ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΕΥΘΕΙΑ ΩΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΙΑΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΧΑΤΖΗΜΑΝΩΛΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Α.Μ. : Δ200528

ΑΘΗΝΑ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ:

- τον Επίκουρο Καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας κ. Σπύρου Παναγιώτη για τις χρήσιμες υποδείξεις του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

- τον Καθηγητή κ. Γαγάτση Αθανάσιο για το πλούσιο βιβλιογραφικό υλικό που μου προσέφερε.

- θερμά την καθηγήτρια και Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια κ. Βαμβακούση Ξένια. Η συμβολή της ήταν πολύτιμη τόσο στην επιλογή του θέματος όσο και στη θεματική δομή της εργασίας μου. Η ερευνητική της εμπειρία και οι γνώσεις της στην επαγωγική στατιστική με βοήθησαν σημαντικά στην υλοποίηση και ανάλυση της δικής μου εμπειρικής μελέτης. Επίσης την ευχαριστώ για την στενή παρακολούθηση και καθοδήγησή της σε όλα τα στάδια της εκπόνησης αυτού του έργου.

- όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος οι οποίοι με τις γνώσεις τους με βοήθησαν να στοχαστώ και να προβληματιστώ πάνω στη διδακτική και τα μαθηματικά, να διευρύνω τις γνώσεις μου αλλά και τον τρόπο σκέψης μου.

- τέλος, τους συναδέλφους εκπαιδευτικούς μαθηματικούς Μακρίδη Δημήτρη και Χούλη Αρετή, χωρίς τους οποίους δεν θα μπορούσα να ολοκληρώσω την έρευνα στα σχολεία.

Χατζημανώλης Νίκος

Κομοτηνή, Σεπτέμβριος 2008

Η ΕΥΘΕΙΑ ΩΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Χατζημανώλης Νικόλαος

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών

στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

που απονέμει

το Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2008

© Χατζημανώλης Νικόλαος, 2008

στη μνήμη του πατέρα μου Εμμανουήλ,
τον πρώτο μου μεγάλο δάσκαλο στα μαθηματικά

στη μητέρα μου Ευαγγελία

στην αδερφή μου Βίκη

στη Μαρία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} :Το πρόβλημα της κατανόησης πυκνότητας του συνόλου των ρητών και πραγματικών αριθμών. 11
1.1 Η έννοια της πυκνότητας και η κατανόηση της από τους μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. 11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Η αριθμητική ευθεία και ο ρόλος των αναπαραστάσεων. Ιστορικές και οντολογικές όψεις της ευθείας και της αριθμητικής ευθείας. 17
2.1 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων 17
2.2 Αναλογίες και αναλογική σκέψη 30
2.3 Ορισμός της αριθμητικής ευθείας 33
2.4 Η ταύτιση των πραγματικών αριθμών με την ευθεία 34
2.5 Η διάσταση ανάμεσα στα φυσικά γεωμετρικά σχήματα και στα μαθηματικά γεωμετρικά σχήματα. 38
2.6 Η εννοιολογική μεταφορά της αριθμογραμμής 40
2.7 Η χρησιμότητα της αριθμητικής ευθείας 42
2.8 Οι δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής ευθείας ως γεωμετρικό μοντέλο 49
2.9 Η ευθεία και η αριθμητική ευθεία στα βιβλία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης 56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Η ΕΡΕΥΝΑ 62
3.1 Πρώτη μελέτη 64
3.2 Δεύτερη μελέτη 75
3.3 Συμπεράσματα 77
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 79
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄: Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΤΟΜΕΣ DEDEKIND 87
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄: ΟΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΩΝ 92
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄ : ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ 98
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄ : ΠΙΝΑΚΕΣ SPSS 111

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στο να κατανοήσουν ότι το σύνολο των ρητών και κατ' επέκταση των πραγματικών αριθμών είναι πυκνό, δηλαδή ότι ανάμεσα σε δύο αριθμούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Αν και το θέμα είναι τετριμμένο από τη σκοπιά ενός μαθηματικού, δεν ισχύει το ίδιο και για τη μαθητική κοινότητα.

Στο πρώτο κεφάλαιο εντοπίζουμε αυτές τις δυσκολίες τις οποίες και ερμηνεύουμε σύμφωνα με το μοντέλο της εννοιολογικής αλλαγής. Φαίνεται πως οι μαθητές αποδίδουν λανθασμένα στο σύνολο των ρητών και πραγματικών αριθμών την ιδιότητα της διακριτότητας, γεγονός που ενδεχομένως οφείλεται στο αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο που έχουν διαμορφώσει για τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία διαφόρων συνθετικών μοντέλων από τους μαθητές σχετικά με τη δομή αυτών των συνόλων. Ακόμη, μας ενδιαφέρει αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αριθμητική ευθεία ως ένα συνεχές μοντέλο των πραγματικών αριθμών ή όχι., Επιπλέον, εξετάζουμε και το ζήτημα της πυκνότητας σε γεωμετρικό περιβάλλον, δηλαδή αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται από άπειρα σημεία.

Επειδή η αριθμητική ευθεία είναι μια αναπαράσταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών, στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματευόμαστε το σύνθετο ζήτημα των αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα τη χρησιμότητά τους στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά και τις δυσκολίες που προκύπτουν κατά την ερμηνεία τους. Ακόμη, στο ίδιο κεφάλαιο τονίζουμε τη διάσταση ανάμεσα στις υλικές αναπαραστάσεις και τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες που αυτές απεικονίζουν. Ενώ οι δεύτερες αποτελούν «εξιδανικεύσεις» των πρώτων, όπως για παράδειγμα είναι οι γραμμές χωρίς πάχος, πολλές φορές συγχέουμε τις υλικές αναπαραστάσεις με τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ποικίλες παρανοήσεις. Ο βασικός μηχανισμός σκέψης που κρύβεται πίσω από τις αναπαραστάσεις είναι η αναλογική σκέψη ο οποίος ενεργοποιείται πολύ συχνά, όταν ασχολούμαστε με τα μαθηματικά. Ο όρος *αναλογία* αναφέρεται στον εντοπισμό ή στη δημιουργία όμοιων δομών μεταξύ δυο διαφορετικών εννοιολογικών πεδίων. Η αριθμητική ευθεία είναι ένα ανάλογο, ή αλλιώς ένα μοντέλο, των πραγματικών αριθμών. Παραθέτουμε μερικά ιστορικά στοιχεία που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική κοινότητα έφτασε να ταυτίζει τους πραγματικούς αριθμούς με τα σημεία μιας

ευθείας. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζουμε διάφορους πίνακες που περιγράφουν τις λειτουργίες που επιτελούν η ευθεία και η αριθμητική ευθεία στα σχολικά βιβλία.

Στο τρίτο κεφάλαιο καταγράφουμε τα αποτελέσματα της έρευνάς μας που διεξήχθη σε διάφορα σχολεία της Αθήνας και της επαρχίας και ερευνούσε τις απόψεις των μαθητών σχετικά με την πυκνότητα, τόσο σε αριθμητικό περιβάλλον όσο και σε γεωμετρικό. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ιδέα της διακριτότητας είναι ισχυρή ακόμα και στις μεγαλύτερες τάξεις και στα δύο πλαίσια (αριθμητικό και γεωμετρικό). Έδειξαν επίσης ότι, παρά το γεγονός ότι οι μαθητές είναι περισσότερο διατεθιμένοι να δεχτούν την απειρία των των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, απ’ότι την απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα, η παρουσία της ευθείας δεν έχει επίδραση, όταν απαντούν για τους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} :Το πρόβλημα της κατανόησης πυκνότητας του συνόλου των ρητών και πραγματικών αριθμών.

1.1 Η έννοια της πυκνότητας και η κατανόηση της από τους μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι ρητοί αριθμοί και κατ' επέκταση οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν βασικό μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Έχουν γίνει διάφορες έρευνες οι οποίες αφορούν την κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών αριθμών από τους μαθητές (Smith, Carey & Solomon 2005, Ni et al 2005, Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007, Vamvakoussi & Vosniadou 2004, Merenluoto & Lehtinen 2002). Οι μαθητές γενικά συναντούν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση της δομής των ρητών αριθμών σε αντίθεση με αυτής των φυσικών όπου δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερα προβλήματα (Smith, Carey & Solomon 2005). Διάφοροι ερευνητές θεωρούν ως πηγή των δυσκολιών αυτών τη καταχρηστική μεταφορά της γνώσης τους από το πεδίο των φυσικών αριθμών στο πεδίο του συνόλου των ρητών (Ni et al 2005). Για παράδειγμα, πολλά παιδιά πιστεύουν ότι ένας δεκαδικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο, όταν έχει περισσότερα δεκαδικά ψηφία (Moskal & Magone 2000). Ένα άλλο παράδειγμα είναι η πεποίθηση ότι ο πολλαπλασιασμός ενός ρητού με κάποιον άλλο έχει ως αποτέλεσμα έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον προηγούμενο, ενώ αντίθετα η διαίρεση έχει το αντίθετο αποτέλεσμα (Fischbein et al 1985). Οι Vamvakoussi και Vosniadou (2004, 2007) εξηγούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των ρητών αριθμών γενικά, και της δομής τους ειδικότερα, με βάση τη θεωρητική προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στην ανάπτυξη και στη μάθηση. Η προσέγγιση αυτή εντάσσεται στο πλαίσιο των «εξειδικευμένων κατά πεδίο» (domain specific) προσεγγίσεων (Vosniadou 2007). Μια βασική υπόθεση τελευταίων είναι ότι τα παιδιά από πολύ νωρίς, οργανώνουν την πολλαπλότητα των αισθητηριακών τους εμπειριών σε περιορισμένης, αλλά σχετικά συνεκτικά, γνωστικά πεδία (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti 2008). Το γνωστικό πεδίο που αφορά τους αριθμούς φαίνεται να είναι ένα τέτοιο πεδίο και η διακριτή φύση των αριθμών έχει προταθεί ως μια από τις βασικές αρχές του (Carey & Spelke 1994). Οι συνέπειες αυτής της υπόθεσης είναι ότι κάποιες όψεις στη μάθηση της αριθμητικής έννοιας ευνοούνται, ενώ κάποιες άλλες όχι (Gelman 2003). Οι

πρώτες είναι όψεις συμβατές με τις αρχικές αριθμητικές έννοιες, ενώ οι άλλες απαιτούν αναδιοργάνωση των υπαρχόντων γνωστικών δομών όπως προβλέπει η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής. Τα παιδιά πριν εισέλθουν στην τυπική εκπαίδευση, αναπτύσσουν πεποιθήσεις για τους αριθμούς, οι οποίες είναι θεμελιωμένες στις βασικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών (Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007, Gelman 2003). Αυτή η αρχική κατανόηση βοηθά τα παιδιά να κατανοήσουν την αρχή του «επόμενου αριθμού» η οποία συμβάλλει στη διαπίστωση της απειρίας του πλήθους των φυσικών αριθμών (Hartnett & Gelman 1998, Merenluoto & Lehtinen 2002). Επίσης, αυτή η αρχική γνώση επιτρέπει την ανάπτυξη στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης με βάση τη μέτρηση και επιπλέον τη σύγκριση και τη διάταξη των φυσικών αριθμών (Smith et al 2005). Σε αυτό το σύνθετο σύστημα εννοιών, σχέσεων και πράξεων κυρίαρχο ρόλο έχει η διακριτότητα των αριθμών. Η προϋπόθεση της διακριτότητας συνιστά ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο για την έννοια του αριθμού το οποίο σταθεροποιείται και ενισχύεται στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, όπου οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν βασικό διδακτικό στόχο (Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007). Σύμφωνα με το μοντέλο της εννοιολογικής αλλαγής τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια των παιδιών για τον αριθμό συνιστούν τη βάση πάνω στην οποία ερμηνεύονται οι νέες πληροφορίες για τους αριθμούς, κατά τη διδασκαλία για παράδειγμα των κλασμάτων, των δεκαδικών και των αρνητικών αριθμών, οι οποίες ενσωματώνονται σταδιακά, εμπλουτίζοντάς τα. Όταν οι νέες πληροφορίες δεν είναι συμβατές με τις θεμελιώδεις προϋποθέσεις του υπάρχοντος πλαισίου, προβλέπεται ότι η κατανόησή τους είναι αργή και δύσκολη ενώ συχνά δημιουργούνται διάφορα συνθετικά μοντέλα (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 2007, Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007).

Το σύνολο των ρητών αριθμών, από μαθηματική άποψη, είναι ένα υπερσύνολο των φυσικών αριθμών στο οποίο επιπλέον ισχύει η κλειστότητα της διαίρεσης και της αφαίρεσης. Μια βασική διαφορά του συνόλου των ρητών αριθμών και κατά συνέπεια και των πραγματικών αριθμών είναι η πυκνή δομή τους. Δηλαδή ανάμεσα σε δύο ρητούς (πραγματικούς) αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί (πραγματικοί) αριθμοί [1].

[1]Μια απόδειξη της πυκνότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών είναι η εξής (από Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο, Γιαννακούλια, 1992): Έστω α, $\beta \in \mathbf{R}$ με $\alpha<\beta$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ρητός γ ώστε $\alpha<\gamma<\beta$. Έστω $\alpha \geq 0$. Από συνέπεια της Αρχιμήδειας Ιδιότητας υπάρχει φυσικός αριθμός $n \geq 1$ ώστε $1/n < \beta-\alpha$. Θέτουμε $A=\{k \in \mathbf{N}: k/n > \alpha\}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα το σύνολο $(1/n)\cdot\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, άρα $A \neq \varnothing$. Από την αρχή της καλής διάταξης το σύνολο Α έχει ένα ελάχιστο στοιχείο k, δηλαδή $(k-1)/n \leq \alpha < k/n$. Τότε $k/n=[(k-1)/n] + (1/n) \leq \alpha + 1/n < \alpha+(\beta-\alpha)=\beta$. Άρα αν θέσουμε όπου $\gamma=k/n$

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό του συνόλου των ρητών αριθμών είναι ότι κάθε στοιχείο του μπορεί να συμβολιστεί με διαφόρους τρόπους, όπως π.χ. ο αριθμός 1/2 να συμβολιστεί ως 2/4 ή ως 0,5. Διάφορες έρευνες έχουν δείξει ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού θεωρούνται από τα παιδιά ότι αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς (Khoury & Zazkis 1994, O' Connor 2001). Για έναν «αρχάριο» στα μαθηματικά, η κατανόηση ότι διαφορετικά σύμβολα μπορούν να αντιστοιχούν στο ίδιο αντικείμενο είναι εξαιρετικά δύσκολη (Markovitz & Sowder 1991). Σύμφωνα με τις Βαμβακούση & Βοσνιάδου (2007), η δυσκολία αυτή μπορεί ενδεχομένως να αποδοθεί στο ότι οι αρχάριοι έχουν την τάση να κατηγοριοποιούν αντικείμενα με βάση επιφανειακά χαρακτηριστικά τους (Chi, Feltovitz & Glaser 1981), μια τάση που στην περίπτωση των αριθμών ενδεχομένως ενισχύεται από το γεγονός ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί διαφέρουν ως προς τη διάταξη και ως προς τις πράξεις. Με αυτό το σκεπτικό, ενδέχεται οι μαθητές να θεωρούν τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως ξένα μεταξύ τους υποσύνολα των ρητών.

Εμπειρικές έρευνες φαίνεται να ενισχύουν τις παραπάνω απόψεις. Για παράδειγμα, ο Neumann (1998) αναφέρει ότι σε έρευνα του ένα παιδί ηλικίας 12-13 ετών είχε δυσκολία στο να δεχτεί την ύπαρξη κλασμάτων ανάμεσα στο 0,3 και 0,6. Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2004) σε έρευνα τους με τη μέθοδο των συνεντεύξεων και σε δείγμα 16 μαθητών ηλικίας 15 ετών περίπου, συνάντησαν την περίπτωση όπου δύο μαθητές απαντώντας στην ερώτηση που αφορούσε το πλήθος των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στο 3/8 και 5/8 απάντησαν ότι υπάρχουν άπειρα κλάσματα, αλλά οι απαντήσεις τους αφορούσαν ισοδύναμα κλάσματα του 4/8 π.χ. 4,0/8 , √16/8, 32/64 κτλ. Επίσης, στην ίδια έρευνα, ανάλογα με το είδος των απαντήσεων, οι μαθητές χωρίστηκαν σε πέντε ομάδες:

1. *Αφελής Διακριτότητα*: Οι μαθητές της ομάδας αυτής απάντησαν με συνέπεια ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς ρητούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος ανάμεσα (π.χ. ανάμεσα στο 0,005 και στο 0,006). Απαντήσεις τέτοιου είδους έδιναν με συνέπεια τόσο όταν συναντούσαν αριθμούς σε δεκαδική μορφή όσο και σε κλασματική μορφή.

τότε έχουμε ότι $\alpha<\gamma<\beta$. Αν $\alpha<0$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε $0<m+\alpha<m+\beta$. Επομένως όπως δείξαμε θα υπάρχει ρητός δ ώστε $m+\alpha<\delta<m+\beta$. Θέτουμε $\gamma=\delta-m$. Τότε γ ρητός με $\alpha<\gamma<\beta$. Το σύνολο των αρρήτων είναι επίσης πυκνό στο **R**. Αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο για τους $\alpha/\sqrt{2}$ και $\beta/\sqrt{2}$ τότε υπάρχει ρητός $\delta\neq0$ ώστε $\alpha/\sqrt{2}<\delta<\beta/\sqrt{2}$. Αν θέσουμε $\gamma=\delta\sqrt{2}$ τότε γ άρρητος με $\alpha<\gamma<\beta$.

2. *Προχωρημένη Διακριτότητα*: Οι μαθητές αυτής της ομάδας απαντούσαν με συνέπεια ότι ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς αριθμούς υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών (≠0). Για παράδειγμα ανάμεσα στο 0,005 και 0,006 υπάρχουν μόνο οι αριθμοί 0,0051…0,0059. Παρόμοιες απαντήσεις έδιναν και στην περίπτωση που συναντούσαν κλασματικούς αριθμούς.
3. *Μικτή κατηγορία*: Οι μαθητές αυτής της ομάδας αναγνώριζαν ότι υπήρχε άπειρο πλήθος αριθμών σε κάποιες μόνο περιπτώσεις.
4. *Αφελής Πυκνότητα*: Ένας μόνο μαθητής τοποθετήθηκε σε αυτήν την κατηγορία. Το κριτήριο για αυτήν την κατηγορία ήταν οι μαθητές να απαντούν με συνέπεια ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο ρητούς, αλλά από την άλλη η απάντησή τους να μην έρχεται αυθόρμητα. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση ενός δεκαδικού και ενός κλάσματος οι μαθητές αυτής της κατηγορίας θα μετέτρεπαν το κλάσμα σε δεκαδικό ή το αντίστροφο.
5. *Εκλεπτυσμένη Πυκνότητα*: Σε αυτήν την ομάδα δεν τοποθετήθηκε κανένας μαθητής. Το κριτήριο ήταν η αυθόρμητη και με συνέπεια απάντηση ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών, χωρίς οι μαθητές να χρειάζονται να κάνουν οποιουδήποτε είδους μετατροπή.

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν ότι η προϋπόθεση της διακριτότητας ήταν ιδιαίτερα ισχυρή σε αυτό το δείγμα των μαθητών και ότι η κατανόηση της πυκνότητας είναι μια επίπονη, αργή και σταδιακή διαδικασία.

Σε μία άλλη έρευνα (Vamvakoussi & Vosniadou 2007) εξετάστηκε παράλληλα και η επίδραση της αριθμητικής ευθείας στις απαντήσεις των μαθητών σχετικά με την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Η αναπαράσταση της ευθείας θα μπορούσε να έχει ένα βοηθητικό ρόλο δεδομένου ότι το άπειρο πλήθος σημείων ανάμεσα σε δύο άλλα σημεία αντιστοιχούν στην περίπτωση της αριθμητικής ευθείας σε άπειρους αριθμούς. Τα αποτελέσματα δεν έδειξαν κάποια επίδραση της αριθμογραμμής στις απαντήσεις των μαθητών.

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι, για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι σε ένα διάστημα ρητών υπάρχουν άπειροι αριθμοί, είναι απαραίτητο να περάσουν από το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο που είναι στενά συνδεδεμένο με τους φυσικούς αριθμούς, σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, συνειδητοποιώντας ότι κάποιες προϋποθέσεις που ίσχυαν στο αρχικό, όπως η προϋπόθεση της διακριτότητας, δεν διατηρούν τη γενικότητα της ισχύος τους (Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007). Εξελίσσοντας το

ευρύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο πρέπει τα παιδιά από τη μια να δεχτούν ότι ο όρος «αριθμός» αναφέρεται τόσο και στους φυσικούς και στα κλάσματα, αλλά και στους δεκαδικούς, παρά τις διαφορές στο συμβολισμό τους, στη διάταξη και στη χρήση. Επιπλέον, πρέπει να κατανοήσουν ότι οι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών μπορούν να αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο και όχι σε διαφορετικά είδη αριθμών. Τα παιδιά σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ερευνών των Βαμβακούση & Βοσνιάδου (2007) φαίνεται να αντιλαμβάνονται τους ακέραιους, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως ασύνδετα μεταξύ τους σύνολα αριθμών. Για παράδειγμα, δυσκολεύονται να δεχτούν ότι ένα κλάσμα μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς ή το αντίστροφο. Επιπρόσθετα, η ίδια έρευνα έδειξε ότι η διαπίστωση πως ανάμεσα σε δύο ακεραίους υπάρχουν άπειροι αριθμοί δεν μεταφέρεται απαραίτητα στους δεκαδικούς ή στα κλάσματα. Ίσως, η σύνδεση μεταξύ των πολλαπλών συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών δεν έχει επιτευχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό μέχρι και τη Β΄ Λυκείου, παρά το γεγονός ότι δίνεται έμφαση στη διαδικαστική συνιστώσα αυτής της σύνδεσης, όπως για παράδειγμα η μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό ή το αντίστροφο (Βαμβακούση & Βοσνιάδου 2007).

Μια άλλη συνιστώσα της πυκνότητας είναι η ανυπαρξία του «επόμενου αριθμού». Η συνειδητοποίηση ότι για κάθε ρητό αριθμό δεν υπάρχει ένας επόμενος ρητός αριθμός αναστέλλεται από το αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο που ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς και απαιτεί ριζική εννοιολογική αλλαγή (Merenluoto & Lehtinen 2002). Οι ερευνητές επικαλούνται τη Sfard (1991),σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών διέρχεται από τρία στάδια: την εσωτερίκευση, τη συμπύκνωση και την εκπραγμάτωση. Το τελευταίο στάδιο είναι και το πιο δύσκολο να επιτευχθεί, όπου εκεί πλέον μια έννοια νοείται ως ένα πλήρες αντικείμενο με διπλή υπόσταση τόσο διαδικαστική όσο και δομική. Η επέκταση της έννοιας του αριθμού απαιτεί δραστικές αλλαγές από την αρχική κατανόηση της φύσης του αριθμού προς το επίπεδο της δομικής κατανόησης (Merenluoto & Lehtinen 2002). Για παράδειγμα ο Fischbein (2002), παρατηρεί ότι μαθητές της ηλικίας των 12 ετών δεν ταυτίζουν τον αριθμό 0,333… με το 1/3, αλλά θεωρούν ότι προσεγγίζει το κλάσμα αυτό, δείχνοντας την έλλειψη της δομικής κατανόησης της φύσης του αριθμού. Από την πλευρά όμως ενός μαθηματικού το επίπεδο κατανόησης της έννοιας του αριθμού αντιστοιχεί στο επίπεδο της δομικής θεώρησης (Merenluoto & Lehtinen 2002). Το πέρασμα από το ένα είδος θεώρησης στο άλλο ενέχει, σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, εννοιολογικές αλλαγές.

Πέρα από τη συμβολική αναπαράσταση των αριθμών, οι μαθητές έρχονται σε επαφή και με άλλες αναπαραστάσεις. Η κατ' εξοχήν αναπαράσταση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι η ευθεία των ρητών και πραγματικών αριθμών.

Η έρευνά μας στο τρίτο κεφάλαιο αφορά όχι απλά την κατανόηση της πυκνότητας, αλλά και την επίδραση της αριθμητικής ευθείας στην κατανόηση αυτή. Η αριθμητική ευθεία αποτελεί ένα αναπαραστατικό εργαλείο με ποικίλες εφαρμογές στην μαθηματική εκπαίδευση. Για αυτό το λόγο, στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το ρόλο των αναπαραστάσεων γενικά, αλλά και της αριθμητικής ευθείας ειδικότερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Η αριθμητική ευθεία και ο ρόλος των αναπαραστάσεων. Ιστορικές και οντολογικές όψεις της ευθείας και της αριθμητικής ευθείας.

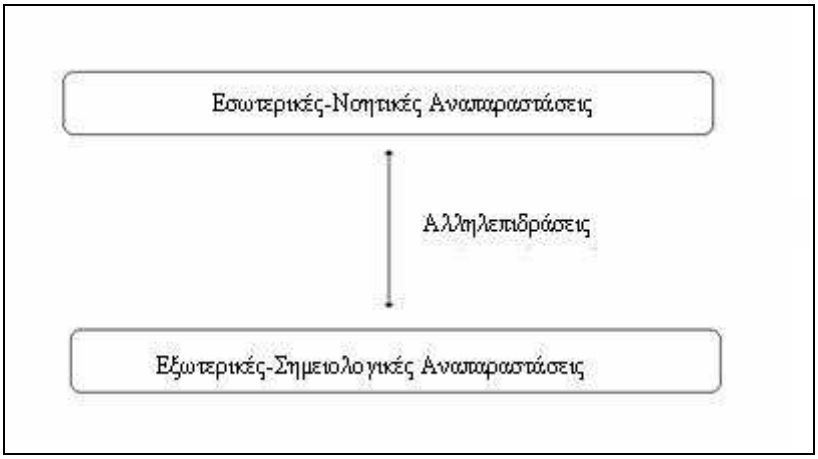
2.1 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων

Ο όρος *αναπαράσταση* αποτελεί μια δύσκολη και ασαφή έννοια. Οι συμπεριφοριστές ήθελαν να απαλλαγούν από αυτήν την έννοια (και συγκεκριμένα από την έννοια της *εσωτερικής αναπαράστασης* που θα δούμε λίγο παρακάτω) (Vergnaud 1998). Διάφοροι ερευνητές προτιμούν να χρησιμοποιούν διαφορετικούς όρους όπως *κατανόηση* ή *αιτιολόγηση* ή ακόμα και *κωδικοποίηση*.

Η ιδέα της αναπαράστασης συναντάται σε όλη τη Θεωρία Γνώσης και Γνωστικής Ψυχολογίας και μελετάται υπό διαφορετικά πρίσματα. Οι Γαγάτσης και Σπύρου (2000) προτείνουν ότι, ‘‘*εκείνοι που ασχολούνται με την αποτελεσματικότητα των διδασκαλιών και της μάθησης πρέπει να επιλέξουν και να επιδιώξουν εκείνη τη σύγκλιση θεωριών και ρευμάτων που θα είναι η καταλληλότερη να περιγράψει τα φαινόμενα που αυτοί* αντιμετωπίζουν’’ (σελ 1). Να σημειώσουμε ότι ο χαρακτήρας των αναπαραστάσεων παίζει σπουδαίο ρόλο στα μαθηματικά. Ο Duval (2000) υποστηρίζει ότι οι σημειολογικές αναπαραστάσεις αποτελούν το μοναδικό μέσο με το οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε τα μαθηματικά αντικείμενα. Έτσι, πολλές απόπειρες έχουν γίνει ώστε να οριοθετηθεί ο όρος *αναπαράσταση*.

Κατά τον Palmer (1977) (αναφορά από Goldin & Kaput 1996) μια αναπαράσταση είναι ένας σχηματισμός (configuration) ο οποίος ολοκληρωτικά ή εν μέρει συνδέεται, αντιστοιχεί, αλληλεπιδρά, συμβολίζει, «αναπαριστά» κάτι άλλο. Ένας παρόμοιος ορισμός είναι ότι πρόκειται για ένα σχηματισμό από χαρακτήρες, εικόνες, διακριτά αντικείμενα κ.τ.λ. τα οποία συμβολίζουν ή «αναπαριστούν» κάτι άλλο (Kaput 1985, Goldin 1998, De Windt-King & Goldin 2003, Gagatsis & Elia 2004). Κανένας όμως ορισμός από τους παραπάνω δεν είναι ικανοποιητικός. Η αιτία είναι πως κάθε αναπαράσταση δεν μπορεί να θεωρηθεί μεμονωμένα, καθώς οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε εξαιρετικά δομημένα συστήματα και είτε έχουν ένα υποκειμενικό χαρακτήρα είτε ένα πιο συμβατικό και πολιτισμικό (Goldin & Kaput 1996).

Αυτά τα συστήματα ονομάζονται *συμβολικά σχήματα* (Kaput 1987) ή *αναπαραστατικά συστήματα* (Goldin 1987, Lesh, Landau & Hamilton 1983). Οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε εσωτερικές/ νοητικές και σε εξωτερικές/ σημειολογικές (DeLoache et al. 1998, Goldin & Kaput 1996, Janvier 1987a, Roth & McGinn 1998, Seeger 1998) και βρίσκονται σε μια σχέση αλληλεπίδρασης. Ο τρόπος που αλληλεπιδρούν τα δύο είδη αναπαραστάσεων φαίνεται στο σχήμα 1:



Σχήμα 1: Αλληλεπιδράσεις εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων (από Γαγάτση & Σπύρου 2000)

Η διάκριση αυτή (Goldin & Kaput 1996) είναι ουσιαστικής σημασίας για την Ψυχολογία και τη μάθηση των μαθηματικών, αν και επιφυλάξεις σε αυτή τη διάκριση έχουν εκφράσει οι Lesh, Post & Behr (1987) και Duval (αναφορά από Γαγάτσης, Σπύρου 2000).

Σύμφωνα με τους Goldin και Kaput (1996), ο όρος *εσωτερικές αναπαραστάσεις* αναφέρεται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς των ατόμων που μαθαίνουν ή επιχειρούν να λύσουν κάποιο πρόβλημα. Η μελέτη των εσωτερικών αναπαραστάσεων δεν γίνεται άμεσα, αλλά προκύπτει από την παρατήρηση της εξωτερικής συμπεριφοράς των υποκειμένων. Πολλές φορές είναι ο δάσκαλος που επιχειρεί να αναπτύξει και να βελτιώσει αυτές τις αναπαραστάσεις μέσω της διδακτικής διαδικασίας. Σε αντίθεση με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις ο όρος *εξωτερικές αναπαραστάσεις* αναφέρεται σε παρατηρήσιμους σχηματισμούς όπως λέξεις, γραφήματα, εικόνες, εξισώσεις, μικροκόσμους κτλ. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων δεν είναι αντικειμενική ούτε απόλυτη, αλλά καθορίζεται από τις υπάρχουσες εσωτερικές αναπαραστάσεις του ατόμου.

Οι ίδιοι ερευνητές (Godin & Kaput, 1996) αναφέρονται στις σχέσεις μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, όταν ένας εξωτερικός σχηματισμός αναπαριστά κάποιον άλλο, τότε υπάρχει μεταξύ τους μια *οριζόντια σχέση,* ενώ όταν αναφερόμαστε στην αντιστοιχία ενός εξωτερικού και ενός εσωτερικού σχηματισμού, τότε πρόκειται για μια *κάθετη σχέση* πάντα σε αναφορά με το σχήμα 1. Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση π.χ. ένα (εξωτερικό) γράφημα μπορεί να αναπαριστά την (εξωτερική) συμβολική έκφραση $f(x) = -3x + 6$ ή μπορεί να αναπαριστά την (εξωτερική, φυσικά ενσώματη) σχέση μεταξύ θέσης και χρόνου ενός κινούμενου σώματος ή ακόμα να αναπαριστά ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Όσον αφορά τη δεύτερη περίπτωση, εννοούμε για παράδειγμα ένας μαθητής αν δεδομένου ενός εξωτερικού σχηματισμού, όπως $y = -3x + 6$, μπορεί να το οπτικοποιήσει (visualize) εσωτερικά ως ευθεία γραμμή. Τέλος, μια ακόμα περίπτωση οριζόντιας σχέσης είναι η δυνατότητα αντιστοίχισης μιας εσωτερικής αναπαράστασης σε μια άλλη. Αυτή η περίπτωση αφορά τη δυνατότητα π.χ. να συσχετίζει εσωτερικά ένας μαθητής την οπτική εικόνα μιας ευθείας γραμμής με τον εσωτερικό συμβολικό σχηματισμό $y = mx + b$ όπου το m αναπαριστά την κλίση της ευθείας και b αφορά το σημείο τομής του άξονα yy' σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τέτοιες αντιστοιχίσεις δεν ανήκουν στους σχηματισμούς αυτούς κάθε αυτούς, αλλά στο είδος των αναπαραστατικών ενεργειών μεταξύ των σχηματισμών αυτών (Goldin & Kaput 1996). Οι διάφορες εξισώσεις, γραφήματα, σχέσεις μεταξύ θέσης και χρόνου, τα ορθογώνια τρίγωνα, οι εσωτερικοί και κιναισθητικοί σχηματισμοί δείχνουν ότι οι αναπαραστάσεις πρέπει να θεωρούνται ως δομημένα συστήματα που ενσωματώνονται είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά.

Ένα συμβολικό σχήμα ή αναπαραστατικό σύστημα (Goldin 1987, 1992a, Kaput 1987, 1991) μπορεί να κατανοηθεί ως μια οντότητα που αποτελείται από πρωταρχικούς (primitive) χαρακτήρες ή σημεία τα οποία συνήθως (αλλά όχι πάντα) είναι διακριτά, όπως για παράδειγμα η ομιλούμενη γλώσσα, τα γράμματα του αλφάβητου, τα αριθμητικά ψηφία κ.τ.λ. Αυτά τα σημεία ενσωματώνονται σε κάποιο φυσικό μέσο, αλλά παρόλα αυτά δεν πρέπει να συγχέονται με τις φυσικές τους ενσωματώσεις. Αντίθετα, πρέπει να θεωρηθούν ως ατελώς ορισμένες κλάσεις ισοδυναμίας όπου η ισοδυναμία καθορίζεται από τις ενέργειες ερμηνείας τους. Για παράδειγμα, «το γράφημα της $y + 3x - 6 = 0$» δεν αφορά ένα συγκεκριμένο γράφημα που αποτυπώνεται σε ένα συγκεκριμένο φύλλο χαρτιού ούτε αφορά μια ακριβώς

ορισμένη αφηρημένη μαθηματική κατασκευή, αλλά αντίθετα πρόκειται για ένα οριοθετημένο σύνολο που αποτελείται από «αποδεκτές» πραγματοποιήσεις (realizations) (Goldin & Kaput, 1996).

Βασικός όρος της διασύνδεσης αναπαραστατικών συστημάτων αποτελεί η έννοια της *μετάφρασης*. Για τον Janvier (1987a) ο όρος μετάφραση αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες κατά τις οποίες πηγαίνουμε από μια αναπαράσταση σε μια άλλη. Ο Janvier (1987a) παραθέτει τις παρακάτω περιπτώσεις μετάφρασης αναπαραστάσεων που αναφέρονται στην περίπτωση της συνάρτησης:

προς / από	Περιγραφή	Πίνακες αριθμών	Γραφικές παραστάσεις	Αλγεβρικούς τύπους
Περιγραφή		μετρήσεις (measuring)	σχεδίαση (sketching)	μοντελοποίηση (modelling)
Πίνακες αριθμών	ανάγνωση (reading)		γραφική αποτύπωση (plotting)	προσαρμογή (fitting)
Γραφικές παραστάσεις	ερμηνεία (interpretation)	ανάγνωση τμημάτων (reading-off)		προσαρμογή καμπύλης (curve fitting)
Αλγεβρικούς τύπους	αναγνώριση των μεταβλητών (parameter recognition)	υπολογισμός (computing)	σχεδίαση (sketching)	

Πίνακας 1: περιπτώσεις μετάφρασης αναπαραστάσεων στην περίπτωση της συνάρτησης (μετάφραση από Κλαουδάτο 1996)

Ο Κλαουδάτος (1996) διακρίνει δύο τρόπους με τους οποίους σχετίζονται οι εσωτερικές και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις:

i. *Ομωνυμία*. Αυτή η περίπτωση αναφέρεται σε μια εξωτερική αναπαράσταση η οποία αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερες εσωτερικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα η εξωτερική αναπαράσταση $x^2+y^2=r^2$ μπορεί να αναφέρεται τόσο

στη σχέση που συνδέονται 3 πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου όσο και στην εξίσωση ενός κύκλου.

ii. *Συνωνυμία.* Αυτή η περίπτωση αναφέρεται σε μια εσωτερική αναπαράσταση η οποία αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερες εξωτερικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, το μονώνυμο 2x μπορεί να αφορά τόσο το διπλάσιο ενός ευθυγράμμου τμήματος x όσο και το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2 και x.

Η μετάβαση από μια αναπαράσταση σε μια άλλη ενέχει δυσκολίες για τους μαθητές, όπως τονίζει ο Duval (1999,2000,2006) ο οποίος εστιάζει στις μαθηματικές έννοιες και σχετικές αναπαραστάσεις. Ο ίδιος θεωρεί τεχνητή τη διάκριση ανάμεσα σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις, και προσπαθεί να ερμηνεύσει πώς μια αναπαράσταση «μεταφράζεται» σε μία άλλη (είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά). Θεωρεί ότι τα βασικά ερωτήματα που απασχολούν τις αναπαραστάσεις σε σχέση με τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι τα εξής δύο (2006):

- *Ποια γνωστικά συστήματα κινητοποιούνται, ώστε να έχουμε πρόσβαση σε μαθηματικά αντικείμενα και συγχρόνως μάς δίνουν τη δυνατότητα να πραγματοποιούμε τους ποικίλους μετασχηματισμούς που χαρακτηρίζουν τις μαθηματικές διαδικασίες;* (σελ 104).
- *Ο τρόπος σκέψης στα μαθηματικά είναι ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιείται σε άλλα πεδία γνώσης; Με άλλα λόγια, η μαθηματική δραστηριότητα απαιτεί κοινή σκέψη ή αντίθετα ιδιάζουσες γνωστικές δομές οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διδασκαλία;* (σελ 105).

Για να δοθούν απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα, θα πρέπει να αναλυθεί το στοιχείο αυτό που χαρακτηρίζει τη μαθηματική δραστηριότητα από γνωστική άποψη. Ο Duval (1999,2000,2006) θεωρεί ότι τα ιδιαίτερα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των μαθηματικών δεν πρέπει να αναζητηθούν μόνο στις έννοιες και την επιστημολογική τους πολυπλοκότητα. Ο λόγος είναι ότι τέτοιες πολυπλοκότητες παρατηρούνται και σε άλλα πεδία γνώσης όπως είναι η αστρονομία, η βιολογία κ.τ.λ. Ο Duval (2006) διακρίνει τρεις βασικούς παράγοντες που συντελούν στις ιδιαιτερότητες που χαρακτηρίζουν τη μάθηση των μαθηματικών:

1. *Ο κυρίαρχος ρόλος των σημειολογικών αναπαραστάσεων.* Ιστορικά δύσκολα κανείς μπορεί να αμφισβητήσει ότι οι σημειολογικές αναπαραστάσεις αποτέλεσαν έναν βασικό όρο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Η κύρια λειτουργία των σημείων σε ένα σημειολογικό σύστημα αφορά την παροχή της δυνατότητας να αντικαθιστούμε κάποια σημεία με άλλα˙ για παράδειγμα *3· 25=75.* Υπάρχει ένα τεράστιο χάσμα μεταξύ της αναπαράστασης «IIIIIIIII» και της αντίστοιχης δεκαδικής αναπαράστασης «10». Το «10» ανήκει σε ένα πανίσχυρο σύστημα βάσης όπου η θέση των σημείων έχει βασικό ρόλο. Πολύ περισσότερο η ύπαρξη και λειτουργία του σημείου «0» είναι επιτηδευμένη σε κάθε σύστημα αρίθμησης. Για αυτό το λόγο η βαθιά κατανόηση εκφράσεων του τύπου 38,45·100, 38,45·0,01 είναι δύσκολη.
2. *Το γνωστικό παράδοξο της πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα.* Στα μαθηματικά, αντίθετα από άλλα πεδία γνώσεων, υπάρχει μια σπουδαία διαφορά ˙ τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να γίνουν καταληπτά μόνο μέσω των αναπαραστάσεων. Σε άλλα πεδία γνώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα παρατηρησιακά όργανα όπως το μικροσκόπια, το τηλεσκόπιο κτλ. Υπάρχουν επομένως δυο βασικές συνιστώσες που απαιτούνται για την παραγωγή ορθής μαθηματικής σκέψης:
   – Σε κάθε μαθηματική δραστηριότητα απαιτείται πάντα η χρήση σημειολογικών αναπαραστάσεων, ακόμα και αν υπάρχει η δυνατότητα επιλογής τους.
   – Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν πρέπει να συγχέονται με τις σημειολογικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται.
3. *Η ευρεία ποικιλία των σημειολογικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά.* Κατά τη μαθηματική δραστηριότητα είναι αναγκαία η ελεύθερη χρήση διαφορετικών αναπαραστατικών συστημάτων ανάλογα με το έργο ή την ερώτηση την οποία τίθεται. Μερικές διαδικασίες είναι ευκολότερες σε ένα σημειολογικό σύστημα από ό,τι σε ένα άλλο. Σε πολλές περιπτώσεις όμως δεν είναι μόνο ένα αναπαραστατικό σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται, αλλά τουλάχιστον δύο. Στη γεωμετρία, για παράδειγμα, είναι απαραίτητη η χρήση δύο τέτοιων συστημάτων, το ένα αφορά τη λεκτική έκφραση των

ιδιοτήτων ή την αριθμητική έκφραση ποσοτήτων και το άλλο αφορά την οπτικοποίηση. Επομένως ένα «γεωμετρικό σχήμα» συνδυάζει τη χρήση *λεκτικών* (discursive) *και οπτικών (visual) αναπαραστάσεων*, ακόμα και αν ρητά τονίζεται μόνο μια από αυτές. Τα μαθηματικά είναι ο κατεξοχήν χώρος που παρατηρείται μια ευρεία χρήση σημειολογικών αναπαραστατικών συστημάτων τόσο αυτών που χρησιμοποιούμε πιο συχνά, όπως είναι η φυσική γλώσσα, αλλά και άλλων πιο εξειδικευμένων, όπως η χρήση αλγεβρικών και τυπικών συμβολισμών. Το βασικό πρόβλημα στην κατανόηση των μαθηματικών εντοπίζεται στο συνδυασμό των ποικίλων αυτών συστημάτων. Οι σημειολογικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά έχουν ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό: μπορούν να μετασχηματιστούν σε άλλες αναπαραστάσεις χωρίς την προσθήκη νέων δεδομένων ή εμπειρικών παρατηρήσεων. Παρακάτω θα αναλύσουμε τα είδη των μετασχηματισμών μιας αναπαράστασης σε μια άλλη.

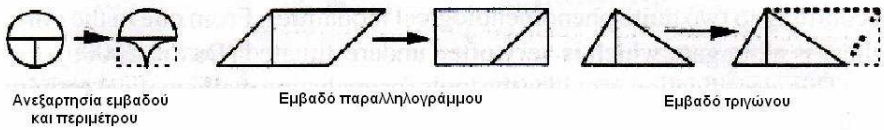
Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς μπορεί κάποιος να διακρίνει τα αναπαριστώμενα μαθηματικά αντικείμενα από τις σημειολογικές τους αναπαραστάσεις, αφού η προσέγγιση των πρώτων γίνεται μόνο μέσω των τελευταίων. Σύμφωνα με το Duval, κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί, όταν κάποιος έχει την ευχέρεια να μεταπηδά από ένα αναπαραστατικό σύστημα σε ένα άλλο.

Όσον αφορά τα είδη των μετασχηματισμών μιας αναπαράστασης σε μια άλλη, ο Duval (2006) διακρίνει δύο είδη: *τους χειρισμούς* (treatments) και τις *μετατροπές* (conversions):

Οι *χειρισμοί* αφορούν μετασχηματισμούς που λαμβάνουν χώρα μέσα στο ίδιο πεδίο[2]. Τέτοιες περιπτώσεις είναι για παράδειγμα, όταν κάνουμε υπολογισμούς παραμένοντας στο ίδιο σημειολογικό σύστημα, όταν λύνουμε εξισώσεις, όταν συμπληρώνουμε ένα γεωμετρικό σχήμα χρησιμοποιώντας αντιληπτικά κριτήρια σύνδεσης ή συμμετρίας κτλ. Οι χειρισμοί που μπορούν να πραγματοποιηθούν εξαρτώνται κυρίως από τις δυνατότητες των σημειολογικών μετασχηματισμών και οι οποίοι είναι συγκεκριμένοι σε κάθε πεδίο. Πράγματι αρκεί να σκεφτούμε ότι για την πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τόσο το σύστημα αναπαράστασης που θα χρησιμοποιηθεί όσο και τις μαθηματικές ιδιότητες

[2] Ο όρος «πεδίο» που δίνει ο Duval ουσιαστικά αντιστοιχεί στον όρο «αναπαραστατικό σύστημα» τον οποίο δίνει ο Goldin ή στον όρο «συμβολικό σχήμα» τον οποίο δίνει ο Kaput όπως αναφέραμε παραπάνω.

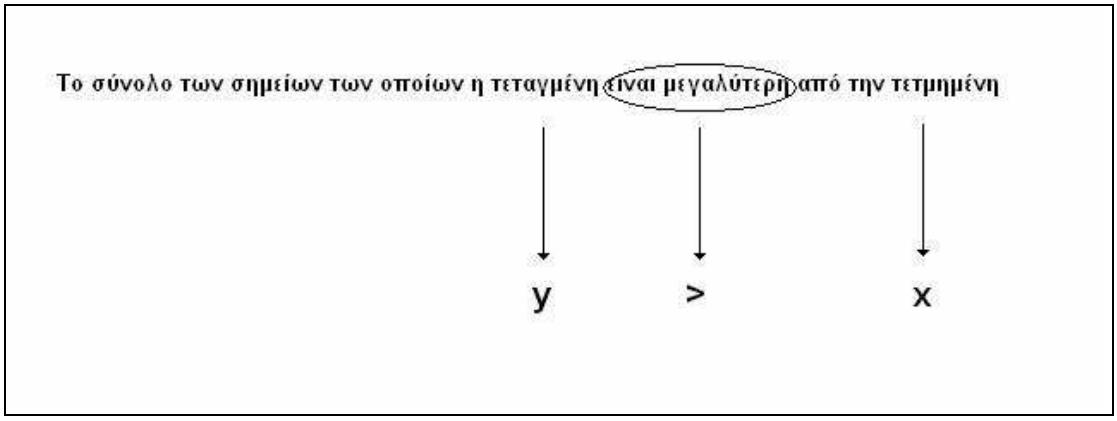
των πράξεων αυτών. Η εκτέλεση αλγορίθμων σε μια δεκαδική αναπαράσταση είναι διαφορετική σε σχέση με μια κλασματική αναπαράσταση που αναφέρεται στους ίδιους αριθμούς, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα: 0,20 + 0,25=… και 1/5+1/4=…Μια άλλη περίπτωση είναι αυτή των γεωμετρικών μετασχηματισμών, για να επιλυθούν με ευρετικό τρόπο προβλήματα της στοιχειώδους γεωμετρίας. Πρόκειται για καθαρά οπτικούς μετασχηματισμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα 2:



Σχήμα 2: Οπτικοί μετασχηματισμοί σχημάτων (Duval 2006)

Οι *μετατροπές* είναι μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων όπου συμβαίνει αλλαγή πεδίου, χωρίς να αλλάζουν τα δηλούμενα αντικείμενα, όπως για παράδειγμα συμβαίνει κατά τη μετατροπή μιας αλγεβρικής εξίσωσης στο αντίστοιχο γράφημα ή από τη δήλωση μιας σχέσης εκφρασμένης σε φυσική γλώσσα στην έκφρασή της χρησιμοποιώντας γράμματα κτλ. Οι μετατροπές είναι κατά βάση μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων πολύ πιο πολύπλοκοι από ότι οι χειρισμοί, διότι οποιαδήποτε αλλαγή πεδίου απαιτεί αναγνώριση του ίδιου αναπαριστώμενου αντικειμένου ανάμεσα σε δύο αναπαραστάσεις τα περιεχόμενα των οποίων έχουν ελάχιστα κοινά στοιχεία. Σύμφωνα με το Duval (2006), διακρίνονται δύο είδη μετατροπών:

α) Η *συγκλίνουσα* (congruent) *μετατροπή*. Αφορά αυτού του είδους τη μετατροπή η οποία ανάγεται στην απλή μετάφραση ή κωδικοποίηση (όρο ανά όρο) από ένα πεδίο σε ένα άλλο. Το σχήμα 3 δείχνει ένα παράδειγμα συγκλίνουσας μετατροπής:



Σχήμα 3: Συγκλίνουσα μετατροπή (από Duval 2006)

β*) Η μη συγκλίνουσα (*non-congruent) *μετατροπή*. Αφορά αυτού του είδους τη μετατροπή η οποία δεν ανάγεται σε απλή μετάφραση τύπου όρο ανά όρο από το ένα πεδίο σε ένα άλλο όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος 4:

Σχήμα 4: Μη συγκλίνουσα μετατροπή (από Duval, 2006)

Ο Duval (1999, 2000, 2006) υποστηρίζει ότι η κατεύθυνση της μετατροπής από το ένα πεδίο στο άλλο πολλές φορές επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών. Για παράδειγμα η κατασκευή του γραφήματος μιας γραμμικής συνάρτησης, όταν είναι γνωστός ο αλγεβρικός τύπος, δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα. Στην αντίστροφη διαδικασία όμως, δηλαδή στην αναγνώριση του αλγεβρικού τύπου, όταν δίνεται το γράφημα, το ποσοστό των επιδόσεων είναι χαμηλότερο. Μια ερμηνεία αποδίδει την ασυνέπεια αυτή στο ότι, όταν οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το επίπεδο κατανόησης τους περιορίζεται σε ένα τοπικό χαρακτήρα, δηλαδή δεν έχουν μια σφαιρική κατανόηση των ποιοτικών οπτικών μεταβλητών, όπως είναι η κλίση και τα σημεία τομής με τους άξονες που μπορεί να φέρει μια ευθεία.

Η κατανόηση των μαθηματικών προϋποθέτει το συγχρονισμό τουλάχιστον δύο πεδίων των σημειολογικών αναπαραστάσεων. Με βάση την προσέγγιση του Duval, πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την κατανόηση των μαθηματικών οφείλονται στις εξής δύο συνιστώσες:

- Στην πολυπλοκότητα και την ιδιαιτερότητα των χειρισμών οι οποίες πραγματοποιούνται σε ένα πεδίο.
- Στην μετατροπή των αναπαραστάσεων, δηλαδή στην αλλαγή πεδίου.

Μια άλλη προσέγγιση στο ρόλο των αναπαραστάσεων έχει κάνει ο Fischbein (1977), ο οποίος χρησιμοποιεί τον όρο *μοντέλο* αντί του όρου "αναπαράσταση". Για τον Fischbein, ένα (διαισθητικό) μοντέλο χαρακτηρίζεται από ευρετική ισχύ και το γεγονός ότι διευκολύνει την παραγωγική σκέψη. Πιο συγκεκριμένα ο βασικός ρόλος των μοντέλων είναι (α) να διευκολύνουν την ερμηνεία συγκεκριμένων γεγονότων και (β) να βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων σύμφωνα με τα αρχικά δεδομένα. Το μοντέλο είναι γενικά μια απλοποιημένη έκδοση του πρωτοτύπου ώστε να επιτρέπει έναν πιο εύκολο και πλήρη έλεγχο των μεταβλητών μιας κατάστασης. Αν πρόκειται για ένα διαισθητικό μοντέλο τότε αυτό αποτελεί ένα επιπλέον πλεονέκτημα δεδομένου ότι το ανθρώπινο μυαλό έχει την τάση να οπτικοποιεί δεδομένα. Ένα διαισθητικό μοντέλο προσφέρει μια χωρική όψη διαφόρων γεγονότων (σχέσεις, αλληλεπιδράσεις, κτλ). Όταν ένα πρόβλημα ή μια έννοια αναπαρίσταται σε ένα μοντέλο, τότε η ευρετική δυνατότητα του τελευταίου θα πρέπει να επιτρέπει χειρισμούς και κανόνες μόνο μέσα σε αυτό. Ένα καλό ευρετικό μοντέλο είναι παραγωγικό, εσωτερικά συνεπές και καλά δομημένο.

Ο Fischbein (1987 διακρίνει τους παρακάτω τύπους αναλογιών στα μαθηματικά. Οι δύο πρώτες κατηγορίες χαρακτηρίζονται ως *ενδομαθηματικές αναλογίες* (intramathematical analogies):

Η πρώτη κατηγορία αναφέρεται στην περίπτωση που και στα δύο πεδία δεν χρησιμοποιούνται ρητά διαισθητικά μέσα, παρά μόνο γίνεται χρήση ενός αριθμητικού-αλγεβρικού συμβολισμού. Ένα παράδειγμα τέτοιας αναλογίας είναι η περίπτωση των πράξεων στους μιγαδικούς αριθμούς κατ’ αντιστοιχία με αυτές στους πραγματικούς αριθμούς ή οι πράξεις με μεταπεπερασμένους αριθμούς κατ’ αντιστοιχία με τους πεπερασμένους πληθικούς αριθμούς.

Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται στην περίπτωση που ο ένας όρος είναι διαισθητικός, συνήθως μια γεωμετρική αναπαράσταση, και ο άλλος όρος είναι μια συμβολική έκφραση. Η γεωμετρική αναπαράσταση των συναρτήσεων η οποία στηρίζεται στο θεμελιώδη ισομορφισμό ανάμεσα σε αριθμούς και σχήματα είναι το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αυτής της κατηγορίας.

Η τρίτη κατηγορία αναλογιών αφορά την περίπτωση που στο μαθηματικό συλλογισμό το μοντέλο είναι δεν είναι μαθηματικό (extramathematical analogies), όπως για παράδειγμα μια υλική αναπαράσταση. Μια τέτοια περίπτωση είναι οι ράβδοι Dienes ή οι ράβδοι Cuisinaire. Μια άλλη περίπτωση είναι οι εικονικές αναπαραστάσεις αριθμών ή οι εικονικές αναπαραστάσεις γεωμετρικών εννοιών, όπως είναι η αναπαράσταση ενός σημείου ως μια κουκκίδα ή η αναπαράσταση ενός αριθμού ως ένα σύνολο κουκκίδων.

Ένα παράδειγμα της πρώτης περίπτωσης είναι η εύρεση του ορίου της σειράς 1+1/4+1/9+1/16… από τον Euler. Ο Euler εφάρμοσε την ισότητα $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_0\left(1+\frac{1}{r_1}\right)\left(1+\frac{1}{r_2}\right)...\left(1+\frac{1}{r_n}\right)$ όπου $r_1, r_2, \ldots, r_n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου με $r_i \neq 0$ στην περίπτωση της σειράς $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - ....$ και απέδειξε ότι $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+... = \frac{\pi^2}{6}$ (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Fiscbein ,1987).

Ένα παράδειγμα της δεύτερης κατηγορίας αποτελεί η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού με διάνυσμα και οι πράξεις των μιγαδικών αριθμών με αντίστοιχες πράξεις διανυσμάτων.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της τρίτης κατηγορίας σύμφωνα με τον Fischbein (1987) αποτελεί η χρήση του συμβόλου της ισότητας. Η Kieran (1981) είχε παρατηρήσει ότι η χρήση του συμβόλου της ισότητας από παιδιά μικρής ηλικίας έχει το χαρακτήρα μιας διαδικασίας *εισόδου-εξόδου*. Έτσι, ενώ η παράσταση 7+3=10 έχει νόημα, δεν ισχύει το ίδιο και για τις παραστάσεις 10=7+3 και 6+4=7+3. Ο Fischbein (1987) παρατηρεί ότι το μοντέλο *εισόδου-εξόδου* εφαρμόζεται άτυπα, όταν κάνουμε πράξεις σε αλγεβρικές παραστάσεις, όπως είναι η 2x+3x=5x. Ακόμα και στους επαΐοντες στα μαθηματικά το μοντέλο δεν εκλείπει, αλλά η συμμετρία της ισότητας επιβάλλεται από τυπικούς περιορισμούς.

Στην πράξη όλες οι προαναφερθείσες κατηγορίες αναλογικών συλλογισμών συνήθως αναμιγνύονται. Αυτές οι μίξεις είναι συνιστώσες λανθανόντων, μη ελεγχόμενων διαδικασιών και μπορούν να οδηγήσουν σε παρερμηνείες ή σε λανθασμένες λύσεις. Για παράδειγμα, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης συνδέεται με την έννοια μιας συνεχούς καμπύλης, όπου η δεύτερη είναι ένα αναλογικό γεωμετρικό μοντέλο της πρώτης. Η ιδεατή καμπύλη όμως, η οποία ιδεατά ανταποκρίνεται στη συνάρτηση, νοείται μέσω ενός εικονικού μοντέλου ως μια λεπτή γραμμή μελάνης (Fischbein, 1987). Η ανακάλυψη από τον Weierstrass μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η οποία δεν έχει παραγώγους ή αντίστοιχα η γραφική της παράσταση που δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο, απηχεί τη βαθιά επίδραση αυτών των σύνθετων σχέσεων. Επειδή ο συλλογισμός μας δεν μπορεί εντελώς να αποσυνδέσει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης από τη γεωμετρική της ερμηνεία και επειδή ο συλλογισμός μας επιπλέον δεν μπορεί να αποσυνδέσει τη γεωμετρική ερμηνεία από τη λανθάνουσα εικονική αναπαράσταση, δεν μπορούμε διαισθητικά να δεχτούμε την ύπαρξη μιας συνεχούς συνάρτησης (ή αντίστοιχα μιας συνεχούς καμπύλης) η οποία δεν έχει παράγωγο σε κανένα σημείο της (αντίστοιχα η καμπύλη δεν έχει σε κανένα σημείο της εφαπτομένη). Μια σχεδιασμένη συνεχής καμπύλη πάντα έχει εφαπτομένες (Fischbein 1987).

Οι Nūñez και Lakoff (2000, 2005) θεωρούν ότι παρόμοια παράδοξα συμβαίνουν από την εσφαλμένη, σε σχέση με τη συμβατική μαθηματική πρακτική, χρήση εννοιολογικών μεταφορών[3]. Για παράδειγμα μια από τις βασικές συνιστώσες της θεωρίας τους είναι η *Βασική Μεταφορά του Απείρου* (στο εξής ΒΜΑ) (2000,2005):

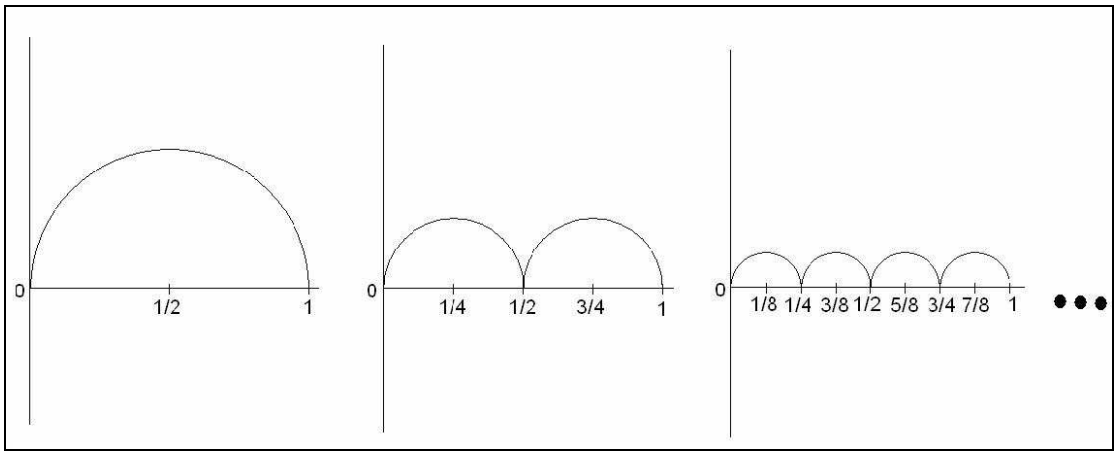
[3] Όρος «*μεταφορά*» όπως τον χρησιμοποιούν οι Nūñez και Lakoff αν και δεν είναι ταυτόσημος, είναι πολύ κοντινός με τον όρο «*αναλογία*».

Η Βασική Μεταφορά του Απείρου

Πεδίο-πηγή Ολοκληρωμένες επαναληπτικές διαδικασίες		Πεδίο-στόχος Επαναληπτικές διαδικασίες που συνεχίζουν στο άπειρο
Αρχική Κατάσταση	→	Αρχική Κατάσταση
Κατάσταση που είναι αποτέλεσμα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας.	→	Κατάσταση που είναι αποτέλεσμα από την αρχική κατάσταση της διαδικασίας.
Η διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση.	→	Η διαδικασία: Από μια δεδομένη ενδιάμεση κατάσταση παράγεται η επόμενη κατάσταση.
Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας.	→	Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα μετά την επανάληψη της διαδικασίας.
Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας.	→	Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας (πραγματικό άπειρο).
Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.	→	Συνεπαγωγή: Η τελική κατάσταση ως αποτέλεσμα της διαδικασίας είναι μοναδική και έπεται κάθε μη τελικής κατάστασης.

Πινακας 2: Η Βασική Μεταφορά του Απείρου (από Nūñez και Lakoff, 2000)

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πώς η λανθασμένη χρήση της ΒΜΑ σε συνδυασμό με την εποπτεία οδηγεί σε φαινομενικά παράδοξα. Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία καμπυλών˙ Έστω το ημικύκλιο με κέντρο Α(1/2 , 0) και ακτίνα ρ=1/2. Στη συνέχεια θεωρούμε δύο ημικύκλια, με κέντρα Β(1/4 , 0) και Γ(3/4 , 0) και ακτίνα ρ=1/4. Συνεχίζουμε να δημιουργούμε ημικύκλια όπως φαίνεται στο σχήμα 3:



Σχήμα 3: Ακολουθία ημικυκλίων (από Nūñez και Lakoff , 2000)

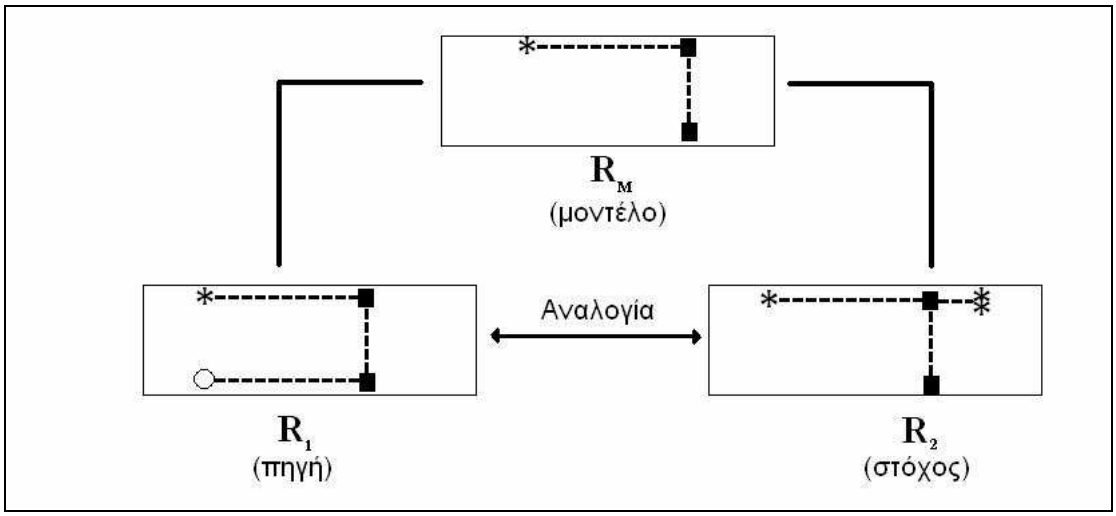
Καθώς $n \to \infty$, τα ημικύκλια φαίνονται ότι τείνουν να συμπέσουν με τον άξονα x΄x στο διάστημα [0,1]. Είναι επόμενο να υποθέσει κανείς ότι η συνολική περίμετρος των ημικυκλίων τείνει στο μήκος που έχει το διάστημα [0,1] δηλαδή 1. Όμως, η συνολική περίμετρος των ημικυκλίων σε κάθε όρο της ακολουθίας είναι σταθερή και ίση με π/2! Η άρση του παραδόξου εξηγείται με τη λανθασμένη χρήση, κατά τη συμβατική μαθηματική πρακτική, της ΒΜΑ. Πράγματι, ενώ η επιφάνεια κάτω από τα ημικύκλια τείνει στο 0, καθώς επίσης και οι αντίστοιχες ακτίνες τείνουν στο 0, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την καμπυλότητα η οποία τείνει στο άπειρο. Με απλά λόγια δεν συγκλίνουν όλες οι ιδιότητες της καμπύλης στις ιδιότητες της ευθείας. Οι Fischbein, Tirosh & Hess (1979) θεωρούν ότι οι περισσότεροι άνθρωποι δεν δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στην καμπυλότητα και στις εφαπτομένες, ενώ οι Nūñez και Lakoff (2005) τονίζουν ότι η αλόγιστη χρήση της ΒΜΑ μπορεί να δημιουργήσει φαινομενικά παράδοξα.

Με τα παραπάνω θέλουμε να αναδείξουμε τη σημασία της αναλογικής σκέψης στην επιστήμη των μαθηματικών γενικά, και ειδικότερα, στο θέμα των αναπαραστάσεων. Πράγματι ο βασικός γνωστικός μηχανισμός που υπόκειται της ερμηνείας και επεξεργασίας των αναπαραστάσεων δεν είναι άλλος από την αναλογική σκέψη στην οποία θα αναφερθούμε εκτενώς στην επόμενη ενότητα. Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι ο εντοπισμός και η αξιοποίηση μιας αναλογίας δεν είναι απλή υπόθεση και συχνά μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

2.2 Αναλογίες και αναλογική σκέψη

Ο όρος αναλογία αναφέρεται στη σύγκριση των δομών μεταξύ δύο πεδίων (domains) (Duit 1991). Ένας άλλος ορισμός της αναλογίας διακρίνει τη σύγκριση δομών ανάμεσα α) σε δύο ριζικά διαφορετικά εννοιολογικά πεδία τα οποία όμως φέρουν μια παρόμοια σχεσιακή δομή και β) σε δύο στοιχεία που προέρχονται από το ίδιο εννοιολογικό πεδίο ή από σχετικά όμοια εννοιολογικά πεδία (Vosniadou 1988). Η ουσία της αναλογικής σκέψης αφορά τη μεταφορά γνώσης από μια κατάσταση σε μια άλλη διαμέσου μιας διαδικασίας (συχνά ατελούς) εύρεσης ενός συνόλου αντιστοιχίσεων ένα-προς-ένα ανάμεσα στα στοιχεία ενός σώματος πληροφοριών και στα στοιχεία ενός άλλου (Gick & Holyoak 1983, αναφορά από Vosniadou 1988). Σύμφωνα με τον Duit (1991) μεταξύ δύο δομών R_1 και R_2 μπορεί να υπάρχουν εν

μέρει ταυτόσημα χαρακτηριστικά. Η δομή R_M αναπαριστά αυτήν τη μερική ταύτιση των δομών R_1 και R_2. Οι δομές R_1 και R_2 ορίζονται μεταξύ τους ως *ανάλογες σε σχέση με τη δομή* R_M (βλέπε σχήμα 2):



Σχήμα 2: Διαγραμματική αναπαράσταση της αναλογίας (Duit, 1991)

Η σχέση ανάμεσα στην πηγή και το στόχο είναι συμμετρική και αμφίδρομη. Επομένως όχι μόνο βοηθά στην κατανόηση του πεδίου-στόχου, αλλά επιπλέον δίνει και νέες προοπτικές θεώρησης και αναδιοργάνωσης του πεδίου-πηγής (Duit 1991).

Ο αναλογικός συλλογισμός (analogical reasoning) αφορά τον προσδιορισμό και τη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα γνωστό σύστημα (*πηγή*) σε ένα νέο ή σχετικά άγνωστο σύστημα (Vosniadou 1988). Βασικός κρίκος αυτής της σύγκρισης ή της μεταφοράς πληροφοριών αποτελεί η έννοια της ομοιότητας. Η Gentner (1983) (αναφορά από Duit 1991) διακρίνει τέσσερα ήδη ομοιότητας:

- Αντιστοίχιση μόνο (ή κυρίως) σχεσιακών κατηγορημάτων.
- Αντιστοίχιση σχεσιακών κατηγορημάτων και χαρακτηριστικών των αντικειμένων.
- Αντιστοίχιση αφηρημένων σχεσιακών δομών ενός πεδίου βάσης.
- Αντιστοίχιση (κυρίως) των περιγραφικών χαρακτηριστικών των αντικειμένων.

Ο Duit (1991) θεωρεί ότι η αναλογία λαμβάνει χώρα διαμέσου του δεύτερου και τρίτου είδους ομοιότητας. Πρέπει να τονίσουμε ότι η έννοια της αναλογίας είναι συμβατή και με την κονστρουκτιβιστική θεωρία και με το μοντέλο της εννοιολογικής

αλλαγής. Πράγματι, σύμφωνα με το κονστρουκτιβιστικό μοντέλο, η μάθηση είναι μια ενεργητική διαδικασία του υποκειμένου, ώστε να κατανοήσει αυτό που δεν είναι οικείο με βάση κάτι άλλο που είναι γνωστό. Η μάθηση επομένως, θεμελιακά αφορά την αναγνώριση ή κατασκευή ομοιοτήτων μεταξύ του καινούριου και αυτού που είναι ήδη γνωστό. Οι αναλογίες έχουν εξέχοντα ρόλο στην εννοιολογική αλλαγή με το σκεπτικό ότι μπορούν να συμβάλουν στην αναδιοργάνωση της μνήμης και να προετοιμάσουν το έδαφος για νέες πληροφορίες (Gentner 1983, αναφορά από Duit 1991).

Η αναλογία λειτουργεί επεξηγηματικά, όταν συσχετίζει νέες έννοιες και αρχές με οικείους όρους. Επιπλέον έχει και δημιουργική λειτουργία, όταν παράγει τη λύση υπαρχόντων προβλημάτων, τον προσδιορισμό νέων προβλημάτων και τη γενίκευση υποθέσεων (Glynn & Takahashi 1998, αναφορά από Duit 1991). Οι αναλογίες συνήθως βοηθούν στη μάθηση συγκεκριμένων περιοχών του πεδίου-στόχου. Επομένως, η χρήση πολλαπλών αναλογιών είναι απαραίτητη, για να διευκολύνει τη μάθηση ολόκληρου του πεδίου (Duid 1991). Η χρήση πολλαπλών αναλογιών αποτρέπει τη δημιουργία παρανοήσεων οι οποίες μπορεί να προκληθούν από τη χρήση μίας και μόνο αναλογίας (Spiro et al 1989, αναφορά από Duit 1991).

Διάφορες εμπειρικές μελέτες έρχονται να στηρίξουν τη χρησιμότητα της αναλογίας αλλά, και να προσδιορίσουν τα όρια αυτής της χρήσης. Οι Black & Solomon (αναφορά από Duit 1991) ερεύνησαν τη χρήση αναλογιών από τους μαθητές προκειμένου να κατανοήσουν την έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος. Το συμπέρασμά τους είναι ότι οι αναλογίες μπόρεσαν να βοηθήσουν τους μαθητές. Οι Gentner & Gentner (αναφορά από Getner 1986) αναφέρουν ότι οι αναλογίες βοήθησαν στην επίλυση προβλήματος στην περίπτωση του ηλεκτρικού κυκλώματος. Ο Shapiro (1985) (αναφορά από Duit 1991) σε δικές του μελέτες καταλήγει σε παρόμοια συμπεράσματα στον τομέα της φυσικής. Οι Vosniadou & Ortony (1983) παρατήρησαν ότι οι μαθητές μικρής ηλικίας μπορούσαν να κατανοήσουν καλύτερα πώς αντιδρά ο ανθρώπινος οργανισμός σε μια μόλυνση, όταν η καινούρια γνώση παρουσιάζεται με αναλογίες.

Σε άλλες εμπειρικές μελέτες, όμως, παρατηρήθηκε ότι ο αναλογικός συλλογισμός ήταν ανεπαρκής. Βασική προϋπόθεση για έναν ορθό αναλογικό συλλογισμό αποτελεί η καλή γνώση του πεδίου-πηγής (Duit 1991, Vosniadou 1988). Αυτή η γνώση από μόνη της δεν είναι πάντα επαρκής συνθήκη. Συνήθως οι μαθητές εντοπίζουν μόνο κυριολεκτικές ή επιφανειακές ομοιότητες μεταξύ δύο πεδίων (Gentner & Landers,

Tenney & Getner, αναφορά από Duit 1991). Ο Fischbein (1987) επιπλέον, τονίζει τους περιορισμούς που πρέπει να τίθενται στην αντιστοίχιση δομικών ιδιοτήτων ανάμεσα σε δύο πεδία, όταν αυτά φέρουν σχετικά επιφανειακές ομοιότητες.

Η αριθμητική ευθεία

2.3 Ορισμός της αριθμητικής ευθείας

Η αριθμητική ευθεία ή αριθμογραμμή είναι μία ευθεία στα σημεία της οποίας έχουμε επισυνάψει αριθμούς (Kilpatrick et al, 2005). Πρόκειται για μια οριζόντια συνήθως ευθεία, στην οποία θεωρούμε ένα σημείο το οποίο καλούμε *αρχή της ευθείας*. Από το σημείο αυτό, η ευθεία εκτείνεται στο άπειρο και από τις δύο κατευθύνσεις. Θεωρούμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς και στα σημεία της γραμμής αυτής. Ο αριθμός 0 αντιστοιχεί στην αρχή της ευθείας και ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο σημείο που ορίζει τη μονάδα μήκους της ευθείας (ξεκινώντας από την αρχή). Ένας θετικός αριθμός x αντιστοιχεί σε ένα σημείο το οποίο απέχει x μονάδες δεξιά της αρχής, ενώ ο αριθμός –x αντιστοιχεί σε ένα σημείο που απέχει x μονάδες από την αρχή προς τα αριστερά. Σχέσεις από το ένα πεδίο μπορούν να «μεταφραστούν» στο άλλο. Για παράδειγμα ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, αν και μόνο αν το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό α βρίσκεται δεξιά του σημείου που αντιστοιχεί στον αριθμό β. Η χρήση της είναι ευρέως διαδεδομένη στα σχολικά εγχειρίδια. Σύμφωνα με τον Ernest (1985) η αριθμητική ευθεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί (α) ως μοντέλο για τη διδασκαλία της διάταξης των αριθμών, (β) ως μοντέλο για τις τέσσερις πράξεις των αριθμών (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση) και (γ) πάνω στη διδασκαλία νέων τύπων αριθμών (π.χ. από τους φυσικούς στους ρητούς). Οι Kilpatrick et al (1985) υποστηρίζουν ότι η αριθμητική ευθεία είναι ένα εννοιολογικό εργαλείο με το οποίο μπορεί να γίνει κατανοητή η δομή των πραγματικών αριθμών.

2.4 Η ταύτιση των πραγματικών αριθμών με την ευθεία[4]

Οι άρρητοι αριθμοί εισήχθησαν στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά όχι ως αριθμοί, αλλά ως μήκη ή άλλου είδους ποσότητες. Στην αρχαία Ελλάδα οι χειρισμοί των αρρήτων είχαν αναπτυχθεί με επιδεξιότητα. Τουλάχιστον μια χιλιετία πριν από τον Πυθαγόρα οι άνθρωποι μετρούσαν μήκη είτε με βηματισμό είτε με κάποιο μετρητικό όργανο. Με άλλα λόγια προσήπταν αριθμούς σε κάποια μήκη. Η πυθαγόρεια οντολογία σχετικά με τους αριθμούς οδήγησε σε κάποιο βαθμό στην ιδέα της σύγκρισης οποιωνδήποτε ποσοτήτων ανεξαρτήτως μήκους. Δεν είναι ξεκάθαρο αν οι αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν αυθαίρετα μήκη, σίγουρα όμως θεωρούσαν μήκη που προέκυπταν από κατασκευή δοσμένων μηκών, όπως φαίνεται και από το Χ βιβλίο των Στοιχείων. Εκείνη την εποχή δεν υπήρχε η ιδέα της ταύτισης κάθε σημείου μιας ευθείας με έναν αριθμό. Η πλήρης ταύτιση κάθε πραγματικού αριθμού με τα σημεία μιας ευθείας στο δυτικό κόσμο ήταν μια αργή και σταδιακή σύλληψη η οποία συνδέεται άμεσα με τη σταδιακή αλλαγή στο πλαίσιο της έννοιας «αριθμός».

Στην Ανατολή, ο μαθηματικός τρόπος σκέψης ήταν απαλλαγμένος από το ενδιαφέρον για αποδείξεις και από ζητήματα που προέκυπταν από την ασυμμετρία. Οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν προσεγγίσεις, για να μετρούν οποιαδήποτε μήκη. Η ταύτιση αυτή ήταν αποτέλεσμα του πρακτικού και αλγοριθμικού χαρακτήρα των μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν.

Στην Ευρώπη, η θέση του Ευκλείδη κυριάρχησε μέχρι τον 16^{ο} αιώνα. Για τους Άραβες η κατάσταση ήταν κάπως διαφορετική. Η επίλυση κυβικών εξισώσεων με γεωμετρικές μεθόδους ισοδυναμούσε με την κατασκευή ευθύγραμμων τμημάτων των οποίων ο λόγος με άλλα δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα αφορούσε κυβικές ρίζες.

Προς το τέλος του 15^{ου} αιώνα οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί είχαν αποκτήσει ευχέρεια στη χρήση τόσο κυβικών ριζών όσο και άλλων εκφράσεων με ριζικά. Όταν λέμε εκφράσεις με ριζικά, εννοούμε τις εκφράσεις που περιέχουν τα τέσσερα σύμβολα των πράξεων και την εξαγωγή ριζών n τάξης για συγκεκριμένους θετικούς ακέραιους n (Cajori, 1894).

Ο Γερμανός αλγεβριστής Stifel [1487-1567] πίστευε ότι όλοι οι άρρητοι λόγοι αντιστοιχούσαν σε εκφράσεις με ριζικά. Διέκρινε τις διαφορές ανάμεσα στα μήκη και

[4] Βασική πηγή για την ενότητα αυτή είναι το βιβλίο του Crossley (1987). Οι αναφορές είναι δευτερογενείς και βρίσκονται στην ίδια πηγή.

τους αριθμούς και θεωρούσε ότι τα μήκη δεν μπορούσαν να αποδοθούν με ακρίβεια από αριθμούς. Στο έργο του Arithmetica Integra γράφει:

"*...διότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ως αριθμούς πραγματικούς αυτούς (*τους άρρητους) *οι οποίοι αποτελούν αποφυγή στην ακρίβεια και δεν έχουν καμία γνωστή αναλογία με τους πραγματικούς*"(Crossley, 1987, σελ 137). Για τον Stifel πραγματικοί αριθμοί είναι οι ακέραιοι και τα κλάσματα. Επιπλέον κάνει διάκριση ανάμεσα στους φυσικούς κύκλους και στους μαθηματικούς κύκλους:

> …
>
> *3. Ο φυσικός κύκλος είναι μια συγκεκριμένα εικόνα του μαθηματικού κύκλου.*
>
> *4. Το τρίγωνο είναι το πρώτο από όλα τα πολύγωνα.*
>
> *5. Το τελευταίο από όλα τα πολύγωνα είναι ο κύκλος.*
>
> *6. Επομένως ο κύκλος ορθά περιγράφεται ως το πολύγωνο που έχει άπειρες πλευρές.*
>
> *7. Επομένως η περιφέρεια ενός κύκλου δεν λαμβάνει κανένα αριθμό ούτε ρητό ούτε άρρητο* (Crossley 1987, σελ 138).

Ο Stifel με βάση τα παραπάνω συμπέρανε, σαφώς λανθασμένα, ότι επειδή μπορούμε να δώσουμε μια άνω και μία κάτω προσέγγιση στο εμβαδό ενός κύκλου αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε να προσδώσουμε και έναν ακριβή αριθμό. Ο Crossley (1987) αναφέρει ότι ο Stifel είχε αντιληφθεί ότι υπάρχουν μήκη ή εμβαδά τα οποία δεν μπορούσαν να εκφραστούν με ριζικά.

Τον 17^{ο} αιώνα, ο Barrow μελετώντας ποσότητες που προέκυπταν από κατασκευή πίστευε ότι η περιφέρεια ενός κύκλου μπορούσε να θεωρηθεί γνωστή, αλλά δεν μπορούσε να συγκριθεί με το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Υποστήριζε ότι οι ποσότητες ήταν πρωταρχικές έννοιες και ότι μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορούσαν να αντιστοιχηθούν αριθμοί.

Οι εξελίξεις στην έννοια του αριθμού σηματοδοτούνται από το έργο του Stevin [1548-1620]. Θεωρεί ότι οι θέσεις των δεκαδικών ψηφίων έχουν άπειρο πλήθος, ωστόσο θεωρούσε αριθμούς με πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα. Χρησιμοποιούσε προσεγγίσεις για διωνυμικές εκφράσεις του τύπου $a \pm \sqrt{b}$ όπου η ποσότητα a^2/b^2 ήταν ρητός αριθμός, ενώ η ποσότητα a/b δεν ήταν. Στην Αγγλία, αντίθετα, υπήρχε η τάση να θεωρούν αριθμούς με άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα με κύριο εκφραστή τον Wallis.

Τον 19^{ο} αιώνα ολοκληρώνονται οι προσπάθειες για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών. Ο Hamilton πρώτος κάνει μια τέτοια προσπάθεια. Αργότερα ο Meray χρησιμοποιεί ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών και ορίζει σαν πραγματικούς αριθμούς τις κλάσεις ισοδυναμίας τέτοιων ακολουθιών. Αυτές τις κλάσεις τις ονομάζει *φανταστικούς αριθμούς* [5].

Ο Cantor συνεχίζει αυτή την προσπάθεια και ορίζει ανάμεσα στις κλάσεις ισοδυναμίας σχέσεις διάταξης. Μετά ορίζει ακολουθίες Cauchy για αυτές τις κλάσεις και συνεχίζει με παρόμοιο τρόπο[6]. Τέλος θεωρεί την ευθεία με κατευθύνσεις + και -, ένα σταθερό σημείο Ο και μια μονάδα μέτρησης αποστάσεων σε αυτή. Αν ένα σημείο έχει απόσταση από το Ο που εκφράζεται με ρητή σχέση, τότε σε αυτό το σημείο αποδίδουμε αυτόν τον ρητό αριθμό. Αν αντίθετα η απόσταση ενός σημείου Μ, το οποίο είναι γνωστό μέσω κατασκευής, δεν εκφράζεται με μια ρητή σχέση, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία αποστάσεων $a_1,a_2,a_3,\ldots$η οποία ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μια ακολουθία Cauchy ρητών αριθμών και της οποίας τα αντίστοιχα σημεία προσεγγίζουν το σημείο Μ. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε ως απόσταση του σημείου Μ το όριο της ακολουθίας αυτής. Ο Cantor παρατηρεί ότι η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή να αντιστοιχίσουμε κάθε αριθμό σε ένα σημείο πάνω στην ευθεία, δεν μπορεί να αποδειχθεί παρά μόνο να δηλωθεί ως ένα επιπλέον αξίωμα. Η συνεισφορά του Cantor σε αυτό το ζήτημα είναι σπουδαία, διότι πλέον η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών στηρίζεται καθαρά σε αριθμητικούς όρους (Crossley, 1987).

Ο Dedekind, όπως και ο Cantor, για να ορίσει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει ως αφετηρία το σύνολο των ρητών αριθμών. Ένας ρητός αριθμός q χωρίζει το σύνολο **Q** σε δύο κλάσεις, σε αυτή που περιέχει όλους τους ρητούς που είναι μικρότεροι από q και σε αυτή που περιέχει όλους τους ρητούς αριθμούς που δεν είναι μικρότεροι από q. Ο Dedekind επεκτείνει αυτήν την έννοια, για να ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς ταυτίζοντας τα ζεύγη των κλάσεων με αριθμούς. Το σκεπτικό του είναι ότι, αν όλα τα σημεία μιας ευθείας διαμερίζονται σε δύο κλάσεις, έτσι ώστε όλα τα σημεία της μιας κλάσης να βρίσκονται αριστερά από όλα τα σημεία της άλλης κλάσης, τότε υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο που παράγει αυτόν τον διαχωρισμό των σημείων σε δύο κλάσεις, δηλαδή το διαχωρισμό της ευθείας σε δύο μέρη

[5] Δεν αναφέρεται στον όρο *φανταστικός αριθμός* όπως χρησιμοποιείται σήμερα.
[6] Για περισσότερες λεπτομέρειες στην κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών από ακολουθίες Cauchy βλέπε Γιαννακούλιας (2007).

(Ρουσόπουλος,1991). Ο Crossley (1987) παρατηρεί ότι και εδώ κρύβεται το αξίωμα του Cantor[7]. Το μοναδικό σημείο που παράγει το διαχωρισμό της ευθείας σε δύο τμήματα ταυτοποιείται ως ένας πραγματικός αριθμός. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ο Russel πρότεινε μια τροποποίηση της τομής Dedekind. Παρατήρησε ότι αφού η κάθε κλάση καθορίζεται μοναδικά η μία από την άλλη, τότε είναι αρκετή μόνο η μία από τις δύο, για να ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι ο αριθμός $\sqrt{2}$ ορίζεται ως αυτό το τμήμα ή υποκλάση του συνόλου των ρητών αριθμών το οποίο αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς των οποίων τα τετράγωνα είναι μικρότερα του δύο και από όλους τους αρνητικούς αριθμούς (Boyer, Merbach 1988). Στην εποχή μας, λοιπόν, η «πραγματική ευθεία» έχει πλήρως αριθμητικοποιηθεί και το αξίωμα Cantor-Dedekind έχει αντικατασταθεί από τον ορισμό ότι η πραγματική ευθεία ορίζεται ως το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών. Η ταύτιση της «πραγματικής ευθείας» με τη γεωμετρική ευθεία φαίνεται πως αποκρύπτει από το γεγονός ότι αν και έχουμε μια συλλογή από αξιώματα τα οποία συμφωνούν με τη διαίσθησή μας για τη γεωμετρική ευθεία, εντούτοις δεν έχουμε καμία εγγύηση ότι έχουμε συλλάβει την πλήρη περιγραφή της.

Ο Hilbert θεμελιώνοντας την ευκλείδεια γεωμετρία στην ουσία δίνει ένα σύνολο αξιωμάτων τα οποία χαρακτηρίζουν τους πραγματικούς αριθμούς. Δίνει όμως και ένα επιπλέον αξίωμα, αυτό της πληρότητας. Το αξίωμα αυτό αναφέρει ότι τα σημεία μιας γραμμής απαρτίζουν ένα μέγιστο σύνολο το οποίο ικανοποιεί τα άλλα αξιώματα (Hilbert, 1950). Το αξίωμα της πληρότητας εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών με την έννοια ότι κάθε άλλο σύνολο που ικανοποιεί τα ίδια αξιώματα είναι ισομορφικό με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα στα σχόλια του ο Hilbert (1950, σελ 16) αναφέρει:

…Από θεωρητική άποψη η αξία αυτού του αξιώματος είναι ότι έμμεσα μας οδηγεί στην εισαγωγή οριακών σημείων και επομένως καθιστά δυνατή μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία ενός τμήματος και στο σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Ωστόσο, η ευθεία δεν είναι παρά ένα μοντέλο περιγραφής του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν και άλλα σύνολα με διαφορετικές ιδιότητες (μη ισόμορφα με το **R**) που χρησιμοποιούν επίσης ως μοντέλο τη γεωμετρική ευθεία. Τέτοια είναι τα μη κανονικά μοντέλα ανάλυσης τα οποία εισήχθησαν από τον

[7] Γνωστό σήμερα και ως αξίωμα Cantor-Dedekind. Για περισσότερες λεπτομέρειες γύρω από την κατασκευή των πραγματικών αριθμών με τομές Dedekind βλ. Παράρτημα Α΄.

Abraham Robinson. Το κύριο χαρακτηριστικό των μη κανονικών μοντέλων είναι ότι παραβιάζει το αξίωμα του Αρχιμήδη[8]. Όπως παρατηρεί ο Crossley (1987) όμως δεν υπάρχει τρόπος να επαληθεύσουμε το τι είναι «πραγματικό» στη γεωμετρική ευθεία. Κάθε μοντέλο αναφέρεται ως επί το πλείστον σε ένα αριθμητικό περιβάλλον παρά γεωμετρικό.

2.5 Η διάσταση ανάμεσα στα φυσικά γεωμετρικά σχήματα και στα μαθηματικά γεωμετρικά σχήματα.

Σύμφωνα με τον Körner (1971) «*ο Πλάτωνας θεωρούσε τα μαθηματικά όχι σαν μια εξιδανίκευση ορισμένων πλευρών του εμπειρικού κόσμου από τους μαθηματικούς, αλλά σαν περιγραφή ενός μέρους της πραγματικότητας,*» (αναφορά από Αναπολιτάνο, 1985, σελ 36). Θεωρούσε ότι τα φυσικά αντικείμενα είναι «αντανακλάσεις» των μαθηματικών αντικειμένων τα οποία με τη σειρά τους είναι αντανακλάσεις των Μορφών (Shapiro, 2006). Σύμφωνα με αυτή τη θέση, η μαθηματική γνώση είναι ανεξάρτητη από την εμπειρία και επομένως η γεωμετρία δεν ασχολείται με φυσικά αντικείμενα στο φυσικό χώρο. Αντίθετα, η φιλοσοφία του Αριστοτέλη περιέχει σπέρματα εμπειρισμού. Μια ερμηνεία της σκέψης του είναι το αίτημα κάποιας νοητικής ικανότητας αφαίρεσης με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα δημιουργούνται ή αλλιώς παράγονται ή συλλαμβάνονται με τη θεώρηση φυσικών αντικειμένων. Ο Mill (Shapiro, 2006) απέρριπτε την ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων και επιδίωξε να θεμελιώσει τη γεωμετρία στην παρατήρηση. Υποστήριζε ότι τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι προσεγγίσεις αληθών σχεδιασμένων σχημάτων, δηλαδή η γεωμετρία αφορά εξιδανικεύσεις των δυνατοτήτων κατασκευής. Θεωρούσε, για παράδειγμα, ότι οι γραμμές χωρίς πλάτος και τα σημεία χωρίς διάσταση είναι οριακές έννοιες. Αυτή η θέση αποδίδει στη γεωμετρία το χαρακτήρα μιας μυθοπλασίας[9] (Shapiro, 2006). Τα σχήματα που εμφανίζονται στα αιτήματα είναι επινοημένα υποκατάστατα. Ωστόσο επειδή τα γεωμετρικά σχήματα προσεγγίζουν τα σχεδιασμένα σχήματα και φυσικά αντικείμενα, οι γεωμετρικές προτάσεις είναι αληθινές εκ φύσεως στο βαθμό που τα πραγματικά αντικείμενα και σχήματα προσεγγίζουν τις εξιδανικεύσεις.

---

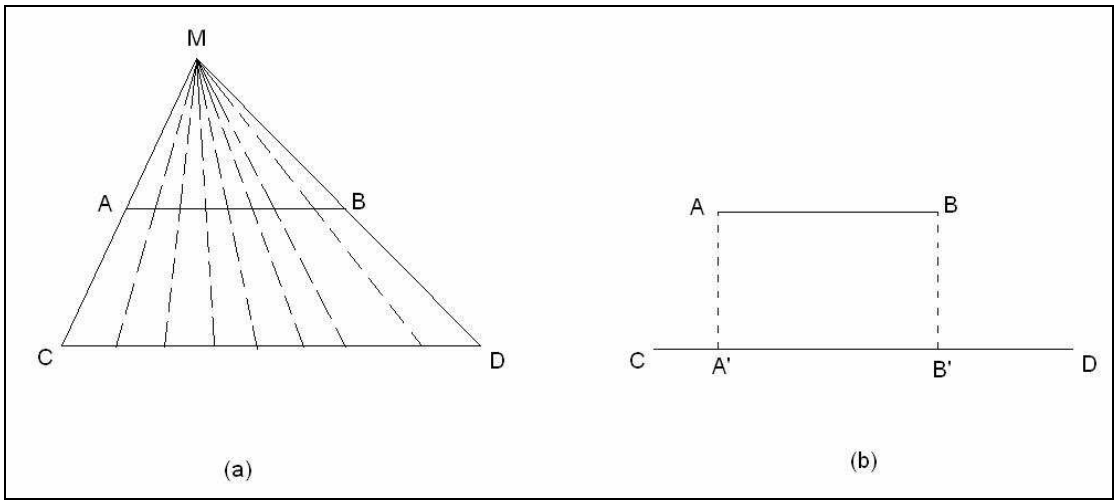
[8] Με σύγχρονη ορολογία αν $a,b \in \mathbf{R}$ με $a<b$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $an>b$.

[9] Με άλλα λόγια ότι τα γεωμετρικά μαθηματικά σχήματα δεν μπορούν να ταυτιστούν με τα υλικά σχήματα, αλλά τα πρώτα είναι εξιδανικεύσεις των δεύτερων.

Αυτό που τονίζεται στις παραπάνω θέσεις παρά τη διαφορετικότητά τους είναι η διάσταση ανάμεσα στα φυσικά σχεδιασμένα αντικείμενα και στα μαθηματικά αντικείμενα. Αυτή η διάσταση αποτελεί και μια πηγή δυσκολιών στη μαθηματική εκπαίδευση, εφόσον δεν είναι πάντα εύκολο ένας μαθητής να διαχωρίσει μια μαθηματική έννοια από μια ατελή αναπαράστασή της.

Ο Fischbein (1987) παρατηρεί ότι το μοντέλο της εικόνας 1a δεν πείθει πάντα τους μαθητές ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο πλήθος σημείων ανεξάρτητα από το μήκος τους. Αντίθετα τείνουν να υιοθετούν το μοντέλο της εικόνας 1b δικαιολογώντας βάσει αυτού του μοντέλου ότι ανάμεσα σε δύο ευθύγραμμα τμήματα διαφορετικού μήκους, περισσότερα σημεία έχει αυτό με το μεγαλύτερο μήκος.

Ο Fischbein (1987) παρατηρεί ότι ο συλλογισμός που κρύβεται στην εικόνα 1b στηρίζεται σε καθαρά υλικό-γεωμετρικούς όρους. Επειδή όπως τα σημεία και οι ευθείες δεν έχουν πραγματική υλική ύπαρξη, π.χ. τα σημεία δεν είναι πραγματικές υλικές κουκκίδες, θα πρέπει κάτω από ορισμένες συνθήκες να μην λαμβάνουμε υπόψη τους υλικο-γεωμετρικούς περιορισμούς αλλά να εφαρμόζουμε τον τυπικό και λογικό συλλογισμό.



Εικόνα 1: Μοντέλα απεικόνισης της σύγκρισης του πλήθους των σημείων μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων (από Fischbein 1987).

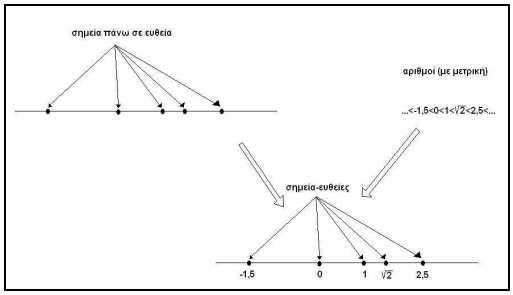
2.6 Η εννοιολογική μεταφορά της αριθμογραμμής

Οι Nūñez και Lakoff (2000) θεωρούν ότι ο όρος «αριθμητική ευθεία» αναφέρεται σε δύο διαφορετικές μεταφορές για την ευθεία.. Η μια αφορά αυτή που διδάσκεται στις πρώτες τάξεις του σχολείου και αναφέρεται στη συνηθισμένη φυσική έννοια της συνεχούς γραμμής. Πρόκειται για την ευθεία που συναντούμε σε διάφορα έντυπα, όπως είναι για παράδειγμα το γράφημα που αναφέρεται στη θερμοκρασία κ.α. Αυτή η ευθεία νοείται μέσω της μεταφοράς *Οι Αριθμοί είναι Σημεία πάνω σε μια Γραμμή* (Nūñez και Lakoff , 2000):

Οι Αριθμοί είναι Σημεία πάνω σε μια Γραμμή (Φυσικός συνεχής χώρος)		
Πεδίο-πηγή Σημεία σε Γραμμή		Πεδίο-στόχος Μια Συλλογή Αριθμών
Ένα σημείο P πάνω σε μια γραμμή	$\rightarrow$	Ένας Αριθμός P΄
Ένα σημείο O	$\rightarrow$	Μηδέν
Ένα σημείο I δεξιά του O	$\rightarrow$	Ένα
Το σημείο P είναι δεξιά του σημείου Q	$\rightarrow$	Ο αριθμός P΄ είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό Q΄
Το σημείο Q είναι αριστερά του σημείου P	$\rightarrow$	Ο αριθμός Q΄ είναι μικρότερος από τον αριθμό P΄
Το σημείο P βρίσκεται στην ίδια θέση με το σημείο Q	$\rightarrow$	Ο αριθμός P΄ είναι ίσος με τον αριθμό Q΄
Σημεία αριστερά του O	$\rightarrow$	Αρνητικοί αριθμοί
Η απόσταση ανάμεσα στο O και το P	$\rightarrow$	Η απόλυτη τιμή του αριθμού P΄

Πίνακας 3: Οι αριθμοί είναι Σημεία Πάνω σε μια Γραμμή (Φυσικός συνεχής χώρος) (από Nūñez και Lakoff , 2000).

Η αριθμητική γραμμή που συναντούμε πρακτικά στο σχολείο είναι μια εννοιολογική μίξη η οποία πραγματοποιείται μέσω αυτής της μεταφοράς (βλ και σχήμα 4):



Σχήμα 4: Η μίξη αριθμού-γραμμής (από Nūñez και Lakoff , 2000)

Η δεύτερη ευθεία αριθμών έχει πιο αφηρημένο χαρακτήρα και απαιτεί μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Αφορά τη μίξη μεταξύ της φυσικής ευθείας, των αριθμών και των συνόλων. Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρήση της ΒΜΑ :

Οι Αριθμοί είναι Σημεία πάνω σε μια Γραμμή (Μίξη Φυσικού Χώρου-Συνόλων-Αριθμών)				
Πεδίο-πηγή Η Μίξη Χώρου-Συνόλου			Πεδίο-στόχος	
Φυσικός συνεχής χώρος: Η Ευθεία		Σύνολα	Αριθμοί	
Η ευθεία	$\leftrightarrow$	Ένα σύνολο	$\rightarrow$	Ένα σύνολο από αριθμούς
Σημεία-τοποθεσίες	$\leftrightarrow$	Στοιχεία του συνόλου	$\rightarrow$	Αριθμοί
Τα σημεία είναι θέσεις πάνω σε μια γραμμή	$\leftrightarrow$	Τα στοιχεία είναι μέλη του συνόλου	$\rightarrow$	Μεμονωμένοι αριθμοί είναι μέλη του συνόλου αριθμών
Τα σημεία-θέσεις είναι έμφυτα στην ευθεία που βρίσκονται	$\leftrightarrow$	Τα μέλη υπάρχουν ανεξάρτητα από τα σύνολα στα οποία ανήκουν	$\rightarrow$	Οι αριθμοί υπάρχουν ανεξάρτητα από σύνολα στα οποία ανήκουν
Δύο σημεία-θέσεις είναι ξεχωριστά, όταν βρίσκονται σε διαφορετικές τοποθεσίες	$\leftrightarrow$	Δύο μέλη συνόλου είναι ξεχωριστά, αν είναι διαφορετικές οντότητες	$\rightarrow$	Δυο αριθμοί είναι ξεχωριστοί, αν υπάρχει μια μη μηδενική διαφορά ανάμεσά τους.
Ιδιότητες της γραμμής	$\leftrightarrow$	Σχέσεις ανάμεσα στα μέλη ενός συνόλου	$\rightarrow$	Σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς
Ένα σημείο Ο	$\leftrightarrow$	Ένα στοιχείο «0»	$\rightarrow$	Μηδέν
Ένα σημείο Ι αριστερά του Ο	$\leftrightarrow$	Ένα στοιχείο «1»	$\rightarrow$	Ένα
Το σημείο Ρ είναι αριστερά του σημείου Q	$\leftrightarrow$	Μια σχέση «P>Q»	$\rightarrow$	Ο αριθμός Ρ είναι μεγαλύτερος του αριθμού Q
Σημεία αριστερά του Ο	$\leftrightarrow$	Το υποσύνολο των στοιχείων x, όπου 0>x	$\rightarrow$	Αρνητικοί αριθμοί
Η απόσταση ανάμεσα στο Ο και το Ρ	$\leftrightarrow$	Μια συνάρτηση d που αντιστοιχίζει το (0,P) σε ένα στοιχείο x, όπου x>0	$\rightarrow$	Η απόλυτη τιμή του αριθμού Ρ

Πίνακας 4: Οι αριθμοί είναι Σημεία Πάνω σε μια Γραμμή (Μίξη φυσικού χώρου, συνόλων και αριθμών) (από Nūñez και Lakoff , 2000).

Υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο μεταφορές. Στην πρώτη μεταφορά, η ευθεία έχει ορισμένα σημεία-θέσεις στα οποία αντιστοιχούνται πραγματικοί αριθμοί. Αυτό δεν σημαίνει ότι σε κάθε σημείο-θέση της ευθείας αντιστοιχεί και ένας πραγματικός αριθμός. Αντίθετα, στη δεύτερη μεταφορά υπάρχει μια ένα προς ένα συσχέτιση ανάμεσα στα σημεία που νοούνται ως στοιχεία ενός συνόλου και στους πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτή την αντιστοιχία τα σημεία ικανοποιούν τα αξιώματα και γενικότερα τις σχέσεις, όπως αυτές εκφράζονται στο σύνολο των αριθμών. Υπό αυτήν την ταύτιση μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί «εξαντλούν» την ευθεία. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Duval (βλ ενότητα 2.1), η μεταφορά της αριθμογραμμής αποτελεί ένα σύνθετο πλέγμα συγκλινουσών μετατροπών του οποίου η πολυπλοκότητα προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές (βλ. και Nūñez & Lakoff , 2000). Η φυσική ευθεία, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην ενότητα 2.4, δεν ταυτίζεται “υπερβατικά” με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ταυτίζεται υπό το πρίσμα μιας εννοιολογικής μίξης όπως φαίνεται στη δεύτερη μεταφορά. Με άλλα λόγια, η φυσική ευθεία δεν είναι παρά ένα μοντέλο περιγραφής του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Πράγματι η ευθεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο και άλλων συστημάτων διαφορετικών από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, στην ευθεία των υπερπραγματικών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί αναπαρίστανται ως σημεία-θέσεις αραιά και όχι πυκνά, όπως συμβαίνει στην ευθεία των πραγματικών αριθμών (Nūñez και Lakoff , 2000).

2.7 Η χρησιμότητα της αριθμητικής ευθείας

Σύμφωνα με τον Herbst (1997) (αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003) η ευκλείδεια ευθεία, η οποία παρουσιάζεται στα εγχειρίδια των μαθηματικών ως γεωμετρική έννοια, χρησιμοποιείται και για την αναπαράσταση αριθμών. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν συνιστά μια αριθμητική ευθεία. Το γεωμετρικό μοντέλο της ευθείας ως μέσο αναπαράστασης αριθμών είναι μια μεταφορά, διότι αποτελεί πρωταρχική έννοια της γεωμετρίας και όχι της αριθμητικής. Σύμφωνα με τον Pimm (1987) (αναφορά από Herbst, 1997) η αριθμητική ευθεία είναι μια μεταφορά, διότι η χρήση της στηρίζεται στην αναλογία μεταξύ δύο σχέσεων: τη σχέση ανάμεσα σε έναν αριθμό και ένα αριθμητικό σύστημα και στη σχέση ανάμεσα σε ένα σημείο και στην αριθμητική ευθεία. Σύμφωνα με τους Tapia, Bibiloni & Tapia (1974) (αναφορά από

Herbst, 1997), η αριθμητική ευθεία ως μέσο αναπαράστασης των αριθμών αποδίδει ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών, όπως είναι το άπειρο και η μοναδικότητα κάθε φυσικού αριθμού.

Σύμφωνα με έρευνες (αναφορά από Chiu 2000), η χρήση μεταφορών, όπως είναι η αριθμητική ευθεία και η μεταφορική λογική, βοηθούν στην οικοδόμηση νέων εννοιών. Ο Herbst (1997) παρατηρεί ότι η αριθμητική ευθεία έχει αναπτυχθεί με τέτοιο τρόπο στα διδακτικά εγχειρίδια, ώστε να επιτυγχάνεται η πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των αριθμών και των ιδιοτήτων τους με την ερμηνεία της αριθμητικής γραμμής. Η ευθεία δηλαδή αναπαριστά την ακολουθία αριθμών, ώστε να δικαιολογήσει τους κανόνες που αφορούν τα πρόσημα στον πολλαπλασιασμό των ακεραίων και επιπλέον να αναπαραστήσει την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Μια προσανατολισμένη ευθεία με κλίμακα ανήκει σε ένα σύνθετο είδος αναπαραστάσεων. Κατά πρώτο λόγο λειτουργεί ως ένα νέο περιεκτικό γεωμετρικό μοντέλο, με τους ρητούς αριθμούς να αντιστοιχούν όχι μόνο σε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και τελεστές σε αυτά, αλλά και σε ένα σύνολο διακριτών σημείων πάνω στην ευθεία, όπου η κλίμακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο αριθμητικοποίησης.

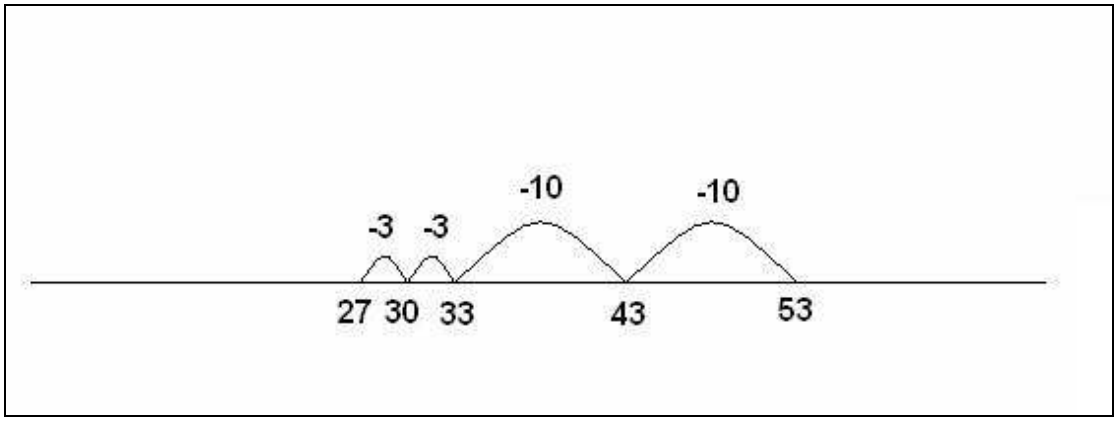
Έτσι μπορεί να αποτελέσει γεωμετρικό μοντέλο για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ρητών αριθμών, καθώς επίσης και για την αναπαράσταση άρρητων αριθμών (Kilpatrick et al 2001, Σιακαλλή και Γαγάτσης 2003). Επιπλέον, κάθε γεωμετρική πράξη, όπως π.χ. η πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων, μπορεί να μεταφραστεί σε μια αριθμητική πράξη η οποία εκτελείται αλγοριθμικά (Birckhoff και Beatley 2002, αναφορά από Σιακαλλή και Γαγάτσης 2003),

Η αριθμητική ευθεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό μέσο για την αναπαράσταση και εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων των ακεραίων (Ernest 1985). Ο Ernest (1985) διακρίνει τρεις στρατηγικές για την εκτέλεση της πρόσθεσης. Αυτές οι στρατηγικές μπορούν να υιοθετηθούν και στο περιβάλλον της αριθμητικής ευθείας. Η πρώτη στρατηγική αφορά τη μετακίνηση του δαχτύλου ή του μολυβιού πρώτα τρεις θέσεις και στη συνέχεια πέντε θέσεις στην περίπτωση της πρόσθεσης «3+5». Αυτή η μέθοδος λέγεται *μέθοδος ολικής μέτρησης* (counting all method). Η δεύτερη στρατηγική συνίσταται στη δυνατότητα να ξεκινήσουν από το 3 και να μετρήσουν ακόμα πέντε. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται *μέτρηση προς τα επάνω* (counting on method). Η τρίτη μέθοδος συνίσταται στο να ξεκινήσουν οι μαθητές από το

μεγαλύτερο προσθετέο, δηλαδή το 5, και να προχωρήσουν ακόμα τρεις θέσεις. Ο Ernest (1985) θεωρεί ότι η διαδικασία εκτέλεσης πρόσθεσης ή αφαίρεσης με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής συνιστά λειτουργική γνώση. Υποθέτει ότι αυτή η γνώση με την πάροδο του χρόνου θα εξασθενήσει και θα αντικατασταθεί από άλλες μεθόδους, όπως η εκτέλεση των πράξεων από μνήμης με τη βοήθεια άλλων γνωστών πράξεων ή με κάποια άλλη φυσιολογική διαδικασία μέτρησης.

Ένα άλλο διδακτικό εργαλείο είναι η χρήση της κενής αριθμητικής γραμμής. Η κενή αριθμητική γραμμή είναι μια αριθμητική γραμμή στην οποία αρχικά δεν είναι τοποθετημένος κανένας αριθμός ή κάποιο άλλο σημείο. Οι μαθητές στη συνέχεια τοποθετούν τους κατάλληλους αριθμούς που χρειάζονται για την εκτέλεση πράξεων (Gravemeijer,1999). Ο Gravemeijer (1994) (αναφορά από Bobis & Bobis, 2005) διακρίνει τρία πλεονεκτήματα στη χρήση της κενής αριθμητικής γραμμής:

- Συμβάλλει στη γραμμική αναπαράσταση των αριθμών. Είναι ένα κατάλληλο εργαλείο το οποίο αναπαριστά καταστάσεις που αφορούν αποστάσεις ή μετρήσεις.
- Αντανακλά καλύτερα σε σχέση με άλλα αναπαραστατικά σχήματα τις ενορατικές νοητικές στρατηγικές των μαθητών. Για παράδειγμα, οι μαθητές επικεντρώνονται σε στρατηγικές μέτρησης (μέθοδος μέτρησης προς τα πάνω και μέθοδος μέτρησης προς τα κάτω) για να λύσουν αριθμητικά προβλήματα μέχρι το εκατό. Πιο προχωρημένες στρατηγικές χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό τέτοιων στρατηγικών (με άλματα των 10 μονάδων) καθώς και μεθόδων διαμερισμού. Στο σχήμα 1 φαίνεται η χρήση της αριθμητικής γραμμής για την εκτέλεση της αφαίρεσης «53-26»:

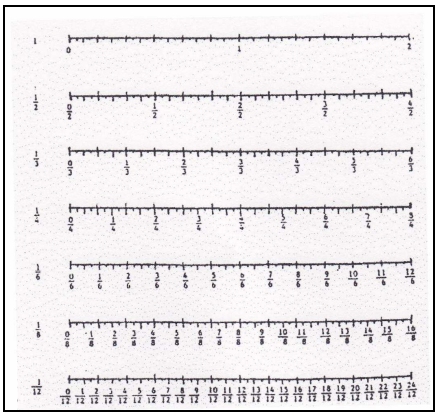


Σχήμα 1: Κατάγράφοντας τα άλματα στην επίλυση της αφαίρεσης 53-26 (από Bobis & Bobis, 2005)

- Δίνει τη δυνατότητα να αναπτύξουν οι μαθητές πιο προχωρημένες στρατηγικές. Καθώς οι μαθητές καταγράφουν τις στρατηγικές τους πάνω στην αριθμητική γραμμή, αυτή λειτουργεί σαν μια σκαλωσιά, γιατί δείχνει ποια μέρη του υπολογισμού έχουν εκτελεστεί σωστά και ποια όχι. Η σκέψη του μαθητή είναι ορατή τόσο στο δάσκαλο όσο και στους άλλους μαθητές. Επομένως η ευθεία προσφέρει ένα ερέθισμα για συζήτηση πάνω στις στρατηγικές που αναπτύσσονται.

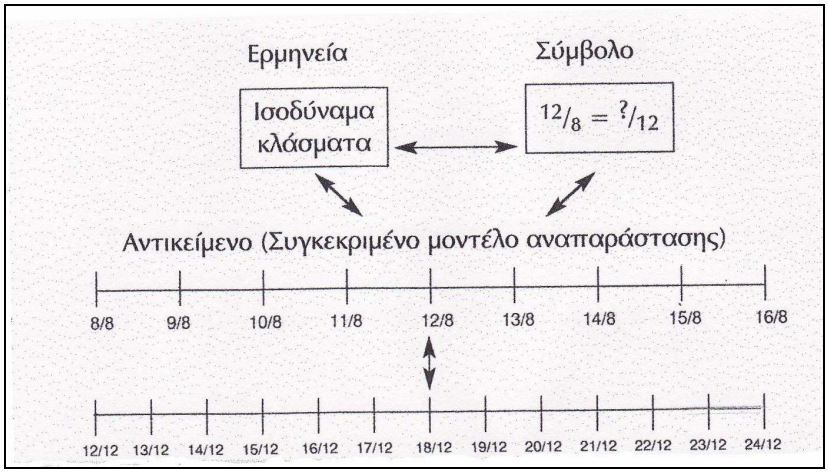
Σύμφωνα με ευρήματα ερευνών (Klein et al 1998), η κενή αριθμητική γραμμή φαίνεται ότι αποτελεί ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τη μάθηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μέχρι το 100. Η κενή αριθμητική γραμμή αποφορτίζει τη μνήμη εργασίας, καθώς προκαταρκτικά αποτελέσματα μπορούν να καταγραφούν σχετικά γρήγορα. Από την άλλη η κενή αριθμητική γραμμή επιτρέπει στο μαθητή να επικοινωνήσει τις ιδέες του με άτυπο τρόπο. Δεν αναγκάζει το μαθητή να ασχοληθεί με συμβάσεις, όπως είναι η χρήση του συμβόλου της ισότητας. Ο μαθητής μέσα σε αυτό το περιβάλλον μπορεί να αναπτύξει τις δικές του στρατηγικές (Σιακαλλή και Γαγάτσης 2003).

Η αριθμητική ευθεία είναι ένα αναπαραστατικό εργαλείο για την περιγραφή των κλασματικών αριθμών και γενικότερα των ρητών αριθμών. Σύμφωνα με τους Chaffe-Stengel και Noddings (1982) (αναφορά από Κολέζα 2000) οι πράξεις των κλασμάτων απαιτούν μια διαφορετική αντίληψη σε σχέση με το μοντέλο *μέρους-όλου*. Τα κλάσματα είναι αριθμοί και πρέπει να διδάσκονται ως αριθμοί. Δηλαδή πρέπει να προηγείται το σχήμα του ρητού ως μέτρηση, πριν από τη διδασκαλία των πράξεων των κλασμάτων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2:



Σχήμα 2: Η αναπαράσταση των κλασμάτων ως αριθμοί πάνω στην αριθμητική ευθεία (από Κολέζα 2000)

Οι μαθητές πριν περάσουν στις πράξεις, είναι καλό να συμπληρώνουν την αντίληψή τους γύρω από τα κλάσματα μέσα από το «γέμισμα» της αριθμογραμμής (Κολέζα, 2000). Παράλληλες αριθμογραμμές μπορούν να λειτουργήσουν ως μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3:



Σχήμα 3: Η χρήση παράλληλων αριθμητικών ευθειών για την αναπαράσταση της έννοιας ισοδύναμων κλασμάτων (από Κολέζα 2000)

Η αριθμητική ευθεία ως μοντέλο αναπαράστασης κλασμάτων διαφέρει από τα άλλα μοντέλα (π.χ. σύνολα, επιφάνειες) σε πολλά σημεία σύμφωνα με τους Bright et al (1988) (αναφορά από Κολέζα 2000). Πιο συγκεκριμένα:

- Η μονάδα αναπαρίσταται από ένα μήκος και η αριθμητική ευθεία υποβάλλει την ιδέα όχι μόνο της επανάληψης της μονάδας, αλλά και της υποδιαίρεσης όλων των επαναλαμβανόμενων μονάδων. Δηλαδή η αριθμητική ευθεία έχει τη μορφή χάρακα.
- Στην αριθμητική ευθεία δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ (συνεχόμενων) μονάδων: το μοντέλο είναι συνεχές.
- Ένα σημείο στην αριθμητική ευθεία δεν έχει αριθμητικό νόημα μέχρι τη στιγμή που θα καθορισθεί το νόημα δύο άλλων τουλάχιστον σημείων αναφοράς.

Η αριθμητική ευθεία εκφράζει τους ρητούς αριθμούς ως μέτρο, δηλαδή ως απόσταση (Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003, Ni et al 2005). Η βασική εννοιολογική μεταφορά της αριθμητικής ευθείας είναι ότι οι ρητοί αριθμοί είναι σημεία στη γραμμή (Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003). Η αριθμογραμμή ως γεωμετρικό μοντέλο το οποίο αναπαριστά τους ρητούς αριθμούς, αναπαριστά και θεμελιώδεις ιδιότητές τους,

όπως είναι η πυκνότητα και το άπειρο των ρητών αριθμών (Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003, Ni 2001). Επειδή η μονάδα μέτρησης της αριθμογραμμής μπορεί να διαιρείται συνεχώς σε μικρότερες μονάδες, η αριθμογραμμή δίνει τη δυνατότητα αναπαράστασης ισοδύναμων κλασμάτων (Ni, 2001). Η διαδικασία εύρεσης ισοδύναμων κλασμάτων με μεγαλύτερους παρονομαστές επαναλαμβάνεται με σκοπό την παραγωγή περισσότερων κλασμάτων που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο αρχικά κλάσματα. Η αριθμητική ευθεία μπορεί να επιλύσει αυτό το πρόβλημα, αφού αναπαριστά το κλάσμα ανάμεσα σε δύο αρχικά κλάσματα. Επομένως, η αριθμογραμμή δεν είναι απλά ένα αναπαραστατικό μέσο κλασματικών αριθμών, αλλά συνδέει την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων καθώς και τα κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο άλλα (Herbst 1997, αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003). Ωστόσο, η αναγνώριση των ισοδύναμων κλασμάτων σε μια αριθμητική ευθεία προϋποθέτει την κατανόηση της ισοδυναμίας ενός πηλίκου, την κατανόηση της πυκνότητας και της διάταξης των ρητών αριθμών (Dufour-Janvier, Bednarz, Belanger, 1987). Η πυκνότητα των σημείων μιας γραμμής[10] αντιστοιχεί στην πυκνότητα των ρητών αριθμών. Επομένως, η σημασία της ευκλείδειας ευθείας στην κατασκευή των ρητών είναι σημαντική για την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Η ευθεία θεωρείται ως ένα συνεχές μοντέλο με τη βοήθεια του οποίου μπορεί να αναπαρασταθεί η πυκνότητα των ρητών αριθμών (Herbst 1997, αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003). Τα κλάσματα παρουσιάζονται ως μετρήσεις με διαφορετικές μονάδες. Η ευθεία των ρητών προκύπτει από την ευθεία των ακεραίων και η ευκλείδεια ευθεία επιτρέπει την τοποθέτηση των νέων σημείων τα οποία υποδηλώνουν διαφορετικούς ρητούς αριθμούς ανάλογα με τη μονάδα υποδιαίρεσης (Herbst 1997, αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003). Η αριθμητική ευθεία παριστάνει τους ρητούς ως αποστάσεις συγκεκριμένων σημείων από το μηδέν και επομένως δείχνει πώς διατάσσονται.

Η χρήση της αριθμητικής ευθείας ευνοεί την κατανόηση της έννοιας των αριθμών και στην ανάπτυξη της τυπικής λογικής σκέψης σε σχέση με τα κλάσματα (Keijzer & Terwel 2000,2001). Έρευνες που έγιναν, σε πειραματική ομάδα στα πλαίσια ενός πειραματικού αναλυτικού προγράμματος, οι οποίες επικεντρώνονταν στην χρήση αριθμητικής ευθείας για την κατανόηση εννοιών γύρω από τα κλάσματα, έδειξαν ποιοτικές διαφορές σε σύγκριση με τις επιδόσεις σε μια ομάδα ελέγχου (Keijzer &

[10] Αναφερόμαστε στη ρητή αριθμογραμμή.

Terwel 2000). Συγκεκριμένα, η πειραματική ομάδα έδειξε να υπερέχει στην κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων, στην εκτέλεση πράξεων με κλάσματα και γενικά στην τυπική γνώση των κλασμάτων. Μια άλλη έρευνα που αφορούσε τη μελέτη περίπτωσης μιας μαθήτριας (Keijzer & Terwel 2001) στα πλαίσια ενός νέου πειραματικού αναλυτικού προγράμματος το οποίο βασιζόταν στη χρήση της αριθμογραμμής για τα κλάσματα έδειξε ότι η αναπαράσταση αυτή εισήγαγε με φυσικό τρόπο τη μαθήτρια στην τυπική γνώση των κλασμάτων, αφού τη βοήθησε να κατανοήσει την ισοδυναμία κλασμάτων, να συγκρίνει κλάσματα και να εκτελεί πράξεις με αυτά.

Η έρευνα στη διδασκαλία των μαθηματικών προτείνει έξι συνιστώσες: Η διδασκαλία (α) να οικοδομεί πάνω στην προηγούμενη γνώση (κονστρουκτιβιστικό μοντέλο), (β) να επικεντρώνεται στα σημαντικά στοιχεία των αλγορίθμων, (γ) να παρέχει πλήρεις εξηγήσεις, (δ) να παρουσιάζει τις έννοιες διαδοχικά, (ε) να διαχωρίζει παρόμοια μαθηματικά σύμβολα για αποφυγή παρεξηγήσεων, και (στ) να προσφέρει ευκαιρίες για εξάσκηση. Οι Fueyo και Bushell (1998) μέσω εμπειρικών ερευνών διαπιστώνουν ότι η ενασχόληση μαθητών με την αριθμητική ευθεία προσφέρει την εφαρμογή των πέντε πρώτων συνιστωσών, ενώ η τελευταία επιτυγχάνεται, όταν εφαρμόζεται η διδασκαλία από συνομήλικους μαθητές (peer tutoring) (Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003).

Ωστόσο η αριθμητική γραμμή δεν είναι μια εύκολη αναπαράσταση. Όπως παρατηρεί η Ni (2000) τα έργα με την αριθμογραμμή αποτελούν αξιολογικό εργαλείο για τον εντοπισμό παρανοήσεων των μαθητών μάλλον, παρά μέσο για την αξιολόγηση της κατανόησης των ρητών αριθμών[11]. Αυτό οφείλεται στο ότι ενδεχομένως η αριθμητική ευθεία περιλαμβάνει παραπλανητικά στοιχεία για κάποιο μαθητή, ο οποίος έχει παρανοήσεις ή δεν έχει αναπτύξει πλήρως την έννοια των ρητών (αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003). Τις δυσκολίες της αριθμογραμμής συζητάμε στην επόμενη ενότητα.

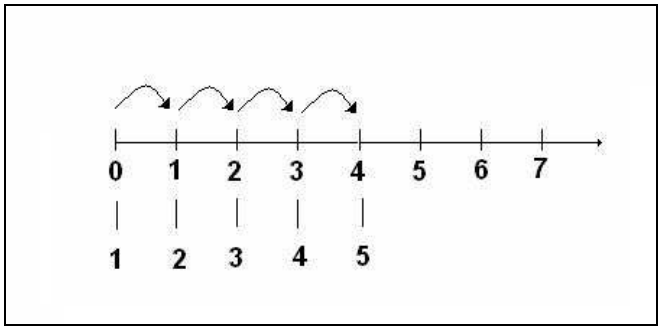
[11] Μπορεί δηλαδή οι μαθητές να αντιλαμβάνονται μερικώς ή πλήρως την έννοια των ρητών αριθμών, αλλά να μπερδεύονται με τις συμβάσεις που ισχύουν στην αριθμητική ευθεία.

2.8 Οι δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής ευθείας ως γεωμετρικό μοντέλο

Οι βασικές συμβάσεις που ισχύουν στην αριθμογραμμή (Fischbein, 1977) είναι οι εξής: (α) ένα βήμα προς τα δεξιά αντιστοιχεί στον ακέραιο +1, (β) ένα βήμα προς τα αριστερά αντιστοιχεί στον ακέραιο -1, (γ) καμία κίνηση αντιστοιχεί στον αριθμό 0. Δύο διαδοχικές κινήσεις αντιστοιχούν στην πράξη της πρόσθεσης.

Το αποτέλεσμα οποιασδήποτε πρόσθεσης μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Οι ιδιότητες της ομάδας των ακεραίων αριθμών, με την πρόσθεση ως εσωτερική πράξη, λειτουργεί με αυτόν τον φυσικό και σαφή τρόπο. Ωστόσο, το μοντέλο της αριθμητικής ευθείας έχει τους περιορισμούς του (Fischbein 1977). Είναι εύκολο να αναπαρασταθεί ο ρητός 1/2 κάνοντας μισό βηματισμό. Δεν είναι όμως το ίδιο εύκολο να αναπαρασταθούν με κινήσεις πιο πολύπλοκοι ρητοί αριθμοί και ακόμη δυσκολότερο είναι να αναπαρασταθούν με κινήσεις άρρητοι αριθμοί (Fischbein 1977). Σε αυτές τις περιπτώσεις η αναπαράσταση αυτών των αριθμών γίνεται με σημεία αντί για κινήσεις. Τα σημεία, όμως, δεν μπορούν να αναπαραστήσουν πράξεις. Επομένως στο πεδίο αναπαράστασης των πράξεων χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα δύο τρόποι: σημεία και κινήσεις. Το μοντέλο αυτό γίνεται μη συνεπές και προδίδει την αυστηρή εσωτερική συνέπεια των ίδιων των μαθηματικών (Fischbein 1977). Η αναπαράσταση της πρόσθεσης των ακεραίων με κινήσεις μπορεί παρόμοια να επεκταθεί στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού με έναν μη συνεπή τρόπο. Για παράδειγμα, η πράξη 3x4 αναπαρίσταται με τρεις ομάδες τεσσάρων κινήσεων προς την ίδια κατεύθυνση. Όμως σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι το «4» αναπαρίσταται με κινήσεις, ενώ το «3» αντιστοιχεί στο πλήθος των όμοιων κινήσεων. Επομένως, αυτή η διαισθητική αναπαράσταση πραγματοποιείται με έναν μη συνεπή τρόπο αναφορικά με την έννοια του αριθμού. Έστω για παράδειγμα το γινόμενο (+4)x(-3). Σύμφωνα με τις προηγούμενες συμβάσεις έχουμε τέσσερις σειρές από τρεις κινήσεις προς τα αριστερά. Το γινόμενο (-4)x(-3) απαιτεί μια νέα σύμβαση. Εφόσον το «4» δηλώνει την επανάληψη μια πράξης τέσσερις φορές, το «-4» απαιτεί μια νέα ερμηνεία. Το «-4» δηλώνει τέσσερις σειρές κινήσεων προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτό που δηλώνει η παράσταση «(+4)x(-3)». Η νέα σύμβαση περιπλέκει το μοντέλο και ουσιαστικά το καθιστά πιο τεχνικό (Fischbein 1977). Παρατηρείται επομένως, αν ληφθεί υπόψη η θεωρία του Duval (2006), ένα είδος μη συγκλίνουσας μετατροπής από το συμβολικό πεδίο στο πεδίο της αριθμογραμμής όσον αφορά το πεδίο των πράξεων.

Η English (1993) θεωρεί ότι η αριθμογραμμή είναι μια δύσκολη αναπαράσταση εξαιτίας του μεγάλου επιπέδου αφαίρεσης που απαιτεί. Επειδή αποτελεί ένα συνεχές μοντέλο και όχι διακριτό, προτείνει ότι η χρήση της θα πρέπει να αποφεύγεται σε παιδιά μικρής ηλικίας, όταν αναπτύσσουν τις πρώτες αριθμητικές τους γνώσεις. Αυτή η αναπαράσταση δεν επιδεικνύει σαφήνεια στη δομή της, ούτε αποσαφηνίζονται οι διάφορες αντιστοιχίες ανάμεσα στους αριθμούς και στην ευθεία. Αυτό συμβαίνει, διότι το πλήθος των διαβαθμίσεων στην αριθμογραμμή δεν ανταποκρίνεται στο αντίστοιχο αριθμητικό. Για παράδειγμα, μολονότι ένα παιδί μπορεί να διδαχθεί ώστε να εκτελεί τέσσερα άλματα, για να φτάσει στο αριθμητικό «4», στην πραγματικότητα όμως υπάρχουν πέντε κόμβοι (διαβαθμίσεις), για να φτάσει στο «4», όπως φαίνεται και στο σχήμα 1:



Σχήμα 1: Τέσσερα άλματα, αλλά πέντε κόμβοι (από English, 1993)

Ο αριθμός των κόμβων είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό των αλμάτων.
Μια παρόμοια άποψη εκφράζουν οι Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987). Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες, τα παιδιά τείνουν να θεωρούν την αριθμογραμμή σαν μια σειρά από πέτρες που πρέπει να βαδίσει κάποιος. Το κενό ανάμεσα στις πέτρες ίσως να εξηγεί τη λανθασμένη αντίληψη η οποία παρατηρείται ανάμεσα στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ότι ανάμεσα σε δύο ακέραιους αριθμούς δεν υπάρχει άλλος αριθμός ή ότι υπάρχει το πολύ ένας.

Η English (1993) επίσης τονίζει το πρόβλημα αναπαράστασης των πράξεων στην αριθμογραμμή. Για παράδειγμα, αφού η αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού είναι δύσκολο να περιγραφεί με τρόπο διαφορετικό από αυτόν της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, υπάρχει ο κίνδυνος οι μαθητές να ερμηνεύουν αυτήν την πράξη μονοδιάστατα ως τη διαδικασία επαναλαμβανόμενων αλμάτων στην αριθμογραμμή.

Η αριθμογραμμή δεν προάγει την κατανόηση των άλλων πράξεων, όπως είναι για παράδειγμα η αφαίρεση (English 1993). Πράγματι, η έννοια της αφαίρεσης ως

«αποκοπή» (take away) όπως την προσεγγίζουν αρχικά οι μαθητές, δεν είναι εύκολο να αναπαρασταθεί στην αριθμογραμμή.

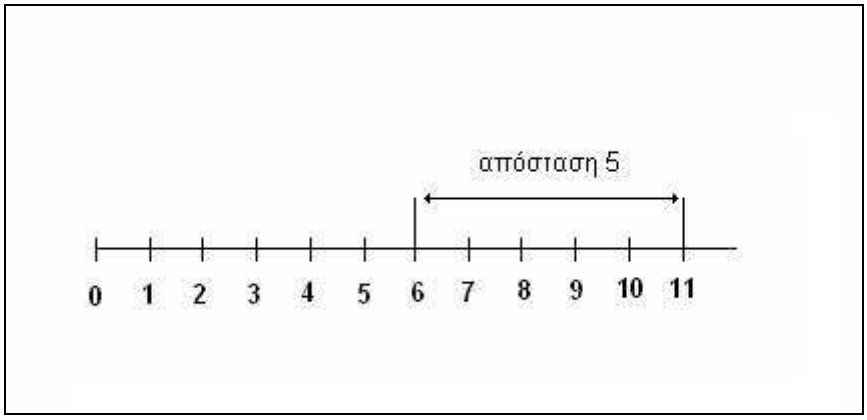
Αρκετές έρευνες έχουν εντοπίσει δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη χρήση της αριθμογραμμής. Η Hart (1981) (αναφορά από Ernest, 1985) υποστηρίζει ότι το μοντέλο της αριθμητικής ευθείας για την αναπαράσταση της αφαίρεσης ακεραίων αριθμών πρέπει να εγκαταλειφθεί. Ο Liebeck (1984) (αναφορά από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003) ισχυρίζεται ότι η αριθμογραμμή δεν είναι ένα χρήσιμο οπτικό μέσο που βοηθά τους μαθητές μικρής ηλικίας να προσθέτουν και να αφαιρούν ακέραιους αριθμούς. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της δεύτερης Εθνικής Αξιολόγησης της εκπαιδευτικής Προόδου στα Μαθηματικά (NAEP) (αναφορά από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003) μόνο το ένα τέταρτο των εννιάχρονων και το μισό των δεκατριάχρονων μαθητών που εξετάστηκαν ήταν σε θέση να απαντήσουν σωστά σε ένα έργο πρόσθεσης με τη χρήση της αριθμητικής ευθείας. Αντίθετα, η επίδοσή τους ήταν πολύ καλύτερη στα υπόλοιπα έργα πρόσθεσης ακεραίων αριθμών που δεν περιελάμβαναν την αριθμογραμμή. Ο Ernest (1985) υποθέτει ότι πολλοί μαθητές μπορεί να μην αντιλαμβάνονται το μοντέλο της πρόσθεσης στην αριθμητική ευθεία, ακόμη και αν κατανοούν σε ικανοποιητικό βαθμό την έννοια της πρόσθεσης ακέραιων αριθμών. Πράγματι, τα έργα πρόσθεσης με τη χρήση της αριθμογραμμής εκτός από την κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης εξετάζουν και την ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα σε μαθηματικές προτάσεις πρόσθεσης και σε αναπαραστάσεις της αριθμογραμμής. Επομένως, η αποτυχία σε έργα της αριθμογραμμής μπορεί να σημαίνει (α) έλλειψη κατανόησης της πρόσθεσης ακεραίων, (β) έλλειψη κατανόησης της έννοιας του μοντέλου της αριθμητικής ευθείας ή (γ) και τα δύο (Ernest 1985).

Όπως ήδη αναφέραμε, οι Dufour-Janvier et al (1987) θεωρούν πως μια δυσκολία στη χρήση της αριθμογραμμής είναι ίσως ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αριθμητική ευθεία ως μια διαδικασία αλμάτων ανάμεσα σε διαδοχικές πέτρες. Μια δεύτερη παρανόηση ίσως να οφείλεται στο ότι οι μαθητές μπορεί να αντιλαμβάνονται τους αριθμούς σε μια ευθεία ως πινακίδες τοποθετημένες κατά μήκος ενός δρόμου, χωρίς να θεωρούν αναγκαία την τοποθέτηση των ακέραιων μονάδων σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Η αντίληψη αυτή είναι διαφορετική από την έννοια της μέτρησης στο μοντέλο της αριθμογραμμής. Μια τρίτη δυσκολία που προκύπτει στην αριθμητική ευθεία είναι η χρήση των βελών (Dufour-Janvier et al 1987). Ο γραφικός αυτός κώδικας μπορεί να έχει διάφορες ερμηνείες: μετασχηματισμό, δείκτη, σχέση

αιτίας-αποτελέσματος. Τα παιδιά μπορεί να αντιλαμβάνονται το βέλος ως δείκτη ή γραμμή με τα δύο άκρα να δηλώνουν δύο καταστάσεις ή δύο θέσεις.

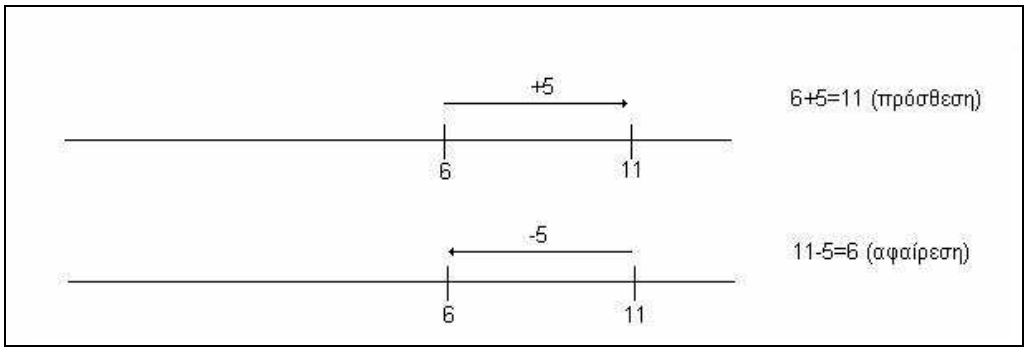
Η χρήση της αριθμητικής ευθείας προκαλεί σύγχυση στους μαθητές σύμφωνα με τα αποτελέσματα της δεύτερης Εθνικής Αξιολόγησης της εκπαιδευτικής Προόδου στα Μαθηματικά (Φιλίππου & Χρίστου 2004). Έρευνες της ψυχολογίας έχουν δείξει ότι μπορεί να γίνει διάκριση ανάμεσα στο *διατακτικό αριθμό*, που έχει σχέση με τη θέση του αριθμού στην αριθμητική ακολουθία και τον *πληθικό αριθμό*, που έχει σχέση με το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου (Σιακαλλη & Γαγάτσης 2003). Έστω ότι προτείνονται δύο αριθμοί, για παράδειγμα το 5 και το 7 και ζητείται να βρεθεί το άθροισμά τους. Αυτό το άθροισμα δεν προκύπτει από τη διατακτική φύση του αριθμού, αλλά από την πληθική του φύση. Αυτό το γεγονός ενδεχομένως να δημιουργεί επιπρόσθετες δυσκολίες στη χρήση της αριθμογραμμής από τα παιδιά.

Σύμφωνα με τους Γαγάτση και Παναούρα (2000) (αναφορά από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003) σε έργα αριθμητικής γραμμής παρεμβαίνουν τουλάχιστον τρεις διαφορετικές αντιλήψεις: (α) η *στατική αντίληψη* των αριθμών-*φωτογραφική*, (β) η *χαρτογραφική αντίληψη* των αριθμών και (γ) η *δυναμική αντίληψη*. Σύμφωνα με τη στατική αντίληψη σε ένα σημείο αντιστοιχεί ένα ακέραιος (αναφερόμαστε στην ακέραια αριθμογραμμή, δηλαδή στην αριθμογραμμή που σημειώνονται μόνο ακέραιοι αριθμοί). Με βάση τη χαρτογραφική αντίληψη, όταν δοθούν σημεία, η απόσταση ανάμεσα σε αυτά τα αριθμημένα σημεία παραπέμπει σε έναν ευκλείδειο χώρο μοναδιαίας διάστασης, που είναι οικείος στα παιδιά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2:



Σχήμα 2: Χαρτογραφική αντίληψη (από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003)

Σύμφωνα με τη δυναμική αντίληψη, όταν δοθούν δύο σημεία, μπορεί να εξεταστούν δύο τελεστές που αλλάζουν τη φορά και παραπέμπουν σε ένα διανυσματικό χώρο ή σε ένα μετασχηματισμό. Ένας τελεστής οδηγεί στην πρόσθεση και ο άλλος στην αφαίρεση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4:



Σχήμα 3: Δυναμική αντίληψη (από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003)

Η συνύπαρξη και των τριών αντιλήψεων αποτελεί πηγή επιστημολογικών εμποδίων (Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003).

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν μια πιο δύσκολη έννοια. Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το κλάσμα ως αριθμό και τείνουν να το χειρίζονται ως δύο διαφορετικούς ακέραιους αριθμούς[12] (Hart 1981, Kernslake 1986) (αναφορά από Μιχαηλίδου & Γαγάτσης 2003).

Οι μαθητές συχνά αποδίδουν ιδιότητες των πράξεων των ακεραίων στις πράξεις των ρητών (Ni et al 2005). Η αναγνώριση και ο χειρισμός των διαφόρων ερμηνειών και αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών, δηλαδή η σύγκριση του μέρους-όλου, ο λόγος, ο τελεστής, το πηλίκο, το μέτρο αποτελεί μια ακόμα πηγή δυσκολιών για τους μαθητές (Ni et al 2005).

Μια βασική διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική ευθεία και σε άλλες αναπαραστάσεις των κλασμάτων είναι ότι απαιτείται η χρήση συμβολισμών, για να γίνει κατανοητή η έννοια του κλάσματος. Αυτό σημαίνει ότι η αριθμητική ευθεία απαιτεί το συνδυασμό δύο μορφών αναπαράστασης: της οπτικής και της συμβολικής (Bright, Behr, Post & Wackesmuth 1988). Η δυσκολία χρήσης της αριθμογραμμής οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο συνδυασμό της πληροφορίας που περιέχεται σε αυτές τις δύο μορφές αναπαράστασης (Κολέζα 2000).

[12] Δηλαδή οι μαθητές δεν κατανοούν ότι το κλάσμα ουσιαστικά αναφέρεται στη σχέση του αριθμητή με τον παρονομαστή οι οποίοι δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Με απλά λόγια, για παράδειγμα μπορεί να μην αντιλαμβάνονται την ισοδυναμία 2/3=4/6. Κατ' επέκταση αυτή η δυσκολία κατανόησης της ισοδυναμίας μπορεί να δυσχεράνει την κατανόηση του κλάσματος ως έναν αριθμό.

Διάφορες έρευνες έχουν εντοπίσει δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αναφορικά με τη χρήση της αριθμητικής ευθείας ως μοντέλου για την κατανόηση των ρητών αριθμών. Οι Behr et al (1983) (αναφορά από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003) αναφέρουν τρία είδη δυσκολιών: (α) η επίδοση των μαθητών ήταν διαφορετική σε σχέση με την αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική ευθεία, (β) προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική ευθεία δεν ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος είναι δυσκολότερα σε σχέση με προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική ευθεία ισούνται με τον παρονομαστή του κλάσματος και (γ) προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις δεν είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος είναι δυσκολότερα από προβλήματα στα οποία οι υποδιαιρέσεις είναι παράγοντες ή πολλαπλάσια του παρονομαστή του κλάσματος.

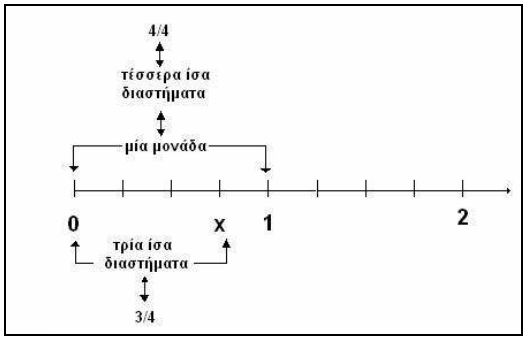
Οι Behr & Bright (1984) και Παντσίδης (2006), σε έρευνές τους που αφορούσαν τη μάθηση κλασμάτων με τη βοήθεια της αριθμογραμμής διαπίστωσαν ότι οι μαθητές αντιμετώπιζαν σοβαρές δυσκολίες στην αναπαράσταση κλασμάτων. Οι δυσκολίες αυτές αφορούσαν την ικανότητα υποδιαίρεσης της αριθμογραμμής και τη μετάφραση ανάμεσα στη συμβολική και εικονική αναπαράσταση των πληροφοριών της αριθμογραμμής.

Η έρευνα της Michaelidou (2003) (αναφορά από Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003) εξέταζε την επίδοση των μαθητών σε έργα μετάφρασης που αφορούσαν εννοιολογική γνώση, δηλαδή σε έργα αναπαράστασης του κλάσματος ως μέρους-όλου, μέτρου, τελεστή, πηλίκου και λόγου, καθώς επίσης και σε έργα που αφορούσαν διαδικαστική γνώση, δηλαδή πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση. Τα έργα τα οποία περιελάμβαναν εικονικές αναπαραστάσεις συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας, ενώ τα έργα μετάφρασης από τη λεκτική στη συμβολική και αντίστροφα συγκέντρωσαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας.

Τα αποτελέσματα δείχνουν τις αδυναμίες τόσο σε επίπεδο εννοιολογικής όσο και διαδικαστικής γνώσης εφόσον η ικανότητα μετάφρασης είναι δείκτης κατανόησης μιας έννοιας (Lesh, Post, Behr 1987). Τα έργα τα οποία εξέταζαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση με τη χρήση της αριθμητικής γραμμής συγκέντρωσαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Πιο συγκεκριμένα τα αποτελέσματα φανερώνουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν την αριθμητική ευθεία, για να εκφράσουν την έννοια του κλάσματος και για να εκτελέσουν πράξεις. Οι δυσκολίες αφορούσαν τον εντοπισμό της μονάδας αναφοράς στην αριθμητική

ευθεία και την αντιστοιχία του σημείου της αριθμογραμμής με το σωστό κλάσμα (Σιακαλλή & Γαγάτσης 2003).

Μια επιπλέον δυσκολία αφορά το μήκος που αναπαριστά τη μονάδα (Bright et al, 1988) (αναφορά από English, 1993). Επιπλέον το μοντέλο της αριθμογραμμής είναι συνεχές, ώστε να μην υπάρχει ένας οπτικός διαχωρισμός ανάμεσα στις διαδοχικές μονάδες. Η αριθμογραμμή σε αυτό το ζήτημα έρχεται σε αντίθεση με άλλες αναπαραστάσεις που προβάλλουν τη διακριτότητα ενός συνόλου. Μια πιθανή συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι οι μαθητές μετρούν τα σημεία αντί για τα διαστήματα προκειμένου να προσδιορίσουν ένα δεδομένο κλάσμα. Για παράδειγμα, στο σχήμα 5 είναι πιθανό να αναγνωρίσουν στη θέση του x το κλάσμα 4/5 και όχι το κλάσμα 3/4.



Σχήμα 5: Ο προσδιορισμός του x ως 4/5 αντί για 3/4 (από English, 1993)

Τέλος, ένα λάθος το οποίο πράττουν συχνά οι μαθητές είναι ότι χρησιμοποιούν την αριθμητική ευθεία ως τη μονάδα αντί να χρησιμοποιούν ως μονάδα το μήκος από το μηδέν ως το ένα[13] (Ni et al 2005). Η πηγή της δυσκολίας εντοπίζεται εν μέρει στην ταύτιση της έννοιας του ρητού με την υποέννοιά του ως μέρος-όλο. Η χρήση των ρητών σε έργα με εμβαδά που συνδυάζουν την υποέννοια του ρητού ως μέρος-όλο οδηγεί συχνά τους μαθητές σε παρανοήσεις, αφού πιστεύουν ότι ο αριθμητής με τον παρονομαστή ενός κλάσματος είναι δύο ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι δεν συνδέονται με κάποια σχέση και αναπαριστούν δύο διαφορετικές μετρήσεις. Η κυριότερη δυσκολία που έχουν οι μαθητές στην αναγνώριση της μονάδας στην αριθμητική ευθεία οφείλεται στην αρνητική επίδραση που έχει η στρατηγική της διπλής μέτρησης την οποία έχουν αναπτύξει οι μαθητές σε σχέση με τα κλάσματα.

[13] Εδώ αναφερόμαστε για παράδειγμα στην περίπτωση όπου έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα αριθμημένο από το μηδέν έως το δύο. Όταν ζητάμε από τους μαθητές να τοποθετήσουν τον αριθμό 1/2 στην κατάλληλη θέση τότε αυτοί θεωρώντας ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα ως τη μονάδα τοποθετούν λανθασμένα το κλάσμα 1/2 στη θέση της μονάδας.

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις λειτουργίες της αριθμογραμμής εξαιτίας των πολύπλοκων συμβάσεων η οποία αυτή φέρει. Ωστόσο στην περίπτωση των ρητών, πέρα από τις δυσκολίες που φέρουν οι συμβάσεις στην αριθμογραμμή των ρητών, πρέπει να λάβουμε υπόψη την πολυπλοκότητα της δομής αυτού του συνόλου. Όπως είδαμε παραπάνω (ενότητα 1.1), τα αρχικά επεξηγηματικά των φυσικών αριθμών επηρεάζουν τις απόψεις των μαθητών σχετικά με τη δομή του συνόλου των ρητών αριθμών. Οι μαθητές δημιουργούν συνθετικά μοντέλα τα οποία ενδεχομένως να «αντανακλώνται» σε έργα της αριθμογραμμής (βλ. και Ni 2000).

2.9 Η ευθεία και η αριθμητική ευθεία στα βιβλία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Η αριθμητική ευθεία σύμφωνα με τον Ernest (1985) επιτελεί τρεις διαφορετικές λειτουργίες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης: (α) ως μοντέλο για τη διδασκαλία της διάταξης των αριθμών, (β) ως μοντέλο για την εκτέλεση των τεσσάρων βασικών πράξεων και (γ) ως εργαλείο που συνδέεται ευθέως με έννοιες που προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα, όπως είναι η μέτρηση ή η χρήση της στην αναλυτική γεωμετρία, όπου εκεί συναντούμε το καρτεσιανό σύστημα αξόνων το οποίο αποτελεί ένα σύστημα αριθμογραμμών κ.τ.λ. Παρακάτω θα αναλύσουμε τη χρήση της αριθμητικής ευθείας, όπως επίσης και τον τρόπο που παρουσιάζεται η ευθεία γεωμετρικά στα σχολικά βιβλία της Δ/θμιας Εκπαίδευσης στον ελλαδικό χώρο (περίοδος 2007-2008):

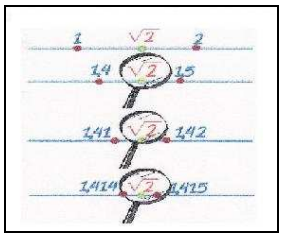
Α΄ Γυμνασίου	**Μέρος Α΄: Αριθμητική-Άλγεβρα**
Σελ:	**Λειτουργία**
12	Διάταξη φυσικών αριθμών
42-43	Τοποθέτηση κλασματικών αριθμών (διάστημα από 0 έως 1 και από 0 έως 2). Άσκηση 8 σελ. 43 με παρόμοιο χαρακτήρα.
88	Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Παράσταση σημείων στο επίπεδο- Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους.
99-103	Ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων. Αναπαράσταση αναλόγων ποσών (χρήση φυσικών και ρητών δεκαδικών αριθμών).
108	Ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων για την αναπαράσταση ποσών αντιστρόφως ανάλογα (φυσικοί αριθμοί).
109	Ορθογώνιο σύστημα αξόνων για την εύρεση τύπου συνάρτησης που αντιστοιχεί σε ευθεία ή υπερβολή.
116-117	Παράσταση των ρητών αριθμών στην αριθμητική ευθεία.
118-120	Διάταξη των ρητών αριθμών με τη χρήση της αριθμογραμμής. Εισαγωγή στην έννοια της απολύτου τιμής, ορισμός ετεροσήμων, αντίθετων αριθμών. Γραφική επίλυση εξισώσεων με επόλυτα με τη χρήση της αριθμητικής ευθείας π.χ. $\lvert\alpha\rvert = 2$.
124-127	Πρόσθεση-αφαίρεση ρητών αριθμών σε κατακόρυφη αριθμητική ευθεία (υπό μορφή θερμομέτρου) με χρήση διανυσμάτων.
	Μέρος Β΄: Γεωμετρία
148-152	Εισαγωγή στην έννοια του σημείου, ευθύγραμμου τμήματος, ευθείας κ.τ.λ. Σχέσεις ανάμεσά τους π.χ. δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία.

Πίνακας 1: Η ευθεία αριθμητική και γεωμετρική στην Α΄ Γυμνασίου.

Β΄ Γυμνασίου	**Μέρος Α΄:Άλγεβρα**
Σελ	**Λειτουργία**
34-36	Γραφική αναπαράσταση των λύσεων μιας ανίσωσης.
45-48	Η αναπαράσταση των άρρητων και πραγματικών αριθμών στην αριθμητική ευθεία. Στη σελ. 45 γίνεται χρήση ενός νοητού μεγεθυντικού φακού για τον προσδιορισμό με μεγαλύτερη ακρίβεια του αριθμού $\sqrt{2}$ [14]. Στη σελ. 46 δηλώνεται η 1-1 και επί αντιστοιχία των σημείων μιας ευθείας με το σύνολο των πραγματικών αριθμών (Άξονας των πραγματικών αριθμών). Στη σελ. 48 προσδιορίζεται η θέση του $\sqrt{2}$ πάνω στον πραγματικό άξονα με τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
58-82	Χρήση Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων για τη γραφική παράσταση διαφόρων συναρτήσεων (έννοιες που εμπλέκονται είναι το διατεταγμένο ζεύγος, παράλληλες ευθείες, συμμετρία).
69-108	Χρήση κατακόρυφης αριθμητικής ευθείας σε ραβδογράμματα.

Πίνακας 2: Η ευθεία αριθμητική και γεωμετρική στη Β΄ Γυμνασίου.

[14] Από το βιβλίο: *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, Ρεκούμης (2007) εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.



Γ΄ Γυμνασίου	**Α΄ Μέρος: Άλγεβρα**
Σελ:	**Λειτουργία**
12	Η αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών στο άξονα.
110	Η διάταξη των πραγματικών αριθμών με τη βοήθεια του άξονα (επαναληπτικού χαρακτήρα)
123-132	Καρτεσιανό Σύστημα συντεταγμένων για τη γραφική παράσταση γραμμικών εξισώσεων. Γραφική επίλυση γραμμικών συστημάτων (βασική έννοια το διατεταγμένο ζεύγος)
144-156	Γραφική παράσταση βασικών συναρτήσεων (λειτουργία όμοια με την αντίστοιχη στη Β΄ Γυμνασίου).
	Β΄ Μέρος: Γεωμετρία-Τριγωνομετρία
Σελ:	**Λειτουργία**
232-243	Εισαγωγή τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω ($0^o \leq \omega \leq 180^o$) με τη χρήση καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (σχέσεις παραπληρωματικων γωνιών, βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες).

Πίνακας 3: Η ευθεία αριθμητική και γεωμετρική στη Γ΄ Γυμνασίου.

ΛΥΚΕΙΟ	
Α΄ Λυκείου	**Άλγεβρα**
Σελ:	**Λειτουργία**
38-41	Η γραφική επίλυση ανισώσεων της μορφής $\lvert x\rvert > \theta$ ή $\lvert x\rvert < \theta, \theta > 0$ με παραδείγματα χρησιμοποιώντας τον άξονα. Η ταύτιση της απόστασης δυο αριθμών α και β με τον τύπο $\lvert \alpha - \beta \rvert$.
159-160	Χρήση καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων για την εύρεση των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ω∈**R**. Οι ευθείες της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης.
	Γεωμετρία Ά Λυκείου
Σελ:	**Λειτουργία**
9-10	Σχέσεις σημείων με ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα κ.τ.λ. Δηλώνεται ότι το σημείο δεν έχει διαστάσεις, η ευθεία έχει άπειρα σημεία και μπορεί να εκτείνεται απεριόριστα χωρίς κενά.
Β΄ Λυκείου	**Β΄ Λυκείου Μαθηματικά Κατεύθυνσης**
Σελ:	**Λειτουργία**
34	Εύρεση μέτρου και συντεταγμένων διανύσματος σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων.
Γ΄ Λυκείου	**Γ΄ Λυκείου Μαθηματικά Κατεύθυνσης**
Σελ:	**Λειτουργία**
57	Η παράσταση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο.

Πίνακας 3: Η ευθεία αριθμητική και γεωμετρική στο Λύκειο.

Η αριθμητική ευθεία ως αναπαραστατικό εργαλείο εξυπηρετεί τις τρεις λειτουργίες, όπως τις διατυπώνει ο Ernest (1985), δηλαδή τη διάταξη των αριθμών,

τις πράξεις και τη χρήση της ως εργαλείο για την εισαγωγή νέων εννοιών. Ειδικότερα στην έννοια του αριθμού, η αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για την επέκταση ενός συστήματος αριθμών σε ένα ευρύτερο (βλ. Bruno & Cabrera 2006). Έτσι, στα σχολικά βιβλία παρατηρήσαμε την χρήση αριθμογραμμής κατά το εξής σχήμα: Φυσικοί αριθμοί → Ρητοί αριθμοί → Πραγματικοί Αριθμοί → Μιγαδικοί αριθμοί. Να τονίσουμε, ωστόσο, ότι η αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών γίνεται από ένα σύστημα αριθμογραμμών για την ακρίβεια με τη χρήση του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Η χρήση της αριθμογραμμής στις πράξεις παρατηρήθηκε μόνο δύο φορές, άθροισμα και διαφορά ρητών αριθμών, δεδομένου ότι δίνεται έμφαση στον αλγοριθμικό χαρακτήρα των πράξεων.

Αντίθετα, έγινε ευρέως η χρήση της αριθμογραμμής για την εισαγωγή νέων εννοιών. Εκτός από την επέκταση ενός συστήματος αριθμών σε ένα ευρύτερο, χρησιμοποιείται ακόμη και για την εισαγωγή άλλων εννοιών, όπως το διατεταγμένο ζεύγος, η γραφική παράσταση συναρτήσεων, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κ.λ.π.

Στο χώρο της γεωμετρίας, η συνολοθεωρητική σχέση των σημείων με το ευθύγραμμο τμήμα, με την ευθεία κ.λ.π. διατυπώνεται έμμεσα και με διαισθητικό τρόπο, όπως π.χ. στην περίπτωση της Α΄ Γυμνασίου ότι «δύο διαφορετικές και μη παράλληλες ευθείες τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο». Αντίθετα στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου, γίνεται ρητή αναφορά ότι κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία. Ωστόσο δεν ξεκαθαρίζεται αν μια ευθεία αποτελείται μόνο από σημεία. Θα δούμε στην έρευνα παρακάτω ότι ενδεχομένως πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται μια ευθεία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα ως σύνολα από σημεία. Τέλος δεν γίνεται καμία αναφορά στην πυκνότητα των σημείων μιας ευθείας ή στην πυκνότητα του συνόλου των ρητών και πραγματικών αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Η ΕΡΕΥΝΑ

Η έννοια των ρητών αποτελεί μια δύσκολη έννοια για τους μαθητές. Οι δυσκολίες μπορούν να αποδοθούν σε δύο βασικά σημεία: (α) οι μαθητές αποδίδουν στο σύνολο των ρητών αριθμών ιδιότητες που ισχύουν μόνο στο σύνολο των φυσικών αριθμών και (β) είναι δύσκολη η χρήση και ερμηνεία των συμβολισμών που χρησιμοποιούνται στους ρητούς αριθμούς (Moss 2005, Ni & Zhou 2005). Οι Vamvakoussi & Vosniadou (2004, 2007), με τις έρευνες τους, έχουν δείξει ότι ο συνδυασμός των παραπάνω δυσκολιών, αντανακλά στην κατανόηση της δομής των ρητών αριθμών από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, οι δυσκολίες εντοπίζονται στα εξής σημεία: (α) Στην ιδέα ότι οι αριθμοί έχουν διακριτή δομή, η οποία θεμελιώνεται από την αρχική θεώρηση του αριθμού ως εργαλείο απαρίθμησης και (β) στην τάση των μαθητών να θεωρούν πως διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών αντιστοιχούν σε διαφορετικά είδη αριθμών τα οποία απαρτίζουν ξένα σύνολα μεταξύ τους (π.χ. ακέραιοι, δεκαδικοί κλάσματα). Αυτή η άποψη συμβάλει σε μια «αποσπασματική» θεώρηση του συνόλου των ρητών αριθμών.

Η αριθμητική ευθεία είναι μια αναπαράσταση η οποία προβάλλοντας το συνεχές των πραγματικών αριθμών μπορεί εν δυνάμει να βοηθήσει τους μαθητές να υπερβούν την ιδέα της διακριτότητας των αριθμών. Επιπλέον, η αριθμητική ευθεία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις όπως 0,5 και ½ μπορούν να αντιστοιχούν στον ίδιο ρητό αριθμό αφού αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της αριθμητικής ευθείας (Kilpatrick et al 2001). Επίσης στη βιβλιογραφία αναφέρεται ότι οι ειδικοί στα μαθηματικά χρησιμοποιούν την αριθμητική ευθεία ως ενδεδειγμένο μοντέλο όταν αναφέρονται στην πυκνότητα των πραγματικών αριθμών (Merenluoto & Palonen 2007).

Όμως η αριθμητική ευθεία είναι μια εξαιρετικά αφηρημένη αναπαράσταση. Έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης έδειξε ότι είναι δύσκολο στους μαθητές η χρήση και η κατανόησή της (English 1993, Ni 2001), ακόμα και αν αναπτύσσεται μεθοδευμένα η χρήση και η ερμηνεία της κατά τη διδασκαλία (Merenluoto 2003). Ο Fischbein (1977) θεωρεί ότι η κύρια δυσκολία στην κατανόηση της αριθμητικής ευθείας οφείλεται στο μεγάλο πλήθος τεχνητών συμβάσεων (βλ ενότητα 2.8). Επιπλέον, οι λανθασμένες αντιλήψεις πάνω στο μοντέλο της αριθμητικής ευθείας ενδεχομένως να προκαλούν παρανοήσεις στις ιδέες των μαθητών. Για παράδειγμα, οι Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger (1987) θεωρούν

πως οι μαθητές τείνουν να θεωρούν την αριθμητική ευθεία ως μια σειρά από πέτρες. Οι ίδιοι ερευνητές εικάζουν πως το κενό ανάμεσα στις πέτρες ίσως να εξηγεί γιατί οι μαθητές έχουν μια αντίληψη υπέρ της διακριτότητας.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, θέσαμε τα εξής ερωτήματα-άξονες στην έρευνά μας:

(α) Έχει η παρουσία και η σειρά παρουσίασης της αριθμητικής ευθείας επίδραση στις σκέψεις των μαθητών αναφορικά με το πλήθος των αριθμών ανάμεσα σε δύο δοσμένους αριθμούς;

Πιο συγκεκριμένα διερευνήσαμε αν η επίδοση των μαθητών διαφοροποιείται όταν οι δοσμένοι αριθμοί εμφανίζονται πάνω στην ευθεία, σε σχέση με την περίπτωση που δεν παρουσιάζεται η ευθεία. Επιπλέον, διερευνήσαμε αν η επίδοση των μαθητών διαφοροποιείται όταν εκτίθενται εξαρχής στην αναπαράσταση της ευθείας, σε σχέση με την περίπτωση που τους ζητείται αρχικά να απαντήσουν χωρίς την παρουσία της ευθείας.

(β) Η ιδέα της απειρίας είναι πιο εύκολα προσβάσιμη για τους μαθητές σε γεωμετρικό (άπειρο πλήθος σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα) ή σε αριθμητικό περιβάλλον (άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσα σε δύο αριθμούς);

(γ) Σε ποιο βαθμό οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αναλογία «οι αριθμοί είναι σημεία της αριθμητικής ευθείας»;

Υποθέσαμε ότι η προϋπόθεση της διακριτότητας είναι και παραμένει ισχυρή, τόσο σε αριθμητικό, όσο και σε γεωμετρικό πλαίσιο, σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου. Ωστόσο, αναμέναμε καλύτερες επιδόσεις στα μεγαλύτερα παιδιά. Σχετικά με την επίδραση της ευθείας, αναμέναμε ότι θα ήταν περιορισμένη, βασισμένοι στην έρευνα των Vamvakoussi & Vosniadou (2007), τα αποτελέσματα της οποίας έδειξαν ότι η παρουσία της ευθείας βελτίωσε την επίδοση μόνο των μικρότερων παιδιών (Γ΄ Γυμνασίου), ενώ η σειρά παρουσίασης της ευθείας δεν είχε καμία επίδραση στην επίδοση.

Υποθέσαμε, ωστόσο, ότι τόσο οι μαθητές του Γυμνασίου, όσο και του Λυκείου, θα ήταν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχτούν ότι υπάρχουν άπειρα σημεία σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, παρά ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ένα διάστημα, κάτι που θα ήταν μια ένδειξη ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την αναλογία «οι αριθμοί είναι σημεία πάνω στην αριθμογραμμή».

Τέλος διερευνήσαμε τις ιδέες των μαθητών σχετικά με τη γεωμετρική ευθεία. Πιο συγκεκριμένα, διερευνήσαμε αν οι μαθητές βλέπουν τη γεωμετρική ευθεία σαν ένα πραγματικό (φυσικό) αντικείμενο, ταυτίζοντας την με τη φυσική της αναπαράσταση (π.χ. μια γραμμή σχεδιασμένη με μολύβι), αν θεωρούν ότι αποτελείται από σημεία και αν η δομή των σημείων είναι διακριτή ή πυκνή. Οι υποθέσεις μας είναι οι εξής:

α) Οι μαθητές αναμένεται να δίνουν περισσότερη έμφαση στα επιφανειακά χαρακτηριστικά σημεία μιας ευθείας, συγκεκριμένα αναμένουμε ότι οι μαθητές θα θεωρούν ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει πάχος.
β) Είναι επίσης αναμενόμενο ότι το ποσοστό των μαθητών που θεωρούν ότι το ευθύγραμμο τμήμα έχει πυκνή δομή είναι σχετικά χαμηλό.
γ) Αναμένουμε ότι οι μαθητές, σύμφωνα με το μοντέλο της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou 1994), θα αναπτύξουν διάφορα συνθετικά μοντέλα.

Πραγματοποιήσαμε δύο μελέτες. Στην Πρώτη μελέτη, το δείγμα ήταν παιδιά Γυμνασίου και Λυκείου, προερχόμενα από δημόσια σχολεία. Στη δεύτερη, συμπληρωματική, μελέτη ο σχεδιασμός και τα υλικά ήταν ίδια με αυτά της πρώτης μελέτης, αλλά το δείγμα προερχόταν από ένα Πειραματικό σχολείο.

3.1 Πρώτη μελέτη

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στη μελέτη συμμετείχαν 229 παιδιά από την Α΄ Γυμνασίου έως και τη Β΄ Λυκείου σε δημόσια σχολεία της Λιβαδειάς και της Κομοτηνής. Η κατανομή των υποκειμένων ανά τάξη φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ΤΑΞΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΟ
Α΄ ΓΥΜΝ.	44 19,21%
Β΄ ΓΥΜΝ.	55 24,02%
Γ΄ ΓΥΜΝ	41 17,90%
Α΄ ΛΥΚ.	47 20,52%
Β΄ ΛΥΚ.	42 18,34%
ΣΥΝΟΛΟ	229 100%

Πίνακας 1: Κατανομή των υποκειμένων ανά τάξη

Υλικό

Σχεδιάστηκαν δύο κλειστά ερωτηματολόγια που αποτελούνταν από 16 ερωτήσεις (Q1-Q16) (Παράρτημα Β΄). Τα ερωτηματολόγια περιείχαν τις ίδιες ερωτήσεις αλλά με διαφορετική σειρά (Παράρτημα Γ΄). Οι πρώτες δεκαπέντε ερωτήσεις χωρίζονται σε τρεις ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από 5 ερωτήσεις (Q1-Q5) της μορφής «ανάμεσα στον αριθμό Α και στον Β υπάρχουν…», η δεύτερη ομάδα αποτελείται και αυτή από 5 ερωτήσεις (Q6-Q10) της ίδιας μορφής, αλλά επιπλέον τους ζητείται αρχικά, πριν απαντήσουν, να τοποθετήσουν τον αριθμό Β πάνω σε μια ευθεία όπου ήδη έχει τοποθετηθεί ο αριθμός Α. Επιπλέον και στις 2 προαναφερθείσες ομάδες υπάρχει από μια ερώτηση όπου τα Α και Β είναι α) ακέραιοι αριθμοί β) δεκαδικοί αριθμοί με ένα δεκαδικό ψηφίο γ) δεκαδικοί αριθμοί με τρία δεκαδικά ψηφία δ) δύο ομώνυμα κλάσματα ε) δύο κλάσματα με κοινό αριθμητή. Σε όλες τις ερωτήσεις οι αριθμοί ήταν ψευδοδιαδοχικοί (π.χ. Α=0,1 και Β=0,2 , Α=7/15 και Β=8/15).

Η τρίτη ομάδα ερωτήσεων (Q11-Q15) αναφέρεται στο πλήθος των σημείων που υπάρχουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Τρεις ερωτήσεις είναι της μορφής «Ανάμεσα στα σημεία Α και Β υπάρχουν…». Ακόμα δύο ερωτήσεις αναφέρονται στο πλήθος των παράλληλων ευθειών που μπορούν να τέμνουν ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Οι απαντήσεις τις οποίες μπορούσαν να επιλέξουν οι μαθητές για τις ερωτήσεις Q1-Q15 ήταν οι εξής:

α) δεν υπάρχει (κανένας αριθμός, κανένα σημείο, καμία ευθεία).

β) υπάρχει πεπερασμένο πλήθος (αριθμών, σημείων, ευθειών).

γ) υπάρχει άπειρο πλήθος (αριθμών, σημείων, ευθειών).

Η τελευταία ερώτηση (Q16) ζητά από τους μαθητές να φανταστούν πώς μοιάζει ένα ευθύγραμμο τμήμα, όταν το μεγεθύνουν νοερά (ερώτηση Q16, στο παράρτημα Β΄)

Τέλος η σειρά των ερωτήσεων στο πρώτο ερωτηματολόγιο είναι Q1,Q2,…,Q15,Q16, ενώ στο δεύτερο ερωτηματολόγιο η σειρά είναι Q6,…,Q10,Q1,…Q5,Q11…Q15.Q16 (βλ. παράρτημα Γ΄). Ο λόγος που χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικά ερωτηματολόγια είναι για να ελέγξουμε την επίδραση της σειράς παρουσίασης της ευθείας.

Διαδικασία

Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στο χώρο των σχολείων και τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους μια διδακτική ώρα να τα συμπληρώσουν (45 λεπτά). Αφού μοιράστηκαν τα ερωτηματολόγια, κατόπιν δόθηκαν διευκρινίσεις στις οδηγίες που υπήρχαν στην πρώτη σελίδα των ερωτηματολογίων. Συγκεκριμένα, οι οδηγίες εξηγούσαν ότι με τον όρο αριθμό εννοούσαμε τους πραγματικούς αριθμούς και ότι πραγματικοί ήταν όλοι οι αριθμοί που γνώριζαν τα παιδιά. Επιπλέον εξηγούνταν ότι η έκφραση «ανάμεσα σε 2 αριθμούς» αναφέρεται στους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από τον πρώτο και μικρότεροι από το δεύτερο. Ακόμη, ότι πεπερασμένο πλήθος σημαίνει ένα πλήθος που έχει τέλος, ενώ άπειρο πλήθος είναι αυτό που δεν έχει. Κάθε ερωτηματολόγιο περιείχε 4 φύλλα και, όταν ένας μαθητής τελείωνε το ένα φύλλο, το παρέδιδε για να παραλάβει το επόμενο. Με αυτό τον τρόπο στερούσαμε από τους μαθητές τη δυνατότητα να διορθώσουν ενδεχόμενες απαντήσεις σε κάποιο προηγούμενο φύλλο ώστε να μπορέσουμε να ελέγξουμε την υπόθεσή μας για τη σειρά των ερωτήσεων.

Αποτελέσματα

Κάθε απάντηση βαθμολογήθηκε ως προς το πλήθος των αριθμών (ή των σημείων) που δίνονταν [0: καμία απάντηση (Τ0) ,1: μηδενικό πλήθος (Τ1), 2: πεπερασμένο πλήθος≠0 (Τ2) , 3: άπειρο πλήθος (Τ3)]. Για τις αναλύσεις που ακολουθούν χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πρόγραμμα SPSS,

Υπενθυμίζεται ότι οι βασικές παράμετροι στην ανάλυσή μας είναι:

α) Η ομάδα στην οποία ανήκουν οι ερωτήσεις. Όπως σημειώσαμε και πριν οι ερωτήσεις Q1-Q5 αναφέρονται στην πρώτη ομάδα (πλήθος αριθμών χωρίς τη χρήση άξονα πραγματικών αριθμών, ΧΕ), οι ερωτήσεις Q6-Q10 στη δεύτερη ομάδα (πλήθος αριθμών με τη χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, ΜΕ), οι ερωτήσεις Q11-Q15 στην τρίτη ομάδα (πλήθος σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, ΕΤ).

β) Ο τύπος του ερωτηματολογίου στα οποία δόθηκαν οι ερωτήσεις αυτές (ΕΡ1, ΕΡ2).

γ) Η τάξη

Ηλικία και τύπος απάντησης

Στον πίνακα 2 παρουσιάζεται η συχνότητα και το ποσοστό κάθε κατηγορίας απαντήσεων, σε όλες τις ερωτήσεις, ανά τάξη:

ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ N=15Χ44=660	Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ N=15Χ55=825	Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ N=15Χ41=615	Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ N=15Χ47=705	Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ N=15Χ42=630
Τ0	4 0,6%	3 0,4%	6 1,0%	1 0,1%	2 0,3%
Τ1	250 37,9%	298 36,1%	148 24,1%	142 20,1%	108 17,1%
Τ2	286 43,3%	376 45,6%	321 52,2%	370 52,5%	304 48,3%
Τ3	120 18,2%	148 17,9%	140 22,8%	192 27,2%	216 34,3%

Πίνακας 2: Συχνότητα και ποσοστό κάθε τύπου απάντησης , στο σύνολο των απαντήσεων στις ερωτήσεις Q1-Q15, ανά τάξη.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1 τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου δίνουν συχνότερα την απάντηση Τ1 (37,9%) σε σχέση με τα παιδιά των άλλων ηλικιακών ομάδων. Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου δίνουν λιγότερο συχνά την απάντηση Τ3 (17,9%), ενώ τα παιδιά της Α΄ Λυκείου δίνουν την απάντηση Τ2 περισσότερο συχνά (52,5%). Τέλος η απάντηση Τ3 συναντάται πιο συχνά στην Β΄ Λυκείου (34,3%).

Η μέση συνολική επίδοση κάθε παιδιού υπολογίστηκε ως το άθροισμα της βαθμολογίας του σε όλες τις ερωτήσεις, δια 15.

ΤΑΞΗ	Α΄ ΓΥΜΝ.		Β΄ ΓΥΜΝ.		Γ΄ ΓΥΜΝ.		Α΄ ΛΥΚ		Β΄ ΛΥΚ.	
ΤΥΠΟΣ ΕΡΩΤΗΜ/ΓΙΟΥ	ΕΡ1	ΕΡ2	ΕΡ1	ΕΡ2	ΕΡ1	ΕΡ2	ΕΡ1	ΕΡ2	ΕΡ1	ΕΡ2
ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	1,808	1,77	1,828	1,792	1,89	2,041	2,078	2,058	2,241	2,089
ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ	0,388	0,381	0,351	0,391	0,325	0,442	0,465	0,518	0,519	0,444

Πίνακας 3: Μέσες επιδόσεις ανά τάξη στο σύνολο των ερωτήσεων.

Από τα στοιχεία του πίνακα 3 φαίνεται ότι οι μέσες επιδόσεις είναι υψηλότερες στις μεγαλύτερες τάξεις από ό,τι στις μικρότερες. Η ανάλυση διακύμανσης στη μέση συνολική επίδοση σε όλες τις ερωτήσεις με ανεξάρτητες μεταβλητές την τάξη (Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄, Β΄ Λυκείου) και τον τύπο ερωτηματολογίου έδειξε κύρια επίδραση μόνο για την ηλικία [$F(4, 228)= 6,647$, $p<0,001$]. Περαιτέρω ανάλυση με το κριτήριο Tukey HSD έδειξε ότι η επίδοση της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου ήταν σημαντικά μικρότερη από την επίδοση της Α΄ και της Β΄ Λυκείου (βλέπε και πίνακα 4):

Πολλαπλές Συγκρίσεις
Εξαρτημένη Μεταβλητή: Ολική Επίδοση

	(I) ΤΑΞΗ	(J) ΤΑΞΗ	Μέση Διαφορά (I-J)	Τυπικό σφάλμα	Σημαν/τα	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	
						Κάτω όριο	άνω όριο
Tukey HSD	Α΄ Γυμν.	Β΄ Γυμν.	-0,020	0,086	0,999	-0,257	0,217
		Γ΄ Γυμν.	-0,177	0,092	0,314	-0,430	0,077
		Α΄ Λυκ.	-0,277	0,089	0,018*	-0,523	-0,032
		Β΄ Λυκ.	-0,374	0,092	0,001*	-0,627	-0,122
	Β΄ Γυμν.	Γ΄ Γυμν.	-0,157	0,088	0,385	-0,398	0,257
		Α΄ Λυκ.	-0,257	0,084	0,022*	-0,49	-0,025
		Β΄ Λυκ.	-0,354	0,087	0,001*	-0,594	-0,114
	Α΄ Λυκ.	Β΄ Λυκ.	-0,097	0,090	0,820	-0,345	0,151

**Με αστερίσκο σημειώνονται όσες διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές στο επίπεδο 0,05.*

Πίνακας 4: Μέσες επιδόσεις ανά τάξη και ανά ομάδα ερωτήσεων, στο σύνολο των ερωτήσεων.

Ομάδα των ερωτήσεων

Στον πίνακα 3 φαίνονται οι συχνότητες και τα ποσοστά ανά ομάδα ερωτήσεων:

ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΧΕ	ΜΕ	ΕΤ
	N=5X229=1145	N=5X229=1145	N=5X229=1145
	1	8	7
Τ0	0,1%	0,7%	0,6%
	358	361	227
Τ1	31,3%	31,5%	19,8%
	536	546	575
Τ2	46,8%	47,7%	50,2%
	250	230	336
Τ3	21,8%	20,1%	29,3%

Πίνακας 5: Συχνότητα και ποσοστό κάθε τύπου απάντησης, στο σύνολο των απαντήσεων σε 15 ερωτήσεις, ανά ομάδα ερωτήσεων.

Από τον πίνακα 5 φαίνεται ότι η ιδέα της διακριτότητας είναι ισχυρή στις απαντήσεις των μαθητών (αναφερόμαστε στις κατηγορίες ΧΕ και ΜΕ). Πράγματι, αθροίζοντας τα ποσοστά των απαντήσεων Τ1 και Τ2 προκύπτει 78,1% για την κατηγορία ΧΕ και 79,2% για την κατηγορία ΜΕ. Το αντίστοιχο ποσοστό στην κατηγορία ΕΤ είναι 70%. Στη συνέχεια, διερευνήσαμε τις διαφορές στις μέσες επιδόσεις των παιδιών στις ομάδες ερωτήσεων ΧΕ, ΜΕ, ΕΤ.

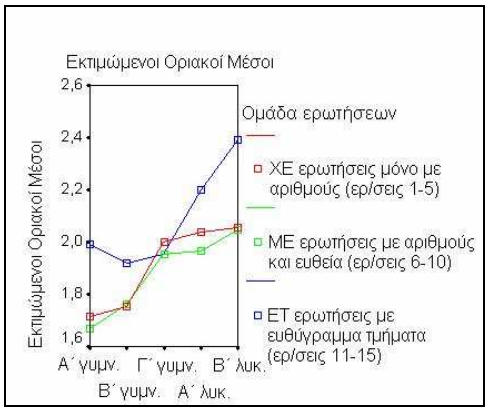
Τάξη	Τύπος ερώτησης	Μέση επίδοση	Τυπικό σφάλμα	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	
				Κάτω όριο	Άνω όριο
Α΄ Γυμν.	ΧΕ	1,714	,077	1,561	1,866
	ΜΕ	1,668	,081	1,509	1,827
	ΕΤ	1,991	,074	1,846	2,136
Β΄ Γυμν.	ΧΕ	1,753	,069	1,616	1,889
	ΜΕ	1,760	,072	1,618	1,902
	ΕΤ	1,920	,066	1,790	2,050
Γ΄ Γυμν.	ΧΕ	2,000	,080	1,842	2,158
	ΜΕ	1,951	,083	1,787	2,116
	ΕΤ	1,951	,076	1,801	2,102
Α΄ Λυκ.	ΧΕ	2,038	,075	1,891	2,186
	ΜΕ	1,966	,078	1,812	2,120
	ΕΤ	2,200	,071	2,059	2,341
Β΄ Λυκ.	ΧΕ	2,057	,079	1,901	2,213
	ΜΕ	2,048	,082	1,885	2,210
	ΕΤ	2,390	,075	2,242	2,539

Πίνακας 6: Εκτιμήσεις μέσων επιδόσεων ανά τύπο ερώτησης και ανά τάξη

Οι μέσες επιδόσεις στις ομάδες ερωτήσεων υποβλήθηκαν σε ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων εντός των ομάδων, με ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη. Τα αποτελέσματα έδειξαν κύριες επιδράσεις , τόσο για τις ομάδες αριθμών [F(2, 448)=23,335, p<0,001], όσο και για την τάξη [F(1, 224)=6,680, p<0.001]. Έδειξαν επίσης αλληλεπίδραση της τάξης με τις ομάδες ερωτήσεων [F(8,448)=2,336, p<0,05].

Η κύρια επίδραση της ομάδας ερωτήσεων οφείλεται στη σημαντικά μεγαλύτερη μέση επίδοση στις ερωτήσεις της ομάδας ΕΤ, σε σχέση με τη μέση επίδοση στις ερωτήσεις ΧΕ [(F(1, 224)=26,175, p<0,001] και τις ερωτήσεις ΜΕ [F(1,224)= 29,941, p<0,001].

Η αλληλεπίδραση οφείλεται στο γεγονός ότι η Α΄ Γυμνασίου και η Β΄ Λυκείου είχαν μεγαλύτερες διαφορές στην επίδοση ανάμεσα στις ερωτήσεις της ομάδας ΕΤ και της ομάδας ΧΕ ([F(4, 224)=3,266, p<0,001] και της ομάδας ΜΕ ([F(2, 224)= 2,408, p=0,5] σε σύγκριση με τις υπόλοιπες τάξεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1:



Σχήμα 1: Εκτιμώμενοι οριακοί μέσοι ανά τάξη

Πιο αναλυτικά, στον πίνακα 7 φαίνονται όλες οι συγκρίσεις ανά τάξη και ποιες είναι στατιστικά σημαντικές στο επίπεδο 0,05:

ΤΑΞΗ	(I) ΤΥΠΟΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ	(J) ΤΥΠΟΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ	ΜΕΣΗ ΔΙΑΦΟΡΑ (I-J)	ΤΥΠΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ	ΣΗΜΑΝΤΙ-ΚΟΤΗΤΑ (a)	95% ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ (a)	
						Κάτω Όριο	Άνω Όριο
Α΄ Γυμν.	ΧΕ	ΜΕ	,045	,057	,423	-,066	,157
		ΕΤ	-,277(*)	,079	,001	-,433	-,122
	ΜΕ	ΕΤ	-,323(*)	,088	,000	-,496	-,150
Β΄ Γυμν.	ΧΕ	ΜΕ	-,007	,051	,886	-,107	,093
		ΕΤ	-,167(*)	,071	,019	-,306	-,028
	ΜΕ	ΕΤ	-,160(*)	,079	,043	-,315	-,005
Γ΄ Γυμν.	ΧΕ	ΜΕ	,049	,059	,407	-,067	,164
		ΕΤ	,049	,082	,551	-,112	,210
	ΜΕ	ΕΤ	,000	,091	1,000	-,179	,179
Α΄ Λυκ.	ΧΕ	ΜΕ	,072	,055	,188	-,036	,180
		ΕΤ	-,162(*)	,076	,035	-,312	-,011
	ΜΕ	ΕΤ	-,234(*)	,085	,006	-,402	-,067
Β΄ Λυκ	ΧΕ	ΜΕ	,010	,058	,870	-,105	,124
		ΕΤ	-,333(*)	,081	,000	-,492	-,174
	ΜΕ	ΕΤ	-,343(*)	,090	,000	-,520	-,166

Βασισμένο σε εκτιμώμενους οριακούς μέσους.
* Η μέση διαφορά είναι σημαντική στο επίπεδο 0,05
a Προσαρμογή για πολλαπλές συγκρίσεις: Ελάχιστη σημαντική διαφορά (ισοδύναμη χωρίς προσαρμογές).

Πίνακας 7: Μέση διαφορά ανάμεσα στους τύπους ερωτήσεων ανά τάξη

Ο πίνακας 7 δείχνει ότι οι μέσες επιδόσεις στις κατηγορίες ΧΕ και ΜΕ δεν διαφέρουν σημαντικά και επομένως επιβεβαιώνεται η υπόθεσή μας ότι οι επιδόσεις δεν θα διέφεραν. Από την άλλη, στην περίπτωση της ΕΤ έχουμε σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις με εξαίρεση στη Γ΄ γυμνασίου.

Επιπλέον η παρουσία της ευθείας δεν είχε θετική επίδραση στην προσέγγιση και πρόσληψη της έννοιας της πυκνότητας. σε πολλές περιπτώσεις η παρουσία της ευθείας δεν είχε θετική επίδραση στην προσέγγιση και πρόσληψη της έννοιας της πυκνότητας. Για παράδειγμα στις ερωτήσεις Q5 και Q10 (ερωτήσεις με δεκαδικούς αριθμούς που έχουν τρία δεκαδικά ψηφία), 21 μαθητές (9,2%) απάντησαν στην πρώτη ερώτηση (χωρίς την παρουσία της αριθμογραμμής) ότι υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών ανάμεσά τους, ενώ στη δεύτερη ερώτηση (παρουσία της αριθμητικής ευθείας) ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος.

		ΕΡΩΤΗΣΗ Q10			
		ΚΑΜΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΠΕΠ.	ΑΠΕΙΡ.	ΣΥΝΟΛΟ
ΕΡΩΤΗΣΗ Q5	ΠΕΠ.	1 0,4%	164 71,60%	6 2,6%	171 74,70%
	ΑΠΕΙΡ.	0 0%	21 9,2%	37 16,2%	58 25,3%
	ΣΥΝΟΛΟ	1 0,4%	185 80,8%	43 18,8%	229 100%

Πίνακα 8: Διασταύρωση είδους απαντήσεων για τις ερωτήσεις Q5 & Q10.

<u>Η ερώτηση Q16:</u>

Η ερώτηση αυτή ήταν κλειστού τύπου, αλλά επιπλέον τους δόθηκε η δυνατότητα να δώσουν μια ξεχωριστή απάντηση σε περίπτωση που δεν τους ικανοποιούσε καμία από τις προτεινόμενες. Επιπλέον μπορούσαν να δώσουν ως σωστή περισσότερες από μια απαντήσεις.

Αποτελέσματα

Σύμφωνα με το σχεδιασμό επεξεργαστήκαμε κάθε απάντηση με τις παρακάτω παραμέτρους:

Κάθε απάντηση κωδικοποιήθηκε με τον εξής τρόπο: [0: καμία απάντηση- ασαφής απάντηση, 1: Η πρώτη προτεινόμενη απάντηση (ομάδα Α, βλ. παράρτημα Β΄), 2: Η τρίτη προτεινόμενη απάντηση (ομάδα Γ΄) καθώς επίσης και οι πολλαπλές απαντήσεις που περιείχαν ακριβώς τις ομάδες Γ΄ και Α΄(παράρτημα Β΄), 3: Η ομάδα Δ΄ ή όλες οι πολλαπλές απαντήσεις που περιείχαν τουλάχιστον μία από τις ομάδες Δ΄ ή Β΄, 4: Η ομάδα Β΄]. Η ανάλυση έγινε με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου SPSS.

		ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	0	6 2,6%
	1	76 33,2%
	2	50 21,8%
	3	45 19,7%
	4	52 22,7%
	ΑΘΡΟΙΣΜΑ	229 100%

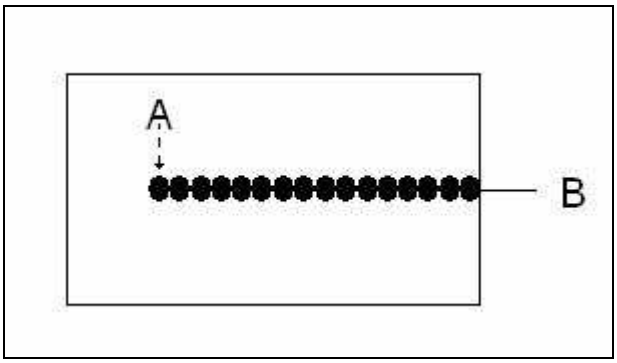
Πίνακας 8: Συχνότητες και ποσοστά ανά είδος απάντησης στην ερώτηση Q16.

Όπως βλέπουμε το 33,2% έδωσε την απάντηση τύπου 1. Αυτή η απάντηση αντικατοπτρίζει την άποψη των μαθητών ότι τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν πάχος. Σύμφωνα με τους Chi, Feltovitz & Glaser (1981) οι αρχάριοι δίνουν σημασία σε επιφανειακά χαρακτηριστικά μιας έννοιας και στην περίπτωση του ευθύγραμμου τμήματος υπάρχει διάσταση ανάμεσα σε ένα φυσικό γεωμετρικό ευθύγραμμο τμήμα και ενός μαθηματικού ευθύγραμμου τμήματος. Ανάμεσα στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου σημειώθηκε το μεγαλύτερο ποσοστό (43,2%), ενώ το χαμηλότερο ποσοστό σημειώθηκε ανάμεσα στους μαθητές της Β΄ Λυκείου (26,2%), όπως φαίνεται και στον πίνακα 9 στην επόμενη σελίδα.

Η απάντηση τύπου 2 αντικατοπτρίζει την διακριτή άποψη σχετικά με τη φύση του ευθύγραμμου τμήματος. Να σημειώσουμε επιπλέον ότι σε αυτή την κατηγορία τοποθετήθηκαν τέσσερα υποκείμενα (1,7%) τα οποία έδωσαν ως εναλλακτική απάντηση ότι το ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται από διακριτά σημεία κολλημένα μεταξύ τους (βλέπε και σχήμα 2 στην επόμενη σελίδα).

ΤΑΞΗ	ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ %
Α΄ ΓΥΜΝ	0	2	4,5
	1	19	43,2
	2	4	9,1
	3	6	13,6
	4	13	29,5
	ΣΥΝΟΛΟ	44	100
Β΄ ΓΥΜΝ	0	4	7,3
	1	19	34,5
	2	11	20
	3	8	14,5
	4	13	23,6
	ΣΥΝΟΛΟ	55	100
Γ΄ ΓΥΜΝ	0	0	0
	1	13	31,7
	2	5	12,2
	3	14	34,1
	4	9	22,0
	ΣΥΝΟΛΟ	41	100
Α΄ ΛΥΚ.	0	0	0
	1	14	29,8
	2	14	29,8
	3	11	23,4
	4	8	17,0
	ΣΥΝΟΛΟ	47	100
Β΄ ΛΥΚ.	0	0	0
	1	11	26,2
	2	16	38,1
	3	6	14,3
	4	9	21,4
	ΣΥΝΟΛΟ	42	100

Πίνακας 9: Συχνότητες και ποσοστά ανά τάξη και ανά είδος απάντησης στην ερώτηση Q16.



Σχήμα 2: Εναλλακτική απάντηση από 4 υποκείμενα

Η απάντηση τύπου 3 αντικατοπτρίζει διάφορα συνθετικά μοντέλα που αναπτύσσουν οι μαθητές και παράλληλα καταδεικνύει μια ατελή άποψη για την πυκνότητα των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Η απάντηση τύπου 4 δίνει την εικόνα ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η μεγέθυνση δεν αλλάζει την αρχική μορφή του ευθύγραμμου τμήματος. Οι μαθητές που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία ίσως να θεωρούν ότι μια ευθεία δεν έχει πάχος ή να αντιλαμβάνονται καλύτερα τη φύση του μαθηματικού ευθύγραμμου τμήματος και ενδεχομένως να αντιλαμβάνονται καλύτερα την πυκνότητα των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε και το ενδεχόμενο της τυχαίας επιλογής.

3.2 Δεύτερη μελέτη

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, το δεύτερο δείγμα αποτελείται από 52 μαθητές ενός πειραματικού σχολείου της Αθήνας (Α΄ Λυκείου). Οι υποθέσεις, τα ερωτηματολόγια και ο τρόπος βαθμολόγησης της επίδοσης είναι ακριβώς οι ίδιοι όπως και στην πρώτη ομάδα.

<u>Οι ερωτήσεις Q1-Q15:</u>

ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Πειραματικό) N=15X52=780
T0	3 0,4%
T1	75 9,6%
T2	342 43,8%
T3	360 46,2%

Πίνακας 1: Συχνότητες και ποσοστό κάθε τύπου ερώτησης, στο σύνολο των απαντήσεων για τις ερωτήσεις Q1-Q15.

Όπως βλέπουμε το 46,2% των απαντήσεων ήταν τύπου T3 (που αντιστοιχεί στην πυκνότητα). Η μέση επίδοση των παιδιών του πειραματικού ήταν 2,36. Να σημειωθεί ότι η υψηλότερη μέση επίδοση στο πρώτο δείγμα ήταν 2,165 (για τη Β΄ Λυκείου).

Ο πίνακας 2 παρακάτω δείχνει τις συχνότητες και τα ποσοστά των τύπων απάντησης για τις ερωτήσεις Q1-Q15 ανά ομάδα ερωτήσεων:

ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	ΧΕ N=5X52=260	ΜΕ N=5X52=260	ΕΤ N=5X52=260
Τ0	0 0%	0 0%	3 1,2%
Τ1	30 11,5%	25 9,6%	20 7,7%
Τ2	116 44,6%	122 46,9%	104 40,0%
Τ3	114 43,8%	113 43,5%	133 51,2%

Πίνακας 2: Συχνότητα και ποσοστό κάθε τύπου απάντησης, στο σύνολο των απαντήσεων σε 15 ερωτήσεις, ανά ομάδα ερωτήσεων.

Από τον παραπάνω πίνακα να σημειώσουμε ότι στην κατηγορία ΕΤ το ποσοστό των απαντήσεων που αντιστοιχεί στην πυκνότητα είναι ελαφρά υψηλότερο από ότι της διακριτότητας (ποσοστό 51,2% έναντι 49,9%).

<u>Η ερώτηση Q16:</u>

ΤΥΠΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ		ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΟ
	0	0 0%
	1	18 34,6%
	2	6 11,5%
	3	7 13,5%
	4	21 40,4%
	ΑΘΡΟΙΣΜΑ	52 100,0%

Πίνακας 3: Συχνότητες και ποσοστά ανά είδος απάντησης στην ερώτηση Q16.

Και σε αυτό το δείγμα το ποσοστό που έδωσε την απάντηση τύπου 1 είναι σχετικά υψηλό (34,6%), όμως το υψηλότερο ποσοστό παρατηρείται στην απάντηση τύπου 4 (40,4%) όπου θεωρούν ότι η νοερή μεγέθυνση ουσιαστικά δεν αλλάζει την αρχική εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος. Μάλιστα κάποιοι μαθητές υπονόησαν στις

εξηγήσεις τους ότι η εικόνα της ευθείας δεν αλλάζει διότι πρόκειται για μια νοητική κατασκευή.

3.3 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματά μας συμφωνούν με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Malara 2001, Merenluoto & Lehtinen 2002, 2004, Tirosh et al 1999, Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 2007) και δείχνουν ότι η ιδέα της διακριτότητας είναι ισχυρή ανάμεσα στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ακόμα και στην περίπτωση των μαθητών του Λυκείου.

Τα αποτελέσματα των ερευνών έδειξαν ότι η παρουσία της αριθμητικής ευθείας, παρόλο που αφορούσε μια αναπαράσταση η οποία αναδείκνυε με ευδιάκριτο τρόπο ένα συνεχές διάστημα ανάμεσα σε δύο δοθέντες ρητούς αριθμούς, δεν οδήγησε αναγκαστικά τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι αριθμοί. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σε κάποιες περιπτώσεις η παρουσία της ευθείας όχι μόνο δεν υποστήριξε τους μαθητές, αλλά αντίθετα τους οδήγησε σε λιγότερο «καλές» απαντήσεις.

Αντίθετα, ο μέσος όρος της επίδοσης στις ερωτήσεις που αφορούσαν το πλήθος των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ήταν σημαντικά μεγαλύτερος σε σχέση με τις ερωτήσεις που αφορούσαν την πυκνότητα των ρητών. Αυτή η έλλειψη συγχρονισμού (coordination), όπως χαρακτηρίζει γενικά ο Duval (1999, 2000, 2006) τη μη σύνδεση μεταξύ δύο διαφορετικών αναπαραστατικών πεδίων, ίσως να οφείλεται στα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια που χαρακτηρίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών και που λανθασμένα οδηγούν στη δημιουργία συνθετικών μοντέλων σύμφωνα με το μοντέλο της εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou 1994). Παρόλα αυτά πρέπει να τονίσουμε ότι στην ερώτηση Q11 (παράρτημα Β΄) ένα ποσοστό 20,5% (από την πρώτη μελέτη) απάντησε ότι ανάμεσα στα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος δεν υπάρχουν άλλα σημεία. Αυτό καταδεικνύει την έλλειψη της συνολοθεωρητικής θεώρησης της ευθείας και οδηγεί τους μαθητές να πιστεύουν ότι μια ευθεία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν αποτελείται κατ’ ανάγκη από σημεία ή μόνο από σημεία.

Η ασυνέπεια της επίδοσης ανάμεσα στις ερωτήσεις που αφορούσαν το πλήθος των σημείων σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και στις ερωτήσεις που αφορούσαν το πλήθος των ρητών αριθμών με την παρουσία της ευθείας ενισχύει την άποψη ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την ενδομαθηματική αναλογία, κατά τον ορισμό του

Fischbein (βλ. ενότητα 2.1), ότι «οι αριθμοί είναι σημεία πάνω στην αριθμογραμμή», το οποίο επιβεβαιώνει την άποψη τόσο σε θεωρητικό επίπεδο των Nūñez και Lakoff (2000) όσο και σε ευρήματα προηγούμενων εμπειρικών ερευνών (Vamvakoussi & Vosniadou 2007).

Ακόμη, η ερώτηση Q16 έδειξε ότι οι μαθητές τονίζουν τα φυσικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά μίας ευθείας, όπως για παράδειγμα το πάχος μιας γραμμής, γεγονός που υποδεικνύει τη δυσκολία της διάκρισης ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα και στις φυσικές τους αναπαραστάσεις. Το ζήτημα της διάκρισης των μαθηματικών εννοιών από τις υλικές τους αναπαραστάσεις έχει τονιστεί όπως είδαμε τόσο από τον Duval (2000, 2006) όσο και από τον Fischbein (1987).

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι μια από τις σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των ρητών οφείλεται στο γεγονός ότι οι νέες πληροφορίες για τους ρητούς ερμηνεύονται στη βάση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς. Επιπλέον, όπως φαίνεται, η αναπαράσταση της αριθμητικής ευθείας δεν επαρκεί, για να μεταφέρει στους μαθητές τις μαθηματικές ιδέες που κρύβονται πίσω από τους ρητούς ή τους πραγματικούς. Οι αιτίες ενδεχομένως να εντοπίζονται στο ότι οι μαθητές αποδίδουν φυσικά χαρακτηριστικά σε μια μαθηματική ευθεία, όπως είναι το πάχος, δεν θεωρούν την ευθεία ως σύνολο από σημεία ή ακόμη δεν θεωρούν ότι αριθμοί και σημεία μπορούν να τεθούν σε μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία.

Ίσως η μαθηματική ευθεία και οι ιδιότητές της θα μπορούσαν να αποτελέσουν μια καλή αρχή για την κατανόηση της πυκνότητας, ωστόσο είναι απαραίτητη η κατάλληλα προσανατολισμένη διδασκαλία η οποία θα οδηγήσει τους μαθητές να κατανοήσουν από τη μία τη διάσταση ανάμεσα στα φυσική γεωμετρική ευθεία και στην αντίστοιχη μαθηματική ευθεία, και από την άλλη την αναλογία ότι «οι αριθμοί είναι σημεία στην αριθμητική ευθεία».

Τέλος, καλό είναι να αναφερθούμε στις επιδόσεις των μαθητών του Πειραματικού σχολείου οι οποίες ήταν καλύτερες σε σχέση με τα άλλα σχολεία. Η μέση επίδοση τους ήταν υψηλότερη στις ερωτήσεις Q1-Q15 (2,36 έναντι 2,165 στη Β΄ Λυκείου της πρώτης μελέτης). Στην ερώτηση Q16 πάλι οι μαθητές του Πειραματικού έδωσαν σε μεγαλύτερο ποσοστό την απάντηση τύπου 4 (40,4% έναντι 29,9% της Γ΄ Γυμνασίου το οποίο ήταν το υψηλότερο στην πρώτη μελέτη). Θα ήταν ενδιαφέρουσα μια περαιτέρω έρευνα σχετικά με τις διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούν οι καθηγητές του Πειραματικού κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Αδαμόπουλος Λ. , Βισκαδουράκης Β. , Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. (1998). Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Αδαμόπουλος Λ. , Δαμιανού Χ., Σβέρκος Α. (1999). Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ ενιαίου Λυκείου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Αναπολιτάνος Δ. Α. (1985). Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Γ΄ έκδοση, Εκδόσεις Νεφέλη.
- Ανδρεαδάκης Σ. , Κατσαργύρης Β. , Παπασταυρίδης Σ. , Πολύζος Γ. , Σβέρκος Α. (1998). Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Ανδρεαδάκης Σ. , Κατσαργύρης Β. , Παπασταυρίδης Σ. , Πολύζος Γ. , Σβέρκος Α. (1998). Άλγεβρα Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Ανδρεαδάκης Σ. , Κατσαργύρης Β. , Παπασταυρίδης Σ. , Πολύζος Γ. , Μέτης Σ. , Μπρουχούτας Κ. (1998). Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Αργυράκης Δ. , Βουργανάς Π. , Μεντής Κ. , Τσικοπούλου Σ. , Χρυσοβέργης Μ. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Αργυρόπουλος Η. , Βλάμος Π. , Κατσούλης Γ. , Μαρκάτης Σ. Σιδέρης Π. (2000). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου.
- Βαμβακούση Ξ. (2006). Γνωστική Ψυχολογία, Σημειώσεις Μαθήματος.
- Βαμβακούση Ξ. , Βοσνιάδου Σ. (2007). «Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα…». Όψεις της κατανόησης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς και το συμβολισμό τους. Στο Χ. Σακονίδης, Δέσποινα Δ. (Εκδ.) 2^{ο} Συνέδριο ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.. Εκδόσεις Τυπωθήτω.
- Βανδουλάκης Ι. , Καλλιγάς Χ. , Μαρκάκης Ν. , Φερεντίνος Σ. (2007). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Βλάμος Π. , Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. , Ρεκούμης Κ. (2007). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Βοσνιάδου Σ. (2004). Γνωσιακή Ψυχολογία. Ψυχολογικές Μελέτες και δοκίμια. Μετάφραση από τα Αγγλικά Κύρκος Χ. Εκδόσεις Gutenberg.
- Γαγάτσης Α., Παναούρα Γ. (2000). Ο ρόλος της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση έργων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη, Κ. Χρίστου (Εκδ.), Σύγχρονη έρευνα στιε επιστήμες της αγωγής. Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Γαγάτσης, Α. & Σπύρου Π. (2000). Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Αθήνα: Έκδοση συγγραφέων.
- Γιαννακούλιας Ε. (2007). Απειροστικός Λογισμός. Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον 5^{ο} π.Χ έως και τον 19^{ο} αιώνα, Εκδόσεις Συμμετρία.
- Κλαουδάτος Ν. (1996). Διδακτική των Μαθηματικών , Σημειώσεις του μαθήματος,Αθήνα 1996.
- Κολέζα Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Εκδόσεις Leader Books.
- Μιχαηλίδου Ε., Γαγάτσης Α. (2003). Η χρήση του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής για την αναπαράσταση της ισοδυναμίας και πρόσθεσης κλασμάτων σε επίπεδο μαθητών Ε΄ δημοτικού: Μια ερευνητική πρόταση. Στο

Α. Γαγάτσης, & Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ* (σ. 71-98). Λευκωσία: Intercollege Press.

- Νεγρεπόντης Σ. , Γιωτόπουλος Σ. , Γιαννακούλιας Ε. (1992). Απειροστικός Λογισμός. Τόμος Ι σελ 34.
- Ρουσόπουλος Γ. (1991). Επιστημολογία των Μαθηματικών. Πρώτη έκδοση, Εκδόσεις Gutenberg.
- Παντσίδης Χ. (2006). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των κλασμάτων. Διπλωματική Εργασία. Αθήνα, 2006.
- Σιακαλλή Μ., Γαγάτσης Α. (2003). Η χρήση του γεωμετρικού μοντέλου της αριθμητικής γραμμής για τη διδασκαλία πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων σε μαθητές πρώτης και δεύτερης τάξης δημοτικού: Μια ερευνητική πρόταση. Στο Α. Γαγάτσης, & Ι. Ηλία (Εκδ.), *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ* (σ. 39-70). Λευκωσία: Intercollege Press.
- Σπύρου Π. (2000). Επιστημολογία των Μαθηματικών. Σημειώσεις του μαθήματος. Αθήνα 2000.
- Φιλίππου Γ. & Χρίστου Κ. (2004). Διδακτική των Μαθηματικών. Εκδόσεις Γ. Δαρδανός.

Ξένη Βιβλιογραφία

- Behr M.J., Lesh R., Post T.R., Silver E.A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh,& M. Hamilton (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press.
- Behr M. , Bright G.W. (1984). Identifying fractions on number lines. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. (68th , New Orleans. LA, 1984).
- Bobis J. , Bobis E. (2005). The empty number line: Making childrens' thinking visible. Making mathematics vital. Proceedings of the 20th Conference of the Australian Association of Mathematics teachers.
- Biza I., Christou C, Zachariades T. (2006). Students' thinking about the tangent line. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 177-184. Prague: PME.
- Birkhoff G. D., Beatley R. (2002). Line axiom (Online). www.math.uga.edu/~clint/2002/5200/line.htm
- Boyer C. , Merzbach U. (1988). Η Ιστορία των Μαθηματικών. Μετάφραση από τη δεύτερη έκδοση Β. Κουσουλάκου. Εκδόσεις Γ.Α Πνευματικού.
- Bright G. W., Behr M. J., Post T.R., Wachsmuth I. (1988). Identifying fractions on number lines. Journal for Research in Mathematics Education 19(3).

- Bruno A. , Cabrera N. (2006). Types of representations of the number line in textbooks. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 249-256.
- Carey S. & Spelke E. (1994). Domain-specific knowledge and conceptual change. In L. A., Hirschfeld, S. A. Gelman. (Eds), Mapping thh Mind: Domain Specificity in Cognition and Culture. Cambridge University Press.
- Carey S. (1985). Conceptual Change in Childhood. Cambridge MA: MIT Press.
- Cazori F. (1894). A History of Mathematics. Retrieved from http://www.archive.org/download/historyofmathema001062mbp/historyofmathema001062mbp.pdf.
- Chaffe-Stengel P., Noddings N. (1982). Facilitating Symbolic Understanding of Fractions, For the Learning of Mathematics 3(2).
- Chi M.T.H. , Feltovich P.J., Glaser R. (1981). Categorization and representation of physics by experts and novices. Cognitive Science, 5, 121-152.
- Chiu M. M. (2000). Metaphorical Reasoning:Origins, Uses, Development and Interactions in Mathematics. Education Journal Vol. 28, No. 1, Summer 2000. The Chinese University of Hong Kong 2000.
- Crossley J. N. (1987).The Emergence of Number. World Scientific Publishing Co Pte Ltd.
- Dehaene S. (1997). The number sense: How the mind Creates Mathematics. New York. Oxford University Press.
- DeLoache J.S. , Uttal D. H., Pierroutsakos S. L. (1998). The development of Early Symbolization: Educational implications. Learning and Instruction 8 (4), 325-339.
- DeWindt A.M, Goldin G. A. (2003). Children's visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 2 (1) 1-42.
- Dufour-Janvier B., Bednarz N. , Belanger M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (109-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Duit R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. Science Education 75(6): 649-672 (1991). John Wiley & Sons, Inc.
- Duval R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.
- Duval R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).
- Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics 61:103-131, Springer 2006.
- English L. (1993). Reasoning by analogy in constructing mathematical ideas. Retrieved from ERIC : http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED370766
- Ernest P. (1985). The number line as a teaching aid. Educational Studies in Mathematics 16 (411-424). Reidel Publishing Company.

- Fischbein E., Deri M., Nello M., Marino M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. Journal of Research in Mathematics Education 16.
- Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity, Education Studies in Mathematics 10 ,3-40.
- Fischbein E. (1997). Image and Concept in Learning Mathematics. Educational Studies in Mathematics 8 (153-165). D Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.
- Fischbein E. (1987). Intuition in Science and Mathematics (127-142). A.J. Bishop, Cambridge, UK.
- Fischbein E. (2002). Tacit Models and Infinity. Educational Studies in Mathematics 48 (309-329). Kluwer Academic Publishers. Nederlands.
- Fueyo V. , Bushell D. (1998). Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low-performing first graders.Journal of Applied Behavior Analysis, 31, (3) , 417–430.
- Gagatsis A., Elia I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 2), 447-454.
- Gelman R. (2003). The epigenesis of mathematical thinking. Journal of Applied Developmental Psychology, 21, 27-37.
- Gentner D. (1986). Evidence for a structure- mapping theory of analogy and metaphor. Retrieved from Eric: http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/ recordDetail?accno=ED278963.
- Goldin G. A. (1987). Levels of Language in Mathematics Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (59-65). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Goldin G. A. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17 (2) 137-165. Ablex Publishing Corp.
- Goldin G. A. (1992a). On developing a unified model for the psychology of mathematical learning and problem solving. Plenary talk. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.) Proceedings of the 16th PME Conference (Vol 3, 235-261). Durham,NH: University of New Hampshire Department of Mathematics.
- Goldin G.A , Kaput J. M. (1996). A Joint Perspective of the Idea of Representation in Learning and DoingMathematics. In von L.P. Steffe, Nesher P. (Eds.). Mahwah (New Jersey): LEA.
- Goldin G. A. , Herscovits N. (1991a). The conceptual-representational analysis of children's early arithmetic. In R. Underbill (Ed.), Proceeding of the 13th Annual Meeting of PME (Vol 1, 118-124). Blacksburg, VA: Virginia Tech Division of Curriculum and Instruction.
- Goldin G. A. , Herscovits N. (1991b). Toward a conceptual-representational analysis of the exponential function. In F. Furingetti (Ed.), Proceeding of the 15th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME) (Vol 2, 64-71). Genoa, Italy: Dipartimento di Matematica dell' Universita di Geneva.
- Gravemeijer K. (1994). Educational development and educational research in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (5).

- Gravemeijer K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, l(2). 155-177.Copyright 0 1999, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Greer B. , Verschafel L. (2007). Nurturing conceptual change in mathematics education. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (319-328). Oxford:Elsevier.
- Hart K. (Ed.) (1981), Children's understanding of mathematics. London: Murray.
- Hartnet P.M. , Gelman R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? Learning and Instruction, 18, 341-374.
- Herbst P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbooks series. For the Learning of Mathematics, 17 (3).
- Hilbert D. (1950). The Foundations of Geometry. Translation by E.J. Townsend. The Open Court Publishing Company. La Salle, Illinois.
- Janvier C. (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (27-32). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput J. M. (1985). Representation anf problem solving: methodological issues related to modeling. In Edward A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput J. (1987) Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Eds)., Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (159-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glaserfeld (Ed.), Constructivism in mathematics education (53-74).

  Keijzer R., Terwel J. (2000). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparison of two Dutch Curricula on fractions. Retrieved from ERIC: http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED440865
- Keijzer R., Terwel J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. Educational studies in Mathematics 47: 53–73, 2001. Kluwer Academic Publishers. printed in the Netherlands.
- Kerslake D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. Windsor, England: Nfer-Nelson
- Khoury H.A. , Zazkis R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. Educational Studies in Mathematics, 27, 191-204.
- Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol, Educational Studies in Mathematics 12 ,317-326.
- Kilpatrick J, Swafford J, Findell B (2001). Adding it up: Helping children Learn Mathematics. Mathematics Learning Study Committee, National Research Council.
- Klein A.S. , Beishuizen M. , Treffers A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (4), 443-464.

- Körner S. (1971). The Philosophy of Mathematics. Hutchinson Un. Library, London.
- Kuhn T. S. (2004). Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων. Μετάφραση Γεωργακόπουλος Γ., Κάλφας Β.Ι΄ Έκδοση. Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα.
- Lesh R. , Landau M. , Hamilton E. (1983). Conceptual models and applied problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes (263-343). New York: Academic Press.
- Lesh R. , Post T., Behr M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Liebeck P. (1984). How children learn mathematics. Harmondsworth: Penguin.
- Malara N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In Novotná J. (Ed), Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education, 2, 35-46. Praga: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogicka Faculta.
- Markovits K., Sowder J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. Focus on Learning Problems in Mathematics, 13 (1).
- Merenluoto L. , Lehtinen E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In: M. Limon & Mason (Eds), reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (233-258). Dordrecht, The Nederlands: Kluwer.
- Merenluoto L. , Lehtinen E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. Learning and Instruction, 14, 519-534.
- Michaelidou E. (2003). The articulation of different representations of the concept of fraction and the operations with fractions: A study with elementary school. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athens: Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society.
- Moskal B.M , Magone M.E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. Educational Studies in Mathematics, 43, 313-335.
- Moss. J. (2005).Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M.S. Donovan & J.D. Bransford (Eds.), How students learn: Mathematics in the classroom (pp. 121-162).Washington, DC: National Academic Press.
- Neumann R. (1998).Students' ideas on the density of fractions. In H.G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Torner& B. Wollring (Eds). Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik (97-104). Retrieved from http://webdock.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/
- Nūňez R. , Lakoff G. (2000). Where Mathematics Comes From. Basic Books. A Member of The Perseus Books Group.
- Ni Y. (2000), How Valid is it to Use Number Lines to Measure Children' s Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology, 20, (2), 139-152.

- Ni Y. (2001), Semantic Domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence, Contemporary Educational Psychology 26, 400–417.
- Ni Y. , Yong-Di Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40, (1), 27-52.
- O' Connor M.C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. Educational Studies in Mathematics, 46, 143-185.
- Palmer S. E. (1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B.B. Lloyd (Eds), Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pimm D. (1987). Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms (Language, Education and Society). Routledge Kegan & Paul.
- Seeger F. (1998). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In von F. Seeger, J. Voigt & U Waschenscio (Eds), The culture of the mathematics classroom (308-343). Cambridge.
- Selter C. (1988). Building on children's mathematics- A teaching experiment in grade three. Educational Studies in Mathematics 36.
- Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.
- Shapiro S. (2006). Σκέψεις για τα Μαθηματικά. Μετάφραση Α. Δρόσος & Σπανός Δ. Πρώτη Έκδοση, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Smith C. , Solomon G. ,Carey S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. Cognitive Psychology ,51, 101–140.
- Stafilidou S. , Vosniadou S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction 14 (2004) 503–518.
- Tsamir P. , Tirosh D. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?. Learning and Instruction 14 (2004) 535–540.
- Vamvakoussi X. , Vosniadou S. (2004). Understanding the structure of the set rational numbers: Conceptual change approach. Learning and Instruction, 14, 453-467.
- Vamvakoussi X. , Vosniadou S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints , synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (265-282). Oxford:Elsevier.
- Van Dooren W. , De Bock D. , Hessels A., Janssens D. , Verschaffel L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. Learning and Instruction 14 (2004) 485–501.
- Verschaffel L. , De Corte E. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving word problems. Journal for Research in Mathematics Education 18 (5), 363-381.

- Verschaffel L. , De Corte E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. Educational Psychology Review, 5 (3), 239-256.
- Vergnaud G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 137-165. Ablex Publishing Corp.
- Vosniadou S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. Learning and Instruction, 4, 45–69. Vosniadou S. (1988). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: A developmental perspective. Retrieved from Eric: http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=ED300826
- Vosniadou S.,Brewer W.F (1987). Theories of Knowledge Restructuring in Development, Review of Educational research,57, 51-67.
- Vosniadou S., & Brewer W. F. (1992). Mental models of the earth: a study of conceptual change in childhood. Cognitive Psychology, 24, 535–585.
- Vosniadou & Ioannides (1998). From conceptual development to science education: a psychological point of view. International Journal of Science Education (vol. 20, no. 10, 1213-1230). Taylor & Francis Ltd.
- Vosniadou S. & Ortony A. (1983). The influence of analogy in children's acquisition of new information from text: An exploratory study. Retrieved from Eric: http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=ED300826.
- Vosniadou S. , Verschaffel L. (2004). Editorial: Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. Learning and Instruction 14 (2004) 445–451.
- Vosniadou S. (2007). The conceptual change approach and its re-fraiming. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), Refraiming the conceptual change approach in learning and instruction. Oxford: Elsevier.
- Vosniadou S., Vamvakoussi X., Skopeliti I. (2008). The Framework Theory Approach to the Problem of Conceptual Change. In Vosniadou S. (Ed.), International Handbook of Research on Conceptual Change (Educational Psychology Handbook). Routledge 2008.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄: Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΤΟΜΕΣ DEDEKIND

Παρακάτω θα δώσουμε ένα γενικό διάγραμμα που θεμελιώνει τους πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τις τομές Dedekind[15].

Θεωρούμε το σύνολο Q με την ολική διάταξη και την πυκνότητα που αυτό έχει. Αν πάρουμε ένα ρητό αριθμό όπως για παράδειγμα τον $1\frac{2}{3}$ τότε μπορούμε να διαμερίσουμε τους ρητούς σε δύο τάξεις Α και Β ως εξής: $A=\{x\in Q: x\leq 1\frac{2}{3}\}$ και $B=\{x\in Q: x>1\frac{2}{3}\}$. Ο αριθμός $1\frac{2}{3}$ αποτελεί το σύνορο των δύο τάξεων και νοείται ως σύμβολο του καταμερισμού αυτού. Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να διαμερίσουμε το σύνολο Q με τις τάξεις $A=\{x\in Q: x<1\frac{2}{3}\}$ και $B=\{x\in Q: x\geq 1\frac{2}{3}\}$ και να θεωρήσουμε πάλι το $1\frac{2}{3}$ ως σύμβολο αυτής της διαμέρισης. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι έχουμε:

I) Κάθε αριθμός της τάξης Α είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξης Β.

II) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $x\in A$ και $y\in B$ με $y-x<\varepsilon$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι η τάξη Α έχει μέγιστο στοιχείο ενώ η δεύτερη δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το Α δεν έχει μέγιστο στοιχείο αλλά έχει ελάχιστο στοιχείο το Β. Υπάρχει όμως και μια τρίτη περίπτωση διαμερισμού του συνόλου Q όπου ούτε η τάξη Α έχει μέγιστο στοιχείο ούτε η Β έχει ελάχιστο όπως για παράδειγμα η διαμέριση με $A=\{x\in Q: x<0$ ή $x>0$ με $x^2-3<0\}$ και $B=\{x\in Q: x^2-3>0\}$. Το σύμβολο ενός τέτοιου καταμερισμού αυτού ονομάζουμε *ασύμμετρο αριθμό* και στη συγκεκριμένη περίπτωση το συμβολίζουμε με $\sqrt{3}$. Συνοψίζοντας, οι ρητοί αριθμοί μπορούν να χωριστούν γενικά σε δύο τάξεις Α και Β, με $A\cap B=\varnothing$ και $Q=A\cup B$ όπου διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:

1. Υπάρχει ένα στοιχείο $z\in A$ με $x\leq z$ για κάθε $x\in A$.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο $z\in B$ με $x\geq z$ για κάθε $x\in B$.

[15] Βλέπε Ζερβού Π. (1929) , *ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*
και Σπύρου Τ. (1998) , *ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα λέμε ότι ο αριθμός z δύναται να νοηθεί ως σύμβολο του καταμερισμού και λέμε ότι ο z προσδιορίζει την *τομή* (A,B) και ότι η τομή είναι *ρητή*.

3. Δεν υπάρχει στοιχείο $z \in A$ με $x \leq z$, για κάθε $x \in A$, ούτε στοιχείο $z \in B$ με $x \geq z$ για κάθε $x \in B$.

Στην τρίτη περίπτωση θα λέμε ότι η τομή είναι *ασύμμετρη*.

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε δυνατό καταμερισμό των ρητών σε δύο τάξεις A και B, ώστε να ισχύουν οι I και II να αντιστοιχεί ένας και μόνο αριθμός ρητός ή ασύμμετρος, που χρησιμεύει για σύμβολο του καταμερισμού και λέγεται *τομή Dedekind*. Αν τον καταμερισμό των περιπτώσεων 1 και 2 τον θεωρήσουμε ως μια περίπτωση, τότε είναι και το αντίστροφο αληθές, δηλαδή για κάθε αριθμό ρητό ή όχι αντιστοιχεί μια τομή.

Ισότητες και ανισότητες των ασυμμέτρων:

Έστω δύο ασύμμετροι δ και δ΄ και έστω (A,B) η τομή που προσδιορίζεται από τον αριθμό δ και η τομή (A΄,B΄) που προσδιορίζεται από τον αριθμό δ΄. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Οι τάξεις A και A΄ ταυτίζονται. Τότε ταυτίζονται και οι τάξεις B και B΄ και άρα οι δ και δ΄ προσδιορίζουν την ίδια τομή. Θα λέμε ότι οι ασύμμετροι δ και δ΄ είναι ίσοι και γράφουμε $\delta=\delta'$.
2. Υπάρχει αριθμός $\zeta \in A'-A$ με $\zeta \in B$. Επομένως υπάρχει $\zeta \in Q$ με $\zeta<\delta'$ και $\zeta>\delta$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο δ΄ είναι *μεγαλύτερος* από τον δ και θα γράφουμε ότι $\delta'>\delta$.
3. Υπάρχει αριθμός $\zeta \in A$ με $\zeta \notin A'$ και επομένως $\zeta \in B'$. Τότε θα λέμε ότι ο δ είναι *μεγαλύτερος* από τον δ΄ και θα γράφουμε ότι $\delta>\delta'$.

Οι ρητοί μαζί με τους άρρητους λέγονται *πραγματικοί αριθμοί*.

Καταμερισμός των πραγματικών σε δύο τάξεις:

Αν χωρίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σε δύο τάξεις Α και Β, έτσι ώστε κάθε αριθμός της Α να είναι μικρότερος κάθε αριθμού της Β, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντοτε πραγματικός αριθμός λ (ρητός ή ασύμμετρος), τέτοιος ώστε κάθε πραγματικός αριθμός μικρότερος του λ να ανήκει στην Α και κάθε πραγματικός μεγαλύτερος του λ να ανήκει στη Β. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντα αριθμός λ που ορίζει την τομή (Α,Β).

Για να το δείξουμε, έστω ότι A_ρ και A_α οι ρητοί και ασύμμετροι αντίστοιχα, που ανήκουν στην τάξη Α, και B_ρ και B_α οι ρητοί και ασύμμετροι αντίστοιχα, που ανήκουν στην τάξη Β. Οι τάξεις των ρητών A_ρ και B_ρ ορίζουν μια τομή, έναν αριθμό ρητό ή ασύμμετρο, έστω λ. Θα δείξουμε ότι κάθε αριθμός ρητός ή ασύμμετρος μικρότερος του λ , ανήκει στην τάξη Α και κάθε αριθμός μεγαλύτερος του λ ανήκει στην τάξη Β. Πράγματι, κάθε μικρότερος του λ θα είναι ρητός ή ασύμμετρος και αν είναι ρητός θα ανήκει στην A_ρ. Αν είναι ασύμμετρος έστω δ, θα υπάρχει μεταξύ του δ και του λ ρητός αριθμός και επομένως απειρία ρητών. Έστω τ ένας τέτοιος ρητός. Τότε ο τ θα ανήκει στην A_ρ. Επομένως ο τ θα ανήκει στην Α και άρα θα είναι μικρότερος κάθε αριθμού που ανήκει στη Β. Αν ο δ ανήκε στο Β τότε θα είχαμε ότι $\tau<\delta$, ενώ έχουμε υποθέσει ότι $\tau>\delta$. Άρα $\delta\in A$. Όμοια δείχνουμε ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος του λ ανήκει στην τάξη Β. Επομένως ο λ που είναι τομή των τάξεων A_ρ και B_ρ είναι και η τομή των τάξεων Α και Β.

Πράξεις των πραγματικών αριθμών:

Πρόσθεση: Έστω κ και κ΄ δύο πραγματικοί αριθμοί και (Α,Β), (Α΄,Β΄) οι αντίστοιχες τάξεις που ορίζουν τους παραπάνω πραγματικούς αριθμούς. Έστω τώρα τυχαίοι ρητοί α,β και α΄,β΄ οι οποίοι ανήκουν στις παραπάνω τέσσερεις τάξεις ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha<\kappa<\beta$ και $\alpha'<\kappa'<\beta'$. Τότε $\alpha+\alpha'<\beta+\beta'$. Χωρίζουμε τους πραγματικούς σε δύο τάξεις Γ και Δ έτσι ώστε:

Α) Η Γ αποτελείται από όλους τους αριθμούς που να είναι μικρότεροι από οποιονδήποτε αριθμό της μορφής β+β΄ και άρα όλοι οι αριθμοί α+α΄ ανήκουν στη Γ.

Β) Η Δ αποτελείται από όλους τους αριθμούς της μορφής β+β΄.

Έστω κ΄΄ ο αριθμός που αποτελεί την τομή (Γ,Δ). Τότε ο κ΄΄ είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της μορφής β+β΄ και μεγαλύτερος από κάθε αριθμό της μορφής α+α΄. Να σημειώσουμε ότι ο κ΄΄ δεν ταυτίζεται με κανένα αριθμό της μορφής β+β΄ και με

κανένα αριθμό της μορφής α+α΄ διότι η τάξη Γ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο ούτε η τάξη Δ έχει μέγιστο στοιχείο. Ο αριθμός κ΄΄ είναι μοναδικός με αυτή την ιδιότητα. Πράγματι, έστω δ άλλος ένας τέτοιος αριθμός διαφορετικός από τον κ΄΄. Τότε μεταξύ των δ και κ΄΄ θα υπάρχουν άπειροι ρητοί, έστω ρ και τα δύο από αυτούς με ρ<τ.

Τότε α+α΄<ρ<τ<β+β΄ και άρα τ-ρ<(β+β΄)-(α+α΄). Η διαφορά τ-ρ όμως είναι ένας σταθερός αριθμός, ενώ η διαφορά (β+β΄)-(α+α΄) γίνεται οσοδήποτε μικρή. Επομένως ο αριθμός κ΄΄ είναι μοναδικός και ονομάζεται *άθροισμα* των κ και κ΄ και συμβολίζεται με κ+κ΄.

Αφαίρεση: Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν δοθούν δύο αριθμοί λ και λ΄ τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός ξ, ο οποίος αν προστεθεί με τον λ να δίνει τον λ΄. Γράφουμε σε αυτή την περίπτωση ξ=λ-λ΄.

Πολλαπλασιασμός: Έστω δύο αυθαίρετοι θετικοί αριθμοί και κ΄, ενώ Α,Β οι τάξεις των ρητών που ορίζουν τον κ και Α΄,Β΄ οι τάξεις των ρητών που ορίζουν τον κ΄. Θεωρούμε τέσσερεις θετικούς αριθμούς α, β, α΄, β΄ που ανήκουν σε αυτές τις τάξεις και οι οποίοι επαληθεύουν τις ανισότητες α<κ<β και α΄<κ΄<β΄. Τότε θα έχουμε ότι αα΄<ββ΄. Όπως και στην πρόσθεση αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός που είναι μικρότερος από οποιονδήποτε αριθμό της μορφής ββ΄ και μεγαλύτερος από οποιονδήποτε αριθμό της μορφής αα΄. Τον αριθμό αυτό τον καλούμε γινόμενο των αριθμών κ και κ΄. Στην περίπτωση που έχουμε αρνητικούς αριθμούς παίρνουμε υπόψη τον κανόνα των σημείων: (-κ)κ΄=-(κκ΄), (-κ)(-κ΄)= κκ΄, κ(-κ΄)=-(κκ΄).

Διαίρεση: Σε κάθε ρητό αριθμό ρ, διαφορετικό από το μηδέν, αντιστοιχεί ένας μοναδικός ρητός πραγματικός αριθμός ρ΄ ώστε ρρ΄=1. Τον αριθμό ρ΄ καλούμε *αντίστροφο* του ρ και τον συμβολίζουμε $\frac{1}{\rho}$. Θεωρούμε τώρα έναν ασύμμετρο αριθμό λ. Ζητούμε στη συνέχεια έναν αριθμό λ΄ που να είναι τέτοιος ώστε λλ΄=1. Παίρνουμε τις τάξεις Α και Β ρητών: Β={x∈Q: x>λ} και Α={x∈Q: x>0 και x<λ}. Οι αντίστροφοι των ρητών της τάξης Α, θα αποτελέσουν μια άλλη τάξη έστω Β΄, ενώ οι αντίστροφοι της Β, μαζί με τους ρητούς αρνητικούς αριθμούς συγκροτούν την τάξη των υπολοίπων ρητών, έστω την Α΄. Η τομή (Α΄,Β΄) ορίζει έναν ορίζει ένα θετικό ασύμμετρο λ΄. Ο λ΄ είναι τέτοιος ώστε λλ΄=1, τον συμβολίζουμε με $\frac{1}{\lambda}$ και τον λέμε αντίστροφο του λ. Όμοια ορίζουμε αντίστροφο για τους αρνητικούς, δηλαδή αν λ

θετικός, τότε ο αντίστροφος του –λ είναι ο $-\frac{1}{\lambda}$. Για το μηδέν δεν ορίζουμε αντίστροφο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄: ΟΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΩΝ

Q1) Ανάμεσα στο 1 και στο 2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q2) Ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q3) Ανάμεσα στο $\frac{5}{7}$ και στο $\frac{5}{6}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q4) Ανάμεσα στο $\frac{7}{15}$ και στο $\frac{8}{15}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

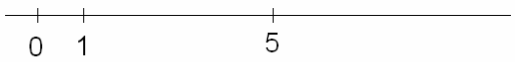
Q5) Ανάμεσα στο 0,005 και στο 0,006

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q6) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 6 στην παρακάτω ευθεία



Ανάμεσα στο 5 και στο 6

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q7) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 0,4 στην παρακάτω ευθεία

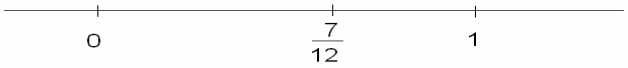
Ανάμεσα στο 0,3 και στο 0,4

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q8) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό $\frac{7}{11}$ στην παρακάτω ευθεία



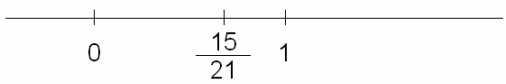
Ανάμεσα στο $\frac{7}{12}$ και στο $\frac{7}{11}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q9) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό $\frac{16}{21}$ στην παρακάτω ευθεία



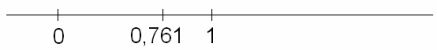
Ανάμεσα στο $\frac{15}{21}$ και στο $\frac{16}{21}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών

Q10) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 0,762 στην παρακάτω ευθεία



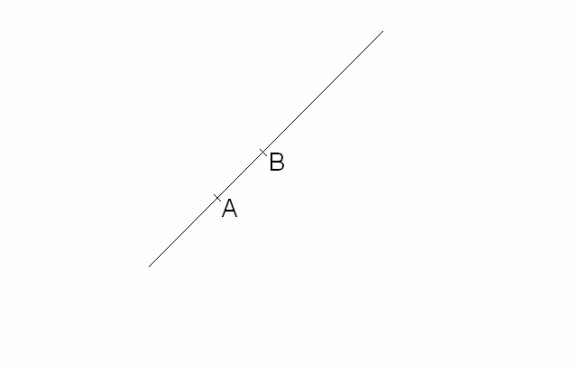
Ανάμεσα στο 0,761 και στο 0,762

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Q11) Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

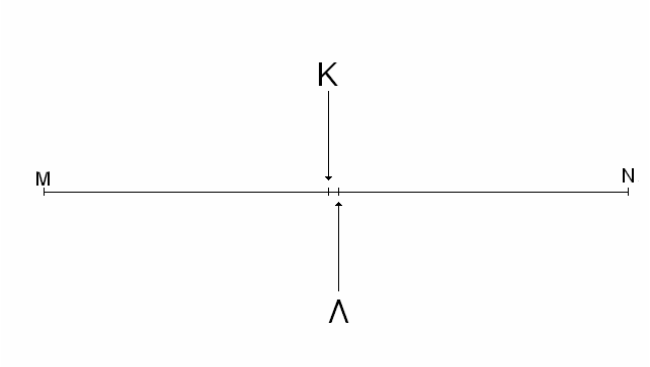


☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων

Q12) Ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

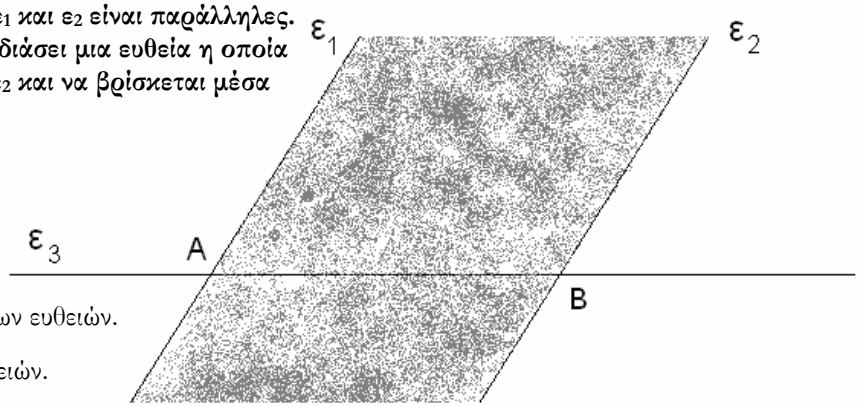
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Πού υπάρχουν περισσότερα σημεία ανάμεσα, στο ΚΛ ή στο ΜΝ;

Απάντηση:……

Q13) Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Σε έναν μαθητή ζητήθηκε να σχεδιάσει μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να βρίσκεται μέσα στην <<γκρίζα>> περιοχή.



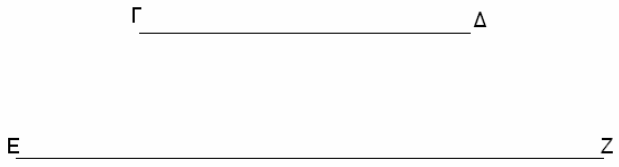
Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

Q14) Ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

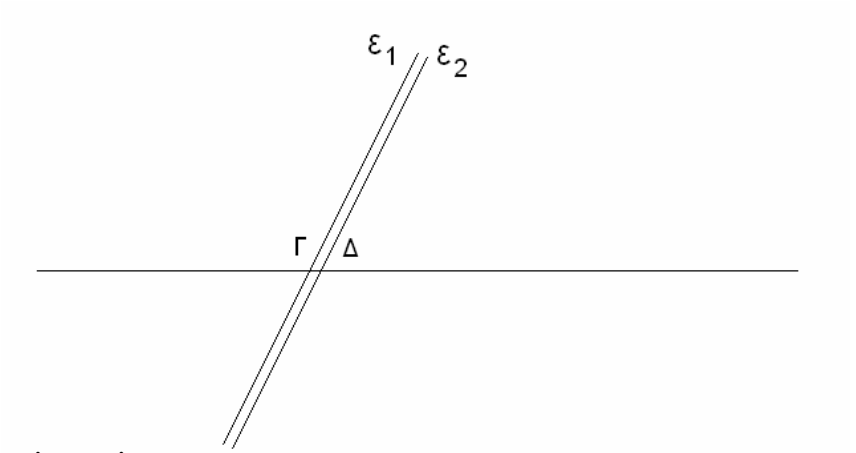
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν περισσότερα σημεία στο ΓΔ ή στο ΕΖ;

Απάντηση:…….

Q15) Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να περνάει κάπου ανάμεσα σε αυτές.



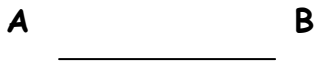
Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

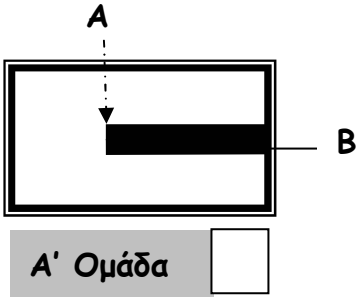
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ευθειών.

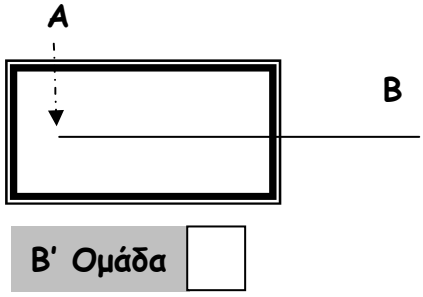
☐ υπάρχει άπειρο πλήθος ευθειών.

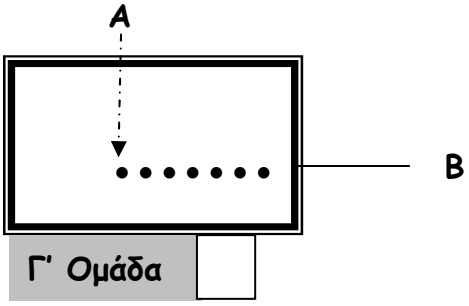
Q16) Σε μια εργασία για τα μαθηματικά ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να φανταστούν ότι «ζουμάρουν» πάνω στο άκρο Α του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

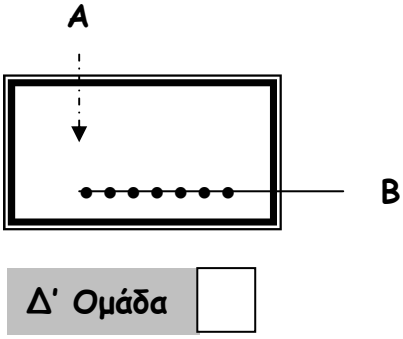


Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.





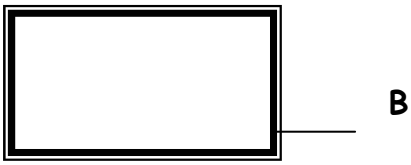




Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο το οποίο θα έφτιαχνες κι εσύ;

- Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. Αιτιολόγησε την επιλογή σου:
  _____
  _____
  _____
  _____
  _____
  _____

- Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄ : ΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 1^{Ο} :

ΦΥΛΛΟ 1^{Ο} (Ερωτήσεις 1-5)

Σχολείο:…….....
Τμήμα:……

Φύλο: **Κορίτσι** ☐ **Αγόρι** ☐

ΟΔΗΓΙΕΣ

Θα σου δοθούν 4 φύλλα εργασιών (συνολικά 16 ερωτήσεις). Αφού συμπληρώσεις το 1^{ο}, θα το παραδώσεις και ύστερα θα λάβεις το 2^{ο} και αφού συμπληρώσεις και παραδώσεις και το 2^{ο}, θα λάβεις το 3^{ο} και τέλος το 4^{ο}.

Στα επόμενα, όπου βλέπεις τον όρο «αριθμός/-οί» θα ξέρεις ότι αναφέρεται στους πραγματικούς αριθμούς. Θυμήσου ότι όλοι οι αριθμοί που γνωρίζεις είναι πραγματικοί αριθμοί!

Ένας αριθμός πχ ο Γ είναι ανάμεσα σε δύο άλλους (πχ. τον Α και τον Β, με Α<Β), αν αυτός είναι μεγαλύτερος από τον Α και μικρότερος από τον Β.

Να θυμάσαι ότι οι φράσεις:
α) <<Άπειρο πλήθος αριθμών>> σημαίνει όχι απλά πολλοί αριθμοί, αλλά ένα πλήθος χωρίς τέλος.
β) <<Πεπερασμένο πλήθος αριθμών>> σημαίνει ότι μπορεί να είναι λίγοι ή πολλοί, αλλά κάπου τελειώνουν.

Στις ερωτήσεις 1-15 να επιλέξεις με √ αυτό που θεωρείς σωστό:

Ερωτήσεις 1-5

1) Ανάμεσα στο 1 και στο 2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

2) Ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

3) Ανάμεσα στο $\frac{5}{7}$ και στο $\frac{5}{6}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

4) Ανάμεσα στο $\frac{7}{15}$ και στο $\frac{8}{15}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

5) Ανάμεσα στο 0,005 και στο 0,006

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

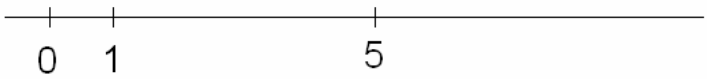
Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 2ο.

ΦΥΛΛΟ 2^{Ο} (Ερωτήσεις 6-10)

Σχολείο:…….....
Τμήμα:……

Ερωτήσεις 6-10

6) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 6 στην παρακάτω ευθεία



Ανάμεσα στο 5 και στο 6

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

7) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 0,4 στην παρακάτω ευθεία

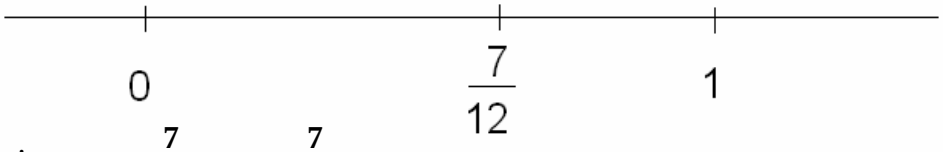
Ανάμεσα στο 0,3 και στο 0,4

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

8) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό $\frac{7}{11}$ στην παρακάτω ευθεία



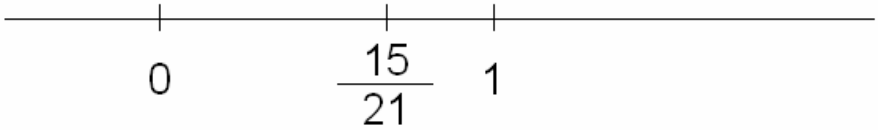
Ανάμεσα στο $\frac{7}{12}$ και στο $\frac{7}{11}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

9) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό $\frac{16}{21}$ στην παρακάτω ευθεία



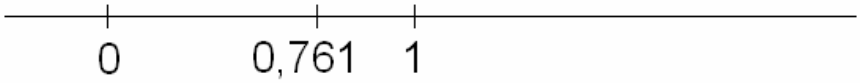
Ανάμεσα στο $\frac{15}{21}$ και στο $\frac{16}{21}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

10) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 0,762 στην παρακάτω ευθεία



Ανάμεσα στο 0,761 και στο 0,762

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

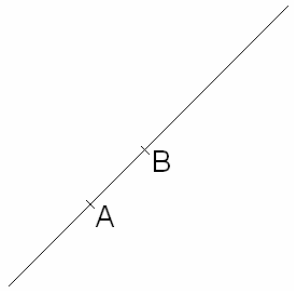
Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 3ο.

ΦΥΛΛΟ 3^{ο} (ερωτήσεις 11-15)

Σχολείο:…….....

Τμήμα:……

11) Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

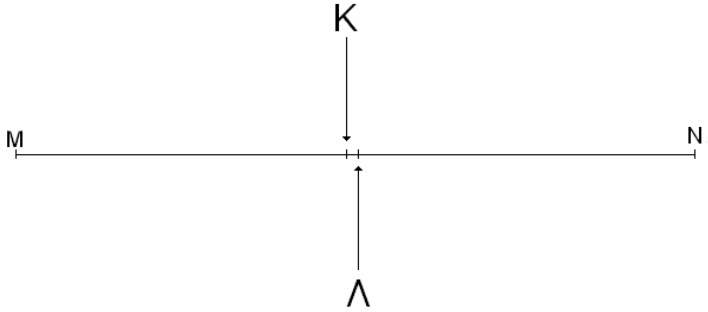


☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

12) Ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

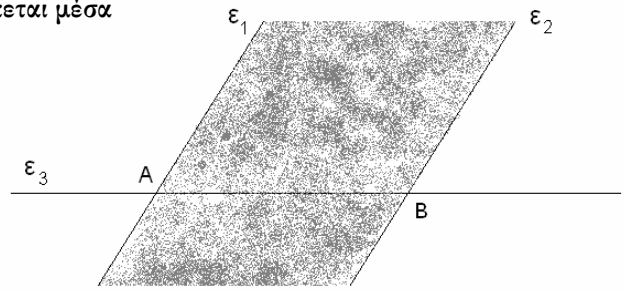
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Πού υπάρχουν περισσότερα σημεία ανάμεσα, στο ΚΛ ή στο ΜΝ;

Απάντηση:…….

13) Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Σε έναν μαθητή ζητήθηκε να σχεδιάσει μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να βρίσκεται μέσα στην <<γκρίζα>> περιοχή.



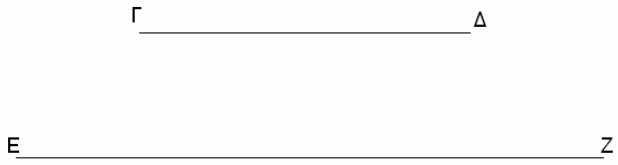
Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

14) Ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

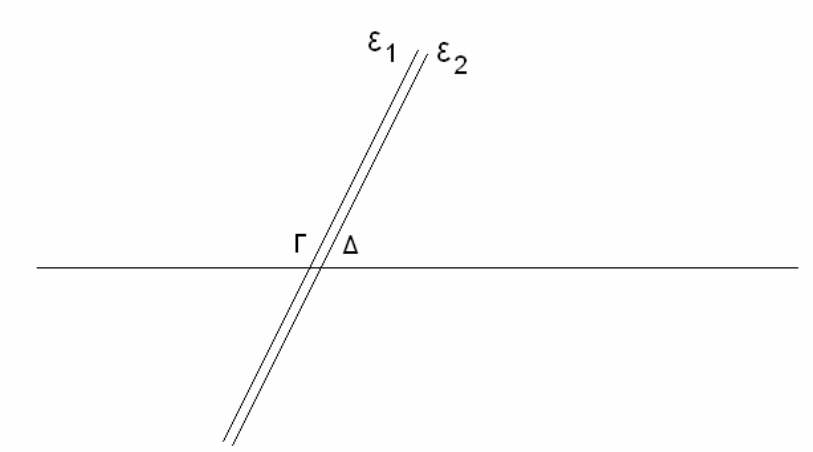
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν περισσότερα σημεία στο ΓΔ ή στο ΕΖ;

Απάντηση:…….

15) Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να περνάει κάπου ανάμεσα σε αυτές.



Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ευθειών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος ευθειών.

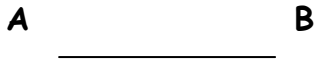
Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 4ο.

ΦΥΛΛΟ 4^{Ο} (ερώτηση 16)

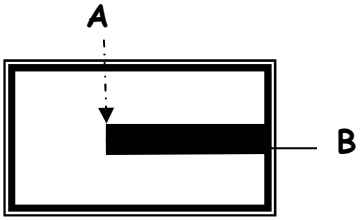
Σχολείο:…….....

Τμήμα:……

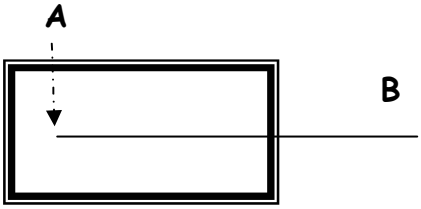
16)Σε μια εργασία για τα μαθηματικά ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να φανταστούν ότι «ζουμάρουν» πάνω στο άκρο Α του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



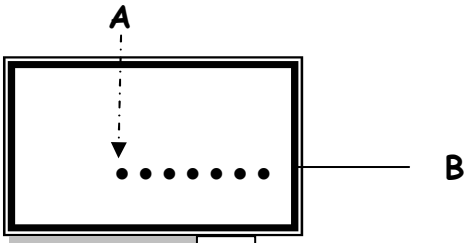
Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.



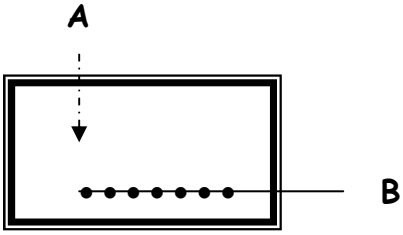
Α' Ομάδα ☐



Β' Ομάδα ☐



Γ' Ομάδα ☐



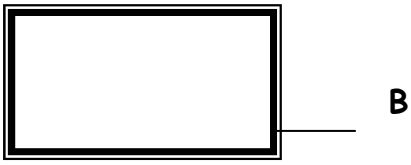
Δ' Ομάδα ☐

Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο το οποίο θα έφτιαχνες κι εσύ;

- **Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. Αιτιολόγησε την επιλογή σου:**

  _____
  _____
  _____
  _____
  _____
  _____

- **Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:**



ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ 2^{Ο}

ΦΥΛΛΟ 1^{Ο} (Ερωτήσεις 1-5)

Σχολείο:…….....
Τμήμα:……

Φύλο: **Κορίτσι** ☐ **Αγόρι** ☐

ΟΔΗΓΙΕΣ

Θα σου δοθούν 4 φύλλα εργασιών (συνολικά 16 ερωτήσεις). Αφού συμπληρώσεις το 1^{ο}, θα το παραδώσεις και ύστερα θα λάβεις το 2^{ο} και αφού συμπληρώσεις και παραδώσεις και το 2^{ο} θα λάβεις το 3^{ο} και τέλος το 4^{ο}.

Στα επόμενα, όπου βλέπεις τον όρο «αριθμός/-οί» θα ξέρεις ότι αναφέρεται στους πραγματικούς αριθμούς. Θυμήσου ότι όλοι οι αριθμοί που γνωρίζεις είναι πραγματικοί αριθμοί!

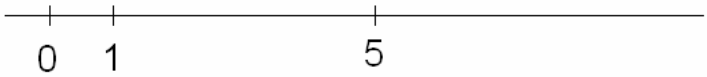
Ένας αριθμός πχ ο Γ είναι ανάμεσα σε δύο άλλους (πχ. τον Α και τον Β, με Α<Β), αν αυτός είναι μεγαλύτερος από τον Α και μικρότερος από τον Β.

Να θυμάσαι ότι οι φράσεις:
α) <<Άπειρο πλήθος αριθμών>> σημαίνει όχι απλά πολλοί αριθμοί, αλλά ένα πλήθος χωρίς τέλος.
β) <<Πεπερασμένο πλήθος αριθμών>> σημαίνει ότι μπορεί να είναι λίγοι ή πολλοί, αλλά κάπου τελειώνουν.

Στις ερωτήσεις 1-15 να επιλέξεις με √ αυτό που θεωρείς σωστό:

Ερωτήσεις 1-5

1) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 6 στην παρακάτω ευθεία



Ανάμεσα στο 5 και στο 6

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

2) Τοποθέτησε στο περίπου τον αριθμό 0,4 στην παρακάτω ευθεία

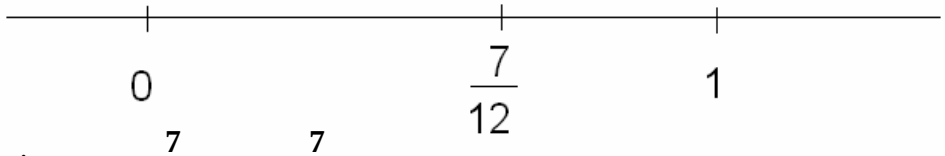
Ανάμεσα στο 0,3 και στο 0,4

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

3) Τοποθέτησε τον αριθμό $\frac{7}{11}$ στην παρακάτω ευθεία



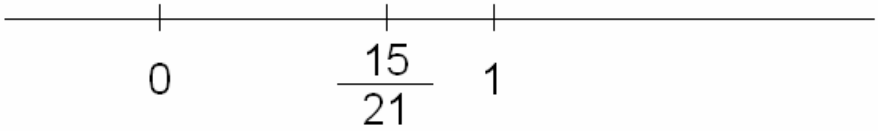
Ανάμεσα στο $\frac{7}{12}$ και στο $\frac{7}{11}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

4) Τοποθέτησε τον αριθμό $\frac{16}{21}$ στην παρακάτω ευθεία



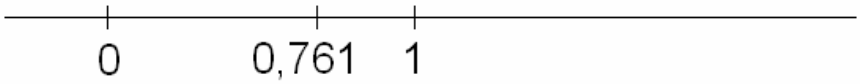
Ανάμεσα στο $\frac{15}{21}$ και στο $\frac{16}{21}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

5) Τοποθέτησε τον αριθμό 0,762 στην παρακάτω ευθεία



Ανάμεσα στο 0,761 και στο 0,762

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 2^{ο}.

ΦΥΛΛΟ 2^{Ο} (Ερωτήσεις 6-10)

Σχολείο:…….....
Τμήμα:……

Ερωτήσεις 6-10

6) Ανάμεσα στο 1 και στο 2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

7) Ανάμεσα στο 0,1 και στο 0,2

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

8) Ανάμεσα στο $\frac{5}{7}$ και στο $\frac{5}{6}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

9) Ανάμεσα στο $\frac{7}{15}$ και στο $\frac{8}{15}$

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

10) Ανάμεσα στο 0,005 και στο 0,006

☐ δεν υπάρχει κανένας αριθμός.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών.

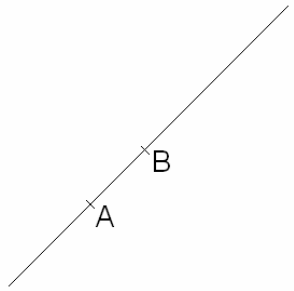
Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 3^{ο}.

ΦΥΛΛΟ 3^{ο} (ερωτήσεις 11-15)

Σχολείο:…….....

Τμήμα:……

11) Ανάμεσα στα σημεία Α και Β του παρακάτω σχήματος

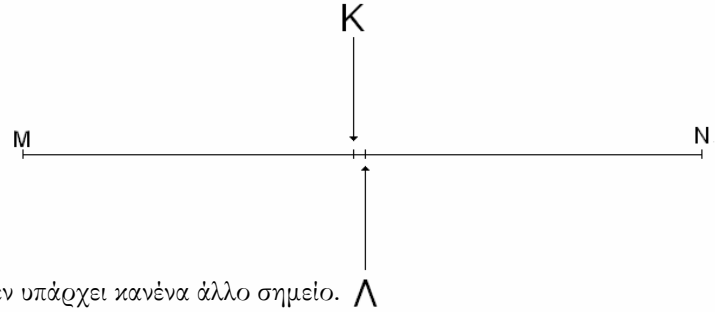


☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

12) Ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

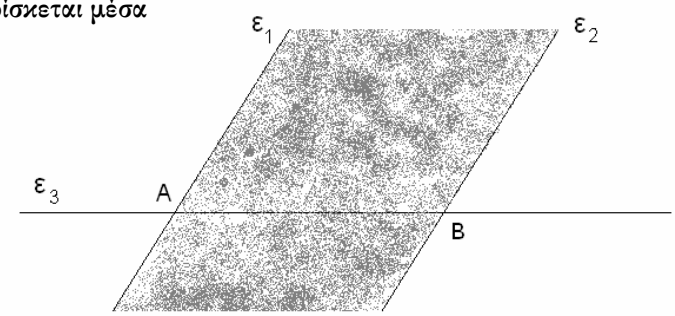
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Πού υπάρχουν περισσότερα σημεία ανάμεσα, στο ΚΛ ή στο ΜΝ;

Απάντηση:……

13) Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Σε έναν μαθητή ζητήθηκε να σχεδιάσει μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να βρίσκεται μέσα στην <<γκρίζα>> περιοχή.



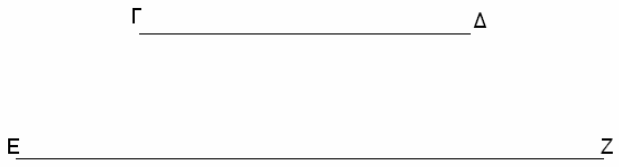
Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος τέτοιων ευθειών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος τέτοιων ευθειών.

14) Ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ του παρακάτω σχήματος



☐ δεν υπάρχει κανένα άλλο σημείο.

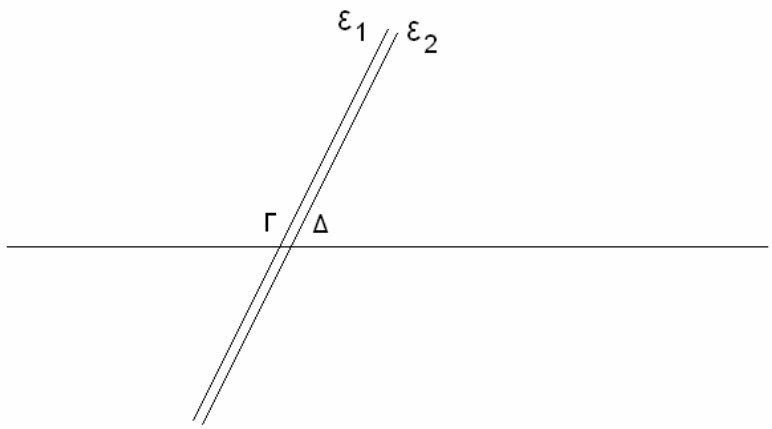
☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων.

Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν περισσότερα σημεία στο ΓΔ ή στο ΕΖ;

Απάντηση:……

15) Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να φτιάξουν μια ευθεία η οποία να είναι παράλληλη με τις $ε_1$ και $ε_2$ και να περνάει κάπου ανάμεσα σε αυτές.



Κατά τη γνώμη σου:

☐ δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

☐ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ευθειών.

☐ υπάρχει άπειρο πλήθος ευθειών.

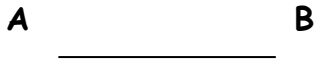
Αφού συμπληρώσεις το φύλλο αυτό, παράδωσέ το, για να πάρεις το 4ο.

ΦΥΛΛΟ 4^{Ο} (ερώτηση 16)

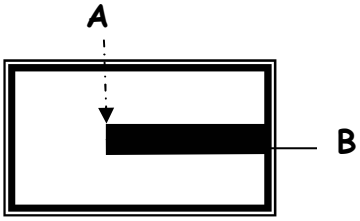
Σχολείο:…….....

Τμήμα:……

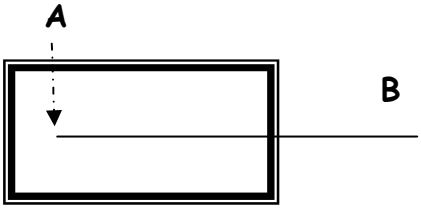
16)Σε μια εργασία για τα μαθηματικά ο καθηγητής ζήτησε από τα παιδιά να κάνουν νοερά ένα πείραμα: Να φανταστούν ότι «ζουμάρουν» πάνω στο άκρο Α του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



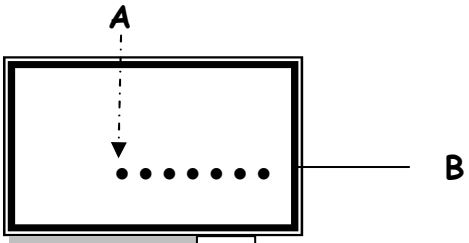
Στη συνέχεια τους ζήτησε να περιγράψουν με ένα σχέδιο πώς θα έβλεπαν το σημείο Α και τα κοντινά του σημεία. Τα παιδιά δούλεψαν σε ομάδες και έφτιαξαν τα παρακάτω σχέδια.



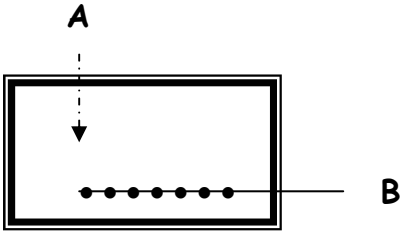
Α' Ομάδα ☐



Β' Ομάδα ☐



Γ' Ομάδα ☐



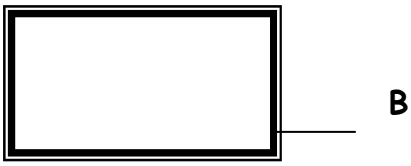
Δ' Ομάδα ☐

Υπάρχει κάποια ομάδα που έφτιαξε το σχέδιο το οποίο θα έφτιαχνες κι εσύ;

- **Αν ναι, σημείωσε √ στο αντίστοιχο κουτάκι. Αιτιολόγησε την επιλογή σου:**

  _____
  _____
  _____
  _____
  _____
  _____

- **Αν όχι, φτιάξε εδώ το δικό σου σχέδιο:**



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄ : ΠΙΝΑΚΕΣ SPSS

- **Πρώτο Δείγμα**

Multiple Comparisons							
Dependent Variable: TOTPERF							
	(I) TAKSI	(J) TAKSI	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Tukey HSD	a gymn	b gymn	-0,020	0,086	0,999	-0,257	0,217
		g gymn	-0,177	0,092	0,314	-0,430	0,077
		a lyk	-0,277	0,089	0,018	-0,523	-0,032
		b lyk	-0,374	0,092	0,001	-0,627	-0,122
	b gymn	a gymn	0,020	0,086	0,999	-0,217	0,257
		g gymn	-0,157	0,088	0,385	-0,398	0,085
		a lyk	-0,257	0,084	0,022	-0,490	-0,025
		b lyk	-0,354	0,087	0,001	-0,594	-0,114
	g gymn	a gymn	0,177	0,092	0,314	-0,077	0,430
		b gymn	0,157	0,088	0,385	-0,085	0,398
		a lyk	-0,101	0,091	0,803	-0,351	0,149
		b lyk	-0,198	0,093	0,217	-0,454	0,059
	a lyk	a gymn	0,277	0,089	0,018	0,032	0,523
		b gymn	0,257	0,084	0,022	0,025	0,490
		g gymn	0,101	0,091	0,803	-0,149	0,351
		b lyk	-0,097	0,090	0,820	-0,345	0,151
	b lyk	a gymn	0,374	0,092	0,001	0,122	0,627
		b gymn	0,354	0,087	0,001	0,114	0,594
		g gymn	0,198	0,093	0,217	-0,059	0,454
		a lyk	0,097	0,090	0,820	-0,151	0,345

TAKSI	QTYPE	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
a gymn	1	1,714	,077	1,561	1,866
	2	1,668	,081	1,509	1,827
	3	1,991	,074	1,846	2,136
b gymn	1	1,753	,069	1,616	1,889
	2	1,760	,072	1,618	1,902
	3	1,920	,066	1,790	2,050
g gymn	1	2,000	,080	1,842	2,158
	2	1,951	,083	1,787	2,116
	3	1,951	,076	1,801	2,102
a lyk	1	2,038	,075	1,891	2,186
	2	1,966	,078	1,812	2,120
	3	2,200	,071	2,059	2,341
b lyk	1	2,057	,079	1,901	2,213
	2	2,048	,082	1,885	2,210
	3	2,390	,075	2,242	2,539

Pairwise Comparisons

Measure: MEASURE_1

TAKSI	(I) QTYPE	(J) QTYPE	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.(a)	95% Confidence Interval for Difference(a) Lower Bound	Upper Bound
a gymn	1	2	,045	,057	,423	-,066	,157
		3	-,277(*)	,079	,001	-,433	-,122
	2	1	-,045	,057	,423	-,157	,066
		3	-,323(*)	,088	,000	-,496	-,150
	3	1	,277(*)	,079	,001	,122	,433
		2	,323(*)	,088	,000	,150	,496
b gymn	1	2	-,007	,051	,886	-,107	,093
		3	-,167(*)	,071	,019	-,306	-,028
	2	1	,007	,051	,886	-,093	,107
		3	-,160(*)	,079	,043	-,315	-,005
	3	1	,167(*)	,071	,019	,028	,306
		2	,160(*)	,079	,043	,005	,315
g gymn	1	2	,049	,059	,407	-,067	,164
		3	,049	,082	,551	-,112	,210
	2	1	-,049	,059	,407	-,164	,067
		3	,000	,091	1,000	-,179	,179
	3	1	-,049	,082	,551	-,210	,112
		2	,000	,091	1,000	-,179	,179
a lyk	1	2	,072	,055	,188	-,036	,180
		3	-,162(*)	,076	,035	-,312	-,011
	2	1	-,072	,055	,188	-,180	,036
		3	-,234(*)	,085	,006	-,402	-,067
	3	1	,162(*)	,076	,035	,011	,312
		2	,234(*)	,085	,006	,067	,402
b lyk	1	2	,010	,058	,870	-,105	,124
		3	-,333(*)	,081	,000	-,492	-,174
	2	1	-,010	,058	,870	-,124	,105
		3	-,343(*)	,090	,000	-,520	-,166
	3	1	,333(*)	,081	,000	,174	,492
		2	,343(*)	,090	,000	,166	,520

Based on estimated marginal means

* The mean difference is significant at the ,05 level.

a Adjustment for multiple comparisons: Least Significant Difference (equivalent to no adjustments).

Crosstabs

N_Q1 * NL_Q6 Crosstabulation

			NL_Q6 No answer	FIN	INF	Total
N_Q1	FIN	Count	2	158	11	171
		% of Total	,9%	69,0%	4,8%	74,7%
	INF	Count	0	13	45	58
		% of Total	,0%	5,7%	19,7%	25,3%
Total		Count	2	171	56	229
		% of Total	,9%	74,7%	24,5%	100,0%

N_Q2 * NL_Q7 Crosstabulation

			NL_Q7			
			No answer	FIN	INF	Total
N_Q2	FIN	Count	1	162	14	177
		% of Total	,4%	70,7%	6,1%	77,3%
	INF	Count	0	12	40	52
		% of Total	,0%	5,2%	17,5%	22,7%
Total		Count	1	174	54	229
		% of Total	,4%	76,0%	23,6%	100,0%

N_Q3 * NL_Q8 Crosstabulation

			NL_Q8			
			No answer	FIN	INF	Total
N_Q3	No answer	Count	0	1	0	1
		% of Total	,0%	,4%	,0%	,4%
	FIN	Count	0	174	13	187
		% of Total	,0%	76,0%	5,7%	81,7%
	INF	Count	1	13	27	41
		% of Total	,4%	5,7%	11,8%	17,9%
Total		Count	1	188	40	229
		% of Total	,4%	82,1%	17,5%	100,0%

N_Q4 * NL_Q9 Crosstabulation

			NL_Q9			
			No answer	FIN	INF	Total
N_Q4	FIN	Count	1	176	11	188
		% of Total	,4%	76,9%	4,8%	82,1%
	INF	Count	2	13	26	41
		% of Total	,9%	5,7%	11,4%	17,9%
Total		Count	3	189	37	229
		% of Total	1,3%	82,5%	16,2%	100,0%

N_Q5 * NL_Q10 Crosstabulation

			NL_Q10			
			No answer	FIN	INF	Total
N_Q5	FIN	Count	1	164	6	171
		% of Total	,4%	71,6%	2,6%	74,7%
	INF	Count	0	21	37	58
		% of Total	,0%	9,2%	16,2%	25,3%
Total		Count	1	185	43	229
		% of Total	,4%	80,8%	18,8%	100,0%

Q16C

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	8	2,6	2,6	2,6
	1	100	32,6	32,6	35,2
	2	60	19,5	19,5	54,7
	3	55	17,9	17,9	72,6
	4	84	27,4	27,4	100,0
	Total	307	100,0	100,0	

- **Δεύτερο Δείγμα**

Descriptive Statistics

erwthmatologio		N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
erwthm 1	TYPOS_AP	390	1	3	2,35	,638
	Valid N (listwise)	390				
erwthm 2	TYPOS_AP	390	0	3	2,37	,697
	Valid N (listwise)	390				

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
TYPOS_AP	780	0	3	2,36	,668
Valid N (listwise)	780				

TYPOS_AP

grammi			Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
efthigramma tmimata	Valid	0	3	1,2	1,2	1,2
		1	20	7,7	7,7	8,8
		2	104	40,0	40,0	48,8
		3	133	51,2	51,2	100,0
		Total	260	100,0	100,0	
xwris grammi	Valid	1	30	11,5	11,5	11,5
		2	116	44,6	44,6	56,2
		3	114	43,8	43,8	100,0
		Total	260	100,0	100,0	
me grammi	Valid	1	25	9,6	9,6	9,6
		2	122	46,9	46,9	56,5
		3	113	43,5	43,5	100,0
		Total	260	100,0	100,0	

Q16C

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	18	34,6	34,6	34,6
	2	6	11,5	11,5	46,2
	3	7	13,5	13,5	59,6
	4	21	40,4	40,4	100,0
	Total	52	100,0	100,0	