ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ

ΦΟΙΤΗΤΗ : ΧΡΙΣΤΙΑ ΣΠΥΡΟΥ (ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ : Δ200613)

ΘΕΜΑ : "Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΑΥΞΗΣΕΩΝ ΤΟΥ BROOK TAYLOR"

BROOK TAYLOR (1685 – 1731)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Ε. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ : ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την **23η Οκτωβρίου 2008** από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ευστάθιος Γιαννακούλιας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	.....
2) Διονύσιος Λάππας	Αν. Καθηγητής	.....
3) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Αν. Καθηγητής	.....

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τους **Αναπληρωτές Καθηγητές** του Μαθηματικού Τμήματος του **Ε.Κ.Π.Α., Θεοδόσιο Ζαχαριάδη** και **Διονύσιο Λάππα** για την αμέριστη συμπαράστασή τους, στην προσπάθεια που κατέβαλλα για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερα όμως ευχαριστώ τον **Αναπληρωτή Καθηγητή** του Μαθηματικού τμήματος του **Ε.Κ.Π.Α., Ευστάθιο Γιαννακούλια**, ο οποίος και ως Καθηγητής μου στην αίθουσα αλλά και ως επιβλέποντας αυτής της διπλωματικής εργασίας, ανάλωσε πολύ από τον χρόνο του ώστε να στεφθεί η προσπάθεια αυτή με επιτυχία.

Αθήνα , Οκτώβριος 2008

Μεταπτυχιακός Φοιτητής
Χριστιάς Σπύρος

Στο γιο που έρχεται, στη σύζυγο μου Γεωργία για την υπομονή της, και στους γονείς μου για την στήριξη που μου παρέχουν μέχρι και σήμερα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος : **3**

Κεφάλαιο 1ο : Σύντομο Βιογραφικό του **Brook Taylor** – Συνοπτική Παρουσίαση της Εργασίας του **Taylor** **5**

1.1. Σύντομο Βιογραφικό του **Brook Taylor** **5**

1.2. Συνοπτική Παρουσίαση της Εργασίας του **Taylor** **7**

Κεφάλαιο 2ο : Τέσσερις Βασικές Προτάσεις της Εργασίας του **Taylor**.....**14**

2.1. Εισαγωγή **14**

2.2. Η Πρόταση 2 των ***«Μεθόδων»*** **14**

2.3. Η Πρόταση 3 των ***«Μεθόδων»*** **19**

2.4. Η Πρόταση 7 – Πόρισμα 2 των ***«Μεθόδων»*** **28**

2.5. Η Πρόταση 11 των ***«Μεθόδων»*** **30**

Κεφάλαιο 3ο : Η Διαμόρφωση της Έννοιας της Σειράς **Taylor** μέσα από τις Εργασίες των **Gregory, Newton**, **Stirling**, **Leibniz**, **Johann Bernoulli** και **De Moivre** **34**

3.1. Εισαγωγή **34**

3.2. Η Εργασία του **Gregory**..... **34**

3.3. Η Εργασία του **Newton**..... **36**

3.4. Η Εργασία του **Stirling** **39**

3.5. Η Εργασία του **Leibniz** **40**

3.6. Η Εργασία του **Johann Bernoulli** **45**

3.7. Η Εργασία του **De Moivre** **48**

3.8. Συμπεράσματα από τις Προηγούμενες Εργασίες **51**

Κεφάλαιο 4ο : Η Σύνδεση των Σειρών **Taylor** και **Johann Bernoulli** – Το Θεώρημα των Προσεγγίσεων του **Taylor** – Γενικά Συμπεράσματα.....**54**

4.1. Η Σύνδεση των Σειρών **Taylor** και **Johann Bernoulli**..... **54**

4.2. Το Θεώρημα των Προσεγγίσεων του **Taylor** **56**

4.3. Γενικά Συμπεράσματα..... **61**

Παράρτημα Α΄ : Η Πρακτική Εφαρμογή και η Σύγχρονη Μορφή του θεωρήματος **Taylor**.....**64**

Α1. Η Πρακτική Εφαρμογή του θεωρήματος **Taylor** **64**

Α2. Η Σύγχρονη Μορφή του Θεωρήματος **Taylor**..... **68**

Παράρτημα Β΄ : Η Θεωρία των Ροών του **Isaac Newton**..... **74**

Παράρτημα Γ΄ : Στοιχεία Θεωρίας των Εξισώσεων Διαφορών..... **79**

Γ1. Ορισμοί **79**

Γ2. Βασικές Μέθοδοι Επίλυσης των Διαφοροεξισώσεων..... **79**

Βιβλιογραφία : **84**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

«Ένας απλός αναλυτικός τύπος στη μέθοδο των προσαυξήσεων που έχει προσφέρει στον Taylor μία τέτοια φήμη που ακόμη και οι πιο πολύτομες εργασίες δεν είναι ικανές να την περιγράψουν». (John Playfair : 1842)

Brook Taylor (1685 – 1731)

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται κατά κύριο λόγο στο βιβλίο του Καθηγητή Μαθηματικών του Πανεπιστημίου **Tufts** της **Μασαχουσέτης**, **Lenore Feigenbaum**, με τίτλο ***«Brook Taylor and the methods of Increments»*** εκδόσεων **Springer (1984)**. Ο **Feigenbaum** με αυτό το βιβλίο προσπαθεί να επιβεβαιώσει τη μαθηματική συνεισφορά της εργασίας του **Taylor**, μέσα από μία προσεκτική ανάλυση των ***«Μεθόδων»*** και αδημοσίευτων εγγράφων του **Taylor**.

Η εργασία που παρουσιάζεται αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια και τρία παραρτήματα.

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει μία συνοπτική βιογραφία του **Taylor** καθώς και μία γενική περίληψη της φύσης, της δομής και του περιεχομένου των ***«Μεθόδων»***, με σκοπό να αντιληφθούμε το μέγεθος της σπουδαιότητας του έργου του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζονται λεπτομερώς τέσσερις προτάσεις ειδικού μαθηματικού και ιστορικού ενδιαφέροντος, στις οποίες απεικονίζονται κάποιες αξιοσημείωτες πτυχές της εργασίας του **Taylor** όπως η διορατικότητά του, η ευστροφία του και το γενικά συνοπτικό του ύφος παρότι οι σημειώσεις του υπήρξαν δυσανάγνωστες. Οι προτάσεις αυτές και ειδικότερα η πρόταση 7 - πόρισμα 2 αλλά και η πρόταση 11, ήταν η αιτία της έντονης διαμάχης του με τον **Johann Bernoulli** και της κριτικής που του ασκήθηκε από τους Ευρωπαίους μαθηματικούς. Αυτές οι δύο προτάσεις παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού αποτελούν τις δύο εκδοχές της σειράς **Taylor**.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιέχεται μία έρευνα που αναδεικνύει την

διαμόρφωση της έννοιας της σειράς Taylor μέσα από τις εργασίες των **James Gregory**, **Newton**, **James Stirling**, **Leibniz**, **Johann Bernoulli** και **Abraham De Moivre**. Αυτές οι έξι εργασίες εξετάζονται ως μία εισαγωγή της εργασίας του **Taylor** στις σειρές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγονται κάποια νέα στοιχεία από αδημοσίευτα έγγραφα του **Taylor**, που δηλώνουν ότι είναι απαραίτητη η αναδιατύπωση της σχέσης μεταξύ των θεωρημάτων **Taylor** και **Bernoulli** και συμπερασματικά υποστηρίζεται ότι είναι απολύτως δικαιολογημένο να αποδίδουμε στον **Taylor** το θεώρημα που αφορά στις σειρές, σε αντίθεση με κάποιες άλλες απόψεις που υπήρχαν στο παρελθόν.

Στο παράρτημα Α’ παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές του θεωρήματος, με σκοπό να διαπιστώσουμε τη διδακτική του χρησιμότητα και την πρακτική του εφαρμογή και στη συνέχεια δίνεται η απόδειξη του θεωρήματος του **Taylor** στη σύγχρονη μορφή του.

Τέλος, στο παράρτημα Β’ αναφέρονται κάποια βασικά στοιχεία από την θεωρία των ροών του **Newton**, που είναι χρήσιμα για την κατανόηση εννοιών και συμβολισμών που περιλαμβάνονται στην εργασία, ενώ στο παράρτημα Γ’ δίνονται μερικά στοιχεία από την θεωρία των εξισώσεων διαφορών, που αφορούν στην κατανόηση της Πρότασης 2 των ***«Μεθόδων»***.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ BROOK TAYLOR - ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ TAYLOR

1.1. ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ BROOK TAYLOR

Ο **Brook Taylor** γεννήθηκε τον Αύγουστο του **1685** στο οικογενειακό κτήμα **Brifons** των **Taylor**, κοντά στο **Canterbury**. Γονείς του ήταν ο **John Taylor** και η **Olivia Tempest**. Οι **Taylor** αποτελούσαν μία εύπορη οικογένεια εκείνης της εποχής γεγονός το οποίο τους επέτρεψε να προσλάβουν δάσκαλους στο σπίτι για τη σχολική εκπαίδευση του μικρού **Taylor**. Έτσι ο **Brook Taylor** είχε ήδη αποκτήσει αρκετές γνώσεις, πριν την εισαγωγή του στο κολέγιο του **St. Jones** του **Cambridge**, τον Απρίλιο του **1701**. Στο κολέγιο αυτό εισάγεται με σκοπό να ξεκινήσει νομικές σπουδές. Κατά τη διάρκεια των σπουδών του παρακολουθεί ταυτόχρονα και πολλές μαθηματικές διαλέξεις. Έτσι κατάφερε να αναπτύξει έντονη μαθηματική δραστηριότητα, η οποία τον οδήγησε στη συγγραφή της πρώτης μαθηματικής του εργασίας το **1708**. Σύμφωνα με τα αρχεία του **Cambridge (1927)** αποφοίτησε το **1709** και συνέχισε τις σπουδές του για ένα ανώτερο δίπλωμα, μέχρι το **1714**. Στη συνέχεια κινήθηκε προς το Λονδίνο με σκοπό να γίνει δικηγόρος στο δικαστήριο των Αψίδων. Τα έγγραφά του δεν περιέχουν καμία αναφορά σε νομικές δραστηριότητες οποιουδήποτε είδους και έτσι δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι άσκησε το επάγγελμα του δικηγόρου. Αντίθετα, είναι πλήρως επιβεβαιωμένο ότι εκείνα τα χρόνια ανέπτυξε το μαθηματικό και επιστημονικό του ταλέντο. Στις **3 Απριλίου 1712** επιλέχθηκε μαζί με τον **Abraham De Moivre** και τον **Francis Aston** ως συνεργάτης της Βασιλικής Ένωσης για να συμμετάσχει σε έρευνες που αφορούσαν διαφωνίες πάνω σε θέματα Απειροστικού Λογισμού. Εάν και η συμμετοχή του ήταν περιορισμένη, λόγω της μικρής διάρκειας των εργασιών της επιτροπής, κατόρθωσε να γίνει μέλος της ομάδας του **Isaac Newton** και έτσι μπόρεσε να προετοιμασθεί για την μετέπειτα δραστηριότητά του στην Νευτώνεια Μηχανική και σε ζητήματα μεταβλητότητας του Απειροστικού Λογισμού. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου έγινε φίλος με τους **Newton** και **John Keill**. Ο **Keill**, ο οποίος ήταν τότε Καθηγητής Αστρονομίας στην Οχφόρδη, ενθάρρυνε το νεαρό τότε **Taylor** να δημοσιοποιήσει τις μαθηματικές ανακαλύψεις του. Οι πρώτες δημοσιεύσεις έγιναν το **1713** στο ***«Philosophical Transactions»*** και αφορούσαν στο κέντρο μίας κίνησης σε ταλάντωση και στις σειρές.

Από τον Ιανουάριο του **1714** έως και τον Οκτώβριο του **1718** ο **Taylor** κατείχε τη θέση του γραμματέα της Βασιλικής Ένωσης. Κατά τη διάρκεια αυτών των ετών δημοσίευσε διάφορα άρθρα στο ***«Philosophical Transactions»*** μεταξύ των οποίων ήταν και μία πραγματεία σχετικά με τη Γραμμική Προοπτική.

Ο **Taylor** ήταν ιδιαίτερα επιτυχής στο να προσελκύει διάσημους φίλους αλλά και με τον ίδιο τρόπο ξακουστούς εχθρούς μέσα στο περιβάλλον της μαθηματικής κοινότητας. Στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, κατά τη διάρκεια της διαμάχης του με τον **Leibniz**, κατάφερε και πήρε με το μέρος του πολλούς από τους πιο ένθερμους υποστηρικτές του **Newton**. Έτσι προκάλεσε τον θυμό του **Leibniz** καθώς και του συμμάχου του **Johann Bernoulli**. Ως μέλος του επιστημονικού κύκλου του **Newton** και αργότερα ως γραμματέας της Βασιλικής Ένωσης μπόρεσε εκτός από τον **Keill** να προσελκύσει και τον **Abraham De Moivre** (Πολιτογραφημένος Άγγλος) ο οποίος ήταν υπέρμαχος του **Newton** αφού αποτελούσε έναν από τους πιο κοντινούς του φίλους.

Ο **Taylor** ήταν συχνός επισκέπτης της Ευρώπης και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την γνωριμία του με πολλούς επιστήμονες και ιδιαίτερα αυτούς του Παρισιού. Τρεις από αυτούς που επιζητούσαν την παρέα του ήταν οι πολιτικοί **Bolingbroke, Conti** και ο Γάλλος μαθηματικός **Pierre Remond De Monmort** ο οποίος είχε εκπονήσει και μία σημαντική εργασία για τη θεωρία των Πιθανοτήτων. Κατά τα τελευταία χρόνια της αμφισβήτησης του Απειροστικού Λογισμού, η πιο έμπιστη φιλία αναπτύχθηκε με τον **Monmort** ο οποίος πέτυχε μία διεξοδική αλληλογραφία όχι μόνο με τον **Taylor** αλλά και με τον **Johann Bernoulli** ο οποίος ήταν από τους πιο σημαντικούς πολέμιους του **Taylor**. Στη διάρκεια της γνωριμίας τους, διατήρησαν πολύ στενή επαφή μέσω αλληλογραφίας, περιστασιακών επισκέψεων ο ένας στον άλλο και μίας φιλικής δημόσιας συζήτησης σχετικά με την αξία της θεωρίας της βαρύτητας του **Newton**. Ουσιαστικά ο **Monmort** υπήρξε ο μεσολαβητής ανάμεσα στον **Taylor** και τον **Bernoulli**. Μεγάλος αριθμός των μεταξύ τους επιστολών εκθέτεται στο Cambridge και στην Βασιλεία της Ελβετίας και επιβεβαιώνει τη σφοδρή αντιπαλότητα για τις μαθηματικές ανακαλύψεις αυτών των δεκαετιών. Ο **Monmort** υπήρξε ο πιο σημαντικός σύμμαχος του **Taylor** στις επικριτικές και συχνά εχθρικές απόψεις των **Leibniz** και **Johann Bernoulli**. Ο **Leibniz** ήταν υπεύθυνος για μία δυσμενή αναθεώρηση ενός κειμένου του **Taylor** στο περιοδικό ***«Acta Eruditorum»,*** ενώ ο **Bernoulli** κατηγορούσε τον **Taylor** για κλοπή των ιδεών του. Η απάντηση του **Taylor** σε αυτές τις κατηγορίες, συνέβαλλε στην κατανόηση του περιεχομένου του έργου του ενώ συγχρόνως ανέδειξε και τη διορατικότητά του, γεγονός που τον βοήθησε στην αντιπαράθεσή του με τον **Bernoulli**.

Μετά το **1721**, ο **Taylor** έπαψε να υπερασπίζεται τον εαυτό του στις επικρίσεις του **Bernoulli** και προτίμησε μία σιωπηλή στάση παρά τις συνεχείς επιθέσεις. Σε αυτή τη δεκαετία είχαν προκύψει κάποια ζητήματα που τον κράτησαν μακριά όχι μόνο από τη διαμάχη με τον **Bernoulli** αλλά και από την ίδια την εργασία του. Το διάστημα αυτό τον βρίσκει με σοβαρά προβλήματα υγείας και έντονη συναισθηματική πίεση λόγω κακών σχέσεων που είχε με τον πατέρα του. Το **1723** χάνει τη γυναίκα του και το ετοιμόγεννο παιδί του κατά τη διάρκεια του τοκετού. Το **1730** χάνει ξανά τη δεύτερη γυναίκα του

πάνω στον τοκετό, αλλά αυτή τη φορά το νεογέννητο παιδί τους κατάφερε να ζήσει. Η γρήγορη διαδοχή όλων αυτών των τραγικών γεγονότων, επιδείνωσε κατά πολύ την κατάσταση της υγείας, του με αποτέλεσμα τον θάνατό του κατά τη διάρκεια του χειμώνα του έτους **1731**.

Η ποικιλία των δημοσιεύσεων του **Taylor** δείχνει ότι ήταν ένας άνθρωπος με πολλά ενδιαφέροντα. Από συντάκτης μίας δυσνόητης εργασίας στην μαθηματική θεωρία της Γραμμικής Προοπτικής, μπορούσε να εμφανισθεί και ως ένας ταλαντούχος ζωγράφος διαφόρων τοπίων. Χαρακτηριστικό της πολυσύνθετης προσωπικότητάς του είναι ότι τα πειράματα που αφορούσαν στην μελέτη των σειρών, τα εκτέλεσε σε ένα μουσικό όργανο που το χρησιμοποιούσε για την ψυχαγωγία των φίλων του. Εκτός από τα μαθηματικά θέματα που αφορούσαν στις σειρές, ασχολήθηκε επίσης με την ολοκλήρωση συναρτήσεων (αυτός επινόησε και απέδειξε τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης $\int \mathbf{ydx} = \mathbf{yx} - \int \mathbf{xdy}$), τη θεωρία πιθανοτήτων καθώς και με προβλήματα θερμότητας και μαγνητισμού.

Στο απόσπασμα αυτό αναφέρθηκαν περισσότερο τα άτομα και τα γεγονότα που άσκησαν ειδική επίδραση στην μαθηματική εργασία του **Taylor**. Για ένα πιο λεπτομερές βιογραφικό του **Taylor**, μπορούμε να αποταθούμε στο δοκίμιο του εγγονού του, **William Young (1793)**, καθώς και στις εργασίες των **Heinrich Auchter (1937)** και **Phillip S. Jones (1976)**.

1.2. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ TAYLOR

Εάν θέλουμε να εκτιμήσουμε την προσοχή που αρμόζει σε μία μαθηματική εργασία σε συνδυασμό με το όνομα του συγγραφέα, τότε ο **Brook Taylor** θα ήταν σήμερα ένας από τους πιο ευρύτατα γνωστούς μαθηματικούς. Για όλους αυτούς που έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού οι σειρές **Taylor** είναι μία οικία φράση εάν και σχετικά λίγοι γνωρίζουν κάποια πράγματα αναφορικά με τον **Taylor** και τις μαθηματικές εργασίες του.

Η κύρια μαθηματική εργασία του **Taylor** έχει τίτλο ***«The Methodus Incrementorum directa et inversa»*** (ευθεία και αντίστροφη μέθοδος των αυξήσεων) και δημοσιεύθηκε το **1715** στο Λονδίνο. Αναφέρεται κατά βάση στη θεωρία των ροών **(fluxions)** του **Newton**, (βασικά στοιχεία της θεωρίας των ροών του **Newton** παραθέτονται στο Παράρτημα Β'), και ενώ μεμονωμένα αποτελέσματα του κειμένου έχουν τύχει λεπτομερούς εξέτασης, κανείς δεν έχει αναλύσει όλη την εργασία και ούτε έχει δημοσιεύσει μία πλήρη μετάφραση αυτού του έργου. Η δημοσίευση αυτού του έργου πραγματοποιήθηκε μέσα σε κλίμα έντονης διαμάχης μεταξύ των μαθηματικών κοινοτήτων. Αυτοί που αντέδρασαν πιο έντονα από όλους ήταν οι **Leibniz** και **Bernoulli**. Χαρακτηριστικά, σε μία επιστολή του **Bernoulli** προς τον **Leibniz** αναφέρονταν τα εξής : ***«Ο Taylor προσπαθεί να δώσει ένα δείγμα των***

ικανοτήτων του αλλά δύσκολα μπορούμε να βρούμε κάτι που δεν έχει ειπωθεί πιο πριν. Το βιβλίο κατά μεγάλο βαθμό έχει γραφεί σκοταδιστικά. Φυσικά εγώ δεν το βρίσκω παράξενο το πώς καταφέρνει να προβάλλει ιδέες των άλλων ως δικές του. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνει να κρύψει την αντιγραφή είναι η σκοταδιστική του γραφή». Σε απάντησή του ο **Leibniz** έγραφε : ***«Εύκολα μπορώ να διαπιστώσω ότι το βιβλίο του Taylor δεν σε ικανοποίησε. Έχω την εντύπωση ότι ένας τέτοιος συγγραφέας δεν είναι καθόλου ικανός στην θέση του γραμματέα της Βασιλικής Ένωσης. Σε μία τέτοια θέση πιθανόν να ταιριάζει ένας άνθρωπος με λιγότερες μαθηματικές ικανότητες αλλά απαραίτητα πρέπει να έχει μία γενικότερη μόρφωση»***.

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι, δεν ήταν μόνο οι πολέμιοι του **Taylor** οι οποίοι έκαναν κριτική στο μοντέλο γραφής του. Ο στενός του φίλος **Monmort** εξομοίωνε το βαρετό καθήκον της μελέτης των ***«Μεθόδων»*** ως την ***«κωπηλασία μίας γαλέρας»***. Στην πραγματικότητα πολλοί από αυτούς που διάβασαν το βιβλίο πίστευαν ότι δεν ήταν δυνατόν να γίνει μελέτη του βιβλίου χωρίς να ταλαιπωρηθούν οι αναγνώστες. Ο μόνος που διαφωνούσε με αυτά τα μη κολακευτικά σχόλια ήταν ο ίδιος ο **Taylor** ο οποίος σε επιστολή του προς τον **Monmort** έγραφε τα εξής : ***«Κρίνοντας τους αναγνώστες με βάση τον εαυτό μου και το τι βρίσκω δυσνόητο και ανεξήγητο, πιστεύω ότι και οι άλλοι αυτά βρίσκουν επίσης. Ειδικά σε αυτούς που τα θέματα είναι καινούργια. Γίνομαι αντιληπτός μέσω της επιτυχίας των γραπτών μου αφού είναι πολύ δύσκολο να γράφεις κατανοητά πάνω σε ζητήματα που είναι εκτός του συνηθισμένου».*** Προφανώς ο **Taylor** δεν ήταν πληροφορημένος για την ολοφάνερη ανεπάρκεια στο γράψιμό του και έτσι αποτυγχάνοντας να εκτιμήσει τις ανάγκες του κοινού του πέτυχε να γίνει ο ίδιος ο χειρότερος πολέμιος του εαυτού του. Δύο σημαντικοί παράγοντες που είναι υπεύθυνοι για την μικρή αποδοχή του γραπτού του έργου, είναι η περιεκτικότητα και η έλλειψη σαφήνειας κατά τη συγγραφή των κειμένων του. Ο **Bernoulli** με έμφαση δήλωνε ότι : ***«Ο Taylor προσέφερε στο εαυτό του και στους άλλους κακή υπηρεσία»***. Παρά την κακή κριτική ο **Taylor** κατέστη ένας άξιος αντίπαλος για τον **Bernoulli.** Ο **Bernoulli** έχοντας διαβάσει με προσοχή την πραγματεία των ***«Μεθόδων»*,** βρήκε ισχυρό κίνητρο για να επεξεργασθεί ξανά διάφορα προβλήματα μεταξύ των οποίων και το ισοπεριμετρικό πρόβλημα που είχε επεξεργασθεί νωρίτερα, με όχι τόσο καλή λύση, ο αδελφός του **Jacob Bernoulli.**

Ο **Moritz Cantor** πιστεύει ότι αυτή η δημόσια κριτική από τον **Bernoulli** έκανε τις ***«Μεθόδους»*** ευρύτατα γνωστές στην Ευρώπη. Φυσικά κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι αυτή η σκληρή κριτική θα αποθάρρυνε και κάποιους σοβαρούς αναγνώστες από την μελέτη αυτής της εργασίας. Όμως μάλλον αυτό δεν συνέβη αφού από τις καταθέσεις πολλών μεταγενέστερων επιστημόνων **(Colin Maclaurin, James Stirling, Daniel Bernoulli, D'**

Alembert, Joseph Louis Lagrange) και ειδικά του **Leonhard Euler** (μαθητής του **Johann Bernoulli**) φαίνεται ότι η εργασία του **Taylor** επηρέασε και ενέπνευσε τις δικές τους εργασίες μέσω των αποτελεσμάτων των ***«Μεθόδων»*.**

Παρότι οι ***«Μέθοδοι»*** έχουν αναγνωρισθεί διεθνώς ως μία πρωτοποριακή πραγματεία των πεπερασμένων διαφορών, οι ιστορικοί απολογισμοί δεν έχουν παράσχει τίποτε περισσότερο από μία επιφανειακή έρευνα για το περιεχόμενό τους. Όμως υπάρχουν δύο βασικοί λόγοι που καθιστούν αναγκαία μία προσεκτικότερη εξέταση του κειμένου :

α) Ο πρώτος λόγος είναι ότι οι ***«Μέθοδοι»*** αντιπροσωπεύουν μία περίοδο για την οποία, συγκριτικά με άλλες, έχουν γραφεί λίγα. Η εργασία του **Taylor** απεικονίζει το ταλέντο και τις ανησυχίες εκείνης της πρώτης γενιάς των ερευνητών (Βρετανών και άλλων Ευρωπαίων) που ανατράφηκαν με τις ιδέες και τις μεθόδους του νεο-αναπτυσσόμενου Απειροστικού Λογισμού. Είναι οι ερευνητές που εμποτίστηκαν με μία εξαιρετική αισιοδοξία που ήταν αποτέλεσμα της δύναμης και της γονιμότητας της νέας θεωρίας. Έτσι ο **Taylor** αξίζει περαιτέρω προσοχής, ως ένας από τους λίγους Άγγλους μαθηματικούς που προσπάθησε να ασχοληθεί με τα προκλητικά προβλήματα των Νευτώνειων υπολογισμών και να συμμετέχει σε μία θερμή συζήτηση με αναγνωρισμένους μαθηματικούς αυτής της εποχής.

β) Ο δεύτερος λόγος αφορά στον πλούτο του αδημοσίευτου έως σήμερα υλικού που υπάρχει συντηρημένο στη βιβλιοθήκη της Βασιλικής Ένωσης του Λονδίνου καθώς και στη βιβλιοθήκη του κολεγίου του **Cambridge**. Αυτό το υλικό περιέχει αλληλογραφία του **Taylor**, σημειωματάρια και διάφορα άλλα έγγραφα που περιλαμβάνουν πολλές από τις προτάσεις που αναφέρονται στις ***«Μεθόδους»*** και αποδεικνύουν τη σπουδαιότητα των επιτευγμάτων του **Taylor**.

Μέχρι τώρα η έρευνα για τον **Taylor** έχει περιορισθεί σε δημοσιευμένα βιβλία του, σε μικρή μερίδα τυπωμένης αλληλογραφίας του καθώς και σε δημοσιευμένες εργασίες μεταγενέστερων μαθηματικών. Οι πιο σημαντικές πηγές σχετικά με τη ζωή και τα επιτεύγματα του **Taylor** είναι η βιογραφία του από τον εγγονό του **William Young (1793)** και η πιο πρόσφατη διατριβή του **Heinrich Auchter (1937)**. Το μεγαλύτερο μέρος των επιστολών που κατείχε ο **Young** ανατυπώθηκε αργότερα με σχολιασμένη μορφή στη διατριβή του **Auchter.** Η μελέτη του **Auchter** εκτός από μία συνοπτική περίληψη του περιεχομένου των ***«Μεθόδων»*** περιελάμβανε και μία άριστη περιγραφή των ζητημάτων της διαμάχης μεταξύ **Taylor** και **Bernoulli**. Ο **Auchter** ενδιαφέρθηκε κυρίως για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των σειρών **Taylor** με προηγούμενες εργασίες των **Leibniz** και **Bernoulli**. Έτσι η έρευνά

του επικεντρώθηκε κυρίως στην Πρόταση 7 – Πόρισμα 2 που αφορά στις σειρές **Taylor** και στην Πρόταση 11 που αφορά στην εκδοχή του **Taylor** για τις σειρές **Bernoulli**.

Η εργασία του **Taylor** μπορούμε να πούμε ότι χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη. Στο πρώτο μέρος εξηγούνται οι αρχές μίας νέας επαυξητικής μεθόδου η οποία εξάγεται λαμβάνοντας την πρώτη και τελευταία αναλογία των δημιουργούμενων αυξήσεων. Στο δεύτερο μέρος παραθέτονται μερικά παραδείγματα που αφορούν στη χρησιμότητα αυτής της μεθόδου σε κάποια προβλήματα, όπως στο άθροισμα των αριθμητικών σειρών, στην εύρεση εφαπτόμενων και ακτινών καμπυλότητας, στην αλυσοειδή καμπύλη, στα τόξα, στην ταλάντωση μίας μηχανικής σειράς, στα κέντρα της ταλάντωσης και της κρούσης, στην πυκνότητα της ατμόσφαιρας και τέλος στη διάθλαση του φωτός.

Το κείμενο περιέχει 118 σελίδες και μία σύντομη εισαγωγή στην οποία ο **Taylor** περιγράφει την μέθοδο των αυξήσεων και τη σχέση της με την μέθοδο των ροών του **Newton**. Οι προτάσεις 1 – 12 αποτελούν το πρώτο μέρος και αφορούν στις θεμελιώδεις αρχές των πεπερασμένων διαφορών, στη μέθοδο των προσαυξήσεων και στη λύση πεπερασμένων διαφορών και διαφορικών εξισώσεων. Οι προτάσεις 13 – 27 του δεύτερου μέρους περιέχουν τις εφαρμογές της μεθόδου των αυξήσεων και της μεθόδου των ροών του **Newton** στα μαθηματικά και την μηχανική. Μερικά από αυτά τα προβλήματα, όπως ο προσδιορισμός της εξίσωσης μίας κίνησης ή η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης μίας ακτίνας του φωτός, διαπραγματεύτηκαν για πρώτη φορά από τον **Taylor**. Κάποια άλλα προβλήματα, όπως το πρόβλημα της αλυσοειδούς καμπύλης ή το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, είχαν μελετηθεί νωρίτερα από άλλους Ευρωπαίους μαθηματικούς και ειδικότερα από τους **Huygens, Leibniz** και τους αδελφούς **Jacob** και **Johann Bernoulli**.

Σύμφωνα με κάποιο απολογισμό των ***«Μεθόδων»*** που είχε κάνει ο **Taylor** στο ***«Philosophical Transactions»*** αυτό που ουσιαστικά τον οδήγησε στην μέθοδο των προσαυξήσεων ήταν η μελέτη της μεθόδου των ροών του **Newton**. Σε κάποιο απόσπασμα αυτού του απολογισμού αναφέρει τα εξής : ***«Σε αυτή τη μέθοδο εξετάζω τις ποσότητες όπως διαμορφώνονται από μία συνεχή προσθήκη των μερών ενός πεπερασμένου μεγέθους και αυτά τα μέρη ονομάζω αυξήσεις των ποσοτήτων επειδή από αυτή την προσθήκη οι ποσότητες αυξάνονται. Θεώρησα απαραίτητο να εξετάσω λεπτομερώς τις ιδιότητες των αυξήσεων διότι από αυτές μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε πλήρως τη μέθοδο των ροών που οφείλεται στον σπουδαίο επιστήμονα Sir Isaac Newton»***. Ο **Taylor** εκτίμησε ότι η μέθοδός του θα έδινε μία ισχυρότερη και συνεπέστερη βάση στη μέθοδο του **Newton**. Χαρακτηριστικά ανέφερε ότι : «***Οι αρχές της μεθόδου των ροών μπορούν να προέλθουν άμεσα ως πόρισμα από τις αρχές της μεθόδου των προσαυξήσεων. Έτσι για να***

γίνει πιο κατανοητή η μέθοδος των ροών σκέφτηκα ότι είναι καλύτερα να μελετήσω αυτές τις δύο μεθόδους ταυτόχρονα και να τις χειρισθώ σαν να ήταν μία μέθοδος».

Έτσι, με αυτή τη συνδυασμένη επεξεργασία των δύο μεθόδων, ο **Taylor** επινόησε ένα συμβολισμό για τις αυξήσεις παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιούσε ο **Newton** για τις ροές. Κατά κύρια βάση χρησιμοποιεί τον συμβολισμό του **Newton**, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις προσπαθεί να εισάγει και δικό του συμβολισμό. Σημαντικό είναι ότι πρώτος αυτός χρησιμοποιεί το σύμβολο $\mathbf{y}_{\mathbf{v}}$ για την παράγωγο νιοστής τάξης. Ο **Newton** στον τετραγωνισμό των καμπυλών, συμβόλιζε τις ροές με $\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}}$ κ.λ.π. ενώ ο **Taylor** συμβόλιζε τις πεπερασμένες αυξήσεις του x με $\mathbf{x}_{\bullet}, \mathbf{x}_{\bullet\bullet}, \mathbf{x}_{\bullet\bullet\bullet}$ κ.λ.π. ή με ένα νούμερο κάτω από το x. (π.χ. : $\mathbf{x}_{\bullet} = \mathbf{x}_{1}$). Όμως ο συμβολισμός του **Taylor** διέφερε σε δύο σημαντικά σημεία από αυτόν του **Newton** :

α) Ο **Newton** χρησιμοποιούσε τον συμβολισμό $\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''$ κ.ο.κ. για να δηλώσει τις ποσότητες των ονομαζόμενων ρεόντων ***(ρέον=fluent)***, δηλαδή αυτές τις ποσότητες των οποίων η πρώτη ροή ήταν x, η δεύτερη ροή ήταν $\mathbf{x}'$ κ.ο.κ. αντίστοιχα. Αντίθετα ο **Taylor** εισήγαγε αρνητικούς αριθμούς που γράφονταν κάτω από το x για να δηλώσει τις ολοκληρωτικές ποσότητες (τις αντίστοιχες στα ρέοντα του **Newton**). Έτσι $\mathbf{x}_{-1}$ είναι η ποσότητα της οποίας η πρώτη προσαύξηση είναι x, $\mathbf{x}_{-2}$ είναι η ποσότητα της οποίας η δεύτερη προσαύξηση είναι x κ.ο.κ. Άρα οι ποσότητες $\mathbf{x}_{-2}, \mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_{0}, \mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}$ … αποτελούν μία ακολουθία ποσοτήτων κάθε μία από τις οποίες είναι η προσαύξηση της αμέσως προηγούμενής της. Μία παρόμοια αντιμετώπιση είχε παρουσιασθεί 20 χρόνια νωρίτερα από τον **Leibniz** ο οποίος είχε συμβολίσει τα διαδοχικά διαφορικά της μεταβλητής x με : $\mathbf{d^{-2}x=\iint x}$, $\mathbf{d^{-1}x=\int x}$, $\mathbf{d^{0}x=x}$, $\mathbf{d^{1}x=dx}$, $\mathbf{d^{2}x=ddx}$ κ.ο.κ. Εάν και ο **Leibniz** είχε ιδιαίτερη αλληλογραφία με τον **Johann Bernoulli** για αυτή την ιδέα του, κανείς από τους δύο δεν την είχε δημοσιοποιήσει πριν αυτή εμφανισθεί στην εργασία του **Taylor**.

β) Η δεύτερη σημαντική διαφορά μεταξύ των συμβολισμών **Taylor** και **Newton** ήταν ότι ο **Taylor** χρησιμοποιούσε μικρές γραμμές πάνω και κάτω από την μεταβλητή **x** για να ορίσει τις διαδοχικές τιμές της. Έτσι για παράδειγμα οι τιμές $\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{x}_{'}, \mathbf{x}_{''}$ αντιπροσωπεύουν πέντε

διαδοχικές τιμές του x οι οποίες εξάγονται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\overset{//}{x} + (\underset{\bullet}{\overset{//}{x}}) = \overset{/}{x}, \quad \overset{/}{x} + (\underset{\bullet}{\overset{/}{x}}) = x, \quad x + \underset{\bullet}{x} = \underset{1}{x}, \quad \underset{1}{x} + (\underset{\bullet}{\underset{1}{x}}) = \underset{//}{x}.$$

Μετά την αναφορά στον συμβολισμό του, ο **Taylor** προχώρησε στην παρουσίαση των προτάσεων οι οποίες αποτελούν μέρη έξι θεματικών ενοτήτων και διαχωρίζονται ως εξής :

Ενότητα 1 : Περιέχει τις προτάσεις 1 έως και 5 οι οποίες αναφέρουν τα προκαταρκτικά θεωρήματα και τους εισαγωγικούς τύπους που χρησιμοποιούνται για το μετασχηματισμό και την επίλυση πεπερασμένων διαφορών και διαφορικών εξισώσεων. Η πρόταση 1 δείχνει τον τρόπο υπολογισμού των προσαυξήσεων, η πρόταση 2 αφορά στην αλλαγή μεταβλητής σε εξισώσεις διαφορών, η πρόταση 3 δίνει τους τύπους των παραγώγων αντίστροφων συναρτήσεων ενώ οι προτάσεις 4 και 5 διαπραγματεύονται τη θεωρία για τις αρχικές συνθήκες στις πεπερασμένες διαφορές και διαφορικές εξισώσεις.

Ενότητα 2 : Περιέχονται οι προτάσεις 6 έως και 9. Στις προτάσεις αυτές αναλύονται διάφορες μέθοδοι για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Στην πρόταση 7 συμπεριλαμβάνεται το πόρισμα 2 στο οποίο εισάγει το ανάπτυγμα της σειράς που σήμερα αποτελεί την γνωστή ***«σειρά Taylor»***. Η πρόταση 8 παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο μια σειρά που αποτελεί λύση διαφορικής εξίσωσης, μπορεί να δημιουργηθεί με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Σύμφωνα με τον **Langrage (1806)** αυτό αποτελεί το πιο γνωστό επίτευγμα του **Taylor**. Στην πρόταση 9 ο **Taylor** δίνει τη δική του εκδοχή ώστε να καθορίσει τον τύπο των σειρών που θα χρησιμοποιηθούν στην επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης.

Ενότητα 3 : Εδώ αναλύονται οι προτάσεις 10 έως και 12 οι οποίες αποτελούν μία ειδική περίπτωση των προτάσεων 6 έως και 9. Στις προτάσεις αυτές ο **Taylor** διαπραγματεύεται το γενικό πρόβλημα της εύρεσης του x συναρτήσει του z όταν μία διαφορική εξίσωση περιέχει μόνο μία παράγωγο της μορφής $\frac{d^n x}{dz^n}$. Στην πρόταση 10 εξετάζει την περίπτωση εύρεσης μίας λύσης διαφορικής εξίσωσης με πεπερασμένο πλήθος όρων, ενώ στις προτάσεις 11 και 12 παρουσιάζει τους τύπους που εκφράζουν το ολοκλήρωμα ως άπειρη σειρά.

Ενότητα 4 : Αποτελείται από τις προτάσεις 13 έως και 16 του δεύτερου μέρους των ***«Μεθόδων»***, οι οποίες περιέχουν εφαρμογές της μεθόδου των προσαυξήσεων και της μεθόδου των ροών. Στην πρόταση 13 ο **Taylor** χρησιμοποιεί τον τύπο παρεμβολής των **Gregory – Newton** προκειμένου να εξάγει το διωνυμικό ανάπτυγμα. Στην πρόταση 14 αναπτύσσει γενικούς τύπους αθροίσματος σειρών κάνοντας χρήση

πεπερασμένων διαφορών ενώ στην πρόταση 15 υπολογίζει τον τύπο για την ακτίνα της καμπυλότητας, θεωρώντας την ως ακτίνα των οριακών κύκλων που διέρχονται από τρία σημεία της καμπύλης.

Ενότητα 5 : Περιέχονται οι προτάσεις 17, 18, 19, 20, 21, 24 και 25, οι οποίες αναφέρουν διάφορα προβλήματα μηχανικής. Πρόκειται για προβλήματα που είχαν αντιμετωπισθεί στο παρελθόν και από άλλους επιστήμονες αλλά ο **Taylor** θεωρούσε ότι με την εργασία του προσέφερε μία νέα επίλυση. Στην ενότητα αυτή εξέτασε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, το πρόβλημα της αψίδας και το πρόβλημα των κέντρων μίας ταλάντωσης.

Ενότητα 6 : Περιλαμβάνει τις προτάσεις 22, 23, 26 και 27, που αναφέρονται στις πρώτες σημαντικές έρευνες για το πρόβλημα της ακολουθίας δονήσεων και το πρόβλημα της διάθλασης του φωτός στην ατμόσφαιρα. Η έρευνα του **Taylor** για τις ακολουθίες δονήσεων, αποτελεί το πιο γνωστό επίτευγμά του μετά το θεώρημα που αναφέρεται στις σειρές. Στην πρόταση 27 ασχολήθηκε με την εύρεση μίας διαφορικής εξίσωσης μέσω της οποίας μπορεί να περιγραφεί η διάθλαση του φωτός στην ατμόσφαιρα. Ο **Edmund Halley (1721)**, υποστηρίζει ότι, αυτή η έρευνα του **Taylor** είχε τον πλέον καταλυτικό ρόλο στην αναγνώρισή του από την μαθηματική κοινότητα εκείνης της εποχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ TAYLOR

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο **William Emerson**, το **1763**, στην εισαγωγή του βιβλίου του, έγραψε τα εξής για την εργασία του **Taylor** : ***«Αυτός που ανακάλυψε τη μέθοδο των προσαυξήσεων ήταν ο Brook Taylor, ο οποίος δημοσίευσε μία πραγματεία αυτής της μεθόδου. Όμως ο τρόπος γραφής του είναι τόσο περιεκτικός και αφηρημένος που δεν γίνεται κατανοητός από τους κοινούς αναγνώστες. Δυστυχώς αυτή η κομψή μέθοδος υπολογισμού έχει μείνει από τότε στο σκοτάδι αφού διαβάστηκε από λίγους και δεν βελτιώθηκε από κανέναν»***.

Πράγματι, η εργασία του **Taylor** διαβάστηκε από λίγους αλλά είναι αναληθές το ότι δεν βελτιώθηκε από κάποιους. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί στη συνέχεια της παρούσας εργασίας με την παρουσίαση κάποιων προτάσεων των ***«Μεθόδων»***. Έχουν επιλεγεί τέσσερις προτάσεις, κάθε μία από τις οποίες αντιπροσωπεύει μία σημαντική πτυχή της εργασίας του **Taylor**.

Αρχικά παρουσιάζεται η πρόταση 2, η οποία αφορά στην αλλαγή μεταβλητών σε πεπερασμένες εξισώσεις διαφορών και είναι πολύ σημαντική για τη θεμελίωση της θεωρίας των πεπερασμένων διαφορών και των διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια, δίνεται η πρόταση 3 που αναφέρεται στον τύπο της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης και στην οποία εμφανίζονται κάποιες αξιοσημείωτες τεχνικές για το μετασχηματισμό και την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, παρουσιάζονται η πρόταση 7 – πόρισμα 2, η οποία σήμερα είναι γνωστή ως το **Θεώρημα Taylor** και η πρόταση 11 η οποία αποτελεί την εκδοχή της σειράς **Taylor** στον Ολοκληρωτικό λογισμό.

2.2. Η ΠΡΟΤΑΣΗ 2 ΤΩΝ *«ΜΕΘΟΔΩΝ»*

Η πρόταση 2 παρουσιάζεται στις ***«Μεθόδους»*** ως εξής :

Πρόταση 2 : ***«Σε μία αυξητική (incremental) εξίσωση, η οποία περιέχει οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες αυτές τις μεταβλητές με νέες, που αυξάνονται με τις ίδιες αυξήσεις αλλά σε αντίστροφη σειρά»***.

Ο **Taylor**, σε μία δημοσίευσή του στο ***«Philosophical Transactions»***, θέλοντας να εξηγήσει την πρόταση αυτή, έγραφε : ***«Η πρόταση αυτή δείχνει πως μπορούμε να μετασχηματίσουμε μία εξίσωση στην οποία εμπλέκονται ολοκληρώματα και οι αυξήσεις τους ή ρέοντα και οι ροές τους»***. Η απόδειξη της πρότασης είναι πολύ σύντομη και δυσνόητη. Όμως σε

ένα σχόλιο που συνοδεύει την απόδειξή του, ο **Taylor** τονίζει ότι σε μία εξίσωση προσαυξήσεων στην οποία περιέχονται η μεταβλητή **x**, οι αυξήσεις της και η ομοιόμορφα ρέουσα μεταβλητή **z**, (η μεταβλητή **x** και οι διαφορές της σαν συναρτήσεις του **z**), μπορούμε να έχουμε κάποια συμπεράσματα εάν ξεκινήσουμε με μία σχέση που συνδέει τη μεταβλητή **x** με μία νέα μεταβλητή **v**.

Για παράδειγμα, εάν κάνουμε την αντικατάσταση $\mathbf{x=v^2}$ τότε οι προσαυξήσεις της μεταβλητής **x** θα υπολογίζονται ως εξής :

$\mathbf{\Delta x=(v+\Delta v)^2-v^2=2v\Delta v+(\Delta v)^2}$,

$\mathbf{\Delta^2 x =\Delta(2v\Delta v+(\Delta v)^2)=2(v+\Delta v)\Delta(v+\Delta v)+(\Delta(v+\Delta v))^2-2v\Delta v-(\Delta v)^2=}$

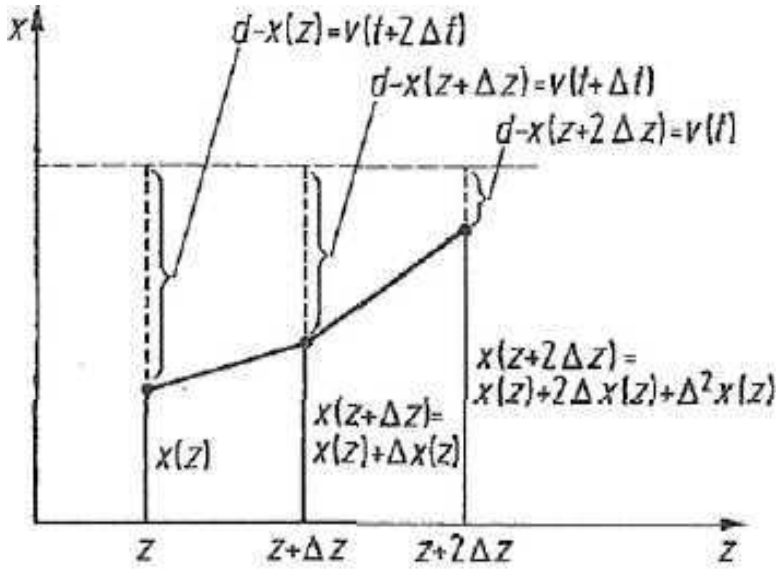
$\mathbf{=2v\Delta v+2v\Delta^2 v+2(\Delta v)^2+2\Delta v\Delta^2 v+(\Delta v)^2+(\Delta^2 v)^2+2\Delta v\Delta^2 v-2v\Delta v-(\Delta v)^2=}$

$\mathbf{=2(\Delta v)^2+2v\Delta^2 v+4\Delta v\Delta^2 v+(\Delta^2 v)^2}$, κ.ο.κ.

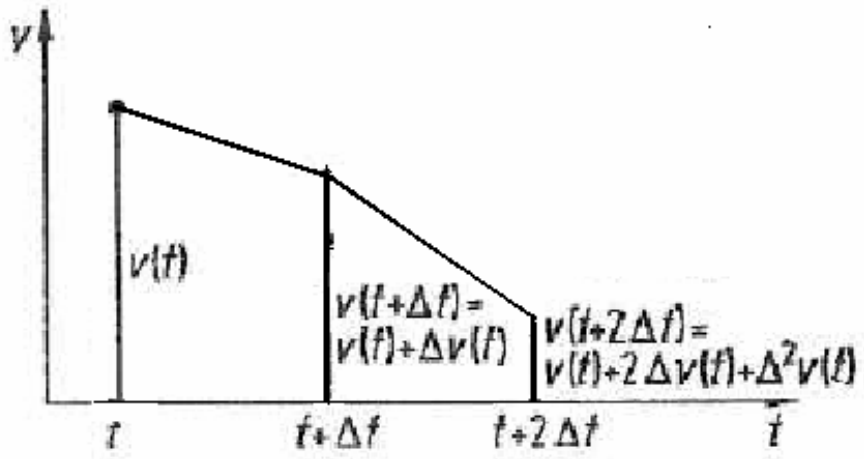
Εάν αντικαταστήσουμε αυτές τις σχέσεις στην αρχική εξίσωση, τότε παίρνουμε μία καινούργια εξίσωση η οποία περιέχει τη μεταβλητή **v**, τις προσαυξήσεις της και την ομοιόμορφα ρέουσα μεταβλητή **z**.

Όμοια, εάν αντικαταστήσουμε **d-v=x** θα έχουμε ότι **–Δv=Δx**. Σύμφωνα με τον **Taylor** εάν το **Δx** είναι θετικό στην αρχική εξίσωση (δηλαδή το **Δx** είναι μία προσαύξηση του **x**) τότε το **Δv** θα είναι μία αρνητική ποσότητα στην καινούργια εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή **v** και τις προσαυξήσεις της. Εάν θέλουμε το **Δv** να είναι θετική ποσότητα στη μετασχηματισμένη εξίσωση, τότε η πρόταση 2 πρέπει να εφαρμοσθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρουμε την απαιτούμενη αντικατάσταση. Έτσι, σύμφωνα με την πρόταση 2, για να συμβαίνει αυτό (να έχουμε το **Δv** θετικό στη μετασχηματισμένη εξίσωση), θα πρέπει καθώς το **x** αυξάνεται το **v** να μειώνεται κατά την ίδια προσαύξηση.

Η παραπάνω διαδικασία παριστάνεται γραφικά όπως φαίνεται από τα δύο ακόλουθα σχήματα **(Σχήμα 1 και Σχήμα 2)**.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Έστω μία εξίσωση που περιέχει την μεταβλητή **x(z)** και τις προσαυξήσεις της. Υποθέτουμε ότι η προσαύξηση της μεγαλύτερης τάξης στην εξίσωση είναι $\Delta^2(x(z))$. (Ο **Taylor** στην απόδειξή του θεωρεί την περίπτωση με μεγαλύτερη τάξη προσαύξησης την $\Delta^3(x(z))$). Αυτό που αναζητούμε είναι μία καινούργια εξίσωση, η οποία θα περιέχει τη μεταβλητή **v(t)** και τις προσαυξήσεις της, έτσι ώστε καθώς το **t** αυξάνεται τότε και η μεταβλητή **v** αυξάνεται, κατά τις ίδιες ποσότητες που η μεταβλητή **x** μειώνεται όταν μειώνεται το **z**. Οι εξισώσεις που συνδέουν τις μεταβλητές **x** και **v** είναι οι ακόλουθες :

$$x(z)=d-v(t+2\Delta t)=d-v(t)-2\Delta v(t)-\Delta^2 v(t) \quad (2.1)$$

$$x(z)+\Delta x(z)=d-v(t)-\Delta v(t) \quad (2.2)$$

$$x(z)+2\Delta x(z)+\Delta^2 x(z)=d-v(t) \quad (2.3)$$

Αφαιρώντας από την **(2.2)** την **(2.1)** και από την **(2.3)** την **(2.2)** θα πάρουμε :

$$\Delta x(z)=\Delta v(t)+\Delta^2 v(t) \quad (2.4)$$

$$\Delta x(z)+\Delta^2 x(z)=\Delta v(t) \quad (2.5)$$

Τέλος αφαιρώντας από την **(2.5)** την **(2.4)** θα έχουμε ότι : $\Delta^2 x(z)=-\Delta^2 v(t)$. Δηλαδή καταλήγουμε σε μία εξίσωση που περιέχει προσαυξήσεις μέχρι το $\Delta^2 x(z)$. Ο **Taylor** τονίζει ότι η μεταβλητή **z** μπορεί να αντικατασταθεί μέσω μίας παρόμοιας διαδικασίας και οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις διαδοχικές τιμές των **z** και **t** θα είναι οι εξής :

$$z=b-(t+2\Delta(t))=b-t-2\Delta(t) \quad (2.6)$$

$$z+\Delta(z)=b-(t+\Delta(t))=b-t-\Delta(t) \quad (2.7)$$

$$z+2\Delta(z)=b-t \quad (2.8)$$

(όπου b μία αυθαίρετη σταθερά). Τότε οι απαιτούμενες αντικαταστάσεις θα είναι $\Delta z=\Delta t$ (που προκύπτει από την αφαίρεση της **(2.6)** από την **(2.7)**) και $z=b-t-2\Delta t$. Ο **Taylor** δεν έδωσε παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το παρακάτω :

Έστω η εξίσωση $x(z)+2\Delta x(z)=4$ με αρχική συνθήκη την $x(0)=2$. **(2.9)**

Για την εξίσωση προσαυξήσεων η οποία περιέχει προσαυξήσεις πρώτης τάξης οι τύποι αντικαταστάσεων θα είναι οι παρακάτω :
x(z)=d-v(t)-Δv(t), Δx(z)=Δv(t), z=b-t-Δ(t), Δz=Δt. Υποθέτουμε ότι **d=4**, **b-Δt=0**, **Δz=Δt=1**. Τότε θα πάρουμε ότι **x(z)=4-v(t)-Δv(t)** και **Δv(t)=Δx(z)**. Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο ισότητες στην αρχική εξίσωση θα έχουμε ότι :
4-v(t)-Δv(t)+2Δv(t)=4 ⇔ Δv(t)=v(t) (2.10) με **Δv(0)=Δx(0)=** $\frac{4-x(0)}{2}=1$ και **Δv(0)=v(0)**. Άρα **v(0)=**1 είναι η καινούργια αρχική συνθήκη. Από τις εξισώσεις **(2.9)** και **(2.10)** και τις αρχικές τους συνθήκες, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των **x(z)** και **v(t)** ως εξής : Θέτοντας στην **(2.9)** όπου **z** το 0 θα πάρουμε ότι **Δx(0)=1 ⇔ x(1)-x(0)=1 ⇔ x(1)=x(0)+1 ⇔ x(1)=2+1 ⇔ x(1)=3**. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, θέτοντας στην **(2.9) z=1, 2, 3, …** παίρνουμε τις τιμές **x(2), x(3), …**. Όμοια εργαζόμαστε για να υπολογίσουμε τις τιμές **v(t)**. Θέτουμε στην **(2.10) t=0, 1, 2, 3, …** και έτσι λαμβάνουμε τις τιμές **v(1), v(2), v(3), …** αντίστοιχα. Στους παρακάτω πίνακες έχουμε τις τιμές των **x(z), Δx(z)** και **v(t), Δv(t)** για **z=0, 1, 2, 3** και **t=0, 1, 2, 3** αντίστοιχα.

z	0	1	2	3
x	2	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$
Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

t	0	1	2	3
v	1	2	4	8
Δv	1	2	4	8

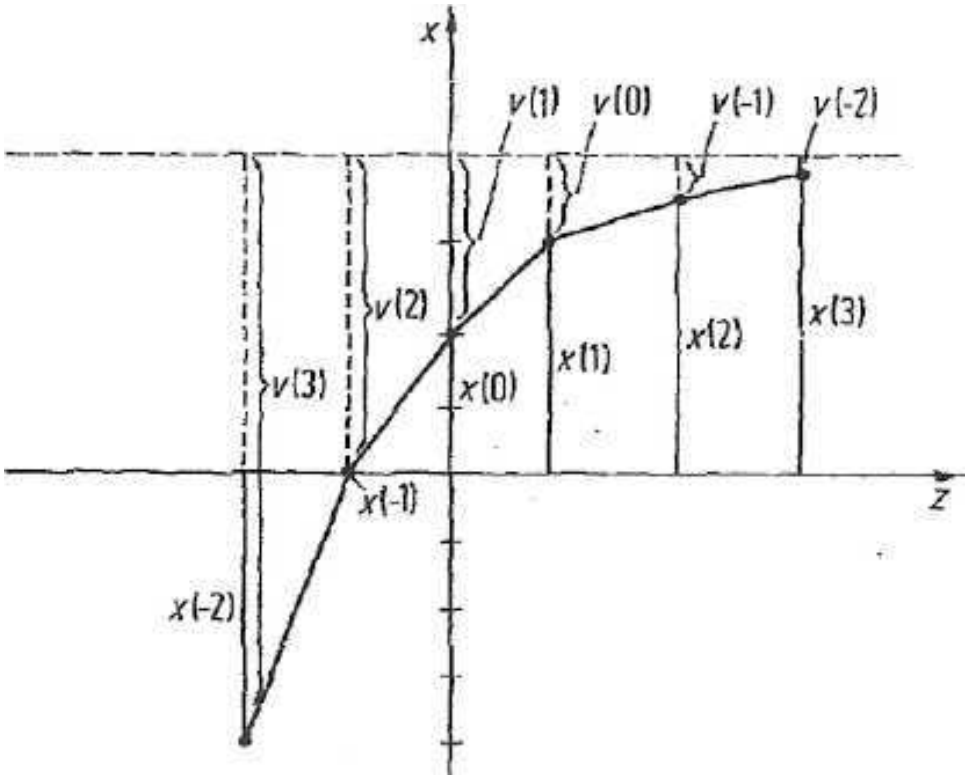
Υπολογίζοντας τις τιμές του **Δv(t)** καθώς αυξάνεται το **t**, είναι το ίδιο με το να υπολογίσουμε τις τιμές του **Δx(z)** καθώς μειώνεται το **z**. Έτσι λόγω των σχέσεων **Δv(1)=Δx(-1)**, **Δv(2)=Δx(-2)**, κ.ο.κ. μπορούμε να πάρουμε τις τιμές του **x** για αρνητικά **z** όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

z	-3	-2	-1	0	1	2	3
x(z)	-12	-4	0	2	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$
Δx(z)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Όμοια χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **Δx(1)=Δv(-1)**, **Δx(2)=Δv(-2)**, κ.ο.κ. παίρνουμε τις τιμές του **v** για αρνητικά **t** σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα :

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
v(t)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
Δv(t)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Η σχέση μεταξύ των μεταβλητών **x** και **v** μπορεί να φανεί πιο καθαρά από το ακόλουθο γράφημα :



Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τις διαφορές για αρνητικά **z** θα ήταν ο μετασχηματισμός της εξίσωσης **(2.9)** σε μία εξίσωση η οποία να συνδέει τις τιμές **x(z)** και **x(z-Δ(z))** ως εξής : Έχουμε ότι **x(z)+2Δx(z)=4**. Τότε ισοδύναμα παίρνουμε ότι **x(z-Δz)+2Δx(z-Δz)=4⇔[x(z)-Δx(z-Δz)]+ +2Δx(z-Δz)=4⇔Δx(z-Δz)=4-x(z)**. Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη της εξίσωσης **(2.10)** αφού **Δv(t+Δt)=Δx(z-Δz)=4-x(z)=v(t)+Δv(t)=v(t+Δt)**.

Η εξίσωση **x(z)+2Δx(z)=4** με **x(0)=2** και **Δ(z)=1**, έχει λύση την $\mathbf{x(z)=4-2^{1-z}}$. (Η βασική θεωρία επίλυσης τέτοιου είδους εξισώσεων περιγράφεται στο Παράρτημα Γ'). Με την πρόταση 2 βρίσκουμε μία εξίσωση της οποίας η λύση είναι πιο απλή. Από το παράδειγμα είδαμε ότι η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση **Δv(t)=v(t)** με **v(0)=1**. Τότε για **Δ(t)=1** η λύση αυτής της εξίσωσης είναι η $\mathbf{v(t)=2^{t}}$.

Η σύντομη αναφορά της πρότασης 2 στις ***«Μεθόδους»*** έχει ως σκοπό την απόδειξη της πρότασης 4 η οποία αφορά στον αριθμό των αρχικών συνθηκών που απαιτούνται για να συμπληρώσουμε τον πίνακα διαφορών για κάθε εξίσωση διαφορών. Η πρόταση 2, εάν και εξηγείται ανεπαρκώς από τον **Taylor**, μπορεί να ληφθεί ως ένα πρόσθετο στοιχείο της σημασίας και της καινοτομίας των ***«Μεθόδων»*** για την συμβολή τους στην θεμελίωση της θεωρίας των πεπερασμένων διαφορών.

2.3. Η ΠΡΟΤΑΣΗ 3 ΤΩΝ *«ΜΕΘΟΔΩΝ»*

Μετά την παρουσίαση της πρότασης 2, ο **Taylor** αναφέρει στην εργασία του ότι οι εξισώσεις που περιέχουν ροές, τάξης μεγαλύτερης της πρώτης, μπορούν να απλοποιηθούν με την αυθαίρετη επιλογή μίας ομοιόμορφα ρέουσας μεταβλητής. Ο **Henk Bos (1974)**, είχε επισημάνει ότι η επιλογή αυτής της ομοιόμορφα ρέουσας μεταβλητής στον Απειροστικό Λογισμό του **Newton**, είναι η αντίστοιχη αυτής που χρησιμοποιείται στον Διαφορικό Λογισμό του **Leibniz**. Στα σύγχρονα έργα και οι δύο πρακτικές χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό μίας συνάρτησης από μία εξίσωση ή μία έκφραση η οποία περιέχει τη συνάρτηση και τις παραγώγους της.

Η συνειδητοποίηση της σημασίας της επιλογής μεταβλητών σε εξισώσεις τέτοιου είδους, είναι διπλά εμφανής στις ***«Μεθόδους»***. Ο **Taylor** υποθέτει ότι μία ιδιαίτερη ομοιόμορφα ρέουσα μεταβλητή μπορεί να συνδεθεί με κάθε εξίσωση ροών υψηλότερης τάξης. Συγχρόνως όμως, στην πρόταση 3, εξετάζει το ειδικό πρόβλημα αλλαγής μεταβλητής η οποία ρέει ομοιόμορφα ενώ συγχρόνως η αρχική σχέση μεταξύ των μεταβλητών διατηρείται.

Η πρόταση 3 διατυπώνεται στις ***«Μεθόδους»*** ως εξής :

Πρόταση 3 : ***«Μετασχηματίζουμε μία εξίσωση ροών στην οποία υπάρχουν μόνο δύο ροές (z και x), εκ των οποίων το z ρέει ομοιόμορφα έτσι ώστε και το x να ρέει ομοιόμορφα»***.

Ένα παρόμοιο θέμα είχε θέσει ο **Nicolaous Bernoulli** σε μία επιστολή του προς τον **Leibniz**, τον Οκτώβριο του **1716**. Στο γράμμα αυτό ανέφερε τον ακόλουθο προβληματισμό : ***«Θεωρούμε μία διαφορική εξίσωση στην οποία δύο μεταβλητές z και x περιέχονται με τα διαφορικά τους dz και dx εκ των οποίων το dz υποτίθεται ότι είναι σταθερό. Θέλουμε να βρούμε τι πρέπει να αντικαταστήσει τα ddx, d^3x, κ.ο.κ. έτσι ώστε το dz γίνει μεταβλητό και το dx σταθερό»***. Με σημερινή ορολογία το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται κάπως διαφορετικά : να βρεθούν οι σχέσεις που εκφράζουν τα $\frac{dx}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, κ.ο.κ. σε όρους των $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, κ.λ.π.

Ο τρόπος μετασχηματισμού του **Taylor** σε αυτές τις εξισώσεις, αναφέρεται σε μία επιστολή του προς τον **Keill** στις **3 Ιουλίου 1713** : ***«Έστω r μία ποσότητα συναρτήσει του x και :*** $\frac{\dot{r}}{\dot{x}} = s,\ \frac{\dot{s}}{\dot{x}} = t,\ \frac{\dot{t}}{\dot{x}} = v,\ \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = w.$ ***Υποθέτοντας ότι*** $\dot{x} = 1$ ***τότε*** $s = \dot{r},\ t = \dot{s} = \ddot{r},\ v = \dot{t} = \dddot{r},\ w = \dot{v} = \ddddot{r}$. ***Όμως σε κάθε εξίσωση όπου η μεταβλητή z ρέει ομοιόμορφα και εκφράζεται συναρτήσει του x μπορούμε να πούμε ότι z=r. Έτσι παίρνοντας τις ροές θα έχουμε :*** $\dot{z} = \dot{r} = s\dot{x},\ (\dot{z}) = 0 = \dot{s}\dot{x} + s\ddot{x} =$

$=t\dot{x}\dot{x}+s\ddot{x}=t(\dot{x})^2+s\ddot{x},\quad t(\dot{x})^2+s\dot{x}\ddot{x}+s\dddot{x}=0=v(\dot{x})^3+3t\dot{x}\ddot{x}+s\dddot{x},$

$w(\dot{x})^4+6v(\dot{x})^2\ddot{x}+3t\ddot{x}\ddot{x}+4t\dot{x}\dddot{x}+s\ddddot{x}=0,$ ***κ.ο.κ.»***. (Ο **Taylor** άφησε τυχαία εκτός τον όρο $2t\dot{x}\ddot{x}$ αλλά ότι ακολούθησε ήταν σωστό).

Από τις παραπάνω σχέσεις λύνοντας ως προς $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$, κ.ο.κ. θα πάρουμε τις ακόλουθες ισότητες :

$$\ddot{x}=-\frac{t(\dot{x})^2}{s},\quad \dddot{x}=\frac{3t^2(\dot{x})^3-sv(\dot{x})^3}{s^2},\quad \ddddot{x}=\frac{-ws^2(\dot{x})^4+10vts(\dot{x})^4-15t^3(\dot{x})^4}{s^3},$$

κ.ο.κ. Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται στο επόμενο παράδειγμα, το οποίο είχε δώσει ο **Taylor** στις σημειώσεις του, ώστε να γίνει κατανοητή η διαδικασία του μετασχηματισμού που ακολουθούσε.

<u>Παράδειγμα :</u> Έστω η εξίσωση : $\dot{x}\ddot{x}-x\dddot{x}=z$. Υποθέτουμε ότι $\dot{z}=1$. Τότε θα έχουμε ότι $\dot{x}\ddot{x}-x\dddot{x}=z(\dot{z})^3$ **(2.11)**

Γνωρίζουμε ότι $t=\dot{s}$ και $\dot{s}\dot{x}+s\ddot{x}=0$. Έτσι παίρνουμε ότι $t\dot{x}+s\ddot{x}=0\Leftrightarrow -t\dot{x}=s\ddot{x}$. Αντικαθιστώντας την ισότητα αυτή στην προηγούμενη ισότητα για το $\ddot{x}$, παίρνουμε ότι : $\ddot{x}=$ $=-\frac{t(\dot{x})^2}{s}=-\frac{t\dot{x}\dot{x}}{s}=\frac{s\dot{x}\dot{x}}{s}=\dot{x}\ddot{x}=\frac{\dot{z}\ddot{x}}{s}$ (αφού $\dot{z}=s\dot{x}$). Από την ισότητα $\dot{z}=s\dot{x}$ και για $\dot{x}=1$ έχουμε $\dot{z}=s$. Έτσι $\ddot{z}=\dot{s}$. Άρα η ισότητα $\dot{s}\dot{x}+s\ddot{x}=0$ γράφεται $\ddot{z}\dot{x}+\dot{z}\ddot{x}=0\Leftrightarrow \dot{z}\ddot{x}=-\ddot{z}\dot{x}$. Αντικαθιστώντας την τελευταία ισότητα στην ισότητα για το $\ddot{x}$, θα έχουμε τελικά ότι $\ddot{x}=-\frac{\dot{x}\ddot{z}}{\dot{z}}$. Με παρόμοια διαδικασία θα πάρουμε ότι $\dddot{x}=\frac{3(\ddot{z})^2\dot{x}-\dot{z}\dddot{z}\dot{x}}{(\dot{z})^2}$. Τότε με την αντικατάσταση των σχέσεων που βρήκαμε για τα $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ και δοθέντος ότι $\dot{x}=1$, η **(2.11)** γράφεται ως εξής : $-\ddot{z}\dot{z}-3(\ddot{z})^2x+\dot{z}\dddot{z}x=z(\dot{z})^5$. Η τελευταία εξίσωση είναι ο μετασχηματισμός της αρχικής εξίσωσης που είχε δοθεί στο παράδειγμα του **Taylor**.

Ίσως η μεγαλύτερη δυσκολία για τον σύγχρονο αναγνώστη είναι να αναλύσει και να αποκρυπτογραφήσει τις σημειώσεις του **Taylor**. Ο τρόπος που ο **Taylor** χρησιμοποιούσε τις ροές ήταν κάπως μπερδεμένος από την στιγμή που απέτυχε να τις επεξεργασθεί με συνέπεια. Ως απόδειξη των

παραπάνω απόψεων θεωρούμε το εξής : Ο **Taylor** υποθέτει ότι $\frac{\dot{r}}{\dot{x}} = s$ και στην επόμενη πρόταση γράφει ***«Υποθέτοντας ότι*** $\dot{x} = 1,\ s = \dot{r},...$***»***. Δηλαδή το πηλίκο $\frac{\dot{r}}{\dot{x}}$ μεταφράζεται ως η παράγωγος $\frac{dr}{dx}$ από την στιγμή που και το επόμενο $\dot{r}$ εννοείται ως η ίδια παράγωγος. Το ερώτημα είναι εάν το πρώτο $\dot{r}$ είναι παράγωγος ή το διαφορικό dr. Τέτοιου είδους αμφιβολίες είναι ευδιάκριτες σε όλη την εργασία του **Taylor**. Στον πρόλογο των ***«Μεθόδων»*** ο **Taylor** ανακοίνωσε ότι στα θεωρήματα των ροών που περιέχουν πεπερασμένες διαφορές θα χρησιμοποιούσε τις ροές ως στιγμές (τα αντίστοιχα των διαφορικών του **Newton**). Σύμφωνα με αυτό οι ροές του **Taylor** θα έπρεπε να αντιπροσωπεύουν διαφορικά. Ωστόσο, στην πρόταση 11, δίνει το ανάπτυγμα της άπειρης σειράς για το ρέον $\dot{r}s$ ως εξής : $\dot{r}s = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} + ...$ και εξηγεί ότι οι ροές $\dot{s},\ \ddot{s},\ \dddot{s},...$ πρέπει να ερμηνεύονται ως πηλίκα ροών. Δηλαδή $\dot{s} = \frac{\dot{s}}{\dot{w}},\ \ddot{s} = \frac{\ddot{s}}{\ddot{w}},...$.

Ο **George Cantor** εμφανίζεται να είναι ο μόνος που έχει γράψει για την πρόταση 3 του **Taylor**. Οι απόψεις του είναι αρκετά σημαντικές από την στιγμή που επέλεξε κάποια άλλη υποσημείωση για να αναδείξει τα επιχειρήματα του **Taylor**. Η επιλογή του φαίνεται να βασίζεται αποκλειστικά στην υπόθεση ότι οι ροές του **Taylor** δεν είναι τίποτε άλλο από τα διαφορικά του **Leibniz**. Αυτό το συμπεραίνει από τις σημειώσεις του **Leibniz** οι οποίες είναι σαφώς πιο κατανοητές από αυτές του **Taylor**. Στην συζήτηση για την πρόταση 11 του **Taylor**, ο **Cantor** παραβίασε την υπόθεσή του και έγραψε τις ροές του **Taylor** $\dot{s},\ \ddot{s},\ \dddot{s},...$ ως τις παραγώγους $\frac{ds}{dr},\ \frac{d^2s}{dr^2},...$ αναγνωρίζοντας ότι η σημείωση του **Taylor** στην πρόταση 11 είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή.

Στηριζόμενοι στην επιστολή του **Taylor** προς τον **Keill** μπορούμε να πούμε ότι θα ήταν πιο συνεπές για τον **Taylor** να εφαρμόσει τους τύπους αντικατάστασης, αφού προηγουμένως είχε αλλάξει τις εξισώσεις με τις ροές σε εξισώσεις με στιγμές. Αυτό πρέπει να αποτελεί συνθήκη που θα συνόδευε τους τύπους που δίνονται στη πρόταση 3 και ο **Taylor** δεν έκανε καμία αναφορά για αυτό στις ***«Μεθόδους»***. Στις ακόλουθες εξισώσεις ο **Taylor** παραγωγίζει υποθέτοντας ότι το z ρέει ομοιόμορφα :

$$z = r,\ \dot{z} = \dot{r} = s\dot{x},\ 0 = \dot{s}\dot{x} + s\ddot{x} = t\dot{x}\dot{x} + s\ddot{x},\ \ddot{x} = -\frac{t\dot{x}\dot{x}}{s} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Εάν δεχθούμε ότι οι ροές αντιπροσωπεύουν διαφορικά τότε σε σύγχρονη μορφή οι εξισώσεις του **Taylor** είναι οι εξισώσεις που υπολογίζουν την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης **x(z)** συναρτήσει της αντίστροφης συνάρτησης **z(x)**. Έτσι θα έχουμε ότι : $z = r(x),\ \frac{dr}{dz} = \frac{dr}{dx}\frac{dx}{dz} = s\frac{dx}{dz} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dz} = \frac{dz}{dz}$ (αφού $z = r(x)$ και $s = \dot{r} = \frac{dz}{dx}$), $0 = \frac{d^2z}{dz^2} = \frac{ds}{dz}\frac{dx}{dz} + s\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{ds}{dx}(\frac{dx}{dz})^2 + s\frac{d^2x}{dz^2} = t(\frac{dx}{dz})^2 + s\frac{d^2x}{dz^2}$ (αφού $t = \ddot{r} = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{ds}{dx}$). Τότε θα πάρουμε ότι $\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{t}{s}(\frac{dx}{dz})^2 =$

$$= \frac{-\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}}(\frac{dx}{dz})^2 = -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{(\frac{dz}{dx})^3} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Ο τύπος $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}} = -\frac{t\dot{x}\dot{x}}{s}$ **(2.14)** που έδωσε ο **Taylor** για το $\ddot{x}$, δεν μπορεί να έχει νόημα για το $\ddot{x}$ αφού δεν μπορεί να παραχθεί από το πηλίκο $-\frac{t\dot{x}\dot{x}}{s}$ όταν οι ροές εμφανίζονται ως παράγωγοι. Στην απόδειξη που έδωσε ο **Taylor** στις ***«Μεθόδους»*** συμπεριλαμβάνει μία παρατήρηση σύμφωνα με την οποία επιβεβαιώνει ότι οι ροές που θεωρεί είναι διαφορικά. Επισημαίνει ότι όταν το x ρέει ομοιόμορφα τότε τα s και t γράφονται $s = \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ και $t = \frac{\ddot{z}}{(\dot{x})^2}$. Έτσι, με την προϋπόθεση ότι όλες οι ροές ερμηνεύονται ως διαφορικά και με την αντικατάσταση των s και t στην εξίσωση **(2.12)** προκύπτει η εξίσωση **(2.13)**. Για αυτόν τον λόγο η επιμονή του **Cantor** στις σημειώσεις του **Leibniz** είναι η μόνη που θεμελιώνει την απόδειξη του **Taylor**. Για να ελέγξει ο **Cantor** εάν η εξίσωση του **Taylor** $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}$ συμφωνεί με την σύγχρονη εξίσωση **(2.13)** έκανε το εξής : θεωρώντας τις ροές ως διαφορικά η εξίσωση $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}$

γράφεται : $\mathbf{d^2x = -d^2z\frac{dx}{dz} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2z}{(dz)^2}\frac{dx}{dz} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{(dz)^2} = -\frac{\frac{d^2zdx}{(dx)^3}}{\frac{(dz)^2dz}{(dx)^3}} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{d^2x}{(dz)^2} = -\frac{\frac{d^2z}{(dx)^2}}{(\frac{dz}{dx})^3} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{(dz)^2} = -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{(\frac{dz}{dx})^3}}$ που είναι η εξίσωση **(2.13)**. Λόγω μίας διαφωνίας που προέκυψε από ένα παράδειγμα που είχε δώσει ο **Taylor** στις ***«Μεθόδους»***, ο **Cantor** έπρεπε επίσης να ελέγξει εάν η αντικατάσταση της ισότητας **(2.13)** σε μία από τις εξισώσεις ροών του **Taylor** είναι ισοδύναμη με την αντικατάσταση της **(2.12)** στην ισότητα $\mathbf{d^2x = -d^2z\frac{dx}{dz}}$. Ο **Taylor** είχε δώσει την ακόλουθη εξίσωση : $\mathbf{\ddot{x} - \dot{x}z - 2x = 0}$ **(2.15)** με την μεταβλητή z να ρέει ομοιόμορφα. Τότε με την αντικατάσταση $\mathbf{\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}}$ παίρνουμε

$\mathbf{-\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}} - \dot{x}z - 2x = 0 \Leftrightarrow \ddot{z}\dot{x} + \dot{x}z\dot{z} + 2x\dot{z} = 0}$. Για $\mathbf{\dot{x} = 1}$ η εξίσωση γράφεται $\mathbf{\ddot{z} + z\dot{z} + 2x\dot{z} = 0}$ **(2.16)** με την μεταβλητή x να ρέει ομοιόμορφα. Όμως αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό. Η εξίσωση **(2.15)** ως μία σύγχρονη διαφορική εξίσωση γράφεται : $\mathbf{\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}z - 2x = 0}$. Αντικαθιστώντας το πηλίκο $\mathbf{\frac{d^2x}{dz^2}}$ από την **(2.13)** στην προηγούμενη ισότητα, θα πάρουμε ότι : $\mathbf{-\frac{d^2z}{dx^2}\frac{1}{(\frac{dz}{dx})^3} - \frac{dx}{dz}z - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2z}{dx^2} + (\frac{dz}{dx})^2z + 2x(\frac{dz}{dx})^3 = 0}$. Η τελευταία εξίσωση ως εξίσωση ροών είναι η : $\mathbf{\ddot{z} + (\dot{z})^2z + 2x(\dot{z})^3 = 0}$ η οποία όμως είναι διαφορετική από την εξίσωση **(2.16)**. Η αρχική εξίσωση των ροών θα ήταν ισοδύναμη με μία σύγχρονη διαφορική εξίσωση όταν οι ροές αντιπροσωπεύουν διαφορικά και όχι παραγώγους. Η επίλυση αυτού του προβλήματος, όπως δόθηκε από τον **Taylor**, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα και αφορά στο παράδειγμα της εξίσωσης **(15)** :

ΕΞΙΣΩΣΗ ΡΟΩΝ	ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ	ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
$\ddot{x} - \dot{x}z - 2x = 0$ με $\dot{z} = 1$ (Η μεταβλητή z ρέει ομοιόμορφα)	$\longrightarrow$	$\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}z - 2x = 0$
Εξισώνουμε τον αριθμό των τελειών για τις μεταβλητές x και z : $\ddot{x} - \dot{x}z\dot{z} - 2x(\dot{z})^2 = 0$	$\longrightarrow$	Πολλαπλασιάζουμε με $(dz)^2$: $d^2x - dxzdz - 2x(dz)^2 = 0$
Αντικαθιστούμε το $\ddot{x}$ από την ισότητα $\ddot{x} = -\frac{\ddot{z}\dot{x}}{\dot{z}}$: $\ddot{z}\dot{x} + \dot{x}z(\dot{z})^2 + 2x(\dot{z})^3 = 0$	$\longrightarrow$	Αντικαθιστούμε το d^2x από την ισότητα $d^2x = -d^2z\frac{dx}{dz}$: $d^2zdx + dxz(dz)^2 + 2x(dz)^3 = 0$
Έχουμε ότι $\dot{x} = 1$: $\ddot{z} + z(\dot{z})^2 + 2x(\dot{z})^3 = 0$ (Η μεταβλητή x ρέει ομοιόμορφα)	$\longrightarrow$	Διαιρούμε με $(dx)^3$: $\frac{d^2z}{dx^2} + (\frac{dz}{dx})^2 z + 2x(\frac{dz}{dx})^3 = 0$

Το ιδιαίτερο της γραφής του **Taylor** αποδεικνύεται και από το ότι όλα τα ενδιάμεσα βήματα που εμφανίζονται στον παραπάνω πίνακα δεν αναφέρονται στις ***«Μεθόδους»*** αλλά σε μία επιστολή του **Taylor** προς τον **Keill**.

Στις σημειώσεις του **Nicolaus Bernoulli**, φαίνεται ότι η πρόταση 3 του **Taylor** εκφράζεται σωστά. Όμως, μία αναφορά που στέλνει ο **Bernoulli** στον **Leibniz** είναι αρκετά διαφορετική από την διατύπωση του **Taylor**. Μέσω αυτής της αναφοράς δίνεται η δυνατότητα σύγκρισης των θεωριών των **Newton** και **Leibniz** που εφαρμόζονται στην επίλυση προβλημάτων που περιέχουν διαφορικές εξισώσεις. Στην επιστολή αυτή, υπογραμμίζεται συγχρόνως, η εντυπωσιακή δυνατότητα που δίνει ο Απειροστικός Λογισμός να εξάγουμε σωστές παραγωγίσεις και ολοκληρώσεις σε προβλήματα με διαφορετικές μεταβλητές, χωρίς να κάνουμε χρήση των μοντέρνων λειτουργιών των συναρτήσεων.

Στην προαναφερόμενη επιστολή ο **Nicolaus Bernoulli** ξεκινά με κάποια δυσμενή σχόλια για το βιβλίο του **Taylor** : ***«Επιτέλους το βιβλίο του Taylor για την μέθοδο των προσαυξήσεων έφθασε. Η εκτίμησή μου είναι ότι όσα αναφέρονται σε αυτό είναι ήδη γνωστά. Εδώ και πολύ καιρό θεωρώ ότι η γραφή του Taylor είναι σκοταδιστική και αφηρημένη, γεγονός που με κάνει να πιστεύω ότι το βιβλίο του θα γίνει κατανοητό από***

ελάχιστους αναγνώστες. Την τρίτη του πρόταση την έχω επεξεργασθεί πριν από κάποιο διάστημα ως εξής : Θέτω ddx=Adz^2 όπου το A δηλώνει μία ποσότητα που εξαρτάται από τις μεταβλητές x και z και σταθερές. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε ότι $dx = \int Adzdz$ ή $\frac{dx}{dz} = \int Adz$. Η εξίσωση αυτή φαίνεται να είναι μία διαφορική εξίσωση. Θέτοντας όμως το dz ως μεταβλητή και το dx σταθερό θα πάρουμε : $-\frac{dxddz}{dz^2} = Adz$ ή $-\frac{dxddz}{dz} = Adz^2 = ddx$. Για τα τρίτα διαφορικά υποθέτω ότι : d^{3}x=Adz^3. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε $ddx = dz^2 \int Adz$. Αντικαθιστώντας το ddx με το πηλίκο $-\frac{dxddz}{dz} = Adz^2$ και διαιρώντας με το dz^2 θα έχουμε ότι $-\frac{dxddz}{dz^2} = \int Adz$. Υποθέτοντας πάλι το dx σταθερά και παραγωγίζοντας, θα πάρουμε ότι $\frac{-dxdzd^3z + 3dxddz^2}{dz^4} = Adz \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{-dxdzd^3z + 3dxddz^2}{dz^2} = Adz^3 = d^3x$. Άρα πρόκειται για το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Taylor. Όμοια θα εργαζόμουν και για τα διαφορικά μεγαλύτερης τάξης».

Η προαναφερόμενη μέθοδος του **Bernoulli** παρουσιάζεται στα περισσότερα από τα σημερινά βιβλία του Απειροστικού Λογισμού. Σε σύγχρονους όρους η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται ως εξής : Υποθέτουμε αρχικά ότι $\frac{d^2x}{dz^2} = A$. Ολοκληρώνοντας με μεταβλητή το z παίρνουμε ότι $\frac{dx}{dz} = \int Adz$. Αυτή η εξίσωση περιλαμβάνει μόνο πρώτης τάξης διαφορικά και επομένως δεν εξαρτάται από μία μεταβλητή που μεταβάλλεται ομοιόμορφα. Παραγωγίζοντας με μεταβλητή το x έχουμε : $\frac{d}{dx}(\frac{dx}{dz}) = \frac{d}{dx}(\int Adz) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dx}{dx}}{\frac{dz}{dx}}\right) = A\frac{dz}{dx} \Leftrightarrow \frac{-\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{dx}}{(\frac{dz}{dx})^2} = A\frac{dz}{dx} \Leftrightarrow -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{(\frac{dz}{dx})^3} = A = \frac{d^2x}{dz^2}.$$

Η επιστολή του **Bernoulli** προς τον **Leibniz** δεν περιέχει άλλο παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας του. Αντίθετα, ο **Taylor** στις ***«Μεθόδους»*** παρέχει τρεις διαφορετικές και σημαντικές εφαρμογές που αναδεικνύουν την εκτίμησή του για την μέθοδο του μετασχηματισμού.

Η πρώτη εφαρμογή της γίνεται στην πρόταση 8 όπου ο **Taylor** εμφανίζει την εξίσωση $\ddot{x}z + n\ddot{x}x - \dot{x} - (\dot{x})^2 = 0$ για να επεξηγήσει το ανάπτυγμα της σειράς που είχε εξάγει από την πρόταση 7. Αφού εξασφάλισε την λύση μέσω σειρών παρατήρησε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ο μετασχηματισμός της εξίσωσης $\ddot{z}z + (\dot{z})^2 + n\ddot{z}x + \dot{z}\dot{x} = 0$. Ο λόγος για τον οποίο ο **Taylor** χρησιμοποιεί αυτό το μετασχηματισμό, είναι να μπορέσει να πάρει μία καινούργια εξίσωση, μέσω της οποίας, η λύση με σειρές όχι μόνο να υπολογίζεται ευκολότερα αλλά και να εκφράζεται με μία απλούστερη κλειστή μορφή μέσω του διωνυμικού αναπτύγματος.

Μία δεύτερη εφαρμογή της πρότασης 3 αφορά στην επαναληπτικότητα των σειρών για την οποία είχαν επινοήσει μία ειδική μέθοδο οι **Newton** και **Leibniz**. Η μέθοδος αυτή είχε καταστεί τυποποιημένη μέχρι την έκδοση των ***«Μεθόδων»***. Σε επιστολή του προς τον **Keill** ο **Taylor** βεβαιώνει ότι το νέο του θεώρημά για την επαναληπτικότητα των σειρών είναι τόσο κατάλληλο όσο και η μέθοδος των **Newton** και **Leibniz**. Χαρακτηριστικά αναφέρει : ***«Αυτή η πρόταση έχει μεγάλη σημασία για την εύρεση ρεόντων από ροές. Για παράδειγμα, εάν έχουμε στην υπόθεση ότι η μεταβλητή z ρέει ομοιόμορφα και το x είναι μεταβλητή, τότε κατά την αντίστροφη μέθοδο των ροών θα βρούμε το x εκφρασμένο σε δυνάμεις του z. Εάν όμως βρούμε το z συναρτήσει δυνάμεων του x θα πρέπει να μετασχηματίσουμε την εξίσωση μέσω αυτής της πρότασης. Οι Newton και Leibniz το κάνουν αυτό με την μέθοδο της επαναληπτικότητας των σειρών. Εκτιμώ όμως ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού είναι πιο άμεση και πιο γνήσια».*** Δεν έχει γίνει γνωστό εάν οι **Newton** και **Leibniz** προσβλήθηκαν από αυτούς τους ισχυρισμούς του **Taylor**. Αυτό όμως που έγινε γνωστό είναι ότι οι μέθοδοί τους συνέχισαν να διδάσκονται και μετά την έκδοση των ***«Μεθόδων»***, γεγονός που κατέστησε την διορατικότητα του **Taylor** μάλλον απαρατήρητη.

Η επιμονή του **Taylor** στη μέθοδό του είναι πιθανόν αβάσιμη. Σύμφωνα με τη μέθοδό του, μία εξίσωση ροών που περιέχει το x ως συνάρτηση του z θα δώσει ως λύση μία δυναμοσειρά του x, αφού πρώτα μετασχηματισθεί μέσω της πρότασης 3 και μετά επιλυθεί ως μία εξίσωση δυναμοσειράς του x. Αυτό δεν είναι πάντοτε ευκολότερο και αμεσότερο από την διαδικασία επίλυσης των **Newton** και **Leibniz**. Με τη μέθοδό τους πρώτα επίλυαν την εξίσωση σε μία δυναμοσειρά του z και στη συνέχεια, χωρίς καμία αναφορά στην εξίσωση, μετασχημάτιζαν με κάποιον από τους τρόπους που είχαν επινοήσει τη δυναμοσειρά αυτή σε μία δυναμοσειρά του x.

Η τρίτη εφαρμογή της πρότασης 3 που εμφανίζεται στις ***«Μεθόδους»*** περιλαμβάνει το μετασχηματισμό μεταβλητών εκφράσεων μεγαλύτερης τάξης. Οι πιο γνωστές εκφράσεις αυτής της μορφής ήταν οι διάφοροι τύποι για την ακτίνα της κυρτότητας, κάθε ένας από τους οποίους είχε εξάρτηση από τη

διαφορετική επιλογή της ομοιόμορφα ρέουσας μεταβλητής. Στο παράδειγμα 4 της πρότασης 15 ο **Taylor** διαπιστώνει ότι ο τύπος της ακτίνας καμπυλότητας για την ομοιόμορφα ρέουσα μεταβλητή z είναι $\frac{(\dot{v})^3}{\dot{z}\ddot{x}}$ όπου z είναι η τετμημένη, x η τεταγμένη και v το μήκος τόξου μίας δεδομένης καμπύλης. Η σχέση αυτή με παραγώγους γράφεται : $\frac{(\frac{dv}{dz})^3}{(\frac{dz}{dz})(\frac{d^2x}{dz^2})} = \frac{(\frac{dv}{dz})^3}{\frac{d^2x}{dz^2}}$ που είναι ο γνωστός σύγχρονος τύπος. Στη συνέχεια ο **Taylor** αποδεικνύει τον τρόπο σύμφωνα με τον οποίο αυτή η έκφραση μπορεί να μετασχηματισθεί μέσω της πρότασης 3 ώστε να πάρουμε τον αντίστοιχο τύπο όταν το v ρέει ομοιόμορφα. Από την εξίσωση $\dot{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$ παραγωγίζοντας παίρνει ότι $\dot{v}\ddot{v} = \dot{x}\ddot{x}$ (η μεταβλητή z ρέει ομοιόμορφα). Έτσι $\ddot{x} = \frac{\dot{v}\ddot{v}}{\dot{x}}$. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή για το $\ddot{x}$ στο αρχικό πηλίκο $\frac{(\dot{v})^3}{\dot{z}\ddot{x}}$ θα έχουμε ότι $\frac{(\dot{v})^3}{\dot{z}\ddot{x}} = \frac{(\dot{v})^3}{\dot{z}\frac{\dot{v}\ddot{v}}{\dot{x}}} = \frac{(\dot{v})^3\dot{x}}{\dot{z}\dot{v}\ddot{v}} = \frac{(\dot{v})^2\dot{x}}{\dot{z}\ddot{v}}$. Λόγω πρότασης 3 γνωρίζουμε ότι $\ddot{v} = -\frac{\ddot{z}\dot{v}}{\dot{z}}$. Έτσι τελικά παίρνουμε ότι $\frac{(\dot{v})^3}{\dot{z}\ddot{x}} = -\frac{(\dot{v})^2\dot{x}\dot{z}}{\dot{z}\dot{v}\ddot{z}} = -\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$. Το πηλίκο $-\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$ αποτελεί το νέο τύπο της ακτίνας καμπυλότητας όταν η μεταβλητή v μεταβάλλεται ομοιόμορφα. Ο **Taylor** χρησιμοποιεί αυτό τον τύπο και στην πρόταση 21 προκειμένου να εξάγει την διαφορική εξίσωση που αφορά στη μορφή τόξου που συγκρατεί το βάρος ενός ρευστού. Ο εναλλακτικός τύπος είναι απαραίτητος από τη στιγμή που η ανάλυση σε δυνάμεις βασίζεται στην υπόθεση των ίσων απειροελάχιστων στοιχείων $\dot{v}$ της καμπύλης που αντιπροσωπεύει το τόξο.

Η πρόταση 3 των ***«Μεθόδων»*** έτυχε μικρής προσοχής κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα. Ένας προφανής λόγος είναι το ύφος γραφής και οι δυσνόητες σημειώσεις του **Taylor**. Δύο άλλοι πιθανοί λόγοι για την έλλειψη αναγνωρισιμότητας αυτής της πρότασης είναι οι ακόλουθοι :

α) Οι τύποι αντικατάστασης του **Taylor** (μεγάλης σημασίας για ένα αποτέλεσμα όπως αυτό των σειρών **Taylor**) μπορεί να είχαν απορροφηθεί στο μεγάλο σώμα των τεχνικών του Απειροστικού Λογισμού (όπως για παράδειγμα η ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή

ο κανόνας της αλυσίδας) οι οποίες μεταφέρθηκαν μεμονωμένα, χωρίς να εξετασθούν, σε κάθε νέα γενεά σπουδαστών.

β) Η εξήγηση αυτή περιλαμβάνει την ανάπτυξη της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων στον 18^{ο} αιώνα. Σύμφωνα με τον **Bos (1974)**, από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα, η προσοχή των τότε μαθηματικών είχε μετατοπισθεί στη μετατροπή διαφορικών εξισώσεων, όπου ένα διαφορικό είναι υποτιθέμενη σταθερά, σε τέτοιες, όπου κανένα διαφορικό δεν είναι σταθερά. Το πρόβλημα αυτό το είχε εισάγει πρώτος ο **Johann Bernoulli** και επηρέασε αρκετές εργασίες επιστημόνων όπως αυτές των **Euler** και **D' Alembert**. Έτσι ίσως να συνέβαλε στην απόκρυψη της πρότασης 3 του **Taylor** που ουσιαστικά αποτελούσε την αφετηρία αυτού του γενικευμένου προβλήματος.

Το **1742** ο **Johann Bernoulli** δημοσίευσε το πρόβλημα αυτό (αφού είχε διαβάσει τις ***«Μεθόδους»*** του **Taylor**) και έκανε το μοναδικό μη δυσμενές σχόλιο για την εργασία του **Taylor**. Προφανώς υποκινήθηκε από την επεξεργασία της πρότασης 3 και ουσιαστικά κατέγραψε την υποχρέωση που είχε στον **Taylor** παρά την παρατεταμένη και έντονη διαφωνία που είχε προκύψει ανάμεσά τους.

2.4. Η ΠΡΟΤΑΣΗ 7 – ΠΟΡΙΣΜΑ 2 ΤΩΝ *«ΜΕΘΟΔΩΝ»*

Η πρόταση 7 και το πόρισμα 2 αυτής της πρότασης αποτελούν τη μέθοδο που ουσιαστικά οδηγεί στο ανάπτυγμα της σειράς **Taylor**. Την εποχή που δημοσιεύτηκε το ανάπτυγμα, οι **Newton** και **James Gregory** γνώριζαν να εφαρμόζουν το θεώρημα σε συγκεκριμένες συναρτήσεις. Επίσης ο **Johann Bernoulli** είχε δημοσιεύσει από το **1694** μία ισοδύναμη μορφή του αναπτύγματος, ενώ ο **Leibniz** ισχυριζόταν ότι τα αποτελέσματα του **Bernoulli** του ήταν ήδη γνωστά. Παρόλα αυτά ο **Taylor** είναι σίγουρα ο πρώτος που διατυπώνει ένα γενικευμένο θεώρημα για το ανάπτυγμα σε άπειρη σειρά, το οποίο σε σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται από την ακόλουθη ισότητα :

$$\mathbf{x(z+u) = x(z) + \frac{\Delta x(z)}{\Delta z}u + \frac{\Delta^2 x(z)}{(\Delta z)^2}\cdot\frac{u(u-\Delta z)}{2!} + \frac{\Delta^3 x(z)}{(\Delta z)^3}\cdot\frac{u(u-\Delta z)(u-2\Delta z)}{3!} + \ldots +}$$

$$\mathbf{+ \frac{\Delta^n x(z)}{(\Delta z)^n}\cdot\frac{u(u-\Delta z)\ldots(u-(n-1)\Delta z)}{n!} + \ldots}$$ όπου **u=nΔz**. **(2.17)**

Η προεργασία για το θεώρημα αυτό είχε γίνει νωρίτερα από τον **Newton** καθώς στο 3^{ο} βιβλίο των ***Principia***, Λήμμα 1 (περίπτωση 5), υπολόγιζε την εξίσωση νιοστού βαθμού, η οποία παρεμβάλλει σε παραβολή ν+1 γνωστές τιμές $\mathbf{z_0 = z,\ z_1 = z + \Delta z,\ z_2 = z + 2\Delta z, \ldots, z_n = z + n\Delta z}$.

Η πρόταση 7 του **Taylor**, η οποία είναι σαφώς επηρεασμένη από τον τύπο παρεμβολής των **Gregory – Newton**, διατυπώνεται στις ***«Μεθόδους»*** ως εξής :

Πρόταση 7 : ***«Έστω x και z είναι δύο μεταβλητές ποσότητες εκ των οποίων η z αυξάνει ομοιόμορφα κατά δοσμένες αυξήσεις*** $\dot{z}$.

Θέτουμε $n\dot{z} = u,\ u - \dot{z} = \dot{u},\ \dot{u} - \dot{z} = \ddot{u}$ ***κ.ο.κ. Τότε λέγω ότι καθ΄ον χρόνο το z αυξάνει σε z+u, το x ομοίως αυξάνει στο :***

$$x + \dot{x}\frac{u}{1\cdot\dot{z}} + \ddot{x}\frac{u\dot{u}}{1\cdot 2\cdot\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{u\dot{u}\dddot{u}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dot{z}^3} + \ldots\text{»}.$$

Το λήμμα 1 (περίπτωση 5) του 3ου βιβλίου των ***Principia*** του **Newton** μεταφρασμένο σε μοντέρνη ορολογία των πεπερασμένων διαφορών γράφεται ως εξής :

$$y(u) = x(z) + \frac{\Delta x(z)u}{\Delta z} + \frac{\Delta^2 x(z)}{(\Delta z)^2}\frac{u(u-\Delta z)}{2!} + \frac{\Delta^n x(z)}{(\Delta z)^n}\frac{u\ldots(u-(n-1)\Delta z)}{n!} + \ldots$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω λήμματος το συμπέρασμα της πρότασης 7 του **Taylor** παίρνει τη μορφή :

$$x(z+u) = x(z) + \frac{\Delta x(z)u}{\Delta z} + \frac{\Delta^2 x(z)u(u-\Delta z)}{(\Delta z)^2\, 2!} + \ldots + \frac{\Delta^n x(z)u\ldots(u-(n-1)\Delta z)}{(\Delta z)^n\, n!} + \ldots$$

όπου **u=nΔz**.

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ενώ ο **Newton** χρησιμοποιεί το θεώρημα κατασκευάζοντας μία συνάρτηση **x(z)** για να παρεμβάλλει τιμή σε άλλη συνάρτηση **y**, ο **Taylor** δίνει ένα θεώρημα για να υπολογισθεί η τιμή της συνάρτησης **x(z)** σε ένα νέο σημείο.

Για την εξαγωγή του αναπτύγματος ο **Taylor** θεωρεί ότι καθώς το n αυξάνει απεριόριστα ($\mathbf{n \to +\infty}$) τότε $\mathbf{\Delta z \to 0}$. Στη συνέχεια, για να υπολογίσει το όριο αντικαθιστά τις απειροελάχιστες αυξήσεις με τις ροές που είναι ανάλογες προς αυτές. Θεωρώντας τις μεταβλητές **x** και **z** ως συναρτήσεις του χρόνου, με το **z** να αυξάνει γραμμικά, παίρνει ότι : $\mathbf{z_0 = z(0),\ z_1 = z(h),\ z_2 = z(2h),}$ κ.ο.κ. Για τις διαφορές $\mathbf{\Delta z = z_1 - z_0 = z(h) - z_0}$ και αφού **h** πολύ μικρό, ο **Taylor** υποθέτει ότι $\mathbf{\Delta z = z_1 - z_0 = z(h) - z(0) \cong \dot{z}_0 h}$ όπου $\mathbf{\dot{z}_0}$ η ροή του **z** στο **t=0**. Όμοια παίρνει ότι $\mathbf{\Delta x(z) = x(z_1) - x(z_0) = x(z(h)) - x(z_0) =}$ $\mathbf{= x(z(0))h \cong \dot{x}_0(z)h}$ και γενικότερα $\mathbf{\Delta x(z_\kappa) = x(z_{\kappa+1}) - x(z_\kappa) = \dot{x}_\kappa(z)h}$. Για την διαφορά $\mathbf{\Delta^2 x(z)}$ η εξίσωση προκύπτει ως εξής : $\mathbf{\Delta^2 x(z) = \Delta x(z_1) - \Delta x(z_0) =}$ $\mathbf{= \dot{x}_1(z)h - \dot{x}_0(z)h \cong \ddot{x}_0(z)h^2}$ κ.λ.π. Αντικαθιστώντας τις διαφορές αυτές στον τύπο παρεμβολής του **Newton** προκύπτει η ισότητα : $\mathbf{x(z+u) = x(z) +}$

$$+\frac{\dot{x}_0(z)h}{\dot{z}_0 h}u+\frac{\ddot{x}_0(z)h^2}{(\dot{z}_0 h)^2}\cdot\frac{u(u-\Delta z)}{2!}+\ldots = x(z)+x'_0(z)u+x''_0(z)\cdot\frac{u(u-\Delta z)}{2!}+\ldots$$

Για $\Delta z \to 0$ η προηγούμενη ισότητα γράφεται : $x(z+u)=x(z)+x'_0(z)u+$ $+x''_0(z)\cdot\frac{u^2}{2!}+\ldots$ Θέτοντας όπου **x** την συνάρτηση **f**, **z** το x_0 και **u** το $x-x_0$ η τελευταία ισότητα παίρνει την μορφή :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\ldots \quad (2.18)$$

που είναι η γνωστή μορφή του θεωρήματος **Taylor**.

Από τα παραπάνω, διαπιστώνεται ότι το πέρασμα από τις διαφορές στα όρια γίνεται χωρίς εξήγηση, ενώ βέβαια δεν υπάρχει καμία αναφορά για την σύγκλιση της σειράς. Η μοναδική εφαρμογή αυτής της πρότασης που αναγράφεται στις ***«Μεθόδους»***, είναι η διαφορική εξίσωση της πρότασης 8 που αναφέρθηκε στην παράγραφο **2.3.** Κάποιες άλλες εφαρμογές αυτής της πρότασης, που αφορούσαν πάλι στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, δημοσιεύθηκαν από τον **Taylor** πολύ αργότερα, στο περιοδικό ***«Philosophical Transactions»***.

2.5. Η ΠΡΟΤΑΣΗ 11 ΤΩΝ *«ΜΕΘΟΔΩΝ»*

Η πρόταση αυτή, όπως δημοσιεύθηκε στις ***«Μεθόδους»***, και όπως περιγράφεται στην αλληλογραφία και στις σημειώσεις του **Taylor**, είναι μία πολύτιμη γενίκευση του θεωρήματος του **Johann Bernoulli** και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Ο **Taylor** παρουσιάζει και εξάγει την πρόταση 11 των ***«Μεθόδων»*** ως εξής : ***«Το ρέον (ολοκλήρωμα) του*** $\dot{r}s$ ***μπορεί να εκφρασθεί από τις σειρές :*** $\int \dot{r}s = rs - \dot{r}'s + \ddot{r}''s - \dddot{r}'''s - \ddddot{r}''''s + \ldots$ ***ή*** $\int \dot{r}s = \dot{r}'s - \ddot{r}''s + \dddot{r}'''s - \ddddot{r}''''s + \ldots$***. Το θεώρημα ερευνάται με τον ακόλουθο τρόπο : Έστω ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι*** $rs+p$***. Τότε παίρνουμε ότι*** $\int \dot{r}s = rs+p$***. Παραγωγίζοντας θα έχουμε*** $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$***. Άρα*** $\dot{p} = -r\dot{s}$ ***και έτσι*** $p = -\int r\dot{s}$***. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του*** p ***στο αρχικό ολοκλήρωμα προκύπτει ότι*** $\int \dot{r}s = rs - \int r\dot{s}$***. Τώρα υποθέτουμε ότι*** $\int r\dot{s} = \dot{r}'s + q$***. Παραγωγίζοντας θα πάρουμε ότι*** $r\dot{s} = r\dot{s} + \dot{r}'\ddot{s} + \dot{q}$ ***ή*** $\dot{q} = -\dot{r}'\ddot{s}$***. Άρα*** $q = -\int \dot{r}'\ddot{s}$ ***και έτσι*** $\int r\dot{s} = \dot{r}'s - \int \dot{r}'\ddot{s}$***. Αντικαθιστώντας πάλι αυτό το ολοκλήρωμα στο αρχικό,***

θα πάρουμε ότι $\int \dot{r}s = rs - \dot{r}'s + \int \ddot{r}'s$ ***. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία θα προκύψει η πρώτη σειρά ενώ παίρνοντας τα ρέοντα του*** s ***αντί του*** r ***θα προκύψει η δεύτερη σειρά»***.

Σε σύγχρονη μορφή οι προαναφερόμενες σειρές γράφονται ως εξής :

$$\int s\,dr = \begin{cases} \int s\frac{dr}{dw}dw = sr - \frac{ds}{dw}\int r\,dw + \frac{d^2s}{dw^2}\int dw\int r\,dw - \frac{d^3s}{dw^3}\int dw\int dw\int r\,dw + \dots \\ \int \frac{dr}{dw}s\,dw = \frac{dr}{dw}\int s\,dw - \frac{d^2r}{dw^2}\int dw\int s\,dw + \frac{d^3r}{dw^3}\int dw\int dw\int s\,dw + \dots \end{cases}$$

όπου **s**, **r**, **w** είναι συναρτήσεις της ίδιας μεταβλητής **z**. Στην περίπτωση όπου **r=z=w** προκύπτει ο τύπος του **Johann Bernoulli** που θα δούμε στο Κεφάλαιο **3** – παράγραφος **3.6**.

Ο **Taylor**, στη σελίδα **41** των ***«Μεθόδων»***, είχε δώσει το ακόλουθο παράδειγμα για αυτή την πρόταση : Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μία σειρά για το ολοκλήρωμα $I = \int z(1+z^3)^{\frac{1}{2}}dz$.

α) Θέτουμε $n = z(1+z^3)^{\frac{1}{2}}$. Τότε $\frac{dn}{dz} = \sqrt{1+z^3} + \frac{3z^3}{2\sqrt{1+z^3}}$ και $\frac{d^2n}{dz^2} = \frac{3z^2(8+5z^3)}{4(1+z^3)\sqrt{1+z^3}}$. Χρησιμοποιώντας τη σειρά του **Johann Bernoulli** $\int n\,dz = nz - \frac{dn}{dz}\frac{z^2}{2!} + \frac{d^2n}{dz^2}\frac{z^3}{3!} - \dots$ με $n = z(1+z^3)^{\frac{1}{2}}$, θα πάρουμε ότι $I = \frac{z^2}{2}\sqrt{1+z^3} - \frac{3z^5}{4\sqrt{1+z^3}} + \frac{3z^5(8+5z^3)}{24(1+z^3)\sqrt{1+z^3}} - \dots$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη από τις σύγχρονες μορφές της σειράς του **Taylor** με $s = \sqrt{1+z^3}$, $dr = z\,dz$ και $dw = 3z^2dz$. Τότε θα έχουμε ότι $\frac{ds}{dw} = \frac{\frac{3z^2}{2\sqrt{1+z^3}}dz}{3z^2dz} = \frac{1}{2\sqrt{1+z^3}} = \frac{1}{2s}$ και $\frac{d^2s}{dw^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dw}\right)\frac{ds}{dw} = \left(-\frac{1}{2s^2}\right)\frac{1}{2s} = -\frac{1}{4s^3}$. Όμοια θα πάρουμε ότι $\frac{d^3s}{dw^3} = \frac{3}{8s^5}$ κ.ο.κ. Από τη σχέση $dr = z\,dz$ έχουμε ότι $r = \frac{z^2}{2}$. Τότε $\int r\,dw = \int \frac{z^2}{2}3z^2dz = \int \frac{3}{2}z^4dz = \frac{3z^5}{10}$, $\int dw\int r\,dw = \int 3z^2\frac{3z^5}{10}dz = \frac{9z^8}{80}$ κ.ο.κ. Αντικαθιστώντας στη σειρά του **Taylor** παίρνουμε ότι $I = \frac{z^2}{2}\sqrt{1+z^3} - \frac{3z^5}{20\sqrt{1+z^3}} - \frac{9z^8}{320(1+z^3)\sqrt{1+z^3}} + \dots$

Για το παράδειγμα αυτό ο **Feigenmaum** επισημαίνει τα εξής :

α) Ο **Taylor** επιλέγει το **s** σε σχέση με το **dw** έτσι ώστε τα πηλίκα $\frac{ds}{dw}, \frac{d^2s}{dw^2}$, κ.ο.κ. να μπορούν να προσδιορισθούν με μικρότερη προσπάθεια από τα πηλίκα $\frac{dn}{dz}, \frac{d^2n}{dz^2}$, κ.ο.κ. στη σειρά του **Johann Bernoulli**.

β) Ο **Taylor** επιλέγει το **dr** σε σχέση με το **dw** έτσι ώστε τα $r, \int r dw, \int dw \int r dw,$ κ.ο.κ. να βρεθούν χωρίς μεγάλο πλήθος υπολογισμών. Η επιπλέον εργασία για τον υπολογισμό αυτών των ολοκληρωμάτων εξισορροπείται από τη διευκόλυνση στους υπολογισμούς των παραγώγων του **s**.

γ) Στο αποτέλεσμα προκύπτει ασυμφωνία διότι στη σειρά του **Johann Bernoulli** δεν έχει υπολογισθεί ο όρος $\frac{d^4n}{dz^4}\frac{z^5}{5!}$. Με την προσθήκη αυτού του όρου το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

δ) Στη σειρά του **Johann Bernoulli**, η συνάρτηση **n** δίνεται αμέσως σε αντίθεση με την πρόταση 11, η οποία επιτρέπει κάποια ελευθερία στην επιλογή των **s** και **dw**. Για παράδειγμα, το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα μπορούσαμε να το γράψουμε $I = \int z^{\frac{5}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{z^3}} dz$.

Τότε επιλέγοντας $s = \sqrt{1+\frac{1}{z^3}},\ dr = z^{\frac{5}{2}} dz,\ dw = -\frac{3}{z^4} dz$ η σειρά του **Taylor** θα έδινε αποτέλεσμα $I = \frac{2z^2\sqrt{1+z^3}}{7} + \frac{6z^2}{7\sqrt{1+z^3}} + \ldots$ η οποία είναι μία σειρά διαφορετική από τις προηγούμενες.

Αυτό που ιδιαίτερα πρέπει να τονισθεί, είναι ότι η σειρά του **Taylor** γενικεύει το θεώρημα του **Johann Bernoulli**. Η διαπίστωση αυτή οφείλεται στη λεπτομερή επεξεργασία των σταθερών ολοκλήρωσης από τον **Taylor**.

Ο **Johann Bernoulli** χρησιμοποίησε τη σειρά του για την επίλυση πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων. Όμως παραμελώντας τη σταθερά ολοκλήρωσης έπαιρνε μόνο μία ειδική περίπτωση για κάθε ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα, για τη διαφορική εξίσωση $dy = \frac{\alpha}{\alpha+z} dz$ βρήκε (μέσω της σειράς του) αποτέλεσμα $y = \int dy = \int \frac{\alpha}{\alpha+z} dz = \frac{\alpha z}{\alpha+z} + \frac{\alpha z^2}{2(\alpha+z)^2} + \frac{\alpha z^3}{3(\alpha+z)^3} + \ldots$.

Όμως για **z=0** το δεύτερο μέλος ισούται με μηδέν και έτσι υπονοείται ότι **y(0)=0**.

Αντίθετα, ο **Taylor** στην πρόταση 11, δίνει ιδιαίτερη προσοχή στη σταθερά ολοκλήρωσης, αναγνωρίζοντας ότι η διαδικασία της ολοκλήρωσης εισάγει απαραίτητα μία σταθερή ποσότητα κατά την επίλυσή της με σειρά.

Επεξηγεί ότι μία σειρά μπορεί να καθορισθεί όταν δίνεται η τιμή του ολοκληρώματος για κάποια γνωστή τιμή του **z** αναφέροντας τα εξής : ***«Η σειρά που βρίσκεται από αυτό το θεώρημα μπορεί να προσαρμοσθεί στις συνθήκες του προβλήματος όταν έχουμε μία τιμή για το ζητούμενο ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί σε μία γνωστή τιμή της μεταβλητής. Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας όλα τα ολοκληρώματα r, r', r'' κ.ο.κ. ή s, s', s'' κ.ο.κ. χωρίς καμία διόρθωση από την προσθήκη σταθερών και προσθέτοντας στη σειρά που βρήκαμε μία σταθερά η οποία θα προσδιορισθεί μέσω της αρχικής συνθήκης»***. Έτσι, στο παράδειγμα του **Johann Bernoulli** για το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\alpha}{\alpha + z} dz$, απαιτούμε $I = 0$ όταν $z = c$. Θέτοντας $s = \frac{\alpha}{\alpha + z}$ και $dr = dz = dw$ τότε σύμφωνα με τον **Taylor** θα έχουμε ότι : $I = \int_c^z \frac{\alpha}{\alpha + z} dz = \begin{cases} \frac{\alpha z}{\alpha + z} + \frac{\alpha z^2}{2(\alpha + z)^2} + \ldots - (\frac{\alpha c}{\alpha + c} + \frac{\alpha c^2}{2(\alpha + c)^2} + \ldots) \\ \frac{\alpha(z - c)}{\alpha + z} + \frac{\alpha(z - c)^2}{2(\alpha + z)^2} + \frac{\alpha(z - c)^3}{2(\alpha + z)^3} + \ldots \end{cases}$.

Η δεύτερη λύση αντιστοιχεί στην πρώτη σειρά της πρότασης 11 του **Taylor** εάν τη γράψουμε : $\int_c^z s dr = s\int_c^z dr - \frac{ds}{sw}\int_c^z dw \int_c^z dr + \frac{d^2 s}{dw^2}\int_c^z dw \int_c^z dr - \ldots$

Παρά τα επιχειρήματα υπέρ της διάκρισης μεταξύ της πρότασης 11 και του θεωρήματος του **Johann Bernoulli**, δεν υπάρχει αμφισβήτηση ότι η εργασία του **Johann Bernoulli** ήταν η κύρια έμπνευση για την ανάπτυξη της πρότασης 11 του **Taylor**. Όμως από τις σημειώσεις του **Taylor** κάτι τέτοιο δεν γίνεται φανερό. Έτσι διαφαίνεται ότι ο **Johann Bernoulli** δικαίως κατηγορεί τον **Taylor** για κλοπή. Αυτό οφείλεται στη λανθασμένη εκτίμηση του **Johann Bernoulli** ότι η πρώτη σειρά της πρότασης 11 του **Taylor**, αποτελεί μία μεταμφιεσμένη έκδοση του θεωρήματός του. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η σειρά του **Johann Bernoulli**, που είναι όμοια με τη δεύτερη σειρά της πρότασης 11 του **Taylor**, είχε ανακαλυφθεί το **1695** και είχε δημοσιοποιηθεί μόνο στον **Leibniz**. Επομένως ήταν δύσκολο για τον **Taylor** να την είχε υποκλέψει. Όσον αφορά στην απόδειξη της πρότασης 11, ο **Johann Bernoulli** θεωρεί ότι οφείλεται στον **De Moivre**. Από τις σημειώσεις του **Taylor** φαίνεται ότι πράγματι ο **Taylor** δανείστηκε τη μέθοδο του **De Moivre** στην απόδειξη της πρότασης 11. Όμως αυτό δεν δικαιολογεί τον μεγάλο θυμό και την αντιπαλότητα του **Johann Bernoulli** προς τον **Taylor**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° : Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ TAYLOR ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΤΩΝ GREGORY, NEWTON, STIRLING, LEIBNIZ, JOHANN BERNOULLI ΚΑΙ DE MOIVRE

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεώρημα του **Taylor**, που ήταν γνωστό στους μεταγενέστερούς του ως πρόταση 7 – πόρισμα 2 των ***«Μεθόδων»***, δημοσιεύτηκε όπως είδαμε (Κεφάλαιο **1** – Παράγραφος **1.2**) για πρώτη φορά το **1715**. Παρότι αυτό το γεγονός χαρακτήρισε την πρώτη δημόσια εμφάνιση των σειρών, σήμερα είναι γνωστό ότι ο **Taylor** δεν ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε τις σειρές. Ανάμεσα σε αυτούς που είχαν εργασθεί πάνω στις σειρές, λίγο πριν ή και σχεδόν ταυτόχρονα με τον **Taylor**, βρίσκουμε τα ονόματα των : **James Gregory**, **Newton**, **James Stirling**, **Leibniz**, **Johann Bernoulli**, και **Abraham De Moivre**. Βέβαια, ο κατάλογος δεν τελειώνει εδώ δεδομένου ότι αναφερόμαστε στη βιβλιογραφία κατά τη διάρκεια του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα.

Η έρευνα όλων αυτών των εργασιών παρέχει ένα διαφωτιστικό παράδειγμα του φαινομένου της ταυτόχρονης ανακάλυψης στα μαθηματικά και επιπλέον, χαρακτηρίζει μία ιδιαίτερη εποχή της ιστορίας του Απειροστικού Λογισμού η οποία έγινε γνωστή από την ανάπτυξη εξαιρετικά έξυπνων τεχνικών, μερικές από τις οποίες υποκίνησαν τον σχηματισμό των νέων κλάδων των μαθηματικών.

3.2. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ GREGORY

Η εργασία του **Gregory** στις άπειρες σειρές είναι εντυπωσιακή και φαίνεται μέσω της αλληλογραφίας που διατηρούσε με τον **John Collins**. Στις **20 Μαρτίου** του **1670** ο **Collins** κοινοποίησε στον **Gregory** την παρακάτω σειρά με την οποία ο **Newton** υπολόγισε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου μεταξύ της χορδής ε και της παράλληλης προς αυτήν διαμέτρου : $\mathbf{S = 2RB - \frac{B^3}{2R} - \frac{B^5}{20R^2} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{567R^7}}$ όπου R η ακτίνα του κύκλου και B η απόσταση της χορδής από τη διάμετρο. Δηλαδή, αυτό που δόθηκε από τον **Newton** είναι μία σειρά για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^B \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Ο **Gregory** απαντά στις **20 Απριλίου** του **1670** ότι δεν μπορεί να καταλάβει εάν η σειρά είναι σωστή ή όχι και έτσι θεωρεί την έκφραση αυτή ως λανθασμένη. Στις **23 Νοεμβρίου** του **1670** ο **Gregory** ανακοινώνει στον **Collins**, χωρίς να αποδεικνύει, μια σχέση παρεμβολής για μία συνάρτηση f

όταν είναι γνωστές οι τιμές της f στα σημεία **0**, $\mathbf{x_o}$, $\mathbf{2x_o,...,nx_o}$. Με σύγχρονο συμβολισμό η σχέση είναι η ακόλουθη :

$$\mathbf{f(x) = f(0) + \frac{x}{x_0}\Delta f(0) + \frac{x(x-x_0)}{x_0 \cdot 2x_0}\Delta^2 f(0) + \frac{x(x-x_0)(x-2x_0)}{x_0 \cdot 2x_0 \cdot 3x_0}\Delta^3 f(0) + ...} \quad \mathbf{(3.1)}$$

όπου $\mathbf{\Delta f(0)=f(x_0)-f(0)}$, $\mathbf{\Delta f(x_0)=f(2x_0)-f(x_0)}$, $\mathbf{\Delta^2 f(0)=\Delta f(x_0)-\Delta f(0)}$. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από τη σχέση παρεμβολής του **Newton** : $\mathbf{f(\alpha+h) = f(\alpha) +}$

$$\mathbf{+\frac{h}{x_0}\Delta f(\alpha) + \frac{\frac{h}{x_0}(\frac{h}{x_0}-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(\alpha) + ... + \frac{\frac{h}{x_0}(\frac{h}{x_0}-1)...(\frac{h}{x_0}-n+1)}{n!}\Delta^n f(\alpha)}$$ για **α=0**

και **f(0)=0**. Στην αλληλογραφία του σχετικά με τη σχέση, ο **Gregory** αναφέρει και τη διαδικασία που χρησιμοποίησε ο **Henry Briggs** στο ***«Arithmetica Logarithmica»***, του **1624**, για την δημιουργία λογαριθμικών πινάκων. Εκτός από τη χρησιμότητα της σχέσης για την παρεμβολή τιμών σε γνωστούς πίνακες ο **Gregory** τονίζει με έμφαση ότι η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πρόβλημα του τετραγωνισμού καμπυλών δίνοντας διάφορα παραδείγματα.

Ο **Gregory** εφάρμοσε αυτή τη σχέση και κατέληξε σε μία σειρά αναπτυγμάτων σειρών. Τώρα γνωρίζει πλέον, όπως αναφέρει και ο ίδιος ***«να βρίσκει το ημίτονο εάν έχει το τόξο και τον αριθμό εάν έχει το λογάριθμο»***. Η μέθοδος που ακολουθούσε είχε ως εξής : Έστω ότι γνωρίζει το λογάριθμο x και αναζητά τον αριθμό α. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι εάν η βάση του λογάρίθμου είναι **1 + d** τότε $\mathbf{\log_{(1+d)}\alpha = x}$ και άρα $\mathbf{(1+d)^x = \alpha}$. Ο αριθμός α υπολογίζεται από το $\mathbf{(1+d)^x}$ με τη βοήθεια της σχέσης της παρεμβολής, καθώς είναι γνωστές οι τιμές της $\mathbf{f(x) =(1+ d)^x}$ όταν **x = 0, 1, 2,...** αφού $\mathbf{f(0) = 1,\ \Delta f(0) = d,\ \Delta^2 f(0) = d^2,...}$ και έτσι τελικά παίρνουμε ότι :

$$\mathbf{(1+d)^x = 1 + xd + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}d^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3 + ...}$$ Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο **Gregory** γνώριζε το Διωνυμικό Θεώρημα. Από την αλληλογραφία με τον **Collins** μπορούμε να διαπιστώσουμε επίσης ότι η ανακάλυψη του Διωνυμικού θεωρήματος από τον **Gregory**, έγινε ανεξάρτητα από τον **Newton**.

Στις **24 Δεκεμβρίου** του **1670** ο **Collins** ανακοινώνει στον **Gregory** τα αναπτύγματα του **Newton** από το ***«De analysi per aequationes infinitas»*** για το ημίτονο, το συνημίτονο, το τόξο συνημίτονου και το $\mathbf{\frac{x}{\varepsilon\varphi x}}$ αναφέροντας ότι προέκυψαν από μια γενική μέθοδο που ο Newton ανακάλυψε. Στις **15 Φεβρουαρίου** του **1671** ο **Gregory** γράφει στον **Collins** : ***«Σε ότι αφορά στη γενική μέθοδο του κ.Newton φαντάζομαι ότι έχω κάποια γνώση αυτής τόσο σε γεωμετρικές όσο και σε μηχανικές καμπύλες. Παρόλα αυτά σε ευχαριστώ για τις σειρές που μου έστειλες και σου στέλνω και τις***

επόμενες σειρές». Οι σειρές αυτές ήταν οι δυναμοσειρές, με 5 ή 6 όρους η κάθε μία, για τις συναρτήσεις : **τοξεφx**, **εφx**, $\frac{1}{\text{συνx}}$, $\log\frac{1}{\text{συνx}}$, $\log\text{εφ}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$, $\text{τοξ}(\frac{1}{\text{συν}(e^x\sqrt{2})})$, $2\text{τοξεφ}(\text{υπερεφαπτ}\frac{x}{2})$. Για παράδειγμα η σειρά που δίνει για την **εφx** είναι η ακόλουθη : $t=\alpha+\frac{\alpha^3}{3r^2}+\frac{2\alpha^5}{15r^4}+\frac{17\alpha^7}{315r^6}+\frac{3.233\alpha^9}{181.440r^8}$ όπου t είναι το μήκος της εφαπτομένης, α το τόξο και r η ακτίνα. Εάν θέσουμε **t=rεφθ** και **α=rθ** η προηγούμενη σειρά γράφεται : $\text{εφ}\theta=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\frac{2\theta^5}{15}+\frac{17\theta^7}{315}+\frac{3.233\theta^9}{181.440}$ **(3.2)** που είναι η σειρά **Taylor** της εφαπτομένης, με λανθασμένο τον πέμπτο συντελεστή. (Ο σωστός συντελεστής είναι $\frac{3.968}{181.440}$). Στο περιθώριο της επιστολής ο **Gregory** είχε κάνει κάποιους υπολογισμούς οι οποίοι υποδείκνυαν τον τρόπο της σκέψης του.

Αρχικά υπέθεσε ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι που του χρειάστηκαν και τις υπολόγισε σωστά, εκτός από το λάθος που ήδη αναφέραμε και ένα ακόμη λάθος στο ανάπτυγμα της $\log\frac{1}{\text{συνx}}$ που οφείλεται στο προηγούμενο λάθος. Σύμφωνα με τον **Herbert Turnbull (1939)** το λάθος οφείλεται στο ότι ο **Gregory** υπολόγισε τις σειρές του με χρήση παραγώγων και όχι με κάποια από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιούσε ο **Newton** για τα αναπτύγματα. Για τις σειρές $\log\frac{1}{\text{συνx}}$ και $\log\text{εφ}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ χρησιμοποίησε ολοκλήρωση κατά μέρη των συναρτήσεων **εφθ** και $\frac{1}{\text{συνx}}$.

Παρόλο που φαίνεται ότι ο **Gregory** έκανε χρήση του θεωρήματος **Taylor** για τα παραπάνω αναπτύγματα, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από τα γραπτά του εάν πραγματικά γνώριζε τη γενική διατύπωση του θεωρήματος. Το μόνο σίγουρο είναι ότι ο **Gregory** γνώριζε να βρίσκει το ανάπτυγμα **Taylor** για συγκεκριμένες συναρτήσεις.

3.3. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ NEWTON

Μία από τις σημαντικότερες δυσκολίες στην ανάπτυξη του θεωρήματος του **Taylor**, προέκυψε από την απροθυμία του **Newton** να δημοσιεύσει την εργασία του σχετικά με τους συντελεστές μίας δυναμοσειράς. Πρόσφατα δημοσιευμένα έγγραφα του **Newton (1976)** αποκαλύπτουν ότι κατά τη διάρκεια του έτους **1691 – 1692** ο **Newton** είχε ανακαλύψει την ακριβή αναλυτική σύνδεση μεταξύ των συντελεστών μίας δυναμοσειράς της

μεταβλητής **y** και των διαδοχικών ροών της **y**. Αυτές οι σημαντικές πληροφορίες είναι εμφανείς σε δύο γνωστές δημοσιευμένες εργασίες του **Newton**. Η πρώτη αναφορά γίνεται στο βιβλίο του ***«Principia»*** **(1687)**, και συγκεκριμένα στο παράδειγμα 1 της πρότασης 10 όπου δείχνει ότι οι συντελεστές μίας δυναμοσειράς, που εκφράζουν τις τεταγμένες μίας καμπύλης, παρέχουν μία γεωμετρική περιγραφή της ίδιας της καμπύλης. Η δεύτερη αναφορά βρίσκεται στο τελικό σχόλιο της πραγματείας του ***«Τετραγωνισμός των καμπυλών»*** **(1704)**, όπου συνδέει τους όρους του διωνυμικού αναπτύγματος $(\mathbf{x}+\mathbf{o})^{\mathbf{n}}$, (η ποσότητα **o** είναι μία απείρως μικρή ποσότητα), με τις διαδοχικές ροές του $\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$. Σε καμία από αυτές τις δύο περιπτώσεις δεν εκφράζει τους συντελεστές συναρτήσει των παραγώγων όπως είχε κάνει παλιότερα σε αδημοσίευτη εργασία του.

Αυτή η θεμελιώδης διορατικότητά του αποτέλεσε το κλειδί για την παρουσίαση της απόδειξης του θεωρήματος του **Taylor** με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Στηριζόμενοι σε αυτήν την εργασία, οι **Maclaurin (1742)** και **Stirling (1717)** προσδιόριζαν τους συντελεστές της σειράς **Taylor** υποθέτοντας αρχικά τη μορφή της σειράς, παραγωγίζοντας διαδοχικά στην συνέχεια, και στο τέλος, εξισώνοντας με τις παραγώγους σε ένα συγκεκριμένο σημείο έπαιρναν τις τιμές των συντελεστών. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να βρεθεί σε δύο πορίσματα που συνδέονται με την πρόταση 12 **(Newton, 1976)**, η οποία αφορά στο ακόλουθο πρόβλημα του οποίου απόσπασμα έχει ως εξής : ***«Από μία εξίσωση που περιέχει δύο ρέουσες ποσότητες, είτε μόνες τους είτε μαζί με τις ροές τους, θέλουμε να πάρουμε την μία από τις δύο ποσότητες σε μορφή συγκλίνουσας σειράς (απείρων όρων). Έστω y η ρέουσα ποσότητα που πρέπει να εξαχθεί σε τέτοια μορφή και z η άλλη ποσότητα η οποία ρέει ομοιόμορφα. Έστω επίσης ότι οι ροές τους εκφράζονται από….»***.

Στην πρόταση 12 ο **Newton** εξηγεί την τεχνική που ακολουθεί για τη δημιουργία όρου προς όρου λύσεων τέτοιου είδους εξισώσεων. Ο εκθέτης του z στον πρώτο όρο της επιθυμητής επέκτασης του y πρόκειται να υπολογισθεί από έναν αριθμητικό κανόνα που βασίζεται στις τιμές των εκθετών στην αρχική εξίσωση. Έστω ότι αυτός ο πρώτος εκθέτης πρέπει να είναι v. Στην συνέχεια ο συντελεστής του $\mathbf{z}^{\mathbf{v}}$ προσδιορίζεται από την αντικατάσταση του y με $\mathbf{cz}^{\mathbf{v}}$ στην αρχική εξίσωση. Αφού βρεθεί το c τότε αντικαθιστούμε το y στην αρχική εξίσωση με $\mathbf{cz}^{\mathbf{v}}\mathbf{+p}$ και έτσι η προκύπτουσα εξίσωση περιέχει την καινούργια μεταβλητή p και τις ροές της. Για να βρούμε τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα της σειράς του p (ή αλλιώς το δεύτερο όρο στο ανάπτυγμα της σειράς του y) επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο θα πάρουμε την επιθυμητή σειρά. Ο **Newton** γνώριζε ότι με αυτή τη μέθοδο οι παραγόμενες σειρές μπορεί να περιέχουν μη ολοκληρώσιμες δυνάμεις του z. Έτσι στα πορίσματα 3 και 4 της πρότασης 12 **(Newton, 1976b : 97 και 99)** θεωρεί τις ειδικές περιπτώσεις, όπου οι

λύσεις πρέπει να είναι δυναμοσειρές.

Τα πορίσματα 3 και 4 της πρότασης 12 του **Newton**, παρουσιάζονται στην εργασία ***«Principia»*** με την ακόλουθη μορφή :

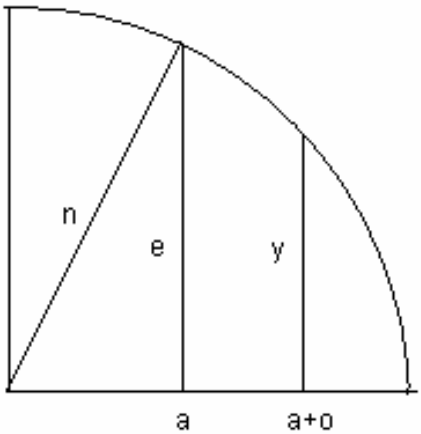
Πόρισμα 3 : ***«Εάν οι σειρές είναι της μορφής*** $y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \ldots$ ***τότε, καθώς το z μηδενίζεται (το z τείνει στο μηδέν), οι ροές του y καθορίζονται από τις αντικαταστάσεις :*** $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \alpha,\ \frac{\ddot{y}}{(\dot{z})^2} = 2\beta,\ \frac{\dddot{y}}{(\dot{z})^3} = 6\gamma,\ \frac{\ddddot{y}}{(\dot{z})^4} = 24\delta, \ldots$

Πόρισμα 4 : ***«Εάν στην προς επίλυση εξίσωση θέσουμε όπου z το w+x και η καινούργια εξίσωση έχει ως λύση τη σειρά*** $y = ex + fx^2 + gx^3 + hx^4 + \ldots$ ***τότε οι ροές του y, για κάθε τιμή του z, θα λαμβάνονται μέσω πεπερασμένων εξισώσεων αντικαθιστώντας στο x την τιμή 0. (Έτσι θα έχουμε ότι z=w). Για εξισώσεις τέτοιου είδους, σύμφωνα με το πόρισμα 3, θα κάνουμε τις αντικαταστάσεις :***

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = e,\ \frac{\ddot{y}}{(\dot{z})^2} = 2f,\ \frac{\dddot{y}}{(\dot{z})^3} = 6g,\ \frac{\ddddot{y}}{(\dot{z})^4} = 24h, \ldots$$

Για την εύρεση των συντελεστών της σειράς **Taylor**, οι **Stirling** και **Maclaurin** θεωρούσαν την περίπτωση όπου το z ήταν ίσο με μηδέν. Αντίθετα, ο **Newton** στο πόρισμα 4 επεξεργάζεται τη γενικότερη περίπτωση. Οι σειρές εκφράζονται σε δυνάμεις του **z-w=x** και οι συντελεστές τους δίνονται συναρτήσει των ροών του **y** όταν **z=w**.

Στην εργασία του **Newton** δεν υπάρχει παράδειγμα που να αφορά στα δύο πορίσματα. Επίσης, μέχρι και σήμερα, δεν έχουν βρεθεί στοιχεία που να αποδεικνύουν ότι ο **Newton** χρησιμοποίησε τα πορίσματα 3 και 4 ως τύπους παραγωγής δυναμοσειρών, σε αντίθεση με τον **Taylor** ο οποίος τα εφάρμοσε στην επίλυση εξισώσεων με ροές. Είναι πιθανό, οι παρατηρήσεις του **Newton** σχετικά με τους συντελεστές μίας δυναμοσειράς, να έγιναν αφού είχαν δημιουργηθεί οι σειρές με κάποιο άλλο τρόπο (μέθοδος διωνυμικού αναπτύγματος, διαδικασία παρεμβολής, μέθοδος εξαγωγής ρίζας). Η μέθοδος εξαγωγής ρίζας περιγράφεται στο παράδειγμα 1 της πρότασης 10 του 2ου βιβλίου των ***«Principia»***. Στο παράδειγμα αυτό (**Newton, 1687 : 263 – 264**) ο **Newton** θεώρησε ένα κύκλο με ακτίνα **n** και τεταγμένη **e** σε ένα σημείο **a** όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Στη συνέχεια για το σημείο **a+o** (όπου **o** απείρως μικρή ποσότητα) ορίζει ως

τεταγμένη την τιμή **y**. Από το σχήμα έχουμε ότι $\mathbf{y^2 = n^2 - (a+o)^2 = n^2 - a^2 - 2ao - o^2}$. Όμως $\mathbf{n^2 - a^2 = e^2}$. Έτσι, λόγω της προηγούμενης ισότητας, παίρνουμε ότι : $\mathbf{y^2 = e^2 - 2ao - o^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{e^2 - 2ao - o^2}}$. Με τη μέθοδο της εξαγωγής ρίζας, ο **Newton** μετασχηματίζει την τελευταία εξίσωση και τη γράφει σε σειρά άπειρων όρων ως εξής : $\mathbf{y = e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} - ...}$ Για αυτή τη σειρά ο **Newton** ανέφερε τα εξής : ***«Ο πρώτος όρος δείχνει πάντοτε το μήκος της τεταγμένης. Ο δεύτερος όρος προσδιορίζει το μήκος της εφαπτόμενης. Ο τρίτος όρος αντιπροσωπεύει τη σύντομη γραμμή μεταξύ της εφαπτόμενης και της καμπύλης και κατά συνέπεια καθορίζει την καμπυλότητα. Ο τέταρτος όρος εξηγεί τη μεταβολή της καμπυλότητας κ.ο.κ.»***.

3.4. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ STIRLING

Ο **Stirling** το **1717** με αρχικό κίνητρο την εργασία του **Newton**, δημοσίευσε ένα θεώρημα το οποίο ήταν ισοδύναμο με το θεώρημα του **Taylor**. Σε αυτή τη δημοσίευση ανέφερε τα εξής : ***«Παρατήρησα ότι οι αυξήσεις κατά την πρώτη χρονική στιγμή, κατά τη δεύτερη χρονική στιγμή, κατά την τρίτη χρονική στιγμή κ.ο.κ. είχαν μία συγκεκριμένη σχέση με τους αντίστοιχους όρους της σειράς και ότι οι όροι καθορίζονται από τις ροές. Η σχέση αυτή είναι η ακόλουθη :***

Έστω ότι η σειρά είναι $y = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + ...$ **(όπου r η ακτίνα του κύκλου που είχε θεωρήσει ο Newton)**. ***Θέτουμε***

$$B = \frac{\dot{y}}{1 \cdot r\,\dot{x}\,x^{r-1}},\quad C = \frac{\ddot{y}}{1 \cdot 2r^2(\dot{x})^2(x^{r-1})^2},\quad D = \frac{\dddot{y}}{1 \cdot 2 \cdot 3r^3(\dot{x})^3(x^{r-1})^3},\ \textit{κ.ο.κ.}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές για τους συντελεστές B, C, D,… έχουμε :

$$y = A + \frac{x\dot{y}}{1 \cdot r\,\dot{x}} + \frac{x^2\ddot{y}}{1 \cdot 2r^2(\dot{x})^2} + \frac{x^3\dddot{y}}{1 \cdot 2 \cdot 3r^3(\dot{x})^3} + ...\text{»} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Ο **Stirling** στην απόδειξή του υποθέτει ότι το $\mathbf{x^r}$ ρέει ομοιόμορφα. Έτσι θα έχουμε ότι $\mathbf{rx^{r-1}\dot{x} = 1}$ ή $\mathbf{\dot{x} = \frac{1}{rx^{r-1}}}$. Στη συνέχεια με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και με διαδοχικές παραγωγίσεις για **x=0** εξάγει τη σειρά **(3.3)** που είναι η σειρά **Taylor** για το **y** γύρω από το μηδέν.

Σε κάποια παραδείγματα που ακολουθούν αυτή την απόδειξη, ο **Stirling** αποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο το **y** μπορεί να εκφρασθεί σε μία δυναμοσειρά του **x** όταν το **y** και το **x** συνδέονται μέσω μίας συνηθισμένης

εξίσωσης ή μέσω μίας εξίσωσης με ροές. Οι εξισώσεις που πρότεινε ήταν οι ακόλουθες :

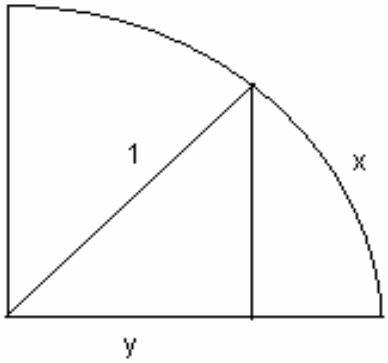
1) $y^4 - \alpha^3 y = \alpha x^3 - \alpha^3 x$.

2) $y^3 + \alpha^2 y + x^2 y - 2\alpha^3 = 0$.

3) $y = (\alpha + x)^n$.

4) $(\dot{y})^2 = (\dot{x})^2 - (\dot{x})^2 y^2$.

Ο **Taylor** στις ***«Μεθόδους»***, δεν εφαρμόζει το πόρισμα 2 της πρότασης 7 σε συνηθισμένες εξισώσεις αλλά ούτε και σε αναπτύγματα της μορφής $(\alpha + x)^n$. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί ο **Stirling** σε αυτά τα τέσσερα παραδείγματα είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιεί ο **Taylor**, κατά τη παρουσίαση του πορίσματος 2 της πρότασης 7, στην επίλυση εξισώσεων με ροές. Η μέθοδος αυτή είναι η εξής : με διαδοχικές παραγωγίσεις της εξίσωσης οι ροές μεγαλύτερης τάξης εκφράζονται συναρτήσει των ροών μικρότερης τάξης και στη συνέχεια, υπολογίζοντας τις ροές σε ένα συγκεκριμένο σημείο (εδώ στο **x=0**) παίρνουμε τους συντελεστές της σειράς. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία στο παράδειγμα της εξίσωσης **4)** θα έχουμε : Θεωρούμε κύκλο ακτίνας ίση με τη μονάδα. Τότε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα το **y** είναι το συνημίτονο του **x**. Με $\dot{x} = 1$ η εξίσωση γράφεται $(\dot{y})^2 = 1 - y^2$. Με διαδοχικές παραγωγίσεις αυτής της εξίσωσης θα έχουμε :



$\ddot{y} = -y$, $\dddot{y} = -\dot{y}$, $\ddddot{y} = -\ddot{y}$ κ.ο.κ. Για **x=0** παίρνουμε ότι **y=1**. Τότε $\dot{y} = \dddot{y} = \ddddddot{y} = \ldots = 0$. Έτσι αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στη σχέση **(3.3)** θα έχουμε το ανάπτυγμα της σειράς του συνημίτονου το οποίο είναι :

$$y = \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \ldots$$

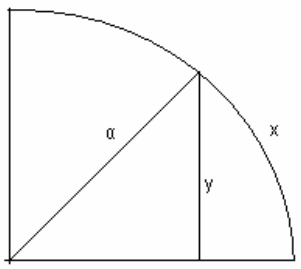
Η εξίσωση αυτή αποτελεί το πρώτο δημοσιευμένο παράδειγμα της εφαρμογής του θεωρήματος **Taylor** στην εξαγωγή αναπτύγματος δυναμοσειράς για μία γνωστή συνάρτηση. (Η τεχνική αυτή είχε αναπτυχθεί σχεδόν σαράντα χρόνια νωρίτερα από τον **James Gregory**).

3.5. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ LEIBNIZ

Σε αντίθεση με τους **Gregory** και **Newton** οι οποίοι ουσιαστικά προέβλεπαν το θεώρημα του **Taylor**, ο **Johann Bernoulli**, πρωτίστως, και στη συνέχεια ο **Leibniz**, παρακινήθηκαν από την εκτίμηση που είχαν ο ένας για τον άλλο σχετικά με τις δημοσιευμένες και αδημοσίευτες εργασίες τους. Η

αλληλογραφία που είχαν κατά τα έτη **1694** και **1695** αποτελεί ένα εξαιρετικά σημαντικό αρχείο που αποδεικνύει τη συνεργασία τους, όχι μόνο στα αποτελέσματα του θεωρήματος **Taylor** αλλά και σε διάφορες έξυπνες τεχνικές που εισήγαγαν στον Απειροστικό Λογισμό.

Η μέθοδος του **Leibniz** είναι σήμερα γνωστή ως η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Σε κάποιο από τα παραδείγματά του ο **Leibniz** υπολόγισε σε σειρά τη λύση της εξίσωσης : $\alpha^2(dx)^2 = \alpha^2(dy)^2 + y^2(dx)^2$ η οποία αντιπροσωπεύει το **ημy** σε όρους του τόξου **x** και της ακτίνας **α** όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μέθοδός του είναι η ακόλουθη : Αρχικά παραγωγίζει τη δοσμένη εξίσωση υποθέτοντας το **dx** σταθερά. Έτσι παίρνει ότι $2\alpha^2 dy(d^2y) + 2ydy(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \alpha^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ **(3.4)** Στη συνέχεια θεωρεί ότι η σειρά είναι της μορφής $y = bx + cx^3 + ex^5 + fx^7 + \ldots$ και προχωρά σε διαδοχικές παραγωγίσεις της. Μέσω αυτών των παραγωγίσεων παίρνει ότι $\dfrac{dy}{dx} = b + 3cx^2 + 5ex^4 + 7fx^6 + \ldots, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\cdot 3cx + 4\cdot 5ex^3 + 6\cdot 7x^5 + \ldots$ κ.ο.κ. Αντικαθιστά τα εξαγόμενα των παραγωγίσεων και τη σειρά **y** που υπέθεσε στη σχέση **(3.4)** Άρα η σχέση **(3.4)** τώρα γράφεται : $\alpha^2(2\cdot 3cx + 4\cdot 5ex^3 + 6\cdot 7fx^6 + \ldots) + bx + cx^3 + ex^5 + fx^7 + \ldots = 0$. Συνεχίζει με αναγωγή ομοίων δυνάμεων του **x** και έτσι η προηγούμενη ισότητα παίρνει τη μορφή : $(2\cdot 3\alpha^2 c + b)x + (4\cdot 5\alpha^2 e + c)x^3 + (6\cdot 7\alpha^2 f + e)x^5 + \ldots = 0$. Τέλος εξισώνει τους συντελεστές των δυνάμεων του **x** με το μηδέν θεωρώντας συγχρόνως ότι **b=1**. Έτσι παίρνει ότι : $c = -\dfrac{1}{2\cdot 3\alpha^2}$, $e = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\alpha^4}$, $f = -\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\alpha^6}, \ldots$. Επομένως, η σειρά για το **y=ημx** θα είναι η ακόλουθη : $y = \eta\mu x = x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3\alpha^2} + \dfrac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\alpha^4} - \dfrac{x^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\alpha^6} + \ldots$

Ο **Leibniz** είχε ανακαλύψει και μία άλλη μέθοδο εξαγωγής σειρών κατά την διάρκεια μελετών του στο **Παρίσι**, όταν εργαζόταν πάνω στα αθροίσματα του **Blaise Pascal**. Για αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούσε εξισώσεις διαφορών και η διαδικασία ήταν η ακόλουθη : Αρχικά θεωρεί τις φθίνουσες σειρές **a, b, c, d, …** και τις διαφορές τους, όπως περιγράφονται παρακάτω.

<u>Φθίνουσες Σειρές</u> : a, b, c, d,…
<u>Πρώτες Διαφορές</u> : e, f, g, h,…
<u>Δεύτερες Διαφορές</u> : l, m, n, o,…

Τρίτες Διαφορές : **p, q, r, s,…**
Τέταρτες Διαφορές : **t, u, v, x,…**
Πέμπτες Διαφορές : **β, γ, δ, θ,…** **(3.5)**

Τότε έχουμε ότι **a-b=e, b-c=f, c-d=g, d-…=h,** κ.ο.κ. Προσθέτει κατά μέλη τις προηγούμενες ισότητες και παίρνει ότι **a=e+f+g+h+…** **(3.6)**

Στη συνέχεια εκφράζει κάθε ένα από τα γράμματα του δεύτερου μέλους της **(3.6)**, σε όρους των διαδοχικών διαφορών που εμφανίζονται στην πρώτη διαγώνιο. Έτσι θα έχουμε : **e=e,** $\mathbf{e-f=l \Leftrightarrow f=1\cdot e-1\cdot l}$, $\mathbf{m=f-g \Leftrightarrow g=f-m=e-l-m}$ και **l-m=p** $\Leftrightarrow$ **m=l-p**. Αντικαθιστώντας την τιμή του **m** στην προηγούμενη ισότητα παίρνουμε ότι $\mathbf{g=1\cdot e-2\cdot l+1\cdot p}$. Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι $\mathbf{h=1\cdot e-3\cdot l-3\cdot p+1\cdot t}$ κ.ο.κ. Ο **Leibniz** σημειώνει ότι οι όροι που εμφανίζονται με αυτή τη σειρά, ονομάζονται συνδυαστικοί **(combinatorics)** αριθμοί. Συνεχίζοντας, θέτει **a=y**, **e=dy**, **l=ddy**, **p=d^{3}y**, **t=d^{4}y**, κ.ο.κ. ενώ θεωρεί το πολύ μικρό **dx** σταθερά ίση με **1**. Αντικαθιστώντας τις τιμές των **e**, **f**, **g**, **h**,**…** στη σχέση **(3.6)** προκύπτει ότι : **a=e+f+g+h+… =e+e-l+e-2l+p+e-3l-3p+t+… =(1+1+1+1…)e-(1+2+3+4+…)l+ +(1+3+6+10+…)p-(1+4+10+20+…)t+….** Όμως **(1+1+1+1+…)=(dx+dx+dx+ +dx+…)=**$\int \mathbf{dx=x}$ και κατά τον ίδιο τρόπο **(1+2+3+4+…)=**$\int \mathbf{x}$, **(1+3+6+10+…)=**$\iint \mathbf{x}$, **(1+4+10+20+…)=**$\iiint \mathbf{x}$ κ.ο.κ. Άρα η ισότητα **(3.6)** γράφεται : $\mathbf{a=y=xdy-ddy\int x+d^3y\iint x-d^4y\iiint x+...}$ Αλλά $\int \mathbf{x=\frac{1}{1\cdot 2}x^2}$, $\iint \mathbf{x=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3}$, $\iiint \mathbf{x=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4}$**,...** Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα η σειρά παίρνει τη μορφή :

$$\mathbf{y=x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1\cdot 2}x^2\frac{ddy}{dx^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4\frac{d^4y}{dx^4}+...} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Σε αυτή την ισότητα θέτει $\mathbf{y=\int y,\ dy=y,\ d^2y=dy,...}$ και τελικά η σειρά γράφεται : $\mathbf{\int ydx=xy-\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^3y}{dx^3}+...}$ **(3.8)**

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η σειρά **(3.8)** αποτελεί τη σειρά που ανακάλυψε ο **Johann Bernoulli**.

Σε σύγχρονη ορολογία οι διαφορές **(3.5)** του **Leibniz**, μπορούν να εκφρασθούν με δύο τρόπους :

α) Θεωρούμε τις τιμές : **f(x)** **f(x-Δx)** **f(x-2Δx)** κ.ο.κ. Τότε ως διαφορές θα έχουμε τις παρακάτω :

Πρώτες Διαφορές : **f(x-Δx)-f(x)** **f(x-2Δx)-f(x-Δx)** κ.ο.κ.
Δεύτερες Διαφορές : **f(x)-2f(x-Δx)+f(x-2Δx)** κ.ο.κ.

Αντικαθιστούμε αυτές τις διαφορές στη σχέση **(3.5)**. Τότε η σειρά αυτή γράφεται : $\mathbf{f(x)-f(0)=xf'(x)-\frac{x^2}{2!}f''(x)+\frac{x^3}{3!}f'''(x)-...}$ **(3.9)**

β) Θεωρούμε τις τιμές : **f(0)** **f(Δx)** **f(2Δx)** κ.ο.κ. Γράφουμε τις διαφορές ως εξής :

Πρώτες Διαφορές : **f(0)-f(Δx)** **f(Δx)-f(2Δx)** κ.ο.κ.

Δεύτερες Διαφορές : **f(0)-2f(Δx)+f(2Δx)** κ.ο.κ.

Με την αντικατάσταση αυτών των διαφορών στη σχέση **(3.7)** και αφού $\frac{f(0)-f(\Delta x)}{\Delta x}=-f'(0)$ η σειρά αυτή παίρνει τη μορφή : $f(0)-f(x)=-xf'(0)-\frac{x^2}{2!}f''(0)-\frac{x^3}{3!}f'''(0)-\ldots$ και με αλλαγή πρόσημου τελικά έχουμε : $f(x)-f(0)=xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$ **(3.10)**

Η σειρά **(3.9)** είναι η σειρά του **Taylor** γύρω από το μηδέν. Επίσης γνωρίζουμε, (Κεφάλαιο **2** - παράγραφος **2.4**) ότι η σειρά του **Taylor** είχε τη μορφή : $f(z+u)=f(z)+uf'(z)+\frac{u^2}{2!}f''(z)+\frac{u^3}{3!}f'''(z)+\ldots$ Θέτουμε όπου **z** το **x** και όπου **u** το **-u**. Τότε η σειρά γράφεται ως εξής : $f(x-u)=f(x)-uf'(x)+\frac{u^2}{2!}f''(x)-\frac{u^3}{3!}f'''(x)+\ldots$ Για **x=u** παίρνουμε ότι $f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(x)-\frac{x^3}{3!}f'''(x)+\ldots$ ή διαφορετικά : $f(x)-f(0)=xf'(x)-\frac{x^2}{2!}f''(x)+\frac{x^3}{3!}f'''(x)-\ldots$ Αυτή η σειρά αποτελεί τη σειρά του **Leibniz** όπως παρουσιάζεται από τη σχέση **(3.8)**.

Από μία επιστολή του **Leibniz** προς τον **Johann Bernoulli** γίνεται φανερό ότι ο **Leibniz** προσδοκούσε στη μέθοδο απόδειξης του **Taylor**. Ο **Leibniz** στη μέθοδό του εξέφραζε τις πρώτες διαφορές σε όρους διαφορών μεγαλύτερης τάξης, ενώ ο **Taylor** εξέφραζε την τεταγμένη σε όρους διαφορών πρώτης αλλά και μεγαλύτερης τάξης. Όμως και στις δύο μεθόδους η κεντρική ιδέα είναι ίδια. Ξεκινούσαν και οι δύο από το θεώρημα πεπερασμένων διαφορών και το μετασχημάτιζαν στο ισοδύναμο του Διαφορικού Λογισμού θεωρώντας τις διαφορές απείρως μικρές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο **Leibniz** δεν έδωσε καμία σημασία στον τύπο του **Taylor** παρά το γεγονός ότι είναι παρόμοιος με τον τύπο της σειράς του. Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι ο **Leibniz** δεν είχε εντυπωσιασθεί από τη χρησιμότητα και την αξία του αποτελέσματός του, σε αντίθεση με τον **Taylor** ο οποίος είχε δώσει μεγάλη έμφαση στη σημασία της σειράς του.

Ο **Leibniz** εισήγαγε επίσης και δύο σημαντικές ιδέες για έναν έξυπνο υπολογισμό πράξεων, στις οποίες τα διαφορικά και τα ολοκληρώματα ερμηνεύονται ως σύμβολα, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν σε αλγεβρικούς κανόνες για εκθέτες. Οι ιδέες αυτές είναι οι ακόλουθες :

α) Μπορούμε να εκφράσουμε το $\mathbf{d^{\kappa}}$ όταν το **κ** είναι αρνητικός αριθμός ή μηδέν ως εξής : $\mathbf{d^0x = x,\ d^{-1}x = \int x,\ d^{-2}x = \iint x,\ldots,d^{-r}x = \underbrace{\iiint\ldots\int}_{r-\text{ολοκληρώματα}} x}$

β) Υπάρχει μία σημαντική αναλογία μεταξύ των διαδοχικών δυνάμεων ενός διωνύμου και των διαδοχικών διαφορικών κάποιου γινομένου. **Παράδειγμα :** Θεωρούμε το ανάπτυγμα του διωνύμου $\mathbf{(x+y)^2}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι : $\mathbf{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$. Υπολογίζουμε αρχικά το διαφορικό του γινομένου **xy** και μετά βρίσκουμε το $\mathbf{d^2(xy)}$. Έτσι έχουμε ότι : $\mathbf{d(xy) = d(xf(x)) = (xf(x))'dx = (f(x) + xf'(x))dx =}$

$\mathbf{= (y + x\frac{dy}{dx})dx = ydx + xdy}$. Τότε για το $\mathbf{d^2(xy)}$ παίρνουμε ότι :

$$\mathbf{d^2(xy) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy) = (f(x)dx)'dx + (xdy)'dx =}$$

$$\mathbf{= (f'(x)\,dx + f(x)\frac{d^2x}{dx})dx + (dy + x\frac{d^2y}{dx})dx = (\frac{dy}{dx}dx + y\frac{d^2x}{dx})dx + dydx +}$$

$$\mathbf{+ xd^2y = dydx + yd^2x + dydx + xd^2y \underset{x=d^0x}{\overset{y=d^0y}{=}} d^2xd^0y + 2dxdy + d^2yd^0x}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο παρατηρήσεις, ο **Leibniz** οδηγήθηκε σε μία νέα σειρά με τον ακόλουθο τρόπο : Θεωρεί το διωνυμικό ανάπτυγμα $\mathbf{(x+y)^m = x^my^0 + \frac{m}{1}x^{m-1}y^1 + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}y^2 + \ldots}$ Τότε λόγω των **α)**, **β)** παίρνει ότι : $\mathbf{d^m(xy) = d^mxd^0y + \frac{m}{1}d^{m-1}xd^1y + \frac{m(m-1)}{2!}d^{m-2}xd^2y + \ldots}$ **(3.11)**

Αντικαθιστά το **d** με $\int$ ενώ θέτει όπου **m** το **–n** και όπου **x** το **dz**. Έτσι έχουμε : $\mathbf{d^{-n}(ydz) = d^{-n}(dz)d^0y + \frac{(-n)}{1}d^{-n-1}(dz)d^1y + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}d^{-n-2}(dz)d^2y + \ldots}$

ή $\mathbf{\int^n ydz = y\int^{n-1}z - \frac{n}{1}dy\int^n z + \frac{n(n+1)}{2!}d^2y\int^{n+1}z - \ldots}$ **(3.12)**

Η σειρά **(3.12)** αποτελεί τη γενίκευση των σειρών **Bernoulli**. (Πράγματι, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, για **n=1** προκύπτει μία από τις σειρές του **Johann Bernoulli**).

Όπως αποδεικνύεται από την αλληλογραφία των **Leibniz** και **Johann Bernoulli**, ο **Leibniz** απέτυχε να πιστώσει στον εαυτό του το επίτευγμά του. Αυτό έγινε διότι μεγάλο μέρος της εργασίας του στις άπειρες σειρές, το είχε χρεώσει στον **Johann Bernoulli**. Εάν αυτό δεν είχε συμβεί τότε το ιστορικό αρχείο θα ήταν κατά πολύ διαφορετικό, αφού τις σειρές **Bernoulli** και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποίησε ο **Taylor** στην πρόταση 7 – πόρισμα 2, θα τις αποδίδαμε σήμερα στον **Leibniz**.

3.6. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ JOHANN BERNOULLI

Το Νοέμβριο του **1694** ο **Johann Bernoulli** ανακοίνωσε ένα νέο θεώρημα σχετικά με τον τετραγωνισμό στο περιοδικό ***«Acta Eruditorum»*** και το χαρακτήρισε ως επίτευγμα της μεθόδου του **Leibniz**. Η μέθοδος αυτή αφορούσε στην εύρεση λύσεων διαφορικών εξισώσεων σε σειρές. Χαρακτηριστικά ο **Johann Bernoulli** έλεγε : ***«Αυτή η μέθοδος είναι η πιο διάσημη εργασία του Leibniz. Είναι γνωστό ότι σε κάθε παράδειγμα πρέπει να γίνει ξεχωριστός υπολογισμός για να παραχθεί μία συγκεκριμένη σειρά. Τώρα είμαι ευτυχής που καταγράφω μία γενική σειρά η οποία εκφράζει όλους τους τετραγωνισμούς και τα ολοκληρώματα άλλων διαφορικών»***.

Για την εύρεση αυτής της σειράς ο **Johann Bernoulli** θεώρησε το γινόμενο **ndz** ως μία σειρά άπειρων όρων η οποία αποτελείται από το **ndz** και ζευγάρια αντίθετων όρων ως εξής : $\mathbf{ndz = ndz + zdn - zdn + \frac{zzddn}{1\cdot 2dz} - \frac{zzddn}{1\cdot 2dz} + \frac{z^3dddn}{1\cdot 2\cdot 3dz^2} - \frac{z^3dddn}{1\cdot 2\cdot 3dz^2} + \ldots}$ Αναδιατάσσει τους όρους της σειράς και έτσι έχει : $\mathbf{ndz = (ndz + zdn) - (zdn + \frac{zzddn}{1\cdot 2dz}) + (\frac{zzddn}{1\cdot 2dz} + \frac{z^3dddn}{1\cdot 2\cdot 3dz^2}) - \ldots}$ ή $\mathbf{ndz = dnz - d\left(\frac{z^2dn}{1\cdot 2dz}\right) + d\left(\frac{z^3d^2n}{dz^2}\right) - \ldots}$ Ολοκληρώνει την τελευταία ισότητα και τελικά έχει : $\mathbf{\int ndz = nz - \frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2n}{dz^2} - \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^3n}{dz^3} + \ldots}$ **(3.13)**

Ο **Johann Bernoulli** είχε δώσει σε αυτήν τη σειρά τον τίτλο ***«Γενική Σειρά»***.

Με τη χρήση αυτής της σειράς ο **Johann Bernoulli** υπολόγιζε, όπως και ο **Leibniz**, τη λύση διαφορικών εξισώσεων σε σειρές. Μία εφαρμογή αυτής της χρήσης φαίνεται στην εξίσωση $\mathbf{\alpha^2(dx)^2 = \alpha^2(dy)^2 + y^2(dx)^2}$. Αρχικά, ο **Johann Bernoulli** μετασχηματίζει την παραπάνω εξίσωση και τη γράφει : $\mathbf{dy = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha}dx}$. Θέτει $\mathbf{n = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha}}$ και $\mathbf{dz = dx}$. Τότε $\mathbf{\frac{dn}{dz} = -\frac{y\frac{dy}{dx}}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - y^2}}}$ ενώ από την αρχική εξίσωση έχουμε ότι $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha}}$. Αντικαθιστώντας αυτό το πηλίκο στο πηλίκο $\mathbf{\frac{dn}{dz}}$ παίρνει ότι : $\mathbf{\frac{dn}{dz} = -\frac{y}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - y^2}}\frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha}} \Leftrightarrow$ $\mathbf{\Leftrightarrow \frac{dn}{dz} = -\frac{y}{\alpha^2}}$. Επίσης έχουμε ότι $\mathbf{\frac{d^2n}{dz^2} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{\alpha^3}}$. Τότε $\mathbf{\frac{d^3n}{dz^3} =}$

$$=\frac{y\frac{dy}{dx}}{\alpha^3\sqrt{\alpha^2-y^2}}=\frac{y\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}}{\alpha^3\sqrt{\alpha^2-y^2}}=\frac{y}{\alpha^4}$$ κ.ο.κ. Αντικαθιστά τα πηλίκα $\frac{dn}{dz}$, $\frac{d^2n}{dz^2}$,... στη ***«Γενική σειρά»*** **(3.11)**. Τότε παίρνει την παρακάτω σειρά : $y=\int dy=\int\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}dx=\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}x+\frac{yx^2}{2!\alpha^2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}x^3}{3!\alpha^3}-\frac{yx^4}{4!\alpha^4}+...$ Στη συνέχεια μετασχηματίζει αυτή τη σειρά γράφοντάς την ως εξής : $y-\frac{yx^2}{2!\alpha^2}+\frac{yx^4}{4!\alpha^4}-...=\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}(x-\frac{x^3}{3!\alpha^2}+\frac{x^5}{5!\alpha^4}-...)$ ή διαφορετικά $y(1-\frac{x^2}{2!\alpha^2}+\frac{x^4}{4!\alpha^4}-...)=\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{\alpha}(x-\frac{x^3}{3!\alpha^2}+\frac{x^5}{5!\alpha^4}-...)$. Πολλαπλασιάζει την ισότητα με το πηλίκο $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$ και έτσι η εξίσωση γράφεται ως : $\frac{y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}(\alpha-\frac{x^2}{2!\alpha}+\frac{x^4}{4!\alpha^3}-...)=x-\frac{x^3}{3!\alpha^2}+\frac{x^5}{5!\alpha^4}-...$ Έτσι τελικά παίρνει : $\frac{y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=\frac{x-\frac{x^3}{3!\alpha^2}+\frac{x^5}{5!\alpha^4}-...}{\alpha-\frac{x^2}{2!\alpha}+\frac{x^4}{4!\alpha^3}-...}$. Στην εξίσωση αυτή ο αριθμητής είναι το ανάπτυγμα της σειράς του ημίτονου που είχε υπολογίσει, όπως είδαμε στην παράγραφο **3.5.**, με διαφορετικό τρόπο ο **Leibniz**.

Σε ένα άλλο παράδειγμα στο ίδιο άρθρο, ο **Johann Bernoulli** χρησιμοποίησε τη σειρά του για να υπολογίσει το λογάριθμο **y** ο οποίος δίνεται από τη διαφορική εξίσωση $dy=\frac{\alpha dx}{\alpha+x}$. Ο **Leibniz** είχε λύσει την εξίσωση με αποτέλεσμα : $y=x-\frac{x^2}{2\alpha}+\frac{x^3}{3\alpha^2}-\frac{x^4}{4\alpha^3}+...$, ενώ ο τύπος του **Johann Bernoulli** δίνει ως λύση την : $y=\frac{\alpha x}{\alpha+x}+\frac{\alpha x^2}{2(\alpha+x)^2}+\frac{\alpha x^3}{3(\alpha+x)^3}+...$ για την οποία σημειώνει : ***«Παρόλο που ο τύπος είναι διαφορετικός από αυτόν του Leibniz η τιμή της λύσης είναι η ίδια»***.

Ο **Johann Bernoulli** αναγνωρίζει ότι η μέθοδός του δεν απομονώνει πάντοτε το **y** (όπως στη περίπτωση του ημίτονου) και στο τέλος της εργασίας του σημειώνει : ***«Αυτό οφείλεται στην αξία του απαράμιλλου Leibniz ο οποίος με τη μέθοδό του εξάγει λύσεις οι οποίες δεν περιέχουν άλλες ποσότητες. Όμως πρέπει να γίνει αποδεκτό, ότι και η δική μου μέθοδος είναι αρκετά αξιοσέβαστη για τη καθολικότητά του»***.

Σίγουρα, ο **Johann Bernoulli** δεν υπερβάλλει όταν λέει ότι οι σειρές του αξίζουν επαίνου. Οι λύσεις του διαφέρουν από αυτές του **Leibniz**, επειδή οι σειρές του είναι ισοδύναμες (όχι όμως ίδιες) με αυτές του **Taylor**. (Ενώ οι λύσεις του **Leibniz** σε δυναμοσειρές, είναι οι ίδιες με τα αναπτύγματα του **Taylor** γύρω από το μηδέν). Ένας από τους τρόπους για να δούμε αυτή την ισοδυναμία, είναι να δημιουργήσουμε και τις δύο σειρές από το ίδιο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες. Έτσι θα πάρουμε : $\int_0^x f'(t)dt = [tf'(t)]_0^x - \int_0^x tf''(t)dt = [tf'(t)]_0^x - [\frac{t^2}{2!}f''(t)]_0^x + ... =$ $= xf'(x) - \frac{x^2}{2!}f''(x) + \frac{x^3}{3!}f'''(x) - ...$ Θέτουμε $n = f'$ και $x = z$. Τότε έχουμε ότι : $\int_0^x f'(t)dt = nz - \frac{z^2}{2!}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{3!}\frac{d^2n}{dz^2} - ...$ Το δεύτερο μέλος αυτής της ισότητας είναι η σειρά **(3.11)** του **Johann Bernoulli**. Επίσης, το ολοκλήρωμα $\int_0^x f'(t)dt$ γράφεται ως : $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (t-x)'f'(t)dt = [(t-x)f'(t)]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)dt =$ $= [(t-x)f'(t)]_0^x - [\frac{(t-x)^2}{2!}f''(t)]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2}f'''(t)dt = ... = xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ...$ Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι το ανάπτυγμα της σειράς του **Taylor**.

Στη συνέχεια της εργασίας του, ο **Johann Bernoulli** δίνει τον ακόλουθο κανόνα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μίας διαφορίσιμης ποσότητας : ***«Μία δοθείσα διαφορίσιμη ποσότητα οποιουδήποτε βαθμού μπορεί να ολοκληρωθεί αφού πρώτα τη διαφορίσουμε και μετά πάρουμε την τρίτη αναλογία αυτής της νέας ποσότητας προς την αρχική θεωρώντας τα d, d^2, d^3, d^4,... αλγεβρικές ποσότητες και όχι απλά γράμματα»***. Πρόκειται για έναν παράξενο κανόνα του οποίου η εξήγηση είναι η εξής : Εάν το διαφορικό $d^m x$ το θεωρήσουμε ως μία μεταβλητή **dx** που υψώνεται στη δύναμη **m**, τότε για να υπολογίσουμε το διαφορικό του γινομένου $d^m x d^n y$ στηριζόμαστε στις ιδιότητες των πράξεων των δυνάμεων και πολλαπλασιάζουμε το $d^m x d^n y$ με την ποσότητα $d^0 x d^1 y + d^1 x d^0 y$. Για παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση όπου **m=1** και **n=1**. Τότε $d(dxdy) = \frac{d}{dx}(dxdy)dx = (\frac{d^2x}{dx}dy + \frac{d^2y}{dx}dx)dx = d^2xdy + d^2ydx$. Επίσης, έχουμε ότι $dxdy(d^0xdy + dxd^0y) = d^2xdy + dxd^2y$. Έτσι παίρνουμε ότι $d(dxdy) = dxdy(d^0xdy + dxd^0y)$ και γενικά $d(d^m x d^n y) = d^m x d^n y(d^0 x dy + dx d^0 y) =$ $= d^m x d^{n+1} y + d^{m+1} x d^n y$. Επεκτείνοντας τον κανόνα στα ολοκληρώματα, θα έχουμε ότι η ολοκλήρωση κάποιου διαφορικού θα αντιστοιχεί στη διαίρεση αυτής της αλγεβρικής έκφρασης με την ποσότητα $d^0 x d^1 y + d^1 x d^0 y$. Για

παράδειγμα θεωρούμε το ολοκλήρωμα του $\mathbf{d^1xd^4y+d^2xd^3y}$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι : $\mathbf{d(dxd^3y)=dxd^4y+d^2xd^3y=dxd^3y(d^0xd^1y+d^1xd^0y)}$.

Άρα $\dfrac{\mathbf{dxd^4y+d^2xd^3y}}{\mathbf{d^0xd^1y+d^1xd^0y}}=\mathbf{dxd^3y}$. Έτσι $\int\mathbf{(dxd^4y+d^2xd^3y)dx}=\int\mathbf{d(dxd^3y)dx}=$

$=\mathbf{dxd^3y}=\dfrac{\mathbf{dxd^4y+d^2xd^3y}}{\mathbf{d^0xd^1y+d^1xd^0y}}$. Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του τελευταίου κλάσματος με τον αριθμητή. Τότε προκύπτει το κλάσμα $\dfrac{\mathbf{(dxd^4y+d^2xd^3y)^2}}{\mathbf{(d^0xd^1y+d^1xd^0y)(dxd^4y+d^2xd^3y)}}$ που γράφεται ως :

$$\frac{\mathbf{(dxd^4y+d^2xd^3y)^2}}{\mathbf{(d^0xd^1y+d^1xd^0y)dxd^4y+(d^0xd^1y+d^1xd^0y)d^2xd^3y}}=\frac{\mathbf{(dxd^4y+d^2xd^3y)^2}}{\mathbf{d(dxd^4y)+d(d^2xd^3y)}}$$

(λόγω του κανόνα που αναπτύξαμε για τα διαφορικά). Έτσι παίρνουμε ένα κλάσμα στο οποίο ως αριθμητή έχουμε το τετράγωνο της αρχικής ποσότητας, ενώ ως παρονομαστή το άθροισμα των επιμέρους διαφορικών της. Αυτή ακριβώς είναι η μορφή της αναλογίας που δίνεται από τον κανόνα του **Johann Bernoulli**.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία, αλλά χωρίς να εξηγήσει τον τρόπο, ο **Johann Bernoulli** δημιουργεί μία σειρά απείρων όρων για να εκφράσει το ολοκλήρωμα $\int\mathbf{ndz}$ και έτσι παίρνει τις ακόλουθες σειρές :

$$\int\mathbf{ndz}=\begin{cases}\mathbf{d^0nd^0z-d^1nd^{-1}z+d^2nd^{-2}z-\ldots}\\ \mathbf{d^{-1}nd^1z-d^{-2}nd^2z+d^{-3}nd^3z+\ldots}\end{cases}=\begin{cases}\mathbf{nz-dn\int z+d^2n\iint z-\ldots}\\ \mathbf{dz\int n-d^2z\iint n+d^3z\iiint n-\ldots}\end{cases}$$

. Με το **dz** σταθερό έχουμε ότι $\int\mathbf{z}=\dfrac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{1\cdot 2dz}}$, $\iint\mathbf{z}=\dfrac{\mathbf{z^3}}{\mathbf{1\cdot 2\cdot 3dz^2}}$ κ.ο.κ. Άρα η πρώτη σειρά είναι η ***«Γενική σειρά»*** **(3.11)** του **Johann Bernoulli**. (Η σειρά αυτή προκύπτει και από τη σειρά **(3.10)** του **Leibniz** για **n=1**). Στη δεύτερη σειρά, εάν θεωρήσουμε το **dn** σταθερό, τότε θα έχουμε ότι :

$$\int\mathbf{ndz}=\mathbf{dz}\frac{\mathbf{n^2}}{\mathbf{1\cdot 2dn}}-\mathbf{d^2z}\frac{\mathbf{n^3}}{\mathbf{1\cdot 2\cdot 3dn^2}}+\mathbf{d^3z}\frac{\mathbf{n^4}}{\mathbf{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dn^3}}-\ldots \qquad \textbf{(3.14)}$$

Λαμβάνοντας τη ***«Γενική Σειρά»*** με αυτό τον περίεργο τρόπο ο **Johann Bernoulli** έγραψε στις σημειώσεις του τα εξής : ***«Όταν άρχισα να γράφω αυτή την εργασία δεν περίμενα αυτό το αποτέλεσμα. Σκέφτηκα ότι θα ανακαλύψω πολύ διαφορετικές σειρές μέσω αυτής της μεθόδου. Όμως η κατάληξη επιβεβαιώνει τη χρησιμότητα της παραπάνω διαδικασίας και ειδικά για την τελευταία σειρά, όπου αντίθετα με όλη την πρακτική, εξελίχθηκε με τη βοήθεια των γραμμάτων d».***

3.7. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ DE MOIVRE

Ο **De Moivre** εκπόνησε μία εργασία για τις σειρές του **Johann Bernoulli** η οποία, σύμφωνα με τον **Feigenbaum**, είναι ίσης αξίας με αυτήν του

Leibniz. Το αποτέλεσμα της εργασίας του θεωρείται η τελική διαμόρφωση της έννοιας της σειράς **Taylor** που δημοσιεύθηκαν στις ***«Μεθόδους»***. Η ανακάλυψη του **De Moivre**, ανακοινώθηκε σε μία επιστολή του προς τον **Johann Bernoulli**, στις **6 Ιουλίου** του **1708**. Στην επιστολή αυτή ο **De Moivre** συζητούσε τις έρευνές του σχετικά με τις ιδιότητες των ακολουθιών των αριθμών. Το ενδιαφέρον του είχε επικεντρωθεί σε εκείνες τις ακολουθίες για τις οποίες οι διαδοχικές διαφορές γίνονταν τελικά μηδέν. Ο **De Moivre** παρουσίαζε σε έναν πίνακα τις τιμές αυτών των ακολουθιών **a, b, c, d,…** συναρτήσει των διαδοχικών διαφορών **f, k, n, p,…** Το **p** δηλώνει την τελευταία διαφορά μετά το μηδέν. Ο πίνακας που κατασκεύασε ο **De Moivre** ήταν ο ακόλουθος :

a				
	f			
b=a+f		**k**		
	g=f+k		**n**	
c=a+2f+k		**l=k+h**		**p**
	h=f+2k+n		**0=n+p**	
d=a+3f+3k+n		**m=k+2n+p**		
	i=f+3k+3n+p			
e=a+4f++6k+4n+p				

Οι παραπάνω διαφορές μπορούν να σχηματοποιηθούν και ως εξής :

a b c d e
f g h i
k l m
n o
p

όπου :

b-a=f,	**g-f=k,**	**l-k=n**
c-b=g,	**h-g=l,**	**m-l=0**
d-c=h,	**i-h=m,**	**0-n=p**
e-d=i		

Ο **De Moivre** παρατήρησε ότι οι συντελεστές στην πρώτη στήλη του πίνακα είναι οι ίδιοι με αυτούς του διωνυμικού αναπτύγματος. Έτσι ο όρος τάξης **x+1**, στην πρώτη στήλη, δίνεται από την ισότητα :

$$\textbf{όρος τάξης } x+1 = a + xf + \frac{x(x-1)k}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)n}{3!} + \ldots \qquad (3.15)$$

Αυτό διαπιστώνεται εύκολα εάν στην προηγούμενη σχέση αντικαταστήσουμε το **x** με τις τιμές **0**, **1**, **2**,… Πράγματι, για **x=0** η σχέση **(3.15)** δίνει την τιμή **a** που είναι ο πρώτος όρος της πρώτης στήλης. Για **x=1** η **(3.15)** δίνει την τιμή **a+f=b**, δηλαδή τον δεύτερο όρο στην πρώτη στήλη κ.ο.κ.

Στη συνέχεια ο **De Moivre** συμβολίζει την πρώτη διαφορά με **d'**, τη δεύτερη διαφορά με **d''**, την τρίτη διαφορά με **d'''** κ.ο.κ. Έτσι το άθροισμα της σχέσης **(3.15)** γράφεται : $a + xd' + \frac{x(x-1)}{2!}d'' + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}d''' + \ldots$ **(3.16)**

Μέσω αυτής της σειράς, ο **De Moivre** προχώρησε σε πολλές αριθμητικά παραδείγματα ανάμεσα στα οποία ήταν και ο τύπος για το άθροισμα κύβων **n** αριθμών. Θεώρησε την αριθμητική πρόοδο **0**, **1**, **2**, **3**,**…**,**x** όπου οι αριθμοί **0**, **1**, **2**, **3**,**…**,**x** αντιστοιχούν στους αριθμούς **a**, **b**, **c**, **d**, **e**,**…** και στη συνέχεια ανέφερε τα εξής : ***«Το x μπορεί να εκτιμηθεί ως η τετμημένη ενός σημείου μίας καμπύλης, ενώ η έκφραση*** $a + xd' + \frac{x(x-1)}{2!}d'' + \ldots$ ***ως η τεταγμένη του. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε μία καμπύλη η οποία διέρχεται από όσα σημεία επιθυμούμε. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα αυτό έχει επιλυθεί και από τον Newton»***.

Επίσης, με τη βοήθεια της σχέσης **(3.14)**, ο **De Moivre** απέδειξε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να υπολογίσει το εμβαδόν χωρίου καμπύλης όταν έχουν δοθεί αρκετά σημεία της με ισαπέχουσες τεταγμένες. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο, ο **De Moivre** σημειώνει ότι η διαδικασία της έρευνάς του καταλήγει σε ένα αποτέλεσμα παρόμοιο με αυτό του **Johann Bernoulli**. Συγκεκριμένα, έγραφε στις σημειώσεις του : ***«Έστω η τεταγμένη*** $a + xd' + \frac{x(x-1)}{2!}d'' + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}d''' + \ldots$ ***. Υποθέτουμε ότι για πολύ μεγάλα x θα έχουμε ότι*** $x - 1 \cong x$, $x - 2 \cong x$, ***κ.ο.κ. Τότε η τεταγμένη γράφεται :*** $a + xd' + \frac{x^2}{2}d'' + \frac{x^3}{6}d''' + \ldots$ ***. Ολοκληρώνοντας στο [0, 1] έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδό θα έχει τιμή*** $a + \frac{1}{2}x^2 d' + \frac{x^3}{6}d'' + \frac{x^4}{24}d''' + \ldots$ ***. Η τιμή αυτή ισοδυναμεί με την τιμή που βρίσκουμε από τη σειρά του Johann Bernoulli κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος*** $\int ydx$ ***»***.

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο **3.5.**, μία παρόμοια απόδειξη της σειράς του **Johann Bernoulli** είχε κάνει και ο **Leibniz**. Υπέθετε ακολουθίες αριθμών και τις διαφορές τους και έχοντας μία διαισθητική εκτίμηση του ορίου, κατέληξε σε μία σειρά άπειρων όρων που περιελάμβανε τις διαδοχικές παραγώγους μίας μεταβλητής.

Σε σύγχρονη ορολογία οι σειρές των **Taylor** και **De Moivre** έχουν δύο αξιοσημείωτες διαφορές :

α) Ο **De Moivre** ουσιαστικά επαναδιατυπώνει το Λήμμα 5 του 3^{ου} βιβλίου των ***«Principia»*** του **Newton**. Το χρησιμοποιεί ως ενδιάμεσο βήμα για την εξαγωγή της σχέσης **(3.14)**, σε αντίθεση με τον **Taylor** ο οποίος δεν ενεργεί έτσι.

β) Ο **De Moivre** και για τη διακριτή αλλά και για τη συνεχή περίπτωση χρησιμοποιεί τον ίδιο συμβολισμό **d', d'', d''',** κ.ο.κ. ενώ ο **Taylor** αλλά και ο **Leibniz** χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό για κάθε περίπτωση.

Ένα άλλο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό της απόδειξης του **De Moivre**, είναι ότι στα συμπεράσματά του, διατυπώνει την εκτίμηση ότι η σειρά του **Taylor** είναι ίδια με αυτήν του **Johann Bernoulli**. Δεν έχει γίνει γνωστό μέχρι ποιο σημείο ο **De Moivre** αναγνώρισε τη σύνδεση μεταξύ των σειρών **Taylor** και **Johann Bernoulli**. Επίσης, δεν γνωρίζουμε πόσοι από αυτούς που επιβεβαίωσαν τις ***«Μεθόδους»*** του **Taylor** αναγνώρισαν συγχρόνως την ισοδυναμία των θεωρημάτων του **Taylor** και του **Johann Bernoulli**. Είναι όμως βέβαιο ότι η συγκεκριμένη παρατήρηση του **De Moivre** αναδεικνύει τόσο τη μαθηματική του διορατικότητα όσο και τη σπουδαιότητα της προσφοράς του στην εξέλιξη των σειρών.

3.8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Εξετάζοντας τις παραπάνω εργασίες και τη σχετικά ταυτόχρονη εμφάνισή τους, μπορούμε να οδηγηθούμε στη διαπίστωση, ότι είχε φθάσει το χρονικό σημείο για την ανακάλυψή τους. Το συμπέρασμα αυτό αποδίδεται ειδικότερα σε τρεις παράγοντες :

α) Στην ειδική φύση της σειράς **Taylor** η οποία εκδηλώνεται σε περισσότερα από ένα πλαίσια και μπορεί να αποδειχθεί με πλήθος τρόπων.

β) Στη γενική κατάσταση της μαθηματικής γνώσης που χαρακτηρίζεται από τη γρήγορη ανάπτυξη των εννοιών και από έναν μεγάλο αριθμό προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής.

γ) Τέλος, στην εκτενή επικοινωνία μεταξύ των μελών της Μαθηματικής κοινότητας σε όλη την Ευρώπη. Η επικοινωνία αυτή στηριζόταν στην αλληλογραφία, στα περιοδικά, σε διάφορα κείμενα αλλά και σε πολλά μαθηματικά προβλήματα που αποτελούσαν πρόκληση για την εποχή.

Οποιαδήποτε εξέταση σύγχρονων εγχειριδίων του Απειροστικού Λογισμού μπορεί να επιβεβαιώσει ότι οι σειρές **Taylor** και οι διάφορες ισοδύναμες μορφές της μπορούν να ληφθούν από έναν πλούτο διαφορετικών τεχνικών. Αυτό φαίνεται στην απόδειξη του **Taylor** για την πρόταση 7 – πόρισμα 2 (όπου χρησιμοποίησε τη γενικότερη θεωρία των πεπερασμένων αυξήσεων) όπως και στις αποδείξεις των **Leibniz** και **De Moivre** (οι οποίοι χρησιμοποίησαν ακολουθίες αριθμών και διαδοχικές ακολουθίες διαφορών). Ο **Leibniz** με έναν αυστηρά αναλυτικό τρόπο μετασχημάτισε τις πεπερασμένες διαφορές του σε διαφορικά ενώ ο **De Moivre** ερμηνεύοντας τον αριθμητικό τύπο του ως συντεταγμένη σημείου μίας καμπύλης κατάφερε να φθάσει στον τύπο για την ίδια την καμπύλη. Οι **Johann Bernoulli** και **De Moivre** απέδειξαν τη σειρά **Bernoulli** χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση κατά παράγοντες, σε αντίθεση με τον **Newton** ο οποίος χρησιμοποίησε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Πρώτα υπέθεσε τη μορφή της σειράς και στη συνέχεια με διαδοχικές παραγωγίσεις

καθόρισε τους συντελεστές. Τέλος, οι **Leibniz** και **Johann Bernoulli** κατέληξαν στις σειρές **Bernoulli** πειραματιζόμενοι με τις αναλογίες μεταξύ των διαδοχικών δυνάμεων ενός διωνύμου και των διαδοχικών διαφορικών ενός γινομένου.

Η σημαντική συλλογή των παραπάνω τεχνικών επιβεβαιώνει τη μαθηματική μεγαλοφυΐα και τη δημιουργικότητα των μαθηματικών που τις χρησιμοποίησαν. Η εμπειρία έχει δείξει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ποικιλομορφία των μεθόδων που ακολουθούνται για τη διερεύνηση ενός αποτελέσματος, τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα ανακάλυψής του. Στο σημείο αυτό, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει και μία εξήγηση σχετικά με την επιλογή αυτών των τεχνικών. Οι δύο προαναφερόμενοι παράγοντες δεν εξηγούν επαρκώς τον τρόπο με τον οποίο έγινε αυτή η επιλογή. Για τη σειρά **Taylor** μπορούμε να πούμε ότι κάποια από τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στις διάφορες αποδείξεις, ήταν κοινά σε όλους τους μαθηματικούς που ανακάλυψαν τη σειρά ή ήρθαν κοντά στην ανακάλυψή της.

Τα δύο πιο σημαντικά κοινά εργαλεία ήταν ο τύπος παρεμβολής του **Newton**, που δημοσιεύθηκε ως Λήμμα 5 στο 3^{ο} βιβλίο των ***«Principia»***, και ο τύπος για το διαφορικό ενός γινομένου. Αυτοί οι δύο τύποι οδηγούν άμεσα στη σειρά **Taylor** ή τη σειρά του **Johann Bernoulli**. Οι **Taylor**, **Leibniz** και **De Moivre** χρησιμοποίησαν μία έκδοση του τύπου του **Newton** που αποτέλεσε το κρίσιμο βήμα για τη λήψη της γενικής μορφής της σειράς. Είναι πολύ πιθανό και ο **James Gregory** να είχε καταλήξει στον τύπο της σειράς με αυτόν τον τρόπο, αφού κατείχε το γενικό τύπο της παρεμβολής τον οποίο είχε ανακαλύψει ανεξάρτητα από τον **Newton**. Ο τύπος για το διαφορικό ενός γινομένου όχι μόνο αποτέλεσε τη βάση για την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, που χρησιμοποίησαν οι **De Moivre** και **Johann Bernoulli**, αλλά οδήγησε τον **Leibniz** στη **«διάσημη αναλογία»** μέσω της οποίας αυτός και ο **Johann Bernoulli** παρήγαγαν και άλλες αποδείξεις για τη σειρά **Bernoulli**.

Όλες αυτές οι τεχνικές βοήθησαν τους μετέπειτα μαθηματικούς κατά την ενασχόλησή τους με θέματα του Απειροστικού Λογισμού. Κάποια γενικά προβλήματα όπως η επίλυση διαφορικών εξισώσεων, η εξαγωγή ριζών εξισώσεων ή ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων απαιτούσαν συχνά τον χειρισμό άπειρων σειρών. Έτσι, η γνώση αυτών των εργασιών και μεθόδων υπήρξε σημαντικός αρωγός στις προσπάθειες αυτών των επιστημόνων.

Οι περισσότεροι από τους μαθηματικούς που εργάστηκαν κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου, μοιράστηκαν την κοινή προοπτική της προόδου του Απειροστικού Λογισμού. Αυτό έγινε φανερό με δύο τρόπους :

α) Με την επιτυχία των νέων αποτελεσμάτων, η οποία πραγματοποιήθηκε μέσω των ισχυρών τεχνικών που παρέχονται από τον Απειροστικό Λογισμό και,

β) Με μία κοινή επιθυμία η οποία είχε διατυπωθεί από όλες τις μαθηματικές κοινότητες της εποχής. Η καινούργια ανακάλυψη να

λειτουργήσει έξω από τα όρια της ακαμψίας που μέχρι τότε είχε καθιερωθεί από παλαιότερες μεθόδους.

Για τον **Taylor** και τους προγενέστερούς του αυτό σήμαινε ότι οι αποδείξεις των σειρών **Taylor** και **Johann Bernoulli** ανέδειξαν την ευστροφία και την διορατικότητά τους, αλλά συγχρόνως και μία ξεχωριστή έλλειψη σεβασμού προς την αυστηρή θεμελίωση που θεωρούμε σήμερα. Σε όλες τις αποδείξεις που συναντήσαμε κανείς δεν εξέτασε το θέμα της σύγκλισης ή το εάν υπάρχει κάποιο υπόλοιπο. Όμως οι αυστηρές αποδείξεις της σειράς **Taylor** θα έρχονταν μόνο σε ένα μεταγενέστερο στάδιο κατά το οποίο θα είχε υπάρξει θεωρητική ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Εάν είχε συμβεί κάτι τέτοιο τότε ο **Taylor** και οι πιο σύγχρονοι από αυτόν θα θεωρούσαν ως κρίσιμη ανακάλυψη τον καθορισμό της πραγματικής μορφής της σειράς και τη δυνατότητα επέκτασης της εφαρμογής της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ TAYLOR ΚΑΙ JOHANN BERNOULLI – ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΤΟΥ TAYLOR – ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1. Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ TAYLOR ΚΑΙ BERNOULLI

Η αποδοχή του αποτελέσματος του θεωρήματος του **Taylor** και η ιστορική σύνδεσή του με το θεώρημα του **Johann Bernoulli** αποτιμάται ως μία περίπλοκη διαδικασία.

Ο **Johann Bernoulli**, έχοντας δει την εργασία των ***«Μεθόδων»*** του **Taylor**, δημοσίευσε το **1716** μία ανώνυμη επιστολή στο περιοδικό ***«Acta Eruditorum»*** στην οποία κατηγορούσε τους Άγγλους μαθηματικούς και ειδικότερα τον **Taylor** για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας. Από τότε και για περίπου οκτώ έτη αμφισβητεί συνεχώς την εργασία του **Taylor** και ειδικά την πρόταση 7 – πόρισμα 2. Αυτή η διαμάχη συνεχίστηκε ακόμη και έναν αιώνα μετά του θάνατο του **Johann Bernoulli** με υποκινητή τον **Giuseppe Peano**, ο οποίος υποστήριζε ότι ο **Johann Bernoulli** δικαίως διεκδικούσε την πατρότητα αυτού του θεωρήματος. Όμως, κάποια νέα στοιχεία που βρέθηκαν σε αδημοσίευτα έγγραφα του **Taylor** οδηγούν τον **Peano** στον ακόλουθο σχολιασμό : ***«Το 1694 ο Johann Bernoulli δημοσίευσε μία σχέση η οποία φέρνει το όνομά του αλλά είναι σχεδόν ισοδύναμη με τον τύπο του Taylor. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα αφού με μία απλή αντικατάσταση γραμμάτων μπορούμε να εξάγουμε τον ένα τύπο από τον άλλο. Έτσι η αξίωση της πατρότητας αυτού του τύπου από τον Johann Bernoulli θεωρείται αδικαιολόγητη»***.

Στην πρόταση 11 των ***«Μεθόδων»***, που είδαμε στο Κεφάλαιο **2** - παράγραφος **2.5.**, ο **Taylor** είχε πάρει την ακόλουθη εξίσωση για το **ρέον** (ολοκλήρωμα) του $\dot{r}\dot{s}$: $\int \dot{r}\dot{s} = rs - r'\dot{s} + r''\ddot{s} - r'''\dddot{s} + \ldots$ **(4.1)**

Ο **Alfred Pringsheim** το **1900**, ήταν ο πρώτος που έγραψε τη σχέση **(4.1)** ως εξής : $\int s\,dr = rs - \int r\,dr\frac{ds}{dr} + \int dr\int r\,dr\frac{d^2s}{dr^2} - \int dr\int dr\int r\,dr\frac{d^3s}{dr^3} + \ldots$ **(4.2)**

Ο **Pringsheim** παρατηρεί ότι η σχέση **(4.2)** είναι η ίδια με τη σειρά **(3.13)** του **Johann Bernoulli** η οποία σε σύγχρονη μορφή γράφεται ως :

$$\int_0^x \varphi(x)dx = \varphi(x)x - \varphi'(x)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \varphi''(x)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots \quad (4.3)$$

Στη συνέχεια, στον τύπο της σειράς του **Taylor** :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \quad (4.4)$$

κάνει την αντικατάσταση $f' = \varphi$ και $h = -x$. Τότε από τη σειρά **(4.4)** του

Taylor εξάγεται η σειρά **(4.3)** του **Johann Bernoulli**.

Αντίστροφα, θεωρούμε τη σύγχρονη μορφή της σειράς του **Johann Bernoulli** $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx = f'(x)x - f''(x)\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots$ και κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x = t - h$ και στη συνέχεια $x = -h$. Τότε η προηγούμενη σειρά θα πάρει τη μορφή $f(t-h)-f(t) = -f'(t-h)h - f''(t-h)\frac{h^2}{1\cdot 2} - f'''(t-h)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots$ ή διαφορετικά $f(t)-f(t-h) = f'(t-h)h + f''(t-h)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(t-h)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ Θέτουμε **t=x+h** και τελικά παίρνουμε : $f(x+h)-f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ που όπως είδαμε (Κεφάλαιο **2** – Παράγραφος **2.4**) είναι η σειρά του **Taylor**.

Ο **Pringsheim** σε κάποια συμπεράσματά του ανέφερε τα εξής : ***«Θα ήταν πραγματικά πολύ δύσκολο να εξάγουμε τη σειρά του Taylor από τον τύπο του Johann Bernoulli εάν αυτή δεν είχε ήδη βρεθεί ανεξάρτητα με κάποιο φυσικότερο τρόπο»***. Με βάση αυτή την αναφορά αλλά χρησιμοποιώντας και κάποια ιστορικά επιχειρήματα, ο **Pringsheim** κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ούτε ο **Taylor** αλλά ούτε και ο **Johann Bernoulli** γνώριζαν τη σχέση μεταξύ των δύο θεωρημάτων τους. Ο **Taylor** είχε δημοσιεύσει την πρόταση 11 και την πρόταση 7 – πόρισμα 2 ξεχωριστά. Ο **Johann Bernoulli** είχε παραμείνει σιωπηλός για την πρόταση 7 – πόρισμα 2. Αυτό που απαιτούσε ως δική του ιδέα ήταν η πρόταση 11. Κατά τον **Pringsheim**, ο **Johann Bernoulli** δεν είχε εξετάσει την περίπτωση εξαγωγής της σειράς **Taylor** από τη σειρά του.

Το γεγονός ότι το θεώρημα του **Johann Bernoulli** είναι μία εύκολη και φυσική συνέπεια του θεωρήματος του **Taylor**, αναγνωρίστηκε στις αρχές του 18^{ου} αιώνα. Ο **Euler**, ο οποίος ήταν μαθητής του **Johann Bernoulli**, απέδειξε το θεώρημα του **Bernoulli** χρησιμοποιώντας το θεώρημα του **Taylor**. Αρχικά ανέπτυξε τη σειρά του **Taylor** σε όρους πεπερασμένων διαφορών και στη συνέχεια εξήγαγε τον τύπο του **Johann Bernoulli** ως μία ειδική περίπτωση. Αυτό που ο **Euler** δεν απέδειξε, σύμφωνα με τον **Gustaf Enestrom** (**1905**), είναι η εξαγωγή της σειράς του **Taylor** από τη σειρά του **Johann Bernoulli**.

Εάν και οι δύο σειρές είναι ισοδύναμες φαίνεται να υπάρχει διαφωνία για τη φύση της κάθε σειράς. Αυτό το πιθανό χάσμα προσπαθούν να το καλύψουν οι αξιολογήσεις που εκφράζονται από τους ερευνητές μαθηματικούς από τον πρόωρο 18^{ο} αιώνα μέχρι και σήμερα. Για παράδειγμα, ο **Robert Rieff** (**1889**) παρατήρησε ότι η δημοσιευμένη εκδοχή των σειρών του **Johann Bernoulli** είναι διαφορετική από αυτήν του **Taylor** επειδή οι συντελεστές $\frac{dn}{dz}, \frac{d^2n}{dz^2}, \ldots$ είναι συναρτήσεις του **z**. Για αυτό το λόγο ο **Johann**

Bernoulli δεν εξάγει δυναμοσειρά για τη συνάρτηση $\int_0^z \mathbf{n}dz$.

Την ίδια ερμηνεία, τριάντα χρόνια αργότερα, έδωσε και ο **George Gibson** ο οποίος ανέφερε τα εξής : ***«Είναι προφανές ότι το θεώρημα του Johann Bernoulli παρέχει την αντιπροσώπευση μίας συνάρτησης υπό τη μορφή άπειρης σειράς. Όμως έχει διαφορετικό χαρακτήρα από αυτό του Taylor. Αυτό που μπόρεσα να ανακαλύψω είναι ότι ο Johann Bernoulli απαιτούσε την πατρότητα μόνο της πρότασης 7 – πόρισμα 2 των Μεθόδων»***.

Αντίθετα, δύο σχετικά πιο σύγχρονοι μαθηματικοί από τον **Taylor**, οι **Stirling** (**1717**) και **Maclaurin** (**1742**), θεωρούσαν τις δύο σειρές ουσιαστικά ίδιες. Ο **Maclaurin**, το **1742**, στην εργασία του ***«Πραγματεία των Συναρτήσεων»*** αρχικά ολοκλήρωσε τις σειρές **Taylor** και στη συνέχεια περιέγραψε το αποτέλεσμα ως μία σειρά που ουσιαστικά ήταν ίδια με αυτήν του **Johann Bernoulli**. Παρά την όλη σειρά ερμηνειών σχετικά με την πραγματική μαθηματική σχέση μεταξύ των δύο θεωρημάτων, φαίνεται να υπάρχει μία γενική συμφωνία στο ότι ο **Taylor** ανέπτυξε το θεώρημά του ανεξάρτητα από το θεώρημα του **Johann Bernoulli**. Στην άποψη αυτή έρχεται να προστεθεί και η σύμφωνη γνώμη του **Harry Bateman** (**1907**), ο οποίος βρήκε μία επιστολή του **Taylor** προς τον **John Machin** (**26 Ιουλίου 1712**) στην οποία φαίνεται ότι ο **Taylor** είχε ανακαλύψει το θεώρημά του τουλάχιστον τρία έτη πριν από τη δημοσίευση του βιβλίου του. Εάν και το θεώρημα παρουσιάσθηκε χωρίς απόδειξη, ο **Taylor** εξηγούσε στην επιστολή ότι κατέληξε στο αποτέλεσμα εφαρμόζοντας τη μέθοδο των προσεγγίσεων του **Edmund Halley**. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως ***«Θεώρημα των προσεγγίσεων»*** του **Taylor** και θα αναφερθούμε σε αυτό στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

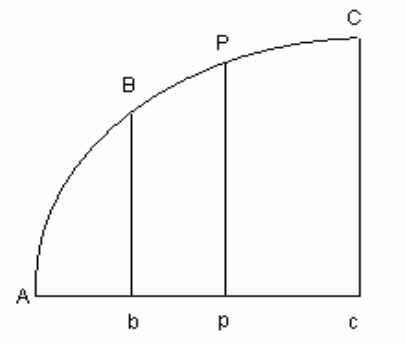
4.2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΤΟΥ TAYLOR

Στις **26 Ιουλίου 1712**, ο **Taylor** σε μία επιστολή του προς τον **John Machin**, παρουσίασε κάποιες σκέψεις του οι οποίες αναφέρονταν ως εξής : ***«Ανακάλυψα μία γενική μέθοδο για την εξαγωγή ριζών σε όλα τα προβλήματα η οποία εξηγείται στο ακόλουθο θεώρημα : Έστω α ένας οποιοσδήποτε συνδυασμός δυνάμεων του z και δοσμένων ποσοτήτων, σε μία ρητή ή άρρητη έκφραση πεπερασμένων ή μη πεπερασμένων όρων και β ένας όμοιος συνδυασμός του p και των ίδιων συντελεστών.***

Εάν z=p+x και $\dot{p} = \dot{z} = 1$ ***τότε ισχύει ότι :*** $\alpha - \beta = \begin{cases} \dfrac{\dot{\beta}x}{1} + \dfrac{\ddot{\beta}x^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{\beta}x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \\ \dot{\eta} \\ \dfrac{\dot{\alpha}x}{1} - \dfrac{\ddot{\alpha}x^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{\alpha}x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \dots \end{cases}$

όπου τα $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$, κ.ο.κ. δίνονται συναρτήσει του z και των δοσμένων συντελεστών με τον ίδιο τρόπο που δίνονται τα $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$, $\dddot{\beta}$, κ.ο.κ. συναρτήσει του p και των δοσμένων συντελεστών. Έτσι, δίνοντας τα α, β και κάποιο από τα z ή p, το άλλο μπορεί να υπολογισθεί εξάγοντας το x από την πρώτη ή τη δεύτερη εξίσωση του παραπάνω θεωρήματος. Εάν α είναι μία πεπερασμένη έκφραση τότε το ίδιο θα είναι και οι ποσότητες $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$,... $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$, $\dddot{\beta}$,... ».

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος δόθηκε από τον **Taylor** σε άλλη επιστολή του προς τον **John Keill** τον **Σεπτέμβριο** του **1712**. Στην επιστολή αυτή αναφέρει ότι για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιεί κατά βάση τη σειρά του **Johann Bernoulli** για τον τετραγωνισμό. Υποθέτει την καμπύλη **ABPC** του διπλανού σχήματος με **Ap=z**, **bp=v** και **Pp=y**. Τότε η μεταβολή του εμβαδού του χωρίου, που περικλείεται από την καμπύλη θα είναι $\mathbf{y\dot{z} = y\dot{v}}$. Από το θεώρημα του **Johann Bernoulli** με $\mathbf{v = bc,\ y = Cc}$ και $\mathbf{z = Ac}$ παίρνει ότι το εμβαδόν του **bBCc** θα είναι :



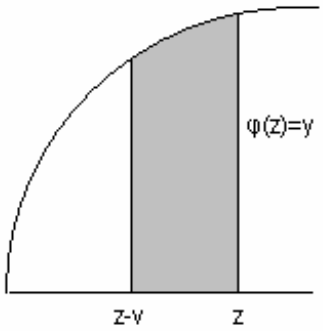
$$\mathbf{bBCc = yv - \frac{\dot{y}v^2}{2!} + \frac{\ddot{y}v^3}{3!} - \frac{\dddot{y}v^4}{4!} + \ldots .} \qquad \mathbf{(4.5)}$$

Εάν το εμβαδόν του **ABCc** είναι **R** τότε $\mathbf{y = \dot{R},\ \dot{y} = \ddot{R},}$ κ.ο.κ. Εάν το εμβαδόν του **AbB** είναι **r** τότε για $\mathbf{cb = v,\ bB = y}$ και $\mathbf{Ab = p}$ με τον ίδιο τρόπο παίρνει ότι το εμβαδόν του **bBCc** θα είναι : $\mathbf{bBCc = \dot{r}v + \frac{\dot{r}v^2}{2!} + \frac{\ddot{r}v^2}{3!} + \frac{\dddot{r}v^3}{4!} + \ldots}$ **(4.6)**

Άρα : $\mathbf{bBCc = R - r = \dot{r}v + \frac{\dot{r}v^2}{2!} + \frac{\ddot{r}v^2}{3!} + \frac{\dddot{r}v^3}{4!} + \ldots = \dot{R}v - \frac{\ddot{R}v^2}{2!} + \ldots}$ **(4.7)**

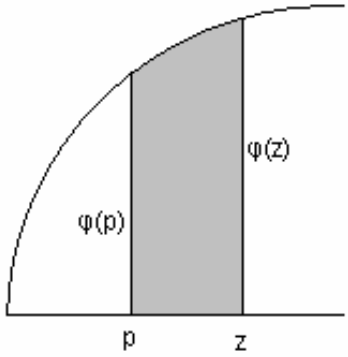
Σύμφωνα με τον **Feigenbaum**, η απόδειξη του **Taylor** αποκαλύπτει ότι η ερμηνεία της μορφής της σειράς του **Johann Bernoulli**, διαφέρει σε δύο σημαντικά σημεία από αυτή που βασίζεται στο δημοσιευμένο άρθρο του **Johann Bernoulli** το **1694**.

α) Ο **Taylor** δεν περιορίζει τα όρια ολοκλήρωσης από το **0** έως το **v** όπως σιωπηρά κάνει στο έγγραφό του ο **Johann Bernoulli**. Ο **Taylor** εξετάζει οποιοδήποτε διάστημα μήκους **v** κατά μήκος της τετμημένης. Έτσι, με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, η σειρά **(4.5)** μπορεί



να γραφεί σε σύγχρονη μορφή ως : **Γραμμοσκιασμένο Εμβαδόν =** $\int_{z-v}^{z}\varphi(x)dx = \varphi(z)v - \varphi'(z)\frac{v^2}{2!} + \varphi''(z)\frac{v^3}{3!} - \ldots$ Αντίθετα, σε οποιοδήποτε ιστορικό κείμενο η σειρά του **Johann Bernoulli** γράφεται κατά γενικό τρόπο ως : $\int_0^v \varphi(z)dz = \varphi(v)v - \varphi'(v)\frac{v^2}{2!} + \varphi''(v)\frac{v^3}{3!} - \ldots$.

β) Η δεύτερη και σημαντικότερη διαφορά στην αντίληψη του **Taylor** για τη σειρά του **Johann Bernoulli** είναι ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση ο **Taylor** τη χρησιμοποιεί ως δυναμοσειρά. Η σειρά **(4.6.)** του **v** εκφράζεται σε δυνάμεις του **v** του οποίου οι συντελεστές εξαρτώνται από τις ροές των τεταγμένων από την αρχική θέση **bB**. Αντίθετα, η σειρά **(4.5)** του **Johann Bernoulli** είναι μία δυναμοσειρά του **v** αλλά οι συντελεστές εξαρτώνται από τις ροές των τεταγμένων από την αρχική θέση **cC**. Ο **Taylor** πήρε τη σειρά **(4.6.)** εφαρμόζοντας τη σειρά του **Johann Bernoulli** στην αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι από τη σειρά **(4.6.)** το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν **E** του διπλανού σχήματος θα



είναι : $E = \varphi(z)(z-p) - \varphi'(z)\frac{(z-p)^2}{2!} + \varphi''(z)\frac{(z-p)^3}{3!} - \ldots =$

$= -[\varphi(p)(p-z) - \varphi'(p)\frac{(p-z)^2}{2!} + \varphi''(p)\frac{(p-z)^3}{3!} - \ldots$ ή τελικά **E** =

$= \varphi(p)(z-p) + \varphi'(p)\frac{(z-p)^2}{2!} + \varphi''(p)\frac{(z-p)^3}{3!} + \ldots$ Η τελευταία σειρά είναι η σειρά **(4.6.)** με την αντικατάσταση $\dot{r} = \varphi$.

Ο **Feigenbaum** υποστηρίζει ότι ο **Taylor** ανακάλυψε στο θεώρημα του **Johann Bernoulli** κάτι διαφορετικό από αυτό που είχε ο **Bernoulli** στο μυαλό του όταν δημοσίευσε τη σειρά του. Αυτή η ερμηνεία όμως δεν φαίνεται να λαμβάνεται υπόψη από μεταγενέστερους συγγραφείς. Για παράδειγμα, ο **Joseph Louis Francois Bertrand** το **1864**, σε μία κριτική του για τη σειρά του **Johann Bernoulli** στο περιοδικό ***«Traité de calcul différentiel et de calcul intégral»***, έγραφε ότι : ***«Οι σειρές στις οποίες οι συντελεστές των διαφόρων δυνάμεων του x που είναι συναρτήσεις του x, είναι διαφορετικής μορφής και πολύ λιγότερο χρήσιμες από τη σειρά του Taylor»***.

Ο **Taylor** επανατοποθετήθηκε στο ***«Θεώρημα των Προσεγγίσεων»*** με περισσότερες λεπτομέρειες, σε μία άλλη επιστολή του προς τον **John Keill**,

στις **9 Οκτωβρίου 1712**. Στην επιστολή αυτή έγραφε : ***«Όταν βρήκα αυτή τη λύση ανακάλυψα μία γενική μέθοδο εφαρμογής αυτών των προσεγγίσεων για όλες τις εξισώσεις, η οποία περιγράφεται ως εξής : Έστω R οποιοσδήποτε συνδυασμός δυνάμεων του z και δοσμένων συντελεστών και r όμοιος συνδυασμός δυνάμεων του p και των ίδιων συντελεστών. Εάν*** $\dot{z} = \dot{p} = 1$ ***και z=p+v τότε :***

$$R - r = \begin{cases} \dfrac{\dot{r}v}{1} + \dfrac{\ddot{r}v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{r}v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \\ \text{ή} \\ \dfrac{\dot{R}v}{1} - \dfrac{\ddot{R}v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{R}v^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots \end{cases}$$

. Έτσι εάν είναι γνωστά τα R, r, p μπορούμε να βρούμε το z εξάγοντας τη ρίζα v από την εξίσωση $R - r = \dfrac{\dot{r}v}{1} + \dfrac{\ddot{r}v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{r}v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ ***και αντικαθιστώντας την τιμή της στην εξίσωση z=p+v. Εάν δίνεται το z τότε το p θα βρεθεί εξάγοντας το v από την εξίσωση*** $R - r = \dfrac{\dot{R}v}{1} - \dfrac{\ddot{R}v^2}{1\cdot 2} + \dfrac{\dddot{R}v^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots$ ***Σε επαλήθευση των παραπάνω θα εξάγουμε την ρίζα της κυβικής εξίσωσης :*** $z^3 - 17z^2 + 54z = 350$***. Έστω p=10. Τότε*** $r = p^3 - 17p^2 + 54p = -160$***,*** $\dot{r} = 3p^2 - 34p + 54 = 14$***,*** $\dfrac{\ddot{r}}{2!} = \dfrac{6p - 34}{2} = 13$***,*** $\dfrac{\dddot{r}}{3!} = \dfrac{6}{6} = 1$ ***ενώ*** $\ddddot{r}$ ***κ.ο.κ. θα είναι μηδέν. Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα θα έχουμε ότι*** $R - r = 14v + 13v^2 + v^3$***. Όμως R=350 και r=-160. Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση*** $v^3 + 13v^2 + 14v = 510$***. Υπολογίζοντας το v και με αντικατάσταση στην εξίσωση z=p+v μπορούμε να προσδιορίσουμε τελικά το z. Αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί και στους τετραγωνισμούς. Εάν θέλουμε να βρούμε την τετμημένη όταν δίνεται το εμβαδόν R οποιασδήποτε γεωμετρικής καμπύλης με τετμημένη z, τότε*** $\dot{R}$ ***θα είναι η τεταγμένη ενώ οι ποσότητες*** $\dot{R}$***,*** $\ddot{R}$***, κ.ο.κ. θα είναι πεπερασμένες εκφράσεις»***.

Το **1717**, ο **Taylor** δημοσίευσε στο περιοδικό ***«Philosophical Transactions»*** το ***«Θεώρημα των Προσεγγίσεων»*** με τέτοιο τρόπο, που να παράγεται από τη δημοσιευμένη στις ***«Μεθόδους»*** πρόταση 7 – πόρισμα 2 που είδαμε στο Κεφάλαιο **2** – παράγραφος **2.4.** Σε αυτή τη δημοσίευση ανέφερε τα ακόλουθα : ***«Αυτή η μέθοδος εύκολα και φυσικά μπορεί να προέλθει από την πρόταση 7 – πόρισμα 2. Έστω z και x δύο ρέουσες ποσότητες των οποίων η μεταξύ τους σχέση είναι οποιαδήποτε***

εξίσωση. Τότε καθώς το z ρέει ομοιόμορφα και γίνεται z+v, τότε το x γίνεται : $x+\frac{\dot{x}v}{1}+\frac{\ddot{x}v^2}{1\cdot 2}+\frac{\dddot{x}v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$ ***όταν*** $\dot{z}=1$***. Έτσι εάν το y είναι η ρίζα οποιασδήποτε μηδενικής εξίσωσης που περιέχει το y και γνωστές ποσότητες και το z είναι μέρος του y ενώ το x δίνεται συναρτήσει του z και των γνωστών ποσοτήτων, τότε υποθέτοντας ότι y=z+v η διαφορά v=y-z θα βρεθεί εξάγοντας τη ρίζα της εξίσωσης*** $x+\frac{\dot{x}v}{1}+\frac{\ddot{x}v^2}{1\cdot 2}+\frac{\dddot{x}v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=0$ ***».*** Δηλαδή, με σύγχρονη μορφή, εάν η μεταβλητή **x** δίνεται συναρτήσει του **z** μέσω της εξίσωσης **x=x(z)** και **y** είναι μία ρίζα της εξίσωσης με **y=z+v** όπου **z** είναι γνωστή πρώτη προσέγγιση του **y**, τότε θα έχουμε ότι $\mathbf{0=x(y)=x(z+v)=x(z)+x'(z)v+\frac{x''(z)v^2}{2!}+\ldots}$ Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη διόρθωση **v**, διαγράφοντας τους όρους της σειράς που περιέχουν δυνάμεις του **v** με βαθμό μεγαλύτερο του **2**. Έτσι προκύπτει μία δευτεροβάθμια εξίσωση της οποίας η επίλυση δίνει το **v**.

Το θεώρημα των προσεγγίσεων και η πρόταση 7 – πόρισμα 2 αποτελούν δύο ανεξάρτητες ανακαλύψεις του **Taylor**, αφού φαίνεται ότι παρακινήθηκε από διαφορετικές ανησυχίες κατά την εξαγωγή των δύο θεωρημάτων. Η ιδέα για το θεώρημα των προσεγγίσεων προέκυψε ενώ χρησιμοποιούσε τη μέθοδο του **Halley** για τις ρίζες εξισώσεων, ενώ η πρόταση 7 – πόρισμα 2 ήταν το αποτέλεσμα του ενδιαφέροντός του για την εύρεση λύσεων διαφορικών εξισώσεων σε σειρές. Επίσης, διέφεραν και οι αποδείξεις του στα δύο αυτά θεωρήματα. Στην απόδειξη του θεωρήματος των προσεγγίσεων χρησιμοποίησε το θεώρημα του **Johann Bernoulli**, ενώ η πρόταση 7 – πόρισμα 2 αποδείχθηκε με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών. Η σύνδεση της σειράς του **Johann Bernoulli** και του θεωρήματος των προσεγγίσεων παρείχε στον **Taylor** δύο σημαντικά οφέλη :

α) Από τη σειρά του **Johann Bernoulli** εξήγαγε εύκολα τη σειρά των προσεγγίσεων $\mathbf{\alpha-\beta=\frac{\dot{\alpha}x}{1}-\frac{\ddot{\alpha}x^2}{1\cdot 2}+\frac{\dddot{\alpha}x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots}$ που έστειλε στους **Machin** και **Keill**.

β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του **Johann Bernoulli** επέκτεινε το θεώρημα του και στην περίπτωση των υπερβατικών εκφράσεων.

Αυτό που δεν έχει απαντηθεί ακόμη, είναι εάν ο **Taylor** προσπάθησε να χρησιμοποιήσει στην απόδειξη του θεωρήματος των προσεγγίσεων την πρόταση 7 – πόρισμα 2. Εάν είχε συμβεί κάτι τέτοιο, τότε εύκολα θα διαπίστωνε τη σύνδεση μεταξύ της σειράς του και της σειράς του **Johann Bernoulli**.

4.3. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Την αντιπαράθεση που αφορά στη σχέση του θεωρήματος **Taylor** και του θεωρήματος του **Johann Bernoulli**, προσπάθησε να συνοψίσει ο **Heinrich Weileitner**, το **1911**, λέγοντας τα εξής : ***« Η σημαντικότερη μέθοδος που δίνεται στον 18^{ο} αιώνα για την ανάπτυξη μίας συνάρτησης σε σειρά, είναι αυτή που κοινοποιήθηκε από τον Brook Taylor σε μία επιστολή του προς τον John Machin το 1712 και η οποία δημοσιεύθηκε αργότερα στις Μεθόδους. Ο Taylor έδωσε τη λειτουργία της παραγώγισης στηριζόμενος στη μέθοδο των διαφορών. Επίσης, ο Taylor στο βιβλίο του, παραγωγίζει την ήδη αναφερθείσα σειρά του Johann Bernoulli, με έναν απλούστερο και ισχυρότερο τρόπο χωρίς όμως να αναφέρει πως ή από ποιον ανακάλυψε αυτή τη μέθοδο. Ούτε ο Johann Bernoulli αλλά ούτε και ο Taylor κατάφεραν να αναγνωρίσουν κάποια σύνδεση μεταξύ των θεωρημάτων τους. Είναι γνωστό ότι ο Johann Bernoulli απαίτησε την πατρότητα του θεωρήματος αλλά δεν πρέπει να έχει καμία διεκδίκηση στο θεώρημα του Taylor»***.

Ο **Feigenbaum**, με βάση κάποια αδημοσίευτα έγγραφα του **Taylor**, θεωρεί ότι η παραπάνω περίληψη είναι υπεραπλουστευμένη και συγχρόνως ανακριβής. Υποστηρίζει ότι η υπόθεση της ανακάλυψης του θεωρήματος **Taylor** είναι αρκετά πιο περίπλοκη και για αυτό το λόγο θεώρησε χρήσιμο να εξετάσει στοιχεία που προκύπτουν τόσο από νέες πηγές όσο και από έγγραφα που είναι ήδη γνωστά. Τα στοιχεία αυτά είναι τα παρακάτω :

α) <u>Νέα Στοιχεία :</u>

1. Το θεώρημα του **Taylor** κάτω από το πρίσμα των εξισώσεων. (Σημειώσεις του **Taylor**)
2. Το θεώρημα για τους τετραγωνισμούς. (Επιστολή του **Taylor** προς τον **John Keill** στις **11 Σεπτεμβρίου 1712**)
3. Το θεώρημα του **Taylor** κάτω από το πρίσμα του τετραγωνισμού. (Σημειώσεις του **Taylor**)
4. Το Θεώρημα των προσεγγίσεων. (Επιστολή του **Taylor** προς τον **John Keill** στις **9 Οκτωβρίου 1712**)
5. Το θεώρημα για τις εξισώσεις με ροές. (Επιστολή του **Taylor** προς τον **John Keill** στις **3 Ιουλίου 1713**)

Τα στοιχεία **1.**, **3.** και **5.** βρίσκονται στη βιβλιοθήκη του **St. John's College** του **Cambridge**, ενώ τα στοιχεία **2.** και **4.** αποτελούν αλληλογραφία του Taylor προς τη Βασιλική Κοινότητα.

β) <u>Προηγούμενα Στοιχεία :</u>

1. Το Θεώρημα των Προσεγγίσεων. (Επιστολή του **Taylor** προς τον **John Machin** στις **26 Ιουλίου 1712** – Δημοσιεύθηκε από τον **Harry Bateman** το **1907**)
2. Πρόταση 7 – πόρισμα 2 των ***«Μεθόδων»***. (Δημοσιεύθηκε το

1715)

3. Πρόταση 11 των ***«Μεθόδων»***. (Δημοσιεύθηκε το **1715**)
4. Δημοσιευμένο άρθρο με προσεγγίσεις στο ***«Philosophical Transactions»***. (Δημοσιεύθηκε το **1717**)

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, ο **Feigenbaum** συμπεραίνει τα εξής :

1. Ακόμη και εάν οι ιστορικοί έχουν ερμηνεύσει το θεώρημα των προσεγγίσεων του **1712** και την πρόταση 7 – πόρισμα 2 ως δύο εκδοχές του ίδιου θεωρήματος, στην πραγματικότητα ο **Taylor** είχε ανακαλύψει το ένα ανεξάρτητα από το άλλο. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί από τα ακόλουθα :
   - **α)** Η πρόταση 7 – πόρισμα 2 μπορεί να εκτιμηθεί ως ένα θεώρημα για τις εξισώσεις με ροές, που είχε στείλει σε επιστολή του ο **Taylor** προς τον **Keill** το **1713**, ενώ το θεώρημα των προσεγγίσεων είχε ήδη σταλεί στον **Keill** σε άλλη επιστολή το **1712**.
   - **β)** Ο **Taylor** δεν είχε δώσει καμία απόδειξη για το θεώρημα των προσεγγίσεων στην επιστολή του προς τον **Machin**, ενώ παρείχε μία τέτοια απόδειξη σε επιστολή του προς τον **Keill** το **1712**, η οποία διαφέρει σημαντικά από τη δημοσιευμένη απόδειξη του **1717** στο ***«Philosophical Transactions»***.
   - **γ)** Τα υπόλοιπα στοιχεία από τις σημειώσεις του **Taylor** και από την επιστολή προς τον **Keill** στις **11 Σεπτεμβρίου 1712**, εξηγούν το λόγο που ο **Taylor** δεν αναγνώρισε καμία σύνδεση μεταξύ του θεωρήματος των προσεγγίσεων και του θεωρήματος των εξισώσεων με ροές. Αυτά τα δύο θεωρήματα εμφανίζονται να προκύπτουν από διαφορετικά πλαίσια και να προορίζονται για διαφορετικές εφαρμογές.
2. Όσον αφορά στην πρόταση 11 των ***«Μεθόδων»***, της οποίας την πατρότητα διεκδικούσε ο **Johann Bernoulli**, και μάλλον δικαίως, ο **Taylor** εντόπισε σε αυτήν την γενίκευση της σειράς του **Johann Bernoulli**. Ήταν το προϊόν ενός ξεχωριστού τρόπου σκέψης του **Taylor** και ήταν ανεξάρτητη τόσο από την πρόταση 7 – πόρισμα 2, όσο και από το θεώρημα των προσεγγίσεων του **1712**. Η προέλευσή της ίσως να οφείλεται σε ένα θεώρημα σχετικά με τον τετραγωνισμό, που βρέθηκε σε κάποιες σημειώσεις του **Taylor**.
3. Με βάση τα παραπάνω ήταν λογικό για τον **Taylor** να δημοσιεύσει αυτά τα δύο θεωρήματα ξεχωριστά το ένα από τα άλλο.

Ο **Taylor** ήταν ο πρώτος ο οποίος δημοσίευσε απόδειξη για τη λήψη μίας σειράς, βασισμένη στη θεωρία των πεπερασμένων αυξήσεων. Επίσης ήταν αυτός που έστρεψε την προσοχή άλλων ερευνητών στη δυνατότητα εφαρμογής του θεωρήματός του, ως αναλυτικό εργαλείο για την παραγωγή λύσεων σε σειρές διαφορικών εξισώσεων. Τέλος προσάρμοσε το θεώρημά

του στην εύρεση ριζών συνηθισμένων εξισώσεων αναπτύσσοντας μία δοσμένη έκφραση σε δυναμοσειρά.

Με βάση αυτά τα στοιχεία κανείς από τους μεταγενέστερους ερευνητές δεν αμφισβήτησε την τεράστια συμβολή του **Taylor** στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού και τον ισχυρισμό ότι η σειρά του δικαίως φέρει το όνομά του. Όμως, το πιο ουσιαστικό στοιχείο που προστίθεται στα παραπάνω, είναι η κατάθεση των άμεσα διαδόχων του, **Stirling**, **Maclaurin** και **Euler**, οι οποίοι επιβεβαιώνουν ότι το θεώρημα του **Taylor**, οδηγεί την προσοχή των ερευνητών στη θεμελιώδη σημασία του αποτελέσματος για ένα πρόβλημα.

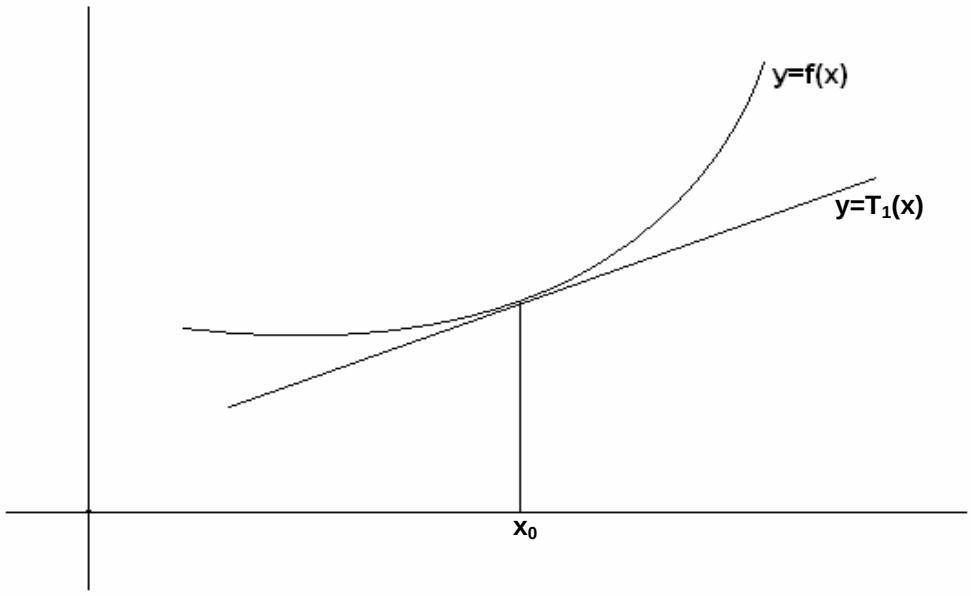
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄ : Η ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ TAYLOR

Α1. Η ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ TAYLOR

Η διαπραγμάτευση του Απειροστικού Λογισμού αφορά στις συναρτήσεις και ειδικότερα στη διαφόριση και ολοκλήρωση αυτών. Όμως, ο υπολογισμός των τιμών μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μία εύκολη υπόθεση. Για παράδειγμα ο τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης $\mathbf{\ln x = \int_1^x \ln t dt}$ δεν δίνει ένα καθαρό τρόπο υπολογισμού των τιμών της. Εφόσον υπάρχουν αρκετές συναρτήσεις τις οποίες δεν είμαστε σε θέση να διαχειρισθούμε εύκολα, στα διάφορα προβλήματα που εμφανίζονται, επιβάλλεται να τις προσεγγίσουμε με κάποιες άλλες που είναι περισσότερο προσβάσιμες ως προς τον λογισμό τους. Βέβαια, στις προσεγγίσεις αυτές θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και το σφάλμα που υπάρχει. Όσο μικρότερο είναι το σφάλμα τόσο καλύτερη είναι και η προσέγγιση που έχουμε. Η προσέγγιση μίας συνάρτησης $\mathbf{f(x)}$ από κάποια άλλη συνάρτηση $\mathbf{g(x)}$ θα θεωρείται ικανοποιητική εάν η συνάρτηση $\mathbf{g(x)}$ είναι σχετικά απλή ώστε να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ή τις τιμές της. Οι απλούστερες συναρτήσεις που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι τα πολυώνυμα διότι οι αριθμητικοί υπολογισμοί με αυτά είναι σχετικά εύκολοι αφού οι τιμές τους υπολογίζονται με ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων. Επιπλέον έχουν παραγώγους κάθε τάξης και η ολοκλήρωση τους, που είναι απλή διαδικασία, δίνει ως αποτέλεσμα πάλι πολυώνυμο.

Ορισμένες συναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν από πολυώνυμα, όταν η διαφορά της συνάρτησης από την πολυωνυμική της προσέγγιση είναι αρκετά μικρή. Τότε για πρακτικούς λόγους θα χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο στη θέση της συνάρτησης. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προσέγγισης μίας συνάρτησης με πολυώνυμα, ανάλογα με τη χρήση της προσέγγισης. Μία πολύ χρήσιμη τεχνική του Απειροστικού Λογισμού για την προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα, αποτελεί το θεώρημα του **Taylor**. Θα αναπτύξουμε την περίπτωση όπου απαιτούμε το πολυώνυμο και οι παράγωγοι αυτού σε κάποιο σημείο, να έχουν την ίδια τιμή με τη συνάρτηση και τις παραγώγους της στο ίδιο σημείο.

Έστω μία συνάρτηση $\mathbf{y = f(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x = x_0}$. Τότε η συνάρτηση αυτή προσεγγίζεται από τη **γραμμική** συνάρτηση $\mathbf{T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$. Σε γεωμετρική γλώσσα, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη προσεγγίζεται από την εφαπτομένη της στην περιοχή του $\mathbf{x_0}$.



Η συνάρτηση $\mathbf{T_1(x)}$ είναι μία καλή προσέγγιση της $\mathbf{f(x)}$ κοντά στο $\mathbf{x_0}$, εφόσον ισχύει ότι $\mathbf{T_1(x_0) = f(x_0)}$ και $\mathbf{T_1'(x_0) = f'(x_0)}$. Τα γραφήματα των $\mathbf{y = f(x)}$ και $\mathbf{y = T_1(x)}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το $\mathbf{x_0}$, και έχουν την ίδια κλίση σε αυτό το σημείο. Μακριά από το $\mathbf{x_0}$ το γράφημα της $\mathbf{y = T_1(x)}$ ενδέχεται να μην πλησιάζει προς το γράφημα της $\mathbf{y = f(x)}$.

Για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας θα προσεγγίσουμε την $\mathbf{f(x)}$ με μία συνάρτηση της οποίας το γράφημα να διέρχεται από το σημείο $\mathbf{(x_0, f(x_0))}$, να έχει την ίδια κλίση με την $\mathbf{y = f(x)}$ σε αυτό το σημείο και να **«καμπυλώνει»** προς την ίδια κατεύθυνση με την $\mathbf{y = f(x)}$. Όμως, η καμπυλότητα του γραφήματος οφείλεται στη μεταβολή της κλίσης του. Η κλίση στο σημείο $\mathbf{x}$ είναι η παράγωγος $\mathbf{f'(x)}$ και ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης είναι η δεύτερη παράγωγος. Άρα αναζητούμε μία συνάρτηση $\mathbf{T_2(x)}$ τέτοια ώστε $\mathbf{T_2(x_0) = f(x_0),\ T_2'(x_0) = f'(x_0)}$ και $\mathbf{T_2''(x_0) = f''(x_0)}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $\mathbf{T_2(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2}$. Τότε θα έχουμε ότι $\mathbf{T_2(x_0) = \alpha,\ T_2'(x_0) = \beta}$ και $\mathbf{T_2''(x_0) = 2\gamma}$. Αφού απαιτούμε $\mathbf{T_2(x_0) = f(x_0),\ T_2'(x_0) = f'(x_0)}$ και $\mathbf{T_2''(x_0) = f''(x_0)}$ θα πρέπει να επιλέξουμε $\mathbf{\alpha = f(x_0),\ \beta = f'(x_0)}$ και $\mathbf{\gamma = \frac{1}{2}f''(x_0)}$. Έτσι το πολυώνυμο $\mathbf{T_2(x)}$ γράφεται : $\mathbf{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}$ το οποίο ταυτίζεται με την $\mathbf{f(x)}$ στο $\mathbf{x = x_0}$ ενώ ισχύει ότι $\mathbf{T_2'(x_0) = f'(x_0)}$ και $\mathbf{T_2''(x_0) = f''(x_0)}$. Το πολυώνυμο $\mathbf{T_2(x)}$ αποτελεί το πολυώνυμο **Taylor**

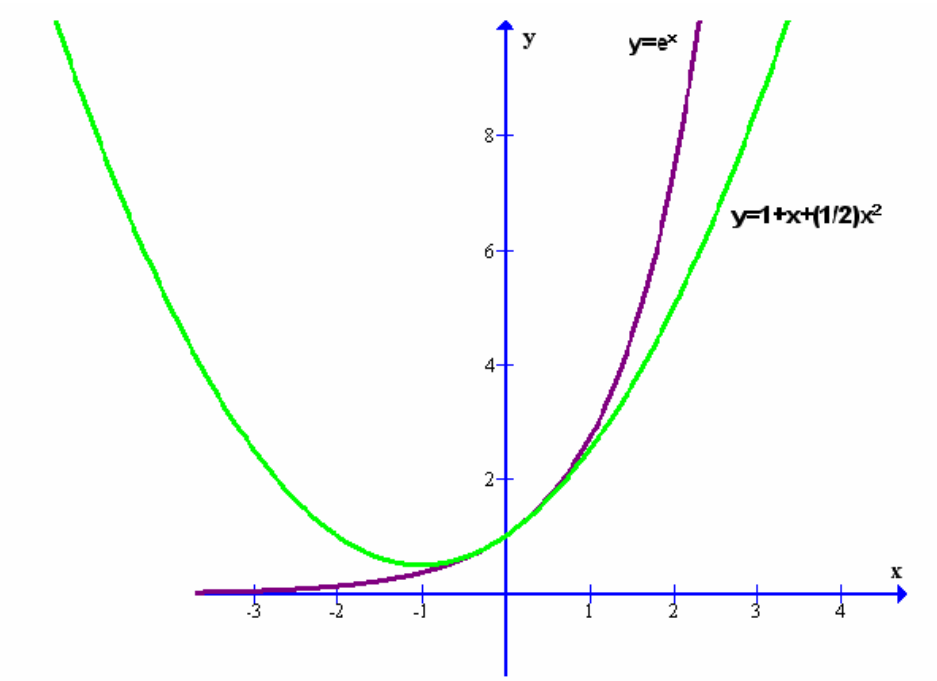
(δευτέρου βαθμού) της $\mathbf{f(x)}$ στο $\mathbf{x = x_0}$ και όπως είδαμε αποτελείται από την εφαπτομενική γραμμική προσέγγιση της $\mathbf{f(x)}$, δηλαδή από το πολυώνυμο $\mathbf{T_1(x)}$, και από τον όρο $\frac{1}{2}\mathbf{f''(x_0)(x - x_0)^2}$ που διορθώνει κατά κάποιο τρόπο το σφάλμα της γραμμικής προσέγγισης.

Παράδειγμα 1 : Θα προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f(x) = e^x}$ στο $\mathbf{x_0 = 0}$ με τα πολυώνυμα **Taylor**, $\mathbf{T_1(x)}$ και $\mathbf{T_2(x)}$. Από τη σχέση $\mathbf{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}$ με $\mathbf{f(x) = e^x}$, $\mathbf{x_0 = 0}$ και $\mathbf{f''(x) = f'(x) = f(x) = e^x}$ προκύπτει ότι $\mathbf{f''(0) = f'(0) = f(0) = 1}$ και $\mathbf{T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}}$. (Το γραμμικό μέρος του $\mathbf{T_2(x)}$ είναι το πολυώνυμο $\mathbf{T_1(x) = 1 + x}$).

Στον πίνακα που ακολουθεί γίνεται η σύγκριση των τιμών της $\mathbf{f(x) = e^x}$ με τις τιμές των $\mathbf{T_1(x)}$ και $\mathbf{T_2(x)}$ για τις διάφορες τιμές του **x**.

Μικρές Τιμές του x				**Μεγάλες Τιμές του x**			
x	$\mathbf{e^x}$	$\mathbf{T_1(x)}$	$\mathbf{T_2(x)}$	**x**	$\mathbf{e^x}$	$\mathbf{T_1(x)}$	$\mathbf{T_2(x)}$
-0,4	0,6703	0,6000	0,6800	-2,0	0,1353	-1,0000	1,0000
-0,3	0,7408	0,7000	0,7450	-1,5	0,2231	-0,5000	0,6250
-0,2	0,8187	0,8000	0,8200	-1,0	0,3679	0,0000	0,5000
-0,1	0,9048	0,9000	0,9050	-0,5	0,6065	0,5000	0,6250
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,1052	1,1000	1,1050	0,5	1,6487	1,5000	1,6250
0,2	1,2214	1,2000	1,2200	1,0	2,7183	2,0000	2,5000
0,3	1,3499	1,3000	1,3450	1,5	4,4817	2,5000	3,6250
0,4	1,4918	1,4000	1,4800	2,0	7,3891	3,0000	5,0000

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις του πολυωνύμου $\mathbf{T_2(x)}$ είναι καλύτερες από αυτές του πολυωνύμου $\mathbf{T_1(x)}$ καθώς το **x** παίρνει τιμές κοντά στο $\mathbf{x_0 = 0}$. Καθώς το **x** παίρνει τιμές μακριά από το $\mathbf{x_0 = 0}$ οι εκτιμήσεις δεν είναι τόσο καλές, αλλά το πολυώνυμο $\mathbf{T_2(x)}$ εξακολουθεί να προσεγγίζει καλύτερα τη συνάρτηση $\mathbf{f(x) = e^x}$, όπως φαίνεται και από το επόμενο σχήμα.



Για μεγαλύτερη ακόμη ακρίβεια προσέγγισης της $y = f(x)$, θεωρούμε πολυώνυμα τρίτου βαθμού. Έστω το πολυώνυμο $T_3(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2 + \delta(x - x_0)^3$ τέτοιο ώστε $T_3(x_0) = f(x_0)$, $T_3'(x_0) = f'(x_0)$, $T_3''(x_0) = f''(x_0)$ και $T_3'''(x_0) = f'''(x_0)$. Τότε θα έχουμε ότι $T_3(x_0) = \alpha,\ T_3'(x_0) = \beta,\ T_3''(x_0) = 2\gamma$ και $T_3'''(x_0) = 6\delta$. Άρα παίρνουμε $\alpha = f(x_0),\ \beta = f'(x_0),\ \gamma = \frac{1}{2}f''(x_0)$ και $\delta = \frac{1}{6}f'''(x_0)$. Επομένως $T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3$. Το πολυώνυμο $T_3(x)$ είναι το πολυώνυμο **Taylor** (τρίτου βαθμού) της συνάρτησης $f(x)$ στο $x = x_0$ για το οποίο ισχύει ότι $T_3(x_0) = f(x_0)$, $T_3'(x_0) = f'(x_0)$, $T_3''(x_0) = f''(x_0)$ και $T_3'''(x_0) = f'''(x_0)$.

<u>Παράδειγμα 2 :</u> Για το πολυώνυμο $T_3(x)$ της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο $x_0 = 0$ θα έχουμε ότι $T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$. Στον παρακάτω πίνακα, γίνεται η σύγκριση των τιμών των πολυωνύμων $T_2(x)$ και $T_3(x)$, με τις τιμές της $f(x) = e^x$, για τις διάφορες τιμές του x.

x	e^x	$T_2(x)$	$T_3(x)$
0,1	1,1052	1,1050	1,1052
0,2	1,2214	1,2200	1,2213
0,5	1,6487	1,6250	1,6458
1,0	2,7183	2,5000	2,6667
2,0	7,3891	5,0000	6,3333

Από τον πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πολυώνυμο $T_3(x)$ προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο $x_0 = 0$, από ότι το πολυώνυμο $T_2(x)$.

Παράδειγμα 3 : Θα προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx$ με το πολυώνυμο **Taylor** $T_3(x)$ στο $x_0 = 0$. Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $T_3(x)$ είναι $T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{6}f'''(0)(x-0)^3$ όπου $f(x) = ημx,\ f'(x) = συνx,\ f''(x) = -ημx$ και $f'''(x) = -συνx$. Τότε $f(0)=0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ και $f'''(0) = -1$. Έτσι το πολυώνυμο $T_3(x)$ γράφεται $T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Στον παρακάτω πίνακα, γίνεται η σύγκριση των τιμών του πολυωνύμου $T_3(x)$, με τις τιμές της $f(x) = ημx$, για τις διάφορες τιμές του **x**.

Μικρές Τιμές του x			**Μεγάλες Τιμές του x**		
x	**ημx**	$T_3(x)$	**x**	**ημx**	$T_3(x)$
0,00	0,00000	0,00000	0,30	0,29552	0,29550
0,05	0,04998	0,04998	0,50	0,47943	0,47917
0,10	0,09983	0,09983	0,70	0,64422	0,64283
0,15	0,14944	0,14944	0,90	0,78333	0,77850
0,20	0,19867	0,19867	1,10	0,89121	0,87817
0,25	0,24740	0,24740	1,30	0,96356	0,93383

Α2. Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ TAYLOR

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = α_0 + α_1x + α_2x^2 + ... + α_nx^n$. **(1)**

Για $x = 0$ είναι $P(0) = α_0$. Παραγωγίζοντας την **(1)** θα πάρουμε ότι

$P'(x) = α_1 + 2α_2x + 3α_3x^2 + ... + nα_nx^{n-1}$ **(2)**

Για $x = 0$ προκύπτει ότι $P'(0) = α_1$. Παραγωγίζοντας την **(2)** θα έχουμε ότι $P''(x) = 2α_2 + 6α_3x + ... + n(n-1)α_nx^{n-2}$ και για $x = 0$ παίρνουμε ότι $\frac{P''(0)}{2} = α_2$. Επαγωγικά για $κ \le n$ προκύπτει ότι $P^{(κ)}(x) = κ!α_κ +$ **(πλήθος όρων ως προς x με θετικούς εκθέτες)**. Για $x = 0$ θα έχουμε ότι

$\alpha_\kappa = \frac{P^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}$, **κ=0, 1, 2,…,n**.

Συνεπώς, ένα πολυώνυμο **n** - βαθμού είναι πλήρως καθορισμένο από την τιμή του στο $x = 0$ και τις τιμές των πρώτων **n** παραγώγων του στο σημείο αυτό. Εάν το πολυώνυμο είναι ανεπτυγμένο κατά τις δυνάμεις του $(x - x_0)$ τότε $\alpha_\kappa = \frac{P^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}$, **κ=0, 1, 2,…,n**.

Με την υπόθεση ότι μία συνάρτηση **f** είναι **n** – φορές παραγωγίσιμη στο $x = 0$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $P(0) = f(0),\ P^{(\kappa)}(0) = f^{(\kappa)}(0)$ για **κ=1, 2,…,n**. Σύμφωνα με τα όσα είδαμε το πολυώνυμο αυτό είναι το $P(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!} x^\kappa$. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του **n** που ταυτίζεται με τη συνάρτηση **f** και τις **n** – πρώτες παραγώγους αυτής στο $x = x_0$. Έτσι για $\alpha < \beta$, **n** φυσικό αριθμό, $x_0 \in [\alpha,\beta]$ και μία συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ που παραγωγίζεται **n** – φορές στο x_0, θέτουμε ως $P_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}(x - x_0)^\kappa$ το **n**ιοστό πολυώνυμο **Taylor** της συνάρτησης **f** με κέντρο το x_0. Εάν $x_0 = 0$ τότε το πολυώνυμο $P(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!} x^\kappa$ είναι το πολυώνυμο **Maclaurin** της **f** στο $x_0 = 0$.

<u>Παραδείγματα :</u>

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Τότε $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $n \in N$ και άρα $f^{(n)}(0) = 1$. Έτσι το πολυώνυμο **Taylor** της $f(x) = e^x$ στο $x_0 = 0$ είναι το $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$.
2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Τότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = -\eta\mu x$, $f'''(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $f''''(x) = \eta\mu x$,… Έτσι $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$ και γενικά $f^{(2n)}(0) = 0$ ενώ $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Άρα το πολυώνυμο **Taylor** της $f(x) = \eta\mu x$ στο $x_0 = 0$ είναι το $P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Τότε $f'(x) = -\eta\mu x$, $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $f'''(x) = \eta\mu x$, $f''''(x) = \sigma\upsilon\nu x$,… και γενικά $f^{(n)}(x) = \sigma\upsilon\nu(x + n\frac{\pi}{2})$ για **n=0, 1, 2,…** Έτσι $f^{(n)}(0) = \sigma\upsilon\nu(n\frac{\pi}{2})$ ενώ $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Άρα το

πολυώνυμο **Taylor** της $f(x) = \eta\mu x$ στο $x_0 = 0$ είναι το $P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ με $x > -1$. Τότε $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ και $f'(0) = 1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ και $f''(0) = -1$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ και $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$ και $f^{(4)}(0) = -2\cdot 3$,... Συνεχίζοντας θα έχουμε ότι $f^{(\kappa)}(x) = (-1)^{\kappa+1}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(\kappa-1)}{(1+x)^\kappa}$ και $f^{(\kappa)}(0) = (-1)^{\kappa+1}(\kappa-1)!$ με $\kappa \geq 1$. Άρα το πολυώνυμο **Taylor** της $f(x) = \ln(1+x)$ στο $x_0 = 0$ είναι το $P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι πολυώνυμο και $P_n(x)$ είναι το **n**ιοστό πολυώνυμο **Taylor** για τη συνάρτηση $f(x)$, τότε η διαφορά $f(x) - P_n(x)$ συμβολίζεται με $R_n(x)$ και αποτελεί το υπόλοιπο (σφάλμα) που γίνεται κατά την προσέγγιση της $f(x)$ από το $P_n(x)$. Για να ορίσουμε καλύτερα το προσεγγιστικό πολυώνυμο, είναι αναγκαίο να έχουμε πληροφορίες σχετικά με το υπόλοιπο $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Τέτοιες πληροφορίες μας δίνει το επόμενο θεώρημα :

<u>Θεώρημα (Taylor) :</u> Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ μία συνάρτηση $(n+1)$ - φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $x_0 \in [\alpha,\beta]$. Τότε για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ υπάρχει ένας αριθμός ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιος ώστε :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Μορφή **Lagrange** του υπολοίπου **Taylor**).

Εάν η $f^{(n+1)}$ είναι **Riemann** ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε έχουμε ότι $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ (***Ολοκληρωτική Μορφή*** του υπολοίπου **Taylor**).

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω $x \in [\alpha,\beta]$. Θέτουμε $\varphi : [\alpha,\beta] \to \Re$ με $\varphi(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$. Εάν

$T_n(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!}f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) + \ldots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)$ τότε θα έχουμε ότι $f(x) = T_n(t) + \varphi(t)$. Παραγωγίζοντας ως προς **t** παίρνουμε ότι $0 = f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} + \varphi'(t) =$ $= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \varphi'(t)$. Άρα $\varphi'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ με $t \in [\alpha,\beta]$. Από το γενικευμένο θεώρημα Μέσης Τιμής για τις συναρτήσεις **φ** και $g(t) = (x-t)^{n+1}$, στο διάστημα με άκρα x_0 και **x** προκύπτει ότι υπάρχει **ξ** μεταξύ των x_0 και **x** τέτοιο ώστε $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Όμως $\varphi(x) = 0,\ \varphi(x_0) = R_n(x),\ g(x) = 0$ και $g(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$. Έτσι από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε ότι $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Επίσης από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για τη συνάρτηση **φ'** στο διάστημα με άκρα τα x_0 και **x** προκύπτει ότι $-R_n(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x}\varphi'(t)dt = -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$. Έτσι τελικά παίρνουμε ότι $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ είναι απείρως παραγωγίσιμη και $x_0 \in [\alpha,\beta]$, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ είναι η σειρά **Taylor** της **f** με κέντρο το x_0. Εάν $x_0 = 0$ τότε η αντίστοιχη σειρά είναι η σειρά **Maclaurin** της **f**.

Παρατηρήσεις :

1. Το $R_n(x)$ στο παραπάνω θεώρημα ονομάζεται υπόλοιπο του **Schlomilch** και **Roche**.
2. Εάν το υπόλοιπο έχει τη μορφή $R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$ ονομάζεται υπόλοιπο κατά **Cauchy**.
3. Στην ειδική περίπτωση για **n=1**, ο τύπος του **Taylor** είναι το θεώρημα της μέσης τιμής.
4. Στις εφαρμογές είναι πολλές φορές χρήσιμο να θέτουμε **ξ=θx** με **0<θ<1**.
5. Η σειρά **Taylor** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ για $x = x_0$ συγκλίνει κατά τετριμμένο τρόπο στην τιμή $f(x_0)$. Συνεπώς εξετάζουμε τη σειρά ως προς τη

σύγκλιση για τις τιμές του x που είναι διάφορες του x_0. Από αυτές, μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα, εκείνες οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά **Taylor** της **f**, συγκλίνει προς τις τιμές $f(x)$. Στην περίπτωση που η σειρά **Taylor** για κάποιο x συγκλίνει προς το $f(x)$, λέμε ότι η σειρά παριστάνει την $f(x)$ για αυτό το x. Αυτό εξαρτάται από το υπόλοιπο $R_n(x,x_0)$ με $x \neq x_0$. Εάν έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Εάν το $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0)$ δεν υπάρχει ή είναι άπειρο, τότε η σειρά **Taylor** της **f** με κέντρο το x_0 δεν συγκλίνει. Τέλος, εάν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0)$ αλλά είναι διάφορο του μηδενός, τότε η σειρά **Taylor** της **f** με κέντρο το x_0 συγκλίνει, αλλά το άθροισμά της δεν είναι η συνάρτηση $f(x)$.

Η επόμενη πρόταση δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μία συνάρτηση f να αναπτύσσεται σε σειρά **Taylor**.

<u>Πρόταση :</u> Έστω συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ απεριόριστα διαφορίσιμη και υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ για κάθε $n \in N$ και κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Τότε η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά **Taylor** με κέντρο το x_0.

<u>Απόδειξη :</u>

Θεωρούμε το υπόλοιπο του τύπου του **Taylor** κατά **Langrage**. Έτσι έχουμε ότι $\left|R_n(x,x_0)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$ για κάποιο ξ μεταξύ των x_0 και x. Από την υπόθεση προκύπτει ότι $\left|R_n(x,x_0)\right| \leq M\frac{\left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$. Όμως $\lim_{n\to\infty} M\frac{\left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!} = 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$. Επομένως η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά **Taylor** με κέντρο το x_0.

<u>Παραδείγματα :</u>

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Ο τύπος του **Taylor** της $f(x) = e^x$, στο $x_0 = 0$ είναι $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(0,x)$ με $R_n(0,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt$. Για $x > 0$ και $0 < t < x$ είναι $e^t < e^x < 3^x$.

Έτσι $$\left|R_n(0,x)\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}3^x dt = 3^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} 3^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Επομένως και $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$. Εάν $x < 0$ θέτουμε στην **(1)** όπου x το $|x|$. Έτσι για κάθε $x \in \Re$ έχουμε ότι $|R_n(0,x)| \le 3^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Εάν $|x| \le 1$ τότε $3^{|x|} \le 3$ και έτσι $|R_n(0,x)| \le \frac{3}{(n+1)!}$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 0$ θα έχουμε ότι και $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$. Εάν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_n = 3^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, τότε $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{|x|}{n+2}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ από όπου προκύπτει ότι και $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$. Επομένως σε κάθε περίπτωση παίρνουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ αναπτύσσεται σε σειρά **Taylor** με κέντρο το $x_0 = 0$ και έτσι $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Τότε $f^n(x) = \eta\mu(x + n\frac{\pi}{2})$ με **n=0, 1, 2,…** Άρα $f_n(0) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ n = 2\kappa \\ \pm 1, & \alpha\nu\ n = 2\kappa + 1 \end{cases}$. Αφού $|f^n(x)| \le 1$ για κάθε $x \in \Re$ θα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ αναπτύσσεται σε σειρά **Taylor** με κέντρο το $x_0 = 0$ και έτσι $\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

Εργαζόμενοι ομοίως προκύπτει ότι :

3. $\sigma\upsilon\nu x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ για κάθε $x \in \Re$.

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ για κάθε x με $-1 < x \le 1$.

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ για $\alpha \in \Re$ και $-1 < x < 1$ (Διωνυμική Σειρά).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄ : Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΡΟΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΕΣΧΑΤΟΙ ΛΟΓΟΙ ΤΩΝ ΑΛΛΑΓΩΝ ΤΟΥ ISAAC NEWTON

Η μέθοδος των ροών του **Newton**, εμφανίστηκε στην εργασία που είχε εκπονήσει με τίτλο ***«Methodus fluxionum et serierum infinitarum»*** (μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών) το **1671**, αλλά δημοσιεύθηκε το **1739**, **19** χρόνια μετά το θάνατό του. Σε αυτή την εργασία του θεωρεί ότι οι μεταβλητές ποσότητες παράγονται από συνεχή κίνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων, παρά ως στατικά αθροίσματα απειροστών στοιχείων όπως είχε παρουσιασθεί στην προηγούμενη εργασία του με τίτλο ***«De Analysi per aequetiones numero terminorum infinitas»*** (Ανάλυση εξισώσεων με απειράριθμους όρους). Με αυτή την αντίληψη η έννοια της διαρκώς μεταβαλλόμενης κίνησης έρχεται διαισθητικά να υπερνικήσει την ασυνέχεια των αδιαιρέτων. Στην περίπτωση των επίπεδων καμπυλών ο **Newton** θεώρησε την κίνηση ως το αποτέλεσμα δύο κινήσεων, μίας προς την κατεύθυνση του **x** – άξονα και μίας προς την κατεύθυνση του **y** – άξονα. Η ταχύτητα της **x** – συνιστώσας και της **y** – συνιστώσας ονομάζονται από τον **Newton** ***«fluxions»*** (ροές), τις οποίες συμβόλισε με $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα. Η ταχύτητα ενός σημείου παριστάνεται από μία εξίσωση στην οποία περιέχονται οι fluxions $\dot{x}$ και $\dot{y}$. Αντίστροφα, το τόξο είναι το ***«ρέον»*** (**fluent**) της ταχύτητας του κινούμενου σημείου, και συνεπώς τα **x**, **y** είναι τα ρέοντα των fluxions $\dot{x}$ και $\dot{y}$ αντίστοιχα. Το απείρως μικρό μήκος κατά το οποίο αυξάνεται το ρέον σε απείρως μικρό χρόνο «ο» το ονόμασε στιγμή του ρέοντος και το συμβόλισε με $\dot{x}o$. Εάν η μεταβλητή **x** δίνεται ως μία ροή τότε το ρέον (δηλαδή η αντιπαράγωγος του **x**) συμβολίζεται αρχικά από τον **Newton** με $\boxed{x}$ και αργότερα με **x'**.

Στην ίδια εργασία, ο **Newton** διετύπωσε σαφέστερα το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού : Εάν δοθεί μία σχέση μεταξύ δύο ρεόντων, να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ των ροών τους και αντίστροφα. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό της ροής (παραγώγου) της $y = f(x) = 3x^2 - 2x$ θεωρούσε την κατάσταση από κινηματική σκοπιά και φανταζόταν ένα σωματίδιο να κινείται κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Για οποιεσδήποτε τιμές των **x, y** υπέθετε ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μήκους «**ο**» η ταχύτητα του σωματιδίου παρέμενε σταθερή. Σε αυτό το χρονικό διάστημα το **y** αυξάνεται σε $y + \dot{y}o$ και το **x** σε $x + \dot{x}o$. Αφού το σωματίδιο παρέμενε σε επαφή με την καμπύλη θα είναι : $y + \dot{y}o =$

$= f(x+\dot{x}o) = 3(x+\dot{x}o)^2 - 2(x+\dot{x}o)$ και άρα $\dot{y}o = 6x\dot{x}o + 3(\dot{x}o)^2 - 2\dot{x}o$. Σε αυτό το σημείο διαγράφει τους όρους που περιείχαν το $\dot{x}o$ σε δυνάμεις μεγαλύτερης της μονάδας. Τότε $\dot{y}o = 6x\dot{x}o - 2\dot{x}o$ και διαιρώντας με $\dot{x}o$ παίρνει το λόγο $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = 6x - 2$ (με σύγχρονο συμβολισμό $\frac{dy}{dx} = 6x - 2$). Για αυτή την εργασία του δέχθηκε πολύ σκληρή κριτική, κυρίως στο σημείο που διέγραφε τους όρους που περιείχαν τις δυνάμεις των $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$ με εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας, αλλά και εάν είχε το δικαίωμα να υποθέτει ότι οι ροές παραμένουν σταθερές στα μικρά χρονικά διαστήματα. Προσπαθώντας να δώσει εξηγήσεις τόνισε, ότι οι στιγμές $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ δεν θα έπρεπε να θεωρούνται ποτέ μόνες, αλλά πάντα ως πηλίκο $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$. Όμως με αυτή την ερμηνεία του προκάλεσε μεγαλύτερη σύγχυση. Δεν μπορούσε να γίνει αντιληπτό εάν ο λόγος $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$ ήταν μία ενιαία οντότητα ή το πηλίκο των δύο μεταβλητών $\dot{x}o$ και $\dot{y}o$. Επίσης προέκυψαν και άλλες δυσκολίες. Η τεχνική της επίλυσης που αναπαριστούσε το **y** ως το πηλίκο $\frac{f(x+\dot{x}o) - f(x)}{o}$ δεν επέτρεπε τον υπολογισμό του επιθυμητού λόγου $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ σε όλες τις περιπτώσεις. Ενώ λειτουργούσε εξαιρετικά στην περίπτωση όπου η **f(x)** ήταν ένα πολυώνυμο του **x**, σε κάποιες άλλες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της συνάρτησης $y = \sqrt{1+x}$ δεν υπήρχε προφανής τρόπος υπολογισμού του λόγου $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Η προσέγγιση του **Newton** σε αυτές τις περιπτώσεις γινόταν με τη βοήθεια της αναπαράστασης των συναρτήσεων με άπειρες σειρές. Την ίδια μέθοδο εφάρμοσε και στην περίπτωση της $y = x^v$. Για την εύρεση της ροής συμβόλισε με «**o**» το απείρως μικρό χρονικό διάστημα και με $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ τις απείρως μικρές αυξήσεις (τις στιγμές των ρεόντων ποσοτήτων **x** και **y**). Θέτοντας $x + \dot{x}o$ στη θέση του **x**, $y + \dot{y}o$ στη θέση του **y** και εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα και τους κανόνες που

είχε θέσει πήρε την ισότητα $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^v = x^v + vx^{v-1}\dot{x}o + ... + (\dot{x}o)^v$. Διαγράφοντας τους όρους που είχαν τον όρο $\dot{x}o$ σε εκθέτη μεγαλύτερο της μονάδας κατέληξε στην ισότητα $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = vx^{v-1}$. Ο **Newton** είχε καταλήξει στην ίδια σχέση και στην προηγούμενη εργασία του ***«De Analysi»***, χωρίς να κάνει χρήση των fluxions. Παρά το ότι δεν φαίνεται να υπάρχει ουσιώδης διαφορά σε αυτές τις δύο εργασίες, ή άποψη του **Newton** είναι εντελώς διαφορετική. Θεωρεί ότι οι στιγμές $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ ***«μεταβάλλονται τώρα με το χρόνο ο»***, ενώ στην πρώτη εργασία του οι στιγμές δεν ήταν τίποτα παρά ***«έσχατα σταθερά τεμάχια»***. Όμως παρ' όλα αυτά οι στιγμές εξακολουθούσαν να θεωρούνται ως κάποιο είδος απείρων μικρών μεγεθών.

Η προσπάθεια δικαιολόγησης του **Newton** για τη διαγραφή των απείρως μικρών όρων τον οδήγησε στην εισαγωγή της έννοιας του ορίου. Αυτή η σκέψη του παρουσιάσθηκε καθαρά στο ***«De Quadratura»***, το **1704**. Σε αυτή τη δημοσίευση γίνεται επικριτικός για την εξάλειψη των όρων που περιείχαν το «**ο**» γράφοντας : ***«Στα μαθηματικά ακόμη και τα μικρότερα λάθη δεν πρέπει να παραβλέπονται…Θεωρώ τα μαθηματικά μεγέθη σε αυτή την εργασία, όχι αποτελούμενα από πολύ μικρά μέρη, αλλά περιγραφόμενα από μία συνεχή κίνηση. Οι γραμμές περιγράφονται, και συνεπώς παράγονται, όχι από παράθεση τμημάτων αλλά από τη συνεχόμενη κίνηση σημείων, οι επιφάνειες από την κίνηση γραμμών, τα χρονικά διαστήματα από τη συνεχή ροή…»***. Οι μαθηματικές ποσότητες δεν θεωρούνται πλέον ότι γίνονται από ***«στιγμές»***, ή πολύ μικρά μέρη, αλλά περιγράφονται από συνεχή κίνηση ενός σημείου, και κατά συνέπεια η τετμημένη και η τεταγμένη είναι γενικά μεταβλητές ποσότητες. Ο **Newton** ονόμασε τη νέα ιδέα του ***«μέθοδο των πρώτων και έσχατων λόγων»*** και τη χρησιμοποίησε στον υπολογισμό της ροής της $y = x^v$. Η προσέγγισή του έγινε όπως και στην εργασία του ***«Methodus fluxionum»***, με την αντικατάσταση του **x** από το **x+o** (εδώ συμβόλισε την αύξηση με «**ο**» και όχι με $\dot{x}o$). Τότε $(x + o)^v - x^v = vx^{v-1}o + o\{\frac{1}{2}v(v-1)x^{v-2}o + ...o^{v-1}\}$ και διαιρώντας με «**ο**», σε σύγχρονο συμβολισμό προκύπτει ότι $\frac{\Delta(x^v)}{\Delta x} = vx^{v-1} + \frac{v(v-1)}{2}x^{v-2}o + ...(o)^{v-1}$. Καθώς το «**ο**» πλησιάζει προς το μηδέν διαγράφει τους όρους που το περιέχουν και ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ των μεταβολών, που τον ονομάζει ***«έσχατο λόγο των μεταβολών»***, ισούται με vx^{v-1}. Δηλαδή σε σύγχρονη ορολογία θα έχουμε ότι $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = vx^{v-1}$.

Μετά τη δημοσίευση και της τελευταίας του εργασίας δημιουργήθηκε και πάλι σύγχυση. Δεν μπορούσε να γίνει κατανοητό τι ήταν ατό το μικρό «**ο**». Εάν ήταν μηδέν τότε δεν μπορούσε να γίνει διαίρεση με αυτό. Εάν δεν ήταν μηδέν τότε δεν θα μπορούσε να παραλειφθεί. Ο **Newton** γράφει τότε το ***«Principia»*** και προσπαθεί να δικαιολογήσει τη μέθοδο των πρώτων και έσχατων λόγων ως εξής : ***«Αυτές οι προτάσεις δίνονται για να αποφύγουμε τη μονότονη και περίπλοκη διαδικασία της διπλής αντίφασης στην οποία κατέφευγαν οι παλαιοί γεωμέτρες. Βέβαια οι αποδείξεις με τη μέθοδο των αδιαιρέτων είναι πιο σύντομες. Επειδή όμως αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο γεωμετρική θα περιορισθώ στις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν, επιλέγοντας τα πρώτα και τελικά αθροίσματα, και τους λόγους των μεγεθών τη στιγμή που εμφανίζονται και που εξαφανίζονται, δηλαδή στα όριά τους. Όταν θα χρησιμοποιώ μικρές καμπύλες αντί για ευθείες δεν θα εννοώ αδιαίρετες, αλλά ανεπαίσθητες διαιρετές ποσότητες, και αντί για αθροίσματα και λόγους ορισμένων μερών θα θεωρώ όρια αθροισμάτων και λόγων. Μπορεί να διατυπωθεί η αντίρρηση ότι δεν υπάρχει τελικός λόγος ανεπαίσθητων ποσοτήτων, γιατί ο λόγος πριν την εξάλειψη των ποσοτήτων δεν είναι τελικός (έσχατος), και όταν εξαλειφθούν δεν υπάρχει καν. Με το ίδιο όμως επιχείρημα και ένα κινητό που φτάνει στον προορισμό του και σταματάει δεν έχει τελική ταχύτητα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η ταχύτητά του, πριν φτάσει στον προορισμό του δεν είναι η τελική, ενώ όταν φτάσει μηδενίζεται. Είναι όμως εύκολο να δοθεί μία απάντηση σε αυτό τον ισχυρισμό. Με τον όρο «τελική ταχύτητα» εννοούμε εκείνη με την οποία κινείται το σώμα, όχι πριν φτάσει στον προορισμό του, ούτε αφού φτάσει, αλλά τη στιγμή ακριβώς που φτάνει, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στην τελευταία του θέση και με την οποία παύει η κίνηση. Αντίστοιχα, με τον όρο έσχατος λόγος των ανεπαίσθητων ποσοτήτων, εννοούμε το λόγο των ποσοτήτων όχι πριν εξαφανισθούν, ούτε μετά, αλλά των τιμών με τις οποίες εξαφανίζονται»***. Ο **Newton** ενώ βρίσκει το όριο του λόγου των διαφορών δεν το ονομάζει όριο του λόγου, αλλά περιγράφει τα όρια ως ***«έσχατους λόγους των αλλαγών»***, δηλαδή ως την τιμή του λόγου αυτών των μηδενιζομένων ποσοτήτων, τη στιγμή ακριβώς που μηδενίζονται. Συγκεκριμένα γράφει : ***«Αυτοί οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους μηδενίζονται οι ποσότητες δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι των εσχάτων ποσοτήτων, αλλά όρια προς τα οποία πάντα τείνουν ποσότητες, που μειώνονται απεριόριστα, και προς τα οποία προσεγγίζουν πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, χωρίς ποτέ να τα ξεπερνούν, ούτε στην πραγματικότητα τα φτάνουν, αφού οι ποσότητες μειώνονται επ΄ άπειρον»***. Η φράση όμως ***«χωρίς να τα ξεπερνούν»*** φανερώνει ότι η ***«παράγωγος»*** δεν μπορεί να ταλαντώνεται

γύρω από το όριό της. Η **Judy Grabiner (1983)** δίνει την ακόλουθη εξήγηση : ***«Φαίνεται ότι ο Newton είχε στο νου του ένα «σύνορο», και οι μαθηματικοί της εποχής του αναφέρουν συχνά το συγκεκριμένο παράδειγμα του κύκλου, ως το όριο των εγγεγραμμένων πολυγώνων. Η φράση «ούτε… να τα φτάνουν, αφού στην πραγματικότητα μειώνονται επ΄ άπειρον» εγείρει ένα κεντρικό ζήτημα : συχνά έμπαινε το ερώτημα εάν στην πραγματικότητα μία μεταβλητή ποσότητα έφτανε ποτέ το όριό της. Εάν δεν το έφτανε μήπως τότε υπήρχε κάποιο λάθος; Διατυπώνοντας την πρόταση «οι ποσότητες και οι λόγοι των ποσοτήτων, που σε κάθε πεπερασμένο χρόνο τείνουν συνεχώς να εξισωθούν και που στο τέλος αυτού του χρόνου προσεγγίζουν μεταξύ των πλησιέστερα από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, τελικά εξισώνονται» δεν βοήθησε να ξεκαθαριστεί αυτό το ζήτημα. Τι σήμαινε τελικά εξισώνονται;»***.

Αυτό το ερώτημα δεν ξεκαθαρίστηκε ούτε τον **18^{ο}** αιώνα. Το **1734** ο Ιρλανδός φιλόσοφος και ιερωμένος **George Berkeley** έκανε οξεία επίθεση και αυστηρή κριτική στον Απειροστικό Λογισμό σε αυτό ακριβώς το σημείο λέγοντας τα εξής : ***«Οι επιστήμονες επιτίθενται στη θρησκεία για τη θεωρούν παράλογη. Ας βελτιώσουν λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι σκέπτονται. Μία ποσότητα είτε είναι μηδέν, είτε όχι. Δεν υπάρχει τίποτε ενδιάμεσο»***. Ο **Berkeley** κλείνοντας την κριτική του χαρακτήρισε τους μαθηματικούς, ως ανθρώπους που συνηθίζουν να υπολογίζουν αντί να σκέπτονται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ΄ : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Γ1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω η συνάρτηση **y=f(x)** ορισμένη για κάθε πραγματικό αριθμό **x** ή για κάποια σημεία της μορφής $x_\kappa = x_o + \kappa h,\ \ \kappa = 0,1,...$. Για κάθε **x** και **x+h** στο πεδίο ορισμού της **f**, η διαφορά **Δ** ορίζεται από τη σχέση : $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Τότε ορίζουμε ως εξίσωση διαφορών ή διαφοροεξίσωση **v** – τάξεως μία εξίσωση της μορφής : $F(x, f(x), \Delta f(x),..., \Delta^v f(x)) = 0$. Με την αντικατάσταση $x' = \frac{x - x_0}{h}$ τα σημεία x_κ μετασχηματίζονται σε θετικούς ακέραιους **κ**. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_0 = 0$ και $h = 1$. Τότε η εξίσωση διαφορών **v** – τάξεως γράφεται ως : $F^*(x, f(x), f(x+1),..., f(x+v)) = 0$.

Εάν η διαφοροεξίσωση **F*** είναι της μορφής : $g_0(x)f(x+v) + g_1(x)f(x+v-1) + ... + g_v(x)f(x) = g(x)$ τότε ονομάζεται **γραμμική διαφοροεξίσωση v** – τάξεως. Εάν $g(x) = 0$ ονομάζεται **ομογενής** ενώ εάν $g_i(x) = \alpha_i,\ i = 0,1,...,v$, με α_i σταθερές τότε η διαφοροεξίσωση ονομάζεται **γραμμική διαφοροεξίσωση v – τάξεως με σταθερούς συντελεστές**. Θέτοντας $y_\kappa=f(x_\kappa)$ με **κ=0,1,…,v** η γραμμική διαφοροεξίσωση θα πάρει τη μορφή $g_0(\kappa)y_{\kappa+v} + g_1(\kappa)y_{\kappa+v-1} + ... + g_v(\kappa)y_\kappa = g(\kappa)$. **Τάξη** μίας διαφοροεξίσωσης (γραμμικής ή όχι) ονομάζεται η διαφορά του πιο μικρού από τον πιο μεγάλο δείκτη **r** της y_r. **Λύση** μίας διαφοροεξίσωσης επί ενός συνόλου **S** ονομάζεται μία συνάρτηση **y=f(x)** η οποία καθιστά την διαφοροεξίσωση ταυτότητα στο **S**.

Παράδειγμα : Έστω η διαφοροεξίσωση $y_{\kappa+1} - 2y_\kappa = 0,\ \kappa = 0,1,2,...$ Η συνάρτηση $y_\kappa=f(\kappa)=2^\kappa$, **κ=0,1,2,…** αποτελεί μία μερική λύση της δοθείσας διαφοροεξίσωσης μέσω της οποίας προσδιορίζεται και η γενική λύση $y_\kappa = c2^\kappa,\ \kappa = 0,1,2,...$ και **c** αυθαίρετη σταθερά.

Γ2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για την επίλυση των γραμμικών εξισώσεων διαφορών ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 1 (Ύπαρξης Λύσεως) : Η γραμμική διαφοροεξίσωση $g_0(x)f(x+v) + g_1(x)f(x+v-1) + ... + g_v(x)f(x) = g(x)$ τάξεως **v**, ορισμένη στο σύνολο **S** διαδοχικών ακεραίων τιμών του **κ**, έχει μία και μόνο λύση $y_\kappa=f(\kappa)$ που παίρνει **v** αυθαίρετες τιμές για **v** αυθαίρετες

διαδοχικές τιμές του **κ**, δηλαδή η λύση ορίζεται μονοσήμαντα όταν δοθούν οι τιμές της για **ν** διαδοχικές τιμές του **κ** (οι καλούμενες αρχικές συνθήκες). Τότε έχουμε :

Α. Επίλυση Γραμμικής Ομογενούς Διαφοροεξίσωσης Πρώτης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές :

Μία τέτοια διαφοροεξίσωση έχει τη γενική μορφή $y_{\kappa+1} - \lambda y_\kappa = 0$ και η γενική λύσης της είναι η $y_\kappa = c\lambda^\kappa$, $\kappa = 0,1,2,...$ και **c** αυθαίρετη σταθερά.

Β. Επίλυση Γραμμικής Ομογενούς Διαφοροεξίσωσης Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές :

Η γενική μορφή αυτής της διαφοροεξίσωσης είναι : $y_{\kappa+2} + \beta y_{\kappa+1} + \gamma y_\kappa = 0$. Θεωρούμε λ_1, λ_2 τις ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης : $\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0$. Τότε ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης οι λύσεις της διαφοροεξίσωσης διαφοροποιούνται ως εξής :

α) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Τότε η γενική λύση της διαφοροεξίσωσης είναι η $y_\kappa = c_1\lambda_1^{\ k} + c_2\lambda_2^{\ k}$ όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και **κ=0, 1, 2,…**

β) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή πραγματική ρίζα **λ**. Τότε γενική λύση είναι η $y_\kappa = (c_1 + c_2\kappa)\lambda^\kappa$, $\kappa = 0, 1, 2,...$

γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\lambda_1 = \xi + \eta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $\lambda_2 = \xi - \eta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)$. Τότε γενική λύση της διαφοροεξίσωσης είναι η $y_\kappa = A\rho^\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa\theta + B)$ όπου **Α** και **Β** είναι αυθαίρετες σταθερές και **κ=0, 1, 2, …**

<u>Παραδείγματα :</u>

1. Οι αριθμοί του **Fibonacci** : **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…** ορίζονται με $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ και από τον τρίτο και μετά ο κάθε ένας είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Δηλαδή έχουμε τη διαφοροεξίσωση : $y_{\kappa+2} = y_{\kappa+1} + y_\kappa$, $\kappa = 0, 1, 2,...$ Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η $\lambda^2-\lambda-1=0$ με ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Τότε η γενική της λύση θα είναι : $y_\kappa = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^\kappa + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^\kappa$, $\kappa = 0, 1, 2,...$ Από τις αρχικές συνθήκες $y_0 = 0$ και $y_1 = 1$ παίρνουμε ότι $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Έτσι τελικά οι αριθμοί του **Fibonacci** δίνονται από τη σχέση

$$y_\kappa = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\kappa - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\kappa, \quad \kappa = 0,\ 1,\ 2,...$$

2. Έστω η εξίσωση διαφορών $y_{\kappa+2} + y_{\kappa+1} + y_\kappa = 0$. Το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο είναι $\lambda^2+\lambda+1=0$ με ρίζες τις συζυγείς μιγαδικές $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Τότε η γενική λύση της διαφοροεξίσωσης είναι $y_\kappa = A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\kappa\pi}{3} + B\right)$, $\kappa=0,\ 1,\ 2,...$ και **A**, **B** αυθαίρετες σταθερές.

Γ. Επίλυση Γραμμικής Ομογενούς Διαφοροεξίσωσης ν – τάξεως με Σταθερούς Συντελεστές :

<u>Θεώρημα 2 :</u> Ένα σύνολο **ν** – λύσεων $y_\kappa^{(1)}, y_\kappa^{(2)},...y_\kappa^{(\nu)}$, αποτελεί θεμελιώδες σύστημα λύσεων της γραμμικής ομογενούς διαφοροεξίσωση **ν** – τάξεως $y_{\kappa+\nu} + \alpha_1 y_{\kappa+\nu-1} + ... + \alpha_\nu y_\kappa = 0$, όταν η ορίζουσα **ν** – τάξεως :

$$W_m = \begin{vmatrix} y_m^{(1)} & y_m^{(2)} & \cdots & y_m^{(\nu)} \\ y_{m-1}^{(1)} & y_{m-1}^{(2)} & \cdots & y_{m-1}^{(\nu)} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{m-\nu+1}^{(1)} & y_{m-\nu+1}^{(2)} & \cdots & y_{m-\nu+1}^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

είναι $\neq 0$ για κάποια τιμή **m** του **κ**.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω διαφοροεξίσωσης είναι η $\lambda^\nu + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + ... + \alpha_{\nu-1}\lambda + \alpha_\nu = 0$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις :

α) Σε κάθε απλή πραγματική ρίζα **λ** της χαρακτηριστικής εξίσωσης αντιστοιχούμε τη μερική λύση $c\lambda^\kappa$ όπου **c** αυθαίρετη σταθερά.

β) Σε κάθε πραγματική ρίζα **λ** πολλαπλότητας **r** αντιστοιχούμε τη μερική λύση $(c_1 + c_2\kappa + c_3\kappa^2 + ... + c_r\kappa^{r-1})\lambda^\kappa$ όπου $c_i,\ i = 1, 2,...,r$ αυθαίρετες σταθερές.

γ) Σε κάθε ζεύγος απλών συζυγών μιγαδικών ριζών με μέτρο **ρ** και όρισμα **θ** αντιστοιχούμε τη μερική λύση $A\rho^\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa\theta + B)$.

δ) Σε κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών πολλαπλότητας **r** με μέτρο **ρ** και όρισμα **θ** αντιστοιχούμε τη μερική λύση $\rho^\kappa[A_1\sigma\upsilon\nu(\kappa\theta + B_1) + A_2\kappa\sigma\upsilon\nu(\kappa\theta + B_2) + ... + A_r\kappa^{r-1}\sigma\upsilon\nu(\kappa\theta + B_r)$ όπου $A_1, A_2,..., A_r, B_1, B_2,...,B_r$ αυθαίρετες σταθερές.

ε) Το άθροισμα των παραπάνω μερικών λύσεων περιέχει **r** αυθαίρετες σταθερές και αποτελεί τη γενική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφοροεξίσωσης **ν** – τάξεως.

Παράδειγμα : Έστω η διαφοροεξίσωση $4^{ης}$ τάξεως $y_{v+4} - 3y_{v+3} + y_{v+2} + 4y_v = 0$. Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η $\lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ με ρίζες τις : $\lambda_1=2$ με πολλαπλότητα **2**, $\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Τότε η γενική λύση της διαφοροεξίσωσης είναι η $y_v = A\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi v}{3}+B) + (c_1 + c_2 v)2^v$ όπου **A**, **B**, c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Δ. Επίλυση Γραμμικής Μη Ομογενούς Διαφοροεξίσωσης v – τάξεως με Σταθερούς Συντελεστές :

Έστω η γραμμική μη ομογενής διαφοροεξίσωση **v** – τάξεως $y_{\kappa+v} + \alpha_1 y_{\kappa+v-1} + ... + \alpha_v y_\kappa = r_\kappa$ όπου α_i **i=1,2,…,v** σταθερές και r_κ συνάρτηση του **κ**. Τότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα :

Θεώρημα 3 : Έστω y_κ^0 μερική λύση της διαφοροεξίσωσης $y_{\kappa+v} + \alpha_1 y_{\kappa+v-1} + ... + \alpha_v y_\kappa = r_\kappa$ και y_κ^* η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Τότε η γενική λύση της διαφοροεξίσωσης $y_{\kappa+v} + \alpha_1 y_{\kappa+v-1} + ... + \alpha_v y_\kappa = r_\kappa$ δίνεται από τη σχέση $y_\kappa = y_\kappa^* + y_\kappa^0$.

Παράδειγμα : Έστω η διαφοροεξίσωση $y_{\kappa+2} - y_{\kappa+1} - 6y_\kappa = 2^\kappa$, **κ=0, 1, 2,…** Η παραπάνω διαφοροεξίσωση έχει μερική λύση την $y_\kappa^0 = -\frac{1}{4}2^\kappa$ ενώ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_\kappa^* = c_1 3^\kappa + c_2(-2)^\kappa$. Άρα η γενική λύση του παραδείγματος είναι η $y_\kappa = c_1 3^\kappa + c_2(-2)^\kappa - \frac{1}{4}2^\kappa$, c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές και **κ=0, 1, 2,…**

Ε. Μη Γραμμικές Διαφοροεξισώσεις που ανάγονται σε Γραμμικές Διαφοροεξισώσεις με Σταθερούς συντελεστές :

Πολλές φορές, με μετασχηματισμό της εξαρτημένης ή της ανεξάρτητης μεταβλητής, μη γραμμικές διαφοροεξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικές ώστε να μπορούν να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι λύσεως που προαναφέραμε. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει γενικός μετασχηματισμός που να εξαρτάται από τη μορφή της εξίσωσης και που επιτυγχάνει τη γραμμικοποίηση.

Παραδείγματα :

1. Έστω η διαφοροεξίσωση $y_{\kappa+3}^2 - 8y_{\kappa+2}^2 + 8y_{\kappa+1}^2 - y_\kappa^2 = 0$. Θέτοντας $z_\kappa = y_\kappa^2$ η διαφοροεξίσωση γράφεται $z_{\kappa+3} - 8z_{\kappa+2} + 8z_{\kappa+1} - z_\kappa = 0$ που αποτελεί μία γραμμική ομογενή διαφοροεξίσωση τρίτης τάξεως. Η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει ρίζα τον πραγματικό αριθμό **λ=2**

με πολλαπλότητα **3**. Έτσι παίρνουμε ότι $z_\kappa = (c_1 + c_2\kappa + c_3\kappa^2)2^\kappa$. Άρα η γενική λύση του παραδείγματος δίνεται από τη σχέση $y_\kappa{}^2 = (c_1 + c_2\kappa + c_3\kappa^2)2^\kappa$.

2. Έστω η διαφοροεξίσωση $y_{\kappa+2}y_\kappa{}^2 = y_{\kappa+1}{}^3$. Θέτοντας $z_\kappa = \log y_\kappa$ η αρχική διαφοροεξίσωση γράφεται $z_{\kappa+2} - 3z_{\kappa+1} + 2z_\kappa = 0$. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$. Έτσι θα έχουμε ότι $z_\kappa = c_1 + c_2 2^\kappa$ και επομένως $y_\kappa = e^{z_\kappa}$ ή $y_\kappa = e^{c_1}e^{c_2 2^\kappa} = C_1(C_2)^{2^\kappa}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Auchter H.**, (1937), «*Brook Taylor der Mathematiker und Philosoph : Beitrüge zur Wissensehaftsgeschichte der Zeit des Newton-Leibniz-Streites»,* Inaugural-Dissertation, Philipps-Universit/it, Marburg Wtirzburg, 1937.
2. **Bateman H.**, (1938), «*Halley's Methods for Solving Equations»,* American Mathematical, Monthly 45 (1938) : 11 - 17.
3. **Bos H. J. M.,** (1974), «*Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*», Archive for History of Exact Sciences 14, (1974) :1 - 90.
4. **Cohen I. B., (**1971), «A*n Introduction to Newton's 'Principia»,* Cambridge, 1971.
5. **Edwards C. H.**, (1979), «*The Historical Development of the Calculus»,* 1979, New York : Springer – Verlag.
6. **Feigenbaum L.**, (1984), «*Brook Taylor and the methods of Increments»*, Berlin, Germany : Springer – Verlag.
7. **Gibson G. A.**, (1921), «*Taylor's Theorem and Bernoulli's Theorem : A Historical Note*», Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1) 39 (1921) : 25 - 33.
8. **Goldstine H.**, (1980), «*A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century»*, New York, 1980.
9. **Pringsheim A.**, (1900), «*Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes*», Bibliotheca Mathematica, 3rd series 1 (1900) : 433 - 479.
10. **Γιαννακούλιας Ε.**, (2007), «*Η Ιστορική Εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού από τον 5ο π.Χ. έως και τον 19ο Αιώνα*», Αθήνα, Εκδόσεις : Συμμετρία.
11. **Γιαννακούλιας Ε.**, (2006), Σημειώσεις του Μαθήματος : «*Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού*», Πανεπιστήμιο Αθηνών.
12. **Γιαννακούλιας Ε.**, **Γιωτόπουλος Σ.**, **Νεγρεπόντης Σ.**, (1993), «*Απειροστικός Λογισμός – Τόμος ΙΙ*», Αθήνα, Εκδόσεις : Συμμετρία.
13. **Κάκκουλος Θ.**, (1990), «*Στοχαστικές Ανελίξεις και Στοιχεία Θεωρίας Εξισώσεων Διαφορών»*, Αθήνα.
14. **Ντούγιας Σ.**, (1985), «*Απειροστικός Λογισμός Ι*», Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.