ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διαφορετικές Προσεγγίσεις της Μαθηματικής Γνώσης.
Παραδείγματα αναφερόμενα σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού με χρήση Νέων Τεχνολογιών.»

Ειρήνη Μπιζά

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσης Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2003

R. Magritt: Les Objets familiers, 1928

«Les mots ou les objets, qui flottent dans l'espace ou qui sont plaques sur les visages, peuvent être compris comme la matérialisation de la pensée, de la parole ou de la vision.»

«Οι λέξεις ή τα αντικείμενα που επιπλέουν μέσα στο χώρο ή είναι κολλημένα στα πρόσωπα, μπορούν να θεωρηθούν ως η υλοποίηση της σκέψης, του λόγου και της όρασης»

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Διαφορετικές Προσεγγίσεις της Μαθηματικής Γνώσης.
Παραδείγματα αναφερόμενα σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού με χρήση Νέων Τεχνολογιών.»

Ειρήνη Μπιζά

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσης Ζαχαριάδης

Εξώφυλλο: Πίνακας του R. Magritt: Les Objets familiers, 1928

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στη

Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

που απονέμει το:

Τμήμα Μαθηματικών

του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την ..... από την Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ (Επιβλέπων Καθηγητής)	**Αναπλ. Καθηγητής**	**.....**
ΦΑΡΜΑΚΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ	**Αναπλ. Καθηγητής**	**.....**
ΧΡΙΣΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ	**Αναπλ. Καθηγητής**	**.....**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ 3

1. Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ – ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ 7
   1.1. Δυϊσμός διεργασίας / αντικειμένου. Η θεωρία της υποστασιοποίησης 8
      1.1.1.Ο δυϊσμός διεργασίας / αντικειμένου. 8
      1.1.2.Η θεωρία της υποστασιοποίησης. 9
   1.2. Η θεωρία APOS 11
   1.3. Η θεωρία της διεργασίας-έννοιας (procept) 15
   1.4. Σύγκριση θεωριών 20
   1.5. Στοιχειώδης και προχωρημένη μαθηματική σκέψη 22

2. ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 25
   2.1. Άτυπες θεωρίες και Μαθηματικά 26
   2.2. Ενσαρκωμένη Γνώση (Embodied Cognitive) 28
   2.3. Ενσαρκωμένα Αντικείμενα – Ενσαρκωμένα Μαθηματικά 33
   2.4. Σχέση μεταξύ ενσαρκωμένων αντικειμένων, διεργασιών-εννοιών και ενθυλάκωσης διεργασιών 36
   2.5. Παράδειγμα 38

3. ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 41
   3.1. Οι τρεις κόσμοι προσέγγισης των Μαθηματικών 41
   3.2. Σύνδεση των τριών κόσμων 43
   3.3. Η απόδειξη στους τρεις κόσμους των Μαθηματικών 46
   3.4. Η καθήλωση των μαθητών στον ενσαρκωμένο κόσμο 51

4. Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 53

5. Ο ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΟΙ 61

6. ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ 65
   6.1. Συνάρτηση – Σύνθεση συναρτήσεων 65
   6.2. Όριο 71
      Παράδειγμα 1 73
      Παράδειγμα 2 76
   6.3. Παράγωγος 78

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 85

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 87

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ. 91

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι γνωστή, όχι μόνο από τις έρευνες, αλλά και από τη καθημερινή πραγματικότητα η δυσκολία που αντιμετωπίζει ένα μεγάλο μέρος των μαθητών/τριών αλλά και των ενηλίκων στα Μαθηματικά. Οι δυσκολίες αυτές οφείλονται στην φύση της μαθηματικής γνώσης καθώς και στον τρόπο που την αντιλαμβάνονται οι μαθητές. Στην εργασία αυτή θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε διαφορετικές απόψεις, από τη βιβλιογραφία, που αφορούν στους τρόπους προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών παραθέτοντας μερικά από τα κυριότερα ερευνητικά δεδομένα που σχετίζονται, αφενός με τον *δυϊσμό διεργασίας και αντικειμένου* στα Μαθηματικά και αφετέρου με την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση των Μαθηματικών. Σκοπός είναι να γίνει κατανοητή μία θεωρία που να διατρέχει όλα το φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης, από τη στοιχειώδη στην προχωρημένη. Αυτό επιτυγχάνεται με την θεωρία που ανέπτυξε ο D. Tall (2002) για τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών: *τον ενσαρκωμένο κόσμο (embodied), τον κόσμο των διεργασιών-εννοιών (proceptual) και τον αξιωματικό κόσμο (axiomatic*). Τέλος παρουσιάζονται παραδείγματα, στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής, που αφορούν σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού και αξιοποιούν τις δυνατότητες που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστή, όχι μόνο από τις έρευνες, αλλά και από τη καθημερινή πραγματικότητα η δυσκολία που αντιμετωπίζει ένα μεγάλο μέρος των μαθητών/τριών αλλά και των ενηλίκων στα Μαθηματικά. Τι είναι αυτό που διαφοροποιεί τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων και χαρακτηρίζει την ικανότητα τους ή μη στη μαθηματική σκέψη; Πως σχετίζεται η φύση των Μαθηματικών που διδάσκονται με αυτή των Μαθηματικών που γίνονται αντιληπτά στη καθημερινότητα; Αυτό που φαίνεται να ισχύει είναι, ότι οι καθημερινές εμπειρίες και τα βιώματα καθώς και η ανθρώπινη φύση καθορίζουν τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε και μαθαίνουμε τα Μαθηματικά ενώ αυτό που διαφοροποιεί τους πιο ικανούς από τους λιγότερο ικανούς μαθητές/τριες είναι ότι έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίζουν τη Μαθηματική γνώση με ποιοτικά διαφορετικούς τρόπους.

Επίσης, ένα άλλο ερώτημα σχετίζεται με τις ποιοτικές διαφοροποιήσεις του περιεχομένου των Μαθηματικών σε όλο το μήκος της εξέλιξης των βαθμίδων από το Δημοτικό μέχρι το Πανεπιστήμιο. Υπάρχουν έννοιες που θεωρούνται στοιχειώδεις και διδάσκονται στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης σε αντίθεση με άλλες που απαιτούν προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Συχνά, όμως συμβαίνει οι πρώτες να αποτελούν τις βάσεις και το στήριγμα των δεύτερων. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η έννοια του εμβαδού και οι έννοιες του ολοκληρώματος *Riemann* ή *Lebesgue*. Είναι λογικό να μην μπορούμε να φανταστούμε ένα/μία δάσκαλο/α να προσπαθεί να διδάξει σε δεκάχρονα παιδιά την έννοια του ολοκληρώματος *Riemann* και ακόμα περισσότερο την έννοια του ολοκληρώματος *Lebesgue*! Θα είχε όμως ενδιαφέρον να διακρίνουμε με ποιο τρόπο σχετίζονται και που διαφοροποιούνται οι έννοιες αυτές και να αναπτύξουμε κατάλληλες διδακτικές προτάσεις προσαρμοσμένες στις δυνατότητες των μαθητών που να διευκολύνουν το μετέπειτα πέρασμα τους από τη *στοιχειώδη* στη *προχωρημένη* μαθηματική σκέψη.

Στην εργασία αυτή θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε μια θεωρία για τον τρόπο που αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση από τα *στοιχειώδη* στα *προχωρημένα* μαθηματικά. Η θεωρία αυτή πρέπει να είναι ικανή να ερμηνεύσει τη γνωστική εξέλιξη του/της μαθητή/τριας: πως αρχικά χτίζει τη γνώση του/της από τη φυσική επαφή με τον

κόσμο που τον/την περιβάλλει, πως αργότερα με την βοήθεια του συμβολικού τρόπου έκφρασης διευρύνει τις δυνατότητες και τη νοητική ευελιξία του/της και τέλος πως, ειδικά για εκείνους που συνεχίζουν με μαθηματικές σπουδές, καταλήγει στο φορμαλιστικό τρόπο έκφρασης και ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών.

Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε τα επιμέρους στάδια της γνωστικής ανάπτυξης θα παρουσιάσουμε στις δύο πρώτες ενότητες μερικά από τα κυριότερα ερευνητικά δεδομένα που σχετίζονται αφενός με τον *δυϊσμό διεργασίας και αντικειμένου* στα Μαθηματικά και αφετέρου με την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση των Μαθηματικών. Με το πρώτο θέμα έχουν ασχοληθεί πολύ ερευνητές (Sfard A., Lichevski L. 1991,1994, Dubinsky 1991, Gray & Tall, 1994) αναπτύσσοντας διαφορετικές και μερικές φορές αλληλοσυμπληρούμενες ή αλληλοσυγκρουόμενες απόψεις. Αυτό που μας ενδιαφέρει στη διερεύνηση αυτή είναι η αναγνώριση της διπλής διάστασης των Μαθηματικών αλλά και η ανάδειξη του ρόλου των μαθηματικών συμβόλων. Το δεύτερο θέμα της *ενσαρκωμένης* προσέγγισης των Μαθηματικών, αν και προγενέστερο στην ανάπτυξη της Μαθηματικής σκέψης, αναγνωρίζεται ως λιγότερο οικείο στη διδακτική και παιδαγωγική πρακτική. Αυτός ήταν και ο λόγος που επιλέξαμε να το προσεγγίσουμε δεύτερο, ώστε να μπορέσουμε να αντιπαραβάλλουμε με το προηγούμενο. Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις *άτυπες θεωρίες* που αναπτύσσουν οι μαθητές/τριες σχετικά με τα Μαθηματικά, επηρεασμένοι από τα καθημερινά τους βιώματα και τον τρόπο που αυτές καθορίζουν άλλοτε θετικά και άλλοτε αρνητικά την γνωστική τους ανάπτυξη (Βοσνιάδου 2001, Fishbein κ.ά., Douady 1985, Grugnetti, Riza κ.ά.. 2002, 2003). Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τις απόψεις των γνωστικών ψυχολόγων σχετικά με την *ενσαρκωμένη γνώση (embodied cognition)* (Lakoff & Núñez, 2000), που υποστηρίζουν ότι οι ανθρώπινες έννοιες και η ανθρώπινη λογική, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής λογικής, δομούνται σύμφωνα με την φύση του σώματος, του μυαλού και τον τρόπο λειτουργίας του ανθρώπου μέσα στο κόσμο. Σημαντικός παράγοντας στην συγκρότηση της ενσαρκωμένης γνώσης αποτελεί ο μηχανισμός των *εννοιολογικών μεταφορών.* Επιπλέον θα περιγράψουμε τον τρόπο που αντιλαμβάνονται ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών τα *ενσαρκωμένα μαθηματικά* και την έννοια του *ενσαρκωμένου αντικειμένου (embodied object)*, του οποίου η δημιουργία ξεκινά από την νοητική αντίληψη των αντικειμένων μέσα στον κόσμο έτσι όπως αυτά εισπράττονται μέσω των αισθήσεων (Gray&Tall, 2001, Tall, 2002, Watson, Spyrou & Tall, in press).

Στην επόμενη ενότητα επιχειρούμε να περιγράψουμε μία θεωρία που να διατρέχει όλα το φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό επιτυγχάνεται με την θεωρία που ανέπτυξε ο D. Tall (2002) για τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών: *τον ενσαρκωμένο κόσμο (embodied), τον κόσμο των διεργασιών-εννοιών (proceptual) και τον αξιωματικό κόσμο (axiomatic*). Οι τρεις αυτοί κόσμοι προσεγγίζουν τα μαθηματικά με διαφορετικό τρόπο: ο *ενσαρκωμένος* κόσμος βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου, ο συμβολικός κόσμος των *διεργασιών-εννοιών* αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων συνδυάζοντας τη διπλή του υπόσταση, ως διεργασίας και ως έννοιας (*διεργασία-έννοια, procept*) και τέλος ο *αξιωματικός* προσεγγίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό τρόπο. Έχει ενδιαφέρον ο τρόπος που συνδέονται οι κόσμοι αυτοί καθώς και το τι σημαίνει *«μαθηματικά ορθό»* στο πλαίσιο που καθορίζει ο καθένας τους.

Στην τέταρτη ενότητα γίνεται αναφορά στη χρήση των *νέων τεχνολογιών* και των τρόπο που αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν στην ανάπτυξη κατάλληλων περιβαλλόντων για την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση των Μαθηματικών. Τα περιβάλλοντα αυτά πρέπει να είναι με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένα ώστε να αναδεικνύουν την *γνωστική ρίζα (cognitive root)* που κρύβεται κάτω από την έννοια που προσεγγίζεται και να λειτουργούν σαν *γένιοι οργανωτές (generic organizer)* που διευκολύνουν τη σύνδεση του *ενσαρκωμένου* με τον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών* .

Τέλος, στην πέμπτη και έκτη ενότητα εξειδικεύουμε την παραπάνω θεωρία στο χώρο του Απειροστικού Λογισμού και αναπτύσσουμε παραδείγματα προσέγγισης εννοιών μέσα από τους τρεις κόσμους. Παράλληλα θέτουμε ερωτήματα σχετικά με το αν έννοιες που παραδοσιακά διδάσκονται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του Λυκείου μπορούν να προσεγγιστούν με *εναλλακτικό* τρόπο από μαθητές του Γυμνασίου ή ακόμα και του Δημοτικού. Τα ερωτήματα που ανακύπτουν είναι ποιες είναι οι έννοιες αυτές και ποιος ο τρόπος ή η διαδικασία προσέγγισης, έτσι ώστε στις ανώτερες βαθμίδες να διευκολύνεται το πέρασμα των μαθητών σε πιο αναπτυγμένους τρόπους σκέψης.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, για τη βοήθεια τους και τις ευκαιρίες που μου προσέφεραν. Τους φίλους, την οικογένεια μου και τους συνεργάτες για την υπομονή και την κατανόηση τους. Επίσης οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην αδερφή μου Μαρία, τη φίλη μου Ιωάννα και τον φίλο Βασίλη για τη βοήθεια τους στα κείμενα και τους προβληματισμούς μου.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στο σύντροφο μου Γιώργο γιατί χωρίς την υποστήριξη του όλα θα ήταν πιο δύσκολα!

Νοέμβριος 2003,

Ειρήνη Μπιζά

1. Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ – ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Ο δυϊσμός μεταξύ διεργασίας και αντικειμένου είναι στην πραγματικότητα η διάκριση μεταξύ της δυναμικής (διαδικασίες, πράξεις, ενέργειες, αλγόριθμοι κ.α.) και της σταθερής (μαθηματικά αντικείμενα, έννοιες, δομικά στοιχεία θεωριών, αποτελέσματα ενεργειών κ.α.) φύσης των μαθηματικών. Η διεργασιακή θεώρηση των μαθηματικών επικεντρώνεται κατά κύριο λόγο στο χειρισμό αντικειμένων τα οποία μπορεί να είναι διακριτά φυσικά αντικείμενα (υπολογισμός του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων), λεκτικές εκφράσεις (ένα και δύο), σύμβολα (1+2, x+y) ή ακόμα και σχήματα (κατασκευή συμμετρικού σχήματος). Αντίθετα, η εστίαση της σκέψης στα μαθηματικά αντικείμενα αφορά την εννοιολογική διάσταση των μαθηματικών αφού αναφέρεται στις έννοιες έτσι όπως διαμορφώνονται στην εξέλιξη της γνώσης και δεν αντιμετωπίζονται σαν αυτόνομες μονάδες πληροφορίας αλλά ως δομικά στοιχεία ενός συνολικού γνωστικού πλέγματος. Στη πραγματικότητα οι, διεργασίες αναφέρονται στις ενέργειες που κάνουμε ενώ οι έννοιες στα αντικείμενα που ξέρουμε και χειριζόμαστε. Στην πράξη οι δύο αυτές υποστάσεις δεν διαχωρίζονται και η πραγματική επιδεξιότητα στα μαθηματικά προϋποθέτει τον ευέλικτο χειρισμό και των δύο αυτών διαστάσεων.

Για να γίνει πιο σαφής η παραπάνω διάκριση θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα από τη γεωμετρία. Στη γεωμετρία η ομοιότητα μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους: είτε ως διαδικασία με την κατασκευή του ομοιόθετου ενός δεδομένου σχήματος είτε ως δεδομένη σταθερή σχέση δύο σχημάτων που συνεπάγεται μία σειρά ιδιοτήτων και καταστάσεων. Η λύση των σχετικών προβλημάτων απαιτεί πολλές φορές και τα δύο, δηλαδή την κατασκευή ή την αναγνώριση ομοίων σχημάτων, την τεκμηρίωση της μεταξύ τους σχέσης και την εξαγωγή συμπερασμάτων και ιδιοτήτων που απορρέουν από αυτή.

Ο παραπάνω διαχωρισμός έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη διατύπωση θεωριών που αφορούν στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών είτε αυτές αναφέρονται σε *στοιχειώδες*, είτε σε *προχωρημένο* επίπεδο *μαθηματικής σκέψης*. Παρακάτω θα αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές από τις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί σχετικά με αυτό το θέμα και θα επιχειρήσουμε την αναγνώριση κοινών τους σημείων καθώς και σημείων διαφοροποίησης. Στόχος είναι να κατανοήσουμε ένα συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης

μαθηματικών εννοιών ώστε να μπορέσουμε να τον εντάξουμε σε μία ευρύτερη θεωρία ικανή να ερμηνεύσει την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης.

1.1. Ο δυϊσμός διεργασίας / αντικειμένου. Η θεωρία της υποστασιοποίησης

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε σύντομα και να δώσουμε μερικά παραδείγματα πάνω σ' αυτό που αναφέρεται από τη Sfard (1991) και τις Sfard και Linchevski (1994), ως δυϊσμός *διεργασίας / αντικειμένου*. Μετά θα περιγράψουμε τα τρία στάδια σχηματισμού της έννοιας: *την εσωτερίκευση (interiorization), συμπύκνωση (condensation) και υποστασιοποίηση (reification)*, έτσι όπως ορίστηκαν για να διευκρινίσουν πώς ένα άτομο μεταβαίνει από τη κατάσταση να σκέφτεται μία έννοια ως λειτουργική διεργασία στη κατάσταση να την αντιμετωπίζει ως αφηρημένο αντικείμενο.

1.1.1. Ο δυϊσμός διεργασίας / αντικειμένου.

Σύμφωνα με τη Sfard (1991), οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να αντιμετωπιστούν είτε ως αφηρημένα αντικείμενα, είτε ως διεργασίες. Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε στη *δομική επινόηση (structural conception)* μιας έννοιας, ενώ στη δεύτερη στη *λειτουργική επινόηση (operational conception),* η οποία μας οδηγεί να ασχοληθούμε κυρίως με *διεργασίες, αλγορίθμους* και *δράσεις* παρά με *αντικείμενα.* Για παράδειγμα η συμμετρία μπορεί να αντιμετωπιστεί στατικά, ως μία ιδιότητα γεωμετρικών σχημάτων αλλά μπορεί να αντιμετωπιστεί και δυναμικά ως μετασχηματισμός.

Πάντως η *δομική* και η *λειτουργική* διάσταση της έννοιας δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αν και φαίνονται ασύμβατες στην πραγματικότητα λειτουργούν συμπληρωματικά. Η ισχύουσα άποψη είναι ότι η ικανότητα να μπορεί κανείς να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες ταυτόχρονα ως *διεργασίες* και ως *αντικείμενα*, συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω αντιλήψεις, είναι στενά συνδεδεμένη με αυτό που καλείται κατανόηση των μαθηματικών.

Για παράδειγμα οι Sfard και Linchevski (1994) εξήγησαν ότι ο δυϊσμός *διεργασίας / αντικειμένου* μπορεί να επηρεάσει την πλήρη κατανόηση της έννοιας της ισότητας. Οι μαθητές/τριες μπορεί να μην καταλαβαίνουν τις διαδικασίες που χρειάζονται για να λύσουν εξισώσεις σαν την $3\chi+8=7\chi+4$, επειδή δεν κατανοούν, εξαρχής, τι σημαίνει οι δύο αυτές ποσότητες, οι οποίες αντιμετωπίζονται ως αυτόνομα αντικείμενα, είναι ίσες.

Μπορούμε να βρούμε παραδείγματα γι' αυτόν το δυϊσμό *διεργασίας/ αντικειμένου*, ουσιαστικά σε κάθε μαθηματικό επίπεδο. Στην αριθμητική για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να θεωρήσει το 3+4 σαν μία οδηγία για να εκτελέσει την πράξη της πρόσθεσης, αλλά να μην το βλέπει σαν την ποσότητα 7, αν δε δει το σύμβολο της ισότητας όπως στην έκφραση 3+4=7. Στη περίπτωση αυτή έχει εστιάσει την προσοχή του στην διεργασία της πρόσθεσης αγνοώντας το αντικείμενο του αποτελέσματος της πρόσθεσης που κρύβεται πίσω από τη πράξη. Αυτό το πρόβλημα γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό όταν οι μαθητές/τριες εισάγονται στην Άλγεβρα και αρχίζουν να αντιμετωπίζουν εκφράσεις όπως η 3+x. Αν συνεχίσουν να επιμένουν να βλέπουν μια τέτοια έκφραση, μόνο σαν μία ένδειξη για την εκτέλεση της πράξης της πρόσθεση, τότε μπορεί να αντιμετωπίσουν δυσκολία στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση εξισώσεων.

Τον ίδιο δυϊσμό συναντάμε και σε υψηλότερο επίπεδο των μαθηματικών. Όταν, για παράδειγμα, αναφερόμαστε στην έννοια της μαθηματικής συνάρτησης άλλοτε ως μίας υπολογιστικής διαδικασίας (π.χ. ψ=3χ+1) και άλλοτε ως ενός συνόλου διατεταγμένων ζευγών (δηλαδή ως ένα αφηρημένο αντικείμενο).

Η Sfard δίνει έμφαση στη δυϊκότητα των *λειτουργικών* (διεργασία) και *δομικών* (αντικείμενο) εννοιών σε αντίθεση με το διαχωρισμό τους. Υποστηρίζει, ότι «για να αναπτύξει κανείς το νόημα για ανωτέρου επιπέδου μαθηματικές έννοιες, χρειάζεται να είναι ικανός να σκέφτεται συγχρόνως και λειτουργικά και δομικά.» (Sfard, 1991)

1.1.2. Η θεωρία της υποστασιοποίησης.

Η Sfard (1991) όρισε τρία στάδια στην ανάπτυξη της έννοιας: την *εσωτερίκευση (interiorization)*, τη *συμπύκνωση (condensation)* και την *υποστασιοποίηση (reification)*.

Η *εσωτερίκευση* περιγράφτηκε σαν εκείνο το στάδιο, κατά το οποίο ένα άτομο εκτελεί λειτουργίες σε μαθηματικά αντικείμενα χαμηλότερου επιπέδου. Καθώς το άτομο αυτό γίνεται περισσότερο οικείο με την εκτέλεση αυτών των διαδικασιών, φτάνει στο σημείο εκείνο, όπου μπορεί να σκεφτεί τι θα συμβεί, χωρίς να πραγματοποιήσει τη διαδικασία. Τότε, λέγεται ότι η διαδικασία έχει *εσωτερικευτεί*. Επομένως αυτό συμβαίνει όταν κάποιος δεν χρειάζεται πλέον να σκεφτεί τον αλγόριθμο για να εκτελέσει τη διαδικασία. Η Sfard (1991) αναφέρει σαν παράδειγμα, την περίπτωση των αρνητικών αριθμών, όταν ακριβώς κάποιος πρέπει να απομνημονεύσει τις αναγκαίες διαδικασίες για την πρόσθεση και την αφαίρεση. Όταν αυτές οι διαδικασίες θα έχουν *εσωτερικευτεί* τότε

το άτομο θα έχει φτάσει στο στάδιο που θα εκτελεί μία πράξη άμεσα χωρίς να χρειάζεται πια να εστιάσει την προσοχή του στον συγκεκριμένο αλγόριθμο. Θα μπορούσαμε να πούμε, στην περίπτωση αυτή, ότι η πράξη της αφαίρεσης δύο ακεραίων έχει *εσωτερικευτεί* όταν κανείς είναι ικανός να αφαιρέσει αυτόματα τους δύο αριθμούς.

Η *συμπύκνωση*, αναφέρεται σαν το στάδιο εκείνο, όπου μία περιπεπλεγμένη διαδικασία συμπυκνώνεται σε μία μορφή που είναι ευκολότερο να την χρησιμοποιήσουμε και να την σκεφτούμε. Η Sfard (1991) δίνει το παράδειγμα των προγραμμάτων του ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ένα σύνολο από κώδικες, μπορεί να αναφέρεται ως ένα υποπρόγραμμα και να συμπεριφέρεται ως μια ενότητα. Το στάδιο της *συμπύκνωσης* ορίστηκε ως το στάδιο εκείνο, που στην πραγματικότητα «μια καινούργια έννοια, επισήμως, γεννιέται». Ένα άτομο θεωρείται ότι βρίσκεται στο στάδιο της *συμπύκνωσης*, όσο καιρό η καινούρια έννοια παραμένει δεμένη σε μία αλγοριθμική διαδικασία. Σε αυτό το στάδιο, ο/η μαθητής/τρια γίνεται ικανός να συνδυάζει διαδικασίες, να κάνει συγκρίσεις και να γενικεύει. Μια πολύ σπουδαία πλευρά της *συμπύκνωσης* είναι η αυξανόμενη ικανότητα του/της μαθητή/τριας να μεταβαίνει ανάμεσα σε πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας.

Η *υποστασιοποίηση*, ορίζεται ως το στάδιο εκείνο κατά το οποίο ο/η μαθητής/τρια μπορεί να αντιληφθεί μια μαθηματική έννοια, ως ένα πλήρες αντικείμενο με τα δικά του χαρακτηριστικά. Μπορεί κάποιος να σκεφτεί τις έννοιες που έχουν *υποστασιοποιηθεί*, σε σχέση με τις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν και να συγκρίνει μεταξύ τους τα χαρακτηριστικά αυτών των κατηγοριών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ενώ η *εσωτερίκευση* και *συμπύκνωση* εμφανίζονται βαθμιαία, η *υποστασιοποίηση* συνήθως εμφανίζεται σαν μία ξαφνική μεταβολή και είναι το πιο επίπονο στάδιο για τους μαθητές:

> *«Για να δει κανείς μία συνάρτηση ως αντικείμενο πρέπει να προσπαθήσει να τη χειριστεί ως μία ολότητα: δεν υπάρχει λόγος να μετατρέψει κανείς μια διεργασία σε αντικείμενο, εκτός αν έχουν πραγματοποιηθεί σ' αυτήν την απλούστερη διεργασία μερικές άλλες ανωτέρου επιπέδου διεργασίες. Αλλά εδώ ενεδρεύει ένα φαύλος κύκλος: από τη μία, η υποστασιοποίηση δεν θα εμφανιστεί, χωρίς μια εσωτερίκευση ανωτέρου επιπέδου. Απ' την άλλη κρίνεται απαραίτητη για την εσωτερίκευση η ύπαρξη αντικειμένων στα οποία μπορούν να πραγματοποιηθούν διεργασίες ανωτέρου επιπέδου (χωρίς την ύπαρξη τέτοιων αντικειμένων, οι διεργασίες μοιάζουν να είναι εντελώς χωρίς νόημα). Με άλλα λόγια: Η χαμηλότερου επιπέδου υποστασιοποίηση και η*

ανωτέρω επιπέδου εσωτερίκευση είναι προϋποθέσεις η μία της άλλης!» (Sfard, 1991, σελ.31).

Αυτή η ερμηνεία μας εφοδιάζει με ένα αδιάψευστο επιχείρημα: ότι η *λειτουργική* και η *δομική κατανόηση* είναι μεταξύ τους περισσότερο συμπληρωματικές παρά αντίθετες. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διαπιστώσει κανείς, ότι τα στάδια της ανάπτυξης μιας έννοιας επαναλαμβάνονται καθώς προχωράει κανείς σε έννοιες ανωτέρου επιπέδου.

1.2. Η θεωρία APOS

Σε αυτή την ενότητα θα σκιαγραφήσουμε την γενική θεωρία *APOS (Action-Process-Object-Schema)* του Dubinsky και των συνεργατών του. Η μορφή που θα παρουσιάσουμε αναφέρεται στην πιο πρόσφατη φάση της ανάπτυξής της (Czarnocha κ.ά., 1999). Επίσης, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε τις νοητικές κατασκευές που προτείνονται από τη θεωρία αυτή.

Η κύρια πηγή αυτής της θεωρίας είναι η επιστημολογία της μάθησης του Piaget από την νηπιακή ηλικία στην εφηβεία (Beth et Piaget 1966) και η προσπάθεια της εφαρμογής του μηχανισμού της *στοχαστικής αφαίρεσης* στην εκμάθηση μαθηματικών πιο πέρα από τη μέση εκπαίδευση, στη προχωρημένη μαθηματική σκέψη.

Η θεωρία *«APOS»* υποστηρίζει ότι η απόκτηση της γνώσης συνιστάται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει νοητικές κατασκευές με σκοπό να αντιμετωπίσει καταστάσεις προβληματισμού. Συχνά οι κατασκευές αυτές απαιτούν την επανακατασκευή ή την υπενθύμιση κάποιας προηγούμενης κατασκευής, κάτι σαν επανάληψη μιας παλαιάς μεθόδου. Η πραγματική εξέλιξη στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης δεν έρχεται απλώς με νέες κατασκευές που προκύπτουν από απλές βελτιώσεις παλαιότερων και μπορούν να αντιμετωπίσουν πιο ευέλικτα μία ομάδα παρόμοιων καταστάσεων. Αντίθετα, η εξέλιξη πραγματοποιείται όταν οι νέες κατασκευές αν και διατηρούν σημεία ομοιότητας με τις προηγούμενες, διαφέρουν σε επίπεδο πολυπλοκότητας. Αυτή η ιδέα σχετίζεται με την γνωστή διχοτόμηση του Piaget για την *αφομοίωση* και τη *συμμόρφωση* (assimilation and accommodation (Piaget 1972))[1]

[1] Κατά τον Piaget, αφομοίωση είναι ένα είδος βιολογικής προσαρμογής, είναι η προσπάθεια συνδιαλλαγής ζωντανού οργανισμού με το περιβάλλον, που κάνει το περιβάλλον να ταιριάζει με την υπάρχουσα δομή του ζωντανού οργανισμού (το περιβάλλον στα μέτρα του οργανισμού, διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις). Ενώ συμμόρφωση είναι η προσπάθεια του οργανισμού να εναρμονίσει τη συμπεριφορά του με το περιβάλλον (ο οργανισμός στα μέτρα του περιβάλλοντος, διαδικασία

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη θεωρία APOS, η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ξεκινά με τη *δράση (action)* πάνω σε φυσικά και νοητικά αντικείμενα, που έχουν από πριν κατασκευαστεί. Στη συνέχεια, οι δράσεις με τη σειρά τους *εσωτερικεύονται (interiorized)* σε *διεργασίες (processes)* οι οποίες μετέπειτα *ενθυλακώνονται (encapsulated)* σε *αντικείμενα (objects).* Τα αντικείμενα, αντιστρόφως, μπορούν να *από–ενθυλακωθούν (de-encapsulated)* πάλι πίσω στις διεργασίες από τις οποίες προέρχονται. Τέλος, διεργασίες και αντικείμενα οργανώνονται σε *σχήματα (schemas).*

Στην περιγραφή αυτή πιθανόν να δημιουργηθεί η παραπλανητική άποψη ότι υπάρχει γραμμική εξέλιξη από τη *δράση* στο *αντικείμενο,* μέσω της *διεργασίας* και τελικά στη δημιουργία του *σχήματος*. Στην πραγματικότητα παρόλο που διακρίνεται κάποια διαδοχή, συχνά η εξέλιξη είναι πιο διαλεκτική. Εκτός από τη μονομερή ανάπτυξη σε κάποιο επίπεδο, η ανάπτυξη κάθε επιπέδου επιδρά ταυτόχρονα στην ανάπτυξη χαμηλότερων ή υψηλότερων επίπεδων. Δηλαδή, πραγματοποιούνται συνεχείς μετακινήσεις με περάσματα από το ένα επίπεδο στο άλλο. Παρακάτω παρατίθεται μία σύντομη περιγραφή των νοητικών αυτών κατασκευών:

Δράση (action): Ένας μετασχηματισμός ονομάζεται δράση όταν αποτελεί την αντίδραση του υποκειμένου σε κάποιο ερέθισμα που το λαμβάνει ως εξωτερικό.

Ένα παράδειγμα εννοιολογικής δράσης δίνεται με την έννοια της συνάρτησης. Έστω η συνάρτηση με τύπο f(x)=x+2. Οι μαθητές/τριες δεν συναντούν δυσκολία να υπολογίσουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης αν το πεδίο ορισμού είναι το {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} προσθέτοντας απλώς σε κάθε στοιχείο το 2 και καταγράφοντας το σύνολο, στοιχείο προς στοιχείο ή ακολουθώντας τον «κανόνα» του τύπου ή ξεκινώντας από το –2 και προχωρώντας ένα-ένα μέχρι το 6 (μετακίνηση όλων το στοιχείων κατά 2). Πάντως η εύρεση του συνόλου τιμών: {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} είναι μια εννοιολογική *δράση*.

Αν όμως το ζητούμενο ήταν να βρεθεί το σύνολο τιμών όταν το πεδίο ορισμού είναι όλο το σύνολο των ρητών αριθμών δε θα επαρκούσε ο παραπάνω τρόπος αντιμετώπισης ούτε θα ήταν διαθέσιμοι απλοί αλγόριθμοι. Ακόμα και στο σύνολο των ακεραίων, γενικά, οι μαθητές/τριες έχουν πρόβλημα να επιχειρηματολογήσουν.

τροποποίησης των γνωστικών δομών του ατόμου). Π.χ. όταν ένα παιδί παίζει με ένα παλιό ξύλο, αυτό μπορεί να γίνει πλοίο, κούκλα κ.α. αυτό είναι αφομοίωση ενώ αντίθετα η μίμηση ενός προσώπου, ζώου είναι συμμόρφωση. Και τα δύο λειτουργούν ταυτόχρονα και η προσαρμογή είναι καλύτερη όταν υπάρχει «ισορροπία» αυτών των δύο. (Βοσνιάδου, 2001)

Σύμφωνα με την θεωρία APOS όλες αυτές οι δυσκολίες σχετίζονται με την έλλειψη ικανότητας των μαθητών/τριών να *εσωτερικεύσουν* αυτές τις *δράσεις* σε *διεργασίες* και να *ενθυλακώσουν (encapsulate)* αυτές τις *διεργασίες* σε *αντικείμενα*.

Διεργασία (process): όταν το άτομο στοχάζεται πάνω σε μια *δράση* και την *εσωτερικεύει* τότε η *δράση* γίνεται μέρος του ατόμου το οποίο αποκτά έλεγχο πάνω της.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συνάρτησης η διαδικασία κατανόησης συνίσταται στην σκέψη πάνω στη μορφή της και την εύρεση του συνόλου τιμών. Δεν είναι απαραίτητη η εκτέλεση των πράξεων απλώς, αρκεί η σκέψη πάνω σε αυτές.

Αντικείμενο (object): όταν το άτομο στοχάζεται πάνω στις λειτουργίες που εφαρμόζονται σε μία συγκεκριμένη *διεργασία*, καθίσταται ενήμερο για αυτή τη *διεργασία*, ως μία ολότητα, αντιλαμβάνεται ποιοι μετασχηματισμοί (*δράσεις* ή *διεργασίες*) μπορούν να ενεργήσουν σε αυτή και είναι πραγματικά ικανό να κατασκευάσει κατάλληλους μετασχηματισμούς και να σκεφτεί πάνω σε αυτή τη *διεργασία* συνολικά σαν ένα αυτόνομο αντικείμενο. Στην περίπτωση αυτή οι *διεργασίες ενθυλακώνονται (encapsulated)* σε *αντικείμενο*.

Στις περιπτώσεις που μία *δράση* ή μία *διεργασία* έχει ήδη *ενθυλακωθεί (encapsulated)* σε ένα *αντικείμενο* παρουσιάζεται συχνά η ανάγκη της αντίστροφης διαδικασίας που είναι η *από-ενθυλάκωση (de-encapsulate)* του *αντικειμένου* πίσω στη *διεργασία,* από την οποία προήλθε, με σκοπό να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες του στη διαχείρισή του.

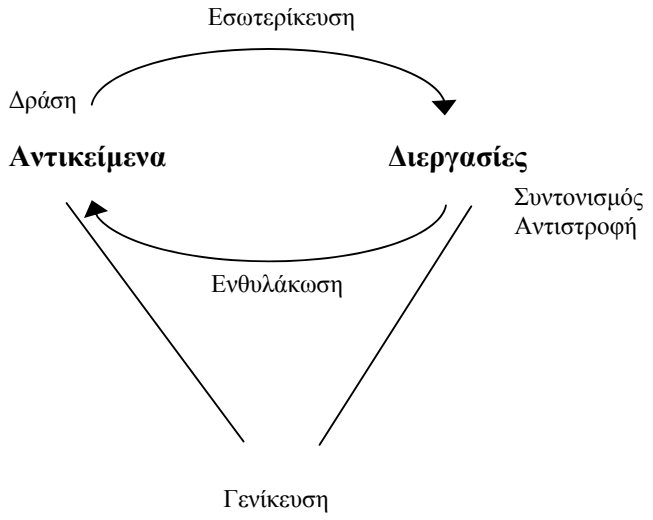
Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συνάρτησης, όταν η διεργασία συσχετισμού των στοιχείων δύο συνόλων, μέσω του τύπου, *ενθηλακωθεί* σε ένα αυτόνομο αντικείμενο που αποτελεί την έννοια της συνάρτησης, τότε μπορεί ο/η μαθητής/τρια να το αντιμετωπίσει ως μία ολότητα και να προχωρήσει σε διαχείριση της, δηλαδή να κάνει πράξεις με συναρτήσεις, να συνθέσει συναρτήσεις κλπ. Όταν, όμως, χρειαστεί να υπολογίσει συγκεκριμένες τιμές της συνάρτησης π.χ. $f(2), f(\sqrt{2})$ μπορεί να *από-ενθηλακώσει* το αντικείμενο - συνάρτηση σε διεργασία υπολογισμού ζευγών αντιστοίχων τιμών.

Σχήμα (schema): είναι οι *διεργασίες* και τα ήδη κατασκευασμένα *αντικείμενα* που μπορούν να συνδεθούν με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, δύο ή περισσότερες διεργασίες μπορούν να συντονιστούν μέσω μιας *σύνθεσης (composition)* ή *διεργασίες* και *αντικείμενα* μπορούν να συσχετιστούν χάρη στην ιδιότητα επίδρασης του ενός πάνω στο άλλο. Μια συλλογή *δράσεων*, *διεργασιών* και *αντικειμένων* μπορεί να οργανωθεί με δομημένο τρόπο σε ένα *σχήμα* το οποίο να έχει τη δυνατότητα να περιέχει προηγούμενα

κατασκευασμένα *σχήματα*. Τα ίδια τα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν ως *αντικείμενα* και να ενταχθούν σε πιο σύνθετες δομές όπως τα «υψηλού επιπέδου» *σχήματα*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση στοιχειοθετεί ένα αντικείμενο που μέσω της σύνδεσής του με μία πράξη (π.χ. πρόσθεση, σύνθεση, αντιστροφή) δημιουργεί νέες συναρτήσεις που μπορεί να ικανοποιούν ή όχι κάποιες ιδιότητες. Όλα αυτά μπορούν να οργανωθούν και να κατασκευάσουν ένα *σχήμα*, το *σχήμα* της συνάρτησης.

Μια σχηματική περιγραφή του *σχήματος* και των κατασκευών του, περιγράφεται στο σχήμα 1. Η περιγραφή που βλέπουμε δεν είναι απαραίτητα γραμμική και είναι πολύ πιθανό να σπάει σε μερικά σημεία. Μπορεί, όμως να περιγράψει τα «*πέντε είδη κατασκευών*» που χαρακτηρίζουν την *στοχαστική αφαίρεση* (Dubinsky, 1991). Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε με τα *αντικείμενα*. Τέτοια στα μαθηματικά είναι οι αριθμοί, οι μεταβλητές, οι συναρτήσεις, οι τοπολογικοί χώροι, τα σύνολα, τα διανύσματα κ.α., ο,τιδήποτε δηλαδή μπορεί να κατασκευαστεί από το/τη μαθητή/τρια κατά τη διάρκεια της μαθηματικής του/της ανάπτυξης.



Σχήμα 1: Το σχήμα και οι κατασκευές του (Dubinsky, 1991)

Κάθε στιγμή, πραγματοποιούνται μία σειρά από *δράσεις* του/της μαθητή/τριας πάνω σε αυτά τα *αντικείμενα*. Δεν είναι απαραίτητο αυτές οι *δράσεις* να είναι αριθμητικές πράξεις με αριθμητικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, τέτοιες *δράσεις* είναι η διαχείριση γεωμετρικών σχημάτων. Αυτές οι δράσεις πρέπει να *εσωτερικευτούν* σε *διεργασίες*. Η *εσωτερίκευση* επιτρέπει στο/η μαθητή/τρια να έχει συνείδηση των ενεργειών που

πραγματοποιεί, να στοχάζεται πάνω σε αυτές και να μπορεί συνδυάζει μεταξύ τους σύνολα *δράσεων*.

Η *εσωτερίκευση* των δράσεων είναι ο ένας τρόπος δημιουργίας διεργασιών, ο άλλος είναι η εργασία πάνω στις υπάρχουσες διεργασίες και η δημιουργία νέων. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους όπως είναι η *αντιστροφή* της διεργασίας. Όταν, για παράδειγμα, ένας μαθητής, στην Ανάλυση, έχει *εσωτερικεύσει* τη δράση της εύρεσης παραγώγου μιας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας με ευελιξία διάφορες τεχνικές, μπορεί να αντιστρέψει τη διεργασία αυτή δημιουργώντας μία νέα διεργασία που στην περίπτωση αυτή θα είναι η αντιπαραγώγιση ή ο υπολογισμός του αορίστου ολοκληρώματος. Η *ενθυλάκωση,* με τη σειρά τους, των διεργασιών της παραγώγισης και αντιπαραγώγισης μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία ενός ενιαίου *αντικειμένου* που θα διευκολύνει την εισαγωγή στο Θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Ένας άλλος τρόπος να δημιουργηθούν νέες διεργασίες είναι η σύνθεση και ο συντονισμός δύο ή περισσοτέρων διεργασιών.

1.3. Η θεωρία της διεργασίας-έννοιας (procept)

Οι Gray & Tall (1994) υιοθετούν τον όρο *διεργασία (process)* διαχωρίζοντας τον από την *διαδικασία (procedure)* με την έννοια ότι η *διεργασία* έχει ένα γενικό χαρακτήρα και συγκεκριμένο σκοπό και δεν ασχολείται με τη συγκεκριμένη μέθοδο που θα ακολουθηθεί για την επίτευξή του ενώ η *διαδικασία* αναφέρεται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την πραγματοποίηση του στόχου μιας *διεργασίας*[2]. Για παράδειγμα η διεργασία της πρόσθεσης μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικούς αλγοριθμικά τρόπους (*διαδικασίες*) ανάλογα με τη στρατηγική που κάθε φορά επιλέγει το παιδί π.χ. ξεκινώντας από τον πρώτο αριθμό (Π- πρόσθεση) ή από τον μεγαλύτερο αριθμό (Μ-πρόσθεση). Επομένως, μία *διεργασία* μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικές *διαδικασίες*.

[2] Στην εργασία αυτή έχουμε υιοθετήσει αυτή τη διάκριση των όρων *process* και *procedure* χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ελληνικούς όρους *διεργασία* και *διαδικασία.* Ως *διεργασία* νοείται η ενέργεια με την ευρύτερη έννοια που στοχεύει στην περάτωση μίας φυσικής ή νοητικής πράξης ανεξάρτητα από τον αλγόριθμο ή την μεθοδολογία, ενώ *διαδικασία* είναι ο συγκεκριμένος κάθε φορά αλγόριθμος. Επομένως, μία διεργασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαφορετικές μεταξύ τους διαδικασίες. Οι ελληνικοί όροι είναι σύμφωνοι με την *Τράπεζα Όρων EURODICAUTOM*

Όπως και στις προηγούμενες θεωρίες οι Gray & Tall διακρίνουν στα μαθηματικά τη *διεργασία (process),* που αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα, από την *έννοια (concept)* που αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Μπορούμε να πούμε ότι το άτομο κατέχει τη γνώση μίας έννοιας, αν μπορεί να αναγνωρίσει τους δεσμούς που τη συνδέουν με άλλες έννοιες και ιδιότητες. Επομένως, η σκέψη που στηρίζεται στην *εννοιολογική γνώση* είναι πιο ευέλικτη από αυτή που περιορίζεται στις *διεργασίες* που είναι από τη φύση της περιορισμένη, δύσκαμπτη και ανελαστική. Αυτό που επιχειρούν οι Gray & Tall (1994), να προσθέσουν τις προηγούμενες θεωρίες, είναι μία ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο οι *διεργασίες* μεταβάλλονται σε *έννοιες* και αντίστροφα. Για την επίτευξη του στόχου αυτού αναδεικνύεται ο σημασία του μαθηματικού συμβολισμού. Αυτό που συμβαίνει στην πράξη είναι, το ίδιο σύμβολο να εκφράζει άλλοτε μία *διεργασία* και άλλοτε μία *έννοια,* δηλαδή με την ίδια μαθηματική έκφραση να δηλώνεται, ταυτόχρονα, μία πράξη αλλά και το αποτέλεσμα της (Gray & Tall, 1994). Τέτοια παραδείγματα υπάρχουν άφθονα στην Αριθμητική, Άλγεβρα και Ανάλυση:

- το κλάσμα $\frac{2}{3}$ εκφράζει ταυτόχρονα τη διαίρεση 2 διά 3 (*διεργασία*) και το αποτέλεσμα της διαίρεσης με μορφή κλασματικού αριθμού (*έννοια*).
- Το σύμβολο +2 εκφράζει ταυτόχρονα τη *διεργασία* της «πρόσθεσης 2» ή τη μετακίνηση κατά 2 θέσεις προς τα δεξιά στον άξονα των πραγματικών αλλά ταυτόχρονα εκφράζει και την *έννοια* του θετικού πραγματικού αριθμού +2.
- Ο συμβολικός τρόπος απόδοσης της αλγεβρικής παράστασης 2x+3 δηλώνει έναν τύπο, δηλαδή μία δυνητική *διεργασία* υπολογισμού, στον οποίο αντικαθιστά τιμές στο x και λαμβάνει αποτελέσματα. Αντίθετα, σε άλλες περιπτώσεις, ο ίδιος συμβολισμός, εκφράζει το αντικείμενο (2x+3), όπως στην παραγοντοποίηση της παράστασης $(2x+3)^2 + x^2(2x+3)$, ή στην έκφραση y=2x+3 που σημαίνει τον τύπο μιας συνάρτησης ή ακόμα και την εξίσωση μιας ευθείας.
- Ο συμβολισμός $\lim_{x \to a} f(x)$ εκφράζει ταυτόχρονα τη *διεργασία* υπολογισμού του αντιστοίχου ορίου αλλά και το αποτέλεσμα του υπολογισμού. (Gray & Tall, 1994).

Η διαφορετική ερμηνεία του ίδιου συμβολισμού αποτελεί ισχυρό εργαλείο για τα μαθηματικά αφού επιτυγχάνει να περικλείσει στην ίδια έκφραση διαφορετικά νοήματα

ενώ αποδεικνύεται ταυτόχρονα και σημαντική πηγή δυσκολιών για τους μαθητές/τριες. Οι δεξιοτέχνες της μαθηματικής σκέψης χρησιμοποιούν το συμβολισμό ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος που αντιμετωπίζουν, άλλοτε ως *διεργασίας* και άλλοτε ως *έννοιας* και ακριβώς στο σημείο αυτό έγκειται και η ικανότητα της μαθηματικής σκέψης τους. Ανάλογα, λοιπόν, με τις μαθηματικές του ικανότητες το άτομο μπορεί με ευελιξία να αναλύει και να ανασυνθέτει το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές διαδικασίες.

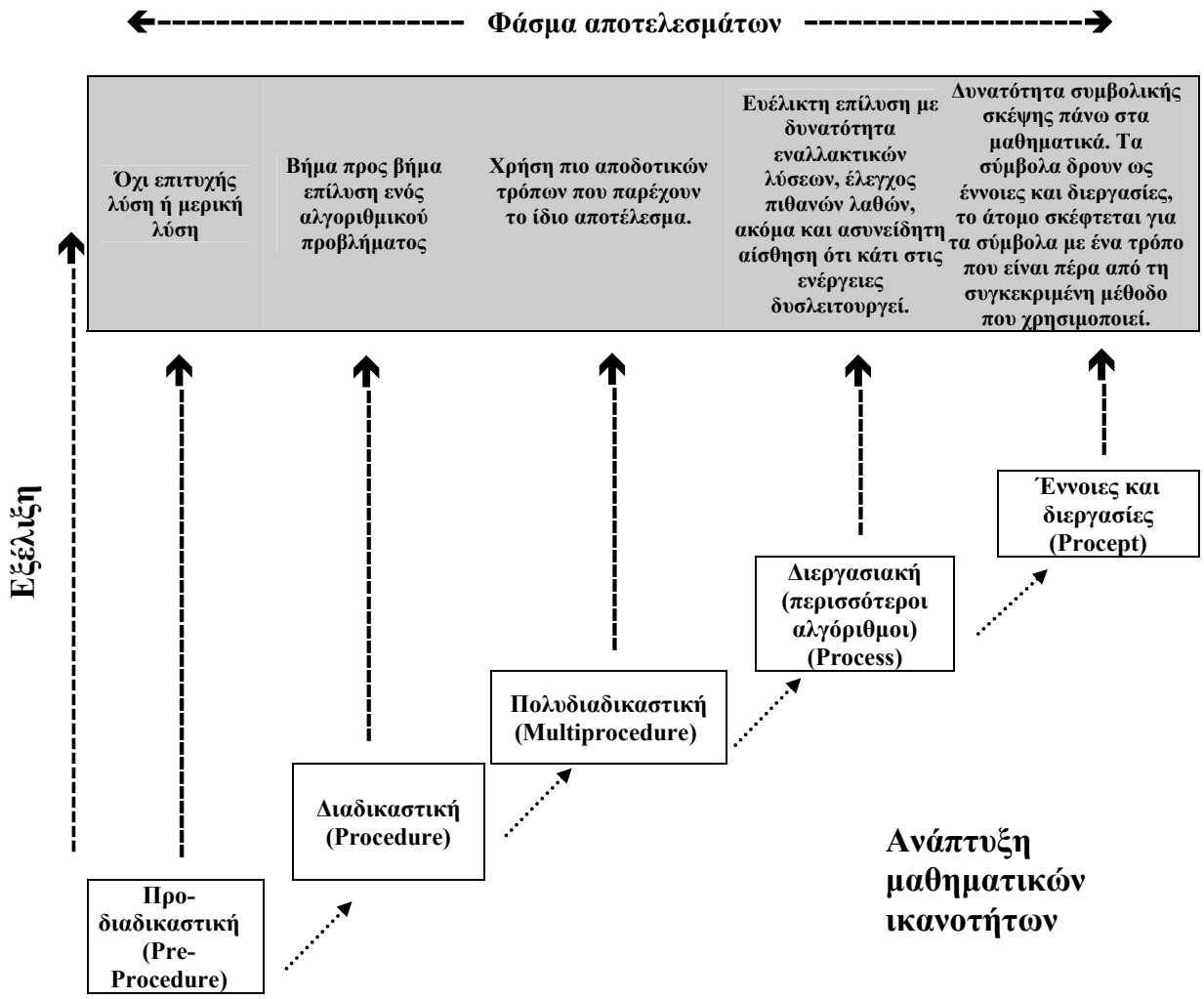
Για να εξηγήσουν αυτό το φαινόμενο, οι Gray & Tall, δημιούργησαν τον όρο *διεργασία-έννοια (procept)* από τον συνδυασμό των λέξεων ***pro**cess (διεργασία)* και *con**cept** (έννοια)*. Σκοπός ήταν να περιγράψουν το μίγμα της *διεργασίας* και της αντίστοιχης *έννοιας* που χρησιμοποιούν κοινό συμβολισμό. Έτσι μία *στοιχειώδη διεργασία-έννοια (elementary procept)* αποτελείται από τρία συστατικά τη *διεργασία* (process) που παράγει ένα μαθηματικό *αντικείμενο (object)*, το *αντικείμενο* και το *σύμβολο (symbol)* που χρησιμοποιείται για να αποδώσει άλλοτε την *διεργασία* και άλλοτε το *αντικείμενο*. Επειδή το ίδιο αντικείμενο μπορεί να αποδοθεί με διαφορετικούς συμβολισμούς, ως *διεργασία-έννοια* ορίζεται μία συλλογή από *στοιχειώδεις διεργασίες-έννοιες* που αντιστοιχούν στο ίδιο αντικείμενο. Για παράδειγμα η *διεργασία-έννοια* του αριθμού 6 μπορεί να είναι η διεργασία αρίθμησης μέχρι το 6 αλλά και διάφορες άλλες διεργασίες όπως 3+3, 4+2, 2+4, 2x3, 8-2 κ.ά. που αποτελούν ισοδύναμες *στοιχειώδεις διεργασίες-έννοιες* που ανήκουν στην ίδια «κλάση ισοδυναμίας» που καλείται η *διεργασία-έννοια* του 6. (Gray&Tall, 1994)

Ύστερα από τον ορισμό της *διεργασίας-έννοιας (procept)* μπορούμε, αντίστοιχα, να μιλήσουμε και για *σκέψη με διεργασίες-έννοιες (proceptual thinking)* που ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό ευέλικτα, άλλοτε ως *διεργασία* και άλλοτε ως *έννοια*, αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο (Gray & Tall, 1994). Αντίθετα, η *διαδικαστική σκέψη (procedural thinking)* των μαθηματικών αναφέρεται στην υλοποίηση ενός συνόλου ενεργειών πάνω σε αντικείμενα και στο περιορισμό της εστίασης στο συσχετισμό δεδομένων και ζητούμενων σε μία διαδικασία. Η αδυναμία ανάπτυξης δομών με *διαδικασίες-έννοιες* αποτελεί το κύριο εμπόδιο για τους αδύνατους, στα Μαθηματικά, μαθητές. Για το λόγο αυτό οι Gray & Tall (1994) υιοθέτησαν τον όρο *διαίρεση διεργασιών-εννοιών (proceptual divide)* για να διακρίνουν τους λιγότερο από τους περισσότερο επιτυχημένους στα μαθηματικά μαθητές (Tall, 1994).

Ακόμα και σε επίπεδο *στοιχειωδών* μαθηματικών, η γενική εντύπωση είναι ότι τα διαφορετικά επίπεδα μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών είναι συνάρτηση της ποιοτικής διαφοράς των αντικειμένων που επινοούν οι ίδιοι/ες για να υποστηρίξουν την μαθηματική τους σκέψη. Οι χαμηλής επίδοσης μαθητές/τριες μεταφράζουν τα σύμβολα που συναντούν στις αριθμητικές διεργασίες σε σχέσεις πραγματικών ή φανταστικών αντικειμένων που έχουν συγκεκριμένη υπόσταση. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούν τα δάκτυλα τους ή ξυλάκια ή άλλα νοητικά αντικείμενα που τους δίνουν σχήμα ακόμα και χρώμα. Αντίθετα, μαθητές/τριες υψηλών επιδόσεων απαντούν άμεσα και όταν καλούνται να περιγράψουν πως κατέληξαν στη λύση μιλούν για «πράγματα» που υπάρχουν στο μυαλό τους ή αναφέρονται σε αυτόματη εμφάνιση των απαντήσεων, κάτι σαν «φλας» (Pinto, Pitta & Tall, 1999).

Στην πραγματικότητα το φάσμα των ικανοτήτων των μαθητών/τριών στα μαθηματικά είναι πολύ ευρύ και μπορεί να περιγραφεί από το διάγραμμα του σχήματος 2. Τα δύο πρώτα επίπεδα αναφέρονται σε προβλήματα που απαιτούν μία συγκεκριμένη διαδικαστική λύση. Το πρώτο αναφέρεται στην περίπτωση που έχουμε αποτυχία ή μερική επιτυχία στη λύση ενώ το δεύτερο στην περίπτωση που η λύση πραγματοποιείται βήμα προς βήμα και είναι επιτυχημένη. Στο τρίτο επίπεδο εμφανίζονται πιο αποδοτικές λύσεις ενώ αυτό που διακρίνει το τέταρτο επίπεδο είναι η δυνατότητα ελέγχου και στοχασμού πάνω στη λύση. Αυτό σημαίνει εναλλαγή μεθόδων, έλεγχος ορθότητας, σύγκριση μεθοδολογιών καθώς και επιλογή της αποδοτικότερης λύσης. Βέβαια οι ενέργειες αυτές είναι πολύ πιθανό να πραγματοποιούνται ασυνείδητα και να γίνονται φανερές μέσα από τη συμπεριφορά των μαθητών/τριών.

Το τελευταίο είναι το υψηλότερο επίπεδο όπου ο χειρισμός των συμβόλων γίνεται πλέον με ευέλικτο τρόπο άλλοτε αντιπροσωπεύοντας έννοιες και άλλοτε διεργασίες. Ο χειρισμός των συμβόλων γίνεται πέρα από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται κάθε φορά και ο/η μαθητής/τρια στο επίπεδο αυτό έχει αποκτήσει τη δυνατότητα της συμβολικής σκέψης. Δηλαδή, σκέφτεται και εκφράζεται με σύμβολα ανεξάρτητα από τη φύση του προβλήματος που αντιμετωπίζει και τη μέθοδο λύσης. Η κατάταξη αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση των ενεργειών και λειτουργιών του/της μαθητή/τριας.



Σχήμα 2: Το φάσμα των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών Gray, Pinto, Pitta & Tall (1999), Gray & Tall (2001), Tall (2003)

Η δομή της είναι σχεδόν σύμφωνη με τη *SOLO ταξινομία (SOLO taxonomy: Structure of Observed Learning Outcomes)* των Biggs και Collis (1982) που αξιολογεί το επίπεδο των νοητικών λειτουργιών σχετικά με μία συγκεκριμένη έννοια. Με βάση τα επίπεδα αυτά, μία απάντηση του/της μαθητή/τριας μπορεί να χαρακτηριστεί ως:

- *Αδόμητη (pre-structural)* όταν η απάντηση δεν έχει καμία σχέση με τα δεδομένα ή την κατάσταση του προβλήματος.
- *Μονοδομική (unistructural)* όπου ο/η μαθητής/τρια επικεντρώνεται σε μία μόνο πτυχή ή χρησιμοποιεί ένα μόνο δεδομένο της ερώτησης. Ως μονοδομική χαρακτηρίζεται επίσης μια απάντηση, όταν ο/η μαθητής/τρια χρησιμοποιεί μόνο τις πληροφορίες της ερώτησης, όπως αυτές δίνονται στην εκφώνηση.

- *Πολυδομική (multi-structural)* όπου ο/η μαθητής/τρια χρησιμοποιεί περισσότερα από ένα δεδομένα ή πληροφορίες, που δίνονται στην ερώτηση, αλλά δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων αυτών.
- *Συσχετιστική (relational)* όταν η απάντηση χρησιμοποιεί τα δεδομένα της ερώτησης με τρόπο που δείχνει την πλήρη κατανόηση του/της μαθητή/τριας για τις μεταξύ τους σχέσεις.
- *Αφηρημένη (extended abstract)* όταν η απάντηση χρησιμοποιεί τις αφηρημένες γενικές αρχές που πηγάζουν από τα δεδομένα και τις καταστάσεις της ερώτησης. (Διδακτική των Μαθηματικών, Φιλίππου Γ., Χρίστου Κ., 2002, σελ 50)

Στην ταξινομία SOLO ο εκπαιδευτικός μπορεί να ταξινομήσει τις ερωτήσεις που υποβάλλει στους μαθητές του ανάλογα με τις απαντήσεις που αναμένει. Με ανάλογο τρόπο μπορούν να ταξινομηθούν οι ερωτήσεις και οι δεξιότητες των μαθητών σχετικά με το στάδιο ανάπτυξης των μαθηματικών τους ικανοτήτων, όπως περιγράφονται στον πίνακα 2.

1.4. Σύγκριση θεωριών

Οι τρεις θεωρίες που περιγράψαμε παραπάνω περιγράφουν με πειστικό τρόπο το δυϊσμό *διεργασίας* και *αντικειμένου* στη φύση των μαθηματικών εννοιών. Εκκρεμεί όμως το ερώτημα: ποια είναι η αφετηρία αυτής της λειτουργίας που δημιουργεί τα αντικείμενα από τις ενέργειες και αντίστροφα; Δηλαδή τι προηγείται, η ενέργεια του αντικειμένου ή το αντικείμενο της ενέργειας;

Ο Piaget είχε προβλέψει τέτοιου είδους ερωτήματα συμπεριλαμβάνοντας στη θεωρία του για τη *στοχαστική αφαίρεση (reflective abstraction)* τα προκαταρκτικά στάδια της *εμπειρικής (empirical abstraction)*, και *ψευδο-εμπειρικής αφαίρεσης (pseudo-empirical)* (Beth et Piaget 1966). Στην *εμπειρική αφαίρεση* η γνώση παράγεται από τις ιδιότητες των αντικειμένων. Αυτό το είδος της αφαίρεσης οδηγεί σε επεκτάσεις των ιδιοτήτων των αντικειμένων και σε γενικεύσεις που έχουν την έννοια του περάσματος από το «μερικό» στο «όλο», από το «ειδικό» στο «γενικό». Η *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση* είναι το ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ της *εμπειρικής* και *στοχαστικής αφαίρεσης* και αναφέρεται στις ιδιότητες που οι δράσεις του ατόμου προσδίδουν στα αντικείμενα. Τέλος, η *στοχαστική αφαίρεση* έχει ως κύρια πηγή το άτομο και αποτελεί αποκλειστικά εσωτερική διεργασία.

Η θεωρία APOS (Dubinsky, 1991) έχει δομηθεί πλήρως πάνω στην *στοχαστική αφαίρεση* και αναγνωρίζει ως αφετηρία τις δράσεις πάνω στα φυσικά ή νοητά αντικείμενα χωρίς όμως να καθορίζει την προέλευση των αντικειμένων αυτών. Επίσης, επικεντρώνεται κατά κύριο λόγο σε προχωρημένα Μαθηματικά. Η Sfard (1991) αναφέρεται σε μεγαλύτερης ηλικίας μαθητές/τριες που έχουν ήδη σχηματίσει κάποια γνωστικά σχήματα. Η θεωρία της διεργασίας-έννοιας (Gray & Tall, 1994) με τη σειρά της, στα πρώτα της βήματα, επικεντρώθηκε σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού και μάλιστα σε προχωρημένο επίπεδο. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα η θεματική αυτή μονομέρεια καλύφθηκε με διεύρυνση της θεωρίας με στοιχεία που προέρχονται από το χώρο της *ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognitive)* και πιο συγκεκριμένα με στοιχεία των *ενσαρκωμένων Μαθηματικών (embodied mathematics)*, (Gray&Tall, 2001, Tall, 2002, Watson, Spyrou & Tall, in press). Στην περίπτωση αυτή ο τρόπος προσέγγισης έρχεται πολύ κοντά, χωρίς πολλές φορές να αναφέρεται ρητά, στις απόψεις του Piaget.

Με την APOS ο Dubinsky και οι συνεργάτες του (1991) επιχειρούν να αναπτύξουν μία ενιαία θεωρία που να ερμηνεύει τον τρόπο που οικοδομείται γενικά η μαθηματική γνώση χωρίς να κάνει διακρίσεις που να αφορούν στο περιεχόμενο. Δηλαδή, αντιμετωπίζει με τον ίδιο τρόπο ενότητες όπως είναι η Αριθμητική, η Άλγεβρα και η Γεωμετρία. Η έννοια του *σχήματος* προσπαθεί να σχηματοποιήσει τους μηχανισμούς μετάβασης από τη *διεργασία* στο *αντικείμενο* και αντίστροφα, χωρίς να προσφέρει μία πειστική εξήγηση για το πως συμβαίνει αυτό. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με τη θεωρία της *υποστασιοποίησης (reification)* (Sfard, 1991) που επιδιώκει να καλύψει όλο το φάσμα των μαθηματικών εννοιών και περιγράφει τα επίπεδα και τους τρόπους αναγνώρισης του κάθε επιπέδου που βρίσκεται ο/η μαθητής/τρια, χωρίς να δίνεται ερμηνεία για τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο. Σχετικά με το θέμα αυτό, η θεωρία της *διεργασίας-έννοιας (procept)* (Gray & Tall, 1994) φαίνεται να δίνει έμφαση σε διαφορετικά σημεία. Καταρχήν κάνει διάκριση μεταξύ των διαφορετικών τύπων των μαθηματικών εννοιών. Δηλαδή, αντιμετωπίζονται διαφορετικά οι γεωμετρικές από τις αριθμητικές έννοιες. Για παράδειγμα, η κατασκευή γεωμετρικών εννοιών (με σημείο έναρξης την *εμπειρική αφαίρεση*) ακολουθεί διαφορετική γνωστική ανάπτυξη από αυτή της κατασκευής της έννοιας του αριθμού (με σημείο έναρξης τη *ψευδο-εμπειρική αφαίρεση*) (Gray, E.M., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D.O., 1999). Η πρώτη περίπτωση αφορά την εξέλιξη της θεώρησης των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους από την αντίληψη των φυσικών αντικειμένων στην αφαιρετική γνώση των

Πλατωνικών σχημάτων (κατά την αντίληψη των επιπέδων Van Hiele). Ενώ η δεύτερη σχετίζεται με την ανάπτυξη της ικανότητας χειρισμού των συμβόλων σαν *διεργασία* και σαν *έννοια* (*διεργασία-έννοια*). Ξεκινά δηλαδή με τον χειρισμό των φυσικών αντικειμένων και εξελίσσεται με τη στροφή από την απλή απαρίθμηση στο χειρισμό των αριθμητικών συμβόλων. Τα σύμβολα αυτά λειτουργούν σαν νέες γνωστικές οντότητες διευκολύνοντας την εξέλιξη σε πιο εκλεπτυσμένους χειρισμούς στην Άλγεβρα και στην Ανάλυση. Αυτό που κάνει τη θεωρία της *διεργασίας-έννοιας* πιο ευέλικτη σε σχέση με τις άλλες είναι ακριβώς η έμφαση που δίνει στο ρόλο του συμβόλου στις διαδικασίες της μετακίνησης από την διεργασία στην έννοια και αντίστροφα, στη μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα αλλά και στο πέρασμα από τη *στοιχειώδη* στην *προχωρημένη* μαθηματική σκέψη. Λίγα περισσότερα στοιχεία, ειδικά για το τελευταίο, επιχειρούμε να περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

1.5. Στοιχειώδης και προχωρημένη μαθηματική σκέψη

Ακόμα κι αν δεχτούμε ότι η φύση της μαθηματικής σκέψης είναι ενιαία και ακολουθεί τους ίδιους κανόνες και γνωσιακούς μηχανισμούς (Lakoff & Núñez, 2000) μπορούμε να διακρίνουμε διαφοροποιήσεις καθώς η γνώση αναπτύσσεται και εξελίσσεται σε επίπεδο πολυπλοκότητας. Υπάρχει, δηλαδή σαφής διάκριση της στοιχειώδους μαθηματικής σκέψης όπου ο χειρισμός των «αντικειμένων» και η παρατήρηση τους συνάγει και τις ιδιότητες τους από τη προχωρημένη μαθηματική σκέψη που κυριαρχεί ο μαθηματικός συμβολισμός και η μαθηματική λογική. Επίσης, παρατηρούνται διαφοροποιήσεις και σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο (Αριθμητική, Άλγεβρα, Γεωμετρία κ.ά.).

Για παράδειγμα, η πορεία της γεωμετρικής σκέψης έχει ως αφετηρία τη βασική παρατήρηση σχεδίων και φυσικών αντικειμένων, διέρχεται στη δράση πάνω στα σχήματα με μετασχηματισμούς και μετρήσεις και οδηγείται με τον αναστοχασμό στη δημιουργία των ιδανικών γεωμετρικών σχημάτων με την έννοια του πλατωνικού σχήματος. Η πορεία αυτή συμφωνεί με την εξέλιξη έτσι όπως περιγράφεται και από τα επίπεδα Van Hiele. Στο βιβλίο του «Structure and Insight», ο Van Hiele (1986) διακρίνει πέντε διαφορετικά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης: το επίπεδο της *Αναγνώρισης*, της *Ανάλυσης*, της *Διάταξης*, της *Αφαίρεσης* και της *Αυστηρότητας*. Αντίθετα, στην περίπτωση της στοιχειώδους αριθμητικής, η αφετηρία είναι η δράση στα αντικείμενα μέσω της αρίθμησης και

αργότερα εξελίσσεται στη χρήση των συμβόλων είτε ως αριθμητικές διεργασίες, είτε ως αριθμητικές έννοιες (Gray & Tall, 1994). Αυτό που διακρίνει τη στοιχειώδη Αριθμητική από τη προχωρημένη Άλγεβρα ή ακόμα περισσότερο τη Μαθηματική Ανάλυση είναι ο ευέλικτος χειρισμός των συμβόλων με τη διπλή τους διάσταση ως *έννοιες* και ως *διεργασίες*.

Στο υψηλότερο επίπεδο της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης τα αντικείμενα προκύπτουν μέσα από μία αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία. Αυτό σημαίνει ότι ορίζονται τα βασικά αξιώματα και οι βασικές έννοιες και από αυτά προκύπτουν τα θεωρήματα και οι ιδιότητες που παράγουν τις νέες μαθηματικές έννοιες. Αυτό πολλές φορές οδηγεί σε σύγχυση τους μαθητές που αναγκάζονται να αποδείξουν ιδιότητες που πριν, μέσα από την παρατήρηση των αντικειμένων, τους φαίνονταν προφανείς. Για παράδειγμα ενώ ο/η μαθητής/τρια από πολύ νωρίς έχει μάθει να κάνει πράξεις με τους Φυσικούς αριθμούς, καλείται να ορίσει το σύνολο των φυσικών (αξιώματα του Peano) με τρόπο αφαιρετικό και να καθορίσει εξαρχής τις πράξεις και τις ιδιότητες τους. Το αποτέλεσμα της θεμελίωσης αυτής θα είναι η έννοια του Φυσικού αριθμού με τη μορφή ενός μαθηματικού αντικειμένου.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι υπάρχουν ποιοτικές διαφορές της μαθηματικής σκέψης και σε σχέση με το περιεχόμενο αλλά και σε σχέση με το επίπεδο ανάπτυξης. Αν λοιπόν μία θεωρία ευελπιστεί να καλύψει όλο το φάσμα της μαθηματικής γνώσης πρέπει να είναι ικανή να ερμηνεύσει τις διαφοροποιήσεις αυτές.

2. ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η διαφορά μεταξύ *στοιχειωδών* και *προχωρημένων* μαθηματικών, έτσι όπως περιγράφτηκε παραπάνω, καθώς και οι διαφορές μεταξύ αλγεβρικής και γεωμετρικής σκέψης οδηγούν στον προβληματισμό ότι η διάκριση διεργασίας – αντικειμένου, η χρήση του μαθηματικού συμβολισμού και η θεωρία της ενθυλάκωσης δεν επαρκούν για να ερμηνεύσουν τη πρωτογενή και θεμελιώδη ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών στο μυαλό του ανθρώπου. Για παράδειγμα, στην αριθμητική, ποια είναι η αφετηρία των ενεργειών που εσωτερικεύονται σε εκείνη τη *διεργασία* που θα οδηγήσει στην *ενθυλάκωση* του *αντικειμένου* του αριθμού; Ακόμα και στην περίπτωση της διεργασίας-έννοιας του αριθμού, πως μπορεί κάποιος να αγνοήσει τις ενέργειες τις καθημερινής ζωής που σχετίζονται με την απαρίθμηση, την διάταξη και γενικότερα με οτιδήποτε σχετίζεται με αυτό που καλείται ασυνείδητη χρήση του αριθμού; Επίσης, ποια είναι η επίδραση του περιβάλλοντος και της βιολογικής δομής του σώματος γενικά και του εγκεφάλου ειδικά στη μαθηματική γνώση;

Με το θέμα αυτό ασχολούνται ερευνητές από διαφορετικούς επιστημονικούς χώρους όπως είναι ο χώρος της γνωστικής ψυχολογίας και γενικότερα της γνωσιακής επιστήμης, της γλωσσολογίας, της νευροφυσιολογίας, των μαθηματικών, των διδακτικών των μαθηματικών κ.α. Η προσέγγιση καθώς και τα ερευνητικά συμπεράσματα διαφοροποιούνται κάθε φορά ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιούνται. Η γνωσιακή προσέγγιση, για παράδειγμα, δεν κάνει διάκριση της «μαθηματικής γνώσης» από τη «γνώση» γενικά και εφαρμόζει στη περίπτωση των μαθηματικών τα γενικότερα συμπεράσματα της. Η νευροφυσιολογία με τη σειρά της ασχολείται με την βιολογική δομή του εγκεφάλου και τον τρόπο που αυτή επηρεάζει την διαμόρφωση της γνώσης. Ενώ, η διδακτική προσέγγιση δίνει προτεραιότητα στη διδασκαλία του γνωστικού αντικειμένου και τις γνωστικές δυσκολίες των μαθητών/τριών με τελικό στόχο την ανάπτυξη κατάλληλων διδακτικών προτάσεων. Στην πραγματικότητα, ανεξάρτητα από το σημείο που εστιάζεται κάθε φορά η έρευνα, οι προσεγγίσεις αυτές δεν είναι ασυσχέτιστες. Τα νέα επιστημονικά στοιχεία που σχετίζονται με την δομή και λειτουργία του εγκεφάλου επηρεάζουν τις απόψεις των γνωσιακών ερευνητών για τον τρόπο που οικοδομείται η γνώση και παρέχουν κατάλληλα στοιχεία διαμόρφωσης διδακτικών πρακτικών. Η

προσέγγιση που έχει υιοθετηθεί στη εργασία αυτή είναι εκείνη που σχετίζεται με την διδακτική των μαθηματικών και λαμβάνει υπόψη της, αφενός πρόσφατα συμπεράσματα της γνωσιακής επιστήμης καθώς και τις δυνατότητες που παρέχουν οι νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση.

Πέρα από το επιστημονικό πλαίσιο, η αντιμετώπιση του παραπάνω προβληματισμού μπορεί να γίνει είτε μέσω της *αναπτυξιακής* (*developmental*) οπτικής, όπου το ζητούμενο είναι ο τρόπος ανάπτυξης των ιδεών στο μυαλό του ανθρώπου, είτε μέσω της *εξελικτικής* (*evolutionary*) οπτικής, όπου ο προβληματισμός είναι κατά κύριο λόγο επιστημολογικός και αφορά τη γέννηση και εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών στη πολιτισμική εξέλιξη του ανθρώπου. Αν και οι δύο οπτικές έχουν ενδιαφέρον, η προσέγγιση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια θα είναι η *αναπτυξιακή* ενώ θα ανατρέξουμε στα επιστημολογικά και ιστορικά δεδομένα για τον σχεδιασμό παραδειγμάτων.

2.1. Άτυπες θεωρίες και Μαθηματικά

Πρόσφατα, στα πλαίσια της *Γνωσιακής Επιστήμης*, έχουν αναπτυχθεί θεωρίες που σχετίζονται με την ανάπτυξη εννοιολογικών δομών κατάλληλων για την ερμηνεία ενός ή περισσοτέρων φαινομένων με τα οποία έρχεται αντιμέτωπο ένα άτομο. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, οι *θεωρίες του κοινού νου* ή οι *αφελείς θεωρίες* που δεν είναι στην πραγματικότητα επιστημονικές θεωρίες αλλά ένα προσωπικό επεξηγηματικό πλαίσιο σύμφωνα με το οποίο το άτομο ερμηνεύει τις καταστάσεις που αντιμετωπίζει. Ορισμένοι ψυχολόγοι ισχυρίζονται ότι το ανθρώπινο βρέφος είναι ψυχολογικά προετοιμασμένο να οργανώσει τις παρατηρήσεις του σε *αφελείς θεωρίες* κατάλληλες να ερμηνεύσουν το φυσικό και κοινωνικό του περίγυρο, άλλοι πάλι υποστηρίζουν ότι τα νήπια είναι εφοδιασμένα με βιολογικά προκαθορισμένους περιορισμούς ή αρχές που κατευθύνουν την πορεία εξέλιξης τους. Οι *αφελείς* αυτές *θεωρίες* διαφοροποιούνται και αναδιοργανώνονται κατά τη πορεία της ανάπτυξης του ατόμου και της απόκτησης εξειδικευμένων γνώσεων, (Βοσνιάδου, 2001).

Ειδικά στην περίπτωση των μαθηματικών, ερευνητές έχουν διαπιστώσει την ύπαρξη τέτοιων θεωριών σχετικών με μαθηματικές έννοιες που αποτελούν μάλιστα συχνό εμπόδιο στην ικανότητα των μαθητών/τριών για κατανόηση. Τέτοιας μορφής είναι τα *θεωρήματα στην πράξη (théorème en action)* (Douady, 1985) που περιγράφονται ως μαθηματικές σχέσεις που εφαρμόζονται υποσυνείδητα από τα παιδιά κατά την εφαρμογή

μιας πράξης για την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτές οι σχέσεις δεν διατυπώνονται ρητά και δεν είναι θεωρήματα με την τυπική έννοια γιατί δεν εφαρμόζονται συνειδητά και βρίσκονται στη βάση της συμπεριφοράς των παιδιών. Η εμβέλεια τους είναι μικρότερη από αυτή των «τυπικών θεωρημάτων» και πολλές φορές είναι λανθασμένα αν και βρίσκουν εφαρμογή σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων, όπως για παράδειγμά η θεώρηση του πολλαπλασιασμού ως συντόμευση της πρόσθεσης. Τα *θεωρήματα στην πράξη* δεν πρέπει να αγνοηθούν από το δάσκαλο αλλά αντίθετα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γεφυρώσουν την «*άτυπη*» με τη «*τυπική*» γνώση.

Αντίστοιχη θεωρία είναι και αυτή των Fishbein κ.ά. για τα *άδηλα μοντέλα (tacit models)* τα οποία είναι *ενδιάμεσα διαισθητικά μοντέλα (intervening intuitive model)* συμπεριφορικού, κατά βάση, χαρακτήρα που βασίζονται σε πρακτικές εμπειρίες. Τα ευρήματα, μάλιστα, των ερευνών δείχνουν ότι τα αρχικά αυτά μοντέλα είναι τόσο βαθιά ριζωμένα στο νου των παιδιών που ασκούν ασυνείδητο έλεγχο πάνω στη νοητική συμπεριφορά ακόμα και αφού ο/η μαθητής/τρια αποκτήσει γνώση των τυπικών μαθηματικών εννοιών. Ακόμα και ενήλικες αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν καλούνται να επιλύσουν στοιχειώδη προβλήματα αριθμητικής που τους οδηγούν σε σύγκρουση ανάμεσα στη σωστή πράξη και τους περιορισμούς του αντίστοιχου *άδηλου μοντέλου*. Στη περίπτωση, για παράδειγμα, του πολλαπλασιασμού, που αναφέραμε παραπάνω, το *άδηλο μοντέλο* είναι αυτό της συντομευμένης πρόσθεσης και είναι αυτό που εμποδίζει την εκτέλεση πολλαπλασιασμών της μορφής 0,3x5 όπου ο τελεστής είναι μικρότερος της μονάδας και δεν έχει άμεσα νόημα η πρόσθεση του 5 με τον εαυτό του 0,3 φορές. Είναι λοιπόν σημαντικό όπως χαρακτηριστικά επισημαίνουν οι Fishbein κ.ά. να δώσουμε στους μαθητές/τριες αποτελεσματικές νοητικές στρατηγικές ώστε να ελέγξουν την επίδραση των πρωτογενών αυτών μοντέλων.

Ακόμα και για έννοιες που αναφέρονται σε προχωρημένο επίπεδο των μαθηματικών όπως είναι οι έννοιες του ορίου και του απείρου, έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές/τριες έχουν ήδη από το Δημοτικό ένα είδος διαισθητικών αντιλήψεων που συνήθως δεν λαμβάνεται υπόψη στη μετέπειτα διδακτική προσέγγιση των εννοιών (Grugnetti, Riza κ.ά. 2002, 2003).

2.2. Ενσαρκωμένη Γνώση (Embodied Cognitive)

Σε μία προσπάθεια να ερμηνευτούν καταστάσεις σαν αυτές που περιγράφτηκαν παραπάνω και να αναζητηθεί η προέλευση και η φύση της μαθηματική γνώσης, αναπτύχθηκε, στα πλαίσια της *Γνωσιακής Επιστήμης,* η θεωρία της *ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognition)*. Ειδικά για την περίπτωση των Μαθηματικών σημαντική είναι η συμβολή του Lakoff και των συνεργατών του (Lakoff & Núñez, Lakoff & Johnson) με την πληθώρα των δημοσιευμάτων τους και ιδιαίτερα με την πρόσφατη έκδοση του βιβλίου «Where Mathematics Comes From. How the Embodied Minds brings Mathematics into Being», (Lakoff & Núñez, 2000). Σύμφωνα λοιπόν με τους παραπάνω ερευνητές, τρία είναι τα νέα δεδομένα που αλλάζουν την οπτική μας σε σχέση με τη Γνωσιακή Επιστήμη, γενικά και ειδικότερα σχετικά με την κατανόηση των Μαθηματικών:

1. *Η ενσάρκωση του μυαλού (the embodiment of mind).* Αυτό σημαίνει ότι η φύση του σώματος, του μυαλού και των καθημερινών λειτουργιών του ανθρώπου, σε σχέση με τον κόσμο που τον περιβάλλει, δομεί και καθορίζει τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται οι έννοιες και η λογική των Μαθηματικών.
2. *Το γνωστικό ασυνείδητο (the cognitive unconscious)*. Οι σκέψεις είναι ασυνείδητες, όχι με τη Φροϋδική έννοια αλλά με την έννοια ότι δεν υπάρχει πρόσβαση σε αυτές με την άμεση συνειδητή ενδοσκόπηση. Αυτό σημαίνει ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να κοιτάξει και να ελέγξει άμεσα τα γνωστικά του συστήματα καθώς και τις διαδικαστικές σκέψεις του που βρίσκονται σε χαμηλό επίπεδο. Αυτό ισχύει γενικά, αλλά και ειδικά για τις Μαθηματικές σκέψεις.
3. *Η μεταφορική σκέψη (metaphorical thought)*. Ο άνθρωπος, σε σημαντικό βαθμό, εννοιολογικοποιεί αφηρημένες έννοιες με συγκεκριμένους όρους χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους επιχειρηματολογίας στηριγμένους σε ένα αισθησιοκινητικό σύστημα. Ο μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο γίνεται κατανοητό με συγκεκριμένους όρους καλείται *εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor)*. Όπως θα περιγράψουμε στα παρακάτω παραδείγματα, ο μηχανισμός αυτός είναι πολύ συνηθισμένος στα Μαθηματικά αφού π.χ οι αριθμοί εννοιολογικοποιούνται ως σημεία της ευθείας ή ως κίνηση πάνω σε μία αριθμημένη ευθεία.

Οι Lakoff και Núñez είναι υποστηρικτές της *ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognition)* σύμφωνα με την οποία οι ανθρώπινες έννοιες και η ανθρώπινη λογική δομούνται σύμφωνα με την φύση του σώματος, του μυαλού και του τρόπου λειτουργίας μέσα στο κόσμο. Στις παραπάνω έννοιες συμπεριλαμβάνονται και οι μαθηματικές έννοιες καθώς και η μαθηματική λογική. Αυτό καλείται *embodiment of mind* που θα μπορούσε να αποδοθεί ως «σωματοποίηση του νου» αφού οι νοητικές λειτουργίες συνδέονται με φυσικές και βιολογικές λειτουργίες του σώματος[3].

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεν υπάρχουν «ανυπέρβλητα» μαθηματικά με την έννοια ότι τα μαθηματικά δεν υπάρχουν «αντικειμενικά» πέρα από την ανθρώπινη ύπαρξη. Ακολουθώντας την άποψη αυτή τα μαθηματικά δεν αποτελούν μέρος του φυσικού κόσμου. Αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει είναι η κατανόηση των κανονικοτήτων του κόσμου μέσα από τα εννοιολογικά συστήματα που το σώμα και ο εγκέφαλος έχουν τη δυνατότητα να ενεργοποιήσουν. Επομένως τα μαθηματικά που γίνονται κατανοητά είναι και αυτά με τη σειρά τους ότι επιτρέπουν και καθορίζουν τα εννοιολογικά συστήματα που το σώμα και ο εγκέφαλος έχουν τη δυνατότητα να ενεργοποιήσουν.

Η θεωρία των *ενσαρκωμένων μαθηματικών (embodied mathematics),* δηλαδή των μόνων μαθηματικών που μπορούμε να ξέρουμε, ορίζεται από τις μελέτες της *ενσαρκωμένης γνώσης (embodied cognition)*. Σύμφωνα με τους Lakoff και Núñez, όλες οι εννοιολογικοποιήσεις, γνώσεις και σκέψεις κάνουν χρήση της φυσικής νευρολογικής δομής του εγκεφάλου. Κατά συνέπεια ότι μαθαίνουμε μπορούμε να το μάθουμε μόνο μέσω ενός νευρολογικού μηχανισμού μάθησης με κατάλληλη δομή που να επιτρέπει τη συγκεκριμένη μάθηση. Τα μαθηματικά είναι ένα νοητικό δημιούργημα που αναπτύσσεται για τη μελέτη αντικειμένων στον κόσμο μέσα στον οποίο ζούμε. Με δεδομένο ότι αυτά τα αντικείμενα έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες, τις ίδιες ιδιότητες κληρονομούν και τα μαθηματικά. Μερικές από αυτές τις ιδιότητες είναι: η *γενικότητα (universality)*, η *ακρίβεια (precision)*, η *συνέπεια (consistency)*, η *σταθερότητα (stability)*, η *δυνατότητα γενικεύσεων (generalizability)*, η *ανακαλυψιμότητα (discoverability)* κ.α.

Η θεωρία των *ενσαρκωμένων μαθηματικών* κάνει τις παρακάτω παραδοχές:

[3] Στην εργασία αυτή έχουμε υιοθετήσει τον όρο *«ενσαρκωμένο»* ως μετάφραση του αγγλικού *embodied* και τον χρησιμοποιούμε σε όλες τις περιπτώσεις, παρόλο που ο όρος επιδέχεται διαφορετικές ερμηνείες που αρμόζουν κατά περίπτωση και σε άλλες μεταφράσεις όπως *ενσωματωμένο* ή *σωματοποιημένο*.

- Η απλή αρίθμηση είναι έμφυτη μέσα στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Για παράδειγμα, κάθε άνθρωπος, ανεξάρτητα από την κουλτούρα και τη μόρφωση του μπορεί να διακρίνει «με μια ματιά» αν έχει ένα, δύο ή τρία αντικείμενα μπροστά του. Αυτή η ικανότητα που καλείται *«subitizing»*[4] είναι αυτή που κάνει τα βρέφη να αντιδρούν σε μεταβολές του πλήθους ενός συνόλου που αποτελείται από το πολύ τέσσερα αντικείμενα. Η δεξιότητα αυτή χαρακτηρίζει και μερικά ζώα όπως παπαγάλους, αρουραίους, πιγκουΐνους κ.α. και διαφέρει από την ικανότητα της μέτρησης και της εκτίμησης του πλήθους αντικειμένων. Ειδικά στον άνθρωπο η ικανότητα του *«subitizing»* που οι ερευνητές ισχυρίζονται ότι είναι έμφυτη, μπορεί να εξελιχθεί στην αντίληψη της αριθμητικής.
- Τα μαθηματικά είναι προϊόν του ανθρώπου, περιορίζονται από την ανθρώπινη βιολογική κατασκευή και ορίζονται από τη φύση του μυαλού, του σώματος και τα εννοιολογικά συστήματα. Επίσης, επηρεάζονται από κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες. Οι διαδικασίες κατασκευής της γνώσης ελέγχονται από εννοιολογικούς μηχανισμούς όπως είναι η *μορφοποίηση σε κατηγορίες (category formation)*, οι *έννοιες χωρικών σχέσεων (spatial-relations concepts)*, οι *σχηματοεικόνες (image schema)*, οι *εννοιολογικές μεταφορές (conceptual mataphors),*το *subitizing* κλπ. Οι ικανότητες αυτές, σε πρωτογενή μορφή, αποτελούν εφόδιο του ανθρώπου με τη γέννηση του.
- Η ικανότητα του ανθρώπου να δημιουργεί προχωρημένα μαθηματικά είναι φυσιολογική γνωσιακή ικανότητα που δυνητικά κάθε άνθρωπος έχει, όπως ισχύει και για άλλες ικανότητες όπως αυτή της *εννοιολογικής μεταφοράς*. Στο σημείο αυτό ανακύπτουν ερωτήματα σχετικά με την εξελικτική πορεία της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τα παραπάνω τα μαθηματικά θα έπρεπε να ήταν σταθερή γνώση για όλους τους ανθρώπους, διαχρονικά. Η απάντηση που δίνεται από τους ερευνητές είναι ότι, όταν μία νέα έννοια ή παραδοχή εδραιωθεί μέσα στην μαθηματική κοινότητα τότε μπορεί με τη σειρά της να οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις χωρίς την προσφυγή σε επιπλέον εμπειρικές ενδείξεις. Παρόλα αυτά ενώ παρατηρείται σταθερότητα και συνέπεια μέσα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο των

[4] Η λέξη *«subitizing»* προέρχεται από παραλλαγή της λατινικής λέξης subitus που σημαίνει ξαφνικός ή απότομος και υιοθετήθηκε από τους συγγραφείς για να δηλώσει την αμεσότητα της αντίδρασης. Η λέξη *«αμεσότητα»* ενδεχομένως να μπορούσε να αποδώσει το νόημα του όρου, επειδή όμως δεν μας ικανοποιεί θα διατηρήσουμε τον όρο στα Αγγλικά.

μαθηματικών π.χ. στο πεδίο της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν συμβαίνει το ίδιο όταν μεταβαίνουμε από το ένα πεδίο στο άλλο π.χ. ευκλείδεια και προβολική γεωμετρία.

- Τα επιμέρους θέματα των μαθηματικών (αριθμητική, γεωμετρία, κλπ) προκύπτουν από το ενδιαφέρον και τις δραστηριότητες του ανθρώπου.
- Η μαθηματική οπτική των φυσικών δραστηριοτήτων και αντικειμένων χαρακτηρίζεται από ακρίβεια γιατί ο άνθρωπος μπορεί να κάνει σαφή διαχωρισμό μεταξύ αντικειμένων και να τα κατηγοριοποιήσει ώστε να μπορεί να τα τακτοποιεί στο μυαλό του και να μπορεί να ανακαλεί αφηρημένες οντότητες όπως είναι οι αριθμοί και τα σχήματα.
- Η ακρίβεια ενισχύεται από την ανθρώπινη ικανότητα για συμβολισμό.
- Η *εννοιολογική μεταφορά* είναι ένας βασικός *νευρολογικά σωματοποιημένος μηχανισμός (neurally embodied fundamental cognitive mechanism)* που μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τις συμπερασματικές δομές ενός πεδίου για να επιχειρηματολογούμε για ένα άλλο.
- Η σταθερότητα που παρουσιάζουν τα μαθηματικά οφείλεται στο γεγονός ότι οι σωματικές και εγκεφαλικές δυνατότητες του ανθρώπου παραμένουν ίδιες καθώς και οι αντίστοιχες καταστάσεις του περιβάλλοντος.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, τα Μαθηματικά στηρίζονται στην εμπειρία που ενσαρκώνεται και δομούνται μέσω των *εννοιολογικών μεταφορών*. Οι μεταφορές χρησιμοποιούνται με μία ευρύτερη έννοια. Ως μεταφορά δεν νοείται μόνο η αντιστοίχηση των μαθηματικών εννοιών με οπτικοποιημένες καταστάσεις, όπως συμβαίνει στην απαρίθμηση συγκεκριμένων πραγμάτων που μέσω μεταφοράς, οδηγείται στην έννοια του αριθμού. Αντίθετα, γενικεύεται όπως στην περίπτωση που επιχειρηματολογούμε για μία κατάσταση χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από μία άλλη π.χ. όταν αντιμετωπίζουμε ένα αλγεβρικό πρόβλημα με γεωμετρικούς όρους.

Πιο συγκεκριμένα, η *εννοιολογική μεταφορά* περιγράφεται ως ένας μηχανισμός συνάρτησης μεταξύ διαφορετικών εννοιολογικών πεδίων (π.χ. Φυσικές ενέργειες και Αριθμητική ή Γεωμετρία και Αριθμητική) που επιτρέπει την επιχειρηματολογία για θέματα του ενός με αξιοποίηση της συμπερασματικής δομής του άλλου. Για το λόγο αυτό

χαρακτηρίζεται ως *«εγκαθιδρυμένη, με διατήρηση του συμπερασμού, αντιστοίχιση μεταξύ των πεδίων» (grounded, inference-preserving cross-domain mapping)*.

Στη εννοιολογική μεταφορά διακρίνονται το *πηγαίο πεδίο (source domain)* και το *πεδίο στόχος (target domain)*. Ένα παράδειγμα *εννοιολογικής μεταφοράς* είναι η θεώρηση της Αριθμητικής ως «Συλλογή Αντικειμένων». Στη περίπτωση αυτή ως *πηγαίο πεδίο* θεωρείται η «Συλλογή Αντικειμένων» και ως *πεδίο στόχος* η Αριθμητική και γίνονται οι παρακάτω αντιστοιχήσεις:

Συλλογή αντικειμένων ίδιου μεγέθους	→	Αριθμοί
Το μέγεθος της συλλογής	→	Το μέγεθος του αριθμού
Περισσότερο	→	Μεγαλύτερος
Λιγότερο	→	Μικρότερος ... κ.ά.

Γενικότερα σύμφωνα με της Lakoff & Núñez υπάρχουν τέσσερις βασικές μεταφορές για την αριθμητική:

- Η αριθμητική ως *μεταφορά συλλογής αντικειμένων* όπου οι αριθμοί αντιστοιχούν (ως πληθικός αριθμός) σε συλλογές από αντικείμενα ίδιου μεγέθους. Στην περίπτωση αυτή το 4, για παράδειγμα, είναι μία συλλογή τεσσάρων αντικειμένων π.χ. τεσσάρων μήλων
- Η αριθμητική ως *μεταφορά κατασκευής αντικειμένων* όπου οι αριθμοί αντιστοιχούν σε αντικείμενα που αποτελούνται από ξεχωριστά τμήματα μοναδιαίου μεγέθους. Τότε, το 4 είναι ένα αντικείμενο που έχει κατασκευαστεί από τέσσερα μοναδιαία μέρη: 4=1+1+1+1
- Η αριθμητική ως *μεταφορά μονάδων μέτρησης* όπου οι αριθμοί είναι τμήματα που αποτελούνται από ξεχωριστά τμήματα μοναδιαίου μήκους. Το 4 είναι ένα τμήμα που έχει προέλθει από την τοποθέτηση τεσσάρων μοναδιαίων τμημάτων διαδοχικά σε μία ευθεία.
- Η αριθμητική ως *μεταφορά κίνησης κατά μήκος ενός μονοπατιού* όπου οι αριθμητικές πράξεις είναι κινήσεις κατά μήκος του μονοπατιού αυτού. Το 4 είναι «κατά τέσσερα μακρύτερα» από την αρχή του μονοπατιού που είναι το 0.

Το *μίγμα (blending)* και η *επέκταση (stretching)* αυτών των μεταφορών μπορεί να δώσει τις κατάλληλες μεταφορές για όλους τους αριθμούς. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι με τις παραπάνω μεταφορές οι αριθμοί εννοιολογικοποιούνται ως

σημεία της ευθείας τότε οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να παραχθούν από τους θετικούς με στροφή κατά 180° ως προς την αρχή των αξόνων.

Σύμφωνα με τους Lakoff και Núñez κάθε οντότητα (έννοια) είναι μία μεταφορική οντότητα, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εννοιολογικά ως αποτέλεσμα μιας μεταφορικής ιδέας. Σε κάθε περίπτωση, η «αλήθεια» είναι «αλήθεια» μόνο σε σχέση με τη μεταφορική αυτή ιδέα. Κάθε τέτοια μαθηματική οντότητα υπάρχει μόνο στο μυαλό των υπάρξεων με τη δυνατότητα ανάπτυξης τέτοιου είδους μεταφορικών ιδεών και κάθε μαθηματική αλήθεια είναι αληθινή μόνο στο μυαλό των υπάρξεων αυτών. Βέβαια, στο σημείο αυτό ανακύπτουν ερωτήματα σχετικά με τις μεταφορές που σχετίζονται με τα φορμαλιστικά μαθηματικά. Για την περίπτωση αυτή ορίζεται μία βασική μεταφορά που καλείται: *«Μεταφορά της τυπικής απλοποίησης» (Formal Reduction Metaphor)* που χρησιμοποιεί ως *πηγαίο πεδίο* τα σύνολα και τα σύμβολα και ως *πεδίο στόχο* τις μαθηματικές έννοιες. Σύμφωνα με την μεταφορά αυτή κάθε εννοιολογική δομή, από κάθε κλάδο των μαθηματικών, μπορεί να αντιστοιχηθεί με μία δομή συνολοθεωρητική, με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθηματικές έννοιες και σχέσεις να αντιστοιχίζονται με σύνολα και σχέσεις συνόλων και ο χειρισμός τους να γίνεται με τη χρήση της δομής της θεωρίας συνόλων.

Επομένως σύμφωνα με την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση:

> «Τα Μαθηματικά έτσι όπως τα γνωρίζουμε είναι τα ανθρώπινα Μαθηματικά, το προϊόν του ανθρώπινου μυαλού. Από πού έρχονται τα Μαθηματικά; Έρχονται από εμάς! Εμείς τα δημιουργούμε, αλλά όχι αυθαίρετα, ούτε απλά ιστορικά ως μία τυχαία κοινωνική κατασκευή. Αυτό που κάνει τα Μαθηματικά να μην είναι αυθαίρετα είναι ότι χρησιμοποιούν τον βασικό εννοιολογικό μηχανισμό του ενσαρκωμένου ανθρώπινου μυαλού όπως αυτό έχει εξελιχθεί μέσα στον πραγματικό κόσμο. Τα Μαθηματικά είναι προϊόν των νευρολογικών ικανοτήτων του εγκεφάλου μας, της φύσης του σώματος μας, της εξέλιξης μας, του περιβάλλοντος μας και της μακρόχρονης κοινωνικής και πολιτισμικής μας ιστορίας»
>
> (Lakoff & Núñez, Where Mathematics Comes From, 2000, σελ. 9)

2.3. Ενσαρκωμένα Αντικείμενα – Ενσαρκωμένα Μαθηματικά

Αυτό που διαφαίνεται και από τα παραπάνω είναι ότι η άποψη των Lakoff & Núñez υποστηρίζει ότι όλα τα Μαθηματικά *στοιχειώδη* και *προχωρημένα* είναι *ενσαρκωμένα*. Αυτό οδήγησε ερευνητές που ασχολούνται με την ανάπτυξη της Μαθηματικής σκέψης και

εμπνεύστηκαν από τη θεωρία της *ενσαρκωμένης γνώσης* να κάνουν τον εξής διαχωρισμό: Ο όρος *ενσαρκωμένο* δεν πρέπει να αναφέρεται σε όλη τη Μαθηματική σκέψη αλλά σε εκείνη τη βασική μαθηματική σκέψη που στηρίζεται στην αντίληψη μέσω των αισθήσεων και διακρίνεται από τη συμβολική και λογική Μαθηματική σκέψη (Gray&Tall, 2001, Tall, 2002, Watson, Spyrou & Tall, in press). Αυτός ήταν και ο λόγος που οδήγησε τους παραπάνω ερευνητές να αξιοποιήσουν την θεωρία της *ενσάρκωσης* των Μαθηματικών όχι ως μία θεωρία που αρκεί για να ερμηνεύσει όλο το φάσμα της Μαθηματικής σκέψης αλλά ως μέρος των θεωριών τους και σημαντικό λειτουργικό κομμάτι για τη κατανόηση του τρόπου που αναπτύσσεται η Μαθηματική ικανότητα.

Επίσης, μέσα από την οπτική των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών, διαφαίνεται η διάθεση της διασύνδεσης της έννοιας της ενσάρκωσης με την έννοια της αναπαράστασης. Δηλαδή τη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων, μικρόκοσμων κ.α. που να παρέχουν κατάλληλες αναπαραστάσεις που θα λαμβάνουν υπόψη το τρόπο που ενσαρκώνεται η μαθηματική έννοια που θέλουμε κάθε φορά να μελετήσουμε. (Edwards L., 1998)

> «Αυτή καθαυτή η χρήση του όρου «ενσάρκωση» εύκολα μας κάνει να πιστέψουμε ότι αυτό που κάνουμε είναι η δημιουργία κάποιου (μίας αναπαράστασης) που δίνει συγκεκριμένο και σαφή σχήμα στη μη υλική ουσία των μαθηματικών και των επιστημών...στο σχεδιασμό ενός μικρόκοσμου ή μίας εξωτερικής αναπαράστασης, συζητάμε σαν να δημιουργούμε ένα «σώμα», ένα «σκεύος», ένα «μεταφορέα» για τις μαθηματικές και επιστημονικές ιδέες...»
>
> (Edwards, L., Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representation, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 1998, σελ. 71)

Οι Gray και Tall υιοθέτησαν τον όρο του *ενσαρκωμένου αντικειμένου (embodied object)* που η δημιουργία του ξεκινά από την νοητική αντίληψη των αντικειμένων μέσα στον κόσμο, έτσι όπως εισπράττονται μέσω των αισθήσεων. Στη συνέχεια οι άμεσες αυτές αντιλήψεις γίνονται αντικείμενο σκέψης, σύγκρισης και διαπραγμάτευσης. Μέσα από αυτή την επεξεργασία οι αντιλήψεις αποκτούν μία πιο εκλεπτυσμένη μορφή που έχει τη μορφή ενός *προτύπου*, κάτι σαν τον σκελετό μιας ιδέας που αποτελεί τη βάση της επικοινωνίας. Το πρότυπο αυτό μπορεί στη συνέχεια, με την πρόσθεση εξειδικευμένων ιδιοτήτων, να οδηγήσει σε μία πιο συγκεκριμένη ιδέα. Για παράδειγμα η καθημερινή μας εμπειρία με σκύλους μας οδηγεί στην δημιουργία ενός προτύπου κατάλληλου να αντιπροσωπεύει όλους τους σκύλους γενικά, αν όμως χρειαστεί να αναφερθούμε σε ένα

συγκεκριμένο σκύλο πρέπει να του προσθέσουμε συγκεκριμένες ιδιότητες π.χ. χρώμα, τρίχωμα, μέγεθος, ιδιοκτήτης κ.α. (Gray & Tall, 2001). Βέβαια στη θεωρία των *προτύπων* έχει ασκηθεί κριτική από Γνωστικούς Ψυχολόγους (Βοσνιάδου, 2000, σελ. 206) αφού στηρίζεται στην ομοιότητα και δεν λαμβάνει υπόψη τη προσωπική τοποθέτηση του ατόμου και την αντίστοιχη θεωρία με την οποία ερμηνεύει τα αντιληπτικά του δεδομένα. Από την άλλη μεριά και αυτό ενδιαφέρει ιδιαίτερα τα μαθηματικά, οι αρχικές αντιλήψεις μπορούν να υποστούν τέτοιες αφαιρέσεις που τελικά να μην αναφέρονται συνειδητά στα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου από τα οποία προέρχονται. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η ευθεία γραμμή, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή στο χώρο που κινείται το παιδί, μέσα από τις γραμμές που ζωγραφίζει, αλλά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο αυτή η γραμμή δεν έχει πάχος ούτε αρχή και τέλος και αποτελεί ένα κατασκεύασμα του νου που χάνει την επαφή του με το φυσικό κόσμο (Gray & Tall, 2001). Με αυτή την έννοια υπάρχει μια αυξανόμενη πολυπλοκότητα στην έννοια του *ενσαρκωμένου αντικειμένου* που ξεκινά από την αντίληψη μέσω των αισθήσεων και εξελίσσεται σε νοητική σκέψη με τη χρήση της γλώσσας που μπορεί να δώσει όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια και ιεράρχηση στα νοήματα. Η άποψη αυτή ταιριάζει πολύ καλά με την περίπτωση της Γεωμετρίας, όπως περιγράφεται και από τα επίπεδα Van Hiele στη περίπτωση όμως της Αριθμητικής, της Άλγεβρας ή της Ανάλυσης απαιτεί προσεκτικότερη διερεύνηση.

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στη διάκριση μεταξύ των *ενσαρκωμένων αντικειμένων* (σχήματα, γραφήματα) και του συμβολισμού της Αριθμητικής και της Άλγεβρας. Σύμφωνα με αυτή την άποψη η *εικόνα (the imagery)* του αριθμού π.χ. του αριθμού «πέντε» δεν είναι *ενσαρκωμένο αντικείμενο* παρόλο που η νοητική εικόνα των «πέντε δακτύλων» είναι. Αυτό σημαίνει ότι η σκέψη που περιλαμβάνει *ενσαρκωμένα αντικείμενα* διαφέρει από αυτή που εμπλέκει σύμβολα και αποτελεί την επιτυχή εξέλιξη γνώσεων της Αριθμητικής και της Άλγεβρας. Επομένως ο αριθμός δεν είναι *ενσαρκωμένο αντικείμενο,* αποτελεί, όμως, μία αυτόνομη οντότητα η οποία αντιστοιχεί στην *έννοια* του αριθμού. Βέβαια γλωσσικά γίνεται χρήση του αριθμού σαν ουσιαστικό αφού αναφερόμαστε σε αυτόν, κάνουμε πράξεις με αυτόν ή ενεργούμε σε αυτόν. Στην πραγματικότητα ενεργεί διευκολύνοντας το πέρασμα από τη νοητική έννοια στη νοητική διεργασία. Γλωσσικά ο ρόλος του είναι αντίστοιχος με αυτόν του ουσιαστικού «τρέξιμο», ενώ δεν είναι αντικείμενο μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτό λέγοντας «το τρέξιμο είναι καλό». (Gray & Tall, 2001). Το σημείο αυτό αποτελεί και μία σημαντική διαφορά των

απόψεων των Gray & Tall με τους Lakoff & Núñez. Οι πρώτοι υποστηρίζουν ότι ο αριθμός αποτελεί ένα σύμβολο της Αριθμητικής και επομένως δεν είναι πλέον το *ενσαρκωμένο* αντικείμενο από το οποίο ενδεχομένως να προέρχεται ενώ οι δεύτεροι υποστηρίζουν ότι όλα τα Μαθηματικά και επομένως και οι αριθμοί είναι *ενσαρκωμένα* με την έννοια που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Βέβαια όπως θα περιγράψουμε και παρακάτω πολλές φορές η πορεία της ενσαρκωμένης προσέγγισης είναι παράλληλη με αυτή της συμβολικής (με χρήση *διεργασιών-εννοιών*) και υπάρχουν δεσμοί μεταξύ τους οι οποίοι θα μπορούσαν να ερμηνευτούν μέσω των *εννοιολογικών μεταφορών*.

2.4. Σχέση μεταξύ ενσαρκωμένων αντικειμένων, διεργασιών-εννοιών και ενθυλάκωσης διεργασιών

Σύμφωνα με τους Gray & Tall (2001), υπάρχει η παρακάτω διάκριση σχετικά με τους τύπους των Μαθηματικών εννοιών:

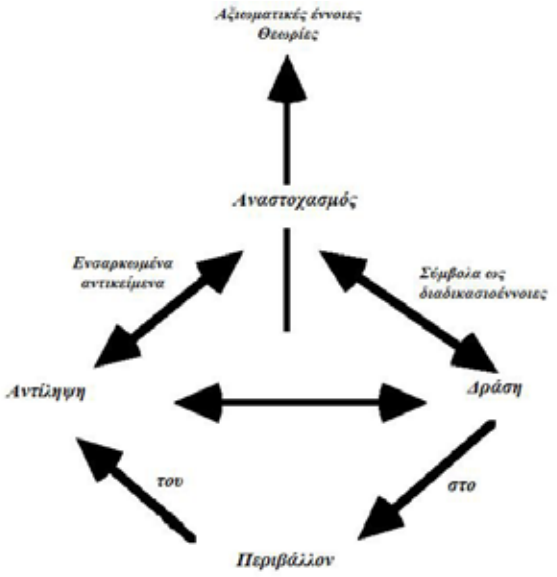
- *Ενσαρκωμένα αντικείμενα*, όπως στη γεωμετρία και στα γραφήματα, τα οποία έχουν ως αφετηρία τις φυσικές τους βάσεις και εξελίσσονται στην ανάπτυξη νοητικών εικόνων με τη βοήθεια της ιεραρχημένης χρήσης της γλώσσας.
- *Συμβολικές* έννοιες οι οποίες λειτουργούν στο συνεχές πέρασμα από την «προς διαχείριση νοητική έννοια» στην συχνά ασυνείδητη «προς εκτέλεση διεργασία».
- Α*ξιωματικές* έννοιες στη προχωρημένη μαθηματική σκέψη όπου τα αξιώματα λεκτικά και συμβολικά χρησιμοποιούνται για τη λογική δόμηση της θεωρίας.
- *Ενθηλακωμένες* διεργασίες, πρόκειται για διεργασίες που έχουν *ενθυλακωθεί* σε μία αυτόνομη οντότητα. Η περίπτωση αυτή μπαίνει επιπροσθέτως στις προηγούμενες για να διαχωρίσει τα *ενσαρκωμένα* αντικείμενα από τις *ενθηλακωμένες διεργασίες*. (Gray & Tall, 2001)

Το άτομο ενεργεί αρχικά πάνω στα φυσικά αντικείμενα και στη συνέχεια πάνω στα *ενσαρκωμένα* αντικείμενα. Στη θεωρία APOS που περιγράψαμε παραπάνω οι ενέργειες πάνω στα φυσικά αντικείμενα *εσωτερικεύονται* σε διεργασίες και αυτές με τη σειρά τους *ενθυλακώνονται* σε νοητικά αντικείμενα. Στο σημείο αυτό διαφαίνεται και η διαφοροποίηση των απόψεων των Gray & Tall σε σχέση με αυτές της θεωρίας APOS (Czarnocha κ.ά.. 1999) και της υποστασιοποίησης (Sfard, 1991) σχετικά με τη μετάβαση από τη διεργασία στο αντικείμενο. Σύμφωνα με τον Tall τα *ενθυλακωμένα* αντικείμενα

δεν προκύπτουν απλώς από την *ενθυλάκωση* ή την *υποστασιοποίηση* των διεργασιών σε αντικείμενα, όπως υποστηρίζουν οι άλλοι ερευνητές. Αλλά ενισχύονται σημαντικά από τη χρήση των δομών και ιδιοτήτων των βασικών αντικειμένων και διεργασιών που με *ενσαρκωμένη* μορφή εμπλέκονται ως πρόδρομοι της, μετέπειτα, εκλεπτυσμένης νοητικής αφαίρεσης. Πιο γενικά, η ενθυλάκωση περιλαμβάνει ένα ευρύτερο φάσμα νοητικών δομών οι οποίες συμπεριλαμβάνουν οπτικές εικόνες, ιδιότητες, σχέσεις, αντιληπτικά δεδομένα, δράσεις και συναισθήματα που είναι παρόντα στο ανθρώπινο μυαλό. Αυτή η προσέγγιση συνδυάζει δύο διαφορετικές οπτικές, αυτήν που καθοδηγείται από τη διεργασία και αυτή που εστιάζεται στο αντικείμενο (Tall, McGowen DeMarois, 2000).

Στην περίπτωση του αριθμού τα βασικά αντικείμενα είναι τα φυσικά αντικείμενα και οι *ενθυλακωμένες* έννοιες είναι οι αριθμητικές έννοιες που αναπαριστώνται από τα αριθμητικά σύμβολα. Η φαινομενικά αφηρημένη έννοια του αριθμού που θεωρητικά δημιουργείται από τη διεργασία της *ενθυλάκωσης* έχει την πρωτογενή ύπαρξη της στη φυσική δομή των βασικών αντικειμένων αφού η διεργασία της μέτρησης λειτουργεί πάνω σε φυσικά αντικείμενα. Δηλαδή, η περίπλοκη δομή της *ενθυλακωμένης* έννοιας (το σύμβολο του αριθμού) έχει προέλθει από την εξέλιξη, σε πολυπλοκότητα και ευελιξία, της *ενσαρκωμένης* έννοιας και του χειρισμού των βασικών αντικειμένων (π.χ. αρίθμηση συγκεκριμένης συλλογής αντικειμένων). Με τον τρόπο αυτό τα βασικά αντικείμενα λειτουργούν ως ενδιάμεσα σκαλοπάτια σε υψηλότερου επιπέδου έννοιες ενώ την ίδια στιγμή μπορούν να σταθούν για τους μαθητές εμπόδια αποτρέποντας την ιεραρχημένη εξέλιξη σε πιο εκλεπτυσμένες μαθηματικές έννοιες.

Στο σχήμα 3 περιγράφεται η εξέλιξη της Μαθηματικής σκέψης από την επαφή με το περιβάλλον μέχρι την αυστηρή – αξιωματική θεμελίωση των θεωριών. Οι δύο διαφορετικές πορείες, αριστερά και δεξιά, αντιστοιχούν στην *ενσαρκωμένη* και στην προσέγγιση με *διαδικασίες-έννοιες* αντίστοιχα. Αυτό που έχει



Σχήμα 3: Διαφορετικά είδη νοητικών οντοτήτων που προκύπτουν από την αντίληψη, τη δράση και την αφαίρεση (Gray & Tall, 2001, σελ. 71)

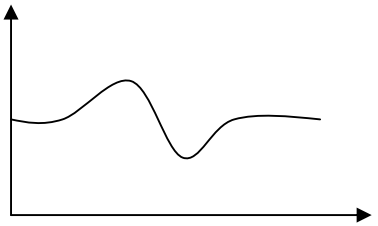
ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η παράλληλη πορεία και η σύνδεση των δύο αυτών προσεγγίσεων.

Αυτή η οπτική μας επιτρέπει να δούμε τις νοητικές αφαιρέσεις ριζωμένες στα *ενσαρκωμένα* αντικείμενα, όχι μόνο για τις γεωμετρικές έννοιες (κατά την έννοια της θεωρίας του Van Hiele) αλλά και για τη θεμελίωση της συμβολικής *διεργασία /αντικείμενο ενθυλάκωσης* στον αξιωματικό τρόπο σκέψης. Βέβαια δεν θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι προχωρημένες μαθηματικές έννοιες, για παράδειγμα του απειροστικού λογισμού, συνδέονται άμεσα με στοιχειώδη *ενσαρκωμένα αντικείμενα*. Η σύνδεση μπορεί να υπάρχει αλλά να λειτουργεί επικουρικά ή ανασταλτικά στο ασυνείδητο. Αυτό σημαίνει ότι ο εγκέφαλος ανατρέχει σε θεμελιώδη στοιχεία που λειτουργούν ως βάση και ελέγχουν με μη συνειδητό τρόπο την κατανόηση και την ανάπτυξη της αξιωματικής θεμελίωσης.

2.5. Παράδειγμα

Στη παράγραφο αυτή, θα δούμε ένα παράδειγμα σχετικό με τον ρυθμό μεταβολή, τη διαδικασία της διαφόρισης και την έννοια της παραγώγου. Η εικόνα της γραφικής παράστασης αποτελεί, σύμφωνα με τις απόψεις που περιγράφτηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ένα *ενσαρκωμένο* αντικείμενο που αποδίδει οπτικά την έννοια της συνάρτησης. Η αναπαράσταση αυτή που μπορεί να αποδοθεί είτε με τη χάραξη ενός σχεδίου με το μολύβι είτε με τη κίνηση του χεριού στο αέρα περιέχει πληροφορίες που σχετίζονται με την έννοια της παραγώγου. Πολλοί μαθητές μπορούν να καταλήξουν σε συμπεράσματα για τη κλίση της γραφικής παράστασης, χωρίς αριθμητικούς υπολογισμού, απλώς παρατηρώντας την καμπύλη. Αυτό αποτελεί μία *ενσαρκωμένη* δραστηριότητα που υποστηρίζεται από τις παρατηρήσεις και τις κινήσεις του σώματος του μαθητή και μπορεί να οδηγήσει στη συνέχεια στη τυπική προσέγγιση των αντιστοίχων εννοιών.

Σε έρευνα που περιγράφεται από τους Arzarello και Paola (2003) μελετήθηκε η *ενσαρκωμένη* προσέγγιση των μαθητών στην έννοια της συνάρτησης σύμφωνα με την Νευτώνεια λογική των μεγεθών που μεταβάλλονται ως προς το χρόνο. Στο πείραμα αυτό ο καθηγητής σχεδίασε μία γραφική παράσταση και οι μαθητές/τριες χωρισμένοι σε ομάδες των τριών ατόμων προσπαθούσαν να αναπαράξουν την ίδια γραφική παράσταση (σχήμα 4) με τη βοήθεια ενός γραφικού υπολογιστή. Πιο συγκεκριμένα, ένας/μία μαθητής/τρια από την κάθε ομάδα χειριζόταν το πρόγραμμα ενώ τα υπόλοιπα μέλη



Σχήμα 4: Arzarello και Paola (2003)

διόρθωναν με επιχειρήματα το συμμαθητή τους σε τυχόντα λάθη που προκαλούσαν την απόκλιση του παραγόμενου σχήματος από το πρότυπο του πίνακα. Κατά τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης αυτής οι μαθητές/τριες προσπαθώντας να εκφραστούν σχετικά με τη μορφή της καμπύλης κατέφευγαν σε κινήσεις του σώματος και ιδιαίτερα των χεριών. Χαρακτηριστικά ένας μαθητής αναφέρει: *«στην αρχή είναι σιγά, μετά γρήγορα επάνω, μετά γρήγορα κάτω»* κάνοντας ταυτόχρονα τις αντίστοιχες κινήσεις με το δεξί του χέρι από αριστερά προς τα δεξιά, πρώτα οριζόντια, μετά γρήγορα προς τα επάνω και αμέσως μετά γρήγορα προς τα κάτω. Στην περίπτωση αυτή, οι πληροφορίες που περιέχονται στις κινήσεις του μαθητή είναι δύο ειδών: πρώτα με τη τροχιά του χεριού δηλώνονται οι μεταβολές της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη, όπως αποτυπώνονται στη γραφική παράσταση, αποδίδοντας ταυτόχρονα το νόμο μεταβολής σε σχέση με το χρόνο. Δεύτερον, με τη ταχύτητα κίνησης του χεριού εκφράζεται η ταχύτητα αλλαγής σε σχέση με το χρόνο, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής. Οι κινήσεις αυτές του μαθητή αποδίδουν ακριβώς αυτό που έδειχνε η γραφική παράσταση στον πίνακα και δεν ήταν τίποτε άλλο από τις *ενσαρκωμένες* πληροφορίες που υπήρχαν στο σχήμα και σχετίζονταν με την κίνηση. Ο τρόπος περιγραφής του μαθητή γινόταν στην οικεία για αυτόν γλώσσα του σώματος και σύμφωνα με τον προσωπικό του φυσικό κώδικα ερμηνείας της κίνησης.

Η έκφραση αυτή αποτελεί σύμφωνα με τους ερευνητές το ενδιάμεσο επίπεδο μεταξύ της παρατήρησης της κίνησης και της διατύπωσης του νόμου μεταβολής, σε σχέση με το χρόνο και θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη στη διαδικασία κατανόησης των επιστημονικών χαρακτηριστικών της κίνησης. Στη διαδικασία αυτή είναι σημαντικός ο ρόλος του καθηγητή ο οποίος οφείλει ανάμεσα στα άλλα να υποστηρίζει λεκτικά τους μαθητές του να εκφράζουν με τυπικό τρόπο αυτό που προσπαθούν να περιγράψουν με τις κινήσεις τους. Οι μαθητές/τριες, στη φάση αυτή της διδασκαλίας, βρίσκονται σε αυτό που καλείται από το Vygotsky, ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (zone of proximal development)[5].

Στο πείραμα αυτό διακρίνεται με σαφήνεια ότι ο τρόπος που προσεγγίζεται η γραφική παράσταση γίνεται μέσω του τρόπου που έχει *ενσαρκωθεί* η κίνηση. Έχουμε,

[5] Η *ζώνη επικείμενης ανάπτυξης* είναι, κατά τον Vygotsky, η απόσταση μεταξύ του τρέχοντος αναπτυξιακού επιπέδου, όπως αυτό προσδιορίζεται από την αυτόνομη επίλυση προβλημάτων, και του εν δυνάμει επιπέδου, όπως αυτό προσδιορίζεται μέσα από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση ενός ενήλικα ή σε συνεργασία με ένα πιο ικανό άτομο ίδιας περίπου ηλικίας. (Κολέζα, 2000)

δηλαδή, μία *μεταφορά* (Lakoff & Núñez, 2000) της κίνησης του αντικειμένου στη κίνηση του σημείου πάνω στη γραφική παράσταση. Αυτή η προσέγγιση καθορίζει τον τρόπο που οι μαθητές/τριες εννοιολογικοποιούν την κίνηση ως ένα νόμο που εκφράζει την μετατόπιση σε σχέση με το χρόνο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι η καμπύλη του σχήματος 4 εκφράζει την απόσταση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα από ένα σταθερό σημείο - «αρχή» σε σχέση με το χρόνο τότε η περιγραφή του μαθητή είναι ασύμβατη με την πραγματική κίνηση. Δηλαδή, τη στιγμή που περιγράφει με την κίνηση του χεριού του από αριστερά προς τα δεξιά το κινητό να πέφτει γρήγορα ή αργά, στην πραγματικότητα το κινητό κινείται γρήγορα ή αργά προς την «αρχή», που σημαίνει ότι κινείται προς τα πίσω. Στο σημείο αυτό διακρίνονται δύο πιθανές ερμηνείες σχετικά με την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση του μαθητή: Η πρώτη είναι άμεσα συνδεδεμένη με την καθετότητα και την κίνηση πάνω-κάτω και αντιμετωπίζει το μέγεθος που μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο ως την «υψομετρική» διαφορά από το οριζόντιο επίπεδο ενός κινητού που ανεβοκατεβαίνει, ενώ η δεύτερη είναι στενά συνδεδεμένη με την εικόνα της γραφικής παράστασης, σαν σύνολο και αντιμετωπίζει την κίνηση του σημείου σαν ένα κινητό που κινείται στη κορυφογραμμή μιας οροσειράς. Από τις παραπάνω ερμηνείες αναδύεται ο προβληματισμός, που στο συγκεκριμένο θέμα διαφεύγει της προσοχής των ερευνητών, σχετικά με το αν η συγκεκριμένη *ενσαρκωμένη* προσέγγιση μπορεί να σταθεί εμπόδιο στην κατανόηση του μαθητή και πως μπορεί να αντιμετωπιστεί αυτό.

3. ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3.1. Οι τρεις κόσμοι προσέγγισης των Μαθηματικών

Σύμφωνα με τον Bruner (1966) διακρίνονται τρεις τρόποι αναπαράστασης του κόσμου: ο *πραξιακός (enactive)* που πραγματοποιείται μέσω της δράσης, ο *εικονικός (iconic)* που βασίζεται στην οπτικοποίηση και γενικά στα δεδομένα των αισθήσεων και τέλος, ο *συμβολικός (symbolic)* που αναφέρεται στις αναπαραστάσεις της γλώσσας, της λογικής και των συμβόλων (συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών συμβόλων). Με τη διάκριση αυτή ο Bruner, σε αντίθεση με τον Piaget που περιγράφει στάδια ανάπτυξης, περιγράφει τις διάφορες μορφές αναπαράστασης του κόσμου με το επιχείρημα, μάλιστα, ότι κάθε έννοια μπορεί να παρουσιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κατανοητή από κάθε μαθητή/τρια κάθε επιπέδου και ηλικίας. Παράλληλα με τον παραπάνω διαχωρισμό ο Bruner έδωσε μεγάλη έμφαση στο ρόλο του εργαλείου και της χρήσης του από τον άνθρωπο στην εξέλιξη των ανθρώπινων νοητικών δυνατοτήτων. Ο όρος εργαλείο εδώ χρησιμοποιείται με την ευρύτερη έννοια και θα μπορούσε να είναι ένα κοινό εργαλείο (σφυρί, κατσαβίδι, κ.α.), ένα όργανο (μουσικό, χημικό κ.α.), δημιούργημα της τεχνολογίας (π.χ. μηχανές) αλλά ακόμα και η ίδια η γλώσσα ως επικοινωνιακό εργαλείο. Στη σύγχρονη εποχή, με την εξέλιξη της τεχνολογίας, σημαντική θέση στα εργαλεία που χειρίζεται ο άνθρωπος είναι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Η πραγματικότητα αυτή οδήγησε τον Tall (2002) να αντιστοιχίσει τους τρόπους αναπαράστασης του Bruner με κατάλληλες χρήσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή: τον *πραξιακό* με το *περιβάλλον διεπαφής (enactive interface)*, τον εικονικό με τα *εικονίδια (icons)* και τις εικόνες που αντιπροσωπεύουν δυνατότητες επιλογών ενώ τον *συμβολικό* με τον συμβολισμό μέσα από το πληκτρολόγιο των δεδομένων και των εσωτερικών διεργασιών.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω απόψεις και προσπαθώντας να αναπτύξει μία θεωρία που να καλύπτει όλα τα είδη αναπαραστάσεων και λειτουργιών στο χώρο των Μαθηματικών ο Tall (2002) ισχυρίζεται ότι μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κόσμους σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών: τον *ενσαρκωμένο κόσμο (embodied)*, τον *κόσμο των διεργασιών-εννοιών (proceptual)* και τον *αξιωματικό κόσμο (axiomatic)*.

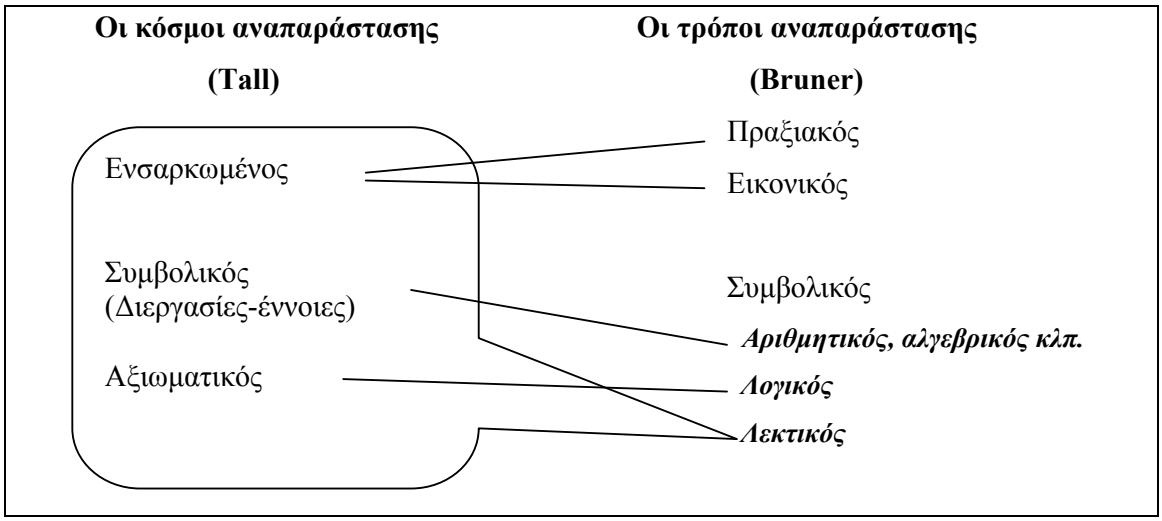
Ο *ενσαρκωμένο (embodied) κόσμος* βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου. Ο κόσμος αυτός δεν περιορίζεται μόνο στο

πραγματικό αλλά επεκτείνεται στις αντίστοιχες νοητικές κατασκευές που προκύπτουν από αφαίρεση, πάντα όμως παραμένει συνδεδεμένος με τη δράση και τα αποτελέσματα των αισθήσεων από τα οποία προέρχεται.

Ο *συμβολικός – κόσμος των διεργασιών-εννοιών (symbolic - proceptual)* αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων στην αριθμητική, στην άλγεβρα και στη συμβολική ανάλυση συνδυάζοντας τη διπλή τους υπόσταση, ως διεργασία και ως έννοια *(διεργασία-έννοια-procept)*. Πρόκειται για τον κόσμο της επεξεργασίας και διαχείρισης συμβόλων.

Ο *αξιωματικός (axiomatic) κόσμος* είναι εκείνος που προσεγγίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό τρόπο. Ξεκινάει από επιλεγμένα αξιώματα και θεμελιώδεις έννοιες και με λογικά συμπεράσματα οδηγείται στην απόδειξη. Στο κόσμο αυτό οι προτάσεις είναι αληθείς, γιατί μπορούν να αποδειχθούν με βάση τα αξιώματα και τα θεωρήματα. Λόγω της αυστηρότητας και του φορμαλισμού που απαιτεί ο κόσμος αυτός, αποτελεί το σημείο εκείνο που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές.

Ο ρόλος της γλώσσας είναι πολύ σημαντικός, και στους τρεις κόσμους, καθώς μέσω της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης εμπλουτίζονται κάθε φορά οι έννοιες που αναπτύσσονται. Η διάκριση αυτή σχετίζεται με αυτή του Bruner αφού ο *ενσαρκωμένος κόσμος* αντιστοιχεί στο *πραξιακό* και *εικονικό* επίπεδο, ο *συμβολικός κόσμος των διεργασιών-εννοιών* με το *συμβολικό* όσο αναφορά στο μαθηματικό συμβολισμό (αριθμητικό, αλγεβρικό κλπ.) ενώ ο *αξιωματικός* με εκείνο το τμήμα του *συμβολικού* που σχετίζεται με τη λογική. Το τμήμα της *συμβολικής* αναπαράστασης που αναφέρεται στη *γλώσσα (verbal)* διαχέεται σε όλους τους κόσμους. Στο σχήμα 5 φαίνεται η παραπάνω αντιστοίχηση.



Σχήμα 5: Σύνδεση των θεωριών των Bruner και Tall, (Tall, 2002)

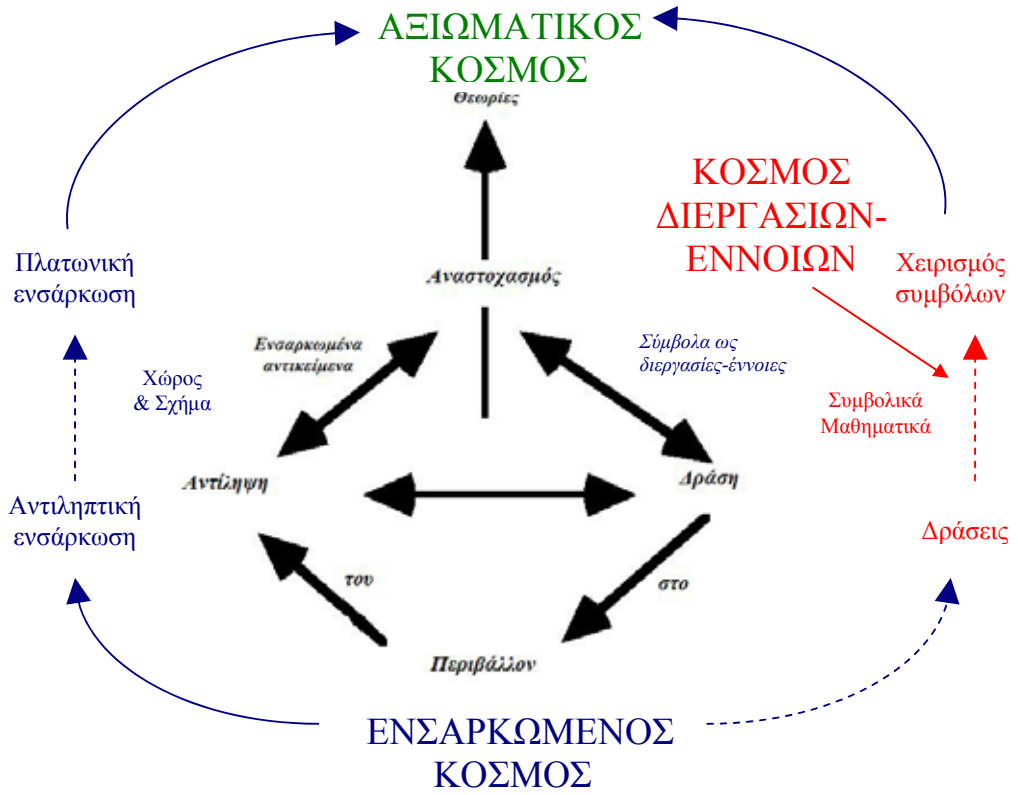
3.2. Σύνδεση των τριών κόσμων

Οι τρεις παραπάνω κόσμοι περιγράφουν την διαδοχή της γνωστικής ανάπτυξης. Αρχικά ο *ενσαρκωμένος κόσμος* αντιστοιχεί στο Α*ισθησιοκινητική στάδιο (Sensori – motor stage)* σύμφωνα με τα στάδια του Piaget και έχει τις βάσεις του στην αντίληψη του έξω κόσμου και στη δράση με φυσικά αντικείμενα. Έπειτα ακολουθεί ο *κόσμος των διεργασιών-εννοιών* που ξεκινά να κτίζεται πάνω σε *ενσαρκωμένες* δράσεις όπως είναι η αρίθμηση, η πρόσθεση, η ομαδοποίηση, η διαίρεση κ.α. και εξελίσσεται στη συμβολική μορφή του αριθμού, του αθροίσματος, του γινομένου, του πηλίκου, αντίστοιχα. Στο κόσμο αυτό, όπως περιγράψαμε και παραπάνω, είναι πολύ σημαντικός ο ρόλος των συμβόλων και η διπλή τους διάσταση άλλοτε ως διεργασίας και άλλοτε ως έννοιας. Οι δύο αυτοί κόσμοι δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενοι, αντίθετα καθώς το παιδί μεγαλώνει εργάζεται και στους δύο παράλληλα (Tall, 2002). Πολύ αργότερα και μόνο αν ο/η μαθητής/τρια ακολουθήσει σπουδές που σχετίζονται με τα Μαθηματικά θα γνωρίσει το *αξιωματικό κόσμο* των τυπικών Μαθηματικών.

Ο ενσαρκωμένος κόσμος βασίζεται στην αντίληψη του γύρω κόσμου και τις ενέργειες που κάνει ένα άτομο με τα αντικείμενα που το περιβάλλουν. Αργότερα, η αντίληψη που έχουμε για τα αντικείμενα και τις ενέργειες μας, μέσα από την αφαιρετική διεργασία, δημιουργούν τα αντίστοιχα τους νοητικά αντικείμενα. Παράλληλα, η γλώσσα επιτρπει την επένδυση των εμπειριών αυτών με ιδιότητες που αργότερα στοιχειοθετούν και τον ορισμό του κάθε αντικειμένου. Για παράδειγμα, η παρατήρηση στρογγυλών σχημάτων όπως ένα στρογγυλό τραπέζι ή ένα νόμισμα, αρχικά, οδηγεί σε μία αντίληψη - αίσθηση της «στρογγυλότητας». Έπειτα η εικόνα αυτή γίνεται αντικείμενο επεξεργασίας δηλαδή τα αντικείμενα χάνουν το χρώμα, την υφή, την ποιότητα, ενδεχομένως και το πάχος τους. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μία νοητική εικόνα που προέρχεται από την αρχική αλλά έχει υποστεί αφαίρεση. Το αποτέλεσμα αυτής της αφαίρεσης είναι το *ενσαρκωμένο* αντικείμενο του κύκλου. Η λεκτική περιγραφή του και η διαπραγμάτευση του αντικειμένου αυτού οδηγεί στον εφοδιασμό του με μία σειρά από ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Έπειτα από αυτό το στάδιο το άτομο μπορεί να αναγνωριστεί αν ένα σχήμα είναι κύκλος επειδή έχει τα χαρακτηριστικά αυτά. Στη συνέχεια το σχήμα αυτό επενδυμένο όπως είναι με τις όποιες ιδιότητές του μπορεί να εφοδιαστεί και με ένα είδος ορισμού (όχι απαραίτητα τον τυπικό ορισμό του). Για παράδειγμα, το τετράγωνο είναι εκείνο το σχήμα που έχει τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ορθές γωνίες. Αργότερα με τη *συμπερίληψη σε κλάσεις* μπορούμε να

θεωρήσουμε ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση του ορθογωνίου. Οι σχέσεις αυτές των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους οδηγούν στην διεργασία της συνεπαγωγής: «αν συμβαίνει το Α … τότε συμβαίνει το Β». Σταδιακά, λοιπόν, οικοδομείται η έννοια του Πλατωνικού σχήματος και η Ευκλείδεια Θεωρία. Το πλατωνικό σχήμα παραμένει όμως συνδεδεμένο με το *ενσαρκωμένο* σχήμα από το οποίο προέρχεται. Αυτό σημαίνει ότι η διαχείριση και ο συλλογισμός πάνω σε γεωμετρικά σχήματα εξακολουθεί να είναι συνδεδεμένα με την εποπτεία τους. Η δομή αυτή ταιριάζει απόλυτα στα επίπεδα Van Hiele, όπως έχουμε προαναφέρει και περιγράφει με ποιο τρόπο, από τον *ενσαρκωμένο* κόσμο, οδηγούμαστε σταδιακά στον κόσμο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ο οποίος με τη σειρά του θα εξελιχθεί σε *αξιωματικό* κόσμο. Οι δεσμοί όμως των δύο κόσμων, του *ενσαρκωμένου* και του *αξιωματικού,* εξακολουθούν να υπάρχουν όπως φαίνεται και στα σχήμα 6.

Για την περίπτωση της Αριθμητικής, της Άλγεβρας και της Ανάλυσης τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά. Στις περιπτώσεις αυτές κυρίαρχο στοιχείο είναι το σύμβολο και



Σχήμα 6: Η σύνθεση των τριών κόσμων: Αριστερά βρίσκεται η πορεία που αφορά στη Γεωμετρία: ξεκινά από την αντίληψη του κόσμου δηλαδή τον *ενσαρκωμένο* κόσμο και κινείται μέσα σε αυτόν ωσότου να οδηγηθεί μέσα από τη Πλατωνικής αντίληψης των σχημάτων στη τυπική θεωρία του *αξιωματικού* κόσμου. Δεξιά είναι η πορεία που αφορά στην Αριθμητική, στην Άλγεβρα και στην Ανάλυση: η αφετηρία είναι πάλι ο *ενσαρκωμένος κόσμος*, αλλά μεσολαβεί ο κόσμος των *διεργασιών-εννοιών* μέχρι να οδηγηθεί στον *αξιωματικό κόσμο*. Τα βέλη ενδιάμεσα δηλώνουν την επιρροή των τριών κόσμων. (Gray & Tall 2001, Tall 2002)

ο κόσμος των λειτουργιών είναι αυτός των *διεργασιών-εννοιών*. Η έναρξη του κόσμου αυτού είναι οι διεργασίες που *ενθυλακώνονται* σε έννοιες. Για παράδειγμα, η απαρίθμηση με τη χρήση αριθμητικών συμβόλων συνδέει την διεργασία της αρίθμησης με την έννοια του αριθμού. Όμως και στην περίπτωση αυτή η βάση των ενεργειών είναι *ενσαρκωμένη* αφού οι δράσεις στηρίζονται στη διαχείριση φυσικών αντικειμένων ή στην νοητική διαχείριση *ενσαρκωμένων* αντικειμένων. Αν επανέλθουμε στο παράδειγμα της αρίθμησης, το παιδί ξεκινά από την απαρίθμηση πραγματικών αντικειμένων ένα μήλο και δύο μήλα και δεν κατανοεί ερωτήσεις της μορφής «πόσο κάνει ένα και δύο», χωρίς συγκεκριμένα αντικείμενα. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα μικρά παιδιά δεν έχουν κατακτήσει την έννοια του αριθμού αλλά, με την τυπική αριθμητική, έρχονται αντιμέτωπα με έναν κώδικα, ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης, κάτι σαν μία ξένη γλώσσα και το πρόβλημα τους είναι με ποιο τρόπο θα μεταφράσουν τις αναπαραστάσεις που ήδη έχουν στη καινούργια τυπική γλώσσα της αριθμητικής (Hughes, 1996). Όταν επομένως το παιδί περνά στη συμβολική γλώσσα των Μαθηματικών διέρχεται στην πραγματικότητα από τον *ενσαρκωμένο* στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών* (σχήμα 6).

Τέλος, ο αξιωματικός κόσμος χρησιμοποιεί τις εμπειρίες και από τους δύο αυτούς κόσμους για να εδραιωθεί. Αυτό που έχει ενδιαφέρον στο σημείο αυτό είναι η διάκριση μεταξύ της Ευκλείδειας Θεωρίας και της Αξιωματικής – Τυπικής Θεωρίας. Η πρώτη εμφανίζεται ως το εκλεπτυσμένο τμήμα του *ενσαρκωμένου* κόσμου. Η πορεία στον *ενσαρκωμένο* κόσμο, όπως περιγράφτηκε λεπτομερώς παραπάνω, έχει ως αφετηρία τα αντικείμενα και τις ιδιότητες τους από τα οποία συνάγονται και οι ορισμοί. Η δεύτερη λειτουργεί στον *αξιωματικό κόσμο* και ακολουθεί αντίστροφη πορεία: από ένα σύνολο ορισμών και αξιωματικών παραδοχών κατασκευάζονται τα κατάλληλα αντικείμενα που τις ικανοποιούν. Υπάρχει, δηλαδή η παρακάτω μεταστροφή:

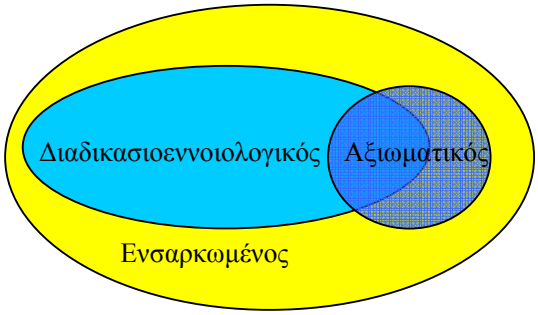
Από τον ενσαρκωμένο:

Αντικείμενο $\Longrightarrow$ Ορισμός

στον αξιωματικό:

Ορισμός $\Longrightarrow$ Αντικείμενο

Ο συσχετισμός των τριών κόσμων φαίνεται και στο σχήμα 7, όπου είναι σαφής η τομή του κόσμου των διαδικασιών-εννοιών με τον αξιωματικό ενώ ταυτόχρονα ο ενσαρκωμένος φαίνεται να συνδέεται και με τους δύο άλλους κόσμους. Στο σημείο αυτό μπορεί να δημιουργηθεί η παρανόηση ότι ο ενσαρκωμένος κόσμος περιέχει τους άλλους δύο, γεγονός που είναι απόλυτα αναληθές. Το σχήμα αυτό περιγράφει τη συσχέτιση των τριών κόσμων και με αυτή την έννοια και ο κόσμος των διαδικασιών-εννοιών και ο αξιωματικός κόσμος φαίνεται να χρησιμοποιούν τον ενσαρκωμένο για να εδραιωθούν.



Σχήμα 7: Η διάταξη των τριών κόσμων (Tall 2002)

3.3. Η απόδειξη στους τρεις κόσμους των Μαθηματικών

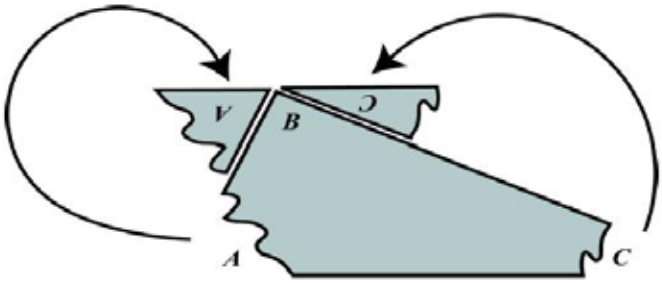
Ο καθένας από τους τρεις κόσμους έχει τις δικές του μεθόδους αντιμετώπισης των προβλημάτων, τις δικές του ενέργειες και τις δικές του προδιαγραφές πιστοποίησης της «αλήθειας». Για παράδειγμα, ο *ενσαρκωμένος κόσμος* διακρίνεται από χαλαρότητα σχετικά με την αυστηρότητα της απόδειξης, ο κόσμος των *διεργασιών-εννοιών* στηρίζει την εγκυρότητα των αποδείξεων στη διαχείριση των συμβόλων, είτε αυτά αντιπροσωπεύουν διεργασίες είτε έννοιες, ενώ ο *αξιωματικός κόσμος* οφείλει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του σε ένα αυστηρό σύνολο αξιωμάτων, θεωρημάτων και προτάσεων που με λογικές συνεπαγωγές εξασφαλίζουν την αλήθεια των ισχυρισμών.

Στο σχήμα 9 παρουσιάζεται μία απόπειρα του D. Tall (2002) να περιγράψει την αποδεικτική διαδικασία, σε ένα ενιαίο πλαίσιο, όπως αυτή πραγματοποιείται σε κάθε έναν από τους τρεις κόσμους. Αριστερά, παρουσιάζεται η πορεία στον *ενσαρκωμένο κόσμο* που ξεκινά με τα αντιληπτικά δεδομένα και τη δράση και προχωρά, μέσω της εμπειρίας, στη δημιουργία ενός *γένιου παραδείγματος (generic example)*[6]. Το *γένιο παράδειγμα* είναι μία

[6] Ως μετάφραση του όρου generic επιλέχθηκε ο όρος «γένιος», ώστε να είναι σύμφωνος με την *Τράπεζα Όρων EURODICAUTOM*

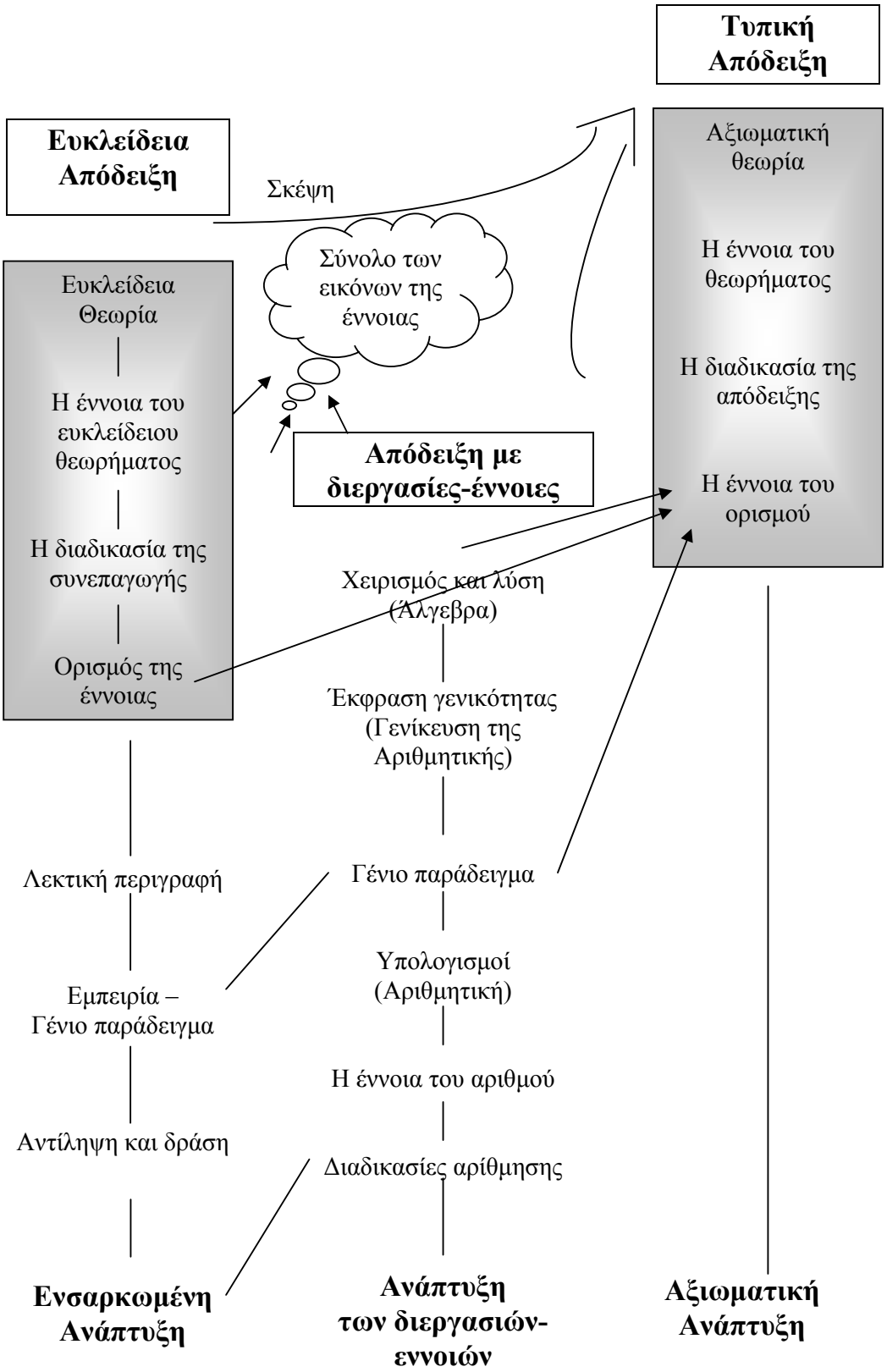
ειδική περίπτωση, αντικείμενο, σχήμα κ.α. που επιλέγει το παιδί μέσω της παρατήρησης ως αντιπροσωπευτική για να αντιμετωπίσει μία συγκεκριμένη κατάσταση και μετά να τη γενικεύσει. Ο όρος *γένιο παράδειγμα* περικλείει και τις δύο διαστάσεις του ρόλου του: είναι μία ειδική περίπτωση (παράδειγμα) που χρησιμοποιείται για την πιστοποίηση της αλήθειας ενός γενικού συμπεράσματος, δηλαδή τον ορισμό μίας ευρύτερης κατηγορίας, ενός γένους (γένιο). Στο δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές/τριες της *αφαίρεσης,* όπου αναγκάζονται να ανακατασκευάσουν τις γνώσεις που ήδη έχουν, το *γένιο παράδειγμα* μπορεί να χρησιμοποιηθεί διδακτικά ως ένα ενδιάμεσο στάδιο ανάπτυξης αντιπροσωπεύονται μία ειδική περίπτωση της αφηρημένης ιδέας. Αρχικά οι μαθητές/τριες λειτουργούν με κάποια πρότυπα των αφηρημένων ιδεών τα οποία στα μάτια των εκπαιδευτικών δεν είναι παρά ειδικά παραδείγματα τους. Τα πρότυπα αυτά μπορούν να οδηγήσουν σε παρανοήσεις τους μαθητές/τριες όταν τους παρασύρουν σε αφαιρέσεις λάθος ιδιοτήτων. Αν όμως τα επιλεχθέντα παραδείγματα είναι κατάλληλα και λειτουργήσουν ως αντιπρόσωποι μιας κλάσης παραδειγμάτων που θα ενσαρκώνουν την ίδια αφηρημένη ιδέα τότε μπορούν να οδηγήσουν σε ένα λιγότερο δύσβατο είδος αφαίρεσης που καλείται *γένια αφαίρεση (generic abstraction).* Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει και την γενίκευση, αφού πολλές περιπτώσεις που ενσαρκώνουν την ίδια έννοια εμφυτεύονται σε μία, αλλά και την αφαίρεση αφού οδηγεί τους μαθητές/τριες σε πιο αφηρημένους τρόπους σκέψεις που σιωπηρά αναδύονται από το *γένιο παράδειγμα* (Harel G., Tall D., 1989).

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του υπολογισμού αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Χρησιμοποιούμε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο και το χειριζόμαστε εμπειρικά όπως δείχνει το σχήμα 8.



Σχήμα 8: Φυσική διαπραγμάτευση ενός γενικού

Η περίπτωση αυτή αποτελεί ένα *γένιο παράδειγμα* διότι έχει τα γενικά χαρακτηριστικά ενός τριγώνου, παρόλο που αποτελεί μία ειδική περίπτωση. Το ενδιαφέρον είναι ότι οι ενέργειες μας πάνω σε αυτό εγγυώνται και την αλήθεια των ισχυρισμών. Ισχύει και θεωρείται δεδομένο ότι βλέπουμε να συμβαίνει.

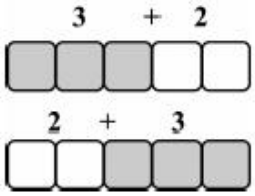


Σχήμα 9: Η απόδειξη στους τρεις διαφορετικούς κόσμους (Tall, 2002)

«Στον ενσαρκωμένο κόσμο δεν επιβάλλονται οι νόμοι στον πραγματικό κόσμο αλλά προκύπτουν από αυτόν μέσω της παρατήρησης του» (Tall, 2002 σελ. 10).

Η λεκτική διαπραγμάτευση των αρχικών ενεργειών του ατόμου, των *γένιων παραδειγμάτων* και των ιδιοτήτων τους οδηγεί σταδιακά στον ορισμό εννοιών και από εκεί στη διαδικασία της συνεπαγωγής. Στο παραπάνω παράδειγμα με το τρίγωνο μπορεί εύκολα να οδηγήσει στην απόδειξη με την κατασκευή ευθείας παράλληλης προς την ΑC που διέρχεται από το Α. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε από τη *διαδικασία* της Ευκλείδειας απόδειξης στην *έννοια* του Ευκλείδειου θεωρήματος και από εκεί στο σύνολο της Ευκλείδειας Θεωρίας.

Η πορεία της ανάπτυξης στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών*, στη μεσαία στήλη του πίνακα (σχήμα 9), είναι τελείως διαφορετική. Αρχικά, η διεργασία της αρίθμησης *ενθυλακώνεται* στην έννοια του αριθμού. Έπειτα αναπτύσσονται *γένια παραδείγματα* που έχουν *ενσαρκωμένη* βάση και διευκολύνουν αρχικά τις διεργασίες των αριθμητικών υπολογισμών και μετέπειτα την αναγνώριση των ιδιοτήτων των πράξεων. Ένα τέτοιο *γένιο παράδειγμα* για την περίπτωση της πρόσθεσης και πιο συγκεκριμένα για την αντιμεταθετική ιδιότητα είναι η χρήση αντικειμένων π.χ. μικρών κύβων που αναπαριστούν μία συγκεκριμένη πρόσθεση: 3+2 που δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το 2+3 (σχήμα 10). Το παράδειγμα αυτό λειτουργεί ως *πρώτυπο* αφού, παρόλο που εκφράζει μία συγκεκριμένη πρόσθεση, πιστοποιεί την αλήθεια της αντιμεταθετικής ιδιότητας για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Η προσέγγιση αυτή προέρχεται από τον *ενσαρκωμένο κόσμο* μπορεί όμως να γενικευτεί στον αντίστοιχο συμβολικό νόμο: «x+y=y+x». Η σχέση αυτή αποτελεί μία νέα «πιστοποίηση» της αλήθειας μέσω του συμβολισμού. Η χρήση του συμβολισμού στον κόσμο αυτό είναι τόσο ισχυρή που μόνο η σωστή, συμβολικά, διατύπωση μίας σχέσης μπορεί να εξασφαλίσει και την εγκυρότητα της. Όταν για παράδειγμα οι μαθητές/τριες θα κλιθούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα: «το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4» θα ανατρέξουν άμεσα στον συμβολισμό (2ν-1)+(2ν+1)=4ν-1+1=4ν που εμπεριέχει τις ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών χωρίς όμως να γίνεται αναφορά σε αυτές. Στην περίπτωση αυτή οι υποκείμενες ιδιότητες εξυπακούονται και δεν διατυπώνονται ρητά. Ο σωστός συμβολισμός των διαδοχικών περιττών καθώς και η σωστή εκτέλεση των πράξεων εξασφαλίζει και την ορθότητα της απόδειξης.



Σχήμα 10: 3+2 είναι ίσο με 2+3 (Tall, 2002)

«Στην Άλγεβρα η πιστοποίηση της αλήθειας των προτάσεων γίνεται μέσα από τον χειρισμό των συμβόλων και βασίζεται στη σιωπηρή παραδοχή των νόμων της Αριθμητικής.» (Tall, 2002 σελ. 13).

Στην τρίτη και τελευταία στήλη παρουσιάζεται ο *αξιωματικός κόσμος*. Στη περίπτωση αυτή το πρώτο βήμα είναι *«η έννοια του ορισμού» (concept of definition)*. Ο όρος αυτός έχει διαφορετικό νόημα από τον αντίστοιχο που χρησιμοποιείται από τον D. Tall (2002) στον *ενσαρκωμένο κόσμο* και καλείται *«ορισμός της έννοιας» (definition of concept)*. Όπως περιγράψαμε και παραπάνω στον *ενσαρκωμένο κόσμο* η έννοια προηγείται του ορισμού ενώ στον *αξιωματικό* συμβαίνει το αντίθετο. Η μετέπειτα πορεία είναι αντίστοιχη με αυτή που περιγράφεται και στην ανάπτυξη της Ευκλείδειας θεωρίας.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι οι δεσμοί μεταξύ των διαφορετικών διεργασιών. Καταρχήν, κανένα από αυτά τα βήματα δεν φαίνεται να είναι αυτόνομο. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει σαφής διαδοχή και η πραγματοποίηση κάποιου βήματος δεν προϋποθέτει απαραίτητα την ολοκλήρωση των προηγούμενων του. Ούτε οι διεργασίες του κάθε κόσμου φαίνονται να λειτουργούν αυτόνομα από τους υπόλοιπους. Ακόμα και ο *αξιωματικός κόσμος* παραμένει συνδεδεμένος με τον *ενσαρκωμένο*.

Στο διάγραμμα του σχήματος 9 φαίνεται στο πάνω μέρος ένα βέλος που περικλείει και τον *ενσαρκωμένο* και τον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών* και τους οδηγεί στον *αξιωματικό*. Στο εσωτερικό αυτού του βέλους υπάρχει ένα σύννεφο που φαίνεται να δέχεται στοιχεία και από τους δύο πρώτους κόσμους. Αυτό είναι το *σύνολο των εικόνων της έννοιας (concept imagery)*. Με τον όρο *εικόνα έννοιας (concept image)* περιγράφεται η συνολική γνωστική δομή που σχετίζεται με μία έννοια. Αυτή μπορεί να περιλαμβάνει είτε νοητικές εικόνες ως *ενσαρκωμένες* ιδέες, είτε *πρότυπα* με *ενσαρκωμένη* ή με *συμβολική* μορφή και γενικότερα εικόνες, ιδιότητες και διαδικασίες που σχετίζονται με την έννοια (Tall & Vinner, 1981). Η *εικόνα έννοιας* αφορά στον τρόπο που σκέφτεται ένα άτομο και διευκολύνει τους συλλογισμούς καθώς τους οδηγεί σε υποθέσεις σχετικά με ιδιότητες και ορισμούς. Η *εικόνα έννοιας* διακρίνεται από τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Για το λόγο αυτό υιοθετήθηκε ο όρος *ορισμός έννοιας (concept definition)* (Tall & Vinner, 1981), που αφορά τον ορισμό της έννοιας μέσω ενός λεκτικού συνόλου που την καθορίζει. Το σύνολο αυτό ο/η μαθητής/τρια μπορεί να το αποστηθίσει ή να το κατανοήσει με τέτοιο τρόπο ώστε να σχετίζεται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό με την έννοια ως ολότητα. Η *εικόνα έννοιας* χρησιμοποιείται για να σχηματίσουμε νοερά πειράματα και να συνάγουμε πιθανούς ορισμούς και θεωρήματα τα οποία στη συνέχεια ενδέχεται να αποδειχθούν και τυπικά.

Παρέχει, δηλαδή, ένα μονοπάτι που συνδέει τη διαίσθηση με το σχηματισμό των θεωρημάτων. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που στο διάγραμμα το *σύνολο των εικόνων της έννοιας* οδηγεί στον αξιωματικό κόσμο.

Γνωρίζουμε ότι, όταν ένα θεώρημα γεννιέται ή όταν σχεδιάζεται η απόδειξη του ο/η μαθηματικός που το επινοεί ή το επεξεργάζεται δεν δουλεύει απαραίτητα σε ένα φορμαλιστικό, αυστηρά μαθηματικό κόσμο. Αντίθετα, έχει κάποιες διαισθητικές εικόνες ή ιδέες που χειρίζεται και έναν άτυπο τρόπο εργασίας. Το ολοκληρωμένο αποτέλεσμα βέβαια δομείται και παρουσιάζεται με φορμαλιστικό τρόπο ώστε να πάρει την κατάλληλη θέση στην θεωρία που ανήκει. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει όταν οι μαθητές/τριες έρχονται αντιμέτωποι με μία καινούργια, για αυτούς/τές, έννοια ή κατάσταση, πρέπει να την προσεγγίσουν καταρχήν με *ενσαρκωμένο* τρόπο και να την διευρύνουν μετά στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών* ή στον *αξιωματικό*, ανάλογα με το γνωστικό επίπεδο τους.

3.4. Η καθήλωση των μαθητών στον ενσαρκωμένο κόσμο

Όπως αναλύσαμε και στις προηγούμενες ενότητες, υπάρχει σαφής διαφορά μεταξύ του *ενσαρκωμένου αντικείμενου* και των συμβόλων της Αριθμητικής και της Άλγεβρας. Παρόλο που τα *ενσαρκωμένα αντικείμενα* προσφέρουν μία πρωταρχική εικόνα των μαθηματικών εννοιών αποδεικνύονται δύσχρηστα και ανεπαρκή να αντιμετωπίσουν περίπλοκα προβλήματα που απαιτούν τη δύναμη και την ευελιξία του συμβολισμού. Η καθήλωση στον *ενσαρκωμένο κόσμο* ή η δημιουργία *ενσαρκωμένων αντικειμένων*, που δεν διευκολύνουν το πέρασμα στον αντίστοιχο συμβολισμό, αποτελούν εμπόδιο στην ανάπτυξη προχωρημένης μαθηματικής σκέψης. Έχει δειχθεί, ότι οι μαθητές/τριες που παρουσιάζουν προβλήματα στη στοιχειώδη αριθμητική, έχουν την τάση να εμμένουν στη χρήση συγκεκριμένων αντικειμένων και μεθόδων και αδυνατούν να κάνουν γενικεύσεις (Gray, Pinto, Pitta & Tall, 1999). Αντίθετα, οι πιο ικανοί μαθητές επικεντρώνονται σε ευέλικτες μεθόδους που επιδέχονται γενικεύσεις και αξιοποιούν το συμβολισμό ως δεσμό μεταξύ των εννοιών και των διεργασιών.

Η πλειοψηφία των προσεγγίσεων στο Δημοτικό και στη πρώτη τάξη του Γυμνασίου κινείται στον *ενσαρκωμένο* κόσμο. Είναι συχνό το φαινόμενο μαθητές/τριες που παρουσιάζουν ικανοποιητικές επιδόσεις στις τάξεις αυτές, να αποτυγχάνουν όταν μεταβαίνουν σε μεγαλύτερες. Μία πιθανή ερμηνεία, προς εξέταση, είναι η αδυναμία τους να συλλογιστούν συμβολικά και να διαχειριστούν ευέλικτα τις έννοιες και τις διεργασίες.

Δηλαδή, στην πραγματικότητα δεν επιτυγχάνουν να πραγματοποιήσουν το πέρασμα στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών* και τον *αξιωματικό κόσμο*, λόγω της εμμονής τους να λειτουργούν στο πλαίσιο του *ενσαρκωμένου κόσμου*. Παραμένουν στην πραγματικότητα μπλοκαρισμένοι σε στατικά και μη επιδεκτικά αφαιρέσεων *ενσαρκωμένα αντικείμενα* που στέκονται εμπόδιο στην γνωστική τους ανάπτυξη. Αν για παράδειγμα, στο Γυμνάσιο, η συνάρτηση διδαχθεί κυρίως με την έννοια της συμμεταβολής δύο μεγεθών, με συγκεκριμένα προβλήματα (κιλά μήλα και κόστος όταν δίνεται η τιμή του κιλού, χρόνος και διάστημα που διανύει ένα κινητό όταν η ταχύτητα παραμένει σταθερή), θα είναι πολύ δύσκολο ο/η μαθητής/τρια να κάνει τις κατάλληλες γενικεύσεις ώστε να προσεγγίσει την έννοια της συνάρτησης ως διεργασία σύνδεσης των στοιχείων δύο συνόλων κάτω από ορισμένους κανόνες. Αυτό θα έχει ως συνέπεια να μην μπορεί να χειριστεί το συμβολισμό της συνάρτησης άλλοτε ως έννοια και άλλοτε ως διεργασία π.χ. η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+5$ μπορεί να εκφράζει τη διεργασία «δίνω τιμές στο x, υπολογίζω και βρίσκω το αποτέλεσμα»: $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2+5$ αλλά μπορεί και να εκφράζει την έννοια της συνάρτησης σαν μία αυτόνομη οντότητα: να βρεθεί η αντίστροφη της f ή να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της.

Είναι, επομένως, πολύ σημαντικό η επιλογή των διδακτικών προσεγγίσεων συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να λαμβάνονται υπόψη δύο παράμετροι: πρώτον ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται τις έννοιες αυτές και δεύτερο ο βαθμός που η προσέγγιση που σχεδιάζεται είναι ικανή να διευκολύνει στο πέρασμα σε πιο εκλεπτυσμένους τρόπους σκέψης.

4. Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΣΑΡΚΩΜΕΝΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Από τα πρώτα κιόλας δείγματα που έχουμε για την ανθρώπινη διερεύνηση της γνώσης παρατηρούμε ότι ο άνθρωπος χρησιμοποιούσε τα μέσα που κάθε φορά είχε στη διάθεση του για να προσεγγίσει, να κατανοήσει ή να προσομοιώσει τις καταστάσεις που ήθελε να μελετήσει. Η προσπάθεια αυτή πολλές φορές λειτουργούσε και αντίστροφα, αφού η αναζήτηση της αλήθειας και η κοινωνική διαπραγμάτευση των προβλημάτων οδηγούσε στην ανακάλυψη νέων εργαλείων. Ο Αρχιμήδης, για παράδειγμα, σχεδίαζε σχήματα στην άμμο ή κατασκεύαζε *μηχανικά ανάλογα* για να μπορέσει να οδηγηθεί σε μηχανο-τεχνικές λύσεις που στην συνέχεια διερευνούσε θεωρητικά. Κάθε φορά πάντως, τα εργαλεία και η τεχνολογική ενασχόληση του ανθρώπου αποτελούσαν το κλειδί που καθόριζε τα νοητικά και κοινωνικά του χαρακτηριστικά. Επίσης, ανάλογα με την εποχή τα εργαλεία διαφοροποιούνται επηρεάζοντας κάθε φορά τα γνωστικά πλαίσια, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Άμεσα γιατί προσέφεραν τη δυνατότητα ευκολότερης πρόσβασης σε συγκεκριμένους γνωστικούς τομείς αλλά και έμμεσα γιατί άλλαζαν τα κοινωνικά δεδομένα δημιουργώντας νέες απαιτήσεις σε γνώσεις και δεξιότητες. Η σχέση αυτή ήταν πάντοτε αμφίδρομη αφού και η γνωστική, πολιτιστική, κοινωνική κατάσταση του ανθρώπου επηρέαζε και το είδος των εργαλείων που κάθε φορά κατασκεύαζε. Το ερώτημα είναι, ποια είναι τα εργαλεία που έχει στην διάθεση του ο σύγχρονος άνθρωπος και σε ποιο βαθμό αυτά αλλάζουν τον τρόπο αλλά και το είδος της γνώσης που μπορεί να προσεγγίσει;

Τα εργαλεία του σύγχρονου ανθρώπου είναι σε ένα μεγάλο ποσοστό ηλεκτρονικά. Η εξέλιξη των υπολογιστών και από άποψη *λογισμικού (software)* αλλά και από άποψη *υλισμικού (hardware)* και η εισαγωγή τους στην καθημερινότητα έχουν αλλάξει τα πολιτισμικά και κοινωνικά δεδομένα του σύγχρονου ανθρώπου. Όπως ήταν φυσικό, η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει επηρεάσει και τα παιδαγωγικά δεδομένα γενικά, αλλά και ειδικά όσο αφορά στην μαθηματική εκπαίδευση. Στην εκπαιδευτική κοινότητα φαίνεται να υπάρχουν διαφορετικές απόψεις σχετικά με την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μερικοί αντιμετωπίζουν τους

ηλεκτρονικούς υπολογιστές (Η/Υ) με *σκεπτικισμό*[7] θεωρώντας ότι δεν έχουν τίποτα περισσότερο να προσφέρουν στον τρόπο μάθησης και σκέψης των ανθρώπων. Οι υποστηρικτές αυτής της άποψης χρησιμοποιούν τους Η/Υ σαν συσκευές προγραμματισμένης διδασκαλίας υποστηρίζοντας με τον τρόπο αυτό τη εσκεμμένη και καθοδηγούμενη διδασκαλία που έκαναν και πριν. Άλλοι πάλι αντιμετωπίζουν τους Η/Υ με *κριτικισμό* θεωρώντας τους ως πηγή αρνητικών συνεπειών στη διαπαιδαγώγηση των νέων. Θεωρούν ανάμεσα στα άλλα ότι η χρήση τους θα έχει ως συνέπεια την αποξένωση, τον κοινωνικό αποκλεισμό, τον έλεγχο της προσωπικής ζωής καθώς και πιθανές βλάβες της πνευματικής υγείας.

Η αλήθεια με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και γενικότερα την εξέλιξη της τεχνολογίας βρίσκεται κάπου ανάμεσα ή για να το διατυπώσουμε καλύτερα κάπου πιο πέρα από τις απόψεις αυτές. Η χρήση των Η/Υ μπορεί να έχει βλαβερές συνέπειες αν δεν γίνει σωστά. Αυτό που έχει σημασία είναι οι δυνατότητες που προσφέρουν και η παιδαγωγική τους αξιοποίηση. Με τη σωστή χρήση ο/η μαθητής/τρια μαθαίνει να σκέφτεται προμελετημένα και όχι μηχανικά, να βιώνει καταστάσεις και να διαπραγματεύεται τις απόψεις του, να μην είναι παθητικός και να επιλέγει τον καλύτερο από διαφορετικούς τρόπους λύσης. Αυτό που είναι ουσιαστικό είναι ότι οι Η/Υ δεν έρχονται να διευκολύνουν την μέχρι τώρα προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης αλλά να την αλλάξουν και σε επίπεδο διαδικασίας, αλλά και σε επίπεδο περιεχομένου. Δεν αρκεί λοιπόν να επικεντρωνόμαστε στο εργαλείο για να εντοπίσουμε τον τρόπο που θα το αξιοποιήσουμε λειτουργικά. Πρέπει να το προσεγγίσουμε κάτω από το πρίσμα της διδακτικής και της επιστημολογίας των Μαθηματικών.

Τα εργαλεία που έχουμε τώρα στη διάθεσή μας μπορούν να φέρουν στο προσκήνιο τμήματα της γνώσης που σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο και τον τρόπο που τον αντιλαμβανόμαστε και μέχρι τώρα βρίσκονταν στο περιθώριο της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα μπορούμε να απεμπλακούμε από τις αυστηρά προδιαγεγραμμένες πράξεις (συγκεκριμένοι τύποι και μεθοδολογία) και τα ακριβή αποτελέσματα (τέλειες διαιρέσεις και αποτελέσματα που είναι ακέραιοι αριθμοί), αφού το πρόβλημα των δύσκολων υπολογισμών μπορεί να ξεπεραστεί με μηχανές υπολογισμού (π.χ. πράξεων, ριζών, ολοκληρωμάτων κ.ά.). Ενώ, οι μαθητές/τριες, απαλλαγμένοι από το εμπόδιο αυτό, θα μπορούσαν να ασχοληθούν με προσεγγιστικές διαδικασίες που έρχονται πιο κοντά στη καθημερινή ζωή (π.χ.

[7] Στο σημείο αυτό έχουμε υιοθετήσει τους όρους «σκεπτικισμός» και «κριτικισμός» με την ίδια έννοια που τις χρησιμοποίησε ο S. Papert στο βιβλίο του «Νοητικές θύελλες» (σελ. 42)

υπολογισμοί εμβαδών «μη κανονικών σχημάτων», προσέγγιση γραφικής παράστασης πολύ κοντά σε ένα σημείο της κ.ά.)

Ειδικά για τα Μαθηματικά, υπάρχουν ειδικά σχεδιασμένα λογισμικά που προσφέρουν στον χρήστη κατάλληλα περιβάλλοντα για τις αντίστοιχες μαθηματικές ή εκπαιδευτικές τους ανάγκες. Τα λογισμικά αυτά δεν απευθύνονται μόνο στο/η μαθητή/τρια αλλά και στον/ην εκπαιδευτικό ακόμα και στον/ην μαθηματικό ερευνητή/τρια. Εμείς για τις ανάγκες της εργασίας αυτής θα περιοριστούμε σε αυτά που προορίζονται και μπορούν να αξιοποιηθούν στην μαθηματική εκπαίδευση και ακόμα πιο συγκεκριμένα σε εκείνα που είναι κατάλληλα να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μέσα στα οποία ο χρήστης, στη περίπτωση μας ο/η μαθητής/τρια, να λειτουργήσει σε *ενσαρκωμένα* πλαίσια. Θα είμαστε πολύ προσεκτικοί στη διάκριση αυτή αφού δεν είναι όλα τα λογισμικά κατάλληλα για το σκοπό αυτό, ούτε καν όλα τα εκπαιδευτικά λογισμικά. Ας δούμε όμως πρώτα ποια λογισμικά χαρακτηρίζονται ως εκπαιδευτικά.

> «Ως Εκπαιδευτικά λογισμικά (Ε.Λ.) χαρακτηρίζονται το λογισμικό εκείνο που *σχεδιάζεται και χρησιμοποιείται για τους σκοπούς της διδασκαλίας και της μάθησης.* Με την έννοια αυτή, λογισμικό άλλων κατηγοριών όπως οι επεξεργαστές κειμένου ή το λογισμικό επεξεργασίας πινάκων, παρότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τους σκοπούς της διδασκαλίας και της μάθησης, δεν εντάσσεται στην κατηγορία του Ε.Λ. Όμως, και το λογισμικό που εντάσσεται στην κατηγορία του Ε.Λ., κατατάσσεται σε ειδικότερες κατηγορίες με βάση διάφορα κριτήρια όπως:
>
> - τα παιδαγωγικά μοντέλα που προωθεί,
> - το ρόλο που επιτελεί στη διαδικασία της μάθησης,
> - το περιεχόμενο, την παιδαγωγική προσέγγιση και το περιβάλλον μάθησης.»
>
> (Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2002 σελ. 7)

Σε σχέση με τον παιδαγωγικό τους προσανατολισμό τα Ε.Λ. θα μπορούσαν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Η μία κατηγορία είναι αυτά που χρησιμοποιούν το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας που υποστηρίζει ότι η γνώση μεταφέρεται από τον διδάσκοντα και απομνημονεύεται από τον μαθητή. Στην περίπτωση αυτή, τα Ε.Λ. είναι κυρίως ηλεκτρονικές προσομοιώσεις βιβλίων που αποτελούνται από σειριακές παρουσιάσεις των εννοιών και έχουν περιορισμένη αλληλεπίδραση με τον μαθητή. Σχεδόν

πάντα συνοδεύονται από ένα σύστημα αξιολόγησης με ερωτήσεις σωστού/ λάθους ή πολλαπλής επιλογής, που επιβραβεύουν τον μαθητή στη περίπτωση που απαντά σωστά ή τον παροτρύνουν να ξαναπροσπαθήσει σε περίπτωση λάθους.

Ενώ η δεύτερη κατηγορία είναι αυτή που συμφωνεί με τις αρχές της γενετικής επιστημολογίας του J. Piaget και τη θεωρία της «Κατασκευής της Γνώσης» (Constructivism). Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση η γνώση δεν αντιμετωπίζεται ως κάτι απόλυτο και ανεξάρτητο από τον μαθητή, αλλά κατασκευάζεται από αυτόν μέσω των ενεργειών του πάνω στα αντικείμενα. Στην περίπτωση αυτή αναγνωρίζεται ο ρόλος των υλικών μέσων και ειδικότερα του Ε.Λ. ως εργαλείου για την κατασκευή της γνώσης του μαθητή μέσα από τις δικές του γνωστικές λειτουργίες. Αυτό επιτυγχάνεται με το *διερευνητικό εκπαιδευτικό λογισμικό* που παρέχει εργαλεία επεξεργασίας και οπτικοποίησης πληροφοριών, προσομοίωσης, έρευνας, εναλλακτικού τρόπου έκφρασης, συνεργατικής μάθησης κ.α. Λογισμικό τέτοιου τύπου προσφέρει τις απαραίτητες ευκαιρίες στο/η μαθητή/τρια:

- να αναπτύξει εικασίες,
- να κάνει γενικεύσεις και επεκτάσεις,
- να επικοινωνήσει και να διαπραγματευτεί τις απόψεις του,
- να αναστοχαστεί στις ενέργειες του,
- να οδηγηθεί σε γνωστική σύγκρουση μεταξύ των ενεργειών του και των αποτελεσμάτων τους.

Για παράδειγμα, τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας, όπως είναι τα Geometer's Sketchpad και Cabri-Geometry II, προσομοιώνουν στην οθόνη του υπολογιστή το Ευκλείδειο Επίπεδο και επιτρέπουν στον/ην μαθητή/τρια να κατασκευάσει γεωμετρικά σχήματα και να τα χειριστεί δυναμικά ενώ αυτά διατηρούν τις γεωμετρικές ιδιότητες με τις οποίες κατασκευάστηκαν. Στα περιβάλλοντα αυτά υπάρχει διαφορά μεταξύ ενός σχεδίου που μπορεί να καταστραφεί με την μετακίνηση και ενός γεωμετρικού σχήματος που οι γεωμετρικές του ιδιότητες διατηρούνται σε κάθε θέση.

Αυτή η κατηγορία του *διερευνητικού λογισμικού* μπορεί να λειτουργήσει ως ένα περιβάλλον του ενσαρκωμένου κόσμου. Ένα περιβάλλον, δηλαδή, σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να ενσαρκώνει μαθηματικές ιδέες, μέσα στο οποίο τα κεντρικά αντικείμενα και οι σχέσεις να γίνονται άμεσα και χειροπιαστά (Edwards, 1998). Όσο κινούμαστε θεματικά στο χώρο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η αφετηρία μας είναι εκ των πραγμάτων

ενσαρκωμένη, ακόμα και αν τα εργαλεία μας είναι μη ηλεκτρονικά. Απλώς τα λογισμικά αυτά δίνουν την δυνατότητα γενικεύσεων και διερευνήσεων που δεν επιτρέπουν τα στατικά σχήματα του χαρτιού με αποτέλεσμα να διευρύνονται τα πλαίσια της *ενσαρκωμένης* προσέγγισης.

Στην περίπτωση της Άλγεβρας ή της Ανάλυσης τα πράγματα διαφοροποιούνται. Λογισμικά χειρισμού συμβόλων, όπως είναι τα Mathematica, Derive, Maple κ.ά., διευκολύνουν την εκτέλεση μαθηματικών εργασιών όπως επίλυση εξισώσεων, υπολογισμούς παραστάσεων, παραγώγων, ολοκληρωμάτων κ.λ.π., απαλλάσσοντας τον χρήστη από τα διαδικαστικά μέρη των εργασιών του και προσφέροντας του έτοιμα αποτελέσματα. Παρόλο που οι γραφικές και υπολογιστικές δυνατότητες των λογισμικών αυτών είναι πλούσιες και αξιόπιστες, η *ενσαρκωμένη* εμπλοκή του χρήστη είναι περιορισμένη. Για το λόγο αυτό δεν είναι κατάλληλα για μία *ενσαρκωμένη* προσέγγιση εννοιών της Άλγεβρας ή της Ανάλυσης. Τα περιβάλλοντα αυτά είναι κατάλληλα για χρήστες που έχουν βρίσκονται ήδη σε ικανοποιητικό επίπεδο γνώσεων και διερευνούν κάτι πέρα από αυτές. Αυτό που χρειαζόμαστε εμείς είναι ένα *διαδραστικό (interactive)* περιβάλλον που να δίνει στην Άλγεβρα ή στην Ανάλυση ανθρώπινο φυσικό περιεχόμενο. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να επαναπροσδιορίσουμε τη μέχρι τώρα προσέγγιση μας σχετικά με το συμβολισμό και τις γραφικές παραστάσεις δημιουργώντας *ενσαρκωμένα* διερευνητικά περιβάλλοντα που να μπορούν να επεκταθούν και διευρυνθούν στη μετέπειτα τυπική θεμελίωση των Μαθηματικών. Για το σκοπό αυτό πρέπει να σχεδιαστούν κατάλληλοι *μικρόκοσμοι*. Πριν προχωρήσουμε θα διευκρινίσουμε τι εννοούμε με τον όρο *μικρόκοσμος* και με ποιο τρόπο μπορεί να εξυπηρετήσει τους στόχους της *ενσαρκωμένης* προσέγγισης.

Ένας *μικρόκοσμος* στο περιβάλλον ενός υπολογιστή μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα είδος εξωτερικής αναπαράστασης. Ο S. Papert (1991) στο βιβλίο του «Νοητικές θύελλες» αναφέρει ότι καθένας από τους *μικρόκοσμους*:

> «...έχει το δικό του σύνολο θέσεων και περιορισμών. Τα παιδιά μαθαίνουν με τι μοιάζει η εξερεύνηση των ιδιοτήτων ενός μικρόκοσμου, ανενόχλητα από άσχετες ερωτήσεις. Κάνοντας το, μαθαίνουν να μεταφέρουν τις συνήθειες της εξερεύνησης από την προσωπική τους ζωή στην τυπική περιοχή της κατασκευής επιστημονικής θεωρίας...» (σελ. 145)

Ένας *μικρόκοσμος* αποτελεί μια ομάδα δραστηριοτήτων που προϋποθέτουν ένα σύνολο από αρχές σχεδίασης: τα συστατικά μέρη του *μικρόκοσμου* να μοντελοποιούν γνωστικά πεδία και οι γνωστικές διαδικασίες και οι στρατηγικές που αναπτύσσονται να

είναι διαπραγματεύσιμες και όχι προδιαγεγραμμένες (Hoyles, 1992). Ένας *μικρόκοσμος* λειτουργεί ως «εκκολαπτήριο» για την γνώση που πρόκειται να κατακτηθεί.

Αρχικά ο όρος *μικρόκοσμος* χρησιμοποιήθηκε για περιβάλλοντα της γλώσσας προγραμματισμού Logo, τώρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι *μικρόκοσμοι* μπορούν να κατασκευαστούν και με άλλες γλώσσες προγραμματισμού ή γενικότερα σε περιβάλλοντα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Ακόμα πιο γενικευμένα, τα χαρακτηριστικά της μάθησης σε περιβάλλον ενός *μικρόκοσμου* μπορούν να επιτευχθούν και χωρίς τη διαμεσολάβηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Edwards, 1998).

Η L. Edwards (1998) περιγράφει δύο οπτικές σύμφωνα με τις οποίες μπορεί να αντιμετωπιστεί ένας *μικρόκοσμος*: την *δομική (structural view)* και τη *λειτουργική (functional view)*. Στην *δομική* το ενδιαφέρον εστιάζεται στον τρόπο σχεδιασμού ενός μικρόκοσμου και στα δομικά-κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του που λίγο ως πολύ ακολουθούν κάποιους γενικούς κοινούς κανόνες που σχετίζονται με τις λειτουργίες που πραγματοποιούνται, τα αντικείμενα και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται καθώς και τις δυνατότητες για δραστηριότητες που προσφέρει. Στην *λειτουργική* το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη σχέση του μικρόκοσμου με αυτόν που μαθαίνει και αναφέρεται στον τρόπο που ο μαθητής αλληλεπιδρά με το προσχεδιασμένο περιβάλλον και πως αυτό επιτυγχάνει να λειτουργήσει σαν περιβάλλον μάθησης. Η οπτική αυτή σχετίζεται με τον τρόπο που ο/η μαθητής/τρια χειρίζεται τα αντικείμενα και τις λειτουργίες του *μικρόκοσμου*, ανακαλύπτει ιδιότητες, κατανοεί τον τρόπο κατασκευής του, αυτοδιορθώνεται, δημιουργεί νέες οντότητες, επιλύει προβλήματα κ.α. Σύμφωνα με την λειτουργική οπτική ένας *μικρόκοσμος* δεν είναι απαραίτητο να υλοποιηθεί με τη χρήση ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, αντίθετα μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε διαδραστικά αντικείμενα ή τεχνήματα, για παράδειγμα ειδικές υλικές κατασκευές όπως ήταν τα «μπλοκ του Dienes» (1966).

Ο κάθε μικρόκοσμος θεωρείται ως «*ενσάρκωση μαθηματικών και επιστημονικών θεμάτων*» αφού πρόκειται για:

> «...ένα περιβάλλον, που χρησιμοποιεί τον ηλεκτρονικό υπολογιστή ή άλλο μέσο, στο οποίο τα κύρια αντικείμενα και οι σχέσεις ενός θεματικού πεδίου γίνονται άμεσα με χειροπιαστό ή σχεδόν χειροπιαστό τρόπο...» (Edwards, 1998, σελ. 69)

Με την παραπάνω έννοια τα σύμβολα και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μεταφέρουν το νόημα που έχει εμφυτευθεί σε αυτά, σε αυτόν που μαθαίνει. Ο τρόπος που μαθαίνουν οι μαθητές/τριες, οι έννοιες και οι διαδικασίες που επιθυμούμε να *ενσαρκώσει* ο μικρόκοσμος

καθώς και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με αυτές πρέπει να ληφθούν υπόψη από το σχεδιαστή-εκπαιδευτικό που θα κατασκευάσει ή θα χρησιμοποιήσει το περιβάλλον αυτό. Τι σημαίνει όμως η *ενσάρκωση* μίας μαθηματικής ενότητας σε ένα συγκεκριμένο σύνολο αναπαραστάσεων; Στην πραγματικότητα η μαθηματική ιδέα αποκτά «σάρκα και οστά», γίνεται χειροπιαστή και συγκεκριμένη. Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει ότι απλώς υπάρχει ένας «αντικειμενικός» σχεδιασμός τέτοιων περιβαλλόντων που να *ενσαρκώνουν* «ανυπέρβλητες και αντικειμενικά σωστές» μαθηματικές ιδέες. Αντίθετα, η καθοριστική παράμετρος είναι η σχέση και η αλληλεπίδραση του/της μαθητή/τριας με το περιβάλλον αυτό, η οποία μπορεί να ανατρέψει τη φιλοσοφία του σχεδιασμού και να διαψεύσει τις προσδοκίες των δημιουργών. Αυτός είναι και ο λόγος που θα έπρεπε να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη *λειτουργική* οπτική ενός μικρόκοσμου.

Πολύ κοντά σε αυτή τη λογική ο D. Tall (1989, 2002). ισχυρίζεται ότι πρέπει να σχεδιαστούν λογισμικά που να λειτουργήσουν ως *γένιοι οργανωτές (generic organizer)*, που μέσα από γραφικά περιβάλλοντα, να δίνουν την δυνατότητα στο χρήστη να κατασκευάσει γραφικές παραστάσεις, να τις χειριστεί επιλέγοντας σημεία ή κατάλληλες περιοχές καθώς και να τις μελετήσει αλλάζοντας τις παραμέτρους τους χρησιμοποιώντας κάθε φορά ως σημείο αναφοράς την *γνωστική ρίζα (cognitive root)*[8] που κρύβεται κάτω από μία έννοια. Η *γνωστική ρίζα* σχετίζεται με το αντικείμενο που διαπραγματευόμαστε κάθε φορά και για τον τρόπο που το αντιλαμβάνονται οι μαθητές/τριες. Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα μιλήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες για το θέμα αυτό.

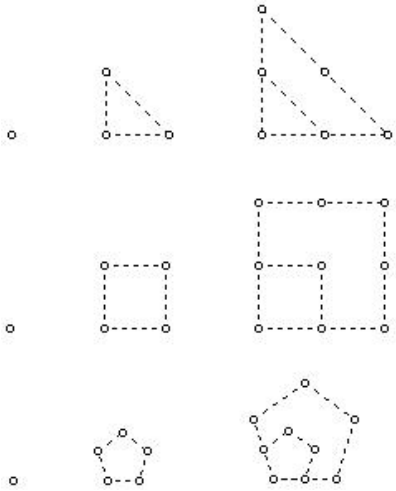
Όπως θα δούμε και στα παραδείγματα που έχουν αναπτυχθεί παρακάτω έχει δημιουργηθεί, κάθε φορά, ένα κατάλληλο περιβάλλον *(μικρόκοσμος)* που να ικανοποιεί τις προδιαγραφές της θεωρητικής ανάλυσης που προηγήθηκε. Δεν έχει τόσο σημασία το λογισμικό με το οποίο δημιουργείται το περιβάλλον αυτό, αλλά οι κανόνες, οι νόμοι και τα περιθώρια ελευθερίας που κάθε φορά το διέπουν. Για παράδειγμα στο *μικρόκοσμο* που δημιουργήθηκε για την εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου δίνεται η δυνατότητα της μεγέθυνσης σε μία περιοχή όσο θέλουμε μικρή γύρω από ένα σημείο της γραφικής παράστασης της επιλογής μας. Έχει όμως προβλεφθεί να είναι πάντοτε ορατή εκτός από τη

[8] Ο *γένιος οργανωτής (generic organizer)* είναι περιβάλλον ή μικρόκοσμος που επιτρέπει τον μαθητή να χειρίζεται παραδείγματα και αν αυτό είναι δυνατό αντιπαραδείγματα από συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και συστήματα από συναφείς έννοιες (Tall 1989, Tall 2002). Η *Γνωστική ρίζα (cognitive root)* είναι μία έννοια η οποία αποτελεί μία σημαντική γνωστική μονάδα που είναι ο πυρήνα γνώσης για τον μαθητή στο ξεκίνημα της διαδικασίας μάθησης. (Tall 1989, Tall, McGowen & DeMarois 2000, Tall 2002)

μεγέθυνση ολόκληρη η γραφική παράσταση της συνάρτησης γιατί δεν θα είχε νόημα να γίνεται μελέτη μίας τοπικής ιδιότητας χωρίς αυτή να παραμένει συνδεδεμένη με τη συνολική συμπεριφορά της συνάρτησης. Δηλαδή δεν θα είχε νόημα να εστιάζουμε σε ένα σημείο χωρίς να είναι ορατή η θέση του σημείου αυτού πάνω στη γραφική παράσταση. Αυτή ήταν η θεωρητική τοποθέτηση και ο *μικρόκοσμος* σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να την ικανοποιεί.

5. Ο ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΟΙ

Αν ανατρέξουμε στις ρίζες της Αριθμητικής και ακόμα περισσότερο της Θεωρίας Αριθμών θα βρούμε πλήθος παραδειγμάτων που συνδέουν τους αριθμούς και τις ιδιότητες τους με αντίστοιχους σχηματισμούς πραγματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, στην Αριθμητική των Πυθαγορείων, υπήρχαν οι τρίγωνοι, οι τετράγωνοι ή πεντάγωνοι αριθμοί που μπορούσαν να διαταχθούν σε τριγωνικό, τετράγωνο ή πεντάγωνο σχηματισμό, αντίστοιχα (σχήμα 11). Η παράσταση αυτών των αριθμών μπορεί να γινόταν με φυσικά αντικείμενα π.χ. βόλους ή σημεία αλλά και νοητικά. Ο πρωτογενής αυτός τρόπος προσέγγισης της Αριθμητικής που στα νεώτερα Μαθηματικά εξελίχθηκε στη Θεωρία Αριθμών, ήταν σαφώς *ενσαρκωμένος*. Ας μην ξεχνάμε ότι και αργότερα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη οι αριθμοί εξέφραζαν στην πραγματικότητα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων και οι αντίστοιχες σχέσεις και ιδιότητες των αριθμών προέκυπταν από σχέσεις μηκών τμημάτων ή εμβαδών σχημάτων.



Σχήμα 11: Τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι αριθμοί

Αντίστοιχα, στον Απειροστικό Λογισμό τα αρχικά παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο και τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι οι προσεγγιστικές – οριακές καταστάσεις (όριο), ο ρυθμός μεταβολής ποσοτήτων που μεταβάλλονται (διαφόριση), ο υπολογισμός εμβαδού και η αθροιστική αύξηση (ολοκλήρωση) καθώς και η σχέση των δύο τελευταίων (Θεμελιώδες Θεώρημα). Ο Αρχιμήδης παλαιότερα και οι Newton και Leibniz αργότερα, ανάμεσα σε πολλούς άλλους, απέβλεπαν, με τα φυσικά και νοητικά εργαλεία που διέθετε ο καθένας, να προσφέρουν μεθόδους υπολογισμών οριακών τιμών, εμβαδών και ρυθμών μεταβολής. Η αφετηρία του Απειροστικού Λογισμού είναι ο πραγματικός – φυσικός κόσμος όπου έννοιες όπως εμβαδόν, κίνηση – ταχύτητα, μεταβολή είναι οικείες. Το πέρασμα από τις πεπερασμένες στις άπειρες διαδικασίες που ιστορικά άργησε τόσο πολύ να πραγματοποιηθεί και διακρίνει τον Απειροστικό Λογισμό, οφείλεται στην ανάπτυξη του κατάλληλου συμβολισμού που ήταν ικανός να τις υποστηρίξει. Επομένως ο Λογισμός

φαίνεται να λειτουργεί και στον *ενσαρκωμένο* πραγματικό κόσμο αλλά και στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών*. Η εξέλιξη βέβαια στα νεώτερα χρόνια της Μαθηματικής Ανάλυσης παρείχε στον Απειροστικό Λογισμό το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο για να λειτουργήσει και στον *Αξιωματικό κόσμο*.

Η συνήθης σχολική πρακτική θέλει ο Λογισμός να κινείται κατά κύριο λόγο στον τρόπο σκέψης με *διεργασίες-έννοιες* με κύρια έμφαση στις *διεργασίες* ενώ η *ενσαρκωμένη* προσέγγιση περιορίζεται σε στατικές εικόνες χωρίς δυναμικό χειρισμό που χρησιμοποιούνται συνήθως στην εισαγωγή των εννοιών και του συμβολισμού. Είναι αλήθεια ότι μία εικόνα δεν αρκεί για να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές/τριες ενεργούν σε *ενσαρκωμένα* πλαίσια, χρειάζεται κάτι πολύ περισσότερο. Για παράδειγμα, το θεώρημα του «κριτηρίου παρεμβολής» παρουσιάζεται, στο σχολικό βιβλίο[9], χωρίς απόδειξη και συνοδεύεται με την εικόνα ενός συστήματος αξόνων που παρουσιάζει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης να εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο άλλες γραφικές παραστάσεις (σελ. 169-170). Η προσέγγιση του θεωρήματος ακροβατεί μεταξύ του *ενσαρκωμένου* πλαισίου και του πλαισίου των *διεργασιών-εννοιών* αφού αρκείται στην εποπτεία του σχήματος για να πείσει για την εγκυρότητα του και χρησιμοποιεί το συμβολισμό για την αυστηρή διατύπωση του. Αυτό που απουσιάζει είναι ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος ώστε οι μαθητές/τριες με κατάλληλες μεγεθύνσεις κοντά στο σημείο x_o να διαπιστώσουν μόνοι τους ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης παγιδεύεται από τις άλλες δύο και δεν υπάρχει άλλη επιλογή από το να έχουν και οι τρεις συναρτήσεις κοινό σημείο σύγκλισης. Στη συνέχεια, οι εφαρμογές του θεωρήματος που ακολουθούν είναι σαφώς διαδικαστικές π.χ. ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$. Το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές/τριες να υπερεκτιμούν σε τέτοιο βαθμό τη διαδικασία ώστε να πιστεύουν ότι αν για τρεις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_o και $\lim_{x\to x_o} h(x)\ne \lim_{x\to x_o} g(x)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_o} f(x)$.

Η εισαγωγή στις έννοιες του Απειροστικού θα έπρεπε να γίνεται με *ενσαρκωμένο* τρόπο και όχι με φορμαλιστικό. Οι έννοιες του ορίου, της παραγώγου ή του ολοκληρώματος είναι κενές νοήματος για τους/τις μαθητές/τριες αν δεν διαδεχθούν την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση μέσα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων. Από την

[9] Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου

άλλη μεριά οι προσεγγίσεις που στηρίζονται αποκλειστικά σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου ενδέχεται να κρύψουν μέσα από τη θεματολογία τους το νόημα των υποκείμενων Μαθηματικών. Για παράδειγμα η προσέγγιση ότι η ταχύτητα είναι η κλίση της γραφικής παράστασης διαστήματος – χρόνου και η επιτάχυνση η κλίση της γραφικής παράστασης ταχύτητα – χρόνου εστιάζεται περισσότερο σε έννοιες της κίνησης όπως ταχύτητα και επιτάχυνση κι όχι στη απλούστερη μαθηματική έννοια της κλίσης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης (D. Tall, 2002). Σύμφωνα με την άποψη αυτή η κεντρική ιδέα της *ενσαρκωμένης* προσέγγισης του Απειροστικού Λογισμού γίνεται μέσα από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων και τη δυνατότητα, όχι μόνο της απλής παρατήρησης της, αλλά και του χειρισμού της με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων και την έκφραση τους με συμβολικό τρόπο.

Για την ενσαρκωμένη προσέγγιση των μαθηματικών έχουν εισαχθεί οι όροι του *γένιου παραδείγματος (generic example,)* της *γνωστικής ρίζας (cognitive root)*, και του *γένιου οργανωτή (generic organizer).*

Το *γένιο παράδειγμα,* όπως είδαμε και σε προηγούμενη ενότητα, είναι μία ειδική περίπτωση, αντικείμενο, σχήμα κ.α. που επιλέγεται μέσω της παρατήρησης ως αντιπροσωπευτική για να αντιμετωπίσει μία συγκεκριμένη κατάσταση και μετά να τη γενικεύσει. Ο όρος *γένιο παράδειγμα* περικλείει και τις δύο διαστάσεις του ρόλου του εφόσον αποτελεί μία ειδική περίπτωση που χρησιμοποιείται για την πιστοποίηση της αλήθειας του γενικού συμπεράσματος (Tall, 2002). Το *γένιο παράδειγμα* δεν είναι ούτε πολύ ειδικό, ούτε πολύ γενικό και χρησιμοποιείται, αν και ειδική περίπτωση, ως αντιπροσωπευτικό δείγμα για την ερμηνεία γενικών καταστάσεων. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε ένα κανονικό πολύγωνο γενικά χρησιμοποιούμε ένα πεντάγωνο ή ένα εξάγωνο κι όχι ένα τρίγωνο ή ένα 20-γωνο. Αυτό βέβαια αποτελεί μόνο την αφετηρία πάνω στην οποία οικοδομούνται οι τυπικές έννοιες και οι μεταξύ τους σχέσεις. Όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.3 το *γένιο παράδειγμα* αποτελεί σημαντικό βήμα στη εξέλιξη τις αποδεικτικής διαδικασίας από χαμηλότερα σε υψηλότερα επίπεδα και στον *ενσαρκωμένο κόσμο* και στο κόσμο των *διεργασιών-εννοιών*.

Η *Γνωστική ρίζα (cognitive root)* είναι μία έννοια η οποία:

- Αποτελεί μία σημαντική γνωστική μονάδα που είναι πυρήνας γνώσης για τον μαθητή στο ξεκίνημα της διαδικασίας μάθησης.

- Επιτρέπει αρχική ανάπτυξη περισσότερο μέσω μιας στρατηγικής γνωστικής επέκτασης παρά μιας γνωστική αναδόμηση.
- Περιέχει την δυνατότητα της διατήρησης ενός μακρόχρονου νοήματος στις επακόλουθες εξελίξεις.
- Είναι αρκετά δυνατή ώστε να παραμένει χρήσιμη καθώς αναπτύσσεται η κατανόηση σε πιο προχωρημένα επίπεδα. (Tall 1989, Tall, McGowen & DeMarois 2000, Tall 2002)

Η *γνωστική ρίζα* είναι συνήθως μία *ενσαρκωμένη* ιδέα που έχει νόημα για τον/την μαθητή/τρια τη στιγμή που τη χρησιμοποιεί. Βέβαια, δεν είναι απαραίτητο η ιδέα αυτή να αναπτυχθεί και να αξιοποιηθεί στη μετέπειτα γνωστική ανάπτυξη, επειδή όμως είναι πλούσια σε νοήματα μπορεί να αποτελέσει το υπόβαθρο θεωριών που θα αναπτυχθούν αργότερα. Καθώς το γνωστικό επίπεδο ανεβαίνει οι *γνωστικές ρίζες* γίνονται πιο ευέλικτες, δηλαδή αποκτούν πιο σύνθετη δομή και παρέχουν περισσότερους και ισχυρότερους δεσμούς με τις έννοιες. Είναι πολύ σημαντικό οι γνωστικές ρίζες που χρησιμοποιούνται να έχουν την ευελιξία να μετασχηματίζονται καθώς ο/η μαθητής/τρια έρχεται αντιμέτωπος με νέες ιδέες. Όπως θα δούμε και στα παρακάτω παραδείγματα, μία *γνωστική ρίζα* για την έννοια της συνάρτησης αποτελεί η *μηχανή της συνάρτησης* που λειτουργεί ως ένα *κουτί εισόδου- εξόδου* ενώ η *γνωστική ρίζα* της παραγώγου είναι η *τοπική ευθύτητα*.

Ο *γένιος οργανωτής*, τέλος, είναι ένα περιβάλλον ή *μικρόκοσμος* που επιτρέπει στον/στην μαθητή/τρια να χειρίζεται παραδείγματα και αν αυτό είναι δυνατό αντιπαραδείγματα από συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες και συστήματα από συναφείς έννοιες (Tall 1989, Tall 2002).

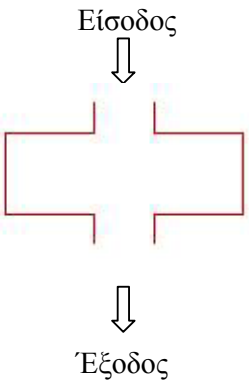
Σε δύο από τα παραδείγματα που ακολουθούν και σχετίζονται με την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων και την παράγωγο συνάρτησης έχουν σχεδιαστεί κατάλληλοι μικρόκοσμοι οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν ως *γενικοί οργανωτές* που στοχεύουν να διευκολύνουν τους μαθητές/τριες μέσα από τον χειρισμό γραφικών παραστάσεων να εξάγουν με *ενσαρκωμένο* τρόπο συμπεράσματα που σχετίζονται με τις παραπάνω μαθηματικές έννοιες.

6. ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

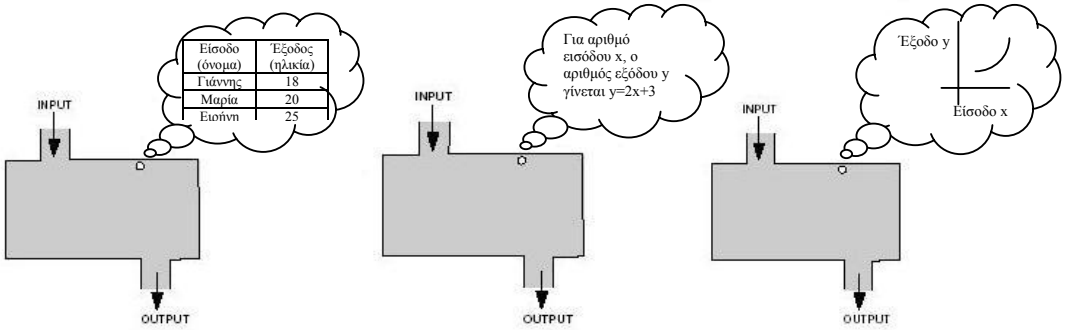
Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε παραδείγματα για τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζονται έννοιες του Απειροστικού Λογισμού σε καθένα από τους τρεις κόσμους των Μαθηματικών που περιγράψαμε παραπάνω: τον *ενσαρκωμένο κόσμο (embodied),* τον *κόσμο των διεργασιών-εννοιών (proceptual)* και τον *αξιωματικό κόσμο (axiomatic).* Τα παραδείγματα αυτά αναπτύχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συνεπή με το θεωρητικό πλαίσιο που προηγήθηκε.

6.1. Συνάρτηση – Σύνθεση συναρτήσεων

Σύμφωνα με τους Tall, McGowen, DeMarois (2000) τις προδιαγραφές της *γνωστικής ρίζας* για την έννοια της συνάρτησης τις συγκεντρώνει η *«μηχανή της συνάρτησης» (function machine)*. Η λειτουργία αυτού του επινοήματος είναι ίδια με αυτή μιας συνηθισμένης μηχανής με είσοδο και έξοδο κάτι σαν ένα κουτί *εισόδου-εξόδου (input-output box)*. Είναι ένα σύνηθες παράδειγμα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί ιδιαίτερα όταν απευθύνονται σε μαθητές του Γυμνασίου. Η αναπαράσταση, όπως φαίνεται στο σχήμα 12, οπτικοποιεί και τις δύο φύσεις της συνάρτησης: το *αντικείμενο* (το κουτί) αλλά και την *διεργασία* (η μηχανή).



Σχήμα 12

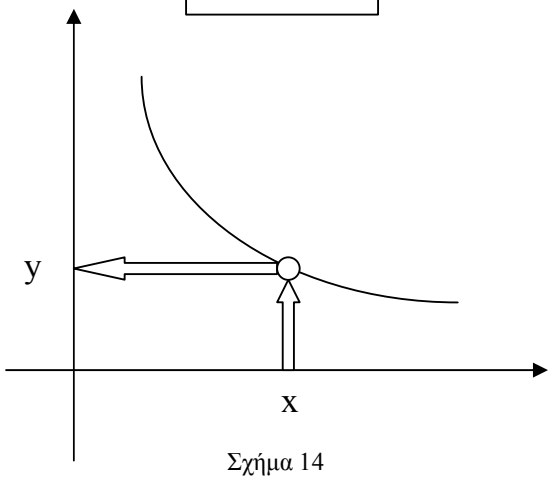


Σχήμα 13: Η μηχανή της συνάρτησης συνδέεται με τον πίνακα τιμών, τον τύπο και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (Tall,McGowen, DeMarois, 2000)

Το πλεονέκτημα είναι ότι οι άλλες αναπαραστάσεις της συνάρτησης, ως πίνακας, γραφική παράσταση, τύπος, διαδικασία κ.α., μπορούν πολύ καλά να αποδοθούν μέσα από ένα μηχανισμό εισόδου – εξόδου όπως φαίνεται και στο σχήμα 13.

Έχοντας ως αφετηρία τη *γνωστική* αυτή *ρίζα* της έννοιας της συνάρτησης μπορούμε να την επεκτείνουμε σε έναν αντίστοιχο μηχανισμό όπου το ρόλο της μηχανής θα τον παίζει αυτή τη φορά η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή της *γνωστικής ρίζας* όπου η αντιστοίχιση των τιμών x και y με τις τιμές εισόδου και εξόδου γίνεται τώρα πλέον μέσω του μηχανισμού της γραφικής παράστασης (σχήμα14). Δηλαδή η τιμή εισόδου (x) διέρχεται μέσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και δίνει την τιμή εξόδου (y):

Δηλαδή:



Σχήμα 14

Με τον τρόπο αυτό μπορούν να γίνουν κατανοητές, σε *ενσαρκωμένο* πλαίσιο, έννοιες και ιδιότητες της συνάρτησης, όπως για παράδειγμα το πεδίο ορισμού της ή το σύνολο τιμών, καθώς αυτά αναγνωρίζονται μέσα από τη γραφική παράσταση ως εκείνα τα τμήματα των αξόνων που μπορούν να λειτουργήσουν ως στοιχεία εισόδου ή εξόδου, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θα αναπτυχθούν παραδείγματα που σχετίζονται με την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων και χρησιμοποιούν τη *γνωστική ρίζα* της συνάρτησης ως μηχανής όπου το ρόλο της μηχανής τον παίζει η γραφική παράσταση.

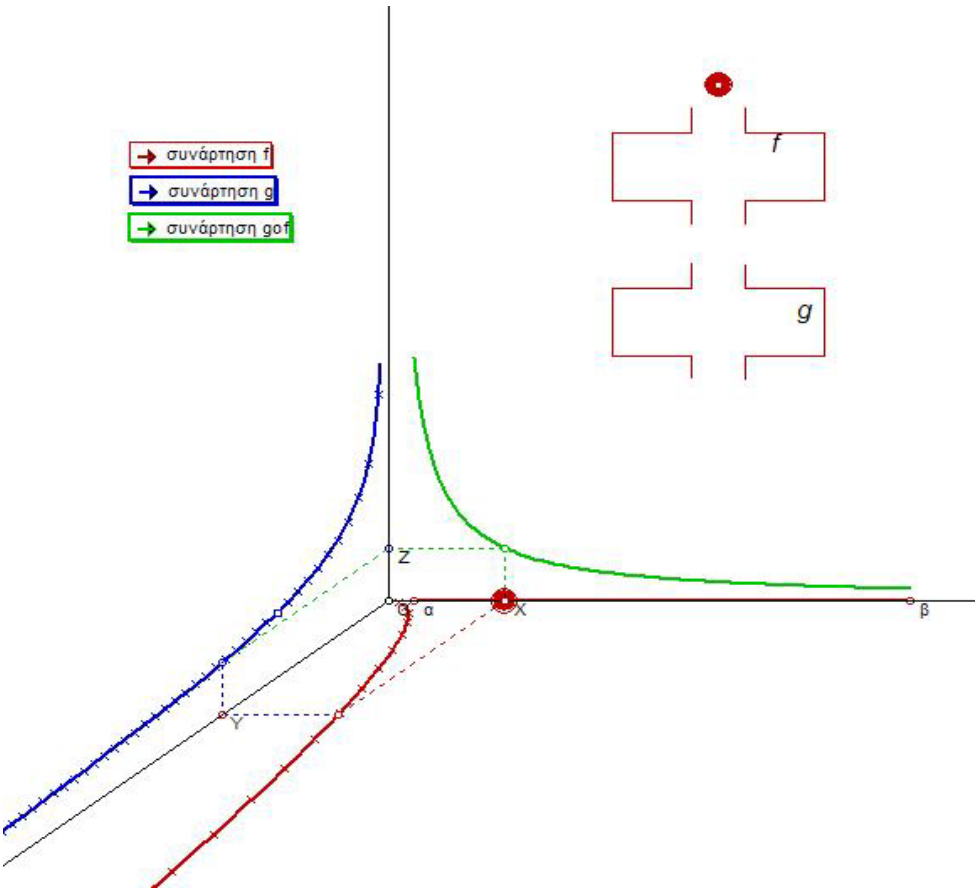
Η σύνθεση συναρτήσεων γίνεται εύκολα κατανοητή ως διαδικασία που δίνει τιμές κατά σημείο. Δηλαδή για το υπολογισμό $(g \circ f)(x)$ για συγκεκριμένο x έχουμε τη διαδικασία $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ που εύκολα σχηματοποιείται. Όταν όμως ο/η μαθητής/τρια καλείται να αντιμετωπίσει τη σύνθεση συναρτήσεων συνολικά τότε παγιδεύεται σε μία διεργασία υπολογισμών (πεδία ορισμού, τύποι) χωρίς να έχει συνείδηση των ενεργειών του/της και χωρίς να μπορεί να παρακολουθήσει τις πραγματικές σχέσεις και ιδιότητες που εμπλέκονται.

Για να σχηματοποιηθεί αυτός ο μηχανισμός με τέτοιο τρόπο ώστε οι συναρτήσεις που εμπλέκονται να αντιμετωπίζονται σαν ολόκληρες οντότητες σχεδιάστηκαν τρεις διαφορετικοί μικρόκοσμοι σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας οι οποίοι λειτουργούν ως *γένιος οργανωτής* που διευκολύνει με *ενσαρκωμένο* τρόπο την προσέγγιση της διεργασίας της σύνθεσης συναρτήσεων και της έννοιας της σύνθετης συνάρτησης.

1ος μικρόκοσμος: Οι τρεις συναρτήσεις με το σύστημα των αξόνων τους συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε ο άξονας των τεταγμένων της f να είναι ο άξονας των τετμημένων της g και οι άξονες των τεταγμένων της g και τετμημένων της f να είναι οι άξονες των τεταγμένων και τετμημένων της gof, αντίστοιχα. Για να επιτευχθεί αυτό οι τρεις άξονες που στην πραγματικότητα χρειάζονται τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων όπως φαίνεται και στο σχήμα 15.

Ο *γενικός* αυτός *οργανωτής* φαίνεται να ταιριάζει καλά με τη *γνωστική ρίζα* της συνάρτησης – γραφικής παράστασης ως *μηχανή εισόδου – εξόδου*. Το x διέρχεται μέσα από τη συνάρτηση f ως τιμή εισόδου και δίνει στην έξοδο την τιμή y η οποία με τη σειρά της διέρχεται ως νέα τιμή εισόδου στη g και δίνει στην έξοδο την τιμή z. Η σύνθεση των συναρτήσεων μπορεί τώρα πλέον να αντιμετωπιστεί «ολιστικά», δηλαδή το πεδίο ορισμού της f μετασχηματίζεται σε σύνολο τιμών της f το οποίο με τη σειρά του τέμνεται με το πεδίο ορισμού της g και το αποτέλεσμα της τομής λειτουργεί ως νέο πεδίο ορισμού της g και δίνει το σύνολο τιμών της g το οποίο αποτελεί με τη σειρά του και το σύνολο τιμών της gof. Με την οπτικοποίηση αυτή γίνονται αμέσως ορατές όλες οι παραπάνω διαδικασίες καθώς και το αποτέλεσμα της σύνθεσης. Το μόνο μειονέκτημα του μικρόκοσμου αυτού είναι ότι αποτυπώνει τις δύο- διαστάσεων γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων σε τριών-διαστάσεων απεικόνιση, με κίνδυνο να δημιουργηθεί σύγχυση για το ποιος είναι ο άξονας των τετμημένων και ποιος των τεταγμένων, για την καθεμία από τις συναρτήσεις.

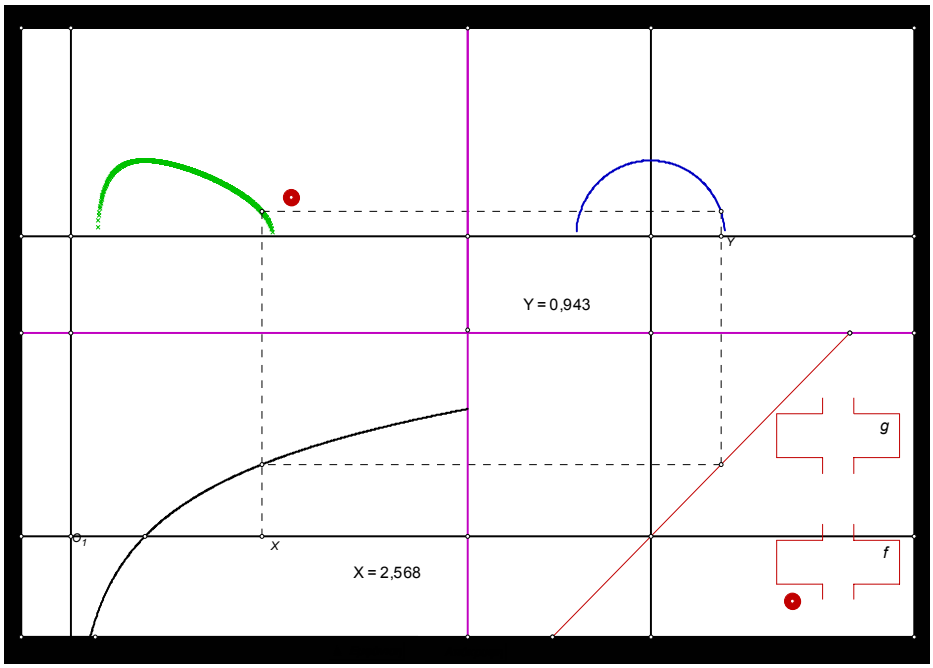
Για να αποφευχθεί αυτός ο προβληματισμός έχει προβλεφθεί να μπορούν να στρέφονται οι άξονες με τέτοιο τρόπο ώστε να έρχεται κάθε φορά σε πρώτο πλάνο η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει.



Σχήμα 15: Σύνθεση της $f(x)=x^2$ με την $g(x)=1/x$

2ος μικρόκοσμος: Σε τέσσερα ξεχωριστά δύο διαστάσεων συστήματα αξόνων παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις των f, g και fog καθώς και η ευθεία y=x (σχήμα 16). Το x διέρχεται μέσα από τη συνάρτηση f και δίνει ως αποτέλεσμα το y=f(x). Αυτό με τη σειρά του πρέπει να μετατραπεί, από τιμή εξόδου της f, σε μία νέα τιμή εισόδου για τη g. Το μηχανισμό αυτό μετατροπής των τιμών εξόδου σε τιμές εισόδου τον έχει αναλάβει η γραφική παράσταση της ευθείας y=x που βρίσκεται στο κάτω δεξιά πλαίσιο. Η ευθεία αυτή έχει σημεία με συντεταγμένες (α,α). Η τιμή y=g(x) μεταφέρεται με ευθεία παράλληλη στο άξονα xx΄ μέχρι να τμήσει την y=x. Στο σημείο τομής η ευθεία στρέφεται κατά 90° και τέμνει το άξονα xx΄ της γραφικής παράστασης της f στο σημείο y και γίνεται η τιμή

εισόδου της συνάρτησης f. Μέσα από αυτή τη διαδικασία η τιμή εξόδου y μετατρέπεται σε τιμή εισόδου. Στη συνέχεια, η τιμή εξόδου της συνάρτησης f μεταφέρεται στο πλαίσιο πάνω αριστερά όπου συνδυάζεται με την αρχική τιμή εισόδου της g και δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης fog.



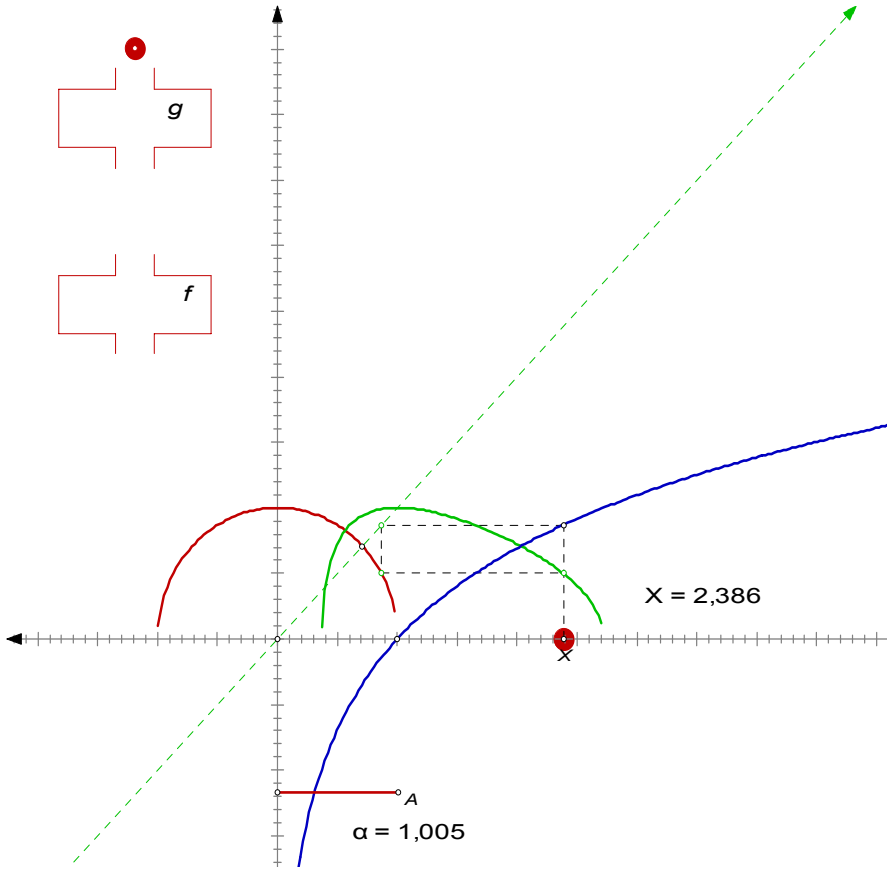
Σχήμα 16: Σύνθεση της g(x)=lnx με την $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Ο μικρόκοσμος αυτός σε σχέση με τον προηγούμενο έχει το πλεονέκτημα της καλύτερης εποπτείας των γραφικών παραστάσεων στις δύο διαστάσεων αλλά έχει τον ιδιαιτερότητα στη διαδικασία να εμπλέκεται και η διχοτόμος, για να λειτουργήσει ως μετατροπέας τιμών εξόδου σε τιμές εισόδου. Αυτός ο μηχανισμός μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς για να διαχωρίσει τον διαφορετικό ρόλο των τιμών.

3ος μικρόκοσμος: Ο μικρόκοσμος αυτός δεν διαφέρει και πολύ από τον προηγούμενο παρά μόνο στο γεγονός ότι και οι τρεις γραφικές παραστάσεις των f, g και fog καθώς και της y=x παριστάνονται στο ίδιο σύστημα αξόνων, σχήμα 17.

Όπως και στον προηγούμενο μικρόκοσμο έτσι και εδώ είναι απαραίτητη η χρήση της διχοτόμου ως ενδιάμεσο στάδιο για το πέρασμα από τη g στην f. Επιπλέον, η τοποθέτηση όλων των γραφικών παραστάσεων σε ένα σύστημα αξόνων δημιουργεί μία δυσδιάκριτη

εικόνα και ενδέχεται να δημιουργήσει παρανοήσεις. Ο μικρόκοσμος αυτός προσφέρεται για συνθέσεις της μορφής: $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{ν φορες}}$.



Σχήμα 17: Σύνθεση της g(x)=lnx με την $f(x) = \sqrt{\alpha - x^2}$, όπου το α έχει ρυθμιστεί ώστε να παίρνει θετικές τιμές.

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις η προσέγγιση της σύνθεσης συναρτήσεων γίνεται με *ενσαρκωμένο* τρόπο. Αν περάσουμε στον τρόπο των *διεργασιών-εννοιών* τότε όλος ο παραπάνω μηχανισμός περιγράφεται με την βοήθεια του συμβολισμού. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση της συνάρτησης f με την g προϋποθέτει την εύρεση των πεδίων ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Στη συνέχεια για να ορίζεται η gof πρέπει να μην είναι κενό το σύνολο $D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ το οποίο θα αποτελέσει το πεδίο ορισμού της gof η οποία έχει τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$. Η διαδικασία αυτή γίνεται πολλές φορές μηχανικά

χωρίς να διακρίνονται οι υποκείμενες έννοιες και μαθηματικές προτάσεις σε αντίθεση με την αντίστοιχη προσέγγιση σε *αξιωματικό* πλαίσιο όπου όλες οι ενέργειες είναι πλήρως καθορισμένες και τεκμηριωμένες σύμφωνα με τη αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία των Μαθηματικών.

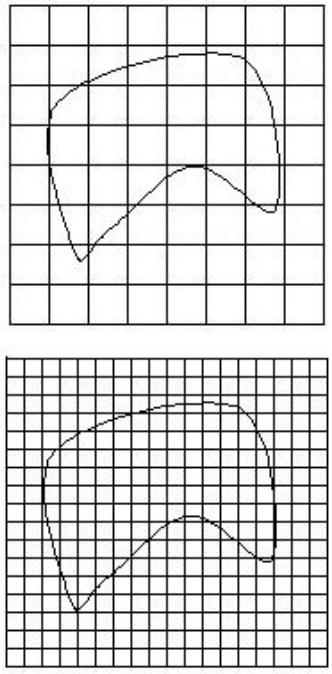
6.2. Όριο

Σχετικά με την έννοια του ορίου οι ερευνητές έχουν εντοπίσει ένα πλήθος διαφορετικών δυσκολιών και εμποδίων ικανές να παρεμποδίσουν τη διαδικασία της κατασκευής της. Τέτοιες δυσκολίες μπορεί να είναι επιστημολογικής φύσης που οφείλονται σε ενδογενής λόγους που αφορούν τα μαθηματικά γενικά, διδακτικής φύσης που οφείλονται στις διδακτικές μεθόδους που δεν είναι πάντοτε αποτελεσματικές, γνωστικής φύσης που οφείλονται στις αφαιρέσεις και τις διαδικασίες εννοιολογικοποίησης καθώς και μεταγνωστικής φύσης που αφορούν τις απόψεις που έχουν οι μαθητές/τριες για τα μαθηματικά γενικά. Σε αυτές τις παραμέτρους έρχονται να προστεθούν και οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του ορίου και του απείρου. Έρευνες των Grugnetti, Riza κ.ά.. (2002, 2003) έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές/τριες ήδη από μικρή ηλικία και από την καθημερινή τους εμπειρία έχουν σχηματίσει μία διαισθητική εικόνα για το σημαίνει άπειρη διαδικασία και όριο. Για παράδειγμα τα παιδιά μπορούν σχετικά εύκολα να κατανοήσουν μία διαδικασία που απειρίζεται (όπως η γεωμετρική πρόοδο με λόγο μεγαλύτερο της μονάδας) αλλά δυσκολεύονται να καταλάβουν τη σύγκλιση σε αριθμό ή τη μηδενική ακολουθία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών/τριών θεωρεί ότι ο όρος «όριο» σχετίζεται με την έννοια του πεπερασμένου στο χρόνο και αυτό τους οδηγεί στην άποψη ότι το όριο είναι ακριβώς το αντίθετο του «απείρου». Ο τρόπος όμως που αντιμετωπίζονται οι έννοιες αυτές στα σχολικά Αναλυτικά Προγράμματα δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη τις προϋπάρχουσες αυτές απόψεις των παιδιών.

Καταρχήν η έννοια του ορίου αντιμετωπίζεται διδακτικά στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου[10] και ο τρόπος προσέγγισης του είναι κατά κύριο λόγο διαδικαστικός με έμφαση στον υπολογισμό ορίων και μετέπειτα αξιοποίηση του σε άλλες έννοιες όπως αυτή της παραγώγου. Στη προηγούμενη μαθηματική εκπαίδευση από το Δημοτικό μέχρι το Γυμνάσιο οι άπειρες διαδικασίες και τα μη ακριβή αποτελέσματα αποτελούν «απαγορευμένο»

[10] Ειδικά στο υπάρχον Ελληνικό Πρόγραμμα Σπουδών αναφέρεται στη Β΄ Λυκείου και μελετάται στη Γ΄ Λυκείου

αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό του εμβαδού επιφανειών αντιμετωπίζονται σχήματα για τα οποία ή έχουμε έτοιμους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού (τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλος κ.α.) ή είναι σχήματα που προέρχονται από σύνθεση γνωστών σχημάτων (ένα τετράγωνο που του έχει αφαιρεθεί ένας κύκλος). Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/τριες μαθαίνουν να θεωρούν τα Μαθηματικά σαν μία Επιστήμη όπου τα πάντα μπορούν να υπολογιστούν με κατάλληλους και γνωστούς τύπους και το αποτέλεσμα του υπολογισμού να είναι ένας συγκεκριμένος και πολλές φορές ακέραιος αριθμός. Αυτή όμως η αντιμετώπιση απομακρύνει τα Μαθηματικά από τον πραγματικό κόσμο όπου τίποτα δεν είναι φτιαγμένο ακριβώς με την μορφή των επιπέδων ή στερεών σχημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με προσεγγιστικό τρόπο. Στην περίπτωση του εμβαδού που αναφερόμαστε θα μπορούσαν κάλλιστα οι μαθητές/τριες να εμπλακούν σε υπολογισμούς επιφανειών «περίεργων» σχημάτων με τη χρήση ενός πλέγματος με ρυθμιζόμενο μοναδιαίο τετράγωνο (σχήμα 18). Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαν προσεγγιστικά να υπολογίσουν οποιοδήποτε εμβαδόν και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα να εμπλακούν με *ενσαρκωμένο* τρόπο σε διεργασίες που θα μπορέσουν αργότερα να διευρυνθούν στην έννοια του ορίου και του απείρου.



Σχήμα 18

Σύμφωνα με τους Grugnetti, Riza κ.ά. (2002, 2003), είναι απαραίτητη η μακρόχρονη κατασκευή της έννοιας του ορίου με σημείο αφετηρίας τις πρωτογενής εμπειρίες και τις διαισθητικές αντιλήψεις των παιδιών. Κατά κύριο λόγο πρέπει να επικεντρωθούμε στις ευνοϊκές, για αυτή τη χρήση, διαισθητικές αντιλήψεις για την έννοια της προσέγγισης. Στα παραδείγματα που ακολουθούν αντιμετωπίζονται δύο προβλήματα υπολογισμού ορίου μέσα από τα τρία διαφορετικά πλαίσια το *ενσαρκωμένο*, το πλαίσιο των *διεργασιών-εννοιών* και το *αξιωματικό*. Στο πρώτο πλαίσιο η προσέγγιση του ορίου είναι τέτοια που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί σε σαφώς μικρότερες τάξεις από αυτές που συνηθίζεται να διδάσκεται το όριο. Το ερώτημα που αναδύεται αφορά τη σκοπιμότητα διερεύνησης δυνατοτήτων ένταξης «εναλλακτικών προσεγγίσεων» εννοιών της Ανάλυσης στο Γυμνάσιο ή ακόμα και το Δημοτικό. Οι προσεγγίσεις αυτές δεν μπορούν παρά να έχουν χαρακτήρα

ενσάρκωσης και να πραγματοποιούνται σε ένα περιβάλλον που να ενεργοποιεί τις αισθήσεις του/της μαθητή/τριας ενώ ταυτόχρονα θα δημιουργεί και κατάλληλες προϋποθέσεις για αναστοχασμό και αφαίρεση.

Παράδειγμα 1

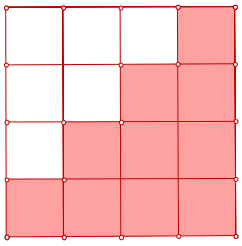
Η αφορμή για το παράδειγμα αυτό πάρθηκε από το βιβλίο του Serge Lang, *Μαθηματικές συναντήσεις*, όπου, προκειμένου να υπολογίσει τον όγκο της σφαίρας, έρχεται αντιμέτωπος με τον υπολογισμό της προσέγγισης του αθροίσματος: $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$, όταν το n γίνεται όλο και μεγαλύτερο (σελ.115). Οι μαθητές/τριες στους οποίους απευθύνεται είναι περίπου στο επίπεδο της Γ΄ Γυμνασίου, γεγονός που αποκλείει τη δυνατότητα χρήσης θεωρίας ορίων. Αναγκάζεται, επομένως να υιοθετήσει μία προσέγγιση που να μπορεί να προσαρμοστεί στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών/τριών του.

Παρακάτω θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε διάφορες προσεγγίσεις του προβλήματος αυτού και να ερμηνεύσουμε το γνωστικό στυλ που αναπτύσσεται από τους μαθητές/τριες σε κάθε μία από αυτές.

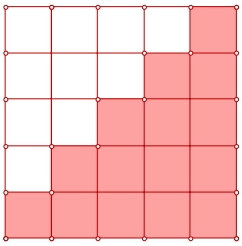
Ενσωματωμένος κόσμος (embodied world)

Δημιουργείται η παρακάτω γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος:

Το γινόμενο $\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές $\frac{1}{n}$ και $\frac{k}{n}$. Αν χωρίσουμε τις πλευρές ενός τετραγώνου πλευράς 1 σε n ίσα μέρη τότε κάθε μικρό τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος $\frac{1}{n}$ και το άθροισμα $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους, όπως φαίνεται στα σχήματα 19α, 19β και 19γ για n ίσο με 4, 5 και 20, αντίστοιχα:

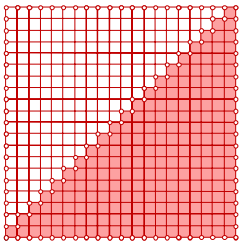


Για n=4
Σχήμα 19α



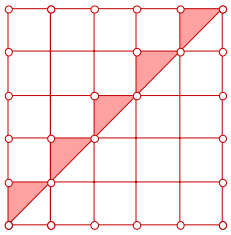
Για n=5
Σχήμα 19β

. . .



Για n=20
Σχήμα 19γ

Βλέπουμε ότι καθώς το n αυξάνει, η επιφάνεια προσεγγίζει το μισό της επιφάνειας του τετραγώνου, άρα η προσέγγιση του αθροίσματος $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$, όταν το n γίνεται όλο και μεγαλύτερο είναι $\frac{1}{2}$.


Σχήμα 20

Μπορούμε, επίσης, να το δούμε και λίγο διαφορετικά. Σε καθένα από αυτά τα σχήματα το εμβαδόν είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ (το μισό του τετραγώνου) προσαυξημένο κατά το εμβαδόν του χρωματισμένου τμήματος που βρίσκεται πάνω από τη διαγώνιο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 20. Το καθένα από τα n ορθογώνια τρίγωνα που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο έχει εμβαδόν $E_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. Επομένως, το συνολικό εμβαδόν είναι $\frac{1}{2}+n\cdot E_n$ και καθώς το n γίνεται όλο και μεγαλύτερο, το E_n γίνεται όλο και μικρότερο και προσεγγίζει το 0. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν προσεγγίζει την τιμή $\frac{1}{2}$.

Ο συμβολισμός En και οι αλγεβρικές παραστάσεις που υπολογίζουν το εμβαδόν, στις παραπάνω μαθηματικές εκφράσεις, έχουν υιοθετηθεί για λόγους απλούστευσης της περιγραφής και δεν έχουν κανένα ρόλο με τη διαδικασία. Ο προσανατολισμός της προσέγγισης είναι κατά κύριο λόγο εποπτικός και σε καμία περίπτωση δε στηρίζεται στη συμβολική διατύπωση και επεξεργασία του προβλήματος.

Η προσέγγιση που περιγράψαμε ενεργεί στον *ενσαρκωμένο κόσμο* και η γεωμετρική κατασκευή[11] λειτουργεί ως φυσικό αντικείμενο του γύρω κόσμου που το αντιλαμβάνεται ο/η μαθητής/τρια μέσω των αισθήσεων του/της. Η ενεργοποίηση της σκέψης που ακολουθεί και η προσπάθεια σύνδεσης με υπάρχουσες έννοιες και ενέργειες καθώς και στοχασμός πάνω στις ενέργειες αυτές οδηγούν το/τη μαθητή/τρια στην αντίληψη ενός *ενσαρκωμένου αντικειμένου* που στο σημείο αυτό είναι η έννοια της προσέγγισης. Η επεξεργασία του προβλήματος έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθητές/τριες να έρθουν σε επαφή με διαδικασίες προσέγγισης, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό και το συμβολισμό του ορίου.

[11]Αντίστοιχη χρησιμοποιήθηκε και από το Serge Lang

Ο κόσμος των Διεργασιών-εννοιών (proseptual world)

Το ζητούμενο είναι η εύρεση του ορίου $\lim_{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+...+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right)$ ή ισοδύναμα του $\lim_{n}\frac{1+2+...+n}{n^2}$ που είναι ίσο με $\lim_{n}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ Στο σημείο αυτό η απόδειξη έχει τα χαρακτηριστικά του κόσμου των *διεργασιών-εννοιών*. Γίνεται χρήση του κατάλληλου συμβολισμού που αναφέρεται και στη διεργασία του υπολογισμού του ορίου αλλά και στην τιμή του ορίου, πρόκειται δηλαδή για τη *διεργασία-έννοια* του ορίου.

Το άθροισμα 1+2+…+n αντικαθίσταται από το ίσο του $\frac{n(n+1)}{2}$, που θεωρείται ήδη γνωστό ή υπολογίζεται με διαδικαστικό τρόπο με κάποιο υπολογιστικό τέχνασμα ή κάνοντας χρήση του αντίστοιχου τύπου της αριθμητικής προόδου. Σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο είναι να βρεθεί η αντίστοιχη παράσταση που θα αντικαταστήσει το άθροισμα (*διεργασία/έννοια*) για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ορίου. Κατά τη διάρκεια της διεργασίας αυτής γίνεται μηχανική χρήση των ιδιοτήτων και των πράξεων του ορίου, όπως, για παράδειγμα, το $\lim_{n}\frac{1}{n}=0$ χρησιμοποιείται ως αυτονόητο, χωρίς αιτιολόγηση.

Στη προσέγγιση αυτή οι ενέργειες του/της μαθητή/τριας πραγματοποιούνται στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών*, όπου δίνεται έμφαση στους υπολογισμούς αλλά και στη διαχείριση εννοιών. Η χρήση των αριθμητικών και αλγεβρικών συμβόλων διευκολύνουν τις ενέργειες που πραγματοποιούνται και εξασφαλίζουν την εγκυρότητα τους. Λειτουργούν, ως συνδετικός κρίκος μεταξύ των *διεργασιών* και των *εννοιών*. Η προσέγγιση αυτή υπερτερεί, σαφώς σε ευελιξία από την προηγούμενη και απαιτεί πιο πολύπλοκες νοητικές διεργασίες. Αυτή τη προσέγγιση του ορίου είναι που κατά κανόνα υιοθετούμε στη διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο. Αυτό όμως δε μας εμποδίζει να εμπλέξουμε τους/τις μαθητές/τριες σε προσεγγιστικές διαδικασίες στο Γυμνάσιο, αρκεί να γίνει με *ενσαρκωμένο* τρόπο και να μη δημιουργήσει εμπόδια στην εξέλιξη τους σε πιο εκλεπτυσμένα επίπεδα μαθηματικής σκέψης. Αυτό ακριβώς λήφθηκε υπόψη στο σχεδιασμό του παραδείγματος αυτού. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην πρώτη προσέγγιση οι μαθητές/τριες καταλήγουν διαισθητικά στην ίδια ανάλυση που καταλήγουν και με τις πράξεις στη δεύτερη

προσέγγιση, στο άθροισμα, δηλαδή, του $\frac{1}{2}$ με μία μηδενική ακολουθία που περιγράφεται με τη μορφή του εμβαδού που γίνεται όλο και μικρότερο καθώς το n γίνεται όλο και μεγαλύτερο.

Αξιωματικός κόσμος (axiomatic world)

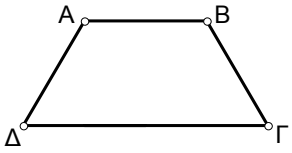
Στην περίπτωση αυτή γίνεται υπολογισμός του ορίου $\lim_{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+...+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\right)$ με χρήση των αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών καθώς και του τυπικού ορισμού του ορίου ακολουθίας και των ιδιοτήτων του. Δηλαδή, γίνεται με επαγωγή η απόδειξη του τύπου $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ για κάθε μη μηδενικό φυσικό αριθμό n, υπολογίζεται το όριο $\lim_{n}\left(\frac{1}{n}\right)$ με τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας και τέλος με εφαρμογή των κατάλληλων ιδιοτήτων: $\lim_{n}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n}\left(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}\right)=\lim_{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)$ υπολογίζεται το ζητούμενο όριο. Η εγκυρότητα της *αξιωματικής* αυτής απόδειξης έγκειται πρωτίστως στην αξιοπιστία του αξιωματικού συστήματος και δευτερευόντως στην αξιοπιστία των διεργασιών και των εννοιών που εμπλέκονται. Ο/Η μαθητής/τρια όταν λειτουργεί στον *αξιωματικό κόσμο* έχει συνείδηση των κανόνων (αξιώματα, θεωρήματα, προτάσεις) και με λογικές συνεπαγωγές οδηγείται στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Το πέρασμα στον κόσμο αυτό γίνεται στις μαθηματικές σπουδές μετά τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και είναι το σημείο ακριβώς που οι φοιτητές φαίνεται να αντιμετωπίζουν τη μεγαλύτερη δυσκολία.

Παράδειγμα 2

Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του άπειρου αθροίσματος: $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+...$

Ενσαρκωμένος κόσμος (embodied world)

Επιλέγεται το σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ με τη μικρή βάση ίση με τις ίσες πλευρές και οξείες γωνίες ίσες με 60°, όπως φαίνεται στο σχήμα 21.



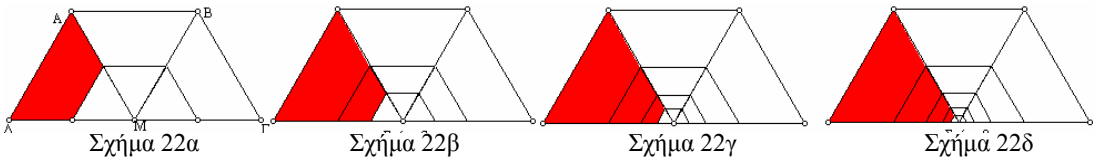
Σχήμα 21

Θεωρούμε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσο

με 1 τ.μ., το διαιρούμε σε τέσσερα ίσα μέρη και επιλέγουμε το ένα από αυτά. Η διαίρεση γίνεται θεωρώντας το μέσο Μ της ΔΓ και τα μέσα των ΑΜ, ΒΜ, ΔΜ και ΓΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα 22α. Το χρωματισμένο τμήμα είναι ίσο με $\frac{1}{4}$ τ.μ. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο τραπέζιο που σχηματίζεται στο εσωτερικό του αρχικού και είναι όμοιο με αυτό κι έχουμε $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$, σχήμα 22β. Όμοια με διαδοχικά βήματα έχουμε τα σχήματα 22γ και 22δ, που αντιστοιχούν στα αθροίσματα:

$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3$ και $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4$, αντίστοιχα.

Πολύ σύντομα γίνεται φανερό, από το σχήμα, ότι το άθροισμα προσεγγίζει το $\frac{1}{3}$ του τραπεζίου. Άρα $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{1}{3}$



Σχήμα 22α Σχήμα 22β Σχήμα 22γ Σχήμα 22δ

Κόσμος των διεργασιών-εννοιών (proseptual world)

Το ζητούμενο άθροισμα απείρων όρων υπολογίζεται με τον αντίστοιχο τύπο της Άλγεβρας $S=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}, |\lambda|<1$ για $\alpha_1=\frac{1}{4}$ και $\lambda=\frac{1}{4}$. Επομένως $S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$

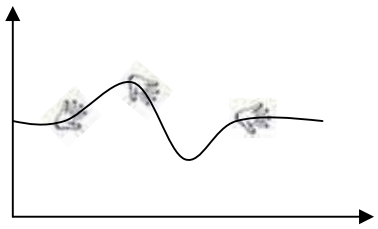
Αξιωματικός κόσμος (axiomatic world)

Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του ορίου $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa}$ γίνεται με χρήση του ορισμού της σύγκλισης σειράς και των ιδιοτήτων των ορίων, οι οποίες προκύπτουν από τα

αξιώματα του σώματος των πραγματικών αριθμών και ιδιαίτερα του αξιώματος της πληρότητας.

6.3. Παράγωγος

Η βασική ιδέα για την ενσαρκωμένη προσέγγιση της παραγώγου είναι η *τοπική ευθύτητα (local straightness)* (Tall, 2002). Αυτή αποτελεί και τη *γνωστική ρίζα* της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μία τιμή του πεδίου ορισμού της και εστιαστεί η γραφική της παράσταση πολύ κοντά στο σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή, τότε δίνει την εντύπωση της ευθείας γραμμής. Την ίδια αντίληψη έχουν και τα παιδιά όταν προσπαθώντας να περιγράψουν μία γραφικής παράσταση τοποθετούν την παλάμη τους τεντωμένη πάνω στην καμπύλη και την ακολουθούν ακολουθώντας στην πραγματικότητα την πορεία της εφαπτομένης (Σχήμα 23). Με τον τρόπο αυτό καθώς ο/η μαθητής/τρια παρατηρεί τη γραφική παράσταση σαν σύνολο εξάγει συμπεράσματα για την κλίση της τοπικά.



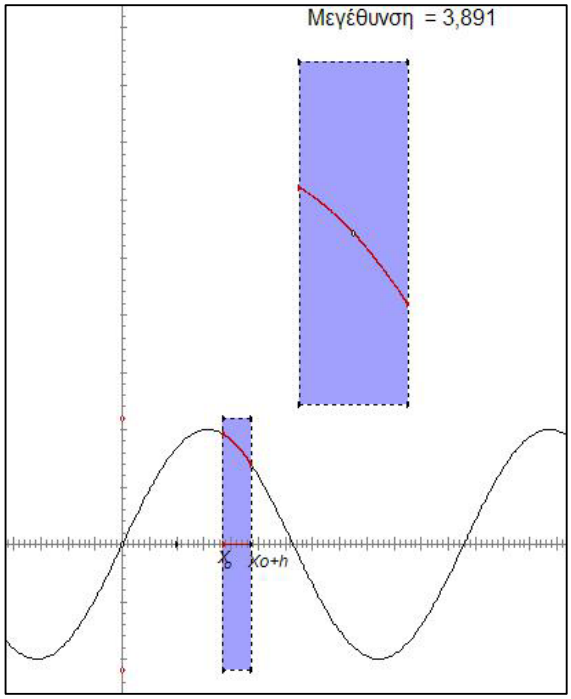
Σχήμα 23

Η *τοπική γραμμικότητα (local linearity)* είναι διαφορετική από την *τοπική ευθύτητα* αφού αποτελεί την συμβολική γραμμική προσέγγιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε ένα σημείο της $A(x_o,f(x_o))$. Πρόκειται για το μαθηματικός τύπος της εφαπτομένης που προκύπτει από την τέμνουσα της γραφικής παράστασης στα σημεία $A(x_o,f(x_o))$ και $B(x_o+h,f(x_o+h))$ όταν το h τείνει στο 0. Στην πραγματικότητα ενώ η *τοπική ευθύτητα* κινείται στο *ενσαρκωμένο* επίπεδο, η *τοπική γραμμικότητα* κινείται στο επίπεδο των *διεργασιών-εννοιών*. Οι δύο προσεγγίσεις είναι πολύ καλά συνδεδεμένες έτσι ώστε η πρώτη να οδηγείται με φυσιολογικό τρόπο στη δεύτερη και οι δύο, αν αυτό είναι απαραίτητο, να τεκμηριώνονται με αυστηρό τρόπο στο *αξιωματικό* επίπεδο.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένας *μικρόκοσμος* που αναπτύχθηκε σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Ο μικρόκοσμος αυτός σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να λειτουργήσει ως *γένιος οργανωτής*. Αυτό που επιδιώκει είναι να διευκολύνει τους/τις μαθητές/τριες να περάσουν από την *τοπική ευθύτητα* στην *τοπική γραμμικότητα* και να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο. Στην πραγματικότητα

επιχειρείται μέσα από τη λειτουργία σε *ενσαρκωμένο* περιβάλλον να γίνει με ομαλό τρόπο το πέρασμα, από τον *ενσαρκωμένο* κόσμο, στον κόσμο των *διεργασιών-εννοιών*.

Ο *μικρόκοσμος* αυτός αποτελείται από ένα κατάλληλα διαμορφωμένο σύστημα αξόνων στο οποίο είναι σχεδιασμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου (σχήμα 24). Ο/Η μαθητής/τρια μπορεί να επιλέξει κάθε φορά ένα σημείο x_o και το πλάτος h του διαστήματος [x_o, x_o+ h]. Το τμήμα της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό μεγεθύνεται κατάλληλα σε ξεχωριστό παράθυρο. Με τον τρόπο αυτό είναι ταυτόχρονα ορατή ολόκληρη η γραφική παράσταση (ολική εικόνα) καθώς και το μικρό τμήμα που μελετάμε κάθε φορά (τοπική εικόνα).

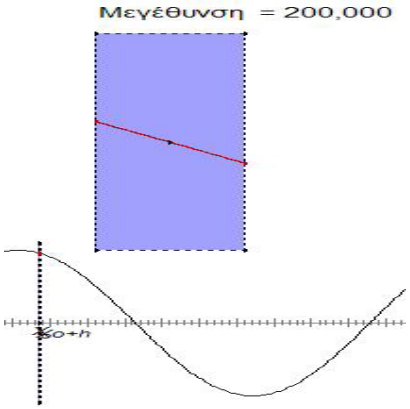


Σχήμα 24: Η γραφική παράσταση της f(x)=ημx. Στο πλαίσιο διακρί-νεται η μεγέθυνση που αντιστοιχεί στο διάστημα [x_o,

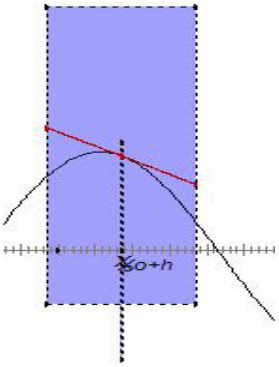
Βασική παράμετρος στο σχεδιασμό του περιβάλλοντος αυτού ήταν η τοπική ιδιότητα να είναι πάντοτε ορατή σε σχέση με τη ολική εικόνα της συνάρτησης, ώστε να μπορούμε να παρατηρούμε το μερικό που είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο διάστημα [x_o,x_o+h], αλλά να εξάγουμε συμπεράσματα για το γενικό που είναι η συνάρτηση συνολικά.

Όταν, με κατάλληλο χειρισμό, το h γίνει πολύ μικρό τότε το πλάτος του διαστήματος [x_o, x_o+ h] γίνεται ελάχιστο και το αντίστοιχο τμήμα της γραφικής παράστασης έτσι όπως φαίνεται στο σχήμα 25α είναι «σχεδόν» ευθεία γραμμή. Με τον τρόπο αυτό προσεγγίζεται η *ενσαρκωμένη* έννοια της *τοπικής ευθύτητας*. Αν μάλιστα σταλεί η «υποτιθέμενη» αυτή

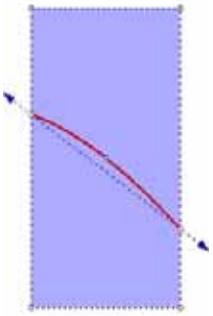
ευθεία στη γραφική παράσταση παραπέμπει σε μία σχέση αντίστοιχη με αυτήν που έχει ο κύκλος με την εφαπτομένη του (σχήμα 25β). Δεν είναι η αυτή η κατάλληλη στιγμή να ορίσουμε την εφαπτομένη, πρέπει πρώτα να διερευνηθεί ποια είναι αυτή η ευθεία και από πού προέρχεται. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην οριακή αυτή θέση η ευθεία αυτή είναι η ίδια με αυτήν που διέρχεται από τα σημεία $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x_o+h, f(x_o+h))$. Αν σχεδιαστεί η ευθεία ΑΒ είναι ορατό ότι αποκλίνει από το αντίστοιχο τμήμα της γραφικής παράστασης καθώς το h μεγαλώνει (σχήμα 25γ).



Σχήμα 25α

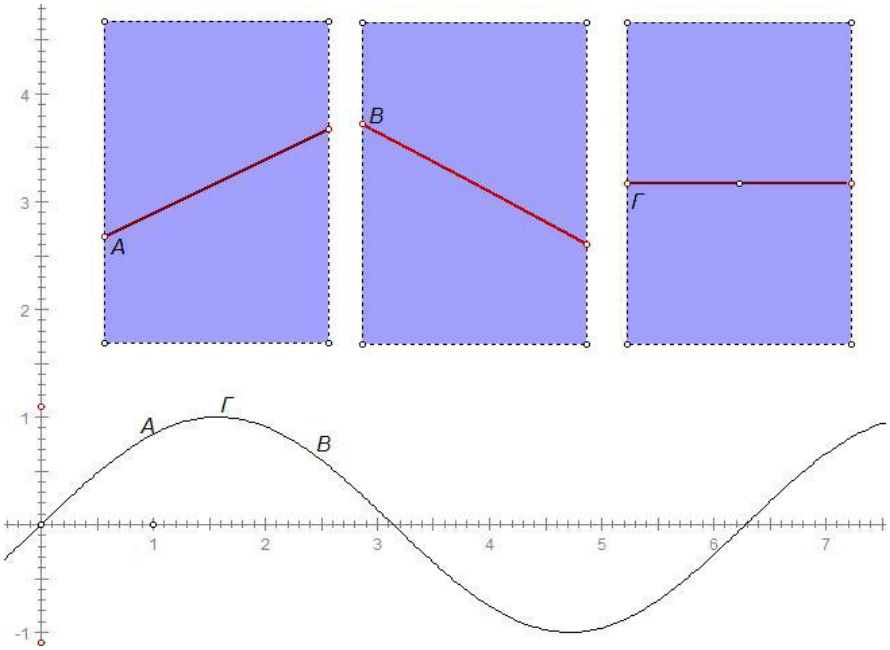


Σχήμα 25β



Σχήμα 25γ

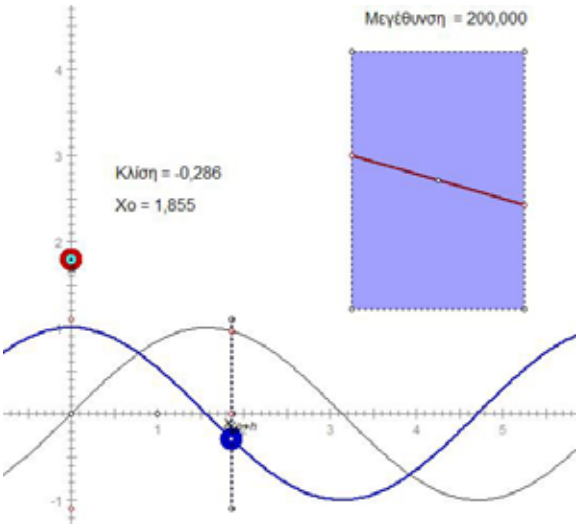
Στο σημείο αυτό μπορούμε να μιλήσουμε για την οριακή θέση της ευθείας ΑΒ καθώς το h πλησιάζει στο 0 και να ορίσουμε την οριακή αυτή ευθεία ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$. Οι μεταβολές της κλίσης της ευθείας



Σχήμα 26: Η τοπική ευθύτητα δίνει για κάθε σημείο τη κλίση της

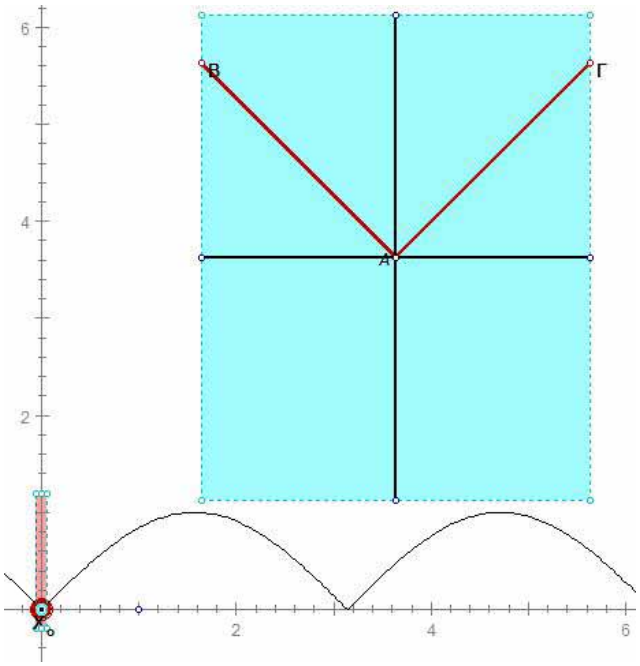
αυτής που απεικονίζει την *τοπική ευθύτητα* της γραφικής παράστασης για κάθε σημείο x_o σχετίζονται με τη συμπεριφορά της γραφικής παράστασης. Ο συσχετισμός αυτός ταιριάζει με τον *ενσαρκωμένο* τρόπο που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες για να περιγράψουν μία γραφική παράσταση: *«στο σημείο Α ανεβαίνει, στο σημείο Β κατεβαίνει ενώ στο σημείο Γ μένει ακίνητο»*, όπως φαίνεται και στα στιγμιότυπα του σχήματος 26.

Επιπλέον, μπορεί να μετρηθεί η κλίση της ευθείας και αποδοθεί στο σύστημα των αξόνων το σημείο με τετμημένη το x_o και τεταγμένη την κλίση της αντίστοιχης ευθείας που προσεγγίζει κοντά στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ τη γραφική παράσταση. Η τροχιά του σημείου αυτού καθώς το x_o διατρέχει το πεδίο ορισμού θα είναι η γραφική παράσταση την συνάρτησης του συνημιτόνου που δεν είναι τίποτα άλλο από τη συνάρτηση της παραγώγου του ημιτόνου (σχήμα 27).



Σχήμα 27

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάποια σημεία του πεδίου ορισμού τους όπως είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\eta\mu x|$ που δεν παραγωγίζεται στις τιμές $x_o = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ που μηδενίζουν το ημίτονο. Η μεγέθυνση της γραφικής παράστασης κοντά στις τιμές αυτές δίνει άλλη ευθεία όταν η προσέγγιση είναι από αριστερά και άλλη από δεξιά. Αν μάλιστα μεγεθύνουμε ένα διάστημα της μορφής $[x_o - h, x_o + h]$, όταν η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o η εικόνα που παίρνουμε είναι πάντα «V» (σχήμα 28).



Σχήμα 28

Η παραπάνω προσέγγιση είναι απόλυτα πειστική και αποδεκτή στο πλαίσιο του *ενσαρκωμένου κόσμου*, σε καμία όμως περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως τυπικός ορισμός της παραγώγου ούτε ως απόδειξη της σχέσης: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Ο τυπικός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο x_o, δίνεται σε πλαίσιο πλέον *διεργασιών-εννοιών* μέσα από τη σχέση: $f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$. Είναι σαφές ότι ο συμβολικός – τυπικός ορισμός της παραγώγου είναι απόλυτα εναρμονισμένος με την *ενσαρκωμένη* προσέγγιση και έρχεται ως συνέχεια της. Η τοπική ευθύτητα και η προσέγγιση της γραφικής παράστασης από μία οριακή ευθεία οδηγεί φυσιολογικά στο όριο του λόγου μεταβολής και στον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης και της παραγώγου.

Στο παραπάνω πλαίσιο, προτεραιότητα έχει ο μαθηματικός συμβολισμός. Ειδικά στην περίπτωση του υπολογισμού της παραγώγου συνάρτησης του ημιτόνου ακολουθούνται μία σειρά από διαδικαστικά βήματα όπως:

$\frac{\eta\mu(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=\eta\mu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}$, στον υπολογισμό αυτό θεωρείται δεδομένο ότι $\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)=0$ και $\lim_{x\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=1$.

Στο σημείο αυτό είναι και η διαφοροποίηση μεταξύ του κόσμου των *διεργασιών-εννοιών* και του *αξιωματικού* κόσμου. Στον αξιωματικό κόσμο η παραπάνω απόδειξη θα γινόταν με αναλυτικό τρόπο και έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένη η αιτιολόγηση κάθε επιμέρους βήματος στο πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας.

Στο τέλος των παραδειγμάτων αυτών να διευκρινίσουμε ότι μία λύση που κάνει ένας μαθητής/τρια δεν είναι πάντα σαφές αν ανήκει στον κόσμο των διεργασιών-εννοιών ή στον αξιωματικό κόσμο. Είναι πολύ πιθανό και οι δύο λύσεις να φαίνονται ίδιες. Για να διερευνήσουμε σε ποιο κόσμο ανήκουν πραγματικά, χρειαζόμαστε περισσότερα στοιχεία για τον τρόπο που σκέφτεται ο/η μαθητής/τρια.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Με την εργασία αυτή επιχειρήθηκε αφενός η παρουσίαση διαφορετικών απόψεων, από τη βιβλιογραφία, που αφορούν στους τρόπους προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης και αφετέρου η περιγραφή της θεωρίας του D. Tall (2002) σχετικά με τους τρεις κόσμους των μαθηματικών. Επίσης αναπτύχθηκαν παραδείγματα, στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής, που σχετίζονται με έννοιες του Απειροστικού Λογισμού και αξιοποίησαν τις δυνατότητες που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες.

Από την εργασία αυτή προκύπτουν μία σειρά από ερωτήματα, προς διερεύνηση, που αφορούν στον έλεγχο των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες, στις διδακτικές προτάσεις που μπορούν να προσφέρουν λύσεις στα παραπάνω προβλήματα και στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των προσφερόμενων λύσεων. Σύμφωνα με τον διαχωρισμό αυτό πρέπει να εξεταστούν:

Παράμετροι που επηρεάζουν ασυνείδητα την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Αυτές μπορεί να είναι οι άτυπες γνώσεις των μαθητών/τριών που έχουν αποκτηθεί από την καθημερινή αλλά και διδακτική τους εμπειρία. Τέτοιου είδους είναι, για παράδειγμα, οι απόψεις που έχουν τα παιδιά για το όριο ή το άπειρο από την καθημερινότητα τους (Grugnetti & Rizza, submitted) ή οι απόψεις που έχουν οι μαθητές για την εφαπτομένη καμπύλης από τη γεωμετρική σχέση ευθείας – κύκλου που έχουν ήδη διδαχθεί. Επίσης, σημαντικοί παράγοντες στη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών φαίνεται να είναι η φύση του ανθρώπινου σώματος και εγκεφάλου και η βιωματική επαφή του ανθρώπου με τον κόσμο που τον περιβάλλει (Lakoff G., Núñez R. E., 2000, Varelas F., Thompson E. & Rosh E., 1999).

Σχεδιασμός διδακτικών προτάσεων.

Συνήθως στη διδακτική πράξη, όταν γίνεται τυπική εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, δεν λαμβάνονται υπόψη οι ήδη σχηματισμένες απόψεις των μαθητών/τριών καθώς και οι σωματικοί τους περιορισμοί. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργούνται γνωστικές συγκρούσεις και να αυξάνονται τα διδακτικά εμπόδια. Είναι, λοιπόν, ερευνητικό

ζητούμενο ο σχεδιασμός διδακτικών προτάσεων που να λαμβάνει υπόψη του τις παραμέτρους αυτές. Πηγή τέτοιων ιδεών μπορεί να αποτελέσει η ιστορία των Μαθηματικών και η μελέτη των επιστημολογικών εμποδίων στην εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Σύμφωνα με την άποψη αυτή η Ιστορία δεν χρειάζεται να είναι ορατή ως κυρίαρχο στοιχείο στη διδασκαλία αλλά να λειτουργεί ως μεσολαβητής για την επίτευξη των αντικειμενικών στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό σημαίνει ότι οι στόχοι της διδασκαλίας πρέπει να θεωρούνται σε συνδυασμό με την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Επίσης, ένα ακόμα στοιχείο προς διερεύνηση, σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης, είναι ο ρόλο των περιβαλλόντων που αναπτύσσονται με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή και των εκπαιδευτικών λογισμικών.

Έλεγχος της αποτελεσματικότητας των παραπάνω απόψεων.

Οι παράμετροι που επηρεάζουν την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης είναι πολυποίκιλοι και η αξιολόγηση τους, σε όλο το φάσμα τους, είναι πολύ δύσκολη και ενδεχομένως αδύνατη. Η όποια διδακτική πρόταση προκύψει από τον παραπάνω σχεδιασμό πρέπει να εφαρμοστεί ερευνητικά και να ελεγχθεί ο βαθμός επίδρασης στη βελτίωση των διδακτικών συνθηκών.

Στόχος είναι, μακροπρόθεσμα και τελικά, να αξιοποιηθούν τα ερευνητικά δεδομένα διαφορετικών κατευθύνσεων και οπτικών: διδακτικών, ψυχολογικών, σωματικών, επιστημολογικών, κοινωνικών, γλωσσικών κ.ά. που αφορούν στους παράγοντες που επηρεάζουν την εξέλιξη της γνώσης. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να δημιουργηθεί ένα *συστημικό* περιβάλλον που θα μπορεί, με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών, να προσομοιωθεί με τη σειρά του σε περιβάλλον μάθησης με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνει την ανάπτυξης και την εδραίωση της μαθηματικής γνώσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arzarello F., Paola D. (submitted). Mathematical Objects and Proofs within Technological Environments: An Embodied Analysis. *Proceedings of the Third Conference of the European Group for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy.

Czarnicha B., Dubinsky Ed, Prabhu V., Vidakovic D., (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, **1**, 95-110

Douady R., (1985). The Interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. *Proceedings of the 9th Conference of PME*, Vol. **2**, 33-52.

Dubinsky Ed., (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In David O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (σελ. 95-123). Kluwer: Dordrecht.

Edwards L., (1998). Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representation, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), σελ. 71

Fischbein E., Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M., (2000). Ο ρόλος των λανθανόντων μοντέλων στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Στο Βοσνιάδου Σ. (επιμ.) *Ψυχολογία των Μαθηματικών.* Αθήνα, Εκδόσεις Gutenberg,

Gray Eddie & Tall David, (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115–141.

Gray Eddie & Tall David, (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **3**, 65–72. Utrecht, The Netherlands.

Gray, E.M., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D.O. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* **38**, 1, 111-133.

Grugnetti L., & Rizza A. (submitted). A lengthy process for the establishment of the concept of limit. *Proceedings of the Third Conference of the European Group for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy.

Grugnetti, L., Rizza, A., Dallanoce, S, Foglia, S., Gregori, S., Marchini, C., Molinari, F., Piccoli, A., Vannucci, V., (2002). Piccole intuizioni crescono: alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo. In Malara N.A., Marchini, C., Navarra, G., Tortora, R. (eds.) *Processi didattici nnovative per la matematica nella scuola dell'obbligo,* Pitagora Editrice, Bologna.

Harel G., Tall D., (1989). The General, the Abstract, and the Generic. *For the Learning of Mathematics*, **11** 1, 38–42

Hughes M., (1996). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών. Δυσκολίες στην εκμάθηση των Μαθηματικών.* Εκδόσεις Gutenberg.

Lakoff G., Núñez R. E., (2000). *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books

Lang Serge, (1998). *Μαθηματικές συναντήσεις*, Κάτοπτρο, Αθήνα.

Papert S., (1991). *Νοητικές θύελλες. Παιδιά ηλεκτρονικοί υπολογιστές και δυναμικές ιδέες.* Εκδόσεις Οδυσσέας, Αθήνα.

Pitta-Pantazi D., Gray, E.M. & Christou, C. (2002). Mental representations in elementary arithmetic. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Ed), *Proceedings of the 26th Conference for the PME.* Vol. 4, pp.065-072. Norwich.UK.

Sfard Anna, (1991). On the dual nature of mathematica conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics,* **22** 1-36.

Sfard Anna, Linchevski Liora, (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics* **26** 191-228.

Sfard Anna, (1991). Operational origins of Mathematical objects and the quandary of reification – The case of function, *MAA Notes, Vol. 25*

Tall D., M. McGowen M., DeMarois P., (2000). The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, *Proceedings of PME-NA,* **1**, 247-254.

Tall D., (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computer & Curriculum Change, *For the Learning of Mathematics,* **9**,3, 37-42.

Tall D., (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand,* 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Tall D., Vinner S., (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151–169.

Tall D., (2002). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics (To appear) in the *Annals of HTEM* vol. 1, Rio De Janiero.

Tracy Goodson-Espy, (1998). The roles of Reification and Reflective Abstraction in the development of Abstract thought: Transition from Arithmetic to Algebra, *Educational Studies in Mathematics* **36** 219-245.

Van Hiele, P.M., (1986). *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education.* Academic Press, Inc

Watson A., Spyrou P., & Tall D. (in press). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., (2002). *Μαθηματικά Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου. Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βοσνιάδου Σ., (2001). *Εισαγωγή στη Ψυχολογία. Τόμος Α.* Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου Σ., (2001). Η θεωρία του Piaget για τη νοητική ανάπτυξη. Στο: Donaldson M. *Η σκέψη των παιδιών* (σελ. 173-195). Εκδόσεις Gutenberg.

Κολέζα Ε., (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα, Leader Books.

Κορδάκη Μ., (2001). Θέματα διδακτικής της Γεωμετρίας στο περιβάλλον του Cabri-Geometry II. Εκδόσεις Καστανιώτης.

Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, (2002). Έκδοση ΥπΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα.

Φιλίππου Γ., Χρίστου Κ., (2002). *Διδακτική των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Δαρδάνος, Αθήνα.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΑΓΓΛΙΚΩΝ ΟΡΩΝ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ.

Αγγλικά	**Ελληνικά**
Action	Δράση
Advanced mathematical thinking	Προχωρημένη μαθηματική σκέψη
Cognitive root	Γνωστική ρίζα
Cognitive science	Γνωσιακή Επιστήμη
Cognitive unconscious	Γνωστικό ασυνείδητο
Concept	Έννοια
Concept definition	Ορισμός έννοιας
Concept image	Εικόνα έννοιας
Concept imagery	Σύνολο εικόνων έννοιας
Conceptual knowledge	Εννοιολογική γνώση
Conceptual metaphor	Εννοιολογική μεταφορά
Condensation	Συμπύκνωση
Configuration	Δομή
De- encapsulation	Από-ενθυλάκωση
Developmental	Αναπτυξιακή
Elementary mathematical thinking	Στοιχειώδης μαθηματική σκέψη
Embodied cognition	Ενσαρκωμένη γνώση
Embodied object	Ενσαρκωμένο αντικείμενο
Embodiment of mind	Ενσάρκωση του μυαλού
Empirical abstraction	Εμπειρική αφαίρεση
Enactive	Πραξιακό
Enactive interface	Περιβάλλον διεπαφής
Enbodied	Ενσαρκωμένος
Encapsulation	Ενθυλάκωση
Evolutionary	Εξελικτική
Extended abstract	Εκτεταμένης αφαίρεσης
Function machine	Μηχανή της συνάρτησης

Generic abstraction	Γένια αφαίρεση
Generic example	Γένιο παράδειγμα
Generic organizer	Γένιος οργανωτής
Hardware	Υλισμικό
Iconic	Εικονικό
Icons	Εικονίδια
Interactive	Διαδραστικό
Interiorization	Εσωτερίκευση
Intervening intuitive model	Ενδιάμεσα διαισθητικά μοντέλα
Local linearity	Τοπική γραμμικότητα
Local straightness	Τοπική ευθύτητα
Metaphorical thought	Μεταφορική σκέψη
Multi-structural	Πολυδομικό
Object	Αντικείμενο
Operational conception	Λειτουργική επινόηση
Pre-structural	Προδομικό
Procedural thinking	Διαδικαστική σκέψη
Procedure	Διαδικασία
Procept	Διεργασία-έννοια
Proceptual thinking	Σκέψη με διεργασίες-έννοιες
Process	Διεργασία
Pseudo-empirical abstraction	Ψευδο-εμπειρική αφαίρεση
Reflection	Αναστοχασμός
Reflective Abstraction	Στοχαστική αφαίρεση
Reification	Υποστασιοποίηση
Relational	Συσχετιστικό
Schema	Σχήμα
Sensori – motor stage	Αισθησιοκινητικό στάδιο
Software	Λογισμικό
SOLO taxonomy	Ταξινομία SOLO
Structural conception	Δομική επινόηση

Symbolic	Συμβολικό
Tacit models	Άδηλα μοντέλα
Unistructural	Μονοδομικό
Verbal	Γλώσσα, γλωσσικό
Zone of proximal development	Ζώνη επικείμενης ανάπτυξης