ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
& ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΚΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ευθυμίου Βασιλική

Επιβλέπων Καθηγητής
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

ΑΘΗΝΑ 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα
Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	……………
2)Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αν. Καθηγητής	……………
3)Νικόλαος Κλαουδάτος	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών	……………

Στην οικογένειά μου,
στη Ράνια και
στον Γιώργο.

ΕΥΘΥΜΙΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ, Ιούνιος 2007

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
"Διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών"
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΚΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ (σελ.199)

Η Μαθηματική Ανάλυση αποτελεί περιοχή των μαθηματικών με ευρύτατο πεδίο εφαρμογών, τόσο στις θετικές όσο και στις θεωρητικές επιστήμες, με βασικό αντικείμενό της τη συνάρτηση. Για τον λόγο αυτό η διδασκαλία των συναρτήσεων και η εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση αποτελεί ένα πολύ σημαντικό κομμάτι του ελληνικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Στις μέρες μας η πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει σοβαρά προβλήματα κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης και πολλών άλλων βασικών εννοιών της Ανάλυσης. Εκτός από τις αντικειμενικές δυσκολίες που οφείλονται στην ιδιαίτερη φύση των εννοιών αυτών, κύρια αιτία των εν λόγω προβλημάτων αποτελεί ο τρόπος διδακτικής προσέγγισής τους στα πλαίσια του ισχύοντος προγράμματος σπουδών.

Είναι προφανές πως η συγκριτική μελέτη και - γιατί όχι - η αντιπαραβολή του τρόπου εισαγωγής της Μαθηματικής Ανάλυσης στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών χωρών του εξωτερικού έναντι του αντίστοιχου ελληνικού είναι δυνατό να προσφέρουν ουσιαστική βοήθεια για την αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων. Στην παρούσα εργασία η χώρα που επιλέχθηκε είναι η Αγγλία, όπου η Μαθηματική Ανάλυση διδάσκεται κυρίως στις τελευταίες τάξεις της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρεται στο αγγλικό εκπαιδευτικό σύστημα. Παρουσιάζονται οι φορείς που είναι αρμόδιοι για την οργάνωσή του και οι εκπαιδευτικές φάσεις στις οποίες χωρίζεται. Επίσης, εντός του κεφαλαίου αναλύεται η σημασία και η χρησιμότητα του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος, τα βασικά στοιχεία του (Βασικά Στάδια κ.α.) και οι κύριοι σκοποί του.

Το δεύτερο κεφάλαιο έχει ως θέμα του την υποχρεωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Αγγλία. Αρχικά περιγράφει τις θεσμοθετημένες ρυθμίσεις αξιολόγησης στο τέλος των Βασικών Σταδίων 3 και 4 και τον τρόπο προαγωγής των άγγλων μαθητών στις επόμενες τάξεις. Έπειτα παραθέτει τις εθνικά αναγνωρισμένες πιστοποιήσεις τίτλων που προσφέρονται στο τέλος του Βασικού Σταδίου 4. Στη συνέχεια αναφέρεται με λεπτομέρεια στην ύλη των μαθηματικών του Βασικού Σταδίου 3 και του Βασικού Σταδίου 4 (για το τελευταίο εξετάσθηκε η ύλη των μαθηματικών ειδικά για την απόκτηση τίτλων GCSE των οποίων περιγράφηκε η δομή, οι στόχοι και το περιεχόμενο). Το κεφάλαιο κλείνει με τις εφαρμογές της ICT στη διδασκαλία των Μαθηματικών στα Βασικά Στάδια 3 και 4.

Στο τρίτο κεφάλαιο αρχικά δίνονται ορισμένες βασικές πληροφορίες για τη δομή της μη υποχρεωτικής Ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην Αγγλία και για τους τίτλους σπουδών που προσφέρονται στη βαθμίδα αυτή. Ακολουθεί αναφορά στους σκοπούς, στους στόχους αξιολόγησης, στη δομή και στο περιεχόμενο των πιο δημοφιλών τίτλων σπουδών στα μαθηματικά, των GCE AS και GCE A level. Ωστόσο το κύριο βάρος του κεφαλαίου δίνεται στην προσεκτική εξέταση του προγράμματος της Μαθηματικής Ανάλυσης, όπως διδάσκεται στα υπό εξέταση αγγλικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για τις επτά συνολικά ενότητες των Μαθηματικών Κορμού και των Προχωρημένων Θεωρητικών Μαθηματικών, με αρκετές αναφορές στα αντίστοιχα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αρχικά επιχειρείται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στις αλλαγές του περιεχομένου και της δομής της Ανάλυσης που περιέχεται στα GCE A level και GCE AS για τα μαθηματικά από τη δεκαετία του 60’ έως σήμερα. Ακολουθεί συγκριτική μελέτη του περιεχομένου της Ανάλυσης ανάμεσα στο αγγλικό και στο ελληνικό πρόγραμμα και επισημαίνονται διαφορές στον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η διδασκαλία τους στα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΚΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ευθυμίου Βασιλική

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούνιος, 2007

@ Βασιλική Ευθυμίου, 2007

Αντί προλόγου

Ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς μου επιτροπής κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια και κ. Νικόλαο Κλαουδάτο. Θα ήθελα να απευθύνω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τις ουσιαστικές υποδείξεις του κατά τη συγγραφή και παρουσίαση αυτής της διπλωματικής εργασίας, αλλά και για τη γενικότερη στήριξη που μου προσέφερε, καθώς θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση των σπουδών μου χωρίς τη συμβολή του.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου για την κατανόηση και τη αμέριστη συμπαράστασή τους κατά τη συγγραφή της εργασίας μου και όλους τους φίλους που με την υπομονή τους και με την πολύ σημαντική παρουσία τους δίπλα μου στήριξαν την προσπάθεια που ακολουθεί.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΑΓΓΛΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

1.1 Αρμόδιοι φορείς, οργάνωση, έγκριση

Η Εκπαίδευση στην Αγγλία έχει αποκεντρωτικό χαρακτήρα (INCA, 2007a). Η ευθύνη για τις διαφορετικές πτυχές της κατανέμεται ανάμεσα στην κεντρική κυβέρνηση, στις τοπικές αρχές (Local Education Authorities, LEAs[1]), στις εκκλησίες και σε άλλους εθελοντικούς οργανισμούς, στα διοικητικά συμβούλια εκπαιδευτικών οργανισμών και στον κλάδο των εκπαιδευτικών. Ωστόσο η γενική ευθύνη για την Εκπαίδευση στην Αγγλία εναπόκειται στον Υπουργό Παιδείας (Secretary of State for Education and Skills).

Υπεύθυνο για την Εκπαίδευση, την κατάρτιση και τη «δια βίου μάθηση» στην Αγγλία είναι το DfES (Department for Education and Skills, Τμήμα για την Εκπαίδευση και τις Δεξιότητες), το οποίο δημιουργήθηκε το 2001 στα πλαίσια της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης που εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια. Στόχοι του DfES είναι:

- Να διασφαλισθεί το ότι όλοι οι νέοι στην ηλικία των 16 ετών θα έχουν ολοκληρώσει την υποχρεωτική Εκπαίδευση κατέχοντας τις δεξιότητες, τη συμπεριφορά και την προσωπικότητα που θα εξασφαλίζουν την ασφαλή θεμελίωση της «δια βίου μάθησης», της εργασίας, των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων του πολίτη.
- Να αναπτυχθεί σε όλους η αντίληψη για τη «δια βίου μάθηση» με στόχο την αναβάθμιση της ζωής τους, τη βελτίωση των προσόντων τους που τους καθιστούν κατάλληλους για πρόσληψη σε μια αγορά εργασίας που αλλάζει συνεχώς και την ανάπτυξη των δεξιοτήτων που είναι απαραίτητα στην οικονομία της χώρας.
- Να στηριχθούν οι άνεργοι κατά την αναζήτηση εργασίας.

Η Q.C.A. (Qualifications and Curriculum Authority, Αρχή για τους Τίτλους Σπουδών και το Αναλυτικό Πρόγραμμα) είναι μια δημόσια υπηρεσία που

[1] Ως «τοπική αρχή Εκπαίδευσης» (local education authority, LEA), μέχρι πρότινος χαρακτηριζόταν η λειτουργία των τοπικών αρχών αναφορικά με την Εκπαίδευση. Αν και ο όρος «LEA» χρησιμοποιείται ακόμη ευρέως και συναντάται ακόμη στην εκπαιδευτική νομοθεσία, τώρα πλέον η κυβερνητική πολιτική οδηγεί στη μη χρησιμοποίησή του.

υποστηρίζεται από το DfES (συμβουλεύοντάς το, παράλληλα, σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα, την αξιολόγηση και τους τίτλους σπουδών στα σχολεία, στα κολέγια και στους χώρους εργασίας). Διοικείται από ένα συμβούλιο τα μέλη του οποίου διορίζονται από τον Υπουργό Παιδείας και ρυθμίζεται σε καθημερινή βάση από μια εκτελεστική ομάδα. Η Q.C.A. οργανώνει το δημόσιο σύστημα εξετάσεων έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες των αρχαρίων και της κοινωνίας και είναι αρμόδια για την ανάπτυξη, την παράδοση και τη διοίκηση των, υψηλής ποιότητας, εθνικών πιστοποιήσεων τίτλων σπουδών. Αναπτύσσει το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα, το οποίο καθορίζει τη γνώση, την κατανόηση και τις δεξιότητες στις οποίες τα παιδιά και οι νέοι έχουν δικαίωμα και το θέτει υπό εξέταση, για να αξιολογηθεί η καταλληλότητα και η σχετικότητα με τις μεταβαλλόμενες ανάγκες των αρχαρίων και της κοινωνίας.

Οι επιτροπές που χορηγούν τους τίτλους υποβάλλουν τα προγράμματα των κύκλων σπουδών προς έγκριση στη Q.C.A.. Ο αντίστοιχος φορέας για την Ουαλία είναι η Αρχή για τους Τίτλους Σπουδών, το Αναλυτικό Πρόγραμμα και την Αξιολόγηση της Ουαλίας (Qualifications, Curriculum and Assessment Authority For Wales, ACCAC). Από τον Απρίλιο του 2001 ένας νέος φορέας είναι επίσης υπεύθυνος για την Εκπαίδευση και την κατάρτιση των μαθητών ηλικίας άνω των 16 ετών: το Συμβούλιο για την Μάθηση και τις Δεξιότητες στην Αγγλία (Learning and Skills Council for England, LSC) και το Εθνικό Συμβούλιο για την Εκπαίδευση και την Κατάρτιση της Ουαλίας που είναι γνωστό ως Εθνικό Συμβούλιο ELWa (National Council For Education and Training in Wales). Το LSC εργάζεται μέσω ενός δικτύου στο οποίο συμμετέχουν 47 τοπικά Συμβούλια για τη Μάθηση και τις Δεξιότητες. Το Γραφείο για τις Προδιαγραφές στην Εκπαίδευση (Office for Standards in Education-OFSTED) είναι υπεύθυνο για την εποπτεία της παρεχόμενης Εκπαίδευσης στα σχολεία και τα κολέγια της ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

1.2 Εκπαιδευτικές φάσεις[2]

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Αγγλίας για τους μαθητές ηλικίας 3 έως 18 ετών είναι χωρισμένο σε τέσσερις φάσεις (INCA, 2007b):

[2] Ως εκπαιδευτικές φάσεις ορίζονται τα στάδια εκείνα στην Εκπαίδευση ενός παιδιού που κανονικά καθορίζονται από τη νομοθεσία ή από κανονισμούς και χαρακτηρίζονται από την ηλικία των μαθητών, τον τύπο του σχολείου, το πρόγραμμα σπουδών και τις ρυθμίσεις αξιολόγησης (INCA, 2007a).

- *Πρώτη φάση:* Προ-υποχρεωτική (pre-compulsory), για μαθητές ηλικίας έως 5 ετών.
- *Δεύτερη φάση:* Πρωτοβάθμια (primary), για μαθητές ηλικίας από 5 έως 11 ετών.
- *Τρίτη φάση:* Κατώτερη Δευτεροβάθμια (lower secondary), για μαθητές ηλικίας 11 έως 16 ετών.
- *Τέταρτη φάση:* Ανώτερη Δευτεροβάθμια (upper secondary), για μαθητές ηλικίας 16 έως 18 ετών.

1.2.1 Πρώτη φάση: Προ-υποχρεωτική Εκπαίδευση

Ο Νόμος Σχολικών Προτύπων και Πλαισίου (The School Standards and Framework Act) του 1998 προσδιόρισε την προ-υποχρεωτική Εκπαίδευση ως «την πλήρη ή μερικής απασχόλησης Εκπαίδευση που είναι κατάλληλη για παιδιά που δεν έχουν φτάσει στην υποχρεωτική σχολική ηλικία». Προσφέρεται κυρίως σε νηπιαγωγεία (nursery schools) και σε αντίστοιχα τμήματα δημοτικών σχολείων, ενώ σε αυτή δε γίνονται δεκτά παιδιά ηλικίας κάτω των τριών ετών. Από τον Σεπτέμβριο του 2000, η περίοδος της σχολικής Εκπαίδευσης από την ηλικία των τριών ετών έως και το τέλος της φοίτησης σε μια τάξη υποδοχής (reception class) δημοτικού σχολείου (συνήθως στην ηλικία των 5 ετών) είναι γνωστή ως «Θεμελιώδες Στάδιο» (foundation stage).

1.2.2 Δεύτερη φάση: Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Οι μαθητές εισάγονται στα δημοτικά σχολεία το σχολικό έτος που ακολουθεί τα πέμπτα τους γενέθλια, εκτός εάν έχει γίνει διαφορετική πρόβλεψη (όπως κατ' οίκον διδασκαλία). Όσα από τα δημοτικά σχολεία ανήκουν στην κατηγορία των maintained schools[3] είναι μικτά, μη επιλεκτικά και δέχονται μαθητές ανεξαρτήτως δυνατοτήτων. Η πλειοψηφία των μαθητών μεταβαίνει από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην ηλικία των 11 ετών αν και, όπου υπάρχει το σύστημα των middle schools[4], οι μαθητές μεταφέρονται στην ηλικία των οκτώ ή

[3] Κατηγορία σχολείων που δεν ελέγχονται από τις τοπικές αρχές αλλά χρηματοδοτούνται από την κυβέρνηση μέσω των LEAs και το πρόγραμμά τους πρέπει να ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες.
[4] Ή αλλιώς «ενδιάμεσα σχολεία». Λειτουργούν ως γέφυρα ανάμεσα στην Πρωτοβάθμια και τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Βάσει νόμου, τα middle schools είναι ταξινομημένα ως στοιχειώδης ή Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, βάσει του αν η ηλικία της πλειοψηφίας των μαθητών τους υπερβαίνει ή όχι τα 11 έτη.

εννέα ετών από ένα σχολείο της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης σε ένα middle school και στη συνέχεια σε σχολείο Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην ηλικία των 12 ή 13 ετών.

1.2.3 Τρίτη και Τέταρτη φάση: Κατώτερη και Ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Τα σχολεία της αγγλικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι γενικά γνωστά ως secondary schools, με τη συντριπτική πλειοψηφία τους να ανήκει στην κατηγορία των comprehensive schools[5]. Σε κάποιες περιοχές της Αγγλίας, ωστόσο, υπάρχουν σχολεία που επιλέγουν όλους τους μαθητές τους βάσει των δυνατοτήτων τους, χαρακτηρίζονται σαν «εκλεκτικά» και είναι ευρέως γνωστά με τον όρο grammar schools. Σύμφωνα με τις διατάξεις του Νόμου Σχολικών Προτύπων και Πλαισίου (School Standards and Framework Act) του 1998, οι γονείς μπορούν να απαιτήσουν τη διεξαγωγή μυστικής ψηφοφορίας για να καθορίσουν εάν ένα συγκεκριμένο grammar school ή ένα σύνολο τέτοιων σχολείων θα πρέπει να διατηρήσει τους υφιστάμενους κανόνες εισαγωγής μαθητών ή όχι.

Ως αποτέλεσμα προηγούμενης κυβερνητικής νομοθεσίας κάποια σχολεία Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης επιλέγουν αυτήν την περίοδο μια μειονότητα μαθητών βάσει δυνατοτήτων τους, μια διαδικασία γνωστή ως «μερική επιλογή» (partial selection). Ο Νόμος Σχολικών Προτύπων και Πλαισίου του 1998, αποτρέπει σχολεία τέτοιου είδους από το να επεκτείνουν τη λειτουργία των διαδικασιών επιλογής.

Το «specialist schools programme» επιτρέπει σε ορισμένα σχολεία Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης να αποκτήσουν εξειδίκευση σε μια συγκεκριμένη περιοχή του προγράμματος σπουδών, ενώ διδάσκουν βάσει του πλήρους Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος και παραδίδουν ευρεία και ισορροπημένη Εκπαίδευση στους μαθητές. Επιπλέον χρηματοδότηση προσφέρεται από την Κυβέρνηση και από χορηγούς, κυρίως από τον τομέα της βιομηχανίας, οι οποίοι αντιπροσωπεύονται στο σχολικό κυβερνητικό σώμα. Το πρόγραμμα άρχισε με σχολεία εξειδικευμένα στην τεχνολογία (τεχνολογικά Κολέγια) το 1994 και επεκτάθηκε στη συνέχεια για να συμπεριλάβει τα σχολεία που εξειδικεύονται στις σύγχρονες ξένες γλώσσες (Language Colleges) το 1995, στις τέχνες (Arts Colleges) και τον αθλητισμό (Αθλητικά Κολέγια) το 1997.

---

[5] Σχολεία Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που δέχονται μαθητές όλων των ακαδημαϊκών ικανοτήτων. Αλλιώς ενιαία, πολυκλαδικά, γενικής παιδείας.

CTCs, CCTAs και Ακαδημίες

Τα αστικά τεχνολογικά κολέγια (City Technology Colleges, CTCs), τα αστικά κολέγια για την τεχνολογία των τεχνών (City Colleges for the Technology of the Arts, CCTAs) και οι Ακαδημίες είναι δημόσια χρηματοδοτούμενα σχολεία Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, αναγνωρισμένα στην Αγγλία.

Ειδικότερα τα CTCs και CCTAs δεν μοιάζουν με τα υπόλοιπα ανεξάρτητα σχολεία, καθώς κάθε ένα από αυτά έχει συνάψει ειδική συμφωνία με το Υπουργείο Παιδείας, ανήκουν και διοικούνται από χορηγούς ή οργανωτές, οι οποίοι απαιτείται να συμβάλλουν ουσιαστικά στο κόστος των κτηρίων και του κύριου εξοπλισμού. Το Τμήμα για την Εκπαίδευση και τις Δεξιότητες (DfES) παρέχει ετήσια επιχορήγηση, αναλόγου ύψους με εκείνη των συγκρίσιμα επιδοτούμενων σχολείων.

Το 2000 η κυβέρνηση ανήγγειλε το πρόγραμμα αστικών Ακαδημιών, οι οποίες επρόκειτο αρχικά να αποτελέσουν σχολές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και ιδρύθηκαν σε αστικές περιοχές πάνω στην ίδια νομική βάση με τα CTCs και CCTAs. Οι πρώτες τρεις Ακαδημίες άνοιξαν τον Σεπτέμβριο του 2002. Τον Σεπτέμβριο του 2005 δέκα νέες Ακαδημίες άνοιξαν επιτυχώς για νέους σπουδαστές. Κάθε Ακαδημία οργανώνεται σαν επιχείρηση που περιορίζεται από εγγύηση φιλανθρωπικής υπόστασης, με εκπαιδευτικό συμβούλιο αρμόδιο για τη διακυβέρνηση και τη στρατηγική ηγεσία του σχολείου και πρέπει να έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Να βρίσκεται σε μη προνομιούχα περιοχή. Αντικαθιστά ένα ή περισσότερα προβληματικά σχολεία ή ιδρύεται όπου υπάρχει ανάγκη για επιπλέον σχολικές θέσεις.
- Να προσφέρει μόρφωση σε μαθητές διαφορετικών δυνατοτήτων.
- Να προσφέρει ευρύ και ισορροπημένο πρόγραμμα σπουδών με έμφαση σε μία ή περισσότερες περιοχές του.
- Δεν επιτρέπεται να χρεώνει δίδακτρα.

Προϋποθέσεις Εισαγωγής και Επιλογή Σχολείου

Σε γενικές γραμμές οι γονείς έχουν το δικαίωμα να εκφράσουν την προτίμησή τους ως προς το σε ποιο σχολείο θα ήθελαν να φοιτήσει το παιδί τους, ωστόσο η εισαγωγή του εξαρτάται από τον αριθμό παιδιών που υποβάλλουν αίτηση για τις προσφερόμενες θέσεις, από τα κριτήρια εισαγωγής του κάθε σχολείου και από τον συνολικό αριθμό προσφερόμενων θέσεων.

Η πολιτική που ακολουθεί κάθε σχολείο για την επιλογή των μαθητών του κατοχυρώνεται από την αρμόδια αρχή, η οποία είναι είτε ο τοπικός φορέας, είτε το σχολικό διοικητικό σώμα (το τελευταίο εξαρτάται από τον τύπο του σχολείου). Αυτή η πολιτική πρέπει να περιέχει καθορισμένες πληροφορίες, παραδείγματος χάριν, ο αριθμός των μαθητών που θα γίνουν δεκτοί στο σχολείο και πρέπει να εξηγεί τον τρόπο διάθεσης των θέσεων, αν τυχόν υπάρξουν περισσότερες αιτήσεις από όσες μπορούν να ικανοποιηθούν.

Τα περισσότερα από τα επιδοτούμενα σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι μη επιλεκτικά, ενώ όσα εξειδικεύονται σε κάποιον τομέα μπορεί να δεχθούν ένα ποσοστό μαθητών βάσει της κλίσης τους σε αυτόν. Τα αστικά τεχνολογικά κολέγια δέχονται τους μαθητές τους με γνώμονα το φυσικό ταλέντο τους στις επιστήμες ή στην τεχνολογία, αλλά επίσης επιλέγουν μαθητές αναλογικά προκειμένου να αντιπροσωπεύεται ποικιλία δυνατοτήτων των παιδιών για την περιοχή που εξυπηρετεί το κολέγιο. Τα grammar schools, όπως ήδη έχει αναφερθεί, επιλέγουν τους μαθητές τους βάσει των ικανοτήτων τους και γενικά κάθε σχολείο τέτοιου είδους διεξάγει δικές του εισαγωγικές εξετάσεις.

Εκθέσεις προόδου μαθητών

Σε συμφωνία με τους Εκπαιδευτικούς Κανονισμούς του 2005 το διοικητικό σώμα οποιουδήποτε επιδοτούμενου σχολείου έχει την υποχρέωση να τηρεί εκπαιδευτικά αρχεία για όλους τους εγγεγραμμένους μαθητές του και να παρέχει αντίγραφα των αρχείων του στους μαθητές ή στους γονείς τους μετά από γραπτή τους αίτηση. Το σχολικά διοικητικά σώματα είναι υπεύθυνα για το ότι όλοι οι γονείς των μαθητών στα Βασικά Στάδια 3 και 4 θα λάβουν μια γραπτή έκθεση σχετικά με τις επιδόσεις του παιδιού τους τουλάχιστον μια φορά κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους. Οι Κανονισμοί ορίζουν τις ελάχιστες απαιτήσεις των εκθέσεων των μαθητών:

- Μια (συνοπτική) περιγραφή της προόδου του μαθητή σε κάθε μάθημα και δραστηριότητα που θεωρούνται τμήμα του σχολικού προγράμματος σπουδών (συμπεριλαμβανομένης της θρησκευτικής Εκπαίδευσης).
- Τα αποτελέσματα από οποιεσδήποτε δημόσιες εξετάσεις συμμετείχε ο μαθητής.
- Ενημέρωση πάνω στη γενική πρόοδο του μαθητή.

- Πρόσκληση των γονέων για τη συζήτηση της έκθεσης με έναν δάσκαλο στο σχολείο.
- Πληροφόρηση για τυχόν απουσίες του μαθητή.

Μετά την ολοκλήρωση της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν στην ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση που διαρκεί 2 χρόνια και παρέχεται:

- Στα secondary schools.
- Στα κολέγια Έκτης τάξης (sixth form colleges).
- Στα κολέγια συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης (further education colleges).
- Στα τριτοβάθμια κολέγια (tertiary colleges).

Οι μαθητές στη μετα-υποχρεωτική Εκπαίδευση μπορούν να παρακολουθήσουν μαθήματα γενικής παιδείας, επαγγελματικής Εκπαίδευσης ή ένα συνδυασμό και των δύο. Γενική παιδεία προσφέρεται στα secondary schools και στα κολέγια έκτης τάξης. Το κολέγιο συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης παρείχε μέχρι πρότινος κυρίως επαγγελματική Εκπαίδευση, αν και αρκετά κολέγια τώρα παρέχουν και γενική Εκπαίδευση. Το τριτοβάθμιο κολέγιο συνδυάζει τις λειτουργίες ενός κολεγίου συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης και ενός κολεγίου έκτης τάξης και προσφέρει μια πλήρη σειρά μαθημάτων γενικής και επαγγελματικής Εκπαίδευσης.

Επικοινωνία ανάμεσα στις διάφορες φάσεις της αγγλικής Εκπαίδευσης

Στην Αγγλία οι Εκπαιδευτικοί Κανονισμοί (Σχολικά Αρχεία) του 1989 απαιτούν από τα σχολεία να τηρούν ένα σχολικό αρχείο των μαθητών τους που να καλύπτει τις ακαδημαϊκές επιδόσεις τους, άλλες δεξιότητες και δυνατότητες και την πρόοδό τους στο σχολείο (Eurydice, 2006). Άλλο υλικό, όπως λεπτομέρειες της σχολικής παρακολούθησης και των απουσιών ή του οικογενειακού τους υποβάθρου μπορούν επίσης να καταγραφούν, εάν κάτι τέτοιο κριθεί αναγκαίο και σκόπιμο. Το σχολικό αρχείο και το πρόσθετο υλικό διαμορφώνουν το εκπαιδευτικό αρχείο, το οποίο κατά τη μεταφορά ενός μαθητή σε οποιοδήποτε άλλο σχολείο ή εκπαιδευτικό ίδρυμα τον ακολουθεί.

Από το σχολικό έτος του 1999/2000, τέθηκε σε εφαρμογή ένα σύστημα μοναδικών αριθμών μαθητών (Unique Pupil Numbers, UPNs) στα αγγλικά maintained schools. Τα UPNs διευκολύνουν την καταγραφή της προόδου των μαθητών εντός του σχολικού συστήματος. Προορίζονται να προσφέρουν καλύτερες πληροφορίες στα σχολεία, στις τοπικές αρχές και στην κεντρική κυβέρνηση για τις αποδόσεις των μαθητών τους και για τους παράγοντες που τις επηρεάζουν.

1.3 Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα

Το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα (National Curriculum) καθορίζει ένα σαφές και πλήρες νομικό δικαίωμα μάθησης για όλους τους μαθητές ηλικίας έως και 16 ετών. Προσδιορίζει το περιεχόμενο των μαθημάτων που θα διδαχθούν και θέτει στόχους επίτευξης για την μάθηση. Καθορίζει επίσης τον τρόπο αξιολόγησης και αναφοράς της απόδοσης των μαθητών. Ένα αποτελεσματικό Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα δίνει στους δασκάλους, στους μαθητές, στους γονείς, στους εργοδότες και στην ευρύτερη κοινότητα μια σαφή και κοινή κατανόηση των δεξιοτήτων και της γνώσης που οι νέοι θα κερδίσουν στο σχολείο (National Curriculum online, 2006a).

Το αγγλικό σχολικό πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνει όλη την εκπαίδευση και τις εμπειρίες που κάθε σχολείο προγραμματίζει για τους μαθητές του και το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα είναι ένα σημαντικό στοιχείο του. Έγκειται σε κάθε σχολικό ίδρυμα να διαμορφώσει το δικό του πρόγραμμα σπουδών συναρτήσει των συνθηκών και των εξειδικευμένων αναγκών του (National Curriculum online, 2006b).

Σε γενικές γραμμές το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα ισχύει για όλους τους μαθητές ηλικίας 5-16 ετών των κρατικά επιδοτούμενων σχολείων (INCA, 2007d). Εντούτοις, ο Υπουργός Παιδείας μπορεί να διατάξει τη μετατροπή και τη μη εφαρμογή του για ορισμένους μαθητές, σε ορισμένα σχολεία και υπό ορισμένες συνθήκες. Μπορεί, παραδείγματος χάρη, να επιτραπεί η μερική τροποποίηση, ακόμη και η μη εφαρμογή του θεσμοθετημένου Αναλυτικού Προγράμματος για μεμονωμένους σπουδαστές με ειδικές ικανότητες[6].

Στόχοι του αγγλικού σχολικού προγράμματος

Στόχος 1: Το σχολικό πρόγραμμα σπουδών πρέπει να αποβλέπει στο να παρέχει ίσες ευκαιρίες για όλους τους μαθητές προκειμένου να μάθουν και να επιτύχουν.

[6] Όρος που χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις απαιτήσεις παιδιών με δυσκολίες σε μια από τις ακόλουθες περιοχές: στη μάθηση, στη συμπεριφορά, στη συναισθηματική, κοινωνική ή φυσική ανάπτυξη, οι οποίες είτε επηρεάζουν την εκπαιδευτική τους πρόοδο, είτε απαιτούν πρόνοια διαφορετική από τη συνήθη. Στην Αγγλία και στην Ουαλία, αν κριθεί ότι ένα παιδί χρήζει επιπλέον φροντίδας και πρόνοιας από αυτή που προσφέρεται κανονικά, οι τοπικές εκπαιδευτικές αρχές υποχρεούνται να συντάξουν μια επίσημη έκθεση όπου να περιγράφονται οι ανάγκες του παιδιού και να προτείνονται τρόποι ικανοποίησής του. Το παιδί πλέον αποκτά τον χαρακτηρισμό 'statemented'.

Στόχος 2: Το σχολικό πρόγραμμα σπουδών πρέπει να αποσκοπεί στο να προωθεί την πνευματική, ηθική, κοινωνική και πολιτιστική ανάπτυξη των μαθητών και να προετοιμάζει όλους τους μαθητές για τις ευκαιρίες, τις ευθύνες και την εμπειρία της ζωής.

Αυτοί οι δύο στόχοι ενισχύουν ο ένας τον άλλον. Η προσωπική ανάπτυξη των μαθητών, πνευματικά, ηθικά, κοινωνικά και πολιτιστικά, διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη δυνατότητά τους να μάθουν και να επιτύχουν.

Οι τέσσερις κύριοι σκοποί του αγγλικού Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος

1. *Να προασπίζει δικαιώματα.*

Να εξασφαλίζει σε όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από το κοινωνικό τους υπόβαθρο, τον πολιτισμό, τη φυλή, το φύλο και τυχόν διαφορές στις ικανότητες δικαίωμα πρόσβασης σε διάφορους μαθησιακούς τομείς προκειμένου να αναπτύξουν τη γνώση, την κατανόηση, τις δεξιότητες και τις τοποθετήσεις που είναι απαραίτητες για την αυτοεκπλήρωση και την εξέλιξή τους σε ενεργούς και υπεύθυνους πολίτες.

2. *Να καθιερώνει πρότυπα.*

Να καθιστά σαφείς τις προσδοκίες για μάθηση και επίτευξη στους μαθητές, στους γονείς, στους δασκάλους, στους κυβερνήτες, στους εργοδότες και στο κοινό και να καθιερώνει εθνικά πρότυπα για την απόδοση όλων των μαθητών στα μαθήματα που περιλαμβάνει. Αυτά τα πρότυπα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να θέσουν στόχους για βελτίωση, να εκτιμήσουν την πρόοδο προς την πλήρωση των εν λόγω στόχων και να συγκρίνουν την απόδοση μεταξύ των ατόμων, των ομάδων και των σχολείων.

3. Να προωθεί τη συνέχεια και τη συνεκτικότητα.

Να συμβάλλει στη διαμόρφωση ενός συνεκτικού εθνικού πλαισίου, που να προωθεί τη συνέχεια του προγράμματος σπουδών και να είναι αρκετά εύκαμπτο για να εξασφαλίσει την πρόοδο των μαθητών. Επίσης να διευκολύνει τη μετάβαση των μαθητών μεταξύ των σχολείων και των φάσεων Εκπαίδευσης και να αποτελέσει τη βάση για τη δια βίου μάθηση.

4. Να προωθεί την κατανόηση από το κοινό.

Να ενισχύει την κατανόηση του έργου των σχολείων και των επιτευγμάτων της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης και να παρέχει κοινή βάση για συζητήσεις εκπαιδευτικών ζητημάτων μεταξύ κοινών και εξειδικευμένων ομάδων, συμπεριλαμβανομένων μαθητών, γονέων, δασκάλων, κυβερνητών και εργοδοτών.

Βασικές δεξιότητες (Key Skills)

Έξι περιοχές δεξιοτήτων περιγράφονται ως Βασικές. Κατέχουν σημαντική θέση στο αγγλικό εκπαιδευτικό σύστημα καθώς θεωρούνται απαραίτητες για την επιτυχία στην εργασία, στην Εκπαίδευση και στη ζωή. Αυτές οι βασικές δεξιότητες ενσωματώνονται στο Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα και είναι οι ακόλουθες:

1. *Επικοινωνία*

Περιλαμβάνει δεξιότητες στην ομιλία, στην ακρόαση, στην ανάγνωση και στη γραφή. Οι δεξιότητες στην ομιλία και στην ακρόαση περιλαμβάνουν τη ικανότητα του να μιλά κάποιος αποτελεσματικά σε διαφορετικά ακροατήρια, το να ακούει, να καταλαβαίνει και να αποκρίνεται κατάλληλα σε άλλους, αλλά και να συμμετέχει αποτελεσματικά σε συζητήσεις. Οι δεξιότητες στην ανάγνωση και τη γραφή περιλαμβάνουν τη δυνατότητα ανάγνωσης με ευφράδεια μιας σειράς λογοτεχνικών και μη κειμένων και την κριτική απεικόνιση του τι έχει αναγνωσθεί. Ευκαιρίες για ανάπτυξη αυτής της βασικής δεξιότητας παρέχονται μέσω της Αγγλικής γλώσσας και με τη χρήση της από τους μαθητές μέσα στο πρόγραμμα σπουδών.

2. *Η εφαρμογή του αριθμού*

Συνδέεται με την ανάπτυξη μιας σειράς διανοητικών δεξιοτήτων υπολογισμού και τη δυνατότητα εφαρμογής τους μέσα σε ποικίλα πλαίσια. Οι δεξιότητες αυτές περιλαμβάνουν την ανάπτυξη της κατανόησης και της χρήσης της μαθηματικής γλώσσας σχετικά με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς προκειμένου να υποβληθούν σε επεξεργασία τα στοιχεία, να λυθούν τα όλο και περισσότερο σύνθετα προβλήματα και να ερμηνευθεί ο συλλογισμός που έλαβε χώρα. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζουν υπολογιστικές δεξιότητες σε προβλήματα και σε άλλα μαθήματα του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος, αλλά και σε πραγματικές καταστάσεις. Οι ευκαιρίες για αυτήν την βασική ικανότητα προσφέρονται ρητά στα μαθηματικά.

3. *Τεχνολογία πληροφοριών*

Η βασική δεξιότητα της τεχνολογίας πληροφοριών περιλαμβάνει την ικανότητα χρήσης ποικίλων πηγών πληροφορίας και εργαλείων ICT[7] για την εύρεση, ανάλυση, ερμηνεία, εκτίμηση και παρουσίαση πληροφοριών για πλήθος σκοπών.

[7] Information and communication Technology (Τεχνολογία πληροφορίας και επικοινωνίας).

4. Εργασία με άλλους

Περιλαμβάνει την ικανότητα συμμετοχής σε συζητήσεις τόσο σε μικρές ομάδες, όσο και μέσα στην τάξη και τη συνεργασία με άλλους για την κοινή αντιμετώπιση μιας πρόκλησης, κάτι που προσφέρουν όλα τα μαθήματα.

5. Βελτίωση προσωπικής μάθησης και απόδοσης

Εμπεριέχει την αυτοκριτική των μαθητών πάνω στην εργασία τους και στο τι έχουν μάθει και τον προσδιορισμό τρόπων για τη βελτίωση της προσωπικής μάθησης και επίδοσης. Όλα τα μαθήματα προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές να ελέγξουν την εργασία τους και να βελτιώσουν τη μάθησή τους.

6. Επίλυση προβλημάτων

Αφορά στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων και στρατηγικών που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουν τόσο κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής τους, όσο και στην υπόλοιπη ζωή τους.

Βασικά στοιχεία του αγγλικού Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος είναι:

- Τέσσερα *Βασικά Στάδια* (key stages) μάθησης και αξιολόγησης:

Εκπαιδευτικές Φάσεις	**Ηλικίες μαθητών**	**Βασικά Στάδια**	**Έτη (Years) Εκπαίδευσης**
Προ-υποχρεωτική Εκπαίδευση	3-5 ετών	Θεμελιώδες Στάδιο	
Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση	5-7 ετών	Βασικό Στάδιο 1	Έτη 1 και 2
	7-11 ετών	Βασικό Στάδιο 2	Έτη 3, 4, 5 και 6
Κατώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση	11-14 ετών	Βασικό Στάδιο 3	Έτη 7, 8 και 9
	14-16 ετών	Βασικό Στάδιο 4	Έτη 10 και 11
Ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση	16-18 ετών		Έτη 12 και 13

Πίνακας 1: Εκπαιδευτικές Φάσεις, ηλικίες μαθητών, Βασικά Στάδια και Έτη Αγγλικής Εκπαίδευσης.

Ο Εκπαιδευτικός Νόμος του 2002 δημιούργησε μια νομοθετική διάκριση μεταξύ των Βασικών Σταδίων 1 έως 3 και του Βασικού Σταδίου 4 της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης.

- Τα *μαθήματα κορμού* (core subjects) και τα *μαθήματα επιλογής* (foundation subjects) Στα μαθήματα κορμού ανήκουν τα αγγλικά, τα μαθηματικά και η επιστήμη και η παρακολούθησή τους είναι υποχρεωτική. Η ειδική αντιμετώπιση που έχουν τα μαθήματα αυτά οφείλεται στο ότι η επάρκεια στη γλώσσα, στις μαθηματικές γνώσεις και στις επιστημονικές μεθόδους θεωρείται καθοριστική τόσο για τα υπόλοιπα μαθήματα του σχολικού προγράμματος όσο και για τη μετέπειτα ενήλικη ζωή. Το υποχρεωτικό πρόγραμμα σπουδών στην Αγγλία αποτελείται από το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα και τη θρησκευτική εκπαίδευση που, ωστόσο, δεν προορίζονται να αποτελούν ολόκληρο το πρόγραμμα σπουδών. Από τον Αύγουστο του 2000, οι μαθητές αναμένεται να ακολουθήσουν ένα μη θεσμοθετημένο πρόγραμμα προσωπικής και κοινωνικής αγωγής καθώς και αγωγής υγείας (PSHE).

	Βασικό Στάδιο 1	*Βασικό Στάδιο 2*	*Βασικό Στάδιο 3*	*Βασικό Στάδιο 4*	
Αγγλικά	■	■	■	■	Μαθήματα κορμού Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος
Μαθηματικά	■	■	■	■	
Επιστήμη	■	■	■	■	
Σχέδιο και τεχνολογία	■	■	■		Μαθήματα Επιλογής Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος
ICT	■	■	■	■	
Ιστορία	■	■	■		
Γεωγραφία	■	■	■		
Σύγχρονες ξένες γλώσσες			■		
Τέχνη και σχέδιο	■	■	■		
Μουσική	■	■	■		
Φυσική Αγωγή	■	■	■	■	
Αγωγή του Πολίτη			■	■	
Θρησκευτική Εκπαίδευση	■	■	■	■	
Επαγγελματικός προσανατολισμός			■	■	
Σεξουαλική Αγωγή			■	■	
Εργασιακή Εκπαίδευση				■	
Προσωπική και κοινωνική αγωγή, αγωγή υγείας, PSHE [8]					

■ : προβλεπόμενα από τη αγγλική νομοθεσία

Πίνακας 2: Μαθήματα και Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα.

[8] Personal Social Health Education.

- Τα *Προγράμματα σπουδών* (Programmes of study, PoS), τα οποία καταδεικνύουν τη μαθηματική γνώση, τις δεξιότητες και την αντίληψη που πρέπει να διδαχθούν σε κάθε Βασικό Στάδιο και παρέχουν τη βάση για τα ετήσια πλάνα εργασίας (Schemes of Work, SoW). Εξειδικευμένες διδακτικές μέθοδοι και σχολικά εγχειρίδια δεν προτείνονται ως μέρος ενός προγράμματος σπουδών, αλλά επιλέγονται από τους καθηγητές. Κάθε Πρόγραμμα σπουδών περιγράφεται από τα ακόλουθα:

    - Αριθμός και Άλγεβρα (Ma2)
    - Σχήμα, χώρος και μέτρα (Ma3)
    - Χειρισμός δεδομένων (Ma4)

- *Στόχοι επίτευξης* και *περιγραφές Επιπέδων*. Ένας στόχος επίτευξης (attainment target, AT) καθορίζει «τη γνώση, τις δεξιότητες και την κατανόηση που μαθητές διαφορετικών δυνατοτήτων και ωριμότητας αναμένεται να έχουν στο τέλος κάθε Βασικού Σταδίου». Οι στόχοι επίτευξης αποτελούνται από οκτώ περιγραφές Επιπέδων αυξανόμενης δυσκολίας, συν ένα προσδιορισμό εξαιρετικής απόδοσης πάνω από το Επίπεδο 8. Σε κάθε Επίπεδο περιγράφεται αναλυτικά η απόδοση που πρέπει να έχουν οι μαθητές. Οι περιγραφές των Επιπέδων παρέχουν τη βάση για την εξαγωγή συμπερασμάτων για την απόδοση των μαθητών στο τέλος των Βασικών Σταδίων 1, 2 και 3, ενώ δε βρίσκουν εφαρμογή στο Βασικό Στάδιο 4 (National Curriculum online, 2006a):

Περιγραφές Επιπέδων εντός της οποίας αναμένεται να εργασθεί η πλειονότητα των μαθητών		**Αναμενόμενη απόδοση για την πλειοψηφία των μαθητών στο τέλος του Βασικού Σταδίου**	
Βασικό Στάδιο 1	1-3	Στην ηλικία των 7 ετών	2
Βασικό Στάδιο 2	2-5	Στην ηλικία των 11 ετών	4
Βασικό Στάδιο 3	3-7	Στην ηλικία των 14 ετών	>5/6

Πίνακας 3: Περιγραφές Επιπέδων - αναμενόμενη απόδοση μαθητών.

Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα και Εκπαιδευτικές φάσεις

Πρώτη φάση: Προ-υποχρεωτική Εκπαίδευση

Μέχρι την εισαγωγή του Εκπαιδευτικού Νόμου (Education Act) του 2002 το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα ίσχυε για τους μαθητές της υποχρεωτικής ηλικίας και μόνο (INCA, 2007c). Η Q.C.A., ωστόσο, όρισε «πρώιμους μαθησιακούς στόχους» (early learning goals) για το προ-υποχρεωτικό Θεμελιώδες Στάδιο (για μαθητές ηλικίας από 3 έως 5 ετών) οι οποίοι έγιναν υποχρεωτικοί το 2002. Οι εν λόγω στόχοι καλύπτουν έξι τομείς:

-Την προσωπική, κοινωνική και συναισθηματική ανάπτυξη.

-Την επικοινωνία, τη γλώσσα και τη βασική παιδεία.

-Τη μαθηματική ανάπτυξη.

-Τη γνώση και κατανόηση του κόσμου.

-Τη φυσική ανάπτυξη.

-Τη δημιουργική ανάπτυξη.

Ο πρώτος τομέας της προσωπικής, κοινωνικής και συναισθηματικής ανάπτυξης θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία των παιδιών στους λοιπούς μαθησιακούς τομείς. Οι υπόλοιποι πέντε τομείς είναι κατά τέτοιον τρόπο οργανωμένοι ούτως ώστε να αντικατοπτρίζουν την προτεραιότητα που δίνει η αγγλική κυβέρνηση στη γλώσσα, στη βασική παιδεία και στη μαθηματική ανάπτυξη.

Το πρόγραμμα του Θεμελιώδους Σταδίου στηρίζεται στους προαναφερθέντες πρώιμους μαθησιακούς στόχους, οι οποίοι ισοδυναμούν με απαιτήσεις που πρέπει να καλύψουν οι μαθητές στο τέλος του Σταδίου, δηλαδή στο τέλος του ακαδημαϊκού έτους όπου έχουν τα 5^{α} τους γενέθλια. Θα πρέπει να δημιουργεί το υπόβαθρο για τη μελλοντική μάθηση μέσω της προστασίας και της ενίσχυσης:

- της προσωπικής, κοινωνικής και συναισθηματικής εξέλιξης.
- της θετικής στάσης απέναντι στη μάθηση.
- της κοινωνικότητας.
- της ικανότητας συγκέντρωσης και επιμονής.
- της ικανότητας επικοινωνίας και γλωσσικής έκφρασης.
- της ικανότητας γραφής και ανάγνωσης.
- της κατανόησης του κόσμου.
- της φυσικής ανάπτυξης.
- της ανάπτυξης της δημιουργικότητας.
- των μαθηματικών ικανοτήτων.

Σε ό,τι αφορά στις μαθηματικές ικανότητες, το πρόγραμμα του Θεμελιώδους Σταδίου προσφέρει ευκαιρίες σε όλα τα παιδιά να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς, τις μετρήσεις, τα σχήματα και τον χώρο προσφέροντάς τους μια ευρεία ποικιλία πλαισίων εντός των οποίων μπορούν να εξερευνήσουν, να διασκεδάσουν, να εξασκηθούν και να μιλήσουν για μαθηματικές έννοιες.

Δεύτερη φάση: Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Η νομοθεσία απαγορεύει στην αγγλική κυβέρνηση την υπόδειξη χρονικών πλαισίων σε ό,τι αφορά στη διδασκαλία κάθε μαθήματος (INCA, 2007d). Δεν υπάρχει, επίσης, προκαθορισμένος αριθμός μαθημάτων που πρέπει να διδάσκονται την εβδομάδα. Το μέρος του διδακτικού χρόνου που θα στηριχθεί στο Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα αποτελεί μέλημα κάθε σχολικού ιδρύματος. Ωστόσο η Q.C.A. έχει εκδώσει οδηγίες για την οργάνωση του προγράμματος διδασκαλίας στα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης υπό τον τίτλο «Designing and Timetabling the Primary Curriculum – a practical guide for key stages 1 & 2» (Q.C.A., 2002).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν ορισμένες κρατικές ενέργειες για την εξασφάλιση της προτεραιότητας του αριθμητισμού (numeracy) και του αλφαβητισμού (literacy) στα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίες εισήχθησαν μέσω της Εθνικής Στρατηγικής Αλφαβητισμού (National Literacy Strategy, NLS*)* και της Εθνικής Στρατηγικής Αριθμητισμού (National Numeracy Strategy, NNS*)*. Από τον Σεπτέμβρη του 1999 και έπειτα η αγγλική κυβέρνηση ενθαρρύνει τα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης σε όλη τη χώρα να προσφέρουν στους νεαρούς μαθητές τους μαθήματα μαθηματικών έως και μία ώρα σε καθημερινή βάση και προσφέρει ένα αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας που επικεντρώνεται στους νοερούς υπολογισμούς. Αν και δεν ήταν υποχρεωτικό, η πλειοψηφία των σχολείων ακολούθησε τις κρατικές προτάσεις. Το 2003 η Εθνική Στρατηγική Αλφαβητισμού και η Εθνική Στρατηγική Αριθμητισμού συνενώθηκαν σε μία, ενιαία, την Πρωτοβάθμια Εθνική Στρατηγική (Primary National Strategy). Το 2006 παρουσιάστηκε ένα ανανεωμένο Πρωτοβάθμιο Πλαίσιο για τον Αλφαβητισμό και τα Μαθηματικά (Primary Framework for Literacy and Mathematics) με στόχο την βελτίωση των προτύπων αριθμητισμού και αλφαβητισμού.

Τρίτη και Τέταρτη φάση: Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Τον Σεπτέμβριο του 2001 παρουσιάσθηκε μια στρατηγική για τους μαθητές του Βασικού Σταδίου 3 μέσω της οποίας προτάθηκε η διδασκαλία της αγγλικής γλώσσας και των μαθηματικών για τουλάχιστον για τρεις ώρες το καθένα, σε εβδομαδιαία βάση. Βάση για το εγχείρημα αυτό αποτέλεσε αντίστοιχη προσπάθεια στα σχολεία της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Την παρούσα περίοδο η Q.C.A. εκτελεί μια ανασκόπηση του προγράμματος του Βασικού Σταδίου 3 ούτως ώστε να γίνει περισσότερο ευέλικτο, να λειτουργεί μεταβατικά από το Βασικό Στάδιο 2 στο 4 και να βελτιωθεί η αξιολόγηση των μαθημάτων επιλογής του. Όλα τα υφιστάμενα μαθήματα κορμού και επιλογής θα παραμείνουν, αλλά με αναθεωρημένο περιεχόμενο. Στόχος είναι να εξασφαλισθεί το ότι τα νεαρά άτομα κατέχουν το βασικό περιεχόμενο και έννοιες για κάθε ένα από τα μαθήματα (INCA, 2007e).

Σε ό,τι αφορά στο πρόγραμμα του Βασικού Σταδίου 4, η ανανέωση του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος που πραγματοποιήθηκε τον Αύγουστο του 2000 δημιούργησε δύο διαφορετικά Προγράμματα σπουδών (Programmes of study) στα μαθηματικά, το ανώτερο (higher) και το προπαρασκευαστικό (foundation). Το ανώτερο Πρόγραμμα σπουδών είναι ειδικά σχεδιασμένο για τους ικανότερους μαθητές. Το προπαρασκευαστικό Πρόγραμμα σπουδών απευθύνεται σε εκείνους που στο τέλος του Βασικού Σταδίου 3 δεν έφθασαν στο Επίπεδο 5 και προσφέρει περισσότερες άμεσες συνδέσεις με εφαρμογές των μαθηματικών και επεξεργασία δεδομένων από πραγματικές καταστάσεις (INCA, 2007f).

Καθώς το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν έχει ισχύ στο Βασικό Στάδιο 4, δεν υπάρχουν μαθήματα υποχρεωτικής παρακολούθησης, εκτός από τη θρησκευτική Εκπαίδευση. Στο επίπεδο αυτό το πρόγραμμα των μαθητών είναι άμεση συνάρτηση της επιλογής τους ανάμεσα στους εθνικά αναγνωρισμένους τίτλους σπουδών. Υπάρχει δυνατότητα επιλογής οποιαδήποτε σειράς μαθημάτων, ανάλογα με το ωρολόγιο πρόγραμμα κάθε σχολείου και το εύρος των επιλογών που προσφέρει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η αξιολόγηση της υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης διαφέρει από εκείνη της μετα-υποχρεωτικής. Επιπλέον υπάρχουν διαφορετικές διευθετήσεις για την αξιολόγηση των μαθητών στα Βασικά Στάδια 3 και 4.

2.1 Θεσμοθετημένες ρυθμίσεις αξιολόγησης στο τέλος του Βασικού Σταδίου 3

Η υποχρεωτική αξιολόγηση του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος για τους μαθητές ηλικίας 14 ετών λαμβάνει χώρα στο τέλος του Βασικού Σταδίου 3 (Έτος 9). Περιλαμβάνει την αξιολόγηση της εργασίας τους από τους δασκάλους σε σχέση με όλους τους στόχους επίτευξης και για όλα τα υποχρεωτικά μαθήματα του Προγράμματος Σπουδών που αφορούν σε αυτό το Βασικό Στάδιο. Η αξιολόγηση από τους δασκάλους βασίζεται σε στοιχεία προφορικών, γραπτών και πρακτικών δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη, στις εργασίες των μαθητών για το σπίτι, στα σχολικά διαγωνίσματα και στις εξωτερικές εξετάσεις του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος για την αγγλική γλώσσα, τα μαθηματικά και την επιστήμη. Γενικά όλοι οι μαθητές αξιολογούνται κατά το τελικό έτος του Βασικού Σταδίου 3. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για εκείνους που βρίσκονται στο Βασικό Στάδιο 3 και στο πρώτο ή στο δεύτερο Επίπεδο (βάσει της κλίμακας από το πρώτο ως το όγδοο Επίπεδο του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος) στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, και στο πρώτο έως και το τρίτο Επίπεδο στα Αγγλικά. Αυτή η κατηγορία μαθητών αξιολογείται μόνο από τους καθηγητές. Ακόμη η Q.C.A. διεξάγει προαιρετικές εξετάσεις για όσους μαθητές υπερβαίνουν το αναμενόμενο Επίπεδο στο τέλος του Βασικού Σταδίου 3[9](Eurydice, 2006).

---

[9] Η Q.C.A. έχει θεσπίσει και προαιρετικά διαγωνίσματα στα μαθηματικά και στην αγγλική γλώσσα για τους μαθητές που βρίσκονται στα Έτη 7 και 8 (ηλικίας 11-12 και 12-13 ετών αντίστοιχα). Επίσης από το 2001 προσφέρει «εξετάσεις προόδου» (progress tests) για το Έτος 7 στα ίδια μαθήματα, με στόχο να ενισχύσει τους μαθητές που η απόδοσή τους βρίσκεται σε χαμηλότερο επίπεδο από το επιθυμητό (Eurydice, 2006).

Εξωτερικές εξετάσεις

Οι εξωτερικές εξετάσεις για τα Μαθηματικά αποτελούνται από δύο ωριαίες γραπτές δοκιμασίες, όπου στη μία επιτρέπεται η χρήση μικροϋπολογιστή, ενώ στην άλλη όχι. Επιπλέον, από το 1998 θεσμοθετήθηκε εικοσάλεπτη εξέταση νοητικών υπολογισμών για μαθητές του τρίτου επιπέδου (με βάση τα Επίπεδα Επίτευξης του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος). Υπεύθυνη για τη διανομή των διαγωνισμάτων είναι η Εθνική Υπηρεσία Αξιολόγησης (National Assessment Agency, NAA), η οποία ιδρύθηκε το 2004 και εξαρτάται από την Q.C.A. Οι εξετάσεις είθισται να πραγματοποιούνται μία εβδομάδα του Μαΐου, ενώ για διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων μαθητών, υπάρχει και η κατάλληλη εξέταση. Τα διαγωνίσματα βαθμολογούνται από εξωτερικούς βαθμολογητές, οι οποίοι προέρχονται από ένα από τα τρία απονεμητικά σώματα (awarding bodies) στην Αγγλία: Edexcel Foundation, Oxford Cambridge and RSA Examinations (OCR) και Assessment and Qualifications Alliance (AQA) (Eurydice, 2006).

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης από τους καθηγητές και από τα εθνικά διαγωνίσματα συνήθως εκφράζονται σε Επίπεδα, βάσει των περιγραφών Επιπέδων του Εθνικού Προγράμματος. Στο τέλος του Βασικού Σταδίου 3 η απόδοση της πλειοψηφίας των μαθητών αναμένεται να είναι ανάμεσα στο τρίτο και στο όγδοο Επίπεδο. Στόχο για τα περισσότερα παιδιά αποτελεί το πέμπτο ή το έκτο Επίπεδο (Eurydice, 2006).

2.2 Θεσμοθετημένες ρυθμίσεις αξιολόγησης στο τέλος του Βασικού Σταδίου 4

Η αξιολόγηση των μαθητών στο Βασικό Στάδιο 4 για την πλειοψηφία των μαθητών γίνεται μέσω των εξετάσεων GCSE (General Certificate of Secondary Education GCSE, Γενικό Πιστοποιητικό Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) σε μαθήματα του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος ή μέσω μιας συνεχώς αυξανόμενης ποικιλίας εξειδικευμένων ή επαγγελματικών πιστοποιήσεων. Για τους μαθητές εκείνους που δεν επιθυμούν να επιλέξουν καμία από τις προαναφερθείσες πιστοποιήσεις ή μια πιστοποίηση Εισαγωγικού Επιπέδου η Κυβέρνηση θεωρεί ως την πλέον αποτελεσματική μέθοδο εκτίμησης της προόδου την αξιολόγηση από τους καθηγητές στο τέλος του Βασικού Σταδίου (Eurydice, 2006).

2.3 Προαγωγή μαθητών

Στην υποχρεωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση οι μαθητές προάγονται στην επόμενη τάξη μετά το τέλος κάθε σχολικού έτους. Σε εξαιρετικές περιπτώσεις οι γονείς και το σχολείο μπορούν να αποφασίσουν για το αν ένα παιδί θα επωφελούνταν εκπαιδευτικά με την παραμονή του για ένα επιπλέον έτος σε μια τάξη ή, εάν είναι ιδιαίτερα ταλαντούχο, με το να παραλείψει την επόμενη τάξη. Αυτές οι περιπτώσεις είναι εξαιρετικά σπάνιες. Αντί αυτού, λαμβάνεται μέριμνα για τέτοιους μαθητές συνήθως με διαφοροποιημένη διδασκαλία και στόχους μελέτης ή με πρόσθετη υποστήριξη για τους μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες (Eurydice, 2006).

2.4 Πιστοποιήσεις

Οι εθνικά αναγνωρισμένες πιστοποιήσεις τίτλων διεκδικούνται από την πλειοψηφία των μαθητών στο τέλος του Βασικού Σταδίου 4, στην ηλικία των 16 ετών, με το τέλος της περιόδου υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Ωστόσο, οποιασδήποτε ηλικίας μαθητής, ακόμη και ενήλικας, μπορεί να διεκδικήσει την απόκτησή τους σε ιδρύματα συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης. Ταλαντούχοι και χαρισματικοί μαθητές μπορούν επίσης να λάβουν μέρος, ακόμη και σε ηλικία μικρότερη από την προβλεπόμενη, με τις κατάλληλες ρυθμίσεις από τα σχολεία.

Οι πρόσφατες αναθεωρήσεις του προγράμματος σπουδών της υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης έδωσαν έμφαση στην ευελιξία με την οποία οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν μαθήματα επαγγελματικού προσανατολισμού στο Βασικό Στάδιο 4 παράλληλα με τα γενικότερα (ακαδημαϊκά) μαθήματα. Λίγο αργότερα θα περιγραφούν και οι επιλογές πιστοποιήσεων γενικού και επαγγελματικού περιεχομένου που είναι διαθέσιμες στο Στάδιο αυτό.

Στην Αγγλία, με τις παραγράφους 96, 98, 100 και 101 του Νόμου Εκμάθησης και Δυνατοτήτων του 2000 (Learning and Skills Act 2000), όλες οι σειρές μαθημάτων που οδηγούν σε εξωτερική πιστοποίηση για μαθητές κάτω των 19 ετών, πρέπει να έχουν εγκριθεί από τον Υπουργό Προεδρίας της Κυβέρνησης της Αγγλίας για την Παιδεία (Eurydice, 2006).

2.4.1 Γενικό Πιστοποιητικό Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (General Certificate of Secondary Education, GCSE)

Τη δεκαετία του 70’ αποφασίστηκε η συνένωση των τίτλων GCE O level και CSE σε έναν νέο, προκειμένου να διαμορφωθεί ένα καινούριο, απλό σύστημα εξέτασης για σπουδαστές ηλικίας 16+ ετών. Βάσει συμφωνίας, η νέα πιστοποίηση θα έπρεπε να βασίζεται σε κριτήρια τόσο γενικού περιεχομένου, όσο και ειδικότερα, αναφορικά με το κάθε μάθημα ξεχωριστά. Η αλλαγή σχεδιάστηκε κατά τρόπο τέτοιο ώστε να καταστήσει τις νέες εξετάσεις περισσότερο περιεκτικές και ενθάρρυνε πολλά νέα άτομα να σπουδάσουν και να λάβουν μέρος σε εξετάσεις για την απόκτηση των νέων τίτλων σπουδών. Η νέα πιστοποίηση ονομάστηκε Γενικό Πιστοποιητικό της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (GCSE) και εισήχθη για πρώτη φορά το 1986, με πρώτες εξετάσεις το 1988. Τα GCSEs παραμένουν ακόμη και σήμερα τα ίδια, αν και είναι περισσότερο προσιτά σε όλους τους μαθητές ηλικίας 14-19 ετών, ενώ συχνά χρησιμοποιούνται σαν κριτήριο εισόδου σε σπουδές ανωτέρου επιπέδου. Το 2001 η αγγλική κυβέρνηση αποφάσισε να προχωρήσει στην εισαγωγή νέων GCSEs σε επαγγελματικά μαθήματα, στηρίζοντας την επαγγελματική Εκπαίδευση. Τα νέα GCSEs προσφέρονται σε οκτώ εφαρμοσμένα μαθήματα και είναι διπλά βραβεία (Double Awards), αξίζοντας όσο δύο ακαδημαϊκά GCSEs. Η διδασκαλία για την απόκτηση των τίτλων αυτών άρχισε τον Σεπτέμβρη του 2002, με πρώτες απονομές το καλοκαίρι του 2004. Η συγκεκριμένη κατηγορία θα αναλυθεί περισσότερο σε επόμενη ενότητα.

Οι μαθητές συνήθως διαλέγουν 8 έως 12 μαθήματα GCSE σε διάρκεια δυο ετών. Είναι σε θέση να επιλέξουν ανάμεσα σε 45 μαθήματα, από την αγγλική γλώσσα και τα μαθηματικά, ως τα οικονομικά και τη ψυχολογία. Οι περισσότεροι παρακολουθούν κάποια μαθήματα κορμού, ενώ επιλέγουν και μερικά συμπληρωματικά μαθήματα επιλογής. Κάποια σχολεία και κολέγια προσφέρουν επιπλέον μαθήματα, ανάλογα με την εξειδίκευση και τα προσόντα του διδακτικού προσωπικού τους, ενώ ορισμένα από αυτά προσφέρουν προγράμματα GCSEs για τους πιο ώριμους από αυτούς. Οι μαθητές σε ένα έτος συμπληρώνουν κάποιο αριθμό μαθημάτων GCSEs με τα οποία μπορούν να συνεχίσουν σε πρόγραμμα προκαταρκτικών σπουδών, σε προγράμματα επαγγελματικής Εκπαίδευσης, σε κύκλους μαθημάτων AS level, A level ή ακόμη και να ξεκινήσουν την επαγγελματική τους σταδιοδρομία. Όλα τα προγράμματα GCSE προβλέπουν διδασκαλία σε τάξη και εργαστήρια και οι σπουδαστές ενθαρρύνονται να εργασθούν ανεξάρτητα και να αναλάβουν έρευνα για εργασίες, συχνά εκτός του σχολικού ωραρίου. Οι εκπαιδευτικές επισκέψεις των σπουδαστών, είτε μεμονωμένα είτε σε μικρές ομάδες, αποτελούν συχνά τμήμα του προγράμματος. Σε κάποια μαθήματα λαμβάνεται υπόψη η επίδοση των σπουδαστών καθ' όλη τη διάρκεια του έτους, ενώ σε κάποια άλλα η αξιολόγηση γίνεται αποκλειστικά με εξετάσεις.

Τα αποτελέσματα των εξετάσεων κατατάσσονται σε οκταβάθμια κλίμακα A*, A, B, C, D, E, F και G. Οι υποψήφιοι που αποτυγχάνουν να φθάσουν στο βαθμό G καταγράφονται ως "U", δηλαδή δεν ταξινομούνται και έτσι δεν λαμβάνουν τον τίτλο. Μερικά μαθήματα σε επίπεδο GCSE εξετάζονται μέσω επιπέδων (tiers), δηλαδή με διαφορετικές εξετάσεις που στοχεύουν σε ομάδες μαθητών συγκεκριμένων δυνατοτήτων. Για τα Μαθηματικά πλέον θα ισχύσει το σύστημα των δύο επιπέδων.

2.4.2 Γενικά Πιστοποιητικά Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε μαθήματα επαγγελματικής Εκπαίδευσης (Vocational GCSE)

Τα GCSEs σε μαθήματα επαγγελματικής Εκπαίδευσης έκαναν την εμφάνισή τους τον Σεπτέμβριο του 2002 και είναι διαθέσιμα για τις ακόλουθες θεματικές ενότητες:

- Επιχειρησιακές σπουδές
- Εφαρμοσμένη τέχνη και σχέδιο
- Εφαρμοσμένη πληροφορική και τεχνολογία επικοινωνιών
- Εφαρμοσμένες επιστήμες
- Μηχανική
- Υγεία και κοινωνική μέριμνα
- Αναψυχή και τουρισμός
- Βιομηχανική επεξεργασία

Τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με δύο κανονικά GCSEs. Ορισμένα μαθήματα είναι στενά συνδεδεμένα με το Βασικό Στάδιο 4 του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος, π.χ. τα GCSEs για τις θεματικές ενότητες της μηχανικής και της βιομηχανικής επεξεργασίας, τα οποία συναντούν τις απαιτήσεις του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος για το σχέδιο και την τεχνολογία. Ο τίτλος Vocational GCSE εισήχθη για να αντικαταστήσει το βασικό επίπεδο και το μέσο επίπεδο των

GNVQs. Ο κύκλος σπουδών που οδηγούσε στις εξετάσεις για την απόκτηση των General National Vocational Qualifications (GNVQs, Γενικοί Εθνικοί Επαγγελματικοί Τίτλοι Σπουδών) είχε ως στόχο να προσφέρει εκτενή προετοιμασία για την επαγγελματική απασχόληση όπως και πρόσβαση στην επαγγελματική Εκπαίδευση στην Ανώτερη Εκπαίδευση, αποτελώντας εναλλακτική επιλογή αντί των GCSE και GCE A Level. Το ανώτερο επίπεδο του GNVQs έχει πια αποσυρθεί πλήρως, ενώ το βασικό και το μέσο επίπεδο έχει προγραμματισθεί να αποσυρθούν σταδιακά μεταξύ των 2005 και 2007.

2.4.3 Πιστοποιήσεις Εισαγωγικού Επιπέδου (Entry level)

Ο Ron Dearing ήταν αυτός που πρότεινε για πρώτη φορά το να συμπεριληφθούν οι πιστοποιήσεις Entry level στο προτεινόμενο Εθνικό Πλαίσιο Πιστοποιήσεων του 1996. Επεσήμανε ότι αν και ένας αριθμός βραβείων αποσκοπούσε στο να ενισχύσει, να κινητοποιήσει και να αναγνωρίσει τα επιτεύγματα νέων ανθρώπων που άφηναν το σχολείο ή το κολέγιο χωρίς να έχουν αποκτήσει ένα GCSE, εντούτοις, κανένα τους δεν είχε την κρατική αναγνώριση. Οραματίστηκε μαθητές ηλικίας 14 ως 16 ετών, αλλά και μεγαλύτερους, αδύναμους να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις ενός GCSE, να εξετάζονται σε πιστοποιήσεις Entry level.

Από τον Απρίλιο του 1998, όταν οι αρμόδιες αρχές άρχισαν να εγκρίνουν τις πιστοποιήσεις Entry level, περισσότερα από 20 απονεμητικά σώματα κατέθεσαν προς έγκριση νέες πιστοποιήσεις στη Q.C.A., με αποτέλεσμα σήμερα να υπάρχουν πάνω από 159 εγκεκριμένες οι οποίες καλύπτουν σχεδόν όλα τα μαθήματα για τα οποία υπάρχουν GCSE, βασικές δεξιότητες, δεξιότητες για την αγορά εργασίας και μια μικρή ποικιλία τομέων επαγγελματικής εξειδίκευσης (Q.C.A., 2004a).

2.4.4 Εισαγωγικά Πτυχία και Διπλώματα (Introductory Certificates and Diplomas)

Επιπρόσθετα, νέοι επαγγελματικοί τίτλοι σπουδών αναπτύσσονται αυτήν την περίοδο παράλληλα με το Γενικό Πτυχίο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (GCSE) σε μαθήματα επαγγελματικής κατεύθυνσης. Αυτά τα νέα «Εισαγωγικά Πτυχία και Διπλώματα» είναι κατάλληλα για άτομα ηλικίας 16 έως 19 ετών, για ενήλικους αρχαρίους και μαθητές που βρίσκονται στο Βασικό Στάδιο 4 της υποχρεωτικής

Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Έχουν ως στόχο το να επιτρέψουν στους νέους και τους ενηλίκους να συμμετάσχουν σε ένα πλήρους ή μερικής απασχόλησης πρόγραμμα σπουδών που θα τους επιτρέψει να εισέλθουν στην αγορά εργασίας ή στην ανώτερη Εκπαίδευση. Επίσης αποβλέπουν στο να διευρύνουν τις γνώσεις του διδασκόμενου, τις δεξιότητες και την κατανόησή του ενός ειδικού επαγγελματικού τομέα, όπως και να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη των βασικών και προσωπικών του δεξιοτήτων.

2.5 Τα Μαθηματικά στο Βασικό Στάδιο 3

Τον Φεβρουάριο του 2007 η Q.C.A. κυκλοφόρησε ένα προσχέδιο για διαβούλευση όπου ανέλυε τον καθοριστικό ρόλο ορισμένων βασικών εννοιών στην επέκταση των γνώσεων και των δεξιοτήτων των μαθητών και στην κατανόηση της ύλης των μαθηματικών που επρόκειτο να διδαχθούν στα πλαίσια του Βασικού Σταδίου 3.

Οι εν λόγω έννοιες είναι οι ακόλουθες (Q.C.A., 2007a):

Επάρκεια στις μαθηματικές διαδικασίες

- Εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών και αλγορίθμων με ακρίβεια σε οικεία και μη πλαίσια μέσα στη σχολική τάξη αλλά και εκτός αυτής, όπως στη διαχείριση χρηματικών ποσών και σε άλλες καθημερινές χρήσεις των μαθηματικών.
- Επιλογή των πιο αποτελεσματικών τρόπων μαθηματικής κατανόησης.
- Χρήση μαθηματικής ορολογίας και ιδεών με ακρίβεια και συνοχή, τόσο στον προφορικό, όσο και στον γραπτό λόγο.
- Μελέτη και κατανόηση κειμένων μαθηματικού περιεχομένου.

Δημιουργικότητα

- Δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών τομέων των μαθηματικών και μεταξύ μαθηματικών τεχνικών και προβλημάτων ή καταστάσεων.
- Χρήση υπάρχουσας μαθηματικής γνώσης για την εύρεση λύσεων σε άγνωστα προβλήματα.
- Ερωτήσεις και ανάπτυξη κατάλληλων ερευνητικών γραμμών.

Αναγνώριση των μαθηματικών

- Κατανόηση του διττού χαρακτήρα των μαθηματικών και ως εργαλείου για την επίλυση προβλημάτων και ως περιοχής με διακριτή δομή.
- Επαφή με την ιστορία των μαθηματικών και έρευνα του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά διαφορετικών πολιτισμών είναι παρόντα στα σύγχρονα μαθηματικά.

- Γνώση τρεχουσών εφαρμογών των μαθηματικών.
- Αντιμετώπιση των μαθηματικών ως μια ενδιαφέρουσα και ευχάριστη δραστηριότητα.

Κριτική κατανόηση στη χρήση των μαθηματικών

- Αναγνώριση του ότι μια κατάσταση ή ένα πρόβλημα μπορεί να παρασταθεί χρησιμοποιώντας μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους, τους οποίους και να συνδέουν μεταξύ τους.
- Χρήση μαθηματικών ιδεών και μοντέλων για την έρευνα πάνω σε πραγματικά παγκόσμια ζητήματα και προβλήματα, αναγνωρίζοντας ότι κατά την επίλυση ίσως να πρέπει να λάβουν υπόψη γενικότερους παράγοντες.
- Χρήση του παραγωγικού συλλογισμού ως εργαλείο για τη λύση προβλημάτων.
- Εξέταση, ανάλυση και εκτίμηση μαθηματικών λύσεων.

Στο ίδιο προσχέδιο της Q.C.A. αναφέρονται οι βασικές δεξιότητες και διαδικασίες που είναι απαραίτητες στους μαθητές προκειμένου να προοδεύσουν στα μαθηματικά του Βασικού Σταδίου 3:

Αναπαράσταση

Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να:

- προσδιορίζουν τις μαθηματικές πτυχές μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος.
- επιλέγουν ανάμεσα στις αναπαραστάσεις.
- απλοποιούν μια κατάσταση ή ένα πρόβλημα προκειμένου να το απεικονίσουν μαθηματικά, χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεταβλητές, σύμβολα, διαγράμματα και μοντέλα.
- επιλέγουν τις κατάλληλες μαθηματικές πληροφορίες, μεθόδους και εργαλεία προς χρήση.

Ανάλυση

Χρήση μαθηματικής αιτιολόγησης

Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να:

- προχωρούν σε συνδέσεις μέσα στα μαθηματικά.
- χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους από σχετικά προβλήματα.
- απεικονίζουν και να εργάζονται με δυναμικές εικόνες.
- αναζητούν και να εξετάζουν σχέδια.
- εκτελούν και να αιτιολογούν υποθέσεις και γενικεύσεις, εξετάζοντας ειδικές περιπτώσεις και αντιπαραδείγματα.
- ερευνούν τα αποτελέσματα ποικίλων τιμών και να αναζητούν τη σταθερότητα.

- λαμβάνουν υπόψη την ανατροφοδότηση και να μαθαίνουν από τα λάθη τους.
- εργάζονται βάσει λογικής αναγνωρίζοντας τον αντίκτυπο των περιορισμών και των υποθέσεων.
- εκτιμούν ότι μια κατάσταση μπορεί να αναλυθεί με πολλές και διαφορετικές τεχνικές.

Χρήση κατάλληλων μαθηματικών διαδικασιών

Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να:

- κατασκευάζουν ακριβή μαθηματικά διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις.
- εκτελούν ακριβείς υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας ένα μικροϋπολογιστή όπου χρειάζεται.
- χειρίζονται αριθμούς, αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις και να εφαρμόζουν στερεότυπους αλγορίθμους.
- χρησιμοποιούν ακριβείς συμβολισμούς.
- καταγράφουν μεθόδους, λύσεις και συμπεράσματα.
- εκτιμούν, να προσεγγίζουν και να ελέγχουν την εργασία τους.

Ερμηνεία και Εκτίμηση

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να:

- παράγουν πειστικά επιχειρήματα βασισμένα σε συμπεράσματα και να κάνουν γενικές δηλώσεις.
- εξετάζουν τις υποθέσεις που γίνονται, την καταλληλότητα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
- γνωρίζουν τη δύναμη των εμπειρικών αποδείξεων και τη διαφορά μεταξύ στοιχείων και απόδειξης.
- αναζητούν στα στοιχεία τους patterns και εξαιρέσεις.
- συσχετίζουν τα ευρήματά τους με το αρχικό πλαίσιο.
- ασχολούνται με το μαθηματικό συλλογισμό κάποιου άλλου στα πλαίσια ενός προβλήματος ή μιας ιδιαίτερης κατάστασης.
- εξετάζουν εναλλακτικές στρατηγικές.

Επικοινωνία και Συλλογισμός

Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να:

- διαβιβάζουν τα συμπεράσματά τους με μια ποικιλία μορφών.
- συμμετέχουν στη μαθηματική συζήτηση των αποτελεσμάτων τους.
- εξετάζουν την κομψότητα και την αποδοτικότητα εναλλακτικών λύσεων.

- αναζητούν για ισοδύναμα σε σχέση και με τις διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα και με διαφορετικά προβλήματα με παρόμοιες δομές.

Εύρος και Περιεχόμενο

Στην ενότητα που έπεται αναλύεται το τι θα πρέπει να περιλαμβάνει η ύλη των μαθηματικών για το Βασικό Στάδιο 3 (Q.C.A., 2007):

Αριθμός και Άλγεβρα

- Ρητούς αριθμούς και τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασής τους.
- Αριθμητικούς κανόνες με εφαρμογή σε υπολογισμούς και χειρισμούς με ρητούς αριθμούς (*το τελευταίο περιλαμβάνει τη χρήση νοητικών και γραπτών μεθόδων για την ερμηνεία καθημερινών καταστάσεων όπως είναι η θερμοκρασία, το υψόμετρο και οικονομικές συναλλαγές*).
- Εφαρμογές λόγου και αναλογίας (*περιλαμβάνει ποσοστά και εφαρμογή λόγων και αναλογιών σε πλαίσια όπως είναι η αξία χρημάτων, κλίμακες, χάρτες, στατιστικές πληροφορίες όπως π.χ. οι εννέα στους δέκα προτιμούν...*).
- Ακρίβεια και στρογγυλοποίηση.
- Αλγεβρικές εκφράσεις, τύπους, εξισώσεις (*δημιουργία και χρήση αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων για την επίλυσή τους*), ανισότητες και ταυτότητες συμπεριλαμβανομένης της χρήσης παρενθέσεων προκειμένου να δηλωθεί προτεραιότητα.
- Συστήματα γραμμικών εξισώσεων σε αλγεβρική και γραφική μορφή (*σε αυτά περιλαμβάνονται και οι εξισώσεις είτε χωρίς, είτε με άπειρες λύσεις, τις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν*).
- Γραφήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων και οι ιδιότητές τους (*ιδιότητες κλίσεων παράλληλων και καθέτων ευθειών*).

Γεωμετρία και Μέτρα

- Ιδιότητες δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων (*συμπεριλαμβανομένων κύκλων και στερεών που κατασκευάζονται από ορθογώνια παραλληλεπίπεδα*), κατασκευές, γεωμετρικούς τόποι (*κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και με χρήση ICT*), επαγωγικό συλλογισμό και Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Μετασχηματισμούς (*όπως εκτίμηση συμμετριών στην τέχνη και μετασχηματισμούς με τη χρήση ICT*), ομοιότητα και ισότητα, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης οργάνου με βαθμονόμηση.

- Σημεία, ευθείες και σχήματα σε δισδιάστατα συστήματα συντεταγμένων.
- Μονάδες, σύνθετα μέτρα (*όπως η κατανάλωση καυσίμων, η ταχύτητα η επιτάχυνση*) και μετατροπές τους.
- Περιμέτρους, εμβαδά, εμβαδά επιφανειών και όγκους (*τρισδιάστατα σχήματα που δομούνται από τρίγωνα και ορθογώνια παραλληλόγραμμα*).

Στατιστική

- Παρουσίαση και ανάλυση ομαδοποιημένων και μη δεδομένων, χρονοσειρές και γραμμές καλύτερης προσαρμογής.
- Μέτρα κεντρικής ροπής και διασποράς *(όπως είναι το εύρος)*.
- Πειραματικές και θεωρητικές πιθανότητες συμπεριλαμβανομένων εκείνων που βασίζονται σε ισοπίθανα ενδεχόμενα (*η περιοχή αυτή περιέχει εφαρμογές της έννοιας της πιθανότητας και του κινδύνου στα τυχερά παιχνίδια, σε θέματα ασφαλείας και σε προσομοιώσεις, χρησιμοποιώντας την ICT για την αναπαράσταση ενός πειράματος πιθανοτήτων, όπως εκείνο της ρίψης δύο ζαριών και άθροισης των ενδείξεών τους*).
- Εφαρμογή της στατιστικής για τη διενέργεια συγκρίσεων (*παραδείγματος χάρη χρησιμοποιώντας τα σχήματα των κατανομών και τα μέτρα του μέσου όρου και του εύρους*).

2.6 Τα μαθηματικά στο Βασικό Στάδιο 4

2.6.1 Εισαγωγή

Όπως προαναφέρθηκε, η τελική αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών στο τέλος του Βασικού Σταδίου 4 και για τα μαθηματικά γίνεται μέσω εθνικών τίτλων σπουδών, με την πλειοψηφία των μαθητών να επιλέγει τις πιστοποιήσεις GCSE. Οι ενότητες που ακολουθούν περιέχουν τη δομή, τους στόχους και το περιεχόμενο των συγκεκριμένων πιστοποιήσεων, όπως αυτές έχουν σχεδιασθεί από το απονεμητικό σώμα του Edexcel. Η περιγραφή του περιεχομένου τους αποβλέπει στον προσδιορισμό της ύλης των μαθηματικών που διδάσκεται κατά τη διάρκεια του Βασικού Σταδίου 4 στους άγγλους μαθητές ηλικίας 14-16 ετών και, όπως θα διαπιστωθεί στη συνέχεια, περιέχει στοιχεία μαθηματικής ανάλυσης (ακολουθίες, συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις).

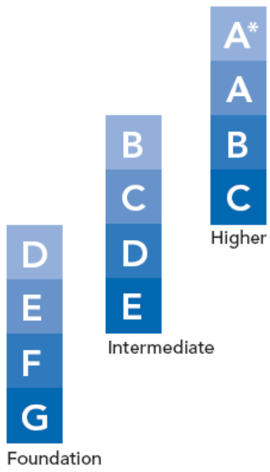
2.6.2 GCSEs στα μαθηματικά

Το τρέχον μοντέλο των τριών επιπέδων[10] των πιστοποιήσεων GCSE στα μαθηματικά έχει πλέον αλλάξει σε μοντέλο δύο επιπέδων[11] για σειρές μαθημάτων που διδάχθηκαν για πρώτη φορά το 2006, με πρώτες απονομές των νέων τίτλων το 2008 (Edexcel, 2006a). Αιτία ήταν η προσπάθεια ευθυγράμμισης των GCSEs με τα δύο Προγράμματα σπουδών του Βασικού Σταδίου 4 του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος. Επιπλέον το Edexcel και οι υπόλοιποι απονεμητικοί οργανισμοί προσφέρουν δυο επιλογές για τις πιστοποιήσεις GCSE, τη γραμμική (linear) και την αρθρωτή (modular), οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι πρόκειται να καταργηθούν οι εργασίες των μαθητών κατά τη διάρκεια των διετούς διάρκειας κύκλων μαθημάτων GCSE στα Μαθηματικά που θα ξεκινήσουν από τον Σεπτέμβριο του 2007 καθώς και εκείνων των τίτλων μονοετούς διάρκειας που θα ξεκινήσουν από τον Σεπτέμβριο του 2008 (Q.C.A., 2006a).

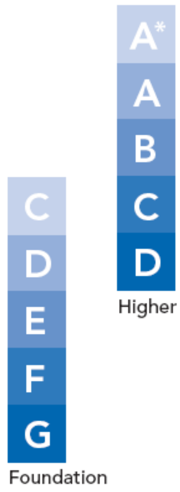
Κριτήριο για το ποιο Πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές είναι το Επίπεδό τους στο Βασικό Στάδιο 3: όσοι από αυτούς έχουν πετύχει Επίπεδο ίσο ή μικρότερο του 4 θα πρέπει να επιλέξουν το προπαρασκευαστικό Πρόγραμμα του Βασικού Σταδίου 4, ενώ όσοι έχουν επιτύχει Επίπεδο μεγαλύτερο του 4, το ανώτερο Πρόγραμμα. Σε ό,τι αφορά στην εισαγωγή για τις εξετάσεις GCSE, το επίπεδο που θα επιλέξει ο μαθητής εξαρτάται από την αναμενόμενη επίδοσή του στις τελικές εξετάσεις:

- Όσοι αναμένεται να επιτύχουν βαθμούς από G ως C θα πρέπει να ενταχθούν στο προπαρασκευαστικό επίπεδο.
- Όσοι αναμένεται να επιτύχουν βαθμούς από D ως A* θα πρέπει να ενταχθούν στο ανώτερο επίπεδο.

[10] Προπαρασκευαστικό (foundation), μέσο (intermediate) και ανώτερο (higher).
[11] Προπαρασκευαστικό και ανώτερο.



Τρέχουσα δομή αξιολόγησης



Νέα δομή αξιολόγησης

Οι υποψήφιοι που δεν αναμένεται να επιτύχουν βαθμούς μεγαλύτερους ή ίσους του G, έχουν την επιλογή να ακολουθήσουν τον κύκλο μαθημάτων για την απόκτηση του Πιστοποιητικού Εκπαιδευτικής Επίτευξης (Certificate of Educational Achievement, CoEA).

Οι τελευταίες εξετάσεις για τις πιστοποιήσεις GCSE με την τρέχουσα μορφή θα γίνουν τον Νοέμβριο του 2007, ενώ οι νέες πιστοποιήσεις προσφέρονται ήδη από τον Σεπτέμβριο του 2006, με πρώτες απονομές το καλοκαίρι του 2008.

2.6.3 Περιγραφή βαθμολογίας

Οι περιγραφές των βαθμών που θα ακολουθήσουν έχουν ως στόχο να προσφέρουν μια γενική ένδειξη της προόδου και των ειδικών γνώσεων που αναμένεται να έχουν οι μαθητές στους οποίους έχουν απονεμήθηκαν. Οι περιγραφές πρέπει να ερμηνευθούν σε σχέση με το περιεχόμενο του τίτλου, καθώς δεν έχουν ως σκοπό να το προσδιορίσουν. Ο βαθμός που θα απονεμηθεί σε έναν υποψήφιο θα εξαρτηθεί στην πράξη από το βαθμό στον οποίο έχει προσεγγίσει συνολικά τους στόχους αξιολόγησης. Οι εν λόγω περιγραφές βρίσκουν εφαρμογή σε όλες τις πιστοποιήσεις GCSE στα μαθηματικά καθώς εντάσσονται στο πλαίσιο των γενικότερων κριτηρίων εντός του οποίου νέες πιστοποιήσεις σχεδιάζονται από τα απονεμητικά σώματα και ελέγχονται από τις ελεγκτικές αρχές προκειμένου να εγκριθούν (Q.C.A., n.d.).

Βαθμός F

Προκειμένου να φέρουν εις πέρας τους στόχους τους και να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα, οι υποψήφιοι προσδιορίζουν και λαμβάνουν τις απαραίτητες πληροφορίες. Ελέγχουν τα αποτελέσματά τους, εξετάζοντας το αν είναι λογικά. Κατανοούν τις καταστάσεις περιγράφοντάς τις μαθηματικά με σύμβολα, λέξεις και διαγράμματα. Εξάγουν απλά δικά τους συμπεράσματα και εξηγούν τους συλλογισμούς τους.

Κατανοούν τη θέση των ψηφίων για να πολλαπλασιάσουν και να διαιρέσουν ακέραιους αριθμούς και δεκαδικούς με το 10, το 100 και το 1000. Διατάσσουν, προσθέτουν και αφαιρούν αρνητικούς αριθμούς. Χρησιμοποιούν και τις τέσσερις πράξεις σε αριθμούς με δύο δεκαδικά ψηφία. Απλοποιούν κλάσματα και λύνουν απλά προβλήματα με λόγους και αναλογίες. Υπολογίζουν τα κλασματικά ή τα ποσοστιαία μέρη ποσοτήτων και μετρήσεων, χρησιμοποιώντας μικροϋπολογιστή όπου αυτό κριθεί απαραίτητο. Κατανοούν και χρησιμοποιούν την κατάλληλη μέθοδο, χωρίς μικροϋπολογιστή, για τα προβλήματα που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση τριψήφιου με οποιοδήποτε διψήφιο αριθμό. Κατά την επίλυση προβλημάτων με ή χωρίς μικροϋπολογιστή, οι υποψήφιοι ελέγχουν τη λογική των αποτελεσμάτων τους με αναφορά στις γνώσεις τους σχετικά με το πλαίσιο του προβλήματος ή το μέγεθος των αριθμών, με την εφαρμογή αντίστροφων διαδικασιών ή με εκτιμήσεις, χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις. Ερευνούν και περιγράφουν αριθμητικές σχέσεις συμπεριλαμβανομένου του πολλαπλασίου, του γινομένου και του τετραγώνου. Κατασκευάζουν, εκφράζουν τις σκέψεις τους σε συμβολική μορφή και χρησιμοποιούν απλούς τύπους που περιλαμβάνουν μια ή δύο πράξεις

Κατά την κατασκευή μοντέλων και κατά το σχεδιασμό ή τη χρήση σχημάτων, οι υποψήφιοι μετρούν και σύρουν γωνίες με όση ακρίβεια τους επιτρέπεται στην πράξη και κάνουν χρήση των εκφράσεων που σχετίζονται με γωνίες. Γνωρίζουν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και εκείνο των γωνιών σε δοθέν σημείο. Προσδιορίζουν όλες τις συμμετρίες των δισδιάστατων σχημάτων. Ξέρουν χονδρικά τα ισοδύναμα των αγγλικών μονάδων μέτρησης που συναντώνται ακόμη στην καθημερινότητα και μετατρέπουν μια μετρική μονάδα σε άλλη. Κάνουν λογικές εκτιμήσεις μέτρων σε σχέση με καθημερινές καταστάσεις, υπολογίζουν εμβαδά ορθογώνιων παραλληλόγραμμων και ορθογώνιων τριγώνων, καθώς και όγκους ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων.

Οι υποψήφιοι κατανοούν και χρησιμοποιούν το μέσο όρο διακριτών δεδομένων. Συγκρίνουν δύο απλές κατανομές χρησιμοποιώντας το εύρος και ένα από τα ακόλουθα: κορυφή, διάμεσος, μέσος. Ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις και διαγράμματα, συμπεριλαμβανομένων κυκλικών διαγραμμάτων συχνοτήτων και εξάγουν συμπεράσματα. Καταλαβαίνουν και χρησιμοποιούν την κλίμακα πιθανοτήτων από το 0 έως το 1. Κάνουν εκτιμήσεις πιθανοτήτων, τις οποίες και δικαιολογούν, με την επιλογή και τη χρήση μιας μεθόδου βασισμένης σε ισοπίθανα ενδεχόμενα ή σε πειραματικά δεδομένα, ανάλογα με την περίπτωση. Έχουν γνώση του ότι είναι δυνατό να προκύψουν διαφορετικές εκβάσεις σε ένα πείραμα κατά την επανάληψή του.

Βαθμός C

Αρχίζοντας από τα προβλήματα ή τα πλαίσια που τους έχουν παρουσιαστεί, οι υποψήφιοι τελειοποιούν ή επεκτείνουν τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσουν για να δώσουν πλήρεις λύσεις. Αιτιολογούν τη μαθηματική παρουσίαση που θα επιλέξουν. Δικαιολογούν τις γενικεύσεις τους, τα επιχειρήματα ή τις λύσεις, εμφανίζοντας κάποια διορατικότητα στη μαθηματική δομή του προβλήματος. Εκτιμούν τη διαφορά μεταξύ της μαθηματικής εξήγησης και της πειραματικής απόδειξης.

Στις εκτιμήσεις οι υποψήφιοι στρογγυλοποιούν σε συγκεκριμένο ψηφίο, πολλαπλασιάζουν και διαιρούν νοητά. Επιλύουν αριθμητικά προβλήματα που περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό και διαίρεση με αριθμούς οποιουδήποτε μεγέθους χρησιμοποιώντας τον μικροϋπολογιστή αποτελεσματικά και κατάλληλα. Κατανοούν τα αποτελέσματα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με αριθμούς μεταξύ του 0 και του 1. Χρησιμοποιούν τις ισοδυναμίες μεταξύ κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών και εκτελούν υπολογισμούς χρησιμοποιώντας αναλογίες σε κατάλληλες καταστάσεις. Καταλαβαίνουν και χρησιμοποιούν τις συμμετρικές αλλαγές. Βρίσκουν και περιγράφουν με σύμβολα τον επόμενο όρο ή τον n-στο όρο μιας ακολουθίας, όπου ο κανόνας είναι τετραγωνικός. Πολλαπλασιάζουν δύο εκφράσεις της μορφής $(x+n)$ και απλοποιούν τις αντίστοιχες τετραγωνικές εκφράσεις. Λύνουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις με δοκιμή και βελτίωση και αναπαριστούν ανισότητες στην αριθμητική ευθεία. Διατυπώνουν και λύνουν γραμμικές εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές. Χειρίζονται απλούς αλγεβρικούς τύπους, εξισώσεις και εκφράσεις και χρησιμοποιούν αλγεβρικές και γραφικές μεθόδους για να λύσουν συστήματα γραμμικών εξισώσεων με δύο μεταβλητές.

Οι υποψήφιοι λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες γωνιών και συμμετρίας των πολυγώνων και τις ιδιότητες τεμνόμενων και παράλληλων ευθειών. Κατανοούν και εφαρμόζουν το θεώρημα του Πυθαγόρα κατά την επίλυση προβλημάτων σε δύο διαστάσεις. Βρίσκουν τα εμβαδά και τις περιφέρειες κύκλων, υπολογίζουν τα μήκη, τα εμβαδά και τους όγκους επιπέδων σχημάτων και ορθών πρισμάτων. Οι υποψήφιοι μεγεθύνουν σχήματα κατά ένα θετικό ακέραιο αριθμό ή έναν κλασματικό παράγοντα. Εκτιμούν τυχόν ανακρίβειες στις μετρήσεις και αναγνωρίζουν ότι μια μέτρηση που δίνεται στον κοντινότερο ακέραιο αριθμό μπορεί να είναι ανακριβής μέχρι και κατά το ήμισυ αυτής σε κάθε κατεύθυνση. Κατανοούν και κάνουν χρήση σύνθετων μέτρων, όπως η ταχύτητα.

Οι υποψήφιοι κατασκευάζουν και ερμηνεύουν διαγράμματα συχνότητας. Ορίζουν υποθέσεις τις οποίες και εξετάζουν. Καθορίζουν τον μέσο, τη διάμεσο και το εύρος ενός συνόλου ομαδοποιημένων δεδομένων, επιλέγοντας παράλληλα την πιο κατάλληλη στατιστική μέθοδο για τη γραμμή έρευνάς τους. Χρησιμοποιούν τα μέτρα του μέσου όρου και του εύρους με τα σχετικά πολύγωνα συχνότητας, ανάλογα με την περίπτωση, για να συγκρίνουν κατανομές και να εξάγουν συμπεράσματα. Σχεδιάζουν την ευθεία καλής προσαρμογής σε ένα διάγραμμα διασποράς μέσω παρατήρησης. Οι υποψήφιοι κατανοούν τη σχετική συχνότητα ως εκτίμηση πιθανότητας, κάτι που χρησιμοποιούν για να συγκρίνουν τις εκβάσεις των πειραμάτων τους.

Βαθμός Α

Οι υποψήφιοι είναι σε θέση να αιτιολογούν τις επιλογές που κάνουν κατά την μαθηματική έρευνα ή κατά την ανάλυση στόχων: εξηγούν γιατί ακολουθούν ορισμένες ιδιαίτερες γραμμές έρευνας ή διαδικασίες, ενώ απορρίπτουν κάποιες άλλες. Εφαρμόζουν τα μαθηματικά που ξέρουν σε γνωστά και σε άγνωστα πλαίσια. Χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα αποτελεσματικά κατά την παρουσίαση ενός πειστικά αιτιολογημένου επιχειρήματος.

Οι υποψήφιοι κατανοούν και χρησιμοποιούν ρητούς και άρρητους αριθμούς. Καθορίζουν όρια διαστημάτων. Καταλαβαίνουν και κάνουν χρήση αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών. Χειρίζονται αλγεβρικούς τύπους, εξισώσεις και εκφράσεις, βρίσκουν τους κοινούς παράγοντες και πολλαπλασιάζουν δύο γραμμικές εκφράσεις. Κατά την απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων, χρησιμοποιούν εκθετικούς κανόνες για αρνητικές και κλασματικές τιμές. Κατά την εξεύρεση τύπων που συνδέουν δεδομένα, οι υποψήφιοι εκφράζουν γενικούς νόμους με συμβολική μορφή. Λύνουν προβλήματα που περιέχουν τομές και κλίσεις γραφικών παραστάσεων.

Οι υποψήφιοι σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων του ημίτονου, του συνημίτονου και της εφαπτομένης για οποιαδήποτε γωνία, παράγουν και ερμηνεύουν τις γραφικές παραστάσεις που βασίζονται στις προηγούμενες συναρτήσεις. Χρησιμοποιούν τις συνθήκες ομοιότητας τριγώνων σε επίσημες γεωμετρικές αποδείξεις. Υπολογίζουν μήκη κυκλικών τόξων και εμβαδά κυκλικών τομέων, το εμβαδόν της επιφάνειας κυλίνδρων και όγκους κώνων και σφαιρών.

Οι υποψήφιοι ερμηνεύουν και κατασκευάζουν ιστογράμματα. Καταλαβαίνουν πώς διαφορετικές μέθοδοι δειγματοληψίας και διαφορετικά δειγματικά μεγέθη δειγμάτων μπορούν να έχουν επιπτώσεις στην αξιοπιστία των συμπερασμάτων τους. Επιλέγουν και δικαιολογούν το δείγμα και τη μέθοδο που θα ακολουθήσουν για την έρευνα πληθυσμού. Τέλος, είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τις πιθανότητες που συνδέονται με ανεξάρτητα ή αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα.

2.6.4 Γραμμική και Αρθρωτή πιστοποίηση GCSE στα Μαθηματικά

Στόχοι Αξιολόγησης

Ο γενικότερος τίτλος GCSE Mathematics πιστοποιεί τη γνώση, την κατανόηση και τις ικανότητες των μαθητών στα ακόλουθα (Edexcel, 2006b):

- *AO1 Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας τα Μαθηματικά*

  -Επίλυση προβλημάτων

  -Επικοινωνία

  -Αιτιολόγηση

- *AO2 Αριθμός και Άλγεβρα*

  -Αριθμοί και αριθμητικό σύστημα

  -Υπολογισμοί

  -Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων

  -Εξισώσεις, τύποι και ταυτότητες

  -Σειρές, συναρτήσεις και γραφήματα

- *AO3 Σχήμα, χώρος και μέτρα*

  -Γεωμετρική αιτιολόγηση

  -Μετασχηματισμοί και συντεταγμένες

  -Μέτρα και κατασκευές

- *AO4 Διαχείριση δεδομένων*

  -Προσδιορισμός προβλήματος και σχεδιασμός

  -Συλλογή δεδομένων

  -Διαχείριση και αναπαράσταση δεδομένων

  -Ερμηνεία και εξήγηση αποτελεσμάτων

	Στόχοι αξιολόγησης		Στάθμιση
Δύο παράλληλες εξετάσεις	A01	Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας τα μαθηματικά	10%
	A02	Αριθμός και Άλγεβρα	40%
	A03	Σχήμα, χώρος και μέτρα	20%
	A04	Διαχείριση δεδομένων	10%
Εργασίες σπουδαστή	A01	Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας τα μαθηματικά	10%
	A04	Διαχείριση δεδομένων	10%

Πίνακας 4: Στόχοι αξιολόγησης GCSE στα Μαθηματικά και συντελεστές στάθμισης

Γραμμική πιστοποίηση GCSE

Η πιστοποίηση αυτή προσφέρει μια παραδοσιακή γραμμική διαδρομή για τα GCSE Mathematics, αποτελούμενη από δύο τελικές εξετάσεις και από εργασίες του μαθητή κατά τη διάρκεια του κύκλου μαθημάτων (Edexcel, 2006b).

	Δύο παράλληλες εξετάσεις A01-A04		**Εσωτερική αξιολόγηση Επιλογή Α: Αξιολόγηση εργασίας του μαθητή από τον καθηγητή ή Επιλογή Β: Βαθμολόγηση εργασίας μαθητή από Edexcel**
Στάθμιση	**40%**	**40%**	**20%**
Προπαρασκευαστικό επίπεδο (G ως C)	Paper 1 Χωρίς μικροϋπολογιστή 1,5 ώρα	Paper 2 Με μικροϋπολογιστή 1,5 ώρα	Paper 7A ή 7B 1.Μελέτη (A04), 10%. 2.Δραστηριότητα στο πλαίσιο του Αριθμού και της άλγεβρας ή του Σχήματος, του χώρου και των μέτρων (A01), 10%.
Ανώτερο επίπεδο (D ως A*)	Paper 3 Χωρίς μικροϋπολογιστή 1,5 ώρα	Paper 4 Με μικροϋπολογιστή 1,5 ώρα	

Πίνακας 5: Σχήμα αξιολόγησης γραμμικής πιστοποίησης GCSE.

Αρθρωτή Πιστοποίηση GCSE

Η πιστοποίηση αυτή προσφέρει μια ευέλικτη, αρθρωτή πορεία για τα GCSE Mathematics. Στόχος της είναι να ενεργοποιήσει τους μαθητές, προσφέροντας διαπλαστική και διαγνωστική ανάδραση με αρθρωτά διαγωνίσματα κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, επιτρέποντας στους δασκάλους και στους μαθητές να εντοπίσουν τυχόν αδυναμίες και να τις εξαλείψουν (Edexcel, 2006c).

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Επιλογή A:
Αξιολόγηση εργασίας μαθητή από τον καθηγητή
ή
Επιλογή B:
Βαθμολόγηση εργασίας μαθητή από Edexcel</td><td colspan="2">Εξετάσεις ενοτήτων
Δύο ισοδύναμα τμήματα
Τομέας A:
με μικροϋπολογιστή
Τομέας B:
χωρίς μικροϋπολογιστή
A01-A04</td><td colspan="2">Δύο παράλληλες τελικές εξετάσεις

A01-A04</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ενότητα 1</td><td rowspan="2">Ενότητα 2</td><td rowspan="2">Ενότητα 3</td><td colspan="2">Ενότητα 4</td></tr>
<tr><td>Χωρίς μικροϋπολογιστή</td><td>Με μικροϋπολογιστή</td></tr>
<tr><td>Στάθμιση</td><td>20%</td><td>10%</td><td>20%</td><td>25%</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>Προπαρα-σκευαστικό επίπεδο
(G ως C)</td><td rowspan="2">Paper 7A ή 7B (και στα δύο επίπεδα)
1.Μελέτη (A04), 10%.
2.Δραστηριότητα στο πλαίσιο του Αριθμού και της άλγεβρας ή του Σχήματος, του χώρου και των μέτρων (A01), 10%.</td><td>Paper 8
40 λεπτά</td><td>Paper 10
1 ώρα</td><td>Paper 12
1 ώρα</td><td>Paper 13
1 ώρα</td></tr>
<tr><td>Ανώτερο επίπεδο
(D ως A*)</td><td>Paper 9
40 λεπτά</td><td>Paper 11
1 ώρα</td><td>Paper 14
1 ώρα και 10 λεπτά</td><td>Paper 15
1 ώρα και 10 λεπτά</td></tr>
</table>

Πίνακας 6: Σχήμα αξιολόγησης αρθρωτής πιστοποίησης GCSE.

Η πρώτη αξιολόγηση της πιστοποίησης αυτής ήταν τον Μάρτιο του 2007, με τις εξετάσεις κάθε ενότητας να είναι διαθέσιμες τρεις φορές το έτος, τον Νοέμβριο, τον Μάρτιο και τον Ιούνιο. Οι τελικές εξετάσεις και για τα δύο επίπεδα λαμβάνουν χώρα κάθε Ιούνιο και Νοέμβριο.

Εργασίες μαθητών (γραμμική και αρθρωτή πιστοποίηση)

Η ελάχιστη απαίτηση σχετικά με τις εργασίες ενός μαθητή είναι μια έρευνα πάνω στη διαχείριση δεδομένων για την αξιολόγηση της A04 και μια δραστηριότητα για την αξιολόγηση της A01 στα πλαίσια της A02 και της A03. Προκειμένου να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις αυτές, οι μαθητές πρέπει να καταθέσουν:

- Μία μόνο έρευνα που θα εμπεριέχει τις γνώσεις, τις ικανότητες και την αντίληψη που περιέχεται στην A04 (διαχείριση δεδομένων) και
- Μια δραστηριότητα τουλάχιστον κάνοντας χρήση των γνώσεων και των ικανοτήτων που περιέχονται στην A01 (χρήση και εφαρμογή μαθηματικών), στο πλαίσιο της A02 (αριθμός και άλγεβρα) ή της A03 (σχήμα, χώρος και μέτρα).

Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων και των ερευνών, θα συλλεχθούν στοιχεία πάνω στην ικανότητα του εξεταζόμενων να

i. ανταποκρίνονται προφορικά στα μαθηματικά.
ii. αναλαμβάνουν πρακτική εργασία.

Ένα μέρος της αξιολόγησης των εργασιών του μαθητή πρέπει να διεξαχθεί στη σχολική αίθουσα, υπό την άμεση επίβλεψη του καθηγητή. Υπάρχει η δυνατότητα οι μαθητές να διεξάγουν την έρευνά τους σε μέρη εκτός σχολείου. Εντούτοις, οφείλουν να εργασθούν και εντός του υπό την εποπτεία του καθηγητή τους και να συζητήσουν μαζί του τα ευρήματά τους, πιστοποιώντας κατά αυτόν τον τρόπο την αυθεντικότητα του έργου τους.

Συμμετοχή εκ νέου σε εξετάσεις

Οι μαθητές έχουν το δικαίωμα να επανεξετασθούν σε μια εξέταση ενότητας μόνο μία φορά σε κάθε επίπεδο και τυχόν καλύτερο αποτέλεσμα θα προσμετρήσει στην τελική βαθμολογία.

Περιεχόμενο τίτλων

Τόσο η γραμμική όσο και η αρθρωτή πιστοποίηση αποσκοπούν στο οι μαθητές να:

Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας τα Μαθηματικά

- χρησιμοποιούν και να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε πρακτικές δραστηριότητες, σε πραγματικά προβλήματα και μέσα στα ίδια τα μαθηματικά.
- εργάζονται με προβλήματα που θέτουν προκλήσεις.
- αντιμετωπίζουν και να εξετάζουν τις διαφορετικές πτυχές ενός μαθηματικού επιχειρήματος.

Αριθμός

- χρησιμοποιούν υπολογιστές και αριθμομηχανές.

- αναπτύξουν και να χρησιμοποιούν ευέλικτα μια σειρά υπολογιστικών μεθόδων τις οποίες και να εφαρμόζουν σε ποικίλα προβλήματα.

Άλγεβρα

- εξερευνούν ποικιλία καταστάσεων και έτσι να οδηγούνται σε έκφραση σχέσεων.
- συνειδητοποιήσουν πως οι σχέσεις μεταξύ αριθμητικών πράξεων υποστηρίζουν τις τεχνικές για τον χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων.
- κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο η άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απεικονίσει πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσει προβλήματα.

Σχήμα, χώρος και μέτρα

- χρησιμοποιούν ποικιλία διαφορετικών αναπαραστάσεων.
- εξερευνούν τα σχήματα και τον χώρο μέσω σχεδίου και πρακτικής εργασίας με ένα ευρύ φάσμα από υλικά.
- χρησιμοποιούν υπολογιστές για την παραγωγή και τον μετασχηματισμό γραφικών και για την επίλυση προβλημάτων.

Διαχείριση δεδομένων

- διατυπώνουν ερωτήσεις που να μπορούν να εξεταστούν μέσω στατιστικών μεθόδων.
- αναλαμβάνουν έρευνες που να βασίζονται στην ανάλυση δεδομένων.
- χρησιμοποιούν υπολογιστές ως πηγή μεγάλων δειγμάτων, ως εργαλείο για την εξερεύνηση γραφικών αναπαραστάσεων και ως μέσο εξομοίωσης γεγονότων.
- εμπλακούν σε πρακτική και πειραματική εργασία προκειμένου να εκτιμήσουν μερικές από τις αρχές που διέπουν τα τυχαία γεγονότα.
- κρίνουν αυστηρά παραπλανητικές αναπαραστάσεις δεδομένων και αβέβαια συμπεράσματα.

Προπαρασκευαστικό επίπεδο (γραμμική και αρθρωτή πιστοποίηση)

Οι σπουδαστές στο επίπεδο αυτό θα πρέπει να:

i. επεκτείνουν τις νοητικές και γραπτές υπολογιστικές στρατηγικές τους και να χρησιμοποιούν με βεβαιότητα διαδικασίες υπολογισμών με ακέραιους αριθμούς, κλάσματα, δεκαδικούς, ποσοστά, λόγους και αναλογίες.
ii. είναι σε θέση να επιλύσουν ένα φάσμα γνωστών και άγνωστων προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων ορισμένων που προέρχονται από πραγματικές καταστάσεις και από άλλους τομείς του προγράμματος σπουδών.

iii. συμμετέχουν σε δραστηριότητες που προσφέρουν ευκαιρίες να συζητηθεί η εργασία τους, να αναπτυχθεί ο συλλογισμός και η κατανόηση και να εξηγήσουν τη συλλογιστική και τις στρατηγικές τους.
iv. λαμβάνουν μέρος σε δραστηριότητες όπου χρειάζεται η ανάπτυξη σύντομων αλυσίδων παραγωγικού συλλογισμού και σωστή χρήση του «=».
v. ασχολούνται στην πράξη με γεωμετρικά αντικείμενα, να προχωρούν σε νοητική σύλληψή τους και να τα επεξεργάζονται σε νοητικό επίπεδο.
vi. ασχοληθούν με το πώς η στατιστική χρησιμοποιείται στην πραγματική ζωή για τη λήψη ορθών αποφάσεων.
vii. συμμετέχουν σε δραστηριότητες που επικεντρώνονται στις βασικές ιδέες της στατιστικής, όπως η χρήση κατάλληλων πληθυσμών και αντιπροσωπευτικών δειγμάτων, να χρησιμοποιούν διαφορετικές κλίμακες μέτρησης, να κατανοούν την πιθανότητα ως μέτρο αβεβαιότητας, να γνωρίζουν την έννοια του τυχαίου και της μεταβλητότητας και να μειώνουν τη μεροληψία στη δειγματοληψία και στις μετρήσεις.
viii. κάνουν ουσιαστική χρήση των δραστηριοτήτων που επικεντρώνονται στη χρήση της κατάλληλης ICT (παραδείγματος χάριν υπολογισμοί με λογιστικά φύλλα, βάσεις δεδομένων, γραφικά ή γεωμετρικά πακέτα), με συνετή χρήση των μικροϋπολογιστών.

Ανώτερο επίπεδο (γραμμική και αρθρωτή πιστοποίηση)

Οι σπουδαστές στο επίπεδο αυτό θα πρέπει να:

i. συμμετέχουν σε δραστηριότητες που εξασφαλίζουν την εξοικείωση με τις τυπικές διαδικασίες που είναι αναγκαίες για αυτό το επίπεδο σπουδών.
ii. είναι σε θέση να επιλύουν οικεία αλλά και άγνωστα προβλήματα σε αριθμητικά, αλγεβρικά και γραφικά πλαίσια.
iii. χρησιμοποιούν καθιερωμένους συμβολισμούς για τους δεκαδικούς, τα κλάσματα, τα ποσοστά, τις αναλογίες και τους εκθέτες.
iv. ασχολούνται και με δραστηριότητες που δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο η άλγεβρα, σαν επέκταση του αριθμού με τη χρήση συμβόλων, προσδίδει ακριβή μορφή σε μαθηματικές σχέσεις και υπολογισμούς.

v. ξεκινούν από απλούς ορισμούς και μικρές αλυσίδες συλλογισμών και να καταλήγουν στην κατανόηση και στη διατύπωση αποδείξεων στην άλγεβρα και τη γεωμετρία.

vi. επιλέγουν τα κατάλληλα εργαλεία ICT και να τα χρησιμοποιούν ανάλογα με τη περίσταση.

Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στο μαθηματικό περιεχόμενο του προπαρασκευαστικού επιπέδου για την γραμμική πιστοποίηση GCSE, ενώ ό,τι παρουσιάζεται για πρώτη φορά στα πλαίσια του ανώτερου επιπέδου θα σημειώνεται με πλάγια γραφή. Το περιεχόμενο της αρθρωτής πιστοποίησης είναι σχεδόν όμοιο με εκείνο της γραμμικής, με μόνη διαφορά τη δομή του (Edexcel, 2006b, 2006c).

Ma2 Αριθμός και Άλγεβρα

Περιεχόμενο

<u>1. Χρήση και Εφαρμογή Αριθμού και Άλγεβρας</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Επίλυση προβλήματος

a) Να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν τις πιο κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος και τις πιο αποδοτικές τεχνικές για να λύσουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα *(αυξανόμενης πολυπλοκότητας, συμπεριλαμβανομένων αριθμητικών και αλγεβρικών χειρισμών).*

-Να προσδιορίζουν ποιες συμπληρωματικές πληροφορίες μπορούν να ζητηθούν προκειμένου να ακολουθήσουν μια ιδιαίτερη γραμμή έρευνας και να δίνουν εξηγήσεις για την αποδοχή ή την απόρριψη ιδιαίτερων προσεγγίσεων.

b) Να χωρίζουν ένα σύνθετο υπολογισμό σε απλούστερα βήματα, με δικαιολόγηση του τρόπου επιλογής των μεθόδων τους.

c) Να χρησιμοποιούν την άλγεβρα για να τυποποιήσουν και να λύσουν ένα απλό πρόβλημα (προσδιορισμός μεταβλητής, δημιουργία και επίλυση εξίσωσης και ερμηνεία λύσης στα πλαίσια του προβλήματος).

d) Να εκτιμούν νοερά τα αποτελέσματα υπολογισμών *(να παρουσιάζουν τις απαντήσεις σε λογικά επίπεδα ακρίβειας και να κατανοούν το πώς προκύπτουν λάθη σε σύνθετους υπολογισμούς).*

-Να χρησιμοποιούν ελεγκτικές διαδικασίες, όπως αντίστροφες πράξεις και να εργάζονται σε συγκεκριμένα επίπεδα ακρίβειας.

Επικοινωνία

e) Να ερμηνεύουν και να συζητούν αριθμητικές και αλγεβρικές πληροφορίες σε μια ποικιλία μορφών *(κάνοντας χρήση σύνθετων μαθηματικών εκφράσεων και συμβολισμών).*

f) Να χρησιμοποιούν ορθά και με συνέπεια παραστάσεις και σύμβολα *(και μια ποικιλία στρατηγικών και διαγραμμάτων).*

g) Να χρησιμοποιούν πλήθος στρατηγικών για να δημιουργήσουν αριθμητικές, αλγεβρικές ή γραφικές αναπαραστάσεις ενός προβλήματος και της λύσης του και

-να μεταφέρονται από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη για να αντλήσουν διαφορετικές οπτικές γωνίες του προβλήματος.

h) Να παρουσιάζουν και ερμηνεύουν λύσεις στα πλαίσια του αυθεντικού προβλήματος.

i) Να ανακεφαλαιώνουν και να αιτιολογούν την επιλογή τους της μαθηματικής αναπαράστασης.

Συλλογιστική

j) Να εξερευνούν, να προσδιορίζουν και να χρησιμοποιούν πρότυπα και συμμετρία σε αλγεβρικά πλαίσια, ερευνώντας τη δυνατότητα γενίκευσης ειδικών περιπτώσεων και κατανοώντας τη σημασία ενός αντιπαραδείγματος, καθώς και να προσδιορίζουν τις ειδικές περιπτώσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων.

k) Να παρουσιάζουν τη βαθμιαία αφαίρεση κατά την επίλυση ενός προβλήματος.

l) Να κατανοούν τη διαφορά μεταξύ πρακτικής επίδειξης και απόδειξης.

m) Να αναγνωρίζουν τη σημασία των υποθέσεων κατά την εξαγωγή συμπερασμάτων, τους περιορισμούς τους και την επίδραση που μπορεί να έχει στη λύση του προβλήματος τυχόν μεταβολή τους.

2. Αριθμοί και Αριθμητικό Σύστημα

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Ακέραιοι

a) Πώς να κάνουν χρήση της προηγούμενης γνώσης τους περί ακεραίων, να διαπραγματεύονται πολύ μεγάλους θετικούς αριθμούς και να τους στρογγυλοποιούν σε δοθείσα δύναμη του 10.

-Τη σωστή θέση θετικών και αρνητικών ακεραίων σε μια αριθμητική γραμμή.

-Τη διάταξη ακεραίων.

-Να κάνουν χρήση των όρων παράγοντας (διαιρέτης), πολλαπλάσιο, κοινός παράγοντας, Ε.Κ.Π., Μ.Κ.Δ., πρώτος αριθμός και ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Δυνάμεις και ρίζες

b) Να χρησιμοποιούν τους όρους: εις το τετράγωνο, θετική και αρνητική τετραγωνική ρίζα, εις τον κύβο, θετική και αρνητική κυβική ρίζα.

-Να χρησιμοποιούν δυνάμεις για το τετράγωνο και τον κύβο και δυνάμεις του 10.

-Να χρησιμοποιούν νόμους για πράξεις μεταξύ δυνάμεων.

- Την ερμηνεία αποτελεσμάτων πράξεων με τη χρήση μικροϋπολογιστή.

Κλάσματα

c) Τα ισοδύναμα κλάσματα, την απλοποίηση κλάσματος και τη διάταξη κλασμάτων μέσω της έκφρασής τους με κοινό παρονομαστή.

Δεκαδικοί

d) Το ότι κάθε πεπερασμένος δεκαδικός είναι κλάσμα και τη διάταξη των δεκαδικών.

-Το ότι οι περιοδικοί δεκαδικοί γράφονται και σαν κλάσματα και ότι κάποια κλάσματα είναι περιοδικοί δεκαδικοί.

Ποσοστά

e) Πως το ποσοστό είναι ο αριθμός μερών ανά 100 και να κάνουν χρήση αυτής της γνώσης για τη σύγκριση λόγων.

-Το ποσοστό σαν «τόσα εκατοστά από» και να κάνουν χρήση του σε πραγματικές καταστάσεις

Λόγος

f) Να χρησιμοποιούν τους κατάλληλους συμβολισμούς και να κάνουν αναγωγές σε απλούστερες μορφές.

<u>3. Υπολογισμοί</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Αριθμητικές πράξεις και τις μεταξύ τους σχέσεις

a) Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ακεραίων (και αρνητικών).

-Τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση οποιουδήποτε αριθμού με δυνάμεις του 10 ή με αριθμό μεταξύ του 0 και του 1 και την ανάλυση θετικών ακεραίων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

-Το ότι ο «αντίστροφος» είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού, το γινόμενο αντιστρόφων ισούται με τη μονάδα και το ότι αντίστροφος του μηδενός δεν ορίζεται.

-Τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με αρνητικό αριθμό.

-Την απλοποίηση και τον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών εκφράσεων που περιέχουν δυνάμεις ακεραίων *(κλάσματα υψωμένα σε δυνάμεις και αρνητικές δυνάμεις και το πώς να χρησιμοποιούν τις αντίστροφες πράξεις, κατανοώντας ότι η αντίστροφη διαδικασία της ύψωσης ενός αριθμού στη δύναμη n, είναι η ύψωσή του στη δύναμη* $\frac{1}{n}$).

b) Τη χρήση παρενθέσεων και την προτεραιότητα των πράξεων.

c) Να υπολογίζουν τμήμα δοθείσης ποσότητας ως κλάσμα του όλου, να γνωρίζουν την προσθαφαίρεση κλασμάτων και τη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό.

(να διακρίνουν τα κλάσματα με παρονομαστές που αποτελούνται μόνο από πρώτους παράγοντες του 2 και του 5 και τα οποία αναπαρίστανται από καταληκτικούς δεκαδικούς, από τα υπόλοιπα κλάσματα τα οποία αναπαρίστανται από περιοδικούς δεκαδικούς. Επίσης να μετατρέπουν ένα δεκαδικό σε κλάσμα).

d) Τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλάσματος από ακέραιο, από μοναδιαίο κλάσμα και από ένα κλάσμα γενικότερα.

e) Να μετατρέπουν απλά κλάσματα του συνόλου σε ποσοστά και vice versa.

(να υπολογίζουν το αρχικό ποσό γνωρίζοντας το τελικό, το μετά την ποσοστιαία μεταβολή και να αντιστρέφουν προβλήματα ποσοστών).

f) Τη διαίρεση ποσότητας σε δοθέντα λόγο.

Νοητικές μέθοδοι

g) Την ανάκληση όλων των δυνατών αθροισμάτων ακεραίων ως το 100 (π.χ. 37+63=100), των τετραγώνων ακεραίων από το 11×11 ως 15×15 και των αντίστοιχων τετραγωνικών ριζών *(το ότι* $n^0 = 1$ *και* $n^{-1} = \frac{1}{n}$*, για θετικούς ακεραίους n, τον αντίστοιχο κανόνα για αρνητικούς ακεραίους και ότι* $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$ *, για θετικούς ακεραίους).*

h) Τη στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο ή σε συγκεκριμένο δεκαδικό ψηφίο.

-Να εκτιμούν λύσεις προβλημάτων που εμπεριέχουν δεκαδικούς.

i) Να αναπτύσσουν εύρος στρατηγικών για νοητικούς υπολογισμούς και τη νοητική προσθαφαίρεση αριθμών ως δύο δεκαδικά ψηφία.

Γραπτές μέθοδοι

j-k) Τυποποιημένες διαδικασίες για πράξεις ανάμεσα σε ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς *(να αναπαριστούν επαναλαμβανόμενες ποσοστιαίες μεταβολές με χρήση πολλαπλασιαστή υψωμένου σε κάποια δύναμη).*

l) Πράξεις με κλάσματα, όπως η διαγραφή κοινών παραγόντων, αναγνωρίζοντας ότι, σε πολλές περιπτώσεις, μόνο ένα κλάσμα μπορεί να εκφράζει την ακριβή απάντηση.

m) Πώς να λύνουν απλά προβλήματα ποσοστών.

n) Τον τρόπο επίλυσης λεκτικών προβλημάτων λόγων και αναλογιών και να χρησιμοποιούν τον αριθμό π σε ακριβείς υπολογισμούς, χωρίς μικροϋπολογιστή *(να συμμετροποιούν άρρητους παρονομαστές).*

Μέθοδοι χρήσης μικροϋπολογιστή

o) Να χρησιμοποιούν τους μικροϋπολογιστές αποτελεσματικά και αποδοτικά: να γνωρίζουν πώς να εισάγουν σύνθετους υπολογισμούς και πώς να χρησιμοποιούν τα πλήκτρα λειτουργίας για τους αντίστροφους, τα τετράγωνα και τις τετραγωνικές ρίζες.

p) Να εισάγουν μια ακολουθία υπολογισμών, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που περιλαμβάνουν μετρήσεις και δυνάμεις.

p) Να κατανοούν τις ενδείξεις της οθόνης ενός μικροϋπολογιστή, να τις ερμηνεύουν σωστά και να κατανοούν πότε δεν πρέπει να στρογγυλοποιούν κατά τα ενδιάμεσα βήματα υπολογισμών.

q) Να χρησιμοποιούν μικροϋπολογιστές ή γραπτές μεθόδους προκειμένου να υπολογίσουν τα ανώτατα και τα κατώτατα όρια στους υπολογισμούς τους, ειδικότερα όταν εργάζονται με μετρήσεις.

r) Να έχουν γνώση του πώς να εισάγουν αριθμούς στην εκθετική τους μορφή.

s) Να κάνουν χρήση των μικροϋπολογιστών για υπολογισμούς αντιστρόφων αναλογιών εκτελώντας μια κατάλληλη διαίρεση.

t) Να χρησιμοποιούν τους μικροϋπολογιστές για να ερευνήσουν την εκθετική αύξηση και μείωση.

4. Επίλυση αριθμητικών προβλημάτων

Οι μαθητές θα πρέπει να διδάσκονται:

a) Το πώς να αντλούν στοιχεία από τις γνώσεις τους περί διαδικασιών, αντίστροφων διαδικασιών και των σχέσεων μεταξύ τους *(και για δυνάμεις και ρίζες),* για απλές δυνάμεις ακέραιων αριθμών, ρίζες *(άρρητους, αντίστροφη αναλογία, επαναλαμβανόμενες σύμμετρες αλλαγές),* μεθόδους απλοποίησης και ιδιότητες των πράξεων, προκειμένου να επιλέξουν και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλες στρατηγικές και τεχνικές για την αντιμετώπιση ποικίλων προβλημάτων σχετικών με μετρικές μονάδες και σύνθετα μέτρα.

b) Να επιλέγουν τις καταλληλότερες πράξεις, μεθόδους και στρατηγικές για τη λύση αριθμητικών προβλημάτων *(να επιλέγουν και να αιτιολογούν τα κατάλληλα επίπεδα ακρίβειας για απαντήσεις σε προβλήματα).*

c) Την εκτίμηση απαντήσεων σε προβλήματα, με τις κατάλληλες ελεγκτικές διαδικασίες.

d) Να δίνουν λύσεις στα πλαίσια του προβλήματος και σε κατάλληλο επίπεδο ακριβείας, ερμηνεύοντας το αποτέλεσμα των πράξεων με τη χρήση μικροϋπολογιστή και εντοπίζοντας τυχόν περιορισμούς στην ακρίβεια των δεδομένων και των μετρήσεων.

5. Εξισώσεις, Τύποι και Ταυτότητες

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Χρήση συμβόλων

a) Τον διαφορετικό ρόλο των γραμμάτων στην άλγεβρα και το ότι αυτά αναπαριστούν ορισμένους άγνωστους αριθμούς σε εξισώσεις, ορισμένες ποσότητες ή μεταβλητές σε τύπους, γενικά άγνωστους και ανεξάρτητους αριθμούς σε ταυτότητες, ενώ σε συναρτήσεις ορίζουν νέες εκφράσεις ή μεγέθη.

b) Το ότι οι μετασχηματισμοί αλγεβρικών εκφράσεων υπακούουν και γενικεύουν κανόνες της αριθμητικής.

-Να χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις και να γνωρίζουν τις διαφορές ανάμεσα στους όρους «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «έκφραση» *(να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τους προηγούμενους όρους).*

-Να αναλύουν το γινόμενο δύο γραμμικών εκφράσεων.

(Να χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις με την αναγωγή ομοίων όρων, να παραγοντοποιούν τετραγωνικές εκφράσεις όπως η διαφορά τετραγώνων και να ακυρώνουν τους κοινούς παράγοντες σε ρητές εκφράσεις).

Συμβολισμοί Εκθετών

c-d) Να χρησιμοποιούν εκθετικούς νόμους για απλές δυνάμεις ακεραίων και να αντικαθιστούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε εκφράσεις όπως $3x^2+4$, $2x^3$.

Εξισώσεις

e) Τον σχηματισμό απλών εξισώσεων και την επίλυσή τους με χρήση αντίστροφων διαδικασιών ή με το να μετασχηματίσουν και τα δύο μέρη κατά τον ίδιο τρόπο.

Γραμμικές εξισώσεις

-Το πώς να επιλύουν γραμμικές εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται είτε στο ένα, είτε και στα δύο μέρη ή όταν απαιτείται πρώτα απαλοιφή παρενθέσεων.

Τύποι

f-g) Τη χρήση τύπων είτε από τα μαθηματικά, είτε από άλλα μαθήματα, πρώτα λεκτικά και μετά με γράμματα και σύμβολα *(να αλλάζουν το αντικείμενο ενδιαφέροντος ενός τύπου, συμπεριλαμβανομένων των περιπτώσεων όπου αυτό εμφανίζεται δύο φορές ή σε κάποια δύναμη και να δημιουργούν νέους τύπους).*

Ευθεία και αντίστροφη αναλογία

h) Να θέτουν και να χρησιμοποιούν εξισώσεις προκειμένου να επιλύσουν λεκτικά και άλλα προβλήματα που περιλαμβάνουν ευθεία και αντίστροφη αναλογία και να συσχετίζουν αλγεβρικές λύσεις με τη γραφική αναπαράσταση των εξισώσεων.

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

i) Να βρίσκουν ακριβείς λύσεις συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους με απαλοιφή του ενός, να ερμηνεύουν τις εξισώσεις ως ευθείες και τη κοινή λύση τους ως το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

Ανισότητες

d) Να επιλύουν απλές γραμμικές ανισότητες μιας μεταβλητής και να αναπαριστούν τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών *(να βρίσκουν τις κοινές λύσεις αρκετών γραμμικών ανισοτήτων δύο μεταβλητών).*

Τετραγωνικές εξισώσεις

k) Να επιλύουν απλές τετραγωνικές εξισώσεις με παραγοντοποίηση, συμπλήρωση τετραγώνου και με χρήση του τύπου Δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Συστήματα γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων

l) Να επιλύουν με ακρίβεια, με απαλοιφή ενός αγνώστου, σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, εκ των οποίων η μία είναι γραμμική για κάθε άγνωστο και η άλλη γραμμική για τον ένα και Δευτεροβάθμια αναφορικά με τον άλλο, ή της μορφής $x^2 + y^2 = r^2$.

Αριθμητικές μέθοδοι

m) Να χρησιμοποιούν με συστηματικό τρόπο τη μέθοδο της δοκιμής και βελτίωσης για την εύρεση λύσεων εξισώσεων κατά προσέγγιση, όπου δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος εύρεσής τους.

6. Ακολουθίες, Συναρτήσεις και Γραφήματα

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Ακολουθίες

a) Το πώς προκύπτουν όροι ακολουθίας (όπως απλές ακολουθίες άρτιων και περιττών αριθμών, τετράγωνα ακεραίων και ακολουθίες βάσει διαγραμμάτων)

-Να κάνουν χρήση γραμμικών εκφράσεων για τον προσδιορισμό του n-οστού όρου μιας αριθμητικής ακολουθίας, δικαιολογώντας τη μορφή της αναφερόμενοι στη δραστηριότητα ή στο πλαίσιο από το οποίο προήλθε.

-Να παράγουν απλές ακολουθίες ακεραίων (όπως ακολουθίες άρτιων ή περιττών, τετραγώνων ακεραίων, δυνάμεων του 2 και του 10 και τριγωνικών αριθμών).

Γραφήματα γραμμικών συναρτήσεων

b) Να χρησιμοποιούν τις συνθήκες για τις συντεταγμένες στο επίπεδο, να σχεδιάζουν σημεία και στα τέσσερα τεταρτημόρια, να αναγνωρίζουν (για δοθείσες τιμές των m και c) ότι οι εξισώσεις της μορφής y=mx+c αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις ευθειών.

-Τη σχεδίαση γραφημάτων συναρτήσεων όπου η μεταβλητή y δίνεται άμεσα συναρτήσει της μεταβλητής x, ή έμμεσα (π.χ. $y=2x+3$, $x+y=7$).

c) Το πώς να κατασκευάζουν γραμμικές συναρτήσεις από πραγματικά προβλήματα και να σχεδιάζουν τα αντίστοιχα γραφήματα.

-Την ερμηνεία γραφικών παραστάσεων που μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις.

-Το γιατί το σημείο τομής δύο διαφορετικών ευθειών για τις ίδιες δύο μεταβλητές που ταυτόχρονα περιγράφουν μια πραγματική κατάσταση είναι και η κοινή λύση των εξισώσεων που αναπαρίστανται από τις ευθείες.

-Το πώς να σχεδιάζουν την ευθεία που προσαρμόζει καλύτερα σε μια ομάδα γραμμικών συσχετιζόμενων σημείων και να βρίσκουν την εξίσωσή της

Κλίσεις

d) Τον τρόπο εύρεσης της κλίσης ευθειών που δίδονται από τον τύπο y=mx+c (με γνωστά τα m και c)

-Να ερευνούν τις κλίσεις παράλληλων ευθειών (*ότι η μορφή* $y = mx + c$ *αναπαριστά ευθεία γραμμή, όπου m είναι η κλίση της ευθείας και c η τιμή του σημείου τομής της με τον άξονα των y και ποια η σχέση των κλίσεων παράλληλων και κάθετων ευθειών).*

Ερμηνεία πληροφοριών από γραφήματα

e) Να ερμηνεύουν τις πληροφορίες που παρουσιάζονται σε μια ποικιλία γραμμικών και μη γραφικών παραστάσεων (όπως γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν τάσεις, μετατροπές, γραφήματα απόστασης με χρόνο, βάρους ή ύψους με ηλικία, γραφήματα από μεταβλητές στο χρόνο ποσότητες, όπως η απασχόληση, γράφημα απόστασης με χρόνο σωματιδίου κινούμενου με σταθερή ταχύτητα και στάθμης νερού σε δεξαμενή που αδειάζει).

Τετραγωνικές συναρτήσεις

-Να βρίσκουν σημεία και να σχεδιάζουν γραφήματα απλών τετραγωνικών συναρτήσεων και στη συνέχεια πιο πολύπλοκων (π.χ. $y=x^2$, $y=3x^2+4$, $y=x^2-2x+1$)

-Την κατά προσέγγιση εύρεση των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης από το γράφημα της αντίστοιχης τετραγωνικής συνάρτησης.

-Να βρίσκουν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης, έχοντας γνώση του ότι αποτελούν λύσεις κατά προσέγγιση του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων.

Άλλες συναρτήσεις

f) Τη χάραξη γραφημάτων απλών κυβικών συναρτήσεων, της αντίστροφης συνάρτησης $y=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, *της εκθετικής συνάρτησης* $y=k^x$ *για ακέραιες τιμές του x και απλές θετικές τιμές του k, αλλά και των συναρτήσεων y=sinx και y=cosx, χρησιμοποιώντας λογιστικά φύλλα ή τον γραφικό σχεδιογράφο, καθώς και μολύβι και χαρτί.*

-Να αναγνωρίζουν το χαρακτηριστικό σχήμα όλων αυτών των συναρτήσεων.

Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

g) Να εφαρμόζουν στο γράφημα της $y = f(x)$ *τους μετασχηματισμούς* $y = f(x)+a$, $y = f(ax)$, $y = f(x+a)$, $y=af(x)$ *για γραμμικές και τετραγωνικές συναρτήσεις, αλλά και για συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου f(x).*

Γεωμετρικοί τόποι

h) Να κατασκευάζουν τα γραφήματα απλών γεωμετρικών τόπων, όπως του κύκλου ακτίνας r με κέντρο το σημείο τομής τον αξόνων $x^2 + y^2 = r^2$.

-Να βρίσκουν γραφικά τα σημεία τομής δοθείσας ευθείας με τον κύκλο αυτό, γνωρίζοντας ότι αντιστοιχούν στις λύσεις του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων.

Ma3 Σχήμα, χώρος και μέτρα

Περιεχόμενο

1. **Χρησιμοποιώντας το σχήμα, τον χώρο και τα μέτρα**

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Επίλυση προβλήματος

a) Τον τρόπο επιλογής στρατηγικών και πηγών επίλυσης προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων εργαλείων ICT, για χρήση στην εργασία τους και για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητάς τους.

b) Να επιλέγουν και να συνδυάζουν γνωστά δεδομένα και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων για να επιλύσουν σύνθετα προβλήματα.

c) Να προσδιορίζουν ποιες συμπληρωματικές πληροφορίες απαιτούνται για να λύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα.

-Τη διάσπαση σύνθετων προβλημάτων σε μια σειρά δραστηριοτήτων.

Επικοινωνία

d) Να ερμηνεύουν, να συζητούν και να συνθέτουν τις γεωμετρικές πληροφορίες που τους παρουσιάζονται με ποικίλες μορφές.

-Να επικοινωνούν μαθηματικά, με έμφαση στην κριτική εξέταση της παρουσίασης και οργάνωσης των αποτελεσμάτων και στην αποτελεσματική χρήση συμβόλων και γεωμετρικών διαγραμμάτων.

e) Να χρησιμοποιούν με ακρίβεια την τυπική γλώσσα και τις μεθόδους ανάλυσης γεωμετρικών συνθέσεων.

f) Να χρησιμοποιούν κατάλληλα τη γεωμετρική ορολογία.

g) Να ανακεφαλαιώνουν και να δικαιολογούν τις μαθηματικές παρουσιάσεις που έχουν επιλέξει.

Συλλογιστική

h) Να διακρίνουν τις πρακτικές αποδείξεις από τις θεωρητικές.

i) Να εφαρμόζουν το μαθηματικό συλλογισμό, εξηγώντας και δικαιολογώντας συμπεράσματα *(προχωρώντας από σύντομες μαθηματικές ερμηνείες σε πλήρεις αιτιολογήσεις, σε πιο σύνθετα πλαίσια).*

j) Τη βαθμιαία αφαίρεση κατά την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος.

- Να ερευνούν συνδέσεις στη γεωμετρία.

- Να θέτουν περιορισμούς στις υποθέσεις, του τύπου «Αν......τότε....»

- Να θέτουν ερωτήσεις «Τι θα συμβεί εάν...» ή «Γιατί....;»

k) Να δηλώνουν τους περιορισμούς και τις αφετηρίες κατά την εξαγωγή συμπερασμάτων.

l) Το πώς να αναγνωρίζουν περιορισμούς οποιωνδήποτε υποθέσεων και να κατανοούν τις μεταβολές που μπορεί να προκαλέσουν τυχόν αλλαγές σε αυτές.

m) Την επισήμανση ειδικών περιπτώσεων κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

- Τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες γενικεύσεις, συμπεράσματα και λύσεις σε γεωμετρικά προβλήματα παραμένουν σε ισχύ.

2. Γεωμετρική αιτιολόγηση

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Γωνίες

a) Να θυμούνται και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των γωνιών σε ένα σημείο, των γωνιών σε μια ευθεία γραμμή (συμπεριλαμβανομένων των ορθών γωνιών) και των κάθετων ευθειών.

b) Να διακρίνουν τις οξείες, τις αμβλείες, τις ορθές γωνίες και εκείνες που είναι μεγαλύτερες των 180^0 (reflex angles) και να εκτιμούν το μέγεθος μιας γωνίας σε μοίρες.

Ιδιότητες τριγώνων και άλλων ευθύγραμμων σχημάτων

c) Να διακρίνουν τις ευθείες από τα ευθύγραμμα τμήματα.

-Να χρησιμοποιούν παράλληλες ευθείες, εναλλάξ και εντός και επί τα αυτά γωνίες.

-Τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και μια απόδειξη του ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180^0.

-Την απόδειξη του ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο άλλων εσωτερικών γωνιών.

d) Τις ιδιότητες των γωνιών ισόπλευρων, ισοσκελών και ορθογώνιων τριγώνων.

-Την ισότητα τριγώνων.

-Το γιατί το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τετράπλευρου είναι 360^0.

e) Να χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για τα ορθογώνια, τα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα και να εξάγουν τον τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου.

- Να υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου, από τον τύπο του εμβαδού ορθογώνιου παραλληλόγραμμου.

f) Τις ουσιαστικές ιδιότητες ειδικών τύπων τετράπλευρων, συμπεριλαμβανομένων του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του παραλληλογράμμου, του τραπεζίου και του ρόμβου.

-Την ταξινόμηση τετραπλεύρων βάσει των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους.

g) Να υπολογίζουν και να χρησιμοποιούν τα αθροίσματα των εσωτερικών και εξωτερικών γωνιών τετραπλεύρων, πενταγώνων και εξαγώνων.

-Να υπολογίζουν και να χρησιμοποιούν τις γωνίες των κανονικών πολυγώνων.

h) Το Πυθαγόρειο θεώρημα *(σε δισδιάστατα αλλά και σε τρισδιάστατα προβλήματα).*

-*Την έννοια της ομοιότητας τριγώνων και άλλων επίπεδων σχημάτων.*

-*Τριγωνομετρικές σχέσεις που αφορούν σε ορθογώνια τρίγωνα, να εφαρμόζουν τις σχέσεις αυτές κατά την επίλυση προβλημάτων που αφορούν και πλευρές και στη συνέχεια να επεκτείνουν αυτές τις σχέσεις στις τρεις διαστάσεις (π.χ. να βρίσκουν τη γωνία μεταξύ ευθείας και επιπέδου, αλλά όχι μεταξύ δύο επιπέδων ή μεταξύ δύο αποκλινουσών ευθειών).*

- Να υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου βάσει του τύπου $\frac{1}{2}absinC$.

-Να σχεδιάζουν και να περιγράφουν τα γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων για γωνίες κάθε μεγέθους.

-Να χρησιμοποιούν τους κανόνες ημιτόνου και συνημιτόνου για να επιλύσουν τρισδιάστατα και δισδιάστατα προβλήματα.

Ιδιότητες κύκλου

i) Τον ορισμό του κύκλου και των σχετικών όρων, όπως του κέντρου, της ακτίνας, της χορδής, της διαμέτρου, της περιφέρειας, της εφαπτομένης, του τόξου, του τομέα και του τμήματος του κύκλου μεταξύ τόξου και χορδής.

-Το ότι τα εγγραμμένα κανονικά πολύγωνα μπορούν να κατασκευαστούν με την ίση διαίρεση της περιφέρειας ενός κύκλου.

-Το ότι η εφαπτομένη κύκλου σε οποιοδήποτε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα του που διέρχεται από το σημείο αυτό.

-Το ότι οι εφαπτόμενες κύκλου από εξωτερικό σημείο του ισούνται και να εξηγούν το γιατί η κάθετος από το κέντρο στη χορδή διχοτομεί τη χορδή.

-*Την απόδειξη του ότι κάθε εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο με αυτήν τόξο, ότι η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, ότι εγγεγραμμένες ή επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο* *ισούνται και πως το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με 360^0.*

-Να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν το θεώρημα: «Γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που έχει το ίδιο με αυτήν αντίστοιχο τόξο».

3-D σχήματα

j-k) Τη γεωμετρία των ορθογώνιων παραλληλεπίπεδων (συμπεριλαμβανομένων των κύβων) και των προκυπτόντων σχημάτων *(και να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα για τον υπολογισμό μηκών στις τρεις διαστάσεις)*, να κάνουν χρήση 2-D αναπαραστάσεων 3-D σχημάτων και να αναλύουν τα τρισδιάστατα σχήματα μέσω δισδιάστατων προβολών και διατομών, συμπεριλαμβανομένων κατόψεων και προόψεων.

i) Τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων που αφορούν εμβαδά επιφανειών και όγκους πρισμάτων *(πυραμίδων, κυλίνδρων, σφαιρών και κώνων).*

-Το πώς να επιλύουν προβλήματα που εμπλέκουν πιο σύνθετα σχήματα και στερεά, όπως κυκλικούς τομείς και κόλουρα στερεά.

<u>3. Μετασχηματισμοί και συντεταγμένες</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Προσδιορισμός μετασχηματισμών

a) Το ότι οι περιστροφές καθορίζονται από ένα κέντρο και από μια (αντίθετη προς την φορά των δεικτών του ρολογιού) γωνία.

-Το πώς να περιστρέφουν ένα σχήμα γύρω από την αρχή των αξόνων ή από οποιοδήποτε άλλο σημείο.

-Να μετρούν τη γωνία περιστροφής χρησιμοποιώντας ορθές γωνίες, απλά τμήματα μιας στροφής ή μοίρες.

-Το ότι οι αντανακλάσεις καθορίζονται από μια γραμμή, πρώτα χρησιμοποιώντας μια γραμμή παράλληλη σε έναν άξονα και στη συνέχεια μια γραμμή όπως οι άξονες y=x ή y =-x.

-Πως οι μεταθέσεις καθορίζονται από την απόσταση και την κατεύθυνση και οι μεγεθύνσεις από ένα κέντρο και ένα θετικό συντελεστή κλίμακας.

Ιδιότητες μετασχηματισμών

b) Να αναγνωρίζουν και να απεικονίζουν περιστροφές, αντανακλάσεις και μεταθέσεις.

-Να μετασχηματίζουν τρίγωνα και άλλα δισδιάστατα σχήματα με μετάθεση, περιστροφή και αντανάκλαση, αναγνωρίζοντας ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί διατηρούν το μήκος και τη γωνία, έτσι ώστε οποιοδήποτε σχήμα να είναι σύμφωνο με την νέα εικόνα του.

-Να διακρίνουν τις ιδιότητες που διατηρούνται μετά από ορισμένους μετασχηματισμούς.

c) Να αναγνωρίζουν, να απεικονίζουν και να κατασκευάζουν μεγεθύνσεις αντικειμένων χρησιμοποιώντας θετικούς *(και αρνητικούς)* συντελεστές κλίμακας μεγαλύτερους της μονάδας και έπειτα μικρότερους της μονάδας.

-Από το προηγούμενο ότι οποιοιδήποτε δύο κύκλοι και οποιαδήποτε δύο τετράγωνα είναι από μαθηματική άποψη όμοια, σε αντίθεση, γενικά, με δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

d) Πως η μεγέθυνση διατηρεί τη γωνία, όχι το μήκος.

-Τον προσδιορισμό του συντελεστή κλίμακας μιας μεγέθυνσης ως τον λόγο των μηκών οποιωνδήποτε δύο αντίστοιχων τμημάτων γραμμών και να τον εφαρμόζουν στα τρίγωνα.

-Τις συνέπειες της μεγέθυνσης για την περίμετρο.

-Τη χρήση και την ερμηνεία χαρτών και κλιμάκων.

-Να ξεχωρίζουν τους τύπους για την περίμετρο, το εμβαδόν και τον όγκο με γνώμονα τις διαστάσεις.

Συντεταγμένες

e) Πως μια συντεταγμένη προσδιορίζει ένα σημείο στην ευθεία των αριθμών, δύο συντεταγμένες ένα σημείο στο επίπεδο, ενώ τρεις ένα σημείο στον χώρο.

-Να χρησιμοποιούν άξονες και συντεταγμένες για τον προσδιορισμό σημείων και στις τέσσερις διαστάσεις και να προσδιορίζουν σημεία με δοθείσες συντεταγμένες και να βρίσκουν τις συντεταγμένες σημείων με τη βοήθεια γεωμετρικών πληροφοριών.

-Να βρίσκουν τις συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δοθέντων των Α και Β και στη συνέχεια να υπολογίζουν το μήκος ΑΒ.

Διανύσματα

f) Να κατανοούν και να χρησιμοποιούν τα διανυσματικά σύμβολα, να υπολογίζουν και να αναπαριστούν γραφικά το άθροισμα, τη διαφορά δύο διανυσμάτων και το εσωτερικό τους γινόμενο.

-Να υπολογίζουν τη συνισταμένη δύο διανυσμάτων.

-Να κατανοούν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων και να επιλύουν, μέσω διανυσμάτων, απλά γεωμετρικά προβλήματα στον δισδιάστατο χώρο.

4. Μέτρα και κατασκευή

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

Μέτρα

a) Την ερμηνεία κλιμάκων πάνω σε όργανα μέτρησης.

-Το ότι οι μετρήσεις που χρησιμοποιούν πραγματικούς αριθμούς εξαρτώνται από την επιλογή της μονάδας.

-Το ότι οι μετρήσεις που δίνονται στην κοντινότερη ολόκληρη μονάδα μπορεί να είναι ανακριβείς ως το ήμισυ προς κάθε κατεύθυνση.

-Να μετατρέπουν τις μετρήσεις από μια μονάδα σε άλλη και κατά προσέγγιση τα μετρικά ισοδύναμα για λίβρες, πόδια, μίλια, γαλόνια και πίντες (pints).

-Να εκτελούν λογικές εκτιμήσεις μέτρων της καθημερινότητας.

b) Τον τρόπο μέτρησης γωνιών.

c) Σύνθετα μέτρα, όπως η ταχύτητα και η πυκνότητα.

Κατασκευή

d) Το πώς να μετρούν και να σύρουν γραμμές στο κοντινότερο χιλιοστόμετρο και γωνίες στην πλησιέστερη μοίρα.

-Να σχεδιάζουν τρίγωνα και άλλα δισδιάστατα σχήματα χρησιμοποιώντας κανόνα και μοιρογνωμόνιο, λαμβάνοντας υπόψη πληροφορίες για τα μήκη των πλευρών και τις γωνίες.

-Από την εμπειρία τους κατά την κατασκευή τους, ότι τα τρίγωνα που ικανοποιούν τις συνθήκες ισότητας είναι μοναδικά, κάτι που δε χαρακτηρίζει, όμως, τα όμοια τρίγωνα.

-Να κατασκευάζουν κύβους, κανονικά τετράεδρα, πυραμίδες με τετραγωνική βάση και άλλα τρισδιάστατα σχήματα, από δοθείσες πληροφορίες.

e) Να χρησιμοποιούν διαβήτη και χάρακα για να εκτελούν τυποποιημένες κατασκευές, όπως ένα ισόπλευρο τρίγωνο με δοθείσα πλευρά, το μέσο και την κάθετη διχοτόμο ευθυγράμμου τμήματος, την κάθετο από σημείο εκτός ευθείας, αλλά και από σημείο πάνω στην ευθεία και τη διχοτόμο γωνίας.

(Διαδικασία με την οποία γίνεται) Μέτρηση

f) Την εύρεση των εμβαδών ορθογωνίων παραλληλογράμμων ανακαλώντας τον τύπο, να κατανοούν τη σύνδεση με τη μέτρηση τετραγώνων και το πώς επεκτείνεται αυτή η προσέγγιση.

-Να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν τους τύπους για το εμβαδόν παραλληλογράμμου και τριγώνου.

-Την εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας απλών σχημάτων χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους τύπους για τα τρίγωνα και τα ορθογώνια

-Το πώς να υπολογίζουν τις περιμέτρους και τα εμβαδά σχημάτων που αποτελούνται από τρίγωνα και ορθογώνια.

g) Να υπολογίζουν τους όγκους ορθογώνιων παραλληλογράμμων κατανοώντας τη σύνδεση με τη μέτρηση τετραγώνων και πώς επεκτείνεται αυτή η προσέγγιση.

-Να υπολογίζουν τους όγκους ορθών πρισμάτων και σχημάτων που συντίθενται από κύβους και από ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

h) Να υπολογίζουν τις περιφέρειες κύκλων και τα εμβαδά των περιοχών που περικλείουν *(να υπολογίζουν μήκη τόξων και εμβαδά κυκλικών τομέων).*

i) Να εκτελούν μετατροπές ανάμεσα σε μετρικά μεγέθη όπως τετραγωνικά εκατοστόμετρα και τετραγωνικά μέτρα και ανάμεσα σε μέτρα όγκου, όπως το κυβικό εκατοστόμετρο και το κυβικό μέτρο.

Γεωμετρικοί Τόποι

j) Να βρίσκουν γεωμετρικούς τόπους βάσει συλλογισμών και με χρήση της ICT για τη δημιουργία σχημάτων και τροχιών.

Μα4 Διαχείριση δεδομένων

1. Χρήση και εφαρμογή της διαχείρισης δεδομένων

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

a) Να διεκπεραιώνουν κάθε μία από τις τέσσερις φάσεις του κύκλου διαχείρισης δεδομένων για να επιλύουν προβλήματα. Οι φάσεις είναι οι εξής:

i. Προσδιορισμός προβλήματος και σχεδιασμός: Να διατυπώνουν ερωτήσεις βάσει δεδομένων και να εξετάζουν το ποια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν, να αποφασίζουν ποια στοιχεία να συγκεντρώσουν καθώς και ποια στατιστική ανάλυση θα απαιτηθεί.

ii. Συλλογή δεδομένων: Από κατάλληλες πηγές, συμπεριλαμβανομένων πειραμάτων και ερευνών, πρωταρχικών και δευτερεύουσων πηγών.

iii. Διαδικασία και αναπαράσταση δεδομένων: Να μετατρέπουν ακατέργαστα στοιχεία σε χρησιμοποιήσιμες πληροφορίες.

iv. <u>Ερμηνεία και συζήτηση</u>: Να απαντούν με την εξαγωγή συμπερασμάτων από τα στοιχεία.

b) Να προσδιορίζουν ποιες συμπληρωματικές πληροφορίες απαιτούνται για να ακολουθήσουν μια ιδιαίτερη γραμμή έρευνας, να επιλέγουν τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που θα χρησιμοποιήσουν στην στατιστική εργασία τους και να ελέγχουν την αποτελεσματικότητά τους.

c) Να επιλέγουν και να οργανώνουν τις κατάλληλες μαθηματικές γνώσεις και πηγές που θα χρησιμοποιήσουν σε μια δραστηριότητα.

d) Να αναθεωρούν την πρόοδό τους ενώ εργάζονται, να ελέγχουν και να εκτιμούν τις απαντήσεις τους.

Επικοινωνία

e) Να ερμηνεύουν, να συζητούν και να συνθέτουν πληροφορίες που εμφανίζονται σε μια ποικιλία μορφών.

f) Να επικοινωνούν σε μαθηματικό επίπεδο με έμφαση σε διαγράμματα και σε σχετικά ερμηνευτικά κείμενα, *στην επιλογή της μαθηματικής τους παρουσίασης, εξηγώντας τον στόχο και την προσέγγισή τους και στη χρήση των συμβόλων που έχουν κάποιο στατιστικό νόημα.*

g) Να εξετάζουν και να αιτιολογούν το πώς επέλεξαν συγκεκριμένες μαθηματικές αναπαραστάσεις.

Συλλογιστική

h) Την εφαρμογή μαθηματικής συλλογιστικής.

e) Τον προσδιορισμό ειδικών ή απρόοπτων περιπτώσεων κατά την επίλυση στατιστικών προβλημάτων.

i) Να ερευνούν συνδέσεις στα μαθηματικά και να αναζητούν τυχόν σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών κατά την ανάλυση δεδομένων

j) Να αναγνωρίζουν τους περιορισμούς οποιαδήποτε εικασίας και τις επιπτώσεις που έχει τυχόν μεταβολή τους στα συμπεράσματα της ανάλυσης δεδομένων

<u>2. Προσδιορισμός Προβλήματος και Σχεδιασμός</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

a) Το ότι οι τυχαίες διαδικασίες είναι απρόβλεπτες.

b) Να προσδιορίζουν τις ερωτήσεις κλειδιά που μπορούν να εξεταστούν με στατιστικές μεθόδους.

c) Το πώς τα δεδομένα συνδέονται με το πρόβλημα.

-Να προσδιορίζουν τις πιθανές πηγές μεροληψίας, την οποία και να ελαχιστοποιούν.

d) Να προσδιορίζουν ποια αρχικά στοιχεία πρέπει να συλλέξουν και σε ποια μορφή, συμπεριλαμβανομένων των ομαδοποιημένων δεδομένων, εξετάζοντας, παράλληλα, κατάλληλα ίσα διαστήματα.

(Να επιλέγουν και να κρίνουν ένα δειγματοληπτικό σχήμα και μια μέθοδο έρευνας ενός πληθυσμού, με τυχαία και στρωματοποιημένη δειγματοληψία).

e) Τον σχεδιασμό ενός πειράματος ή έρευνας και το ποια αρχικά και Δευτεροβάθμια δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν.

3. Συλλογή δεδομένων

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

a) Το πώς να σχεδιάζουν και να χρησιμοποιούν φύλλα συλλογής δεδομένων για ομαδοποιημένα διακριτά και συνεχή στοιχεία.

-Το πώς να συγκεντρώνουν δεδομένα χρησιμοποιώντας μεθόδους όπως παρατήρηση, ελεγχόμενο πείραμα, καταγραφή δεδομένων, ερωτηματολόγιο και έρευνα.

b) Τη συλλογή δεδομένων από δευτερεύουσες πηγές, όπως πίνακες και καταλόγους με τη βοήθεια της ICT.

c) Να χρησιμοποιούν διπλής κατεύθυνσης πίνακες για διακριτά και ομαδοποιημένα δεδομένα.

d) *Να διαπραγματεύονται πρακτικά προβλήματα, όπως η μη ανταπόκριση και η απουσία δεδομένων.*

4. Διαχείριση και Αναπαράσταση Δεδομένων

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

a) Τον τρόπο κατασκευής κυκλικών διαγραμμάτων συχνοτήτων για κατηγορικά δεδομένα και διαγραμμάτων για συνεχή δεδομένα, συμπεριλαμβανομένων γραμμογραφημάτων για χρονοσειρές, διαγραμμάτων διασποράς, διαγραμμάτων συχνότητας, φυλλογραφημάτων (*πινάκων και διαγραμμάτων αθροιστικής συχνότητας, ιστογραμμάτων για ομαδοποιημένα συνεχή δεδομένα και θηκογραμμάτων)*.

b) Να υπολογίζουν τον μέσο όρο, το εύρος και τη διάμεσο μικρών συνόλων δεδομένων, διακριτών και στη συνέχεια συνεχών.

c) Την έννοια της πιθανότητας.

d) Τη χρήση εκτιμήσεων ή μέτρων πιθανότητας από θεωρητικά μοντέλα (συμπεριλαμβανομένων ισοπίθανων ενδεχομένων), ή από τη πρόσθεση σχετικών συχνοτήτων απλών πιθανοτήτων.

e) Τον τρόπο να κατηγοριοποιούν συστηματικά ενδεχόμενα απλών ή διαδοχικών γεγονότων.

f) Το ποια ενδεχόμενα ορίζονται ως αμοιβαία αποκλειόμενα (mutually exclusive) και ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων τους ισούται με τη μονάδα.

g) Να βρίσκουν τη διάμεσο *(τα τεταρτημόρια και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος)* για μεγάλα σύνολα δεδομένων και να εκτιμούν το μέσο, με ομαδοποίηση στοιχείων.

h) Να σύρουν γραμμές καλύτερης προσαρμογής (lines of best fit) με το μάτι, κατανοώντας το τι αυτές αναπαριστούν.

i) Τον τρόπο να χρησιμοποιούν σχετικές στατιστικές συναρτήσεις σε υπολογιστή ή σε λογιστικά φύλλα.

j) *Να υπολογίζουν το μεταβλητό μέσο όρο.*

-Να γνωρίζουν πότε είναι σε θέση να προσθέσουν ή να πολλαπλασιάσουν δύο πιθανότητες.

-Να χρησιμοποιούν δενδροδιαγράμματα προκειμένου να αναπαραστήσουν αποτελέσματα σύνθετων ενδεχομένων, αναγνωρίζοντας πότε τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

<u>5. Ερμηνεία και Συζήτηση Αποτελεσμάτων</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν:

a) Τη συσχέτιση τελικών αποτελεσμάτων με τις αρχικές ερωτήσεις.

b) Να ερμηνεύουν ένα ευρύ φάσμα γραφικών παραστάσεων και διαγραμμάτων και να εξάγουν συμπεράσματα ερμηνεύοντας ένα φυλλογράφημα.

-Να προσδιορίζουν την εποχικότητα και τυχόν τάσεις σε χρονοσειρές.

c) Να εξετάζουν δεδομένα αναζητώντας πρότυπα και εξαιρέσεις.

d) Να συγκρίνουν κατανομές και να εξάγουν συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας μορφές κατανομών και μέτρα μέσου όρου και εύρους *(τεταρτημόρια και διάμεσο)*.

e) Να ελέγχουν τα αποτελέσματα και, αν κριθεί απαραίτητο, να αλλάζουν τρόπο προσέγγισης.

f) Το ότι η συσχέτιση προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών.

-Τη διάκριση της συσχέτισης σε θετική, αρνητική και μηδενική, χρησιμοποιώντας γραμμές καλύτερης προσαρμογής.

-Το ότι μηδενική συσχέτιση δε σημαίνει «δεν υπάρχει σχέση», αλλά «δεν υπάρχει γραμμική σχέση».

g) Να κάνουν χρήση όρων της θεωρίας των πιθανοτήτων προκειμένου να ερμηνεύσουν αποτελέσματα που εμπεριέχουν αβεβαιότητα και πρόβλεψη.

h) Να συγκρίνουν πειραματικά δεδομένα και θεωρητικές πιθανότητες.

i) Το ότι, εκτελώντας ένα πείραμα πολλές φορές, συνήθως θα καταλήξουν σε διαφορετικά αποτελέσματα και ότι, αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος, θα λάβουν καλύτερες εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
j) Την ερμηνεία κοινωνικών στατιστικών που περιλαμβάνουν αριθμοδείκτες, χρονοσειρές, έρευνα δεδομένων.
να εξετασθούν συνολικά, για όλη την πιστοποίηση, περισσότερες από μία φορές.

2.7 ICT και διδασκαλία των Μαθηματικών στα Βασικά Στάδια 3 και 4

Η ICT κατέχει σημαντική θέση στο αγγλικό εκπαιδευτικό σύστημα. Η συμβολή της είναι καθοριστική σε ό,τι αφορά στην αλλαγή της φύσης και του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών, καθώς οι διαδικασίες της μοντελοποίησης, του υπολογισμού, της εκτίμησης, της υπόθεσης και της εύρεσης πληροφοριών γίνονται ολοένα και σπουδαιότερες. Η ICT αξιοποιείται στις αγγλικές σχολικές αίθουσες για τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω:

- μικροϋπολογιστών.
- μικρών προγραμμάτων (αριθμητικά παιχνίδια, βάσεις δεδομένων, λογιστικά φύλλα).
- της κατασκευής γραφημάτων.
- ανεξάρτητων μαθησιακών συστημάτων (independent learning systems, ILS).
- του διαδικτύου.
- της επεξεργασίας κειμένου.
- του προγραμματισμού.

Ακολουθεί αναφορά στις υποχρεωτικές απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος σχετικά με την αξιοποίηση της ICT από τους μαθητές και το διδακτικό προσωπικό για τα μαθηματικά των Βασικών Σταδίων 3 και 4 (National Curriculum in Action, 2007):

Βασικό Στάδιο 3

Ma2 Αριθμός και Άλγεβρα (Υπολογισμοί: Υπολογισμοί με μικροϋπολογιστή)

Οι μαθητές πρέπει:

-Να χρησιμοποιούν τους μικροϋπολογιστές αποτελεσματικά και αποδοτικά: να γνωρίζουν πώς να εισάγουν σύνθετους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας παρενθέσεις, καθώς και ακολουθίες διαδοχικών υπολογισμών, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που περιλαμβάνουν μετρήσεις (παραδείγματος χάρη χρονικοί υπολογισμοί στους οποίους τα μέρη μιας ώρας πρέπει να εισαχθούν ως μέρη ή δεκαδικά).

-Να γνωρίζουν το πώς να χρησιμοποιούν τα πλήκτρα λειτουργίας για τους αντίστροφους, τα τετράγωνα, τις τετραγωνικές ρίζες, τις δυνάμεις, τα κλάσματα (και να εισάγουν ένα κλάσμα ως δεκαδικό).

-Να κατανοούν τις ενδείξεις της οθόνης ενός μικροϋπολογιστή και να τις ερμηνεύουν σωστά και να καταλαβαίνουν πότε δεν πρέπει να στρογγυλοποιούν κατά τα ενδιάμεσα βήματα υπολογισμών.

-Μέσω δοκιμών και βελτίωσης και με τη χρήση εργαλείων ICT να βρίσκουν κατά προσέγγιση λύσεις εξισώσεων, όπου δεν εφαρμόζει απλή αναλυτική μέθοδος.

Ma3 Χώρος, σχήμα και μέτρα

Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να:

-Επιλέγουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και κατάλληλες πηγές, συμπεριλαμβανομένης της ICT, τις οποίες και θα χρησιμοποιούν κατά τη γεωμετρική εργασία τους, ελέγχοντας την αποτελεσματικότητά τους.

-Να βρίσκουν γεωμετρικούς τόπους και βάσει συλλογισμών και με χρήση της ICT προκειμένου να παράγουν σχήματα και τροχιές.

Ma4 Διαχείριση Δεδομένων

Οι μαθητές πρέπει:

-Να μπορούν να συγκεντρώνουν δεδομένα από δευτερεύουσες πηγές, όπως πίνακες και καταλόγους πηγών ICT.

-Να σχεδιάζουν και να παράγουν, με χαρτί και μέσω της ICT, κυκλικά διαγράμματα για κατηγορικά στοιχεία και διαγράμματα για συνεχή δεδομένα συμπεριλαμβανομένων γραμμογραφημάτων χρονοσειρών, διαγραμμάτων διασποράς, διαγραμμάτων συχνότητας και φυλλογραφημάτων.

Προπαρασκευαστικό Βασικό Στάδιο 4

Ma2 Αριθμός και Άλγεβρα

Είναι απαραίτητο οι μαθητές να:

3ο: Χρησιμοποιούν τους μικροϋπολογιστές αποτελεσματικά και αποδοτικά, γνωρίζοντας πώς να εισάγουν σύνθετους υπολογισμούς και πώς να χρησιμοποιούν τα πλήκτρα λειτουργίας για τους αντίστροφους, τα τετράγωνα και τις τετραγωνικές ρίζες (όμοια και στο Ανώτερο Βασικό Στάδιο 4).

3p: Εισάγουν μια ακολουθία υπολογισμών, συμπεριλαμβανομένων όσων περιλαμβάνουν μετρήσεις και δυνάμεις.
3q: Κατανοούν τις ενδείξεις της οθόνης ενός μικροϋπολογιστή, να τις ερμηνεύουν σωστά και να καταλαβαίνουν πότε δεν πρέπει να στρογγυλοποιούν κατά τα ενδιάμεσα βήματα υπολογισμών.

Το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα προσφέρει ευκαιρίες για χρήση της ICT στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών στα ακόλουθα σημεία:
5f: Σχετικά με τη χρήση τύπων εκφρασμένων πρώτα με λέξεις και μετά με γράμματα και σύμβολα, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν λογιστικά φύλλα για την κατασκευή τύπων που θα μοντελοποιούν καταστάσεις.
6d: Αναφορικά με την κλίση ευθειών της μορφής y=mx+c, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν λογιστικά φύλλα για να υπολογίσουν σημεία και να ερευνήσουν τις συνέπειες της μεταβολής των m και c στο γράφημα της y=mx+c.

Ma3 Χώρος, σχήμα και μέτρα

Οι μαθητές πρέπει:
1a: Να επιλέγουν στρατηγικές και πηγές επίλυσης προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων εργαλείων ICT, για χρήση στην εργασία τους και να ελέγχουν την αποτελεσματικότητά τους.
4j: Να βρίσκουν γεωμετρικούς τόπους και βάσει συλλογισμών και με χρήση της ICT για τη δημιουργία σχημάτων και τροχιών (όπως σε ισόπλευρα τρίγωνα).

Ma4 Διαχείριση δεδομένων

Οι μαθητές πρέπει:
1f: Να επικοινωνούν και σε μαθηματικό επίπεδο και μέσω της ICT, κάνοντας χρήση διαγραμμάτων και των σχετικών ερμηνευτικών κειμένων.
3b: Να συγκεντρώνουν δεδομένα από δευτερεύουσες πηγές, όπως πίνακες και καταλόγους με τη βοήθεια της ICT.
4a: Να μάθουν να κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα συχνοτήτων για κατηγορικά δεδομένα και διαγράμματα για συνεχή δεδομένα, συμπεριλαμβανομένων γραμμογραφημάτων για χρονοσειρές, διαγραμμάτων διασποράς, διαγραμμάτων συχνότητας και φυλλογραφημάτων, τόσο με τη χρήση χαρτιού, όσο και μέσω της ICT.

Ανώτερο Βασικό Στάδιο 4

Ma2 Αριθμός και Άλγεβρα

Οι μαθητές πρέπει:

3q) Να χρησιμοποιούν μικροϋπολογιστές ή γραπτές μεθόδους προκειμένου να υπολογίσουν τα ανώτατα και τα κατώτατα όρια στους υπολογισμούς τους, ειδικότερα όταν εργάζονται με μετρήσεις.

3r) Να έχουν γνώση του πώς να εισάγουν αριθμούς στην εκθετική τους μορφή

3s) Να κάνουν χρήση μικροϋπολογιστών για υπολογισμούς αντιστρόφων αναλογιών εκτελώντας μια κατάλληλη διαίρεση.

3t) Να χρησιμοποιούν μικροϋπολογιστές για να ερευνήσουν την εκθετική αύξηση και μείωση (για παράδειγμα, στη γεωγραφία και στις φυσικές επιστήμες).

Τα σημεία του Ma2 που ακολουθούν αποτελούν πρόσφορο έδαφος για χρήση της ICT και, κατά συνέπεια, για την εμπέδωση της διδακτέας ύλης, βάσει οδηγιών του Εθνικού Αναλυτικού Προγράμματος:

5g: Σχετικά με τη χρήση τύπων είτε από τα μαθηματικά, είτε από άλλα μαθήματα (για παράδειγμα, του εμβαδού τριγώνου, του εμβαδού επιφάνειας κυκλικού δίσκου κ.α.), με την αλλαγή του αντικειμένου ενδιαφέροντος ενός τύπου, συμπεριλαμβανομένων των περιπτώσεων όπου αυτό εμφανίζεται δύο φορές ή υψωμένο σε κάποια δύναμη και με την παραγωγή νέων τύπων, οι μαθητές θα μπορούσαν να κάνουν χρήση λογιστικών φύλλων ή γραφικού υπολογιστή προκειμένου να κατασκευάσουν τύπους και να εργασθούν πάνω σε αυτούς

Αναφορικά με την επόμενη ομάδα (από το κεφάλαιο 6: Ακολουθίες, συναρτήσεις και γραφήματα) που περιέχει:

- Τη χρήση συνθηκών για συντεταγμένες στο επίπεδο και τον σχεδιασμό σημείων στα τέσσερα τεταρτημόρια, όπως και την αναγνώριση του ότι (για δοθείσες τιμές των m και c) οι εξισώσεις της μορφής $y=mx+c$ αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις ευθειών.
- Τον σχεδιασμό γραφημάτων συναρτήσεων όπου η μεταβλητή y δίνεται άμεσα συναρτήσει της μεταβλητής x ή έμμεσα (π.χ. $y=2x+3$, $x+y=7$).
- Την εύρεση της κλίσης ευθείας με εξίσωση της μορφής $y=mx+c$ για δοθείσες τιμές των m και c, το ότι αν η $y=mx+c$ είναι μια ευθεία, τότε η κλίση της είναι m και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο c, όπως και τις ιδιότητες που έχουν οι κλίσεις παραλλήλων και κάθετων ευθειών.

- Την κατασκευή γραμμικών συναρτήσεων, μελέτη και ερμηνεία των αντίστοιχων γραφημάτων που πηγάζουν από πραγματικά προβλήματα.
- Τον σχεδιασμό γραφημάτων απλών κυβικών συναρτήσεων, της αντίστροφης συνάρτησης, της εκθετικής, των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου με τη βοήθεια λογιστικών φύλλων και γραφικών σχεδιαστών.
- Την εφαρμογή στο γράφημα της y=f(x) των μετασχηματισμών y=f(x)+a, y = f(ax), y =af(x) και y=f(x+a)

Ma3 Χώρος, σχήμα και μέτρα

Στην ενότητα αυτή απαιτείται οι μαθητές να είναι σε θέση να βρίσκουν γεωμετρικούς τόπους βάσει συλλογισμών και με χρήση της ICT για τη δημιουργία σχημάτων και τροχιών (4j).

Ma4 Διαχείριση δεδομένων

Αναμένεται από τους μαθητές να:

3b) Συγκεντρώνουν δεδομένα από δευτερεύουσες πηγές, όπως πίνακες και καταλόγους με τη βοήθεια της ICT.

4a) Κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα συχνοτήτων για κατηγορικά δεδομένα και διαγράμματα για συνεχή δεδομένα, συμπεριλαμβανομένων γραμμογραφημάτων για χρονοσειρές, διαγράμματα διασποράς, διαγράμματα συχνότητας, φυλλογραφήματα, πίνακες και διαγράμματα αθροιστικής συχνότητας, ιστογράμματα για ομαδοποιημένα συνεχή δεδομένα και θηκογράμματα.

4i) Χρησιμοποιούν σχετικές στατιστικές συναρτήσεις σε μικροϋπολογιστή ή λογιστικά φύλλα.

Στα πλαίσια του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών ζητείται από τους μαθητές να επικοινωνούν σε μαθηματικό επίπεδο δίνοντας έμφαση σε διαγράμματα, σε σχετικά ερμηνευτικά κείμενα και στη χρήση των συμβόλων που έχουν κάποιο στατιστικό νόημα εξηγώντας, ταυτόχρονα, τον στόχο και την προσέγγισή τους (1f), προσφέροντάς τους τη δυνατότητα να δουλέψουν με βάσεις δεδομένων ή με λογιστικά φύλλα για να παρουσιάσουν τα δεδομένα και τα ευρήματά τους.-

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΗ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΑΝΩΤΕΡΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η μη υποχρεωτική ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση προσφέρεται κυρίως στην Έκτη τάξη (sixth form[12]) πολλών secondary schools. Πλήρης και μερικής απασχόλησης μη υποχρεωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση παρέχεται επίσης στα κολέγια Έκτης τάξης, στα τριτοβάθμια κολέγια και στα κολέγια συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης[13].

3.1 Προϋποθέσεις εισαγωγής και επιλογή σχολείου

Στην Αγγλία δεν έχουν ορισθεί επίσημες πιστοποιήσεις, απαραίτητες για την εισαγωγή ενός σπουδαστή στην Έκτη τάξη ενός secondary school. Σαν αποτέλεσμα, κάθε σχολείο θέτει τις δικές του προϋποθέσεις εισαγωγής. Τα περισσότερα σχολεία ζητούν συνήθως το ελάχιστο των πέντε GCSE με βαθμούς A*-C προκειμένου να γίνει κάποιος δεκτός σε σειρές μαθημάτων που θα οδηγήσουν στην απόκτηση του πιο δημοφιλούς τίτλου σπουδών σε αυτό το επίπεδο, του GCE A level. Τα κριτήρια για την αποδοχή στις σειρές μαθημάτων GCE A level συχνά επίσης περιλαμβάνουν την επίτευξη καλών βαθμών GCSE (συνήθως βαθμού C ή και παραπάνω) σε συγκεκριμένα μαθήματα GCE A level.

3.2 Εξατομίκευση σπουδών

Οι σπουδαστές της μη υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης μπορούν να επιλέξουν ανάμεσα σε επαγγελματικό ή ακαδημαϊκό προσανατολισμό, ακόμη και ένα συνδυασμό τους. Έπειτα από τη Λευκή Βίβλο για τα Σχολεία (Schools White Paper) του 2005 έχουν γίνει σημαντικές επενδύσεις προκειμένου να γίνουν οι απαραίτητες αλλαγές προς την κατεύθυνση της εξατομικευμένης μάθησης. Έχει προγραμματιστεί η χορήγηση ποσών χρηματοδότησης για την παροχή πόρων στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με στόχο την προσφορά εξατομικευμένης μάθησης στους μαθητές ηλικίας 11 έως 14 ετών, οικονομική ενίσχυση που θα έχει

[12] Τα δύο έτη της ανώτερης Δευτεροβάθμιας μετα-υποχρεωτικής Εκπαίδευσης για τους μαθητές ηλικίας 16 έως 18 ετών, οι οποίοι είναι συνήθως στο Έτος (Year) 12 ή 13 της σχολικής Εκπαίδευσης αποκαλούνται συνήθως «έκτη τάξη» (sixth form).
[13] Σχετική αναφορά στο 1^{ο} Κεφάλαιο.

πραγματοποιηθεί μέχρι το 2007-08. Μια δεύτερη φάση προσφοράς κεφαλαίων θα λάβει χώρα το 2006-07 και το 2007-08, με στόχο να διανεμηθούν τα κεφάλαια αυτά μεταξύ των πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων τομέων, στοχεύοντας σε εκείνα τα σχολεία με τους μεγαλύτερους αριθμούς μαθητών που έχουν μείνει πίσω στα αγγλικά και τα μαθηματικά (Eurydice, 2006).

3.3 Η μη υποχρεωτική ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στα αγγλικά σχολεία

Το Εθνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα στην Αγγλία δε βρίσκει εφαρμογή στη μη υποχρεωτική Εκπαίδευση. Η κυβέρνηση δεν προτείνει συγκεκριμένο χρόνο που θα πρέπει ένας σπουδαστής να αφιερώσει στις εργασίες του των μαθηματικών για το σπίτι. Ωστόσο τα σχολεία παρέχουν καθοδήγηση στους σπουδαστές και στους γονείς τους αναφορικά με τους στόχους που πρέπει να επιτευχθούν και το χρονικό διάστημα που θα απαιτηθεί για τον σκοπό αυτό.

Στην παρούσα φάση το πρόγραμμα που θα ακολουθήσουν οι σπουδαστές είναι συνυφασμένο με τους εθνικά αναγνωρισμένους τίτλους σπουδών και την εξεταστέα ύλη που έχουν αποφασίσει οι επιτροπές εξετάσεων και χορήγησης των τίτλων.

Οι επικρατέστερες επιλογές τίτλων σπουδών είναι οι ακόλουθες:

- GCE A level (General Certificate of Education Advanced level, Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Προχωρημένου Επιπέδου).
- GCE AS level (General Certificate of Education Advanced Subsidiary qualification, Γενικό Πιστοποιητικό της Εκπαίδευσης, Προχωρημένο επίπεδο, Κατώτερος τίτλος σπουδών).
- VCEs (Vocational Certificates of Education, Πιστοποιητικά Επαγγελματικής Εκπαίδευσης), τα οποία από τον Σεπτέμβρη του 2005 αναδιαρθρώθηκαν σε A level σε εφαρμοσμένα μαθήματα.

3.4 Εκθέσεις προόδου και προαγωγή σπουδαστών

Σε όποιο σχολείο παρέχεται μη υποχρεωτική Εκπαίδευση οι επικεφαλής καθηγητές έχουν την υποχρέωση κάθε ακαδημαϊκό έτος να συντάξουν τουλάχιστον μία γραπτή έκθεση προόδου για κάθε μαθητή. Εάν οι σπουδαστές είναι ηλικίας κάτω των 18 ετών, η έκθεση αποστέλλεται στους γονείς, ειδάλλως δίνεται στους ίδιους τους σπουδαστές.

Για όσους σπουδαστές δεν είναι απόφοιτοι, η έκθεση πρέπει να περιέχει:

- Την πρόοδο του μαθητή σε κάθε μάθημα και δραστηριότητα.
- Τη γενική πρόοδο του μαθητή.
- Συνάντηση με τους γονείς (ή τους σπουδαστές ηλικίας άνω των 18 ετών) για συζήτηση της έκθεσης με έναν καθηγητή στο σχολείο.
- Λεπτομέρειες για τυχόν απουσίες του μαθητή.
- Τα μαθήματα στα οποία ο μαθητής ενδεχομένως συμμετείχε σε εξετάσεις για οποιοδήποτε τίτλο GCSE και τους βαθμούς του.
- Τα μαθήματα στα οποία ο μαθητής ενδεχομένως συμμετείχε σε εξετάσεις για οποιοδήποτε τίτλο GCE AS και A level και τους αντίστοιχους βαθμούς.
- Οποιαδήποτε άλλη πιστοποίηση ή ενότητά της και τον αντίστοιχο βαθμό του.

Για τους σπουδαστές εκείνους που παρακολουθούν διετείς κύκλους μαθημάτων, όπως για την απόκτηση ενός GCE A level στα μαθηματικά, η μετάβαση από το πρώτο στο δεύτερο έτος σπουδών γίνεται συνήθως αυτόματα, πλην εξαιρετικών περιστάσεων. Με την ολοκλήρωση των ετήσιων κύκλων μαθημάτων οι σπουδαστές μπορούν να προχωρήσουν, σε έναν άλλο, ανώτερο, (διετή) κύκλο, να μεταφερθούν σε ένα ίδρυμα μεταΔευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης ή ακόμη και να προσχωρήσουν στην αγορά εργασίας.

3.5 Προσφερόμενοι τίτλοι σπουδών

Η αξιολόγηση των σπουδαστών της μη υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης βασίζεται στις απαιτήσεις του εκάστοτε απονεμητικού σώματος για τον κάθε τίτλο σπουδών. Στη συγκεκριμένη φάση της Εκπαίδευσης οι σπουδαστές μπορούν να επιλέξουν ανάμεσα σε ένα αριθμό μαθημάτων που μπορούν να οδηγήσουν σε εγκεκριμένες πιστοποιήσεις, όπως είναι τα GCE A level και Advanced Subsidiary, τα GCSEs και τα GCEs/A level σε εφαρμοσμένα μαθήματα (μέχρι πρότινος γνωστά σαν Επαγγελματικά Πιστοποιητικά Εκπαίδευσης, VCEs). Όταν πια ολοκληρώσουν τον κύκλο σπουδών τους μπορούν να αναζητήσουν εργασία ή να συνεχίσουν σε ιδρύματα συνεχιζόμενης ή τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης, βάσει των μαθημάτων που έχουν επιλέξει και των πιστοποιήσεων που έχουν αποκτήσει.

3.5.1 GCE A level και GCE Advanced Subsidiary

Τα GCE A level γενικά αποτελούνται από έξι ενότητες: οι πρώτες τρεις συνιστούν την πιστοποίηση GCE Advanced Subsidiary και ορίζουν ένα τίτλο επιπέδου μεταξύ ενός GCSE και ενός GCE A level. Οι υποψήφιοι που συνεχίζουν και για δεύτερο έτος μελετούν τρεις ακόμη πιο απαιτητικές ενότητες προκειμένου να αποκτήσουν το GCE A level με την ολοκλήρωση των σπουδών τους.

Οι πιστοποιήσεις GCE Advanced Subsidiary αντικατέστησαν τις εξετάσεις GCE AS level τον Αύγουστο του 2000[14]. Οι τελευταίες κάλυπταν το ήμισυ του περιεχομένου ενός πλήρη τίτλου GCE A level στο ίδιο επίπεδο γνώσεων και εισήχθησαν το 1987 σε μια προσπάθεια ενθάρρυνσης των σπουδαστών να διευρύνουν τις σπουδές τους GCE A level. Εντούτοις, ο αριθμός των συμμετοχών στις εξετάσεις για την απόκτησή τους παρέμεινε σε χαμηλά επίπεδα σε σύγκριση με εκείνον για την απόκτηση GCE A level. Έρευνα σχετική με την αναθεώρηση της Εκπαίδευσης για τους σπουδαστές ηλικίας 16 έως 19 ετών πρότεινε την αναδιάρθρωση των GCE AS level ούτως ώστε να αντιστοιχούν στο περιεχόμενο και στα πρότυπα του πρώτου έτους ενός τυπικού διετούς κύκλου μαθημάτων GCE A level. Στόχος ήταν μια αρτιότερη, πλήρους απασχόλησης, Εκπαίδευση και η μείωση του αριθμού των μαθητών που εγκατέλειπαν το σχολείο προτού προχωρήσουν στο πλήρες GCE A level και που δεν κατείχαν κάτι να αποδεικνύει τις προσπάθειές τους. Η αγγλική κυβέρνηση αποδέχθηκε την πρόταση και το προαναφερθέν μοντέλο για τη νέα πιστοποίηση Advanced Subsidiary και το GCE A level τέθηκε σε εφαρμογή τον Αύγουστο του 2000. Η πιστοποίηση GCE Advanced Subsidiary είναι επίσης γνωστή ως GCE AS level και το GCE A level ως πιστοποίηση A2 (INCA, 2007g).

Οι εξετάσεις για τα GCE A level μπορούν να δοθούν σε πολλούς συνδυασμούς, εντός των περιορισμών που θέτει το χρονοδιάγραμμα κάθε σχολείου και το εύρος των μαθημάτων που προσφέρει. Το κάθε σχολείο θέτει τις δικές του ιδιαίτερες απαιτήσεις για την εισαγωγή μαθητών. Οι κύκλοι μαθημάτων διαρκούν κανονικά δύο έτη και οι περισσότεροι σπουδαστές δίνουν εξετάσεις στην ηλικία των 18 ετών, αλλά μπορεί να γίνουν ρυθμίσεις για ταλαντούχους και χαρισματικούς

[14] Πριν τον Αύγουστο του 2000 το περιεχόμενο των GCE A level και GCE AS level εκφράζονταν ως **syllabus** (πρόγραμμα σπουδών). Με την εμφάνιση των νέων πιστοποιήσεων GCE A level και GCE Advanced Subsidiary τον Αύγουστο του 2000 τα προγράμματα σπουδών μετονομάστηκαν σε **specifications** (προδιαγραφές) (INCA, 2007f).

σπουδαστές προκειμένου να συμμετάσχουν ακόμη και σε μικρότερη ηλικία. Οι εξετάσεις είναι επίσης ανοικτές σε όσους έχουν παρακολουθήσει μερικής απασχόλησης σειρές μαθημάτων, συμπεριλαμβανομένων ενηλίκων, ή που έχουν ακολουθήσει ανεξάρτητες σπουδές στην Αγγλία και στο εξωτερικό. Το περιεχόμενο των GCE A level στα μαθηματικά θα αναλυθεί λεπτομερώς σε επόμενη ενότητα.

3.5.2 VCEs (Vocational Certificates of Education, Επαγγελματικά Πιστοποιητικά Εκπαίδευσης)

Τα VCEs στοχεύουν πρώτιστα στους νέους της υποχρεωτικής σχολικής ηλικίας που παραμένουν στην πλήρους απασχόλησης Εκπαίδευση, αν και είναι διαθέσιμα για σπουδαστές οποιασδήποτε ηλικίας. Η βασική πιστοποίηση είναι το VCE, το οποίο αποτελείται από έξι ενότητες και είναι ισοδύναμο με ένα GCE A level. Υπάρχει επίσης ένα διπλό βραβείο 12 ενοτήτων, ισοδύναμο με δύο A level, και ένα βραβείο τριών ενοτήτων, ισοδύναμο με ένα τίτλο GCE AS. Βαθμολογούνται παρόμοια με τα A level, δηλαδή με κλίμακα από το A ως το E. Τα VCEs αντικατέστησαν τους Γενικούς Εθνικούς Επαγγελματικούς Τίτλους Σπουδών (General National Vocational Qualifications, GNVQs). Από τον Σεπτέμβριο του 2005, το VCE έχει δομή AS/A2. Οι νέες πιστοποιήσεις είναι γνωστές σαν A level σε εφαρμοσμένα μαθήματα (A level in applied subjects), ενώ τα VCEs θα έχουν αντικατασταθεί πλήρως μέχρι τον Ιανουάριο του 2007.

Προσφέρονται τέσσερις πιστοποιήσεις με την ακόλουθη δομή (Q.C.A., 2007b):

- *Advanced Subsidiary General Certificate of Education (απλό βραβείο)*:

Τρεις ενότητες AS, η μία εξ' αυτών εξεταζόμενη εξωτερικά και οι υπόλοιπες εσωτερικά, με βαθμολογία A-E.

- *Advanced Subsidiary General Certificate of Education (διπλό βραβείο)*:

Έξι AS ενότητες, τυπικά δύο εξεταζόμενες εξωτερικά και οι υπόλοιπες εσωτερικά, με βαθμολογία AA, AB-EE.

- *Advanced General Certificate of Education (απλό βραβείο)*:

Έξι ενότητες (τρεις AS ενότητες και τρεις A2 ενότητες), τυπικά δύο εξεταζόμενες εξωτερικά και οι υπόλοιπες εσωτερικά, με βαθμολογία A-E.

- *Advanced General Certificate of Education (διπλό βραβείο)*:

Δώδεκα ενότητες (έξι AS ενότητες και έξι A2 ενότητες), τυπικά δύο εξεταζόμενες εξωτερικά και οι υπόλοιπες εσωτερικά, με βαθμολογία AA, AB-EE.

3.5.3 Βραβεία Advanced Extension Awards (AEAs)

Το καλοκαίρι του 2002 άρχισαν να απονέμονται τα Βραβεία Advanced Extension Awards (AEAs) και για τα Μαθηματικά, με τη συμμετοχή σε εξετάσεις μαθητών ηλικίας 18 ετών. Έχουν σχεδιασθεί ούτως ώστε να προκαλούν τους ικανότερους σπουδαστές μαθηματικών Προχωρημένου επιπέδου, εξασφαλίζοντας το ότι εξετάζονται με κριτήρια συγκρίσιμα με τα πιο απαιτητικά άλλων χωρών. Τα συγκεκριμένα Βραβεία αποβλέπουν επίσης στο να βοηθήσουν τα πανεπιστήμια να διακρίνουν τους ικανότερους υποψηφίους, ιδιαίτερα στα Μαθηματικά, όπου υπάρχει ένα μεγάλο ποσοστό άριστων βαθμολογιών στο Προχωρημένο επίπεδο. Ελέγχουν τον βαθμό κατανόησης των εννοιών από τους σπουδαστές, την ικανότητα για κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητά τους και, τέλος, εξετάζουν το κατά πόσο είναι σε θέση ο κάθε σπουδαστής να κατανοήσει τις συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές ενότητες του μαθήματος. Στην Αγγλία, AEAs στα Μαθηματικά προσφέρονται μόνο από το απονεμητικό σώμα του Edexcel.

Τα AEAs πρέπει να:

- απευθύνονται στο κορυφαίο 10% των σπουδαστών σε κάθε μάθημα, σε εθνικό επίπεδο.
- είναι διαθέσιμα σε κάθε σπουδαστή.
- συμβάλλουν στη διαφοροποίηση των πιο ικανών μαθητών, ειδικά σε μαθήματα με υψηλά ποσοστά βαθμών A στο προχωρημένο GCE (Q.C.A., 2007c, 2007d).

Τα AEAs προσφέρονται σε όλους τους ικανούς σπουδαστές, με την αξιολόγηση μόνο του κορμού των θεωρητικών μαθηματικών που διδάσκεται στα Μαθηματικά A level. Ωστόσο απαιτούν μαθηματική σκέψη πέρα από το επίπεδο που απαιτείται για τα GCE A level Mathematics. Η ύλη για τις εξετάσεις περιέχει (Q.C.A., 2007e):

➢ ***Άλγεβρα και συναρτήσεις***

- Χρήση άρρητων και νόμους ρητών εκθετών.
- Τετραγωνικές συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις τους, διακρίνουσα τετραγωνικής συνάρτησης, συμπλήρωση τετραγώνου, λύση τετραγωνικών εξισώσεων.

- Συστήματα εξισώσεων (γραμμική και τετραγωνική), αναλυτική λύση με αντικατάσταση.
- Λύση γραμμικών και τετραγωνικών ανισώσεων.
- Αλγεβρικό χειρισμό πολυωνύμων με ανάλυση, αναγωγή ομοίων όρων και παραγοντοποίηση, χρήση παραγοντικού θεωρήματος, απλοποίηση ρητών εκφράσεων, αλγεβρική διαίρεση.
- Ορισμό συνάρτησης, πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών, σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις.
- Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους, καμπύλες που καθορίζονται από απλές εξισώσεις. Γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικής λύσης εξισώσεων, χρήση σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων για την επίλυση εξισώσεων.
- Συνάρτηση απόλυτης τιμής.
- Γνώση της επίδρασης απλών μετασχηματισμών στη γραφική παράσταση της $y=f(x)$, όπως αναπαρίσταται από τις $y=af(x)$, $y=f(x+a)$, $y=f(ax)$ και συνδυασμούς τους.
- Ρητές συναρτήσεις, απλά κλάσματα.
- Θεώρημα υπολοίπου.

➢ ***Γεωμετρία συντεταγμένων στο επίπεδο (x,y)***

- Εξίσωση ευθείας γραμμής στις μορφές $y–y_1=m(x–x_1)$ και $ax+by+c=0$, συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών.
- Γεωμετρία του κύκλου, εξίσωσή του στη μορφή $(x–a)^2+(y-b)^2=r^2$.
- Καρτεσιανές, παραμετρικές εξισώσεις καμπυλών και εναλλαγή μεταξύ τους.

➢ ***Ακολουθίες και σειρές***

- Ακολουθίες συμπεριλαμβανομένων όσων δίνεται ο τύπος του n-οστού όρου αλλά και εκείνων που παράγονται από απλή επαναληπτική σχέση της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.
- Αριθμητικές σειρές, συμπεριλαμβανομένου του τύπου για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών αριθμών.
- Άθροισμα όρων πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς, άθροισμα ως το άπειρο συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς.
- Διωνυμικό ανάπτυγμα του $(1+x)^n$ για $n>0$, συμβολισμοί $n!$, $\binom{n}{r}$.

- Διωνυμικές σειρές για οποιοδήποτε ρητό n.

➢ ***Τριγωνομετρία***

- Μέτρο ακτινίου, μήκος τόξου, εμβαδόν τομέα.
- Συναρτήσεις ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης, γραφικές παραστάσεις τους, συμμετρίες και περιοδικότητα.
- Συντέμνουσα, τέμνουσα, συνεφαπτομένη, arcsin, arccos και arctan και οι σχέσεις τους με το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη. Κατανόηση των γραφικών παραστάσεών τους.
- Γνώση και χρήση των $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ και των ισοδυνάμων τους.
- Γνώση και χρήση των τριγωνομετρικών τύπων του διπλασίου γωνίας, χρήση τύπων για $\sin(A\pm B)$, $\cos(A\pm B)$ και $\tan(A\pm B)$ και των εκφράσεων $a\cos\theta+b\sin\theta$ στις ισοδύναμες μορφές $r\cos(\theta\pm a)$ ή $\sin(\theta\pm a)$.
- Επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων σε δοθέν διάστημα.

➢ ***Εκθετικές και Λογαριθμικές συναρτήσεις***

- Η συνάρτηση e^x και η γραφική της παράσταση.
- Εκθετική αύξηση και μείωση.
- Η συνάρτηση lnx και η γραφική της παράσταση, η lnx ως η αντίστροφη συνάρτηση της e^x, λογαριθμικοί κανόνες: $\log_a x+\log_a y\equiv\log_a(y)$,

$\log_a x-\log_a y\equiv\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $k\log_a x\equiv\log_a(x^k)$.

- Επίλυση εξισώσεων της μορφής $a^x = b$.

➢ ***Διαφόριση***

- Η παράγωγος της $f(x)$ ως κλίση της εφαπτομένης της $y=f(x)$ σε ένα σημείο, η κλίση της εφαπτομένης σαν όριο, ερμηνεία της ως ρυθμός μεταβολής, παράγωγοι δεύτερης τάξης.
- Παραγώγιση των x^n, e^x, lnx, των αθροισμάτων και των διαφορών τους, ομοίως για τις sinx, cosx και tanx.
- Εφαρμογές παραγώγισης σε κλίσεις, εφαπτόμενες και καθέτους, ακρότατα, μέγιστα και ελάχιστα, αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις.
- Παραγώγιση με χρήση των κανόνων γινομένου και πηλίκου, του κανόνα αλυσίδας και με χρήση του $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$.

- Παραγώγιση απλών συναρτήσεων που ορίζονται άμεσα ή παραμετρικά.
- Διαμόρφωση απλών διαφορικών εξισώσεων.

➢ ***Ολοκλήρωση***

- Το αόριστο ολοκλήρωμα ως αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης.
- Ολοκλήρωση των x^n, e^x, 1/x, sinx, cosx.
- Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων και ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από καμπύλη.
- Υπολογισμός όγκου εκ περιστροφής.
- Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης με αντικατάσταση και ολοκλήρωση κατά παράγοντες και γνώση του ότι οι μέθοδοι αυτοί αποτελούν το αντίστροφο των κανόνων αλυσίδας και γινομένου αντίστοιχα.
- Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης με χρήση απλών κλασμάτων.
- Αναλυτική λύση απλών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές.

➢ ***Αριθμητικές μέθοδοι***

- Εντοπισμός ριζών της f(x)=0 με τη βοήθεια των αλλαγών προσήμου της f(x) σε ένα διάστημα του x όπου η f(x) είναι συνεχής.
- Επίλυση εξισώσεων κατά προσέγγιση, με χρήση απλών επαναληπτικών μεθόδων.
- Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων (π.χ. με τον κανόνα του τραπεζίου).

➢ ***Διανύσματα***

- Διανύσματα σε δύο και τρεις διαστάσεις
- Μέτρο διανύσματος
- Αλγεβρικές πράξεις για την πρόθεση διανυσμάτων και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό τους και οι γεωμετρικές ερμηνείες τους
- Διανύσματα θέσης, απόσταση μεταξύ δύο σημείων, εξισώσεις ευθειών με χρήση διανυσμάτων
- Εσωτερικό γινόμενο και η χρήση του για τον υπολογισμό της γωνίας μεταξύ δύο ευθειών.

3.5.4 Key Skills qualifications (Πιστοποιήσεις Βασικών Δεξιοτήτων)

Από τον Σεπτέμβριο του 2001, ανεξάρτητες προαιρετικές πιστοποιήσεις Βασικών Δεξιοτήτων στις βασικές δεξιότητες της επικοινωνίας, της εφαρμογής του αριθμού και της τεχνολογίας πληροφοριών διατίθενται σε σπουδαστές ηλικίας 16+

ετών στην μετα-υποχρεωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Αυτοί οι τίτλοι σπουδών προορίζονται να λαμβάνονται μετά από άλλες σειρές μαθημάτων και προσφέρονται για όλους τους σπουδαστές, είτε αυτοί ακολουθούν μαθήματα για τίτλους GCE A level, GCSE, ακόμη και GCE σε εφαρμοσμένα μαθήματα (Eurydice, 2006).

3.5.5 Free standing maths units (Αυτοτελείς μαθηματικές ενότητες)

Από τον Σεπτέμβριο του 2000 οι αυτοτελείς μαθηματικές ενότητες διατίθενται ως εθνικές πιστοποιήσεις σε σπουδαστές ηλικίας 16+ ετών. Περιλαμβάνουν δάσκαλοκεντρική Εκπαίδευση, απαιτούν από τους σπουδαστές να εφαρμόσουν τα μαθηματικά και σε άλλους τομείς μελέτης και βαθμολογούνται όπως τα GCE A level.

Απευθύνονται στις ακόλουθες ομάδες (Q.C.A., 2007f):

- Σπουδαστές που επιθυμούν να αποκτήσουν κάποιον τίτλο στα μαθηματικά ισοδύναμο με ένα GCSE, είτε στους χαμηλότερους βαθμούς (G ως D), είτε στους υψηλότερους (C ως A*).
- Σπουδαστές που κατέχουν ήδη ένα τίτλο GCSE στα Μαθηματικά και προσδοκούν στο να χρησιμοποιήσουν τις ενότητες για να εδραιώσουν ή και να διευρύνουν τις γνώσεις τους πάνω σε εξειδικευμένους τομείς των μαθηματικών και να ενισχύσουν τις άλλες σπουδές τους.
- Σπουδαστές A level ή πιστοποιήσεων επαγγελματικού προσανατολισμού και άλλοι που αγαπούν τα μαθηματικά και είναι καλοί σε αυτά, αλλά που έχουν επιλέξει διαφορετικές κατευθύνσεις, μη μαθηματικού περιεχομένου. Οι ενότητες θα τους επιτρέψουν να συνεχίσουν σε κάποιο βαθμό τις σπουδές τους στο αντικείμενο αυτό.
- Σπουδαστές που υποβάλλουν αίτηση για τις σειρές μαθημάτων της Αρχικής Κατάρτισης Εκπαιδευτικών (Initial Teacher Training courses).
- Σπουδαστές σε εισαγωγικές ή προπαρασκευαστικές σειρές μαθημάτων στην τριτοβάθμια Εκπαίδευση.
- Φοιτητές τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης που επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν τις ενότητες με σκοπό την επανάληψη.
- Σύγχρονοι μαθητευόμενοι.
- Εργαζόμενοι (σπουδαστές NVQ και άλλοι).

Προσφέρονται σε τρία επίπεδα (Q.C.A., 2007g):

i. *Προπαρασκευαστικό (Foundation)* (περιλαμβάνει την ύλη των μαθηματικών που αντιστοιχεί περίπου σε εκείνη που απαιτείται η γνώση της για την απόκτηση του GCSE στα Μαθηματικά με βαθμό έως και D).
ii. *Μεσαίο (Intermediate)*(περιλαμβάνει την ύλη των μαθηματικών που αντιστοιχεί περίπου σε εκείνη που απαιτείται η γνώση της για την απόκτηση του GCSE στα Μαθηματικά με βαθμό έως και A*).
iii. *Προχωρημένο (Advanced)*(περιλαμβάνει την ύλη των μαθηματικών επιπέδου AS/A level).

Ισοδυναμία τίτλων

Κάθε αυτοτελής μαθηματική ενότητα Προχωρημένου επιπέδου είναι ισοδύναμη εννοιολογικά με μία ενότητα AS ή A level (όπου τρεις ενότητες δίνουν ένα τίτλο AS και έξι έναν πλήρη τίτλο A level). Οι σπουδαστές που αποκτούν ένα τίτλο Προπαρασκευαστικού επιπέδου έχουν αποδείξει ότι κατέχουν μαθηματικές γνώσεις ισοδύναμες με αυτές που απαιτούνται για την απόκτηση ενός τίτλου GCSE στα Μαθηματικά με βαθμό από G ως D, ενώ όσοι αποκτήσουν τίτλο Μεσαίου επιπέδου θεωρείται ότι οι γνώσεις τους είναι βαθμού C-A*. Οι εν λόγω ενότητες δε μπορούν να συναθροιστούν σε άλλους ισοδύναμους τίτλους: τρεις αυτοτελείς μαθηματικές ενότητες δε μπορούν να δώσουν ένα τίτλο AS στα Μαθηματικά.

3.5.6 IB, International Baccalaureate Diploma Programme (Διεθνές Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης)

Το IB είναι ένας διεθνής τίτλος σπουδών που απονέμεται σε αποφοίτους της ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και αναγνωρίζεται ισότιμα με τους ακαδημαϊκούς και επαγγελματικούς τίτλους σπουδών που προαναφέρθηκαν. Τον Δεκέμβριο του 2003 η Q.C.A. δημοσίευσε τα αποτελέσματα έρευνας πάνω στη συγκρισιμότητα των εξετάσεων A level και International Baccalaureate όπου αναφέρονται τα ακόλουθα (Q.C.A., 2003):

Το IB δημιουργήθηκε το 1968. Ο Οργανισμός του IB, ο IBO (International Baccalaureate Organisation) προσδιορίζει το Διεθνές Απολυτήριο ως «απαιτητικές προ-πανεπιστημιακές σπουδές ειδικά σχεδιασμένες για σπουδαστές ηλικίας 16 έως 18 ετών». Το IB είναι ευρύτερου περιεχομένου από τα A level, διαρκεί δύο έτη και περιλαμβάνει έξι κύρια μαθήματα:

1. Λογοτεχνία / Μητρική Γλώσσα
2. Ξένη Γλώσσα
3. Ανθρωπιστικές-Κοινωνικές Επιστήμες
4. Πειραματικές Επιστήμες
5. Μαθηματικά και Επιστήμες Υπολογιστών (προαιρετικό)
6. Καλές Τέχνες

Εκτός από τα μαθήματα ο σπουδαστής πρέπει:

- Να συντάξει με την καθοδήγηση ενός καθηγητή μια διπλωματική εργασία (extended essay) 4.000 περίπου λέξεων σε επιστημονικό θέμα επιλογής του ιδίου.
- Να παρακολουθήσει το μάθημα της Θεωρίας της Γνώσης (Theory of Knowledge, TOK), συνδετικό κρίκο των άλλων μαθημάτων.
- Να συμμετάσχει σε οργανωμένες και προγραμματισμένες αθλητικές και πολιτισμικές δραστηριότητες. Επιπλέον να προσφέρει συγκεκριμένη κοινωνική υπηρεσία πέρα από τις ώρες διδασκαλίας με το Πρόγραμμα CAS (Creativity-Action-Service).

Τα μαθήματα προσφέρονται σε δύο επίπεδα, το υψηλό (higher level, HL) και το βασικό (standard level, SL). Το πρόγραμμα κάθε μαθητή πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον τρία μαθήματα, όχι πάνω από τέσσερα, υψηλού επιπέδου, τα υπόλοιπα πρέπει να είναι βασικού επιπέδου. Τα Μαθηματικά διδάσκονται σε υψηλό επίπεδο για όσους σκοπεύουν να συνεχίσουν με σπουδές που συνδέονται άμεσα με αυτά και σε βασικό επίπεδο για όσους θα ασχοληθούν με συναφείς επιστήμες. Εκείνοι που θα συνεχίσουν σε τομείς όπως Φιλολογία, Ιστορία, Τέχνες κλπ. μπορούν να παρακολουθήσουν σε βασικό επίπεδο έναν ειδικό κύκλο μαθηματικών (Mathematical Studies). Πιο συγκεκριμένα προσφέρονται τέσσερις επιλογές: Μαθηματικά HL, Προχωρημένα Μαθηματικά SL, Μαθηματικές μέθοδοι και Μαθηματικές Σπουδές (Mathematical Studies).

Η αναφορά Tomlinson που δημοσιεύθηκε το 2003 σχετικά με την Εκπαίδευση στην Αγγλία για τους μαθητές ηλικίας 14 έως 19 ετών, έθεσε επί τάπητος το θέμα της διεξαγωγής εξετάσεων για τίτλους σπουδών με δομή αντίστοιχη του Baccalaureate σε αντικατάσταση των A level και GCSE, κάτι που όμως δεν έγινε αποδεκτό από την τότε αγγλική κυβέρνηση.

3.6 GCE A (Advanced) level και GCE Advanced Subsidiary στα Μαθηματικά

Το πρόγραμμα σπουδών που θα ακολουθήσουν οι σπουδαστές κατά τη φοίτησή τους στην ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση εξαρτάται από τις πιστοποιήσεις που θα επιλέξουν και από την εξεταστέα ύλη που ορίζουν οι οργανισμοί που έχουν το δικαίωμα χορήγησης τίτλων πιστοποίησης. Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθούν οι σκοποί, οι στόχοι αξιολόγησης, η δομή και το περιεχόμενο των προσφερόμενων πιστοποιήσεων GCE AS (Advanced Subsidiary) και GCE A (Advanced) level στα μαθηματικά, όπως έχουν σχεδιασθεί από τον οργανισμό του Edexcel και εγκριθεί από τη Q.C.A..

3.6.1 Στόχοι αξιολόγησης, σκοποί, δομή και περιεχόμενο προδιαγραφών

Η Q.C.A. κυκλοφόρησε τον Φεβρουάριο του 2004 περίληψη των αναγνωρισμένων πιστοποιήσεων τίτλων AS και A level GCE στα Μαθηματικά σύμφωνα με την οποία οι στόχοι αξιολόγησης και οι σκοποί των παραπάνω τίτλων είναι οι ακόλουθοι (Q.C.A., 2004b):

Στόχοι αξιολόγησης

Οι στόχοι αξιολόγησης και οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης για τους τίτλους AS και A level δε διαφέρουν μεταξύ τους. Στους στόχους αξιολόγησης υποδεικνύονται ελάχιστες σταθμίσεις σε όλους τους τίτλους. Ο μέγιστος συντελεστής στάθμισης για κάθε στόχο δε θα πρέπει να υπερβαίνει τον ελάχιστο για πάνω από το 10% του συνόλου[15].

Στόχοι αξιολόγησης		Ελάχιστη στάθμιση
AO1	Ανάκληση, επιλογή και χρήση γνώσεων περί μαθηματικών δεδομένων, εννοιών και τεχνικών σε μια ποικιλία πλαισίων.	30%
AO2	Κατασκευή αυστηρών μαθηματικών επιχειρημάτων και αποδείξεων με χρήση ακριβών δηλώσεων, λογικών συμπερασμάτων και με χειρισμό μαθηματικών εκφράσεων, συμπεριλαμβανομένης της κατασκευής εκτενών επιχειρημάτων για τον χειρισμό ουσιαστικών προβλημάτων, σε μορφή χωρίς δομή.	30%
AO3	Ανάκληση, επιλογή και χρήση γνώσεων σχετικών με πρότυπα μαθηματικά μοντέλα προκειμένου να γίνει αναπαράσταση	10%

[15] Παραδείγματος χάρη ο AO1 είναι δυνατό να έχει στάθμιση από 30% έως 40 %.

	πραγματικών καταστάσεων. Αναγνώριση και κατανόηση δοθέντων αναπαραστάσεων που περιέχουν πρότυπα μοντέλα. Παρουσίαση και ερμηνεία αποτελεσμάτων από τέτοια μοντέλα σε κανονικές συνθήκες, με συζήτηση των πορισμάτων και, τελικά, εξευγενισμός των μοντέλων.	
AO4	Κατανόηση μεταφράσεων συνήθων ρεαλιστικών πλαισίων στα μαθηματικά, και χρήση αποτελεσμάτων υπολογισμών για προβλέψεις, ή για σχολιασμό. Όπου κρίνεται πρέπον, κριτική ανάγνωση και κατανόηση εκτενών μαθηματικών επιχειρημάτων ή παραδειγμάτων εφαρμογών.	5%
AO5	Χρήση σύγχρονης τεχνολογίας και άλλων επιτρεπόμενων πηγών (όπως στατιστικοί πίνακες και τυπολόγια) με ακρίβεια και επάρκεια. Γνώση του πότε να μη γίνεται χρήση τους και των περιορισμών τους. Απαντήσεις σε υψηλό βαθμό ακριβείας.	5%

Πίνακας 7: Στόχοι αξιολόγησης και συντελεστές στάθμισης για τους τίτλους AS και A level στα μαθηματικά

Σκοποί

Οι πιστοποιήσεις AS και A level στα μαθηματικά πρέπει να ενθαρρύνουν τους σπουδαστές να:

- κατανοήσουν τα μαθηματικά και τις μαθηματικές διαδικασίες κατά τρόπο τέτοιο ώστε να προωθείται η εμπιστοσύνη και να ενθαρρύνεται η διασκέδαση.
- αναπτύξουν τη δυνατότητα λογικής αιτιολόγησης και αναγνώρισης των ανακριβών συλλογισμών, να γενικεύουν και να κατασκευάζουν μαθηματικές αποδείξεις.
- επεκτείνουν το εύρος των μαθηματικών δεξιοτήτων και τεχνικών τους και να κάνουν χρήση τους σε πιο πολύπλοκα, μη δομημένα προβλήματα.
- κατανοήσουν τη συνοχή και τη πρόοδο στα μαθηματικά και το πώς διαφορετικοί τομείς των μαθηματικών μπορεί να συνδεθούν.
- αναγνωρίζουν πώς μια κατάσταση μπορεί να παρασταθεί από μαθηματική άποψη και να συνειδητοποιήσουν τη σχέση ανάμεσα σε «πραγματικά» προβλήματα και σε πρότυπα και άλλα μαθηματικά μοντέλα και πώς αυτά μπορούν να βελτιωθούν.
- χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως αποτελεσματικό τρόπο επικοινωνίας.
- διαβάζουν και να κατανοούν τα μαθηματικά επιχειρήματα και τα άρθρα που αφορούν εφαρμογές των μαθηματικών.
- αποκτήσουν τις δεξιότητες που απαιτούνται προκειμένου να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά την τεχνολογία, όπως οι υπολογιστές και οι μικροϋπολογιστές,

να αναγνωρίζουν πότε μια τέτοια χρήση μπορεί να είναι ακατάλληλη και να έχουν γνώση των περιορισμών.

- συνειδητοποιήσουν τη σχετικότητα των μαθηματικών με άλλους τομείς της έρευνας, στον εργασιακό χώρο και στην κοινωνία γενικότερα.
- αποκτήσουν υπευθυνότητα για την προσωπική τους μάθηση και την αξιολόγηση της εξέλιξης των μαθηματικών τους γνώσεων.

Περίληψη σχήματος αξιολόγησης

Ο σπουδαστής μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε 18 ενότητες και κάθε μία τους χαρακτηρίζεται είτε σαν ενότητα Advanced Subsidiary (AS) είτε σαν A2. Ένας πλήρης τίτλος A level GCE συνίσταται από 6 ενότητες, ενώ ένας τίτλος Advanced Subsidiary από 3. Η AS είναι το πρώτο μισό ενός κύκλου μαθημάτων Advanced GCE και συμβάλλει κατά το 50% των συνολικών βαθμών. Η A2, το δεύτερο μισό ενός Advanced GCE, αποτελεί το υπόλοιπο 50%. Διαφορετικοί συνδυασμοί ενοτήτων οδηγούν και σε διαφορετικούς τίτλους. Δεν είναι απαραίτητο κάποιος που επιθυμεί έναν Advanced Subsidiary τίτλο να περιορίσει τις επιλογές του σε ενότητες με τον χαρακτηρισμό Advanced Subsidiary. Όλες οι ενότητες αποτελούνται από μια γραπτή εξέταση και έχουν συντελεστή βαρύτητας $16\frac{2}{3}$%. (London Qualifications Limited, 2004).

Τίτλος	Κωδικός ενότητας	Επίπεδο
Μαθηματικά Κορμού (Core Mathematics) C1	6663	AS
Μαθηματικά Κορμού C2	6664	AS
Μαθηματικά Κορμού C3	6665	A2
Μαθηματικά Κορμού C4	6666	A2
Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά (Further Pure Mathematics) FP1	6667	A2
Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά FP2	6668	A2
Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά FP3	6669	A2
Μηχανική M1	6677	AS
Μηχανική M2	6678	A2
Μηχανική M3	6679	A2

Μηχανική M4	6680	A2
Μηχανική M5	6681	A2
Στατιστική S1	6683	AS
Στατιστική S2	6684	A2
Στατιστική S3	6670	A2
Στατιστική S4	6686	A2
Μαθηματικά Αποφάσεων (Decision Mathematics) D1	6689	AS
Μαθηματικά Αποφάσεων D2	6690	A2

Πίνακας 8: Προσφερόμενες ενότητες AS και A2 GCE στα Μαθηματικά.

Διαθεσιμότητα ενοτήτων

Οι εξετάσεις για κάθε μια από τις ενότητες λαμβάνουν χώρα δύο φορές κάθε έτος, τους μήνες Ιανουάριο και Ιούνιο. Οι υποψήφιοι μπορούν να δηλώσουν οποιονδήποτε αριθμό ενοτήτων σε κάθε συνάντηση. Κατά συνέπεια όσοι επιθυμούν να ακολουθήσουν μια παραδοσιακή εξέταση μπορούν να επιλέξουν τρεις ενότητες στο τέλος της σειράς μαθημάτων Advanced Subsidiary ή έξι ενότητες στο τέλος της σειράς μαθημάτων Advanced GCE. Το περιεχόμενο της κάθε ενότητας περιγράφεται συνοπτικά στον πίνακα που ακολουθεί:

	Μαθηματικά κορμού
C1	Άλγεβρα και συναρτήσεις, γεωμετρία συντεταγμένων στο επίπεδο (x,y), ακολουθίες και σειρές, διαφόριση, ολοκλήρωση.
C2	Άλγεβρα, συναρτήσεις, γεωμετρία συντεταγμένων στο επίπεδο (x,y), ακολουθίες και σειρές, τριγωνομετρία, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, διαφόριση, ολοκλήρωση.
C3	Άλγεβρα και συναρτήσεις, τριγωνομετρία, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις, διαφόριση, αριθμητικές μέθοδοι.
C4	Άλγεβρα και συναρτήσεις, γεωμετρία συντεταγμένων στο επίπεδο (x,y), ακολουθίες και σειρές, διαφόριση, ολοκλήρωση, διανύσματα.
	Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά
FP1	Ανισότητες, σειρές, μιγαδικοί αριθμοί, αριθμητική λύση εξισώσεων, διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης, πολικές συντεταγμένες.
FP2	Συστήματα συντεταγμένων, υπερβολικές συναρτήσεις, διαφόριση, ολοκλήρωση.

FP3	Μιγαδικοί αριθμοί, άλγεβρα πινάκων, διανύσματα, σειρές Maclaurin και Taylor, αριθμητικές μέθοδοι, απόδειξη.
	Μηχανική
M1	Μαθηματικά μοντέλα στη μηχανική, διανύσματα στη μηχανική, κινηματική σωματιδίου κινούμενου επί ευθείας γραμμής, δυναμική σωματιδίου κινούμενου επί ευθείας γραμμής ή επιπέδου, στατική σωματιδίου, ροπές.
M2	Κινηματική σωματιδίου κινούμενου επί ευθείας γραμμής, κέντρα μάζας, έργο και ενέργεια, κρούσεις, στατική δύσκαμπτων σωμάτων (static of rigid bodies).
M3	Ανώτερη κινηματική, ελαστικές χορδές (elastic strings) και ελατήρια, ανώτερη δυναμική, κίνηση σε κυκλική τροχιά, στατική δύσκαμπτων σωμάτων.
M4	Σχετική κίνηση, δισδιάστατες ελαστικές κρούσεις, κίνηση σωματιδίων σε δύο διαστάσεις, σταθερότητα.
M5	Εφαρμογές διανυσμάτων στη μηχανική, μεταβλητή μάζα, ροπές αδράνειας σε δύσκαμπτο σώμα, περιστροφή σώματος γύρω από ένα σταθερό άξονα.
	Στατιστική
S1	Μαθηματικά μοντέλα στις πιθανότητες και στη στατιστική, αναπαράσταση και περίληψη δεδομένων, πιθανότητες, συσχέτιση και παλινδρόμηση, τυχαίες διακριτές μεταβλητές, διακριτές κατανομές, η Κανονική κατανομή.
S2	Η Διωνυμική κατανομή και η κατανομή Poisson, τυχαίες συνεχείς μεταβλητές, συνεχείς κατανομές, δείγματα, έλεγχοι υποθέσεων.
S3	Συνδυασμοί τυχαίων μεταβλητών, δειγματοληψία, εκτίμηση, διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι, πίνακες καλής προσαρμογής και συνάφειας, συσχέτιση και παλινδρόμηση.
S4	Ποιότητα κριτηρίων και εκτιμητριών, διαδικασίες ενός και δύο δειγμάτων.
	Μαθηματικά Αποφάσεων
D1	Αλγόριθμοι, αλγόριθμοι γραφημάτων, πρόβλημα διαδρομής επιθεώρησης (the route inspection problem), ανάλυση κρίσιμης γραμμής (critical path analysis), γραμμικός προγραμματισμός, συζεύξεις (matchings), ροές σε δίκτυα.
D2	Προβλήματα μεταφοράς, προβλήματα κατανομής-αντιστοίχισης, ο περιοδεύων πωλητής (the travelling salesman), θεωρία παιγνίων, δυναμικός προγραμματισμός.

Πίνακας 9: Συνοπτική αναφορά περιεχομένου μαθηματικών ενοτήτων GCE.

Όροι εξάρτησης

Οι ενότητες στους τομείς των Θεωρητικών Μαθηματικών, της Μηχανικής, της Στατιστικής και των Μαθηματικών Αποφάσεων είναι αριθμημένες διαδοχικά κατά σειρά μελέτης. Η μελέτη μιας ενότητας εξαρτάται από τη μελέτη όλων των προηγούμενων μέσα σε μια συγκεκριμένη περιοχή των μαθηματικών -για παράδειγμα η μελέτη της C3 εξαρτάται από τη μελέτη των C1 και C2-. Οι υποψήφιοι που επιθυμούν να αποκτήσουν ένα Advanced Subsidiary ή ένα A level στα Προχωρημένα

Μαθηματικά είναι δυνατό να αναμένεται να έχουν αποκτήσει (ή και να αποκτήσουν, ταυτόχρονα) ένα τίτλο Advanced GCE στα Μαθηματικά. Οι ενότητες που συμμετέχουν σε ένα A level στα Μαθηματικά μπορεί να μη χρησιμοποιηθούν επίσης για έναν τίτλο στα Προχωρημένα Μαθηματικά.

Τίτλοι σπουδών Advanced Subsidiary/Advanced GCE και επιλογές ενοτήτων

Στους σπουδαστές προσφέρονται οι ακόλουθοι τίτλοι:

Advanced Subsidiary

- *8371: Advanced Subsidiary στα Μαθηματικά.*

Ενότητες Μαθηματικά Κορμού C1 και C2 πλέον μιας από τις ενότητες εφαρμογών M1, S1 ή D1.

- *8372: Advanced Subsidiary στα Προχωρημένα Μαθηματικά.*

Ενότητα Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά FP1 και δύο άλλες ενότητες (εξαιρουμένων των C1—C4).

- *8373 Advanced Subsidiary στα Θεωρητικά Μαθηματικά.*

Ενότητες Μαθηματικά Κορμού C1, C2 and C3.

Advanced GCE

- *9371 Advanced GCE στα Μαθηματικά.*

Ενότητες Μαθηματικά Κορμού C1, C2, C3 και C4 πλέον δύο ενοτήτων εφαρμογών από τους ακόλουθους έξι συνδυασμούς: M1 και M2, S1 και S2, D1 και D2, M1 και S1, S1 και D1, M1 και D1.

- *9372 Advanced GCE στα Προχωρημένα Μαθηματικά*

Οι ενότητες Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά FP1, FP2, FP3 πλέον τριών ενοτήτων εφαρμογών (εκτός από τις C1—C4) ώστε να προκύπτει άθροισμα έξι ενοτήτων, ή FP1, είτε FP2 ή FP3 και τέσσερις επιπλέον ενότητες εφαρμογών (εκτός από τις C1—C4) ώστε να προκύπτει άθροισμα έξι ενοτήτων. Για να απονεμηθούν τίτλοι και Advanced GCE Μαθηματικά και Advanced GCE Προχωρημένα Μαθηματικά θα πρέπει οι υποψήφιοι να κάνουν χρήση αποτελεσμάτων ενοτήτων από 12 διαφορετικές διδακτικές ενότητες.

- *9373 Advanced GCE στα Θεωρητικά Μαθηματικά*

Ενότητες Θεωρητικά Μαθηματικά C1, C2, C3, C4, FP1 και είτε FP2, είτε FP3.

Advanced Subsidiary		
Τίτλος	**Υποχρεωτικές ενότητες**	**Ενότητες επιλογής**
Μαθηματικά	C1, C2	Μία από τις M1, S1 ή D1
Προχωρημένα Μαθηματικά	FP1	Οποιεσδήποτε δύο πλην των C1—C4
Θεωρητικά Μαθηματικά	C1, C2, C3	Καμία
Advanced GCE		
Τίτλος	**Υποχρεωτικές ενότητες**	**Ενότητες επιλογής**
Μαθηματικά	C1, C2, C3, C4	Ένα ζεύγος ενοτήτων από: M1, M1 ή S1, S2 ή D1, D2 ή M1, S1 ή S1, D1 ή M1, D1
Προχωρημένα Μαθηματικά	FP1 και μία από τις FP2 ή FP3	Τέσσερις ενότητες (πλην των C1—C4) για τελικό άθροισμα έξι ενοτήτων
Θεωρητικά Μαθηματικά	C1, C2, C3, C4, FP1	Είτε FP2 ή FP3

Πίνακας 10: Τίτλοι Advanced Subsidiary/Advanced GCE στα Μαθηματικά και απαιτούμενες ενότητες

Αριθμός Βραβείων

Ο μέγιστος αριθμός πιστοποιήσεων που δικαιούται κάποιος να διεκδικήσει είναι ο εξής:

- τρεις ενότητες: μία πιστοποίηση AS
- έξι ενότητες: δύο πιστοποιήσεις (μία AS και μία A **ή** δύο AS)
- εννέα ενότητες: τρεις πιστοποιήσεις (δύο AS και μία A **ή** τρεις AS)
- δώδεκα ενότητες: τέσσερις πιστοποιήσεις (δύο AS και δύο A **ή** τρεις AS και μία A **ή** τέσσερις AS)

Μικροϋπολογιστές

Οι τίτλοι Advanced Subsidiary και Advanced GCE στα Μαθηματικά και στα Θεωρητικά Μαθηματικά περιλαμβάνουν ένα στοιχείο της αξιολόγησης, εξετάζοντας τους στόχους αξιολόγησης AO1 και AO2, όπου οι υποψήφιοι δεν επιτρέπεται να κάνουν χρήση βοήθειας στους υπολογισμούς τους. Αυτό το στοιχείο πρέπει να μετρήσει για τουλάχιστον μια ενότητα του συνολικού τίτλου. Για την ενότητα C1, οι υποψήφιοι δεν επιτρέπεται να έχουν πρόσβαση σε οποιαδήποτε ενίσχυση των υπολογισμών τους, συμπεριλαμβανομένων λογαριθμικών πινάκων και κανόνων, προκειμένου να ενθαρρυνθεί η κατάλληλη χρήση των γραφικών υπολογιστών και των ηλεκτρονικών υπολογιστών ως εργαλείων μέσω των οποίων μπορούν να ενισχυθούν η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών.

Κανόνες ενότητας και επαναληπτικής εξέτασης

Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο πόσες φορές μπορεί να διεκδικήσει κάποιος την απονομή μιας πιστοποίησης τίτλου.

Περιεχόμενο Προδιαγραφών[16]

Ενότητα C1 – Μαθηματικά Κορμού

Η εξέταση διαρκεί μια και μισή ώρα. Περιέχει περίπου δέκα θέματα, ποικίλης έκτασης. Οι κατανομές βαθμών ανά ερώτηση αναφέρονται σε κάθε γραπτό εξετάσεων. Για αυτήν την ενότητα οι υποψήφιοι δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση σε οποιαδήποτε βοήθημα στους υπολογισμούς τους, συμπεριλαμβανομένων λογαριθμικών πινάκων και κανόνων.

Προδιαγραφή	Παρατηρήσεις
1. Άλγεβρα και συναρτήσεις	
Εκθετικοί νόμοι για όλους τους ρητούς εκθέτες.	Το ισοδύναμο του $a^{m/n}$ και του $\sqrt[n]{a^m}$ θα πρέπει να είναι γνωστό.
Άρρητοι.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να γνωρίζουν το πώς να μετατρέπουν άρρητους παρονομαστές σε ρητούς.
Τετραγωνικές συναρτήσεις και τα γραφήματά τους.	
Η διακρίνουσα τετραγωνικής συνάρτησης.	
Συμπλήρωση τετραγώνου. Λύση τετραγωνικών εξισώσεων.	Λύση τετραγωνικών εξισώσεων με παραγοντοποίηση, χρήση τύπου και συμπλήρωση τετραγώνου.
Σύστημα εξισώσεων: αναλυτική λύση με αντικατάσταση.	Παραδείγματος χάρη όταν η μια εξίσωση είναι γραμμική και η άλλη τετραγωνική.
Αλγεβρικός χειρισμός πολυωνύμων, συμπεριλαμβανομένης της απαλοιφής παρενθέσεων, της αναγωγής ομοίων όρων και της παραγοντοποίησης.	Παραδείγματος χάρη $ax+b>cx+d$, $px^2+qx+r\geq 0$, $px^2+qx+r<ax+b$. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να κάνουν χρήση παρενθέσεων. Παραγοντοποίηση πολυωνύμων βαθμού n, όπου

[16] Specification Content.

$n \leq 3$, π.χ. x^3+4x^2+3x.
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός f(x) -χρήση του παραγοντικού θεωρήματος (factor theorem) δεν απαιτείται-.

Γραφήματα συναρτήσεων και σχεδιασμός καμπυλών που ορίζονται από απλές εξισώσεις. Γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικής λύσης εξισώσεων. Χρήση σημείων τομής γραφημάτων συναρτήσεων για τη λύση εξισώσεων. Γνώση της επίδρασης απλών μετασχηματισμών στο γράφημα της y=f(x) όπως αυτοί αναπαρίστανται από τις y=af(x), y=f(x)+a, y=f(x+a), y= f(ax).	Συναρτήσεις που περιλαμβάνουν απλές κυβικές συναρτήσεις και η αντίστροφη συνάρτηση $y=\frac{k}{x}$ με $x \neq 0$. Αναμένεται να είναι γνωστός ο όρος «ασύμπτωτη». Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζουν κάποιον από αυτούς τους μετασχηματισμούς σε οποιαδήποτε από τις παρακάτω συναρτήσεις (τετραγωνική, κυβική, αντίστροφη) και να σχεδιάζουν το γράφημα που προκύπτει. Δοθέντος του γραφήματος οποιασδήποτε συνάρτησης y=f(x) οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν το γράφημα που προκύπτει από έναν τέτοιο μετασχηματισμό.

2. Γεωμετρία συντεταγμένων στο (x, y) επίπεδο

Εξίσωση ευθείας γραμμής, συμπεριλαμβανομένων των μορφών $y-y_1=m(x-x_1)$ και ax+by+c=0. Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών.	Να περιλαμβάνει (i)την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία, (ii)την εξίσωση ευθείας παράλληλης (ή κάθετης) σε δοθείσα ευθεία και που διέρχεται από δοθέν σημείο. Για παράδειγμα, η κάθετη ευθεία στην 3x+4y=18, η οποία διέρχεται από το (2, 3) έχει εξίσωση $y-3=\frac{4}{3}(x-2)$.

3. Ακολουθίες και σειρές

Ακολουθίες, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δίνονται μέσω τύπου για τον n-οστό όρο και εκείνων που παράγονται από μια απλή σχέση της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.

Αριθμητικές πρόοδοι, συμπεριλαμβανομένου του τύπου για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών αριθμών.	Απαιτείται η γνώση του γενικού όρου και του αθροίσματος n όρων προόδου. Θα πρέπει να είναι γνωστή η απόδειξη του τύπου αθροίσματος, ενώ αναμένεται να είναι κατανοητός ο συμβολισμός Σ.

4. Παραγώγιση

Η παράγωγος της f(x) ως κλίση εφαπτομένης του γραφήματος της y=f(x) σε ένα σημείο. Η κλίση εφαπτομένης ως όριο, ερμηνεία ως ρυθμός μεταβολής. Παράγωγοι δεύτερης τάξης.	Για παράδειγμα, γνώση του ότι το $\frac{dy}{dx}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του y αναφορικά με το x. Δεν απαιτείται η γνώση του κανόνα της αλυσίδας. Μπορεί να γίνει χρήση του συμβολισμού f′(x).

Παράγωγος του x^n, σχετικά αθροίσματα και διαφορές.	Π.χ. για $n \neq 1$, η ικανότητα παραγώγισης εκφράσεων όπως $(2x+5)(x-1)$ και $\dfrac{x^2+5x-3}{3x^{\frac{1}{2}}}$ είναι αναμενόμενη.
Εφαρμογές παραγώγου σε κλίσεις, εφαπτόμενες και καθέτους.	Χρήση παραγώγου για την εύρεση εξισώσεων καθέτων και εφαπτόμενων σε συγκεκριμένα σημεία μιας καμπύλης.
5. Ολοκλήρωση	
Το αόριστο ολοκλήρωμα ως αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Ολοκλήρωση του x^n.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να γνωρίζουν ότι απαιτείται σταθερά ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, αναμένεται να υπάρχει η δυνατότητα ολοκλήρωσης εκφράσεων όπως $\frac{1}{2}x^2$- $3x^{\frac{-1}{2}}$ και $\dfrac{(x+2)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$. Δοθείσας της $f'(x)$ και σημείου της καμπύλης, οι υποψήφιοι θα πρέπει να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της καμπύλης στη μορφή $y = f(x)$.

Ενότητα C2 – Μαθηματικά Κορμού

Η εξέταση διαρκεί μία και μισή ώρα. Περιέχει περίπου εννέα θέματα, ποικίλης έκτασης. Οι κατανομές βαθμών ανά ερώτηση αναφέρονται σε κάθε γραπτό εξετάσεων. Για αυτήν την ενότητα οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν πρόσβαση σε υπολογιστή τουλάχιστον με τις ακόλουθες λειτουργίες: +, −, ×, ÷, π, x^2, √x, $\frac{1}{x}$, x^y, ln x, e^x, x!, sine, cosine και tangent, καθώς και τις αντίστροφες λειτουργίες σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους και σε rads. Υπολογιστές με δυνατότητες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί. Προϋπόθεση είναι η γνώση της ύλης του C1, καθώς θεωρείται δεδομένη και είναι πιθανή η εξέτασή της.

Προδιαγραφή	**Παρατηρήσεις**
1. Άλγεβρα και συναρτήσεις	
Απλή αλγεβρική διαίρεση, χρήση του Παραγοντικού θεωρήματος (Factor Theorem) και του Θεωρήματος Υπολοίπου (Remainder Theorem).	Θα απαιτείται διαίρεση με το (x+a) ή το (x–a). Οι υποψήφιοι θα πρέπει να έχουν γνώση του ότι αν f(x)=0 για x=a, τότε ο (x– a) είναι παράγοντας του f(x). Επίσης, είναι δυνατό να απαιτηθεί από τους υποψηφίους να παραγοντοποιήσουν κυβικές εκφράσεις όπως x^3+3x^2-4 και $6x^3+11x^2-x-6$. Θα πρέπει οι υποψήφιοι να έχουν εξοικειωθεί με τους όρους «πηλίκο» και «υπόλοιπο» και να είναι σε θέση να προσδιορίζουν το υπόλοιπο όταν το πολυώνυμο f(x) διαιρείται από το (ax+b).

2. Γεωμετρία συντεταγμένων στο (x, y) επίπεδο

Γεωμετρία συντεταγμένων του κύκλου κάνοντας χρήση της εξίσωσης του κύκλου με τη μορφή: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ και κάνοντας χρήση των ακόλουθων ιδιοτήτων του κύκλου: (i) η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. (ii) η κάθετος από κέντρο σε μια χορδή διχοτομεί τη χορδή. (iii) καθετότητα ακτίνας και εφαπτομένης.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να μπορούν να βρίσκουν την ακτίνα και τις συντεταγμένες κέντρου κύκλου δοθείσης της εξίσωσής του και vice versa.

3. Ακολουθίες και σειρές

Το άθροισμα όρων πεπερασμένης γεωμετρικής προόδου.	Απαιτείται γνώση του γενικού όρου και του αθροίσματος n όρων.
Το άθροισμα στο άπειρο συγκλίνουσας γεωμετρικής προόδου, περιλαμβανομένης της χρήσης του $\|1\|$<r.	Θα πρέπει να είναι γνωστή η απόδειξη για τον τύπο του αθροίσματος.
Διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+x)^n$ για θετικό	Είναι δυνατό να απαιτηθεί ανάπτυγμα του $(a+bx)^n$.

4. Τριγωνομετρία

Κανόνες ημιτόνου και συνημιτόνου, εμβαδόν τριγώνου ως $\frac{1}{2}$absinC.	
Rads και χρήση τους για μήκος τόξου και εμβαδόν τομέα.	Χρήση του τύπου s=rθ and A=$\frac{1}{2}r^2\theta$ για κύκλο.
Συναρτήσεις ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης, γραφικές παραστάσεις, συμμετρίες και περιοδικότητα.	Γνώση γραφημάτων καμπύλων με εξισώσεις όπως y=3sinx, y=sin(x+π/6), y=sin2x .
Γνώση και χρήση των τύπων $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ και $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.	
Επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων σε δοθέν διάστημα.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να επιλύουν εξισώσεις της μορφής: $\sin(x-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}$ για 0<x<2π, $\cos(x+30°)=\frac{1}{2}$, για −180°<x<180°, tan2x=1 για 90°<x< 270°, $6\cos^2 x°+\sin x°-5=0$ για 0≤x<360, $\sin^2(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, για –π≤x<π.

5.Εκθετικές συναρτήσεις και λογάριθμοι

Η $y = a^x$ και το γράφημά της.	
Λογαριθμικοί νόμοι	Να είναι γνωστά τα: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k\log_a x$, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, $\log_a a=1$.

Επίλυση εξισώσεων της μορφής $a^x = b$.	Οι υποψήφιοι να μπορούν να κάνουν χρήση του τύπου αλλαγής βάσης.
6. Παραγώγιση Εφαρμογές παραγώγου σε μέγιστα, ελάχιστα και στάσιμα σημεία, αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις.	Ο συμβολισμός $f''(x)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παράγωγο δεύτερης τάξης. Να περιλαμβάνονται εφαρμογές για σχεδίαση γραφημάτων. Προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου είναι δυνατό να τεθούν στο πλαίσιο ενός πρακτικού προβλήματος.
7. Ολοκλήρωση Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων	
Ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος ως του εμβαδού που περικλείει το γράφημα μιας καμπύλης.	Θα πρέπει οι υποψήφιοι να είναι σε θέση να υπολογίζουν το εμβαδόν επιφάνειας που περικλείεται από καμπύλη και δοθείσες ευθείες γραμμές. Για παράδειγμα, να βρεθεί το πεπερασμένο εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από την καμπύλη $y = 6x - x^2$ και τη γραμμή $y = 2x$. Το $\int x\, dy$ δεν θα ζητηθεί.
Προσέγγιση εμβαδού που περικλείεται από μια καμπύλη με χρήση του κανόνα του τραπεζίου.	Παραδείγματος χάρη να υπολογισθεί το $\int_0^1 \sqrt{(2x+1)}dx$ υπολογίζοντας τις τιμές της ρίζας $\sqrt{(2x+1)}$ για x = 0, 0.25, 0.5, 0.75 και 1.

Ενότητα C3 – Μαθηματικά Κορμού

Η εξέταση διαρκεί μία και μισή ώρα και περιέχει περίπου επτά θέματα ποικίλης έκτασης. Οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν στη διάθεσή τους ένα calculator με τουλάχιστον τις ακόλουθες λειτουργίες: $-$, $\times$, $\div$, π, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, x^y, $\ln x$, e^x, x!, sine, cosine και tangent και τις αντίστροφές τους σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους, αλλά και σε ακτίνια. Μικροϋπολογιστές με δυνατότητες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί.

Προϋποτίθεται γνώση της ύλης των C1 και C2.

Αποδεικτικές μέθοδοι, συμπεριλαμβανομένης της απόδειξης μέσω αντίφασης, είτε της διάψευσης μέσω αντιπαραδείγματος είναι απαιτητές. Τουλάχιστον μία ερώτηση απαιτεί χρήση απόδειξης.

Προδιαγραφή	**Παρατηρήσεις**
1. Άλγεβρα και συναρτήσεις	
Απλοποίηση ρητών εκφράσεων, πλέον παραγοντοποίησης, απλοποίησης και	Οι παρονομαστές ρητών εκφράσεων θα είναι σε

	αλγεβρικής διαίρεσης.	γραμμική ή τετραγωνική μορφή, π.χ. $\frac{1}{ax+b}$, $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$, $\frac{x^3+1}{x^2-1}$.
S	Ορισμός συνάρτησης. Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών. Σύνθεση συναρτήσεων. Αντίστροφες συναρτήσεις και τα γραφήματά τους.	Η έννοια της συνάρτησης ως ένα προς ένα ή πολλά προς ένα αντιστοίχιση από το ℝ (ή από υποσύνολο του ℝ), στο ℝ. Ο συμβολισμός f : x → . . . και f(x) θα χρησιμοποιείται. Οι υποψήφιοι πρέπει να ξέρουν ότι fg σημαίνει «πρώτα η g και μετά η f». Θα πρέπει επίσης να τους είναι γνωστό το ότι αν υπάρχει η f^{-1}, τότε $f^{-1}f(x) = ff^{-1}(x) = x$.
S	Η συνάρτηση απόλυτης τιμής (The modulus function.)	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν τα γραφήματα των y=$\lvert ax+b\rvert$ καθώς και εκείνα των y=$\lvert f(x)\rvert$ και y=f($\lvert x\rvert$) δοθέντος του γραφήματος της y=f(x).
	Συνδυασμοί μετασχηματισμών της y=f(x) όπως αναπαρίστανται από τις y=af(x), y=f(x) a, y=f(x+a), y=f(ax).	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάσουν το γράφημα π.χ. των y=2f(3x), y=f(−x)+1, δοθέντος του γραφήματος της y=f(x) ή τα γραφήματα των, π.χ. y=3+sin2x, y=−cos(x+4π). Το γράφημα της y= f(ax+b) δεν θα ζητηθεί.

2. Τριγωνομετρία

S	Γνώση της τέμνουσας, της συντέμνουσας, της συνεφαπτομένης και των arcsin, arccos και arctan. Η σχέση τους με το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη. Κατανόηση των γραφημάτων τους.	Γωνίες σε μοίρες και σε rads.
S	Γνώση και χρήση των τύπων $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ και $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$.	
S	Γνώση και χρήση τύπων για το διπλάσιο μιας γωνίας, χρήση τύπων για τα sin(A±B), cos(A±B), tan(A±B), αλλά και εκφράσεων όπως acosθ+bsin θ στις ισοδύναμες μορφές των rcos(θ±a) ή rsin(θ±a).	Να περιλαμβάνουν εφαρμογές για το ήμισυ γωνιών. Γνώση του τύπου ($\tan\frac{1}{2}\theta$) δεν είναι απαραίτητη. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να επιλύουν εξισώσεις όπως acosθ+bsinθ=c σε δοθέν διάστημα καινα αποδεικνύουν απλές ταυτότητες όπως cosxcos2x+sinxsin2x≡cos x.

3. Εκθετικές συναρτήσεις και λογάριθμοι

N	Η συνάρτηση e^x και το γράφημά της.	Να περιλαμβάνεται το γράφημα της $y=e^{ax+b}+c$.
N	Η συνάρτηση lnx και το γράφημά της. Η lnx ως η αντίστροφη συνάρτηση της e^x.	Επίλυση εξισώσεων της μορφής $e^{ax+b}=p$ και ln(ax+b)=q είναι αναμενόμενη.

4. Παράγωγος

S Παραγώγιση των e^x, lnx, sinx, cosx, tanx, των αθροισμάτων και των διαφορών τους	
S Παραγώγιση κάνοντας χρήση των κανόνων γινομένου, πηλίκου και αλυσίδας.	Είναι απαραίτητη η γνώση παραγώγισης των cosec x, cotx και secx. Αναμένεται να υπάρχει ευχέρεια στην παραγώγιση συναρτήσεων που προκύπτουν από βασικές μορφές, με τη χρήση γινομένων, πηλίκων και σύνθεσης, όπως $2x^4 \sin x$, $\frac{e^{3x}}{x}$, $\cos x^2$ και $\tan^2 2x$.
Η χρήση του $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$	Π.χ. εύρεση $\frac{dy}{dx}$ για x=sin3y.

5. Αριθμητικές μέθοδοι

Θέση ριζών της f(x) = 0 βάσει της αλλαγής προσήμου της f(x) σε ένα διάστημα της x όπου η f(x) είναι συνεχής.

N Προσεγγιστική λύση εξισώσεων κάνοντας χρήση απλών επαναληπτικών μεθόδων και επαναληπτικών σχέσεων της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.	Λύση εξισώσεων με επαναληπτικές διαδικασίες, δοθείσης της αρχικής.

Ενότητα C4 – Μαθηματικά Κορμού

Η εξέταση διαρκεί μία και μισή ώρα και περιέχει περίπου επτά θέματα ποικίλης έκτασης. Οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν στη διάθεσή τους ένα μικροϋπολογιστή με τουλάχιστον τις ακόλουθες λειτουργίες: −, ×, ÷, π, x^2, √x, $\frac{1}{x}$, x^y, ln x, e^x, x!, sine, cosine και tangent και τις αντίστροφές τους σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους, αλλά και σε ακτίνια. Μικροϋπολογιστές με δυνατότητες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί. Προϋποτίθεται γνώση της ύλης των C1, C2 και C3 καθώς μπορεί να εξετασθεί.

Πιστοποίηση	**Παρατηρήσεις**

1. Άλγεβρα και συναρτήσεις

S Ρητές συναρτήσεις, (ανάλυση σε) απλά κλάσματα με παρονομαστές όχι περισσότερο πολύπλοκους από επαναλαμβανόμενους γραμμικούς όρους.	Τα απλά κλάσματα να περιέχουν παρονομαστές όπως (ax+b)(cx+d)(ex+f) και $(ax+b)(cx+d)^2$. Ο βαθμός του αριθμητή μπορεί να ισούται με εκείνον του παρονομαστή ή να τον υπερβαίνει. Με εφαρμογές στην ολοκλήρωση, στην παραγώγιση και στην ανάπτυξη σειρών. Τετραγωνικοί παράγοντες στον παρονομαστή όπως ο (x^2+a), a>0,

	δεν απαιτούνται.

2. Γεωμετρία συντεταγμένων στο επίπεδο (*x*, *y*)

S Παραμετρικές εξισώσεις καμπυλών και μετατροπή μεταξύ Καρτεσιανών και παραμετρικών μορφών.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να υπολογίζουν την επιφάνεια κάτω από μια καμπύλη, δοθέντων των παραμετρικών της εξισώσεων, ωστόσο δεν θα αναμένεται να είναι σε θέση να σχεδιάζουν μια καμπύλη από αυτές.

3. Ακολουθίες και σειρές

S Διωνυμικές σειρές για τυχαίο ρητό n.	Για $\|x\| < \frac{b}{a}$ οι υποψήφιοι θα πρέπει να μπορούν να αναπτύσσουν την έκφραση $(ax+b)^n$ καθώς και να αναπτύσσουν ρητές συναρτήσεις σε απλά κλάσματα.

4. Παράγωγος

S Παραγώγιση απλών συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται άμεσα ή παραμετρικά.	Απαραίτητη η εύρεση εξισώσεων εφαπτόμενων και καθέτων καμπυλών που δίνονται άμεσα ή παραμετρικά.
S Εκθετική αύξηση και μείωση.	Είναι αναμενόμενη η γνώση και η χρήση του $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
S Μορφοποίηση απλών διαφορικών εξισώσεων.	Μπορεί να τεθούν ερωτήματα που να εμπεριέχουν ρυθμούς μεταβολής.
5. Ολοκλήρωση Ολοκλήρωση των e^x, $\frac{1}{x}$, sinx, cosx.	Να περιλαμβάνεται ολοκλήρωση δεδομένων συναρτήσεων, όπως sin3x, $\sec^2 2x$, tanx, e^{5x}, $\frac{1}{2x}$. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + c$, καθώς και να χρησιμοποιούν τριγωνομετρικές ταυτότητες για να ολοκληρώνουν, για παράδειγμα, τα $\sin^2 x$, $\tan^2 x$.
S Εκτίμηση όγκου εκ περιστροφής.	Είναι απαραίτητο το π $\int y^2 dx$, όχι όμως το π$\int x^2 dy$. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν όγκο εκ περιστροφής, δοθέντων παραμετρικών εξισώσεων.
S Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης με αντικατάσταση ή κατά μέρη. Οι ίδιες μέθοδοι ως αντίστροφες διαδικασίες των κανόνων αλυσίδας και γινομένου αντίστοιχα.	Εκτός από τις πιο απλές περιπτώσεις η αντικατάσταση θα δίνεται. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x d(x)$ είναι απαραίτητο. Πιθανό να χρειαστούν περισσότερες από μία εφαρμογές ολοκλήρωσης κατά μέρη, για παράδειγμα $\int x^2 e^x dx$.
Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης μέσω απλών κλασμάτων.	Ολοκλήρωση ρητών εκφράσεων όπως εκείνων που προκύπτουν από απλά κλάσματα, π.χ. $\frac{2}{3x+5}$ και

$\dfrac{3}{(x-1)^2}$ ακόμα και $\dfrac{x}{x^2+5}$, $\dfrac{2}{(2x-1)^4}$.

S	Αναλυτική λύση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές.	Θα απαιτούνται γενικές και ειδικές λύσεις.
S	Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων.	Εφαρμογή του κανόνα του τραπεζίου σε συναρτήσεις, όπως καλύφθηκε στις ενότητες C3 και C4. Θα απαιτηθεί χρήση αυξανόμενου πλήθους τραπεζίων για μεγαλύτερη ακρίβεια και εκτίμηση σφάλματος. Οι ερωτήσεις δε θα απαιτούν περισσότερες από τρεις επαναλήψεις.

Ο κανόνας του Simpson δεν είναι απαραίτητος.

6. Διανύσματα

N	Διανύσματα σε δύο και σε τρεις διαστάσεις.	
N	Μέγεθος διανύσματος .	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να βρίσκουν ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του **a** και να έχουν εξοικειωθεί με το $\lvert a \rvert$.
N	Αλγεβρικός χειρισμός της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού τους με μεγέθη. Οι γεωμετρικές τους ερμηνείες.	
N	Διανύσματα θέσης. Απόσταση μεταξύ δύο σημείων.	$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}=b-a.$ Η απόσταση d ανάμεσα σε δύο σημεία (x_1,y_1,z_1) και (x_2,y_2,z_2) δίδεται από τον τύπο $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$.
N	Διανυσματικές εξισώσεις ευθειών.	Να περιλαμβανουν τους τύπους **r**=**a**+t**b** και **r**=**c**+t(**d**–**c**).
N	Η χρήση του εσωτερικού γινομένου για τον υπολογισμό της γωνίας που σχηματίζουν δύο ευθείες.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να ξέρουν ότι αν $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ και $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ τότε $\mathbf{a.b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ και $\cos\angle AOB=\dfrac{ab}{\lvert a\rvert\lvert b\rvert}$. Επίσης, αν **a.b**=0 και τα **a** και **b** είναι μη μηδενικά διανύσματα, τότε τα **a** και **b** είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ενότητα FP1 – Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά

Η εξέταση διαρκεί μία και μισή ώρα και περιέχει περίπου οκτώ θέματα ποικίλης έκτασης. Οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν στη διάθεσή τους ένα μικροϋπολογιστή με τουλάχιστον τις ακόλουθες λειτουργίες: −, ×, ÷, π, x^2, √x, $\frac{1}{x}$, x^y, ln x, e^x, x!, sine, cosine και tangent και τις αντίστροφές τους σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους, αλλά και σε ακτίνια. Μικροϋπολογιστές με δυνατότητες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί.

Προϋποτίθεται γνώση της ύλης των C1, C2, C3 και C4, καθώς μπορεί να εξετασθεί.

Προδιαγραφή	**Παρατηρήσεις**
1.Ανισότητες Ο χειρισμός και η επίλυση αλγεβρικών ανισοτήτων, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που περιλαμβάνουν απόλυτες τιμές.	Επίλυση ανισοτήτων όπως $\frac{1}{x-a} > \frac{x}{x-b}$ και $\lvert x^2 - 1\rvert > 2(x+1)$.
2.Σειρές Άθροισμα απλών πεπερασμένων σειρών. Η μέθοδος των διαφορών.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να αθροίζουν σειρές, όπως οι $\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$, $\sum_{r=1}^{n} r(r^2+2)$. Δεν απαιτείται απόδειξη μέσω επαγωγής.
3. Μιγαδικοί αριθμοί Ορισμός μιγαδικών αριθμών στη μορφή a+ib και rcos θ + irsin θ.	Θα πρέπει να είναι γνωστό το νόημα των όρων: συζυγής (conjugate), μέτρο (modulus), όρισμα (argument), πραγματικό μέρος, φανταστικό μέρος και ισότητα μιγαδικών αριθμών.
Άθροισμα, γινόμενο και πηλίκο μιγαδικών αριθμών.	
Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών στο διάγραμμα Argand. Γεωμετρική αναπαράσταση αθροισμάτων, γινομένων και πηλίκων μιγαδικών αριθμών. Μιγαδικές λύσεις αθροισμάτων, γινομένων και πηλίκων μιγαδικών αριθμών. Μιγαδικές λύσεις τετραγωνικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές. Συζυγείς μιγαδικές ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές.	Γνώση του ότι αν η z_1 είναι ρίζα της f(z) = 0 τότε η z_1^* είναι επίσης ρίζα της.
4. Αριθμητική επίλυση εξισώσεων. Εξισώσεις της μορφής f(x) = 0 οι οποίες επιλύονται αριθμητικά με: (i) διχοτόμηση διαστημάτων (ii) γραμμική παρεμβολή (iii) διαδικασία Newton-Raphson	
5. Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης Περαιτέρω επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με χωριζόμενες	Είναι δυνατό να ζητηθεί μορφοποίηση διαφορικής εξίσωσης. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να καταλήγουν σε συγκεκριμένες λύσεις και να σχεδιάζουν

μεταβλητές.

καμπύλες που να αντιπροσωπεύουν μέλη της οικογένειας των λύσεων.

Πρώτης τάξης γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dx}$+Py = Q, όπου οι P και Q είναι συναρτήσεις του x.

Είναι δυνατή η χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int P dx}$ χωρίς απόδειξη.

Διαφορικές εξισώσεις αναγόμενες στην παραπάνω μορφή μέσω δοθείσας αντικατάστασης.

6. Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης a$\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$ όπου τα a, b και c είναι πραγματικές μεταβλητές και το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα μπορεί να βρεθεί με έρευνα ή δοκιμή.

Η χαρακτηριστική εξίσωση (auxiliary equation) είναι δυνατό να έχει πραγματικές διακριτές, ίσες ή μιγαδικές ρίζες.

Η f(x) θα έχει μία από τις μορφές ke^{px}, A + Bx, p + qx + cx^2 ή m cos ωx + n sin ωx.

Οι υποψήφιοι θα πρέπει να έχουν εξοικειωθεί με τους όρους ‘complementary function’ (συμπληρωματική εξίσωση, η γενική λύση ομογενούς εξίσωσης) και ‘particular integral’ (ειδική λύση ολοκληρωτικής εξίσωσης) και να είναι σε θέση να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\sin 2x$.

Διαφορικές εξισώσεις αναγόμενες στους παραπάνω τύπους μέσω δοθείσης αντικατάστασης.

7. Πολικές συντεταγμένες

Πολικές συντεταγμένες (r, θ) με r ≥ 0.

Χρήση τύπου $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ για εμβαδόν.

Ο σχεδιασμός καμπυλών όπως η θ = α, r = p sec (α − θ), r = a, r = 2a cos θ, r = kθ, r = a(1 ± cos θ), r = a(3 + 2 cos θ), r = a cos 2θ and r^2 = a^2 cos 2θ μπορεί να ζητηθεί.

Η ικανότητα εύρεσης εφαπτόμενων παράλληλων, ή σε ορθή γωνία με την αρχική γραμμή είναι αναμενόμενη.

Ενότητα FP2 – Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά

Η εξέταση διαρκεί μία και μισή ώρα και περιέχει περίπου οκτώ θέματα ποικίλης έκτασης.

Οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν στη διάθεσή τους ένα μικροϋπολογιστή με τουλάχιστον τις ακόλουθες λειτουργίες: −, ×, ÷, π, x^2, √x, $\frac{1}{x}$, x^y, ln x, e^x, x!, sine, cosine και tangent και τις αντίστροφές τους σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους, αλλά και σε ακτίνια. Μικροϋπολογιστές με λειτουργίες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί.

Προϋποτίθεται γνώση της ύλης των C1, C2, C3, C4 και FP1, καθώς μπορεί να εξετασθεί.

Προδιαγραφή	**Παρατηρήσεις**
1.Συστήματα συντεταγμένων	
Καρτεσιανές και παραμετρικές εξισώσεις για την παραβολή, την έλλειψη, την υπερβολή και την ορθογώνια υπερβολή.	Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τις εξισώσεις: $y^2 = 4ax$, $x = at^2$, $y = 2at$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, x = a cos t, y = b sin t. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, x = a sec t, y = b tan t και x = a cosh t, y = b sinh t. $xy = c^2$, $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$.
Οι ιδιότητες εστίας και διευθετούσας παραβολής, έλλειψης και υπερβολής, συμπεριλαμβανομένης της εκκεντρότητας.	Για παράδειγμα οι υποψήφιοι θα πρέπει να γνωρίζουν ότι για την έλλειψη $b^2 = a^2(1 - e^2)$ οι εστίες είναι οι (ae, 0) και (−ae, 0) και οι εξισώσεις των διευθετουσών είναι οι x = +ea και x = −ea. (όπου e η εκκεντρότητα).
Εφαπτόμενες και κάθετες σε καμπύλες.	Θεωρείται ότι πρέπει να είναι γνωστή η συνθήκη για να είναι η y = mx + c εφαπτομένη στις καμπύλες.
Απλά προβλήματα γεωμετρικών τόπων	
Εσωτερικές συντεταγμένες (Intrinsic coordinates (s,ψ)).	Οι υποψήφιοι πρέπει να έχουν εξοικειωθεί με τις εξισώσεις $\frac{dy}{dx}=\tan\psi$, $\frac{dx}{ds}=\cos\psi$ και $\frac{dy}{ds}=\sin\psi$. Ανά περιπτώσεις, οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να κατασκευάζουν τις εσωτερικές εξισώσεις καμπυλών (intrinsic equations of curves), όταν αυτές δίνονται σαν καρτεσιανές ή παραμετρικές εξισώσεις.
Ακτίνα καμπυλότητας	Για καμπύλες με καρτεσιανές, παραμετρικές ή εσωτερικές εξισώσεις.
2. Υπερβολικές συναρτήσεις	
Ορισμός των έξι υπερβολικών συναρτήσεων, με τη βοήθεια εκθετικών συναρτήσεων. Γραφήματα και ιδιότητές τους.	Για παράδειγμα, $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sec hx \equiv \frac{1}{\cosh x} \equiv \frac{2}{e^x + e^{-x}}$. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να κατασκευάζουν και να κάνουν χρήση απλών ταυτοτήτων όπως οι $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$, $1 - \tanh^2 x \equiv \sec h^2 x$ και να επιλύουν εξισώσεις όπως η $a\cosh x + b\sinh x = c$.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις, τα γραφήματα, οι ιδιότητές τους και λογαριθμικά ισοδύναμα.	Π.χ. $ar\sinh x \equiv \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$. Είναι πιθανό να χρειαστεί οι υποψήφιοι να αποδείξουν κάτι ανάλογο, όπως και παρόμοια αποτελέσματα.
3. Παραγώγιση	
Παραγώγιση υπερβολικών συναρτήσεων και εκφράσεων που τις περιέχουν.	Για παράδειγμα tanh 3x, $x\sinh^2 x$, $\dfrac{\cosh 2x}{\sqrt{x+1}}$
Παραγώγιση αντίστροφων συναρτήσεων, συμπεριλαμβανομένων τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων.	Για παράδειγμα, $\arcsin x + x\sqrt{(1-x^2)}$, $\dfrac{1}{2}$ (artanh x^2).
4. Ολοκλήρωση	
Ολοκλήρωση υπερβολικών συναρτήσεων και εκφράσεων που τις περιέχουν. Ολοκλήρωση αντίστροφων τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων. Ολοκλήρωση με χρήση υπερβολικών και τριγωνομετρικών αντικαταστάσεων. Χρήση αντικατάστασης για ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τετραγωνικούς άρρητους.	Παραδείγματος χάρη $\int ar\sinh x dx$, $\int \arctan x dx$. Περιλαμβάνονται τα ολοκληρώματα των $\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Σε πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, οι αντικαταστάσεις θα δίνονται.
Παραγωγή και χρήση απλών αναγωγικών τύπων.	Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν τύπους όπως οι: $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $n \geq 2$, για $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $I_{n+2} = \dfrac{2\sin(n+1)x}{n+1} + I_n$ για $I_n = \int \dfrac{\sin nx}{\sin x} dx$, n>0.
Υπολογισμός μήκος τόξου και εμβαδού επιφάνειας εκ περιστροφής.	Η εξίσωση της καμπύλης είναι δυνατόν να δίνεται σε καρτεσιανή ή παραμετρική μορφή, όχι όμως σε πολικές ή εσωτερικές συντεταγμένες.

Ενότητα FP3 – Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά

Η εξέταση διαρκεί και μισή ώρα και περιέχει περίπου οκτώ θέματα ποικίλης έκτασης. Οι υποψήφιοι αναμένεται να έχουν στη διάθεσή τους ένα μικροϋπολογιστή με τουλάχιστον τις ακόλουθες λειτουργίες: −, ×, ÷, π, x^2, $\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{x}$, x^y, ln x, e^x, x!, sine, cosine και tangent και τις αντίστροφές τους σε μοίρες και υποδιαιρέσεις τους, αλλά και σε ακτίνια. Μικροϋπολογιστές με λειτουργίες για συμβολική άλγεβρα, παραγώγιση και/ή ολοκλήρωση δεν είναι επιτρεπτοί.

Προϋποτίθεται γνώση της ύλης των C1, C2, C3, C4, FP1 και των συνδεόμενων με αυτές τύπων, πλέον των υπερβολικών συναρτήσεων, καθώς μπορεί να εξετασθεί.

Προδιαγραφή	Σημειώσεις
1. Μιγαδικοί αριθμοί Η σχέση του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Σχέσεις ανάμεσα σε τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις.	Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τους τύπους: $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ και $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
Θεώρημα Moivre και η εφαρμογή του σε τριγωνομετρικές ταυτότητες και ρίζες μιγαδικού αριθμού.	Εύρεση των $\cos n\theta$ και $\sin m\theta$ σε δυνάμεις των $\sin\theta$ και $\cos\theta$ καθώς και δυνάμεις των $\sin\theta$ και $\cos\theta$ εκφραζόμενες σε πολλαπλάσια γωνιών. Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι σε θέση να αποδεικνύουν το θεώρημα De Moivre για κάθε ακέραιο n.
Γεωμετρικοί τόποι και περιοχές στο διάγραμμα Argand.	Γεωμετρικοί τόποι όπως οι $\lvert z-a\rvert = b$, $\lvert z-a\rvert = k\ \lvert z-b\rvert$, $\arg(z-a) = \beta$ και $\arg\frac{z-\alpha}{z-b} = \beta$ και περιοχές όπως οι $\lvert z-a\rvert \le \lvert z-b\rvert$ και $\lvert z-a\rvert \le b$.
Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί από το z-επίπεδο στο w-επίπεδο.	Μπορεί να τεθούν μετασχηματισμοί όπως οι $w = z^2$ και $w = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου a, b, c, d $\in \mathbb{C}$.
2. Άλγεβρα Πινάκων Γραμμικοί μετασχηματισμοί διανυσμάτων στήλης σε δύο και τρεις διαστάσεις και η αναπαράστασή τους ως πίνακες. Συνδυασμοί μετασχηματισμών.	Ο μετασχηματισμός που αναπαρίσταται ως **AB** είναι ο μετασχηματισμός που αναπαρίσταται σαν **B** και ακολουθείται από εκείνον που αναπαρίσταται σαν **A**.
Γινόμενο πινάκων. Ανάστροφος πίνακα. Υπολογισμός 2x2 και 3x3 οριζουσών. Αντίστροφος 2x2 και 3x3 πίνακα. Αντίστροφος (όταν υπάρχει) δοθέντος μετασχηματισμού ή συνδυασμού μετασχηματισμών.	Χρήση της σχέσης $(AB)^T = B^T A^T$. Αντιστρέψιμοι και μη πίνακες. Χρήση της σχέσης $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα 2x2 και 3x3 πινάκων.	Μπορεί να ζητηθούν ορθοκανονικά διανύσματα.
Αναγωγή συμμετρικών πινάκων σε διαγώνια μορφή.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να βρίσκουν έναν ορθογώνιο πίνακα **P** τέτοιον ώστε ο $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ να είναι διαγώνιος.
3. Διανύσματα Το εξωτερικό γινόμενο **a x b** και το μικτό γινόμενο διανυσμάτων **a . b x c = 0**. Χρήση διανυσμάτων σε προβλήματα που περιέχουν σημεία, ευθείες και επίπεδα. Εξίσωση ευθείας στη μορφή **(r – a) x b = 0.** Εξίσωση επιπέδου στις μορφές **r.n** = p, **r** = **a** + s**b** + t**c**.	Ερμηνεία του $\lvert$ **a x b** $\rvert$ ως επιφάνειας και του **a . b x c** ως όγκου. Είναι πιθανό οι υποψήφιοι να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουν και ισοδύναμες καρτεσιανές μορφές. Οι εφαρμογές περιλαμβάνουν: (i) απόσταση σημείου από επίπεδο. (ii) τέμνουσα δύο επιπέδων. (iii) ελάχιστη απόσταση ευθειών που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν τέμνονται.

4. Σειρές Maclaurin και Taylor

Παράγωγοι τρίτης και ανώτερης τάξης. Παραγώγιση και χρήση σειρών Maclaurin.	Μπορεί να ζητηθεί η παραγώγιση του αναπτύγματος των e^x, sinx, cosx, ln(1+x) και άλλων απλών συναρτήσεων.
Παραγώγιση και χρήση σειρών Taylor.	Η παραγώγιση, για παράδειγμα, της ανάλυσης του sinx σε ανιούσες δυνάμεις του (x – π) μέχρι και τον όρο $(x-\pi)^3$.
Χρήση των σειρών Taylor για τη λύση σειρών διαφορικών εξισώσεων.	Είναι πιθανό να ζητηθεί εύρεση και έκφραση λύσης σε δυνάμεις του x έως και τον όρο x^4 της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$, τ.ω. y = 1, $\frac{dy}{dx}=0$, για x = 0.

5. Αριθμητικές μέθοδοι

Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερης τάξης με μεθόδους βήμα προς βήμα.	Οι προσεγγίσεις $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1-y_0}{h}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1-y_{-1}}{2h}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \approx {y_1-2y_0+y_{-1}}\big/{h^2}$ όπου είναι απαραίτητες θα δίνονται, αλλά η παραγώγιση των αποτελεσμάτων αυτών μπορεί να ζητηθεί.

6. Απόδειξη

Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή.	Οι υποψήφιοι θα πρέπει να είναι σε θέση να αποδεικνύουν το θεώρημα De Moivre, καθώς και το διωνυμικό θεώρημα. Επαγωγικές αποδείξεις για: (i) Άθροισμα σειρών, π.χ. $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. (ii) Διαιρετότητα, π.χ. να δειχθεί το ότι το $3^{2n}+11$ διαιρείται από το 4. (iii) Ανισότητες, π.χ. να δειχθεί το ότι $(1+x)^n > 1+nx$ για $n \geq 2$, $x > -1$, $x \neq 0$. (iv) Εύρεση γενικών όρων ακολουθίας, π.χ. εάν $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ με $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, να αποδειχθεί ότι $u_n = 3^n - 2^n$.

Στατιστική 1 (S1)

Τύποι

Αναμένεται από τους υποψηφίους να γνωρίζουν και να είναι σε θέση να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν τους ακόλουθους τύπους:

Μέση τιμή=$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$ ή $\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

Τυπική απόκλιση=$\sqrt{\Delta\iota\alpha\kappa\acute{\upsilon}\mu\alpha\nu\sigma\eta}$

Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος=IQR=Q_3–Q_1

P(A′)=1–P(A)

Για ανεξάρτητα ενδεχόμενα, P(B/A)=P(B), P(A/B)=P(A), P(A∩B)=P(A)P(B)

E(aX+b)=aE(X)+b

Var(aX+b)=a^2Var(X)

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής διακριτής τυχαίας μεταβλητής:

$F(x_0) = P(X \leq x_0) = \sum_{x \leq x_0} p(x)$

Τυποποιημένη Κανονική Τυχαία Μεταβλητή $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, όπου X~N(μ, σ^2)

Προδιαγραφή

1. Μαθηματικά μοντέλα στις πιθανότητες και στη στατιστική

-Οι βασικές ιδέες της μαθηματικής μοντελοποίησης όπως εφαρμόζονται στις πιθανότητες και στη στατιστική.

2. Αναπαράσταση και συνοπτική παρουσίαση δεδομένων

-Ιστογράμματα, φυλλογραφήματα, θηκογράμματα (box plots).

-Μέτρα θέσης: μέση τιμή, διάμεσος, κορυφή.

-Μέτρα διασποράς: διακύμανση, τυπική απόκλιση, εύρος και ενδοεκατοστημοριακά εύρη (interpercentile ranges).

-Λοξότητα. Έκτροπες τιμές.

3. Πιθανότητα

-Στοιχειώδης πιθανότητα

-Δειγματικός χώρος. Συμπληρωματικά και ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Δεσμευμένη πιθανότητα.

-Ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων.

-Νόμοι αθροίσματος και γινομένου.

4. Συσχέτιση και παλινδρόμηση

-Διαγράμματα διασποράς. Γραμμική παλινδρόμηση.

-Επεξηγηματικές (ανεξάρτητες) μεταβλητές (explanatory variables) και (εξαρτημένες) μεταβλητές απόκρισης (response variable). Εφαρμογές και ερμηνείες.

-Ο συντελεστής στιγμιαίου συσχετισμού (product moment correlation coefficient), χρήση, ερμηνεία και περιορισμοί του.

5. Τυχαίες διακριτές μεταβλητές

-Η έννοια της τυχαίας διακριτής μεταβλητής.

-Συνάρτηση πιθανότητας και αθροιστική συνάρτηση κατανομής για τυχαία διακριτή μεταβλητή.

-Μέση τιμή και διακύμανση τυχαίας διακριτής μεταβλητής.

-Η ομοιόμορφη διακριτή κατανομή.

6. Η Κανονική κατανομή

-Η Κανονική κατανομή συμπεριλαμβανομένης της μέσης τιμής, της διακύμανσης και της χρήσης πινάκων της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής.

Στατιστική 2 (S2)

Αναμένεται από τους υποψηφίους να γνωρίζουν και να είναι σε θέση να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν τους ακόλουθους τύπους:

Για τη τυχαία συνεχή μεταβλητή Χ, με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$,

$$P(\alpha < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \; f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Απαιτείται γνώση του περιεχομένου της S1, των προαπαιτούμενών της και των σχετικών τύπων, γνώση παραγώγισης και ολοκλήρωσης πολυωνύμων, διωνυμικοί συντελεστές σε σύνδεση με τη διωνυμική κατανομή και εκτίμηση της εκθετικής συνάρτησης θεωρούνται γνωστά και μπορεί να εξετασθούν.

Προδιαγραφή

1. Διωνυμική κατανομή και κατανομή Poisson

-Η διωνυμική κατανομή και η κατανομή Poisson.

-Μέση τιμή και διακύμανση διωνυμικής κατανομής και κατανομής Poisson.

-Χρήση της κατανομής Poisson ως προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.

2. Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

-Η έννοια της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

-Η συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας συνεχούς μεταβλητής.

-Σχέση συναρτήσεων πυκνότητας και κατανομής.

-Μέση τιμή και διακύμανση τυχαίων συνεχών μεταβλητών.

-Κορυφή, διάμεσος και τεταρτημόρια τυχαίων συνεχών μεταβλητών.

3. Συνεχείς κατανομές

-Η συνεχής ομοιόμορφη κατανομή

-Χρήση της Κανονικής κατανομής ως προσέγγιση της διωνυμικής και της Poisson.

4. Έλεγχοι υποθέσεων

-Πληθυσμός, απογραφή και δείγμα. Δειγματοληπτική μονάδα, δειγματοληπτικό πλαίσιο.

-Δειγματοληπτική κατανομή.

-Έννοια και ερμηνεία ελέγχου υποθέσεων. Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση.

-Κρίσιμη περιοχή.

-Έλεγχοι απλής-διπλής κατεύθυνσης.

-Έλεγχοι υποθέσεων για την παράμετρο p μιας διωνυμικής κατανομής και για τη μέση τιμή κατανομής Poisson.

Στατιστική 3 (S3)

Αναμένεται από τους υποψηφίους να γνωρίζουν και να είναι σε θέση να ανακαλούν και να χρησιμοποιούν τους ακόλουθους τύπους:

$\alpha X \pm bY \sim N(\alpha\mu_\chi \pm b\mu_y, \alpha^2{\sigma_\chi}^2 + b^2{\sigma_y}^2)$, όπου τα X, Y είναι ανεξάρτητα και $X \sim N(\mu_\chi, {\sigma_x}^2)$ και $Y \sim N(\mu_y, {\sigma_y}^2)$.Γνώση του περιεχομένου των S2 και S3, των προαπαιτούμενών τους και των σχετικών τύπων, θεωρούνται γνωστά και μπορεί να εξετασθούν.

Προδιαγραφή

1. Συνδυασμοί τυχαίων μεταβλητών

-Κατανομή γραμμικών συνδυασμών ανεξάρτητων τυχαίων κανονικών μεταβλητών.

2. Δειγματοληψία

-Μέθοδοι συλλογής δεδομένων. Απλή τυχαία δειγματοληψία. Χρήση τυχαίων αριθμών για δειγματοληψία.

-Λοιπές μέθοδοι δειγματοληψίας: στρωματοποιημένη, συστηματική, αναλογική

3. Εκτίμηση, διαστήματα εμπιστοσύνης και έλεγχοι

-Έννοιες τυπικού σφάλματος, εκτιμήτριας, μεροληψίας.

-Η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X}$.

-Έννοια και ερμηνεία ενός διαστήματος εμπιστοσύνης.

-Φράγματα εμπιστοσύνης για Κανονικό μέσο, δοθείσης της διακύμανσης.

-Έλεγχοι υποθέσεων για τον μέσο Κανονικής κατανομής, δοθείσης της διακύμανσης.

-Χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ.) για την επέκταση των ελέγχων υποθέσεων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης σε δείγματα από μη-Κανονικές κατανομές. Χρήση αποτελεσμάτων μεγάλων δειγμάτων για την περίπτωση άγνωστης μεταβλητής.

-Έλεγχος υποθέσεων για τη διαφορά δύο μέσων τιμών από δύο Κανονικές κατανομές με γνωστές τις διακυμάνσεις τους.

-Χρήση αποτελεσμάτων μεγάλων δειγμάτων στην περίπτωση όπου οι πληθυσμιακές διακυμάνσεις δεν είναι γνωστές.

4. Πίνακες καλής προσαρμογής (goodness of fit tables) και συνάφειας (contingency tables)

-Μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις.

-Η χρήση του $\sum_{i=1}^{n}\frac{(\mathrm{O}_\iota-\mathrm{E}_\iota)^2}{\mathrm{E}_\iota}$ ως ελεγχοσυνάρτησης για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης.

-Βαθμοί ελευθερίας.

5. Συσχέτιση και παλινδρόμηση

-Συντελεστής συσχέτισης του Spearman, χρήση, ερμηνεία και περιορισμοί του.

-Έλεγχος υπόθεσης μηδενικής συσχέτισης.

Μαθηματικά Αποφάσεων 1 (D1)

Προδιαγραφή

1. Αλγόριθμοι

-Γενικά για τους αλγόριθμους.

-Υλοποίηση αλγόριθμου που δίνεται από διάγραμμα ροής εργασιών (flow chart) ή από κείμενο.

-Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με:

i. προσεγγιστικό αλγόριθμο για NP-Hard προβλήματα (bin packing).
ii. ταξινόμηση φυσαλίδας (bubble sort).
iii. γρήγορη ταξινόμηση (quick sort).
iv. δυαδική αναζήτηση (binary search).

2. Αλγόριθμοι σε γραφήματα

-Το πρόβλημα του ελάχιστου συνεκτικού δέντρου (minimum spanning tree problem). Αλγόριθμος Prim και Kruskal (Greedy).

-Ο αλγόριθμος Dijkstra για εύρεση της βραχύτερης απόστασης.

-Επίπεδα και μη γραφήματα.

-Αλγόριθμος επιπεδότητας (planarity algorithm) για γραφήματα με έναν Hamiltonian κύκλο.

3. Το πρόβλημα διαδρομής επιθεώρησης (the route inspection problem)

-Αλγόριθμος για την εύρεση της συντομότερης διαδρομής σε ένα δίκτυο, περνώντας από κάθε ακμή τουλάχιστον μια φορά, με κατάληξη στην κορυφή εκκίνησης. Το δίκτυο θα έχει έως τέσσερις κόμβους με περιττό αριθμό ακμών.

4. Ανάλυση κρίσιμης διαδρομής (ή κρίσιμου μονοπατιού, critical path analysis)

-Μοντελοποίηση έργου μέσω ενός δικτύου δραστηριότητας (activity network), συμπεριλαμβανομένης της χρήσης ομοιωμάτων.

-Αλγόριθμος για εύρεση κρίσιμης διαδρομής. Ο συντομότερος χρόνος στον οποίο μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός (earliest event time). Ο μεγαλύτερος χρόνος στον οποίο μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός (latest event time). Συνολικό περιθώριο (total float). Διαγράμματα Gantt. Χρονοπρογραμματισμός (Scheduling).

5. Γραμμικός προγραμματισμός

-Διατύπωση προβλημάτων ως γραμμικά προγράμματα

-Γραφική επίλυση προβλημάτων δύο μεταβλητών με τις μεθόδους του χάρακα και της κορυφής. Ενασχόληση με προβλήματα στα οποία οι λύσεις πρέπει να έχουν ακέραιες τιμές.

-Αλγόριθμος Simplex και tableau για προβλήματα μεγιστοποίησης.

-Χρήση και έννοια των «αδιάφορων» μεταβλητών (slack variables).

6. Συζεύξεις (Matchings)

-Χρήση διμερών γραφημάτων για τη μοντελοποίηση συζεύξεων. Ολοκληρωμένες και μέγιστες συζεύξεις.

-Αλγόριθμος μέγιστης σύζευξης.

7. Ροές σε δίκτυα

-Αλγόριθμος για την εύρεση μέγιστης ροής. Τομές και χωρητικότητά τους.

-Χρήση θεωρήματος μέγιστης ροής – ελάχιστης τομής για επιβεβαίωση του ότι μια ροή είναι μέγιστη.

Μαθηματικά Αποφάσεων 2 (D2)

Προδιαγραφή

1. Προβλήματα μεταφοράς

-Μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας (north-west corner method) για την εύρεση μιας αρχικής βασικής λύσης.

-Μέθοδος Stepping Stone για την εύρεση βέλτιστης λύσης. Συντελεστές βελτίωσης.

-Διατύπωση σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

***2.Προβλήματα κατανομής-αντιστοίχισης* (allocation-assignment problems)**

-Μείωση πίνακα κόστους.

-Χρήση Ουγγρικού αλγόριθμου για την εύρεση της κατανομής ελαχίστου κόστους.

-Τροποποίηση μεθόδου για κατανομή μέγιστου κέρδους. Διατύπωση ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

3. Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή

-Πρακτικά και κλασικά προβλήματα. Το κλασικό πρόβλημα για ολοκληρωμένα γραφήματα που ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

- Καθορισμός ανώτατων και κατώτατων ορίων με μεθόδους ελάχιστου δέντρου έκτασης (minimum spanning tree methods).

-Ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα (nearest neighbour algorithm).

4. Θεωρία παιγνίων

-Παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος (two person zero-sum games) και πίνακας αποτελεσμάτων (pay-off matrix). Αναγνώριση στρατηγικών ασφαλούς παιχνιδιού (safe play strategies) και σταθερές λύσεις (stable solutions), σημεία ισορροπίας (saddle points).

-Μείωση πίνακα αποτελεσμάτων χρησιμοποιώντας επιχειρήματα επικράτησης (dominance arguments). Βέλτιστες μικτές στρατηγικές για παίγνια χωρίς σταθερή λύση.

-Μετατροπή 3x2 και 3x3 παιγνίων σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

-Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για 3x2 και 3x3 παίγνιο.

5. Δυναμικός προγραμματισμός

-Αρχές δυναμικού προγραμματισμού. Αρχή βέλτιστου κατά Bellman.

-Μεταβλητές σταδίων και κατάστασης. Χρήση πινακοποίησης (tabulation) για την επίλυση προβλημάτων εύρεσης μεγίστου, ελαχίστου, minimax και maximin.

3.6.2 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα GCE AS και A level

Στις επόμενες σελίδες θα γίνει μια προσπάθεια λεπτομερούς περιγραφής του προγράμματος της Ανάλυσης, όπως διδάσκεται στα αγγλικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για τις επτά συνολικά ενότητες των Μαθηματικών Κορμού και των Προχωρημένων Θεωρητικών Μαθηματικών. Κατά την παράθεση του προγράμματος και σε συγκεκριμένα σημεία του θα γίνουν αναφορές στην ύλη της Ανάλυσης, όπως αυτή παρουσιάζεται στα αντίστοιχα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι τα αγγλικά σχολικά εγχειρίδια δεν απαιτούν την έγκριση της αγγλικής κυβέρνησης. Εκδίδονται από εκδότες του εμπορίου και δεν υπάρχουν προτεινόμενα κείμενα στο επίπεδο της ανώτερης Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, εκτός από εκείνα που προορίζονται να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις των εξετάσεων που οργανώνουν τα διάφορα απονεμητικά σώματα (INCA, 2007f). Η επιλογή του υλικού για τις εξετάσεις είναι μια σύνθετη διαδικασία. Επιτροπές εξεταστών, εν ενεργεία καθηγητές και αντιπρόσωποι της συνεχιζόμενης και της τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης ενέχονται στη διαδικασία επιλογής, ενώ λαμβάνονται υπόψη προτάσεις από ανεξάρτητους καθηγητές. Ευνόητο είναι το ότι τα κείμενα που επιλέγονται πρέπει να συνάδουν με τις κυβερνητικές απαιτήσεις (οι οποίες εκφράζονται μέσω της Q.C.A.). Τελικά η αξιολόγηση της επιτυχίας και της πληρότητας ενός κειμένου επιτυγχάνεται με τον έλεγχο της ποιότητας των απαντήσεων των μαθητών. Όπου η ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση παρέχεται στα σχολεία, αρμόδιοι για την επιλογή των μεθόδων και των υλικών διδασκαλίας των μαθηματικών είναι οι καθηγητές, σε συνεργασία με τον επικεφαλή του τμήματος ή της σχολής. Τα επιδοτούμενα σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης προσφέρουν στους σπουδαστές τα σχολικά εγχειρίδια για την ανώτερη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και μπορεί να μην τους χρεώσουν για τα βιβλία ή τη γραφική ύλη. Τα ιδρύματα της συνεχιζόμενης Εκπαίδευσης προσφέρουν στους σπουδαστές ηλικίας 16-19 ετών τα απαραίτητα εκπαιδευτικά υλικά συνήθως μέσω δανεισμού.

3.6.2.1 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Μαθηματικά Κορμού 1 (C1)

Κεφάλαιο 2/C1: ***Τετραγωνικές συναρτήσεις*[17] *(Quadratic functions)***

Θέμα του παρόντος Κεφαλαίου αποτελεί ο σχεδιασμός και η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων (quadratic equations). Το θεωρητικό μέρος στηρίζεται στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και στις τετραγωνικές συναρτήσεις, όπως αυτές διδάχθηκαν στα πλαίσια της ενότητας Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4.

Στο μάθημα αρχικά τονίζεται το ότι οι μαθητές «πρέπει να μπορούν να σχεδιάζουν γραφήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων»[18] και δίνεται ο ορισμός της γενικής μορφής μιας Δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως $y = ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c σταθερές, $a \neq 0$ με το συνοδευτικό σχόλιο ότι μπορεί να γραφεί ως $f(x) = ax^2 + bx + c$. Στη συνέχεια μελετάται ο τρόπος επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσω παραγοντοποίησης, συμπλήρωσης τετραγώνου και με τη χρήση της διακρίνουσας. Στο τέλος γίνεται αναλυτική αναφορά, βήμα προς βήμα, στον τρόπο σχεδιασμού γραφημάτων δευτεροβάθμιων εξισώσεων και στην εύρεση του πλήθους των ριζών τους.

Στις εφαρμογές και στα λυμένα παραδείγματα του Κεφαλαίου:

- Διδάσκεται ο τρόπος σχεδιασμού της γραφικής παράστασης μιας τετραγωνικής συνάρτησης ως παραβολής, μέσω της κατασκευής του πίνακα τιμών της, με ορισμό του άξονα συμμετρίας και των ιδιοτήτων του.
- Δίνεται η μεθοδολογία επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με παραγοντοποίηση ή με συμπλήρωση τετραγώνου.
- Αποδεικνύεται βήμα προς βήμα ο τύπος που δίνει τις ρίζες Δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη βοήθεια διακρίνουσας.

Οι ασκήσεις, αποβλέποντας μάλλον σε απλή εφαρμογή των εννοιών του μαθήματος, σχετίζονται με:

- Τον σχεδιασμό γραφημάτων τετραγωνικών συναρτήσεων και εύρεση του άξονα συμμετρίας τους.
- Την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

[17]Στον τίτλο του Κεφαλαίου (σελ.14/C1) και μόνο χρησιμοποιείται ο όρος «συνάρτηση» (function), αν και θα οριστεί λεπτομερώς αργότερα, στο C3.

[18] “plot graphs of quadratic equations” (σελίδα 14/C1), έκφραση που ίσως προκαλέσει σύγχυση στον μαθητή, αφού τα γραφήματα συνδέονται με συναρτήσεις, όχι με εξισώσεις.

Κεφάλαιο 3/C1: ***Εξισώσεις και Ανισώσεις***

Το Κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια του προηγούμενου και θέμα του αποτελεί η επίλυση συστημάτων εξισώσεων και ανισώσεων. Επαναλαμβάνει και επεκτείνει τη σχετική θεωρία της ενότητας Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4.

Στο μάθημα αρχικά υποδεικνύεται ο τρόπος επίλυσης ενός συστήματος εξισώσεων (όπου είτε και οι δύο εξισώσεις βρίσκονται σε γραμμική μορφή, είτε η μία σε γραμμική και η άλλη σε τετραγωνική μορφή) μέσω απαλοιφής του ενός αγνώστου ή μέσω αντικατάστασης. Ακολουθεί μελέτη γραμμικών ανισώσεων και συστημάτων τους, με εύρεση των λύσεών τους. Τέλος, σημαντική θέση στο Κεφάλαιο κατέχει η επίλυση Δευτεροβάθμιας ανίσωσης.

Στις εφαρμογές του Κεφαλαίου:

- Διδάσκεται η γραφική επαλήθευση των λύσεων ενός συστήματος εξισώσεων.
- Αναφέρεται αναλυτικά ο τρόπος εύρεσης των λύσεων γραμμικής ανίσωσης (ή και συστήματος γραμμικών ανισώσεων) και παράστασής τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Υποδεικνύεται η εύρεση των λύσεων Δευτεροβάθμιας ανίσωσης μέσω της εύρεσης των ριζών της αντίστοιχης Δευτεροβάθμιας εξίσωσης, με σχεδιασμό του γραφήματος και χρήση αυτού για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου κατά κύριο λόγο αποβλέπουν στην εξοικείωση των μαθητών με αλγεβρικές πράξεις για την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν εξισώσεις και ανισώσεις 2^{ου} βαθμού. Χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες ασκήσεις:

Άσκηση 1: Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η $kx^2 + 8x + 5 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες. (Θέμα τελικών εξετάσεων)

Άσκηση 2: Λύστε το σύστημα εξισώσεων: $\begin{array}{c} y + 2x = 5 \\ 2x^2 - 3x - y = 16 \end{array}$

a. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος ή αλλιώς, βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες: $2x^2 - 3x - 16 > 5 - 2x$. [Edexcel, Ιούνιος 2004]

Άσκηση 3: Δοθέντος του ότι $x^2 + 10x + 36 \equiv (x+a)^2 + b,$ όπου οι a, b είναι σταθερές,

a. Υπολογίστε τις τιμές των a, b

b. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + 10x + 36 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

Η εξίσωση $x^2 + 10x + k = 0$ έχει πραγματικές ρίζες

c. Βρείτε την τιμή του k

d. Για αυτήν τη τιμή του k, σχεδιάστε το γράφημα της $y = x^2 + 10x + k$, υποδεικνύοντας τις συντεταγμένες τυχόν σημείων όπου το γράφημα συναντά τους άξονες των συντεταγμένων [Edexcel, Ιούνιος 2004].

Κεφάλαιο 4/C1: ***Σχεδιασμός καμπύλων***

Το Κεφάλαιο αυτό, όπως δηλώνεται στην εισαγωγή του, έχει ως στόχο να διδάξει στους μαθητές τον τρόπο χάραξης απλών καμπύλων και την εφαρμογή μετασχηματισμών σε αυτές. Βασίζεται στη σχετική θεωρία της ενότητας Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4, την οποία και εμπλουτίζει.

Η ύλη του Κεφαλαίου είναι δομημένη κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Στο πρώτο μέρος διδάσκεται ο τρόπος σχεδιασμού καμπύλων τρίτου βαθμού, της μορφής $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ και ειδικότερα η ερμηνεία γραφημάτων κυβικών συναρτήσεων της μορφής $y = x^3$. Ακολουθεί μελέτη της καμπύλης της συνάρτησης $y = \frac{k}{x}$, όπου k σταθερά και επίλυση συστημάτων εξισώσεων με τη εύρεση των σημείων τομής των γραφημάτων των αντίστοιχων καμπύλων.

Το δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου επικεντρώνεται στη μελέτη καμπύλων της μορφής $f(x+a)$, $f(x)+a$, $f(ax)$ και $af(x)$ σε σχέση με την καμπύλη της εξίσωσης $y = f(x)$ και σε συνδυασμούς τους.

Μέσω εφαρμογών εισάγονται τα εξής:

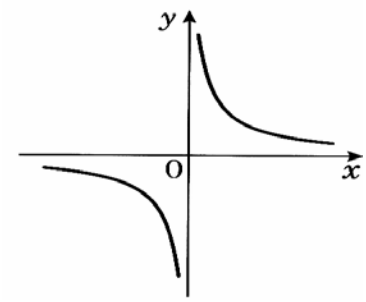
- Οι συμβολισμοί $x \to \infty, y \to \infty$, $x \to -\infty, y \to -\infty$ με την ακόλουθη ερμηνεία[19]: «όταν το x είναι μεγάλο (large) και θετικό (positive), το y είναι μεγάλο και θετικό» και «όταν το x είναι μεγάλο (large) και αρνητικό (negative), το y είναι μεγάλο και αρνητικό», αντίστοιχα.
- Η έννοια του (τοπικού) μεγίστου (maximum point) ως «το σημείο όπου η κλίση (gradient) αλλάζει από +ve σε 0 και σε -ve» [αντίστοιχα, το (τοπικό) ελάχιστο (minimum point) ορίζεται σαν «το σημείο όπου η κλίση αλλάζει από -ve σε 0 και

[19] Σελίδα 38/C1.

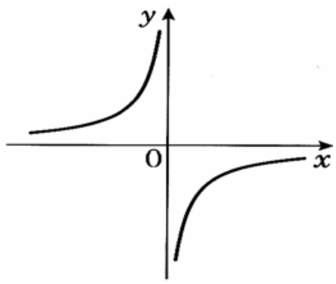
σε +ve»][20]. Σημειώνεται ότι στην παρούσα φάση δεν πρόκειται να ζητηθεί από τους σπουδαστές να βρουν τις συντεταγμένες των ακροτάτων.

- Η έννοια του σημείου καμπής (point of inflexion) για το σημείο $O(0,0)$ της $y = x^3$: «Η καμπύλη είναι επίπεδη στο $(0,0)$. Αυτό το σημείο καλείται σημείο καμπής. Η κλίση είναι θετική λίγο πριν το $(0,0)$ και θετική λίγο μετά»[21].
- Η έννοια της οριζόντιας ασύμπτωτης (horizontal asymptote), κατά τη μελέτη της καμπύλης της συνάρτησης $y = \frac{k}{x}$: «Η καμπύλη δεν τέμνει τους άξονες. Η καμπύλη τείνει στον άξονα των x όταν το x είναι μεγάλο και θετικό ή όταν είναι μεγάλο και αρνητικό»[22] (Ανάλογα για τον άξονα των y ορίζεται η κατακόρυφη ασύμπτωτη).

$y = \frac{k}{x}$, $k>0$



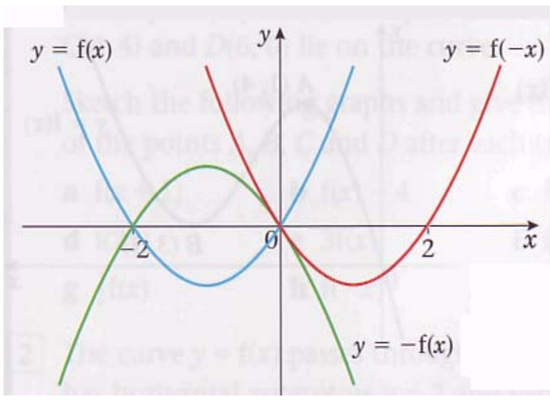
$y = \frac{k}{x}$, $k<0$



Σχήμα 1

- Η $y = -f(x)$ ως συμμετρική της $y = f(x)$ με άξονα συμμετρίας τον άξονα των τετμημένων. Ανάλογα, η $y = f(-x)$ είναι συμμετρική της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Αυτό προκύπτει από τη μελέτη των $f(x) = x(x+2)$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$ όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

Επίσης θεωρείται ότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τα Σχήματα των βασικών καμπύλων: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^3$, $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ και $y = \frac{1}{x}$.

[20] Σελίδα 38/C1.
[21] “The curve is ‘flat’at (0,0).This point is called a point of inflexion. The gradient is positive just before (0,0) and positive just after (0,0)”, σελίδα 43/C1.
[22] “The curve does not cross the axes. The curve tends towards the x-axis when x is large and positive or large and negative. The x axis is a horizontal asymptote”, σελίδα 46/C1.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου περιλαμβάνουν:

- Τη σχεδίαση καμπύλων και τον προσδιορισμό των σημείων τομής τους με τους άξονες των συντεταγμένων.
- Γραφική επίλυση συστημάτων εξισώσεων.
- Μοναδικότητα λύσης, υπολογισμό αριθμού λύσεων εξίσωσης.
- Μετασχηματισμούς καμπύλων.

Κεφάλαιο 6/C1: ***Ακολουθίες (Sequences)***

Στόχος του Κεφαλαίου αυτού, όπως δηλώνεται και στην εισαγωγή του, είναι να δείξει στους μαθητές το πώς δημιουργείται μια ακολουθία αριθμών (sequence) και πώς μπορούν να υπολογισθούν όροι (terms) και αθροίσματα όρων αριθμητικών προόδων. Οι έννοιες αυτές δεν είναι άγνωστες στους μαθητές: στην ενότητα Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4 διδάσκεται το πώς προκύπτουν απλές ακολουθίες άρτιων και περιττών αριθμών, τετραγώνων ακεραίων, δυνάμεων του 2 και του 10, τριγωνικών αριθμών κ.α.

Ορίζονται:

- Η ακολουθία αριθμών.
- Ο γενικός όρος ακολουθίας.
- Η αριθμητική πρόοδος (ορισμός σύμφωνα με την ελληνική ορολογία, στο αγγλικό εγχειρίδιο "arithmetic sequence").
- Το άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου (ορισμός σύμφωνα με την ελληνική ορολογία, στο αγγλικό εγχειρίδιο "arithmetic series" (αριθμητική σειρά)).

Η δομή του 6^{ου} Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Στην πρώτη ενότητα δίνεται ο ορισμός της ακολουθίας αριθμών ως «Μια σειρά αριθμών που ακολουθούν έναν καθορισμένο κανόνα[23]». Η δεύτερη ενότητα εισάγει την έννοια του γενικού όρου ακολουθίας: τα λυμένα παραδείγματα και οι ασκήσεις της βασίζονται στο ότι αν κάποιος γνωρίζει τον n-οστό όρο μιας ακολουθίας, τότε μπορεί να υπολογίσει όποιον άλλο όρο της επιθυμεί. Η έννοια της αναδρομικότητας είναι το κύριο θέμα της επόμενης ενότητας και εισάγεται μέσω

[23] "A series of numbers following a set rule", σελίδα 82/C1. Ο αντίστοιχος ορισμός στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας Β΄ Ενιαίου Λυκείου (σελίδα 90) είναι ο εξής: «Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των $\aleph^*$).

παρατήρησης των όρων μιας αριθμητικής προόδου (η οποία θα ορισθεί στη συνέχεια). Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στον ρόλο του πρώτου όρου μιας ακολουθίας κατά τον αναδρομικό ορισμό της. Τα λυμένα παραδείγματα και οι ασκήσεις της ενότητας περιέχουν: εύρεση όρων ακολουθίας δοθέντων του αναδρομικού ορισμού και του πρώτου όρου της, κατασκευή αναδρομικών τύπων και διάφορες παραλλαγές των προηγούμενων.

Στις επόμενες ενότητες δίνονται οι ορισμοί:

- Της αριθμητικής προόδου ως «η ακολουθία που αυξάνει κατά μια σταθερή ποσότητα κάθε φορά»[24] και ο τύπος της $U_{k+1} = U_k + n$, $k \geq 1$, $n \in Z$.
- Του αθροίσματος n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου, με n-οστό όρο τον $a+(n-1)d$, όπου a ο πρώτος όρος της προόδου και d η διαφορά[25] της.

Τα λυμένα παραδείγματα και οι ασκήσεις που αναφέρονται στα παραπάνω αποτελούν άμεσες εφαρμογές των προαναφερθέντων τύπων.

Εισαγωγή για τον υπολογισμό του αθροίσματος των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου αποτελεί η αναφορά που γίνεται στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο της μεθόδου[26] με την οποία υπολόγισε ο Carl Friedrich Gauss (1777-1855) το ακόλουθο άθροισμα:

1+2+3+4+5+...+99+100

Έστω S = 1+2+3+4+5+...+99+100.

Γράφοντας τους προσθετέους με αντίθετη σειρά: S = 100+99+...+6+5+4+3+2+1.

Αθροίζοντας τα δύο ποσά: 2S = 101+101+101+....101

2S = 100x101

S = (100x101) $\div$ 2

S = 5050

[24] "A sequence that increases by a constant amount each time", στη σελίδα 88/C1. Κατά τη γνώμη μας ο ορισμός αυτός μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στο μαθητή, καθώς είναι πιθανό να θεωρήσει θετική τη σταθερή ποσότητα. Ο αντίστοιχος ορισμός στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας Β΄ Ενιαίου Λυκείου (σελίδα 94) είναι, κατά τη γνώμη μας, καλύτερα διατυπωμένος ως εξής: «Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού».

[25] Η διαφορά (common difference) αριθμητικής προόδου «Είναι εκείνος ο σταθερός αριθμός που προστιθέμενος (ή αφαιρούμενος) δίνει το επόμενο όρο μιας "αριθμητικής σειράς"», όπως δηλώνεται στη σελίδα 90/C1. Δεν ορίζεται μαζί με την αριθμητική πρόοδο, όπως συμβαίνει στο σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας Β΄ Ενιαίου Λυκείου.

[26] Η συγκεκριμένη μέθοδος βρίσκεται πριν από την απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου και στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας Β΄ Ενιαίου Λυκείου, στη σελίδα 96.

Στη συνέχεια η απόδειξη του τύπου $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ ή $S_n = \frac{n}{2}(a + L)$, όπου a ο πρώτος όρος της ακολουθίας, d η διαφορά της προόδου, n το πλήθος των όρων και L ο τελευταίος όρος περιγράφεται λεπτομερώς, ενώ τονίζεται στους μαθητές η σπουδαιότητά του και η υποχρέωσή τους να γνωρίζουν την απόδειξή του (η απόδειξη του τύπου υπάρχει και ως σχολική άσκηση). Τέλος εισάγεται ο συμβολισμός $\sum$ για το παραπάνω άθροισμα.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου περιέχουν:

- Τον υπολογισμό όρων ακολουθίας, δοθέντος του γενικού όρου της ή του αναδρομικού τύπου της.
- Την εύρεση τύπου ακολουθίας και προσδιορισμό του αν αποτελεί αριθμητική ακολουθία.
- Ανισοτικές σχέσεις-εξισώσεις.

Σημαντική θέση στο Κεφάλαιο κατέχουν τα προβλήματα μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων, τα οποία συχνά αποτελούν θέματα στις τελικές εξετάσεις, όπως εκείνα του τελικού ποσού αποταμίευσης με ημερήσιες καταβολές χρηματικών ποσών, του υπολογισμού αποδοχών μετά από σταθερές ετήσιες αυξήσεις, προμήθειες αντιπροσώπων κ.α.

Ακολουθεί αναφορά χαρακτηριστικών παραδειγμάτων:

Πρόβλημα 1: Ο τέταρτος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 3k, όπου k σταθερά και το άθροισμα των πρώτων έξι όρων της προόδου είναι 7k+9.

a. Δείξτε ότι ο πρώτος όρος της είναι ο 9-8k.

b. Εκφράστε τη διαφορά της προόδου μέσω k.

Δοθέντος του ότι ο έβδομος όρος της προόδου είναι ο 12, υπολογίστε:

c. την τιμή του k.

το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου. [Edexcel, Ιανουάριος 2001]

Πρόβλημα 2: (Κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, των οποίων η ακολουθία των πλευρών τους προκύπτει από κάποια αριθμητική πρόοδο): Ένα πολύγωνο έχει 10 πλευρές, τα μήκη των οποίων, ξεκινώντας από τη μικρότερη, σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο. Η περίμετρος του πολυγώνου είναι 675 cm και το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς είναι όσο δύο φορές εκείνου της μικρότερης. Να βρείτε, για την πρόοδο αυτή τη διαφορά και τον πρώτο όρο της [Edexcel, Ιανουάριος 1998]

Κεφάλαιο 7/C1: ***Παραγώγιση***

Το 7^{ο} Κεφάλαιο αποτελεί μια πρώτη εισαγωγή στον λογισμό δείχνοντας στους μαθητές πώς να υπολογίζουν μέσω της παραγώγισης:

- Την κλίση καμπύλης σε δοθέν σημείο.
- Τον ρυθμό μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς κάποια άλλη.

Η διδακτέα ύλη κατανέμεται στις ακόλουθες ενότητες, κάθε μία από τις οποίες συνδέεται με τις προηγούμενές της:

7.1:Εκτίμηση κλίσης εφαπτομένης.

7.2:Εύρεση τύπου για την κλίση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και άλλων συναρτήσεων της μορφής $f(x)=x^n$, $n \in \Re$.

7.3:Εύρεση τύπου για την κλίση συναρτήσεων της μορφής $f(x)=ax^2+bx+c$, όπου a, b και c σταθερές.

7.4:Εύρεση τύπου για την κλίση συναρτήσεων όπως η $f(x)=x^3+x^2-x^{\frac{1}{2}}$ και γενικότερα της μορφής $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, όπου $a_n, a_{n-1},...,a_0$ σταθερές, $a_n \neq 0$ και $n \in \Re$.

7.5:Ανάπτυξη ή απλοποίηση πολυωνυμικών συναρτήσεων για ευκολότερη παραγώγισή τους.

7.6:Επανάληψη της διαδικασίας παραγώγισης για την παράγωγο δεύτερης τάξης.

7.7:Εύρεση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης f σε δοθέν σημείο χρησιμοποιώντας την $f'(x)$ και αντικαθιστώντας την τιμή του x.

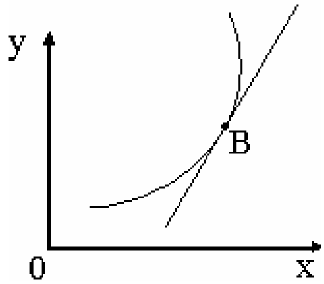
7.8:Χρήση παραγώγισης για τον υπολογισμό της κλίσης εφαπτομένης σε καμπύλη, εύρεση των εξισώσεων εφαπτομένης και καθέτου σε συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης.

Πιο αναλυτικά, στην ενότητα 7.1 δίνεται ο ορισμός της κλίσης καμπύλης σε συγκεκριμένο σημείο ως η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο αυτό[27]. Η εφαπτομένη (tangent) προσδιορίζεται ως «μια ευθεία που αγγίζει, αλλά δεν τέμνει την καμπύλη[28]». Στο σχολικό εγχειρίδιο προτείνεται για την εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης σε σημείο Β γνωστής καμπύλης ο μαθητής να υπολογίζει την κλίση των χορδών που συνδέουν το Β με άλλα σημεία της καμπύλης και να ερευνά τις τιμές

[27] “The gradient of a curve at a specific point is defined as being the same as the gradient of the tangent to the curve at that point”, σελίδα 102/C1.

[28] “The tangent is a straight line which touches, but doesn’t cut the curve”, σελίδα 102/C1.

που παίρνουν οι κλίσεις όσο τα σημεία προσεγγίζουν το B καταλήγοντας στο ότι προσεγγίζουν μια οριακή τιμή, την κλίση της εφαπτομένης (κλίση καμπύλης) (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Στα λυμένα παραδείγματα που έπονται της θεωρίας στο σχολικό εγχειρίδιο χρησιμοποιείται η καμπύλη με εξίσωση $y=x^2$. Τονίζονται τα ακόλουθα:

- Κατά την κίνηση κατά μήκος της καμπύλης, απομακρυνόμενοι από την αρχή των αξόνων «οι χορδές γίνονται ολοένα και πιο απότομες (steeper) και οι κλίσεις μεγαλύτερες (larger)[29]».
- Η τοπική ευθύτητα της καμπύλης σε μια περιοχή πολύ κοντά σε δοθέν σημείο, μέσω μεγέθυνσης της περιοχής. Επίσης το ότι η κλίση του εν λόγω τμήματος της καμπύλης είναι κοντά στην κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό[30].

Σε συνέχεια των προηγουμένων, μέσω εφαρμογής διδάσκεται στους μαθητές το εξής: Έστω χορδή που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης $y=x^2$, τα B(1,1) και P(1+h, $(1+h)^2$) των οποίων οι τετμημένες διαφέρουν κατά σταθερά h. Τότε, όταν το h είναι μικρό, η κλίση της χορδής είναι κοντά στην κλίση της εφαπτομένης. Θεωρώντας την h πολύ κοντά στο 0, υπολογίζεται αριθμητικά η κλίση της εφαπτομένης[31].

Στόχος της ενότητας 7.2 είναι η εισαγωγή του τύπου της κλίσης της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και άλλων συναρτήσεων της μορφής $f(x)=x^n$, $n\in\Re$.

Σε αυτήν ορίζονται:

- Η κλίση της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της καμπύλης $y=f(x)$ ως «ο ρυθμός μεταβολής του y αναφορικά με το x»[32].
- Η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ ως «η κλίση της $y=f(x)$ στο σημείο $(x,f(x))$»[33].

---

[29] Σελίδα 103/C1.

[30] “[...]. This section is almost a line and is close in gradient to the tangent at the point B”, σελ. 103/C1.

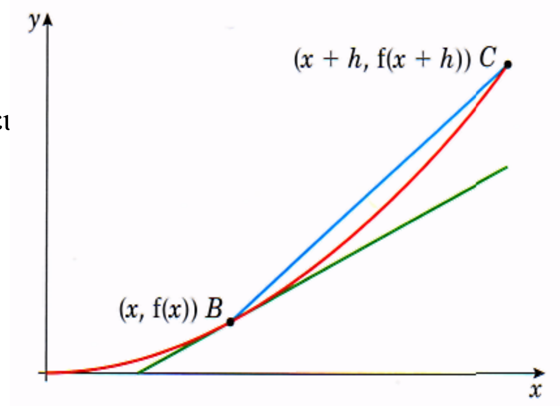
[31] Αφού υπολογίζεται η κλίση της χορδής PB=2+h, το σχολικό εγχειρίδιο αναφέρει (σελίδα 104/C1): “When h is small the gradient of the chord is close to the gradient of the tangent and 2+h is close to the value 2” και «If you let h become very close to zero, the gradient (of the tangent) is very close to 2”.

[32] Σελίδα 105/C1. Η καμπύλη που χρησιμοποιείται είναι εκείνη με εξίσωση $y=x^2$ και, ακολουθώντας την ίδια μέθοδο της σταθεράς h, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτει ότι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(x,x^2\right)$ είναι η $2x$.

[33] “The gradient formula for $y=f(x)$ is given by the equation: gradient= $f'(x)$, where $f'(x)$ is called the derived function”[...] “$f'(x)$ is defined as the gradient of the curve $y=f(x)$ at the

Ακολουθεί γενίκευση των προηγούμενων για το γράφημα της $y = f(x)$, όπου $f(x) = x^n$, $n \in \Re$, με την κλίση της χορδής BC με B$(x, f(x))$ και C$(x+h, f(x+h))$ να δίνεται από τον τύπο $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$.

Το σχολικό εγχειρίδιο αναφέρει ότι « Όσο μικραίνει το h και η κλίση της χορδής πλησιάζει εκείνη της εφαπτομένης, ο ορισμός της $f'(x)$ δίνεται από τον τύπο $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ [34]».



Σχήμα 4

Μέσω κατευθυνόμενων δραστηριοτήτων ζητείται να υπολογισθούν, με χρήση του προηγούμενου τύπου, οι $f'(x)$ για $f(x) = x^3$ και $f(x) = \frac{1}{x}$ προκειμένου να προκύψει χωρίς απόδειξη το: «Αν $f(x) = x^n$, $n \in \Re$, τότε $f'(x) = nx^{n-1}$ ».[35]

Οι ασκήσεις της ενότητας αποτελούν απλές εφαρμογές του προηγούμενου τύπου.

Στόχος της επόμενης ενότητας (7.3) είναι ο υπολογισμός της κλίσης συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου οι a, b, c σταθερές. Στα πλαίσια του μαθήματος ορίζονται:

- Τα δx και δy ως «σύμβολα που αντιπροσωπεύουν μικρές αλλαγές στην τιμή των x και y αντίστοιχα»(το δx αντικαθιστά το h των προηγούμενων ενοτήτων)[36].
- Η παράγωγος $f'(x)$ ως το πηλίκο $\frac{dy}{dx}$, αλλιώς η παράγωγος του y ως προς x όπου $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$, ενώ ορίζεται ως παραγώγιση η διαδικασία εύρεσης του $\frac{dy}{dx}$ όταν δίνεται το y.[37]

---

general point $(x, f(x))$" (σελίδα 106/C1). Στην ίδια σελίδα διευκρινίζεται ότι εκφράζει και την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

[34] Σελίδα 106/C1: "And so as h becomes small and the gradient of the chord becomes close to the gradient of the tangent, the definition of $f'(x)$ is given as $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

[35] Στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ' Λυκείου η σχέση αποδεικνύεται (σελ. 224).

[36] Σελίδα 109/C1.

[37] Σελίδα 110/C1: "$\frac{dy}{dx}$ is called the derivative of y with respect to x. Also $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.", "The process of finding $\frac{dy}{dx}$ when y is given is called differentiation."

Στο μάθημα ορίζεται ότι για $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $n \in \Re$ και υπολογίζεται το πηλίκο $\frac{dy}{dx}$ για $y = ax^2 + bx + c$. Στα παραδείγματα και στις ασκήσεις της ενότητας ζητείται ο υπολογισμός του πηλίκου $\frac{dy}{dx}$ για συναρτήσεις σε μορφή τριωνύμου και, γνωστής της εξίσωσης της συνάρτησης $f(x)$:

-Η κλίση της καμπύλης σε δοθέν σημείο.

-Το σημείο της καμπύλης όπου η κλίση της παίρνει συγκεκριμένη τιμή.

-Η κλίση καμπύλης σε σημεία όπου αυτή τέμνεται από γνωστή ευθεία.

Η ενότητα 7.4 αποτελεί γενίκευση της αμέσως προηγούμενης, καθώς σε αυτή υπολογίζεται η κλίση συναρτήσεων της μορφής $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, όπου $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ σταθερές, $a_n \neq 0$ και $n \in \Re$.

Στο μάθημα παρατίθενται χωρίς απόδειξη τα ακόλουθα:

-Αν $y = ax^n$, με a σταθερά, τότε $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.

- Για $y = f(x) \pm g(x)$, $\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$ [38].

Η επόμενη ενότητα 7.5 διδάσκει στους μαθητές το πώς να κάνουν τη διαδικασία της παραγώγισης πολυωνυμικών συναρτήσεων ευκολότερη γι’ αυτούς, μέσω πράξεων ανάπτυξης και απλοποίησης, ενώ στην ενότητα 7.6 εισάγεται η έννοια της δεύτερης παραγώγου. Η ενότητα 7.7 εισάγει τις έννοιες της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής[39], συνδέει την κλίση συνάρτησης με τον ρυθμό μεταβολής και υπενθυμίζει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς τον χρόνο εκφράζει την επιτάχυνση και ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ως προς τον χρόνο την ταχύτητα (απλή αναφορά των τελευταίων).

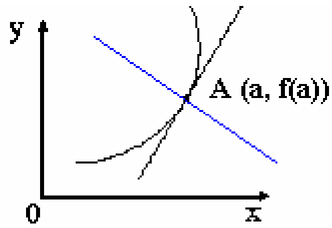
Η τελευταία ενότητα (7.8) έχει ως αντικείμενο μελέτης:

- Την εύρεση της κλίσης εφαπτομένης συνάρτησης μέσω παραγώγισης.
- Την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης και της κάθετης σε αυτή (normal) σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

[38] Στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Γ’ Λυκείου η σχέση αποδεικνύεται (σελ. 229).

[39] “The variables in the relationship $y = f(x)$ are such that x is the independent variable and y is the dependent variable” (σελίδα 116/C1). Θα περιμέναμε η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή να εισαχθεί κατά τον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης.

Στο μάθημα ορίζεται η κάθετη καμπύλης (normal). Με χρήση της εξίσωσης της ευθείας γραμμής προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(a, f(a))$, η $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ και η κλίση της καθέτου $-\frac{1}{f'(a)}$, με εξίσωση: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$.



Σχήμα 5

Τα παραδείγματα και οι ασκήσεις της ενότητας αυτής αποτελούν σχετικά απλές εφαρμογές των παραπάνω τύπων. Στο τέλος του Κεφαλαίου βρίσκονται ασκήσεις που καλύπτουν όλη την διδακτέα ύλη και αναφέρονται:

-Στον υπολογισμό της κλίσης μιας καμπύλης και στην εύρεση σημείων όπου αυτή μηδενίζεται.

-Στην εύρεση σημείων όπου γνωστή καμπύλη έχει συγκεκριμένη κλίση.

-Στην παραγώγιση συναρτήσεων.

-Στο ρυθμό μεταβολής όγκου και πλευρικής επιφάνειας κυλινδρικού δοχείου ως προς την ακτίνα βάσης.

-Στην εφαπτομένη και στην κάθετη καμπύλης.

Κεφάλαιο 8/C1: *Ολοκλήρωση*

Στο Κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μια πρώτη εξοικείωση των μαθητών με την έννοια της ολοκλήρωσης, η οποία στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο προσδιορίζεται ως «η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης».[40]

Στα πλαίσια του μαθήματος η ολοκλήρωση περιγράφεται ως «η διαδικασία εύρεσης του y όταν είναι γνωστό το $\frac{dy}{dx}$»[41] και, ανάλογα, δοθέντος του $f'(x)$, το $f(x)$. Δίνεται στους μαθητές η ακόλουθη πρόταση: «Για $\frac{dy}{dx} = x^n$, $y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$», με την υπόδειξη ότι «(το y) ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα καθώς δεν μπορείτε να βρείτε τη σταθερά»[42]. Λίγο αργότερα εισάγεται

[40] "[...] the reverse process of differentiation which is called integration." (σελίδα 122/C1)

[41] "Integration is the process of finding y when you know $\frac{dy}{dx}$." (σελίδα 122/C1)

[42] "This is called indefinite integration because you cannot find the constant." (σελίδα 122/C1)

ο συμβολισμός του ολοκληρώματος του x^n, σε συνέχεια του προηγούμενου τύπου, ο $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$.

Οι εφαρμογές του σχολικού εγχειριδίου απαιτούν χρήση των παραπάνω τύπων, αναλύουν βήμα προς βήμα τον τρόπο υπολογισμού απλών ολοκληρωμάτων, όπως το $\int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^3)dx$ και δείχνουν τον τρόπο προσδιορισμού της σταθεράς ολοκλήρωσης c, δοθέντος ενός σημείου της καμπύλης.

Οι ασκήσεις στηρίζονται στον βασικό τύπο του $\int x^n dx$. Ενδεικτικά αναφέρεται η ακόλουθη:

Άσκηση 1: Ένα σύνολο από καμπύλες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, έχουν εξισώσεις $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$,..., όπου $f_n^{'}(x) = f_{n-1}(x)$ και $f_1(x) = x^2$.

a. Να βρεθούν οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$.

b. Προτείνετε μια έκφραση για την $f_n(x)$.

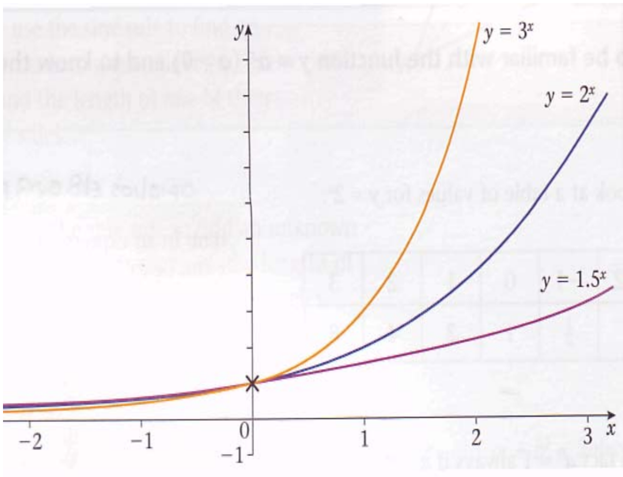
3.6.2.2 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Μαθηματικά Κορμού 2 (C2)

Κεφάλαιο 3/C2: ***Εκθετικές συναρτήσεις και λογάριθμοι***

Το 3ο Κεφάλαιο μελετά τις εκθετικές συναρτήσεις και τους λογαρίθμους. Διδάσκει τον τρόπο σχεδιασμού του γραφήματος μιας εκθετικής συνάρτησης, τη λογαριθμική έκφραση σχέσης και τη χρήση λογαρίθμων για την επίλυση εξισώσεων. Η έννοια της εκθετικής συνάρτησης δεν εισάγεται για πρώτη φορά: η συνάρτηση $y=k^x$ για ακέραιες τιμές του x και απλές θετικές τιμές του k έχει ήδη διδαχθεί στην ενότητα Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4.

Στο μάθημα αρχικά επιχειρείται εξοικείωση του μαθητή με τη συνάρτηση $y=a^x,(a>0)$ και το γράφημά της:

- Διδάσκεται η κατασκευή της καμπύλης της μέσω της δημιουργίας πίνακα τιμών και προκύπτει ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης της $y=a^x,(a>0)$.
- Με τη γραφική παράσταση των καμπύλων των $y=3^x$, $y=2^x$, $y=1.5^x$ (Σχήμα 6) επισημαίνεται ότι:

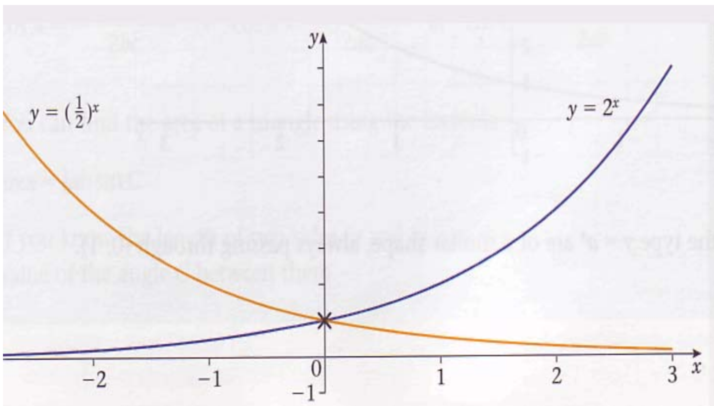


Σχήμα 6

όταν $x>0$, $3^x>2^x>1.5^x$ και όταν $x<0$, $3^x<2^x<1.5^x$.

- Διδάσκεται ότι το γράφημα της $y=(\frac{1}{a})^x$ είναι συμμετρικό ως προς τη $y=a^x,(a>0)$ με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

(Σχήμα 7, για τις $y=(\frac{1}{2})^x$, $y=2^x$)



Σχήμα 7

Ωστόσο, το μεγαλύτερο μέρος του Κεφαλαίου επικεντρώνεται στην έννοια του λογαρίθμου. Δίνεται το ότι το $\log_a n = x$ σημαίνει $a^x=n$, $\log_a 1=0$ και $\log_a a=1$ για $a>0$. Ορίζεται ο δεκαδικός λογάριθμος, την τιμή του οποίου προτρέπονται οι μαθητές να υπολογίζουν με τη χρήση μικροϋπολογιστή. Ακολουθούν οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων με απόδειξή τους και η επίλυση εξισώσεων της μορφής $a^x = b$. Τέλος, αποδεικνύεται ο τύπος αλλαγής βάσης αλγόριθμου $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Τα λυμένα παραδείγματα του Κεφαλαίου αποτελούν απλές εφαρμογές της θεωρίας, όπως είναι η σχεδίαση καμπύλης εκθετικής συνάρτησης και χρήση της για την γραφική επίλυση εξισώσεων, πράξεις μεταξύ λογαριθμικών εκφράσεων, εφαρμογές ιδιοτήτων λογαρίθμων, επίλυση εξισώσεων με τον άγνωστο στον εκθέτη κ.α.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου προσφέρονται μάλλον για εξοικείωση με το θεωρητικό κομμάτι του Κεφαλαίου και ως επί το πλείστον σχετίζονται με λογαρίθμους. Ενδεικτικά αναφέρονται μερικές από αυτές, θέματα τελικών εξετάσεων:

Άσκηση 1: Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1$.

Άσκηση 2:

a. Δοθέντος του ότι $3 + 2\log_2 x = \log_2 y$, δείξτε ότι $y = 8x^2$.
b. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος ή αλλιώς, βρείτε τις ρίζες α, β, όπου $\alpha < \beta$ της εξίσωσης $3 + 2\log_2 x = \log_2 (14x - 3)$.
c. Δείξτε ότι $\log_2 \alpha = -2$.
d. Υπολογίστε το $\log_2 \beta$, με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

Κεφάλαιο 7/C2: *Γεωμετρικές πρόοδοι*[43]

Στόχος του Κεφαλαίου αυτού είναι να διδάξει στους μαθητές την έννοια της γεωμετρικής προόδου. Εντός του, επίσης, υπολογίζεται το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου και το άπειρο άθροισμα όρων της. Η θεωρία στηρίζεται στην καλή γνώση των λογαρίθμων και των εκθετικών συναρτήσεων (3^{ο} Κεφάλαιο/C2) και στην μεθοδολογία επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού (3^{ο} Κεφάλαιο/C1).

[43] Ορισμός σύμφωνα με την ελληνική ορολογία Στο αγγλικό εγχειρίδιο δίνεται ως “geometric sequence” (σελίδα 94/C2), ενώ αργότερα (σελίδα 95/C2) αναφέρεται και ως “geometric progression”.

Στο μάθημα ορίζονται:

- Η γεωμετρική πρόοδος.
- *Το άπειρο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου*. Το αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο χαρακτηριστικά αναφέρει: «Έστω το άθροισμα S=3+1.5+0.75+0.375+…Το άθροισμα δεν υπερβαίνει ποτέ ένα συγκεκριμένο αριθμό, χωρίς να έχει σημασία το πόσους όρους της σειράς θα πάρετε. Ονομάζουμε τον αριθμό αυτό *όριο του αθροίσματος* ή, πιο συχνά, *άπειρο άθροισμα*».[44]
- *Η σύγκλιση* (convergence) *αθροίσματος απείρων όρων γεωμετρικής προόδου*. Στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο αναφέρεται ότι «(Για το άθροισμα S=3+1.5+0.75+0.375+…) ισχύει ότι $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 6(1-(\frac{1}{2})^n)$. Για n=3:$S_3$=5.25, για n=5:$S_5$=5.8125, για n=10:$S_{10}$=5.999 και για n=20:$S_{20}$=5.999994. Λέμε ότι αυτή η άπειρη σειρά είναι συγκλίνουσα με άπειρο άθροισμα 6. Συγκλίνουσα σημαίνει ότι τείνει σε μια συγκεκριμένη τιμή, όσο προστίθενται επιπλέον όροι. Δε συγκλίνουν όλες οι σειρές. Ο λόγος για τον οποίο συγκλίνει η εν λόγω σειρά είναι ότι οι όροι της μικραίνουν[45] συνεχώς. Αυτό συμβαίνει διότι $-1 < r < 1$. Το άπειρο άθροισμα μιας σειράς υπάρχει μόνο εάν $-1 < r < 1$. Έτσι, αν $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ και $-1 < r < 1$, $r^n \to 0$ για $n \to \infty$ τότε $S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$.»[46]

Στο μάθημα εισάγονται με τη σειρά τα εξής:

- Η έννοια της γεωμετρικής προόδου και του λόγου της.
- Ο τύπος του αθροίσματος των πρώτων n όρων γεωμετρικής προόδου (με απόδειξη).
- Το άπειρο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου..
- Η σύγκλιση αθροίσματος άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Οι κατευθυνόμενες εργασίες περιλαμβάνουν :

- Μοντελοποίηση με τη βοήθεια γεωμετρικών προόδων.

---

[44] “No matter how many terms of the series you take, the sum never exceeds a certain number. We call this number the limit of the sum, or more often, its sum to infinity.” (σελίδα 103/C2)

[45] Κατά τη γνώμη μας πιο σωστή είναι η έκφραση «[...]μικραίνουν συνεχώς **κατά απόλυτη τιμή**».

[46] “[…]. We say this infinite series is convergent and has a sum to infinity of 6. Convergent means the series tends towards a specific value as more terms are added. Not all series converge. The reason that this one does is that the terms of the sequence are getting smaller”. (σελίδα 104/C2)

- Την εύρεση του γενικού όρου για το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου της μορφής $a, ar, ar^2, ..., ar^n$. Σε εργασία αποδεικνύεται και ο τύπος: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ή $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

Στα παραδείγματα, εκτός από εφαρμογές τύπων, συμπεριλαμβάνεται η επίλυση προβλημάτων σχετικών με επιτόκια, αύξηση ή μείωση πληθυσμού, υποτίμηση αξίας, εξάπλωση ιού σε πληθυσμό κ.α.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου**,** τόσο σαν άμεσες εφαρμογές του μαθήματος όσο και στο επίπεδο της εμβάθυνσης, περιέχουν:

- Υπολογισμό $n-$οστού όρου και αθροίσματος όρων γεωμετρικής προόδου.
- Απόδειξη του ότι μία ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος (και εύρεση του λόγου της).
- Απόδειξη ύπαρξης και υπολογισμό άπειρου αθροίσματος όρων γεωμετρικής προόδου.

Ενδεικτική του πνεύματος που διέπει τις ασκήσεις του Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη ***άσκηση*** (θέμα τελικών εξετάσεων):

Οι πρώτοι τρεις όροι μιας γεωμετρική προόδου είναι οι $p(3q+1)$, $p(2q+2)$ και $p(2q-1)$, αντίστοιχα, όπου τα p, q είναι μη μηδενικές σταθερές.

a. Κάνοντας χρήση άλγεβρας, δείξτε ότι μια δυνατή τιμή του q είναι το 5 και υπολογίστε την άλλη δυνατή τιμή του q.
b. Υπολογίστε τον λόγο της προόδου για κάθε μία από τις δυνατές τιμές του q.

Δοθέντος του ότι $q = 5$ και το άθροισμα άπειρων όρων της προόδου είναι 896, υπολογίστε:

c. Την τιμή του p.
d. Το άθροισμα, με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων, των πρώτων δώδεκα όρων του αθροίσματος.

Τα προβλήματα του Κεφαλαίου σχεδόν εξ' ολοκλήρου απαιτούν μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων με τη βοήθεια γεωμετρικών προόδων. Στη συνέχεια παρατίθενται ενδεικτικά δύο από αυτά, τα οποία έχουν αποτελέσει θέματα τελικών εξετάσεων:

Πρόβλημα 1: Μια δρομέας αγωνίζεται σε διαδρομή 25 km. Κατά τα πρώτα 15 km τρέχει με σταθερό ρυθμό 12 km/h. Με τη συμπλήρωση 15 km μειώνει την ταχύτητά της και παρατηρείται ότι χρειάζεται πλέον 20% περισσότερο χρόνο να καλύψει ένα χιλιόμετρο σε σχέση με το προηγούμενό του.

a. Υπολογίστε τον συνολικό χρόνο, σε ώρες και λεπτά, που χρειάζεται η δρομέας να καλύψει τα πρώτα 16km της διαδρομής

Εάν ο χρόνος που απαιτείται για τη συμπλήρωση του r οστού km είναι u_r ώρες,

b. Δείξτε ότι για $16 \le r \le 25$, $u_r = \frac{1}{12}(1.2)^{r-15}$.

c. Βάσει της απάντησής σας στο b., ή αλλιώς, υπολογίστε τον χρόνο, με προσέγγιση λεπτού, στον οποίο η δρομέας ολοκλήρωσε τελικά τη διαδρομή.

Πρόβλημα 2: Ένα υγρό φυλάσσεται σε βαρέλι. Αρχικά το βαρέλι γεμίζει με 160 λίτρα αυτού. Λόγω της εξάτμισης, στο τέλος κάθε έτους η ποσότητα του υγρού στο βαρέλι μειώνεται κατά 15% της ποσότητας στην αρχή του έτους.

a. Υπολογίστε την ποσότητα του υγρού στο βαρέλι στο τέλος του πρώτου έτους

b. Δείξτε ότι η ποσότητα του υγρού στο βαρέλι στο τέλος των δέκα ετών είναι περίπου 31.5 λίτρα.

Στην αρχή κάθε έτους ένα νέο βαρέλι γεμίζει με 160 λίτρα υγρού, ούτως ώστε στο τέλος των 20 ετών να υπάρχουν 20 βαρέλια που περιέχουν υγρό.

c. Υπολογίστε τη συνολική ποσότητα υγρού, με προσέγγιση λίτρου, που περιέχεται στα βαρέλια στο τέλος των 20 ετών.

Κεφάλαιο 8/C2: *Γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων*

Το παρόν Κεφάλαιο επικεντρώνεται στη μελέτη των συναρτήσεων του ημιτόνου (sine), του συνημιτόνου (cosine), της εφαπτομένης (tangent) και των αντίστοιχων γραφημάτων τους. Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου είναι οικείες στους μαθητές, καθώς η χάραξη των γραφημάτων τους έχει ήδη διδαχθεί στην ενότητα Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4. Επιπλέον, βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις που αφορούν σε ορθογώνια τρίγωνα καθώς και το πυθαγόρειο Θεώρημα έχουν ήδη διδαχθεί στην ενότητα Ma3 (Σχήμα, χώρος και μέτρα), επίσης του Βασικού Σταδίου 4. Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η καλή γνώση του Κεφαλαίου 4/C1, σε ό,τι αφορά στους μετασχηματισμούς γραφικών παραστάσεων και στη σχεδίασή τους.

Το πρώτο μέρος του 8ου Κεφαλαίου περιέχει τριγωνομετρία: βασικοί τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο, θετικές και αρνητικές γωνίες, τριγωνομετρικός κύκλος και τεταρτημόρια, περιορισμοί για τον ορισμό εφαπτομένης γωνίας, πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών σε κάθε τεταρτημόριο με υπόδειξη μνημονικού κανόνα, τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών με άθροισμα ή διαφορά 180^0 και 360^0, υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών 30^0, 60^0 και 45^0 (με απόδειξη).

Στις εφαρμογές και στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου:

- Δοθείσης της ημιευθείας ΟΡ (Ο η αρχή των αξόνων), η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα των x, ζητείται να βρεθεί η θέση της όταν η θ:
  - είναι αρνητική γωνία (π.χ.-60^o).
  - είναι εκτός του εύρους 0-360^o (π.χ.-480^o, $+700^o$).
  - εκφράζεται σε rads (π.χ.$-\frac{5\pi}{8}$).
- Υπολογίζονται οι τιμές των $\sin\theta, \cos\theta$, για γωνίες θ πολλαπλάσιες των 90^0 (και σε rads, π.χ. $\sin(-\frac{\pi}{2})$.
- Ζητείται να αποδειχθούν οι τύποι των τριγωνομετρικών αριθμών συμπληρωματικών γωνιών.

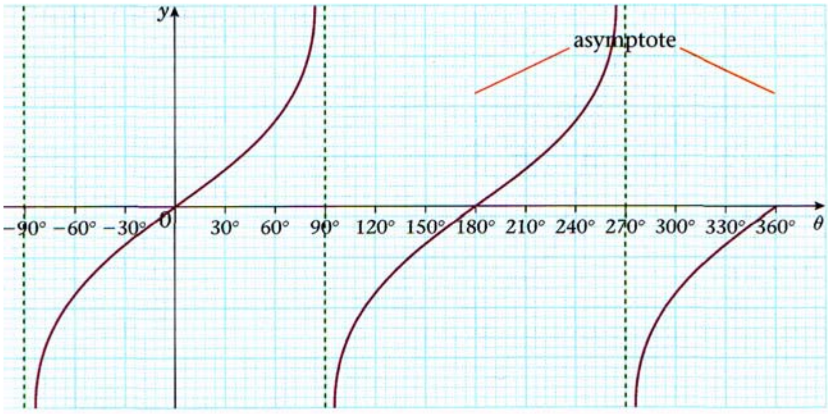
Παρατήρηση: οι ορισμοί της άρτιας και της περιττής συνάρτησης περιέχονται στην εκφώνηση άσκησης του Κεφαλαίου, όπου ζητείται να χαρακτηριστούν ως άρτιες ή περιττές οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Επίσης, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αντίθετων γωνιών δε διδάσκονται στο θεωρητικό τμήμα, αλλά η απόδειξή τους ζητείται σε υποερωτήματα ασκήσεων[47].

Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου:

- Αναλύονται τα γραφήματα των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Ορίζονται οι περιοδικές συναρτήσεις ως «οι συναρτήσεις που επαναλαμβάνονται μετά από ένα ορισμένο διάστημα και το διάστημα καλείται περίοδος της συνάρτησης»[48].
- Ερμηνεύονται τριγωνομετρικοί τύποι με τη βοήθεια συμμετριών.

[47] Σελίδα 117/C2.
[48] "Functions that repeat themselves after a certain interval are called periodic functions, and the interval is called the period of the function."(σελίδα 118/C2). Ο αντίστοιχος ορισμός στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Β' Λυκείου (σελίδα 10) είναι ο ακόλουθος: «Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε $\forall x \in A$ να ισχύει: (i) $x+T \in A, x-T \in A$ και (ii) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$. Ο αριθμός $T \in \Re$ λέγεται περίοδος της f ».

- Κατά την περιγραφή του γραφήματος της συνάρτησης της εφαπτομένης ορίζονται οι ασύμπτωτές της όταν θ=(2n+1)90^{o} για n ακέραιο αριθμό ως «οι γραμμές που προσεγγίζει η καμπύλη αλλά ποτέ δε φτάνει»[49]. (Σχήμα 8)



Σχήμα 8

- Εκτελούνται απλοί μετασχηματισμοί συναρτήσεων, όπως οι $a\sin\theta, a\cos\theta, a\tan\theta, \sin\theta + a, \cos\theta + a, \tan\theta + a, \sin(\theta + a), \cos(\theta + a), \tan(\theta + a)$, $\sin n\theta, \cos n\theta, \tan n\theta$ με σχεδίαση των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων που προκύπτουν.

Κεφάλαιο 9/C2: ***Παραγώγιση***

Στόχος του Κεφαλαίου αυτού, όπως αναφέρεται στη εισαγωγή του, είναι οι μαθητές να διδαχθούν τη χρήση της παραγώγισης ούτως ώστε να:

- Διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ μιας αύξουσας και μιας φθίνουσας συνάρτησης.
- Βρίσκουν τα μέγιστα και τα ελάχιστα σημεία μιας καμπύλης.
- Εφαρμόζουν τις τεχνικές αυτές σε πραγματικά προβλήματα.

Προαπαιτούμενα: Η θεωρία τετραγωνικών συναρτήσεων του $2^{ου}$ Κεφαλαίου/C1, και η παραγώγιση συναρτήσεων, όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 7/C1.

Η ύλη του Κεφαλαίου παρουσιάζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Αρχικά δίνονται οι ορισμοί της *αύξουσας συνάρτησης* (increasing function) (ανάλογα της *φθίνουσας συνάρτησης* (decreasing function)) ως εξής: «Μια συνάρτηση f που αυξάνει όσο αυξάνει το x στο διάστημα από $x = a$ έως $x = b$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα (a,b).» και «Για μια αύξουσα συνάρτηση στο

[49] "[…] lines to which the curve approaches but never reaches" (σελίδα 119/C2). Συμπληρώνει την αναφορά στην έννοια της ασύμπτωτης που έγινε στο Κεφάλαιο 4/C1.

διάστημα (a,b), εάν x_1, x_2 είναι δύο τιμές του x στο διάστημα $a \le x \le b$ και αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$. Έπεται ότι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $a \le x \le b$.»[50] (Κατά ανάλογο τρόπο ο ορισμός για την φθίνουσα συνάρτηση).

Παρατηρήσεις:

Η περιγραφή της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου συνάρτησης όπως λαμβάνει χώρα στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο κατά τη γνώμη μας περιέχει ορισμένες ασάφειες και ελλείψεις.

(a)Ο ορισμός της «αύξουσας» συνάρτησης που δίνεται, είναι εκείνος της γνησίως αύξουσας συνάρτησης, σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται στη σελίδα 149 του ελληνικού σχολικού εγχειριδίου της Γ' Λυκείου:

«Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.»

(b)Όπως έχει διατυπωθεί ο ορισμός, υποδηλώνεται στους μαθητές ότι αν η f είναι «αύξουσα» (ή «φθίνουσα») στο (a,b), τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική (αντίστοιχα αρνητική), κάτι που δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία, αν και «αύξουσα» (γνησίως αύξουσα κατά το ελληνικό εγχειρίδιο, σελίδα 254) στο $\Re$, έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0) = 0$.

(c)Τέλος, στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο γίνεται χρήση του θεωρήματος: «Αν $f'(x) > 0$ (ή $f'(x) < 0$) σε κάθε εσωτερικό σημείο x ενός διαστήματος Δ, τότε η f είναι «αύξουσα» (αντίστοιχα, «φθίνουσα») σε όλο το Δ»[51] χωρίς να επισημαίνεται το ότι η f θα πρέπει να είναι συνεχής στο διάστημα. Το σχολικό εγχειρίδιο ξεπερνά το εμπόδιο αυτό κάνοντας χρήση μόνο πολυωνυμικών (άρα συνεχών) συναρτήσεων στα λυμένα παραδείγματα και στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Στη συνέχεια ορίζονται τα ***μέγιστα*** (maximum points) μιας συνάρτησης ως «τα σημεία όπου η $f(x)$ σταματά να αυξάνει και αρχίζει να μειώνεται» και τα

---

[50] "A function f which increases as x increases in the interval from x=a to x=b is an increasing function in the interval (a,b)" και "For an increasing function in the interval (a,b), if x_1, x_2 are two values of x in the interval $a \le x \le b$ and if $x_1 < x_2$ then $f(x_1) < f(x_2)$. It follows that $f'(x) > 0$ in the interval $a \le x \le b$.", (σελίδα 129/C2)

[51] Σε παράδειγμα του σχολικού εγχειριδίου στη σελίδα 130/C2, προκειμένου να χαρακτηρισθεί η $f(x) = x^3 + 24x + 3 (x \in \Re)$ «αύξουσα συνάρτηση», το σχολικό εγχειρίδιο κατευθύνει τον μαθητή στην εύρεση της f': $f'(x) = 3x^2 + 24$, και στην απόδειξη του ότι η f' παίρνει μόνο θετικές τιμές.

ελάχιστα (minimum points) ως «τα σημεία όπου η $f(x)$ σταματά να μειώνεται και αρχίζει να αυξάνει»[52]. Ωστόσο, δεν γίνεται διαχωρισμός μεταξύ τοπικού και ολικού ελαχίστου ή μεγίστου. Απλή υπόδειξη σημείων τοπικού ελαχίστου και μεγίστου, χωρίς όμως ορισμό τους, γίνεται μόνο κατά την περιγραφή γραφικής παράστασης συνάρτησης. Χωρίς απόδειξη επίσης δηλώνεται ότι στα σημεία αυτά, που ονομάζονται (τοπικά) *ακρότατα* (turning points), ισχύει ότι $f'(x)=0$ (το γνωστό θεώρημα του Fermat).

Ακολουθεί ο ορισμός του ***σημείου καμπής***[53], ως «το σημείο όπου η κλίση (της συνάρτησης) παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή γειτονικά του»[54]. Σχετικά σημειώνεται ότι, αν και υπάρχουν σημεία καμπής με μη μηδενική κλίση, στο παρόν βιβλίο (Core Mathematics 2) θα εξετασθούν μόνο τα σημεία καμπής στα οποία η κλίση έχει μηδενική τιμή.

Κατά τη γνώμη μας ο ορισμός αυτός δεν είναι σωστά διατυπωμένος: σημείο καμπής είναι εκείνο το σημείο **στο οποίο** η κλίση της συνάρτησης παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, όχι «γειτονικά του». Άλλωστε, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f δύο φορές παραγωγίσιμης σε ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται ή

-Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Κατόπιν δίνεται ο ορισμός των ***στάσιμων σημείων*** (stationary points) ως «τα σημεία όπου η κλίση έχει μηδενική τιμή»[55], δηλώνεται ότι αυτά μπορεί να είναι:

- μέγιστα
- ελάχιστα
- σημεία καμπής

---

[52] "The points where $f(x)$ stops increasing and begins to decrease are called maximum points.", "The points where $f(x)$ stops decreasing and begins to increase are called minimum points." (σελίδα 131/C2). Στο Κεφάλαιο 4/C1 ως σημείο μεγίστου έχει ορισθεί το σημείο όπου η κλίση της καμπύλης αλλάζει από +ve σε 0 και στη συνέχεια σε –ve και ως σημείο ελαχίστου το σημείο όπου η κλίση της αλλάζει από –ve σε 0 και ακολούθως σε +ve.

[53] Στο Κεφάλαιο 4/C1, όπως αναφέρθηκε ήδη, ως σημείο καμπής προσδιορίσθηκε το 0(0,0) για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^3$, ως το σημείο όπου "η καμπύλη είναι «επίπεδη» και η κλίση της συνάρτησης είναι θετική λίγο πριν και λίγο μετά το (0,0)".

[54] "A point of inflexion is a point where the gradient is at a maximum or minimum value in the neighbourhood of the point." (σελίδα 131/C2).

[55] Σελίδα 131/C2. Σχετικά αναφέρουμε πως είναι δυνατόν κάποιος να μπερδέψει τους όρους «στάσιμο σημείο» και «κρίσιμο σημείο». Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία εκείνα ενός διαστήματος Δ όπου (i) η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή (ii) η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν. Ένα στάσιμο σημείο είναι πάντα κρίσιμο, δεν ισχύει, όμως, πάντα το αντίστροφο. Οι όροι είναι εναλλάξιμοι σε ομαλή καμπύλη.

και προτείνονται οι ακόλουθοι τρόποι προσδιορισμού ενός στάσιμου σημείου, μέσω υπολογισμού της δεύτερης και τρίτης παραγώγου της συνάρτησης[56]:

- Αν $\frac{dy}{dx}=0$ και $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, τότε το σημείο είναι ελάχιστο.
- Αν $\frac{dy}{dx}=0$ και $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, τότε το σημείο είναι μέγιστο.
- Αν $\frac{dy}{dx}=0$ και $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, τότε το σημείο είναι είτε μέγιστο, είτε ελάχιστο, είτε σημείο καμπής.
- Αν, τέλος, $\frac{dy}{dx}=0$ και $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, αλλά $\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, τότε το σημείο είναι σημείο καμπής.

Μέσω των εφαρμογών και των λυμένων παραδειγμάτων του Κεφαλαίου:

- Διδάσκεται η μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων που αφορούν σε χαρακτηρισμό σημείου (μέγιστο, ελάχιστο, σημείο καμπής) με χρήση παραγώγισης, επίλυση εξισώσεων, δημιουργία πίνακα μεταβολών για τιμές πλησίον του σημείου και περιγραφή σχήματος καμπύλης ή κάνοντας χρήση κριτηρίων 2ης και 3ης παραγώγου.
- Ορίζεται το σύνολο τιμών (range) μιας συνάρτησης.

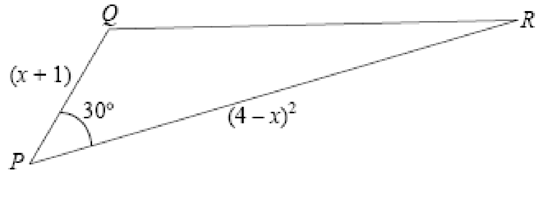
Στις ασκήσεις και στα προβλήματα του Κεφαλαίου ζητείται:

- Ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης καμπύλης.
- Μοντελοποίηση προβλημάτων που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις.
- Προσδιορισμός στάσιμων σημείων συνάρτησης.
- Εύρεση μέγιστης ή ελάχιστης τιμής εμβαδού επιφάνειας, όγκου, χωρητικότητας κ.α.

Ακολουθεί πρόβλημα, θέμα τελικών εξετάσεων, ενδεικτικό του πνεύματος του παρόντος Κεφαλαίου:

Πρόβλημα 1:

[Εξετάσεις Edexcel Ιουνίου 2004]



[56] Σελίδες 132 και 133/C2. Κατά τη γνώμη μας η διατύπωση των σχέσεων που έπονται δεν είναι ορθή. Προτείνεται η ακόλουθη διατύπωση (π.χ. πρώτη σχέση): « Αν $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0$ και $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}>0$ τότε το σημείο x_o είναι (τοπικό) ελάχιστο.»

Το παραπάνω Σχήμα απεικονίζει ένα τρίγωνο PQR. Η γωνία QPR είναι 30^0, το μήκος της PQ είναι $(x+1)$ και το μήκος της PR είναι $(4-x)^2$, όπου $x \in \Re$.

a. Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $A = \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$. (3)

b. Χρησιμοποιώντας λογισμό, δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου PQR αποκτά τη μέγιστη τιμή του όταν $x = \frac{2}{3}$. Εξηγήστε αναλυτικά πώς καταλήξατε στο ότι αυτή η τιμή του x δίνει το μέγιστο εμβαδόν. (6)

c. Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου PQR (1)

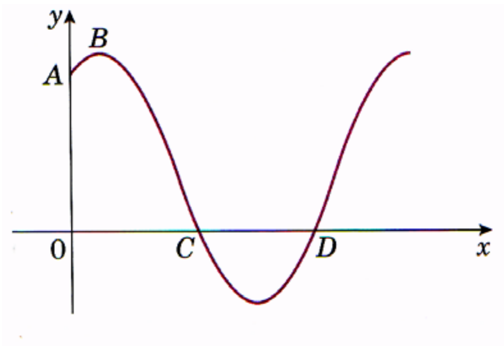
d. Υπολογίστε το μήκος του QR όταν το εμβαδόν του τριγώνου PQR παίρνει τη μέγιστη τιμή του. (3)

Κεφάλαιο 10/C2: ***Τριγωνομετρικές ταυτότητες και απλές εξισώσεις***

Το Κεφάλαιο αυτό εισάγει τριγωνομετρικές ταυτότητες ($\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$) και απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις ($\sin\theta = k, \cos\theta = k$, όπου $-1 \le k \le 1$ και $\tan\theta = p$, $p \in \Re$, αλλά και $\sin(n\theta + a) = k, \cos(n\theta + a) = k$, $\tan(n\theta + a) = p$) σε συνέχεια του $8^{ου}$ Κεφαλαίου/C2.

Η άσκηση που ακολουθεί, θέμα τελικών εξετάσεων, συνδέει το παρόν Κεφάλαιο, με το προηγούμενο:

Το διάγραμμα δείχνει τμήμα της καμπύλης με εξίσωση $y = f(x)$, όπου $f(x) = 1 + 2\sin(px^o + q^o)$ με p, q θετικές σταθερές και $q \le 90$. Η καμπύλη τέμνει τον άξονα των y στο σημείο A και τον άξονα των x στα σημεία C και D. Το σημείο B είναι μέγιστο της καμπύλης.



Δοθέντων των συντεταγμένων των A, C να είναι (0,2) και (45,0) αντίστοιχα,

a. Υπολογίστε την τιμή του q.

b. Δείξτε ότι $q = 4$.

c. Βρείτε τις συντεταγμένες των B και D.

Κεφάλαιο 11/C2: ***Ολοκλήρωση***

Το 11ο Κεφάλαιο έρχεται να συμπληρώσει τη θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού του 8ου Κεφαλαίου/C1 με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και την εφαρμογή του στον υπολογισμό εμβαδών χωρίων.

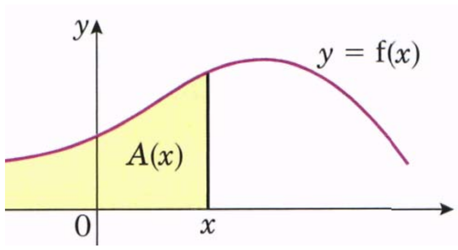
Καταρχήν, στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο δίνεται ο ορισμός της *ορισμένης ολοκλήρωσης* (definite integration) ως «ολοκλήρωση συναρτήσεων εντός καθορισμένων ορίων»[57]. Αμέσως μετά υποδεικνύεται η εξής μεθοδολογία των τριών σταδίων για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος:

Η δήλωση (The statement)		***Μετά την ολοκλήρωση*** (After integration) (αγκύλες)		***Η εκτίμηση*** (The evaluation) (παρενθέσεις)
$\int_a^b ...dx$	=	$\left[...\right]_a^b$	=	$(...)-(...)$

Ακολουθεί η εισαγωγή του ορισμένου ολοκληρώματος (definite integral) ως «$\int_a^b f'(x)dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b)-f(a)$ όπου f' η παράγωγος της f στο διάστημα (a,b).»[58]

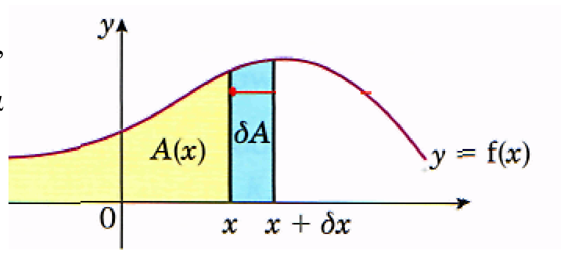
Στην επόμενη ενότητα γίνεται η σύνδεση του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από καμπύλη:

«Για οποιαδήποτε καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, μπορείτε να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη και αριστερά του x ως συνάρτηση του x, την $A(x)$ (Σχήμα 9). Όσο το x αυξάνει, η $A(x)$ αυξάνει επίσης.»[59]



Σχήμα 9

«Αν παρατηρήσετε μια μικρή αύξηση του x, έστω δx, τότε το εμβαδόν του χωρίου αυξάνει κατά μια ποσότητα $\delta A = A(x+\delta x) - A(x)$ (Σχήμα 10). Η επιπλέον αύξηση στο δA είναι κατά προσέγγιση ένα ορθογώνιο μεγέθους $y\delta x$.



Σχήμα 10

[57] "You need to be able to integrate simple functions within defined limits. This is called definite integration.", σελίδα 157/C2.

[58] Σελίδα 157/C2. Παραπέμπει στο Θεμελιώδες θεώρημα Απειροστικού λογισμού «Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,b]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a,b]$, τότε $\int_a^b f'(t)dt = G(b)-G(a)$.»

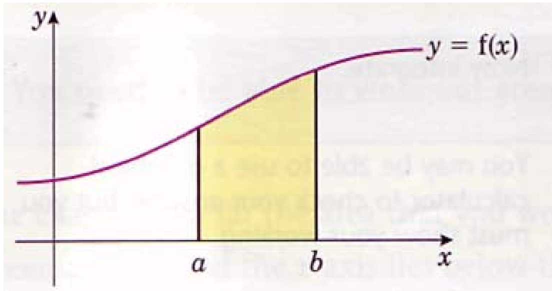
[59] Σελίδα 159/C2.

(Όσο το δx μικραίνει, τυχόν διαφορά ανάμεσα στο πραγματικό χωρίο και σε αυτό θα είναι ασήμαντη). Έτσι έχουμε $\delta A \approx y\delta x$ ή $\frac{\delta A}{\delta x} \approx y$ και, αν πάρουμε το όριο $\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)$, τότε, από το 7[ο] Κεφάλαιο/C1 προκύπτει ότι $\frac{dA}{dx} = y$. Γνωρίζοντας ότι $\frac{dA}{dx} = y$, για να βρείτε το A θα πρέπει να ολοκληρώσετε. Έτσι $A = \int y dx$ »[60].

Το σχολικό εγχειρίδιο συνεχίζει στην ίδια σελίδα: «Ειδικότερα, αν επιθυμείτε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μια καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, έχετε

Εμβαδόν χωρίου = $\int_a^b y dx$

όπου $y = f(x)$ η εξίσωση της καμπύλης»[61]



Σχήμα 11

Ακολουθεί υπολογισμός του εμβαδού χωρίου που βρίσκεται μεταξύ ευθείας και καμπύλης με γραφική αιτιολόγηση (δεν εξετάζεται ανάλογη περίπτωση όπου αντί ευθείας υπάρχει καμπύλη) και για περιπτώσεις όπου το τμήμα της καμπύλης παίρνει (και) αρνητικές τιμές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αναφορά στον κανόνα του τραπεζίου που έπεται, για τον υπολογισμό εμβαδού χωρίου που περικλείει μια καμπύλη όταν η ολοκλήρωσή της δεν είναι εφικτή. Στο σχολικό εγχειρίδιο γίνεται λεπτομερή απόδειξη του τύπου:

---

[60] Σελίδα 159/C2. Όσα αναφέρει το αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο στη συγκεκριμένη ενότητα υπάρχουν στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ' Λυκείου, στη σελίδα 334, κατά την εποπτική διαπίστωση του συμπεράσματος του ακόλουθου θεωρήματος μέσω του οποίου εξασφαλίζεται η ύπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ:

«Αν f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α σημείο του, τότε η συνάρτηση F(x)= $\int_a^x f(t)dt, x \in \Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει $\left(\int_\alpha^\chi f(t)dt\right)' = f(x)$, $\forall x \in \Delta$»

[61] Στο 6[ο] Κεφάλαιο των Core Mathematics 4 και στη σελίδα 105 το σχολικό εγχειρίδιο "επαναλαμβάνει" το συγκεκριμένο θεωρητικό κομμάτι του C2 αναφέροντας ότι «Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y = f(x)$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, μπορεί να θεωρηθεί σαν το όριο ενός αθροίσματος κατά προσέγγιση ορθογώνιων λωρίδων πλάτους δx και μήκους y. Έτσι, το εμβαδόν του χωρίου είναι το όριο του $\sum y\delta x$, καθώς το $\delta x \to 0$. Το σύμβολο ολοκλήρωσης της $\int$ είναι ένα S που έχει επιμηκυνθεί ούτως ώστε να αναπαριστά αυτήν την έννοια του αθροίσματος».

$$\int_a^b y dx \approx \frac{1}{2}h[y_0 + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + y_n]\text{, όπου } h = \frac{b-a}{n} \text{ και } y_i = f(a+ih),$$

Στις εφαρμογές του βιβλίου:

- Υπολογίζονται απλά ορισμένα ολοκληρώματα βάσει τύπου.
- Ζητείται το εμβαδόν επιφάνειας που περικλείεται από καμπύλη συνάρτησης (με θετικές και αρνητικές τιμές) και κατακόρυφες ευθείες, είτε από καμπύλη και ευθεία.
- Γίνεται χρήση του κανόνα του τραπεζίου με χωρισμό του διαστήματος σε λωρίδες. Προτείνονται μέθοδοι βελτίωσης της ακρίβειας των υπολογισμών και εξηγούνται τυχόν διαφορές στην υπολογισθείσα τιμή του ολοκληρώματος.

Ακολουθούν δύο χαρακτηριστικές ασκήσεις του Κεφαλαίου:

Άσκηση 1: Δοθέντος του $I = \int_1^3 (\frac{1}{x^2} + 3\sqrt{x})dx$:

a. Κάνοντας χρήση του κανόνα του τραπεζίου με χρήση των παρακάτω τιμών υπολογίστε το I με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

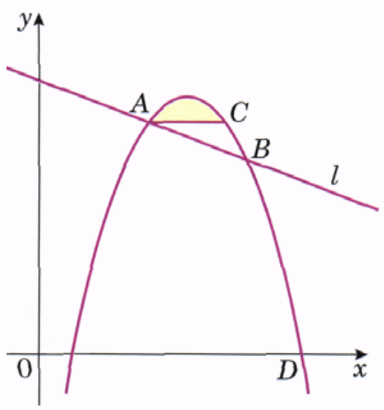
x	1	1.5	2	2.5	3
y	4	4.119	4.493	4.903	5.307

b. Υπολογίστε την ακριβή τιμή του I

c. Υπολογίστε, με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου, το ποσοστιαίο σφάλμα που προέκυψε κατά τις δύο παραπάνω μετρήσεις.

Άσκηση 2: (Εμβαδόν γραμμοσκιασμένου χωρίου)

Το διάγραμμα δείχνει μέρος της καμπύλης με εξίσωση $y = p + 10x - x^2$, όπου η p είναι σταθερά και τμήμα της γραμμής l με εξίσωση $y = qx + 25$, όπου η q είναι σταθερά. Η l τέμνει την καμπύλη στα σημεία A και B, με τετμημένες 4 και 8 αντίστοιχα. Η παράλληλη προς τον άξονα των x που περνά από το A τέμνει την καμπύλη στο C.



a. Δείξτε ότι $p = -7$ και υπολογίστε το q.

b. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του C.

c. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή στο διάγραμμα οριοθετείται από την καμπύλη και τη γραμμή AC. Υπολογίστε το εμβαδόν της χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση και περιγράφοντας αναλυτικά την εργασία σας. (Θέμα τελικών εξετάσεων)

3.6.2.3 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Μαθηματικά Κορμού 3 (C3)

Κεφάλαιο 2/C3: ***Συναρτήσεις***

Στο 2ο Κεφάλαιο ορίζεται η έννοια της συνάρτησης και η σύνθεση συναρτήσεων, ενώ εισάγεται η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Κατά τη διδασκαλία της ενότητας Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4 έγινε μια πρώτη εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως κανόνα που υποδεικνύει την εκτέλεση μιας πράξης. Επίσης διδάχθηκε η σχεδίαση γραφημάτων συναρτήσεων όπου η μεταβλητή y δίνεται άμεσα ή έμμεσα συναρτήσει της μεταβλητής x, ο τρόπος κατασκευής γραμμικών συναρτήσεων στο πλαίσιο πραγματικών προβλημάτων και η σχεδίαση των γραφημάτων τους.

Στο μάθημα αρχικά δίνεται ο ορισμός της *απεικόνισης* (mapping) ως εξής: «Μια απεικόνιση μετασχηματίζει ένα αριθμητικό σύνολο σε ένα άλλο, διαφορετικό»[62]. Σημειώνεται ότι αυτό είναι δυνατό να γίνει είτε λεκτικά, είτε μέσω αλγεβρικής εξίσωσης, είτε κάνοντας χρήση καρτεσιανών γραφημάτων. Η *συνάρτηση* προσδιορίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: «Μια συνάρτηση είναι μια ειδική απεικόνιση τέτοια ώστε κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (πεδίο ορισμού, the domain) να απεικονίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου Β (πεδίο τιμών[63]).»[64] Στη συνέχεια ορίζεται η σύνθεση συναρτήσεων ως «συνδυασμός δύο ή περισσότερων βασικών συναρτήσεων για τη δημιουργία μίας νέας, περισσότερο σύνθετης συνάρτησης»[65]. Στο τελευταίο μέρος του Κεφαλαίου ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$.

Μέσω εφαρμογών εισάγονται τα ακόλουθα:

- Η συνάρτηση 1-1 (one-to-one) με την οποία «κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού πηγαίνει σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου τιμών»[66](παράδειγμα προς αναφορά η συσχετισμένη συνάρτηση $y = ax + b$).
- Η συνάρτηση πολλά προς ένα (many-to-one). Ο όρος «πολλά προς ένα» αναφέρεται κατά τη μελέτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = x^2 - 1$ η οποία «καλείται "πολλά προς ένα" συνάρτηση διότι δύο στοιχεία του πεδίου

[62] "A mapping transforms one set of numbers into a different set of numbers.", σελίδα 11/C3.
[63] Έχει προηγηθεί αναφορά στο πεδίο τιμών συνάρτησης, στο Κεφάλαιο 9/C3 ως «το σύνολο τιμών που μπορεί να πάρει μια συνάρτηση»
[64] Σελίδα 12/C3.
[65] Σελίδα 18/C3.
[66] Σελίδα 14/C3.

ορισμού απεικονίζονται σε ένα στοιχείο του συνόλου τιμών.»[67]

- Η δυνατότητα μετατροπής μιας απεικόνισης σε συνάρτηση με την επιλογή κατάλληλου πεδίου ορισμού (με αναφορά στην $y = \sqrt{x}$).
- Η συμμετρία των γραφημάτων μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της ως προς την ευθεία $y = x$ ((με αναφορά στην $f(x) = \sqrt{x-2}, \{x \in \Re, x \geq 2\}$).

Οι ασκήσεις[68] του σχολικού εγχειριδίου περιέχουν:

- Καθορισμό του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της, εύρεση τύπου αντίστροφης.
- Χάραξη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων για διακριτά και συνεχή πεδία ορισμού.
- Έλεγχο για το αν ορισμένα γραφήματα αναπαριστούν συναρτήσεις.
- Έλεγχο για το αν μια συνάρτηση είναι 1-1.
- Εύρεση του τύπου και του πεδίου ορισμού της σύνθεσης $f \circ g$.

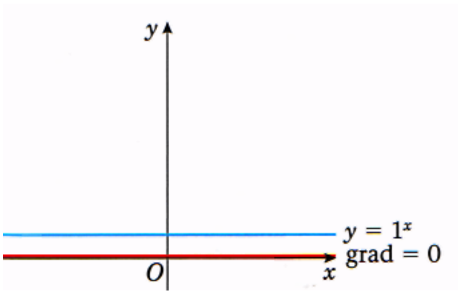
[67] Σελίδα 14/C3.

[68] Σε εκφώνηση άσκησης δίνεται και ο ορισμός της “self inverse function”, ως η συνάρτηση που ισούται με την αντίστροφή της.

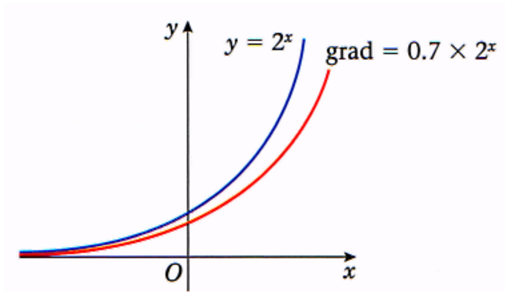
Κεφάλαιο 3/C3: ***Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις***

Το $3^{ο}$ Κεφάλαιο των Core Mathematics 3 συνδέεται στενά με το $3^{ο}$ Κεφάλαιο των Core Mathematics 2. Στόχο του αποτελεί η εισαγωγή και μελέτη των εκθετικών συναρτήσεων της μορφής $y = a^x$. Ειδική αναφορά γίνεται στην εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ και στην αντίστροφή της $y = \log_e x$. Απαραίτητη είναι η καλή γνώση της θεωρίας του $2^{ου}$ Κεφαλαίου/C3 σχετικά με τη συνάρτηση, την αντίστροφη συνάρτησης, το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και του $4^{ου}$ Κεφαλαίου/C1, που αφορά στους μετασχηματισμούς συναρτήσεων.

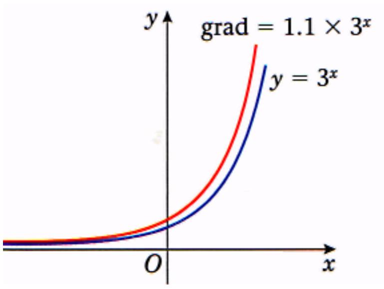
Στο μάθημα αρχικά γίνεται μια σύντομη αναφορά στις ιδιότητες της συνάρτησης $y = a^x$, $a > 0$. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 1^x$, $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$ και των κλίσεών τους σε κοινούς άξονες συντεταγμένων (Σχήματα 12-15):



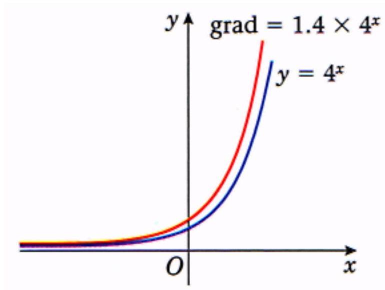
Σχήμα 12



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

Το σχολικό εγχειρίδιο παρατηρεί την ύπαρξη ομοιοτήτων ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις κάθε συνάρτησης και της αντίστοιχης κλίσης της (Σχήματα 12-15). Επισημαίνει ότι «όσο αυξάνει το a για τη συνάρτηση $y = a^x$, το ίδιο συμβαίνει

Συνάρτηση	*Κλίση*
$y = 1^x$	0×1^x
$y = 2^x$	0.7×2^x
$y = 3^x$	1.1×3^x
$y = 4^x$	1.4×4^x

και στην αντίστοιχη συνάρτηση κλίσης. Θα πρέπει να μπορείτε να συμπεράνετε πως υπάρχει ένας αριθμός μεταξύ του 2 και του 3, για τον οποίο η συνάρτηση κλίσης είναι ίδια με την αρχική συνάρτηση. Ο αριθμός αυτός είναι κατά προσέγγιση ίσος με τον αριθμό 2.718 και αναπαρίσταται από το γράμμα "e". Είναι ανάλογο με το π, υπό την έννοια ότι είναι ένας άρρητος αριθμός που αναπαριστά έναν αριθμό που υπάρχει στον πραγματικό κόσμο.»[69].

Κατ' αυτόν τον τρόπο εισάγεται και η εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ ως «η συνάρτηση της οποίας η κλίση (gradient) είναι πανομοιότυπη (identical) με την ίδια τη συνάρτηση»[70]. Κατόπιν το σχολικό εγχειρίδιο αναφέρεται αναλυτικά στη σύνδεση εκθετικής συνάρτησης και προβλημάτων εκθετικής αύξησης και μείωσης. Τελικά εισάγει την $\log_e x$ (ή $\ln x$) ως αντίστροφη της e^x.

Μέσω των εφαρμογών και των λυμένων παραδειγμάτων οι μαθητές:

- Εξοικειώνονται με τη χάραξη καμπύλων εκθετικών συναρτήσεων κάνοντας χρήση πίνακα τιμών.
- Μελετούν τα γραφήματα των $y = e^x$ και $y = e^{-x}$, καταλήγοντας στο ότι είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των y΄y.
- Διαπιστώνουν τη σχέση των γραφημάτων των $y = e^x$ και $y = \ln x$ με την ευθεία $y = x$.
- Διδάσκονται ποιο είναι το σύνολο τιμών ($\Re$) και το πεδίο ορισμού ($\{x \in \Re, x > 0\}$) της $f(x) = \ln x$.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου αναφέρονται σε γραφική επίλυση εξισώσεων, σχεδίαση καμπύλων συναρτήσεων με προσδιορισμό ασύμπτωτων και σημείων τομών με άξονες, αντίστροφες συναρτήσεις, σύνθεση συναρτήσεων, εύρεση πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών. Τα προβλήματα αναφέρονται στον νόμο της εκθετικής μεταβολής (εκθετική αύξηση και απόσβεση) με εφαρμογές από τον χώρο της Βιολογίας, της Φυσικής, της Στατιστικής κ.α. Ακολουθεί αναφορά σε ορισμένα χαρακτηριστικά προβλήματα και ασκήσεις του Κεφαλαίου:

Άσκηση: (Περιέχει αντίστροφη λογαριθμικής, σύνθεση συναρτήσεων, μετασχηματισμό καμπύλης)

Η συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο: $f : x \to \ln(4-2x)$, $\{x \in \Re, x < 2\}$

[69] Σελίδα 30/C3.
[70] Σελίδα 30/C3.

a. Βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$

b. Σχεδιάστε την καμπύλη με εξίσωση $y = f^{-1}(x)$, δείχνοντας τις συντεταγμένες των σημείων όπου η καμπύλη τέμνει τους άξονες

c. Βρείτε το σύνολο τιμών της $f^{-1}(x)$

Εάν η συνάρτηση g δίνεται από τον τύπο $g : x \to e^x$, $\{x \in \Re\}$,

d. Βρείτε την τιμή της $gf(0.5)$. [Θέμα τελικών εξετάσεων Edexcel]

Πρόβλημα: Η αξία ενός υπολογιστή μπορεί να εκφραστεί μέσω του τύπου $P = 100 + 850e^{-\frac{t}{2}}$ όπου P είναι η αξία του υπολογιστή σε £ και t η ηλικία του υπολογιστή σε έτη μετά την αγορά του.

a. Ποια η αξία του υπολογιστή όταν είναι καινούριος;

Υπολογίστε την αξία του μετά από τρία έτη.

b. Πότε θα αξίζει λιγότερο από £200;

c. Βρείτε την αξία του για $t \to \infty$.

d. Σχεδιάστε την καμπύλη P/t και σχολιάστε την καταλληλότητα του μοντέλου.

Κεφάλαιο 4/C3: ***Αριθμητικές μέθοδοι***

Στο 4$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο αναλύεται η κατά προσέγγιση εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Η κατά προσέγγιση εύρεση ριζών εξίσωσης δεν είναι άγνωστη στους μαθητές: στην ενότητα Ma2 (Αριθμός και Άλγεβρα) του Βασικού Σταδίου 4 διδάχθηκαν να χρησιμοποιούν με συστηματικό τρόπο τη μέθοδο της δοκιμής και βελτίωσης για την εύρεση λύσεων εξισώσεων κατά προσέγγιση, όπου δεν υπάρχει αναλυτική μέθοδος εύρεσής τους.

Εισάγονται οι έννοιες:

- Της ασυνέχειας (discontinuity) συνάρτησης.
- Της συγκλίνουσας και αποκλίνουσας ακολουθίας.

Αν και το περιεχόμενο του Κεφαλαίου σχετίζεται μάλλον με την αριθμητική ανάλυση, στην αρχή του διδάσκεται η ακόλουθη μεθοδολογία εύρεσης των ριζών της $f(x) = 0$ που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς μοιάζει με το θεώρημα του

Bolzano[71]: «Γενικά, αν βρείτε ένα διάστημα στο οποίο η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο, τότε το διάστημα πρέπει να περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.».[72] Το αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο συνεχίζει στην ίδια σελίδα αναφέροντας ότι «Η μόνη εξαίρεση σε αυτό είναι όταν η $f(x)$ έχει ασυνέχεια στο διάστημα, π.χ. η $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι ασυνεχής στο 0(0,0).».

Στη συνέχεια προτείνεται η ακόλουθη μεθοδολογία επίλυσης της εξίσωσης $f(x)=0$: αναδιάταξή της στη μορφή $x=g(x)$ και χρήση του επαναληπτικού τύπου $x_{n+1}=g(x_n)$.

Μέσω λυμένων παραδειγμάτων:

- Αιτιολογείται το ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ αλλάζει πρόσημο σε ένα διάστημα, τότε σε αυτό θα περιέχεται ρίζα της, με απλή παρατήρηση της γραφικής της παράστασης στο εν λόγω διάστημα.
- Δηλώνεται ότι «[...] διαφορετικές αναδιατάξεις της εξίσωσης $f(x)=0$ δίνουν επαναληπτικούς τύπους που **ίσως** οδηγήσουν σε διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης.».[73]
- Δίνεται ο ορισμός της *συγκλίνουσας* και της *αποκλίνουσας ακολουθίας* μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας εύρεσης ρίζας της $f(x)=0$ και της ακολουθίας $x_0, x_1, x_2 ...$, που προκύπτει: «Κάθε επανάληψη πλησιάζει όλο και πιο κοντά σε μια ρίζα, έτσι η ακολουθία $x_0, x_1, x_2 ...$, είναι συγκλίνουσα.»[74] και «Κάθε

---

[71] Η ορθή διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη: «Αν η f, **ορισμένη σε κλειστό διάστημα** $[a,b]$, **είναι συνεχής σε αυτό** και επιπλέον ισχύει $f(a)f(b)<0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$». Εντούτοις, το αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο στο τέλος του Κεφαλαίου, κατά την περιληπτική αναφορά των βασικών σημείων του μαθήματος, τονίζει ότι «Αν βρείτε ένα διάστημα όπου η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο **και η** $f(x)$ **είναι συνεχής σε αυτό,** τότε το διάστημα πρέπει να περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.» (σελίδα 53/C3).

[72] "In general, if you find an interval in which $f(x)$ changes sign, then the interval must contain a root of the equation $f(x)=0$.", σελίδα 43/C3.

[73] Σελίδα 48/C3. Σχετικό είναι το παράδειγμα της $x^2-5x-3=0$, με $x_{n+1}=\sqrt{5x_n+3}$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2-3}{5}$ και $x_0=5$, στην ίδια σελίδα.

[74] "Each iteration gets closer to a root, so the sequence $x_0, x_1, x_2 ...$, is convergent.", σελίδα 48/C3.

επανάληψη απομακρύνεται από μια ρίζα, έτσι η ακολουθία $x_0, x_1, x_2 ...,$ είναι αποκλίνουσα.»[75].

- Επισημαίνεται το ότι και αν ακόμη επιλεχθεί μια τιμή $x_0 = a$, η οποία βρίσκεται κοντά σε ρίζα εξίσωσης, τότε η ακολουθία $x_0, x_1, x_2 ...,$ δεν συγκλίνει απαραίτητα στη ρίζα αυτή. Είναι πιθανό ακόμη και το να μη συγκλίνει καθόλου (με παράδειγμα την $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ η οποία αποδεικνύεται ότι έχει μια ρίζα στο $3 < x < 4$, αλλά ο επαναληπτικός τύπος $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^3 - 2x_n + 5}{3}}$ για $x_0 = 3$ και $x_0 = 4$ δεν τη προσδιορίζει).

Ενδεικτικά αναφέρονται οι ακόλουθες ασκήσεις, θέματα τελικών εξετάσεων:

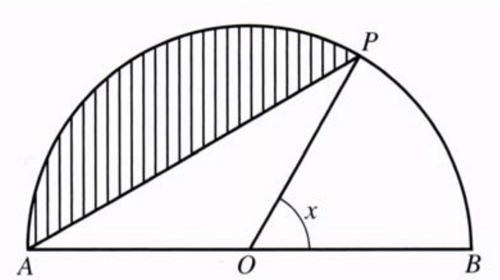
Άσκηση 1:

a. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = e^x - 4$ και $y = \ln x$.

b. Δώστε τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης $\ln x = e^x - 4$.

c. Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln x = e^x - 4$ έχει μία ρίζα στο διάστημα (1.4, 1.5).

Άσκηση 2: Το διάγραμμα δίνει ένα ημικύκλιο με Ο το κέντρο της διαμέτρου ΑΒ. Το σημείο Ρ του ημικυκλίου είναι τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τομέα ΡΟΒ να ισούται με το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος. Η γωνία ΡΟΒ δίνεται σε rads.



a. Αποδείξτε ότι $x = \frac{1}{2}(\pi - \sin x)$.

Η επαναληπτική μέθοδος που βασίζεται στη σχέση $x_{n+1} = \frac{1}{2}(\pi - \sin x_n)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του x.

b. Αρχίζοντας με $x_1 = 1$ εκτελέστε δύο επαναλήψεις για να βρείτε τις τιμές των x_2 και x_3, με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων.

[75] "Each iteration gets further from a root, so the sequence $x_0, x_1, x_2 ...,$ is divergent.", σελίδα 50/C3.

Κεφάλαιο 5/C3: ***Μετασχηματισμοί γραφημάτων συναρτήσεων***

Το Κεφάλαιο αυτό διαπραγματεύεται τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές και την επίλυση των αντίστοιχων εξισώσεων, καθώς και την εφαρμογή μετασχηματισμών σε συναρτήσεις, συμπληρώνοντας το 4^{o} Κεφάλαιο/C1.

Στο μάθημα ορίζεται η συνάρτηση απόλυτης τιμής $y=|f(x)|$ και σχεδιάζεται η καμπύλη της (με εφαρμογές για τις $y=|x|$, $y=|3x-2|$ και $y=|x^2-3x-10|$). Ανάλογα για καμπύλες της μορφής $y=f(|x|)$, με παραδείγματα τις $y=|x|-2$ και $y=4|x|-|x|^3$. Ακολουθεί γραφική επίλυση εξισώσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές και εφαρμογή μετασχηματισμών σε καμπύλη συνάρτησης.

Μέσω των εφαρμογών και των λυμένων παραδειγμάτων του σχολικού βιβλίου,

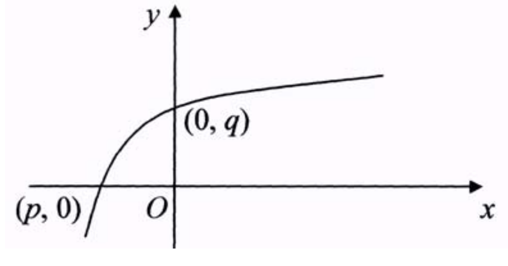
- οι μαθητές εξασκούνται στην εφαρμογή μετασχηματισμών σε καμπύλες συναρτήσεων δευτέρου βαθμού, αντιστρόφων, τριγωνομετρικών κ.α. Τονίζεται ότι για την $y=f(x)$:
  - Η $f(x+a)$: οριζόντια μεταφορά κατά $-a$
  - Η $f(x)+a$: κατακόρυφη μεταφορά κατά $+a$
  - Η $f(ax)$: οριζόντια έκταση κατά $\frac{1}{a}$
  - Η $af(x)$: κατακόρυφη έκταση κατά $+a$
- ζητείται η εφαρμογή μετασχηματισμών σε συναρτήσεις με γνωστή καμπύλη και η εύρεση των συντεταγμένων των νέων σημείων τους.

Οι περισσότερες από τις ασκήσεις του Κεφαλαίου δε διαφέρουν σε γενικές γραμμές από τα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου. Ενδεικτικά αναφέρεται η ακόλουθη άσκηση, θέμα τελικών εξετάσεων:

Άσκηση*:* Το διπλανό Σχήμα δείχνει μέρος καμπύλης με εξίσωση $y=f(x), x\in\Re$. Η καμπύλη συναντά τον άξονα των x στο $P(p,0)$ και τον άξονα των y στο $Q(0,q)$.

a. Σε χωριστά διαγράμματα σχεδιάστε την καμπύλη με εξίσωση:

i) $y=|f(x)|$



ii) $y = 3f(\frac{1}{2}x)$

Σε κάθε περίπτωση προσδιορίστε τις συντεταγμένες των σημείων όπου η καμπύλη τέμνει τους άξονες. Δοθέντος του ότι $f(x) = 3\ln(2x+3)$,

b. υπολογίστε την ακριβή τιμή του q,

c. βρείτε την τιμή του p,

d. βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο P.

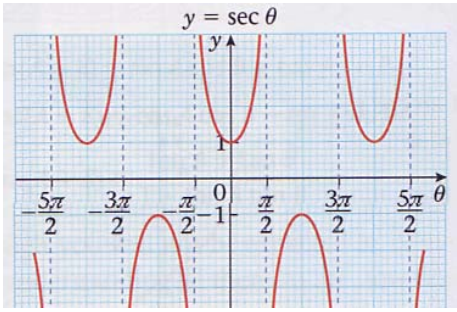
Κεφάλαιο 6/C3: *Τριγωνομετρία*

Στόχος του Κεφαλαίου αυτού είναι να εμβαθύνει περισσότερο στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και ταυτότητες, συμπληρώνοντας τη σχετική θεωρία των Κεφαλαίων 8 και 10/C2.

Αρχικά ορίζονται οι συναρτήσεις:

- *τέμνουσα θ* (secant θ): $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

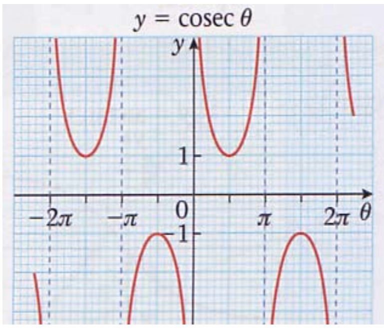
  (δεν ορίζεται για τα θ: $\cos\theta = 0$)



Σχήμα 16

- *συντέμνουσα θ* (cosecant θ): $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

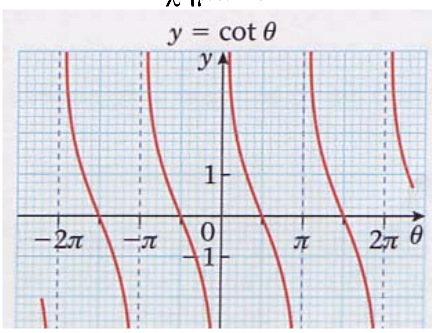
  (δεν ορίζεται για τα θ: $\sin\theta = 0$)



Σχήμα 17

- *συνεφαπτομένη θ* (cotangent θ): $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

  (δεν ορίζεται για τα θ: $\tan\theta = 0$)

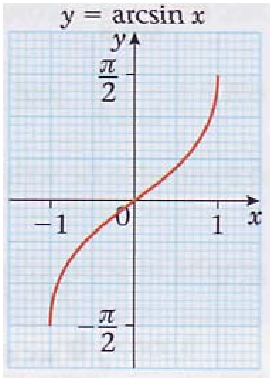


Σχήμα 18

Το σχολικό εγχειρίδιο ασχολείται εκτενώς με τις προηγούμενες συναρτήσεις, διακρίνοντας τη συνάρτηση $\cos^{-1}\theta$ από την $\sec\theta$ και αφιερώνοντας πολύ χρόνο στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών πλήθους γωνιών (και) με τη χρήση μικροϋπολογιστή. Εξηγεί με ιδιαίτερα λεπτομερή τρόπο τον τρόπο σχεδιασμού των γραφημάτων των $\sec\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$ και $\cot\theta$, με αναφορά στις γραφικές παραστάσεις των $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ και προσδιορίζει στοιχεία περιοδικότητας, ασύμπτωτες, συμμετρίες κ.α. Στη συνέχεια επικεντρώνεται στην απλοποίηση εκφράσεων, στην απόδειξη ταυτοτήτων και την επίλυση εξισώσεων που περιέχουν τους όρους $\sec\theta$, $\mathrm{cosec}\,\theta$ και $\cot\theta$, ενώ αποδεικνύονται οι ταυτότητες $1+\tan^2\theta \equiv \sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta \equiv \mathrm{cosec}^2\theta$. Τέλος, εξηγείται αναλυτικά ο τρόπος κατασκευής των αντίστροφων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης, για κατάλληλα πεδία ορισμού, όπου οι συναρτήσεις είναι 1-1 και, άρα, αντιστρέψιμες, με χρήση της συμμετρίας τους όπως προς την ευθεία $y = x$.

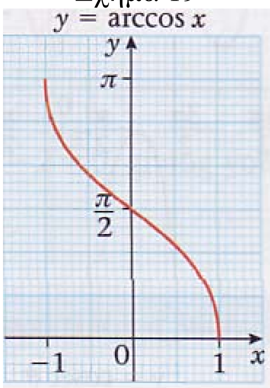
Έτσι ορίζονται:

- *η αντίστροφη της συνάρτησης ημίτονο*, η $y = \arcsin x$, όπου $\arcsin x$ είναι η γωνία a στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$ για την οποία $\sin a = x$.



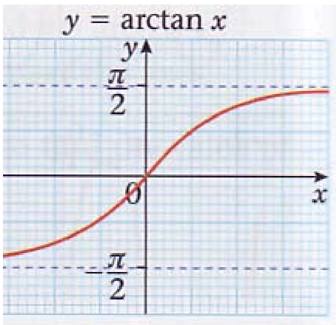
Σχήμα 19

- *η αντίστροφη της συνάρτησης συνημίτονο*, η $y = \arccos x$, όπου $\arccos x$ είναι η γωνία a στο διάστημα $0 \le a \le \pi$ για την οποία $\cos a = x$.



Σχήμα 20

- *η αντίστροφη της συνάρτησης εφαπτομένη,* η $y = \arctan x$, όπου $\arctan x$ είναι η γωνία a στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ για την οποία $\tan a = x$.



Σχήμα 21

Στις εφαρμογές και στις ασκήσεις του Κεφαλαίου:

- Ζητείται ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που περιέχουν $\sec\theta$, $\cos ec\theta$, $\cot\theta$ και η εύρεση των συνόλων τιμών τους. Ερευνώνται σχέσεις ανάμεσα στα γραφήματά τους, προσδιορίζονται περίοδοι, μέγιστα και ελάχιστα.
- Απλοποιούνται σύνθετες μαθηματικές εκφράσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς, επιλύονται βήμα προς βήμα σχετικές εξισώσεις και γίνεται χρήση ταυτοτήτων (και Πυθαγορείου θεωρήματος).
- (για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις) Ζητείται να υπολογισθούν οι τιμές των $\arcsin x, \arccos x$ και $\arctan x$ για διάφορες τιμές των x (π.χ. $\sin[2\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})]$), να αποδειχθούν σχετικές ταυτότητες και να σχεδιασθούν οι γραφικές παραστάσεις τους.

Χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες ασκήσεις:

Άσκηση 1: Αποδείξτε ότι $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \equiv (\cos ec\theta + \cot\theta)^2$.

Άσκηση 2: Στο ίδιο διάγραμμα αξόνων σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$ και $y = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$, προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες των σημείων όπου οι καμπύλες συναντούν τους άξονες.

Άσκηση 3:

a. Σχεδιάστε το γράφημα της $y = \sin x$ και σκιαγραφείστε την περιοχή που εκφράζει το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

b. Σχεδιάστε το γράφημα της $y = \arcsin x$ και σκιαγραφείστε την περιοχή που εκφράζει το $\int_0^1 \arcsin x dx$.

c. Παρατηρώντας τις σκιαγραφείσες περιοχές εξηγείστε τον λόγο για τον οποίο: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^1 \arcsin x dx = \frac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση: Στο $7^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο που έπεται και αναφέρεται σε τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς γωνιών και γωνίας $2a$, σε μετασχηματισμό γινομένου σε άθροισμα, αλλά και αθροίσματος σε γινόμενο, διδάσκεται η γραφή εκφράσεων της μορφής $a\cos\theta + b\sin\theta$, όπου a, b σταθερές στη μορφή συνάρτησης ημιτόνου ή συνημιτόνου μόνο:

Για $a,b>0$, το $a\sin\theta \pm b\cos\theta$ εκφράζεται στη μορφή $R\sin(\theta \pm a)$, με $R>0$, $0<a<90^0$ (ή $\frac{\pi}{2}$) και, ανάλογα, το $a\cos\theta \pm b\sin\theta$ μπορεί να εκφρασθεί στη μορφή $R\cos(\theta \mp a)$ με $R>0$, $0<a<90^0$ (ή $\frac{\pi}{2}$), όπου $R\sin a = b$, $R\cos a = a$ και $R=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ενδεικτικά αναφέρεται η ακόλουθη ***άσκηση***:

a. Δείξτε ότι το $3\sin 3\theta - 4\cos 3\theta$ είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή $R\sin(3\theta - a)$, με $R>0$ και $0<a<90^0$.
b. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του $3\sin 3\theta - 4\cos 3\theta$.

Κεφάλαιο 8/C3: *Παραγώγιση*

Στο Κεφάλαιο αυτό διδάσκεται η παραγώγιση της e^x, της $\ln x$, των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ και πλήθους συνδυασμών τους. Γίνεται χρήση του κανόνα της αλυσίδας, της παραγώγου γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων. Το θεωρητικό μέρος του Κεφαλαίου προϋποθέτει πολύ καλή γνώση της παραγώγου συναρτήσεων, όπως αυτή αναλύθηκε στα προηγούμενα Κεφάλαια 7/C1 και 9/C2, των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Κεφάλαια 10/C2, 6-7/C3) και των ιδιοτήτων της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης (Κεφάλαια 3/C2, 3/C3).

Αρχικά στο μάθημα εισάγεται ο κανόνας της αλυσίδας για την παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων με την παρατήρηση ότι «Ο κανόνας της αλυσίδας σας επιτρέπει να παραγωγίζετε συνάρτηση συνάρτησης.»[76]. Δίνεται ο συμβολισμός του Leibniz $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ όπου y συνάρτηση του u και u συνάρτηση του x και η ειδική περίπτωσή του, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(\frac{dx}{dy})}$ με μια υποτυπώδη απόδειξη.

Έπεται ο κανόνας παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων (the product rule): Αν $y=uv$, τότε $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$, όπου u,v συναρτήσεις του x. Ενδιαφέρουσα είναι η απόδειξη που δίνεται στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο[77]:

«Έστω η $y=uv$ όπου οι u,v είναι δύο συναρτήσεις του x. Ας θεωρηθεί ότι μικρή αύξηση (small increment) δx στη μεταβλητή x συνεπάγεται μικρή μεταβολή δu στη u και μικρή μεταβολή δv στη v, οι οποίες με τη σειρά τους προκαλούν μια μικρή

[76] "The chain rule enables you to differentiate a function of a function.", σελίδα 120/C3.
[77] Σελίδα 122/C3. Δεν απαιτείται γνώση της απόδειξης στις τελικές εξετάσεις.

μεταβολή δy στη μεταβλητή y. Τότε $y+\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)$ και $y=uv$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις:

$\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)-uv = uv+u\delta v+v\delta u+\delta u\delta v-uv = u\delta v+v\delta u+\delta u\delta v$, οπότε

$\frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{\delta v}{\delta x}+v\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta x}\delta v$. Για $\delta x\to 0$, $\frac{\delta y}{\delta x}\to\frac{dy}{dx}$, $\frac{\delta u}{\delta x}\to\frac{du}{dx}$ και $\frac{\delta v}{\delta x}\to\frac{dv}{dx}$.

Επίσης $\delta v\to 0$, άρα $\frac{\delta u}{\delta x}\delta v\to 0$ και προκύπτει ο ζητούμενος τύπος $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$».

Αμέσως μετά αποδεικνύεται ο τύπος της παραγώγου της εκθετικής συνάρτησης $y=e^x, \frac{dy}{dx}=e^x$ βάσει της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στο βιβλίο C1 με χρήση του ορισμού $f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ ως εξής[78]:

«Αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\frac{e^{x+\delta x}-e^x}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{e^x(e^{\delta x}-1)}{\delta x}\right] = e^x\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{(e^{\delta x}-1)}{\delta x}\right]$

Βάσει του πίνακα 11 που ακολουθεί:

	δx = 0.1	δx = 0.01	δx = 0.001	δx = 0.0001	δx = 0.00001
$\left[\frac{(e^{\delta x}-1)}{\delta x}\right]$	1.05170925	1.005016772	1.00050023	1.00005006	1.000005063

Πίνακας 11: Τιμές της $\left[\frac{(e^{\delta x}-1)}{\delta x}\right]$ για δx = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 και 0.00001

μπορείτε να διαπιστώσετε ότι το $\left[\frac{(e^{\delta x}-1)}{\delta x}\right]$ προσεγγίζει την οριακή τιμή της μονάδας όσο το $\delta x\to 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x)=e^x\times 1$. Η e^x καλείται *η* εκθετική συνάρτηση, με e=2.718282 με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων και έχει την ιδιότητα αν $y=e^x$, τότε και $\frac{dy}{dx}=e^x$. Έπεται ότι αν $y=e^{f(x)}$ τότε $\frac{dy}{dx}=f'(x)e^{f(x)}$.». Ακολουθεί η παραγώγιση της λογαριθμικής συνάρτησης $\ln x$ (με

---

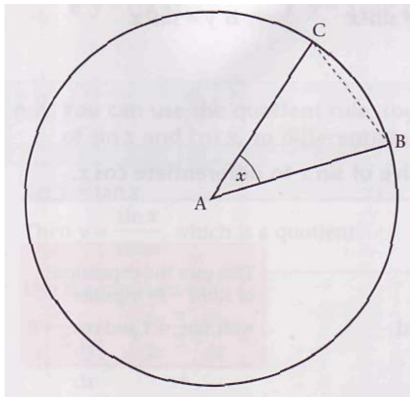
[78] Σελίδα 125/C3. Έχει προηγηθεί αναφορά στη σελίδα 30 του 3ου Κεφαλαίου/C3: «Η εκθετική συνάρτηση $y=e^x$ είναι εκείνη της οποίας η κλίση (gradient) είναι πανομοιότυπη (identical) με την ίδια τη συνάρτηση, $y=e^x, \frac{dy}{dx}=e^x$».

απόδειξη του τύπου, κάνοντας χρήση της ιδιότητας της ως αντίστροφη της e^x) και της $\ln f(x)$.

Ενδιαφέρουσα είναι η απόδειξη του τύπου της παραγώγου της συνάρτησης $\sin x$ που ακολουθεί[79]: «Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Τότε $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin(x+\delta x) - \sin(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cos \delta x + \cos x \sin \delta x - \sin x}{\delta x} \right]$*.

Όπως συμβαίνει με πολλές τέτοιες οριακές τιμές, τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής του κλάσματος πλησιάζουν το 0 και έτσι χρειάζεται να ερευνηθεί η συμπεριφορά των $\sin x$ και $\cos x$ για μικρές τιμές του x.

θεωρήστε κατ' αρχήν ένα κύκλο ακτίνας r, με ακτίνες AB και AC τέτοιες ώστε να σχηματίζουν γωνία BAC x rads. Το εμβαδόν της επιφάνειας του τομέα ABC είναι $\frac{1}{2} r^2 x$ και το εμβαδόν του τριγώνου ABC είναι $\frac{1}{2} r^2 \sin x$. Όσο το x μικραίνει, το εμβαδόν του τριγώνου προσεγγίζει εκείνο του τομέα και $\frac{1}{2} r^2 \sin x \approx \frac{1}{2} r^2 x \Rightarrow \sin x \approx x$. Επίσης, για μικρές τιμές του x, $\cos x \approx 1$. Έτσι ο τύπος * μετατρέπεται σε $\lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\sin x + \cos x \times \delta x - \sin x}{\delta x} \right] = \cos x$».



Σχήμα 22

Βάσει του προηγούμενου υπολογίζεται η παράγωγος της συνάρτησης συνημιτόνου (με χρήση του τύπου $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$), ενώ ακολουθεί ανάλογη απόδειξη με χρήση του κανόνα της αλυσίδας για τις παραγώγους των υπόλοιπων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Στις εφαρμογές και στα λυμένα παραδείγματα της ενότητας:

- Εφαρμόζεται ο τύπος $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})}$ (π.χ. να βρεθεί η τιμή $\frac{dy}{dx}$ στο σημείο (2,1) της καμπύλης με εξίσωση $y^3 + y = x$)

---

79 Σελίδες 128-129/C3.

- Αποδεικνύεται ο κανόνας παραγώγισης πηλίκου συναρτήσεων (quotient rule) εκφράζοντας το πηλίκο $\frac{u}{v}$ σαν uv^{-1} και κάνοντας χρήση του κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων.
- Ζητείται η παραγώγιση συνθέσεων τριγωνομετρικών, εκθετικών, λογαριθμικών και πολυωνυμικών συναρτήσεων και η εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε συγκεκριμένα σημεία τους.

3.6.2.4 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Μαθηματικά Κορμού 4 (C4)

Κεφάλαιο 4/C4: *Παραγώγιση*

Σε συνέχεια της θεωρίας του προηγούμενου βιβλίου Core 3, όπου οι υπό παραγώγιση συναρτήσεις ήταν της μορφής $y = f(x)$, με το y να εκφράζεται συναρτήσει του x (ή της μορφής $x = f(y)$, όπου το x εκφράζεται συναρτήσει του y), στο 4^{o} Κεφάλαιο του Core 4:

- Διδάσκεται η μεθοδολογία εύρεσης της κλίσης καμπύλης όταν δίνεται σε παραμετρική μορφή[80] και η παραγώγιση πεπλεγμένων μορφών.
- Μελετάται ο ρυθμός μεταβολής εκθετικών συναρτήσεων.
- Επιχειρείται σύνδεση των ρυθμών μεταβολής συσχετισμένων μεταβλητών.
- Πραγματοποιείται μια πρώτη εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις.

Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου διδάσκεται η μεθοδολογία εύρεσης της κλίσης καμπύλης που δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις (κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας) και η παραγώγιση πεπλεγμένων σχέσεων (όπως η $x^2 + y^2 = 8x$). Το δεύτερο μέρος επικεντρώνεται στην παραγώγιση της συνάρτησης $y = a^x$, όπου a σταθερά[81] και στη συσχέτιση ρυθμών μεταβολής σε προβλήματα που περιέχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας. Το Κεφάλαιο κλείνει με τη δημιουργία απλών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και

[80] Έχει προηγηθεί η θεωρία του $2^{ου}$ Κεφαλαίου/C4 (Γεωμετρία συντεταγμένων στο (x,y) επίπεδο) όπου οι συντεταγμένες σημείου καμπύλης δίνονται με τη χρήση παραμετρικών εξισώσεων (τα x, y δίνονται ως $x = f(t), y = g(t)$, t παράμετρος) ο τύπος του εμβαδού της περιοχής που περικλείει μια τέτοια καμπύλη: $E = \int y dx = \int y \frac{dx}{dt} dt$.

[81] Σελίδα 37/C4. Στην ίδια σελίδα το σχολικό εγχειρίδιο σημειώνει ότι «η συνάρτηση αυτή περιγράφει αύξηση και ελάττωση και η παράγωγός της δίνει ένα μέτρο τους ρυθμού μεταβολής της αύξησης ή της μείωσής της.». Επίσης αποδεικνύεται αναλυτικά ο τύπος της παραγώγου της $y = a^x$, με ιδιαίτερη αναφορά στην $y = e^x$ και στη σχέση που διέπει την παράγωγο με την ίδια την συνάρτηση.

μόνο, με τη βοήθεια συσχετισμένων ρυθμών μεταβολής και αναλογιών, μέσω ποικίλων προβλημάτων από τον χώρο της μηχανικής, της φυσικής, της χημείας, της βιολογίας και των οικονομικών.

Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις του Κεφαλαίου περιλαμβάνουν:

- Δοθείσης της εξίσωσης καμπύλης σε παραμετρική μορφή, την εύρεση της κλίσης της, της εξίσωσης της εφαπτομένης και της καθέτου σε σημείο που ανήκει στην καμπύλη.
- Παραγώγιση πεπλεγμένων σχέσεων, εύρεση εφαπτομένης και καθέτου καμπύλης με πεπλεγμένη εξίσωση.
- Εύρεση ρυθμού μεταβολής μεγέθους, δοθέντος του ρυθμού μεταβολής ενός άλλου, συσχετιζόμενου, σε προβλήματα σχετικά με επιφάνεια επίπεδου σχήματος και όγκο στερεού.
- Κατασκευή διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Ακολουθούν χαρακτηριστικές ασκήσεις και προβλήματα του Κεφαλαίου:

Άσκηση 1: Μια καμπύλη έχει εξίσωση $7x^2 + 48xy - 7y^2 + 75 = 0$.

Έστω Α, Β δύο σημεία της καμπύλης στα οποία η κλίση της ισούται με $\frac{2}{11}$.

a. Να δειχθεί ότι στα σημεία Α και Β ισχύει ότι $x + 2y = 0$
b. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των Α και Β.

[Θέμα τελικών εξετάσεων Edexcel, Ιούνιος 2003]

Άσκηση 2: Δοθέντος του ότι $e^{2x} + e^{2y} = xy$, βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσει των x, y.

[Θέμα τελικών εξετάσεων London, Ιούνιος 1999]

Πρόβλημα (με συσχετισμένους ρυθμούς μεταβολής): Μια ανεστραμμένη κωνική δεξαμενή είναι γεμάτη με αλάτι, το οποίο διαφεύγει μέσω μικρής οπής στην κορυφή της με σταθερό ρυθμό $6cm^3s^{-1}$. Δοθέντος του ότι η γωνία μεταξύ μιας λοξής πλευράς της δεξαμενής και της καθέτου είναι 30^0, αποδείξτε ότι ο όγκος του αλατιού είναι $\frac{1}{9}\pi h^3$, όπου h το ύψος της στάθμης του αλατιού σε t sec. Επιπλέον δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του ύψους της στάθμης του αλατιού είναι αντιστρόφως ανάλογος του h^2 και γράψτε τη διαφορική εξίσωση που συσχετίζει τα h και t.

Κεφάλαιο 6/C4: ***Ολοκλήρωση***

Το Κεφάλαιο αυτό έρχεται να συμπληρώσει τη θεωρία του ολοκληρωτικού λογισμού των Core 1 και 2, με την ολοκλήρωση πιο σύνθετων συναρτήσεων. Για την πληρέστερη κατανόηση των εννοιών του 6^{ου} Κεφαλαίου, καθοριστικό ρόλο διαδραματίζουν τα Κεφάλαια 7/C1, 9/C2 και 6/C3 (παραγώγιση συναρτήσεων), οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και ταυτότητες, η θεωρία παραμετρικών εξισώσεων όπως έχει διδαχθεί στο 2^{ο} Κεφάλαιο/C4 και οι διαφορικές εξισώσεις του 4^{ου} Κεφαλαίου/C4.

Η δομή του Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Σε πρώτη φάση υπολογίζονται τα αόριστα ολοκληρώματα $\int x^n$, $\int e^x$, $\int \frac{1}{x}$, $\int \cos x$, $\int \sin x$, $\int \sec^2 x$, $\int \cos ecx \cot x$, $\int \cos ec^2 x$, $\int \sec x \tan x$. Προτείνεται η χρήση του αντιστρόφου του κανόνα της αλυσίδας για γραμμικούς μετασχηματισμούς συναρτήσεων της μορφής $f(ax+b)$ και μέσα από παράδειγμα[82] του σχολικού εγχειριδίου προκύπτει ο γενικός τύπος $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)+C$. Ακολουθεί χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και ανάλυση πολύπλοκων συναρτήσεων σε απλά κλάσματα για τον υπολογισμό σύνθετων ολοκληρωμάτων.

Σε δεύτερη φάση διδάσκονται οι μέθοδοι ολοκλήρωσης *με αντικατάσταση*[83] (χωρίς απόδειξη) και *κατά παράγοντες* (με απόδειξη, γνώση της οποίας ωστόσο δε ζητείται στις τελικές εξετάσεις), για ορισμένο και για αόριστο ολοκλήρωμα. Δίνονται οι τύποι των ολοκληρωμάτων $\int \tan x dx$, $\int \sec x dx$, $\int \cot x dx$, $\int \cos ecx dx$ και υπενθυμίζεται ο κανόνας του τραπεζίου για τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τιμής ορισμένων ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που ο μαθητής συνάντησε στις ενότητες C3 και C4.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι τελευταίες ενότητες του Κεφαλαίου, οι οποίες διαπραγματεύονται τη χρήση ολοκληρωμάτων για τον υπολογισμό όγκου στερεού εκ περιστροφής και την επίλυση απλών διαφορικών εξισώσεων.

[82] Σελίδα 84/C4.
[83] “Integration by substitution”, σελίδα 95/C4. Στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο της Γ’ Λυκείου η μέθοδος αναφέρεται ως «ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής».

Ειδικότερα, το σχολικό εγχειρίδιο αποδεικνύει αναλυτικά τον τύπο του όγκου στερεού εκ περιστροφής ως εξής[84] «Αν κάθε λωρίδα περιστραφεί κατά 2π rads (ή 360°) γύρω από τον άξονα των x, τότε θα προκύψει ένα Σχήμα κατά προσέγγιση κυλινδρικό. Ο όγκος κάθε τέτοιου κυλίνδρου θα είναι $\pi y^2 \delta x$, καθώς η ακτίνα είναι y και το ύψος δx. Το όριο του αθροίσματος $\sum \pi y^2 \delta x$ όταν $\delta x \to 0$ δίνεται από τη σχέση $\pi \int y^2 dx$.», καταλήγοντας στο ότι «Όταν η συνάρτηση $y = f(x)$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x ανάμεσα στις ευθείες $x = a$ και $x = b$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει δίνεται από τον τύπο $\pi \int_a^b y^2 dx$»[85]. Τέλος, σε ότι αφορά στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων, στο παρόν Κεφάλαιο το σχολικό εγχειρίδιο διαπραγματεύεται αποκλειστικά εκείνες της πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές: «Όταν $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ μπορείτε να γράψετε $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$.»[86].

Στα λυμένα παραδείγματα και στις εφαρμογές:

- Υποδεικνύονται μεθοδολογίες υπολογισμού σύνθετων ολοκληρωμάτων, όπως «Για να ολοκληρώσετε εκφράσεις της μορφής $\int k \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, δοκιμάστε την $\ln|f(x)|$, παραγωγίστε για να ελέγξετε και προσθέστε τυχαία σταθερά.»[87].
- Γίνεται χρήση του κανόνα του τραπεζίου για την εκτίμηση της αριθμητικής τιμής ολοκληρωμάτων κατά προσέγγιση και υπολογισμός ποσοστιαίου σφάλματος.
- Εφαρμόζεται ο τύπος του όγκου στερεού εκ περιστροφής σε καμπύλη που δίνεται σε παραμετρική μορφή (προκύπτει ο τύπος $V = \pi \int_a^b y^2 \frac{dx}{dt} dt$)
- Διδάσκεται βήμα προς βήμα η μεθοδολογία κατασκευής απλών διαφορικών εξισώσεων μέσα από προβλήματα, ο τρόπος επίλυσής τους (εύρεση γενικής και ειδικής λύσης) και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων στα πλαίσια του κάθε προβλήματος.

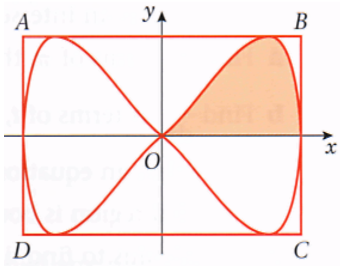
Ως ενδεικτικά του πνεύματος που διέπει τα προβλήματα του Κεφαλαίου αναφέρονται τα ακόλουθα, θέματα τελικών εξετάσεων:

[84] Έχοντας θεωρήσει ακριβώς πιο πριν ότι το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την $y = f(x)$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ είναι το όριο του αθροίσματος κατά προσέγγιση ορθογώνιων λωρίδων πλάτους δx και μήκους y (σελίδα 105/C4).
[85] Σελίδα 105/C4.
[86] Σελίδα 108/C4.
[87] Σελίδα 93/C4.

Πρόβλημα 1: Το Σχήμα που ακολουθεί αποτελεί τμήμα σχεδίου υαλογραφήματος. Οι δύο βρόχοι περικλείουν επιφάνεια γαλάζιου γυαλιού. Η εναπομείνασα περιοχή εντός του ορθογωνίου $ABCD$ καλύπτεται από κόκκινο γυαλί. Οι βρόχοι περιγράφονται από την καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = 3\cos t, y = 9\sin t, 0 \le t < 2\pi$.

a. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στη μορφή $y^2 = f(x)$

b. Δείξτε ότι η σκιασμένη περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x δίνεται



από τον τύπο $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin 2t \sin t dt$, υπολογίζοντας το A .

c. Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

Οι πλευρές του ορθογωνίου $ABCD$ είναι εφαπτόμενες της καμπύλης, παράλληλες στους άξονες των συντεταγμένων. Δοθέντος του ότι μια μονάδα σε κάθε άξονα ισοδυναμεί με ένα 1 cm,

d. Βρείτε το εμβαδόν όλης της επιφάνειας που καλύπτει κόκκινο γυαλί.

Πρόβλημα 2: Ο ρυθμός, σε $cm^3 s^{-1}$, με τον οποίο στάζει λάδι από δεξαμενή σε χρόνο t sec είναι ανάλογος με τον όγκο του λαδιού που βρίσκεται τη δεδομένη στιγμή στο φρεάτιο, V cm^3 . Τη χρονική στιγμή $t = 0$, V=A.

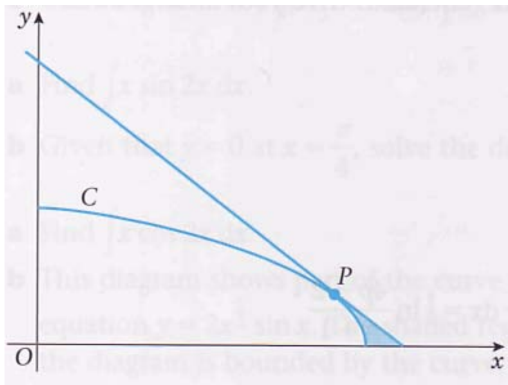
a. Διαμορφώνοντας και ολοκληρώνοντας μια διαφορική εξίσωση δείξτε ότι $V=Ae^{-kt}$.

b. Σχεδιάστε ένα γράφημα για να δείξετε τη σχέση ανάμεσα στα V και t

c. Δοθέντος του ότι V=$\frac{1}{2}$ A για $t = T$, δείξτε ότι kT=ln2.

Πρόβλημα 3: Το διάγραμμα απεικονίζει την καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις:

$x = a\sin^2 t, y = a\cos t$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$, όπου α θετική σταθερά. Το σημείο P βρίσκεται πάνω στη C και έχει συντεταγμένες $(\frac{3}{4}a, \frac{1}{2}a)$.



a. Υπολογίστε το $\frac{dy}{dx}$, δίνοντας την απάντησή σας συναρτήσει του t

b. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C στο P

c. Δείξτε ότι η καρτεσιανή εξίσωση της C είναι $y^2 = a^2 - ax$

Η γραμμοσκιασμένη περιοχή περικλείεται από τη C, την εφαπτομένη στο P και τον άξονα των y. Έστω ότι περιστρέφεται κατά 2π radians γύρω από τον άξονα των x, σχηματίζοντας στερεό εκ περιστροφής.

d. Με τη βοήθεια λογισμού υπολογίστε τον όγκο του στερεού που προκύπτει, δίνοντας την απάντησή σας στη μορφή $k\pi a^3$, όπου k κλάσμα.

3.6.2.5 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά 1 (FP1)

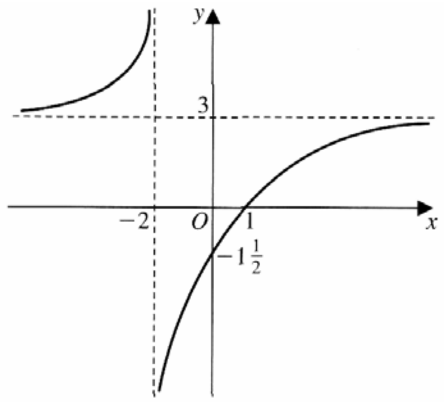
Α' Μέρος

Κεφάλαιο 1/FP1: ***Ανισώσεις***

Το Κεφάλαιο αυτό εμβαθύνει στην αλγεβρική και γραφική επίλυση ανισώσεων (και εκείνων που περιέχουν απόλυτες τιμές).

Στο μάθημα αρχικά επεκτείνεται η σχετική θεωρία του 3^{ου} Κεφαλαίου/C1 (Εξισώσεις και Ανισώσεις) για την επίλυση απλών γραμμικών ανισώσεων. Ορίζονται οι *κρίσιμες τιμές* (critical values) της μεταβλητής x ως «οι τιμές του x, παραδείγματος χάρη για $f(x) > 0$, όπου το πρόσημο της $f(x)$ είναι διαφορετικό για τιμές των x σε κάθε μία πλευρά της κρίσιμης τιμής»[88].

Σε παράδειγμα του σχολικού εγχειριδίου (σελίδα 2/FP1) ζητείται η εύρεση των τιμών του x για τις οποίες ισχύει ότι $\frac{4x-1}{x+2} < 1$. Κατά την επίλυση της ανίσωσης προκύπτει η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-3}{x+2}$, το γράφημα της οποίας εμφανίζεται στο διπλανό Σχήμα.



Σχήμα 23

Ενδιαφέρουσα είναι η σχετική παρατήρηση του σχολικού εγχειριδίου πως «Αντίθετα με τις ανισώσεις του C1 όπου οι κρίσιμες τιμές συμβαίνουν μόνο όπου $f(x) = 0$, σε κάποιες ανισώσεις οι κρίσιμες τιμές συμβαίνουν όπου $f(x) = 0$ *και επιπλέον* στις ασύμπτωτες της $y = f(x)$ που είναι παράλληλες στον άξονα των y.»[89]

[88] "These are values of x for the inequality $f(x) > 0$, say, where the sign of $f(x)$ changes between values of x on either side of the critical value.", σελίδα 1/FP1.
[89] Σελίδα 2/FP1.

Σε συνέχεια του 4ου Κεφαλαίου/C1 (Σχεδιασμός καμπύλων), το σχολικό εγχειρίδιο μελετά τη γραφική επίλυση συστημάτων ανισώσεων, με σχεδίαση των γραφημάτων των αντίστοιχων συναρτήσεων είτε βάσει θεωρίας, είτε με τη βοήθεια γραφικού μικροϋπολογιστή. Το τελευταίο μέρος του Κεφαλαίου διαπραγματεύεται ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές[90] και προτείνει την επίλυσή τους γραφικά.

Κεφάλαιο 2/FP1: ***Σειρές (Series)***

Στόχο του 2ου Κεφαλαίου αποτελεί ο υπολογισμός του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους όρων ακολουθίας με χρήση της μεθόδου των διαφορών. Στο μάθημα υπενθυμίζονται οι τύποι που δίνουν το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων αριθμητικής[91] και γεωμετρικής[92] προόδου και υπολογίζεται το άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} r$:

- Με χρήση μεθόδου παρόμοιας με εκείνης που ακολούθησε ο Gauss.
- Με τη μέθοδο των διαφορών, εισάγοντας τον τύπο $\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n+1) - f(1)$ όπου $f(r)$ συνάρτηση τέτοια ώστε $u_r \equiv f(r+1) - f(r)$.

Στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου αποδεικνύονται βήμα προς βήμα οι τύποι υπολογισμού των $\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$, $\sum_{r=1}^{n} r^3$ και ακολουθεί η εφαρμογή τους σε ασκήσεις.

---

[90] Σε συνέχεια του 5ου Κεφαλαίου/C3.
[91] Κεφάλαιο 6/C1.
[92] Κεφάλαιο 7/C2.

Κεφάλαιο 4/FP1: ***Αριθμητική επίλυση εξισώσεων***

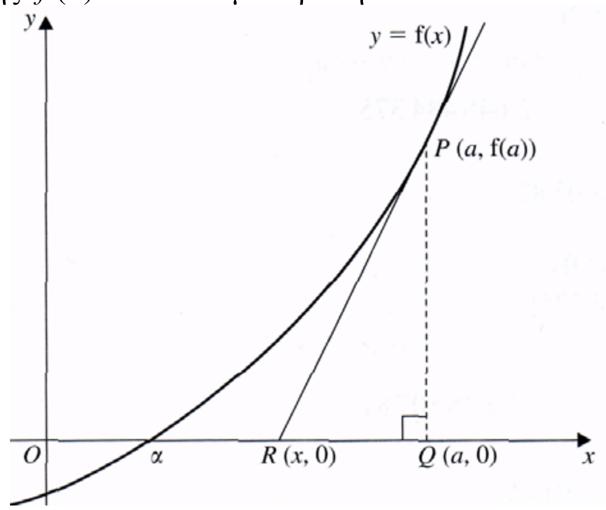
Το Κεφάλαιο αυτό έρχεται να συμπληρώσει τη θεωρία του 4ου Κεφαλαίου/C3 με την παράθεση τριών επιπλέον επαναληπτικών μεθόδων για την κατά προσέγγιση εύρεση ριζών εξισώσεων:

i. Τη γραμμική παρεμβολή (linear interpolation).
ii. Τη διχοτόμηση διαστήματος (interval bisection).
iii. Τη διαδικασία Newton Raphson.

Η δομή του Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Αρχικά υπενθυμίζεται το ότι «Η τεχνική της επανάληψης δίνει μια ακολουθία από προσεγγίσεις. Συνήθως η ακολουθία αυτή συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης. Εντούτοις κάποτε η ακολουθία αποκλίνει και απομακρύνει από τη ρίζα.»[93]. Έπειτα περιγράφεται η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής για την εύρεση ρίζας της $f(x)=0$ και δίνεται η απόδειξή της με χρήση ομοίων τριγώνων. Ακολουθεί ανάλυση της μεθόδου διχοτόμησης διαστήματος. Στη συνέχεια, το σχολικό εγχειρίδιο δίνει ιδιαίτερο βάρος στην ακόλουθη περιγραφή της διαδικασίας Newton Raphson[94]:

«[...] Έστω το γράφημα της $y=f(x)$ με α ρίζα της $f(x)=0$ και α μια πρώτη προσέγγιση της α. Καθώς το σημείο P της καμπύλης έχει την α ως x-συντεταγμένη, σχεδιάστε την εφαπτομένη της καμπύλης στο P. Αυτή τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $R(x,0)$. Η κλίση της καμπύλης $y=f(x)$ δίνεται από τον τύπο $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ Άρα η κλίση της καμπύλης στο P είναι $f'(\alpha)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο P είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$.»

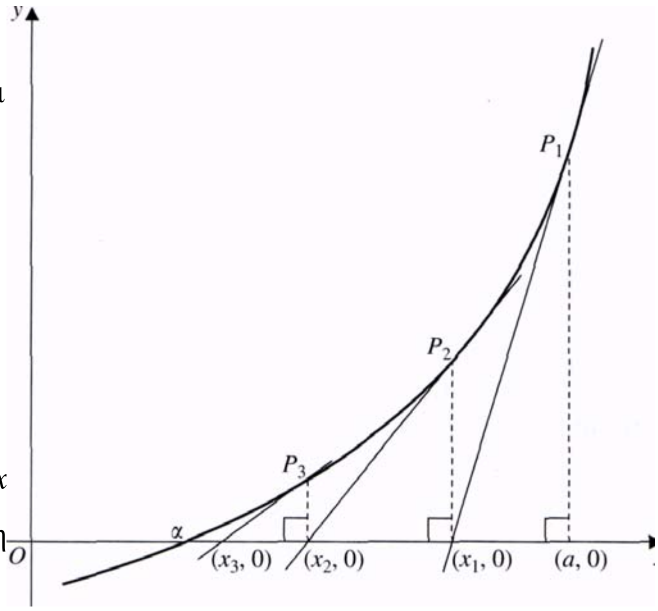


Σχήμα 24

«Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x για $y=0$ έτσι [...] $R(\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},0)$ και άρα

[93] Σελίδα 51/FP1.
[94] Σελίδες 58-59/FP1.

Αν α είναι μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας της $f(x)=0$, τότε μια καλύτερη προσέγγιση θα είναι, γενικά, η $\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$.»[95]



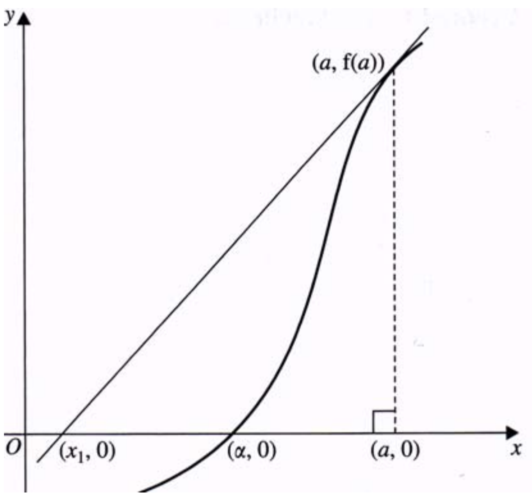
Με χρήση της τιμής που προκύπτει και συνεχείς επαναλήψεις λαμβάνεται τρίτη, τέταρτη κ.ο.κ. προσέγγιση, κάθε μία από τις οποίες γενικά θα είναι καλύτερη από τη προηγούμενή της.

Το σχολικό εγχειρίδιο, αναφερόμενο στο διπλανό Σχήμα, παρατηρεί ότι «κάθε διαδοχική εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x όλο και πιο κοντά στο σημείο όπου η καμπύλη τέμνει τον άξονα.

Σχήμα 25

Σαν επακόλουθο, η ακολουθία των προσεγγίσεων $\alpha, x_1, x_2, x_3, \ldots$, πλησιάζει όλο και πιο κοντά στη ρίζα α της $f(x)=0$.»

Ωστόσο το σχολικό εγχειρίδιο δεν παραλείπει να αναφέρει και περιπτώσεις όπου η διαδικασία Newton Raphson δε λειτουργεί και η ακολουθία των προσεγγίσεων απομακρύνεται από τη ρίζα α της $f(x)=0$ (Σχήμα 26):



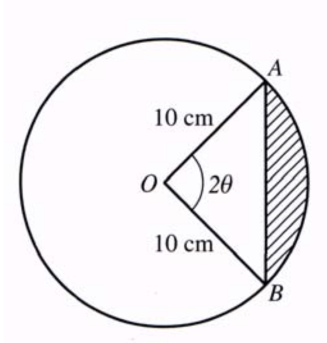
Σχήμα 26

Στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου περιγράφεται αναλυτικά η κατά προσέγγιση εύρεση της ρίζας εξίσωσης με κάθε μια από τις παραπάνω μεθόδους, με την επισήμανση ότι εκείνη της διχοτόμησης διαστήματος, αν και

[95] Σελίδες 58-59/FP1.

εύκολη στην εφαρμογή της, απαιτεί αρκετό χρόνο μέχρι να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ενδεικτική του πνεύματος που διέπει τα θέματα των τελικών εξετάσεων είναι η ακόλουθη ***άσκηση***:



Στο διπλανό Σχήμα, O είναι το κέντρο του κύκλου ακτίνας 10 cm και τα σημεία A και B είναι τοποθετημένα κατά τέτοιον τρόπο στην περιφέρειά του ούτως ώστε $\angle AOB$=2θ radians. Το εμβαδόν του σκιασμένου τομέα είναι 44 cm^2. Αποδείξτε ότι 2θ-sin2θ-0.88=0. Δείξτε ότι μια ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται ανάμεσα στο 0.9 και στο 1. Λαμβάνοντας το 0.9 σαν πρώτη προσέγγιση στη ρίζα, χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Newton Raphson μία φορά για μια δεύτερη προσέγγιση, δίνοντας την απάντησή σας με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

Ακολουθούν ορισμένες ασκήσεις που προέρχονται από το σχολικό εγχειρίδιο, αποτελούν θέματα τελικών εξετάσεων και είναι ενδεικτικές του πνεύματος που διέπει τα προηγούμενα κεφάλαια:

Άσκηση 1: Στους ίδιους άξονες σχεδιάστε τις καμπύλες με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=\frac{x}{x+2}$. Δώστε τις εξισώσεις τυχόν ασύμπτωτων και τα σημεία τομής των καμπυλών με τους άξονες και μεταξύ τους. Βάσει των προηγούμενων, ή με άλλο τρόπο βρείτε τις τιμές των x για τις οποίες ισχύει $\frac{1}{x}>\frac{x}{x+2}$.

Άσκηση 2: Δείξτε ότι $\sum_{r=1}^{n} r(r+2)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$. Βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος ή αλλιώς να υπολογισθεί συναρτήσει του n το άθροισμα $3\ln 2+4\ln 2^2+5\ln 2^3+...+(n+2)\ln 2^n$.

Άσκηση 3: Δοθέντος του ότι $f(r)=\frac{1}{r^2}$, δείξτε ότι $f(r)-f(r+1)=\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ και βρείτε το $\sum_{r=1}^{n}\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$.

Β' Μέρος

Διαφορικές Εξισώσεις

Κεφάλαιο 5/FP1: *Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης*

Το Κεφάλαιο αυτό αποτελεί συνέχεια του 4ου και 6ου Κεφαλαίου/Core 4, όπου παρουσιάσθηκαν οι 1ης τάξης διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές.

Εντός του ορίζονται:

- Η έννοια της διαφορικής εξίσωσης και η τάξη της.
- Η οικογένεια καμπύλων λύσεων.
- Η ακριβής (exact) διαφορική εξίσωση 1ης τάξης.
- Η 1ης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, με P,Q είτε συναρτήσεις του x, είτε σταθερές.

Η δομή του μαθήματος είναι η ακόλουθη:

Αρχικά υπενθυμίζεται ο τύπος της γενικής λύσης της 1ης τάξης διαφορικής εξίσωσης με χωριζόμενες μεταβλητές[96]. Στη συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά οικογένειες καμπύλων λύσεων (όπως για την δ.ε. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, η $x^2+y^2=a^2$, όπου $a^2=2C$) και οι ακριβείς διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης (π.χ. η $y+x\frac{dy}{dx}=x^3$). Ακολουθεί μελέτη της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, όπου P,Q είτε συναρτήσεις του x, είτε σταθερές. Εξετάζεται η μετατροπή της σε ακριβή μορφή με τη χρήση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα (integrating factor) και αποδεικνύεται βήμα προς βήμα, για P,Q συναρτήσεις του x, το πώς προκύπτει ο γενικότερος τύπος του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int Pdx}$ [97] και η λύση της, $ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$, όπου C τυχαία σταθερά.

Τα λυμένα παραδείγματα και οι ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου διαπραγματεύονται:

---

[96] «Το $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ ισοδύναμα μπορεί να γραφεί σαν $\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$ με τον όρο ότι το $\frac{1}{g(y)}$ μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς y και το $f(x)$ ως προς x» (6ο Κεφάλαιο/C4).

[97] Πολλαπλασιαστής Eulor.

- Την εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές (και ειδικής λύσης, δοθέντων οριακών συνθηκών (boundary conditions)).
- Την εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης, με σχεδίαση της οικογένειας των καμπύλων λύσεων που αυτή αναπαριστά.
- Χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{\int P dx}$ για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

Κεφάλαιο 6/FP1: ***Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης***

Σε συνέχεια του προηγούμενου Κεφαλαίου, στο 6ο Κεφάλαιο επιπλέον εισάγονται:

- Η 2ης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση.
- Η έννοια της συμπληρωματικής συνάρτησης (complementary function).
- Η έννοια της ειδικής λύσης (particular integral).

Η διάρθρωση του Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Αρχικά το σχολικό εγχειρίδιο ερευνά τις λύσεις της 2ης τάξης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με τη γενική μορφή $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$. Αποδεικνύεται αναλυτικά το πώς προκύπτει η γενική λύση της, $y = Au + Bv$ (όπου $y = u$ και $y = v$ ειδικές, διακριτές λύσεις) και με χρήση της βοηθητικής Δευτεροβάθμιας εξίσωσης προσδιορίζονται οι συναρτήσεις u, v ως εξής:

Αν η βοηθητική Δευτεροβάθμια εξίσωση $am^2 + bm + c = 0$ έχει:

◊ Πραγματικές, διακριτές ρίζες α, β, τότε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$, A, B σταθερές.

◊ Μία διπλή ρίζα α, τότε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο $y = (A + Bx)e^{\alpha x}$, A, B σταθερές.

◊ Συζυγείς μιγαδικές ρίζες $p+iq$, $p-iq$ με $p, q \in \Re$ τότε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο $y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$, A, B σταθερές.

◊ Φανταστικές ρίζες (διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$), η γενική λύση είναι η $y = A\cos nx + B\sin nx$, με A, B σταθερές.

Το δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου μελετά τη 2ης τάξης διαφορική εξίσωση με τη γενική μορφή $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$, όπου η $f(x)$ μπορεί να είναι σταθερά, γραμμική, εκθετική (ke^{px}), τριγωνομετρική, ακόμη και Δευτεροβάθμια συνάρτηση. Η λύση της δίνεται ως το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς (συμπληρωματική συνάρτηση) και μιας ειδικής λύσης, ανάλογα με τη μορφή της $f(x)$.

Το θεωρητικό κομμάτι ολοκληρώνεται με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης με αλλαγή μεταβλητής (με υπόδειξη των απαραίτητων αντικαταστάσεων) και την αναγωγή τους σε γνωστές περιπτώσεις.

Στα λυμένα παραδείγματα και στις εφαρμογές του σχολικού εγχειριδίου υποδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσης 2ης τάξης ομογενών και μη διαφορικών εξισώσεων και, με γενίκευση των αποτελεσμάτων των ασκήσεων, προκύπτουν οι τύποι των γενικών λύσεων ανά περίπτωση.

Ενδεικτικά αναφέρονται οι ακόλουθες ασκήσεις, θέματα τελικών εξετάσεων:

Άσκηση 1: Μια καμπύλη που διέρχεται από το σημείο (1,1) έχει εξίσωση $y=f(x)$ όπου $\frac{dy}{dx}+\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}y=\frac{2(x+1)}{x^2-2x+2}$.

a. Λύστε αυτή τη διαφορική εξίσωση δείχνοντας ότι $f(x)\equiv\frac{x^2+2x-2}{x^2-2x+2}$.

b. Δείξτε ότι $-1\le f(x)\le 3$.

Άσκηση 2: Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=0$.

a. Υπολογίστε τις σταθερές k,p έτσι ώστε η ke^{px} να αποτελεί ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=54e^{2x}$ και βρείτε εκείνη τη λύση της διαφορικής εξίσωσης για την οποία $y=0$ και $\frac{dy}{dx}=3$ για $x=0$.

b. i) Βρείτε τη λύση της $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=0$ όταν $y=0$ και $\frac{dy}{dx}=3$ για $x=0$.

ii) Βρείτε τις στάσιμες τιμές της y.

iii) Δείξτε ότι τα μεγέθη των διαδοχικών στάσιμων τιμών της y σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο.

Άσκηση 3: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $z = y^{-2}$ για να μετατρέψετε τη διαφορική εξίσωση $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ στη $\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2}$ και βρείτε τη γενική λύση της πρώτης.

Κεφάλαιο 7/FP1: ***Πολικές συντεταγμένες***

Στο Κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι έννοιες:

- Των πολικών συντεταγμένων, του πόλου και της πολικής ευθείας.[98]
- Του εμβαδού περιοχής που εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες.
- Των παράλληλων και κάθετων εφαπτόμενων στην πολική ευθεία.

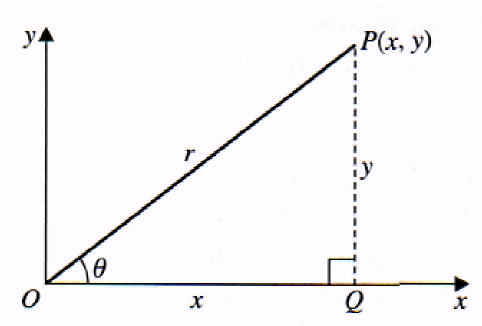
Αρχικά στο μάθημα περιγράφεται αναλυτικά το σύστημα των πολικών συντεταγμένων, η λειτουργικότητά του και η σχέση μεταξύ ενός καρτεσιανού και ενός πολικού συστήματος αναφοράς:

Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)

Πολικές συντεταγμένες (r, θ)

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$[99], $-\pi < \theta \le \pi$

με $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ και $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$



Σχήμα 27

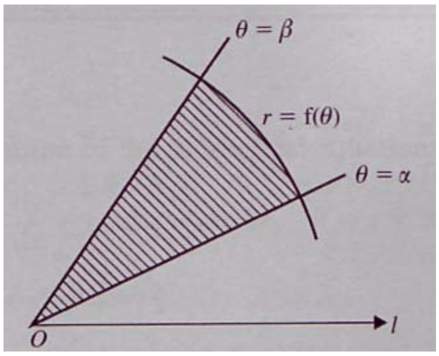
Στη συνέχεια το σχολικό εγχειρίδιο επικεντρώνεται στην εύρεση των εξισώσεων σε πολικές συντεταγμένες του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας c (η $r = c$) και της ημιευθείας που σχηματίζει γωνία α με την πολική ευθεία (η $\theta = \alpha$). Επίσης του κύκλου κέντρου $(b, 0)$ και ακτίνας α (η $a^2 = r^2 + b^2 - 2br\cos\theta$) και της ευθείας που απέχει από τον πόλο Ο απόσταση p με την κάθετο σε αυτή να σχηματίζει γωνία α με τον πόλο Ο (η $p = r\cos(\alpha - \theta)$). Ακόμη εξετάζει τη μετατροπή εξισώσεων καμπυλών από την καρτεσιανή μορφή σε άλλη, βάσει πολικών συντεταγμένων (και αντιστρόφως).

Το θεωρητικό κομμάτι του κεφαλαίου καταλήγει με τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίων που εκφράζονται σε πολικές συντεταγμένες, αποδεικνύοντας λεπτομερώς τον σχετικό τύπο:

[98] Σελίδα 114/FP1.
[99] Το σχολικό εγχειρίδιο επισημαίνει ότι σε άλλα εγχειρίδια και προγράμματα διδασκαλίας επιτρέπεται το r να παίρνει αρνητικές τιμές.

«Για την καμπύλη με πολική εξίσωση $r = f(\theta)$

$$E_{\text{γραμμ. χωρίου}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$ ».[100]

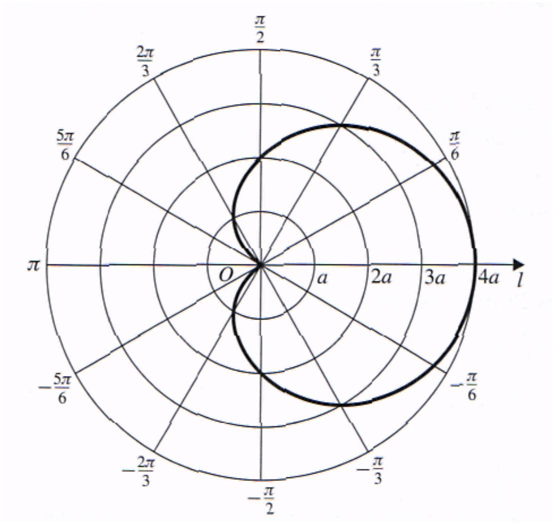


Σχήμα 28

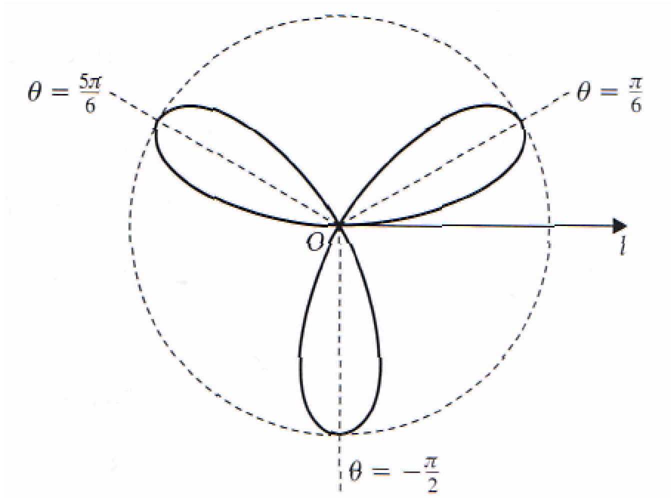
και με τον προσδιορισμό των κάθετων και παράλληλων εφαπτόμενων του πολικού άξονα.

Στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου:

- Προτείνεται η ακόλουθη μεθοδολογία για τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης καμπύλης: έλεγχος για την ύπαρξη τομών της καμπύλης με τον πολικό άξονα, για τυχόν περιοδικότητα της εξίσωσης (η οποία κυρίως οφείλεται στην ύπαρξη τριγωνομετρικών συναρτήσεων), για συμμετρίες, για φραγμένες τιμές του r και, τέλος, κατασκευή πίνακα τιμών και σχεδίαση συνάρτησης σε ειδικά φύλλα γραφημάτων (με κατασκευή της καρδιοειδούς (cardioid) καμπύλης και της καμπύλης τρίφυλλο (3 'leaves') (Σχήματα 29 και 30):



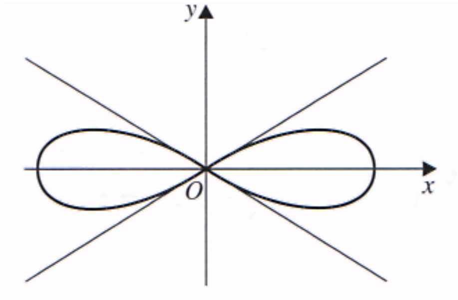
Σχήμα 29

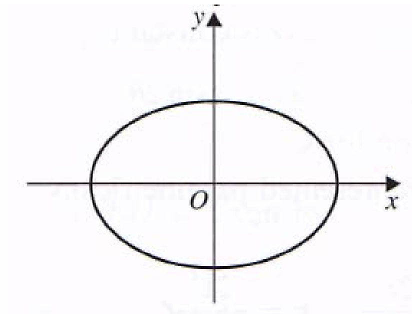


Σχήμα 30

- Επιχειρείται εξοικείωση του μαθητή με ασκήσεις μετατροπής της εξίσωσης μιας καμπύλης από καρτεσιανή μορφή σε πολική και αντιστρόφως. Σε αυτό το σημείο δίνονται και οι ακόλουθες καμπύλες του λημνίσκου Bernoulli και της έλλειψης (Σχήματα 31 και 32):

[100] Σελίδα 127/FP1.





Σχήμα 31 $r^2 = 4\cos 2\theta$

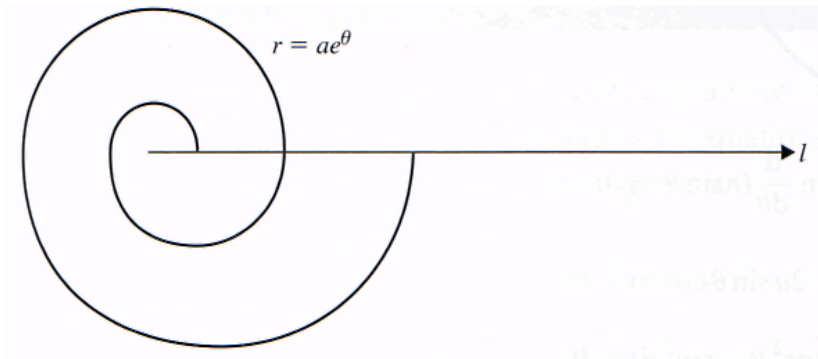
$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

Σχήμα 32 $r^2 = \dfrac{3}{2 - \cos 2\theta}$

$x^2 + 3y^2 = 3$

- Ζητείται να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας καμπύλων που δίνονται σε πολικές συντεταγμένες και οι κάθετες και παράλληλες εφαπτόμενες του πολικού άξονα με χρήση παραγώγισης. Εδώ παρουσιάζεται και η ελικοειδής καμπύλη με πολική εξίσωση $r = ae^{\theta}$, όπου a θετική σταθερά (Σχήμα 33)

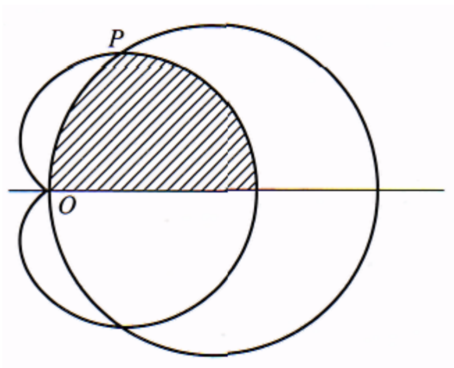
Σχήμα 33



Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω προβλήματα και ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, θέματα τελικών εξετάσεων:

Πρόβλημα 1:

Το διάγραμμα απεικονίζει τις καμπύλες με πολικές εξισώσεις $r = a(1 + \cos\theta)$ και $r = 3a\cos\theta$, $\alpha > 0$.

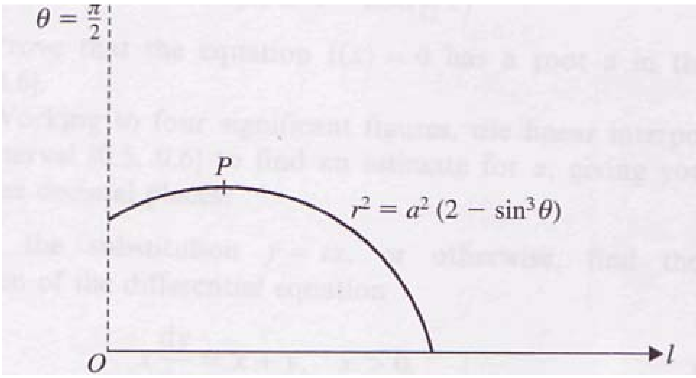


a. Βρείτε τις πολικές συντεταγμένες του σημείου τομής P των δύο καμπύλων.
b. Βρείτε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του Σχήματος το οποίο περικλείεται από την πολική ευθεία $\theta = 0$ και τις δύο καμπύλες συναρτήσει του π.

Πρόβλημα 2: Σχεδιάστε την καμπύλη με εξίσωση $r = a(1 + \cos\theta)$ για $0 \le \theta \le \pi$ με $\alpha > 0$ και την ευθεία με εξίσωση $r = 2a\sec\theta$ για $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ στο ίδιο διάγραμμα.

Η ημιευθεία με εξίσωση $\theta = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ συναντά την καμπύλη στο A και την ευθεία με εξίσωση $r = 2a \sec\theta$ στο B. Αν O ο πόλος, βρείτε εκείνη την τιμή του $\cos a$ για την οποία OB=2 OA.

Πρόβλημα 3: Το διάγραμμα απεικονίζει την καμπύλη με εξίσωση $r^2 = a^2(2 - \sin^3\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ όπου α θετική σταθερά. Εξετάζοντας τις στάσιμες τιμές του $r^2 \sin^2\theta$ ή αλλιώς βρείτε τις πολικές συντεταγμένες του σημείου P όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην πολική ευθεία l.



3.6.2.6 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά 2 (FP2)

Κεφάλαιο 1/FP2: ***Υπερβολικές συναρτήσεις***

Στο Κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μια εισαγωγή στη θεωρία των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους. Απαραίτητη είναι η καλή γνώση των εκθετικών και των λογαριθμικών συναρτήσεων, της αντίστροφης συνάρτησης και της τριγωνομετρίας, όπως έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες ενότητες.

Το μάθημα ξεκινά με τους ορισμούς των ακόλουθων υπερβολικών συναρτήσεων με τη βοήθεια εκθετικών συναρτήσεων, δίνοντας τις γραφικές παραστάσεις των πρώτων τριών :

- Το υπερβολικό ημίτονο: $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $x \in \Re$.
- Το υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in \Re$.

- Η υπερβολική εφαπτομένη: $\tanh x \equiv \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x \in \Re$.
- Η υπερβολική τέμνουσα: $\sec hx \equiv \dfrac{1}{\cosh x} \equiv \dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$, $x \in \Re$.
- Η υπερβολική συντέμνουσα: $\cos echx \equiv \dfrac{1}{\sinh x} \equiv \dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$, $x \in \Re, x \neq 0$.
- Η υπερβολική συνεφαπτομένη: $\coth x \equiv \dfrac{1}{\tanh x} \equiv \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$, $x \in \Re, x \neq 0$.

Στη συνέχεια αποδεικνύονται ταυτότητες που περιέχουν υπερβολικές συναρτήσεις και δίνεται ο κανόνας του Osborn (Osborn's rule)[101]. Σχεδιάζονται τα γραφήματα των αντιστρόφων συναρτήσεων του υπερβολικού ημιτόνου ($ar\sinh x$), του υπερβολικού συνημιτόνου ($ar\cosh x$) και της υπερβολικής εφαπτομένης ($ar\tanh x$) βάσει της συμμετρίας των f, f^{-1} ως προς την $y = x$ και δίνονται οι σχετικοί τύποι:

- $ar\sinh x \equiv \ln\left\lfloor x+\sqrt{x^{2}+1}\right\rfloor$, $x \in \Re$ (με απόδειξη)
- $ar\cosh x \equiv \ln\left\lfloor x+\sqrt{x^{2}-1}\right\rfloor, x \geq 1$, $x \in \Re$ (χωρίς απόδειξη)
- $ar\tanh x \equiv \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), |x|<1$, $x \in \Re$ (χωρίς απόδειξη)

Στα λυμένα παραδείγματα και στις εφαρμογές του βιβλίου:

- Αποδεικνύονται αναλυτικά ταυτότητες υπερβολικών συναρτήσεων όπως $\cosh^{2} x-\sinh^{2} x \equiv 1$, $1-\tanh^{2} x \equiv \sec h^{2} x$, $\sinh 2A \equiv 2\cosh A \sinh A$ κ.α.
- Διδάσκεται η έκφραση τιμών υπερβολικών συναρτήσεων (όπως η $ar\sinh\dfrac{3}{4}$) σε λογαριθμική μορφή.
- Επιλύονται εξισώσεις που περιέχουν υπερβολικές συναρτήσεις.

Οι ασκήσεις του Κεφαλαίου δε διαφοροποιούνται από τις εφαρμογές και τα λυμένα παραδείγματά του.

[101] Σύμφωνα με τον κανόνα του Osborn «Μια τριγωνομετρική ταυτότητα μπορεί να μετατραπεί σε μια ανάλογη για υπερβολικές συναρτήσεις με την αντικατάσταση κάθε τριγωνομετρικής συνάρτησης με την αντίστοιχή της υπερβολική και με την αλλαγή προσήμου κάθε γινομένου δύο ημίτονων».

Κεφάλαιο 2/FP2: ***Παραγώγιση***

Σε συνέχεια του προηγούμενου Κεφαλαίου, στο παρόν διδάσκεται η παραγώγιση υπερβολικών συναρτήσεων και εκφράσεων που τις περιέχουν, καθώς και η παραγώγιση αντιστρόφων συναρτήσεων, συμπεριλαμβανομένων των αντιστρόφων υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Απαιτείται άριστη γνώση της θεωρίας της παραγώγισης, όπως έχει διδαχθεί στα C1, C2, C3 και C4, των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους (Κεφάλαιο 6/C3).

Η ύλη του Κεφαλαίου είναι διαρθρωμένη ως εξής:

Αρχικά αποδεικνύονται οι τύποι των παραγώγων του υπερβολικού συνημιτόνου ($\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$), του υπερβολικού ημιτόνου ($\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$) και των αντιστρόφων τους ($\frac{d}{dx}(ar\cosh x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [102] και $\frac{d}{dx}(ar\sinh x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$).

Στη συνέχεια, μετά από μια σύντομη υπενθύμιση των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ημιτόνου, του συνημιτόνου, της εφαπτομένης και των αντίστρόφων τους συναρτήσεων, ακολουθεί η παραγώγισή τους, διαδικασία που αναλύεται με λεπτομέρεια και μέσω της οποίας προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ και } \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Στις εφαρμογές και στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου:

- Επιδιώκεται η εξοικείωση του μαθητή με την παραγώγιση υπερβολικών συναρτήσεων, όπως οι $\tanh x$ και $\coth x$, αλλά και μαθηματικών συναρτήσεων που τις περιέχουν, κάνοντας χρήση του κανόνα του γινομένου, της αλυσίδας κ.α.
- Ζητείται να βρεθεί η εφαπτομένη και η κάθετη καμπύλης της οποίας η εξίσωση περιέχει υπερβολικές ή και τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Κεφάλαιο 3/FP2: ***Ολοκλήρωση***

Το 3ο Κεφάλαιο ολοκληρώνει τη θεωρία ολοκληρωτικού λογισμού που έχει διδαχθεί στις προηγούμενες ενότητες. Περιέχει:

- Μεθοδολογίες υπολογισμού ολοκληρωμάτων που περιέχουν υπερβολικές συναρτήσεις, αντίστροφες υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Αναγωγικούς τύπους ολοκληρωμάτων.
- Υπολογισμό μήκους καμπύλης όταν αυτή δίνεται σε καρτεσιανή ή παραμετρική μορφή.
- Υπολογισμό εμβαδού επιφάνειας εκ περιστροφής

Η διάρθρωση του μαθήματος είναι η ακόλουθη:

Στο πρώτο μέρος υπενθυμίζεται ότι η ολοκλήρωση αποτελεί διαδικασία αντίστροφη της παραγώγισης και δίνεται αντιστοιχία παραγώγων με ολοκληρώματα υπερβολικών συναρτήσεων[103]. Αναφέρονται επίσης οι ακόλουθοι τύποι με την επισήμανση ότι θα δίνονται στις τελικές εξετάσεις, ο πρώτος εκ των οποίων αποδεικνύεται στις εφαρμογές του σχολικού εγχειριδίου:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right), a>0, \ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), |x|<a, a>0,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = ar\cosh\left(\frac{x}{a}\right), x>a>0 \text{ και} \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = ar\sinh\left(\frac{x}{a}\right), a>0.*$$

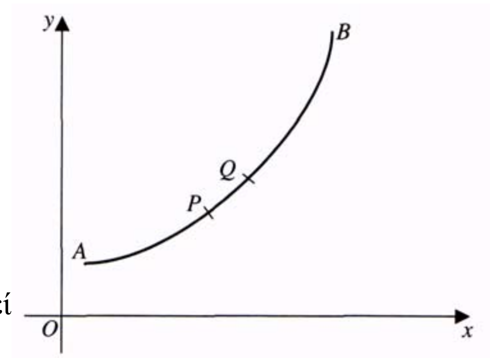
Διδάσκεται η χρήση, κατά την ολοκλήρωση, υπερβολικών ταυτοτήτων (όπως οι $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$, $\cosh 2A \equiv 2\cosh^2 A - 1$ και άλλες)[104] και υποδεικνύεται μεθοδολογία επίλυσης ολοκληρωμάτων της μορφής $\int \frac{1}{px^2+qx+r}dx$ ή $\int \frac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}}dx$ είτε με τη βοήθεια των τύπων *, είτε μέσω απλών κλασμάτων: $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, |x|>a$, $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x|<a$ [105].

Το δεύτερο μέρος εμβαθύνει στην παραγωγή και χρήση απλών αναγωγικών ολοκληρωτικών τύπων (αποδεικνύοντας αναλυτικά για το $I_n = \int x^n e^x dx$, $n \in Z^*$ τον αναγωγικό τύπο $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}, n \geq 1$), τονίζοντας την ιδιαίτερη χρησιμότητά τους

[103] 2ο Κεφάλαιο/FP3.
[104] Μεθοδολογία που έχει διδαχθεί και στο 6ο Κεφάλαιο/C4.
[105] 6ο Κεφάλαιο/C4.

σε περιπτώσεις υπολογισμού εμβαδού επιφανειών και όγκου στερεών εκ περιστροφής.[106]

Το τελευταίο μέρος διαπραγματεύεται τον υπολογισμό μήκους καμπύλης και εμβαδού επιφάνειας εκ περιστροφής, όταν η εξίσωση της καμπύλης δίδεται σε καρτεσιανή ή παραμετρική μορφή, όχι όμως σε πολικές ή εσωτερικές συντεταγμένες. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο το σχολικό εγχειρίδιο προσεγγίζει τα θέματα αυτά:

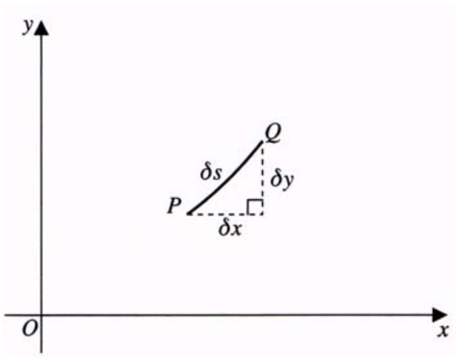


Σχήμα 34

Μήκος καμπύλης[107]

«Έστω ότι μια καμπύλη είναι συνεχής με κάθε σημείο της να έχει μοναδική εφαπτομένη. Θεωρήστε τμήμα της καμπύλης από το σημείο A στο B.
Στη συνέχεια υποθέστε ότι αυτό το τμήμα έχει χωρισθεί σε πολύ μικρά μέρη, με ένα από αυτά να είναι το PQ.
Αν τα P, Q επιλεχθούν ούτως ώστε να είναι *αρκούντως κοντά* (sufficiently close) τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι $\frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\_\tau\acute{o}\xi o\upsilon\_PQ}{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\_\chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma\_PQ} \approx 1$.

Επιπλέον, αν το Q προσεγγίζει το P κατά μήκος της καμπύλης, γεγονός που αυξάνει τον αριθμό των πολύ μικρών μερών *επ' αόριστον* (indefinitely), τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι $\lim\limits_{Q\to P}\frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\_\tau\acute{o}\xi o\upsilon\_PQ}{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\_\chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma\_PQ} \approx 1$[108].»



Σχήμα 35

«Έστω ότι η καμπύλη έχει καρτεσιανή εξίσωση $y = f(x)$ και θεωρείστε τα σημεία $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(x+\delta x, y+\delta y)$. Το μήκος της χορδής PQ είναι βάσει Πυθαγόρειου θεωρήματος: $\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$.
Αν δs το μήκος του τόξου PQ, τότε $\delta s \approx \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$, $(\delta s)^2 \approx (\delta x)^2 + (\delta y)^2$ και $\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 \approx 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$. Για $\mathrm{P}\to\mathrm{Q}$, $\delta x \to 0$ και $\frac{\delta s}{\delta x} \to \frac{ds}{dx}$, $\frac{\delta y}{\delta x} \to \frac{dy}{dx}$, οπότε $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.» Το σχολικό εγχειρίδιο συνεχίζει ως εξής:

---

[106] 6$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο/C4.

[107] Σελίδες 59-61/FP2.

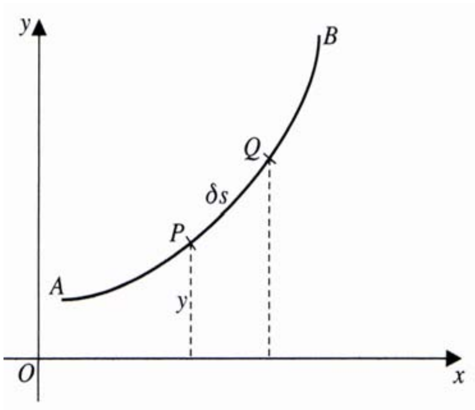
[108] Το σχολικό εγχειρίδιο εδώ επισημαίνει ότι το συμπέρασμα για την τιμή του ορίου είναι πάντα το ίδιο, ακόμα και αν τα σημεία P, Q επιλεχθούν διαφορετικά, κάτι που αποδεικνύεται σε ανώτερο επίπεδο μαθηματικών σπουδών και που στο παρόν απλά θεωρείται ότι ισχύει.

«Δοθέντων των $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ θα ισχύει $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ και, παραγωγίζοντας ως προς x: ***Μήκος τόξου AB***= $\int_{x_A}^{x_B}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx$. Επίσης από τη σχέση $(\delta s)^2 \approx (\delta x)^2 + (\delta y)^2$ με κατάλληλες πράξεις προκύπτει πως ***Μήκος τόξου AB***= $\int_{y_A}^{y_B}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dy$. Αν η καμπύλη είναι σε παραμετρική μορφή: ***Μήκος τόξου AB***= $\int_{t_A}^{t_B}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$.»

Εμβαδόν επιφάνειας εκ περιστροφής

«Όταν το μικρό τόξο PQ περιστραφεί κατά 2π rads γύρω από τον άξονα των x, θα σχηματισθεί ένας στενός δακτύλιος εμβαδού επιφάνειας περίπου $2\pi y \delta s$.

Το άθροισμα των εμβαδών όλων των παρόμοιων δακτυλίων από το A ως το B δίνει κατά προσέγγιση το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει κατά τη περιστροφή του τόξου AB γύρω από τον άξονα των x. Έστω $P \to Q$ τέτοιο ώστε $\delta s \to 0$. Τότε το εμβαδόν της επιφάνειας θα δίνεται από τον τύπο:



Σχήμα 36

Εμβαδόν επιφάνειας= $\int_{x_A}^{x_B} 2\pi y ds = \int_{x_A}^{x_B} 2\pi y \frac{ds}{dx}dx = \int_{x_A}^{x_B} 2\pi y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx$

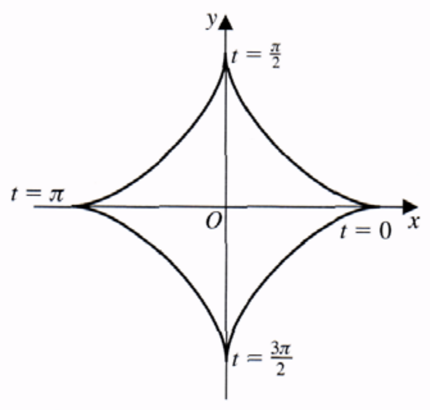
Σε παραμετρικές συντεταγμένες: ***Εμβαδόν επιφάνειας*** $= \int_{t_A}^{t_B} 2\pi y\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$»[109].

Στις εφαρμογές του Κεφαλαίου:

- Υπολογίζονται ολοκληρώματα υπερβολικών συναρτήσεων, αντιστρόφων υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση υπερβολικών ταυτοτήτων, με τη βοήθεια εκθετικών συναρτήσεων, με την αναγωγή σε κάποιον από τους τύπους *, με την ανάλυση σε απλά κλάσματα της προς ολοκλήρωση συνάρτησης, με ολοκλήρωση κατά μέρη ή με αντικατάσταση.
- Αποδεικνύονται οι αναγωγικοί τύποι: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.
- Υπολογίζεται το εμβαδόν που περικλείει η

[109] Σελίδες 61-62/FP2.

αστροειδής καμπύλη (Σχήμα 37) με εξισώσεις $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \le t < 2\pi$) και ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του τμήματος της καμπύλης που είναι πάνω από τον άξονα των y γύρω από τον άξονα των x με τη βοήθεια αναγωγικού τύπου.



Σχήμα 37

- Υπολογίζονται μήκη τόξων καμπυλών και επιφάνειες από περιστροφή.

Ενδεικτικά αναφέρονται οι ακόλουθες ασκήσεις, θέματα τελικών εξετάσεων, που καλύπτουν την ύλη των FP2:

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η καμπύλη με εξίσωση $y = \sec hx$ έχει $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ στα σημεία όπου $x = \pm \ln p$ και δώστε μια τιμή για το p. Σχεδιάστε την καμπύλη.

Άσκηση 2: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $t = \sinh x$ για να αποδείξετε ότι $\int_0^a (1+t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} a(1+a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left[a + (1+a^2)^{\frac{1}{2}} \right]$.

Άσκηση 3: Δοθέντος του $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n \in \aleph$

a. Δείξτε ότι $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

b. Εκτιμήστε το $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^8 3t dt$.

c. Δείξτε ότι $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

d. Δείξτε επιπλέον ότι $I_{2n-1}\, I_{2n} = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση 4:

a. Βρείτε το $\int \sqrt{x^2+4}$.

b. Η καμπύλη C έχει εξίσωση $y^2 - x^2 = 4$. Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο μέρος a. για να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τη C, τον θετικό ημιάξονα των x, τον θετικό ημιάξονα των y και την ευθεία $x = 2$, δίνοντας την απάντησή σας στη μορφή $p + \ln q$, όπου p, q σταθερές που πρέπει να βρεθούν.

Άσκηση 5: Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $x \in \Re$.

a. Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες αυτές και τις ευθείες $x = a$, $x = b$, $0 < a < b$ ισούται με $e^{-a} - e^{-b}$.

b. Βρείτε την οριακή τιμή του εμβαδού αυτού όταν, ταυτόχρονα, $a \to 0$ και $b \to \infty$.

Άσκηση 6: Για την καμπύλη με εξίσωση $y = (1-x)\sqrt{\dfrac{x}{3}}$ δείξτε ότι $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{(3x+1)^2}{12x}$ a. Βρείτε το μήκος της καμπύλης από το Ο ως το Α(1,0).

Το τόξο της καμπύλης ΟΑ περιστρέφεται 360^0 γύρω από τον άξονα των x.

b. Υπολογίστε το εμβαδόν της προκύπτουσας επιφάνειας.

Άσκηση *7*: Εκφράστε την $\tanh x$ χρησιμοποιώντας : a) e^x b) e^{2x}

Βάσει των προηγούμενων ή αλλιώς, αποδείξτε ότι $\tanh(x+y) \equiv \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.

Καθορίστε αν η $\tanh x$ είναι περιττή, άρτια ή τίποτα από τα δύο.

Ξεκινώντας από την έκφραση της $\tanh x$ βάσει e^x δείξτε $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$.

Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού που δημιουργείται όταν η πεπερασμένη περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = \tanh x$, τη γραμμή $x = 1$ και τον άξονα των x περιστραφεί κατά 2π rads γύρω από τον άξονα των x ισούται με $\dfrac{2\pi}{1+e^2}$.

3.6.2.7 Το πρόγραμμα της Ανάλυσης στα Προχωρημένα Θεωρητικά Μαθηματικά 3 (FP3)

Κεφάλαιο 1/FP3: ***Σειρές Maclaurin και Taylor***

Στόχο του παρόντος Κεφαλαίου αποτελεί η έκφραση συναρτήσεων όπως οι e^x, $\sin x$ και $\ln x$ με τη μορφή δυναμοσειρών.

Εισάγονται:

- Η έννοια της δυναμοσειράς (power series).
- Η παράγωγος ανώτερης τάξης.
- Η κατά Maclaurin ανάλυση της $f(x)$ σε ανιούσες δυνάμεις του x.
- Η κατά Taylor ανάλυση της $f(x)$.

Η δομή του Κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Αρχικά υπενθυμίζεται ο τύπος που δίνει το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου: $a + ar + ar^2 + ... = a(1-r)^{-1}$, $|r| < 1$[110] και το διωνυμικό θεώρημα Δηλώνεται ότι γενίκευσή τους αποτελούν οι δυναμοσειρές και εισάγεται η παράγωγος n-τάξης[111].

Στη συνέχεια δίνεται το ανάπτυγμα Maclaurin συνάρτησης $f(x)$ σε ανιούσες δυνάμεις του x, χωρίς αυστηρή απόδειξη, ως εξής:
«Για τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία $f : x \to f(x), x \in \Re$, εάν οι $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$,..., $f^{(r)}(0)$,... έχουν πεπερασμένες τιμές, τότε $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(0) + ...$»[112]. Αμέσως μετά σημειώνεται πως «για μια δοθείσα συνάρτηση είναι πιθανό η σειρά να συγκλίνει σε αυτή για *όλες* τις τιμές του x. Ωστόσο, πολύ συχνά η ανάλυση ισχύει μόνο για περιορισμένου εύρους τιμές του x». Σαν άμεση συνέπεια των προηγούμενων δίνονται οι προσεγγίσεις: $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, $\tan x \approx x$ και $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$.

Ακολουθεί το ανάπτυγμα (σειρά) Taylor της συνάρτησης $f(x)$:

$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(a) + ...$ ή

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(x-r)^r}{r!} f^{(r)}(a) + ...$, το οποίο εισάγεται ως γενίκευση του αναπτύγματος Maclaurin για την προσέγγιση της τιμής της $f(x)$, όταν $x \approx a$, με $a \neq 0$ και υποδεικνύεται η χρήση των σειρών Taylor για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Το τελευταίο μέρος του Κεφαλαίου διαπραγματεύεται τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τιμής ενός ορισμένου ολοκληρώματος μέσω της ανάλυσης της προς ολοκλήρωση συνάρτησης σε άθροισμα απείρων όρων ακολουθίας[113].

Στις εφαρμογές του σχολικού εγχειριδίου:

[110] Κεφάλαιο 7/C2.
[111] Σε συνέχεια του Κεφαλαίου 9/C2, που αναφέρεται στην παράγωγο 2ης και 3ης τάξης.
[112] Σελίδα 3/FP3.
[113] Με την επισήμανση ότι η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται από τα όρια του ολοκληρώματος τα οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε το άθροισμα των απείρων όρων να συγκλίνει γρήγορα στους πρώτους όρους και αυτοί που υπολείπονται να είναι αμελητέοι (σελίδα 13/FP3).

- Αναλύονται οι συναρτήσεις e^x, $\cos x$ και $\ln(1+x)$ κατά Maclaurin και επισημαίνεται στον μαθητή ότι πρέπει να γνωρίζει τις συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει η ανάλυσή τους.
- Προσεγγίζονται συναρτήσεις (όπως η $\frac{\sin 2x}{1+x}$), αποδεικνύονται σχέσεις (π.χ. $\frac{3\sin x}{2+\cos x} \approx x$), υπολογίζονται όρια (π.χ. $\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2})$ και εφαρμόζεται το ανάπτυγμα Taylor.
- Περιγράφεται με αναλυτικό τρόπο ο τρόπος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης με χρήση σειρών Taylor.
- Περιγράφεται η εκτίμηση της τιμής του $\int_0^{0.6} e^{-x^2}dx$.

Χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες ασκήσεις:

Άσκηση 1: Βρείτε το ανάπτυγμα σε ανιούσες δυνάμεις του x, του $\ln(\frac{1+x}{1-x})$, δίνοντας τους πρώτους τρεις μη μηδενικούς όρους. Δηλώστε τις τιμές του x για τις οποίες είναι αληθής η προηγούμενη έκφραση και βρείτε τις τιμές των θετικών σταθερών a,b για τις οποίες το ανάπτυγμα του $2x(1+ax)(1+bx)^{-\frac{2}{3}}$ είναι ακριβώς όμοιο με εκείνο του $\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Άσκηση 2: (Προσέγγιση της $\sqrt{2}$)

i. Βρείτε τους πρώτους τέσσερις μη μηδενικούς όρους του αναπτύγματος της $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, δοθέντος του ότι $|x|<1$.

ii. Δείξτε ότι για $x=\frac{1}{3}$, $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ και δώστε μια προσέγγιση της $\sqrt{2}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 3: Δοθείσας της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+4y=0$, όπου $y=1$ και $\frac{dy}{dx}=1$ για $x=0$,

i. Υπολογίστε το y ως σειρά ανιόντων δυνάμεων του x έως και τον όρο x^4.

ii. Βρείτε την τιμή του y για $x=1$ με τη βοήθεια του i.

Κεφάλαιο 5/FP3: ***Αριθμητικές Μέθοδοι***

Στο 5ο Κεφάλαιο προτείνονται μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων[114] 1ης και 2ης τάξης, για τις οποίες δεν υπάρχει αναλυτική λύση, με χρήση της μεθόδου του Euler[115].

Στο μάθημα καταρχήν διδάσκεται η ακόλουθη μέθοδος[116]:

«Έστω ότι η δ.ε. $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$, όπου g συνάρτηση των μεταβλητών x,y και ισχύει ότι $y=y_0$ στο $x=x_0$. Τότε, εκτελώντας μικρά βήματα μήκους h κατά μήκος του άξονα των x, προκύπτουν τα σημεία $x_1,x_2,...$, όπου $x=x_1=x_0+h$, $x=x_2=x_1+h$ κ.ο.κ. Σε μια προσέγγιση βήμα προς βήμα πρέπει να υπολογιστούν διαδοχικές τιμές $y_1,y_2,y_3,...$ τέτοιες ώστε τα σημεία (x_1,y_1), (x_2,y_2),(x_3,y_3),... να ανήκουν στην καμπύλη λύσης της $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$, όπου $y=y_0$ στο $x=x_0$ [117], κάτι που είναι εφικτό με χρήση του αναπτύγματος Taylor:

$f(x+a)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+...+\frac{x^r}{r!}f^{(r)}(a)+...$ Για $x=h$ και $a=x_0$ θα ισχύει $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+...$ και για πολύ μικρές τιμές του h:

$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$. Για $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_0+h)$ και $f'(x_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ προκύπτει ο τύπος : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1-y_0}{h}$ (*Μέθοδος Euler*).

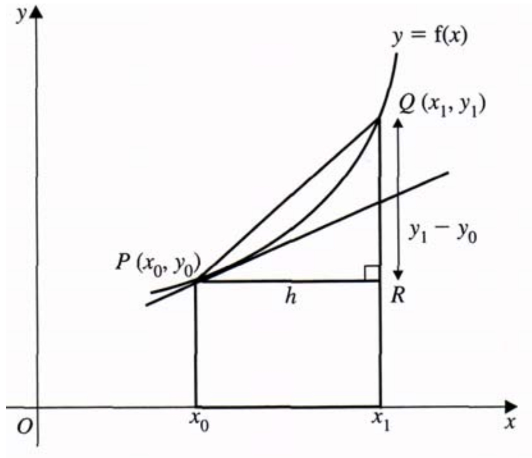
Ισοδύναμη είναι η έκφραση $y_1\approx y_0+h[g(x_0,y_0)]$, ως η εκτιμηθείσα τιμή του y στο $x=x_1$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία έπεται ότι $y_2\approx y_1+h[g(x_1,y_1)]$ και γενικά $y_{n+1}\approx y_n+h[g(x_n,y_n)]$.»[118]

Ενδιαφέρουσα είναι η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου, όπως δίνεται στο αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο[119]:

---

[114] Διαφορικές εξισώσεις: 4ο και 6ο Κεφάλαιο/C4, 5ο και 6ο Κεφάλαιο/FP1.
[115] Η οποία αποτελεί ουσιαστικά περιορισμένη εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor (1ο Κεφάλαιο/FP3).
[116] Σελίδα 145/FP3.
[117] Στο σημείο αυτό στο σχολικό εγχειρίδιο τονίζεται ότι διαφορετικές αρχικές συνθήκες δίνουν και διαφορετική καμπύλη λύσης (σελίδα 145/FP3).
[118] Σελίδες 145-146/FP3.
[119] Σελίδα 146/FP3.

“Τα $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1)$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$.
Η εφαπτομένη της καμπύλης στο $P(x_0, y_0)$ έχει κλίση $f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$. Για $x_1 - x_0 = h$ και για μικρό h η κλίση της χορδής PQ είναι περίπου ίση με εκείνη της κλίσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο P, δηλαδή $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$.»

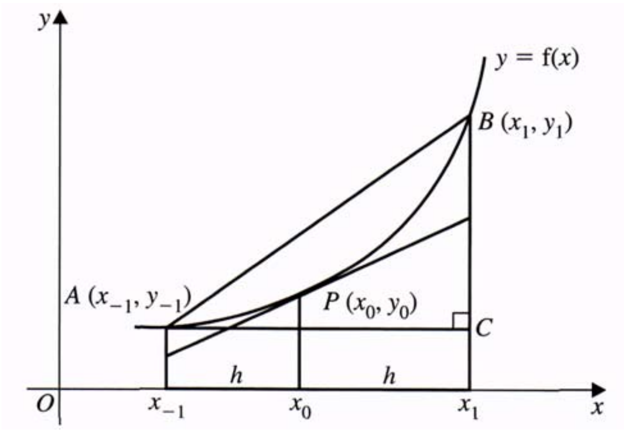


Σχήμα 38

Ακολουθεί διασκευή της μεθόδου του Euler[120]: «Για τιμές του x κοντά στο x_0 θα ισχύει $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$, όπου οι δυνάμεις του $(x - x_0)$ που είναι μεγαλύτερες της μονάδας αγνοούνται. Για μικρές τιμές του h, στο σημείο $x = x_0 - h$ θα ισχύει ότι $f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ και ανάλογα $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις: $f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \approx 2hf'(x_0)$ και, για $f(x_0 + h) = y_1$, $f(x_0 - h) = y_{-1}$ έπεται ότι $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$.»

Γεωμετρικά ο τύπος ερμηνεύεται ως εξής[121]:

Τα σημεία $P(x_0, y_0)$, $A(x_{-1}, y_{-1})$ και $B(x_1, y_1)$ ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$. Ισχύει ότι $x_0 - x_{-1} = h = x_1 - x_0$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο P είναι η $f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$. Πάλι για μικρά h η κλίση της χορδής PQ είναι περίπου ίση με εκείνη της κλίσης της καμπύλης στο P,



Σχήμα 39

δηλαδή $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$, $y_1 \approx y_{-1} + 2h[g(x_0, y_0)]$ και έτσι προκύπτει ο γενικότερος τύπος $y_{n+1} \approx y_{n-1} + 2h[g(x_n, y_n)]$.»

[120] Σελίδα 148/FP3.
[121] Σελίδα 148-149/FP3.

Το τελευταίο θεωρητικό κομμάτι του Κεφαλαίου διαπραγματεύεται την επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης, αποδεικνύοντας με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor τον τύπο $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \approx \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}$.

Στα λυμένα παραδείγματα του σχολικού εγχειριδίου:

- Επιλύονται 1ης και 2ης τάξης διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο του Euler: δοθέντος του βήματος h, επισημαίνεται η ύπαρξη αναδρομικής σχέσης που συνδέει τα y_n, y_{n+1}, η οποία και απεικονίζεται σε πίνακα. Επίσης αναφέρεται ότι οι τιμές των $y_1, y_2, y_3,\ldots$ που προκύπτουν δεν είναι αξιόπιστες (με τη σημείωση ότι η αποδοχή ή η απόρριψη εκτιμήσεων λαμβάνει χώρα σε ανωτέρου επιπέδου μαθηματικές σπουδές).
- Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της απλής μεθόδου του Euler και της διασκευής της και παρατηρείται ότι η τελευταία είναι συνήθως περισσότερο ακριβής.

Οι ασκήσεις του κεφαλαίου απαιτούν απλά εφαρμογή των προαναφερθέντων τύπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΑΓΓΛΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

4.1 Εισαγωγή

Στο 4^{o} Κεφάλαιο, το τελευταίο κομμάτι της εργασίας μας, κατ' αρχήν θα αναφερθούμε στις μεταβολές του περιεχομένου και της δομής της Ανάλυσης που περιέχεται στην ύλη των GCE A level και GCE Advanced Subsidiary για τα μαθηματικά, από τη δεκαετία του 60' έως σήμερα, προκειμένου να αντλήσουμε στοιχεία για τον σημερινό τρόπο διδασκαλίας της. Αμέσως μετά θα επιχειρήσουμε μια συγκριτική μελέτη του περιεχομένου της Ανάλυσης ανάμεσα στο αγγλικό και στο ελληνικό πρόγραμμα, θα αναφερθούμε στον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η διδασκαλία της στα αγγλικά σχολικά εγχειρίδια και θα επισημάνουμε τυχόν διαφορές με τα αντίστοιχα ελληνικά.

4.2 Η ύλη της Ανάλυσης στους τίτλους GCE A level και GCE Advanced Subsidiary στα Μαθηματικά από τη δεκαετία του 60' ως σήμερα

Το 1951 έκαναν την εμφάνισή τους οι τίτλοι σπουδών GCE A level και O level. Ένα A level στα μαθηματικά περιείχε θεωρητικά και εφαρμοσμένα μαθηματικά και αποτελούνταν από τρία ωριαία διαγωνίσματα. Το κάθε ένα από αυτά περιελάμβανε δέκα εκτενή θέματα που κάλυπταν όλη την ύλη, από τα οποία οι υποψήφιοι έπρεπε να απαντήσουν στα οκτώ (C.R.E., 2004a). Επιπλέον, από το 1965 έως το 1987 παράλληλα με τους τίτλους GCE O level προσφέρονταν και οι τίτλοι CSE[122], ειδικά σχεδιασμένοι για τους λιγότερο ικανούς μαθητές που δεν ήταν σε θέση να αποκτήσουν ένα O level.

Οι τίτλοι σπουδών O level και CSE αντικαταστάθηκαν το 1988 από τα GCSE. Ως τότε τα O level απευθύνονταν στο κορυφαίο 20% των υποψηφίων, έναντι του αντίστοιχου 50% των GCSE, κάτι που θα μπορούσε να ερμηνευθεί σαν προσπάθεια «εκδημοκρατισμού» των μαθηματικών, μέσω μιας λιγότερο απαιτητικής διδακτέας

[122] Certificate of Secondary Education (Πιστοποιητικό Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης).

ύλης (Mayer, 2005). Σαν επακόλουθο, για τα επόμενα δέκα έτη η διδακτέα ύλη των μαθηματικών σε επίπεδο A level απλοποιήθηκε αρκετά με ορατές τις επιπτώσεις αυτής της μεταβολής στα πανεπιστήμια. Συγκεκριμένα, οι νεοεισαχθέντες φοιτητές έφθαναν σε αυτά με λιγότερο εκτενείς και περιεκτικές μαθηματικές γνώσεις και έτσι συναντούσαν χαρακτηριστικές δυσκολίες σε μαθήματα όπως εφαρμοσμένη μηχανική, επιστήμες, οικονομικές σπουδές, αλλά και στα μαθηματικά. Σχετικά αναφέρεται (C.R.E., 2004a) πως το 1992 τα A level αποτελούνταν πια από τέσσερα διαγωνίσματα που χώριζαν τη διδακτέα ύλη σε μικρότερες και ευκολότερες ενότητες με ορισμένα θέματα που παρουσιάζονταν σε μια ενότητα να μην εμφανίζονται σε μεταγενέστερη. Αυτή η δομή διευκόλυνε τους υποψήφιους με μικρή (ή μόνο) βραχυπρόθεσμη μνήμη να αποκτήσουν ένα A level στα μαθηματικά, κάτι που δε θα μπορούσαν να επιτύχουν με το παλιό σύστημα. Επιπλέον, ως το 1995 η ύλη των θεωρητικών Μαθηματικών είχε περιοριστεί στο μισό της.

Το 1995 δημοσιεύθηκε έκθεση της London Mathematics Society με τίτλο «Tackling the Mathematics Problem» (L.M.S., 1995), η οποία, αν και δεν γνώρισε μεγάλη δημοσιότητα, διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην μετέπειτα δομή των A level (Mayer, 2005). Χαρακτηριστικά αναφέρονται τα ακόλουθα αποσπάσματά της:

«Οι πρόσφατες αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά μπορεί να αποτελούν πλεονέκτημα για μερικούς μαθητές, ωστόσο δεν έχουν θέσει τα απαραίτητα θεμέλια για να διατηρήσουν την ποσότητα και την ποιότητα των, από μαθηματική άποψη, ικανών αποφοίτων και έχουν αδικήσει κατά πολύ εκείνους που πρέπει να συνεχίσουν τη μαθηματική κατάρτισή τους πέρα από το σχολικό επίπεδο (p.3)»,

«Η κατάσταση επιδεινώθηκε από τον αναθεωρημένο υποχρεωτικό πυρήνα A level που προήλθε από τους SEAC/SCAA και εμφανίζεται να προσπαθεί περισσότερο να προσαρμόσει διαφορετικές σειρές μαθημάτων, παρά να προσφέρει τις απαραίτητες βάσεις που απαιτούν οι τελειόφοιτοι. Η διδακτέα ύλη έχει μειωθεί τόσο ώστε εκείνοι στην τριτοβάθμια Εκπαίδευση να μπορούν να συμπεράνουν σχετικά λίγα από το γεγονός ότι ένας σπουδαστής έχει ένα A level στα μαθηματικά (p.18)»

« [...] Η εικόνα που παρουσιάζεται σε έκθεση του DfE (1994) και η επόμενή της από τον OFSTED (1994), πολύ συχνά είναι παραπλανητική, λόγω ενός γενικότερου πνεύματος εφησυχασμού. Παραδείγματος χάρη και οι δύο εκθέσεις επαναπαύονται στο γεγονός ότι οι αριθμοί των αποφοίτων στα μαθηματικά και στην πληροφορική, συνδυασμένοι, αυξάνονται σταθερά, ακόμα κι αν η εικόνα μόνο για τα μαθηματικά είναι ανησυχητική. Όλα τα στοιχεία συνηγορούν στο ότι (δείτε τις παραγράφους 5-10)

δηλώσεις όπως "Η εικόνα, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί σχετικά καθησυχαστική" (OFSTED, 1994, p.1) είναι επικίνδυνα παραπλανητικές (p.6)».

Η προηγούμενη έκθεση αποτέλεσε το ερέθισμα για τη σχεδίαση του αναλυτικού προγράμματος Curriculum 2000, με εφαρμογή σε όλα τα απονεμητικά σώματα (και στο Edexcel). Πριν από τις μεταρρυθμίσεις του Αυγούστου του 2000 ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα παραδοσιακά προσέφερε τίτλους GCE A level σε οκτώ έως τριάντα μαθήματα. Οι σπουδαστές συνήθως επέλεγαν δύο ως τέσσερα μαθήματα σε διάρκεια δύο ετών, εκ των οποίων το ένα ήταν Γενικών Σπουδών (General Studies). Εκτός από τους τίτλους GCE A level υπήρχαν οι επιλογές των GCE 'AS' level examinations και των GNVQs. Από τον Αύγουστο του 2000 και έπειτα οι τίτλοι GCE Advanced Subsidiary qualifications (AS level) αντικατέστησαν τα GCE 'AS' level examinations. Συνήθως σε κάποιον μαθητή που επέλεγε τρία GCE A level αντιστοιχούσαν δεκαοκτώ διδακτικές ώρες, αφήνοντάς του ελεύθερο χρόνο για προσωπική μελέτη και άλλες δραστηριότητες. Μετά τις αλλαγές του 2000 οι σπουδαστές ενθαρρύνθηκαν να μελετήσουν κατά το πρώτο έτος των σπουδών τους περισσότερα μαθήματα (τέσσερα ή και παραπάνω), τα οποία και περιόριζαν στο δεύτερο έτος των σπουδών τους συνήθως σε τρία (INCA, 2007f).

Ειδικότερα, τα A level στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά πλέον αποτελούνταν από έξι ενότητες, τρεις από τις οποίες (οι P1, P2 και P3) περιείχαν καθαρά θεωρητικά μαθηματικά και ήταν υποχρεωτικές. Οι υπόλοιπες τρεις ενότητες ήταν δυνατό να επιλεχθούν από ένα σύνολο ενοτήτων Εφαρμογών (Μηχανική M1, M2 και M3, Στατιστική S1, S2 και S3, Μαθηματικά Αποφάσεων D1 και D2) υπό τον όρο τουλάχιστον μία να ανήκει στις M2, M3, S2, S3 και D2 και να μη γίνει επιλογή M1, S1&D1 (C.R.E. 2004b). Αρκετά από τα θεωρητικά μαθηματικά που είχαν βγει από την ύλη όπως ο κανόνας του τραπεζίου, η έκφραση $a\cos\theta + b\sin\theta$ ως $r\cos(\theta + a)$, οι αντίστροφες συναρτήσεις του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης, ορισμένες σε κατάλληλα διαστήματα και τα γραφήματά τους, επανήλθαν. Μαθηματικές δεξιότητες και θέματα που μέχρι πρότινος αποτελούσαν τμήμα της διδακτέας ύλης για μαθητές ηλικίας 14 έως 16 ετών, τώρα πλέον θα εξετάζονταν στις αρχικές ενότητες των A level. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του εμβαδού επιφανειών και όγκου στερεών με τη βοήθεια διαφορικού λογισμού που αποτελούσε αντικείμενο εξέτασης των O level, εντάχθηκε στις ενότητες P1 και P2 των θεωρητικών μαθηματικών, αν και τα θέματα των O level σαφώς ήταν μεγαλύτερης δυσκολίας (C.R.E., 2004a).

Η συνδυασμένη επίδραση όλων αυτών των αλλαγών μπορούσε μόνο να χαρακτηρισθεί ως καταστροφή για τα μαθηματικά (Porkess, 2003). Οι μαθητές δε διέθεταν πλέον αρκετό χρόνο και το πρόγραμμά τους ήταν υπερφορτωμένο. Οι πρώτοι μαθητές του Curriculum 2000 εξετάσθηκαν για την πιστοποίηση AS το 2001. Τα αποτελέσματα για εκείνη τη χρονιά και για τα επόμενα δύο έτη ήταν τα εξής: το 2001 το ποσοστό αποτυχίας των μαθητών στα μαθηματικά ήταν της τάξης του 28.6%, το 2002 ήταν 22.1% και το 2003 19.9%. Αν και μειούμενα στο πέρασμα των ετών, τα ποσοστά αποτυχίας που σημείωσαν οι άγγλοι μαθητές τις τρεις αυτές χρονιές στα μαθηματικά ήταν τα μεγαλύτερα από κάθε άλλο μάθημα του αγγλικού σχολικού προγράμματος. Σαν αποτέλεσμα της εμπειρίας τους στις εξετάσεις AS level, το καλοκαίρι του 2001 πολλοί μαθητές εγκατέλειψαν τα μαθηματικά και έτσι παρατηρήθηκε μείωση κατά περίπου 12.000 στον αριθμό των μαθητών που συνέχισαν για τις εξετάσεις A level το 2002, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί (Porkess, 2003):

Έτος	**Συνολικός αριθμός υποψηφίων**	**Υποψήφιοι στα Μαθηματικά**	**Ποσοστό για τα Μαθηματικά**
1989	661.591	84.744	12.8
1990	684.117	79.747	11.7
1991	699.041	74.972	10.7
1992	731.024	72.384	9.9
1993	734.081	66.340	9.0
1994	732.974	64.919	8.9
1995	725.992	62.188	8.6
1996	739.163	67.442	9.1
1997	777.710	68.880	8.9
1998	794.262	70.554	8.9
1999	783.692	69.945	8.9
2000	771.809	67.036	8.7
2001	748.866	66.247	8.8
2002	701.380	53.940	7.7
2003	750.537	55.917	7.5

Πίνακας 12: Συμμετοχές στις εξετάσεις A level, πλήθος και % συνόλου των συμμετοχών για τα Μαθηματικά A level.

Οι αλλαγές στα AS και A level στα Μαθηματικά με ισχύ από τον Σεπτέμβριο του 2004, οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια, προσπάθησαν να βελτιώσουν την κατάσταση.

Αλλαγές στα μαθηματικά AS και A level -Σεπτέμβριος 2004

Μέχρι πρότινος ένα A level στα μαθηματικά αποτελούνταν από έξι ενότητες, τρεις θεωρητικές και τρεις εφαρμογών. Το νέο σχήμα που ίσχυσε εν τέλει διατήρησε τον συνολικό αριθμό ενοτήτων, μόνο που πλέον θα αποτελούνταν από τέσσερις θεωρητικές ενότητες και από δύο εφαρμογών. Οι νέες πιστοποιήσεις AS στα Μαθηματικά αντιπροσωπεύουν, όπως προαναφέρθηκε, το ήμισυ ενός A level με δύο θεωρητικές ενότητες και μία εφαρμογών. Οι ενότητες P1, P2 και P3 αντικαταστάθηκαν από τις C1 (στην οποία δεν επιτρέπεται η χρήση μικροϋπολογιστή), C2, C3 και C4, με τις C1 και C2 να συνιστούν τον κορμό του AS και τις C3 και C4 τον κορμό του A2. Πλέον σε κάθε νέα ενότητα αντιστοιχούν λιγότερα θεωρητικά μαθηματικά, καθιστώντας την αυτομάτως ευκολότερη για τους μαθητές. Στον πίνακα 13 που ακολουθεί δίνονται θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης των P1, P2 και P3 και η θέση τους στις νέες ενότητες (Edexcel, 2004):

P1:Τετραγωνικές συναρτήσεις και τα γραφήματά τους, διακρίνουσα τετραγωνικής συνάρτησης, συμπλήρωση τετραγώνου, λύση τετραγωνικών εξισώσεων, σύστημα εξισώσεων: αναλυτική λύση με αντικατάσταση, λύση γραμμικών και τετραγωνικών ανισοτήτων.	**C1**
P1:Συναρτήσεις ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης, γραφικές παραστάσεις, συμμετρίες και περιοδικότητα, γνώση και χρήση των τύπων $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ και $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων σε δοθέν διάστημα.	**C2**
P1:Ακολουθίες, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δίνονται μέσω τύπου για τον n-οστό όρο, αριθμητική πρόοδος.	**C1:**Ακολουθίες, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δίνονται μέσω τύπου για τον n-οστό όρο *(και όσες παράγονται από μια απλή σχέση της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$)*, αριθμητική πρόοδος.
P1:Γεωμετρική πρόοδος, άθροισμα όρων πεπερασμένης γεωμετρικής προόδου, άθροισμα στο άπειρο συγκλίνουσας γεωμετρικής προόδου.	**C2:**Γεωμετρική πρόοδος, Άπειρο άθροισμα συγκλίνουσας γεωμετρικής προόδου.
P1:Η παράγωγος της f(x) ως κλίση εφαπτομένης του γραφήματος της y=f(x) σε ένα σημείο, κλίση εφαπτομένης ως όριο, ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής, παράγωγος του x^ρ όπου ρ ρητός. Εφαρμογές παραγώγισης σε κλίσεις, μέγιστα,	**C1:**Παράγωγος του x^n *(πλέον σχετικών αθροισμάτων και διαφορών).* Εφαρμογές παραγώγισης σε κλίσεις *(σε εφαπτόμενες και καθέτους).*

ελάχιστα και στάσιμα σημεία.	
P1:Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις.	**C2**
P1:Το αόριστο ολοκλήρωμα ως αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Ολοκλήρωση του x^{ρ} όπου ρ ρητός, $\rho \neq 1$.	**C1:**Ολοκλήρωση του x^{n}. *Πλέον δεν αναφέρεται ρητά η γενική και η ειδική λύση της* $\frac{dy}{dx} = f(x)$.
P1:Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων, ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος ως το εμβαδόν που περικλείει το γράφημα μιας καμπύλης.	**C2**
P2:Ορισμός συνάρτησης, πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις.	**C3:**Ορισμός συνάρτησης, πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις *(με γραφήματά τους).*
P2:Γραφήματα συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους. Σχεδίαση καμπύλων που ορίζονται από απλές εξισώσεις.	**C1:**Γραφήματα συναρτήσεων. Σχεδίαση καμπύλων που ορίζονται από απλές εξισώσεις.
P2:Η συνάρτηση απόλυτη τιμή.	**C3**
P2:Γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικής λύσης εξισώσεων. Χρήση σημείων τομής γραφημάτων.	**C1**
P2:Γνώση της επίδρασης απλών μετασχηματισμών στο γράφημα της y=f(x) όπως αυτοί αναπαρίστανται από τις y=af(x), y=f(x)+a, y=f(x+a), y= f(ax) και συνδυασμοί τους.	**C1:**Γνώση της επίδρασης απλών μετασχηματισμών στο γράφημα της y=f(x) όπως αυτοί αναπαρίστανται από τις y=af(x), y=f(x)+a, y=f(x+a), y= f(ax). **C3:**Συνδυασμοί των παραπάνω μετασχηματισμών.
P2:Ακολουθίες που παράγονται από μια απλή επαναληπτική σχέση της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.	**C1:**Ακολουθίες *(συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δίνονται μέσω τύπου για τον n-οστό όρο και εκείνων)* που παράγονται από μια απλή σχέση της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.
P2:Γνώση της τέμνουσας, της συντέμνουσας, της συνεφαπτομένης και των arcsin, arccos και arctan. Η σχέση τους με το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη. Κατανόηση των γραφημάτων τους και των κατάλληλων πεδίων ορισμού.	**C3**
P2:Γνώση και χρήση των τύπων $\sec^2\theta \equiv 1+\tan^2\theta$, $\text{cosec}^2\theta \equiv 1+\cot^2\theta$ και $\cot\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.	**C3:**Γνώση και χρήση των τύπων $\sec^2\theta \equiv 1+\tan^2\theta$ και $\text{cosec}^2\theta \equiv 1+\cot^2\theta$.
P2:Γνώση και χρήση τύπων για το διπλάσιο μιας γωνίας, για τα sin(A±B), cos(A±B), tan(A±B), αλλά και εκφράσεων όπως acosθ+bsin θ στις ισοδύναμες μορφές των rcos(θ±a) ή rsin(θ±a).	**C3**
P2:Η συνάρτηση e^x και το γράφημά της. Η συνάρτηση lnx και το γράφημά της.	

Η lnx ως η αντίστροφη συνάρτηση της e^x.	
P2:Η $y=a^x$, a>0, και το γράφημά της, λογαριθμικοί νόμοι, επίλυση εξισώσεων της μορφής $a^x= b$.	**C2**
P2:Παραγώγιση των e^x, lnx, των αθροισμάτων και των διαφορών τους.	**C3:**Παραγώγιση των e^x, lnx, *(sinx, cosx, tanx)*, των αθροισμάτων και των διαφορών τους.
P2:Εφαρμογές παραγώγισης σε εφαπτόμενες και καθέτους καμπύλης.	**C1:**Εφαρμογές παραγώγου σε *(κλίσεις)* εφαπτόμενες και καθέτους.
P2:Ολοκλήρωση των e^x και $\frac{1}{x}$.	**C4:** Εκτίμηση όγκου εκ περιστροφής.
P2:Εκτίμηση όγκου εκ περιστροφής γύρω από ένα από τους άξονες συντεταγμένων. (Οι μαθητές έπρεπε να είναι εξοικειωμένοι με ολοκληρώματα της μορφής $\pi\int y^2 dx$ και $\pi\int x^2 dy$).	
P2:Θέση ριζών της f(x)=0 βάσει της αλλαγής προσήμου της f(x) σε ένα διάστημα της x όπου η f(x) είναι συνεχής. Προσεγγιστική λύση εξισώσεων κάνοντας χρήση απλών επαναληπτικών μεθόδων.	**C3** Προσεγγιστική λύση εξισώσεων κάνοντας χρήση απλών επαναληπτικών μεθόδων (*και επαναληπτικών σχέσεων της μορφής $x_{n+1}=f(x_n)$.)*
P2:Αριθμητική ολοκλήρωση συναρτήσεων.	**C4**
P3:Παραγώγιση των sinx, cosx, tanx, των αθροισμάτων, διαφορών, πηλίκων και γινομένων τους. Παραγώγιση κάνοντας χρήση των κανόνων γινομένου, πηλίκου και αλυσίδας και του $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$	**C3:** Παραγώγιση των sinx, cosx, tanx, των αθροισμάτων και των διαφορών τους.
P3:Εκθετική αύξηση και μείωση. Σχηματισμός απλών διαφορικών εξισώσεων. Παραγώγιση απλών συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται άμεσα ή παραμετρικά.	**C4**
P3:Ολοκλήρωση των sinx, cosx. Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης με αντικατάσταση ή κατά μέρη. Απλές περιπτώσεις ολοκλήρωσης μέσω απλών κλασμάτων. Αναλυτική λύση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές.	

Πίνακας 13: Θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης των ενοτήτων P1, P2 και P3 και η νέα θέση τους στις ενότητες C1-C4.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει σχετική έρευνα της C.R.E. (C.R.E., 2004b) όπου επισημαίνεται ότι κατά τις αλλαγές του 2004 η ύλη των θεωρητικών μαθηματικών μειώθηκε κατά πολύ με την αφαίρεση από τη εξεταστέα ύλη:

- της απόδειξης του γενικού τύπου λύσεων τετραγωνικής εξίσωσης
- του εμβαδού που περικλείουν καμπύλες με χρήση του $\int xdy$.
- των άρτιων και περιττών συναρτήσεων.
- ταυτοτήτων όπως η $2\cos A\cos B \equiv \cos(A+B)+\cos(A-B)$.
- της σχεδίασης καμπύλης βάσει παραμετρικών εξισώσεων.
- του όγκου στερεού εκ περιστροφής, με χρήση του $\pi\int x^2dy$.

Το φθινόπωρο του 2005 η Q.C.A. διεξήγαγε εκτενή έρευνα προκειμένου να προσδιορίσει πιθανούς τρόπους αύξησης του αριθμού των συμμετεχόντων στις εξετάσεις για τα μαθηματικά A level (Q.C.A., 2006b). Χρησιμοποιώντας ποσοτικές και ποιοτικές μεθόδους, από τη λεπτομερή συνεργασία με 19 εξεταστικά κέντρα έως την επεξεργασία εθνικών αποτελεσμάτων και τη διανομή ερωτηματολογίων σε περίπου 200 σχολεία και κολέγια προέκυψαν τα εξής:

- Ένα μεγάλο μέρος του διδακτικού προσωπικού θεωρούσε την έμφαση που δόθηκε στις θεωρητικές ενότητες έναντι των εφαρμοσμένων και τη μείωση της διδακτέας ύλης «υπεραπλοποίηση» των μαθηματικών A level, κάτι που τα έκανε λιγότερο ελκυστικά στους πιο ικανούς μαθητές. Ένα άλλο μέρος του αντιμετώπισε τις αλλαγές ως θετικό βήμα στην κατεύθυνση της στήριξης όλων ανεξαιρέτως των μαθητών, με αύξηση του διαθέσιμου χρόνου για την κάλυψη της ύλης (p.6).
- Η πλειοψηφία των ερωτηθέντων πίστευε ότι οι νέες πιστοποιήσεις διευκόλυναν τη μετάβαση από τα GCSE στα A level, γεγονός που αποδόθηκε στη μείωση της συνολικής ύλης, στην αύξηση του διαθέσιμου διδακτικού χρόνου, αλλά κυρίως στον ουσιαστικό ρόλο της ενότητας C1. Σχεδόν όλα τα εξεταστικά κέντρα που έλαβαν μέρος στην έρευνα την αντιμετώπισαν ως «μεταβατική» και ως «τόνωση αυτοπεποίθησης» για τους μαθητές, δικαιολογώντας τη δομή και το περιεχόμενό της. Ωστόσο αρκετά από αυτά επεσήμαναν το ότι η κατανομή της ύλης ανάμεσα στα C1 και C2 «στερείται συνοχής» ενώ η «τοποθέτηση αρκετών από τα θέματα είναι χωρίς σύνδεση» (συγκεκριμένα για την παραγώγιση, την ολοκλήρωση, τα

προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου και τις αριθμητικές και γεωμετρικές ακολουθίες, p.65).

4.3 Σύγκριση ανάμεσα στο αγγλικό και στο ελληνικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία της Ανάλυσης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

4.3.1 Γενικές παρατηρήσεις

Καταρχήν παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα που περιέχει τα έτη υποχρεωτικής φοίτησης στην Πρωτοβάθμια και στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε Αγγλία και Ελλάδα:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th rowspan="2">Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση</th><th colspan="2">Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση</th></tr>
<tr><th>Υποχρεωτική</th><th>Μη Υποχρεωτική</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Έτη υποχρεωτικής φοίτησης</td><td>Αγγλία</td><td>1ο και 2ο έτος: Έτη 1 και 2 Βασικού Σταδίου 1

3ο, 4ο, 5ο και 6ο έτος: Έτη 3, 4, 5 και 6 Βασικού Σταδίου 2</td><td>7ο, 8ο, 9ο έτος: Έτη 7, 8 και 9 Βασικού Σταδίου 3

10ο και 11ο έτος: Έτη 10 και 11 Βασικού Σταδίου 4</td><td>Έκτη Τάξη (6th Form) Διάρκεια 2 ετών</td></tr>
<tr><td>Ελλάδα</td><td>1ο έτος: Νηπιαγωγείο

2ο έως 7ο έτος: Τάξεις Α’-ΣΤ’ Δημοτικού Σχολείου</td><td>8ο, 9ο, 10ο έτος: Τάξεις Α’, Β’, Γ’ Γυμνασίου</td><td>Λύκειο Τάξεις Α’, Β’, Γ’</td></tr>
</table>

Πίνακας 14: Έτη υποχρεωτικής φοίτησης σε Αγγλία και Ελλάδα

Όπως προκύπτει, στο αγγλικό σύστημα τα έτη της υποχρεωτικής φοίτησης είναι συνολικά 11, με τα τελευταία 5 να συνιστούν την υποχρεωτική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, έναντι 10[123] και 3 ετών, αντίστοιχα, του ελληνικού συστήματος. Η Ανάλυση (Συναρτήσεις, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός) διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στα μαθηματικά του ελληνικού Λυκείου[124], καθώς μαζί με τους μιγαδικούς αριθμούς αποτελεί υποχρεωτική εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ’ Λυκείου για την εισαγωγή των μαθητών στην Ανώτερη Εκπαίδευση. Ωστόσο οι πολύ σπουδαίες και δύσκολες έννοιες του ορίου, της συνέχειας συναρτήσεων, της παραγώγισης και της

[123] Στην Ελλάδα η φοίτηση των νηπίων στα νηπιαγωγεία έγινε υποχρεωτική για ένα έτος με τον νόμο 3518/2006.

[124] Μία από τις επιλογές της μη υποχρεωτικής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, για μαθητές ηλικίας 15 έως 18 ετών.

ολοκλήρωσης είναι πολύ βαρύ φορτίο ούτως ώστε να μπορέσει ένας μαθητής μέσα σε 7-8 μήνες να τις κατανοήσει και να εμβαθύνει στο επίπεδο των απαιτήσεων των θεμάτων των πανελληνίων Εξετάσεων. Προκύπτει έτσι μια τυπική διαφορά ανάμεσα στα δύο προγράμματα καθώς, όπως παρουσιάζεται στην εργασία μας, η ύλη της Ανάλυσης για το αντίστοιχο επίπεδο της αγγλικής Εκπαίδευσης (μη υποχρεωτική Δευτεροβάθμια) είναι κατανεμημένη σε επτά ενότητες επιλογής[125], οι συνδυασμοί των οποίων οδηγούν σε διαφορετικούς τίτλους, στα πλαίσια των πιστοποιήσεων GCE AS και GCE A level στα μαθηματικά.

Κατά τη μελέτη των προγραμμάτων σπουδών για τα μαθηματικά των δύο χωρών προκύπτουν σημαντικές διαφορές σε ό,τι αφορά στο τυπικό περιεχόμενο της ύλης της Ανάλυσης και στην ποιοτική αντιμετώπισή του. Σημειώνουμε ότι τα αγγλικά σχολικά εγχειρίδια που εξετάσαμε στην εργασία μας δεν είναι τα μοναδικά που χρησιμοποιούνται στις αγγλικές τάξεις και προφανώς θα υπάρχουν μικρές διαφοροποιήσεις από βιβλίο σε βιβλίο. Ο ιδιαίτερος τρόπος εισαγωγής, παρουσίασης και διαπραγμάτευσης της ύλης της Ανάλυσης από το κάθε πρόγραμμα ξεχωριστά καταδεικνύει τη διαφορετική φιλοσοφία τους και θα αποτελέσει αντικείμενο εξέτασης της επόμενης ενότητας.

4.3.2 Σύγκριση περιεχομένων αγγλικού-ελληνικού προγράμματος και η υλοποίησή τους στα σχολικά εγχειρίδια

Η σύγκριση των περιεχομένων των δύο προγραμμάτων θα γίνει σε επιλεγμένα σημεία τους:

- *Εισαγωγικές έννοιες*

Η *συνάρτηση*, το *πεδίο ορισμού* και το *σύνολο τιμών* διδάσκονται στους μαθητές και των δύο προγραμμάτων από τις μικρότερες τάξεις. Μολονότι και στα δύο προγράμματα η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης αρχικά στηρίζεται σε παρατήρηση του γραφήματός της, εντούτοις μόνο στο ελληνικό πρόγραμμα επαναλαμβάνεται αργότερα με τη βοήθεια της συνέχειας και της μονοτονίας[126].

[125] Core Mathematics 1, 2, 3 και 4, Further Pure Mathematics 1, 2 και 3. Η κάθε μία ενότητα εξαρτάται από τις προηγούμενές της, εκτός της FP3 που είναι ανεξάρτητη των C4 και FP2:

C1	C2	C3	C4	FP1	FP2	FP3

[126] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδα 196.

Εντύπωση προκαλεί το ότι μόλις στην ύλη του Core 3[127] δίνεται ο αυστηρός ορισμός της συνάρτησης, ενώ έχει ήδη προηγηθεί θεωρία διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού των Core 1 και 2, σε αντίθεση με το ελληνικό πρόγραμμα. Η *αντίστροφη συνάρτηση* και οι ιδιότητές της ορίζονται για πρώτη φορά στο 2ο Κεφάλαιο του Core 3, αμέσως μετά τον γενικό ορισμό της συνάρτησης και της συνάρτησης 1-1. Για την τελευταία δίνεται ένας απλός ορισμός[128], ενώ δεν αναφέρεται πουθενά το ότι «Μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Re$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$» ή «Μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Re$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.», όπως συμβαίνει στο ελληνικό πρόγραμμα[129].

Και στα δύο προγράμματα η *μονοτονία συνάρτησης* έχει εισαχθεί από τις μικρότερες τάξεις. Στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο αυστηροί ορισμοί της *γνησίως αύξουσας* και της *γνησίως φθίνουσας συνάρτησης* δίνονται λίγο πριν από τη συνάρτηση 1-1[130], σύνδεση που δεν πραγματοποιείται στο αγγλικό πρόγραμμα. Επίσης, στο ελληνικό πρόγραμμα με τη βοήθεια της 1ης παραγώγου διαπιστώνεται υπό προϋποθέσεις το αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα[131], κάτι που επιχειρεί να διατυπώσει το αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο με ελλιπή και ασαφή τρόπο[132].

Τα *ακρότατα συνάρτησης* έχουν εισαχθεί σαν έννοιες ήδη από τις μικρότερες τάξεις και στα δύο προγράμματα. Ωστόσο, όπως αναφέρεται στο 3ο Κεφάλαιο της εργασίας μας[133], στο αγγλικό πρόγραμμα δε γίνεται διαχωρισμός μεταξύ τοπικού και ολικού ελαχίστου ή μεγίστου, απλά τα σημεία αυτά υποδεικνύονται κατά την περιγραφή της γραφικής παράστασης συνάρτησης. Χωρίς απόδειξη επίσης δηλώνεται πως στα σημεία αυτά ισχύει $f'(x) = 0$ (θεώρημα Fermat). Από την άλλη, στο ελληνικό πρόγραμμα τα τοπικά ακρότατα συνάρτησης διδάσκονται σε αυτοτελές

[127] Κεφάλαιο 2/C3, σελίδες 11-28.
[128] «Η αντίστροφη συνάρτησης εκτελεί την αντίστροφη λειτουργία με τη συνάρτηση. Παίρνει στοιχεία από το σύνολο τιμών και τα αντιστοιχίζει σε σημεία του πεδίου ορισμού.», σελίδα 21/C3.
[129] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδες 151 και 152.
[130] «Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε, προφανώς, είναι και 1-1», χωρίς να ισχύει το αντίστροφο, σελίδα 153 σχολικού εγχειριδίου Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου.
[131] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδες 253 και 254.
[132] Αναλυτική αναφορά στην σελίδα 124 της παρούσας διπλωματικής.
[133] Αναλυτική αναφορά στην σελίδα 125 της παρούσας διπλωματικής.

κεφάλαιο[134], εντός του οποίου δίνεται ένας σαφώς πιο αυστηρός ορισμός[135] τους σε σχέση με τους αντίστοιχους αγγλικούς[136] και το θεώρημα Fermat αποδεικνύεται.

➢ *Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση*

Στο αγγλικό πρόγραμμα η μελέτη της συνάρτησης $y=k^x$ για ακέραιες τιμές του x και απλές θετικές τιμές του k έχει ήδη πραγματοποιηθεί σε μικρές τάξεις. Η *εκθετική συνάρτηση* $y=a^x, (a>0)$ παρουσιάζεται αργότερα σαν αυτοτελής ενότητα. Άξιο αναφοράς είναι το ότι μόνο στο ελληνικό πρόγραμμα προκειμένου να διδαχθεί η εκθετική συνάρτηση κρίνεται απαραίτητο να δειχθεί ότι $\forall x \in \Re$ ορίζεται η δύναμη a^x, ορίζοντας έτσι τις δυνάμεις με άρρητο εκθέτη a^x ως το $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha^{\rho_\nu}$, όπου $a>0$, x άρρητος και ρ_ν η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία[137]. Οι *λογάριθμοι* μελετώνται ανάλογα και στα δύο προγράμματα. Ο αριθμός e, ο οποίος στο αγγλικό πρόγραμμα εισάγεται «ως ο ένας αριθμός μεταξύ του 2 και του 3, για τον οποίο η συνάρτηση κλίσης είναι ίδια με την αρχική συνάρτηση»[138], στο ελληνικό ορίζεται ως το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}(1+\frac{1}{\nu})^\nu$ [139]. Σε ό,τι αφορά στη *λογαριθμική* και στην *εκθετική συνάρτηση* e^x και στα δύο προγράμματα εξετάζονται αναλυτικά η σχέση των γραφημάτων τους, τα όρια και η ασυμπτωτική συμπεριφορά τους, ενώ υπάρχουν πολλά προβλήματα σχετικά με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής (εκθετική αύξηση και απόσβεση) με εφαρμογές από τον χώρο της Βιολογίας, της Φυσικής, της Στατιστικής κ.α.

➢ *Ακολουθίες*

Στο ελληνικό πρόγραμμα η έννοια της *ακολουθίας* συναντάται στην ύλη της Β’ Λυκείου κυρίως στα πλαίσια διδασκαλίας της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου, αλλά και κατά τον ορισμό δυνάμεων με άρρητο εκθέτη. Στη Γ’ Λυκείου

---

[134] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ’ Λυκείου, σελίδες 258-272.

[135] «Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ $\forall x \in A\cap(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται ***θέση*** ή ***σημείο τοπικού μεγίστου***, ενώ το $f(x_0)$ ***τοπικό μέγιστο*** της f» (σελίδα 258 σχολικού εγχειριδίου Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ’ Λυκείου).

[136] Όπως διατυπώνονται στις σελίδες 38/C1 και 129/C2.

[137] Σχολικό εγχειρίδιο Άλγεβρας Β’ Ενιαίου Λυκείου, σελίδα 107.

[138] Σελίδα 30/C3.

[139] Σχολικό εγχειρίδιο Άλγεβρας Β’ Ενιαίου Λυκείου, σελίδα 113.

γίνεται απλή αναφορά της. Η εισαγωγή της στο αγγλικό πρόγραμμα γίνεται από τις πιο μικρές τάξεις, καθώς οι μαθητές από νεαρή ηλικία μαθαίνουν να δημιουργούν απλές ακολουθίες άρτιων και περιττών αριθμών, τετραγώνων ακεραίων κ.α. Διδάσκονται επίσης την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο, παραλείποντας τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο και προβλήματα παρεμβολής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η κατά προσέγγιση εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ με χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως διδάσκεται στο αγγλικό πρόγραμμα (με μόνο κοινό σημείο με το αντίστοιχο ελληνικό την κοινή αναφορά στην ύπαρξη ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ στα διαστήματα όπου η f έχει ετερόσημες τιμές.). Στις ενότητες που αφιερώνονται στην εύρεση ριζών, είτε με αναδιάταξή της εξίσωσης στη μορφή $x = g(x)$ και χρήση του επαναληπτικού τύπου $x_{n+1} = g(x_n)$ [140], είτε μέσω της μεθόδου Newton-Raphson[141] οι ακολουθίες διαδραματίζουν ουσιαστικό ρόλο. Εκεί δίνεται και ο ορισμός της *συγκλίνουσας* και *αποκλίνουσας ακολουθίας*[142].

➢ *Όριο*

Το ελληνικό πρόγραμμα αφιερώνει ένα σεβαστό κομμάτι της ύλης του και αρκετές ασκήσεις προκειμένου να αποκτήσουν οι μαθητές μια διαισθητική αντίληψη της έννοιας του ορίου. Ο ορισμός που αναφέρεται (με τα ε και δ)[143] είναι μάλλον νεκρός. Έμφαση δίνεται στα πλευρικά όρια, στις ιδιότητες ορίων, στα θεωρήματα διάταξης, στα όρια βασικών συναρτήσεων, στο όριο σύνθεσης συναρτήσεων, στο κριτήριο παρεμβολής, στους κανόνες de l' Hospital για εύρεση ορίων κ.λ.π.

Στο αγγλικό πρόγραμμα δεν δίνεται επακριβής και αυστηρός ορισμός του *ορίου συνάρτησης στο* $x_o \in \Re$. Απλή αναφορά του γίνεται σε συγκεκριμένα σημεία του αγγλικού προγράμματος, όπου γίνονται και κάποιες απόπειρες διαισθητικής προσέγγισής του, όπως:

-Κατά τον ορισμό της παραγώγου $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

-Στο άπειρο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου.

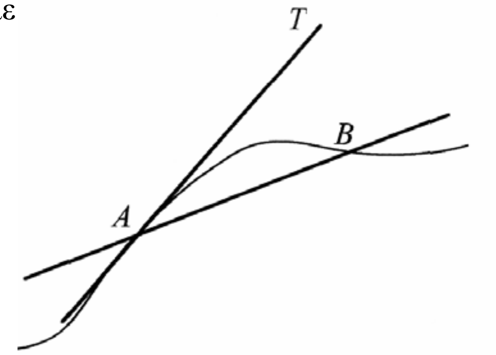
-Κατά τον υπολογισμό εμβαδού χωρίου[144], όγκου στερεού εκ περιστροφής[145] και μήκους καμπύλης[146].

---

[140] 4ο Κεφάλαιο/C3.
[141] 4ο Κεφάλαιο/FP1.
[142] 4ο Κεφάλαιο/C3, σελίδα 48.
[143] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδα 161.
[144] 11ο Κεφάλαιο/C3, σελίδα 159.

-Κατά την εύρεση της παραγώγου των συναρτήσεων e^x [147], $\sin x$ [148].

Ο ορισμός του ορίου του αθροίσματος S=3+1.5+0.75+0.375+…ο οποίος δίνεται ως εξής *"No matter how many terms of the series you take, the sum never exceeds a certain number. We call this number the limit of the sum, or more often, its sum to infinity"*[149], είναι πιθανό να προκαλέσει δυσκολίες στην έννοια της κατανόησης του ορίου από τους μαθητές: μπορεί να θεωρήσουν το όριο ως κάτι αντίστοιχο με το όριο ταχύτητας (το οποίο δε μπορούμε



Ο Tall (1985) σχετικά αναφέρει την περίπτωση ενός μαθητή ο οποίος, επηρεασμένος από τον προηγούμενο ορισμό του ορίου, παρατήρησε στο διπλανό σχέδιο ότι η χορδή διαπερνούσε την εφαπτομένη και επέμενε στο ότι «η εφαπτομένη δεν μπορεί να είναι ένα όριο, καθώς δεν μπορείς να υπερβείς ένα όριο και μέρος της χορδής την έχει ήδη περάσει».

Τα *όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων* (με αποδείξεις), $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$ περιέχονται στην ύλη της Γ' Λυκείου[150]. Στο αγγλικό πρόγραμμα δεν υπάρχουν, αν και κατά την παραγώγιση του $\sin x$ προκύπτει ότι για μικρές τιμές του x, $\sin x \approx x$ και $\cos x \approx 1$ [151].

Το όριο στο άπειρο εντοπίζεται στο αγγλικό πρόγραμμα σε εκφράσεις όπως $x \to \infty, y \to \infty$, $x \to -\infty, y \to -\infty$ [152], όπου «όταν το x είναι μεγάλο (large) και θετικό (positive), το y είναι μεγάλο και θετικό» και «όταν το x είναι μεγάλο (large) και αρνητικό (negative), το y είναι μεγάλο και αρνητικό», αντίστοιχα. Δε δίνεται, επίσης, αυστηρός ορισμός του *μη πεπερασμένου ορίου σε* $x_o \in \Re$. Υπάρχουν μόνο συμβολισμοί, όπως «όσο $x \to 0, y \to \infty$», κατά την περιγραφή του γραφήματος της $f(x) = \ln x$.

[145] 6ο Κεφάλαιο /C4, σελίδα 105.
[146] Σελίδες 59-61/FP2.
[147] 8ο Κεφάλαιο/C3, σελίδα 125.
[148] 8ο Κεφάλαιο/C3, σελίδες 128 και 129.
[149] 7ο Κεφάλαιο/C3, σελίδα 103.
[150] Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδες 225 και 226.
[151] 8ο Κεφάλαιο/C3, σελίδα 129.
[152] Σελίδα 38/C1.

➢ *Συνέχεια*

Στο ελληνικό πρόγραμμα η *συνέχεια συνάρτησης* αποτελεί ανεξάρτητη ενότητα, άρρηκτα συνδεδεμένη με τον διαφορικό λογισμό. Ορίζεται σε σημείο x_o, σε ανοικτό και σε κλειστό διάστημα. Στα πλαίσιά του διδάσκονται οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, οι βασικές συνεχείς συναρτήσεις, το θεώρημα του Bolzano, το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και το πώς αξιοποιούνται τα παραπάνω για τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης. Εντούτοις, στο αγγλικό πρόγραμμα γίνονται εξαιρετικά λίγες αναφορές στην έννοια της συνέχειας[153] και δεν υπάρχει ορισμός της. Όμοια για την *ασυνέχεια συνάρτησης*, όπου το ότι υπάρχει προκύπτει παρατηρώντας τη γραφική παράσταση συνάρτησης[154].

➢ *Ασύμπτωτες*

Στο αγγλικό πρόγραμμα δίνονται περιγραφικά οι ορισμοί:

-της *οριζόντιας ασύμπτωτης* ως εξής: «(Η καμπύλη δεν τέμνει τους άξονες). Η καμπύλη τείνει στον άξονα των x όταν το x είναι μεγάλο και θετικό ή όταν είναι μεγάλο και αρνητικό»[155].

-της *κατακόρυφης ασύμπτωτης* ως εξής «(Η καμπύλη δεν τέμνει τους άξονες). Η καμπύλη τείνει στον άξονα των y όταν το y είναι μεγάλο και θετικό ή όταν είναι μεγάλο και αρνητικό»[156].

-των *ασύμπτωτων* ως «οι γραμμές που προσεγγίζει η καμπύλη αλλά ποτέ δε φτάνει»[157].

Δεν δίνεται αυστηρός ορισμός της ασύμπτωτης με τη βοήθεια ορίων, ούτε και υποδεικνύονται πιθανά σημεία ύπαρξής τους, όπως συμβαίνει στο ελληνικό πρόγραμμα.

---

[153] Μία από αυτές είναι η ακόλουθη: «Αν βρείτε ένα διάστημα όπου η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο και η $f(x)$ είναι συνεχής σε αυτό, τότε το διάστημα πρέπει να περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.» που, όπως προαναφέρθηκε, παραπέμπει στο θεώρημα του Bolzano.

[154] Για την $f(x)=\frac{1}{x}$ η οποία είναι ασυνεχής στο 0(0,0), σελίδα 43/C3.

[155] Σελίδα 46/C1.

[156] Σελίδα 46/C1.

[157] "[…] lines to which the curve approaches but never reaches" (σελίδα 119/C2).

➢ *Διαφορικές Εξισώσεις*

Σε ό,τι αφορά στη διδασκαλία του συγκεκριμένου τύπου εξισώσεων το αγγλικό πρόγραμμα υπερτερεί κατά πολύ έναντι του ελληνικού.

Στην τελευταία ενότητα των Μαθηματικών Κορμού (C4) εισάγονται απλές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες αντλούνται μέσα από ποικίλα προβλήματα από τη μηχανική, τη φυσική, τη βιολογία κ.α., χρησιμοποιώντας ρυθμούς μεταβολής και αναλογίες. Επίσης διδάσκονται οι 1ης τάξης διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές.

Στην πιο απαιτητική πρώτη ενότητα των Προχωρημένων Θεωρητικών Μαθηματικών (FP1):

-Ορίζεται η οικογένεια καμπύλων λύσεων, και η γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, όπου P,Q είτε συναρτήσεις του x, είτε σταθερές.

-Εισάγεται η 2ης τάξης ομογενής διαφορική εξίσωση της μορφής $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ και με χρήση βοηθητικής Δευτεροβάθμιας εξίσωσης προσδιορίζονται οι λύσεις της.

-Μελετάται η 2ης τάξης διαφορική εξίσωση $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$, όπου $f(x)$ σταθερά, γραμμική, εκθετική (ke^{px}), τριγωνομετρική ή τετραγωνική συνάρτηση.

-Επιλύονται διαφορικές εξισώσεις 1ης και 2ης τάξης με αλλαγή μεταβλητής.

Στην τελευταία ενότητα των Προχωρημένων Θεωρητικών Μαθηματικών FP3 προτείνονται μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων 1ης και 2ης τάξης, για τις οποίες δεν υπάρχει αναλυτική λύση, με χρήση της μεθόδου του Euler.

Το ελληνικό πρόγραμμα περιέχει μόνο διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και τη γραμμική 1ης τάξης: $y'+a(x)y=b(x)$, οι οποίες όμως ποτέ μέχρι τώρα δεν έχουν συμπεριληφθεί στη διδακτέα ύλη.

➢ *Παραγώγιση*

Κοινή στα δύο προγράμματα είναι η προσέγγιση της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο μέσω της έννοιας της εφαπτομένης[158], αν και στο σημείο αυτό στο ελληνικό πρόγραμμα επιπλέον χρησιμοποιείται η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας. Ειδικά στο υπό εξέταση αγγλικό σχολικό εγχειρίδιο των Core Mathematics 1 εντοπίστηκε ορισμός της εφαπτομένης ως «μια ευθεία γραμμή που αγγίζει αλλά δεν τέμνει την καμπύλη»[159], διατύπωση που πιθανόν να εγείρει ερωτηματικά στους μαθητές για τη μοναδικότητά της. Επίσης στο αγγλικό πρόγραμμα, σε αντίθεση με το ελληνικό, δεν προσδιορίζεται το πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε σημείο του πεδίου ορισμού της[160], σε κλειστό ή σε ανοικτό διάστημα και δεν τονίζεται η ιδιαίτερη σχέση της συνέχειας με την παραγωγισιμότητα. Επιπλέον απουσιάζει το θεώρημα Rolle, το θεώρημα Μέσης τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και οι συνέπειές του («Για f συνεχή σε διάστημα Δ με $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ έπεται ότι η $f=c$ σε όλο το Δ» και «Για f, g συνεχείς στο Δ με $f'=g'$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x)=g(x)+c$, $\forall x \in \Delta$»).

Η *κυρτότητα* και τα *σημεία καμπής συνάρτησης* συνιστούν αυτοτελή ενότητα στο ελληνικό πρόγραμμα. Εντός της δίνονται πλήθος γραφικών παραστάσεων που συνοδεύουν και ερμηνεύουν τους λεπτομερείς ορισμούς της κυρτής και κοίλης συνάρτησης, καθώς και του σημείου καμπής, για την αρτιότερη κατανόησή τους. Το αγγλικό πρόγραμμα αναφέρει μόνο τα σημεία καμπής, υποδεικνύοντας συγκεκριμένη μεθοδολογία για τον εντοπισμό τους με χρήση δεύτερης και τρίτης παραγώγου.

Σε ό,τι αφορά στους *κανόνες παραγώγισης*, στο αγγλικό πρόγραμμα, αντίθετα με το ελληνικό, δίνεται χωρίς απόδειξη η παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων, αποδεικνύεται η παράγωγος γινομένου συναρτήσεων, ενώ σε λυμένο παράδειγμα σχολικού εγχειριδίου[161] υπάρχει η απόδειξη της παραγώγου πηλίκου συναρτήσεων. Και τα δύο προγράμματα περιέχουν τον κανόνα της αλυσίδας, αν και το αγγλικό χρησιμοποιεί τον κατά Leibniz συμβολισμό.

Διαφορές εντοπίστηκαν και στον τρόπο με τον οποίο εισάγονται στα δύο προγράμματα οι παράγωγοι ορισμένων βασικών συναρτήσεων. Σε αντίθεση με το

---

[158] Και στα δύο προγράμματα η εφαπτομένη προσδιορίσθηκε ως «οριακή θέση» τεμνουσών.
[159] Σελίδα 102/C1.
[160] Παραδείγματος χάρη για την f σε σημείο της $\mathrm{A}(x_o, f(x_o))$, όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι πραγματικός αριθμός.
[161] Κεφάλαιο 8/C3, σελίδα 124.

ελληνικό πρόγραμμα, στο αγγλικό δίνεται χωρίς απόδειξη ο τύπος της παραγώγου των συναρτήσεων $f(x)=x^n$, $n\in\Re$ και $\cos x$ (συνημίτονο), αποδεικνύεται ο τύπος της παραγώγου των e^x και $\ln x$ (με την ιδιότητα της αντίστροφης της e^x), ενώ και η εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης ημίτονο γίνεται με τρόπο διαφορετικό και ιδιαίτερο.

Τέλος, κοινή και για τα δύο προγράμματα είναι η χρήση της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

➢ *Ολοκλήρωση*

Η διδασκαλία του ολοκληρωτικού λογισμού στο ελληνικό πρόγραμμα έχει την ακόλουθη δομή:

Αρχικά ορίζεται η παράγουσα συνάρτηση F[162] και αποδεικνύεται το θεώρημα «Αν F είναι μια παράγουσα της f σε διάστημα Δ, τότε (i) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\Delta$ είναι παράγουσες της f στο Δ και (ii) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\Delta$». Ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα[163], δηλώνεται η γραμμικότητά του, δίνεται πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων και μέθοδοι ολοκλήρωσης (κατά παράγοντες, με αντικατάσταση, για ρητές συναρτήσεις). Έπεται ο υπολογισμός κατά προσέγγιση εμβαδού παραβολικού χωρίου, ο γενικότερος ορισμός του εμβαδού επιπέδου χωρίου, η εισαγωγή του ορισμένου ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης, η σύνδεσή του τελευταίου με το εμβαδόν επιπέδου χωρίου και οι ιδιότητές του (πρόσημο, γραμμικότητα, $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$). Εξασφαλίζεται η ύπαρξη παράγουσας συνεχούς συνάρτησης f σε διάστημα Δ (η $F=\int_a^x f(t)dt$), δίνεται το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Α.Λ.), το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.Ο.Λ.) και τέλος τα εμβαδά επιπέδων χωρίων που ορίζονται από τον άξονα των τετμημένων, τις ευθείες $x=a, x=\beta$ και:

---

[162] «Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. *Αρχική συνάρτηση* ή *παράγουσα* της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ (Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδα 303).

[163] Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της f στο *Δ*, $\int f(x)dx=F(x)+c$ (Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Θετ. και Τεχνολ. Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, σελίδα 304).

(i) τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων f, g, όταν $f(x) \geq g(x)$ και όταν η διαφορά τους δε διατηρεί σταθερό πρόσημο.
(ii) τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης g, αν $g(x) \leq 0$.

Στο αγγλικό πρόγραμμα η σειρά εισαγωγής των εννοιών του αόριστου και του ορισμένου ολοκληρώματος είναι όμοια με εκείνη του ελληνικού. Ωστόσο, δε δίνεται ορισμός της παράγουσας συνάρτησης και το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται μόνο για τη συνάρτηση $f(x) = x^n, n \neq -1$ ως $\int x^n dx$, ίσο με $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, με c τυχαία σταθερά. Διαφορετική είναι και η προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος. Πρώτα ορίζεται ως «$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ όπου f' η παράγωγος της f στο διάστημα (a,b).»[164], σχέση που παραπέμπει στο Θ.Θ.Α.Λ. και έπειτα συνδέεται με το εμβαδόν επιπέδου χωρίου. Η προηγούμενη σύνδεση πραγματοποιείται μέσω διαδικασίας που παραπέμπει σε εποπτική απόδειξη του θεωρήματος του ελληνικού προγράμματος με το οποίο εξασφαλίζεται η ύπαρξη παράγουσας συνεχούς συνάρτησης f σε διάστημα Δ και στην οποία ενέχεται η συνάρτηση $F = \int_a^x f(t)dt$ εκφρασμένη διαφορετικά. Ακολουθεί υπολογισμός εμβαδών επιπέδων χωρίων που είτε ορίζονται από τον άξονα τον άξονα των τετμημένων, τις ευθείες $x = a, x = \beta$ και την καμπύλη συνάρτησης που βρίσκεται κάτω από τον άξονα των τετμημένων, είτε περιέχονται μόνο ανάμεσα σε καμπύλη και ευθεία. Όταν η ολοκλήρωση δεν είναι εφικτή προτείνεται η χρήση του κανόνα του τραπεζίου. Η ολοκλήρωση πιο σύνθετων συναρτήσεων καταλαμβάνει μεγάλο μέρος του αγγλικού προγράμματος, εντός του οποίου υποδεικνύονται ποικίλες τεχνικές και μέθοδοι ολοκλήρωσης, όπως κατά παράγοντες, με αντικατάσταση κ.α.. Οι αναγωγικοί τύποι ολοκληρωμάτων και η χρήση τους σε εφαρμογές της ολοκλήρωσης κατέχουν σημαντική θέση στο αγγλικό πρόγραμμα, κάτι που δεν ισχύει στο ελληνικό.

Στο αγγλικό πρόγραμμα διδάσκονται επιπλέον του ελληνικού:

i. Οι συναρτήσεις τέμνουσα θ: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, συντέμνουσα θ: $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, η αντίστροφη της συνάρτησης ημίτονο ($y = \arcsin x$), η αντίστροφη της

[164] Σελίδα 157/C2.

συνάρτησης συνημίτονο ($y = \arccos x$), η αντίστροφη της συνάρτησης εφαπτομένη ($y = \arctan x$) και η παραγώγισή τους.

ii. Η μεθοδολογία εύρεσης της κλίσης καμπύλης όταν αυτή δίνεται σε παραμετρική μορφή και η παραγώγιση πεπλεγμένων μορφών.
iii. Ο υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής
iv. Ο υπολογισμός του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους όρων ακολουθίας με χρήση της μεθόδου των διαφορών
v. Η κατά προσέγγιση εύρεση ριζών εξισώσεων με χρήση γραμμικής παρεμβολής και με διχοτόμηση διαστήματος
vi. Οι πολικές συντεταγμένες
vii. Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\sec hx$, $\cos echx$ και $\coth x$, οι αντίστροφές τους και η παραγώγισή όλων τους.
viii. Ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων που περιέχουν υπερβολικές συναρτήσεις, αντίστροφες υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
ix. Ο υπολογισμός μήκους καμπύλης όταν αυτή δίνεται σε καρτεσιανή ή παραμετρική μορφή.
x. Ο υπολογισμός του εμβαδού επιφάνειας εκ περιστροφής.
xi. Σειρές Maclaurin και Taylor.

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε τα ακόλουθα στοιχεία που εντοπίσθηκαν στο αγγλικό πρόγραμμα και το διαφοροποιούν έναντι του ελληνικού:

- Δίνεται έμφαση σε μια διάσταση του λογισμού, την αλγεβρική, εις βάρος της αναλυτικής και τη γεωμετρικής.
- Διαπιστώθηκαν διαφορές στην έκταση της καλυπτόμενης ύλης, καθώς προσεγγίζονται περισσότερες περιοχές των μαθηματικών από τον τομέα της Ανάλυσης.
- Το όριο εισάγεται με τρόπο δυναμικό, ως μια μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε μια σταθερή οριακή τιμή («όσο το x τείνει στο a», «x$\rightarrow$a» κ.λ.π.) και, παρά την σπουδαιότητά του, δεν αναλύεται σε επίπεδο αντίστοιχο με εκείνο του ελληνικού προγράμματος.
- Σημαντική θέση διατηρεί η κατά προσέγγιση εκτίμηση αριθμητικών τιμών (ρίζες εξίσωσης) με χρήση επαναληπτικών μεθόδων, κατά την εφαρμογή των οποίων προκύπτουν ακολουθίες προσεγγίσεων που άλλοτε συγκλίνουν και άλλοτε όχι.

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την ενότητα αυτή θα παραθέσουμε ορισμένα στοιχεία που προέκυψαν κατά την έρευνα του τρόπου υλοποίησης του αγγλικού προγράμματος στα υπό εξέταση σχολικά εγχειρίδια, επισημαίνοντας τυχόν διαφορές του σε σχέση με το ελληνικό πρόγραμμα:

-Βασικές έννοιες και σημεία-κλειδιά της θεωρίας υποδεικνύονται στην αρχή κάθε ενότητας, χωρίς να επισημαίνεται η αιτία εισαγωγής τους. Έτσι οι μαθητές διδάσκονται στη συνέχεια **το πώς** να χειριστούν μια έννοια για να λύσουν σχετικές ασκήσεις και όχι **το γιατί**. Κάτι αντίστοιχο αποφεύγεται στο ελληνικό πρόγραμμα, όπου παραδείγματος χάρη, η έννοια της παραγώγου συνάρτησης εισάγεται σαν απάντηση στο πρόβλημα της εφαπτομένης και της στιγμιαίας ταχύτητας, η κυρτότητα ως μέσο για την χάραξη γραφήματος συνάρτησης κ.α.

-Πολλά σημεία της θεωρίας, όπως η έννοια της παραγώγου, του ολοκληρώματος και των ακροτάτων συνάρτησης, αρχικά εισάγονται σε απλουστευμένη μορφή. Στη συνέχεια διδάσκονται σε διάφορα μέρη, προσεγγίζονται από διαφορετικές οπτικές γωνίες και το περιεχόμενό τους συνεχώς εμπλουτίζεται, στα πλαίσια της άποψης ότι η γνώση εδραιώνεται και αφομοιώνεται καλύτερα μέσω της επανάληψης.

-Σε αντίθεση με το ελληνικό πρόγραμμα, δεν επιδιώκεται ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, και λιτότητα.

-Η απουσία αντιπαραδειγμάτων, γραφικών παραστάσεων και εποπτικής παρατήρησης είναι έντονα αισθητή. Δεν διατυπώνονται εικασίες στα πλαίσια προβλημάτων και παραλείπονται σημαντικά θεωρήματα που θα εξυπηρετούσαν την ισόρροπη και ποιοτική παρουσίαση των εννοιών. Τέλος οι αποδείξεις που δίνονται είναι μάλλον στοιχειώδεις.

-Οι ιστορικές αναφορές[165] είναι εξαιρετικά σπάνιες. Στα ελληνικά σχολικά βιβλία υπάρχουν ιστορικά σημειώματα στο τέλος κεφαλαίων, τα οποία, ωστόσο, δεν έχουν λειτουργική αξία.

-Τα αγγλικά σχολικά εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της Ανάλυσης και έχουν σχεδιασθεί ειδικά ούτως ώστε να αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες ενότητες AS ή A2, είναι ιδιαίτερα δημοφιλή στους μαθητές και στους

[165] Συγκεκριμένα εντοπίστηκε μία μόνο έμμεση αναφορά στον Carl Friedrich Gauss για τον τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος 1+2+3+4+5+...+99+100 (Core Mathematics 1, 6^{o} Κεφάλαιο).

καθηγητές. Η έντονη προσήλωσή τους στις εξετάσεις, με αναφορές σε θέματα προηγούμενων ετών και σε practice papers, τα καθιστούν αποτελεσματικό εργαλείο επανάληψης και προετοιμασίας για τις τελικές εξετάσεις. Συνήθης πρακτική είναι ένα γρήγορο πέρασμα όλης της διδακτέας ύλης και αφιέρωση του υπολειπόμενου χρόνου σε επαναλήψεις και εξάσκηση πάνω σε θέματα παρελθόντων ετών. Ωστόσο θεωρούμε ότι αυτή τους η δύναμη αποτελεί παράλληλα και αδυναμία, καθώς διαπιστώθηκε ότι στο πνεύμα αυτό δεν επιχειρούνται μαθηματικές συνδέσεις πέρα από τον προς επίτευξη στόχο και έτσι δεν προωθείται η μαθηματική έρευνα και κατανόηση.

Ασκήσεις, εφαρμογές και προβλήματα

-Σύνθετες τεχνικές εισάγονται μέσω λυμένων παραδειγμάτων: οι μαθητές διδάσκονται μία τεχνική και στη συνέχεια κάνουν εξάσκηση σε αυτή, επιλύοντας όσες περισσότερες σχετικές ασκήσεις μπορούν. Η εξέταση καθοδηγεί συνήθως τους σπουδαστές μέσω ερωτήσεων με εκτενή χρήση διαγραμμάτων και με τον διαχωρισμό τους σε διατεταγμένα βήματα.

-Η διαρθρωτή δομή των σχολικών εγχειριδίων περιορίζει καθοριστικά την ποικιλία και τη δυσκολία των ερωτήσεων και των ασκήσεων Μαθηματικής Ανάλυσης, οι οποίες είναι πιο σύντομες και προβλέψιμες, αρκετά απαιτητικές σε ό,τι αφορά στις αλγεβρικές διαδικασίες και συχνά δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια σειρά συστηματικά επαναλαμβανόμενων ασκήσεων. Έτσι δεν αναπτύσσεται η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

-Δεν υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις στο αγγλικό πρόγραμμα.

4.4 Επίλογος

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία θα πρέπει να τονίσουμε ότι βασική επιδίωξη αποτέλεσε η συνεισφορά της στην ευρύτερη επιστημονική κοινότητα που ενδιαφέρεται γενικότερα για τα προβλήματα της διδακτικής των μαθηματικών και ειδικότερα για εκείνα που σχετίζονται με τη διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης. Η κρίση που διέρχεται στις μέρες μας η Εκπαίδευση των μαθηματικών καθιστά αναγκαία την επανεξέταση όλων των εκπαιδευτικών συνιστωσών, κυρίως εκείνων που συνδέονται άμεσα με τη διδακτική πρακτική. Υπό αυτή την οπτική γωνία η μελέτη προγραμμάτων άλλων χωρών και εκπαιδευτικών συστημάτων διαφορετικής φιλοσοφίας καθίσταται απαραίτητη. Ελπίζουμε η εργασία μας αυτή να συνέβαλε σε αυτήν την κατεύθυνση, καθώς η βελτίωση των συνθηκών διδασκαλίας εξαρτάται ισχυρά από το περιεχόμενο της διδαχθείσας ύλης, τους στόχους και από τον τρόπο με τον οποίο αυτή υλοποιείται εντός των σχολικών εγχειριδίων, θέματα που εξετάστηκαν με προσοχή στα προηγούμενα κεφάλαια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Attwood, G., Macpherson A., Moran, B., Petran, J., Staley, G. & Wilkins, D. (2004). *Modular Maths Edexcel Core Mathematics 1.* Oxford: Heinemann Educational Publishers.

Attwood, G., Macpherson A., Moran, B., Petran, J., Staley, G. & Wilkins, D. (2004). *Modular Maths Edexcel Core Mathematics 2.* Oxford: Heinemann Educational Publishers.

Attwood, G., Macpherson A., Moran, B., Petran, J., Staley, G. & Wilkins, D. (2004). *Modular Maths Edexcel Core Mathematics 3.* Oxford: Heinemann Educational Publishers.

London Qualifications Limited. (2004). *Edexcel Advanced Subsidiary GCE in Mathematics (8371) Further Mathematics (8372) Pure Mathematics (8373) For teaching from September 2004 First award in January 2005. Edexcel Advanced GCE in Mathematics (9371) Further Mathematics (9372) Pure Mathematics (9373) For teaching from September 2004 First award in June 2005 Specification.* London: Edexcel Publications.

Mannall, G., & Kenwood M. (2004). *Heinemann Modular Maths Edexcel Further Pure Maths 1.* (2005). Oxford: Heinemann Educational Publishers.

Mannall, G., & Kenwood M. (2004). *Heinemann Modular Maths Edexcel Further Pure Maths 2.* (2005). Oxford: Heinemann Educational Publishers.

Mannall, G., & Kenwood M. (2004). *Heinemann Modular Maths Edexcel Further Pure Maths 3.* (2005). Oxford: Heinemann Educational Publishers.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α.(2005). *Άλγεβρα Α' Ενιαίου Λυκείου.* (Δ' Έκδοση). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Στ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ.(2006). *Άλγεβρα Β' Ενιαίου Λυκείου.* (Ν' Έκδοση). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α.(2006). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου*. (Ζ' Έκδοση). Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Από το διαδίκτυο

C.R.E., Campaign for Real Education. (2004a). Observations on London (Edexcel) ‘A’ level Mathematics from 1960 to 2004. Retrieved May 13, 2007 from http://www.cre.org.uk/maths1.pdf

C.R.E., Campaign for Real Education. (2004b). A comparison of the new specification (First A level Specification June 2005) with Specification (Curriculum) 2000 for Edexcel A level Pure and Applied Mathematics. Retrieved May 13, 2007 from http://www.cre.org.uk/maths2.pdf

Edexcel GCE. (2004). Specification Mapping P1-P3 to C1-C4. Retrieved May 13, 2007 from http://www.edexcel.org.uk/VirtualContent/83441/GCE_Maths_Specification_mapping_Pure_to_Core.pdf

Edexcel. (2006a). Update on the Two Tier Edexcel GCSE Mathematics Specifications. Retrieved February 26, 2006 from http://www.edexcel.org.uk/subjects/a-z/maths-numeracy/ri/news/two-tier-maths.htm

Edexcel. (2006b). Edexcel GCSE in Mathematics (Linear) (2540) First examination June 2008, First certification June 2008. Retrieved August 8, 2006 from http://gcsemaths.edexcel.org.uk/VirtualContent/98576/GCSE_Maths_A_Linear_2540_covered.pdf

Edexcel. (2006c). Edexcel GCSE in Mathematics (Modular) (2544) First examination March 2007 First certification June 2008. Retrieved August 10, 2006 from http://gcsemaths.edexcel.org.uk/VirtualContent/98577/GCSE_Maths_B_Modular_2544_covered.pdf

Eurydice Database on Education. (2006). The Education System in the United Kingdom (England, Wales and Northern Ireland). Retrieved February 2, 2007, from http://194.78.211.243/Eurybase/Application/frameset.asp?country=UK&language=VO

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007a). Organisation/control of education system. Retrieved 30 April, 2007 from http://www.inca.org.uk/england-organisation-mainstream.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007b). England:Education Structure (ages 3-19). Retrieved 30 April, 2007 from http://www.inca.org.uk/1277.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007c). England:Curricula (age 3-19). 5.1 First phase: Pre-compulsory, age up to 5. Retrieved 30 April, 2007 from http://www.inca.org.uk/1306.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007d). England:Curricula (age 3-19). 5.2 Second phase: Primary, age 4 or 5 to 11. Retrieved 1 May, 2007 from http://www.inca.org.uk/1304.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007e). England:Curricula (age 3-19). 5.3 Third phase: Lower secondary, age 11 – 16. Retrieved 1 May, 2007 from http://www.inca.org.uk/1303.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007f). England:Curricula (age 3-19). 5.4 Fourth phase: Upper secondary, age 16 – 18. Retrieved 1 May, 2007 from http://www.inca.org.uk/1300.html

INCA, International Review of Curriculum and Assessment Frameworks Internet Archive. (2007g). England: Assessment arrangements. 6.4 Fourth phase: Upper secondary, age 16–18. Retrieved 30 April, 2007 from http://www.inca.org.uk/1317.html

London Mathematical Society, Institute of Mathematics and its Applications Royal Statistical Society. (1995). Tackling the Mathematics Problem. Retrieved May 14, 2007 from www.lms.ac.uk/policy/tackling_maths_prob.pdf

Mayer, S.(2005). A level Mathematics Teaching. Retrieved May 13, 2007 from sixthform.info/maths/files/AMaths2.pdf

National Curriculum in Action. (2007). ICT in Mathematics. Retrieved February 11, 2007 from http://www.ncaction.org.uk/subjects/maths/ict-lrn.htm

National Curriculum on line (2006a). About the National Curriculum. What is the National Curriculum for England? Retrieved February 11, 2006 from http://www.nc.uk.net/nc_resources/html/about_NC.shtml

National Curriculum on line (2006b). About the National Curriculum. Values, aims and purposes. Retrieved February 11, 2006 from http://www.nc.uk.net/nc_resources/html/valuesAimsPurposes.shtml

Porkess, R. (2003).The new AS and A levels in Mathematics. *MSOR Connections Vol 3*, (No 4), 12-16. Retrieved January 30, 2007 from http://ltsn.mathstore.ac.uk/newsletter/nov2003/pdf/asa.pdf

Q.C.A. (n.d.). GCSE Criteria for Mathematics. Retrieved February 15, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/5704.html

Q.C.A. (2002). Designing and Timetabling the Primary Curriculum – a practical guide for key stages 1 & 2. Retrieved May 21, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/6306.html

Q.C.A. (2003). Report on Comparability between GCE and International Baccalaureate Examinations. Retrieved February 1, 2007 from www.Q.C.A..org.uk/downloads/alevels_vs_ib.pdf

Q.C.A. (2004a). An evaluation of Entry level qualifications. A joint project by Q.C.A., ACCAC, CCEA and LSC. Retrieved May 2, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/7550.html

Q.C.A. (2004b). AS and A level GCE Mathematics: Summary of accredited specifications. Retrieved January 1, 2007 from www.Q.C.A..org.uk/14-19/6th-form-schools/downloads/mathematics.pdf

Q.C.A. (2006a). GCSE mathematics coursework, Consultation summary. Retrieved January 15, 2007 from www.Q.C.A..org.uk/downloads/Q.C.A.-06 2737_maths_coursework.pdf

Q.C.A..(2006b). Evaluation of participation in A level Mathematics. Interim report, Autumn 2005. Retrieved May 13, 2007 from www.Q.C.A..org.uk/downloads/Q.C.A.-06-2326-gce-maths-participation.pdf

Q.C.A. (2007a). Programme of study: Mathematics key stage 3. Retrieved April 2, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/secondarycurriculumreview/subject/ks3/mathematics)

Q.C.A. (2007b). VCE A levels, Changes to VCE. Retrieved February 15, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/10379.html

Q.C.A. (2007c). Advanced Extension Awards. Retrieved February 2, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/11300_11306.html

Q.C.A. (2007d). Advanced Extension Awards. What is an Advanced Extension Award?. Retrieved February 2, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/613.html

Q.C.A. (2007e). AEA Text specification for mathematics. Retrieved January 2, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/3950.html

Q.C.A. (2007f). Free standing mathematics qualifications. Retrieved February 17, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/12046_1690.html

Q.C.A. (2007g). Free-standing mathematics qualifications: introduction. Retrieved February 17, 2007 from http://www.Q.C.A..org.uk/12046_1688.html

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. [Electronic version]. *Mathematics Teaching, 110,* 49–53. Retrieved June 10, 2007 from www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1985a-und-calc-mt.pdf