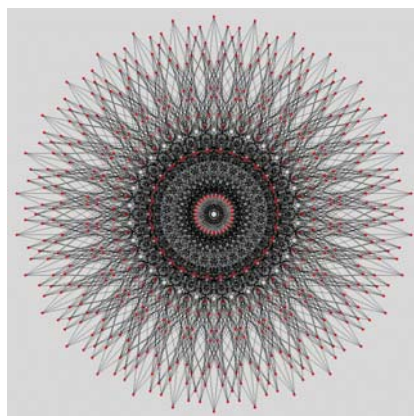
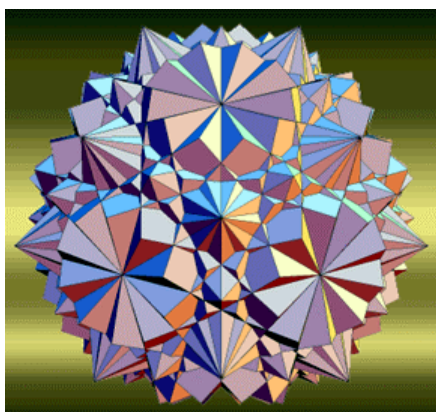


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Διπλωματική εργασία :
**ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΑ ΚΑΙ
ΚΑΠΟΙΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ**

Επιβλέπων Καθηγητής :
ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ



ΟΥΡΑΝΙΑ ΓΙΑΝΝΑΡΑΚΗ

Οκτώβριος 2005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦ. 1. ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

1.1	Ιστορικά	5
1.2	Εισαγωγή	8

ΚΕΦ. 2. Η ΣΦΑΙΡΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

	Εισαγωγή	15
2.1	Γεωμετρία της σφαίρας	15
2.2	Δίχτυα – Θεώρημα Euler	19
2.3	Κυρτά πολύεδρα – Θεώρημα Cauchy	23
2.4	Στερεές γωνίες – Θεώρημα Descartes's	32
2.5	Καμπυλότητα – Θεώρημα Gauss-Bonnet	35

ΚΕΦ. 3. ΠΟΛΥΕΔΡΑ

	Εισαγωγή	40
3.1	Ψηφιδωτά στο επίπεδο και στη σφαίρα	40
3.2	Κανονικά πολύεδρα	42
3.3	Εξέλιξη πολυέδρων	52
3.4	Ημικανονικά πολύεδρα	53
3.5	Αστεροειδή πολύεδρα	58

ΚΕΦ. 4. ΠΟΛΥΤΟΠΑ

	Εισαγωγή	61
	Πολύτοπα στις 4 διαστάσεις	67
	Πολύτοπα στις 5 διαστάσεις	71
	Πολύτοπα στις n διαστάσεις	71

ΚΕΦ. 5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

5.1	Οικογένεια κυρτών πολυέδρων	73
5.2	Τα 13 Αρχιμήδεια Στερεά	74
5.3	Τα πολύτοπα μέχρι τις 4 διαστάσεις	75
5.4	Υποστηρικτές πολυτόπων	75

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	81
---------------------------	-----------

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σύγχρονες απαιτήσεις στα μαθηματικά έχουν περιορίσει σημαντικά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια. Ειδικά η στερεομετρία πολλές φορές δε διδάσκεται καθόλου στο Λύκειο. Δύο ώρες, όλες κι όλες, διδασκαλίας την εβδομάδα κι ένας κλάδος που δεν εξετάζεται στις εισαγωγικές εξετάσεις αποτελούν δύο από τους λόγους για να χάσει ο κλάδος το ενδιαφέρον του από τους μαθητές. Παράλληλα, η χρήση σχημάτων στο χώρο απαιτεί αρκετή φαντασία και έτσι οι μαθητές συναντούν κατά κανόνα μεγάλες δυσκολίες.

Όμως κανένα άλλο μάθημα δεν βάζει σε τάξη το ανθρώπινο μυαλό όσο η γεωμετρία. Η διαδικασία υπόθεση – επεξεργασία – συμπέρασμα είναι απαραίτητη σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα. Εξαιτίας όλων αυτών, η διπλωματική εργασία μου έχει τίτλο : « Στερεομετρία : Γεωμετρία στη σφαίρα και κάποιες διδακτικές προεκτάσεις » και ιδιαίτερα ασχολείται με μια θεωρητική προέκταση της στερεομετρίας του Ευκλείδη. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με δύο ζητήματα : την επέκταση των θεμάτων θεμελίωσης του Ευκλείδη, όπου δημιουργήθηκε ένα πρόβλημα ισότητας στο χώρο και το οποίο λύθηκε πλήρως από το θεώρημα Cauchy, και την μεθοδολογική επέκταση των κανονικών πολυέδρων σε κανονικά πολύτοπα, με τη βοήθεια του συμβόλου Schläfli. Στη στερεομετρία του Ευκλείδη υπάρχουν και θέματα μέτρησης σε συγκεκριμένα στερεά όπου η θεωρητική επέκταση τους οδηγεί στο 3^ο πρόβλημα του Hilbert και σε θέματα τύπου Dehn. Εμείς εδώ δεν θα ασχοληθούμε με αυτά.

Έτσι, η εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια.

Στο 1^ο κεφάλαιο θα δούμε την πορεία της στερεομετρίας στο χρόνο και θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς ώστε να καταλήξουμε στη θεωρία των πολυέδρων. Στο 2^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με θεμελιώδη γεγονότα της γεωμετρίας και ιδιαίτερα τη γεωμετρία της σφαίρας. Στη συνέχεια θα περάσουμε στο θεώρημα Euler, που έχει γενικευτεί με πολλούς τρόπους, στο θεώρημα Cauchy, από όπου παίρνουμε ότι οι κυρτές πολυεδρικές επιφάνειες διατηρούν το σχήμα τους, στο θεώρημα του Descartes, που είναι ισοδύναμο με το θεώρημα του Euler, και στο τέλος θα περάσουμε στο θεώρημα Gauss – Bonnet, που είναι ανάλογο με το θεώρημα του Descartes. Στο 3^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με 3 ομάδες κατανομής των πολυέδρων : τα κανονικά, τα ημικανονικά και τα αστεροειδή πολυέδρα. Τέλος, στο 4^ο κεφάλαιο βρίσκουμε τα κανονικά πολυέδρα σε τέσσερις και παραπάνω διαστάσεις με τη βοήθεια του συμβόλου Schläfli.

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα Αναπλ. Καθηγητή κ. Διονύσιο Λάππα για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου πρόσφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας και τον Επίκ. Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου και τον Αναπλ. Καθηγητή κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Κεφάλαιο 1. Στερεομετρία

Η θεωρία των πολυέδρων, και ιδιαίτερα για τα κυρτά πολύεδρα, αποτελεί ένα από τα πιο γοητευτικά κεφάλαια της γεωμετρίας, η οποία μελετήθηκε και από τους αρχαίους. Θα δούμε την πορεία της στερεομετρίας με το πέρασμα των χρόνων και θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς ώστε να καταλήξουμε στη θεωρία των πολυέδρων.

1.1 Ιστορικά

Τα μαθηματικά είναι απόλυτα συνδεδεμένα με τις φιλοσοφικές αναζητήσεις της προέλευσης, της δομής του κόσμου και των νόμων που τα διέπουν. Η αντίληψη των αρχαίων Ελλήνων περί της υπεροχής της φιλοσοφικής διάστασης της γεωμετρίας, έναντι της πρακτικής, αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα που διαφοροποιεί την Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων από αυτή των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων και άλλων ανατολικών λαών.

Η αριθμητική είναι η επιστήμη της ποσότητας, ενώ η γεωμετρία είναι η επιστήμη του χώρου. Αντικείμενο της πρώτης είναι οι αριθμοί, ενώ της δεύτερης είναι η μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων. Ιδιαίτερα η γεωμετρία είναι αρκετές θεωρίες μαζί. Είναι ένα σύνολο από χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αντικειμένων. Μπορεί να αποτελέσει μοντέλο για την ερμηνεία και επεξεργασία καταστάσεων άλλων γνωστικών περιοχών. Ο ελάχιστος σκοπός της γεωμετρίας είναι η παροχή πρακτικών γνώσεων όπως η αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων και ο μέγιστος σκοπός είναι η παροχή μαθηματικής παιδείας.

Η γεωμετρία στο Δημοτικό δίνει έμφαση στην εξερεύνηση, περιγραφή, ομαδοποίηση, σχεδιασμό και κατά-μέτρηση συγκεκριμένων φυσικών αντικειμένων στο επίπεδο ή στο χώρο. Η μελέτη της γεωμετρίας εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες ι) διαδικασίες οπτικοποίησης ιι) διαδικασίες κατασκευής και ιιι) διαδικασίες συλλογισμού. Αντίθετα, η επίπεδη γεωμετρία του Λυκείου είναι μια 'έκδοση' του βιβλίου Στοιχεία που συνέγραψε ο Έλληνας μαθηματικός Ευκλείδης γύρω στο 300 π.Χ. Λέγεται ότι αυτό το βιβλίο είναι το πιο πολυδιαβασμένο μετά τη Βίβλο και έχει θεωρηθεί ως το αρχέτυπο ενός αυστηρού συμπερασματικού συστήματος¹. Ο Ευκλείδης δεν ήταν ο

¹ [7; Σελ 34] Επεξήγηση : Το πρώτο νούμερο δηλώνει το αντίστοιχο βιβλίο στην βιβλιογραφία.

πρώτος Έλληνας που έγραψε βιβλίο με τον τίτλο Στοιχεία, το οποίο είναι επισκόπηση όλων όσων θεωρούνταν βασικά μαθηματικά.

Δεν είναι γνωστό πόσα από τα θεωρήματα ανήκουν αποκλειστικά στον ίδιο τον Ευκλείδη, αν και μάλλον δεν πρέπει να είναι πάρα πολλά μιας και η συμπερασματική προσέγγιση της Γεωμετρίας μετρούσε ήδη τριακόσια χρόνια.

Ο πιο γνωστός από τους γεωμέτρους του 5^{ου} αιώνα ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο οποίος ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου. Από τους συλλογισμούς του προκύπτει ότι ο Ιπποκράτης κατείχε έναν αξιοσημείωτο αριθμό προτάσεων της στοιχειώδους γεωμετρίας. Τα Στοιχεία της Γεωμετρίας, που σύμφωνα με τον κατάλογο του Πρόκλου είχε γράψει, πρέπει να περιείχαν ένα μεγάλο μέρος από τα βιβλία III και IV του Ευκλείδη, τα οποία πραγματεύονται τον κύκλο και τα εγγεγραμμένα πολύγωνα, καθώς επίσης, και τα περιεχόμενα των βιβλίων I και II, που τα κατείχαν ήδη οι Πυθαγόρειοι.

Ο Βιτρούβιος αναφέρει ότι ο Αγάθαρχος ήταν ο πρώτος που ζωγράφιζε με προοπτική σκηνικά για τις παραστάσεις των τραγωδιών του Αισχύλου². Η διάχυση των ακτίνων, που μνημονεύει ο Βιτρούβιος, πρέπει να αναφέρεται στις ακτίνες που συγκλίνουν στο μάτι από τα σημεία του χώρου και τέμνουν το επίπεδο της εικόνας στα σημεία της εικόνας. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, περί το 450, η στερεομετρία πρέπει να είχε φτάσει σε ένα στάδιο ανάπτυξης το οποίο επέτρεπε τη διατύπωση και επίλυση προβλημάτων που εγείρει η προοπτική.

Στη διάρκεια του χρυσού αιώνα η στερεομετρία αναπτύχθηκε μέχρι το σημείο που ο Αναξαγόρας και ο Δημόκριτος μπόρεσαν να διατυπώσουν τις γενικές γραμμές μιας θεωρίας προοπτικής. Ο Δημόκριτος βρήκε τον τύπο για τους όγκους της πυραμίδας και του κώνου, αλλά δεν βρήκε μία αυστηρή απόδειξη. Έπειτα, οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν μόνο τρία από τα κανονικά στερεά, το τετράεδρο, τον κύβο και το δωδεκάεδρο. Ο Ίππασος πέτυχε να περιγράψει σφαίρα σε δωδεκάεδρο.

Δηλαδή τον 5^ο αιώνα, η στερεομετρία αποτελούσε πεδίο εντατικής έρευνας διαφόρων μαθηματικών. Παρόλο που οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν τρία από τα πέντε κανονικά πολύεδρα, ο Ιπποκράτης είχε αναγάγει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου σε εκείνο της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δεδομένων τμημάτων και τη μεγάλη ποσότητα της στερεομετρίας που χρειαζόταν για τη λύση του διπλασιασμού του κύβου από τον Αρχύτα, ο Πλάτωνας (Πολιτεία 528B) κάνει παράπονο για την πενιχρή ανάπτυξη της στερεομετρίας. Μάλλον ο Πλάτωνας θεωρούσε τη στερεομετρία με μια πιο περιορισμένη έννοια, η οποία υποδεικνύεται με τα ίδια λόγια του Πλάτωνα: «η μεγέθυνση των κύβων και όλων όσα έχουν βάθος³».

² [18; Σελ. 155]

³ [18; Σελ. 157-158]

Στο συμπλήρωμα των Νόμων του Πλάτωνος, που είναι γνωστό ως Επινόμις, το πρόβλημα των δύο μέσων αναλόγων θεωρείται ως το κατεξοχήν πρόβλημα της στερεομετρίας. Δηλαδή η στερεομετρία ορίζεται ως «η νέα τέχνη η οποία μας διδάσκει πώς να κάνουμε όμοιους δύο αριθμούς οι οποίοι δεν είναι⁴». Το ιδιαίτερο αντικείμενο της στερεομετρίας λοιπόν είναι να δείξει πώς μετασχηματίζουμε οποιονδήποτε αριθμό σε κύβο και, επομένως, πώς κατασκευάζουμε δύο κύβους, ο λόγος των όγκων των οποίων είναι ίσος με τον λόγο δύο τυχαίων ακεραίων.

Η αντιπαραβολή αυτού του ορισμού με το απόσπασμα της Πολιτείας του Πλάτωνος, φανερώνει ότι και για τον ίδιο τον Πλάτωνα, το προεξάρχον πρόβλημα της στερεομετρίας είναι η αύξηση του κύβου κατά δεδομένο λόγο.

Η στερεομετρία του Ευκλείδη χωρίζεται σε τρεις κλάδους. Ο πρώτος κλάδος περιέχει θέματα θεμελίωσης, που είναι λίγα σε αριθμό και πίστευε ο Ευκλείδης ότι η θεμελίωση της επιπεδομετρίας αρκούσε για το πέρασμα στο χώρο, ο δεύτερος κλάδος περιέχει μετρήσεις σε συγκεκριμένα στερεά (πρίσματα, πυραμίδα, κύλινδρος, κώνος και σφαίρα) και ο τρίτος κλάδος περιέχει τα κανονικά στερεά.

Τα πολύεδρα εμφανίζονται στο 11^ο, 12^ο, 13^ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Τα πολύεδρα έχουν βρει πολλές εφαρμογές στην αρχιτεκτονική, στην τέχνη, στα κοσμήματα, στη φύση (κρύσταλλα), στα γραφήματα, στη φιλοσοφία και στη λογοτεχνία⁵. Το 13^ο βιβλίο δίνει την εντύπωση ότι είναι μία αυτοτελής και ανεξάρτητη πραγματεία. Αρχίζει με δώδεκα προτάσεις για τη χρυσή τομή και για το εγγεγραμμένο κανονικό πεντάγωνο και τρίγωνο σε κύκλο. Πραγματεύεται τα πέντε, λεγόμενα, Πλατωνικά στερεά, τα οποία, ωστόσο, δεν ανήκουν στον Πλάτωνα. Τρία από τα προαναφερθέντα σχήματα οφείλονται στους Πυθαγορείους, συγκεκριμένα ο κύβος, η πυραμίδα και το δωδεκάεδρο, ενώ το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο οφείλονται στον Θεαίτητο. Η ονομασία τους δόθηκε από τον Πλάτωνα, διότι τα μνημονεύει στον Τίμαιο.

Επειδή ο συγγραφέας του 13^{ου} βιβλίου γνώριζε τα αποτελέσματα του 10^{ου} βιβλίου αλλά, επιπλέον, η θεωρία του 10^{ου} βιβλίου αναπτύχθηκε με σκοπό να εφαρμοστεί στο 13^ο βιβλίο συμπεραίνουμε ότι τα δύο βιβλία γράφτηκαν από τον ίδιο συγγραφέα, τον Θεαίτητο. Επίσης τα θέματα του 13^{ου} βιβλίου έχουν μελετηθεί λεπτομερώς στα βιβλία II και IV, αλλά με έναν διαφορετικό τρόπο. Οπότε αν είχε γράψει ο Ευκλείδης το 13^ο βιβλίο θα έπρεπε να χρησιμοποιούσε στοιχεία από τα άλλα δύο βιβλία.

⁴ Οι στερεοί αριθμοί $\alpha\beta\gamma$ και $\delta\epsilon\zeta$ λέγονται όμοιοι εάν οι πλευρές τους σχηματίζουν συνεχή αναλογία $\alpha : \delta = \beta : \epsilon = \gamma : \zeta$ [18; Σελ. 159]

⁵ [6; Σελ. 1-9]

Μελετώντας αυτά τα βιβλία βλέπουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν προβολική και παραστατική γεωμετρία.

Επιστέγασμα του όλου έργου των Στοιχείων είναι η κατασκευή και η εγγραφή των πέντε κανονικών πολυέδρων : του τετραέδρου, του οκταέδρου, του κύβου, του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου στην σφαίρα. Όπως στην επιπεδομετρία, έτσι και στην στερεομετρία, ο Ευκλείδης δεν κάνει κανένα αριθμητικό υπολογισμό.

1.2 Εισαγωγή⁶

Ορισμός 1⁷

Στερεό είναι αυτό που έχει μήκος, πλάτος και βάθος.

Αυτός ο ορισμός ήταν προφανώς παραδοσιακός μιας και έχει αναφερθεί σε μεγάλο βαθμό από Πλάτωνα και Αριστοτέλη.

Ο Πλάτωνας μιλά για μίμηση ενός παραδείγματος σε μήκος, πλάτος και βάθος, Σοφιστής 235D, και για την τέχνη στο μέτρημα μήκους, πλάτους και βάθους, Νόμοι 817E.

Το βάθος, η τρίτη διάσταση, χρησιμοποιείται από μόνη της σαν μία περιγραφή του 'σώματος' από τον Αριστοτέλη, ο όρος θεωρείται σαν να υποδηλώνει τις άλλες δύο διαστάσεις, έτσι μήκος είναι μία γραμμή, πλάτος είναι μία επιφάνεια και βάθος είναι το σώμα. Το μήκος είναι συνεχής σε μία διάσταση, το πλάτος σε δύο και το βάθος σε τρεις διαστάσεις. Στα Τοπικά του Αριστοτέλη βρίσκουμε τον ορισμό του σώματος σαν αυτό που έχει τρεις διαστάσεις ή διαφορετικά είναι αυτό που έχει όλες τις διαστάσεις. Βέβαια στα Φυσικά λέγοντας διαστάσεις ο Αριστοτέλης εννοεί 6 διαιρώντας κάθε μία από τις τρεις σε δύο αντίθετα : πάνω – κάτω, πριν – μετά, δεξί – αριστερό, όπου εξηγώντας τους αυτοί οι όροι προκύπτουν συγγενικοί.

Ο Heron, όπως αναμενόταν, συνδυάζει και τα δύο είδη του ορισμού : Ένα στερεό σώμα είναι αυτό που έχει μήκος, πλάτος και βάθος ή αυτό που κατέχει τρεις διαστάσεις.

Ορισμός 2

Το πέρασ του στερεού είναι επιφάνεια.

Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει, στα Μεταφυσικά (1066 b23), ότι ο λόγος του σώματος είναι αυτός που οριοθετείται από επίπεδα και, στα

⁶ [9; Σελ.262-268]

⁷ 17; σελ. 10]

Μεταφυσικά (1060 b15), ότι οι επιφάνειες είναι τα όρια των σωμάτων. Έτσι, ο Heron ορίζει ότι «Κάθε στερεό οριοθετείται από επίπεδα και παράγεται όταν ένα επίπεδο κινείται προς τα μπρος με αντίθετη διεύθυνση».

Ορισμός 3

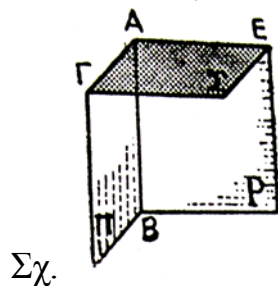
Όμοια στερεά σχήματα είναι αυτά που περιέχονται από ίσο πλήθος ομοίων επιπέδων.

Ορισμός 4

Ίσα και όμοια στερεά σχήματα είναι αυτά που περιέχονται από ίσα στο πλήθος και στο μέγεθος όμοια επίπεδα.

Ορισμός 5

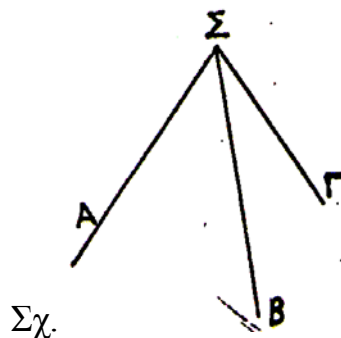
Τα τρία επίπεδα Π , P , Σ που έχουν ένα κοινό σημείο, A , και περατούνται στην τομή τους περικλείουν ένα μέρος του απείρου διαστήματος το οποίο λέγεται **τρίεδρος γωνία**.



Το κοινό σημείο A των επιπέδων Π , P , Σ καλείται **κορυφή** της τριέδρου γωνίας, τα επίπεδα Π , P , Σ καλούνται έδρες και οι ημιευθείες AB , AG , AE , κατά τις οποίες τέμνονται τα επίπεδα λέγονται ακμές τις τριέδρης.

Σε κάθε τριέδρη διακρίνουμε τα εξής :

- Τις γωνίες οι οποίες περιέχονται μεταξύ δύο διαδοχικών ακμών και οι οποίες ονομάζονται **έδρες ή επίπεδες γωνίες** της τριέδρου.



Π.χ. οι γωνίες $ΑΣΒ$, $ΒΣΓ$ και $ΓΣΑ$

- Τις **δίεδρες γωνίες** οι οποίες περιέχονται μεταξύ δύο διαδοχικών εδρών και έχουν σαν ακμές τις ακμές της τριέδρης γωνίας.

Ορισμός 6

Στερεά γωνία είναι ή κλίσις πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς περισσοτέρων τῶν δύο εὐθειῶν γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄλλως, στερεά γωνία εἶναι ή περιεχομένη ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔχουσών κοινὴν κορυφὴν.

Η φρασεολογία του δεύτερου ορισμού της στερεάς γωνίας είναι ακριβώς αυτή του Πλάτωνα, όταν αυτός μιλά για στερεές γωνίες στον Τίμαιο. Γι' αυτό μιλά για : ι) 4 ισόπλευρα τρίγωνα έτσι τοποθετημένα ώστε η κάθε ομάδα των 3 επιπέδων γωνιών να κάνουν μία στερεά γωνία ιι) 8 ισόπλευρα τρίγωνα έτσι τοποθετημένα ώστε η κάθε ομάδα από 4 επίπεδες γωνίες να συνθέτουν μία στερεά γωνία και ιιι) 6 τετράγωνα να κάνουν 8 στερεές γωνίες, έτσι συντεθειμένες από 3 επίπεδες δεξιές γωνίες. Ο Heiberg εικάζει ότι ο πρώτος από τους 2 ορισμούς της στερεάς γωνίας πρέπει να έχει παρθεί από τον Ευκλείδη από κάποια παλαιότερα 'Στοιχεία', αφού δεν είναι τρόπος ορισμού του Ευκλείδη.

Είναι προφανές από έναν υπαινιγμό στον Πρόκλο (σελ.123, 1-6) ότι υπήρχε μία αντίφαση ως προς την ορθότητα του να περιγράφεις ως στερεά γωνία την γωνία που εσωκλείεται από λιγότερες από 3 επιφάνειες (περιλαμβανομένου καμπύλων επιφανειών). Έτσι, οι σχολιαστές λένε ότι ο ορισμός του Ευκλείδη για την στερεά γωνία φτιαγμένη από τρεις ή περισσότερες επίπεδες γωνίες είναι ελλιπής γιατί π.χ. δεν καλύπτει την περίπτωση της γωνίας από τέσσερα μέρη μιας σφαίρας η οποία περιέχεται από περισσότερες από δύο επιφάνειες.

Στα σύγχρονα βιβλία μία πολυεδρική γωνία συνήθως αναφέρεται σαν η σχηματιζόμενη ή οριοθετημένη από 3 ή περισσότερα επίπεδα που συναντιούνται σε ένα σημείο ή ότι είναι το γωνιακό άνοιγμα μεταξύ τέτοιων επιπέδων στο σημείο όπου συναντιούνται.

Παρατηρήσεις

Μια στερεά (ή πολυεδρική) γωνία καλείται τριέδρη, τετράεδρη, κλπ εάν έχει τρεις, τέσσερις κλπ έδρες.

Στα Στοιχεία, ο Ευκλείδης συνεχίζει με ορισμούς κάποιων στερεών σχημάτων, όπως πυραμίδα, πρίσμα κτλ, και όχι με τους ορισμούς που ακολουθούν, οι οποίοι θα μας βοηθήσουν να δώσουμε τον ορισμό του πολυέδρου.

Ορισμός 7

Μία **στερεά** γωνία καλείται **κυρτή** εάν κάθε έδρα της προεκταμένη αφήνει ολόκληρη την στερεά γωνία προς το αυτό μέρος της.

Μια τριέδρη γωνία είναι πάντα κυρτή.

Ορισμός 8

Ένα **πολύγωνο** καλείται **κανονικό** εάν όλες οι πλευρές του είναι ίσου μήκους και όλες οι γωνίες των κορυφών είναι ίσες.

Ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές καλείται n -γωνο.

Ορισμός 9

Μιας και το πολύγωνο με n πλευρές μπορεί να διαμεριστεί σε $(n-2)$ μη συμπτώσιμα τρίγωνα η **γωνία κορυφής ενός n -γωνου** είναι $(n-2)\pi/n$.

Ορισμός 10⁸

Πολύεδρο ονομάζουμε το στερεό με επίπεδες έδρες και ευθύγραμμες ακμές, διατεταγμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ακμή να ενώνει δύο κορυφές και να είναι κοινή για δύο έδρες.

Παρατήρηση

Για πολλούς αιώνες, η λέξη ‘πολύεδρο’ ήταν συνώνυμη με την λέξη ‘κυρτό στερεό’⁹.

Ο Ευκλείδης, συμπτωματικά, χρησιμοποίησε τον όρο ‘πολύεδρο’. Για παράδειγμα στο βιβλίο XII στην πρόταση 17¹⁰ κατασκευάζει ένα πολυεδρικό στερεό του οποίου η επιφάνεια κείται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρες σφαίρες.

Ενώ, ο Cauchy και ο Möbius θεωρούσαν τα πολύεδρα σαν επιφάνειες συγκροτημένες από πολύγωνα. Οπότε γενικά το πολύεδρο ορίζεται σαν η ένωση μιας πεπερασμένης ομάδας από πολύγωνα με κάποια χαρακτηριστικά : ι)κάθε ζευγάρι από πολύγωνα συναντιέται μόνο στις πλευρές ή στις κορυφές του ιι)κάθε πλευρά κάθε πολυγώνου συναντά ακριβώς ένα άλλο πολύγωνο κατά μήκος μιας ακμής ιιι)είναι πιθανόν να μεταβούμε από το εσωτερικό οποιουδήποτε πολυγώνου στο εσωτερικό ενός άλλου και τέλος ιiv)δηλώνοντας με V μια κορυφή και με $F_1, F_2, \dots, F_n$ τα n πολύγωνα που συναντιόνται στην V είναι πιθανόν να μεταβούμε διαδοχικά σ’ όλα τα F_i χωρίς να περάσουμε από την V .

⁸ [7; Σελ. 57]

⁹ [6; Σελ.206-210]

¹⁰ [17; Σελ. 129]

Ορισμός 11

Ένα **πολύεδρο** καλείται **κυρτό** αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν με ένα ευθύγραμμο τμήμα που να κείται εξ' ολοκλήρου μέσα του.

Ορισμός 12

Ένα **κυρτό πολύεδρο** είναι **κανονικό** αν όλες οι έδρες του είναι κανονικά πολύγωνα ίσα μεταξύ τους (ή οι ακμές όλων των πολυγώνων είναι ίσες και οι γωνίες όλων των πολυγώνων είναι ίσες) και σε κάθε κορυφή συναντάται ο ίδιος αριθμός εδρών.

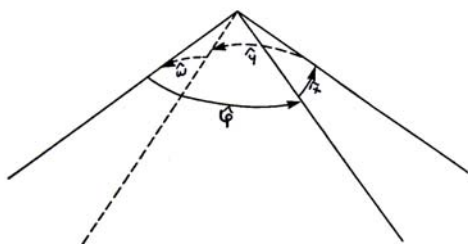
Παρατήρηση

Έστω P ένα κυρτό πολύεδρο που οι όψεις του είναι συμπτώσιμα κανονικά πολύγωνα. Τότε οι ακόλουθες δηλώσεις για το P είναι ισοδύναμες:

- όλες οι κορυφές του P κείτονται πάνω σε σφαίρα
- όλες οι διέδρες γωνίες του είναι ίσες
- όλα τα σχήματα κορυφής είναι κανονικά πολύγωνα
- όλες οι στερεές γωνίες είναι συμπτώσιμες
- όλες οι κορυφές περιβάλλονται από τον ίδιο αριθμό όψεων

Πρόταση 1

Το άθροισμα των γωνιών κορυφής των πολυγώνων που περικλείει μία κορυφή ενός κυρτού πολύεδρου είναι λιγότερο από 2π .



Αυτό είναι γεωμετρικά φανερό μιας και μπορούμε να το δούμε μεταφέροντας τις περικυκλωμένες όψεις που ενώνονται σε μία κοινή κορυφή σε μία επίπεδη επιφάνεια.

Σύμφωνα με τον Heath¹¹, ο Simson υποστηρίζει ότι η ισότητα των στερεών σχημάτων δεν είναι ένας ορισμός αλλά ένα θεώρημα το οποίο δεν θα έπρεπε να βρίσκεται ανάμεσα στους ορισμούς και ότι επιδέχεται απόδειξη. Παράλληλα, δίνει ένα παράδειγμα για να δείξει ότι ο ορισμός ή το θεώρημα δεν είναι γενικά αληθές. Παίρνει μία πυραμίδα και ορθώνει πάνω στην πυραμίδα σε αντίθετες πλευρές αυτής δύο ίσες πυραμίδες

¹¹ [9; Σελ.265-267]

μικρότερες από την πρώτη. Η πρόσθεση και η αφαίρεση αντίστοιχα αυτών των πυραμίδων δίνουν δύο στερεά σχήματα τα οποία ικανοποιούν τον ορισμό αλλά δεν είναι ίσα.

Έτσι, ο Simson ορίζει τα όμοια στερεά σχήματα σαν αυτά που έχουν όλες τις σταθερές γωνίες ίσες, μία προς μία, και περιέχονται από τον ίδιο αριθμό ομοίων επιπέδων.

Ο Legendre συμφωνεί με τον Simson στο ότι ο ορισμός 4 δεν είναι ακριβώς ένας ορισμός αλλά ένα θεώρημα το οποίο είναι αναγκαίο να αποδειχθεί, αφού δεν είναι προφανές ότι δύο στερεά είναι ίσα για τον μοναδικό λόγο ότι έχουν έναν ίσο αριθμό από ίσες όψεις. Το σφάλμα του ορισμού 4 είναι σύνηθες και στον ορισμό 3 διότι αν ο ορισμός 4 δεν αποδειχθεί ένας μπορεί να υποθέσει ότι υπάρχουν δύο άνισα και ανόμοια στερεά με ίσες όψεις. Αλλά σ' αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με τον ορισμό 3, ένα στερεό που έχει τις όψεις του όμοιες με αυτές των δύο πρώτων θα είναι όμοιο και με τα δύο.

Ως υπεράσπιση των δύο ορισμών, όπως δόθηκαν από τον Ευκλείδη, θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι τα σχήματα τα οποία ο Ευκλείδης πραγματικά αποδεικνύει ίσα ή όμοια με αναφορά στους ορισμούς 3,4 είναι τέτοια ώστε οι στερεές γωνίες τους να μην αποτελούνται από περισσότερες από 3 επίπεδες γωνίες και αποδεικνύει επαρκώς ότι αν τρεις επίπεδες γωνίες σχηματίζουν μία στερεά γωνία που είναι αντίστοιχα ίσες με τρεις επίπεδες γωνίες οι οποίες σχηματίζουν μία άλλη στερεά γωνία τότε οι δύο στερεές γωνίες θα είναι ίσες.

Αν τώρα δύο πολύεδρα έχουν αντίστοιχα ίσες τις όψεις τους, οι αντίστοιχες στερεές γωνίες θα συντίθενται από τον ίδιο αριθμό των επίπεδων γωνιών και οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν κάθε στερεά γωνία σε ένα πολύεδρο θα είναι αντίστοιχα ίσες με τις επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν την αντίστοιχη στερεά γωνία στο άλλο. Γι' αυτό το λόγο, εάν οι επίπεδες γωνίες σε κάθε στερεά γωνία δεν είναι περισσότερες από τρεις σε αριθμό οι αντίστοιχες στερεές γωνίες είναι ίσες. Αλλά εάν οι αντίστοιχες όψεις είναι ίσες και οι αντίστοιχες στερεές γωνίες ίσες τότε και τα στερεά θα πρέπει να είναι ίσα γιατί τότε θα μπορεί να υποτεθεί ότι τουλάχιστον είναι συμμετρικά μεταξύ τους.

Γι' αυτό η δήλωση των ορισμών 3, 4 είναι αληθής και αποδεκτή σε όλες τις περιπτώσεις που έχουμε σχήματα με τριέδρες γωνίες, η οποία είναι η μόνη περίπτωση που παίρνει ο Ευκλείδης.

Ο Legendre παρατήρησε ότι ο ορισμός που έδωσε ο Simson αν και αληθής έχει ένα μειονέκτημα το ότι περιέχει έναν αριθμό από περιττές υποθέσεις. Έτσι, για να ξεπεράσει τις δυσκολίες, χώρισε τον ορισμό των ομοίων στερεών σε δύο. Ο πρώτος ορίζει μόνο όμοιες τριγωνικές πυραμίδες και ο δεύτερος ορίζει γενικά όμοια πολύεδρα βασισμένος στον πρώτο ορισμό.

1^{ος}) Δύο τριγωνικές πυραμίδες είναι όμοιες όταν έχουν τα ζευγάρια των όψεων τους αντιστοίχως όμοια, ομοίως τοποθετημένα και ίσα συγκλίνοντα το ένα με το άλλο.

2^{ος}) Δύο πολύεδρα είναι όμοια όταν έχουν όμοιες βάσεις και οι κορυφές των αντίστοιχων στερεών γωνιών εξωτερικά των βάσεων καθορίζονται από τριγωνικές πυραμίδες όμοιες μία προς μία.

Ο Legendre δίνει μία απόδειξη, η οποία θεωρείται παρόμοια με αυτή του Cauchy ο οποίος απέδειξε ότι δύο κυρτά στερεά σχήματα είναι ίσα εάν περιέχονται από ίσα επίπεδα σχήματα όμοια τοποθετημένα, βασισμένη σε δύο λήμματα τα οποία οδήγησαν στο θεώρημα ότι : Δοθέντος ενός κυρτού πολυέδρου στο οποίο όλες οι στερεές γωνίες είναι φτιαγμένες από περισσότερες από τρεις επίπεδες γωνίες, είναι πιθανόν να ποικίλουν οι συγκλίσεις των επιπέδων αυτού του στερεού έτσι ώστε να παράγουν ένα δεύτερο πολύεδρο σχηματιζόμενο από τα ίδια επίπεδα τακτοποιημένα με τον ίδιο τρόπο όπως στο δοθέν πολύεδρο. Το κυρτό πολύεδρο, στο οποίο όλες οι στερεές γωνίες είναι φτιαγμένες από περισσότερες από τρεις επίπεδες γωνίες, διατηρείται με το να κόβεις από οποιοδήποτε δοθέν πολύεδρο όλες τις τριγωνικές πυραμίδες που σχηματίζουν τριέδρες γωνίες. Αυτό είναι νόμιμο γιατί οι τριέδρες γωνίες είναι αμετάβλητες από την φύση τους.

Φαίνεται ότι ο ορισμός του Heron για ίσα στερεά σχήματα στο οποίο έχει προστεθεί ο όρος ‘ομοίως τοποθετημένα’ από τον Ευκλείδειο όρο ‘όμοια’ είναι σωστό εάν κατανοηθεί ότι αναφερόμαστε μόνο σε κυρτά πολύεδρα : «Ίσα στερεά σχήματα είναι εκείνα που περιλαμβάνονται από ίσα και ομοίως τοποθετημένα επίπεδα ίσα στον αριθμό και στο μέγεθος (magnitude)». Παράλληλα, ο Heron ορίζει όμοια στερεά σχήματα αυτά που περικλύονται από επίπεδα όμοια και ομοίως τοποθετημένα.

Κεφάλαιο 2. Η σφαίρα ως επιφάνεια.

Εδώ θα ασχοληθούμε με κάποια θεμελιώδη γεγονότα της γεωμετρίας. Θα ξεκινήσουμε με τη γεωμετρία στη σφαίρα και θα περάσουμε στο θεώρημα Euler που είναι ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα των μαθηματικών γνωστό στην αλγεβρική τοπολογία και έχει γενικευτεί με πολλούς τρόπους. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα κυρτά πολύεδρα και το θεώρημα Cauchy από το οποίο μία συνέπεια του είναι ότι οι κυρτές πολυεδρικές επιφάνειες είναι άκαμπτες (δηλαδή ότι διατηρούν το σχήμα τους). Έπειτα, θα δούμε ένα θεώρημα ισοδύναμο με το θεώρημα του Euler το θεώρημα του Descartes αλλά οι μέθοδοι με τους οποίους κατέληξαν και οι δυο στα αποτελέσματα τους είναι διαφορετικοί. Συγκεκριμένα το θεώρημα Descartes εμφανίζεται από τον ίδιο σαν ένα αποτέλεσμα παρατηρήσεων. Στο τέλος, θα ασχοληθούμε με ένα ανάλογο θεώρημα ως προς το θεώρημα του Descartes το οποίο ισχύει για κλειστές επιφάνειες και δίνει ότι η ολική καμπυλότητα μιας κλειστής επιφάνειας είναι πάντα ίση με 4π . Αυτό είναι μια ειδική περίπτωση αυτουνού που είναι γνωστό σαν θεώρημα Gauss – Bonnet.

2.1 Γεωμετρία της σφαίρας

Είδαμε ότι στο βιβλίο XI των Στοιχείων ότι ο Ευκλείδης ασχολείται με την στερεομετρία. Παρόλο που ορίζει την στερεά γωνία δεν κάνει καμιά προσπάθεια να την μετρήσει ποσοτικά γιατί δεν ξέρει πως να μετρήσει το μέγεθος της και πως να γίνει η σύγκριση μεταξύ αυτών.

Εάν η επίπεδη γωνία μετριέται με βάση το τόξο ενός κύκλου τότε πιθανόν οι στερεές γωνίες να μετριοούνται από τμήματα μιας σφαίρας¹². Για να καταλάβουμε αυτή την αναλογία φανταζόμαστε μία σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο την κορυφή μιας στερεάς γωνίας. Αυτή θα τέμνει τα επίπεδα σχήματα που αποτελούν την στερεά γωνία σε τόξα μέγιστων κύκλων και αυτά τα τόξα θα οριοθετούν ένα πολύγωνο πάνω στην σφαίρα, το οποίο κείται μέσα στην στερεά γωνία. Αυτό το σφαιρικό πολύγωνο είναι ένας τρόπος μέτρησης της στερεάς γωνίας. Οι γωνίες ανάμεσα στις πλευρές του σφαιρικού πολυγώνου είναι οι διέδρες γωνίες των όψεων της στερεάς γωνίας και οι πλευρές είναι ένας τρόπος μέτρησης των επίπεδων γωνιών των όψεων. Στην πραγματικότητα, το

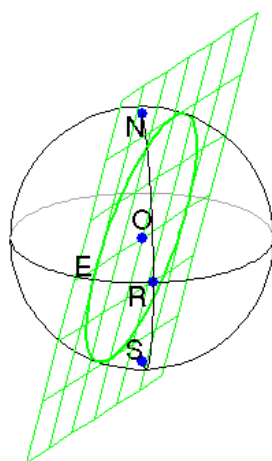
¹² [6; Σελ. 184-186]

μήκος μιας πλευράς είναι η μέτρηση της επίπεδης γωνίας σε ακτίνια. Όπως το μήκος ενός τόξου χρησιμοποιείται σαν μέτρο της επίπεδης γωνίας, έτσι, το εμβαδό ενός σφαιρικού πολυγώνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μέτρο μιας στερεάς γωνίας.

Όλα αυτά οδήγησαν στην ανάπτυξη μιας γεωμετρίας που καλείται σφαιρική. Η μελέτη της ουράνιας σφαίρας και οι κινήσεις ήλιου και σελήνης οδήγησαν στην ανάπτυξη της Σφαιρικής Γεωμετρίας, με αποτέλεσμα να θεωρείτο κλάδος της Αστρονομίας. Η Αστρονομία εφαρμόζεται στη μελέτη προβλημάτων που δεν μας ενδιαφέρει η απόσταση των ουρανίων σωμάτων από τη Γη αλλά η θέση τους στον ουράνιο θόλο που θεωρείται σφαιρικός με κέντρο το κέντρο της Γης.

Η Γη θεωρείται κατά προσέγγιση σφαιρική, επομένως η σφαιρική γεωμετρία έχει εφαρμογές και στις επιστήμες που σχετίζονται με το σχήμα Γης. Μία από αυτές είναι η Ναυσιπλοία και χρησιμεύει για να γίνονται υπολογισμοί πορείας. Επειδή, από την αρχαιότητα είναι γνωστό ότι, η επιφάνεια της σφαίρας δεν αναπτύσσεται στο επίπεδο οι χάρτες δεν είναι ακριβείς.

Η **σφαίρα** νοείται σαν μία ομάδα από σημεία του τρισδιάστατου χώρου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο, το οποίο καλείται **κέντρο** της σφαίρας και η απόσταση καλείται **ακτίνα** της σφαίρας. Εάν πάρουμε τυχαία μία ευθεία και μία σφαίρα τότε υπάρχουν τρεις περιπτώσεις : 1) να μην τέμνονται 2) να έχουν ένα κοινό σημείο, τότε η ευθεία καλείται **εφαπτομένη** και 3) να έχουν δύο κοινά σημεία, τα οποία λέγονται **αντίποδα σημεία** π.χ. βόρειος και νότιος πόλος. Τρεις είναι και οι σχετικές θέσεις της σφαίρας με επίπεδο 1) να μην τέμνονται 2) να τέμνονται σε ένα σημείο, λέγεται εφαπτόμενο επίπεδο και 3) να τέμνονται σε ένα κύκλο.



Ο κύκλος της τομής γίνεται μέγιστος όταν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας. Τότε αυτός ο κύκλος καλείται **μέγιστος κύκλος**. Ένα παράδειγμα μέγιστου κύκλου είναι ο ισημερινός. Οι μέγιστοι κύκλοι είναι σημαντικοί για να καταλάβουμε ότι η μικρότερη απόσταση

ανάμεσα σε δύο σημεία πάνω στην σφαίρα είναι κατά μήκος του τμήματος του μέγιστου κύκλου που τα ενώνει.

Στο επίπεδο το απλούστερο πολύγωνο είναι το τρίγωνο. Δεν υπάρχουν πολύγωνα με δύο πλευρές. Αυτό όμως δεν ισχύει στην περίπτωση της σφαίρας. Κάθε δύο μέγιστοι κύκλοι συναντιούνται σε δύο αντίποδα σημεία και διαιρούν την σφαίρα σε 4 περιοχές, όπου η κάθε μία έχει δύο πλευρές.



Οι καμπύλες στην σφαίρα δεν κείτονται σε ένα επίπεδο. Ωστόσο, οι ευθείες οι οποίες είναι εφαπτόμενες σε δυο τεμνόμενες καμπύλες βρίσκονται και οι δύο σε ένα επίπεδο, το οποίο είναι εφαπτόμενο στην σφαίρα στο σημείο τομής. Ορίζουμε την **γωνία** ανάμεσα σε δυο καμπύλες να είναι η γωνία ανάμεσα στις εφαπτόμενες γραμμές.

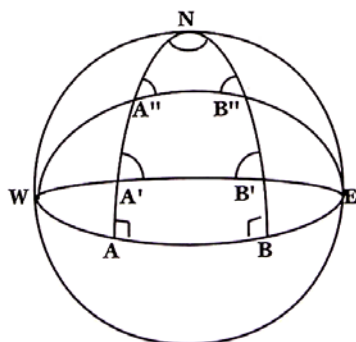
Στη σφαίρα ορίζουμε και το **σφαιρικό τρίγωνο**, που είναι ένα τρίγωνο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας με πλευρές τόξα μέγιστων κύκλων, μικρότερα από ημικύκλια.



Είναι σαν να θεωρούμε ότι η τριέδρη γωνία βρίσκεται στο επίπεδο μιας σφαίρας, το ίχνος της τριέδρου πάνω στην σφαίρα το καλούμε σφαιρικό τρίγωνο. Στο σφαιρικό τρίγωνο έχουμε ότι το μήκος του τόξου ισούται με το μήκος της επίπεδης γωνίας σε ακτίνια και οι γωνίες του είναι οι διέδρες γωνίες. Επίσης, δυο σφαιρικά τρίγωνα που έχουν ίσες πλευρές έχουν ίσες γωνίες (και αντιστρόφως). Δηλαδή η ομοιότητα και η ισότητα συμπίπτουν.

Οι κορυφές ενός κανονικού σφαιρικού πολυγώνου κείτονται σε ένα επίπεδο, στον Ευκλείδειο χώρο. Έτσι, οι κορυφές ενός κανονικού σφαιρικού πολυγώνου είναι οι κορυφές ενός κανονικού Ευκλείδειου πολυγώνου το οποίο είναι εγεγραμμένο στην σφαίρα. Ορίζουμε την υπεροχή ενός σφαιρικού τριγώνου να είναι η ποσότητα (άθροισμα γωνιών του τριγώνου) – π .

Κάθε ισοσκελές τρίγωνο είναι φτιαγμένο από 2 μεσημβρινούς που διέρχονται από το βόρειο πόλο N και από ένα μέγιστο κύκλο ο οποίος διέρχεται από ένα ζευγάρι αντίποδων σημείων E, W πάνω στον ισημερινό. Εάν η τρίτη πλευρά είναι μέρος του ισημερινού το τρίγωνο που σχηματίζεται NAB έχει τις γωνίες της βάσης να είναι ακριβώς 90° . Εάν το τρίγωνο NA'B' έχει τις κορυφές του στο βόρειο ημισφαίριο τότε οι γωνίες της βάσης θα είναι μικρότερες των 90° . Καθώς μετακινούμε την βάση προς τα σημεία A'' και B'', πλησιέστερα στο N, οι γωνίες της βάσης συνεχίζουν να μειώνονται.



Όταν είναι πολύ κοντά στο N το σχήμα που παίρνουμε μοιάζει με ένα μικροσκοπικό τρίγωνο με ευθείες πλευρές. Στην πραγματικότητα οι γωνίες της βάσης μειώνονται φτάνοντας τις Ευκλείδειες τιμές των 60° . Αυτό αποδεικνύεται με το να παρατηρήσουμε ότι το σφαιρικό τρίγωνο μπορεί όλο και περισσότερο να προσεγγίσει το Ευκλείδειο τρίγωνο με τις ίδιες κορυφές καθώς συρρικνώνεται σε μέγεθος.

Από αυτά προκύπτει ότι εάν ένα τρίγωνο διαιρεθεί σε μικρότερα τρίγωνα η υπεροχή του αρχικού τριγώνου ισούται με το άθροισμα των υπεροχών των μικρότερων τριγώνων. Μετά από αυτό αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου είναι ανάλογο με την υπεροχή του.

Το 1629 ο Girard, προεκτείνοντας τα «Σφαιρικά» του Μενέλαου, απέδειξε ότι για τα σφαιρικά τρίγωνα ABΓ ισχύει ο τύπος :

$A+B+\Gamma = \pi + (AB\Gamma)/R^2$ όπου R η ακτίνα της θεωρούμενης σφαίρας και το (ABΓ) συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου¹³.

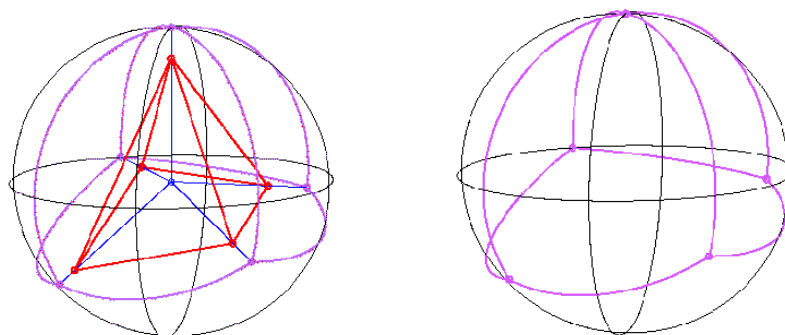
Δηλαδή το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 2 ορθές και δεν είναι το ίδιο για όλα τα τρίγωνα αφού μεγαλύτερο εμβαδό συνεπάγεται μεγαλύτερο άθροισμα γωνιών για την ίδια σφαίρα. Επίσης, εάν το R τείνει στο άπειρο τότε το εμβαδό του τριγώνου είναι π , δηλαδή η Ευκλείδεια Γεωμετρία θεωρείται σαν η οριακή περίπτωση της Σφαιρικής.

Επειδή το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών σε τρίγωνο είναι $> \pi$ θα πρέπει το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών να είναι $< 2\pi$ αφού το

¹³ Elwyn H. Davis [14; Σελ.150-153]

άθροισμα των εσωτερικών και εξωτερικών γωνιών σε ένα πολύγωνο είναι πV , όπου V είναι ο αριθμός των κορυφών του πολυγώνου.

Τέλος, μπορούμε να χαρτογραφήσουμε ένα πολύεδρο στη σφαίρα χρησιμοποιώντας **κεντρική προβολή**, δηλαδή κάθε σημείο του πολυέδρου το ενώνουμε με το κέντρο και προεκτείνουμε αυτή την γραμμή μέχρι να φτάσει στην σφαίρα. Παίρνουμε το σημείο τομής της γραμμής αυτής με την σφαίρα, αυτό θα είναι η καινούργια κορυφή. Τώρα η ακμή του πολυέδρου είναι ένα τμήμα μιας ευθείας. Αυτή η ευθεία μαζί με το κέντρο ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο. Το ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο σε καθένα σημείο της ακμής κείται εξ' ολοκλήρου σε αυτό το επίπεδο και το επίπεδο τέμνει την σφαίρα σε ένα μέγιστο κύκλο. Οπότε η εικόνα μιας ακμής είναι ένα τόξο μέγιστου κύκλου και κάθε όψη του πολυέδρου χαρτογραφείται σε ένα σφαιρικό πολύγωνο και το πολύεδρο σε ένα **σφαιρικό πολύεδρο**, το οποίο είναι μία καμπυλώδης εικόνα του αρχικού.



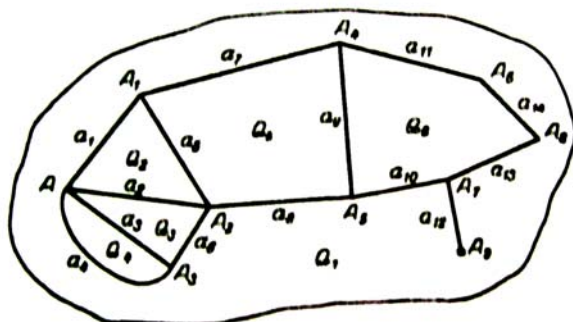
Το αρχικό πολύεδρο είναι αυτό στη μέση, οι ευθείες γραμμές δείχνουν πως οι κορυφές χαρτογραφούνται στη σφαίρα και το σχήμα στην δεύτερη σφαίρα είναι η εικόνα του πολυέδρου, το σφαιρικό πολύεδρο.

2.2 Δίχτυα – Θεώρημα Euler

Ορισμός 13¹⁴

Ορίζουμε **δίχτυο** (net) πάνω στην επιφάνεια μία πεπερασμένη ομάδα από σημεία, κόμπους, γραμμές και περιοχές όπου κάθε ευθεία του διχτύου συνδέει τους κόμπους του.

¹⁴ [12; Σελ. 53]



Παράδειγμα

Οι γραμμές $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ είναι οι γραμμές του διχτύου, τα σημεία $A_1, A_2, \dots, A_8$ είναι οι κόμβοι του διχτύου και $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ είναι οι περιοχές του διχτύου. Οι κόμβοι κείτονται στα άκρα των γραμμών. Δύο γραμμές μπορούν να έχουν ένα κοινό σημείο, μόνο στα άκρα τους.

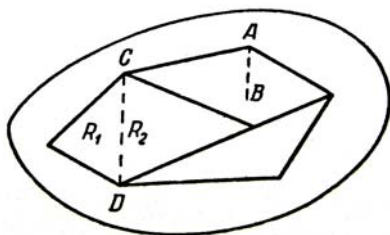
Ορισμός 14

Ένα **δίχτυο** καλείται **συνδεδεμένο** (connected) εάν μπορούμε να πηγαίνουμε από οποιοδήποτε κόμβο του σε ένα άλλο ενώ παραμένουμε πάνω στις γραμμές του διχτύου.

Διαφορετικά λέγεται **ασύνδετο δίχτυο**.

Υπάρχουν δύο λειτουργίες οι οποίες μετασχηματίζουν συνδεδεμένα δίχτυα σε πιο πολύπλοκα συνδεδεμένα δίχτυα. Αυτές τις λειτουργίες τις καλούμε προσαυξήσεις 1^{ου} και 2^{ου} είδους.

Προσαύξηση 1^{ου} είδους έχουμε όταν από ένα κόμβο A ενός διχτύου K φέρουμε καινούργια γραμμή AB , όπου το δεύτερο άκρο B αυτής της γραμμής δεν ανήκει στο δίχτυο, χωρίς αυτή να έχει άλλα κοινά σημεία με τις άλλες ευθείες του διχτύου εκτός από τα άκρα. Έτσι παίρνουμε ένα καινούργιο συνδεδεμένο δίχτυο K' .



Προσαύξηση 2^{ου} είδους έχουμε όταν συνδέουμε δύο σημεία C και D του διχτύου K με μία γραμμή CD η οποία δεν θα έχει άλλα κοινά σημεία με τις άλλες γραμμές του διχτύου εκτός από τα άκρα. Οπότε παίρνουμε ένα άλλο συνδεδεμένο δίχτυο K' το οποίο έχει μία παραπάνω γραμμή και μία παραπάνω περιοχή από το K .

Καταλήξαμε ότι για οποιοδήποτε συνδεδεμένο δίχτυο K , πάνω σε μία κυρτή επιφάνεια, προκύπτει από ένα πρωτόγονο δίχτυο με την βοήθεια επιτυχών προσαυξήσεων 1^{ου} και 2^{ου} είδους.

Τώρα θα αποδείξουμε το σημαντικό θεώρημα του Euler έτσι όπως το παραθέτει ο Lyusternik¹⁵.

Θεώρημα Euler

Για οποιοδήποτε συνδεδεμένο δίκτυο K πάνω σε κυρτή επιφάνεια που αποτελείται από m κόμπους, n περιοχές και l γραμμές ισχύει $m + n - l = 2$.

Για οποιοδήποτε ασύνδετο δίκτυο πάνω σε μία κυρτή επιφάνεια που αποτελείται από m κόμπους, n περιοχές, l γραμμές και s συνδεδεμένα δίκτυα ισχύει $m + n - l = s + 1$ (1)

Η ποσότητα $\chi = m + n - l$ καλείται **χαρακτηριστική Euler**.

απόδειξη

I) Εάν έχουμε συνδεδεμένο δίκτυο :

Για το πρωτόγονο δίκτυο K_0 , το οποίο αποτελείται από μία μοναδική απομονωμένη κορυφή, η χαρακτηριστική Euler είναι 2 αφού υπάρχει μόνο μία κορυφή και μία περιοχή. Οπότε, έχουμε $m + n - l = 1 - 0 + 1 = 2$.

Έστω ότι το δίκτυο K λαμβάνεται από το K_0 με προσαύξηση 1^{ου} είδους. Εάν για το δίκτυο K_0 ο αριθμός των κόμπων, των περιοχών και των γραμμών είναι ίσος με m , n , l , αντίστοιχα, τότε για το δίκτυο K είναι αντιστοίχως $m+1$, n , $l+1$. Οπότε η χαρακτηριστική του Euler είναι η ίδια και για τα δύο δίκτυα.

Έστω ότι το δίκτυο K λαμβάνεται από το K_0 με προσαύξηση 2^{ου} είδους. Εάν για το δίκτυο K_0 ο αριθμός των κόμπων, των περιοχών και των γραμμών είναι ίσος με m , n , l , αντίστοιχα, τότε για το δίκτυο K είναι αντιστοίχως m , $n+1$, $l+1$. Οπότε η χαρακτηριστική του Euler είναι η ίδια και για τα δύο δίκτυα.

Οπότε καταλήξαμε ότι προσαυξήσεις 1^{ου} και 2^{ου} είδους δεν αλλάζουν την χαρακτηριστική του Euler για ένα δίκτυο πάνω σε μία κυρτή επιφάνεια και ισούται με 2.

II) Εάν έχουμε ασύνδετο δίκτυο :

Έστω το δίκτυο K που αποτελείται από s συνδεδεμένα δίκτυα $K_1, K_2, \dots, K_s$. Διαλέγουμε σε καθένα ένα κόμπος $A_1, A_2, \dots, A_s$. Αυτά τα s σημεία διαμορφώνουν ένα δίκτυο K_0 πάνω στην επιφάνεια S για το οποίο $m=s$ (s =κόμποι), $n=1$ (μία περιοχή, ολόκληρη την επιφάνεια) και $l=0$ (καμία γραμμή). Η χαρακτηριστική του Euler γίνεται $m+n-l=s+1-0=s+1$. Ακριβώς όπως στην περίπτωση του συνδεδεμένου δικτύου, αποδεικνύεται ότι το K προκύπτει από το K_0 με επιτυχείς προσαυξήσεις 1^{ου} και 2^{ου} είδους, οι οποίες δεν αλλάζουν την χαρακτηριστική του Euler. Αυτό σημαίνει ότι οι χαρακτηριστικές των K και K_0 είναι ίδιες και είναι $s+1$.

¹⁵ [12; Σελ. 55-59]

Παρατήρηση

Κατά τον Max Zacharias το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε πρώτα από τον R. Baltzer το 1861. Ο Euler το ανακάλυψε εκ νέου το 1752 πρώτα με την επαγωγή και το δημοσίευσε χωρίς απόδειξη, την οποία όμως την βρήκε αμέσως μετά¹⁶.

Παρατήρηση

Εάν στην επιφάνεια μας έχουμε Η ‘τρύπες’ τότε η χαρακτηριστική του Euler μετασχηματίζεται σε $\chi = 2 - 2H$.

Παρατήρηση

Καλούμε **περιοχή (region)** ενός διχτύου με κ πλευρές εάν το όριο του αποτελείται από κ γραμμές του διχτύου.

Δηλώνουμε με n_k τον αριθμό των κ-πλευρών περιοχών του διχτύου. Τότε εάν n είναι ο ολικός αριθμός των περιοχών του διχτύου και l ο αριθμός των γραμμών ισχύει : $n = n_2 + n_3 + \dots + n_k$ (2) και $2l = 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k$ (3)

Από την (1) επειδή $s \geq 1$ έχουμε $m + n - 1 \geq 2$ ή $m - 2 \geq 1 - n$ (4)

Πολλ/ζοντας με 4 έχουμε $4m - 8 \geq 4l - 4n = 2(2l) - 4n$ (5)

Από (2), (3), (5) προκύπτει ότι

$$4m - 8 \geq 2(2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k) - 4(n_2 + n_3 + \dots + n_k) \Rightarrow$$

$$4m - 8 \geq 2n_3 + 4n_4 + 6n_5 + 8n_6 + \dots + (2k-4)n_k \quad (6)$$

Εφαρμογή

Εάν περιοριστούμε σε δίχτυα όπου από κάθε κόμπο να διέρχονται τουλάχιστον δύο γραμμές και κάθε περιοχή να οριοθετείται από τουλάχιστον δύο γραμμές τότε έχουμε τα δίχτυα στην επιφάνεια ενός πολυγώνου. Τότε ισχύει ανάλογα σε πολύεδρα ο **τύπος του Euler** $v - e + f = 2$, όπου v = ο συνολικός αριθμός των κορυφών, e = ο συνολικός αριθμός των ακμών και f = ο συνολικός αριθμός των εδρών. Όμοια, η ποσότητα $\chi = v - e + f$ καλείται χαρακτηριστική Euler. Με βάση αυτόν τον τύπο ο Euler παρατήρησε ότι $2E \geq 3F$ και $2E \geq 3V$.

Παρατήρηση

Σαν μία συνέπεια του τύπου, ο Euler γνωστοποίησε στον Goldbach ότι δεν υπάρχει πολύεδρο με 7 ακμές γιατί εάν υπήρχε θα είχε $E=7$. Οπότε από την $2E \geq 3F$ παίρνουμε $3F \leq 14$. Μιας και το F παριστάνει τον αριθμό των όψεων πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός και μεγαλύτερος από 3. Δηλαδή τελικά $F=4$. Τώρα, από την $2E \geq 3V$ παίρνουμε $3V \leq 14$ δηλαδή $V=4$. Αντικαθιστώντας τα E, F, V στον τύπο Euler καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $4 - 7 + 4 \neq 2$.

¹⁶ [17; Σελ. 269]

Παρόμοια, σε σχέση με τις τιμές των E , F , V για να υπάρχουν τα αντίστοιχα πολύεδρα προέκυψαν κάποιοι περιορισμοί. Αυτοί είναι οι εξής : $E \geq 6$ & $E \neq 7$, $F \geq 4$, $V \geq 4$ ¹⁷.

2.3 Κυρτά πολύεδρα – Θεώρημα Cauchy

Η απόδειξη της φόρμουλας του Euler, η οποία δεν στηρίζεται σε μετρικές σχέσεις αλλά σε επιχειρήματα σχετικά με τον τρόπο όπου τα συστατικά μέρη συνδυάζονται μεταξύ τους, δόθηκε το 1813 από τον Cauchy. Η ιδέα του ήταν να διαλέξει μία όψη ενός πολυέδρου και τότε να μεταφέρει τις εναπομείναντες όψεις έτσι ώστε να δημιουργήσει ένα ψηφιδωτό από πολύγωνα μέσα στην επιλεγμένη όψη. Δηλαδή, ο Cauchy πραγματικά απέδειξε ότι για οποιοδήποτε επίπεδο ψηφιδωτό πολυγώνων ισχύει $V+F = E+1$ ¹⁸.

Γνωρίζουμε ότι στα πολύεδρα μπορούμε να κάνουμε πολλούς μετασχηματισμούς, όπως να μετασχηματίσουμε ένα κυρτό πολύγωνο σε ένα άλλο κυρτό πολύγωνο με τέτοιο τρόπο ώστε τα μήκη των πλευρών να παραμένουν αμετάβλητα και να αλλάζουν οι γωνίες.

Παράδειγμα

Ένα τετράγωνο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ρόμβο όπου οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος και οι γωνίες αλλάζουν σε 2 οξείες και 2 αμβλείες.

Το ερώτημα που μας δημιουργείται είναι εάν είναι δυνατόν να αλλάξουμε τις διέδρες γωνίες ενός πολυέδρου χωρίς να αλλάξουν οι όψεις του.

Ο γνωστός γάλλος μαθηματικός Cauchy (1789-1857) έδωσε μία θετική απάντηση σε αυτή την ερώτηση. Συγκεκριμένα σε μία εργασία που εκδόθηκε το 1813 απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα¹⁹ :

Θεώρημα Cauchy

Δύο κυρτά πολύεδρα με αντίστοιχα ίσες συμπτώσιμες (congruent) και παρόμοια ευρισκόμενες όψεις έχουν ίσες διέδρες γωνίες ανάμεσα στις αντίστοιχες όψεις τους.

¹⁷ [6; Σελ. 193-194]

¹⁸ [6; Σελ. 200-201]

¹⁹ [12; Σελ. 60-67]

Το θεώρημα του Cauchy μπορεί επίσης να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο : Δύο κυρτά πολύεδρα με αντίστοιχα ίσες και παρόμοια ευρισκόμενες όψεις είναι είτε συμπτώσιμα είτε συμμετρικά.

Πρώτα από όλα παρατηρούμε ότι αυτό το θεώρημα παύει να είναι έγκυρο εάν δεν δώσουμε σημασία στην αναγκαιότητα της κυρτότητας. Για π.χ. θεωρούμε τα εξάεδρα Q και Q_1 (σχ.86)

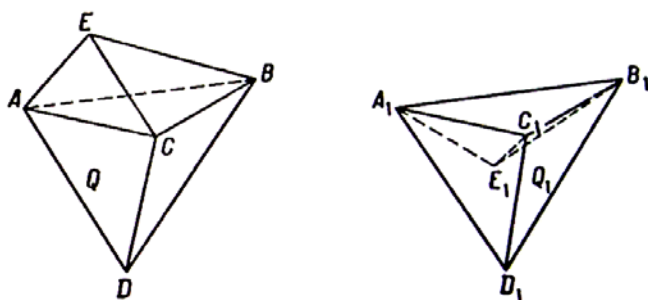
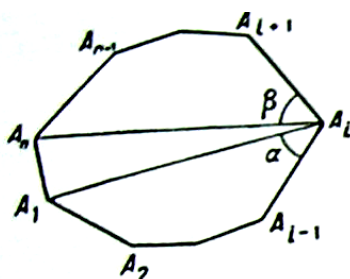


FIG. 86

Το κυρτό εξάεδρο Q αποτελείται από δύο τετράεδρα $ABCD$ και $ABCE$ τα οποία εφάπτονται κατά μήκος της κοινής τους όψης ABC . Το μη κυρτό εξάεδρο Q_1 σχηματίζεται από το τετράεδρο $A_1B_1C_1D_1$ συμπτώσιμο με $ABCD$ και από το 'κρυμμένο' τετράεδρο $A_1B_1C_1E_1$ συμμετρικό με το $ABCE$. Και τα 6 ζευγάρια των αντίστοιχα όψεων των πολυέδρων είναι συμπτώσιμα αλλά φαίνεται καθαρά ότι οι διέδρες γωνίες κατά μήκος των ακμών AB και A_1B_1 δεν είναι ίσες.

Για την απόδειξη του θεωρήματος Cauchy θα χρησιμοποιήσουμε 3 λήμματα. Στο 1^ο λήμμα υπάρχει μία ανακρίβεια η οποία αντιλήφθηκε και διορθώθηκε από τον Steinitz.

Λήμμα 1



Έστω ένα κυρτό πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_n$ μετασχηματισμένο σε ένα άλλο κυρτό πολύγωνο $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ με τέτοιο τρόπο ώστε τα μήκη των πλευρών να μην αλλάζουν, εκτός από μία πλευρά. Εάν κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό οι γωνίες των κορυφών $A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ είτε όλες αυξάνονται ή ένα μέρος των γωνιών αυτών αυξάνεται και οι υπόλοιπες μένουν αμετάβλητες τότε το μήκος της πλευράς A_nA_1 αυξάνεται. Αντίστοιχα, εάν όλες οι γωνίες των κορυφών $A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ μειώνονται

ή εάν μερικές μειώνονται και οι υπόλοιπες μένουν αμετάβλητες τότε το μήκος της πλευράς $A_n A_1$ μειώνεται.

απόδειξη

I) Το λήμμα είναι προφανές για τρίγωνα αφού εάν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι πλευρές AB και $B\Gamma$ παραμένουν αμετάβλητες αλλά η γωνία B αυξάνεται τότε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ αυξάνεται. Αντίστοιχα μειώνοντας την γωνία B κρατώντας τις πλευρές AB και $B\Gamma$ αμετάβλητες έχουμε την μείωση της πλευράς $A\Gamma$.

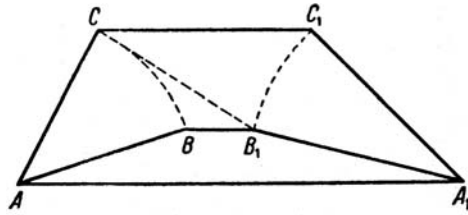
II) Έστω τώρα ότι έχουμε το πολύγωνο $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$.

*) Υποθέτουμε ότι τα μήκη όλων των πλευρών του εκτός του $A_n A_1$ παραμένουν αμετάβλητα και μόνο μία από τις γωνίες $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ αυξάνεται, έστω η γωνία $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ στην κορυφή A_i . Ενώνουμε την κορυφή A_i με τις κορυφές A_1, A_n . Στις πολυγωνικές γραμμές $A_1 A_2 \dots A_i$ και $A_i A_{i+1} \dots A_n$ ούτε τα μήκη των πλευρών ούτε οι γωνίες αλλάζουν. Άρα τα μήκη των τμημάτων $A_1 A_i$ και $A_i A_n$ και οι γωνίες $\alpha = A_1 A_i A_{i-1}$, $\beta = A_{i+1} A_i A_n$ δεν αλλάζουν. Αλλά η γωνία $A_1 A_i A_n$ αυξάνεται παράλληλα με την γωνία $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ αφού τα α, β μένουν αμετάβλητα και γωνία $A_1 A_i A_n = \text{γωνία } A_{i-1} A_i A_{i+1} - \alpha - \beta$. Στο τρίγωνο $A_1 A_i A_n$ τα μήκη των πλευρών $A_1 A_i, A_i A_n$ δεν αλλάζουν αλλά η γωνία στην κορυφή A_i αυξάνεται οπότε το μήκος της πλευράς $A_1 A_n$ επίσης θα αυξάνεται.

**) Υποθέτουμε τώρα ότι μερικές από τις γωνίες $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ του πολυγώνου αυξάνονται, έστω $A_i, A_k, \dots$ και άλλες που μένουν αμετάβλητες. Στην αρχή αυξάνουμε την γωνία A_i αφήνοντας όλες τις άλλες αμετάβλητες, οπότε από την *) περίπτωση θα αυξάνεται και η πλευρά $A_1 A_n$. Μετά αλλάζοντας την γωνία A_k , αφήνοντας τις υπόλοιπες αμετάβλητες, πάλι η πλευρά $A_1 A_n$ αυξάνεται. Γενικά, εάν όλες ή μέρος των γωνιών αυξάνονται, ενώ οι άλλες παραμένουν αμετάβλητες, τότε η πλευρά $A_1 A_n$ αυξάνεται. Αντίστοιχα εάν όλες οι γωνίες ή ένα μέρος από αυτές μειώνονται η πλευρά $A_1 A_n$ μειώνεται.

Παρατήρηση

Είδαμε ότι για την απόδειξη του λήμματος 1 χρησιμοποιήσαμε ότι εάν όλες οι γωνίες διαμορφωμένες από τις $n-1$ πλευρές αμετάβλητου μήκους αυξάνονται (ή εάν μέρος αυτών αυξάνεται και μέρος παραμένει αμετάβλητο) τότε το μήκος της n -ιοστής πλευράς αυξάνεται. Όμως το 1930 ο Ernst Steinitz παρατήρησε ότι με το να αυξάνουμε μία γωνία σε ένα κυρτό n -γωνο (έχοντας $n-1$ αμετάβλητες πλευρές) φτάνουμε σε ένα μη κυρτό πολύγωνο και στα μη κυρτά πολύγωνα αυξάνοντας τις γωνίες που διαμορφώνονται από $n-1$ αμετάβλητες πλευρές δεν απαιτείται η αύξηση της n -ιοστής πλευράς. Αυτό προκύπτει από το εξής παράδειγμα :



Στο σχήμα υπάρχουν 2 τραπέζια ABB_1A_1 και ACC_1A_1 με κοινή πλευρά την AA_1 και ίσες πλευρές $AB=AC$, $A_1B_1=A_1C_1$. Με σκοπό να λάβουμε τραπέζιο ACC_1A_1 από τραπέζιο ABB_1A_1 χωρίς να αλλάξουμε τα μήκη των 3 πλευρών AA_1 , AB και A_1B_1 είναι αναγκαίο να αυξήσουμε τις γωνίες BAA_1 (σε CAA_1) και B_1A_1A (σε C_1A_1A). Αλλά εάν στην αρχή αυξήσουμε την γωνία BAA_1 σε CAA_1 κρατώντας στερεωμένα την γωνία B_1A_1A και τα μήκη των 3 πλευρών B_1A_1 , AA_1 και AB τότε το τραπέζιο ABB_1A_1 μετασχηματίζεται σε ένα μη κυρτό τετράπλευρο CAA_1B και μόνο αυξάνοντας την δεύτερη γωνία B_1A_1A γίνεται ένα κυρτό σχήμα, τραπέζιο CAA_1C_1 .

Η απόδειξη που έδωσε ο ίδιος ο Steinitz είναι αρκετά μακροσκελής²⁰ και έχει παρακινήσει άλλους στο να βρούν μια άλλη απόδειξη μικρότερη σε μήκος. Αυτή που θα δούμε εμείς οφείλεται στον Issai J. Schoenberg²¹.

Λήμμα Schoenberg

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ και $B_1, B_2, \dots, B_n$ να είναι οι κορυφές δύο κυρτών n -πλευρών πολυγώνων των οποίων οι πλευρές είναι τέτοιες ώστε $A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3, \dots, A_{n-1}A_n=B_{n-1}B_n$ και οι γωνίες τους είναι τέτοιες ώστε $A_2 \leq B_2$, $A_3 \leq B_3, \dots, A_{n-1} \leq B_{n-1}$ όπου τουλάχιστον μία ανισότητα είναι χωρίς το ίσον. Τότε $A_1A_n < B_1B_n$.

απόδειξη

Η απόδειξη χρησιμοποιεί επαγωγή στον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου. Όπως ο Cauchy παρατήρησε ότι το λήμμα είναι αληθές για τρίγωνα ($n=3$) τώρα υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για όλα τα πολύγωνα με λιγότερες από n πλευρές και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για n -γωνα.

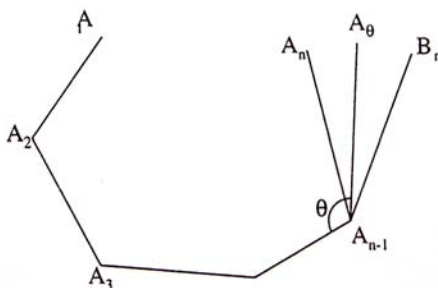
Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον μία από τις γωνιακές σχέσεις είναι μια ισότητα, έστω $A_i=B_i$. Τα τρίγωνα $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ είναι συμπτώσιμα και έτσι οι πλευρές $A_{i-1}A_{i+1}$ και $B_{i-1}B_{i+1}$ είναι ίσες. Οπότε τα πολύγωνα με κορυφές $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$ και $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_n$ είναι και τα δύο κυρτά και ικανοποιούν τις υποθέσεις του λήμματος. Αυτά έχουν $(n-1)$ πλευρές και έτσι από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $A_1A_n < B_1B_n$.

²⁰ [12; Σελ. 66-73]

²¹ [6; Σελ. 235-237]

Βήμα 2: Υποθέτουμε τώρα ότι οι γωνιακές ανισότητες δεν έχουν ίσον και έτσι $A_i < B_i$ για όλα τα $i=2,3,\dots,n-1$. Έστω θ να είναι η γωνία ανάμεσα στις γωνίες A_{n-1} και B_{n-1} . Εξετάζουμε το πολύγωνο του οποίου οι κορυφές είναι $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_\theta$ όπου η γωνία $A_{n-2}A_{n-1}A_\theta = \theta$ και η πλευρά $A_{n-1}A_\theta = A_{n-1}A_n$ από το παρακάτω σχήμα. Ενώ αυτό το πολύγωνο παραμένει κυρτό από το βήμα 1 έχουμε $A_1A_n < A_1A_\theta$. Εάν το πολύγωνο $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_\theta$ είναι κυρτό για όλες τις τιμές του θ τότε όταν $\theta = B_{n-1}$ έχει μόνο μία γωνία κοινή με το πολύγωνο $B_1B_2, \dots, B_n$. Εφαρμόζοντας ξανά το βήμα 1 βλέπουμε ότι $A_1A_\theta < B_1B_n$. Έτσι, $A_1A_n < A_1A_\theta < B_1B_n$.

Βήμα 3 : Έχουμε ακόμα να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση όταν το πολύγωνο $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_\theta$ δεν είναι κυρτό για όλες τις τιμές του θ



ανάμεσα στις γωνίες A_{n-1} και B_{n-1} . Έστω, θ' να είναι η τελευταία τιμή της θ για την οποία το πολύγωνο είναι κυρτό. Από το βήμα 1 έχουμε $A_1A_n < A_1A_{\theta'}$. Η γωνία στην κορυφή A_1 είναι τώρα 180° και $A_1A_{\theta'} = A_2A_{\theta'} - A_2A_1$.

Τα δύο πολύγωνα με κορυφές $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_{\theta'}$ και $B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ είναι κυρτά και τα δύο έχουν $(n-1)$ πλευρές. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση σε αυτά τα πολύγωνα παίρνουμε $A_2A_{\theta'} < B_2B_n$. Επειδή το $B_1B_2B_n$ είναι τρίγωνο από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $B_1B_2 + B_1B_n \geq B_2B_n$.

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα παίρνουμε $A_1A_n < A_1A_{\theta'} = A_2A_{\theta'} - A_2A_1 < B_2B_n - B_1B_2 \leq B_1B_n$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πόρισμα 1

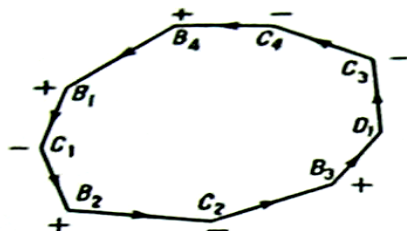
Εάν μετασχηματίσουμε ένα κυρτό πολύγωνο σε ένα άλλο κυρτό πολύγωνο μην αλλάζοντας τα μήκη των πλευρών του και εάν κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό μία γωνία αυξάνεται τότε αναγκαίως κάποια άλλη γωνία στο πολύγωνο πρέπει να μειώνεται.

Παρατήρηση

Από το 1^ο λήμμα, που χρησιμοποιείται ότι αύξηση της γωνίας σε τρίγωνα συνεπάγεται αύξηση της πλευράς, έχουμε ότι και για επίπεδα και σφαιρικά τρίγωνα οι μεγαλύτερες πλευρές κείτονται απέναντι από τις μεγαλύτερες γωνίες.

Για το 2^ο λήμμα καθορίζουμε κάθε κορυφή του κυρτού πολυγώνου με ένα σύμβολο $+$ ή $-$. Σε μία διαδοχική περιφέρεια όλων των κορυφών

πρέπει μερικές φορές να περάσουμε από μία κορυφή μαρκαρισμένη με $+$ σε κορυφή με $-$ ή αντιστρόφως. Αυτό το καλούμε **μετάβαση συμβόλου**. Πηγαίνοντας διαδοχικά τριγύρω από όλες τις κορυφές και επιστρέφοντας στην αρχική κορυφή παρατηρούμε τον ίδιο αριθμό μεταβάσεων από το $+$ στο $-$ όπως και από το $-$ στο $+$. Έτσι ο αριθμός των μεταβάσεων που συμβαίνει πάνω σε μία ολόκληρη περιφέρεια θα είναι ένας ζυγός αριθμός.



Π.χ.

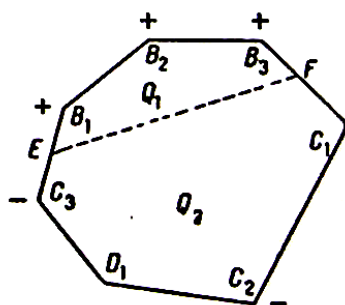
υπάρχουν 6 μεταβάσεις.

Λήμμα 2

Έστω το κυρτό πολύγωνο στο οποίο δεν αλλάζουν τα μήκη των πλευρών του. Μαρκάρουμε με σύμβολο $+$ εκείνες τις κορυφές στις οποίες οι γωνίες αυξάνονται και με σύμβολο $-$ εκείνες τις κορυφές στις οποίες οι γωνίες μειώνονται (τις αμετάβλητες γωνίες τις αφήνουμε αμαρκάριστες). Πάνω στην διαδοχική περιφέρεια των όλων μαρκαρισμένων κορυφών δεν θα έχουμε λιγότερες από 2 μεταβάσεις από το $-$ στο $+$ (σε όλο, θα παρατηρούνται όχι λιγότερο από 4 μεταβάσεις).

απόδειξη

Εάν υπάρχει μία κορυφή μαρκαρισμένη με σύμβολο $+$ τότε από το πόρισμα 1 υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή μαρκαρισμένη με σύμβολο $-$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μόνο μία μετάβαση από το $+$ στο $-$ και μία μετάβαση από το $-$ στο $+$. Τότε όλες οι κορυφές θα χωρίζονται σε 2 ομάδες όπου κάθε ομάδα έχει κορυφές με το ίδιο σύμβολο και μερικές χωρίς σύμβολα. Για π.χ. στο σχήμα



θα ήταν C_1, C_2, D_1, C_3 και B_1, B_2, B_3 .

Διαλέγουμε ένα σημείο E πάνω στο όριο του πολυγώνου τοποθετημένο ανάμεσα σε 2 κορυφές με διαφορετικά σύμβολα (για π.χ. C_1, B_3) και ένα σημείο F τοποθετημένο σε μία άλλη πλευρά ανάμεσα στις κορυφές με

διαφορετικά σύμβολα. Το τμήμα EF χωρίζει το κυρτό πολύγωνο μας σε 2 κυρτά πολύγωνα : πολύγωνο Q_1 το οποίο έχει μόνο κορυφές με σύμβολο + και πολύγωνο Q_2 κορυφές με σύμβολο $-$. Εφαρμόζοντας το λήμμα 1 στο πολύγωνο Q_1 έχουμε ότι το μήκος της πλευράς EF πρέπει να αυξάνεται. Εφαρμόζοντας το λήμμα 1 στο Q_2 πρέπει το μήκος της πλευράς EF να μειώνεται. Οπότε οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Έτσι, θα έχουμε τουλάχιστον 2 μεταβάσεις.

Πόρισμα 2

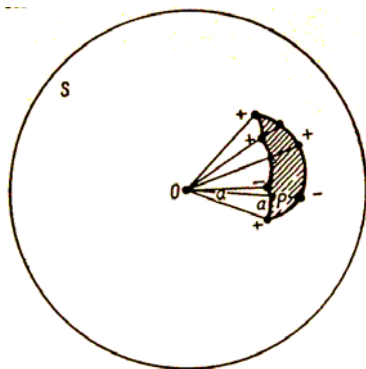
Εάν ένα κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται έτσι ώστε οι πλευρές του να μην αλλάζουν τότε είτε όλες οι γωνίες παραμένουν αμετάβλητες είτε τουλάχιστον 4 γωνίες αλλάζουν (τουλάχιστον 2 αυξήθηκαν και τουλάχιστον 2 μειώθηκαν).

Λήμμα 3

Έστω ότι μία κυρτή στερεά γωνία μετασχηματίζεται σε μία άλλη κυρτή στερεά γωνία έτσι ώστε οι γωνίες των όψεων της στην κορυφή O να μην αλλάζουν (μόνο οι διέδρες γωνίες αλλάζουν). Μαρκάρουμε με σύμβολο + εκείνες τις αρχικές ακμές που διέρχονται από το O για τις οποίες οι διέδρες γωνίες αυξάνονται και με σύμβολο $-$ εκείνες τις έδρες για τις οποίες οι διέδρες γωνίες μειώνονται. Εάν κάτω από τον μετασχηματισμό μας μία από τις διέδρες γωνίες αλλάξει τότε πάνω στη περιφέρεια, γύρω από την κορυφή O , δεν θα έχουμε λιγότερες από 2 μεταβάσεις από + στο $-$ και όχι λιγότερες από 2 μεταβάσεις από $-$ στο +.

απόδειξη

Έστω μία σφαίρα S με κέντρο O . Στη τομή της στερεάς γωνίας T με την σφαίρα λαμβάνουμε μερικά κυρτά σφαιρικά πολύγωνα P . Κάθε μία από τις όψεις K της γωνίας T στην τομή με το S δίνει μία πλευρά a αυτού του σφαιρικού πολυγώνου όπου το μήκος της a καθορίζεται από τη γωνία α των όψεων στην κορυφή O .



Η διέδρη γωνία ανάμεσα σε 2 γειτονικές όψεις K και K_1 καθορίζει την γωνία ανάμεσα στις αντίστοιχες πλευρές a και a_1 του πολυγώνου P .

Κάτω από τον προτεινόμενο μετασχηματισμό το πολύγωνο P μεταβάλλεται από αλλαγές στην στερεά γωνία T με τέτοιο τρόπο ώστε το μήκος των πλευρών του P να μην αλλάζουν. Μόνο οι γωνίες ανάμεσα των πλευρών επιτρέπονται να αλλάξουν και αυτές οι γωνίες αυξάνονται ή μειώνονται μαζί με τις αντίστοιχες γωνίες της T . Εφαρμόζοντας το λήμμα 2 στα σφαιρικά κυρτά πολύγωνα αποδείξαμε το λήμμα 3.

Απόδειξη θεωρήματος Cauchy

Θεωρούμε 2 πολύεδρα Q και Q_1 με τις αντίστοιχες όψεις συμπτώσιμες και όμοια τοποθετημένες. Μαρκάρουμε μία ακμή του Q με σύμβολο $+$ εάν η διέδρη γωνία σ' αυτήν την ακμή του πολυέδρου Q είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη διέδρη γωνία του Q_1 και σε αντίθετη περίπτωση με ένα σύμβολο $-$ εάν η διέδρη γωνία από την δοθείσα ακμή του Q είναι λιγότερη από την αντίστοιχη διέδρη γωνία του Q_1 . Τις υπόλοιπες ακμές, για τις οποίες η διέδρη γωνία του Q είναι ίση με την αντίστοιχη διέδρη γωνία του Q_1 , τις αφήνουμε αμαρκάριστες.

*) Εάν δεν υπάρχει ούτε μία μαρκαρισμένη ακμή με σύμβολο $+$ ή $-$ τότε όλες οι διέδρες γωνίες του Q είναι ίσες με τις αντίστοιχες διέδρες γωνίες του Q_1 . Οπότε αποδείχθηκε το θεώρημα για αυτή την περίπτωση.

*) Εάν υπάρχουν ακμές μαρκαρισμένες με σύμβολα $+$ ή $-$ θα αποδείξουμε ότι κάτω από αυτή την υπόθεση φτάνουμε σε μία αντίφαση. Δίνεται μία κορυφή του Q από την οποία περνά μία ακμή μαρκαρισμένη με σύμβολο $+$ ή $-$. Από λήμμα 3 πρέπει να περνούν από αυτή την κορυφή τουλάχιστον 4 ακμές μαρκαρισμένες με σύμβολο $+$ ή $-$ έτσι ώστε πάνω στη συνεχή περιφέρεια αυτών των ακμών να μην βρούμε λιγότερες από 4 αλλαγές από $+$ στο $-$ και από $-$ στο $+$. Οι ακμές μαρκαρισμένες με σύμβολο $+$ ή $-$ διαμορφώνουν πάνω στην επιφάνεια του Q ένα δίκτυο K (δηλαδή κάθε περιοχή αυτού του δικτύου αποτελείται από μία ή περισσότερες όψεις του Q_1). Δηλώνουμε με $\alpha_3, \alpha_4, \dots$ τον αριθμό των 3-πλευρών, 4-πλευρών, ... περιοχών του K και με M τον αριθμό των ακμών που περιέχονται στο K οι οποίες είναι μαρκαρισμένες με σύμβολο $+$ ή $-$. Έξω από κάθε κόμμο του K περνούν όχι λιγότερες από 4 τέτοιες ακμές (δηλαδή 4 μεταβιβάσεις από $+$ στο $-$). Συνεπώς $M \geq 4m$ (1), όπου m είναι ο αριθμός των κόμπων στο δίκτυο K .

Παράλληλα, πάνω στην περιφέρεια της όψης κάθε περιοχής του δικτύου βρίσκουμε μόνο ένα άρτιο αριθμό από μεταβάσεις από $+$ στο $-$. Συνεπώς, πάνω στην περιφέρεια μιας κ -πλευράς όψης αυτός ο αριθμός δεν ξεπερνά το κ , εάν το κ είναι ζυγός αριθμός, και δεν ξεπερνά το $\kappa-1$, εάν το κ είναι περιττός. Δηλαδή πάνω σε μία 3-πλευρη όψη ο αριθμός των μεταβάσεων από $+$ στο $-$ (και αντιστρόφως) δεν ξεπερνά το 2, πάνω σε μία 4-πλευρη όψη ο αριθμός των μεταβάσεων δεν ξεπερνά το 4, σε

μία 5-πλευρη επίσης το 4, σε μία 6-πλευρη και 7-πλευρη όψη είναι το 6 κ.ο.κ.

Τώρα ο αριθμός των 3-πλευρων, 4-πλευρων ... περιοχών είναι ίσος αντιστοίχως με $a_3, a_4, \dots$ οπότε ο αριθμός M των μεταβάσεων από $+$ στο $-$ (και αντιστρόφως) γειτονικών ακμών δεν μπορεί να ξεπεράσει το

$$2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + 6a_7 + 8a_8 + 8a_9 + \dots \quad (2)$$

Δηλαδή από (1), (2) $4m \leq 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + 6a_7 + 8a_8 + \dots$ (3)

Όμως από παρατήρηση του θεωρήματος Euler [σχέση (6) παράγραφος 2.2] ισχύει ότι $4m - 8 \geq 2a_3 + 4a_4 + 6a_5 + 8a_6 + 10a_7 + 12a_8 + \dots$ (4)

Αφαιρώντας τις (3), (4) παίρνουμε

$$-8 \geq 2a_5 + 2a_6 + 4a_7 + 4a_8 + \dots$$

Η δεξιά πλευρά αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς οπότε $-8 \geq 0$ Άτοπο.

Παρατήρηση

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy ορίζεται ο προσανατολισμός της τριέδρης γωνίας και η ισότητα αυτών. Δηλαδή, ισχύει ότι δύο τριέδρες οι οποίες έχουν τις διέδρες γωνίες ίσες μία προς μία και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό είναι ίσες. Εάν δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό τότε είναι συμμετρικές.

Παρατήρηση

Λέμε ότι δύο επιφάνειες είναι ισομετρικές εάν είναι πιθανόν να αποδειχθεί μία τοπολογική σχέση μεταξύ αυτών κάτω από την οποία κάθε τμήμα της μιας επιφάνειας αντιστοιχεί σε ένα τμήμα ίσου μήκους της άλλης επιφάνειας. Προφανώς οι επιφάνειες των δύο πολυέδρων που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Cauchy είναι ισομετρικές. Το θεώρημα αποδεικνύει ότι αυτές είναι επίσης συμπτώσιμες ή συμμετρικές.

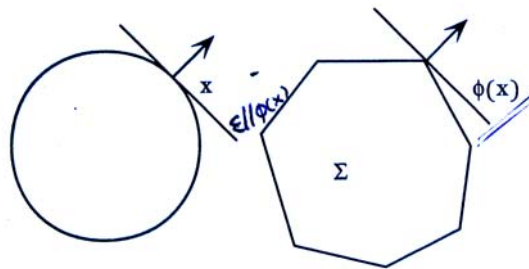
Μια σημαντική συμπληρωματική φόρμουλα του θεωρήματος του Cauchy δόθηκε από τον S. P. Olavianshchikov [12; Σελ. 74], ο οποίος απέδειξε ότι οποιαδήποτε κυρτή επιφάνεια η οποία είναι ισομετρική με την επιφάνεια ενός κυρτού πολυέδρου είναι συμμετρική με αυτή. Τον τελευταίο αιώνα πολλοί μαθηματικοί έχουν αποδείξει την συμπτωσιμότητα ή την συμμετρικότητα των κυρτών ισομετρικών επιφανειών με τη βοήθεια αυτών και άλλων υποθέσεων. Ιδιαίτερα, το 1949 ο μαθηματικός A. V. Pogorelov απέδειξε στην τελευταία και ολοκληρωμένη μορφή του θεωρήματος των ισομετρικών επιφανειών :

«Δύο αυθαίρετες ισομετρικές κυρτές επιφάνειες είναι είτε συμπτώσιμες είτε συμμετρικές».

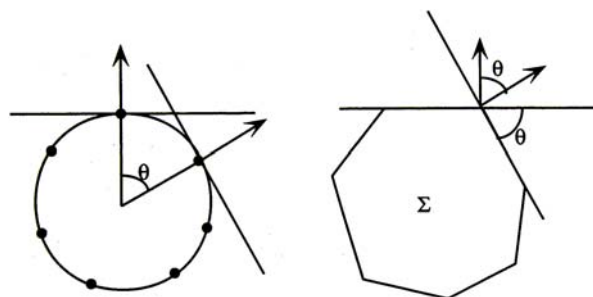
2.4 Στερεές γωνίες – Θεώρημα Descartes's

Με σκοπό να σχηματίσουμε μία κλειστή καμπύλη από ένα ευθύ κομμάτι σύρματος είναι αναγκαίο να το λυγίσουμε. Εάν λυγίσουμε το σύρμα σε μία πολυγωνική καμπύλη τότε το λύγισμα λαμβάνει χώρα μόνο στις γωνίες. Το σύνολο του λυγισμού είναι καλύτερα μετρήσιμο από τις εξωτερικές γωνίες παρά από τις εσωτερικές γωνίες, μιας και μία μικρή εξωτερική γωνία αντιστοιχεί σε μικρή αλλαγή στη κατεύθυνση. Εάν τις δηλώσουμε με $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$.

Τώρα σε κάθε σημείο πάνω στην μοναδιαία σφαίρα παίρνουμε την εφαπτομένη του και ζωγραφίζουμε ένα βέλος κάθετο στην εφαπτομένη με φορά μακριά από το κέντρο του κύκλου. Το διάνυσμα αυτό του βέλους θα το καλούμε **στοιχείο επαφής** του κύκλου (contact element). Εάν Σ είναι μία κυρτή κλειστή καμπύλη μπορούμε να πάρουμε ένα διάνυσμα παράλληλο με το στοιχείο επαφής του κύκλου. Σε αντιστοιχία με την εφαπτομένη του κύκλου έχουμε μία **γραμμή υποστήριξης** (support line) $\phi(x)$ όπου η καμπύλη να κείται στην μία πλευρά της $\phi(x)$. Ιδιαίτερα στην περίπτωση ενός πολυγώνου το διάνυσμα αυτό αγγίζει την καμπύλη μόνο στην κορυφή.



Παίρνοντας όλες τις γραμμές υποστήριξης σε μία κορυφή του Σ δύο από αυτές θα είναι εφαπτόμενες σε δύο γειτονικές πλευρές της κορυφής. Οι προεκτάσεις αυτών αντιστοιχούν σε ένα τόξο του κύκλου με γωνία θ ακριβώς ίση με την εξωτερική γωνία στην κορυφή του Σ ²².



²² [16; Σελ. 121-127]

Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε τον κύκλο σε τόξα, καθένα όσα και οι κορυφές του Σ. Κάθε τόξο έχει μία γωνία ίση με μία από τις εξωτερικές γωνίες. Έτσι, το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι ίσο με την ολόκληρη γωνία του κύκλου, η οποία είναι $360^\circ = 2\pi$.

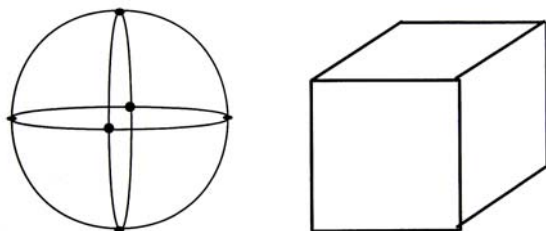
Θεώρημα

Στην μοναδιαία σφαίρα, το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός οποιουδήποτε πολυγώνου και το εμβαδό του πολυγώνου είναι πάντα ίσο με 2π .

Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, ορίζουμε το στοιχείο επαφής σε ένα κυρτό πολύεδρο, ένα **επίπεδο υποστήριξης** (support plane) σε ένα σημείο να είναι ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο και το πολύεδρο κείται εξ' ολοκλήρου στη μία πλευρά του επιπέδου του. Όπως πριν, το επίπεδο αγγίζει το πολύεδρο μόνο σε κορυφή του.

Παράδειγμα

Θεωρούμε έναν κύβο απλωμένο οριζόντια πάνω σε ένα τραπέζι. Ο βόρειος και ο νότιος πόλος της σφαίρας αντιστοιχούν στο πάνω και στο κάτω επίπεδο υποστήριξης του κύβου.



Υπάρχουν 4 ίσα σημεία χώρου πάνω στον ισημερινό, αντίστοιχα στα επίπεδα υποστήριξης, εφαιπτόμενα στις 4 πλευρικές όψεις του κύβου. Όλα τα εναπομείνοντα σημεία πάνω στον ισημερινό αντιστοιχούν στα επίπεδα υποστήριξης τα οποία αγγίζουν τον κύβο κατά μήκος μιας από τις κάθετες ακμές. Κάθε μέγιστο κυκλικό τόξο, που συνδέει ένα από τα 4 σημεία του ισημερινού σε έναν από τους πόλους, αντιστοιχεί στα επίπεδα υποστήριξης, τα οποία αγγίζουν τον κύβο κατά μήκος μιας από τις οριζόντιες ακμές. Αυτό διαιρεί την σφαίρα σε 8 συμπτώσιμα τρίγωνα καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε επίπεδα υποστήριξης τα οποία αγγίζουν μία από τις 8 γωνίες.

Ορισμός 15

Ορίζουμε **έλλειμα** σε μία κορυφή V ενός πολυέδρου να είναι η ποσότητα $(2\pi - \text{άθροισμα των γωνιών στη } V)$.

Καθένα από αυτά τα 8 σφαιρικά τρίγωνα έχει εμβαδό ίσο με το $1/8$ όλου του εμβαδού της σφαίρας, δηλαδή $4\pi/8 = \pi/2$. Αντίστοιχα, το έλλειμα σε

καθεμία από τις 8 κορυφές του κύβου είναι ίσο με $\pi/2$. Δηλαδή ικανοποιείται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα Descartes's

Εάν Σ είναι ένα οποιοδήποτε κυρτό πολύεδρο τότε το άθροισμα των ελλειμάτων σε όλες τις κορυφές του Σ είναι 4π .

απόδειξη

Θα το αποδείξουμε με την βοήθεια του τύπου του Euler. Παίρνουμε ένα κυρτό πολύεδρο Σ και διαιρούμε τις όψεις του σε τρίγωνα φέρνοντας τις διαγώνιες. Για παράδειγμα ο κύβος μπορεί να θεωρηθεί σαν να έχει 12 τριγωνικές όψεις, καθεμία ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Θεωρούμε με F να είναι ο αριθμός των τριγωνικών όψεων του Σ οπότε ο αριθμός των πλευρών των πολυγώνων είναι $3F$ και έτσι ο αριθμός των ακμών δίνεται από $E=3F/2$. Εάν V είναι ο αριθμός των κορυφών τότε το θεώρημα του Euler μας δίνει ότι $2V - 2E + 2F = 4 \Rightarrow 2V - F = 4$ (*)

Το άθροισμα X των ελλειμάτων των κορυφών δίνεται από το άθροισμα των ποσοτήτων $(2\pi - \text{γωνίες στο } V) = 2\pi V - (\text{το άθροισμα όλων των γωνιών από όλες τις κορυφές})$. Αυτό το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας τις γωνίες τρίγωνο – τρίγωνο και όχι κορυφή – κορυφή. Το άθροισμα που παίρνουμε είναι ακριβώς πF . Έτσι, $X = 2\pi V - \pi F = 4\pi$, από (*).

Η απόδειξη που ακολουθήσαμε είναι διπλής πορείας αφού εάν υποθέσουμε το θεώρημα Descartes's αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε κυρτό πολύεδρο ισχύει ο τύπος του Euler. Όμως ο Malkevich επισημάνει σ' ένα άρθρο του ότι αυτό οδηγεί σε μια λανθασμένη αντίληψη, δηλαδή ότι ο Descartes μπορούσε εύκολα να είχε ανακαλύψει τον τύπο Euler. Αλλά αυτό θα απαιτούσε από τον Descartes να σκεφτεί το πολύεδρο σαν ένα συνδυαστικό (combinatorial) αντικείμενο παρά σαν γεωμετρικό αντικείμενο, ένα σημαντικό πνευματικό άλμα για εκείνη την εποχή.

Παρατήρηση

Το θεώρημα αποδεικνύεται και με την βοήθεια του παραδείγματος :

Εάν έχουμε ένα κυρτό πολύεδρο Σ τότε διαιρούμε την μοναδιαία σφαίρα σε πολύγωνα, ένα σε κάθε κορυφή, όπου κάθε πολύγωνο αντιστοιχεί σε μία ομάδα επιπέδων υποστήριξης μιας κορυφής του Σ . Το εμβαδό κάθε πολυγώνου είναι ίσο με το έλλειμα των αντίστοιχων κορυφών. Το άθροισμα των εμβαδών είναι το εμβαδό της σφαίρας, το οποίο είναι 4π .

2.5 Καμπυλότητα – Θεώρημα Gauss-Bonnet

Το 1827 ο Gauss εισήγαγε την ιδέα ότι μια λεία επιφάνεια έχει μια εσωτερική γεωμετρία²³. Αυτή η γεωμετρία βασίζεται στο μέτρημα των μηκών των τόξων στην επιφάνεια και από το μήκος του τόξου κάποιες γεωμετρικές έννοιες, όπως γωνίες, εμβαδό, μπορούν να οριστούν. Έχοντας την έννοια του μήκους του τόξου καλεί την ομαλή καμπύλη που έχει το ελάχιστο μήκος από όλες τις ομαλές καμπύλες σαν γεωδαισιακή. Στο επίπεδο οι γεωδαισιακές είναι ευθεία τμήματα και πάνω στην σφαίρα είναι τόξα μέγιστων κύκλων.

Ορισμός 16²⁴

Μία **Ευκλείδεια πολυεδρική επιφάνεια** είναι μία πεπερασμένη συλλογή από πολύγωνα κολλημένα μεταξύ τους κατά μήκος των ακμών τους σύμφωνα με τους παρακάτω νόμους:

1. Κάθε πολύγωνο είναι συμπτώσιμο με ένα κυρτό πολύγωνο στο Ευκλείδειο επίπεδο.
2. Οποιαδήποτε δύο πολύγωνα που έχουν ένα κοινό σημείο συναντιούνται είτε στη κοινή τους κορυφή είτε κατά μήκος μία κοινής ακμής τους.
3. Έαν δύο πολύγωνα έχουν μία κοινή ακμή τότε η ακμή έχει το ίδιο μήκος σε κάθε πολύγωνο.
4. Κάθε ακμή του πολυγώνου είναι ακμή ενός άλλου ακριβώς ίδιου πολυγώνου.
5. Εάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι όλα τα πολύγωνα τα οποία μοιράζονται μία κορυφή V τότε μπορούμε να τα ξαναριθμήσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε τα α_i και α_{i+1} να μοιράζονται μία ακμή για $1 \leq i \leq n$ και τα α_1, α_n να μοιράζονται μία ακμή.

Παρατήρηση

Εάν ο 1^{ος} νόμος αντικατασταθεί από την δήλωση ότι κάθε πολύγωνο είναι συμπτώσιμο με ένα κυρτό πολύγωνο στο υπερβολικό επίπεδο (αντιστοίχως στη σφαίρα) τότε το αποτέλεσμα είναι μία υπερβολική (αντιστοίχως σφαιρική) πολυεδρική επιφάνεια.

Πολυεδρικό θεώρημα Gauss – Bonnet²⁵

Το άθροισμα των ελλειμάτων των κορυφών για οποιαδήποτε Ευκλείδεια πολυεδρική επιφάνεια είναι $2\pi\chi$ όπου χ = χαρακτηριστική του Euler.

²³ [6; Σελ. 215]

²⁴ [16; Σελ. 132-133]

²⁵ [16; Σελ. 137]

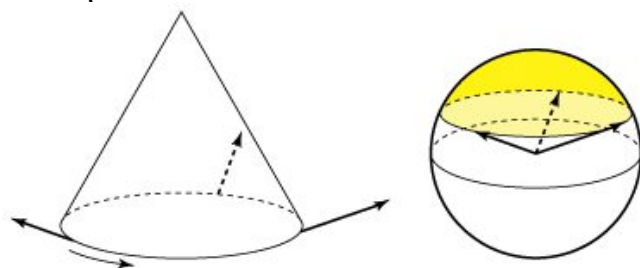
Επειδή η χαρακτηριστική του Euler της σφαίρας είναι 2, το θεώρημα μας δίνει ότι το άθροισμα των ελλειμμάτων των κορυφών για οποιαδήποτε πολυεδρική επιφάνεια είναι 4π , ότι και το Θεώρημα Descartes's.

Τρία από τα προβλήματα με τα οποία καταπιάστηκε ο Gauss μελετώντας τις επιφάνειες, έδωσαν το έναυσμα για τη διατύπωση γενικών θεωριών μεγάλης μαθηματικής και επιστημονικής σημασίας : η μέτρηση της καμπυλότητας, η θεωρία της σύμμορφης αναπαράστασης (ή απεικόνισης) και το εφαρμόσιμο των επιφανειών²⁶. Η μαθηματική επέκταση της οικείας παραστάσιμης καμπυλότητας από έναν χώρο δύο συντεταγμένων σ' έναν τεσσάρων συντεταγμένων υπήρξε επακόλουθο της εργασίας του Gauss πάνω στις καμπύλες επιφάνειες.

Τώρα θα δούμε το τι είναι η καμπυλότητα Gauss. Η καμπυλότητα Gauss είναι ένα μέτρο της κυρτότητας (curvedness) της επιφάνειας. Παίρνουμε μία επιφάνεια με σύνορο (όχι μία κλειστή επιφάνεια όπως η σφαίρα). Η επιφάνεια αυτή δεν πρέπει να έχει 'τρύπες' στο εσωτερικό της και το σύνορο της να είναι ομαλό (δηλαδή να μην έχει μυτερές γωνίες). Τώρα παίρνουμε ένα βέλος κάθετο στην επιφάνεια και αφήνουμε το βέλος να κινηθεί κατά μήκος του συνόρου της επιφάνειας, παραμένοντας συνέχεια κάθετο, μέχρι να φτάσει στο αρχικό του σημείο.

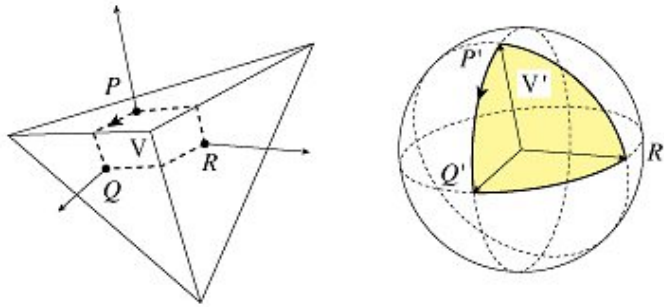
Στη συνέχεια παίρνουμε μία μοναδιαία σφαίρα (δηλαδή σφαίρα με ακτίνα 1) και ένα βέλος να δείχνει από το κέντρο του κύκλου στην επιφάνεια της σφαίρας. Ενώ το βέλος της αρχικής μας επιφάνειας κινείται γύρω από το σύνορο βάζουμε το βέλος της σφαίρας να μιμηθεί αυτή την κίνηση παραμένοντας κολλημένο στο κέντρο της σφαίρας. Έτσι το βέλος της σφαίρας θα περιγράψει το σύνορο της επιφάνειας σαν ένα μέρος της επιφάνειας της σφαίρας. Το εμβαδό της επιφάνειας αυτού του σφαιρικού τμήματος καλείται **καμπυλότητα Gauss** της αρχικής επιφάνειας.

Για παράδειγμα παίρνουμε ένα κώνο με το βέλος του να κινείται γύρω του και το αντίστοιχο βέλος στην σφαίρα χαράσσει την σχεδιασμένη επιφάνεια, της οποίας το εμβαδό παριστάνει την καμπυλότητα Gauss του κώνου.



²⁶ [3; Σελ. 426]

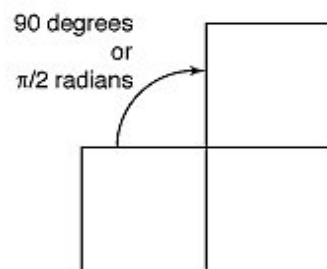
Έστω τώρα ότι δεν έχουμε ομαλό σύνορο. Παίρνουμε μία απλή 3-διάστατη πυραμίδα η οποία είναι ‘κούφια’ δηλαδή δεν υπάρχει το κάτω μέρος της.



Καθώς το βέλος της πυραμίδας κινείται κατά μήκος μιας όψης το αντίστοιχο βέλος στην σφαίρα δεν κινείται. Μόνο όταν το βέλος στην πυραμίδα κινείται γύρω από την γωνία μιας ακμής το βέλος της σφαίρας περιστρέφεται. Όταν το βέλος της πυραμίδας γυρίσει όλο το σύνορο και επιστρέψει στην αρχική του θέση το βέλος της σφαίρας θα χαράξει το 3-διάστατο σχεδιασμένο σχήμα πάνω στην σφαίρα.

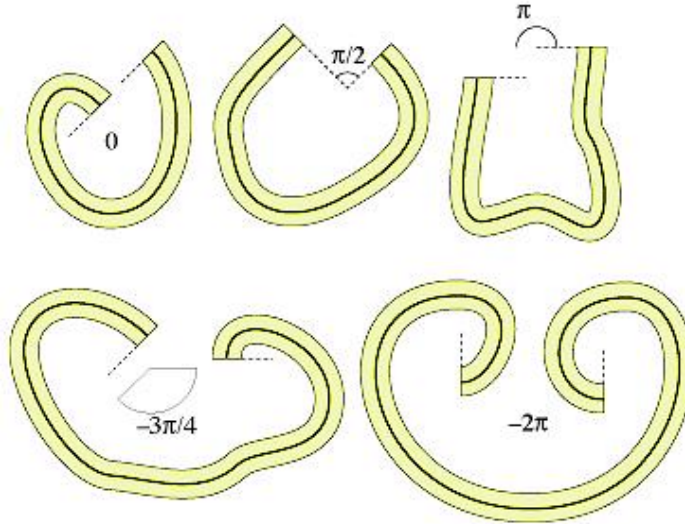
Επειδή οι 3 όψεις της πυραμίδας είναι επίπεδα η καμπυλότητα τους θα είναι 0. Όμως στην σφαίρα η καμπυλότητα δεν είναι 0 γιατί η όψη της πυραμίδας μεταφέρεται στην σφαίρα σαν σημείο, η ακμή της πυραμίδας σαν ακμή και η κορυφή σαν επιφάνεια. Δηλαδή η κορυφή περιέχει την ολόκληρη καμπυλότητα της επιφάνειας.

Εάν πάρουμε τώρα την κυβική γωνία και την ανοίξουμε σε ένα επίπεδο βλέπουμε ότι επειδή η κάθε γωνία είναι 90° λείπουν άλλες 90° για να δημιουργήσουμε μία ολόκληρη γωνία.



Οι $90^\circ = \pi/2$, όσο η γωνιακή καμπυλότητα. Δηλαδή ισχύει ότι η γωνία που λείπει για να έχουμε άθροισμα γωνιών 2π είναι η καμπυλότητα της εσωκλειστης επιφάνειας.

Παραδείγματα :



Παίρνουμε ένα τετράεδρο (μία πυραμίδα με 4 τριγωνικές όψεις, όπου κάθε ακμή έχει το ίδιο μήκος) οπότε κάθε γωνία ενός τριγώνου του είναι 60° . Μιας και 3 τέτοια τρίγωνα συναντιούνται σε μία κορυφή της πυραμίδας θα είναι συνολικά 180° , και έτσι θα λείπουν 180° για να συμπληρώσουμε την γωνία. Επειδή υπάρχουν 4 γωνίες το άθροισμα των γωνιών που λείπουν είναι 4π , όσο και η ολική καμπυλότητα της πυραμίδας.

Αυτό ισχύει και αντίστροφα. Έστω ότι παίρνουμε ένα δωδεκάεδρο (μία κανονική 12-πλευρη επιφάνεια όπου κάθε όψη είναι ένα κανονικό πεντάγωνο), το οποίο έχει 20 κορυφές. Η ολική καμπυλότητα 4π είναι εξ' ίσου μοιρασμένη στις κορυφές και έτσι κάθε κορυφή έχει καμπυλότητα $4\pi/20 = \pi/5 = 180^\circ/5 = 36^\circ$, δηλαδή η γωνία που λείπεται, όταν ανοίξουμε την γωνία της κορυφής σε ένα επίπεδο, είναι 36° . Οπότε $360^\circ - 36^\circ = 324^\circ$ και μιας 3 όψεις συναντιούνται στην γωνία κάθε πεντάγωνη όψη έχει μία εσωτερική γωνία $324^\circ/3 = 108^\circ$.

Θεώρημα Gauss – Bonnet

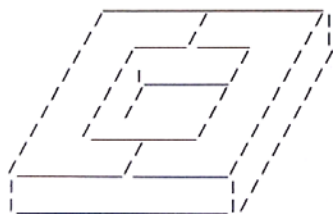
Η ολική καμπυλότητα μιας κλειστής επιφάνειας είναι $2\pi\chi$ όπου χ = χαρακτηριστική Euler.

Παίρνουμε τώρα μία σφαίρα Σ με οποιαδήποτε ακτίνα και ένα κάθετο βέλος να κινείται γύρω από την Σ σε οποιοδήποτε πιθανόν σημείο. Είναι φανερό ότι το αντίστοιχο βέλος το οποίο χαράσσει μία επιφάνεια μέσα στη μοναδιαία σφαίρα θα έχει αγγίξει όλα τα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας οπότε η επιφάνεια η οποία χαράσσεται είναι ολόκληρη η μοναδιαία σφαίρα. Και έτσι η καμπυλότητα Gauss της σφαίρας είναι ίση με την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας, δηλαδή

$4\pi R^2 = 4\pi 1^2 = 4\pi$ όπου R είναι η ακτίνα της σφαίρας. Έτσι η καμπυλότητα Gauss μιας οποιασδήποτε σφαίρας είναι 4π .

Αυτό αποδεικνύεται και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Gauss – Bonnet αφού $\chi(\text{σφαίρας}) = \text{χαρακτηριστική Euler σφαίρας} = 2$ και άρα καμπυλότητα Gauss σφαίρας $= 2\pi 2 = 4\pi$.

Παράδειγμα



Αυτό το πολυεδρικό torus έχει 8 κορυφές με καμπυλότητα $\pi/2$, 8 κορυφές με καμπυλότητα 0 και 8 κορυφές με καμπυλότητα $-\pi/2$. Οπότε η ολική καμπυλότητα του είναι 0.

Το θεώρημα Gauss – Bonnet έρχεται σε αντιδιαστολή με την διαίσθηση μας γιατί στο αριστερό μέλος έχουμε μια ποσότητα ορισμένη ολοκληρωτικά από την εσωτερική γεωμετρία της επιφάνειας (η καμπυλότητα είναι μια μετρική ιδιότητα) ενώ στο δεξιό μέλος έχουμε μια έκφραση η οποία είναι ολοκληρωτικά ανεξάρτητη από οποιαδήποτε μετρική σχέση (το δίκτυο έχει εντελώς τοπολογική σημασία). Αυτή η παράδοξη κατάσταση αντανακλά την αμοιβαία σχέση ανάμεσα στα θεωρήματα Descartes και Euler. Διαλέγοντας ένα αμετάβλητο δίκτυο και μεταβάλλοντας την γεωμετρία της επιφάνειας βλέπουμε ότι η ολική καμπυλότητα είναι ανεξάρτητη από την γεωμετρία. Αντιστρόφως, αφήνοντας αμετάβλητη την επιφάνεια και μεταβάλλοντας το δίκτυο βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική δεν εξαρτάται από το δίκτυο που διαλέγουμε²⁷.

²⁷ [6; Σελ. 217]

Κεφάλαιο 3. Πολύεδρα

Ανάλογα με κάποια χαρακτηριστικά τους, τα πολύεδρα έχουν κατανεμηθεί σε κάποιες ομάδες. Η ιδέα να διακρίνουμε τα πολύεδρα σε ομάδες, που παρουσιάζουν κάποια ιδιάζουσα κανονικότητα, ανάγεται στην αρχαία Ελλάδα. Εδώ θα ασχοληθούμε μελετώντας ιδιότητες, χαρακτηριστικά και ιστορικά στοιχεία από τρεις ομάδες : τα κανονικά, τα ημικανονικά και τα αστεροειδή πολύεδρα.

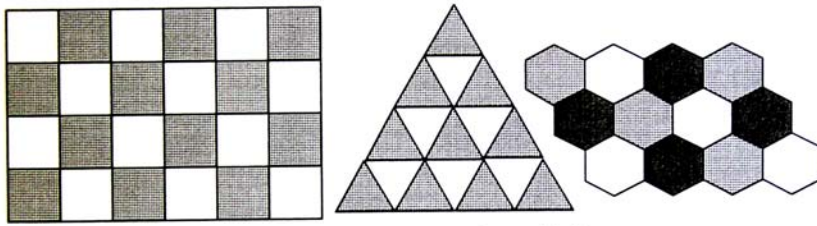
3.1 Ψηφιδωτά στο επίπεδο και στη σφαίρα

Έστω τώρα ότι θέλουμε να καλύψουμε ένα επίπεδο με πολύγωνα, αυτό καλείται **ψηφιδωτό** (tessellation). Το κανονικό ψηφιδωτό ενός επιπέδου φτιάχνεται παίρνοντας πανομοιότυπα αντίγραφα ενός κανονικού πολυγώνου P_n με n πλευρές, καλύπτοντας κάθε σημείο του επιπέδου έτσι ώστε να μην υπάρχει σύμπτωση εκτός από τις άκρες²⁸. Κάθε ακμή του πολυγώνου θα πρέπει να συμπίπτει με μία ακμή ενός άλλου πολυγώνου.

Με σκοπό να φτιάξουμε ένα κανονικό ψηφιδωτό θα πρέπει να ταιριάζουμε μαζί έναν ορισμένο αριθμό αντιγράφων ενός πολυγώνου έτσι ώστε να μοιράζονται μία κοινή κορυφή. Αυτό σημαίνει ότι η εσωτερική γωνία του πολυγώνου πρέπει ακριβώς να διαιρεί τις 360° . Οπότε πρέπει να υπολογίσουμε την εσωτερική γωνία ενός n -γωνου. Εάν φέρουμε όλες τις διαγωνίους από μία κορυφή στις άλλες κορυφές κόβουμε το πολύγωνο σε $(n-2)$ τρίγωνα. Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων είναι $180^\circ(n-2)$. Με αυτό το άθροισμα ισούτε και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του πολυγώνου. Μιας και όλες οι γωνίες είναι ίσες η γωνία σε κάθε κορυφή είναι $\frac{180(n-2)}{n}$. Αυτό θα διαιρεί ακριβώς τις 360°

εάν το $\frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2}$ είναι ακέραιος αριθμός. Δηλαδή θα πρέπει $n = 3, 4, 6$ και άρα τα ψηφιδωτά είναι 3 ειδών :

²⁸ [16; Σελ. 26-27]



Εάν τώρα θέλουμε να καλύψουμε το επίπεδο μας με διαφορετικά κανονικά πολύγωνα θα πρέπει να σκεφτούμε ότι ο ίδιος αριθμός πολυγώνων θα πρέπει να συναντιούνται σε κάθε κορυφή και ότι εάν ξεκινήσουμε από μία κορυφή και δούμε κυκλικά γύρω της θα πρέπει να συναντήσουμε μία συγκεκριμένη σειρά πολυγώνων και αυτή η σειρά θα πρέπει να ικανοποιείται σε οποιαδήποτε κορυφή.

Ψάχνοντας για όλα τα κανονικά και ημικανονικά ψηφιδωτά του επιπέδου θα οδηγηθούμε στο γεγονός ότι μόνο συγκεκριμένα κανονικά πολύγωνα ταιριάζουν αναμεταξύ τους γύρω από ένα σημείο έτσι ώστε το άθροισμα των γωνιών γύρω από το σημείο να είναι ακριβώς 360° .

Το θεώρημα του Euler μας λέει ότι αυτή η κατάσταση είναι κάπως διαφορετική στη σφαίρα. Έστω ότι θέλουμε να διαμερίσουμε (tile) την σφαίρα με πεντάγωνα χωρίς να μας απασχολεί εάν είναι κανονικά πολύγωνα. Ζητάμε μόνο ακριβώς k πεντάγωνα να ταιριάζουν σε κάθε κορυφή όπου k είναι ακέραιος αριθμός. Εάν f είναι ο αριθμός των πολυγώνων τότε ο αριθμός των ακμών πρέπει να είναι ακριβώς $5f/2$, ενώ ο αριθμός των κορυφών πρέπει να είναι ακριβώς $5f/k$. Η ισότητα του Euler συνεπάγεται ότι $\chi = 2 + \frac{3f}{2}$ έτσι εξαλείφοντας το χ και λύνοντας ως

προς f παίρνουμε $f = \frac{4k}{10-3k}$. Μιας και το k δεν μπορεί να είναι λιγότερο από 3 το k θα πρέπει να είναι 3 και το $f=12$.

Ορισμός 17

Λέγοντας **κανονική υποδιαίρεση της σφαίρας** (regular subdivision) εννοούμε ότι η σφαίρα χωρίζεται σε πολυγωνικές γραμμές με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε περιοχή να έχει n πλευρές και k πολύγωνα να είναι σε κάθε κορυφή.

Πρόταση

Υπάρχουν ακριβώς 5 ζευγάρια των αριθμών $\{n,k\}$ για τα οποία υπάρχουν κανονικές υποδιαίρεσεις της σφαίρας²⁹.

απόδειξη

²⁹ [16; Σελ. 90-91]

Εάν μία κανονική υποδιαίρεση έχει n κορυφές, e ακμές και f όψεις τότε υπολογίζοντας τον ολικό αριθμό των πλευρών σε όλες τις περιοχές δίνει $2e = nf = kv$

Από το θεώρημα του Euler $2kn - 2ke + 2kf = 4k$, έτσι $2nf - knf + 2kf = 4k$. Λύνοντας ως προς f ,
$$f = \frac{4k}{2n - kn + 2k} = \frac{4k}{4 - (n-2)(k-2)}$$

Μιας και το f είναι θετικό πρέπει να έχουμε $(n-2)(k-2) < 4$. Από αυτό υπάρχουν ακριβώς 5 λύσεις, επειδή $(n-2)$, $(k-2)$ είναι δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και το γινόμενο τους λιγότερο από 4. Δηλαδή θα πρέπει να είναι 1×1 ή 1×2 ή 1×3 ή 2×1 ή 3×1 . Έτσι, οι αξίες των f , n , e είναι μοναδικά καθορισμένες.

Από αυτή την απαίτηση του Πλάτωνα να χωριστεί η σφαίρα σε ίσα μέρη οι πέντε λύσεις που βρήκαμε αντιστοιχούν στα 5 κανονικά πολύεδρα και για οποιαδήποτε κανονική υποδιαίρεση το αντίστοιχο γράφημα στο επίπεδο είναι μοναδικά καθορισμένο.

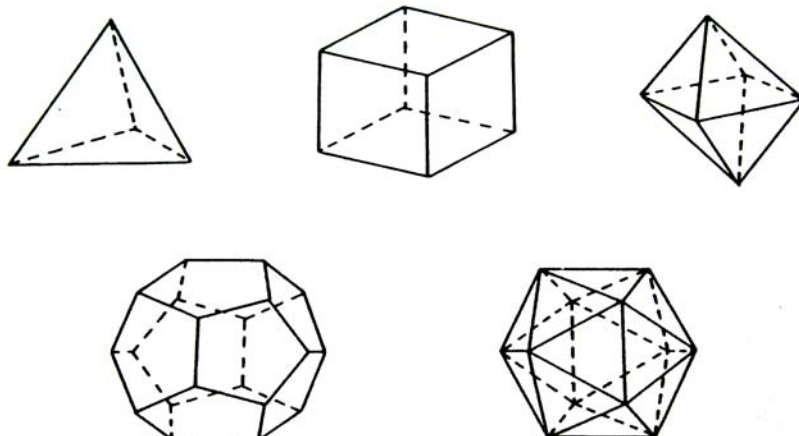
3.2 Κανονικά πολύεδρα

Τα πιο γνωστά πολύεδρα είναι οι πυραμίδες και τα πρίσματα. Το ύψος μιας n -γωνης πυραμίδας μπορεί μερικές φορές να προσαρμοστεί έτσι ώστε τα ισοσκελή τρίγωνα να γίνουν ισόπλευρα. Στην πραγματικότητα, αυτό μπορεί να γίνει όταν $n < 6$. Η τριγωνική πυραμίδα καλείται τετράεδρο. Εάν οι 3 όψεις είναι ισόπλευρα, τότε και οι 4, το τετράεδρο είναι κανονικό.

Με μία ελαφρώς παραμόρφωση ενός n -γωνου πρίσματος λαμβάνουμε ένα n -γωνο αντίπρισμα του οποίου οι όψεις αποτελούνται από δύο κανονικά n -γωνα συνδεδεμένα από $2n$ ισοσκελή τρίγωνα. Το ύψος ενός τέτοιου αντιπρίσματος μπορεί πάντα να προσαρμοστεί έτσι ώστε τα ισοσκελή τρίγωνα να γίνουν ισόπλευρα και έτσι να έχουμε ένα ομοιόμορφο πολύεδρο με 3 τρίγωνα και ένα n -γωνο σε κάθε κορυφή. Όταν το $n=3$ το αντίπρισμα είναι το κανονικό οκτάεδρο. Όταν το $n=5$ το συνδυάζουμε με δύο πεντάγωνες πυραμίδες, μία σε κάθε βάση, για να σχηματίσουμε το κανονικό εικοσάεδρο.

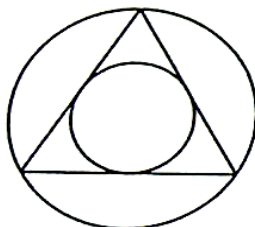
Σχεδόν οποιοσδήποτε που συναντά τα κανονικά στερεά βρίσκει κάτι ελκυστικό σ' αυτά. Το ότι οι Έλληνες έκαναν τόσες λεπτομερείς μελέτες πάνω σ' αυτά πιθανόν να συνδέεται με τον απροσδόκητο μικρό αριθμό τους : υπάρχουν μόνο πέντε, σε αντίθεση με τον μη πεπερασμένο αριθμό κανονικών πολυγώνων.

Τα πέντε κανονικά πολύεδρα είναι τα εξής : τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο.



Τα κανονικά πολύεδρα βοήθησαν τον Johannes Kepler (1571 – 1630) να εξηγήσει την κίνηση των πλανητών. Ο Kepler διαπραγματεύθηκε τα πέντε κανονικά πολύεδρα λεπτομερέστερα στο πρώτο του βιβλίο *Mysterium Cosmographicum* που εκδόθηκε το 1596 (Τυβίγγη). Ένα θεμελιώδες έργο του Kepler είναι το ‘Στερεομετρία των βυτίων’ (*Stereometria doliorum*), το οποίο αποτελεί την πρώτη αξιόλογη εξέλιξη στην Ευρώπη της θεωρίας που δημιούργησε ο Αρχιμήδης στα βιβλία του ‘Περί κωνοειδών και σφαιροειδών’³⁰.

Ο Kepler ήταν δραστήριος οπαδός της ηλιοκεντρικής θεωρίας του Copernicus επειδή έδινε καλύτερη εξήγηση ορισμένων ποσοτικών πλευρών της πλανητικής κίνησης από ό,τι η Θεωρία του Πτολεμαίου³¹. Αλλά ο Kepler δεν ήταν ικανοποιημένος με τη χρήση των επικύκλων από τον Copernicus και έψαχνε μία απλούστερη εξήγηση που θα συμφωνούσε με τις παρατηρήσεις. Βασικά τον Kepler τον απασχολούσαν θέματα σαν το γιατί να υπάρχουν ακριβώς έξι πλανήτες (ο Ουρανός, ο Ποσειδώνας και ο Πλούτωνας δεν είχαν ανακαλυφθεί ακόμα). Έτσι, υποστήριξε ότι ήταν έξι επειδή το 6 ήταν ο πρώτος τέλειος αριθμός. Μία μέρα ενώ δίδασκε, σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο.

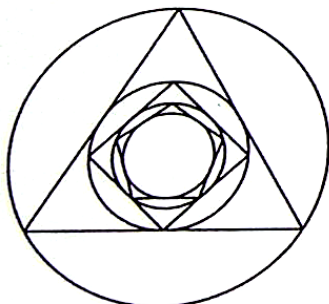


Τότε παρατήρησε ότι ο λόγος των ακτινών των δύο κύκλων φαινόταν ίσος με τον λόγο των ακτινών των τροχιών του Δία και του

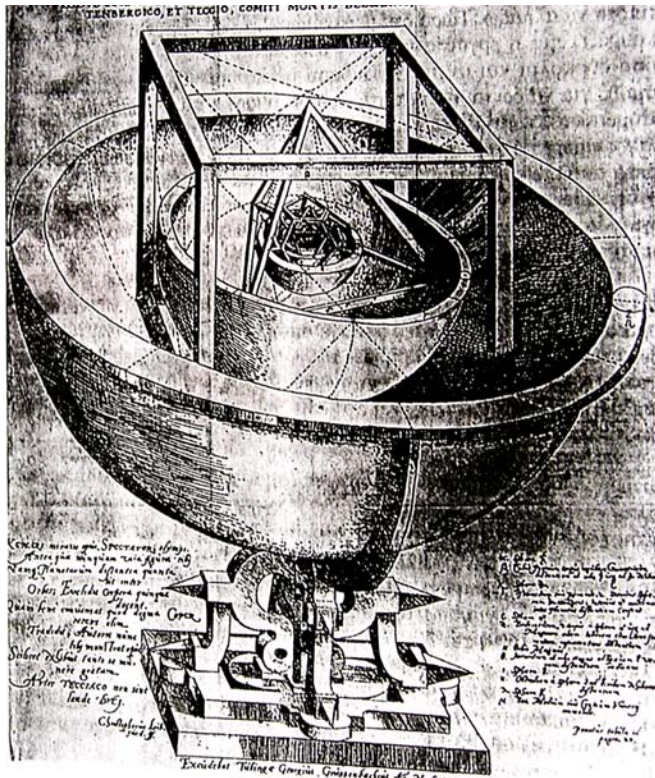
³⁰ [11; Τόμος Β Σελ. 173]

³¹ [7; Σελ. 73]

Κρόνου. Συμπέρανε αμέσως ότι αυτό δεν μπορούσε να ήταν συμπτωματικό και συμπλήρωσε το σχέδιο του με ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο, μετά με έναν άλλο κύκλο και ένα εγγεγραμμένο σ' αυτόν πεντάγωνο, κ.ο.κ., πεπεισμένος ότι οι κύκλοι θα έπρεπε να αντιστοιχούν στις τροχιές των πλανητών.



Έπειτα, επειδή το Σύμπαν είναι τρισδιάστατο χρησιμοποίησε τα κανονικά πολύεδρα αντί για τα επίπεδα πολύγωνα. Με αυτή την σκέψη και επειδή τα πέντε κανονικά πολύεδρα θα καθόριζαν έξι σφαίρες, το πρόβλημα ανάχθηκε στο να βρεθεί κάποια διάταξη που να παράγει σφαίρες που θα συμφωνούσαν με τις τροχιές των πλανητών. Η σειρά στη διάταξη είναι Σφαίρα του Κρόνου, Κύβος, σφαίρα του Δία, Τετράεδρο, Σφαίρα του Άρη, Δωδεκάεδρο, Σφαίρα της Γης, Εικοσάεδρο, Σφαίρα της Αφροδίτης, Οκτάεδρο, Σφαίρα του Ερμή³².

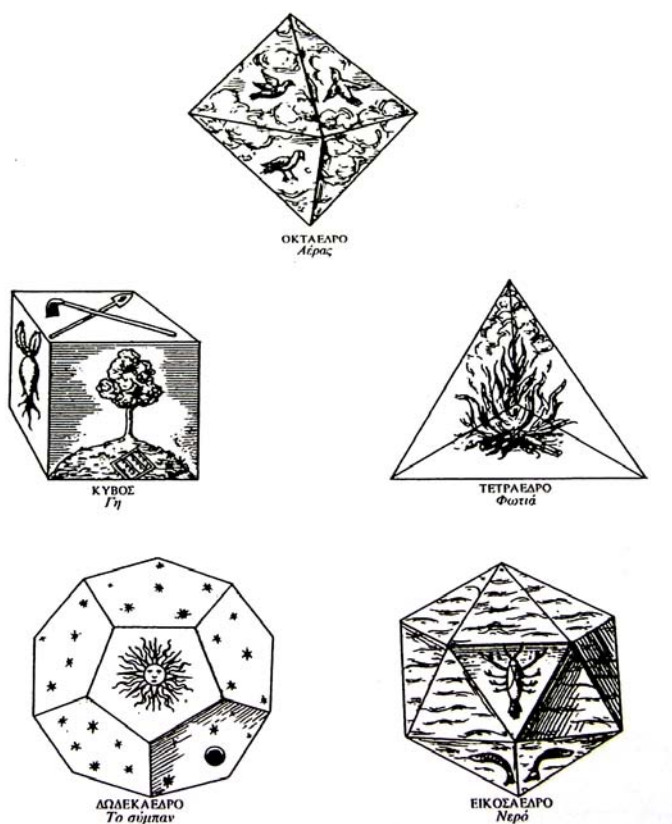


³² [7; Σελ. 75]

Στο έργο του ‘Αρμονίας του κόσμου’ (Harmonice Mundi) περιέχεται «ο τρίτος νόμος του Kepler» : Για όλους τους πλανήτες τα τετράγωνα των περιόδων είναι ανάλογα προς τους κύβους των μεγάλων ημιάξόνων των τροχιών. Κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι αυτό το βιβλίο γράφτηκε από άνθρωπο της πυθαγορικής σχολής αφού σκοπός του είναι η αναζήτηση των αρμονικών σχέσεων που υπάρχουν στην γεωμετρία και στη μουσική, στην αρχιτεκτονική και στην αστρολογία, στην μεταφυσική και στην αστρονομία. Στο II βιβλίο αυτού του έργου του έχουμε την αντιστοιχία των πέντε κανονικών πολυέδρων με τα στοιχεία του κόσμου που δέχονταν οι αρχαίοι.

Έτσι, ο Kepler τα θεώρησε ως εξής³³ :

- Ο κύβος αντιστοιχεί στη γη επειδή είναι ο πιο σταθερός.
- Το οκτάεδρο αντιστοιχεί στον αέρα επειδή στροβιλίζει εύκολα.
- Το τετράεδρο αντιστοιχεί στη φωτιά επειδή ο λόγος όγκος/επιφάνεια είναι ελάχιστος.
- Το εικοσάεδρο αντιστοιχεί στο νερό επειδή ο λόγος όγκος/επιφάνεια είναι μέγιστος (όπως νόμιζε λανθασμένα).
- Το δωδεκάεδρο αντιστοιχεί στο Σύμπαν επειδή οι δώδεκα έδρες του αντιστοιχούν στα δώδεκα σημεία του Ζωδιακού κύκλου.



³³ [7; Σελ. 80]

Επίσης, τα πλατωνικά στερεά δεν είναι άλλα από τα κυρτά στερεά που οριοθετούνται από ίσα κανονικά επίπεδα πολύγωνα. Ίσα κανονικά επίπεδα πολύγωνα που μπορούν να σχηματίσουν κυρτά στερεά είναι μόνο τρία : το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό πεντάγωνο. Τα δυνατά κυρτά στερεά που μπορούν να σχηματιστούν απ' αυτά είναι ακριβώς πέντε : το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, το κανονικό οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο.

Τα πέντε κανονικά πολύεδρα καλούνται και Πλατωνικά στερεά επειδή ανακαλύφθηκαν από την Πλατωνική σχολή και αποτέλεσαν αντικείμενα λατρίας αφού είχαν για την πλατωνική φιλοσοφία και κοσμολογία ιδιαίτερη σημασία. Η ιδέα ενός αρμονικού σύμπαντος φτιαγμένου με τα κανονικά αυτά πολύεδρα ως πρώτη ύλη, εμφανίζεται στον πλατωνικό διάλογο Τίμαιος, έναν διάλογο όπου επιχειρείται από τον Πλάτωνα η άρθρωση μιας θεωρίας για τη δομή του κόσμου με καθαρά γεωμετρικό περιεχόμενο.

Κατά τον Πλάτωνα, η μόνη πραγματικότητα που είναι ικανή να γίνει γνωστή με βεβαιότητα, λόγω του αναλλοίωτου χαρακτήρα της, είναι η πραγματικότητα του αεί ὄντος των Ιδεών³⁴. Ο αισθητός κόσμος, σε αντιδιαστολή με τον κόσμο των Ιδεών, που υπήρχε ανέκαθεν, δημιουργήθηκε πάνω σε κάποια ιδεατά πρότυπα. Πιο συγκεκριμένα, ισχυρίζεται πως οτιδήποτε αισθητό αποτελείται από κάποιον ποικίλλοντα συνδυασμό τεσσάρων βασικών στοιχειωδών υλικών, τα οποία είναι : φωτιά, αέρας, νερό και γη. Με την σειρά τους τα υλικά αυτά, δεν είναι απλά αλλά συντίθενται από τεσσάρων ειδών στοιχειώδη πλατωνικά στερεά. Αντιστοίχισε τα τέσσερα ευκατασκευάστα πολύεδρα – τετράεδρα, οκτάεδρο, εικοσάεδρο και κύβος – με τα τέσσερα στοιχεία : φωτιά, αέρας, νερό και γη αντίστοιχα. Με την σειρά τους τα πλατωνικά στερεά, μπορούσαν να αναλυθούν περαιτέρω σε απλούστερα γεωμετρικά σχήματα, τα οποία όμως δεν μπορούσαν να αναλυθούν περαιτέρω και από αυτά δομείται το αισθητό σύμπαν. Κατά τον Πλάτωνα αυτά είναι τρίγωνα δύο ακριβώς ειδών : α) ορθογώνια και ισοσκελή και β) ορθογώνια που η υποτείνουσα είναι διπλάσια της μιας των καθέτων πλευρών τους. Το δωδεκάεδρο, που σχηματίζεται από κανονικά πεντάγωνα, ενωμένα ανά τρία στην αντίστοιχη κορυφή, αντιστοιχούσε στο σύμπαν.

Σύμφωνα με τον Ευκλείδη τα κανονικά πολύεδρα ορίζονται περιγραφικά από τον αριθμό και το είδος των όψεων που τα περιέχει³⁵. Δηλαδή ορίζονται ως εξής (Στοιχεία βιβλίο XI ορισμοί 25-28) :

- κύβος είναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἑξ ἴσων τετραγώνων.

³⁴ [1; Σελ. 46-52]

³⁵ [6; Σελ. 66]

- ὀκτάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτώ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.
- εἰκοσάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.
- δωδεκάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων.

Περί το 380 π.Χ. ο Θεαίτητος θεωρεῖται, κατά γενική ομολογία, ο πρώτος που απέδειξε ὅτι αὐτὰ τα πέντε πολυέδρα εἶναι καὶ τα μόνα δυνατὰ κανονικά πολυέδρα. Ενώ, ο Ευκλείδης ἔδειξε πὼς κατασκευάζεται κάθε στερεό καὶ ο περιγεγραμμένος κύκλος τους, ο Πάππος ἔδειξε πὼς εγγράφεται κάθε στερεό σε μία δοσμένη σφαῖρα. Σύμφωνα με μια μαρτυρία του Υψικλή μια δεύτερη πραγματεία πάνω στα κανονικά στερεά με τίτλο «Σύγκριση των πέντε κανονικῶν στερεῶν» γράφτηκε ἀπὸ τον Αρισταίο γύρω στο 320π.Χ.. Πιθανόν, στην πραγματεία αὐτή να ἀνάγονται οἱ κατασκευές των εγγεγραμμένων σε σφαῖρα κανονικῶν πολυέδρων που ἀπαντάμε στη «Συναγωγή» του Πάππου. Ο Υψικλής μας μεταφέρει, ἐπίσης, την μαρτυρία ὅτι ο Απολλώνιος ἔγραψε μια συγκεκριμένη μελέτη για το δωδεκάεδρο καὶ το εἰκοσάεδρο, ἡ οποία ὁμως δεν διασώθηκε.

Ἡ βασική λογική δυσκολία εἶναι ὅτι ο Ευκλείδης ποτέ δεν ὀρίσε (ἢ ἐξήγησε) το τι εἶναι ‘στερεό’ ἢ ‘σχῆμα’ παρόλο που σκόπευε να δείξει ὅτι ‘εκτὸς ἀπὸ τα λεγόμενα 5 σχήματα δεν μπορούν να κατασκευαστοῦν ἄλλα σχήματα τα οποία να περιέχονται ἀπὸ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια σχήματα ἴσα το ένα με το ἄλλο. Κάποιοι θεωροῦν ὅτι ο Ευκλείδης εἶχε στο μυαλό του μόνο τα κυρτά πολυέδρα³⁶.

Ἡ θεωρία της κατασκευῆς των πέντε κανονικῶν πολυέδρων ἐκτίθεται στο τέλος των «Στοιχείων», Βιβλίο XIII³⁷, του Ευκλείδη, ὅπου οἱ ακμές τους εκφράζονται ως συνάρτηση της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαῖρας με τη βοήθεια της θεωρίας των ἀρρήτων του Βιβλίου X καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι υπάρχουν ακριβῶς πέντε κανονικά πολυέδρα. Τώρα θα δούμε αὐτή την ἀπόδειξη παρατηρώντας ὅτι ἐπειδὴ ο Ευκλείδης βλέπει την ὀρθή γωνία σαν μια θεμελιώδη γωνία ὅλες οἱ ἄλλες γωνίες εκφράζονται σαν πολλαπλάσια αὐτῆς³⁸.

Λήμμα

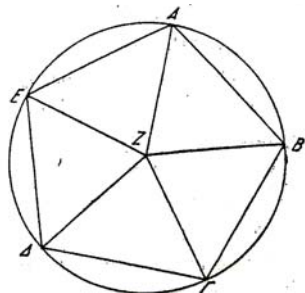
Ἡ γωνία του ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου εἶναι μία καὶ το $1/5$ της ὀρθῆς.

³⁶ [8; Σελ. 866]

³⁷ [17; Σελ. 186-189]

³⁸ [6; Σελ. 183]

απόδειξη



Έστω το ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$, ο περιγεγραμμένος κύκλος του $AB\Gamma\Delta E$ (IV.14), το κέντρο του κύκλου Z (III.1) και τα τμήματα $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$. Αυτά τα τμήματα τέμνουν τις γωνίες A, B, Γ, Δ, E του πενταγώνου διπλά. Επειδή οι γωνίες στο Z είναι ίσες και έχουν άθροισμα 4 ορθές, η καθεμία από αυτές π.χ. η AZB θα ισούται με μία ορθή μείον το $1/5$ της. Οπότε το άθροισμα των γωνιών $ZAB + ABZ$ ισούται με μία ορθή και το $1/5$ της. Η γωνία ZAB είναι ίση με την γωνία $ZB\Gamma$ και άρα όλη η γωνία $AB\Gamma$ του πενταγώνου είναι μία ορθή και $1/5$ της ορθής.

Θεώρημα

Εκτός αυτών των πέντε σχημάτων που είδαμε κανένα άλλο σχήμα δεν κατασκευάζεται περιεχόμενο από ισόπλευρα και ισογώνια μεταξύ τους.

απόδειξη

Διότι από δύο τρίγωνα ή επίπεδα δεν κατασκευάζεται τριέδρη στερεά γωνία (Ορισμός XI.11). Από 3 όμως τρίγωνα κατασκευάζεται η στερεά γωνία της πυραμίδας, από 4 του οκταέδρου και από 5 του εικοσαέδρου. Από 6 τρίγωνα ισόπλευρα και ισογώνια που διέρχονται από το ίδιο σημείο δεν υπάρχει στερεά γωνία γιατί η γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου είναι τα δύο τρίτα της ορθής, τότε και οι έξι θα έχουν άθροισμα προς 4 ορθές, το οποίο είναι αδύνατο γιατί κάθε στερεά γωνία περιέχεται από γωνίες με άθροισμα μικρότερη των 4 ορθών. (Πρόταση XI.21). Για αυτούς τους λόγους, ούτε από περισσότερες των έξι επιπέδων γωνιών είναι δυνατόν να κατασκευαστεί στερεά γωνία. Από τρία τετράγωνα περιέχεται η γωνία του κύβου, από τέσσερα αδύνατον γιατί θα είναι πάλι το άθροισμα τέσσερις ορθές. Από πεντάγωνα ισόπλευρα και ισογώνια : από 3 περιέχεται η γωνία του δωδεκαέδρου, από 4 είναι αδύνατον να περιέχεται γιατί η γωνία του ισοπλεύρου και ισογωνίου πενταγώνου είναι μία ορθή και το $1/5$ της ορθής και θα είναι οι 4 γωνίες μεγαλύτερες των 4 ορθών, αδύνατο. Όμως κανένα από τα υπόλοιπα πολύγωνα σχήματα είναι δυνατόν να σχηματιστεί στερεά γωνία για τον ίδιο λόγο. Άρα το αποδείξαμε.

Στη συνέχεια, καθένα από τα κανονικά στερεά κατασκευάζεται και εγγράφεται σε δοσμένη σφαίρα και επιπλέον εξετάζεται η σχέση της

πλευράς του στερεού και της διαμέτρου της περιγεγραμμένης σφαίρας. Ο Ευκλείδης ξεκινά από τη διάμετρο της δοσμένης σφαίρας, κατασκευάζει το ζητούμενο στερεό και τέλος αποδεικνύει ότι εγγράφεται στη σφαίρα. Γι' αυτό τον λόγο ο Ευκλείδης δίνει ένα ασυνήθιστο ορισμό για την σφαίρα (είναι η επιφάνεια που σαρώνεται από την περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από την διάμετρο του³⁹). Αντίθετα, ο Πάππος δίδει πως εγγράφεται κάθε στερεό σε μια δοθείσα σφαίρα⁴⁰ και λύνει τα ίδια προβλήματα με σύνθεση και ανάλυση. Θεωρώντας r την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου παίρνουμε ότι :

Η ακμή του τετραέδρου είναι : $\frac{2}{3}r\sqrt{6}$

Η ακμή του οκταέδρου είναι : $r\sqrt{2}$

Η ακμή του κύβου είναι : $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$

Η ακμή του εικοσαέδρου είναι : $\frac{r}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$

Η ακμή του δωδεκαέδρου είναι : $\frac{r}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$

Παράλληλα, ο Leonardo da Vinci έφτιαξε μοντέλα για πολύεδρα χρησιμοποιώντας λουρίδες από ξύλο για τις ακμές του αφήνοντας τις όψεις στην φαντασία. Όταν ένα τέτοιο μοντέλο φαίνεται με καλή προοπτική από μία θέση έξω από το κέντρο μιας όψης αυτή η όψη εμφανίζεται σαν ένα μεγάλο πολύγωνο με όλες τις εναπομείναντες όψεις να γεμίζουν το εσωτερικό του. Αυτή η σχεδίαση του στερεού καλείται **διάγραμμα του Schlegel**⁴¹.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει κάθε πλατωνικό στερεό σε 3 μορφές : μία συνηθισμένη προοπτική θέα, ένα δίκτυο (ορισμός 13) το οποίο μπορεί να διπλωθεί για να φτιαχτεί ένα χάρτινο μοντέλο των στερεών και ένα διάγραμμα του Schlegel.

Το διάγραμμα του Schlegel για το πολύεδρο δείχνει με μία ματιά ποια κορυφή ανήκει σε ποια ακμή και όψη. Κάθε όψη εμφανίζεται σαν μία περιοχή οριοθετημένη από ακμές εκτός από την 'αρχική' όψη η οποία περικλείει όλες τις άλλες. Για να εγγυηθούμε μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις όψεις και στις περιοχές έχουμε απλώς να συσχετίσουμε την 'αρχική' όψη με την μη πεπερασμένη εξωτερική περιοχή.

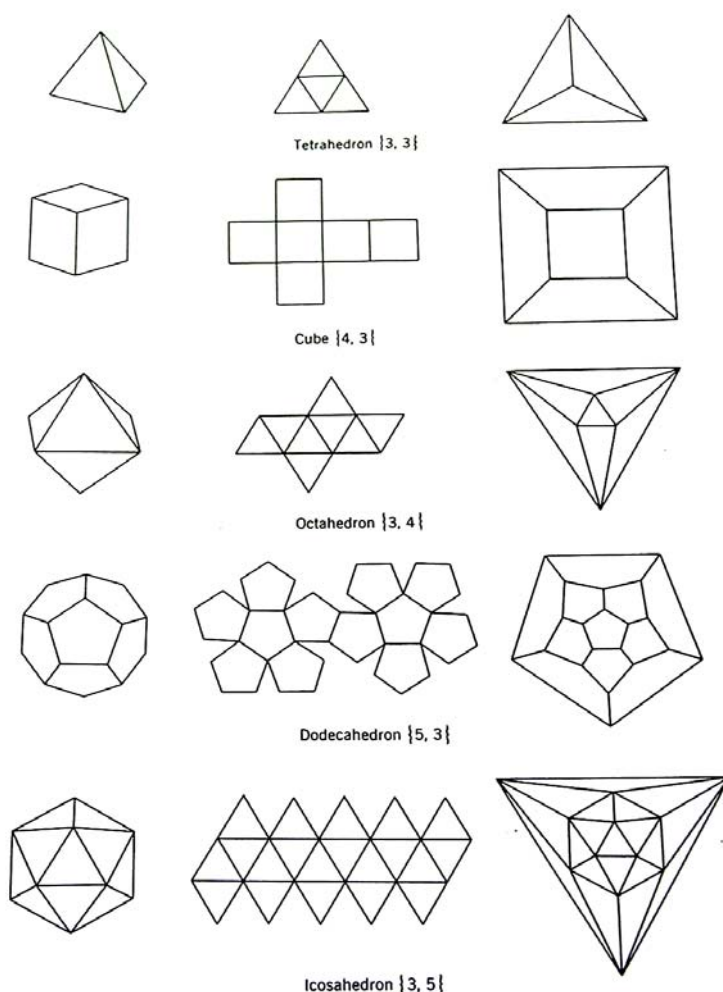
Κάθε πολύεδρο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάγραμμα του Schlegel και οι αριθμητικές ιδιότητες του ικανοποιούν τον τύπο του Euler $v - e + f = 2$, όπου v = ο συνολικός αριθμός των κορυφών, e = ο

³⁹ [6; Σελ. 66]

⁴⁰ [6; Σελ. 99]

⁴¹ [5; Σελ. 150-152]

συνολικός αριθμός των ακμών και $f = o$ συνολικός αριθμός των εδρών [παράγραφος 2.2].



Κάθε κανονικό πολύεδρο χαρακτηρίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος φυσικών αριθμών (p, q) που λέγεται και **σύμβολο του Schläfli**. Το πρώτο μέλος p του ζεύγους μας πληροφορεί για τον αριθμό των πλευρών ενός από τα κανονικά πολύγωνα που έχει σαν έδρες του το αντίστοιχο κανονικό πολύεδρο. Το δεύτερο μέλος q μας πληροφορεί για τον αριθμό των πολυγωνικών εδρών που συνενώνονται σε μία τυχαία κορυφή του πολυέδρου.

Παράλληλα, τα κανονικά ικανοποιούν και τις σχέσεις $qn = 2e = pf$. Στην πραγματικότητα, εάν μετρήσουμε τις q ακμές σε καθεμιά από τις n κορυφές τότε έχουμε μετρήσει κάθε ακμή διπλά. Μία παρόμοια κατάσταση αναπτύσσεται εάν μετρήσουμε της p πλευρές καθεμιάς από τις f όψεις μιας και κάθε ακμή ανήκει σε 2 όψεις. Τώρα μπορούμε να συμπεραίνουμε εκφράσεις για τα n, e, f σαν λειτουργίες των p και q . Έτσι,

$$\frac{v}{1} = \frac{e}{2} = \frac{f}{p} = \frac{v-e+f}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{2}{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} = \frac{4pq}{2p+2q-pq}$$

$$\text{Δηλαδή, } v = \frac{4p}{2p+2q-pq}, e = \frac{2pq}{2p+2q-pq}, f = \frac{4q}{2p+2q-pq}$$

Μιας και αυτοί οι αριθμοί πρέπει να είναι θετικοί οι πιθανές αξίες των p q περιορίζονται από την ανίσωση $2p + 2q - pq > 0$ ή $(p-2)(q-2) < 4$. Όπως πριν οι λύσεις αυτής είναι 1×1 ή 2×1 ή 1×2 ή 1×3 ή 3×1 . Αυτές οι πέντε πιθανότητες εξασφαλίζουν μία απλή απόδειξη του ισχυρισμού του Ευκλείδη ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$, $(3,5)$. Το κανονικό τετράεδρο χαρακτηρίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος $(3,3)$, το εξάεδρο από το $(4,3)$, το οκτάεδρο από το $(3,4)$, το δωδεκάεδρο από το $(5,3)$ και το εικοσάεδρο από το $(3,5)$.

Για τα κανονικά πολύεδρα είναι καθιερωμένος ο εξής συμβολισμός :

p = ο αριθμός των ακμών σε κάθε έδρα

q = ο αριθμός των ακμών που συνενώνονται σε κάθε κορυφή

v = ο συνολικός αριθμός των κορυφών

e = ο συνολικός αριθμός των ακμών

f = ο συνολικός αριθμός των εδρών

Κανονικά πολύεδρα	p	q	v	e	f
Τετράεδρο	3	3	4	6	4
Κύβος	4	3	8	12	6
Δωδεκάεδρο	5	3	20	30	12
Οκτάεδρο	3	4	6	12	8
Εικοσάεδρο	3	5	12	30	20

Παρατήρηση

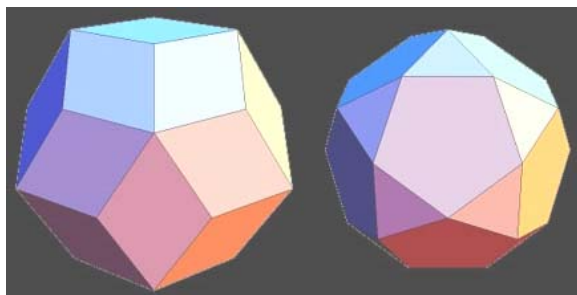
Επίσης έχει φτιαχτεί μια χάρτινη ομάδα των Πλατωνικών στερεών όπου το ένα βρίσκεται μέσα στο άλλο και έχουν βρεθεί οι ακριβείς διαστάσεις αυτών⁴².

Ορισμός 18

Κάθε πολύεδρο έχει ένα **συζυγή** (dual) του το οποίο λαμβάνεται βασικά από την εναλλαγή των ρόλων των κορυφών και των όψεων.

⁴² Ronald B. Hopley [13; Σελ. 312-318]

Το πολύεδρο μαζί με το συζυγή του έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών αλλά κάθε ακμή εμφανίζεται στο συζυγή του σαν να συνδέει δύο όψεις αντί δύο κορυφές. Το πλήθος των ακμών μένει ίδιο και για τα δύο.



Π.χ.

Πιθανόν αυτή η ιδιομορφία του τετραέδρου να συνδέεται με το ότι δεν έχει κεντρική συμμετρία, αφού μία ευθεία γραμμή που συνδέει μία κορυφή με το κέντρο τέμνει το τετράεδρο στο μέσο σημείο μιας από τις όψεις του. Αντίθετα, π.χ. μία ευθεία που συνδέει κάθε κορυφή του κύβου με το κέντρο τέμνει τον κύβο σε μία δεύτερη κορυφή.

Μία εφαρμογή είναι ότι αν με κορυφές τα κέντρα των εδρών ενός κανονικού πολυέδρου κατασκευάσουμε άλλο κανονικό πολύεδρο, αυτό είναι το συζυγές του. Από τα 5 κανονικά πολύεδρα, το τετράεδρο είναι αυτοσυζυγή και τα υπόλοιπα είναι δυϊκά κατά ζεύγη, δηλαδή το οκτάεδρο με τον κύβο και το δωδεκάεδρο με το εικοσάεδρο.

Για να πάρουμε ένα συζυγές πολύεδρο μπορούμε να φτιάξουμε ένα μοντέλο ενός οκταέδρου μέσα σε κύβο (τον οκτάκυβο)⁴³.

3.3 Εξέλιξη (Evolute) πολυέδρων

Εάν ένας κόψει ένα κυρτό πολύεδρο R κατά μήκος των ακμών του λαμβάνει ένα σύστημα από πολύγωνα $P_1, P_2, \dots, P_m$. Κάθε ακμή a κατά μήκος των δύο όψεων που εφάπτεται θα εμφανίζεται σαν πλευρά και στα δύο αντίστοιχα πολύγωνα. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο a για να μαρκάρουμε αυτή την πλευρά και στα δύο πολύγωνα και θεωρούμε αυτή την πλευρά σαν κοινή πλευρά των δύο πολυγώνων. Με τον ίδιο τρόπο η κορυφή A που είναι κοινή σε κ όψεις ($\kappa \geq 3$) θα θεωρείται σαν κοινή κορυφή των αντίστοιχων πολυγώνων και θα χρησιμοποιούμε το κοινό σύμβολο A για να το δηλώσουμε σε όλα τα πολύγωνα.

Ένα τέτοιο σύστημα από πολύγωνα με μαρκαρισμένες κοινές πλευρές και κορυφές καλείται εξέλιξη της αρχικής επιφάνειας του

⁴³ Michael Naylov [14; Σελ. 102-104]

πολυέδρου R . Εάν κολλήσουμε αυτά τα πολύγωνα κατά μήκος των κοινών πλευρών τους ξαναγυρίζουμε στην πολυεδρική μας επιφάνεια.

Κανονικά το σύστημα των πολυγώνων που σχηματίζουν την εξέλιξη της επιφάνειας ενός κλειστού κυρτού πολυέδρου ικανοποιεί τις ακόλουθες υποθέσεις :

1. Κάθε πλευρά είναι κοινή σε δύο και μόνο σε δύο πολύγωνα. Κάθε κορυφή είναι κοινή σε όχι από λιγότερα από 3 πολύγωνα.
2. Εάν n είναι ο αριθμός των πολυγώνων, m είναι ο αριθμός των κοινών κορυφών και l είναι ο αριθμός των κοινών πλευρών αυτών των πολυγώνων τότε η σχέση του Euler ικανοποιείται από $m+n-l=2$.
3. Οποιαδήποτε δύο πολύγωνα Q και Q' μπορούν να συνδεθούν από ένα σύστημα πολυγώνων $Q=Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_i=Q'$ όπου τα $Q_0, Q_1, Q_1, Q_2, \dots$, και Q_{i-1}, Q_i έχουν κοινές πλευρές.
4. Οι κοινές πλευρές 2 πολυγώνων έχουν ίσο μήκος.
5. Το άθροισμα των γωνιών σε όλα τα πολύγωνα στην κοινή κορυφή είναι λιγότερο από 2π .

Ο A.D. Alexandron απέδειξε το εξής αξιοσημείωτο θεώρημα⁴⁴ : Οι αριθμημένες υποθέσεις είναι επαρκές έτσι ώστε το σύστημα των πολυγώνων να μπορεί να ληφθεί σαν μία εξέλιξη του κυρτού πολυέδρου.

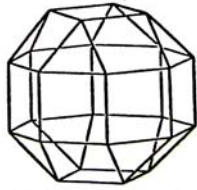
Δηλαδή αυτές οι υποθέσεις είναι επαρκείς για να εξασφαλίσουν ότι όταν τα πολύγωνα κολληθούν κατά μήκος των κοινών ακμών τους θα λάβουμε ένα κλειστό κυρτό πολύεδρο.

3.4 Ημικανονικά πολύεδρα

Είδαμε λοιπόν ότι ένα πολύεδρο είναι κανονικό εάν οι όψεις του είναι συμπτώσιμα κανονικά πολύγωνα και κάθε κορυφή έχει τον ίδιο αριθμό όψεων που την περικλείει. Δηλαδή ένα κανονικό πολύεδρο έχει όλες τις όψεις του και όλες τις κορυφές όμοιες.

Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα αντίστοιχο 'τοπικό' ορισμό για την ημικανονικότητα των πολυέδρων. Για παράδειγμα θα καλέσουμε ένα πολύεδρο ημικανονικό εάν οι όψεις του είναι κανονικά πολύγωνα και κάθε κορυφή έχει το ίδιο ζεύγος όψεων που την περικλείει. Δηλαδή το ημικανονικό πολύεδρο έχει όλες τις κορυφές όμοιες αλλά οι όψεις του ίσως να διαφέρουν. Ωστόσο, το πολύεδρο στο σχήμα γίνεται ημικανονικό κάτω από έναν τέτοιο ορισμό.

⁴⁴ [12; Σελ. 88]



Σχ.

Pseudo-rhombicuboctahedron

Όμως, αυτό το στερεό δεν είναι επαρκώς ομοιόμορφο στην εμφάνιση για να ονομαστεί ημικανονικό, από τους περισσότερους γεωμέτρους. Συνεπώς, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν πιο ‘ολικό’ ορισμό ο οποίος να αποκλείει αυτό το στερεό από την συλλογή των ημικανονικών πολυέδρων.

Ο ορισμός της ημικανονικότητας, που θα δώσουμε, εξαρτάται από την συμμετρία και είναι βασικά του Ball και Coxeter. Λέγοντας **συμμετρία** του στερεού εννοούμε το σύνολο από περιστροφές και αντανakλάσεις του στερεού, στον τρισδιάστατο χώρο, που αφήνουν το στερεό αμετάβλητο στην εμφάνιση.

Ορισμός 19⁴⁵

Ορίζουμε ένα **πολύεδρο** να είναι **ημικανονικό** εάν οι όψεις του είναι κανονικά πολύγωνα και δοθέντων δύο οποιονδήποτε κορυφών υπάρχει μία συμμετρία του πολυέδρου η οποία στέλνει την μία κορυφή στην άλλη.

Δηλαδή η ολική εμφάνιση του πολυέδρου είναι η ίδια όταν βλέπεται από οποιαδήποτε κορυφή. Αυτό συνεπάγεται ότι ένα ημικανονικό πολυέδρο είναι ολοκληρωτικά καθορισμένο εάν δοθεί το ζευγάρι των κανονικών πολυγώνων που περικλείουν μία κορυφή.

Εάν συναντήσουμε ένα n_1 -γωνο, ακολούθως ένα n_2 -γωνο, ..., ακολούθως ένα n_r -γωνο καθώς κάνουμε τον κύκλο γύρω από μία κορυφή τότε λέμε ότι το ημικανονικό πολυέδρο έχει **σύμβολο κορυφών** το $(n_1, n_2, \dots, n_r)$. Για παράδειγμα, ο κύβος (σχ.5a) δηλώνεται από το $(4,4,4)$ και το κυβοκτάεδρο (σχ.5b) από $(3,4,3,4)$.



Figure 5a.

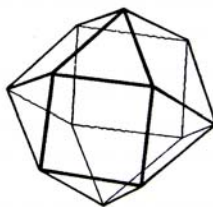


Figure 5b.

⁴⁵ [19; Σελ. 53]

Πρόταση

Θα βρούμε τα ημικανονικά πολύεδρα χρησιμοποιώντας μόνο έννοιες από την γεωμετρία και τη στοιχειώδη άλγεβρα, σύμφωνα με τον Warren Page⁴⁶.

απόδειξη

Θεωρούμε ένα κυρτό ημικανονικό πολύεδρο με σύμβολο κορυφών $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ και δηλώνουμε με $N_1, N_2, \dots, N_r$ τα n_i με $1 \leq i \leq r$ κατά αύξοντα τρόπο. Έτσι, $3 \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_r$

Στις παρακάτω σχέσεις γράφοντας π.χ. n_2, N_2 εννοούμε n_2, N_2 .

Επειδή, το άθροισμα των γωνιών κορυφής $\varphi, \chi, \psi, \omega$ των πολυγώνων που περικλείει μία κορυφή ενός κυρτού πολύεδρου είναι λιγότερο από 2π [από πρόταση 1 παραγράφου 1.2] ισχύει ότι

$$\frac{(n_1-2)\pi}{n_1} + \frac{(n_2-2)\pi}{n_2} + \dots + \frac{(n_r-2)\pi}{n_r} < 2\pi$$

Το οποίο ξαναγράφεται σαν :

$$\frac{r}{2} - 1 < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_r}$$

Μιας και το σύνολο $(N_1, N_2, \dots, N_r)$ είναι το ίδιο με το $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ αλλά με άλλη σειρά μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε. Δηλαδή παίρνουμε

$$\frac{r}{2} - 1 < \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_r} \quad (1)$$

Μιας και κάθε $N_i \geq 3$ το δεξιό μέλος της (1) είναι μικρότερο ή ίσο από $\frac{r}{3}$.

Επομένως από την (1) συνεπάγεται ότι κάθε κορυφή περικλείεται από τουλάχιστον 5 όψεις. Έτσι το $r \geq 6$ υποδηλώνει ότι

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_r} \leq \frac{r}{3} \leq \frac{r}{2} - 1 \quad \text{και αυτό διαψεύδει την (1).}$$

Έτσι, το r είναι είτε 3, είτε 4 ή 5. Θα θεωρήσουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Για $r=5$:

Η (1) γίνεται

$$\frac{3}{2} < \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \frac{1}{N_4} + \frac{1}{N_5} \quad (2)$$

Επειδή $N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_5$ η ανισότητα (2) συνεπάγεται $N_1=N_2=N_3=N_4=N_5=3$. Εάν $N_4 \geq 4$, τότε

⁴⁶ [19; Σελ. 53-61]

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \frac{1}{N_4} + \frac{1}{N_5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

Επειδή $N_1=N_2=N_3=N_4=3$ και $\frac{3}{2} < 4\frac{1}{3} + \frac{1}{N_5}$ έχουμε $N_5 \leq 5$. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις δείχνουν ότι υπάρχουν μόνο 3 πιθανά σύμβολα κορυφών $(3,3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,3,5)$ συσχετισμένα με τις 5 όψεις που περικλείουν την κορυφή.

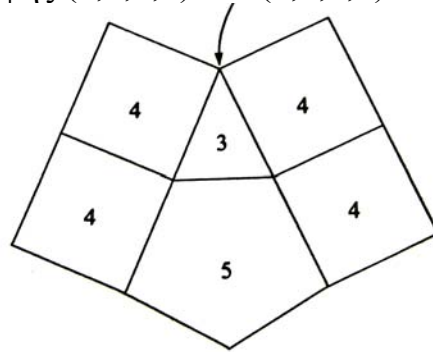
Για $r=4$:

Η (1) γίνεται $1 < \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \frac{1}{N_4}$ (3)

Αυτό απαιτεί ότι $N_1=3$ και $N_2 \leq 4$

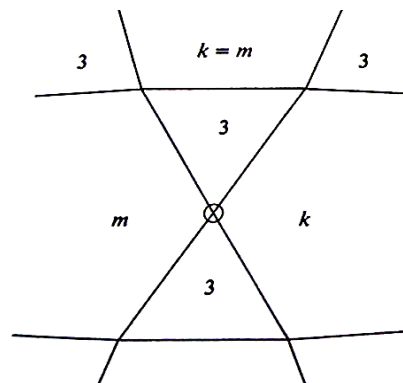
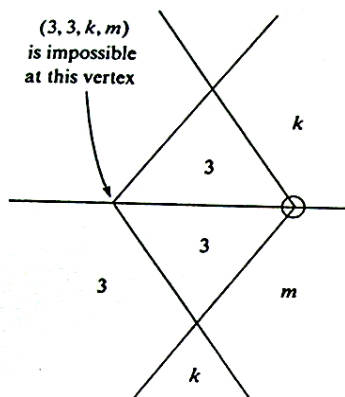
α) Υποθέτουμε ότι $N_2=4$

Τότε η (3) δίνει ότι $N_3=4$ και $N_4 \leq 5$. Το παρακάτω σχήμα δηλώνει ότι τα σύμβολα κορυφής $(3,4,4,5)$ και $(4,4,3,5)$ είναι απίθανα.



β) Υποθέτουμε ότι $N_2=3$. Τότε $N_3 \leq 5$. Εάν $N_3=3$ τότε το $(3,3,3,N_4)$ ικανοποιεί την (3) για οποιοδήποτε $N_4 \geq 3$. Έτσι ένα πιθανό σύμβολο κορυφής είναι το $(3,3,3,m)$ με $m \geq 3$.

Εάν $N_3 > 3$ έχουμε την λύση $(3,3,N_3,N_4)$ και τα πιθανά σύμβολα κορυφής $(3,3,k,m)$, $(3,k,3,m)$. Μιας και τα k,m είναι μεγαλύτερα από 3 το παρακάτω 1^ο σχήμα δείχνει ότι το $(3,3,k,m)$ δεν είναι πιθανόν, και το 2^ο σχήμα δείχνει ότι $k=m$ για $(3,k,3,m)$.

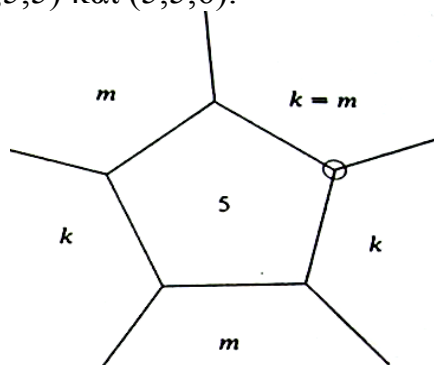


Επομένως, τα πιθανά σύμβολα κορυφής είναι (3,4,3,4) και (3,5,3,5).

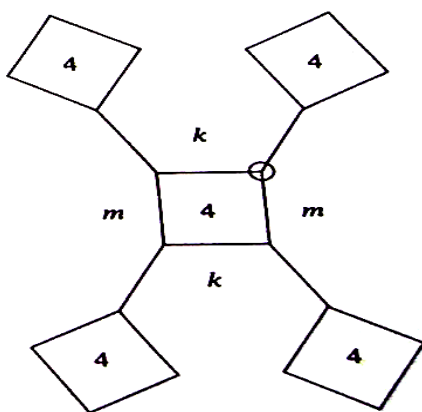
Για $r=3$:

$$\text{Η (1) γίνεται } \frac{1}{2} < \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} \quad (4)$$

α) Υποθέτουμε ότι $N_1=5$. Τότε $N_2 \leq 6$ και το (N_1, N_2, N_3) ικανοποιεί την (4) για $N_3 \geq N_2$ και $N_2=5$ ή 6. Εάν θεωρήσουμε το σύμβολο κορυφής $(5, k, m)$ το σχήμα δείχνει ότι $k=m$. Επομένως, τα πιθανά σύμβολα κορυφής είναι $(5, 5, 5)$ και $(5, 5, 6)$.



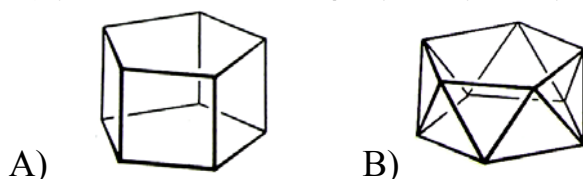
β) Υποθέτουμε ότι $N_1=4$. Τότε $N_2 \leq 7$. Εάν $N_2=4$ τότε το N_3 είναι αυθαίρετο και έτσι το πιθανό σύμβολο κορυφής είναι $(4, 4, m)$ με $m \geq 4$. Τώρα θεωρώντας το $(4, k, m)$ με $m \geq k > 4$ το σχήμα δείχνει ότι και το k και το m πρέπει να είναι άρτιοι (μιας και για π.χ. κάθε k -γωνο περικλείεται από 4-γωνο και τα m -γωνο σε εναλλακτική σειρά. Έτσι, $k=6$ και μιας $m \leq 11$ από την (4) τα πιθανά σύμβολα κορυφής είναι $(4, 6, 6)$, $(4, 6, 8)$, $(4, 6, 10)$.



γ) Υποθέτουμε ότι $N_1=3$. Θεωρούμε $(3, k, m)$. Όπως στην α) περίπτωση $k=m$. Και όπως στην β) περίπτωση βλέπουμε ότι k και m είναι άρτιοι εάν είναι μεγαλύτεροι από 3. Μιας και $k \leq 11$ από την (4) τα πιθανά σύμβολα κορυφής είναι $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 6, 6)$, $(3, 8, 8)$, $(3, 10, 10)$.

Οπότε τα ημικανονικά πολύεδρα είναι τα εξής :

A) $(4,4,m)$ με $m \geq 3$ είναι τα πρίσματα με m -γωνα για βάση



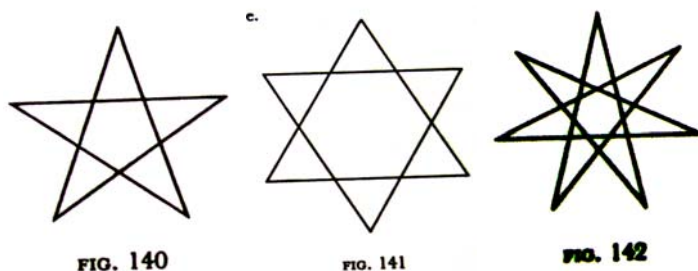
B) $(3,3,3,m)$ με $m \geq 3$ είναι τα αντιπρίσματα με m -γωνα για βάση.

Γ) Μία ειδική περίπτωση του A) είναι το $(4,4,4)$ ο κύβος και μία ειδική περίπτωση του B) είναι το $(3,3,3,3)$ το οκτάεδρο. Επίσης, έχουμε το $(3,3,3)$ το τετράεδρο, το $(5,5,5)$ το δωδεκάεδρο και το $(3,3,3,3,3)$ το εικοσάεδρο. Δηλαδή μία ειδική περίπτωση των ημικανονικών είναι τα κανονικά πολύεδρα.

Δ) Τα 13 Αρχιμήδεια Στερεά [βλέπε παράρτημα]. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πάππου, ο Αρχιμήδης στη χαμένη πραγματεία του για τα λεγόμενα ημικανονικά πολύεδρα διακρίνει δεκατρία νέα είδη πολυέδρων, οι έδρες των οποίων είναι κανονικά πολύγωνα, αλλά διάφορων ειδών, και όλες οι κορυφές των οποίων είναι ισοδύναμες, δηλαδή έχουν την ίδια διάταξη εδρών γύρω από κάθε κορυφή. Από αυτά άλλα έχουν δύο είδη πολυγώνων και άλλα τρία. Ο αριθμός των εδρών κυμαίνεται μεταξύ 8 και 92. Αυτά είναι τα Αρχιμήδεια στερεά.

3.5 Αστεροειδή πολύγωνα – πολύεδρα.

Εκτός από τα κανονικά κυρτά πολύγωνα υπάρχουν και τα **κανονικά αστεροειδή πολύγωνα**. Από αυτά αναφέρουμε το κανονικό αστεροειδή πεντάγωνο (σχ.140), το κανονικό αστεροειδή εξάγωνο που σχηματίζεται από 2 τρίγωνα (σχ.141), δύο είδη κανονικών αστεροειδών επταγώνων (σχ.142,143), το αστεροειδή οκτάγωνο (σχ.144) και το οκτάγωνο σχηματισμένο από δύο τετράγωνα (σχ.145).



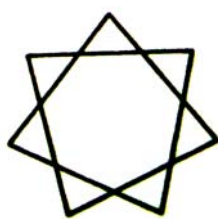


FIG. 143

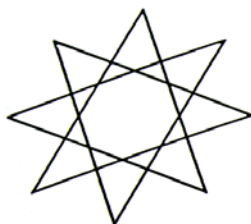


FIG. 144

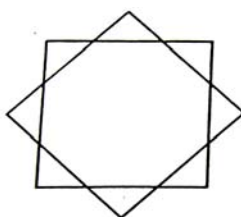
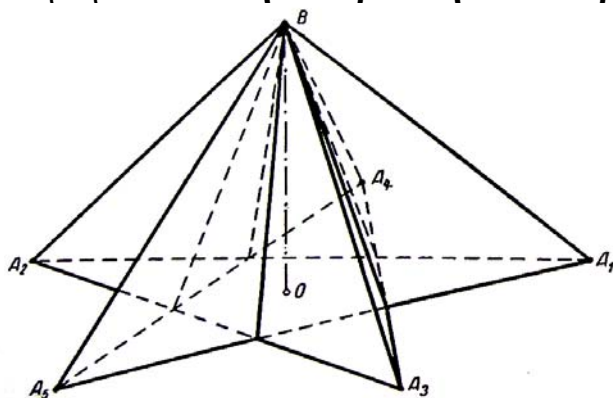


FIG. 145

Αναλογικά με τις κανονικές κυρτές πολύεδρες γωνίες έχουμε τις κανονικές αστεροειδείς πολυεδρικές γωνίες, ένα παράδειγμα αυτών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Εάν ένας στήσει την κατακόρυφο OB στο κέντρο O του κανονικού αστεροειδούς πενταγώνου $A_1A_2A_3A_4A_5$ τότε οι 5 ίσες επίπεδες γωνίες A_1BA_2 , A_2BA_3 , A_3BA_4 , A_4BA_5 και A_5BA_1 παράγουν αυτή την **κανονική αστεροειδή πεντάεδρη γωνία**.



Στο I βιβλίο του έργου του Kepler ‘Αρμονίας του κόσμου’ (Harmonice Mundi) αναπτύσσεται η έννοια του «αστεροειδούς πολυγώνου». Περαιτέρω ανάπτυξη είχαμε από τον T. Bradwardine και τον C. De Bouvelles, όπου ο δεύτερος στο έργο του ‘Geometriae introductionis Libri VI (Παρίσι, 1503)’ παρατήρησε ότι τα αστεροειδή πολύγωνα λαμβάνονται από την προέκταση των πλευρών των κυρτών πολυγώνων.

Ο Kepler εισήγαγε μία διάκριση των πολυγώνων (κυρτών και αστεροειδών) σε δύο κατηγορίες, εκ των οποίων η μία περιλάμβανε πολύγωνα κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη και η άλλη πολύγωνα που απαιτούσαν ανώτερα μέσα για την κατασκευή τους. Ειδικότερα, σταμάτησε στο κανονικό επτάγωνο αποδεικνύοντας ότι ο λόγος της πλευράς του προς την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι ρίζα της εξίσωσης $7 - 14\chi^2 + 7\chi^4 - \chi^6 = 0$ ⁴⁷ (*).

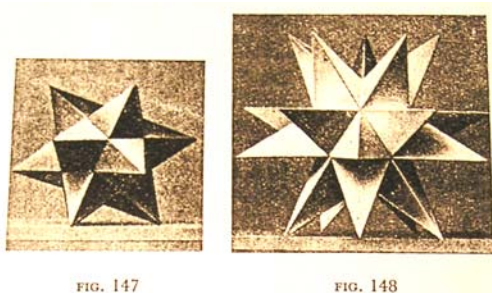
Επιπλέον παρατήρησε ότι η πολλαπλότητα των ριζών της (*) ανταποκρίνεται στην ύπαρξη 3 κανονικών πενταγώνων με δεδομένες

⁴⁷ [11; Τόμος Β Σελ. 177]

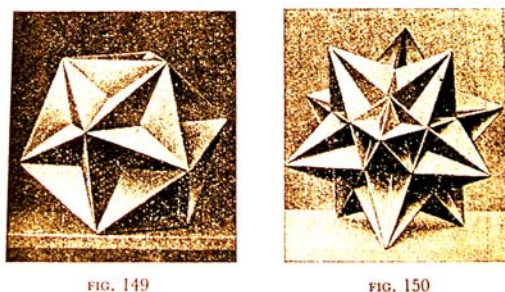
κορυφές, ενός κυρτού και δύο αστεροειδών. Ανάλογα, συμβαίνουν και στα υπόλοιπα πολύγωνα διότι π.χ. η ανάλογη εξίσωση έχει για το πεντάγωνο δύο ρίζες, για το εννιάγωνο τέσσερις κλπ. Άρα ο Kepler ανακάλυψε ότι αυτή η εξίσωση οδηγεί συγχρόνως σε όλα τα παρόμοια πολύγωνα, κυρτά και αστεροειδή.

Στην αρχή του 17^{ου} αιώνα ο Kepler ανακάλυψε την ύπαρξη 2 κανονικών αστεροειδών πολυέδρων και το 1810 ο Poinsot (1777 – 1859) ερεύνησε 4 τέτοια πολύεδρα τα οποία ονομάστηκαν **πολύεδρα Poinsot**⁴⁸. Αυτά είναι τα εξής⁴⁹ :

1. Μικρότερο αστεροειδή δωδεκάεδρο (σχ.147). Έχει 12 όψεις, καθεμία είναι ένα αστεροειδή πεντάγωνο, 30 ακμές και 12 κορυφές, καθεμία είναι κορυφή μιας κανονικής πεντάεδρης κυρτής γωνίας.
2. Μεγαλύτερο αστεροειδή δωδεκάεδρο (σχ.148). Έχει 12 όψεις, καθεμία είναι ένα κανονικό αστεροειδή πεντάγωνο, 30 ακμές και 20 κορυφές, καθεμία είναι κορυφή μιας κανονικής τριέδρης γωνίας.



3. Μεγαλύτερο δωδεκάεδρο (σχ.149). Έχει 12 όψεις, καθεμία είναι ένα κανονικό κυρτό πεντάγωνο, 30 ακμές και 12 κορυφές, καθεμία είναι κορυφή μιας κανονικής αστεροειδούς πεντάεδρης γωνίας.
4. Μεγαλύτερο εικοσάεδρο (σχ.150). Έχει 20 όψεις, καθεμία είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο, 30 ακμές και 12 κορυφές, καθεμία είναι κορυφή μιας κανονικής αστεροειδούς πεντάεδρης γωνίας.



⁴⁸ [12; Σελ. 143]

⁴⁹ Για περισσότερες πληροφορίες [6; Σελ. 168-173]

Κεφάλαιο 4

Πολύτοπα

Σε αυτό το κεφάλαιο βρίσκουμε τα κανονικά πολύεδρα σε 4 και παραπάνω διαστάσεις με τη βοήθεια του συμβόλου Schläfli. Θα αποδείξουμε ότι για τις 4 διαστάσεις τα κανονικά πολύεδρα (πολύχωρα) είναι 6 και για παραπάνω διαστάσεις τα κανονικά πολύεδρα (πολύτοπα) είναι 3.

Υπάρχουν τρεις τρόποι προσέγγισης της Ευκλείδειας γεωμετρίας για τις 4 και παραπάνω διαστάσεις : ο αξιωματικός, ο αλγεβρικός και ο διαισθητικός. Οι δύο πρώτοι τρόποι έχουν ερμηνευτεί πλήρως από τους Sommerville και Neville. Ο τρίτος τρόπος είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί αφού η οπτικοποίηση των στερεών με ανάλογο τρόπο από τη μία στις δύο διαστάσεις, από τις δύο στις τρεις διαστάσεις κ.ο.κ. δεν οδηγεί πάντα σε σωστά αποτελέσματα. Για π.χ. βλέποντας ότι η περιφέρεια ενός κύκλου είναι $2\pi r$ και η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι $4\pi r^2$ αναλογικά και χωρίς υπολογισμούς θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η υπερεπιφάνεια μιας υπερσφαίρας θα ήταν $6\pi r^3$ ή $8\pi r^3$, που στην πραγματικότητα όμως είναι $2\pi^2 r^3$ και με καμιά διαίσθηση δεν θα καταλήγαμε σ' αυτό χωρίς υπολογισμούς.

Ορισμός 20

Τα πολύεδρα σε έναν n -διάστατο χώρο με $n \geq 4$ καλούνται **πολύτοπα** και ιδιαίτερα για $n = 4$ καλούνται **πολύχωρα**.

Ορισμός 21

Το πολύχωρο οριοθετείται από 3-διάστατες όψεις που καλούνται **κελλιά** (Cells).

Ορισμός 22

Το σύνορο ενός n -διάστατου πολύτοπου αποτελείται από **υπερόψεις** (hyperfaces) οι οποίες είναι $(n-1)$ -διάστατα πολύτοπα που ενώνονται στις **υπερακμές** (hyperedges), οι οποίες είναι $(n-2)$ -διάστατα πολύτοπα.

Οι 4 κορυφές ενός τετραέδρου καθορίζουν ένα υπερεπίπεδο το οποίο δίνεται από μία μόνη γραμμική ισότητα που συνδέει τις 4 συντεταγμένες.

Ορισμός 23

Κανονικά πολύτοπα είναι τα κυρτά στερεά (κλειστά) όπου όλα τα σχηματιζόμενα κομμάτια (κορυφές, ακμές, όψεις, υπερόψεις) έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά.

Αυτό σημαίνει ότι οι κορυφές έχουν τον ίδιο αριθμό γειτονικών στοιχείων, οι ακμές έχουν το ίδιο μήκος, τα πολύγωνα έχουν όλα το ίδιο σχήμα και εμβαδό και οι υπερόψεις έχουν το ίδιο όγκο.

Όπως για τα κανονικά πολύεδρα συμφωνήσαμε ότι οι όψεις τους θα είναι κανονικά πολύγωνα, έτσι και για τα κανονικά πολύτοπα συμφωνούμε ότι τα οριοθετημένα κελλιά τους θα είναι κανονικά πολύεδρα. Το πολύτοπο καλείται και n κελλί εάν οριοθετείται από n πολύεδρα.

Στις 2 διαστάσεις υπάρχει ένα άπειρο πλήθος κανονικών πολύτοπων.

Στις 3 διαστάσεις είδαμε ότι υπάρχουν μόνο 5, τα γνωστά Πλατωνικά Στερεά.

Στις 4 διαστάσεις θα δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο 6 κανονικά πολύτοπα. Αυτός είναι ο μέγιστος αριθμός ο οποίος υπάρχει σε οποιαδήποτε διάσταση μεγαλύτερη του 4 αφού για περισσότερες διαστάσεις θα δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 κανονικά πολύτοπα.

Στις 4 διαστάσεις, τα κανονικά πολύτοπα χαρακτηρίζονται από ένα 3-ψήφιο σύμβολο Schläfli $\{p, q, r\}$. Το $\{p, q, r\}$ λαμβάνεται σαν η συνένωση των 2-ψήφιων συμβόλων Schläfli $\{p, q\}$, $\{q, r\}$, όπου το $\{p, q\}$ χαρακτηρίζει το κελλί και το $\{q, r\}$ χαρακτηρίζει το σχήμα κορυφής (vertex figure). Τα κελλιά είναι ενωμένα μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε όψη $\{p\}$ να ανήκει σε 2 κελλιά και κάθε ακμή σε r κελλιά. [Το $\{r, q, p\}$ καλείται **αντίθετο** (reciprocal) του $\{p, q, r\}$]. Έτσι και το $\{p, q, \dots, v, w\}$ έχει κελλιά $\{p, q, \dots, v\}$ και σχήματα κορυφής $\{q, \dots, v, w\}$.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τα πολύεδρα στις περισσότερες διαστάσεις ξεκινώντας από τις 4 διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τις διέδρες γωνίες.

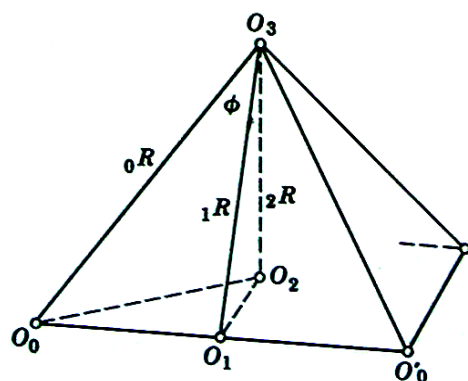
Η διέδρη γωνία του τετραέδρου $\{3, 3\}$ είναι λιγότερη από 71° οπότε μπορούμε να τοποθετήσουμε 3, 4, ή 5 (αλλά όχι περισσότερα) τετράεδρα μαζί με μια κοινή ακμή έτσι ώστε να αρχίσουμε την κατασκευή των $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$. Επίσης, οι διέδρες γωνίες του οκταέδρου και δωδεκαέδρου είναι ανάμεσα στις 90° και 120° οπότε τοποθετούμε μόλις 3 από αυτά μαζί σε μια ακμή ώστε να λάβουμε τα $\{3, 4, 3\}$ και $\{5, 3, 3\}$. Το εικοσάεδρο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αυτό τον τρόπο μιας και η διέδρη γωνία του είναι μεγαλύτερη από 120° . Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι τα μόνο πιθανά πεπερασμένα πολύτοπα στις 4-διαστάσεις είναι $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 3, 5\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 4, 3\}$ και $\{5, 3, 3\}$.

Για μεγαλύτερες διαστάσεις όμως δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε αυτό τον τρόπο, οπότε πρέπει να βρούμε άλλον τρόπο. Δηλαδή βλέπουμε ότι όλη η θεωρία επεκτείνεται αλλά όχι και η απόδειξη. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει το σύμβολο Schläfli.

Πρώτα θα ορίσουμε κάποια βασικά στοιχεία που θα μας βοηθήσουν μετά να τα γενικεύσουμε στα πολύτοπα ώστε να βρούμε τον γενικό τρόπο εύρεσης των πολυτόπων⁵⁰.

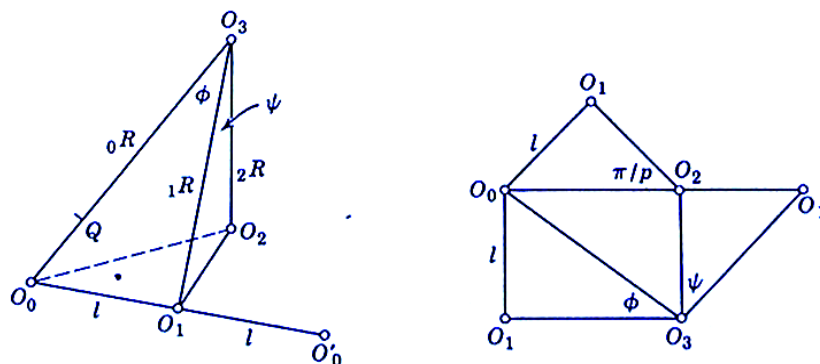
Ένα στερεό πρότυπο του $\{p, q\}$ μπορεί να φτιαχτεί από F p -γωνικές πυραμίδες με κατάλληλο ύψος τοποθετημένες μαζί σε μία κοινή κορυφή τους, η οποία αποτελεί το κέντρο O_3 του πολυέδρου. Το σημείο O_3 είναι το κοινό κέντρο 3 σφαιρών : του περιγεγραμμένου κύκλου (circumsphere), ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές, της σφαίρας από τα μέσα (mid-sphere) που περιλαμβάνει τους εγγεγραμμένους κύκλους των όψεων, ο οποίος εφάπτεται με όλες τις ακμές στα μέσα τους και του εγγεγραμμένου κύκλου (insphere), ο οποίος εφάπτεται όλες τις όψεις στα κέντρα τους.

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου R_0 εμφανίζεται σαν η πλευρική ακμή οποιασδήποτε πυραμίδας, η ακτίνα του mid-sphere R_1 εμφανίζεται σαν το ύψος μιας πλευρικής όψης και η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου R_2 εμφανίζεται σαν το ύψος ολόκληρης της πυραμίδας.



Σε μία p -γωνη πυραμίδα στην κορυφή της O_3 ενώνονται p γραμμές. Με την βοήθεια αυτών των p επιπέδων η στερεά πυραμίδα διαχωρίζεται σε $2p$ συμπτώσιμα, μη κανονικά, τετράεδρα. Ένα τέτοιο τετράεδρο είναι το $O_0O_1O_2O_3$ στο παρακάτω σχήμα.(a).

⁵⁰ [5; Σελ. 155-157]

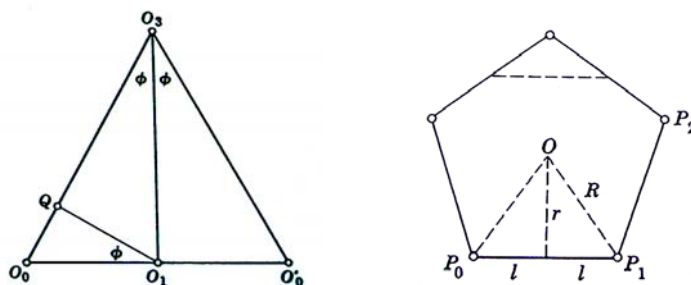


Το O_0 είναι η κορυφή του πολυέδρου, O_1 είναι το μέσο της ακμής O_0O_0' , O_2 είναι το κέντρο μιας όψης και O_3 είναι το κέντρο ολόκληρου του στερεού. Μιας και το επίπεδο $O_1O_2O_3$ διχοτομεί κάθετα την ακμή O_0O_0' η O_0O_1 είναι κάθετη στα O_1O_2 και O_1O_3 . Επειδή $O_0O_1O_2$ είναι το επίπεδο μιας όψης, η ακτίνα O_3O_2 του εγγεγραμμένου κύκλου είναι κάθετη στα O_0O_2 και O_1O_2 . Έτσι, οι τρεις γραμμές O_0O_1 , O_1O_2 , O_3O_2 είναι κάθετες ανά δύο και οι 4 όψεις είναι ορθογώνια τρίγωνα.

Δηλαδή έχουμε $O_0O_1=l$, $O_0O_3=R_0$, $O_1O_3=R_1$, $O_2O_3=R_2$, η γωνία $O_0O_2O_1 = \pi/p$. Η γωνία $\phi = \text{γωνία } O_0O_3O_1$ και ισούται με το μισό της γωνίας που είναι απέναντι από το κέντρο και από μία ακμή. Η γωνία $\psi = \text{γωνία } O_1O_3O_2$ και είναι συμπληρωματική της γωνίας $O_2O_1O_3$, η οποία ισούται με το μισό της διέδρης γωνίας του πολυέδρου. Οπότε, η διέδρη γωνία του πολυέδρου είναι $\pi - 2\psi$.

Αναζητώντας αυτές τις γωνίες υπενθυμίζουμε ότι σχήμα κορυφής του $\{p, q\}$ είναι ένα πολύγωνο σχηματισμένο από τα μέσα των q ακμών στην κορυφή O_0 . Δηλαδή, είναι ένα επίπεδο πολύγωνο μιας και οι κορυφές του κείτονται πάνω σ' ένα κύκλο που είναι η τομή δύο σφαιρών : του mid-sphere με κέντρο O_3 και ακτίνα $O_1O_3=R_1$ και της σφαίρας με κέντρο O_0 και ακτίνα $O_0O_1=l$. Άρα, το σχήμα κορυφής του $\{p, q\}$ είναι ένα $\{q\}$ πλευράς $2l\cos\pi/p$.

Μιας και το επίπεδο του είναι κάθετο στο O_0O_3 το κέντρο του Q είναι το άκρο της καθέτου από το O_1 στο O_0O_3 και η ακτίνα αυτού του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $QO_1 = l\cos\phi$.



Τώρα από το δεύτερο παραπάνω σχήμα έχουμε ότι $R = l \csc \pi / q$ $r = l \cot \pi / q$.
 Βάζοντας στην θέση του l το $l \cos \pi / p$ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου γίνεται $l \cos \pi / p \csc \pi / q$.

Δηλαδή $\cos \varphi = \cos \pi / p \csc \pi / q = (\cos \pi / p) / (\sin \pi / q)$.

Οπότε από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος.(a) παίρνουμε

$$R_0 = l \csc \varphi,$$

$$R_1 = l \cot \varphi,$$

$$R_2^2 = R_1^2 - (l \cot \pi / p)^2,$$

$$\cos \psi = R_2 / R_1.$$

Παρατήρηση

Εάν θέλουμε να εξαλείψουμε το φ θέτουμε $\kappa^2 = \sin^2 \pi / q - \cos^2 \pi / p = \sin^2 \pi / p - \cos^2 \pi / q$ και έτσι έχουμε $\sin \varphi = \kappa \csc \pi / q$. Οπότε

$$R_0 = (1/\kappa) \sin \pi / q,$$

$$R_1 = (1/\kappa) \cos \pi / p,$$

$$R_2 = (1/\kappa) \cot \pi / p \cos \pi / q,$$

$$\cos \psi = (\cos \pi / q) / (\sin \pi / p) \text{ και}$$

η διέδρη γωνία είναι $\pi - 2\psi = 2 \arcsin \{(\cos \pi / q) / (\sin \pi / p)\}$.

Τώρα θα δούμε την αναγκαία υπόθεση ώστε να υπάρξει το πολύτοπο $\{p, q, \dots, v, w\}$, σύμφωνα με τον Coxeter⁵¹.

Οι γωνίες $\varphi = O_0 O_n O_1$, $\chi = O_0 O_n O_{n-1}$, $\psi = O_{n-2} O_n O_{n-1}$ είναι οι γενικεύσεις των γωνιών φ, χ, ψ που ορίσαμε προηγουμένως. Ακόμα ισχύει ότι $R_0 \sin \varphi = O_0 O_1 = l$, $2\varphi = \eta$ γωνία που βαίνει (subtended) στο κέντρο από μια ακμή (μήκους $2l$), $\chi = \eta$ γωνία που βαίνει από την ακτίνα του περιγεγραμμένου ενός κελλιού και $(\pi - 2\psi)$ είναι η διέδρη γωνία (ανάμεσα στα υπερεπίπεδα περιλαμβάνοντας 2 γειτονικά κελλιά).

Δηλώνοντας με R_0', l', φ' , τα αντίστοιχα με τα R_0, l, φ , για το σχήμα κορυφής $\{q, \dots, v, w\}$ παίρνουμε $R_0' \sin \varphi' = l' = l \cos \pi / p$ και θεωρώντας ότι έχουμε O_n αντί του O_3 παίρνουμε $R_0' = l \cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \csc \varphi' \cos \pi / p \Rightarrow \sin^2 \varphi = 1 - \left(\frac{\cos \pi / p}{\sin \varphi'} \right)^2$$

Εάν το φ'' αναφέρεται στο 2° σχήμα κορυφής και το $\varphi^{(k)}$ στο k° σχήμα κορυφής παίρνουμε αναλογικά

$$\sin^2 \varphi' = 1 - \left(\frac{\cos \pi / q}{\sin \varphi''} \right)^2, \dots, \sin^2 \varphi^{(n-3)} = 1 - \left(\frac{\cos \pi / v}{\sin \pi / w} \right)^2$$

$$\text{αφού } \varphi^{(n-2)} = \pi / w$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά καταλήγουμε :

⁵¹ [4; Σελ. 133-136]

$$\sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \pi/p}{1 - \frac{\cos^2 \pi/q}{1 - \frac{\cos^2 \pi/v}{1 - \cos^2 \pi/w}}}$$

δηλαδή $\sin^2 \phi = \Delta_{p,q,\dots,v,w} / \Delta_{q,\dots,v,w}$ (1)

όπου η Δ – λειτουργία καθορίζεται από την επανάληψη της φόρμουλας

$\Delta_{p,q,r,\dots,w} = \Delta_{q,r,\dots,w} - \Delta_{r,\dots,w} \cos^2 \pi/p$ με αρχικές σχέσεις :

$$\Delta = 1,$$

$$\Delta_p = \sin^2 \pi/p,$$

$$\Delta_{p,q} = \sin^2 \pi/p - \cos^2 \pi/q = \sin^2 \pi/q - \cos^2 \pi/p,$$

$$\Delta_{p,q,r} = \sin^2 \pi/p \sin^2 \pi/r - \cos^2 \pi/q,$$

$$\Delta_{p,q,r,s} = \sin^2 \pi/p \sin^2 \pi/s - \sin^2 \pi/r \cos^2 \pi/q - \cos^2 \pi/q \sin^2 \pi/s.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\Delta_{p,q,\dots,v,w} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & 1 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

με $c_1 = \cos \pi/p$, $c_2 = \cos \pi/q$, $c_3 = \cos \pi/r, \dots$, $c_{n-2} = \cos \pi/v$, $c_{n-1} = \cos \pi/w$ και προκύπτει ότι $\Delta_{p,q,r,\dots,v,w} = \Delta_{w,v,\dots,q,p}$

Παρόμοια μπορούμε να το συμβολίσουμε και σαν

$$\Delta_{p,q,r,\dots,v,w} = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \dots \pm \sigma_{[n/2]}$$

με $\sigma_1 = \sum c_i^2$, $\sigma_2 = \sum c_i^2 c_j^2$ για $i < j-1$, $\sigma_3 = \sum c_i^2 c_j^2 c_k^2$ για $i < j-1$, $j < k-1$

κ.ο.κ.

$$\begin{aligned} \Delta_{3^{n-1}} &= 1 - \frac{1}{4}(n-1) + \frac{1}{4^2} \binom{n-2}{2} - \frac{1}{4^3} \binom{n-3}{3} + \dots \\ &= \frac{n+1}{2^n}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{3^{n-2}, 4} = \Delta_{4, 3^{n-2}} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} \frac{n-1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Delta_{4, 3^{n-3}, 4} = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-3}} = 0.$$

Επαναλαμβάνοντας επαγωγικά την (1) έχουμε ότι

$$\Delta_{p,q,r,\dots,v,w} = \sin^2 \phi \sin^2 \phi' \dots \sin^2 \phi^{(n-2)}, \text{ έτσι } \Delta_{p,q,r,\dots,v,w} \geq 0$$

Η σχέση $\Delta_{p,q,r,\dots,v,w} \geq 0$ δηλώνει την ύπαρξη ενός κανονικού σχήματος αντίστοιχου στο δοθέν σύμβολο $\{p,q,\dots,v,w\}$. Δηλαδή αυτή είναι η σχέση που παίρνουμε με το σύμβολο Schläfli ώστε να ορίζεται από την γνήσια

ανισότητα ένα πεπερασμένο πολύτοπο και από την ισότητα ένα άπειρο πολύτοπο, η κερήθρα, όπου $R_0 = \infty$ και $\varphi=0$.

- Για $n=3$ έχουμε $\Delta_{p,q} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$ (I)

Αυτή την ανισότητα εάν την πολλαπλασιάσουμε με π δηλώνουμε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει το αντίστοιχο άθροισμα γωνιών ώστε να είναι είτε σφαιρικό είτε Ευκλείδειο.

Από την (I) αποδείξαμε ότι παίρνουμε τα 5 Πλατωνικά στερεά.

- Για $n=4$ έχουμε $\Delta_{p,q,r} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} \geq \cos \frac{\pi}{q}$ (II)

Η ανισότητα (II) μας δηλώνει ότι το $2\pi/r$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την διέδρη γωνία $\pi - 2\psi$ του $\{p,q\}$.

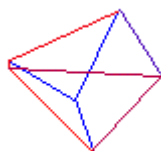
Από την (II) έχουμε ότι υπάρχουν μόνο 6 κανονικά πολύτοπα και μία κερήθρα. Αυτά ισχύουν αφού στο σύμβολο Schläfli $\{p, q, r\}$ τα $\{p, q\}$, $\{q, r\}$ πρέπει να είναι ένα από τα 5 Πλατωνικά, $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$, $\{5,3\}$.

Από αυτά, αυτά που ικανοποιούν την ανισότητα της (II) μας δίνουν τα κανονικά πολύτοπα στις 4 διαστάσεις. Δηλαδή είναι τα : το $\{3, 3, 3\}$ που λέγεται Simplex, το $\{4, 3, 3\}$ που λέγεται υπερκύβος (hypercube), το $\{3, 3, 4\}$ που λέγεται crosspolytope, το $\{3, 4, 3\}$ που λέγεται 24 κελλί, το $\{5, 3, 3\}$ που λέγεται 120 κελλί και το $\{3, 3, 5\}$ που λέγεται 600 κελλί.

Οπότε λεπτομερέστερα είναι :

1) Simplex :

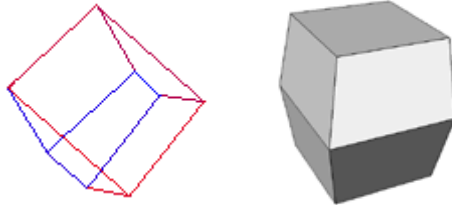
- Γνωστό και σαν πεντάτοπο ή πεντάχωρο.
- Είναι αυτοσυζυγή.
- Είναι τετραδιάστατο ισοδύναμο του τετραέδρου.
- Έχει 5 τετράεδρα κελλιά, 10 τριγωνικές όψεις, 10 ακμές, 5 κορυφές.
- 3 τετράεδρα συνενώνονται σε μία κορυφή.
- Η διαδοχή είναι : σημείο – γραμμή – τρίγωνο – τετράεδρο – simplex.



2) Υπερκύβος (hypercube):

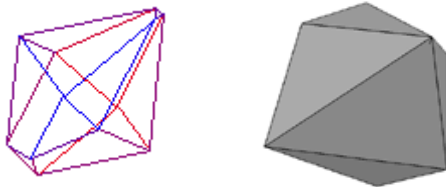
- Γνωστό και σαν Tesseract.
- Είναι συζυγή με το cross πολύτοπο.

- Είναι τετραδιάστατο ισοδύναμο του κύβου.
- Έχει 8 κυβικά κελλιά, 24 τετραγωνικές όψεις, 32 ακμές, 16 κορυφές.
- 3 κύβοι συνενώνονται σε μία ακμή.
- Η διαδοχή είναι : σημείο – γραμμή – τετράγωνο – κύβος – υπερκύβος.



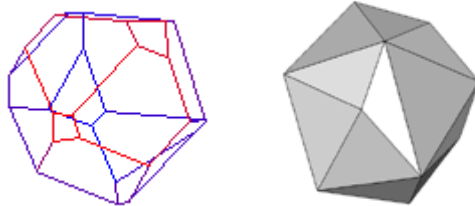
3) crosspolytope :

- Γνωστό και σαν 16 κελλί ή εξαδεκάχωρο (hexadecachoron).
- Συζυγή με υπερκύβο.
- Είναι τετραδιάστατο ισοδύναμο με το οκτάεδρο.
- Έχει 16 τετραεδρικά κελλιά, 32 τριγωνικές όψεις, 24 ακμές, 8 κορυφές.
- 4 τετράεδρα συνενώνονται σε μία ακμή.
- Η διαδοχή είναι : σημείο – γραμμή – τετράγωνο – οκτάεδρο – cross πολύτοπο.



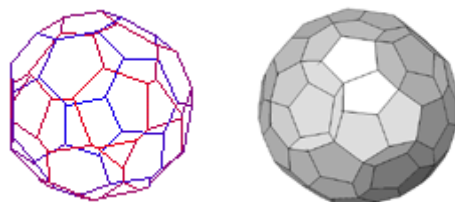
4) 24 κελλί (24 cell) :

- Γνωστό και σαν εικοσιτετράχωρο.
- Είναι αυτοσυζυγή.
- Δεν είναι ισοδύναμο στις άλλες διαστάσεις.
- Έχει 24 οκταεδρικά κελλιά, 96 τριγωνικές όψεις, 96 ακμές, 24 κορυφές.
- 3 οκτάεδρα συνενώνονται σε μία ακμή.



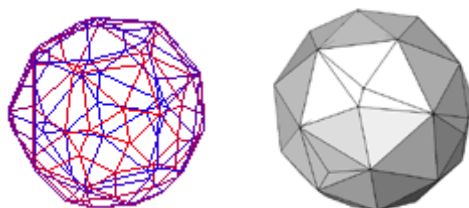
5) 120 κελλί:

- Γνωστό και σαν εκατονεικοσάχωρο (hecatonicosachoron).
- Συζυγή με το 600 κελλί.
- Είναι τετραδιάστατο ισοδύναμο με το δωδεκάχωρο.
- Έχει 120 δωδεκαεδρικά κελλιά, 720 5-πλευρές όψεις, 1200 ακμές, 600 κορυφές.
- 3 δωδεκάεδρα συνενώνονται σε κάθε ακμή.



6) 600 κελλί :

- Γνωστό και σαν εξακοσίχωρο (hexacosichoron).
- Συζυγή με το 120 κελλί.
- Είναι τετραδιάστατο ισοδύναμο με το εικοσάεδρο.
- Έχει 600 τετραεδρικά κελλιά, 1200 τριγωνικές όψεις, 720 ακμές, 120 κορυφές.
- 5 τετράεδρα συνενώνονται σε κάθε ακμή.



Ιδιαίτερα εάν δηλώσουμε με d_0 = τον αριθμό των κορυφών, με d_1 = τον αριθμό των ακμών, με d_2 = τον αριθμό των επίπεδων όψεων, με d_3 = τον αριθμό των 3-διάστατων όψεων κτλ τότε για το καθένα έχουμε :

1. το simplex έχει $d_0=5$, $d_1=d_2=10$, $d_3=5$ και οι πέντε 3-διάστατες όψεις είναι τετράεδρα.
2. ο υπερκύβος έχει $d_0=16$, $d_1=32$, $d_2=24$, $d_3=8$ και 8 κύβοι σχηματίζουν τις 3-διάστατες όψεις.

3. το cross πολύτοπο έχει $d_0=8$, $d_1=24$, $d_2=32$, $d_3=16$ και οι 16 3-διάστατες όψεις είναι ξανά τετράεδρα.
4. το 24 κελλί έχει $d_0=24$, $d_1=d_2=96$, $d_3=24$ και οι 24 όψεις είναι οκτάεδρα.
5. το 120 κελλί έχει $d_0=600$, $d_1=1200$, $d_2=720$, $d_3=120$ και 120 δωδεκάεδρα σχηματίζουν τις όψεις.
6. το 600 κελλί έχει $d_0=120$, $d_1=720$, $d_2=1200$, $d_3=600$ και οι όψεις είναι τετράεδρα.

Παρατήρηση

Οι αριθμοί d_0 , d_1 , d_2 , d_3 για ένα αυθαίρετο 4-διάστατο κυρτό πολύεδρο (ιδιαιτέρως για οποιονδήποτε κανονικό πολύεδρο) ικανοποιούν την σχέση $d_0 - d_1 + d_2 - d_3 = 0$ που καλείται **φόρμουλα Euler – Poincaré**.

Παρατήρηση

Ο υπερκύβος $\{4, 3, 3\}$ με το crosspolytope $\{3, 3, 4\}$ και το 120 κελλί $\{5, 3, 3\}$ με το 600 κελλί $\{3, 3, 5\}$ είναι αντίθετα πολύτοπα.

Τώρα από αυτά, αυτό που ικανοποιεί την ισότητα της (II) είναι το $\{4, 3, 4\}$ που καλείται **κερήθρα**. Το κελλί της κερήθρας είναι ο κύβος $\{4, 3\}$ και σχήμα κορυφής (vertex figure) είναι το οκτάεδρο $\{3, 4\}$ του οποίου οι 8 όψεις είναι τα σχήματα κορυφής των 8 κύβων τα οποία συνενώνουν μία κορυφή. Το τελευταίο 4 στο σύμβολο $\{4, 3, 4\}$ σημαίνει ότι υπάρχουν 4 κελλιά που συνενώνονται σε μία ακμή.

Παρατήρηση

Το εξαγωνικό πλέγμα αναπαριστά τον καλύτερο τρόπο ώστε να διαιρέσουμε μία επιφάνεια σε περιοχές ίσου εμβαδού με την ελάχιστη περίμετρο.

Πολλοί έχουν αναρωτηθεί τι επιλογές είχαν οι μέλισσες εάν ήθελαν να διαιρέσουν μία επίπεδη επιφάνεια σε ίδια ισόπλευρα κελλιά. Στην παράγραφο 3.1 είδαμε ότι μόνο 3 υποψήφια κανονικά πολύγωνα συνενώνονται χωρίς να αφήνουν κενά ανάμεσα τους : τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Άλλα πολύγωνα όπως τα πεντάγωνα και τα οκτάγωνα αφήνουν κενά ανάμεσα τους. Βρέθηκε επίσης ότι εάν είχαμε την ίδια ποσότητα κεριού για την κατασκευή μιας απλής 3-διάστατης εκδοχής για τα 3 υποψήφια σχήματα το εξάγωνο κελλί κρατά περισσότερο κεριό από το τριγωνικό ή το τετράγωνο κελλί. Ισοδύναμα, η περίμετρος του εξαγωνικού κελλιού εσωκλείοντας ένα δοθέν εμβαδό είναι λιγότερη από αυτή του τετραγωνικού ή τριγωνικού κελλιού εσωκλείοντας το ίδιο εμβαδό.

Παράλληλα, αποδεικνύεται ότι το κανονικό εξάγωνο με ίσες πλευρές και 120° γωνίες έχει την μικρότερη περίμετρο από οποιοδήποτε 6-πλευρο

σχήμα ίδιου εμβαδού. Το 1943 ο μαθηματικός L. Fejes Tóth απέδειξε ότι το πλεονέκτημα να έχουμε περισσότερα πολύγωνα με περισσότερες από 6 πλευρές είναι λιγότερο από το μειονέκτημα να έχουμε περισσότερα πολύγωνα με λιγότερες πλευρές. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις ο ελάχιστος περιμετρικός τρόπος να εσωκλείσουμε και να ξεχωρίσουμε άπειρες περιοχές ίσου εμβαδού είναι το κανονικό εξαγωνικό πλέγμα της κερήθρας.

- Για $n=5$ έχουμε $\Delta_{p,q,r,s} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \pi / q}{\sin \pi / p}\right)^2 + \left(\frac{\cos \pi / r}{\sin \pi / s}\right)^2 \leq 1$ (III)

Η οποία μας δηλώνει ότι οι τιμές του ψ για τα $\{p,q\}$ και $\{q,s\}$ είναι μαζί μεγαλύτερες ή ίσες από $\pi/2$.

Όμοια με $n=4$ καταλήγουμε ότι την ανισότητα (III) την ικανοποιούν 3 κανονικά πολύτοπα $\{3, 3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 3, 4\}$, $\{4, 3, 3, 3\}$, την ισότητα (III) την ικανοποιούν 3 κερήθρες $\{3, 3, 4, 3\}$, $\{3, 4, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3, 4\}$ και αποκλείονται οι εξής περιπτώσεις $\{3, 3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3, 4\}$, $\{5, 3, 3, 5\}$.

Κάνοντας ανάλογες μελέτες για χώρους υψηλότερων διαστάσεων, αναγωγικά, βρίσκουμε ότι μόνο 3 κανονικά πολύτοπα υπάρχουν.

Πολύτοπα	Κορυφές	Συζυγή με
$(n+1)$ κελλί	$1+n$	Αυτοσυζυγή
$2n$ κελλί	2^n	2^n κελλί
2^n κελλί	$2n$	$2n$ κελλί

Τα 3-διάστατα πολύεδρα αντίστοιχα σ' αυτούς τους 3 τύπους πολύτοπων είναι τα τετράεδρο, κύβος και οκτάεδρο ($n+1 = 4$, $2n = 6$, $2^n = 8$).

Τα 4-διάστατα αντίστοιχα σ' αυτούς τους 3 τύπους πολύτοπων είναι το 5 κελλί, το 8 κελλί και το 16 κελλί.

Οπότε το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο στις 3 διαστάσεις, όπως και τα 24 κελλί, 120 κελλί, 600 κελλί στις 4 διαστάσεις δεν υπάρχουν αντίστοιχα σε χώρους μεγαλύτερης διάστασης.

Αυτά τα 3 πολύτοπα καλούνται και n -simplex, n -κύβος, n -crosspolytope. Δηλαδή :

n -simplex :

- Γνωστό και σαν υπερτετράεδρο (hypertetrahedron).
- Είναι αυτοσυζυγή.
- Έχει $n+1$ κελλιά καθένα από τα οποία είναι ένα $(n-1)$ -simplex.
- Έχει $n+1$ κορυφές.
- Έχει $n(n+1) / 2$ ακμές.

n- κύβος :

- Γνωστό και σαν υπερκύβος (hypercube).
- Συζυγή με το n-crosspolytope.
- Έχει $2n$ κελλιά με καθένα ένα $(n-1)$ -κύβο.
- Έχει 2^n κορυφές.
- Έχει $n2^{n-1}$ ακμές.
- Έχει $2n(n-1)$ $(n-2)$ -τετράγωνα.

n-crosspolytope :

- Γνωστό και σαν υπεροκτάεδρο (hyperoctahedron).
- Συζυγή με n-κύβο.
- Έχει 2^n κελλιά με καθένα ένα $(n-1)$ -simplex.
- Έχει $2n$ κορυφές.
- Έχει $2n(n-1)$ ακμές.
- Έχει $n2^{n-1}$ $(n-2)$ -crosspolytopes.

Πολυεδρική φόρμουλα

Αριθμό κορυφών – αριθμό ακμών + αριθμό όψεων – αριθμό κελλιών = 0

Παρατήρηση

Δηλώνουμε με d_0 =τον αριθμό των κορυφών, με d_1 =τον αριθμό των ακμών, με d_2 =τον αριθμό των επίπεδων όψεων, με d_3 = τον αριθμό των 3-διάστατων όψεων κτλ. Οι αριθμοί d_k ($k=0,1,\dots,n-1$) ικανοποιούν την σχέση $d_0 - d_1 + d_2 + \dots + (-1)^{n-1}d_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$ (*) η οποία καλείται **φόρμουλα Euler – Poincaré**⁵².

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ισότητας είναι ίσο με το 0 για άρτιο n και είναι ίσο με 2 για περιττό n .

Ανακαλώντας αυτό :

Για $n=1$ το κυρτό πολύεδρο γίνεται τμήμα για το οποίο $d_0=2$, όπου οι 2 κορυφές είναι τα δύο άκρα του τμήματος.

Για $n=2$ το κυρτό πολύεδρο γίνεται κυρτό πολύγωνο στο οποίο ο αριθμός d_0 των κορυφών είναι ίσος με τον αριθμό d_1 των πλευρών. Έτσι έχουμε $d_0 - d_1 = 0$.

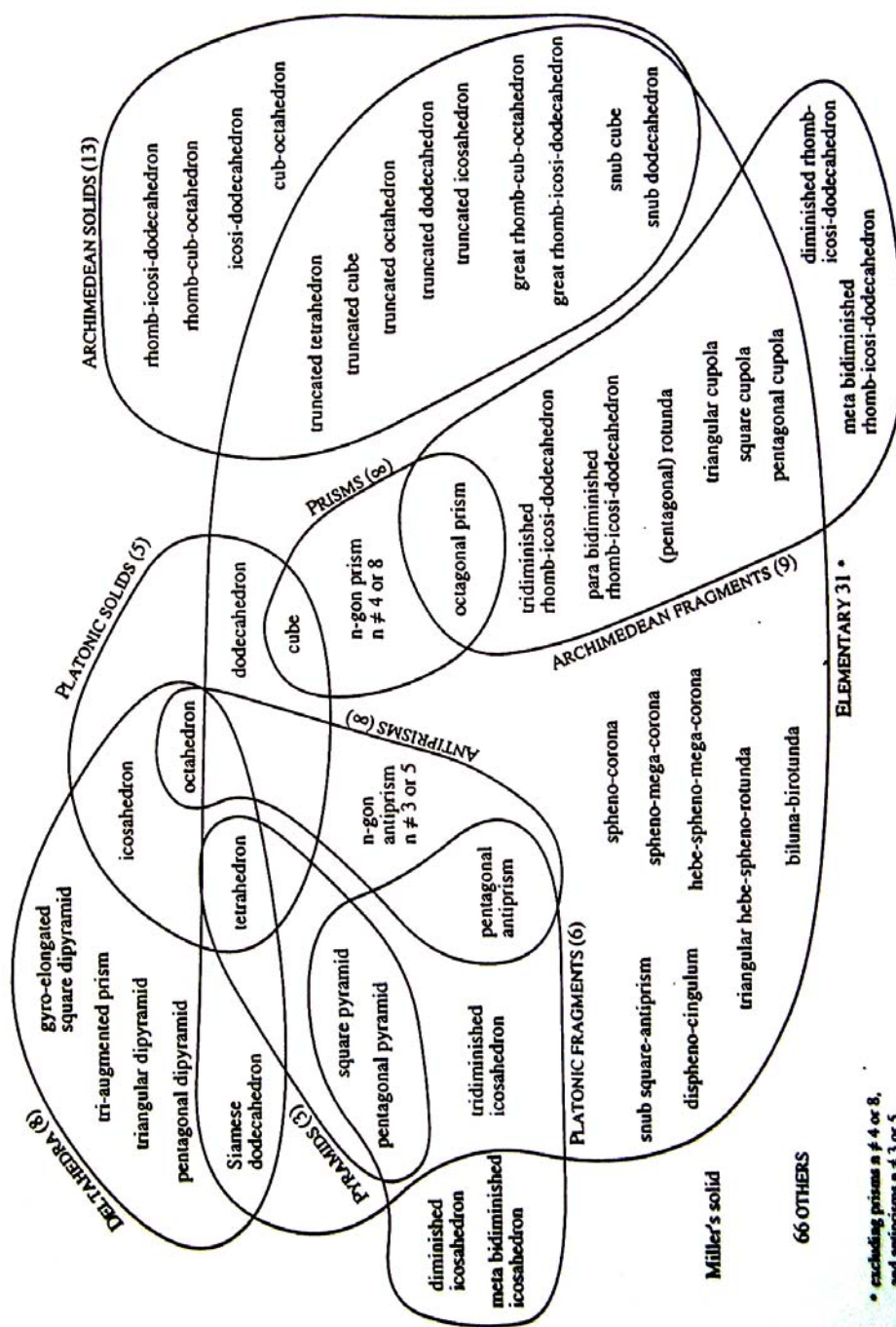
Για $n=3$ το θεώρημα του Euler μας δίνει $d_0 - d_1 + d_2 = 2$.

Για $n=4$ είδαμε ότι ικανοποιούν την σχέση $d_0 - d_1 + d_2 - d_3 = 0$.

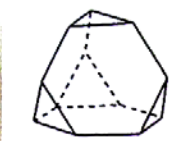
⁵² [12; Σελ. 147]

Κεφάλαιο 5. Παράρτημα

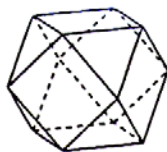
5.1 Η οικογένεια όλων των κυρτών πολυέδρων με κανονικές όψεις φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



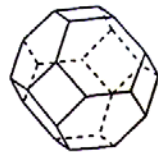
5.2 Τα 13 Αρχιμήδεια Στερεά είναι τα εξής:



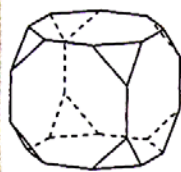
truncated tetrahedron



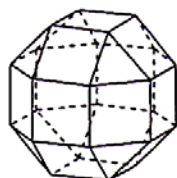
cub-octahedron



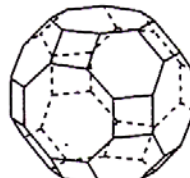
truncated octahedron



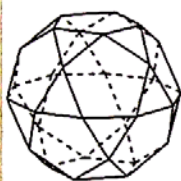
truncated cube



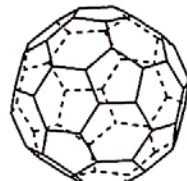
rhomb-cub-octahedron



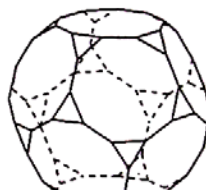
great rhomb-cub-octahedron



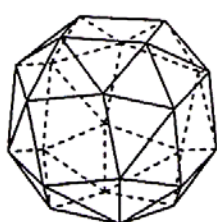
icosi-dodecahedron



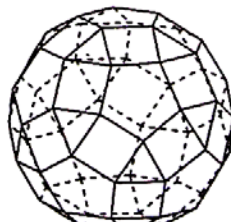
truncated icosahedron



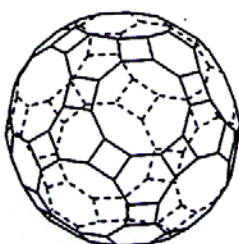
truncated dodecahedron



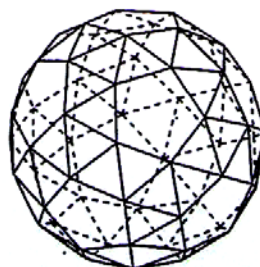
snub cube



rhomb-icosi-dodecahedron



great rhomb-icosi-dodecahedron

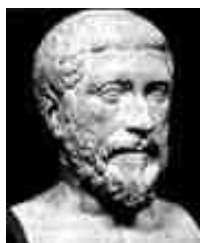


snub dodecahedron

5.3 Τα 3 είδη πολυτόπων μέχρι τις 4 διαστάσεις είναι :

οικογένεια	n-Πολύτοπα	διαστάσεις	V 0	E 1	F 2	C 3	T 4	p- όψεις p
Simplex		n	$C(n+1, p+1)$					
	Σημείο	0	1					
	Τμήμα	1	2	1				
	Τρίγωνο	2	3	3	1			
	Τετράεδρο	3	4	6	4	1		
	Πεντάχωρο	4	5	10	10	5	1	
Cross Polytope		n	$C(n, p+1) 2^{p+1}$					
	Σημείο	0	1					
	Τμήμα	1	2	1				
	Τετράγωνο	2	4	4	1			
	Οκτάεδρο	3	6	12	8	1		
	Hexadecachoron Εξαντεκάχωρο	4	8	24	32	16	1	
Hypercube		n	$C(n, p) 2^{n-p}$					
	Σημείο	0	1					
	Τμήμα	1	2	1				
	Τετράγωνο	2	4	4	1			
	Κύβος	3	8	12	6	1		
	Tesseract	4	16	32	24	8	1	

5.4 Θα δούμε με μία χρονολογική σειρά τους κύριους υποστηρικτές που οδήγησαν σε ανακαλύψεις γύρω από τα πολύτοπα.



Ο Πυθαγόρας (569π.Χ. – 475π.Χ.) γεννήθηκε στη Σάμο. Παρόλο που παλαιότερα ευρήματα αναγνωρισμένα από μαθηματικούς και ιστορικούς, χρονολογούνται πριν τον Πυθαγόρα, όπως οι Βαβυλώνιοι οι οποίοι ήταν οικείοι με το περίφημο πυθαγόρειο θεώρημα $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ το 3750 π.Χ., αυτό δεν ανακαλύφθηκε μέχρι το 1962. Κάποια από τα πρώτα βασικά γεωμετρικά θεωρήματα αποδόθηκαν στον Πυθαγόρα, ο οποίος χαρακτηριζόταν ως ο πρώτος αγνός μαθηματικός. Πέρα από το σπουδαίο πυθαγόρειο θεώρημα, στον Πυθαγόρα αποδόθηκαν κάποια βασικά πολυγωνικά θεωρήματα όπως ότι : Ένα πολύγωνο με n πλευρές έχει άθροισμα εσωτερικών γωνιών $2n - 4$ ορθές γωνίες και το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι ίσο με 4 ορθές γωνίες. Αυτό τελικά περιγράφηκε με περισσότερη λεπτομέρεια από τον Ευκλείδη. Παρόλο που ήταν άγνωστο το ποιος πρώτος έθεσε την ιδέα, μεταγενέστεροι του Πυθαγόρα, οι οποίοι ήταν σχετικοί με πρόχειρους συλλογισμούς του π , πρέπει να είχαν αναγνωρίσει ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από κανονικά πολύγωνα και ένα κανονικό πολύγωνο με ένα άπειρο αριθμό κορυφών ισοδυναμεί με ένα τέλειο κύκλο. Αυτά τα πολύγωνα λέγονται επίσης και κανονικά κυρτά πολύτοπα στις 2 διαστάσεις, έχοντας σύμβολο Schläfli $\{n\}$, όπου n είναι ο αριθμός των γωνιών.



Ο Πλάτωνας (427π.Χ. – 347π.Χ.) έζησε στην Αθήνα και ίδρυσε την Ακαδημία. Στο έργο του Τίμαιος υπάρχει μία μαθηματική κατασκευή στοιχείων όπου ο κύβος, το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο δίνονται σαν τα σχήματα των στοιχείων της γης, της φωτιάς, του αέρα, του νερού και της υφελίου [αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.2]. Η αυθεντική δουλειά του χάθηκε αλλά περιγράφηκε αργότερα από τον Ευκλείδη.



Ο Ευκλείδης (325π.Χ. – 265π.Χ.) πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Το 300π.Χ. ο Ευκλείδης, μαθητής της σχολής του Πλάτωνα, απέδειξε στο χειρόγραφο του ‘Τα Στοιχεία XII’ ότι στις 3 διαστάσεις υπάρχουν μόνο 5 κανονικά πολύεδρα, όπου οι όψεις τους αποτελούνται από κυρτά κανονικά πολύγωνα [αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.2]. Στην λεπτομερή δουλειά του εισάχθηκε για πρώτη φορά η έννοια του 3-διάστατου ορθογωνίου χώρου, ο οποίος τώρα καλείται Ευκλείδειος χώρος.



Ο Αρχιμήδης των Συρακουσών (287π.Χ. – 212π.Χ.) πέρα από το περίφημο ‘Εύρηκα’ εισήγαγε την θεωρία του για να επιπλέουν κάποια αντικείμενα. Αυτός πρώτος εκτίμησε ακριβώς το π να είναι $223/71 < \pi < 22/7$ με την μέθοδο της εξάντλησης από την οποία λαμβάνει 3,1418, με ένα λάθος της τάξης $\pm 0,0002\pi$. Αυτό ήταν πιο ακριβές από αυτό που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες, ότι είναι $3 \frac{1}{8}$ ή 3,125. Ο Αρχιμήδης απέδειξε στο βιβλίο του ‘Η μέθοδος’ ότι η ολική επιφάνεια του περιγεγραμμένου κυλίνδρου ισούται με τα $2/3$ της ολικής επιφάνειας της σφαίρας. Για αυτό το αποτέλεσμα ήταν τόσο περήφανος ώστε έδωσε εντολή να το χαράξουν στην ταφόπλακα του. Το αυθεντικό χειρόγραφο του και η ταφόπλακα του χάθηκαν, αλλά ένα αντίγραφο του χειρογράφου του ανέκυψε με εκπληκτικό τρόπο σε δημοπρασία του Christie το 1998.

Τα αυθεντικά χειρόγραφα σχετικά με τα πολύεδρα ήταν επίσης χαμένα αλλά ο Πάππους από την Αλεξάνδρεια έγραψε τον 4^ο αιώνα στο βιβλίο V περί το εύρημα του Αρχιμήδη ότι στις 3-διαστάσεις υπάρχουν ακριβώς 13 ημικανονικά κυρτά πολύτοπα όπου 5 από αυτά λαμβάνονται από τα κόλoura των Πλατωνικών Στερεών.



Ο Johannes Kepler (1571 – 1630) βοήθησε στην ανάπτυξη των κανονικών πολυέδρων [αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.2] και των αστεροειδών πολυγώνων [αναλυτικότερα στην παράγραφο 3.5].



Ο René Descartes γεννήθηκε 31 Μαρτίου 1596 στο La Haye της Γαλλίας και πέθανε 11 Φεβρουαρίου 1650 στην Στολκχόμη στη Σουηδία. Αναλογικά με το 2-διάστατο θεώρημα του Πυθαγόρα για τα πολύγωνα, στο ‘De Solidorum Elementis’, το θεώρημα του Descartes δηλώνει ότι ‘Το άθροισμα των ελλειμάτων μιας στερεάς γωνίας σε ένα πολύεδρο είναι 8 ορθές γωνίες.’ [αναλυτικότερα στην παράγραφο 2.4]. Ο Descartes δεν έδωσε καμία απόδειξη για το θεώρημα του, η απόδειξη δόθηκε αργότερα από τους Steinitz και Rademacher το 1934 και από τους Ball και Coxeter το 1987. Ένα άλλο θεώρημα του δηλώνει ότι για κανονικά κυρτά πολύεδρα τα $(2v-4) / f$ και $(2f-4) / v$ πρέπει να είναι ακέραιοι, όπου v είναι οι κορυφές και f είναι οι όψεις. Αυτό είναι πιθανό μόνο για $v = 4, 6, 8, 12$ ή 20 και $f = 4, 8, 6, 20$ ή 12 , που αντιστοιχούν στις κορυφές και στις όψεις των 5 Πλατωνικών Στερεών.



Ο Leonhard Euler γεννήθηκε 15 Απριλίου 1707 στην Ελβετία και πέθανε 18 Σεπτεμβρίου 1783 στη Ρωσία. Ο Euler ανακάλυψε το 1750 τον τύπο $v-e+f=2$, όπου v = ο συνολικός αριθμός των κορυφών, e = ο συνολικός αριθμός των ακμών, f = ο συνολικός αριθμός των εδρών [αναλυτικότερα στην παράγραφο 2.2]. Ο Euler ξαφνιάστηκε από το ότι αυτός ο προφανές τύπος παρέμεινε απαρατήρητος για 2 χιλιετίες και αυτό φάνηκε από ένα γράμμα που έστειλε το Νοέμβριο του 1750 στο φίλο του Christian Goldbach. Ο ίδιος δεν έδωσε ικανοποιητική απόδειξη για τον τύπο και η

πρώτη γενική αποδεκτή απόδειξη δόθηκε από Adrien – Marie Legendre το 1794.



Ο Ludwig Schläfli γεννήθηκε 15 Ιανουαρίου 1814 και πέθανε 20 Μαρτίου 1895 στην Ελβετία. Παρόλο που η μαθηματικός Alicia Boole Stott, κόρη του George Boole, είχε βρει πειραματικά κάποια παρόμοια αποτελέσματα που εκδόθηκαν με τη βοήθεια του Pieter Hendrik Schoute το 1900 και 1910 ο Schläfli απέδειξε, το 1852, στο χειρόγραφο του ‘Theorie der vielfachen Kontinuität’ ότι πέραν από τα 5 Πλατωνικά στερεά υπάρχουν ακριβώς 6 κανονικά πολύχωρα στις 4-διαστάσεις και μόνο 3 στις 5 ή μεγαλύτερες διαστάσεις. Παράλληλα, επινόησε τον συμβολισμό των πολυτόπων [αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 3]. Αυτά εκδόθηκαν μερικώς στην Αγγλία από τον Arthur Cayley το 1858 και 1860. Η δουλειά του Schläfli εκδόθηκε εξ’ ολοκλήρου το 1901, έξι χρόνια μετά το θάνατο του.



Ο Harold Scott MacDonald Coxeter γεννήθηκε 9 Φεβρουαρίου 1907 στο Λονδίνο της Αγγλίας και πέθανε 31 Μαρτίου 2003 στο Τορόντο του Καναδά. Ο Coxeter συνείσφερε πάνω στη θεωρία των πολυτόπων, στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, στη θεωρία ομάδων και ιδιαίτερα έκανε μία στερεά θεμελίωση για την γεωμετρία στον υπερχώρο. Εκλαΐκευσε τον όρο ‘πολύτοπο’, το οποίο είχε χρησιμοποιηθεί από τη φίλη του Alicia Boole Stott. Επίσης, πολλά από τα ευρήματα του Schläfli γενικεύτηκαν από τον Coxeter, όπως ότι ‘Τα κανονικά κυρτά πολύτοπα $\{p,q,r\}$ πρέπει να ικανοποιούν την σχέση $\cos(\pi/q) < \sin(\pi/p)\sin(\pi/r)$ ’.



Ο Willem Abraham Wythoff (1865 – 1939) έζησε στο Άμστερνταμ. Παρόλο που πολλά από τα πολύτοπα είχαν αρχικά ανακαλυφθεί από την Alicia Boole Stott και τον Άγγλο Thorold Gosset (1869 – 1962) τα Αρχιμήδεια πολύτοπα στις 4 διαστάσεις είναι κοινώς γνωστά μέσω της δουλειάς του Wythoff το 1920. Παράλληλα, ο Wythoff εφεύρε ένα άλλο σύμβολο για την περιγραφή της ημικανονικότητας από το σύμβολο του Schläfli, το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα.



Ο John Horton Conway γεννήθηκε 26 Δεκεμβρίου 1937 στην Αγγλία και μαζί με τον Michael Guy ανακάλυψαν το 1965 ότι υπάρχει μόνο ένα μη Wythoff αντιπρισματικό ομοιόμορφο κυρτό 4-διάστατο πολύτοπο το οποίο επίσης χρειάστηκε να προστεθεί ώστε να ολοκληρωθεί η συλλογή των ημικανονικών κυρτών 4-διάστατων πολυτόπων. Με την βοήθεια των υπολογιστών απέδειξαν ότι η συλλογή αυτή είναι ολοκληρωμένη. Ολόκληρη η συλλογή των 64 πολυτόπων ή πολυχώρων (περιλαμβανομένων των 6 4-διάστατων κανονικών και εκείνων που κατασκευάζονται από τα πρίσματα) μπορούν να βρεθούν σε ιστοσελίδα του George Olshevsky. Ολόκληρη η συλλογή των Αρχιμήδειων πολυτόπων στις 5 ή μεγαλύτερες διαστάσεις είναι μέχρι τις μέρες μας άγνωστα, παρόλο που αρκετά έχουν περιγραφεί ή υπολογιστεί ή μπορούν πολύ εύκολα να αντληθούν από το σύμβολο του Wythoff.

Βιβλιογραφία :

1. Αναπολιτάνος, Δ. Α. Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών. Εκδόσεις Νεφέλη.
2. Γιαννίκου, Αριάδνη. Στοιχεία από τη Σφαιρική Γεωμετρία και τις εφαρμογές της. Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2002.
3. Bell, E.T. Οι μαθηματικοί από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy. Τόμος Ι. Μετάφραση Μανόλης Μαγειρόπουλος. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
4. Coxeter, H.S.M. Regular Polytopes. Dover Publications New York.
5. Coxeter Wiley. Introduction to Geometry.
6. Cromwell, Peter R. Polyhedra. Cambridge University Press.
7. Donald, M. Davis. Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών. Απόδοση στα ελληνικά : Δημήτρης Καραγιαννάκης, Μανώλης Μαγειρόπουλος. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
8. Edited by Grattan-Guinness. Companion encyclopedia of the History and Philosophy of the mathematical sciences. Volume 1,2.
9. Euclid. The thirteen books of the elements. Translated with introduction and commentary of Sir Thomas L. Heath. Dover Publications INC New York.
10. Καμπούκου, Κυριάκος Κων/νου. Κανονικά και ημικανονικά στερεά στο 13^ο βιβλίο των Στοιχείων και στο 5^ο βιβλίο της συναγωγής του Πάππου. Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2001.
11. Loria, G. Ιστορία των Μαθηματικών. Εκδόσεις Παπαζήση.
12. Lyusternik L.A. Convex Figures and Polyhedra. Translated from the Russian by T. Jefferson Smith.
13. Mathematics Teacher v87 n5 NCTM May 1994.
14. Mathematics Teacher v92 n2 NCTM February 1999.
15. Ο.Ε.Δ.Β. Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου
16. Singer, David A. Geometry: Plane and fancy. Springer.
17. Σταμάτη, Ευαγγέλου Σ. Ευκλείδου Στερεομετρία. Βιβλία Στοιχείων XI, XII, XIII. Τόμος IV.
18. Van Der Waerden, B. L. Η αφύπνιση της επιστήμης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
19. Edited by Warren Page. Two year college mathematics Readings. Mathematics association of America.
20. Οι διευθύνσεις του Internet που χρησιμοποιήθηκαν ως πηγές:
<http://math.rice.edu/~pcmi/sphere.html>
<http://www.omega-art.com/math/gauss.html>
<http://www.presh.com/hovinga/regularandsemiregularconvexpolytopesashorthistoricalloverview.html>
<http://www.home.att.net/~numericana/answer/polyhedra.htm>
http://www.mathdaily.com/lessons/List_of_regular_polytopes
<http://www.home.inreach.com/rtowle/Polytopes/polytope.html>

<http://www.astronomy.swin.edu.au/~pbourke/polyhedra/platonic4d>

<http://www.geometryalgorithms.com/history.htm>

<http://www.watermanpolyhedron.com/ppp.html>

Στην διεύθυνση www.answers.com για τα κανονικά πολύτοπα υπάρχουν και περιγραφές των πολυτόπων στη φύση.