ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Γ-ΛΥΚΕΙΟΥ

Γεώργιος Γιατίλης του Πλάτωνα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

ΑΘΗΝΑ 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών

Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)**ΕΥΣ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ** (επιβλέπων Καθηγητής)	**Αναπλ. Καθηγητής**	…….
2) **ΘΕΟΔ. ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ**	**Αναπλ. Καθηγητής**	……..…
3) **ΠΑΝΑΓ. ΣΠΥΡΟΥ**	**Επίκ. Καθηγητής**	……..…

Θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ. Ευστάθιο Γιαννακούλια ,Θεοδόσιο Ζαχαριάδη και Παναγιώτη Σπύρου για τη βοήθεια που μου προσέφεραν κατά τη συγγραφή της εργασίας αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

3. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ
3.1 Τι ισχύει σήμερα στο Ελληνικό Σχολείο

3.2 Στόχοι της έρευνας

3.3 Υποκείμενα της έρευνας.

3.4 Παρουσίαση του ερωτηματολογίου

3.5 Κριτήρια βαθμολόγησης

3.6 Πίνακας ποσοστών αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου

3.7 Ανάλυση αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου

4. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ (Για την κατανόηση της έννοιας της συνεχούς συνάρτησης)

4.1 Φύλλο εργασίας 1^{ο} και παρατηρήσεις .

4.2 Φύλλο εργασίας 2^{ο} και παρατηρήσεις .

4.3 Φύλλο εργασίας 3^{ο} και παρατηρήσεις .

4.4 Φύλλο εργασίας 4^{ο} και παρατηρήσεις .

4.5 Φύλλο εργασίας 5^{ο} και παρατηρήσεις .

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1 Ελληνική

5.2 Ξένη

6.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6.1 Ερωτηματολόγια

6.2 Φύλλα εργασίας

6.3 Δείγματα γραπτών μαθητών

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σήμερα είναι κοινή διαπίστωση, ότι υπάρχουν προβλήματα στην προσπάθεια προσέγγισης των εννοιών στοιχειώδους ανάλυσης από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Οι δυσκολίες αυτές συναντώνται κάθε χρόνο από τους δασκάλους μέσα στην τάξη.

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να εντοπίσει τα προβλήματα που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της συνέχειας συνάρτησης.

Η έννοια της συνέχειας συνάρτησης είναι πολύ σημαντική για τον απειροστικό λογισμό και η δυσκολία κατανόησης της υπάρχει από την αρχαιότητα μέχρι τις μέρες μας, με τη σύγκρουση του διακριτού και του συνεχούς, όπως φαίνεται μέσα από την ιστορική αναδρομή, που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή.

Σ' αυτή την εργασία επιδίωξη είναι, η καταγραφή των αντιλήψεων που έχουν οι μαθητές για την έννοια της συνέχειας συνάρτησης (όπως αυτές προκύπτουν διαισθητικά από τη γραφική της παράσταση) πριν τη διδασκαλία καθώς επίσης και οι αλλαγές που επέρχονται σ' αυτές μετά τη διδασκαλία.

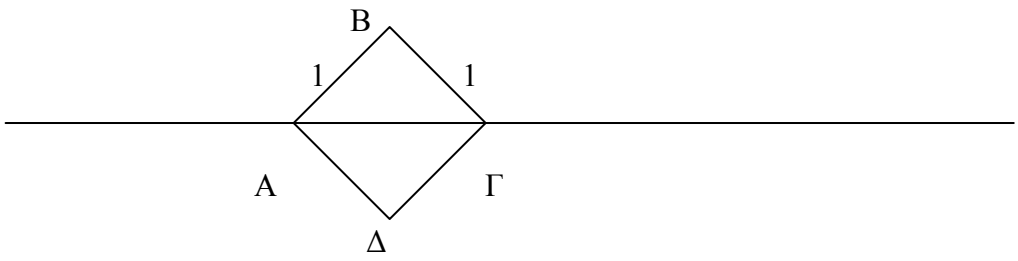
Προετοιμάσθηκε λοιπόν και δόθηκε στους μαθητές, ένα ερωτηματολόγιο πριν τη διδασκαλία. Το ίδιο ερωτηματολόγιο με προσθήκη ενός επιπλέον ερωτήματος δόθηκε μετά τη διδασκαλία. Το ερωτηματολόγιο αυτό είχε ως προϋπόθεση τη γνώση από τους μαθητές της έννοιας της συνάρτησης, της γραφικής παράστασης της, της απεικόνισης ενός υποσύνολου των πραγματικών αριθμών στον άξονα και τη δυνατότητα να διακρίνουν αν αυτό είναι διάστημα ή όχι.

Η έρευνα οδήγησε σε ορισμένα συμπεράσματα που αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε αδυναμία στην κατανόηση της εννοίας του διαστήματος. Επιπλέον θεωρούν τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης σαν την καμπύλη που δεν διακόπτεται, ή τμήματα καμπύλων, ενώ για κάθε καμπύλη που διακόπτεται πιστεύουν ότι είναι γραφική παράσταση ασυνεχούς συνάρτησης.

Με βάση τ' αποτελέσματα του ερωτηματολογίου διατυπώνονται κάποιες παρατηρήσεις και παρατίθεται μια διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας πραγματικής συνάρτησης στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Η πρόταση αυτή στηρίζεται στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας και των θεωρημάτων της από τους μαθητές, όπως ορίζει το αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

2. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Από την αρχή της ανάπτυξης των μαθηματικών δημιουργήθηκαν δύο βασικοί κλάδοι, η αριθμητική (μελέτη των αριθμών) και η γεωμετρία (μελέτη των σχημάτων). Πρώτοι οι Πυθαγόρειοι προσπάθησαν να θεμελιώσουν μια φιλοσοφία που να βασίζεται στους αριθμούς. Η μοναδικότητα τους έγκειται απλά στο γεγονός, ότι κατασκεύασαν και πίστεψαν σε μια κοσμογονία με αριθμητικό χαρακτήρα, που είναι ενδιαφέρουσα για τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Πίστευαν ότι ο κόσμος θα έπρεπε να δομείται κατά τρόπο ρητό. Θα έπρεπε με άλλα λόγια όλες οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος, να είναι σχέσεις λόγων θετικών ακεραίων αριθμών. Αν οποιαδήποτε δύο αντικείμενα δεδομένων μηκών συγκρίνονταν, θα έπρεπε να δίνουν σαν αποτέλεσμα σύγκρισης των μηκών τους ένα λόγο x/y, όπου x και y ακέραιοι (θετικοί) αριθμοί. Αυτή η πυθαγόρεια πίστη για σύμμετρη (ρητή) δομή του κόσμου έμελλε να διαψευσθεί. Το πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμοζόμενο σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους ίσου με την μονάδα, έχει σαν αποτέλεσμα πως η υποτείνουσα του συγκεκριμένου τριγώνου δεν έχει κοινό μέτρο με τις κάθετες πλευρές του ίδιου τριγώνου.



Ενώ η διαγώνιος ΑΓ υπάρχει ως μήκος, εν τούτοις δεν υπάρχει (ρητός) αριθμός μ/ν , (μ , ν ακέραιοι , ν ≠ 0) που να τη μετρά. Συνεπώς στην ευθεία και στο σημείο Γ υπάρχει ένα χάσμα, και άρα το μήκος (ΑΓ)=$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Τα μεγέθη (ΑΓ) , (ΑΒ) δεν έχουν κοινή μονάδα μέτρησης, είναι ασύμμετρα, και άρα ο λόγος ΑΓ **:**ΑΒ δεν είναι εκφράσιμος από ρητούς, είναι άρρητος ή άλογος (δίχως μαθηματική λογική). Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας της πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου θ' ανατρέψει την αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρία.

Το συμπέρασμα αυτό είχε σοβαρές επιπτώσεις, με την έννοια πως η διαδικασία σύγκρισης δύο μεγεθών μπορούσε να μην έχει τέλος. Δηλαδή πίσω από τη διαπίστωση της μη –ύπαρξης κοινού μέτρου σύγκρισης δύο μεγεθών, κρύβεται η

ριζικότερα ανατρεπτική διαπίστωση ανυπαρξίας αλγορίθμου που, σε πεπερασμένο το πλήθος βήματα, θα μπορούσε να οδηγήσει με σιγουριά σ' ένα αποτέλεσμα της μορφής μ/ν όπου μ , ν ακέραιοι και ν $\neq 0$ (άπειρες διαδικασίες).

Η μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Έλληνες για την εύρεση μέγιστου κοινού μέτρου, στη σύγκριση δύο δεδομένων μηκών, ήταν η μέθοδος της ανθυφαίρεσης. Σύμφωνα μ' αυτήν και για δύο δεδομένα μήκη x και y και με το μήκος του y να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μήκος του x αφαιρώντας από το μήκος y ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο του μήκους x, βρίσκουμε ένα υπόλοιπο z που να ικανοποιεί τη σχέση: $0 \leq z < x$.

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία με συγκεκριμένα μήκη τα x και z, αφαιρούμε από το x κατάλληλο πολλαπλάσιο του z και η αλγοριθμική αυτή διαδικασία συνεχίζεται μ' αυτόν τον τρόπο. Αν κάποιο υπόλοιπο βρεθεί ίσο με το μηδέν, τότε το μήκος του τελευταίου διαιρέτη είναι το κοινό μέτρο των x και y. Αν τα μήκη x και y είναι ασύμμετρα, η αλγοριθμική διαδικασία που μόλις περιγράφηκε συνεχίζεται έπ' άπειρον, δεδομένου πως σε κανένα στάδιο της δεν μπορούμε να πετύχουμε υπόλοιπο ίσο με το μηδέν, όπως προκύπτει από την πρόταση β΄ του Χ βιβλίου των στοιχείων του Ευκλείδη:

> *Εάν δυο μεγεθών [εκκειμένων] ανίσων ανθυφαιρουμένου αεί του ελάσσονος από του μείζονος το καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρή το προ εαυτού , ασύμμετρα έσται τα μεγέθη .(Εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερον από το μεγαλυτέρο , το εκάστοτε δε υπόλοιπον ουδέποτε καταμετρή το προ εαυτού , τα μεγέθη θα είναι ασύμμετρα.)* [Σταμάτης Τόμος ΙΙΙ, σελ.23].

Η πυθαγόρεια λοιπόν πίστη στην αριθμητική δομή και φύση του κόσμου προσέκρουσε στην ανακάλυψη ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών με δραματικά αποτελέσματα. Οι Πυθαγόρειοι, κάτω από το βάρος της κρίσης, δεν μπόρεσαν να αναθεωρήσουν την οντολογία τους. Η κρίση θα ξεπεραστεί από τον **Εύδοξο** τον Κνίδιο(408-355 π.Χ.). Αυτός θα αναπτύξει μια αξιωματική θεωρία λόγων δίχως αναφορά σε σύμμετρα ή ασύμμετρα μεγέθη. Ο Εύδοξος εισήγαγε την έννοια του μεγέθους. Τα μεγέθη δεν ήταν αριθμοί, αλλά οντότητες όπως π.χ. ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, εμβαδά, όγκοι, χρόνος τα οποία μεταβάλλονται συνεχώς. Η θεωρία

λόγων του Ευδόξου περιγράφεται στο V βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Παραθέτουμε τους 5 πρώτους ορισμούς: [Σταμάτης, Τόμος ΙΙ, σελ.24]

(i). *Μέρος εστί μέγεθος μεγέθους το έλασσον του μείζονος ,όταν καταμετρή το μείζον.*

(ii) *Πολλαπλάσιον δε το μείζον του ελάττονος, όταν καταμετρήται υπο του ελάττονος .*

(iii) *Λόγος εστί δύο μεγεθών ομογενών η κατά πηλικότητά ποια σχέσις.*

(iv) *Λόγον έχειν προς άλληλα μεγέθη λέγεται ά δύναται πολλαπλασιαζόμενα αλλήλων υπερέχειν.*

(v) *Εν τω αυτώ λόγω μεγέθη λέγεται είναι πρώτον προς δεύτερον και τρίτον προς τέταρτον , όταν τα του πρώτου και τρίτου ισάκις πολλαπλάσια των του δευτέρου και τετάρτου ισάκις πολλαπλασίων καθ' οποιονούν πολλαπλασιασμόν εκάτερον εκατέρου ή άμα υπερέχη ή άμα ίσα η ή άμα ελλείπη ληφθέντα κατάλληλα.*

Ο ορισμός (iv) μας λέει πώς αν Α , Β δύο μεγέθη τότε υπάρχει $m \in N$: m A>B (ιδιότητα Ευδόξου-Αρχιμήδη)(και περικλείει την έννοια της συνέχειας).

Ο ορισμός (v) σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα αποδίδεται ως εξής: Αν α , β είναι ομοειδή μεγέθη και το ίδιο συμβαίνει και για τα γ , δ τότε

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων μ , ν ισχύει μία ακριβώς των παρακάτω σχέσεων :

(i). Αν $\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta \Rightarrow \mu \cdot \gamma > \nu \cdot \delta$

(ii). Αν $\mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta \Rightarrow \mu \cdot \gamma < \nu \cdot \delta$

(iii) Αν $\mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta \Rightarrow \mu \cdot \gamma = \nu \cdot \delta$

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πλευράς και διαγωνίου του τετραγώνου (και άρα των αρρήτων) ανέτρεψε την αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και τη γεωμετρία και σε συνδυασμό με τα παράδοξα που διατύπωσε αργότερα ο Ζήνων ο Ελεάτης,

σχετικά με τις ατέρμονες διαδικασίες και με τις αντιλήψεις για το **άπειρα μικρό** και το **άπειρα μεγάλο** υπήρξαν οι αφορμές για τη διερεύνηση της έννοίας του συνεχούς, ιδιαίτερα από τον Αριστοτέλη. Η Πλατωνική σχολή δέχτηκε την ιδέα της άπειρης διαιρετότητας των μεγεθών, ενώ η σχολή του Δημόκριτου (του Αβδηρίτη) (460-370 π. Χ.) και των μαθητών του απέρριψε την ιδέα της συνέχειας και βασίστηκε στην περίφημη θεωρία των ‘‘ατμήτων’’, (ατόμων). Για τους Ελεάτες το πρόβλημα ‘‘συνέχεια ή ασυνέχεια’’ ήταν ένα ψευδοπρόβλημα, δηλαδή ήταν γι’ αυτούς χωρίς νόημα, γιατί αναφερόταν στον λάθος κόσμο της εμφάνισης, και όχι σ’ αυτόν που πραγματικά ήταν. Σύμφωνα με τους Ελεάτες, όχι μόνο ο κόσμος φαίνεται να είναι διαφορετικός απ’ ότι είναι, αλλά και ο κόσμος που φαίνεται είναι άλλος από τον κόσμο που είναι. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Παρμενίδης (540-475 π. Χ.) και οι μαθητές του είναι οι πρώτοι στην ιστορία της δυτικής φιλοσοφίας που ξεχωρίζουν το φαινομενικό από την πραγματικότητα. Κατά την άποψή τους το ΄΄**όντως ον**΄΄ είναι αναλλοίωτο. Γι’ αυτούς τα πράγματα δεν αλλάζουν, επί πλέον δε, όταν παρατηρούμε κάποια αλλαγή είμαστε ακόμη στον κόσμο της πλάνης και της εμφάνισης. Επίσης οι Ελεάτες πίστευαν ότι το ΄΄**Ον** ΄΄ **δεν έχει** ΄΄**μέρη**΄΄ .

Ο Ζήνωνας για να υπερασπιστεί τη φιλοσοφία του Παρμενίδη διατύπωσε κάποιες θέσεις που είναι γνωστές ως παράδοξα του Ζήνωνα. Παραθέτουμε δύο απ’ αυτά:

(i) Το παράδοξο της διχοτομίας: Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διαιρετό τότε η κίνηση είναι αδύνατη, γιατί για να διανύσει ένας δρομέας ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσον του Μ, αλλά πριν το κάνει αυτό, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο Κ του ΑΜ, κ. ο. κ. ,έπ’ άπειρον. Από αυτό συνεπάγεται ότι η κίνηση δεν αρχίζει ποτέ.

(ii) Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας: Αν ο Αχιλλέας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πιο μπροστά απ’ αυτόν, τότε –αν και ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή – ο Αχιλλέας δεν φθάνει ποτέ τη χελώνα. Και αυτό στο γιατί, πρέπει πρώτα να φθάσει στο μέρος απ’ όπου ξεκίνησε η χελώνα. Κατά το χρόνο αυτόν όμως, η χελώνα θα έχει πάει σε ένα άλλο σημείο, πιο μπροστά. Έτσι, ο Αχιλλέας θα πρέπει πάντα να πηγαίνει πρώτα στο σημείο από το οποίο η χελώνα μόλις έφυγε, και κατ’ αυτόν τον τρόπο, πάντα η χελώνα θα προπορεύεται.

Στα παράδοξα αυτά, ο Ζήνωνας χρησιμοποιεί τις ιδέες του απείρου και του συνεχούς. Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα, σε κάποια τους μορφή, έχουν δώσει τις βάσεις για όλες σχεδόν τις θεωρίες του χώρου και του απείρου που έχουν προταθεί

από την εποχή του έως τις μέρες μας. Φαίνεται ότι ο Ζήνων, σ' αυτά τα παράδοξα χρησιμοποιεί τη θεωρία του Αναξαγόρα (500-428 π. Χ.) για το συνεχές. Για τον Αναξαγόρα, το πιο ουσιαστικό χαρακτηριστικό του συνεχούς περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:

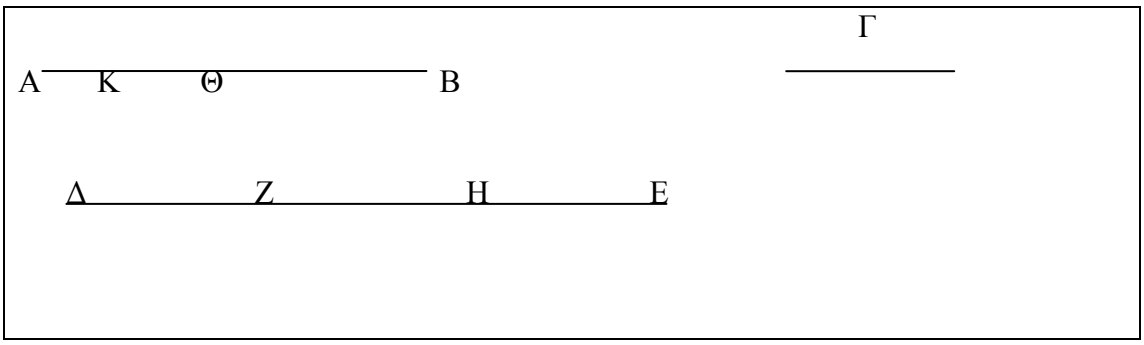
> *Ούτε γαρ του σμικρού έστι το γε ελάχιστον, άλλ' έλασσον αεί (το γαρ εόν ούκ έστι το μη ούκ είναι) –άλλά και του μεγάλου αεί έστι μείζον, και ίσον έστι τω σμικρώ πλήθος, προς εαυτό δε έκαστον έστι και μέγα και σμικρόν.*
> (ούτε και υπάρχει το ελάχιστο κομμάτι του μικρού, αλλά υπάρχει πάντα ένα μικρότερο κομμάτι (γιατί αυτό που είναι, δεν είναι δυνατόν να πάψει να είναι). Επίσης, υπάρχει πάντα κάτι μεγαλύτερο από το μεγάλο, και ως προς το πλήθος, είναι ίσο με το μικρό , γιατί κάθε πράγμα είναι προς τον εαυτό του και μεγάλο και μικρό.)

Αυτή η περιγραφή προσεγγίζει το χαρακτήρα του συνεχούς, αν και η φράση, **μεταξύ των μικρών δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά πάντα κάτι μικρότερο**, υπονοεί την ιδιότητα της πυκνότητας. Για τον Ζήνωνα η φράση: **ό,τι είναι δεν παύει να είναι, όσες φορές και αν υποδιαιρεθεί,** σημαίνει ότι η ακολουθία των υποδιαιρέσεων είναι άπειρη.

Πρώτη ουσιαστική απάντηση στα παράδοξα του Ζήνωνα ήταν αυτή που έδωσε η Πλατωνική σχολή με **τη Μέθοδο της εξάντλησης,** που αποδίδεται στον Εύδοξο (408-355 π. Χ.) Η μέθοδος αυτή δέχεται την ιδέα της άπειρης διαιρετότητας των μεγεθών και έχει σα βάση της την ακόλουθη πρόταση :(α΄ του Χ βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη):

Πρόταση : **Δύο μεγεθών ανίσων εκκειμένων, εάν από του μείζονος αφαιρεθη μείζον ή το ήμισυ και του καταλειπομένου μείζον ή το ήμισυ, και τούτο αεί γίγνηται, λειφθήσεται τι μέγεθος, ό έσται έλασσον του εκκειμένου ελάσσονος μεγέθους.** (**Αν δοθούν δύο άνισα (ομοειδή) μεγέθη και αν από το μεγαλύτερο μέγεθος αφαιρεθεί ένα μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του, από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, στο τέλος θ' απομείνει ένα μέγεθος μικρότερο από το δοσμένο αρχικό μικρότερο μέγεθος.)** **[**Σταμάτης, Τόμος ΙΙΙ, σελ.20**].**

Απόδειξη: Έστω δύο μεγέθη ΑΒ ,Γ με ΑΒ>Γ . Εάν από το ΑΒ αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από του υπολοίπου του μεγέθους μεγαλύτερο από το μισό και τούτο γίνεται συνέχεια, θ' απομείνει κάποιο μέγεθος που θα είναι μικρότερο από το μέγεθος Γ. Διότι το Γ πολλαπλασιαζόμενο θα γίνει κάποτε μεγαλύτερο του ΑΒ . Έστω ΔΕ κάποιο πολλαπλάσιο του Γ που είναι μεγαλύτερο του ΑΒ. π. χ. ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ =Γ και ΔΕ>ΑΒ. Αν από το ΑΒ αφαιρέσουμε ΒΘ μεγαλύτερο από το μισό τού ΑΒ, από το υπόλοιπο ΑΘ αφαιρέσουμε ΘΚ μεγαλύτερο από το μισό τού ΑΘ και αυτό γίνει τόσες φορές όσες είναι τα πολλαπλάσια του ΔΕ τότε: Εφ' όσον ΔΕ>ΑΒ συνεπάγεται ΔΗ>ΑΘ και άρα ΔΖ>ΑΚ, δηλαδή ΑΚ<Γ.



Αυτό που εννοεί ο Εύδοξος είναι ότι μέσω της διαδικασίας αφαιρέσεων ή υποδιαιρέσεων ενός δεδομένου μεγέθους μπορούμε να εξαντλήσουμε αυτό το μέγεθος. Θεωρούμε ότι η μέθοδος της εξάντλησης είναι ο πρόδρομος της σύγχρονης θεωρίας των ορίων, χρησιμοποιείται δε από τους σύγχρονους μαθηματικούς για να διαφωτιστούν τα δύο πρώτα παράδοξα του Ζήνωνα. Τα παράδοξα του Ζήνωνα σχετικά με τις ατέρμονες διαδικασίες και με τις αντιλήψεις για το **απείρως μικρό** και το **απείρως μεγάλο** υπήρξαν οι απαρχές για τη διερεύνηση της έννοιας του συνεχούς, ιδιαίτερα από τον Αριστοτέλη. Για τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.), το άπειρο και το συνεχές είναι ουσιαστικά συναρτημένα με τρόπο ώστε, κάθε προσπάθεια μελέτης του δεύτερου, να απαιτεί αναγκαστικά και τη μελέτη του πρώτου.

Κατά τον Αριστοτέλη, το συνεχές ορίζεται από τη δυνατότητα ατέρμονης διαιρετότητας του, δηλαδή από την ιδιότητα μεταξύ δύο τομών του μπορούμε πάντα να προβούμε σε μια τρίτη –ιδιότητα που είναι ανάλογη με τη γνωστή ιδιότητα :μεταξύ δύο σημείων του συνεχούς υπάρχει πάντα ένα τρίτο σημείο του. Η ομοιότητα όμως των δύο ιδιοτήτων δεν σημαίνει ότι είναι και ταυτόσημες. Για τον Αριστοτέλη το συνεχές είναι συνδεδεμένο με την ύπαρξη δυνατότητας διαίρεσης μεταξύ δύο

οποιονδήποτε άλλων πράξεων διαίρεσης και όχι με την ύπαρξη πραγματικού σημείου μεταξύ δύο οποιονδήποτε άλλων σημείων. Έτσι υπάρχει η δυνατότητα για την έπ' άπειρο διαίρεση ποσοτήτων όπως είναι ο χρόνος και τα γεωμετρικά μεγέθη. Αν στα προηγούμενα προσθέσουμε και την κίνηση θα έχουμε τα ποσά που εξετάζει ο Αριστοτέλης ως συνεχή, με βάση τον ορισμό που δίνει:

> *Και λέω ότι παρουσιάζεται το συνεχές όταν το όριο του καθενός από τα δύο πράγματα που εφάπτονται είναι ένα και το αυτό και τα κάνει όπως τα λέει η λέξη συνεχόμενα. Δεν είναι δυνατόν να γίνει λόγος περί συνέχειας αν τα όρια (των συνεχόμενων) διακρίνονται ως δύο χωριστά άκρα.*
>
> [Αριστοτέλης, Φυσικά. Α,Γ' 206a].

Επομένως τα συνεχή μεγέθη δεν μπορεί να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από αδιαίρετα ελάχιστα μεγέθη, γιατί τα αδιαίρετα δεν θα έχουν όρια με τα οποία να έλθουν σε επαφή και συναποτελέσουν μέγεθος. Στα συνεχή μεγέθη είναι δυνατή η έπ' άπειρο διαίρεση χωρίς να φθάσουμε στο μηδέν.

Στο ίδιο σημείο με τον ορισμό της συνέχειας, ο Αριστοτέλης παραθέτει και τους ορισμούς για τις έννοιες **: μαζί (άμα), χωριστά (χωρίς), σε επαφή (άπτεσθαι), μεταξύ (μεταξύ), άμεσα επακόλουθο(εφεξής), επόμενο (εχόμενο) .**
[Αριστοτέλης, Φυσικά. Α,Ζ' 232b]. Έτσι :

1) Η ακολουθία των αριθμών υπακούει στο μόνο ορισμό του **εφεξής** και όχι του συνεχούς. Το ίδιο θα μπορούσαμε να πούμε ,για παράδειγμα για τα γράμματα της αλφαβήτου.
2) Και αν ακόμη μεταξύ των άκρων δεν μεσολαβεί κανένα πράγμα που να ανήκει στο ίδιο γένος πάλι δεν είναι απαραίτητο να έχουμε κάτι συνεχές.
3) Αντικείμενα τοποθετημένα σε επαφή το ένα μετά το άλλο δεν αποτελούν υποχρεωτικά συνεχές. Ενδέχεται να υπακούουν μόνο στον ορισμό για **απτόμενο.**
4) Αφού τα συνεχή δεν αποτελούνται από αδιαίρετα, είναι αδύνατο η γραμμή να αποτελείται από σημεία.
5) Ένα σημείο δε μπορεί να είναι άμεσα επόμενο κάποιου άλλου.

Θα μπορούσαμε να πούμε, ότι ο αριστοτελικός ορισμός εμπεριέχει την έννοια της συνέχειας, που απαιτούμε σήμερα από την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Αντίθετα με τον ορισμό του Αριστοτέλη, αυτό το είδος της συνέχειας δεν εμπεριέχεται στον ορισμό που θεωρεί ο Russel [Russel,σελ.193] ως παλαιό και τον καταγράφει ως εξής:

> *Η συνέχεια αναφέρεται σε συστοιχίες (και μόνο σε συστοιχίες) οποτεδήποτε αυτές είναι τέτοιες, ώστε να υπάρχει ένας όρος ανάμεσα σε οποιους μας δώσουν.*

Έτσι, οι ρητοί αριθμοί αποτελούν συνεχές, αφού μεταξύ δύο οποιουσδήποτε από αυτούς υπάρχει το ημιάθροισμά τους που είναι ρητός αριθμός.

Όμως, είναι αδύνατο να θεμελιωθεί ο Απειροστικός Λογισμός στηριζόμενος σ' αυτό το είδος της **συνέχειας** που προσφέρουν οι ρητοί. Χωρίς το αξίωμα της πληρότητας, δηλαδή ουσιαστικά χωρίς τους άρρητους είναι αδύνατον να αποδείξει κανείς ή να επεξεργαστεί τα σημαντικότερα αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού.

Στο Μεσαίωνα, η μελέτη των έργων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη από σχολαστικούς φιλόσοφους, συνδυαζόμενη με θεωρητικές αναζητήσεις για τη φύση της θεότητας, οδήγησε σε λεπτεπίλεπτες εικασίες για τη φύση της κίνησης, για το συνεχές και για το άπειρο. Για τον Γαλιλαίο το συνεχές κατασκευάζεται από αδιαίρετες ποσότητες και παρατηρεί ότι ενώ οι αριθμοί είναι κομμάτι του απείρου, στο σύνολο τους δεν μοιάζουνε με κράμα αλλά με μια συγχώνευση από τα κομμάτια μιας ολότητας, όπως στη περίπτωση των ρευστών.[Boyer C, σελ.116].

Τον 17^{ο} αιώνα, τον αιώνα της επιστημονικής επανάστασης, ο γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), υποστήριξε ότι ο κόσμος έχει διακριτή υφή, αλλά το χωροχρονικό μας σύμπαν είναι γι' αυτόν άπειρα διαιρετό. Το φιλοσοφικό έργο του Leibniz, που αποτέλεσε και το υπόβαθρο για το μαθηματικό του έργο στηρίχθηκε σε συγκεκριμένες a priori αρχές, εκ των οποίων μια βασική αρχή φέρει την ονομασία **αρχή της συνέχειας.** [Αναπολιτάνος Δ., σελ.112].

Η αρχή αυτή εμφανίζεται με διάφορες μορφές στο έργο του, οι πιο βασικές από τις οποίες είναι οι εξής:

α) Η φύση δεν κάνει άλματα.

β) Οι ιδιότητες των όντων είναι συνεχείς συναρτήσεις των βασικών χαρακτηριστικών τους.

γ) Η φύση σέβεται τη συνέχεια του γίγνεσθαι, και γενικότερα τη συνέχεια της έπ' άπειρον αλλαγής.

δ) Τα όντα και οι εκάστοτε καταστάσεις τους σχηματίζουν γραμμικά συστήματα, που είναι παντού πυκνά.

Για να δούμε την ισχύ και τη σημασία της αρχής της συνέχειας στο σύστημα του Leibniz, είναι απαραίτητη η παράθεση ορισμένων πρόσθετων στοιχείων που συνδέονται με τη νομιμότητα και την αποτελεσματικότητα της χρήσης της. Οι απαντήσεις που έδωσε ο Leibniz, όταν του ζητήθηκε να αποδείξει την αρχή του, είναι οι ακόλουθες:

(i). Η αρχή αυτή είναι ένα αξίωμα που χρησιμοποιώ: ΄΄καμιά αλλαγή δεν μπορεί να γίνει με άλματα ΄΄. Ισχυρίζομαι πως αποτελεί συνέπεια του νόμου της τάξης και στηρίζεται πάνω στην ίδια λογική, σύμφωνα με την οποίαν όλοι γνωρίζουν πως η κίνηση δεν συντελείται με άλματα. Δέχομαι πως αν υποθέσουμε, ότι ο Δημιουργός θέλησε να συντελείται η κίνηση με συνεχή τρόπο, αυτό από μόνο του αποκλείει τη δυνατότητα ύπαρξης αλμάτων και

(ii). Οποιοσδήποτε αρνείται τη συνέχεια των πραγμάτων θα πει πως η κίνηση από φύση της δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια επαλληλία αλμάτων. Η υπόθεση αυτή των αλμάτων δεν μπορεί να διαψευσθεί παρά μόνο με την αρχή της τάξης, με τη βοήθεια δηλαδή του υπέρτατου λόγου, που πράττει με τον πιο τέλειο τρόπο.

Αν αγνοήσουμε την αναφορά του στην εμπειρία, που φαίνεται να μη τη θεωρεί και πολύ σίγουρο έδαφος για να στηρίξει την απόδειξη του, δεδομένου πως δεν τη χρησιμοποιεί στη δεύτερη ωριμότερη του απάντηση, μπορούμε να συνοψίσουμε τη συλλογιστική του Leibniz στο παρακάτω σχήμα: [Αναπολιτάνος Δ, σελ.113].

1. Ο δημιουργός επιθυμεί το καλύτερο δυνατό,
2. Το καλύτερο δυνατό είναι το καλύτερα διατεταγμένο,
3. Το καλύτερο διατεταγμένο είναι το συνεχές,
4. Επομένως η αρχή της συνέχειας ισχύει.

Η αρχή της συνέχειας ισχύει, σύμφωνα με τον Leibniz, τόσο καθολικά, ώστε ακόμα και το σύνολο των φυσικών όντων, οργανικών και ανόργανων σχηματίζει μια συνεχή αλυσίδα. Σε ένα γράμμα του στο γάλλο Ακαδημαϊκό Pierre Varignon γράφει:

Νομίζω ότι έχω σοβαρούς λόγους να πιστεύω ότι όλες οι διαφορετικές κλάσεις όντων των οποίων η ολότητα αποτελεί το σύμπαν, υπάρχουν στις ιδέες του θεού, ο οποίος γνωρίζει να διακρίνει τις ουσιώδεις διαβαθμίσεις τους. Οι άνθρωποι επομένως σχετίζονται με τα ζώα, αυτά με τα φυτά, και τα φυτά με τα απολιθώματα τα οποία, με τη σειρά τους, είναι συνδεδεμένα με τα σώματα εκείνα που οι αισθήσεις και η φαντασία μας αναπαριστάνουν σαν νεκρά και άμορφα. Τώρα η αρχή της συνέχειας απαιτεί, όταν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά ενός όντος προσεγγίζουν αυτά ενός άλλου, όλες οι ιδιότητες του πρώτου να προσεγγίζουν βαθμιαία αυτές του δεύτερου. Τόσο μεγάλη είναι η δύναμη της αρχής της συνέχειας στη φιλοσοφία μου, ώστε δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη αν μάθαινα ότι ανακαλύφθηκαν όντα τα οποία, σε σχέση με διάφορες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα διατροφή και αναπαραγωγή, θα μπορούσαν να θεωρηθούν είτε σαν φυτά, είτε σαν ζώα. Λέω ότι δεν θα έπρεπε να αισθανθώ έκπληξη. Η αλήθεια είναι ότι είμαι πεπεισμένος ότι οφείλουν να υπάρχουν τέτοια όντα, τα οποία θα ανακαλύψει μια μέρα η Φυσική Ιστορία όταν θα έχει μελετήσει περισσότερους από άπειρους ζωντανούς οργανισμούς των οποίων το μικρό μέγεθος δεν επιτρέπει τη συνηθισμένη παρατήρηση και τα οποία είναι θαμμένα στα έγκατα της γης και στην άβυσσο των υδάτων.

Η παράθεση αυτής της αρκετά μεγάλης παραγράφου αποδίδει με ακρίβεια και πληρότητα την εφαρμογή της αρχής της συνέχειας στον κόσμο των φυσικών όντων.

Δύο σημαντικές παρατηρήσεις που σχετίζονται άμεσα με την παράγραφο αυτή είναι, [Αναπολιτάνος Δ, σελ.117]:

1η. Η αλυσίδα των όντων υπάρχει στις **ιδέες του θεού**. Επομένως η ιδιότητα της συνέχειας που ανήκει στο κόσμο των φαινομένων, αντιστοιχεί σε κάποια ιδιότητα της αλυσίδας των όντων σαν αντικειμένων θεϊκής γνώσης, που μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν **τέλεια τάξη ή διάταξη**. Δηλαδή, τα όντα με τις **ουσιώδεις διαβαθμίσεις** τους, σαν αντικείμενα γνώσης του Θεού, αποτελούν μια τέλεια διατεταγμένη αλυσίδα η οποία μας εμφανίζεται ως συνεχής.

2η. Η αρχή της συνέχειας χρησιμοποιείται από τον Leibniz για την πρόβλεψη της ανακάλυψης όντων, που ενώ υπάρχουν δεν είναι ακόμη γνωστά. Με άλλα λόγια ο Leibniz πίστευε, πως αν δύο ακολουθίες όντων (φυτών και ζώων συγκεκριμένα) προσεγγίζουν κατάλληλα η μια την άλλη από αντίθετες διευθύνσεις, τότε θα πρέπει να υπάρχει το κοινό τους όριο. Γενικεύοντας τα παραπάνω για κάθε δύο τέτοιες ακολουθίες, και χρησιμοποιώντας μοντέρνα ορολογία θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την παραπάνω πίστη του Leibniz ως εξής: Η αλυσίδα των όντων είναι πλήρης. Με άλλα λόγια, στην παράγραφο που παραθέσαμε πιο πάνω υπάρχει σε πρωτολειακή μορφή το ένα (που συμβαίνει να είναι και το σπουδαιότερο) από τα δύο βασικά χαρακτηριστικά της μοντέρνας έννοιας της συνέχειας. Το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι αυτό της πυκνότητας που εκφράζεται από την πρόταση: **μεταξύ δύο οποιονδήποτε όντων υπάρχει κάποιο ενδιάμεσο**.

Η πληρότητα –είτε με τη μορφή ύπαρξης των ορίων βασικών ακολουθιών, είτε με τη μορφή ύπαρξης των τομών του Dedekind –και η πυκνότητα είναι οι δύο βασικότερες ιδιότητες του μαθηματικού συνεχούς, δηλαδή της πραγματικής ευθείας. Ένα από τα πρώτα μεγέθη που αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος ως συνεχές είναι ο χρόνος. Καθώς τίποτα δεν δίνει την εντύπωση ότι η ροή του χρόνου γίνεται με περίπλοκο τρόπο ή διακόπτεται, μια σειρά μεταβολών ή φαινομένων, όπως η κίνηση, έχουν μελετηθεί σε σχέση με το χρόνο. Στην ουσία τους, οι σχετικές μελέτες συνιστούν σύγκριση της εξέλιξης ενός φαινομένου με τη σταθερή και κυρίως αδιάλειπτη **πορεία του χρόνου**. Η συνέχεια, η πρόσκαιρη ή ακόμα και η στιγμιαία διακοπή ενός φαινομένου γίνεται αντιληπτή αναφορικά με το χρόνο, που **δρα** συνεχώς και ανεξάρτητα, ενώ το φαινόμενο εξελίσσεται έχοντας το χρόνο ως υπόβαθρο. Από την άλλη πλευρά αντιλαμβανόμαστε το συνεχές γεωμετρικά, μέσω μιας καμπύλης. Μια καμπύλη διαισθητικά είναι συνεχής αν τη διατρέχουμε πάνω σ' ένα χαρτί ή στον πίνακα, χωρίς να σηκώσουμε το χέρι μας, χωρίς να διασπάται η γραφικής της παράσταση.

Είναι φανερό όμως ότι τα παραπάνω δεν χαρακτηρίζονται από ακρίβεια καθώς, οι έννοιες δεν είναι σαφώς ορισμένες αλλά σχετίζονται με τη διαίσθηση ή την εποπτεία, και δεν συνδέονται μ' ένα ορισμό-που θα είναι ένα γενικό κριτήριο για το συνεχές. Η λογική αυστηρότητα που απαιτείται από τα μαθηματικά, αν δεχθούμε ότι μας απομακρύνει από αντιφάσεις και παράδοξα, αποτελεί βασικό εργαλείο για να επεξεργαστεί κανείς και να αναδείξει το ακριβές περιεχόμενο της έννοιας του συνεχούς. Θα πρέπει δηλαδή, να καθοριστεί επακριβώς ο χαρακτήρας της συνέχειας

και να διατυπωθεί ο σχετικός ορισμός, που θα χρησιμεύει, σε κάθε περίπτωση, ως βάση για έγκυρες συνεπαγωγές. Μετά την εμφάνιση και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών τα μαθηματικά οδηγούνται να θέσουν μέσω των γεωμετρικών αυτών εξελίξεων το αίτημα της θεμελίωσης των. Η γεωμετρική εποπτεία και το γεωμετρικό πνεύμα γενικότερα απειλήθηκε, και τη θέση της κατέλαβε το αναλυτικό- αριθμητικό πνεύμα, όπως τούτο εκφράζεται ως απαίτηση για αυστηρότητα στη μαθηματική ανάλυση. Η ζητούμενη θεμελίωση του λογισμού και της ανάλυσης επιχειρήθηκε από τους BOLZANO, CAUCHY, WEIERSTRASS και DEDEKIND και αφορούσε την αποσαφήνιση των θεμελιωδών εννοιών που εμπλέκονταν. Η έννοια της *συνέχειας* και της συνεχούς μεταβολής ενός μεγέθους ή μιας συνάρτησης συγκαταλέγονταν ανάμεσα στις έννοιες, που αποτελούσαν το αναγκαίο βάθρο πάνω στο οποίο θα στηρίζονταν ο λογισμός, για να φτάσει στις αποδεκτές προτάσεις. Μέχρι τον 18^{ο} αιώνα δεν φαινόταν να υπάρχει πραγματικό πρόβλημα για τον ορισμό της συνέχειας. Ο λογισμός ήταν ένας λογισμός των καμπύλων και συνεπώς υπήρχε ένας γεωμετρικός χαρακτήρας. Έτσι η ιδιότητα της συνέχειας χρησιμοποιείτο στη γεωμετρία για να δειχθεί ότι μια καμπύλη που έχει τα σημεία της εκατέρωθεν μιας ευθείας αναγκαστικά πρέπει να τέμνει την καμπύλη. Στην άλγεβρα, τα πολυώνυμα εθεωρούντο ως συνεχείς συναρτήσεις και συνεπώς βρίσκοντας κάποια φράγματα για τη ρίζα ενός πολυωνύμου, μπορούσαν να συμπεράνουν για την ύπαρξη της ρίζας αυτής. Οι πριν τον 18^{ο} αιώνα συζητήσεις των ιδιοτήτων για τη συνέχεια συναρτήσεων, περιορίζονταν γύρω από τις ΄΄καλές΄΄ (ή απλές) συναρτήσεις.

Ένας μεγάλος αριθμός ιδιοτήτων που έχουν σχέση με τη σύγχρονη έννοια της συνέχειας συζητήθηκε κατά τον 18^{ο} αιώνα σε διάφορα χρονικά διαστήματα με την ονομασία **συνέχεια**. Μια συνάρτηση ονομαζόταν συνεχής, εάν είχε την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, εάν ήταν παραγωγίσιμη, εάν ήταν εκφρασμένη με ένα μόνο τύπο, εάν δεν παρουσίαζε άλματα ή εάν δοσμένης μιας ανεπαίσθητης αλλαγής στην ανεξάρτητη μεταβλητή, αυτή επέφερε μια ανεπαίσθητη αλλαγή στην ίδια την συνάρτηση. Μερικές φορές αυτές οι ιδιότητες τις οποίες σήμερα εμείς γνωρίζουμε ως διαφορετικές τις έβλεπαν ως ισοδύναμες, και μερικές φορές αν και είχαν το ίδιο όνομα τις έβλεπαν διαφορετικές.

Οι όροι συνέχεια και ο νόμος της συνέχειας χρησιμοποιούντο με εντελώς διαφορετική έννοια στις συζητήσεις για το όριο και την παράγωγο. Η συνέχεια μερικές φορές σήμαινε ότι, εάν κάθε στοιχείο μιας δοσμένης ακολουθίας έχει κάποια ιδιότητα, το ίδιο μπορούμε να πούμε και για το όριο αυτής της ακολουθίας.

Ένα επιχείρημα αυτού του τύπου έδινε μια οντολογική απόδειξη για την ύπαρξη της παραγώγου. Ο Lacroix έγραψε ότι ‘‘*είναι συνέπεια του νόμου της συνέχειας, ότι οι αυξήσεις διατηρούν το λόγο προς τον οποίον τείνουν βαθμιαία πριν μηδενισθούν*’’. Έτσι η συνέχεια φαίνεται να σχετίζεται κατά κάποιο τρόπο με την παραγωγισιμότητα. Η ανάγκη να ορισθεί η συνέχεια άρχισε να γίνεται πιεστική όταν η έννοια της συνάρτησης άρχιζε να αλλάζει. Όταν άρχισαν να μελετούν τις συναρτήσεις τον 18^{ο} αιώνα, οι συναρτήσεις ταυτίζονταν με τους τύπους τους που ήταν συνήθως σειρές. Τα παραδείγματα των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν όπως, πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, τριγωνομετρικές, λογαριθμικές, οδήγησαν τους μαθηματικούς να αναμένουν οι συναρτήσεις να έχουν καλή συμπεριφορά, όπως να έχουν την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και να έχουν παραγώγους κάθε τάξης. Αυτές οι ελπίδες γκρεμίστηκαν περί τα μέσα του αιώνα, όταν προέκυψε η ανάγκη θεώρησης συναρτήσεων που δεν είχαν αναλυτικές εκφράσεις, αλλά προέκυπταν σαν λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων από τη φυσική. Αυτές οι συναρτήσεις μπορεί να μην είχαν καν τύπους. Αφού η έννοια της συνάρτησης είχε τόσον επεκταθεί, οι μαθηματικοί έπρεπε να αποσαφηνίσουν, ποιες συναρτήσεις και με ποιους τύπους, ήταν επιτρεπτές σαν λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Αυτό θα μπορούσε φυσικά να γίνει μόνον αν μπορούσαν να βρουν νέους τρόπους για την ταξινόμηση των συναρτήσεων.

Η συζήτηση πάνω στα είδη των συναρτήσεων που ήταν επιτρεπτά για τη λύση διαφορικών εξισώσεων άρχισε, όταν ο d’ Alembert διατύπωσε και έλυσε τη διαφορική εξίσωση για την παλλόμενη χορδή. Στη συζήτηση τελικά έλαβαν μέρος οι d’ Alembert, Euler, Daniel Bernoulli και Lagrange που θεωρούνται οι κορυφαίοι μαθηματικοί αυτού του αιώνα. Το 1747 ο d’ Alembert έδωσε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης της παλλόμενης χορδής, η οποία σήμερα ονομάζεται εξίσωση κύματος και είναι η ακόλουθη: $\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{1}{\boldsymbol{c}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}^2}$. Ο d’ Alembert κατόρθωσε να δείξει ότι η λύση y έχει τη γενική μορφή $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ct}\right)-\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{ct}\right)$. Αλλά αυτή η μορφή της λύσης αμέσως έθεσε τον προβληματισμό. Ποιοι περιορισμοί, εκτός από τις οριακές συνθήκες έπρεπε να τεθούν για την $\boldsymbol{F}$; Πρέπει όπως πίστευε ο d’ Alembert, οι λύσεις να ορίζονται με τον ίδιο τύπο; Ή όπως δεχόταν ο Euler, μπορούσαν να ήταν κατά τμήματα διαφορίσιμες εκτός των σημείων σύνδεσης; Ο d’ Alembert είπε ότι το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής δεν θα μπορούσε ποτέ να μελετηθεί μαθηματικά

εκτός αν *΄΄τα διάφορα σχήματα της παλλόμενης χορδής μπορούσαν να εκφρασθούν με την ίδια εξίσωση*΄΄. Όταν ο Daniel Bernoulli πρότεινε μια τριγωνομετρική σειρά σαν λύση της διαφορικής εξίσωσης της παλλόμενης χορδής, ο Euler αντέδρασε. Ο Euler πίστευε ότι οι συναρτήσεις που περιγράφονται με τριγωνομετρικές σειρές θα συμπεριφερόντουσαν σαν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, δηλαδή θα ήταν πάντα παραγωγίσιμες, περιοδικές και στην περίπτωση των ημιτόνων περιττές. Έτσι δεν θα ήταν αρκετά γενικές για να περιγράψουν όλες τις δυνατές φυσικές λύσεις. Ο Euler δεν κατάλαβε πλήρως τις σχετικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών σειρών, αλλά ο λόγος για τη μομφή του ήταν ασφαλώς υπερασπιστικός και σημαντικός. Ήθελε τον ορισμό της συνάρτησης να είναι όσο το δυνατόν πιο γενικός. [J. Grabiner.]

Το 1787 η Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης προκήρυξε βραβείο με την ερώτηση, ποιες συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Το βραβείο κέρδισε ο L.F.A. Arbogast που βοήθησε, τουλάχιστον προσωρινά, ώστε να ξεκαθαριστεί η έννοια της συνέχειας. Κάθε συνάρτηση που σήμερα καλούμε κατά τμήματα συνεχή μπορούσε να γίνει δεκτή ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης. Μια συνάρτηση που δεν μπορούσε να γραφεί με τον ίδιο αλγεβρικό τύπο σε όλα τα διαστήματα ήταν ασυνεχής. Στην περίπτωση που η λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από μέρη καμπύλων γινόταν δεκτή αρκεί τα τμήματα αυτά να συνδέονταν το ένα με το άλλο . Την ιδιότητα αυτή την ονόμασε **contiguity** που αντιστοιχεί σ' αυτό που αργότερα οι Cauchy και Bolzano ονόμασαν συνέχεια.[J. Grabiner.]

Ο Arbogast έδωσε τρεις χαρακτηρισμούς αυτής της ιδιότητας.

i) Η τελευταία τεταγμένη του προηγούμενου τύπου και η πρώτη του νέου τύπου είναι περίπου ίσες μεταξύ των, διαφέροντας μόνον κατά μία απείρως μικρή ποσότητα.

ii) Όταν η μεταβλητή αυξάνεται συνεχώς, τότε και η συνάρτηση μεταβάλλεται αντίστοιχα και

iii) Η τεταγμένη y, όπου y είναι συνάρτηση του x, δεν μπορεί να περάσει απότομα από τη μία τιμή στην άλλη. Δεν μπορεί να κάνει άλματα από τη μια τιμή σε μια άλλη που διαφέρει απ' αυτήν ελάχιστα.

Όλοι αυτοί οι χαρακτηρισμοί είχαν σκοπό να αποκλείσουν μια συνάρτηση που παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας σε ένα σημείο. Δίνοντας αυτές τις ιδιότητες εφιστούσε την προσοχή στην ουσιώδη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων σε σημείο. Έτσι συνδέθηκαν αυτές οι τρεις ερμηνείες της παραπάνω ιδιότητας, να μην

υπάρχουν άλματα, με την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, λέγοντας ότι τέτοιες συναρτήσεις πρέπει να υπακούουν στο **νόμο της συνέχειας**. Μια ποσότητα δεν μπορεί να περάσει από μια θέση σε μια άλλη χωρίς να έχει περάσει προηγουμένως από όλες τις ενδιάμεσες θέσεις. Ο Arbogast με το άρθρο του πλησίασε πολύ κοντά στις ιδιότητες που πρέπει να πληρούν οι συνεχείς συναρτήσεις.

Το άρθρο και οι συζητήσεις που προκάλεσε, ασφαλώς πρόσφεραν τροφή για σκέψεις στους μαθηματικούς όπως ο Bolzano και ο Cauchy. Ατυχώς οι Cauchy και Bolzano δεν αναφέρουν, ούτε τον Arbogast, ούτε κανέναν από τους άλλους που προσέφερε στη συζήτηση για τους ορισμούς της συνέχειας της συνάρτησης. Έτσι, αν και η εργασία του Arbogast κέρδισε ένα μεγάλο Ακαδημαϊκό βραβείο και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι ήταν ευρύτερα γνωστή, δεν υπάρχει σαφής μαρτυρία ότι είχε άμεση επίδραση στον Bolzano, ή τον Cauchy.

Ακόμη, μια συνέπεια της συζήτησης για την παλλόμενη χορδή ήταν ότι υπήρξαν πολλές περιγραφές των συνεχών συναρτήσεων την περίοδο γύρω από το 1800 και επομένως ήταν στη διάθεση του Bolzano και του Cauchy. Ο S. F. Lacroix, για παράδειγμα, έγραψε το 1806 για τέτοιες συναρτήσεις, ‘‘*όσο πιο μικρές είναι οι αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής τόσο πιο κοντά η μια στην άλλη είναι οι διαδοχικές τιμές της συνάρτησης*’’. Ο Bolzano το 1830 ανέφερε μια άλλη πρόταση από την ίδια σελίδα στην οποία εμφανίστηκε η παραπάνω φράση. Ο Jourdain, μας πληροφορεί ότι η συζήτηση για την παλλόμενη χορδή επέστησε την προσοχή στις διάφορες ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, αν και δεν περιγράφει την επίδραση αυτής της συζήτησης στον Cauchy.

Ο Lagrange προκειμένου να αποδείξει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής χρησιμοποίησε τα πολυώνυμα και τη θεωρία του, για την εύρεση φραγμάτων στην προσέγγιση μιας ρίζας των. Στην απόδειξη του έδωσε μια περιγραφή της συνέχειας πολυωνύμου με θετικούς όρους. Αν P , Q είναι πολυώνυμα με θετικούς όρους ορισμένα μεταξύ x = p και x = q γράφει: *΄΄Είναι φανερό ότι αυτές οι ποσότητες αυξάνονται αναγκαστικά σύμφωνα με τον τρόπο που το x αυξάνεται και όταν το x αυξάνεται ελάχιστα από p προς το q, τα πολυώνυμα P και Q αυξάνονται επίσης ελάχιστα’’*.[J. Grabiner, σελ. 93] Αυτό αν και περιορισμένο στα πολυώνυμα ήταν μια πρώτη προσέγγιση της ιδιότητας την οποία αργότερα ο Bolzano και ο Cauchy χρησιμοποίησαν για να ορίσουν τη συνέχεια.

Ο Lagrange ήταν ο μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα που έφτασε πολύ κοντά στον ορισμό της συνέχειας, που έδωσαν αργότερα ο Bolzano και ο Cauchy, αλλά με μια

αλγεβρική περιγραφή στην εργασία του που αφορούσε τις προσεγγίσεις συναρτήσεων από σειρές Taylor. Το 1797 στην προσπάθεια του αυτή έδωσε μια εσφαλμένη απόδειξη: Αν $f(x + h) = f(x) + hp(x) + h^2q(x) + \ldots$, τότε υπάρχει h αρκούντως μικρό ώστε $|f(x)| > |hp + h^2q + \ldots|$. Όμως κατά την απόδειξη ο Lagrange έδωσε μια περιγραφή της συνεχούς συνάρτησης η οποία ήταν πολύ πιο κοντά στο μοντέρνο ορισμό των Cauchy- Bolzano από οποιαδήποτε άλλη φορά. Με την υπόθεση ότι δίνεται μια συνάρτηση hp, όπου p συνάρτηση του x, αν το x είναι σταθερό, ο Lagrange ισχυρίστηκε τότε ότι καθώς η p υπάρχει και παραμένει πεπερασμένη, η hp μηδενίζεται με την h. Τότε η καμπύλη που αντιστοιχεί σ' αυτή τη συνάρτηση, με τετμημένη το h και τεταγμένη hp θα τέμνει τον άξονα στην αρχή. Και ο Lagrange είπε χαρακτηριστικά: ''*Η τροχιά της καμπύλης θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής από αυτό το σημείο. Έτσι, αυτή σιγά-σιγά, πριν κόψει τους άξονες θα τους προσεγγίσει σε απόσταση μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα*''. Βέβαια αυτός ο χαρακτηρισμός της συνέχειας είναι γεωμετρικός. Αλλά ο Lagrange το μετέτρεψε σε αλγεβρικό. Έτσι μπορούμε πάντα να βρούμε μια τετμημένη h που να αντιστοιχεί σε τεταγμένη μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, και τότε όλες οι μικρότερες τιμές του h αντιστοιχούν επίσης σε τετμημένες μικρότερες από τη δοσμένη ποσότητα. Αυτό διαφέρει αρκετά από τις **ανεπαίσθητες αλλαγές** ή τις **απείρως μικρές αλλαγές**. Δεν είναι όμως μακριά από αυτόν τον ορισμό της συνέχειας στο h=0 μέχρι τους ορισμούς της συνέχειας των Bolzano- Cauchy. Αν και ο ίδιος ο Lagrange δεν θεώρησε αυτό τον χαρακτηρισμό σαν ορισμό της συνεχούς συνάρτησης, όμως είχε για πρώτη φορά διατυπώσει, με ανισοτικό τρόπο, αυτό που αργότερα οι Cauchy και Bolzano αναγνώρισαν στον ορισμό της συνέχειας.[J. Grabiner.]

Ο Lagrange είχε τονίσει δύο φορές την ουσιώδη ιδιότητα, των συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, ο χαρακτηρισμός του για τη συνέχεια των πολυωνύμων το 1798 –**όταν το *x* αυξάνει ανεπαίσθητα από το *p* στο *q*, (οι αντίστοιχες συναρτήσεις) αυξάνουν επίσης ανεπαίσθητα -** εμφανίζεται στην απόδειξη που έκανε για το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, το οποίο ήταν, και για τον Cauchy και για τον Bolzano, μια σημαντική εφαρμογή του ορισμού τους. Οι Cauchy και Bolzano, αργότερα, συχνά αναφέρονταν στην εργασία *Fonctions analytiques* (Αναλυτικές συναρτήσεις) του Lagrange στην οποία υπάρχει ο ανισοτικός χαρακτηρισμός της συνέχειας.

Ο πρώτος που συνειδητοποίησε την ανάγκη ενός μαθηματικά αυστηρού ορισμού για την έννοια της συνέχειας ήταν ο Bernhard Bolzano (1781-1848). Στα πρώτα του εγχειρίδια, (1816-1817) βρίσκουμε, ανάμεσα σε άλλους ορισμούς θεμελιωδών εννοιών της ανάλυσης (όριο, παράγωγος, infimum) και τον ορισμό συνεχούς συνάρτησης. Στην εργασία του *Analytik proof* (Αναλυτική απόδειξη), το 1817, ο Bolzano ασχολείται με το θεώρημα: <<Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος τότε η συνάρτηση παίρνει την τιμή μηδέν σε ένα τουλάχιστο εσωτερικό σημείο του διαστήματος >>. Το θεώρημα αυτό είναι διαισθητικά αληθοφανές. Μια συνεχής καμπύλη της οποίας ένα τμήμα βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ και ένα άλλο τμήμα βρίσκεται κάτω, απαραίτητα θα τον τέμνει. Για την αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος χρειάζεται βέβαια η πληρότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Το θεώρημα όμως δεν ισχύει στο σύνολο Q των ρητών αριθμών όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$f : [0 , 2] \cap Q \to R , f(x) = x^2 - 2$$

είναι συνεχής, $f(0)\ f(2) < 0$, αλλά το γράφημα της δεν τέμνει το $[0 , 2] \cap Q$ σε κανένα σημείο (Εφ' όσον από την $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2} \notin Q$). Είναι εντυπωσιακό ότι ο Bolzano δεν επαναπαύτηκε στη διαισθητική αληθοφάνεια του θεωρήματος του και έκρινε ότι ήταν απαραίτητο να δοθεί ένας αναλυτικός ορισμός της συνέχειας και να αποδείξει το θεώρημα ως συνέπεια του ορισμού αυτού. Οπότε άρχισε την προσπάθεια του να εισάγει ένα ορισμό για τη συνέχεια συνάρτησης.

Στην εργασία του *Functionenlehre* εισάγεται η έννοια της συνέχειας όχι μόνο σε διάστημα αλλά και σε ένα σημείο και ακόμη εξετάζεται η συνέχεια από τα δεξιά και από τα αριστερά. Ο ορισμός που έδωσε ο Bolzano είναι ο ακόλουθος:

> *''Η έκφραση ότι η συνάρτηση f(x) μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x, μέσα ή έξω από κάποια όρια, σημαίνει ακριβώς ότι: αν x ήταν μια τέτοια τιμή, η διαφορά f(x + ω) – f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα, με τη προϋπόθεση ότι το ω λαμβάνεται όσο μικρό θέλουμε''.*

Δηλαδή, η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής σε ένα διάστημα αν σε κάθε x του διαστήματος η διαφορά f(x + ω) – f(x) μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμεί κανείς, παίρνοντας το ω αρκούντως μικρό .

Ο Bolzano γνώριζε πολύ καλά τη σημασία της έννοιας της συνέχειας από το γεγονός ότι στη συγκεκριμένη εργασία του βρίσκουμε παράδειγμα συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, καθώς επίσης και παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής ακριβώς σε ένα σημείο. [Jarnik V.]

Σήμερα κλασσικό παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι η γνωστή συνάρτηση του Dirichlet,

f : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ με τύπο: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q} \\ 0, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} \end{cases}$

και συνάρτησης που είναι συνεχής ακριβώς σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της η

$$g : [0\ ,\ 1] \to R\ ,\ \ g(x) = \begin{cases} x & , \quad x = \dfrac{1}{n} \quad n = 1,2,... \\ 0 & , \quad \text{οπουδήποτε} \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

που είναι συνεχής μόνο στο $x_0 = 0$.

Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Bolzano έθεσε και το ερώτημα κατά πόσο ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματός του· δηλαδή :

Αν a, b∈R, $a < x_1 < x_2 < b$ και συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$, και παίρνει στο διάστημα $(x_1\ ,\ x_2)$ όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$, τότε αληθεύει ότι η f είναι συνεχής;

Η απάντηση του είναι αρνητική. Μεταξύ των ερωτημάτων που έθεσε ήταν και αν υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής και είναι παντού ασυνεχείς όπως για παράδειγμα η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x \in (0,1) \cap Q \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ 1 - x^2 & , \quad x \in (0,1) \cap (R \setminus Q) \end{cases}$$

Η ανάγκη για την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του απειροστικού λογισμού ήταν αυτή που οδήγησε τον Cauchy (1789-1857) να δώσει στο έργο του *Cours d' Analyse* [Cauchy, Augustin, σελ.19,43], το 1821, τον ακόλουθο ορισμό της συνεχούς συνάρτησης:

Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο διάστημα Δ αν και μόνο αν η αριθμητική τιμή (δηλαδή η απόλυτη τιμή) της διαφοράς f(x+h)- f(x) τείνει στο μηδέν καθώς το h τείνει στο μηδέν.

Συνεχίζοντας, εξηγεί τον προηγούμενο ορισμό λέγοντας ότι η συνάρτηση f(x) θα είναι συνεχής σε σχέση με το x, σε ένα δοσμένο διάστημα, εάν σ' αυτό το διάστημα <u>μια απειροελάχιστη μεταβολή στη μεταβλητή</u> σημαίνει πάντα <u>μια απειροελάχιστη μεταβολή στις τιμές της συνάρτησης</u>. Με τη βοήθεια του ορισμού της συνέχειας ο Cauchy απέδειξε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις. Έπειτα χρησιμοποίησε τον ορισμό και το θεώρημα, για απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής για την παράγωγο και το ολοκλήρωμα και για την ύπαρξη του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης.

Ο Cauchy, πριν καταλήξει στον προηγούμενο ορισμό, είχε δώσει δύο άλλες διατυπώσεις του ορισμού της συνέχειας. Η πρώτη χρησιμοποιεί ενορατική γλώσσα και η δεύτερη είναι αλγεβρική. Η πρώτη διατύπωση:

Η συνάρτηση f(x) θα είναι συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής x μεταξύ δύο δοσμένων αριθμών εάν για κάθε τιμή μεταξύ αυτών των αριθμών η απόλυτος τιμή της διαφοράς f(x + α) – f(x) μειώνεται καθώς μειώνεται το α .

Με άλλα λόγια η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής σε σχέση με το x μεταξύ των δύο αριθμών, εάν μεταξύ αυτών των αριθμών μια απείρως μικρή αύξηση της μεταβλητής, πάντοτε παράγει μια μικρή αύξηση της ίδιας της συνάρτησης. Μετά τον ορισμό αυτό απέδειξε τη συνέχεια της ημx, ένα παράδειγμα που το θεώρησε απαραίτητο για την κατανόηση του.

Ο Cauchy στην εισαγωγή της εργασίας του για τα ορισμένα ολοκληρώματα (1814), παρατήρησε ότι το θεώρημα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$, όπου f(x) = F΄(x), ισχύει ''*μόνο στην περίπτωση συνάρτησης που αυξάνει ή φθίνει κατά συνεχή τρόπο μεταξύ των δοσμένων ορίων · όταν η μεταβλητή αυξάνει ανεπαίσθητα (πολύ λίγο) , η συνάρτηση περνάει απότομα από τη μια τιμή στην άλλη , τότε οι διαφορές μεταξύ των πηδημάτων που κάνει η συνάρτηση χρειάζονται διόρθωση*''. (Αυτό το κείμενο μερικές

φορές χρησιμοποιείται για να δείξει γιατί ο Cauchy θεώρησε το ολοκλήρωμα σαν άθροισμα αντί ως αντίστροφο της παραγώγου. Η γλώσσα της περιγραφής του για τις ασυνέχειες - ΄΄περνάει απότομα΄΄, ΄΄πηδάει΄΄- ταιριάζει πολύ με τη γλώσσα του Arbogast και σίγουρα είναι γραμμένη γνωρίζοντας τη συζήτηση του 18^{ου} αιώνα. Η φράση του **ανεπαίσθητες μεταβολές** θυμίζει τον Lagrange, του οποίου ο χαρακτηρισμός της συνέχειας ενός πολυωνύμου ίσως να βοήθησε για την επισήμανση της κρίσιμης ιδιότητας της συνέχειας.[Kline, M.].

Ο Cauchy δεν χρησιμοποίησε, τουλάχιστον κατά κατηγορηματικό τρόπο, κανέναν από τους ΄΄ανταγωνιστικούς΄΄ χαρακτηρισμούς, και δεν χρησιμοποίησε εξισώσεις για τις συναρτήσεις στην περιγραφή του για τη συνέχεια συνάρτησης. Γενικά, ο Cauchy δεν όρισε τι είναι συνεχής συνάρτηση στην εργασία του το 1814. Η ιδιότητα που χρειαζόταν στις αποδείξεις του ήταν ΄΄χωρίς πηδήματα΄΄, ενώ η απόδειξη του για το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής το 1821, χρειαζόταν την κατανόηση της συνέχειας με τον (ε-δ) ορισμό του. [Kline, M.]

Ο Cauchy ήδη από το 1814 είχε δώσει ένα αλγεβρικό χαρακτηρισμό της συνέχειας σε ένα σημείο. Θεώρησε την περίπτωση συνάρτησης η οποία ΄΄περνάει ξαφνικά (απότομα) από μία δεδομένη τιμή σε μια άλλη αισθητά διαφορετική από την πρώτη΄΄. Αν φ(z) είναι η συνάρτηση, z το σημείο, και ξ ΄΄μια πολύ μικρή ποσότητα΄΄, ο Cauchy περιέγραψε την κατάσταση γράφοντας $\varphi(z+\xi)-\varphi(z-\xi) = \Delta$.

Ο χαρακτηρισμός της ασυνέχειας από τον Cauchy, είναι αλγεβρική μεταφορά της ιδιότητας του να κάνει άλμα (πήδημα). Αν και δεν χρησιμοποιεί εδώ τη γλώσσα των ορίων, μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτή την εξίσωση ότι ο Cauchy ήξερε ότι μια συνάρτηση κάνει ένα πήδημα στο σημείο ξ, αν το όριο της διαφοράς $\varphi(z+\xi)-\varphi(z-\xi)$ δεν είναι μηδέν, καθώς το ξ τείνει στο μηδέν. Αυτή η αλγεβρική κατανόηση το (1814) της ασυνέχειας σε ένα σημείο, είναι συνεπής με τον ορισμό της συνέχειας που έδωσε ο Cauchy το 1821, ασφαλώς χωρίς να έχει διαβάσει τον Bolzano, γιατί μπορούσε να συμπεράνει πολύ εύκολα ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής όταν το Δ τείνει στο μηδέν με το ξ. Επειδή οι δύο χαρακτηρισμοί δεν είναι ίδιοι και επειδή ούτε οι ανισότητες ούτε τα όρια αναφέρονται, δεν είναι βέβαιο αν ο Cauchy είχε ήδη από το 1814 διατυπώσει τον ορισμό της συνέχειας. [Grattan- Guinnes.]

Η αντιστοιχία μεταξύ της άποψης του Lagrange για τη συνέχεια και της άποψης των Cauchy - Bolzano τονίσθηκε το 1830 από τον ίδιο τον Bolzano . Ο Bolzano σημείωσε ότι ο όρος συνεχής συνάρτηση είχε χρησιμοποιηθεί με διάφορες

σημασίες: Για παράδειγμα, κατά τον Lacroix σήμαινε ότι ο λόγος $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ ήταν φραγμένος, κατά τον K*ä*stner και Fries σήμαινε ότι η συνάρτηση είναι πραγματική και πεπερασμένη. Ο Bolzano είπε ότι αυτές οι ιδιότητες είναι όλες σημαντικές και πρέπει να διακρίνονται η μια από την άλλη. Πρόσθεσε όμως ότι ο όρος συνεχής συνάρτηση πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για τη βασική ιδιότητα. Με τα λόγια του *΄΄ Έτσι θα ήταν πιο καλά, διατηρώντας την ορολογία του Lagrange και του Cauchy, με τον όρο συνεχής συνάρτηση να εννοούμε μόνο την ιδιότητα ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς F(x+Δx)-F(x) γίνεται και παραμένει μικρότερη από κάθε δοσμένο κλάσμα* $\frac{1}{N}$ *αν το Δx λαμβάνεται αρκετά μικρό΄΄.* [Grattan -Guinnes].

Οι Cauchy- Bolzano επανεξέτασαν τις λεπτομέρειες των λύσεων της εξίσωσης κύματος, των τεμνόμενων καμπυλών, των πολυωνύμων και δυναμοσειρών κοντά στο μηδέν, και αναγνώρισαν και απομόνωσαν τη βασική ιδιότητα σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. Ήταν ακριβώς η ιδιότητα που χρειαζόταν ο καθένας στις τελείως διαφορετικές αποδείξεις τους για το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Επίσης ήταν ακριβώς η ιδιότητα που χρειαζόταν ο Cauchy στις μετέπειτα εργασίες του στο διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Αυτό το γεγονός αναδεικνύει ακόμη μια φορά τη διπλή ικανότητα του Cauchy να επιλέγει τη βασική ιδιότητα μιας έννοιας μέσα από ένα πλήθος αποτελεσμάτων και να διατυπώνει αυτήν την ιδιότητα σωστά.

Η σχεδόν ταυτόχρονη ανακάλυψη του ορισμού της συνέχειας από τους Bolzano και Cauchy κατά τους ιστορικούς φανερώνει την επιθυμία τους, να διατυπώσουν τον ορισμό της συνέχειας σύμφωνα με τις απόψεις που είχαν διατυπωθεί από τους άλλους αναλύστες του 18^{ου} αιώνα.

Αλλά ο Cauchy και ο Bolzano προχώρησαν πολύ περισσότερο από τους προκατόχους τους. Έχοντας επιλέξει τη βασική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων, ξεκίνησαν μια αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας των συνεχών συναρτήσεων, με τη βοήθεια της οποίας, ο Cauchy απέδειξε τα θεωρήματα μέσης τιμής του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.

Η έννοια της συνέχειας μελετήθηκε καθ' όλη τη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα και οι μαθηματικοί έμαθαν περισσότερα γι' αυτή, βρίσκοντας μερικές φορές αποτελέσματα που τους προκαλούσαν έκπληξη, όπως το παράδειγμα που έδωσε ο Darboux, μιας συνάρτησης που παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ δύο δοθεισών τιμών δίχως να είναι συνεχής. Έτσι αυτή η βασική ιδιότητα των συνεχών

συναρτήσεων δεν είναι ικανή να εξασφαλίσει τη συνέχεια. Για παράδειγμα, η συνάρτηση f : $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ με τύπο: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}\right), & \boldsymbol{\gamma\iota\alpha} \quad \boldsymbol{x} \neq 0 \\ 0 \quad , & \boldsymbol{\gamma\iota\alpha} \quad \boldsymbol{x} = 0 \end{cases}$ παίρνει όλες τις τιμές που βρίσκονται ανάμεσα σε αυτές που παίρνει η συνάρτηση σε μια αρνητική τιμή του χ και σε μια θετική τιμή του χ. Όμως δεν είναι συνεχής στο χ = 0.

Παρά το γεγονός ότι ο Cauchy έδωσε αυστηρούς ορισμούς των βασικών εννοιών της ανάλυσης εντούτοις η ταυτόχρονη χρήση αυτών και των απειροστών οδήγησε αρκετές φορές σε μαθηματικά λάθη. Την Τρίτη δεκαετία του 19^{ου} αιώνα οι Dedekind, Weierstrass, Cantor, Meray κατασκεύασαν τους πραγματικούς αριθμούς, ώστε η έννοια του ορίου, κεντρική του απειροστικού λογισμού, να είναι μόνον αριθμητική, βασισμένη στο σύστημα των πραγματικών αριθμών και απαλλαγμένη από διαισθητικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις.

Για τον Dedekind, το θεμελιωτικό πρόγραμμα της ανάλυσης θα ήταν εξασφαλισμένο αν μπορούσε να καταφέρει τη θεμελίωση του ίδιου του συστήματος των πραγματικών αριθμών, του συστήματος που βρίσκεται στη βάση όλων των αναζητήσεων στην ανάλυση και στα μαθηματικά γενικότερα. Έτσι αναζητήθηκε η κατασκευή μιας αναλυτικής δομής, η οποία θα υποκαθιστούσε το γεωμετρικό συνεχές. Αυτό φαίνεται από τα γραπτά του Dedekind :

> *΄΄Κατά τη συζήτηση της εννοίας της προσέγγισης μιας μεταβλητής ποσότητας προς μια οριακή τιμή, και ιδιαίτερα κατά την απόδειξη του θεωρήματος σύμφωνα με το οποίο, κάθε μέγεθος που αυξάνεται συνεχώς, αλλά όχι πέραν κάποιου ορίου, πρέπει κατ' ανάγκην να προσεγγίζει μια οριακή τιμή, κατέφυγα στη γεωμετρική μαρτυρία. Ακόμη και τώρα θεωρώ ότι η προσφυγή στη γεωμετρική εποπτεία κατά την πρώτη παρουσίαση του διαφορικού λογισμού είναι εξαιρετικά χρήσιμη από διδακτική σκοπιά και επαναστατικά αναγκαία αν δεν θέλει κανείς να χάσει πολύτιμο χρόνο. Αλλά κανείς δεν θα μπορούσε ν' αρνηθεί ότι αυτός ο τρόπος εισαγωγής στο διαφορικό λογισμό είναι μη επιστημονικός. Προσωπικά αισθανόμουν αυτή τη δυσφορία τόσο έντονα που υποσχέθηκα στον εαυτό μου να συνεχίσω να σκέπτομαι πάνω στο ζήτημα μέχρι να μπορέσω να βρω ένα καθαρά αριθμητικό*

και εντελώς αυστηρό θεμέλιο των αρχών του απειροστικού λογισμού. Πολύ συχνά ακούμε να λέγεται ότι ο διαφορικός λογισμός ασχολείται με συνεχή μεγέθη, όμως πουθενά δεν δίνεται μια ερμηνεία αυτής της συνέχειας, ακόμη και οι πιο αυστηρές διατυπώσεις του διαφορικού λογισμού δεν βασίζουν τις αποδείξεις τους πάνω στη συνέχεια, αλλά καταφεύγουν, περισσότερο ή λιγότερο συνειδητά, σε γεωμετρικές έννοιες, ή σε έννοιες που συνδέονται με τη γεωμετρία ή εξαρτώνται από θεωρήματα που δεν αποδεικνύονται με καθαρά αριθμητικό τρόπο. Σε αυτά, για παράδειγμα ανήκει το παραπάνω θεώρημα, και με πιο προσεκτική εξέταση με έπεισε ότι αυτό το θεώρημα, ή ένα άλλο ισοδύναμο μ' αυτό, μπορεί να θεωρηθεί κατά κάποιο τρόπο ως επαρκής βάση για τον απειροστικό λογισμό. Έμενε λοιπόν να ανακαλυφθεί η πραγματική του προέλευση από τα στοιχεία της αριθμητικής, και να εξασφαλισθεί ταυτόχρονα ένας πραγματικός ορισμός της συνέχειας΄΄ . [Dedekind R, σελ.1].

Η εμφάνιση των αρρήτων ήταν ένα ζήτημα στενά συνδεδεμένο με τις γεωμετρικές κατασκευές και την εποπτεία. Το $\sqrt{2}$ είναι το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1. Το πρόγραμμα όμως ορισμού των αρρήτων αριθμών μέσω των ρητών προσέκρουε σε έννοιες που δεν είχαν ακόμη αναλυτικό χαρακτήρα. Έτσι η έννοια της προσέγγισης ενός ορίου που δόθηκε από τον Cauchy δεν ήταν ξεκομμένη από τη γεωμετρική εποπτεία και τις σχετικές γεωμετρικές εικόνες. Ο Dedekind θα προσπαθήσει να περιγράψει το συνεχές, διασώζοντας το διαισθητικό χαρακτήρα αυτής της δομής. Ερευνά ν' ανακαλύψει τη δομή του συνεχούς, όπως αυτό δίνεται στη λογικό εποπτική του διάσταση. Πρόκειται για τη χαρακτηριστική ιδιότητα που καθιστά την ευθεία γραμμή ένα συνεχές. Η ανακάλυψη αυτής της ιδιότητας θα απεδίδετο κατόπιν ως η χαρακτηριστική ιδιότητα της υπό κατασκευή αναλυτικής δομής (δηλαδή των πραγματικών αριθμών).

Ο Dedekind καθώς ανέλυε την συνέχεια μιας ευθείας συνέκρινε τους ρητούς αριθμούς με τα σημεία της ευθείας.

ΡΗΤΟΙ(κλάσματα)	ΣΗΜΕΙΑ (ευθείας)
1. Αν α , β , γ τρεις ρητοί αριθμοί με α>β και β>γ, τότε α>γ	1.Αν Α , Β, Γ τρία σημεία ώστε το Α να είναι δεξιά του Β και το Β να είναι δεξιά του Γ, τότε το Α είναι στα δεξιά του Γ.
2. Αν α και γ είναι ρητοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους τότε υπάρχει άπειρον πλήθος ρητών αριθμών που βρίσκονται ανάμεσα στους α και γ .	2.Αν Α και Γ είναι δύο σημεία μιας ευθείας διαφορετικά μεταξύ τους τότε υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων της ευθείας που βρίσκονται ανάμεσα στα Α και Γ
3. Ένας ρητός αριθμός α διαιρεί τους ρητούς σε δύο κλάσεις : Την κλάση Α = {χ ρητός με χ ≤ α} και την κλάση Β = {y ρητός με y > α}. Ο αριθμός α ανήκει σε μια μόνο κλάση.	3. Ένα σημείο Μ μιας ευθείας διαιρεί την ευθεία σε δύο κλάσεις. Την κλάση των σημείων της ευθείας που βρίσκονται αριστερά του Μ και την κλάση των σημείων της ευθείας που βρίσκονται δεξιά του Μ .
Οι δύο κλάσεις έχουν την προφανή ιδιότητα ότι κάθε αριθμός της Α είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της Β.	

Η αναλογία αυτή ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς και τα σημεία μιας ευθείας γραμμής, μπορεί να εκφραστεί με μια αντιστοιχία αν επιλεγεί πάνω στην ευθεία ένα σημείο ως αρχή και μια μονάδα μήκους για τη μέτρηση των τμημάτων. Τότε σε κάθε ρητό q θ' αντιστοιχεί ένα μήκος που θα μετριέται με αφετηρία την αρχή είτε προς τα δεξιά αν ο q>0 είτε προς τα αριστερά αν q<0. Με τον τρόπο αυτό θα αντιστοιχεί ένα σημείο Μ πάνω στην ευθεία σε κάθε ρητό q. Συνεπώς αν p, q δύο ρητοί με p > q τότε σ' αυτούς θ' αντιστοιχούν δύο σημεία Μ , Ν της ευθείας, και αφού p >q το Μ θα βρίσκεται δεξιά του Ν. Υπάρχουν όμως άπειρα σημεία της ευθείας όπως είδαμε, που δεν αντιστοιχούν σε ρητό αριθμό. Υπάρχουν άπειρα μήκη που είναι ασύμμετρα με τη μονάδα μήκους, και μάλιστα η ευθεία είναι πλουσιότερη σε σημεία απ' ότι είναι οι ρητοί αριθμοί. Το σύνολο λοιπόν των ρητών είναι ανεπαρκές, και συνεπώς καθίσταται επιτακτική η ανάγκη να δημιουργηθούν νέοι αριθμοί, ώστε το νέο σύνολο αριθμών να έχει την ίδια πληρότητα ή συνέχεια , όπως η ευθεία γραμμή.

Ο Dedekind καταλήγει ότι η ουσία της συνέχειας της ευθείας βρίσκεται στην 3η ιδιότητα η οποία μπορεί να ληφθεί και ως αξίωμα που να αφορά την ευθεία. **Εάν όλα τα σημεία μιας ευθείας διαιρεθούν σε δύο κλάσεις έτσι ώστε, κάθε σημείο της πρώτης κλάσης βρίσκεται στα αριστερά κάθε σημείου της δεύτερης κλάσης, τότε υπάρχει <u>ένα και μόνο ένα σημείο</u> της ευθείας το οποίον παράγει αυτή η διαίρεση των σημείων σε δύο κλάσεις, το διαχωρισμό της ευθείας σε δύο τμήματα.** Έτσι εάν μια γραμμή τμηθεί σε δύο μέρη τότε <u>υπάρχει ακριβώς ένα σημείο</u> που βρίσκεται πάνω σ' αυτή την κοπή. Αντίθετα στους ρητούς αριθμούς η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει. Είναι δυνατόν να κόψουμε τους ρητούς σε δύο κλάσεις μια αριστερή και μια δεξιά κι όταν η αριστερή δεν έχει μέγιστο και η δεξιά δεν έχει ελάχιστο τότε η τομή τους δεν πέφτει σε ρητό, δηλαδή δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να βρίσκεται στην τομή τους. Ο Dedekind γενίκευσε την 3η ιδιότητα δίνοντας τον ορισμό:

Αν δίνεται ένας χωρισμός του συνόλου Q των ρητών σε δύο κλάσεις A, B που ικανοποιεί την χαρακτηριστική ιδιότητα ότι κάθε αριθμός α που ανήκει στην κλάση A είναι μικρότερος από κάθε αριθμό β που ανήκει στην κλάση B τότε θα ονομάζουμε τομή ένα τέτοιο χωρισμό και θα συμβολίζουμε με (A,B) .

Κάθε ρητός αριθμός α ορίζει μια τομή για την οποία το α είναι είτε ο μεγαλύτερος αριθμός της κλάσης Α είτε ο μικρότερος της κλάσης Β. Υπάρχουν όμως τομές που δεν παράγονται από ρητούς αριθμούς: Για παράδειγμα, αν διαμερίσουμε τους ρητούς σε δύο κλάσεις, την κλάση $A = \{x \text{ρητός με } x^2 < 2\}$ και την κλάση $B = \{y \text{ρητός με } y^2 > 2\}$ τότε η τομή τους βρίσκεται πάνω στον $\sqrt{2}$,που δεν είναι ρητός. <u>Τα χάσματα που αφήνουν οι ρητοί ανάμεσα τους είναι πολύ περισσότερα από τους ίδιους τους ρητούς</u>. Η συμπλήρωση αυτών των χασμάτων χαράσσει την πορεία προς την έννοια του πραγματικού αριθμού. <u>Το πέρασμα στους πραγματικούς αριθμούς ήταν άμεσο</u>. Ο Dedekind χώρισε το σύνολο των ρητών σε δύο κλάσεις μια αριστερή και μια δεξιά κι όταν η αριστερή δεν έχει μέγιστο και η δεξιά δεν έχει ελάχιστο θεωρεί ότι ορίζεται ένας καινούριος αριθμός που δεν είναι ρητός. Αυτός θα ονομασθεί <u>άρρητος</u>. Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, θα είναι τελικά ένα διατεταγμένο αντιμεταθετικό σώμα, που αποτελείται από τους ρητούς και τους

άρρητους. Αποδεικνύεται ότι: Για κάθε χωρισμό σε δύο κλάσεις δεξιά και αριστερά του συνόλου **R** υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο του **R** που τον προκαλεί και ονομάζεται τομή. Έτσι ορίζεται μια 1-1 και επί απεικόνιση του συνόλου των πραγματικών αριθμών με τα σημεία της ευθείας γραμμής. Το νέο αυτό σώμα **R** ικανοποιεί την ιδιότητα πληρότητας: **κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.** Την ιδιότητα αυτή προφανώς δεν την ικανοποιεί το σύνολο των ρητών αριθμών.

Μετά την κατασκευή των πραγματικών αριθμών ο Weierstrass (1815-1897) εργάστηκε ώστε να αποφύγει τη διαίσθηση και να στηριχθεί η έννοια του ορίου μόνο σε αριθμητικές έννοιες. Απέφυγε να χρησιμοποιεί τη φράση **μια μεταβλητή προσεγγίζει ένα όριο**, που αναφέρεται στο χρόνο και την κίνηση. Ερμηνεύει μια μεταβλητή απλά σαν ένα γράμμα που αντιπροσωπεύει μια οποιαδήποτε τιμή από ένα σύνολο τιμών. Έτσι αποφεύγει την κίνηση. Μια συνεχής μεταβλητή είναι αυτή για την οποίαν, αν χ_0 είναι μια (οποιαδήποτε) τιμή από το σύνολο τιμών της μεταβλητής και δ είναι ένας (οποιοσδήποτε) θετικός αριθμός (τότε) υπάρχουν και άλλες τιμές της μεταβλητής στο διάστημα $(\chi_0 - \delta , \chi_0 + \delta)$. Ο ορισμός που έδωσε ο Weierstrass για τη συνεχή συνάρτηση ισοδυναμεί με εκείνον των Cauchy –Bolzano αλλά τώρα είναι περισσότερο ακριβής και σαφής. Ο Weierstrass όρισε ως συνεχή τη συνάρτηση f(x), όταν το x βρίσκεται σε κάποιο (φραγμένο) διάστημα, εάν για κάθε τιμή x_0 σ' αυτό το διάστημα και για ένα οσοδήποτε θέλουμε μικρό θετικό αριθμό ε, είναι δυνατόν να βρούμε μια περιοχή γύρω από το x_0 τέτοια, ώστε για όλες τις τιμές σ' αυτή την περιοχή η διαφορά $|(f(x) - f(x_0)|$ είναι μικρότερη από τον ε.

Ο παραπάνω ορισμός με σημερινό συμβολισμό διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $A \neq \varnothing$, $A \subseteq R$, $x_0 \in A$, *και συνάρτηση* $f : A \to R$. *Η f είναι συνεχής στο* $x_0 \in A$ *αν και μόνο αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε αν* $x \in A$ *και* $|x - x_0| < \delta$ *τότε* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο Weierstrass κατόρθωσε να εξοστρακίσει τα απειροστά και έκτοτε όλοι οι ορισμοί που περιείχαν τέτοιες έννοιες δόθηκαν πλήρως αριθμητικά. Για παράδειγμα, ο μαθητής του Edward Heine, όχι μόνο έδωσε τον ορισμό της συνέχειας σ' ένα σημείο, σε μια εργασία του το 1872, αλλά διατύπωσε τον ορισμό της συνέχειας σε διάστημα που είχε δώσει ο Cauchy ως εξής.

Μια συνάρτηση f(x) καλείται ομοιόμορφα συνεχής από το x=a έως το x=b αν για κάθε δοσμένη ποσότητα ε, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει θετική ποσότητα n_0 τέτοια ώστε για όλες τις θετικές τιμές n που είναι μικρότερες από το n_0, η απόλυτη τιμή της $f(x_0 \pm n) - f(x_0)$ παραμένει μικρότερη του ε.

Μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα του χ αν είναι συνεχής σε κάθε χ του διαστήματος. Ο Weierstrass απέδειξε με αυστηρότητα διάφορα θεωρήματα που αφορούσαν τις συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ των οποίων και το θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει, κατά χρονολογική σειρά, τους ορισμούς της συνέχειας, έτσι όπως δόθηκαν από τους: Euler, Bolzano, Cauchy, Dirichlet και Heine. [Katz V.σελ. 710].

Euler (1748): *A continuous curve is one such that its nature can be expressed by a single function of x. If a curve is of such a nature that for its various parts, ...,then we call such a curve discontinuous.*
(Μια καμπύλη λέγεται συνεχής αν μπορεί να περιγραφεί με μια μόνο συνάρτηση. Διαφορετικά λέγεται ασυνεχής. [Άρα κατά τον Euler οι συναρτήσεις με κλάδους δεν μπορούν να περιγράφουν συνεχείς καμπύλες].).

Bolzano(1817): *A function f(x) varies according to the law of continuity for all values of x inside or outside certain limits ... if [when] x is some such value, the difference f(x+ω)-f(x) can be made smaller than any given quantity provided ω can be taken as small as we please .*
(Μια συνάρτηση μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του χ μέσα ή έξω από κάποια όρια αν [όταν] χ είναι μια τέτοια τιμή, η διαφορά f(x+ω)-f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα αρκεί το ω να εκλεγεί τόσο μικρό, όσο θέλουμε).

Cauchy (1821) : *The function f(x) will be , between two assigned values of the variable x , a continuous function of this variable if for each value of x between these limits, the [absolute] value of the difference f(x+a)-f(x) decreases indefinitely with a .*

(Η συνάρτηση f(x) θα λέγεται, μεταξύ δύο δοσμένων τιμών της μεταβλητής x, συνεχής συνάρτηση αυτής της μεταβλητής, αν για κάθε τιμή του x μεταξύ αυτών των ορίων, η [απόλυτη] τιμή της διαφοράς f (x + α) - f (x) γίνεται διαρκώς μικρότερη καθώς ελαττώνεται το α).

Dirichlet (1837) : *One thinks of a and b as two fixed values and of x as a variable quantity that can progressively take all values lying between a and b . Now if to every x there corresponds a single , finite y in such a way that , as x continuously passes through the interval from a to b , y=f(x) also gradually changes, then y is called a continuous function of x in this interval.*
(Αν α και b δύο σταθερές τιμές και x μια μεταβλητή ποσότητα, η οποία παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ α και b. Αν σε κάθε x αντιστοιχεί μια μόνο, πεπερασμένη τιμή y έτσι ώστε, καθώς το x διατρέχει συνεχώς το διάστημα από το α ως το b, η y = f(x) επίσης μεταβάλλεται βαθμιαία, τότε y λέγεται συνεχής συνάρτηση του x σ' αυτό το διάστημα.).

Heine (1872) : *A function f(x) is continuous at the particular value x=X if for every given quantity ε , however small, there exists a positive number* $\mathbf{n}_0$ *with the property that for no positive quantity* $\mathbf{n}$ *which is smaller than* $\mathbf{n}_0$ *does the absolute value of f(X±* $\mathbf{n}$*)-f(X) exceed ε . A function f(x) is continuous from x=a to x=b if for every single value x=X between x=a and x=b , including x=a and x=b it is continuous.*
(Μια συνάρτηση f(x) λέγεται συνεχής στην τιμή x = X αν για κάθε δοσμένη ποσότητα ε, οσοδήποτε μικρή, υπάρχει ένας θετικός αριθμός n_0 έτσι ώστε για καμία ποσότητα n, μικρότερη από το n_0, η απόλυτη τιμή της ποσότητας f (X±n) – f (X) υπερβαίνει το ε. Μια συνάρτηση f (x) λέγεται συνεχής από το x = α μέχρι το x = b , αν για κάθε τιμή x = X μεταξύ x = α και x = b , συμπεριλαμβανομένων των τιμών x = α και x = b, είναι συνεχής.)

3. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε σύντομα τι συμβαίνει στο ελληνικό σχολείο σήμερα. Τους στόχους που θέτει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για τα μαθηματικά στην ενότητα που αναφερόμαστε, πώς εφαρμόζεται το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας καθώς και τον τρόπο διδασκαλίας που, συνήθως, ακολουθείται από τους διδάσκοντες. Στη συνέχεια θα καθορίσουμε τους στόχους της παρούσας έρευνας, θα περιγράψουμε τον τρόπο επιλογής του δείγματος των μαθητών της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου που ακολουθούν θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση και τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Ακολούθως θα παρουσιάσουμε το ερωτηματολόγιο, που δόθηκε προς συμπλήρωση από τους μαθητές, καθώς και τον τρόπο αξιολόγησης του. Τέλος θα αναφερθούμε στη στατιστική ανάλυση των δεδομένων, που προέκυψαν από τις απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο.

3.1 ΤΙ ΙΣΧΥΕΙ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Στο Ελληνικό σχολείο σήμερα κυριαρχεί η παραδοσιακή παιδαγωγική άποψη, σύμφωνα με την οποίαν η ΄΄καλή΄΄ διδασκαλία είναι επαρκής για καλή μάθηση. Η διδασκαλία συνήθως είναι μετωπική, με στόχο τη μεταφορά γνώσεων από το διδάσκοντα προς τους μαθητές. Οι φροντιστηριακές προσεγγίσεις και νοοτροπίες κυριαρχούν, ενώ απουσιάζουν δραστηριότητες εναλλακτικού χαρακτήρα που θα ευνοούσαν τη διερευνητική και συνεργατική μάθηση, την οικοδόμηση των νέων γνώσεων και την καλλιέργεια δεξιοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν διδακτικές μεθόδους που εστιάζουν στην εκπλήρωση αυστηρά προσδιορισμένων διδακτικών στόχων. Όσον αφορά το μαθησιακό αποτέλεσμα πολλές φορές καθορίζεται από το κατά πόσο μπορούν οι μαθητές να ανακαλούν γνώσεις σε εξετάσεις συμβατικού τύπου. Δεν εξετάζεται κατά πόσον οι απαντήσεις των μαθητών βασίζονται στη βαθύτερη κατανόηση και την εφαρμογή δεξιοτήτων.

Η ευρύτερη εκπαιδευτική διαδικασία δεν ευνοεί διαθεματικές προσεγγίσεις. Ειδικότερα στο Ενιαίο Λύκειο παραμένει επικεντρωμένη στις πανελλαδικές εξετάσεις, μια προσέγγιση που σε μεγάλο βαθμό ευνοείται από το σχολικό περιβάλλον και ενισχύεται ακόμη περισσότερο από το κοινωνικό περιβάλλον. Δηλαδή το Ενιαίο Λύκειο δεν αποτελεί αυτοτελή κύκλο σπουδών, αλλά αντιμετωπίζεται ως προθάλαμος για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σ' αυτό το πλαίσιο εντάσσεται η μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές που είναι οι τελικοί αποδέκτες αυτής της κατάστασης συχνά αποκομίζουν μια λαθεμένη εικόνα του τι είναι μαθηματικά. Βασικές έννοιες των μαθηματικών δεν κατανοούνται από τους μαθητές. Οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης είναι οι πιο σημαντικές και ίσως οι πιο δύσκολες στην κατανόηση τους από τις έννοιες που διδάσκονται στο Λύκειο.

Οι μαθητές έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την έννοια της συνέχειας (που αφορά την ευθεία των πραγματικών αριθμών) στη Γ΄ τάξη του Γυμνασίου και την Α΄ τάξη του Ενιαίου Λυκείου. Σ' αυτές τις τάξεις επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση στην έννοια της συνέχειας κατά τη μετάβαση από το σύνολο των ρητών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με την αναζήτηση της επίλυσης της εξίσωσης $x^2=2$, τη γεωμετρική κατασκευή της ρίζας της και την απόδειξη ότι η ρίζα αυτή δεν είναι ρητός αριθμός (χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής).

Στη Γ΄ τάξη του Ενιαίου Λυκείου όλοι οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικά γενικής παιδείας, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουν, και χρησιμοποιούν το βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» των Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ., και Σβέρκου Α. Στο 1^{ο} κεφάλαιο του βιβλίου με τίτλο «Διαφορικός Λογισμός», γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της, παρουσιάζεται η έννοια του ορίου, της συνέχειας, και τέλος της παραγώγου συνάρτησης. Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διαφόρων εννοιών και προτάσεων. Όσον αφορά την έννοια του ορίου, και της συνέχειας συνάρτησης, αυτές παρουσιάζονται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα. Επισημαίνεται μάλιστα στις «Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά το σχολικό έτος 2005-2006» του Π. Ι σ.193, ότι η διδασκαλία της έννοιας του ορίου και της συνέχειας δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου.

Οι μαθητές της Γ΄ τάξης που επιλέγουν τη θετική ή την τεχνολογική κατεύθυνση διδάσκονται μαθηματικά κατεύθυνσης και χρησιμοποιούν το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» των Ανδρεαδάκη Σ., Κασταργύρη Β., Μέτη Σ., Μπουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ. και Πολύζου Γ. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από ένα κεφάλαιο άλγεβρας (Μιγαδικοί αριθμοί) και τρία κεφάλαια ανάλυσης (Όριο-συνέχεια συνάρτησης, Διαφορικός Λογισμός και Ολοκληρωτικός Λογισμός). Η

άλγεβρα αποτελεί το 17% περίπου της διδακτέας ύλης, ενώ η ανάλυση το υπόλοιπο 83%.

Το πρώτο κεφάλαιο της ανάλυσης αποτελείται από τρεις επιμέρους ενότητες :

a) Τις βασικές έννοιες της ανάλυσης,
b) Το όριο συνάρτησης σε ένα σημείο $x_o \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
c) Τη συνέχεια συνάρτησης.

Και στα τρία κεφάλαια της ανάλυσης το βιβλίο διαπραγματεύεται συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης στο $x_o \in R$ εισάγονται εποπτικά μέσω παραδειγμάτων, δυναμικών προσεγγίσεων και εφαρμογών σε γεωμετρικά ή αριθμητικά πλαίσια. Ο τυπικός ε-δ ορισμός αναφέρεται μόνο για την πληρότητα του βιβλίου, όπως αναφέρεται στις οδηγίες του Π.Ι, δεν διδάσκεται και προφανώς δεν εξετάζεται.

Στο σχολικό βιβλίο τονίζεται ότι οι προϋποθέσεις για να είναι συνεχής μια συνάρτηση f σε ένα σημείο x_o είναι: Το x_o να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να υπάρχει το όριο της f στη θέση x_o και να ισούται με την τιμή της f στη θέση x_o. Το θεώρημα του BOLZANO προσεγγίζεται διαισθητικά, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής αποδεικνύεται με βάση το θεώρημα του BOLZANO και τα δύο μαζί χρησιμοποιούνται, για τον προσδιορισμό του πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της, καθώς και για να προσδιορίσουμε αν η εξίσωση $f(x)=0$ με $x \in [\alpha,\beta]$ έχει ρίζες στο (α,β). Ακόμη προσεγγίζονται διαισθητικά το θεώρημα μεγίστης και ελάχιστης τιμής και ο υπολογισμός του συνόλου τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f σε διάστημα Δ. Με τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας, όπως επισημαίνει το Π.Ι. (σ.194) επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
- Να αναγνωρίζουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σε σημείο ή διάστημα από τη γραφική παράσταση της.
- Να γνωρίζουν τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο καθώς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

- Να γνωρίζουν τα βασικά θεωρήματα: BOLZANO, ενδιάμεσης τιμής, και μεγίστης και ελάχιστης τιμής, όταν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό, φραγμένο διάστημα. Να μπορούν να τα εφαρμόζουν στην εύρεση του προσήμου, του συνόλου τιμών και του πλήθους των ριζών συνεχών συναρτήσεων σε διαστήματα γνωστής μονοτονίας.

Συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι να μην δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατανόηση της έννοιας της συνέχειας ούτε στην εφαρμογή της σε καταστάσεις λύσης προβλήματος που ξεφεύγουν από τη ρουτίνα των ασκήσεων. Ο δάσκαλος παρουσιάζει με αφηγηματικό τρόπο την έννοια, λύνει κάποια παραδείγματα και μετά δίνεται ένας αριθμός παρόμοιων περίπου ασκήσεων για εξάσκηση και εμπέδωση. Οι ασκήσεις δεν εστιάζουν στις έννοιες του ορίου και της συνέχειας, αλλά στη χρήση ανισοτήτων, στην έννοια της απόλυτης τιμής και σε άλλες πολύπλοκες τεχνικές, τις οποίες εφαρμόζουν μηχανικά για να λύσουν ασκήσεις που εμπίπτουν σε ειδικές κατηγορίες. Οι μαθητές διαμορφώνουν την πεποίθηση ότι τα όρια αφορούν κυρίως πράξεις και δεν χρειάζεται να κατακτήσουν την έννοια. Δηλαδή παρατηρείται μια υποβάθμιση σε θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης όπως είναι το όριο και η συνέχεια συνάρτησης, σε ένα είδος αλγεβρικού και αλγοριθμικού υπολογισμού. Όμως μια τέτοια προσέγγιση δεν έχει σχέση με την προσπάθεια κατανόησης της έννοιας του ορίου και της συνέχειας. Στην υπάρχουσα κατάσταση και με δεδομένο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στη διδακτική ενότητα του ορίου και της συνέχειας, εκτός από τα σχολικά βιβλία και τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου συμβάλει αρνητικά και η επιλογή των θεμάτων στις πανελλαδικές εξετάσεις που κατά κανόνα αναφέρονται σε αλγεβρικές διαδικασίες.

Το Π.Ι στο Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ.) προσδιορίζει τους γενικούς στόχους για τα μαθηματικά. Μεταξύ άλλων αναφέρονται ότι επιδιώκεται οι μαθητές να μπορούν: «Να μυηθούν και να εξοικειωθούν με τη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και γενικότερα να καλλιεργήσουν τη μαθηματική τους σκέψη και την κριτική τους ικανότητα. Να αποκτήσουν μια αξιόλογη βάση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων που θα τους επιτρέψει να συνεχίσουν τις σπουδές τους σε πιο προχωρημένο επίπεδο».(Ε.Π.Π.Σ.,1998). Όμως παρά τις αρχικές προθέσεις αυτών που σχεδίασαν την τελευταία εκπαιδευτική μεταρρύθμιση (1998) η πορεία των τελευταίων ετών όπως καταγράφεται και μέσα από τις εξετάσεις, υπογραμμίζει ότι το εκπαιδευτικό μας σύστημα εξακολουθεί να παραμένει εξεταστικοκεντρικό.

Στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στη διδακτική ενότητα της συνέχειας εστιάζεται η ερευνητική μας εργασία. Το μάθημα αυτό (με το σύστημα που ισχύει σήμερα για την εισαγωγή των υποψηφίων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση), αποτελεί το πιο σημαντικό μάθημα για όσους μαθητές έχουν στόχο τις θετικές επιστήμες. Επίσης συντελεί αποφασιστικά και για την εισαγωγή στις ιατρικές και οικονομικές σχολές. (Για την εισαγωγή στη τριτοβάθμια εκπαίδευση ο βαθμός σε κάθε μάθημα στις Γενικές Εξετάσεις πολλαπλασιάζεται με ειδικό συντελεστή ανάλογα με την Πανεπιστημιακή Σχολή που στοχεύει ο υποψήφιος φοιτητής). Σημειώνουμε πως ο αρχικός προγραμματισμός στην τελευταία μεταρρύθμιση προέβλεπε διαφορετικά μαθηματικά για τις δύο κατευθύνσεις. Εφαρμόστηκε μόνο μία χρονιά το 2000. Από τότε έχουμε κοινό βιβλίο και κοινή ύλη και κοινές εξετάσεις για τις δύο κατευθύνσεις.

3.2 ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ :

Με βάση το τι ισχύει σήμερα στο Ελληνικό σχολείο, το αναλυτικό πρόγραμμα που εφαρμόζεται για τα μαθηματικά και τις διαδικασίες που ακολουθούνται συνήθως στη διδασκαλία, η παρούσα έρευνα έχει στόχους να διερευνήσει:

- Τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του διαστήματος ως υποσυνόλου του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Τον έλεγχο, αν μπορούν να ξεχωρίζουν πότε μια καμπύλη σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης και το ρόλο που παίζει η γραφική παράσταση της στη διαμόρφωση αυτών των αντιλήψεων.
- Τον έλεγχο, αν μπορούν γνωρίζοντας τον τύπο μιας συνάρτησης και το πεδίον ορισμού της να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της.

3.3 ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν 80 μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου, θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, από 6 Λύκεια της Ανατολικής Αττικής (5 Δημόσια και 1 ιδιωτικό).

Η έρευνα έγινε τον Σεπτέμβριο του 2005 (πριν διδαχθούν την έννοια της συνάρτησης με στόχο τη διερεύνηση των άτυπων αντιλήψεων των μαθητών για την

έννοια της συνέχειας), οπότε δόθηκε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο διάρκειας μιας διδακτικής ώρας. Το ίδιο ερωτηματολόγιο με προσθήκη ενός ακόμη ερωτήματος (που αναφέρεται σε εφαρμογές του θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής) δόθηκε στους ίδιους μαθητές τον Φεβρουάριο του 2006, (αφού είχαν διδαχθεί την έννοια της συνάρτησης, με στόχο να διερευνήσουμε, αν διαφοροποιήθηκαν οι μαθητές στις αντιλήψεις, που είχαν εκφράσει στο $1^{ο}$ ερωτηματολόγιο).

3.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Δίνουμε παρακάτω μια σύντομη περιγραφή του ερωτηματολογίου (βλ. Παράρτημα) με τους αντίστοιχους συμβολισμούς για τις μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων(κωδικοποίηση).

Ερώτημα $1^{ο}$:

Δίνονται τέσσερα υποσύνολα Α, Β, Γ, Δ του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ζητάμε από τους μαθητές, να αναπαραστήσουν αυτά πάνω στον άξονα και ακολούθως να εξετάσουν, ποια είναι διαστήματα Το ερώτημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουμε, αν μπορούν οι μαθητές να αντιστοιχίσουν ένα σύνολο αριθμών σε σημεία ενός άξονα και να διακρίνουν, αν είναι διάστημα.

Οι επιμέρους ερωτήσεις να αναπαραστήσουν τα υποσύνολα Α, Β, Γ, Δ του συνόλου των πραγματικών αριθμών (αντίστοιχα) πάνω στον άξονα συμβολίζονται (πριν τη διδασκαλία) με: **Aa1, Aa2, Aa3, Aa4,** και (μετά την διδασκαλία) με: **Ba1, Ba2, Ba3, Ba4.** Όσον αφορά την ερώτηση πιο από τα παραπάνω υποσύνολα είναι διάστημα συμβολίζεται (πριν τη διδασκαλία) με **Aint.,** και (μετά την διδασκαλία) με **Bint.**

Ερώτημα $2^{ο}$:

Δίνονται επτά καμπύλες σχεδιασμένες η κάθε μια σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ζητάμε από τους μαθητές να διακρίνουν, ποιες από αυτές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στη συνέχεια, ποιες από τις γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν σε συνεχείς συναρτήσεις.

Το ερώτημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να διερευνήσουμε, αν μπορούν οι μαθητές να διακρίνουν, πότε μια καμπύλη είναι συνάρτηση και πώς από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αντιλαμβάνονται, αν αυτή είναι ή δεν είναι συνεχής.

Τις επιμέρους ερωτήσεις συμβολίζουμε:

Για την ερώτηση, ποιες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, (πριν τη διδασκαλία) με: **Af1, Af2, Af3, Af4, Af5, Af6, Af7** και (μετά τη διδασκαλία) με **Bf1, Bf2, Bf3, Bf4, Bf5, Bf6, Bf7.**

Στη δε ερώτηση, ποιες από τις καμπύλες αντιστοιχούν σε συνεχείς συναρτήσεις, (πριν τη διδασκαλία) με **Acf1, Acf2, Acf3, Acf4, Acf5, Acf6, Acf7** και (μετά τη διδασκαλία) με **Bcf1, Bcf2, Bcf3, Bcf4, Bcf5, Bcf6, Bcf7**.

Ερώτημα 3^{ο} :

Δίνονται τέσσαρες συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο και διαφορετικά πεδία ορισμού, και ζητάμε από τους μαθητές: Να διακρίνουν ποια από τις συναρτήσεις έχει πεδίο ορισμού διάστημα, να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης και να διακρίνουν ποιες από αυτές είναι συνεχείς.

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι σύνολα, που το ένα είναι πεπερασμένο, τα δύο είναι διαστήματα και το τέταρτο είναι ένωση διαστημάτων. Η επιλογή έγινε με τέτοιο τρόπο, ώστε να διερευνηθεί αν οι μαθητές θεωρούν, ότι αν κόβεται ή όχι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εξαρτάται, όχι μόνο από τη συνέχεια της συνάρτησης αλλά και από το πεδίο ορισμού της.

Τις επιμέρους ερωτήσεις συμβολίζουμε:

Για την ερώτηση, πιο από τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι διάστημα, (πριν τη διδασκαλία) με: **Aafd1, Aafd2, Aafd3, Aafd4** και (μετά τη διδασκαλία) με **Bafd1, Bafd2, Bafd3, Bafd4.**

Στην δε ερώτηση να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση κάθε μιας από τις δοσμένες συναρτήσεις, (πριν τη διδασκαλία) με: **Aag1, Aag2, Aag3, Aag4** και (μετά τη διδασκαλία) με **Bag1, Bag2, Bag3, Bag4.**

Τέλος στην ερώτηση, να διακρίνουν ποιες από τις συναρτήσεις είναι συνεχείς (πριν τη διδασκαλία) με: **Aagc1, Aagc2, Aagc3, Aagc4** και (μετά την διδασκαλία) με **Bagc1, Bagc2, Bagc3, Bagc4**

Ερώτημα 4^{ο} :

Το ερώτημα αυτό προστέθηκε στα προηγούμενα 3 ερωτήματα στην επαναληπτική εξέταση τον Φεβρουάριο του 2006. Σ' αυτό το ερώτημα δίνεται ο πίνακας μεταβολών, μιας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και ζητάμε από τους μαθητές, να υπολογίσουν το σύνολο τιμών, το πλήθος των ριζών και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης αυτής.

Τις επιμέρους ερωτήσεις συμβολίζουμε:

Την ερώτηση, να υπολογισθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης σε οκτώ διαστήματα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, με: **Ptv1, Ptv2.**

Την ερώτηση, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης **f(x)=α** για έξη πραγματικές τιμές του α, με **Pteg1, Pteg2, Pteg3, Pteg4, Pteg5, Pteg6** και,

Τέλος την ερώτηση, να υπολογισθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης, με **Ptmm.**

3.5 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Για τη βαθμολόγηση των απαντήσεων, ακολουθήσαμε τον παρακάτω τρόπο.

Η κάθε ερώτηση, σε όλα τα ερωτήματα λαμβάνει, 1 αν η απάντηση είναι σωστή και 0 αν η απάντηση είναι λανθασμένη ή δεν δίνεται απάντηση.

3.6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Παραθέτουμε τον πίνακα αποτελεσμάτων κάθε ερωτήματος και σχολιάζουμε τις απαντήσεις των μαθητών σ' αυτό

1ο ΕΡΩΤΗΜΑ							
ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ				**ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ**			
ΕΡΩΤΗΜΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**	**ΕΡΩΤΗΜΑ**	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**
Aa1	**65%**	**35%**	**0%**	**Ba1**	**79%**	**17,50%**	**3,75%**
Aa2	**27,50%**	**71,25%**	**1,25%**	**Ba2**	**43,75%**	**52,50%**	**0%**
Aa3	**95,00%**	**5%**	**0%**	**Ba3**	**96,25%**	**1,25%**	**2,50%**
Aa4	**91,25%**	**8,75%**	**0%**	**Ba4**	**86,25%**	**11,25%**	**2,50%**
Aint.	**23,75%**	**76,25%**	**0%**	**Bint**	**48,75%**	**48,75%**	**2,50%**

(i) Στη ερώτηση (**Aa1**) όπως φαίνεται από τον πίνακα αποτυγχάνει το 35% των μαθητών στο 1ο ερωτηματολόγιο ,ενώ στο 2° ερωτηματολόγιο το ποσοστό μειώνεται στο 20%. Ενώ φαίνεται εύκολο ερώτημα, να παραστήσουν ακεραίους πάνω στον άξονα αυτοί που αποτυγχάνουν, παρατηρούμε ότι δίνουν σημασία μόνο στην ανίσωση $1 \leq \boldsymbol{x} \leq 5$ και παραβλέπουν την επόμενη φράση, ότι ο $\boldsymbol{x}$ είναι ακέραιος.

Αυτή η παράβλεψη παρατηρείται σε πολλούς μαθητές μας, όταν τους ζητάμε να λύσουν μια ανίσωση ή εξίσωση. Θεωρούν ότι η μεταβλητή παίρνει τιμές από ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, οπότε ως λύση αναφέρουν ότι προκύψει από τις αλγεβρικές διαδικασίες χωρίς να λαμβάνουν υπόψη, τούς περιορισμούς για τη μεταβλητή.

(ii) Στην ερώτηση (**Aa2**), όπως φαίνεται από τον πίνακα αποτυγχάνει το 73% των μαθητών στο 1° ερωτηματολόγιο ενώ στο 2° ερωτηματολόγιο το ποσοστό μειώνεται

σε 20%. Δεν έχουν κατανοήσει ότι οι ρητοί δε γεμίζουν κανένα ευθύγραμμο τμήμα του άξονα. Φαίνεται να αγνοούν ότι υπάρχουν σημεία του άξονα που καλύπτονται από τους άρρητους. Έχουμε το επιστημολογικό εμπόδιο της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

(iii) Στην ερώτηση (**Aa3)** επιτυγχάνουν σε μεγάλο ποσοστό 95% στο 1° ερωτηματολόγιο με μικρή βελτίωση στο 96% στο 2° ερωτηματολόγιο. Η μεγάλη επιτυχία τους σ' αυτό το ερώτημα οφείλεται στο ότι η μεταβλητή παίρνει τιμές από ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο συμπίπτει με την αντίληψη που έχουν για όλες τις μεταβλητές.

(iv) Στην ερώτηση (**Aa4)** παρατηρείται μεγάλο ποσοστό επιτυχίας όμως κατά 5% μικρότερο από το (**Aa3)** με μικρή μείωση του ποσοστού επιτυχίας στο 2° ερωτηματολόγιο. Η διαφοροποίηση αυτή, οφείλεται στο μεμονωμένο σημείο, που επιπλέον δίνεται στην ερώτηση (**Aa4).**

(v) Στην ερώτηση (**Aint.)** η μεγάλη αποτυχία τους οφείλεται στην εσφαλμένη αντίληψη που έχουν για την έννοια του διαστήματος (που προκύπτει από το επιστημολογικό εμπόδιο της πληρότητας). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις απαντήσεις ενός μαθητή πριν και μετά τη διδασκαλία.

<u>Εσφαλμένη απάντηση:</u> (**Τα Α και Β είναι διαστήματα διότι οι τιμές τους x περιορίζονται από δύο αριθμούς, δηλαδή δεν μπορούν να πάρουν τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες αντίστοιχα απ' τους δύο αυτούς αριθμούς. Για το σύνολο Α ισχύει x ακέραιος με $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [1\ ,\ 5]$, ενώ για το σύνολο Β ισχύει x ρητός : $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [1\ ,\ 2]$).**

Ο ίδιος μαθητής στο δεύτερο ερωτηματολόγιο διορθώνει την πρώτη εσφαλμένη απάντηση του με την επόμενη:

<u>Σωστή απάντηση:</u> (**Διάστημα είναι το σύνολο Γ διότι περιλαμβάνει όλα τα $x \in R$ και μόνο αυτά μεταξύ δύο ακραίων τιμών του 1 και του $+\infty$)**

Γενικά, όπως προκύπτει από τα παραπάνω δεδομένα, αρκετοί μαθητές θεωρούν ως διάστημα ένα σύνολο αριθμών που τα στοιχεία του βρίσκονται ανάμεσα σε δύο αριθμούς. Μια μικρή σχετικά βελτίωση παρατηρείται στην επίδοση τους στο 2° ερωτηματολόγιο μετά τη διδασκαλία.

2ο ΕΡΩΤΗΜΑ							
ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ				ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ			
ΕΡΩΤΗΜΑ	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ-ΑΠ.	ΕΡΩΤΗΜΑ	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ-ΑΠ.
Af1	85%	10%	5%	Bf1	90%	7,50%	2,50%
Af2	90%	5,00%	5%	Bf2	93,75%	3,75%	2,50%
Af3	85%	10%	5%	Bf3	95%	2,50%	2,50%
Af4	83,75%	11,25%	5%	Bf4	93,75%	3,75%	2,50%
Af5	83,75%	11,25%	5%	Bf5	92,50%	5%	2,50%
Af6	88,75%	6,25%	5%	Bf6	95%	2,50%	2,50%
Af7	63,75%	31,25%	5%	Bf7	81,25%	15%	3,75%

Στις ερωτήσεις **Af1, Af2, Af3, Af4, Af5, Af6, Af7 (πριν τη διδασκαλία)** και **Bf1, Bf2, Bf3, Bf4, Bf5, Bf6, Bf7 (μετά την διδασκαλία)** ζητάμε από τους μαθητές να απαντήσουν, ποιες από τις δοσμένες καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

(i) Στην **Af1**(όπου δίνεται καμπύλη μη διακοπτόμενη που δεν είναι συνάρτηση) παρατηρείται μεγάλη επιτυχία 85% με βελτίωση στο δεύτερο ερωτηματολόγιο 90% . Παραθέτουμε ενδεικτικά μια σωστή και μια λανθασμένη απάντηση μαθητών.

Σωστή απάντηση: **Δεν είναι συνάρτηση διότι υπάρχει ένα τουλάχιστο x_0 στο οποίο αντιστοιχούν δύο f(x_0).**

Εσφαλμένη διατύπωση: **Είναι συνάρτηση γιατί από όλα τα σημεία της περνάει μια γραμμή.** Θα έπρεπε να αναφέρει ότι κάθε κατακόρυφη γραμμή περνάει το πολύ από ένα σημείο της.

(ii) Στην ερώτηση **Af2**(όπου δίνεται καμπύλη μη διακοπτόμενη που είναι συνάρτηση) παρατηρείται η μεγαλύτερη επιτυχία των μαθητών από όλες τις ερωτήσεις του 2^{ου} ερωτήματος με ποσοστό 90%. Οι περισσότεροι απαντούν σωστά ότι είναι συνάρτηση με γεωμετρική αιτιολόγηση (με όχι όμως σωστή διατύπωση) (**Είναι συνάρτηση γιατί από όλα τα σημεία της περνάει μια γραμμή**). Παραθέτουμε τη σωστή αιτιολόγηση που διατυπώνουν μερικοί μαθητές. **Είναι συνάρτηση διότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α (πρότυπα) αντιστοιχεί ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.**

(iii) Στις ερωτήσεις **Af3, Af4, Af5** (όπου δίνονται καμπύλες διακοπτόμενες

που είναι συναρτήσεις) παρατηρείται το ίδιο ποσοστό επιτυχίας με το ερώτημα **Af1.** Συμπεραίνουμε ότι όποιος απαντά με επιτυχία στο **Af1** απαντά με επιτυχία και στα **Af3, Af4, Af5.**

Η σωστή αιτιολόγηση που δίνουν στο **Af1**: **(Δεν είναι συνάρτηση διότι υπάρχει ένα τουλάχιστο x_0 στο οποίο αντιστοιχούν δύο f(x_0))** είναι ισοδύναμη με τη σωστή αιτιολόγηση που δίνουν στα **Af3, Af4, Af5: (Είναι συνάρτηση διότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α (πρότυπα) αντιστοιχεί ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β).** Οι απαντήσεις αυτές δείχνουν ότι οι μαθητές που τις δίνουν έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης.

(iv) Στην ερώτηση **Af6** παρατηρείται μεγάλο ποσοστό επιτυχίας περίπου ίδιο με το **Af2**. Και στα δύο αυτά ερωτήματα αθροίζονται τα ποσοστά της ομάδος των μαθητών που έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης και της ομάδος των μαθητών που ως συνάρτηση θεωρούν την καμπύλη, που από όλα τα σημεία της περνάει μια γραμμή.

(v) Στην ερώτηση **Af7** παρατηρείται ποσοστό επιτυχίας 64% που είναι το μικρότερο από τα όλα τα ερωτήματα **Af1** μέχρι το **Af7**.

Η καμπύλη σ' αυτό το ερώτημα αποτελείται από μεμονωμένα σημεία όπότε αποτυγχάνουν οι μαθητές που έχουν την πεποίθηση ότι οι καμπύλες συναρτήσεων αποτελούνται από μη διακοπτόμενες καμπύλες ή από διακοπτόμενα τμήματα καμπύλων. Σε αυτή την ερώτηση επιτυγχάνουν οι μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης όπως φαίνεται από την αιτιολόγηση που δίνουν στην απάντηση τους: **(Είναι συνάρτηση διότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α (πρότυπα) αντιστοιχεί ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β)** Ακόμη διαπιστώνουμε ότι όσοι επιτυγχάνουν στο **Af7** επιτυγχάνουν και στα ερωτήματα **Af1** μέχρι το **Af6.** Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το **Af7** είναι το πιο κατάλληλο ερώτημα για να ελέγξουμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης.

2ο ΕΡΩΤΗΜΑ							
ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ				ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ			
Acf1	**85%**	**8,75%**	**6,25%**	**Bcf1**	**83,75%**	**12,50%**	**3,75%**
Acf2	**88,75%**	**5%**	**6,25%**	**Bcf2**	**86,25%**	**10%**	**3,75%**
Acf3	**65%**	**28,75%**	**6,25%**	**Bcf3**	**76,25%**	**20%**	**3,75%**
Acf4	**57,50%**	**36,25%**	**6,25%**	**Bcf4**	**76,25%**	**20%**	**3,75%**
Acf5	**7,50%**	**86,25%**	**6,25%**	**Bcf5**	**15%**	**82,50%**	**3,75%**
Acf6	**68,75%**	**25%**	**6,25%**	**Bcf6**	**71,25%**	**25%**	**3,75%**
Acf7	**1,25%**	**92,50%**	**7,50%**	**Bcf7**	**8,75%**	**86,25%**	**5%**

Στις ερωτήσεις: **Acf1, Acf2, Acf3, Acf4, Acf5, Acf6, Acf7 (πριν τη διδασκαλία), Bcf1, Bcf2, Bcf3, Bcf4, Bcf5, Bcf6, Bcf7 (μετά την διδασκαλία)**, ζητάμε από τους μαθητές να απαντήσουν ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των προηγούμενων συναρτήσεων αντιστοιχούν σε συνεχείς συναρτήσεις.

(i) Στην **Acf1** έχουμε το ίδιο ποσοστό επιτυχίας 85% με την **Af1** αφού όσοι απάντησαν στην **Af1** ότι η καμπύλη δεν είναι συνάρτηση οι ίδιοι απάντησαν ότι δεν συζητάμε για συνέχεια για την καμπύλη αυτή.

(ii) Στην **Acf2** έχουμε το ίδιο περίπου ποσοστό επιτυχίας με την **Af2**

Ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών για τη συνέχεια της καμπύλης είναι:

(**Αποτελεί γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης καθώς σε όλο το πεδίο ορισμού της είναι αδιάκοπη.),**

(Είναι συνεχής συνάρτηση γιατί η γραμμή δεν διακόπτεται.),

(Έχουμε συνεχή συνάρτηση αφού έχουμε μια ενιαία καμπύλη.)

Από τις απαντήσεις τους φαίνεται η πρώτη γνώμη που έχουν για τη συνέχεια μιας καμπύλης, ως μη διακοπτόμενης.

(iii) Στην **Acf3** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 65% κατά 20% μικρότερο από το ποσοστό επιτυχίας στο αντίστοιχο **Af3,** το οποίο βελτιώνεται κατά 10% στο 2^{ο} ερωτηματολόγιο μετά την διδασκαλία. Από τις απαντήσεις τους φαίνεται ο προβληματισμός τους λόγω του ότι η καμπύλη είναι διακοπτόμενη σε ένα σημείο. Απαντήσεις μαθητών για τη συνέχεια της καμπύλης είναι:

Πριν τη διδασκαλία: **(Η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής διότι η καμπύλη αποτελείται από δύο τμήματα, ίσως μπορούσε να θεωρηθεί συνεχής σε μεμονωμένα διαστήματα.).**

(Η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής στο x_0=1 διότι παρουσιάζει άλμα.).

(Δεν είναι συνεχής γιατί το γράφημα C_f δεν είναι μια συνεχόμενη καμπύλη αλλά διακόπτεται.).

Μετά τη διδασκαλία : **(Είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty\ ,\ 1)\cup(1\ ,\ +\infty)$. Στο x_0=1 η συνάρτηση δεν είναι συνεχής διότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$).**

(Δεν είναι συνεχής συνάρτηση γιατί όπως φαίνεται από το σχήμα στο x_0=1 η Γ. Π. διακόπτεται.).

Οι περισσότεροι μαθητές τόσο πριν όσο και μετά τη διδασκαλία, εμμένουν στην ίδια αιτιολόγηση της άποψης τους για την ασυνέχεια της καμπύλης. Λίγοι μετά τη διδασκαλία τεκμηριώνουν την ασυνέχεια της καμπύλης, στηριζόμενοι στη σύνδεση αυτής με το όριο.

(iv) Στην **Acf4** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 57% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 76% Και σ' αυτή την ερώτηση τεκμηριώνουν την απάντηση τους όμοια όπως στη **Acf3.**

(v) Στην **Acf5** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 7,5% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 15% .

Η αποτυχία των πολλών μαθητών σ' αυτή την ερώτηση ίσως να οφείλεται στην άποψη τους ότι κάθε διακοπτόμενη καμπύλη είναι ασυνεχής. Οι σωστές απαντήσεις των λίγων μαθητών τεκμηριώνονται στηριζόμενοι στον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο με το όριο. Αναφέρεται η απάντηση ενός μαθητή:

Πριν την διδασκαλία: **Δεν είναι συνεχής διότι το πεδίο ορισμού της δεν είναι ένα διάστημα ,αλλά ένωση πολλών .(δύο στην προκειμένη περίπτωση).**

Μετά τη διδασκαλία: **Είναι συνεχής αφού σε κάθε σημείο (x_0 , f(x_0)) του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ Δεν μπορώ να μιλάω για συνέχεια στο x_0=2 αφού 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .**

(vi) Στην **Acf6** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 68% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 70% .

Η επιτυχία των μαθητών σ' αυτή την ερώτηση οφείλεται στο ότι η καμπύλη δεν διακόπτεται. Απαντήσεις μαθητών είναι:

Πριν την διδασκαλία: **Είναι συνεχής γιατί η γραφική παράσταση δεν διακόπτεται.**

Μετά τη διδασκαλία: **Είναι συνεχής στο [0 , 4). Το x_0=4 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της ,συνεπώς δεν μπορώ να μιλάω για συνέχεια.**

(vii) Στην **Acf7** έχουμε ποσοστό επιτυχίας πολύ μικρό 1,25% βελτιούμενο μετά την διδασκαλία στο 8,75%. Τα μεμονωμένα σημεία δημιουργούν έντονα την αίσθηση της διαισθητικής ασυνέχειας. Με γραφικές παραστάσεις τέτοιων συναρτήσεων δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, αφού δεν διδάσκονται την ακολουθία ως συνάρτηση.

Ίσως γι' αυτό απέτυχαν σε μεγάλο ποσοστό σ' αυτό το ερώτημα με πολύ μικρή επιτυχία μετά τη διδασκαλία. Απαντήσεις μαθητών σ' αυτό το ερώτημα είναι:

Πριν την διδασκαλία: **Δεν είναι συνεχής αφού το πεδίο ορισμού της αποτελείται από μεμονωμένα στοιχεία που δεν αποτελούν διάστημα .**

Μετά τη διδασκαλία: **Είναι συνεχής αφού μια συνάρτηση είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία της.**

Μπορούμε να επισημάνουμε ότι σημαντικό ποσοστό μαθητών ακόμη και μετά τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας δεν έχει κατανοήσει, ότι η διακοπή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης δεν σημαίνει υποχρεωτικά ασυνέχεια της συνάρτησης. Αυτό εξαρτάται και από το πεδίο ορισμού της.

3ο ΕΡΩΤΗΜΑ							
ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ				**ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ**			
ΕΡΩΤΗΜΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**	**ΕΡΩΤΗΜΑ**	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**
Aafd1	**82,50%**	**17,50%**		**Bafd1**	**92,50%**	**7,50%**	
Aafd2	**78,75%**	**21,25%**		**Bafd2**	**87,50%**	**12,50%**	
Aafd3	**55%**	**45%**		**Bafd3**	**58,75%**	**41,25%**	
Aafd4	**38,75%**	**61,25%**		**Bafd4**	**68,75%**	**31,25%**	
Aag1	**86,25%**	**13,75%**		**Bag1**	**91,25%**	**8,75%**	
Aag2	**75%**	**25%**		**Bag2**	**80%**	**20%**	
Aag3	**71,25%**	**28,75%**		**Bag3**	**73,75%**	**26,25%**	
Aag4	**80%**	**20%**		**Bag4**	**86,25%**	**13,75%**	
Aagc1	**75%**	**25%**		**Bagc1**	**88,75%**	**11,25%**	
Aagc2	**5%**	**95%**		**Bagc2**	**15%**	**85%**	

Aagc3	**56,25%**	**43,75%**		**Bagc3**	**66,25%**	**33,75%**	
Aagc4	**3,75%**	**96,25%**		**Bagc4**	**21,25%**	**78,75%**	

Στις ερωτήσεις **Aafd1, Aafd2, Aafd3, Aafd4 (πριν τη διδασκαλία) και Bafd1, Bafd2, Bafd3, Bafd4 (μετά τη διδασκαλία)** δίνονται οι τύποι και το πεδίο ορισμού τεσσάρων συναρτήσεων και ζητάμε από τους μαθητές να απαντήσουν και να δικαιολογήσουν πιο από τα πεδία ορισμού είναι διάστημα.

(i) Στην **Aafd1** και στην **Aafd2** έχουμε μεγάλο ποσοστό επιτυχίας 80% πριν τη διδασκαλία βελτιούμενο στο 90% μετά τη διδασκαλία.

Στην μεν **Aafd1** γνωρίζουν εύκολα τη συνήθη στους μαθητές συμβολική αναπαράσταση του διαστήματος $x \in [0\ ,3]$ και μια αιτιολογημένη απάντηση τους είναι: Τα x μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές από το 0 έως το 3. Στη δε **Aafd2** η συμβολική αναπαράσταση $\{0,1,2,3\}$ διαφέρει από την αναπαράσταση του διαστήματος και μερικοί αιτιολογούν την απάντηση τους με τη φράση: Δεν είναι διάστημα διότι αποτελείται από συγκεκριμένα μεμονωμένα στοιχεία.

(ii) Στην **Aafd3** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 55% βελτιούμενο στο 58% μετά τη διδασκαλία. Το μικρό ποσοστό επιτυχίας σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα ίσως να οφείλεται στον πολλαπλό τύπο της συνάρτησης από τον οποίο οι μαθητές θεωρούν τη συνάρτηση ως δύο συναρτήσεις με διαφορετικά πεδία ορισμού και δεν προχωρούν στον καθορισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης ενώνοντας τα πεδία ορισμού κάθε τύπου χωριστά. Εδώ έχουμε ένα ιστορικό επιστημολογικό εμπόδιο της έννοιας της συνάρτησης, όπου τις συναρτήσεις με πολλαπλό τύπο δεν τις θεωρούσαν ενιαία συνάρτηση.

(iii) Στην **Aafd4** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 38,75% μικρότερο από τα ποσοστά των προηγούμενων που βελτιώνεται αισθητά μετά τη διδασκαλία στο 68,75%. Η αποτυχία μαθητών σ' αυτό το ερώτημα ίσως να οφείλεται στη σύγχυση της συμβολικής αναπαράστασης του διαστήματος ανοικτού, κλειστού απ' όπου προκύπτει δυσκολία στο να διακρίνουν αν η ένωση διαστημάτων είναι διάστημα Παραθέτουμε ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών:

<u>Εσφαλμένη απάντηση:</u> **Το $[0\ ,1)\cup(1\ ,\ 3]$ είναι διάστημα διότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το 0 έως το 1 και από το 1 έως το 3.**

<u>Σωστή απάντηση:</u> **Το $[0\ ,1)\cup(1\ ,\ 3]$ δεν μπορεί να θεωρηθεί ως διάστημα ,διότι δεν μπορεί να πάρει το x όλες τις τιμές από το 0 έως το 3 (τέτοιο είναι το 1).**

Στις ερωτήσεις **Aag1, Aag2, Aag3, Aag4 (πριν τη διδασκαλία) και Bag1, Bag2, Bag3, Bag4 (μετά τη διδασκαλία)** δίνονται οι τύποι και το πεδίο ορισμού κάθε μιας συνάρτησης και ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τις γραφικές παραστάσεις κάθε μιας από αυτές.

(i) Στις **Aag1** και **Aag4** έχουμε τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας 86% και 80% βελτιούμενα μετά την διδασκαλία στο 91% και 86% αντίστοιχα. Η μικρή διαφορά ίσως να οφείλεται στο ότι από το διάστημα του **Aag4** λείπει ένα εσωτερικό σημείο του [0,3], το οποίο δεν το υπολογίζουν οι μαθητές στη γραφική παράσταση και να επιμένουν να τη σχεδιάζουν ως ενιαίο ευθύγραμμο τμήμα όπως στην **Aag1.**

(ii) Στις **Aag2** και **Aag3** έχουμε μικρότερα ποσοστά επιτυχίας 75% και 71% βελτιούμενα μετά την διδασκαλία στο 80% και 73% αντίστοιχα. Στη μεν **Aag2** ενώ το πεδίο ορισμού αποτελείται από μεμονωμένα σημεία σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση ως μη διακοπτόμενη γραμμή όπως στα προηγούμενα και στη δε **Aag3** ίσως να αγνοούν το σημείο του δεύτερου τύπου και σχεδιάζουν πάλι τη γραφική παράσταση ως μη διακοπτόμενη γραμμή.

Στις ερωτήσεις **Aagc1, Aagc2, Aagc3, Aagc4 (πριν τη διδασκαλία) και Bagc1, Bagc2, Bagc3, Bagc4 (μετά τη διδασκαλία)** ζητείται να εξετάσουν ποιες από τις προηγούμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς.

(i) Στην **Aagc1** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 75% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 88%. Είναι το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας όλων των περιπτώσεων, φαίνεται ότι οφείλεται στο ότι το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα και η γραφική παράσταση της δεν διακόπτεται.

(ii) Στην **Aagc3** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 56% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 66%. Η μείωση του ποσοστού επιτυχίας σε σχέση με το προηγούμενο ίσως να οφείλεται στο πολλαπλό τύπο της συνάρτησης και ότι η γραφική παράσταση διακόπτεται.

(iii) Στην **Aagc2** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 5% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 15%. Η μεγάλη αποτυχία οφείλεται στο ότι το πεδίο ορισμού αποτελείται από ακεραίους η δε γραφική παράσταση της από μεμονωμένα σημεία.

(iv) Στην **Aagc4** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 4% βελτιούμενο μετά τη διδασκαλία στο 20%. Και σ' αυτό το ερώτημα το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα αλλά ένωση διαστημάτων με την γραφική παράσταση να διακόπτεται. Απαντήσεις μαθητών είναι:

<u>Πριν την διδασκαλία:</u> **Συνεχής είναι μόνο η C_{f_1} διότι το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα και η γραφική της παράσταση δεν διακόπτεται.**

<u>Μετά τη διδασκαλία:</u> **α) Η f_1 είναι συνεχής ως πολυωνυμική. β) Η f_2 είναι συνεχής διότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. γ) Η f_3 δεν είναι συνεχής αφού, $\lim\limits_{x\to 1} f_3(x)=1\neq f_3(1)$, δ) Η f_4 είναι συνεχής ως πολυωνυμική.**

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα στις παραπάνω ερωτήσεις του 3ου ερωτήματος είναι τα ίδια με τα αποτελέσματα στις αντίστοιχες ερωτήσεις του 2ου ερωτήματος. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, ακόμη και μετά τη διδασκαλία της συνέχειας στους περισσότερους μαθητές επικρατεί η αντίληψη, ότι κάθε διακοπτόμενη καμπύλη είναι γραφική παράσταση ασυνεχούς συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της, καθώς επίσης και κάθε συνάρτηση που η γραφική της παράσταση αποτελείται από μεμονωμένα σημεία είναι ασυνεχής.

4ο ΕΡΩΤΗΜΑ ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ							
ΕΡΩΤΗΜΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**	**ΕΡΩΤΗΜΑ**	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ-ΑΠ.**
Ptv1	**73,75%**	**26,25%**		**Pteg4**	**42,50%**	**57,50%**	
Ptv2	**53,75%**	**46,25%**		**Pteg5**	**41,25%**	**58,75%**	
Pteg1	**33,75%**	**66,25%**		**Pteg6**	**48,75%**	**51,25%**	
Pteg2	**43,75%**	**56,25%**		**Ptmm**	**62,50%**	**37,5**	
Pteg3	**38,75%**	**61,25%**					

Στο 4ο ερώτημα δόθηκε ότι:

Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για τις τιμές της ισχύει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών και ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
f(x)	**-3**	↗	**2**	↘	**0**	↗	**5**	↘	$-\infty$

(i) Στην ερώτηση **Ptv1** ζητούμε από τους μαθητές να υπολογίσουν τα σύνολα τιμών της συνεχούς συνάρτησης **f** σε διαστήματα που η **f** έχει σταθερή μονοτονία. Η επιτυχία τους είναι 73,75% και όπως φαίνεται από τον πίνακα είναι το μεγαλύτερο ποσοστό από όλες τις ερωτήσεις του $4^{ου}$ ερωτήματος. Κάποιες λανθασμένες απαντήσεις είναι οι ακόλουθες:

f **((-∞ , -1])=[-3 ,2].** Το λάθος είναι ότι θεωρεί το κλειστό διάστημα [-3,2] αντί του (-3,2].

f **([-1 , 0]])=[2 ,0].** Το λάθος είναι ότι γράφει το διάστημα με λανθασμένη διάταξη αντί της σωστής **[0 ,2]** Ίσως να οφείλεται ότι στον πίνακα μεταβολών το 2 υπάρχει αριστερά και το 0 δεξιά.

(ii) Στην ερώτηση **Ptv2** ζητούμε από τους μαθητές να υπολογίσουν τα σύνολα τιμών της συνεχούς συνάρτησης **f** σε διαστήματα που η **f** δεν έχει σταθερή μονοτονία. Η επιτυχία τους είναι 53,75% και όπως φαίνεται από τον πίνακα σε αισθητά μικρότερο ποσοστό από την προηγούμενη ερώτηση. Κάποιες λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών είναι οι ακόλουθες:

f **(*R*)=(-∞ ,-3] αντί του σωστού *f* (*R*)=(-∞ ,5].**

f **((-∞ , 0])=[-3 ,0] αντί του σωστού *f* ((-∞ , 0])=(-3 ,2].**

f **([-1 , 3]])=[2 , 5] αντί του σωστού *f* ([-1 , 3]])=[0 , 5].**

f **([0 ,+∞))=(- ∞ ,0] αντί του σωστού *f* ((-∞ , 0])=(- ∞ ,5].**

Τα παραπάνω λάθη των μαθητών οφείλονται, όπως φαίνεται από αυτά, στη αντίληψη τους, ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα, ισούται με το διάστημα που ορίζεται από τις τιμές στα άκρα του διαστήματος, κάτι που ισχύει στην περίπτωση, που η συνάρτηση έχει σταθερή μονοτονία στο διάστημα.

(iii) Στις ερωτήσεις **Pteg1, Pteg2, Pteg3, Pteg4, Pteg5** ζητούμε από τους μαθητές να καθορίσουν το πλήθος των ριζών της εξίσωσης **f(x)=α** για ορισμένες πραγματικές τιμές του **α.** Στις **Pteg2, Pteg3, Pteg4, Pteg5** οι μαθητές πετυχαίνουν περίπου σε ποσοστό 40%, στη δε **Pteg1** σε ποσοστό 33%. Η διαφοροποίηση του ποσοστού επιτυχίας στο **Pteg1** προς τα κάτω ίσως να οφείλεται στην τιμή του **α= -3** για την οποία ισχύει $\lim_{x\to-\infty}$ ***f*** **(x)=-3,** οπότε δημιουργείται μια σύγχυση αν ο αριθμός **-3** ανήκει ή όχι στο σύνολο τιμών της συνάρτησης(ανήκει γιατί υπάρχει **x∈(3,+∞)** ώστε ***f*** **(x)=-3)**.

Μια αξιοσημείωτη (λανθασμένη) απάντηση μαθητών στις ερωτήσεις αυτές είναι: **Δεν υπάρχουν ρίζες αυτών διότι είναι όλες σταθερές συναρτήσεις.** Εδώ διακρίνουμε μια σύγχυση εξίσωσης με τον τύπο μιας συνάρτησης. Δεν έχουν ξεκαθαρίσει ότι η εύρεση του πλήθους των ριζών της εξίσωσης f **(x)=-3** σημαίνει κάτι διαφορετικό από την εύρεση του πλήθους των ριζών της συνάρτησης με τύπο f **(x)=-3**: Προφανώς το λάθος αυτό οφείλεται στη σύγχυση των εννοιών, **ρίζες εξίσωσης** και **ρίζες συνάρτησης.**

(iv) Στην ερώτηση **Ptmm** ζητούμε από τους μαθητές να υπολογίσουν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. Οι μαθητές πετυχαίνουν ένα ποσοστό 62,50% που είναι μικρό γι' αυτήν την ερώτηση εφόσον έχουν άμεσα τις πληροφορίες από τον πίνακα μεταβολών. Παραθέτουμε κάποιες από τις απαντήσεις:

(Μέγιστο είναι το 5 για x=3 . Ελάχιστο είναι το $\lim_{x\to-\infty}$ f (x)=- ∞).

(Ολικό ελάχιστο $\to$-∞ . Ολικό μέγιστο $\to$5).

(Ολικό ελάχιστο είναι στο 0 το f (0)=0 , Ολικό μέγιστο είναι στο 3 το f (3)=5).

(Δεν έχει ολικό ελάχιστο γιατί η συνάρτηση τείνει στο -∞, Έχει ολικό μέγιστο το 5 διότι είναι η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της.).

Μια λανθασμένη αντίληψη των μαθητών είναι ότι θεωρούν το -∞ ως ελάχιστο (δηλαδή συγχέουν το σύμβολο - ∞ με αριθμό).

Στο 4^{ο} ερώτημα έχει δοθεί ο πίνακας μεταβολών μιας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο πίνακας μεταβολών συνεχούς συνάρτησης περιέχει πολλές πληροφορίες για τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης. Τις πληροφορίες για τις τιμές της συνάρτησης μπορεί να τις αντλήσει ο μαθητής από τον πίνακα μεταβολών χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των βασικών θεωρημάτων συνέχειας σε διάστημα. Οι μαθητές που έχουν κατανοήσει τα θεωρήματα συνέχειας φάνηκε ότι μπορούν να αντλήσουν τις πληροφορίες στις ερωτήσεις από τον πίνακα μεταβολών.

4. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ
(Για κατανόηση της έννοιας συνέχεια συνάρτησης)

Σύμφωνα με την Anna Sierpinska για την κατανόηση ενός μαθηματικού αντικειμένου δεν αρκεί μόνο ο τυπικός ορισμός του. Πρέπει στην αρχή να εξοικειώσουμε τους μαθητές μας με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα γύρω από το μαθηματικό αντικείμενο, στη συνέχεια να τους κάνουμε ικανούς να διακρίνουν όχι μόνο τι είναι το αντικείμενο αλλά και τι δεν είναι και να αναγνωρίζουν τις σχέσεις που τον συνδέουν με άλλες έννοιες. Πολύ σημαντική στη διαδικασία μάθησης είναι η περίοδος εκείνη κατά την οποία γίνεται η μετάβαση από ένα παλιό στάδιο γνώσης σε ένα καινούργιο. Τη περίοδο αυτή της μετάβασης μπορεί ο μαθητής να συναντήσει εμπόδια που τα διακρίνουμε σε γνωστικά ή επιστημολογικά. Τα εμπόδια δεν πρέπει να τα θεωρούμε αρνητικά στην κατανόηση μιας έννοιας αλλά πολλές φορές συμβάλουν όταν ξεπεραστούν στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

Τα επιστημολογικά εμπόδια μπορούμε να τα διακρίνουμε σε τρία είδη.

(i) Αυτά που οφείλονται στην κουλτούρα μας που πηγάζει από τον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε και ερμηνεύουμε τον κόσμο.

(ii) Αυτά που οφείλονται στον τρόπο που σκεπτόμαστε και προσεγγίζουμε τα προβλήματα που είναι αποτέλεσμα της παιδείας μας.

(iii) Αυτά που οφείλονται στη λεγόμενη τεχνική γνώση, τα επιστημονικά.

Ένας δάσκαλος όσο καλά προετοιμασμένος και να είναι, δεν είναι δυνατόν να προβλέπει και να αντιμετωπίζει εκ των προτέρων την τεράστια ποικιλία εμποδίων που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές του. Θα πρέπει συνεπώς να επεξεργάζεται από πριν τα προβλήματα που θέτει στους μαθητές του, και με την εμπειρία του από προηγούμενες παρερμηνείες που έχουν παρατηρηθεί σε απαντήσεις μαθητών να φροντίσει ώστε με κατάλληλες ερωτήσεις και παραδείγματα να καθοδηγεί τους μαθητές σε μια σωστή κατανόηση και εμβάθυνση των μαθηματικών εννοιών. Δεν είναι δυνατόν να φθάσει κανείς απευθείας σε οποιαδήποτε γνώση χωρίς να περάσει από ενδιάμεσα στάδια με τα προβλήματα τους.

Τα Πέντε Συστατικά Κατανόησης ενός αντικειμένου κατά την Anna Sierpinska είναι:

1. Η αναγνώριση του αντικειμένου ανάμεσα σε άλλα αντικείμενα και η προσοχή σ' αυτό ως κάτι που αξίζει να το μελετήσουμε .
2. Η συσχέτιση αυτού του αντικειμένου με κάποιο άλλο αντικείμενο και

εντοπισμός όμοιων και διαφορετικών ιδιοτήτων αυτών των αντικειμένων.

3. Η γενίκευση που αφήνει περιθώρια για εναλλακτικούς τρόπους ερμηνείας και διευρύνει το πεδίο εφαρμογών.

4. Η σύνθεση που είναι η ανακάλυψη των συνδέσμων που υπάρχουν μεταξύ ιδιοτήτων και σχέσεων του αντικειμένου με άλλα αντικείμενα.

5. Η χρησιμοποίηση του αντικειμένου ως εργαλείου για να εκπληρώσει ο μαθητής ένα σύνολο δραστηριοτήτων.

Στην περίπτωση της έννοιας της συνέχειας πραγματικής συνάρτησης από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές πρέπει πριν τη διδασκαλία της έννοιας της συνέχειας να έχουν κατανοήσει την έννοια του διαστήματος, την έννοια της συνάρτησης και την έννοια του ορίου συνάρτησης. Για το σκοπό αυτό σχεδιάσαμε πέντε φύλλα εργασίας στηριζόμενοι στα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις του ερωτηματολογίου και στο Αναλυτικό πρόγραμμα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για το Ελληνικό σχολείο. Τα φύλλα αυτά τα μοιράζουμε στους μαθητές της Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου, ένα για κάθε διδακτική ώρα. Παραθέτουμε κάθε φύλλο εργασίας χωριστά και σχολιάζουμε τι επιδιώκουμε να έχουν κατανοήσει οι μαθητές από τη διδασκαλία.

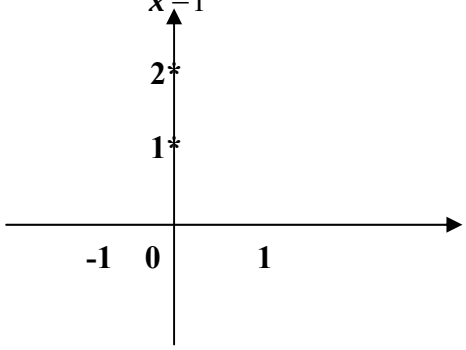
4.1 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1^{ο}) ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (1^{η} διδακτική ώρα)

Παρατηρήσεις στο 1^{ο} Φύλλο εργασίας:

Μοιράζουμε στους μαθητές το 1^{ο} φύλλο εργασίας και για 10 περίπου λεπτά περιμένουμε να συμπληρώσουν την πρώτη σελίδα του.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού ,να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση ,να υπολογίσετε το όριο στη θέση x_0=1 και την τιμή στη θέση x_0=1, εφ' όσον υπάρχει, για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

Α) $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

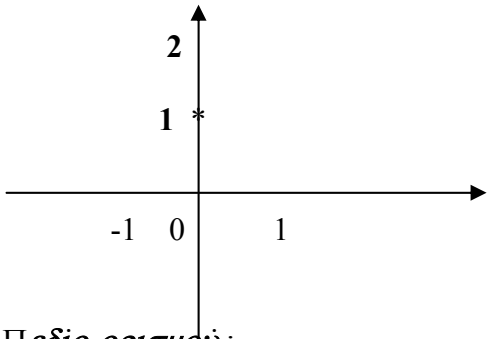


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=$

$f_1(1)=$

Β) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

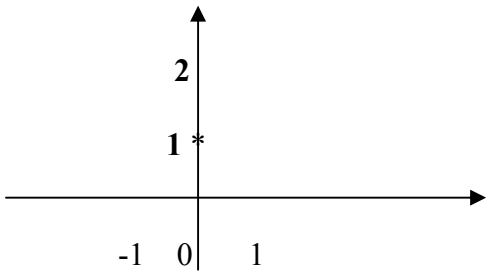


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)=$

$f_2(1)=$

Γ) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 2 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

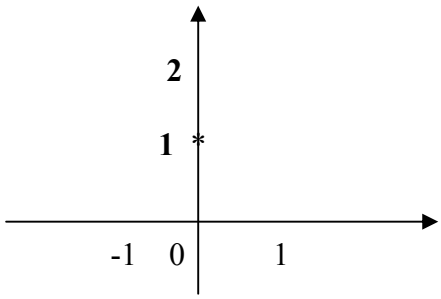


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_3(x)=$

$f_3(1)=$

Δ) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\leq 0\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$



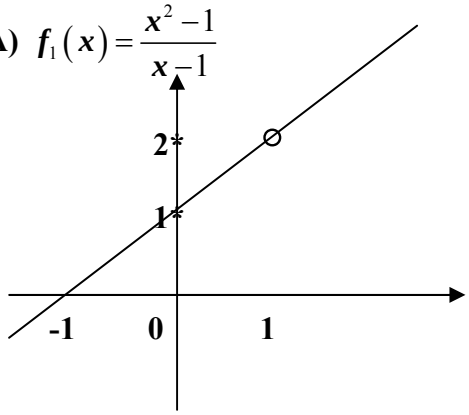
Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_4(x)=$

$f_4(1)=$

Συμπλήρωσης της 1ης σελίδας του 1ου Φύλλου εργασίας κατόπιν συζήτησης καθηγητού και μαθητών.

Α) $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

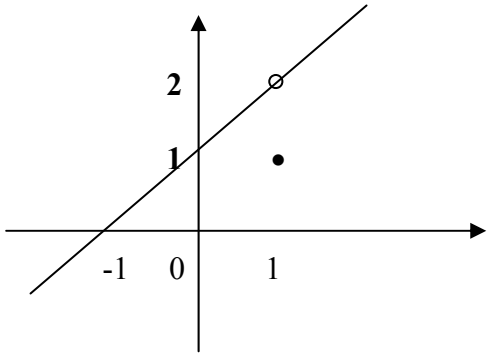


Πεδίο ορισμού: $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=2$

$f_1(1)=$ **δεν υπάρχει**

Β) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

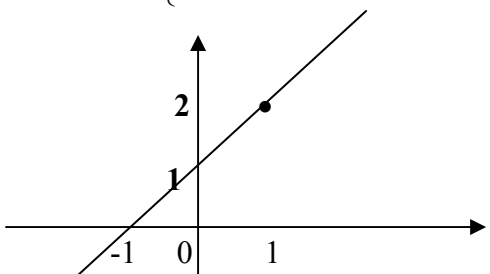


Πεδίο ορισμού: $(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)=2$

$f_2(1)=1$

Γ) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 2 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

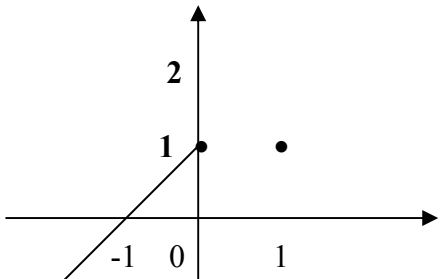


Πεδίο ορισμού: $(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1} f_3(x)=2$

$f_3(1)=2$

Δ) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\leq 0\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$



Πεδίο ορισμού: $(-\infty,0]\cup\{1\}$

Το $\lim\limits_{x\to 1} f_4(x)$ **δεν έχει νόημα.**

$f_4(1)=1$

Αφού όλοι οι μαθητές της τάξης συμπληρώσουν τις απαντήσεις τους (με παρεμβάσεις και διευκρινήσεις από εμάς σε όσους δυσκολεύονται), γίνεται συζήτηση

πάνω στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο όριο της συνάρτησης στη θέση x_0=1 και τη τιμή της f (1).

Από τη συσχέτιση του ορίου και της τιμής και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης προσεγγίζουμε διαισθητικά την έννοια της συνέχειας στις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Το x_0 ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού και να έχει νόημα το όριο της συνάρτησης στο x_0 (δηλαδή το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης).

(ii) Το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού και είναι άκρο ανοικτού διαστήματος που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και

(iii) Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού και δεν έχει νόημα το όριο της συνάρτησης στο x_0 (δηλαδή το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης).

Οπότε καταλήγουμε στην διατύπωση των παρακάτω.

<u>Ορισμός:</u> Έστω Δ διάστημα του R και συνάρτηση f :Δ→ R. Η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \Delta$ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Στην περίπτωση που x_0 είναι άκρο του διαστήματος έχουμε πλευρικά όρια).

Στη περίπτωση συνάρτησης f :Δ$\cup\{x_0\} \to R$ όπου x_0 μεμονωμένο σημείο της f δεχόμαστε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση : Η συνέχεια συνάρτησης εξετάζεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της .(Δηλαδή για σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν έχει νόημα η συνέχεια).

Προχωρούμε κατόπιν στη γενίκευση της έννοιας της συνέχειας συνάρτησης σε διάστημα.

<u>Ορισμός:</u> Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος Δ.

Επανερχόμενοι στις απαντήσεις των μαθητών του 1^{ου} φύλλου εργασίας διατυπώνουμε το ερώτημα, **πότε η γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της διακόπτεται και πότε όχι.**

Μετά από συζήτηση και παρατήρηση στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που έχουν σχεδιάσει στο φύλλο εργασίας διαπιστώνουμε διαισθητικά ότι η γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της:

1° . Διακόπτεται αν το πεδίο ορισμού της δεν είναι διάστημα και

2° . Δεν διακόπτεται αν το πεδίο ορισμού της είναι διάστημα. Και διατυπώνουμε την παρατήρηση.

<u>Παρατήρηση :</u> Η γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα είναι μια συνεχής γραμμή, δηλαδή μια γραμμή που δεν διακόπτεται.

Τέλος αναφερόμαστε στη συνέχεια γνωστών συναρτήσεων και δίνουμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων για επεξεργασία στη τάξη και ασκήσεις για το σπίτι.

<u>Παρατήρηση:</u> Όλες οι γνωστές συναρτήσεις (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές) είναι συνεχείς.

Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα ,διαφορά ,πηλίκο, γινόμενο, δύναμη, ρίζες, απόλυτη τιμή συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Έστω $f : R \to R$ **με τύπο,** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx - 12}{x-1} \text{ , } \alpha\nu \quad x \neq 1 \\ 12 \text{ , } \alpha\nu \quad x = 1 \end{cases}$ **. Βρείτε τα α,b ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.**

(ii) Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ **συνεχής στο 0 για την οποία ισχύει:**

$\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) + x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 3$ **. Να βρεθεί το f(0)**

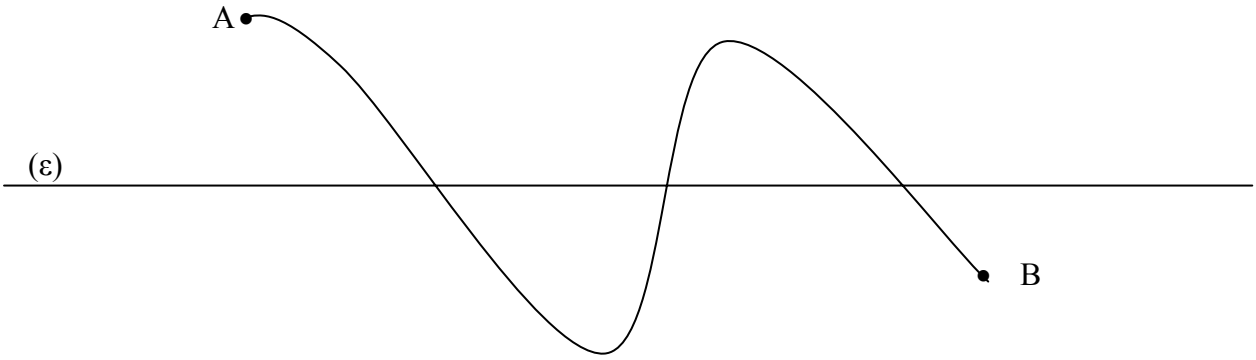
(iii) Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ **συνεχής στο 1 για την οποία ισχύει:**

$xf(x) = f(x) + x\eta\mu(x-1)$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in R$ **. Να βρεθεί ο τύπος της.**

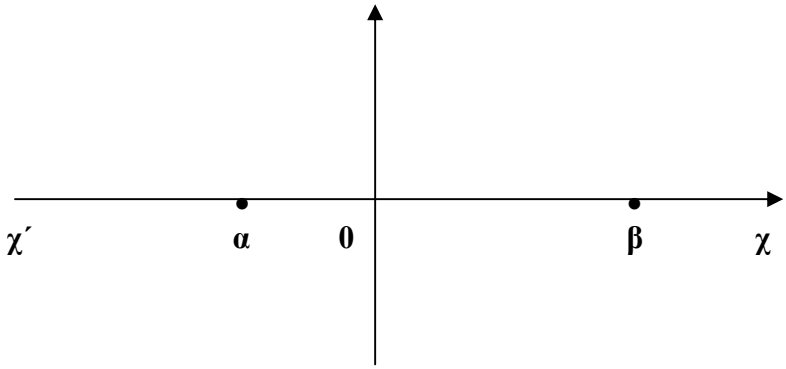
<u>4.2 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2°) ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ($2^{η}$ διδακτική ώρα)</u>

Θεωρώντας γνωστόν ότι η γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα δεν διακόπτεται διατυπώνουμε το παρακάτω αξίωμα και βοηθούμε τους μαθητές με κατάλληλες ερωτήσεις να προσεγγίσουν το Θεώρημα του **Bolzano**.

Α) <u>Αξίωμα:</u> Αν δύο σημεία Α, Β βρίσκονται στα αντικείμενα ημιεπίπεδα που ορίζονται από μια ευθεία (ε) τότε κάθε γραμμή που ενώνει τα σημεία Α , Β και δεν διακόπτεται έχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με την ευθεία (ε).



Β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης συνεχούς στο [α , β] και της οποίας τα άκρα Α , Β να βρίσκονται στα αντικείμενα ημιεπίπεδα που ορίζονται από τον άξονα των τετμημένων χ΄χ .



Τι παρατηρείτε
(i) για τα πρόσημα των τιμών f(α) , f(β) της συνάρτησης f.
(ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διακόπτεται ή όχι;

(iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ΄χ ;

Από τα παραπάνω προκύπτει μια διαισθητική προσέγγιση του θεωρήματος **Bolzano** το οποίο διατυπώνουμε λεκτικά και κατόπιν με αυστηρή διατύπωση.

<u>Θεώρημα (Bolzano)</u>

<u>Λεκτικά:</u> Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα [α , β] και στα άκρα α , β έχει ετερρόσημες τιμές τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε ένα τουλάχιστο σημείο ανάμεσα στα α , β.

Η αυστηρή διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

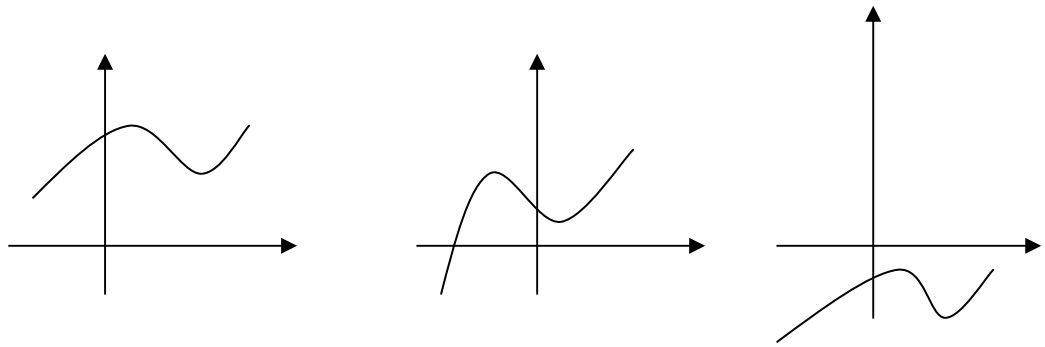
$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } f(x) \text{ συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ \text{και } f(\alpha)\cdot f(\beta)<0 \end{array}\right\} \text{τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο } \xi \in (\alpha,\beta) \text{ ώστε } f(\xi)=0$$

Ακολούθως με τις γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε διάστημα και που δεν τέμνουν τον άξονα των τετμημένων τίθενται τα παρακάτω

ερωτήματα, με στόχο να οδηγηθούν οι μαθητές στο συμπέρασμα, ότι οι συναρτήσεις αυτές διατηρούν πρόσημο.

<u>Ερώτημα :</u> Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ **για κάθε** $x \in \Delta$**.**

(i) ποια από τα παρακάτω σχήματα ανταποκρίνονται στις υποθέσεις του ερωτήματος;



(ii)Τι συμπεραίνετε για το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης;

Έτσι διαισθητικά προσεγγίζουμε το παρακάτω θεώρημα και ζητούμε από τους μαθητές να το αποδείξουν τυπικά στηριζόμενοι στο θεώρημα του Bolzano.

<u>Θεώρημα:</u> Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ **για κάθε** $x \in \Delta$ **τότε η συνάρτηση διατηρεί πρόσημο (δηλαδή όλες οι τιμές της έχουν το ίδιο πρόσημο).**

<u>Απόδειξη.</u> (Υποδεικνύεται να στηριχθούν στο θεώρημα του Bolzano **).**

<u>Παρατήρηση:</u> Το θεώρημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μελετούμε το πρόσημο των τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα στο εσωτερικό του οποίου δεν μηδενίζεται.

Τέλος τους δίνουμε να ασχοληθούν με το παρακάτω παράδειγμα υποδεικνύοντας να το προσεγγίσουν διαισθητικά και στη συνέχεια τυπικά χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα.

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν $f: R \to R$ **συνεχής ,** $f(x) \neq 2$ **για κάθε** $x \in R$ **και** $f(3)=1$ **δείξτε ότι** $f(x)<2$ **για κάθε** $x \in R$**.**

4.3 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (3η διδακτική ώρα)

Στη συνέχεια δίνεται το τρίτο φύλλο εργασίας . Σ' αυτό προτείνονται αφ' ενός μεν παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε διάστημα και ζητούμε την εύρεση των διαστημάτων στα οποία οι τιμές τους έχουν σταθερό πρόσημο , και αφ' ετέρου εφαρμογές που αντιμετωπίζονται με το θεώρημα Bolzano.

Α) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in[0,2\pi]$.

Υπόδειξη:

(i) 1ο βήμα: Βρείτε τις ρίζες της $f(x)=0$, $x\in[0,2\pi]$. Περιμένουμε επιτηρώντας μέχρις ότου μερικοί μαθητές λύσουν την εξίσωση και εντοπίζουμε τις αδυναμίες αυτών που δυσκολεύονται. Στη συνέχεια σηκώνουμε στον πίνακα έναν από τους μαθητές πουν την έλυσαν, να μας παρουσιάσει τη λύση και να τη γράψουν οι υπόλοιποι μαθητές στο φύλλο εργασίας τους.

$(f(x)=0\ ,x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1$

$\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in$ Z.Ο$\mu\omega\varsigma\ x\in[0,2\pi]\ \alpha\rho\alpha\ 0\le\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\le 2\pi\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\kappa\le 2+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \kappa=1,2\ \alpha\rho\alpha\ x=\frac{3\pi}{4}, x=\frac{7\pi}{4}$).

(ii) 2ο βήμα: Με τις ρίζες που βρήκατε διαμερίστε το διάστημα [0,2π] σε υποδιαστήματα και βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης σε κάθε ένα από αυτά. Το πρόσημο της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα προσδιορίστε το βρίσκοντας το πρόσημο της τιμής ενός επιλεγμένου αριθμού σ' αυτό το υποδιάστημα.

Δικαιολογείστε γιατί το πρόσημο των τιμών της σε κάθε υποδιάστημα είναι το ίδιο με το πρόσημο του επιλεγμένου σ' αυτό αριθμού.

x	**0**	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	**2π**
$f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$		$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ +	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ -		$f(2\pi)=1$ +

Κατόπιν συζητάμε τις παρακάτω παρατηρήσεις που βοηθούν στο να αντιμετωπίζουν οι μαθητές ερωτήματα για την ύπαρξη μιας ή περισσοτέρων ριζών συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα που είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{R}$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(i) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει <u>μια τουλάχιστο ρίζα</u> σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) προσπαθούμε για την f να εφαρμόσουμε το θεώρημα του (Bolzano) στο [α , β] ή σε κάποιο άλλο κλειστό διάστημα υποσύνολο του (α , β) .

(ii) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει <u>μια το πολύ ρίζα</u> σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) αρκεί η f να είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

(iii) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει <u>μια ακριβώς ρίζα</u> σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) προσπαθούμε για την f να εφαρμόσουμε το θεώρημα του (Bolzano) στο [α , β] και να δείξουμε ότι η f να είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

Τέλος δίνουμε τα παρακάτω παραδείγματα, να αντιμετωπίσουν όσα προλάβουν μέσα στην τάξη και τα υπόλοιπα ως εργασία στο σπίτι.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

(i) Να δείξετε ότι η εξίσωση ημχ-χ+1=0 έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (0 , π).

(ii) Αν $f, g : [0,1] \to R$ **συνεχείς συναρτήσεις και** $f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$ **τότε δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** $\xi \in (0,1)$ **ώστε** $f(\xi) = g(\xi)$**.**

(iii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{x}$ **έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.**

(iv) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = x^2$ **έχουν δύο τουλάχιστο κοινά σημεία.**

<u>Πρόβλημα :</u> Αν για μια συνάρτηση f ισχύει:

$xf(x) - x^4 + \eta\mu(\alpha x) = x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ *για κάθε* $x \in R^*$ *και* $f(0) = -\alpha \neq 0$ **τότε:**

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0,

(ii) Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **και**

(iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ *έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο* R **.**

4.4 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (4η διδακτική ώρα)

Α) Θα προσεγγίσουμε το ερώτημα, πότε ένας αριθμός η είναι τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα διάστημα , με τις παρακάτω τέσσαρες διαφορετικές ισοδύναμες διατυπώσεις.

(i) Ο αριθμός η είναι τιμή της συνάρτησης f που ορίζεται σε ένα διάστημα Α ;

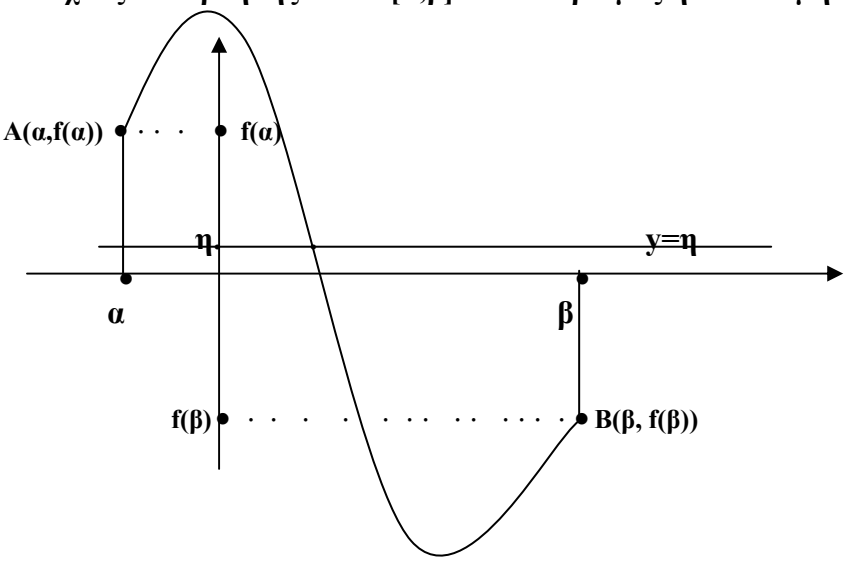
(ii) Υπάρχει αριθμός *x* από ένα διάστημα Α που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ώστε f(*x*)=η ;

(iii) Η εξίσωση f(*x*)=η έχει λύση σε ένα διάστημα Α υποσύνολο του πεδίο ορισμού της ;

(iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία με εξίσωση y=η;

Την προσέγγιση του παραπάνω ερωτήματος θα την κάνουμε για συνάρτηση ορισμένη και είναι συνεχή σε διάστημα Α που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Για την προσέγγιση μας αυτή θα μας βοηθήσει το θεώρημα του Bolzano.

Ερώτημα: Αν ένας αριθμός η βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές f(α), f(β) μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α,β] τότε ο αριθμός η είναι τιμή της συνάρτησης f ;



Ας υποθέσουμε ότι f(α)> f(β)

Από το σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει την ευθεία y=η σε ένα τουλάχιστο σημείο, άρα ο αριθμός η είναι τιμή της συνάρτησης f . Μετά την παραπάνω διαισθητική προσέγγιση διατυπώνουμε το αντίστοιχο θεώρημα και το προσεγγίζουμε με τυπική απόδειξη στηριζόμενοι στο θεώρημα του Bolzano.

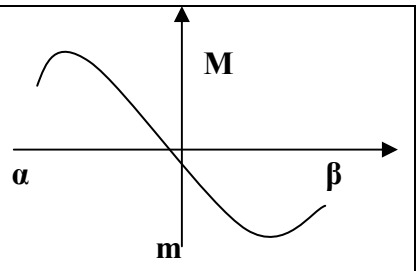
Θεώρημα (Ενδιαμέσων τιμών) :

Λεκτικά:Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και στα άκρα του έχει διαφορετικές τιμές, τότε κάθε αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα σ' αυτές τις τιμές είναι τιμή της συνάρτησης.

Η αυστηρή διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

Αν f : [α,β]$\rightarrow R$ συνεχής συνάρτηση και f (α)<η< f (β) τότε δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ$\in$(α,β) ώστε f (ξ)=η.

<u>Απόδειξη:</u>

Β) <u>Θεώρημα (Μεγίστης και Ελαχίστης τιμής)</u> **Αν $f(x)$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α , β] τότε η $f(x)$ παίρνει μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m .** **Το δε διάστημα [m , M] ισούται με το σύνολο τιμών της $f(x)$ δηλαδή με το σύνολο** **{ $f(x)$: $x \in$[α , β] }.**	

Γ) Εύρεση συνόλου τιμών μιας συνεχούς και μονότονης συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα.

(i) Αν $f(x)$ συνεχής και αύξουσα στο [α,β]$\Rightarrow$ f ([α,β])=[$f(\alpha)$, $f(\beta)$]

(ii) Αν $f(x)$ συνεχής και φθίνουσα στο [α,β]$\Rightarrow$ f ([α,β])=[$f(\beta)$, $f(\alpha)$]

(iii) Αν $f(x)$ συνεχής και αύξουσα στο (α,β)$\Rightarrow$

f ((α,β))=($\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$)

(iv) Αν $f(x)$ συνεχής και φθίνουσα στο (α,β)$\Rightarrow$

f ((α,β))=($\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$).

Τα παραπάνω τα προσεγγίζουν οι μαθητές με σχήματα. Στη συνέχεια δίνουμε παραδείγματα συναρτήσεων ορισμένων και συνεχών σε διάστημα που είναι υποσύνολο του $\boldsymbol{R}$ και στα οποία ζητούμε να βρουν το σύνολο τιμών τους.

<u>Παράδειγμα 1° :</u> Να βρείτε τα σύνολα τιμών της συνάρτησεων.

(i) $f(x)=\ln x-1$, **(ii)** $f(x)=-x+2, x\in(0,2)$

(iii) $f(x)=2\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ **και, (iv)** $f(x)=e^x+1$, $x\in \boldsymbol{R}$.

<u>Παράδειγμα 2° :</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α , β] και ισχύουν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=+\infty$ δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δηλαδή $f([\alpha,\beta])=\boldsymbol{R}$.

4.5 ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (5η διδακτική ώρα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με παραδείγματα συναρτήσεων εκ των οποίων η μια να είναι **συνεχής** σε σημείο x_0 και η άλλη είναι **ασυνεχής** στο x_0 ζητούμε να βρουν το άθροισμα και το γινόμενο τους και να εξετάσουν τη συνέχεια αυτών στο σημείο x_0. Με βάση τ' αποτελέσματα και μετά από συζήτηση διατυπώνουμε τα συμπεράσματα μας. Όμοια ζητούμε να βρουν το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων που είναι ασυνεχείς σε σημείο x_0 και να εξετάσουν τη συνέχεια αυτών στο x_0.

1) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι <u>συνεχής</u> στο x_0 και η συνάρτηση g <u>είναι ασυνεχής</u> στο x_0.

(i)Δείξτε ότι η f + g είναι <u>ασυνεχής</u> στο x_0.

(ii) Για τα επόμενα τρία ζεύγη συναρτήσεων στα οποία η f είναι συνεχής στο x_0=0 και η g είναι <u>ασυνεχής</u> στο x_0=0

$$(1)\ f(x)=x^2\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

$$(2)\ f(x)=x\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

$$(3)\ f(x)=|x|\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

εξετάστε, για κάθε ζεύγος, αν το γινόμενο f.g είναι <u>συνεχής</u> στο x_0=0 ;

Τι συμπεραίνετε;

Μετά από συζήτηση στα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος συμπεραίνουμε ότι αν το γινόμενο δύο συναρτήσεων είναι συνάρτηση συνεχής σε σημείο x_0 δεν έπεται πάντοτε ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς.

2) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι <u>ασυνεχείς</u> στο x_0. Εξετάστε αν,

(i) η συνάρτηση άθροισμα f + g είναι <u>ασυνεχής</u> στο x_0 και

Υποδεικνύουμε να βρουν παραδείγματα δύο συναρτήσεων ασυνεχών σε σημείο x_0 που το άθροισμα τους να είναι συνάρτηση συνεχής

(ii) η συνάρτηση γινόμενο f . g είναι <u>ασυνεχής</u> στο x_0.

Υποδεικνύουμε να βρουν παραδείγματα δύο συναρτήσεων ασυνεχών σε σημείο x_0 που το γινόμενο τους να είναι συνάρτηση συνεχής

Στο ίδιο φύλλο εργασίας δίνουμε τον πίνακα μεταβολών μιας συνεχούς συνάρτησης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με διαφορετικές μονοτονίες σε διαστήματα. Ζητούμε από τους μαθητές με βάση τον πίνακα μεταβολών να υπολογίσουν:

α)Το σύνολο τιμών της συνάρτησης, στο $\boldsymbol{R}$ και σε διαστήματα υποσύνολα του $\boldsymbol{R}$.

β)Το πλήθος των ριζών κάποιων εξισώσεων της μορφής **f(*x*)=α,** με **α** δοσμένο πραγματικό αριθμό και

γ) Τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

3) Για τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$, δίνεται ο παρακάτω πίνακας μεταβολών και ότι ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ ***και*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)=1$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
f(x)	**-3**	↗	**2**	↘	**0**	↗	**5**	↘	$-\infty$

(i) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

(ii) Να υπολογίσετε τα παρακάτω σύνολα τιμών:

$f\left((-\infty,-1]\right) =$, $f\left([-1,0]\right) =$, $f\left([0,3]\right) =$, $f\left([3,+\infty)\right) =$

$f(R) =$, $f\left((-\infty,0]\right) =$, $f\left([-1,3]\right) =$, $f\left([0,+\infty)\right) =$

(iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών κάθε μιας από τις παρακάτω εξισώσεις και σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάθε ρίζα της.

$f(x) = -3$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$, $f(x) = 1$, $f(x) = 5$, $f(x) = 2006$

(iv) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.

Στο τέλος δίνουμε μερικές ασκήσεις να τις αντιμετωπίσουν χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της συνέχειας συνάρτησης.

1) Έστω f(x) συνεχής στο [1,3].Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ που ανήκει στο [1,3] ώστε να ισχύει: $f(\xi) = \dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}$**.**

2) Αν f συνεχής στο [α , β] με σύνολο τιμών το [α , β] δηλαδή με $f\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)=\left[\alpha,\beta\right]$ δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ που ανήκει στο [α , β] ώστε : f(ξ)=ξ.

3) Αν για τη συνάρτηση $f : R \to R$ με $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\theta\left|x-y\right|$ για κάθε $x , y \in R$ και θ>0, δείξτε ότι f είναι συνεχής στο R .

4) Αν η συνάρτηση f :[α,β]$\to R$ είναι συνεχής και $x_1, x_2, ..., x_\nu \in\left[\alpha,\beta\right]$ δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ στο [α , β] ώστε $f\left(\xi\right)=\frac{1}{\nu}\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_\nu\right)\right)$

Στο παράρτημα παραθέτουμε τα φύλλα εργασίας όπως τα δίνουμε στους μαθητές ένα για κάθε διδακτική ώρα.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

5.1 ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., και Σβέρκος Α.(2005). Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αναπολιτάνος Δ. (1985), Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπροχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., & Πολύζος Γ., (2002). Μαθηματικά Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου. Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αριστοτέλης, (1993), άπαντα, τόμος 1ος ,Μετά τα Φυσικά, Εκδόσεις κάκτος, Αθήνα.

Βοσνιάδου Σ., (2001) Εισαγωγή στη Ψυχολογία, τόμος Α, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Γαγάτσης Α .(1994), Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδότης Α.Γαγάτσης, Θεσσαλονίκη.

Γαγάτσης Α.(2004) Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών Υπουργείο. Παιδείας –Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία.

Γαγάτσης Α. , Ευαγγελίδου Α, Ηλία Η., Σπύρου Π.(2004). Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών, τόμος Ι (Επίλυση Προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις), τόμος ΙΙ (Γεωμετρία), Εκδόσεις Intercollege, Λευκωσία.

Κάππος Δ.(1962), Απειροστικός Λογισμός, Εκδόσεις Δ. Κάππος, Αθήνα.

Νεγρεπόντης Σ. , Γιωτόπουλος Σ. , Γιαννακούλιας Ε.(1999), Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Ρουσόπουλος, Γ.(1991), Επιστημολογία των μαθηματικών, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Σπύρου Π.(2005), Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών (τμήμα Μαθηματικών), Αθήνα.

Σταμάτης Ε.(1953) Ευκλείδου Γεωμετρία Θεωρία Αριθμών, Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII,VIII, IX. Τόμος ΙΙ, Ο.Ε.Δ.Β, Αθήνα

Σταμάτης Ε.(1975) Ευκλείδου περί Ασυμμέτρων, Στοιχεία Βιβλίον Χ, Τόμος ΙΙΙ, Ο.Ε.Δ.Β, Αθήνα.

5.2 ΞΕΝΗ

Bartle R. Sherbert D. (1982), Introduction to Real Analysis, John Wiley & Sons, New York.

Boyer C., (1959), The history of the calculus and its conceptual development, Dover publications, New York.

Cauchy A, Oeuvres completes, 25 vols., Paris, 1882-1932.

Grabiner J. (1981), The origins of Cauchy's rigorous calculus, Dover publications, New York.

Grattan-Guinness I, (1970) Bolzano, Cauchy and the "new analysis" at the early 19th century, Archive for history of exact sciences.

Dedekind, R. (1901), Essays on the theory of Numbers. Translated by wooster Beman. Chicago.

Jarnik, V. (1981), Bolzano and foundation of mathematical analysis, Prague.

Katz, V., (1998), A history of mathematics, Addison Wesley, New York.

Kline M., (1972), Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University, New York.

Russel B., (1992), The principles of Mathematics, Rutledge, London.

Sierpinska A, (1990).Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics- An International Journal of Mathematics Education, 10(3), 24-36.

6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6.1 ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

1ο ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (ΠΡΙΝ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ)

ΟΝΟΜΑ:……
ΤΑΞΗ:……ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:……
ΣΧΟΛΕΙΟ:……..

1ο Ερώτημα: Δίνονται τα σύνολα :

$A = \{x \text{ ακέραιος} : 1 \le x \le 5\}$, $B = \{x \text{ ρητός} : 1 \le x \le 2\}$

$\Gamma = \{x \in \boldsymbol{R} : 1 \le x\}$, $\Delta = \{x \in \boldsymbol{R} : 1 > x \text{ ή } x = 7\}$

ι) Παραστήστε το κάθε ένα από αυτά στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Α:

Β:

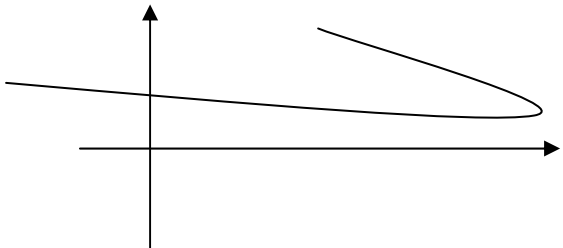
Γ:

Δ:

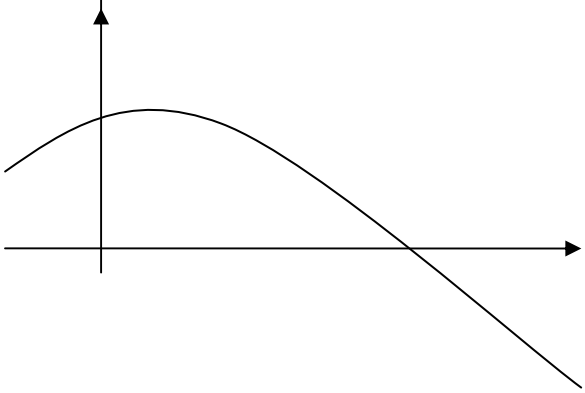
ιι) Ποιο από τα παραπάνω σύνολα είναι διάστημα .Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

<u>2° Ερώτημα:</u>α) Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Αιτιολογείστε την απάντηση σας.
β) Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων. Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

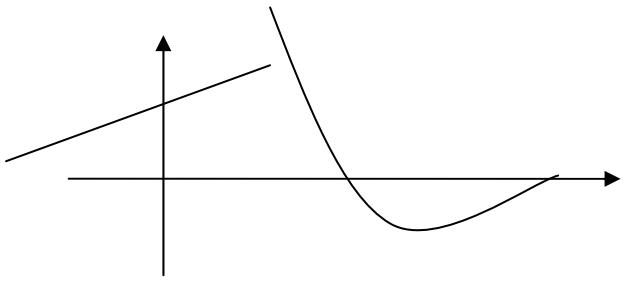
i)



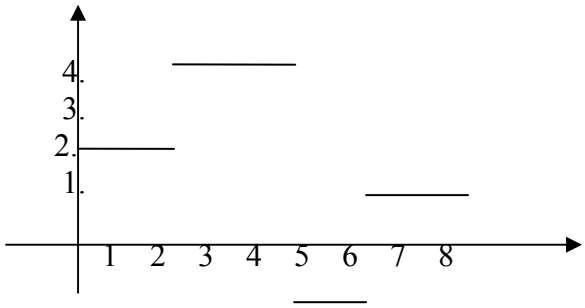
ii)



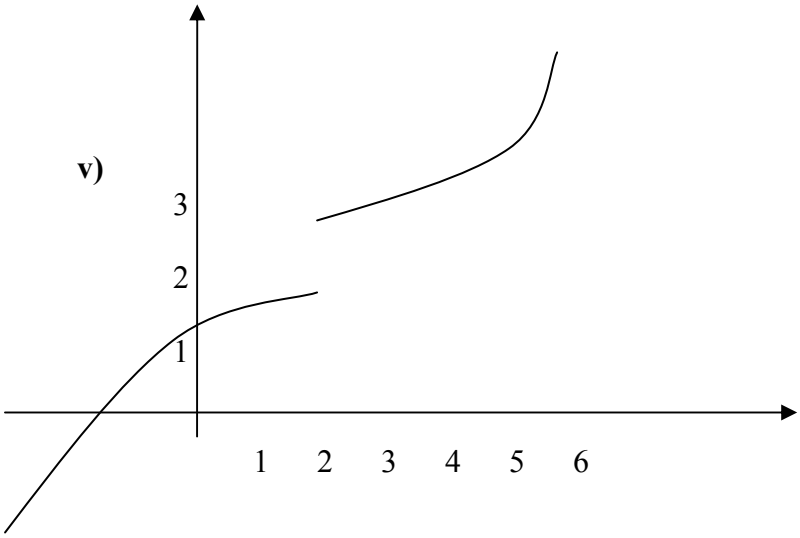
iii)



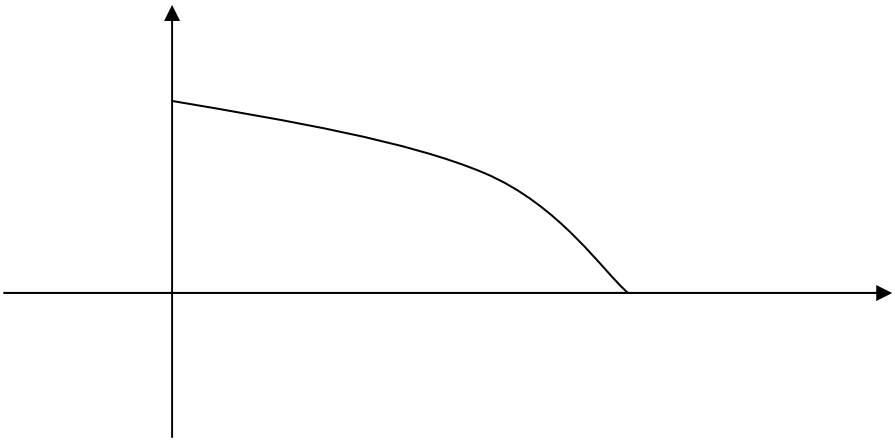
iv)



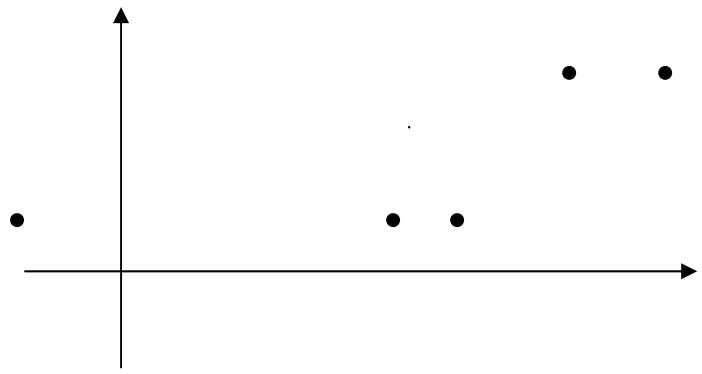
v)



vi)



vii)



<u>3° Ερώτημα:</u> Δίνονται οι συναρτήσεις :

α) $f_1(x) = x \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in [0,3]$

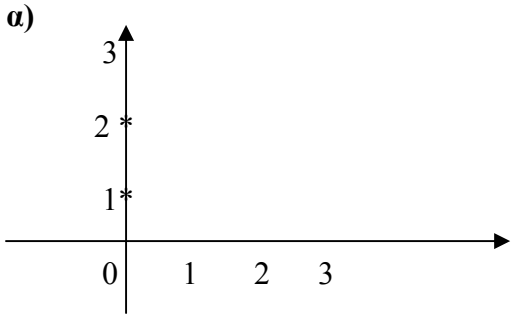
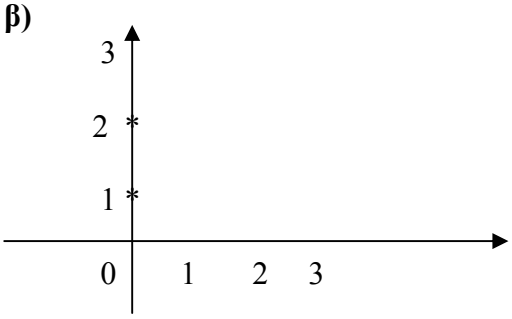
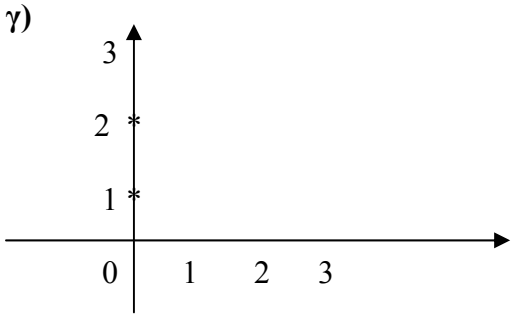
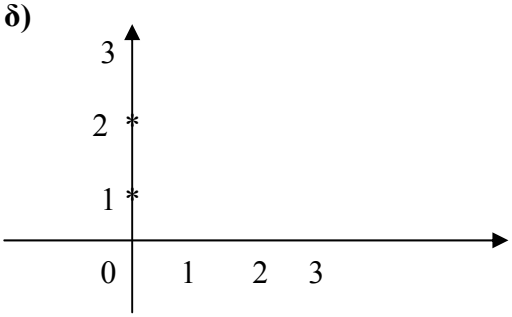
β) $f_2(x) = x \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in \{0,1,2,3\}$

γ) $f_3(x) = \begin{cases} x, \alpha\nu \ \ x \in [0,1) \cup (1,3] \\ 2, \alpha\nu \ \ x = 1 \end{cases}$

δ) $f_4(x) = x, \alpha\nu \ \ x \in [0,1) \cup (1,3]$

(i) Ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού διάστημα Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

(ii) Κατασκευάστε τις γραφικές παραστάσεις κάθε μιας από τις παραπάνω συναρτήσεις.

α) 	**β)** 
γ) 	**δ)** 

iii) Ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς .Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

2^{ο} ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ)

ΟΝΟΜΑ:……
ΤΑΞΗ:……ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:……
ΣΧΟΛΕΙΟ:……..

1^{ο} Ερώτημα: Δίνονται τα σύνολα :

$A = \{x \text{ ακέραιος} : 1 \le x \le 5\}$, $B = \{x \text{ ρητός} : 1 \le x \le 2\}$

$\Gamma = \{x \in \boldsymbol{R} : 1 \le x\}$, $\Delta = \{x \in \boldsymbol{R} : 1 > x \text{ ή } x = 7\}$

ι) Παραστήστε το κάθε ένα από αυτά στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Α:

Β:

Γ:

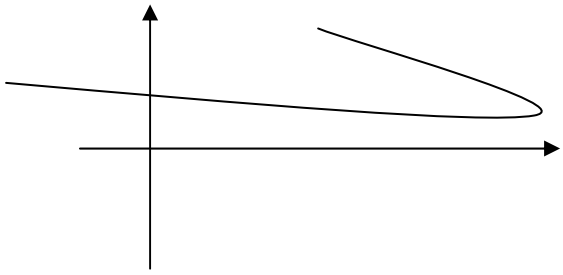
Δ:

ιι) Ποιο από τα παραπάνω σύνολα είναι διάστημα .Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

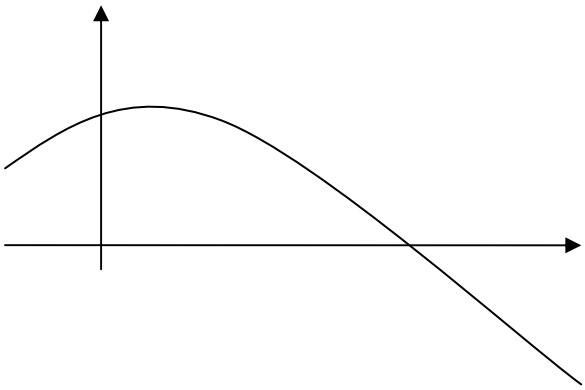
.

<u>2° Ερώτημα:</u>α) Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Αιτιολογείστε την απάντηση σας.
β) Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων. Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

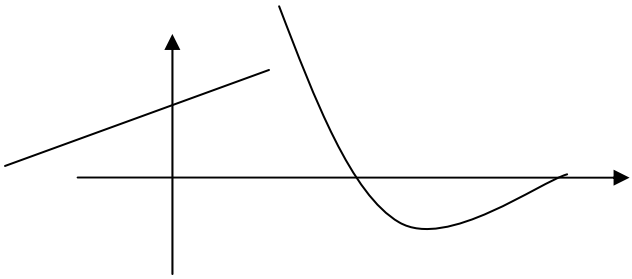
i)



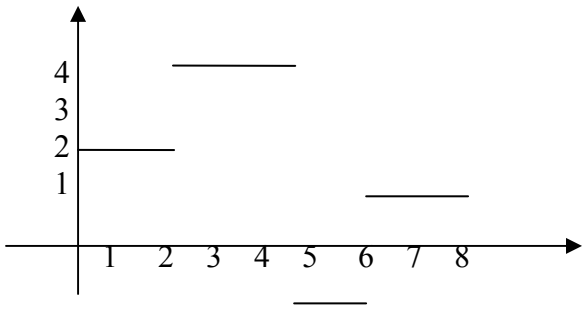
ii)



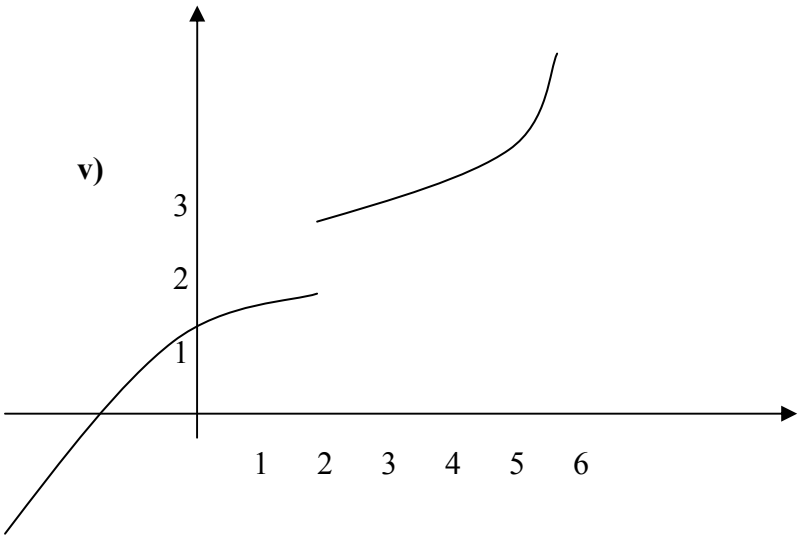
iii)



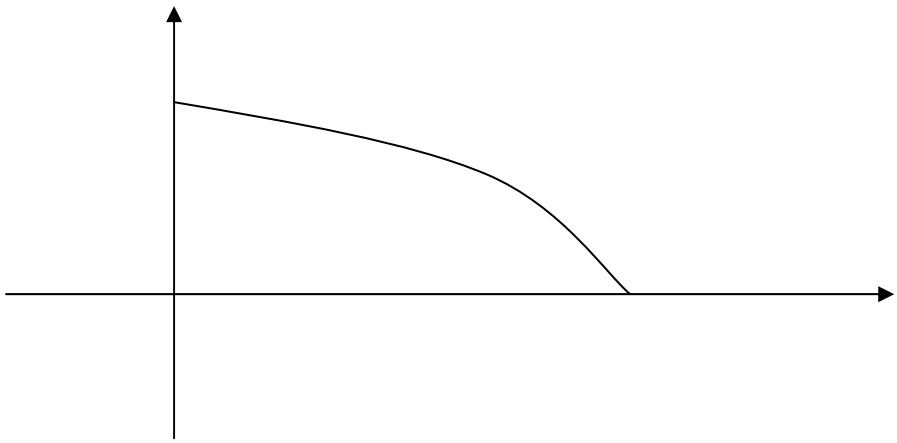
iv)



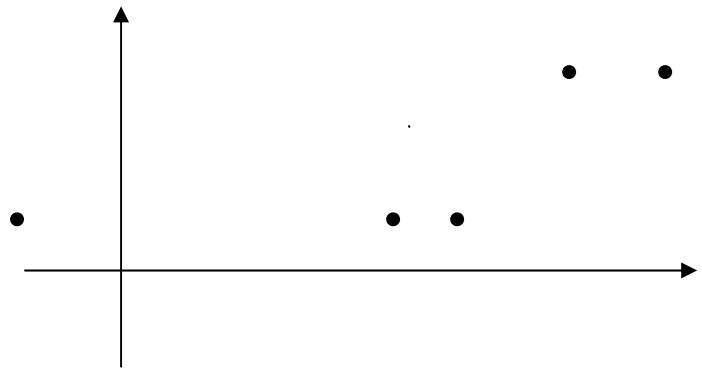
v)



vi)



vii)



<u>3ο Ερώτημα:</u> Δίνονται οι συναρτήσεις :

α) $f_1(x) = x \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in [0,3]$

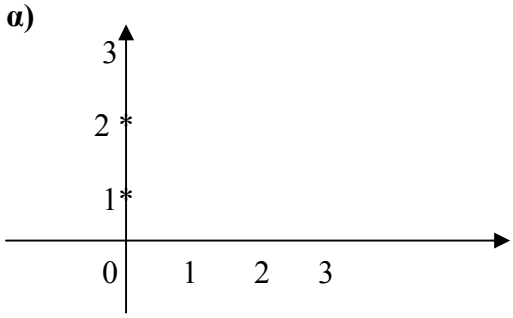
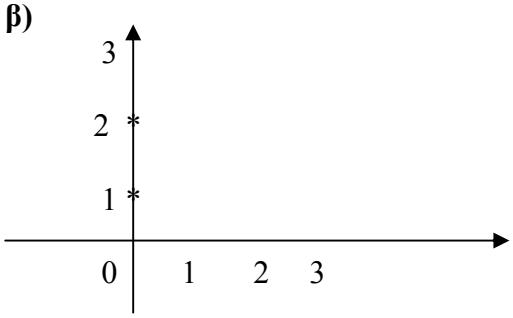
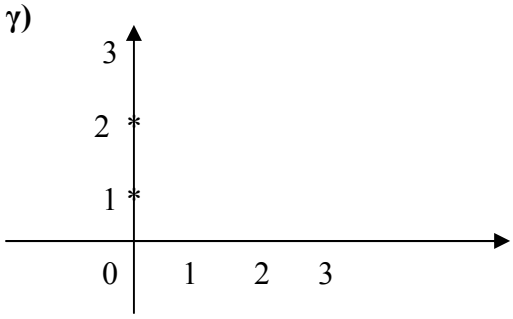
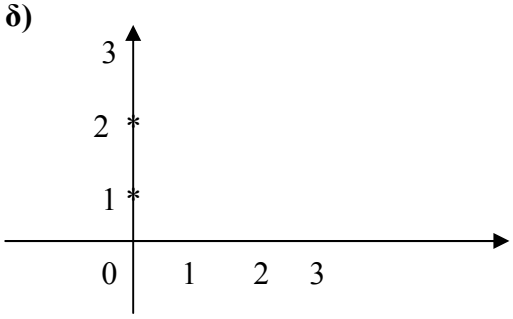
β) $f_2(x) = x \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in \{0,1,2,3\}$

γ) $f_3(x) = \begin{cases} x, \alpha\nu \ \ x \in [0,1) \cup (1,3] \\ 2, \alpha\nu \ \ x = 1 \end{cases}$

δ) $f_4(x) = x, \alpha\nu \ \ x \in [0,1) \cup (1,3]$

(i)Ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού διάστημα Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

ii) Κατασκευάστε τις γραφικές παραστάσεις κάθε μιας από τις παραπάνω συναρτήσεις.

α) 	**β)** 
γ) 	**δ)** 

iii) Ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς .Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

<u>4^{ο} Ερώτημα:</u> Για τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$, δίνεται ο παρακάτω πίνακας μεταβολών και ότι ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ ***και*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right) = 1$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
f(x)	**-3**	↗	**2**	↘	**0**	↗	**5**	↘	$-\infty$

1)Να υπολογίσετε τα παρακάτω σύνολα τιμών:

(i) $f\left((-\infty,-1]\right) =$, $f\left([-1,0]\right) =$, $f\left([0,3]\right) =$, $f\left([3,+\infty)\right) =$

(ii) $f(R) =$, $f\left((-\infty,0]\right) =$, $f\left([-1,3]\right) =$, $f\left([0,+\infty)\right) =$

2)Να βρείτε το πλήθος των ριζών κάθε μιας από τις παρακάτω εξισώσεις και σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάθε ρίζα της.

(i) $f(x) = -3$, $f(x) = -2$

(ii) $f(x) = 2$, $f(x) = 1$

(iii) $f(x) = 5$, $f(x) = 2006$

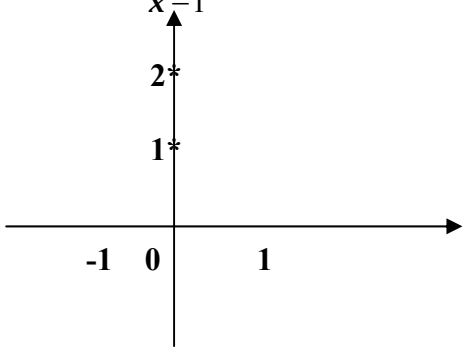
4) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης (ολικό ελάχιστο-ολικό μέγιστο) εφόσον υπάρχουν.

6.2 Φύλλα Εργασίας

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1^{ο}) ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (1^{η} διδακτική ώρα)</u>

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού ,να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση ,να υπολογίσετε το όριο στη θέση x_0=1 και την τιμή στη θέση x_0=1, εφ' όσον υπάρχει, για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

Α) $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

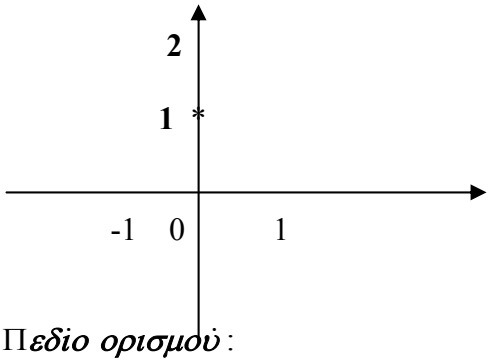


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)=$

$f_1(1)=$

Β) $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

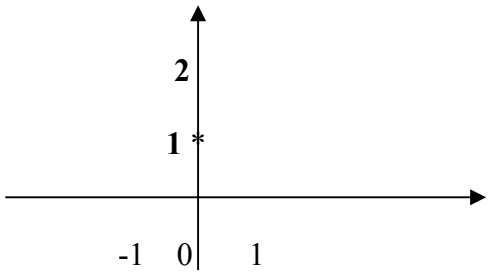


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)=$

$f_2(1)=$

Γ) $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq 1\\ 2 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$

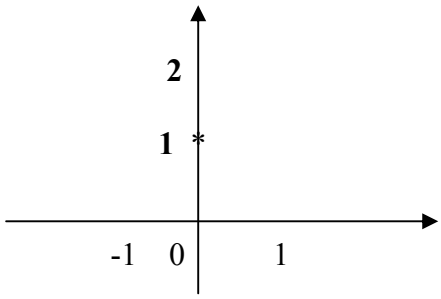


Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_3(x)=$

$f_3(1)=$

Δ) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \alpha\nu\ x\leq 0\\ 1 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$



Πεδίο ορισμού:

$\lim\limits_{x\to 1} f_4(x)=$

$f_4(1)=$

<u>Ορισμός:</u>

……

……

<u>Ορισμός:</u>

……

……

<u>Παρατήρηση:</u> Όλες οι γνωστές συναρτήσεις (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές) είναι συνεχείς.
Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα ,διαφορά ,πηλίκο, γινόμενο, δύναμη, ρίζες, απόλυτη τιμή συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Ἐ$\sigma\tau\omega$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+bx-12}{x-1}, & \alpha\nu \quad x\neq 1\\ 12 \quad \alpha\nu & x=1\end{cases}$ **. Βρείτε τα α,b ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.**

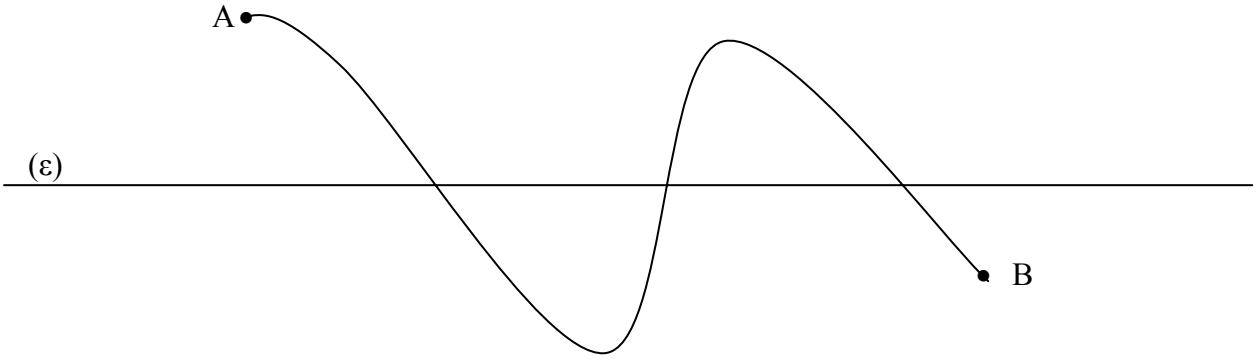
(ii) Έστω **συνάρτηση f συνεχής στο 0 για την οποία ισχύει:**
$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=3$ **. Να βρεθεί το f(0)**

(iii) Έστω **συνάρτηση f συνεχής στο 1 με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει:** $xf(x)=f(x)+x\eta\mu(x-1)$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x\in R$ **. Να βρεθεί ο τύπος της**

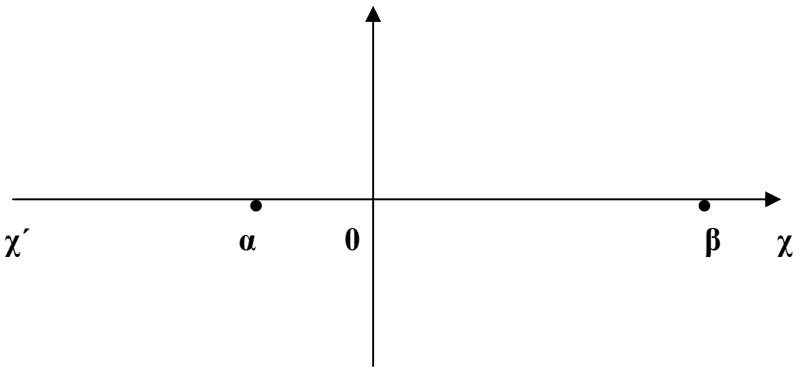
<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2^{ο}) ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (2^{η} διδακτική ώρα)</u>

.

Α) <u>Αξίωμα:</u> Αν δύο σημεία Α, Β βρίσκονται στα αντικείμενα ημιεπίπεδα που ορίζονται από μια ευθεία (ε) τότε κάθε γραμμή που ενώνει τα σημεία Α , Β και δεν διακόπτεται έχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με την ευθεία (ε).



Β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης συνεχούς στο [α , β] και της οποίας τα άκρα Α , Β να βρίσκονται στα αντικείμενα ημιεπίπεδα που ορίζονται από τον άξονα των τετμημένων χ΄χ .



Τι παρατηρείτε
(i) για τα πρόσημα των τιμών f(α) , f(β) της συνάρτησης f.

(ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διακόπτεται ή όχι;

(iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ΄χ ;

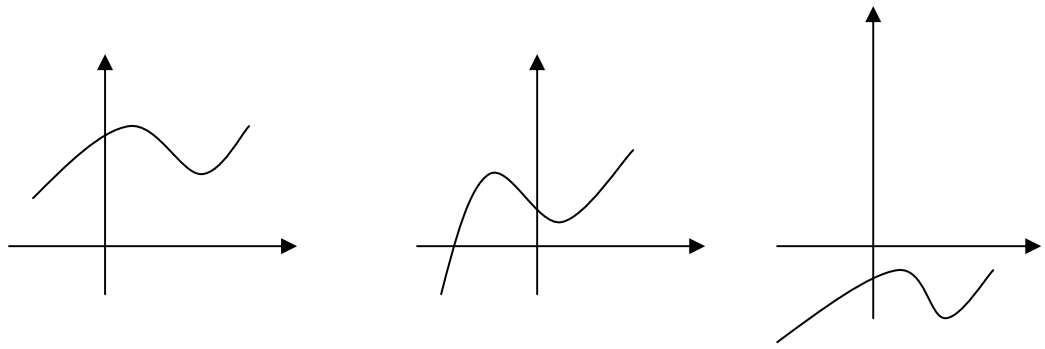
<u>Θεώρημα (Bolzano)</u>

<u>Λεκτικά:</u> …….
……

Η αυστηρή διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

<u>Ερώτημα :</u> Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και
$f(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in \Delta$

(i) ποια από τα παρακάτω σχήματα ανταποκρίνονται στις υποθέσεις του ερωτήματος;



(ii)Τι συμπεραίνετε για το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης;

<u>Θεώρημα:</u> Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και
$f(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in \Delta$ **τότε η συνάρτηση διατηρεί πρόσημο (δηλαδή όλες οι τιμές της έχουν το ίδιο πρόσημο).**
<u>Απόδειξη.</u> (Υποδεικνύεται να στηριχθούν στο θεώρημα του Bolzano **).**

<u>Παρατήρηση:</u> ……
…….
……..

<u>Παράδειγμα:</u>
Αν $f: R \to R$ **συνεχής ,** $f(x) \neq 2$ **για κάθε** $x \in R$ **και** $f(3)=1$ **δείξτε ότι**
$f(x)<2$ **για κάθε** $x \in R$
……
……
……
……..

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (3η διδακτική ώρα)

Α) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ **με** $x \in [0, 2\pi]$

Υπόδειξη:

(i) 1ο βήμα: Βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

(ii) 2ο βήμα: Με τις ρίζες που βρήκατε διαμερίστε το διάστημα [0,2π] σε υποδιαστήματα και βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης σε κάθε ένα από αυτά. Το πρόσημο της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα προσδιορίστε το βρίσκοντας το πρόσημο της τιμής ενός επιλεγμένου αριθμού σ' αυτό το υποδιάστημα.
Δικαιολογείστε γιατί το πρόσημο των τιμών της σε κάθε υποδιάστημα είναι το ίδιο με το πρόσημο του επιλεγμένου σ' αυτό αριθμού.

x

$f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$			

Παρατηρήσεις:

(i) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστο ρίζα σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) προσπαθούμε για την f να εφαρμόσουμε το θεώρημα του (Bolzano) στο [α , β] ή σε κάποιο άλλο κλειστό διάστημα υποσύνολο του (α , β) .

(ii) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει μια το πολύ ρίζα σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) αρκεί η f να είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

(iii) Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει μια ακριβώς ρίζα σ' ένα ανοικτό διάστημα (α , β) προσπαθούμε για την f να εφαρμόσουμε το θεώρημα του (Bolzano) στο [α , β] και να δείξουμε ότι η f να είναι γνησίως μονότονη στο (α , β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Να δείξετε ότι η εξίσωση ημχ-χ+1=0 έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο (0 , π)

…….

…….

……..

(ii) Αν $f, g : [0,1] \to R$ **συνεχείς συναρτήσεις και** $f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$ **τότε δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον** $\xi \in (0,1)$ **ώστε** $f(\xi) = g(\xi)$**.**

…….

……
……
(iii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x)=\ln x, g(x)=\frac{1}{x}$ **έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.**
……
……
……

(iv) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x)=3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=x^2$ **έχουν δύο τουλάχιστο κοινά σημεία.**
……
……
……

<u>Πρόβλημα 1ο :</u> Αν για μια συνάρτηση f ισχύει:
$xf(x)-x^4+\eta\mu(\alpha x)=x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ *για κάθε* $x\in R^*$ *και* $f(0)=-\alpha\neq 0$ **τότε:**
(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0,
(ii) Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **και**
(iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$f(x)=0$ *έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο* R.
……
……
……
……
……
……
……
……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4^{ο} ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (4^{η} διδακτική ώρα)

Α) Θα προσεγγίσουμε το ερώτημα, πότε ένας αριθμός η είναι τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα διάστημα , με τις παρακάτω τέσσαρες διαφορετικές ισοδύναμες διατυπώσεις.

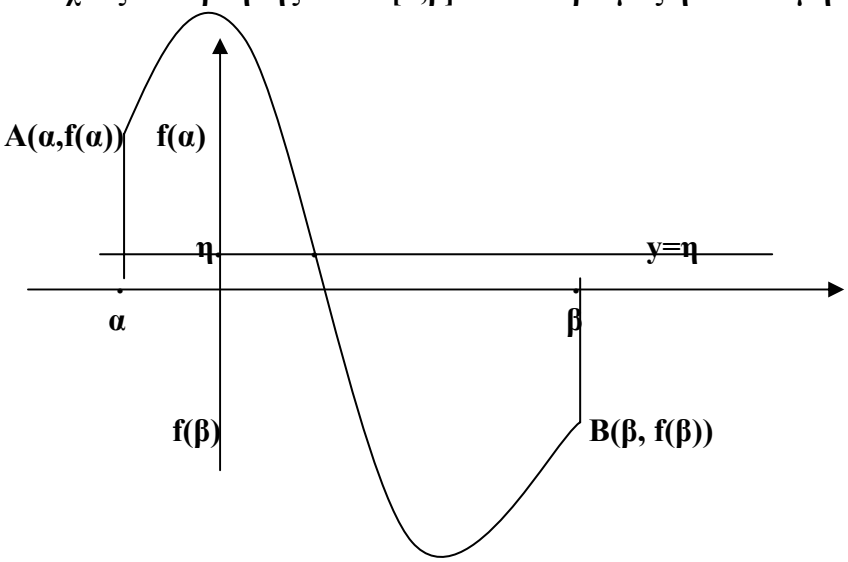
(i) Ο αριθμός η είναι τιμή της συνάρτησης f που ορίζεται σε ένα διάστημα Α ;

(ii) Υπάρχει αριθμός *x* από ένα διάστημα Α που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ώστε f(*x*)=η ;

(iii) Η εξίσωση f(*x*)=η έχει λύση σε ένα διάστημα Α υποσύνολο του πεδίο ορισμού της ;

(iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία με εξίσωση y=η;

Ερώτημα: Αν ένας αριθμός η βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές f(α), f(β) μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α,β] τότε ο αριθμός η είναι τιμή της συνάρτησης f ;



Ας υποθέσουμε ότι f(α)> f(β)

Θεώρημα (Ενδιαμέσων τιμών) :

Λεκτικά:

……..

……..

Η αυστηρή διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

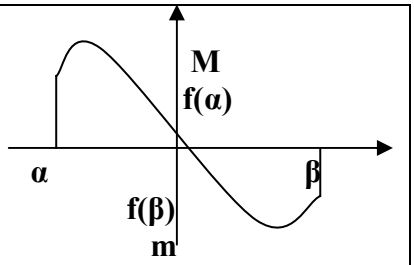
……..

……

Απόδειξη:

……

……

Β) <u>Θεώρημα (Μεγίστης και Ελαχίστης τιμής)</u> **Αν $f(x)$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α , β] τότε η $f(x)$ παίρνει μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m .** **Το δε διάστημα [m , M] ισούται με το σύνολο τιμών της $f(x)$ δηλαδή με το σύνολο** **{ $f(x)$: $x \in$ [α , β] }**	

Γ) Εύρεση συνόλου τιμών μιας συνεχούς και μονότονης συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα.

(i) Αν $f(x)$ συνεχής και αύξουσα στο [α,β] $\Rightarrow$ f ([α,β])=

(ii) Αν $f(x)$ συνεχής και φθίνουσα στο [α,β] $\Rightarrow$ f ([α,β])=

(iii) Αν $f(x)$ συνεχής και αύξουσα στο (α,β) $\Rightarrow$ f ((α,β))=

(iv) Αν $f(x)$ συνεχής και φθίνουσα στο (α,β) $\Rightarrow$ f ((α,β))=

<u>Παράδειγμα 1ο :</u> Να βρείτε τα σύνολα τιμών της συνάρτησεων.

(i) $f(x) = \ln x - 1$ **.**

(ii) $f(x) = -x + 2, x \in (0,2)$**.**

(iii) $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ **και**

(iv) $f(x) = e^x + 1$, $x \in R$**.**

<u>Παράδειγμα 2ο :</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α , β] και ισχύουν $\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \beta} f(x) = +\infty$ **δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δηλαδή** $f([\alpha, \beta]) = R$**.**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (5η διδακτική ώρα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι ασυνεχής στο x_0.

(i)Δείξτε ότι η f + g είναι ασυνεχής στο x_0.

(ii) Για τα επόμενα τρία ζεύγη συναρτήσεων στα οποία η f είναι συνεχής στο x_0=0 και η g είναι ασυνεχής στο x_0=0

$$(1)\ f(x)=x^2\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

$$(2)\ f(x)=x\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

$$(3)\ f(x)=|x|\ ,g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

εξετάστε, για κάθε ζεύγος, αν το γινόμενο f.g είναι συνεχής στο x_0=0 ;

Τι συμπεραίνετε;

……

……

……

2) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι ασυνεχείς στο x_0. Εξετάστε αν,

(i) η συνάρτηση άθροισμα f + g είναι ασυνεχής στο x_0 και

……

……

……

(ii) η συνάρτηση γινόμενο f . g είναι ασυνεχής στο x_0.

……

……

……

3) Για τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$, δίνεται ο παρακάτω πίνακας μεταβολών και ότι ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ ***και*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right) = 1$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
f(x)	**-3**	↗	**2**	↘	**0**	↗	**5**	↘	$-\infty$

(i) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

(ii) Να υπολογίσετε τα παρακάτω σύνολα τιμών:
$f\left((-\infty,-1]\right) =$, $f\left([-1,0]\right) =$, $f\left([0,3]\right) =$, $f\left([3,+\infty)\right) =$

$f(R) =$, $f\left((-\infty,0]\right) =$, $f\left([-1,3]\right) =$, $f\left([0,+\infty)\right) =$

(iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών κάθε μιας από τις παρακάτω εξισώσεις και σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάθε ρίζα της.
$f(x) = -3$ ……..

$f(x) = -2$ ……..

$f(x) = 2$ ……

$f(x) = 1$ ……

$f(x) = 5$ ……

$f(x) = 2006$ ……..

(iv) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.
……..

4) Έστω f(x) συνεχής στο [1,3].Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ που ανήκει στο [1,3] ώστε να ισχύει: $f(\xi)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}$**.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

5) Αν f συνεχής στο [α , β] με σύνολο τιμών το [α , β] δηλαδή με $f([\alpha,\beta])=[\alpha,\beta]$ **δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ που ανήκει στο [α , β] ώστε : f(ξ)=ξ.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

6) Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ **με** $|f(x)-f(y)|\le\theta|x-y|$ **για κάθε** $x,y\in R$ **και θ>0, δείξτε ότι f είναι συνεχής στο** R.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

7) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ **είναι συνεχής και** $x_1,x_2,...,x_\nu\in[\alpha,\beta]$ **δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ στο [α , β] ώστε** $f(\xi)=\frac{1}{\nu}\left(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_\nu)\right)$**.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

6.3 Δείγματα γραπτών μαθητών