ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

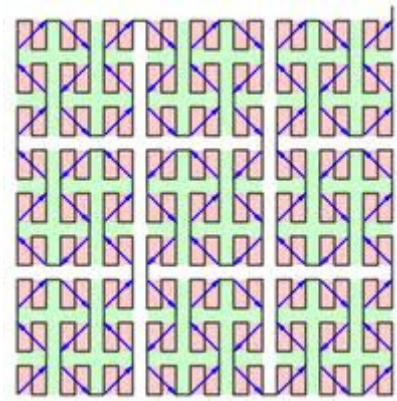
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η μελέτη της συνάρτησης με δραστηριότητες μέτρησης στο Γυμνάσιο

Αναστασία Γιατράκου



Επιβλέπων καθηγητής: Σπύρου Παναγιώτης

Αθήνα, Ιούνιος 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……	……
2)……	……	……
3)……	……	……

Σε όλους τους ανθρώπους
που είχα τη χαρά να γνωρίσω
κατά τη διάρκεια
των σπουδών μου
σε αυτό το μεταπτυχιακό

Θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω

- τον επιβλέποντα επίκουρο καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη για την καθοδήγησή του, το υλικό που μου έδωσε για μελέτη και τις χρήσιμες συμβουλές του σε όλα τα στάδια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας αλλά και τα όσα έμαθα από αυτόν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα
- την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα για τις εύστοχες παρατηρήσεις της σε καίρια σημεία της εργασίας αυτής
- τον δρ. κ. Ανδρέα Μούτσιο Ρέντζο για την πολύτιμη ενημέρωση σε όλα τα θέματα που παρουσιάστηκαν και την καθοριστική συμβολή του στην διαμόρφωση της δραστηριότητας που έγινε σε αυτή την εργασία
- την συνάδελφο και συμφοιτήτρια στο ΠΜΣ Χαρά Παπακανδεράκη που χάρη στη δική της βοήθεια έγινε δυνατό να πραγματοποιηθεί η δραστηριότητα στο σχολείο
- την εκπαιδευτικό και τους μαθητές του σχολείου με τους οποίους συνεργάστηκα, που με προθυμία και ενδιαφέρον βοήθησαν τη διεξαγωγή αυτής της μελέτης
- τους φίλους και συναδέλφους με τους οποίους συζήτησα το θέμα της διπλωματικής και μου έδωσαν ηθική και πρακτική βοήθεια

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά την έννοια της συνάρτησης και προτείνεται μια διδασκαλία της έννοιας αυτής ως δράση μέτρησης.

Η εργασία είναι χωρισμένη σε τέσσερα μέρη:

Στο πρώτο μέρος υπάρχει η ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης και οι διάφορες μορφές που πήρε η έννοια με την πάροδο του χρόνου. Επίσης παρουσιάζεται ο τρόπος που ορίζεται η συνάρτηση στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται αναφορά σε διάφορες μελέτες που έχουν γίνει σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές

Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται η αναγκαιότητα για το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής στον ορισμό της έννοιας της συνάρτησης και η συνάρτηση ως δράση μέτρησης.

Στο τέταρτο μέρος προτείνεται μια διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης ως δράση μέτρησης και συζητούνται τα αποτελέσματα από τη διεξαγωγή της διδασκαλίας αυτής στη Β΄ τάξη του Γυμνασίου.

Η συνάρτηση ως δράση μέτρησης είναι ένας τρόπος για να εισαχθεί η έννοια αυτή με τρόπο προσιτό τους μαθητές και έτσι ώστε να αναδεικνύεται η αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής.

Λέξεις κλειδιά: συνάρτηση, μονοσήμαντο, δράση μέτρησης, διαμεσολαβημένη μέτρηση

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι – ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ

Ι1) ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ……11

Ι2) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....24

Ι3) Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΗΜΕΡΑ.....29

Ι4) ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ» - Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΥΤΟ.....31

ΜΕΡΟΣ ΙΙ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΙ1) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ- ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ.....34

ΙΙ2) ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ, ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ, ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ 43

ΙΙ3) ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ- ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ – ΕΝΑΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΔΡΟΜΟΣ 48

ΙΙΙ4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ.....54

ΙΙ5) ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ..55

ΙΙ6) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΣΤΑΔΙΑΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ- ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΌ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ.....57

ΙΙ7) ΣΥΛΛΗΨΗ ΕΝΝΟΙΑΣ , ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑ.....63

ΙΙ8) ΑΛΛΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....67

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ- Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΔΡΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

III1) Η ΑΠΑΙΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.....72
III2) Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ (ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ).....74
III3) Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΜΕΝΗ ΜΕΤΡΗΣΗ.....77
III4) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΔΡΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ.....79

ΜΕΡΟΣ IV - Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

IV1) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ.....82
IV2) ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ.....85
IV3) ΜΕΘΟΔΟΣ.....92
IV4) ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....100
IV5) ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....102

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....103

- ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΟΙ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ (ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ»)
- ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ (ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ»)
- ΤΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΣΥΝΟΔΕΥΕΙ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....123

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλές έρευνες έχουν γίνει για να αναλύσουν την κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη συνάρτηση, τις διάφορες αναπαραστάσεις της έννοιας αυτής , και τον εναλλακτικό τρόπο της μελέτης της έννοιας μέσω των ιδιοτήτων της αφού είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εκμάθησής της .

«Η πρόταση είναι αν προσεγγίσουμε περισσότερο την σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης ως δράση μέτρησης, μέσα από προβλήματα, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι αντικείμενο μέτρησης, ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι απευθείας προσβάσιμη σε μέτρηση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως χρειαζόμαστε να μετρήσουμε το ύψος ενός λόφου και γνωρίζουμε την απόσταση από αυτό και την εφαπτομένη της γωνίας από το σημείο παρατήρησης .

Η έννοια της συνάρτησης ως δράση μέτρησης θα μπορούσε να ενοποιήσει τα συστατικά του ορισμού της συνάρτησης και να τα εγκαταστήσει ως αναγκαιότητες» (Spyrou, Zagorianakos, 2010)

Το παραπάνω κείμενο ήταν η αφορμή για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Επιχειρήθηκε να γίνει μια δραστηριότητα σε μια σχολική τάξη με την οπτική που περιγράφεται παραπάνω και σκοπό να κατανοηθεί η έννοια της συνάρτησης με όσο δυνατό λιγότερες παρανοήσεις από μέρους των μαθητών. Επίσης αυτή η οπτική δίνει την αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής με τρόπο απλό , άμεσο και σαφή.

“Expellas naturam furca, tamen usque recurrit”- Quintus Horatius Flaccus

«Ακόμη κι αν διώξεις τη φύση, αυτή θα επιστρέψει».

You may drive out Nature with a pitchfork, yet she still will hurry back.)

ΜΕΡΟΣ Ι

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ι1) ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ι2) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ι3) Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΗΜΕΡΑ

Ι4) ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ» - Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΥΤΟ

Ι1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

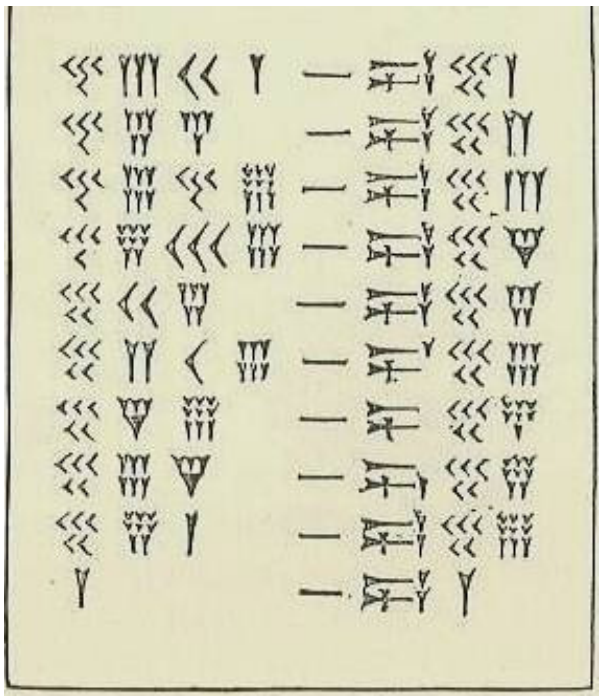
Αρχαιότητα- Πρώτες Αναφορές

Είναι δύσκολο να καθοριστεί πότε παρουσιάστηκε η συνάρτηση ως έννοια για πρώτη φορά. Όπως αναφέρει ο Freudenthal, η ιστορία μιας μαθηματικής έννοιας αρχίζει πολύ νωρίτερα από τη στιγμή που θα της δοθεί ένα όνομα.

Ένα από τα παλαιότερα σημεία όπου συναντάται χωρίς να ορίζεται η έννοια της συνάρτησης είναι οι πίνακες που χρησίμευαν για πρακτικούς και αστρονομικούς υπολογισμούς.

Οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες είχαν τέτοιους πίνακες, κατασκευασμένους από εμπειρικά δεδομένα.

Η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται στο υπόβαθρο αυτών των πινάκων.



Βαβυλωνιακός Πίνακας των Τετραγώνων

Οι Βαβυλώνιοι από το 2000 π.Χ. παρατήρησαν τις περιοδικότητες των θέσεων των πλανητών. Οι συναρτήσεις με τις οποίες επιχείρησαν να περιγράψουν τις πλανητικές κινήσεις είναι συνεπώς περιοδικές συναρτήσεις. Έχουν βρεθεί πίνακες που χρησίμευαν για τη μελέτη των κινήσεων αυτών. Οι πίνακες αυτοί συνάγονταν από εμπειρικά δεδομένα και αποτέλεσαν το μαθηματικό θεμέλιο για την ανάπτυξη της αστρονομίας.

Επίσης σε βαβυλωνιακά κείμενα υπάρχουν πίνακες υπολογισμού αντιστρόφων αριθμών, τετραγώνων, κύβων, τετραγωνικών ριζών και κυβικών ριζών (Youschkevitch A.P.)

Από όλα αυτά είναι φανερό ότι οι Βαβυλώνιοι ήταν πολύ ειδικευμένοι στους υπολογισμούς. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είχαν ενστικτωδώς την έννοια

της συνάρτησης, αφού οι τιμές των πινάκων αυτών, προκύπτουν από συναρτήσεις, σημειώνει ο E. T. Bell.(p. 32)

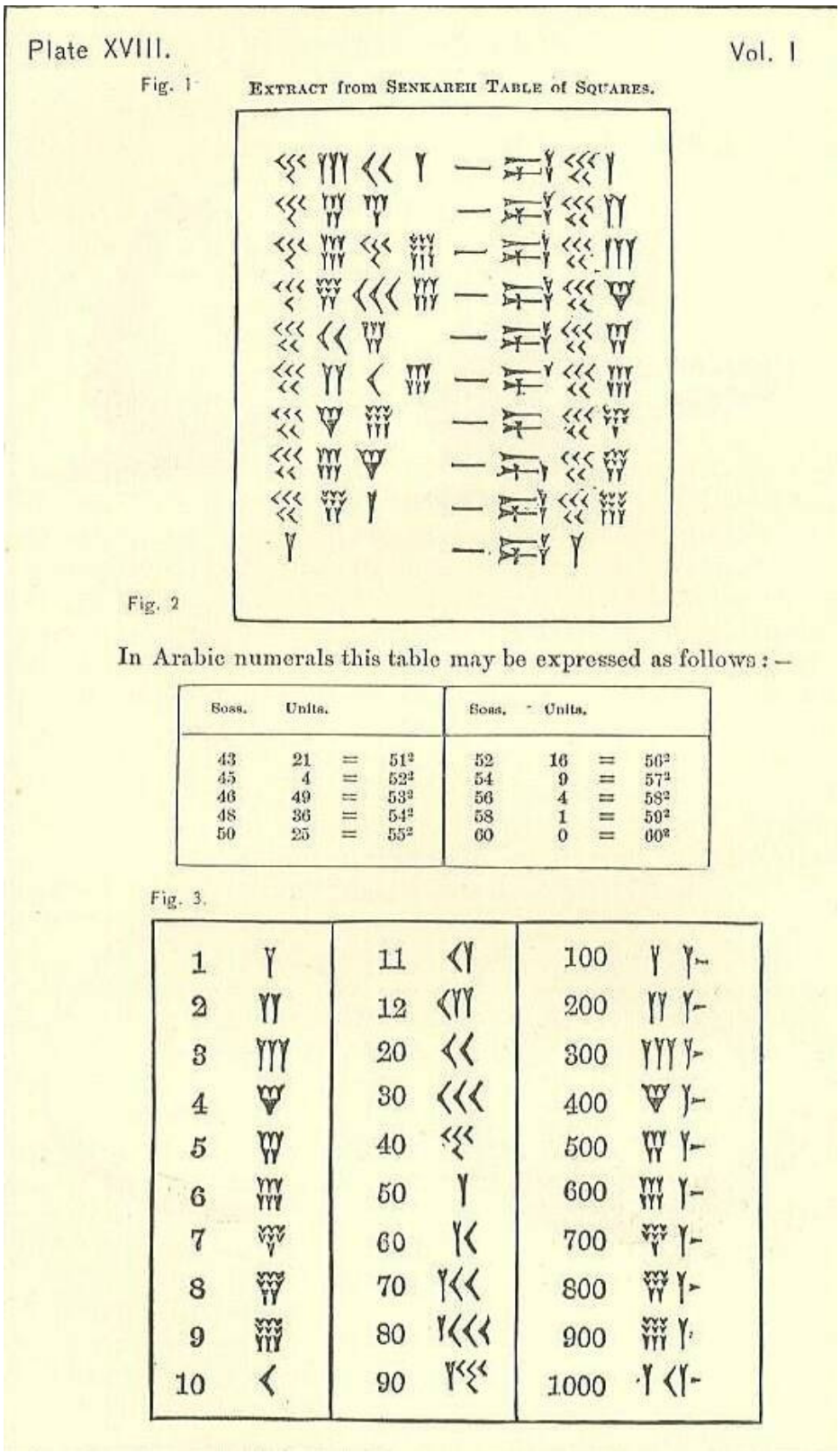


Plate XVIII. Vol. I

Fig. 1 EXTRACT from SENKAREH TABLE of SQUARES.

Fig. 2

In Arabic numerals this table may be expressed as follows: —

Soss.	Units.			Soss.	Units.		
43	21	=	51^2	52	16	=	56^2
45	4	=	52^2	54	9	=	57^2
46	49	=	53^2	56	4	=	58^2
48	36	=	54^2	58	1	=	59^2
50	25	=	55^2	60	0	=	60^2

Fig. 3.

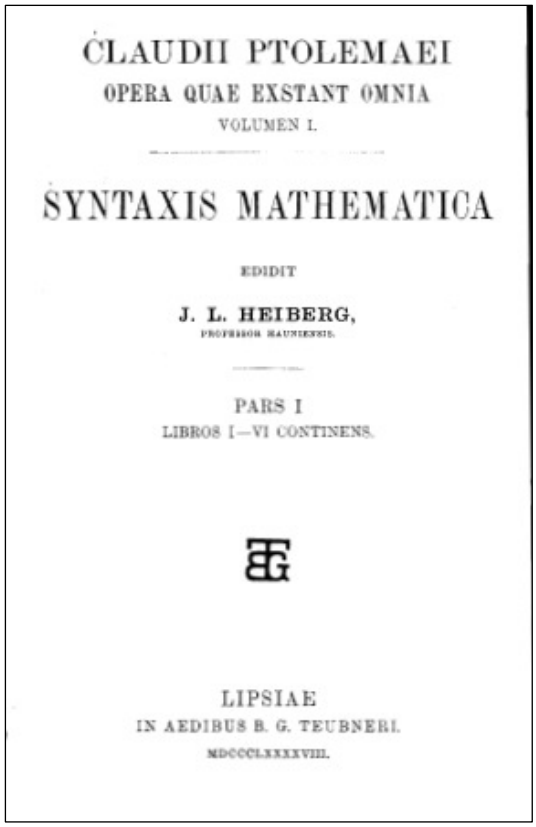
1		11		100	
2		12		200	
3		20		300	
4		30		400	
5		40		500	
6		50		600	
7		60		700	
8		70		800	
9		80		900	
10		90		1000	

Ο Βαβυλωνιακός Πίνακας των Τετραγώνων και η αρίθμηση των Βαβυλωνίων

Στα ελληνικά μαθηματικά συναντάμε αρχικά την έννοια της συνάρτησης στο έργο των Πυθαγορείων, στις προσπάθειες που έκαναν να καθορίσουν τους απλούς νόμους της ακουστικής, οι οποίες είναι τυπικές για την διερεύνηση ποσοτικών αλληλεξαρτήσεων διάφορων φυσικών ποσοτήτων , όπως το μήκος χορδής και η ένταση του ήχου που παράγει. (Youschkevitch A.P.)

Οι Έλληνες, από **την Αλεξανδρινή εποχή**, ανέπτυξαν στην αστρονομία τους μια πλήρη τριγωνομετρία των χορδών, που σώζεται στην **Αλμαγέστη** της οποίας ο ελληνικός τίτλος είναι «**Μαθηματική Σύνταξις» (λατινικά "Syntaxis Mathematica")** του Πτολεμαίου στην οποία υπάρχουν διάφοροι αστρονομικοί πίνακες που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις , όπως η συνάρτηση του ημιτόνου (Youschkevitch A.P.)

Στην αστρονομική εργασία του **Πτολεμαίου** βρίσκουμε επίσης τους Πίνακες Χορδών, δηλαδή χορδές κύκλου σαν συνάρτηση της αντίστοιχης γωνίας. Εναι φανερή η σύνδεση της χορδής κύκλου και του ημιτόνου γωνίας . Έτσι οδηγούμαστε στη συνάρτηση ημίτονο όπως παλιότερα συναντάται η εφαπτομένη στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά αλλά και στην εργασία του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις» (υπολογισμός του π) (Freudenthal, p. 518).


CLAUDII PTOLEMAEI
OPERA QUAE EXSTANT OMNIA
VOLUMEN I.

SYNTAXIS MATHEMATICA

EDIDIT

J. L. HEIBERG,
PROFESSOR HAUNIENSIS.

PARS I
LIBROS I—VI CONTINENS.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.
MDCCCLXXXXVIII.

«Η Μεγίστη»

(ή «Μαθηματική Σύνταξις»), σώθηκε στα αραβικά ως «Αλμαγέστη» και στηρίζεται στις παρατηρήσεις διάφορων προγενέστερων αστρονόμων και ιδίως του Ιππάρχου. Αποτέλεσε ένα από τα κείμενα που έδωσαν ώθηση στην αστρονομία των Αράβων.

48 ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ια'. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
∠'	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
α∠'	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν
β	β	ε	μ	ο	α	β	ν
β∠'	β	λζ	δ	ο	α	β	μη
γ	γ	η	κη	ο	α	β	μη
γ∠'	γ	λθ	νβ	ο	α	β	μη
δ	δ	ια	ιϛ	ο	α	β	μζ
δ∠'	δ	μβ	μ	ο	α	β	μζ
ε	ε	ιδ	δ	ο	α	β	μϛ
ε∠'	ε	με	κζ	ο	α	β	με
ϛ	ϛ	ιϛ	μθ	ο	α	β	μδ
ϛ∠'	ϛ	μη	ια	ο	α	β	μγ
ζ	ζ	ιθ	λγ	ο	α	β	μβ
ζ∠'	ζ	ν	νδ	ο	α	β	μα
η	η	κβ	ιε	ο	α	β	μ
η∠'	η	νγ	λε	ο	α	β	λθ
θ	θ	κδ	νά	ο	α	β	λη
θ∠'	θ	νϛ	ιγ	ο	α	β	λζ
ι	ι	κζ	λβ	ο	α	β	λε
ι∠'	ι	νη	μθ	ο	α	β	λγ
ια	ια	λ	ε	ο	α	β	λβ
ια∠'	ιβ	α	κα	ο	α	β	λ
ιβ	ιβ	λβ	λϛ	ο	α	β	κη

MΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ Α'. 49

ιβ∠'	ιγ	γ	ν	ο	α	β	κζ
ιγ	ιγ	λε	δ	ο	α	β	κε
ιγ∠'	ιδ	ϛ	ιϛ	ο	α	β	κγ
ιδ	ιδ	λζ	κζ	ο	α	β	κα
ιδ∠'	ιε	η	λη	ο	α	β	ιθ
ιε	ιε	λθ	μζ	ο	α	β	ιζ
ιε∠'	ιϛ	ι	νϛ	ο	α	β	ιε
ιϛ	ιϛ	μβ	γ	ο	α	β	ιγ
ιϛ∠'	ιζ	ιγ	θ	ο	α	β	ι
ιζ	ιζ	μδ	ιδ	ο	α	β	ζ
ιζ∠'	ιη	ιε	ιζ	ο	α	β	ε
ιη	ιη	με	ιθ	ο	α	β	β
ιη∠'	ιθ	ιζ	κα	ο	α	β	ο
ιθ	ιθ	μη	κα	ο	α	α	νζ
ιθ∠'	κ	ιθ	ιθ	ο	α	α	νδ
κ	κ	ν	ιϛ	ο	α	α	να
κ∠'	κα	κα	ια	ο	α	α	μη
κα	κα	νβ	ϛ	ο	α	α	με
κα∠'	κβ	κβ	νη	ο	α	α	μβ
κβ	κβ	νγ	μθ	ο	α	α	λθ
κβ∠'	κγ	κδ	λθ	ο	α	α	λϛ

1. ια'] om. ABCD. 3. ∠'] ∠' ϛ D. 12. με] $με^{ϛ}$ D. 13. με (alt.)] $μδ^{α}$ D. 14. μδ] $μγ^{β}$ D. 17. μα] $μδ^{α}$ D. 20. νδ] νδ BC. να] νδ D. 22. λε] mut. in λδ B^{2}. 23. λγ] $λϛ^{γ}$ D. 24. λ] α AD. 28. λε] λγ D. 29. κγ] $κβ^{γ}$ D. 32. μζ] corr. ex μ A^{2}, με D. 33. ιε] -ε in ras. C. 37. ιζ (alt.)] ζ D. 39. κα] $κδ^{α}$ D. 40. κα] $κδ^{α}$ D. α (alt.)] β C, corr. C^{2}; $β^{α}$ D; item lin. 41 — 47. 42. κα] $νδ^{α}$ D. 43. ια] mut. in ιβ B^{2}. 44. ϛ] ιϛ D. 46. νγ] νδ D. 47. κδ] D, corr. ex κα A^{1}, κα BC, corr. B^{2}.

Ptolemaeus, ed. Heiberg. 4

Πίνακας χορδών

Οι Έλληνες, χρησιμοποίησαν κινητικά μοντέλα για κυκλικές κινήσεις που επηρεάζουν η μία την άλλη, δηλαδή τριγωνομετρικές συναρτήσεις , όπως έκανε ο Kepler. Στη συνέχεια οι κύκλοι αντικαταστάθηκαν από ελλείψεις. (Freudenthal, p. 517).

Στην ουσία οι κινήσεις των πλανητών είναι συναρτήσεις της θέσης ως προς τον παρατηρούμενο χρόνο. Η Ελληνική αστρονομία γνώριζε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις κάτω από μια άλλη οπτική, αυτή της σφαιρικής τριγωνομετρίας.

Εκτός από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ήταν γνωστές στους Έλληνες οι γραμμικές συναρτήσεις μέσα από την έννοια της αναλογίας αλλά μέσα από τη γεωμετρία. Το εμβαδό του κύκλου, ο όγκος της σφαίρας είναι ανάλογα των τετραγώνων και κύβων των ακτίνων τους. Οι Έλληνες ήταν εξοικειωμένοι με την περιγραφή καμπύλων και επιφανειών με τη βοήθεια εξισώσεων αν και οι

εξισώσεις αυτές δεν ήταν γραμμένες με αλγεβρική αλλά με γεωμετρική γλώσσα. (Freudenthal, p. 518).

Οι Έλληνες δεν περιορίστηκαν στη χρήση των αριθμητικών πινάκων, όπως δείχνει και η μελέτη των κωνικών τομών όπου βασικό ρόλο παίζουν τα «συμπτώματα» , δηλαδή οι ιδιότητες των δημιουργούμενων καμπύλων που προκύπτουν άμεσα από τον στερεομετρικό τους ορισμό, ως επίπεδες τομές του κώνου. Το «σύμπτωμα» μιας κωνικής τομής , είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση (Youschkevitch A.P.)

Ωστόσο οι δυνατότητες που παρείχε η γεωμετρική άλγεβρα δεν ήταν ικανοποιητικές για να εκφράσουν με παρόμοιο τρόπο τις καμπύλες τρίτης και τέταρτης τάξης (κισσοειδής και κογχοειδής) και άλλες αλγεβρικές καμπύλες, γνωστές στους Έλληνες μαθηματικούς , που είχαν παρουσιαστεί σε ειδικές γεωμετρικές και μηχανικές κατασκευές. (Youschkevitch A.P.)

Οι ιδέες της αλλαγής μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας δεν είναι ξένες για την ελληνική σκέψη. Προβλήματα κίνησης, συνέχειας, απείρου, παρουσιάζονται από την εποχή του Ηράκλειτου και του Ζήνωνα.και στη μελέτη αυτών των αντιλήψεων ήταν αφιερωμένο το μεγαλύτερο μέρος από τα Φυσικά του Αριστοτέλη (η λέξη Φυσικά προέρχεται από τη λέξη Φύση). Ωστόσο, ούτε η ποσοτική αλλαγή ούτε η κίνηση , έννοιες που τελικά βρήκαν την αναπαράστασή τους στην αφηρημένη μορφή της μεταβλητής, δεν έγιναν αντικείμενο μαθηματικής μελέτης από τους 'Ελληνες. (Youschkevitch A.P.)

Μεσαίωνας – Νέα Άνθηση των Μαθηματικών

Μετά την πτώση του αρχαίου κόσμου, έχουμε μια νέα άνθηση των επιστημών στις **αραβικές χώρες** , καθώς και νέα ανάπτυξη στην έννοια της συνάρτησης. Ο αριθμός των συναρτήσεων αυξάνεται και οι μέθοδοι μελέτης βελτιώνονται. Εισάγονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τελειοποιούνται οι μέθοδοι πινακοποίησής τους και η μελέτη των θετικών ριζών των κυβικών πολυωνύμων με χρήση των κωνικών τομών βελτιώνεται ουσιαστικά. Επίσης σημειώθηκε πρόοδος στην οπτική και την αστρονομία , όπως και στην ανάλυση της επιταχυνόμενης κίνησης. Ωστόσο η έννοια της συνάρτησης εμφανίστηκε σε γενικότερη μορφή , τρεις αιώνες αργότερα στις σχολές της

φυσικής φιλοσοφίας στην Οξφόρδη και στο Παρίσι. Τον 14^{ο} αιώνα , ξεκινώντας από τις ιδέες του Αριστοτέλη για τις μεταβολές των ποσοτήτων, άρχισε να παίζει κυρίαρχο ρόλο η σύνθεση και της μαθηματικής σκέψης. (Youschkevitch A.P.)

Η φιλοσοφία που κυριαρχούσε στους μαθηματικούς στην Αναγέννηση ήταν ένα βήμα προς τη μοντελοποίηση των φυσικών φαινομένων με τη βοήθεια σχέσεων μεταξύ συνόλων αριθμών, που για να πραγματοποιηθεί χρειαζόταν μια επέκταση και ομογενοποίηση της έννοιας του αριθμού. Εμπόδιο αποτελούσε η ελληνική διαίρεση μεταξύ των ακέραιων αριθμών και των συνεχών μεγεθών . Καθώς δεν μπορούν όλοι οι λόγοι ή οι σχέσεις μεταξύ μεταβλητών μεγεθών να εκφραστούν σαν λόγοι ακεραίων, και οι λόγοι διαφορετικών μεγεθών – όπως διάστημα και χρόνος ή μήκος και επιφάνεια ή όγκος – δεν ήταν αποδεκτοί, οι αναλογίες θεωρούνταν ως κάτι διαφορετικό από τις ισότητες, οι λόγοι ως κάτι διαφορετικό από τα πηλίκα.

(Sierpinska)

Η σχέση μιας καμπύλης και ενός πίνακα παίζει σημαντικό ρόλο στον σχηματισμό και στην επίλυση του προβλήματος του καθορισμού της τροχιάς των πλανητών. Ο Kline αναφέρει ότι **ο Kepler** έχει βελτιώσει τον υπολογισμό της θέσης των πλανητών σημαντικά με την προσάρτηση γεωμετρικών καμπύλων και αστρονομικών δεδομένων, χωρίς καμιά θεωρητική αναφορά στο να εξηγήσει γιατί οι τροχιές είναι ελλειπτικές. Η αξία των υποθετικών τροχιών ήταν τότε θεμελιωδώς σχετισμένη με την ακρίβεια της μέτρησης της θέσης των πλανητών και στην επιλογή ενός οικείου γεωμετρικού αντικειμένου, της έλλειψης, που επιτρεπόταν να περιγράψει το σύμπαν με απλούς μαθηματικούς νόμους. Ο Kline σημειώνει ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εισήχθησαν τον 17^{ο} αιώνα πρωτομελετήθηκαν ως καμπύλες

Η ιδέα της κίνησης των μορφών ή αλλιώς η θεωρία των υπολογισμών , είχε αναπτυχθεί στην Αγγλία από τους **W. Heytesbury** , **R. Swinshead** και στη Γαλλία από τον **N. Oresme**.

«Κάθε μετρήσιμο μέγεθος, εκτός από τους αριθμούς μπορούμε να το δούμε με την έννοια της συνεχόμενης ποσότητας»

(Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitates continue)- Oresme

Αυτές οι θεωρίες που αναπτύχθηκαν τον 14^{ο} αιώνα, φαίνεται να δημιουργούνται μαζί με τη χρήση γενικότερων ιδεών σχετικά με τις ποσότητες ανεξάρτητης και την εξαρτημένης μεταβλητής. Αν και δεν υπάρχουν οι άμεσοι ορισμοί αυτών των ποσοτήτων, καθεμιά από αυτές έχει καθοριστεί από έναν ειδικό όρο. Η συνάρτηση οριζόταν είτε με λεκτική περιγραφή , είτε με τη γραφική της παράσταση. Οι συντεταγμένες ήταν σημεία γραφικής παράστασης και όχι τυχαία σημεία του επιπέδου.((Youschkevitch A.P.)

Η νεοτερικότητα , από τον Oresme ως τον Γαλιλαίο, θα μετατοπιστεί σε ένα άλλο επίπεδο αφαίρεσης που θα προκύψει με τη μετατροπή του λόγου σε ratio, δηλαδή σε υπολογιστική σχέση με αριθμητικό αποτέλεσμα, καθόσον η αναγέννηση βλέπει τις φυσικές οντότητες ως res extensa (μεγέθη εκτατά και μετρούμενα) . Ο ορθολογισμός των αρχαίων θα μετατραπεί σε ρασιοναλισμό. Εξάλλου η νεοτερικότητα διαθέτει ένα τέτοιο αριθμητικό σύστημα και σκέφτεται με έννοιες ακόμη πιο αφηρημένες κάτι που θα έχει ως αποτέλεσμα να φτάσει στην άλγεβρα (Σπύρου, Γαγάτσης)

«Επίσης, ξεπερνώντας τα επιστημολογικά εμπόδια των αρχαίων βάζει τη διάσταση του χρόνου, ως ομογενές μέγεθος στις μετρήσεις και αρχίζει να κάνει μαθηματική κινητική. Η μαθηματική μελέτη της κίνησης αποτελεί καθαυτό επίτευγμα της Αναγέννησης και είναι εκείνη που θα οδηγήσει στις δυναμικές ιδέες του Απειροστικού Λογισμού, όπως της παραγώγου και του διαφορικού οπότε και αναπόφευκτα θα προκύψει η ανάγκη νέων μαθηματικών εργαλείων» (Boyer, 1949 in Σπύρου, Γαγάτσης)

Από την Ιστορία της Καμπύλης

Στην ελληνική γεωμετρία οι καμπύλες εμφανίζονται με τρεις διαφορετικούς τρόπους: ως τομές επιφανειών , ως γραμμές που χαράσσονταν με συγκεκριμένες κινήσεις ή συνδυασμό κινήσεων και ως γεωμετρικοί τόποι σημείων .

Οι καμπύλες που ήταν γνωστές μέχρι το 1600 ήταν περίπου δώδεκα με δεκαπέντε. Την εποχή εκείνη, το φυσικό φαινόμενο της κίνησης αρχίζει να αποκτά ενδιαφέρον, ενώ μέχρι τότε οι μελέτες των καμπύλων ήταν κατά κανόνα χωρίς αναφορά σε φυσικά φαινόμενα. Για πρώτη φορά ασχολείται ο **Nicolaus Cusanus** (1401-1464).

Η μέθοδος των συντεταγμένων του **Descartes** – αν και υπονοείται στον Απολλώνιο και την αρχαία ελληνική αστρονομία για την περιγραφή της θέσης των άστρων - επέτρεψε για πρώτη φορά να οριστεί η έννοια της καμπύλης με τρόπο γενικό. Έγινε δυνατό για κάθε καμπύλη να κατασκευαστεί μια εξίσωση, δηλαδή μια σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες των σημείων της, τέτοια που να την ικανοποιούν τα σημεία της καμπύλης και μόνο αυτά.

Την ίδια εποχή με τον Descartes, ο **Fermat** βλέπει στην εξίσωση την εξειδικευμένη ιδιότητα της καμπύλης. Μέχρι τότε μελετούσαν τις καμπύλες σε σχέση με τα γεωμετρικά προβλήματα ενώ ο Fermat αντέστρεψε τη διαδικασία και οι εξισώσεις έχουν πια γεωμετρική ανάλογο.

Αργότερα ο **Newton** (1642- 1727) μελέτησε τις καμπύλες ανώτερου βαθμού. Οι **Fermat και Roberval** φτάνουν σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις από τις κυκλοειδείς. Οι **De Langny** και **Cotes** αναδεικνύουν την περιοδική φύση της εφαπτομένης. Ο **Euler** καταδεικνύει την περιοδική φύση όλων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Κατά τη διάρκεια του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα η μελέτη των φυσικών φαινομένων της κίνησης σωμάτων στο χώρο και τα προβλήματα των εφαπτομένων εμπνέουν τον Απειροστικό Λογισμό. Έτσι, το 1700 , υπάρχει ένα πλήθος από καμπύλες και αρχίζει η μελέτη των καμπύλων ως γεωμετρικών αντικειμένων με αναζήτηση αναλλοιώτων, που τελικά θα οδηγήσουν αργότερα σε μια ταξινόμηση στα πλαίσια της Διαφορικής Γεωμετρίας. Την ίδια εποχή ο **Cramer** γράφει ένα έργο που έχει στον τίτλο του τον όρο καμπύλη. Ο **Bernoulli** επιχειρεί έναν πρώτο ορισμό της που αργότερα επανεπεξεργάζεται ο **Euler**. Τον 19^{ο} αιώνα, στο πλαίσιο των νεώτερων μαθηματικών που θεμελιώθηκαν πάνω στη θεωρία των συνόλων, <u>ο **Peano**, έδωσε πρώτος παράδειγμα καμπύλης που γεμίζει το επίπεδο</u> και έδειξε πόση λίγη εμπιστοσύνη μπορούμε να έχουμε στην αφελή εποπτεία και τη γεωμετρική αίσθηση για τα Μαθηματικά.

Η αναπαράσταση μιας καμπύλης με παραμετρική μορφή ανταποκρινόταν άριστα στην ιδέα της καμπύλης ως τροχιάς ενός κινητού σημείου. Στο δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα, φτάνουμε στον υποδειγματικό ορισμό του **Jordan** για την καμπύλη ως το δρόμο που διαγράφει η συνεχής κίνηση ενός σημείου. Ο ορισμός αυτός υπήρξε πολύ γενικός και δεν έδινε μόνο καμπύλες όπως απέδειξε ο **Peano**. Ο Cantor θεωρούσε την καμπύλη ως ένα κλειστό κλά διατεταγμένο σύνολο σημείων τέλειο στον εαυτό του.

Την πρώτη εικοσαετία του 20ου αιώνα, δόθηκε ένας πιο αυστηρός ορισμός της καμπύλης, από τον **P. Urysohn**.
Η Θεωρία των Καμπύλων αποτέλεσε έναν κομψό κλάδο της τοπολογίας κι έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα όπως τα fractals. Η καμπύλη συνεχίζει να μελετάται στις διαφορικές εξισώσεις , την αλγεβρική και διαφορική γεωμετρία, τα δυναμικά συστήματα , την έρευνα του DNA.(Λάππας , Σπύρου)

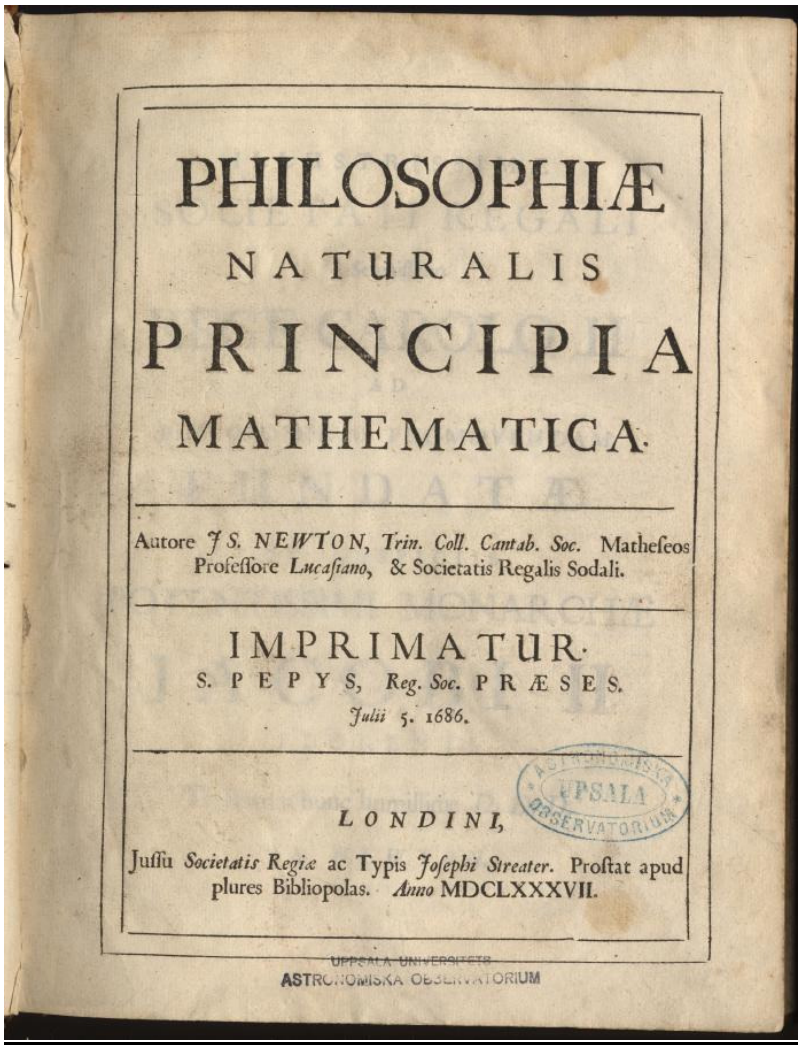
Η νεότερη εποχή – Από τον 16ο αιώνα έως σήμερα

Τον 16ο αιώνα, βρίσκουμε σε πρώιμη μορφή την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης <u>σαν σχέση ανάμεσα σε σύνολα αριθμών</u> παρά σαν «ποσότητες» και την αναλυτική παρουσίαση των συναρτήσεων <u>με τύπους</u>. Επίσης έγινε η <u>εισαγωγή συμβόλων</u> για τις μαθηματικές διαδικασίες και σχέσεις καθώς και για άγνωστες ποσότητες και παραμέτρους. Η σημασία των συμβολισμών ήταν μεγάλη γιατί διευκόλυναν την μελέτη και περιγραφή των εννοιών. Ο **Descartes**, ο **Newton** ο **Leibniz** ο **Euler** και άλλοι, συμμετείχαν στη διαδικασία του να τελειοποιήσουν τον μαθηματικό συμβολισμό. (Youschkevitch A.P.)

Τον 17ο αιώνα η νέα θεώρηση των ποσοτικών νόμων της φύσης κέρδισε ακόμη περισσότερο έδαφος. Η εισαγωγή ποσοτικών μέτρων για τη θερμοκρασία , την πίεση κτλ, έπαιξε σημαντικό ρόλο και δόθηκε έμφαση στην ακρίβεια των πειραμάτων και των παρατηρήσεων. Η μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στην κίνηση σε καμπύλη τροχιά και τις δυνάμεις που επηρεάζουν αυτή την κίνηση ήταν το κυρίαρχο πρόβλημα της επιστήμης. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να εισάγονται οι συναρτήσεις όχι μόνο με λεκτικό τρόπο ή γραφικά, όπως μέχρι τότε, αλλά ειδικά στις θεωρητικές μελέτες η αναλυτική μέθοδος <u>εισαγωγής συναρτήσεων με τύπους και εξισώσεις</u> ήρθε στο προσκήνιο. (Youschkevitch A.P.) Σε αυτή την κατεύθυνση εργάστηκαν ο **Descartes** και ο **Fermat** και παρουσίασαν την αναλυτική μέθοδο εισαγωγής των συναρτήσεων ανοίγοντας μια νέα εποχή στα μαθηματικά. (Youschkevitch A.P.)

Ο **Descartes** (και ταυτόχρονα ο **Fermat**) παρουσίασε μια άλλη οπτική, το να εκφράζει τις γεωμετρικές σχέσεις αλγεβρικά. Όταν ένα σημείο κινείται σε μια καμπύλη έχουμε την έννοια της συνάρτησης και αυτή η εικόνα παρουσιάζεται στη σκέψη του **Newton** ως εξάρτηση δύο μεταβλητών όπου η μια είναι ο χρόνος αλλά αυτές οι εξαρτήσεις δεν είχαν ακόμη εκφραστεί με έναν τύπο.

Στην αρχική προσέγγιση δεν υπάρχει τίποτα που να διαχωρίζει την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή. Σύμφωνα με τις ανάγκες, κάποιες από τις μεταβλητές έπρεπε να οριστούν ως ως ανεξάρτητες και άλλες ως εξαρτη9μένες. Αυτό προέκυψε όταν χρειάστηκε να γίνει διαφόριση ανώτερης τάξης. (Freudenthal)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

UPSALA
OBSERVATORIUM
UPPSALA UNIVERSITET
ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

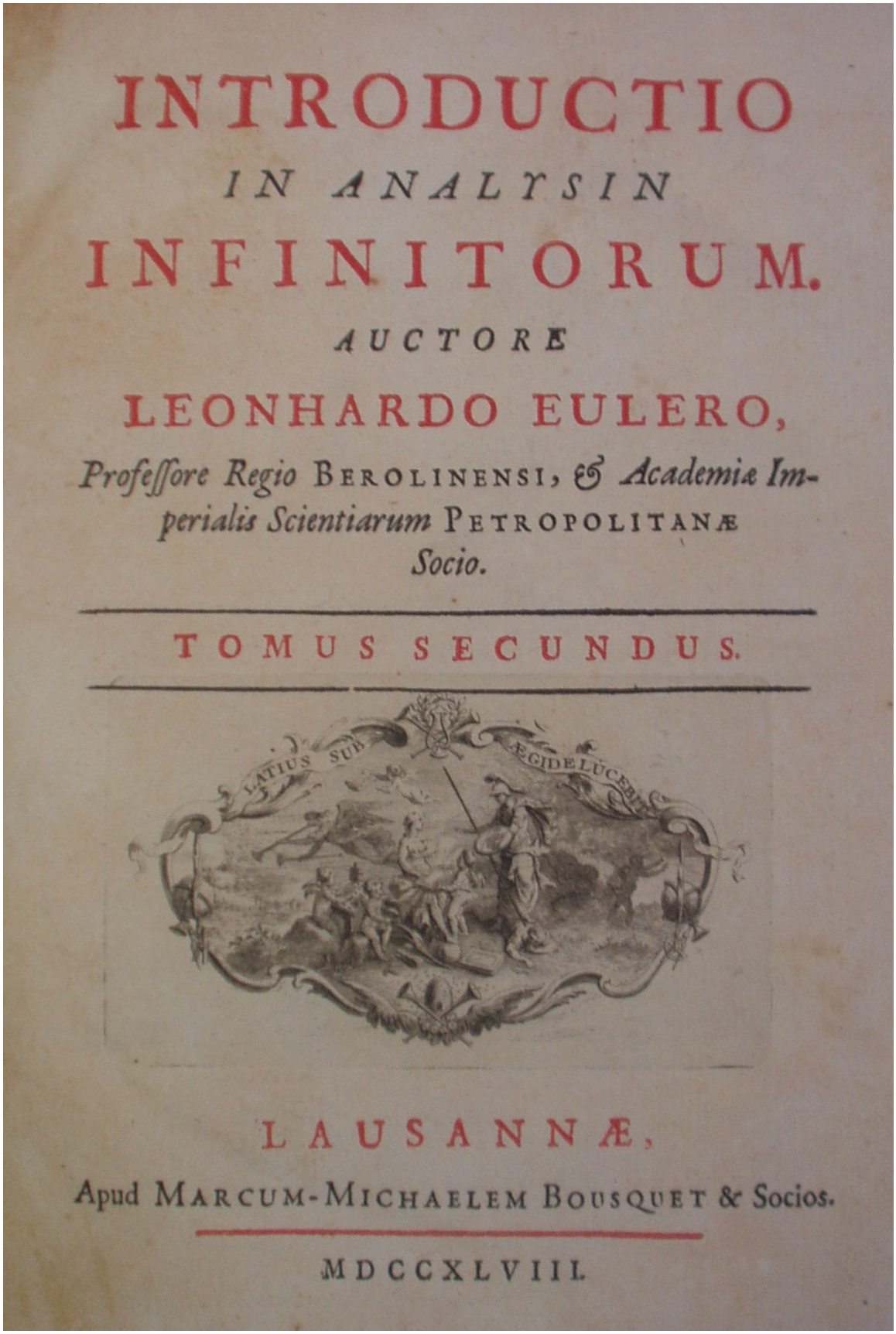
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica , Sir Isaac Newton
Πρωτοδημοσιεύτηκε στις 5 Ιουλίου 1687

Στο πλαίσιο της διαφορικής γεωμετρίας, ένας ορισμός της συνάρτησης εμφανίστηκε σε μερικά άρθρα του **Leibniz** το 1692 και το 1694. Εκεί καλεί συναρτήσεις (functiones, functions) , τμήματα ευθειών γραμμών που

αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο σημείο και στα σημεία μιας δοσμένης καμπύλης..Με την ίδια σημασία η λέξη συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε από τον **Jacob Bernoulli** τον Οκτώβριο του 1694. Ωστόσο , ένας τέτοιος ορισμός της συνάρτησης δεν ανταποκρινόταν σε ένα πλατύτερο αναλυτικό πλαίσιο. (Youschkevitch A.P.)

Ο **Leibniz** εισήγαγε σε γενική χρήση τις λέξεις «σταθερή» και «μεταβλητή» , «συντεταγμένες» και «παράμετρος» . Στη συνέχεια βρήκε άβολη την ορολογία που είχε εισάγει ο Descartes και την άλλαξε. Ο Descartes είχε ομαδοποιήσει τις καμπύλες σε «γεωμετρικές» και «μηχανικές» , εσφαλμένα αποκλείοντας τις τελευταίες από τη γεωμετρία , αφού δεν μπορούσαν να μελετηθούν με τα εργαλεία της αλγεβρικής του μεθόδου. Αντίθετα, ο Leibniz διαίρεσε τις συναρτήσεις και τις καμπύλες σε δύο κατηγορίες : τις <u>αλγεβρικές</u> , δηλαδή αυτές που μπορούσαν να παρασταθούν με εξίσωση συγκεκριμένου βαθμού (certi gradus) και τις <u>υπερβατικές</u> οι οποίες μπορούσαν επίσης να μελετηθούν και να υπολογιστούν, αλλά επειδή είχαν διαφορετική φύση, η αναπαράστασή τους γινόταν με εξισώσεις αόριστου (gradus indefinite) ή άπειρου βαθμού. (Youschkevitch A.P.)

Η ιδέα ότι η μαθηματική ανάλυση είναι μια γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους, φαίνεται να οφείλεται στον **Euler** που ανέφερε αυτό ακριβώς στον πρόλογο του περίφημου έργου του **<u>Introductio in Analysin infinitorum</u>** **(δύο τόμοι)** το οποίο ολοκληρώθηκε το 1744 και δημοσιεύτηκε το 1748. (Youschkevitch A.P.)



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS SECUNDUS.

LATIUS SUB ÆGIDE LUCEBIT

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Leonhard Euler - Introductio in analysin infinitorum, πρωτοδημοσιεύτηκε το 1748

Την εποχή αυτή, όλες οι αρχικές έννοιες του μαθηματικού λογισμού βαθμιαία έχασαν το γεωμετρικό και μηχανικό τους περίβλημα, σχηματίστηκαν αλγεβρικά και άρχισαν ως λογικό προαπαιτούμενο από παρόμοιες έννοιες για άλλες επιστήμες. (Youschkevitch A.P.)

Η διαδικασία της δημιουργίας της μαθηματικής ανάλυσης ως αυτόνομη επιστημονική οντότητα, ήταν παρατεταμένη. Ο **Lagrange** διακήρυξε ότι η μηχανική είναι μέρος της μαθηματικής ανάλυσης. (Youschkevitch A.P.)

Ο **Fourier** πρότεινε την επέκταση μιας συνάρτησης σε μια τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

όπου το x παίρνει τιμές στο διάστημα –π και π .

Η πλειοψηφία αυτών των συναρτήσεων ερευνήθηκαν διεξοδικά από τις αρχές του 18ου αιώνα μαζί με την ανάπτυξη των διαφορικών εξισώσεων στην αστρονομία και τη φυσική. (E.T. Bell , p. 385)

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τον Fourier το 1807 , ξάφνιασαν τους μαθηματικούς των παλιότερων γενεών και ο Lagrange έδειξε δυσπιστία σε αυτά. Μετά το 1822, έλαβαν ενθουσιώδη υποδοχή από τους νέους μαθηματικούς.

Από τη μελέτη των **Σειρών Fourier** και των συνθηκών κάτω από τις οποίες συγκλίνουν οδηγήθηκε ο **Dirichlet** στο σχηματισμό του γενικού ορισμού της συνάρτησης , το 1837: «**αν μια μεταβλητή y σχετίζεται με την μεταβλητή x με τρόπο ώστε όποτε δοθεί μια αριθμητική τιμή στη x, υπάρχει ένας κανόνας σύμφωνα με τον οποίο μια μοναδική τιμή της y καθορίζεται, τότε μπορεί να ειπωθεί ότι το y είναι μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x».** Από την προσεκτική μελέτη του κειμένου όπου η γενική έννοια της συνάρτησης γεννήθηκε, γίνεται φανερό γιατί η σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης είναι τόσο δύσκολη στα αρχικά στάδια της μαθηματικής εμπειρίας. Δεν χρειάζεται μόνο κάποιος να δει τις χρήσεις ιδιαίτερων παραδειγμάτων της έννοιας αλλά πρέπει να υπάρξει και ανάγκη για ισχυρισμούς πάνω σε κλάσεις ή χώρους συναρτήσεων. (Sierpinska)

I2) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί που δόθηκαν στη συνάρτηση κατά τη διάρκεια της εξέλιξης της έννοιας

Μέχρι τον 18^{ο} αιώνα η έννοια της συνάρτησης δεν είχε οριστεί, αλλά όπως βλέπουμε παραπάνω, υπήρχε άτυπα στις εργασίες των αστρονόμων και των μαθηματικών.

Η λέξη «συνάρτηση» πρωτοεμφανίζεται στα χειρόγραφα του Leibniz τον Αύγουστο του 1673. Η λατινική **λέξη fungor, functus sum , fungi** σημαίνει το να παρουσιάζεται, να πραγματοποιείται μια υποχρέωση.

Μπορούμε να πούμε ότι δόθηκε για πρώτη φορά ένας ορισμός της συνάρτησης , από τον **Leibniz** σε κάποια άρθρα του που δημοσιεύτηκαν το 1692 και το 1694. Εκεί ονομάζει συναρτήσεις (**funciones, foncions**) οποιαδήποτε τμήματα ευθειών που δημιουργούνται κατασκευάζοντας άπειρες ευθείες και αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο σημείο και στα σημεία μιας δεδομένης καμπύλης.

Με το ίδιο νόημα η λέξη συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε από τον Jacob Bernoulli το 1694. (Youschkevitch A.P.)

Ο **Bernoulli** έδωσε τον εξής ορισμό για τη συνάρτηση που ήταν και ο πρώτος σαφής ορισμός για την έννοια:

«Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους, μια ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και σταθερές ποσότητες»

σε άρθρο του που δημοσιεύτηκε στο Παρίσι το 1718. Στο ίδιο άρθρο πρότεινε να χρησιμοποιηθεί το ελληνικό γράμμα φ σαν συμβολισμό για τον χαρακτηρισμό μιας συνάρτησης την οποία έγραφε ως φx , χωρίς παρενθέσεις.

Οι παρενθέσεις, όπως και ο συμβολισμός f οφείλονται στον Euler που τα χρηιμοποίησε σε άρθρο του που συζητήθηκε το 1734 και δημοσιεύτηκε το 1740. (Youschkevitch A.P.)

Επιπλέον ουσιαστική ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης έγινε από τον **Euler** , ο οποίος υπήρξε μαθητής του Bernoulli. Στο έργο του **Introductio in analysin infinitorum** το 1748 ο Euler μελέτησε με μεγάλη λεπτομέρεια την

έννοια της συνάρτησης όπως χρησιμοποιείται στη μαθηματική ανάλυση. Όρισε και τις αρχικές έννοιες σταθερά και μεταβλητή.

Στον ορισμό του ο Euler ακολούθησε τον Bernoulli αλλά <u>άλλαξε τη λέξη «ποσότητα» με τη φράση «αναλυτική έκφραση».</u>

Ο **Euler** έδωσε το 1747 τον εξής ορισμό :

«Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντείθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητες»

(Hollingdale, p. 280, Youschkevitch A.P.)

Αργότερα, το 1775 , ο Euler έδωσε έναν πιο αφηρημένο ορισμό , στην εισαγωγή του έργου του **Institutones Calculi Differentialis** :

«Μια ποσότητα θα ονομαζόταν συνάρτηση μόνο όταν θα εξαρτιόταν από μια άλλη ποσότητα με έναν τέτοιο τρόπο ώστε, αν η τελευταία ποσότητα αλλάζει, η πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της».

(Katz 512, in Σπύρου, Γαγάτσης)

Η έννοια της συνάρτησης κατά τον Euler άσκησε μια σημαντική θετική επιρροή σε όλη την επακόλουθη ανάπτυξη των μαθηματικών. Η γενική θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων τον 19^{ο} αιώνα που αναπτύχθηκε από τους **Cauchy, Riemman** και **Weierstrass** , έχει τις ρίζες της στα έργα των Euler και D' Alembert. (Youschkevitch A.P.)

Ο **Lagrange** έδωσε το 1797 τον εξής ορισμό:

«Συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών ποσοτήτων ονομάζεται κάθε αναλυτική έκφραση στην οποία εμφανίζονται με οποιονδήποτε τρόπο αυτές οι ποσότητες είτε μόνες τους είτε με άλλες, των οποίων οι τιμές θεωρούνται σταθερές, ενώ οι ποσότητες της συνάρτησης μπορούν να παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές. Έτσι στις συναρτήσεις λαμβάνονται υπόψη μόνο οι ποσότητες που θεωρούνται μεταβλητές και όχι οι σταθερές που συνυπάρχουν».

Ο **Cauchy** ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που εγκαινίασαν ένα νέο πνεύμα αυστηρότητας στην ανάλυση. Στο έργο του **Cours d' Analyse** το 1821 , και σε σχετικές εργασίες, όρισε αυστηρά τις έννοιες της συνέχειας , της διαφορισιμότητας και της ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης στα πλαίσια της θεωρίας των ορίων.

Η αντίληψη του **Cauchy** για την έννοια της συνάρτησης, δεν διέφερε πολύ σε σχέση με τους προηγούμενούς του. Έδωσε τον παρακάτω ορισμό για την έννοια της συνάρτησης:

«Όταν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν δίνεται η τιμή της μιας να μπορούμε να συμπεράνουμε για την τιμή της άλλης, συνήθως θεωρούμε ότι αυτές οι διάφορες ποσότητες εκφράζονται μέσω της μίας εξ αυτών η οποία τότε παίρνει την ονομασία της ανεξάρτητης μεταβλητής και οι απομένουσες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι εκείνες τις οποίες κάποιος μπορεί να τις ονομάσει συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής»

Αν και ο Cauchy δίνει έναν μάλλον γενικό ορισμό για την συνάρτηση, τα επόμενα σχόλιά του δείχνουν ότι είχε στο νου του κάτι ποιο περιορισμένο. Κατηγοριοποιεί τις συναρτήσεις σε «απλές» και «σύνθετες ».

Οι απλές είναι : a+x, a-x, ax, a/x, xa , logx, sinx, cosx, arcsinx, arccosx και οι σύνθετες είναι αυτές που ονομάζουμε συνθέσεις των απλών όπως π.χ. log(sinx). (Kleiner)

Από τον **Lagrange** στον **Cauchy** έχουμε μια μικρή μεταβολή στη γλώσσα και στην εστίαση. Ο **Lagrange** ακόμη μιλάει για την έκφραση σαν να είναι η συνάρτηση. Για τον **Cauchy** είναι τα αποτελέσματα των πράξεων που συμμετέχουν στην έκφραση. Ο **Lagrange** μιλάει για το νόμο της συνάρτησης, ενώ ο **Cauchy** για την τιμή. Τώρα δεν αντιλαμβανόμαστε τη συνάρτηση ούτε ως νόμο ούτε ως τιμή αλλά ως σύνθεση αυτών των δύο.

(Sierpinska)

Ο **Lobatchevski** το 1834 έγραψε:

«Η γενική αντίληψη απαιτεί ότι συνάρτηση του x καλείται ένας αριθμός ο οποίος δίνεται για κάθε x και ο οποίος αλλάζει σταδιακά μαζί με το x. Η τιμή της συνάρτησης θα μπορούσε να δοθεί είτε από μια αναλυτική έκφραση, είτε από μία συνθήκη που προσφέρει ένα μέσο για να ελεχθούν όλοι οι αριθμοί και να επιλεγεί ένας από αυτούς, ή τελικά η εξάρτηση ίσως να υπάρχει αλλά να παραμένει άγνωστη». (Youschkevitch A.P.)

Τελικά ο **Dirichlet (1837)** , την ίδια εποχή με τον **Lobatchevski**, θα καταλήξει σε μια πιο γενική διατύπωση και θα δώσει τον παρακάτω ορισμό, ο οποίος κρίθηκε ως πιο κατάλληλος για παρουσίαση της έννοιας της συνάρτησης από τα σχολικά βιβλία :

«Η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x η οποία ορίζεται στο διάστημα a<x<b, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μία μόνη τιμή της μεταβλητής y ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας». (Σπύρου, Γαγάτσης, αναφορά σε Davis & Herch)

Στον ορισμό αυτόν εμφανίζεται ξεκάθαρα η προϋπόθεση του μονοσήμαντου για την εξαρτημένη μεταβλητή y.

Ο Dirichlet εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια της συνάρτησης σαν μια συμμεταβολή ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς. Περίπου εκατό χρόνια αργότερα , το 1932, με την ανάπτυξη της αφηρημένης άλγεβρας οι **Bourbaki** γενίκευσαν τον ορισμό του Dirichlet και έτσι η συνάρτηση έγινε μια συμμεταβολή ανάμεσα σε δύο σύνολα (Ronda, αναφορά σε Kieran , 1992). Ο ορισμός των Dirichlet- Bourbaki επιτρέπει στη συνάρτηση να ειδωθεί σαν μαθηματικό αντικείμενο, πράγμα που ήταν η αδυναμία του προηγούμενου ορισμού .Ωστόσο ο συνολοθεωρητικός ορισμός είναι πολύ αφηρημένος για να χρησιμοποιηθεί ως μια αρχική εισαγωγή για τους μαθητές και είναι ασυμβίβαστος με τις εμπειρίες τους από τον πραγματικό κόσμο. (Ronda, Grouth points....)

Πολλά σχολικά εγχειρίδια ,που ορίζουν τη συνάρτηση σαν ένα σύνολο απο διατεταγμένα ζεύγη , συχνά εισάγουν τη συνάρτηση σαν ένα ξεχωριστό είδος σχέσης. Ωστόσο η σχέση είναι πιο αφηρημένη από τη συνάρτηση. Έτσι , η παιδαγωγική αξία του να διδαχτεί η συνάρτηση ως είδος σχέσης, κατά τη γνώμη του Thorpe είναι λανθασμένη. Ο Freudenthal επίσης εξέφρασε έντονα ότι δεν χρειάζεται να διδαχτεί πρώτα η σχέση και μετά η συνάρτηση. (Ronda)

Ο **Peano** το 1911 έδωσε ένα νέο ορισμό σύμφωνα με τον οποίο η έννοια της συνάρτησης έπρεπε να **περιοριστεί** στην **έννοια της σχέσης.** Ο Peano εισήγαγε την έννοια της μονοσήμαντης σχέσης έδωσε ικανοποιητηκά επιχειρήματα για το ότι οι συναρτήσεις θα έπρεπε να οριστούν με τέτοιες σχέσεις. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι και αντίστροφα, η έννοια της σχέσης θα μπορούσε να περιοριστεί στην έννοια της συνάρτησης.

Η ιδέα του **Peano** έγινε αποδεκτή από τους **Russell** και **Whitehead** στο έργο τους **Principia Mathematica,** όπου ανέπτυξαν ευρέως τη **θεωρία των σχέσεων.** Παρ' όλα αυτά, η πιο δημοφιλής ιδέα ήταν του **Hausdorff** , με τον περιορισμό της έννοιας της συνάρτησης σε αυτή του **διατεταγμένου ζεύγους.** Παρά τις ξεκάθαρες εξηγήσεις που έδωσε ο **Hausdorff** , η ιδέα συσχετίστηκε με την αυθαίρετη επιλογή αντικειμένων a και b. Αυτό το

“ελάττωμα στην ομορφιά” αποκαταστάθηκε το 1920 από το ζεύγος **Kuratowski:**

[(a, b):={a, {a,b}}]

το οποίο έδωσε έναν τυπικό ορισμό για το διατεταγμένο ζεύγος.

Εισάγοντας την έννοια της συνάρτησης σαν μια πρωταρχική έννοια , ή στο πλαίσιο της Θεωρίας Συνόλων , έχουμε τη δυνατότητα να εργαζόμαστε σε σύνολα ή διαστήματα και να αναπτύσσουμε νέες έννοιες. (Mostowski, in Sierpinska).

Ο ορισμός του Peano για τη συνάρτηση εισήχθηκε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση κατά τη διάρκεια της περιόδου των μεταρυθμίσεων των Νέων Μαθηματικών. Ωστόσο η αιτία γι αυτό δεν είναι ξεκάθαρη μια και οι μαθητές δεν αναμενόταν να εργαστούν με διαστήματα οπότε η απόφαση να περιοριστεί η συνάρτηση σε σχέση δύσκολα θα μπορούσε να δικαιολογηθεί στο περιβάλλον της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ή επιστημολογικά.

Έτσι επικράτησε στα σχολικά εγχειρίδια να δίνεται ο ορισμός του Dirichlet, ως ο πιο κατάλληλος για τις διδακτικές ανάγκες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. (Sierpinska)

Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε πρόσφατα μέσα στην επιστήμη. Πρόκειται για μια σύνοψη και ενοποίηση πολλών διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για να λυθούν προβλήματα και να συγκροτηθούν θεωρίες. Όταν οι μαθητές μαθαίνουν τον ορισμό και τις ιδιότητες των συναρτήσεων δεν μπορούν να γνωρίζουν τη μεγάλη πορεία της ανθρώπινης διανόησης μέχρι να φτάσουμε στη σύγχρονη θεώρηση της συνάρτησης.(Σπύρου, Γαγάτσης)

Πού πρωτοεμφανίστηκε η λέξη «συνάρτηση» (function)

Η λέξη «συνάρτηση» πρωτοεμφανίστηκε σε ένα λατινικό χειρόγραφο με τίτλο «Methodus tangentium inverse, seu de fuctionibus” γραμένο από τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716).

Ο Leibniz χρησιμοποίησε τη λέξη με τη μη αναλυτική σημασία της , σαν μέγεθος που παρουσιάζει ένα ειδικό καθήκον. Θεώρησε την συνάρτηση ως «μαθηματική εργασία» που θα παράγει μια καμπύλη. Από την αρχή του

χειρογράφου ωστόσλο, ο Leibniz έκανε φανερό ότι ήδη κατείχε την ιδέα της συνάρτησης, την οποία ονόμαζε με τον όρο relation.
Ο όρος Function δημιουργήθηκε στα αγγλικά το 1779 στην Chambers' Cyclopedia : " Ο όρος function χρησιμοποιείται στην άλγεβρα , για μια αναλυτική έκφραση που αποτελείται από μια μεταβλητή ποσότητα, και από αριθμούς, ή σταθερές ποσότητες». (Katz)

Ι3) Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΗΜΕΡΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στην τάξη αυτή δεν αναφέρεται η λέξη «συνάρτηση», ωστόσο μέσα από την παρουσίαση των αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών δίνονται οι συναρτήσεις $y=ax$ και $y=a/x$, και διδάσκονται οι πίνακες τιμών και οι γραφικές τους παραστάσεις στο πρώτο μόνο τεταρτημόριο.
Επειδή δεν διδάσκεται η έννοια της συνάρτησης, η λέξη που την υποκαθιστά είναι «σχέση».
Δηλαδή, μέσα από τα παραδείγματα των συναρτήσεων των αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών, γίνεται η εξοικείωση των μαθητών με τους πίνακες τιμών , τις γραφικές παραστάσεις , τη λεκτική περιγραφή μιας συνάρστησης και τους τύπους που συσχετίζουν δύο μεταβλητές.
Στο παράρτημα υπάρχουν οι σχετικές σελίδες από το σχολικό βιβλίο της τάξης αυτής, όπου γίνεται η παρουσίαση αυτών των εννοιών.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Η έννοια εισάγεται με μια δραστηριότητα (πραγματικό πρόβλημα) και έναν άτυπο ορισμό:
«.....**κάθε τιμή της μεταβλητής x** ….αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y**…..Μια τέτοια σχέση λέγεται **συνάρτηση**» .
(τα έντονα γράμματα υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο)

Στη συνέχεια μελετώνται οι συναρτήσεις **y=ax, y=ax+b, y=a/x** και αυτό γίνεται κάθε φορά με εισαγωγή μιας δραστηριότητας, συνήθως αναφερόμενη σε πραγματικό πρόβλημα.
Στο παράρτημα υπάρχουν οι αντίστοιχες σελίδες από το σχολικό βιβλίο και οι οδηγίες από το βιβλίο του εκπαιδευτικού οι οποίες αναφέρονται στην έννοια.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στην τάξη αυτή θεωρείται δεδομένη η γνώση της έννοιας της συνάρτησης οπότε γίνεται απλή υπενθύμιση του – άτυπου – ορισμού μέσα στο κείμενο:
«Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y»
Στη συνέχεια μελετώνται οι συναρτήσεις **$y=ax^2$ με $a\neq0$ και $y= ax^2+bx+c$ με $a\neq0$** και η εισαγωγή τους γίνεται άμεσα με κατασκευή της γραφικής τους παράστασης και χωρίς αναφορά σε κάποιο πραγματικό πρόβλημα ή δραστηριότητα.(αν και υπάρχουν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται σε πραγματικά προβλήματα).
Στο παράρτημα υπάρχουν οι αντίστοιχες σελίδες από σχολικό βιβλίο της τάξης αυτής και οδηγίες από το βιβλίο του εκπαιδευτικού.
Είναι φανερή η επιλογή που ακολουθείται στα σχολικά βιβλία να μη δίνεται μεγάλη έμφαση στον ορισμό, λόγω και του ότι αναφερόμαστε σε μικρές τάξεις (Γυμνάσιο) όπου γίνεται εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης για πρώτη φορά. Η ιδέα ταιριάζει με τη διαπίστωση του Vinner (βλ. μέρος ΙΙΙ αυτής της εργασίας) ότι η εικόνα της έννοιας είναι που παίζει τον καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωσή της και όχι ο ορισμός.

Σε καμιά από τις τάξεις δεν γίνεται κάποια επιπλέον αναφορά για την αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής , οπότε δεν δίνονται στον εκπαιδευτικό εργαλεία για να το στηρίξει κατάλληλα.

Ι4) ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ» - Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΥΤΟ

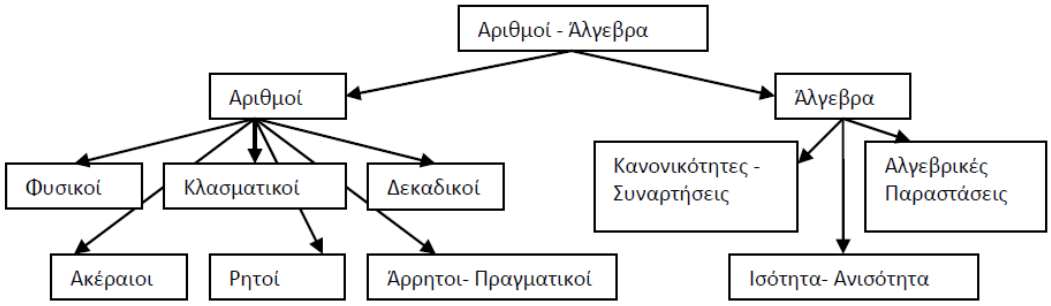
Μια βασική έννοια που παρουσιάζεται στη φιλοσοφία του Προγράμματος αυτού είναι η **Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας** η οποία περιγράφεται ως εξής:

«Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία»

Κάθε ΤΜΔ αποτελείται από τρία μέρη: ένα **μαθηματικό στόχο**, μια **διαδρομή** , κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσονται για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο και ένα σύνολο από διδακτικές **δραστηριότητες**, αντίστοιχες των επιπέδων σκέψης που διακρίνονται στη διαδρομή ή τη χαρακτηρίζουν, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, μια ΤΜΔ δεν είναι μια γραμμική, βήμα-προς-βήμα περιγραφή πορείας, όπου κάθε βήμα συνδέεται αναγκαία με το επόμενο. Σε μια ΤΜΔ, αυτό που μαθαίνεται σε μια φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην αμέσως επόμενη, δηλαδή, η μαθησιακή διαδικασία εξελίσσεται σε επίπεδα.

Οι βασικές θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι οι εξής τρεις: **Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά.**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της **Θεματικής Περιοχής «Αριθμοί- Άλγεβρα»** , στην οποία ανήκει η έννοια της συνάρτησης.



Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης , αναφέρεται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Η πρώτη συνδέεται με τη **συνθετότητα της έννοιας** αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν. Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι **η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών** αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης. Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την **αναγκαιότητα να αντιληφτούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο.**

Στον Οδηγό του Εκπαιδευτικού αναφέρεται **η τροχιά «μοτίβο/ κανονικότητα και συνάρτηση»** η οποία περιλαμβάνει **δύο υπο-τροχιές** μία για το μοτίβο/ κανονικότητα και μία για τις συναρτήσεις.

Στο Παράρτημα της εργασίας αυτής , υπάρχουν **οι πίνακες** που σχετίζονται με τη διδασκαλία της έννοιας της Συνάρτησης όπως παρουσιάζονται σε αυτό το Πρόγραμμα Σπουδών καθώς και το **σχεδιάγραμμα** όπου παρουσιάζεται σχηματικά η ανάπτυξη της τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική εκπαίδευση.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

-ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

ΙΙ1) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ- ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

ΙΙ2) ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ, ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ, ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

ΙΙ3) ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ- ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ – ΕΝΑΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΔΡΟΜΟΣ

ΙΙΙ4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

ΙΙ5) ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΙΙ6) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΣΤΑΔΙΑΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ- ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΌ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

ΙΙ7) ΣΥΛΛΗΨΗ ΕΝΝΟΙΑΣ , ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑ

ΙΙ8) ΑΛΛΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συνάρτηση είναι μια μαθηματική έννοια που έχει έχει μελετηθεί πολύ από διάφορους ερευνητές.

Είναι γνωστό στους εκπαιδευτικούς το ότι η έννοια της συνάρτησης δημιουργεί διάφορες δυσκολίες στους μαθητές. Ο ορισμός της έννοιας συχνά οδηγεί σε παρανοήσεις, επειδή δεν αποκαλύπτει άμεσα στους μαθητές όλο το εύρος της ποικιλίας ειδών συναρτήσεων που καλύπτει. Η έννοια της συνάρτησης έχει τη δυανατότητα να περιγράφεται από διαφορετικές αναπαραστάσεις, πράγμα που συχνά οδηγεί τους μαθητές σε παρανοήσεις καθώς μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Η σύνδεση της έννοιας με άλλες επιστήμες και με την καθημερινή ζωή, αν και είναι απαραίτητο να γίνεται, συχνά δημιουργεί μερικές φορές επιπρόσθετες δυσκολίες.

Η κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη συνάρτηση , είναι γενικά μια διαδικασία που ξεκινά γενικά από την κατανόηση κάποιων σημείων και καταλήγει στηνκατανόηση της συνάρτησης ως αντικείμενο.Περιέχει ακόμη την κατανόηση των ιδιοτήτων της συνάρτησης σε αυξανόμενο βαθμό αφαίρεσης.(Ronda ….)

Η κατανόηση δεν είναι της μορφής « όλα ή τίποτα» αλλά μια διαδικασία που αναπτύσσεται συνεχώς. Οι γνωστικές δομές που κατασκευάζουν οι μαθητές μπορούν να θεωρηθούν κόμβοι (nodes) ή σημεία ανάπτυξης (growth points).

Για να περιγραφεί η διαδικασία κατανόησης της συνάρτησης έχουν προταθεί:

1)Αναπαραστάσεις και μετάφραση μεταξύ των αναπαραστάσεων

2) Θεωρία διαδικασίας- αντικειμένου (process-object theory) και αναπαραστάσεις της συνάρτησης

3) Θεώρηση της συνάρτησης ως αντικείμενο που κατέχει ή όχι μια ιδιότητα (Slavit)

<u>Ο ορισμός μιας έννοιας δεν οδηγεί υποχρεωτικά στην σύλληψη της έννοιας.</u>

Έτσι , για να περιγραφεί η κατανόηση των μαθητών σχετικά με μια μαθηματική έννοια, η έμφαση θα δοθεί στις ενέργειες σχετικά με την έννοια και τις ιδιότητες και αναπαραστάσεις της και όχι τόσο πολύ στον ορισμό. (Ronda)

ΙΙ1) ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ- ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης είναι παρατηρημένες από πολλούς και πολύ γνωστές, σημειώνει η Sierpinska. Οι μαθητές έχουν πρόβλημα στο να δημιουργούν τη σύνδεση ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων : τύποι, γραφικές παραστάσεις , διαγράμματα, λεκτική περιγραφή των σχέσεων. Οι δυσκολίες βρίσκονται στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων, στον χειρισμό των συμβόλων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις, και άλλες. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται σε σύνδεση με τις συναρτήσεις δεν βοηθά, πχ το σύμβολο f(x) σημαίνει και το όνομα της συνάρτησης αλλά και την τιμή της συνάρτησης f. Σε αυθόρμητες

καταστάσεις, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικό συμβολισμό και διαφορετική γλώσσα.

Η μελέτη της ιστορίας της έννοιας και των δυσκολιών των μαθητών αποτελούν εργαλείο και έμπνευση για τους ερευνητές.
Η παιδαγωγική ερώτηση είναι βέβαια το πώς να αντιμετωπιστούν όλες αυτές οι δυσκολίες στην τάξη. Σε αυτό το θέμα έχουν δοθεί πολλές παιδαγωγικές λύσεις . Η Sierpinska προτείνει πως πρέπει να απαντηθούν δύο ερωτήσεις σχετικά με το θέμα. Πρώτα «**τι θέλουμε να περιέχει η κατανόηση;**» και έπειτα «**τι εννοούμε όταν μιλάμε για κατανόηση συνάρτησης;**»

Χρειάζεται να έχουμε κάποια θεωρία σχετικά με την κατανόηση γενικά και με την κατανόηση συνάρτησης σύμφωνα με τις οποίες να κατασκευάσουμε ή να αξιολογήσουμε όσα σχεδιάζουμε.

Κατανόηση της έννοιας θα σημαίνει το να είμαστε ικανοί να αντιμετωπίσουμε και τις δύο παραπάνω ερωτήσεις καθώς και τις ποικίλες σχέσεις μεταξύ των απαντήσεων σε αυτές τις ερωτήσεις. Αυτή η στάση απέναντι στην κατανόηση σημαίνει ότι το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας παρουσιάζεται ως μια σχέση μεταξύ της πλευράς του συμβόλου και του αντικειμένου. Η συμβολική *πλευρά* αναφέρεται στην πρώτη από τις ερωτήσεις, ενώ αυτή του αντικειμένου στη δεύτερη.

Στην προσπάθειά μας να ορίσουμε τις βασικές συνθήκες κατανόησης των συναρτήσεων, θα καθοδηγηθούμε από μια διερεύνηση των αναφορών του ορισμού αυτής της έννοιας. Θα αναρωτηθούμε τι είναι αυτή η πραγματικότητα στην οποία αναφέρεται ο ορισμός αυτός, τη φύση των αντικειμένων που αναγνωρίζει και διακρίνει, το είδος των τάξεων που μπορεί να βρεθούν ώστε να επιφέρουν τη μεγέθυνση της πραγματικότητας, μέσα από διορατικές γενικεύσεις και συνθέσεις

Γενικότερα σε σχέση με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών υπάρχουν δύο συμπληρωματικοί τρόποι για να εργαστούμε: να μελετήσουμε τους παλιούς τρόπους γνώσης που μας εμποδίζουν από τη γνώση με ένα νέο τρόπο (**ενέργειες υπέρβασης των εμποδίων**) και να κοιτάξουμε μπροστά μας ώστε

να περιγράψουμε την αλλαγή με νέους τρόπους γνώσης (**ενέργειες κατανόησης**).
Οι τρόποι αυτοί είναι συμπληρωματικοί γιατί κανένας από τους δύο δεν δίνει μια πλήρη περιγραφή της μετάβασης ενώ και οι δύο είναι υποχρεωτικοί για να περιγραφεί το τι έχει συμβεί. Αν το εμπόδιο ή η δυσκολία είναι σε αντίθεση με τον νέο τρόπο γνώσης, τότε είναι ασυμβίβαστο με αυτήν.

Αν ένα εμπόδιο δεν είναι μόνο δικό μας ή ίσως και λίγων ακόμη ανθρώπων, αλλά είναι πιο διαδεδομένο , ή είναι πιο διαδεδομένο κάποια χρονική στιγμή ή σε κάποιο πολιτισμό, τότε καλείται **επιστημολογικό εμπόδιο** .
Ένα επιστημολογικό εμπόδιο δεν είναι υποχρεωτικά κάτι αρνητικό στην εννοιολογική ανάπτυξη. Η φύση των επιστημολογικών εμποδίων είναι τέτοια που δεν μπορούν να αποφευχθούν και ο ρόλος τους στη σκέψη μας είναι σημαντικός. Δεν μπορούμε να λειτουργήσουμε χωρίς τις δομές της σκέψης μας, τις αντιλήψεις μας, και τις στάσεις μας. Αυτό είναι το έδαφος το οποίο στεκόμαστε. Ωστόσο, αν θέλουμε να κατανοήσουμε περισσότερα, καλύτερα , ή να δούμε διαφορετικές απόψεις των πραγμάτων, πρέπει να έχουμε επίγνωση αυτών των αντιλήψεων και στάσεων σκέψης και να ενεργούμε εναντίον τους. Αυτό θα ήταν παράδοξο αν έχουμε στο μυαλό μας τον ερμηνευτικό κύκλο αλλά μπορούμε να ξεφύγουμε από το παράδοξο αν φέρουμε την ιδέα της σπείρας στην περιγραφή της γνωστικής διαδικασίας.

Η έννοια της συνάρτησης μπορεί να οριστεί με έναν τυπικό συμβολικό τρόπο, σχεδόν χωρίς να χρησιμοποιήσουμε λέξεις. Έτσι, αν αναρωτηθούμε ποιος είναι ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης, η απάντηση μπορεί να είναι ότι πρόκειται για μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, f), όπου τα X και Y είναι σύνολα και το f είναι το υποσύνολο του XxY, τέτοιο ώστε αν το (x,y) ανήκει στο f και το (x,y΄) ανήκει στο f, τότε y=y΄ .

Αν όμως η ερώτηση είναι «τι λέει αυτός ο ορισμός;», τότε η απάντηση είναι πιο σύνθετη, γιατί αναφερόμαστε σε μια πραγματικότητα που βρίσκεται πίσω από τη λογική και το μαθηματικό φορμαλισμό, αναφερόμαστε σε ερμηνείες και εφαρμογές της έννοιας. Για να κατανοήσουμε μια μαθηματική έννοια δεν είναι ποτέ αρκετός ο ορισμός της. Η Sierpinska προτείνει να δώσουμε σημασία στις ποιοτικές διαφορές που σχετίζονται με τη μαθηματική γνώση στο ανθρώπινο μυαλό , στη μετάβαση από τους παλιούς τρόπους γνώσης σε νέους.

Από πού προέρχονται τα επιστημολογικά εμπόδια

Σχετικά με τα επιστημολογικά εμπόδια, μπορούμε να διακρίνουμε τρία διαφορετικά επίπεδα: ένα είναι αυτό των στάσεων και πεποιθήσεων σχετικά με την οπτική μας για τον κόσμο. Αυτό είναι σαφής γνώση και μπορεί να γίνει αντικείμενο επικοινωνίας με τους άλλους με καθαρούς όρους (πχ «τα μαθηματικά είναι η γλώσσα της επιστήμης»). Αλλά αυτές οι δηλώσεις δεν μπορούν να δικαιολογηθούν παρά μόνο με αναφορά σε κάποια αρχή , παράδοση ή κοινή αίσθηση.

Ένα άλλο επίπεδο είναι αυτό των ασυνείδητων σχημάτων σκέψης , τρόπων προσέγγισης προβλημάτων, ερμηνείας καταστάσεων, πράγματα που μαθαίνονται από πρακτική και μίμηση στη διαδικασία κοινωνικοποίησης και μόρφωσης.

Το τρίτο επίπεδο είναι αυτό της τεχνικής γνώσης , δηλαδή της γνώσης της οποίας η αξία υποστηρίζεται με πιο ορθολογικά κριτήρια όπως συνέπεια, εφαρμοσιμότητα και τα είδη των σχέσεων με τα συστήματα γνώσεων τα οποία κοινωνικά χαρακτηρίζονται ως επιστημονικά. Αυτή είναι επίσης σαφής γνώση αλλά χρειάζεται ορθολογική εξήγηση για τη δικαιολόγησή της, αν και ο όρος «ορθολογική» έχει διαφορετικές σημασίες σε διαφορετικούς πολιτισμούς και εποχές.

Τα τρία επίπεδα δεν είναι ανεξάρτητα. Πολλά από αυτά που κάνουμε στο «τεχνικό» επίπεδο μπορούν να εξηγηθούν από τα περιεχόμενα του πρώτου και του δεύτερου επιπέδου γνώσης μας. Οι στάσεις μας σχετικά με τη μαθηματική γνώση , τα πιστεύω μας στο τι θα έπρεπε να είναι η μαθηματική απόδειξη , για παράδειγμα, τα ασυνείδητα σχήματα σκέψης οδηγούν τις επιλογές μας στα θέματα έρευνας ή μάθησης , και στις μεθόδους προσέγγισης και επίλυσης προβλημάτων. Από την άλλη μεριά , τα επιτεύγματά μας στο τεχνικό επίπεδο μερικές φορές αλλάζουν τις πεποιθήσεις μας , φέρνουν σε επίγνωση μερικά από τα σχήματα της σκέψης που έχουμε χρησιμοποιήσει και τα μετατρέπουν. Τα τρία επίπεδα δεν είναι ανεξάρτητα αλλά αλληλοεπηρεάζονται.

Όσο καιρό οι πεποιθήσεις μας είναι τυφλές πεποιθήσεις , και τα σχήματα σκέψης μας ασυνείδητα, μπορεί να λειτουργούν σαν εμπόδια στη σκέψη μας στο τεχνικό επίπεδο. Ένα εμπόδιο μπορεί να ξεπεραστεί αν είμαστε ικανοί να

πάρουμε μια απόσταση σε αυτό που πιστεύουμε ή αν δούμε τις συνέπειές του και είμαστε ικανοί να θεωρήσουμε άλλες οπτικές γωνίες.

Ένα εμπόδιο που δεν είναι μόνο δικό μας ή μόνο λίγων ανθρώπων αλλά είναι πλατιά εξαπλωμένο σε έναν πολιτισμό , καλείται επιστημολογικό εμπόδιο. (Sierpinska, 1985)

Τέσσερις Κατηγορίες Ενεργειών Κατανόησης

Α) Μία από αυτές είναι ο προσδιορισμός **(identification)** (ενός αντικειμένου ανάμεσα σε άλλα αντικείμενα). Αυτό σημαίνει πως κάτι που μέχρι τώρα ήταν στο περιθώριο , ξαφνικά εμφανίζεται ως το κύριο αντικείμενο της εικόνας , όπως στα πειράματα Gestalt . Το θεωρούμε ως κάτι που αξίζει το ενδιαφέρον μας και τη μελέτη μας.

β) Η **διάκριση (discrimination)** (ανάμεσα σε δύο αντικείμενα) είναι μια άλλη κατηγορία. Η διάκριση φέρνει στην αντίληψή μας την ύπαρξη δύο διαφορετικών αντικειμένων . Παρατηρούμε όχι μόνο τις διαφορές ανάμεσα σε αυτά αλλά και τις σχέσεις τους.

γ) Η **γενίκευση (generalization)** οδηγεί σε μια επίγνωση της δυνατότητας να επιμηκύνουμε το εύρος των εφαρμογών μας. Μερικά συμπεράσματα καταλήγουν να μην είναι σημαντικά και νέες δυνατότητες ερμηνείας ανακαλύπτονται.

δ) Η **σύνθεση (synthesis)** είναι η αντίληψη των σχέσεων ανάμεσα σε αρχικά απομονωμένα γεγονότα. Επομένως, γεγονότα, ιδιότητες, σχέσεις, αντικείμενα κτλ. οργανώνονται σε συνεπείς ολότητες.

Οι **Hoyles & Noss** (1986) πρόσθεσαν στις παραπάνω κατηγορίες μία ακόμη, αυτή της **χρησιμοποίησης (using).** Αυτή είναι η δραστηριότητα ενός μαθητή όταν μια έννοια χρησιμοποιείται ως εργαλείο για λειτουργικούς σκοπούς, για να επιτευχθούν συγκεκριμένοι σκοποί. Η χρησιμοποίηση δεν είναι ενέργεια κατανόησης αλλά είναι υποχρεωτική συνθήκη για να συμβεί κάθε ενέργεια κατανόησης .

Μια μέθοδος ορισμού της κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας

Η έννοια της συνάρτησης μπορεί να οριστεί με έναν φορμαλιστικό συμβολικό τρόπο , σχεδόν χωρίς τη χρήση λέξεων. Η λογική αίσθηση της έννοιας είναι έτσι περιορισμένη στη δομή της πρότασης του ορισμού και στη σχέση των περιεχομένων σε άλλες μαθηματικές έννοιες και θεωρίες. Τη στιγμή όμως που η έννοια εφαρμόζεται μέσα σε ένα πλαίσιο , η άτυπη γλώσσα μεταφέρει νοήματα που υπερβαίνουν την απλή λογική του ορισμού. Μέσω των συναρτήσεων, επεξεργαζόμαστε τα αντικείμενα ή ομάδες αντικειμένων, για να αποκτήσουμε άλλα αντικείμενα. Αυτό δίνει μια πιο δυναμική εικόνα της συνάρτησης η οποία παρουσιάζεται επίσης όταν κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης: επεξεργαζόμαστε τις ανεξάρτητες μεταβλητές για να αποκτήσουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Έτσι, στην προσπάθειά μας να ορίσουμε τις βασικές συνθήκες στην κατανόηση της συνάρτησης θα αναρωτηθούμε ποια είναι αυτή η αλήθεια στην οποία αναφέρεται ο ορισμός. Ποια αντικείμενα πρόκειται να προσδιοριστούν , διακριθούν, ποιοι κανόνες μπορεί να βρεθούν. Η μελέτη της ιστορίας της έννοιας και των δυσκολιών των μαθητών θα προσφέρει ένα εργαλείο και έμνευση στην έρευνα. Παραδείγματα από τις δυσκολίες των μαθητών μπορούν να παρθούν από μια αναφορά βασισμένη σε μια σειρά από διδακτικές καταστάσεις στο μαθηματικό πλαίσιο των προσεγγίσεων των συναρτήσεων και των ελκυστικών καθορισμένων σημείων.

Συνθήκες κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης

Αν θεωρήσουμε ότι τα Χ και Υ αναφέρονται στον **κόσμο των αλλαγών ή των αντικειμένων που μεταβάλλονται** , το σύμβολο f αναφέρεται στον **κόσμο των σχέσεων** ανάμεσα στα αντικείμενα που μεταβάλλονται ή στον **κόσμο των διαδικασιών** που μετατρέπουν τα αντικείμενα σε άλλα αντικείμενα. Αυτές οι σχέσεις ή διαδικασίες πρέπει να οριστούν καλά και αυτό αναφέρεται στον **κόσμο των κανόνων , μοτίβων , νόμων.**

Η πρώτη συνθήκη αφορά την επίγνωση της ύπαρξης των κόσμων που αναφέρονται παραπάνω. Οι αλλαγές στον περιβάλλοντα κόσμο είναι πάντα μια πηγή προβλημάτων και άγχους. Ωστόσο η αντίληψη των σχέσεων ανάμεσα σε

αυτές , οι κανονικότητες , είναι ένα εργαλείο για να αντιμετωπίσουμε αυτές τις αλλαγές.

Η **Sierpinska** παρουσιάζει τις **ενέργειες κατανόησης** που πρέπει να γίνουν και τα **επιστημολογικά εμπόδια** που προκαλούν διάφορες αντιλήψεις. Κάθε επιστημολογικό εμπόδιο έχει και μια αντίστοιχη ενέργεια κατανόησης.

Συγκεκριμένα:

Οι **ενέργειες κατανόησης** της συνάρτησης είναι οι εξής:

U(f)-1: Προσδιορισμός των αλλαγών που παρατηρούνται στον περιβάλλοντα κόσμο ως ένα πρακτικό πρόβλημα προς επίλυση

U*(f)-2:* Προσδιορισμός των κανονικοτήτων στις σχέσεις ανάμεσα στις αλλαγές ως έναν τρόπο για να ασχοληθούμε με αυτές τις αλλαγές.

U(f)-3: Προσδιορισμός των αντικειμένων των αλλαγών στη μελέτη των αλλαγών

U(f)-4: Διάκριση μεταξύ δύο ειδών μαθηματικής σκέψης: τη μία με όρους γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων και την άλλη με όρους μεταβλητών και σταθερών ποσοτήτων.

U(f)-5: Διάκριση μεταξύ των εξαρτημένων και της ανεξάρτητων μεταβλητών.

U(f)-6: Γενίκευση και σύνθεση της έννοιας του αριθμού.

U(f)-7: Διάκριση μεταξύ αριθμού και ποσότητας.

U(f)-8: Σύνθεση των εννοιών του νόμου και της έννοιας της συνάρτησης ˙ ειδικότερα, η επίγνωση της πιθανής χρήσης των συναρτήσεων στη μοντελοποίηση σχέσεων μεταξύ φυσικών ή άλλων μεγεθών.

U(f)- 9: Διάκριση μεταξύ μιας συνάρτησης και των αναλυτικών εργαλείων που μερικές φορές χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των κανόνων της.

U(f)- 10: Διάκριση μεταξύ μαθηματικών ορισμών και περιγραφών των αντικειμένων.

U(f)- 11*:* Σύνθεση της γενικής έννοιας της συνάρτησης ως αντικείμενο.

U(f)- 12*:* Διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της σχέσης.

U(f)- 13*:* Διάκριση μεταξύ των εννοιών της συνάρτησης και της ακολουθίας.

U(f)- 14*:* Διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου της καμπύλης και των ευθύγραμμων τμημάτων που επιτελούν κάποια λειτουργία της καμπύλης.

U(f)- 15*:* Διάκριση μεταξύ των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης συναρτήσεων και των ίδιων των συναρτήσεων.

U(f)- 16*:* Σύνθεση των διαφορετικών τρόπων που δίνονται οι συναρτήσεις, αναπαρίστανται ή μιλάμε για συναρτήσεις.

U(f)- 17*:* Γενίκευση της έννοιας της μεταβλητής.

U(f)- 18: Σύνθεση των ρόλων της έννοιας της συνάρτησης και αιτιότητας στην ιστορία της επιστήμης: επίγνωση του γεγονότος ότι έρευνες για τις συναρτησιακές και αιτιακές σχέσεις είναι και οι δύο εκφράσεις της ανθρώπινης προσπάθειας για την κατανόηση και ερμηνεία των αλλαγών μέσα στον κόσμο.

U(f)- 19: Διάκριση ανάμεσα στις έννοιες των συναρτησιακών και αιτιακών σχέσεων.

Τα **<u>επιστημολογικά εμπόδια</u>** που πρέπει να ξεπεραστούν είναι:

EO(f)-1 (μια φιλοσοφία των μαθηματικών) Τα μαθηματικά δεν ενδιαφέρονται για πρακτικά προβλήματα.

EO(f)-2 (μια φιλοσοφία των μαθηματικών) Οι τεχνικές υπολογισμού που χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν πίνακες αριθμητικών σχέσεων δεν αξίζουν να είναι αντικείμενο μελέτης στα μαθηματικά.

EO(f)-3 (ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Θεώρηση των αλλαγών ως φαινόμενα. Εστίαση στο πώς τα πράγματα αλλάζουν, αγνοώντας αυτές τις αλλαγές.

EO(f)-4 *(*ασυνείδητο σχήμα σκέψης*)* Σκέψη με όρους εξισώσεων και αγνώστων που πρέπει να υπολογιστούν από αυτές.

EO(f)-5 *(*ασυνείδητο σχήμα σκέψης*)* Θεώρηση της τάξης των μεταβλητών ως άσχετης

EO(f)-6 (μια στάση σε σχέση με την έννοια του αριθμού) Μια ετερογενής αντίληψη του αριθμού.

EO(f)-7 (στάση σε σχέση με την έννοια του αριθμού) Μια Πυθαγόρεια φιλοσοφία του αριθμού: όλα είναι αριθμός.

EO(f)-8 (ασυνείδητο σχήμα σκέψης)Οι νόμοι της Φυσικής και οι συναρτήσεις στα μαθηματικά δεν έχουν τίποτα κοινό- ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές (διαμερίσματα) της σκέψης.

EO(f)-9 (ασυνείδητο σχήμα σκέψης) Η αναλογία είναι ένα προνομιούχο είδος σχέσης .

ΕΟ(f)-10 (μια πεποίθηση που αφορά τις μαθηματικές μεθόδους) Ισχυρή πεποίθηση στην δύναμη των τυπικών πράξεων στις αλγεβρικές εκφράσεις.

ΕΟ(f)-11 (μια αντίληψη για τη συνάρτηση) Μόνο σχέσεις που μπορούν να περιγραφούν με αναλυτικούς τύπους αξίζουν να ονομαστούν συναρτήσεις.

ΕΟ(f)-12 (μια αντίληψη της συνάρτησης) Ο ορισμός είναι η περιγραφή ενός αντικειμένου που είναι κατανοητό και με άλλους τρόπους, μέσω των αισθήσεων και της διορατικότητας. Ένας ορισμός δεν καθορίζει το αντικείμενο αλλά το αντικείμενο καθορίζει τον ορισμό. Ο ορισμός δεν είναι λογικά δεσμευτικός.

ΕΟ(f)-13 (έννοια των συναρτήσεων) Οι συναρτήσεις είναι ακολουθίες.

ΕΟ(f)-14 (έννοια των συντεταγμένων) Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι ευθύγραμμα τμήματα (όχι αριθμοί).

ΕΟ(f)-15 (αντίληψη για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα γεωμετρικό μοντέλο της συναρτησιακής σχέσης. Δεν χρειάζεται να είναι πιστό και μπορεί να περιλαμβάνει σημεία (x,y) στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται στο x.

ΕΟ(f)-16 (μια αντίληψη για τη μεταβλητή) Οι αλλαγές μιας μεταβλητής είναι αλλαγές μέσα στο χρόνο.

Τα παραπάνω είναι , όπως παρατηρεί η συγγραφέας, αποτελούν **επιστημολογική ανάλυση** και όχι παιδαγωγική γιατί δεν έχουν ληφθεί υπόψη άλλοι παράγοντες όπως κοινωνιολογικοί, ψυχολογικοί , και διδακτικοί , σχετικοί με τη μάθηση σε μια τάξη μαθηματικών. Ωστόσο κάνει μερικές παιδαγωγικές προτάσεις που σχετίζονται με τη δημιουργία κινήτρων, τους τρόπους εισαγωγής της έννοιας της συνάρτησης , την ανάπτυξη κατάλληλων πλαισίων , την ανάπτυξη του επιπέδου κατανόησης, την αναγνώριση των προαπαιτούμενων δομών, την παροχή διαφορετικών αναπαραστάσεων και τον ορισμό με τον οποίο δίνεται η έννοια.

ΙΙ2) ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ, ΕΙΚΟΝΑ ΕΝΝΟΙΑΣ, ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

.

Ας δούμε ποια είναι η γνωστική διαδικασία για να κατανοηθεί μια έννοια χρησιμοποιώντας τους όρους εικόνα έννοιας (concept image) και ορισμός έννοιας (concept definition), νοητική εικόνα (mental picture) όπως τα ορίζει ο Vinner.

Νοητική εικόνα (mental picture) ενός μαθητή είναι η ομάδα όλων των εικόνων που συνδέονται με την έννοια και έχουν κατασκευαστεί στο νου του μαθητή.

Ο όρος «εικόνες» χρησιμοποιείται εδώ με την ευρεία έννοια της λέξης και εμπεριέχει κάθε οπτική αναπαράσταση της έννοιας, ακόμη και τα σύμβολα.

Μαζί με την νοητική εικόνα της έννοιας ίσως να υπάρχει μια ομάδα από **ιδιότητες (properties)** που συνδέονται με την έννοια.

Αυτή η ομάδα ιδιοτήτων μαζί με την νοητική εικόνα θα την αποκαλέσουμε **εικόνα έννοιας (concept image).**

Δηλαδή:

Νοητική εικόνα + ιδιότητες έννοιας = εικόνα έννοιας

Με τον όρο **ορισμός έννοιας (concept definition)** εννοούμε έναν λεκτικό ορισμό που εξηγεί ακριβώς την έννοια με έναν μη κυκλικό τρόπο.

Στη ζωή μας άλλες έννοιες εισάγονται μόνο με τη εικόνα της έννοιας (πχ η έννοια «σπίτι») και άλλες μέσα από τον ορισμό της έννοιας (πχ δάσος= πολλά δέντρα μαζί).

Ωστόσο για να χειριστούμε μια έννοια χρειαζόμαστε την εικόνα της έννοιας και όχι τον ορισμό έννοιας και αν μια έννοια εισαχθεί μόνο με τον ορισμό της, ο ορισμός αυτός της έννοιας θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμη θα ξεχαστεί.

<u>Στη σκέψη, σχεδόν πάντα θα προκληθεί μια εικόνα της έννοιας.</u>

Στην τυπική μάθηση βέβαια, οι ορισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο γιατί δεν είναι μόνο μια περιγραφή της εικόνας έννοιας κάποιου, αλλά αποτελούν ένα μέρος ενός γενικότερου συστήματος με το οποίο δεν είμαστε υποχρεωτικά εξοικειωμένοι.Μερικές φορές οι ορισμοί εισάγονται σε μας προτού να έχουμε

κάποια εικόνα της έννοιας. Ζητούμε περισσότερη μάθηση για να καλύψουμε αυτό το κενό.

Ο Vinner υποθέτει πως υπάρχουν στο νου ενός μαθητή δύο διαφορετικά κελιά, ένα για τον ορισμό έννοιας και ένα για την εικόνα έννοιας, τα οποία αλληλεπιδρούν. Έτσι αν υποθέσουμε πως ο μαθητής έχει τις εικόνες μιας έννοιας και στη συνέχεια του δοθεί ο ορισμός από τον εκπαιδευτικό, μπορεί να συμβεί ένα από τα παρακάτω τρία πράγματα:

1) η εικόνα έννοιας θα αλλάξει για να συμπεριλάβει και όσα στοιχεία εμπεριέχει ο ορισμός

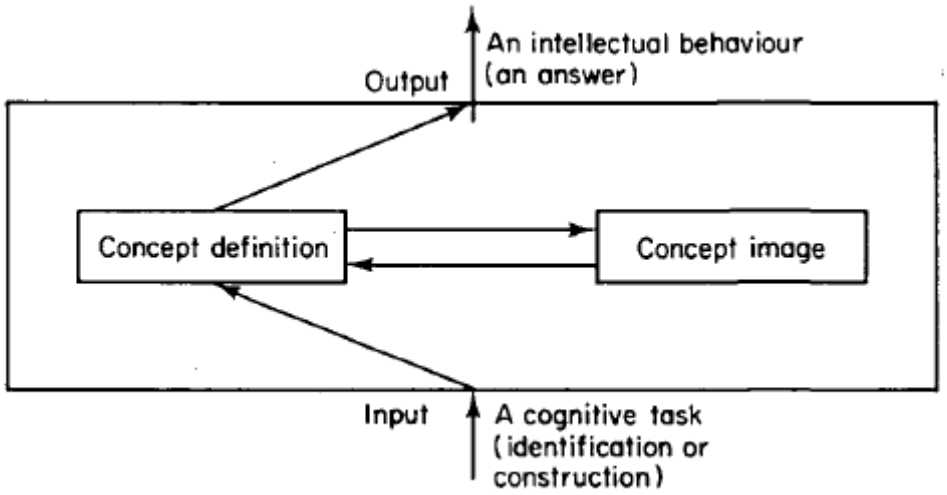
2) το κελί της εικόνας έννοιας μένει όπως είναι ενώ το κελί του ορισμού έννοιας θα συμπεριλάβει τον ορισμό του εκπαιδευτικού αλλά αυτός ο ορισμός θα ξεχαστεί ή θα διαστρεβλωθεί μετά από λίγο και ο μαθητής θα επιστρέπει στην αρχική εικόνα έννοιας που είχε.

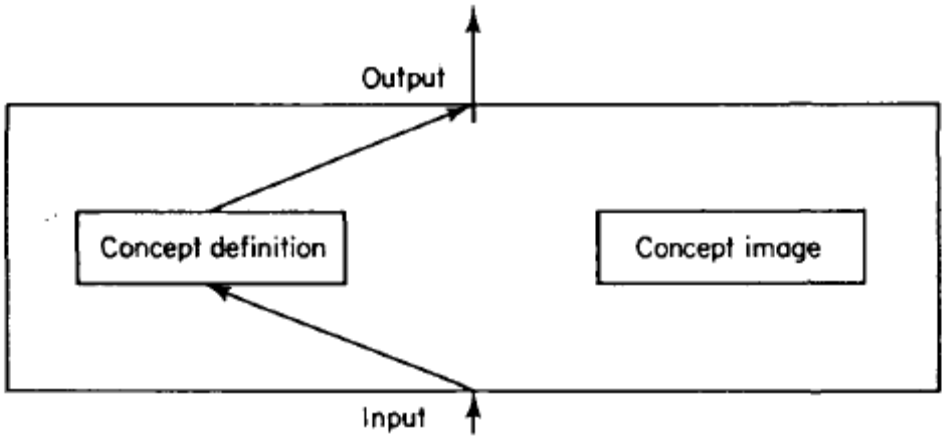
3) Και τα δύο κελιά θα παραμείνουν όπως ήταν. Τη στιγμή που ο μαθητής θα ερωτηθεί για τον ορισμό της έννοιας θα επαναλάβει τον ορισμό που έδωσε ο εκπαιδευτικός ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα σκεφτεί την έννοια όπως είναι αποθηκευμένη στο κελί της εικόνας έννοιας.

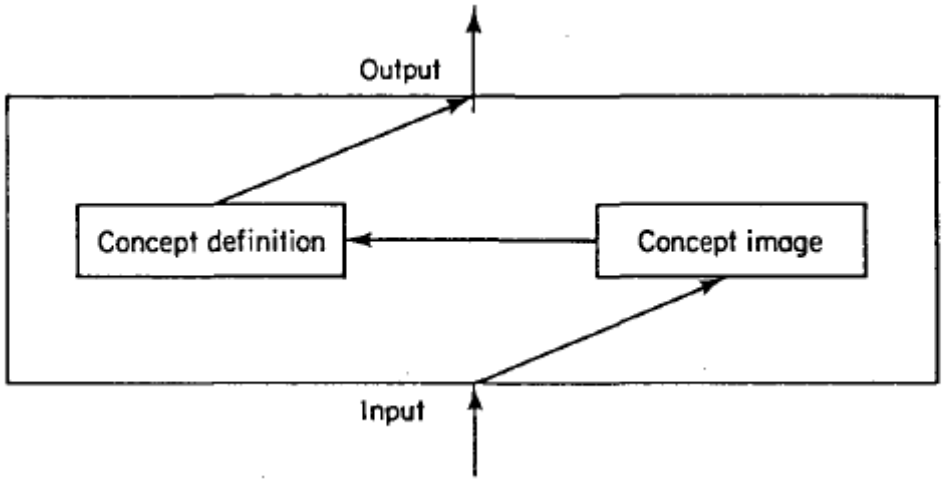
Παρόμοια διαδικασία γίνεται και όταν η έννοια εισαχθεί πρώτα με τον ορισμό της, όμως το κελί του ορισμού έννοιας είναι αρχικά άδειο και βαθμιαία γεμίζει , ενώ αλληλεπιδρά με το κελί της εικόνας έννοιας.

Αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι πως δεν είναι αυτονόητο ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τον ορισμό που έχουν διδαχτεί σε μια νοητική εργασία και άρα δεν χρειάζονται παραδείγματα, γιατί ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι κατά τον Vinner, αστήρικτο.

Τα τρία παρακάτω διαγράμματα **δεν αντικατοπτρίζουν την πρακτική** εξηγεί ο Vinner.



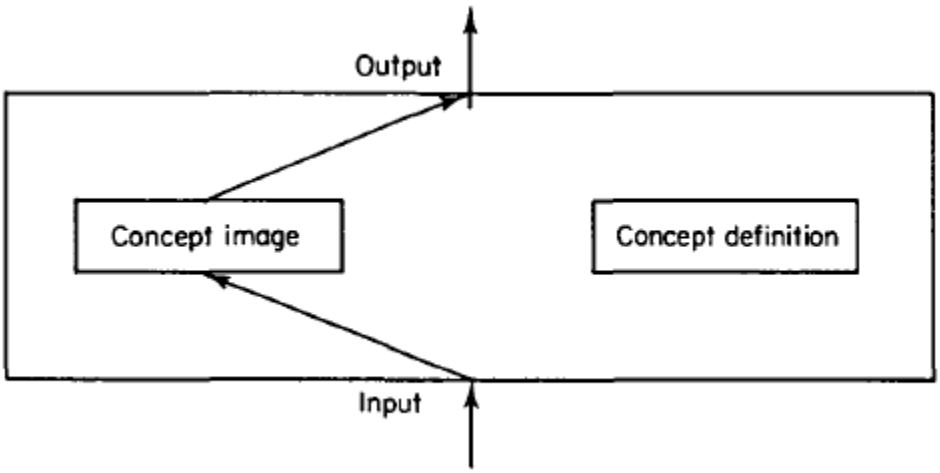




Δεν υπάρχει τρόπος να εξαναγκάσουμε μια γνωστική δομή να χρησιμοποιήσει ορισμούς , είτε με σκοπό να σχηματίσει εικόνες έννοιας είτε με σκοπό να διαχειριστεί μια γνωστική εργασία. Μερικοί ορισμοί είναι πολύ

περίπλοκοι για να ασχοληθούν με αυτούς. Δεν βοηθούν στη δημιουργία εικόνων έννοιας στο νου του μαθητή. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν μερικοί ορισμοί που έχουν νόημα αλλά τη στιγμή που μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα δίνονται από τον εκπαιδευτικό ή από το βιβλίο, σχηματίζουν την εικόνα έννοιας και έτσι οι ορισμοί γίνονται ανενεργοί ή και ξεχνιούνται.

Έτσι , <u>το μοντέλο που είναι πιο κοντά στην παραπάνω γνωστική εργασία είναι το ακόλουθο:</u>



Στην πραγματικότητα, σε μια συγκεκριμένη διανοητική εργασία, συχνά μόνο μέρη του κελιού της εικόνας έννοιας ή του ορισμού έννοιας είναι ενεργοποιημένα. Έτσι η εικόνα έννοιας (ή ο ορισμός έννοιας) δεν μπορεί να καθοριστεί από μια μόνο παρατήρηση συγκεκριμένης συμπεριφοράς. Για το λόγο αυτό μιλάμε για προσωρινή εικόνα έννοιας (temporary concept image).

Σε έρευνα που έκανε ο Vinner βρέθηκε πως <u>οι μαθητές έχουν κάποιες προσδοκίες από τις συναρτήσεις , οι οποίες δεν ταιριάζουν με τον ορισμό της</u> έννοιας και ακόμη η γνωστική διαδικασία με την οποία σχηματιζόταν η εικόνα έννοιας των μαθητών αγνοούσε τις «παράξενες συναρτήσεις» ίσως ακριβώς επειδή έμοιαζαν αφύσικες. Η προσέγγιση των μαθητών έμοιαζε να ακολουθεί τους παρακάτω κανόνες:

1) μια συνάρτηση θα έπρεπε να δίνεται από έναν κανόνα.
2) μια συνάρτηση μπορεί να δοθεί απο αρκετούς κανόνες που σχετίζονται με ασυνεχή πεδία ορισμού όταν δίνεται ότι αυτά τα πεδία ορισμού είναι ημιευθείες ή διαστήματα. Αλλά μια αντιστοιχία η οποία έχει έναν κανόνα και μια εξαίρεση δεν θεωρείται συνάρτηση.

3) Οι συναρτήσεις υπάρχουν μόνο αν οι μαθηματικοί επίσημα τις αναγνωρίζουν (δίνοντάς τους ένα όνομα ή δηλώνοντάς τις με συγκεκριμένα σύμβολα).
4) Μια γραφική παράσταση συνάρτησης θα έπρεπε να είναι «λογική». Ισχυρίζονται ότι μια γραφική παράσταση συνάρτησης θα έπρεπε να είναι συμμετρική ¸συνεχής , πάντα αύξουσα ή πάντα φθίνουσα κτλ.
5) Για κάθε y στο σύνολο τιμών υπάρχει μόνο ένα x στο πεδίο ορισμού που αντιστοιχεί σε αυτό. Αυτή η άποψη είναι αποτέλεσμα μιας αποτυχίας να ανακαλέσουν τον ορισμό του σχολικού βιβλίου σωστά.
6) Μια συνάρτηση είναι ένα προς ένα αντιστοιχία . Αυτή η άποψη είναι αποτέλεσμα μιας παρανόησης του ορισμού του σχολικού βιβλίου. Αυτή η παρανόηση πιθανόν είναι αποτέλεσμα αυτού που καλούμε υπονοούμενη απαίτηση για συμμετρία. Αν για κάθε x στο πεδίο ορισμού υπάρχει μόνο ένα y στο σύνολο τιμών , τότε το αντίστροφο θα έπρεπε επίσης να είναι αληθές.

Ο Vinner προτείνει πως κάποιος θα πρέπει να ξέρει τι να περιμένει από τους μαθητές και αυτό είναι που αυξάνει την κατανόηση που έχουμε για τους μαθητές.

Είναι φανερό ότι θεωρώντας την έννοια της συνάρτησης από την ιστορική της ματιά, κάποιος θα έπρεπε να έχει μια εντελώς διαφορετική άποψη σχετικά με το πρόβλημά μας. Σημαντικοί μαθηματικοί όπως ο Euler, ο D' Alembert και ο Lagrange είχαν μια εικόνα έννοιας διαφορετική από αυτή που δίνεται σε ένα σύγχρονο σχολικό βιβλίο. Ο σύγχρονος ορισμός μπορεί να θεωρηθεί σαν των Dirichlet- Bourbaki. Η σύγχρονη προσέγγιση έχει απορριφθεί από μερικούς σημαντικούς μαθηματικούς.

Από την άλλη μεριά, είναι φανερό ότι αν κάποιος θέλει να επιμείνει στον γενικό ορισμό , θα πρέπει να παρέχει στους μαθητές παραδείγματα που σχηματίζουν την επιθυμητή εικόνα έννοιας , όχι μόνο στην αρχή του κεφαλαίου αλλά και κατά τη διάρκεια της μάθησης. Τα στοιχεία της εικόνας έννοιας που δεν ενισχύονται σταθερά είναι πολύ πιθανό να ξεχαστούν και έτσι η εικόνα έννοιας παρανοείται . Το να παρέχονται στους οι μαθητές τέτοια παραδείγματα που δίνονται σε όλη την χρονική περίοδο διδασκαλίας ίσως να μην είναι εύκολο. Το πρόβλημα είναι να βρεθούν ενδιαφέρονται παραδείγματα στο σωστό πλαίσιο χωρίς να δίνεται στους μαθητές η αίσθηση ότι καθοδηγούνται.

Ωστόσο οι μαθητές μπορούν να κάνουν εργασίες και να επιτύχουν σε εξετάσεις ακόμη κι όταν έχουν λανθασμένη εικόνα έννοιας . Αν ενδιαφερόμαστε για την σωστή εικόνα έννοιας τότε ό,τι κάνουμε δεν είναι αρκετό. Ακόμη περισσότερος χρόνος και παιδαγωγική προσπάθεια απαιτούνται. (Vinner)

ΙΙ3) ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ- ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ – ΕΝΑΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΔΡΟΜΟΣ

Πρόσφατα , **η θεωρία της εκπραγμάτωσης** (**reification -Sfard**) διατυπώνει την άποψη ότι οι μαθητές έρχονται να αναπτύξουν πιο σταθερές κατανοήσεις (αφηρημένα αντικείμενα) μέσα από τον εμπλουτισμό της κατανόησης συνδεδεμένων μαθηματικών διαδικασιών και ενεργειών- τα αφηρημένα αντικείμενα είναι οι ενσαρκώσεις αυτών των ενεργειών.

Ο **Slavit** προτείνει μια εναλλακτική προσέγγιση σε αυτές τις θεωρητικές έννοιες μέσα στις τάξεις των μαθηματικών, που εστιάζουν στις συναρτήσεις και κάνουν χρήση των γραφικών παραστάσεων και των τεχνολογιών που παράγουν γραφικές παραστάσεις. Η θεωρία προτείνει ότι οι μαθητές εν μέρει, μπορούν να συλλάβουν τις συναρτήσεις ως οντότητες αφού κάνουν κτήμα τους πολλές ιδιότητες ανάπτυξης) τοπικής και ολικής φύσης. Αυτές οι ιδιότητες περιλαμβάνουν τομές, συμμετρίες, ασύμπτωτες και άλλα είδη συμπεριφορών των συναρτήσεων. Οι μαθητές μπορούν να συλλάβουν τις συναρτήσεις ως αφηρημένα αντικείμενα είτε κατέχοντας είτε όχι αυτές τις ιδιότητες ως προηγούμενες εμπειρίες.

Ο Slavit, σε αντίθεση με άλλες συζητήσεις σχετικά με την οπτική προσανατολισμένη στις ιδιότητες (property oriented view), εστιάζει στην κατανόηση της συνάρτησης που περιλαμβάνει την **ανάπτυξη (growth)** και την **διακύμανση (covariance).** Βασικές έννοιες όπως η αντιστρεψιμότητα και το επί είναι στη φύση τους συγγενικές. Αυτές οι ιδιότητες περιλαμβάνουν την ανάλυση της φύσης μιας σχέσης ανάμεσα στα δεδομένα και στα ζητούμενα σε μια βάση «σημείο προς σημείο» περισσότερο παρά σε σχέση με τον τρόπο με τον οποίο η σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στα ζητούμενα αλλάζει.

Η θεωρία της οπτικής προσανατολισμένης στις ιδιότητες (property oriented view) προτείνει ότι οι μαθητές έρχονται σε κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, μετατρέποντας τα βασισμένα στην εμπειρία τους αντιληπτικά μοτίβα για τις συμπεριφορές της συναρτησιακής ανάπτυξης σε καλά δομημένες κατανοήσεις συγκεκριμένων συναρτησιακών γνωρισμάτων (Slavit, 1997)

Η οπτική προσανατολισμένη στις ιδιότητες (property oriented view) ασχολείται με τη **βαθμιαία επίγνωση** συγκεκριμένων ιδιοτήτων συναρτησιακής ανάπτυξης (τοπικής και ολικής φύσης) συνοδευόμενης από την δυνατότητα των μαθητών να αναγνωρίσοουν και να αναλύσουν συναρτήσεις τονίζοντας την παρουσία ή απουσία αυτών των ιδιοτήτων ανάπτυξης.

Οι περισσότερες θεωρίες σχετικά με την ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης εστιάζουν στις διαφορές ανάμεσα στη οπτική **την προσανατολισμένη στη δράση (action oriented)** και στη οπτική **την προσανατολισμένη στο αντικείμενο (object oriented)**

Υπάρχει συμφωνία σε σχέση με την πρώτη , ενώ αρκετές θεωρίες έχουν αναπτυχθεί για να περιγράψουν τη δεύτερη.

Η οπτική η προσανατολισμένη στη δράση (action oriented view) περιλαμβάνει την κατανόηση της συνάρτησης **σαν μια μη μόνιμη κατασκευή**. Η άποψη αυτή εμπεριέχεται στις αλγοριθμικές οπτικές που είναι ενσωματωμένες στη συνάρτηση, όπως στην αριθμητική διαδικασία της «μηχανής συνάρτησης». Αυτή η σύλληψη δεν απαιτεί επίγνωση των προτύπων και κανονικοτήτων που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των αριθμητικών τιμών ούτε δίνεται προσοχή στις σχέσεις εξάρτησης των μεταβλητών. Η οπτική αυτή επικεντρώνει στον υπολογισμό μιας ποσότητας για μια αριθμητική τιμή μέσω ενός δεδομένου αλγορίθμου ή κανόνα σχέσης.

Η οπτική η προσανατολισμένη στο αντικείμενο (object oriented view) δείχνει ότι οι μαθητές αποκτούν **μια πιο μόνιμη νοητική εικόνα**.

Οι περισσότερες θεωρίες αυτής της κατηγορίας αναφέρονται ως άποψη αντιστοιχίας (correspondence ή relational) view ή ως άποψη συνδιακύμανσης (covariance view).- Confrey, Thompson

A) Οπτική αντιστοιχίας

(Correspondence or relational view of function):

Η κατανόηση βασίζεται στις σχέσεις **αιτίας** και **εξάρτησης** ανάμεσα στα ζεύγη ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Τα σχολικά βιβλία παραδοσιακά δίνουν έμφαση σε αυτή την άποψη της συνάρτησης.

Ο Briedenbach ισχυρίζεται ότι η διαδικασία της σύλληψης της έννοιας παρέχει την είσοδο μέσα από κατανόηση προσανατολισμένη στο αντικείμενο της συνάρτησης. Οι μαθητές είναι πιο ικανοί να κατανοήσουν ιδιότητες όπως το η 1-1 , επί και αντιστρεψιμότητα όταν η διαδικασία της σύλληψης έχει επιτευχθεί.

Η Sfard περιγράφει την κατανόηση την προσανατολισμένη στο αντικείμενο (object oriented conception) ως την **εκπραγμάτωση** (reification) μιας οπτικής προσανατολισμένης στη δράση (action view of function).Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να θεωρήσει την έκφραση 3(x+1)+1 σαν έναν αλγόριθμο με τον οποίο παράγει διάφορα αποτελέσματα. Όμως, κάποιος μπορεί να «δει» την έκφραση ως έναν συγκεκριμένο αριθμό στα δεξιά της , δηλαδή η έκφραση γίνειαι το αποτέλεσμα της διαδικασίας. Οι δυσκολίες των μαθητών στην ταυτόχρονη κατανόηση αυτών των εννοιών έχει αναφερθεί ως «το δίλημμα διαδικασίας αποτελέσματος» (Davis 1975) Η Sfard δίνει έμφαση στην ανάπτυξη των «αφηρημένων αντικειμένων» σαν μια παραγωγή βαθύτερης κατανόησης της μαθηματικής διαδικασίας.

Β) <u>Οπτική συνδιακύμανσης</u>

<u>(Covariance view of function)</u>

Αυτή η άποψη περιλαμβάνει την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αλλάζουν η ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Αναλύοντας, κάνοντας χειρισμούς και κατανοώντας τις σχέσεις ανάμεσα στις ποσότητες που μεταβάλλονται , τονίζεται η οπτική της συνδιακύμανσης. Για παράδειγμα, όταν δοθεί η γραμμική εξίσωση y=2x+3 έχει ερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές εγκαθιστούν τις σχέσεις.

Άλλες έρευνες σχετικές με τη συνδιακύμανση έχουν εστιάσει περισσότερο στις ιδιότητες της συναρτησιακής ανάπτυξης, και έχει φανεί ότι οι μαθητές ζητούν να μετακινηθούν στην κατεύθυνση της αφαίρεσης.

Ισχυρίζονται ότι οι οπτικές ιδιότητες των συναρτήσεων που γίνονται αντιληπτές στις γραφικές παραστάσεις οδηγούν τους μαθητές στις ιδιότητες των συναρτήσεων. (Monk & Nemirovsky, 1994).

Οι Schwarz & Dreyfus (1995) έχουν κάνει εκτεταμένες έρευνες σχετικά με την απόκτηση της έννοιας της συνάρτησης και έχουν δημιουργήσει το

Μοντέλο Τριπλής Αναπαράστασης (Triple Representation Model - TRM). Αυτό το πρόγραμμα επιτρέπει τη δυναμική αλληλεπίδραση ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις και τα αριθμητικά δεδομένα και εξισώσεις. Προτείνουν δύο διαφορετικά είδη ενεργειών : την αλλαγή της ίδιας της συνάρτησης και την αλλαγή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Οι δύο αυτές οπτικές εστιάζουν στις ιδιότητες των συναρτήσεων και στη φυσική κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ «ΙΔΙΟΤΗΤΑ»; (PROPERTY)

Ο Thompson (1994) υποστηρίζει ότι η άποψη της «αναπαράστασης» έχει ανάγκη εξήγησης. Επιπλέον έει την άποψη ότι αυτό που κανονικά έχει ονομαστεί «πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης» θα έπρεπε να συζητηθεί με πιο υποκειμενικούς όρους. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων δεν αναπαριστούν συναρτήσεις αλλά **παρέχουν ένα μέσο** για να δημιουργηθούν συνδέσεις και να μας επιτρέψουν να εγκαταστήσουμε μια αίσθηση αμετάβλητου.

Σε αυτό το πλαίσιο ο Slavit συζητά την έννοια της **ιδιότητας**. Όταν δίνεται ένα φυσικό αντικείμενο κάποιος μπορεί να περιγράψει διάφορα χαρακτηριστικά που κατέχει το αντικείμενο αυτό. Εκτός κι αν αλλάξει το αντικείμενο που παρουσιάζεται, ή μέχρι να βρεθούν νέες οπτικές, αυτές οι ιδιότητες θα παραμείνουν αμετάβλητες στον παρατηρητή.Η δυσκολία παρουσιάζεται όταν κάποιος πρέπει **να ορίσει την ιδιότητα στο πλαίσιο μιας πιο γενικής ιδέας** , όπως αυτή που συμπεριλαμβάνει πολλά είδη αντικειμένων και εμπεριέχει έναν αφηρημένο χαρακτήρα (πχ μια μαθηματική συνάρτηση). Εδώ η έννοια του αμετάβλητου είναι σημαντική. Κάποιος βλέπει τα χαρακτηριστικά που είναι αμετάβλητα δίνοντας παραδείγματα και κατηγοριοποιεί σε υπο-ομάδες βασισμένες στο αν ένα αντικείμενο κατέχει ή όχι ένα παρατηρησιμο χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, μπορούμε να συζητήσουμε τι είναι οι γραμμικές συναρτήσεις περιγράφοντας όλες τις ιδιότητες που οι γραμμικές συναρτήσεις πρέπει να κατέχουν. Με άλλα λόγια, οι γραμμικές συναρτήσεις μπορούν να περιγραφούν τονίζοντας τα σημεία που παραμένουν αμετάβλητα σε κάθε παράδειγμα μιας γραμμικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα είδη συναρτήσεων μπορούν επίσης να να περιγραφούν από τις **ιδιότητες που δεν κατέχουν** όπως η μη κανονικότητα ή έλλειψη συμμετρίας .

Όταν συζητάμε για ιδιότητες σε μια γενική έννοια της συνάρτησης, κάποιος πρέπει να θεωρήσει **όλα τα χαρακτηριστικά** που συνδέονται με ένα αντικείμενο το οποίο ικανοποιεί τον ορισμό της συνάρτησης. Επιπλέον, η ποικίλη φύση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων μας επιτρέπει να τις κατηγοριοποιήσουμε σε διαφορετικούς τύπους.

Ο παρακάτω πίκακας δείχνει τις συνήθεις ιδιότητες των συναρτήσεων , κατηγοριοποιημένες σε ολικές (global) και τοπικές (local):

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		
ΟΛΙΚΕΣ (GLOBAL)		**ΤΟΠΙΚΕΣ (LOCAL)**
Ανάπτυξη (growth)		
Περιοδικότητα		Σημεία καμπής
Συμμετρία	κλίση	Κοιλότητα
Μονοτονία		Σημεία όπου η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται
Οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες		Κατακόρυφες ασύμπτωτες
Όρια	συνέχεια	Ακρότατα
Σταθερές	πολυμεταβλητότητα	Σημεία τομής με τους άξονες
Ολοκληρωσιμότητα	σημείο	
Αντιστρεψιμότητα	διαφορισιμότητα	
Ένα προς ένα	πεδίο ορισμού	
Επί		Τιμές του x με ίσες Εικόνες
	σύνολο τιμών	
Αντιστοιχία (correspondence)		

Αυτή η κατηγοριοποίηση προτείνει επίσης πως οι ιδιότητες των συναρτήσεων μπορούν να μελετηθούν περισσότερο με απόψεις ανάπτυξης (growth) και συνδιακύμανσης (covariance) παρά με τις απόψεις αντιστοίχισης της συνάρτησης. Βέβαια διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις αυτών των ιδιοτήτων θα μπορούσαν να δοθούν. Επίσης η εστίαση έγινε μόνο στις ιδιότητες των συναρτήσεων ως μαθηματικά αντικείμενα. Αλλά πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι η έλλειψη σαφήνειας περιλαμβάνεται στον ισχυρισμό ότι καθένας έχει μια κατανόηση προσανατολισμένη στο αντικείμενο για κάθε μαθηματική ιδέα.(in Slavit, Thompson 1994, Schoenfeld et al 1993).

ΟΠΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
(PROPERTY ORIENTED VIEW OF FUNCTION)

Η οπτική η προσανατολισμένη στις ιδιότητες ασχολείται με τη βαθμιαία επίγνωση συγκεκριμένων συναρτησιακών ιδιοτήτων ανάπτυξης τοπικής (local) και ολικής (global) φύσης, που ακολουθούνται από την ικανότητα να αναγνωρίζουν και να αναλύουν συναρτήσεις προσδιορίζοντας την παρουσία ή την απουσία αυτών των ιδιοτήτων ανάπτυξης. Μέσα από εμπειρίες με υποδείγματα συναρτήσεων, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια νοητική εικόνα της συνάρτησης σαν μια συσχετισμένη ομάδα από διαδικασίες και ιδιότητες σε μια ποικιλία από σημειωτικά συστήματα. Στην ουσία, οιδιαδικασίες που παρουσιάζονται στις συναρτήσεις δίνουν έμφαση σε μια κατανόηση των ιδιοτήτων της ανάπτυξης της συνάρτησης (τιμές μηδενισμού, κοίλα, ασύμπτωτες). Συγκεκριμένα περιβάλλοντα που προκαλούνται από τον σημασιολογικό τομέα της συναρτησιακής κατάστασης μπορούν επίσης να εμπλουτίσουν τις σημασίες των συναρτησιακών ιδιοτήτων όπως γίνονται αντιληπτές από τους μαθητές. Οι ιδιότητες ανάπτυξης μπορούν να γίνουν συγκεκριμένες σε μια ομάδα συναρτήσεων , όπως η κλίση ευθείας, ή να γενικευτούν σε διάφορα είδη συναρτήσεων όπως η συμμετρία. Όπως αυτές οι κατανοήσεις διαμορφώνονται, ένας μαθητές μπορεί να εκπραγματώσει (reify) την έννοια της συνάρτησης σαν μαθηματικό αντικείμενο που είναι δυνατό να κατέχει ή να μην κατέχεις αυτές τις ιδιότητες. Επομένως δεν είναι εντελώς σαφές αν αν κάποιος «έχει» μια οπτική προσανατολισμένη στις ιδιότητες της συνάρτησης γιατί δεν είναι εύκολο να καθοριστεί ένα ικανό μέγεθος ιδιοτήτων των συναρτήσεων στο οποίο ο μαθητής έχει επίγνωση και

μετά να οριστεί ότι ο μαθητής μπορεί όντως να σχηματίσει μια επαρκή κατανόηση της συνάρτησης σαν αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο τέτοιο ώστε να κατέχει αυτές τις ιδιότητες.

Ανάπτυξη μιας οπτικής προσανατολισμένης στις ιδιότητες

Όπως έχει δειχτεί σε προηγούμενες έρευνες αναφέρει ο Slavit, μπορεί να υποτεθεί ότι η οπτική η προσανατολισμένη στις ιδιότητες εγκαθίσταται μέσα από δύο τύπους εμπειριών. Πρώτα, εμπεριέχει μια δυνατότητα να αναγνωρίσει την ισοδυναμία των διαδικασιών που παρουσιάζονται σε διαφορετικά σημειωτικά συστήματα. Δεύτερον, οι μαθητές αναπτύσσουν την δυνατότητα να γενικεύουν τις διαδικασίες μέσα στα διάφορα είδη και τύπους συναρτήσεων. Εδώ, οι μαθητές μπορούν να συσχετίζουν τις διαδικασίες διαμέσου των σημειωτικών συστημάτων, αλλά αρχίζουν επίσης να αναγνωρίζουν ότι μερικές από αυτές τις διαδικασίες έχουν αναλογίες σε άλλους τύπους συναρτήσεων. Είναι ξεκάθαρο ότι οι κατανοήσεις που είναι προσανατολισμένες σε συγκεκριμένα είδη και τύπους συναρτήσεων αναπτύσουν ταυτόχρονα με μια περισσότερο γενική οπτική της συνάρτησης.

ΙΙ4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Ο Freudenthal τονίζει ότι η συνάρτηση είναι μια έννοια παρμένη με αρμονικό τρόπο από το φυσικό κόσμο.

Οι σχέσεις μπορούν στη συνέχεια να γίνουν αντικείμενα (objectivation) και αυτό μπορεί να βιωθεί πνευματικά, να χρησιμοποιηθεί, να προκληθεί, να γίνει συνειδητό, να βιωθεί ως ένα αντικείμενο, να ονομαστεί ως ένα αντικείμενο, να τοποθετηθεί σε πλατύτερα πλαίσια σχέσεων. Η ακρίβεια με την οποία μια τέτοια σχέση αντικειμενικοποιείται (objectivated) μπορεί να ποικίλει από την ταξινόμηση σε είδη σχέσεων, να σχετίζεται με περισσότερο ή λιγότερο ακριβή πιθανόν αριθμητικό τρόπο η μια με την άλλη και να εξαρτάται από αυτή την ακρίβεια η σχέση που μπορεί να δοθεί με ένα γενικό όνομα , ένα κατάλληλο όνομα ενός ειδικού χαρακτήρα ή ενός αλγοριθμικού χαρακτήρα.

Τα παραδείγματα που δίνει ο Freudenthal είναι παρμένα από το φυσικό κόσμο.

1) ένα σώμα πέφτει- σχέση χρόνου και τόπου

2) δύο ελαστικά σώματα συγκρούονται (πχ στο παιχνίδι του μπιλιάρδου)- σχέση μεταξύ της ταχύτητας πριν και μετά τη σύγκρουση
3) κίνηση, ανάπτυξη, φθορά, διαδικασία , εξέλιξη όπου ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή
4) για διάφορες φυσικές σχέσεις με συγκεκριμένο όνομα όπως έλξη, τριβή, μεταφορά θερμότητας, οξείδωση, διάθλαση, οπτική αναπαράσταση κ.α.
5) αυτόματη σύνδεση, πχ ανάμεσα στο άγγιγμα ενός πλήκτρου στο πιάνο και στην παραγωγή ενός ήχου.

Η συνάρτηση είναι ένα ξεχωριστό είδος σχέσης, μεταξύ μεταβλητών τις οποίες διακρίνουμε σε ανεξάρτητη και εξαρτημένη .
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η κατεύθυνση από κάτι που μεταβάλλεται ελεύθερα σε κάτι που μεταβάλλεται κάτω από περιορισμούς.
Μαθηματικοποιημένα, είναι η ενέργεια της αντιστοίχισης κάθε στοιχείου ενός συνόλου Α σε ένα στοιχείο ενός συνόλου Β.
Οι συναρτήσεις είναι όλες σχετικές με τα μαθηματικά και τις εφαρμογές τους αν και ονομάζονται με διάφορους τρόπους: χαρτογράφηση , μετατροπή, μετάθεση, λειτουργία, διαδικασία, συνάρτηση, φορέας, αλληλουχία, μορφισμός, συναρτητής, αυτόματο, μηχανή , που χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τις ανάγκες κάθε φορά.
Οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές σχέσεις.
«για κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του Β, οπότε λέμε ότι τα α, β σχετίζονται»

Το μοτίβο «σαν συνάρτηση του...» περιγράφει τυπικές συνδέσεις όπως τη μέτρηση ως συνάρτηση της μονάδας μέτρησης, την ίδια την πράξη της μέτρησης και την πράξη του υπολογισμού αλλά και τις τυποποιημένες εκφράσεις των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στα βιβλία των μαθηματικών.

II5) ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η **E. Ronda** προτείνει τον εξής πίνακα ως αρχικό πλαίσιο σημείων ανάπτυξης για την κατανόηση της συνάρτησης. Η περιγραφή των σημείων αυτών είναι επανερμηνείες των διαφορετικών τρόπων αντίληψης της συνάρτησης βασισμένες στο πώς μελετήθηκε η συνάρτηση στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΠΙΝΑΚΕΣ**	**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**	**ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ**	**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ**
Διαδικασία (procedure)	Σημείο προς σημείο ερμηνεία για να συναχθούν πληροφορίες	Ερμηνεία της εξίσωσης σαν διαδικασία που δημιουργεί τιμές	Σημείο προς σημείο ερμηνεία για να συναχθούν πληροφορίες	Δείχνει επίγνωση για ποικίλες ποσότητες
Ιδιότητα (property)	Χρήση των τάσεων ή των μοτίβων για να περιγραφούν συσχετιζόμενες ποσότητες και να προβλεφτούν τιμές	Ερμηνείες βασισμένες στις ιδιότητες	Ερμηνείες βασισμένες στις ιδιότητες	Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες/τάσεις για να σχεδιάσει ή να αναπαραστήσει καταστάσεις
Διεργασία (process)	Χρησιμοποιεί σημείο προς σημείο ερμηνεία για να συνδέσει τις αναπαραστάσεις Οι ερμηνείες βασίζονται σε τάσεις/μοτίβα			
Αντικείμενο	Χρησιμοποιεί τη γνώση μη σχετιζόμενων ιδιοτήτων της			

(object)	συνάρτησης για να συνδέσει τις αναπαραστάσεις και να δημιουργήσει νέες συναρτήσεις

Σύμφωνα με τη θεωρία διαδικασία-αντικείμενο (process- object theory) ένας μαθητής ξεκινά κάνοντας υπολογιστικές διαδικασίες που τους οδηγούν σε μια αντίληψη διαδικασίας , η οποία αργότερα ενσωματώνεται σαν νοητικό αντικείμενο. Η Sfard θεωρεί ότι για τους περισσότερους ανθρώπους , οι έννοιες συλλαμβάνονται ως διαδικασίες προτού γίνουν αντιληπτές ως μαθηματικό νοητικό αντικείμενο. (Ronda 2)

ΙΙ6) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΣΤΑΔΙΑΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ- ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΌ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Οι συναρτήσεις και οι αναπαραστάσεις τους

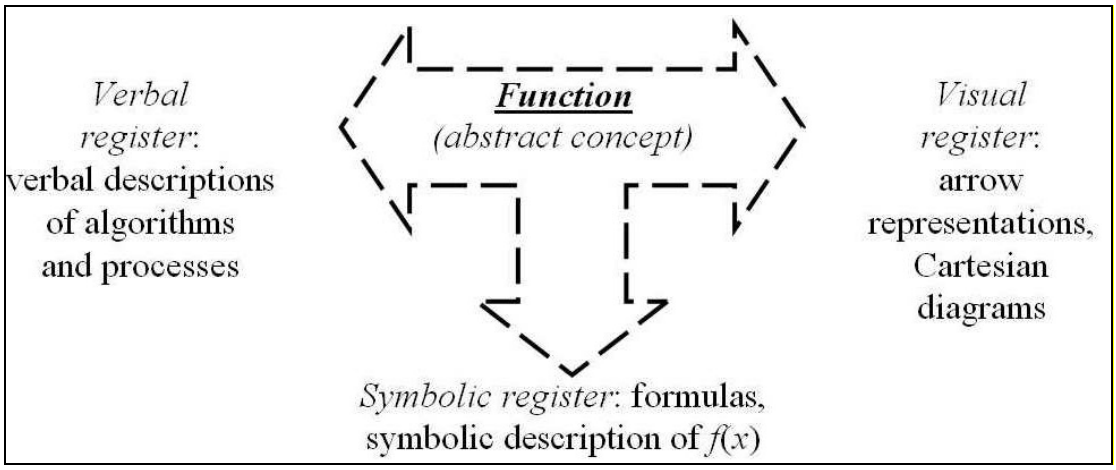
Θεωρώντας τις συνδέσεις ανάμεσα στην ανθρώπινη εμπειρία και τα τυπικά μαθηματικά συστήματα , η διάκριση μεταξύ των νοητικών δομών και των φυσικών δομών συχνά αντιπαραβάλλεται με τη διάκριση ανάμεσα στο σημαινόμενο (signified) εσωτερικά και το σημαίνον (signifier) εξωτερικά. Μόνο ένα από αυτά τα επίπεδα μπορεί να παρατηρηθεί και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι κυκλική: η νοητική διεργασία μπορεί να πάρει μέρος ανεξάρτητα από τη φυσική διεργασία , αλλά οι νοητικές δομές μπορούν να θεωρηθούν σαν η παραγωγή των φυσικών λειτουργιών (Kaput in Bagni)

Η διάκριση ανάμεσα στις εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις συχνά εισάγεται από αρκετούς ερευνητές με σαφήνεια ή με έμμεσο τρόπο.

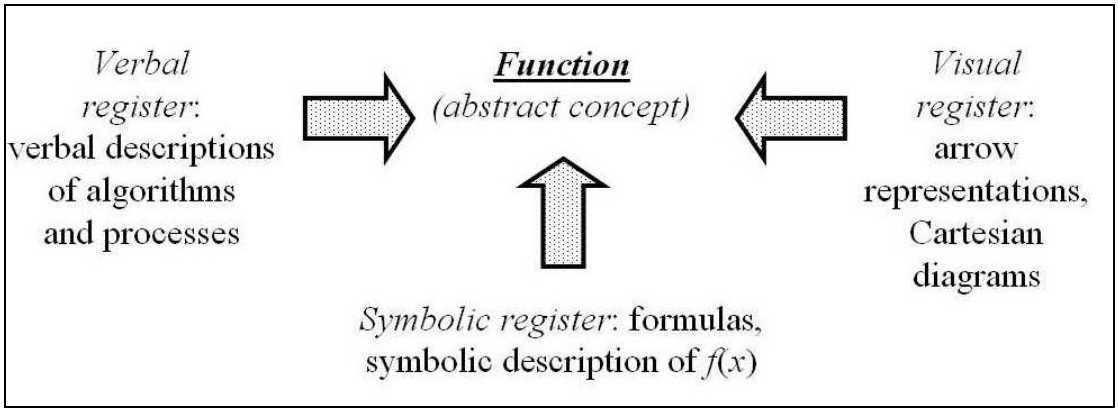
Σημαντικές εκπαιδευτικές έρευνες δείχνουν ότι η μάθηση της έννοιας της συνάρτησης συχνά διευκολύνεται με την πρώιμη θεώρηση μιας ενέργειας ή από την ερμηνεία της σαν μια διαδικασία, όπου οι αντιστοιχίες μεταξύ ποσοτήτων παίρνουν πραγματικά μέρος.

Όταν η εικόνα έννοιας (concept image) σχηματιστεί , και αυτό το βήμα μας επιτρέψει να φτάσουμε στον ορισμό της έννοιας (concept definition) (Tall & Vinner in Bagni) ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι πρωταρχικός , όπως και ο εκπαιδευτικός ρόλος της τεχνολογίας με σκοπό να υποστηρίξει τις οπτικές αναπαραστάσεις.

Στην εκπαιδευτική πρακτική η έννοια της συνάρτησης προσεγγίζεται καθαρά από τις αναπαραστάσεις , κυρίως αυτές που αναφέρονται σε καταστάσεις όπου η συνάρτηση είναι μια διαδικασία όπου με σαφήνεια συνδέει δύο ποσότητες.



Το προηγούμενο σχήμα θα έπρεπε να συμπληρωθεί με το παρακάτω γιατί είναι πιο σωστό να δείχνουν τα βέλη προς την κατεύθυνση της συνάρτησης.

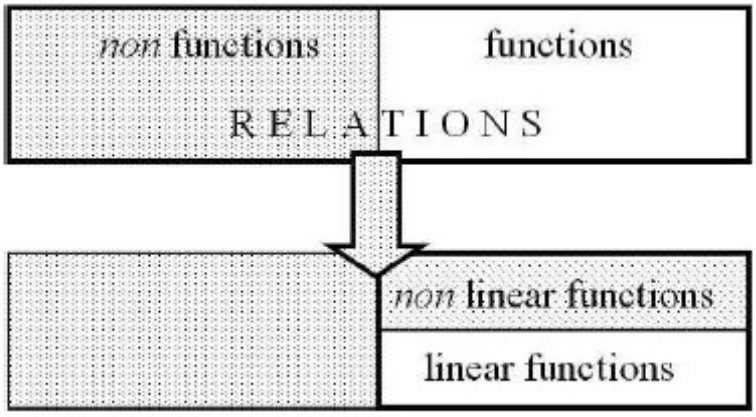


Συναρτήσεις και ιδιότητες

Η σημασία των αναπαραστάσεων στην <u>οπτική την προσανατολισμένη στις ιδιότητες</u> (property oriented approach) σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να αναφερθεί. (Kieren, Slavit in Bagni)

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, μια συνάρτηση μπορεί να εισαχθεί και να περιγραφεί σε αναφορά με τις τοπικές της ιδιότητες και στις ολικές της ιδιότητες. Στην ουσία η προσέγγιση ασχολείται με την ικανότητα των μαθητών να εγκαθιστούν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων συχνά σε αναφορά με τις νέες τεχνολογίες.

Η **οπτική η προσανατολισμένη στις ιδιότητες** είναι χρήσιμη με για να κατηγοριοποιήσουμε διαφορετικές συναρτήσεις και να προσδιορίσουμε κοινά χαρακτηριστικά σε μερικές συναρτήσεις , όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα, όπου φαίνεται η συνάρτηση σαν είδος σχέσης <u>αν και αυτή η κατηγοριοποίηση δεν είναι εκπαιδευτικά αποτελεσματική</u> όπως τονίζει ο Bagni.



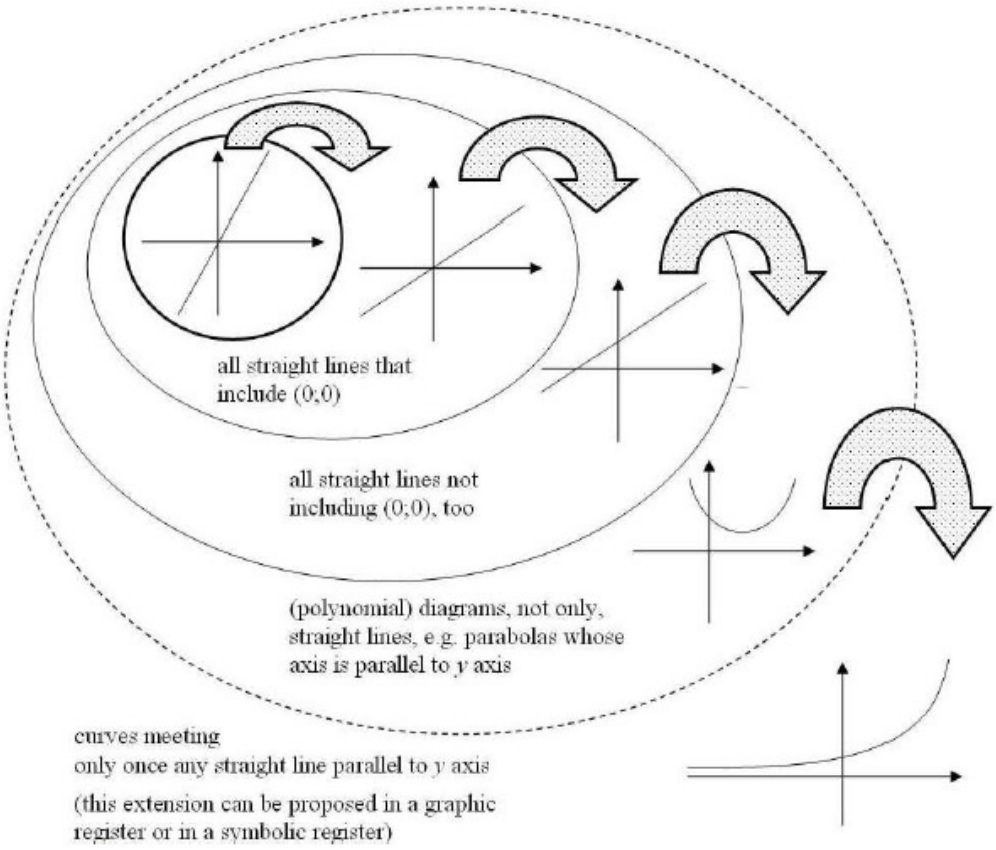
Γενίκευση σε σύγκριση με την Συγκεκριμενοποίηση

Η θεώρηση η προσανατολισμένη στις ιδιότητες μπορεί να οδηγήσει σε μαθησιακή διαδικασία που να βασίζεται στη **συγκεκριμενοποίηση (particularization)** , δηλαδή από τη γενική έννοια της σχέσης να θεωρήσουμε τηη γενική έννοια της συνάρτησης , μετά μια συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων (πχ τις γραμμικές συναρτήσεις) και ούτω καθεξής.

Ωστόσο, η καθημερινή εκπαιδευτική πρακτική προτείνει τον αντίθετο δρόμο: μια συγκεκριμένη αντιστοιχία όδηγεί στη **γενίκευσή της (generalization)** σε μια ολόκληρη κλάση συναρτήσεων με σκοπό να θεωρηθεί τελικά η γενική έννοια. Δηλαδή η κατανόηση έχει ως εξής:

Πρώιμη θεώρηση → πρώτη γενίκευση → περαιτέρω γενίκευση

Κάθε βήμα απο μια κλάση συναρτήσεων σε μια άλλη πιο πλατιά κλάση, μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε νέες αντιστοιχίες.



Σε σχέση με την προσέγγιση την προσανατολισμένη στις ιδιότητες , ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο είναι το εξής: όταν ασχολούμαστε με τη γενική έννοια της συνάρτησης συχνά θεωρούμε την οπτική της αναπαράσταση , και συγκεκριμένα την Καρτεσιανή γραφική παράσταση. Αυτό θα μπορούσε να προκαλέσει εμπόδια. Γι αυτό οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να ελέγχουν προσεκτικά , την ανεξαρτησία του μαθηματικού αντικειμένου και τους ρόλους των αναπαραστάσεών του.

Έτσι οι προσεγγίσεις οι προσανατολισμένες στις ιδιότητες, των οποίων η σπουδαιότητα στην εκπαίδευση είναι πρωταρχική, δεν λύνει εντελώς το πρόβλημα της εκπραγμάτωσης (reification) της τελικής κατασκευής των μαθηματικών αντικειμένων. Ο Slavit σημειώνει ότι δεν υπάρχουν εργασίες που αποδεικνύουν αν η προσέγγιση η προσανατολισμένη στις ιδιότητες βελτιώνει αποτελεσματικά την πλήρη ανάπτυξη της σύλληψης της έννοιας της συνάρτησης ως αντικείμενο.

Η θεσμοθέτηση απο τη διαδικασία στο αντικείμενο και ο ρόλος του εκπαιδευτικού.

Η μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας μπορεί να χωριστεί σε πολλά βήματα , αλλά τέτοια διάσπαση δεν μπορεί να θεωρηθεί αυστηρά. Ωστόσο προτιμά ο Bagni να παρουσιάσει μια προοδευτική διαλεκτική σύγκριση βημάτων , με νέους προβληματισμούς και παράλληλα εμβάθυνση των βημάτων αυτών.

Το πέρασμα από την πρώιμη θεώρηση μιας δράσης στην σύλληψη της εσωτερίκευσης μιας διαδικασίας (interiorization) αναφέρεται μόνο σε μια συγκεκριμένη κατάσταση : οι μαθητές ασχολούνται με ένα παράδειγμα ενός μαθηματικού αντικειμένου το οποίο αργότερα θα θεωρηθεί ως συνάρτηση. Η προσέγγιση η προσανατολισμένη στιις ιδιότητες επιτρέπει τη συγκεκριμενοποίηση κάποιων χαρακτηριστικών μιας κλάσης που αποτελείται από τέτοια παραδείγματα , κυρίως αν παιχνίδι παίζεται με κύρια αναφορά στις αναπαραστάσεις και μάλιστα τις οπτικές. Η εκπραγμάτωση (reification) μπορεί να θεωρηθεί σε αναφορά μιας ολόκληρης τάξης συναρτήσεων.

Μια αξιοσημείωτη δυσκολία στην κατασκευή του αφηρημένου αντικειμένου , είναι η γενίκευση (generalization). Στην πραγματικότητα, η σπουδαιότητα των ιδιοτήτων μερικών κλάσεων συναρτήσεων μπορεί να ελαττωθεί στο σωστό

μέγεθος: μια συνάρτηση μπορεί να έχει τέτοιες ιδιότητες , ή να μην τις έχει αλλά να παραμένει συνάρτηση.

Ο εκπαιδευτικός παίζει πρωταρχικό ρόλο στο βήμα που οδηγεί από τη θεώρηση μιας διαδικασίας στην κατασκευή ενός μαθηματικού αντικειμένου , δηλαδή στην εκπραγμάτωση (reification). Ο εκπαιδευτικός , πρέπει προσεκτικά να επαληθεύσει ότι τα διάφορα στοιχεία που έρχονται να αποτελέσουν την εικόνα έννοιας (concept image) και , αργότερα , έναν πλήρη ορισμό έννοιας (concept definition) κρατούν τους σωστούς τους ρόλους. Μετά προτείνει στους μαθητές την τελική γενίκευση (generalization) με σχετικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα , με ταξινόμηση σε κλάσεις και αναφορές σε σημειωτικές αναπαραστάσεις.

Οι μαθητές θα πρέπει να φτάσουν στο σημείο να έχουν επίγνωση του επιπέδου της γνώσης τους. Η επίγνωση αυτών των χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης είναι ένα θεμελιώδες στοιχείο όλης της διαδικασίας διδασκαλίας και μάθησης που σχετίζεται με τα μαθηματικά και θα συμπληρώσει τη γνώση που θα απασχολήσει τους μαθητές σε μια μαθηματική δραστηριότητα.

ΙΙ7) ΣΥΛΛΗΨΗ ΕΝΝΟΙΑΣ , ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑ

Ο Balacheff (2002) επιχείρησε να κάνει μια τυποποίηση της «σύλληψης» μιας έννοιας σαν πιθανό εργαλείο για απάντηση στο επιστημολογικό πρόβλημα αυτό. Προτείνει την εξής διάκριση:

Γνώση του υποκειμένου (knowing) : Σύμφωνα με τον Brousseau (1997) η λέξη διακρίνει τις προσωπικές δομές των μαθητών σε αντίθεση με τη λέξη γνώση (knowledge) που αναφέρεται στις διανοητικές δομές που αναγνωρίζονται από ένα κοινωνικό σώμα.

Ο Balacheff προτείνει τα εξής ήδη για να κατηγοριοποιηθεί η συνάρτηση:

1) Η συνάρτηση ως «νόμος» αντιστοιχίας (μια συνάρτηση εκφράζει την αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων, ένα στοιχείο του πρώτου συνόλου που συνδέεται με ένα μοναδικό στοιχείο του δεύτερου συνόλου)
2) Η συνάρτηση ως συμβολική έκφραση (ένας τύπος, μια αλγεβρική έκφραση
3) Η συνάρτηση ως αντικείμενο γραφικής παράστασης

Οι δύο πρώτες κατηγορίες προέρχονται από τους Vinner , Dreyfus. Άλλοι ερευνητές παρουσιάζουν διαφορετικές κατηγορίες που θα μπορούσαν όμως να θεωρηθούν ως εξειδικεύσεις των γενικών κατηγοριών που αναφέρθηκαν παραπάνω. (Balacheff, Gaudin)

Από τη συμπεριφορά στην έννοια

Οι μόνοι δείκτες που έχουμε σχετικά με τον τρόπο που λειτουργεί η διδασκαλία , είναι οι συμπεριφορές των μαθητών και τα όσα παράγουν, τα οποία είναι συνέπειες της γνώσης τους (knowing) την οποία έχουν κατασκευάσει και από τις σχέσεις τους με το περιεχόμενο που διδάχτηκαν. Η σχέση μεταξύ συμπεριφορών και γνώσης είναι κρίσιμη.

Το ερώτημα σχετικά με τις σχέσεις ανάμεσα στις συμπεριφορές και τη γνώση (knowing) θεωρείται θεμελιώδες για τη Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Brousseau (1997). Ένα από τα αξιώματά της είναι ότι κάθε προβληματική κατάσταση απαιτεί από τη μεριά των μαθητών συμπεριφορές που είναι δείκτες γνώσης. Αυτή η θεμελιώδης αντιστοιχία εγκαταστάθηκε ανά περίπτωση, δικαιολογήθηκε από την ερμηνεία των προβληματικών καταστάσεων όσον αφορά το παιχνίδι και από την ερμηνεία των συμπεριφορών όσον αφορά την ένδειξη των στρατηγικών την υιοθετημένη φύση των οποίων μπορεί να παρουσιάστηκαν στο μοντέλο της αναπαράστασης που αποδόθηκε στους μαθητές. Αυτό το αξίωμα είναι κοινό με μια προσέγγιση στη Γνωσιακή Επιστήμη: «Κάθε συμπεριφορά υποδηλώνει μια γνώση» γράφει ο Pichot .

Αλλά το να αποκόψει κανείς μια συμπεριφορά από την παρατήρηση μιας πραγματικότητας , είναι και μεθοδολογικό αλλά και θεωρητικό πρόβλημα όπως τονίζει ο Robert . Μια παρατηρημένη συμπεριφορά δεν δίνεται από την «πραγματικότητα» αλλά προκύπτει από αυτήν σαν αποτέλεσμα μιας απόφασης που παίρνεται από έναν παρατηρητή.

Αν η συμπεριφορά είναι η περιγραφή υλικών σχέσεων ανάμεσα σε ένα άτομο και το περιβάλλον του , τότε εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του προσώπου όπως και από τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος. Ένα καλό παράδειγμα είναι η περίπτωση των οργάνων τα οποία την ίδια στιγμή διευκολύνουν τη δράση αν ο

χρήστης έχει την απαιτούμενη γνώση , και από την άλλη μεριά περιορίζουν αυτή τη δράση εξαιτίας των ίδιων των περιορισμών που θέτουν.

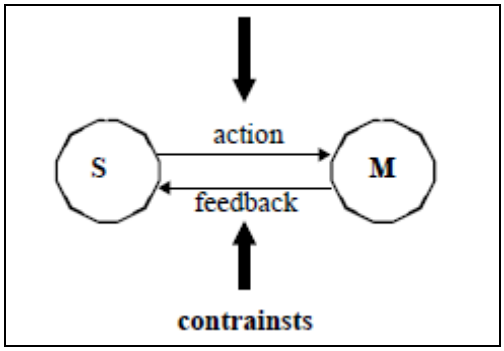
Το «άτομο» και το «περιβάλλον» αναφέρονται σε σύνθετες πραγματικότητες των οποίων δεν είναι όλες οι απόψεις σχετικές με τον τύπο του προβληματισμού που θεωρούμε. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι είναι το «άτομο» από την άποψη της σχέσης του με ένα μέρος της γνώσης (knowledge). Γι αυτό το λόγο θα αναφερθούμε στο «υποκείμενο» ως έναν υποβιβασμό του ατόμου στη γνωστική του διάσταση. Με τον ίδιο τρόπο, δεν ενδιαφερόμαστε για το περιβάλλον σε όλη του την πολυπλοκότητα, αλλά μόνο στα χαρακτηριστικά του που είναι σχετικά με ένα δεδομένο κομμάτι γνώσης. Θα ονομάζουμε **milieu** μια υποομάδα του περιβάλλοντος του υποκειμένου. Το milieu είναι ένα είδος προβολής του περιβάλλοντος στην επιστημική του διάσταση.

Στην περίπτωση των μαθηματικών, οι γνώσεις των ατόμων δεν είναι μόνο οι συνέπειες της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο υποκείμενο και ένα υλικό milieu, αλλά εμπεριέχουν αλληλεπιδράσεις με συστήματα από σημαίνοντα που παράγονται από το ίδιο το υποκείμενο , ή από άλλα. Πρέπει να επεκτείνουμε την κλασική έννοια του milieu με σκοπό να ενσωματώσει συμβολικά συστήματα και κοινωνική αλληλεπίδραση όπως και τρόπους παραγωγής της γνώσης. Αυτό είναι το νόημα της πρότασης του Brousseau να οριστεί το milieu σαν το ανταγωνιστικό σύστημα του υποκειμένου στη διαδικασία της μάθησης. Δηλαδή θεωρούμε τη γνώση του υποκειμένου σαν ιδιότητα της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο υποκείμενο και το milieu –το ανταγωνιστικό του σύστημα. Αυτή η αλληλεπίδραση έχει νόημα γιατί επιτυγχάνει να ικανοποιήσει τις απαραίτητες συνθήκες για τη βιωσιμότητα του συστήματος υποκείμενο /milieu , δηλαδή την κατάσταση ισορροπίας μεταξύ τους. Με άλλα λόγια , αυτό είναι μια διατύπωση του αξιώματος του Vergnaud ότι τα προβλήματα είναι οι πηγές και τα κριτήρια της γνώσης.

Πρόβλημα σημαίνει εδώ μία λιγότερο ή περισσότερο σοβαρή διαταραχή του συστήματος υποκείμενο/ milieu. Η ύπαρξη της γνώσης μπορεί τότε να εμφανιστεί με την εκδήλωση της ως εργαλείο για τη λύση του προβλήματος.

Μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό της γνώσης του υποκειμένου (knowing):

Η **γνώση του υποκειμένου (knowing)** χαρακτηρίζεται ως μια κατάσταση δυναμικής ισορροπίας ενός βρόχου δράσης/ ανατροφοδότησης ανάμεσα στο υποκείμενο και ένα milieu κάτω από δεσμευτικούς περιορισμούς βιωσιμότητας.



Υποκείμενο → δράση → milieu
← ανατροφοδότηση ←

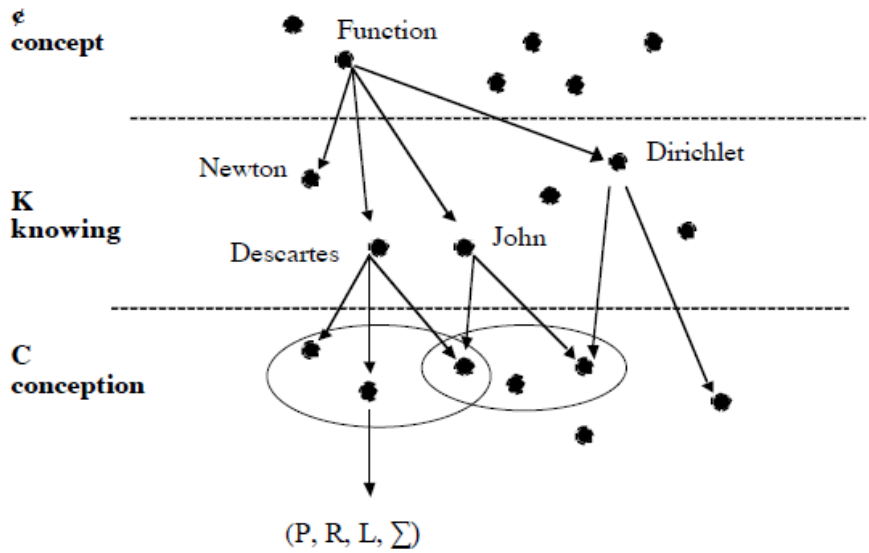
Δύο περιορισμοί που είναι συγκεκριμένοι στα διδακτικά συστήματα, είναι οι περιορισμοί του χρόνου και οι επιστημολογικοί περιορισμοί. Οι πρώτοι αφορούν τον τρόπο που είναι οργανωμένη η σχολική ζωή και οι δεύτεροι την ύπαρξη μιας γνώσης αναφοράς που βρίσκεται πίσω από κάθε περιεχόμενο που πρόκειται να διδαχτεί και το οποίο εκ των πραγμάτων παρέχει τα κριτήρια για την δυνατότητα αποδοχής σε κάθε μαθησιακό αποτέλεσμα.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού, σε σχέση με ένα δεδομένο περιεχόμενο που πρόκειται να διδαχτεί, είναι να οργανώσει τη συνάντηση ανάμεσα στο υποκείμενο και σε ένα milieu έτσι ώστε μια γνώση του υποκειμένου (knowing) να μπορεί να αναδυθεί από την αλληλεπίδραση. Μια τέτοια συνάντηση δεν είναι ασήμαντο γεγονός. Το να βρίσκεται σε ένα περιβάλλον, δεν είναι αρκετό για ένα μαθητή ώστε να γίνει ικανός να «διαβάσει» μέσα σε αυτό , το milieu που σχετίζεται με το σκοπό της διδασκαλίας. Τα μέσα για τον εκπαιδευτικό, για να επιτύχει σε αυτό το καθήκον είναι να κατασκευάσει μια κατάσταση που να επιτρέπει τη μεταβίβαση στους μαθητές και του milieu και των σχέσεων μέσα σε αυτό το milieu (δράση, ανατροφοδότηση). Αλλά ο διδακτικός σκοπός μιας τέτοιας κατάστασης μπορεί να λειτουργήσει σαν περιορισμός, όταν ο μαθητής πιστεύει στην προσδοκία ενός εκπαιδευτικού, που θα μπορούσε να τροποποιήσει τη φύση του συστήματος υποκειμένου /milieu και στη συνέχεια τη φύση της σχετιζόμενης γνώσης. Αλλά αυτή είναι η βασική πολυπλοκότητα των διδακτικών συστημάτων.

Η διδακτική προβληματική (**didactical problematique**) προτείνει πως μπορούν να προκληθούν σκόπιμα διαταραχές στο σύστημα υποκείμενο/ milieu, με σκοπό να τονωθεί η μάθηση.

Σύλληψη έννοιας, γνώση και έννοια

Αν καλούμε γνώση του υποκειμένου (knowing) ένα σύνολο από έννοιες οι οποίες αναφέρονται στο ίδιο περιεχόμενο, μπορούμε τότε να μιλήσουμε για το πεδίο εγκυρότητας μιας γνώσης και μπορούμε επίσης να αναγνωρίσουμε τον αντιφατικό χαρακτήρα μιας γνώσης, το ότι δεν έχει την ίδια εγκυρότητα για όλους. Ο Balacheff προτείνει να καλείται έννοια (concept) το σύνολο όλων των γνώσεων του υποκειμένου που αναφέρονται στο ίδιο περιεχόμενο. Στην περίπτωση της συνάρτησης, ερευνώντας τη σημασία της αποτελείται πρώτα από την κατασκευή ενός σχήματος όπως το παρακάτω και η κατανόηση των σχέσεων σε επίπεδα σύλληψης .



Σε κάποιο βαθμό μπορούμε να απαντήσουμε θετικά στην ερώτηση που έθεσε ο Biehler : «Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας είναι σύνθεση όλων των χρήσεών του;» . Από την άλλη μεριά, υπάρχει μια απόσταση από την πρόταση της Sfard (1991) που έγραψε ότι «η λέξη έννοια θα αναφερθεί όταν μια μαθηματική ιδέα θεωρείται στην τυπική της μορφή –σαν μια θεωρητική

κατασκευή μέσα στο τυπικό σύμπαν της ιδεώδους γνώσης». Ωστόσο η έννοια της «σύλληψης» μιας ιδέας είναι πιο κοντά σε όσα προτείνει η Sfard (1991).

ΙΙ8) ΑΛΛΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Περιγράψαμε μερικές απόψεις σχετικά με την κατανόηση της συνάρτησης και τα εμπόδια που υπάρχουν σε αυτήν κατά τη διαδικασία της μάθησης. Θα δούμε εδώ μερικές ακόμη απόψεις σχετικά με αυτή την σημαντική έννοια.

Η Sfard αναγνωρίζει ότι η σύλληψη ως αντικείμενο έρχεται αργότερα. Η **Sfard** διέκρινε τρία στάδια προτού κάποιος φτάσει στην σύλληψη της συνάρτησης ως αντικείμενο. Αυτά είναι η **εσωτερίκευση (interiorization)** , η **συμπύκνωση (condensation)** και η **εκπραγμάτωση (reification).**

Οι **DeMarois & Tall** για να περιγράψουν το σχηματισμό της έννοιας της συνάρτησης χρησιμοποίησαν τις έννοιες **προ-δράση (pre-action)**, **δράση (action)** , **διεργασία (process)** , **αντικείμενο (object)** και τον όρο **procept** . Σύμφωνα με τους Gray – Tall, ο όρος procept είναι η σύνθεση τριών συστατικών : μιας διαδικασίας -process (όπως πχ η πρόσθεση των αριθμών τρία και τέσσερα) , μιας έννοιας που παράγεται από αυτή τη διαδικασία- concept (στο παράδειγμά μας το άθροισμα) και ένα σύμβολο που παραπέμπει είτε στην έννοια είτε στη διαδικασία (στο παράδειγμά μας , 3+4). (Gray, Tall)

Στο παρακάτω σχήμα τα επίπεδα action, process, object θεωρούνται αυξανόμενου βάθους.

Το επίπεδο pre-action αφορά το χαμηλότερο επίπεδο σε σχέση με το σχηματισμό μιας έννοιας. Το τελευταίο επίπεδο του procept δηλώνει την κατάσταση όπου υπάρχει ευελιξία στη μετακίνηση ανάμεσα στα επίπεδα process , object.

Τα επίπεδα αυτά συνδυάζονται με τις διάφορες **όψεις (facets)** με τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί μια έννοια που σε σχέση με τη συνάρτηση είναι:

Αριθμητική (numeric) : χρησιμοποίηση πινάκων

Γεωμετρική (geometric) : χρησιμοποίηση γραφικών παραστάσεων και οπτικής περιγραφής

Συμβολική (symbolic) : χρησιμοποιώντας εξισώσεις

Γραπτή (written) : γραπτή περιγραφή

Προφορική (verbal) : προφορική περιγραφή

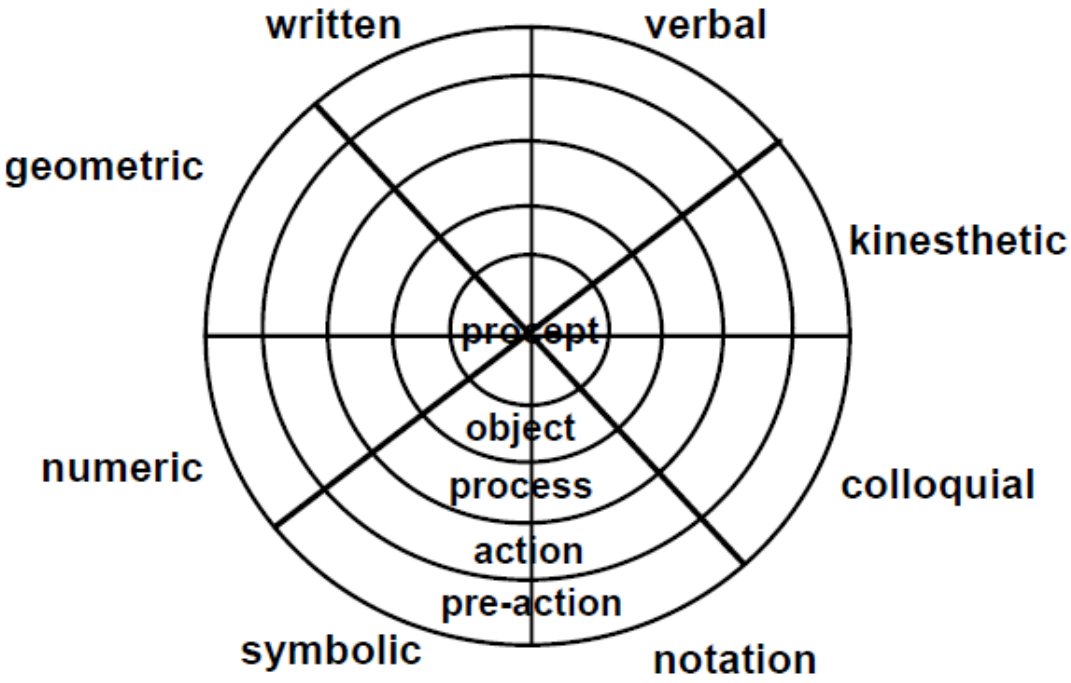
Σημειογραφική (notation) : περιγραφή με σύμβολα που περιλαμβάνει και κατανόηση του νοήματος

Κοινώς χρησιμοποιούμενη (colloquial) :άτυπα, όπως η χρήση της «μηχανής συνάρτησης»

Κιναισθητική (kinesthetic) : το να κάνουν οι μαθητές ενέργειες σχετικές με την κατανόησή τους για τη συνάρτηση.

(deMarois, Tall)

Στο παρακάτω σχήμα οι deMarois & Tall δίνουν την εικόνα που περιγράφει σχηματικά τις διάφορες παραμέτρους και τα επίπεδα κατανόησης της συνάρτησης:



Facets and layers of a concept

‘Ενα άλλο μοντέλο της κατανόησης της συνάρτησης προτάθηκε από τον **O’ Callaghan** και αποτελείται από τέσσερις διαφορετικές ικανότητες: μοντελοποίηση, ερμηνεία, μετάφραση, εκπραγμάτωση .

Μοντελοποίηση: η ικανότητα της μαθηματικοποίησης μιας κατάστασης που εμπεριέχει ένα πρόβλημα προς επίλυση. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει τη χρήση μεταβλητών και συναρτήσεων.

Ερμηνεία : Η αντίστροφη διαδικασία είναι η ερμηνεία των συναρτήσεων σε όρους εφαρμογών της καθημερινής ζωής. Η ικανότητα αυτή , είναι το δεύτερο συστατικό του μοντέλου που προτείνει ο O’ Callaghan.

Μετάφραση : Η ικανότητα της μετάβασης από μια αναπαράσταση της συνάρτησης σε άλλη αποτελεί το τρίτο συστατικό του μοντέλου.

Εκπραγμάτωση : Η ικανότητα δημιουργίας ενός μαθηματικού αντικειμένου από αυτό που αρχικά έγινε αντιληπτό σαν μια διαδικασία ή διεργασία. Αυτό το μαθηματικό αντικείμενο γίνεται τότε κατανοητό σαν μια μοναδική οντότητα που κατέχει συγκεκριμένες ιδιότητες και μπορεί να λειτουργήσει μαζί με άλλες διαδικασίες υψηλότερου επιπέδου, όπως μετατροπές ή συνθέσεις.

Η εκπραγμάτωση (reification) έχει περιγραφεί από πολλούς μελετητές σαν το τελικό στάδιο της απόκτησης της έννοιας της συνάρτησης , και ως ο τελικός στόχος της διδασκαλίας. Επίσης έχει θεωρηθεί μια δύσκολη διαδικασία που εμπεριέχει την εννοιολογική σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης και κατορθώνεται από πολύ λίγους μαθητές (in O’ Callaghan, Sfard)

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΔΡΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

ΙΙΙ1) Η ΑΠΑΙΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

ΙΙΙ2) Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΙΙΙ3) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΜΕΝΗ ΜΕΤΡΗΣΗ

ΙΙΙ4) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΔΡΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

III1) Η ΑΠΑΙΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΥ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Για να συζητήσουμε τι είναι αυτό που ονομάζουμε συνάρτηση, γράφει ο Freudenthal , και πώς αυτό είναι φτιαγμένο, οδηγηθήκαμε στην ερώτηση «γιατί», από την αναφορά γεγονότων στην διερεύνηση των αιτίων – οι αιτίες, όπως συμβαίνει στα μαθηματικά και τη μαθηματική ορολογία , είναι αναγκαιότητες.

Αν και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο όρος «συνάρτηση» εμφανίζεται στις εργασίες των Leibniz – Bernoulli και όχι μέχρι τουλάχιστον ο Euler να κάνει χρήση της λέξης όπως την έχουμε συνηθίσει. Μπορούμε επίσης να ισχυριστούμε ότι ο Euler και ο D' Alembert ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποιησαν απροσδιόριστα σύμβολα για συναρτήσεις . Μπορούμε να αναφέρουμε τον όρο «mapping" (λατινικά representation) στην εργασία του Euler (1777) όπου μελετά τη χαρτογράφηση της σφαίρας στο επίπεδο. Μέχρι και τον 20^{ο} αιώνα , η χαρτογράφηση και η συνάρτηση ήταν παρόμοιες έννοιες.

Ωστόσο αυτή η ιστορική αναφορά είναι πολύ απλοποιημένη. Θα πρέπει να αναζητήσουμε τα ίχνη της έννοιας της συνάρτησης σε αρχαιότερες πηγές. Η

ιστορία των μαθηματικών εννοιών αρχίζει πολύ πριν από τη στιγμή που θα τους δοθεί ένα όνομα.

Οι πίνακες συχνά αναπαριστούν συναρτήσεις και τέτοιους πίνακες γνωρίζουμε από τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Η συνάρτηση εμφανίζεται επίσης στην αστρονομία- πίνακες πολύ γνωστοί από τη Βαβυλωνιακή και Ελληνική Αστρονομία , δημιουργήθηκαν από εμπειρικά δεδομένα. Οι Βαβυλώνιοι παρατήρησαν περιοδικότητες στις θέσεις των ουρανίων σωμάτων .Οι συναρτήσεις με τις οποίες επιχείρησαν να περιγράψουν τις κινήσεις των πλανητών και τα μέσα με τα οποία υπολόγισαν τους πίνακές τους, είναι περιοδικές συναρτήσεις με ευθύγραμμα τμήματα. Οι Έλληνες προχώρησαν λιγότερο φαινομενολογικά. Χρησιμοποίησαν κινηματικά μοντέλα: κεντρικές και εκκεντρικές κυκλικές κινήσεις και επικύκλους, δηλαδή , κυκλικές κινήσεις που δημιουργήθηκαν από άλλες. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι περιέγραψαν τις κινήσεις των πλανητών σαν υπερθέσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ένα μοντέλο που παρέμεινε ίδιο μέχρι τον Κέπλερ. Οι κινήσεις των πλανητών ήταν ένα κίνητρο για να δημιουργηθούν και να αναλυθούν οι συναρτήσεις. Αλλά η ελληνική αστρονομία γνώριζε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και από μια άλλη σκοπιά, αυτή της σφαιρικής τριγωνομετρίας. Στις εργασίες του Πτολεμαίου βρίσκουμε τους πίνακες χορδών όπου έχουμε τόξα κύκλου ως συνάρτηση των αντίστοιχων γωνιών, όπου γίνεται φανερή η σχέση των χορδών με το ημίτονο γωνίας. Ακόμη παλιότερα συναντάμε την εφαπτομένη , στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως η εφαπτομένη , χρησιμοποιούνται στην μέτρηση κύκλου και τον υπολογισμό του π από τον Αρχιμήδη. Επίσης στα ελληνικά μαθηματικά συναντάμε τις γραμμικές συναρτήσεις, όπως και τετραγωνικές συναρτήσεις στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ενώ στις κωνικές τομές του Απολλώνιου έχουμε τις εξισώσεις έλλειψης, υπερβολής , παραβολής.

Οι Έλληνες ήταν εξοικειωμένοι με την περιγραφή καμπύλων και επιφανειών με εξισώσεις. Ωστόσο οι εξισώσεις δεν ήταν γραμένες με αλγεβρική μορφή αλλά με γεωμετρική. Η αλλαγή αυτής της οπτικής, το να εκφράζονται οι αλγεβρικές σχέσεις γεωμετρικά, άλλαξε από τον Descartes ο οποίος εξέφρασε τις γεωμετρικές σχέσεις με αλγεβρικό τρόπο.

Αν u, v είναι μεταβλητές , τότε σύμφωνα με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ τους, μια «απειροελάχιστη» μεταβολή του u συμβολίζεται με du και αντιστοιχεί σε μια «απειροελάχιστη» μεταβολή του v που συμβολίζεται με dv , όπου καμιά από τις

δύο δεν υποδεικνύεται ως εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή. Το πηλίκο du/dv αποδίδει την αναλογία της μεταβολής , που υπάρχει στους υπολογισμούς του Newton . Αυτή η οπτική έχει προέλθει από τη φυσική και μάλιστα από την κλασική μηχανική, όπου εμφανίστηκαν οι συναρτήσεις θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης . Σε αυτές τις συναρτήσεις, στην αρχική τους προσέγγιση υπήρχε απλά η σχέση των μεταβλητών χωρίς να διαχωρίζονται σε εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η σκέψη να διαχωριστούν η εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή προέκυψε από την αναγκαιότητα , όταν κάποιος χρειάζεται να υπολογίσει παραγώγους μεγαλύτερης τάξης. Εκεί, η ασυμμετρία ανάμεσα στον αριθμητή και παρονομαστή ανάγκασε αυτούς που δημιούργησαν τον διαφορικό λογισμό να ορίσουν μια μεταβλητή ως ανεξάρτητη, πράγμα που οδηγεί στον σημερινό ορισμό που περιέχει την απαίτηση για το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο γόρδιος αυτός δεσμός κράτησε σχεδόν έναν αιώνα, μέχρι να γίνει γενικά αποδεκτή η παραδοχή της εξ ορισμού μονοσήμαντης (univalent) συνάρτησης. (Freudenthal)

Οι Even – Tirosh (1995) αναφέρουν ότι όλες οι μαθηματικές πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς είναι συναρτήσεις. Έτσι οι ορισμοί των μαθηματικών πράξεων θα πρέπει να ικανοποιούν τις απαιτήσεις των συναρτήσεων όπως την απαίτηση του μονοσήμαντου, και την απαίτηση ότι η πράξη θα πρέπει να οριστεί για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της.

III2) Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ – Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Επίλυση Προβλήματος

Ο Freudenthal επισημαίνει ότι ο όρος «μεταβλητή» σημαίνει κάτι που πραγματικά ποικίλει, κάτι στη φυσική, κοινωνική , πνευματική ζωή αλλά και στον μαθηματικό κόσμο κάτι που γίνεται αντιληπτό, που το φανταζόμαστε ή το υποθέτουμε.και μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο που περνάει, την πορεία που διανύεται, το σκοπό που αλλάζει, το φεγγάρι που αλλάζει

μέγεθος, τη θερμοκρασία που έχει διακυμάνσεις, τον άνεμο που αλλάζει, τις ημέρες που αλλάζουν σε μέγεθος κ.α.

Επίσης η μεταβολή μαθηματικών αντικειμένων όπου με τη βοήθεια των μεταβλητών , αυτά τα φαινόμενα περιγράφονται.

«Μπορείς να διώξεις βίαια τη φύση, αλλά παρ' όλα αυτά θα επιστρέψει» γράφει ο Freudenthal (**"Expellas naturam furca, tamen usque recurrit").**

Η μαθηματική «καθαρολογία» (purism) είναι μια βεβιασμένη και λιγότερο ακριβής γλώσσα μόλις κάποιος βγει από τα μαθηματικά. Η αφθονία των αντικειμένων που επιδέχονται μεταβλητή είναι συνεχώς μέσα στον κόσμο μας. Ο κόσμος είναι ένα πεδίο αλλαγών, το να περιγράφει κάποιος τον κόσμο είναι σαν αν περιγράφει την αλλαγή, και για να το κάνει αυτό χρειάζεται να δημιουργήσει μεταβλητά αντικείμενα- φυσικά , κοινωνικά, πνευματικά και τελικά μαθηματικά. Υπάρχουν πολλές γλώσσες περιγραφής , ή μάλλον πολλά επίπεδα περιγραφής. Στο υψηλότερο επίπεδο του φορμαλισμού, τα μεταβλητά μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να ξεχαστούν, αλλά σε χαμηλότερα επίπεδα είναι γενετικά και διδακτικά απαραίτητος σύνδεσμος με τις φυσικές, κοινωνικές και διανοητικές μεταβλητές.

Στη φαινομενολογική προσέγγιση η μεταβλητή είναι πολύ περισσότερο από ένα αντικείμενο σχηματισμένης μαθηματικής γλώσσας και ακόμη περισσότερο από κάτι που κάποιος χρησιμοποιεί ως τρόπο ομιλίας. Η καταγωγή της συνάρτησης προέρχεται από το να δηλώσει, να υποθέσει, να παράγει και να αναπαράγει τη σχέση (ή σύνδεση) μεταξύ μεταβλητών που συμβαίνουν στο φυσικό , κοινωνικό και πνευματικό κόσμο και ακόμη, ανάμεσα σε αυτούς τους κόσμους. Σημαντικές είναι οι μαθηματικές μεταβλητές που σχετίζονται μεταξύ τους, ή που σχετίζονται με άλλες. (Freudenthal , p. 494).

Στο «Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση» (2011), αναφέρονται τα εξής σχετικά με την επίλυση προβλήματος:

«Η επίλυση προβλήματος αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς η εμπλοκή τους στη

συγκεκριμένη διαδικασία τούς βοηθά να “κατασκευάσουν” προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση, εμβαθύνοντας εννοιολογικά σε αυτήν και συνειδητοποιώντας τη λειτουργική της πτυχή αλλά και την πολιτισμική και ιστορική της διάσταση. Επομένως, η κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων αποτελεί κομβικό σημείο για τη μάθηση των μαθηματικών. Αναγνωρίζοντας αυτόν τον κεντρικό ρόλο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, η σχετική βιβλιογραφία προτείνει α) τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλήματος αλλά και για την επίλυση προβλημάτων και β) την ανάδειξη της επίλυσης προβλήματος σε κεντρικό στόχο του Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά, με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσής του.

Σημαντική στιγμή κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και, γενικά, κατά την επεξεργασία μαθηματικών ερωτημάτων αποτελεί ο αναστοχασμός, μια διαδικασία που αφορά τη σκέψη του ατόμου σχετικά με την προηγούμενη δράση του και δεν ενεργοποιείται αυθόρμητα. Χαρακτηρίζει συνήθως τους “καλούς λύτες” προβλημάτων, γιατί μέσω αυτής έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την ισχύ και το εύρος εφαρμογής των λύσεων που προτείνουν, και, ενδεχομένως, να αναθεωρήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, ακόμα και πολύ μικροί μαθητές μπορούν να ασκηθούν στη χρήση της αναστοχαστικής διαδικασίας, η οποία απαιτεί χρόνο και τη διατύπωση ερωτήσεων που να αποτελούν έναυσμα για τη μεταγνωστική ανάπτυξη των μαθητών»

Η επιλογή στην παρούσα εργασία μιας δραστηριότητας που έχει αφετηρία ένα φυσικό φαινόμενο- πρόβλημα από τη Φυσική , γίνεται κατανοητή μετά από τις παραπάνω σκέψεις. Ένα τέτοιο πρόβλημα ήταν επίσης κατάλληλο για να εισαχθεί η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη μέτρηση, όπως εξηγείται παρακάτω και να δημιουργηθούν οι συνθήκες ώστε να πραγματοποιηθεί μια δράση μέτρησης , όπως μπορούμε να δούμε στη συνέχεια της εργασίας αυτής.

Β) ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ (artifacts)

Μία από τις πηγές της μάθησης είναι αποτέλεσμα της επαφής μας με τον υλικό κόσμο, τον κόσμο των πολιτιστικών τεχνουργημάτων (artifacts) που μας περιβάλλει (αντικείμενα , όργανα κτλ). Ο Radford επισημαίνει ότι η σκέψη συμβαίνει σε μια ζώνη που καλείται **Περιοχή της Τεχνητής Σκέψης (Territory**

of Artifactual Thought). Αλλά ο ρόλος των τεχνουργημάτων, είναι πολύ παραπάνω από το να υλοποιεί τη σκέψη με και διαμέσου τεχνουργημάτων. Τα τεχνουργήματα , στην πραγματικότητα , είναι φορείς ιστορικά κατατεθειμένης γνώσης από μια γνωστική ενέργεια προηγούμενων γενεών. Ο άνθρωπος, σε αντίθεση με τα ζώα, αλλάζει φανερά μέσω των τεχνουργημάτων . Ερχόμενος σε επαφή με αυτά, η ανθρώπινη ύπαρξη αναδομεί τις κινήσεις της και νέες κινήσεις και διανοητικές δεξιότητες σχηματίζονται , όπως η πρόβλεψη, η μνήμη και η αντίληψη. (Vygotsky & Luria, in Radford).

Ο κόσμος των τεχνουργημάτων εμφανίζεται , τότε να είναι μια σημαντική πηγή για τη διαδικασία της μάθησης , αλλά δεν είναι η μόνη. Τα αντικείμενα δεν μπορούν να κάνουν ξεκάθαρη την ιστορική νοημοσύνη που εμπεριέχεται σε αυτά. Αυτό απαιτεί το ότι χρησιμοποιούνται σε δραστηριότητες ώστε να έρχονται σε επαφή με άλλους ανθρώπους που γνωρίζουν πώς να « διαβάζουν» αυτή τη νοημοσύνη και να τους βοηθούν να την αποκτήσουν. Η συμβολική- αλγεβρική γλώσσα θα μπορούσε διαφορετικά να υποβιβαστεί σε μια ομάδα ιερογλυφικών. Η νοημοσύνη που η συμβολική- αλγεβρική γλώσσα μεταφέρει, δεν θα μπορούσε να παρατηρηθεί χωρίς την κοινωνική δραστηριότητα που λαμβάνει μέρος στο σχολείο. Είναι αυτή η κοινωνική διάσταση που αποτελεί , για τη θεωρία της εξαντικειμενίκευσης (objectification) της γνώσης τη δεύτερη ουσιαστική πηγή της μάθησης. (Radford, the ethics of being….)

Η Sfard βλέπει τα σύμβολα και τα τεχνουργήματα σαν αδιαχώριστα στοιχεία της μάθησης στα μαθηματικά. Ωστόσο, είναι πλατιά κατανοητό ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων ενώ λύνουν ένα μαθηματικό πρόβλημα. Τα εργαλεία όπως και τα σύμβολα απαιτούν μια σύνθετη διαδικασία εξοικείωσης και συχνά ένα πεδίο αναφοράς στις λειτουργίες της καθημερινής ζωής (Keisoglou, Spyrou) .

Οι διαπιστώσεις αυτές μας οδήγησαν να προτείνουμε μια δραστηριότητα που να περιέχει κάποια αντικείμενα , ώστε να γίνουν εργαλεία επικοινωνίας για τους μαθητές και να μη φτιάξουμε μια «άσκηση επί χάρτου» . Τα απλά εργαλεία που εισάγουμε στη δραστηριότητα (μέρος IV της εργασίας αυτής) εμπλουτίζουν το μαθησιακό περιβάλλον με την κατεύθυνση να γίνει τελικά κατανοητή η έννοια της συνάρτησης **μέσα από μια δράση μέτρησης**.

III3) Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΜΕΝΗ ΜΕΤΡΗΣΗ

Ο ορισμός της συνάρτησης πέρασε από διάφορα στάδια μέχρι να φτάσει στη σημερινή του μορφή. Αυτή η προοδευτική ανάπτυξη έχει γίνει αφορμή για έναν αριθμό επιστημολογικών εμποδίων. Οι πρώτοι ορισμοί της έννοιας της συνάρτησης από τους **Bernoulli, Euler** και **Cauchy** δεν ήταν ολοκληρωμένοι. Αυτό συνέβη επειδή είδαν τη συμμετρία της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής, στο πλαίσιο μιας σχέσης. Η Sierpinska σημειώνει ότι αυτή η «στιγμή» στη θεωρία της έννοιας ως ένα επιστημολογικό εμπόδιο: «θεωρώντας τη σειρά των μεταβλητών να μην έχει σημασία» . Ήταν ο Dirichlet το 1837 που χρησιμοποίησε τη μελέτη του στις σειρές Fourier και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια σειρά Fourier συγκλίνει και δημιούργησε ένα γενικό ορισμό της συνάρτησης:

«αν μια μεταβλητή y σχετίζεται με μια μεταβλητή x ώστε για μια αριθμητική τιμή που δίνεται στο x υπάρχει ένας κανόνας σύμφωνα με τον οποίο μια μοναδική τιμή του y καθορίζεται , τότε το y ονομάζεται συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x».

Η Sierpinska αναφέρει ότι η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης συνολοθεωρητικά σαν ένα συγκεκριμένο είδος σχέσης , λίγο δικαιολογείται από διδακτική και επιστημολογική άποψη. Οι άτυποι ορισμοί που μοιάζουν με αυτούς του Dirichlet είναι ικανοποιητικοί για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σε ανώτερα επίπεδα, όταν η έννοια της σχέσης μελετάται αποκλειστικά, ο ορισμός του Peano μπορεί να συζητηθεί και οι σπουδαστές θα μπορούσαν να διακρίνουν ανάμεσα στους ρόλους και στη σημασία των εννοιών της σχέσης και συνάρτησης (Sierpinska)

Ο ορισμός της συνάρτησης του Dirichlet χρησιμοποιείται ακόμη και το κύριο συμπέρασμα είναι πως αναφέρει την αναγκαιότητα η εξαρτημένη μεταβλητή να υπάρχει μοναδικά προσδιορισμένη και όχι πάντα η ανεξάρτητη.

Επομένως, ο ορισμός του Dirichlet εξέφρασε με ακρίβεια , για πρώτη φορά , την έννοια της **διαμεσολαβημένης μέτρησης**

Αυτό σημαίνει:

Να υπολογιστεί η εξαρτημένη μεταβλητή y , και να κατορθωθεί αυτό αν και δεν υπάρχει άμεση πρόσβαση στο y , με την μέτρηση του x.

Επομένως, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η διαμεσολαβημένη μεταβλητή που δίνει πρόσβαση στην εξαρτημένη μεταβλητή , έχοντας ως αποτέλεσμα την προτεραιότητα της τελευταίας. Αυτή η προτεραιότητα εμφανίζεται καθαρά στη συνθήκη «πολλά- ένα» δηλαδή όταν υπάρχουν πολλά σημεία όπου η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή. Αυτή η επέκταση της συνθήκης της «μοναδικής τιμής» που επιτρέπει ο ορισμός του Dirichlet καθορίζει την ασυμμετρία της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής και είναι το κεντρικό σημείο της μαθηματικής έννοιας της συνάρτησης. (Spyrou, Zagorianakos)

Οι μελέτες που έγιναν σχετικά με τα επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίζονται μέσα από την ανάπτυξη του ορισμού της συνάρτησης είναι ιδιαίτερα πλούσιες (Freudenthal 1983, Sfard 1992, Dubinsky & Harel 1992, Sierpinska 1992, Even & Tirosh 1995).

Η διδασκαλία της συνάρτησης τα πρώτα σχολικά χρόνια , η οποία μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, είναι προσανατολισμένη προς μια κοινή θεώρηση της συνάρτησης , που δίνει έμφαση στη σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής , αγνοώντας την προτεραιότητα της εξαρτημένης μεταβλητής. Επομένως , η κυρίαρχη χρήση των ένα προς ένα συναρτήσεων κάνει ακόμη πιο δύσκολο στους μαθητές να αναγνωρίσουν την σπουδαιότητα της εξαρτημένης μεταβλητής , που είναι ο σκοπός της μέτρησης. Επιπλέον , ο εστιασμός στην σχεσιακή οπτική κρύβει την ποικιλία των εφαρμογών που επιτρέπει ο ορισμός.

Τελικά, η κοινή άποψη για τη διδασκαλία των συναρτήσεων στο σχολείο μπορεί να ειδωθεί σαν μια συλλογή από συνήθειες, όπου «ο χαρακτήρας μιας συνήθειας εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μας κάνει να ενεργήσουμε» (Peirce 1958, vol.V, par. 18). Είναι η κατανόηση της συνάρτησης μέσα από τη συνήθεια που αποκλίνει από τον τυπικό ορισμό, και δημιουργεί μαθηματικά εμπόδια και δυσκολίες.

III4) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΔΡΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Λαμβάνοντας υπόψη τα διδακτικά εμπόδια που πολλές έρευνες έχουν καταδείξει ότι συναντούν οι μαθητές σχετικά με την κατανόηση της συνάρτησης προτείνεται

να συνδέεται η διδασκαλία της συνάρτησης με εργασίες δράσης (action tasks, Bagni 2005, Slavit 1997)

Τα δεδομένα που υπάρχουν δείχνουν ότι οι μαθητές αρχικά αποκτούν μια οπτική δράσης ή λειτουργικότητας της συνάρτησης (Briedenbach, Sfard in Slavit) .Στο πλαίσιο μιας θεωρίας δράσης/ διαδικασίας / αντικειμένου της εννοιολογικής ανάπτυξης , η οπτική της δράσης εμπεριέχει μια κατανόηση της συνάρτησης σαν μια μη μόνιμη κατασκευή. Η οπτική της δράσης αφορά τις υπολογιστικές όψεις που σχετίζονται με τις συναρτήσεις όπως είναι η αριθμητική διαδικασία της «μηχανής συνάρτησης». Δηλαδή το να θεωρήσει κάποιος τη συνάρτηση ως αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει αριθμητικές τιμές. Αυτή η θεώρηση δεν αναζητά μια επίγνωση των μοτίβων και των κανονικοτήτων που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα στις αριθμητικές τιμές των διαδοχικών δεδομένων και αποτελεσμάτων (inputs , outputs) ούτε δίνει σημασία σε τυχαίες και και εξαρτημένες σχέσεις ανάμεσα σε αυτά τα inputs και outputs. Μια θεώρηση δράσης εκφράζεται με τον υπολογισμό μιας μοναδικής ποσότητας για μια μοναδική αριθμητική τιμή, μέσω ενός δεδομένου αλγορίθμου ή κανόνα συσχέτισης. (Slavit)

Είναι ξεκάθαρο ότι οι μαθητές αρχικά εστιάζουν στη δράση όταν διαμορφώνουν την κατανόησή τους για τη συνάρτηση. Μια σημαντική συνέπεια της οπτικής μέσω της δράσης είναι ότι, μέσω του ορισμού, η συνάρτηση θεωρείται με τοπικές ιδιότητές της. Όταν οι σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα των inputs, outputs σχηματίζονται, τότε, μια οπτική προσανατολισμένη στο αντικείμενο της συνάρτησης , μπορεί να κατασκευαστεί. Αλλά το να δημιουργεί κάποιος σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα ζευγών δεν είναι μια εύκολη εργασία. Το πρόβλημα επιδεινώνεται όταν οι συναρτησιακοί συμβολισμοί βρίσκονται αντιμέτωποι με πολλές διαφορετικές μορφές (όπως γραφικές παραστάσεις και εξισώσεις) και όταν οι συναρτησιακές ιδέες βρίσκονται αντιμέτωπες μέσω των μαθηματικών συμβόλων, με αποτέλεσμα να χάνουν τη βάση αναφοράς τους.

Ενώ τα συστατικά αυτής της σχέσης υποστηρίζουν την οπτική μέσω της δράσης, έχει αποδειχτεί ότι οι μαθητές μπορούν να κάνουν πολύ λίγα για να προωθήσουν μια οπτική που να κατευθύνεται στο αντικείμενο της έννοιας , εκτός αν αυτή η σχέση ειδωθεί ως συγκεκριμένη, τοπική ιδιότητα που ολόκληρη η συνάρτηση εμπεριέχει. . (Slavit)

Σημαντικές έρευνες σχετικά με την εκπαίδευση δείχνουν πως η μάθηση της έννοιας της συνάρτησης συχνά διευκολύνεται με την πρώιμη θεώρησή της ως δράση ή από την ερμηνεία της σαν μια διαδικασία , όπου οι αντιστοιχίες ανάμεσα σε ποσότητες (αριθμούς, μεγέθη) πραγματικά λαμβάνουν μέρος.

«Έχουμε μία διευκόλυνση στη σκέψη σχετικά με τις διαδικασίες ή τις αλληλουχίες ενεργειών που μπορούν συχνά να χρησιμοποιηθούν για καλά αποτελέσματα στη μαθηματική αιτιολόγηση. Ένας τρόπος για να σκεφτούμε σχετικά με μια συνάρτηση είναι μια δράση, μια διαδικασία από το πεδίο ορισμού στο σύνολο τιμών » (Thurston, 1994).

Ας υπενθυμίσουμε τη γνώμη της Sfard , σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη των «αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων» μπορεί να θεωρηθεί σαν μια τελική παραγωγή της κατανόησης των διαδικασιών. (Bagni)

Αν η μάθηση των συναρτήσεων ειδωθεί απλά ως δράση ή διαδικασία, θα μπορούσε να είναι ημιτελής και αναποτελεσματική , γράφει στο ίδιο άρθρο ο Bagni. Η δημιουργία των μαθηματικών ιδεών είναι μια σύνθετη διαδικασία που χρειάζεται μια σειρά από βήματα , μια διαδοχική προσέγγιση Η Sfard καλεί reification το πέρασμα από τη θεώρηση μιας διαδικασίας, σε μια σύλληψη που κανονικά αναγνωρίζει το μαθηματικό αντικείμενο. (Bagni)

Το πέρασμα από την πρώιμη θεώρηση μιας ενέργειας στη σύλληψη της διαδικασίας αναφέρεται στο ότι οι μαθητές ασχολούνται με ένα παράδειγμα μαθηματικού αντικειμένου το οποίο , στο μέλλον, θα θεωρηθεί γενικά ως συνάρτηση. (Bagni)

ΜΕΡΟΣ IV

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

IV1) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

IV2) ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ (ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ)

IV3) ΜΕΘΟΔΟΣ

IV4) ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

IV5) ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

IV1) ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

> Γιατί επιλέχθηκε παρουσίαση δραστηριότητας μέσα από εργαλεία- αντικείμενα.

Σύμφωνα με το **Vygotsky** τα τεχνουργήματα (artifacts) και τα ψυχολογικά εργαλεία όπως τα σύμβολα, δίνονται ως γνωστικά εργαλεία , που επεκτείνουν τη σκέψη και τη γνώση , με τη διαμεσολάβηση στις πρακτικές και διανοητικές μας λειτουργίες. Σε μια πρώιμη εποχή, ο Vygotsky θεωρεί τα εργαλεία σαν εισαγωγή σε μια έντονη αλληλεπίδραση με τα υποκείμενα που τα χειρίζονται. Τα εργαλεία είναι επεκτάσεις των ανθρώπινων δυνατοτήτων και μάλιστα όταν αλλάζει το περιβάλλον μέσα από την εισαγωγή νέων δραστηριοτήτων , επηρεάζεται αναπόφευκτα ο τρόπος σκέψης αυτών που χειρίζονται τα εργαλεία.
Ειδικότερα, όσον αφορά τη μαθηματική παιδεία , η Sfard βλέπει τα σύμβολα και τα τεχνουργήματα σαν αλληλένδετα στοιχεία της μάθησης στα μαθηματικά, με τα οποία χρειάζεται να εξοικειωθούν πρώτα οι μαθητές για να τα χρησιμοποιήσουν. (Sfard, 2002)
Για το λόγο αυτό επιλέχθηκαν εργαλεία και όχι παρουσίαση σε πίνακα όπως συνήθως γίνεται στη σχολική τάξη. Τα εργαλεία δόθηκαν για να εμπλουτιστεί το μαθησιακό περιβάλλον και να αλληλεπιδράσουν με τη σκέψη των μαθητών. Επίσης προτιμήθηκε να χρησιμοποιηθούν κάποια εργαλεία για να εμπλακούν στην δραστηριότητα όλοι οι μαθητές και με αυτόν τον τρόπο να οικοδομήσουν τη νέα γνώση μέσα από τη δράση και όχι μέσα από παρακολούθηση μιας διαδικασίας στην οποία δεν θα συμμετείχαν.

> Γιατί επιλέχθηκε ένα πρόβλημα από το φυσικό περιβάλλον

Η **Sierpinska** αναφέρει ότι η πρώτη συνθήκη για την κατανόηση της συνάρτησης είναι, να έχουμε επίγνωση της ύπαρξης του κόσμου γύρω. Κάποιος πρέπει να προσέξει τις αλλαγές και τις σχέσεις ανάμεσά τους σαν να είναι πρόβλημα προς μελέτη, που αξίζει να μελετηθεί. Οι αλλαγές στον περιβάλλοντα κόσμο ήταν πάντα μια πηγή προβληματισμού και άγχους. Ωστόσο η αντίληψη των σχέσεων μεταξύ τους, των κανονικοτήτων , αποτελούν ένα εργαλείο για να αντιμετωπίζει κάποιος αυτές τις αλλαγές.

Στην πραγματικότητα, η έννοια της συνάρτησης μπορεί να θεωρηθεί σαν έαν αποτέλεσμα της ανθρώπινης προσπάθειας να συμφιλιωθεί με τις αλλαγές που παρατηρούνται και γίνονται αντικείμενο εμπειρίας στον κόσμο που μας περιβάλλει.

Σε σχέση με το κίνητρο που πρέπει να έχουν οι μαθητές, η Sierpinska προτείνει να τους δίνονται ευκαιρίες για να χρησιμοποιούν τη γνώση σχετικά με τις συναρτήσεις για να εξηγήσουν φαινόμενα από την καθημερινή τους ζωή , την κοινωνική και οικονομική ζωή, ή σχετικά με συναρτήσεις που συναντώνται σε άλλες επιστήμες. Οι συναρτήσεις μπορούν να εμφανίζονται ως μοντέλα συγκεκριμένων σχέσεων τις οποίες παρατηρούν. Αλλά μπορούν και να εμφανιστούν ως εργαλεία για την αναπαράσταση ενός συστήματος , σε ένα άλλο σύστημα. (Sierpinska)

- Γιατί επιλέχθηκε μια δραστηριότητα που εμπεριείχε δράση μέτρησης;

Όπως προτείνεται από τους Spyrou, Zagorianakos , η διδασκαλία της συνάρτησης θα μπορούσε να συνδυαστεί με έργα δράσης .

Επομένως μια δυνατή απάντηση για την εισαγωγή της έννοιας είναι ο συσχετισμός της με συγκεκριμένες δραστηριότητες , όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή ζητείται και χρησιμοποιείται ως ένα μέσο για τον υπολογισμό ενός στόχου, δηλαδή της εξαρτημένης μεταβλητής. Υπάρχουν ουσιαστικά επιχειρήματα που υποστηρίζουν την ιδέα ότι η εμπειρία της μέτρησης είναι συνυφασμένη με την πραγματικότητα των μαθητών όπως και οι εφαρμογές οι οποίες διδάσκονται στο σχολείο. (Spyrou, Zagorianakos)

Μια θεώρηση δράσης για τη συνάρτηση μπορεί να δοθεί με τον υπολογισμό μιας ποσότητας μέσω μιας άλλης ποσότητας και ενός δοσμένου αλγορίθμου ή κανόνα που τις συσχετίζει. (Slavit, 1997).

Το απόσπασμα αυτό στάθηκε η αφορμή για τη πραγματοποίηση αυτής της εργασίας. Έτσι , η δραστηριότητα που περιγράφεται παρακάτω, επιλέχθηκε με βάση ακριβώς αυτό το σκεπτικό. Υπάρχει ένα μέγεθος που επιδέχεται μέτρηση από τους ίδιους τους μαθητές (η διαφορά ύψους του νερού σε δοχείο) και ένα άλλο μέγεθος που προσδιορίζεται μέσα από αυτή τη δράση μέτρησης (ο όγκος του σώματος που ρίχνουμε μέσα στο δοχείο με το νερό).

Με τη συμπλήρωση κατάλληλα σχεδιασμένου Φύλλου Εργασίας (υπάρχει στο Παράρτημα) έγινε προσπάθεια να διερευνηθεί αν το στοιχείο του ορισμού που αφορά το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής προέκυψε ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα της διαδικασίας ώστε να αποτελέσει μέρος της εμπειρίας των μαθητών και όχι μια στείρα συνθήκη του ορισμού που δεν θα είχε νόημα στη σκέψη των μαθητών.

IV2) ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Η δραστηριότητα υλοποιήθηκε σε ένα τμήμα 24 μαθητών της Β' Τάξης Γυμνασίου. Επιλέχθηκε η τάξη αυτή στην οποία η έννοια της συνάρτησης εισάγεται για πρώτη φορά στους μαθητές (στην Α' Γυμνασίου αναφέρεται ως «σχέση» μέσα από το παράδειγμα των αναλόγων ποσών).

Οι μαθητές είχαν διδαχτεί πρόσφατα το κεφάλαιο που αφορά τις συναρτήσεις ώστε να έχουν εξοικείωση με τις αντίστοιχες έννοιες. Η επαφή τους με την συνάρτηση είχε γίνει ουσιαστικά για πρώτη φορά (στην πρώτη τάξη είχαν γίνει μόνο αναφορές σε σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών).Αυτός ήταν ο λόγος που επιλέχθηκε η τάξη αυτή.

Αποφασίσαμε η δραστηριότητα να έχει εξωμαθηματικό πλαίσιο ώστε να εισάγονται οι έννοιες με φυσικό τρόπο και να γίνουν πιο εύκολα δεκτές από το σύνολο των μαθητών και ταυτόχρονα να φανεί πως τα μαθηματικά αποτελούν μια αναγκαιότητα για την εξήγηση του κόσμου που μας περιβάλλει και όχι κάτι αφηρημένο και χωρίς πλαίσιο αναφοράς.

Επιλέχθηκε επίσης να γίνει η παρουσίαση μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένο μαθησιακό περιβάλλον που να περιλαμβάνει εργαλεία και να ζητείται από τους μαθητές να κάνουν μετρήσεις, δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή να προκύπτει μέσα από μέτρηση και όχι από κάποιον πίνακα όπως συνηθίζεται στα σχολικά βιβλία. Ο λόγος ήταν για να γίνει αντιληπτή η ανάγκη των μετρήσεων της ανεξάρτητης μεταβλητής στην οποία είχαν πρόσβαση (διαφορά ύψους

εκτοπισμένου νερού) για τον υπολογισμό της εξαρτημένης (όγκος σώματος), στην οποία δεν είχαν πρόσβαση.

Επιλέχθηκε η έννοια της άνωσης η οποία είναι γνωστή από την ύλη της Φυσικής που διδάσκεται σε αυτή την τάξη.

Για να είναι απλή η δραστηριότητα δεν αναφερθήκαμε στην έννοια της πυκνότητας αλλά απομονώσαμε την συνθήκη « όταν ένα σώμα βυθίζεται στο νερό, εκτοπίζει τόσο όγκο νερού όσος είναι ο όγκος του σώματος» .

Μέσα από μια δραστηριότητα που θα περιγραφεί παρακάτω παρουσιάσαμε τη συνάρτηση ως δράση μέτρησης και εξετάσαμε αν προέκυψε η αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής της συνάρτησης.

Σχεδιασμός - Υλικά και χειρατπικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν

Τα υλικά της δραστηριότητας επιλέχθηκε να είναι πολύ απλά ώστε να μπορούν οι μαθητές να επαναλάβουν το βασικό μέρος της δραστηριότητας όποτε θελήσουν.

Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν:

ΤΑ ΥΛΙΚΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Ένα πλαστικό μπουκάλι εμφιαλωμένο νερό.

Ένα δεύτερο όμοιο μπουκάλι το οποίο κόπηκε στο πάνω μέρος ώστε να γίνει κυλινδρικό δοχείο.

Μαρκαδόρος για να σημειωθεί η αρχική στάθμη του νερού.

Βότσαλα με διαφορετικούς όγκους μεταξύ τους.

Χάρακας

Φύλλα εργασίας για συμπλήρωση από τους μαθητές.

Υλοποίηση – Παρουσίαση

Η εκπαιδευτικός της τάξης είπε στους μαθητές ότι το τμήμα τους επιλέχθηκε για να γίνει μια μελέτη , επειδή είναι πολύ σοβαρό και καλό τμήμα και θα μπορεί να γίνει σωστά η μελέτη αυτή.

Στη συνέχεια έγινε ένας διάλογος με τους μαθητές σχετικά με το φαινόμενο της άνωσης και το τι συμβαίνει όταν ένα σώμα βυθίζεται στο νερό ή επιπλέει στην επιφάνεια. Οι μαθητές απάντησαν σε όλες τις ερωτήσεις και έγινε φανερό ότι ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της άνωσης.

Στη δραστηριότητα που θα πραγματοποιούνταν, θα χρειαζόταν μόνο να εντοπίσουν οι μαθητές το γεγονός ότι ο όγκος ενός σώματος που βυθίζεται σε

ένα δοχείο με νερό, μετατοπίζει ίδιο όγκο νερού οπότε ανεβαίνει η στάθμη του νερού στο δοχείο.

Αφαιρέσαμε άλλες έννοιες που συνδέονται με το φαινόμενο της άνωσης (πυκνότητα, ειδικό βάρος , βάρος σώματος και εκτοπιζόμενου υγρού) για λόγους απλότητας και αποφυγής συγχύσεων.

Κατόπιν έγινε συζήτηση για την έννοια του όγκου και τι γνωρίζουν για αυτόν μέσα από τα μαθήματα των μαθηματικών και της φυσικής. Πάλι οι μαθητές είχαν την απαραίτητη γνώση για την έννοια του όγκου.

Τελευταίο βήμα για την προετοιμασία τους, ήταν να γίνει παρουσίαση της δραστηριότητας για να δουν τι ακριβώς τους ζητούνταν να κάνουν.

Η διαδικασία ήταν η εξής:

Στην έδρα ήταν τοποθετημένα τα δύο μπουκάλια που αναφέρθηκαν παραπάνω και η εκπαιδευτικός που σχεδίασε τη δραστηριότητα ρώτησε τους μαθητές αν ξέρουν να υπολογίζουν το εμβαδό της κυκλικής βάσης του δοχείου. Το αντίστοιχο κεφάλαιο δεν είχε ακόμη διδαχτεί αλλά οι μαθητές μπόρεσαν να υποδείξουν πως πρέπει να μετρηθεί η ακτίνα της βάσης και στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδό της βάσης από το γνωστό γι αυτούς τύπο $E= \pi\rho^2$.

Το αποτέλεσμα γράφτηκε στον πίνακα και στα φύλλα εργασίας τους.

Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός έριξε νερό στο κυλινδρικό δοχείο μέχρι ένα ύψος.

Πήρε το μαρκαδόρο και σημείωσε το ύψος της στάθμης του νερού.

Τη μέτρησε με το χάρακα και σημειώθηκε το αποτέλεσμα.

Έριξε ένα από τα βότσαλα μέσα στο νερό και μέτρησε το νέο ύψος της στάθμης του νερού.

Υπολογίστηκε η διαφορά ύψους του νερού και στη συνέχεια υπολογίστηκε ο όγκος του εκτοπισμένου νερού ο οποίος είναι ταυτόχρονα και ο όγκος του βυθισμένου σώματος, όπως ήδη είχε συζητηθεί.

Συζητήθηκε πως με αυτόν τον τρόπο είχαν ένα απλό εργαλείο για να υπολογίζουν τον όγκο σε οποιοδήποτε σώμα μπορούσε να βυθιστεί στο δοχείο, ανεξάρτητα από το σχήμα του.

Ζητήθηκε από τους μαθητές να έρχονται ανά δύο στην έδρα και ο ένας να κάνει πάλι το ίδιο βυθίζοντας ένα από τα βότσαλα στο νερό και ο άλλος να σημειώνει το αποτέλεσμα στο φύλλο εργασίας.

Η διαδικασία έπρεπε να επαναληφθεί τρεις φορές από κάθε ζεύγος μαθητών ώστε να συμπληρωθεί ο πίνακας του φύλλου εργασίας.

Για λόγους συντόμευσης της διαδικασίας αυτό δεν έγινε από όλους τους μαθητές αλλά από τα πρώτα πέντε ζευγάρια και στη συνέχεια δόθηκαν οι μετρήσεις και στους υπόλοιπους.

Στη συνέχεια οι μαθητές συμπλήρωσαν τον πίνακα του Μέρους 1 του φύλλου εργασίας , εργαζόμενοι πάλι σε ομάδες των δύο .

Στο Μέρος 2 είχαν δοθεί πέντε ερωτήσεις ανοιχτού τύπου που είχαν στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές μέσα από τη δραστηριότητα στη χρήση της κατάλληλης συνάρτησης και να εξεταστεί αν προκύπτει η αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής.

Πριν απαντηθεί η κάθε ερώτηση από τους μαθητές , γινόταν μια συζήτηση, ώστε να δοθούν οι απαραίτητες διευκρινίσεις.

Μετά τις διευκρινίσεις οι μαθητές απαντούσαν μόνοι τους στα ζητούμενα της κάθε ερώτησης.

Παρατηρήσεις

Έγινε προσπάθεια να υπάρχει το απαραίτητο ενδιαφέρον των μαθητών και η σοβαρότητα που χρειαζόταν για να ασχοληθούν με τη δραστηριότητα. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ καλά.

Εξηγήθηκε πως η όλη διαδικασία δεν είχε την έννοια του να εξετάσει ή να κρίνει τις γνώσεις τους και ότι δεν υπήρχε πρόβλημα αν αυτοί έκαναν κάποιο .λάθος. Το μόνο που τους ζητούνταν να κάνουν, ήταν να απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα , όσο πιο σωστά μπορούσαν.

Οι μαθητές ρώτησαν αν τα αποτελέσματα θα είχαν κάποιο αντίκτυπο στην επίδοσή τους στο σχολείο και διαβεβαιώθηκαν πως δεν υπήρχε τέτοιο θέμα.

Ρώτησαν ακόμη αν κάνοντας κάποιο λάθος θα επηρεαζόταν η όλη προσπάθεια και τους εξηγήθηκε πως δεν χρειαζόταν να ανησυχούν.

Γενικά υπήρχε πολύ καλό κλίμα ενδιαφέροντος (που δεν είναι πάντα δεδομένο σε μια σχολική τάξη).

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις τους ήταν ικανοποιητικές , οπότε μπορούσαν να συμμετέχουν στη δραστηριότητα χωρίς να γίνει οποιαδήποτε παρανόηση.

Η δραστηριότητα ήταν σχεδιασμένη έτσι ώστε να υπάρχει συμμετοχή από όλους τους μαθητές μέσα από τη δράση μέτρησης, χωρίς να γίνεται διάκριση σε «καλύτερες» ή «χειρότερες» συμμετοχές. Γι αυτό έγινε και η επιλογή του να συζητούν τα αποτελέσματά τους σε ομάδες των δύο ώστε να μην υπάρχει κανένα εμπόδιο στη συμμετοχή όλων (ομαδοσυνεργατική).

Επίσης τονίστηκε ότι όλες οι απαντήσεις ήταν χρήσιμες για τη συμμετοχή στη μελέτη που θα γινόταν. Έγινε σαφές ότι όλοι μαζί συνεργάζονταν για να εκτελεστεί ένα έργο.

Μερικοί μαθητές, που δεν πρόλαβαν να τελειώσουν τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας, έμειναν και μετά το τέλος της διδακτικής ώρας γιατι ήθελαν να το συμπληρώσουν όλο , όπως τους είχε ζητηθεί να γίνει. Αυτό δείχνει ότι η δραστηριότητα αντιμετωπίστηκε με πολλή σοβαρότητα και ενδιαφέρον από τους μαθητές.

«Μέτρα ό,τι είναι μετρήσιμο και κάνε μετρήσιμο ό,τι δεν είναι» - Γαλιλαίος

Παραδοχές

Ως προς τον τρόπο παρουσίασης:

Μέσα από ένα μη μαθηματικό πρόβλημα όπως αυτό της μετατόπισης του υγρού σε ένα δοχείο σε τόσο όγκο όσο ο όγκος του σώματος που ρίχνουμε στο δοχείο αυτό, οι μαθητές οδηγούνται στο να χρησιμοποιήσουν την έννοια της

συνάρτησης ως εργαλείο που διευκολύνει προβλήματα της πραγματικής ζωής και αποφεύγεται η παρανόηση του να δουν μια μαθηματική έννοια ως κάτι αφηρημένο και ξένο σε σχέση με την πραγματικότητά τους.

Ως προς το επικοινωνιακό κλίμα :
Φιλική στάση, ομαδοσυνεργατική μέθοδος , όχι κριτική στα λάθη, εξήγηση ότι τα λάθη είναι κι αυτά μέρος της διαδικασίας.
Δόθηκε προσοχή ώστε η πειραματική διαδικασία να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών, στοιχείο που θεωρήθηκε απαραίτητο για να γίνει σωστά η όλη δραστηριότητα.

IV3) ΜΕΘΟΔΟΣ

Ερωτήματα προς μελέτη:

1) Έχουν κατανοήσει οι μαθητές το ρόλο των μεταβλητών σε μια συνάρτηση;
2) Μπορούν να οδηγηθούν στην αναγκαιότητα του μονοσήμαντου της συνάρτησης μέσα από μια δράση μέτρησης;

Ως ερευνητικό εργαλείο επιλέχθηκε ένα , φύλλο εργασίας, κατάλληλα διαμορφωμένο για τις ανάγκες της μελέτης μας, το οποίο δόθηκε για συμπλήρωση στους μαθητές.

Το Φύλλο Εργασίας

Το φύλλο εργασίας αποτελούνταν από δύο μέρη:

Στο **Μέρος 1** σκοπός ήταν να αναζητηθεί το πώς σχετίζεται η διαφορά ύψους της στάθμης του νερού με τον όγκο του εκτοπιζόμενου υγρού και άρα και με τον όγκο του σώματος.
Η διαφορά ύψους, η οποία υπολογίστηκε με μετρήσεις από τους ίδιους τους μαθητές ήταν η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης που παράχθηκε.

Δόθηκε για συμπλήρωση ο παρακάτω πίνακας:

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ	Ύψος νερού πριν (σε εκατοστά)	Ύψος νερού μετά (σε εκατοστά)	Διαφορά ύψους (αφαιρούμε το αποτέλεσμα στις δύο προηγούμενες στήλες)	Διαφορά ύψους επί εμβαδό βάσης	Όγκος αντικειμένου (σε κυβικά εκατοστά)
Αντικείμενο 1					
Αντικείμενο 2					
Αντικείμενο 3					
Αντικείμενο 4					

Οι δύο πρώτες στήλες ήταν αποτέλεσμα της δράσης μέτρησης των μαθητών. Στην πρώτη στήλη κρατήσαμε σταθερό το αρχικό ύψος νερού (πριν τη βύθιση του σώματος) για λόγους απλοποίησης του προβλήματος και η δεύτερη συμπληρωνόταν μετά από μέτρηση που έκαναν οι ίδιοι οι μαθητές.
Οι άλλες δύο στήλες συμπληρώθηκαν με υπολογισμό. Στην προτελευταία στήλη δόθηκαν οδηγίες να γραφεί το γινόμενο που κάθε φορά θα υπολογίζαμε ενώ το αποτέλεσμα γράφτηκε στην τελευταία στήλη (υπολογισμός όγκου αντικειμένου).

Στο **Μέρος 2** δόθηκαν κυρίως ερωτήσεις ανοιχτού τύπου όπου ζητούνταν σύντομες απαντήσεις, με σκοπό να εξεταστεί αν έγινε κατανοητή η ανάγκη του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής της συνάρτησης του όγκου αντικειμένου.

Συγκεκριμένα:

Α) Γράψτε τον τύπο που δίνει τον όγκο του αντικειμένου χρησιμοποιώντας λέξεις και όχι σύμβολα:

……
……

Σκοπός: να διατυπώσουν οι μαθητές τη λεκτική έκφραση της συνάρτησης όπως προκύπτει από το μη μαθηματικό πρόβλημα που δόθηκε.

Β) Στον προηγούμενο τύπο βλέπετε τρία μεγέθη. Σκεφτείτε ποια από αυτά μεταβάλλουμε στο πείραμά μας και ποια μένουν σταθερά και βάλτε σε κύκλο την κατάλληλη λέξη παρακάτω:

Δοχείο: σταθερό /μεταβαλλόμενο

Βάση δοχείου: σταθερή/μεταβαλλόμενη

Αντικείμενα που ρίχνουμε στο δοχείο: σταθερό/μεταβαλλόμενο

ύψος νερού: σταθερό/μεταβαλλόμενο

όγκος αντικειμένων: σταθερό /μεταβαλλόμενο

Σκοπός: να ειδωθούν τα μεγέθη ως σταθερά ή μεταβλητά , ώστε να εισαχθεί η έννοια της συνάρτησης ως εργαλείο για την μελέτη της δραστηριότητας.

Γ) Συμπληρώστε τώρα τον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΓΕΘΗ	ΣΤΑΘΕΡΟ Ή ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ;	ΣΥΜΒ ΟΛΙΣΜΟΣ (στα μεταβλητά μεγέθη)
Ύψος εκτοπισμένου νερού (διαφορά ύψους)		
εμβαδό βάσης δοχείου		
Όγκος αντικειμένου		

Σκοπός: Συνέχεια της ερώτησης Γ για να γίνει η μετάβαση από τον τύπο του όγκου στην συμμεταβολή και άρα στην έννοια της συνάρτησης.

Δ) Τώρα γράψτε τον τύπο της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα σύμβολα x και y για τις μεταβλητές .

……
……..

Σκοπός: Να μεταφερθεί ο μαθητής στο πλαίσιο γνώσεων που έχει σχετικά με τη συνάρτηση. Οι μαθητές αυτοί είχαν μελετήσει την έννοια της συνάρτησης και ολοκληρώσει το σχετικό κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου, μερικές μέρες πριν γίνει η δραστηριότητα.

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.

Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;

Δώστε μια εξήγηση.

……
……
……
……
……
……

Σκοπός: Να διερευνηθεί αν μέσα από την διαδικασία που ακολουθήθηκε (δράση μέτρησης) , προέκυψε η ανάγκη του μονοσήμαντου της συνάρτησης .Να δοθεί δηλαδή η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη μέτρηση και να ελεγθεί αν η απαίτηση του μονοσήμαντου προκύπτει ως αναγκαιότητα μέσα από τη διαδικασία (και όχι ως μια «παραξενιά» του ορισμού, με άγνωστη για τους μαθητές βάση).

Παρακάτω φαίνεται ενδεικτικά ένα από τα Φύλλα Εργασίας , συμπληρωμένο από κάποιον μαθητή:

ΜΕΡΟΣ 1- ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Εμβαδό βάσης: E = 50,3 cm²

Συμπληρώστε <u>τις δύο πρώτες στήλες</u> αρχικά και τις υπόλοιπες στο θρανίο σας.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ	Ύψος νερού πριν (σε εκατοστά)	Ύψος νερού μετά (σε εκατοστά)	Διαφορά ύψους (αφαιρούμε το αποτέλεσμα στις δύο προηγούμενες στήλες)	Διαφορά ύψους επί εμβαδό βάσης	Όγκος αντικειμένου (σε κυβικά εκατοστά)
Αντικείμενο 1	10 cm	11 cm	1 cm	1·50,3	50,3 cm³
Αντικείμενο 2	10 cm	10,8 cm	0,8 cm	0,8·50,3	40,24 cm³
Αντικείμενο 3	10 cm	13 cm	3 cm	3·50,3	150,9 cm³
~~Αντικείμενο 4~~					

ΜΕΡΟΣ 2- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Α) Γράψτε τον τύπο που δίνει τον όγκο του αντικειμένου χρησιμοποιώντας λέξεις και όχι σύμβολα:

....όγκος αντικειμένου = Εμβ. βάσης • διαφορά ύψους.....

Β) Στον προηγούμενο τύπο βλέπετε τρία μεγέθη. Σκεφτείτε ποια από αυτά μεταβάλλουμε στο πείραμά μας και ποια μένουν σταθερά και βάλτε σε κύκλο την κατάλληλη λέξη παρακάτω:

Δοχείο: σταθερό / μεταβαλλόμενο

Βάση δοχείου: σταθερό / μεταβαλλόμενη

Αντικείμενα που ρίχνουμε στο δοχείο: σταθερό / μεταβαλλόμενο

Ύψος νερού: σταθερό / μεταβαλλόμενο

Όγκος αντικειμένων: σταθερό / μεταβαλλόμενο

Γ) Συμπληρώστε τώρα τον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΓΕΘΗ	ΣΤΑΘΕΡΟ Ή ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ;	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ (στα μεταβλητά μεγέθη)
Ύψος εκτοπισμένου νερού (διαφορά ύψους)	ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ	x
εμβαδό βάσης δοχείου	ΣΤΑΘΕΡΟ	50 3
Όγκος αντικειμένου	ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ	y

3

Δ) Τώρα γράψτε τον τύπο της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα σύμβολα x και y για τις μεταβλητές .

y=50,3 x

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.

Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;

Δώστε μια εξήγηση.

Ναι δεν μπορεί.
Αν θα ήταν διαφορετικοί ο όγκος
τότε η εκτόπιση θα ήταν διαφορετική

IV4) ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στις ερωτήσεις Β και Γ διερευνάται το αν είναι ξεκάθαρο ποια από τα μεγέθη που συμμετέχουν στη συνάρτηση είναι σταθερά και ποια μεταβλητά.

Ερώτηση Β:

Σωστές απαντήσεις: 16

Απαντήσεις με λάθη: 8

Ερώτηση Γ:

Απαντήθηκε σωστά από όλους.

Ερώτηση Δ:

Απαντήθηκε σωστά από όλους.

Η ερώτηση Ε είναι αυτή που δείχνει αν έγινε κατανοητή μέσα από την παρουσίαση η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη μέτρηση, αν δηλαδή κατανοήθηκε ως ένα αξιόπιστο εργαλείο που δίνει για κάθε μέτρηση ένα μόνο αποτέλεσμα.

Ερώτηση Ε:

Στο σύνολο των 24 φύλλων εργασίας:

Σωστές απαντήσεις: 19

Λανθασμένες απαντήσεις: 3

Δεν έδωσαν απάντηση: 2

Ενδιαφέρουσες είναι οι παρακάτω απαντήσεις:

Μαθητής Α:

Όχι, δεν μπορούν να έχουν διαφορετικό όγκο γιατί όσο ύψος έχει η διαφορά ύψους του υγρού (πριν και μετά) επί το εμβαδό της βάσης , τόσος είναι κι ο όγκος του αντικειμένου που ρίξαμε μέσα. Άρα αφού το ύψος εκτοπισμένου νερού ήταν ίδιο και τις δύο φορές , τότε ο όγκος των πετρών είναι ίδιος.

Η απάντηση **του μαθητή Α** όπως δόθηκε στο φύλλο εργασίας:

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.

Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;

Δώστε μια εξήγηση.

Όχι, δε μπορούν να έχουν διαφορετικό όγκο γιατί ~~...~~ όσο ύψος ~~...~~ έχει η διαφορά ύψους του νερού (μικρό και μεγάλο), επί το εμβαδόν της βάσης, τόσος είναι και ο όγκος των αντικειμένων που ρίξαμε μέσα. Άρα αφού το ύψος εκτοπισμένου νερού ήταν ίδιο και στις δύο φορές, τότε ο όγκος των πετρών είναι ίδιος.

Μαθητής Β :

Όχι, τα αντικείμενα θα έχουν ίδιο όγκο γιατί αν είχαν διαφορετικό, το ύψος του νερού θα ήταν πιο ψηλά ή πιο χαμηλά στο ένα μπουκάλι από το άλλο.

Η απάντηση **του μαθητή Β** όπως δόθηκε στο φύλλο εργασίας:

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.

Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;

Δώστε μια εξήγηση.

Όχι τα αντικείμενα θα έχουν ίδιο όγκο γιατί αν είχαν διαφορετικό το ύψος του νερού θα ήταν πιο ψηλά ή πιο χαμηλά στο ένα μπουκάλι από το άλλο.

Μαθητής Γ:

Όχι, γιατί όταν ένα αντικείμενο βυθίζεται μέσα στο νερό εκτοπίζει τον ίδιο όγκο νερού με τον όγκο του σώματος. Άρα τα αντικείμενα έχουν τον ίδιο όγκο αφού το ύψος του νερού και στα δυο δοχεία είναι ίδιο.

Η απάντηση **του μαθητή Γ** όπως δόθηκε στο φύλλο εργασίας:

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.

Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;

Δώστε μια εξήγηση.

Όχι τα αντικείμενα θα έχουν ίδιο όγκο γιατί αν είχαν διαφορετικό το ύψος του νερού θα ήταν πιο ψηλά ή πιο χαμηλά στο ένα μπουκάλι από το άλλο.

Και στις τρεις- αλλά και στις περισσότερες από τις υπόλοιπες- απαντήσεις οι μαθητές είχαν ξεκάθαρο στο νου τους ποια ήταν η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποια η εξαρτημένη και επίσης μπορούσαν να διακρίνουν ότι η συνάρτηση είναι ένα εργαλείο μέτρησης το οποίο πρέπει να είναι αξιόπιστο, οπότε το αποτέλεσμα της μέτρησης θα έπρεπε να είναι κάθε φορά μοναδικό.

Είναι φανερό δηλαδή, ότι οι μαθητές είδαν τη συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη μέτρηση και το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής προέκυψε ομαλά μέσα από τη διαδικασία.

IV5) ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κατά την υλοποίηση της δραστηριότητας έγινε προσπάθεια να υπάρχει συνεργατικό κλίμα και επιλέχθηκε ένα πείραμα στο οποίο να μπορούν να εμπλακούν όλοι οι μαθητές. Το πείραμα αυτό ήταν έτσι κατασκευασμένο ώστε μέσα η διαδικασία να γίνεται με την έννοια της διαμεσολαβημένης μέτρησης. Έτσι τα μαθηματικά συνδέθηκαν άμεσα με τον πραγματικό κόσμο, και δεν παρουσιάστηκαν σαν ένα ανθρώπινο δημιούργημα που δεν σχετίζεται με πρακτικές εφαρμογές όπως συχνά πιστεύουν πολλοί μαθητές.

Από το μεγάλο πλήθος των σωστών απαντήσεων στο φύλλο εργασίας θα μπορούσαμε να πούμε ότι η δραστηριότητα ήταν τέτοια που ήταν προσβάσιμη από το σύνολο των μαθητών.

Η έννοια της συνάρτησης, η οποία σε αυτή την τάξη εισάγεται για πρώτη ουσιαστικά φορά στους μαθητές, προέκυψε μέσα από αυτή τη διαδικασία <u>ως εργαλείο που είναι ακριβές</u> και άρα δεν επιδέχεται δύο διαφορετικές μετρήσεις.

Η διδασκαλία της συνάρτησης ως δράση μέτρησης, θα μπορούσαμε να προτείνουμε ότι έχει δύο πλεονεκτήματα: συνδέει την έννοια της συνάρτησης με τον πραγματικό κόσμο και εισάγει το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής με τρόπο ομαλό και αδιαμφισβήτητο. Επίσης αυτά γίνονται με απλό τρόπο και είναι εύκολα προσβάσιμα από το σύνολο των μαθητών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα υπάρχουν :

- σελίδες από τα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου, όπου είναι σημειωμένη σε κόκκινο πλαίσιο η παρουσίαση του ορισμού της συνάρτησης
- σελίδες από τα βιβλία εκπαιδευτικού όπου δίνονται οδηγίες για τη διδασκαλία κάθε ενότητας
- σελίδες από το Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου , 2011 (Πράξη Νέο Σχολείο)
- σελίδες σχετικά με τη διδασκαλία της συνάρτησης από το Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική εκπαίδευση –Πράξη «Νέο Σχολείο », 2011
- το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας

ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δεν υπάρχει η λέξη «συνάρτηση» αλλά δίνεται ο όρος «σχέση» και γίνεται έμμεσα μια αρχική μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων που προκύπτουν από τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Παρακάτω βλέπουμε τη σελίδα που αναφέρει την έννοια «σχέση» και τις δύο σελίδες ανακεφαλαίωσης που δείχνουν πώς γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στις έννοιες συνάρτησης/σχέσης χωρίς όμως αυτή να αναφέρεται ως έννοια.

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

- *Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;*
- *Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;*

Βάρος σε Kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 € το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

- *Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:*

Τιμή	6 €	2,8 €	5,2 €	3,2 €		3,6 €	4,8 €	2,4 €	1,6 €	4,4 €	2 €
Κιλά											

- *Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις ένα γενικό κανόνα.*

Μαθαίνουμε

- Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.
- Δύο ποσά **x** και **y** είναι **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο: $\frac{y}{x} = \alpha$. Το πηλίκο **α** λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.
  - Τα ανάλογα ποσά **x** και **y** συνδέονται με τη σχέση: $y = \alpha \cdot x$ όπου **α** ο συντελεστής αναλογίας.
  - Όταν το ποσό **y** είναι **ποσοστό** του ποσού **x**, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{\alpha}{100} \cdot x$ και είναι **ανάλογα**, με **συντελεστή αναλογίας** το $\frac{\alpha}{100}$ ή **α%**.
- Η σχέση $y = \alpha \cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού.

Ανακεφαλαίωση

Λόγος δύο αριθμών:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \text{ και}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Ποσά ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$\frac{y}{x} = \alpha \text{ ή } y = \alpha \cdot x$$

όπου, α συντελεστής αναλογίας

Πίνακας τιμών:

$\cdot 0,3$

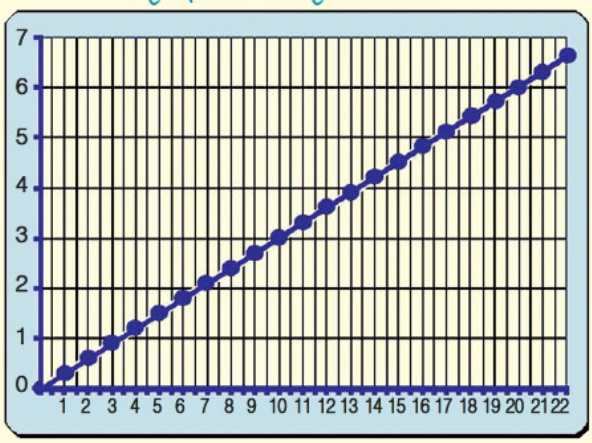
y	0	0,3	0,9	1,5	3	3,6	4,5	5,4	6
x	0	1	3	5	10	12	15	18	20

$\cdot 20$ $\cdot 15$ $\cdot 15$ $\cdot 20$

$y = 0,3 \cdot x$
ή και
$y = 30\% \cdot x$

Το y είναι ποσοστό του x

Γραφική παράσταση



Κάθε **ζευγάρι τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών** αναπαρίσταται από **ένα σημείο** του επιπέδου με συντεταγμένες το ζευγάρι τιμών (x, y)

Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια **ημιευθεία**, με αρχή το σημείο **O(0,0)**

Κάθε σημείο της ημιευθείας η οποία αναπαριστά μια σχέση αναλογίας, έχει συντεταγμένες που ικανοποιούν αυτήν τη **σχέση αναλογίας y = 0, 3· x**

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$y \cdot x = a \quad \text{ή} \quad y = \frac{a}{x}$$

όπου x, y $\neq 0$

Πίνακας τιμών:

:15

:10

x	15	5	3	2,5	1,5	1,25	1
y	1	3	5	6	10	12	15

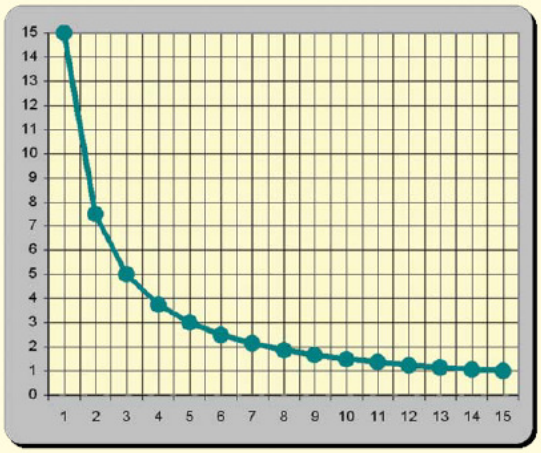
·10

·15

Δύο μεγέθη λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν μεταβάλλονται έτσι ώστε το ένα μέγεθος **πολλαπλασιάζεται** επί έναν αριθμό όταν το άλλο, ταυτόχρονα, **διαιρείται με τον ίδιο αριθμό**.

Δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x και y, δεν μπορούν να πάρουν τιμές ίσες με μηδέν.

Γραφική παράσταση



Τα **σημεία** που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται, σε μια **καμπύλη γραμμή**.

Η καμπύλη αυτή, που έχει χαρακτηριστικό σχήμα και ιδιότητες, ονομάζεται **υπερβολή**.

Η **υπερβολή** δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες **Ox** και **Oy**, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της **δεν παίρνουν ποτέ** την τιμή **0**.

ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δίνεται για πρώτη φορά στους μαθητές ο όρος «συνάρτηση» μέσα από μια δραστηριότητα – παράδειγμα, καθώς και ένας άτυπος ορισμός της συνάρτησης.Το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής αναφέρεται χωρίς να δικαιολογείται με κάποιον τρόπο.

Δεν γίνεται κάποια διάκριση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24$ €,

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33$ €.

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x$ δηλαδή $y = 0{,}03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0{,}03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ €.

Με τη σχέση αυτή **κάθε τιμή της μεταβλητής x** (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** (αύξηση).
Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **«η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x»**. Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση $y = 0{,}03x$ έχουμε:

Για $x = 700$, $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$.
Για $x = 800$, $y = 0{,}03 \cdot 800 = 24$.
Για $x = 900$, $y = 0{,}03 \cdot 900 = 27$.
Για $x = 1000$, $y = 0{,}03 \cdot 1000 = 30$.
Για $x = 1100$, $y = 0{,}03 \cdot 1100 = 33$.

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης $y = 0{,}03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης , σε μορφή υπενθύμισης από την προηγούμενη τάξη. Και πάλι δεν γίνεται κάποια ευρύτερη αναφορά στην απαίτηση του μονοσήμαντου της εξαρτημένης μεταβλητής, ούτε δίνεται κάποια εξήγηση για την ύπαρξη της απαίτησης αυτής , στον – άτυπο- ορισμό που δίνεται.

4.1 Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

- ✓ *θυμάμαι τι ονομάζεται συνάρτηση και τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.*
- ✓ *Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$.*
- ✓ *Μαθαίνω να βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης $y = ax^2$ από τη γραφική της παράσταση.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
– Ο αριθμός y που είναι ίσος με το τετράγωνο ενός αριθμού x είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός ορθογωνίου με πλάτος x και διπλάσιο μήκος είναι y = ...
– Το εμβαδόν y ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα x είναι y = ...

2. Στην πρώτη πρόταση, όταν ο x πάρει τις τιμές –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές του y;

3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη (x, y) που προσδιορίσατε και να σχεδιάσετε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a > 0$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

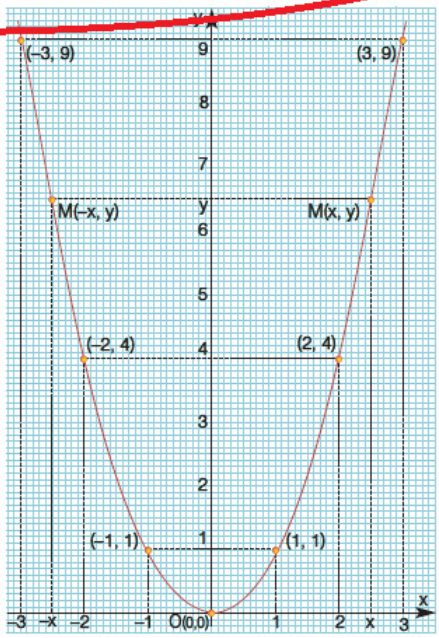
Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ' ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η συνάρτηση παρουσιάζεται μονο ως μια «συσχέτιση μεταβλητών» και δεν υπάρχουν δραστηριότητες που να υπαινίσσονται το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής. Δεν γίνεται καμιά διάκριση συνάρτησης – σχέσης. Η οδηγία προτείνει να δοθούν κατάλληλες δραστηριότητες σχετικά με το τι είναι συνάρτηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - **Συναρτήσεις**

Ενδεικτικός προγραμματισμός 3ου Κεφαλαίου

3.1	Η έννοια της συνάρτησης	2 ώρες
3.2	Καρτεσιανές συντεταγμένες. Γραφική παράσταση συνάρτησης	3 ώρες
3.3	Η συνάρτηση $y = \alpha x$	3 ώρες
3.4	Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$	3 ώρες
3.5	Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή	2 ώρες
	ΣΥΝΟΛΟ	**13 ώρες**

3.1. Η έννοια της συνάρτησης

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: **2 ώρες**

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

Προτείνονται δύο ώρες για την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης.

2. Διδακτικοί Στόχοι

Οι μαθητές επιδιώκεται:
- να εκφράζουν ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, εφόσον αυτό είναι δυνατόν,
- να συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.

3. Σχόλια - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης ενοποιητική έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και θεωρείται κεντρικής σημασίας για την παραπέρα ανάπτυξή τους. Η διδασκαλία της έννοιας στη Β΄ Γυμνασίου περιορίζεται στη συσχέτιση δύο μεταβλητών και στην κατασκευή του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης.
- Προτείνεται να δοθούν δραστηριότητες από την καθημερινότητα με τις οποίες οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή ενός μεγέθους καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την τιμή ενός άλλου μεγέθους, και να βρουν τις σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά.

3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: **3 ώρες**

1. Ενδεικτικός προγραμματισμός

- Μια ώρα για το σύστημα συντεταγμένων, τις συντεταγμένες ενός σημείου και τις συμμετρίες.
- Μια ώρα για την απόσταση δύο σημείων και τη γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Μια ώρα για ασκήσεις εμπέδωσης και εφαρμογές.

ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται διάκριση μεταξύ συνάρτησης – σχέσης ούτε κάποια έμφαση για το πότε μια σχέση αποτελεί συνάρτηση, παρά μόνο ένας άτυπος ορισμός της συνάρτησης. Στις προηγούμενες τάξεις πάλι δεν έχε ι καθοριστεί τι ακριβώς είναι η συνάρτηση.

Φυσικά δεν γίνεται εδώ υπαινιγμός ότι θα έπρεπε να οριστεί η συνάρτηση με πλήρη μαθηματικό τρόπο, ο οποίος δεν θα ήταν κατάλληλος για προσέγγιση από τους μαθητές, αλλά να δίνεται με εμπειρικό αλλά και λεκτικό τρόπο το τι είναι συνάρτηση, ώστε να μην φαίνονται αδικαιολόγητες οι απαιτήσεις του ορισμού. Όπως είδαμε στα σχολικά βιβλία παραπάνω, το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής δίνεται χωρίς παραπάνω δικαιολόγηση, πράγμα που είναι πιθανό να δημιουργεί απορίες στους μαθητές σχετικά με την έννοια της συνάρτησης , την οποία καλούνται να κατανοήσουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - Συναρτήσεις

4.1. Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ (2 διδακτικές ώρες)

Δραστηριότητα

Με τη δραστηριότητα δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να γνωρίσουν μερικές εκφράσεις που οδηγούν σε συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$. Η εύρεση ορισμένων τιμών της συνάρτησης $y = x^2$ και ο προσδιορισμός των αντίστοιχων σημείων σε τετραγωνισμένο χαρτί δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν τη μορφή της γραφικής της παράστασης. Η επιλογή του συγκεκριμένου παραδείγματος, έγινε γιατί η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει και αρνητικές τιμές.

Διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μπορούν να προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη x, y και να θυμηθούν πότε αυτή καθορίζει μία συνάρτηση.
- Να μάθουν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.
- Να κατανοήσουν τη σχέση του συντελεστή α με το σχήμα (άνοιγμα της παραβολής) και τη θέση της παραβολής $y = \alpha x^2$ ως προς τους άξονες.
- Να προσδιορίζουν το συντελεστή α της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ από στοιχεία της γραφικής της παράστασης.

Διδακτικές οδηγίες

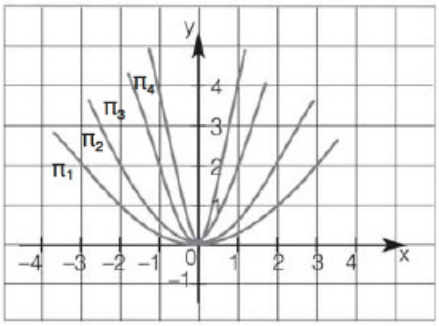
– Ο σχεδιασμός και η ερμηνεία των στοιχείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ είναι ο κύριος διδακτικός στόχος της ενότητας αυτής. Γι' αυτό οι μαθητές πρέπει να ασκηθούν στο σωστό σχεδιασμό των παραβολών με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού.

– Προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση του συντελεστή α με τη θέση και το άνοιγμα της παραβολής $y = \alpha x^2$, να δοθούν κατάλληλες ερωτήσεις (ερώτ. κατανόησης 6). Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί και η παρακάτω άσκηση:

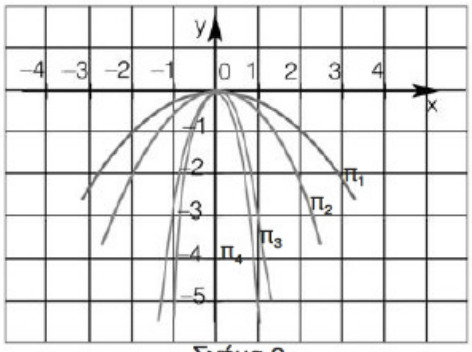
Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή π_1, π_2, π_3, π_4 του σχήματος 1 μια από τις εξισώσεις

π_1	π_2	π_3	π_4

α) $y = 2x^2$, β) $y = 4x^2$, γ) $y = \frac{1}{2}x^2$, δ) $y = \frac{1}{4}x^2$

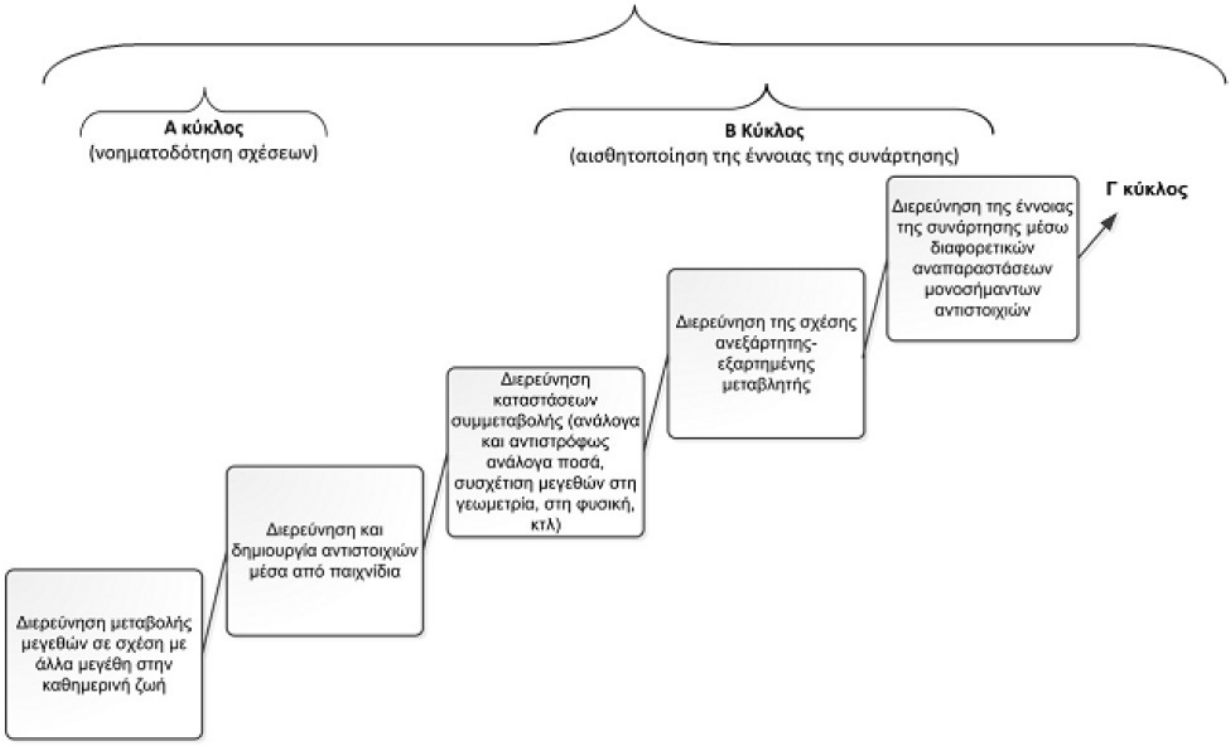


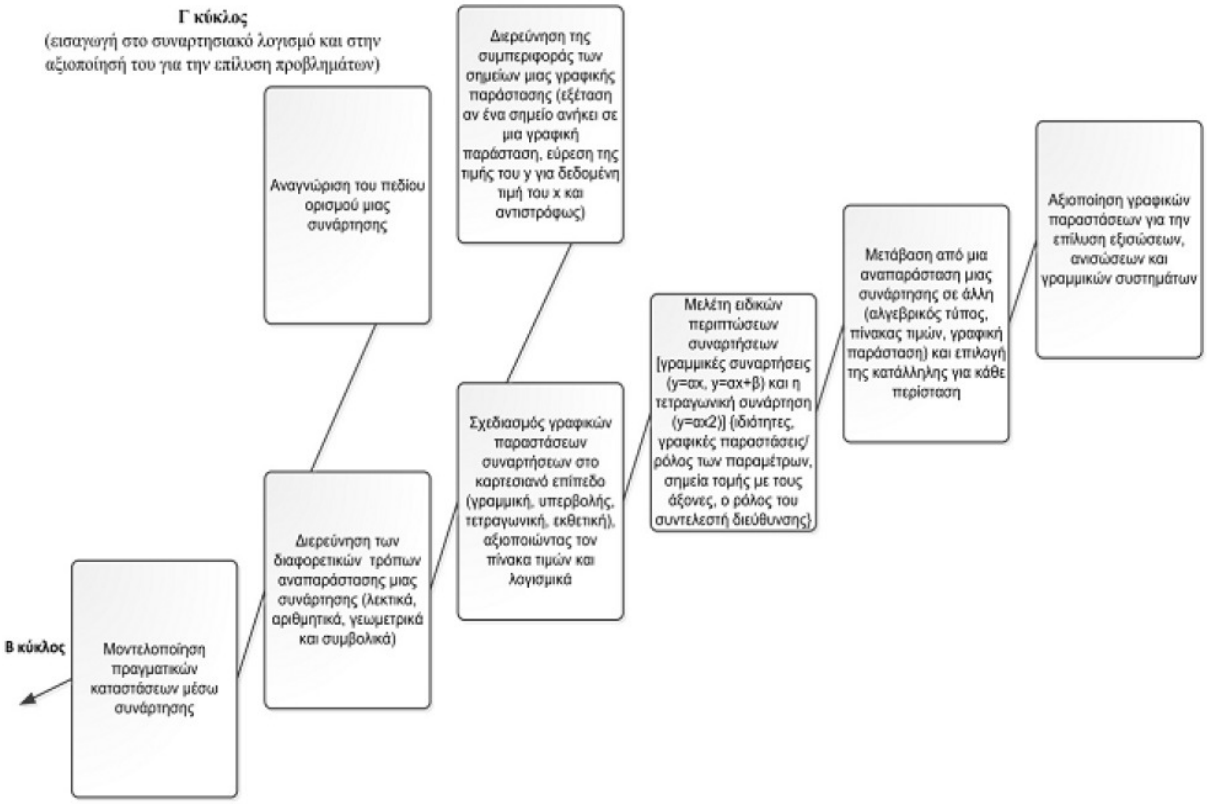
Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΑΠΟ ΤΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ «ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, 2011
Σχηματική αναπαράσταση μιας ανάπτυξης της τροχιάς «συνάρτηση» σε τρεις κύκλους.




Γ κύκλος
(εισαγωγή στο συναρτησιακό λογισμό και στην αξιοποίησή του για την επίλυση προβλημάτων)
Αναγνώριση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης
Διερεύνηση της συμπεριφοράς των σημείων μιας γραφικής παράστασης (εξέταση αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση, εύρεση της τιμής του y για δεδομένη τιμή του x και αντιστρόφως)
Αξιοποίηση γραφικών παραστάσεων για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και γραμμικών συστημάτων
Μετάβαση από μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση) και επιλογή της κατάλληλης για κάθε περίσταση
Μελέτη ειδικών περιπτώσεων συναρτήσεων [γραμμικές συναρτήσεις (y=αx, y=αx+β) και η τετραγωνική συνάρτηση (y=αx2)] (ιδιότητες, γραφικές παραστάσεις/ρόλος των παραμέτρων, σημεία τομής με τους άξονες, ο ρόλος του συντελεστή διεύθυνσης)
Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων στο καρτεσιανό επίπεδο (γραμμική, υπερβολής, τετραγωνική, εκθετική), αξιοποιώντας τον πίνακα τιμών και λογισμικά
Διερεύνηση των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης μιας συνάρτησης (λεκτικά, αριθμητικά, γεωμετρικά και συμβολικά)
Μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων μέσω συνάρτησης
Β κύκλος

ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ – ΠΡΑΞΗ «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ», 2011

Παρακάτω φαίνονται τα σημεία της ύλης όπου διδάσκεται η έννοια της συνάρτησης, στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.

Α΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Α1. Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση. *Α2.* Προσδιορίζουν ένα σημείο (ως διατεταγμένο ζεύγος) σε σύστημα αξόνων. *Α3.* Αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.	***Κανονικότητες–Συναρτήσεις*** • αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων *(4 ώρες)*	Η ανάγκη συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί αργότερα στις συναρτήσεις. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ. 74 (ασκ 15), παρ. 6.1 (παράσταση σημείων στο επίπεδο) Ψηφιακό περιβάλλον: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html

Β΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Α1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο. *Α2.* Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση. *Α3.* Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών. *Α4.* Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. *Α5.* Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. *Α6.* Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο). *Α7.* Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η	**Κανονικότητες–Συναρτήσεις** • συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης (7 ώρες)	Η συμμεταβολή μεγεθών είναι οικεία στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή αλλά και από προηγούμενες σχολικές εμπειρίες. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της με άμεση αναφορά σε καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση). Η ικανότητα να μεταφράζουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν) είναι στοιχείο κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.1 και 3.2. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Thematα/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 20-34 (μόνο δραστηριότητες).

ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης. *Α8.* Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).			
Α9. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο ανάλογων ποσών. *Α10.* Διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής y=αx. Σχεδιάζουν τη γραφική παράστασή τους και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία. Εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή και διερευνούν το ρόλο του α. *Α11.* Διερευνούν τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής y=αx. Συγκρίνουν με συναρτήσεις που η αντίστοιχη μεταβολή του y δεν είναι σταθερή (πχ τετραγωνικές) *Α12.* Επιλύουν (αλγεβρικά και γραφικά) προβλήματα ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας την συνάρτηση y=αx.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • ανάλογα ποσά, η συνάρτηση y=αx. *(4 ώρες)*	Μέσα από προβλήματα ανάλογων ποσών μπορεί να εισαχθεί και να διερευνηθεί η συνάρτηση y=αx και οι αναπαραστάσεις της. Η χρήση της γραφικής παράστασης από τους μαθητές ως εργαλείο διερεύνησης και αιτιολόγησης αποτελεί σημαντικό στόχο των δραστηριοτήτων. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ2, ΑΔ3, ΑΔ4)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.3. Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-1 , Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-2 Φύλλο εργασίας- Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ Β-ΑΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην ψ=αχ
Α13. Μοντελοποιούν και επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα με συναρτήσεις της μορφής y=αx+β.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • η συνάρτηση y=αx+β *(4 ώρες)*	Μέσω της y=αx+β πρέπει να αρχίσει να αναδεικνύεται ο ρόλος των γραμμάτων στην άλγεβρα ως μεταβλητών (χ, ψ) ή ως	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.4.

Α14. Διερευνούν τη συνάρτηση y=αx+β. Εξετάζουν το ρόλο του α (σταθερή μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x) και του β («σημείο» τομής με τον άξονα των y). *Α15.* Βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της y=αx+β με τους άξονες. *Α16.* Χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων της μορφής αx+β=γ.		παραμέτρων (α, β). Ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ5.	
Α17. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. *Α18.* Διερευνούν τη συνάρτηση y = α/x και τη γραφική της παράσταση. *Α19.* Επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης y=α/x.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • αντιστρόφως ανάλογα ποσά, η συνάρτηση y=α/x *(2 ώρες)*	Μέσω δραστηριοτήτων πρέπει να αναδειχθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και της υπερβολής σε αντιδιαστολή με τα ανάλογα ποσά και την ευθεία. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ6, ΑΔ7)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.5. Β-ΑΔ7-Η υπερβολή

Γ΄ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Α1. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με τη συνάρτηση $y=\alpha x^2$. *Α2.* Εξετάζουν την μεταβολή του y για κάθε μοναδιαία αύξηση του x (συγκρίνουν με την γραμμική συνάρτηση) *Α3.* Διερευνούν μέσω της γραφικής της παράστασης τις ιδιότητές της $y=\alpha x^2$ και το ρόλο της παραμέτρου α. *Α4.* Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=\alpha x^2$. *Α5.* Βρίσκουν αλγεβρικά και γραφικά τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $y=\alpha x^2$ και y=αx+β.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • η $y=\alpha x^2$ ως περίπτωση μη γραμμικής μεταβολής *(4 ώρες)*	Είναι σημαντική η διερεύνηση προβλημάτων που μοντελοποιούνται με τετραγωνικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι μια μορφή μη γραμμικής μεταβολής. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη διερεύνηση του ρόλου του α και τη σύνδεση με τις εξισώσεις. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ1, ΑΔ2)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 4.1. Γ- ΑΔ1-Το α στην $\psi=\alpha\chi^2$

ΤΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΕ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΙΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΧΟΛΕΙΟ:……
ΤΜΗΜΑ:……
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:……

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Για το Μέρος 1:
Οι μαθητές έρχονται ανά δύο (ανά θρανίο) στο σημείο που γίνονται οι μετρήσεις, μαζί με ένα φύλλο εργασίας.
Ο ένας αναλαμβάνει να κάνει τις μετρήσεις και ο δεύτερος να σημειώνει τα αποτελέσματα παρακάτω , στις δύο πρώτες στήλες του δοσμένου πίνακα.
Για το Μέρος 2:
Οι μαθητές, ανά δύο, συζητούν τις ερωτήσεις που δίνονται και συμπληρώνουν τις απαντήσεις ο καθένας στο δικό του φύλλο εργασίας.

ΜΕΡΟΣ 1- ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Εμβαδό βάσης: ……..

Συμπληρώστε τις δύο πρώτες στήλες αρχικά και τις υπόλοιπες στο θρανίο σας.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ	Ύψος νερού πριν (σε εκατοστά)	Ύψος νερού μετά (σε εκατοστά)	Διαφορά ύψους (αφαιρούμε το αποτέλεσμα στις δύο προηγούμενες στήλες)	Διαφορά ύψους επί εμβαδό βάσης	Όγκος αντικειμένου (σε κυβικά εκατοστά)
Αντικείμενο 1					
Αντικείμενο 2					
Αντικείμενο 3					
Αντικείμενο 4					

ΜΕΡΟΣ 2- ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Α) Γράψτε τον τύπο που δίνει τον όγκο του αντικειμένου χρησιμοποιώντας λέξεις και όχι σύμβολα:

……

Β) Στον προηγούμενο τύπο βλέπετε τρία μεγέθη. Σκεφτείτε ποια από αυτά <u>μεταβάλλουμε</u> στο πείραμά μας και ποια <u>μένουν σταθερά</u> και βάλτε σε κύκλο την κατάλληλη λέξη παρακάτω:

Δοχείο: σταθερό / μεταβαλλόμενο
Βάση δοχείου: σταθερό / μεταβαλλόμενη
Αντικείμενα που ρίχνουμε στο δοχείο: σταθερό / μεταβαλλόμενο
Ύψος νερού: σταθερό / μεταβαλλόμενο
Όγκος αντικειμένων: σταθερό / μεταβαλλόμενο

Γ) Συμπληρώστε τώρα τον παρακάτω πίνακα:

ΜΕΓΕΘΗ	ΣΤΑΘΕΡΟ Ή ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ;	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ (στα μεταβλητά μεγέθη)
Ύψος εκτοπισμένου νερού (διαφορά ύψους)		
εμβαδό βάσης δοχείου		
Όγκος αντικειμένου		

Δ) Τώρα γράψτε τον τύπο της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα σύμβολα x και y για τις μεταβλητές .

……

Ε) Φανταστείτε τώρα πως βάζουμε σε δύο ίδια μπουκάλια κάποια αντικείμενα.
Αν το ύψος του εκτοπισμένου νερού είναι το ίδιο και στα δύο, μπορεί τα αντικείμενα να έχουν διαφορετικό όγκο;
Δώστε μια εξήγηση.
……
……
……
……
……
……

ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΑ ΑΓΓΛΙΚΑ

1. Bagni G. Functions: Processes, properties, objects
2. Balacheff N. , Gaudin N. Students' conceptions :an introduction to a formal characterization
3. Bell E.T. The Development of Mathematics
4. Boyer C. (1949) The history of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, N. York
5. Brousseau G. (1997) Theory of didactical situations in mathematics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
6. DeMarois P, Tall D. (1996) Facets and Layers of the Function Concept , Proceedings of PME 20, Valencia, 2
7. Even R. Tirosh D. Subject matter knowledge and knowledge about students as sources of teaching presentations of the subject- matte Educational Studies in Mathematics, 29.
8. Freudenthal H. Didactical Phenomenology of mathematical structures , Ch. 17: Reidel Publishing Company, Utrecht
9. Gray E. , Tall D. (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic , The Journal for Research in Mathematics Education 26 (2)
10. Hollingdale Stuart, Makers of Mathematics
11. Katz V. Stages in the History of Algebra with implications for teaching
12. Keisoglou S., Spyrou P. Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools

13. Kleiner I (1989) Evolution of the Function Concept: A Brief Survey - The College Mathematics Journal, 20

14. O' Challaghan B. (1998) Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions , Journal for Research in Mathematics Education, 29

15. Radford L. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning

16. Ronda E. (2004) A framework of Grouth Points in Students' Developing Understanding of Function , Australia Catholic University

17. Ronda E. (2009) Growth Points in Students' Developing Understanding of Function in Equation Form , Mathematics Education Research Journal , 21

18. Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22

19. Sierpinska, A. On understanding the notion of function- *The concept of function, Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). Washington D.C.: The Mathematical Assosiation of America.

20. Slavit D. An alternative route to the reification of function

21. Spyrou, Zagorianakos, An exploration of mathematics students' distinguishing between function and arbitrary relation- Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 29

22. Spyrou P. , Zagorianakos A. Distinction between function and relation: a research on pupils, students and teachers

23. Thurston W, (1994) On Proof and Progress in Mathematics , Bulletin of American Mathematical Society, 30, 2

24. Vinner S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function- International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14

25. Vygotsky, L.S, (1978): Mind and Society, the development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press

26. Youschkevitch A.P. The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century

ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

27. Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ. , Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ)

28. Βανδουλάκης Ι. , Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν. , Φερεντίνος Σ. Μαθηματικά Α' Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ)

29. Βιβλίο εκπαιδευτικού – Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

30. Βιβλίο εκπαιδευτικού – Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

31. Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. , Ρεκούμης Κ. Μαθηματικά Β' Γυμνασίου (σχολικό εγχειρίδιο ΟΕΔΒ)

32. Ζαχαριάδης Θ. , Πόταρη Δ., Στουραΐτης Κ. - Επιμορφωτικό Υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου, 2011

33. Μαθηματικά στη Δευτεροβάθια Εκπαίδευση- Γυμνάσιο ,Πράξη «Νέο Σχολείο», 2011

34. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση , Επιστημονικό Πεδίο : Μαθηματικά , Πράξη «Νέο Σχολείο» . 2011

35. Σπύρου Π. , Λάππας Δ. (2000) Από την Ιστορία της Καμπύλης, Μαθηματική Επιθεώρηση , τ. 53

36. Σπύρου –Γαγάτσης : Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και η διδακτική μεταφορά της