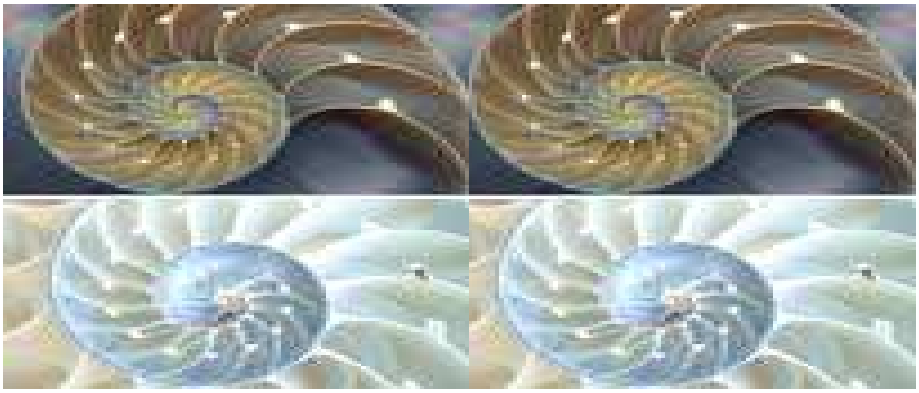
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ»



ΓΚΑΡΑΝΗ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Πόταρη Δέσποινα

Αθήνα 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών

για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Που απονέμει το Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο Βαθμίδα Υπογραφή

1) Πόταρη Δέσποινα……Αν. Καθηγήτρια……
(Επιβλέπουσα Καθηγήτρια)

2) Σπύρου Παναγιώτης…….. Επ. Καθηγητής…….……..……

3) Σακονίδης Χαράλαμπος……. Αν. Καθηγητής ……

Ευχαριστώ την τριμελή επιτροπή που συνέβαλε σ' αυτή την προσπάθεια και κυρίως την κ$_{\alpha}$ Πόταρη για τον χρόνο που διέθεσε και τις συμβουλές της.

Επιπλέον, ευχαριστώ τους τρεις καθηγητές που συμμετείχαν στην έρευνα και με δέχθηκαν στις τάξεις τους.

…….Συγνώμη από τα παιδιά μου
για το χρόνο ……..που τους έκλεψα!

Περίληψη

Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί μια προσπάθεια μελέτης των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στους μαθητές και τον εκπαιδευτικό μιας κλασσικής σχολικής τάξης που κάνει Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, με αφετηρία τον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός θέτει και υλοποιεί μαθηματικές «δραστηριότητες» στη σχολική αίθουσα, αναζητά σχέσεις ανάμεσα στις διαχειριστικές επιλογές του και στην εμπλοκή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε εκείνες τις επιλογές που φαίνεται τελικά να οδηγούν τους μαθητές σε ουσιαστική «μαθηματική δραστηριότητα», επιχειρεί να δώσει μια διδακτική κατεύθυνση εφαρμόσιμη μέσα στην σύνθετη δομή της σύγχρονης σχολικής τάξης.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολικές τάξεις Α΄ Γυμνασίου και στη μεθοδολογία συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο «μελέτη περίπτωσης». Οι επιλογές των εκπαιδευτικών μελετήθηκαν μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της Θεωρίας της Δραστηριότητας και δόθηκε έμφαση στο ρόλο των «εργαλείων» που διαμεσολαβούν με στόχο τη μάθηση και σε διδακτικά χαρακτηριστικά όπως η «καθοδήγηση», η «εκχώρηση», το «πλαίσιο» της «δραστηριότητας» ή τα «κίνητρα» που ωθούν τους μαθητές σε εμπλοκή.

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως το είδος της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία μάθησης είναι άμεσα συνδεδεμένο με τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός χειρίζεται τις «δραστηριότητες». Σημαντικός αναδείχθηκε ο ρόλος των κινήτρων με τη μορφή κυρίως της «μαθηματικής πρόκλησης», καθώς και η παραχώρηση πρωτοβουλίας στους μαθητές (μείωση του βαθμού καθοδήγησης από τον εκπαιδευτικό – αυτενέργεια των μαθητών). Επιπλέον, αξιόλογο εύρημα της έρευνας αποτέλεσε η διαπίστωση πως όταν ο εκπαιδευτικός κατανοεί τον τρόπο που σκέφτονται και ακολουθεί τις σκέψεις που διατυπώνουν οι μαθητές στην τάξη, αυξάνει σημαντικά η πιθανότητα οι μαθητές να εμπλακούν σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα.

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α΄

Εισαγωγή…….....σελ 13-14

Κεφάλαιο 1 (Θεωρητικό πλαίσιο)

1.1 Η Θεωρία της Δραστηριότητας …….....σελ 15-17

1.2 Τα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Δραστηριότητας.....σελ 17-21

1.2.1 Η φύση της Μαθηματικής Γνώσης…….....σελ 17-19

1.2.2 Η ιδιαίτερη φύση της Γεωμετρίας……σελ 19-21

1.3 Η μετάβαση στη Μαθηματική Δραστηριότητα …….....σελ 21-23

1.4 Βιβλιογραφική ανασκόπηση……σελ 24-30

1.5 Η «δραστηριότητα» στα Μαθηματικά του Γυμνασίου……σελ 31-33

Κεφάλαιο 2 (Μεθοδολογία της Έρευνας)

2.1 Ερευνητικό πρόβλημα- Ερευνητικά ερωτήματα……..σελ 34-35

2.2 Συμμετέχοντες……σελ 35

2.3 Διαδικασία συλλογής δεδομένων……σελ 35-36

2.4 Διαδικασία Ανάλυσης δεδομένων

2.4.1 Μεθοδολογικά εργαλεία ανάλυσης……. ….σελ 37-39

2.4.1.1 Προσδιορισμός των κρίσιμων συμβάντων…..σελ 38-39

2.4.2 Πλαίσιο ανάλυσης της Μαθ/κής Δραστηριότητας……σελ 39-40

Κεφάλαιο 3 (Αποτελέσματα)

3.1 Πώς εμφανίζονται οι «δραστηριότητες» στα σχολικά βιβλία….σελ 41-54

3.2 Πώς υλοποιήθηκαν οι «δραστηριότητες» από τους εκπ/κούς…σελ 55-105

3.2.1 Η διαχείριση του εκπαιδευτικού Α΄……..σελ 56-72

3.2.2 Η διαχείριση του εκπαιδευτικού Β΄……σελ 73-89

3.2.3 Η διαχείριση του εκπαιδευτικού Γ΄……σελ 89-105

3.3 Συνοπτική παρουσίαση της διαχείρισης των «δραστηριοτήτων»

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Α΄……. σελ.106-107

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Β΄……..σελ.107-109

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Γ΄…… σελ.109-110

3.4 Συζήτηση – Συμπεράσματα……. σελ.111-115

Βιβλιογραφικές Αναφορές……σελ.117-123

ΜΕΡΟΣ Β΄

Παράρτημα ……..σελ.127-212

Παράρτημα-1 (ενδεικτική-πλήρης διδασκαλία)……..σελ. 129-168

Παράρτημα-2 (συνολική καταγραφή των κρισίμων συμβάντων)…….....σελ. 169-212

ΜΕΡΟΣ Α΄

Εισαγωγή

Η μαθηματική γνώση για πολλούς αιώνες έδειχνε να απευθύνεται σε μια μειοψηφία ανθρώπων που την κατανοούσαν και την ανέπτυσσαν μέσα σε κλειστές μαθηματικές κοινότητες (Davis & Hersh, 1980). Οι εξελίξεις των νέων επιστημών και οι απαιτήσεις των νέων κοινωνικών και τεχνολογικών περιβαλλόντων που δημιουργήθηκαν τα τελευταία χρόνια επιβάλει τη συστηματική ενασχόληση με τα μαθηματικά καθώς πολλές καθημερινές δραστηριότητες απαιτούν ανάλυση, δομημένη λογική σκέψη και εξαγωγή συμπερασμάτων μέσα από διαδικασίες που συνδέονται με το μαθηματικό τρόπο σκέψης. Στο πλαίσιο μιας άκρως τεχνολογικής εποχής το αίτημα «Μαθηματικά για όλους» (Kilpatrick, 1992) που δείχνει την τάση που δημιουργήθηκε από το β΄ μισό του 20^{ου} αιώνα μέχρι και σήμερα, φαντάζει όχι μόνο λογικό αλλά και κοινωνικά επιβεβλημένο. Οι επαγγελματικές ανάγκες και προσωπική ζωή του καθενός, μας αναγκάζει να εμπλακούμε με μαθηματικού τύπου έννοιες που αφορούν αποφάσεις που σχετίζονται με θέματα «αξιοπιστίας», «καταλληλότητας», «βελτιστοποίησης» και γενικά ζητημάτων όπου η ανάπτυξη της συλλογιστικής ικανότητας επιτρέπει στο άτομο να οργανώσει καλύτερα τον περίγυρό του και θέματα που το αφορούν άμεσα. Μια τέτοιου τύπου μαθηματική ικανότητα αναγκαία συνδέεται με τη διαμόρφωση ενός νέου τρόπου σκέψης με τον οποίο το άτομο βλέπει τα Μαθηματικά ως μέσο που το βοηθά να προσεγγίζει καταστάσεις σφαιρικά, να μοντελοποιεί καταστάσεις να επεξεργάζεται δεδομένα και να προτείνει λύσεις. Η θετική τάση του ατόμου και στην προκείμενη περίπτωση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά εκφράζεται σε μελέτες ερευνητών ως «Μαθηματική τάση» ή «Μαθηματική προδιάθεση» (Mathematical disposition, Lerman 2006). Η ανάπτυξη μιας τέτοιας διάθεσης όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως χρήσιμα, κατανοητά και συνδεδεμένα με τις πραγματικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες αυτά αναδύονται και λειτουργούν και όχι πλέον ως αλγοριθμικές ουτοπίες, είναι το ζητούμενο στη σημερινή εκπαίδευση.

Για αυτό το λόγο τα τελευταία χρόνια η μαθηματική εκπαίδευση ανά τον κόσμο κάνοντας μια σημαντική στροφή στο τι ακριβώς είναι τα μαθηματικά και ποια ακριβώς μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται στα σχολεία έφτασε με τη βοήθεια ερευνών σε συμπεράσματα και διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης. Η έννοια της «δραστηριότητας» σε συνδυασμό με τη διαθεματικότητα,

χρησιμοποιήθηκαν για να δώσουν μια άλλη διάσταση στον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά. Η δημιουργία μαθηματικών νοημάτων που προκύπτουν από άτυπες διαδικασίες προσανατολισμένες στο περιεχόμενο πραγματικών καταστάσεων και που στη συνέχεια καταλήγουν σε τυπικές μαθηματικές μορφές (Streefland, 1993) αποδίδουν την πορεία που ακολούθησαν κατά την ιστορική τους εξέλιξη. Βασισμένα σ' αυτή την οπτική κινήθηκαν νεώτερα ερευνητικά προγράμματα διδασκαλίας εκπαιδευτικών συστημάτων του εξωτερικού, όπως τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά της Ολλανδίας, τα Standards 2000 της Αμερικής και το Εθνικό Πρόγραμμα Αριθμητισμού της Αγγλίας.

Στην Ελλάδα μέχρι το 2007 που κυκλοφόρησαν τα νέα βιβλία μαθηματικών του Γυμνασίου, ο τρόπος διδασκαλίας ήταν επηρεασμένος από τα λεγόμενα Μοντέρνα Μαθηματικά των Bourbaki, όπου τα περιεχόμενα είχαν ως βάση τη θεωρία των συνόλων και ακολουθούσαν καθαρά στρουκτουραλιστική λογική στη διδασκαλία. Η αναθεώρηση και ο εκ νέου σχεδιασμός των αναλυτικών προγραμμάτων (Α.Π.Σ.) που ξεκίνησε από το 2000 και η διαμόρφωση του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) θεωρήθηκαν αναγκαία στην κατεύθυνση της προσαρμογής της εκπαίδευσης και διδασκαλίας των μαθηματικών στα νέα κοινωνικά και επιστημονικά δεδομένα. Μέσα από αυτή την αλλαγή η ευρύτερη έννοια της Μαθηματικής Δραστηριότητας στη Σχολική Τάξη ήρθε να αντικαταστήσει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, με καινοτομίες όπως η εισαγωγή μαθηματικών εννοιών με χρήση Μαθηματικών Δράσεων-Έργων (Mathematical Tasks), ακολουθώντας τις κατευθύνσεις άλλων χωρών και ενσωματώνοντας σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί των γυμνασίων επιμορφώθηκαν ως προς το περιεχόμενο των νέων βιβλίων, όχι όμως και ως προς το πνεύμα που τα διέπει. Αποτέλεσμα, οι περισσότεροι να αποφεύγουν την υλοποίηση των «δραστηριοτήτων»[1] που προτείνονται για την εισαγωγή νέων εννοιών και να συνεχίζουν να διατηρούν ένα μοντέλο παραδοσιακής διδασκαλίας ντυμένο ίσως με μια πιο επικοινωνιακή διάθεση προς τους μαθητές. Η παρούσα διπλωματική εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται τις «δραστηριότητες» στη σχολική τάξη και πώς αυτή η διαχείριση επιδρά στη μαθηματική εμπλοκή των μαθητών.

---

1. Για να διαχωρίσουμε τη «δραστηριότητα» που περιγράφει ένα μαθηματικό πρόβλημα ή γενικότερα ένα μαθηματικό έργο (mathematical task) που θέτει ο εκπαιδευτικός στην τάξη, από την ευρύτερη έννοια της δραστηριότητας, η λέξη θα εμφανίζεται μέσα σε εισαγωγικά.

.

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό πλαίσιο

Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την έννοια της δραστηριότητας, όπως αυτή ορίζεται στη «Θεωρία της Δραστηριότητας» (Leont'ev, 1978), η οποία αποτελεί μετεξέλιξη των ιδεών του Vygotsky και η δομή της αντιπροσωπεύει σε μεγάλο βαθμό τις καταστάσεις αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται μέσα στη σχολική τάξη.

1.1 Η Θεωρία της Δραστηριότητας (Activity theory)

Μελετώντας την έννοια και τις διαστάσεις μιας δραστηριότητας, ο συνεχιστής και συγχρόνως μελετητής του έργου του Vygotsky, Leont'ev (1978, 1981), έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στη συστημική υποστήριξη των μαθητών, τα *κίνητρα* και τα *διαμεσολαβητικά πολιτισμικά εργαλεία.* Θέτοντας στο επίκεντρο ενός οικοδομήματος παραγόντων τη βασική ιδέα της δραστηριότητας η οποία αντιμετωπίζεται σαν ένα *σύστημα* όπου το *υποκείμενο* «ενεργεί» πάνω σε ένα *αντικείμενο* με κάποιο επιθυμητό *στόχο*, επικέντρωσε την προσοχή του σε ένα τρισδιάστατο μοντέλο (Leont'ev, 1979). Σ' αυτό το μοντέλο, η ανθρώπινη δραστηριότητα υποκινείται πάντα από *ένα κίνη-τρο*. Βασικά συστατικά της δραστηριότητας είναι *οι ενέργειες* που μεταφράζουν τη κίνητρο της δραστηριότητα στην πραγματική του διάσταση και κάθε ενέργεια υπάγεται σε έναν συνειδητό *στόχο*. Οι *διαδικασίες* είναι τα μέσα με τα οποία μια δράση πραγματοποιείται και συνδέονται με τις *συνθήκες* κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται οι *ενέργειες* .

Τα τρία επίπεδα δραστηριότητας (Jaworski-Goodchild, 2006) συνοψίζονται ως εξής:

- Κίνητρα , στόχοι
- Ενέργειες, συνθήκες
- Διαδικασίες

Τα *εργαλεία* αποκτούν το ρόλο ενός «*διαμεσολαβητικού μέσου*» του οποίου η χρήση θα οδηγήσει το υποκείμενο (π.χ. μαθητές) στην πραγματοποίηση του στόχου, που στην περίπτωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η μάθηση (αντικείμενο). Η ενέργεια του υποκειμένου πάνω στο αντικείμενο υλοποιείται χρησιμοποιώντας διττής φύσης *εργαλεία* που μπορεί άλλοτε να έχουν την υπόσταση πραγματικών αντικειμένων όπως: χειραπτικού τύπου υλικά αντικείμενα (μολύβια, χάρακες,

γεωμετρικά όργανα κλπ.) ή *κοινωνικά διαμορφωμένων εργαλείων* (Davydov, 1988) όπως η «γλώσσα». Στα εργαλεία που υπάγονται στην δεύτερη κατηγορία (της μη υλικής υπόστασης) περιλαμβάνεται οτιδήποτε μπορεί να προκύψει ως αποτέλεσμα νοητικών διεργασιών γεγονός που το κατατάσσει με τη σειρά του σε μια ευρύτερη συλλογή νέων εργαλείων (πχ. τα μαθηματικά σύμβολα αποτελούν ανθρώπινη επινόηση γεγονός που τα κατατάσσει στα εργαλεία που διαμεσολαβούν στην ευρύτερη μαθηματική δραστηριότητα ή αν εστιάσουμε στη Γεωμετρία, ένα γεωμετρικό σχήμα που ορίζεται μέσα από ιδιότητες αποκτά δομή μαθηματικού αντικειμένου, κλπ.). Έτσι, το υποκείμενο δρώντας με τη βοήθεια ειδικά διαμορφωμένων πια *συμβολικών συστημάτων* επιτυγχάνει το πέρασμα από το γενικό και αφηρημένο στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών εννοιών.

Ο Engestrom εξέλιξε περαιτέρω το παραπάνω σχήμα του Leont'ev ως θεωρητικό μοντέλο για τον προσδιορισμό αντιθέσεων, τριβών και γενικότερα σχέσεων σε ένα ευρύτερο σύστημα δραστηριότητας (Engestrom, 1987, 1999, 2002). Στο δικό του μοντέλο δραστηριότητας αποκτά υπόσταση ο παράγοντας της *κοινωνίας* («αυτοί που μοιράζονται το ίδιο αντικείμενο»). Υπεισέρχονται οι *κανόνες* μεταξύ *υποκειμένου* και *κοινωνίας*, καθώς και ο *καταμερισμός* της εργασίας.

Σύμφωνα με αυτό το διευρυμένο μοντέλο η εκπαίδευση ως σύστημα δραστηριότητας στο επίπεδο διδασκαλίας – μάθησης ενός γνωστικού αντικειμένου αντιπροσωπεύεται από συγκεκριμένες προοπτικές προς εξέταση που αφορούν τα εμπλεκόμενα μέρη. Εκτός από την προοπτική του *εκπαιδευτικού* και του *μαθητή* που θα μπορούσαμε να τους τοποθετήσουμε στο ρόλο του *υποκειμένου*, σημαντικός εξακολουθεί να είναι ο ρόλος των *εργαλείων* ως *διαμεσολαβητικά μέσα* (tools) προς τη μάθηση, καθώς εντάσσονται σ' αυτά εκτός από τα συνήθη υλικά μέσα (π.χ. γεωμετρικά όργανα-εποπτικά μέσα), τα διδακτικά εγχειρίδια που προκύπτουν από φορείς που πρόσκεινται στην πολιτική των εκπαιδευτικών κοινοτήτων, καθώς και διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις. Στους *κανόνες* (rules), θα μπορούσαμε να εντάξουμε τη νομοθεσία, τις εγκυκλίους, τα αναλυτικά προγράμματα (που κι αυτά με τη σειρά τους μπορούν να αποτελέσουν εργαλεία στα χέρια των εκπαιδευτικών), ενώ στον *καταμερισμό*, την ύλη, τα μαθήματα κ.ά. Στο πλαίσιο των *κοινοτήτων* εντάσσονται οι μαθητές, οι εκπαιδευτικοί, οι σύλλογοι και λοιποί φορείς, με την ταυτότητα των ομάδων που ενεργούν συνολικά σ' αυτό το αλληλεπιδραστικό μοντέλο. Τον βασικό στόχο του οικοδομήματος του συστήματος δραστηριότητας αποτελεί η έννοια της «*μάθησης με*

νόημα» (*αντικείμενο*) και ο τρόπος που είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί αυτή μέσα από διαδικασίες και περιβάλλοντα που να υποστηρίζουν τους μαθητές.

Ο Van Oers (2001) ακολουθώντας μετά τον Leont'ev τη θεωρία της δραστηριότητας, θεωρεί πως η *μαθηματική δραστηριότητα* αναφέρεται σε εκείνους τους τρόπους που τα ανθρώπινα όντα έχουν αναπτύξει για να διαχειρίζονται τις ποσοτικές και χωρικές σχέσεις του πολιτισμού τους και του φυσικού περιβάλλοντός τους. Θεωρεί επίσης τη *μαθηματική πρακτική* ως την εφαρμογή της μαθηματικής δραστηριότητας μέσα από τις αξίες, τα εργαλεία και τους κανόνες που υιοθετούνται σε μια συγκεκριμένη πολιτισμική κοινότητα. Σύμφωνα με τον Van Oers κάθε ομάδα μπορεί να είναι "συμμετέχουσα σε μια κοινότητα μαθηματικής πρακτικής".

1.2 Τα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής Δραστηριότητας

Απαραίτητη προϋπόθεση, στα πλαίσια μιας συστηματικής και έγκυρης μελέτης του τρόπου που εξελίσσεται μια «δραστηριότητα», αποτελεί ο εντοπισμός των χαρακτηριστικών που αυτή εμφανίζει ανάλογα με το πεδίο γνώσης μέσα στο οποίο υλοποιείται. Έτσι η πρόθεσή μας να μελετήσουμε τη Μαθηματική Δραστηριότητα προϋποθέτει την επίγνωση εκείνων των παραγόντων που συνδέονται με την ιδιαίτερη φύση των Μαθηματικών οντοτήτων και διεργασιών. Η φύση της Μαθηματικής γνώσης και ιδιαίτερα της Γεωμετρικής γύρω από την οποία θα περιστραφεί η έρευνά μας, απαιτεί να εστιάσουμε κατάλληλα ώστε να έχουμε μια σαφή εικόνα των χαρακτηριστικών που θέλουμε να μελετήσουμε.

1.2.1 Η φύση της Μαθηματικής Γνώσης

Πολλά άρθρα έχουν δημοσιευθεί επί σειρά ετών σχετικά με έρευνες που εξετάζουν τον τρόπο που μαθαίνονται τα μαθηματικά. Βασικά ερωτήματα όπως:

- Ποια είναι η φύση της μαθηματικής γνώσης ;
- Ποιες προσεγγίσεις είναι αποτελεσματικές;

αποτελούν τον κεντρικό άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας και των ερευνητών. Όπως ήταν αναμενόμενο, πολλές απαντήσεις επιχειρήθηκαν κατά καιρούς διατυπωμένες μέσα από διαφορετικές οπτικές προσέγγισης.

Στις δεκαετίες '70-'80 οι διαφορετικές μορφές γνώσης που μπορούν να αναπτυχθούν, αποδόθηκαν με όρους όπως: *εννοιολογική* και *διαδικαστική* (conceptual and procedural) ή *συσχετιστική* και *οργανωτική* (relational and instrumental). Αργότερα μέσω ερευνών των Noss, Healy και Hoyles (1997) εξετάστηκαν οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές κάνουν *συνδέσεις* μεταξύ οπτικών, συμβολικών μορφών και λειτουργικών σχέσεων δείχνοντας πως οι μαθητές αναπτύσσουν συχνά μια αποσυνδεμένη αίσθηση των αλγεβρικών διατυπώσεων από την πραγματικότητα, θεωρώντας π.χ. την Άλγεβρα ως στόχο παρά ως εργαλείο επίλυσης προβλήματος. Οι παραπάνω ερευνητές σχεδίασαν ένα περιβάλλον υπολογιστών στο οποίο ο μόνος τρόπος να χειριστούν και να αναδημιουργηθούν τα αντικείμενα ήταν να εκφραστούν ρητά οι σχέσεις μεταξύ τους. Με αυτό τον τρόπο βοήθησαν τους μαθητές να δουν την Άλγεβρα ως αναπαραστασιακό εργαλείο στην υπηρεσία της έκφρασης μαθηματικών συνδέσεων και σχέσεων . Οι Noss, Healy, και Hoyles (1997) υποστηρίζουν ότι η πράξη της παραγωγής των συνδέσεων είναι σημαντική επειδή οι μαθηματικές έννοιες προέρχονται από τις *μαθηματικές συνδέσεις*. Η πράξη της σύνδεσης μιας μαθηματικής περιοχής με μια άλλη, προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα, είναι μια δράση που επεκτείνεται πέρα από τη γνώση. Οι μαθητές με βαθιά κατανόηση μπορούν να δημιουργούν συνδέσεις. Όμως η πράξη του να κάνουν συνδέσεις, δεν καθορίζεται από τη γνώση που κατέχουν. (Burton και Singh, 1999).

Σε μια ειδική έκδοση (Tirosh, 1999), μια ομάδα ερευνητών περιέγραψε τις διαφορετικές *κατηγορίες γνώσης* με ορολογίες όπως: *υπονοούμενη*, *ρητή*, *τυπική* και *οπτική γνώση* συνδέοντας αυτές με διαδικασίες που αντιπροσωπεύουν την ικανότητα κάποιου να «γνωρίζει ότι» , να «γνωρίζει γιατί» και να «γνωρίζει πώς» να χειρίζεται μαθηματικές διαδικασίες (knowing that, knowing why και knowing how).

Επίσης, ερευνητικές κατευθύνσεις όπως αυτή των *μαθηματικών πρακτικών* (mathematical practices) αναφέρονται στις συγκεκριμένες ενέργειες που κάνουν οι μαθητές ώστε να προσεγγίζουν με επιτυχία τα μαθηματικά. (πχ η δικαιολόγηση των αξιωμάτων , η χρήση συμβολισμού και οι γενικεύσεις που κάνουν, αποτελούν παραδείγματα μαθηματικών πρακτικών - RAND, 2002). Η έννοια των μαθηματικών πρακτικών εστιάζεται στην ορολογία του «*κάνοντας μαθηματικά*» – δηλαδή στις ενέργειες στις οποίες οι μαθητές δεσμεύονται. Δεδομένου ότι οι μαθητές συμμετέχουν στις πρακτικές των τάξεων και στις μαθηματικές πρακτικές, αναπτύσσουν μια ιδιαίτερη σχέση με τη γνώση που αποκτούν. Η έννοια της *μαθηματικής ταυτότητας* (Boaler, 2002) περιλαμβάνει τη γνώση που κατέχουν, τους

τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιούν αυτή τη γνώση, καθώς και τις μαθηματικές τους πεποιθήσεις.

Σύμφωνα με τις "**Αρχές και επίπεδα γνώσης για τα σχολικά μαθηματικά**" (Standards 2000), που διατυπώθηκαν από το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών των Μαθηματικών της Αμερικής (NCTM) θεωρήθηκε ως ιδιαίτερα σημαντική η επίγνωση του τι γνωρίζει ο μαθητής και τι είδους μαθηματικά χρειάζεται να μάθει. Οι μαθητές πρέπει να μαθαίνουν με κατανόηση, να οικοδομούν με δράση τη νέα γνώση μέσα από τις εμπειρίες και την προηγούμενη γνώση τους. Ως αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών ορίστηκε αυτή που προάγει τη **«Μαθηματική Ικανότητα(Επάρκεια)»** (Mathematical Proficiency) των μαθητών (Kilpatrick, Swafford, και Findell, 2001), και περιγράφηκε μέσα από τους παρακάτω άξονες ως εξής :

- ***Εννοιολογική κατανόηση***,(conceptual understanding): Αναφέρεται στην κατανόηση των μαθητών όσον αφορά έννοιες, διαδικασίες, και σχέσεις (Ικανότητα συνδέσεων).
- ***Διαδικαστική Ευχέρεια***,(procedural fluency): Δηλαδή ικανότητα να πραγματοποιούν μαθηματικές διαδικασίες με ευελιξία, ακρίβεια, αποτελεσματικά, και κατάλληλα.
- ***Στρατηγική ικανότητα***,(strategic competence): Η ικανότητα να διατυπώνουν, να αντιπροσωπεύουν, και να λύνουν μαθηματικά προβλήματα.
- ***Συλλογιστική (προσαρμοστική) ικανότητα,*** (adaptive reasoning): Η ικανότητα για λογική σκέψη και επανατροφοδότηση, εξήγηση και αιτιολόγηση των μαθηματικών επιχειρημάτων.
- ***Παραγωγική προδιάθεση,*** (productive disposition): Η οποία περιλαμβάνει την προδιάθεση των μαθητών να δουν τα μαθηματικά σαν λογικό, χρήσιμο και σημαντικό αντικείμενο, συνδεδεμένο με την πίστη ότι αποτελούν απαραίτητο παράγοντα της επάρκειας ενός ατόμου.

  (Boaler, 2002)

1.2.2 Η ιδιαίτερη φύση της Γεωμετρίας

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα ιδιαίτερο πεδίο του οποίου η φύση των εννοιών διαφέρει σημαντικά σε σχέση με τις έννοιες της Αριθμητικής, της Άλγεβρας, ή της Ανάλυσης. (Tall, 2000) Ενώ στην περίπτωση της Αριθμητικής οι ενέργειες γίνονται πάνω σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου στην Γεωμετρία το άτομο διαμορφώνει πρώτα

δομική αντίληψη για τα αντικείμενα που το περιβάλλουν και στη συνέχεια μεταβαίνει στη *λειτουργική*. Η Γεωμετρία δηλαδή ξεκινά ως θεωρία που στηρίζεται στα αντικείμενα και όχι ως ενέργειες πάνω σε αντικείμενα καθώς στο εμπειρικό στάδιο, τα σχήματα συνδέονται με τις πραγματικές μορφές από τις οποίες προήλθαν και αναγνωρίζονται ως ολοκληρωμένες μορφές (gestalts).

Σύμφωνα με τον Duval (1998) αυτό που χαρακτηρίζεται ως « γεωμετρική σκέψη», περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών :

- Οπτικοποίησης
- Κατασκευής με χρήση εργαλείων
- Συλλογισμού (λεκτικές διαδικασίες, για την επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση ή την απόδειξη).

Η γεωμετρική σκέψη και η εξέλιξή της, η περιγραφή της φύσης των οπτικών αναπαραστάσεων (visual representations) και ο ρόλος της διαίσθησης και της φαντασίας στη δημιουργία τους, είναι από τα πιο δύσκολα θέματα που χρήζουν μελέτης στο πλαίσιο της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Σύμφωνα με τον Bruner (1966), στο στάδιο των εικονικών αναπαραστάσεων από τα *πραγματικά αντικείμενα,* το υποκείμενο περνά μέσω μιας *αφαιρετικής διαδικασίας* στα *οπτικά αντικείμενα* (visual objects). Το υποκείμενο δεν εκτελεί ενέργειες σε αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, αλλά σε (νοητικές) αναπαραστάσεις πραγματικών αντικειμένων. Στην περίπτωση της Γεωμετρίας, κατασκευάζει σχήματα με ή χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων, αλλά συγχρόνως είναι σε θέση να εκτελεί *νοητικά πειράματα.* Η διπλή φύση του γεωμετρικού σχήματος κατά το Fischbein (1993) ανάγεται στην νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου κάτι που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες. Δηλαδή έχει συγχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες (επίπεδο οπτικής αντίληψης). Γι' αυτό το λόγο αναφέρει τα γεωμετρικά σχήματα ως 'σχηματικές έννοιες' (figural concepts). Συνεπώς η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικού σχήματος και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας.

Με τη χρήση της γλώσσας, το γεωμετρικό σχήμα σταδιακά μετατρέπεται από οπτικό αντικείμενο (visual object), σε καθορισμένο αντικείμενο που έχει ιδιότητες (object-defined), και τέλος σε μαθηματικά ορισμένο αντικείμενο (defined object), δηλαδή νοητικό αντικείμενο που περιγράφεται από έναν μαθηματικό ορισμό (Tall, 1994). Τα τρία αυτά διαδοχικά στάδια εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης, αντιστοιχούν στα επίπεδα της Ανάλυσης, Αφαίρεσης και Επαγωγής της Θεωρίας Επιπέδων της

Γεωμετρικής Σκέψης των Van Hieles (1986), όπου η μάθηση είναι μια ασυνεχής διαδικασία που χαρακτηρίζεται από διαφορετικά επίπεδα σκέψης. Τα επίπεδα αυτά είναι συνεχόμενα και ιεραρχημένα. Η πρόοδος εξαρτάται από την εξάσκηση και όχι από την ηλικία. Οι ιδέες που εισάγονται σε κάθε ένα επίπεδο κατανοούνται πλήρως στο επόμενο επίπεδο (Τζεκάκη, 2007).

Σύμφωνα με κριτικές στην κατηγοριοποίηση και ιεραρχία των παραπάνω επιπέδων και παρατηρώντας ότι οι μαθητές παρουσιάζουν τρόπους σκέψης που εμπίπτουν σε περισσότερα από ένα επίπεδα, αντιλαμβανόμαστε ότι τα όρια από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν είναι απολύτως ξεκάθαρα. Η γεωμετρική ανάπτυξη μπορεί να γίνεται ταυτόχρονα σε πολλά επίπεδα. Σε γενικές γραμμές όμως προσφέρεται μέσω των επιπέδων Van Hiele, ένα γενικό πλαίσιο που μπορεί να εφαρμοστεί στα Αναλυτικά Προγράμματα και στη διδασκαλία ώστε να είναι πιο αποτελεσματικά. Επιπλέον μας υπενθυμίζει ότι οι μαθητές σκέφτονται με διαφορετικούς τρόπους, γεγονός ώστε να προσπαθήσουμε να τους κατανοήσουμε και να προσεγγίσουμε τον τρόπο σκέψης τους.

1.3 Η μετάβαση στη Μαθηματική Δραστηριότητα

Το πέρασμα από τη «δραστηριότητα», με την έννοια του «μαθηματικού έργου» (mathematical task), στην πραγματική Μαθηματική Δραστηριότητα εκ μέρους των μαθητών (δηλαδή της εμπλοκής τους με τρόπο που να υποδεικνύει ότι «κάνουν Μαθηματικά») αποτελεί πρόκληση για μελέτη.

Ο τρόπος που τίθεται μια «δραστηριότητα» μέσα στη σχολική τάξη και οι διδακτικοί άξονες γύρω από τους οποίους αυτή είναι δομημένη αποτελεί τη ***«Διδακτική της διάσταση»***. Σύγχρονες προσεγγίσεις του χώρου της «Διδακτικής των Μαθηματικών» υποδεικνύουν τη διδακτική διάσταση μιας «δραστηριότητας» ως σημαντικό χαρακτηριστικό της που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να εμπλακούν με μαθηματικές έννοιες στα πλαίσια μιας πραγματικής Μαθηματικής Δραστηριότητας.

Μια από τις αυτές τις προσεγγίσεις, αντιπροσωπεύεται από τη *«Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση»* (RME) στη σημερινή της μορφή, που έχει επηρεαστεί κυρίως από την οπτική του Freudenthal (1968,1973,1983,1991) για τα μαθηματικά, ο οποίος επισημαίνει την ιδέα των μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Μέσα από τη «*Διδακτική Φαινομενολογία*» και την αρχή της *Φαινομενολογικής εξερεύνησης* ο Freudenthal υποστηρίζει μια μαθηματική εκπαίδευση όπου οι μαθητές κατασκευά-

ζουν μόνοι τους τις γνώσεις τους μέσα από προβλήματα που παίρνουν το νόημά τους από τον πραγματικό κόσμο (*Πλαισιοθετημένη μάθηση*). Οι μαθητές ακολουθούν μια διαδικασία ανακάλυψης των Μαθηματικών αντίστοιχη με αυτή που ακολούθησαν τα ίδια τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους *(Αρχή της «Καθοδηγούμενης επανα-νακάλυψης»* - guided reinvention)

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε μια τέτοια διδακτική προσέγγιση είναι μέσα από τις άτυπες λύσεις των προβλημάτων και τις στρατηγικές (informal strategies) των μαθητών να βοηθήσει να αναδυθούν οι επίσημες (τυπικές- formal approaches) που θα μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες καταστάσεις. Οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν «*εργαλεία*» οργάνωσης των πραγματικών φαινομένων. Οι μαθητές μαθαίνουν σε ένα περιβάλλον «*αλληλεπίδρασης*» να χρησιμοποιούν αυτά τα «εργαλεία» που πριν εξελιχθούν ξεκίνησαν ως διαισθητικές προσεγγίσεις. Καθώς αυτές οι μαθηματικές έννοιες βρίσκονται σε άμεση συσχέτιση μεταξύ τους, πρέπει να διδάσκονται χωρίς να είναι αποκομμένες η μία από την άλλη (Αρχή της «*Συνύφανσης»).*

Η έννοια της «*προοδευτικής μαθηματικοποίησης*» αποτελεί μια από τις βασικές αρχές των ρεαλιστικών μαθηματικών. Τα δυο είδη της μαθηματικοποίησης (οριζόντια και κάθετη) σύμφωνα με τον Treffers (1993), αποτελούν μια δραστηριότητα όπου οι γνώσεις και οι ικανότητες που αποκτήθηκαν χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη νέων άγνωστων σχέσεων και δομών.

Κατά την οριζόντια μαθηματικοποίηση πραγματοποιείται η ‘μετάφραση’ του πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα και στη συνέχεια μέσω ενεργειών όπως η διατύπωση και αναπαράσταση με διάφορους τρόπους εντοπίζονται μαθηματικές δομές μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Απαραίτητη προϋπόθεση η ανάδυση όλων των εννοιών μέσα από τη χρήση ενός *πραγματικού πλαισίου* μέσα στο οποίο δομούνται όλες οι δραστηριότητες.

Η επιστημολογία της Μαθηματικής εκπαίδευσης, η γνώση για τη φύση των μαθηματικών εννοιών καθώς και η πεποίθηση πως μια μαθηματική έννοια παίρνει το νόημα της μέσα από μια σειρά καταστάσεων στις οποίες εμπλέκεται και λειτουργεί, καθόρισαν τη θεωρία των «*Εννοιολογικών πεδίων*» (Conceptual Fields - Vergnaud, 1996). Με βάση την προσέγγιση αυτή απαιτείται η διαμόρφωση κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων όπου η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών να περνά μέσα από τη σημασία τους στη μαθηματική θεωρία, τις ιστορικές–πολιτισμικές

συνθήκες που οδήγησαν στη δημιουργία τους και τη σημασία που μπορεί να παίρνουν από τον τρόπο διαχείρισης τους ή τον συνδυασμό τους με άλλες έννοιες.

Οι απόψεις του Brousseau (1997) μέσα από τη «*Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων*», πολύ κοντά στις προτάσεις του Freudenthal, αποτέλεσαν την αφορμή ο ίδιος να ασχοληθεί συστηματικά με τη δημιουργία «*καταστάσεων*» που θα είχαν την ιδιότητα της «γένεσης» μαθηματικών νοημάτων και θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Μέσα από τη θεωρία του, ο Brousseau υποστηρίζει ότι ο σκοπός της διδακτικής είναι να οδηγηθούν οι μαθητές μέσα από κατάλληλες προτεινόμενες καταστάσεις στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Η μεταβίβαση της ευθύνης μιας κατάστασης (προβλήματος) από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές με τρόπο ώστε εκείνοι να ενθαρρυνθούν και να ενεργήσουν μόνοι τους χωρίς όμως αυτό να συνεπάγεται την ακύρωση του ρόλου του εκπαιδευτικού, αναπτύχθηκε μέσα από την ιδέα της *α-διδακτικής κατάστασης*. Η έννοια της ***εκχώρησης*** (devolution) αποτελεί κεντρικό σημείο της θεωρίας όπου ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να προσαρμόσει τις νέες γνώσεις με τρόπο ώστε να συνδέονται με αυτές που έχουν ήδη αποκτηθεί από τους μαθητές (Henry, 1991). Οι εκπαιδευτικοί μέσα στις *διδακτικές πρακτικές* τους αποφεύγουν να παραχωρούν την ευθύνη της λύσης των προτεινόμενων προβλημάτων στους μαθητές έχοντας την τάση να παρεμβαίνουν και να κάνουν υποδείξεις. Σύμφωνα με τον Brousseau (1997) αυτή η διαχείριση οδηγεί σε περιορισμό της γνωστικής ανάπτυξης των μαθητών:

"……όσο ο εκπαιδευτικός υποδεικνύει στο μαθητή τι πρέπει να κάνει, τόσο η ευκαιρία για την προσδοκούμενη μάθηση κινδυνεύει να χαθεί." (1997, σ. 41)

Μέσα από τις παραπάνω θεωρήσεις αναδεικνύεται ο ρόλος των διδακτικών επιλογών ως ικανός να καθορίσει το είδος της εμπλοκής των μαθητών στα μαθηματικά προβλήματα που διαχειρίζονται. Οι προτάσεις στο χώρο της «Διδακτικής των Μαθηματικών» γενικά είναι πολλές και παρουσιάζουν διαφορές αλλά και κοινά χαρακτηριστικά. Παραβλέποντας τις διαφορές, παρατηρούμε ότι η *δραστηριοποίηση των μαθητών* και η *μάθηση με νόημα* είναι κοινά ζητούμενα στις περισσότερες από αυτές. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι παραπάνω (διδακτικές προσεγγίσεις) αποτελούν σημαντικό πεδίο διερεύνησης της μαθηματικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια που διαρκώς εξελίσσεται.

1.4 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η μάθηση μέσω «δραστηριοτήτων» (Mathematical Tasks) έχει απασχολήσει αρκετά την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα. Ερευνητικά προγράμματα κινήθηκαν γύρω από τη μελέτη της ενσωμάτωσης δραστηριοτήτων μέσα στην καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία. (Quasar Project[2]-USA, 1990-1995). Ο **σχεδιασμός** κατάλληλων μαθηματικών «δραστηριοτήτων» και η **εφαρμογή** τους μέσα στην σχολική τάξη θεωρήθηκαν σημαντικές διαδικασίες οι οποίες σε συνδυασμό με τις θεωρίες μάθησης μπορούν να οδηγήσουν τους μαθητές να «κάνουν Μαθηματικά».

Ο προβληματισμός ως προς το σκέλος του σχεδιασμού μιας κατάλληλης μαθηματικής «δραστηριότητας» σύμφωνα με τους Ainley, Pratt, και Hansen (2006) πρέπει να επικεντρώνεται σε δυο άξονες οι οποίοι δεν είναι άμεσα ορατοί στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αυτοί είναι: ο **σκοπός** και η **χρησιμότητα** (Purpose and utility) της «δραστηριότητας». Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών αντιμετωπίζουν αυτό που καλείται ως *παράδοξο του σχεδιασμού*. Ενώ σχεδιάζουν μέσα από στόχους δεμένους γύρω από τις μαθηματικές έννοιες που θέλουν να διδάξουν, τελικά βλέπουν πως οι στόχοι που θέτουν δεν έχουν την ανταπόκριση που θα περίμεναν από τους μαθητές. Αντίθετα, έχει παρατηρηθεί ότι σε περιπτώσεις που η διδασκαλία δεν προγραμματίζεται γύρω από σφιχτά επικεντρωμένους μαθηματικούς στόχους, η δέσμευση των μαθητών με τη «δραστηριότητα» μπορεί να είναι μεγαλύτερη και ίσως πολύ πλουσιότερη. Στην περίπτωση αυτή όμως είναι λιγότερο εύκολο να ελεγχθεί η μάθηση και δυσκολότερο να αξιολογηθεί η όλη εκπαιδευτική διαδικασία. Οι προσπάθειες να παρασχεθεί *αυθεντικότητα* μέσω *πλαισιοθετημένων* «δραστηριοτήτων» που υποστηρίζουν μαθηματικούς στόχους δεν φαίνεται να επιλύει το παράδοξο του σχεδιασμού καθώς δεν φαίνεται να εξασφαλίζεται η δέσμευση των μαθητών με τους στόχους, ή το σημαντικότερο, η δέσμευση με τις μαθηματικές ιδέες.

Η αναφορά στο *σκοπό* (purpose) μιας «δραστηριότητας» περιλαμβάνει την σημασία της ως προς το γεγονός της ύπαρξης σημαντικών αποτελεσμάτων για τους ίδιους τους μαθητές (η δραστηριότητα να έχει νόημα για αυτούς). Ο σκοπός μιας δραστηριότητας όπως εκλαμβάνεται από τους μαθητές μπορεί να είναι τελείως διαχωρισμένος από αυτόν που επιδιώκει ο εκπαιδευτικός μέσω των επιλογών του. Αυτό ως γεγονός καταδεικνύει τη σοβαρότητα με την οποία θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν η παραπάνω

2. Το πρόγραμμα Quasar εφαρμόστηκε στις ΗΠΑ στα πλαίσια εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης οικονομικά υποβαθμισμένων σχολείων με ιδιαιτερότητες όπως: προβληματική γεωγραφική θέση, μαθητές διαφορετικών εθνικοτήτων κλπ. Στο πενταετές πρόγραμμα πήραν μέρος 6 Middle Schools. (1990-1995).
(Τα Middle Schools αφορούν ηλικίες από 11-13 ετών στο Αμερικάνικο σύστημα εκπ/σης)

διαφοροποίηση κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Όσον αφορά το δεύτερο άξονα, της *χρησιμότητας* (utility) των μαθηματικών ιδεών, αποτυπώνει την απαίτηση οι μαθητές να μην είναι μόνον σε θέση να φέρουν σε πέρας διαδικασίες, αλλά και με τρόπο που να αξιοποιούν τις μαθηματικές ιδέες με τις οποίες αυτές σχετίζονται (δημιουργία νοήματος-χρησιμότητα των μαθηματικών ιδεών).

Ο *σκοπός* και η *χρησιμότητα* μιας «δραστηριότητας» είναι έννοιες στενά συνδεδεμένες και σύμφωνα με τους Ainley, Pratt, και Hansen, κάθε σχεδιασμός παιδαγωγικών «δραστηριοτήτων» θα πρέπει να έχει ως προαπαιτούμενες τις παραπάνω, αν πραγματικά θέλουμε οι μαθητές να εμπλακούν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ισχυρίζονται δε πως η δημιουργία τέτοιων «δραστηριοτήτων» που να υποστηρίζουν μαθηματικές ιδέες είναι εφικτή και μάλιστα προτείνουν τέτοιες δραστηριότητες (Ainley, Pratt, και Hansen, 2006).

Η δημιουργία «δραστηριοτήτων» που προκαλούν «*αβεβαιότητα*» σύμφωνα με την Zaslavsky (2005) είναι ένας τρόπος να αξιοποιηθούν με παιδαγωγικό και μαθηματικό τρόπο προβλήματα που να υποστηρίζουν μάθηση με νόημα και αναστοχασμό (reflection). Το να «κάνεις Μαθηματικά» (Doing Mathematics) συχνά περιλαμβάνει την εγκαθίδρυση μαθηματικών αληθειών μέσα από έλεγχο εικασιών που πρέπει να αποδεχθείς ή να απορρίψεις. Η ενασχόληση με μια τέτοια «δραστηριότητα» περικλείει στοιχεία που σχετίζονται με θέματα εγκυρότητας και αξιοπιστίας, μεθόδους πολλαπλής απόδειξης, ύπαρξης και μοναδικότητας, παραδειγμάτων-αντιπαραδειγμάτων και συνδέσεων. Ο σχεδιασμός «δραστηριοτήτων αβεβαιότητας» σύμφωνα με τη Zaslavsky μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

- Μικρή τροποποίηση κοινών προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων.
- Αξιοποίηση δυσκολιών ή λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών που έρχονται στην επιφάνεια κατά την διδασκαλία .
- Ερωτήματα που συνήθως υπονοούνται, υποθέσεις ή πεποιθήσεις.
- Αυθεντικές καταστάσεις που δημιούργησαν αντιπαραθέσεις στην τάξη.

Σημαντικός παράγοντας που συνηγορεί υπέρ της διδασκαλίας με χρήση «δραστηριοτήτων αβεβαιότητας» είναι η συνδιαλλαγή απόψεων των εμπλεκομένων,

που κοινοποιούνται και αξιολογούνται από την ομάδα, γεγονός που ενισχύει την κοινωνικο-πολιτισμική φύση της δραστηριότητας.

Σημαντική θεωρούν οι Smith και Stein (1998) την ικανότητα του εκπαιδευτικού να μπορεί να διακρίνει και να επιλέγει κατάλληλες «δραστηριότητες» ώστε να υλοποιήσει μέσα στην τάξη του. Η αξιολόγηση των «μαθηματικών δραστηριοτήτων» (Mathematical Tasks) πρέπει να γίνεται παράλληλα με τους στόχους μάθησης που θέτει ο εκπαιδευτικός και στους οποίους προσδοκεί να φτάσουν οι μαθητές. Πώς όμως καταλαβαίνει κανείς μια καλή «δραστηριότητα» όταν τη βλέπει; Τι σημαίνει καλή «δραστηριότητα» και ποια είναι τα χαρακτηριστικά της;

Η κατηγοριοποίηση των «μαθηματικών δραστηριοτήτων» όπως αυτές περιγράφονται από τις Smith και Stein (1998) ανάγεται σε 4 ομάδες και αφορούν γνωστικές απαιτήσεις:

Επίπεδα απαίτησης (Levels of Demands)

- Απομνημόνευσης (Χαμηλό επίπεδο)
- Διαδικασίες χωρίς συνδέσεις με τις έννοιες που αφορούν ή το νόημά τους (Χαμηλό επίπεδο)
- Διαδικασίες με συνδέσεις με τις έννοιες και το νόημα τους (Υψηλό επίπεδο)
- Κάνοντας Μαθηματικά (Με την έννοια ότι οι μαθητές σκέφτονται και δρουν με μαθηματικό τρόπο) (Υψηλό επίπεδο)

(Αναλυτικά τα επίπεδα γνωστικής απαίτησης αναφέρονται στη δουλειά των Stein, Grover και Henningsen 1996, και Stein, Lane και Silver 1996).

Οι Smith και Stein ισχυρίζονται πως ο εκπαιδευτικός πρέπει να ξεκινά με μια «δραστηριότητα» που να απαιτεί εμπλοκή των μαθητών σε υψηλό γνωστικό επίπεδο από τη στιγμή που οι στόχοι του είναι να αξιοποιήσει την ικανότητα των μαθητών να σκέφτονται και να αιτιολογούν. Βασικές προϋποθέσεις η ηλικία των μαθητών στους οποίους απευθύνεται η «δραστηριότητα», η προηγούμενη εμπειρία και γνώση των μαθητών, καθώς και οι νόρμες που επικρατούν στην τάξη.

Ο ίδιος ισχυρισμός υποστηρίζεται σε δημοσίευση των Stein και Lane (1996) όπου πέρα από το σχεδιασμό και την επιλογή των «δραστηριοτήτων» το ενδιαφέρον στρέφεται στην εφαρμογή τους στη σχολική τάξη. Η σχέση μεταξύ της διδασκαλίας και μάθησης με τη χρήση «δραστηριοτήτων» αναλύεται μέσα από τη μελέτη ενός ερευνητικού μεταρρυθμιστικού προγράμματος της Αμερικής στο οποίο επιχειρήθηκε

με συστηματικό τρόπο και με βάση τα λεγόμενα “Instructional Tasks[3]”, να ελεγχθεί κατά πόσον και με ποιο τρόπο η χρήση των παραπάνω, επιδρά στην εμπλοκή και μάθηση των μαθητών (Πρόγραμμα Quasar). Τα ευρήματα έδειξαν πως η απόδοση των μαθητών βελτιώνεται όταν οι «δραστηριότητες» που τους δίνονται είναι δομημένες με τρόπο που να υποστηρίζουν πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, πολλαπλές αναπαραστάσεις και επεξηγήσεις, σε αντίθεση με εκείνα που προωθούν διαδικαστικές μεθόδους, μονομερείς στρατηγικές και αναπαραστάσεις με ελάχιστη ή και καθόλου μαθηματική σύνδεση. Σύμφωνα με την έρευνα, το μέγιστο κέρδος για τους μαθητές προέκυψε από την ενασχόλησή τους με «δραστηριότητες» που τους δεσμεύουν σε υψηλά γνωστικά επίπεδα του τύπου “Doing mathematics” (Βλέπε προηγούμενες σελ.25-26) ή τουλάχιστον στο επίπεδο διαδικασιών με συνδέσεις και νόημα.

Οι άξονες γύρω από τους οποίους επικεντρώθηκαν τα ερωτήματα της έρευνας και που αφορούσαν την εφαρμογή των «δραστηριοτήτων» στη σχολική τάξη ακολούθησαν το εξής μοντέλο:

Η «δραστηριότητα»

- Όπως εμφανίζεται στα αναλυτικά προγράμματα
- Όπως τίθεται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη
- Όπως αξιοποιείται από τους μαθητές
- Η μάθηση που συντελείται μέσα από τη χρήση της

Παρόμοιες θέσεις εμφανίζονται και στο ερευνητικό άρθρο των Stein, Grover και Henningsen, (1996) Οι συγγραφείς μέσα από το δείγμα 144 «δραστηριοτήτων» που χρησιμοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος Quasar ανέλυσαν τις «δραστηριότητες» όσον αφορά

α) Τα χαρακτηριστικά τους (Task features)
(πλήθος στρατηγικών , τρόπους αναπαράστασης)

β) Τις γνωστικές απαιτήσεις τους (Cognitive Demands)
(απομνημόνευση, χρήση διαδικαστικών ενεργειών με ή χωρίς συνδέσεις με νόημα , όρους που υποδεικνύουν ότι οι μαθητές «κάνουν μαθηματικά» με την έννοια ότι σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο).

3. Ως Instructional Tasks αναφέρονται οι δραστηριότητες που εμπλέκουν μαθητές και εκπ/κους στην ανάπτυξη δεξιοτήτων , ιδεών και εννοιών . Δίνουν στο μαθητή τη δυνατότητα να κάνει συνδέσεις και οδηγούν σε διαφορετικού είδους ευκαιρίες για σκέψη. Δεν ενθαρρύνουν την απομνημόνευση και τις αλγοριθμικές διαδικασίες.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ενώ οι συμμετέχοντες στο μεταρρυθμιστικό πρόγραμμα εκπαιδευτικοί επέλεγαν και έθεταν «δραστηριότητες» που σύμφωνα με τους μεταρρυθμιστές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης οδηγούν στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών, (η πλειονότητά τους υποστήριζε πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης , πολλαπλές αναπαραστάσεις και έμφαση στην επεξήγηση από τους μαθητές ώστε να περιγράφουν τους τρόπους με τους οποίους φτάνουν στα αποτελέσματα), οι «δραστηριότητες» είχαν την τάση να αποκλίνουν από τους στόχους.

Οι παράγοντες αυτής της απόκλισης που παρατηρήθηκε κατά τη φάση της υλοποίησής τους από τους μαθητές ερευνήθηκαν (Henningsen, Stein, 1997) και εντοπίστηκαν τα εξής:

Μια «δραστηριότητα» αποκλίνει από το υψηλό επίπεδο όταν:

- Υπάρχουν μαθησιακά κενά μεταξύ της προγενέστερης γνώσης των μαθητών και της νέας γνώσης καθώς και απόκλιση μεταξύ των στόχων των «δραστηριοτή-των» σε σχέση με τα ενδιαφέροντα και τα κίνητρα των μαθητών
- Αφαιρείται η μαθηματική πρόκληση της «δραστηριότητας»
- Η «δραστηριότητα» είναι ακατάλληλη ή δεν σχετίζεται με τους στόχους
- Υπάρχουν προβλήματα διαχείρισης της τάξης

Αντίθετα

Μια «δραστηριότητα» διατηρείται σε υψηλό επίπεδο όταν:

- Οι απαιτήσεις διατηρούνται όπως και οι στόχοι που δεσμεύουν σε υψηλά επίπεδα (διατηρείται η μαθηματική πρόκληση)
- Η «δραστηριότητα» είναι κατάλληλη και υποστηρίζεται από τις ενέργειες των εκπαιδευτικών
- Ο εκπαιδευτικός πιέζει για επεξηγήσεις και αιτιολόγηση ή βοηθά στο να γίνουν οι κατάλληλες συνδέσεις (scaffolding)
- Ο εκπαιδευτικός λειτουργεί ενθαρρυντικά προς το μαθητή
- Διατίθεται ο κατάλληλος χρόνος ενώ συγχρόνως υπάρχει ευελιξία και άμεση λήψη αποφάσεων από τον εκπαιδευτικό

Σημαντικά ευρήματα της έρευνας (Stein, Grover και Henningsen, 1996), που αποτελούν και ένα σχεσιακό πλαίσιο μεταξύ διδασκαλίας των μαθηματικών και μάθησης με χρήση «δραστηριοτήτων» υψηλού γνωστικού επιπέδου, θεωρήθηκαν τα παρακάτω:

- Οι «δραστηριότητες» που επιτρέπουν πολλαπλούς τρόπους στρατηγικών επίλυσης, παρουσίασης και επεξήγησης και που παρουσιάζουν υψηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων σε αντίθεση με τις «δραστηριότητες» που βασίζονται σε αλγοριθμικές διαδικασίες, ωθούν τους μαθητές σε επίπεδο ώστε να «κάνουν Μαθηματικά».
- Ακόμα και στην περίπτωση που η υψηλής γνωστικής απαίτησης «δραστηριότητα» τελικά καταλήγει στην μη εμπλοκή των μαθητών και το επίπεδό της υποβιβάζεται κατά την φάση της διαχείρισής της μέσα στην σχολική τάξη, παρατηρήθηκε ότι υπήρξε κέρδος για τους μαθητές σε σχέση με την περίπτωση όπου η «δραστηριότητα» ήταν εξ' αρχής χαμηλού επιπέδου.
- Μαθητές που δεν έχουν βασικές γνώσεις (basic skills) ωφελούνται καθώς προάγεται ο τρόπος σκέψης τους. (Διαπιστώθηκε πως οι μαθητές που έχουν κενά ωφελούνται περισσότερο όταν εμπλέκονται σε τέτοιου είδους «δραστηριότητες»)
-

Από την άλλη πλευρά ο τρόπος που ο εκπαιδευτικός χειρίζεται τη «δραστηριότητα» μέσα στην τάξη σύμφωνα με την Doerr (2006) λειτουργεί καταλυτικά σε σχέση με αυτά που κάνουν οι μαθητές. Ειδικά στις περιπτώσεις που οι «δραστηριότητες» δεν είναι συνηθισμένες, οι μαθητές έχουν την τάση να τα παρατάνε. Παράλληλα οι εκπαιδευτικοί τείνουν να αξιολογούν τις απαντήσεις των μαθητών συνήθως παραδοσιακά, δηλαδή ανάλογα με το αν αυτές αντιπροσωπεύουν το σωστό αποτέλεσμα ή όχι. Η Doerr υποστηρίζει πως όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν τον τρόπο που οι μαθητές προσεγγίζουν μια «μαθηματική δραστηριότητα» τότε αυτό τους δίνει τη δυνατότητα να τους υποστηρίξουν κατάλληλα. Η μελέτη του τρόπου που λειτουργούν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν «δραστηριότητες», αποτελεί έναν παράγοντα που, αν ληφθεί υπ' όψη, πιθανότατα να οδηγήσει σε αλλαγή της πρακτικής της διδασκαλίας ώστε να είναι πιο αποτελεσματική. Επικεντρώνοντας στην μελέτη μιας «δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος» (απόσπασης μοντέλου-Model Eliciting Task) που πραγματοποιήθηκε σε σχολική τάξη, η Doerr παρατήρησε πως η μετάφραση της σκέψης του μαθητή και η αξιοποίησή της από τον εκπαιδευτικό επιδρά ουσιαστικά στην διδασκαλία. Διαπιστώθηκε πως όταν ο εκπαιδευτικός ζητά επεξηγήσεις, ακούει παράλληλα τη σκέψη των μαθητών του και κάνει δια-πραγμάτευση των απαντήσεων που παίρνει, τότε είναι σε θέση να βρει κατάλληλους τρόπους ώστε η «δραστηριότητα» να εξελιχθεί μέσα από τις ίδιες τις σκέψεις των μαθητών. Εντοπίζοντας τους άξονες που οδήγησαν σε επιτυχή προσέγγιση (από τους

μαθητές) του προβλήματος που τέθηκε στην τάξη, βρέθηκε πως εκείνα τα χαρακτηριστικά που γενικά δρουν ώστε να εξελιχθεί η «δραστηριότητα» προς θετική κατεύθυνση είναι:

- Μαθηματικοποίηση του προβλήματος από τους ίδιους τους μαθητές.
- Ελάχιστη παρέμβαση από τον εκπαιδευτικό. (Ο εκπαιδευτικός άφηνε τους μαθητές να συνεχίσουν ακόμη και όταν παρουσίαζαν λανθασμένους τρόπους επίλυσης)
- Αναγνώριση των ιδεών τους. (Υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό).
- Οι μαθητές αξιολογούν μόνοι τους τη δουλειά τους.

Επιπρόσθετα, στην Διδακτική Τριάδα των Potari και Jaworski, (2002) η *διαχείριση της μάθησης* αναφέρεται ως ο βασικός άξονας της εξέλιξης της όλης εκπαιδευτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα, τονίζεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού που προσπαθεί να δημιουργήσει ένα μαθησιακό περιβάλλον αλληλεπίδρασης, ενώ παράλληλα χρησιμοποιεί τη *Μαθηματική πρόκληση* ως τρόπο για να ενθαρρύνει τη μαθηματική σκέψη και δραστηριότητα (Η Μαθηματική πρόκληση εκφράζεται είτε μέσα από τον καθορισμό των στόχων μιας «δραστηριότητας» είτε μέσα από ερωτήσεις που τίθενται από τον εκπαιδευτικό προς τους μαθητές). Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τον παράγοντα της *Ευαισθησίας στους μαθητές* που περιγράφει τη γνώση του δασκάλου όσον αφορά τους μαθητές του και την προσοχή στις ανάγκες τους, φαίνεται να αποτελούν έναν κύκλο αλληλεπίδρασης που λειτουργεί προσδιορίζοντας την εξέλιξη στην οποία συμμετέχει συστημικά η σχολική τάξη και που θα οδηγήσει στη μάθηση.

Τέλος, επισημαίνεται ιδιαίτερα ο ρόλος των παρεμβάσεων που κάνει ο ίδιος ο εκπαιδευτικός στην τάξη κατά τη διάρκεια της δέσμευσης των μαθητών με έναν μαθηματικό στόχο (Kaldrimidou, Sakonidis, και Tzekaki, 2003) και που λειτουργούν αρνητικά ως προς τη πραγματική Μαθηματική εμπλοκή των μαθητών. Ως τέτοιες αναφέρονται διαχειριστικές μέθοδοι όπως:

- Προσήλωση σε τεχνικές και διαδικασίες
- Βήμα προς βήμα καθοδήγηση
- Παρουσίαση της λύσης από τον εκπαιδευτικό

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ανωτέρω έρευνας φαίνεται πως ότι οι παρεμβάσεις αυτές συνήθως είναι πολύ καθοδηγούμενες και κατά συνέπεια ακυρώνουν τις πρωτοβουλίες των μαθητών .

1.5 Η «δραστηριότητα» στα Μαθηματικά του Γυμνασίου

Τα νέα προγράμματα για τη διδασκαλία όπως αποτυπώνονται μέσα στα νέα βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου(2007) στην Ελλάδα, ήταν ένα βήμα προόδου όπου εγκαταλείφθηκε η παραδοσιακή παρουσίαση της διδακτέας ύλης και υιοθετήθηκε η δομή αναλυτικού προγράμματος, με περιεχόμενα στόχους και οδηγίες διδασκαλίας.

Η ενεργητική προσέγγιση μάθησης αποτέλεσε καινοτομία όπου μέσω της διερεύνησης και ανακάλυψης οι μαθητές καλούνται πια να σκεφτούν και να μάθουν «πώς να μαθαίνουν». Η δραστηριοποίηση του μαθητή άρχισε να παίρνει μορφή απαίτησης καθώς θεωρείται ότι βοηθά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Οι ενέργειες που οδηγούν στην ανακάλυψη της νέας γνώσης και που εντοπίζονται σε διαδικασίες όπως η παρατήρηση, η σύγκριση, η μέτρηση, η ταξινόμηση, ο παραγωγικός συλλογισμός κ.α., ενώθηκαν με το μέσο για τη δραστηριοποίηση των μαθητών που αποκαλούμενο ως «δραστηριότητα» εμφανίζεται συχνά στα νέα βιβλία. Κυριαρχεί ως έννοια κλειδί γύρω από την οποία περιστρέφονται οι νέες διδακτικές προσεγγίσεις (έμφαση στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου) και ο ρόλος της θεωρείται βασικός.

Σύμφωνα με το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Π.Ι.) ως «δραστηριότητα» ορίζεται μια κατάσταση-πρόβλημα ή διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Η υλοποίηση της «δραστηριότητας» είναι χρήσιμη για την κατασκευή της νέας γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές αφενός, και αφετέρου ως ευκαιρία για εμπέδωση μέσω των εφαρμογών. Οι γενικοί στόχοι της μαθηματικής εκπ/σης μέσω «δραστηριοτήτων» στο αναλυτικό πρόγραμμα ορίζονται με γνώμονα οι μαθητές:

- Να μαθαίνουν
- Να ερευνούν
- Να αιτιολογούν
- Να εκτιμούν πιθανές λύσεις
- Να επιχειρηματολογούν υπέρ των προτάσεών τους
- Να εκφράζονται σε μαθηματική γλώσσα

Σημαντικό επίσης γεγονός ο διαχωρισμός Άλγεβρας – Γεωμετρίας , που υποδεικνύει μια προσπάθεια αναβάθμισης της σχολικής Γεωμετρίας (Τα δύο μαθήματα διδάσκονται παράλληλα).

Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών πάνω στα νέα βιβλία πραγματοποιήθηκε μεν πριν την εισαγωγή τους, αλλά με τρόπο που αφορούσε καθαρά το περιεχόμενο που

επρόκειτο να διδαχθεί και όχι τη νοοτροπία που προσπαθούσε να εισάγει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο μέσω των νέων βιβλίων. Μεγάλη συζήτηση έγινε και διαφωνίες διατυπώθηκαν από πολλούς κατά την παρουσίαση των νέων βιβλίων, όπου επισημάνθηκε ότι οι συγγραφείς προσπαθώντας να ανταποκριθούν στην καινοτομία του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, έκαναν κατάχρηση με αποτέλεσμα να φορτώσουν υπερβολικά τα βιβλία με «Εισαγωγικές δραστηριότητες[4]» (κυρίως της Α΄ Γυμνασίου). Άλλοι έδωσαν έμφαση στην εκ των πραγμάτων ακύρωση του ρόλου της «δραστηριότητας» με την ταυτόχρονη παράθεση των λύσεων κάτω από τις διατυπωμένες «δραστηριότητες» (με έμφαση στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου). Επιπλέον θέματα που απασχόλησαν τη μαθηματική κοινότητα ήταν πως ενώ είναι εμφανής η προσπάθεια να συνδεθούν τα προβλήματα που υποστηρίζονται από τις «δραστηριότητες» με πραγματικές καταστάσεις, οι περισσότερες από αυτές χρησιμοποιούν μη αυθεντικό πλαίσιο[5] ή διατυπώνονται με τρόπο που η «δραστηριότητα» ακυρώνει από μόνη της την εμπλοκή των μαθητών. Ένα ακόμη συμπέρασμα που προέκυψε ήταν η μετατόπιση στοιχείων της ύλης του Λυκείου στα βιβλία του Γυμνασίου και η τάση ενσωμάτωσης αποδεικτικών διαδικασιών μέσα από τις εφαρμογές και τις ασκήσεις.

Οι εκπαιδευτικοί που πήραν μέρος στη γενικότερη συζήτηση που αφορούσε τα νέα βιβλία, διατύπωσαν τις επιφυλάξεις τους για τον τρόπο με τον οποίο οι ίδιοι θα ήταν σε θέση να υλοποιήσουν τις προτεινόμενες «δραστηριότητες» από τη στιγμή που δεν είχαν καμιά βασική εκπαίδευση πάνω στο αντικείμενο, καθώς επί χρόνια ακολουθούσαν την παραδοσιακή προσέγγιση διδασκαλίας. Κατά άλλους δε, η υποτιθέμενη νέα προσέγγιση διδασκαλίας θεωρήθηκε ότι δεν καθιστά στην ουσία καινοτομία, καθώς όπως ισχυρίστηκαν, ανέκαθεν χρησιμοποιούσαν και οι ίδιοι παραδείγματα για την εισαγωγή των νέων εννοιών.

Δεδομένου ότι δεν έγινε καμία απολύτως πειραματική εφαρμογή των βιβλίων, οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί των Γυμνασίων έγιναν οι εκτελεστές και ταυτόχρονα οι αξιολογητές των καινοτομιών που εισήγαγε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Σύμφωνα με έρευνα που διεξήχθη το Μάιο του 2008 (Δημητριάδου, Θωμαΐδης, Οικονόμου, Σταφυλίδου, 2009), που αποσκοπούσε να προσεγγίσει την οπτική των εκπαιδευτικών που δίδαξαν τα νέα βιβλία κατά το σχολικό έτος 2007-08, το αίτημα

4. Εισαγωγική Δραστηριότητα είναι αυτή που χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας

5. Ως μη αυθεντικό θεωρείται το πλαίσιο που δεν προκύπτει από πραγματικές καταστάσεις ή μόνον κατά τους τύπους αντιπροσωπεύει καταστάσεις που θα μπορούσαν να διαχειριστούν οι μαθητές.

που προβλήθηκε επιτακτικά ήταν η μείωση της ύλης που με την έχουσα μορφή καθιστά σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς τη διδασκαλία με χρήση «δραστηριοτήτων» απαγορευτική.

Επίσης, σύμφωνα με την ίδια έρευνα, περίπου το ένα τέταρτο των εκπαιδευτικών αγνοεί τις «δραστηριότητες» και εισάγει απ' ευθείας τις μαθηματικές έννοιες με τον παραδοσιακό τρόπο. Οι περισσότεροι από τους μισούς λύνουν οι ίδιοι τις «δραστηριότητες» στον πίνακα κάνοντας ταυτόχρονα ερωτήσεις στους μαθητές, (οπότε χάνεται η προβληματική κατάσταση που θα έκανε τους μαθητές να διερευνήσουν και να ανακαλύψουν τη νέα γνώση), ενώ υπάρχει και μια ομάδα (περίπου 21%) που αναθέτουν τις «δραστηριότητες» είτε ατομικά στους μαθητές, είτε ανά ομάδες. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην Α΄ Γυμνασίου[6] όπου το βιβλίο στρέφει σε μεγαλύτερο βαθμό τους εκπαιδευτικούς σε αυτή την προσέγγιση (να χρησιμοποιούν «δραστηριότητες»), σε σχέση με τα βιβλία των άλλων δυο τάξεων[7].

Η κάλυψη της ύλης φαίνεται να είναι το ζητούμενο για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς ενώ η ανάγκη επιμόρφωσης για αρκετούς από αυτούς δεν φαίνεται να αποτελεί σημαντική προϋπόθεση καθώς θεωρούν τον εαυτό τους επαρκή ώστε να αντεπεξέλθει στο ύψος των περιστάσεων.

Οι περισσότεροι δε, δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται το ρόλο των «δραστηριοτήτων» ως έναν τρόπο προσέγγισης της γνώσης μέσα από την ανακάλυψη από τους ίδιους τους μαθητές, παρά απλά ως μια μέθοδο εισαγωγής νέων εννοιών. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών φαίνεται να θεωρεί την τυπική γνώση των Μαθηματικών αναγκαία και ικανή συνθήκη διδακτικής επάρκειας, γεγονός που καταδεικνύεται από τον τρόπο που αξιολογούν τα νέα βιβλία

6. Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ., (2007). *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου* και Β*ιβλίο Εκπαιδευτικού* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

7. Βλάμος, Π., Δρούτσας ,Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ., (2007). *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου* και *Βιβλίο Εκπαιδευτικού* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

7. Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ., (2007). *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου* και *Βιβλίο Εκπαιδευτικού* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογία της Έρευνας

2.1 Ερευνητικό πρόβλημα- Ερευνητικά ερωτήματα

Η μελέτη των παραγόντων που δρουν σε μια σχολική τάξη είναι μια διαδικασία που εκ των πραγμάτων περικλείει την έννοια του υποκειμενικής ερμηνείας των κατάστάσεων από τον ερευνητή. Πρόταση στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής έρευνας, που μπορεί να περιγράψει με κατανοητό τρόπο περιστατικά «εν εξελίξει», αποτελεί η «μελέτη περίπτωσης».

Πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης ερευνητικής μεθόδου είναι ότι αποτυπώνει μοναδικά χαρακτηριστικά που σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να χάνονταν σε μεγαλύτερης κλίμακας δεδομένα (πχ. σε επισκοπήσεις). Τα χαρακτηριστικά που μελετώνται είναι στενά συνδεδεμένα με την πραγματικότητα και η έρευνα μπορεί να πραγματοποιηθεί από έναν ερευνητή (τα δεδομένα συλλέγονται συστηματικά και με αυστηρότητα). Τα αποτελέσματα αντλούν την ιδιαίτερη δύναμή τους από τη λεπτομέρεια και την πολυπλοκότητα της κατάστασης την οποία μελετούν και γίνονται εύκολα κατανοητά στο ευρύ κοινό ενώ συγχρόνως παρέχουν μια φυσική βάση για γενίκευση. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί σκοποί και τα περιβάλλοντα που συνήθως μελετώνται είναι ποικίλα, αποτελούν μια πηγή (βάση δεδομένων) για άλλους ερευνητές που οι σκοποί τους μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από τους αρχικούς για τους οποίους πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Σε γενικές γραμμές αποτυπώνουν δυναμικές και εκτεταμένες αλληλεπιδράσεις γεγονότων, σχέσεων (υποκειμένων) και άλλων παραμέτρων σε μια μοναδική περίπτωση.

Μειονεκτήματα της μεθόδου: είναι επιρρεπής σε προκαταλήψεις των ερευνητών και είναι δύσκολο να υποβληθεί σε επανέλεγχο (Cohen, Manion και Morrison, 2008).

Δεδομένου ότι σκοπός της έρευνάς μας ήταν να διαπιστώσουμε την επίδραση που έχει στους μαθητές ο τρόπος με τον οποίο υλοποιεί ο εκπαιδευτικός μια «δραστηριότητα» στη σχολική τάξη, θεωρήθηκε πως η παραπάνω ερευνητική προσέγγιση ήταν η καταλληλότερη για την απάντηση στα ερωτήματά μας. Για την ακρίβεια επιχειρήσαμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα :

Ερευνητικά ερωτήματα

1. *Πώς οι επιλογές* του εκπαιδευτικού που σχετίζονται με το *μετασχηματισμό της «δραστηριότητας» επιδρούν* στον τρόπο που οι μαθητές ενεργούν μέσα στη σχολική τάξη;
2. Ποιοι *διδακτικοί χειρισμοί* οδηγούν στην κατεύθυνση της *εμπλοκής* των μαθητών σε *ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα*;

2.2 Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τρία σχολεία της Αθήνας την επόμενη σχολική χρονιά από την εισαγωγή των νέων βιβλίων των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Αυτό υποδεικνύει πως οι εκπαιδευτικοί που έλαβαν μέρος είχαν την εμπειρία της προηγούμενης χρονιάς. Επιπλέον και οι τρεις ήταν απόφοιτοι του Μεταπτυχιακού Τμήματος της «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών» της Αθήνας γεγονός που δηλώνει τη θετική στάση τους σε θέματα που αφορούν τη δραστηριότητα και την υλοποίησή στη σχολική τάξη. (Δυο άνδρες και μια γυναίκα)

Σημειώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί είχαν μεγάλη εμπειρία στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και είχαν δουλέψει με τα παλαιά σχολικά βιβλία αρκετά χρόνια.

2.3 Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε την Άνοιξη του 2009. Για τη μελέτη μας επιλέχθηκε η Α΄ τάξη Γυμνασίου διότι το νέο σχολικό βιβλίο αυτής της τάξης δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη διδασκαλία μέσω «δραστηριοτήτων» σε σχέση με τα άλλα δύο βιβλία της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Επιπλέον επιλέχθηκε οι αναλύσεις να γίνουν σε μαθήματα της Γεωμετρίας καθώς θεωρήθηκε πώς ήταν μια καλή ευκαιρία να δούμε το πώς γίνονται αντιληπτές οι γεωμετρικές έννοιες από τους μαθητές.

Παρ’ όλο που ήταν στην πρόθεσή μας να υπάρξουν διδασκαλίες στα ίδια ακριβώς μαθήματα ώστε να υπάρξει ένα είδος συγκριτικής μελέτης πιο στοχευόμενο, αυτό δεν μπόρεσε να γίνει λόγω του ότι οι καθηγητές έχοντας διαφορετικούς ρυθμούς κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς βρισκόταν σε διαφορετικά κεφάλαια της Γεωμετρίας. Υπάρχει μόνο ένα κοινό μάθημα μεταξύ του Α΄ και Β΄ εκπαιδευτικού (Συμμετρία ως προς σημείο). Επισημαίνεται ότι οι διδασκαλίες όσον αφορά τον πρώτο εκπαιδευτικό (2 Διδασκαλίες) έγιναν σε δυο διαφορετικά τμήματα της Α΄ τάξης Γυμνασίου, ενώ

για τους άλλους δυο εκπαιδευτικούς οι «δραστηριότητες» (2 Διδασκαλίες για τον καθένα) υλοποιήθηκαν στα ίδια τμήματα.

Οι εκπαιδευτικοί επιπλέον ήταν ενήμεροι για το θέμα της έρευνας σε γενικές γραμμές μόνον, χωρίς να γνωρίζουν λεπτομέρειες που θα μπορούσαν να επιδράσουν κατά οποιονδήποτε τρόπο στις επιλογές και τη διαχείρισή τους μέσα στην τάξη.

Η μελέτη σε βάθος των φαινομένων μέσα σε μια σχολική τάξη, η πληθώρα των παραγόντων που επιδρούν στη διαδικασία μάθησης και οι τρόποι με τους οποίους δρουν και μαθαίνουν οι μαθητές, δεν θα μπορούσαν να προκύψουν με απλές καταγραφές και παρατηρήσεις γι' αυτό αναλυτικά έγιναν οι εξής ενέργειες:

- Βιντεοσκοπήθηκαν-μαγνητοφωνήθηκαν 6 συνολικά ωριαίες διδασκαλίες στο μάθημα της Γεωμετρίας της Α΄ Γυμνασίου (2 ώρες ανά εκπαιδευτικό)
- Έγινε καταγραφή των διδασκαλιών. (Απομαγνητοφωνήσεις)
- Η κάθε διδασκαλία μελετήθηκε μέσα από γεγονότα που θεωρήθηκαν ως σημαντικά σε σχέση με τα ερωτήματα της έρευνας τα οποία χαρακτηρίστηκαν ως *Κρίσιμα Συμβάντα* (περιγράφονται πιο κάτω).

Στον πίνακα 1. καταγράφονται τα μαθήματα τα οποία είτε βιντεοσκοπήθηκαν είτε μαγνητοφωνήθηκαν ανά εκπαιδευτικό.

Πίνακας 1.

Εκπαιδευτικός Α΄	1η Διδασκαλία	«Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»
	2η Διδασκαλία	«Συμμετρία ως προς σημείο»
Εκπαιδευτικός Β΄	1η Διδασκαλία	«Συμμετρία ως προς σημείο»
	2η Διδασκαλία	«Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία»
Εκπαιδευτικός Γ΄	1η Διδασκαλία	« Στοιχεία τριγώνου –Είδη τριγώνων»
	2η Διδασκαλία	« Παραλληλόγραμμο –Ορθογώνιο –Ρόμβος – Τετράγωνο -Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο»

2.4 Διαδικασία Ανάλυσης δεδομένων

Η ανάγκη να αποδοθεί ολιστικά η μορφή του πλαισίου που συγκροτεί μια κοινότητα μάθησης, οδήγησε στην επιλογή αφ' ενός *ποιοτικού μοντέλου ανάλυσης* και αφ' ετέρου σε επισταμένη συλλογή και καταγραφή στοιχείων με τη μέθοδο που περιγράφεται παρακάτω.

2.4.1 Μεθοδολογικά εργαλεία ανάλυσης

Η χρήση βιντεοσκοπημένων (μαγνητοφωνημένων) παρατηρήσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών θεωρείται ότι υπερτερεί σε σχέση με τη συλλογή δεδομένων και την ανάλυση στοιχείων, που προέρχονται από τη συστηματική αναγραφή σημειώσεων ή άλλες μεθόδους ερευνητικής παρουσίασης. Το βίντεο είναι ένα σημαντικό, ευέλικτο εργαλείο για τη συλλογή ακουστικών και οπτικών πληροφοριών. Μπορεί να συλλάβει συμπεριφορές και σύνθετες αλληλεπιδράσεις και αυτό επιτρέπει στους ερευνητές να επανεξετάσουν τα στοιχεία επανειλημμένα (Clement, 2000). Υπερνικά τον ανθρώπινο περιορισμό της παρατήρησης καθώς είναι σε θέση να συλληφθεί όχι μόνο ένα "μέρος του συνόλου μιας εικόνας" αλλά πολύ περισσότερα (Martin, 1999). Πρότυπα έρευνας που βασίζονται στη χρήση «βιντεοσκοπημένων» αρχείων δημιουργήθηκαν με στόχο την δημιουργία «μοντέλων ποιοτικής ανάλυσης»(Powell, 2003). Ένα τέτοιο μοντέλο, που προτείνεται για τη μελέτη και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, ακολουθήθηκε κατά την ανάλυση της παρούσας έρευνας (Powell, Francisco & Maher, 2003). Για την ακρίβεια, υιοθετήθηκε ανά διδασκαλία μια ακολουθία επτά αλληλεπιδρώντων, μη γραμμικών φάσεων:

1. Προσεκτική παρακολούθηση των βιντεοσκοπημένων στοιχείων
2. Καταγραφή των βιντεοσκοπημένων στοιχείων
3. Εντοπισμός των κρίσιμων γεγονότων (που προέκυψαν με κριτήριο τις αλλαγές που έκανε ο εκπαιδευτικός στην «δραστηριότητα», καθώς και τις διδακτικές επιλογές που έδειξαν να επιδρούν στο μετασχηματισμό της «δραστηριότητας»)
4. Καταγραφή
5. Δημιουργία πινάκων αλληλεπίδρασης[8] (με τη μορφή *εντοπισμού των*

8. Οι πίνακες εμφανίζονται στην παρ. 3.2 και χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για την σύγκριση μεταξύ των διαχειριστικών προφίλ των εκπαιδευτικών

ενεργειών του εκπαιδευτικού που οδηγούν στο *μετασχηματισμό* της «δραστηριότητας» και στην εμπλοκή των μαθητών)

6. Δημιουργία μιας περίληψης (αφηγηματική)
7. Σύνθεση

Πριν όμως επιχειρηθεί η μελέτη των παραπάνω χαρακτηριστικών είναι απαραίτητο να περιγράψουμε μέσα από τη σχετική βιβλιογραφία, την έννοια του «κρίσιμου συμβάντος» διαμέσου της οποίας περνά συνολικά η ανάλυση που αφορά τους μετέχοντες στην «δραστηριότητα» που υλοποιείται στη σχολική τάξη.

2.4.1.1 Προσδιορισμός των κρίσιμων συμβάντων

Εξετάζοντας και καταγράφοντας αναλυτικά βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες και αφού αποκτηθεί μια αρκετά σε βάθος γνώση του περιεχομένου τους , ως επόμενη φάση σύμφωνα με τους Maher (2002), και Maher και Martino (1996, 2000), θεωρείται ο προσδιορισμός των σημαντικών στιγμών ή με άλλα λόγια, *κρίσιμων γεγονότων*. Ένα γεγονός καλείται κρίσιμο όταν καταδεικνύει μια σημαντική αλλαγή, ή ένα εννοιολογικό άλμα σε σχέση με προηγούμενη κατανόηση (Kiczek, 2000, Maher, 2002), ή ένα διαισθητικό λάθος, ή «μια κατά τρόπο ενδιαφέροντα λανθασμένη μετάβαση» (Bruner,1960,1977). Ένα γεγονός είναι κρίσιμο στη σχέση του με τις ιδιαίτερες ερευνητικές ερωτήσεις που ακολουθεί. Κατά συνέπεια, η περίπτωση στην οποία οι μαθητές παρουσιάζουν μια μαθηματική εξήγηση ή ένα επιχείρημα μπορεί να είναι σημαντική σε σχέση με ένα ερευνητικό ερώτημα που ενδιαφέρεται για τον τρόπο που οι μαθητές οικοδομούν αποδείξεις ή αιτιολογούν με μαθηματικό τρόπο. Οπότε με βάση αυτό θεωρείται ως κρίσιμο γεγονός. Όταν το ερώτημα που ενδιαφέρει σχετίζεται με τον αντίκτυπο των επεμβάσεων των εκπαιδευτικών και του τρόπου με τον οποίο διαχειρίζονται θέματα ή νοήματα μέσα στην τάξη τότε αντίστοιχα ως κρίσιμο θεωρείται ένα συμβάν, όταν αυτό αντανακλά στην μαθηματική κατανόηση και σκέψη του μαθητή. Κρίσιμο συμβάν μπορεί επίσης να θεωρηθεί ένα γεγονός το οποίο κάνει τον εκπαιδευτικό να αναρωτηθεί για το τι ενέργειες ή αποφάσεις πρέπει να πάρει ώστε να μπορέσει να βελτιώσει τη διδασκαλία του (Hole & McEntee, 1999). Η παραπάνω διαδικασία ως αποτέλεσμα έχει για τους εκπ/κους να δουν τις τωρινές πρακτικές τους και όταν διαπιστώσουν ότι είναι προβληματικές να τους στρέψει να βρουν εναλλακτικές οδούς δράσης (Cobb, Wood & Yackel,1990). Τα κρίσιμα συμβάντα συνήθως αφορούν παράγοντες που σχετίζονται με τη διαχείριση

της τάξης, την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, την κατανόηση, τα κίνητρα που τους εμπλέκουν σε μαθηματικές διαδικασίες (Even & Schwarz, 2003) καθώς και κοινωνικού περιεχομένου παράγοντες όπως οι σχέσεις μεταξύ μαθητών, ή μαθητών – εκπαιδευτικού ή ακόμα και μεταξύ του ευρύτερου κοινωνικού πλαισίου της εκπαιδευτικής κοινότητας.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρίζουμε ως «δραστηριότητα» (θέτοντας τη λέξη σε εισαγωγικά), τη δραστηριότητα με την έννοια του Μαθηματικού έργου (Mathematical Task) που υλοποίησε ο εκπαιδευτικός στην τάξη, είτε αυτή είναι η προτεινόμενη από το σχολικό βιβλίο, είτε οποιαδήποτε άλλη που επιλέχθηκε από τον εκπαιδευτικό.

2.4.2 Πλαίσιο ανάλυσης της Μαθηματικής Δραστηριότητας

Παρατηρώντας τη διαδικασία αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη μέσα από τη συστημική Θεωρία της Δραστηριότητας (Leont'ev) και το εξελιγμένο μοντέλο του Engestrom όπου οι φορείς που εμπλέκονται στη διαδικασία της μάθησης των μαθητών ξεπερνούν τα όρια της τάξης (με την έννοια ότι πχ. τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια σχεδιάζονται εκτός αυτής αλλά εφαρμόζονται τελικά μέσα σ' αυτή), η μελέτη έγινε με βάση τα κάτωθι :

- Τι λέει το αναλυτικό πρόγραμμα για την εφαρμογή των «δραστηριοτήτων» στη σχολική τάξη και πώς παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο.
  (Κρίθηκε αναγκαίο να εντοπίσουμε στην κάθε προτεινόμενη δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου τη «*Διδακτική*» και τη «*Μαθηματική*» της διάσταση εστιάζοντας στα αντίστοιχα χαρακτηριστικά μέσα από το θεωρητικό μας πλαίσιο).
- Πώς τίθεται από τον καθηγητή η «δραστηριότητα» στην τάξη.
- Τι κάνουν οι μαθητές.

Η μελέτη όσον αφορά τους μετέχοντες στη «δραστηριότητα», δηλαδή τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές (όπως προαναφέρθηκε στο 2.3), επικεντρώθηκε στα «κρίσιμα» επεισόδια που χαρακτηρίσαμε ως «κρίσιμα συμβάντα». Τα συμβάντα οριοθετήθηκαν με κριτήρια:

- Τις *αλλαγές (μετασχηματισμούς)* που πραγματοποίησαν οι εκπαιδευτικοί στην αρχική «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου (π.χ. μετατροπές ως προς το είδος του «πλαισίου» όπως: από πραγματικό σε γεωμετρικό ή αντίστροφα), αλλαγές ως προς τις προτεινόμενες «*ενέργειες*» (Leont'ev, 1978) και τα «*εργαλεία*»

(Vygotsky, 1934) διαχείρισης της «δραστηριότητας» (όπως π.χ. η χρήση γεωμετρικών οργάνων και λογικών συλλογισμών αντί οπτικής σύγκρισης, παρατήρησης και εικασίας).

- Τη συνολική *διδακτική προσέγγιση* της «δραστηριότητας» από τον κάθε εκπαιδευτικό μέσα από παράγοντες που λειτουργούν ως προς την κατεύθυνση της εμπλοκής των μαθητών με τη «δραστηριότητα» δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα:

  Κίνητρα των μαθητών για ενασχόληση με τη «δραστηριότητα»

  - Μαθηματική πρόκληση» (Potari και Jaworski, 2002)
  - Σκοπός και Ωφέλειες» (Ainley, Pratt, και Hansen,2006),

  Σε συνδυασμό με δ*ιδακτικά χαρακτηριστικά* της διαχείρισης του εκπαιδευτικού όπως:

  - Η *καθοδήγηση* (ώθηση των μαθητών προς συγκεκριμένη κατεύθυνση)
  - *Η εκχώρηση της «δραστηριότητας»* στους μαθητές (Brousseau, 1997)
  - *Η αξιοποίηση της σκέψης* των μαθητών σε συνδυασμό με *πίεση για επεξηγήσεις* (Doerr, 2006)

- Σχετικά με τη δραστηριοποίηση των μαθητών δόθηκε έμφαση στο:
  - Κατά πόσον *εμπλέκονται* στη διαδικασία και με ποιο τρόπο; (εμπλοκή ή μη στη διαδικασία της μάθησης)
  - Τι είδους μαθηματική εμπλοκή φαίνεται να επιτυγχάνεται;
    - *τετριμμένη* (χωρίς συνδέσεις με νόημα)
    - *υψηλή* (οι μαθητές κάνουν συνδέσεις με μαθηματικές έννοιες, κάνουν μαθηματικούς συλλογισμούς , κατασκευάζουν κλπ)

      (βλέπε παράγραφο 1.4)

Όσον αφορά τη *Μαθηματική διάσταση* της «δραστηριότητας», που αναφέρεται παραπάνω, αφορά εκείνα τα χαρακτηριστικά της, που αποσκοπούν στο να οδηγήσουν τους μαθητές στον εντοπισμό και τη διαχείριση μαθηματικών εννοιών και γενικότερα στην εμπλοκή τους σε διαδικασίες που να υποδεικνύουν ότι σκέφτονται με «μαθηματικό τρόπο».

(βλέπε παράγραφο 1.2.1, 1.2.2, 1.4)

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα

3.1 Πώς εμφανίζονται οι «δραστηριότητες» στα σχολικά εγχειρίδια

Το μοντέλο της «πλαισιοθετημένης» μάθησης, τυπικά τουλάχιστον, έχει επιδράσει στη φιλοσοφία με την οποία δημιουργήθηκαν οι «δραστηριότητες» στα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου. (Οι περισσότερες εισαγωγικές δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου χρησιμοποιούν «πραγματικό πλαίσιο», υπό την έννοια ότι οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν κρυμμένες μαθηματικές έννοιες που αναδύονται από μια εικόνα). Συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται αρκετές από τις «δραστηριότητες» που αφορούν τα κεφάλαια της Γεωμετρίας ακολουθεί την εξής πορεία[9]:

Μέσα από την εικόνα ενός ή περισσοτέρων πραγματικών αντικειμένων οι μαθητές πρέπει να παρατηρήσουν, να εικάσουν και να διατυπώσουν σχέσεις κάνοντας μαθηματικοποίηση των εικασιών τους. Η διαίσθηση προτείνεται συχνά ως τρόπος προσέγγισης (ενέργεια-διαδικασία), ενώ τα εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης (πχ γεωμετρικά όργανα) χρησιμοποιούνται συνήθως στις επεκτάσεις[10] των «δραστηριοτήτων» και στα παραδείγματα. Εξετάζοντας το «πραγματικό» πλαίσιο των προτεινόμενων «δραστηριοτήτων» παρατηρούμε ότι περιορίζεται μόνον στους τύπους καθώς η δυνατότητα ενεργειών των μαθητών είναι θεωρητική και περιορισμένη. Επιπλέον, ορατή είναι η *έλλειψη «αυθεντικότητας»* με την έννοια ότι μέσα από αυτές τις «δραστηριότητες» αντιπροσωπεύονται καταστάσεις που δεν υπάρχει περίπτωση να αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην καθημερινότητά τους. Σημειώνουμε δε, ότι κάτω από κάθε προτεινόμενη «δραστηριότητα» στο σχολικό βιβλίο υπάρχει ένα πλαίσιο με τίτλο «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε» ή «Σκεφτόμαστε» όπου δίνονται οι απαντήσεις των ερωτημάτων της. Αυτό καθιστά τις προτεινόμενες «δραστηριότητες» *καθοδηγούμενες* σε μεγάλο βαθμό αν υποτεθεί ότι αυτές διδάσκονται με ανοιχτό το βιβλίο (Δίνεται ενδεικτικά ένα μέρος ενός τέτοιου πλαισίου κάτω από κάποιες «δραστηριότητες» στη συνέχεια).

---

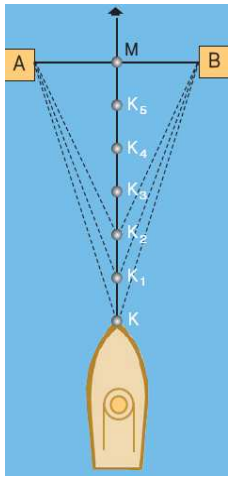
9. Βλέπε αναλυτικό πρόγραμμα και το «βιβλίο του εκπαιδευτικού» της Α΄ Γυμνασίου

10. Κάτω από τη βασική «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου που συνήθως κάνει εισαγωγή νέας έννοιας υπάρχουν παραδείγματα που διαχειρίζονται επιπλέον ιδιότητες. Στη μελέτη μας αποδόθηκαν με το γενικό όρο «επεκτάσεις» με το σκεπτικό ότι πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί τις ενέταξαν στο βασικό κομμάτι της «δραστηριότητας»

Παρακάτω παρατίθενται οι «δραστηριότητες» όπως ακριβώς υπάρχουν στο αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο και κάτω από την κάθε μια αρχικά αναφέρονται οι στόχοι μέσα από το αναλυτικό πρόγραμμα και το «βιβλίο του εκπαιδευτικού». Προκειμένου να μελετηθούν με τρόπο ώστε να απαντηθούν τα ερωτήματα της έρευνας, κρίθηκε απαραίτητο να γίνεται η αποτύπωση της *Μαθηματικής* και *Διδακτικής* τους διάστασης, (επιπρόσθετα από τα αναφερόμενα στο αναλυτικό πρόγραμμα και από τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων), αποσκοπώντας να ελέγξουμε τις δυνατότητες που προσφέρουν κατά την υλοποίησή τους.

1η Δραστηριότητα: «Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»

Ο καπετάνιος του πλοίου προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά από τις βάσεις Α και Β της γέφυρας, επειδή η στενότητα του περάσματος, ο αέρας και η γνωστή παλίρροια του Ευβοϊκού κόλπου επιδρούν στην πορεία των καραβιών και κάνουν τη διέλευση επικίνδυνη. Μπορείς να υποδείξεις την πορεία που πρέπει να έχει ένα πλοίο για να περάσει με ασφάλεια το στενό του Ευρίπου;



- Τι είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;
- Τι είναι τα σημεία Α και Β μεταξύ τους σε σχέση με την πορεία του πλοίου;
- Ποια σημαντική ιδιότητα πρέπει να έχουν τα σημεία της πορείας αυτής;

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

- **Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος** λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.

Οι στόχοι του Αναλυτικού προγράμματος (όπως δίνονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού)

Ο στόχος της παραπάνω «δραστηριότητας» σύμφωνα με τους συγγραφείς είναι η προσέγγιση με ευρετικό τρόπο της αναγκαιότητας της χάραξης της μεσοκαθέτου για την πορεία του πλοίου (ανακάλυψη από τους μαθητές). Αναλυτικά η προτεινόμενη ανάπτυξη της «δραστηριότητας» είναι:

- ✓ Η αναζήτηση και η έρευνα της έννοιας (διαισθητικά σε πρώτο στάδιο).
- ✓ Η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.

- ✓ Η χρήση της έννοιας για τη λύση προβλημάτων.

Στις «επεκτάσεις» της «δραστηριότητας» αναμένεται οι μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια στην κατασκευή της μεσοκαθέτου, αρχικά με υποδεκάμετρο και γνώμονα και στη συνέχεια με κανόνα και διαβήτη.

<u>Η Μαθηματική διάσταση της «δραστηριότητας»</u>

Α. Η σχολική «δραστηριότητα» με τον τρόπο που δίνεται έχει ως στόχο να διεγείρει την:

- *Παραγωγική προδιάθεση,* δηλαδή τη διάθεση των μαθητών να δουν τα Μαθηματικά ως χρήσιμα.
  - Το πρόβλημα που περιγράφεται αντιπροσωπεύει μια πραγματική κατάσταση.
- *Συλλογιστική (προσαρμοστική) ικανότητα,* δηλαδή την ώθηση των μαθητών σε μια διαδικασία λογικών συλλογισμών και αιτιολόγησης.
  - Οι μαθητές θα πρέπει να αιτιολογήσουν γιατί δεν μπορεί να υπάρξει διαφορετική πορεία πέραν της πορείας που σχηματίζουν τα σημεία που ισαπέχουν από Α και Β.
- *Εννοιολογική κατανόηση,* δηλαδή την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και δημιουργία συνδέσεων μεταξύ τους, όπως:
  - Όλα τα σημεία στο επίπεδο που έχουν ως κοινή ιδιότητα το να απέχουν το ίδιο από δυο άλλα σταθερά σημεία , ανήκουν στη μεσοκάθετο.
  - Δυο σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ορίζουν τη μεσοκάθετο.
  - Η μοναδικότητα της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος.
  - Η σύνδεση της μεσοκαθέτου με τον άξονα συμμετρίας.

Β. Εξετάζοντας τη «δραστηριότητα» κυρίως μέσα από τις επεκτάσεις της στόχος είναι :

- Η *Διαδικαστική ευχέρεια,* δηλαδή οι μαθητές να μπορούν να εκτελούν μαθηματικές διαδικασίες με άνεση, και αποτελεσματικότητα, όπως:
  - Να κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο με κανόνα και διαβήτη

(Πλαίσιο μελέτης του National Research Council των ΗΠΑ για την ανάπτυξη της «Μαθηματικής ικανότητας» των μαθητών - Kilpatrick, 2001).

<u>Η Διδακτική διάσταση της «δραστηριότητας»</u>

Εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης

Ως βασικά εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης όσον αφορά την κατασκευαστική διάσταση της μεσοκαθέτου, προτείνονται από το σχολικό εγχειρίδιο:

α) Ο *γνώμονας* και το *υποδεκάμετρο* με *ενέργειες* τον προσδιορισμό του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος μέσω *μέτρησης*

β) Ο *κανόνας* και ο *διαβήτης* με *ενέργειες* το *σχεδιασμό δυο ίσων κύκλων* που έχουν ως κέντρα τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος και η *χάραξη της ευθείας που ορίζουν τα σημεία τομής* τους.

Το πλαίσιο και η αυθεντικότητα

Η «δραστηριότητα» που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο αναφέρεται σε μια εικόνα που τυπικά τουλάχιστον υποστηρίζει ένα «*πραγματικό πλαίσιο*» (Freudental,1968) διαχείρισης του μαθηματικού προβλήματος. Η συγκεκριμένη «δραστηριότητα», σε σχέση με άλλες του σχολικού βιβλίου, έχει το χαρακτηριστικό της *αυθεντικότητας* πιο έντονα, δεδομένου του ότι το πρόβλημα που τίθεται προς τους μαθητές είναι υπαρκτό ως προς τη φύση και την κατάσταση που περιγράφει.

Τα κίνητρα

Η χρήση της εικόνας αποτελεί ελκυστικό στοιχείο και ο τρόπος που διατυπώνονται τα ερωτήματα έχουν αρκετό ενδιαφέρον σε γενικές γραμμές αν και δεν ασχολούνται με θέματα που άπτονται στα άμεσα προβλήματα της καθημερινότητας των μαθητών ώστε να υπάρξει πραγματική εμπλοκή από αυτούς (Ainley, Pratt και Hansen, 2006- “Purpose & Utility”). Η «δραστηριότητα», με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο, δεν δίνει τη δυνατότητα της εικασίας ως προς την εξέλιξη της πορείας του πλοίου καθώς υποδεικνύεται αυτή η πορεία μέσα από τα διαδοχικά σημεία που είναι σημειωμένα πάνω στην εικόνα. Οι μαθητές καλούνται να βγάλουν συμπεράσματα για την πορεία αυτή και να βρουν τη σχετική θέση της πορείας ως προς το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζεται από τα σημεία Α και Β. Η *μαθηματική πρόκληση* κατά συνέπεια αφαιρείται, γεγονός που σύμφωνα με τις Henningsen και Stein, (1997) τείνει να οδηγήσει τη Δραστηριότητα στην τετριμμένη μορφή της. Επιπλέον ζητείται από τους μαθητές να βρουν και να διατυπώσουν μαθηματικές σχέσεις που θα εξασφαλίζουν την ασφαλή πορεία του πλοίου.

Ο βαθμός καθοδήγησης

Όσο παραμένουμε αυστηρά στο κομμάτι της «δραστηριότητας», ο βαθμός καθοδήγησης είναι υπαρκτός εφόσον όπως αναφέρθηκε πιο πάνω η πορεία του

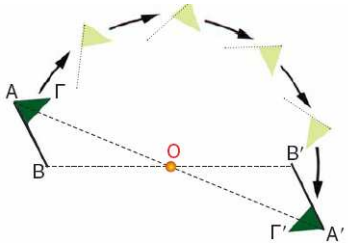
πλοίου είναι προδιαγεγραμμένη, αφήνει όμως περιθώρια στη σκέψη του μαθητή όσον αφορά την διαπίστωση και διατύπωση των αναμενόμενων μαθηματικών σχέσεων και ιδιοτήτων.

Βλέποντας όμως συνολικά τον τρόπο που παρατίθεται η «δραστηριότητα» στο σχολικό εγχειρίδιο και το πλαίσιο του «Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε» που βρίσκεται ακριβώς από κάτω, όπου δίνεται ο ορισμός της μεσοκαθέτου και οι ιδιότητες που κανονικά θα 'πρεπε να ανακαλυφθούν από τους μαθητές, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι στόχοι της «δραστηριότητας» που αναφέρονται στην ανακάλυψη της γνώσης, στην περίπτωση που η δραστηριότητα διδαχθεί μέσα από το σχολικό βιβλίο (με ανοιχτά βιβλία), αναιρούνται .

2η Δραστηριότητα: «Συμμετρία ως προς σημείο»

Αν περιστραφεί το σχήμα ΑΒΓ, γύρω από το σημείο Ο κατά 180°, παίρνει μια νέα θέση την Α΄Β΄Γ΄.

- Τι συμπεραίνεις για τα σχήματα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.



Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι όταν ολοκληρωθεί η στροφή αυτή, κάθε σημείο του ΑΒΓ συμπίπτει με ένα σημείο του Α΄Β΄Γ΄. Για παράδειγμα , θα συμπέσουν τα σημεία Α και Α΄κλπ

Οι στόχοι του Αναλυτικού προγράμματος (όπως δίνονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού)

Ο στόχος της παραπάνω «δραστηριότητας» σύμφωνα με τους συγγραφείς είναι η *κατανόηση των ιδιοτήτων* που έχουν τα συμμετρικά σχήματα ως προς σημείο.

Στις *επεκτάσεις* της «δραστηριότητας» αναμένεται οι μαθητές να αποκτήσουν δεξιότητα στην κατασκευή των συμμετρικών βασικών γεωμετρικών σχημάτων ως προς σημείο. Θεωρείται σημαντική η κατασκευαστική ευχέρεια με σταδιακό τρόπο ξεκινώντας από τα απλούστερα συμμετρικά σχημάτων όπως: σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας και ημιευθείας, μέχρι συνθετότερα σχήματα όπως: γωνίας, τριγώνου και κύκλου.

Η Μαθηματική διάσταση της «δραστηριότητας»

Α. Η σχολική «δραστηριότητα» χωρίς να λάβουμε υπόψη τις *επεκτάσεις* της έχει ως στόχο κυρίως την

- *Παραγωγική προδιάθεση* των μαθητών, καθώς η προς μελέτη έννοια εμφανίζεται στην καθημερινότητα με διάφορες εκφάνσεις, γεγονός που καταδεικνύει άμεσα τη χρησιμότητα των Μαθηματικών.
    - Η έννοια της συμμετρίας εμφανίζεται σε τομείς όπως η Τέχνη, η Αρχιτεκτονική, η Τεχνολογία, η Βιολογία και στην φύση γενικότερα.
- *Συλλογιστική (προσαρμοστική) ικανότητα,* δηλαδή την ικανότητα για λογική σκέψη και διατύπωση:
    - Διατύπωση ορισμού για τα συμμετρικά σχήματα καθώς και ιδιοτήτων που απορρέουν από γεωμετρικούς μετασχηματισμούς .

Β. Εξετάζοντας τη «δραστηριότητα» κυρίως μέσα από τις *επεκτάσεις* της παρατηρούμε ότι έχει ως στόχο την

- *Εννοιολογική κατανόηση,* δηλαδή την κατανόηση μαθηματικών ιδιοτήτων όπως:
    - Διατήρησης του σχήματος και των ιδιοτήτων των συμμετρικών αντικειμένων (Το *αναλλοίωτο του σχήματος* μέσα από *γεωμετρικούς μετασχηματισμούς* - congruency)
    - Ανάπτυξη της οπτικής ικανότητας των μαθητών με
        - αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων
        - προσανατολισμό και μετασχηματισμούς ταύτισης
    - Σύγκριση συμμετρικών σχημάτων
    - Εύρεση σχέσεων που δηλώνουν αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων.
- *Διαδικαστική ευχέρεια,* δηλαδή οι μαθητές να πραγματοποιούν
    - Κατασκευές συμμετρικών σχημάτων με χρήση γεωμετρικών οργάνων όπως ο κανόνας και ο διαβήτης. Ανάπτυξη της δεξιότητας κατασκευής των συμμετρικών βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

<u>Η Διδακτική διάσταση της «δραστηριότητας»</u>

Εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης

Βασικό εργαλείο διαμεσολάβησης της μάθησης, όσον αφορά την κατασκευαστική διάσταση των συμμετρικών σχημάτων, προτείνεται ο *διαβήτης* και ως *ενέργεια* η *περιστροφή* του σχήματος κατά 180° καθώς και το *υποδεκάμετρο* με αντίστοιχη *ενέργεια* τη *μέτρηση*.

Το πλαίσιο και η αυθεντικότητα

Η χρήση της εικόνας ενός αντικειμένου (σημαίας αγώνων) που περιστρέφεται με σκοπό τη διαπίστωση της σύμπτωσης των σημείων του αρχικού και του τελικού

σχήματος, δείχνει την προσπάθεια να τεθεί η «δραστηριότητα» σε ένα *πραγματικό πλαίσιο* (Freudental, 1968) και την έμφαση στο να προσελκυστεί το ενδιαφέρον των μαθητών σε συγκεκριμένες καταστάσεις όπου τα μαθηματικά είναι χρήσιμα (όχι αφηρημένες ιδεατές μορφές σχημάτων όπως έχουν συνηθίσει στη Γεωμετρία). Η *αυθεντικότητα* του πλαισίου παραμένει μόνο στους τύπους (πραγματικό σχήμα που περιστρέφεται).

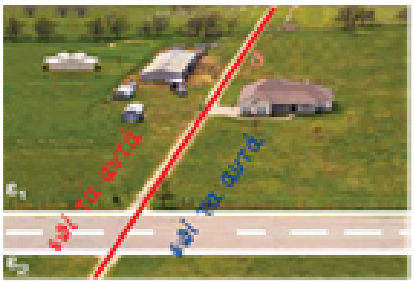
Τα κίνητρα

Χαρακτηριστικά που σύμφωνα με τους Ainley, Pratt και Hansen (2006), θα μπορούσαν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον και την *πραγματική εμπλοκή* (student's involvement) των μαθητών στη διαδικασία της ενασχόλησης με τη «δραστηριότητα» και τις επεκτάσεις της, απουσιάζουν. Ο «*σκοπός*» και οι «*ωφέλειες*» (Purpose & Utility) που θα μπορούσαν να αναδυθούν από το πρόβλημα αν αυτό είχε νόημα για τους μαθητές, δεν υφίστανται. Δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μια «δραστηριότητα» που θα μπορούσε να προσελκύσει τους μαθητές ώστε να ασχοληθούν, καθώς ο τρόπος που δίνεται, όπως και τα συμπεράσματα που δυνητικά μπορούν να προκύψουν δεν είναι εφαρμόσιμα στην καθημερινότητα των μαθητών. Επιπρόσθετα, η νέα θέση του αντικειμένου μετά την περιστροφή του γύρω από το σταθερό σημείο Ο δίνεται έτοιμη, γεγονός που αφαιρεί από τους μαθητές τη δυνατότητα της *εικασίας* ως προς την εξέλιξη του *γεωμετρικού μετασχηματισμού*. Οι μαθητές απλά καλούνται να εξάγουν συμπεράσματα για τα δεδομένα συμμετρικά σχήματα Η *μαθηματική πρόκληση* απουσιάζει.

Ο βαθμός καθοδήγησης

Κάτω από τη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου, στο πλαίσιο του «Σκεφτόμαστε», εκτός από την παρατήρηση όπου γίνεται η αναφορά ότι κάθε σημείο του σχήματος ΑΒΓ μετά την περιστροφή θα συμπέσει με σημείο του Α΄Β΄Γ΄, δίνεται ο ορισμός των συμμετρικών σημείων ως προς κέντρο Ο . Επιπλέον δίνονται και όλες οι ιδιότητες που κανονικά αναμένονται να διατυπωθούν από τους μαθητές, γεγονός που επιβεβαιώνει πως ο *βαθμός καθοδήγησης* είναι μεγάλος. Οι στόχοι της «δραστηριότητας», που από τον τρόπο που τίθεται είναι η *ανακάλυψη της γνώσης* από τους ίδιους τους μαθητές (όπως δηλώνεται και στο βιβλίο του εκπαιδευτικού), ακυρώνονται πριν ακόμα ξεκινήσει η υλοποίηση της.

3η Δραστηριότητα: «Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από άλλη ευθεία»



Στην διπλανή εικόνα βλέπουμε ένα δημόσιο δρόμο να διασχίζει δυο αγροκτήματα. Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 ορίζουν τα όρια του δρόμου αυτού και χωρίζουν τη γη σε τρεις ζώνες.

Δώσε μια συγκεκριμένη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται στην άσφαλτο του δρόμου, δηλαδή στη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες ε_1 και ε_2, καθώς και μια άλλη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω απ' αυτή, δηλαδή στα χωράφια.

Στην ίδια εικόνα υπάρχει ένας χωματόδρομος που χωρίζει τα δυο αγροκτήματα και ορίζει μια ευθεία δ που είναι το σύνορο μεταξύ τους.

- Πώς μπορείς να δώσεις μια κοινή ονομασία σε όλα τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο και μόνο αγρόκτημα;

Οι στόχοι του Αναλυτικού προγράμματος (όπως δίνονται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού)

Ο στόχος της προτεινόμενης από το βιβλίο «δραστηριότητας» όπως περιγράφεται από τους συγγραφείς είναι η *κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ονομάζονται τα μέρη του επιπέδου* που προκύπτουν από δύο παράλληλες ευθείες και μια τρίτη ευθεία που τις τέμνει. Ο λόγος που επιλέχθηκαν ως παράλληλες τα όρια του ασφαλτοστρωμένου δρόμου και για τέμνουσα ο άξονας του μονοπατιού, είναι για να μπορέσουν οι μαθητές να συνδέσουν το «εντός» με την άσφαλτο και το «επί τα αυτά» με τις ιδιοκτησίες.

Στην *επέκταση* της «δραστηριότητας» οι μαθητές καλούνται *να συγκρίνουν τις γωνίες* που σχηματίζονται από τις παράλληλες και την ευθεια δ.

Η Μαθηματική διάσταση της «δραστηριότητας»

Η σχολική «δραστηριότητα» έχει ως στόχο την

- *Εννοιολογική κατανόηση*
  - ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών με
    - αναγνώριση θέσεων στο επίπεδο
    - απόδοση κοινής ονομασίας ανάλογα με τη θέση

- εύρεση σχέσεων μεταξύ γωνιών

- *Παραγωγική προδιάθεση* των μαθητών, δηλαδή ενίσχυση της θετικής στάσης τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Η εικόνα παρουσιάζει μια πραγματική κατάσταση.

<u>Η Διδακτική διάσταση της «δραστηριότητας»</u>

Εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης

Όσον αφορά την *επέκταση* της «δραστηριότητας», για το είδος και τη σύγκριση των γωνιών που σχηματίζονται στα σημεία τομής των παραλλήλων ε_1 και ε_2 με την τέμνουσα δ, ως μέθοδος προσέγγισης *(ενέργειες)* προτείνεται η *μέτρηση* και ως *εργαλείο* για την εύρεση σχέσεων μεταξύ των σχηματιζόμενων γωνιών το *μοιρογνωμόνιο*.

Το πλαίσιο και η αυθεντικότητα

Όταν εισάγεται μια νέα έννοια ή ένα νέο αντικείμενο σύμφωνα με τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και την *αρχή της Φαινομενολογικής εξερεύνησης*, οι μαθηματικές «δραστηριότητες» πρέπει να αναδύονται μέσα από ένα συγκεκριμένο *πλαίσιο*. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές καλούνται να οικοδομήσουν τη γνώση εξερευνώντας τη μαθηματική δραστηριότητα με τη βασική προϋπόθεση ότι η «δραστηριότητα» αυτή έχει νόημα για τους ίδιους.

Η «δραστηριότητα» του βιβλίου με τον τρόπο που δίνεται, φαίνεται να αποβλέπει στο να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών με τη βοήθεια ενός *πραγματικού πλαισίου* όπου η ονομασία και η αναγνώριση θέσεων αφορούν κάποια κατάσταση που βγαίνει από την καθημερινότητα. Παρ' όλα αυτά όμως η *αυθεντικότητα* του πλαισίου δεν φαίνεται να υφίσταται από τη στιγμή που είναι μάλλον δύσκολο οι μαθητές να αντιμετωπίσουν μια παρόμοια κατάσταση ώστε να τη διαχειριστούν σε πραγματικές συνθήκες.

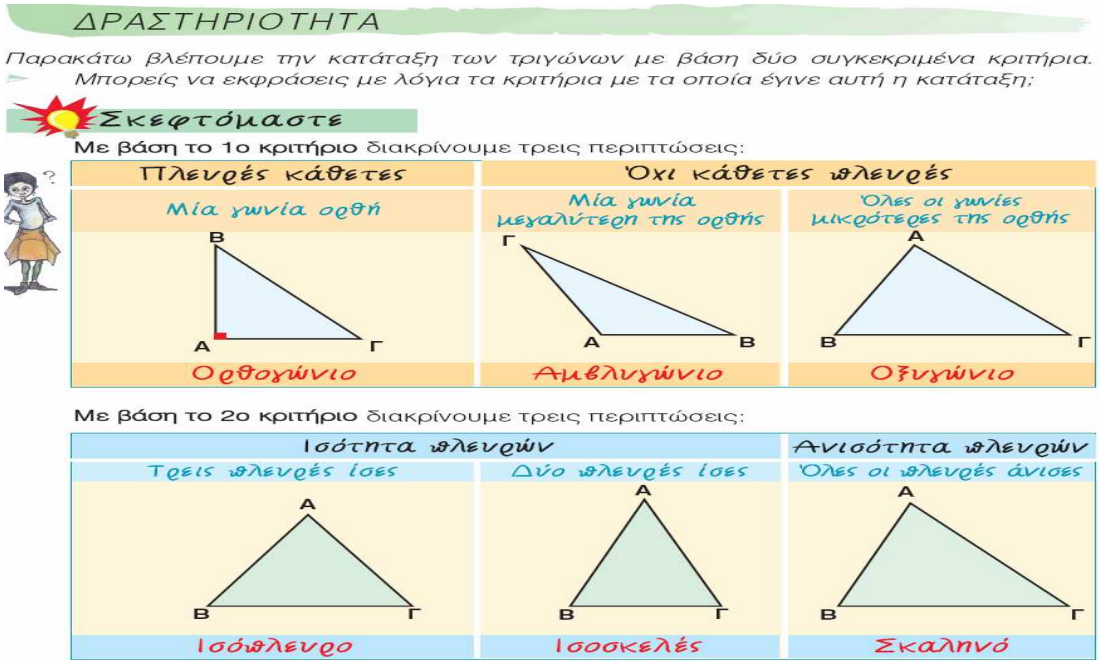
Τα κίνητρα

Η κατάσταση μέσα από την οποία αναδύεται η «δραστηριότητα» του βιβλίου, ενώ θα έπρεπε να αποτελεί «κίνητρο» ώστε οι μαθητές να εμπλακούν σοβαρά στη διαδικασία μάθησης (Θεωρία της Δραστηριότητας, Leont'ev,1979), δεν εμπεριέχει εκείνα τα στοιχεία που σύμφωνα με τους Ainley, Pratt, και Hansen (2006) θα μπορούσαν να δώσουν νόημα στην ενασχόληση των μαθητών με αυτή. Ο «*σκοπός*» και οι «*ωφέ-λειες*» (Purpose and Utility) δεν φαίνεται να προκύπτουν ως αποτελέσματα άμεσα εφαρμόσιμα στην καθημερινότητα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

Ο βαθμός καθοδήγησης

Ο *βαθμός καθοδήγησης* είναι μεγάλος, όσον αφορά τον προσδιορισμό χωρικών ονομασιών, καθώς στην εικόνα υπάρχει ήδη η προσδοκώμενη έκφραση «επί τα αυτά», ενώ το πρόβλημα για την κοινή ονομασία των σημείων δεν είναι σαφές. Τι ακριβώς είναι αυτό που αναμένεται να κάνουν οι μαθητές;

4η Δραστηριότητα : « Στοιχεία τριγώνου –Είδη τριγώνων»



Οι στόχοι του Αναλυτικού προγράμματος

Σύμφωνα με τους συγγραφείς (βιβλίο εκπαιδευτικού Α΄ γυμνασίου), η προτεινόμενη «δραστηριότητα» έχει ως στόχο την «*ανακάλυψη*» από τους μαθητές, *των κριτηρίων κατάταξης* των τριγώνων με τρόπο που αφορά κατά πρώτο λόγο, τη *σχετική θέση των πλευρών* τους (π.χ. κάθετες μεταξύ τους) άρα κατ' επέκταση το είδος των γωνιών, και κατά δεύτερο λόγο το *σχετικό μέγεθος των πλευρών* των τριγώνων (ίσες ή άνισες).

Η Μαθηματική διάσταση της «δραστηριότητας»

Εξετάζοντας τη σχολική «δραστηριότητα» ως πιο «*ανοιχτή*» (παραβλέποντας το πλαίσιο του «Σκεφτόμαστε» που παρεμβάλλεται) , θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει ως στόχο την:

- *Συλλογιστική (προσαρμοστική) ικανότητα*, δηλαδή την ανάπτυξη λογικών συλλογισμών εκ μέρους των μαθητών ώστε να εντοπίζουν χαρακτηριστικά μέσω

των οποίων κατηγοριοποιούνται ομοειδή μαθηματικά αντικείμενα (πχ. μεταξύ των τρίγωνων της «δραστηριότητας»). Επιπλέον, ζητούμενο είναι να μπορούν να εκφράζουν με λόγια και να αιτιολογούν το σκεπτικό τους χρησιμοποιώντας μαθηματικές εκφράσεις.

- *Εννοιολογική κατανόηση,* δηλαδή οι μαθητές να κάνουν *συνδέσεις* όπως: «το είδος των γωνιών που δημιουργούνται εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των πλευρών των τριγώνων», «ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει και τις 3 γωνίες του οξείες» , ή «ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει μια και μόνο αμβλεία γωνία» κλπ.

<u>Η Διδακτική διάσταση της «δραστηριότητας»</u>

Εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης

Υλικής υπόστασης εργαλεία διαμεσολάβησης της γνώσης (πχ μοιρογνωμόνιο, διαβήτης ή οποιοδήποτε χειραπτικό εργαλείο) μέσω των οποίων οι μαθητές θα μπορούσαν να επιχειρήσουν την ταξινόμηση των τριγώνων, κάνοντας μετρήσεις ή συγκρίσεις, δεν προτείνονται. Ως *ενέργεια* θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπονοείται η *οπτική σύγκριση* μεταξύ πλευρών και γωνιών των τριγώνων.

(Το εμβόλιμο πλαίσιο του «Σκεφτόμαστε» μέσα στη «δραστηριότητα» εξηγεί την έλλειψη αυτών των εργαλείων).

Το πλαίσιο και η αυθεντικότητα

Το *πλαίσιο της* «δραστηριότητας» που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο είναι καθαρά «*γεωμετρικό*». Οι μαθητές καλούνται μέσα από ένα σύνολο γεωμετρικών σχημάτων (τρίγωνα) που έχουν ενταχθεί σε δύο ομάδες με βάση κοινά χαρακτηριστικά, να ανακαλύψουν ποια είναι αυτά και να *διατυπώσουν* τα *συμπεράσματά* τους.

Τα κίνητρα

Τα κίνητρα, για την εμπλοκή των μαθητών στη «δραστηριότητα», δεν υπάρχουν ενώ είναι εμφανές ότι η «δραστηριότητα» με τον τρόπο που δίνεται δεν μπορεί να μετασχηματισθεί μέσα από τη σκέψη των μαθητών (Doerr, 2006).

Η κατάταξη των τριγώνων σε ομάδες και το σκεπτικό αυτής της κατάταξης προσφέρονται σχεδόν έτοιμα στους μαθητές οι οποίοι αντί να «ανακαλύψουν» τα «κριτήρια» που έχουν θέσει ως στόχο οι συγγραφείς καλούνται απλά να τα περιγράψουν.

(Υπενθύμιση: στόχος στο βιβλίο του εκπαιδευτικού είναι η «ανακάλυψη» των κριτηρίων).

Ο βαθμός καθοδήγησης

Ο *βαθμός καθοδήγησης* της «δραστηριότητας», με τον τρόπο που δίνεται, είναι μεγάλος χωρίς να αφήνει ιδιαίτερα περιθώρια στη σκέψη του μαθητή όσον αφορά την διαπίστωση και απόδοση των αναμενόμενων μαθηματικών ιδιοτήτων που επιτρέπουν την κατάταξη των σχημάτων σε κλάσεις ισοδυναμίας. Ο στόχος της *ανακάλυψης της γνώσης*, στην περίπτωση που η «δραστηριότητα» διδαχθεί μέσα από το σχολικό βιβλίο, δεν φαίνεται να έχει νόημα.

5η Δραστηριότητα: « Παραλληλόγραμμο –Ορθογώνιο –Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο»

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η υπηρεσία οδικής ασφάλειας αποφάσισε να βάψει το οδόστρωμα σε όλες τις διασταυρώσεις με έντονο κίτρινο χρώμα. Για να κάνει τους υπολογισμούς της, πρέπει να βρεθεί το ακριβές σχήμα του οδοστρώματος στο κοινό μέρος δύο δρόμων, σε κάθε διασταύρωση.

Με την προϋπόθεση ότι οι δρόμοι που διασταυρώνονται είναι ευθείς, προσπάθησε να βρεις όλες τις περιπτώσεις των τετραπλεύρων που σχηματίζουν οι δρόμοι:

(α) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται καθέτως.
(β) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται καθέτως.
(γ) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται πλαγίως.
(δ) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται πλαγίως.

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

- **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.
- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.

Οι στόχοι του Αναλυτικού προγράμματος

Η προτεινόμενη «δραστηριότητα» έχει ως στόχο, σύμφωνα με τους συγγραφείς, (βιβλίο εκπαιδευτικού Α΄ γυμνασίου) την «*ανακάλυψη*» από τους μαθητές των σχημάτων που δημιουργούνται από δυο ζευγάρια παράλληλων ευθειών που τέμνονται και σχηματίζουν, ανάλογα με τον τρόπο που τέμνονται (καθέτως ή πλαγίως), διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων. Οι μαθητές αναμένεται να διατυπώσουν τον ορισμό του παραλληλογράμμου και των ειδικών κατηγοριών του, δηλαδή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του τετραγώνου. Παράλληλος

στόχος είναι η εμπέδωση της έννοιας του ύψους ως απόσταση μεταξύ παράλληλων ευθειών.

Η Μαθηματική διάσταση της «δραστηριότητας»

Η σχολική «δραστηριότητα» θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει ως στόχο την:

- *Παραγωγική προδιάθεση* των μαθητών, δηλαδή ενίσχυση της θετικής στάσης τους σε σχέση με τα μαθηματικά με τη βοήθεια του «πραγματικού» πλαισίου που χρησιμοποιεί.
- *Συλλογιστική (προσαρμοστική) ικανότητα,* ώστε να μπορούν να κατηγοριοποιούν γεωμετρικά αντικείμενα (τετράπλευρα) με βάση κάποια χαρακτηριστικά τους. Να διερευνούν το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων που μπορούν να προκύψουν με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά, καθώς και να είναι σε θέση να διατυπώσουν με μαθηματικές εκφράσεις ορισμούς που να περιγράφουν κλάσεις ισοδυναμίας επίπεδων σχημάτων.
- *Εννοιολογική κατανόηση,* δηλαδή ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας των μαθητών ή την δυνατότητα να κάνουν συνδέσεις όπως: «το πλάτος των δρόμων αντιπροσωπεύεται από την κάθετη απόσταση μεταξύ των παραλλήλων» κλπ.

Η Διδακτική διάσταση της «δραστηριότητας»

Εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης

Στην παραπάνω «δραστηριότητα» *δεν προτείνονται* κάποια *εργαλεία* διαμεσολάβησης της γνώσης που να έχουν υλική υπόσταση (πχ οποιοδήποτε χειραπτικό εργαλείο). Οι μαθητές καλούνται *να κάνουν (νοερά) αναπαραστάσεις* παράλληλων ευθειών και *να χειριστούν τις σχετικές θέσεις* που μπορούν να έχουν μεταξύ τους δυο ζεύγη παράλληλων ευθειών. Ως *ενέργεια* υπονοείται η *οπτική σύγκριση* μεταξύ των πλευρών των τετραπλεύρων που σχηματίζονται ή των αποστάσεων των απέναντι πλευρών τους. Το *«ανακαλυπτικό»* πλαίσιο μάθησης της «δραστηριότητας» καθώς δεν υποστηρίζεται από κατάλληλα διαμεσολαβητικά εργαλεία μάθησης κάνει δύσκολο το έργο των μαθητών οι οποίοι πρέπει να χειριστούν χωρικές έννοιες όχι μόνο σαν αντικείμενα προς παρατήρηση και μελέτη, αλλά και τροποποιώντας αυτές με νοητικές διαδικασίες.

Το πλαίσιο και η αυθεντικότητα

Το *πλαίσιο της* «δραστηριότητας» που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο είναι «*πραγματικό*» ως προς τους τύπους. Το πρόβλημα που καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές δεν άπτεται στα άμεσα ενδιαφέροντά τους, ωστόσο αναδύεται μέσα από μια καθημερινή κατάσταση (Freudental, 1968).

Τα κίνητρα

Το κίνητρο (Leont'ev, 1979) που θα μπορούσε να έχει έννοια για τους μαθητές αν η «δραστηριότητα» υλοποιούνταν με τη βοήθεια ενός περιβάλλοντος «Δυναμικής Γεωμετρίας» χάνεται καθώς η προτεινόμενη διαχείριση δεν υποστηρίζεται από τα κατάλληλα εργαλεία.

Ο βαθμός καθοδήγησης

Ο *βαθμός καθοδήγησης* είναι υπαρκτός καθώς κάτω από τη «δραστηριότητα» στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχει το πλαίσιο του «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε» όπου δίνονται οι ορισμοί του παρ/μου καθώς και των ειδικών μορφών του.

Σημείωση: Οι εικόνες που αφορούν τις «δραστηριότητες που παρουσιάστηκαν παραπάνω υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου των: Βανδουλάκη, Ι., Καλλιγά, Χ., Μαρκάκη, Ν., Φερεντίνου, Σ., (Αθήνα, 2007), του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. Φορείς: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων και Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

3.2 Πώς υλοποιήθηκαν οι «δραστηριότητες» από τους εκπ/κούς

Η μελέτη του τρόπου που οι τρεις εκπαιδευτικούς επέλεξαν και διαχειρίστηκαν τις «δραστηριότητες» στη σχολική τάξη, σε συνδυασμό με το τι τελικά έκαναν οι μαθητές ως αποτέλεσμα αυτής της διαχείρισης, οδήγησε στη δημιουργία πινάκων που ονομάσαμε «πίνακες αλληλεπίδρασης». (Δημιουργήθηκε για κάθε «δραστηριότητα» ένας τέτοιος πίνακας με βάση ολόκληρη τη διδασκαλία).

Στην ανάλυση που ακολουθεί επιλέχθηκαν για τον κάθε εκπαιδευτικό κάποια από τα πιο χαρακτηριστικά επεισόδια που οδήγησαν τη «δραστηριότητα» είτε σε «ουσιαστική» μαθηματική δραστηριότητα εκ μέρους των μαθητών, είτε σε «τετριμμένη» μορφή με την έννοια ότι οι μαθητές απλά μετέχουν χωρίς να κάνουν εννοιολογικές συνδέσεις. (Τα «κρίσιμα συμβάντα» στο σύνολό τους βρίσκονται στο παράρτημα).

Συγκεκριμένα, η σειρά με την οποία γίνεται η παράθεση των αποτελεσμάτων έχει ως εξής:

Πορεία της ανάλυσης

- Για τον κάθε εκπαιδευτικό γίνεται αρχικά μια μικρή παρουσίαση της διαχειριστικής του ταυτότητας (διδακτικό προφίλ εκπαιδευτικού), όπως αυτή προέκυψε από το σύνολο των διδασκαλιών.
- Ακολουθεί η ανάλυση της κάθε «δραστηριότητας» ξεκινώντας αρχικά με την παράθεση του πίνακα αλληλεπίδρασης όπου αναφέρονται με αριθμητικούς προσδιορισμούς τα επεισόδια που ονομάσθηκαν «κρίσιμα συμβάντα» και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός ή διαχειριστική επιλογή του εκπαιδευτικού που στάθηκε η αιτία τα επεισόδια να ονομαστούν «κρίσιμα». Στον ίδιο πίνακα καταγράφεται το είδος της εμπλοκής των μαθητών με τη «δραστηριότητα» σε συνάρτηση με τους μετασχηματισμούς (αλλαγές) που κάνει ο εκπαιδευτικός στην αρχική (προτεινόμενη από το σχολικό βιβλίο) «δραστηριότητα» ενώ συγχρόνως τονίζεται η διδακτική προσέγγιση που οδήγησε σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα εκ μέρους των μαθητών ή σε τετριμμένη εμπλοκή.
- Κάτω από τον κάθε πίνακα παρουσιάζονται (ως παραδείγματα), αποσπάσματα διαλόγων (όπως αυτά καταγράφηκαν κατά τις απομαγνητοφωνήσεις των διδασκαλιών). Επιπλέον, κάτω από τον κάθε διάλογο υπάρχουν συνοπτικές αναγνώσεις των επεισοδίων που συνηγορούν υπέρ της συνολικής ανάλυσης.

- Ακολουθεί συνολική ανάλυση της διαχείρισης του κάθε εκπαιδευτικού ανά διδασκαλία και του τρόπου που αποκρίνονται οι μαθητές.

3.2.1 Η διαχείριση του Εκπαιδευτικού Α΄

Ο εκπαιδευτικός Α΄ υλοποίησε δυο «δραστηριότητες» οι οποίες με τη σειρά που έγιναν ήταν οι εξής:

1η «δραστηριότητα»: «Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»

2η «δραστηριότητα»: «Συμμετρία ως προς σημείο»

Διαχειριστικό προφίλ του εκπαιδευτικού

Τα κοινά χαρακτηριστικά της διαχείρισης από την εκπαιδευτικό που αφορούν και τις δυο «δραστηριότητες» που υλοποίησε, συνοψίζονται στα παρακάτω:

Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη «*δραστηριότητα*» για την εισαγωγή της προς διαχείριση νέας έννοιας, από την αρχή του μαθήματος . Το μοντέλο διδασκαλίας της, επιτρέπει την *αλληλεπίδραση* με τους μαθητές σε μεγάλο βαθμό. Δεν παραδίδει απλά τις νέες έννοιες αλλά δουλεύει και συνδιαλέγεται μαζί με τους μαθητές κάνοντας διαρκώς ερωτήσεις και παρατηρήσεις στις ιδέες τους . Οι μαθητές δουλεύουν *ατομικά* και απαντούν προφορικά ή παρουσιάζουν τα ευρήματά τους στον πίνακα. Η *καθοδήγηση* εκ μέρους της είναι υπαρκτή αλλά περιορισμένη (εμφανίζεται σε αρκετά σημεία του μαθήματος). Τα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* και *οι ενέργειες* που χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία είναι τα προτεινόμενα από το βιβλίο (*μέτρηση* με *υποδεκάμετρο χρήση κανόνα* και *διαβήτη)*. Τάση της εκπαιδευτικού να *εκχωρεί με ελεγχόμενο τρόπο* την «δραστηριότητα» στους μαθητές, να τους ωθεί να χρησιμοποιήσουν τη *διαίσθησή* τους ώστε να προσεγγίσουν μαθηματικές έννοιες και να *πιέζει για επεξηγήσεις*. Επιπλέον δίνει *έμφαση στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων* (διαμεσολαβητικά εργαλεία) από τους ίδιους τους μαθητές.

Σημείωση: Παρατηρήθηκε πως οι διαχειριστικές επιλογές στις δυο «δραστηριότητες» που μελετήθηκαν για τον κάθε εκπαιδευτικό από διδασκαλία σε διδασκαλία παρουσίασαν διαφοροποιήσεις οι οποίες, όπως αποδείχθηκε στη συνέχεια, ήταν αυτές που οριοθέτησαν σημαντικές μεταβολές στα αποτελέσματα που αφορούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Έτσι, δεν είναι τυχαίο που παρακάτω γίνεται λόγος για διαφοροποιήσεις στο χειρισμό μεταξύ πρώτης και δεύτερης διδασκαλίας για τον κάθε

εκπαιδευτικό ενώ όπως θα ήταν αναμενόμενο κάποιος θα περίμενε να επισημανθούν κυρίως τα κοινά στοιχεία.

Οι διαφοροποιήσεις στο χειρισμό μεταξύ 1ης και 2ης «δραστηριότητας»

1η «δραστηριότητα» : «Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»

Η εκπαιδευτικός επιλέγει να *χρησιμοποιήσει τη «δραστηριότητα» του σχολικού* βιβλίου *όπως ακριβώς δίνεται* (βλέπε 3.1, σελ 42), με τη διαφορά ότι την μοιράζει σε φωτοτυπίες και ζητά από τους μαθητές να έχουν τα βιβλία τους κλειστά (*διατήρηση* του *πραγματικού αλλά συγχρόνως καθοδηγούμενου πλαισίου*).

2η «δραστηριότητα» : «Συμμετρία ως προς σημείο»

Επιλέγει να *αλλάξει* το *πλαίσιο της «δραστηριότητας»* μετατρέποντας το *πραγματικό* αντικείμενο (σημαία που περιστρέφεται) της προτεινόμενης «δραστηριότητας» του βιβλίου (βλέπε 3.1), *σε καθαρά γεωμετρικό σχήμα*(τρίγωνο) που το μοιράζει σε φωτοτυπίες στους μαθητές. [Στις φωτοτυπίες υπάρχει ένα «ισοσκελές» τρίγωνο ΑΒΓ, και ένα σημείο Ο έξω από το τρίγωνο].

Ζητά από τους ίδιους τους μαθητές *να εικάσουν* τη νέα θέση του τριγώνου μετά την περιστροφή του γύρω από το σημείο Ο, αρχικά κατά έναν ολόκληρο κύκλο και στη συνέχεια κατά μισό κύκλο. Ενώ στη «δραστηριότητα» του βιβλίου το συμμετρικό του σχήματος είναι έτοιμο, στην προς υλοποίηση «δραστηριότητα» που δίνει η εκπαιδευτικός, η εύρεση της νέας θέσης μετά την περιστροφή, είναι ανοιχτή προς συζήτηση με τους μαθητές. (Αυξάνει με αυτή την επιλογή τη μαθηματική πρόκληση επιτρέποντας στους μαθητές να αυτενεργούν σε μεγάλο βαθμό και συγχρόνως δίνει το κίνητρο για να εμπλακούν στη διαδικασία ενεργά).

Πίνακας αλληλεπίδρασης 1ης «δραστηριότητας»:

«Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»

Η εκπαιδευτικός όπως προαναφέρθηκε μοίρασε τη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου σε φωτοτυπίες, αποκόπτοντας το καθοδηγητικό κομμάτι «Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε» που υπήρχε κάτω από την εικόνα (βλέπε 3.1, σελ. 42).

Διαχειριστική παράληψη: Στη φωτοτυπία υπάρχει ο τίτλος του μαθήματος όπου αναφέρεται με έντονα γράμματα η λέξη μεσοκάθετος, γεγονός που εκ των πραγμάτων προϊδεάζει τους μαθητές.

(Εντείνει ακόμα περισσότερο την καθοδήγηση της προτεινόμενης «δραστηριότητας»)

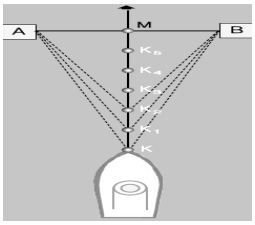
Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί της εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Μεγάλος βαθμός καθοδήγησης	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Διατηρεί* το *πλαίσιο* και την *καθοδήγηση του βιβλίου* (Συνδυασμός με διαχειριστική παράλειψη)	**Τετριμμένη** (στα πλαίσια του κοινωνικού συμβολαί-ου της τάξης)
	2^{ο} κρίσιμο συμβάν Ακούει και *αξιοποιεί* την *σκέψη των μαθητών* (Αξιοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών)	Σύνδεση με προηγούμενη γνώση και αρχή εμπλοκής των μαθητών.(***Εννοιολογι-κή κατανόηση)***
	3^{ο} κρίσιμο συμβάν *Εκχωρεί* τη *Δραστηριότητα* ως προς το κατασκευαστικό μέρος στους μαθητές. (Μεταβίβαση της ευθύνης της κατάστασης-παραχώρηση –αυτενέργεια μαθητών)	Εμπλοκή των μαθητών σε μεγάλο βαθμό (***Διαδικα-στική ευχέρεια)*** (Οι μαθητές κατασκευάζουν τη μεσοκάθετο ενός ευθύ-γραμμου τμήματος ΑΒ με κανόνα και διαβήτη).
	4^{ο} κρίσιμο συμβάν Ακούει και *αξιοποιεί* την *σκέψη των μαθητών*. (Αυτενέργεια μαθητών- μαθηματική εμπλο-κή)	Οι μαθητές **εμπλέκονται** σε πραγματική **μαθημα-τική δραστηριότητα** και εμφανίζουν δυναμικό, δι-ερευνητικό τρόπο σκέψης. (Οι μαθητές εμπλέκονται σε μια ακολουθία συλλογισμών για την πιθανή θέση του σημείου τομής των κύκλων κατά την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμ-μου τμήματος).

Η **διατήρηση** του πραγματικού **πλαισίου** της «δραστηριότητας» του βιβλίου (1^{ο} συμβάν) δεν είναι αρκετή για να **εμπλέξει** τους μαθητές σε μαθηματική δραστηριότητα καθώς **ο βαθμός καθοδήγησης** είναι μεγάλος και δεν προσφέρει στους μαθητές το **κίνητρο** ώστε να εμπλακούν. Η καθηγήτρια διατηρεί το καθοδηγούμενο πλαίσιο και αυτό έχει ως αποτέλεσμα την **τετριμμένη εμπλοκή** των

μαθητών χωρίς έμφαση στα μαθηματικά χαρακτηριστικά που αναζητούνται. Οι μαθητές προσπαθούν να απαντήσουν στα πλαίσια του συνήθους κοινωνικού συμβολαίου της τάξης που διαμορφώνεται από την αντίληψη της αξιολόγησης μέσα από εκείνες τις απαντήσεις που θα ικανοποιήσουν άμεσα τον εκπαιδευτικό.

Παράδειγμα

1ο Κρίσιμο συμβάν (διάλογος)



Σχ.1

2. Καθ: Κοιτάξτε όλοι το σχήμα σας .(Βλέπε σχ.1) Έχουμε ένα πλοίο και μας λέει ότι ο καπετάνιος προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά …Εγώ θέλω να υπογραμμίσετε τη φράση : «το ίδιο μακριά από τη γέφυρα». Καταρχήν για να δούμε πως κινείται το πλοίο, τι πορεία κάνει; Τι νομίζετε;
3. M_1: Ευθεία .
4. Καθ: Παρατηρείστε ότι οι βάσεις της γέφυρας είναι οι Α και Β. Δηλ σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πώς τη βλέπετε αυτή την πορεία;
5. M_2: Μεσοκάθετος.
6. Καθ: Τι σημαίνει αυτό;
7. M_2: Είναι στη μέση.
9. M_3: Οι αποστάσεις από τα τμήματα Α και Β είναι ίσες
11. M_4: Η πορεία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα και περνάει από τη μέση του.

……

17. M6: Πέρα από τα σχήματα όπου είναι μεσοκάθετος……..
18. Καθ: Τι σημαίνει μεσοκάθετος ; Έχουμε πει τι σημαίνει μεσοκάθετος;

……

20. M_6: Ότι είναι κάθετος από τη μέση και οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα δυο άκρα.
21. Καθ: Πολλά είπες. Εγώ το μόνο που ρώτησα είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με τα Α και Β. Άλλο;
22. M_1: Η μεσοκάθετη είναι η κάθετη στο μέσο ….
23. Καθ**:** Το είπαμε αυτό όμως….
24. M_7: Από τη στιγμή που τα σημεία ισαπέχουν από τα Α , Β η πορεία πρέπει να είναι σταθερή.
25. Καθ: Ο συμμαθητής σας λέει ότι αφού όλα τα σημεία έχουν την ίδια απόσταση από τα Α και Β , λογικά λέει ότι η πορεία θα είναι σταθερή .Και είναι πάντα ευθεία. Για να δούμε..……

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[2-4,21,24-25] *Διατήρηση* του *πραγματικού πλαισίου* της «δραστηριότητας» και της *καθοδήγησης* του βιβλίου.

Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί την προτεινόμενη από το βιβλίο δραστηριότητα, με τη διαφορά ότι τη δίνει σε φωτοτυπίες όπου έχει αφαιρέσει το καθοδηγητικό πλαίσιο του «Θυμόμαστε-μαθαίνουμε». Όμως η πορεία του πλοίου, στο σχήμα που απευθύνεται προς τους μαθητές, είναι εξ αρχής σχεδιασμένη, καθώς δίνονται οι διαδοχικές θέσεις αυτής της πορείας. Επιπλέον, το γεγονός ότι η καθηγήτρια έχει παραλείψει να αφαιρέσει τον τίτλο του μαθήματος, προϊδεάζει τους μαθητές και η πρόκληση της δραστηριότητας χάνεται προκαταβολικά. Όλες οι απαντήσεις των μαθητών δεσμεύονται γύρω από τη λέξη «μεσοκάθετος». Η προσπάθεια να γίνει η προσέγγιση με βάση τη διαίσθηση και τις εικασίες

των μαθητών (σύμφωνα με τους στόχους του Αναλυτικού προγράμματος και των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου) αποτυγχάνει.

Αντίθετα η **αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών** ($2^{ο}$ συμβάν) από την εκπαιδευτικό οδηγεί τους μαθητές σε **συνδέσεις** και **εννοιολογική κατανόηση** που προκύπτει μέσα από την προηγούμενη γνώση των μαθητών.

Παράδειγμα

2ο Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

……..

25. Καθ: Και είναι πάντα ευθεία. [εννοεί την πορεία του πλοίου]
Για να δούμε.....
27. M_4: Και επίσης είναι και άξονας συμμετρίας διότι αν διπλώσουμε το χαρτί θα ταυτίζεται.
28. Καθ: Πολύ σωστά, η συμμαθήτριά σας λέει ότι είναι και άξονας συμμετρίας η πορεία του πλοίου. Για ξαναπές. Γιατί είναι και άξονας συμμετρίας;
29. M_4: Γιατί το διπλώνεις στη μέση.
30. Καθ: Πού θα γίνει η τσάκιση ; Ονόμασέ το με δυο γράμματα. Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα πάνω θα γίνει; Με αρχή και τέλος . Πού θα πέσει το Α;
33. M_4: Ναι. Το Β θα πέσει πάνω στο….
34. Καθ: Όχι η τσάκιση πού θα γίνει;
35. M_4: Στο Μ
36. Καθ: Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα θα γίνει η τσάκιση;
37. M_4: Στο ΑΒ
38. Καθ: Μισό λεπτό , μας είπες και πολύ ωραία μάλιστα ,ότι διπλώνουμε το χαρτί μας και έτσι έχουμε άξονα συμμετρίας αυτή την ευθεία .Δηλαδή πού πάνω θα διπλώσεις; Να μου ονομάσεις αυτό το ευθύγραμμο τμήμα. Ναι αυτό που μου δείχνεις!!
39. M_4: ΜΚ;
40. Καθ: Ε ναι . ΜΚ δεν είναι; ΜΚ λοιπόν λέει η συμμαθήτριά σας.

……..

44. Καθ: Να ρωτήσω τώρα κάτι άλλο.. Για ξαναπείτε μου τώρα ποια είναι η σχέση που έχουν το ΜΑ με το ΜΒ;
45. M_9: Το Μ είναι το κέντρο του ευθυγράμμου τμήματος
46. Καθ: Πώς το λένε αυτό το κέντρο; Άλλη λέξη.
47. Καθ: Είναι το μέσο ε;
48. M_9: Ναι είναι το μέσο και σχηματίζονται δυο ευθύγραμμα τμήματα τα ΜΑ, ΜΒ
49. Καθ: Και ποια είναι η σχέση που έχουν μεταξύ τους αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα;
50. M_9: Συμμετρικά;
52. Καθ: Δυο συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ τους τι είναι;
53. M_{10}: Ίσα .
54. Καθ: Τι παρατηρείτε τώρα για τα ΚΑ , ΚΒ;
55. M_{11}: Είναι κι αυτά ίσα
56. Καθ: Και τι άλλο;
57. M_{11}: Είναι και συμμετρικά
59. Καθ: Η ΚΜ λοιπόν είναι ο άξονας συμμετρίας. Για ξαναπείτε μου τα χαρακτηριστικά της σε σχέση με το ΑΒ ;
60. M_{12}: Είναι κάθετη και διέρχεται από το μέσο.
61. Καθ: Είναι λοιπόν κάθετη και περνά από το μέσο. Γι αυτό και πήρε το όνομα της , δηλαδή μεσο-κάθετη
62. M_{13}: Θα μπορούσαμε να πούμε δηλ ότι η πορεία του πλοίου είναι ο άξονας συμμετρίας;
63. Καθ: Βεβαίως!! Στην ουσία παιδιά , εδώ που λέει: δείτε την πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εμείς ως άξονα συμμετρίας κανονικά θα μπορούσαμε να το δούμε σαν συνέχεια του προηγούμενου μαθήματος. Παρατηρούμε ποια είναι τα χαρακτηριστικά του άξονα συμμετρίας και μας προκύπτει η νέα έννοια που είναι η Μεσοκάθετος

Συνοπτική ανάλυση του 2ου συμβάντος

[27-63] *Μετασχηματισμός* της «δραστηριότητας» με τη βοήθεια της *σκέψης των μαθητών*

Η εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται την αποτυχία της διαισθητικής προσέγγισης (βλέπε 1ο κρίσιμο συμβάν). Η παρατήρηση μιας μαθήτριας δίνει την ευκαιρία η «δραστηριότητα» να μετασχηματιστεί ως προς τον τρόπο προσέγγισης. Η συμμετρία ως προς άξονα (έννοια με την οποία ασχολήθηκαν στο προηγούμενο μάθημα), επιστρατεύεται για δώσει λύση στα ερωτήματα. Η εκπαιδευτικός αξιοποιεί την παρατήρηση της μαθήτριας στο μέγιστο βαθμό, εγκαταλείποντας το διαισθητικό τρόπο του βιβλίου, υποστηρίζοντας τη σύνδεση της νέας έννοιας με την προηγούμενη γνώση των μαθητών.

Η **εκχώρηση** των κατασκευών (επεκτάσεις της «δραστηριότητας») στους μαθητές (3ο συμβάν - βλέπε παράρτημα σελ. 174-176) οδηγεί σε **εμπλοκή** τους σε **πλούσια μαθηματική δραστηριότητα**, διατύπωση εικασιών και συμπερασμάτων. (Συλλογιστική ικανότητα και διαδικαστική ευχέρεια). Προβληματικό σημείο, κάποιες ανακολουθίες κατά τη διδασκαλία που δεν επιτρέπουν στους μαθητές να αιτιολογήσουν και να υποστηρίξουν τις ιδέες τους (βλέπε συνολική ανάλυση παρακάτω).

Επιπλέον η ευαισθησία της εκπαιδευτικού στο να **ακούει τη σκέψη των μαθητών** της οδηγεί στη εκδήλωση εκ μέρους τους ενός δυναμικού τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις διαδικασίες (4ο συμβάν, βλέπε παράρτημα, σελ.176-177) οι ανακολουθίες όμως του 3ου συμβάντος φαίνεται να λειτουργούν με προβληματικό τρόπο στην εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας .

Συνολική Ανάλυση της 1ης διδασκαλίας

Η εκπαιδευτικός ξεκινά το μάθημα μοιράζοντας σε φωτοτυπία τη «δραστηριότητα» που έχει το σχολικό βιβλίο, έχοντας αφαιρέσει το πλαίσιο του «Θυμόμαστε–Μαθαίνουμε» και λέει στους μαθητές να κλείσουν τα βιβλία τους. Έχει παραλείψει όμως να αφαιρέσει τον τίτλο του μαθήματος όπου αναφέρεται με έντονα γράμματα η προς εισαγωγή έννοια της «μεσοκαθέτου».

Ξεκινά τη «δραστηριότητα» (*1ο κρίσιμο συμβάν*) ζητώντας από τους μαθητές να κοιτάξουν την εικόνα που τους δίνει και να *εικάσουν* την πιθανή πορεία του πλοίου σε σχέση με τα σημεία Α, Β, έχοντας υπόψη τις παραμέτρους της εκφώνησης. Εκείνοι *προϊδεασμένοι από τον τίτλο* δίνουν κατευθείαν την απάντηση *ακυρώνοντας* ολόκληρο

το σκεπτικό της *διαισθητικής προσέγγισης* της δραστηριότητας του βιβλίου. Επιπλέον, αναφέρουν και ιδιότητες της μεσοκαθέτου. Η εκπαιδευτικός αγωνίζεται να επαναφέρει το διαισθητικό κομμάτι της δραστηριότητας στη συζήτηση, όμως οι μαθητές επιμένουν να χρησιμοποιούν τη λέξη «μεσοκάθετος» και φαίνεται ότι *η σκέψη* τους έχει *δεσμευτεί* γύρω από τη συγκεκριμένη έννοια. Εκτός των άλλων, η πορεία του πλοίου, στο σχήμα που απευθύνεται προς τους μαθητές, είναι εξ αρχής σχεδιασμένη, καθώς δίνονται οι διαδοχικές θέσεις αυτής της πορείας. Η *διατήρηση* από την εκπαιδευτικό *του πλαισίου* της «δραστηριότητας» του βιβλίου με τον τρόπο που αυτή δίνεται, σε συνδυασμό με την εμφάνιση του τίτλου του μαθήματος στις φωτοτυπίες, έχουν ως αποτέλεσμα την *αφαίρεση* του *κινήτρου* και της *μαθηματικής πρόκλησής* της για τους μαθητές. (Οι μαθητές χωρίς δεύτερη σκέψη απαντούν με τρόπο που καταδεικνύει ότι το διδακτικό συμβόλαιο της τάξης κινείται στα πλαίσια του «δίνω απαντήσεις για να ικανοποιήσω τον καθηγητή μου και να πάρω καλό βαθμό».)

Η διαπίστωση μιας μαθήτριας ότι η πορεία του πλοίου εκτός από ευθεία είναι και άξονας συμμετρίας του σχήματος της εικόνας (*2^{ο} κρίσιμο συμβάν*), δίνει στην εκπαιδευτικό τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει έναν *διαφορετικό τρόπο προσέγγισης* των *ιδιοτήτων* της μεσοκαθέτου, κάνοντας *σύνδεση* με *προηγούμενη γνώση* των μαθητών. Η αποτυχημένη διαισθητική προσπάθεια του 1^{ου} κρίσιμου συμβάντος αντικαθίσταται άμεσα και επαναπροσδιορίζονται οι ιδιότητες της μεσοκαθέτου μέσω της συμμετρίας ως προς άξονα. (Η συμμετρία ως προς άξονα είναι ακριβώς το προηγούμενο μάθημα πριν τη μεσοκάθετο). Η μέθοδος που χρησιμοποιεί η εκπαιδευτικός για τη σύνδεση αυτή, παρ' όλο που έχει αρκετά στοιχεία καθοδήγησης, οδηγεί την εκπαιδευτική διαδικασία στην αιτιολόγηση ιδιοτήτων από τους μαθητές. Επιπλέον η έννοια της μεσοκαθέτου μέσα από τη συμμετρία ως προς άξονα εμφανίζεται ως συνέχεια του προηγούμενου μαθήματος. Η λογική ακολουθία των εννοιών δίνει άλλη διάσταση στο μαθηματικό αντικείμενο προς μελέτη και *αξία στην πρότερη γνώση* των μαθητών. Η *αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών* από την εκπαιδευτικό βοηθά την δραστηριότητα τελικά να εξελιχθεί και *να μετασχηματισθεί προς όφελος των μαθητών* καθώς οι μαθητές συνδέουν τη μεσοκάθετο με μια από τις ιδιότητές της. Επιπλέον δίνει και μια ευκαιρία διεξόδου από την αποτυχία της αρχικής προσέγγισης.

Στο *3^{ο} κρίσιμο συμβάν* (βλέπε παράρτημα-2, σελ.174-176) η εκπαιδευτικός περνά στο *κατασκευαστικό κομμάτι* που αφορά τις *επεεκτάσεις* της δραστηριότητας. Ζητά από τους μαθητές να σκεφτούν τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να βρουν το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που έχει σχεδιάσει στον πίνακα (το τμήμα ΑΒ που δίνει η εκπαιδευτικός στον πίνακα έχει οριζόντιο προσανατολισμό). Οι μαθητές διατυπώνουν τη γνώμη τους και προτείνουν την εύρεση του μέσου με μέτρηση (η εύρεση γίνεται με λεκτική περιγραφή καθώς δεν υπάρχουν γεωμετρικά όργανα στην αίθουσα). Η εκπαιδευτικός ζητά κι άλλες γνώμες και στη συνέχεια βάζει το ερώτημα της εύρεσης του μέσου χωρίς την ύπαρξη υποδεκάμετρου (το αναφέρει ως 'χάρακα'). Απαντήσεις όπως «υπολογισμός με το μάτι» ή «διαδοχικών δοκιμών» δεν απορρίπτονται αλλά συζητούνται ως τρόποι που δεν δίνουν ακρίβεια. Η εκπαιδευτικός επιμένει στην εύρεση τρόπου αποδεκτού όπου δεν θα υπάρχει το παραπάνω πρόβλημα. Ένας μαθητής λέει να χρησιμοποιήσουν διαβήτη (διαβήτης δεν υπάρχει στην αίθουσα αλλά πάει κάποιος και τον φέρνει). Στη συνέχεια *η δραστηριότητα,* ως προς το κατασκευαστικό κομμάτι, *εκχωρείται στους μαθητές* οι οποίοι σχεδιάζουν στον πίνακα, συζητούν απαντούν και εκθέτουν τη γνώμη τους. Κάποιοι από αυτούς δοκιμάζουν την κατασκευή μεσοκαθέτου με κανόνα και διαβήτη στον πίνακα αποσπασματικά στην αρχή και στη συνέχεια πιο αναλυτικά ενώ συγχρόνως περιγράφουν λεκτικά. Ένας μαθητής μάλιστα την παρουσιάζει με ακρίβεια, κατασκευάζοντας δυο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα τα Α και Β. Οι *σχέσεις* που *διατυπώνει* είναι μεν σωστές αλλά δεν φαίνεται να μπορεί να δικαιολογήσει πλήρως γιατί ισχύουν. Επιπλέον, ούτε η εκπαιδευτικός εμμένει στο να εξηγηθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια το γιατί ισχύουν οι ισότητες που λέει ο μαθητής. Δεν έχει ειπωθεί από καμία πλευρά το ότι οι αποστάσεις ΓΑ, ΓΒ, ΔΒ και ΔΑ είναι ακτίνες του ίδιου ή ίσων κύκλων (Γ και Δ είναι τα σημεία τομής των δυο κύκλων που σχεδιάστηκαν με κέντρα τα Α και Β). Επίσης δεν έχει αναφερθεί πουθενά ότι αν δυο σημεία ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ορίζουν τη μεσοκάθετό του (έννοια γεωμετρικού τόπου). Όσον αφορά δε τον πρώτο τρόπο κατασκευής με μέτρηση, δεν ολοκληρώθηκε ποτέ. Η χάραξη καθέτου στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με χρήση γνώμονα δεν πραγματοποιήθηκε αλλά ούτε και αναφέρθηκε. Η διαδικασία έμεινε στην μέτρηση και εύρεση του μέσου με χρήση υποδεκαμέτρου.

Σε γενικές γραμμές υπάρχει έντονη *εμπλοκή των μαθητών* στην δραστηριότητα και προσπάθεια *μαθηματικοποίησης* του σκεπτικού τους μέσα από *λογικούς συλλογισμούς*.

Υπάρχουν όμως μαθητές που φαίνεται να μην κατανόησαν την όλη διαδικασία καθώς δεν έχουν γίνει οι απαραίτητες συνδέσεις της έννοιας της μεσοκαθέτου με τις ιδιότητές της .

Προχωρώντας στο επόμενο συμβάν (*4^{ο} κρίσιμο συμβάν*) και αναλύοντας τα λεγόμενα άλλων δυο μαθητών, παρατηρούμε να αποκαλύπτεται μια *δυναμική διάσταση* στον τρόπο *σκέψης* των μαθητών. Η *ακτίνα* των *κύκλων* παίρνει *μεταβλητό χαρακτήρα* στο μυαλό κάποιων από αυτούς και τα σημεία τομής των δυο κύκλων αλλάζουν θέση. Το ερώτημα που αναδύεται είναι αν η ευθεία που ενώνει τα δυο νέα σημεία τομής εξακολουθεί να είναι κάθετη στο μέσο του ΑΒ. Επιπλέον υπάρχει θέμα αμφισβήτησης για το αν τα σημεία αυτά είναι πιο πάνω ή πιο κάτω από αυτά που θεωρήθηκαν ως αρχικά (δηλαδή πάνω στην προηγούμενη ευθεία ΓΔ). Κάποιος μαθητής μάλιστα επιμένει πως τα νέα σημεία τομής υπάρχει περίπτωση να βγουν πιο δεξιά ή πιο αριστερά σε σχέση με τα προηγούμενα. Η καθηγήτρια προσπαθεί να εξηγήσει ότι δεν τίθεται τέτοιο θέμα (δηλαδή να βγουν πιο δεξιά η πιο αριστερά), τονίζοντας ότι υπάρχει μόνο περίπτωση να βγουν πιο πάνω ή πιο κάτω σε σχέση με τα προηγούμενα. Επειδή χτυπά το κουδούνι για τη λήξη της διδακτικής ώρας η εκπαιδευτικός δεν προλαβαίνει να δώσει περισσότερες εξηγήσεις. Λέει μόνο ότι αυτό συμβαίνει γιατί το άνοιγμα του διαβήτη είναι το ίδιο και ότι πρόκειται για ακτίνες. Ο μαθητής που έθεσε το ερώτημα δεν δείχνει ικανοποιημένος και η εκπαιδευτικός λέει ότι θα επανέλθουν στο επόμενο μάθημα. Είναι φανερό ότι η κατανόηση του σκεπτικού βάσει του οποίου έγινε η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη είχε ελλείψεις που λειτούργησαν αρνητικά στο μυαλό κάποιων μαθητών. Επιπλέον ο χρόνος δεν επέτρεψε να γίνουν οι απαραίτητες δοκιμές με γεωμετρικά όργανα ώστε να πεισθούν οι μαθητές. Η *μαθηματική δραστηριότητα δεν προλαβαίνει να εξελιχθεί πλήρως*.

Με λίγα λόγια, μελετώντας συνολικά την διδασκαλία, μπορούμε μέσα από την εστίαση στον τρόπο που η εκπαιδευτικός χειρίζεται τη δραστηριότητα και τις επεκτάσεις της να πούμε ότι οι επιλογές της φαίνεται να έχουν ως στόχο την *εμπλοκή* των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης (student's involvement). Προσπαθεί με συνεχείς ερωτήσεις να προκαλέσει το *ενδιαφέρον* τους και να τους ωθήσει να δράσουν, να διατυπώσουν και να συμπεράνουν. Η αποτυχία της διαισθητικής προσέγγισης της έννοιας της μεσοκαθέτου *(1^{ο} κρίσιμο συμβάν)* την ωθεί προς εύρεση άλλου τρόπου. Αξιοποιεί την παρατήρηση μαθήτριας που συνδέει τη μεσοκάθετο με

τη συμμετρία *(2^{ο} κρίσιμο συμβάν)*, γεγονός που δείχνει ότι *ακούει τη σκέψη των μαθητών* της *(Doerr, 2006)*. Η έλλειψη εμβάθυνσης όμως στις ιδιότητες της μεσοκαθέτου και κυρίως αυτών μέσω των οποίων ορίζεται (χαράσσεται) η μεσοκάθετος αποτελεί στο 3^{ο} κρίσιμο συμβάν σημείο σύγχυσης και παρανοήσεων. Ενόσω το μεγαλύτερο μέρος του μαθήματος κινείται γύρω από την εύρεση της μεσοκαθέτου, *εκχωρεί τη δραστηριότητα στους μαθητές* όσον αφορά το κατασκευαστικό κομμάτι της. Οι μαθητές *εικάζουν, κατασκευάζουν με γεωμετρικά όργανα* και *διατυπώνουν σχέσεις* (*Συλλογιστική ικανότητα – διαδικαστική ευχέρεια. Kilpatrick, 2001*). Η *καθοδήγηση* της εκπαιδευτικού, παρ' όλο που υπάρχει , επιτρέπει σε μεγάλο βαθμό στους μαθητές να *αυτενεργούν*.

Τέλος, στο 4^{ο} κρίσιμο συμβάν η υλοποίηση της *«δραστηριότητας»* φαίνεται ότι αρχίζει να *μετασχηματίζεται* προς *πραγματική «μαθηματική δραστηριότητα»* από την πλευρά *των μαθητών* καθώς το είδος των ερωτήσεων που διατυπώνονται από αυτούς υποδεικνύει διερευνητικό τρόπο σκέψης. Η διδακτική ανακολουθία όμως των εννοιών στο 3^{ο} συμβάν και η έλλειψη κάποιων διευκρινήσεων, οδηγεί σε λανθασμένες εικασίες και ισχυρισμούς. Η πρόθεση της εκπαιδευτικού να βοηθήσει στην αιτιολόγηση μέσω σχημάτων στον πίνακα ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές στη διαπίστωση της ορθότητας ή μη του σκεπτικού τους είναι εμφανής. Η εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται να κατανοήσουν οι μαθητές και να διασαφηνιστούν οι μαθηματικές έννοιες, όμως ο χρόνος δεν επαρκεί. Η μαθηματική δραστηριότητα δεν ολοκληρώνεται.

Πίνακας αλληλεπίδρασης 2ης «δραστηριότητας»:

<u>«Συμμετρία ως προς Σημείο»</u>

Υπενθυμίζουμε ότι η εκπαιδευτικός έχει αντικαταστήσει τη «δραστηριότητα» του βιβλίου (βλέπε 3.1 σελ. 45) με μια δική της η οποία δίνεται σε φωτοτυπία στους μαθητές. Στη φωτοτυπία υπάρχει ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η βάση ΒΓ έχει οριζόντιο προσανατολισμό. Επιπλέον δίνει έξω από την περιοχή που περικλείουν οι πλευρές του τριγώνου ένα σταθερό σημείο Ο ως προς το οποίο ζητά να γίνει ο μετασχηματισμός της περιστροφής.

Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί της εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Πραγματικό, μη αυθεντικό πλαίσιο. Μεγάλος βαθμός καθοδήγησης	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* Αλλάζει το *πλαίσιο* από πραγματικό σε γεωμετρικό, ενώ συγχρόνως *εκχωρεί* τη «δραστηριότητα» ως προς το διαισθητικό κομμάτι στους μαθητές ζητώντας να εικάσουν (αύξηση της μαθηματικής πρόκλησης) την πιθανή θέση του αντικειμένου μετά το μετασχηματισμό. *Ελαχιστοποιεί* την *καθοδήγηση* (Επιτυχής διαχειριστική επιλογή και ως προς τον μετασχηματισμό της «δραστηριότητας αλλά και ως προς τα διδακτικά χαρακτηριστικά)	Οι μαθητές ***εμπλέκονται στο σύνολό τους*** χρησιμοποιώντας τη διαίσθησή τους (*ανάπτυξη χωρικής ικανότητας-σύνδεση με μετασχηματισμό περιστροφής- αυτενέργεια μαθητών)*
	2^{ο} κρίσιμο συμβάν *Διατηρεί* τα προτεινόμενα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* (διαβήτης κλπ) και *ωθεί τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην πράξη.* *Ευαισθησία στους μαθητές.* Αξιοποιεί *τη σκέψη τους.* (Εννοιολογικό άλμα των μαθητών σε σχέση με προηγούμενη γνώση)	Οι μαθητές εμπλέκονται στη διαδικασία, χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα, ***κατάσκευάζουν, κάνουν συνδέσεις, διατυπώνουν, ανακαλύπτουν ισοδύναμους τρόπους διαχείρισης της «δραστηριότητας».*** **Πλούσια μαθηματική δραστηριότητα** *Εννοιολογική κατανόηση, Διαδικαστική ευχέρεια, Συλλογιστική ικανότητα*
	3^{ο} κρίσιμο συμβάν Επιμένει στην εμπέδωση των	**Εμπλοκή** των μαθητών σε μεγάλο βαθμό. Αν και κά-

	νέων εννοιών. *Εκχωρεί* τη «δραστηριότητα» ως προς το κατασκευαστικό μέρος στους μαθητές.(Επέκταση της «δραστηριότητας») (Εντοπισμός λαθών, αντανάκλαση στην κατανόηση των μαθητών)	ποιοι ενεργούν με λανθασμένο τρόπο δίνεται η *ευκαιρία να εντοπιστούν οι παρανοήσεις* των μαθητών.

Η **αλλαγή** του **πλαισίου** της «δραστηριότητας» του βιβλίου από πραγματικό σε γεωμετρικό δεν δείχνει να επηρεάζει τους μαθητές. Αντιμετωπίζουν το γεωμετρικό σχήμα σαν πραγματικό αντικείμενο και το διαχειρίζονται ανάλογα. **Η «δραστηριότητα» εκχωρείται στους μαθητές** . Καλούνται να χρησιμοποιήσουν τη **διαίσθηση** και να **εικάσουν** τη νέα θέση του συμμετρικού του αρχικού σχήματος σε αντίθεση με το σχολικό βιβλίο όπου η θέση του συμμετρικού του σχήματος είναι έτοιμη ($1^{ο}$ συμβάν, βλέπε παράρτημα-2, σελ 178-179). **Όλες οι προτάσεις εκτίθενται στον πίνακα και η εκπαιδευτικός ζητά να τις αξιολογήσουν οι ίδιοι οι μαθητές.** Εκείνοι εμπλέκονται σε μεγάλο βαθμό και κάνουν συνδέσεις γεγονός που υποδεικνύει πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Η **καθοδήγηση είναι ελάχιστη** από την πλευρά της εκπαιδευτικού.

Στη συνέχεια ($2^{ο}$ συμβάν) η αντιμετώπιση της «δραστηριότητας» γίνεται με παραίνεση της εκπαιδευτικού με χρήση γεωμετρικών οργάνων. Οι μαθητές ανταποκρίνονται στην εκχώρηση της «δραστηριότητας» και ενεργούν κάνοντας συλλογισμούς, διατυπώνουν, συμπεραίνουν, σχεδιάζουν και κατασκευάζουν. Αναπτύσσουν πλούσια μαθηματική δραστηριότητα ενώ **η εκπαιδευτικός ακούει, αξιοποιεί τις σκέψεις** τους και επιβραβεύει το σκεπτικό των μαθητών επισημοποιώντας τις ιδέες τους.

Παράδειγμα

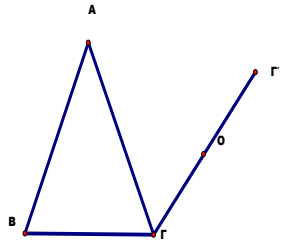
$2^{ο}$ Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

[Η εκπαιδευτικός μοιράζει φωτοτυπίες όπου υπάρχει ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Οι μαθητές βρίσκουν αρχικά με βάση τη διαίσθηση το συμμετρικό του ως προς σταθερό δοθέν σημείο Ο. Στη συνέχεια επιχειρείται η εύρεση των συμμετρικών όλων των κορυφών του τριγώνου κατασκευαστικά].

……

26. Καθ: Ρωτάω τώρα το εξής: πώς θα μπορούσατε να τα βρείτε αυτά τα σημεία εσείς;
[Εννοεί τα νέα σημεία που προκύπτουν κατά την μισή περιστροφή των Α, Β, Γ]
27. [Ο μαθητής M_6 σηκώνεται στον πίνακα]
28. Καθ: Έχουμε και διαβήτη αν χρειαστείς .

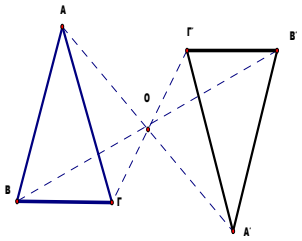
[Ο μαθητής M_6 βρίσκει μόνο το πιθανό σημείο όπου θα πέσει μετά την περιστροφή το σημείο Γ, κάνοντας χρήση του διαβήτη και ακολουθώντας το ημικύκλιο (σχ.1) με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΓ . Δηλώνει ότι προεκτείνει την ΓΟ. Κάνει την υπόλοιπη κατασκευή στο περίπου με το χέρι.]



Σχ.1

……

32. Καθ: Και πώς είσαι σίγουρος ότι τα Α΄ και Β΄ είναι στη σωστή θέση;
33. M_6: Γιατί θα γυρίσει ανάποδα και θα έρθουν εδώ πέρα ακριβώς.
34. Καθ: Άλλος τι θα μπορούσε να κάνει ;
35. M_7: Να έρθω;
36. [Ο M_7 με δεδομένο το παραπάνω σχήμα σχεδιάζει τα άλλα δυο σημεία Α΄ και Β΄ με τον ίδιο τρόπο. (σχ.2) Δηλαδή με διαβήτη και ακτίνες τις ΟΑ και ΟΒ]
38. Καθ: Και πώς είμαστε σίγουροι τώρα ότι το σχήμα έχει κάνει μίση στροφή
39. M_8: Αν το δούμε με μοίρες από το Β στο άλλο Β δηλ τη διάμετρο, το Β΄…,τότε η γωνία είναι 180° ……
43. M_9: Αφού αν κάνουμε όλη τη στροφή ,έναν ολόκληρο κύκλο, καταλήγουμε στο ίδιο σχήμα , τότε το μισό του είναι το απέναντι



Σχ.2

……

64. M_{14}: Εγώ θέλω να πω ότι τα Γ και Γ΄ πρέπει να σχηματίζουν πάντα τη διάμετρο ενός κύκλου.
65. Καθ: Και γιατί αυτό;
66. M_{14}: Γιατί το καθένα πρέπει να απέχει ίσα με την ακτίνα
67. Καθ: Ο Παναγιώτης τώρα το μάζεψε όλο μαζί αυτό που ακούστηκε ,είπε ότι τα Α και Α΄ πρέπει να είναι πάντα στη διάμετρο για να έχουμε 180. Και να έχει γίνει ημικύκλιο.

…….

88. M_7: Κυρία θέλω να πω …..Αυτό είναι το αντίθετο της περιστροφής; [εννοεί αυτό που πρόκειται να πεί] Γιατί αν από το Α φτάσω στο Ο και μετά το προεκτείνω άλλο τόσο, τότε …και κάνω το ίδιο με το Β και το Γ , τότε βρίσκω κατευθείαν το σωστό.
89. Καθ: Ναι ,ναι.
90. Καθ**:** Ο συμμαθητής σας λέει ότι αν πάρουμε την ακτίνα από το Ο μέχρι κάποιο σημείο του τριγώνου και προεκτείνουμε άλλο τόσο, βρίσκουμε πού θα βρεθεί το κάθε σημείο μετά την μίση περιστροφή.
91. Καθ**:** Ο συμμαθητής σας εδώ μας είπε ότι αν το σχεδιάσουμε με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε αμέσως τη νέα θέση του σχήματος.
92. Καθ**:** Εδώ παιδιά λοιπόν έχουμε ένα νέο είδος συμμετρίας που λέγεται όμως όχι πια συμμετρία ως προς άξονα , αλλά ως προς κέντρο συμμετρίας.
Εδώ δεν είχαμε άξονα αλλά ένα σημείο μόνο και θέλαμε η στροφή να γίνει ως προς το σημείο. Όταν έχω κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό σχήμα προκύπτει από περιστροφή .
Δεν έχω πια δίπλωση όπως στη συμμετρία ως προς άξονα.

<u>Συνοπτική ανάλυση του $2^{ου}$ συμβάντος</u>

[27-28,36,38-39,43,64-67,88-91] Διατήρηση ως προς τα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* και τις *ενέργειες* με παράλληλη έμφαση στη *χρήση των γεωμετρικών οργάνων στην πράξη από τους μαθητές*

Η *χρήση* του *διαβήτη* και *η ενέργεια* της *περιστροφής* οδηγεί τη σκέψη των μαθητών προς τη σωστή κατεύθυνση. Συνδέουν την μισή περιστροφή με τη διάμετρο του κύκλου και τα αντιδιαμετρικά σημεία, καθώς και με το μέτρο της αντίστοιχης γωνίας σε μοίρες (180°). Οι ιδιότητες των αντιδιαμετρικών στη συνέχεια οδηγούν με απολύτως λογικό τρόπο στην διατύπωση από τους ίδιους τους μαθητές ενός πιο εύκολου τρόπου για την εύρεση των νέων σημείων χωρίς διαβήτη (με προέκταση και μέτρηση). Η διαπίστωση της ισοδυναμίας των δύο

τρόπων προκύπτει αβίαστα χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια από την πλευρά της εκπαιδευτικού. Η ύπαρξη γεωμετρικών διαμεσολαβητικών εργαλείων και η παρότρυνση της εκπαιδευτικού για τη χρήση τους, βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, ενώ ταυτόχρονα η εκπαιδευτικός ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών στο μετασχηματισμό της «δραστηριότητας» που ουσιαστικά κάνουν οι ίδιοι.

Η **επιμονή να εμπεδωθούν οι νέες έννοιες** μέσα από παραδείγματα ($3^{ο}$ συμβάν-βλέπε παράρτημα-2, σελ.182-183) που επίσης **εκχωρούνται στους μαθητές** και παρουσιάζονται στον πίνακα για αξιολόγηση από τους ίδιους, λειτουργεί ώστε να εντοπιστούν τυχόν παρανοήσεις που δημιουργήθηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Συνολική Ανάλυση της $2^{ης}$ διδασκαλίας

Η εισαγωγή της νέας έννοιας «συμμετρία ως προς σημείο» ξεκινά από την αρχή της διδασκαλίας. Η εκπαιδευτικός θέλοντας να γίνει αυτή η εισαγωγή με απολύτως ομαλό και λογικό τρόπο επιλέγει να χρησιμοποιήσει μια «δραστηριότητα» την οποία μοιράζει σε φωτοτυπίες στην τάξη. Στη φωτοτυπία απεικονίζεται ένα ειδικού τύπου τρίγωνο (ισοσκελές) και ένα σημείο Ο εκτός αυτού. Δεν υπάρχει εκφώνηση, ούτε τίτλος, καθώς και κανένα άλλο στοιχείο που να κατευθύνει τους μαθητές στο προς εξέταση αντικείμενο του μαθήματος. (Επιπλέον τα βιβλία των μαθητών είναι κλειστά)

Η εκπαιδευτικός επιλέγει (*$1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν*) να χρησιμοποιήσει ένα καθαρά *γεωμετρικό σχήμα* σε αντίθεση με τη δραστηριότητα που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο, (σημαία που περιστρέφεται κατά $180^{ο}$) *αλλάζοντας* έτσι το *πλαίσιο της δραστηριότητας* από *πραγματικό* (real world context), σε *γεωμετρικό*. Η *ενέργεια* που ζητά από τους μαθητές να κάνουν , είναι να *περιστρέψουν* αρχικά το σχήμα τους γύρω από το σταθερό σημείο Ο πραγματοποιώντας μια πλήρη περιστροφή και να πούνε τα συμπεράσματά τους. Οι μαθητές απαντούν άμεσα πως αυτό θα συμπέσει με τον εαυτό του. Συνεπώς η επόμενη ερώτηση, 'πού θα βρεθεί το τρίγωνο αν κάνει μισή περιστροφή', έρχεται πιο ομαλά προς διαχείριση από τους μαθητές. Η καθηγήτρια *δεν προτείνει* σ' αυτή τη φάση *τη χρήση* κάποιων *γεωμετρικών οργάνων* αφήνοντας τους μαθητές να εκθέσουν τις προτάσεις τους για τη νέα θέση, *με βάση τη διαίσθησή* τους. Οι μαθητές συμμετέχουν κατά μεγάλο ποσοστό και απαντούν σχεδιάζοντας στον πίνακα. Η *αλλαγή του πλαισίου* σε *γεωμετρικό δεν φαίνεται να τους δημιουργεί κάποιο*

πρόβλημα κατά την εκτέλεση της ενέργειας της περιστροφής, καθώς βλέπουν το τρίγωνο ως αντικείμενο και όχι σαν γεωμετρική οντότητα. Η παρότρυνση προς τους μαθητές να «*εικάσουν*» ως προς το νέο σχήμα δείχνει την *πρόθεση* της καθηγήτριας *να εκχωρήσει* τη *δραστηριότητα* σ' αυτούς . Παρ' όλο που από τις προτεινόμενες λύσεις των μαθητών, η πρώτη που εκτίθεται είναι και η σωστή, η εκπαιδευτικός ζητά περισσότερες προτάσεις. Η *ορθή λύση* αφήνεται προσωρινά ως *ανοιχτό θέμα για αξιολόγηση* από τους μαθητές.

Η εκπαιδευτικός όσον αφορά το $1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν είναι φανερό ότι δίνει *έμφαση* κυρίως *στην ενέργεια* της *περιστροφής*, μέσω της οποίας θα προκύψει ο *γεωμετρικός μετασχηματισμός* και *η νέα θέση* του μαθηματικού αντικειμένου. Επιπλέον η ώθηση προς τους μαθητές να εικάσουν οι ίδιοι τη νέα αυτή θέση επιτρέπει σε μεγάλο βαθμό την *αυτενέργεια* των μαθητών.

Αμέσως μετά η καθηγήτρια καλεί τους μαθητές να *μαθηματικοποιήσουν* το σκεπτικό τους (*$2^{ο}$ κρίσιμο συμβάν)*. Τους ζητά δηλαδή να υποδείξουν έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαν *πρακτικά πια και όχι διαισθητικά* να βρουν τη νέα θέση που θα πάρουν οι κορυφές Α , Β, Γ του τριγώνου μετά την περιστροφή. (Δηλαδή τα Α΄, Β΄, Γ΄) *Έμμεσα υποδεικνύει* ως γεωμετρικό όργανο *το διαβήτη*, λέγοντας πως είναι στη διάθεσή τους αν τον χρειαστούν. Ένας μαθητής σηκώνεται στον πίνακα και βρίσκει μόνο το πιθανό σημείο όπου θα πέσει μετά την ενέργεια της *περιστροφής* το σημείο Γ, κάνοντας *χρήση του διαβήτη* και ακολουθώντας το ημικύκλιο με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΓ. Δηλώνει ότι προεκτείνει την ΓΟ. Κάνει την υπόλοιπη κατασκευή στο περίπου με το χέρι. Ένας δεύτερος μαθητής έρχεται και συμπληρώνει με τον ίδιο τρόπο για τα σημεία Α και Β ώστε να είναι πλήρης η υπόλοιπη κατασκευή.

Στην ερώτηση της εκπαιδευτικού για το «πώς είναι σίγουροι ότι όλο το σχήμα έχει κάνει μισή περιστροφή» οι μαθητές απαντούν με λογικές σκέψεις. *Συνδέουν* την *μισή περιστροφή* με τη *διάμετρο* του κύκλου και τα *αντιδιαμετρικά σημεία*, καθώς και με το *μέτρο της αντίστοιχης γωνίας* σε μοίρες ($180^{ο}$). Ένας άλλος μαθητής διαπιστώνει την ισοδυναμία του τρόπου κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε, με μια πιο εύκολη κατασκευή χωρίς διαβήτη την οποία περιγράφει. Προτείνει προέκταση και μέτρηση κατά ίσο τμήμα. Η διαπίστωση της *ισοδυναμίας* των *δύο τρόπων κατασκευής* προκύπτει άμεσα και αβίαστα χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια από την πλευρά της εκπαιδευτικού. Η υλοποίηση της «*δραστηριότητας*» φαίνεται να αρχίζει να *μετασχηματίζεται* προς πραγματική *Μαθηματική δραστηριότητα* (Henningsen, Stein, 1997) από την πλευρά *των μαθητών* . Η καθηγήτρια *επικροτεί* την παρατήρηση του

μαθητή και *τονίζει την ορθότητά* της . Αμέσως μετά αναφέρεται για πρώτη φορά στην έννοια της «συμμετρίας ως προς σημείο», που μέχρι τώρα δεν είχε αναφερθεί πουθενά (στιχ. 92). Λέει πως *η ενέργεια της μισής περιστροφής* ενός σχήματος γύρω από ένα σημείο δίνει το νέο είδος συμμετρίας ενώ συγχρόνως την αντιπαραβάλλει με την μέχρι τώρα γνωστή συμμετρία ως προς άξονα που προκύπτει με τη διαδικασία της δίπλωσης.

Αναλύοντας το *3ο κρίσιμο συμβάν* παρατηρούμε πως η καθηγήτρια προχωρά στις επεκτάσεις *της δραστηριότητας* (βλέπε 3.1 σελ. 45) που έχουν να κάνουν με *ανάπτυξη* της *διαδικαστικής ευχέρειας (Kilpatrick, 2001)* των μαθητών, δηλαδή την ικανότητά τους να κάνουν κατασκευές με ακρίβεια και ευελιξία. Καλεί τους μαθητές να σχεδιάσουν στα τετράδιά τους το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με κέντρο ένα σημείο Ο. Στη συνέχεια δίνει στους μαθητές χρόνο (εκχωρεί τη «δραστηριότητα») να εργαστούν πάνω στο μετασχηματισμό και περνά από θρανίο σε θρανίο να ελέγξει τα αποτελέσματα. Οι εκδοχές που εμφανίζονται είναι δύο (βλέπε σχ1, σχ2 στο 3ο κρίσιμο συμβάν του παραρτήματος-2, σελ.182-183). Η καθηγήτρια σχεδιάζει στον πίνακα και τα δύο αποτελέσματα του μετασχηματισμού που έκαναν οι μαθητές και στη συνέχεια τους ζητά να βρουν τη διαφορά που έχει το ένα σχήμα σε σχέση με το άλλο. Κάποιοι *μαθητές*, παρ' όλο που κατά βάση όλη η δραστηριότητα εξελίχθηκε γύρω από *την έννοια της περιστροφής* ενός σχήματος γύρω από σταθερό σημείο, φαίνεται να έχουν εκτοπίσει από το μυαλό τους αυτή τη διαδικασία και να *την έχουν αντικαταστήσει* με την *προέκταση* και *μέτρηση*, μόνο που δεν την εφαρμόζουν σωστά (σχ1). Πιθανόν να υπάρχει *σύγχυση* μεταξύ του *νέου είδους συμμετρίας*, με τη *συμμετρία ως προς άξονα* που διδάχθηκαν σε προηγούμενο μάθημα. (Ο προσανατολισμός του συμμετρικού σχήματος που σχεδιάζουν φαίνεται σαν να προέκυψε με δίπλωση πάνω σε έναν νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο).

Παρατηρώντας συνολικά ολόκληρη την διδασκαλία φαίνεται πως ο τρόπος που η εκπαιδευτικός θέτει και χειρίζεται τη δραστηριότητα έχει σαν αποτέλεσμα το *ενδιαφέρον* (κίνητρο) και την *εμπλοκή* στη διαδικασία της μάθησης (student's involvement) μεγάλου μέρους των μαθητών. Παρ' όλο που το *πλαίσιο της δραστηριότητας* που προτείνει στους μαθητές *δεν είναι «πραγματικό»* , αλλά καθαρά «*γεωμετρικό»*, οι μαθητές το αντιμετωπίζουν θετικά.

Η *καθοδήγηση* ενώ είναι *υπαρκτή, δεν είναι μεγάλη,* γεγονός που επιτρέπει στους μαθητές να σκεφτούν, να εκθέσουν τις ιδέες τους και να αξιολογήσουν αποτελέσματα, επιτρέποντάς τους σε μεγάλο βαθμό την *αυτενέργεια.* Ως συνέπεια των παραπάνω φαίνεται να προκύπτει η αξιοποίηση της δραστηριότητας από τους ίδιους τους μαθητές οι οποίοι *παρατηρούν, εικάζουν* και παράλληλα *διατυπώνουν σχέσεις* που δηλώνουν συμμετρία ως προς σημείο *(συλλογιστική ικανότητα, Kilpatrick,2001).* Η *εύρεση* δε από τους ίδιους τους μαθητές δευτέρου *τρόπου κατασκευής* συμμετρικών ως προς σημείο και η *διαπίστωση* της *ισοδυναμίας* μεταξύ αυτών των δυο τρόπων *(Εννοιολογική κατανόηση-Kilpatrick, 2001),* παραπέμπει σε *πραγματική «μαθηματική δραστηριότητα»* από *την πλευρά των μαθητών.*

Η εκπαιδευτικός δείχνει με τη στάση της ότι *ακούει τη σκέψη των μαθητών* της *(Doerr, 2006)* και επιδοκιμάζει την προσπάθειά τους με το να προβάλει τις ιδέες τους (*2^{ο} κρίσιμο συμβάν,)* ενώ συγχρόνως προχωρά στο κομμάτι που έχει να κάνει με την εμπέδωση και την κατασκευαστική ευχέρεια των μαθητών(διαδικαστική ευχέρεια-*Kilpatrick, 2001*). Το γεγονός της επιλογής των μαθητών να βρίσκουν το συμμετρικό ως προς σημείο με βάση την *ενέργεια* της *προέκτασης* και *μέτρησης* (*3^{ο} κρίσιμο συμβάν),* ενώ το σύνολο της δραστηριότητας κινήθηκε γύρω από την περιστροφή με διαβήτη (έστω κι αν αυτή η ενέργεια έγινε αρκετές φορές νοερά), ίσως να δείχνει ότι οι μαθητές είναι ακόμα επηρεασμένοι από τη συμμετρία ως προς άξονα, η διδασκαλία της οποίας έχει πραγματοποιηθεί σε προηγούμενο μάθημα. Η *εκχώρηση* των κατασκευών στους μαθητές από την εκπαιδευτικό *αναδεικνύει τις παρανοήσεις* τους ώστε να ξεκαθαριστούν τα προβληματικά σημεία και να δοθούν περαιτέρω επεξηγήσεις.

3.2.2 Η διαχείριση του Εκπαιδευτικού Β΄

Ο εκπαιδευτικός Β΄ υλοποίησε δυο «δραστηριότητες» οι οποίες με τη σειρά που έγιναν ήταν οι εξής:

1η «δραστηριότητα»: «Συμμετρία ως προς σημείο»

2η «δραστηριότητα»: «Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία»

Διαχειριστικό προφίλ του εκπαιδευτικού

Τα κοινά χαρακτηριστικά της διαχείρισης του εκπαιδευτικού που αφορούν και τις δυο «δραστηριότητες» συνοψίζονται στα παρακάτω:

Ο εκπαιδευτικός σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος χρησιμοποιεί ένα *αλληλεπιδραστικό μοντέλο διδασκαλίας* με συνεχείς ερωτήσεις προς τους μαθητές. Αφιερώνει ένα αρκετά μεγάλο μέρος του χρόνου που διαθέτει στην αρχή για να κάνει σύνδεση με έννοιες οι οποίες διδάχθηκαν σε προηγούμενα μαθήματα και που σχετίζονται με το νέο μαθηματικό αντικείμενο. Οι «*δραστηριότητες*» εισάγονται στη συνέχεια, ενώ *οι επεκτάσεις* τους (βλέπε 3.1 σελ. 45,48) εμφανίζονται σταδιακά σε όλο το υπόλοιπο μάθημα.

Και στις δυο διδασκαλίες μετατρέπει το «πραγματικό» πλαίσιο, των προτεινόμενων από το σχολικό εγχειρίδιο «δραστηριοτήτων», σε «γεωμετρικό». Κατά συνέπεια η *αυθεντικότητα του πλαισίου,* που υπήρχε τουλάχιστον τυπικά, χάνεται εξ αρχής.

Στην 1η «δραστηριότητα» δίνει στους μαθητές στον πίνακα ένα τυχαίο τρίγωνο προς αναζήτηση του συμμετρικού του, ενώ στη 2η «δραστηριότητα» δύο παράλληλες ευθείες προς διαχείριση χωρικών εννοιών. (Οι δραστηριότητες του βιβλίου παρουσιάζονται στην παράγραφο 3.1 στις σελ.45 και 48)

Η *καθοδήγηση* εκ μέρους του εκπαιδευτικού εμφανίζεται έντονα σε αρκετά σημεία της διδασκαλίας.

Τάση του εκπαιδευτικού να ωθεί τους μαθητές σε μαθηματικοποίηση των παρατηρήσεών τους χωρίς να τους παρέχει αρκετό χρόνο ώστε να διαπιστώσει ότι μπορούν να ανταποκριθούν, με αποτέλεσμα να απαντά πολλές φορές ο ίδιος.

Οι διαφοροποιήσεις στο χειρισμό μεταξύ 1ης και 2ης «δραστηριότητας»

<u>1η «δραστηριότητα»:</u>

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να βρουν οι ίδιοι το συμμετρικό ενός γεωμετρικού σχήματος εκτελώντας ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό (στροφή κατά

180°) και να το σχεδιάσουν στα τετράδιά τους (βλέπε παράρτημα-2 σελ.184-185) ενώ στη «δραστηριότητα» του βιβλίου το συμμετρικό του σχήματος είναι έτοιμο (*αυξάνει τη μαθηματική πρόκληση* σε συνδυασμό με *μετασχηματισμό ως προς τις ενέργειες*). Τα *εργαλεία* που χρησιμοποιεί είναι τα προτεινόμενα από το βιβλίο, δηλαδή *μέτρηση* με *υποδεκάμετρο* και *περιστροφή* με *χρήση διαβήτη*. (Η κατασκευή του συμμετρικού του τριγώνου γίνεται με χρήση υποδεκάμετρου από τους μαθητές και ο καθηγητής βοηθά. Η περίπτωση της περιστροφής με διαβήτη γίνεται περιγραφικά διότι δεν υπάρχει διαβήτης στην τάξη).

Η προσπάθεια να γίνει μαθηματικοποίηση των συμπερασμάτων περνά μέσα από τις παρατηρήσεις των μαθητών οι οποίες δείχνουν μαθηματική σκέψη. Ο εκπαιδευτικός *ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών* οι οποίοι εμφανίζουν έναν δυναμικό τρόπο αντίληψης και προσαρμόζει τη διδασκαλία ανάλογα. Η ενέργειά του αυτή έχει ως αποτέλεσμα το *«μετασχηματισμό»* της «δραστηριότητας» *από τους ίδιους τους μαθητές* αλλά με *απόλυτα ελεγχόμενο τρόπο* γεγονός που *περιορίζει τη δυνατότητα αυτενέργειας*.

<u>2η «δραστηριότητα»:</u>

Η «δραστηριότητα» υλοποιείται στον πίνακα. Είναι μια προσομοίωση του προβλήματος του βιβλίου (σελ.48) όπου τα όρια του ασφαλτοστρωμένου δρόμου της εικόνας της «δραστηριότητας» του βιβλίου αντικαθίστανται με *δυο παράλληλες* ευθείες ε_1 και ε_2 τις οποίες ο εκπ/κός σχεδιάζει (βλέπε παράρτημα-2, σελ.190). Ο σκοπός της «δραστηριότητας» του βιβλίου αρχικά είναι να γίνει χωρική ταξινόμηση και ονομασία των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ παραλλήλων και τέμνουσας. [Εργαλεία όσον αφορά το κύριο μέρος της δραστηριότητας (των χωρικών προσδιορισμών και της ονομασίας) δεν προτείνονται από το σχολικό εγχειρίδιο. Μόνον στο κομμάτι της επέκτασης της «δραστηριότητας» (βλέπε 3.1 σελ.48), όπου σκοπός είναι η εύρεση των σχέσεων μεταξύ των παραπάνω γωνιών, το σχολικό βιβλίο προτείνει για τη σύγκρισή τους μέτρηση με μοιρογνωμόνιο. Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί προσέγγιση μέσω αποδεικτικής διαδικασίας. *(Αλλαγή των εργαλείων διαμεσολάβησης της μάθησης-ενεργειών)*

Ο εκπαιδευτικός προσπαθώντας να φτάσει στη μαθηματικοποίηση των συμπερασμάτων όσον αφορά τις επεκτάσεις της «δραστηριότητας» παρακάμπτει τις παρατηρήσεις των μαθητών. Η «δραστηριότητα» δεν εκχωρείται στους μαθητές.

Πίνακας αλληλεπίδρασης 1ης «δραστηριότητας»:

«Συμμετρία ως προς Σημείο»

Ο εκπαιδευτικός δίνει ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ στον πίνακα και ένα σημείο Ο εκτός του τριγώνου και ζητά από τους μαθητές να εικάσουν τη νέα θέση που θα πάρει αυτό όταν περιστραφεί κατά ένα ημικύκλιο (παράρτημα-2 σελ.184). Η «δραστηριότητα» που προτείνει το σχολικό βιβλίο περιέχει μια εικόνα στην οποία μια σημαία έχει ήδη περιστραφεί κατά μισό κύκλο και αναμένει από τους μαθητές να διατυπώσουν μαθηματικές σχέσεις που αναδεικνύονται διαισθητικά μέσα από την εικόνα.

Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί του εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Πραγματικό, μη αυθεντικό πλαίσιο. Μεγάλος βαθμός καθοδήγησης	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Μετασχηματίζει το πλαίσιο* της δραστηριότητας από πραγματικό σε γεωμετρικό. *Τροποποιεί* τις προτεινόμενες *ενέργειες* του σχολικού βιβλίου Η παρατήρηση και διατύπωση σχέσεων με βάση έτοιμα σχήματα, μετατρέπεται σε *κατασκευή* συμμετρικών *από* τους ίδιους *τους μαθητές* . (Η «δραστηριότητα» εν μέρει *εκχωρείται* στους μαθητές.) *(Διαχειριστικές επιλογές που αντανακλούν στην κατανόηση και σκέψη των μαθητών)*	Οι μαθητές δεν φαίνεται να προβληματίζονται με το γεωμετρικό σχήμα Δίνεται η δυνατότητα να «*εικάσουν*» ως προς το νέο σχήμα. Οι μαθητές παρ' όλο που αρχικά δυσκολεύονται, (λείπουν τα κατάλληλα δια μεσολαβητικά εργαλεία) **κατασκευάζουν** τελικά το ζητούμενο σχήμα. **(Διαδικαστική ευχέρεια)**
	2^{ο} και *3^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Αξιοποιεί τη σκέψη των μαθητών κάνοντας* επέκταση του περιεχομένου της «δραστηριότητας»	Οι μαθητές **εμπλέκονται** και διατυπώνουν «εικασίες» και εμφανίζουν διερευνητικές τάσεις. (Ένδειξη ότι οι μαθητές

	(Ελεγχόμενη εκχώρηση της «δραστηριότητας» στους μαθητές – ο εκπαιδευτικός δεν πιέζει για επεξηγήσεις) Παράλληλα *διατηρεί* (κάποια) προτεινόμενα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* (υποδεκάμετρο, μέτρηση) και βοηθά τους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν στην πράξη. *(Διαχειριστικές επιλογές που αντανακλούν στην κατανόηση και σκέψη των μαθητών σε συνδυασμό με διδακτικά χαρακτηριστικά που ευνοούν την αυτενέργεια των μαθητών)*	σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο, **συλλογιστική και εννοιολογική ικανότητα**). Οι μαθητές **εξοικειώνονται με** τις **κατασκευές** συμμετρικών σχημάτων. (**Διαδικαστική ευχέρεια - πλούσια μαθηματική δραστηριότητα**) *(Θα μπορούσε να εξελιχθεί περισσότερο αν ο εκπαιδευτικός παραχωρούσε τον κατάλληλο χρόνο στους μαθητές αφήνοντάς τους να εξηγούν οι ίδιοι)*

Η **τροποποίηση** του πραγματικού **πλαισίου** της «δραστηριότητας» του βιβλίου ($1^{ο}$ συμβάν, βλέπε παράρτημα-2, σελ.184-185) δεν φαίνεται να επηρεάζει με κάποιο ιδιαίτερο τρόπο τους μαθητές οι οποίοι φαίνονται εξοικειωμένοι με τα γεωμετρικά σχήματα. Ενώ στη δραστηριότητα του βιβλίου το συμμετρικό δίνεται έτοιμο και ζητείται από τους μαθητές να κάνουν διατύπωση συμπερασμάτων, στη «δραστηριότητα» που υλοποιείται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη, οι μαθητές καλούνται να κάνουν οι ίδιοι το γεωμετρικό μετασχηματισμό της περιστροφής. Αυτή η ενέργεια του εκπ/κου δείχνει την ***πρόθεσή*** του, τουλάχιστον αρχικά, ***να εκχωρήσει τη δραστηριότητα*** *στους μαθητές* και να τους ωθήσει στο να «*εικάσουν*» και στη συνέχεια να σχεδιάσουν την πιθανή νέα θέση του γεωμετρικού αντικειμένου μετά το μετασχηματισμό. Η ***καθοδήγηση*** **είναι έντονη**. Οι μαθητές **ενώ αρχικά δυσκολεύονται οδηγούνται στην κατασκευή του ζητούμενου συμμετρικού σχήματος**. [Προβληματικό σημείο της διδασκαλίας η έλλειψη διαβήτη που δημιούργησε αρχικά δυσκολία στη μετάβαση από την κατασκευή συμμετρικού μέσω περιστροφής, στον ισοδύναμο τρόπο με προέκταση και μέτρηση κατά ίσο τμήμα]. **(έλλειψη του κατάλληλου διαμεσολαβητικού εργαλείου).**

Η *αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών* κατά το *$2^{ο}$ κρίσιμο συμβάν* οδηγεί σε ***επέκταση του μαθηματικού περιεχομένου*** της «δραστηριότητας» (*δυο συμμετρικά του ιδίου σχήματος)*. Οι μαθητές εμφανίζουν μαθηματικές ανησυχίες διερευνητικού

χαρακτήρα. Ο εκπαιδευτικός ακούει τον τρόπο σκέψης των μαθητών και η διδασκαλία εξελίσσεται σε πραγματική **Μαθηματική δραστηριότητα**. Παρατηρείται δε *ανατροφοδότηση* μεταξύ 2^{ου} και 3^{ου} κρίσιμου συμβάντος (βλέπε παράρτημα-2, σελ.188-189) όπου οι μαθητές συνεχίζουν την διερευνητική διαδικασία μεταφέροντας το σημείο γύρω από το οποίο γίνεται η περιστροφή μέσα στο σχήμα. Η διδασκαλία φαίνεται να μετασχηματίζεται μέσα από τη σκέψη των μαθητών που συλλογίζονται με μαθηματικό τρόπο και δείχνουν να κατανοούν εννοιολογικά. **(Συλλογιστική–Εννοιολογική ικανότητα)**

Παράδειγμα

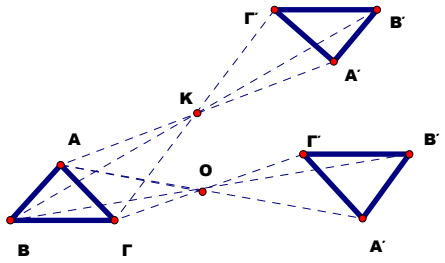
2^{ο} Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

153. M_3: Το σημείο μπορεί να είναι οπουδήποτε; (εννοεί το κέντρο συμμετρίας)
154. Καθ: Οπουδήποτε! Έλα να το κάνεις μιας και το είπες
155. Καθ: Αν φέρναμε εδώ ένα σημείο το Κ ας πούμε…. Να το βάλουμε εδώ
{Βάζει πιο ψηλά ένα άλλο σημειο ενώ διατηρεί όλο το προηγούμενο σχήμα}
156. Καθ: Πάρε ετσι πρόχειρα……πάρε και το χάρακα να σε διευκολύνει
157. M_3: Δηλαδή πάλι θα τραβήξουμε από δω γραμμή εδώ πάνω και πάλι από εδώ;
158. Καθ: Ναι πάλι

{Η μαθήτρια φτιάχνει τις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ. Ο καθηγητής βοηθά και πάλι στο σχήμα}
……..

164. Καθ: Βαλε Γ΄ ,Β, ΄Α΄ και ένωσε τα. Αυτά μεταξύ τους είναι ίσα.

165. M_3: Άρα γίνεται παντού. Όπου και να είναι το σημείο.
166. Καθ: Το καταλάβατε αυτό που έκανε; Τι ήθελε να δει; Αν όπου κι αν είναι το κέντρο….αν πάρουμε το συμμετρικό του…..
167. M_3: Αυτά δεν είναι ίδια; Είναι;



{Δείχνει τα δύο τρίγωνα που σχηματίστηκαν ως συμμετρικά με κέντρο πρώτα το Ο και στη συνέχεια με κέντρο το Κ}

168. Καθ: Αυτά μεταξύ τους είναι ίσα. Αυτό είναι στροφή του τριγώνου ως προς αυτό (εννοεί το Ο) ενώ αυτό είναι στροφή του ίδιου τρίγωνου ως προς αυτό.(εννοεί το Κ)
169. Καθ: Να ρωτήσω κάτι.. ,αυτό βέβαια θα το δούμε αργότερα όταν δούμε τα τρίγωνα… Αυτό είναι σαν να έχει στρίψει τούτο κατά 180^{ο} με κέντρο το Κ.
Αυτό πάλι είναι σαν να έχει στρίψει πάλι κατά 180^{ο}. (Δείχνει το άλλο τρίγωνο)
Αυτό με τούτο μεταξύ τους τι είναι;
170. M_4: Ίσα
……..
183. Καθ: Δηλαδή είτε πάρω ένα κέντρο εδώ και το στρίψω και έρθει εδώ, είτε πάρω ένα άλλο κέντρο και το στρίψω και έρθει εκεί το ίδιο πράγμα στρίβει κατά 180^{ο} .
Δεν αλλοιώνεται, δεν αλλάζει. Δεν έχω σμίκρυνση ή μεγέθυνση. Δεν αλλάζει κλίμακα. Το καταλάβατε αυτό;
184. Μαθ: Ναι. (όλοι)

Συνοπτική ανάλυση του 2ου συμβάντος

[153,165,167] Οι μαθητές δίνουν την *πρόκληση για* το *μετασχηματισμό* της «δραστηριότητας».

Η παρατήρηση από την πλευρά της μαθήτριας για την αλλαγή του σημείου αναφοράς, οδηγεί το μάθημα σε άλλη κατεύθυνση. Ο εκπαιδευτικός ενεργεί άμεσα και αξιοποιεί το ερώτημα δίνοντας ένα παράδειγμα αλλαγής του σημείου αναφοράς ως προς το οποίο βρίσκουμε το συμμετρικό. Το συμμετρικό σχήμα κατασκευάζεται από μαθητές με βοήθεια από τον εκπαιδευτικό.

[154-158,164] *Μετασχηματισμός της «δραστηριότητας»* προς όφελος των μαθητών.

Η αλλαγή του σημείου αναφοράς γίνεται πάνω στο προηγούμενο σχήμα και αυτό δίνει την ευκαιρία σε όλους να δουν ταυτόχρονα δυο συμμετρικά σχήματα του ίδιου τριγώνου.

[168-170,183] Έμφαση στον *γεωμετρικό μετασχηματισμό μέσω περιστροφής* με στόχο την αιτιολόγηση της ισότητα συμμετρικών σχημάτων. (Σημαντική η κατασκευή χρησιμοποιώντας ως *εργαλείο* το διαβήτη)

Ως αποτέλεσμα της αλλαγής του σημείου ως προς το οποίο βρίσκεται το συμμετρικό του τριγώνου έρχεται η απόπειρα εικασίας εκ μέρους της μαθήτριας για την ισότητα των δύο συμμετρικών του τριγώνου. Ο καθηγητής απαντά πως είναι ίσα, γιατί και τα δυο είναι στην ουσία η περιστροφή του ίδιου σχήματος αλλά ως προς διαφορετικό κέντρο.

Επιπλέον, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της περιστροφής του σχήματος κατά μισό κύκλο είναι και ο μόνος που μπορεί να δικαιολογήσει την ισότητα των συμμετρικών από τη στιγμή που οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τίποτε ακόμη πάνω στην ισότητα τριγώνων. Αυτός είναι και ένας ακόμη λόγος που ο καθηγητής επιμένει στην περιστροφή με κέντρο το σημείο αναφοράς όσον αφορά τον κατασκευαστικό τρόπο προσέγγισης.

Χαρακτηριστικό είναι πως ο εκπαιδευτικός παρ' όλο που ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών του απαντά στα βασικά ερωτήματα που τίθενται ο ίδιος. Δεν εκχωρεί τη «δραστηριότητα» στους μαθητές του (παρά μόνο αποσπασματικά) κρατώντας ο ίδιος τον έλεγχο. Δεν πιέζει για επεξηγήσεις και δεν δίνει τον απαραίτητο χρόνο για την εξέλιξη της «δραστηριότητας». Αποτέλεσμα να περιορίζει την αυτενέργεια των μαθητών που φανερά εμφανίζουν μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Συνολική Ανάλυση της 1ης διδασκαλίας

Η υλοποίηση της «δραστηριότητας» για την εισαγωγή της νέας έννοιας της «συμμετρίας ως προς σημείο», όπως φαίνεται από τη δομή του μαθήματος, ξεκινά με καθυστέρηση, σχεδόν 20 λεπτά μετά την έναρξη της διδακτικής ώρας (βλέπε την πλήρη διδασκαλία του μαθήματος στο παράρτημα-1). Ο εκπαιδευτικός αναλώνει ένα μεγάλο μέρος του χρόνου σε επανάληψη και σύνδεση με προηγούμενη γνώση.

Βασικές ιδιότητες της «μεσοκαθέτου» και της «συμμετρίας ως προς άξονα» επαναλαμβάνονται αρκετά αναλυτικά.

Το *αντικείμενο της «δραστηριότητας»* που προτείνεται από το σχολικό βιβλίο, μια σημαία που περιστρέφεται κατά 180°, *αντικαθίσταται* από τον εκπαιδευτικό με ένα *καθαρά γεωμετρικό σχήμα* (τρίγωνο) το οποίο σχεδιάζει στον πίνακα. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές στα τετράδιά τους, να περιστρέψουν το τρίγωνο ΑΒΓ με κέντρο ένα σταθερό σημείο Ο (*1° κρίσιμο συμβάν,* βλέπε παράρτημα-2).

Το *πραγματικό* αλλά *μη αυθεντικό πλαίσιο της «δραστηριότητας» μετασχηματίζεται* σε γεωμετρικό ενώ συγχρόνως υπάρχουν μεταβολές και *ως προς τις ενέργειες*. Ενώ στη «δραστηριότητα» του βιβλίου το νέο σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή δίνεται έτοιμο και ζητούνται να διατυπωθούν ιδιότητες και συμπεράσματα από τους μαθητές, στη «δραστηριότητα» που υλοποιείται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη, οι μαθητές καλούνται να κάνουν οι ίδιοι το γεωμετρικό μετασχηματισμό της περιστροφής. Αυτή η ενέργεια του εκπ/κου δείχνει την *πρόθεσή* του, τουλάχιστον αρχικά, *να εκχωρήσει τη «δραστηριότητα» στους μαθητές* και να τους ωθήσει στο να «*εικάσουν*» και στη συνέχεια να σχεδιάσουν την πιθανή νέα θέση του γεωμετρικού αντικειμένου μετά το μετασχηματισμό.

Ο τρόπος που τους υποδεικνύει να κάνουν την περιστροφή είναι αρκετά *καθοδηγητικός*, όμως το καθαρά πρακτικό πρόβλημα της *έλλειψης βασικών γεωμετρικών οργάνων* (διαβήτη) από μέρους των μαθητών, αποτελεί εμπόδιο στην ομαλή εξέλιξη του μετασχηματισμού. Ενώ ο καθηγητής δείχνει με το σχολικό διαβή-τη στον πίνακα τις βασικές ενέργειες, οι μαθητές αδυνατούν να τις εφαρμόσουν στα πρόχειρά τους.

Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να παρακάμψει το εμπόδιο της έλλειψης του βασικού γεωμετρικού οργάνου για την *περιστροφή*, αντικαθιστώντας την αρχική μέθοδο με άλλη ισοδύναμη μέθοδο, όπως η κατασκευή συμμετρικού με *προέκταση και μέτρηση*.

Η άμεση αντικατάσταση της μιας μεθόδου από την άλλη μπερδεύει τους μαθητές και αποσυντονίζει αρχικά τη διδασκαλία. Ο εκπαιδευτικός επιμένει στην υπόδειξη πως αφού τα αντιδιαμετρικά σημεία ενός κύκλου με κέντρο το δοθέν σημείο Ο βρίσκονται στην ίδια ευθεία, άρα μπορούν να βρεθούν τα σημεία του συμμετρικού του γεωμετρικού σχήματος ενώνοντας με το κέντρο Ο και προεκτείνοντας κατά ίσο τμήμα.

Στη συνέχεια δίνει στους μαθητές χρόνο να εργαστούν πάνω στο μετασχηματισμό και περνά από θρανίο σε θρανίο να ελέγξει τα αποτελέσματα. Στο τέλος σηκώνει στον πίνακα μια μαθήτρια η οποία με τη βοήθειά του κάνει το προσδοκώμενο νέο σχήμα.
Καθ' όλη τη διάρκεια του 1^{ου} κρίσιμου συμβάντος ο καθηγητής φαίνεται να βλέπει το μετασχηματισμό ως *στροφή της ακτίνας ΟΑ* κατά μισό κύκλο, ενώ οι μαθητές υιοθετούν τον τρόπο της *προέκτασης* και *μέτρησης*.
Η αναφορά στην ονομασία του μετασχηματισμού ως «συμμετρία ως προς σημείο» για πρώτη φορά γίνεται στον στίχο 125 δηλαδή αρκετά καθυστερημένα. Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως επιλογή του εκπαιδευτικού να δώσει *έμφαση στο είδος του μετασχηματισμού* κυρίως και μετά στην ονομασία του.

Αναλύοντας το *2^{ο} κρίσιμο συμβάν* και παρατηρώντας το *καθοδηγητικό πλαίσιο της διδασκαλίας* που έχει προηγηθεί περιμένει κανείς η συνέχεια της μαθηματικής δραστηριότητας να κινηθεί στο ίδιο μοντέλο. (Δηλαδή της κατασκευής των συμμετρικών γνωστών γεωμετρικών σχημάτων)
Η ασυνήθιστη ερώτηση όμως μιας μαθήτριας έρχεται να δώσει άλλη διάσταση στην εξέλιξη του μαθήματος. Η μαθήτρια ρωτά αν το σημείο γύρω από το οποίο γίνεται η περιστροφή «μπορεί να είναι οπουδήποτε».Ο εκπαιδευτικός *αξιοποιεί* άμεσα *την ευκαιρία* και καλεί τη μαθήτρια να έρθει στον πίνακα και να βρει το συμμετρικό του ίδιου τριγώνου ΑΒΓ ως προς ένα νέο σημείο αναφοράς Κ. Έχοντας κρατήσει το αρχικό σχήμα του 1^{ου} συμβάντος δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να δουν συγχρόνως *δυο συμμετρικά του ιδίου σχήματος*. Όπως ήταν αναμενόμενο, *τίθεται θέμα ισότητας των δυο συμμετρικών του σχήματος ΑΒΓ* (ερώτημα της ίδιας μαθήτριας). Ο εκπαιδευτικός απαντά ότι αυτά είναι ίσα διότι και τα δυο είναι η περιστροφή του αρχικού τριγώνου κατά 180^{ο} αλλά ως προς διαφορετικό σημείο αναφοράς. Ως στροφή λοιπόν του ίδιου σχήματος *δεν αλλοιώνεται η μορφή* του κατά το μετασχηματισμό. Δεν μικραίνει αλλά ούτε μεγαλώνει. (Ο εκπαιδευτικός επιλέγει να απαντά ο ίδιος αντί να πιέσει τους μαθητές να σκεφτούν και να απαντήσουν)
Συνεπώς μέσα από το *γεωμετρικό μετασχηματισμό της περιστροφής*, γίνεται και η αιτιολόγηση της ισότητας των νέων σχημάτων που προκύπτουν με κέντρα περιστροφής τα Ο και Κ, γεγονός που δεν θα μπορούσε να αιτιολογηθεί μέσα από τη χρήση της προέκτασης και μέτρησης.
Η ερώτηση ενός άλλου μαθητή, για το αν η θέση του *σημείου αναφοράς* μπορεί να μεταφερθεί *μέσα στο ίδιο το σχήμα* (*3^{ο} κρίσιμο συμβάν, βλέπε παράρτημα-2, σελ 187-*

188), επανατροφοδοτεί εκ νέου την διαδικασία δείχνοντας πως η σκέψη των μαθητών όταν δεν περιορίζεται ή καθοδηγείται λειτουργεί προς απρόσμενες κατευθύνσεις. Ο εκπαιδευτικός *αξιοποιεί εκ νέου* την *πρόκληση ακολουθώντας τη σκέψη του μαθητή* (Doerr, 2006), και ενώ σχεδιάζει μόνος του το συμμετρικό λόγω έλλειψης χρόνου, περιγράφοντας όμως το τι ακριβώς κάνει, διαφαίνεται ότι οι μαθητές αρχίζουν να βλέπουν πια τη συμμετρία ως προς σημείο ως στροφή.

Η *διαχείριση της μάθησης* μέσα από τη «δραστηριότητα» σε συνδυασμό με *το ενδιαφέρον των μαθητών* (*μαθηματική πρόκληση*) (*Potari & Jaworski, 2002)* και τη στάση που επιδεικνύει ο εκπαιδευτικός (ακούει και ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών) σε σημαντικά ερωτήματα *(2^{ο} και 3^{ο} κρίσιμο συμβάν),* έχει σαν αποτέλεσμα την διαρκή επανατροφοδότηση της διδακτικής διαδικασίας με νέες ιδέες και κατευθύνσεις. Η τάση του εκπαιδευτικού να κρατά τον έλεγχο της διδασκαλίας και να εκχωρεί μόνο αποσπασματικά τη «δραστηριότητα» στους μαθητές οδηγεί στο εξής φαινόμενο: ενώ η «δραστηριότητα» αρχίζει να μετασχηματίζεται προς πραγματική *Μαθηματική δραστηριότητα* από την πλευρά των μαθητών (οι οποίοι *δίνουν από μόνοι τους την πρόκληση για το μετασχηματισμό* της), ο εκπαιδευτικός απαντά ο ίδιος. Δεν αφήνει την πρωτοβουλία των απαντήσεων στους μαθητές ενώ φαίνεται ότι είναι σε θέση να κάνουν αξιόλογες παρατηρήσεις (πιθανόν η έλλειψη χρόνου να είναι μια από τις αιτίες της διαχείρισής του – βλέπε την κατανομή της διδακτικής ώρας στο Παράρτημα-1).

Πίνακας αλληλεπίδρασης 2ης «δραστηριότητας»:

<u>«Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία»</u>

Ο εκπαιδευτικός, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, αντικατέστησε την εικόνα της «δραστηριότητας» του σχολικού βιβλίου σχεδιάζοντας δυο παράλληλες ευθείες στον πίνακα. Ο σκοπός της «δραστηριότητας» αρχικά ήταν να γίνουν χωρικές αναγνωρίσεις των γωνιών που σχηματίζονται από τις δύο παράλληλες και μια τέμνουσα (σύμφωνα με τους στόχους των συγγραφέων του σχολικού εγχειριδίου, όπως αυτοί διατυπώνονται στο «Βιβλίο του εκπαιδευτικού»), ενώ στη συνέχεια να διατυπωθούν σχέσεις που συνδέουν τις παραπάνω γωνίες (επέκταση της «δραστηριότητας», βλέπε 3.1 σελ. 48).

Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί του εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Πραγματικό μη αυθεντικό καθοδηγούμενο πλαίσιο	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Αλλάζει* το *πλαίσιο* από πραγματικό σε γεωμετρικό (*Διαχειριστική επιλογή που συνδυάζεται με τη ανάμιξη δυο πλαισίων: του βιβλίου και του πίνακα)*	Οι μαθητές δυσκολεύονται στην αναγνώριση χωρικών εννοιών.
	2^{ο} κρίσιμο συμβάν *Μετασχηματίζει* τα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* και τις *ενέργειες*. Η μέτρηση με μοιρογνωμόνιο αντικαθίσταται αρχικά από τη *διαισθητική αναγνώριση* ισότητας γωνιών και στη συνέχεια από *αποδεικτική διαδικασία*. Η «δραστηριότητα» *δεν εκχωρείται* στους μαθητές . *(Ανακολουθίες και σύγχυση ως προς τα διαμεσολαβητικά εργαλεία - μέθοδο προσέγγισης)*	Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις προηγούμενες γνώσεις τους ώστε να ανταποκριθούν στις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού. **Δεν είναι βέβαιο ότι κατάνοούν την αποδεικτική διαδικασία.**
	3^{ο} κρίσιμο συμβάν *Δεν αξιοποιεί τη σκέψη που διατυπώνουν οι μαθητές* για να μετασχηματίσει τη «δραστηριότητα». Το εννοιολογικό κομμάτι θυσιάζεται χάριν της χωρικής ονομασίας. *(Οι μαθητές παρουσιάζουν ένα επιχείρημα σημαντικό σε σχέση με την έννοια προς διδασκαλία και ο εκπαιδευτικός το αγνοεί)*	Ενώ **οι μαθητές δίνουν την πρόκληση για το μετασχηματισμό** της «δραστηριότητας» γεγονός που υποδεικνύει ότι σκέφτονται με λογικό τρόπο και συνδέουν με σωστό τρόπο τη «λεκτική» διατύπωση με τον αντίστοιχο χωρικό προσδιορισμό, ο εκπαιδευτικός δεν αντιλαμβάνεται τη σημασία των παρατηρήσεων (πα-

		ρανοήσεων) με αποτέλεσμα να χάνεται η εννοιολογική κατάνόηση. **Η ευκαιρία για μετασχηματισμό της «δραστηριότητας» δεν αξιοποιείται.**
	4^{ο} κρίσιμο συμβάν *Αλλάζει* εκ νέου τα *εργαλεία* και τις *ενέργειες* *(Ανακολουθίες και σύγχυση ως προς τις μεθόδους προσέγγισης)*	Οι μαθητές λαμβάνουν μια *αντιφατική εικόνα* για το ποιοι τρόποι προσέγγισης τελικά είναι έγκυροι και αποδεκτοί στα μαθηματικά

Ο **μετασχηματισμός** του **πλαισίου** δημιουργεί **σύγχυση στους μαθητές** καθώς μπλέκονται ανάμεσα σε δυο ειδών πλαίσια (*1^{ο} κρίσιμο συμβάν,* βλέπε παράρτημα-2, σελ.189). Αυτό του βιβλίου που είναι ανοιχτό μπροστά τους και στο γεωμετρικό του πίνακα που έχει κάποιες τροποποιήσεις. Το είδος του «πλαισίου» από μόνο του, δεν φαίνεται να είναι αυτό που δημιουργεί την ασυνεννοησία μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού.

Από την άλλη, η προσπάθεια του εκπαιδευτικού να **αλλάξει** τα **εργαλεία διαμεσολάβησης** της μάθησης και τις **ενέργειες** (*2^{ο} κρίσιμο συμβάν,* βλέπε παράρτημα-2, σελ.190*)* με ένα μίγμα διαίσθησης και απόδειξης δυσκολεύει τους μαθητές που **δεν φαίνεται να κατανοούν**. Η **μη εκχώρηση της δραστηριότητας** ώστε να εμπλακούν οι μαθητές περισσότερο στη διαδικασία της απόδειξης που επιχειρείται, οδηγεί σε **απαντήσεις των ερωτημάτων από τον ίδιο** τον καθηγητή.

Επιπλέον, **η μη αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών** στο *3^{ο} κρίσιμο συμβάν* και των παρατηρήσεων τους, οδηγεί στο **χάσιμο μοναδικής ευκαιρίας** η «δραστηριότητα» να μετασχηματιστεί ώστε οι μαθητές να κάνουν συνδέσεις και να διορθωθούν οι παρανοήσεις που είναι φανερό ότι έχουν δημιουργηθεί.

Παράδειγμα

3^{ο} Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

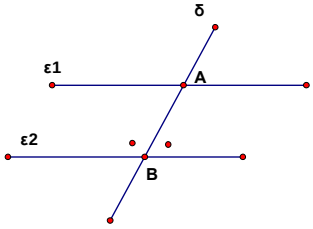
……

114. Καθ: Όμως επαναλαμβάνω παιδιά προσέξτε αυτό το σημείο. Εντάξει! Πολλά ονόματα μπορείς να βρεις μπερδεμένα . *Αυτές που κυρίως μας ενδιαφέρουν* είναι αυτές οι δυο οι «εντός-εναλλάξ» που όταν είναι παράλληλες οι ευθείες είναι πάντα μεταξύ τους ίσες. Όπως και αυτές οι δυο . Άρα ως σημαντικές κρατάμε τις «εντός-εναλλάξ» που είναι πάντα ίσες. Και

οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» που είναι επίσης πάντα ίσες. Σωστά; Οι «εντός-εναλλάξ» και οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά», συνήθως στα σχήματα είναι αυτές που πιο πολύ απ' όλες χρησιμοποιώ.

……

117. M_4: Και τις κατακορυφήν δεν τις χρησιμοποιούμε;
118. Καθ: Ναι εντάξει. Αλλά το κατακορυφήν είναι γενικό.
119. M_4: Και τις παραπληρωματικές;
120. Καθ: Ναι εντάξει . Λέμε για *παράλληλες που τέμνονται από τρίτη*. Άρα όταν είναι παράλληλες ξέρουμε ότι οι «εντός-εναλλάξ» είναι ίσες και *αντίστροφα* αν οι «εντός-εναλλάξ» είναι ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.*
121. Καθ: Επίσης οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» είναι ίσες . Γιατί συνήθως αυτό περισσότερο μας ενδιαφέρει να συνδυάσουμε.
123. M_{10}: Θέλω να ρωτήσω…αυτές οι δυο οι γωνίες τι είναι μεταξύ τους; [Ο μαθητής δείχνει τις γωνίες με τις κουκίδες στο παρακάτω σχήμα]



124. Καθ**:** Αυτές εδώ; ….Αυτές τώρα εντάξει….. αυτές οι δυο γωνίες είναι δυο παραπληρωματικές γωνίες 180.. οι οποίες δεν μας νοιάζει ιδιαίτερα..
125. M_{10}: Είναι «εντός-εναλλάξ»
126. Καθ: Εντάξει είναι «εντός» και «εναλλάξ», αλλά σας είπα δεν μας πολυενδιαφέρει. Σας είπα ότι κυρίως μας ενδιαφέρουν οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» και οι «εντός-εναλλάξ». Ωραία; Τις άλλες όμως τις περίεργες εντάξει ……...

* (Ο καθηγητής δίνει και την αντίστροφη πρόταση όπου η ισότητα των κατάλληλων γωνιών συνεπάγεται την παραλληλία. Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται καμία αναφορά στην αντίστροφη πρόταση)**.**

Συνοπτική ανάλυση του 3ου συμβάντος

[114-121] Αυτό που ο εκπαιδευτικός θεωρεί ως σημαντικό καθορίζει την εξέλιξη της διδασκαλίας. Ο εκπαιδευτικός δεν ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών ώστε να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους.

Η *χωρική αναγνώριση* και ονομασία των γωνιών που «*συνήθως χρησιμοποιούνται*» φαίνεται να έχει μεγαλύτερη βαρύτητα απ' ότι η *εννοιολογική κατανόηση της μεταφοράς και ισότητας γωνιών μέσω παραλλήλων*. Ο καθηγητής αναλώνεται σε μια διαδικασία να δείξει στους μαθητές ποιες είναι εκείνες οι γωνίες που συνήθως εμφανίζονται ως σημαντικές στις ασκήσεις και τις εφαρμογές. Στην προσπάθειά του αυτή δεν διευκρινίζει όμως ότι οι γωνίες που συνήθως μας ενδιαφέρουν είναι ζεύγη που η μια έχει την κορυφή της στο ένα σημείο τομής της ε_1 και της τέμνουσας , ενώ η άλλη στο άλλο σημείο τομής. Επικεντρώνεται στην ονομασία τους και δεν κάνει πιο συγκεκριμένες τις γωνίες ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές ποιες είναι αυτές που διατηρούν την ιδιότητα της ισότητας.

[123-126] Η *δραστηριότητα δεν μετασχηματίζεται* προς όφελος των μαθητών από τον εκπαιδευτικό παρ' όλο που δίνεται η ευκαιρία προς αυτή την κατεύθυνση από τους ίδιους τους μαθητές. Το σημαντικότερο εννοιολογικό κομμάτι παραμερίζεται δίνοντας

προτεραιότητα στην χωρική ονομασία και αναγνώριση. Οι γωνίες (στο σχήμα) που επικαλείται ένας μαθητής σύμφωνα με τον τρόπο που δόθηκε η χωρική ονομασία από τον εκπ/κο είναι «εντός-εναλλάξ» με τη διαφορά ότι έχουν κοινή κορυφή. Δεν είναι όμως ίσες αλλά παραπληρωματικές. Η πρόκληση εκ μέρους του μαθητή δεν γίνεται αντιληπτή από τον εκπαιδευτικό.

Οι **διαρκείς μετασχηματισμοί** του εκπαιδευτικού ($4^{ο}$ κρίσιμο συμβάν, βλέπε παρα-ρτημα-2, σελ.195-196) ως προς τα εργαλεία και τις ενέργειες **μπερδεύουν τους μαθητές** στο να αντιληφθούν ποιοι τρόποι διαχείρισης προβλημάτων τελικά είναι αποδεκτοί στα μαθηματικά.

Συνολική Ανάλυση της $2^{ης}$ διδασκαλίας

Παρατηρώντας την εξέλιξη της διδασκαλίας από την αρχή (βλέπε παράρτημα-2) είναι φανερό πως ο καθηγητής ενδιαφέρεται για τη συμμετοχή των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Στην αρχή κάνει σύνδεση με προηγούμενα μαθήματα, υπενθυμίζει βασικές έννοιες που προηγήθηκαν ώστε η μετάβαση στη νέα γνώση να είναι ομαλή. Κάνει διαρκώς ερωτήσεις περιμένει απαντήσεις και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να προχωρήσει στο νέο μαθηματικό αντικείμενο που πρόκειται να διδάξει. Οι μαθητές ανταποκρίνονται στο διαλεκτικό μοντέλο και απαντούν. Ανασύρουν από τη μνήμη τους έννοιες και σχέσεις και κάποιοι απ' αυτούς με ολοκληρωμένο και σαφή τρόπο διατυπώνουν ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενα μαθήματα. Η συμμετοχή των μαθητών είναι εμφανής τουλάχιστον αρχικά.

Μπαίνοντας στη «δραστηριότητα» για την εισαγωγή των νέων μαθηματικών εννοιών, ο εκπαιδευτικός επιλέγει να χρησιμοποιήσει το *πλαίσιο της «δραστηριότητας»* του βιβλίου *τροποποιώντας το* όμως κατά την κρίση του (*$1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν*). Παρουσιάζει τη «δραστηριότητα» κατά βάση *με γεωμετρικό τρόπο* φτιάχνοντας δυο παράλληλες στον πίνακα οι οποίες αντιπροσωπεύουν θεωρητικά δυο δρόμους. Το *πραγματικό πλαίσιο της «δραστηριότητας»* εκφυλίζεται *σε γεωμετρικό σχήμα* άμεσα όπου οι μαθητές καλούνται να δώσουν ονομασίες και να προσδιορίσουν χωρικά γωνίες και να διατυπώσουν ονομασίες. Οι μαθητές έχοντας μπροστά τους και τα βιβλία όπου η «δραστηριότητα» είναι διαφοροποιημένη , μπλέκονται ανάμεσα στους δύο τρόπους παρουσίασής της (βιβλίου-πίνακα) και αρχικά φαίνεται να μην κατανοούν κάποιες χωρικές θέσεις.

Ο χρονικός περιορισμός της διδακτικής ώρας, στη συνέχεια, αναγκάζει τον εκπαιδευτικό να *ανακοινώσει τις ονομασίες* των «εντός» και «εκτός» γωνιών καθώς και των γωνιών που σχηματίζονται «επί τα αυτά» μέρη και «εναλλάξ» της τέμνουσας, ενέργεια που υποθετικά θα έπρεπε κατά κάποιον τρόπο να προκύψει από τους μαθητές.

Προτιμά να δώσει περισσότερο χρόνο στην αναγνώριση γωνιών αφού έχει ανακοινώσει τις ονομασίες. Από τις απαντήσεις των μαθητών διαφαίνεται στη συνέχεια και αφού έχουν προηγηθεί αρκετά παραδείγματα ονομασίας γωνιών, ότι αρκετοί (εκτός κάποιων εξαιρέσεων) έχουν αντιληφθεί το χωρικό κομμάτι. Κατόπιν προχωρά στην προσέγγιση των σχέσεων των γωνιών που προκύπτουν από τη χρήση παραλλήλων και τέμνουσας (*2ο κρίσιμο συμβάν,* βλέπε παράρτημα-2, σελ.191-193).

Θέλοντας να αποφύγει τη σύγκριση γωνιών με μέτρηση, *αλλάζει* τα προτεινόμενα από το σχολικό βιβλίο *εργαλεία* (το σχολικό βιβλίο προτείνει τη χρήση μοιρογνωμονίου), ζητώντας από τους μαθητές να κάνουν *οπτική σύγκριση* (διαισθητικά).Οι μαθητές ανταποκρίνονται θετικά. Βλέπουν ποιες γωνίες είναι ίσες και τις απεικονίζουν στον πίνακα με κοινά σύμβολα (γράμματα φ και ω). Αμέσως μετά ο εκπαιδευτικός ζητά αιτιολόγηση βάσει μαθηματικών συλλογισμών προσπαθώντας να φέρει τους μαθητές σε επαφή με την «*αποδεικτική διαδικασία*». Το μίγμα διαισθητικής προσέγγισης και αποδεικτικής διαδικασίας φαίνεται να μπερδεύει τους μαθητές δημιουργώντας σύγχυση καθώς δεν υπάρχουν σαφή όρια στο πού τελειώνει η διαίσθηση και πού ξεκινά η απόδειξη. Η συμμετοχή των μαθητών είναι υπαρκτή αλλά αποσπασματική σε πολλά σημεία και *καθοδηγούμενη* σε μεγάλο βαθμό από τον καθηγητή. Η *δραστηριότητα δεν εκχωρείται στους μαθητές* αλλά μετασχηματίζεται από τον εκπαιδευτικό ανεξάρτητα από τη δράση των μαθητών. Απαντά ο ίδιος στα περισσότερα από τα ερωτήματα που θέτει.

Κατόπιν τίθεται ως θέμα η αναγνώριση των γωνιών των οποίων η ισότητα γενικά ενδιαφέρει περισσότερο. Ο καθηγητής ανακοινώνει πως αυτές είναι οι «εντός εναλλάξ» και οι «εντός –εκτός και επί τα αυτά» (*3ο κρίσιμο συμβάν*).

Οι μαθητές αντικρούουν την δήλωση του καθηγητή προτείνοντας ως σημαντικές και τις γωνίες που μέχρι τώρα γνώριζαν ότι είναι ίσες μεταξύ τους, που είναι οι «κατακορυφήν» και κάποιοι συμπληρώνουν ως σημαντικές και τις παραπληρωματικές. Οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν γιατί οι μεν είναι γωνίες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον , ενώ οι άλλες έπαψαν πια να ενδιαφέρουν. Τι είναι εκείνο

που τις πρώτες, τις «εντός εναλλάξ» και τις «εντός – εκτός και επί τα αυτά», τις κάνει πιο ενδιαφέρουσες από τις άλλες;

Ο καθηγητής *δεν αξιοποιεί* την ένσταση των μαθητών. Χάνει μια θαυμάσια *ευκαιρία να εμβαθύνει* στο ρόλο των παράλληλων ευθειών και της τέμνουσας που λειτουργεί ως μέσο μεταφοράς γωνιών από το ένα σημείο τομής στο άλλο. Αντί αυτού παρακάμπτει το θέμα λέγοντας πως αυτές τις γωνίες θέλουμε συνήθως να συνδυάσουμε και πως για τις άλλες δεν μας πολυενδιαφέρει.

Ένας μαθητής επιμένει υποδεικνύοντας δυο γωνίες που σύμφωνα με την χωρική περιγραφή των γωνιών που προηγήθηκε θα έπρεπε να χαρακτηριστούν ως «εντός – εναλλάξ» αλλά είναι ολοφάνερο ότι δεν είναι ίσες, αλλά παραπληρωματικές.

Οι γωνίες έχουν κοινή κορυφή το σημείο τομής Β της μιας από τις παράλληλες με την τέμνουσα δ. Ο μαθητής τονίζει ότι κι αυτές είναι «εντός και εναλλάξ». Ο καθηγητής όμως και πάλι δεν αντιλαμβάνεται την σημασία του θέματος και λέει πως αυτές είναι απλά δυο παραπληρωματικές γωνίες χωρίς ενδιαφέρον και τις χαρακτηρίζει ως «περίεργες» για τις οποίες δεν μας νοιάζει ιδιαίτερα!

Σύμφωνα με την Doerr (2006), η *μαθηματική δραστηριότητα* εξελίσσεται *ανάλογα με το πώς ερμηνεύει ο εκπαιδευτικός τον τρόπο σκέψης που εκφράζει ο μαθητής*. Είναι φανερό σ' αυτό το κρίσιμο συμβάν πως η ερμηνεία που κάνει ο καθηγητής δεν ακολουθεί τη σκέψη του μαθητή. Πιθανόν ο περιορισμός του χρόνου τον αναγκάζει να παρακάμψει οτιδήποτε τον καθυστερεί χωρίς να δώσει ιδιαίτερη προσοχή. Έτσι *δεν καταφέρνει να ακούσει τη σκέψη των μαθητών του που θα τον οδηγούσε σε διευκρινήσεις* και πιθανότατα *επιλογές που θα ωθούσαν την τάξη σε υψηλή μαθηματική εμπλοκή*. Χάνει για δεύτερη φορά την ευκαιρία να αξιοποιήσει τις απορίες των μαθητών για εννοιολογική εμβάθυνση.

Ενώ φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχουν στιγμές όπου οι μαθητές ξεκινούν να εμπλέκονται σε ουσιαστική *μαθηματική δραστηριότητα,* αυτή *περιορίζεται* λόγω της *μη επαρκούς εκχώρησής της* προς αυτούς από τον εκπαιδευτικό. Εν ολίγοις , η «δραστηριότητα» *μετασχηματίζεται* από τις επιλογές και τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού που φαίνεται να οριοθετούνται από το τι ο ίδιος θεωρεί ως *μαθηματική δραστηριότητα*.

Στη φάση της εφαρμογής και εμπέδωσης (*4^{ο} κρίσιμο συμβάν,* παράρτημα-2, σελ. 195) επιλύονται ασκήσεις που σχετίζονται άμεσα με τις μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν οι μαθητές στο συγκεκριμένο μάθημα. Ο εκπαιδευτικός τονίζει ότι γενικά τα σχήματα που χρησιμοποιούμε ή μας δίνονται έτοιμα σε ασκήσεις-εφαρμογές, δεν

ανταποκρίνονται πάντα κατασκευαστικά σ' αυτά που δηλώνονται ως δεδομένα. Γι αυτό, ωθεί τους μαθητές στον υπολογισμό γωνιών μέσω των δεδομένων και όχι των μετρήσεων με γεωμετρικά όργανα.

Κατά την επίλυση της 2ης άσκησης ένας μαθητής έρχεται στον πίνακα και κάνει σωστά τις μεταφορές των γωνιών από παράλληλη σε παράλληλη δικαιολογώντας πλήρως όλες του τις πράξεις, γεγονός που πιθανόν να καταδεικνύει ότι ένα μέρος των μαθητών κατανόησαν το κομμάτι της διδασκαλίας που αφορούσε την ισότητα των γωνιών με κορυφές στα σημεία τομής των παραλλήλων με την τέμνουσα.

Ο καθηγητή βρίσκει πάλι την ευκαιρία να τονίσει πως είναι πολύ σημαντικό να ελέγχουμε στις ασκήσεις ποιες ευθείες δίνονται να είναι παράλληλες και ότι δεν μπορούμε να παίρνουμε αυθαίρετα ότι νομίζουμε. Τονίζει τη *σημασία* της *υπόθεσης* (δεδομένων) στη γεωμετρία.

Εν ολίγοις, προσπαθεί να δείξει στους μαθητές ότι το σχήμα δεν αποτελεί πάντα αξιόπιστη πηγή πληροφοριών, καθώς ο τρόπος με τον οποίο αποδίδεται μπορεί να παραπλανά. Αυτό βέβαια θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι είναι αντίθετο στη διαισθητική κατεύθυνση που ο ίδιος αρχικά έδωσε στους μαθητές, όταν στο 2ο κρίσιμο συμβάν, στη δραστηριότητα με τις παράλληλες, τους ζήτησε να βρουν *οπτικά* ίσες γωνίες. Οι δυο αυτές αντικρουόμενες κατευθύνσεις πιθανόν να δίνουν μια αντιφατική εικόνα στους μαθητές για το ποιοι τρόποι προσέγγισης τελικά είναι έγκυροι και αποδεκτοί στα μαθηματικά.

Με λίγα λόγια, συνολικά η διαχείριση της «δραστηριότητας» από τον εκπαιδευτικό χαρακτηρίζεται από αντιφάσεις που ενώ δεν είναι άμεσα αντιληπτές για τον ίδιο που την υλοποιεί, η αντανάκλασή τους στους μαθητές αποτελεί πεδίο σύγχυσης. Ενώ στο 1ο κρίσιμο συμβάν η *αλλαγή του πλαισίου* δεν φαίνεται αποτελεί γεγονός που από μόνο του επηρεάζει την εμπλοκή των μαθητών, η σημασία της *χρήσης των κατάλληλων εργαλείων* και της *ομαλής μετάβασης* από το ένα *εργαλείο διαμεσολάβησης* στο άλλο (πχ. από τη μέτρηση ή τη διαίσθηση στην απόδειξη) αναδεικνύονται ως βασικές παράμετροι στο 2ο και 4ο συμβάν. Η «μη εκχώρηση» της «δραστηριότητας» δεν επιτρέπει την ουσιαστική εμπλοκή των μαθητών καθώς ο χρόνος που τους διατίθεται δεν επαρκεί. Και ενώ ο εκπαιδευτικός φαίνεται να χρησιμοποιεί ένα κλασσικό μοντέλο διδασκαλίας όπου η διαδικασία της μάθησης περνά από τις γραμμικές φάσεις: «επανάληψη προηγούμενων εννοιών» - «εισαγωγή νέας έννοιας, παραδείγματα» - «εμπέδωση», είναι φανερό πώς το *εννοιολογικό*

κομμάτι που είναι και το ζητούμενο στη διδασκαλία των Μαθηματικών τελικά *διαφεύγει της προσοχής* του (3^{ο} κρίσιμο συμβάν). Η επικοινωνία με τη *σκέψη των μαθητών* του δεν φαίνεται να επιτυγχάνεται, ώστε η Μαθηματική δραστηριότητα να μπορέσει να εξελιχθεί και να γίνουν αντιληπτές οι παρανοήσεις.

3.2.3 Η διαχείριση του Εκπαιδευτικού Γ΄

Ο εκπαιδευτικός Γ΄ υλοποίησε δυο «δραστηριότητες» οι οποίες με τη σειρά που έγιναν ήταν οι εξής:

1η «δραστηριότητα»: « Στοιχεία τριγώνου –Είδη τριγώνων»

2η «δραστηριότητα»: « Παραλληλόγραμμο –Ορθογώνιο –Ρόμβος – Τετράγωνο - Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο»

Διαχειριστικό προφίλ του εκπαιδευτικού

Τα κοινά χαρακτηριστικά της διαχείρισης του εκπαιδευτικού που αφορούν και τις δυο «δραστηριότητες» συνοψίζονται στα παρακάτω:

Το *μοντέλο διδασκαλίας* που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός είναι έντονα *αλληλεπιδραστικό* με τους μαθητές. Χαρακτηριστικό της μεθόδου του είναι να κρατά τους μαθητές σε διαρκή εγρήγορση απευθυνόμενος προσωπικά στον καθένα με το όνομά του και *πιέζοντας για επεξηγήσεις*. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη συμμετοχή σχεδόν όλων των μαθητών και όχι μόνο ενός μέρους αυτών. Οι μαθητές δουλεύουν *ατομικά* και απαντούν κυρίως προφορικά. Η *καθοδήγηση* εκ μέρους του είναι έντονη και εμφανίζεται στο μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας του μαθήματος.

Και στις δύο δραστηριότητες επιλέγει να χρησιμοποιήσει *γεωμετρικό πλαίσιο*. Στην 1^{η} διατηρεί το υπάρχον γεωμετρικό πλαίσιο (της προτεινόμενης «δραστηριότητας»), ενώ στη 2^{η} μετατρέπει το «πραγματικό» πλαίσιο της προτεινόμενης από το βιβλίο «δραστηριότητας» πάλι σε «γεωμετρικό».

Ο τρόπος που χειρίζεται το θέμα της *καθοδήγησης* δεν είναι σαφώς καθορισμένος. Ενώ φαίνεται να έχει ενσυνείδητα την πρόθεση να αφαιρεί οτιδήποτε μπορεί να καθοδηγήσει τους μαθητές (πχ. τα καθοδηγούμενα πλαίσια «Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε» ή «Σκεφτόμαστε» του σχολικού βιβλίου, βλέπε 3.1 σελ.41), καθοδηγεί ο ίδιος τους μαθητές (*Eliciting Pattern*) με τα λεγόμενά του (Voigt, 1994).

Χειραπτικά εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης (πχ. γεωμετρικά όργανα) δεν χρησιμοποιούνται (ο πίνακας λειτουργεί ως εργαλείο διαμεσολάβησης της μάθησης,

καθώς αποτελεί τη βάση για την παρουσίαση ορισμών και ταξινομήσεων με ιεραρχημένο τρόπο από τον εκπαιδευτικό). Οι μαθητές καλούνται να κρατάνε σημειώσεις αυτών που παρατίθενται στον πίνακα. Οι διαδικασίες γίνονται σε επίπεδο *συλλογισμών και συνδέσεων* εννοιών με προηγούμενες γνώσεις ενώ οι *ενέργειες* παραμένουν στο επίπεδο της «*οπτικής σύγκρισης*».

Διδακτικές τάσεις του εκπαιδευτικού εκτός από την επιμονή του να πιέζει τους μαθητές για επεξηγήσεις σε κάθε ισχυρισμό τους, η *αύξηση της Μαθηματικής πρόκλησης*, η *επέκταση του μαθηματικού περιεχομένου* της «δραστηριότητας» όποτε παρουσιάζεται η ευκαιρία και η *εμμονή στις σωστά διατυπωμένες Μαθηματικές εκφράσεις* τις οποίες τονίζει διαρκώς μέσα στο μάθημα. Επιπλέον δεν φαίνεται να ενεργεί μέσα από το βιβλίο του εκπαιδευτικού αλλά να λειτουργεί πιο ελεύθερα χρησιμοποιώντας διάφορες ευκαιρίες που εμφανίζονται την ώρα του μαθήματος ώστε να συζητήσει με τους μαθητές ακόμα και το συντακτικό μαθηματικών όρων. *Δεν εκχωρεί* τη «δραστηριότητα» εξ' ολοκλήρου στους μαθητές, άλλα *ελεγχόμενα.*

Οι διαφοροποιήσεις στο χειρισμό μεταξύ 1ης και 2ης «δραστηριότητας»

1η «δραστηριότητα»:

Η «δραστηριότητα» εισάγεται από την αρχή της διδασκαλίας. Δ*ιατηρεί* το *γεωμετρικό πλαίσιο* της «δραστηριότητας» του σχολικού βιβλίου (βλέπε 3.1, σελ. 50), με τη διαφορά ότι *μειώνει* την *καθοδήγηση*. Ζητά από τους μαθητές να έχουν τα βιβλία τους κλειστά. *Μετασχηματίζει τη δραστηριότητα* μέσα από την *πρότερη γνώση* των μαθητών ενώ *αυξάνει τη μαθηματική πρόκληση* σε συνδυασμό με *επέκταση του περιεχομένου*.

2η «δραστηριότητα»:

Ο εκπαιδευτικός ξεκινά με επανάληψη σε έννοιες προηγούμενων μαθημάτων για να διαπιστώσει κατά πόσον έχουν εμπεδωθεί από τους μαθητές. Υλοποιεί τη «δραστηριότητα» αμέσως μετά, ως δεύτερη φάση της διδασκαλίας. *Αλλάζει το πλαίσιο* από *πραγματικό* σε *γεωμετρικό* αλλά συγχρόνως *μειώνει το περιεχόμενο* της «δραστηριότητας». Η «δραστηριότητα» πραγματοποιείται στον πίνακα και ενώ το σχολικό βιβλίο πραγματεύεται τα είδη των παραλληλογράμμων που δημιουργούνται αλλάζοντας τις σχετικές θέσεις των πλευρών (βλέπε 3.1, σελ.52), ο εκπαιδευτικός εστιάζει στο βασικό γεωμετρικό σχήμα του απλού παραλληλογράμμου και τις ιδιότητές του. Η «*δραστηριότητα» μετασχηματίζεται* μέσα από *συλλογισμούς* που κάνουν οι μαθητές και μέσα από την *ανάκληση προηγούμενων γνώσεών* τους.

Πίνακας αλληλεπίδρασης 1ης «δραστηριότητας»:

«Στοιχεία τριγώνου –Είδη τριγώνων»

Ο εκπαιδευτικός επιλέγει να μοιράσει στην τάξη του τη «δραστηριότητα» σε φωτοτυπία στην οποία υπάρχουν διάφορα τρίγωνα σε τυχαίες θέσεις χωρίς να ανήκουν σε συγκεκριμένες ομάδες (βλέπε παράρτημα-2, σελ.199). Δεν υπάρχει τίτλος ούτε και υποδείξεις που θα μπορούσαν να κατευθύνουν τους μαθητές. Ακολουθούν ερωτήματα του τύπου: «κατατάξτε τα τρίγωνα που βλέπετε σε ομάδες. Με βάση ποια κριτήρια κάνατε την κατάταξη;»

Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί του εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Γεωμετρικό πλαίσιο. Μεγάλος βαθμός καθοδήγησης. Δεν προτείνονται διαμεσολαβητικά εργαλεία .	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Μετασχηματίζει τη «δραστηριότητα» αυξάνοντας* τη *«μαθηματική πρόκληση»* *(Κίνητρο προς τους μαθητές)*	Οι μαθητές **εμπλέκονται** και ωθούνται σε ***δυναμικό τρόπο σκέψης.*** (**Συλλογιστική Ικανότητα**)
	2ο κρίσιμο συμβάν *Διατηρεί* το γεωμετρικό *πλαίσιο* της «δραστηριότητας» *περιορίζοντας την* υπάρχουσα *καθοδήγηση της «δραστηριότητας»*. *Διαχειριστική ώθηση προς σκέψη και κατανόηση.* Προβληματικό σημείο: η καθοδήγηση από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό.	Οι μαθητές *διατυπώνουν* κριτήρια κατάταξης, *εντοπίζουν κοινά χαρακτηριστικά, κάνουν ταξινόμηση* σχημάτων με βάση τα χαρακτηριστικά αυτά. (Ένδειξη ότι οι μαθητές σκέφτονται με Μαθηματικό τρόπο, **συλλογιστική και εννοιολογική ικανότητα-συνδέσεις**).
	3ο κρίσιμο συμβάν Μετασχηματίζει εκ νέου τη «δραστηριότητα» ως προς τη «μαθηματική πρόκληση» και	Οι μαθητές κάνουν *συνδέσεις* των γεωμετρικών αντικειμένων με ιδιότητες. **(Συλλογιστική ικανότητα)**

	κάνει *επέκταση* του *περιεχομένου.* *(Κίνητρο προς τους μαθητές)*	
	4ο κρίσιμο συμβάν Ωθεί τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν προηγούμενες γνώσεις ώστε να φτάσουν σε αιτιολόγηση των συμπερασμάτων τους. *Ελεγχόμενη εκχώρηση* της «δραστηριότητας» στους μαθητές και *ελάχιστος ο χρόνος* για να δράσουν. Έμφαση στη *χρήση «Μαθηματικών εκφράσεων»* *(Διαχειριστική επιλογή που αντανακλά στην μαθηματική κατανόηση και σκέψη του μαθητή).*	Οι μαθητές *εμπλέκονται*, απαντούν δίνοντας την εντύπωση ότι έχουν την ικανότητα να χειριστούν τα ερωτήματα. Τους δίνεται όμως **αποσπασματικά η δυνατότητα να ενεργήσουν.**

Η **αύξηση** της **Μαθηματικής πρόκλησης** (1^{ο} και 3^{ο} κρίσιμο συμβάν) καθώς και η αύξηση στο **μαθηματικό περιεχόμενο** της «δραστηριότητας» (3^{ο} κρίσιμο συμβάν-βλέπε παράρτημα-2, σελ. 201-202) οδηγούν στην **εμπλοκή** των μαθητών και στην διατύπωση λογικών συλλογισμών που παραπέμπουν στο σκέλος της « **Συλλογιστικής Ικανότητας**» (Kilpatrick 2001) .

Παράδειγμα

1^{ο} Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

[Η «δραστηριότητα» έχει μοιραστεί σε φωτοτυπίες. Σ' αυτή υπάρχουν όπως έχει ήδη αναφερθεί μια ομάδα τριγώνων προς κατάταξη. Ο εκπαιδευτικός, πριν ασχοληθούν με τα ερωτήματα της φωτοτυπίας, προκαλεί τους μαθητές να απαντήσουν σε μια προαπαιτούμενη ερώτηση].

……..

40. Καθ: Έχω λοιπόν 3 κορυφές και 3 πλευρές του τριγώνου ....ΑΒ ,ΒΓ, ΑΓ. Αυτά παιδιά ονομάζονται και κύρια στοιχεία του τριγώνου.

41. Καθ: Όταν θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο ή θα σχεδιάσουμε τρία σημεία πάνω στο επίπεδο και θα τα συνδέσουμε με ευθύγραμμα τμήματα,……. είναι σωστή αυτή η πρόταση που είπα; Θα σχεδιάσω 3 σημεία πάνω στο επίπεδο και θα τα συνδέσω με ευθύγραμμα τμήματα. Θα δημιουργηθεί τότε σίγουρα τρίγωνο;

42. M_3: Όχι δεν είμαστε σίγουροι;
43. Καθ: Πότε θα γίνει αυτό; Μπορείς να σηκωθείς πάνω στον πίνακα και να σχεδιάσεις τρία σημεία πάνω στο επίπεδο που να μη σχηματίζουν τρίγωνο;
[Ο μαθητής σκέφτεται.]
44. Καθ: Όσο σκέφτεται ο συμμαθητής σας , υπάρχει περίπτωση να έρθει κάποιος στον πίνακα και να σχεδιάσει 3 σημεία που αν τα συνδέσει κανείς μεταξύ τους να μη δημιουργείται τρίγωνο ; Το σκέφτηκες; [Ο M_3 σηκώνει το χέρι]
45. M_3: Όχι δεν γίνεται!
46. Καθ: Δεν γίνεται;
47. M_3: Άμα σχεδιάσουμε 3 σημεία δεν υπάρχει περίπτωση να μη βγει τρίγωνο.
48. Καθ: Έχεις άλλη άποψη; [απευθύνεται στο μαθητή M_1 που σηκώνει το χέρι του]
49. M_1: Αν είναι σε μια ευθεία.
50. Καθ: Άκουσες τι είπε ο συμμαθητής σου; Αν είναι πάνω σε μια ευθεία ….Αν αυτά τα σημεία είναι πάνω σε μια ευθεία ξέρει κανείς πως τα ονομάζουμε ;
51. M_{10}: Στην ίδια ευθεία .
52. Καθ: Στην ίδια, ναι πάνω σε μια ευθεία ,στην ίδια.
53. M_{10}: Νομίζω δεν είμαι σίγουρος …Διαδοχικά;
54. Καθ: Όχι διαδοχικά…Το μαζί με συν ..το ξεχάσαμε; 3 μη συνευθειακά σημεία…. το ξεχάσατε!
55. Μαθ: Δεν το έχουμε πει άλλη φορά . Πρώτη φορά το ακούω.(Μαθητής)
56. Καθ: Το έχουμε πει το ξεχάσατε ..Με συν που σημαίνει μαζί.

…….

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[41-54] *Μετασχηματισμός* ως προς τη *«μαθηματική πρόκληση»* της «δραστηριότητας». *Προϋποθέσεις* ώστε *να ορίζονται* τα προς ταξινόμηση σχήματα της «δραστηριότητας».

Ο εκπαιδευτικός, πριν προχωρήσουν στην δραστηριότητα της κατάταξης των τριγώνων σε ομάδες, θέτει ως ερώτημα το 'ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των σημείων (κορυφών) του τριγώνου ώστε αυτό να μπορεί να υπάρξει ως γεωμετρική οντότητα'. Το γεγονός του εκφυλισμού του επίπεδου σχήματος σε ευθύγραμμο τμήμα όταν η μία από τις κορυφές του μετακινηθεί προς το φορέα της απέναντι πλευράς απαιτεί μια δυναμική νοητική ενέργεια από την πλευρά των μαθητών. Η «αναγκαία συνθήκη» όσον αφορά την «ύπαρξη» της γεωμετρικής φιγούρας του τριγώνου, ως προς την οποία στρέφει ο εκπαιδευτικός τη σκέψη των μαθητών, υποδεικνύει το τι ο ίδιος θεωρεί ως σημαντική προϋπόθεση ώστε να προχωρήσουν στην κύρια «δραστηριότητα» της ταξινόμησης. Ο εκπαιδευτικός ενισχύει με την ενέργειά του τη «μαθηματική πρόκληση» της «δραστηριότητας» και οι μαθητές ανταποκρίνονται άμεσα.

Η «δραστηριότητα» στο σχολικό βιβλίο εμφανίζει μεγάλο βαθμό καθοδήγησης καθώς μέσα σ' αυτή είναι ενσωματωμένο το πλαίσιο «Σκεφτόμαστε» (βλέπε 3.1, σελ.50) όπου τα κριτήρια κατάταξης των τριγώνων που πρέπει να ανακαλυφθούν (σύμφωνα με τους συγγραφείς) από τους μαθητές δίνονται έτοιμα. Ο εκπαιδευτικός **διατηρεί** μεν το γεωμετρικό **πλαίσιο** αλλά **αφαιρεί την καθοδήγηση** μοιράζοντας φωτοτυπία με παρόμοια ερωτήματα αλλά χωρίς οποιαδήποτε αναφορά που θα μπορούσε να κατευθύνει τους μαθητές. Οι μαθητές **εμπλέκονται**, απαντούν και διατυπώνουν τα

αναμενόμενα κριτήρια. Φαίνεται πως είναι σε θέση να σκεφτούν με Μαθηματικό τρόπο (2ο κρίσιμο συμβάν-βλέπε παράρτημα-2, σελ.199).

Η αποσπασματικές ενέργειες των μαθητών που προκύπτουν από την **ελεγχόμενη μεν εκχώρηση** της «δραστηριότητας» (*4^{ο} κρίσιμο συμβάν)* σε συνδυασμό με την **έλλειψη του απαραίτητου χρόνου** προς τους μαθητές ώστε να αυτενεργήσουν, δεν φαίνονται ως επιλογές ικανές για το χαρακτηρισμό της δραστηριότητας των μαθητών ως Μαθηματική.

Παράδειγμα

4^{ο} Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

…….

223. Καθ: Ξεκινάμε τώρα να δούμε… Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει 2 η 3 ορθές γωνίες; Σκεφτόμαστε τώρα!!!
224. M_{12}: Όχι.
225. Καθ: Γιατί;
226. M_{12}: Γιατί θα έβγαινε πάνω από 180 μοίρες.
227. Καθ: Τι θα βγει πάνω από 180;
228. M_{12}: Το άθροισμα των γωνιών.

……..

233. Καθ: Άρα συμπέρασμα.. Πόσες γωνίες ορθές μπορεί να έχει ένα τρίγωνο;
234. M_{14}: Το πολύ μια.
235. Καθ: Γιατί λέμε «το πολύ» . Γιατί λέμε το πολύ ;
236. M_3: Γιατί θα μπορούσε να μην έχει και καμία ορθή.
237. Καθ: Μπορεί να έχει δυο ή 3 αμβλείες γωνίες;
239. M_1: Όχι .Γιατί πάλι το άθροισμα ……
240. Καθ: Για τον ίδιο λόγο. Δεν χρειάζεται να επαναλαμβάνουμε τα ίδια.. Γιατί και πάλι το άθροισμα των γωνιών θα βγει πάνω από 180^{ο} .

…….

244. Καθ: Για να ρωτήσω κάτι άλλο τώρα… Ένα τρίγωνο έχει **μια** οξεία γωνία. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις άλλες δυο γωνίες.
247. M_{20}: Μια όταν λέμε; Τουλάχιστον μια;
248. Καθ: Όταν λέω μια εννοώ μια . Τι συμπέρασμα μπορώ να βγάλω για τις άλλες δυο; Για να το πάρουμε λίγο αριθμητικά!!. Έστω μια γωνία είναι 40. Άρα πόσο μπορούν να είναι οι άλλες;
249. M_5: Οι άλλες να είναι μεγαλύτερες.
250. Καθ: Γιατί; Δεν θα μπορούσε κάποια να είναι 20 ή 39;
251. M_5: Αν η μια είναι 40 το άθροισμα των άλλων δυο πρέπει να είναι 140.
252. Καθ: Συμπέρασμα λοιπόν …Μου άρεσε κι αυτό που είπε ο συμμαθητής σας!!! Πατάει επάνω στο αριθμητικό!! Οπότε αρχίζουμε να γενικεύουμε ..Πες μας περιπτώσεις. Το άθροισμα των άλλων δυο πρέπει να είναι 140…
254. M_5: 100 και 40.

…….

263. Καθ: Άρα λοιπόν μπορούμε να έχουμε μια οξεία και μια αμβλεία. Άλλο ;

…….

268. Καθ: Γνωρίζω ότι έχει μια οξεία γωνία. Για τις άλλες δεν τις ξέρω. Τις ψάχνω.
269. Καθ: Τι συμπεράσματα μπορώ να έχω για τις άλλες δυο γωνίες του;
271. M_{21}: Μια γωνία ορθή.

……..

274. Καθ: Να πούμε και μια τελευταία . Μια περίπτωση μας είπε ο M_5….να έχω μια οξεία και μια αμβλεία .Άλλη περίπτωση μας είπε η M_{21}, μια ορθή και μια οξεία. Και μένει άλλη μια;
275. M_9: 3 οξείες . ……

283. M_8: Αν υπάρχει μια οξεία, οι άλλες γωνίες μπορεί να είναι ή οξεία και αμβλεία, ή ορθή και οξεία ή δυο οξείες. …….

287. Καθ: Αν γνωρίζουμε ότι έχει δυο γωνίες οξείες τι συμπεραίνουμε για τη τρίτη γωνία; Τι μπορεί να είναι;

288. M_6: Θα είναι αμβλεία.

289. Καθ: Θα είναι αμβλεία σίγουρα; 70+70=140. Μπορεί να είναι αμβλεία, μπορεί να είναι ορθή, μπορεί και οξεία. Άρα λοιπόν η τρίτη γωνία μπορεί να είναι ή οξεία ,ή αμβλεία ή ορθή. Και βέβαια εκεί που έπρεπε να πούμε τα συμπεράσματα να το κλείσουμε χτύπησε το κουδούνι……Να το πούμε γρήγορα γρήγορα;

290. Όχι!!!(όλοι μαζί)

Συνοπτική ανάλυση του 4ου συμβάντος

[223-228,233-240,244-283] Η «*δραστηριότητα»*, όσον αφορά το είδος των γωνιών ενός τριγώνου, *μετασχηματίζεται* με τη βοήθεια πρότερης γνώσης (Ελεγχόμενη *εκχώρησή της* στους μαθητές).

Ο εκπαιδευτικός στρέφει τους μαθητές στην αναζήτηση του είδους των υπόλοιπων γωνιών που μπορεί να έχει ένα τρίγωνο όταν το είδος της μιας από τις γωνίες του είναι γνωστό. Οι μαθητές επικαλούνται το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου για να αιτιολογήσουν γιατί ένα ορθογώνιο ή ένα αμβλυγώνιο μπορούν να έχουν μόνο μια γωνία του είδους αυτού , ενώ για το οξυγώνιο ο τρόπος προσέγγισης στηρίζεται σε δοκιμές με αριθμητικά δεδομένα.

Ενώ η ύπαρξη μιας ορθής ή μιας αμβλείας γωνίας σε ένα τρίγωνο οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι υπόλοιπες γωνίες του είναι υποχρεωτικά οξείες, η ύπαρξη μιας οξείας δεν αποτελεί δεσμευτικό στοιχείο για το είδος των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου. Οι αριθμητικές δοκιμές χρησιμοποιούνται ως μέθοδος για τη διαπίστωση του γεγονότος αυτού. Ο εκπαιδευτικός δεν εκχωρεί αυτό το κομμάτι της «δραστηριότητας» στους μαθητές να το ερευνήσουν μόνοι τους αλλά λειτουργεί καθοδηγώντας τους σε μεγάλο μέρος με κατάλληλες ερωτήσεις, διορθώνει σε κάποιες περιπτώσεις ή απαντά ο ίδιος σε αυτά που ρωτά. Δεν παραχωρεί τον απαραίτητο χρόνο στους μαθητές ώστε να παρουσιάσουν ολοκληρωμένο σκεπτικό.

Συνολική Ανάλυση της 1ης διδασκαλίας

Ο εκπαιδευτικός μοιράζει τη «δραστηριότητα» που επέλεξε σε φωτοτυπία. Ζητά από τους μαθητές να έχουν τα βιβλία τους κλειστά. *Διατηρεί το γεωμετρικό πλαίσιο* της «δραστηριότητας» του βιβλίου με τη διαφορά ότι τα τρίγωνα που δίνει δεν είναι από την αρχή διαχωρισμένα σε ομάδες. Οι μαθητές καλούνται να κάνουν οι ίδιοι το διαχωρισμό ανάλογα με κάποια γνωρίσματα τα οποία όμως δεν υπονοούνται κατά κανένα τρόπο, σε αντίθεση με το εμβόλιμο πλαίσιο του «σκεφτόμαστε» που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο.

Δεν ξεκινά απ' ευθείας με τη «δραστηριότητα» αλλά, αφού έχει προηγηθεί συζήτηση με τους μαθητές για τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου (πλευρές και γωνίες), αυξάνει τη *«μαθηματική πρόκληση»* ζητώντας από αυτούς να σκεφτούν αν με τρία σημεία σχηματίζεται πάντα η γεωμετρική φιγούρα ενός τριγώνου (*1^{ο} κρίσιμο συμβάν*). Η *ύπαρξη του τριγώνου* αποτελεί προϋπόθεση για τη μετέπειτα κατάταξη των τριγώνων σε ομάδες. Οι μαθητές σκέφτονται. Κάποιος απαντά ότι πάντα σχηματίζεται τρίγωνο από 3 δοθέντα σημεία, ενώ ένας δεύτερος μαθητής εκφράζει την αντίθετη άποψη και την αιτιολογεί λέγοντας πως υπάρχει η περίπτωση τα 3 σημεία να είναι πάνω σε μια ευθεία. Η αιτιολόγηση του τελευταίου μαθητή φανερώνει *διερευνητικό τρόπο σκέψης* από την πλευρά του. Επιπλέον φαίνεται να χρησιμοποιεί *δυναμικές νοητικές διεργασίες* καθώς η μεταφορά της μιας κορυφής του τριγώνου στην ευθεία που ορίζουν οι άλλες δυο κορυφές προϋποθέτει την νοερή μεταφορά της με αποτέλεσμα τον εκφυλισμό ενός επίπεδου σχήματος δυο διαστάσεων στη μονοδιάστατη έννοια μιας ευθείας. Ο εκπαιδευτικός επικροτεί τη σκέψη του μαθητή και τονίζει την ονομασία των «συνευθειακών» σημείων επιμένοντας στη *σωστή διατύπωση μαθηματικών εκφράσεων*.

Στη συνέχεια γίνεται η εισαγωγή της κύριας «δραστηριότητας» που αφορά τον διαχωρισμό και την κατάταξη ομάδας τρίγωνων σε κατηγορίες. Ο εκπαιδευτικός στις φωτοτυπίες του *διατηρεί το γεωμετρικό πλαίσιο* της «δραστηριότητας» του βιβλίου(*2^{ο} κρίσιμο συμβάν)*, ενώ *έχει αφαιρέσει* κάθε *καθοδήγηση* που θα μπορούσε να κατευθύνει τη σκέψη των μαθητών. Από την άλλη πλευρά όμως *δεν εκχωρεί τη δραστηριότητα* στους μαθητές αλλά επιλέγει να υιοθετήσει ένα *μοντέλο διδασκαλίας* διαδοχικών ερωτήσεων-απαντήσεων που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί *καθοδηγούμενο* από δική του πλευρά (Voigt, 1994). Υπό αυτές τις συνθήκες η εύρεση των χαρακτηριστικών για την ταξινόμηση προκύπτει από τους μαθητές άμεσα. Μιλούν για ισόπλευρα και ισοσκελή τρίγωνα. Είναι φανερό ότι οι μαθητές έχουν καλή πρότερη γνώση για τα παραπάνω τρίγωνα. Η *έλλειψη φυσικών εργαλείων διαμεσολάβησης της μάθησης* δεν επιτρέπει τη σύγκριση μεγεθών (πλευρές) και η διαδικασία παραμένει στο επίπεδο εν μέρει της *οπτικής σύγκρισης* και κυρίως στο *επίπεδο συλλογισμών και συνδέσεων*. Η «δραστηριότητα» πολύ γρήγορα ξεφεύγει από το πλαίσιο της φωτοτυπίας και εξελίσσεται αποκλειστικά στον πίνακα. (Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει σχήματα και γράφει τις κατηγορίες των τριγώνων με κατάλληλη σειρά). Το μοντέλο διδασκαλίας του καθηγητή και ο τρόπος που

χειρίζεται τη «δραστηριότητα» δεν επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι η «ανακάλυψη» των κριτηρίων κατάταξης (σχετικό μέγεθος των πλευρών και είδος γωνιών) ανήκει αποκλειστικά στους μαθητές. Η καθοδήγηση εκ μέρους του εκπαιδευτικού είναι αρκετή. Αυτό όμως δεν ακυρώνει την εμπλοκή τους και δεν παύει να αποτελεί ένδειξη του τρόπου σκέψης των μαθητών.

Μελετώντας το *3ο κρίσιμο συμβάν* ο εκπαιδευτικός, συγχρόνως με την ταξινόμηση των τριγώνων σε κατηγορίες με χαρακτηριστικό τις πλευρές, βρίσκει την ευκαιρία να διαχειριστεί ιδιότητες των ισόπλευρων και ισοσκελών τριγώνων που έχουν σχέση με την συμμετρία. Με αυτή την ενέργεια *αξιοποιεί* την *προηγούμενη* (πρόσφατη) *γνώση* των μαθητών ωθώντας τους να κάνουν *συνδέσεις* των γεωμετρικών σχημάτων *με τις ιδιότητές* τους. Η συμμετρία, ο άξονας συμμετρίας και η κανονικότητα που παρουσιάζουν τρίγωνα όπως τα παραπάνω, αποτελούν *επέκταση του μαθηματικού περιεχομένου της «δραστηριότητας»* και εκ νέου *αύξηση της μαθηματικής της πρόκλησης*. Ο εκπαιδευτικός με την ενέργειά του αυτή καλύπτει συγχρόνως και ένα μεγάλο μέρος του επόμενου μαθήματος του σχολικού βιβλίου, όπου γίνεται συζήτηση για άξονες συμμετρίας ισόπλευρων και ισοσκελών τριγώνων.

Στο *4ο κρίσιμο συμβάν* ξεκινά η συστηματική πια ταξινόμηση με κριτήριο το είδος των γωνιών. Η δραστηριότητα *μετασχηματίζεται* μέσα από την *γνώση των μαθητών* οι οποίοι γνωρίζουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180°, και αιτιολογούν γιατί δεν είναι δυνατόν ένα τρίγωνο να έχει πάνω από μια ορθή ή πάνω από μία αμβλεία γωνία. Επιπλέον χρησιμοποιούν μαθηματικές εκφράσεις όπως : «ένα τρίγωνο μπορεί να έχει *μια το πολύ* αμβλεία», γεγονός που υποδεικνύει ότι ο εκπαιδευτικός γενικά επιμένει στο γλωσσικό κομμάτι στη διδασκαλία του.*(Χρήση* και *σωστή διατύπωση μαθηματικών εκφράσεων)* Στην περίπτωση του τριγώνου που έχει μια οξεία γωνία ο καθηγητής στρέφει τους μαθητές σε δοκιμές με αριθμητικά παραδείγματα ώστε να διαπιστώσουν τη δυνατότητα οι άλλες δυο γωνίες του να είναι οτιδήποτε. Οι μαθητές *εμπλέκονται στη διαδικασία* σε μεγάλο ποσοστό. Σκέφτονται, υπολογίζουν και απαντούν στα πλαίσια που ο εκπαιδευτικός τους επιτρέπει να το κάνουν. Η *εκχώρηση* της «*δραστηριότητας*» είναι θα λέγαμε *ελεγχόμενη*, καθώς ο βαθμός ελευθερίας των μαθητών μένει στο ότι διατυπώνουν τις σκέψεις τους προφορικά χωρίς να αναλαμβάνουν την ευθύνη του μέρους των υπολογισμών εξ' ολοκλήρου. Ο εκπαιδευτικός διορθώνει το σκεπτικό τους όταν χρειάζεται, δίνοντας

αριθμητικά αντιπαραδείγματα όταν οι εκτιμήσεις τους είναι λανθασμένες. Χρησιμοποιεί δε τον όρο «γενίκευση» που υποδεικνύει την μετάβαση από το ειδικό στο γενικό όσον αφορά τον τρόπο που προκύπτουν τα συμπεράσματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Προς το τέλος δε της διδακτικής ώρας στο ερώτημα 'τι συμβαίνει με την τρίτη γωνία ενός τριγώνου όταν είναι γνωστό ότι οι δυο γωνίες του είναι οξείες' , δίνει ο ίδιος τις απαντήσεις καθώς χτυπά το κουδούνι.

Μελετώντας και αναλύοντας συνολικά τη μέθοδο διαχείρισης του καθηγητή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει ως βασικό άξονα τη συμμετοχή όσο γίνεται περισσότερων μαθητών. Επιτυγχάνει δε αυτή την *εμπλοκή (student's involvement)* υιοθετώντας ένα μόνιμα *διαδραστικό* μοντέλο ερωτήσεων–απαντήσεων όπου όλοι σχεδόν μιλούν και εκφράζουν γνώμη. Οι κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης παρ' όλο που οι μαθητές απαντούν ατομικά (χωρίς ομάδες συνεργασίας), δείχνει να έχει τη δομή μιας μεγάλης ομάδας που την αποτελεί ολόκληρη η τάξη με κέντρο τον καθηγητή. Ο εκπαιδευτικός απευθύνει ερωτήσεις προς όλους ανεξαιρέτως, χωρίς να σηκώνουν απαραίτητα το χέρι για να εκφράσουν κάποια άποψη, γεγονός που κρατά τους μαθητές σε διαρκή εγρήγορση.

Η επιλογή του να χρησιμοποιήσει πιο «*ανοιχτή*» δραστηριότητα σε σχέση με αυτή του βιβλίου διατηρώντας το «*γεωμετρικό*» πλαίσιο και αφαιρώντας την «*καθοδήγηση*» παραπέμπει στη διάθεσή του να βάλει τους μαθητές σε μια διαδικασία *«ανακάλυψης»* των κριτηρίων κατάταξης των τριγώνων *(2^{ο} κρίσιμο συμβάν)* και επιπλέον *«διερεύνησης»* όλων των πιθανοτήτων που υπάρχουν ώστε να σχηματίζονται τα τρίγωνα *(1^{ο} κρίσιμο συμβάν)*. Η διάθεσή του αυτή έρχεται σε αντίφαση με την διαχειριστική πρακτική που χρησιμοποιεί καθώς ο ίδιος αρκετές φορές καθοδηγεί με τον τρόπο του τους μαθητές προς συγκεκριμένες απαντήσεις.

Η τάση του να *αυξάνει «την μαθηματική πρόκληση»* σε διάφορα μέρη της «δραστηριότητας» και να *επεκτείνει το «μαθηματικό περιεχόμενο»* της κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας *(1^{ο} και 3^{ο} κρίσιμο συμβάν*) φαίνεται να είναι πάγια τακτική του (βλέπε παράρτημα-2, σελ.198, 201). Οι μαθητές δείχνουν να ανταποκρίνονται και να μπαίνουν στη διαδικασία να σκεφτούν και να απαντήσουν χρησιμοποιώντας κάποιες φορές δυναμικά τη σκέψη τους.

Επιπλέον η επιμονή του εκπαιδευτικού στη *σωστή χρήση «μαθηματικών εκφράσεων»* δείχνει το τι θεωρεί ο ίδιος ως σημαντικό στη διδασκαλία του και το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτές τις μαθηματικές εκφράσεις ακολουθώντας το

παράδειγμα του καθηγητή, παραπέμπει σε επιτυχή προσέγγιση από την πλευρά του *(2^{ο} κρίσιμο συμβάν*, βλέπε παράρτημα-2, σελ.199*)*.

Η *εν μέρει εκχώρηση της «δραστηριότητας»* προς τους μαθητές στο *4^{ο} κρίσιμο συμβάν* υποδεικνύει την επιλογή του εκπαιδευτικού να διατηρεί ο ίδιος τον έλεγχο της «δραστηριότητας» και του συντονισμού του μαθήματος. Η έλλειψη χρόνου καθώς η διδακτική ώρα τελειώνει πιθανόν να αποτελεί μια παράμετρο που σχετίζεται με αυτή την επιλογή του εκπαιδευτικού.

Πίνακας αλληλεπίδρασης 2ης Δραστηριότητας:

«Παραλ/γραμμο –Ορθογώνιο –Ρόμβος- Τετράγωνο – Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο»

Ο εκπαιδευτικός δεν επιχειρεί τη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου. Στο σχολικό εγχειρίδιο η «δραστηριότητα» βασίζεται τυπικά σε ένα *πραγματικό αλλά μη αυθεντικό πλαίσιο*. Συγχρόνως παρουσιάζει και άλλα προβλήματα «διδακτικής φύσης» (βλέπε 3.1, σελ.52-54). Ο εκπαιδευτικός επιλέγει να την απλοποιήσει και να περιορίσει το περιεχόμενό της στο βασικό γεωμετρικό σχήμα του παραλληλογράμμου και την διαχείριση των ιδιοτήτων του στον πίνακα

Η Δραστηριότητα όπως δίνεται στο βιβλίο	**Οι μετασχηματισμοί του εκπαιδευτικού**	**Η εμπλοκή των μαθητών**
Πραγματικό μη αυθεντικό πλαίσιο Δεν προτείνονται διαμεσολαβητικά εργαλεία .	*1^{ο} κρίσιμο συμβάν* *Μετασχηματίζει το πραγματικό πλαίσιο* της «δραστηριότητας» σε *γεωμετρικό* ενώ συγχρόνως *περιορίζει το περιεχόμενο*. *Διεγείρει το ενδιαφέρον* των μαθητών με *πρωτότυπες μαθηματικές εκφράσεις* *(Κίνητρα προς τους μαθητές)*	Οι μαθητές ανταποκρίνονται χρησιμοποιώντας προηγούμενες γνώσεις. Η εμπλοκή τους περιορίζεται σε αναγνώριση του βασικού σχήματος. **Οι μαθητές στο σύνολό τους δείχνουν θετική διάθεση** και προσπαθούν να ανταποκριθούν με μεγάλη προθυμία.
	2ο κρίσιμο συμβάν *Αξιοποιεί* την *προηγούμενη γνώση* των μαθητών	Οι μαθητές διατυπώνουν ιδιότητες κάνοντας ανάκληση γνώσεων και **λογικούς συλ-**

	Καθοδηγεί ο ίδιος με τον τρόπο του χρησιμοποιώντας συνεχώς ερωτήσεις. *Επιμένει* στη *σωστή διατύπωση μαθηματικών εκφράσεων*. *(Διαχειριστική επιλογή που αντανακλά στην μαθηματική κατανόηση και σκέψη του μαθητή).*	**λογισμούς.** Οι μαθητές χρησιμοποιούν και οι ίδιοι σωστά διατυπωμένες μαθηματικές εκφράσεις.
	3ο κρίσιμο συμβάν Αυξάνει τη «μαθηματική πρόκληση» και πιέζει για επεξηγήσεις. *(Κίνητρα προς τους μαθητές)*	Οι μαθητές κάνουν συνδέσεις των γεωμετρικών αντικειμένων με ιδιότητες. **(Συλλογιστική-εννοιολογική ικανότητα)**

Ο εκπαιδευτικός χειρίζεται τη «δραστηριότητα» με τρόπο τελείως διαφορετικό από τον προτεινόμενο από το σχολικό βιβλίο. Εισάγει την έννοια των τετραπλεύρων με πολύ κλασικό τρόπο *(1^{ο} κρίσιμο συμβάν*-βλέπε παράρτημα-2, σελ.204-206) δίνοντας στους μαθητές ένα απλό παραλληλόγραμμο στον πίνακα. Αντίθετα στο βιβλίο ζητείται η ταξινόμηση επίπεδων σχημάτων (παραλληλογράμμων) που προκύπτουν από ενέργειες όπως: αλλαγή της κλίσης και μετατοπίσεις παράλληλων ευθειών. Ο εκπαιδευτικός μετασχηματίζει το «πραγματικό» πλαίσιο μετατρέποντάς το σε καθαρά *«γεωμετρικό»*. Ο **μετασχηματισμός του πλαισίου** από μόνος του **δεν δείχνει** να έχει κάποια ιδιαίτερη **επίδραση** στους μαθητές, ενώ ο συνδυασμός του με τον περιορισμό του περιεχομένου μπορεί να προσφέρει ασθενή ένδειξη για την εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία. Αντίθετα, η **χρήση ελκυστικών εκφράσεων** μαθηματικού περιεχομένου (πχ: «τι είναι αυτό που κάνει ένα τετράπλευρο «καλό τετράπλευρο;»), από τον εκπαιδευτικό φαίνεται να **ωθεί ως ένα είδος κινήτρου** τους μαθητές να συμμετέχουν και να απαντούν στο σύνολό τους.

Η *καθοδήγηση* από τον εκπαιδευτικό είναι *έντονη* (*2^{ο} κρίσιμο συμβάν*-βλέπε παράρτημα-2, σελ. 206-208) και ο τρόπος της διαχείρισής του καθώς διατηρεί το ίδιο μοντέλο διδασκαλίας των συνεχών ερωτήσεων και απαντήσεων, με πίεση προς την κατεύθυνση που πιστεύει, κάνει τους μαθητές να απαντούν κάνοντας ανάκληση

γνώσεων και γενικότερα να συμμετέχουν. Ο εκπαιδευτικός **αξιοποιεί την προηγούμενη γνώση των μαθητών** ενώ συγχρόνως **επιμένει στη σωστή διατύπωση μαθηματικών εκφράσεων**. Οι μαθητές φαίνεται να **υιοθετούν τον τρόπο έκφρασης** που χρησιμοποιεί ο καθηγητής.

Η κατασκευαστική διάσταση που δίνει στη «δραστηριότητα» στο *3ο κρίσιμο συμβάν* συνδυάζεται με ***αύξηση* της *μαθηματικής πρόκλησης*** καθώς με μοναδικό *εργαλείο* το *υποδεκάμετρο* οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τον ασφαλέστερο τρόπο με τον οποίο δημιουργείται ένα παραλληλόγραμμο μέσα από τις ιδιότητές του. Οι μαθητές ωθούνται να κάνουν *συνδέσεις* του γεωμετρικού σχήματος *με τις ιδιότητές* του ενώ συγχρόνως τους δίνονται ενδιαφέροντα ερωτήματα προς επίλυση εντείνοντας τον ρόλο των κινήτρων. **Η πίεση για επεξηγήσεις του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές οδηγεί σε εννοιολογικές συνδέσεις**.

Παράδειγμα

3ο Κρίσιμο συμβάν (Διάλογος)

……

284. Καθ: Ερώτηση κρίσης. Θέλω να μου πείτε έναν πολύ γρήγορο και πολύ εύκολο τρόπο να σχεδιάσουμε ένα παρ/μο.
285. M_3: Βάζουμε τέσσερα σημεία……
286. Μαθ: Τι παραλληλόγραμμο κύριε; Ορθογώνιο;(μαθήτρια)
287. Καθ: Δεν μιλήσαμε για κανένα άλλο παρ/μο , μόνο για ένα μιλήσαμε.
289. Καθ: Το πλάγιο που το λέτε
290. Μαθ: Ωραία , βάζουμε δυο πλάγιες γραμμές.(μαθητής)
291. Καθ: Και μετά;
292. Μαθ: Μετά παίρνουμε τη μια ….από ένα σημείο της μιας και ενώνουμε με το άλλο σημείο της άλλης.(μαθητής)
293. Καθ: Και πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα που θα δημιουργηθεί είναι παρ/μο; Η M_{15} μας είπε……. θύμισε μας σε παρακαλώ ποιο τετράπλευρο σχήμα θα ονομάζουμε παρ/μο;
296. M_{15}: Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο σχήμα που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
298. M_6: Σχεδιάζω δυο παράλληλες…
299. Καθ: Και πώς θα ξέρεις 100% ότι αυτές είναι παράλληλες; Μπορεί στο μάτι και όσο τις σχεδιάζεις ……δηλ. αν σχεδιάσω εγώ δυο ευθείες και πω ότι αυτές είναι παρ/λες μπορεί όσο είναι ο πίνακας να φαίνονται παρ/λες αλλά εδώ κάπου να τέμνονται.
300. M_8: Παίρνω δυο τρίγωνα . Σχεδιάζουμε το ένα . Μετά βάζουμε τη μια πλευρά του άλλου πάνω στην άλλη και μετά το αφήνουμε…….
301. Καθ: Εγώ στον πίνακα θέλω να το σχεδιάσω…. Ωραίο αυτό που είπε η συμμαθήτριά σας αλλά εγώ αν θέλω να το κάνω πρέπει να διπλώσω τον πίνακα. Μπορώ να διπλώσω τον πίνακα;

……..

327. M_{18}: Κύριε όλα αυτά χωρίς όργανα;
330. Καθ: Το πολύ πολύ να έχουμε αυτόν το χάρακα, το δικό μου. Τίποτα άλλο.

……..

335. M_{15}: Κύριε αν στις διαγώνιες το κέντρο τους ισαπέχει…….

[Αρκετοί μαθητές λένε τη γνώμη τους κάνοντας κατασκευές με το χέρι στο περίπου ενώ συγχρόνως διατυπώνονται διάφορες ενστάσεις από τους συμμαθητές τους].

345. Καθ: Άρα ένας άλλος πιο καλός τρόπος για να καλύψουμε κι αυτούς που ψάχνουν διαρκώς να μας βρουν ότι έχουμε κάνει λάθος, είναι η σκέψη της M_{15} . Τι είπες προηγουμένως;

[Απευθύνεται στη μαθήτρια].
346. M_{15}: Να πάρουμε όχι τέτοιον χάρακα . Εκείνον με την ορθή γωνία . Δεν ξέρω πώς τον λένε….
350. Καθ: Όχι. Άλλο είχες πει πριν και το ξέχασες. Ξεχνάτε και τι λέτε!!
351. M_{15}: Για τις διαγώνιες λέτε;
352. Καθ: Για τις διαγώνιες. Μ' αυτό τον πολύ ωραίο, τον πολύ μικρό χάρακα. Ορίστε!! Τι είναι αυτό που σχεδίασα;
353. M_9: Ένα Χ
354. Καθ: Ένα Χ. Δηλαδή; Τι; Κωνσταντίνε;
355. Μ9: Δυο ευθείες που τέμνει η μια την άλλη.
358. Καθ: Τυχαία το σχεδίασα;
362. M_6: Πήραμε δυο ίσα σημεία….εεε που ισαπέχουν.
367. M_6: Από το μέσο
368. Καθ: Από το μέσο;
370. M_6: Από το σημείο που τέμνονται…
375. Καθ: Ναι βρε παιδί μου αυτό είναι!! Πήραμε λοιπόν πάνω στη μια ευθεία δυο σημεία τα οποία να ισαπέχουν από το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δυο ευθείες. Δηλαδή τι έχω κάνει στην ουσία; Αυτό που είπε η M_6 το κάνω πιο μικρή πρόταση. Τι κάναμε; Σχεδιάσαμε ένα ευθύγραμμο τμήμα…
376. M_{17}: Και βρήκαμε το μέσο
377. Καθ: Το βρήκαμε το μέσο ή το κατασκευάσαμε το μέσο;
378. M_{17}: Το κατασκευάσαμε
379. Καθ: Έτσι ώστε το σημείο τομής τι να είναι βρε παιδιά ;
380. Καθ: Το μέσο.
381. Καθ: Το ίδιο κάνουμε και από την άλλη πλευρά , ορίστε!
382. Μαθ: Και ενώνουμε τα σημεία (μαθήτρια)
387. Μαθ: Αυτό είναι ρόμβος κύριε (μαθητής)
388. Καθ: Μπορεί. Δεν το ξέρω ……...

Συνοπτική ανάλυση του 3ου συμβάντος

[284-293,299-301,327-388] *Αύξηση της μαθηματικής πρόκλησης* της «δραστηριότητας». *Πίεση για επεξηγήσεις.*

Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει στη διαδικασία την κατασκευή ενός παραλληλογράμμου με βάση τις ιδιότητές του. Η χρήση ενός απλού υποδεκαμέτρου αποτελεί τον πιο σύντομο και εύκολο τρόπο για την συγκεκριμένη κατασκευή, καθώς το σημείο τομής των διαγωνίων ισαπέχει από τα άκρα της κάθε μιας. Η επιλογή αξιόπιστου τρόπου κατασκευής που να εξασφαλίζει ότι το σχήμα που προκύπτει είναι παραλληλόγραμμο αποτελεί τον πυρήνα του διαλόγου. Ο εκπαιδευτικός με αυτή του την ενέργεια αυξάνει την μαθηματική πρόκληση της «δραστηριότητας» προς κατεύθυνση η οποία βέβαια αποκλίνει κατά πολύ από την «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου. Η καθοδήγηση από την πλευρά του εξακολουθεί και είναι έντονη ενώ πιέζει τους μαθητές για περισσότερες επεξηγήσεις σε ότι ισχυρίζονται κάνοντας κατάλληλες ερωτήσεις.

Συνολική Ανάλυση της 2ης διδασκαλίας

Ο καθηγητής φαίνεται πως θεωρεί σημαντική την εμπέδωση εννοιών, καθώς στην αρχή του μαθήματος κάνει μια μικρή επανάληψη στην προηγούμενη ενότητα που αφορά τα τρίγωνα και τα στοιχεία τους. Τα βιβλία των μαθητών είναι κλειστά σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Η «δραστηριότητα» μέσα στη σχολική τάξη ξεκινά με τρόπο τελείως διαφορετικό από τον προτεινόμενο από το σχολικό βιβλίο. Ο εκπαιδευτικός εισάγει την έννοια των τετραπλεύρων με πολύ κλασικό τρόπο (*1^{ο} κρίσιμο συμβάν,παράρτημα-2*) δίνοντας στους μαθητές ένα απλό παραλληλόγραμμο στον πίνακα. Αντίθετα, στη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου, η διασταύρωση δυο δρόμων (βλέπε 3.1 , σελ.52) και η ταξινόμηση των επίπεδων σχημάτων που προκύπτουν από ενέργειες όπως: αλλαγή της κλίσης και μετατοπίσεις παράλληλων ευθειών (όρια των δρόμων) υποδηλώνουν την έμφαση των συγγραφέων στη διαχείριση μέσω *πραγματικού πλαισίου*.

[Παρατήρηση: οι νοεροί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που απαιτεί η συγκεκριμένη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου είναι δύσκολο να πραγματοποιηθούν από μαθητές αυτής της ηλικίας. Η υλοποίησή της θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με χρήση ενός περιβάλλοντος δυναμικής Γεωμετρίας (πχ. Sketchpad ή Cabri κλπ.)]

Ο εκπαιδευτικός μετασχηματίζει το παραπάνω πλαίσιο μετατρέποντάς το σε καθαρά *«γεωμετρικό»*. Περιορίζει τις αναμενόμενες ενέργειες των μαθητών από εικασίες πάνω σε νοερά αντικείμενα, σε *αναγνώριση και διατύπωση ιδιοτήτων* με βάση προηγούμενη γνώση των μαθητών, πάνω σε ένα μόνο γεωμετρικό σχήμα οικείο προς αυτούς, το παραλληλόγραμμο. Το πλαίσιο επομένως μετατρέπεται, ενώ *οι ενέργειες* και το *περιεχόμενο περιορίζονται*. Γενικότερα ο εκπαιδευτικός επιλέγει να χρησιμοποιήσει μια κλασική μορφή διδασκαλίας όπου ως *εργαλείο διαμεσολάβησης* της μάθησης χρησιμοποιείται *ο πίνακας* όπου ο ίδιος σχεδιάζει τα προς διαχείριση σχήματα. Επιπλέον η βασική ενέργεια που στη «δραστηριότητα» του βιβλίου είναι η ταξινόμηση σχημάτων σε κατηγορίες καταργείται, καθώς το *περιεχόμενο* της «*δραστηριότητας» περιορίζεται* στη μοναδική φιγούρα ενός παρ/μου. Η έκφραση «καλό τετράπλευρο» που χρησιμοποιεί ο καθηγητής για το παραλληλόγραμμο, αποτελεί μια προσπάθεια από μέρους του *να κινήσει το ενδιαφέρον* των μαθητών και να τους μυήσει στην διαδικασία ταξινόμησης με βάση τις ιδιότητές του. Τι είναι εκείνο που κάνει ένα τετράπλευρο να είναι «καλό τετράπλευρο»; Αφήνεται ως αιωρούμενο ερώτημα ανοιχτό προς απάντηση. Οι μαθητές δραστηριοποιούνται και απαντούν. Συμμετέχουν κατά μεγάλο ποσοστό. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί με τον τρόπο του. Επιμένει να αντιληφθούν οι μαθητές το σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στον ορισμό ενός σχήματος και στις «ιδιότητες» που απορρέουν από αυτόν. Χαρακτηριστικό επίσης της διαχείρισης του καθηγητή είναι η επιμονή στις σωστές μαθηματικές εκφράσεις τις οποίες τονίζει συνεχώς.

Η ενασχόληση με τις *ιδιότητες* του παραλληλογράμμου που αναφέρθηκαν στο 1^{ο} κρίσιμο συμβάν έρχεται να τεθεί προς διαπραγμάτευση στο *2^{ο} κρίσιμο συμβάν* (βλέπε

παράρτημα-2, σελ.206-208). Το πλαίσιο της «δραστηριότητας» παραμένει, όπως και παραπάνω, «*γεωμετρικό*», *μετασχηματισμένο* σε σχέση με την «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου και *περιορισμένο ως προς το περιεχόμενο* καθώς οι διαφορετικοί τύποι τετραπλεύρων δεν αναφέρονται ώστε να γίνει η ταξινόμησή τους. Αντίθετα το μοναδικό προς μελέτη σχήμα εξακολουθεί να είναι το παραλληλόγραμμο, με τη διαφορά ότι οι μαθητές καλούνται να ομαδοποιήσουν τις ιδιότητές του ανάλογα με τα στοιχεία τα οποία αφορούν, δηλαδή τις πλευρές, τις γωνίες και τις διαγωνίους του. Ο εκπαιδευτικός εξακολουθεί και διατηρεί το ίδιο μοντέλο διδασκαλίας των συνεχών ερωτήσεων και απαντήσεων με πίεση προς την κατεύθυνση που πιστεύει. Οι μαθητές απαντούν κάνοντας ανάκληση γνώσεων και γενικότερα συμμετέχουν. Η *καθοδήγηση* από τον εκπαιδευτικό είναι *έντονη* και η διαχείρισή του *τραβά την προσοχή των μαθητών* με φράσεις διατυπωμένες με ενδιαφέροντα τρόπο όπως: «ποια μπορεί να είναι η ιδιότητα των διαγωνίων που μας υποχρεώνει να ασχοληθούμε μαζί τους;». Ο τρόπος με τον οποίο εκφράζεται ως ερώτημα φαίνεται να λειτουργεί και να διεγείρει την περιέργεια των μαθητών και να διατηρεί ενεργή τη συμμετοχή τους στη συζήτηση.

Κατά το *3^{ο} κρίσιμο* συμβάν ο εκπαιδευτικός εξακολουθεί να μην προχωρά στην ταξινόμηση τετραπλεύρων (παραλληλογράμμων) ανάλογα με τις ιδιότητές τους. Αντί αυτού *τροποποιεί τη «δραστηριότητα»* προς τελείως διαφορετική κατεύθυνση, ζητώντας από τους μαθητές να βρουν τον πιο εύκολο τρόπο για να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο. Η κατασκευαστική διάσταση που δίνει στη «δραστηριότητα» *αυξάνει* τη *μαθηματική πρόκληση* καθώς με μοναδικό *εργαλείο* το *υποδεκάμετρο* οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τον ασφαλέστερο τρόπο με τον οποίο δημιουργείται ένα παραλληλόγραμμο μέσα από τις ιδιότητές του. Ο σχεδιασμός παραλλήλων χωρίς κατάλληλα εργαλεία δεν αποτελεί αξιόπιστο τρόπο που να εξασφαλίζει ότι οι «παράλληλες» δεν θα αποδειχθούν τελικά τεμνόμενες σε ένα απομακρυσμένο σημείο. Το παραπάνω ερώτημα αποτελεί πρόκληση για τους μαθητές οι οποίοι το αντιμετωπίζουν με πολύ ενδιαφέρον λέγοντας διάφορες γνώμες που στηρίζονται στις άτυπες μαθηματικές τους γνώσεις. Ο καθηγητής κατευθύνει τη συζήτηση εξακολουθώντας να έχει έντονα καθοδηγητικό ρόλο.

Μελετώντας συνολικά τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τη «δραστηριότητα» μέσα στη σχολική τάξη, παρατηρούμε πως οδηγεί σε ένα

περιβάλλον επικοινωνιακό με τους μαθητές. Παρά το γεγονός ότι έχει την *τάση να μην εκχωρεί τη «δραστηριότητα»* στους μαθητές υιοθετώντας ένα *μοντέλο διδασκαλίας* σαφώς *καθοδηγούμενο από τον ίδιο*, εκείνοι *εμπλέκονται στη διαδικασία* σε μεγάλο βαθμό. Σκέφτονται, υπολογίζουν, δίνουν απαντήσεις στα πλαίσια μιας *ελεγχόμενης διαδικασίας*. Η *εμπλοκή (student's involvement)* επιτυγχάνεται μέσα από ένα *διαδραστικό* μοντέλο ερωτήσεων και απαντήσεων όπου οι όλοι οι μαθητές σχεδόν, χωρίς εξαίρεση, μιλούν και λένε τη γνώμη τους χωρίς ενδοιασμούς. Η τάξη δεν χωρίζεται σε ομάδες μαθητών , αλλά έχει την συνοχή μιας μεγάλης ομάδας όπου ο καθηγητής κρατά τον πρωταγωνιστικό ρόλο.

Το γεγονός ότι αποφεύγει τη σχολική «δραστηριότητα» του βιβλίου (*1^{ο} κρίσιμο συμβάν*) που είναι δύσκολο να υλοποιηθεί χωρίς υποστηρικτικά εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης (πχ. λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) υποδεικνύει πως γνωρίζει τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές της ηλικίας αυτής να κάνουν νοερούς μετασχηματισμούς αντικειμένων. Αντικαθιστά το *πλαίσιο* την «δραστηριότητας» από *πραγματικό* σε *γεωμετρικό* περιορίζοντας το περιεχόμενο της σε ένα μοναδικό σχήμα το οποίο είναι οικείο στους μαθητές. Ωθεί έτσι τους μαθητές σε ανάκληση προηγούμενης γνώσης την οποία διατυπώνουν με ευχέρεια.

Με όμοιο τρόπο ενεργεί κατά την διαπραγμάτευση των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου (*2^{ο} κρίσιμο συμβάν*) και η δραστηριότητα της σχολικής τάξης μετασχηματίζεται προς τελείως διαφορετική κατεύθυνση από την αναμενόμενη. Οι ιδιότητες των παραλληλογράμμων που σχολικό βιβλίο αναφέρονται σε επόμενο μάθημα, αποτελούν θέμα προς συζήτηση. Και ενώ ο καθηγητής από τη μια πλευρά περιορίζει τις ενέργειες και το περιεχόμενο της προτεινόμενης «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου, από την άλλη επεκτείνει (*3^{ο} κρίσιμο συμβάν*) το περιεχόμενο της διαφοροποιώντας το. Με αυτή του την ενέργεια *αξιοποιεί* την *προηγούμενη γνώση* των μαθητών και τους ωθεί να κάνουν *συνδέσεις* του γεωμετρικού σχήματος *με τις ιδιότητές* τους ενώ συγχρόνως *αυξάνει* την *μαθηματική πρόκληση*, δίνοντας ενδιαφέροντα ερωτήματα προς επίλυση και πιέζοντας για επεξηγήσεις.

3.3 **Συνοπτική παρουσίαση της διαχείρισης των «δραστηριοτήτων»**

Παρατίθεται παρακάτω η σύνοψη των επιλογών και της διαχειριστικής τακτικής όπως προκύπτει συνολικά από τις δυο «δραστηριότητες» που εφάρμοσε ο κάθε εκπαιδευτικός στην τάξη του.

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Α΄

Η εκπαιδευτικός τροφοδοτεί με τις ενέργειές της ένα συστημικό μοντέλο αλληλεπίδρασης όπου οι μαθητές ενθαρρύνονται, αιτιολογούν τις ενέργειές τους και διαπραγματεύονται εναλλακτικές λύσεις με τους συμμαθητές τους. Αυτό υποδεικνύεται από το ότι εκχωρεί τις «δραστηριότητες» στους μαθητές, ακούει και αξιοποιεί τις σκέψεις τους, επιτρέπει την αυτενέργεια και ελαχιστοποιεί την καθοδήγηση. Αποτέλεσμα: η ανάπτυξη πλούσιας μαθηματικής δραστηριότητας από τους μαθητές (βλέπε 2^{ο} κρίσιμο συμβάν 1^{ης} «δραστηριότητας» και 1^{ο} , 2^{ο} κρίσιμο συμβάν 2^{ης} «δραστηριότητας»).

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο τρισδιάστατο μοντέλο του Leont'ev (1978, 1979,1981), όπου η ανθρώπινη δραστηριότητα αντιμετωπίζεται σαν ένα *σύστημα* όπου το *υποκείμενο* «ενεργεί» πάνω σε ένα *αντικείμενο* (με έναν επιθυμητό *στόχο*) *και* υποκινείται πάντα από *ένα κίνητρο*, βλέπουμε πως: οι μαθητές παρ' όλο που και οι δύο «δραστηριότητες» που επιλέχθηκαν από την εκπαιδευτικό δεν φαίνεται να έχουν κάποιο ορατά χρήσιμο στόχο και ωφέλεια (Purpose & Utility) για αυτούς, εμπλέκονται στη διαδικασία. Λειτουργούν δε, σύμφωνα με το κοινωνικό συμβόλαιο της τάξης που θέλει να προσπαθούν να δώσουν ικανοποιητικές απαντήσεις προς τον διδάσκοντα και να κερδίσουν με αυτό τον τρόπο την αποδοχή του και την αποδοχή των συμμαθητών τους.

Επιπλέον ο παράγοντας της πλαισιοθετημένης μάθησης (μάθησης με δραστηριότητες που αναδύονται μέσα από πραγματικές καταστάσεις - *Αρχή Φαινομενολογικής εξερεύνησης*, RME) παρ' όλο που φαινομενικά υποστηρίζεται από τα σχολικά εγχειρίδια μέσω εικόνων που αντιπροσωπεύουν πραγματικές μεν αλλά μη αυθεντικές καταστάσεις, δεν φαίνεται να είναι από μόνος του ικανός να επηρεάσει την ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα την οποία αναπτύσσουν οι μαθητές.[Η επιλογή μιας ρεαλιστικής πλην όμως κατευθυνόμενης «δραστηριότητας» του σχολικού εγχειριδίου οδηγεί σε τετριμμένη μαθηματική δραστηριότητα τους μαθητές. (βλέπε 1^{ο} κρίσιμο συμβάν 1^{ης} «δραστηριότητας»)].

Τα βασικά συστατικά της «δραστηριότητας» που φαίνεται να επηρεάζουν κατά βάση την εξέλιξη της μαθηματικής δραστηριότητας είναι *οι ενέργειες* της εκπαιδευτικού που σχετίζονται από τις επιλογές της, όχι ως προς το πλαίσιο (πραγματικό ή γεωμετρικό στην προκείμενη περίπτωση), αλλά από την τάση της να αφήνει τους μαθητές να αυτενεργούν ελαχιστοποιώντας την καθοδήγηση και να αξιοποιεί τη σκέψη των μαθητών της.

Επιπλέον η έμφαση και η χρήση των *διαμεσολαβητικών εργαλείων* (γεωμετρικά όργανα) αποτελεί βασική ενέργεια των υποκειμένων (μαθητών) πάνω στα μαθηματικά αντικείμενα και συμβάλλει στο πέρασμα από το γενικό και αφηρημένο, στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών.

Οι κανόνες (rules-μοντέλο Engestrom), που στην προκείμενη περίπτωση είναι οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος και η κάλυψη συγκεκριμένης ύλης δεν φαίνεται να επιτυγχάνονται όσον αφορά την πληθώρα των παραδειγμάτων που έχει το βιβλίο προς εμπέδωση.

Γενικότερα η εξέλιξη της «δραστηριότητας» σε τετριμμένη ή πλούσια μαθηματική δραστηριότητα εκ μέρους των μαθητών φαίνεται ότι κατά βάση εξαρτάται από το χειρισμό και την ευελιξία της εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας καθώς και από τις αλλαγές που κάνει όταν οι λανθασμένες επιλογές οδηγούν τη «δραστηριότητα» στην τετριμμένη μορφή της (απόκλιση από τους στόχους).

[Μετάβαση από το $1^{ο}$ στο $2^{ο}$ κρίσιμο συμβάν της $1^{ης}$ «δραστηριότητας» όπου ο μετασχηματισμός πραγματοποιείται με τη βοήθεια της σκέψης των μαθητών].

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Β΄

Ο τρόπος διδασκαλίας που υιοθετεί ο $2^{ος}$ εκπαιδευτικός (subject) σε γενικές γραμμές αποτυπώνει τη διάθεσή του να υπάρχει αλληλεπίδραση με τους μαθητές (object) μέσα στη σχολική τάξη (μοντέλο Engestrom,1987,1999,2002) με τη διαφορά ότι η συμμετοχή ενώ είναι υπαρκτή περιορίζεται σε μικρό αριθμό μαθητών και σε πολλά σημεία είναι αποσπασματική και *καθοδηγούμενη* σε μεγάλο βαθμό από τον καθηγητή.

Ο ρόλος των κινήτρων (Leont'ev, 1978) για την εμπλοκή των μαθητών δεν διακρίνεται ξεκάθαρα και θα μπορούσαμε να τα εντάξουμε στο τυπικό κοινωνικό συμβόλαιο της τάξης του τύπου «απαντώ για να αξιολογηθώ με καλό βαθμό από τον καθηγητή μου».

Ο καθηγητής φαίνεται να αποφεύγει όσες «δραστηριότητες» στο σχολικό βιβλίο βασίζονται σε «πραγματικό» πλαίσιο μετατρέποντας το άμεσα σε «γεωμετρικό». Από τις τρεις δραστηριότητες που καταγράφηκαν (εκ των οποίων μόνο οι δύο παρουσιάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία) ο εκπαιδευτικός μετέτρεψε τα πραγματικά πλαίσια των δυο από αυτές σε γεωμετρικά ενώ στην 3η που είχε γεωμετρικό πλαίσιο το διατήρησε. Από μόνη της αυτή η διαχειριστική επιλογή δεν έδωσε ως αποτέλεσμα κάποια αξιόπιστη ένδειξη ότι μπορεί να επηρέασε την εμπλοκή των μαθητών.

Ο τρόπος δε με τον οποίο ο καθηγητής υποστηρίζει την υλοποίηση της «δραστηριότητας» δεν είναι σαφώς καθορισμένος και εμφανίζει διακυμάνσεις από «δραστηριότητα» σε «δραστηριότητα» ως προς τον παράγοντα «ευαισθησία» προς τους μαθητές (*«Διδακτική Τριάδα», Potari και Jaworski, 2002).* Η τάση του εκπαιδευτικού *να μην εκχωρεί στους μαθητές* τις *δραστηριότητες* φαίνεται σε πολλά σημεία στις διδασκαλίες (βλέπε παράρτημα). Ενώ δείχνει την πρόθεση να εκχωρήσει τη «δραστηριότητα», δεν την αφήνει να εξελιχθεί κρατώντας τον έλεγχο προς την κατεύθυνση που εκείνος πιστεύει. Η *εκχώρηση* της «δραστηριότητας»(Brousseau, 1997) και η *αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών* (Doerr, 2006) φαίνεται να είναι ο καθοριστικός παράγοντας μετασχηματισμού που επηρεάζει τελικά την εξέλιξη της εμπλοκής των μαθητών σε πραγματική «*μαθηματική δραστηριότητα»*. Αυτό παρατηρείται κατ' αρχήν στη 1η διδασκαλία όπου ο εκπαιδευτικός όταν *αξιοποιεί* άμεσα *τις παρατηρήσεις μαθητών στο* 2ο και 3ο κρίσιμο συμβάν έχει ως αποτέλεσμα η «δραστηριότητα» να αρχίζει να μετασχηματίζεται προς πραγματική «μαθηματική δραστηριότητα» με ανατροφοδότηση με νέες ιδέες και κατευθύνσεις από την πλευρά των μαθητών. Αντίθετα, στο 3ο κρίσιμο συμβάν της 2ης διδασκαλίας *δεν καταφέρνει να ακούσει τη σκέψη των μαθητών του* χάνοντας την ευκαιρία να αξιοποιήσει τις απορίες των μαθητών για εννοιολογική εμβάθυνση και υψηλή μαθηματική εμπλοκή.

Επιπλέον, *οι ενέργειες* του εκπαιδευτικού που σχετίζονται με τις επιλογές και τη χρήση των *διαμεσολαβητικών εργαλείων* (Γεωμετρικά όργανα) αποτελεί βασικό παράγοντα που επηρεάζει τη δράση των υποκειμένων (μαθητών) και την εξέλιξη της «δραστηριότητας» όσον αφορά την κατανόηση και ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών.

[Η έλλειψη διαβήτη περιορίζει την δυνατότητα σύνδεσης από τους μαθητές της συμμετρίας ως προς σημείο με την *διαδικασία (ενέργεια)* της στροφής κατά 180ο]

Σε γενικές γραμμές η «δραστηριότητα» *μετασχηματίζεται* από τις επιλογές και τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού που φαίνεται να οριοθετούνται από το τι ο ίδιος θεωρεί ως *Μαθηματική δραστηριότητα.*

Σύνοψη για τον Εκπαιδευτικό Γ΄

Μελετώντας και αναλύοντας συνολικά τη μέθοδο διαχείρισης του καθηγητή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει ως βασικό άξονα τη συμμετοχή όσο γίνεται περισσότερων μαθητών. Επιτυγχάνει δε αυτή την *εμπλοκή (student's involvement)* υιοθετώντας ένα μόνιμα *διαδραστικό* μοντέλο ερωτήσεων–απαντήσεων όπου όλοι σχεδόν μιλούν και εκφράζουν γνώμη (Engestrom,1987,1999,2002). Οι κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης παρ' όλο που οι μαθητές απαντούν ατομικά (χωρίς ομάδες συνεργασίας), δείχνει να έχει τη δομή μιας μεγάλης ομάδας που την αποτελεί ολόκληρη η τάξη με κέντρο τον καθηγητή. Ο εκπαιδευτικός απευθύνει ερωτήσεις προς όλους ανεξαιρέτως, χωρίς να σηκώνουν απαραίτητα το χέρι για να εκφράσουν κάποια άποψη, γεγονός που κρατά τους μαθητές σε διαρκή εγρήγορση.

Γενικότερα, ο εκπαιδευτικός επιλέγει να χρησιμοποιήσει μια κλασική μορφή διδασκαλίας όπου ως *εργαλείο διαμεσολάβησης* της μάθησης χρησιμοποιείται *ο πίνακας* όπου ο ίδιος σχεδιάζει τα προς διαχείριση σχήματα.

Οι επιλογές του όσον αφορά το «πλαίσιο» των «δραστηριοτήτων» δείχνουν μια τάση στη «γεωμετρική» του έκφανση. [Συγκεκριμένα από τις 3 διδασκαλίες που αναλύθηκαν συνολικά για τον εκπαιδευτικό - εκ των οποίων οι δύο χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα Διπλωματική Εργασία - ο εκπαιδευτικός επέλεξε να διατηρήσει το προϋπάρχον γεωμετρικό πλαίσιο των δύο ($2^{ο}$ κρίσιμο συμβάν $1^{ης}$ «δραστηριότητας), ενώ μετέτρεψε σε «γεωμετρικό» το «πραγματικό» πλαίσιο της άλλης «δραστηριότητας του βιβλίου ($2^{η}$ «δραστηριότητα)]. Από την μελέτη των μετασχηματισμών του πλαισίου δεν φάνηκε κάποια ισχυρή ένδειξη ότι οι μαθητές επηρεάζονται τελικά από το είδος του.

Και ενώ οι «δραστηριότητες» που επιλέγει να υλοποιήσει είναι πιο «*ανοιχτές*» σε σχέση με αυτές του βιβλίου καθώς αφαιρεί την «*καθοδήγηση*» που είναι φανερή στο σχολικό εγχειρίδιο θέλοντας να βάλει τους μαθητές σε μια διαδικασία «*ανακάλυψης*» ($2^{ο}$ κρίσιμο συμβάν $1^{ης}$ «δραστηριότητας) και «*διερεύνησης*» ($1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν $1^{ης}$ «δραστηριότητας»), η διάθεσή του αυτή έρχεται σε αντίφαση με την διαχειριστική

πρακτική που χρησιμοποιεί καθώς ο ίδιος αρκετές φορές καθοδηγεί με τον τρόπο του τους μαθητές προς συγκεκριμένες απαντήσεις (Voigt, 1994).

Η τάση του να *αυξάνει «την μαθηματική πρόκληση»* σε διάφορα μέρη της δραστηριότητας και να *επεκτείνει το «μαθηματικό περιεχόμενο»* της κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ($1^{ο}$ και $3^{ο}$ κρίσιμο συμβάν, $1^{ης}$ «δραστηριότητας» και $3^{ο}$ κρίσιμο συμβάν, $2^{ης}$ «δραστηριότητας») φαίνεται να είναι πάγια τακτική του (βλέπε παράρτημα). Οι μαθητές δείχνουν να ανταποκρίνονται και να μπαίνουν στη διαδικασία να σκεφτούν και να απαντήσουν χρησιμοποιώντας κάποιες φορές δυναμικά τη σκέψη τους.

Επιπλέον η επιμονή του εκπαιδευτικού στη *σωστή χρήση «μαθηματικών εκφράσεων»* δείχνει το τι θεωρεί ο ίδιος ως σημαντικό στη διδασκαλία του και το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτές τις μαθηματικές εκφράσεις ακολουθώντας το παράδειγμα του καθηγητή, παραπέμπει σε επιτυχή προσέγγιση από την πλευρά του. Η *εν μέρει εκχώρηση της δραστηριότητας* προς τους μαθητές στο $4^{ο}$ κρίσιμο συμβάν της $1^{ης}$ «δραστηριότητας» υποδεικνύει την επιλογή του εκπαιδευτικού να διατηρεί ο ίδιος τον έλεγχο της δραστηριότητας και του συντονισμού του μαθήματος.

Ο ρόλος των κινήτρων (Leont'ev, 1978) για την εμπλοκή των μαθητών φαίνεται να αναδύεται μέσα από τις εκφράσεις που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία οι οποίες φαίνεται να *κινούν το ενδιαφέρον* των μαθητών και να συμμετέχουν στην διαδικασία Τι είναι εκείνο που κάνει ένα τετράπλευρο να είναι «καλό τετράπλευρο»; Αφήνεται ως αιωρούμενο ερώτημα ανοιχτό προς απάντηση. Οι μαθητές δραστηριοποιούνται και απαντούν ($1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν, $2^{ης}$ «δραστηριότη-τας»).

Μελετώντας συνολικά τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τη «δραστηριότητα» μέσα στη σχολική τάξη, παρατηρούμε πως οδηγεί σε ένα περιβάλλον επικοινωνιακό με τους μαθητές. Παρά το γεγονός ότι έχει την *τάση να μην εκχωρεί τη «δραστηριότητα»* στους μαθητές υιοθετώντας ένα *μοντέλο διδα-σκαλίας* σαφώς *καθοδηγούμενο,* εκείνοι *εμπλέκονται στη διαδικασία* σε μεγάλο βαθμό. Σκέφτονται, υπολογίζουν, δίνουν απαντήσεις στα πλαίσια μιας *ελεγχόμενης διαδικασίας.* Η *εμπλοκή (student's involvement)* αυτή επιτυγχάνεται μέσα από ένα *διαδραστικό* μοντέλο ερωτήσεων και απαντήσεων όπου οι όλοι οι μαθητές σχεδόν, χωρίς εξαίρεση, μιλούν και λένε τη γνώμη τους χωρίς ενδοιασμούς. Έντονη τάση του εκπαιδευτικού να *αυξάνει* την *μαθηματική πρόκληση,* δίνοντας ενδιαφέροντα ερωτήματα προς επίλυση και πιέζοντας για επεξηγήσεις.

3.4 Συζήτηση – Συμπεράσματα

Οι παράγοντες που δρουν μέσα σε μια σχολική τάξη αποτελούν ένα σύνθετο σύμπλεγμα ενεργειών, συμπεριφορών και προσδοκιών που δύσκολα μπορούν να εξεταστούν σε όλο το φάσμα τους. Η προσπάθεια ώστε να υπάρξει όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστη αντιπροσώπευση της πραγματικότητας μέσα από τα ερευνητικά στοιχεία δεν είναι πάντα επιτυχής καθώς πίσω από κάθε ορατή κατάσταση υπάρχουν παράμετροι που δεν γίνονται εύκολα αντιληπτές. Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε να μελετηθεί μέσα από την διευρυμένη προοπτική της Θεωρίας της Δραστηριότητας η επίδραση των διαχειριστικών επιλογών του εκπαιδευτικού (μετασχηματισμοί) στην εμπλοκή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία με έμφαση στην «Μαθηματική Δραστηριότητα». Ειδικότερα, είδαμε πως οι *μετασχηματισμοί* που επιχειρήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς ήταν ως προς το *πλαίσιο-αυθεντικότητα* των «δραστηριοτήτων» του σχολικού βιβλίου, την *καθοδήγηση*, τα *εργαλεία* και τις *ενέργειες*. *Επιπλέον*, παράγοντες όπως τα *κίνητρα και* η *αξιοποίηση της σκέψης* των μαθητών έδειξαν *να* επηρεάζουν τη διαδικασία της μάθησης.

Συγκεκριμένα οι εκπαιδευτικοί που πήραν μέρος στην έρευνα προσανατολίστηκαν κυρίως στην μετατροπή του δοθέντος *«πραγματικού»* πλαισίου του βιβλίου σε *«γεωμετρικό»*. Παρατηρήθηκε μόνον μία περίπτωση της εκπαιδευτικού Α΄ που στην 1η «δραστηριότητα» ($1^{ο}$ κρίσιμο συμβάν) διατήρησε το πραγματικό πλαίσιο του βιβλίου. Ως αποτέλεσμα αυτής της επιλογής φάνηκε να οδηγείται η Μαθηματική Δραστηριότητα σε τετριμμένη μορφή, στα πλαίσια άμεσων απαντήσεων από τους μαθητές ώστε να ικανοποιηθεί η εκπαιδευτικός. Παρατηρώντας όμως πιο προσεκτικά, η διατήρηση του «πραγματικού» πλαισίου συνδυάστηκε με μια μορφή καθοδήγησης που διέφυγε της προσοχής της εκπαιδευτικού. Γιατί ενώ η εκπαιδευτικός αφαίρεσε μεν το καθοδηγούμενο τμήμα της εικόνας του βιβλίου του τύπου «Σκεφτόμαστε – Μαθαίνουμε», διατήρησε τον τίτλο του μαθήματος γεγονός που οδήγησε τους μαθητές να απαντούν χωρίς να μπουν στη διαδικασία να σκεφτούν. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι στις περιπτώσεις που το πλαίσιο των «δραστηριοτήτων» του βιβλίου ήταν ήδη «γεωμετρικό» και οι τρεις καθηγητές το διατήρησαν. Η τάση αυτή των εκπαιδευτικών ως προς την εφαρμογή «δραστηριοτήτων» με «γεω-μετρικού» τύπου πλαίσιο, λαμβάνοντας υπ' όψη και τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται αυτές στο σχολικό βιβλίο (βλέπε 3.1) όπου είναι μεν πραγματικό

αλλά μη αυθεντικό και καθοδηγούμενο, υποδεικνύει πως οι παράγοντες που τους ώθησαν στη συγκεκριμένη επιλογή δεν έχουν να κάνουν με το είδος του πλαισίου. Παρατηρώντας πιο προσεκτικά είδαμε ότι και οι τρεις εκπαιδευτικοί όπου τροποποίησαν το πλαίσιο (ή ακόμα κι όταν το διατήρησαν) επέλεξαν να μειώσουν ταυτόχρονα το βαθμό «καθοδήγησης» της ίδιας της «δραστηριότητας», γεγονός που δείχνει πώς οι παράγοντες που υπεισέρχονται είναι στενά συνδεδεμένοι μεταξύ τους και δεν επιτρέπουν το διαχωρισμό του «πλαισίου» από την «καθοδήγηση». Επιπρόσθετα, οι τροποποιημένες «δραστηριότητες» σε «γεωμετρική» μορφή δεν φάνηκε να αποτελούν πρόβλημα για τους μαθητές καθώς έδρασαν και λειτούργησαν στην αντιμετώπιση χωρικών και κατασκευαστικών διαδικασιών με ευχέρεια. Τα παραπάνω συνηγορούν υπέρ της άποψης πως ο μετασχηματισμός του «πλαισίου» μέσα από το οποίο αναδύεται η «δραστηριότητα» από μόνος του δεν είναι ικανός να μας οδηγήσει σε αξιόπιστα συμπεράσματα για τον τρόπο που εμπλέκονται οι μαθητές στην Μαθηματική διαδικασία.

Η *καθοδήγηση* ως παράγοντας παρατηρήθηκε σε δύο πεδία. Το ένα, όπως προαναφέρθηκε, α) αφορά την ίδια τη «δραστηριότητα» και τον τρόπο που αυτή δίνεται στο σχολικό εγχειρίδιο, γεγονός που στη μελέτη μας θεωρείται δεδομένο σε όλες τις «δραστηριότητες» και στο πεδίο β) που αφορά τις διαχειριστικές ενέργειες του εκπαιδευτικού. Όπως είδαμε στα αποτελέσματα και οι τρεις καθηγητές επιχείρησαν να μειώσουν το βαθμό καθοδήγησης που εξ’αρχής είχαν οι «δραστηριότητες» τροποποιώντας αυτές με τρόπους όπως: παράληψη των έτοιμων πλαισίων του «Σκεφτόμαστε» ή «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε» (βλέπε 3.1) ή δίνοντας φωτοτυπίες με παρεμφερείς «δραστηριότητες», είτε σχεδιάζοντας στον πίνακα. Σημειώνουμε δε ότι κανείς από τους εκπαιδευτικούς δεν χρησιμοποίησε τις εικόνες του βιβλίου για την υλοποίηση της διδασκαλίας του. [Η καθοδήγηση που εξ αρχής εμπεριείχαν οι «δραστηριότητες» (1^{ο} κρίσιμο συμβάν 1^{ης} «δραστηριότητας»– Εκπαιδευτικός Α΄) έδειξε ότι ακυρώνει την πιθανή εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματική δραστηριότητα].

Από την άλλη πλευρά η καθοδήγηση από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό έδειξε να λειτουργεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Συγκεκριμένα παρατηρήθηκαν διαχειριστικές επιλογές όπου ο εκπαιδευτικός απλά συντόνιζε τη διαδικασία εκχωρώντας μεγάλο μέρος της «δραστηριότητας» στους μαθητές και επιλογές όπου η καθοδήγηση χωρίς να είναι ακριβώς «βήμα προς βήμα» δίνει την εντύπωση πως

περιορίζει τους μαθητές σε μια ελεγχόμενη διαδικασία όπου η «εκχώρηση» φαίνεται να έχει έναν μάλλον τυπικό ρόλο. Δεν παρατηρήθηκε περίπτωση κάποιος από τους εκπαιδευτικούς να παρουσιάζει έννοιες χωρίς τη συμμετοχή των μαθητών ή να χρησιμοποιεί βήμα προς βήμα καθοδήγηση γεγονός που ως αναμενόμενο αποτέλεσμα έχει συνήθως την ακύρωση της πρωτοβουλίας των μαθητών (Kaldrimidou, Sakonidis, και Tzekaki, 2003). Επίσης δεν παρατηρήθηκε η περίπτωση κάποιος από τους εκπαιδευτικούς να εκχωρήσει πλήρως τη «δραστηριότητα» χωρίς να κρατήσει ένα ελεγχόμενα καθοδηγούμενο διαχειριστικό μοντέλο. Εκείνο που θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ως συμπέρασμα μέσα από τη μελέτη των αποτελεσμάτων (των κρισίμων συμβάντων) είναι πώς όταν ο εκπαιδευτικός μειώνει το βαθμό καθοδήγησης και συγχρόνως εκχωρεί τη «δραστηριότητα» (Brousseau, 1997) στους μαθητές, η διαδικασία έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να οδηγήσει σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Ο μετασχηματισμός που παρατηρήθηκε ως προς τα *εργαλεία* και τις *ενέργειες*, επικεντρώθηκε κυρίως στην αντικατάσταση της *παρατήρησης* και της κατά βάση «*διαισθητικής*» προσέγγισης που προτείνεται από το βιβλίο, με τη χρήση *γεωμετρικών οργάνων* σε συνδυασμό με *ώθηση στη διατύπωση συλλογισμών* μέσα από χρήση προηγούμενης γνώσης των μαθητών. Συγκεκριμένα, η διαισθητική προσέγγιση υιοθετήθηκε σε αρχικό στάδιο από τους εκπαιδευτικούς Α΄ και Β΄ ενώ στη συνέχεια η «δραστηριότητα» μετασχηματίσθηκε με γεωμετρικές μεθόδους και συλλογισμούς. Ο εκπαιδευτικός Γ΄ χρησιμοποίησε κυρίως την προηγούμενη γνώση των μαθητών για το μετασχηματισμό της «δραστηριότητας». Τα αποτελέσματα έδωσαν ως ένδειξη πως όταν η χρήση γεωμετρικών εργαλείων εμφανίζεται ως λογική συνέχεια της προσέγγισης μιας έννοιας αφού έχει ήδη προηγηθεί η «διαισθητική» διεργασία της από τους ίδιους τους μαθητές οι πιθανότητες να εμπλακούν σε πλούσια Μαθηματική δραστηριότητα είναι περισσότερες. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει πως οι συνδέσεις που κάνουν οι μαθητές με τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων είναι περισσότερο εφικτές καθώς η μαθηματική διαδικασία εξελίσσεται με φυσικό τρόπο. (Σύνδεση γεωμετρικού σχήματος και αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας).

Ο μετασχηματισμός της «δραστηριότητας με *χρήση προηγούμενων γνώσεων* των μαθητών και λογικών συλλογισμών που στοχεύουν στον προσανατολισμό στην *αποδεικτική διαδικασία* φάνηκε να λειτουργούν θετικά ως προς την εκδήλωση μαθηματικού τρόπου σκέψης από τους μαθητές (βλέπε εκπαιδευτικός Γ΄). Επιπλέον η μύηση των μαθητών στη χρήση «μαθηματικών εκφράσεων» από μικρή ηλικία δεν

δείχνει να είναι απαγορευτική καθώς η «μαθηματική γλώσσα» αποτελεί ένα εργαλείο νοηματοδότησης που αντιπροσωπεύει την ίδια τη φύση των «Μαθηματικών».

Ο ρόλος των *κινήτρων* φάνηκε να αναδύεται μέσα από παράγοντες που σχετίζονται με το «κοινωνικό συμβόλαιο» της τάξης. Οι μαθητές εμπλέκονται στη διαδικασία της «δραστηριότητας» για λόγους που έχουν να κάνουν με την διάθεση να δώσουν ικανοποιητικές απαντήσεις προς το διδάσκοντα και να τύχουν καλής αξιολόγησης. Η *αυθεντικότητα* του πλαισίου που θα μπορούσε να συσχετιστεί με τις έννοιες του *σκοπού* και *ωφέλειας* (Ainley, 2006) από τη στιγμή που δεν υφίσταται στις «δραστηριότητες» του σχολικού βιβλίου και δεν επιδιώχθηκε από κανέναν από τους τρεις εκπαιδευτικούς στις διδακτικές επιλογές τους δεν μπορεί να γίνει αντικείμενο μελέτης στην παρούσα εργασία. Αντίθετα, η επίδραση της *μαθηματικής πρόκλησης* στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν οι μαθητές δείχνει να είναι μεγάλη καθώς παρατηρήθηκε σε πολλά επεισόδια πώς αποτελεί παράγοντα ώθησης των μαθητών στην ανάπτυξη μαθηματικών συλλογισμών, συνδυαστικής σκέψης, δημιουργίας συνδέσεων και γενικότερα στην εμπλοκή των μαθητών σε πλούσια Μαθηματική Δραστηριότητα μέσα στη σχολική τάξη.

Με τον ίδιο τρόπο λειτούργησε και ο παράγοντας της *αξιοποίησης της σκέψης* των μαθητών (Doerr, 2006) σχεδόν σε όλες τις «δραστηριότητες» που υλοποιήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς . Συγκεκριμένα, όπου ο εκπαιδευτικός αντιμετώπισε τη σκέψη των μαθητών του ακούγοντας τη και όχι παραβλέποντάς τη χάριν διλημμάτων έλλειψης χρόνου, η «δραστηριότητα» εξελίχθηκε σε ουσιαστική Μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών. Αντίθετα, η μη αξιοποίηση αυτής ($3^{ο}$ κρίσιμο, $2^{ης}$ δραστηριότητας, εκπαιδευτικού Β΄) οδήγησε σε χαμένες ευκαιρίες κατά το μετασχηματισμό της «δραστηριότητας». (Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στον εκπαιδευτικό Β΄ εμφανίστηκε το φαινόμενο της διαφοροποίησης των διδακτικών επιλογών από τη μια διδασκαλία στην άλλη. Συγκεκριμένα είδαμε πως ενώ στη μια «δραστηριότητα» αξιοποίησε τη σκέψη των μαθητών του με αποτέλεσμα η «δραστηριότητα» να εξελιχθεί προς όφελος των μαθητών, στη δεύτερη επέλεξε να μην το κάνει και κατά συνέπεια να χαθεί η ευκαιρία για ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα).

Τα παραπάνω συμπεράσματα αποτελούν μια μικρή ένδειξη του πώς οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τις «δραστηριότητες» και πώς αυτή τους η διαχείριση αντανακλά στους μαθητές. Ακολουθώντας τα επίπεδα της Δραστηριότητας μέσα από τη θεωρία

της Δραστηριότητας του Leont'ev και την επέκταση αυτού μέσα από το θεωρητικό μοντέλο του Engestrom, διαπιστώσαμε την αλληλεξάρτηση που έχουν μεταξύ τους οι παράγοντες που αναφέρονται σ' αυτά τα μοντέλα. Δεν είναι δυνατόν, βέβαια, να ισχυριστεί κανείς ότι π.χ. μόνον τα κίνητρα ή μόνον το πλαίσιο από το οποίο αναδύεται μια «δραστηριότητα» είναι ικανά να κάνουν την ενασχόληση των μαθητών με αυτή σε βαθμό ώστε να οδηγηθούν σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Εκείνο που μπορούμε όμως να ισχυριστούμε είναι πως ο ρόλος των διαχειριστικών επιλογών του εκπαιδευτικού είναι πολύ σημαντικός στην εκπαιδευτική διαδικασία τόσο ως προς την εμπλοκή των μαθητών όσο και ως προς την ποιότητα αυτής της εμπλοκής. Γι αυτό θα πρέπει ως εκπαιδευτικοί να μην επαναπαυόμαστε σε μεθόδους που θεωρητικά προτείνονται είτε μέσα από αναλυτικά προγράμματα είτε από προηγούμενα διδακτικά μοντέλα, αλλά να αναζητάμε διαρκώς τρόπους που να μπορούν να εναρμονιστούν με τα δεδομένα της σημερινής σχολικής τάξης. Η αξιοποίηση της σκέψης των μαθητών ίσως να αποτελεί έναν ενδεικτικό τρόπο επικοινωνίας αλλά και διαπραγμάτευσης των μαθηματικών νοημάτων μέσα στη σχολική τάξη που φαίνεται να είναι ικανός να ωθήσει τους μαθητές στο μαθηματικό τρόπο σκέψης. Η διάθεση του εκπαιδευτικού να ακούει, να συζητά και να εκχωρεί «δραστηριότητες» αποτελεί άλλωστε ένδειξη εμπιστοσύνης και αναγνώρισης των δυνατοτήτων που έχουν οι μαθητές του.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξενόγλωσση

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A., (2006). *Connecting engagement and focus in pedagogic task design*. British Educational Research Journal, Vol. 32, No.1, pp. 23–38.

Boaler, J., (2002). *Exploring the nature of mathematical activity: using theory, research and 'working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing*", Educational Studies in Mathematics 51: 3–21, 2002.

Brousseau, G., (1997). *Theory of Didactical Situations. Dordrecht/Boston/London: Hluwer Academia Publisher*.

Bruner, J. (1960/1977). The process of education. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. S., (1966). *Towards a theory of instruction*, New York: Norton

Burton, L., (1999). *The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics?*. Educational Studies in Mathematics 37, 121–143.

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1990). *Classrooms as learning environments for teachers and researchers.* In R. Davis, C. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Research Monograph no. 4. (pp. 125–146). Reston, VA: NCTM

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο, Οκτώβριος 2008.

Clement, J. (2000). *Analysis of clinical interviews: foundations and model viability*. In: A. E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research data design in mathematics and science education* (pp. 547–589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, P., J., & Hersh, R., (1980). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία, 1991.

Davydov, V., V., (1988). *Problems of Developmental Teaching* .Soviet Education, 30 (8-9), 6-37 & 3-83.

Doerr, H., M., (2006). *Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking.* Educational Studies in Mathematics 62: 3–24 DOI: 10.1007/s10649-006-4437-9 C_ Springer 2006

Duval, R., (1998). *Geometry from a Cognitive Point of View*, In C. Mammana & V. Villani (eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.

Engeström, Y., (1987). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Engeström, Y., (1999). *Activity Theory and Individual and Social Transformation*. In Y., Engestrom, R. Miettinen & R-L. Punamaki, (Eds.). Perspectives on Activity Theory (pp. 19-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Engeström, Y., Engeström, R., & Sunito, A. (2002). *Can a school community learn to master its own future? An Activity theoretical study of expansive learning among middle school teachers*. In G. Wells & G. Claxton (Eds.). *Learning for life in the 21st century: sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 211-224). London: Blackwell.

Engeström, Y., (1998). *Reorganising the motivational sphere of classroom culture: An activity-theoretical analysis of planning in a teacher team*. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 76–103). Cambridge: Cambridge University Press.

Even R. & Schwarz B., (2003). *Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education*. Educational Studies in Mathematics v. 54: 283-313, 2003.

Fischbein, E., (1993). *The Theory of Figural Concepts*, Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139-162

Freudenthal, H., (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing

Company.

Freudenthal, H., (1981). *Major problems of mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 12, 133-150.

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H., (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Henningsen, M., Stein, M.,K., (1997). *Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, No. 5, 524–549.

Henry, M., (1991). *Σημειώσεις του μαθήματος «Επιστημολογία των Μαθηματικών»* του Μεταπτυχιακού τμήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών, (χειμερινό εξάμηνο). Αθήνα, 2009.

Hole, S., & McEntee, G. H. (1999). Reflection is at the heart of practice. Educational Leadership, 56, 34–37.

Jaworski, B., & Potari, D., (2009). *Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development . Educational Studies in Mathematics.* 72:219–236 DOI 10.1007/s10649-009-9190-4

Jaworski, B., & Goodchild, S. (2006). *Inquiry community in an activity theory frame*. In J. Navotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Sociocultural complexity in mathematics teaching* Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 353–360). Prague: Charles University.

Kaldrimidou, L., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (2003). *Teachers' intervention in students' mathematics work: A classification.* In M.A. Mariotti (Ed.), Proceedings of third conference of European research in mathematics education, thematic group 12. Bellaria: CERME.

Kiczek, R. D. (2000). *Tracing the development of probabilistic thinking: profiles from a longitudinal study*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick.

Kilpatrick., J., (1992). *A History of Research in Mathematics Education*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 3-38. N.Y.: MacMillan Publisher Co.

Kilpatrick, J., Swafford, J., and Findell, B., (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, National Academy Press, Washington, DC. Educational Studies in Mathematics 47: 101–116, 2001.

Kilpatrick., J., (2001) . *Understanding The Mathematical Literacy: The Contribution Of Research.* Educational Studies in Mathematics 47: 101–116.

Leont'ev, A., N., (1979). *The problem of activity in psychology*. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology* (pp. 37–71). New York: M. E. Sharpe.

Leont'ev, A., N., (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Leont'ev, A., N., (1981). *Problems of the Development of the Mind*. Moscow: Progress.

Lerman, S., (2006). Socio-cultural Research in PME. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics education*, 347-366. Sense Publishers.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996a). *The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study.* Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 194–214.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996b). *Young children invent methods of proof: the gang of four*. In: P. Nesher, L. P. Steffe, P. Cobb, B. Greer, & J. Golden (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431–447). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (2000). *From patterns to theories: conditions for conceptual change.* Journal of Mathematical Behavior, 19(2), 247–271.

Maher, C. A. (2002). *How students structure their own investigations and educate us: what we've learned from a fourteen year study*. In: A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Sixth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31–46). Norwich, UK: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Martin, L. C. (1999). *The nature of the folding back phenomenon within the Pirie–Kieren theory for the growth of mathematical understanding and the associated implications for teachers and learners of mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, University of Oxford, Oxford, UK.

National Council for Teachers of Mathematics (NCTM): 2000, Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Virginia.

Noss, R., Healy, L. and Hoyles, C.(1997), *The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic*. Educational Studies in Mathematics 33, 203–233.

Potari, D., & Jaworski, B., (2002). *Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis*. Journal of Mathematics Teacher Education 5: 351–380, 2002.

Powell, A., B., Francisco, J.,M., & Maher, C.,A., (2003). *An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data*. Journal of Mathematical Behavior 22 405–435

RAND Mathematics Study Panel: 2002, October, Mathematical Proficiency for all Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education(DRU-2773-OERI), RAND Education and Science and Technology Policy Institute, Arlington, VA.

Smith, M.,S., & Stein, M.,K., (1998). *Selecting and creating Mathematical Tasks: From research to Practice*. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(5), 344–350.

Streefland, L., (1993). *The Design of a Mathematical Course. A theoretical reflection*. Educational Studies in Mathematics, 25, 109-135

Stein, M., K., Lane, S., (1996). *Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An analysis of The relationship between teaching and Learning in a reform Mathematics project.* Educational Research & Evaluation, vol 2, No I pp.50-80.

Stein, M.,K., Grover, B., W., & Henningsen, M., (1996). *Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms*. American Educational Research Journal Summer Vol.33, No. 2, pp. 455-488.

Tall, D., (1994). *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics*, Plenary presentation, CIEAM, Toulouse, France

Tall, D. O. et al. , (2000). *What is the object of the encapsulation process*? Journal of Mathematical Behavior, 18(2), 1-19.

Tirosh, D., (1999). *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with Understanding*. Educational Studies in Mathematics 38(1-3), 1–9.

Treffers, A. (1993). *Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics, 25 (1/2), 89-108

Van Oers, B. (2001). *Educational forms of initiation in mathematical culture*. Educational Studies in Mathematics, 46, 59–85. doi:10.1023/A:1014031507535.

Vergnaud, G., (1996). *The Theory of Conceptual Fields*. In L., Steffe & P., Nesher (Eds.), Theories of Mathematical Learning, 219-239. Mahwah, N.J.: Lawrence Elbraum.

Voigt, J., (1994). *Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics*. Educational Studies in Mathematics 26: 275-298, 1994.

Vygotsky, L., (1934). *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα: Γνώση, 1972.

Zaslavsky, O., (2005). *Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics*. "Educational Studies in Mathematics , 60: 297–321 DOI: 10.1007/s10649-005-0606-5.

Ελληνική

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ. *Βιβλίο εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ. *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., Φερεντίνος, Σ. *Βιβλίο εκπαιδευτικού Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Βλάμος, Π., Δρούτσας ,Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. *Σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Βλάμος, Π., Δρούτσας ,Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. *Βιβλίο εκπαιδευτικού Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου* του Οργανισμού Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων - Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (Αθήνα, 2007).

Δημητριάδου Ε., Θωμαΐδης Ι., Οικονόμου Π., και Σταφυλίδου Μ. (2009). "*Η εισαγωγή των νέων βιβλίων Μαθηματικών στο Γυμνάσιο" – Από την οπτική των εκπαιδευτικών που τα δίδαξαν το σχολικό έτος 2007-2008* . Εκδόσεις Ζυγός .

Τζεκάκη, Μ., (2007) . *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα.* Αθήνα 2007. Εκδόσεις: Gutenberg (Παιδαγωγική Σειρά).

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Αναφορικά με το Παράρτημα

Στις επόμενες σελίδες που αποτελούν το Παράρτημα αυτής της Διπλωματικής Εργασίας, παρατίθεται ενδεικτικά 1 από τις 6 διδασκαλίες, ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να παρακολουθήσει το συνολικό τρόπο καταγραφής και μελέτης των «δραστηριοτήτων» που πραγματοποίησαν οι τρεις εκπαιδευτικοί στις τάξεις τους.
(Δεν ήταν δυνατόν να παρατεθούν και οι 6 λόγω του μεγάλου όγκου τους).

Συγκεκριμένα στο Παράρτημα 1 παρατίθεται, καταγεγραμμένη πλήρως, η διδασκαλία που πραγματοποίησε ο εκπαιδευτικός Β΄ υλοποιώντας τη «δραστηριότητα» «Συμμετρία ως προς σημείο».

Στο Παράρτημα 2 παρατίθενται όλα τα κρίσιμα συμβάντα ανά εκπαιδευτικό και ανά «δραστηριότητα». Κάτω από κάθε «συμβάν» γίνεται περιληπτική μελέτη του τρόπου που ο κάθε εκπαιδευτικός χειρίστηκε τις «δραστηριότητες», ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να παρακολουθήσει τον τρόπο με τον οποίο προέκυψαν τα αποτελέσματα της έρευνας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ-1

Ακολουθεί η καταγραφή (απομαγνητοφώνηση) ολόκληρης της ωριαίας διδασκαλίας που υλοποίησε ο εκπαιδευτικός Β΄ που αφορά τη «δραστηριότητα» του μαθήματος «Συμμετρία ως προς σημείο». Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο έγινε η καταγραφή και των 6 διδασκαλιών που πραγματοποίησαν οι τρεις εκπαιδευτικοί στις τάξεις τους.

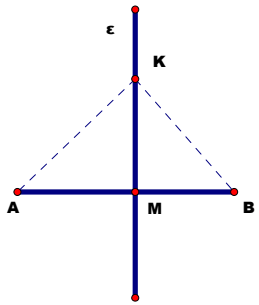
Εκπαιδευτικός Β΄

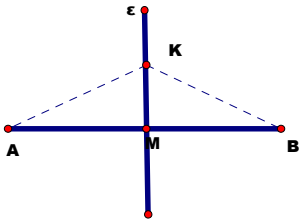
Διδασκαλία: **Στην Α΄ τάξη Γυμνασίου (Γεωμετρία)**
Μαθηματικό Αντικείμενο: **«Η έννοια της Συμμετρίας ως προς σημείο»**

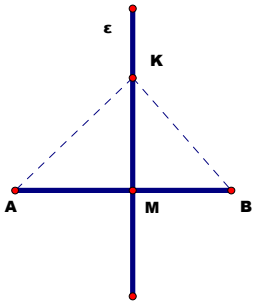
Τρίτη 5 Μαΐου 2009

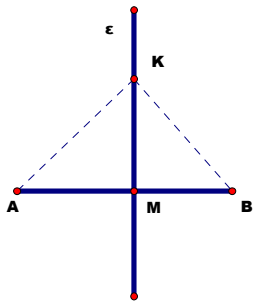
Μέρη	**Εκπαιδευτικός**	**Μαθητές**	**Σχήματα**	**Εξωγλωσσικές Δράσεις**	**Χρόνος**	**Παρατηρήσεις**
1.	Είχαμε πει στο προηγούμενο μάθημα για τη μεσοκάθετο και κάναμε μερικές ασκήσεις.				0:01-3:20	
2.		Όχι δεν κάναμε.				Επικρατεί μια γενική σύγχυση για αρκετή ώρα.
3.	Για να συνεννοηθού-με. Γι αυτό θα επανα-λάβουμε τι είναι η μεσοκάθετος, πώς τη βρίσκουμε και θα				3:25-4:13	

	πούμε τη συμμετρία ως προς σημείο , ως προς κέντρο συμμετρίας . Και την τελευταία ώρα θα σας πω να είστε έτοιμοι για το τι θα κάνουμε τις επόμενες μέρες.					
Α. Ανακεφαλαίωση προηγουμένων εννοιών - Επανάληψη (Μεσοκαθέτου-Συμμετρίας ως προς άξονα) (4:58- 18:48)						
4. 5. 6.	Για να θυμηθούμε λίγο τη μεσοκάθετο. Για να μου θυμίσει κάποιος τι είναι η μεσοκαθετος. Εντάξει δεν χρειάζεται όλο αυτό. Η κάθετη στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος. Για έλα φτιάξε μια	 Μ1:Μεσοκάθετος είναι η κάθετη ευθεία που περνάει από το μέσο ενός ευθυ-γράμμου τμήμα-τος και το χωρίζει σε δυο ίσα μέρη.(Γιώργος)			4:58 5:11 5:20	

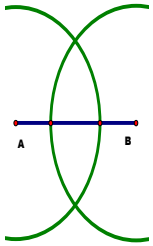
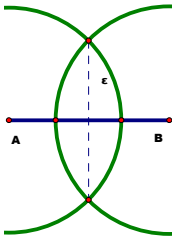
7.	μεσοκάθετο.			Ο μαθητής έρχεται στον πίνακα. (χρησιμοποιεί υποδεκάμετρο). Μετρά, βρίσκει το μέσο και φέρνει τη μεσοκάθετο. Παρατηρεί ότι αν πάρει ένα σημειο πάνω στη μεσο-κάθετο (Κ) και το ενώσει με τα άκρα του ευθ. τμήματος ΑΒ τότε οι από-στάσεις του από τα Α και Β είναι ίσες.	5:24-7:15	Ο καθηγητής τον παροτρύνει να σχεδιάσει αυτά τα τμήματα ΚΑ και ΚΒ με τη βοήθεια του χάρακα.
8.		Μ2: Κύριε να ρωτήσω κάτι , όσο είναι το Α με το Μ ,τόσο θα είναι και το Α με το Κ; (Βασιλική)		(εννοεί ΑΜ=ΑΚ)	7:23	
9.	Εσύ τι λες ; Το ΚΑ με ποιο είναι ίσο είπε ο Γιώργος;				7:40	

10.		Μ2: Με το ΚΒ (Βασιλική)			7:50	
11.	Το ΑΚ με το ΑΜ ;					
12.		Μ2: Δεν θα είναι!! Όμως δεν θα είναι ίσο το ΑΜ με το ΜΚ; (Βασιλική)			8:04	
13.	Όχι δεν θα είναι Δεν είναι υποχρεωτικό. Πρόσεξε.				8:13	Ο καθηγητής αλλάζει το σχήμα ώστε η μαθήτρια να δει τη διαφορά όταν το μήκος του βασικού ευθ. τμήματος διαφοροποιείται
14.	Δες κάτι αν τα Α, Β ήταν πιο μακριά τότε αυτά τα τμήματα που λες θα ήταν ίσα ; Εδώ επειδή είναι πιο κοντά θα μπορούσε να ήταν ίσα αλλά δεν είναι . Μπορει σε κάποια περίπτωση να είναι ίσα,όχι όμως πάντα. Εντάξει;				8:21-8:33	

15.	Το ΑΚ και το ΑΜ τι διάφορα έχουν; Το ΑΜ τι είναι ως προς την ε ; Ονόμασε Γιώργο την ευθεια με ε.			(Την ονομάζει…)	8:39	
16.				(Οι μαθητές δεν απαντούν)		
17.	Η ε τι είναι στο ΑΒ τμημα;				8:52	
18.		Μ1: Κάθετη (Γιώργος)				
19.	Άρα και η ΑΜ τι είναι στην ε;					
20.		Μ1: Κάθετη. (Γιώργος)				
21.	Το ΑΚ είναι κάθετο;				9:04	
22.		Μ1: Όχι. (Γιώργος)				
23.	Βασιλική για πες μου					

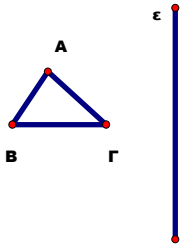
	…το ΑΚ είναι κάθετο στην ε ;					
24.		Μ2: Όχι . (Βασιλική)				
25.	Ποιο θα ναι μεγαλύτερο το ΑΚ ή το ΑΜ ;				9:19	
26.		Μ2: Το ΑΚ. (Βασιλική)				
27.	Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα είναι το πιο σύντομο ….εντάξει;				9:26	
28.		Μ3:Αλλά και πρακτικά να το δούμε άμα πάρουμε τη γωνία και την κατεβάσουμε τότε το Κ θα ήταν πιο μακριά από ότι το Μ .			9:32	(Εννοεί μετρώ-ντας από το Α) Πιθανόν να βλέπει τη γωνία ως στροφή της ημιευθείας ΑΚ ως προς ΑΜ.
29.	Εντάξει ,αυτό που ρώτησε η Βασιλική είναι….				9:41	
30.		Μ3: Αν είναι ίσα				
31.	Ποιο είναι μεγαλύτερο;					

32.		Το ΑΚ. (Πολλοί μαζί)			9:48	
33.	Το κάθετο είναι το συντομότερο ετσι;					Το έχει αναφέρει ξανά παραπάνω.
34.		Μ2: Ναι αλλά άμα είχαμε το σημείο από την άλλη μεριά πάλι θα ήταν μεγαλύτερο. (Βασιλική)			9:56	(Εννοεί αν το Κ ήταν από την κάτω πλευρα σε σχέση με το τμημα ΑΒ)
35.	Που εδώ;					
36.		Μ2: Ναι.				
37.	Σωστά πάλι θα ήταν μεγαλύτερο.				10:11	
38.	Τώρα είπε κάποιος ότι μπορούμε να τη φτιάξουμε και αλλιώς τη μεσοκαθετο…..				10:16	
39.		Μ4: Ναι .				
40.	Ποιος το είπε ;					
41.		Μ4: Εγώ .				
42.	Για έλα πάνω να μας δείξεις πώς ;			(Ο μαθητής έρχεται στον πίνακα , παίρνει το διαβήτη)	10:23	

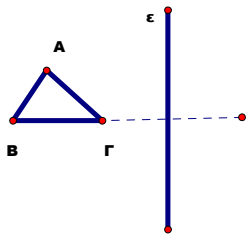
43.		Μ4: Βάζουμε τη μύτη του διαβήτη εδώ (Εννοεί το Β) και ανοίγουμε το διαβήτη ώστε να είναι μεγαλύτε-ρος από το μέσο (εννοεί με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της ΑΒ) και σχηματίζουμε τόξα. Και κάνουμε το ίδιο από την άλλη πλευρα .		(Ο καθηγητής βοηθάει κρατώντας το διαβήτη).	10:34-11:15	
44.	Και μετά;					
45.		Μ4: Βάζουμε τη μύτη στο Α . Και μετά με την ίδια ακτίνα κάνουμε το ίδιο Και μετά ενώνουμε τα δυο σημεία και περνούμε τη μεσοκάθετο		(Χρησιμοποιεί το χάρακα για να ενώσει τα σημεία που τέμνονται τα τόξα ,πάνω κάτω από την ΑΒ)	11:20-12:02	
46.	Ωραία..					
47.	Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν. Πώς μπορούμε να φτιάξουμε τη				12:13	

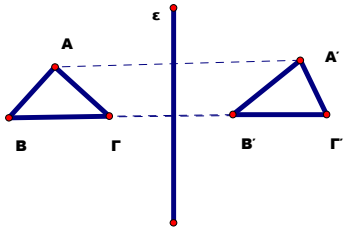
	μεσοκάθετο;					
48.		Μ3 : Ή να μετρήσουμε και να βρούμε τη μέση και να τραβηξουμε τη γραμμή….				
49.	Και με το γνώμονα όμως έτσι; Να φέρουμε την κάθετο! Ή πώς αλλιώς;					Αναφέρει απλά, χωρίς έμφαση τη χρήση γνώμονα για την κατασκευή της καθέτου.
50.		Μ3: Με το διαβήτη. Να κάνουμε δυο ημικύκλια και εκεί που ενώνονται να φέρουμε τη γραμμή.				
51.	Ωραία, τι διάφορα έχει η πρώτη μέθοδος με τη δεύτερη .Στη δεύτερη τι δεν χρειάζομαι;					Σύγκριση μεταξύ δύο μεθόδων και πλεονεκτήματα του ενός τρόπου έναντι του άλλου.
52.		Μ3: Δεν χρειάζεται να το μετρήσουμε.			12:22	

53.	Δεν χρειάζεται λοιπόν να το μετρήσουμε , εντάξει;					
54.	Και ποια ιδιότητα είπε ο Γιώργος ότι έχουν όλα τα σημεία της μεσοκαθετου;				12:28	
55.		Μ4: Να ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.				
56.	Ωραία να ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.					
57.	Μας έχουν μείνει ασκήσεις που θα τις λύσουμε την επόμενη φορά.				12:40	
58.	Για να δούμε τώρα να θυμηθούμε πριν περάσουμε στη συμμετρία ως προς σημείο να πούμε τι είχαμε πει ότι είναι η συμμετρία ως προς άξονα.			(Κάποια χέρια σηκώνονται).	12:49	
59.	Για κάντε το εξής στο πρόχειρο: φτιάξτε μια			(Σχεδιάζει στον πίνακα μια κατακό-	13:20	

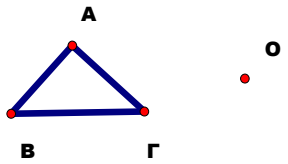
	ευθεία .			ρυφη ευθεία).		
60.	Και φτιάξτε από τη μια πλευρά ένα τριγωνάκι.			(Το φτιάχνει και ο ίδιος στον πίνακα με τη βάση ΒΓ οριζόντια ,το ονομάζει ΑΒΓ).	13:28	
61.	Για πέστε μου όταν πάρουμε το συμμετρικό του τριγώνου ως προς την ευθεία, ως προς τον άξονα, τι είχαμε πει θα κάνουμε ,πώς θα το βρούμε και πώς θα φαίνεται;				13:43	
62.		Μ3 : Εννοείτε για να κάνουμε το ίδιο σχήμα και από την άλλη πλευρα;			14:44	
63.		Μ3: Θα μετρήσουμε πόση απόσταση έχει κάθε γωνία…			14:49	
64.	Κάθε γωνία;					
65.		Μ3 : Κάθε				

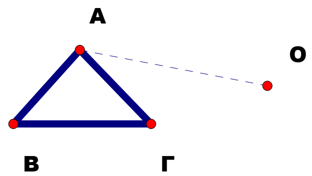
		πλευρά.. Δηλαδή εκεί που λέει Γ .				
66.	Το Γ τι είναι γωνία, πλευρά,.. τι;					
67.		Μ3: Γωνία δεν είναι;				
68.	Κορυφή.				15:00	Χρήση σωστής ορολογίας.
69.		Μ3: Κορυφή. Ωραία, θα πάρουμε και θα βρούμε την απόσταση που έχει το Γ μέχρι την γραμμή και θα πάρουμε ένα σημείο του , θα μετρήσουμε… και για το Α και θα πάρουμε άλλο ένα σημείο από την άλλη πλευρα ,και για το Β το ίδιο…..και μετά θα συνεχίσουμε.			15:10	
70.	Για σήκω να το κάνεις.			(Η μαθήτρια σηκώνεται στον πίνακα).	15:18	
71.		Μ3 : Σωστά δεν				

		το είπα;				
72.	Σωστά το είπες.			(Η μαθήτρια ενώνει το Γ με τον άξονα και μετράει).	15:28-16:00	[Με χάρακα χωρίς κανείς να τονίζει συγχρό-νως την έννοια της απόστασης σημείου από ευθεία (Καθέτου) Ούτε ο καθηγη-τής το κάνει και ενώ στην αρχή δίνει στη μαθή-τρια ένα γνώμονα (τρίγωνο) χάριν ευκολίας τον αποσύρει και της δίνει ένα χάρακα με υποδιαιρέσεις]
73.				(Ο καθηγητής βοήθα τη μαθήτρια στις μετρήσεις).	16:05	
74.				(Το ίδιο επαναλαμβάνεται για τα άλλα δυο σημεία).	16:40	
75.	Εννοείται ότι εδώ έχουμε φέρει καθέτους				16:49	Η παρατήρηση γίνεται εκ των

	και από τα τρία σημεία Α ,Β, Γ					υστέρων και πάντα θεωρητικά
76.	Ένωσε τώρα τα σημεία και βάλε Α΄, Β΄, Γ΄ .			(Τοποθετούν τα σημεία από την άλλη μεριά του άξονα και η μαθήτρια τραβά διακεκομμένες γραμμές με υπόδειξη του καθηγητή τα ονομάζει Α΄, Β΄, Γ΄ και ενώνει τα σημεία **).**	16:58-17:48	Η μαθήτρια τοποθετεί με λάθος τρόπο τα συμμετρικά των Β και Γ . (Τα βάζει ανάποδα) Δεν γίνεται αντιληπτό .
77.	Και τι είχαμε πει ; Πώς λειτουργεί τώρα η ευθεία ;				18:03	
78.		Μ9: Ως μεσοκάθετος.				
79.	Αλλιώς;					
80.		Μ9: Ως άξονας . (μαθήτρια)				
81.	Είναι άξονας Αλλιώς.. …….;					
82.	Σαν καθρέφτης . Αυτό αντικατοπτρίζεται Άρα				18:17-18:48	Απαντά μόνος του!!! Οι μαθητές δεν

	λοιπόν είχαμε πει ότι όταν έχουμε συμμετρία ως προς άξονα τι έχουμε ; …..Από κάθε σημειο φέρνουμε την κάθετη και προεκτείνουμε άλλο τόσο. Και έχουμε το συμμετρικό. Και αν διπλώσουμε ως προς τον άξονα τότε…..					φαίνεται να ακολουθούν τη σκέψη του.
83.		Μ3: Η κάθε πλευρά και κάθε κορυφή θα πέσει πάνω στην άλλη .				
84.	Είναι ένας αντικατοπτρισμός. Ωραία .Τώρα τι θέλω; Κάθισε κάτω ….			(Απευθύνεται στη μαθήτρια Μ3 που είχε σηκωθεί στον πίνακα).		

Β. Εισαγωγή της νέας έννοιας Συμμετρία ενός σχήματος ως προς σημείο - Τρόποι κατασκευής (19:04 – 31:18)						
Β1. Το συμμετρικό ως στροφή του αρχικού σχήματος κατά μισό κύκλο. (Χρήση κανόνα και διαβήτη) (19:04 – 20:59)						
85.	Στο πρόχειρο κάντε το εξής:			Σβήνει το υπόλοιπο σχήμα και κρατάει το αρχικό τρίγωνο και δεξιά του βάζει ένα σημείο Ο.	19:04	Η επιλογή της δραστηριότητας από τον εκπαιδευτικό έχει καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα.
86.	Αν εδώ είχα ένα σημείο Ο και δεν είχα την ευθεία και έχω το τρίγωνο ΑΒΓ…. θα κάνουμε το εξής στο πρόχειρο και θα περάσω να δω τι θα βγάλουμε…Θέλω με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ να φτιάξετε ένα ημικύκλιο δηλ, να στρίψετε ,…να το φτιάξω κιόλας ….			(Φτιάχνει το ΟΑ) (Δείχνει περίπου στον πίνακα εικονικά)	19:35-20:25	

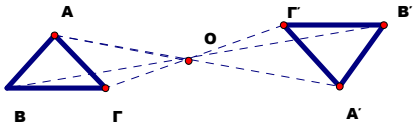
87.	Αν πάρω κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ και στρίψω το Α ως προς κέντρο το Ο κατά 180° …..και το ίδιο να γίνει και με το Β και με το Γ .Να το δούμε φτιάξτε το.			Ο καθηγητής επεξηγεί….		Οι μαθητές συνομιλούν μεταξύ τους υπάρχει μια μικρή σύγχυση …δεν έχουν καταλάβει ακριβώς τι θέλει ο καθηγητής και δεν έχουν όλοι διαβήτη. .
88.	Μισό λεπτό να πω κάτι για το διαβήτη που είπατε…… για προσέχτε τι θα κάνουμε εδώ……Αν είναι έτσι και το στρίψω κατά 180° που θα βγει;				20:38-20:59	Η έλλειψη κατασκευαστικού υλικού καθορίζει σημαντικά τον τρόπο κατά τον οποίο εξελίσσε-ται η διδασκαλία .
89.		Μ3,Μ5: Ακριβώς απέναντι .				
Β2.	**Το συμμετρικό με προέκταση και μέτρηση κατά ίσο τμήμα (21:04 – 31:18)**					
90.	Άρα έχουμε άλλη λύση που μπορούμε να κάνουμε αν δεν έχουμε διαβήτη;				21:04	
91.		Μ3: Να τραβήξουμε μια				Η έλλειψη διαβήτη

		γραμμή..				αποτέλεσε αφορμή για την αναφορά στο δεύτερο τρόπο κατασκευής.
92.	Το καταλάβαμε;					
93.		Όχι. (μαθητές)				
94.	Όχι; Να το ξαναπούμε.				21:12	
95.	Βλέπετε τι κάνω εδώ; Αν το στρίψω κατά 180° που θα βγει ;				21:22	Ο καθηγητής χρησιμοποιεί το σχολικό διαβήτη
96.		Μ1: Απέναντι.			21:24	
97.	Δεν θα είναι πάνω στην ευθεία ;					
98.		Ναι θα είναι. (Μαθητής)				
99.	Ναι ,άρα μπορείς να το κάνεις τότε…				21:32	
100	Είπαμε για κάθε σημειο αυτού του τρίγωνου και ξεκινώντας από τις κορυφές να τις στρίψουμε κατά 180° .				21:40	
101		Μ3: Κύριε ,δεν θα είναι συμμε-τρία αυτό το			21:49	Αμφισβήτηση της ύπαρξης συμμετρίας

		πράγμα !!				
102	Θα δούμε τι είναι κάντε το πρώτα .				21:55	
103		Μ6: Πόσο μεγάλο να είναι το τρίγωνο;			22:00	
104	Όσο θες . Κάντο εσύ όσο θες !					
105	Να το εξηγήσω πάλι ή το καταλάβατε;			(Ανησυχία μεταξύ των μαθητών συνομιλούν μεγαλόφωνα).	22:05	
106	Να εξηγήσω πάλι γιατί κάποιος μου είπε ότι δεν το κατάλαβε.				22:16	Οι μαθητές γενικότερα φαίνεται να μην κατανοούν τον τρόπο.
107	Έχουμε το τριγωνάκι ΑΒΓ και ένα σημείο Ο. Λέμε το Ο… το ενώνουμε με το Α… το ΟΑ δεν μας νοιάζει πόσο είναι …όσο μας βγει. Το ΟΑ το στρέφουμε κατά 180° ,δηλ το Α να κάνει μια στροφή, ένα ημικύκλιο , σωστά ; Με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ.				22:26-23:17	

108	Θα το σημειώσουμε που θα πέσει. Και μετά θα κάνουμε το ίδιο για το Β το ίδιο για το Γ.	Μ7: Στο ίδιο σχήμα;			23:19	
109	Στο ίδιο σχήμα..					
110				(Οι μαθητές εργάζονται και φωνάζουν τον καθηγητή να ρωτήσουν αν αυτά που έφτιαξαν είναι σωστά) . Ο καθηγητής περιφέρεται από θρανίο σε θρανίο. (Πάει στον πίνακα.)	23:29-24:20	
111	Λοιπόν για ακούστε λίγο…					
112	Ενώνουμε το Ο με το Α . Το ΟΑ το στρίβουμε 180° . ενώνουμε το Ο με το Β και το ίδιο για το Γ.				24:24-24:55	(Το βλέπει ως στροφή Ευθύγραμμου τμήματος)
113				(Μια μαθήτρια σηκώνεται στον πίνακα).		
114	Με τι θες να το κάνεις;				25:04	

115		Μ5: Με χάρακα. (Αφροδίτη)			25:12	(Η μαθήτρια διαλέγει τελικά γνώμονα).
116					25:20	Στη συνέχεια βλέπει ότι δυσκολεύεται και ο καθηγητής της προτείνει το υποδεκάμετρο).
117				Με τη βοήθεια του καθηγητή και με υποδεκάμετρο ενώνει ένα ένα τα Α, Β, Γ με το Ο και μετράει τις αποστάσεις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και παίρνουν ίσα τμήματα στην προέκταση προς το Ο.	25:29-26:35	
118				Στην προέκταση του ΟΑ γίνεται κάποιο λάθος από τη μαθήτρια Δεν παίρνει σωστά την προέκταση ΟΑ΄ και ο καθηγητής το προσέχει και διορθώνει.	26:47-27:25	

				Λέει στη μαθήτρια να τοποθετήσει και τα τονούμενα γράμματα.		
119	Ακούστε λίγο εδώ τι κάναμε το Α,… το στρίψαμε κατά 180 άρα το Α με το Α΄ είναι αντιδιαμετρικά .Σωστά; Άρα είναι στην ίδια ευθεία				27:28	
120	Και τα ΟΑ με το ΟΑ΄ Αφροδίτη τι είναι;			Ρωτάει τη μαθήτρια στον πίνακα .	28:00	
121		Μ5: Ίσα .			28:10	
122	Γιατί ;				28:20	
123		Μ5: Γιατί το ΑΟ το μετρήσαμε. Και κάναμε το ίσο.			28:35	Η μαθήτρια το βλέπει μέσω μέτρησης
124	Είναι στον ίδιο κύκλο ε;				28:45	Ο καθηγητής βλέπει τα ευθύγραμμα τμήματα ως ακτίνες ενός κύκλου.
125	Ακούστε λίγο αν το κάναμε με το διαβήτη θα ήταν αυτό εδώ ίσο με αυτό εδώ. Τώρα			Δείχνει με το διαβήτη	29:00-29:30	

	επειδή δεν είχε διαβήτη η Αφροδίτη το έκανε με το χάρακα άρα τι έκανε; Μέτρησε αυτό και προέκτεινε άλλο τόσο. Το ίδιο και για το ΟΒ και το ΟΒ΄ κλπ…. Άρα η στροφή κατά 180° είναι σαν να παίρνουμε το συμμετρικό του κάθε σημείου ως προς το κέντρο. Άρα εάν …					
126		Μ5: Να καθίσω ;			29:32	
127	Ναι κάθισε ….το καταλάβαμε αυτό;				29:38	
128	Το να στρίψεις κάθε σημείο ως προς ένα κέντρο κατά 180° ….δηλ έχεις ένα σημείο το Α παίρνεις ένα κέντρο, το στρίβεις κατά 180°…. θα έχεις το Α΄. Το ΟΑ και το ΟΑ΄ θα πρέπει να είναι ίσα γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου. Άρα αφού				29:43-30:10	

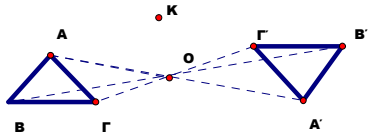
	αυτά είναι ίσα και επειδή είναι 180° είναι συνευθειακά.. το ΟΑ και το ΟΑ΄ είναι σαν να ενώσουμε το Α με το Ο και να προεκτείνουμε άλλο τόσο.					
129	Έγινε κατανοητό απο όλους ;				30:14	
130		Ναιιιι.(πολλοί μαζί)				
131	Το ίδιο για το Β και το ίδιο με το Γ. Τώρα σε σχέση με το σχήμα τι παρατηρούμε;				30:20	
132		Μ3: Είναι ανάποδα.				
133	Αντιστράφηκε ε; Ενώ όταν είχαμε τον άξονα στον αντικατοπτρισμό απλώς φαινότανε το ίδιο από την άλλη μεριά .Εδώ αν διπλώσουμε θα πέσει το Α΄Β΄Γ΄ πάνω στο ΑΒΓ;				30:26	
134		Όχι. (Όλοι μαζί)				
135		Ναι .(μαθητής)				

136	Θα πέσει;				30:37	
137		Όχι . (Όλοι μαζί)				
138	Σωστά . Αυτό είναι συμμετρία ως προς κέντρο. Αυτό είναι στροφή. Έχουμε στροφή του σχήματος . Κοιτάξτε λίγο έχουμε στροφή αυτού του σχήματος οπότε έρχεται έτσι, συμπίπτει με το άλλο όταν το στρίψουμε κατά 180° .			(Δείχνει με τα χέρια τη στροφή).	30:48-31:00	
139		Μ4: Ναι αλλά αν το φέρναμε από την άλλη το ίδιο δεν θα ήταν; (μαθητής)			31:08	(Εννοεί να γινόταν η στροφή αριστερόστροφα αντί δεξιόστροφα.).
140	Αν το έκανε ετσι;			(Δείχνει με τα χέρια).		
141	Ναι πάλι το ίδιο θα ' τανε. Λες αν το φέρναμε έτσι ε; Πάλι το ίδιο δεν θα 'τανε;				31:18	
		Γ. Αντιπαραβολή των δυο ειδών Συμμετρίας (31:25 – 34:00)				
142	Άρα λοιπόν αυτό είναι το δεύτερο είδος συμμετρίας. Το πρώτο				31:25-31:57	

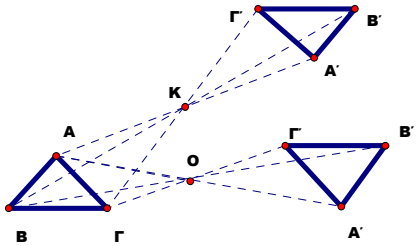
	που είχαμε δει ήταν ως προς άξονα, έτσι δεν είναι; Και το δεύτερο είναι ως προς κέντρο. Ως προς άξονα είναι σαν να καθρεφτίζεται αυτό στο άλλο . Έτσι; Με καθρέφτη τον άξονα άρα είναι ένας αντικατοπτρισμός . Όπως βλέπουμε το πρόσωπό μας μέσα σε μια λεκάνη νερό .Από κάτω και σε ίση απόσταση .					
143	Το ίδιο θα είχαμε και δω αν διπλώσου-με…πέφτει το ένα πάνω στο άλλο. Εδώ τώρα βέβαια δεν πέφτει το ένα στο άλλο αν διπλώσουμε .. μόνο αν το στρίψουμε κατά 180° θα πέσει το ένα πάνω στο άλλο. Και αυτή είναι η στροφή .				32:00-32:20	(Εννοεί αν είχαμε άξονα συμμετρίας)
144	Η μια είναι ένας αντικατοπτρισμός ενώ το άλλο είναι στροφή, εδώ λοιπόν η				32:20-32:54	

	συμμετρία ως προς κέντρο σημαίνει ότι το κάθε σημείο του σχήματος έχει στραφεί κατά 180° για να συμπέσει με το συμμετρικό ή αυτό που έκανε η Αφροδίτη… αν πάρουμε κάθε σημείο του ενός σχήματος και το ενώσουμε με το κέντρο και το προεκτείνουμε άλλο τόσο θα πέσει στο συμμετρικό του, πάνω στο άλλο σχήμα.					
145		Μ8: Δηλαδή το τριγωνάκι είναι σαν να γυρίζει γύρω και πάει πάνω στο άλλο.			33:00:	
146	Αλλά 180° έτσι ;					
147		Μ8: Ναι 180° .				
148	Γιατί αν έκανε 360° θα ξαναρχόταν…					
149		Μ8: Στο ίδιο. (μαθήτρια)			33:44	
150	Αν πάρουμε το					Η στροφή κατά

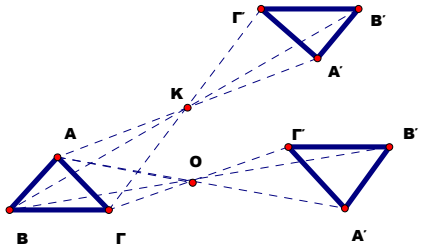
	συμμετρικό αυτουνού πάλι θα πέσει στο ίδιο…					360° ισοδυναμεί με ταύτιση του σχήματος με τον εαυτό του.
151	Αυτή λοιπόν είναι η συμμετρία ως προς κέντρο. Δηλαδή έχουμε συμμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας όπου κέντρο τι είναι;				33:51	
152	Ένα σημείο . Δεν είναι άξονας εδώ , ο άξονας είναι ευθεία , …εδώ είναι ένα σημείο.				34:00	Μέχρι στιγμής εκτός από την περίπτωση όπου υπονοείται η ισότητα των συμμετρικών σχημάτων ως ταύτιση μετά από στροφή κατά 180° , δεν έχει γίνει σαφής αναφορά στο ότι τα συμμετρικά σχήματα ως προς σημείο είναι ίσα.

Δ .	**Εφαρμογές που προκύπτουν από παρατηρήσεις και σχόλια μαθητών – Εμπέδωση (34:10 – 45:15)**					
Δ1 .	**Αλλάζοντας το σημείο συμμετρίας- Συμμετρικά του ιδίου σχήματος, σχέση μεταξύ τους . (34:10 – 42:23)**					
153		Μ3: Το σημείο μπορεί να είναι οπουδήποτε;			34:10	Σημαντική παρατήρηση από την πλευρά της μαθήτριας. Οδηγεί το μάθημα σε άλλη κατεύθυνση από τη συνήθη.
154	Οπουδήποτε! Έλα να το κάνεις μιας και το είπες….			(Η ίδια μαθήτρια στον πίνακα ξανά)		
155	Αν φέρναμε εδώ ένα σημείο το Κ ας πούμε…. Να το βάλουμε εδώ ;			(Βάζει πιο ψηλά ένα άλλο σημειο ενώ διατηρεί όλο το προηγούμενο σχήμα)	34:25	
156	Πάρε ετσι πρόχειρα……πάρε και το χάρακα να σε διευκολύνει….			(Της δίνει το γνώμονα).	34:32	
157		Μ3: Δηλ πάλι θα τραβήξουμε από δω γραμμή εδώ πάνω και πάλι			34:46	

158	Ναι πάλι .	από εδώ ….;				
159				Η μαθήτρια φτιάχνει τις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ. Ο καθηγητής βοηθά και πάλι στο σχήμα.	34:50-35:34	
160	Να είναι περίπου ίσες όμως οι προεκτάσεις διόρθωσε τα λίγο…. Να είναι ίσα .				35:48	
161	Το ΑΚ με το ……Να σου πω αφού είναι ευθεία πόσες μοίρες θα ναι;			(Απευθύνεται σε ένα μαθητή στα αριστερά).	35:56	Ο μαθητής δεν απαντά.
162	Το μετράς ;				36:20	
163				(Έρχεται και ο ίδιος στον πίνακα και βοηθάει τη μαθήτρια που δυσκολεύεται).	36:30-36:57	

164	Βαλε Γ΄ ,Β, ΄Α΄ και ένωσε τα . Αυτά μεταξύ τους είναι ίσα. .			(λέει στη μαθήτρια)	37:15	
165		Μ3: Άρα γίνεται παντού . Όπου και να είναι το σημείο. (μαθήτρια)			37:28	Συμπέρασμα που προκύπτει από την ίδια τη μαθήτρια..
166	Το καταλάβατε αυτό που έκανε ; Τι ήθελε να δει; Αν όπου κι αν είναι το κέντρο….αν πάρουμε το συμμετρικό του….					
167		Μ3: Αυτά δεν είναι ίδια; Είναι;		Δείχνει τα δύο τρίγωνα που σχηματίστηκαν ως συμμετρικά με κέντρο πρώτα το Ο και στη συνέχεια με κέντρο το Κ.	37:46	Απόπειρα εικασίας εκ μέρους της μαθήτριας.
168	Αυτά μεταξύ τους			Δείχνει στον πίνακα	38:12	Είναι η πρώτη

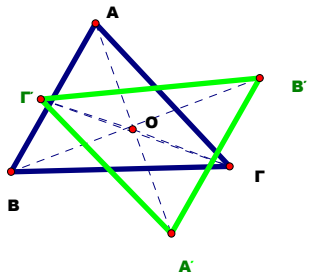
169 170	είναι ίσα. Αυτό είναι στροφή του τριγώνου ως προς αυτό (εννοεί το Ο) ενώ αυτό είναι στροφή του ίδιου τρίγωνου ως προς. αυτό(το Κ) Να ρωτήσω κάτι.. ,αυτό βέβαια θα το δούμε αργότερα όταν δούμε τα τρίγωνα… εντάξει; Αυτό είναι σαν να έχει στρίψει τούτο κατά 180° με κέντρο το Κ. Λεπτομέρειες βέβαια μην ψάχνετε γιατί το έχουμε φτιάξει πολύ πρόχειρα. .Αυτό πάλι είναι σαν να έχει στρίψει πάλι κατά 180° .(Δείχνει το άλλο τρίγωνο). Αυτό με τούτο μεταξύ τους τι είναι ;	Μ4: Ίσα (Μαθητής)		με τα χέρια . Απευθύνεται προς όλους.	38:37-39:10	φορά που γίνεται σαφής αναφορά για την ισότητα των συμμετρικών (ως προς σημείο) σχημάτων από τον καθηγητή. Εννοεί ότι το βιβλίο έχει παρακάτω αναφορά για τα τρίγωνα ξεχωριστά όπου θα θέσουν το θέμα της ισότητας τριγώνων.

171	Ίσα . Γιατί αυτό είναι η στροφή αυτού κατά 180 ενώ αυτό είναι η στροφή αυτουνού κατά 180. Άρα αυτό το ίδιο είναι σαν να το έχεις στρίψει. Αν το πάρω αυτό και το στρίψω είτε από δω είτε από κει δεν θα 'ναι το ίδιο πράγμα ;				39:33	Μέχρι στιγμής η δυνατότητα που υπάρχει είναι τα συμμετρικά να ειδωθούν ως το ίδιο τρίγωνο που έχει στραφεί γύρω από δύο διαφορετικά αναφορικά σημεία. Κατά συνέπεια είναι ίσα υπο την έννοια της μεταφοράς και σύμπτωσης. (Congruency)
172	Κατάλαβες τι είπα;;			(Απευθύνεται σε μαθητή στα αριστερά.).	40:01	
173	Λέω το εξής αν πάρω αυτό το τρίγωνο…. εδώ κοίταξε και το στρίψω με κέντρο αυτό κατά 180° θα 'ρθει εδώ ;			(Κρατάει το γνώμονα ως παράδειγμα και τον στρίβει).	40:13	
174		Ναι.(όλοι)				

175	Αν το ίδιο τρίγωνο το στρίψω με κέντρο αυτό θα έρθει εκεί ;			(Δείχνει στον αέρα).	40:27	
176		Ναι. (όλοι)				
177	Θα έχει αλλάξει το τρίγωνο;				40:34	
178		Όχι. (όλοι)				
179	Εδώ τώρα λέμε χωρίς βέβαια να έχουμε κάνει ισότητα τριγώνων, θα τα πούμε αργότερα ,λέμε κάτι που είναι πολύ σημαντικό να το καταλάβουμε ότι αν το ίδιο σχήμα το στρίψεις ως προς ένα κέντρο είτε ως προς άλλο κέντρο, το σχήμα θα αλλοιωθεί;				40:39-41:00	
180		Όχι. (όλοι)				
181	Όχι. Είναι σαφές αυτό;				41:05	
182		Ναι.				
183	Δηλαδή είτε πάρω ένα κέντρο εδώ και το στρίψω και έρθει εδώ, είτε πάρω ένα άλλο κέντρο και το στρίψω				41:10-41:35	Ο εκπαιδευτικός δεν προσπαθεί να πιέσει τους μαθητές να δικαιολογήσουν,

	και έρθει εκεί το ίδιο πράγμα στρίβει κατά 180°. Δεν αλλοιώνεται, δεν αλλάζει .Δεν έχω σμίκρυνση ή μεγέθυνση. Δεν αλλάζει κλίμακα. Το καταλάβατε αυτό;					αλλά απαντά ο ίδιος.
184		Ναι. (όλοι)				
185	Στον αντικατοπτρισμό,……. στη συμμετρία λοιπόν ως προς κέντρο (διορθώνει) το σχήμα στρίβει κατά 180° . Στη συμμετρία ως προς άξονα το ίδιο σχήμα αντανακλάται απ' την άλλη . Αλλάζει πάλι;				41:46	
186	Και κει δεν αλλάζει. Απλώς αλλάζει θέση έτσι;				42:08	(Απαντά μόνος)
187	Λοιπόν ,νομίζω πως το καταλάβατε .Έτσι;					
188		Ναι .			42:16	
189	Πόση ώρα έχουμε ακόμη;					Ανεπάρκεια χρόνου για την ολοκλήρωση του

190		3 λεπτά(μαθητής)			42:23	μαθήματος.
Δ2 . Μεταφέροντας το σημείο μέσα στο σχήμα. (Κέντρο συμμετρίας) (42:42 – 45:15)						
191		Μ4: Υπάρχει περίπτωση το σημείο να είναι μέσα στο τρίγωνο; (μαθητής)			42:42	Το ενδιαφέρον των μαθητών και οι απορίες δεν προλαβαίνουν να εξελιχθούν λόγω έλλειψης χρόνου. [Η χρονική κατανομή που επέλεξε ο εκπαιδευτικός μεταξύ προηγούμενης γνώσης (επανάληψη) και εισαγωγής στη νέα έννοια δεν σταθμίστηκαν σωστά]
192	Ναι υπάρχει . Για κοίταξε. Αν έχεις ένα τρίγωνο και έχεις αυτό το σημειο.			(Παίρνει ένα σημειο μέσα σ ένα τρίγωνο ΑΒΓ και σχεδιάζει με τον $2^{ο}$ τρόπο δηλ. με προεκτάσεις κατά ίσα τμήματα,	42:58-43:19	

				το συμμετρικό του, Α΄Β΄Γ΄.)		
193				Περιγράφει τον τρόπο για το συμμετρικό κάθε σημείου).	43:20-43:50	
194	Καταλάβατε αυτό που ρώτησε; Παίρνω τα συμμετρικά των Α, Β, Γ. Αν το στρίψω αυτό το τρίγωνο με κέντρο αυτό κατά 180° θα συμπέσει με το συμμετρικό του;				43:54-44:00	Η διαδικασία αρχίζει να γίνεται συνοπτική .
195				(Μικρή διακοπή από εξωτερικό παράγοντα.).	44:02	Κατά συνέπεια οι μαθητές δεν πρόλαβαν να απαντήσουν.
196	Λοιπόν ολοκληρώνουμε…. Όταν έχουμε ένα σημείο Α και ένα κέντρο συμμετρίας Ο ,				44:14	

197	πώς βρίσκουμε το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Ο; Πες το .					
198		Μ8: Αφού πρέπει να στρίψει κατά 180° , ενώνουμε το Α με το Ο και προεκτείνουμε άλλο τόσο στη ίδια ευθεια .			44:21	
199	Αν έχω ένα οποιαδήποτε σχήμα τι θα κάνω;			(Χτυπά το κουδούνι!!!)	44:53	
200	Για κάθε σημειο του σχήματος θα κάνουμε το ίδιο πράγμα και θα είναι σαν να έχουμε στρίψει το σχήμα κατά 180.				44:58	
201	Λοιπόν θα διαβάσετε ……..				45:15	

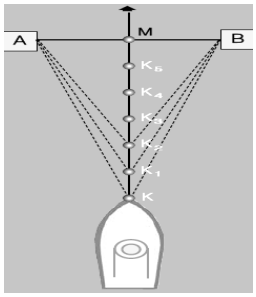
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ- 2

Στο συγκεκριμένο Παράρτημα καταγράφονται συνολικά τα «κρίσιμα συμβάντα» ανά εκπαιδευτικό με τη σειρά που εμφανίστηκαν και ανά «δραστηριότητα».

Εκπαιδευτικός Α΄

1η «δραστηριότητα»: **«Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος»**

1ο Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:



2. Καθ: Κοιτάξτε όλοι το σχήμα σας . Έχουμε ένα πλοίο και μας λέει ότι ο καπετάνιος προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά …
Εγώ θέλω να υπογραμμίσετε τη φράση : «το ίδιο μακριά από τη γέφυρα». Καταρχήν για να δούμε πως κινείται το πλοίο , τι πορεία κάνει; Τι νομίζετε;
[Βλέπε και εικόνα της δραστηριότητας του βιβλίου στο 3.1]
3. M_1: Ευθεία .
4. Καθ: Παρατηρείστε ότι οι βάσεις της γέφυρας είναι οι Α και Β. Δηλ σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πώς τη βλέπετε αυτή την πορεία;
5. M_2: Μεσοκάθετος.
6. Καθ: Τι σημαίνει αυτό;
7. M_2: Είναι στη μέση.
9. M_3: Οι αποστάσεις από τα τμήματα Α και Β είναι ίσες
11. M_4: Η πορεία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα και περνάει από τη μέση του.
……
17. Μ6: Πέρα από τα σχήματα όπου είναι μεσοκάθετος……..
18. Καθ: Τι σημαίνει μεσοκάθετος ; Έχουμε πει τι σημαίνει μεσοκάθετος;
……
20. M_6: Ότι είναι κάθετος από τη μέση και οποιοδήποτε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα δυο άκρα.
21. Καθ: Πολλά είπες. Εγώ το μόνο που ρώτησα είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με τα Α και Β. Άλλο;
22. M_1: Η μεσοκάθετη είναι η κάθετη στο μέσο ….
23. Καθ**:** Το είπαμε αυτό όμως….

24. M_7: Από τη στιγμή που τα σημεία ισαπέχουν από τα Α , Β η πορεία πρέπει να είναι σταθερή.

25. Καθ: Ο συμμαθητής σας λέει ότι αφού όλα τα σημεία έχουν την ίδια απόσταση από τα Α και Β , λογικά λέει ότι η πορεία θα είναι σταθερή .Και είναι πάντα ευθεία. Για να δούμε..

……

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[2-4,21,24-25] *Διατήρηση* του *πραγματικού πλαισίου* της «δραστηριότητας» και της *καθοδήγησης* του βιβλίου

Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί την προτεινόμενη από το βιβλίο «δραστηριότητα», με τη διαφορά ότι τη δίνει σε φωτοτυπίες όπου έχει αφαιρέσει το καθοδηγητικό πλαίσιο του «Θυμόμαστε-μαθαίνουμε». Όμως η πορεία του πλοίου, στο σχήμα που απευθύνεται προς τους μαθητές, είναι εξ αρχής σχεδιασμένη, καθώς δίνονται οι διαδοχικές θέσεις αυτής της πορείας. Επιπλέον, το γεγονός ότι η καθηγήτρια έχει παραλείψει να αφαιρέσει τον τίτλο του μαθήματος, προϊδεάζει τους μαθητές και η πρόκληση της δραστηριότητας χάνεται προκαταβολικά. Όλες οι απαντήσεις των μαθητών δεσμεύονται γύρω από τη λέξη «μεσοκάθετος». Η προσπάθεια να γίνει η προσέγγιση με βάση τη διαίσθηση και τις εικασίες των μαθητών αποτυγχάνει.

2ο Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:

……..

25. Καθ: Και είναι πάντα ευθεία.[εννοεί την πορεία του πλοίου] Για να δούμε…..

27. M_4: Και επίσης είναι και άξονας συμμετρίας διότι αν διπλώσουμε το χαρτί θα ταυτίζεται.

28. Καθ: Πολύ σωστά, η συμμαθήτριά σας λέει ότι είναι και άξονας συμμετρίας η πορεία του πλοίου. Για ξαναπές. Γιατί είναι και άξονας συμμετρίας;

29. M_4: Γιατί το διπλώνεις στη μέση.

30. Καθ: Πού θα γίνει η τσάκιση ; Ονόμασέ το με δυο γράμματα. Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα πάνω θα γίνει; Με αρχή και τέλος . Πού θα πέσει το Α;

33. M_4: Ναι Το Β θα πέσει πάνω στο….

34. Καθ: Όχι η τσάκιση πού θα γίνει;

35. M_4: Στο Μ

36. Καθ: Σε ποιο ευθύγραμμο τμήμα θα γίνει η τσάκιση;

37. M_4: Στο ΑΒ

38. Καθ: Μισό λεπτό , μας είπες και πολύ ωραία μάλιστα ,ότι διπλώνουμε το χαρτί μας και έτσι έχουμε άξονα συμμετρίας αυτή την ευθεία .Δηλαδή πού πάνω θα διπλώσεις; Να μου ονομάσεις αυτό το ευθύγραμμο τμήμα. Ναι αυτό που μου δείχνεις!!

39. M_4: ΜΚ;

40. Καθ: Ε ναι . ΜΚ δεν είναι; ΜΚ λοιπόν λέει η συμμαθήτριά σας.

……..

44. Καθ: Να ρωτήσω τώρα κάτι άλλο…Για ξαναπείτε μου τώρα ποια είναι η σχέση που έχουν το ΜΑ με το ΜΒ;

45. M_9: Το Μ είναι το κέντρο του ευθυγράμμου τμήματος

46. Καθ: Πώς το λένε αυτό το κέντρο; Άλλη λέξη.

47. Καθ: Είναι το μέσο ε;

48. M_9: Ναι είναι το μέσο και σχηματίζονται δυο ευθύγραμμα τμήματα τα ΜΑ, ΜΒ

49. Καθ: Και ποια είναι η σχέση που έχουν μεταξύ τους αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα;

50. M_9: Συμμετρικά;

52. Καθ: Δυο συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ τους τι είναι;

53. M_{10}: Ίσα .

54. Καθ: Τι παρατηρείτε τώρα για τα ΚΑ , ΚΒ;

55. M_{11}: Είναι κι αυτά ίσα

56. Καθ: Και τι άλλο;

57. M_{11}: Είναι και συμμετρικά

59. Καθ: Η ΚΜ λοιπόν είναι ο άξονας συμμετρίας. Για ξαναπείτε μου τα χαρακτηριστικά της σε σχέση με το ΑΒ ;

60. M_{12}: Είναι κάθετη και διέρχεται από το μέσο.

61. Καθ: Είναι λοιπόν κάθετη και περνά από το μέσο. Γι αυτό και πήρε το όνομα της δηλ μεσοκάθετη.

62. M_{13}: Θα μπορούσαμε να πούμε δηλ ότι η πορεία του πλοίου είναι ο άξονας συμμετρίας;

63. Καθ: Βεβαίως!! Στην ουσία παιδιά , εδώ που λέει: δείτε την πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εμείς ως άξονα συμμετρίας κανονικά θα μπορούσαμε να το δούμε σαν συνέχεια του προηγούμενου μαθήματος. Παρατηρούμε

ποια είναι τα χαρακτηριστικά του άξονα συμμετρίας και μας προκύπτει η νέα έννοια που είναι η Μεσοκάθετος.

……..

Συνοπτική ανάλυση του 2ου συμβάντος

[27-63] *Μετασχηματισμός* της «δραστηριότητας» με τη βοήθεια της *σκέψης των μαθητών*

Η εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται την αποτυχία της διαισθητικής προσέγγισης (βλέπε 1ο κρίσιμο συμβάν). Η παρατήρηση μιας μαθήτριας δίνει την ευκαιρία η «δραστηριότητα» να μετασχηματιστεί ως προς τον τρόπο προσέγγισης. Η συμμετρία ως προς άξονα (έννοια με την οποία ασχολήθηκαν στο προηγούμενο μάθημα), επιστρατεύεται για δώσει λύση στα ερωτήματα. Η εκπαιδευτικός αξιοποιεί την παρατήρηση της μαθήτριας στο μέγιστο βαθμό, εγκαταλείποντας το διαισθητικό τρόπο του βιβλίου, υποστηρίζοντας τη σύνδεση της νέας έννοιας με την προηγούμενη γνώση των μαθητών.

3ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

……..

64. Καθ: Ας ρωτήσω τώρα κάτι άλλο. Αν σας δώσω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, αυτό που κάνω στον πίνακα, και σας πω να βρείτε το μέσον, πώς θα δουλέψετε;

Με όποιο τρόπο θέλετε.

65. M_6: Θα μετρούσα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, θα διαιρούσα δια δυο και θα μετρούσα από το Α και θα έβρισκα το μέσο.

……..

73. Καθ: Άλλος τρόπος αν δεν έχουμε χάρακα (εννοεί υποδεκάμετρο) και δεν έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε για να βρούμε το μέσο. Τι μπορούμε να κάνουμε;

74. Μαθ:Κύρια ούτε χάρακα ούτε γνώμονα;

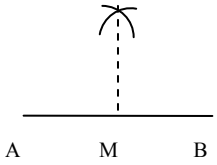
75. Καθ: Αν υποθέσουμε ότι ο γνώμονας μας δεν είναι αριθμημένος. Το πρόβλημα μας είναι ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε….

[κάποιοι λένε να μετρήσουν με το μάτι αλλά θα είναι στο περίπου]

80. Καθ: Στην ανάγκη κι αυτό γίνεται. Άλλος όμως τρόπος για να μας βγει στα σίγουρα;

81. Μ14: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαβήτη και το άνοιγμα του να είναι λίγο παραπάνω από τη μέση .

83. M_{14}: Και να κάνουμε ένα μέρος του κύκλου και από τα δυο σημεία…. και από το σημείο τομής τους τραβάμε τη μεσοκάθετο.



84. Καθ: Ωραία. Βέβαια τώρα δεν έχουμε το διαβήτη εδώ….

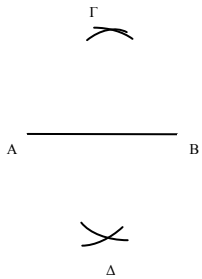
[ένας μαθητής φέρνει το διαβήτη και ο μαθητής M_{14} σχεδιάζει στον πίνακα]

89. Καθ: Τι έκανε ο συμμαθητής σας λοιπόν; Πώς είμαστε σίγουροι ότι με το γνώμονα βρήκε το μέσο σωστά; Πώς ξέρουμε σίγουρα πως η γραμμή που έφερε περνά από το μέσο;

96. Μαθ: Δεν το ξέρουμε.

97. Καθ: Δεν ξέρουμε. Πώς μπορούμε να σιγουρέψουμε ότι η γραμμή αυτή είναι μεσοκάθετος του ΑΒ;

98. Μαθ: Δεν φαίνεται;



99. Καθ: Τα φαινόμενα απατούν καμία φορά

107.M_1: Να σηκωθώ;

[Ο μαθητής συμπληρώνει το προηγούμενο σχήμα]

109.Καθ: Κάτι κάνει παιδιά ο συμμαθητής σας ,για δείτε…

114.Καθ: Σε τι μας ωφελεί αυτό που έκανε;

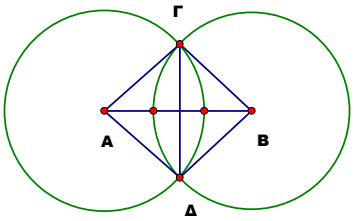
116.Καθ: Μπορούμε να βρούμε το μέσο ετσι;

119. M_9: Θα τραβήξουμε μια γραμμή από το Γ στο Δ .

125. M_{10}: Κύρια να πω κάτι που είναι σχετικό με αυτό;

127. M_{10}: Πρέπει να συνεχίσουμε αυτό. Να κάνουμε ολόκληρους τους κύκλους.

128. Καθ: Γιατί; Τι αλλάζει αν κανείς ολόκληρους τους κύκλους; Θα μας βγει ένας κύκλος από δω κι ένας κύκλος από κει.



129. M_{10}: Ναι εντάξει .Αλλά έτσι μπορώ πιο εύκολα να το εξηγήσω.

[Ο M_{10} κάνει ολόκληρους τους κύκλους στον πίνακα, συμπληρώνει τραβώντας τα ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ χαρακτηρίζοντάς τα ως ίσα]

131. Καθ: Κοιτάξτε λίγο τι λέει ο συμμαθητής σας.. Εφόσον λέει έχουμε κύκλο , έχουμε ίσες αποστάσεις . Ποιες αποστάσεις είναι ίσες;

132. M_{10}: Η ΑΓ με την ΓΒ και η ΑΔ με τη ΔΒ

…….

139. Καθ: Όπως είδατε και στην περίπτωση του M_{14} το αν είναι κάθετη αμφισβητήθηκε . Ενώ στην περίπτωση του M_{10} που συμπλήρωσε και από κάτω είμαστε σίγουροι. Γιατί αν ενώσουμε αυτά τα δυο σημεία είναι μεσοκάθετος.

140. Μαθ: Κύρια, και πού ξέρουμε με το δεύτερο τρόπο ότι είναι κάθετος;

141. Καθ: Το ξέρουμε γιατί έχουν ίσες αποστάσεις .

146. M_{17}: Εγώ δεν το κατάλαβα .

……

Συνοπτική ανάλυση του 3ου συμβάντος

[64-65,81,83,107,127-129,131-146] Η *«δραστηριότητα»* όσον αφορά τις επεκτάσεις της (κατασκευές) *εκχωρείται* στους μαθητές.

Οι μαθητές κατασκευάζουν με γεωμετρικά όργανα. Δοκιμάζουν τρόπους χάραξης της μεσοκαθέτου και προσπαθούν να αιτιολογήσουν την ορθότητα των ενεργειών τους. Η εμπλοκή τους στη μαθηματική διαδικασία είναι έντονη παρ' όλο που οι εξηγήσεις που επιχειρούν είναι εν μέρει αποσπασματικές. Η αποσπασματική επεξήγηση από τη μεριά τους είναι αναμενόμενη αφού μέχρι στιγμής δεν έχουν δει τη μεσοκάθετο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ως γεωμετρικό τόπο. Δεν έχει αναφερθεί πουθενά ότι δύο σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ορίζουν τη μεσοκάθετό του. Οι μαθητές δρουν αλλά δεν έχουν γίνει οι απαραίτητες συνδέσεις ώστε να μπορούν να δικαιολογήσουν.

4ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

……

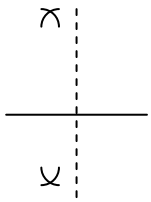
166. M_7: Αν το άνοιγμα του διαβήτη φτάνει στο απέναντι σημείο τότε τα σημεία τομής θα είναι σε άλλο σημείο .[Αναφορά στο τελευταίο σχήμα του προηγούμενου συμβάντος]

168. Καθ: Τα Γ και Δ θα είναι σε διαφορετική θέση. Ναι θα είναι πάνω από την τομή, πάνω από το προηγούμενο σημείο αλλά θα είναι πάλι σωστό. Το θέμα μας είναι να τέμνονται τα τοξάκια . Το υπόλοιπο είναι εξίσου σωστό.

…….

181. M_{10}: Πώς ξέρουμε αν ανοίξουμε το διαβήτη περισσότερο, ότι το νέο σημείο βγαίνει αλλού όχι όμως πιο πάνω ή πιο κάτω, αλλά πιο δεξιά ή πιο αριστερά;

[Είναι ο ίδιος μαθητής που έκανε την κατασκευή με την τομή των δυο κύκλων στο τελευταίο σχήμα του προηγούμενου κρίσιμου συμβάντος.]



182. Καθ: Ακούστε λίγο την ερώτηση. Έχει ήδη απαντηθεί στη πραγματικότητα

183. Μαθ: Όχι κυρία . Όχι πιο πάνω ή πιο κάτω. Πιο αριστερά ή πιο δεξιά!

184. Καθ: Αυτό θα ήθελα να το δοκιμάσεις και να μου πεις.. αν υπάρχει τέτοια πιθανότητα.

185. Μαθ: Και βέβαια υπάρχει . [Χτυπά το κουδούνι]

186. Καθ: Μιας και χτύπησε το κουδούνι θα απαντήσω εγώ σ' αυτό. Όσο και να αλλάξουμε το άνοιγμα του διαβήτη, πιθανότητα τα σημεία τομής να βγουν πιο δεξιά ή πιο αριστερά δεν υπάρχει ,αφού το άνοιγμα του διαβήτη είναι το ίδιο.

188. Καθ: Γιατί δεν βγαίνουν πιο αριστερά ή πιο δεξιά και βγαίνουν είτε πιο πάνω είτε πιο κάτω;

189. M_4: Γιατί ο διαβήτης έχει πάντα το ίδιο άνοιγμα. Ίσο με την ακτίνα.

190. Καθ: Είναι ακτίνα άρα δεν μπορει να είναι πιο αριστερά ή πιο δεξιά. Βλέπω όμως ότι ο συμμαθητής σας δεν είναι ικανοποιημένος από την απάντηση .Οπότε θα επανέλθουμε στο επόμενο μάθημα.

…….

<u>Συνοπτική ανάλυση του 4^{ου} συμβάντος</u>

[166,168,181-186] Η *σκέψη των μαθητών* δίνει την αφορμή για το *μετασχηματισμό της «δραστηριότητας»*.

Οι μαθητές εκφράζουν απορίες που υποδεικνύουν διερευνητικό τρόπο σκέψης στο κατασκευαστικό κομμάτι της «δραστηριότητας» του 3^{ου} κρίσιμου συμβάντος. Κάποιοι δεν έχουν κατανοήσει το σκεπτικό βάσει του οποίου έγινε η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Αμφισβητούν το αποτέλεσμα της κατασκευής καθώς δεν έχουν αντιληφθεί ότι οι κύκλοι πρέπει να έχουν την ίδια ακτίνα ώστε οι αποστάσεις των Γ και Δ να είναι ίσες από τα άκρα του τμήματος ΑΒ. Η εκπαιδευτικός εξηγεί λεκτικά. Ο χρόνος δεν επιτρέπει τις απαραίτητες δοκιμές με γεωμετρικά όργανα ώστε να πεισθούν οι μαθητές. Η μαθηματική δραστηριότητα ενώ αρχίζει να κινείται προς ουσιαστική κατεύθυνση, δεν προλαβαίνει να εξελιχθεί.

2η «δραστηριότητα»: **«Συμμετρία ως προς σημείο»**

Η εκπαιδευτικός έχει αντικαταστήσει τη «δραστηριότητα» του βιβλίου με μια δική της η οποία δίνεται σε φωτοτυπία στους μαθητές. Στη φωτοτυπία υπάρχει ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η βάση ΒΓ έχει οριζόντιο προσανατολισμό. Επιπλέον δίνει έξω από την περιοχή που περικλείουν οι πλευρές του τριγώνου ένα σταθερό σημείο Ο ως προς το οποίο ζητά να γίνει ο μετασχηματισμός της περιστροφής.

1ο Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:

…….

5. Καθ: Σας δίνω λοιπόν ένα τριγωνάκι ΑΒΓ και ένα σημείο Ο

Αν σας έλεγα το τρίγωνο αυτό να το περιστρέψετε …να κάνει μια στροφή ολόκληρη, να κάνει έναν κύκλο γύρω από το Ο… με κέντρο το Ο, μπορείτε να φαντασθείτε σε ποια θέση θα βρεθεί το τρίγωνο αυτό; Τι λέτε;

6. M_1: Θα βρεθεί στην αντίθετη θέση (δείχνει με τα χέρια, εννοεί ότι θα αντιστραφεί το τρίγωνο).

7. Καθ: Αυτή είναι μια πρόταση. Να δούμε όλες τις προτάσεις.

8. M_2: Αν κάνει ολόκληρη την κίνηση θα παραμένει στο ίδιο μέρος .

9. M_1: Α!!! κύκλο είπαμε;

10. Καθ: Ναι αφού είπαμε ολόκληρη στροφή.

11. Καθ: Υπάρχει άλλη πρόταση;

12. Όχι (φωνάζουν οι περισσότεροι).

13. Καθ: Συμφωνώ και εγώ μαζί σας. Τώρα αν το τρίγωνο αυτό κάνει την μίση στροφή. Που θα βρεθεί;

14. M_3: Ανάποδα .

16. M_4: Δεν καταλαβαίνω τι θα πει ανάποδα. Εγώ λέω ότι θα βρεθεί απ' την αντίθετη μεριά που είναι τώρα.

17. Καθ**:** Ας έρθει κάποιος στον πίνακα να το φτιάξει για τη μίση περιστροφή , το μισό κύκλο.

18. [Έρχεται η M_3 στον πίνακα και σχεδιάζει το σχήμα 1]

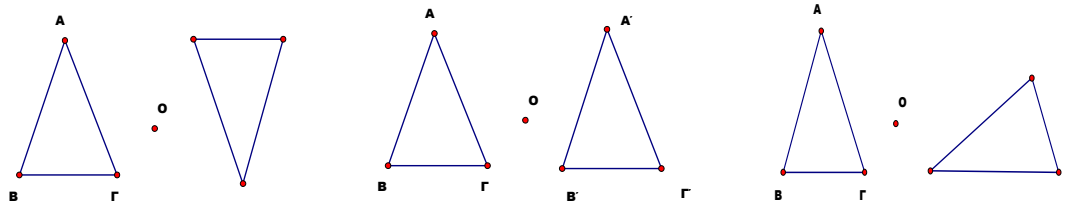
……..

21. [Έρχεται η M_4 και σχεδιάζει το σχήμα 2 και μετά από προτροπή της εκπ/κου συμβολίζει τα νέα σημεία με Α΄, Β΄, Γ΄]

22. Καθ: Άλλη πρόταση, να δούμε αν υπάρχει άλλη πρόταση.

23. M_5: Κυρία να έρθω;

25.[Έρχεται ο M_5 (έχει μαθησιακά προβλήματα) στον πίνακα και προσπαθεί να φτιάξει το τρίγωνο πλάγια, σχήμα 3]



Σχ1 **Σχ2** **Σχ3**

26. Καθ: Έχουμε λοιπόν 3 προτάσεις.

…….

<u>Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος</u>

[5-18,21-25] *Αλλαγή του πλαισίου* της δραστηριότητας.

Η καθηγήτρια αντικαθιστά το *πραγματικό* προς περιστροφή αντικείμενο με *γεωμετρικό σχήμα* (τρίγωνο) και τους ζητά να *εικάσουν* την πιθανή νέα θέση. Οι μαθητές δεν φαίνεται να έχουν πρόβλημα να χειριστούν το γεωμετρικό αντικείμενο.

[6-14,16-18,21-23,25-26] *Αλλαγή* ως προς τις *ενέργειες* επιτρέποντας *την αυτενέργεια των μαθητών*.

Η περιστροφή προσεγγίζεται σε αυτή τη φάση με βάση τη διαίσθηση των μαθητών.

Οι ενέργειες που ζητά η εκπ/κός αρχικά είναι η πλήρης περιστροφή του τριγώνου ώστε να δουν την ταύτιση με τον εαυτό του, και στη συνέχεια κατά μισή στροφή. Οι μαθητές προτρέπονται να συμμετάσχουν στη *διαισθητική προσέγγιση* εκθέτοντας τις προτάσεις τους. Παρ' όλο που η πρώτη πρόταση από τους μαθητές είναι και η ζητούμενη, η εκπ/κός ζητά και άλλες προτάσεις χωρίς να σχολιάσει την ορθότητα ή μη των προτάσεων. Αφήνει τη διαπίστωση για το ποιο είναι το σωστό σχήμα ως θέμα ανοιχτό για συζήτηση.

2° Κρίσιμο συμβάν

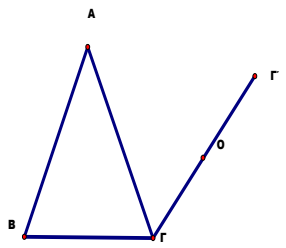
Διάλογος:

……..

26. Καθ: Ρωτάω τώρα το εξής: πώς θα μπορούσατε να τα βρείτε αυτά τα σημεία εσείς; [Εννοεί τα νέα σημεία που προκύπτουν κατά την μισή περιστροφή των Α, Β, Γ]

27. [Ο μαθητής M_6 σηκώνεται στον πίνακα]

28. Καθ: Έχουμε και διαβήτη αν χρειαστείς .



[Ο μαθητής M_6 βρίσκει μόνο το πιθανό σημείο όπου θα πέσει μετά την περιστροφή το σημείο Γ , κάνοντας χρήση του διαβήτη και ακολουθώντας το ημικύκλιο με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΓ . Δηλώνει ότι προεκτείνει την ΓΟ . Κάνει την υπόλοιπη κατασκευή στο περίπου με το χέρι.]

……..

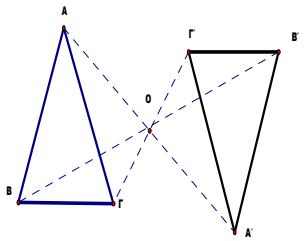
32. Καθ: Και πώς είσαι σίγουρος ότι τα Α΄ και Β΄ είναι στη σωστή θέση;

33. M_6: Γιατί θα γυρίσει ανάποδα και θα έρθουν εδώ πέρα ακριβώς;

34. Καθ: Άλλος τι θα μπορούσε να κάνει ;

35. M_7: Να έρθω;

36. [Ο M_7 με δεδομένο το παραπάνω σχήμα σχεδιάζει τα άλλα δυο σημεία Α΄ και Β΄ με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή με διαβήτη και ακτίνες τις ΟΑ και ΟΒ]



38. Καθ: Και πώς είμαστε σίγουροι τώρα ότι το σχήμα έχει κάνει μίση στροφή

39. M_8: Αν το δούμε με μοίρες από το Β στο άλλο Β δηλ τη διάμετρο, το Β΄ …,τότε η γωνία είναι 180° .

……

43. M_9: Αφού αν κάνουμε όλη τη στροφή ,έναν ολόκληρο κύκλο, καταλήγουμε στο ίδιο σχήμα , τότε το μισό του είναι το απέναντι

……..

64. M_{14}: Εγώ θέλω να πω ότι τα Γ και Γ΄ πρέπει να σχηματίζουν πάντα τη διάμετρο ενός κύκλου.

65. Καθ: Και γιατί αυτό;

66. M_{14}: Γιατί το καθένα πρέπει να απέχει ίσα με την ακτίνα

67. Καθ: Ο Παναγιώτης τώρα το μάζεψε όλο μαζί αυτό που ακούστηκε ,είπε ότι τα Α και Α΄ πρέπει να είναι πάντα στη διάμετρο για να έχουμε 180. Και να έχει γίνει ημικύκλιο.

…….

88. M_7: Κυρία θέλω να πω …..Αυτό είναι το αντίθετο της περιστροφής;

Γιατί αν από το Α φτάσω στο Ο και μετά το προεκτείνω άλλο τόσο, τότε …και κάνω το ίδιο με το Β και το Γ , τότε βρίσκω κατευθείαν το σωστό.

89. Καθ: Ναι ,ναι.

90. Καθ**:** Ο συμμαθητής σας λέει ότι αν πάρουμε την ακτίνα από το Ο μέχρι κάποιο σημείο του τριγώνου και προεκτείνουμε άλλο τόσο, βρίσκουμε πού θα βρεθεί το κάθε σημείο μετά την μίση περιστροφή.

91. Καθ**:** Ο συμμαθητής σας εδώ μας είπε ότι αν το σχεδιάσουμε με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε αμέσως τη νέα θέση του σχήματος.

92. Καθ**:** Εδώ παιδιά λοιπόν έχουμε ένα νέο είδος συμμετρίας που λέγεται όμως όχι πια συμμετρία ως προς άξονα , αλλά ως προς κέντρο συμμετρίας.

Εδώ δεν είχαμε άξονα αλλά ένα σημείο μόνο και θέλαμε η στροφή να γίνει ως προς το σημείο. Όταν έχω κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό σχήμα προκύπτει από περιστροφή . Δεν έχω πια δίπλωση όπως στη συμμετρία ως προς άξονα.

……..

<u>Συνοπτική ανάλυση του 2^{ου} συμβάντος</u>

[27-28,36,38-39,43,64-67,88-91] Διατήρηση ως προς τα *εργαλεία διαμεσολάβησης της μάθησης* και τις *ενέργειες* .(Χρήση των γεωμετρικών οργάνων στην πράξη από τους μαθητές)

Η *χρήση* του *διαβήτη* και *η ενέργεια* της *περιστροφής* οδηγεί τη σκέψη των μαθητών προς τη σωστή κατεύθυνση. Συνδέουν την μισή περιστροφή με τη διάμετρο του κύκλου και τα αντιδιαμετρικά σημεία, καθώς και με το μέτρο της αντίστοιχης γωνίας σε μοίρες (180°). Οι ιδιότητες των αντιδιαμετρικών στη συνέχεια οδηγούν με

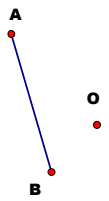
απολύτως λογικό τρόπο στην διατύπωση από τους ίδιους τους μαθητές, ενός πιο εύκολου τρόπου για την εύρεση των νέων σημείων χωρίς διαβήτη, με προέκταση και μέτρηση. Η διαπίστωση της ισοδυναμίας των δύο τρόπων προκύπτει άμεσα και αβίαστα χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια από την πλευρά της εκπαιδευτικού. Η ύπαρξη γεωμετρικών διαμεσολαβητικών εργαλείων και η παρότρυνση της εκπαιδευτικού για τη χρήση τους, βοηθά τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, ενώ ταυτόχρονα η εκπαιδευτικός ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών στο μετασχηματισμό της «δραστηριότητας» που ουσιαστικά κάνουν οι ίδιοι.

<u>3ο Κρίσιμο συμβάν</u>

Διάλογος:

……..

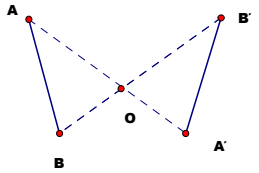
106. Καθ: Τώρα αν σας έδινα ένα ευθύγραμμο τμήμα πλάγιο. ΑΒ όπως αυτό που κάνω στον πίνακα Δοκιμάστε στα χαρτιά σας να βρείτε το συμμετρικό ως προς το σημείο Ο που σας δίνω. Δηλ να στρίψετε το ΑΒ κατά 180 μοίρες. Το Ο να είναι πιο κοντά στο Β. Πού θα βρεθεί το ΑΒ;



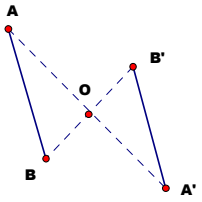
110. [Η καθηγήτρια περιφέρεται μέσα στην αίθουσα και ελέγχει τα σχήματα των μαθητών]

116. Καθ: Για δείτε λίγο , έχουμε δυο εκδοχές . Κάποιοι έκαναν αυτό …..περίπου το δείχνω (σχ1) … ……..[σχεδιάζει στον πίνακα]

117. Καθ: Και κάποιοι άλλοι έκαναν αυτό……(σχ2)



Σχ1



Σχ2

118. Μαθ: Το ίδιο δεν είναι;

119. Καθ: Δεν ξέρω, εσείς θα μου πείτε αν είναι το ίδιο. Εγώ σας δείχνω τι έχετε κάνει…Τι διάφορα υπάρχει στα δύο σχήματα; Οι μισοί κάνανε το πρώτο και οι άλλοι μισοί το δεύτερο σχήμα.

120. M_{15}: Νομίζω ότι στο πρώτο η απόσταση ΒΟ πρέπει να είναι ίση με την ΟΒ΄

121.Ίση είναι (Άλλος μαθητής)

122. Μαθ: Όχι δεν είναι. [αναφέρονται στο σχ1]

123. M_4: Και η ΟΑ με την ΟΑ΄ πρέπει να είναι το ίδιο.

124. Καθ**:** Δεν μου είπατε ότι πρέπει να είναι πάνω στη διάμετρο τα συμμετρικά;

126. Καθ: Για κοιτάξτε λίγο το Σχ1. Μου είπατε ότι πρέπει να είναι πάνω στη διάμετρο τα σημεία τα καινούρια. Η ΑΑ΄ είναι διάμετρος; Είναι το Ο κέντρο;

127. Μαθ: Όχι.

128. Καθ: Άρα λοιπόν θα'πρεπε να είναι ίση η ΑΟ με την ΟΑ ΄και η ΟΒ να είναι ίση με την ΟΒ΄ για να ναι πάνω στη διάμετρο. Όπως είναι εδώ.(δηλ στο σχ2) Αυτό είναι όλο. Εντάξει;

(χτυπάει το κουδούνι)

……

<u>Συνοπτική ανάλυση του 3^{ου} συμβάντος</u>

[116-126] Η μετάβαση από τον ένα τρόπο κατασκευής στον άλλο οδηγεί σε λανθασμένες ενέργειες από την πλευρά των μαθητών. Η *εκχώρηση* της «δραστηριότητας» στους μαθητές *αναδεικνύει τις παρανοήσεις* .

Ο νέος γεωμετρικός μετασχηματισμός με προέκταση και μέτρηση κατά ίσο τμήμα αντικαθιστά, τουλάχιστον προσωρινά, την έννοια της περιστροφής στο μυαλό των μαθητών οι οποίοι λειτουργούν πια με μετρήσεις. Αυτό το γεγονός οδηγεί σε παρανοήσεις. Η εκπαιδευτικός εκχωρώντας τη «δραστηριότητα» στους μαθητές αντιλαμβάνεται τις παρανοήσεις. Κατευθύνει πάλι τη σκέψη των μαθητών στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της περιστροφής με μέσο το διαβήτη και τη διάμετρο.

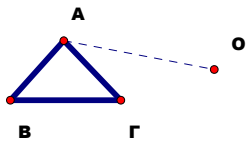
[Πιθανόν κάποιοι μαθητές να είναι ακόμα επηρεασμένοι από τη συμμετρία ως προς άξονα. Το σχήμα που έφτιαξαν (Σχ1) θα προέκυπτε με συμμετρία αυτού του τύπου. Η εκπαιδευτικός εκθέτει τις ιδέες των μαθητών στον πίνακα για τις αξιολογήσουν οι ίδιοι. Επιμένει στην εμπέδωση της νέας έννοιας].

Εκπαιδευτικός Β΄

1η «δραστηριότητα»: **«Συμμετρία ως προς σημείο»**

1ο Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:

85-86. Καθ: Στο πρόχειρο κάντε το εξής: Αν εδώ είχα ένα σημείο Ο και το τρίγωνο ΑΒΓ….Θέλω με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ να φτιάξετε ένα ημικύκλιο δηλ, να στρίψετε…{Δείχνει με τα χέρια τη στροφή}



87. Καθ: Αν πάρω κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ και στρίψω το Α ως προς κέντρο το Ο κατά 180°,και το ίδιο να γίνει και με το Β και με το Γ
Να το δούμε φτιάξτε το.

{Οι μαθητές συνομιλούν μεταξύ τους υπάρχει μια μικρή σύγχυση …δεν έχουν κατάλάβει ακριβώς τι θέλει ο καθηγητής και κυρίως δεν έχουν φέρει διαβήτη μαζί τους..}

88. Καθ**:** Μισό λεπτό να πω κάτι για το διαβήτη που είπατε. Για προσέχτε τι θα κάνουμε εδώ……Αν είναι έτσι και το στρίψω κατά 180° πού θα βγει; {Δείχνει με το σχολικό διαβήτη στον πίνακα}

89. M_3,M_5: Ακριβώς απέναντι
90. Καθ**:** Άρα έχουμε άλλη λύση που μπορούμε να κάνουμε αν δεν έχουμε διαβήτη;
91. M_3: Να τραβήξουμε μια γραμμή
92. Καθ**:** Το καταλάβαμε;
93. Όχι. (μαθητές)
94. Καθ: Όχι; Να το ξαναπούμε
95. Καθ: Βλέπετε τι κάνω εδώ; Αν το στρίψω κατά 180° πού θα βγει; {Πάλι δείχνει με το διαβήτη}
96. M_1**:** Απέναντι
97. Καθ**:** Δεν θα είναι πάνω στην ευθεία ;

98. Ναι θα είναι. (Μαθητής)

99. Καθ: Ναι ,άρα μπορείς να το κάνεις τότε.

……

106. Καθ: Να εξηγήσω πάλι γιατί κάποιος μου είπε ότι δεν το κατάλαβε.

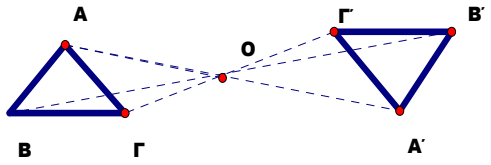
107. Καθ: Έχουμε το τριγωνάκι ΑΒΓ και ένα σημείο Ο. Λέμε το Ο… το ενώνουμε με το Α… το ΟΑ δεν μας νοιάζει πόσο είναι …όσο μας βγει. Το ΟΑ το στρέφουμε κατά 180° ,δηλ το Α να κάνει μια στροφή, ένα ημικύκλιο. Με κέντρο το Ο και ακτίνα την ΟΑ θα σημειώσουμε πού θα πέσει. Και μετά θα κάνουμε το ίδιο για το Β και το ίδιο για το Γ.

…….

{Εργάζονται και φωνάζουν τον καθηγητή να ρωτήσουν αν αυτά που έφτιαξαν είναι σωστά. Ο καθηγητής περιφέρεται από θρανίο σε θρανίο}.

…….

{Μια μαθήτρια σηκώνεται στον πίνακα και ο καθηγητής τη βοηθά να φτιάξει το συμμετρικό του τριγώνου με προέκταση και μέτρηση}.



……..

119. Καθ: Ακούστε λίγο εδώ τι κάναμε το Α,… το στρίψαμε κατά 180 άρα το Α με το Α΄ είναι αντιδιαμετρικά Σωστά; Άρα είναι στην ίδια ευθεία

120. Καθ: Και τα ΟΑ με το ΟΑ΄ τι είναι;

121. M_5: Ίσα

122. Καθ: Γιατί;

123. M_5**:** Γιατί το ΑΟ το μετρήσαμε. Και κάναμε το ίσο.

124. Καθ: Είναι στον ίδιο κύκλο ε;

125. Καθ: Ακούστε λίγο αν το κάναμε με το διαβήτη θα ήταν αυτό εδώ ίσο με αυτό εδώ. Τώρα επειδή δεν είχε διαβήτη η συμμαθήτριά σας ,το έκανε με το χάρακα άρα τι έκανε;…. Μέτρησε αυτό και προέκτεινε άλλο τόσο. Άρα η στροφή κατά 180° είναι σαν να παίρνουμε το συμμετρικό του κάθε σημείου ως προς το κέντρο**.**

{Δείχνει με το διαβήτη}

.....

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[85-87] *Αλλαγή του πλαισίου* της δραστηριότητας.

Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει στον πίνακα ένα καθαρά γεωμετρικό σχήμα (ένα τρίγωνο) και ζητά από τους μαθητές να το περιστρέψουν κατά μισό κύκλο με κέντρο ένα δοθέν σημείο Ο. Οι μαθητές δεν φαίνεται να προβληματίζονται από το γεωμετρικό πλαίσιο της «δραστηριότητας».

[88-91,95-99] *Αλλαγή* ως προς τα *εργαλεία μάθηση και τις ενέργειες*.

Το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν διαβήτη για να πραγματοποιήσουν την περιστροφή, αποτελεί αφορμή για την απευθείας αναφορά σε ισοδύναμο τρόπο κατασκευής. Η έλλειψη του κατάλληλου γεωμετρικού οργάνου καθορίζει τον τρόπο κατά τον οποίο προσανατολίζεται η διδασκαλία. Η *έννοια της στροφής* αναγκαστικά αντικαθίσταται εξ' αρχής από την κατασκευή συμμετρικού με υποδεκάμετρο (*Μέτρηση*). Οι μαθητές παρ' όλο που δυσκολεύονται αρχικά, κατασκευάζουν το ζητούμενο σχήμα. Χαρακτηριστικό της όλης διαδικασίας είναι ο διαφορετικός τρόπος γεωμετρικού μετασχηματισμού με τον οποίο φαίνεται ότι τελικά συνδέουν τη συμμετρία ως προς σημείο από τη μια μεριά ο εκπαιδευτικός, και από την άλλη οι μαθητές. Ο πρώτος φαίνεται σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας να τη βλέπει ως *στροφή* ακτίνας ΟΑ ενός κύκλου , ενώ στο μυαλό των μαθητών φαίνεται να επικρατεί η *μέτρηση* και *προέκταση* κατά ίσο τμήμα.

[92-94,106] Οι μαθητές δείχνουν μπερδεμένοι από τον *τρόπο κατασκευής* με *μέτρηση*.

Οι μαθητές αρχικά φαίνεται να μην κατανοούν. Ο καθηγητής εξηγεί πολλές φορές τη διαδικασία της προέκτασης και μέτρησης, προσπαθώντας συγχρόνως να τονίσει την ισοδυναμία των δυο τρόπων κατασκευής.

2ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

153. M_3: Το σημείο μπορεί να είναι οπουδήποτε;
154. Καθ: Οπουδήποτε! Έλα να το κάνεις μιας και το είπες
155. Καθ: Αν φέρναμε εδώ ένα σημείο το Κ ας πούμε…. Να το βάλουμε εδώ

{Βάζει πιο ψηλά ένα άλλο σημειο ενώ διατηρεί όλο το προηγούμενο σχήμα}

156. Καθ: Πάρε ετσι πρόχειρα……πάρε και το χάρακα να σε διευκολύνει

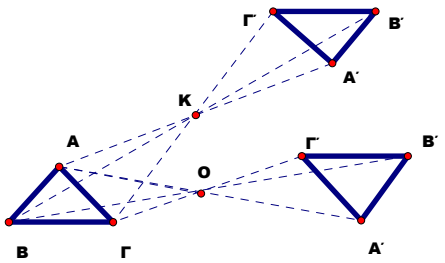
157. M_3: Δηλ πάλι θα τραβήξουμε από δω γραμμή εδώ πάνω και πάλι από εδώ;

158. Καθ: Ναι πάλι

{Η μαθήτρια φτιάχνει τις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ. Ο καθηγητής βοηθά και πάλι στο σχήμα}

……

164. Καθ: Βαλε Γ΄ ,Β, ΄Α΄ και ένωσε τα. Αυτά μεταξύ τους είναι ίσα.



165. M_3: Άρα γίνεται παντού. Όπου και να είναι το σημείο.

166. Καθ: Το καταλάβατε αυτό που έκανε; Τι ήθελε να δει; Αν όπου κι αν είναι το κέντρο….αν πάρουμε το συμμετρικό του…..

167. M_3: Αυτά δεν είναι ίδια; Είναι;

{Δείχνει τα δύο τρίγωνα που σχηματίστηκαν ως συμμετρικά με κέντρο πρώτα το Ο και στη συνέχεια με κέντρο το Κ}

168. Καθ: Αυτά μεταξύ τους είναι ίσα. Αυτό είναι στροφή του τριγώνου ως προς αυτό (εννοεί το Ο) ενώ αυτό είναι στροφή του ίδιου τρίγωνου ως προς αυτό.(εννοεί το Κ)

169. Καθ: Να ρωτήσω κάτι.. ,αυτό βέβαια θα το δούμε αργότερα όταν δούμε τα τρίγωνα… Αυτό είναι σαν να έχει στρίψει τούτο κατά 180° με κέντρο το Κ.

Αυτό πάλι είναι σαν να έχει στρίψει πάλι κατά 180°. (Δείχνει το άλλο τρίγωνο)

Αυτό με τούτο μεταξύ τους τι είναι;

170. M_4: Ίσα

……

183. Καθ: Δηλαδή είτε πάρω ένα κέντρο εδώ και το στρίψω και έρθει εδώ, είτε πάρω ένα άλλο κέντρο και το στρίψω και έρθει εκεί το ίδιο πράγμα στρίβει κατά 180° .

Δεν αλλοιώνεται, δεν αλλάζει. Δεν έχω σμίκρυνση ή μεγέθυνση. Δεν αλλάζει κλίμακα. Το καταλάβατε αυτό;

184. Μαθ: Ναι. (όλοι)

Συνοπτική ανάλυση του 2ου συμβάντος

[153,165,167] Οι μαθητές δίνουν την *πρόκληση για* το *μετασχηματισμό* της «δραστηριότητας».

Η παρατήρηση από την πλευρά της μαθήτριας για την αλλαγή του σημείου αναφοράς, οδηγεί το μάθημα σε άλλη κατεύθυνση. Ο εκπαιδευτικός ενεργεί άμεσα και αξιοποιεί το ερώτημα δίνοντας ένα παράδειγμα αλλαγής του σημείου ως προς το οποίο βρίσκουμε το συμμετρικό. Το συμμετρικό σχήμα κατασκευάζεται από τους μαθητές με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού.

[154-158,164] *Μετασχηματισμός της «δραστηριότητας»* προς όφελος των μαθητών.

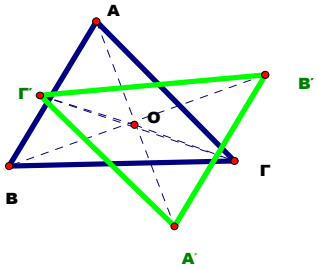
Η αλλαγή του σημείου αναφοράς γίνεται πάνω στο προηγούμενο σχήμα και αυτό δίνει την ευκαιρία σε όλους να δουν ταυτόχρονα δυο συμμετρικά σχήματα του ίδιου τριγώνου.

[168-170,183] Έμφαση στον *γεωμετρικό μετασχηματισμό μέσω περιστροφής* με στόχο την αιτιολόγηση της ισότητα συμμετρικών σχημάτων. (Σημαντική η κατασκευή χρησιμοποιώντας ως *εργαλείο* το διαβήτη)

Ως αποτέλεσμα της αλλαγής του σημείου ως προς το οποίο βρίσκεται το συμμετρικό του τριγώνου έρχεται η απόπειρα εικασίας εκ μέρους της μαθήτριας για την ισότητα των δύο συμμετρικών του τριγώνου. Ο καθηγητής απαντά πως είναι ίσα, γιατί και τα δυο είναι στην ουσία η περιστροφή του ίδιου σχήματος αλλά ως προς διαφορετικό κέντρο. Επιπλέον, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της περιστροφής του σχήματος κατά μισό κύκλο είναι και ο μόνος που μπορεί να δικαιολογήσει την ισότητα των συμμετρικών από τη στιγμή που οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τίποτε ακόμη πάνω στην ισότητα τριγώνων. Αυτός είναι και ένας ακόμη λόγος που ο καθηγητής επιμένει στην περιστροφή με κέντρο το σημείο αναφοράς όσον αφορά τον κατασκευαστικό τρόπο προσέγγισης.

3ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:



191. M_4: Υπάρχει περίπτωση το σημείο να είναι μέσα στο τρίγωνο; (μαθητής)

192. Καθ: Ναι υπάρχει . Για κοίταξε. Αν έχεις ένα τρίγωνο και έχεις αυτό το σημειο.

{Παίρνει ένα σημειο μέσα σ ένα τρίγωνο ΑΒΓ και σχεδιάζει με προεκτάσεις κατά ίσα τμήματα, το συμμετρικό του, Α΄Β΄Γ΄].

194. Καθ: Καταλάβατε αυτό που ρώτησε; Παίρνω τα συμμετρικά των Α, Β, Γ. Αν το στρίψω αυτό το τρίγωνο με κέντρο αυτό κατά 180° θα συμπέσει με το συμμετρικό του.

196. Καθ: Λοιπόν ολοκληρώνουμε…. Όταν έχουμε ένα σημείο Α και ένα κέντρο συμμετρίας Ο, πώς βρίσκουμε το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Ο;

198. M_8: Αφού πρέπει να στρίψει κατά 180° , ενώνουμε το Α με το Ο και προεκτείνουμε άλλο τόσο στη ίδια ευθεια.

199. Καθ: Αν έχω ένα οποιαδήποτε σχήμα τι θα κάνω;

200. Καθ: Για κάθε σημειο του σχήματος θα κάνουμε το ίδιο πράγμα και θα είναι σαν να έχουμε στρίψει το σχήμα κατά 180.

(Χτυπά το κουδούνι!!!)

<u>Συνοπτική ανάλυση του $3^{ου}$ συμβάντος</u>

[191] Οι μαθητές δίνουν εκ νέου την *πρόκληση για* το *μετασχηματισμό* της «δραστηριότητας»

Ο μαθητής ρωτώντας αν το σημείο ως προς το οποίο γίνεται η περιστροφή μπορεί να είναι μέσα στο σχήμα, δείχνει τη κατεύθυνση της σκέψης των μαθητών και το ενδιαφέρον εκ μέρους τους, γεγονός που με την κατάλληλη αντιμετώπιση θα μπορούσε να οδηγήσει σε πραγματική μαθηματική εμπλοκή .

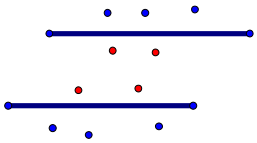
[192,194,196,199-200] Η «δραστηριότητα» *μετασχηματίζεται* προς όφελος των μαθητών.

Η «*συμμετρία ως προς σημείο*» αρχίζει και προσεγγίζει στην παράγωγη έννοια του «*κέντρου συμμετρίας*» ενός σχήματος. Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί την ευκαιρία για να μετασχηματίσει τη δραστηριότητα δίνοντας τη νέα διάσταση της μεταφοράς του σημείου ως προς το οποίο γίνεται η περιστροφή μέσα στο ίδιο το σχήμα. Και ενώ κάνει ο ίδιος το νέο συμμετρικό του τριγώνου, οι μαθητές φαίνεται ότι αρχίζουν να βλέπουν πια και οι ίδιοι τη συμμετρία ως περιστροφή. Ο παράγοντας «χρόνος» όμως δεν επιτρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα που μόλις αρχίζει, να εξελιχθεί.

<u>2η «δραστηριότητα»</u>: «Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία»

<u>1ο Κρίσιμο συμβάν</u>
Διάλογος:

37. Καθ: Τώρα αυτές οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των δυο παραλλήλων και της τέμνουσας ....Έχουμε ένα ειδικό τρόπο να τις ονομάζουμε. Το πρώτο είναι αν είναι ανάμεσα στις παράλληλες ή απ' έξω.



38. Καθ: Όπως θα λέγαμε, αν είχαμε δυο δρόμους και είχαμε κάποιο σπίτι εδώ ή κάποιο σπίτι εδώ. Αυτό τι διαφορά θα έχει με τούτο; Αυτό είναι….(σπίτια εννοεί τα σημεία)
39. M_4: Είναι πάνω στο δρόμο..
40. Καθ: Όχι αυτοί είναι οι δρόμοι .Πάνω στο δρόμο θα ήταν εδώ.(δείχνει πάνω στις ευθείες).
41. Καθ: Αυτά τα σπίτια σε σχέση μ' αυτά και μ' αυτά τι διαφορά έχουν;
42. M_5:Είναι ανάμεσα.
43. Καθ**:** Αυτά είναι ανάμεσα ενώ αυτά….;
44. M_5: Κι αυτά είναι πάνω.
45. Καθ: Κι αυτά είναι απ' έξω. Άρα αυτά είναι ανάμεσα στους δρόμους και αυτά είναι έξω από τους δρόμους. Ωραία ; Αυτό το λέμε «εντός» κι αυτό «εκτός» .. Συμφωνούμε;
(φέρνει και μια τέμνουσα των δυο παραλλήλων)
46. Καθ: Δυο γωνίες, ή εν πάση περιπτώσει , όλες αυτές τις γωνίες που είναι ανάμεσα στις παράλληλες τις λέμε «εντός». Ενώ αυτές που είναι έξω από τις παρ/λες τις λέμε «εκτός» . Όπως θα λέγαμε εδώ ότι τα σπίτια αυτά είναι ανάμεσα στους δυο δρόμους και τα άλλα είναι απ' έξω. Εντάξει; Ωραία. Άρα λοιπόν «εντός» γι' αυτές τις γωνίες και «εκτός» για αυτές .

. …….
47. Καθ: Τώρα αν έχουμε την τέμνουσα , προσέξτε λίγο , αν οι γωνίες είναι προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ,όπως είναι αυτές εδώ ή όπως είναι αυτές, τότε το λέμε λίγο αρχαιοπρεπώς… «επί τα αυτά» δηλ ότι είναι επί το αυτό μέρος …….

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[38-40] *Αλλαγή του πλαισίου* της «δραστηριότητας»

Ο εκπαιδευτικός σχεδίασε στον πίνακα δύο οριζόντιες παράλληλες (*αναπαράγοντας το φαινόμενο του προτύπου*), οι οποίες αντιπροσωπεύουν δυο δρόμους . Τις ονόμασε ε_1 και ε_2 και *κάλεσε τους μαθητές να εκφράσουν χωρικές σχέσεις*.

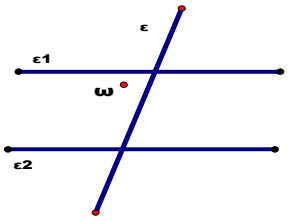
[41-45] Οι μαθητές δείχνουν να μπερδεύονται από την τροποποίηση του πλαισίου. Δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται τι τους ζητά ο καθηγητής, με αποτέλεσμα να μη δίνουν αρχικά ικανοποιητικές απαντήσεις.

[45-47] Ο καθηγητής *δίνει τις χωρικές ονομασίες* των γωνιών που σύμφωνα με τη «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου αναμένεται να «*ανακαλυφθούν*» από τους μαθητές.

Ανακοινώνει τις επίσημες ονομασίες «εντός» , «εκτός» για τις γωνίες που σχηματίζονται χωρίς να ζητά από τους μαθητές να βρουν κοινές ονομασίες όπως η δραστηριότητα του βιβλίου.Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο χειρίζεται την εισαγωγή των χωρικών εννοιών των γωνιών «εναλλάξ» και «επί τα αυτά» σε σχέση με την τέμνουσα.

2ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:



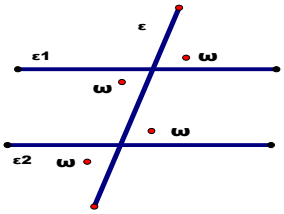
81.Καθ: Θα δούμε τώρα ποιες (γωνίες) τραβάνε περισσότερο το ενδιαφέρον.

Θέλω να μου πείτε από αυτές όλες τις γωνίες *ποιες βλέπετε να είναι ίσες*.

82. Καθ: Αν βάλω πχ αυτή ω!!

83. M_{10}: Η «εναλλάξ» . Αυτή η από κάτω.

(Ο μαθητής υποδεικνύει και ο καθηγητής σημειώνει. Στη συνέχεια ο μαθητής σηκώνεται στον πίνακα και σημειώνει πάνω στο σχήμα όλες τις γωνίες που είναι ίσες με την ω).



……..

87. Καθ: Αυτές οι δυο κατ' αρχήν μεταξύ τους γιατί είναι ίσες; Μπορεί να μου πει κάποιος; Για πες!

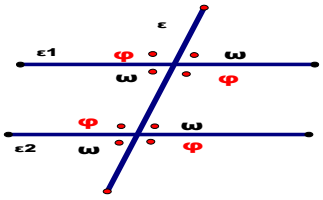
88. M_4: Κατακορυφήν

……..

92. Καθ: Αν τώρα έχω τη γωνία φ; Ποιος θα ΄ρθει πάνω;

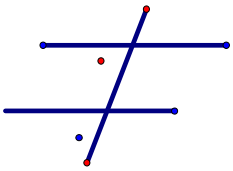
94. Καθ: Ποιες βλέπεις ίσες μ' αυτή;

(Ο μαθητής M_8 σημειώνει, πάλι διαισθητικά.)



……..

97. Καθ: Τώρα,… αυτή γιατί είναι ίση μ' αυτή; Αυτό είναι το θέμα. Εμείς τι είπαμε;…(δείχνει τις «εντός - εκτός και επί τα αυτά» που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα)



98. M_{11}:Επειδή οι πάνω φ και ω είναι παραπληρωματικές και εφεξής. Και το ίδιο ισχύει και για τις από κάτω

99. Καθ: Εμείς όμως λέμε… γιατί αυτή και αυτή είναι ίσες;

Αυτή με αυτή είναι 180.(Εννοεί τις παραπληρωματικές αριστερά της τέμνουσας στο πάνω σημείο τομής)

Αυτή μ' αυτή 180. (Εννοεί τις παραπληρωματικές αριστερά της τέμνουσας στο κάτω σημείο τομής)

Αυτές γιατί να είναι ίσες; Αυτή με τούτη τι είναι…; (Εννοεί τις «εντός και επί τα αυτά» γωνίες αριστερά της τέμνουσας).

100. 180° (Όλοι μαζί)

……..

[Ο καθηγητής έχει διδάξει σε προηγούμενο μάθημα ότι το άθροισμα των «εντός και επί τα αυτά» γωνιών που σχηματίζονται από δυο παράλληλες και μια τέμνουσα είναι 180° βασισμένος σε ιστορικό σημείωμα του βιβλίου. Επίσης έκανε μια επαρκή υπενθύμιση της ιδιότητας αυτής στην αρχή του παρόντος μαθήματος.]

103. Καθ: Τι είπαμε στην αρχή; Ότι αν έχουμε δυο παράλληλες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία αυτές οι δυο είναι 180. (Εννοεί τις «εντός και επί τα αυτά» γωνίες). Δεν είναι ούτε λιγότερο ούτε περισσότερο. Άρα αυτές οι δυο, οι ω και η φ τι είναι;
……

<u>Συνοπτική ανάλυση του $2^{ου}$ συμβάντος</u>

[81-82,94] *Αλλαγή* των *εργαλείων μάθησης*. (Αντί για *μέτρηση* με μοιρογνωμόνιο, *διαισθητική προσέγγιση*)

Το σχολικό βιβλίο χειρίζεται το θέμα της ισότητας των γωνιών με *μέτρηση-σύγκριση* αποτελεσμάτων με *χρήση μοιρογνωμονίου*. Ο καθηγητής αρχικά προτρέπει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη *διαίσθηση* για να βρουν ποιες γωνίες είναι ίσες.

[97-100,103] *Αλλαγή* των *εργαλείων μάθησης*. Χρήση *αποδεικτικής διαδικασίας*. Ο εκπαιδευτικός δρα μόνος. Η αποδεικτική διαδικασία δεν εκχωρείται παρά μόνο φαινομενικά στους μαθητές. (Δεν είναι σίγουρο ότι οι μαθητές κατανόησαν τη διαδικασία)

Ο καθηγητής ξεφεύγει από το διαισθητικό πλαίσιο και αρχίζει να ζητά *αιτιολόγηση* με βάση λογικές προτάσεις. Πιέζει για επεξηγήσεις. Προσπαθεί να βάλει τους μαθητές σε μια *αποδεικτική διαδικασία*. Ο χρόνος που δίνει στους μαθητές όμως δεν είναι επαρκής ώστε να μπορέσουν να σκεφτούν και να απαντήσουν. Απαντά κατ' ουσία ο ίδιος στα πιο πολλά από τα ερωτήματα που θέτει. Η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι βέβαιο ότι έγινε κατανοητή από τους μαθητές. *Η μέτρηση με τη βοήθεια εργαλείων όπως το μοιρογνωμόνιο αντικαταστάθηκε από ένα μίγμα διαίσθησης και αποδεικτικής διαδικασίας*.

Σχόλιο: Στις πρόσθετες ερωτήσεις και δραστηριότητες στο βιβλίο του εκπαιδευτικού προτείνεται και εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης για την ισότητα των «εντός και εναλλάξ» γωνιών που βασίζεται στην συμμετρία ως προς σημείο.

3° Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:

…….

114. Καθ: Όμως επαναλαμβάνω παιδιά προσέξτε αυτό το σημείο. Εντάξει! Πολλά ονόματα μπορείς να βρεις μπερδεμένα . *Αυτές που κυρίως μας ενδιαφέρουν* είναι αυτές οι δυο οι «εντός-εναλλάξ» που όταν είναι παράλληλες οι ευθείες είναι πάντα μεταξύ τους ίσες. Όπως και αυτές οι δυο . Άρα ως σημαντικές κρατάμε τις «εντός-εναλλάξ» που είναι πάντα ίσες. Και οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» που είναι επίσης πάντα ίσες. Σωστά; Οι «εντός-εναλλάξ» και οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά», συνήθως στα σχήματα είναι αυτές που πιο πολύ απ' όλες χρησιμοποιώ.

……..

117. M_4: Και τις κατακορυφήν δεν τις χρησιμοποιούμε;

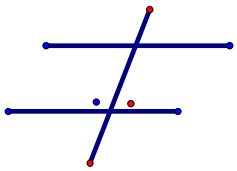
118. Καθ: Ναι εντάξει. Αλλά το κατακορυφήν είναι γενικό.

119. M_4: Και τις παραπληρωματικές;

120. Καθ: Ναι εντάξει . Λέμε για *παράλληλες που τέμνονται από τρίτη*. Άρα όταν είναι παράλληλες ξέρουμε ότι οι «εντός-εναλλάξ» είναι ίσες και *αντίστροφα* αν οι «εντός-εναλλάξ» είναι ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.*

121. Καθ: Επίσης οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» είναι ίσες . Γιατί συνήθως αυτό περισσότερο μας ενδιαφέρει να συνδυάσουμε.

123. M_{10}: Θέλω να ρωτήσω…αυτές οι δυο οι γωνίες τι είναι μεταξύ τους;



124. Καθ**:** Αυτές εδώ; ….Αυτές τώρα εντάξει….. αυτές οι δυο γωνίες είναι δυο παραπληρωματικές γωνίες 180.. οι οποίες δεν μας νοιάζει ιδιαίτερα..

125. M_{10}:Είναι «εντός-εναλλάξ»

126. Καθ: Εντάξει είναι «εντός» και «εναλλάξ», αλλά σας είπα δεν μας πολυενδιαφέρει. Σας είπα ότι κυρίως μας ενδιαφέρουν οι «εντός-εκτός και επί τα αυτά» και οι «εντός-εναλλάξ». Ωραία;

Τις άλλες όμως τις περίεργες εντάξει ……

* (Ο καθηγητής δίνει και την αντίστροφη πρόταση όπου η ισότητα των κατάλληλων γωνιών συνεπάγεται την παραλληλία. Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται καμία αναφορά στην αντίστροφη πρόταση)**.**

Συνοπτική ανάλυση του 3ου συμβάντος

[114-121] Αυτό που ο εκπαιδευτικός θεωρεί ως σημαντικό καθορίζει την εξέλιξη της διδασκαλίας. Δεν ακολουθεί τη σκέψη των μαθητών ώστε να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους.

Η *χωρική αναγνώριση* και ονομασία των γωνιών που «*συνήθως χρησιμοποιούνται*» φαίνεται να έχει μεγαλύτερη βαρύτητα απ' ότι η *εννοιολογική κατανόηση της μεταφοράς και ισότητας γωνιών μέσω παραλλήλων*.

Ο καθηγητής αναλώνεται σε μια διαδικασία να δείξει στους μαθητές ποιες είναι εκείνες οι γωνίες που συνήθως εμφανίζονται ως σημαντικές στις ασκήσεις και τις εφαρμογές. Στην προσπάθειά του αυτή δεν διευκρινίζει όμως ότι οι γωνίες που συνήθως μας ενδιαφέρουν είναι ζεύγη που η μια έχει την κορυφή της στο ένα σημείο τομής της ε_1 και της τέμνουσας , ενώ η άλλη στο άλλο σημείο τομής. Επικεντρώνεται στην ονομασία τους και δεν κάνει πιο συγκεκριμένες τις γωνίες ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές ποιες είναι αυτές που διατηρούν την ιδιότητα της ισότητας.

[123-126] Η *δραστηριότητα δεν μετασχηματίζεται* προς όφελος των μαθητών από τον εκπαιδευτικό παρ' όλο που δίνεται η ευκαιρία προς αυτή την κατεύθυνση από τους ίδιους τους μαθητές. Το σημαντικότερο εννοιολογικό κομμάτι παραμερίζεται δίνοντας προτεραιότητα στην χωρική ονομασία και αναγνώριση.

Οι γωνίες (στο σχήμα) που επικαλείται ένας μαθητής σύμφωνα με τον τρόπο που δόθηκε η χωρική ονομασία από τον εκπ/κο, λέγονται «εντός-εναλλάξ» με τη διαφορά ότι έχουν κοινή κορυφή. Δεν είναι όμως ίσες αλλά παραπληρωματικές. Η πρόκληση εκ μέρους του μαθητή δεν γίνεται αντιληπτή από τον εκπαιδευτικό.

4ο Κρίσιμο συμβάν

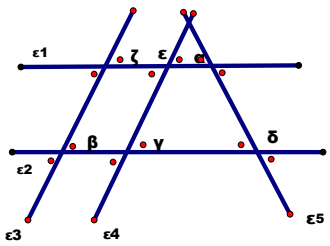
Διάλογος:

Φάση εφαρμογής και εμπέδωσης

[Επίλυση άσκησης (2/216)]

(αρχικά ο καθηγητής φτιάχνει το σχήμα στον πίνακα)

…….



α=β=70°

161. M_{12}: Κύριε δεν είναι 70° . Είναι 60° !!!

(Η μαθήτρια μετράει τη γωνία β με το μοιρογνωμόνιο)

162. Καθ: Μη το μετράς. Εμείς παίρνουμε ως σωστό αυτό που μας λέει.

…….

178-188 . (Ένας μαθητής έρχεται στον πίνακα και κάνει σωστά τις μεταφορές των γωνιών από παράλληλη σε παράλληλη δικαιολογώντας πλήρως όλες του τις πράξεις, γεγονός που πιθανόν να καταδεικνύει ότι ένα μέρος των μαθητών κατανόησαν το διαδικαστικό μέρος της ισότητας γωνιών στα σημεία τομής των παραλλήλων).

……

189. Καθ: Εκείνο που έχει σημασία είναι ότι πρέπει να μας πει ποιες είναι παράλληλες. Μας έχει πει ότι είναι παράλληλες η $ε_1$ με την $ε_2$ και η $ε_3$ με την $ε_4$.

190. Καθ: Γιατί αν δεν ξέρουμε ότι αυτές είναι παράλληλες τότε δεν μπορούμε να παίρνουμε αυθαίρετα ότι μας έρχεται.

191. M_9**:** Μα αφού το βλέπουμε(μαθήτρια)

192. Καθ: Το βλέπουμε είναι σχετικό. Στο σχήμα δεν το λέμε: «έτσι μου φαίνεται». Προσέξτε λίγο γιατί μπορεί να την πατήσετε σε άσκηση που ίσως πέσει σαν θέμα Ότι σας δηλώσουνε θα παίρνετε σαν δεδομένο!!

……

205. Καθ: Θα πρέπει να το λέει ότι αυτές είναι παράλληλες. Σύμφωνοι ;

Αν δεν το λέει, δεν θα τις πάρουμε εμείς σαν δεδομένο γιατί «ετσι μας φαίνεται».

<u>Συνοπτική ανάλυση του 4^{ου} συμβάντος</u>

[161-162,190-192,205] Εκ νέου *αλλαγή στα εργαλεία μάθησης* . Από το «φαίνεται και τη *διαίσθηση*, στον *υπολογισμό βάσει δεδομένων*.

Ο καθηγητής τονίζει επανειλημμένα *τη σημασία της υπόθεσης (δεδομένων) στη γεωμετρία*. Προσπαθεί να δείξει στους μαθητές ότι το σχήμα δεν αποτελεί πάντα αξιόπιστη πηγή πληροφοριών, καθώς ο τρόπος με τον οποίο αποδίδεται μπορεί να

παραπλανά. Ο ίδιος στο 2^{ο} κρίσιμο συμβάν είχε ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη διαίσθηση τους για να συγκρίνουν γωνίες.(Δεν δίνει στους μαθητές επαρκείς εξηγήσεις για τις μεθόδους προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών).

Εκπαιδευτικός Γ΄

1η «δραστηριότητα» : « Στοιχεία τριγώνου –Είδη τριγώνων»

1ο Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:

……

40. Καθ: Έχω λοιπόν 3 κορυφές και 3 πλευρές του τριγώνου ....ΑΒ ,ΒΓ, ΑΓ. Αυτά παιδιά ονομάζονται και κύρια στοιχεία του τριγώνου.

41. Καθ: Όταν θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο ή θα σχεδιάσουμε τρία σημεία πάνω στο επίπεδο και θα τα συνδέσουμε με ευθύγραμμα τμήματα,……. είναι σωστή αυτή η πρόταση που είπα; Θα σχεδιάσω 3 σημεία πάνω στο επίπεδο και θα τα συνδέσω με ευθύγραμμα τμήματα. Θα δημιουργηθεί τότε σίγουρα τρίγωνο;

42. M_3: Όχι δεν είμαστε σίγουροι;

43. Καθ: Πότε θα γίνει αυτό; Μπορείς να σηκωθείς πάνω στον πίνακα και να σχεδιάσεις τρία σημεία πάνω στο επίπεδο που να μη σχηματίζουν τρίγωνο;

[Ο μαθητής σκέφτεται.]

44. Καθ: Όσο σκέφτεται ο συμμαθητής σας , υπάρχει περίπτωση να έρθει κάποιος στον πίνακα και να σχεδιάσει 3 σημεία που αν τα συνδέσει κανείς μεταξύ τους να μη δημιουργείται τρίγωνο ; Το σκέφτηκες; [Ο M_3 σηκώνει το χέρι]

45. M_3: Όχι δεν γίνεται!

46. Καθ: Δεν γίνεται;

47. M_3: Άμα σχεδιάσουμε 3 σημεία δεν υπάρχει περίπτωση να μη βγει τρίγωνο.

48. Καθ: Έχεις άλλη άποψη; [απευθύνεται στο μαθητή M_1 που σηκώνει το χέρι του]

49. M_1: Αν είναι σε μια ευθεία.

50. Καθ: Άκουσες τι είπε ο συμμαθητής σου; Αν είναι πάνω σε μια ευθεία ….Αν αυτά τα σημεία είναι πάνω σε μια ευθεία ξέρει κανείς πως τα ονομάζουμε ;

51. M_{10}: Στην ίδια ευθεία .

52. Καθ: Στην ίδια, ναι πάνω σε μια ευθεία ,στην ίδια.

53. M_{10}: Νομίζω δεν είμαι σίγουρος …Διαδοχικά;

54. Καθ: Όχι διαδοχικά…Το μαζί με συν ..το ξεχάσαμε; 3 μη συνευθειακά σημεία…. το ξεχάσατε!

55. Δεν το έχουμε πει άλλη φορά . Πρώτη φορά το ακούω.(Μαθητής)

56. Καθ: Το έχουμε πει το ξεχάσατε ..Με συν που σημαίνει μαζί.

……..

Συνοπτική ανάλυση του 1ου συμβάντος

[41-54] *Μετασχηματισμός* ως προς τη *«μαθηματική πρόκληση»* της «δραστηριότητας». *Προϋποθέσεις* ώστε *να ορίζονται* τα προς ταξινόμηση σχήματα της «δραστηριότητας» Ο εκπαιδευτικός, πριν προχωρήσουν στην δραστηριότητα της κατάταξης των τριγώνων σε ομάδες, θέτει ως ερώτημα το 'ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των σημείων (κορυφών) του τριγώνου ώστε αυτό να μπορεί να υπάρξει ως γεωμετρική οντότητα'. Το γεγονός του εκφυλισμού του επίπεδου σχήματος σε ευθύγραμμο τμήμα όταν η μία από τις κορυφές του μετακινηθεί προς το φορέα της απέναντι πλευράς απαιτεί μια δυναμική νοητική ενέργεια από την πλευρά των μαθητών. Η «αναγκαία συνθήκη» όσον αφορά την «ύπαρξη» της γεωμετρικής φιγούρας του τριγώνου, ως προς την οποία στρέφει ο εκπαιδευτικός τη σκέψη των μαθητών, υποδεικνύει το τι ο ίδιος θεωρεί ως σημαντική προϋπόθεση ώστε να προχωρήσουν στην κύρια «δραστηριότητα» της ταξινόμησης. Ο εκπαιδευτικός ενισχύει με την ενέργειά του τη «μαθηματική πρόκληση» της «δραστηριότητας» και οι μαθητές ανταποκρίνονται άμεσα.

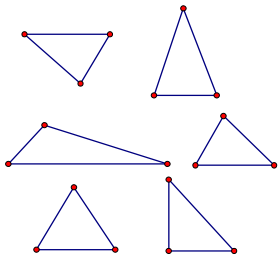
2ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

……

71. Καθ: Λοιπόν ξεκινάμε τώρα..... ξεκίνα το ερώτημα της φωτοτυπίας ..διάβασέ το!

72. M_{14}: Θέλουμε να κατατάξουμε τα παρακάτω τρίγωνα σε κάποιες μεγάλες ομάδες. (σχ1) Με τη βοήθεια ποιών γνωρισμάτων μπορείτε να γίνει αυτή η κατάταξη των τρίγωνων σε ομάδες;



Σχ 1.

73. Καθ: Μάλιστα. Θέλουμε να κατατάξουμε τα τρίγωνα σε ομάδες. Να τα χωρίσω σε σύνολα. Εννοεί, με τη βοήθεια ποιών γνωρισμάτων μπορεί να γίνει αυτή η κατάταξη, με βάση κάποια χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα.

74. Άμα είναι ισοσκελή; (μαθητής)

75. Καθ: Δεν μου λέει κάτι αυτό που λες!! Με τη βοήθεια ποιών γνωρισμάτων;

76. Των γωνιών. (μαθητής)

77. Καθ: Των γωνιών. Μόνο;

78. Των ευθυγράμμων τμημάτων…(μαθητής)

79. Καθ: Που είναι οι πλευρές . Άρα λοιπόν και των πλευρών. Με τη βοήθεια λοιπόν ποιών γνωρισμάτων μπορεί να γίνει η κατάταξη των τριγώνων σε ομάδες; Τι απαντάς;

80. M_{14}: Με τη βοήθεια των πλευρών και των γωνιών.

……

88. Καθ: Άρα λοιπόν κατάταξη με κριτήριο τις πλευρές ενός τριγώνου. Για να ακούσω κατατάξεις!!

89. M_3: Όταν είναι ισοσκελή.

……

92. Καθ: Μας είπε λοιπόν ότι ένα τρίγωνο με κριτήριο τις πλευρές του μπορεί να είναι ισοσκελές. Άλλη κατάταξη;

93. M_3: Ισόπλευρο ήθελα να πω κύριε μπερδεύτηκα.

94. Καθ: Καλά ας το αλλάξω. Άρα λοιπόν με κριτήριο τις πλευρές μια πολύ καλή περίπτωση, μια πρώτη κατάταξη είναι όταν είναι ισόπλευρο. Για πες; Ποτέ ισχύει αυτό ;

97.M_3: Όταν όλες οι πλευρές που έχει είναι ίσες.

…….

111. Καθ: …δεύτερο ποιο είπες ;

112. M_2: Το σκαληνό.

113. Καθ: Και τι ακριβώς είναι αυτό το τρίγωνο;

114. M_2: Είναι αυτό που έχει όλες τις πλευρές άνισες.

115. Καθ: Ωραία, έχει όλες τις πλευρές άνισες. Δε μου λες, νομίζεις ότι η θέση του είναι ακριβώς κάτω από το ισόπλευρο ;

116. M_2: Όχι είναι το ισοσκελές .

117. Καθ: Άρα ας βάλουμε τρίτη περίπτωση αυτή μετά το ισοσκελές.

……

<u>Συνοπτική ανάλυση του 2^{ου} συμβάντος</u>

[71-80,88-114] *Διατήρηση του πλαισίου* της «δραστηριότητας». *Περιορισμός της καθοδήγησης* ως προς τον εντοπισμό των κοινών χαρακτηριστικών για την ταξινόμηση.

Το γεωμετρικό πλαίσιο της δραστηριότητας που δίνει ο εκπαιδευτικός είναι παρόμοιο με το πλαίσιο της δραστηριότητας του σχολικού βιβλίου. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει καθοδήγηση που να στρέφει τη σκέψη των μαθητών σε συγκεκριμένη κατεύθυνση

μέσα στην ίδια τη «δραστηριότητα», λειτουργεί θετικά καθώς οι μαθητές απαντούν και διατυπώνουν τα αναμενόμενα συμπεράσματα. Κάνουν κατάταξη με κριτήριο το σχετικό μέγεθος των πλευρών των τριγώνων. (Άνισες , ίσες πλευρές και πόσες). Προβληματικό σημείο: η καθοδήγηση από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό που δεν επιτρέπει την έγκυρη αξιολόγηση της διαδικασίας.

<u>3ο Κρίσιμο συμβάν</u>
Διάλογος:

……..

103. Καθ: Ένα τρίγωνο, το λέει και η λέξη –ισόπλευρο- που έχει όλες τις πλευρές ίσες, και τις τρεις πλευρές ίσες μεταξύ τους, ονομάζεται ισόπλευρο . Είναι μια πολύ ιδανική περίπτωση αυτή. Και μάλιστα με ποια άλλη έννοια της γεωμετρίας λέτε ότι θα συνδέεται το ισόπλευρο τρίγωνο; Γιατί θα πρέπει να ξέρετε και από την άποψη της ομορφιάς είναι και το πιο όμορφο τρίγωνο.

104. M_2: Το σκαληνό, …το ισοσκελές…..

105. Καθ: Με ποια άλλη έννοια της γεωμετρίας θα συνδέεται το ισόπλευρο τρίγωνο;

106. M_1: Συμμετρία.

107. Καθ: Συμμετρία. Είναι το πλέον συμμετρικό τρίγωνο.

……..

118. Καθ: Λοιπόν για να δούμε τώρα τη δεύτερη περίπτωση που είναι το ισοσκελές Άρα το ισοσκελές λοιπόν είναι τρίγωνο….

119. M_2: Που έχει τις 2 πλευρές από τις 3 πλευρές του ίσες.

…….....

135. Καθ: Αυτό το τρίγωνο είναι ισοσκελές ε;

136. M_9: Δεν είναι και συμμετρικό;

138. Καθ: Και το ισόπλευρο και το ισοσκελές είναι συμμετρικό αλλά ας μου επιτραπεί η έκφραση : «γιατί το ισόπλευρο είναι καλύτερο συμμετρικό»;

139. M_{15}: Έχει και τις 3 πλευρές ίσες, ενώ το άλλο έχει μόνο τις 2.

140. Καθ: Και αυτό τι σημαίνει; Η συμμετρία τι είπαμε ότι είναι;

141. Καθ: Με ποια άλλη έννοια . Μιλήσαμε για συμμετρικά σχήματα. Αυτό τι σημαίνει;

.....

149. M_{17}: Με τη δίπλωση . (Βασιλική)

150. Καθ: Με τη δίπλωση πολύ σωστά Η συμμετρία συνδέεται με τη δίπλωση ,και δημιουργεί τι πράγμα η δίπλωση ; Καθώς διπλώνουμε στη συμμετρία; Όπως διπλώνει

ένα σχήμα κάτι δημιουργεί. Δηλαδή αν πάρω τώρα εγώ ένα χαρτί και το διπλώσω δημιουργεί τι; ….

151. Καθ: Μια τσάκιση. Αυτή την τσάκιση πώς τη λέμε;

152. M_5: Άξονα συμμετρίας.

153. Καθ: Πολύ σωστά άξονα συμμετρίας. Ένα ισοσκελές πόσους τέτοιους άξονες έχει;

154. M_7: Έναν ενώ το ισόπλευρο τρεις.

155. Καθ: Να η διάφορα η μεγάλη!!

Συνοπτική ανάλυση του 3ου συμβάντος

[103-107,135-141,149-155] Εκ νέου *μετασχηματισμός* ως προς τη *«μαθηματική πρόκληση»* της «δραστηριότητας» - *επέκταση του μαθηματικού περιεχομένου*.

Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί την ευκαιρία που του δίνει η αναφορά που κάνουν οι μαθητές σε ισόπλευρα και ισοσκελή τρίγωνα καθώς προσπαθούν να κάνουν την ταξινόμηση με κριτήριο το σχετικό μέγεθος των πλευρών (ισότητα – ανισότητα) .

Τους προκαλεί να ανακαλύψουν και να συνδέσουν τα παραπάνω τρίγωνα με ιδιότητες. Οι έννοιες της συμμετρίας του άξονα συμμετρίας και της κανονικότητας σχημάτων αναδύονται μέσα από τη συζήτηση και αξιοποιούνται.

4ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

……..

223. Καθ: Ξεκινάμε τώρα να δούμε… Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει 2 η 3 ορθές γωνίες; Σκεφτόμαστε τώρα!!!

224. M_{12}: Όχι.

225. Καθ: Γιατί;

226. M_{12}: Γιατί θα έβγαινε πάνω από 180 μοίρες.

227. Καθ: Τι θα βγει πάνω από 180;

228. M_{12}: Το άθροισμα των γωνιών.

……..

233. Καθ: Άρα συμπέρασμα.. Πόσες γωνίες ορθές μπορεί να έχει ένα τρίγωνο;

234. M_{14}: Το πολύ μια.

235. Καθ: Γιατί λέμε «το πολύ» . Γιατί λέμε το πολύ ;

236. M_3: Γιατί θα μπορούσε να μην έχει και καμία ορθή.

237. Καθ: Μπορεί να έχει δυο ή 3 αμβλείες γωνίες;

239. M_1: Όχι .Γιατί πάλι το άθροισμα ……

240. Καθ: Για τον ίδιο λόγο. Δεν χρειάζεται να επαναλαμβάνουμε τα ίδια.. Γιατί και πάλι το άθροισμα των γωνιών θα βγει πάνω από 180° .

…….

244. Καθ: Για να ρωτήσω κάτι άλλο τώρα… Ένα τρίγωνο έχει **μια** οξεία γωνία. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις άλλες δυο γωνίες.

247. M_{20}: Μια όταν λέμε; Τουλάχιστον μια;

248. Καθ: Όταν λέω μια εννοώ μια . Τι συμπέρασμα μπορώ να βγάλω για τις άλλες δυο; Για να το πάρουμε λίγο αριθμητικά!!. Έστω μια γωνία είναι 40. Άρα πόσο μπορούν να είναι οι άλλες;

249. M_5: Οι άλλες να είναι μεγαλύτερες.

250. Καθ: Γιατί; Δεν θα μπορούσε κάποια να είναι 20 ή 39;

251. M_5: Αν η μια είναι 40 το άθροισμα των άλλων δυο πρέπει να είναι 140.

252. Καθ: Συμπέρασμα λοιπόν …Μου άρεσε κι αυτό που είπε ο συμμαθητής σας!!! Πατάει επάνω στο αριθμητικό!! Οπότε αρχίζουμε να γενικεύουμε ..Πες μας περιπτώσεις. Το άθροισμα των άλλων δυο πρέπει να είναι 140…

254. M_5: 100 και 40.

……..

263. Καθ: Άρα λοιπόν μπορούμε να έχουμε μια οξεία και μια αμβλεία. Άλλο ;

268. Καθ: Γνωρίζω ότι έχει μια οξεία γωνία. Για τις άλλες δεν τις ξέρω. Τις ψάχνω.

269. Καθ: Τι συμπεράσματα μπορώ να έχω για τις άλλες δυο γωνίες του;

271. M_{21}: Μια γωνία ορθή.

……..

274. Καθ: Να πούμε και μια τελευταία . Μια περίπτωση μας είπε ο M_5….να έχω μια οξεία και μια αμβλεία .Άλλη περίπτωση μας είπε η M_{21}, μια ορθή και μια οξεία. Και μένει άλλη μια;

275. M_9: 3 οξείες .

…….

283. M_8: Αν υπάρχει μια οξεία, οι άλλες γωνίες μπορεί να είναι ή οξεία και αμβλεία, ή ορθή και οξεία ή δυο οξείες.

……

287. Καθ: Αν γνωρίζουμε ότι έχει δυο γωνίες οξείες τι συμπεραίνουμε για τη τρίτη γωνία; Τι μπορεί να είναι;

288. M_6: Θα είναι αμβλεία.

289. Καθ: Θα είναι αμβλεία σίγουρα; 70+70=140. Μπορεί να είναι αμβλεία, μπορεί να είναι ορθή, μπορεί και οξεία. Άρα λοιπόν η τρίτη γωνία μπορεί να είναι ή οξεία ,ή αμβλεία ή ορθή. Και βέβαια εκεί που έπρεπε να πούμε τα συμπεράσματα να το κλείσουμε χτύπησε το κουδούνι……Να το πούμε γρήγορα γρήγορα;
290. Όχι!!!(όλοι μαζί)

Συνοπτική ανάλυση του 4^{ου} συμβάντος

[223-228,233-240,244-283] Η «*δραστηριότητα»* όσον αφορά το είδος των γωνιών ενός τριγώνου *μετασχηματίζεται* με τη βοήθεια πρότερης γνώσης. (Ελεγχόμενη *εκχώρησή της* στους μαθητές).

Ο εκπαιδευτικός στρέφει τους μαθητές στην αναζήτηση του είδους των υπόλοιπων γωνιών που μπορεί να έχει ένα τρίγωνο όταν η μια από τις γωνίες του είναι γνωστή. Οι μαθητές επικαλούνται το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου για να αιτιολογήσουν γιατί ένα ορθογώνιο ή ένα αμβλυγώνιο μπορούν να έχουν μόνο μια γωνία του είδους αυτού , ενώ για το οξυγώνιο ο τρόπος προσέγγισης στηρίζεται σε δοκιμές με αριθμητικά δεδομένα. Ενώ η ύπαρξη μιας ορθής ή μιας αμβλείας γωνίας σε ένα τρίγωνο οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι υπόλοιπες γωνίες του είναι υποχρεωτικά οξείες, η ύπαρξη μιας οξείας δεν αποτελεί δεσμευτικό στοιχείο για το είδος των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου. Οι αριθμητικές δοκιμές χρησιμοποιούνται ως μέθοδος για τη διαπίστωση του γεγονότος αυτού. Ο εκπαιδευτικός δεν εκχωρεί αυτό το κομμάτι της «δραστηριότητας» στους μαθητές να το ερευνήσουν μόνοι τους αλλά λειτουργεί καθοδηγώντας τους σε μεγάλο μέρος με κατάλληλες ερωτήσεις, διορθώνει σε κάποιες περιπτώσεις ή απαντά ο ίδιος σε αυτά που ρωτά. Δεν παραχωρεί τον απαραίτητο χρόνο στους μαθητές ώστε να παρουσιάσουν ολοκληρωμένο σκεπτικό.

2^{η} «δραστηριότητα»: « Παραλληλόγραμμο –Ορθογώνιο –Ρόμβος –Τετράγωνο-Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο»

1^{ο} Κρίσιμο συμβάν
Διάλογος:
……

42. Καθ: Αφήνουμε λοιπόν πίσω μας τα τρίγωνα και πάμε στα τετράπλευρα.
43. Καθ: Από τα τετράπλευρα τώρα , ένα πάρα πολύ καλό τετράπλευρο είναι αυτό εδώ. Βέβαια, θα μου πείτε: «κύριε τι θα πει καλό τετράπλευρο»; Θα το εξηγήσουμε σε λίγο. [σχεδιάζει στον πίνακα ένα παραλληλόγραμμο]

44. Καθ: Αυτό τι σου μοιάζει να έχει;

45. M_{15}: 4 γωνίες και 4 πλευρές

46. Καθ: 4 γωνίες γι αυτό είναι τετράπλευρο…4 πλευρές , γι αυτό είναι τετράπλευρο!

47. M_{15}: Δυο αμβλείες και δυο οξείες

48. Καθ: Και;

49. M_{15}: Ότι είναι παράλληλες

50. Καθ: Ότι είναι παράλληλες. Ποιες ;

53. M_{15}: Οι πλευρές.

54. Καθ: Για να σχολιάσουμε τώρα την έκφραση παράλληλες πλευρές. Υπάρχει περίπτωση ένα τετράπλευρο να έχει τις πλευρές του παράλληλες;

57. M_{14}: Γίνεται αλλά όχι όλες οι πλευρές.

58. Καθ: Ποιες πλευρές;

59. M_{14}: Οι απέναντι

60. Καθ: Οι απέναντι. Άρα λοιπόν κάτι πολύ καλό που συναντάμε σ αυτό το τετράπλευρο είναι ότι έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες**.**

61. Καθ: Προσέξτε αν δεν πούμε απέναντι είναι λάθος. Απέναντι λοιπόν πλευρές παράλληλες.

64. Καθ: Ένα τέτοιο τετράπλευρο θυμόμαστε όλοι από το δημοτικό το λέμε;……. Για να δω χέρια για να δω χέρια.!!

65. M_{10}: Πλάγιο παρ/μο.

66. Καθ:Γιατί το λες πλάγιο;

67. M_{10}: Επειδή γέρνει

68. Καθ:Γιατί υπάρχει παραλληλόγραμμο που δεν γέρνει;

69. M_{10}: Ναι .

73. Καθ:Και πώς το λέμε;

74. M_{10}: Ορθογώνιο

……..

84. Καθ: Από την αρχή σας είπα ότι αυτό το παραλληλόγραμμο είναι και καλό τετράπλευρο. Ποιος μπορεί να μου πει τι μπορούσα να εννοώ μ αυτή την πρόταση; Καλό τετράπλευρο;

89. M_{12}: Δεν ξέρω

…….....

109. M_5: Μήπως επειδή οι δυο απέναντι γωνίες είναι ίσες;

110. Καθ: Επαναλαμβάνω ότι ακόμα συζητάμε την πρόταση την αρχική. «Καλό τετράπλευρο».

111. M_6: Οι δυο γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές…..

…….

117. M_8: Μήπως είναι συμμετρικό σχήμα;

118. Καθ: Μμμμμ θα μπορούσε να είναι . Δεν είναι αυτό όμως. Έχει μια συμμετρία. Αλλά αυτό που λες τώρα, αυτό που είπε στην αρχή ο M_3 για τις ίσες πλευρές , αυτό που είπε ο M_5 για τις ίσες γωνίες …Αυτό που λες εσύ για τη συμμετρία….. Πώς τα λέμε για ένα σχήμα ή γενικά για μια μαθηματική έννοια;

119. M_8: Ιδιότητες

120.Καθ: Ιδιότητες!! Άρα λοιπόν έχουμε τον ορισμό, τι είναι παραλληλόγραμμο, και τελικά το τετράπλευρο γιατί είναι καλό; Γιατί όπως βλέπουμε έχει κάποιες ιδιότητες. Ενώ το τυχαίο σχήμα που είχα κάνει ξέραμε ότι έχει ιδιότητες;

121. M_8: Όχι.

122. Καθ: Όχι . Άρα λοιπόν ξεκινάμε να σχολιάσουμε τις ιδιότητες.

<u>Συνοπτική ανάλυση του 1^{ου} συμβάντος</u>

[43-53,64-74,110-122] *Μετασχηματισμός* ως προς το *πλαίσιο* και τις *ενέργειες*, καθώς και περιορισμός του *περιεχομένου* της «δραστηριότητας».

Ο εκπαιδευτικός αλλάζει το αρχικό «πραγματικό» πλαίσιο της «δραστηριότητας» του βιβλίου σε «γεωμετρικό». Σχεδιάζει στον πίνακα ένα κλασικό παραλληλόγραμμο και ζητά από τους μαθητές να το αναγνωρίσουν. Οι μαθητές ανταποκρίνονται χρησιμοποιώντας προηγούμενες γνώσεις. Οι έννοιες του πλάγιου και του ορθογωνίου παρ/μου τουλάχιστον σε επίπεδο «οπτικό» είναι φανερό ότι είναι οικείες στους μαθητές. Η νοερές στροφές και αυξομειώσεις του «πραγματικού» σχήματος που ζητούνται στο βιβλίο, αντικαθίστανται με ένα σταθερό σχήμα, ενώ το ενδιαφέρον των μαθητών υποκινείται από πρωτότυπες εκφράσεις που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός. (Η δραστηριότητα έχει ξεφύγει ως προς το περιεχόμενο των εννοιών που σύμφωνα με το βιβλίο είναι προς διερεύνηση. Έχει περιοριστεί σε ένα μόνο σχήμα σε σχέση με την δραστηριότητα του βιβλίου).

<u>2^{ο} Κρίσιμο συμβάν</u>

Διάλογος:

……..

136. Καθ: Λοιπόν…3 είναι οι ομάδες των ιδιοτήτων. Σε τι θα αφορούν οι ιδιότητες;

137. M_8: Τις γωνίες του.

139. M_2: Πλευρές;

140. Καθ: Πλευρές και άλλο; Τι έμεινε;

141. M_7: Τον άξονα συμμετρίας;

142. Καθ: Αν θα έχει συμμετρία. Αν είχε άξονα μάλλον συμμετρίας.. Κάτι άλλο;

149. M_{10}: Ίσως παράλληλες να απέχουν…

150. Καθ: Γενικά κι αόριστα δηλαδή. Βρε παιδιά για τις διαγώνιες. Τι έμεινε;

151. Καθ: Άρα λοιπόν έχουμε ιδιότητες για ένα παραλληλόγραμμο για τις γωνίες του, τις πλευρές του και τις διαγώνιες του. Λοιπόν ήδη κάποιος είπε για τις γωνίες. Τι γνωρίζουμε για τις γωνίες ενός παραλληλογράμμου;

152. Καθ: Κάποιος το είπε. Νομίζω ο M_5;

153. M_5: Οι απέναντι γωνίες είναι …

154. Καθ: Άρα γράφω ότι οι απέναντι γωνίες είναι τι μεταξύ τους;

155. M_5: Ίσες.

156. Καθ: Ποιος είπε τις ιδιότητες για τις πλευρές; M_3;

157. M_3: Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

159. Καθ: Τώρα για τις διαγώνιες, θυμάται κανείς από το δημοτικό;

160. M_8: Ότι χωρίζει το σχήμα σε δυο ίσα μέρη.

161. Καθ: Ωραία. Με τις διαγώνιες ,προσοχή παιδιά, έχουμε δυο ιδιότητες.. Πρώτη ιδιότητα ότι οι διαγώνιες χωρίζουν …μισό λεπτάκι να το γράψουμε…..

…….

164. M_8: Σε δυο ίσα τρίγωνα.

167. Καθ: Όταν λέμε ότι αυτά τα δυο σχήματα είναι ίσα. Δεν έχουμε χάρακα να μετρήσουμε τι κάνουμε;

168. M_{16}: Άμα βάλουμε το ένα πάνω απ το άλλο……

169. Καθ: Πάρα πολύ ωραία. Να εφαρμόζει το ένα πάνω στο άλλο.

……..

216. M_{10}: Να πω το δεύτερο για τη διαγώνιο;

218. M_{10}: Νομίζω δεν είμαι σίγουρος. Οι διαγώνιες δεν είναι και άξονες συμμετρίας;

219. Καθ: Το παραλληλόγραμμο δεν έχει άξονα συμμετρίας . Έχει κέντρο συμμετρίας.

222. Καθ: Να ρωτήσω κάτι τώρα. Βλέπετε δυο διαγώνιες σ ένα παρ/μο. Θα θελα κάποιος να σκεφτεί τι ιδιότητα μπορεί να έχουν πέρα από αυτά που έχουμε σχεδιάσει

τι μπορεί να έχουν οι διαγώνιες του παρ/μου και μας υποχρεώνουν να ασχοληθούμε μαζί τους.

225. M_{14}: Να έχει σχέση με το μέσο τους;

226. Καθ: Δεν το λέμε μέσον. Κάπως αλλιώς το λέμε. Και τι θα πει μέσο σ' ένα παραλληλόγραμμο;

……..

234. M_3: Μήπως ισαπέχει από τις παράλληλες; (Εννοεί το μέσο που αναφέρθηκε παραπάνω)

235. Καθ: Θα μπορούσε. Πρόσεχε. Να ισαπέχει από τις παράλληλες, από τις πλευρές του παραλληλογράμμου. Θα μπορούσε να 'ναι κι αυτή μια καλή ιδιότητα.

236. M_1: Είναι άξονας συμμετρίας;

239. Καθ: Οι διαγώνιες; Το είπε πριν ο συμμαθητής σας και του είπα όχι.

241. M_5: Μήπως είναι κέντρο βάρους;

245. Καθ: Σχεδιάσαμε λοιπόν τις δυο διαγώνιες . Οι διαγώνιες όπως λέμε συναντιούνται στο σημειο Ο. Δηλ τι κάνουν στο σημειο Ο ;

246. M_{10}: Τέμνονται.

……

253. Καθ: Οι διαγώνιες λοιπόν τέμνονται η μια ……

254. Με την άλλη ηηηη!!!(όλοι)

255. Καθ: Ε σίγουρα!!! Είναι τώρα αυτό ιδιότητα;

258. M_5: Στη μέση;

260. Στο μέσο!!! (Μαθήτρια)

262. Α!!! Διχοτομεί (μαθητής)

263. Καθ: Τι;

264. Διχοτομία; (άλλος μαθητής)

265. Καθ: Δίχα . Τι είπαμε σημαίνει Δίχα;

266. Καθ: Δίχα το αρχαίο Ελληνικό επίρρημα .Σε δυο ίσα μέρη. Γι αυτό και: διχάζω, διχάλα . Τέμνονται λοιπόν η μια στο μέσο της άλλης. Με αλλά λόγια όπως λέμε , τι κάνουν; Διχοτομούνται!! Από εκεί προέρχεται και ποια άλλη λέξη;

268. Διχοτόμος (μαθητής)

271. Καθ: Όταν λέμε ότι οι διαγώνιες διχοτομούνται τι εννοούμε ;

280. M_{21}: Χωρίζονται στη μέση

281. Καθ: Χωρίζονται στη μέση . Δηλαδή εκεί όπου συναντιούνται η μια περνάει από το μέσο της άλλης. Να συμμαζέψουμε λοιπόν**……..**

Συνοπτική ανάλυση του 2ου συμβάντος

[151-160,216-281] *Μετασχηματισμός* ως προς το *περιεχόμενο* της «δραστηριότητας» και ως προς τις *ενέργειες*.

Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί την προηγούμενη γνώση των μαθητών ως προς τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου. Οι νοερές ενέργειες της μετατόπισης ευθειών και στροφής μετατρέπονται σε ανάκληση γνώσεων των μαθητών από το δημοτικό και σε λογικούς συλλογισμούς για το γενικευμένο είδος της οικογένειας των παραλληλογράμμων (πλάγιο). Οι μαθητές διατυπώνουν ιδιότητες με ευχέρεια. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου και «ο λόγος που μας υποχρεώνει να ασχοληθούμε μαζί τους», είναι η βασική υπό διαπραγμάτευση πρόταση που ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται μέσα από ερωτήσεις προς τους μαθητές με αρκετή τάση καθοδήγησης και επιμονής στη σωστή διατύπωση μαθηματικών εκφράσεων.

3ο Κρίσιμο συμβάν

Διάλογος:

……..

284. Καθ: Ερώτηση κρίσης. Θέλω να μου πείτε έναν πολύ γρήγορο και πολύ εύκολο τρόπο να σχεδιάσουμε ένα παρ/μο.

285. M_3: Βάζουμε τέσσερα σημεία……

286. Τι παραλληλόγραμμο κύριε; Ορθογώνιο;(μαθήτρια)

287. Καθ: Δεν μιλήσαμε για κανένα άλλο παρ/μο , μόνο για ένα μιλήσαμε.

289. Καθ: Το πλάγιο που το λέτε

290. Ωραία , βάζουμε δυο πλάγιες γραμμές.(μαθητής)

291. Καθ: Και μετά;

292. Μετά παίρνουμε τη μια ….από ένα σημείο της μιας και ενώνουμε με το άλλο σημείο της άλλης.(μαθητής)

293. Καθ: Και πώς ξέρεις ότι αυτό το σχήμα που θα δημιουργηθεί είναι παρ/μο; Η M_{15} μας είπε……. θύμισε μας σε παρακαλώ ποιο τετράπλευρο σχήμα θα ονομάζουμε παρ/μο;

296. M_{15}: Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο σχήμα που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

298. M_6: Σχεδιάζω δυο παράλληλες…

299. Καθ: Και πώς θα ξέρεις 100% ότι αυτές είναι παράλληλες; Μπορεί στο μάτι και όσο τις σχεδιάζεις ……δηλ. αν σχεδιάσω εγώ δυο ευθείες και πω ότι αυτές είναι

παρ/λες μπορεί όσο είναι ο πίνακας να φαίνονται παρ/λες αλλά εδώ κάπου να τέμνονται.

300. M_8: Παίρνω δυο τρίγωνα . Σχεδιάζουμε το ένα . Μετά βάζουμε τη μια πλευρά του άλλου πάνω στην άλλη και μετά το αφήνουμε……..

301. Καθ: Εγώ στον πίνακα θέλω να το σχεδιάσω…. Ωραίο αυτό που είπε η συμμαθήτριά σας αλλά εγώ αν θέλω να το κάνω πρέπει να διπλώσω τον πίνακα. Μπορώ να διπλώσω τον πίνακα;

……

327. M_{18}: Κύριε όλα αυτά χωρίς όργανα;

330. Καθ: Το πολύ πολύ να έχουμε αυτόν το χάρακα, το δικό μου. Τίποτα άλλο.

……..

335. M_{15}: Κύριε αν στις διαγώνιες το κέντρο τους ισαπέχει…….

[Αρκετοί μαθητές λένε τη γνώμη τους κάνοντας κατασκευές με το χέρι στο περίπου ενώ συγχρόνως διατυπώνονται διάφορες ενστάσεις από τους συμμαθητές τους].

345. Καθ: Άρα ένας άλλος πιο καλός τρόπος για να καλύψουμε κι αυτούς που ψάχνουν διαρκώς να μας βρουν ότι έχουμε κάνει λάθος, είναι η σκέψη της M_{15} . Τι είπες προηγουμένως; [Απευθύνεται στη μαθήτρια].

346. M_{15}: Να πάρουμε όχι τέτοιον χάρακα . Εκείνον με την ορθή γωνία . Δεν ξέρω πώς τον λένε….

350. Καθ: Όχι. Άλλο είχες πει πριν και το ξέχασες. Ξεχνάτε και τι λέτε!!

351. M_{15}: Για τις διαγώνιες λέτε;

352. Καθ: Για τις διαγώνιες. Μ αυτό τον πολύ ωραίο, τον πολύ μικρό χάρακα. Ορίστε!! Τι είναι αυτό που σχεδίασα;

353. M_9: Ένα Χ

354. Καθ: Ένα Χ. Δηλαδή; Τι; Κωνσταντίνε;

355. Μ9: Δυο ευθείες που τέμνει η μια την άλλη.

358. Καθ: Τυχαία το σχεδίασα;

362. M_6: Πήραμε δυο ίσα σημεία….εεε που ισαπέχουν.

367. M_6: Από το μέσο

368. Καθ: Από το μέσο;

370. M_6: Από το σημείο που τέμνονται…

375. Καθ: Ναι βρε παιδί μου αυτό είναι!! Πήραμε λοιπόν πάνω στη μια ευθεία δυο σημεία τα οποία να ισαπέχουν από το σημείο στο οποίο τέμνονται οι δυο ευθείες.

Δηλαδή τι έχω κάνει στην ουσία; Αυτό που είπε η M_6 το κάνω πιο μικρή πρόταση. Τι κάναμε; Σχεδιάσαμε ένα ευθύγραμμο τμήμα…

376. M_{17}: Και βρήκαμε το μέσο

377. Καθ: Το βρήκαμε το μέσο ή το κατασκευάσαμε το μέσο;

378. M_{17}: Το κατασκευάσαμε

379. Καθ: Έτσι ώστε το σημείο τομής τι να είναι βρε παιδιά ;

380. Καθ:Το μέσο.

381. Καθ:Το ίδιο κάνουμε και από την άλλη πλευρά , ορίστε!

382. Και ενώνουμε τα σημεία (μαθήτρια)

387. Αυτό είναι ρόμβος κύριε (μαθητής)

388. Καθ: Μπορεί. Δεν το ξέρω ……..

<u>Συνοπτική ανάλυση του 3^{ου} συμβάντος</u>

[284-293,299-301,327-388] *Μετασχηματισμός* ως προς τη *μαθηματική πρόκληση* της «δραστηριότητας» και τα διαμεσολαβητικά *εργαλεία*

Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει στη διαδικασία την κατασκευή ενός παραλληλογράμμου με βάση τις ιδιότητές του. Η χρήση ενός απλού υποδεκαμέτρου αποτελεί τον πιο σύντομο και εύκολο τρόπο για την συγκεκριμένη κατασκευή καθώς το σημείο τομής των διαγωνίων ισαπέχει από τα άκρα τους. Η επιλογή αξιόπιστου τρόπου κατασκευής που να εξασφαλίζει ότι το σχήμα που προκύπτει είναι παραλληλόγραμμο αποτελεί τον πυρήνα του διαλόγου. Ο εκπαιδευτικός με αυτή του την ενέργεια αυξάνει την μαθηματική πρόκληση της «δραστηριότητας» προς κατεύθυνση η οποία βέβαια αποκλίνει κατά πολύ από την «δραστηριότητα» του σχολικού βιβλίου. Η καθοδήγηση από την πλευρά του εξακολουθεί και είναι έντονη καθώς πιέζει τους μαθητές για περισσότερες επεξηγήσεις σε ότι ισχυρίζονται με κατάλληλες ερωτήσεις.