ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Raphaello Sanzio (Ραφαέλο, 1483-1520)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Δυσκολίες κατανόησης στο Διαφορικό Λογισμό, μαθητών Γ΄ Λυκείου. »

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΓΚΙΩΝΗ ΜΑΓΔΑΛΗΝΗ Α. Μ.: Δ200910

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	.....
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	.....
3) Φαρμάκη Βασιλική	Καθηγήτρια	.....

«Επειδή από τις κοινότητες των μαθητών και μαθητριών απουσιάζει η εμπειρία και η αυθεντία που υπάρχει στις κοινότητες των ειδικών, οι εκπαιδευτικοί φέρουν μεγάλη ευθύνη για την καθοδήγηση της δραστηριότητας των παιδιών, για την μοντελοποίηση της μαθηματικής συμπεριφοράς τους και για την παροχή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, τα οποία θα μετατρέψουν το λόγο των μαθητών και μαθητριών σε χρήσιμη επικοινωνία για τα μαθηματικά. Τέτοια ευθύνη απαιτεί συμπεριφορές και πεποιθήσεις εκπαιδευτικών εντελώς διαφορετικές από τις παραδοσιακές».

(Davis, Maher, Noddings κα 1990)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω θερμά, τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ και Καθηγητή μου, για το χρόνο που αφιέρωσε, την καθοριστική βοήθεια και τις πολύτιμες συμβουλές που μου παρείχε, για να μπορέσω να εκπονήσω την παρούσα εργασία. Επίσης, να ευχαριστήσω και το κ. κ Γιαννακούλια Ευστάθιο για τις σημαντικές οδηγίες και παρεμβάσεις του που αφορούν το κεφάλαιο της ιστορικής εξέλιξης του Διαφορικού Λογισμού.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής την κ. Φαρμάκη Βασιλική και την κ. Πόταρη Δέσποινα, που ήταν πάντα εκεί για να μ' ακούσουν και να με βοηθήσουν με τις σημαντικές υποδείξεις τους.

Τέλος, δεν μπορώ να παραλείψω όλους τους διδάσκοντες του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, που με βοήθησαν να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου σ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, τους συμφοιτητές μου για τις αμέτρητες συζητήσεις και προβληματισμούς που είχαμε, τους φίλους και τις φίλες μου που ήταν πάντα κοντά μου και πρόθυμοι να με ακούσουν και φυσικά το σύζυγό μου για την υπομονή, την κατανόηση και την στήριξη που μου έδωσε για να πραγματοποιήσω το όνειρό μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ….. ……..... 7

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ …….. 9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ … 33

2.2 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ …… 44

2.3 ΣΤΑΣΕΙΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ …… 48

2.4 ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ……..…… 52

2.5 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ …… 55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΗ …… 60

3.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ …….. 61

3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ …… 62

3.4 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ – ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ……. 73

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ….…….. 83

4.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ …….. 88

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1ο …… **91**
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2ο …… **94**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ ..…… **101**
ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ …… **102**

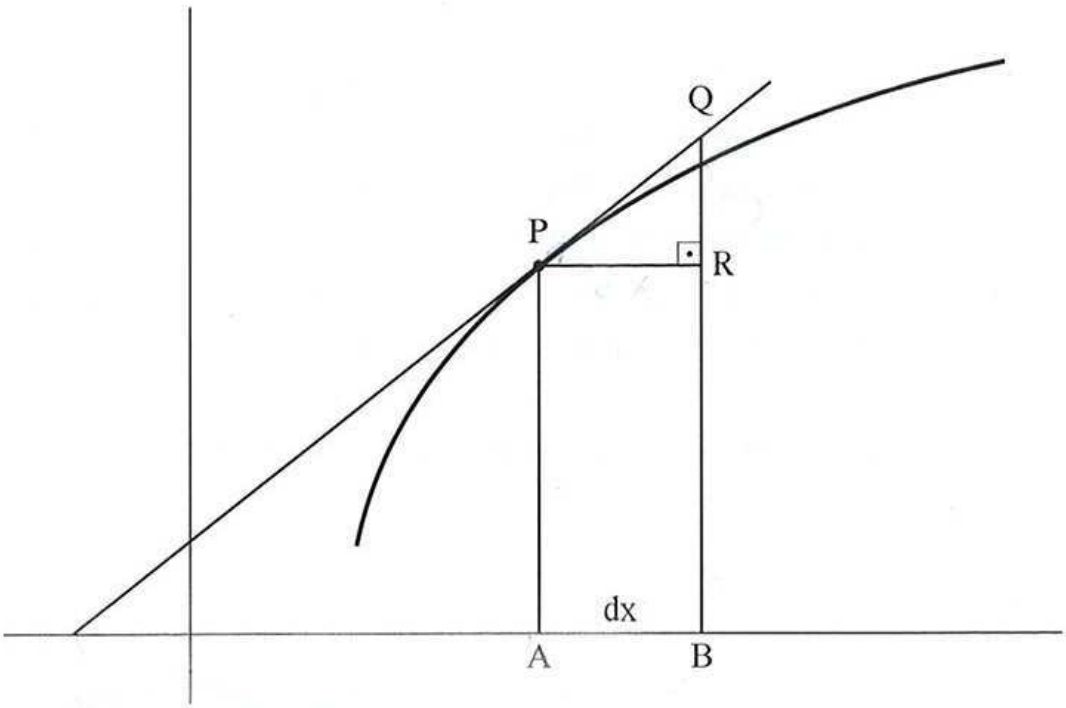
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Απειροστικός Λογισμός μελετά τη συμπεριφορά των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής με την βοήθεια της έννοιας του ορίου. Αρχικά, ο Απειροστικός Λογισμός ασχολήθηκε με τη μελέτη των παρακάτω προβλημάτων:

α) το πρόβλημα της εφαπτομένης,
β) το πρόβλημα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης,
γ) το πρόβλημα μεγίστου και ελαχίστου,
δ) το πρόβλημα του εμβαδού

και αναπτύχθηκε με εργασίες Ευρωπαίων Μαθηματικών κατά τον 17ο αιώνα.



Ο Απειροστικός Λογισμός περιέχει το Διαφορικό Λογισμό που ασχολείται με την μελέτη της έννοιας της παραγώγου συναρτήσεων και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό που ασχολείται με την έννοια του ολοκληρώματος συναρτήσεων.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τον Διαφορικό Λογισμό δηλαδή την έννοια της Παραγώγου και τα Βασικά Θεωρήματα που συνδέονται με αυτήν. Αφετηρία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου υπήρξε το πρόβλημα της εφαπτομένης μιας καμπύλης και το πρόβλημα καθορισμού του περιεχομένου στις διαισθητικές έννοιες της στιγμιαίας ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός κινούμενου σώματος.

Η διδακτική εμπειρία έχει δείξει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της Παραγώγου και στα Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού. Οι μαθητές μαθαίνουν μεθοδολογίες και τεχνικές, προκειμένου να λύνουν ασκήσεις, με στόχο τις εισαγωγικές εξετάσεις, χωρίς να καταλαβαίνουν γιατί τις ακολουθούν.

Στο **1ο Κεφάλαιο** της εργασίας περιγράφεται η ιστορική εξέλιξη του Διαφορικού Λογισμού.

Στο **2ο Κεφάλαιο** παρατίθεται το θεωρητικό πλαίσιο που βασίζεται σε διεθνείς έρευνες πάνω στην κατανόηση γενικά του Απειροστικού Λογισμού και ειδικότερα του Διαφορικού Λογισμού, με σκοπό να δείξουμε τις δυσκολίες και τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση μ’ αυτήν την έννοια. Επίσης αναλύεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο να αμβλυνθούν όσο περισσότερο είναι εφικτό οι δυσκολίες αυτές. Τέλος, παρουσιάζεται η σημασία των αναπαραστάσεων στην κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών εννοιών με ιδιαίτερη αναφορά στις βασικές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού.

Στο **3ο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται έρευνα που διενεργήθηκε σε 3 Δημόσια Λύκεια της Κορίνθου, με σκοπό να διερευνηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση του Διαφορικού Λογισμού, καθώς και οι λανθασμένες αντιλήψεις και οι παρανοήσεις που έχουν.

Τέλος στο **4ο Κεφάλαιο** αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα καθώς και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα πάνω στη διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού.

Στα Παραρτήματα παρατίθενται το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές στην έρευνα που διεξάχθηκε, καθώς και οι πίνακες κατανομής συχνοτήτων με τα αντίστοιχα ραβδογράμματά τους.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ο Λογισμός μετά την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μεγαλύτερη δημιουργία των μαθηματικών. Ο Λογισμός του 17ου αιώνα δημιουργήθηκε ώστε να διαπραγματευθεί τα κυριότερα επιστημονικά προβλήματα του αιώνα αυτού που ήταν:

α) Δοθέντος του τύπου της απόστασης που διανύει ένα σώμα, ως συνάρτησης του χρόνου να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε κάθε χρονική στιγμή και αντίστροφα, δοθείσης της επιτάχυνσης ως συνάρτησης του χρόνου να βρεθεί η ταχύτητα και η διανυθείσα απόσταση. Αυτό το πρόβλημα είχε τη δυσκολία στο γεγονός ότι οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις που άρχισαν να μελετώνται μεταβάλλονταν από στιγμή σε στιγμή (στιγμιαία ταχύτητα) και κατέληγαν σε μια μορφή 0/0 που δεν είχε νόημα.

β) Το δεύτερο πρόβλημα ήταν η εύρεση της εφαπτομένης σε μια καμπύλη, το οποίο προέκυπτε από διάφορες πηγές:

- Ήταν ένα πρόβλημα της καθαρής γεωμετρίας, αλλά ήταν μεγάλης σημασίας για επιστημονικές εφαρμογές. Η οπτική ήταν κατά τον 17ο αιώνα μία από τις κύριες επιστημονικές εργασίες. Ο σχεδιασμός φακών υπήρξε του άμεσου ενδιαφέροντος των Fermat, Καρτέσιου, Huygens και Newton. Στη μελέτη της διαδρομής του φωτός διαμέσου φακών πρέπει να γνωρίζουμε τη γωνία πρόσπτωσης για να εφαρμόσουμε το νόμο της διάθλασης. Συνεπώς πρέπει να γνωρίζουμε την κάθετη στην καμπύλη ή την εφαπτομένη.

- Ένα άλλο επιστημονικό πρόβλημα που περιέκλειε την εφαπτομένη σε καμπύλη προήλθε από τη μελέτη της κίνησης. Η κατεύθυνση ενός κινούμενου σώματος σε κάθε χρονική στιγμή της τροχιάς του είναι η κατεύθυνση της εφαπτομένης στην τροχιά του. Επιπλέον η έννοια της εφαπτομένης ήταν ανοιχτή. Για τις κωνικές τομές ο ορισμός της εφαπτομένης ως της γραμμής που «εγγίζει» την καμπύλη μόνο σ’ ένα σημείο και αφήνει προς το ένα μέρος της την καμπύλη ήταν

ικανοποιητική (Αρχαίοι Έλληνες). Δεν ήταν όμως ικανοποιητική για πιο πολύπλοκες καμπύλες που χρησιμοποιούνταν κατά τον 17ο αιώνα.

γ) Το τρίτο πρόβλημα ήταν η εύρεση μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα το μέγιστο βεληνεκές της βολής μ' ένα κανόνι, εξαρτάται από τη γωνία εκτόξευσης του βλήματος. Ο Γαλιλαίος στις αρχές του αιώνα βρήκε ότι η επιθυμητή γωνία ήταν 45 μοίρες. Η μελέτη της κίνησης των πλανητών περιείχε επίσης προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, όπως για παράδειγμα η εύρεση της μεγαλύτερης και της ελάχιστης απόστασης ενός πλανήτη από τον ήλιο.

δ) Το τέταρτο πρόβλημα ήταν η εύρεση μηκών καμπύλων, εμβαδά φραγμένα από καμπύλες, όγκοι που παράγονται από την περιστροφή τους, κέντρα βάρους σωμάτων. Η μέθοδος της εξάντλησης άρχισε να χρησιμοποιείται όταν οι εργασίες του Αρχιμήδη έγιναν γνωστές στην Ευρώπη. Η δυσκολία της οδήγησε πρώτα στην τροποποίηση της βαθμιαία και κατόπιν ριζικά με τη ανακάλυψη του Λογισμού.

Τα προβλήματα αυτά λύθηκαν με τις εργασίες των Isaac Newton – Gottfried Wilhelm Leibniz. Όμως πριν από αυτούς υπήρξαν πολλοί που ασχολήθηκαν μ' αυτά. Το πρόβλημα της σχεδίασης εφαπτόμενων σε καμπύλες και το πρόβλημα του υπολογισμού μεγίστων και ελαχίστων τιμών συναρτήσεων οδήγησε στη δημιουργία του Διαφορικού Λογισμού [Kline M. (1972), Boyer C. (1969), Ε. Γιαννακούλιας (2006)].

Το μοναδικό παράδειγμα καμπύλης της οποίας η εφαπτομένη είναι πιθανόν ότι έχει υπολογισθεί με τη μεθοδολογία του Διαφορικού Λογισμού, είναι η έλικα στη εργασία «Περί Ελίκων» του Αρχιμήδη. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κινητικός ορισμός της έλικας που έδωσε ο Αρχιμήδης καθιστά πιο εύκολη τη φυσική έννοια της εφαπτομένης ως ταχύτητας.

Από τη εποχή του Αρχιμήδη έως και τον 15ο αιώνα δεν έγινε κάποιο ουσιαστικό βήμα πάνω στο Διαφορικό Λογισμό. Στα τέλη του 15ου αιώνα και τις αρχές του 16ου αιώνα σημειώνεται μεγάλη άνθηση στην Άλγεβρα και την υπολογιστική Αριθμητική. Τότε οι Ευρωπαίοι εξοικειώθηκαν και πάλι με τα Ελληνικά Μαθηματικά, έμαθαν την Ισλαμική Άλγεβρα, συνέθεσαν τις δύο παραδόσεις και επιχείρησαν ένα δικό τους ξεκίνημα. Συγχρόνως άρχισε η επαναστατική αλλαγή στην εξέλιξη των μαθηματικών συμβόλων. Έτσι το 1591 ο

François Viéte ανακαλύπτει τη συμβολική άλγεβρα και ο René Descartes (Καρτέσιος) και ο Pierre de Fermat ανακαλύπτουν την αναλυτική Γεωμετρία στη δεκαετία του 1630. Έτσι στις αρχές του 17ου αιώνα οι μαθηματικοί που μελετούσαν την γεωμετρία των καμπύλων ήρθαν ξαφνικά αντιμέτωποι μ' ένα εκρηκτικό αριθμό καμπύλων προς εξέταση. Γι' αυτές τις καμπύλες, οι παλιές ελληνικές μέθοδοι της συνθετικής γεωμετρίας δεν ήταν πλέον επαρκείς. Για παράδειγμα: «πως θα μπορούσε να οριστεί η εφαπτομένη στο σημείο (0,0) της καμπύλης $y = x^3$, ή σ' ένα σημείο μιας καμπύλης με πολλά σημεία καμπής (J. Grabiner, 1983).

Η Ελληνική Γεωμετρία κληροδότησε στους μαθηματικούς της Αναγέννησης ένα πλήθος από γενικές κατηγορίες ερωτημάτων, τα οποία οι Αρχαίοι ήταν σε θέση να απαντήσουν σε ορισμένες περιπτώσεις αλλά για τα οποία δεν είχε επιζήσει καμία γενική μέθοδος. Οι μαθηματικοί που προηγήθηκαν των Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz, ενδιαφέρθηκαν για την επίλυση αυτών των προβλημάτων τόσο σε ειδικές περιπτώσεις ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, όσο και σε γενικές εφόσον τούτο ήταν δυνατό. Οι προσπάθειες τους παρακινήθηκαν από διάφορους παράγοντες. Το αυξανόμενο ενδιαφέρον για ορισμένα φυσικά προβλήματα έκανε κάποιες καμπύλες (ειδικότερα την κογχοειδή, την κισσοειδή και την κυκλοειδή) να δείχνουν ιδιαίτερα άξιες μελέτης. Η Γεωμετρία του Καρτέσιου έδειχνε να παρέχει ένα κλειδί για την επίλυση των προβλημάτων: η αλγεβρική αναπαράσταση μπορούσε να θέσει εκ νέου τα παλαιά γεωμετρικά ζητήματα σε μορφές που υπόσχονταν μία λύση (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Το 17ο αιώνα για την επίλυση του προβλήματος της εφαπτομένης αναπτύχθηκαν δύο τάσεις, μία γεωμετρική και μία αλγεβρική. Ο Καρτέσιος επινόησε μια μέθοδο κατασκευής εφαπτόμενων ευθειών που ήταν αλγεβρική και δεν είχε απειροστό χαρακτήρα. Η μέθοδός του ήταν χρήσιμη μόνον για καμπύλες των οποίων οι εξισώσεις ήταν της μορφής $y = f(x)$, όπου $f(x)$ ήταν ένα απλό πολυώνυμο. Η μέθοδος του για την εύρεση της εφαπτομένης στην καμπύλη $y = f(x)$ στο σημείο $P(x, f(x))$ αναγόταν στην εύρεση του σημείου $A(\upsilon, 0)$ της τομής με το άξονα των x, της καθέτου στην καμπύλη στο σημείο P. Η εφαπτομένη ευθεία θα ήταν η κάθετη στην κάθετο της καμπύλης στο P (C. H. Edwards, 1979).

Γύρω στο 1644 ο Evangelista Torricelli (1608 – 1647) συνέλαβε την ιδέα να χρησιμοποιήσει την κινηματική προκειμένου να χαράξει την εφαπτομένη διαφόρων καμπύλων. Θεώρησε την καμπύλη ως την τροχιά ενός κινούμενου σημείου, που η κατεύθυνση της κίνησης προέκυπτε από τη συνισταμένη δύο απλούστερων κινήσεων,

με γνωστές τις κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους. Με εφαρμογή του κανόνα του παραλληλογράμμου, έβρισκε την κατεύθυνση της συνισταμένης κίνησης η οποία ήταν η κατεύθυνση εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο που ήθελε. Η μέθοδος που ανέπτυξε ο Torricelli, περιείχε την ιδέα της στιγμιαίας ταχύτητας, κρύβοντας από πίσω την έννοια του ορίου και έφθασε κοντά στο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Τα προβλήματα που οδήγησαν τους μαθηματικούς του 17ου αιώνα, όπως τον Γαλιλαίο, τον Καρτέσιο, τον Fermat, στο Διαφορικό Λογισμό, αναφέρονταν συχνά σε υπολογισμούς εφαπτόμενων και ταχυτήτων. Ο Napier το 1614 εισάγει τον λογάριθμο με έναν κινητικό ορισμό, αφού βασίστηκε σε μελέτες της συνεχούς κίνησης σημείων κατά μήκος ευθειών. Καμία από τις προηγούμενες μεθόδους δεν έχει γενική εφαρμογή και δεν περιέχει τη διαδικασία της διαφόρισης. Η πρώτη αξιοσημείωτη νύξη διαφόρισης προέρχεται από τις ιδέες που διατύπωσε ο Pierre de Fermat (1601 – 1665) το 1629, στην εργασία του με τίτλο «Introductio to plane and Solid loci». Δεν γνώρισε όμως μεγάλη δημοσιότητα γιατί κυκλοφόρησε σε χειρόγραφο το 1637, έγινε γνωστό στη μαθηματική κοινότητα το 1638 και δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του. Οι ιδέες του Fermat βασίστηκαν στις παρατηρήσεις του Johannes Kepler (1571 - 1630) σύμφωνα με τις οποίες η αύξηση μιας συνάρτησης γίνεται αμελητέα στην περιοχή μιας τοπικά μέγιστης ή ελάχιστης τιμής της. Στα τέλη του 1620 ο Fermat μετέτρεψε το παραπάνω γεγονός σε διαδικασία προσδιορισμού ενός τέτοιου ακρότατου. Έλυσε λοιπόν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων μελετώντας τη συμπεριφορά των συναρτήσεων κοντά σε ακραίες τιμές τους.

Περιληπτικά η μέθοδος του Fermat ήταν η εξής:

Αν η f (x) έχει ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο (ακρότατο) στο x και αν το ε είναι πολύ μικρό, τότε η τιμή f(x + ε) είναι σχεδόν ίση με την f(x). Επομένως αναπτύσσοντας τη σχέση $f(x + \varepsilon) \approx f(x)$ θα πρέπει να θέσει κανείς, μετά από απλοποιήσεις, $\varepsilon = 0$. Για παράδειγμα αν $f(x) = x^2$ η σχέση $f(x + \varepsilon) \approx f(x)$ γίνεται $(x + \varepsilon)^2 \approx x^2$ δηλαδή $2\varepsilon x + \varepsilon^2 \approx 0$ οπότε $2x + \varepsilon \approx 0$ και για $\varepsilon = 0$ προκύπτει $x = 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης που σχηματίζεται, δίνουν εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες η f (x) έχει ακρότατα, χωρίς όμως να μπορεί διακρίνει ανάμεσα σε μια μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Δηλαδή η βασική ιδέα του Fermat ήταν ν' αυξάνει την μεταβλητή και μετά από πράξεις ν' αφήνει την αύξηση να εξαφανίζεται (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Η εξήγηση και αποσαφήνιση της διαδικασίας αυτής προκύπτει από τη μελέτη του πρώτου παραδείγματος του Fermat που αφορούσε το χωρισμό μιας ποσότητας σε δύο μέρη, ώστε το γινόμενο να γίνεται μέγιστο. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Viéte, όπου οι μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία φωνήεντα, αν παραστήσουμε με B τη δεδομένη ποσότητα και με A, B - A τα μέρη της, τότε έχουμε:

$$(A + E)\ [B - (A + E)] = A - (B - A)$$

ή $$BE - 2AE - E^2 = 0\ .$$

Διαιρώντας με E και θέτοντας E = 0 έχουμε ότι A = B / 2.

Η λογική της ανάπτυξης του Fermat δεν είναι βέβαια ικανοποιητική, είναι όμως φανερό ότι η μέθοδός του είναι ισοδύναμη σε σύγχρονο συμβολισμό με το να θέσουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(x)=0\ .$$

Ο Fermat παρατήρησε πως στα σημεία στα οποία η καμπύλη έπαιρνε μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, η εφαπτομένη ήταν παράλληλη προς τον άξονα των x. Αυτό τον οδήγησε το 1636, να εφαρμόσει την μέθοδό του σε προβλήματα χάραξης της εφαπτομένης. Ο Fermat χρησιμοποίησε την μέθοδο εύρεσης μεγίστων και ελαχίστων στη χάραξη της εφαπτομένης σε σημεία παραβολής, έλλειψης, στην κυκλοειδή, στην κισσοειδή, στην κογχοειδή, στην τετραγωνίζουσα καμπύλη και στο φύλλο του Καρτέσιου (H. Eves, μετάφραση Μ. Κωνσταντινίδης, 1990).

Η εφαπτομένη θεωρείται ως τέμνουσα και τα δύο σημεία της πλησιάζουν μέχρι να συμπέσουν. Υπολόγισε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης y = f(x), δηλαδή το κλάσμα $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και όταν το h είναι μηδέν η τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη και αν αγνοηθεί το πολύ μικρό h τότε η κλίση της τέμνουσας δίνει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης.

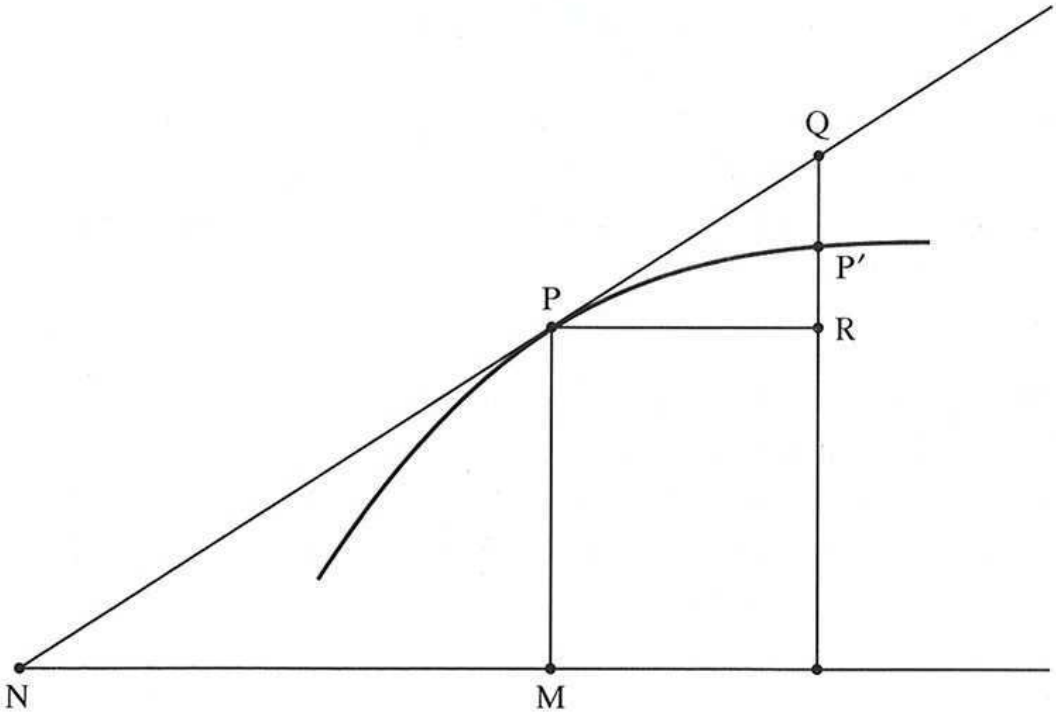
Γύρω στα 1655 οι Γερμανοί μαθηματικοί René François de Sluse (1622 – 1685) και Johann Hudde (1628 – 1704) ανακάλυψαν τυπικούς αλγόριθμους για τη χάραξη

των εφαπτόμενων και οι μηχανικοί κανόνες που έθεσαν έδιναν με υπολογισμούς ρουτίνας τις κλίσεις των εφαπτόμενων σε τυχαίες αλγεβρικές καμπύλες. Οι αλγόριθμοι αυτοί είχαν σκοπό να απλοποιήσουν τους υπολογισμούς που ήταν απαραίτητοι για τον προσδιορισμό της διπλής ρίζας μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, αναγκαίας στη μέθοδο του Καρτέσιου για την εύρεση της καθέτου. Αν και οι κανόνες αυτοί ήταν εμπειρικοί εν τούτοις παρουσίαζαν ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του αδιαμόρφωτου ακόμα Απειροστικού Λογισμού (την αλγοριθμική μορφή και την υπολογιστική ακρίβεια) [Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999].

Ο Gilles Persone de Roberval (1602 - 1675) πέτυχε μία άλλη προσέγγιση του ζητήματος του σχεδιασμού της εφαπτομένης. Προσπάθησε να μελετήσει μία καμπύλη σαν να παράγεται από ένα σημείο του οποίου η κίνηση είναι η σύνθεση δύο γνωστών κινήσεων. Τότε η συνισταμένη των διανυσμάτων της ταχύτητας των δύο γνωστών κινήσεων, μας δίνει την εφαπτομένη στην καμπύλη. Αυτή η ιδέα υποστηρίχθηκε και από τον Evangelista Torricelli (1608 – 1647) και προκλήθηκε μία αντιδικία ανάμεσα σ’ αυτόν και τον Roberval για την ανακάλυψη της μεθόδου (H. Eves, μετάφραση Μ. Κωνσταντινίδης, 1990).

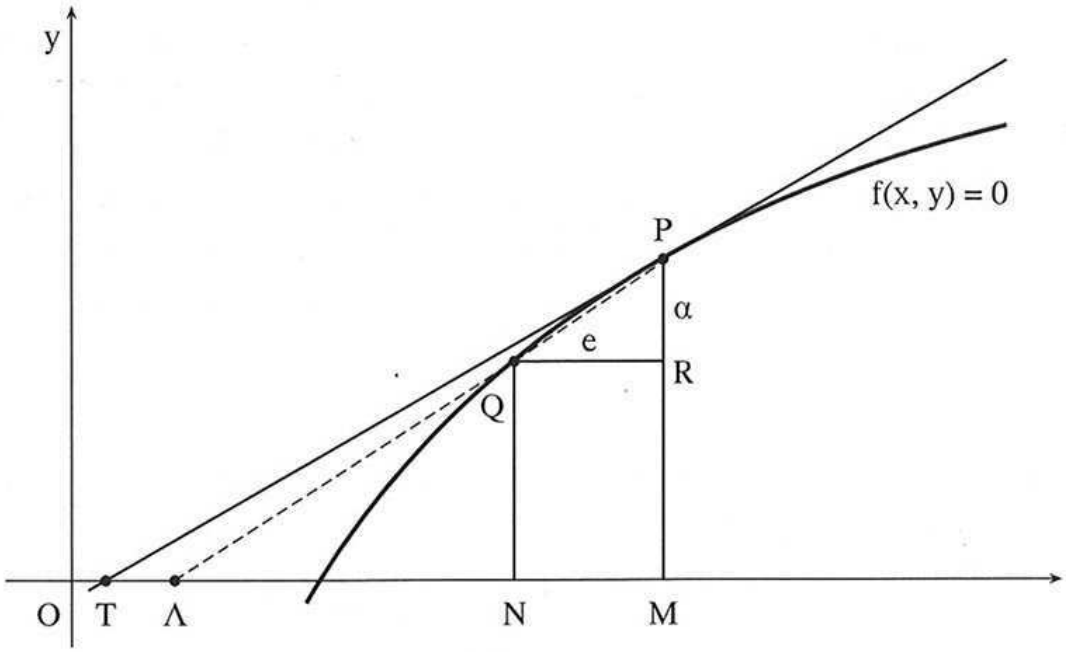
Ένας άλλος επιστήμονας που συνέβαλε στην ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού ήταν και ο Isaac Barrow (1630 – 1677). Τροποποιώντας τη μέθοδο του Fermat προσεγγίζει με αναλυτικό τρόπο τον ορισμό της εφαπτομένης σ’ ένα παράρτημα της 10ης διάλεξης του συγγράμματος του «Lectiones Geometricae» που δημοσιεύτηκε το 1670. Ήταν ένα σύγγραμμα στο οποίο δίνει για πρώτη φορά τη γεωμετρική απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, χωρίς να αντιληφθεί ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης και του εμβαδού συνδέονται μέσω μιας αντίστροφης διαδικασίας.

Αξιοσημείωτο της μεθόδου του Barrow είναι ότι υπεισέρχεται η έννοια του χρόνου. Χρησιμοποιεί μία ανάλογη μέθοδο κατασκευής εφαπτόμενων καμπύλης, το «διαφορικό ή χαρακτηριστικό τρίγωνο» και ουσιαστικά είναι ίδια με του Fermat.



Αρχίζει με το τρίγωνο PQR που προκύπτει από την αύξηση του PR και χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το τρίγωνο είναι όμοιο με το τρίγωνο PMN, για να ισχυρισθεί ότι η κλίση QR / PR της εφαπτομένης είναι ίση με PM / MN. Στο τρίγωνο P RP΄ με μικρή αύξηση του PR το τόξο PP΄ είναι επαρκώς μικρό και μπορεί να το ταυτίσουμε με το τμήμα RQ της εφαπτομένης στο σημείο P. Το τρίγωνο P RP΄ στο οποίο το τόξο PP΄ θεωρείται και ως τόξο της καμπύλης και ως τμήμα της εφαπτομένης είναι το «χαρακτηριστικό τρίγωνο».

Η κλίση της εφαπτομένης σ' ένα σημείο P της καμπύλης καθώς αυτό κινείται πάνω στην καμπύλη είναι η στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο P (Katz, 1998). Ο λόγος α/e (Δy / Δx) είναι η κλίση της εφαπτομένης και καθώς το τρίγωνο PQR γίνεται ολοένα και μικρότερο, το σημείο Q πλησιάζει το σημείο P και η ευθεία QR τείνει να γίνει εφαπτομένη της καμπύλης στο P. Έτσι βρίσκουμε το όριο του λόγου Δy / Δx όταν το $\Delta x \rightarrow 0$ (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).



Ο Fermat και ο Barrow, συνέβαλαν στην εξέλιξη του Διαφορικού Λογισμού, προσεγγίζοντας την έννοια της παραγώγου μέσω της εφαπτομένης καμπύλης, δηλαδή με γεωμετρικό τρόπο.

Γύρω στα 1660 είχαν κατανοηθεί με σαφήνεια οι λογιστικές και γεωμετρικές σχέσεις ανάμεσα στο πρόβλημα ακρότατων και στο πρόβλημα της εφαπτομένης, δηλαδή το μέγιστο βρισκόταν με το μηδενισμό της κλίσης της εφαπτομένης, η οποία υπολογιζόταν με τις γνωστές διαδικασίες που αναφέραμε προηγουμένως. Δεν είχε όμως δοθεί ένας ικανοποιητικός ορισμός της εφαπτομένης και δεν είχε κατανοηθεί η σχέση της με τις άλλες γεωμετρικές έννοιες, όπως αυτή του εμβαδού. Η αναζήτηση στράφηκε λοιπόν προς την κατεύθυνση της δημιουργίας ενός Λογισμού ενιαίου, λειτουργικού, με κατάλληλη ορολογία, συμβολισμό και αναλυτικούς κανόνες, ο οποίος να προσφέρει μια γενική τεχνική για τη λύση των διαφόρων προβλημάτων που έχουν προαναφερθεί.

Οι άνθρωποι αυτοί δεν άργησαν να φανούν τη δεκαετία του 1660 – 1670, οι Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Von Leibniz θα ανακαλύψουν τον Απειροστικό Λογισμό. Ο Newton προσέγγισε τον Λογισμό από τη φυσική πλευρά. Θεώρησε μία καμπύλη ως παραγόμενη από τη συνεχή κίνηση ενός σημείου. Επομένως οι συντεταγμένες αυτού του σημείου είναι μεταβλητές ποσότητες. Ονόμασε μία μεταβλητή «ρέον - fluent» και το ρυθμό μεταβολής της «ροή - fluxion» του ρέοντος.

Αν ένα «ρέον» όπως η τεταγμένη του σημείου που παράγει την καμπύλη, παριστάνεται με y, τότε η «ροή» του «ρέοντος» παριστάνεται με . Σε σύγχρονο συμβολισμό παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο dy / dt , όπου t παριστάνει τον χρόνο. Ο Newton εισήγαγε επίσης μία άλλη έννοια που την ονόμασε στιγμή (moment) του «ρέοντος» και είναι το απειροελάχιστο ποσό κατά το οποίο ένα «ρέον» αυξάνει σ' ένα απείρως μικρό χρονικό διάστημα «ο». Άρα η «στιγμή του ρέοντος» x δίνεται από το γινόμενο x·ο . Ο Newton παρατήρησε ότι μπορούσε σε κάθε πρόβλημα ν' αγνοήσουμε όλους τους όρους που είναι πολλαπλασιασμένοι με τη δεύτερη ή μεγαλύτερη δύναμη του «ο» και έτσι παίρνουμε μία εξίσωση μεταξύ των συντεταγμένων x , y του σημείου που παράγει μια καμπύλη και των ροών τους. Η αγνόηση των όρων αυτών αποτέλεσε αντικείμενο κριτικής από κάποιους σύγχρονούς του. Η μέθοδός του γίνεται κατανοητή από ένα παράδειγμα του που έδωσε στο έργο του «Μέθοδος των ροών και άπειρες σειρές», που γράφτηκε το 1671 αλλά δημοσιεύτηκε το 1736, εννέα χρόνια μετά τον θάνατό του. Στην ίδια εργασία, ο Newton, διατύπωσε σαφέστατα το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: «αν δοθεί μια σχέση μεταξύ δύο ρεόντων, να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ των ροών τους και αντίστροφα».

Αργότερα το 1687, ο Newton δημοσίευσε τα πεπραγμένα στην επιστημονική του διατριβή «Philosophie Naturalis Principia Mathematica» (Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας) που είναι ένα έργο μεγάλης σημασίας και συχνά θεωρείται η πρώτη δημοσίευση του Νεύτωνα στον Απειροστικό Λογισμό.

Η διατριβή αυτή περιέχει τρεις μεθόδους ερμηνείας του νέου Λογισμού:

α) Η πρώτη μέθοδος στην εργασία του «De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas», που κυκλοφόρησε μεταξύ φίλων το 1669 και δημοσιεύτηκε το 1711, σχετίζεται με «απειροστά» επιχειρήματα. Η πρωτοτυπία του Newton κατά τον Boyer (1969) είναι ότι: «για πρώτη φορά υπολόγισε το εμβαδόν μιας επιφάνειας από το λόγο μεταβολής σ' ένα μόνο σημείο, δηλαδή με αντιδιαφόριση. Αρχικά όριζε το ρυθμό μεταβολής του ζητούμενου εμβαδού ως προς x και κατόπιν υπολόγιζε το εμβαδόν μέσω του αόριστου ολοκληρώματος (με σημερινή ορολογία) της συνάρτησης που παρίστανε την τεταγμένη (αντιδιαφόριση)».

β) Η δεύτερη μέθοδος σχετίζεται με τις ροές που αναλύσαμε παραπάνω και τις άπειρες σειρές στην εργασία του «Methodus fluxionum et serierum infinitarum». Ο

Newton εφάρμοσε τη μέθοδο των ροών προσδιορίζοντας μέγιστα και ελάχιστα, εφαπτόμενες σε καμπύλες, καμπυλότητες καμπύλων, σημεία καμπής κυρτότητας και κοιλότητας καμπύλων, καθώς και σε αρκετούς υπολογισμούς εμβαδών και ευθειοποίηση καμπύλων.

γ) Η τρίτη μέθοδος σχετίζεται με τα όρια στο έργο του «De quadaratura» που παρουσιάστηκε το 1676 και δημοσιεύτηκε το 1704, όπου αναπτύσσει την «μέθοδο των πρώτων και των έσχατων λόγων - ultimate ratio». Σ' αυτήν προσπάθησε να δικαιολογήσει τη διαγραφή των απείρως μικρών όρων εισάγοντας την έννοια του ορίου, διατυπώνοντας ότι οι «ροές» δεν ήταν δυνατόν να θεωρούνται ποτέ μόνες τους, αλλά σε λόγους.

Κατά τον Boyer (1969), «η δυσκολία κατανόησης των απείρως μικρών μεγεθών τον οδήγησε στην μελέτη του λόγου τους που ήταν εν γένει ένας πεπερασμένος αριθμός. Αυτό του επέτρεψε ν' αντικαθιστά τα απειροστά μεγέθη με οποιαδήποτε άλλα πεπερασμένα, που ήταν αντιληπτά και είχαν τον ίδιο λόγο μ' αυτά». Απέτυχε όμως να προσεγγίσει τους λόγους αυτούς με την αριθμητική έννοια του ορίου γιατί είχε βαθιά επηρεαστεί από τις απειροστικές απόψεις του 17ου αιώνα (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Η προσέγγιση της παραγώγισης του Νεύτωνα είναι παρόμοια με τις έρευνες του Γάλλου μαθηματικού Gilles Persone de Roberval την περίοδο 1630-1640, όμως δεν γνωρίζουμε αν ήταν οι έρευνες αυτές γνωστές στον Νεύτωνα.

Η έρευνα του Leibniz έγινε κατά το διάστημα 1672-1676. Εργαζόμενος σε προβλήματα τετραγωνισμού καμπύλων, χάραξη εφαπτόμενων και υπολογισμού μεγίστων και ελαχίστων τιμών συναρτήσεων, μελέτησε μια εργασία του Blaise Pascal (1623 – 1662) που είχε τίτλο «Traite des sinus du quart de cercle – Πραγματεία για τα ημίτονα του τεταρτοκυκλίου», κατόπιν υποδείξεως του Cristiaan Huygens (1629 – 1695). Η μελέτη αυτή ήταν η αιτία ν' ανακαλύψει τη χρησιμότητα του φημισμένου «χαρακτηριστικού ή διαφορικού τριγώνου», το οποίο είχαν ήδη χρησιμοποιήσει οι Pascal και Barrow.

Στο έργο του «Historia et origo» ο Leibniz περιγράφει την ανακάλυψη του χαρακτηριστικού τριγώνου και γράφει:

(D. J. Struik, 1969 & Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999)

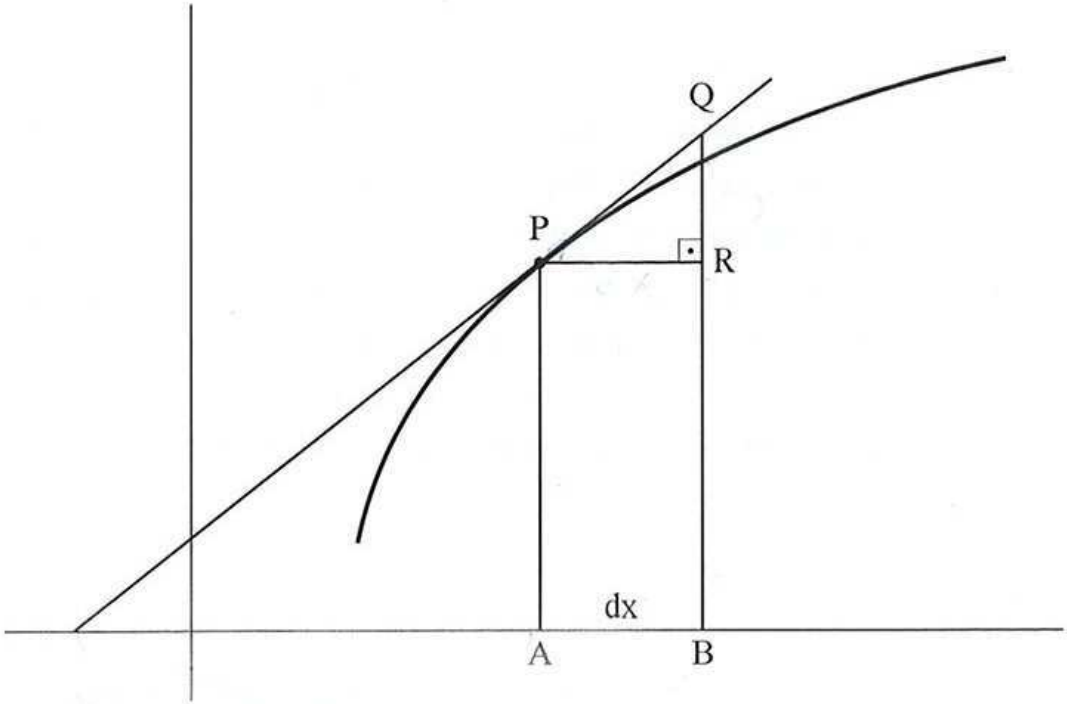
«Από ένα παράδειγμα του Dettonville, ένα φως εξερράγη ξαφνικά επάνω σ' αυτόν, τον οποίο περιέργως ο Pascal δεν είχε αντιληφθεί. Γιατί όταν αποδεικνύει το θεώρημα του Αρχιμήδη για τη μέτρηση της επιφάνειας της σφαίρας ή των μερών της, χρησιμοποίησε μία μέθοδο στην οποία ολόκληρη η επιφάνεια του στερεού που διαμορφώνεται από την περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα μπορεί να μειωθεί σε έναν ισοδύναμο αριθμό απλών σχημάτων. Από αυτό ο νεαρός φίλος μας έφθασε στο παρακάτω θεώρημα. Τα τμήματα μιας ευθείας γραμμής πάνω σε μια καμπύλη, που σχηματίζονται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα, όταν λαμβάνονται στη σειρά και εφαρμόζονται κάθετα στον άξονα δίνουν ένα σχήμα ισοδύναμο με τη στιγμή της καμπύλης για τον άξονα».

Συνειδητοποίησε ότι το «χαρακτηριστικό τρίγωνο» είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού μήκους καμπύλων κλπ. Αντιλήφθηκε λοιπόν ότι ο καθορισμός της εφαπτομένης σ' ένα σημείο μιας καμπύλης εξαρτάται από τον λόγο των διαφορών της συνάρτησης και της μεταβλητής, καθώς οι διαφορές αυτές γίνονται απείρως μικρές. Επίσης ο τετραγωνισμός εξαρτάται από το άθροισμα των εμβαδών απείρου αριθμού απείρως λεπτών ορθογωνίων τα οποία έχουν βάσεις τμήματα της τετμημένης απειροστού μήκους. Οι δύο διαδικασίες αυτές είναι εργασίες αντίστροφες. Με άλλα λόγια συνειδητοποίησε το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Το πρώτο άρθρο του Leibniz για το διαφορικό λογισμό δημοσιεύτηκε το 1684 στο περιοδικό «Acta Eruditorum» (πεπραγμένα των σοφών) με τίτλο:

«Μια νέα μέθοδος για μέγιστα και ελάχιστα καθώς και για εφαπτόμενες, η οποία δεν παρακωλύεται ούτε από κλασματικές ούτε από άρρητες ποσότητες και ένας ειδικός τρόπος για τον υπολογισμό τους». Βασική έννοια σ' αυτήν την εργασία ήταν το «διαφορικό».

Σ' αυτή δημοσιεύτηκε μια περιεκτική έκθεση του Διαφορικού Λογισμού του, που όπως λέει ο ίδιος η διατύπωσή του χρονολογούνταν το 1676. Παρ' όλες τις ασάφειες, τα λάθη και τις απροσεξίες η εργασία αυτή αποδείχθηκε ορόσημο για την παραπέρα ανάπτυξη των μαθηματικών.



Θεώρησε μία αυθαίρετη ποσότητα που την ονόμασε «διαφορά» και τη συμβόλισε με dx (απείρως μικρή μεταβολή της μεταβλητής x) και όρισε την dy ως εξής: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\upsilon\pi o\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta}$. Το dy είναι το διαφορικό πρώτης τάξης της συνάρτησης y. Από τα διαφορικά dx , dy προκύπτουν διαφορικά δευτέρας τάξεως και γενικά κ-τάξεως. Τα διαφορικά dx , dy είναι σταθερές μη μηδενικές ποσότητες, όμως ασύγκριτα μικρές ποσότητες άρα αμελητέες σε σύγκριση με τις τιμές των μεταβλητών x, y.

Ο ορισμός που έδωσε ο Leibniz για την εφαπτομένη ήταν:

« η εφαπτομένη είναι η γραμμή που ενώνει δύο απείρως γειτονικά σημεία της καμπύλης (με την έννοια ότι η διαφορά dx ήταν απείρως μικρή). Βλέπουμε λοιπόν ότι καθώς το dx γίνεται όλο και μικρότερο το σημείο Q τείνει να γίνει σημείο της καμπύλης, οπότε το QR γίνεται περίπου ίσο με το dy όταν το Q τείνει να συμπέσει με το P».

Ο σύγχρονος συμβολισμός είναι:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx},$$

όπου ο λόγος dy/dx είναι ο λόγος των απειροστών μεταβολών dx, dy των μεταβλητών x, y αντίστοιχα και είναι και το σύμβολο που αντιπροσωπεύει το όριο του λόγου Δy / Δx όταν το Δx τείνει στο 0, όπου Δx , Δy είναι οι μεταβολές αντίστοιχα των μεταβλητών x, y (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Αργότερα ο Leibniz σε μια επιστολή του στον L' Hospital γράφει:

(J. M. Child, 1920 & «Απειροστικός Λογισμός, τόμος 1», Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999)

«Με τη χρήση αυτού που καλώ χαρακτηριστικό τρίγωνο, που σχηματίζεται από τα δεδομένα των συντεταγμένων και της καμπύλης, ανακάλυψα, δεδομένου ότι ήταν εύκολο όσο το ανοιγοκλείσιμο των βλεφάρων, μονομιάς όλα τα θεωρήματα, που στη συνέχεια τα εντόπισα στις εργασίες των Barrow και Gregory. Μέχρι εκείνη τη στιγμή, δεν είχα ασχοληθεί αρκετά με το Λογισμό του Καρτέσιου και μέχρι τώρα δεν χρησιμοποίησα τις εξισώσεις για να περιγράψω καμπύλες. Αλλά, κατόπιν συμβουλής του Huygens κάθισα να ασχοληθώ με αυτήν και του είμαι ευγνώμων γι' αυτό, γιατί μου έδωσε τα μέσα σχεδόν αμέσως να ανακαλύψω τον Διαφορικό Λογισμό. Κάποια χρόνια πριν είχα την ευχαρίστηση να ασχοληθώ με την εύρεση των αθροισμάτων της σειράς των αριθμών, και γι' αυτό είχα χρησιμοποιήσει το γνωστό θεώρημα, ότι, σε μια σειρά με φθίνοντες όρους, ο πρώτος όρος είναι ίσος με το άθροισμα όλων των διαδοχικών διαφορών. Από αυτό είχα επινοήσει αυτό που καλώ αρμονικό τρίγωνο σε αντιδιαστολή με το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal. Αναγνωρίζοντας από αυτό τη μεγάλη χρησιμότητα των διαφορών και εντοπίζοντας το λογισμό του Descartes, ότι οι συντεταγμένες της καμπύλης θα μπορούσαν να εκφραστούν αριθμητικά, είδα ότι για να βρω τους τετραγωνισμούς ή τα αθροίσματα των συντεταγμένων ήταν το ίδιο πράγμα με το να βρεθεί μια συντεταγμένη (τετραγωνίζουσα), της οποίας η διαφορά είναι ανάλογη προς τη δεδομένη τεταγμένη. Αναγνώρισα επίσης ότι η εύρεση των εφαπτόμενων δεν είναι τίποτε άλλο από την εύρεση των διαφορών, και ότι η εύρεση των τετραγωνισμών δεν είναι τίποτε άλλο από την εύρεση των αθροισμάτων, υπό τον όρο ότι οι διαφορές είναι εξαιρετικά μικρές».

Η θεμελίωση του Leibniz έπασχε από ασάφειες παρόμοιες με εκείνες του Newton. Το διαφορικό dx, dy ήταν άλλοτε πεπερασμένες ποσότητες και άλλοτε ποσότητες μικρότερες από κάθε πεπερασμένη ποσότητα, όχι όμως μηδενικές.

Ο Leibniz παρουσιάζει τον λογισμό των απειροστών ως μια πιο σύντομη μορφή της αρχαιοελληνικής μεθόδου εξάντλησης. Η δεύτερη προσέγγιση του Leibniz για να αιτιολογήσει τη χρήση των «φανταστικών» απειροστών στο λογισμό είναι ο νόμος της συνέχειας που τον διατύπωσε ως εξής: «Εάν οποιαδήποτε συνεχής μετάβαση θεωρηθεί ότι τερματίζεται σε ένα ορισμένο όριο, τότε είναι πιθανό να διαμορφωθεί ένας γενικός συλλογισμός, ο οποίος να καλύπτει και το τελικό όριο». Για παράδειγμα, για τεμνόμενες ευθείες μπορούμε να υποθέσουμε ότι τέμνονται σ' ένα φανταστικό σημείο και όταν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε σχηματίζουν γωνία απείρως μικρή. Οι αποδείξεις των κανόνων του λογισμού του Leibniz στηρίχτηκαν στον νόμο της συνέχειας.

Αν θελήσουμε να συγκρίνουμε το λογισμό του Leibniz με το σημερινό απειροστικό λογισμό, ο λογισμός του Leibniz αφορά μεταβλητές και το διαφορικό ενώ ο σύγχρονος λογισμός συναρτήσεις και την παράγωγό τους (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Στον Νεύτωνα η έννοια του ορίου στην παράγωγο έχει διαισθητική ερμηνεία και η ταχύτητα ενυπάρχει, ενώ στον Leibniz η έννοια του ορίου δεν βασίζεται στη διαίσθηση αλλά ο Leibniz οδηγείται στα απειροστά συμπεράσματα από την αναλογία που αυτά παρουσιάζουν προς τις διακριτές διαφορές. Έτσι για τον Leibniz τα απειροστά dx, dy έχουν μια αυθυπαρξία που λειτουργεί και οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα, χωρίς να μπορούν να εξηγηθούν αυστηρά, ενώ για τον Νεύτωνα μόνον ο λόγος αυτών $\frac{dy}{dx}$ η παράγωγος δηλαδή, έχει φυσική και γεωμετρική έννοια. Η έννοια της παραγώγου του Νεύτωνα, είναι πολύ κοντά στην έννοια που δεχόμαστε σήμερα στη σύγχρονη ανάπτυξη του Λογισμού.

Ο Νεύτωνας και ο Leibniz εισήγαγαν νέες έννοιες και ο λογισμός τους έγινε ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορούσαμε να αντιμετωπίζονται με κοινές μεθόδους διαφορετικά προβλήματα της γεωμετρίας και της φυσικής. Η «διαφόριση» αποτέλεσε μία νέα πράξη με την οποία κατόρθωσαν να αναγάγουν τα προβλήματα του εμβαδού, του όγκου και άλλων συναφών προβλημάτων που αντιμετωπίζονταν σαν προβλήματα άθροισης, σε προβλήματα που μπορούσαν να λυθούν με «αντιδιαφόριση».

Πάντως το συμπέρασμα της ιστορικής έρευνας δείχνει ότι Newton και Leibniz, ακολουθώντας διαφορετικούς δρόμους ο καθένας, έφτασαν στον ίδιο στόχο, όμως πρέπει να θεωρηθούν ανεξάρτητοι επινοητές του Διαφορικού Λογισμού (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Ο Απειροστικός Λογισμός, στις αρχές του 18ου αιώνα, εμφανίζεται ως ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, χωρίς όμως αυστηρή θεμελίωση. Ο φιλόσοφος – θεολόγος George Berkeley (1685-1753), σε μια μονογραφία του το 1734 με τίτλο «The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician», διατύπωσε σημαντικές λογικές και φιλοσοφικές αντιρρήσεις γι' αυτήν την έλλειψη αυστηρής θεμελίωσης.

Ο Berkeley κατηγορεί τον Νεύτωνα και τον Leibniz ότι χρησιμοποιούν μεθόδους που δεν καταλαβαίνουν και ότι καταλήγουν σε σωστά συμπεράσματα, περνώντας από λογικές αντιφάσεις και αμφισβητούμενες έννοιες:

(«Απειροστικός Λογισμός, τόμος 1, Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999»)

«*Ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε τις παραγώγους (fluxions) ως ικρίωμα ενός οικοδομήματος, ως αντικείμενα που τίθενται στο περιθώριο, όταν πεπερασμένες ποσότητες ανευρίσκονται ανάλογες προς αυτές. Αλλά αυτοί οι πεπερασμένοι εκθέτες ανευρίσκονται με την χρήση των fluxions . Άρα ότι αποτέλεσμα προκύπτει από την χρήση αυτών των εκθετών και αναλογιών αναφέρεται στις fluxions οι οποίες, άρα πρέπει να είναι προηγουμένως κατανοητές. Και τι είναι λοιπόν οι fluxions; Άραγε οι ταχύτητες απειροστικών μεταβλητών; Και τι είναι οι απειροστές μεταβολές; Δεν είναι ούτε πεπερασμένες ποσότητες, ούτε ποσότητες απεριόριστα μικρές, ούτε και ανύπαρκτες ποσότητες. Δεν πρέπει κανείς να τις αποκαλέσει τα φαντάσματα ποσοτήτων που έχουν απέλθει;*»

Μεγάλη συμβολή στην εξέλιξη του Διαφορικού Λογισμού έχει ο Leonhard Euler (1707 – 1783). Στο έργο του «Institutiones calculi differentialis – Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού» ταξινόμησε την έως τότε υπάρχουσα ύλη του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιώδη έννοια του Λογισμού διατήρησε το «διαφορικό». Για τον Euler το διαφορικό dy της μεταβλητής ήταν η διαφορά του y σε δύο απείρως κοντινές τιμές του x. Αρνήθηκε την έννοια του απειροστού ως μιας ποσότητας μη μηδενικής που γίνεται μικρότερη από κάθε μέγεθος, πιστεύοντας ότι μια απείρως μικρή ποσότητα

είναι μια ποσότητα που ισούται με μηδέν. Ισχυρίστηκε όπως και Jacob Bernoulli, ότι ένας αριθμός που είναι μικρότερος από κάθε δοσμένη ποσότητα, αναγκαία πρέπει να ισούται με μηδέν. Έτσι τα διαφορικά dx, dy για τον Euler θεωρούνταν ίσα με το μηδέν. Ισχυριζόταν όμως ότι τα διαφορικά μπορούσαν να θεωρηθούν ως μηδενικά, αλλά σύμφωνα με την αρχή της συνέχειας διατηρούσαν τον χαρακτήρα των σχέσεων πεπερασμένων μεγεθών από τα οποία προέκυψαν. Ο Euler μετέτρεψε το Διαφορικό Λογισμό σε μια φορμαλιστική θεωρία συναρτήσεων που δεν ήταν ανάγκη ν' αναφέρεται σε διαγράμματα ή γεωμετρικές έννοιες. Ήταν ο πρώτος που έδωσε τον ορισμό της συνάρτησης, ως μιας αναλυτικής έκφρασης με σταθερές και μεταβλητές που μπορούσαν να παρασταθούν με απλά σύμβολα. Πριν από τον Euler ο Απειροστικός Λογισμός μελετούσε ιδιότητες καμπύλων. Μετά τον Euler διαπραγματευόταν ιδιότητες συναρτήσεων (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Αν και οι απόψεις του για τις θεμελιώδεις αρχές του Λογισμού δεν παρουσίαζαν την ακρίβεια και την αυστηρότητα που εμφάνισαν τα μαθηματικά του επόμενου αιώνα, η φορμαλιστική τάση που εγκαινίασε ήταν αυτή που απελευθέρωσε το νέο Λογισμό από τα γεωμετρικά εμπόδια.

Παρά τη μεγάλη συνεισφορά του Euler υπάρχουν και ορισμένα αδύνατα σημεία του. Οι διαδικασίες με το άπειρο αντιμετωπίστηκαν χωρίς αυστηρότητα. Δεν ήλεγχε για παράδειγμα με κριτήρια σύγκλισης και απόκλισης την ισχύ των τύπων για σειρές. Η θεμελίωση του Λογισμού από τον Euler έχει τις αδυναμίες της, από την άλλη μεριά όμως, διατύπωσε τις απόψεις του χωρίς ν' αφήνει κενά.

Μία πρώτη προσπάθεια για να τεθεί ο Διαφορικός Λογισμός σε αυστηρές βάσεις, ήταν το σύγγραμμα του Maclaurin, «Treatise of Fluxions - Πραγματεία για τις ροές», με το οποίο διαδόθηκαν οι Νευτώνιες αντιλήψεις για το λογισμό και κάποιες επεκτάσεις του στην υπόλοιπη Ευρώπη και αποτέλεσε το συνδετικό κρίκο μεταξύ των μεθόδων του Newton – Leibniz (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Όμως το αποφασιστικό βήμα που διέλυσε την ομίχλη και ξεκαθάρισε τις σχετικές έννοιες, έγινε από τον Jean D' Alembert (1717-1784), με τα αξιοσημείωτα άρθρα του «Différentiel και Limite της Encyclopédie (1754)», με τα οποία κατάφερε να απομακρύνει κάθε τι το «μεταφυσικό» και μυστηριώδες από τον Απειροστικό Λογισμό.

Ο D' Alembert γράφει:

(«Απειροστικός Λογισμός, τόμος 1», Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999)

«Ο Leibniz αισθανόταν αμηχανία από τις αντιρρήσεις που υπήρχαν για τις απεριόριστα μικρές ποσότητες, που εμφανίζονται στο διαφορικό λογισμό. Έτσι προτιμούσε να ανάγει τις απεριόριστα μικρές σε απλές μη συγκρίσιμες ποσότητες …Ο Νεύτωνας ξεκινούσε από μια άλλη αρχή. Και μπορούμε να πούμε ότι η μεταφυσική αυτού μεγάλου μαθηματικού στο λογισμό των fluxions είναι πολύ ακριβής και διαφωτιστική, αν και μας επέτρεψε να έχουμε μόνο μία πολύ βιαστική ματιά των ιδεών του. …Ποτέ δεν θεώρησε το διαφορικό λογισμό ως τη μελέτη των απεριόριστα μικρών μεγεθών, αλλά ως τη μέθοδο αρχικών και τελικών λόγων, δηλαδή τη μέθοδο της εύρεσης ορίων λόγων. Έτσι ο φημισμένος συγγραφέας ποτέ δεν διαφόρισε ποσότητες αλλά μόνο εξισώσεις. Στην πραγματικότητα δε, κάθε εξίσωση ενέχει μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και η διαφόριση των εξισώσεων έγκειται απλώς στην εύρεση του ορίου του λόγου των πεπερασμένων διαφορών των δύο ποσοτήτων που περιέχονται στην εξίσωση … Αν αυτό γίνει αντιληπτό, τότε αισθάνεται κάποιος ότι η υπόθεση για τις απεριόριστα μικρές ποσότητες εξυπηρετεί μόνο στη συντόμευση και απλοποίηση των λογικών επιχειρημάτων. Και ότι ο διαφορικός λογισμός δεν έχει ανάγκη να υποθέσει την ύπαρξη τέτοιων ποσοτήτων. Και ότι ακόμη ο λογισμός αυτός έγκειται στον καθορισμό με αλγεβρικά μέσα του ορίου ενός λόγου, για τον οποίο ήδη έχουμε την έκφραση ως συνάρτηση ευθειών και στην εξίσωση αυτών των δύο εκφράσεων …Είδαμε ότι στο διαφορικό λογισμό δεν υπάρχουν κατ' ουσία απεριόριστα μικρές ποσότητες πρώτου βαθμού. Ότι στην πραγματικότητα αυτές οι ποσότητες (τα διαφορικά), υποτίθεται, ότι διαιρούνται από άλλες υποτιθέμενες απεριόριστα μικρές ποσότητες. Σ' αυτή τη μορφή δεν συμβολίζουν ούτε απεριόριστα μικρές ποσότητες ούτε λόγους απεριόριστα μικρών ποσοτήτων. Είναι τα όρια ενός λόγου δύο πεπερασμένων ποσοτήτων».

Ο D' Alembert λοιπόν θεώρησε ότι η βάση του Διαφορικού Λογισμού του Leibniz και αυτή των «ροών» του Newton θα έπρεπε ν' αναζητηθεί στην έννοια του ορίου. Στο άρθρο του «Limite» γράφει:

«μπορεί κανείς να ονομάσει ένα μέγεθος όριο κάποιου άλλου μεγέθους, όταν το δεύτερο πλησιάζει το πρώτο οσοδήποτε κοντά, δίχως ωστόσο να μπορεί να ξεπεράσει το πρώτο, και με τέτοιο τρόπο, ώστε η διαφορά να μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα».

Οι μεταβλητές επομένως του D’ Alembert δεν έφταναν τα όριά τους.

Η πρόταση του D’ Alembert να ληφθεί ως κεντρική έννοια του Διαφορικού Λογισμού το όριο, δεν έγινε αποδεκτή.

Η χρήση της γεωμετρικής ερμηνείας που εξακολούθησε να γίνεται και η μεταφυσική ερμηνεία που δινόταν ήταν οι αιτίες να θεωρηθεί μια εικόνα, τόσο σκοτεινή όσο αυτή του απείρους μικρού (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Γύρω στα 1715 ο Brook Taylor απέδειξε τον γνωστό τύπο για σειρές που φέρουν τ’ όνομά του. Οι σειρές Taylor αποτέλεσαν ένα χρήσιμο εργαλείο, που αρχικά αναπτύχθηκε για τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Η σημασία αυτής της ιδιότητας των παραγώγων αναγνωρίστηκε γρήγορα τόσο από τον Colin Maclaurin (1698 – 1746) όσο και από τους Leonhard Euler και τον Joseph Louis Lagrange. Είχαν πλέον στα χέρια τους ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη των συναρτήσεων και τις προσεγγιστικές λύσεις εξισώσεων. Πέρα όμως απ’ αυτό, η μελέτη των σειρών Taylor εφοδίασε τους μαθηματικούς με νέες αντιλήψεις για τη φύση της παραγώγου.

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του αιώνα αυτού προσπάθησε να αναπτύξει τον Λογισμό παραμερίζοντας απειροστά, ροές και όρια. Σκοπός του ήταν να εξαφανίσει τα όρια από τον Λογισμό, γιατί αδυνατούσε να ξεκαθαρίσει τι σήμαινε στην πραγματικότητα ο λόγος $\Delta y / \Delta x$ τη στιγμή που έφτανε στο όριό του.

Στο μνημειώδες έργο του, «Théorie des Fonctions Analytiques - Θεωρία των Αναλυτικών Συναρτήσεων» στα 1797, προσπάθησε να θεμελιώσει το Διαφορικό Λογισμό και γενικότερα την Μαθηματική Ανάλυση στην Νευτώνεια έννοια της δυναμοσειράς (με καθαρά αλγεβρικές διαδικασίες). Έτσι αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x με x + i , όπου i συμβολίζει μια μικρή αύξηση και χρησιμοποιώντας τη θεωρία των σειρών έχει:

$$f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

με τους συντελεστές p, q, r, … να είναι συναρτήσεις του x, ανεξάρτητες του i , αλλά εξαρτημένες από την f. Έτσι κατέληξε στην κλάση των αναλυτικών συναρτήσεων (μιας μιγαδικής και όχι πραγματικής μεταβλητής), η οποία όμως είναι ουσιωδώς πιο περιορισμένη από τις διαφορίσιμες, σε κάποιο σημείο, συναρτήσεις.

Ο Lagrange συμβόλισε τη συνάρτηση p (x) με f ΄ (x) και την ονόμασε πρώτη παραγόμενη συνάρτηση της f (x) , την οποία αργότερα ονόμασε παράγωγο της f (x)

και τη συμβόλισε f'_x . Αυτός είναι ιστορικά και ο πρώτος συμβολισμός της παραγώγου (C. H. Edwards, 1979).

Η εξήγηση του Newton της «fluxion» ως ρυθμού μεταβολής φαινόταν να περικλείει την έννοια της κίνησης στα μαθηματικά. Επιπλέον μια «fluxion» φαινόταν να είναι ένα διαφορετικό είδος αντικειμένου από τη ρέουσα ποσότητα. Για τον Leibniz, το διαφορικό πηλίκο ήταν το πηλίκο των μηδενιζόμενων μικρών διαφορών. Για τον Lagrange η παράγωγος ήταν μία συνάρτηση, δηλαδή ήταν το ίδιο είδος όπως και η αρχική συνάρτηση. Γι' αυτό και ο συμβολισμός $f'(x)$ ήθελε να δείξει αυτό το πράγμα. Όμως δεν έγινε πλήρως αποδεκτός ο ορισμός του Lagrange, διότι υπέθετε ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση είναι άθροισμα μιας σειράς Taylor και συνεπώς έχει απείρου πλήθους παραγώγους.

Αργότερα ο Augustin Louis Cauchy έδωσε τη χαρακτηριστική βολή στη μέθοδό του με το αντιπαράδειγμα της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ που δεν είναι αναλυτική.

Παρ' όλα αυτά ο ορισμός αυτός οδήγησε τον Lagrange σ' έναν αριθμό από ενδιαφέρουσες ιδιότητες της παραγώγου. Χρησιμοποίησε τον ορισμό του που σε συνδυασμό με ένα κριτήριο του Euler, έδωσε ένα πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό για την παράγωγο μιας συνάρτησης:

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x) + h \cdot H,$$

όπου το H πηγαίνει στο μηδέν μαζί με το h .

Ο Lagrange μετέφρασε τη φράση: « Η πηγαίνει στο μηδέν με το h» με όρους ανισοτήτων και έγραψε:

«Δοθέντος D, το h μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $f(x + h) - f(x)$ να κείται μεταξύ $h(f'(x) - D)$ και $h(f'(x) + D)$»

που πλησιάζει αρκετά κοντά στον ε–δ ορισμό της παραγώγου (J. Grabiner, 1983).

Παρά το γεγονός ότι η αλγεβρική μέθοδος του Lagrange για τη θεμελίωση του Λογισμού δεν έδινε τις αναγκαίες συνθήκες για τη σύγκλιση των σειρών, η αντιμετώπιση της συνάρτησης με αφηρημένο τρόπο ήταν ένα αξιόλογο βήμα προόδου (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Ανάμεσα στους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού ήταν και ο Τσέχος Bernhard Bolzano (1781-1848). Κατά τη διετία 1816-1817, στις πρώτες μαθηματικές του εργασίες κάνει συστηματική μελέτη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων. Η σημαντικότερη εργασία του Bolzano, σχετικά με τις αρχές του Απειροστικού Λογισμού και της ανάλυσης γενικότερα, είναι η «Αναλυτική Απόδειξη», του 1817, όπου δίνει τον κατάλληλο ορισμό της συνεχούς συνάρτησης.

Ο ορισμός του είναι:

«Η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα, αν σε κάθε x του διαστήματος, η διαφορά f(x + ω) – f(x) μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμεί κανείς, παίρνοντας το ω αρκούντως μικρό» και παραδείγματα του ήταν τα πολυώνυμα.

Ήταν ο πρώτος που όρισε την παράγωγο της f , ως την ποσότητα της οποίας ο λόγος $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ προσεγγίζει το μηδέν, όσο κοντά θέλουμε, καθώς το Δx προσεγγίζει το μηδέν με θετικές ή αρνητικές τιμές και συμβόλισε με $\frac{dy}{dx}$ την παράγωγο της y = f(x). Επίσης στην «Αναλυτική Απόδειξη» ασχολείται κυρίως με την απόδειξη του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής. Δεκαπέντε χρόνια μετά, κατά τη διετία 1833-1834 έγραψε την πραγματεία του «Functionenlehre - θεωρία συναρτήσεων», όπου δίνει τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο, την έννοια της πλευρικής συνέχειας, των πλευρικών παραγώγων. Απέδειξε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη, προσέγγισε το θεώρημα του Taylor και το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, όμως οι αποδείξεις του ήταν ανεπαρκείς. Μελέτησε τοπικά ακρότατα και μονότονες συναρτήσεις και απέδειξε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για συναρτήσεις που ορίζονταν σε κλειστά - φραγμένα διαστήματα, δείχνοντας με κατάλληλα παραδείγματα ότι το θεώρημα δεν ισχύει όταν το διάστημα είναι ανοιχτό. Η προσφορά του στη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού ήταν ανεκτίμητη (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Ο Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) επεσήμανε το 1821 ότι το σκεπτικό του Lagrange δεν μπορεί να υλοποιηθεί, αφού η άλγεβρα των πεπερασμένων ποσοτήτων δεν επεκτείνεται αυτόματα στις άπειρες διαδικασίες.

Στο έργο του «Cours d' analyse» το 1821 έδωσε τον δικό του ορισμό του ορίου, αφού είχε δώσει αρχικά τους ορισμούς της μεταβλητής και της συνάρτησης.

Όρισε λοιπόν ως μεταβλητή:

«Μία ποσότητα που θεωρείται ως διαδοχή πολλών τιμών, διαφορετικών μεταξύ τους»

και ως συνάρτηση:

«Όταν οι μεταβλητές ποσότητες είναι συσχετισμένες μεταξύ τους έτσι ώστε, όταν δίνεται η τιμή της μιας να μπορούμε να ορίσουμε τις τιμές των άλλων και τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι διάφορες ποσότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω μιας απ' αυτές, η οποία ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ οι άλλες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής».

Ο ορισμός του ορίου που έδωσε ήταν:

«Όταν οι τιμές που δίνονται διαδοχικά στην ίδια μεταβλητή πλησιάζουν διαρκώς μια σταθερή τιμή από την οποία διαφέρουν τόσο λίγο, οσοδήποτε θέλουμε, αυτή η σταθερή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων».

Έπειτα ακολούθησε ο ορισμός του απειροστού:

«Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας μειώνονται διαρκώς με τέτοιον τρόπο, ώστε να γίνονται μικρότερες από οποιαδήποτε δοθείσα ποσότητα, εκείνη η μεταβλητή γίνεται αυτό που ονομάζουμε απειροστό. Μια τέτοια μεταβλητή έχει όριο μηδέν».

Ανάλογα ονόμασε άπειρο:

«μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούσαν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό οσοδήποτε μεγάλο».

Έχοντας δώσει τον ορισμό του ορίου συνέχισε δίνοντας τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης:

«Η f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] αν και μόνον αν η αριθμητική τιμή (δηλαδή η απόλυτη τιμή) της διαφοράς f (x + h) – f(x) τείνει στο μηδέν, καθώς το h τείνει στο μηδέν».

Συμπλήρωσε τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης με μία αναδιατύπωση:

«Η συνάρτηση f (x) θα παραμένει συνεχής ως προς x σ' ένα ορισμένο διάστημα, αν σ' αυτό το διάστημα μια απειροστή αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντα μια απειροστή αύξηση στην ίδια τη συνάρτηση».

Ο ακριβής ορισμός της παραγώγου δόθηκε από τον Cauchy, στα 1822, στο σύγγραμμά του «Resume des leçons sur le calcul infinitesimal».

Γράφει λοιπόν:

(«Απειροστικός Λογισμός, τόμος 1», Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, 1999)

«Όταν μια συνάρτηση y=f(x) παραμένει συνεχώς μεταξύ δύο άκρων της μεταβλητής x, και όταν αντιστοιχίσουμε σε μια τέτοια μεταβλητή μια τιμή μεταξύ των δύο παραπάνω άκρων, τότε μια απεριόριστα μικρή μεταβολή της μεταβλητής παράγει μία απεριόριστα μικρή μεταβολή της τιμής της συνάρτησης. Άρα, αν θέσουμε Δx=i, οι δύο όροι του λόγου των διαφορών $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ *θα είναι απεριόριστα μικρές ποσότητες. Παρόλο που οι δύο όροι θα πλησιάζουν στο όριο μηδέν απεριόριστα και σύγχρονα, ο λόγος είναι δυνατόν να συγκλίνει σε κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό. Αυτό το όριο, όταν υπάρχει, έχει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x. Αλλά*

μεταβάλλεται με το x… Η μορφή της νέας συνάρτησης, που είναι το όριο του λόγου $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$*, θα εξαρτάται από τη μορφή της αρχικής συνάρτησης y=f(x). Ακριβώς για να δείξουμε αυτή την εξάρτηση τη νέα συνάρτηση ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση και τη συμβολίζουμε με τη βοήθεια ενός τύπου ,* y' ή $f'(x)$*».*

Αν και ο Cauchy, όπως και οι Newton και D' Alembert πριν από αυτόν, έδωσε τον ορισμό του ορίου λεκτικά, εν τούτοις η αντίληψή του ήταν αλγεβρική. Με άλλα λόγια όταν στην απόδειξή του χρειαζόταν μια ιδιότητα ορίου χρησιμοποιούσε τον αλγεβρικό ανισοτικό – χαρακτηρισμό του ορίου, όπως φαίνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για παραγώγους.

Δηλαδή ο Cauchy όρισε την παράγωγο με όρους ορίου χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του Lagrange και μετά το διαφορικό με όρους παραγώγου και η εργασία του επηρέασε τους μαθηματικούς του δεύτερου μισού του 19ου αιώνα. Αν ο Cauchy ήταν εκείνος που έδωσε την απαραίτητη ώθηση στον Απειροστικό Λογισμό, ορίζοντας σωστά τις βασικές του έννοιες με κέντρο την έννοια του ορίου, εκείνος που είπε την τελευταία λέξη στην αυστηρή θεμελίωση του Λογισμού ήταν ο Karl Weierstrass και ο Richard Dedekind. Στόχος τους ήταν η αποκάθαρση των Μαθηματικών από τις ασάφειες του παρελθόντος δίνοντας έμφαση στην ακρίβεια και αυστηρότητα της διατύπωσης. Ο Karl Weierstrass δόμησε την Ανάλυση πάνω σε μια καθαρά τυπική αριθμητική βάση, εντελώς απαλλαγμένη από τη γεωμετρική εποπτεία και ο Dedekind ανέλυσε την έννοια της συνέχειας πραγματικών αριθμών σε αριθμητική γλώσσα, κατασκευάζοντας το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τομές (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

Μετά τον Cauchy, ο Λογισμός ήταν τελείως διαφορετικός. Έμοιαζε μ' ένα αυστηρό αντικείμενο με καλούς ορισμούς και με θεωρήματα των οποίων οι αποδείξεις βασίζονταν στους ορισμούς αυτούς, παρά σαν ένα σύνολο δυνατών μεθόδων. Ο ορισμός του Cauchy για την παράγωγο πάσχει από μια έλλειψη την οποία αυτός δεν γνώριζε βέβαια: «Δοθέντος ενός ε , επιλέγει δ που κάνει για όλα τα x». Δηλαδή υπέθετε ότι το πηλίκο διαφορών συγκλίνει ομοιόμορφα στο όριό του.

Το 1840 ο G.G. Stokes, V. Seidel, K. Weierstrass διατύπωσαν τη διάκριση μεταξύ σύγκλισης και ομοιόμορφης σύγκλισης. Στα 1850 ο Weierstrass στα μαθήματά του στο Βερολίνο έθεσε αλγεβρικές ανισότητες σε αντικατάσταση των λεκτικών εκφράσεων στα θεωρήματα της Ανάλυσης. Διέκρινε την κατά σημείο

σύγκλιση από την ομοιόμορφη σύγκλιση και με την ε-δ τεχνική παρουσίασε ένα συστηματικό και αυστηρό Λογισμό.

Ο Karl Weierstrass (1815 – 1897) το 1872 έδωσε ένα παράδειγμα μιας συνεχούς συνάρτησης που δεν έχει παράγωγο, δηλαδή μιας συνεχούς συνάρτησης που δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο της, κάτι εντελώς αντίθετο με τη διαίσθηση. Έτσι κατάφερε ένα σοβαρό χτύπημα στη χρήση της γεωμετρικής διαίσθησης στις αναλυτικές μελέτες.

Οι ελλείψεις και τα λάθη που υπήρχαν κατά την ιστορική εξέλιξη του Διαφορικού Λογισμού, συνέβαλε στο «ξεκαθάρισμα» του και στην αυστηρότερη θεμελίωσή του.

Έτσι, το 19ο αιώνα με την αυστηρότερη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών και την ανάπτυξη της άλγεβρας και των ανισοτήτων, έγινε η θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού. Βέβαια η αριθμητικοποίηση του απειροστικού λογισμού δημιούργησε πολλές αντιδράσεις Ένα χαρακτηριστικό δείγμα αποτελεί το παρακάτω κείμενο του Du Bois Reymond: «… Η αριθμητικοποίηση της ανάλυσης τη διαχωρίζει από τη γεωμετρία και συνεπώς από τη διαίσθηση και το φυσικό τρόπο σκέψης. Την περιορίζει σ’ ένα απλό παιχνίδι συμβόλων, όπου τα γραπτά σύμβολα αναλαμβάνουν τον αυθαίρετο ρόλο του πιονιού στο σκάκι».

Με την εισαγωγή των ε-δ διαδικασιών, έπαψαν να υπάρχουν οι ασαφείς εκφράσεις που συναντήσαμε στην ιστορική διαδρομή και όλες οι βασικές έννοιες του απειροστικού λογισμού διατυπώθηκαν με μεγάλη προσοχή και σαφήνεια, βασισμένες στους πραγματικούς αριθμούς και τις θεμελιώδεις πράξεις και σχέσεις που τους διέπουν (Ε. Γιαννακούλιας, 2006).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Η M. Artigue (1991) ταξινομεί σε τρεις μεγάλες κατηγορίες τις δυσκολίες που δημιουργούνται στους μαθητές κατά τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού.

Οι τρεις αυτές κατηγορίες είναι:

1. Δυσκολίες που συνδέονται με ελλείψεις στην κατανόηση των βασικών αντικειμένων, που διαπραγματεύεται ο Απειροστικός Λογισμός, δηλαδή, των πραγματικών αριθμών και της έννοιας της συνάρτησης.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές θεωρούν τους πραγματικούς αριθμούς αλγεβρικά αντικείμενα, αναγνωρίζουν ότι έχουν πυκνή διάταξη, δεν μπορούν όμως να τους συσχετίσουν με την πραγματική ευθεία. Όσον αφορά στην έννοια τη συνάρτησης, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο τι είναι συνάρτηση, στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας συνάρτησης και στη θεώρηση συναρτήσεων για την επίλυση προβλημάτων. Μία συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί με διάφορες αναπαραστάσεις π.χ. γραφική παράσταση, αλγεβρική ή λεκτική έκφραση, πίνακα τιμών, και κάθε πεδίο αναπαράστασης της δεν μπορεί να την περιγράψει πλήρως. Έτσι, οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις πληροφορίες που παίρνουν από τις διάφορες μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης, όπως και να μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Η πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ως διαδικασίες και όχι ως αντικείμενο. Πρώτα αναπτύσσεται η διάσταση της διαδικασίας ενώ η διάσταση του αντικειμένου είναι πιο δύσκολο να αποκτηθεί (Mochkovich et al, 1993; Sfard, 1992; Yeruschalmy & Schwartz, 1993, N. Μουσουλίδης & Α. Γαγάτσης 2004).

Σε έρευνα των M. Asiala, J. Cottrill, Ed. Dubinsky, K. E. Schwingendorf, (1997), επιβεβαιώθηκε ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της γραφικής παράστασης της παραγώγου, πηγάζουν από την δυσκολία

που αντιμετωπίζουν οι ίδιοι στην κατανόηση της συνάρτησης. Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο το θεωρητικό πλαίσιο δράση- διαδικασία- αντικείμενο-σχήμα (Action - Process - Object- Schema, APOS). Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο (M. Asiala, J. Cottrill, Ed. Dubinsky, K. E. Schwingendorf, 1997), ο μαθητής για να κατανοήσει μία έννοια ακολουθεί κάποιες διανοητικές διεργασίες, σύμφωνα με τις οποίες αρχικά εκφράζεται με μία εσωτερική λειτουργία (δράση) η οποία μετασχηματίζεται σε μια διαδικασία που ενσωματώνεται σε προηγούμενες για να γίνει αντικείμενο. Ένα σχήμα αποτελεί συνεκτική συλλογή διαδικασιών και αντικειμένων που συνεχώς εμπλουτίζονται. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την θεωρία APOS (Dubinsky, 1991) μία δράση (ενέργεια) που ασκείται σταδιακά είναι η ατομική μετατροπή «μαθηματικών αντικειμένων», χρησιμοποιώντας έναν σαφή αλγόριθμο. Όταν οι ατομικές σκέψεις που κάνουμε κατά τη διάρκεια της «δράσης» (action) δημιουργούν μία εσωτερική διεργασία που εκτελεί την ίδια μετατροπή των μαθηματικών αντικειμένων τότε λέμε ότι η δράση έχει γίνει διαδικασία (process) με την οποία το μαθηματικό θέμα θα γίνει μία ολοκληρωμένη «οντότητα», δηλαδή ένα «αντικείμενο» (object). Καθώς ο μαθητής αναστοχάζεται πάνω στη δράση μετασχηματισμού διαδικασιών, οι διαδικασίες αρχίζουν να γίνονται αντικείμενα (objects) . Ένα αντικείμενο κατασκευάζεται μέσω της ενθυλάκωσης (encapsulated) μιας διαδικασίας και ο μαθητής δρώντας συνειδητά, αντιλαμβάνεται ότι οι μετασχηματισμοί μπορούν να ενεργήσουν στη διαδικασία και μπορεί να κατασκευάσει τέτοιους μετασχηματισμούς. Το «σχήμα» (schema) είναι μία συνεπής συλλογή διαδικασιών (δράσεων) που συνδέονται με τα μαθηματικά αντικείμενα καθώς και με άλλα σχήματα που έχουν ήδη κατασκευαστεί με σκοπό να χρησιμοποιηθεί στο μαθηματικό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε. Για την κατανόηση μιας έννοιας που εξετάζουμε, ο Dubinsky (1991) υποστηρίζει ότι σε ήδη υπάρχοντα σχήματα δημιουργούνται νέα με αναστοχαστική αφαίρεση και έχει διατυπώσει την έννοια της «γενετικής αποσύνθεσης» των μαθηματικών εννοιών, δηλαδή μια συλλογή αναστοχαστικών αφαιρέσεων που προσεγγίζονται με μια ορισμένη σειρά ώστε να επέλθει η κατανόηση μιας έννοιας. Σύμφωνα με την έρευνα αυτή, μια διδασκαλία που ακολουθεί το παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο (APOS), βοηθάει τους μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη αντίληψη για τη συνάρτηση και την παράγωγό της ως διαδικασία και αντικείμενο σε σχέση με τη παραδοσιακή διδασκαλία.

Οι καθηγητές των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παραδοσιακά εστιάζουν τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων, για τη διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Οι έρευνες δείχνουν ότι, την καλύτερη επίδοση στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και στην επίλυση προβλήματος, που εμπλέκουν την έννοια αυτή, έχουν οι μαθητές που ακολουθούν τη γεωμετρική ή ολιστική προσέγγιση και όχι αυτοί που ακολουθούν την αλγεβρική. Σύμφωνα με την έρευνα των Μονογυιού και Γαγάτση (2008), ένας μεγάλος αριθμός μαθητών εργάζεται μηχανικά, αλγεβρικά αγνοώντας το σχήμα που τους δίνεται. Επίσης, ο Vinner (1992) επισήμανε ότι μια συνάρτηση, όπως διδάσκεται στα σχολεία, προσδιορίζεται συχνά με μια μόνο από τις αναπαραστάσεις της, είτε την αλγεβρική είτε την γραφική. Επιπροσθέτως, η Sfard (1992), διαπίστωσε ότι οι μαθητές δεν είναι ικανοί να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων.

Επίσης σε έρευνα που έγινε από τους Μ. Καλδρυμίδου και Ε. Μορόγλου (2006) σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου και αφορούσε τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης και τον ρόλο του αναπαραστασιακού πλαισίου (αριθμητικό, αναλυτικό, γραφικό) βρέθηκε ότι όταν η συνάρτηση δίνονταν με τη γραφική της παράσταση υπήρχε πολυμορφία απαντήσεων από τους μαθητές, ενώ στην περίπτωση όπου η συνάρτηση δίνονταν με τον τύπο της, οι απαντήσεις διαφοροποιούνταν ανάλογα με την ευκολία ή το βαθμό εξοικείωσης με την κατηγορία της συνάρτησης. Όταν η συνάρτηση ήταν οικεία οι μαθητές ακολουθούσαν το σημειακό τρόπο επεξεργασίας (υπολογισμός σημείων για τη γραφική παράσταση), ενώ σε πιο δύσκολες ή και άγνωστες συναρτήσεις εκτός από τον σημειακό τρόπο επεξεργασίας χρησιμοποιούσαν και ένα πιο γενικό τρόπο προσέγγισης (σχήμα χωρίς στοιχεία, γενικές ιδιότητες). Από την έρευνα αυτή φαίνεται ότι ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου είναι σημαντικός και οι αντιλήψεις, καθώς και οι τρόποι επεξεργασίας δεν είναι ανελαστικές αλλά διαφοροποιούνται ανάλογα με το πλαίσιο. Φαίνεται επίσης ότι πράγματι το ζήτημα του διαχωρισμού των αναπαραστατικών πλαισίων δεν είναι δεδομένο. Το μεν γραφικό πλαίσιο αποτελεί μία ενιαία και συνεπή οντότητα, αλλά στα δύο άλλα πλαίσια, το αναλυτικό και το αριθμητικό, οι αντιλήψεις και οι τρόποι επεξεργασίας διαφοροποιούνται αφενός ανάλογα με το έργο και αφετέρου δεν είναι σαφώς διαχωρισμένα.

2. Δυσκολίες που οφείλονται στη κατανόησης της έννοιας του ορίου.

Σύμφωνα με τον Cornu (1991), η δυσκολία στη διδασκαλία και την μάθηση της έννοιας του ορίου οφείλεται στην πολυπλοκότητα της έννοιας και στον βαθμό που μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιεί τον μαθηματικό ορισμό. Πολλοί μαθητές, δεν στηρίζονται στον ορισμό του ορίου για να επιλύσουν διάφορα προβλήματα, χρησιμοποιούν όμως την έννοια του ορίου με διαισθητικό τρόπο. Διάφορες έρευνες που έχουν γίνει, έχουν δείξει ότι ενώ οι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια του ορίου παρόλα αυτά μπορούν να λύνουν ασκήσεις και προβλήματα στα όρια. Προφανώς, το ότι οι μαθητές είναι σε θέση να λύνουν ασκήσεις επάνω στα όρια ενώ δεν μπορούν να κατανοήσουν πλήρως το νόημά τους, οφείλεται στον φορμαλιστικό τρόπο με τον οποίο σκέπτονται, δηλαδή στην τυποποιημένη χρήση των κανόνων εύρεσης ορίων πραγματικής συνάρτησης. Όταν ο καθηγητής διδάσκει την έννοια του ορίου, οι μαθητές έχουν ήδη κάποιες ιδέες, εικόνες, διαισθήσεις, εμπειρίες προερχόμενες από την καθημερινότητα, οι οποίες αναμιγνύονται με την νέα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται σχηματίζοντας νέες αντιλήψεις. Βέβαια, είναι αξιοσημείωτο ότι πολλές φορές οι αυθόρμητες αντιλήψεις μπορούν να παραμείνουν πολύ καιρό στο μυαλό του μαθητή και να δημιουργήσουν αντιφατικές ιδέες, οδηγώντας τον μαθητή σε μία γνωστική σύγκρουση.

Με τον όρο αυθόρμητες αντιλήψεις εννοούμε τις ιδέες- λανθασμένες συνήθως- που έχουν σχηματίσει τα παιδιά επάνω σε λέξεις και έννοιες πριν ξεκινήσει η διδασκαλία εντός της τάξης και που οφείλονται στις μέχρι τότε εμπειρίες τους. Οι μαθητές κατασκευάζουν τα πλαίσια εργασίας τους στα μαθηματικά από τις απόψεις, τις διαισθήσεις και τις εμπειρίες που έχουν από το παρελθόν προσπαθώντας να κατανοήσουν και να βγάλουν νόημα για τον κόσμο. Μια τέτοια άποψη που μπορεί να προκύπτει είναι ότι τα μαθηματικά της τάξης είναι τυποποιημένα, μη – διαπραγματεύσιμα και ασύνδετα με τον έξω κόσμο.

Ο Tall (1986) από στοιχεία ερευνών που αφορούν τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, αναφέρει ότι η προσέγγιση της είτε μέσω του τυπικού ορισμού είτε μέσω της γεωμετρικής εμπειρίας μιας τέμνουσας που τείνει σε μια εφαπτομένη (όταν αναφερόμαστε στην έννοια της παραγώγου) είναι εντελώς ακατάλληλη. Οι Cottrill et al. (1996), επισημαίνουν ότι ακόμη και η χρήση της τεχνολογίας δεν μπόρεσε να υπερνικήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι σπουδαστές στην κατανόηση της έννοιας, όπως προκύπτει από αναφορές ερευνητών

(Tall, 1992; Li & Tall, 1993; Monaghan, Sun & Tall,1994), που ασχολήθηκαν με το θέμα αυτό.

3. Δυσκολίες που συνδέονται με το ρήγμα που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης.

Οι δραστηριότητες σε δύσκολα αντικείμενα των Μαθηματικών, όπως στον Διαφορικό Λογισμό, απαιτούν αλγεβρικές δεξιότητες και αναλυτική σκέψη που είναι διαφορετική από την αλγεβρική και αυτό είναι κάτι που δυσκολεύει τους μαθητές. Για παράδειγμα όταν θέλουμε να αποδείξουμε μία ισότητα α = β στην Άλγεβρα, συνήθως αποδεικνύουμε ότι α – β = 0, ή ξεκινάμε από το ένα μέλος και με ισότητες καταλήγουμε στο άλλο, ή να αποδεικνύουμε ότι το α = γ και το β = γ άρα α = β. Στην Ανάλυση μία ισότητα αποδεικνύεται συνήθως μέσω ανισοτήτων. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, ή ότι δεν ισχύει α < β και β < α .

Οι μαθητές λοιπόν, ενώ μπορούν ευκολότερα να μαθαίνουν αλγεβρικές μεθόδους και να τις εφαρμόζουν, όταν πρέπει να αλλάξουν τρόπο σκέψης αποτυγχάνουν. Αυτό συμβαίνει διότι όταν ο μαθητής καλείται να ανταπεξέλθει στην εκμάθηση των εννοιών του Διαφορικού Λογισμού στην τελευταία τάξη του Λυκείου**,** απαιτείται από αυτόν η συσσώρευση και πλήρης κατανόηση γνώσεων προηγούμενων ετών προκειμένου να μπορεί να κρίνει σωστά αλλά και να συνδυάζει προηγούμενες γνώσεις. Με λίγα λόγια οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου φθάνουν πολλές φορές έως την τάξη αυτή χωρίς να έχουν κάνει κτήμα τους βασικές αλγεβρικές έννοιες αλλά ακόμα και όταν έχουν κατακτήσει τις απαιτούμενες φορμαλιστικά αλγεβρικές γνώσεις δεν έχουν την απαιτούμενη κριτική και συνδυαστική σκέψη**.**

Σύμφωνα με τους John S. Berry & Melvin A. Nymanb (2003), οι μαθητές έχουν αρχικά στο μυαλό τους μία αλγεβρική εικόνα του λογισμού και γι’ αυτό είναι δύσκολο να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων και των παραγώγων τους, καθώς και με την ίδια την συνάρτηση. Έτσι πρέπει οι μαθητές να επεκτείνουν την κατανόηση των εννοιών του λογισμού από τη συμβολική αναπαράσταση σε μια γραφική αναπαράσταση, δηλαδή να αποκτήσουν «αισθητική». Όταν κάνουν τους απαραίτητους συνδυασμούς με τις ιδιότητες των γραφικών παραστάσεων, δηλαδή όταν μπορούν να πηγαίνουν από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης στη γραφική παράσταση της παραγώγου της και ειδικότερα την

αντίστροφη διαδικασία, τότε αποκτούν μία καλύτερη κατανόηση των εννοιών του λογισμού. Σύμφωνα με την Repo (1994), αν ο μαθητής έχει ενσωματώσει την έννοια της παραγώγου και μπορεί να σκεφτεί πάνω στην παράγωγο συνάρτησης, σαν ένα αντικείμενο για δραστηριότητα, τότε είναι επίσης δυνατόν να κατασκευάσει μία νέα αντίστροφη διαδικασία για την παραγωγισιμότητα (ολοκλήρωση).

Α. Δυσκολίες κατανόησης μαθηματικών ορισμών

Έχει παρατηρηθεί από έρευνες, ότι κάποιοι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα σωστής αποκωδικοποίησης των μαθηματικών ορισμών και ειδικά αυτών που αναφέρονται στον Διαφορικό Λογισμό. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Διαφορικός Λογισμός αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα αντικείμενα της μαθηματικής επιστήμης με τα οποία έρχονται σε επαφή οι μαθητές.

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση των εννοιών του Διαφορικού Λογισμού γιατί μαθαίνουν αλγοριθμικούς κανόνες και μεθοδολογίες σχετικά με την παράγωγο για να μπορούν να λύσουν τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων, χωρίς να κατανοούν πλήρως τη σημασιολογία της καθεμίας από αυτές τις έννοιες. Δηλαδή οι μαθητές δεν πρέπει να μαθαίνουν απλά ορισμούς, θεωρήματα και διαδικασίες, αλλά πρέπει να προσπαθούν με την βοήθεια του εκπαιδευτικού να κατανοούν τις ιδέες που υπάρχουν πίσω από την τυπική περιγραφή αυτών και να κατανοούν τις βαθύτερες αιτίες που οδηγούν στα μαθηματικά συμπεράσματα.

Οι ορισμοί στα Μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση και κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών. Αποτελούν τη βάση επάνω στην οποία στηρίζεται ο μαθητής προκειμένου να κατασκευαστεί το οικοδόμημα των δικών του μαθηματικών γνώσεων. Η σωστή κατανόηση των πρωταρχικών εννοιών του Διαφορικού λογισμού είναι το εφαλτήριο για τη σωστή πορεία του μαθητή προς την κατάκτηση της γνώσης.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές έχουν συνηθίσει σ’ ένα τρόπο σκέψης χωρίς τη χρήση των ορισμών. Ο Vinner (1991) αναφέρει ότι η κατανόηση μιας έννοιας δεν είναι το ίδιο με το να είναι κανείς σε θέση να σχηματίσει τυπικά τον ορισμό της, αλλά αν ένα άτομο διαθέτει μια εικόνα της έννοιας τότε μπορεί να κατανοήσει την έννοια. Για να κατανοήσουμε μια έννοια πρέπει να μπορούμε να σχηματίζουμε μια σωστή εικόνα για την έννοια αυτήν και όχι να αποστηθίζουμε έναν τυπικό ορισμό.

Ο D. Tall και ο S. Vinner (1981) με τον όρο «εικόνα έννοιας» (concept image) ή «πλαίσιο έννοιας» (concept frame), θέλουν να περιγράψουν την πλήρη γνωσιακή δομή που συσχετίζεται με την έννοια, η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές απεικονίσεις και τις σχετικές ιδιότητες και διεργασίες. Βέβαια, είναι λογικό σε διαφορετικές στιγμές να προκληθούν φαινομενικά συγκρουόμενες εικόνες, όμως μόνο τότε μπορεί να υπάρχει κάποια πραγματική έννοια σύγκρουσης ή σύγχυσης, κάτι που είναι αναγκαίο προκειμένου να γίνει αισθητή η ελλιπής κατανόηση των εν λόγω εννοιών. Δηλαδή οι μαθητές όταν βρεθούν αντιμέτωποι με κάποιο μαθηματικό πρόβλημα, πολλές φορές φαίνεται πως αμφιταλαντεύονται στη χρήση κάποιων ορισμών, κατάσταση που φανερώνει τη μη κατάκτηση των συγκεκριμένων γνώσεων.

Όταν λέμε «ορισμό έννοιας», εννοούμε ένα σχήμα λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει μια έννοια και ο μαθητής μπορεί να τον μάθει μηχανικά ή να τον μάθει και να τον συσχετίσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια στο σύνολό της ή ακόμα μπορεί να είναι μια προσωπική ανακατασκευή ενός ορισμού. Τον ορισμό της έννοιας μπορεί να τον δίνουμε στον μαθητή, ή να τον κατασκευάζει μόνος του και φυσικά μπορεί να τον μεταβάλλει με την πάροδο του χρόνου. Έτσι, ένας «προσωπικός ορισμός της έννοιας» μπορεί να διαφέρει από έναν *τυπικό* ορισμό της έννοιας, που είναι γενικά αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Με τη φράση «προσωπικός ορισμός της έννοιας» εννοούμε τις σκέψεις που κάνει ο κάθε μαθητής στο μυαλό του για την κάθε έννοια, απόρροια των μέχρι τότε εμπειριών του. Πρέπει όμως να προσέξουμε να μην εξελιχθεί η εικόνα μιας έννοιας σε μία πιο περιορισμένη έννοια που να περιλαμβάνει μόνο τύπους, κάτι που γίνεται όταν ο καθηγητής δώσει τον τυπικό ορισμό και εργαστεί αρχικά με τη γενική έννοια και έπειτα περάσει μόνο σε παραδείγματα με χρήση τύπων. Αντιθέτως ο κάθε εκπαιδευτικός θα πρέπει να δίνει παραδείγματα πιο σύνθετων ασκήσεων έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να επεξεργάζονται τις μαθηματικές έννοιες σε βάθος και κατ' επέκταση να εξοικειωθούν με τη χρήση των εννοιών σε δυσκολότερες ασκήσεις. Επίσης ο τρόπος σκέψης του μαθητή επηρεάζεται από αυτόν που έχει συνηθίσει στην καθημερινή του ζωή, διότι η διδασκαλία του μαθήματος δεν ξεκινά μέσα στην τάξη. Κάθε μαθητής έχει δημιουργήσει στο μυαλό του εικόνες για τις διάφορες έννοιες ανάλογα με τις εμπειρίες του, το έως τότε διάβασμά του στα σχετικά μαθήματα και τις γνώσεις που έχει αποκτήσει. Γι' αυτό πολλές φορές αγνοεί τον τυπικό ορισμό, παρόλο που ο ορισμός μιας έννοιας μπορεί να τον αποτρέψει από την δημιουργία διαφόρων

παρανοήσεων από την εικόνα μιας έννοιας. Ο Davydov (1990) επισήμανε ότι οι καθημερινές έννοιες αναπτύσσονται διαμέσου της εμπειρικής αφαίρεσης, με τη σύγκριση των χαρακτηριστικών διαφορετικών καταστάσεων και την επισήμανση ομοιοτήτων και διαφορών, ενώ οι επιστημονικές έννοιες απαιτούν τη θεωρητική αφαίρεση, δεν μπορούν να προκύψουν από την εμπειρική αφαίρεση αλλά χρειάζονται ένα ποιοτικό, νοητικό άλμα. Οι επιστημονικές και οι καθημερινές έννοιες σχηματίζονται μέσω διαφορετικών δρόμων και ο καθένας από τους παραπάνω τύπους εννοιών είναι ισχυρός στο εδάφιο εκείνο της γνώσης στο οποίο, ο άλλος τύπος εκδηλώνει την αδυναμία του και την περιορισμένη ερμηνευτική του ικανότητα (Δαφέρμος, 2002).

Οι D. Tall και ο S. Vinner (1981) ονόμασαν ένα τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας που μπορεί να συγκρούεται με ένα άλλο τμήμα της εικόνας της έννοιας ή του ορισμού της έννοιας, δυνητικό παράγοντα σύγκρουσης. Ο παράγοντας αυτός δεν προκαλείται όταν έχουμε πραγματικά γνωσιακή σύγκρουση, γιατί τότε έχουμε παράγοντες γνωσιακής σύγκρουσης. Σε μερικές περιπτώσεις οι παράγοντες γνωσιακής σύγκρουσης μπορούν να προκληθούν υποσυνείδητα, αφού απαιτείται πολύς χρόνος για να γίνει, αν ποτέ γίνει, συνειδητά κατανοητός ο λόγος της σύγκρουσης.

Ο Piaget (Tall, 1991) ονόμασε τη διαδικασία της πρόσληψης νέων δεδομένων αφομοίωση και την αναδιάταξη παλαιών δεδομένων ώστε να ενσωματωθούν στα νέα, προσαρμογή, έννοιες οι οποίες είναι συμπληρωματικές. Αν η προσαρμογή δεν έχει εκτελεστεί ικανοποιητικά, μπορεί να συμβαίνει το εξής: νέα δεδομένα να βρίσκονται σε σύγκρουση με τα παλιά, αλλά και οι δύο αναπαραστάσεις δηλαδή οι νέες σωστές γνώσεις με τις παλιές λανθασμένες να εξακολουθούν να είναι παρούσες την ίδια στιγμή.

Όταν μιλάμε για μια διαδικασία ή ένα αντικείμενο, σχηματίζεται γι' αυτό μια *νοητική αναπαράσταση* (Dreyfus, 1991) και κάποιοι μαθητές περιλαμβάνουν εικόνες στις νοητικές τους αναπαραστάσεις, ενώ άλλοι έχουν σύμβολα ή παραδείγματα για να είναι σε θέση να σκεφτούν τις έννοιες. Μια έννοια μπορεί να αναπαρασταθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, ενώ μπορεί ακόμη να υπάρχουν συγκρουόμενες αναπαραστάσεις οι οποίες προκαλούνται σε διαφορετικές στιγμές ανάλογα με το πλαίσιο. Όταν οι αναπαραστάσεις δεν συγκρούονται, τότε συγχωνεύονται σε μία,

αρκεί να μπορεί το άτομο να βρει τις συνδέσεις και ο μαθητής κατανοεί καλύτερα την έννοια, ενώ όταν δεν υπάρχει συνέπεια, τότε μπορεί να προκύψει σύγκρουση.

Η γνώση μιας έννοιας είναι, σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), η τάση του ατόμου να φέρνει στο νου του ένα σχήμα ώστε να είναι σε θέση να χειριστεί, να οργανώσει ή να κατανοήσει μια προβληματική κατάσταση. Μπορεί να είναι δύσκολο να κρατηθεί η μαθηματική γνώση χωριστά από τη μαθηματική κατασκευή. Μία σωστά κατακτημένη έννοια μπορεί να αποτυπωθεί επίσης σωστά σε ένα σχήμα, για παράδειγμα σε μία γραφική παράσταση, αν όχι τότε ένα λάθος σχήμα μπορεί να διορθωθεί διορθώνοντας επίσης τις λανθασμένες σκέψεις του μαθητή για τις εν λόγω έννοιες.

Ένα μέρος της μάθησης, σύμφωνα με τον Dubinsky (1991), εφαρμόζει την αναστοχαστική αφαίρεση σε υπάρχοντα σχήματα για να δημιουργήσει νέα που παρέχουν μια κατανόηση των υπό εξέταση εννοιών και αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μάθηση μέχρι να σχηματιστούν τουλάχιστον πολύ απλουστευτικά σχήματα. Διαφορετικά, οι μαθητές θα εκτελούν έργα ρουτίνας και θα αγνοούν το πραγματικό εύρος μιας έννοιας. Μπορούν επίσης να δημιουργήσουν σχήματα τα οποία είναι ασυνεπή και εσφαλμένα.

Σύμφωνα με τον Cornu (1991) ο μαθητής περνάει περιόδους σύγχυσης, ώστε η νέα γνώση να συναρμοστεί με την υπάρχουσα και τούτο αποτελεί τμήμα της μαθησιακής διαδικασίας. Με τη σύγχυση οι μαθητές προσπαθούν να βάλλουν τα σχήματα τους σε τάξη και έτσι αρχίζουν να τα προσαρμόζουν. Η σύγχυση λοιπόν φαίνεται πως είναι πολλές φορές το πρώτο στάδιο για την κατάκτηση της γνώσης, εφόσον αυτή υφίσταται, αρκεί ο μαθητής μέσα από την μετέπειτα διαδικασία της αναθεώρησης να μπορέσει να ξεκαθαρίσει τις σωστές από τις λανθασμένες εικόνες προς την τελική κτήση της αλήθειας των εννοιών.

Σύμφωνα με τις Fulvia Furinghetti & Domingo Paola (1991), οι εικόνες των μαθητών για την παράγωγο προέρχονται περισσότερο από την προηγούμενη σχολική τους εμπειρία παρά από την καθημερινή εμπειρία εκτός σχολείου. Σύμφωνα πάντα με τις Fulvia Furinghetti & Domingo Paola (1991), η εικόνα που έχουν οι μαθητές για την έννοια της παραγώγου και τον ορισμό της είναι η εφαπτομένη της συνάρτησης, η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση. Μία από τις πιο κοινές πεποιθήσεις των μαθητών είναι ότι η εφαπτομένη δεν μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης σε άλλα σημεία παρά μόνο στο ένα σημείο επαφής. Σύμφωνα με το Orton (1977, 1984) η δυσκολία βρίσκεται στην κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης ως

το όριο της γραμμής που τείνει να έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ένα κοινό σημείο σε απειροστό διάστημα ($x_0 - \Delta x$, $x_0 + \Delta x$) και προτείνει τη χρήση κατάλληλου λογισμικού που θα δώσει έμφαση σε δυναμικές πτυχές, που υποστηρίζονται από αριθμητικές και γραφικές μεθόδους και από την απεικόνιση. Επίσης, ο Orton (1983) αναφέρει ότι πολλοί μαθητές μαθαίνουν την παραγώγιση σαν ένα σύνολο από κανόνες που εφαρμόζουν χωρίς να καταλαβαίνουν τους λόγους για τους οποίους γίνεται αυτό.

Οι Samer Habre & May Abboud (1997), σε εμπειρική έρευνα με ερωτηματολόγιο και συνεντεύξεις που έγινε σε φοιτητές 1ου έτους πάνω στον Διαφορικό Λογισμό, βρήκαν ότι οι περισσότεροι φοιτητές όταν τους ζητείται να γράψουν τον ορισμό της παραγώγου αποτυγχάνουν. Η αιτία της αποτυχίας αυτής σύμφωνα με την έρευνα, οφείλεται στη μη χρήση του ορισμού για την εύρεση της παραγώγου με συνέπεια οι μαθητές γρήγορα να ξεχνούν τον ορισμό. Όταν, όμως εξηγήσουν στους φοιτητές την παράγωγο ως ρυθμό μεταβολής και την αφομοιώσουν δημιουργώντας την εικόνα της παραγώγου ως κλίση μιας καμπύλης σ' ένα δεδομένο σημείο που μπορεί να αυξάνεται και να μειώνεται, τότε αυτοί έχουν μια σχεδόν πλήρη γεωμετρική κατανόηση.

Β. Δυσκολίες κατανόησης μαθηματικών αποδείξεων

Πολλές έρευνες έχουν ασχοληθεί με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση μαθηματικών αποδείξεων. Οι D. Alibert και M. Thomas (1991) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές είναι παθητικοί δέκτες και δεν έχουν ενεργή συμμετοχή στην κατασκευή της γνώσης και γι αυτό οι μαθητές θα πρέπει να διδάσκονται αποδείξεις, διότι έτσι οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι πράγματι ισχύουν οι διάφορες μαθηματικές προτάσεις. Επιπροσθέτως όταν οι μαθητές διδάσκονται και κατανοούν τις μαθηματικές αποδείξεις, οικοδομούν ένα στέρεο θεμέλιο μαθηματικών γνώσεων. Όμως υπάρχει και διαφορετική προσέγγιση από άλλους ερευνητές που επισημαίνουν ότι οι μαθητές βλέπουν τις αποδείξεις ως απλή εποπτική επιβεβαίωση σε κάτι που όντως ισχύει (Schoenfeld, 1985). Με λίγα λόγια οι μαθητές δέχονται πως για κάθε θεώρημα που υπάρχει στην Ανάλυση, θα πρέπει να διδαχτούν και μία απόδειξη χωρίς να αισθάνονται πως μπορούν οι αποδείξεις να προσφέρουν κάτι στη μαθηματική τους σκέψη. Γενικά, οι μαθητές δυσκολεύονται να γράψουν αυστηρά μία

απόδειξη και γι’ αυτό συνηθίζουν να τις αποφεύγουν, ή όταν επιχειρούν να τις κάνουν χρησιμοποιούν την εν λόγω πρόταση ως κάτι που ισχύει ή θεωρούν ως προφανή κάποια άλλα θεωρήματα. Πολλές φορές, οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου, προσπαθούν να αποστηθίσουν τις αποδείξεις, προκειμένου να τις αποδώσουν όταν τους ζητηθούν στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, χωρίς να κατανοούν τις ιδέες που κρύβονται πίσω από αυτές και δεν μπορούν να τις συνδέσουν με άλλες μαθηματικές προτάσεις. Ο τρόπος παρουσίασης των μαθηματικών προτάσεων στα σχολικά εγχειρίδια ακολουθεί την παραγωγική λογική και στην Μαθηματική Ανάλυση δεν αναφέρονται τα αξιώματα θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Επίσης, δεν αναφέρεται πότε οι διατυπώσεις των θεωρημάτων προηγούνται και πότε έπονται των αποδείξεων.

Σε έρευνα που έγινε από τους Ε. Καπετανά, Θ. Ζαχαριάδη (2007), για τις πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών του Λυκείου για τη μελέτη και μάθηση των μαθηματικών βρέθηκε ότι η αγάπη για τα μαθηματικά συσχετίζεται θετικά με τη μελέτη των μαθηματικών με κατανόηση και αναστοχασμό, με υψηλή επίδοση στο σχολείο και με ικανότητα για κατανόηση μαθηματικών αποδείξεων. Τελικά φαίνεται ότι η υψηλή επίδοση και μαθηματική ικανότητα εκφράζεται με την ικανότητα κατανόησης των αποδείξεων. Αντίθετα, η διαδικαστική άποψη και ο διαδικαστικός τρόπος μελέτης των μαθηματικών σχετίζονται αρνητικά με την επίδοση στα μαθηματικά και την ικανότητα για κατανόηση αποδείξεων. Αυτό σημαίνει ότι η επίδοση στα μαθηματικά και η μαθηματική ικανότητα για κατανόηση αποδείξεων εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μελετούν μαθηματικά.

Η διαδικασία της απόδειξης εμπεριέχει δύο υποδιαδικασίες, την επιβεβαίωση (ascertaining) κατά την οποία απομακρύνει τις δικές του αμφιβολίες , και την πειθώ (persuading) κατά την οποία εξαλείφει τις αμφιβολίες των άλλων για την αλήθεια της εικασίας (Harel & Sowder, 1998). Με την συνεχή διδασκαλία των αποδείξεων αυξάνεται η κατανόηση των εννοιών, ενδυναμώνεται η εγκυρότητα των ισχυρισμών, δημιουργούνται κίνητρα για την δημιουργία νέων μαθηματικών, αμφιβολίες και παρανοήσεις απομακρύνονται (Davis & Hersh, 1981).

2.2 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός αρχίζει, χειρίζεται και τελικά ολοκληρώνει ένα μάθημα έχει σημαντική επίπτωση στη μάθηση. Ο πιο ενδεδειγμένος στόχος της διδασκαλίας θα ήταν να επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν συνδέσεις, να κατασκευάσουν νέα νοήματα και να τα ενσωματώσουν στην προηγούμενη γνώση.

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να μπορεί να αλλάζει μια λανθασμένη κατάσταση που τείνει να δημιουργηθεί από τη διαπραγμάτευση μιας μαθηματικής ιδέας, ώστε αυτή να γίνει ευκολότερα πιο κατανοητή και διαθέσιμη. Οι Carter and Richards (1991), σε σχετική τους έρευνα, αναφέρουν διλήμματα, τα οποία συνδέονται με τη στάση του εκπαιδευτικού, για το αν θα γίνει αποδεκτή ή όχι μία απάντηση ενός μαθητή, για το αν ο εκπαιδευτικός θα απαντήσει τελικά σε μία ερώτηση και για το ποιος είναι ο κατάλληλος τρόπος προκειμένου να παρουσιαστεί μια μαθηματική ιδέα.

Όταν λοιπόν, γνωρίζουμε τα σημεία στα οποία συναντούν οι μαθητές δυσκολίες ή κάνουν λάθη, θα πρέπει κατά την διδασκαλία μας να εστιάζουμε σ' αυτά, να προσπαθούμε να δούμε τα πράγματα από την δική τους οπτική γωνία και μέσα από τη συζήτηση να τους βοηθήσουμε να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες (Wood, Cobb και Yackel, 1991). Έτσι στην έννοια της παραγώγου, υπάρχει μία σύγχυση στους μαθητές ανάμεσα στη «στατική» εφαπτομένη που αγγίζει σ' ένα σημείο την καμπύλη, όπως τη διδάσκονται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και την «δυναμική» εφαπτομένη που η κλίση της καμπύλης σ' ένα σημείο είναι η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Δηλαδή οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι η οριακή τέμνουσα μας δείχνει την κλίση της καμπύλης, αλλά βλέπουν μόνο ότι η τέμνουσα εξαφανίζεται. Ίσως, λοιπόν είναι καλύτερο η διδασκαλία της παραγώγου να γίνεται συσχετίζοντας τη «στατική» εφαπτομένη με το όριο τεμνουσών.

Το πως χρησιμοποιείται ο ορισμός και ποιος είναι ο ρόλος του σπάνια επισημαίνεται στην τάξη, αφού οι καθηγητές έχουν την τάση να εξηγούν απλά στους μαθητές πώς να χειριστούν τα στοιχεία, στα οποία αναφέρονται οι ορισμοί. Βέβαια και μία διδασκαλία βασισμένη σε ορισμούς είναι παιδαγωγικά λανθασμένη. Οι μαθητές θα πρέπει να πεισθούν από τον καθηγητή για τη χρησιμότητα και σημασία των αυστηρών ορισμών και θεωρημάτων, που φαίνεται να είναι διαισθητικές έννοιες και συμπεράσματα. Τα θεωρήματα απομνημονεύονται ως κανόνες δράσης και συχνά

οι ορισμοί και τα θεωρήματα συγχέονται με τις διαδικασίες. Ο Διαφορικός Λογισμός περιέχει ορισμούς, αλγόριθμους, θεωρήματα και εφαρμογές. Οι μαθητές πρέπει να έρθουν σε επαφή με την τεχνική του δομή, την λογική του και τη χρησιμότητά του. Η γνώση του εκπαιδευτικού που είναι ειδικός, συγκρούεται με την ακατέργαστη γνώση των μαθητών όπως γράφει ο Ackermann (1995). Σύμφωνα με τον D. Tall (1991) αν θέλουμε να καλυφθεί το χάσμα που εμφανίζεται στην κατανόηση του απειροστικού λογισμού από το μαθητή, πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος γνωστικά ελκυστικός για το μαθητή τη στιγμή που ξεκινά η μελέτη και που ταυτόχρονα να βοηθήσει την κατανόηση των τυπικών εννοιών που εμφανίζονται αργότερα.

Με τον όρο «πρακτική» εννοούμε το σύνολο όλων των ενεργειών του εκπαιδευτικού στην τάξη, καθώς και του διδακτικού πλάνου, με σκοπό να βοηθήσει τον μαθητή να προσεγγίσει μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Βέβαια, ο εκπαιδευτικός πρέπει να διαμορφώνει τις πρακτικές που χρησιμοποιεί κατά τη διάρκεια τη διδακτικής περιόδου, ανάλογα με τις ανάγκες που δημιουργούνται στην τάξη του. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι ο διαχειριστής της γνώσης, δηλαδή να καθοδηγεί τους μαθητές, ώστε να εμπλέκονται στη μαθησιακή διαδικασία και να αξιοποιεί τους συλλογισμούς των μαθητών και να παροτρύνει τους μαθητές στη διατύπωση ερωτήσεων κατά τη διδασκαλία. Είναι αναγκαίο οι τοποθετήσεις και οι απόψεις των μαθητών να αξιοποιηθούν, με την ενσωμάτωσή τους σε νέα διδακτικά πλάνα, τα οποία να περιέχουν δραστηριότητες, που να είναι οικείες στους μαθητές, να ευνοούν το διάλογο και τη συζήτηση. Έτσι, δημιουργείται ένα περιβάλλον τάξης, στο οποίο ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές διαπραγματεύονται τις μαθηματικές ιδέες και τα νοήματα και έτσι διευρύνουν τη μαθηματική τους σκέψη. Ο παρεμβατικός ρόλος του εκπαιδευτικού, επαναπροσδιορίζει, τροποποιεί και αλλάζει τις διδακτικές του προσεγγίσεις, χρησιμοποιώντας την εμπειρία του. Ο Tall (1991) επισημαίνει ότι: «για να μπορέσει ο μαθητής να κατανοήσει μαθηματικές έννοιες πρέπει ο τρόπος διδασκαλίας να είναι γνωστικά ελκυστικός χωρίς να επιχειρήσουμε να απλουστεύσουμε τις έννοιες, αλλά να παρουσιάσουμε στους μαθητές όλες τις πτυχές της πολυπλοκότητά τους και των αντιπαραδειγμάτων τους». Ο εκπαιδευτικός είναι και ερευνητής (Cobb & Steffe, 1983, D’ Ambrosio & Campos 1992), καθώς θα πρέπει να μπορεί να ερμηνεύει τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην τάξη του, να αναστοχάζεται τις ενέργειές του και τις επιπτώσεις που έχουν στη κατασκευή νοήματος από τους μαθητές του, για να μπορεί να κάνει τις κατάλληλες αλλαγές στις διδακτικές του προσεγγίσεις, ώστε να βοηθήσει το μαθητή να αναπτύξει δικούς του

τρόπους μάθησης. Σύμφωνα με τον Orton (1983) η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής πρέπει να είναι το βασικό εργαλείο του εκπαιδευτικού που διδάσκει τον Διαφορικό Λογισμό σε μαθητές και πρέπει να είναι απαλλαγμένο από τους τυπικούς ορισμούς και να στηρίζεται σε γραφικές και διαισθητικές εξερευνήσεις με ταυτόχρονη χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ο εκπαιδευτικός στην τάξη θα πρέπει χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες δραστηριότητες, ερωτήσεις και παραδείγματα από την καθημερινότητα ο μαθητής να κάνει τον μαθητή να προβληματιστεί. Με τη σειρά του σκοπός του κάθε μαθητή θα πρέπει να είναι να καταφέρει να κάνει αργότερα μόνος του, αυτό που του διδάσκει μέσα στην τάξη ο καθηγητής να κάνει. Αν ο μαθητής αποτυχαίνει σημαίνει ότι δεν μπορεί να συσχετίσει το διδακτικό υλικό με τις δραστηριότητες της τάξης. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να δώσει ευκαιρίες στους μαθητές του χρησιμοποιώντας το διάλογο, να καταλάβουν τις συνδέσεις που υπάρχουν μεταξύ των εννοιών, καθώς και ότι οι αναπαραστάσεις τους δίνουν ιδιαίτερο νόημα. Έτσι, παραχωρεί στους μαθητές ένα πιο ενεργό ρόλο στη μάθησή τους και τους καθιστά συνυπεύθυνους στην ανάπτυξή της, μέσω της διερεύνησης και της ανακάλυψης. Βέβαια υπάρχουν διαφορετικές απόψεις, όσον αφορά στον βαθμό καθοδήγησης της μάθησης από τον εκπαιδευτικό, δηλαδή κατά πόσο, επιτρέπει ο εκπαιδευτικός στο μαθητή να αναλάβει ο ίδιος την κατασκευή μαθηματικού νοήματος. Σε αυτό παίζει καθοριστικό ρόλο ο τύπος διδασκαλίας που ακολουθεί ο κάθε εκπαιδευτικός. Ο καλός εκπαιδευτικός είναι αυτός που μπορεί να επικοινωνεί με τους μαθητές του, που τους επιτρέπει να επικοινωνούν μεταξύ τους, τους κάνει να αναρωτηθούν, να ερευνήσουν και, τελικά, να τοποθετηθούν με ποικίλους τρόπους επάνω στα μαθηματικά ζητήματα. Εν ολίγοις, ο σωστός εκπαιδευτικός είναι αυτός που δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον, όπου ο κάθε μαθητής είναι ένα σημαντικό μέρος του και μέσα στο οποίο υπάρχει μία συνεχή αλληλεπίδραση, που καθιστά δυνατή την ανταλλαγή μαθηματικών εμπειριών. Έτσι τη μαθηματική γνώση δε τη παρέχει αποκλειστικά ο εκπαιδευτικός, αλλά στην κατασκευή του νοήματος σημαντικό ρόλο έχουν και οι μαθητές. Όπως υποστηρίζει και ο Bauersfeld (1988), «όχι μόνο ο δάσκαλος αλλά και οι μαθητές συμβάλλουν στα δρώμενα των τάξεων και είναι ιδιαίτερα σημαντικός ο ρόλος της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης των απόψεων των μαθητών στην προσπάθεια ανακατασκευής των μαθηματικών εννοιών». Πράγματι, στη διδασκαλία ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές αποτελούν την πραγματικότητα της τάξης, όπου οι μαθητές, αναπτύσσουν

επιχειρήματα και απόψεις, κάνουν λάθη και έτσι προκαλούν συζητήσεις με τους συμμαθητές τους και τον καθηγητή τους με αποτέλεσμα μέσω του διαλόγου και της γνωστική σύγκρουσης, να μαθαίνουν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και να ανακαλύπτουν τυχόν κενά ή λαθεμένες συνδέσεις και παρανοήσεις, προκειμένου να τις ξεπεράσουν. Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό ή ένα θεώρημα, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από τον δάσκαλο, αν και οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή. Η μορφή των αλληλεπιδράσεων καθορίζει τα όρια και τους κανόνες για το τι θα πει ο μαθητής ή ο δάσκαλος, πως θα το πει και πότε. Ωστόσο όλοι αυτοί οι κανόνες έχουν ένα διαπραγματευτικό χαρακτήρα. Διαμορφώνονται διαμέσου κάποιων περισσότερο ή λιγότερο σαφών και άμεσων διαπραγματεύσεων ανάμεσα στον δάσκαλο και το μαθητή και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το μονοπάτι προς τη μαθηματική σκέψη οδηγεί, διαμέσου νύξεων, στη μαθηματική διαπραγμάτευση, καθώς, σταδιακά, κατανοούμε ποιες είναι οι προθέσεις πίσω από συγκεκριμένες εκφράσεις, ποιες είναι οι κοινές προϋποθέσεις. Αυτά μαθαίνονται από την αλληλεπίδραση με εκείνους που νομιμοποιούνται να θέτουν τα πρότυπα της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, οι οποίοι συνήθως είναι οι δάσκαλοι των Μαθηματικών. Ο μαθητής κάνει λάθη και τα διορθώνει σύμφωνα με τις υποδείξεις του δασκάλου, διαπραγματεύεται τον τρόπο του να λέει κάτι και τον τρόπο του να σκέφτεται ανταλλάσσοντας επιχειρήματα με το δάσκαλο και με άλλους μαθητές. Αλλά το κοινωνικό και το θεσμικό πλαίσιο αυτών των αλληλεπιδράσεων, το σχολείο, οι αρχές υπεράνω του δασκάλου, όπως είναι οι καθοδηγήσεις του Υπουργείου Παιδείας, επιβάλλουν όρια τόσο στην διαπραγμάτευση όσο και στην επιχειρηματολογία. Δηλαδή η αλληλεπίδραση προσεγγίζεται σαν μια από τις πιο σημαντικές διαδικασίες μάθησης και ιδιαίτερα όταν βασίζεται στις αρχές της ενεργητικής μάθησης, της οικοδόμησης της γνώσης, της στοχαστικής μάθησης, της αυθεντικής και υποβοηθητικής μάθησης (Μακράκης, 1998, Τσεμασφύρας, επιμ.).

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να προσπαθεί να πετύχει και να διατηρήσει μαθησιακά περιβάλλοντα που να υποστηρίζουν τη μάθηση και τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων, όσο πολύπλοκο και σύνθετο κι αν είναι, γιατί ενθαρρύνεται η συμμετοχή του μαθητή στην ανταλλαγή ιδεών και απόψεων με χρήση του διαλόγου, παρόλο που μπορεί να μην

έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα, δηλαδή την οικοδόμηση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής ιδέας ή διαδικασίας.

2.3 ΣΤΑΣΕΙΣ, ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι Φιλίππου και Χρίστου (2001) με τον όρο «στάσεις» εννοούν τις τάσεις και την προδιάθεση του υποκειμένου να ανταποκρίνεται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο ευμενώς ή δυσμενώς έναντι συγκεκριμένων γεγονότων, ατόμων ή φορέων, αντικείμενων ή και μαθημάτων. Οι τάσεις περιέχουν το στοιχείο της υποκειμενικής αντίληψης και αξιολόγησης βασικών παραμέτρων που εξετάζεται, προέρχονται από προηγούμενες εμπειρίες του ατόμου θετικές ή αρνητικές και επηρεάζουν τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά του. Σύμφωνα με τους ίδιους συγγραφείς, τα «πιστεύω» και οι «πεποιθήσεις» ενός ατόμου μπορούν να οριστούν ως οι υποκειμενικές γνώσεις, αντιλήψεις και θεωρίες, ενώ σύμφωνα με τον Κλαουδάτο (2010) τα «πιστεύω» είναι η οπτική γωνία με την οποία ένα άτομο αντιμετωπίζει τον κόσμο των μαθηματικών. Επίσης ο McLeod (1989) αναφέρει ότι οι πεποιθήσεις έχουν ως γνωστικό χαρακτήρα από τη φύση τους και εδραιώνονται σε σχετικά μεγάλο διάστημα, ενώ τα συναισθήματα έχουν μικρή γνωστική αξία και είναι δυνατόν να εμφανιστούν και να εξαφανιστούν πολύ γρήγορα. Κατά συνέπεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πεποιθήσεις, οι στάσεις και τα συναισθήματα αντιπροσωπεύουν αυξανόμενα επίπεδα συναισθηματικής εμπλοκής και ελαττούμενα επίπεδα γνωστικής εμπλοκής του ατόμου. Σύμφωνα πάντα με τον McLeod (1989, 1992) τα πιστεύω του κάθε ατόμου προκύπτουν από τις προσωπικές εμπειρίες, το σύστημα αξιών και τη φιλοσοφία του, είναι δηλαδή υποκειμενικά και υποσυνείδητα. Υπάρχει επίσης έντονη η παρουσία του συναισθήματος και δεν επιδέχεται πλήρη αντικειμενική αιτιολόγηση σε αντίθεση με τις γνώσεις που επιδέχονται απόδειξη και επαλήθευση και είναι αντικειμενικές. Συγκεκριμένα για τα μαθηματικά, τα «πιστεύω» μπορούν να καθορίσουν τις επιλογές με τις οποίες ο μαθητής θα αποφασίσει να προσεγγίσει τη λύση του προβλήματος, τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσει ή θα αποφύγει, το χρόνο που θα αφιερώσει και το πόσο επίμονα θα εργαστεί. Εν ολίγοις, τα πιστεύω δημιουργούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι γνώσεις και πολλές φορές τα πιστεύω αυτά επηρεάζουν και διαμορφώνουν τις στάσεις και τα συναισθήματα.

Οι αντιλήψεις ενός ατόμου μπορούν να θεωρηθούν οι πεποιθήσεις οι σχετικές με ένα αντικείμενο ή μία κατάσταση, οι οποίες όμως έχουν έντονο το στοιχείο της υποκειμενικότητας. Ειδικά για τα μαθηματικά οι υπάρχουσες αντιλήψεις σχετίζονται με το σύνολο των συνειδητών και υποσυνείδητων κανόνων, εννοιών και εμπειριών που σχετίζονται με τα μαθηματικά. (Φιλίππου Γ. – Χρίστου Κ. 2001, Κλαουδάτος Ν. 2010)

Στην περίπτωση των μαθηματικών, τα κίνητρα του μαθητή και η σχολική επίδοσή του επηρεάζονται από τις στάσεις και τις πεποιθήσεις του παιδιού για τα μαθηματικά, για τις προσωπικές του ικανότητες σε σχέση μ' αυτά και για το πλαίσιο μέσα στο οποίο εκτυλίσσεται η προσπάθεια του. Μερικοί από τους πιο βασικούς παράγοντες που διαμορφώνουν αυτές τις στάσεις είναι:

I. η σχέση του παιδιού με τις μαθηματικές δραστηριότητες,

II. οι εμπειρίες των επιτυχημένων ή αποτυχημένων προσπαθειών του,

III. οι συνθήκες της μαθησιακής διαδικασίας,

IV. οι κρίσεις και οι προσδοκίες του δασκάλου, των γονιών και των συνομηλίκων (Ashcraft, Kirk & Hopko, 1998).

Κατά τον Schoenfeld (1985) οι στάσεις αυτές συνιστούν την «άποψη του ατόμου για τον κόσμο από μαθηματική σκοπιά» (mathematical world view) και επηρεάζουν ιδιαίτερα την επίδοση στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων.

Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις των μαθητών που αφορούν τα Μαθηματικά έχουν καθοριστική επίδραση στον τρόπο που διδάσκουν οι καθηγητές (διδακτική συμπεριφορά), όπως προκύπτει από έρευνες που έχουν γίνει. Οι ερευνητές συμφωνούν ότι τα συναισθήματα και οι πεποιθήσεις των μαθητών αποτελούν βασικό παράγοντα που επηρεάζει άμεσα τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών και αποτελούν αντικείμενο μελέτης και προβληματισμού σε διεθνές επίπεδο. Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις ως προς τα μαθηματικά αναφέρονται σε θεμελιώδεις υποθέσεις για τη φύση και τη μάθηση των μαθηματικών, σε πιστεύω ως προς την πηγή, τη βεβαιότητα, την οργάνωση, τον έλεγχο και την ταχύτητα απόκτησης της γνώσης και περιέχουν όρια και κριτήρια βεβαιότητας της γνώσης (Chan & Elliot 2004). Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (1998), οι αντιλήψεις για τα μαθηματικά

μπορούν να επηρεάσουν δραστικά την επίδοση των μαθητών στον Απειροστικό Λογισμό. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι αντιλήψεις των μαθητών ποικίλουν, ότι κάνουν θεμελιώδη λάθη και δεν υπερνικούν συνήθως τα επιστημολογικά εμπόδια. Γι' αυτό και είναι απαραίτητη η εκπαίδευση των καθηγητών, για να ενημερωθούν και να μπορέσουν να βοηθηθούν πάνω στα σχετικά προβλήματα.

Ο Cobb (1986) όρισε τις πεποιθήσεις ως τις προσωπικές υποθέσεις ενός ατόμου σχετικά με τη φύση της πραγματικότητας. Οι υποθέσεις αυτές αποτελούν τη βάση της προσανατολισμένης σε στόχους δραστηριότητας και είναι διαφορετικές από τις στάσεις ή τα συναισθήματά του ατόμου. Σύμφωνα με τον Cobb (1986) υπάρχει σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των μαθητών και της μάθησης των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τη Schommer (1990) υπάρχουν πέντε κατηγορίες πεποιθήσεων: **α)** η σταθερότητα των γνώσεων, **β)** η δομή της γνώσης, **γ)** η πηγή της γνώσης, **δ)** η ταχύτητα μάθησης και **ε)** η ικανότητα μάθησης. Η ταξινόμηση αυτή χρησιμοποιήθηκε από πολλούς ερευνητές σε μετέπειτα έρευνες. Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις των μαθητών επηρεάζουν τη συμμετοχή τους στην διαδικασία μάθησης και στην επίδοσή τους. Ο καθηγητής είναι αυτός που θα αλλάξει τις πεποιθήσεις των μαθητών μέσω της διδασκαλίας του, με στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και να αποκτήσουν μαθηματικές δεξιότητες.

Πολλές ερευνητικές προσπάθειες έγιναν για τη δομή των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά (Φιλίππου & Χρίστου, 2001). Οι επιστήμονες κατέληξαν ότι οι πεποιθήσεις τους αποτελούνται από αντιλήψεις αναφορικά με τη μάθηση, τη διδασκαλία, τη φύση των μαθηματικών, καθώς και το ρόλο του μαθητή και του καθηγητή στη μάθηση. Σύμφωνα πάντα με τις παραπάνω έρευνες οι πεποιθήσεις των μαθητών μπορεί να τους εμποδίσουν να κατανοήσουν βασικές έννοιες του Διαφορικού Λογισμού, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να επιτύχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες. Για παράδειγμα σε έρευνα των Max Scheja & Kerstin Pettersson (2009), είναι φανερό ότι η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κατανόηση της έννοιας του ορίου. Οι πεποιθήσεις και αντιλήψεις των μαθητών είναι παρόμοιες με αυτές που έχουν για την έννοια του ορίου καθώς αυτές οι δύο έννοιες είναι άμεσα συνδεδεμένες μεταξύ τους βάση του ορισμού της παραγώγου. Η Szydlik (2000) διερεύνησε τις πεποιθήσεις των σπουδαστών που φοιτούσαν στο δεύτερο έτος των σπουδών τους στον Απειροστικό Λογισμό, στα μαθηματικά και τη σχέση που είχαν οι πεποιθήσεις τους στη κατανόηση της έννοιας του ορίου. Οι πεποιθήσεις των σπουδαστών για το περιεχόμενο που λογικά αποτελεί

τη βάση της έννοιας του ορίου (πεποιθήσεις για τους πραγματικούς αριθμούς, το άπειρο και τις συναρτήσεις) αποκαλούνται με τον όρο πεποιθήσεις περιεχομένου (content beliefs), ενώ οι πεποιθήσεις σχετικά με το πώς η μαθηματική αλήθεια και εγκυρότητα εδραιώνονται, αποκαλούνται πηγές βεβαιότητας (sources of conviction) (Frid, 1994). Σε έρευνα των Peterson, Fennema, Carpenter, and Loef (1989), που αφορούσε τον Διαφορικό Λογισμό, προέκυψε ότι οι πεποιθήσεις περιεχομένου των καθηγητών είναι άμεσα συνδεδεμένες με το σχεδιασμό της διδασκαλίας και γενικά των πρακτικών που ακολουθεί ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Το συμπέρασμα της έρευνας αυτής έδειξε ότι υπάρχουν ισχυρές σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων περιεχομένου και της ικανότητας των μαθητών καθώς και με την βελτίωση της επίδοσής τους.

Επίσης, σε έρευνα των Leslie Aspinwall, Kenneth L. Shaw and Norma C. Presmeg (1997), οι πεποιθήσεις που έχουν για τον Διαφορικό Λογισμό τόσο οι μαθητές όσο και οι καθηγητές, είναι ότι έχουμε την ικανότητα να κάνουμε Διαφορικό Λογισμό όταν μπορούμε να χειριζόμαστε σύμβολα και αριθμούς (Hallett, 1991). Στην έρευνα αυτή, ερεύνησαν τις γραφικές συνδέσεις μεταξύ μιας συνάρτησης και της παραγώγου της και τις δυσκολίες που μπορούν να παρουσιαστούν από ανεξέλεγκτες νοητικές εικόνες. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο φοιτητής μπορούσε εν γένει να ανταποκριθεί ικανοποιητικά σε απλές ασκήσεις αλγεβρικού τύπου, κάνοντας κάποιες φορές κάποια λάθη, τα οποία όμως εύκολα αναγνώριζε ως τέτοια όταν του εξηγούνταν, αλλά παρουσιάστηκε σημαντικότατο πρόβλημα όταν του παρουσιάστηκε μέσω γραφήματος μια παραβολή (και μάλιστα της απλούστατης μορφής $y = x^2$) και του ζητήθηκε το γράφημα της παραγώγου της, όπου εκεί παρουσίασε ως απάντηση το γράφημα μιας κυβικής συνάρτησης. Αυτό που φάνηκε να τον μπερδεύει ιδιαίτερα ήταν η εντύπωση που του έδινε το γράφημα της παραβολής και το οποίο κατά τη γνώμη του φαινόταν σα να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Βέβαια και το γράφημα που παρουσίαζε ως γράφημα παραγώγου δε μπορούσε να δικαιολογήσει αυτόν τον ισχυρισμό του. Όταν του παρουσιάστηκε η εναλλακτική άποψη, ότι δηλαδή το γράφημα που του παρουσιαζόταν ήταν το γράφημα της παραβολής, αμέσως έδωσε τη σωστή απάντηση, ότι δηλαδή η παράγωγος είναι μια ευθεία γραμμή, τονίζοντας μάλιστα ότι «έπρεπε να έχει σκεφτεί από την αρχή αλγεβρικά». Και πάλι όμως υπαναχώρησε στις αρχικές του σκέψεις περί κατακόρυφης ασύμπτωτης της παραβολής μη μπορώντας να συνταιριάξει τα,

δεδομένα πλέον γι' αυτόν, συμπεράσματα που πηγάζουν από τη θεωρία, με τις εικόνες που αυτός με κάποιον τρόπο έχει σχηματίσει. Δυσκολίες αυτής της φύσης έχουν ονομαστεί, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, από τους Tall & Vinner (1981), ως γνωστικοί παράγοντες σύγκρουσης. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, σ' αυτήν την περίπτωση ίσως είναι η εικόνα της έννοιας του απείρου που μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό της αντίστοιχης έννοιας. Η εικόνα της έννοιας όπως την κατέχει ο εν λόγω φοιτητής είναι το όλο γνωστικό οικοδόμημά του, που σχετίζεται με την έννοια του απείρου και το οποίο περιέχει όλες τις νοητικές εικόνες και έννοιες των σχετικών ιδιοτήτων και διαδικασιών. Δόμησε αυτήν την κατασκευή διαμέσου εμπειριών χρόνων. Η εικόνα του μπορεί να του προκαλεί σύγχυση καθώς προσπαθεί να την συνταιριάξει με την τυπική θεωρία. Όταν τελικά ο φοιτητής κατάφερε να συνταιριάξει τις εικόνες του με τη θεωρία, έφτασε δηλαδή στο στάδιο της «συμμόρφωσης» φάνηκε να καταλαβαίνει και την αιτία που του δημιούργησε αυτό το πρόβλημα, ότι ήταν δηλαδή μια εικόνα που δεν μπορούσε να ελέγξει. Την αποκάλεσε μάλιστα «οπτική παραίσθηση». Οι συγγραφείς με αυτό το άρθρο έδειξαν την ανάγκη περισσότερης προσοχής σε τέτοιου είδους προβλήματα που μπορεί να δημιουργηθούν από τη χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων.

2.4 ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ

Όταν λέμε «Γνωστικό Εμπόδιο» εννοούμε τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Λόγω της σπουδαιότητάς του, το Γνωστικό Εμπόδιο εν γένει αποτελεί αντικείμενο μελέτης με σκοπό να βρούμε τις κατάλληλες στρατηγικές που πρέπει να ακολουθήσουμε στη διδασκαλία, προκειμένου να βοηθήσουμε τους μαθητές να τις ξεπεράσουν.

Διακρίνουμε τρεις διαφορετικούς τύπους εμποδίων (Brousseau, 1997):

Α) τα γενετικά και ψυχολογικά εμπόδια που εμφανίζονται ως αποτέλεσμα της προσωπικής ανάπτυξης του μαθητή,

Β) τα διδακτικά εμπόδια είναι αποτέλεσμα της φύσης της διδασκαλίας και

Γ) τα επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίζονται λόγω της φύσης των ίδιων των μαθηματικών εννοιών.

Για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας έχει μεγάλη σημασία να προσδιορίσουμε τα διδακτικά και τα επιστημολογικά εμπόδια.

Ο όρος του επιστημολογικού εμποδίου εισήχθη από τον Gaston Bachelard (1938), ο οποίος λέει:

«Πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης από την άποψη των εμποδίων. Δεν αρκεί μόνο να λαμβάνουμε υπόψη τα εξωτερικά εμπόδια, όπως η πολυπλοκότητα και η προσωρινότητα των επιστημονικών φαινομένων, ούτε να θρηνούμε την αδυναμία των ανθρώπινων αισθήσεων και του πνεύματος. Είναι μέρος της δράσης της απόκτησης της ίδιας της γνώσης. Το να γνωρίσουμε βαθιά αποτελεί υγιής λειτουργική ανάγκη, προκειμένου να μην υπάρξει καθυστέρηση στην ταχύτητα της μάθησης. Εδώ μπορούμε να βρούμε τις αιτίες της στασιμότητας, όταν αυτή υπάρχει ακόμη και της οπισθοδρόμησης και ίσως να αντιληφθούμε τους λόγους της αδράνειας, τους οποίους ονομάζουμε επιστημολογικά εμπόδια. Αντιμετωπίζουμε νέα γνώση που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπάρχουσα γνώση και έτσι πρέπει να καταστρέψουμε τις προϋπάρχουσες λανθασμένες ιδέες».

Όπως φαίνεται από την παραπάνω άποψη τα επιστημολογικά εμπόδια αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της αποκτώμενης γνώσης και βρίσκονται, τουλάχιστον εν μέρει, στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας.

Βέβαια υπάρχουν και άλλοι συγγραφείς που έχουν ασχοληθεί με τα επιστημολογικά εμπόδια, όπως ο Guy Brousseau (1983), που ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή δραστηριότητας όπου και εδραιώνεται, όμως έπειτα αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σ’ ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί σε αντιφάσεις. Επομένως, είναι αναγκαίο να αντικατασταθεί η αρχική ανεπαρκής και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με τη νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο. Η απόρριψη και η διευκρίνιση ενός τέτοιου εμποδίου αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης. Ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να γίνει χωρίς την αποσταθεροποίηση των αρχικών ιδεών, με την τοποθέτηση τους σ’ ένα νέο πλαίσιο

όπου φαίνεται σαφώς ότι αποτυγχάνουν. Αυτό επομένως απαιτεί μια μεγάλη προσπάθεια γνωστικής ανακατασκευής.

Ο ορισμός που δίνει η Sierpinska (1985, 1990) στο επιστημολογικό εμπόδιο είναι:

«Αν το εμπόδιο δεν είναι μόνο δικό μας εμπόδιο, η πιθανόν δυο άλλων ανθρώπων, αλλά είναι πιο πλατιά διαδεδομένο ή έχει διαδοθεί κάποια φορά ή σε κάποιο πολιτισμό, τότε ονομάζεται επιστημολογικό εμπόδιο».

Ας δούμε τώρα με τη βοήθεια της Sierpinska (1985, 1990), συμπερασματικά το ρόλο των επιστημολογικών εμποδίων στην εννοιολογική μας ανάπτυξη. Αρχικά η εντύπωση, που μπορεί να δημιουργηθεί στον καθένα, από την παραπάνω περιγραφή μπορεί εύκολα να είναι η εξής: τα επιστημολογικά εμπόδια είναι κάτι αρνητικό στην εννοιολογική μας ανάπτυξη και πρέπει να αποφευχθούν στην διδασκαλία και μάθηση, κάτι που είναι ακριβώς το αντίθετο απ’ ότι αναμένουμε. Η ίδια η φύση των επιστημολογικών εμποδίων είναι τέτοια, που δεν μπορούν να αποφευχθούν και ο ρόλος τους στη σκέψη μας είναι σημαντικός. Ο ρόλος αυτός είναι συγχρόνως θετικός και αρνητικός. Είναι θετικός, γιατί, για να καταλάβει κανείς ένα αντικείμενο, πρέπει ήδη να έχει την ικανότητα της κατανόησης, να έχει κάποιες προηγούμενες αντιλήψεις και κρίσεις. Δεν μπορούμε να λειτουργήσουμε χωρίς τα σχήματα σκέψης, χωρίς τις πίστεις και τις στάσεις μας γιατί αυτά είναι η βάση μας. Αν θέλουμε να καταλάβουμε βαθύτερα, ή να δούμε διαφορετικές απόψεις των πραγμάτων που μελετάμε, θα πρέπει να αντιληφθούμε αυτές τις στάσεις και τα σχήματα σκέψης και να ενεργήσουμε ενάντια σ’ αυτά, οπότε ο ρόλος των επιστημολογικών εμποδίων είναι αρνητικός. Για παράδειγμα αποδεικνύεται συχνά μέσα στην τάξη πως η πλειοψηφία των μαθητών δεν μπορούν να αντιληφθούν την έννοια της εφαπτομένης τυχαίας καμπύλης σε ένα σημείο ως την οριακή θέση μιας τέμνουσας της καμπύλης όταν το διάστημα των τετμημένων των σημείων τομής τέμνουσας- καμπύλης τείνει να γίνει μηδενικό. Φαίνεται πως οι μαθητές αντιλαμβάνονται εύκολα τέτοιες έννοιες σε πιο απλές περιπτώσεις όπως αυτή του κύκλου, μην μπορώντας αργότερα να γενικεύσουν τον ορισμό σε πιο περίπλοκες καταστάσεις.

Σύμφωνα με έρευνες, η χρήση ψηφιακής τεχνολογίας μπορεί παίξει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση εννοιών του Διαφορικού Λογισμού γιατί βοηθάει τον μαθητή να ξεπεράσει ορισμένα από τα εμπόδια που συναντά στην κατανόησή του, μέσα από κατάλληλα περιβάλλοντα. Βέβαια, τέτοιες προσεγγίσεις μπορεί να περιέχουν δικά

τους ιδιαίτερα επιστημολογικά εμπόδια (Tall & Winkelmann 1988), γι αυτό και πρέπει να λάβουμε υπόψη τις εμπειρίες των μαθητών στο νέο περιβάλλον, ώστε να καταλάβουμε τι μαθαίνεται και με ποια μορφή συγκρατείται η γνώση στο νου. Ο μαθητής κατά την αλληλεπίδραση με τον Η / Υ πρέπει να μάθει να κατασκευάζει διαδικασίες στον Η / Υ (προγραμματισμό), που με τον αναστοχασμό, θα βοηθήσουν τον μαθητή να κατανοήσει τις μαθηματικές κατασκευές. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν περισσότερα μαθηματικά και να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες των μαθηματικών με την κατάλληλη χρήση της τεχνολογίας (Dunham & Dick 1994, Sheets 1993, Groves 1994). Αν ο Η / Υ περιλαμβάνει κάποιο μαθηματικό λογισμικό, τότε ο μαθητής μπορεί να αποκτήσει την εμπειρία προσεκτικά επιλεγμένων περιβαλλόντων που μοντελοποιούν την έννοια της παραγώγου και χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού ο μαθητής θα κατασκευάσει τη γνώση. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού, μπορεί να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση ακόμα και κάποιας περίπλοκης συνάρτησης και μιας τέμνουσας αυτής σε δύο σημεία, και με τη χρήση κατάλληλων εντολών να κατασκευαστεί τελικά η οριακή ευθεία της εφαπτομένης. Με τον τρόπο αυτό, συσχετίζεται ο ορισμός της παραγώγου με τη γραφική του απεικόνιση.

2.5 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο ανθρώπινος νους λειτουργεί σύνθετα και συχνά διαφέρει από τη λογική των μαθηματικών, γιατί πολλές φορές η καθαρή λογική δεν μπορεί να μας δώσει την ενόραση. Γι’ αυτό και πρέπει να υπάρχει μια διάκριση μεταξύ των μαθηματικών εννοιών όπως ορίζονται τυπικά και των γνωσιακών διεργασιών μέσω των οποίων κατανοούμε τις έννοιες. Πολλές έννοιες που χρησιμοποιούμε τις μαθαίνουμε μέσω της εμπειρίας και της χρήσης τους σε κατάλληλα πλαίσια, οι οποίες μπορούν να εκλεπτυνθούν ως προς το νόημά τους και να ερμηνευθούν με αυξανόμενη πολυπλοκότητα με ή χωρίς την χρήση ενός ακριβή ορισμού. Πολλές φορές σ’ αυτή τη διεργασία αποδίδεται στην έννοια ένα σύμβολο ή ένα όνομα, το οποίο μπορεί να μεταφερθεί μέσω της επικοινωνίας και αυτό μπορεί να βοηθήσει στο νοητικό της χειρισμό. Όμως. η πλήρης γνωσιακή δομή του νοήματος της έννοιας είναι πολύ ανώτερη από την ανάκληση ενός συμβόλου, είναι κάτι πολύ περισσότερο από

οποιαδήποτε νοητική απεικόνιση, είτε εικονιστική ή συμβολική ή άλλη. Κατά τις νοητικές διεργασίες της ανάκλησης και του χειρισμού μιας έννοιας, πολλές συσχετιζόμενες διεργασίες ενεργοποιούνται, τόσο ενσυνείδητα όσο και ασυνείδητα και επηρεάζουν το νόημα και τον τρόπο χρήσης της.

Ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής γι' αυτό και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996; Roth & McGinn, 1998; Seeger, 1998). Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα (προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά) που ονομάστηκαν σχήματα συμβόλων Kaput (1987) ή συστήματα αναπαράστασης Goldin (1987). Σύμφωνα με τους Kaput (1987) και Goldin (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ολότητες: **α)** την έννοια που αναπαρίσταται, **β)** την ολότητα που αναπαριστά, **γ)** τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας της αναπαράστασης που αναπαρίστανται, **δ)** τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες σχηματίζουν την αναπαράσταση και **ε)** την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες. Στο παραπάνω θεωρητικό πλαίσιο, έχουμε τις εικονικές αναπαραστάσεις (εξωτερικές-σημειωτικές), τα σύμβολα και τις νοητικές αναπαραστάσεις (εσωτερικές). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις λειτουργούν ως ερεθίσματα στις αισθήσεις και αποτελούνται από διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, διάφορα μοντέλα, γραφικά ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς και από τυπικά σύμβολα και άλλες παραστάσεις της γλώσσας των μαθηματικών. Από την άλλη, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ένα άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του όταν βρίσκεται απέναντι σε ένα πρόβλημα, δηλαδή είναι αποτέλεσμα νοητικής δραστηριότητας με την οποία ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε και στην οποία προσδίδουμε μια συγκεκριμένη σημασία.

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική ούτε απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει και είναι αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων κι εμπειριών. Ο Kaput (1996) υποστηρίζει ότι στα προβλήματα μετάφρασης, εννοώντας στο πως ερμηνεύει ο κάθε μαθητής την κάθε μαθηματική αναπαράσταση, πρέπει να προσέξουμε πώς χρησιμοποιούμε τα σύμβολα, τους συνδυασμούς τους μέσα στα μαθηματικά συστήματα αναπαράστασης και πως αυτά τα συστήματα σχετίζονται μεταξύ τους. Κρίνεται σκόπιμο λοιπόν η

εισαγωγή μιας κατάλληλης θεωρίας που αφορά στις αναπαραστάσεις η οποία θα καθορίζει τις γενικές ιδιότητες των συστημάτων αναπαράστασης.

Οι Goldin και Kaput (1996) υποστηρίζουν ότι με τη χρήση της έννοιας της αναπαράστασης μπορούμε να περιγράψουμε τι μπορούν και τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές και να συζητήσουμε ποιες ικανότητες θέλουμε να αναπτύξουν. Επιπλέον, μπορούμε να αναλύσουμε τις δομικές ιδιότητες που είναι σημαντικές για τα μαθηματικά και να ασχοληθούμε με τα αποτελέσματα που οφείλονται στο μέσο που χρησιμοποιείται για την παρουσίαση των εξωτερικών αναπαραστάσεων.

Η έννοια της αναπαράστασης είναι ένα βοηθητικό εργαλείο που χαρακτηρίζει τις γνωστικές διαδικασίες για τη μάθηση των μαθηματικών και περιλαμβάνει τις σημειωτικές πράξεις, μέσω των οποίων οι αναπαραστάσεις αποκτούν συγκεκριμένο νόημα και τη δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, τα οποία οικοδομούνται πάνω στις βάσεις που παρέχουν τα προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης. Για να μπορέσει ένας μαθητής να συγκρατήσει μεγάλες ποσότητες πληροφοριών, πρέπει οι πληροφορίες να «αποθηκευτούν» στο μυαλό του ως οργανωμένα συστήματα, που όταν είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους σχηματίζουν ένα γνωστικό σχήμα. Μέσω του γνωστικού σχήματος γίνεται η οργάνωση των εμπειριών ενός ατόμου, ώστε να μπορεί να αναγνωρίζει νέες εμπειρίες και γνώσεις αν είναι όμοιες ή διαφορετικές με τις προϋπάρχουσες, να μπορεί να έχει πρόσβαση στα ουσιώδη στοιχεία όλων των παραπλήσιων εμπειριών. Επίσης, να μπορεί να διατυπώνει συμπεράσματα, να κάνει εκτιμήσεις, να δημιουργεί στόχους, να αναπτύσσει σχέδια ενεργειών και να χρησιμοποιεί δεξιότητες, διαδικασίες και κανόνες όταν προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα.

Η χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών εξυπηρετεί διάφορους στόχους, όπως η κατανόηση μιας έννοιας, η επίλυση του προβλήματος και η πιο προσιτή για τους μαθητές παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών που αποτελεί κίνητρο για να ασχοληθούν με τα μαθηματικά. Οι αναπαραστάσεις είναι στενά συνδεδεμένες με τα μαθηματικά, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση όπου είναι δύσκολο μια έννοια να γίνει κατανοητή χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Ενώ οι μαθητές όταν τους ζητείται χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στα μαθηματικά που χειρίζονται καλύτερα, τις περισσότερες φορές δεν αντιλαμβάνονται τις αναπαραστάσεις ως μέσα που θα τους βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων, αλλά ως μαθηματικά αντικείμενα Όταν στην ίδια έννοια υπάρχουν πολλές αναπαραστάσεις, ο μαθητής δεν

μπορεί να διακρίνει τα κοινά δομικά τους χαρακτηριστικά και πολλές φορές δεν είναι σε θέση να επιλέξει την κατάλληλη αναπαράσταση, που θα τον βοηθήσει να λύσει το πρόβλημα. Μια αναπαράσταση είναι πλούσια εάν περιέχει πολλές συνδεμένες πτυχές εκείνης της έννοιας, ενώ είναι φτωχή εάν έχει πολύ λίγα στοιχεία για να επιτρέψει ευελιξία στην επίλυση του δεδομένου προβλήματος. Υπάρχουν βέβαια και οι ανταγωνιστικές νοητικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας που μπορούν να συνυπάρχουν στο μυαλό του μαθητή, και να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές μαθηματικές καταστάσεις. Επίσης, διάφορες νοητικές αναπαραστάσεις για την ίδια έννοια μπορούν να συμπληρώσουν η μια την άλλη και μπορούν τελικά να ενσωματωθούν σε μια ενιαία αντιπροσώπευση της έννοιας, διαδικασία που σχετίζεται με την αφαίρεση. Ο μαθητής πρέπει να μπορεί να μεταπηδά από μια αναπαράσταση σε μια άλλη πιο αποδοτική για να λύσει το πρόβλημα και να χρησιμοποιεί διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Μια μετάφραση περιλαμβάνει δύο μορφές αναπαράστασης: την «πηγή», που είναι η αρχική αναπαράσταση και το «στόχο» που είναι η τελική αναπαράσταση (Janvier, 1987). Κατά τον Janvier (1987), για να γίνει μια μετάφραση άμεσα και σωστά πρέπει να επιλέγουν και να αξιοποιηθούν τα στοιχεία της πηγής που είναι απαραίτητα για να δημιουργηθεί ο στόχος.

Μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερα στάδια στη μάθηση:

α) τη χρήση μιας ενιαίας αναπαράστασης,

β) τη χρήση περισσότερων της μιας αναπαράστασης,

γ) τη σύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων και

δ) την ενσωμάτωση αυτών και των διαφόρων μετατροπών τους.

Οι αναπαραστάσεις συντελούν και στη δημιουργία εικασιών, που είναι πολύ σημαντικές για την επίλυση ενός προβλήματος ή την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση, πρώτα κάνουμε μια εικασία και μετά από κατάλληλες σκέψεις μπορεί να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα, ενώ αν δεν το καταφέρουμε τότε προχωρούμε σε νέα εικασία. Βέβαια, η χρήση εικασιών απουσιάζει από τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όμως για να αναπτυχθεί ένας προβληματισμός στη τάξη και να διατυπωθεί μια εικασία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη τεχνολογία και τις αναπαραστάσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η σύνδεση της μονοτονίας μια διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου. Οι

αναπαραστάσεις συμβάλουν στην περιγραφή μαθηματικών συμπερασμάτων. Επειδή μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή, που πολλές φορές οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν, αν χρησιμοποιήσουμε μια εικονική αναπαράσταση μπορεί να βοηθήσουμε τους μαθητές να την κατανοήσουν. Η μελέτη και η προσεκτική παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων στη μαθηματική έρευνα, πολλές φορές οδήγησε στη διατύπωση σημαντικών γενικών εικασιών που στη συνεχεία αποδείχθηκαν. Η εφαρμογή τέτοιων διαδικασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όχι μόνο στο Λύκειο αλλά και σε μικρότερες τάξεις, αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη του μαθητή. Για να είναι όμως αποτελεσματικές διαδικασίες αυτού του τύπου, πρέπει ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να σκέφτεται πάνω στα σχήματα και να μπορεί να μεταφράζει τα συμπεράσματα σε συμβολικά μαθηματικά.

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στον μαθητή. Η ενσάρκωση αυτής της πρότασης, δηλαδή η περιγραφή της με μια εικονική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της. Ένα παράδειγμα είναι το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, όπου η γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος βοηθάει το μαθητή να αφομοιώσει στην ουσία του θεωρήματος.

Οι όροι όπως «μέσος ρυθμός μεταβολής» και «στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής» μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση της παραγώγου, όμως δεν είναι αρκετές για να δημιουργήσει ο μαθητής μια λειτουργική νοερή εικόνα (Downs & Mamona-Downs, 2001). Επίσης οι Downs & Mamona-Downs (2001), υποστηρίζουν ότι οι δύο παραπάνω όροι είναι αναγκαίοι για τη διαισθητική ερμηνεία του ορισμού της παραγώγου, η οποία είναι ανεξάρτητη από γραφικές εικόνες, αλλά δημιουργούν στους μαθητές δυσκολίες. Εξαιτίας αυτών των δυσκολιών οι μαθητές έχουν ως πιο ισχυρές εικόνες για την παράγωγο, τη γραφική παράσταση συνάρτησης και τη γεωμετρική εφαπτομένη. Δηλαδή, η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού της παραγώγου μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου, γιατί με τη γεωμετρική αναπαράσταση της εφαπτομένης οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι, αφού την έχουν συναντήσει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Σ' αυτές τις εικόνες, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν ευκολότερα ένα όριο πραγματικής συνάρτησης μέσα από μια οριακή διαδικασία τεμνουσών, γιατί οι τέμνουσες είναι γεωμετρικά αντικείμενα. Στη συνέχεια, οι μαθητές κατανοούν την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σ' ένα σημείο ως την κλίση της εφαπτομένης σ' αυτό το σημείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα έγινε σε μαθητές Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, από Δημόσια Ενιαία Λύκεια της Κορίνθου. Οι μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης ήταν 26 και της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης ήταν 75. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στη μέση της σχολικής χρονιάς, σε τρία σχολεία κατά τη διάρκεια του Φεβρουαρίου και του Μαρτίου 2011 και αποτελούνταν από 7 Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής, μία Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού και 3 Ερωτήσεις Ανάπτυξης (παρατίθεται στο παράρτημα). Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μία διδακτική ώρα (45 λεπτά) για να απαντήσουν το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο. Χρησιμοποιήθηκε ποικιλία ερωτήσεων και ασκήσεων ώστε να καλύπτονται οι βασικές έννοιες και τα Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.

Έως την ημέρα που δόθηκε το ερωτηματολόγιο οι μαθητές εκτός από τους μιγαδικούς αριθμούς, που δεν μας απασχολούν στην παρούσα μελέτη είχαν διδαχθεί:

- Γενικά για τις συναρτήσεις (ορισμός, πεδίο ορισμού, μονοτονία, αντίστροφη συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων).
- Όριο και συνέχεια συνάρτησης.
- Γενικά για την παράγωγο (ορισμός, κανόνες παραγώγισης, ρυθμός μεταβολής).
- Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού και συνέπειες αυτού.
- Ακρότατα συνάρτησης – Σημεία καμπής.

3.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να αποτυπώσει αντιλήψεις και παρανοήσεις που έχουν οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου σχετικά με την έννοια της παραγώγου, καθώς και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση και στην εφαρμογή των βασικών θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού.

Ειδικότερα στόχοι της έρευνας ήταν:

- Να αποτυπώσει κάποιες ενδεικτικές αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου για τον Διαφορικό Λογισμό.

- Να επισημάνει κάποιες από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, τόσο στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου, όσο και στον υπολογισμό των παραγώγων συναρτήσεων.

- Να εξετάσει την κατανόηση των Βασικών Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού όσον αφορά στις υποθέσεις και στα συμπεράσματά τους καθώς και στην ισχύ ή όχι του αντιστρόφου τους.

Ανάλυση του Ερωτηματολογίου:

- Με τις 7 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής θέλουμε να δούμε τον βαθμό που οι μαθητές έχουν κατανοήσει τα βασικά θεωρήματα για την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης και την ισχύ ή όχι του αντιστρόφου τους. Επίσης σκοπός μας είναι να δούμε αν οι μαθητές μπορούν να βρίσκουν την παράγωγο σύνθετων συναρτήσεων, την πλάγια ασύμπτωτη συνάρτησης και τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να έχουν δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες κοινή εφαπτομένη σ’ ένα σημείο ή αν έχουν κοινή παράγωγο πότε οι συναρτήσεις είναι ίσες.

- Με την ερώτηση συμπλήρωσης κενού επιδιώκουμε να καταλάβουμε αν οι μαθητές μπορούν από τη γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης να βγάζουν συμπεράσματα για την μονοτονία της συνάρτησης και της παραγώγου της, για το είδος της κυρτότητας της συνάρτησης, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

- Με τις 3 ερωτήσεις ανάπτυξης θέλουμε να δούμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να εφαρμοστεί ο Κανόνας De L' Hospital, το Θεώρημα του Rolle και το Θεώρημα της Μέσης τιμής.

3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται ως εξής:

Αρχικά παρατίθενται τα ποσοστά επιτυχίας με τα αντίστοιχα ραβδογράμματα σε κάθε ερώτηση-άσκηση και έπειτα ακολουθούν κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών.

Μία απάντηση θεωρήθηκε:

α) σωστή, αν είχε πλήρη αιτιολόγηση

β) λανθασμένη, αν δεν ήταν πλήρως αιτιολογημένη καθώς και αν ήταν λανθασμένη.

Μία τρίτη κατηγορία είναι οι ερωτήσεις στις οποίες δεν δίνεται απάντηση (Δεν Απάντησαν).

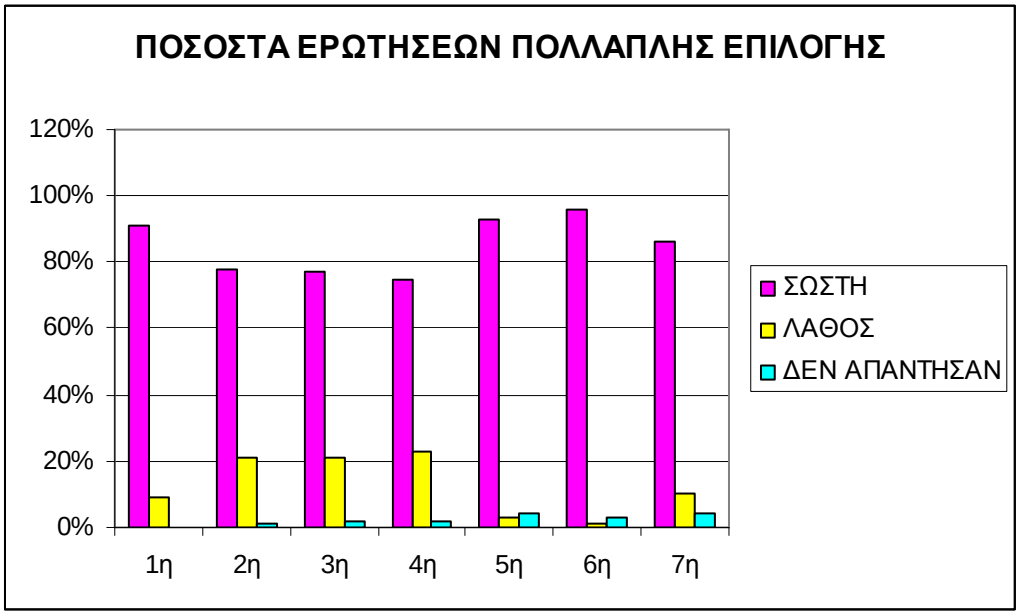
ΕΠΙΔΟΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ	ΣΩΣΤΗ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
1η Ερώτηση	91 %	9 %	0 %
2η Ερώτηση	78 %	21 %	1 %
3η Ερώτηση	77 %	21 %	2 %
4η Ερώτηση	75 %	23 %	2 %
5η Ερώτηση	93 %	3 %	4 %
6η Ερώτηση	96 %	1 %	3 %
7η Ερώτηση	86 %	10 %	4 %

Πίνακας 1: Ποσοστά απαντήσεων στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Ακολουθεί το αντίστοιχο ραβδόγραμμα 1 των ποσοστών των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής:



Ραβδόγραμμα 1: Ποσοστά απαντήσεων στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα 1 και το αντίστοιχο ραβδόγραμμα, οι μαθητές απάντησαν σωστά στην 1η , 5η , 6η και 7η ερώτηση σε ποσοστό περίπου 90%, ενώ στη 2η, 3η και 4η ερώτηση το ποσοστό επιτυχίας είναι περίπου 75%.

Συγκεκριμένα στην 1η Ερώτηση Πολλαπλής Επιλογής θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει το Πόρισμα που προκύπτει από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής:

«Έστω δύο συναρτήσεις f , g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f , g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά $c \in \Re$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
$f(x) = g(x) + c$».

Έτσι, είχαμε ένα ποσοστό 9 % που απάντησε λάθος, ενώ δεν υπήρχε μαθητής που δεν απάντησε.

Οι μαθητές λοιπόν που απάντησαν λάθος είτε βρίσκονται σε σύγχυση, είτε δηλώνουν λαθεμένες αντιλήψεις. Μια χαρακτηριστική λαθεμένη αντίληψη που φαίνεται από τις απαντήσεις των μαθητών, είναι ότι θεωρούν ότι δεν χρειάζεται άλλη συνθήκη για να ισχύει $f(x) = g(x)$, δηλαδή οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει ότι αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους δε σημαίνει ότι αναγκαία είναι και ίσες.

Μια άλλη παρανόηση είναι ότι πολλοί μαθητές ισχυρίζονται ότι πρέπει οι συναρτήσεις f και g να είναι συνεχείς στο R κάτι το οποίο ισχύει έτσι κι αλλιώς, αφού οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο R άρα από γνωστό Θεώρημα θα είναι και συνεχείς. Δηλαδή οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει το Θεώρημα παραγωγισιμότητας – συνέχειας.

Στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής 2 και 4 παρατηρούμε ότι ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών 21 % και 23 % αντίστοιχα έχουν απαντήσει λάθος, ενώ 1 % και 2 % των μαθητών δεν απάντησαν.

Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο των παρακάτω Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού :

Α) «Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ.

- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ»

και

Β) «Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα Δ.

- Εάν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f(x) είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

- Εάν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ».

Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι στη διδασκαλία αρκετές φορές δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στο ότι δεν ισχύει το αντίστροφο ενός θεωρήματος ακόμα και όταν αυτό αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

Στην 3η Ερώτηση Πολλαπλής Επιλογής παρατηρούμε ότι ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό μαθητών 21 % έχει απαντήσει λάθος, ενώ 2 % των μαθητών δεν απάντησαν. Οι μαθητές στην ερώτηση αυτή καλούνται να ερμηνεύσουν τη γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης και να βγάλουν συμπεράσματα για την μονοτονία της συνάρτησης. Οι περισσότεροι μαθητές που απάντησαν λάθος, ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση που τους δίνεται σαν να είναι της συνάρτησης και όχι της παραγώγου. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι δεν έχουν κατανοήσει ότι

είναι διαφορετική η γραφική παράσταση της συνάρτησης και της παραγώγου της. Μία άλλη πιθανή αιτία είναι η μη επαρκής εξοικείωση με τις γραφικές παραστάσεις, αφού μαθαίνουν αλγοριθμικές μεθόδους λύσεων χωρίς να εμβαθύνουν.

Στην 5η και 6η Ερώτηση Πολλαπλής Επιλογής, είχαμε την μεγαλύτερη επιτυχία στις απαντήσεις των μαθητών (ποσοστά 93 % και 96 % αντίστοιχα). Οι ερωτήσεις αυτές ζητούσαν από τους μαθητές να βρουν την πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης και την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης, κάτι που όπως φάνηκε δεν τους δυσκόλεψε καθόλου. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι οι μαθητές μαθαίνουν ευκολότερα αλγοριθμικές μεθόδους και διαδικασίες και μπορούν να τις εφαρμόζουν με μεγάλη επιτυχία.

Τέλος στην 7η Ερώτηση Πολλαπλής Επιλογής είχαμε ένα ποσοστό αποτυχίας περίπου 10 % και ένα ποσοστό περίπου 4 % που δεν απάντησε καθόλου. Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους μαθητές να επιλέξουν τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να έχουν δύο συναρτήσεις f , g που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους R, κοινή εφαπτομένη στο A (1, 2).

Από τους μαθητές που απάντησαν λάθος είχαμε ένα ποσοστό περίπου 6 % που επέλεξε μόνο την συνθήκη $f'(1) = g'(1)$. Αυτό πιθανώς να οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν έχουν στο μυαλό τους ότι το σημείο A (1, 2) πρέπει να είναι κοινό σημείο των δύο συναρτήσεων, δηλαδή ότι πρέπει να ισχύει $f(1) = g(1)$. Χρησιμοποιούν μόνο την νέα γνώση της κλίσης της εφαπτομένης ως την παράγωγο στην τετμημένη του σημείου A.

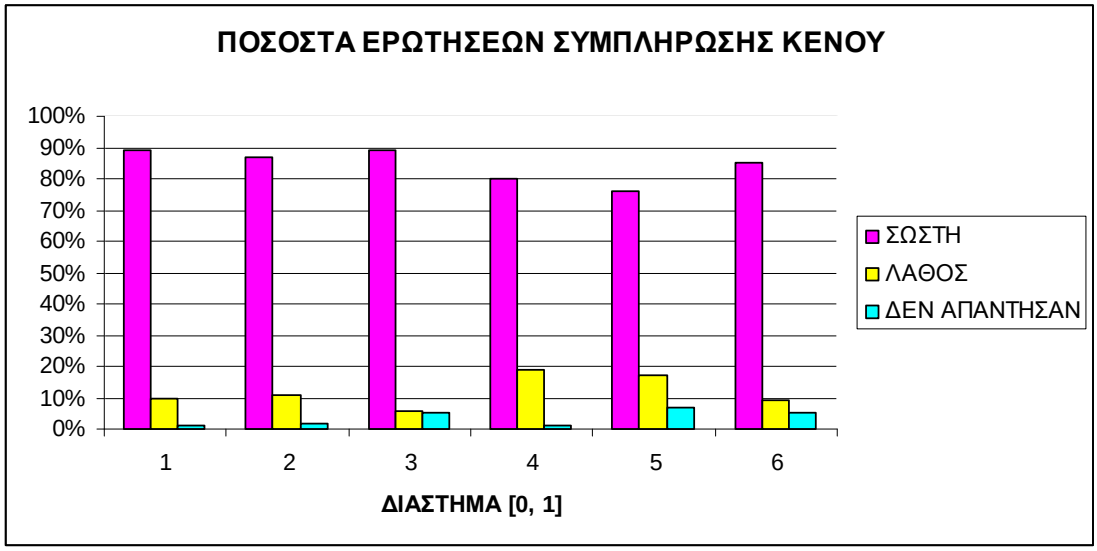
Επίσης, ένα ποσοστό περίπου 2 % που επέλεξε μόνο την συνθήκη $f(1) = g(1)$, φαίνεται ότι δεν έχει κατανοήσει την νέα γνώση που αναφέραμε παραπάνω. Τέλος ένα ποσοστό περίπου 2 % που επέλεξε τη συνθήκη $f''(1) = g''(1)$, φαίνεται ότι δεν έχει κατανοήσει καθόλου τι σημαίνει κοινή εφαπτομένη και χρησιμοποιεί την φράση της εκφώνησης «f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους».

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [0, 1]:

	Διάστημα [0, 1]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	89 %	10 %	1 %
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	87 %	11 %	2 %
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	89 %	6 %	5 %
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	80 %	19 %	1 %
5ο Ερώτημα Ακρότατο $x_o = 1$	76 %	17 %	7 %
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής $x_o = 1$	85 %	9 %	6 %

Πίνακας 2: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [0, 1]

Ακολουθεί η παρουσίαση των ποσοστών των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [0, 1] στο παρακάτω ραβδόγραμμα 2:



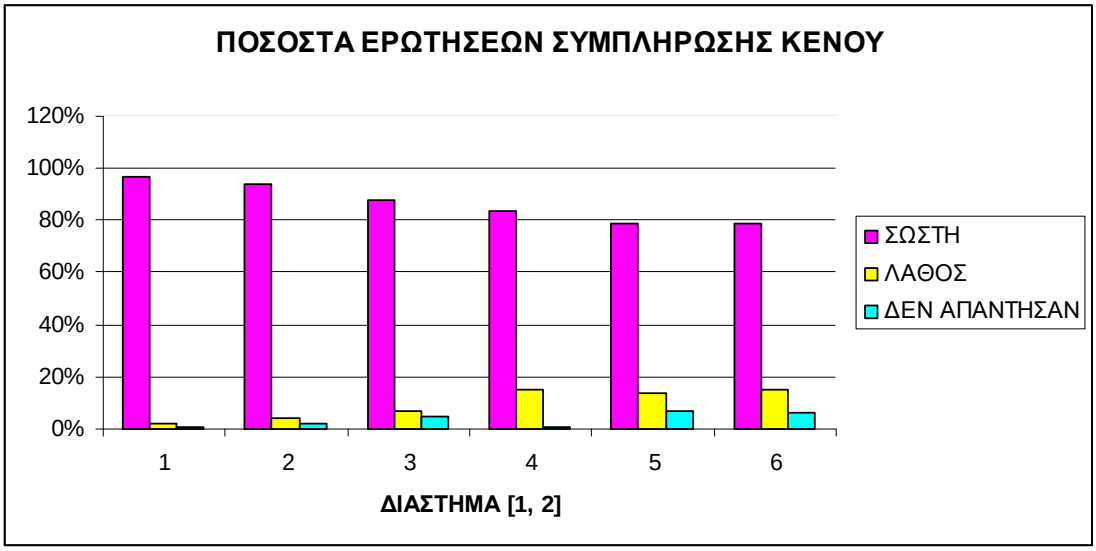
Ραβδόγραμμα 2: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [0, 1]

Στον πίνακα 3 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [1, 2] :

	Διάστημα [1, 2]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	97 %	2 %	1 %
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	94 %	4 %	2 %
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	88 %	7 %	5 %
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	84%	15%	1%
5ο Ερώτημα Ακρότατο $x_o = 2$	79%	14%	7%
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής $x_o = 2$	79%	15%	6%

Πίνακας 3: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [1, 2]

Στη συνέχεια παρουσιάζονται στο ραβδόγραμμα 3 τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [1, 2]:



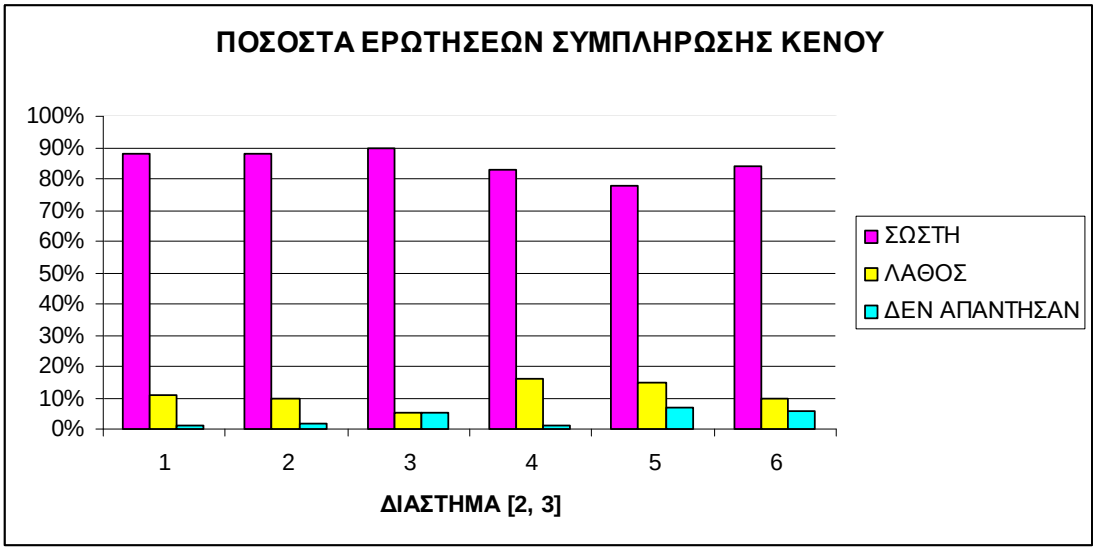
Ραβδόγραμμα 3: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [1, 2]

Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [2, 3]:

	Διάστημα [2, 3]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	88%	11%	1%
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	88%	10%	2%
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	90%	5%	5%
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	83%	16%	1%
5ο Ερώτημα Ακρότατο $x_o = 3$	78%	15%	7%
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής $x_o = 3$	84%	10%	6%

Πίνακας 4: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [2, 3]

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα 4 παρουσιάζονται τα ποσοστά απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [2, 3]:



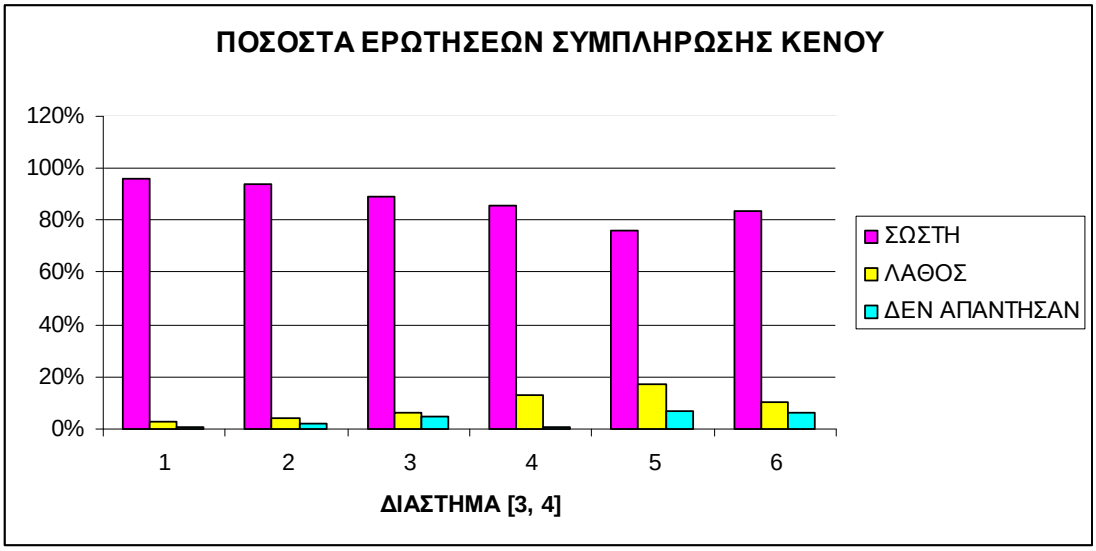
Ραβδόγραμμα 4: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [2, 3]

Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [3, 4]:

	Διάστημα [3, 4]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	96%	3%	1%
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	94%	4%	2%
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	89%	6%	5%
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	86%	13%	1%
5ο Ερώτημα Ακρότατο $x_o = 4$	76%	17%	7%
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής $x_o = 4$	84%	10%	6%

Πίνακας 5: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [3, 4]

Στο ραβδόγραμμα 5 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά απαντήσεων των μαθητών του δείγματος, στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [3, 4]:



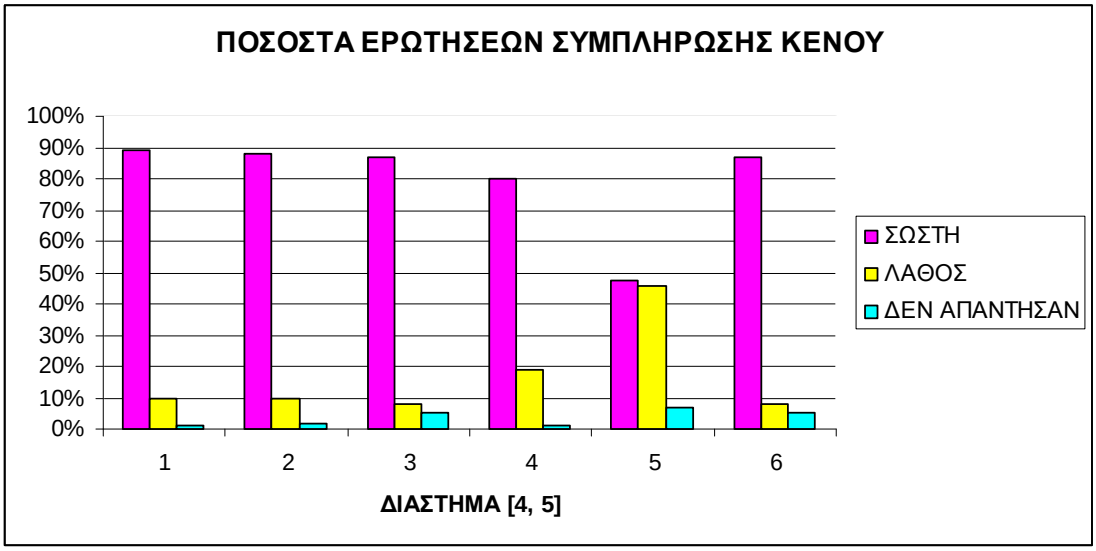
Ραβδόγραμμα 5: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [3,4]

Στον πίνακα 6 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [4,5]:

	Διάστημα [4, 5]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	89%	10%	1%
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	88%	10%	2%
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	87%	8%	5%
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	80%	19%	1%
5ο Ερώτημα Ακρότατο $x_o = 5$	47,5%	45,5%	7%
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής $x_o = 5$	87%	8%	5%

Πίνακας 6: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [4,5]

Έπειτα στο ραβδόγραμμα 6 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [4,5]:



Ραβδόγραμμα 6: Ποσοστά απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού για το διάστημα [4,5]

Στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού παρατηρούμε ότι:

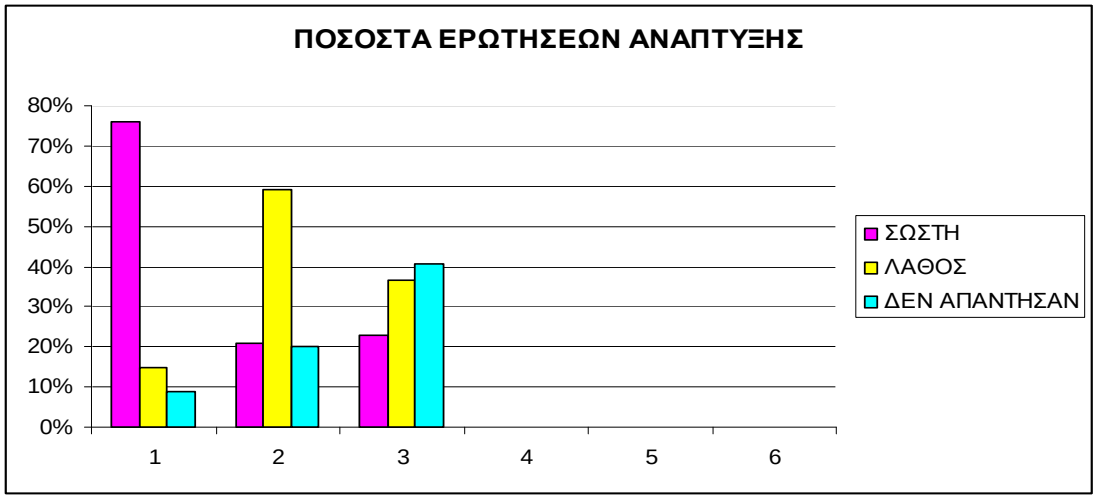
Σε όλα τα διαστήματα, ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό της τάξεως 15 – 25 % απάντησε λάθος ή δεν απάντησε στο ερώτημα για το είδος της κυρτότητας, όπως και στο ερώτημα για το ακρότατο και το σημείο καμπής. Εκείνο που είναι αξιοσημείωτο, είναι ότι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό 45,5 % απάντησε λάθος και 7 % δεν απάντησε στο ερώτημα για το ακρότατο στο $x_o = 5$. Το λάθος αυτό πιθανόν να έχει γίνει γιατί οι μαθητές δεν έχουν καταλάβει ότι πρέπει να εξετάζουμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης και στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και όχι μόνο στα σημεία αλλαγής της μονοτονίας της συνάρτησης. Ίσως, επειδή οι μαθητές μαθαίνουν να εφαρμόζουν μηχανικά τα θεωρήματα μονοτονίας-ακρότατων, ενώ στην πραγματικότητα δεν έχουν καταλάβει το βαθύτερο νόημα σ' αυτό που εξετάζουν.

Στον πίνακα 7 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης :

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ	**ΣΩΣΤΗ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1η Ερώτηση	76 %	15 %	9 %
2η Ερώτηση	21 %	59 %	20 %
3η Ερώτηση	22,8 %	36,6 %	40,6 %

Πίνακας 7: Ποσοστά απαντήσεων στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης

Τέλος στο ραβδόγραμμα 7 παρουσιάζονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης :



Ραβδόγραμμα 7: Ποσοστά απαντήσεων στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης

Στην 1η Ερώτηση Ανάπτυξης είχαμε ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό 15 % απάντησε λάθος, ενώ 9 % δεν απάντησε. Στην Ερώτηση αυτή, θέλουμε να δούμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να εφαρμόσουν τον Κανόνα De L' Hospital. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν αρκετοί μαθητές που δεν έχουν καταλάβει πότε εφαρμόζουμε τον Κανόνα De L' Hospital, όμως πρέπει να τονίσουμε ότι οι περισσότεροι μαθητές του δείγματος απάντησαν σωστά. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι τον Κανόνα De L' Hospital οι μαθητές τον κατανοούν καλύτερα από τα Θεωρήματα του Rolle ή της Μέσης Τιμής.

Στην 2η Ερώτηση Ανάπτυξης, παρατηρήθηκε ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών 59 % που απάντησε «Λάθος» και 20 % «Δεν Απάντησε». Στην Ερώτηση αυτή, θέλουμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει, πότε και πως εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle. Όπως λοιπόν προέκυψε από την έρευνα οι μαθητές δημιουργούν πολλές παρανοήσεις, ίσως γιατί δεν έχουν ξεκαθαρίσει τις προϋποθέσεις των θεωρημάτων και παρατηρείται μία σύγχυση στις γνώσεις τους.

Στην 3η Ερώτηση Ανάπτυξης, παρατηρήθηκε ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών 36,6 % που απάντησε λάθος και ένα ακόμα πιο μεγάλο ποσοστό, 40,6 % που δεν απάντησε. Σκοπός της Ερώτησης αυτής είναι να ανιχνεύσουμε αν οι μαθητές έχουν συνδέσει την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, που όπως φάνηκε, είναι δύσκολο για τους μαθητές να το καταλάβουν. Έτσι λοιπόν, οι περισσότεροι μαθητές δεν απάντησαν, ενώ υπήρχαν πολλοί μαθητές που είχαν σοβαρή παρανόηση στη χρήση του ορίου σε ανισοτικές σχέσεις.

3.4 ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ –ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Α. 1η ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ:

Στην 1η Ερώτηση ανάπτυξης οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά (ποσοστό 76%), οι μαθητές που απάντησαν «Λάθος» είχαν ποσοστό 15%, και αυτοί που «Δεν Απάντησαν» είχαν ποσοστό 9%.

Από αυτούς που οι απαντήσεις τους χαρακτηρίστηκαν «Λάθος» είχαμε:

α) Περίπου το 7% απάντησαν ότι ο ισχυρισμός της ερώτησης είναι λάθος, χωρίς να αιτιολόγησαν καθόλου τον ισχυρισμό τους.

β) Περίπου το 6% δεν απάντησαν αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος, αλλά έλυσαν το πρώτο όριο χρησιμοποιώντας την μέθοδο επίλυσης ορίων ρητών συναρτήσεων που έχουν απροσδιόριστη μορφή 0/0 και επιλύονται με παραγοντοποίηση. Βέβαια, ο τρόπος επίλυσης ορίου είναι σωστός, όμως δεν ζητείται από τους μαθητές να επιλύσουν το όριο. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι οι μαθητές μαθαίνουν μεθόδους επίλυσης (διαδικασίες) χωρίς να εμβαθύνουν στην γνώση.

γ) Περίπου 2% βρήκαν τα όρια όταν το $x \to \pm\infty$, ενώ η ερώτηση ζητούσε το όριο ρητής συνάρτησης όταν το $x \to 1$. Από το Λάθος αυτό μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές βρίσκονται σε μία σύγχυση όσον αφορά στην εύρεση ορίων. Φαίνεται ότι δεν έχουν ξεκαθαρίσει πότε χρησιμοποιούν τις μεθόδους εύρεσης ορίων που έχουν διδαχθεί.

Β. 2η ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πρέπει να επισημάνουμε ότι στην 2η Ερώτηση Ανάπτυξης παρατηρήθηκε μία λανθασμένη απάντηση από 12 μαθητές σε σύνολο 101 μαθητών, ποσοστό 12% περίπου, η οποία παρατίθεται παρακάτω:

«Έχουμε $f(x) = x^8 + \alpha x + \beta$ με $f'(x) = 8x^7 + \alpha$.

Τότε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^7 + a = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{\frac{a}{8}}$$

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt[7]{\frac{a}{8}}$	$+\infty$
f΄(x)	−	+
f (x)	↘	↗

Άρα η f έχει μια πραγματική ρίζα στο $(-\infty, -\sqrt[7]{\frac{a}{8}}]$ και μία στο $[-\sqrt[7]{\frac{a}{8}}, +\infty)$, οπότε η f έχει δύο το πολύ πραγματικές ρίζες».

Όπως είδαμε, ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό περίπου 12 % έλυσε την 2η Ερώτηση Ανάπτυξης χρησιμοποιώντας την μονοτονία της συνάρτησης. Όμως, δεν υπάρχει σωστή αιτιολόγηση, πως από την μονοτονία προκύπτει ότι η f έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Σύμφωνα με την αιτιολόγηση των μαθητών προκύπτει ότι η συνάρτηση έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες και όχι το πολύ, οπότε είναι λάθος. Όπως φαίνεται από την απάντησή τους, δεν γίνεται καμία διερεύνηση για τις πιθανές τιμές της τιμής της συνάρτησης, $f(-\sqrt[7]{\frac{a}{8}})$, που αν είναι θετική τότε η f δεν τέμνει τον άξονα των x΄x, οπότε η εξίσωση f (x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα, αν είναι $f(-\sqrt[7]{\frac{a}{8}}) = 0$ τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία ρίζα και αν $f(-\sqrt[7]{\frac{a}{8}}) < 0$ τότε η εξίσωση f (x) = 0 έχει δύο ρίζες. Άρα σε κάθε περίπτωση, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Έτσι, δεν είμαστε σίγουροι ότι οι μαθητές που έλυσαν την άσκηση με τον τρόπο αυτό, έχουν όντως στο μυαλό τους την παραπάνω διερεύνηση και με βάση αυτή καταλήγουν στο συμπέρασμα. Απουσία συνέντευξης με τους μαθητές προκειμένου να κατανοήσουμε τι ακριβώς έχουν στο μυαλό τους, μας κάνει να πιθανολογούμε πως το παραπάνω συμβαίνει επειδή ξέρουν τι πρέπει να αποδείξουν και έχουν μάθει ότι με τη χρήση της μονοτονίας καταλήγουν στην ύπαρξη ρίζας, θεωρούν ότι ισχύει το συμπέρασμα, χωρίς όμως να έχουν ουσιαστικά κατανοήσει το γιατί ισχύει το

συγκεκριμένο συμπέρασμα. Ενδεχομένως, να ευθύνεται γι' αυτό και ο τρόπος διδασκαλίας, όταν οι ορισμοί και τα θεωρήματα παρουσιάζονται ως διαδικασίες και έτσι οι μαθητές τα απομνημονεύουν ως κανόνες δράσης, χωρίς να βλέπουν τι κρύβεται πίσω από την μαθηματική αυτή ιδέα.

Επίσης στη 2η Ερώτηση Ανάπτυξης παρατηρήθηκε η παρακάτω βασική παρανόηση σε 27 από τα 101 ερωτηματολόγια (ποσοστό περίπου 27%) που απαντήθηκαν:

« Έστω ότι η f έχει τρεις ρίζες ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$,
- παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) με $f'(x) = 8x^7 + \alpha$ και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ {= 0} , $f(\rho_2) = f(\rho_3)$ {=0}

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f΄ στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- Η f΄ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$,
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (ξ_1, ξ_2) με $f''(x) = 56x^6$ και
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi) = 0, \text{ δηλαδή } 56\xi^6 = 0, \text{ δηλαδή } \xi = 0.$$

Επειδή δεν καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η f δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες, οπότε η άσκηση είναι λάθος».

Παρατηρήσαμε δηλαδή, ότι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών, περίπου 27 % , είχε την παραπάνω σοβαρή παρανόηση. Όπως φαίνεται, οι μαθητές έχουν μάθει την μέθοδο επίλυσης τέτοιου είδους ασκήσεων και ξέρουν ότι πρέπει να καταλήξουν σε άτοπο. Δηλαδή, ξέρουν να χρησιμοποιούν την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγή», επειδή όμως δεν βλέπουν το άτοπο στην πορεία της απόδειξής τους, θεωρούν ότι το λάθος βρίσκεται στην ίδια την άσκηση και όχι στη διαδικασία που ακολούθησαν.

Οι μαθητές λοιπόν, δεν αντιλαμβάνονται ότι το άτοπο βρίσκεται στο πλήθος των ριζών της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης f (x) που δίνεται με την πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle, προχωρούν σε δεύτερη εφαρμογή του από την οποία προκύπτει ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f (x) έχει μία ρίζα που είναι κάτι που όντως ισχύει. Αντί λοιπόν να προβληματισθούν με το συμπέρασμα που καταλήγουν και να ψάξουν να βρουν που έχουν κάνει οι ίδιοι λάθος, συμπεραίνουν ότι η άσκηση είναι λάθος.

Υπάρχει πάντα στους μαθητές ένα ποσοστό που αμφισβητεί την ορθότητα μιας άσκησης και αυτό γίνεται συνήθως όταν είναι σίγουρος για την μέθοδο που εφαρμόζει στην επίλυση μιας άσκησης και πιστεύει στην δική του αυθεντία. Αυτό γίνεται γιατί αποδέχονται μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, χωρίς να έχουν κατανοήσει για ποιους λόγους τους χρησιμοποιούν. Οι μαθητές φορτίζονται συναισθηματικά και ίσως τα συναισθήματα που αναπτύσσονται να οφείλονται στην επιτυχία ή αποτυχία τους να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα. Η αιτία του λάθους είναι βαθύτερη και έχει να κάνει με το λογικό λάθος. Το πρόβλημα που υπάρχει από πίσω είναι πρόβλημα μαθηματικής λογικής, το οποίο θα σχολιαστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗ 2η ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στην 2η Ερώτηση Ανάπτυξης ακολούθησαν τις παρακάτω δύο λύσεις που παρατίθενται:

1η Λύση

« Έστω ότι η f έχει τρεις ρίζες ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$.
. Ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$,
- παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) με $f'(x) = 8x^7 + \alpha$ και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ {= 0} , $f(\rho_2) = f(\rho_3)$ {=0}

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0,$$

που είναι άτοπο γιατί η εξίσωση $f'(\xi) = 0$ δηλαδή $8\xi^7 + \alpha = 0$

έχει μοναδική λύση την $\xi = -\sqrt[7]{\frac{a}{8}}$ ».

2η Λύση

« Η εξίσωση είναι άρτιου βαθμού άρα θα έχει 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8 ρίζες.

Έστω ότι η f έχει τέσσερις ρίζες ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 και ρ_4 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ και $[\rho_3, \rho_4]$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ και $[\rho_3, \rho_4]$,
- παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) και (ρ_3, ρ_4) με $f'(x) = 8x^7 + \alpha$ και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ {= 0} , $f(\rho_2) = f(\rho_3)$ {=0} και $f(\rho_3) = f(\rho_4)$ {=0}

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = 0,\ \ f'(\xi_2) = 0 \text{ και } f'(\xi_3) = 0.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f΄ στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις:

- Η f΄ είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ και $[\xi_2, \xi_3]$,
- παραγωγίσιμη στα ανοιχτά διαστήματα (ξ_1, ξ_2) (ξ_2, ξ_3) με $f''(x) = 56x^6$ και
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και $f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ και ένα τουλάχιστον $\xi' \in (\xi_2, \xi_3)$ ώστε:

$$f''(\xi) = 0 \text{ και } f''(\xi') = 0, \text{ με } \xi \neq \xi',$$

πράγμα που είναι άτοπο γιατί η εξίσωση
$f''(x) = 0$ ή $56x^6 = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$».

Η πρώτη σωστή λύση που έδωσαν οι μαθητές ήταν αναμενόμενη, γιατί έχουν διδαχθεί την συγκεκριμένη μέθοδο, σύμφωνα με τις ασκήσεις δίνονται στο σχολικό βιβλίο και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Rolle για την επίλυσή τους.

Όμως η δεύτερη λύση στην οποία οι μαθητές χρησιμοποίησαν την πρόταση: «Η εξίσωση είναι άρτιου βαθμού άρα θα έχει 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8 ρίζες» είναι μία πρόταση η οποία δεν υπάρχει στα σχολικά μαθηματικά βιβλία, όμως συνήθως οι

εκπαιδευτικοί την χρησιμοποιούν κατά την διδασκαλία επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μεταφέρεται στους μαθητές, οι οποίοι την χρησιμοποιούν στην επίλυση τέτοιων ασκήσεων. Η πρώτη φορά που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με μία ειδική περίπτωση της παραπάνω πρότασης, είναι όταν διδάσκονται την επίλυση της εξίσωσης f (x) = 0 ενός τριωνύμου της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ στην Γ ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου. Στη συνέχεια, στην Β΄ Λυκείου, μαθαίνουν να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου και ενώ δεν υπάρχει η παραπάνω πρόταση στο σχολικό βιβλίο, μερικοί καθηγητές μαθαίνουν στους μαθητές τους να τη χρησιμοποιούν.

Γ. 3η ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Στην 3η Ερώτηση Ανάπτυξης είχαμε την παρακάτω σοβαρή παρανόηση σε 31 από τα 101 ερωτηματολόγια, δηλαδή ένα μεγάλο σχετικά ποσοστό μαθητών:

«Για x = y ισχύει ως ισότητα.

Για x $\neq$ y έχουμε:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y}{x - y}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y}{x - y} \le 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to y}(-1) \le \lim_{x\to y}\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y}{x - y} \le \lim_{x\to y} 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -1 \le -\eta\mu y \le 1 \Rightarrow 1 \ge \eta\mu y \ge -1 \Rightarrow -1 \le \eta\mu y \le 1$$

Άρα αποδείχτηκε».

Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών, περίπου 31 % , όπως είδαμε προσπάθησε να επιλύσει την άσκηση ξεκινώντας από αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και με συνεπαγωγές καταλήγει σε κάτι που ισχύει άρα συμπεραίνουν ότι θα ισχύει το ζητούμενο. Το πρώτο βασικό λάθος που έκαναν οι μαθητές είναι ότι συγχέουν την συνεπαγωγή με την ισοδυναμία. Πράγματι, πολλοί μαθητές δεν κάνουν διάκριση μεταξύ της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι δεν

διδάσκεται η Μαθηματική Λογική, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην μπορούν να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ συνεπαγωγής και ισοδυναμίας γιατί το βλέπουν μόνο σαν ένα σύμβολο που συνδέει δύο προτάσεις. Υπάρχει δηλαδή σύγχυση στους μαθητές και γι αυτό πρέπει να τους εξηγούμε σ' όλη τη διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Πρέπει να τους βοηθήσουμε να συνειδητοποιήσουν τη διαφορά ανάμεσα σε μία απλή συνεπαγωγή και σε μία ισοδυναμία και να είναι σε θέση να ελέγχουν πότε μια συνεπαγωγή ισχύει και αντίστροφα. Πολλοί καθηγητές υποστηρίζουν ότι δεν χρησιμοποιούμε πλέον το σύμβολο της ισοδυναμίας, αλλά χρησιμοποιούμε μόνο το σύμβολο της συνεπαγωγής, δημιουργώντας μεγαλύτερη σύγχυση στους μαθητές.

Ένα άλλο βασικό λάθος ήταν η χρήση ορίου σε μία ανίσωση, δηλαδή θεωρούν ότι ισχύει η εξής πρόταση:

αν f (x) ≤ g (x) ≤ h (x) τότε και $\lim_{x \to x_o} f(x) \le \lim_{x \to x_o} g(x) \le \lim_{x \to x_o} h(x)$,

κάτι που αποτελεί σοβαρή παρανόηση και φαίνεται έτσι η μη πλήρης κατανόηση του Θεωρήματος:

«Αν δύο συναρτήσεις f , g έχουν όριο σ' ένα σημείο x_o και ισχύει f (x) ≤ g (x) κοντά στο x_o , τότε ισχύει $\lim_{x \to x_o} f(x) \le \lim_{x \to x_o} g(x)$ ».

Θα έπρεπε λοιπόν οι μαθητές πριν περάσουν από την ανίσωση των συναρτήσεων στην ανίσωση των ορίων, πρώτα δηλώσουν την ύπαρξη των ορίων όταν το x τείνει στο x_o . Αυτό το Λάθος φαίνεται ανάλογο με το προηγούμενο Λάθος με την εις άτοπον απαγωγή στην 2η Ερώτηση Ανάπτυξης. Αν συνδυάσουμε τις δύο αυτές απαντήσεις παρατηρούμε ότι 20 από τους 31 μαθητές (ποσοστό περίπου 20% στο σύνολο όλων των μαθητών) που έκαναν αυτό το λάθος στην 3η Ερώτηση Ανάπτυξης έκαναν και το ανάλογο λάθος και στην 2^{η}η Ερώτηση Ανάπτυξης. Δηλαδή οι μαθητές φαίνεται να θεωρούν ότι αν υποθέσουμε ότι μία πρόταση ισχύει ή δεν ισχύει και καταλήξουμε σε κάτι αληθές τότε και αυτό που υποθέσαμε για την αρχική πρόταση είναι αληθές.

ΛΥΣΗ ΣΤΗ 3η ΕΡΩΤΗΣΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Οι μαθητές που έλυσαν σωστά την 3η Ερώτηση Ανάπτυξης παρουσίασαν την παρακάτω λύση, η οποία ήταν αναμενόμενη με βάση αυτά που έχουν διδαχθεί:

«Θεωρούμε τη συνάρτηση f (t) = συν t στο διάστημα [y, x] (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι y < x).

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [y, x] και
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (y, x) με f΄(t) = - ημ t

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ Є (y, x) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Rightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y}{x - y}.$$

Ισχύει $\left|-\eta\mu\xi\right| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y}{x - y}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y\right| \le \left|x - y\right|$.

Άρα αποδείχτηκε».

Οι μαθητές μαθαίνουν να λύνουν τέτοιου είδους ασκήσεις χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Άλλωστε, υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου αρκετές ασκήσεις αυτού του είδους για να λύσουν οι μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κύριος σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει τις αντιλήψεις των μαθητών της Γ΄ Λυκείου πάνω στο Διαφορικό Λογισμό και να αναδείξει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των Βασικών Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού. Παρόλο που το δείγμα ήταν σχετικά μικρό (101 μαθητές) τα περισσότερα αποτελέσματα συμφωνούν και επιβεβαιώνουν προηγούμενες έρευνες όπως έχουμε επισημάνει.

Συγκεκριμένα έχουμε να επισημάνουμε τα ακόλουθα με βάση τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές:

Παρατηρήθηκαν παρανοήσεις των μαθητών, που οφείλονταν στο ότι δεν είχαν κατανοήσει τη συνέπεια του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής που είναι το Πόρισμα: «Αν δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα Δ έχουν ίσες παραγώγους για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x στο Δ να ισχύει f (x) = g (x) + c». Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να εφαρμόσουν το Πόρισμα αυτό σε συνδυασμό με το Θεώρημα: «Μία συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και συνεχής στο σημείο αυτό». Πρέπει λοιπόν οι εκπαιδευτικοί να δίνουν μεγάλη βαρύτητα στις συνθήκες εφαρμογής των παραπάνω θεωρημάτων. Να επιμείνουν στην γεωμετρική ερμηνεία του Πορίσματος και να επισημάνουν ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω Θεωρήματος παραγωγισιμότητας – συνέχειας χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του σχολικού βιβλίου. Θεωρήματα των οποίων η γεωμετρική εποπτεία καθιστά την απόδειξη προφανή θα πρέπει να αποτελούν αντικείμενο αναλυτικής συζήτησης με τους μαθητές ως προς το γιατί η εποπτεία δεν επαρκεί. Με την επιχειρηματολογία και τη συζήτηση οι μαθητές μπορεί να πειστούν για την ορθότητα ή μη του επιχειρήματος. Η καλύτερη απόδειξη για τους μαθητές είναι αυτή που είναι επεξηγηματική και όχι κατά ανάγκη αυτή που πείθει (Healy & Hoyles, 2000). Ο Λογισμός περιλαμβάνει αλγόριθμους, θεωρία και εφαρμογές. Οι μαθητές πρέπει να έρθουν σε επαφή με την τεχνική του δύναμη, τη λογική του αρμονία και την χρησιμότητά του.

Επίσης, ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών δεν έχουν κατανοήσει πότε ισχύει το αντίστροφο των βασικών Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού για την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Αυτό μπορεί να συμβαίνει γιατί αφενός οι μαθητές δεν προσέχουν τα σχόλια και τις παρατηρήσεις που υπάρχουν σε κάθε Θεώρημα, αλλά μαθαίνουν κυρίως να εφαρμόζουν το Θεώρημα και αφετέρου οι καθηγητές δεν δίνουν την απαραίτητη βαρύτητα κατά τη διδασκαλία.

Υπήρχαν λάθη πολλών μαθητών που οφείλονταν στο ότι δεν ερμηνεύουν σωστά τη γραφική παράσταση που τους δίνεται. Όπως είδαμε οι Leslie Aspinwall, Kenneth L. Shaw & Norma C. Presmeg (1997), ερεύνησαν τις γραφικές συνδέσεις μεταξύ μιας συνάρτησης και της παραγώγου της και τις δυσκολίες που μπορούν να παρουσιαστούν από ανεξέλεγκτες νοητικές εικόνες. Και αν και όλες οι σύγχρονες οδηγίες και εγχειρίδια προτείνουν περισσότερες γραφικές παραστάσεις στις οδηγίες του Απειροστικού Λογισμού, πηγάζοντας από την άποψη ότι η εννοιολογική αντίληψη των μαθητών αυξάνει όποτε χρησιμοποιούνται γραφικές παραστάσεις και προκαλούνται συνοδεύουσες εικόνες, φαίνεται ότι η άποψη αυτή, τελικά δεν είναι πανάκεια.

Γενικά έχει επιβεβαιωθεί από έρευνες ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην κατανόηση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων, πόσο μάλλον στις παραγώγους τους. Πράγματι σε έρευνα από τους Kelly K. Chappell & Kendra Killpatrick (2003), που έγινε σε μαθητές που προετοιμάζονται να δώσουν εξετάσεις στον Διαφορικό Λογισμό για να μπουν στο Πανεπιστήμιο, παρατηρήθηκε ότι ενώ είχαν διαδικαστικές δεξιότητες, δεν ήταν σε θέση να εξηγήσουν λεκτικά ή να δώσουν γραφική ερμηνεία της παραγώγου. Αυτό φαίνεται και από τις απαντήσεις των μαθητών στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού, τα συμπεράσματα της οποίας προκύπτουν από την ερμηνεία της γραφικής παράστασης της παραγώγου μιας συνάρτησης. Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα λάθη των μαθητών οφείλονται στο ότι δεν έχουν καταλάβει ότι πρέπει να εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης και στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και όχι μόνο στα σημεία αλλαγής της μονοτονίας της συνάρτησης. Είναι πιθανόν οι μαθητές να εφαρμόζουν τα θεωρήματα μονοτονίας-ακρότατων, χωρίς να έχουν καταλάβει το βαθύτερο νόημα τους.

Επιπροσθέτως, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην εύρεση ακρότατων, είδος κυρτότητας και σημείων καμπής, ειδικά όταν πρέπει να βγάλουν τα συμπεράσματα ερμηνεύοντας γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ή

γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων γιατί δεν έχουν εξοικειωθεί με τις γραφικές παραστάσεις στην πορεία της μαθηματικής τους εκπαίδευσης, αλλά και λόγω της δυσκολίας της έννοιας της συνάρτησης, γύρω από την οποία έχουν γίνει πολλές έρευνες όπως αναλύσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (M. Asiala, J. Cottrill, Ed. Dubinsky, K. E. Schwingendorf, (1997), Mochkovich et al, 1993; Sfard, 1992; Yeruschalmy & Schwartz, 1993, N. Μουσουλίδης & Α. Γαγάτσης 2004, Μ. Καλδρυμίδου και Ε. Μορόγλου 2006). Το γενικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται εδώ είναι ο εμπλουτισμός των αναπαραστάσεων που έχουν οι μαθητές με τις συναρτήσεις, η εδραίωση μιας ισορροπίας μεταξύ των προηγούμενων γνώσεών τους και της εισαγωγής νέων εννοιών και η ανάπτυξη ικανοτήτων για μοντελοποίηση γεωμετρικών καταστάσεων. Επειδή οι συναρτήσεις αναπαρίστανται με ποικίλους τρόπους (απεικονίσεις, σχέσεις κ.ά.) και η κάθε μια από αυτές, όταν εφαρμόζεται, χρησιμοποιεί διαφορετικούς όρους για τα ίδια πάντα πράγματα, δημιουργεί σύγχυση και δυσκολία στη συγκρότηση της έννοιας. Οι μαθητές δυσκολεύονται να ερμηνεύουν διαγράμματα και να χειρίζονται σύμβολα και δεν μπορούν εύκολα να συνδέσουν μεταξύ τους τις διαφορετικές παραστάσεις των συναρτήσεων: τύπους, γραφήματα, πίνακες τιμών, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων. Αυτό οφείλεται στην πολυπλοκότητα και τις πολλές υπό-έννοιες που συνδέονται με την έννοια αυτή, καθώς και στην έλλειψη θεωρητικού πλαισίου, στη δυσκολία των θεωρητικών της μοντέλων και στους τρόπους διδακτικής μεταφοράς της στην τάξη.

Όπως είδαμε, οι περισσότεροι μαθητές του δείγματος έχουν κατανοήσει τις συνθήκες εφαρμογής του Κανόνα De L' Hospital, ενώ αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση των συνθηκών των Θεωρημάτων του Rolle και της Μέσης Τιμής. Πράγματι, όπως προέκυψε από την έρευνα οι μαθητές δημιουργούν πολλές παρανοήσεις στα παραπάνω θεωρήματα, ίσως γιατί δεν έχουν ξεκαθαρίσει τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν και παρατηρείται μία σύγχυση στις γνώσεις τους. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι όλοι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν πίνακα μονοτονίας απέτυχαν, ενώ όσοι μαθητές χρησιμοποίησαν το Θεώρημα του Rolle πέτυχαν. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι οι μαθητές έχουν μάθει να αντιμετωπίζουν ασκήσεις τέτοιου είδους με το Θεώρημα του Rolle και δεν μπορούν εύκολα να σκεφτούν μία άλλη στρατηγική επίλυσης.

Επιπλέον, οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν την απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Έτσι λοιπόν, υπήρχαν πολλοί μαθητές που είχαν σοβαρή παρανόηση στη χρήση του ορίου σε ανισοτικές σχέσεις. Οι

διάφορες έρευνες (Cornu 1991, Tall 1986) που έχουν γίνει παρουσιάζουν σαφέστατα ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους. Έχει αποδειχθεί ότι προκειμένου να επιλύσει ο μαθητής ένα πρόβλημα, δε στηρίζεται μόνο στην επιστημονική θεωρία, αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό, ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες ιδέες. Λόγω της ποικιλίας των αυθόρμητων ιδεών και της αυξανόμενης συνειδητοποίησης του φορμαλισμού από τον μαθητή, συμβαίνει συχνά να υπάρχουν ταυτόχρονα στο μυαλό ενός ατόμου αντιφατικές ιδέες, που οδηγούν σε μια καθολική «εικόνα έννοιας» που περιέχει πιθανούς συγκρουόμενους παράγοντες.

Όπως επισημάναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, πίσω από κάποια λάθη των μαθητών κρύβεται το πρόβλημα της Μαθηματικής Λογικής, που αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο των μαθηματικών. Με το εργαλείο αυτό ελέγχεται η ορθότητα ενός συλλογισμού και οι συνέπειες μιας θεωρίας, ενός ορισμού ή μιας πρότασης και κυρίως μιας ολόκληρης μαθηματικής θεωρίας. Πρέπει λοιπόν οι μαθητές να διδαχθούν κάποια βασικά στοιχεία όπως οι βασικές μέθοδοι απόδειξης, η ορθή χρήση του συνεπάγεται, της ισοδυναμίας και του αρκεί, η έννοια του για κάθε, του υπάρχει και των αρνήσεών τους κλπ. Έτσι οι μαθητές ξεκινώντας μια απόδειξη από την αποδεικτέα σχέση πολλές φορές θεωρούν ότι την απέδειξαν επειδή κατέληξαν σε κάτι αληθές ή όταν δεν καταλήγουν σε αυτό που περιμένουν τότε θεωρούν ότι η άσκηση είναι λάθος. Και αυτό συμβαίνει γιατί δεν γίνεται επισήμανση των συνθηκών που ισχύουν και την κάνουν σε συγκεκριμένες αποδείξεις σωστή, ούτε στα σχολικά εγχειρίδια ούτε από τους εκπαιδευτικούς.

Έχουν γίνει αρκετές απόπειρες στο παρελθόν για τη διδασκαλία στοιχείων της μαθηματικής λογικής στο Λύκειο, με στόχο να κατανοηθούν από τους μαθητές έννοιες – κλειδιά, όπως η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία που βρίσκονται στον πυρήνα της αποδεικτικής διαδικασίας στα μαθηματικά. Στις δεκαετίες του 1970 και 1980 τα σχολικά βιβλία περιείχαν ένα εισαγωγικό κεφάλαιο για τις λογικές πράξεις, τους πίνακες αλήθειας και τους ποσοδείκτες, στοιχεία τα οποία καταργήθηκαν με το νέο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου που κυκλοφόρησε το 1990 (και διατηρείται μέχρι σήμερα), μέσα στο γενικότερο κλίμα αποκαθήλωσης των λεγόμενων «Νέων Μαθηματικών». Η ολοένα και διευρυνόμενη όμως αδυναμία των περισσότερων μαθητών να κατανοήσουν τις βασικές αρχές της αποδεικτικής διαδικασίας (αδυναμία που εκδηλώνεται με τον πιο οδυνηρό για τους μαθητές τρόπο στις Πανελλαδικές Εξετάσεις) οδήγησε σε μια απόπειρα μερικής επαναφοράς. Στην αναθεωρημένη

έκδοση της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου οι συγγραφείς έχουν συμπεριλάβει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στο οποίο γίνεται μια νέα απόπειρα να παρουσιαστούν στους μαθητές οι βασικές έννοιες της μαθηματικής λογικής. Το διδακτικό πρόβλημα της μαθηματικής λογικής και της απόδειξης γενικά, δεν βρίσκεται στην ύπαρξη ή έλλειψη σχετικών παραγράφων στα σχολικά βιβλία, αλλά στην απουσία διδακτικών προτάσεων που λαμβάνουν υπόψη την πραγματική φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Έτσι λοιπόν, πρέπει οι εκπαιδευτικοί να προσπαθήσουν με κατάλληλα παραδείγματα να ξεκαθαρίσουν τις παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών που οφείλονται στη μη γνώση της μαθηματικής λογικής.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι για όλες τις παραπάνω δυσκολίες και αντιλήψεις, ίσως δεν ευθύνονται κατά κύριο λόγο οι μαθητές. Οι παρανοήσεις οφείλονται, κυρίως στην δυσκολία κατανόησης του Διαφορικού Λογισμού και πιο συγκεκριμένα στην ίδια την έννοια της Παραγώγου και στις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την εφαρμογή των Βασικών Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού που είναι από την φύση τους δύσκολες. Εξάλλου αυτό επιβεβαιώνεται και από την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, όπου για πολλά χρόνια υπήρχαν διαμάχες ανάμεσα σε μεγάλους επιστήμονες. Επιπροσθέτως, όπως έχουμε αναλύσει, οι δυσκολίες αυτές πηγάζουν από την δυσκολία κατανόησης βασικών εννοιών, όπως του ορίου και της συνάρτησης. Το γεγονός ότι δεν δίνεται έμφαση στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και η εφαρμογή της έννοιας περιορίζεται συχνά σε ασκήσεις ρουτίνας, οδηγεί σε μηχανική και επιφανειακή μάθηση (Furinghetti & Paola, 1991), ενδεχομένως δίνει μια εξήγηση για την περιορισμένη και αποσπασματική απόδοση των μαθητών στη λύση προβλήματος πάνω στα όρια.

Ίσως, ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι και ο τρόπος διδασκαλίας από τους καθηγητές, τα σχολικά βιβλία, ο διδακτικός χρόνος σε σχέση με την ύλη που πρέπει να διδαχθεί. Είναι λοιπόν θεμιτό, ο εκπαιδευτικός γνωρίζοντας τα σημεία στα οποία συναντούν δυσκολίες οι μαθητές, να ακολουθήσει μία διδακτική προσέγγιση που να εστιάζει σ’ αυτά, προκαλώντας γνωστική σύγκρουση για να μπορέσουν να τις ξεπεράσουν. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε επιλέγοντας τα κατάλληλα παραδείγματα και δραστηριότητες και οργανώνοντας την τάξη έτσι, ώστε να δώσει τη δυνατότητα και την ευκαιρία στους μαθητές του να οικοδομήσουν τη γνώση. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός πρέπει να ελαττώσει το χρόνο που αφιερώνει για να παρουσιάσει ο ίδιος, μαθηματικά θέματα και έννοιες.

Η Μαθηματική ανάλυση απαιτεί αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες και ταυτόχρονα απαιτεί απομάκρυνση από τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Για να διεισδύσουμε στην αναλυτική σκέψη και να είμαστε αποτελεσματικοί σε αυτήν πρέπει να αναπτύξουμε νέες τεχνικές. Διάφορες έρευνες δείχνουν ότι το εκπαιδευτικό σύστημα αφήνει στους μαθητές την ευθύνη να αναδιοργανώσουν μόνοι τους τις διάφορες έννοιες, κάτι βέβαια που δεν μπορούν να το επιτύχουν. Έτσι, τελειώνοντας τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η πλειοψηφία των μαθητών δεν είναι σε θέση να συνδέσει αυτές τις έννοιες. Έρευνες επίσης έδειξαν ότι όταν η διδασκαλία είναι υπεύθυνη και σωστή, τότε η αναδιοργάνωση των εννοιών από τους μαθητές, γίνεται αποτελεσματικά και σταθερά.

4.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Η διδασκαλία του Διαφορικού Λογισμού αποτελεί ένα μαθηματικό πεδίο που πρέπει να διερευνηθεί σε βάθος και ιδιαίτερα στα ελληνικά σχολεία. Μία χρήσιμη έρευνα θα ήταν να εξεταστεί πως μπορεί η ψηφιακή τεχνολογία, να επηρεάσει την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των Βασικών Θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού. Η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας κάνει το μάθημα ελκυστικότερο και δημιουργικότερο και γενικά συμβάλει στην ποιοτική αναβάθμιση της εκπαίδευσης. Η χρήση των εργαλείων αυτών είναι συνδεδεμένη με τη μαθησιακή διαδικασία και με τη διαμόρφωση ενός σύγχρονου διδακτικού «παραδείγματος» το οποίο υποστηρίζει την καλλιέργεια μεθοδολογικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων, τη διερεύνηση μέσα στο πείραμα, την ομαδική εργασία και επικοινωνία των μαθητών στα πλαίσια συνεργατικών δραστηριοτήτων. Δηλαδή έχει στόχο τη δημιουργία νέων ρόλων για τον εκπαιδευτικό και το μαθητή. Η αξιοποίηση των εκπαιδευτικών λογισμικών στοχεύει να αποτελέσει παιδαγωγικό εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των μαθητών. Μία διδακτική προσέγγιση που βασίζεται στη ομαδική συνεργασία, όπου ο εκπαιδευτικός έχει αποφασιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της κατεύθυνσης και του χαρακτήρα της επικοινωνίας στην τάξη ίσως βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στον Διαφορικό Λογισμό. Μαζί όμως με την διαφορετική διδακτική προσέγγιση, πρέπει να μπει ενεργά η χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών στην διδασκαλία, γιατί δίνουν τη δυνατότητα έκφρασης μαθηματικών ιδεών και νοημάτων (Papert, 1980). Αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να χειριστούν πολλαπλές διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις, να αναπτύξουν εικασίες, να

πειραματιστούν να υποθέσουν και χρησιμοποιήσουν την αφαιρετική σκέψη και τον αναστοχασμό και να προσεγγίσουν τα Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού μ' ένα πιο ουσιαστικό τρόπο. Με την ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να παρακαμφθεί ο φορμαλισμός και μπορεί να ενισχύσει ένα διαφορετικό τρόπο χρήσης του από τους μαθητές, δηλαδή, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα χρησιμοποιώντας ως μέσο τον τυπικό φορμαλισμό (Κυνηγός 2002). Επιπροσθέτως, οι μαθητές αντιμετωπίζουν με ενθουσιασμό τη χρήση των ΤΠΕ στη μαθησιακή διαδικασία και εμφανίζουν αυξημένα κίνητρα για μάθηση σε περιβάλλοντα τεχνολογικώς υποστηριζόμενα, εξαιτίας των οποίων είναι διατεθειμένοι να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο και προσπάθεια για να μάθουν κάτι. Προσαρμόζονται εύκολα στα τεχνολογικά περιβάλλοντα και αναπτύσσουν γρήγορα τις απαιτούμενες δεξιότητες για το χειρισμό τους. Όμως, οι μαθητές έχουν δυσκολία στο να συνεργάζονται, να αναλάβουν πρωτοβουλίες, καθώς και να κατευθύνουν από μόνοι τους τη μάθηση, χωρίς να εξαρτώνται από τη συνεχή καθοδήγηση και επιβεβαίωση των καθηγητών. Γι' αυτό και είναι θεμιτό η έρευνα αυτή να ξεκινήσει από την Α΄ Λυκείου, ώστε όταν φθάσουν στην Γ΄ Λυκείου να μην αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα.

Ο Καθηγητής των Μαθηματικών μπορεί να κάνει πολλές διδακτικές επιλογές, όμως για να είναι πιο αποτελεσματικές πρέπει οι επιλογές να γίνονται συνειδητά, που σημαίνει ότι ο καθηγητής πρέπει να γνωρίζει τις υποθέσεις κάθε επιλογής του και τις συνέπειές της, να είναι δηλαδή ενημερωμένος. Και αυτό γιατί θα υπάρχουν στην τάξη του μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τις προηγούμενες έννοιες ώστε να συμμετάσχουν στο νέο μάθημα, και θα υπάρχουν μαθητές που έχουν οικοδομήσει με λάθος τρόπο τις προηγούμενες γνώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις θα συναντήσει δυσκολίες στην εξέλιξη του νέου μαθήματος. Υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση ανάμεσα στο προσωπικό νόημα, που οικοδομεί ο κάθε μαθητής, και στην κοινωνική διάσταση της γνώσης στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Τα προσωπικά νοήματα συζητούνται μέσα στην τάξη προκειμένου να ομογενοποιηθούν και να γίνουν συμβατά και συνεπή με ότι δέχεται η μαθηματική κοινότητα (Η υπόθεση της αλληλεπίδρασης ή διάδρασης) [Ν. Κλαουδάτος 2010].

Ίσως λοιπόν τέτοιες διδακτικές προσεγγίσεις αν εφαρμοστούν συστηματικά, να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν κάποιες από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση του Διαφορικού Λογισμού και γενικά των

μαθηματικών εννοιών που από τη φύση τους είναι δύσκολες. Τόσο ο εκπαιδευτικός καθώς και τα μέσα που χρησιμοποιεί, όσο και οι ίδιοι οι μαθητές, μπορεί να βοηθήσουν για την επίτευξη του στόχου αυτού.

Μία δεύτερη πρόταση για περαιτέρω διερεύνηση είναι να γίνουν έρευνες που να αναφέρονται στους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν στα σχολεία στην Γ΄ Λυκείου και να προσανατολίζονται τόσο στον τρόπο διδακτικής προσέγγισης που ακολουθούν όσο και στην επιμόρφωσή τους. Όπως αναφέρει η Leslie Aspinwall (1997) είναι πολλές οι φωνές για αλλαγές στις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού (Steen 1989, Vinner 1989, Tall 1991) συζητώντας για τον αυξανόμενο ρόλο που θα πρέπει να παίξει η οπτική σκέψη στο αναλυτικό πρόγραμμα. Εννοιολογικά, ο ρόλος της οπτικής σκέψης είναι τόσο θεμελιώδης στην κατανόηση του Απειροστικού Λογισμού, γι αυτό και πρέπει να δίνεται έμφαση στην οπτική σκέψη του αντικειμένου κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Παρόλο που η οπτικοποίηση θεωρείται ουσιώδης στην κατανόηση, μελέτες (Tall, 1991, Vinner, 1989) έχουν δείξει ότι η κατανόηση των μαθητών είναι τυπικά αλγεβρική και όχι οπτική. Οι λόγοι που συμβαίνει αυτό μπορεί να είναι πολλοί, αλλά σίγουρα μέσα σ' αυτούς περιλαμβάνονται και οι ακόλουθοι:

1. Η πεποίθηση ότι μια οπτική απόδειξη δεν είναι «πραγματική» απόδειξη (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

2. Η αλγεβρική μέθοδος, σε αντίθεση με το γράφημα ή μια οπτική μέθοδο, χρησιμοποιείται συχνότερα όταν λύνουμε προβλήματα ρουτίνας που είναι τυπικά σχεδόν σε κάθε τεστ Απειροστικού Λογισμού (Vinner, 1989).

3. Οι πεποιθήσεις μαθητών και καθηγητών ότι το να κάνουμε Απειροστικό Λογισμό είναι να χειριζόμαστε επιδέξια σύμβολα και αριθμούς (Hallett, 1991).

Η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων των ερευνών αυτών από τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους που σχεδιάζουν τα αναλυτικά προγράμματα μπορεί να βελτιώσουν τα σχολικά βιβλία και να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη κατανόηση και τους καθηγητές να διορθώσουν πιθανές λανθασμένες προσεγγίσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1ο

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ (1 Διδακτική ώρα)

Σχολείο:…….

Ονοματεπώνυμο:……..

Ημερομηνία:…….

Διδακτική Ενότητα: «Διαφορικός Λογισμός»

Τάξη: Γ΄ Λυκείου

Τμήμα:…….

Κατεύθυνση:…….

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1) Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο R και είναι παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in R$, ποια από τις παρακάτω συνθήκες αρκεί να ισχύει επιπλέον, ώστε να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(x) = g(x)$, για όλα τα $x \in R$;

Α. f και g συνεχείς στο R

Β. $f(0) = g(0)$

Γ. Οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύει $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in R$;

Δ. $f''(0) = g''(0)$

Ε. Δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη γιατί όταν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in R$ τότε ισχύει $f(x) = g(x)$, για όλα τα $x \in R$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ, τότε

Α. $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

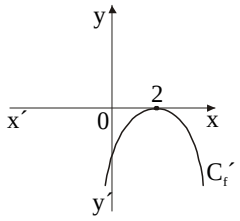
Β. $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Γ. $f''(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Δ. $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Ε. δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f''(x)$ στο Δ

3) Αν στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ΄ τότε



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο (- ∞, 2].

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο [2, + ∞).

Γ. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για την μονοτονία της f.

Ε. η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

4) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει

Α. f ΄ (x) > 0, για κάθε x ∈ R.

Β. f ΄ (x) ≥ 0, για κάθε x ∈ R.

Γ. f ΄ (x) ≤ 0, για κάθε x ∈ R.

Δ. f ΄ (x) < 0, για κάθε x ∈ R.

Ε. η f ΄ (x) δεν διατηρεί υποχρεωτικά σταθερό πρόσημο στο R.

5) Η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της

Α. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5}{2x^2 + 3}$ Β. $g(x) = x^4 + 5x$ **Γ.** $h(x) = \frac{1 + x^2 + x}{x}$

Δ. $\varphi(x) = e^x - 1$ **Ε.** κ (x) = x + ημx

6) Από τις παρακάτω συναρτήσεις η συνάρτηση f (x) = - 3ημ3x είναι παράγωγος της

Α. $g(x) = \text{συν}^3 x$ **Β.** $h(x) = \text{συν}x^3$

Γ. φ (x) = 3συνx **Δ.** s (x) = συν3x **Ε.** $\sigma(x) = \text{συν}\frac{x}{3}$

7) Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους R. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο Α (1, 2), από τις παρακάτω συνθήκες:

I. f ΄ (1) = g ΄ (1) II. f (1) = g (1)

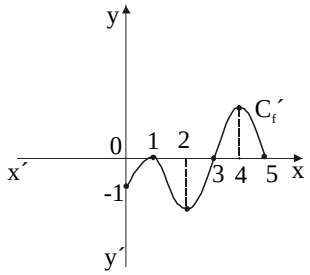
III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$ IV. f ΄΄ (1) = g ΄΄ (1)

απαραίτητες είναι

Α. μόνο η I **Β.** μόνο η II **Γ**. οι I και II **Δ.** οι II και IV **Ε.** οι II και III.

Β. ΕΡΩΤΗΣΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

1) Η γραφική παράσταση C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f ΄					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f ΄					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμπής της f					

Γ. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1) Είναι οι παρακάτω ισότητες σωστές; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2}{2x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{2} = 3$

Αιτιολογήσατε τον ισχυρισμό σας.

2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)= x^8 +\alpha x +\beta$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

3) Να αποδείξετε ότι $|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y| \le |x-y|$, για κάθε $x,y \in R$.

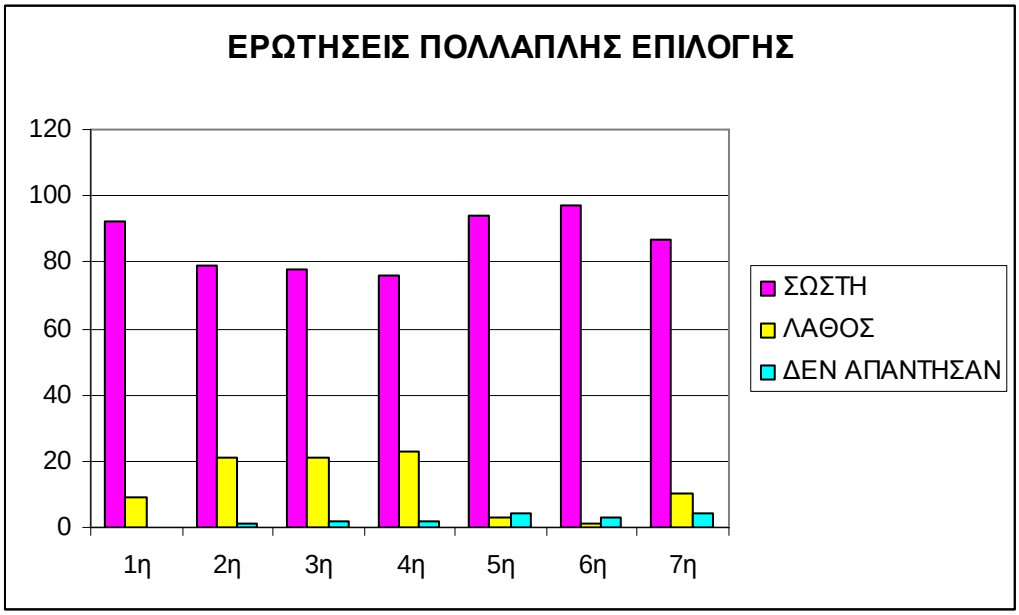
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2ο

Οι **Συχνότητες των απαντήσεων** του ερωτηματολογίου σε σύνολο 101 μαθητών Γ΄ Λυκείου και τα ραβδογράμματα συχνοτήτων δίνονται παρακάτω:

Α) Στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής είχαμε:

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ	ΣΩΣΤΗ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
1η Ερώτηση	92	9	0
2η Ερώτηση	79	21	1
3η Ερώτηση	78	21	2
4η Ερώτηση	76	23	2
5η Ερώτηση	94	3	4
6η Ερώτηση	97	1	3
7η Ερώτηση	87	10	4

Πίνακας 1: Συχνότητες απαντήσεων στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής



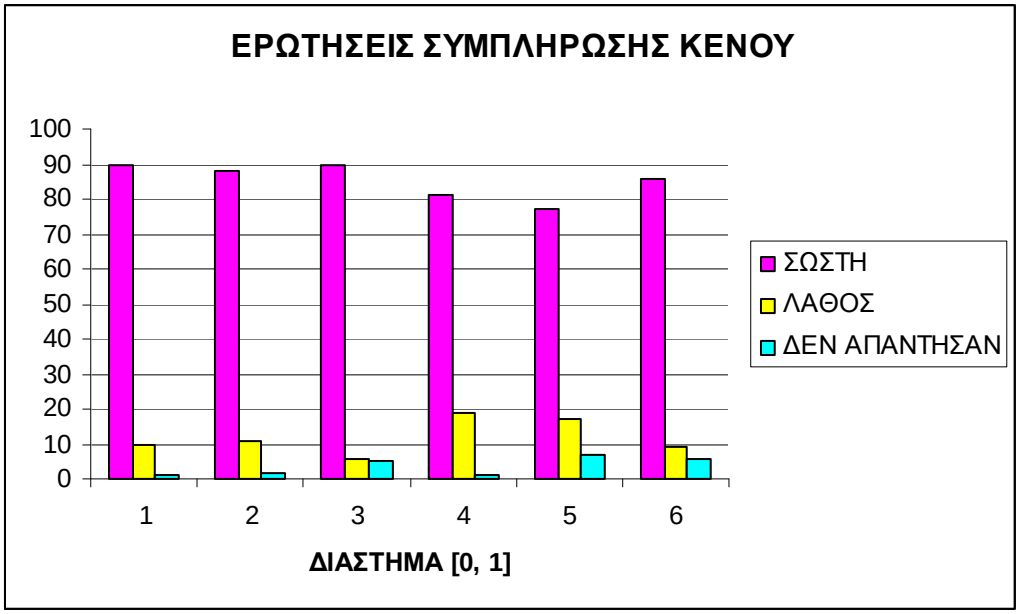
Ραβδόγραμμα 1: Συχνότητες απαντήσεων στις Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Β) Στις Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού είχαμε τις παρακάτω συχνότητες απαντήσεων, καθώς και τα ραβδογράμματα που παρατίθενται:

Στο Διάστημα [0, 1] έχουμε:

	Διάστημα [0, 1]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	90	10	1
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	88	11	2
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	90	6	5
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	81	19	1
5ο Ερώτημα Ακρότατο	77	17	7
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής	86	9	6

Πίνακας 2: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [0, 1]

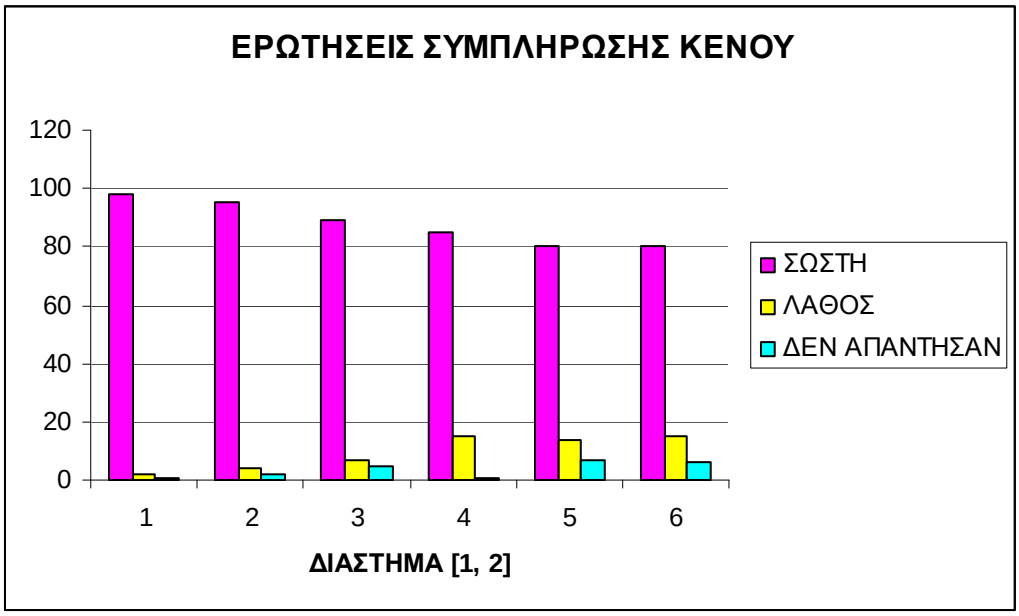


Ραβδόγραμμα 2: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [0, 1]

Στο Διάστημα [1,2] έχουμε:

	Διάστημα [1, 2]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	98	2	1
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	95	4	2
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	89	7	5
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	85	15	1
5ο Ερώτημα Ακρότατο	80	14	7
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής	80	15	6

Πίνακας 3: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [1, 2]

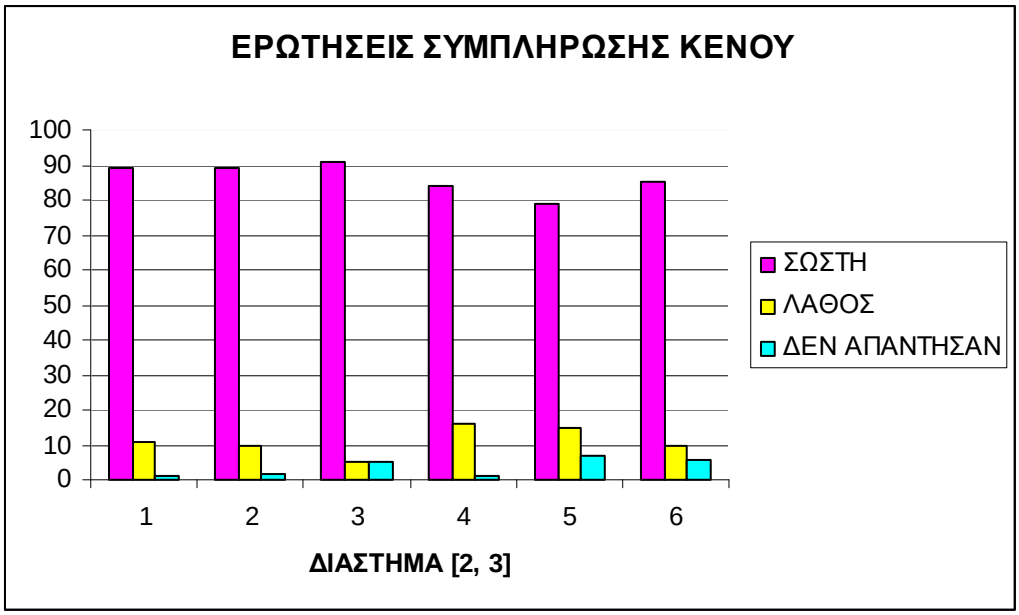


Ραβδόγραμμα 3: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [1, 2]

Στο Διάστημα [2, 3] έχουμε:

	Διάστημα [2, 3]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	89	11	1
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	89	10	2
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	91	5	5
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	84	16	1
5ο Ερώτημα Ακρότατο	79	15	7
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής	85	10	6

Πίνακας 4: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [2, 3]

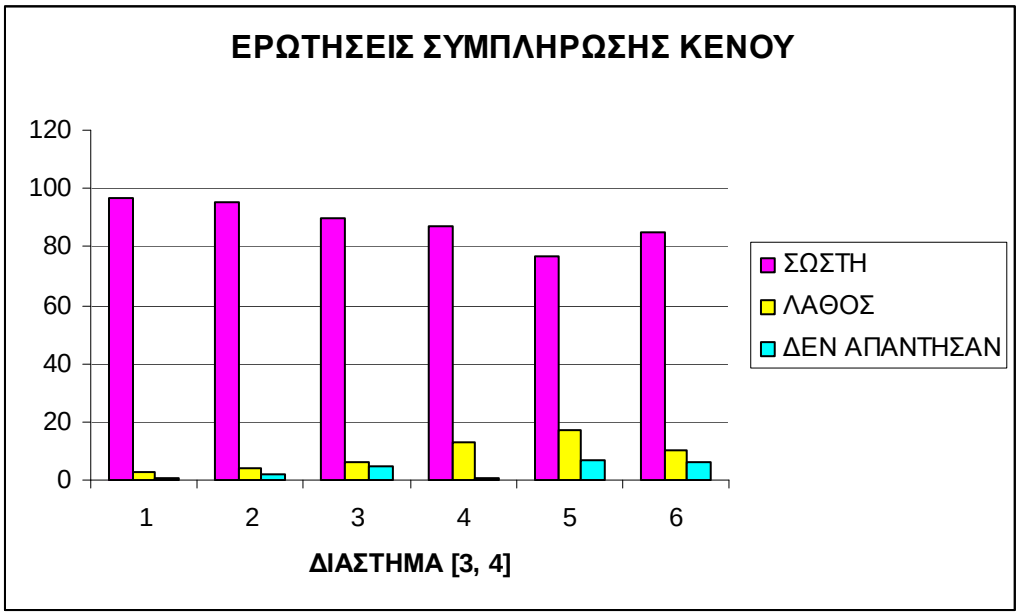


Ραβδόγραμμα 4: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [2, 3]

Στο Διάστημα [3, 4] έχουμε:

	Διάστημα [3, 4]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	97	3	1
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	95	4	2
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	90	6	5
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	87	13	1
5ο Ερώτημα Ακρότατο	77	17	7
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής	85	10	6

Πίνακας 5: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [3, 4]

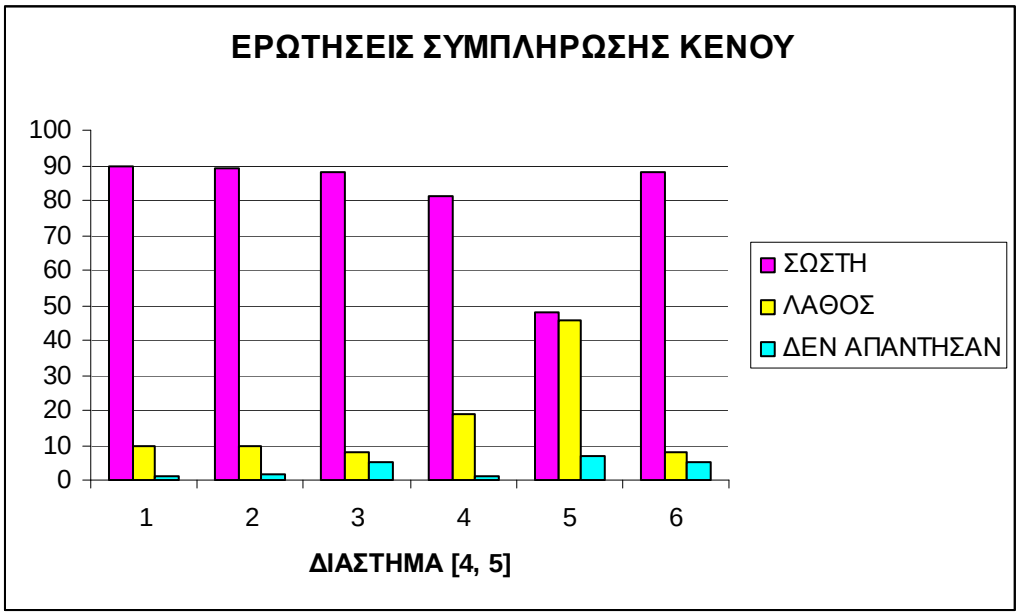


Ραβδόγραμμα 5: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [3, 4]

Στο Διάστημα [4, 5] έχουμε:

	Διάστημα [4, 5]		
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**	**ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
1ο Ερώτημα Πρόσημο f΄	90	10	1
2ο Ερώτημα Μονοτονία f	89	10	2
3ο Ερώτημα Μονοτονία f΄	88	8	5
4ο Ερώτημα Είδος Κυρτότητας	81	19	1
5ο Ερώτημα Ακρότατο	48	46	7
6ο Ερώτημα Σημείο καμπής	88	8	5

Πίνακας 6: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [4, 5]

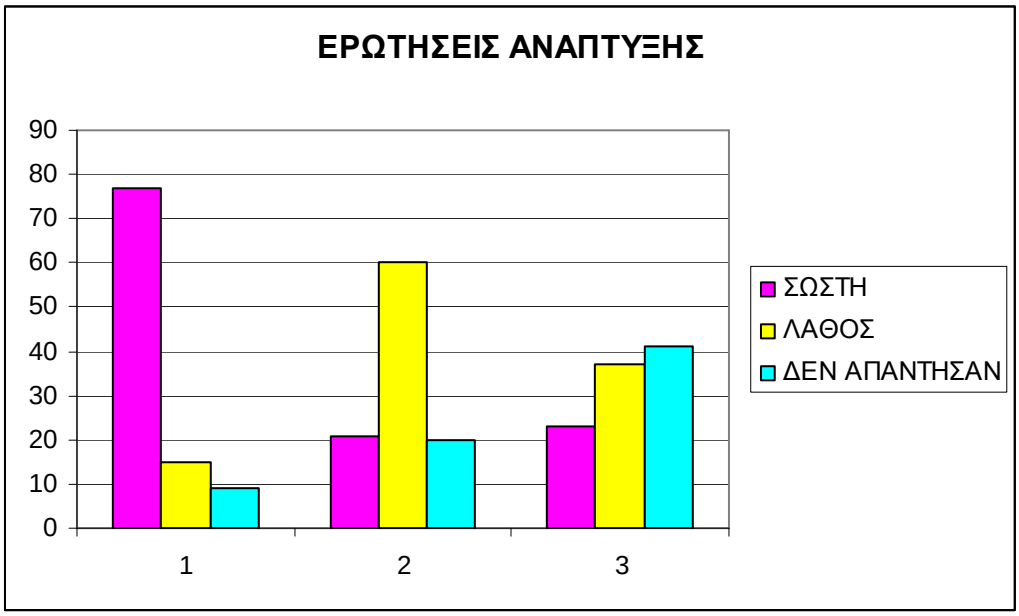


Ραβδόγραμμα 6: Συχνότητες απαντήσεων στην Ερώτηση Συμπλήρωσης Κενού στο διάστημα [4, 5]

Γ) Στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης έχουμε τις συχνότητες που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα και ακολουθεί το ραβδόγραμμα τους:

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ	ΣΩΣΤΗ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
1η Ερώτηση	77	15	9
2η Ερώτηση	21	60	20
3η Ερώτηση	23	37	41

Πίνακας 7: Συχνότητες απαντήσεων στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης



Ραβδόγραμμα 7: Συχνότητες απαντήσεων στις Ερωτήσεις Ανάπτυξης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2002). *Μαθηματικά, Γ' Ενιαίου Λυκείου, Θετικής Κατεύθυνσης*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
2. Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Γιαννίκος Χ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Φωτόπουλος Σ., Σολδάτος Κ. (1985). *Μαθηματικά, Γ' Λυκείου, Ανάλυση*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.
3. Γιαννακούλιας Ε. (2006). *Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική εξέλιξη από τον 5ο αιώνα π.χ. έως και τον 19ο αιώνα.* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
4. Δαφέρμος, Μ. (2002). *Η Πολιτισμική-Ιστορική θεωρία του Vygotsky*. Εκδόσεις Ατραπός, Αθήνα.
5. Ζαχαριάδη Θ. (2010). Σημειώσεις της: *Διδακτικής του Απειροστικού Λογισμού*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
6. Καλδρυμίδου Μ., Μορόγλου Ε. (2006). *Αντιλήψεις για την έννοια της συνάρτησης και ο ρόλος του αναπαραστατικού πλαισίου*, Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών.
7. Καπετανάς Ε., Ζαχαριάδης Θ. (2007). *Πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών του λυκείου για τη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών.
8. Κλαουδάτος Ν. (2010). Σημειώσεις: *Εισαγωγή στην Θεωρία της διδασκαλίας*, και σημειώσεις της: *Διδασκαλίας και Μάθησης των Μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
9. Κλαουδάτος Ν. (2010). Σημειώσεις της *Διδακτικής των Μαθηματικών Ι*, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.
10. Κλαουδάτος Ν. (2010). Συμπληρωματικές Σημειώσεις: *Οι βασικές αρχές της θεωρίας του Vygotsky: Η επικοινωνιακή προσέγγιση και η πλαισιοθετημένη*

μάθηση, του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Αθήνα.

11. Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (2002). Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα: *Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη μετεξέλιξη της εκπαιδευτικής πρακτικής*, Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα.

12. Κυνηγός Χρόνης (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης*, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

13. Κωνσταντινίδης Μ. (1990). *Η. Eves, μεγάλες στιγμές των μαθηματικών*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

14. Μακράκης, Β. (1998). Αρχές παιδαγωγικού σχεδιασμού και ανάπτυξη συστημάτων ανοιχτής και εξ Αποστάσεως εκπαίδευσης μέσω του Παγκόσμιου Ιστού (www), στο Τσεμασφύρος, Γ. (επιμ.), τ*ηλεκπαίδευση: Η σημερινή πραγματικότητα στην Ελλάδα*, Πρακτικά επιστημονικής ημερίδας ΕΜΠ, (54-64).

15. Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

16. Φιλίππου Γ. & Χρίστου Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες στη μάθηση των μαθηματικών*, Εκδόσεις Ατραπός, Αθήνα.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Ackerman, E. (1995). *Construction and transference of meaning through form*, In L.P. Steffe, J. Gale (Eds), *Constructivism in education*, Hillsdale NJ: Lawrence, Erlbann Associates.

2. Alibert, D., Thomas, M. (1991). *Research on mathematical proof*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 215-230), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

3. Artigue, M. (1991).Analysis, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 168-198), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

4. Artigue, M. (1998). *Teaching and Learning Elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?* , First Mediterranean Conference on Mathematics 1997.

5. Ashcraft, M. H., Kirk, E. P., & Hopko, D. (1998). *On the cognitive consequences of mathematics anxiety*. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills,* (pp. 175–196), East Sussex, Great Britain: Psychology Press.

6. Asiala, M., Cottrill, I., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative, *Journal of Mathematical Behavior, 16 (4), 355-431.*

7. Aspinwall Leslie, Kenneth L. Shaw and Norma C. Presmeg, (1997). *Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a function and its derivative,* Kluwer Academic Publishers, printed in the Netherlands.

8. Bachelard, G. (1938). *La formation de 1' esprit scientifique,* Paris : Editions J. Vrin.

9. Bauersfeld, H. (1988). *Interaction, Construction and Knowledge: Alternative perspectives for Mathematics Education*. In D. A. Grows T. J. Cooney & D. Jones (Eds), *Effective Mathematics Teaching,* (pp.27-46), Hillsdale, New Jersey: N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates.

10. Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus, *Journal of Mathematical Behaviour*, 22, 481-497.

11. Boyer, C. (1969). *The history of the calculus and its conceptual development,* New York, Dover publications.

12. Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Researches in didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.

13. Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, Netherland.

14. Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. -P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study, *American Educational Research Journal*, 26, 499–531.

15. Carter R. and Richards J. (1991). *Dilemmas of Constructivist Mathematics teaching: Instances from classroom practice, i*n B. Jaworski, T. Wood and S. Dawson, Mathematics Teacher Education.

16. Chappell Kelly K. & Kendra Killpatrick (2003). *Conceptual understanding and procedural knowledge of calculus,* Colorado State University, USA.

17. Cobb, P. (1986). *Contexts, goals, beliefs and learning mathematics, for the learning of mathematics* 6, 2, FLM Publishing association, Montreal, Quebec, Canada.

18. Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1991). *A constructivist approach to second grade mathematics*. In E. Von Glaserfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

19. Chan, K.-W, & Elliot, R. G. (2004). *Epistemological beliefs across cultures: Critique and analysis of belief structure studies*, Educational Psychology, *24*(2), 123-142.

20. Child J. M. (1920). *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Chicago.

21. Cornu, B. (1991). *Limits*, In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

22. Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

23. D' Ambrosio, B. J. Campos, T.M.M. (1992). Preservice teachers' representation of children's understanding of Mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution, *Education Studies in Mathematics*, V.23, 213-230.

24. Davis P. J. & Hersh R. (1981). *Η μαθηματική εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

25. Davydov, V. (1990). Types of Generalization in Jeremy Kilpatrick (Ed.) Instruction: *Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

26. Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*, ιn Tall.

27. Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A. and Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics* 58, 335-359.

28. Dunham, P. H. Dick, T. P. (1994). *Research on graphing calculators, Mathematics teacher* (Reston, VA), vol. 87, p. 440–45.

29. Edwards, C. H. (1979). *The historical Development of the calculus*, Springer – Verlag, New York.

30. Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics*. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.): *Visualisation in teaching and learning mathematics,* (pp. 26-37), Washington DC: Mathematical Association of America.

31. Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics,* 2 vols MAA, Washington.

32. Frid, S. (1994). *Three approaches to undergraduate calculus instruction: Their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction.* In Szydlik,-Jennifer-Earles (2000), Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function, *Journal for Research in Mathematics Education,* v 31 no3 May 2000, pp. 258- 276.

33. Furinghetti, Fulvia, & Paola, Domingo (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16-19), *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 22(5), 719-729.

34. Goldin, G. A. (1987). *Levels of Language in Mathematics Problem Solving*. In C. Janvier (Ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* (pp. 59 – 65), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

35. Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). *A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics*. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin (Eds.), *Theories of mathematical learning,* (pp. 397-430), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

36. Grabiner, J. (1983). *The changing concept of change, the Derivative from Fermat to Weierstrass,* mathematics magazine 56, σελ. 195-206.

37. Groves, Sussie (1994). *Calculators a Learning Environment to promote number sense, P*aper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

38. Habre Samer & Abboud May (1997). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course, *Journal of Mathematical Behavior,* 25 (2006) 57–72.

39. Hughes-Hallett, D. (1991). *Visualization and calculus reform*. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, *MAA Notes No. 19*, 121-126.

40. Janvier, C. (1987). *Translation processes in Mathematics Education*. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 27-32), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

41. Harel, G. & Sowder L. (1998). *Students' proof Schemes: Results from Exploratory Studies*, JBMS Issues in Mathematics Education, Volume 7**.**

42. Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

43. Kaput, J. J. (1987). *Representation Systems and Mathematics*. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 19-26, 159-195), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

44. Katz, V. (1998). *A history of mathematics*: An Introduction, Addisson – Wesley, Longman, New York.

45. Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University press, Fair Lawn, NJ.

46. Lave J. και Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

47. Li, L. & Tall D. (1993). Constructing different concept images of sequences and limits by programming, *Proceedings of PME 17*, TsukubaJapan II, 41-48.

48. Mamona - Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence, *Educational studies in mathematics*, 48, 259-288.

49. McLeod, D. B. (1989). *Beliefs, attitudes, and Emotions: New Views of affect in Mathematics Education*. In D. McLeod and V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical Problem Solving*, (pp 245 – 258), Springer Verlag.

50. McLeod, D. B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.575-596), New York: Macmillan.

51. Monaghan, J. Sun, S. and Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system, *in the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 279-286, Lisbon.

52. Monoyiou, A., & Gagatsis, A. (2008). *The stability of students' approaches in function problem solving: A coordinated and an algebraic approach*. In A.

Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education,* (pp. 3-12), Nicosia: University of Cyprus.

53. Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). *Algebraic and geometric approach in function problem solving.* In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, pp. 385-392), Bergen University College.

54. Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). *Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them*. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions,* (pp. 69–100), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

55. Orton, A. (1977). Chords, secants, tangents & elementary Calculus, *Mathematics Teaching*, 78, 48-49.

56. Orton, A. (1983). Students' understanding of integration & Differentiation, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18, 235- 250.

57. Orton, A., (1984). Understanding rate of change. *Math. School*, 13, 23-26.

58. Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas,* New York: Basic Books.

59. Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: learning the concept of the derivative in the computer environment, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education (formerly The International DERIVE Journal), 1*(1), 97–113.

60. Roth, W. M. & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Towards a Theory of Representing as Social Practice, *Review of Educational Research*, 68 (no 1), 35 – 59.

61. Scheja M., Pettersson Z Kerstin, (2009). Transformation and contextualisation: conceptualizing students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus, *Higher Education*. 59(2), 221-241.

62. Schoenfeld A. H.B (1985). *What's all the fuss about metacognition?.* In Schoenfeld (Ed.), *cognitive science and mathematics education*, pp. 189-215, Hillsdale, NJ: Lawrence Associates.

63. Schommer, M. (1990). Effects of Beliefs about the Nature of Knowledge on Comprehension, *Journal of Educational Psychology*, 82: 498 – 504.

64. Seeger, F. (1998). *Representations in the Mathematical classroom: Reflections and Constructions*. In von F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom,* (pp. 308 – 343), Cambridge UP.

65. Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans 1' enseignement des mathématiques, *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM,* 73 - 95.

66. Sierpinska**,** A**.** (1990). Epistemological obstacle and understanding - two useful categories of thought for research into teaching and learning mathematics, *Proceedings of the 2 Bratislava International Symposium of Mathematics Education*.

67. Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.): *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy,* (pp. 59-84), Mathematical Association of America.

68. Sheets, Charlene (1993). Effects of Computer Learning and Problem Solving Tools on the Development of Secondary School Student's Understanding of Mathematical Function, Ph. D. diss., University of Maryland College Park.

69. Steen, L. A. (Ed.), (1989). Reshaping college mathematics: A project of the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, *MAA Notes No. 13*, Washington, DC: Mathematical Association of America.

70. Struik D. J (1969). A. Source Book in Mathematics 1200-1800, Cambridge, MA: Harvard University Press.

71. Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function, *Journal for Research in Mathematics Education* vol 31 no3, May 2000, pp. 258- 276.

72. Tall, D. O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

73. Tall, D. O. (1986). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics, *PhD Thesis in Mathematics Education*, The Warwick University.

74. Tall, D. (1986). A graphical approach to integration and the fundamental theorem, *Mathematics Teaching*, 113, 48-51.

75. Tall, D. (1992). Student's difficulties in Calculus, *Plenary presentation in working group 3*, ICME Quebec.

76. Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics, *28th Conference of the I.G.P.M.E.*, Bergen, Norway.

77. Tall, D. O. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, Visualization in Mathematics, (ed. Zimmermann & Cunningham), *M. A. A. Notes No19*, 105-119, Summer meeting of the Mathematical Association of America (Michigan).

78. Tall, D. O. & Winkelmann (1998). *Hidden algorithms in the drawing of discontinuous functions*, Bulletin of the I.M.A. 24, 111-115.

79. Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics*, in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.

80. Wood, J., Cobb, P. & Yackel, E. (1991). Change in Teaching Mathematics: A Case Study, *American Educational Research Journal*, 28 (3), 587-616.

81. Wren F. – Garrett, J. (1935). The Development of the fundamental concepts of Infinitesimal analysis, *Amer. Math. Monthly 5*, 269 – 283.

82. Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). *Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting*. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions*, (pp. 41–68), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

83. Zaslavsky, O., (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics, in *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 297-321.