ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Σπύρος Γ. Γλένης

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων: Καθηγητής Βασίλης Νεστορίδης

Αθήνα 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Βασίλη Νεστορίδη (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	…….
2) Θεοδόση Ζαχαριάδη	Αν. Καθηγητής	……..…
3) Διονύση Λάππα	Αν. Καθηγητής	……..…

Ευχαριστώ:

- Το καθηγητή Βασίλη Νεστορίδη για την εμπιστοσύνη και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

- Τους Αν. Καθηγητές Θεοδόση Ζαχαριάδη και Διονύση Λάππα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.

- Τους Α. Γιαννόπουλο, Π. Παπάζογλου και Ε. Ράπτη για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ **1**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΕΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΚΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ **5**

1.1 «Στοιχεία» Ευκλείδη (3ος αι. π.Χ) 5

1.2 Felix Klein (1849-1925) 7

1.3 David Hilbert (1862-1943) 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ **15**

2.1 Ισότητα και ισοδυναμία 15

2.2 Διάταξη 16

2.3 Λήμμα του Zorn 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ **21**

3.1 Βασικοί ορισμοί 21

3.2 Αναζήτηση καλών κλάσεων σχημάτων 26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΛΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΑΛΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΕ ΜΗ−ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ **35**

4.1 Υπερβολική Γεωμετρία 35

4.2 Ελλειπτική Γεωμετρία 42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΟΙΚΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ **47**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **49**

Εισαγωγή

Το σχολικό βιβλίο αναφέρει τον εξής ορισμό για την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων:

Δυο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν

Ανάλογο ορισμό χρησιμοποιεί για την ισότητα γωνιών, κύκλων και τόξων που κείνται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους. Ο ορισμός γενικεύεται αργότερα σε όλα τα ευθύγραμμα σχήματα με σκοπό να ορισθεί η ισότητα τριγώνων.

Το σχολικό βιβλίο δε δίνει εξίσου γενικό ορισμό για την ανισότητα, αλλά περιορίζεται σε συγκεκριμένα σχήματα: ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες και τόξα στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους. Ειδικότερα, για τα τόξα αναφέρει:

Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται μικρότερο από το τόξο $\overset{\frown}{CD}$ και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$ όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{CD}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{AB}$.

Η γενίκευση του παραπάνω ορισμού σε τυχαία σχήματα είναι:

Για δυο επίπεδα σχήματα I, J ισχύει ότι το I είναι μικρότερο ή ίσο του J όταν με κατάλληλη κίνηση το I μπορεί να ταυτιστεί με μέρος του J ή με ολόκληρο το J. Τότε θα συμβολίζουμε $I \leq J$.

Ο φυσιολογικός αυτός ορισμός της ανισότητας, δεν ικανοποιεί εν γένει την αντισυμμετρική ιδιότητα, όπως αργότερα θα αποδείξουμε, οπότε πολύ σωστά το σχολικό βιβλίο αποφεύγει τη διατύπωση γενικού ορισμού ανισότητας και περιορίζει

τη σύγκριση μόνο σε συγκεκριμένες κλάσεις σχημάτων. Θα είχε όμως νόημα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, να λέμε ότι ένας κυκλικός δίσκος είναι μικρότερος από ένα τριγωνικό χωρίο, αν χωράει μέσα σε αυτό, δηλαδή αν έχει ακτίνα μικρότερη ή ίση από την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο αντίστοιχο τρίγωνο. Επίσης ένα τριγωνικό χωρίο θα μπορούσε να λέγεται μικρότερο από ένα κυκλικό δίσκο αν χωράει μέσα σε αυτόν, δηλαδή αν η ακτίνα του δίσκου είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο. Έτσι η έννοια της ανισότητας δεν είναι απαραίτητο να περιορισθεί μόνο μεταξύ ομοειδών σχημάτων, αλλά ούτε μπορεί να θεωρηθεί και χωρίς κανένα περιορισμό μεταξύ όλων των σχημάτων. Ο λόγος είναι ότι τότε οδηγούμαστε σε παράδοξα που σχετίζονται με την αντισυμμετρική ιδιότητα της ανισότητας.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι: Θεωρούμε ως Α ένα κλειστό ημιεπίπεδο και ως Β το ημιεπίπεδο Α μαζί με ένα ευθύγραμμο τμήμα που προεξέχει κάθετα στην ακμή του Α. Επειδή $A \subseteq B$ μπορούμε να πούμε ότι $A \leq B$. Αν επιπλέον κάνουμε στο Β μια παράλληλη μετατόπιση έτσι ώστε το Β (μαζί και το ευθύγραμμο τμήμα) να καλυφθεί από το Α βλέπουμε ότι το Β είναι κι αυτό μικρότερο ή ίσο του Α. Λογικά θα έπρεπε τα Α και Β να είναι γεωμετρικά ίσα, δηλαδή να μπορούν να ταυτιστούν με μια στερεά κίνηση. Όμως κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό να γίνει διότι με στερεά κίνηση ένα ημιεπίπεδο παραμένει πάντα ημιεπίπεδο.

Ονομάζουμε *καλές κλάσεις σχημάτων* αυτές που ανάμεσα στα σχήματα που περιέχουν, να μην παρατηρούνται παράδοξα του προηγούμενου τύπου. Είναι ενδιαφέρον να βρούμε φυσιολογικές καλές κλάσεις και μάλιστα όσο το δυνατόν ευρύτερες. Μια καλή κλάση, αλλά όχι κι η μοναδική, είναι η κλάση των συμπαγών σχημάτων. Μάλιστα τα συμπαγή σχήματα έχουν την ιδιότητα να μην παράγουν παράδοξα με κανένα άλλο σχήμα, είτε είναι συμπαγές είτε όχι. Αυτά τα σχήματα θα τα αποκαλούμε *καλά σχήματα*. Εκτός από τα συμπαγή, καλά σχήματα είναι και τα ανοικτά φραγμένα. Αντίθετα τα φραγμένα, δεν είναι καλά σχήματα, όπως θα φανεί στη συνέχεια με ένα αντιπαράδειγμα που σχετίζεται με άρρητη στροφή.

Η προηγούμενη μελέτη δεν περιορίζεται μόνο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά επεκτείνεται τόσο στην Υπερβολική όσο και στην Ελλειπτική Γεωμετρία και κάποια κομμάτια της μελέτης μπορούν να διατυπωθούν και κατά γενικό τρόπο έτσι ώστε να καλύπτουν και τις τρεις Γεωμετρίες. Τα συμπεράσματα της μελέτης είναι απόλυτα συμβατά με τα όσα ήδη γνωρίζουμε για τη σύγκριση σχημάτων. Ειδικά στην

περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπάρχει μια καλή κλάση που περιλαμβάνει όλα τα βασικά της σχήματα: ευθύγραμμα τμήματα, τόξα, τρίγωνα, κύκλους, γωνίες, ανοικτούς ή κλειστούς κυκλικούς δίσκους κλπ. Οπότε στην κλάση αυτή γενικεύεται η έννοια της ανισότητας ακόμη και μεταξύ μη ομοειδών σχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σημαντικότερες θεμελιώσεις στην έννοια της ισότητας κι ανισότητας επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων

1.1 «Στοιχεία» Ευκλείδη (3ος αι. π.Χ)

Στην επιπεδομετρία των «Στοιχείων» διακρίνουμε δυο είδη ισότητας:

α) ως προς την ταύτιση δυο σχημάτων

Κοινή έννοια 4:

και τα εφαρμόζοντα επ' άλληλα είναι ίσα μεταξύ τους

β) ως προς το εμβαδόν[1] δυο σχημάτων

Πρόταση Ι.35

τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι μεταξύ τους ίσα

Στην απόδειξη της πρότασης Ι.35 χρησιμοποιούνται, χωρίς να έχουν αναφερθεί νωρίτερα, κάποια αξιώματα του εμβαδού (όπως το εννοεί ο Ευκλείδης) δηλαδή:

- δυο ίσα σχήματα κατά την κοινή έννοια 4 έχουν ίσα εμβαδά
- για δυο ξένα σχήματα το εμβαδόν της ένωσης ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων.

Στις αποδείξεις του Ευκλείδη, η ισότητα εμβαδών δυο κλειστών πολυγωνικών χωρίων επιτυγχάνεται χωρίζοντας κατάλληλα τα δυο χωρία σε πεπερασμένο πλήθος

[1] Όχι όμως με τη σύγχρονη έννοια του εμβαδού ως μέτρο.

από ίσα τρίγωνα. Η ιδιότητα αυτή γενικεύθηκε και αποδείχθηκε κατά το 19^{ο} αιώνα από τον Fargas Bolyai (πατέρα του Yanos) στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Αν δυο πολυγωνικά χωρία είναι ισεμβαδικά τότε διαιρούνται σε πεπερασμένο πλήθος από ίσα τρίγωνα και αντιστρόφως.

Ο Ευκλείδης φαίνεται ότι έχει κατανοήσει το κεντρικό ρόλο της ισότητας και γι αυτό φροντίζει να τη θεμελιώσει με αυστηρό τρόπο. Έτσι στις κοινές έννοιες δηλώνει τα αξιώματα που εξασφαλίζουν τη μεταβατικότητα και τη συμβατότητα της ισότητας με την πρόσθεση και αφαίρεση *ομοειδών μεγεθών*[2].

Κοινή έννοια 1:

Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα

Κοινή έννοια 2:

Κι αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα

Κοινή έννοια 3:

Κι αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα απομένουν ίσα

Η ανισότητα - διάταξη ομοειδών μεγεθών κατοχυρώνεται με την έννοια του «περιέχεσθαι» στην:

Κοινή έννοια 5:

Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους

Σε αντίθεση με την ισότητα, ο Ευκλείδης δεν κατοχυρώνει αξιωματικά ιδιότητες της διάταξης που αναγκαστικά θα χρησιμοποιήσει στις αποδείξεις. Για παράδειγμα ενώ δεν αναφέρει πουθενά τη μεταβατική ιδιότητα, τη χρησιμοποιεί στην απόδειξη της:

Πρόταση Ι.18:

σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά

Τέτοιου είδους παραλείψεις, που έχουν εντοπισθεί και σε άλλα σημεία των *Στοιχείων*, δεν μειώνουν τη βαρύτητα της διάταξης. Μια από τις σπουδαιότερες προτάσεις της Ευκλείδειας, αλλά και της Ουδέτερης Γεωμετρίας είναι:

---

[2] Μέγεθος – Ποσότητα είναι ότι μπορεί να τεθεί σε αναλογία με τα ομοειδή του δηλαδή ικανοποιεί την ιδιότητα Αρχιμήδους – Ευδόξου.

Πρόταση Ι.16

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική του γωνία.

της οποίας η απόδειξη στηρίζεται ουσιαστικά στη κοινή έννοια 5. Μπορούμε συνεπώς να ισχυριστούμε ότι ενώ η έννοια της ισότητας κυριαρχεί στο σύνολο των *Στοιχείων*, η έστω και περιορισμένη χρήση της διάταξης είναι απαραίτητη για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας.

1.2 Felix Klein (1849-1925)

Προς τα τέλη του 19ου αιώνα αναπτύσσεται από τους Jordan και Lagrange η θεωρία ομάδων. Ο Klein, που ταξίδευε τότε στο Παρίσι, αντιλαμβάνεται τις ενοποιητικές δυνατότητες της νέας θεωρίας και το 1872 στο *Erlangen* προσπάθησε να κατατάξει τις Γεωμετρίες με τη βοήθεια της θεωρίας ομάδων. Θεωρεί ότι *κάθε γεωμετρία χαρακτηρίζεται από την ομάδα των μετασχηματισμών που αφήνει αναλλοίωτα τα σχήματά της*. Δηλαδή αν f είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός και S ένα σχήμα με την ιδιότητα I τότε το σχήμα $f(S)$ έχει επίσης την ιδιότητα I. Η έννοια του μετασχηματισμού συνδέεται με το σύνολο των αυτομορφισμών ενός συνόλου δηλαδή:

Έστω $X \neq \varnothing$ *και* $Aut(X) = \{f : X \to X$ *ώστε* f *1-1 κι επί}. Τότε κάθε* $f \in Aut(X)$[3] *είναι ένας μετασχηματισμός στο* X.

Η Γεωμετρία κατά τον *Klein* οικοδομείται ως εξής: Αρχικά υπάρχει ένα μη κενό σύνολο X και οι μετασχηματισμοί στο X, δηλαδή το $Aut(X)$. Κατόπιν το σύνολο εφοδιάζεται με μια ιδιότητα π.χ. γραμμικότητα ή εσωτερικό γινόμενο. Στο σύνολο αυτό εντοπίζουμε την ομάδα G των μετασχηματισμών που διατηρούν την ιδιότητα του X. Οπότε προκύπτει ο ορισμός:

[3] Το σύνολο $Aut(X) \neq \varnothing$ αφού $id_X \in Aut(X)$ και εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης αποτελεί ομάδα.

Ορισμός

Έστω σύνολο $X \neq \varnothing$. *Μια Γεωμετρία Klein στο* X *είναι ένα ζεύγος* (G, X) *όπου* G *υποομάδα του* $Aut(X)$

Έχοντας πλέον καθορίσει το πλαίσιο της Γεωμετρίας, η ισότητα δυο σχημάτων εξαρτάται από τις ιδιότητες που έχουμε απαιτήσει να διατηρούνται κάτω από τη *δράση της ομάδας* G επί των σχημάτων του X. Φυσιολογικά πλέον καταλήγουμε στη διατύπωση του ορισμού της ισότητας δυο σχημάτων ως εξής:

Ορισμός

Έστω (G, X) *μια Γεωμετρία Klein και σχήματα* $S_1, S_2 \subseteq X$. *Θα λέμε ότι τα σχήματα είναι* $G-$*γεωμετρικά ίσα και συμβολίζουμε* $S_1 \underset{G}{\approx} S_2$ *αν και μόνον αν υπάρχει* $f \in G$ *τέτοια ώστε* $f(S_1) = S_2$.

Παράδειγμα

Θεωρώ το σύνολο $\mathbb{R}^2$ ως γραμμικό χώρο και ως ομάδα G τους μετασχηματισμούς που διατηρούν τη γραμμικότητα (*ιδιότητα I*). Τότε η G αποτελείται από όλες τις αντιστρέψιμες γραμμικές απεικονίσεις (δηλαδή το σύνολο των πινάκων M 2×2 με $\det(M) \neq 0$) και ονομάζεται γενική γραμμική ομάδα του $\mathbb{R}^2$ και συμβολίζεται με $GL(\mathbb{R}^2)$.

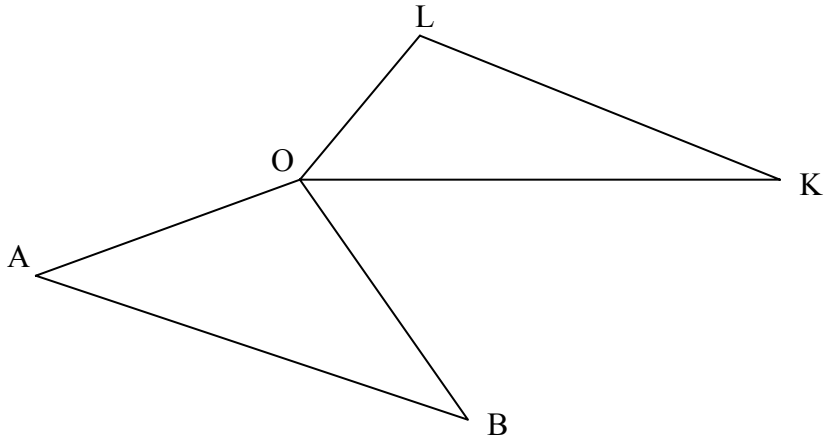
Διατήρηση της γραμμικότητας σημαίνει ότι αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι παράλληλα τότε ίδιο θα ισχύει και για τα $f(\vec{a}), f(\vec{b})$ για κάθε $f \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Άμεσες συνέπειες είναι:

- Αν τρία σημεία A, B, C είναι συγγραμμικά και $f \in GL(\mathbb{R}^2)$ τότε τα $f(A), f(B), f(C)$ είναι επίσης συγγραμμικά.
- Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και $f \in GL(\mathbb{R}^2)$ τότε οι $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2)$ είναι ευθείες και μάλιστα παράλληλες.

Όσον αφορά την ισότητα σχημάτων κι ιδιαίτερα των τριγώνων έχουμε:

Δυο τρίγωνα OAB και OKL ορίζονται από τα διανύσματα $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ και $\vec{u}=\overrightarrow{OK}$, $\vec{w}=\overrightarrow{OL}$ όπως φαίνεται στο σχήμα:



Επειδή τόσο τα $\vec{a},\vec{b}$ όσο και τα $\vec{u},\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ, ν ώστε:

$$\begin{cases}\vec{u}=\kappa\vec{a}+\lambda\vec{b}\\ \vec{w}=\mu\vec{a}+\nu\vec{b}\end{cases},\ \text{με } \det\begin{pmatrix}\kappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix}\neq 0\,.$$

Τότε η απεικόνιση f που αντιστοιχεί στον πίνακα $\begin{pmatrix}\kappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix}$ ανήκει στην ομάδα $GL\left(\mathbb{R}^2\right)$ και ισχύει ότι $f\left(OAB\right)=OKL \Leftrightarrow OAB \underset{GL\left(\mathbb{R}^2\right)}{\approx} OKL$, δηλαδή στην παραπάνω γεωμετρία **όλα** τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εφοδιάζοντας το χώρο με επιπλέον ιδιότητες κι απαιτώντας τη διατήρησή τους, προκύπτουν νέες υποομάδες άρα και Γεωμετρίες. Για παράδειγμα αν εφοδιάσουμε το γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^2$ με εσωτερικό γινόμενο κι απαιτήσουμε οι μετασχηματισμοί να διατηρούν τη γραμμικότητα και το εσωτερικό γινόμενο, προκύπτει η ομάδα $O\left(\mathbb{R}^2\right)$ των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$. Στη γεωμετρία αυτή, δεν είναι ίσα όλα τα τρίγωνα, αλλά μόνον αυτά που έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία αντίστοιχα ίσες.

Τέλος αν θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^2$ ως μετρικό χώρο εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική:

$$\rho\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

και απαιτήσουμε οι μετασχηματισμοί να διατηρούν τις αποστάσεις, δηλαδή για δυο σημεία $A, B \in \mathbb{R}^2$ και ένα μετασχηματισμό f να ισχύει:

$$\rho(A,B) = \rho(f(A), f(B))$$

προκύπτει η ομάδα $ISO(\mathbb{R}^2)$ των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$. Τότε η Γεωμετρία Klein ταυτίζεται με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τα δε στοιχεία της $ISO(\mathbb{R}^2)$ ονομάζονται *στερεές κινήσεις*:

Αποδεικνύεται ότι οι στερεές κινήσεις αποτελούνται από *στροφές, παράλληλες μετατοπίσεις, ανακλάσεις σε ευθείες και τις μεταξύ τους συνθέσεις*. Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε στερεά κίνηση, είναι σύνθεση το πολύ τριών ανακλάσεων .

1.3 David Hilbert (1862-1943)

Στα τέλη του 19ου η θεωρία συνόλων του Cantor, αρχίζει να δέχεται κριτική με τη μορφή των παραδόξων. Τα θεμέλια των Μαθηματικών κλονίζονται κι αναζητούνται τρόποι ώστε να ξεπερασθεί η κρίση. Ο Hilbert ανατρέχοντας στη Φιλοσοφία των Αρχαίων Ελλήνων και ειδικά στις απόψεις του Αριστοτέλη περί απείρου, προσπαθεί να διαφυλάξει τον κορμό των μαθηματικών θεμελιώνοντάς τα με περατοκρατικές μεθόδους. Η άποψη αυτή, για την Ευκλείδεια Γεωμετρία, υλοποιήθηκε στο έργο του *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, όπου προτείνει ένα Αξιωματικό Σύστημα το οποίο ικανοποιεί τις απαιτήσεις[4]:

συνέπεια, ανεξαρτησία και πληρότητα.

Το σύστημα αυτό αποτελείται από 21 αξιώματα χωρισμένα σε 5 ομάδες:

I. Αξιώματα της «σύμπτωσης»
II. Αξιώματα του «μεταξύ»
III. Αξιώματα της «συμφωνίας – ισότητας»
IV. Αξιώματα συνέχειας
V. Αξίωμα της παραλληλίας

[4] Ο Goedel απέδειξε αργότερα ότι οι απαιτήσεις αυτές δεν είναι δυνατό να ικανοποιούνται.

Τα αξιώματα της «ισότητας» αφορούν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες και τρίγωνα

Για τα ευθύγραμμα τμήματα δεχόμαστε ότι υπάρχει μεταξύ τους μια πρωταρχική σχέση ισοδυναμίας "$\cong$" και όταν αυτή συνδέει δυο ευθύγραμμα τμήματα AB, CD θα λέμε ότι αυτά είναι ίσα. Επίσης δεχόμαστε ότι η σχέση "$\cong$" ικανοποιεί τα εξής δυο αξιώματα:

III(1) *Αν δοθεί ευθύγραμμο τμήμα AB, τότε σε κάθε ημιευθεία $\overrightarrow{CD}$ αντιστοιχεί ένα τουλάχιστο σημείο Z, που να ανήκει σε αυτή, έτσι ώστε $AB \cong CZ$.*

III(2) *Θεωρούμε τις ευθείες x και x' (που μπορεί και να ταυτίζονται) και σε καθεμιά τους τα σημεία A, B, C και A', B', C' αντίστοιχα, έτσι ώστε τα C και A να μην ανήκουν στις ημιευθείες $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BC}$ αντίστοιχα και ανάλογα να ισχύουν για τα C', A' και τις $\overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{B'C'}$. Αν $AB \cong A'B'$ και $BC \cong B'C'$ δεχόμαστε ότι $AC \cong A'C'$.*

Η III(1) κατοχυρώνει τη δυνατότητα μεταφοράς ευθυγράμμων τμημάτων, κάτι που ο Ευκλείδης είχε παραλείψει, ενώ η III(2) κατοχυρώνει την *πρόσθεση* ευθυγράμμων τμημάτων και τη συμβατότητα της ισοδυναμίας με την *πρόσθεση* που είναι αντίστοιχη με την κοινή έννοια 2 των «Στοιχείων».

Για να ορισθεί καλά η ανισοτική σχέση ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα πρέπει να εξασφαλιστεί στο III(1) το μονοσήμαντο του Z. Κατόπιν έχουμε τον ορισμό:

Για δυο ευθύγραμμα τμήματα AB, CD θα λέμε ότι το AB είναι μικρότερο από το CD και θα γράφουμε $AB < CD$ όταν μεταφέρουμε το AB στην ημιευθεία $\overrightarrow{CD}$ και το σημείο Z βρίσκεται μεταξύ των C και D

Άμεση συνέπεια των ορισμών είναι ότι η "$<$" ικανοποιεί την ιδιότητα:

Αν δοθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα AB, CD τότε ισχύει ακριβώς μια από τις: $AB < CD$, $AB \cong CD$, $CD < AB$

Για τις γωνίες δεχόμαστε και πάλι ότι υπάρχει μεταξύ τους μια άλλη σχέση ισοδυναμίας η οποία ικανοποιεί το επόμενο αξίωμα:

III(3) *Αν δοθούν η γωνία* $\widehat{BAC}$*, η ευθεία* x*, μια ημιευθεία* $\overrightarrow{ZQ}$ *της* x *και προκαθορισθεί ένα ημιεπίπεδο από τα δυο που ορίζει η* x*, τότε υπάρχει ακριβώς μια ημιευθεία* $\overrightarrow{ZP}$ *έτσι ώστε να ισχύει* $\widehat{BAC} \approx \widehat{QZP}$ *κι επιπλέον τα σημεία της* $\overrightarrow{ZP}$ *εκτός του* Z*, και τα εσωτερικά σημεία της* $\widehat{QZP}$ *να ανήκουν στο προκαθορισμένο ημιεπίπεδο.*

Κατόπιν η ανισοτική σχέση στις γωνίες ορίζεται ως:

Για δυο γωνίες $\widehat{BAC}, \widehat{QZP}$ *θα λέμε ότι η* $\widehat{BAC}$ *είναι μικρότερη από τη* $\widehat{QZP}$ *και θα γράφουμε* $\widehat{BAC} < \widehat{QZP}$ *όταν συμβαίνουν τα εξής: αν συμβολίσουμε με* x *την ευθεία που ορίζουν τα* Q, Z *και "μεταφέρουμε" τη* $\widehat{BAC}$ *με προκαθορισμένα την ημιευθεία* $\overrightarrow{ZQ}$ *και το ημιεπίπεδο ως προς* x *που περιέχει το* P*, τότε όλα τα σημεία που ανήκουν στη* $\overrightarrow{ZP}$ *εκτός του* Z *είναι εσωτερικά σημεία της* $\widehat{QZP}$*.*

Αποδεικνύεται ότι η σχέση $<$ είναι μεταβατική.

Τέλος, θα λέμε ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα αν οι κορυφές τους μπορούν να αντιστοιχισθούν έτσι ώστε οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι ίσες.

III(4) *Αν για δυο τρίγωνα* ABC *και* $A'B'C'$ *ισχύουν* $\widehat{BAC} \approx \widehat{B'A'C'}$*,* $AB \cong A'B'$ *και* $AC \cong A'C'$ *τότε δεχόμαστε ότι ισχύει και* $\widehat{ABC} \approx \widehat{A'B'C'}$*.*

Το αξίωμα αυτό ισοδυναμεί με την πρόταση Ι.4 των "Στοιχείων" που κι αυτή ουσιαστικά έχει ρόλο αξιώματος.

Είδαμε τρεις απόψεις περί ισότητας γεωμετρικών σχημάτων. Στον Ευκλείδη η ισότητα στηρίζεται στη δυνατότητα υπέρθεσης των αντικειμένων, την οποία όμως δεν κατοχυρώνει με κάποιο αξίωμα[5] και είναι ενιαία για όλα τα σχήματα. Στον Klein η ισότητα είναι συνολοθεωρητική κι επίσης έχει ενιαίο χαρακτήρα. Τέλος, στον Hilbert η ισότητα κατοχυρώνεται αξιωματικά και δεν είναι ενιαία αφού διακρίνεται σε τρία είδη: ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων, ισότητα γωνιών και ισότητα τρίγωνων.

[5] Ο Ευκλείδης φαίνεται να αποφεύγει την απόδειξη προτάσεων με βάση αυτήν την παραδοχή. Η πρόταση Ι.2 θα μπορούσε να αποδειχθεί με υπέρθεση αλλά ο Ευκλείδης προτιμά άλλη τεχνική. Στην επιπεδομετρία (βιβλία Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV) τη χρησιμοποιεί μόνο στην απόδειξη της Ι.4 .

Οι απόψεις περί ισότητας καθορίζουν έμμεσα και τις απόψεις περί ανισότητας των γεωμετρικών σχημάτων. Ο Ευκλείδης θεωρεί ότι ένα σχήμα είναι μικρότερο από ένα άλλο όταν με υπέρθεση το ένα σχήμα συμπίπτει με μέρος του άλλου. Ο Hilbert συγκρίνει ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του «μεταξύ». Και οι δυο τους χρησιμοποιούν την ανισότητα περιορισμένα και μόνον για ομοειδή σχήματα. Αντίθετα, η κατά Klein έννοια της ισότητας που είναι συνολοθεωρητική, μας οδηγεί να ορίσουμε ανισότητα σχημάτων με την έννοια του «περιέχεσθαι» χωρίς να περιορίζει τη σύγκριση μεταξύ μόνον ομοειδών σχημάτων. Η απουσία περιορισμών φαίνεται να την κάνει πιο γόνιμη από τις προηγούμενες δυο και αποτελεί κίνητρο για βαθύτερη μελέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Από την ισότητα στη διάταξη

2.1 Ισότητα και ισοδυναμία

Ο όρος «ισότητα» δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος στα μαθηματικά. Εξαρτάται κάθε φορά από τα αντικείμενα που μελετάμε. Ήδη έχουμε μιλήσει για την ισότητα ως σύμπτωση γεωμετρικών σχημάτων. Υπάρχει η ισότητα συναρτήσεων, η ισότητα διανυσμάτων, η ισότητα πραγματικών αριθμών κλπ. Στην πραγματικότητα κάθε ισότητα δεν είναι τίποτε άλλο από μια σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή:

Αν X *είναι ένα μη κενό σύνολο τότε η σχέση* $\sigma \subseteq X \times X$ *είναι σχέση ισοδυναμίας όταν ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:*

α) $(x,x) \in \sigma$ *για κάθε* $x \in X$ *αυτοπάθεια*

β) αν $(x,y) \in \sigma$ *τότε* $(y,x) \in \sigma$ *συμμετρικότητα*

γ) αν $(x,y) \in \sigma$ *και* $(y,z) \in \sigma$ *τότε* $(x,z) \in \sigma$ *μεταβατικότητα*

Αντί $(x,y) \in \sigma$ γράφουμε $x\sigma y$ και μάλιστα στη θέση του σ χρησιμοποιούμε συνήθως ένα από τα σύμβολα: $\sim, \approx, =$ οπότε οι παραπάνω γράφονται:

α΄) $x \approx x$

β΄) αν $x \approx y$ *τότε* $y \approx x$

γ΄) αν $x \approx y$ *και* $y \approx z$ *τότε* $x \approx z$

2.2 Διάταξη

Σε ένα σύνολο X κάθε σχέση τ που να ικανοποιεί τις εξής δυο ιδιότητες:

α) $(x,x)\in\tau$ *για κάθε* $x\in X$ *αυτοπάθεια*

β) αν $(x,y)\in\tau$ *και* $(y,z)\in\tau$ *τότε* $(x,z)\in\tau$ *μεταβατικότητα*

ονομάζεται *προδιάταξη*.

Αν επιπλέον η τ ικανοποιεί και την:

γ) αν $(x,y)\in\tau$ *και* $(y,x)\in\tau$ *τότε* $x=y$, *αντισυμμετρικότητα*

τότε ονομάζεται *διάταξη* και το X *διατεταγμένο σύνολο*. Αντί τ συνήθως χρησιμοποιούμε κάποια από τα σύμβολα $<,\leq,>,\geq$ οπότε οι παραπάνω γράφονται ως

α΄) $x\leq x$ *για κάθε* $x\in X$

β΄) αν $x\leq y$ *και* $y\leq z$ *τότε* $x\leq z$

γ΄) αν $x\leq y$ *και* $y\leq x$ *τότε* $x=y$

Οι προηγούμενοι ορισμοί μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που αντί για ισότητα έχουμε μια άλλη σχέση ισοδυναμίας $\approx$. Στη μεν προδιάταξη η αυτοπάθεια αντικαθίσταται με

α΄΄) αν $x\approx y$ τότε $(x,y)\in\tau$

ενώ η αντισυμμετρική ιδιότητα γίνεται

γ΄΄) αν $(x,y)\in\tau$ *και* $(y,x)\in\tau$ *τότε* $x\approx y$

Αν σε ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης τ, για οποιαδήποτε $x,y\in X$ ισχύει $x\tau y$ ή $y\tau x$ τότε το X καλείται *ολικά διατεταγμένο* σύνολο.

Παραδείγματα

α) Σε κάθε σύνολο $X\neq\varnothing$ ορίζεται μια σχέση διάταξης και είναι η τετριμμένη:

$\tau=\{(x,x):x\in X\}$

β) Στα λεξικά οι ταξινόμηση γίνεται με τη λεξικογραφική διάταξη, που είναι περίπτωση ολικής διάταξης.

γ) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών έχουμε ολική διάταξη συμβατή με τις πράξεις.

δ) Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζονται ολικές διατάξεις (π.χ. λεξικογραφική) αλλά καμιά από αυτές δεν μπορεί να είναι συμβατή με τις πράξεις κι αυτό διότι υπάρχει στοιχείο $i \in \mathbb{C}$ ώστε $1^2 + i^2 = 0$.

ε) Αν το X περιέχει τουλάχιστο δυο στοιχεία τότε στο δυναμοσύνολο $\wp(X)$ η σχέση "$\subseteq$" του «περιέχεσθαι» αποτελεί σχέση διάταξης αλλά όχι ολικής διάταξης, καθώς υπάρχουν σύνολα $A, B \in \wp(X)$ για το οποία δεν ισχύει $A \subseteq B$ ούτε και $B \subseteq A$. Συνήθως μια τέτοια σχέση αποκαλείται *σχέση μερικής διάταξης*.

Πρόταση 2.1

Έστω $X \neq \varnothing$ και $\approx$ μια σχέση ισοδυναμίας στο X. Στο X ορίζουμε μια σχέση $\leq$ που να ικανοποιεί τις:

α) αν $A \approx B$ τότε $A \leq B$ (δηλαδή το γράφημα της $\approx$ είναι υποσύνολο του γραφήματος της $\leq$)

β) αν $A \leq B$ και $B \leq C$ τότε θα ισχύει ότι $A \leq C$ (δηλαδή η $\leq$ είναι μεταβατική)

Αν από το γράφημα της $\leq$ διαγράψουμε όλα τα ζεύγη (A, B), (B, A) ώστε $A \leq B$, $B \leq A$ αλλά όχι $A \approx B$ τότε μένει μια σχέση σ που είναι σχέση διάταξης

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή όλα τα ζεύγη (A, A) ανήκουν στο γράφημα της $\approx$ τότε θα ανήκουν και στο γράφημα της $\leq$. Από τον ορισμό της, η σ δεν εξαιρεί τα ζεύγη (A, A) άρα ισχύει $A\sigma A$, που σημαίνει ότι είναι αυτοπαθής.

Έστω $A\sigma B$ και $B\sigma C$. Για να ισχύει η μεταβατική ιδιότητα για τη σ, πρέπει να αποδείξουμε ότι $A\sigma C$.

Επειδή η $\leq$ είναι μεταβατική, και λόγω της σ ισχύει ότι $A \leq B$ και $B \leq C$ τότε επίσης έχουμε $A \leq C$.

Υποθέτουμε ότι το (A, C) δεν ανήκει στο γράφημα της σ. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει $C \leq A$ αλλά όχι $A \approx C$.

Επειδή ισχύουν $C \leq A$ και $A \leq B$ τότε ισχύει ότι $C \leq B$.

Άρα έχουμε ότι $B \leq C$, $C \leq B$ και $B\sigma C$ που σημαίνει ότι $B \approx C$.

Από υπόθεση έχουμε $A\sigma B$ άρα και $A\sigma C$, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το (A, C) δεν ανήκει στο γράφημα της σ.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι η σ είναι αντισυμμετρική.

Έστω $A\sigma B$ και $B\sigma A$. Τότε επίσης ισχύει ότι $A \le B$ και $B \le A$.

Από τον ορισμό της σ αναγκαστικά πρέπει να ισχύει ότι $A \approx B$ διότι σε αντίθετη περίπτωση τα (A,B) και (B,A) δεν θα άνηκαν στο γράφημα της σ.

Πρόταση 2.2

Έστω $X \ne \varnothing$ και $\approx$ μια σχέση ισοδυναμίας στο X. Στο X ορίζουμε μια σχέση $\le$ που να ικανοποιεί τις:

α) αν $A \approx B$ τότε $A \le B$ (δηλαδή το γράφημα της $\approx$ είναι υποσύνολο του γραφήματος της $\le$)

β) αν $A \le B$ και $B \le C$ τότε θα ισχύει ότι $A \le C$ (δηλαδή η $\le$ είναι μεταβατική)

Αν λ είναι η σχέση που ορίζεται ως εξής:

$$A\lambda B \Leftrightarrow A \approx B \text{ ή } \{A \le B \text{ και όχι } B \le A\}$$

τότε η λ είναι μια σχέση διάταξης.

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $A \approx A$ από τον ορισμό ισχύει ότι $A\lambda A$, δηλαδή είναι αυτοπαθής.

Έστω ότι $A\lambda B$ και $B\lambda C$. Για να είναι η λ μεταβατική πρέπει να αποδείξουμε ότι $A\lambda C$.

Επειδή η $\le$ είναι μεταβατική και ισχύουν οι $A\lambda B$ και $B\lambda C$ τότε ισχύουν και οι $A \le B$, $B \le C$ και $A \le C$.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $A\lambda C$. Τότε θα ισχύει ότι $C \le A$ αλλά όχι $A \approx C$.

Επειδή $B \le C$ και $C \le A$ τότε και $B \le A$.

Επίσης επειδή $A \le B$, $B \le A$ και $A\lambda B$ τότε θα ισχύει ότι $A \approx B$.

Τότε όμως η $B\lambda C$ συνεπάγεται και την $A\lambda C$, άτοπο.

Τέλος, αν $A\lambda B$ και $B\lambda A$ αναγκαστικά συνεπάγονται την $A \approx B$, αλλιώς για $A \not\approx B$ θα είχαμε $A \le B$ και $B \le A$ που έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό της λ.

Πρόταση 2.3

Έστω $X \neq \varnothing$ και $\approx$ μια σχέση ισοδυναμίας στο X. Επίσης θεωρούμε μια σχέση $\leq$ που να ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 2.1. Οι σχέσεις λ και σ όπως ορίσθηκαν στις προτάσεις 2.1 και 2.2 συμπίπτουν, δηλαδή:

$$A\sigma B \Leftrightarrow A\lambda B$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι $A\sigma B$.

Αν $A \approx B$ τότε ισχύει ότι $A\lambda B$

Αν $A \not\approx B$ και $A \leq B$ τότε δεν μπορεί να ισχύει ότι $B \leq A$ άρα $A\lambda B$

Οπότε $A\sigma B \Rightarrow A\lambda B$

Έστω ότι $A\lambda B$

Αν $A \approx B$ τότε ισχύει ότι $A\sigma B$

Αν $A \not\approx B$ τότε $A \leq B$ και όχι $B \leq A$. Άρα δεν μπορεί να ισχύει ότι $A \leq B$, $B \leq A$ και $A \not\approx B$, οπότε το ζεύγος (A, B) ανήκει στη σ ή πιο απλά $A\sigma B$

Οπότε $A\lambda B \Rightarrow A\sigma B$

2.3 Λήμμα του Zorn

Έστω $(X, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο, και $Y \subseteq X$.

- Θα λέμε ότι το $u \in X$ είναι *άνω φράγμα* του Y όταν ισχύει $y \leq u$ για κάθε $y \in Y$. Επίσης θα λέμε τότε, ότι το Y είναι άνω φραγμένο.
- Θα λέμε ότι το $m \in X$ είναι ένα *μεγιστικό* στοιχείο του X αν η σχέση $m \leq x, x \in X$ συνεπάγεται ότι $m = x$, δηλαδή δεν υπάρχει $x \in X$ ώστε $m \leq x$ και $m \neq x$.

Στα διατεταγμένα σύνολα δεχόμαστε αξιωματικά το:

Λήμμα του Zorn:

Έστω $(X, \leq)$ ένα μη κενό διατεταγμένο σύνολο ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X να είναι άνω φραγμένο. Τότε το X έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σύγκριση Σχημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

3.1 Βασικοί ορισμοί

Το σχολικό βιβλίο αναφέρει τον εξής ορισμό για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων:

Δυο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν

Ανάλογο ορισμό χρησιμοποιεί για την ισότητα γωνιών, κύκλων και τόξων που κείνται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους. Ο ορισμός γενικεύεται αργότερα σε όλα τα ευθύγραμμα σχήματα με σκοπό να ορισθεί η ισότητα τριγώνων. Κάνοντας μια υπέρβαση θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σχολικό βιβλίο βασίζει την ισότητα σχημάτων στον:

Ορισμός 3.1 (*Klein*)

Δυο επίπεδα σχήματα S_1 *και* S_2 *είναι γεωμετρικά ίσα όταν υπάρχει Ευκλείδεια ισομετρία*[6] $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ώστε* $f(S_1) = S_2$. *Τότε θα συμβολίζουμε* $S_1 \approx S_2$

<u>Παρατήρηση</u>

Ως *σχήμα* θα εννοείται οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, επομένως οι όροι «υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$» και «σχήμα» στο εξής θα θεωρούνται ταυτόσημοι.

---

[6] ως προς τη συνήθη *Ευκλείδεια μετρική* ρ με $\rho((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Το σχολικό βιβλίο δε δίνει εξίσου γενικό ορισμό για την ανισότητα, αλλά περιορίζεται σε συγκεκριμένα σχήματα: ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες και τόξα (στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους). Ειδικότερα, για τα τόξα αναφέρει:

Το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται μικρότερο από το τόξο $\overset{\frown}{CD}$ και γράφουμε $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$ όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{CD}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{AB}$

Η φυσιολογική γενίκευση του παραπάνω ορισμού σε τυχαία σχήματα είναι:

Ορισμός 3.2

Για δυο επίπεδα σχήματα S_1 και S_2 θα λέμε ότι το S_1 είναι μικρότερο ή ίσο του S_2 όταν υπάρχει Ευκλείδεια στερεά κίνηση f ώστε $f(S_1) \subseteq S_2$. Τότε θα συμβολίζουμε $S_1 \leq S_2$.

Ο φυσιολογικός αυτός ορισμός της ανισότητας, δεν ικανοποιεί εν γένει την αντισυμμετρική ιδιότητα, όπως θα δείξουμε σε επόμενα παραδείγματα, οπότε πολύ σωστά το σχολικό βιβλίο αποφεύγει τη διατύπωση γενικού ορισμού ανισότητας και περιορίζει τη σύγκριση σε συγκεκριμένες κλάσεις σχημάτων.

Πρόταση 3.1

Η "$\leq$" είναι σχέση προδιάταξης των επίπεδων σχημάτων, δηλαδή είναι αυτοπαθής και μεταβατική, όπου η αυτοπάθεια εννοείται με τη σχέση ισοδυναμίας που είναι η γεωμετρική ισότητα σχημάτων (ορισμός 3.1)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω Α και Β δυο σχήματα τα οποία είναι γεωμετρικά ίσα τότε υπάρχει ευκλείδεια ισομετρία f ώστε $f(A) = B$, άρα $f(A) \subseteq B$. Συνεπώς σχέση $\leq$ είναι αυτοπαθής ως προς τη γεωμετρική ισότητα σχημάτων

Αν $A \leq B$ και $B \leq C$ τότε υπάρχουν ισομετρίες f, g ώστε $f(A) \subseteq B$ και $g(B) \subseteq C$. Τότε για την ισομετρία $g \circ f$ ισχύει ότι $g \circ f(A) \subseteq C$ δηλαδή $A \leq C$. Άρα είναι και *μεταβατική*.

Στα ακόλουθα παραδείγματα θα αποδείξουμε ότι η "$\leq$" δεν ικανοποιεί εν γένει την *αντισυμμετρική* ιδιότητα, με σχέση ισοδυναμίας αυτή του ορισμού 3.1.

Παράδειγμα 3.1

Έστω οι ημιευθείες $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$, $B=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$. Επειδή η A είναι κλειστό σύνολο και η B δεν είναι κλειστό σύνολο, **δεν** υπάρχει ισομετρία f ώστε $f(A)=B$[7] οπότε $A\not\approx B$.

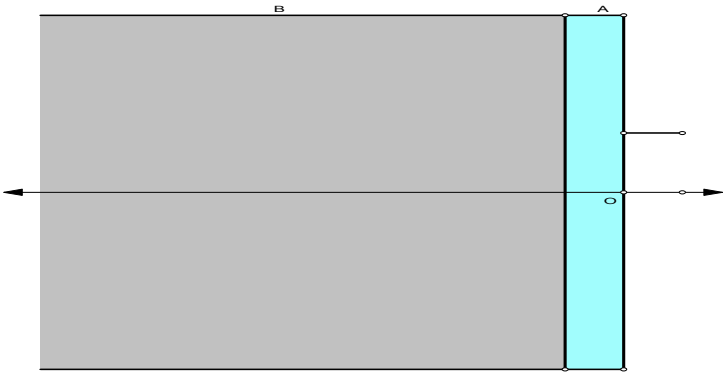
Για την ισομετρία $f(x,y)=(x+1,y)$ ισχύει ότι $f(A)\subseteq B$. Επίσης όμως ισχύει ότι $B\subseteq A$, οπότε έχουμε ότι $A\leq B$ και $B\leq A$ ενώ $A\not\approx B$.

Παράδειγμα 3.2

Θεωρούμε το σχήμα $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0\}\cup\{(x,2)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1\}$ και το ημιεπίπεδο $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 2\}$.

σχήμα 3.1

Επειδή κάθε ισομετρία απεικονίζει τα ημιεπίπεδα σε ημιεπίπεδα δεν υπάρχει ισομετρία f ώστε $f(A)=B$, άρα $A\not\approx B$.



σχήμα 3.2

[7] Κάθε ομοιομορφισμός απεικονίζει τα κλειστά σύνολα σε κλειστά.

Επίσης για την ισομετρία $f(x,y)=(x-3,y)$ ισχύει ότι $f(B)\subseteq A$.

Άρα $A\le B$ και $B\le A$ ενώ $A\not\approx B$.

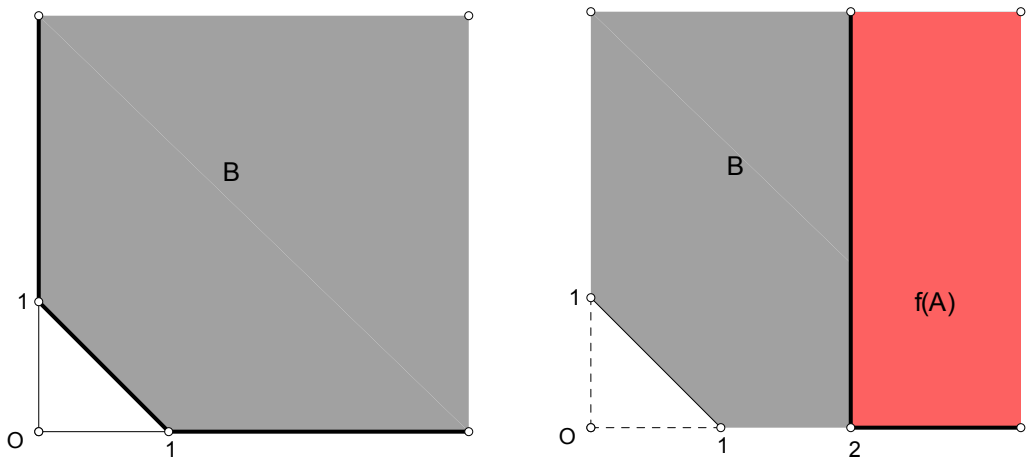
Παράδειγμα 3.3

Θεωρώ ως σχήμα A την ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ δηλαδή $\mathrm{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0\}$ και ως B το σχήμα που προκύπτει αν από το A αφαιρέσω το εσωτερικό του ορθογώνιου ισοσκελούς τρίγωνου $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0, x+y<1\}$.

Προφανώς $B\subseteq A$ άρα ισχύει ότι $B\le A$

Επίσης μετατοπίζοντας το A παράλληλα προς τον $x'x$ κατά δυο μονάδες ισχύει ότι $f(A)\subseteq B$, όπου $f(x,y)=(x+2,y)$ ισομετρία, άρα έχουμε $A\le B$.

Όμως τα A και B δεν είναι γεωμετρικά ίσα διότι αν υπήρχε ισομετρία g ώστε $g(A)=B$ κι επειδή οι ισομετρίες διατηρούν τις γωνίες θα έπρεπε το B να είναι επίσης μια ορθή γωνία, κάτι που προφανώς δεν ισχύει.



σχήμα 3.3

Παράδειγμα 3.4

Θεωρούμε ω μια γωνία ώστε $n\omega\ne 2\lambda\pi$ για όλους τους ακεραίους n,λ και θέτω $a_k(\cos k\omega,\sin k\omega)$ μια ακολουθία σημείων στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Ισχύει δε ότι $a_k\ne a_m$ για $k\ne m$ γιατί αλλιώς θα υπήρχαν ακέραιοι n,λ ώστε $n\omega=2\lambda\pi$.

Το $A=\{a_k : k=0,1,2,3,...\}$ είναι άπειρο πυκνό υποσύνολο της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου και μάλιστα τα σημεία του είναι ισοκατανεμημένα σε αυτήν. Θεωρούμε επίσης το σχήμα $B=A\setminus\{a_1\}\subseteq A$. Αν υπάρχει ισομετρία f του επιπέδου

ώστε $f(A)=B$, τότε για κάθε $a \in A$ υπάρχει τουλάχιστο ένα $a' \in A$ ώστε η απόσταση $d(a,a')=r$ με $r=2\sin(\omega/2)$. Επειδή $f(A)=B$ τότε και για κάθε $b \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $b' \in B$ ώστε η απόσταση $d(b,b')=r$. Άτοπο διότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει για το $a_o \in B$.

Για την ισομετρία T που είναι στροφή κατά 2ω περί την αρχή των αξόνων ισχύει ότι $T(A)=\{a_k : k=2,3,...\} \subseteq B$ άρα και πάλι $A \le B$ και $B \le A$ ενώ $A \not\approx B$.

Βελτιώνουμε τον ορισμό της προδιάταξης "$\le$" ώστε να προκύψει σχέση διάταξης:

Ορισμός 3.3

Στο σύνολο των σχημάτων ορίζουμε μια σχέση λ ώστε:

$A\lambda B \Leftrightarrow \{A \approx B\}$ *ή* $\{A \le B$ *και όχι* $B \le A\}$

Πρόταση 3.2

Η λ είναι σχέση διάταξης.

<u>Απόδειξη</u>

Έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση 2.2

Ορισμός 3.4

Μια κλάση επιπέδων σχημάτων Ε θα λέμε ότι είναι **καλή** *όταν δεν υπάρχουν σχήματα* A,B *στη κλάση Ε ώστε* $A \le B, B \le A$ *και* $A \not\approx B$.

<u>Παρατήρηση</u>

Η λ είναι κατά τέτοιο τρόπο ορισμένη ώστε να εξοβελίζει τις παθολογικές περιπτώσεις της "$\le$". Ο ορισμός όμως δεν είναι «φυσιολογικός» και δεν αποκαλύπτει ποια σχήματα αποτελούν καλές κλάσεις, αφήνοντας ουσιαστικά άλυτο το πρόβλημα της διάταξης. Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον στα σύνολα που ικανοποιούν την αντισυμμετρική ιδιότητα για την "$\le$":

Ορισμός 3.5

Θα λέμε ότι ένα σχήμα A *είναι* **καλό** *όταν για οποιοδήποτε σχήμα* B*, εφόσον ισχύουν οι* $A \le B$ *και* $B \le A$*, τότε αναγκαστικά ισχύει ότι* $A \approx B$.

Προφανώς αν μια κλάση αποτελείται μόνον από καλά σχήματα, τότε είναι καλή κλάση. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μια τετριμμένη περίπτωση είναι η κλάση που αποτελείται από ένα μόνο σχήμα (και όλα τα γεωμετρικά ίσα προς αυτό) που δεν είναι καλό. Επειδή το σχήμα αυτό δεν μπορεί να δώσει αντιπαράδειγμα με άλλο σχήμα της κλάσης τότε η κλάση είναι καλή.

Άλλη χαρακτηριστική περίπτωση είναι η κλάση των ευθύγραμμων γωνιών. Ενώ οι γωνίες δεν είναι καλά σχήματα σύμφωνα με το παράδειγμα 3.3, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αποτελούν καλή κλάση.

3.2 *Αναζήτηση καλών κλάσεων σχημάτων*

Πρόταση 3.3

Αν A καλό σύνολο και $A \approx B$ τότε και το B είναι καλό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω $C \leq B$ και $B \leq C$. Επειδή $A \approx B$ τότε ισχύει ότι $A \leq C$ και $C \leq A$. Επειδή A καλό σύνολο τότε υπάρχει ισομετρία f του επιπέδου ώστε $f(A) = C$. Επίσης υπάρχει ισομετρία g του επιπέδου ώστε $g(B) = A$ οπότε $g \circ f(B) = C$ δηλ. $B \approx C$.

Πρόταση 3.4

Αν A είναι καλό σύνολο τότε και το συμπλήρωμά του είναι επίσης καλό.

Απόδειξη

Έστω ότι $B \leq A^c$ και $A^c \leq B$. Τότε υπάρχουν ισομετρίες του επιπέδου f, g ώστε $f(B) \subseteq A^c$ και $g(A^c) \subseteq B$. Τότε όμως ισχύει ότι $f(B)^c \supseteq A$ και $g(A^c)^c \supseteq B^c$.

Επειδή f, g είναι 1-1 κι επί ισχύει ότι $f(B)^c = f(B^c)$, $g(A^c)^c = g(A)$. Άρα $f(B^c) \supseteq A$ και $g(A) \supseteq B^c$ που ισοδυναμεί με $A \leq B^c$ και $B^c \leq A$. Επειδή το A είναι καλό υπάρχει ισομετρία h του επιπέδου ώστε $h(A) = B^c$ ή ισοδύναμα $h(A)^c = B$ κι επειδή h είναι 1-1 κι επί ισχύει ότι $h(A^c) = B$ δηλαδή $A^c \approx B$.

Θεώρημα 3.1

Έστω $\langle X,d\rangle$ *μετρικός χώρος με* X *συμπαγές. Αν υπάρχει ισομετρία* $f:X\to X$ *τότε η* f *είναι επί δηλαδή* $f(X)=X$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_o\in X$ τότε $x_n=f^n(x_o)\in f(X)\subseteq X$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Επειδή X συμπαγής τότε η ακολουθία (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n})

Η (x_{k_n}) είναι και βασική άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε

$k_m\geq k_n\geq k_{n_o}$ να ισχύει $d(x_{k_m},x_{k_n})<\varepsilon$

Επειδή όμως η f είναι ισομετρία άρα και η f^{-1} ισχύει ότι:

$d(x_{k_m},x_{k_n})=d\left(f^{-1}(x_{k_m}),f^{-1}(x_{k_n})\right)=d(x_{k_m-1},x_{k_n-1})$ κι επαγωγικά προκύπτει ότι

$d(x_{k_m},x_{k_n})=d(x_{k_m-k_n},x_o)<\varepsilon$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ $S(x_o,\varepsilon)\cap f(X)\neq\varnothing$ που σημαίνει ότι $x_o\in\overline{f(X)}=f(X)$

Αποδείξαμε ότι $X\subseteq f(X)\subseteq X$ οπότε $f(X)=X$

Πρόταση 3.5

Κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ *είναι καλό.*

<u>Απόδειξη</u>

Έστω A συμπαγές και B ένα τυχαίο σύνολο ώστε $A\leq B$ και $B\leq A$. Τότε υπάρχουν ισομετρίες f,g ώστε $f(A)\subseteq B$ και $g(B)\subseteq A$.

Τότε για την ισομετρία $g\circ f:A\to A$ ισχύει ότι $g\circ f(A)\subseteq A$. Επειδή όμως το A είναι συμπαγές από το *θεώρημα 1* ισχύει ότι $g\circ f(A)=A$.

Τότε όμως $g(B)\subseteq A=g\circ f(A)$ άρα $B\subseteq f(A)$. Συνεπώς ισχύει ότι $f(A)=B$, δηλαδή $A\approx B$ οπότε το A είναι καλό σύνολο.

Δίνουμε ένα νέο ορισμό που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στις αποδείξεις:

Ορισμός 3.6

Ένα σχήμα A *θα καλείται* **ισχυρά καλό** *όταν για κάθε ισομετρία* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *που ικανοποιεί την* $f(A)\subseteq A$, *τότε ισχύει* $f(A)=A$.

Πρόταση 3.6

Κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ *είναι ισχυρά καλό.*

<u>Απόδειξη</u>

Άμεση από τον ορισμό 3.6 και το θεώρημα 3.1.

Πρόταση 3.7

Αν ένα σύνολο είναι ισχυρά καλό τότε είναι καλό.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω A ισχυρά καλό. Αν B είναι σύνολο ώστε $A \le B$ και $B \le A$ τότε υπάρχουν ισομετρίες f, g του επιπέδου ώστε $f(A) \subseteq B$ και $g(B) \subseteq A$.

Για την ισομετρία $g \circ f : A \to A$ ισχύει ότι $g \circ f(A) = A$ αφού A ισχυρά καλό. Τότε όμως $g(B) \subseteq A = g \circ f(A)$ άρα $B \subseteq f(A)$.

Συνεπώς ισχύει ότι $f(A) = B$ οπότε $A \approx B$ κι άρα το A είναι καλό.

Πρόταση 3.8

Κάθε ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ *είναι ισχυρά καλό.*

<u>Απόδειξη</u>

Έστω A ανοικτό και φραγμένο και f ισομετρία του επιπέδου ώστε $f(A) \subseteq A$.

Επειδή A ανοικτό ισχύουν: $A \cap \partial A = \varnothing$ και $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Άρα $A = \overline{A} \setminus \partial A$

$\delta(\overline{A}) = \delta(A) < \infty$ τότε το $\overline{A}$ είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές στο $\mathbb{R}^2$.

Επίσης $\partial A \subseteq \overline{A}$ άρα $\delta(\partial A) \le \delta(\overline{A})$ δηλαδή και το σύνορο είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές στο $\mathbb{R}^2$.

$f(A) \subseteq A \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{A} \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ οπότε από το *θεώρημα 1* ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{A}$

$f(\partial A) = f(\overline{A} \setminus A) = f(\overline{A}) \setminus f(A) = \overline{A} \setminus f(A) \supseteq \overline{A} \setminus A = \partial A$

Άρα $f^{-1}(\partial A) \subseteq \partial A$ κι επειδή η f^{-1} είναι ισομετρία και πάλι από το *θεώρημα 1* ισχύει ότι $f^{-1}(\partial A) = \partial A \Leftrightarrow \partial A = f(\partial A)$

$f(A) = f(\overline{A} \setminus \partial A) = f(\overline{A}) \setminus f(\partial A) = \overline{A} \setminus \partial A = A$ άρα είναι ισχυρά καλό.

Πρόταση 3.9

Στο $\mathbb{R}^2$, η ένωση συμπαγούς με ανοικτό και φραγμένο σύνολο είναι ισχυρά καλό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω K συμπαγές και A ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του επιπέδου και ισομετρία f του επιπέδου ώστε $f(A \cup K) \subseteq A \cup K$.

Το σύνολο $V = (A \cup K)^o \subseteq A \cup K$ είναι επίσης ανοικτό και φραγμένο.

Το $W = K \setminus V = K \cap V^c$ είναι συμπαγές ως τομή συμπαγούς με κλειστό.

Προφανώς $V \cap W = \varnothing$

Επειδή A ανοικτό υποσύνολο του $A \cup K$ τότε $A \subseteq V$ και

$A \cup K \subseteq V \cup K = V \cup (K \setminus V) = V \cup W \subseteq A \cup K$. Άρα $V \cup W = A \cup K$

Επίσης $V \cap W = \varnothing \Rightarrow f(V \cap W) = \varnothing \Rightarrow f(V) \cap f(W) = \varnothing$

Συνεπώς $f(V \cup W) \subseteq V \cup W \Rightarrow f(V) \cup f(W) \subseteq V \cup W$

$f(V)$ ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $A \cup K$ άρα $f(V) \subseteq V$ αφού V είναι το εσωτερικό του $A \cup K$ και από *πρόταση 3.8* έχουμε ότι $f(V) = V$.

Επειδή $f(V) \cup f(W) \subseteq V \cup W$ και $V \cap W = \varnothing, f(V) \cap f(W) = \varnothing$ τότε $f(W) \subseteq W$

Όμως W είναι συμπαγές οπότε από *θεώρημα 1* $f(W) = W$.

$f(V) \cup f(W) = V \cup W \Rightarrow f(V \cup W) = A \cup K \Rightarrow f(A \cup K) = A \cup K$.

Πρόταση 3.10

Στο $\mathbb{R}^2$, η τομή ενός συμπαγούς με ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο του επιπέδου είναι ισχυρά καλό.

Απόδειξη

Έστω K συμπαγές, A ανοικτό και φραγμένο σύνολο και ισομετρία f του επιπέδου ώστε $f : A \cap K \to A \cap K$

Θεωρώ το συμπαγές σύνολο $X = \overline{A \cap K}$ με $X \subseteq K$.

Τότε $f(A \cap K) \subseteq A \cap K \Rightarrow f\left(\overline{A \cap K}\right) \subseteq X \Rightarrow f(X) \subseteq X$.

$A \cap K$ ανοικτό στο K, άρα και σε οποιοδήποτε υποσύνολό του. Τότε $A \cap K$ ανοικτό στο X, οπότε και $X \setminus (A \cap K)$ συμπαγές κι αποδεικνύω ότι

$f^{-1}\left(X \setminus \left(A \cap K\right)\right) \subseteq X \setminus \left(A \cap K\right)$ οπότε βάσει του *θεωρήματος 1* ισχύει ότι $f^{-1}\left(X \setminus \left(A \cap K\right)\right) = X \setminus \left(A \cap K\right)$.

Τότε όμως ισχύει $f\left(X \setminus \left(A \cap K\right)\right) = X \setminus \left(A \cap K\right)$ κι επειδή $f\left(X\right) = X$ προκύπτει το ζητούμενο $f\left(A \cap K\right) = A \cap K$ δηλαδή $A \cap K$ ισχυρά καλό.

Πρόταση 3.11

Οι κλάσεις συνόλων $X = \{K \cup A$ όπου K συμπαγές και A ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του επιπέδου$\}$, $Y = \{K \cap A$ όπου K συμπαγές και A ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του επιπέδου$\}$, $E = X \cup Y$ και $F = E \cup \{S \subseteq \mathbb{R}^2 : S^c \in E\}$ είναι καλές κλάσεις.

<u>Απόδειξη</u>

Οι παραπάνω κλάσεις αποτελούνται μόνον από ισχυρά καλά σύνολα. Τότε από τον ορισμό 3.4 και τις προτάσεις 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 έπεται το συμπέρασμα.

Η κλάση F περιλαμβάνει σχεδόν όλα τα θεμελιώδη σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλους, τόξα κύκλων καθώς και τα εσωτερικά τους. Βέβαια δεν περιέχει τις γωνίες, οι οποίες όμως, όπως έχουμε αναφέρει, αποτελούν καλή κλάση.

Πρόταση 3.12

Αν W είναι η κλάση όλων των ευθύγραμμων γωνιών τότε η κλάση $F \cup W$ είναι καλή.

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή ήδη γνωρίζουμε ότι οι κλάσεις F, W είναι καλές, αρκεί να εξετάσουμε αν κάποιο στοιχείο της μιας κλάσης δίνει αντιπαράδειγμα στην άλλη κλάση.

Έστω A σχήμα της κλάσης F. Τότε είτε $A \in E$ είτε $A \in F \setminus E$.

Αν $A \in E$ θα είναι φραγμένο οπότε δεν μπορεί να δώσει αντιπαράδειγμα με κάποια γωνία.

Αν $A \in F \setminus E$ και δίνει αντιπαράδειγμα με κάποια γωνία τότε και το συμπλήρωμά του $A^c \in E$, θα δίνει αντιπαράδειγμα με το συμπλήρωμα της γωνίας (που επίσης είναι γωνία). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει στοιχείο του E που δίνει αντιπαράδειγμα στο W, που είναι αδύνατο όπως δείξαμε στην πρώτη περίπτωση.

Άρα η κλάση $F \cup W$ είναι καλή και περιλαμβάνει πλέον και τις γωνίες.

Παρατηρήσεις

1. Τα **κλειστά σύνολα** δεν είναι καλά, κι ούτε αποτελούν καλή κλάση. Αυτό φαίνεται άμεσα από το παράδειγμα 3.1
2. Τα **συνεκτικά σύνολα** δεν είναι καλά κι ούτε αποτελούν καλή κλάση σύμφωνα με το παράδειγμα 3.1
3. Τα **φραγμένα σύνολα** δεν είναι καλά κι ούτε αποτελούν καλή κλάση σύμφωνα με το παράδειγμα 3.4
4. Τα **συνεκτικά και φραγμένα σύνολα** δεν είναι καλά κι ούτε αποτελούν καλή κλάση. Αυτό αποδεικνύεται αν στο παράδειγμα 3.4 επισυνάψω τα εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου.
5. Τα **κυρτά σύνολα** δεν είναι καλά κι ούτε αποτελούν καλή κλάση σύμφωνα με τα παράδειγμα 3.3
6. Τα **κυρτά και φραγμένα σύνολα** δεν είναι καλά κι ούτε αποτελούν καλή κλάση. Αυτό προκύπτει αν και πάλι στο παράδειγμα 3.4 επισυνάψω τα εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου.

Αν δυο σχήματα A, B είναι καλά έχουμε δείξει ότι τα συμπληρώματά τους είναι επίσης καλά. Ωστόσο η ένωση ή η τομή (ισχυρά) καλών συνόλων δεν είναι απαραίτητα (ισχυρά) καλό σύνολο όπως φαίνεται στα επόμενα αντπαραδείγματα:

Ισχυρισμός 1

Το σχήμα $L = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(0,1)\}$ είναι ισχυρά καλό.

$M = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ είναι ισχυρά καλά σύνολα.

Απόδειξη

Συμβολίζω $A = \{(x,0) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $b = \{(0,1)\}$ οπότε $L = A \cup b$. Στο εξής θα ταυτίζω το σημείο $(0,1)$ με το σύνολο $\{(0,1)\}$.

Έστω ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $f(L) \subseteq L \Leftrightarrow f(A \cup b) \subseteq A \cup b$

Επειδή οι ισομετρίες είναι 1-1 και $b \notin A$ τότε και $f(b) \notin f(A)$.

Η εικόνα της ημιευθείας μέσω ισομετρίας είναι επίσης ημιευθεία με αρχή το $f(a_o)$,

όπου $a_o(0,0)$, άρα $f(A) \subseteq A$

Αν $f(b) \in A$ τότε τα σημεία $f(b), f(a_o), f(a_1)$ με $a_1 \in A$ είναι συνευθειακά. Τότε

όμως θα ήταν συνευθειακά και τα σημεία b, a_o, a_1 άτοπο!

Άρα $f(b) = b$.

Επίσης $d(f(a_o), b) = d(f(a_o), f(b)) = d(a_o, b) = 1$

Επειδή $f(a_o) \in A$ και το μοναδικό σημείο $a \in A$ ώστε $d(a,b) = 1$ είναι το a_o τότε

$f(a_o) = a_o$.

Για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $d(a, a_o) = d(f(a), f(a_o)) = d(f(a), a_o)$

Όμως υπάρχει μόνο ένα σημείο της ημιευθείας με αυτήν την ιδιότητα, άρα $f(a) = a$.

Αποδείξαμε ότι $f = id_{\mathbb{R}^2}$ οπότε για το $L = A \cup b$ ισχύει $f(L) = L$ δηλαδή είναι

ισχυρά καλό.

Ισχυρισμός 2

Το σχήμα $M = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ είναι ισχυρά καλό.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω $M = \{(x,0) : x \geq 0\} \cup \{(x,1) : x < 0\} = B_1 \cup B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$

Έστω ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $f(M) \subseteq M$.

$f(M) \subseteq M \Leftrightarrow f(B_1 \cup B_2) \subseteq B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(B_1) \cup f(B_2) \subseteq B_1 \cup B_2$

Επειδή $B_1 \cap B_2 = \varnothing \Leftrightarrow f(B_1 \cap B_2) = \varnothing \Leftrightarrow f(B_1) \cap f(B_2) = \varnothing$

Οι εικόνες των B_1, B_2 είναι ημιευθείες άρα είτε $f(B_1) \subseteq B_1$ οπότε και $f(B_2) \subseteq B_2$

είτε $f(B_1) \subseteq B_2$ οπότε και $f(B_1) \subseteq B_2$.

Αν $f(B_1) \subseteq B_1$ και $f(B_2) \subseteq B_2$ τότε $f(0,0) = (x_1, 0)$, $x_1 \geq 0$.

Επίσης κάθε σημείο του φορέα της B_2 απεικονίζεται σε σημείο του φορέα οπότε

$f\left((0,1)\right)=(x_2,1)$, $x_2 \le 0$

$1=d\left((0,0),(0,1)\right)=d\left(f(x_1,0),f(x_2,1)\right)=d\left((x_1,0),(x_2,1)\right)=\sqrt{(x_1-x)^2+1}$

Τότε $|x_1-x_2|=0$ άρα $x_1=x_2=0$.

Οπότε έχουμε ότι $f\left((0,0)\right)=(0,0)$ και $f\left((0,1)\right)=(0,1)$

Αν $b_o(0,0)$ και $b_1(1,0)$ τότε

$1=d(b_o,b_1)=d\left(f(b_o),f(b_1)\right)=d\left((0,0),f(b_1)\right)$

Επειδή $f(b_1)\in f(B_1)\subseteq B_1$ τότε το $f(b_1)\equiv b_1$

Επειδή η f διατηρεί σταθερά τρία μη συνευθειακά σημεία ισχύει ότι $f=id_{\mathbb{R}^2}$

Αν $f(B_1)\subseteq B_2$ και $f(B_2)\subseteq B_1$ τότε $f(0,0)=(x_1,1)$, $x_1\le 0$ και $f(0,1)=(x_2,0)$, $x_2<0$.

Όμως $1=d\left((0,0),(0,1)\right)=d\left((x_1,1),(x_2,0)\right)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+1}$ τότε $x_1=x_2=0$ άτοπο αφού $x_2<0$.

Άρα ισχύει ότι $f(M)=M$

Παράδειγμα 3.5

Το σύνολο $L\cap M=\left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0\right\}$ δεν είναι καλό σύμφωνα με το παράδειγμα 3.1

Παράδειγμα 3.6

Αν g είναι ανάκλαση ως προς τον άξονα $y'y$ τότε το $g(M)$ είναι ισχυρά καλό αλλά το $W=L\cup g(M)=\left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{(x,1)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0\right\}$ δεν είναι καλό διότι για το σύνολο $V=\left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{(x,1)\in\mathbb{R}^2 : x>0\right\}$ ισχύει ότι $V\subseteq W$ οπότε $V\le W$ και $h(W)\subseteq V$ για $h(x,y)=(x+1,y)$ δηλαδή $W\le V$. Επειδή το W είναι κλειστό σύνολο ενώ το V δεν είναι κλειστό, τότε δεν υπάρχει ισομετρία f ώστε $V=f(W)$ άρα $V\not\approx W$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Καλά σχήματα και καλές κλάσεις σε μη−Ευκλείδειες Γεωμετρίες

4.1 Υπερβολική Γεωμετρία

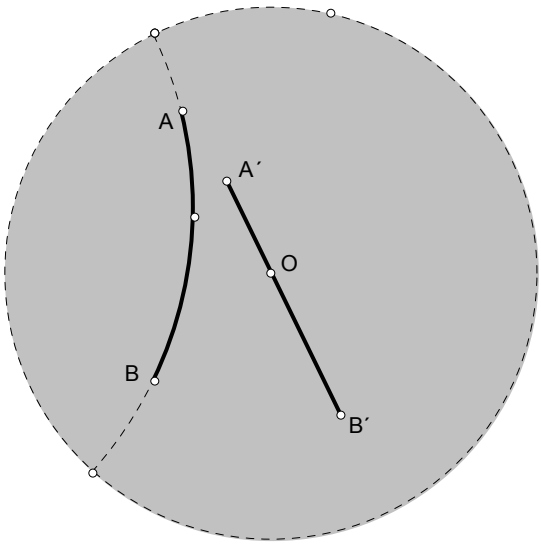
Ως μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε το δίσκο *του Poincare*. Το μη – Ευκλείδειο επίπεδο είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου D του μιγαδικού επιπέδου δηλαδή

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \right\}$$

Η απόσταση για δυο σημεία $A(z_1), B(z_2)$ του μοντέλου δίνεται από την

$$d_p(A,B) = 2\,\mathrm{arctanh}\,\frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|} \quad (1)$$

και θα την καλούμε Υπερβολική Μετρική



σχήμα 4.1

Οι ισομετρίες του μοντέλου είναι οι $f : D \to D$ με

$$f(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \text{ και } a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \text{ (χωρίς αλλαγή προσανατολισμού) ή}$$

$$f(z) = \frac{a\bar{z}-b}{\bar{b}\bar{z}-\bar{a}} \text{ και } a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \text{ (με αλλαγή προσανατολισμού)}$$

Ορισμός 4.1

Δυο επίπεδα σχήματα S_1 και S_2 του Υπερβολικού επιπέδου D, είναι γεωμετρικά ίσα όταν υπάρχει ισομετρία[8] $f : D \to D$ *ώστε* $f(S_1) = S_2$. *Τότε θα συμβολίζουμε* $S_1 \approx S_2$

Ορισμός 4.2

Για δυο επίπεδα σχήματα S_1 και S_2 του Υπερβολικού επιπέδου D, θα λέμε ότι το S_1 είναι μικρότερο ή ίσο του S_2 όταν υπάρχει ισομετρία f ώστε $f(S_1) \subseteq S_2$. Τότε θα συμβολίζουμε $S_1 \leq S_2$.

Οι ορισμοί **καλού συνόλου**, **ισχυρά καλού συνόλου** και **καλής κλάσης** στην Υπερβολική Γεωμετρία είναι ανάλογοι με αυτούς της Ευκλείδειας.

Η σχέση "$\leq$" είναι αυτοπαθής και μεταβατική αλλά όχι εν γένει αντισυμμετρική, όπως θα φανεί στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1

Το παράδειγμα 3.4 της άρρητης στροφής στο Ευκλείδειο επίπεδο, μπορεί να μεταφερθεί και στο Υπερβολικό αρκεί να θεωρήσουμε ότι το κέντρο περιστροφής είναι η αρχή των αξόνων και τα σημεία a_k απέχουν από την αρχή O απόσταση $b < 1$, δηλαδή $a_k(b\cos k\omega, b\sin k\omega)$. Πρέπει να τονίσουμε ότι οι γωνίες του Υπερβολικού επιπέδου D ταυτίζονται με τις αντίστοιχες Ευκλείδειες γωνίες.

Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως και στο Ευκλείδειο επίπεδο, ότι τα σύνολα $A = \{a_k : k = 0,1,2,3,...\}$ και $B = A \setminus \{a_1\}$ δεν είναι γεωμετρικά ίσα.

Επίσης ισχύει ότι $B \leq A$ διότι $B \subseteq A$.

[8] ως προς την Υπερβολική μετρική d_p

Η στροφή $T(z)=e^{2i\omega}z$, είναι ισομετρία του Υπερβολικού επιπέδου D διότι εμπίπτει στην περίπτωση $f(z)=\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ για $b=0$ και $a=e^{i\omega}$ οπότε ικανοποιείται η $a\overline{a}-b\overline{b}=1$.

Εκτελώντας τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι $T(a_k)=a_{k+2}$ άρα

$T(A)=\{a_k : k=2,3,...\}\subseteq B$ δηλαδή $A\leq B$.

Έχουμε ότι $A\leq B$, $B\leq A$ ενώ $A\not\approx B$ που σημαίνει ότι το A δεν είναι καλό σύνολο στην Υπερβολική γεωμετρία.

Παράδειγμα 4.2

Επειδή οι μεταφορές κατά τη διεύθυνση μιας μη−Ευκλείδειας ευθείας του Υπερβολικού επιπέδου D παρουσιάζουν δυσκολίες θα δώσουμε ένα αντίστοιχο παράδειγμα σε ένα άλλο μοντέλο Υπερβολικού επιπέδου, το ημιεπίπεδο H του Poincare που ορίζεται ως

$$H=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)>0\}$$

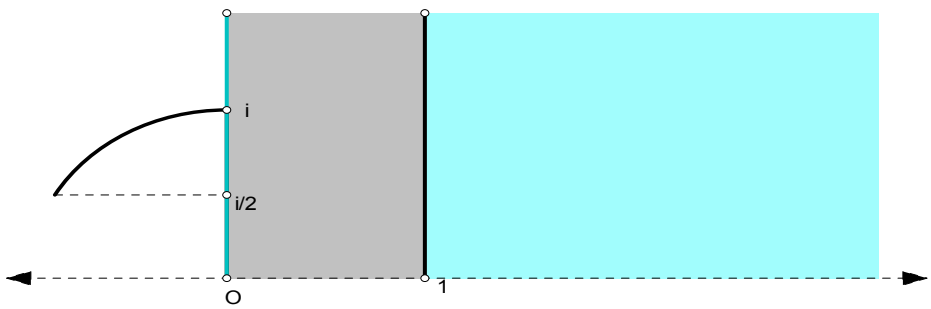
Στο Υπερβολικό επίπεδο H η μετρική διαφοροποιείται ελαφρά σε

$$d_H(z_1,z_2)=\operatorname{arctanh}\frac{|z_2-z_1|}{|\overline{z}_2-z_1|}$$

Επισημαίνουμε ότι τα μοντέλα του Δίσκου και του Ημιεπιπέδου είναι ισομετρικά ισόμορφα και ο αντίστοιχος τύπος του ισομετρικού ισομορφισμού είναι:

$$h:H\to D \text{ με } h(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

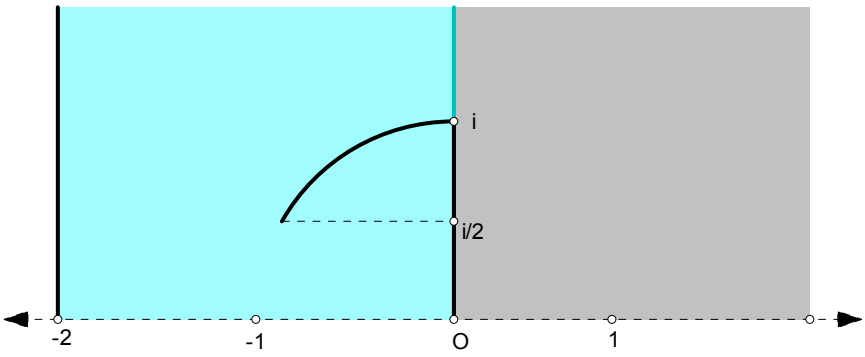
Θεωρώ τα $A=\{z\in H : \mathrm{Re}(z)\geq 0\}\cup\left\{z\in H : |z|=1 \text{ με } \mathrm{Re}(z)\leq 0 \text{ και } \mathrm{Im}(z)\geq\frac{1}{2}\right\}$ και $B=\{z\in H : \mathrm{Re}(z)\geq 1\}$. Παρατηρούμε ότι $B\subseteq A$ (βλέπε σχήμα 4.2).



σχήμα 4.2

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $g_H(z) = z - 3$ είναι ισομετρία του Υπερβολικού επιπέδου H.

Τότε το A είναι υποσύνολο του $g_H(B) = \{z \in H : \mathrm{Re}(z) \geq -2\}$ (βλέπε σχήμα 4.3)



σχήμα 4.3

Συνεπώς έχουμε ότι $A \leq B$ και $B \leq A$. Δεν υπάρχει όμως ισομετρία f ώστε $f(A) = B$ διότι το B είναι συνεκτικό σύνολο ενώ το A δεν είναι.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο μετασχηματισμός Moebius $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ με $\mathrm{Re}(z) > 0$ απεικονίζει σύμμορφα το Υπερβολικό επίπεδο H στο Υπερβολικό επίπεδο D, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τα σύνολα A, B και την ισομετρία g_H του H σε σύνολα A', B' και ισομετρία g_D του D ώστε να ισχύουν:

$$A' \leq B', \ B' \leq A' \text{ και } A' \not\approx B'$$

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε καλά σύνολα και καλές κλάσεις του Υπερβολικού επιπέδου D

Λήμμα 4.1

Αν $z, w \in D$ *τότε* $|1 - \bar{z}w| > 1 - |w|$

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή $z, w \in D$ ισχύει $|\bar{z}| < 1$ και $|w| < 1$.

Τότε

$$|\bar{z}||w| < |w| < 1.$$

Άρα

$$0 < 1 - |w| < 1 - |\bar{z}||w|$$

και επειδή $1-|\bar{z}||w|>0$ ισχύει ότι

$$|1-|\bar{z}||w||=1-|\bar{z}||w|$$

Από την τριγωνική ανισότητα ισχύει

$$|1-\bar{z}w|\geq|1-|\bar{z}||w||=1-|\bar{z}||w|>1-|w|$$

δηλαδή ισχύει ότι $|1-\bar{z}w|>1-|w|$

Πρόταση 4.1

Η Ευκλείδεια και η Υπερβολική μετρική, στο εσωτερικό D του μοναδιαίου δίσκου, είναι ισοδύναμες, δηλαδή δίνουν τα ίδια ανοικτά σύνολα.

<u>Απόδειξη</u>

Συμβολίζω ρ την ευκλείδεια απόσταση και d την υπερβολική. Από την (1) ισχύει

$$d=2\operatorname{arctanh}\frac{\rho}{|1-\bar{z}z_o|}$$

όπου $d=d_p(z,z_o)$, $\rho=|z-z_o|$

Αν $z_o\in D$ και $\varepsilon>0$ συμβολίζω

$S_d(z_o,\varepsilon)=\{z\in D:d(z,z_o)<\varepsilon\}$ και $S_\rho(z_o,\varepsilon)=\{z\in D:|z-z_o|<\varepsilon\}$.

Επιλύνοντας τον παραπάνω τύπο ως προς σ παίρνουμε την

$$\rho=|1-\bar{z}z_o|\tanh\frac{d}{2}\ (2)$$

και επειδή $|\bar{z}|<1$, $|z_o|<1$ ισχύει

$$|1-\bar{z}z_o|\leq 1+|\bar{z}z_o|=1+|\bar{z}||z_o|<2$$

Τότε η σχέση (2) γίνεται

$$\rho<2\tanh\frac{d}{2}$$

Υποθέτοντας ότι $d<\varepsilon$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η $y=\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$\rho<2\tanh\frac{\varepsilon}{2}$$

Τότε για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta=2\tanh\frac{\varepsilon}{2}>0$ τέτοιο ώστε

$$S_\rho(z_o,\delta)\subseteq S_d(z_o,\varepsilon)\ (3)$$

Έστω τώρα ένα $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho = |z - z_o| < \varepsilon$.

Από το λήμμα 4.1 έχουμε ότι

$$|1 - \bar{z}z_o| > 1 - |z_o| > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{|1 - \bar{z}z_o|} < \frac{2}{1 - |z_o|}$$

κι από την (1) και τη μονοτονία της συνάρτησης $y = \operatorname{arctan h} x$ έχουμε

$$d = 2\operatorname{arctanh}\frac{\rho}{|1 - \bar{z}z_o|} < 2\operatorname{arctanh}\frac{\rho}{1 - |z_o|} < 2\operatorname{arctanh}\frac{\varepsilon}{1 - |z_o|}$$

δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = 2\operatorname{arctanh}\frac{\varepsilon}{1 - |z_o|} > 0$ ώστε

$$S_d(z_o, \delta) \subseteq S_\rho(z_o, \varepsilon) \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) και κριτήριο του Hausdorff προκύπτει ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 4.2

Έστω $A \subseteq D$. Αν το A είναι φραγμένο ως προς την Υπερβολική μετρική τότε θα είναι φραγμένο κι ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Δεν ισχύει το αντίστροφο.

<u>Απόδειξη</u>

Αφού το A είναι φραγμένο, τότε $\delta_d(A) = k < \infty$. Δηλαδή για κάθε $z, w \in A$ ισχύει

$$\operatorname{arctanh}\frac{|z - w|}{|1 - \bar{z}w|} \le k$$

Επιλύνοντας ως προς $|z - w|$ προκύπτει

$$|z - w| \le k'|1 - \bar{z}w| \text{ με } k' = \tanh k$$

Επειδή $|1 - \bar{z}w| \le 1 + |\bar{z}w| < 2$ έχουμε ότι

$$|z - w| \le 2k' \text{ για κάθε } z, w \in D$$

Άρα το A είναι φραγμένο κι ως προς την Ευκλείδεια μετρική.

Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι ενώ το σύνολο $D^+ = \{z \in D : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ είναι φραγμένο ως προς την Ευκλείδεια μετρική, δεν ισχύει το ίδιο κι ως προς τη Υπερβολική διότι αν $z \to i$ τότε $\frac{|z - w|}{|1 - \bar{z}w|} \to 1$ για κάθε $w \in D^+$. Οπότε

$$\lim_{z\to i} d_p\left(z,w\right) = \lim_{z\to i} \operatorname{arctanh} \frac{\left|z-w\right|}{\left|1-\bar{z}w\right|} = \lim_{u\to 1} \operatorname{arctanh} u = +\infty$$

Άρα όχι φραγμένο ως προς την Υπερβολική μετρική.

Πόρισμα 4.1

Αν A είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του D ως την Υπερβολική μετρική, τότε είναι και συμπαγές.

Απόδειξη

Επειδή οι μετρικές είναι ισοδύναμες και το A είναι κλειστό ως προς την Υπερβολική μετρική, τότε είναι κλειστό κι ως προς την Ευκλείδεια. Επίσης επειδή είναι φραγμένο ως προς την Υπερβολική μετρική τότε είναι και ως προς την Ευκλείδεια. Άρα το A είναι κλειστό και φραγμένο ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Τότε όμως είναι και συμπαγές. Η συμπάγεια όμως, ως τοπολογική ιδιότητα, διατηρείται από ισοδύναμες μετρικές άρα το A είναι συμπαγές κι ως προς την Υπερβολική μετρική.

Πρόταση 4.3

Στο D, κάθε συμπαγές, κάθε ανοικτό και φραγμένο, η ένωση ή η τομή συμπαγούς με ανοικτό και φραγμένο καθώς και τα συμπληρώματα αυτών, είναι ισχυρά καλά σύνολα της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Απόδειξη

Η απόδειξη για τα συμπαγή είναι ανάλογη της πρότασης 3.6

Επίσης, επειδή κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Υπερβολικού επιπέδου D είναι συμπαγές, τότε και τα υπόλοιπα αποδεικνύονται όπως ακριβώς αποδεικνύονται και στο Ευκλείδειο επίπεδο.

Πρόταση 4.4

Αν περιοριστούμε στα σχήματα που περιέχονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, τότε η κλάση $F \cup W$ της πρότασης 3.12 αποτελεί καλή κλάση του Υπερβολικού επιπέδου.

Απόδειξη

Άμεση από τον ορισμό και την πρόταση 4.3.

Τέλος, όπως και στο Ευκλείδειο επίπεδο, αποδεικνύεται ότι τα κλειστά, τα συνεκτικά, τα φραγμένα, τα συνεκτικά και φραγμένα, τα κυρτά, τα κυρτά και φραγμένα σύνολα δεν είναι καλά σύνολα ούτε στην Υπερβολική Γεωμετρία.

4.2 Ελλειπτική Γεωμετρία

Ως μοντέλο Ελλειπτικής Γεωμετρίας θα χρησιμοποιήσουμε την επιφάνεια S^+ του άνω ημισφαιρίου της σφαίρας του Riemann δηλαδή:

$$S^+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

με την παραδοχή ότι δυο αντιδιαμετρικά σημεία του ισημερινού ταυτίζονται δηλαδή τα σημεία $a(x, y, 0) \in S^+$ και $a(-x, -y, 0) \in S^+$ αποτελούν το ίδιο σημείο $\overline{a}$.

Οι ευθείες του μοντέλου είναι οι τομές της S^+ με επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας οπότε η απόσταση μεταξύ δυο σημείων του Ελλειπτικού Επιπέδου ορίζεται ως εξής:

Αν $a, b \in S^+$ τότε

$$d_s(a, b) = \arccos\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|$$

με $\vec{a} \cdot \vec{b}$ το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Η d_s στο εξής θα αποκαλείται Ελλειπτική Μετρική.

Ορισμός 4.3

Δυο επίπεδα σχήματα S_1 και S_2 του Ελλειπτικού επιπέδου S^+, είναι γεωμετρικά ίσα όταν υπάρχει ισομετρία[9] *$f : S^+ \to S^+$ ώστε $f(S_1) = S_2$. Τότε θα συμβολίζουμε $S_1 \approx S_2$*

Ορισμός 4.3

Για δυο επίπεδα σχήματα S_1 και S_2 του Ελλειπτικού επιπέδου S^+, θα λέμε ότι το S_1 είναι μικρότερο ή ίσο του S_2 όταν ισομετρία f ώστε $f(S_1) \subseteq S_2$. Τότε θα συμβολίζουμε $S_1 \leq S_2$.

[9] ως προς την Ελλειπτική μετρική d_s

Οι ορισμοί **καλού συνόλου**, **ισχυρά καλού συνόλου** και **καλής κλάσης** στην Ελλειπτική Γεωμετρία είναι ανάλογοι με αυτούς της Ευκλείδειας και Υπερβολικής.
Η σχέση "$\leq$" είναι αυτοπαθής και μεταβατική αλλά όχι εν γένει αντισυμμετρική, όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια..

Πριν αποδείξουμε ότι η "$\leq$" δεν είναι αντισυμμετρική πρέπει να επισημάνουμε τα εξής σημαντικά για το Ελλειπτικό επίπεδο:
α) Οι ευθείες έχουν πεπερασμένο μήκος π
β) Το Ελλειπτικό επίπεδο δεν έχει προσανατολισμό, είναι μια μονόπλευρη κλειστή επιφάνεια (τέτοια επιφάνεια είναι και η ταινία του Moebius). Γι αυτό δεν έχει νόημα να μιλάμε για ημιεπίπεδα, ημιευθείες και ότι άλλο ορίζεται μέσω αυτών. Άρα τα παραδείγματα 3.1, 3.2, και 3.3 δεν μπορούν να υλοποιηθούν στην Ελλειπτική Γεωμετρία.

Ισχυρισμός

Η απεικόνιση $T : S^+ \to S^+$ *με* $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos 2\omega & -\sin 2\omega & 0 \\ \sin 2\omega & \cos 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *είναι ισομετρία του Ελλειπτικού επιπέδου* S^+.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $a(x_1, y_1, z_1)$ και $b(x_2, y_2, z_2)$ τότε

$T(\vec{a}) = (x_1 \cos\omega - y_1 \sin\omega, x_1 \sin\omega + y_1 \cos\omega, z_1)$,

$T(\vec{b}) = (x_2 \cos\omega - y_2 \sin\omega, x_2 \sin\omega + y_2 \cos\omega, z_2)$

και το εσωτερικό γινόμενο $T(\vec{a}) \cdot T(\vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Άρα $d_s(T(a), T(b)) = \arccos\left|T(\vec{a}) \cdot T(\vec{b})\right| = \arccos\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| = d_s(a,b)$

Η ισομετρία αυτή αντιστοιχεί σε στροφή με κέντρο το βόρειο πόλο $N(0,0,1)$ κατά γωνία 2ω.

Παράδειγμα 4.3

Έστω τα σημεία $a_k\left(\frac{1}{2}\cos k\omega, \frac{1}{2}\sin k\omega, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ της επιφάνειας S^+.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\vec{a}_k \vec{a}_{k+1} = \frac{1}{4}\cos\omega + \frac{3}{4}$ ανεξάρτητο του k.

Οπότε $d_s\left(a_k, a_{k+1}\right) = r$ σταθερή για $k = 0,1,2,...$

Θεωρώ τα σχήματα $A = \left\{a_k : k = 0,1,2,3,...\right\}$ και $B = A \setminus \left\{a_1\right\}$.

Επειδή $B \subseteq A$ ισχύει ότι $B \leq A$

Για την παραπάνω ισομετρία T εύκολα διαπιστώνουμε ότι $T\left(a_k\right) = a_{k+2}$ οπότε ισχύει $T\left(A\right) = \left\{a_k : k = 2,3,...\right\} \subseteq B$ δηλαδή ισχύει ότι $A \leq B$.

Τέλος αν υπήρχε ισομετρία, ως προς την Ελλειπτική Μετρική, $f : S^+ \to S^+$ ώστε $f\left(A\right) = B$ τότε με παρόμοιο τρόπο όπως και στο παράδειγμα 3.4 καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η σχέση $"\leq"$ δεν είναι διάταξη ούτε στην Ελλειπτική Γεωμετρία .

Πρόταση 4.5

Το S^+ είναι συμπαγές (ως προς την Ελλειπτική Μετρική)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\left\{u_n\right\} \subseteq S^+$.

Η $\left\{u_n\right\}$ είναι φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^3$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\left\{u_{k_n}\right\}$ με $u_{k_n} \to u \Leftrightarrow \left(x_{k_n}, y_{k_n}, z_{k_n}\right) \to \left(x, y, z\right)$, και μάλιστα $u \in S^+$ αφού είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Τότε $d_s\left(u_{k_n}, u\right) = \arccos\left|\vec{u}_{k_n} \cdot \vec{u}\right| \to \arccos\left|u \cdot u\right| = \arccos 1 = 0$

Επειδή κάθε (φραγμένη) ακολουθία του S^+ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε είναι συμπαγές.

Πόρισμα 4.2

Κάθε κλειστό υποσύνολο του S^+ είναι συμπαγές.

Πρόταση 4.6

Στο S^+, κάθε κλειστό και κάθε ανοικτό σύνολο είναι ισχυρά καλό σύνολο της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

<u>Απόδειξη</u>

Κάθε κλειστό σύνολο είναι συμπαγές στο S^+, άρα είναι και ισχυρά καλό. Τότε όμως και το συμπλήρωμά του θα είναι επίσης ισχυρά καλό, άρα και κάθε ανοικτό σύνολο είναι ισχυρά καλό.

Πρόταση 4.7

Αν Α ανοικτό και Κ κλειστό υποσύνολο του Ελλειπτικού Επιπέδου τότε το σύνολο $A \cup K$ *είναι ισχυρά καλό.*

Απόδειξη

Όπως και στην πρόταση 3.9

Πόρισμα 4.3

Αν Α ανοικτό και Κ κλειστό υποσύνολο του Ελλειπτικού Επιπέδου τότε το σύνολο $A \cap K$ *είναι ισχυρά καλό.*

Απόδειξη

Το σύνολο $A^c \cup K^c$ είναι ισχυρά καλό σύμφωνα με την πρόταση 4.7

Τότε θα είναι ισχυρά καλό και το συμπλήρωμά του: $\left(A^c \cup K^c\right)^c = A \cap K$

Παρατήρηση

Στο Ελλειπτικό επίπεδο τα κυρτά και τα συνεκτικά σύνολα δεν είναι ισχυρά καλά. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σχήμα ανάλογο με αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του παραδείγματος 3.4. Το ανάλογο του ανοικτού δίσκου είναι το σύνολο $\left\{a \in S^+ : d\left(a, N\right) < \frac{\pi}{6}\right\}$ (όπου N ο βόρειος πόλος της σφαίρας) που αντιπροσωπεύει το άνω τμήμα της σφαίρας που αποκόπτει ένα επίπεδο κάθετο στον ημιάξονα Oz και σε απόσταση $\cos\frac{\pi}{6}$ από την αρχή Ο. Στο σύνολο αυτό επισυνάπτω και το σύνολο Α του παραδείγματος 4.3 που είναι πυκνό υποσύνολο του συνόρου του $\left\{a \in S^+ : d\left(a, N\right) < \frac{\pi}{6}\right\}$ οπότε το $A \cup \left\{a \in S^+ : d\left(a, N\right) < \frac{\pi}{6}\right\}$ είναι ένα κυρτό και συνεκτικό σύνολο του Ελλειπτικού επιπέδου. Όπως και στο παράδειγμα 3.4 αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο ότι το $A \cup \left\{a \in S^+ : d\left(a, N\right) < \frac{\pi}{6}\right\}$ δεν είναι ισχυρά καλό σύνολο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ανοικτά ερωτήματα

Ένα βασικό αναπάντητο ερώτημα είναι αν υπάρχει καλό σχήμα που να μην είναι ισχυρά καλό ή αν οι δυο ορισμοί του καλού και του ισχυρά καλού σχήματος είναι ισοδύναμοι.

Άλλο ερώτημα είναι αν η άλγεβρα που παράγεται από το $X = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : A$ συμπαγές ή ανοικτό και φραγμένο$\}$ αποτελείται μόνον από ισχυρά καλά σύνολα.

Τέλος, επειδή στο $\Omega = \{$σύνολο καλών κλάσεων$\}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του λήμματος του Zorn[10] θα ήταν ενδιαφέρον να βρεθούν μεγιστικές κλάσεις.

[10] Κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Ω είναι ένα σύνολο καλών κλάσεων $Y = \{ F_i ,\ i \in I \}$ ώστε για κάθε $i, j \in I$ να ισχύει $F_i \subseteq F_j$ ή $F_j \subseteq F_i$. Προφανώς η **καλή** κλάση $\bigcup_{i \in I} F_i$ είναι ένα άνω φράγμα του Y.

Βιβλιογραφία

1. **Δ. Αναπολιτάνος**: *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών Δ΄έκδοση βελτιωμένη*, εκδόσεις Νεφέλη.
2. **Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σίδερης**: *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ.
3. **Θ. Κυβεντίδη**: *Ασκήσεις Τοπολογίας* , Θεσσαλονίκη 1977.
4. **Δ. Λάππας**: *Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών*, Φάκελος μαθήματος εαρινό εξάμηνο 2005.
5. **Β. Νεστορίδης**: *Περί Ανισότητας Γεωμετρικών Σχημάτων*, πρακτικά διάλεξης στο Τμήμα Μαθηματικών (10-11-2004).
6. **Ε. Σταμάτη**: *Ευκλείδου Γεωμετρία*, Τόμος Ι ΟΕΣΒ 1975.
7. **Χ. Στράντζαλος**: *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Μέρος Πρώτο)*, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
8. **Χ. Στράντζαλος**: *Εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο Λύκειο*, Συνοπτικές σημειώσεις για τους συμμετέχοντες στο σεμινάριο Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. εαρινό εξάμηνο 2005.
9. **E.T.Bell**: *Οι Μαθηματικοί*, ΠΕΚ.
10. **C. Boyer – U. Merzbach**: *Η Ιστορία των Μαθηματικών 2η έκδοση*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού.
11. **C. Caratheodory**: *Theory of Functions of a complex variable*, Chelsea Publishing Company New York.
12. **L. Carothers**: *Real Analysis*, Cambridge University Press.
13. **J. Dugunji**: *Topology*, Allyn and Bacon Inc. Boston.
14. **Sir Thomas L. Heath**: *Euclid the thirteen books of the elements*, vol.1 2nd edition unabridged, Dover.
15. **E. Hlawka, J. Schoibengeier, R. Taschner**: *Geometric and Analytic Number Theory*, Springer – Verlag.
16. **L. Kuipers, H. Niederreiter**: *Uniform distribution of sequences*, Wiley N.Y.
17. **E. Moise**: *Elementary Geometry from an advanced standpoint*, Addison – Wesley.
18. **E. G. Rees**: *Notes on Geometry*, Springer – Verlag.
19. **D. J. Struik**: *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλου.