ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ- ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ& ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό –Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ »

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Διπλωματική εργασία για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

ΓΡΑΒΒΑΝΗ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΑΓΑΤΣΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γαγάτσης Αθ. (Επιβλέπων Καθηγητής)	……..	…….
2) Σπύρου Π.	……..	……..…
3) Φαρμάκη Β.	……..	……...…

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να εξερευνήσουμε ορισμένες πτυχές της έννοιας της συνάρτησης που είναι θεμελιώδης και ενοποιητική στα μαθηματικά. Διαλέξαμε το θέμα αυτό, διότι η συνάρτηση είναι μια πολύ σημαντική έννοια, την οποία αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε όλη τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αφού η διδασκαλία της άλγεβρας και της ανάλυσης έχουν ως επίκεντρο τις συναρτήσεις.

Στο πρώτο μέρος, καταγράφουμε μια επιστημολογική ανάλυση και ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Επίσης, η μελέτη των μαθησιακών δυσκολιών στην κατανόηση τόσο της έννοιας αυτής όσο και των διαφόρων μορφών αναπαράστασής της υπηρετούν ως εργαλεία και έμπνευση αυτή την εργασία. Στόχος είναι η ανάλυση της έννοιας της αναπαράστασης σε σχέση με τη μάθηση, τη διδασκαλία και την ανάπτυξη των μαθηματικών.

Ακολουθεί, στο δεύτερο μέρος, η ερευνητική εργασία, που έχει ως αντικείμενο τη σχέση των αναπαραστάσεων στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές. Βασική επιδίωξη είναι να διαφανεί ο ουσιαστικός ρόλος που διαδραματίζει η μετάφραση από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Θεωρώ αναγκαίο να εκφράσω τις ευχαριστίες μου, ιδιαίτερα στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. **Α. Γαγάτση**, Καθηγητή του Τμήματος Επιστημών Αγωγής Πανεπιστημίου Κύπρου, του οποίου η βοήθεια ήταν καθοριστική για την υλοποίηση της παρούσας εργασίας, στα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. **Π. Σπύρου**, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ και κ. **Β. Φαρμάκη**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ, καθώς επίσης και στις Αρετή Παναούρα και Ιλιάδα Ηλία, διδάκτορες Πανεπιστημίου Κύπρου, για τη συνεργασία τους στη συγγραφή άρθρου για το 30^{ο} συνέδριο PME και για Διεθνές Περιοδικό Μαθηματικής Παιδείας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους μου κ. Ν. Τζίφα, κ. Γ. Καραγιαννάκη, κ. Α. Κωνσταντάρα, κ. Β. Ογλάνη, κ. Π. Βλάχο καθώς και την Ε. Γραββάνη για τη συμβολή τους στη διαμόρφωση αυτής της εργασίας και τη βοήθειά τους στην παρούσα έρευνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ……. 4

1ο ΜΕΡΟΣ: Θεωρητικό Πλαίσιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1. Θεωρητική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης …… 8

1.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή & Επιστημολογική διάσταση της έννοιας της συνάρτησης 8

1.2 Το ζήτημα της διδακτικής μεταφοράς της συνάρτησης 12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2. Η σημασία των αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών 18

2.1 Η έννοια της αναπαράστασης 18

2.2 Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών 23

2.3 Έρευνες και Θεωρίες για τις αναπαραστάσεις 27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3. Αναπαραστάσεις και Συναρτήσεις 34

3.1 Η σημασία των αναπαραστάσεων στην έννοια της συνάρτησης 34

3.2 Αλλαγή πεδίου αναπαράστασης της συνάρτησης 43

3.2.1 Η σύνδεση μεταξύ γραφικής και αλγεβρικής αναπαράστασης 49

2ο Μ Ε Ρ Ο Σ: Η Έ ρ ε υ ν α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4. Θέμα: «Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων και ο μετασχηματισμός τους από μαθητές Λυκείου» 54

4.1 Το πειραματικό πλαίσιο της έρευνας 54

4.1.1 Ο στόχος της έρευνας 54

4.1.2 Οι υποθέσεις της έρευνας 54

4.1.3 Τα υποκείμενα της έρευνας 55

4.1.4 Οι μεταβλητές της έρευνας 56

4.1.5 Τα έργα 57

4.1.6 Ανάλυση δεδομένων 59

4.2 Αποτελέσματα 60

4.2.1 Ποσοστά επιτυχίας 60

4.2.2 Αποτελέσματα βασισμένα στο Διάγραμμα Ομοιότητας 69

4.2.3 Αποτελέσματα βασισμένα στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 73

4.3 Συμπεράσματα – Συζήτηση 76

4.4 Η επαναληπτική έρευνα 88

4.5 Διδακτικές συνέπειες 95

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 96

1. Το δοκίμιο της έρευνας 97
2. Οι απαντήσεις των μαθητών 101
3. Ανάλυση δεδομένων επαναληπτικής έρευνας 105

ΑΝΑΦΟΡΕΣ 107

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της ανθρώπινης σκέψης είναι η ικανότητα έκφρασης μιας ιδέας με πολλούς τρόπους. Σύμφωνα με τους Gagatsis, Demetriou, Afantiti, Michaelidou, Panaoura, Shiakali & Cristoforides (1999), χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το γεγονός ότι παρουσιάζεται ένα σχέδιο ή μια εικόνα ως επεξήγηση μιας φράσης ή ενός κειμένου, χωρίς να παρέχεται οποιαδήποτε εξήγηση.

Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, η οποία είναι μια από τις εκφράσεις τις ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους. Κατ' επέκταση, η Μαθηματική Εκπαίδευση ως αναπόσταστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Kaput (1987a), τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε άλλη. «Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση» (Kaput, 1987a. Στου Γαγάτση «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ. 2).

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους (Kaput, 1985; 1987a; 1987b. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.2). Οι πρακτικοί λόγοι αφορούν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης και ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα μαθηματικά. Με τον όρο μετάφραση εννοούμε «τις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη, για παράδειγμα, από μια εξίσωση σε μια γραφική παράσταση» (Janvier, 1987a. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.2). Οι θεωρητικοί λόγοι αφορούν στην ανάγκη ύπαρξης ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση των

αναπαραστάσεων. «Το θεωρητικό πλαίσιο θεωρείται ότι παρέχει ένα γλωσσικό-σημειωτικό συμπλήρωμα στην καθαρά γνωστική προσέγγιση των πιο πάνω προβλημάτων» (Kaput, 1987a. Στου Γαγάτση «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ.2).

Τα παιδιά από μικρή ηλικία έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στόχος της διδασκαλίας είναι η σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και τέλος, την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Dufour – Janvier, 1987; Seeger, 1998. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.3). Η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.3).

Οι αναπαραστάσεις είναι «σύμφυτες» με τα μαθηματικά (Dufour – Janvier et al, 1987, σ.110). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. «Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής τους» (Kalchman & Case, 1998, σ.7). Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους: με πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση, λεκτική έκφραση. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται.

Στην εργασία αυτή εξετάζεται η έννοια της συνάρτησης σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και η μετάφραση από το ένα πεδίο έκφρασης

στο άλλο. Μια βασική υπόθεση αφορά στο γεγονός ότι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επιτυχία σε έργα άμεσης μετάφρασης και την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία απαιτούν τη μετάφραση ανάμεσα στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης. Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην ικανότητα μεταφοράς των μαθητών από αλγεβρική σε γεωμετρική αναπαράσταση συνάρτησης και αντίστροφα, καθώς και την προσέγγιση που ακολουθούν (αλγεβρική ή γεωμετρική) σε προβλήματα συναρτησιακού τύπου.

Με βάση τους παραπάνω στόχους η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά στο θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο περιγράφει το θεμελιώδη ρόλο που έχουν διαδραμματίσει οι πολλαπλές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών γενικά, ενώ στο δεύτερο, παρουσιάζεται η έρευνα, γίνεται αναφορά στις υποθέσεις και στα υποκείμενα της έρευνας, περιγράφονται τα έργα, ο τρόπος διεξαγωγής της έρευνας και οι στατιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για την επεξεργασία των δεδομένων και τέλος, παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν με βάση τη στατιστική ανάλυση για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές και για τις παρερμηνείες τους στην έννοια αυτή και υπογραμμίζεται η σημασία της σύνδεσής της με τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

1ο ΜΕΡΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή & Επιστημολογική διάσταση της έννοιας της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης «είναι από τις πιο στοιχειώδεις στην ανθρώπινη σκέψη» (Hamley, 1934 σ.5), είναι κεντρική στην Επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της και ανάγεται στη γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων, η οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι τόσο αρχαία όσο και τα ίδια τα Μαθηματικά.

Μια προδρομική μορφή της έννοιας της συνάρτησης βρίσκεται στους πίνακες των Βαβυλωνίων, που χρονολογούνται το 2000 π.Χ. και δείχνουν τη σχέση των αριθμών με τα τετράγωνά τους ή τις τετραγωνικές τους ρίζες. Όμως η κατασκευή αριθμητικών πινάκων δεν αρκεί για να γεννηθεί μια θεωρητική έννοια και ιδιαίτερα η έννοια της συνάρτησης. Η αντίληψη μιας πολύ γενικής αντιστοιχίας σε τιμές (π.χ. ημερομηνίας) και άλλων τιμών (γωνιακών θέσεων πλανητών) φαίνεται ότι υπάρχει κατά τους Ελληνιστικούς χρόνους στον πίνακα ημιτόνων στην «Αλμαγέστη» του Πτολεμαίου το 165 π.Χ.

Κατά την περίοδο των αρχαίων Ελλήνων, κάνει την εμφάνισή της μια ιδιαίτερη διαχείριση των μαθηματικών αντικειμένων, η οποία θα υπερβεί κατά πολύ εκείνη των απλών υπολογισμών και θα δώσει ουσιαστικά προοπτική στην απόδειξη και την ακρίβεια που θα κάνουν τα Μαθηματικά. Η ιδέα του λόγου, που έγινε βασικό διανοητικό εργαλείο της διαλεκτικής και της Γεωμετρίας, είναι γνωστό ότι δεν παρέπεμπε άμεσα στη μέτρηση (Szabo, 1973; Mueler, 1981), αλλά αποτέλεσε ένα εργαλείο προς σύγκριση, απαραίτητο στις αποδείξεις. Οπωσδήποτε, η σχέση διαμέτρου και περιφέρειας ή εμβαδού κύκλου αποτελούν πρώιμες μορφές συναρτησιακού συσχετισμού, αλλά ένας τέτοιος συνθετικός ορισμός δεν στάθηκε εκείνη την εποχή αναγκαίος (Boyer, 1949). Βέβαια, η οπτική με την οποία έβλεπαν τις παραπάνω σχέσεις ήταν καθαρά γεωμετρική, διότι αφενός η θεμελιώδης αλγεβρική έννοια του αριθμού δεν είχε αναπτυχθεί και έτσι, υποκαθίσταται

παντού από τη γεωμετρική έννοια του λόγου και αφετέρου, απουσίαζε ένα αλγεβρικό συμβολικό σύστημα.

Αν και θα ανέμενε κανείς ότι οι μαθηματικοί θα απομόνωναν σύντομα την έννοια της συνάρτησης, αυτό δεν συνέβη. Η εμμονή στη μελέτη των μαθηματικών μέσα από την οπτική της «στατικής» Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αποτέλεσε τροχοπέδη για την ανάπτυξη της συνάρτησης ως αυτόνομο αντικείμενο. Στην ουσία, για τους επόμενους αιώνες, τα μαθηματικά στηρίζονται σε μια γεωμετρική άλγεβρα.

Κατά την Αναγέννηση αμφισβητούνται οι αυθεντίες, ξεπερνιούνται τα επιστημολογικά εμπόδια των αρχαίων, σταδιακά απελευθερώνεται η επιστήμη από τις παγιωμένες αντιλήψεις του παρελθόντος, καθίσταται ο χρόνος ως ομογενές μέγεθος στις μετρήσεις και μπαίνουν οι βάσεις της μαθηματικής κινητικής (Koyre, 1994). Η γεωμετρία γίνεται αναλυτική, η μαθηματική μελέτη της κίνησης αποτελεί καθαυτό επίτευγμα της Αναγέννησης και είναι εκείνη που θα οδηγήσει στις δυναμικές ιδέες του Απειροστικού Λογισμού, όπως της παραγώγου και του διαφορικού, οπότε και αναπόφευκτα θα προκύψει η ανάγκη νέων μαθηματικών εργαλείων (Boyer, 1949).

Διάφορες επεξεργασίες, που θα διαρκέσουν τρεις και πλέον αιώνες μετά την Αναγέννηση και προσιδιάζουν στην ιδέα της συνάρτησης, θα κάνουν την εμφάνισή τους. Παράλληλα, με την ανάπτυξη ενός αλγεβρικού συμβολικού συστήματος από τον Vieta, αλλάζει η οπτική από γεωμετρική σε αλγεβρική. Το 17^{ο} αιώνα, κεντρικό θέμα ήταν η μελέτη της κίνησης, ξεκινώντας από τις μελέτες του Kepler για τους πλανήτες και φθάνοντας στις μελέτες του Huygen’s για το εκκρεμές. Οι συναρτησιακές σχέσεις ήταν εκφρασμένες λεκτικά στη γλώσσα της αναλογίας. Πήρε πολύ χρόνο μέχρι η ανάλυση να ξαναδιατυπωθεί στην αλγεβρική και συμβολική γλώσσα με τις καμπύλες εκφρασμένες με τύπους και εξισώσεις. Όταν αυτό έλαβε χώρα, η προσοχή επικεντρώθηκε στις σχέσεις μεταξύ των συμβόλων. Για λόγους ορολογίας, χρειάστηκε να αναπαρασταθούν τα ποσά που εξαρτώνταν από άλλα ποσά με τύπους και εξισώσεις. Το 1718 ο Johann Bernoulli έδωσε έναν αρχικό ορισμό της συνάρτησης μιας μεταβλητής «ως η ποσότητα που συντίθεται με κάποιο τρόπο από αυτή τη μεταβλητή και από σταθερές». Η φράση «συντίθεται με κάποιο τρόπο» δεν είχε εξηγηθεί, όμως, είχε πιθανόν ερμηνευτεί με έναν περισσότερο περιορισμένο τρόπο από ότι σήμερα. Βαθμιαία, στο πρώτο μισό του 18^{ου} αιώνα, η ανάλυση διαχωρίστηκε από τη γεωμετρική της προέλευση και η έννοια της

μεταβλητής, όπως είχε εφαρμοστεί στα γεωμετρικά αντικείμενα, αντικαστάθηκε με την έννοια της συνάρτησης ως αλγεβρικό τύπο (Selden, 1991).

Το 1734, ο Euler εισήγαγε το συμβολισμό f(x) από το function, – δεν πρέπει να μας διαφύγει ότι υπάρχει μια σύνδεση με αυτό που λέμε «λειτουργία» ή «διαδικασία» και την οποία προσπαθούμε να αποδώσουμε με την ιδέα της συνάρτησης (Cassiser, 1953) – και το 1747, ήταν ο πρώτος που έδωσε στη συνάρτηση έναν σαφή και κεντρικό ρόλο στο βιβλίο του Introduction in Analysis Infinitorum (Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση), όπου όρισε τη συνάρτηση «ως μια αναλυτική έκφραση που περιέχει οποιεσδήποτε μεταβλητές ποσότητες, σταθερές ποσότητες ή και αριθμούς» (Katz, 1993). Από τότε η έννοια της συνάρτησης έγινε κεντρική στην ανάλυση. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε την ιδέα της μεταβλητής που είναι εμφανής. Την εποχή εκείνη, η μεταβλητή ή η σταθερά δεν είναι παρά έκτακτα συνήθως γεωμετρικά μεγέθη κατά τη μελέτη καμπυλών (τετμημένες, τεταγμένες κ.λ.π.). Όμως, αυτή η αντίληψη, η αναφορά των γραμμάτων σε αντικείμενα που θεωρούνταν πραγματικά, όπως παρατηρεί ο Βασάκος (1995), δεν πρέπει να άρεσε στον Euler, γι'αυτό και η άποψή του για τη συνάρτηση εξελίχθηκε ακόμη περισσότερο μετά από τη διάσημη διαμάχη του με τους D'Alembert και Daniel Bernoulli σχετικά με το πρόβλημα των παλλόμενων χορδών. Έτσι, το 1775 προσπάθησε να διατυπώσει έναν ορισμό πιο αφηρημένο: «μια ποσότητα θα ονομαζόταν συνάρτηση μόνο όταν θα εξαρτιόταν από μια άλλη ποσότητα με έναν τέτοιο τρόπο ώστε, εάν η τελευταία ποσότητα αλλάζει η πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της» (Katz, 1993).

Ο 19^{ος} είναι η εποχή που κυριαρχεί το αίτημα της θεμελίωσης για τα Μαθηματικά (Ρουσόπουλος, 1985). Σε αυτό θα συμβάλλουν μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής, όπως οι Langrange, Legendre, Cauchy, Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, Peano, Frege κ.α. Ο Cauchy, που έδωσε το μαθηματικό ορισμό του ορίου ακολουθίας, προσπαθεί να ξεπεράσει και τις διαισθητικές δεσμεύσεις της έννοιας της συνάρτησης με μικρή όμως επιτυχία: «Όταν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν δίνεται η τιμή της μιας από αυτές, να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των άλλων, τότε συνήθως εννοούμε ότι αυτές οι μεταβλητές ποσότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω της μιας από αυτές και η οποία τότε παίρνει την ονομασία ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι απομένουσες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης

μεταβλητής είναι εκείνες που μπορούμε να ονομάσουμε συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής». Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Cauchy έχει ακόμη υπόψη του τις αναλυτικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς και διαφορίσιμες.

Τελικά, η μελέτη των σειρών Fourier και η έρευνα των συνθηκών, κάτω από τις οποίες μια σειρά συγκλίνει, οδήγησαν τον Dirichlet να δώσει το 1837, το γενικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης: «η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x, η οποία ορίζεται στο διάστημα $\alpha<x<\beta$, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνη τιμή της μεταβλητής y, ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας». Πρόκειται για μια αντιστοιχία που δε βασίζεται απαραίτητα σε κάποια αλγοριθμική εξάρτηση μεταξύ των x και y. Η γενική έννοια μιας συνάρτησης y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x ως αυθαίρετη αντιστοιχία, θα επιφέρει σημαντικούς μετασχηματισμούς στην ανάπτυξη της ανάλυσης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995).

Εκείνο ωστόσο που αποτελεί το μεγάλο βήμα του ορισμού αυτού σε σχέση με τους παλιότερους και δίνει μια άλλη επιστημολογική διάσταση, είναι η επιλογή από όλες τις σχέσεις εκείνων που εμπεριέχουν το συσχετισμό της μορφής **πολλά – ένα**, προσδίδοντας στην έννοια κάτι πιο ισχυρό από απλό συσχετισμό: εμφανίζεται ξεκάθαρα το **μονοσήμαντο** της τιμής y. Η συνάρτηση, στη μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στους υπολογισμούς. Στην ουσία πρόκειται για την εκτίμηση ενός μεγέθους y, η οποία όμως ανάγεται στην εκτίμηση ενός άλλου μεγέθους x μέσω μιας σχέσης. Το y έρχεται να αποτελέσει το στόχο, που επιδιώκεται να γνωρίζουμε την τιμή του, σε ένα πλαίσιο διαχείρισης, τη στιγμή που το x μας είναι άμεσα προσπελάσιμο. Μια μέτρηση ενός μεγέθους έχει πάντοτε μία τιμή. Με αυτή την οπτική θα λέγαμε ότι η συνάρτηση προσφέρεται ως εργαλείο, ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση ή και περιγραφή (Σπύρου & Κεϊσογλου, 2005).

Δημόσιες συζητήσεις μεταξύ πολλών διάσημων μαθηματικών περιλαμβανομένων και των Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Lebesgue και Borel έδωσαν ώθηση στη συνέχιση της ιστορικής εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης μέχρι το 1939 οπότε οι Bourbaki έδωσαν το συνολοθεωρητικό ορισμό της μέσω διατεταγμένων ζευγών (Kleiner, 1989; Kline, 1972).

Σύμφωνα με τον I. Lakatos, στο βιβλίο του «Αποδείξεις και Ανασκευές», η “αυστηρή” μορφή των εννοιών όπως η συνάρτηση, είναι η κατάληξη μιας διαδικασίας

από προβλήματα, ερωτήματα, εικασίες, απλοϊκούς ορισμούς, απόπειρες αποδείξεων, αναιρέσεις με αντιπαραδείγματα, επιστημονική διαμάχη, νέα ερωτήματα και νέες αναθεωρημένες εικασίες και αποδείξεις (Lakatos, 1978).

Η προσεκτική μελέτη της εξέλιξης των ορισμών αποκαλύπτει όχι μόνο την εξέλιξη και αυστηρότητα με την οποία αντιμετωπίστηκαν γενικότερα τα μαθηματικά σε κάθε περίοδο, αλλά και το επιστημολογικό εμπόδιο που αποτέλεσε η έννοια της συνάρτησης. Είναι λοιπόν αναμενόμενο, το εμπόδιο αυτό να εξελιχθεί σε γνωστικό.

Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε εν συντομία τα εξής: «Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα μέσα στην επιστήμη. Πρόκειται για μια σύνοψη και ενοποίηση πολλών, εν πρώτοις, διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων, που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν θεωρίες. Η λιτότητα του σημερινού συνολοθεωρητικού ορισμού, όπως τον ξέρουμε, δεν αποτελεί για τους μαθητές απλά ένα ξυράφι του Ochkam αλλά την έρημη ψυχρή κορυφή ενός παγόβουνου που κρύβει βαθιά την ιστορική πρακτική και εμπειρία που τη διαμόρφωσε» (Σπύρου & Γαγάτσης, 2004).

1.2 Το πρόβλημα της διδακτικής μεταφοράς της συνάρτησης

Εξαιτίας της ιστορικής συμπύκνωσης, που περιγράψαμε παραπάνω (Boyer, 1949; Βασάκος, 1995; Katz, 1993), η έννοια της συνάρτησης είναι αφηρημένη και παρουσιάζει δυσκολίες για τη διδακτική της μεταφορά (παρόλη την απλότητα και τη σαφήνεια του ορισμού της για τα κριτήρια ενός μαθηματικού). Στα διδακτικά εγχειρίδια παραθέτονται κατά συγκεχυμένο τρόπο οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στο νόημα της συνάρτησης, μέσα στη μακρόχρονη ιστορική της εξέλιξη. Η πολυπλοκότητα της έννοιας της συνάρτησης έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τους ενασχολούμενους με τη διδακτική των Μαθηματικών και έχει συντελέσει σε μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας (Freudenthal, 1983; Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992; Kalchman & Case, 1998; Βασάκος, 1995; Ασβεστά & Γαγάτσης 1995; Gagatsis & Christou, 2000).

Αν και η συνάρτηση είναι μια βασική δυναμική έννοια στο τελικό οικοδόμημα των μαθηματικών όπως διαμορφώθηκε από τους Bourbaki, αποδεικνύεται ότι είναι μια από τις πιο δύσκολες έννοιες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά. Οι μαθητές δυσκολεύονται να ερμηνεύουν διαγράμματα και να χειρίζονται σύμβολα όπως f(x), cos(x+α) κ.λ.π. Επίσης, συναντούν δυσκολία στο να συνδέσουν μεταξύ τους τις διαφορετικές παραστάσεις των συναρτήσεων: τύπους, γραφήματα, πίνακες τιμών, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων. Αυτό οφείλεται στα επίπεδα πολυπλοκότητας και στις πολυάριθμες υπό-έννοιες που συνδέονται με την έννοια αυτή, στην έλλειψη θεωρητικού πλαισίου, στη δυσκολία των θεωρητικών της μοντέλων και στους τρόπους διδακτικής μεταφοράς της στην τάξη.

Οι ερευνητές συνήθως αναζητούν τα επιστημολογικά εμπόδια, όπως αυτά μπορούν να προβλεφθούν από την ιστορική μελέτη της έννοιας και επιπλέον προτείνουν μεθόδους διδασκαλίας, που έχουν σα στόχο να ξεπεραστούν τα εμπόδια αυτά (Sierpinska, 1992). Μια άλλη αντιμετώπιση είναι εκείνη του Freudenthal (1983), που ασχολείται κυρίως με τις βιωμένες εμφανίσεις της έννοιας μέσω γλωσσικών μεταφορών, πρακτικών, φυσικών εμπειριών και εφαρμογών.

Δεν πρέπει να αγνοηθεί το γεγονός ότι μέσα στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας, έχουν γίνει προσπάθειες για την αναγωγή σε σωματικές κιναισθητικές εμπειρίες, που προκύπτουν δια μέσου των δράσεων των υποκειμένων και θα μπορούσαν να αποτελέσουν το βιωματικό υπόστρωμα, ώστε να γίνει κατανοητή μια τέτοια έννοια (Piaget et al, 1977). Όταν ζητηθεί από τους μαθητές να δώσουν ένα παράδειγμα συνάρτησης, στην πλειονότητά τους καταφεύγουν σε παραδείγματα 1-1. (Evagelidou et al, 2004). Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, καθόσον η έννοια της αντιστοιχίας 1-1 προσφέρεται άμεσα στο νου με τις πρώτες ιδέες απαρίθμησης. Ωστόσο, εκείνο που αναφύεται πιο δύσκολο είναι η ιδέα της συνάρτησης ως πολλά – ένα, καθώς προκύπτει ως μια αδικαιολόγητη προτίμηση από όλες τις σχέσεις που δίνονται ως υποσύνολα του καρτεσιανού γινομένου, εκείνων του τύπου: για τα ζεύγη (x, y_1), (x, y_2) να ισχύει $y_1=y_2$. Το γεγονός εμφανίζεται ως αυθαίρετος κανόνας για αποστήθιση. Έτσι, ο μαθητής έρχεται να γνωρίζει ότι το γράφημα μιας παραβολής αναπαριστά συνάρτηση, αλλά αν περιστραφεί κατά 90° παύει να αναγνωρίζεται ως τέτοια. Ο Piaget έχει αναζητήσει κιναισθητικές εμπειρίες, που να αποτελούν στοιχεία βίωσης του πολλά – ένα. Πολλές

διαφορετικές δράσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, π.χ. ένα σημείο το προσεγγίζω με πολλούς δρόμους (Chapman et al, 1988).

Είναι γενικά παραδεκτό ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο γίνεται σε μεγάλο βαθμό ξεκομμένη από τις εμπειρίες των παιδιών, με αποτέλεσμα οι έννοιες να μη βρίσκουν κάποιο προηγούμενο εννοιολογικό υπόστρωμα για να στηριχτούν. Συχνά, οι καλούμενες εφαρμογές από τη Φυσική, την Οικονομία ή άλλες επιστήμες προϋποθέτουν μια άλλη επιστημονική γνώση, που και εκείνη με τη σειρά της προϋποθέτει τα Μαθηματικά για να γίνει κατανοητή. Εκτός των άλλων, πραγματιστικές αναφορές είναι και εξεζητημένες, αφού, όπως αναφέρει ο Γαγάτσης, καμιά νοικοκυρά δε στήνει κάποια συνάρτηση για να ψωνίσει. Την ίδια στιγμή, αυτό που γίνεται πολύ λίγο είναι η αξιοποίηση των άμεσων βιωματικών και αδιαμεσολάβητων εμπειριών που προέρχονται από την επαφή μας με το φυσικό περιβάλλον, την αίσθηση της βαρύτητας, την πρόσληψη της συμμετρίας, της ομοιότητας ή της σταθερότητας των μορφών (Lappas & Spyrou, 2003; Watson et al, 2002; Nunez et al, 1999; Lakoff & Nunez, 2000).

Οι μαθητές ενίοτε, παγιδεύονται σε μια σειρά εμποδίων που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών ή μεταφορών γλωσσικών συνειρμών, που προσλαμβάνονται κατά κυριολεξία, όπως για παράδειγμα την αναζήτηση μιας χρονικής μεταβλητής πίσω από τους όρους της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής. Αυτό αποτέλεσε ένα ισχυρό επιστημολογικό εμπόδιο, όπως είδαμε στις ιστορικές μας αναφορές, καθώς η μελέτη της κίνησης στάθηκε αποφασιστικός παράγοντας στην ανάδειξη της έννοιας.

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα ακολουθούν διάφορους δρόμους αποκαλύπτοντας στους μαθητές κομμάτια ενός παζλ, που συγκροτούν ένα αόριστο συνοθήλευμα αποσπασματικών πληροφοριών, τυφλών απομνημονεύσεων, διάσπαρτων συνιστωσών, που ενδεχομένως ενοποιούνται σε πανεπιστημιακό επίπεδο σπουδών που έχουν να κάνουν με τις θετικές επιστήμες: τύποι, γραφήματα, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων, ένα αόριστο σχήμα συνειρμών, όπως παρατηρεί και η Sierpinska.

Η Sierpinska, όπως αναφέραμε, αναζητά τα διάφορα εμπόδια που εμφανίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία και τα συσχετίζει με την ιστορική ή τη διδακτική εξέλιξη της έννοιας, προτείνοντας μια διδακτική πορεία που θα έχει επίγνωση αυτών των εμποδίων και θα υπογραμμίζει το ξεπέρασμά τους. Η τεχνική αυτή θυμίζει την πορεία

προς τη γενίκευση μέσω αντιπαραδειγμάτων που προτείνει ο Lakatos (1996). Η πορεία αυτή θα εμφανίσει στο τέλος τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας αφού έχει διδάξει όλες τις επί μέρους δυνατές εμφανίσεις του μέσα στην εμπειρία των μαθητών.

Μερικά από τα εμπόδια που διακρίνει η Sierpinska είναι:

- Το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα και χωρίς να επικεντρώνεται στο πως τα πράγματα αλλάζουν, παραγνωρίζοντας το τι αλλάζει, δηλαδή τις παραμέτρους της αλλαγής. Μια τέτοια στάση βλέπει κατά ποιοτικό τρόπο τον κόσμο και δεν στέκεται στις ποσοτικές σχέσεις.
- Η σκέψη που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο χωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες οδηγεί συχνά στην ιδέα της εξίσωσης και όχι στη συνάρτηση.
- Η συμμετρία μεταξύ των x και y. Στην εξίσωση της έλλειψης ή του κύκλου έχουμε τις σχέσεις των x και y, οι οποίες εμφανίζονται κατά έναν ισοδύναμο και συμμετρικό τρόπο. Δηλαδή, δεν έχουμε να κάνουμε με ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή και η σειρά τους είναι αδιάφορη. Ο χειρισμός συμβόλων στην άλγεβρα είναι συχνά αδιαφοροποίητος στο αν λύνει κάποιος μια εξίσωση για x ή για y, ακόμη δε για σταθερές ή μεταβλητές.
- Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.
- Η διάκριση μεταξύ της χρήσης του αριθμού και της ποσότητας. Αυτό εν γένει οφείλεται σε μια περιορισμένη κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Η εντύπωση ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν αναλυτικό τύπο.
- Το πρόβλημα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης, συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κ.λ.π.
- Η χρονικότητα της μεταβλητής, που αναφέραμε παραπάνω.
- Άλλα εμπόδια, όπως η εύκολη εντύπωση της συνάρτησης ως 1-1 και η δυσκολία της κατανόησης του πολλά – ένα.

Με βάση τις παραπάνω διακρίσεις της Sierpinska, μια ενδεχόμενη διδασκαλία της συνάρτησης είναι εκείνη που θα ξεκινά από τις διάφορες δυνατές εμφανίσεις της έννοιας, π.χ. γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, λεκτικές είτε συμβολικές μορφές. Θα τη

διακρίνει: από άλλες που συνειρμικά ενδεχομένως εμπλέκονται στο νου των μαθητών – π.χ. σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις, όπως η εξίσωση του κύκλου –, από την έννοια της εξίσωσης, επειδή και εκείνη δίνεται με τύπο, από στερεότυπες αποδόσεις της έννοιας, π.χ. συνέχεια της συνάρτησης, μονοκλαδική. Επίσης, μια παραδοσιακή και από την ιστορία δυσκολία που πρέπει να ξεπεραστεί είναι το ξεκαθάρισμα του νοήματος της χρονικότητας της μεταβλητής. Θα πρέπει να προσθέσουμε και άλλες στερεότυπες προσκολλήσεις των μαθητών που έχουν παρατηρηθεί σε διάφορες έρευνες, όπως η 1-1 συνάρτηση ως το πλέον διαδεδομένο παράδειγμα συνάρτησης.

Μια βασική παράμετρος των δυσκολιών, που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην κατανόηση των εννοιών που έχουν σχέση με τις συναρτήσεις καθώς και της μετάφρασής τους από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη, είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διδακτική μεταφορά τους στην τάξη. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου – συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. Οι ερευνητές Vinner & Dreyfus, 1983; Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1983; Hersconics, 1982 διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι:

- Οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν τύπο. Αν δίνονται πολλαπλοί τύποι συναρτήσεων, τότε έχουμε πολλές συναρτήσεις.
- Μια συνάρτηση υπάρχει αν υπάρχει ένας τύπος που την περιγράφει.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει «καλή συμπεριφορά» (συμμετρικότητα, ομαλότητα, συνεχώς να αυξάνεται...)
- Θα πρέπει να υπάρχει μια πράξη στο x που να αποδίδει το y, αυτό αποκλείει άλλου είδους σχέσεις.
- Οι σταθερές και καθορισμένα σύνολα σημείων δεν είναι συναρτήσεις.
- Ο καθορισμός του πεδίου ορισμού δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της συνάρτησης.

Εν κατακλείδι, η έννοια της συνάρτησης θεωρείται πως είναι μια «δύσκολη έννοια», για την οποία απαιτήθηκαν πολλοί αιώνες συζήτησης, προτάσεων και υπερπήδησης πολύ διαφορετικών εμποδίων ώστε να συγκροτηθεί. Από την άλλη πλευρά, εξίσου δύσκολη φαίνεται να είναι και η διδακτική μεταφορά της έννοιας, αφού η

τελευταία εμπλέκει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: την επιστημολογική διάσταση, όπως αυτή εκφράστηκε στα μαθηματικά κείμενα διαφόρων μαθηματικών μέσα στην ιστορία, την επιστημολογία των καθηγητών των μαθηματικών και τέλος, τη διδακτική διάσταση, η οποία δεν αφορά μόνο τις γνώσεις των μαθητών, αλλά και τη λειτουργία του εν γένει διδακτικού συστήματος και τους περιορισμούς, τους οποίους θέτει.

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, φαίνεται εντελώς φυσικό οι μαθητές να αντιμετωπίζουν προβλήματα με την έννοια αυτή. Αυτά τα προβλήματα δεν μπορεί παρά να αποτελούν αντικείμενο πολλών και ξεχωριστών ερευνών, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

2. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2.1 Η έννοια της Αναπαράστασης

Αναπαράσταση σημαίνει ότι μια οντότητα αντιπροσωπεύει μια άλλη οντότητα μέσω κάποιας αντιστοίχισης. Ο όρος «αναπαράσταση» όμως, είναι ασαφής και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996; Roth & McGinn, 1998; Seeger, 1998; Glasersfeld, 1987). Σύμφωνα με τον ορισμό του Palmer (1977), τον οποίο υιοθετούν οι Kaput (1987a; 1987b) και Goldin (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ενότητες: α. την ολότητα που αναπαρίσταται, β. την ολότητα που αναπαριστά, γ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται, δ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και τέλος, ε. την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες (Γαγάτσης, 2000, σελ. 13).

Η γνωστική ψυχολογία χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο με δύο κυρίως τρόπους:

1. Κάποια οργάνωση που αντιστοιχεί σε κάποια οντότητα και αποτελεί μοντέλο διανοητικών διεργασιών.
2. Την οργάνωση της γνώσης στο ανθρώπινο νοητικό σύστημα.

Αυτοί οι ορισμοί έχουν επηρεαστεί από τις ιδέες του Johnson Laird (1983), ο οποίος διακρίνει τρεις τύπους αναπαράστασης:

i. Προτασιακές (γραπτές προτάσεις της φυσικής γλώσσας).
ii. Νοητικά μοντέλα (δομημένα ανάλογα με τον κόσμο).
iii. Νοητικές εικόνες (αντιλήψεις των μοντέλων από μία οπτική γωνία).

Κατά τον Bruner (1996) υπάρχουν τρεις τύποι που συνδέονται εξελικτικά:

α. Ενεργητική (λειτουργική) αναπαράσταση (δράση, π.χ. οι διάφορες κινήσεις).

β. Εικονική αναπαράσταση (νοερές εικόνες, όχι λεπτομέρειες αλλά κάποια πολύ χρήσιμα χαρακτηριστικά).

γ. Συμβολική αναπαράσταση (ο τρόπος αυτός αναπαράστασης εμπειριών στη μνήμη γίνεται μέσω γλωσσικών ή άλλων συμβόλων. Ένα σύμβολο είναι μια λέξη ή ένα σημάδι που δεν μοιάζει καθόλου με το αντικείμενο ή την ενέργεια που παριστάνει.

Η φάση της ενεργητικής αναπαράστασης αφορά στην ικανότητα των παιδιών να απαντούν σε ερωτήσεις μόνο σε σχέση με προηγούμενες πρακτικές εμπειρίες τους. Η εικονική φάση χαρακτηρίζεται από απαντήσεις που αφορούν σε νοητικές εικόνες φυσικών αντικειμένων ή σε έναν εσωτερικό χώρο σχημάτων ή δομών. Η συμβολική αναπαράσταση αφορά στη χρήση αφηρημένων συμβόλων των οποίων το νόημα πρέπει να εκφραστεί ή να οριστεί. Ο Bruner αναφέρει ότι η εμφάνιση αυτών των φάσεων στη ζωή του παιδιού γίνεται με την παραπάνω σειρά και ότι η κάθε φάση εξαρτάται από την προηγούμενη για να εξελιχθεί, αλλά ότι και οι τρεις αφού αναπτυχθούν συνυπάρχουν εφ'όρου ζωής. Ο Mason επεκτείνει τη θεώρηση αυτή του Bruner εστιάζοντας το ενδιαφέρον του στη σημασία της αναπαράστασης μιας ιδέας με παραπάνω από έναν τρόπους και αν είναι δυνατόν και με τους τρεις. Ο Mason μάλιστα, υποστηρίζει ότι οποιαδήποτε συμβολική αναπαράσταση πρέπει να μπορεί να γίνει λειτουργική για να μπορούμε να πούμε ότι το παιδί την έχει κατανοήσει. Έχει μεγάλη σημασία να δώσουμε ευκαιρίες στα παιδιά να κινούνται σπειροειδώς σε σχέση με τον τρόπο που αναπαριστούν ιδέες, δηλαδή λειτουργικές ιδέες να δίνουν μια εικονική αναπαράσταση, η οποία με τη σειρά της να γεννά ιδέες που να αναπαρίστανται συμβολικά και οι οποίες στη συνέχεια να γίνονται λειτουργικές κοκ. Δηλαδή, η συμβολική έκφραση πρέπει τελικά να μπορεί να γίνει λειτουργική για να μπορούν να γεννηθούν από αυτή νέες πιο πολύπλοκες έννοιες και νοήματα. Χειροπιαστό παράδειγμα μαθητικών προβλημάτων που έχουν τη ρίζα τους στην έλλειψη εμπειρίας αναπαράστασης ιδεών και στα τρία επίπεδα, είναι τα μαθηματικά, όπου οι μαθητές μαθαίνουν τον επιφανειακό χειρισμό συμβολικών εννοιών, χωρίς να έχουν ιδέα για τα νοήματα που αυτός ο συμβολισμός αναπαριστά.

Οι ιδέες γύρω από τις αναπαραστάσεις στην έρευνα, τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια (Goldin & Shteingold, 2001; Moritz, 2000). Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics πρόσθεσε την αναπαράσταση στα «Principles and Standards of School Mathematics», λόγω της αυξανόμενης σημασίας της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών ενώ αρχικά, το 1989, είχε θεωρηθεί ως μέρος της επικοινωνίας (Fennell & Rowan, 2001).

Η αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως μια εσωτερική αφαίρεση μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων (Pape & Tchoshanov, 2001). Είναι ένα προϊόν μιας διανοητικής ενέργειας, από την οποία το άτομο (ή ομάδα ατόμων) ξαναφτιάχνει το πραγματικό, το οποίο αντιμετωπίζει και του προσδίδει μια ορισμένη σημασία (A. Robert & J. Robinet, 1989). Οι Confrey & Smith αναφέρουν την αναπαράσταση ως μια νοητική δομή, η οποία καθορίζεται από διάφορα εργαλεία όπως πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις και από τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και εννοιών (Confrey & Smith, 1991). Οι ψυχολογικές διεργασίες που πραγματοποιούνται κατά τη μεταφορά από τη μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, ορίζονται από τον Janvier (1987) ως «διαδικασία μετάφρασης».

Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα: προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.13). Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί «σχήματα συμβόλων» (Kaput, 1987a; 1987b) ή «συστήματα αναπαράστασης» (Goldin, 1987; Lesh, Landau & Hamilton, 1983. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.13).

Στο πιο πάνω γενικό πλαίσιο οι Janvier Bednarz & Belanger (1987) κάνουν μια ενδιαφέρουσα διάκριση:

α. **εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις** και

β. **εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις**

(DeLoache et al, 1998; Gagatsis et al, 1999; Goldin & Kaput, 1996; Janvier, 1987; Maher & Speiser, 1998b; Roth & McGinn, 1998; Seeger, 1998).

Οι Goldin & Kaput (1996) διακρίνουν τα εσωτερικά από τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης υποστηρίζοντας ότι «η διάκριση αυτή είναι ουσιαστικής σημασίας για την ψυχολογία και τη μάθηση των μαθηματικών» (Goldin & Kaput, 1996. Στου Γαγάτση, «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ.13).

- **Εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις**: είναι οι νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε, για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου) (Dufour – Janvier et al, 1987. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.14). Είναι προϊόν νοητικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε. Το άτομο δεν περιμένει απλώς να αποτυπωθούν οι επιδράσεις του περιβάλλοντός του στο

μυαλό του. Προσπαθεί ενεργητικά να το ερμηνεύσει και να το κατανοήσει. Το ερμηνεύει νοητικά, χτίζει ένα μοντέλο του κόσμου στο μυαλό του, ένα σύστημα εσωτερικών αναπαραστάσεων, το κινητοποιεί όταν θέλει να προβλέψει γεγονότα ή όταν αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα και πάντα με τον δικό του προσωπικό τρόπο. Εξαιτίας της φύσης τους, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν με βάση την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Όπως επισημαίνει ο Glasersfeld (1987), μια νοητική αναπαράσταση αποτελείται από στοιχεία που αρχικά προήλθαν από το αισθησιοκινητικό επίπεδο της εμπειρίας. Δεν αποκλείονται, ωστόσο, οι πρωτότυποι συνδυασμοί επιμέρους στοιχείων της εμπειρίας ή κάποιος βαθμός αφαίρεσης σε σχέση με τα αρχικά αισθησιοκινητικά στοιχεία, με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέες νοητικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τις αρχές του οικοδομισμού, οι νοητικές αναπαραστάσεις έχουν δυμαμικό χαρακτήρα: δεν πρόκειται για καταχωρήσεις που ανακαλούνται από κάποιο αρχείο, αλλά για παραγωγικές διαδικασίες, οι οποίες ενεργοποιούνται.

- **Εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις**: αφορούν στην εξωτερική οργάνωση συμβόλων που αναπαριστούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος) (Dufour – Janvier et al, 1987. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.14). Τα βασικά εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνουν: γλώσσες, σύμβολα (αλγεβρικά και αριθμητικά), διαγράμματα, εικόνες, γραφικές παραστάσεις και φυσικά μοντέλα. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις του τρόπου, με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές» (Lesh et al, 1987a, σ.33).

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998. Στου Γαγάτση, «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ. 16). Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις,

εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας, ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική και απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996. Στου Γαγάτση, «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ.17). Σύμφωνα με μια από τις βασικές αρχές του οικοδομισμού (Glasersfeld, 1987) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της, αλλά χρειάζεται ερμηνεία και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών. Η ερμηνεία, ωστόσο, μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια.

Συνοπτικά, ο όρος «αναπαράσταση» ή «σύστημα αναπαράστασης» περιλαμβάνει τα εξής (Goldin & Janvier, 1998; Goldin, 1998. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.17):

α. Εξωτερικές φυσικές ενσωματώσεις, δηλαδή, οποιαδήποτε δομημένη φυσική κατάσταση ή σύνολο καταστάσεων εξωτερικών προς το άτομο, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν με τη χρήση των μαθηματικών ή να θεωρηθούν ως ενσωματώσεις μιας μαθηματικής έννοιας.

β. Εξωτερικές γλωσσικές ενσωματώσεις, όπου δίνεται έμφαση στα συντακτικά και σημασιολογικά δομικά χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων και τη συζήτηση των μαθηματικών.

γ. Τυπικές μαθηματικές κατασκευές ή συστήματα κατασκευών, που αναπαριστούν καταστάσεις μέσω της χρήσης συμβόλων, τα οποία συνήθως υπακούουν σε συγκεκριμένα αξιώματα ή είναι σύμφωνα με ακριβείς ορισμούς. Όταν αναφερόμαστε σε σύμβολα ή σημεία, εννοούμε τα τεχνητά σημεία που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν κάτι. Το σύμβολο επιλέγεται αυθαίρετα ανάμεσα σε πολλές πιθανές

επιλογές, για να υποδηλώσει κάτι άλλο. Η έμφαση βρίσκεται σε ένα περιβάλλον προβλήματος εξωτερικό προς το υποκείμενο.

δ. Εσωτερικές γνωστικές αναπαραστάσεις, την ύπαρξη των οποίων συμπεραίνουμε με βάση τη συμπεριφορά. Πρόκειται για εσωτερικές, γνωστικές διαμορφώσεις των υποκειμένων. Συνεπώς, εννοούμε ατομικές εσωτερικές αναπαραστάσεις, για αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών, όπως είναι το «εμβαδό», οι «συναρτήσεις» κ.λ.π. Περιλαμβάνονται, επίσης, συστήματα γνωστικής αναπαράστασης με μια ευρύτερη έννοια, ως κατασκευές που υποβοηθούν την περιγραφή των διαδικασιών μάθησης και επίλυσης προβλήματος στα μαθηματικά.

Τέλος, διαφανή συστήματα αναπαράστασης είναι τα συστήματα αναπαράστασης που έχουν ακριβώς το ίδιο νόημα με την έννοια ή τη δομή που αναπαριστούν, ενώ, αδιαφανή συστήματα αναπαράστασης είναι τα συστήματα που δίνουν έμφαση σε ορισμένες πτυχές της έννοιας ή της δομής που αναπαριστούν, υποβαθμίζοντας κάποιες άλλες. Ένα αδιαφανές σύστημα είναι δυνατό να έχει κάποιες ιδιότητες πέρα από τις ιδιότητες των υποκείμενων εννοιών και δομών, ενώ ταυτόχρονα, είναι δυνατόν να παραλείπει κάποιες άλλες (Lesh, Behr & Post, 1987. Στου Γαγάτση, «Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών», σελ.368).

2.2 Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών

Η αναπαράσταση είναι μια δύσκολη έννοια (Vergnaud, 1998). Υπάρχουν τουλάχιστον δύο απλοί λόγοι που καθιστούν τις αναπαραστάσεις σημαντικό θέμα για επιστημονική μελέτη. Ο πρώτος, είναι ότι χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση ως έκφραση των εσωτερικών εικόνων, των χειρονομιών και των λέξεων. Ο δεύτερος, είναι ότι οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στην επικοινωνία δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα, αλλά αντιπροσωπεύουν τις οντότητες: αντικείμενα, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, ενέργειες και κατασκευάσματα, για τα οποία δεν υπάρχει καμία αυτόματη συμφωνία μεταξύ δύο ατόμων. Οι γλωσσικές και συμβολικές εκφράσεις διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά και στην εκπαίδευση γενικότερα.

Ο ρόλος και η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και εκτενούς συζήτησης κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών στη μαθηματική κοινότητα.

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις έχουν μεγάλη σημασία για την εκμάθηση των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης. Οι παραστάσεις που σχηματίζει καθένας στο μυαλό του για μια έννοια ή ένα σύμβολο είναι διαφορετικές και καθορίζουν τον ατομικό τρόπο κατάκτησης της έννοιας (π.χ. συνάρτηση).

Οι αναπαραστάσεις που έχει ο μαθητής για μια έννοια συνδέονται άμεσα με την ικανότητά του στα μαθηματικά. Όσο πιο πλούσιες είναι αυτές τόσο πιο κατανοητή είναι η έννοια και αντίστροφα. Ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας σημαίνει να ελευθερώσει ο μαθητής τη σκέψη του από το συγκεκριμένο, χωρίς όμως να αποκοπεί και από αυτό που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του αναπαραστασιακού χαρακτήρα του συμβολισμού. Πρέπει να δει ότι ένα τυπικό σύστημα (δηλαδή ένα σύνολο από σύμβολα, ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα π.χ. Άλγεβρα), πέρα από το αναφορικό του νόημα, μπορεί να λειτουργεί και από μόνο του. Σ’αυτή τη δύναμή του οφείλεται η αξία του. Δε θα μπορούσαν να αναπτυχθούν τα Μαθηματικά και η μαθηματική σκέψη, ούτε θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε με προχωρημένα προβλήματα, έχοντας πάντοτε αναφορικό νόημα στα σύμβολα.

Η μαθηματική γλώσσα, όπως και κάθε φυσική γλώσσα, παίζει τον διπλό ρόλο του σημαίνοντος και του σημαινόμενου. Υπάρχει όμως μια διαφορά στη γλώσσα των Μαθηματικών. Υπάρχουν σύμβολα και ποικίλες λέξεις της φυσικής γλώσσας με εντελώς διαφορετική σημασία. Για παράδειγμα, η έννοια του «ορίου» στην καθημερινή επικοινωνία χρησιμοποιείται ποικιλοτρόπως. Στα Μαθηματικά δίνεται ένας φορμαλιστικός ορισμός με εντελώς διαφορετικό περιεχόμενο από αυτό που έχει στη φυσική γλώσσα. Ερμηνεία όμως, ενός συμβόλου σημαίνει να το συνδέσουμε με κάποια έννοια ή μία νοητική απεικόνιση, για να μπορεί να αφομοιωθεί από την ανθρώπινη συνείδηση. Απαιτεί προσοχή, διότι η σύνδεση αυτή έχει σχέση και με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, η δύναμη του συμβόλου είναι τόσο μεγάλη, που μπορεί ο μαθητής να ταυτίσει την έννοια με το σύμβολο, π.χ. την έννοια της συνάρτησης με το σύμβολο f(x) ή της μεταβλητής με το x. Όταν ο Απολλώνιος δούλευε τις κωνικές τομές, οι οποίες είχαν φυσικά μια εμπειρική προέλευση – είχαν προκύψει ως αφαιρέσεις

κάποιων επίπεδων επιφανειών – δεν έβλεπε καμιά άμεση εφαρμογή τους. Έβλεπε μια ομορφιά σ'αυτά τα σύμβολα με τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους. Πολύ αργότερα ο Kepler θα δει τις ελλειπτικές τροχιές των πλανητών και των ηλεκτρονίων.

Η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί ένα εξαιρετικά βοηθητικό θεωρητικό εργαλείο για το χαρακτηρισμό των γνωστικών διαδικασιών στη μάθηση των μαθηματικών και αυτό γιατί η περιγραφή του τρόπου εξέλιξης των συστημάτων αναπαράστασης στο χρόνο περιλαμβάνει τόσο σημειωτικές πράξεις, μέσω των οποίων οι αναπαραστάσεις αποκτούν συγκεκριμένο νόημα, όσο και τη δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, τα οποία οικοδομούνται πάνω στις βάσεις που παρέχουν τα προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης (Goldin & Kaput, 1996. Στου Γαγάτση, 2005, σελ.4).

Οι Dufour – Janvier, Bednarz και Belanger (1987) υποστηρίζουν ότι οι αναπαραστάσεις είναι σύμφυτες με τα μαθηματικά (Dufour-Janvier et al, 1987, σ.110; Kaput, 1987a, σ.25). Τα μαθηματικά ως «συλλογή γλωσσών» (Kaput, 1989, σ.167), με την παρουσία συμβόλων και αφαιρέσεων, είναι ένας από τους τομείς όπου οι αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρέως, λόγω των ικανοτήτων τους να ενισχύουν τις «πληροφορίες κατανόησης και επικοινωνίας» (Greeno & Hall, 1997, σ.362). Η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων έχει συνδεθεί έντονα με τη σύνθετη διαδικασία στα μαθηματικά και ειδικότερα, με την επιδίωξη της καλύτερης κατανόησης των σημαντικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Η ανάγκη για ποικίλες σημειωτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών εξηγείται, κυρίως λόγω του κόστους επεξεργασίας και των περιορισμένων ικανοτήτων των αναπαραστάσεων για κάθε περιοχή του συμβολισμού. Η χρήση περισσοτέρων του ενός συστημάτων αναπαράστασης βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν καλύτερη εικόνα για μια μαθηματική έννοια (Kaput, 1992). Ο Kaput (1989) διαπίστωσε ότι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων καλύπτει τις διαφορετικές ερμηνείες μιας έννοιας, υπογραμμίζει τις πτυχές των σύνθετων εννοιών και προωθεί τη γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να μετριάσουν ορισμένες δυσκολίες και να καταστήσουν τα μαθηματικά ελκυστικότερα και ενδιαφέροντα (Στου Γαγάτση, 2005, σελ.4).

Οι De Jong, Ainsworth, Dobson, van Der Hulst, Levonen Reimann, Sime και van Someren (1998) δήλωσαν ότι υπάρχουν τρεις στόχοι που εξυπηρετούν οι πολλαπλές

αναπαραστάσεις. Κατ’αρχάς, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συστήνονται λόγω των πληροφοριών που λαμβάνουν οι μαθητές. Δεύτερον, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι καλές μέθοδοι για να προκαλέσουν μια ιδιαίτερη ποιότητα στη γνώση των μαθητών. Και τρίτον, η χρήση των αναπαραστάσεων μπορεί με τη σειρά της να είναι ευεργετική για τη μάθηση. Οι Greeno και Hall (1997) υπογραμμίζουν τη σημασία της επιλογής κατάλληλων αναπαραστάσεων από τους μαθητές με μορφές που τους βοηθούν στην κατανόηση εννοιών, δεδομένου ότι οι διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων παρέχουν διαφορετικές πληροφορίες για μια έννοια. Επιπρόσθετα, λόγω της εκτενούς χρήσης των συμβόλων, των αφαιρέσεων, των κανόνων και των ορισμών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν πραγματικό πρόβλημα προσπαθώντας να καταλάβουν, να εσωτερικοποιήσουν, να εφαρμόσουν και να επικοινωνήσουν με σημαντικές έννοιες στα σχολικά μαθηματικά. Στην παρούσα έρευνα, οι αναπαραστάσεις, υπό μια περιορισμένη έννοια, ερμηνεύονται ως εργαλεία, όπως οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις και οι αλγεβρικοί τύποι (Gagatsis, Elia & Mougi, 2002). Τα συστήματα αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδη και καθοριστικά για τη μάθηση (Cheng, 2000). Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρουσιάζεται η πληροφορία στους μαθητές με ποικίλες μορφές και να διδάσκεται η σχέση και η σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η ικανότητα να προσδιορίζεται η ίδια έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη, είναι κύρια στοιχεία στη μάθηση των μαθηματικών, διότι επιτρέπουν στους μαθητές να δουν τις πολλαπλές σχέσεις και να κατανοήσουν βαθιά την έννοια (Even, 1998).

Συχνά παρατηρείται οι μαθητές στην τάξη να παρουσιάζουν ορισμένες προτιμήσεις για κάποια συγκεκριμένη εξωτερική αναπαράσταση. Οι Dufour – Janvier et al. (1987) επεξήγησαν την αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν την ίδια έννοια που δόθηκε σε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Σε μια εκτενή έρευνα σχετικά με τις αναπαραστάσεις, η Hart (1991) μελέτησε τις αναπαραστάσεις που προτιμούν οι μαθητές και τον τρόπο κατά τον οποίο η επιλογή των αναπαραστάσεων ποίκιλε όσον αφορά το πρόβλημα. Τα συμπεράσματά της έδειξαν ότι η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται από τους μαθητές για να λύσουν τα προβλήματα επηρεάζεται έντονα από την προηγούμενη εμπειρία τους.

Κατά συνέπεια, ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος είναι να μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τις διάφορες μορφές αναπαράστασης για την ίδια έννοια. Εκτός από το γεγονός ότι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις παρέχουν μια συνεπή ερμηνεία για ένα μαθηματικό αντικείμενο, επίσης, βοηθούν τους μαθητές να οργανώνουν και να παρακολουθούν τις ιδέες και τα συμπεράσματά τους. Η Sierpinska (1992) επισήμανε ότι είναι σημαντικό να παρέχεται στους μαθητές ένα ευρύ φάσμα των τρόπων αναπαράστασης των συναρτήσεων.

Οι αναπαραστάσεις συνιστούν μια από τις πιο βασικές διαδικασίες μάθησης των μαθηματικών και ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών. Η ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να ερμηνεύουν μαθηματικές πληροφορίες που παρουσιάζονται σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, να οργανώνουν, να καταγράφουν και να μεταδίδουν μαθηματικές ιδέες με λόγια, εικόνες, γραφικές παραστάσεις, πίνακες ή σύμβολα διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση πληθώρας εννοιών και δεξιοτήτων των μαθηματικών.

2.3 Έρευνες και Θεωρίες για τις αναπαραστάσεις

Ένας κεντρικός στόχος της μαθηματικής παιδείας είναι η αύξηση της ισχύος των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθηματών (Goldin & Kaput, 1996). Ισχυρό είναι το σύστημα αναπαράστασης που έχει ευρύ και ποικίλο πεδίο εφαρμογής. Γενικά, ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος διαφαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνών που εξετάζουν το θέμα αυτό (Στου Γαγάτση, 2000, σελ.18).

Συγκεκριμένα, οι έρευνες των Γαγάτση et al. σχετικά με τις αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τομείς ανάλογα με το περιεχόμενό τους:

1. **Έρευνες που προτείνουν μια Θεωρία Αναπαράστασης** (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2000; Goldin & Kaput, 1996; Houser, 1987; Kaput, 1985; Kaput, 1987a; Kaput, 1987b; Roth & McGinn, 1998; Glasersfeld, 1987).

Ο Glasersfeld (1987) υποστηρίζει ότι απαραίτητη προϋπόθεση για τη διατύπωση μιας βιώσιμης θεωρίας αναπαράστασης είναι η ύπαρξη μιας σαφώς διατυπωμένης θεωρίας μάθησης. Προσεγγίζει, λοιπόν, το ζήτημα των αναπαραστάσεων από την προοπτική της επιστημολογίας του ριζοσπαστικού οικοδομισμού, σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι μια ενεργητική διαδικασία οικοδόμησης και προτείνει κάποια προκαταρκτικά στοιχεία, τα οποία θεωρεί απαραίτητα για τη δόμηση οποιασδήποτε θεωρίας αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, εισηγείται ότι προκειμένου να δομηθεί μια θεωρία αναπαράστασης, είναι απαραίτητο να οριστεί εξ'αρχής και με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια το περιεχόμενο του όρου «αναπαράσταση». Συνεπώς, επιχειρεί να αναλύσει τα διαφορετικά νοήματα που αποδίδονται στον όρο αυτό, πάντοτε μέσα από το πρίσμα του ριζοσπαστικού οικοδομισμού. Ο όρος «αναπαράσταση» είναι δυνατό να αναφέρεται: α) στις εικονικές αναπαραστάσεις, β) στα σύμβολα και γ) στις νοητικές αναπαραστάσεις.

Ο Kaput (1985; 1987a; 1987b. Στου Γαγάτση, «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ. 20) επισημαίνει την ανάγκη ύπαρξης ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου για τα συστήματα αναπαράστασης, το οποίο θα συμβάλει στην ουσιαστική αντιμετώπιση διαφόρων πρακτικών προβλημάτων σε σχέση με τις αναπαραστάσεις. Τέτοια προβλήματα αφορούν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τη μετάφραση από μια αναπαράσταση σε άλλη και τη μετάφραση ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ο Kaput υποστηρίζει ότι πρέπει να δοθεί προσοχή στους τρόπους χρήσης των συμβόλων και των συνδυασμών τους μέσα στα μαθηματικά συστήματα αναπαράστασης, καθώς επίσης και στον τρόπο με τον οποίο τα συστήματα αυτά σχετίζονται μεταξύ τους. Εδώ φαίνεται η αναγκαιότητα ύπαρξης μιας θεωρίας αναπαράστασης, η οποία θα καθορίσει γενικές ιδιότητες των συστημάτων αναπαράστασης και συγκεκριμένα, τον τρόπο με τον οποίο διαφοροποιούνται τα συστήματα αναπαράστασης ως προς την ικανότητά τους να

κωδικοποιούν μαθηματικές έννοιες και να υποβοηθούν την επίλυση συγκεκριμένων τάξεων προβλημάτων.

Οι Goldin και Kaput (1996) υποστηρίζουν ότι η χρήση της έννοιας της αναπαράστασης μας επιτρέπει να περιγράψουμε με λεπτομέρεια τι μπορούν και τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές και να συζητήσουμε ποιες ικανότητες επιδιώκουμε να αναπτύξουν. Επιπρόσθετα, παρέχει τη δυνατότητα για λεπτομερή ανάλυση δομικών ιδιοτήτων που θεωρούνται σημαντικές στα μαθηματικά, καθώς επίσης, τη συζήτηση αναφορικά με τα αποτελέσματα, που οφείλονται στο μέσο που χρησιμοποιείται για την παρουσίαση των εξωτερικών αναπαραστάσεων.

2. **Έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος** (Cifarelli, 1998; Gagatsis et al, 1999; Goldin, 1987; Lesh et al, 1987a; Mousoulidis & Gagatsis, 2004; Owens et al, 1998).

Οι όροι «πρόβλημα» και «επίλυση προβλήματος» επιδέχονται πολλαπλές ερμηνείες. Η έρευνα στον τομέα της επίλυσης προβλήματος περιλαμβάνει πληθώρα μελετών, οι οποίες ποικίλουν τόσο ως προς το αντικείμενο μελέτης όσο και ως προς τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται (Lester, 1985. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.23). Αυτή η ποικιλία οφείλεται στο σύνθετο χαρακτήρα αυτής καθ’αυτής της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος στην οποία εμπλέκεται ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων.

Ένα επεισόδιο επίλυσης προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μικρό μοντέλο μιας διαδικασίας μάθησης και ως τέτοιο, όπως η σύγχρονη έρευνα στην Ψυχολογία της Μάθησης υπογραμμίζει (Schoenfeld, 1992), εμπλέκει πέρα από γνωστικούς, μεταγνωστικούς και συναισθηματικούς παράγοντες. Η σημασία τέτοιων παραγόντων προκύπτει όταν χρειάζεται να ερμηνευτεί η επιτυχία ενός υποκειμένου, το οποίο συμμετέχει στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Οι Lesh et al. (1987a. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.25) εξετάζουν το ρόλο που διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις μεταφράσεις από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και στους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο το σύστημα. Επισημαίνουν δε, ότι οι μεταφράσεις και οι μετασχηματισμοί βρίσκονται στην πραγματικότητα σε σχέση αλληλεξάρτησης.

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει από τις έρευνες των Lesh et al. (1987a), αφορά στη φύση της πράξης της αναπαράστασης, η οποία τείνει να είναι πλουραλιστική, ασταθής και συνεχώς αναπτυσσόμενη. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν διάφορα συστήματα αναπαράστασης όταν λύνουν ένα πρόβλημα, όπου το κάθε σύστημα αναπαριστά μέρος της δοσμένης κατάστασης. Οι καλοί λύτες προβλημάτων είναι ευέλικτοι και χρησιμοποιούν ποικιλία αναπαραστάσεων επιλέγοντας κάθε φορά τις αναπαραστάσεις που είναι καταλληλότερες για το συγκεκριμένο τμήμα της προβληματικής κατάστασης. Συνήθως, ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την καθημερινή πραγματικότητα παρουσιάζεται με διάφορες αναπαραστάσεις ταυτόχρονα. Οι μαθητές καλούνται να αντλήσουν πληροφορίες από τις διάφορες αναπαραστάσεις, τις οποίες θα μεταφράσουν σε μια ομοιογενή αναπαράσταση προκειμένου να λύσουν το πρόβλημα.

3. **Έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις σε σχέση με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες** (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Boulton & Lewis, 1998; Even, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Janvier, 1987b; Janvier, 1987c; Janvier, 1998; Lesh et al, 1987b; Mesquita, 1998).

Οι Lesh et al. (1987b) εξετάζουν τους ρητούς αριθμούς και τις αναλογίες ως προς τις διάφορες αναπαραστάσεις τους. Ειδικότερα, επισημαίνουν το βοηθητικό ρόλο που διαδραματίζει η προφορική γλώσσα και τα χειριστικά μοντέλα στην επίλυση προβλήματος, στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης και των εννοιών των ρητών αριθμών. Εξετάζουν, επίσης, τα συστήματα αναπαράστασης, που περιλαμβάνονται στα διδακτικά εγχειρίδια (εικόνες, γραπτή γλώσσα, σύμβολα).

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας (Lesh et al, 1987b. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.28) έχει διαφανεί ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στο βαθμό κατανόησης των εννοιών των ρητών αριθμών από τα υποκείμενα και στην ικανότητα πραγματοποίησης μεταφράσεων από το ένα σύστημα στο άλλο και μετασχηματισμών μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης. Επιπρόσθετα, έχει διαφανεί ότι αναφορικά με το επίπεδο δυσκολίας ενός προβλήματος, σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν όχι μόνο η υποκείμενη μαθηματική δομή και το πόσο συγκεκριμένο είναι το έργο, αλλά και τα χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων συστημάτων αναπαράστασης, τα οποία

αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο παρουσιάζεται η μαθηματική δομή. Η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων ενός συστήματος αναπαράστασης και η παράλειψη των αδυναμιών του είναι σημαντική για την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας.

Ο Janvier (1987c) εξετάζει τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του κύκλου (Στου Γαγάτση, 2000, σελ.29). Συγκεκριμένα, επισημαίνει ότι οι αντιλήψεις των μαθητών διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο, τόσο για τις διαδικασίες μετάφρασης όσο και για τη μαθηματική σκέψη. Επιπρόσθετα, αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη των τυπικών μαθηματικών εννοιών που είναι αποδεκτές από την επιστημονική κοινότητα. Τονίζεται, λοιπόν, ότι είναι σημαντικό να διαγνωστούν και να αξιοποιηθούν οι αντιλήψεις των μαθητών, γιατί διασφαλίζουν τη βασική γνώση, η οποία θα συστηματοποιηθεί και θα τυποποιηθεί με τη διδασκαλία.

Η Mesquita (1998) συζητά θέματα που σχετίζονται με τη χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων και τις συνέπειές τους στη μάθηση της γεωμετρίας. Επισημαίνεται ότι ο ρόλος και η φύση των εξωτερικών αναπαραστάσεων παρέχουν αντικειμενικά στοιχεία για τον καθορισμό μερικών γνωστικών και αντιληπτικών εμποδίων και διευκολύνουν την ταξινόμηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Μια άλλη έννοια, η οποία αποτελεί αντικείμενο πολλών ερευνών, είναι η έννοια της συνάρτησης και αυτό γιατί μπορεί να εκφραστεί με διάφορους κώδικες: γραφική παράσταση, αλγεβρική μορφή, πίνακα τιμών και λεκτική μορφή (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Even, 1998; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Janvier, 1987b; Janvier, 1998). Στην έννοια της συνάρτησης γίνεται εκτενής αναφορά στο 4^{ο} κεφάλαιο.

4. **Έρευνες που εξετάζουν τις αναπαραστάσεις και την αλλαγή πεδίου αναπαράστασης** (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Γαγάτσης & Μουγή, 2000α; Γαγάτσης & Παναούρα, 2000β; Duval, 1987; Janvier, 1987a; Janvier, 1987b; Lesh et al, 1987a; Lesh et al, 1987b).

Ενώ το πέρασμα αυτό φαίνεται φυσικό, για μερικές περιπτώσεις, ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία (Duval, 1987. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.30), στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.

Τα περισσότερα διδακτικά εγχειρίδια χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό μια ποικιλία εξωτερικών–σημειωτικών αναπαραστάσεων με στόχο να διευκολύνουν την κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών. Γενικά, είναι παραδεκτό ότι η χρήση συμβόλων στα μαθηματικά είναι θεμελιώδους σημασίας (Janvier, 1987a). Ωστόσο, παραβλέπονται οι διαδικασίες μετάφρασης, το πέρασμα, δηλαδή, από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη.

Μια μετάφραση περιλαμβάνει δύο μορφές αναπαράστασης: την «πηγή» (αρχική αναπαράσταση) και το «στόχο» (τελική αναπαράσταση) (Janvier, 1987a. Στου Γαγάτση, 2000, σελ.31). Αν για παράδειγμα, οι δύο μορφές αναπαράστασης είναι η εξίσωση και η γραφική παράσταση τότε προκύπτουν οι εξής μεταφράσεις: από γραφική παράσταση σε εξίσωση και από εξίσωση σε γραφική παράσταση. Όπως επισημαίνει ο Janvier (1987a), προκειμένου μια μετάφραση να πραγματοποιηθεί άμεσα και σωστά είναι απαραίτητο να επιλεγούν και να αξιοποιηθούν τα στοιχεία της πηγής που είναι απαραίτητα για να δημιουργηθεί ο στόχος. Διαφαίνεται, λοιπόν, ο ρόλος που διαδραματίζει η διδασκαλία στρατηγικών με στόχο την επιτυχημένη μετάφραση από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Είναι γενικά παραδεκτό ότι οι μεταφράσεις από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο, τόσο για την απόκτηση και τη χρήση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Ωστόσο, παρά τον ουσιαστικό ρόλο που διαδραματίζουν οι μεταφράσεις, οι στρατηγικές μετάφρασης σπάνια αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας μέσα στην τάξη (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Janvier, 1987a; Janvier, 1987b; Lesh et al, 1987a; Lesh et al, 1987b).

Οι Lesh et al. (1987b) αναφέρουν κάποιους λόγους για τους οποίους οι στρατηγικές μετάφρασης δεν αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας και αξιολόγησης. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι ερευνητικά ερωτήματα που αφορούν στον ακριβή ρόλο που διαδραματίζουν οι μεταφράσεις στην απόκτηση και τη χρήση μαθηματικών εννοιών και τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα που προκύπτουν από την αποτελεσματική τους διδασκαλία, παραμένουν αναπάντητα. Επιπλέον, επικρατεί η παρανόηση σύμφωνα με την οποία η μετάφραση είναι εύκολη διαδικασία.

Η παραπάνω ταξινόμηση των διαφόρων μελετών που ασχολούνται με τις αναπαραστάσεις σε τέσσερις κατηγορίες, με βάση το περιεχόμενό τους, αποτελεί μια πρώτη προσέγγιση με στόχο να διαφανεί ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην κατανόηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Όπως έχει διαφανεί υπαρχουν επικαλύψεις ανάμεσα στους τέσσερις τομείς, γεγονός απόλυτα φυσικό από τη στιγμή που υπάρχει μια σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα θέματά τους.

3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Η σημασία των αναπαραστάσεων στην έννοια της συνάρτησης

«Η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα έπρεπε να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης» (Eisenberg, 1992, σ.174). Ωστόσο, η ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία συνδυασμού των συστημάτων αναπαράστασης μιας έννοιας, η οποία εμπλέκεται στην επίλυση προβλήματος, δυσχεραίνουν την επίτευξη του παραπάνω στόχου (Hitt, 1998).

Είναι γενικά παραδεκτός ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών και γι’αυτό θα πρέπει οι μαθητές να είναι ικανοί να μεταβαίνουν μεταξύ της συμβολικής, της γραφικής και της αναπαράστασης σε πίνακα μιας συνάρτησης (NCTM, 1989, σ.154). Επιπλέον, θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα χρησιμοποίησης των αναπαραστάσεων ως ένα από τα νέα μοντέλα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (NCTM, 2000).

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδους σημασίας στη μάθηση των μαθηματικών (Eisenberg, 1992). Οι συναρτήσεις έχουν μια βασική θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια, όπου παίρνουν ένα ευρύ φάσμα εκφράσεων και αναπαραστάσεων. Όντας θεμελιώδης για τη μελέτη των μαθηματικών, η έννοια της συνάρτησης έχει προσδιοριστεί ως ενιαία σημαντικότερη έννοια, καθ’όλη τη τη σχολική εκπαίδευση των μαθητών (Dubinsky & Harel, 1992).

Η διδακτική μεταφορά της έννοιας της συνάρτησης, όπως ήδη έχει προαναφερθεί, φαίνεται δύσκολη, δεδομένου ότι περιλαμβάνει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: την επιστημολογική διάσταση όπως εκφράζεται στα ιστορικά μαθηματικά κείμενα, την επιστημολογία των καθηγητών μαθηματικών για τη συνάρτηση και τη διδακτική διάσταση που αφορά στη γνώση των μαθητών και στους περιορισμούς που θέτει το εκπαιδευτικό σύστημα (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004). Η πολυπλοκότητα

της διδακτικής μεταφοράς και η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι κύρια ανησυχία των εκπαιδευτικών και σημαντική εστίαση της προσοχής για την ερευνητική κοινότητα (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). Οι έρευνες σχετικά με τις συναρτήσεις, τη διδασκαλία τους και τη μάθηση κατέχουν ένα τεράστιο μέρος στη βιβλιογραφία μαθηματικών κειμένων, όπως θα δούμε στη συνέχεια (π.χ. Evangelidou et al, 2004; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998).

Ένας ουσιαστικός αριθμός ερευνητικών μελετών έχει εξετάσει επίσης το ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση και την ερμηνεία των συναρτήσεων (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986). Η έννοια της συνάρτησης περιλαμβάνει ποικίλες αναπαραστάσεις, οι οποίες πρέπει να εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία της έννοιας και κάθε μια από αυτές προσφέρει πληροφορίες για τις ιδιαίτερες πτυχές της έννοιας χωρίς να είναι σε θέση να την περιγράφει εντελώς. Τα μαθηματικά κείμενα επεξηγούν τις συναρτήσεις με διάφορους τρόπους, όπως με διαγράμματα, πίνακες τιμών, γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικούς τύπους. Η χρησιμοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία της συνάρτησης, δηλαδή, η λεκτική, η γραφική και συμβολική μορφή, στοχεύει στην προώθηση, την ενίσχυση και τη βαθιά κατανόηση της συνάρτησης.

Οι Eisenberg και Dreyfus (1994) επισημαίνουν ότι η συνάρτηση είναι μια από τις σημαντικότερες ιδέες της μαθηματικής σκέψης, δεδομένου ότι επιτρέπει στους μαθητές να αποκτήσουν τις επιμέρους γνώσεις στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη την ποικιλία των αναπαραστάσεων που συνδέονται με αυτή την έννοια και τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στη διαδικασία επιλογής κατάλληλων συστημάτων αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλήματος (Yamada, 2000), είναι φανερό πως οι συναρτήσεις στα σχολικά μαθηματικά δεν είναι εύκολη υπόθεση.

Η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδους σπουδαιότητας στη μάθηση των μαθηματικών και κατέλαβε σημαντική εστίαση της προσοχής για την ερευνητική μαθηματική κοινότητα κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών, όπως θα δούμε πιο αναλυτικά στη συνέχεια (π.χ. Dubinsky & Harel, 1992; Evangelidou et al, 2004; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989).

Διάφοροι ερευνητές έχουν ασχοληθεί πρόσφατα με την προφανή μοναδικότητα της έννοιας της συνάρτησης (Janvier, 1998). Αν και οι αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται εκτενώς στα μαθηματικά και η ικανότητα μετάφρασης συσχετίζεται ιδιαίτερα επιτυχώς στη μαθηματική εκπαίδευση, η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, που υποστηρίζονται έντονα από την τεχνολογία, δεν έχει φτάσει σε όλες τις γωνίες της εκπαίδευσης.

Ο σημαντικός ρόλος που κατέχει η έννοια της συνάρτησης, η οποία αποτελεί μια έννοια με μακρόχρονη ιστορική εξέλιξη, στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών διαφαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και επιχειρούν μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας αυτής.

Οι εργασίες θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται:

- Ο ορισμός της συνάρτησης και η διδακτική προσέγγιση της έννοιας, αφορά σε έρευνες που ασχολούνται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης (Breidenbach et al, 1992; Dudinsky & Harel, 1992; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Markovitz et al, 1986; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989; Freudenthal, 1983; Kalchman & Case, 1998) και σε έρευνες που ασχολούνται με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών (Even, 1990; Even, 1993; Norman, 1992).
- Η συνάρτηση και οι διάφοροι τρόποι αναπαράστασής της (Artique, 1992; Duval, 1987; Even, 1998; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992; Kerslake, 1986).

Στον πρώτο τομέα μπορούν να ταξινομηθούν οι εργασίες που εστιάζουν την προσοχή τους στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας. Ένας σημαντικός αριθμός εργασιών που εμπίπτουν στον τομέα αυτό ασχολείται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης, όπως αυτές διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους παιδείας.

Ο δεύτερος τομέας περιλαμβάνει τις εργασίες που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο. Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ενός πίνακα τιμών, μιας γραφικής παράστασης, μιας αλγεβρικής έκφρασης ή μιας λεκτικής

έκφρασης. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, διαφωτίζει και παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης στη γραφική της παράσταση και αντίστροφα. Αυτή η μετάβαση δεν είναι μια απλή μετάφραση, όπως υποδεικνύει ο Janvier (1987a), αλλά μια μεταφορά. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με τον Janvier (1987a), ότι ένα μέρος πληροφορίας δεν μετατρέπεται απλώς σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα, αλλά αναλύεται και ως αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα.

Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών, η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, τόσο σε μαθητές γυμνασίου-λυκείου (Kerslake, 1986; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998) και απόφοιτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artique, 1992; Even, 1998). Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου – συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. Κατά συνέπεια, ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης αφορά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη, χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις (Hitt, 1998).

Επιπρόσθετα, όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), μια αλγεβρική έκφραση είναι αναλογική, με την έννοια ότι μεταφέρει πληροφορία γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας προτάσεων που μπορούν να διαβαστούν η μια μετά την άλλη. Αντίθετα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ολιστική. Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις μεταξύ των απλών συστατικών της γραφικής παράστασης δίνονται ταυτόχρονα, με παράλληλο τρόπο και η επεξεργασία τους απαιτεί την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών.

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης έχουν ευρέως αναφερθεί. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πρόβλημα στο να δημιουργήσουν συνδέσμους

μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (τύπων, γραφικών παραστάσεων, διαγραμμάτων, λεκτικών περιγραφών ή σχέσεων), στην ερμηνεία διαγραμμάτων και στο χειρισμό συμβόλων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις (Sierpinska). Ωστόσο, η φύση των συνδέσμων μέσα στις αναπαραστάσεις και μεταξύ των αναπαραστάσεων είναι άξια έρευνας (Kaput, 1989). Φαίνεται ότι οι μαθητές διατηρούν τελείως διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα για τη συνάρτηση και δεν εκμεταλλεύονται πλήρως τα συμπληρωματικά χαρακτηριστικά καθενός. Όταν η διδασκαλία εννοιών γίνεται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, οι μαθητές πραγματοποιούν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων και έτσι μπορούν να διακρίνουν μεταξύ τους τις μαθηματικές έννοιες (Gagatsis & Christou, 2002). Επίσης, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να οργανώσουν εποικοδομητικά τις δικές τους αναπαραστάσεις (Yerushalmy & Schwartz, 1993).

Οι Schwartz & Yerushalmy (1992) ισχυρίζονται ότι η συμβολική αναπαράσταση είναι σχετικά πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως μιας **διαδικασίας**, ενώ η γραφική αναπαράσταση είναι πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως **οντότητας** (Schwartz & Yerushalmy, 1992, σ.263). Για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι απαραίτητο οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση (και τη γραφική της παράσταση) τόσο ως διαδικασία όσο και ως οντότητα (Goldenberg, Leweis & O'Keefe, 1992; Moschkovich et al, 1993; Sfard, 1991; Yerushalmy & Schwartz, 1993). Οι Dubinsky & Harel (1992) επισημαίνουν ότι οι δύο έννοιες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες: «είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η έννοια του αντικειμένου είναι δομημένη ώστε να ενσωματώνει τη διαδικασία» (Dubinsky & Harel, 1992). Αυτές οι προοπτικές απορρέουν από έναν οντολογικό δυϊσμό συμφυή με τις μαθηματικές έννοιες, δηλαδή, «την ιδέα ότι πολλές μαθηματικές έννοιες μπορούμε να τις δούμε με δύο διαφορετικούς συμπληρωματικούς τρόπους, ως λειτουργικό και δομικό ή ως διαδικασία και αντικείμενο (αντιστοίχως)» (Dubinsky & Harel, 1992, σ.19). Η Sfard (1991) υποστήριξε ότι «η ικανότητα να αντιμετωπίζεις μια συνάρτηση ή έναν αριθμό ή άλλη μαθηματική έννοια ταυτόχρονα ως διαδικασία και ως αντικείμενο είναι απαραίτητη για τη βαθιά κατανόηση των μαθηματικών, όπως και αν ορίζεται η κατανόηση» (Sfard, 1991, σ.5).

Οι Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi ανέπτυξαν ένα θεωρητικό πλαίσιο για την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα διάφορα είδη αναπαράστασης των συναρτήσεων. Το θεωρητικό πλαίσιο που υποστηρίζεται, χαρακτηρίζεται από δύο αρχές:

α) τα διαθέσιμα μέσα για την αναπαράσταση των συναρτήσεων, δηλαδή, την αλγεβρική, τη γεωμετρική και την αναπαράσταση σε πίνακα και

β) τη διάσταση στην οποία αντιμετωπίζεται μια συνάρτηση.

Ο Moschkovich και οι συνεργάτες του διακρίνουν δύο διαφορετικές διαστάσεις:

i) **τη διάσταση διαδικασίας** και

ii) **τη διάσταση αντικειμένου**.

Σύμφωνα με την πρώτη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων (x και y), αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x και προσπαθούν να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης. Σύμφωνα με τη διάσταση αντικειμένου, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα. Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη διάσταση αυτή, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής και κάνουν παρατηρήσεις για τις τιμές και το πρόσημο των συντελεστών της (π.χ. για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)= 3x$ και $g(x)=3x+1$, χρησιμοποιούν τη σχέση που τις συνδέει $g(x)=f(x)+1$) (Knuth, 2000).

Η αντιμετώπιση της συνάρτησης ως διάσταση αντικειμένου αναφέρεται και ως «ποιοτική» διάσταση των συναρτήσεων. Από αυτή τη σκοπιά οι συναρτήσεις αντιμετωπίζονται ολιστικά, ως ανεξάρτητες οντότητες, ως αντικείμενα στα οποία πράξεις όπως π.χ. η σύνθεση, μπορούν να εκτελεστούν (Μουσουλίδης & Γαγάτσης, 2004).

Σύμφωνα με τον Dubinsky, ο οποίος υιοθετεί απόψεις της θεωρίας του Piaget σχετικά με την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών, κάθε άτομο κατασκευάζει τη δική του μαθηματική γνώση διαμέσου μιας διαδικασίας στοχαστικής αφαίρεσης. Η θεωρία ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο οι διαδικασίες εσωτερικοποιούνται για να γίνουν τετριμμένες, συντονίζονται (δύο ή περισσότερες διαδικασίες για να κατασκευαστεί μια νέα), συμπυκνώνονται για να θεωρηθούν έννοιες, γενικεύονται τοποθετούμενες σε ένα ευρύτερο πλαίσιο και αντιστρέφονται (εκτελούνται από την αντίθετη κατεύθυνση).

Για να επεξεργαστεί το μοντέλο του και να το συνδέσει με συγκεκριμένες έννοιες ο Dubinsky χρησιμοποιεί την έννοια του «σχήματος». Ένα σχήμα είναι μια περισσότερο ή λιγότερο συναφής συλλογή από αντικείμενα και διαδικασίες. Ο Dubinsky πιστεύει ότι η μαθηματική γνώση ενός ατόμου έχει σχέση με την τάση να απαντήσει σε μια συγκεκριμένη κατάσταση προβλήματος κατασκευάζοντας νέο σχήμα σε μια προσπάθεια να διεκπεραιώσει την κατάσταση. Η μάθηση είναι αποσπασματική. Ο μαθητής απομονώνει αποσπάσματα μιας σύνθετης δομής, τα αναλύει και τοποθετεί σε μερική διάταξη τα περιεχόμενά τους για να παράγει αυτό που ορίζεται ως «γενετική ανάλυση» της έννοιας και μετά ερευνά πως αυτή η γενετική αποσύνθεση συνδέεται με τα σχήματά του. Ο Dubinsky εφάρμοσε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο σε αρκετά μαθηματικά θέματα συμπεριλαμβανομένης και της έννοιας της συνάρτησης. Οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τη συνάρτηση περνούν από διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης και φθάνουν σε κάποια ορόσημα, τα οποία κάλεσε έννοιες της συνάρτησης ως **ενέργεια, διαδικασία, αντικείμενο** (Dubinsky, 1991).

Όποιος αντιλαμβάνεται την έννοια της συνάρτησης ως ενέργεια βλέπει τη συνάρτηση ως ένα σύνολο από μεμονωμένους υπολογισμούς. Έτσι, όταν αναφέρεται στη συνάρτηση μιλάει για κάποιο συγκεκριμένο δεδομένο. Δηλαδή η έννοια της συνάρτησης ως ενέργειας είναι συνδεδεμένη με σαφείς υπολογισμούς και κάθε εξαγόμενο από μια συγκεκριμένη συνάρτηση είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος χωρίς να συνδέεται με άλλα εξαγόμενα. Έτσι, φαίνεται η συνάρτηση ως στατική έννοια, γιατί κάποιος καλείται να κάνει έναν συλλογισμό πάνω σ’αυτήν μια μόνο φορά.

Η έννοια της συνάρτησης ως διαδικασίας συνεπάγεται έναν δυναμικό χειρισμό των ποσοτήτων. Όταν ένα δίκτυο υπολογισμών εσωτερικοποιηθεί σε μια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σα μια βασική πρωταρχική έννοια στους υπολογισμούς χωρίς να μας ενδιαφέρει ο εσωτερικός τρόπος λειτουργίας της, π.χ. η συνάρτηση $f(x)=4x-1$ ερμηνεύεται ως η διαδικασία κατά την οποία όταν δίνουμε το δεδομένο x, παράγεται το εξαγόμενο f(x). Οι μαθητές που προσανατολίζονται στη συνάρτηση ως διαδικασία, αισθάνονται περισσότερη σιγουριά αιχμαλωτίζοντας ένα περίπλοκο δίκτυο υπολογισμών σε μια διαδικασία και στη συνέχεια χρησιμοποιούν τη συμπεριφορά της διαδικασίας αντί για τα αποτελέσματα ενός εμπειρικού πειράματος ως κριτήριο για την ορθότητα της εκτέλεσης των υπολογισμών (Cuoco, 1995).

Η συνάρτηση μπορεί να αντιμετωπιστεί ως αντικείμενο, ανεξάρτητο από αυτό που κάνει και πάνω στο οποίο μπορούμε να ενεργήσουμε ολιστικά. Στη φάση αυτή συμπυκνώνονται διαδικασίες και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται ως δεδομένα. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές δεν ασχολούνται με τις λεπτομέρειες των υπολογισμών, αρχίζουν να συγκρίνουν συναρτήσεις, όχι στη βάση των βημάτων που εκτελούνται για να υπολογίσουμε τα εξαγόμενα, αλλά περισσότερο στη βάση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων. Από τη σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης ως αντικείμενο εξαρτάται και η κατανόηση διεργασιών πάνω στις συναρτήσεις όπως η σύνθεση, ο μετασχηματισμός, η διαφόριση και η ολοκλήρωση (Cuoco, 1995).

Σχετικά με τις διάφορες μορφές αναπαραστάσεων των συναρτήσεων η Sfard υποστηρίζει ότι η αλγεβρική αναπαράσταση μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους: είτε λειτουργικά ως μια περιληπτική περιγραφή κάποιων σχέσεων ή δομικά ως μια στατική σχέση δύο μεγεθών. Από την άλλη μεριά, επειδή σε μια γραφική παράσταση τα άπειρα συνθετικά μιας συνάρτησης συνδυάζονται σε μια λεπτή γραμμή έτσι ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ταυτοχρόνως σαν μια ολοκληρωμένη ολότητα, το γράφημα ενθαρρύνει μια δομική προσέγγιση της έννοιας (Sfard, 1992).

Είδαμε ότι ένας τεράστιος αριθμός ερευνών έχει χρησιμοποιήσει διαφορετικές προσεγγίσεις για να μελετήσει την έννοια της συνάρτησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Η Sierpinska (1992) μελέτησε τις αντιλήψεις των μαθητών για τις συναρτήσεις, τον τρόπο με τον οποίο αυτές διατυπώνονται στα πλαίσια της διδασκαλίας και τη σχέση τους με την ιστορική ανάπτυξη της συνάρτησης. Η Sfard (1992) εισήγαγε τη δομική και λειτουργική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, ενώ οι Dubinsky και Harel (1992) πρότειναν τέσσερα διαφορετικά στάδια στην κατανόηση των συναρτήσεων (προσυνάρτηση, ενέργεια, διαδικασία και αντικείμενο). Οι Markovitz et al. (1986) προσδιόρισαν ότι οι μαθητές συνάντησαν δυσκολίες στα διάφορα έργα που περιελάμβαναν τρεις ιδιαίτερους τύπους συναρτήσεων: τη σταθερή συνάρτηση, τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση είναι διακεκομμένη και τη συνάρτηση πολλαπλού τύπου. Επίσης, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και η γραφική της παράσταση αποτέλεσαν το βασικό αντικείμενο πολλών άρθρων (π.χ. Kalchman & Case, 1998; Vassakos, 1994).

Στην παρούσα έρευνα λαμβάνονται υπόψη τρεις ερευνητικές περιοχές για την κατανόηση της συνάρτησης. Η πρώτη ερευνητική περιοχή αναφέρεται στην εικόνα της έννοιας της συνάρτησης στο μυαλό του μαθητή, η δεύτερη, που αναφέρθηκε παραπάνω, αφορά στις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας και στη μετάβαση από μια μορφή σε άλλη και η τρίτη ερευνητική κατεύθυνση μελετά τις ικανότητες των μαθητών στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης.

Οι όροι «εικόνα» και «ορισμός» είναι δύο έννοιες που έχουν συζητηθεί εκτενώς στα μαθηματικά κείμενα σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τη συνάρτηση (Vinner & Dreyfus, 1989; Tall & Vinner, 1981; Vinner & Hershkowitz, 1980). Αν και οι τυπικοί ορισμοί των μαθηματικών εννοιών εισάγονται στους μαθητές γυμνασίου ή λυκείου, οι μαθητές δεν τους χρησιμοποιούν ουσιαστικά όταν καλούνται να προσδιορίσουν ή να κατασκευάσουν μαθηματικά αντικείμενα που έχουν σχέση με αυτές τις έννοιες. Συχνά βασίζονται σε μια εικόνα της έννοιας που αναφέρεται στο «σύνολο όλων των διανοητικών εικόνων που συνδέονται στο μυαλό του μαθητή με το όνομα της έννοιας, μαζί με όλες τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν» (Vinner & Dreyfus, 1989, σ.356).

Στη μελέτη τους, οι Vinner και Dreyfus εξέτασαν, αρχικά, τους κοινούς ορισμούς της έννοιας της συνάρτησης που δόθηκαν από τους μαθητές πριν αρχίσουν τους υπολογισμούς. Στη συνέχεια, εξέτασαν τις κύριες εικόνες της έννοιας της συνάρτησης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για τους στόχους προσδιορισμού και κατασκευής. Έπειτα, εξέτασαν τις διαφορές μεταξύ των ομάδων των μαθητών ως προς τον τρόπο που συνέλαβαν τις συναρτήσεις και τέλος, εξέτασαν τη συχνότητα των μαθητών που χρησιμοποίησαν τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης και αυτών που χρησιμοποίησαν την εικόνα τους για την έννοια της συνάρτησης, δηλαδή, είχαν δύο συγκρουόμενα γνωστικά σχέδια που αντιστοιχούσαν στον ορισμό και στην εικόνα της συνάρτησης, αντίστοιχα.

Σύμφωνα με όλα όσα έχουν προαναφερθεί, είναι προφανές ότι υπάρχουν ομοιότητες ανάμεσα στις θεωρίες των Dubinsky και Sfard. Συνεπώς, η τεχνική να αιχμαλωτίσουμε τη διαδικασία της συνάρτησης σε ένα μαθηματικό αντικείμενο φαίνεται να ταιριάζει τέλεια στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης (Eisenberg, 1991).

3.2 Αλλαγή πεδίου αναπαράστασης της συνάρτησης

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης περιλαμβάνει και την ικανότητα να μπορεί κάποιος να αναπαριστά συναρτήσεις με μια ποικιλία τρόπων, εκ των οποίων οι πιο γνωστές στους μαθητές είναι με τη βοήθεια ενός αλγεβρικού τύπου (συμβολικά), με γραφική παράσταση ή με πίνακα τιμών, καθώς επίσης και την ικανότητά τους να ερμηνεύουν τις πληροφορίες που περιέχονται σε όλες αυτές τις αναπαραστάσεις και να μετακινούνται ευέλικτα μεταξύ τους όταν μια αναπαράσταση ταιριάζει καλύτερα για να ορίσει ή να μεταδώσει κάποια πληροφορία.

Οι Tall (1986), Blackett (1987), Rival (1987) και Thomas (1988) έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση σε δυσκολότερες μορφές συναρτήσεων και σχέσεων μόνο αν τις αναπτύξουν διαισθητικά. Επίσης, έδειξαν ότι όταν η έμφαση δίνεται στην οπτική αναπαράσταση, οι μαθητές συγκρατούν πολύ καλύτερα τις έννοιες παρά όταν τις αναπτύσσουν σε αναλυτικό πλαίσιο.

Η ικανότητα ερμηνείας μιας γραφικής παράστασης ή ενός πίνακα τιμών δεν κατακτάται εύκολα. Αν και οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν απλές συναρτήσεις, συχνά αντιμετωπίζουν τη γραφική παράσταση σαν κάτι εξωτερικό από την ίδια τη συνάρτηση και όχι πραγματικά σαν μέρος της ουσίας της (Vinner & Dreyfus, 1989). Επίσης, δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις που οι ίδιοι σχεδιάζουν.

Οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει την εννοιακή εικόνα της συνάρτησης. Καθηλώνονται στη χρήση των διαδικασιών και στη λύση ασκήσεων αναλυτικά και όχι γραφικά. Ιστορικά, η οπτική εννοιακή εικόνα της συνάρτησης έχει με την αναλυτική περιγραφή της μια διαμάχη εκατοντάδων χρόνων, με την οπτική εικόνα πάντα να χάνει (Kleiner, 1988).

Ο Schoenfeld (1985) παρατήρησε ότι οι μαθητές δεν βλέπουν τις στοιχειώδεις συναρτήσεις μιας μεταβλητής ως άρρηκτα συνδεδεμένες με τη γραφική τους παράσταση. Οι Dreyfus και Eisenberg (1987) παρατήρησαν ότι οι μαθητές σπανίως αναφέρονται στις γραφικές παραστάσεις που οι ίδιοι δημιουργούν. Άλλες μελέτες έδειξαν ότι η χρήση της γραφικής παράστασης δεν είναι αποτελεσματική γιατί οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη σχέση που περιγράφει η γραφική παράσταση ανάμεσα στην ανεξάρτητη και την

εξαρτημένη μεταβλητή. Σε μια δημόσια συζήτηση στο Working Group on Advanced Mathematical Thinking, φάνηκε ότι υπάρχουν δύο «σχολές» ανάμεσα στους ερευνητές σχετικά με το θέμα αν τα σχολικά και πανεπιστημιακά μαθηματικά πρέπει να δίνουν έμφαση ή όχι στις οπτικές όψεις που περιβάλλουν τις στοιχειώδεις συναρτήσεις (Dubinsky, 1989; Dreyfus, 1991). Η οπτική αναπαράσταση της συνάρτησης μέσα από τις γραφικές παραστάσεις εξασφαλίζει καλύτερη κατανόηση και διατήρηση στη μνήμη, εκθέτει τα σπουδαιότερα μέρη της πληροφορίας και τους συνδετικούς κρίκους μεταξύ τους και διευκολύνει το συμβολισμό των καταστάσεων. Ο Polya προτείνει την κλασσική παιδαγωγική αρχή του «Σχεδίασε μια εικόνα» ως μια στρατηγική για τη λύση ενός προβλήματος.

Αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τις δυσκολίες συνδυασμού των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης καταδεικνύουν την ύπαρξη συγκεκριμένων επιπέδων κατανόησης της έννοιας (Hitt, 1998). Οι έρευνες περιλαμβάνουν συγκεκριμένα έργα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, ώστε να διατηρείται το νόημα, καθώς επίσης έργα όπου η κατάσταση προβλήματος δεν υποδηλώνει άμεσα το σύστημα ή τα συστήματα αναπαράστασης που απαιτούνται για την επίλυσή τους. Με βάση τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών έχουν εντοπιστεί τα ακόλουθα επίπεδα σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης (Hitt, 1998, σ.125):

Επίπεδο 1: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).

Επίπεδο 2: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να εντοπίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας.

Επίπεδο 3: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Επίπεδο 4: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης.

Επίπεδο 5: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Με βάση τα επίπεδα που έχουν εντοπιστεί σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης διαφαίνεται ότι η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα

αναπαράστασης σε άλλο (Επίπεδο 3) αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Επίπεδο 5).

Η Even (1998) εξετάζει τους παράγοντες που εμπλέκονται στη σύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, επικεντρώνεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και σε άλλες πτυχές της γνώσης και κατανόησης. Σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998), η οποία περιλάμβανε φοιτητές μαθηματικών, η γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά συνδέεται με τη γνώση για τους διάφορους τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, τη γνώση για το πλαίσιο της παρουσίασης και τέλος, τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Η γνώση μιας μαθηματικής έννοιας περιλαμβάνει τους τρόπους με τους οποίους προσεγγίζεται η έννοια. Σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, μια ουσιαστική διάκριση σε σχέση με τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται, αφορά στην ολιστική προσέγγιση του τρόπου συμπεριφοράς μιας συνάρτησης και την προσέγγιση κατά σημεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ολιστικά και να μελετηθεί η συμπεριφορά της (π.χ. όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, που δίνεται σε συμβολική μορφή). Η κατά σημεία προσέγγιση αφορά στη μελέτη συγκεκριμένων σημείων (π.χ. εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση). Η ευελιξία στη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη συνδέεται με την ευελιξία στη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων όσον αφορά στις συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998) υπήρχαν περιπτώσεις όπου τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την κατά σημεία προσέγγιση είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, που περιλάμβαναν διάφορες αναπαραστάσεις συναρτήσεων, σε σχέση με τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την ολιστική προσέγγιση και αντίστροφα.

Ένας άλλος παράγοντας, σύμφωνα με την Even (1998), που σχετίζεται με το ρόλο που διαδραματίζουν οι διάφορες αναπαραστάσεις και η σύνδεση μεταξύ τους στην κατανόηση μιας έννοιας αφορά το συγκεκριμένο πλαίσιο παρουσίασης του προβλήματος. Για παράδειγμα, το είδος και η φύση των συναρτήσεων που εξετάζονται, καθορίζουν το κατά πόσο και το πως ο λύτης του προβλήματος χειρίζεται τις αναπαραστάσεις προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα.

Τέλος, η ποιότητα της γνώσης των υποκείμενων ιδεών για τις συναρτήσεις που μελετώνται, επίσης συνδέεται με την ικανότητα μετάφρασης από μια αναπαράσταση σε άλλη (Even, 1998).

Δύο από τα ερωτήματα που προσπάθησαν να απαντήσουν οι Γαγάτσης et al. (2000a) σχετικά με την επίλυση προβλήματος είναι:

(α) Υπάρχει ένα είδος αναπαράστασης στα Μαθηματικά, το οποίο οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά;

(β) Υπάρχει ένα είδος μετάφρασης που ευνοείται;

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας έχει διαφανεί ότι οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά συγκεκριμένες μορφές αναπαράστασης, όπως είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση. Αντίθετα, παρουσιάζονται δυσκολίες σχετικά με το χειρισμό λεκτικών εκφράσεων. Αναφορικά με το είδος της μετάφρασης, έχει φανεί ότι ευνοείται η μετάφραση από συμβολική έκφραση σε λεκτική έκφραση και το αντίθετο.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ερευνών, η πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει τις γραφικές παραστάσεις ως διαδικασία και όχι ως αντικείμενο. Η διάσταση διαδικασίας είναι η πρώτη που αναπτύσσεται, ενώ η διάσταση αντικειμένου μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να αποκτηθεί (Moschkovich et al, 1993; Sfard, 1992; Yeruschalmy & Schwartz, 1993). Η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a).

Όπως έχει διαφανεί, τρία είδη παραγόντων σχετίζονται με την ικανότητα σύνδεσης των διαφόρων αναπαραστάσεων των συναρτήσεων: οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των συναρτήσεων, το πλαίσιο παρουσίασης και η γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld, κατανόηση «σημαίνει να παίζει κανείς στα δάχτυλα ένα μεγάλο αριθμό από προαπαιτούμενες γνώσεις, σημαίνει να έχει πολλαπλές αναπαραστάσεις αυτών και να μπορεί να μετακινηθεί συντονισμένα μεταξύ όλων αυτών των προοπτικών και των αναπαραστάσεων». Με άλλα λόγια η κατανόηση είναι μια εξαιρετικά σύνθετη υπόθεση και διδακτικές, γνωστικές, επιστημολογικές και

μαθηματικές μελέτες παρεμβαίνουν και αλληλεπιδρούν για τον προσδιορισμό των διαδικασιών που οδηγούν σε αυτή (Schoenfeld, 1990).

Η χρήση αρκετών αναπαραστάσεων και η σύνδεση μεταξύ των διαφορετικών αυτών μορφών βοηθούν τους μαθητές να μεταβούν από μια περιορισμένη και συγκεκριμένη κατανόηση ενός θέματος σε μια περισσότερο ευέλικτη και αφηρημένη κατανόηση (Schwartz & Dreyfus, 1991).

Μερικοί ερευνητές ερμηνεύουν τα λάθη των μαθητών είτε σαν ένα προϊόν ανεπαρκούς χειρισμού των αναπαραστάσεων είτε σαν έλλειψη συντονισμού ανάμεσα στις αναπαραστάσεις (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa & Roschelle, 1993). Οι τυποποιημένες μορφές αναπαράστασης μερικών μαθηματικών εννοιών, όπως η έννοια της συνάρτησης, δεν είναι αρκετές για τους μαθητές ώστε να κατασκευάσουν ολόκληρη την έννοια και να καλύψουν όλη τη σειρά των εφαρμογών της. Οι καθηγητές μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παραδοσιακά έχουν στρέψει τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων. Οι περισσότερες εκπαιδευτικές πρακτικές περιορίζουν τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων στη μετάφραση της αλγεβρικής μορφής της σε γραφική. Ο Vinner (1992) επισήμανε ότι μια συνάρτηση, όπως διδάσκεται στα σχολεία, προσδιορίζεται συχνά με μια μόνο από τις αναπαραστάσεις της, είτε την αλγεβρική είτε την γραφική. Η Sfard (1992), επίσης, διαπίστωσε ότι οι μαθητές δεν είναι ικανοί να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων. Επιπρόσθετα, η μετατροπή από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, επηρεάζει τη μάθηση των μαθηματικών και ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να αποκτήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις βασικές μαθηματικές ιδέες.

Δεδομένου ότι η πλειοψηφία των προαναφερθέντων μελετών εξέτασε την εικόνα των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης και τη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεών της ξεχωριστά, δημιουργήθηκε η ανάγκη να εξερευνηθεί και να αποκαλυφθεί η σύνδεση αυτών των δύο απόψεων της κατανόησης της συνάρτησης. Μόνο ένας περιορισμένος αριθμός μελετών ενσωμάτωσε την έρευνα και για τις δύο προοπτικές. Μια πρόσφατη μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τους Evangelidou et al. (2004), έδειξε τις στενές αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ τριών διαφορετικών παραγόντων που είναι συστατικά της έννοιας της συνάρτησης: των ορισμών και παραδειγμάτων της

συνάρτησης (εικόνα της έννοιας) με την ικανότητα να χρησιμοποιηθούν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης από τους μαθητές.

Η λιγότερη προσοχή δόθηκε στις αμοιβαίες σχέσεις ανάμεσα στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης, στους διαφορετικούς τρόπους αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας και στη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεών της, όπως οι δυνατότητες επίλυσης προβλήματος συνάρτησης, που εξερευνήθηκαν κυρίως ανεξάρτητα από τους τελευταίους δύο παράγοντες. Μια εξαίρεση ήταν η μελέτη των Mousoulidis και Gagatsis (2004), που ερεύνησε τις προσεγίσεις των φοιτητών της Παιδαγωγικής Σχολής στην επίλυση έργων συναρτήσεων και τη σύνδεση αυτών των προσεγγίσεων με τη σύνθετη γεωμετρική επίλυση προβλήματος. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι αρκετοί φοιτητές ακολούθησαν μια διαδικασία που οδήγησε στην κατασκευή μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης με την εύρεση των ζευγών των τιμών x και y. Αυτή η μέθοδος χαρακτηρίστηκε ως προσέγγιση μέσω σημείων και δίνει μερική (τοπική) εικόνα της έννοιας της συνάρτησης. Άλλοι φοιτητές χρησιμοποίησαν μια προοπτική αντικειμένου, η οποία περιέλαβε την προσέγγιση της συνάρτησης ως οντότητα (Knuth, 2000; Moschkovich et al, 1993), η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί με ευελιξία. Αυτή η μέθοδος δίνει στους φοιτητές μια ολιστική προσέγγιση της έννοια της συνάρτησης. Οι φοιτητές που ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν μια ολιστική οπτική προσέγγιση, είχαν τις καλύτερες εκβάσεις στην επίλυση των σύνθετων προβλημάτων συνάρτησης, ίσως επειδή ήταν σε θέση να παρατηρήσουν και να χρησιμοποιήσουν με ευελιξία τις σχέσεις των μεταβλητών και τις συνδέσεις μεταξύ των συμβολικών και γραφικών αναπαραστάσεων στα προβλήματα. Επιπρόσθετα, αν και τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη ήταν μερικά από εκείνα που διδάχθηκαν στο σχολείο, οι φοιτητές αντιμετώπισαν δυσκολίες, ειδικά όταν έπρεπε να εφαρμόσουν τη γεωμετρική προσέγγιση. Το τελευταίο συμπέρασμα φαίνεται σημαντικό και χρειάζεται περαιτέρω έρευνα, δεδομένου ότι μια έννοια μαθαίνεται στην έκταση στην οποία χρησιμοποιείται αποτελεσματικά, ή με άλλα λόγια, αποτελεί μια λύση σε ένα πρόβλημα (Brousseau, 1999).

3.2.1 Η σύνδεση μεταξύ γραφικής και αλγεβρικής αναπαράστασης

Σύμφωνα με το άρθρο του Knuth J. E. (2000) «Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study», ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση μεταξύ αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης των συναρτήσεων που πραγματοποιείται από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο άρθρο αυτό γίνεται σαφές ότι πολλοί μαθητές αποφοιτούν από το σχολείο μη έχοντας κατανοήσει τις συνδέσεις ανάμεσα στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων. Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι για γνωστά και συνηθισμένα προβλήματα πολλοί μαθητές έχουν κατανοήσει τις συνδέσεις μεταξύ γραφικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων, εντούτοις, αυτή η κατανόηση φάνηκε να είναι επιφανειακή.

Στη συνέχεια παραθέτουμε αναλυτικότερα κάποια στοιχεία αυτής της ενδιαφέρουσας έρευνας:

«Η εισαγωγή των αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ως μια από τις πιο κρίσιμες στιγμές στη μάθηση των μαθηματικών και αντιπροσωπεύει “ένα από τα πιο σημαντικά σημεία στα μαθηματικά, στο οποίο ο μαθητής χρησιμοποιεί ένα συμβολικό σύστημα για να επεκτείνει και να κατανοήσει κάποιο άλλο” (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990, σ.2). Κορυφαίοι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση, αναγνωρίζοντας το σημαντικό ρόλο που παίζουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών, προσδιόρισαν την έννοια σαν μια από τις «μεγάλες ιδέες» της άλγεβρας (Lacampagne, Blair & Kaput, 1995). Στην πραγματικότητα, λόγω των πρωτοβουλιών μεταρρύθμισης, που απαιτούν από τους εκπαιδευτικούς να εφαρμόζουν την άλγεβρα σε όλους τους μαθητές, ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης που επιλέγον, η χρήση των αναπαραστάσεων της συνάρτησης έχει γίνει περισσότερο αναγκαία (NCTM, 1997).

Σκοπός της έρευνας του Knuth ήταν να εξετάσει την κατανόηση των συνδέσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν αλληλεπιδρούν με τις διάφορες αναπαραστάσεις. Ειδικότερα, εξέτασε την ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται, να επιλέγουν και να κινούνται μεταξύ των αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων. Οι καθηγητές γενικά, υποθέτουν ότι εφόσον οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή μια φορά με αυτή τη σύνδεση, δεν χρειάζεται καμιά περαιτέρω αναθεώρηση (Schoenfeld et al. 1993).

Για το λόγο αυτό, στόχος ήταν να εξεταστεί αυτή η υπόθεση και να ελεγχθεί εάν στην πραγματικότητα, οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν αυτή τη θεμελιώδη σύνδεση. Συγκεκριμένα, έπρεπε να εξεταστούν οι ικανότητες των μαθητών να χρησιμοποιούν την Καρτεσιανή Σύνδεση – κατά την οποία, οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου μιας γραμμής ικανοποιούν την εξίσωσή της – για να επιλύσουν ασκήσεις όπου απαιτείται η χρήση της.

Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε ασκήσεις στις γραμμικές συναρτήσεις, όπου οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν είτε την αλγεβρική είτε τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης, ώστε να επιτύχουν τη λύση με τον πιο εύκολο υπολογιστικά τρόπο, αφού και οι δύο μορφές ήταν ισοδύναμες ως προς τις πληροφορίες που παρείχαν. Έτσι, εάν οι μαθητές είχαν κατανοήσει την Καρτεσιανή Σύνδεση, θα επέλεγαν την πιο βολική και εύκολη στρατηγική επίλυσης, η οποία, ήταν η χρήση της γραφικής αναπαράστασης για τις συγκεκριμένες ασκήσεις.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι περισσότεροι από τα τρία τέταρτα των μαθητών επέλεξαν μια αλγεβρική προσέγγιση σαν μέθοδο λύσης, ακόμη και στην περίπτωση όπου η γραφική προσέγγιση ήταν πιο εύκολη και πιο πρακτική. Εξετάζοντας και τους γνωστικούς και τους εκπαιδευτικούς παράγοντες, δόθηκαν διάφορες εξηγήσεις για να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες των μαθητών στη σύνδεση των αναπαραστάσεων.

Η φύση των προβλημάτων που δόθηκαν στην παρούσα μελέτη, απαιτούσε από τους μαθητές την ικανότητα να αντιληφθούν καθεμιά αναπαράσταση από τη διάσταση της «διαδικασίας», ώστε να απαντήσουν σωστά (δηλαδή, να αναγνωρίζουν την Καρτεσιανή Σύνδεση). Η αλγεβρική αναπαράσταση, που χρησιμοποίησε η πλειοψηφία των μαθητών, προκαλεί μια προσέγγιση μέσα από την προοπτική της διαδικασίας (Schwartz & Yerushalmy, 1992). Ερευνητές προτείνουν ότι η δυσκολία των μαθητών να δουν τις γραφικές αναπαραστάσεις από την προοπτική της διαδικασίας, οφείλεται ίσως στην ανικανότητα να φανούν τα μεμονωμένα σημεία που περιλαμβάνει μια ευθεία (Goldenberg, 1988; Moschkovich et al, 1993). Από μια άποψη, η γραφική παράσταση κρύβει τις αναγκαίες πληροφορίες και κατά συνέπεια, οι μαθητές μπορεί να αγνοούν ότι αυτές οι αναπαραστάσεις προσφέρουν τα μέσα που θα τους οδηγήσουν στη λύση.

Ένας παράγοντας που οδήγησε τους μαθητές σε μια αλγεβρική προσέγγιση μπορεί να ήταν η φύση των ίδιων των προβλημάτων. Όταν δηλαδή, ο μαθητής καλείται

να βρει μια λύση σε μια εξίσωση, υποθέτει ότι απαιτείται μια ακριβής λύση. Επειδή οι συντεταγμένες ενός σημείου σε μια γραφική παράσταση μπορεί να προκύψουν μόνο προσεγγιστικά, οι μαθητές στηρίζονται σε μια μέθοδο αλγεβρικής λύσης για να επιλύσουν μια εξίσωση.

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τις επιλογές των μαθητών στις μεθόδους λύσης είναι η διδακτική και εκπαιδευτική έμφαση, που χαρακτηρίζεται από μια εστίαση στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις και το χειρισμό τους. Κατά συνέπεια, οι μαθητές αντιλαμβάνονται συχνά ότι οι γραφικές αναπαραστάσεις είναι περιττές και σε αρκετές περιπτώσεις, ότι δε συνδέονται με τις αλγεβρικές (Yerushalmy & Schwartz, 1993). Επιπλέον, σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus, οι μαθητές έχουν ισχυρή τάση να σκέφτονται αλγεβρικά παρά οπτικά. (Eisenberg & Dreyfus, 1991, σ.29).

Τέλος, οι μεταφράσεις που συνήθως παρουσιάζονται στους μαθητές δυναμώνουν τη τάση τους για χρήση μεθόδων λύσης μέσα από το πλαίσιο των αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Όπως έχουν δείξει οι Leinhardt et al. (1990), οι μαθητές ασχολούνται κυρίως με προβλήματα που απαιτούν τη μετάφραση από μια εξίσωση σε γραφική παράσταση, κατά την οποία, κατασκευάζουν αρχικά τον πίνακα τιμών που ικανοποιούν την εξίσωση και στη συνέχεια, σχεδιάζουν τα σημεία στο σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με τους Schoenfeld et al. (1993), αυτή η διαδικασία γίνεται συνήθως εύκολα αντιληπτή από μαθηματική άποψη και σε σύντομο χρονικό διάστημα οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν τις συνδέσεις εξίσωση – γραφική παράσταση (δηλαδή, ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας ευθείας αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωσή της). Εντούτοις, οι απαντήσεις των μαθητών στα προβλήματα της παρούσας μελέτης δείχνουν ότι δεν έχουν κατανοήσει αυτή τη σύνδεση όταν κινούνται από μια γραφική παράσταση προς την εξίσωση και επομένως, στην πραγματικότητα, η κατανόησή τους είναι περιορισμένη και μονόπλευρη. Οι Hiebert και Carpenter υποστηρίζουν ότι οι μαθητές συνήθως, αποτυγχάνουν να κάνουν συνδέσεις, δηλαδή, χρησιμοποιούν πληροφορίες σαν απομονωμένα κομμάτια και αδυνατούν να αναγνωρίσουν ή να δημιουργήσουν συνδέσεις σε μαθηματικές καταστάσεις οι οποίες είναι προφανείς στους ενήλικες (Hiebert & Carpenter, 1992, σ.76). Τα στοιχεία έδειξαν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αναπτύξουν σημαντικές συνδέσεις ανάμεσα στις δύο αυτές αναπαραστάσεις και ειδικότερα, αποτυγχάνουν να αναγνωρίσουν ή να δημιουργήσουν τη σύνδεση στην κατεύθυνση από

τη γραφική παράσταση σε εξίσωση. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν αναγνωρίζει ότι η επιλογή ενός οποιουδήποτε σημείου της γραφικής παράστασης της ευθείας θα μπορούσε να είναι λύση της εξίσωσης της ευθείας.» (Knuth J. E. 2000).

Ως συνέπεια όλων όσων έχουν προαναφερθεί, η έρευνα που ακολουθεί είχε στόχο να εξετάσει την επίλυση προβλήματος συνάρτησης, η οποία θεωρείται κεντρική στην κατανόηση της έννοιας αυτής, σε σχέση με τους ορισμούς και τα παραδείγματα συνάρτησης που δίνουν οι μαθητές, με τις ικανότητές τους στην μετατροπή από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και με την αναγνώριση των συναρτήσεων μέσα από τις γραφικές μορφές αναπαράστασης.

2ο Μ Ε Ρ Ο Σ

Η Ε Ρ Ε Υ Ν Α

4. ΘΕΜΑ: «ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ»

4.1 Το πειραματικό πλαίσιο της έρευνας

4.1.1 Ο στόχος της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και η σχέση της με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων και ειδικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Διερευνήθηκε, επίσης, το είδος της προσέγγισης (αλγεβρική ή γεωμετρική) που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλήματος αλλά και ο τρόπος επίδρασής του στην ικανότητα εκτέλεσης έργων μετάφρασης. Επιπλέον, εξετάστηκε η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κατανόηση της συνάρτησης και στον ορισμό της έννοιας, στα παραδείγματα, στην ικανότητα αναγνώρισης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας και στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, μελετήθηκε ο ρόλος της επίλυσης προβλήματος στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν την έννοια της συνάρτησης με διάφορες μορφές αναπαράστασης για να δώσουν ορισμό και παραδείγματα αυτής.

4.1.2 Οι υποθέσεις της έρευνας

Όσον αφορά στις υποθέσεις της έρευνας, αυτές συνοψίζονται ως εξής:

Υπόθεση 1: Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία εξωτερικών-σημειωτικών αναπαραστάσεων και με την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο.

Υπόθεση 2: Η επιτυχία σε έργα άμεσης μετάφρασης σχετίζεται με την επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία απαιτούν τη μετάφραση από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης στο άλλο.

Υπόθεση 3: Η επιτυχία στα έργα άμεσης μετάφρασης θα είναι διαφορετική ανάλογα με το είδος της αρχικής αναπαράστασης.

Υπόθεση 4: Η κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης συνδέεται με την αναγνώριση της έννοιας στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης καθώς και με την επίλυση προβλήματος.

Υπόθεση 5: Η επίδοση των μαθητών της Γ΄ Λυκείου θα είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της Β΄ Λυκείου.

4.1.3 Τα υποκείμενα της έρευνας

Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν 193 μαθητές από δύο διαφορετικά λύκεια της Κεφαλλονιάς. Συγκεκριμένα, στην έρευνα συμμετείχαν 109 μαθητές της Β΄ Λυκείου και 84 μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Ειδικότερα, τα αγόρια και τα κορίτσια της Β΄ Λυκείου ήταν 48 και 61, αντίστοιχα, ενώ τα αγόρια και τα κορίτσια της Γ΄ Λυκείου ήταν 34 και 50, αντίστοιχα. Οι μαθητές προέρχονταν από τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις, τη Θεωρητική, τη Θετική και την Τεχνολογική, οι οποίες διαφέρουν στο επίπεδο των Μαθηματικών που περιλαμβάνουν. Επιπλέον, όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα, είχαν διδαχθεί τις συναρτήσεις με το ίδιο περιεχόμενο στην Α΄ Λυκείου. Η συλλογή των στοιχείων πραγματοποιήθηκε στην αρχή του σχολικού έτους, γεγονός που σημαίνει ότι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου εξοικειώθηκαν με το μαθηματικό περιεχόμενο της προηγούμενης τάξης σχετικά με τις συναρτήσεις, ενώ οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου είχαν λάβει μια πρόσθετη διδασκαλία στις εκθετικές, τις λογαριθμικές και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, σε σχέση με τους πρώτους. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ύλη που έπρεπε να κατέχουν οι μαθητές για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της έρευνας ήταν αυτή της Α΄ Λυκείου, δεδομένου ότι τα έργα του δοκιμίου είχαν διδαχθεί στους μαθητές αυτής της τάξης.

Ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου ήταν περίπου 40-45 λεπτά.

4.1.4 Οι μεταβλητές της έρευνας

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις κωδικοποιήσεις των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των στοιχείων και μια σύντομη περιγραφή του δοκιμίου:

1. **D1** : σωστός ορισμός ή 1-1 συνάρτηση
   D2 : ελλιπής ορισμός
   D3 : λανθασμένος ορισμός – κενό
   EX1 : σωστό παράδειγμα
   EX2 : λανθασμένο παράδειγμα – ασαφές παράδειγμα – κενό

2. **G1** : γραφική παράσταση α
   G2 : γραφική παράσταση β
   G3 : γραφική παράσταση γ
   G4 : γραφική παράσταση δ

3. **AL1** : αντιστοίχιση του α από αλγεβρική σε λεκτική μορφή
   AL2 : αντιστοίχιση του β από αλγεβρική σε λεκτική μορφή
   AL3 : αντιστοίχιση του γ από αλγεβρική σε λεκτική μορφή
   AL4 : αντιστοίχιση του δ από αλγεβρική σε λεκτική μορφή

4. **GA1** : γραφική παράσταση α σε αλγεβρικό τύπο
   GA2 : γραφική παράσταση β σε αλγεβρικό τύπο

5. **AG** : αλγεβρικός τύπος σε γραφική παράσταση

6. **Pa** : σχεδίαση της γραφικής παράστασης του όγκου $V_1(t)$
   Pb : σχεδίαση της γραφικής παράστασης του όγκου $V_2(t)$
   Ea1 : λάθος σχεδίαση του όγκου $V_1(t)$ που οφείλεται σε χρήση αναλόγων ποσών
   Ea2 : λάθος, από εμπειρική-τυχαία σχεδίαση της γραφικής παράστασης του $V_1(t)$
   Eb : λάθος, λόγω εμπειρικής σχεδίασης της γραφικής παράστασης του όγκου $V_2(t)$
   Pc1 : σωστός χρόνος, κατά τον οποίο γεμίζει η δεξαμενή
   Pc2 : σωστός όγκος βενζίνης στο βυτιοφόρο
   Pd1 : σωστός χρόνος
   Pd2 : σωστός όγκος βενζίνης στη δεξαμενή και το βυτιοφόρο

Ed : λάθος σημείο, λόγω εμπειρικής σχεδίασης

7. **Q3** : επιλογή της ερώτησης 3, γιατί το υποκείμενο δεν την είχε ξανακάνει ποτέ

Q6a : επιλογή της ερώτησης 6, διότι: «τα προβλήματα είναι δύσκολα»,

Q6b : «δε ξέρω να αντιστοιχίζω τα μαθηματικά σε προβλήματα καθημερινότητας»,

Q6c : «τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με προβλήματα καθημερινότητας»

Ms : αγόρι

Fs : κορίτσι

B : μαθητής της Β΄ Λυκείου

C : μαθητής της Γ΄ Λυκείου

4.1.5 Τα έργα

Προκειμένου να εξεταστούν οι υποθέσεις της έρευνας ετοιμάστηκε ένα δοκίμιο (το οποίο υπάρχει στο Παράρτημα) που δόθηκε στους μαθητές στην αρχή του σχολικού έτους. Η διάρκεια χορήγησης του δοκιμίου ήταν 45 λεπτά. Το δοκίμιο περιλάμβανε επτά ερωτήσεις, από τις οποίες η πρώτη ζητούσε από τους μαθητές να περιγράψουν τι είναι συνάρτηση και να δώσουν ένα παράδειγμα της έννοιας. Οι πέντε επόμενες ερωτήσεις βασίστηκαν στους δύο τύπους μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων που προτάθηκαν από τον Duval (2002): επεξεργασία και μετάφραση. Επιπλέον, οι ερωτήσεις που επιλέχθηκαν διέφεραν από τις προτεινόμενες δραστηριότητες του Duval για δύο λόγους: Κατ’αρχάς, ζητούσαν από τους μαθητές να αναγνωρίσουν εάν οι γραφικές παραστάσεις που δίνονταν, προέρχονταν από συναρτήσεις ή όχι, με την εφαρμογή του ορισμού της συνάρτησης. Δεύτερον, υπήρξαν ερωτήσεις που περιλάμβαναν τις αδιαφανείς μετατροπές (Duval, 2002), που θα μπορούσαν να ολοκληρωθούν με την πραγματοποίηση διαφόρων ειδών επεξεργασίας, όπως οι υπολογισμοί σημείων. Στο δοκίμιο περιλήφθηκε επίσης, ένα σύνθετο πρόβλημα συναρτήσεων βασισμένο σε μια πραγματική κατάσταση.

Στη συνέχεια ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή του δοκιμίου:

Έργο 1: Αυτή η ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν τι είναι συνάρτηση και να δώσουν ένα παράδειγμα συνάρτησης. Ο σωστός ορισμός κωδικοποιήθηκε σαν D1, δηλαδή, σε αυτόν τον τύπο απαντήσεων περιλήφθηκε ο ακριβής θεωρητικός ορισμός ή ένας συγκεκριμένος τύπος συνάρτησης, όπως 1-1 ή 1-1

και επί. Ο ελλιπής ορισμός κωδικοποιήθηκε σαν D2, δηλαδή σε αυτή την ομάδα περιλήφθηκαν οι απαντήσεις που είχαν σωστή αναφορά στην σχέση μεταξύ των μεταβλητών, αλλά δεν καθόριζαν τον τρόπο αντιστοιχίας τους. Τέλος, ένας ανακριβής ορισμός που περιλάμβανε μια ακατάλληλη σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές, η οποία δεν θα μπορούσε να καθορίσει συνάρτηση (όπως π.χ. μια τυχαία σχέση ανάμεσα στα στοιχεία δύο συνόλων) ή οι κενές απαντήσεις, κωδικοποιήθηκαν σαν D3.

Όσον αφορά στο παράδειγμα της συνάρτησης, η μεταβλητή EX1 αντιπροσωπεύει ένα σωστό παράδειγμα συνάρτησης, με ένα κατάλληλο βελοδιάγραμμα ή με μια εφαρμογή από την καθημερινότητα (π.χ. «εάν ένα κιλό πατάτες κοστίζει 0,5 euro, τότε για τα x κιλά πληρώνουμε y=0,5x euro»), ή με μια συμβολική εξίσωση (π.χ. «y=αx»). Η μεταβλητή EX2 αντιπροσωπεύει ένα λανθασμένο παράδειγμα σε ένα βελοδιάγραμμα ή μια λανθασμένη συμβολική εξίσωση (π.χ. «f(x)=x+y+3»).

Έργο 2: Αυτή η ερώτηση περιλάμβανε τέσσερις γραφικές παραστάσεις (G1, G2, G3, G4) και ζητούσε την αναγνώριση εκείνων που αντιστοιχούσαν σε συναρτήσεις.

Έργο 3: Αυτή η ερώτηση έδινε τέσσερις αλγεβρικές ισότητες ή ανισότητες (AL1, AL2, AL3, AL4) σε μια στήλη και οκτώ λεκτικές εκφράσεις σε μια άλλη στήλη. Οι μαθητές κλήθηκαν να αντιστοιχίσουν κάθε αλγεβρική σχέση της πρώτης στήλης με μια από τις λεκτικές περιγραφές της δεύτερης.

Έργο 4: Αυτή η ερώτηση περιλάμβανε δύο γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων (GA1 και GA2) και τέσσερις αλγεβρικές σχέσεις για κάθε γραφική παράσταση και ζητούσε από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν κάθε γραφική παράσταση σε μια από τις δεδομένες σχέσεις.

Έργο 5: Αυτή η ερώτηση ζητούσε από τους μαθητές να αντιστοιχίσουν την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης (AG) σε μια από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις που δίνονταν.

Έργο 6: Αυτό το έργο ήταν ένα πρόβλημα που περιλάμβανε λεκτικές πληροφορίες για μια δεξαμενή με ένα αρχικό ποσό βενζίνης και για ένα βυτιοφόρο που ανεφοδιάζει τη δεξαμενή με βενζίνη. Οι μαθητές κλήθηκαν να χρησιμοποιήσουν τις δεδομένες πληροφορίες για να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση της ποσότητας της βενζίνης στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου και τη γραφική παράσταση της ποσότητας της βενζίνης στο βυτιοφόρο συναρτήσει του χρόνου. Οι σωστές γραφικές

παραστάσεις των δύο γραμμικών συναρτήσεων κωδικοποιήθηκαν ως Pa και Pb, αντίστοιχα. Η ανακριβής σχεδίαση της πρώτης γραφικής παράστασης, λόγω της λανθασμένης αντίληψης ότι οι δύο μεταβλητές ήταν ανάλογες ή λόγω μιας τυχαίας σχεδίασης κωδικοποιήθηκε ως Ea1 και Ea2, αντίστοιχα. Η τυχαία σχεδίαση και συνεπώς η λανθασμένη απάντηση στη δεύτερη γραφική παράσταση, κωδικοποιήθηκε σαν Eb. Στη συνέχεια, οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν το χρόνο στον οποίο θα γέμιζε η δεξαμενή (Pc1) και την ποσότητα της βενζίνης στο βυτιοφόρο εκείνη τη στιγμή (Pc2). Τέλος, οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν σε ποιά χρονική στιγμή η ποσότητα της βενζίνης στη δεξαμενή και στο βυτιοφόρο θα ήταν η ίδια (Pd1), καθώς και την ποσότητα της βενζίνης στη δεξαμενή και στο βυτιοφόρο εκείνη τη στιγμή (Pd2). Ο εντοπισμός ενός λανθασμένου σημείου τομής των δύο γραμμών στην τελευταία ερώτηση, λόγω του τυχαίου σχεδιασμού των γραφικών παραστάσεων, κωδικοποιήθηκε σαν Ed.

Έργο 7: Αυτό ήταν το τελευταίο έργο του δοκιμίου, το οποίο ζητούσε από τους μαθητές να εξηγήσουν ποιά ερώτηση ήταν η δυσκολότερη για αυτούς. Από τους μαθητές επιλέχθηκαν δύο ερωτήσεις: η ερώτηση 3 και η ερώτηση 6. Οι μαθητές που επέλεξαν την ερώτηση 3 ως τη δυσκολότερη, θεώρησαν ότι ήταν ασυνήθιστη (Q3). Όσον αφορά στην ερώτηση 6, δόθηκαν τρεις διαφορετικές εξηγήσεις: α) η πεποίθηση ότι «τα προβλήματα είναι δύσκολα», β) η προσωπική εκτίμηση «δεν ξέρω πως να αντιστοιχώ τα μαθηματικά στα πραγματικά προβλήματα καθημερινότητας» και γ) η πεποίθηση ότι «τα μαθηματικά δεν συσχετίζονται με τις πραγματικές καταστάσεις προβλήματος στη ζωή».

Στο Παράρτημα της εργασίας καταγράφονται πιο αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών.

4.1.6 Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων αρχικά, υπολογίστηκαν τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα του δοκιμίου και χρησιμοποιήθηκε η χ^2 ανάλυση μέσω του Στατιστικού Πακέτου SPSS. Επίσης, κατασκευάστηκαν το Διάγραμμα Ομοιότητας (Lerman, 1981) και το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα (Gras, Peter, Briand & Philippe, 1997) των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε έργο του ερωτηματολογίου με τη χρήση του Στατιστικού Λογισμικού CHIC (Bodin, Coutourier & Gras, 2000).

Το Διάγραμμα Ομοιότητας, του οποίου τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με εκείνα της γνωστής μεθόδου ανάλυσης κατά συστάδες, δείχνει τη σχέση των έργων στις ομάδες σύμφωνα με την ομοιογένεια με την οποία αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές. Αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα κάθε ομάδας μεταβλητών.

Το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, που δημιουργείται από την εφαρμογή της στατιστικής συνεπαγωγικής μεθόδου Gras, περιέχει τις συνεπαγωγικές σχέσεις που δείχνουν εάν η επιτυχία σε ένα συγκεκριμένο έργο υπονοεί την επιτυχία σε ένα άλλο σχετικό με το προηγούμενο. Η συνεπαγωγική μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση της γένεσης μιας ικανότητας σύμφωνα με τα στάδια της γενετικής ψυχολογίας και επιτρέπει την εύρεση αναλλοίωτων ή σταθερών στη σκέψη των υποκειμένων. Οι σχέσεις στις οποίες καταλήγουμε δεν είναι σχέσεις αιτιότητας. Αντίθετα, πρόκειται για ένα δείκτη ποιότητας που επιτρέπει τον ισχυρισμό ότι η επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται. Κατ'αναλογία η αποτυχία σε κάποιο έργο συνεπάγεται την αποτυχία σε κάποιο άλλο έργο με το οποίο το πρώτο έργο συνδέεται.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το Στατιστικό Λογισμικό CHIC έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την επεξεργασία των στοιχείων διαφόρων μελετών στον τομέα της εκπαίδευσης μαθηματικών τα τελευταία χρόνια (π.χ. Evangelidou et al, 2004; Gagatsis, Shiakalli & Panaoura, 2003; Gras & Totohasina, 1995).

4.2 Αποτελέσματα

4.2.1 Ποσοστά επιτυχίας

Αρχικά, παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου (Πίνακας 1). Σχετικά με την πρώτη ερώτηση που ζητούσε τον ορισμό της συνάρτησης, τα ποσοστά αναφέρονται στους τρεις διαφορετικούς τύπους απαντήσεων των μαθητών, δηλαδή, σωστός ορισμός, ελλιπής ορισμός και λανθασμένος ή κανένας ορισμός.

Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (60.6%) παρείχε έναν κατάλληλο ορισμό της συνάρτησης. Το 2X2 χ^2 τεστ (σωστός ή λανθασμένος ορισμός X για δύο ομάδες ηλικιών) αποκάλυψε το σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών της Γ΄ Λυκείου (70.2%) που έδωσαν έναν σωστό ορισμό σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών της Β΄ Λυκείου (53.2%) ($x^2(1)=4.78$, $p<0.05$). Η περαιτέρω ανάλυση αποκάλυψε ότι δεν υπήρξε καμιά σημαντική διαφορά στο ποσοστό των μαθητών που δεν έδωσαν σωστό ορισμό (D2 και D3) μεταξύ των δύο ομάδων Β΄ και Γ΄ Λυκείου (D2: $x^2(1)=3.17$, $p<0.05$; D3: $x^2(1)=1.38$, $p<0.05$).

Το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας στο δοκίμιο (74.6%) παρατηρήθηκε στο έργο που ζητούσε ένα παράδειγμα συνάρτησης. Ένα παρόμοιο επίπεδο επιτυχίας (73.6%) επιτεύχθηκε στο υποερώτημα G1 που περιλάμβανε την αναγνώριση εάν μια γραφική παράσταση σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων ήταν γραφική παράσταση συνάρτησης ή όχι. Επιπρόσθετα, ένα 2X2 χ^2 τεστ (σωστή ή λανθασμένη αναγνώριση X για δύο ομάδες ηλικιών) έδειξε τη σημαντική διαφορά μεταξύ του ποσοστού των μαθητών της Γ΄ Λυκείου (83.3%), οι οποίοι αναγνώρισαν σωστά ότι η συγκεκριμένη γραφική παράσταση δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση και του αντίστοιχου ποσοστού των νεώτερων μαθητών (66.1%) ($x^2(1)=7.29$, $p<0.05$). Η πλειοψηφία των μαθητών (62.7%) υποστήριξε, λανθασμένα, ότι η γραφική παράσταση G2 αντιστοιχούσε σε συνάρτηση, ενώ, 55% των μαθητών δεν μπόρεσε να αναγνωρίσει ότι η διακοπτόμενη γραφική παράσταση G3 αντιστοιχούσε σε συνάρτηση, γεγονός που αποκάλυψε την παρανόηση των μαθητών ότι η γραφική παράσταση συνάρτησης πρέπει να μη διακόπτεται, να είναι «συνεχής». Η μάλλον ασυνήθιστη γραφική παράσταση της συνάρτησης G4 αναγνωρίστηκε κατά 51.3% των μαθητών. Εντούτοις, μια σημαντική διαφορά εμφανίστηκε μεταξύ του ποσοστού των μεγαλύτερων μαθητών (64.3%) που απάντησαν σωστά στο υποερώτημα G4 σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών της Β΄ Λυκείου (41.3%) ($x^2(1)=10.05$, $p<0.05$).

Τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας παρατηρήθηκαν στα υποερωτήματα AL1 (36.8%), AL3 (34.2%) και AL4 (30.6%). Φαίνεται ότι οι μαθητές βρήκαν δύσκολη την αντιστοίχιση των δεδομένων αλγεβρικών ανισοτήτων, οι οποίες αντιπροσώπευαν περιοχές σημείων του επιπέδου, με τις κατάλληλες λεκτικές περιγραφές. Τα σχετικά υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας (56%) επιτεύχθηκαν στο υποερώτημα AL2, το οποίο

περιλάμβανε μια παρόμοια μετατροπή εξίσωσης. Η περαιτέρω ανάλυση παρουσίασε σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων ηλικιών υπέρ των μεγαλύτερων μαθητών στο συγκεκριμένο έργο ($x^2(1)=12.31$, $p<0.05$). Οι δυσκολίες που παρατηρήθηκαν σε ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών στο τρίτο έργο μπορεί να είναι προϊόν του αδιαφανούς χαρακτήρα της αλλαγής του συστήματος αναπαράστασης (αλγεβρικής σε λεκτική), υπό την έννοια ότι δεν ήταν μόνο μια απλή δραστηριότητα μετάφρασης ή μια βήμα προς βήμα μετάφραση (Duval, 2002).

Η μετατροπή μιας γραφικής παράστασης μιας φθίνουσας γραμμικής συνάρτησης στην αλγεβρική της μορφή (GA1) φάνηκε, επίσης, να προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές και κυρίως στους μαθητές της Β΄ Λυκείου. Μόνο 25% των νεώτερων μαθητών επέλεξε τη σωστή αλγεβρική μορφή στο συγκεκριμένο υποερώτημα, ενώ, 52.7% των μεγαλύτερων μαθητών απάντησε σωστά. Ένα 2X2 χ^2 τεστ έδειξε ότι αυτή η διαφορά ήταν απίθανο να οφείλεται στην τύχη ($x^2(1)=14.45$, $p<0.05$). Επίσης, το άλλο υποερώτημα μετατροπής μιας αύξουσας γραμμικής συνάρτησης (GA2) στην περιοχή $x\leq 0$ σε αλγεβρική, φάνηκε να είναι ευκολότερο για τους μαθητές, δεδομένου ότι 61.1% επέλεξε την κατάλληλη αλγεβρική έκφραση. Επιπρόσθετα, παρατηρήθηκε το υψηλό επίπεδο επιτυχίας (60.1%) κατά τη μετατροπή μιας αλγεβρικής σχέσης στην γραφική της μορφή (AG), δεδομένου ότι η κατασκευή μιας γραφικής παράστασης βάσει μιας αλγεβρικής έκφρασης με τον εντοπισμό των σημείων είναι μια τυποποιημένη δραστηριότητα των σχολικών μαθηματικών (Duval, 2002; Kaldrimidou & Ikonomou, 1998).

Η επιτυχία των μαθητών μειώνεται ριζικά στην επίλυση ενός σύνθετου προβλήματος στις συναρτήσεις, δεδομένου ότι μόνο 15% των μαθητών έδωσε τις σωστές απαντήσεις στα διαφορετικά υποερωτήματα του έργου 6. Η λύση του προβλήματος απαιτούσε αποτελεσματική μαθηματική οργάνωση που περιλάμβανε την κατανόηση της σύνδεσης μεταξύ της πραγματικής κατάστασης καθημερινότητας και των αντίστοιχων μαθηματικών σχέσεων. Ένα σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών της Γ΄ Λυκείου παρείχε σωστή λύση στο πρόβλημα σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό των νεώτερων μαθητών ($x^2(1)=4.78$, $p<0.05$). Το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας των μαθητών στο πρόβλημα του δοκιμίου ήταν σύμφωνο με αντίληψη της πλειοψηφίας των μαθητών που θεώρησαν το πρόβλημα ως το δυσκολότερο έργο του ερωτηματολογίου. Οι πιο

συνηθισμένες αιτιολογήσεις για αυτή την επιλογή ήταν η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι δύσκολα (Q6a: 45.1%) ή η προσωπική εκτίμηση ότι καθένας μόνος του δεν είναι ικανός να συσχετίσει τις πραγματικές καταστάσεις καθημερινότητας με τα μαθηματικά (Q6b: 40.9%). Μια άλλη εξήγηση που δόθηκε από ένα μικρό ποσοστό (Q6c: 9.3%) έδειξε την αντίληψη των μαθητών ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και των πραγματικών καταστάσεων καθημερινότητας. Ένα ακόμη μικρότερο ποσοστό των μαθητών (4.7%) θεώρησε το έργο 3, το οποίο ζητούσε την αντιστοίχιση των δεδομένων αλγεβρικών σχέσεων με τις λεκτικές περιγραφές, ως το δυσκολότερο του δοκιμίου, λόγω της μάλλον ασυνήθιστης μορφής του.

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω αποτελέσματα έδειξαν τις ακόλουθες ισχυρές τάσεις μεταξύ των μαθητών: υψηλά ποσοστά επιτυχίας στην παροχή ενός κατάλληλου παραδείγματος συνάρτησης και αποτυχίας στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης. Επιπλέον, υπήρξε μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στα ποσοστά των μαθητών των δύο ομάδων ηλικιών που απάντησαν σωστά στα διάφορα έργα, υπέρ των μαθητών της Γ΄ Λυκείου. Αυτή η ανωτερότητα μπορεί να οφείλεται στην πρόσθετη εμπειρία εκμάθησης που έχουν οι μεγαλύτεροι μαθητές στη μελέτη περισσότερων ειδών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο Πίνακας 1 με τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου ανά τάξη και στο σύνολο:

Πίνακας 1 : Ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου ανά τάξη και στο σύνολο.

Τύπος Έργου	Μεταβλητή	Β΄ Λυκείου % N_1=109	Γ΄ Λυκείου % N_2=84	Σύνολο % N=193
Ορισμοί	D1 (σωστός)	53.2	70.2	60.6
	D2 (ελλιπής)	33.0	21.4	28.0
	D3 (λανθασμένος ή κανένας)	13.8	8.3	11.4
Παράδειγμα	EX1	75.2	73.8	74.6
Γραφικές παραστάσεις (αναγνώριση)	G1	66.1	83.3	73.6
	G2	37.6	36.9	37.3
	G3	42.2	51.2	46.1
	G4	41.3	64.3	51.3
Αλγεβρική σε Λεκτική μορφή (μετατροπή)	AL1	32.1	42.9	36.8
	AL2	45.0	70.2	56.0
	AL3	29.4	40.5	34.2
	AL4	25.7	36.9	30.6
Γραφική σε Αλγεβρική μορφή (μετατροπή)	GA1	25.7	52.4	37.3
	GA2	63.3	58.3	61.1
Αλγεβρική σε Γραφική μορφή (μετατροπή)	AG	61.5	58.3	60.1
Επίλυση Προβλήματος	Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1, Pd2	10.1	21.4	15.0
Ερώτηση δύσκολου έργου	Q3	2.8	7.1	4.7
	Q6a	44	46.4	45.1
	Q6b	44.9	36.9	40.9
	Q6c	9.2	9.5	9.3

Είναι σημαντικό να ερευνηθεί η επιτυχία των μαθητών στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης σε σχέση με την απόδοσή τους στα έργα άμεσης μετάφρασης και αναγνώρισης καθώς επίσης και με τους ορισμούς και τα παραδείγματα συνάρτησης που δόθηκαν από τους μαθητές. Όλοι οι μαθητές που παρείχαν μια σωστή λύση στο πρόβλημα του δοκιμίου (29 σε αριθμό), έδωσαν έναν σωστό ορισμό και ένα κατάλληλο παράδειγμα συνάρτησης. Απάντησαν, επίσης, σωστά σε όλα τα έργα αναγνώρισης και μετατροπής, με μόνο μία εξαίρεση. Συγκεκριμένα, ένας μαθητής από τους επιτυχόντες στην επίλυση προβλήματος δεν ολοκλήρωσε την αντιστοίχιση της ανισότητας $xy \leq 0$ (AL1) από την αλγεβρική μορφή στη λεκτική περιγραφή. Αυτά τα συμπεράσματα αποκαλύπτουν τη συνεπή συμπεριφορά αυτών των μαθητών σε όλες τις διαστάσεις σχετικά με την κατανόηση της συνάρτησης που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα, δηλαδή, επίλυση προβλήματος, αποτελεσματική χρήση των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής και παροχή σωστού ορισμού και παραδείγματος της έννοιας. Υπολογίσαμε, επίσης, τα ποσοστά των μαθητών, οι οποίοι απάντησαν σωστά ή όχι στα έργα του δοκιμίου, έχοντας επιτύχει στην επίλυση προβλήματος. Είναι αξιοσημείωτο, ότι κανένας από τους μαθητές που απέτυχαν στην αναγνώριση ή μετατροπή αναπαραστάσεων, με εξαίρεση ένα υποερώτημα (AL1), δεν θα μπορούσε να λύσει σωστά το πρόβλημα. Ένας μόνο μαθητής που απάντησε λανθασμένα στο υποερώτημα AL1, ήταν σε θέση να επιτύχει στην επίλυση προβλήματος.

Τα ποσοστά των μαθητών για τις διαφορετικές κατηγορίες αναγνώρισης και παραδείγματος της έννοιας που αποκρίθηκαν σωστά στα έργα του δοκιμίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 2. Είναι φανερό ότι ο μεγαλύτερος αριθμός μαθητών που παρείχαν σωστά ορισμούς και παραδείγματα πέτυχε στα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης που περιλάμβαναν τα διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων, καθώς επίσης και στα έργα επίλυσης προβλήματος σε σχέση με τους μαθητές που δεν έδωσαν σωστούς ορισμούς ή παραδείγματα. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει για τους μαθητές που έδωσαν ελλιπείς ορισμούς της συνάρτησης σε σχέση με τους μαθητές που έδωσαν λανθασμένο ή ακόμη και κανέναν ορισμό. Το 2X3 χ^2 τεστ (επιτυχία ή όχι ενός έργου X, σωστός ή ελλιπής ή λανθασμένος – κανένας ορισμός) και το 2X2 χ^2 τεστ (επιτυχία ή όχι ενός έργου X, σωστό παράδειγμα ή όχι) αποκάλυψαν ότι αυτές οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές μεταξύ των διαφορετικών ομάδων των μαθητών, όπως

διευκρινίζεται στον Πίνακα 2. Κανένας από τους μαθητές που έδωσαν ελλιπή (D2), λανθασμένο ή κανέναν ορισμό (D3) ή ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης (EX2) δεν πέτυχε στην επίλυση προβλήματος. Επιπλέον, όλοι οι μαθητές που έδωσαν έναν λανθασμένο ή κανέναν ορισμό της συνάρτησης (D3), απέτυχαν σε δύο έργα που περιλάμβαναν τη μετατροπή των ανισοτήτων από την αλγεβρική μορφή σε λεκτική περιγραφή (AL1 και AL4).

Παρατηρήθηκαν μερικά κοινά συμπεράσματα για όλες τις ομάδες μαθητών ανεξάρτητα από την ακρίβεια των ορισμών ή των παραδειγμάτων τους. Τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών σε όλες τις ομάδες σημειώθηκαν στο έργο G1 που περιλάμβανε την αναγνώριση εάν μια γραφική παράσταση αντιπροσώπευε συνάρτηση ή όχι και στο έργο GA2 που περιλάμβανε τη μετατροπή μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης σε αλγεβρική μορφή. Τα μικρότερα ή ακόμη και ανύπαρκτα ποσοστά των μαθητών σε όλες τις ομάδες παρατηρήθηκαν στη σωστή λύση του προβλήματος συνάρτησης. Επιπρόσθετα, σε μερικές περιπτώσεις ένα ποσοστό μαθητών εξέθεσε την ασυμβίβαστη συμπεριφορά στην παροχή των σωστών ορισμών ή παραδειγμάτων, από τη μια πλευρά και την επίτευξη της αναγνώρισης ή της μετατροπής των διαφορετικών μορφών συναρτήσεων και της επίλυσης προβλήματος, από την άλλη. Για παράδειγμα, μόνο 25% των μαθητών που έδωσαν έναν σωστό ορισμό συνάρτησης πέτυχαν στη λύση του προβλήματος συνάρτησης και λιγότεροι από τους μισούς της ίδιας ομάδας μαθητών (45.3%) ολοκλήρωσαν τη μετατροπή μιας αλγεβρικής σχέσης σε μια λεκτική περιγραφή (AL4). Αντίθετα, ένα ποσοστό μαθητών που δεν έδωσε σωστούς ορισμούς (D2 ή D3) ή σωστά παραδείγματα συνάρτησης πέτυχε σε μερικά έργα αναγνώρισης ή μετατροπής, όπως G1, GA2, AG. Αυτή η ασυνάρτητη συμπεριφορά διαφόρων μαθητών αποτελεί μια ένδειξη για την εκτίμηση των τεσσάρων διαστάσεων, που προτείνεται σε αυτή τη μελέτη για την εξέταση της πολυπλοκότητας της κατανόησης της συνάρτησης, οι οποίες είναι: ο ορισμός, τα παραδείγματα, η χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής και η επίλυση προβλήματος συνάρτησης.

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο Πίνακας 2 με τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν σωστά στα έργα ορισμού και παραδείγματος συνάρτησης από κάθε ομάδα:

<u>Πίνακας 2</u>: Ποσοστά των μαθητών που απάντησαν σωστά στα έργα ορισμού και παραδείγματος συνάρτησης από κάθε ομάδα.

		Ορισμός				Παρά-δειγμα		
Τύπος Έργου	Μεταβλητή	Σωστός (D1)	Ελλιπής (D2)	Λανθασμένος ή κανένας (D3)	$X^2(2)$	Σωστό (EX1)	Λανθασμένο ή κανένα (EX2)	$X^2(1)$
Γραφικές παραστάσεις (αναγνώριση)	G1	92.3	51.9	27.3	58.48*	80.6	53.1	14.22*
	G2	56.4	9.3	4.5	46.52*	49.3	2	34.92*
	G3	69.2	13	4.5	64.34*	59.7	6.1	42.27*
	G4	65.8	38.9	4.5	32.44*	61.8	20.4	25.08*
Αλγεβρική σε Λεκτική μορφή (μετατροπή)	AL1	53.8	14.8	0	38.66*	48.6	2	34.10*
	AL2	76.9	25.9	18.2	53.37*	66.7	24.5	26.39*
	AL3	50.4	11.1	4.5	35.10*	43.1	8.2	19.78*
	AL4	45.3	11.1	0	31.28*	40.3	2	25.18*
Γραφική σε Αλγεβρική μορφή (μετατροπή)	GA1	52.1	16.7	9.1	28.33*	47.2	8.2	23.85*
	GA2	80.3	35.2	22.7	47.13*	71.5	30.6	25.76*
Αλγεβρική σε Γραφική μορφή (μετατροπή)	AG	76.9	44.4	9.1	43.20*	70.8	28.6	27.23*
Επίλυση Προβλήματος	Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1, Pd2	24.8	0	0	22.17*	20.1	0	11.61*
		N_1=117	N_2=54	N_3=22		N_4=144	N_5=49	

*p<0.01

Είναι, επίσης, σημαντικό να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται οι αντιλήψεις των μαθητών για το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου με την απόδοσή τους στα έργα που περιλαμβάνονται σε αυτό το ερωτηματολόγιο. Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν στην επιλογή των δυσκολότερων έργων του δοκιμίου με τις αντίστοιχες αιτιολογήσεις. Είναι εμφανές ότι το πρόβλημα του δοκιμίου (το έργο 6) προσδιορίστηκε ως το δυσκολότερο έργο από την πλεοψηφία των μαθητών που απέδωσαν καλά στο δοκίμιο. Το έργο 3 που περιλάμβανε τη μετατροπή των μαθηματικών σχέσεων από μια αλγεβρική αναπαράσταση σε λεκτική περιγραφή (Q3),

επιλέχθηκε από ένα σημαντικά μικρότερο ποσοστό μαθητών, λόγω της μη συμβατικής μορφής της παρουσίασής του.

Ειδικότερα, η πλειοψηφία των μαθητών που πέτυχαν στα διάφορα έργα του δοκιμίου (από 47.9% έως 63.6%) επέλεξε το πρόβλημα του δοκιμίου (έργο 6) ως το δυσκολότερο έργο με την εξήγηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι δύσκολα (Q6a). Μικρότερα, αλλά αρκετά σημαντικά ποσοστά των μαθητών που απάντησαν με επιτυχία στα διάφορα έργα του δοκιμίου (από 28.8% έως 40.4%) επέλεξαν το ίδιο έργο δίνοντας μία διαφορετική εξήγηση: δεν γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά σχετίζονται με πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας (Q6b). Αρκετά χαμηλότερα ποσοστά των μαθητών (κάτω από 10%) επέλεξαν το ίδιο έργο με την αιτιολόγηση ότι δεν υπάρχει καμία σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και των πραγματικών καταστάσεων καθημερινής ζωής (Q6c). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, το 4X2 χ^2 τεστ (επιλεγμένα έργα με τις διαφορετικές εξηγήσεις X, σωστή ή λανθασμένη απάντηση στα διαφορετικά έργα του δοκιμίου) έδειξε ότι αυτές οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές για τα περισσότερα από τα έργα του δοκιμίου, όπως η παροχή ενός σωστού ορισμού και πολλών έργων μετατροπής. Είναι αξιοσημείωτο ότι όλοι οι μαθητές που πέτυχαν στην επίλυση προβλήματος αναγνώρισαν το πρόβλημα που έλυσαν (έργο 6) ως το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου, με την εξήγηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι δύσκολα. Μόνο οι μαθητές που δεν μπορούσαν να παρέχουν μια σωστή λύση στο πρόβλημα αναφέρθηκαν στην ανικανότητά τους να συνδέσουν τα μαθηματικά με τις πραγματικές καταστάσεις καθημερινής ζωής ή στην πεποίθησή τους ότι τα μαθηματικά δεν συνδέονται με τις πραγματικές καταστάσεις προβλήματος της καθημερινής ζωής.

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο Πίνακας 3 με τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν στην επιλογή του δυσκολότερου έργου του δοκιμίου και τις αιτιολογήσεις τους:

<u>Πίνακας 3</u>: Ποσοστά των μαθητών που απάντησαν στην επιλογή του δυσκολότερου έργου του δοκιμίου και τις αιτιολογήσεις τους.

Τύπος Έργου	Μεταβλητή	Επιλογή του δυσκολότερου έργου του δοκιμίου				
		Q3	Q6a	Q6b	Q6c	$X^2(3)$
Ορισμός	D1 (σωστός)	5.1	53.8	32.5	8.5	10.59*
Παράδειγμα	EX1	4.2	47.9	38.9	9.0	1.94
Γραφικές παραστάσεις (αναγνώριση)	G1	4.9	50	35.9	9.2	6.29
	G2	4.2	61.1	30.6	4.2	12.91*
	G3	3.4	62.9	30.3	3.4	23.07*
	G4	6.1	48.5	40.4	5.1	5.37
Αλγεβρική σε Λεκτική μορφή (μετατροπή)	AL1	1.4	60.6	33.8	4.2	13.06*
	AL2	1.9	56.5	34.3	7.4	14.87*
	AL3	1.5	63.6	28.8	6.1	14.56*
	AL4	1.7	62.7	33.9	1.7	13.80*
Γραφική σε Αλγεβρική μορφή (μετατροπή)	GA1	2.8	62.5	34.7	0	20.40*
	GA2	3.4	55.9	34.7	5.9	15.58*
Αλγεβρική σε Γραφική μορφή (μετατροπή)	AG	4.3	52.6	35.3	7.8	6.70
Επίλυση Προβλήματος	Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1, Pd2	0	100	0	0	41.58*

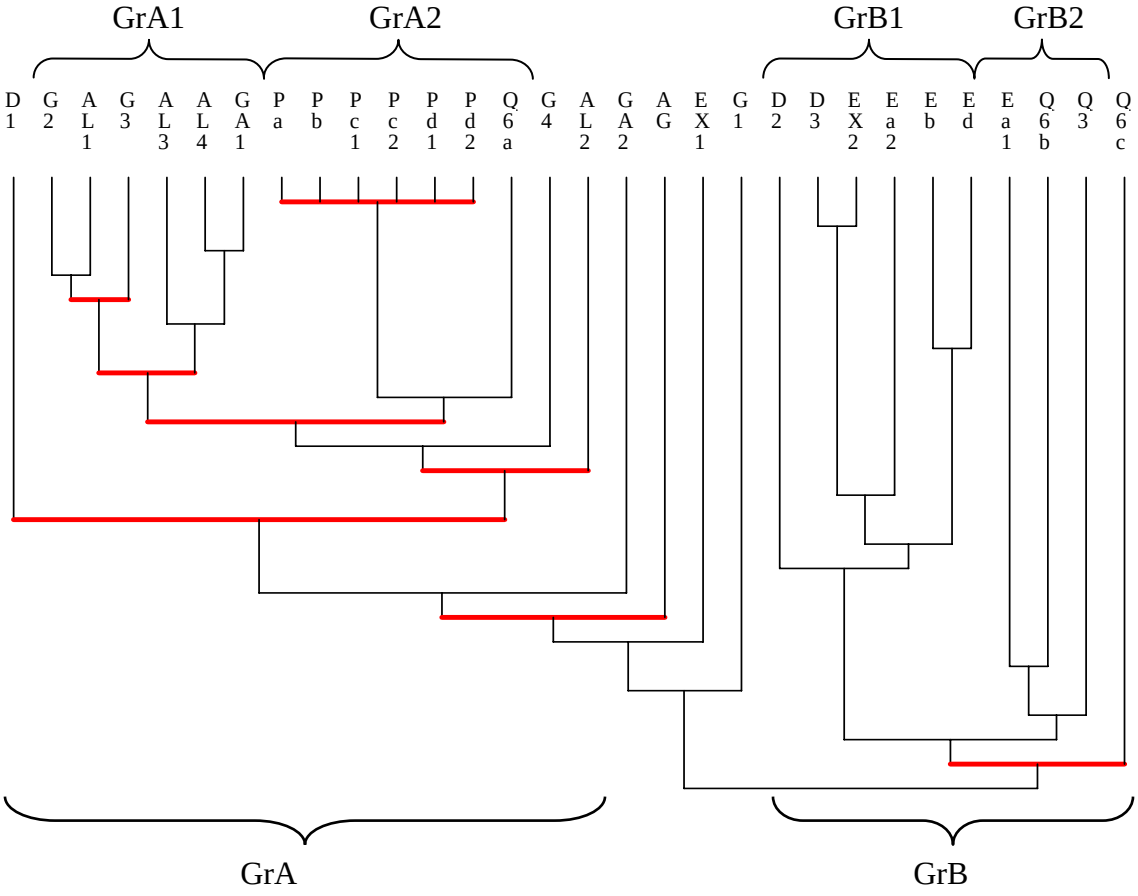
*$p<0.01$

4.2.2 Αποτελέσματα βασισμένα στο Διάγραμμα Ομοιότητας

Στο Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας παρουσιάζονται οι ομαδοποιήσεις έργων με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυσή τους. Οι ομοιότητες με κόκκινο χρώμα είναι σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

Στο Διάγραμμα Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1, που ακολουθεί, προσδιορίζονται δύο ευδιάκριτοι κλάδοι Α και Β:

<u>Σχήμα 1</u>: Διάγραμμα Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο.



Α. Ο κλάδος Α, δηλαδή το GrA, περιλαμβάνει δύο ομάδες, τις GrA1 και GrA2. Από αυτές τις ομάδες, οι ισχυρότερες συνδέσεις διαμορφώνονται από τις μεταβλητές Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1 και Pd2 που παρουσιάζουν μια ισχυρή ομοιότητα στο GrA2. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που αποκρίθηκαν σωστά σε ένα ερώτημα του προβλήματος (έργο 6), πέτυχαν, επίσης, σε όλα τα άλλα ερωτήματά του. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί με το ίδιο ποσοστό μαθητών (15%) που πέτυχε σε όλα τα μέρη του προβλήματος. Αυτή η ομάδα ολοκληρώνεται με τη μεταβλητή Q6a, η οποία αντιπροσωπεύει την επιλογή του έργου 6 σαν το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου, με την αιτιολόγηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι πολύπλοκα. Αυτή η παρατήρηση

συμφωνεί με το συμπέρασμα που παρουσιάστηκε παραπάνω, ότι όλοι οι μαθητές της έρευνας που έλυσαν σωστά το πρόβλημα, θεώρησαν το έργο 6 ως το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου, λόγω της πεποίθησης ότι η επίλυση μαθηματικού προβλήματος είναι μια περίπλοκη διαδικασία.

Η ομάδα GrA2 συνδέεται με την GrA1, η οποία περιλαμβάνει τις ακόλουθες μεταβλητές: τις G2 και G3, που αντιπροσωπεύουν τη σωστή αναγνώριση μερικών μη συμβατικών περιπτώσεων συναρτήσεων με τη μορφή γραφικών παραστάσεων, τη μεταβλητή GA1, που αντιπροσωπεύει τη σωστή μετατροπή μιας γραμμικής συνάρτησης από γραφική σε αλγεβρική μορφή επιλέγοντας την αντίστοιχη αλγεβρική έκφραση μεταξύ τεσσάρων, καθώς και τις μεταβλητές AL1, AL3 και AL4, που δηλώνουν τη σωστή αντιστοιχία των αλγεβρικών εκφράσεων των ανισοτήτων που αντιπροσωπεύουν περιοχές σημείων του επιπέδου, στις λεκτικές τους περιγραφές. Οι δύο παραπάνω ομάδες συνδέονται με τη σωστή απάντηση στο έργο G4, που ζητάει την αναγνώριση εάν μια καμπύλη αντιπροσωπεύει συνάρτηση ή όχι, καθώς και με τη σωστή αντιστοιχία της αλγεβρικής εξίσωσης που αντιπροσωπεύει έναν από τους δύο άξονες, στη λεκτική της περιγραφή στο έργο AL2.

Ο κλάδος ομοιότητας GrA ολοκληρώνεται με το σωστό ορισμό της συνάρτησης (D1), δείχνοντας ότι οι μαθητές που ολοκλήρωσαν μια σωστή λύση στο πρόβλημα του δοκιμίου και απάντησαν επιτυχώς στα προαναφερθέντα έργα των συναρτήσεων με τη χρήση γραφικών, αλγεβρικών και λεκτικών αναπαραστάσεων, παρείχαν, επίσης, έναν σωστό ορισμό της έννοιας. Ο κλάδος GrA συμπληρώνεται από τις ακόλουθες μεταβλητές: την GA2, που αντιπροσωπεύει μια επιτυχή αναγνώριση της σωστής αλγεβρικής έκφρασης μεταξύ τεσσάρων, που αντιστοιχεί σε μια γραμμική γραφική παράσταση συνάρτησης, τη μεταβλητή AG, που αντιπροσωπεύει την πραγματοποίηση της αντίστροφης μετατροπής, δηλαδή, τη σωστή επιλογή μεταξύ τεσσάρων γραφικών παραστάσεων, εκείνης που αντιστοιχεί στη δεδομένη αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης, τη μεταβλητή EX1, που αντιπροσωπεύει ένα σωστό παράδειγμα συνάρτησης και τη μεταβλητή G1, που περιλαμβάνει την αναγνώριση εάν μια γραφική παράσταση αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης ή όχι. Ο κλάδος GrA με τις ομάδες του συνεπάγεται μια εννοιολογική προσέγγιση της συνάρτησης, ενσωματώνοντας τις τέσσερις διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας που μελετούνται σε αυτή την

έρευνα: α) την επίλυση προβλήματος β) την αναγνώριση εάν μια γραφική παράσταση αντιπροσωπεύει συνάρτηση ή όχι και τη μετατροπή των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης συνάρτησης από μια μορφή σε άλλη γ) τον ορισμό της έννοιας και δ) την παροχή ενός σωστού παραδείγματος της έννοιας.

Β. Ο κλάδος Β, δηλαδή το GrB, περιλαμβάνει δύο μικρές ομάδες, τις GrB1 και GrB2. Η ομάδα GrB1 διαμορφώνεται από τις μεταβλητές: D2 και D3 που αντιπροσωπεύουν έναν ελλιπή ορισμό της συνάρτησης και έναν λανθασμένο ή κανέναν ορισμό, αντίστοιχα, την μεταβλητή EX2, που αντιπροσωπεύει ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης, τις μεταβλητές Ea2 και Eb, που δηλώνουν μια λανθασμένη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων που ζητούνται στο πρόβλημα, λόγω του τυχαίου τρόπου σχεδίασης και τη μεταβλητή Ed, που δηλώνει το λανθασμένο σημείο τομής των δύο γραμμών του προβλήματος, λόγω της λανθασμένης σχεδίασης.

Η ομάδα GrB1 συνδέεται με την ομάδα GrB2, η οποία διαμορφώνεται από τις μεταβλητές: την Ea1, που δηλώνει τη λανθασμένη κατασκευή της προηγούμενης γραφικής παράστασης του προβλήματος, λόγω του σχεδιασμού της γραμμής που περνά από την αρχή των αξόνων (0,0), τη μεταβλητή Q6b, που δηλώνει την επιλογή του προβλήματος (έργο 6), ως το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου, λόγω της πεποίθησης των μαθητών ότι δεν γνωρίζουν τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά συνδέονται με τις πραγματικές καταστάσεις ζωής και τη μεταβλητή Q3, που δηλώνει την επιλογή του έργου 3 στην ίδια ερώτηση, λόγω της ασυνήθιστης παρουσίασης του έργου. Τέλος, αυτές οι δύο ομάδες συνδέονται με τη μεταβλητή Q6c, που δηλώνει την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά δεν συνδέονται με τα πραγματικά προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Συνολικά, η περιοχή GrB επεξηγεί την ασάφεια και την περιορισμένη αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης, σε σχέση με τον ορισμό και τα παραδείγματα της συνάρτησης, καθώς επίσης και με την επίλυση προβλήματος. Αυτή η παρατήρηση συμπίπτει με τη διαπίστωση ότι κανένας μαθητής από αυτούς που έδωσαν έναν ελλιπή ή λανθασμένο ορισμό ή ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης, δεν κατόρθωσε να αντιμετωπίσει επιτυχώς το πρόβλημα του δοκιμίου. Επιπλέον, η έλλειψη άμεσων συνδέσεων ομοιότητας αυτού του κλάδου με τα έργα αναγνώρισης ή μετατροπής του δοκιμίου αποκαλύπτει ότι οι μαθητές που απέτυχαν να δώσουν έναν σωστό ορισμό και ένα παράδειγμα συνάρτησης ή τη λύση του προβλήματος συνάρτησης, δεν θα

μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά και ευέλικτα τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Αυτός ο ισχυρισμός είναι σύμφωνος με τη διαπίστωση ότι σημαντικά λιγότεροι μαθητές από αυτούς που έδωσαν έναν λανθασμένο ορισμό ή ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης ή δεν έλυσαν με επιτυχία το πρόβλημα, απάντησαν σωστά στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής του δοκιμίου, σε σύγκριση με τους μαθητές που έδωσαν έναν σωστό ορισμό, ένα σωστό παράδειγμα συνάρτησης ή τη λύση στο πρόβλημα. Η ομάδα των μαθητών που επέδειξε τις συγκεκριμένες ελλείψεις φάνηκε, επίσης, να αναγνωρίζει ότι τα μαθηματικά δεν είναι αρμόδια στις καταστάσεις προβλήματος της πραγματικής καθημερινότητας. Τέλος, ένας μικρός αριθμός μαθητών υποστήριξε ότι τα μαθηματικά είναι μια απομονωμένη περιοχή που εξετάζει τα διάφορα ζητήματα μακριά από τις καθημερινές καταστάσεις ζωής.

4.2.3 Αποτελέσματα βασισμένα στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα

Το Σχήμα 2 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του δοκιμίου. Η δομή του Συνεπαγωγικού Διαγράμματος είναι σύμφωνη με το Διάγραμμα Ομοιότητας, αφού αποτελείται από δύο ομάδες συνεπαγωγών που αντιστοιχούν στους δύο κλάδους ομοιότητας του τελευταίου διαγράμματος, που χαρακτηρίζεται από δύο ευδιάκριτες πτυχές της εικόνας των μαθητών για την έννοια της συνάρτησης: εννοιολογική κατανόηση και λανθασμένη ή περιορισμένη εικόνα για την έννοια.

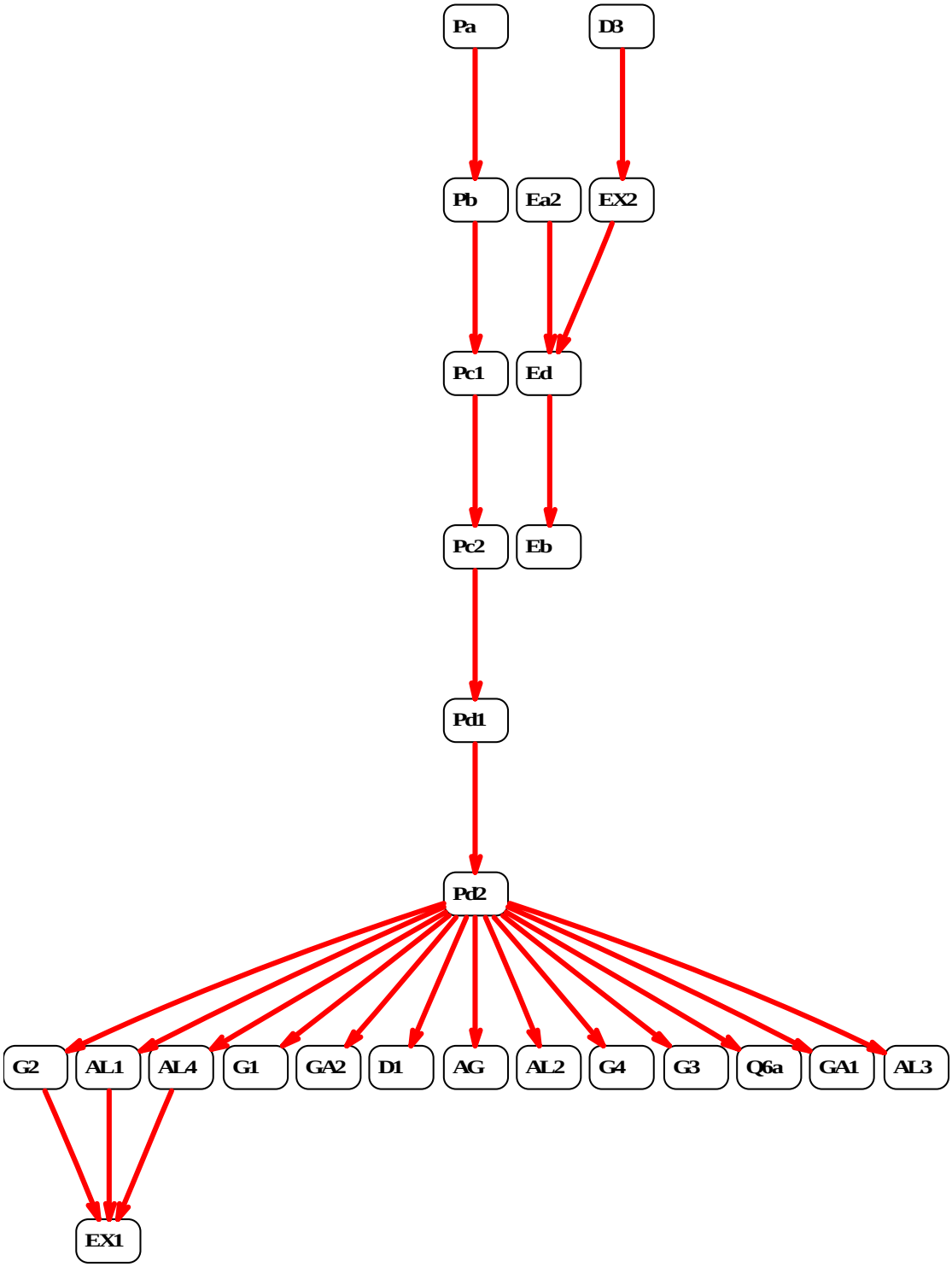
Στην πρώτη συνεπαγωγική ομάδα μεταβλητών που μπορεί να χαρακτηριστεί ως εννοιολογική, φαίνεται να υπάρχουν ισχυρές συνεπαγωγές της μορφής μιας αλυσίδας, δηλαδή, Pa-Pb-Pc1-Pc2-Pd1-Pd2, που είναι τα διαφορετικά ερωτήματα του προβλήματος του έργου 6, τα οποία συνδέουν την έννοια της συνάρτησης με μια πραγματική εφαρμογή της καθημερινής ζωής. Αυτές οι άμεσες συνεπαγωγές δείχνουν ότι η επιτυχία σε ένα μέρος του προβλήματος υπονόησε την επιτυχία σε ένα άλλο μέρος. Έπειτα, μορφοποιούνται οι συνεπαγωγές που αρχίζουν από την τελευταία μεταβλητή της συνεπαγωγικής αλυσίδας και ακολουθούν σε όλα τα άλλα έργα του δοκιμίου. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η απόδοση στην επίλυση προβλήματος των μαθητών μπορεί να είναι ένας θεμελιώδης παράγοντας, ο οποίος συνεπάγεται την επιτυχία στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής που περιλαμβάνουν τις διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων των

συναρτήσεων, καθώς επίσης και την παροχή ενός σωστού ορισμού και ενός σωστού παραδείγματος της συνάρτησης. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί με το γεγονός ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές που ολοκλήρωσαν μια λύση στο πρόβλημα, πέτυχαν στη χρήση των διαφόρων αναπαραστάσεων όλων των έργων αναγνώρισης και μετατροπής του δοκιμίου. Η συνεπαγωγή της αλυσίδας επίλυσης προβλήματος στην επιλογή του προβλήματος (έργο 6) ως το δυσκολότερο έργο, λόγω της γενικής πολυπλοκότητας των μαθηματικών προβλημάτων (Q6a), συμφωνεί με την άμεση σύνδεση ομοιότητας της ομάδας επίλυσης προβλήματος με τη συγκεκριμένη πεποίθηση. Αυτές οι συνεπαγωγικές σχέσεις και σχέσεις ομοιότητας που παρατηρήθηκαν, στηρίζουν τον ισχυρισμό ότι οι μαθητές που πέτυχαν στην επίλυση προβλήματος μάλλον θεωρούν ότι τα μαθηματικά προβλήματα δεν είναι απλά ή στερεότυπα έργα.

Η άλλη ομάδα συνεπαγωγικών σχέσεων, που αντιστοιχεί στη λανθασμένη άποψη της έννοιας από τους μαθητές, περιλαμβάνει κυρίως τις συνεπαγωγές που αρχίζουν από τον λανθασμένο ορισμό (D3) μέχρι τα λάθη των μαθητών στα διαφορετικά ερωτήματα του προβλήματος του δοκιμίου. Κατά συνέπεια, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η παροχή ενός λανθασμένου ορισμού της συνάρτησης υπονοεί τις δυσκολίες των μαθητών και επομένως, την αποτυχία στην επίλυση προβλήματος. Αυτή η διαπίστωση, μαζί με το γεγονός ότι κανένας από τους μαθητές που έδωσαν ένα λανθασμένο ορισμό ή ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης δεν πέτυχε στην επίλυση προβλήματος, δείχνει ότι ένας μαθητής θα μπορούσε να λύσει σωστά ένα πρόβλημα συνάρτησης μόνο εάν έδινε έναν σωστό ορισμό και ένα σωστό παράδειγμα συνάρτησης.

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο:

<u>Σχήμα 2</u>: Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο.



4.3 Συμπεράσματα – Συζήτηση

Αυτή η έρευνα μελέτησε τις ικανότητες των μαθητών λυκείου στις τέσσερις διαφορετικές διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, δηλαδή, τον ορισμό της έννοιας, τα παραδείγματα της έννοιας, τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων της έννοιας, την επίλυση προβλήματος, καθώς και τις αμοιβαίες σχέσεις τους.

Μέσα από τη συγκεκριμένη έρευνα, θα περίμενε κανείς τα αποτελέσματα να είναι ενθαρρυντικά και οι μαθητές να μην αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση αναπαραστάσεων των συναρτήσεων, δεδομένου ότι τα περισσότερα έργα του δοκιμίου ήταν στερεότυπες ασκήσεις, τις οποίες είχαν διδαχθεί κατά τη διάρκεια της σχολικής τους θητείας. Εντούτοις, είναι φανερό ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών δεν έχει κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης. Μέσα από τις γραφικές παραστάσεις, αναγνωρίζει ως συναρτήσεις, καμπύλες που θυμίζουν γνωστά είδη συναρτήσεων, όπως π.χ. παραβολή, χωρίς να χρησιμοποιεί τον ορισμό της έννοιας, ιδιαίτερα στη Β΄ Λυκείου. Για το λόγο αυτό, όταν μια καμπύλη συνδυάζει δύο γνωστούς τύπους συναρτήσεων, χωρίς τελικά να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, απαντά λανθασμένα, π.χ. ερώτηση 2α. Ακόμη, και στην περίπτωση όπου κάποιοι μαθητές έχουν δώσει τον σωστό ορισμό της έννοιας, δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν εάν μια καμπύλη αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης ή όχι, γεγονός που σημαίνει ότι απλά αποστηθίζουν τον ορισμό χωρίς να τον κατανοούν.

Μια συνήθης παρανόηση που παρατηρήθηκε στους μαθητές αυτής της έρευνας, είναι η αντίληψη ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι οπωσδήποτε «συνεχής» γραμμή. Σε περίπτωση που δοθεί με διακεκομμένη μορφή, όπως π.χ. η γραφική παράσταση 2γ, τότε δεν αναγνωρίζεται ως συνάρτηση.

Κατά την εξέταση των ερωτηματολογίων, επιβεβαιώθηκε για ακόμη μια φορά, το γεγονός ότι τα παραδείγματα συναρτήσεων που δίνουν οι περισσότεροι μαθητές είναι 1-1 συναρτήσεις. Επιπλέον, αρκετοί μαθητές, μέσα από τα παραδείγματα που δίνουν, πιστεύουν ότι οποιαδήποτε σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές αποτελεί συνάρτηση. Αγνοούν, δηλαδή, τη διαδικασία μέσω της οποίας ορίζεται αυτή η σχέση και για το λόγο

αυτό αντιμετωπίζουν τη συνάρτηση «σαν μια εξίσωση που περιέχει δύο μεταβλητές x και y με άγνωστο το x».

Επιπρόσθετα, σε πιο ακραίες περιπτώσεις, διαπιστώθηκε η σύγχυση που επικρατεί ως προς το συμβολισμό της συνάρτησης, όπου δόθηκαν παραδείγματα της μορφής f(x)=x+y+3.

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω συμπεράσματα καταδεικνύουν πως ένα μεγάλο μέρος των μαθητών, αν και διανύουν τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου, δεν έχει κατανοήσει στοιχειωδώς την έννοια της συνάρτησης.

Τέλος, στην παρούσα έρευνα παρατηρήθηκαν κάποια συμπεράσματα σχετικά με την συνάρτηση y=αx+β, που παριστάνει ευθεία. Παρά το γεγονός ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση μελετήθηκε εκτενώς σε προηγούμενες τάξεις, ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών δεν γνωρίζει το ρόλο των παραμέτρων α και β, όπως αποδεικνύεται μέσα από την ερώτηση 4α. Αντίθετα, ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των μαθητών επιτυγχάνει στη μετατροπή της αλγεβρικής μορφής της συγκεκριμένης συνάρτησης σε γραφική, γεγονός που αποδεικνύει για άλλη μια φορά ότι οι μαθητές εφαρμόζουν τυποποιημένα κάποια βήματα που θα τους οδηγήσουν στην επιτυχή μετάφραση από το πρώτο σύστημα αναπαράστασης στο δεύτερο, χωρίς όμως να έχει επιτευχθεί η ουσιαστική κατανόηση της έννοιας της συνάρησης. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών, όπως του Knuth, J. E. (2000). Με άλλα λόγια, από τον τρόπο που απαντούν οι μαθητές, φαίνεται η επιφανειακή γνώση ή στην καλύτερη περίπτωση η αποσπασματική γνώση που έχουν για την έννοια της συνάρτησης, διότι ακόμη και στην περίπτωση δύο μορφών αναπαράστασης από όλες (γραφική και αλγεβρική), επιτυγχάνουν ικανοποιητικά στην μετατροπή προς τη μία μόνο κατεύθυνση, αλγεβρική σε γραφική και όχι και αντίστροφα.

Τη διαπίστωση αυτή επαληθεύει περίτρανα το πρόβλημα του ερωτηματολογίου, – του οποίου απαραίτητη προϋπόθεση για να λυθεί, ήταν οι συνδέσεις όλων των μορφών αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης μεταξύ τους – το οποίο κατάφεραν να επιλύσουν, όπως ήδη έχει αναφερθεί, μόνο όσοι μαθητές πέτυχαν σε όλα τα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου, συνεπώς, μόνο όσοι είχαν κατανοήσει σε βάθος την έννοια της συνάρτησης.

Είναι γνωστό ότι στην επεξεργασία των συναρτήσεων παρεμβαίνει και η εννοιολογική – επιστημολογική φύση της συνάρτησης, αλλά και η επεξεργασία των διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων. Η εργασία μας δείχνει, με σαφή τρόπο, ότι αυτές οι διαφορετικές πτυχές δεν συνδυάζονται κατ'ανάγκη από τους μαθητές. Με άλλα λόγια μπορεί οι μαθητές να πετυχαίνουν σε κάποιο είδος αναπαράστασης συναρτήσεων και να μην πετυχαίνουν σε κάποιο άλλο. Ενώ π.χ. η διατύπωση ορθού ορισμού από τους μαθητές συνδέεται με κάποιες μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης, όπως μετατροπή από γραφική σε αλγεβρική, εν τούτοις δεν συνδέεται και με άλλες. Έτσι, εάν ένας διδάσκων λάβει υπόψη του μόνο τη μία επιτυχία, θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές κατανοούν τις συναρτήσεις, ενώ εάν λάβει υπόψη του μόνο τη δεύτερη, θα βγάλει το συμπέρασμα ότι δεν τις κατανοούν. Επομένως, η επιτυχία σε έργα συναρτήσεων εξαρτάται από το σύστημα αναπαράστασης, στο οποίο κάθε μια έχει εκφραστεί.

Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι οι μαθητές ήταν ικανότεροι να δώσουν παραδείγματα της συνάρτησης παρά έναν σωστό ορισμό της έννοιας, πιθανώς επειδή ο τυπικός ορισμός δεν αναφέρεται αρκετά συστηματικά κατά τρόπο ρητό, μέσω διαφορετικών παραδειγμάτων της συνάρτησης στα σχολικά μαθηματικά. Αυτό το συμπέρασμα συμφωνεί με τα αποτελέσματα των Evangelidou et al. (2004), που έδειξαν ότι η πλειοψηφία των πανεπιστημιακών φοιτητών Παιδαγωγικής Σχολής δεν έδωσε σωστό ορισμό, αλλά έκανε αναφορά σε μια ελλιπή σχέση. Επιπλέον, η εικόνα που κατασκευάζουν οι μαθητές για την έννοια της συνάρτησης παρεκκλίνει από τον τυπικό ορισμό της έννοιας που εισάγεται στους μαθητές λυκείου (Vinner, 1983). Η επιτυχία των μαθητών στις διαφορετικές μορφές μετατροπής της συνάρτησης μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων και αναγνώρισης εάν οι διαφορετικές σχέσεις αντιπροσώπευαν συνάρτηση ή όχι, ποίκιλε όσον αφορά τον τύπο της σχέσης ως προς την κατεύθυνση και το είδος της μετατροπής. Για παράδειγμα, η αντιστοίχιση της σχέσης $xy<0$, $x>0$ με τη λεκτική περιγραφή αυτού που αντιπροσωπεύει σε μια γραφική παράσταση στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, δηλαδή, το τέταρτο τεταρτημόριο, προκάλεσε μεγάλες δυσκολίες και στις δύο ομάδες ηλικιών των μαθητών, δεδομένου ότι περιλάμβανε μια μη-συμβατική ή αδιαφανή μετατροπή (Duval, 2002).

Το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας παρατηρήθηκε στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης. Αυτό το συμπέρασμα είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα της μελέτης των Mousoulides και Gagatsis (2004), που προσδιόρισαν τις μεγάλες δυσκολίες των πανεπιστημιακών φοιτητών στην παροχή μιας σωστής λύσης στα προβλήματα συνάρτησης, σε σχέση με την ανικανότητα χρησιμοποίησης μιας γεωμετρικής προσέγγισης και την εύρεση των συνδέσεων και των σχέσεων μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων που περιλαμβάνονται στα προβλήματα. Βάσει της επιλογής του δυσκολότερου έργου του δοκιμίου και της αιτιολόγησης των μαθητών, τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης υποστηρίζουν μερικούς επιπλέον παράγοντες που μπορούν να συνδεθούν με την απόδοση επίλυσης προβλήματος από τους μαθητές. Τέτοιοι παράγοντες είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών ότι τα προβλήματα μαθηματικών είναι δύσκολα ή ότι τα μαθηματικά δεν συσχετίζονται με τις πραγματικές καταστάσεις προβλήματος ζωής (Schoenfeld, 1992). Όπως αποκάλυψαν οι μαθητές, ένας άλλος παράγοντας μπορεί να είναι η ανικανότητά τους να συνδέσουν τις καταστάσεις προβλήματος του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά, να κατασκευάσουν και να εφαρμόσουν μαθηματικά πρότυπα για να αναλύσουν και να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα.

Είνα γνωστό ότι οι αναπαραστάσεις προσφέρουν την δυνατότητα στους μαθητές να ερμηνεύουν συνθήκες και να κατανοούν τις σχέσεις που υπάρχουν σε ένα πρόβλημα (Gagatsis & Christou, 2002). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων είναι πολύ σημαντικός στην ανάπτυξη και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στο θεμελιώδες πεδίο των συναρτήσεων. Ωστόσο, όπως συμπεράναμε από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, οι μαθητές αδυνατούν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων μορφών αναπαράστασης και να τις χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά ώστε να επιλύσουν προβλήματα στα οποία εμπλέκονται αναπαραστάσεις.

Ένα επιπλέον στοιχείο που προκύπτει από την έρευνα αυτή, είναι ότι τα αποτελέσματά της βρίσκονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών και δείχνουν ότι η ικανότητα γεωμετρικής προσέγγισης στην επίλυση προβλημάτων συναρτήσεων δεν είναι ανεπτυγμένη στους μαθητές όσο θα αναμενόταν (Knuth, 2000; Yeryshalmy, 1997). Η αλγεβρική προσέγγιση ήταν, μάλλον, ο προτιμότερος τρόπος λειτουργίας των μαθητών, ανεξαρτήτως της ευκολίας και της αποδοτικότητάς της στην

εκάστοτε ερώτηση, γεγονός που πρέπει να σχετίζεται με τον προσανατολισμό της διδασκαλίας και το επακόλουθο είδος των εμπειριών των μαθητών από τη διαπραγμάτευση ανάλογων ζητημάτων. Από την άλλη, αρκετοί από τους μαθητές που επιχείρησαν να επιλύσουν το πρόβλημα γραφικά, δεν κατάφεραν να εκφράσουν την αλγεβρική εξίσωση, διότι προσπαθούσαν να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση με τη χρήση αναλογιών. Πάντως, τα αποτελέσματα της επίλυσης προβλήματος δεν είναι ικανοποιητικά, δεδομένου ότι οι μαθητές του δείγματος είχαν παρακολουθήσει αρκετά μαθήματα, τόσο σε λυκειακό όσο και σε γυμνασιακό επίπεδο, πάνω στις συναρτήσεις. Οι αυξημένες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την γεωμετρική προσέγγιση, μπορεί να οφείλονται στο γεγονός ότι μια γραφική παράσταση κρύβει τις αναγκαίες και απαραίτητες πληροφορίες, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αδυνατούν να αντιληφθούν τη γραφική παράσταση ως ένα αποτελεσματικό μέσο για την επίλυση προβλημάτων συναρτήσεων (Larkin & Simon, 1987). Ένας παράγοντας, που πιθανόν να ευθύνεται για την αποτυχία των μαθητών να αντιμετωπίζουν γεωμετρικά τις συναρτήσεις και να οδηγούνται αποκλειστικά σε αλγεβρικές προσεγγίσεις επίλυσης μπορεί να είναι και η φύση των ίδιων των προβλημάτων (Dugdale, 1993; Harel et al, 1992). Συνήθως, μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια ζητείται η κατασκευή γραφικών παραστάσεων από δοθείσα εξίσωση και η προτεινόμενη μέθοδος λύσης είναι ο πίνακας τιμών (Leinhardt, 1990).

Επιπρόσθετα, οι γραφικές παραστάσεις δεν αντιμετωπίζονται ποιοτικά, με αποτέλεσμα αρκετοί μαθητές να αδυνατούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων της ίδιας μορφής. Όπως αναφέρεται από τους Yerushalmy & Schwartz (1993), ίσως η σημαντικότερη επιρροή στις επιλογές των μαθητών για τις μεθόδους λύσης που χρησιμοποιούν είναι η διδακτική και εκπαιδευτική έμφαση, η οποία εστιάζεται στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Κατά συνέπεια, οι μαθητές αντιλαμβάνονται συχνά τις γραφικές αναπαραστάσεις ως περιττές και σε πολλές περιπτώσεις ως ασύνδετες προς τις αντίστοιχες αλγεβρικές αναπαραστάσεις (Schwartz & Yerushalmy, 1992).

Η μετάφραση από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη δεν είναι μια απλή διαδικασία (Lesh et al, 1987; Gagatsis, 2000), ειδικά σε περιπτώσεις που δεν δίνεται έμφαση με τη διδασκαλία, όπως στα προβλήματα συναρτήσεων. Έτσι, μια αναβάθμιση της γεωμετρικής – ολιστικής προσέγγισης των συναρτήσεων κατά τη διδασκαλία τους θα

βοηθούσε τους μαθητές να οικοδομήσουν πληρέστερα κάποια γνωστικά σχήματα, που ενδεχομένως, θα τους επέτρεπαν και αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των διαφόρων προβλημάτων συναρτήσεων. Επίσης, μπορεί να βοηθήσει στη σύνδεση των διαφόρων μορφών αναπαράστασής της και επομένως, στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Τα συμπεράσματα σχετικά με τις αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων διαστάσεων της κατανόησης της συνάρτησης έδειξαν ότι υπήρξαν ισχυροί δεσμοί ομοιότητας και συνεπαγωγικές σχέσεις ανάμεσα στην επίλυση προβλήματος των μαθητών, στις ικανότητές τους να χειριστούν τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης της έννοιας στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής, στους ορθούς ορισμούς και στα σωστά παραδείγματα της συνάρτησης. Η παραπάνω διαπίστωση δείχνει ότι η επίλυση προβλήματος, ο ορισμός της έννοιας, τα παραδείγματα και η ικανότητα χειρισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων δεν είναι ανεξάρτητες οντότητες, αλλά σχετίζονται με τις διαδικασίες των μαθητών που ολοκλήρωσαν μια εννοιολογική κατανόηση της συνάρτησης. Αυτοί οι μαθητές είχαν ένα πιο υψηλό ποσοστό επιτυχίας ως προς την αναγνώριση των περισσοτέρων από τις αναπαραστάσεις της έννοιας και ως προς τους διαφορετικούς τύπους μετατροπής από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη. Επιπλέον, η ομάδα μαθητών που επέλεξε το πρόβλημα του δοκιμίου ως το δυσκολότερο έργο, επιβεβαιώνει την άποψη ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι δύσκολα. Αυτή η άποψη μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη της αντίληψης των μαθητών ότι τα μαθηματικά προβλήματα δεν είναι στερεότυπες ασκήσεις μαθηματικών που μπορούν να ολοκληρωθούν γρήγορα και χωρίς την σε βάθος κατανόησή τους, αλλά σύνθετες, άγνωστες καταστάσεις που απαιτούν την εφαρμογή των ήδη γνωστών ή νέων στρατηγικών με έναν εύκαμπτο και δημιουργικό τρόπο.

Η ομάδα μαθητών που είχε τις λανθασμένες απόψεις για την έννοια της συνάρτησης ερμηνεύθηκε από την ανικανότητα των μαθητών στην κατασκευή ενός τυπικού μαθηματικού μοντέλου να αναλύσουν και να επιλύσουν μια κατάσταση προβλήματος του πραγματικού κόσμου με τη χρήση των γραφικών ή αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Η έλλειψη σχέσεων για τη χρήση οποιασδήποτε αναπαράστασης της έννοιας σε αυτή την ομάδα μαθητών και τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας τους στα διάφορα έργα ματατροπής ή αναγνώρισης έδειξε την ανικανότητά τους να χειριστούν

αποτελεσματικά τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης. Αυτά τα συμπεράσματα συμφωνούν με την άποψη διαφόρων ερευνητών ότι τα λάθη των μαθητών μπορεί να είναι αποτέλεσμα της ανεπαρκούς χρήσης των αναπαραστάσεων ή της έλλειψης συντονισμού μεταξύ των αναπαραστάσεων (Greeno & Hall, 1997; Smith, diSessa & Rochelle, 1993).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτής της ομάδας μαθητών ήταν οι απαντήσεις τους για το δυσκολότερο έργο του δοκιμίου, οι οποίες αφορούσαν κυρίως την πεποίθηση ότι δεν ήξεραν οι ίδιοι τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά συνδέονται με τις πραγματικές καταστάσεις ζωής ή την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με προβλήματα πραγματικών καταστάσεων. Τα παραπάνω συμπεράσματα, που αφορούν στις αντιλήψεις για το δυσκολότερο έργο και για τις δύο ομάδες μαθητών, δηλαδή, την εννοιολογική ομάδα και την ομάδα με την λανθασμένη κατανόηση, προσδιορίζουν κυρίως τη συνέπεια των μαθητών ανάμεσα σε αυτό που έκαναν κατά την επίλυση του προβλήματος και στον τρόπο που εξήγησαν τη συμπεριφορά τους και υποστηρίζουν τη στενή σχέση μεταξύ των αντιλήψεων των μαθητών προς τη μαθηματική επίλυση του προβλήματος και της επιτυχίας στα μαθηματικά γενικότερα. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992) οι πεποιθήσεις ότι «τα σχολικά μαθηματικά σχετίζονται πολύ λίγο με τις πραγματικές καταστάσεις ζωής» αναπτύσσονται βάσει της εμπειρίας των μαθητών στην τάξη και έχουν αρνητικές συνέπειες στην ακαδημαϊκή απόδοσή τους στα μαθηματικά.

Αξιοσημείωτα συμπεράσματα παρατηρήθηκαν όσον αφορά στη σχέση μεταξύ της επίλυσης προβλήματος και των άλλων ικανοτήτων που εξετάστηκαν σε αυτή την έρευνα για την έννοια της συνάρτησης. Στο Διάγραμμα Ομοιότητας, οι μεταβλητές που περιλαμβάνουν την επιτυχία σε όλα τα έργα μετατροπής και αναγνώρισης του δοκιμίου, ένας ορθός ορισμός και ένα σωστό παράδειγμα της συνάρτησης διαπιστώσαμε ότι συνδέθηκαν με την επιτυχία στην επίλυση προβλήματος. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, η επιτυχής επίλυση προβλήματος συνεπαγόταν την επιτυχία σε όλα τα άλλα έργα του δοκιμίου. Τα αποτελέσματα που περιγράφηκαν αποκάλυψαν ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές που παρείχαν μια σωστή λύση στο πρόβλημα συνάρτησης πέτυχαν σε όλα τα άλλα έργα. Κατά συνέπεια, είναι εμφανές ότι η επίλυση προβλήματος εξασφάλισε την επιτυχία σε όλες τις άλλες διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης, γεγονός που αποκαλύπτει

τον προφητικό ρόλο της στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα εφάρμοζαν την έννοια στις διάφορες μορφές αναπαράστασης, στην παροχή ορθού ορισμού και σωστών παραδειγμάτων της συνάρτησης. Μια ερμηνεία για αυτό το συμπέρασμα που εξετάστηκε στην παρούσα έρευνα, είναι ότι η επίλυση προβλήματος είναι μια σύνθετη διαδικασία που περιλαμβάνει διάφορες ικανότητες και δεξιότητες που αναφέρονται στις άλλες τρεις διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος του δοκιμίου απαίτησε, μεταξύ άλλων ικανοτήτων, το συντονισμό των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης, δηλαδή, της λεκτικής, της αλγεβρικής και της γραφικής, καθώς επίσης και την κατανόηση του τι είναι συνάρτηση (ορισμός) και των διαφορετικών τύπων συναρτήσεων (παράδειγμα). Οι παραπάνω παρατηρήσεις υποστηρίζουν έντονα ότι **η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στον πυρήνα της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, ενισχύοντας έτσι την άποψη των Stanic και Kilpatrick (1988) ότι μια κατάσταση προβλήματος είναι κεντρική στη μάθηση μαθηματικών.**

Επιπρόσθετα, αποκαλύφθηκε μια άλλη ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ τριών από τα συστατικά της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, κανένας από τους μαθητές που έδωσαν έναν ελλιπή ή λανθασμένο ορισμό ή ένα λανθασμένο παράδειγμα συνάρτησης ή απέτυχαν στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής των διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης, δεν ήταν σε θέση να παρέχει μια σωστή λύση στο πρόβλημα του δοκιμίου. Αυτό το συμπέρασμα δείχνει ότι η επίλυση προβλήματος συνάρτησης ολοκληρώθηκε μόνο εάν οι μαθητές είχαν συλλάβει τον ορθό ορισμό και τα σωστά παραδείγματα συνάρτησης στο μυαλό τους ή εάν είχε επιτευχθεί ευελιξία στη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας. Με άλλα λόγια, η παροχή του σωστού ορισμού ή ενός παραδείγματος της συνάρτησης καθώς και η αναγνώριση και η μετατροπή των συναρτήσεων μεταξύ των πολλαπλών τρόπων αναπαράστασης ήταν απαραίτητες προϋποθέσεις για την επιτυχή επίλυση προβλήματος της έννοιας.

Επιπλέον, επιβεβαιώθηκε ότι οι μαθητές που πέτυχαν στην επίλυση προβλήματος είχαν αναπτύξει πιο υψηλό επίπεδο της κατανόησης της συνάρτησης σχετικά με τους μαθητές που δεν πέτυχαν. Ως εκ τούτου, η υποστήριξη για την ανάπτυξη της κατανόησης της συνάρτησης, παρέχεται μέσω τουλάχιστον δύο διαφορετικών ιεραρχικά

διατεταγμένων επιπέδων. Στην παρούσα μελέτη, το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα του πιο υψηλού επιπέδου θα μπορούσε να είναι η επιτυχής επίλυση προβλήματος, ενώ ένα χαμηλότερο επίπεδο θα μπορούσε να περιλάβει μια σύνθεση των διαφορετικών ικανοτήτων που αναφέρονται στις τρεις άλλες διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης: την παροχή ενός ορθού ορισμού, την παροχή ενός σωστού παραδείγματος συνάρτησης και την ευέλικτη χρήση των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας. Σε μια ερευνητική μελέτη που εξετάζει τις δυσκολίες του συνδυασμού των διαφόρων αναπαραστάσεων για τη συνάρτηση, ο Hitt (1998) παρουσίασε την ύπαρξη συγκεκριμένων σταδίων για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (τα επίπεδα που αναφέρει ο Hitt σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης καταγράφονται αναλυτικά στο Θεωρητικό Πλαίσιο της παρούσας εργασίας, σελ.44), σύμφωνα με τα οποία η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος. Τα επίπεδα που προτείνονται από τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης, συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας του Hitt. Διαφαίνεται, λοιπόν, ότι η ικανότητα επίλυσης έργων άμεσης μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης σε άλλο, σχετίζεται με το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Τα αποτελέσματα της έρευνας, επίσης, είναι σύμφωνα με τα αποτελέσματα άλλων ερευνητικών εργασιών, βάσει των οποίων η ικανότητα μετάφρασης από ένα πεδίο έκφρασης σε άλλο, αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Janvier, 1987a; Janvier, 1987b; Lesh et al, 1987a). Συγκεκριμένα, έχει διαφανει ότι η δυσκολία μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, αποτελεί σημαντικό παράγοντα, ο οποίος επηρεάζει τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση στην επίλυση προβλήματος. Η υπερπήδηση αυτών των αδυναμιών διευκολύνει την απόκτηση και τη χρήση στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών, όπως είναι η έννοια της συνάρτησης.

Είναι, λοιπόν, εμφανές ότι η μετάφραση συγκαταλέγεται ανάμεσα στους σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και θα έπρεπε να περιλαμβάνεται σε οποιαδήποτε μελλοντική κατάταξη μεταβλητών, οι οποίες παρεμβαίνουν στην επίλυση προβλήματος. Ωστόσο, παρά τον ουσιαστικό ρόλο που

διαδραματίζουν οι μεταφράσεις, οι στρατηγικές μετάφρασης σπάνια αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας μέσα στην τάξη (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Janvier, 1987a; Janvier, 1987b; Lesh et al, 1987a; Lesh et al, 1987b).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα είναι πολύ δύσκολο να οριστεί μια σημασιολογική συμφωνία μεταξύ δύο αναπαραστάσεων. Για να είναι δυνατός ο ορισμός σημασιολογικής συμφωνίας θα έπρεπε σε όλα τα ζεύγη «γραφική παράσταση → λεκτική έκφραση» και «γραφική παράσταση → αλγεβρική έκφραση», καθώς επίσης στα ζεύγη «λεκτική έκφραση → γραφική παράσταση» και «λεκτική έκφραση → αλγεβρική έκφραση» να υπάρχουν ίσα ποσοστά επιτυχίας, γεγονός που δεν συμβαίνει.

Η δυσκολία ορισμού σημασιολογικής συμφωνίας οφείλεται κυρίως σε θεωρητικούς λόγους, αφού ένα είδος αναπαράστασης ποτέ δεν είναι ισοδύναμο με ένα άλλο είδος αναπαράστασης. Κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας της συνάρτησης, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Με άλλα λόγια, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται. Από το συμπληρωματικό, λοιπόν, χαρακτήρα των διαφόρων αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας προκύπτει η δυσκολία ορισμού μιας σημασιολογικής συμφωνίας με την έννοια που την ορίζει ο Duval (1987). «Η σημασιολογική ασυμφωνία κρύβει την ισοδυναμία της σημασίας που επιτρέπει τη μετάβαση από μια έκφραση, σε μια άλλη ή από μια έκφραση σε μια παράσταση» (Duval, 1987, σ.57).

Συγκεκριμένα, σε αυτή την μελέτη, στο τελευταίο στάδιο τα υποκείμενα είναι σε θέση να συντονίσουν με συνέπεια τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης στην επίλυση προβλήματος, ενώ στα χαμηλότερα επίπεδα τα υποκείμενα είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας της συνάρτησης, να μεταφράσουν μια δεδομένη συνάρτηση από μια αναπαράσταση σε άλλη με τη διατήρηση της έννοιας και τον συντονισμό μεταξύ των δύο συστημάτων αναπαράστασης. Τα επιπλέον στοιχεία που μας προσθέτει η παρούσα μελέτη σχετικά με τα παραπάνω στάδια, είναι οι ορισμοί και τα παραδείγματα της συνάρτησης που βρέθηκαν επίσης να είναι προϋποθέσεις της επίλυσης προβλήματος.

Εντούτοις, με εξαίρεση τους μαθητές που πέτυχαν στην επίλυση προβλήματος στην έρευνα, προσδιορίσαμε μερικές ασυνέπειες στην πλειοψηφία των άλλων μαθητών

ως προς την απόδοσή τους στις τέσσερις διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης. Για παράδειγμα, τα σημαντικά ποσοστά των μαθητών που έδωσαν έναν σωστό ορισμό ή ένα παράδειγμα συνάρτησης, τα οποία φθάνουν σε 45% και 50%, αντίστοιχα, δεν ήταν σε θέση να προσδιορίσουν την έννοια με γραφικές μορφές αναπαράστασης. Παρόμοιες ασυνέπειες εμφανίστηκαν μεταξύ των σωστών ορισμών ή των παραδειγμάτων των μαθητών και των μετατροπών της συνάρτησης από μια αναπαράσταση σε άλλη. Η πιο εξέχουσα ασυμβίβαστη συμπεριφορά εμφανίστηκε μεταξύ των ορθών ορισμών ή παραδειγμάτων της συνάρτησης και της επιτυχούς επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα, ακόμη και αν η επιτυχία στην επίλυση προβλήματος ολοκληρώθηκε μόνο από τους μαθητές που έδωσαν τους σωστούς ορισμούς και τα σωστά παραδείγματα, μόλις το 25% και 20% αυτών των μαθητών, αντίστοιχα, απέδωσαν καλά στην επίλυση προβλήματος. Τα παραπάνω συμπεράσματα δείχνουν την ανικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν με νόημα και ευελιξία τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης και τη γνώση για τα διάφορα παραδείγματα της συνάρτησης, προκειμένου να καθορίσουν εάν μια γραφική παράσταση αντιπροσωπεύει συνάρτηση ή όχι και να χρησιμοποιήσουν ευέλικτα τις πολλαπλές αναπαραστάσεις για να λύσουν ένα πρόβλημα. Εξετάζοντας την αντίστροφη προοπτική, παρατηρούμε ότι σημαντικά ποσοστά των μαθητών που έδωσαν έναν ελλιπή ορισμό ή λανθασμένα παραδείγματα της συνάρτησης, τα οποία φθάνουν σε 50%, απέδωσαν καλά στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής, του δοκιμίου. Αυτό το γεγονός αποκάλυψε ότι η επιτυχία στα έργα μετατροπής ή αναγνώρισης στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης δεν ήταν ενδεικτική για την κατανόηση της συνάρτησης από τους μαθητές.

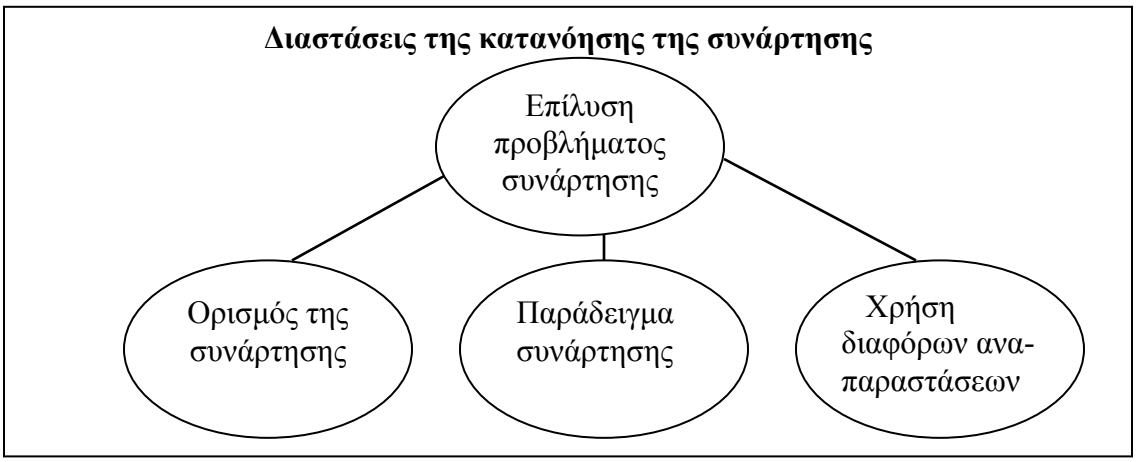
Οι παραπάνω παρατηρήσεις εξηγούν ότι παρά τις στενές σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών διαστάσεων που αποτελούν το νόημα της έννοιας της συνάρτησης, οι αποκλίσεις ανάμεσά τους ήταν σχετικά συχνές. Αντίθετα, από την ικανότητα επίλυσης προβλήματος των μαθητών, οι ορισμοί ή τα παραδείγματά τους δεν είχαν πάντα έναν προφητικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα εφάρμοζαν την έννοια της συνάρτησης μέσω των διαφόρων μορφών αναπαράστασης. Επομένως, δεν μπορούμε να διεξάγουμε γενικά συμπεράσματα, όπως «οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια της συνάρτησης», υπό την έννοια ότι έχουν την ικανότητα να δώσουν επιτυχώς τον ορισμό ή παραδείγματα της έννοιας ή ακόμη και να χρησιμοποιήσουν ξεχωριστά διαφορετικές

μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης στα έργα αναγνώρισης ή μετατροπής. Επιπλέον, η παροχή σωστών ορισμών και παραδειγμάτων της συνάρτησης και η επιτυχής εναλλαγή των διαφόρων αναπαραστάσεων με ευελιξία στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής, ενέργησαν σαν απαραίτητες προϋποθέσεις για την επίτευξη της επίλυσης προβλήματος, η οποία, σύμφωνα με τα συμπεράσματά μας, αρκεί για να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ολοκληρώνεται μια επαρκής κατανόηση της συνάρτησης.

Εξετάζοντας τις ασυνέπειες που καταδείχθηκαν από ένα ποσοστό μαθητών στις διαφορετικές διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης, διαπιστώσαμε ότι φάνηκε να συμβάλλουν στην κατανόηση της έννοιας και οι τέσσερις παράγοντες της μαθηματικής σκέψης που εξετάστηκαν σε αυτή τη μελέτη, οι ορισμοί, τα παραδείγματα, η χρήση των αναπαραστάσεων και η επίλυση προβλήματος και να περιγράφουν με το μοναδικό τους τρόπο τις διαφορετικές πτυχές της προόδου των μαθητών για την απόκτηση μιας ολοκληρωμένης εικόνας αυτής της σύνθετης έννοιας. Κατά συνέπεια, παρέχονται στοιχεία που οδηγούν στην ανάγκη χρήσης ενός τετραδιάστατου μοντέλου για την εξέταση και την εξήγηση του τρόπου με τον οποίο η έννοια της συνάρτησης γίνεται κατανοητή από τους μαθητές, το οποίο αποτελείται από αυτους τους τέσσερις τύπους ικανοτήτων. Η συνεπής κατανόηση της έννοιας μπορεί να υποδειχθεί πρώτιστα από την επιτυχή επίλυση προβλήματος, που χτίζεται βάσει του ορθού ορισμού και των κατάλληλων παραδειγμάτων συνάρτησης και της ευελιξίας στις πολλαπλές αναπαραστάσεις στα έργα αναγνώρισης και μετατροπής (Σχήμα 3). Οι λανθασμένες και περιορισμένες αντιλήψεις της έννοιας της συνάρτησης μπορούν να αποκαλυφθούν από τις ελλείψεις των μαθητών όσον αφορά τουλάχιστον σε μια από τις προαναφερθείσες τέσσερις διαστάσεις.

Στη συνέχεια, ακολουθεί το Σχήμα 3, στο οποίο φαίνονται οι αμοιβαίες σχέσεις των διαφορετικών διαστάσεων της κατανόησης της συνάρτησης βάσει των συμπερασμάτων της έρευνας:

<u>Σχήμα 3</u>: Οι αμοιβαίες σχέσεις των διαφορετικών διαστάσεων της κατανόησης της συνάρτησης βάσει των συμπερασμάτων της έρευνας.



4.4 Η επαναληπτική έρευνα

Για να ελεγχθεί η εγγυρότητα των αποτελεσμάτων της έρευνας που παρουσιάσαμε, πραγματοποιήθηκε μια επαναληπτική έρευνα, της οποίας τον πληθυσμό αποτέλεσαν 153 μαθητές της Γ΄ Λυκείου τεσσάρων σχολείων του Νομού Αττικής. Συγκεκριμένα, 50 μαθητές προέρχονταν από το Ενιαίο Λύκειο Πόρου, 36 μαθητές από το 1^{ο} Ενιαίο Λύκειο Ταύρου, 37 μαθητές από το 2^{ο} Ενιαίο Λύκειο Ταύρου και 30 μαθητές από το 12^{ο} Ενιαίο Λύκειο Αθηνών. Σε αυτή τη δεύτερη έρευνα δόθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο στους μαθητές, με τη διαφορά ότι αρκετοί από αυτούς, επέλεξαν δύο έργα χαρακτηρίζοντάς τα ως τα δυσκολότερα του δοκιμίου. (Η ολοκληρωμένη μελέτη αυτής της έρευνας υπάρχει αναλυτικά σε ξεχωριστό άρθρο).

Η σύγκριση μεταξύ των δύο ερευνών πραγματοποιήθηκε ως προς τις επιτυχίες στα έργα του δοκιμίου από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου και για τις δύο έρευνες, ώστε να υπάρχει αμεροληψία όσον αφορά στην ηλικία των μαθητών. Για την ανάλυση των

δεδομένων, αρχικά, υπολογίστηκαν τα ποσοστά επιτυχίας για τα έργα του δοκιμίου της δεύτερης έρευνας και πραγματοποιήθηκε στατιστικός έλεγχος υποθέσεων για τη διαφορά των ποσοστών επιτυχίας κάθε έργου μέσω του στατιστικού Πακέτου MINITAB, έκδοση 13.1. Επιπλέον, κατασκευάστηκαν το Διάγραμμα Ομοιότητας και το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών, μέσω του στατιστικού λογισμικού CHIC.

Τα αποτελέσματα που διεξήχθησαν, επαλήθευσαν τα συμπεράσματα της πρώτης έρευνας, με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: οι μαθητές των σχολείων του νομού Αττικής πέτυχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε όλα σχεδόν τα έργα του δοκιμίου από τους μαθητές του νομού Κεφαλλονιάς.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου της επαναληπτικής έρευνας (Πίνακας 4). Στη δεύτερη έρευνα, τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας παρατηρήθηκαν στο έργο που ζητούσε ένα παράδειγμα συνάρτησης (50.3%), στο υποερώτημα G4 που περιλάμβανε την αναγνώριση εάν μια γραφική παράσταση σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων ήταν γραφική παράσταση συνάρτησης ή όχι (69.3%), στο υποερώτημα AL2, που περιλάμβανε μια μετατροπή αλγεβρικής εξίσωσης σε λεκτική περιγραφή (74.5%), στο υποερώτημα GA2, που περιλάμβανε τη μετατροπή μιας γραφικής παράστασης σε αλγεβρική (60.8%) και στο έργο AG, που περιλάμβανε τη μετατροπή μιας αλγεβρικής εξίσωσης στην αντίστοιχη γραφική παράσταση (61.4%).

Επιπρόσθετα, η δεύτερη έρευνα χαρακτηρίζεται, γενικά, από χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, όμως, τα χαμηλότερα ποσοστά παρατηρήθηκαν στα υποερωτήματα AL1 (20.9%) και AL4 (20.1%), όπου οι μαθητές δυσκολεύηκαν στην αντιστοίχιση των δεδομένων αλγεβρικών ανισοτήτων με τις κατάλληλες λεκτικές περιγραφές και στο υποερώτημα GA1 (33.3%), που περιλάμβανε τη μετατροπή μιας γραφικής παράστασης σε αλγεβρική μορφή.

Τέλος, η επιτυχία των μαθητών μειώνεται ριζικά στην επίλυση του σύνθετου προβλήματος στις συναρτήσεις, όπου μόνο το 10.5% των μαθητών έδωσε τις σωστές απαντήσεις στα διάφορα υποερωτήματα του έργου 6.

Στον Πίνακα 4 που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου της επαναληπτικής έρευνας:

Πίνακας 4 : Ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου της δεύτερης έρευνας.

Τύπος Έργου	Μεταβλητή	Γ΄ Λυκείου % N=153
Ορισμοί	D1 (σωστός)	39.2
	D2 (ελλιπής)	31.3
	D3 (λανθασμένος ή κανένας)	29.4
Παράδειγμα	EX1	50.3
Γραφικές παραστάσεις (αναγώριση)	G1	54.2
	G2	42.5
	G3	40.5
	G4	69.3
Αλγεβρική σε Λεκτική μορφή (μετατροπή)	AL1	20.9
	AL2	74.5
	AL3	41.2
	AL4	20.3
Γραφική σε Αλγεβρική μορφή (μετατροπή)	GA1	33.3
	GA2	60.8
Αλγεβρική σε Γραφική μορφή (μετατροπή)	AG	61.4
Επίλυση Προβλήματος	Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1, Pd2	10.5
Ερώτηση δύσκολου έργου	Q3	24.1
	Q6a	41.2
	Q6b	28.8
	Q6c	20.9

Από τη σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου ανάμεσα στις δύο έρευνες, επαληθεύονται σημαντικά συμπεράσματα, τα οποία έχουν ήδη καταγραφεί και δείχνουν ότι οι μαθητές και των δύο ερευνών αντιμετωπίζουν τα ίδια περίπου προβλήματα στις συναρτήσεις.

Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5 που ακολουθεί, στα υποερωτήματα D2, G3, G4, AL2 και GA2 παρατηρήθηκαν τα ίδια περίπου ποσοστά επιτυχίας και στις δύο έρευνες, ενώ σε όλες σχεδόν τις υπόλοιπες μεταβλητές παρατηρήθηκε η ίδια περίπου αντιμετώπιση από τους μαθητές, με χαμηλότερα ποσοστά επιτυχιών στην έρευνα που πραγματοποιήθηκε στον νομό Αττικής.

Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών δίνει σωστό παράδειγμα συνάρτησης σε σχέση με εκείνους που δίνουν το σωστό ορισμό της έννοιας, επιβεβαιώθηκε και στην επαναληπτική έρευνα.

Τέλος, ακόμη και στην ποιοτική ερώτηση του δοκιμίου (έργο 7), παρατηρήθηκε κοινή αντιμετώπιση από τους μαθητές και των δύο ερευνών, με τη διαφορά ότι στη δεύτερη, ήταν μεγαλύτερο το ποσοστό των μαθητών που επέλεξαν την ερώτηση 3 σαν την πιο δύσκολη του ερωτηματολογίου, σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό της πρώτης. Η διαπίστωση αυτή εξηγείται από το γεγονός ότι οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην επαναληπτική έρευνα, φάνηκε πως είχαν, γενικά, χαμηλότερο επίπεδο γνώσεων στις συναρτήσεις, από τους μαθητές της πρώτης.

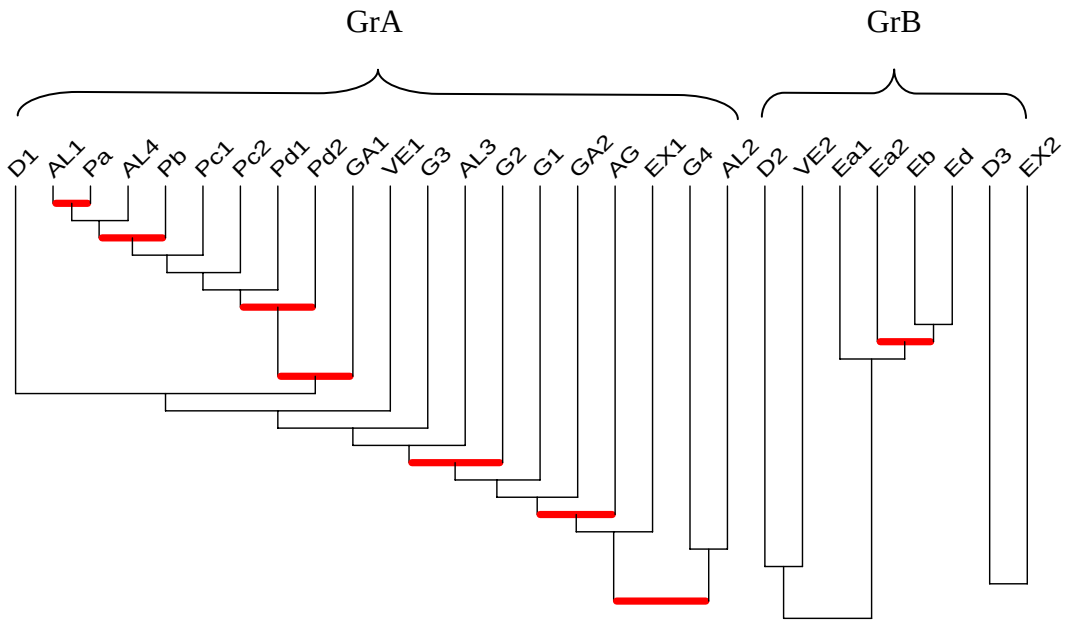
Στη συνέχεια, ακολουθεί ο Πίνακας 5, στον οποίο παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας στα έργα του δοκιμίου και για τις δύο έρευνες:

Πίνακας 5 : Σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας των δύο ερευνών στα έργα του δοκιμίου.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ 1ης ΕΡΕΥΝΑΣ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ 2ης ΕΡΕΥΝΑΣ	ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ 95%	Z	P-value
D1	70.2	39.2	31	(18.5, 43.5)	4.88	0.000
D2	21.4	31.3	-9.9	(-21.4, 1.5)	-1.70	0.089
D3	8.3	29.4	-21	(-30.4, -11.7)	-4.43	0.000
EX1	73.8	50.3	23.5	(11.2, 35.8)	3.74	0.000
G1	83.3	54.2	40.8	(29.7, 52)	7.16	0.000
G2	36.9	42.5	-17.3	(-30.3, -4.4)	-2.62	0.009
G3	51.2	40.5	10.7	(-2.6, 23.9)	1.58	0.114
G4	64.3	69.3	-5	(-17.6, 7.6)	-0.78	0.437
AL1	42.9	20.9	21.9	(9.6, 34.3)	3.47	0.001
AL2	70.2	74.5	-4.3	(-16.2, 7.7)	-0.70	0.484
AL3	40.5	41.2	-0.7	(-13.8, 12.4)	-0.10	0.916
AL4	36.9	20.3	16.6	(4.5, 28.8)	2.69	0.007
GA1	52.4	33.3	19	(6, 32.1)	2.86	0.004
GA2	58.3	60.8	-2.5	(-15.5, 10.6)	-0.37	0.713
AG	58.3	61.4	-3.1	(-16.2, 10)	-0.47	0.641
Pa, Pb, Pc1, Pc2, Pd1, Pd2	21.4	10.5	11	(0.9, 21)	2.14	0.032
Q3	7.1	24.1	-17	(-25.8, -8.3)	-3.82	0.000
Q6a	46.4	41.2	5.3	(-8, 18.5)	0.78	0.436
Q6b	36.9	28.8	8.1	(-4.4, 20.7)	1.27	0.204
Q6c	9.5	20.9	-11.4	(-20.4, -2.4)	-2.48	0.013

Στη συνέχεια ακολουθεί το Διάγραμμα Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο:

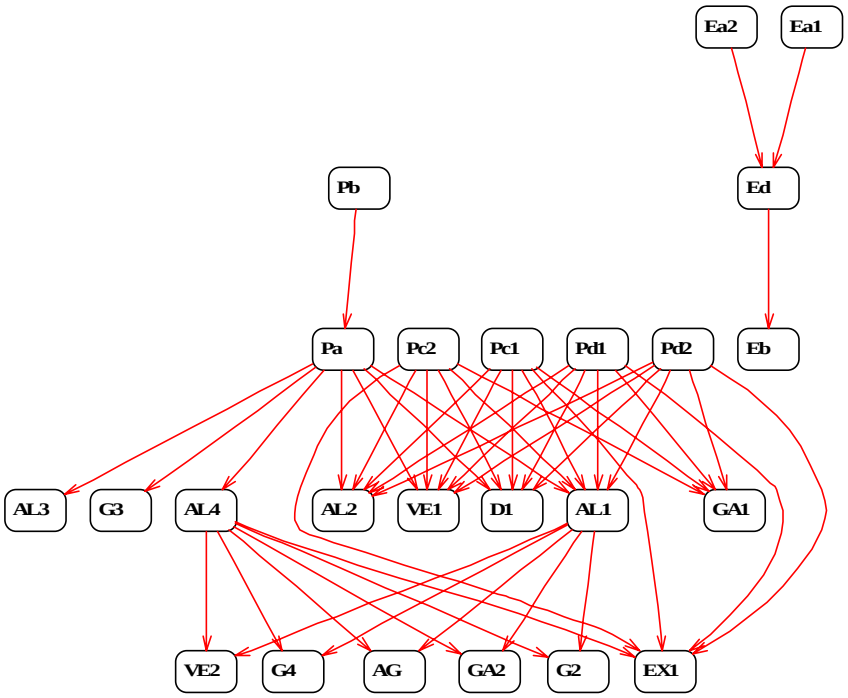
<u>Σχήμα 4</u> : Διάγραμμα Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο.



Από τη μελέτη του παραπάνω Διαγράμματος Ομοιότητας, παρατηρούμε ότι η δομή του είναι όμοια με τη δομή του Διαγράμματος Ομοιότητας της πρώτης έρευνας. Οι δύο ευδιάκριτοι κλάδοι GrA και GrB αντιπροσωπεύουν την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης και την περιορισμένη ή λανθασμένη άποψη που έχουν οι μαθητές για τη συνάρτηση, αντίστοιχα.

Ακολουθεί, τέλος, το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο:

<u>Σχήμα 5</u> : Συνεπαγωγικό Διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στο δοκίμιο.



Graph : C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\rita's folder\rita\articles\function\function3\gravanni data2.csv 99 95 90 85

Από τη μελέτη του Συνεπαγωγικού Διαγράμματος, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο ομάδες συνεπαγωγών, από τις οποίες η πρώτη μπορεί να χαρακτηριστεί ως εννοιολογική, ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στη λανθασμένη άποψη της έννοιας της συνάρτησης από τους μαθητές. Συγκεκριμένα, η επιτυχία στα διάφορα ερωτήματα του προβλήματος υπονοεί την επιτυχία στα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης, μετατροπής από αλγεβρική σε λεκτική μορφή και από γραφική σε αλγεβρική καθώς και την επιτυχία στην παροχή ορθού ορισμού συνάρτησης. Στη συνέχεια, η επιτυχία στα έργα μετατροπής από αλγεβρική σε λεκτική μορφή συνεπάγεται την επιτυχία στα υπόλοιπα έργα αναγνώρισης καθώς και στην παροχή ορθού παραδείγματος συνάρτησης.

4.5 Διδακτικές συνέπειες

Το παραπάνω τετραδιάστατο μοντέλο της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης έχει παιδαγωγικές επιπτώσεις στη διδασκαλία και την αξιολόγηση:

- Μια πρώτη διδακτική συνέπεια είναι ότι πρέπει να δίνεται έμφαση στην κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης, καθόσον αυτό θα σημαίνει και την αύξηση της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων.
- Δεύτερη διδακτική συνέπεια είναι ότι πρέπει να ενθαρρύνονται οι μαθητές να διατυπώνουν παραδείγματα συναρτήσεων και από την καθημερινή τους ζωή, αφού έτσι γίνεται δυνατή η καλύτερη κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης.
- Τρίτη διδακτική συνέπεια είναι ότι η διδασκαλία συναρτήσεων πρέπει να δίνει έμφαση στην όσο δυνατόν καλύτερη σύνδεση των διαφόρων μορφών αναπαράστασης συναρτήσεων και στις εναλλαγές μεταξύ αυτών των διαφορετικών μορφών.
- Επιπλέον, η κατανόηση της συνάρτησης μπορεί να ενισχυθεί με το σχεδιασμό των διδακτικών δραστηριοτήτων, οι οποίες δεν περιορίζονται σε τυποποιημένες διαστάσεις και μεμονωμένα διδαγμένες, αλλά συνδέονται η μία με την άλλη για την ανάπτυξη μιας σφαιρικής και συνεπούς κατανόησης της συνάρτησης και της επίλυσης προβλήματος.
- Επιπρόσθετα, χρειάζονται εργαλεία αξιολόγησης για τη μάθησης της συνάρτησης από τους μαθητές ώστε να υπογραμμίζουν και να ενσωματώνουν τις διάφορες πτυχές της κατανόησης της συγκεκριμένης έννοιας, όπως εκείνα που εξετάζονται στην παρούσα μελέτη, δεδομένου ότι κάθε μια από τις διαφορετικές πτυχές που συμβάλλουν στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης δίνει διαφορετικές πληροφορίες για την ικανότητα των μαθητών και τη σημαντικότητα αυτού του θέματος.

Εν κατακλείδι, η ουσιαστική κατανόηση των συναρτήσεων περνάει μέσα από την αποστεγανοποίηση των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης και αυτός θα πρέπει να είναι ο βασικός στόχος της διδασκαλίας.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α

1. Το δοκίμιο της έρευνας

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

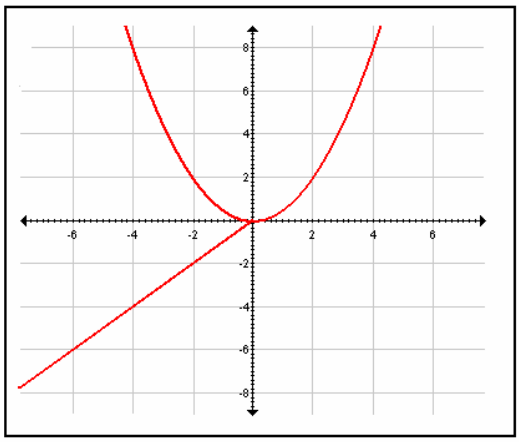
ΤΑΞΗ: **ΗΜΕΡ/ΝΙΑ:**

ΑΓΟΡΙ: **ΚΟΡΙΤΣΙ:**

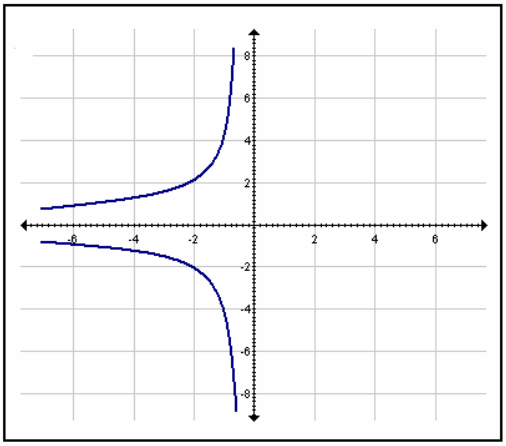
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Τι είναι συνάρτηση; Δώσε ένα παράδειγμα.
2. Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

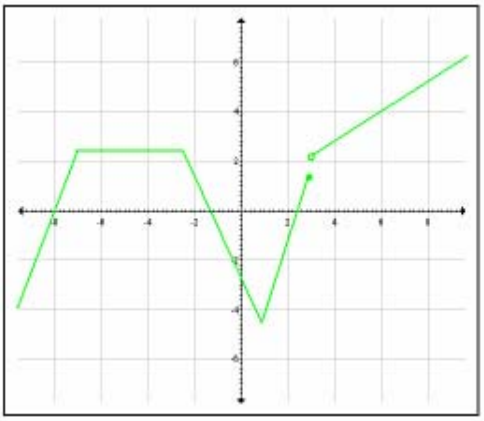
α)



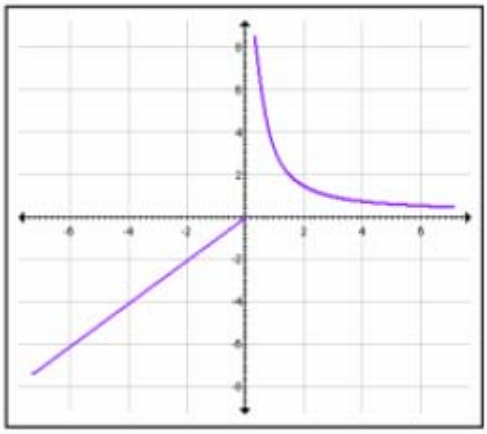
β)



γ)



δ)

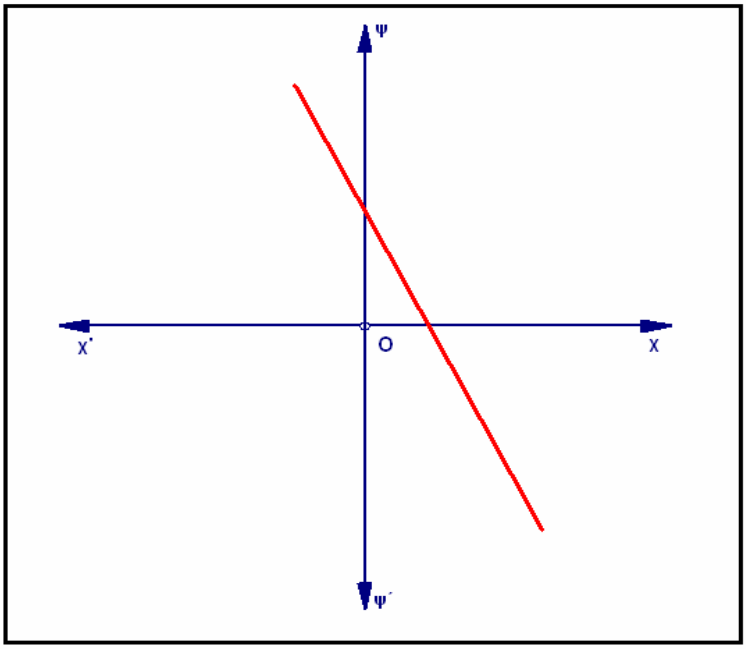


3. Να αντιστοιχίσεις τις αλγεβρικές εκφράσεις της στήλης Α στις λεκτικές εκφράσεις της στήλης Β:

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $xy \leq 0$	1. 1° – 3° τεταρτημόριο
β. $xy = 0$	2. 1° – 2° τεταρτημόριο
γ. $xy>0$	3. άξονας x΄x ή άξονας y΄y
δ. $xy<0$, $x>0$	4. ημιάξονας Ox ή ημιάξονας Oy
	5. 2° – 4° τεταρτημόριο
	6. 2° – 4° τεταρτημόριο και οι άξονες x΄x, y΄y
	7. 2° τεταρτημόριο
	8. 4° τεταρτημόριο

4. Να επιλέξεις τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην κάθε γραφική παράσταση:

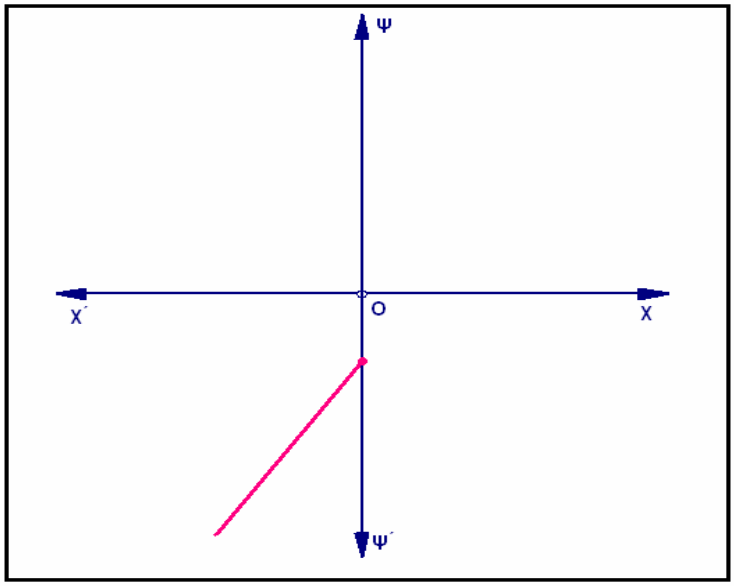
α.



i) $y + 3x = 0$ iii) $y + 2 = 3x$

ii) $y = -3x-2$ iv) $y + 3x = 2$

β.

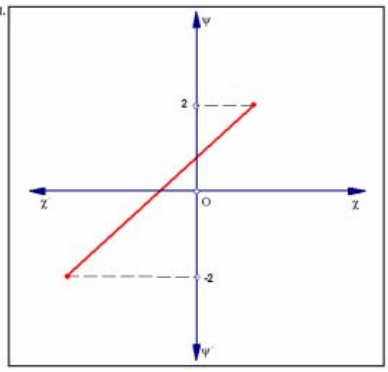


i) $y = -3x,\ x>0$ iii) $y + 3x = -1,\ x \geq 0$

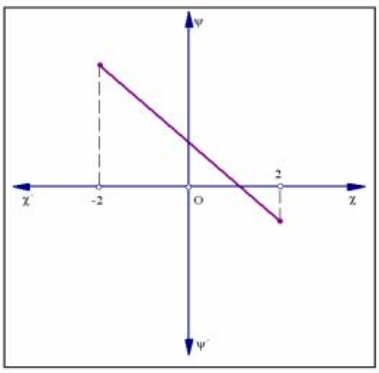
ii) $y -3x = 1,\ x<0$ iv) $y – 3x = -1,\ x \leq 0$

5. Σε ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί η αλγεβρική έκφραση $y = -2x + 1,\ -2 \leq x \leq 2$;

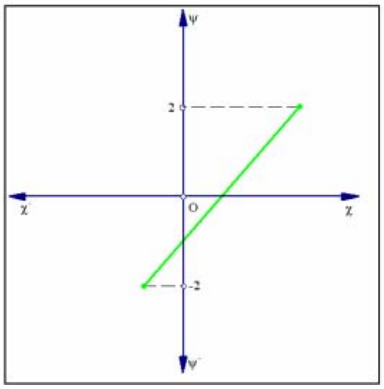
α.



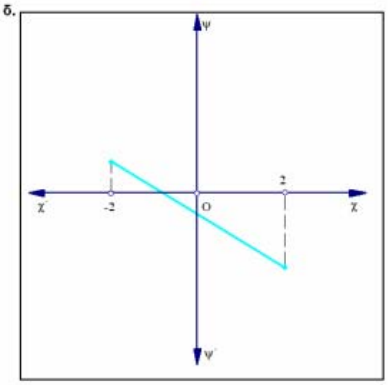
β.



γ.



δ.



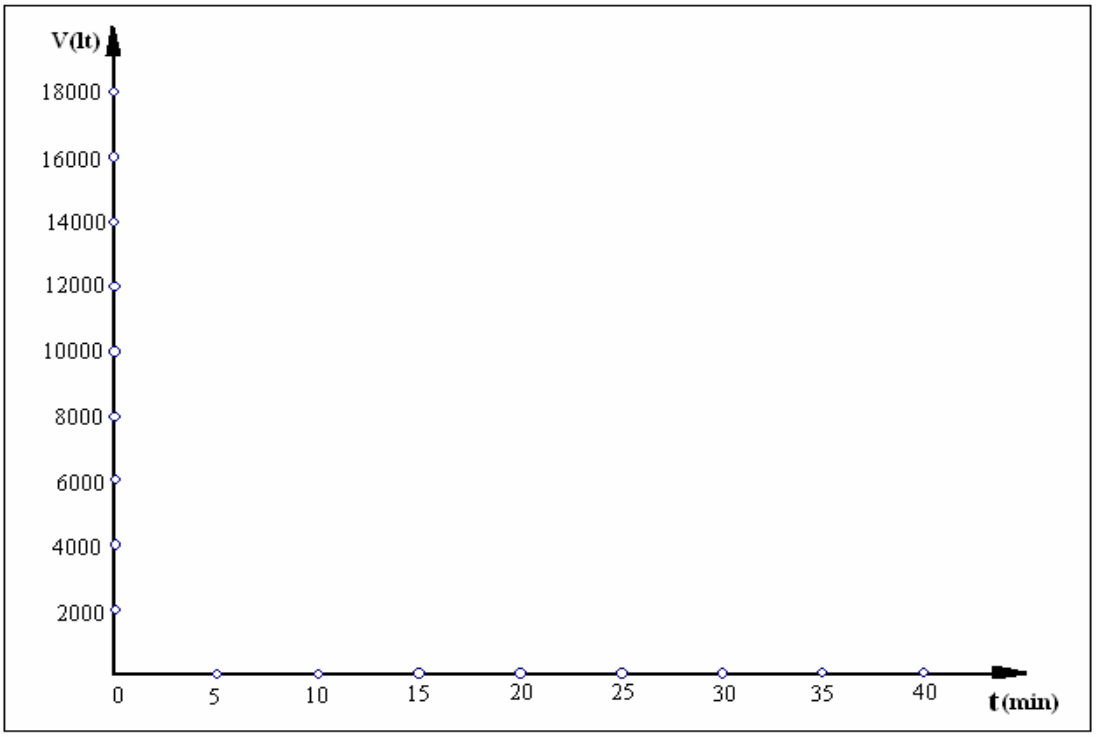
6. Βυτιοφόρο με 17.000 lt βενζίνη ανεφοδιάζει πρατήριο βενζίνης που διαθέτει δεξαμενή χωρητικότητας 15.000 lt. Τη στιγμή της παράδοσης, η δεξαμενή περιέχει 1.000 lt βενζίνης και το βυτιοφόρο αρχίζει να τη γεμίζει με σταθερή παροχή 400 lt ανά λεπτό (γραμμική σχέση).

   α. Να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση που εκφράζει τον όγκο V_1 της βενζίνης της δεξαμενής ως συνάρτηση του χρόνου t.

   β. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση του όγκου V_2 της βενζίνης στο βυτιοφόρο ως συνάρτηση του χρόνου t.

   γ. Να βρεις σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή. Πόση βενζίνη περιέχει τότε το βυτιοφόρο;

   δ. Να εκτιμήσεις μετά από πόσο χρόνο η δεξαμενή και το βυτιοφόρο θα περιέχουν τον ίδιο όγκο βενζίνης. Πόση βενζίνη περιέχεται τότε στη δεξαμενή και στο βυτιοφόρο;



7. Ποια άσκηση σε δυσκόλεψε περισσότερο και γιατί;

2. Οι απαντήσεις των μαθητών

Οι κυριότερες από τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές της έρευνας ήταν οι ακόλουθες:

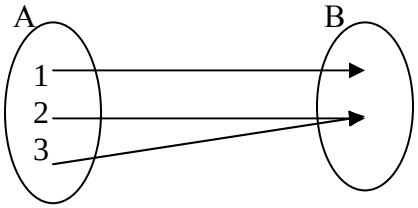
1. **D1** → σωστός ορισμός. Απάντησαν: 1) «Συνάρτηση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου Β». 2) Έδωσαν σωστό ορισμό συγκεκριμένου είδους συνάρτησης π.χ. της 1-1 συνάρτησης και της συνάρτησης 1-1 και επί.

   D2 → ελλιπής ορισμός. Απάντησαν: 1) «Όταν κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχεί σε κάποια στοιχεία ενός συνόλου Β». 2) «Όταν στοιχεία ενός συνόλου Α αντιστοιχούν σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου Β».

   D3 → λάθος ορισμός. Απάντησαν: 1) «Όταν στοιχεία ενός συνόλου Α αντιστοιχούν σε κάποια στοιχεία ενός συνόλου Β». 2) «Συνάρτηση είναι η εξίσωση με δύο αγνώστους». 3) «Όταν δύο μεταβλητές έχουν σχέση μεταξύ τους». 4) Δεν απάντησαν τίποτα.

   EX1 → σωστό παράδειγμα. Απάντησαν: 1) Έδωσαν παράδειγμα με βελοδιάγραμμα,

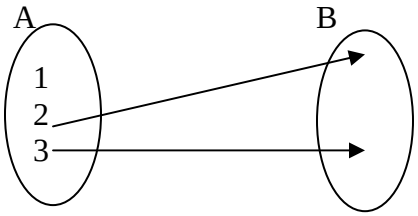
π.χ.



2) Έδωσαν παράδειγμα με συγκεκριμένους τύπους συναρτήσεων, πχ $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $y=\alpha x+\beta$. 3) Έδωσαν παράδειγμα μέσα από καθημερινές εφαρμογές, π.χ. αν ένα κιλό πατάτες κοστίζει 0,5 ευρώ, τότε για τα x κιλά πληρώνουμε y=0,5x.

   EX2 → λάθος παράδειγμα. Απαντήσεις: 1) Έδωσαν λάθος παράδειγμα με βελοδιάγραμμα,

π.χ.



2) Έδωσαν παραδείγματα εξισώσεων, π.χ. f(x)=x+y+3 με άγνωστο το x. 3) Δεν απάντησαν τίποτα.

▶ Αξίζει να σημειωθεί ότι κανένας μαθητής δεν έδωσε παράδειγμα συνάρτησης με τη βοήθεια γραφικής παράστασης.

2. **G1** → χαρακτήρισαν σωστά ότι η γραφική παράσταση α δεν είναι συνάρτηση.

   G2 → χαρακτήρισαν σωστά ότι η γραφική παράσταση β δεν είναι συνάρτηση.

   G3 → χαρακτήρισαν σωστά ότι η γραφική παράσταση γ είναι συνάρτηση.

   G4 → χαρακτήρισαν σωστά ότι η γραφική παράσταση δ είναι συνάρτηση.

3. **AL1** → αντιστοίχισαν σωστά το α στο 6.

   AL2 → αντιστοίχισαν σωστά το β στο 3.

   AL3 → αντιστοίχισαν σωστά το γ στο 1.

   AL4 → αντιστοίχισαν σωστά το δ στο 8.

4. **GA1** → αντιστοίχισαν σωστά τη γραφική παράσταση α στον αλγεβρικό τύπο iv: y+2x=3.

   GA2 → αντιστοίχισαν σωστά τη γραφική παράσταση β στον αλγεβρικό τύπο iv: y-4x=-2, x≤ 0.

5. **AG** → αντιστοίχισαν σωστά τον αλγεβρικό τύπο στη γραφική παράσταση β.

6. **Pa** → σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση του όγκου V_1 της βενζίνης της δεξαμενής ως προς το χρόνο t είτε: 1) βρίσκοντας δύο σημεία, π.χ. (0, 1000) και (1, 1400) – μερικοί μαθητές βρήκαν περισσότερα από δύο σημεία - , είτε 2) αλγεβρικά:

V_1=1000+400t.

   Pb → σχεδίασαν σωστά τη γραφική παράσταση του όγκου V_2 της βενζίνης του βυτιοφόρου ως προς το χρόνο t, είτε: 1) βρίσκοντας δύο σημεία, π.χ. (0, 17000) και (1, 16600) – μερικοί μαθητές βρήκαν περισσότερα από δύο σημεία - , είτε 2) αλγεβρικά:

V_2=17000-400t.

   Ea1 → σχεδίασαν λάθος τον όγκο V_1 της βενζίνης στη δεξαμενή, διότι θεώρησαν ότι τα ποσά όγκος-χρόνος είναι ανάλογα. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση του όγκου V_1 διερχόταν από την αρχή των αξόνων.

Ea2 → σχεδίασαν λάθος τον όγκο V_1 της βενζίνης στη δεξαμενή, διότι βασίστηκαν απλά και μόνο στη διαίσθησή τους και όχι σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή απλά κατανόησαν ότι η γραφική παράσταση θα είναι αύξουσα και θα ξεκινάει από το σημείο (0, 1000), όμως, είτε δεν ήταν η σωστή ευθεία, είτε ήταν καμπύλη.

Eb → σχεδίασαν λάθος τον όγκο V_2 της βενζίνης στο βυτιοφόρο, διότι βασίστηκαν απλά και μόνο στη διαίσθησή τους και όχι σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή απλά κατανόησαν ότι η γραφική παράσταση θα είναι φθίνουσα και θα ξεκινάει από το σημείο (0, 17000), όμως, είτε δεν ήταν η σωστή ευθεία, είτε ήταν καμπύλη.

Pc1 → βρήκαν σωστά το χρόνο t στον οποίο γεμίζει η δεξαμενή, είτε: 1) αλγεβρικά, δηλαδή η δεξαμενή γεμίζει όταν V_1=15000lt, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση V_1=1000+400t, έχουμε: 15000=1000+400t οπότε t=35min, είτε: 2) από τη γραφική παράσταση του όγκου V_1 όπου εντόπισαν το σημείο (35, 15000).

Pc2 → βρήκαν σωστά τη βενζίνη που υπάρχει στο βυτιοφόρο όταν γεμίζει η δεξαμενή, είτε: 1) αλγεβρικά, με τη βοήθεια του ίδιου ερωτήματος όπου ο χρόνος είναι t=35min, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση V_2=17000-400t, έχουμε: V_2=17000-400*35, δηλαδή V_2=3000lt, είτε: 2) από τη γραφική παράσταση του όγκου V_2 όπου εντόπισαν το σημείο (35, 3000).

Pd1 → βρήκαν σωστά το χρόνο κατά τον οποίο η δεξαμενή και το βυτιοφόρο περιέχουν τον ίδιο όγκο βενζίνης είτε: 1) αλγεβρικά εξισώνοντας τις δύο σχέσεις, δηλαδή, V_1=V_2 οπότε έχουμε: 1000+400t=17000-400t άρα t=20min, είτε: 2) από τη γραφική παράσταση εντόπισαν το σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων των V_1 και V_2.

Pd2 → βρήκαν σωστά τον όγκο της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή που ήταν ίσος με τον όγκο της βενζίνης στο βυτιοφόρο, είτε: 1) αλγεβρικά, αντικαθιστώντας σε μία από τις δύο σχέσεις τον αντίστοιχο χρόνο t=20min, δηλαδή πχ V_1=1000+400*20, άρα V_1=9000lt, είτε: 2) από τη γραφική παράσταση, όπου εντόπισαν το σημείο (20, 9000).

Ed → βρήκαν λάθος σημείο, διότι βασίστηκαν απλά και μόνο στη διαίσθησή τους και όχι σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο.

7. **Q3** → επέλεξαν σαν δυσκολότερη ερώτηση την 3, γιατί «δεν την είχαν ξανακάνει ποτέ».

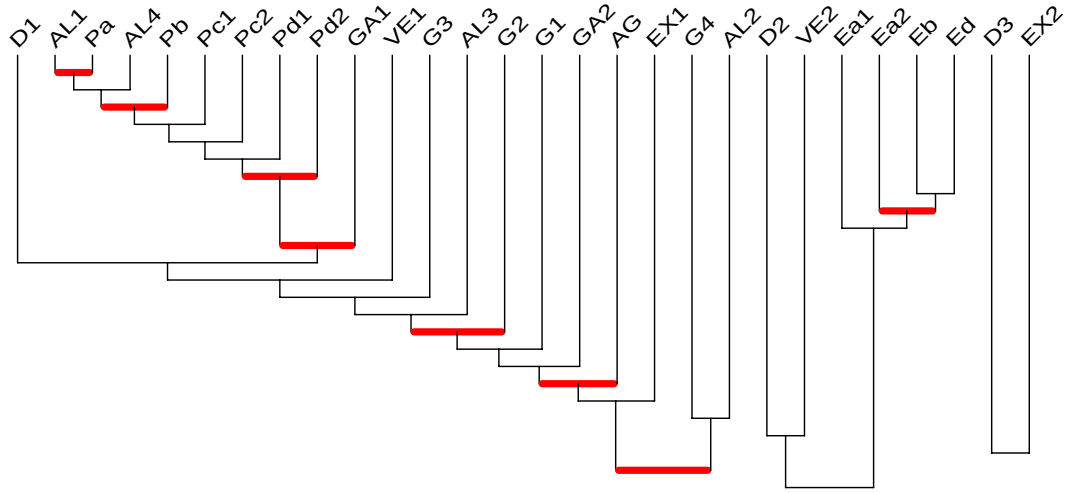
Q6a → επέλεξαν σαν δυσκολότερη ερώτηση την 6, γιατί «τα προβλήματα είναι δύσκολα».

Q6b → επέλεξαν σαν δυσκολότερη ερώτηση την 6, γιατί «δεν ξέρουν να αντιστοιχίζουν τα μαθηματικά σε προβλήματα καθημερινότητας».

Q6c → επέλεξαν σαν δυσκολότερη ερώτηση την 6, γιατί «τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με την καθημερινότητα».

▶ **Παρατήρηση :** Αξίζει να σημειωθεί ότι υπήρξε μαθητής που οδηγήθηκε στη λύση του προβλήματος με πρακτικά μαθηματικά, αλλά λόγω έλλειψης στοιχειωδών γνώσεων στις συναρτήσεις, δεν έκανε τη γραφική παράσταση.

3. Ανάλυση δεδομένων επαναληπτικής έρευνας



Similarity : C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\Êùäéêïðïßçóç 2çò Ýñåðíáò.csv

Classification at level : 1 : (AL1 Pa) similarity : 1

Classification at level : 2 : ((AL1 Pa) AL4) similarity : 1

Classification at level : 3 : (((AL1 Pa) AL4) Pb) similarity : 1

Classification at level : 4 : ((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) similarity : 1

Classification at level : 5 : (((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) similarity : 1

Classification at level : 6 : ((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) similarity : 1

Classification at level : 7 : (((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) similarity : 1

Classification at level : 8 : (Eb Ed) similarity : 1

Classification at level : 9 : (Ea2 (Eb Ed)) similarity : 0.999999

Classification at level : 10 : (Ea1 (Ea2 (Eb Ed))) similarity : 0.999998

Classification at level : 11 : ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1) similarity : 0.999985

Classification at level : 12 : (D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) similarity : 0.999617

Classification at level : 13 : ((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) similarity : 0.99926

Classification at level : 14 : (((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) similarity : 0.999186

Classification at level : 15 : ((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) similarity : 0.998846

Classification at level : 16 : (((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) similarity : 0.998236

Classification at level : 17 : ((((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) G1) similarity : 0.997791

Classification at level : 18 : (((((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) G1) GA2) similarity : 0.983484

Classification at level : 19 : ((((((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) G1) GA2) AG) similarity : 0.97866

Classification at level : 20 : (((((((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) G1) GA2) AG) EX1) similarity : 0.971919

Classification at level : 21 : (G4 AL2) similarity : 0.840065

Classification at level : 22 : (D2 VE2) similarity : 0.788443

Classification at level : 23 : (D3 EX2) similarity : 0.735588

Classification at level : 24 : ((((((((((D1 ((((((((AL1 Pa) AL4) Pb) Pc1) Pc2) Pd1) Pd2) GA1)) VE1) G3) AL3) G2) G1) GA2) AG) EX1) (G4 AL2)) similarity : 0.396566

Classification at level : 25 : ((D2 VE2) (Ea1 (Ea2 (Eb Ed)))) similarity : 0.196104

The most significant node is at level : 1

Significant nodes
at level: 1
at level: 3
at level: 7
at level: 9
at level: 11
at level: 16
at level: 19
at level: 24

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κύρια Βιβλιογραφία

- Gagatsis, A., Elia, I., Panaoura A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2006). *An empirical four-dimensional model for the understanding of function.* In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. 3, pp. 137-144). Prague: Charles University, Faculty of Education.

- Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (submitted for publication). Exploring different aspects of the understanding of function: Towards a four-dimensional model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*
- Γαγάτση, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). *Συναρτήσεις. Ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP1.
- Γαγάτση, Α. (Εκδ.) (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα.* Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Γαγάτση, Α. (2004) Γαγάτση (Εκδ.), *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών.* Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού – Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., & Σπύρου, Π. (2004). Γαγάτση (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και Μάθηση των Μαθηματικών. Τόμος Ι. Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις.* Λευκωσία: 5ο Εντατικό Πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών.

Βοηθητική Βιβλιογραφία

- Ασβεστά, Α., & Γαγάτση, Α. (1995). Προβλήματα Ερμηνείας και η Έννοια της Συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (σσ. 19-38). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.
- Βασάκου, Θ. (1995). Η Έννοια της Συνάρτησης στους Μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες Κατανόησης – Εμπόδια που σχετίζονται με τον Ορισμό της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα* (σσ.239-257). Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Γαγάτση, Α., Κυριακίδη, Λ., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). Ο Ρόλος της Μετάφρασης μεταξύ των Διαφόρων Πεδίων Αναπαράστασης της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση της Έννοιας. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ.337-347). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Γαγάτση, Α., & Μουγή, Α. (2000). Ικανότητα Μαθητών Δημοτικού Σχολείου για Διατύπωση Αλγεβρικών Σχέσεων σε Έργα Μετάφρασης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ. 349-359). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Γαγάτση, Α., & Παναούρα, Γ. (2000). Ο Ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Επίλυση Έργων Πρόσθεσης και Αφαίρεσης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ. 361-368). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Dubisky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). United States: The Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

- Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sence for Functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Consept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 153-174). The Mathematical Association of America.
- Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen University College.
- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*, (5), 645-657.
- Gras, R. (1995). Ανάλυση ενός Ερωτηματολογίου με τη Συνεπαγωγική Μέθοδο. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (σσ. 97-109). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.
- Henry Michel, (1999). *Διδακτική Μαθηματικών*. Μετάφραση από τα γαλλικά, έκδοση και επιμέλεια Σπύρου Π., Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.
- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *TheJournal of Mathematical Behavior, 17* (1), 79-103.
- Κλαουδάτος, Ν. (1996). *Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών»*, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.
- Κυνηγός, Χρόνης (1996). «*Μαθηματική Εκπαίδευση», Σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά*, Τμήμα Φ.Π.Ψ., Αθήνα.
- Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education, 31* (4), 500-508.
- Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Bergen University College.

- Σπύρου, Π. (1998). *Σημειώσεις του μαθήματος «Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών»*, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.
- Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America.
- Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.