ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ,
ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα
Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών»

Χαραλαμπίδου Γεωργία

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΛΑΘΩΝ ΓΙΑ ΜΙΑ ΑΛΑΝΘΑΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΒΑΘΜΙΔΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Διπλωματική εργασία
Επιβλέπων: Αναπλ. Καθηγητής Ιωάννης Αραχωβίτης

Αθήνα 2008

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη …….. .σελ 6

1. Πρόλογος……σελ 9

2.

2.1 Τρεις ‘‘παράδοξες’’ για την εποχή τους ανακαλύψεις:……..σελ 11

2.1.1 Ασύμμετροι αριθμοί……....σελ 11

2.1.2 Μη ευκλείδειες γεωμετρίες…….. ..σελ 12

2.1.2 Το άπειρο……σελ 15

Παραλήψεις στα στοιχεία του Ευκλείδη……..... ….. σελ 18

3.

3.1 ΑΛΓΕΒΡΑ

3.1.1 Λάθη στις αναλογίες……σελ 27

1) 7=13……σελ 27

2) –α >α .Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μεγαλύτερος

από ένα θετικό αριθμό που έχει την ίδια απόλυτη τιμή……...σελ 28

3) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι

μεγαλύτερη της υποτείνουσας.

(Ballis, Bernouli, Carnot, D Alembert)……..σελ 29

3.1.2 Λάθη στις ανισώσεις……...σελ 29

4) Αν α >β τότε α>2β…… …σελ 30

5) Ένας θετικός αριθμός είναι μικρότερός από το μηδέν…….σελ 30

6) Αν α και β δύο θετικοί αριθμοί τότε α >β και α <β……σελ 31

7) συνα>1……σελ 32

8) Ένας αρνητικός αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος

του μηδενός……..σελ 33

3.1.3 Λάθη στις τετραγωνικές ρίζες……..σελ 34

9) Το άθροισμα τυχαίων ίσων αριθμών είναι ίσο με το μηδέν…..σελ 34

10) Ένας αριθμός δεν αλλάζει αν προσθέσουμε σε αυτόν

τη μονάδα……σελ 34

11) 4=5……..σελ 35

12) 2=0……..σελ 36

13) 6=2……..σελ 38

14) 12=6=0……σελ 38

3.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Κάθε τρίγωνο είναι ορθογώνιο……..σελ 40
2) Το ημίτονο μίας γωνίας αυξάνεται αν προστεθούν 360º
σε αυτή τη γωνία……σελ 41
3) $2^2=4^2$…… σελ 42
4) π=0……..σελ 43
5) 1=-1…… σελ 44
6) συνα<-1……σελ 45
7) Όλα τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα……σελ 45
8) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου
πότε δεν είναι μικρότερο από το τετράγωνο της τρίτης πλευράς...σελ 46

3.3 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

1) π/4=0…… σελ 49
2) Το άθροισμα 2 οποιοδήποτε αριθμών είναι ίσο με το μηδέν ...σελ 50
3) Το παράδοξο Augustus De Morgan: αν το χ=1 τότε το χ=0…. σελ 50
4) B.Bolzano: όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι……..σελ 51
5) Ένα ευθύγραμμο τμήμα μιας ευθείας γραμμής είναι ίσο
με ένα τμήμα του μικρότερο από αυτό……..σελ 52

3.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

3.4.1 Λάθη λόγω κατασκευής……σελ 55
1) Η εξωτερική γωνία ισούται με την εσωτερική ……σελ 56
2) Από ένα σημείο είναι δυνατόν να σχεδιαστούν δύο
παράλληλες ευθείες προς μια δοσμένη ευθεία……..σελ 57
3) Άδειος κύκλος – κάθε σημείο της διαμέτρου του κύκλου
βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου……σελ 58
4) Μια ορθή γωνία είναι ίση με μια οξεία γωνία …….. σελ 59
5) Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές……..σελ 61
6) Από ένα σημεία μιας ευθεία μπορούν να σχεδιαστούν
δύο κάθετες ευθείες……σελ 62
7) Αν ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο στο οποίο ΑΒ=ΓΔ.
Τότε η ΑΔ είναι παράλληλη στην ΒΓ……σελ 63

8) Δύο ευθείες γραμμές μπορούν να σχεδιαστούν
από δύο δοσμένα σημεία……σελ 65
3.4.2 Λάθη λόγω έκφρασης…….σελ 66
9) Η χορδή όπου δεν περνά από το κέντρο του κύκλου
είναι ίση με τη διάμετρο……..…σελ 67
3.4.3 Λάθη από την ύπαρξη πολλών περιπτώσεων……σελ 68
10) Ο κύκλος με τα δύο κέντρα……..σελ 68
11) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την υποτείνουσα…….σελ 70
3.4.4 Λάθη εξαιτίας ανεπίτρεπτων αλγεβρικών πράξεων…..σελ 70
12) Ένα κομμάτι ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο
με όλο το ευθύγραμμο τμήμα……σελ 72
3.5 ΑΠΕΙΡΟ
1) Είναι το ολόκληρο πάντα μεγαλύτερο από ένα κομμάτι του;…σελ 75
2) Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει λιγότερα σημεία
από ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερου μήκους;……σελ 76
3) Το άθροισμα άπειρων ακεραίων αριθμών είναι ρητός……σελ 77
4) Το άθροισμα μηδενικών είναι μηδέν;……σελ 78
5) Αριθμοί με 2 αντιπροσώπους.....σελ 80
3.6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
1) 0=1…… σελ 81
2) 2=1…… σελ 82
3) π=0……σελ 83
3.7 ΣΥΧΝΑ ΛΑΘΗ ΜΑΘΗΤΩΝ…….σελ 85
3.8 ΛΑΘΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ……..σελ 88
3.8.1Poncelet …….σελ 89
3.8.2 Euler……σελ 92
3.9 Λογικά παράδοξα ……...σελ 96
4.
4.1 Η ερμηνεία της ανθυφαίρεσης……σελ 99
4.2 Παρανοήσεις εξαιτίας διφορούμενων και
ασαφών εννοιών……σελ 102
5. Το δυναμικό μοντέλο της λυτικής προβλήματος……σελ 104

6. ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΛΑΘΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ………..σελ106
Επίλογος……σελ 114
Βιβλιογραφία…….....σελ 116
Πίνακας ονομάτων…….....σελ 119

Περίληψη

Στην ιστορία των μαθηματικών έχουν καταγραφεί συχνά λάθος εκτιμήσεις ή και παράδοξα αποτελέσματα τα οποία αφενός ήταν αντίθετα με τη διαίσθηση και με τη λογική της εποχής, αφετέρου συντέλεσαν καθοριστικά στην εξέλιξη πολλών πεδίων.

Υπάρχουν τρία είδη παραδόξων. Υπάρχουν τα θεωρήματα που μοιάζουν παράξενα αλλά επειδή δεν μπορούν να απορριφθούν με βάση τη λογική και τις αποδείξεις, γίνονται δεκτά παρόλο που είναι σε αντίθεση με τη διαίσθηση και τις επικρατούσες θεωρίες. Στη δεύτερη κατηγορία, στην οποία επικεντρώνεται η παρούσα εργασία, είναι αυτά που προκύπτουν από λάθος ισχυρισμούς και έρχονται σε αντίθεση με γνωστές προτάσεις. Η τρίτη κατηγορία παραδόξων αποτελείται από τα λογικά παράδοξα και τα οποία έχουν προέλθει από τη θεωρία συνόλων.

Οι ασύμμετροι αριθμοί, η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών και η έννοια του απείρου είναι ανακαλύψεις που διαδραμάτισαν κεντρικό ρόλο (σελ 11) και ανήκουν στην πρώτη κατηγορία.

Το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη αποτελεί βάση όλου του οικοδομήματος των Στοιχείων. Ωστόσο ακριβώς επειδή το πρώτο βιβλίο είναι θεμελιώδες, παρατηρούνται ορισμένες παραλήψεις καθώς και θεωρήσεις που δεν είχαν οριστεί μέσα στο αξιωματικό σύστημα, πριν χρησιμοποιηθούν (σελ 18-25).

Στη δεύτερη κατηγορία έχουμε αποδείξεις που καταλήγουν σε παράδοξα εξαιτίας ανεπίτρεπτων πράξεων ή παρανόηση δεδομένων σε διάφορα πεδία των μαθηματικών.

Στην άλγεβρα παρουσιάζονται παραδείγματα (σελ 26-39) εξαιτίας λανθασμένης χρήσης των αναλογίων (σελ 26), των ιδιοτήτων των ανισοτήτων (σελ 29) και λόγω της ελλιπούς κατανόησης των τετραγωνικών ριζών (σελ 34).

Στη τριγωνομετρία (σελ 40-48) αποδείξεις που οδηγούν σε αντίφαση όπως ότι κάθε τρίγωνο είναι ορθογώνιο (σελ 40), συνα<-1 (σελ 45) κ.τ.λ.

Η διαίρεση μιας ποσότητας με το μηδέν μπορεί να οδηγήσει σε αντιφατικά αποτελέσματα τόσο σε αλγεβρικά όσο και γεωμετρικά θέματα (σελ 49-54).

Έπειτα είναι τα παράδοξα αποτελέσματα που προκύπτουν σε θέματα της γεωμετρίας (σελ 55-73). Στη γεωμετρία υπάρχουν παράδοξα εξαιτίας της κατασκευής του σχήματος (σελ 55), λάθη λόγω έκφρασης (σελ 66), εξαιτίας της ύπαρξης πολλών περιπτώσεων που δε λαμβάνονται υπόψη (σελ 68) και τέλος λόγω ανεπίτρεπτων αλγεβρικών πράξεων (σελ 71).

Το άπειρο από τη φύση του αποτέλεσε εμπόδιο επειδή οι προσπάθειες να εξηγηθεί βασίζονταν στην εμπειρία των ανθρώπων στα πεπερασμένα αντικείμενα. Στα παραδείγματα που αναφέρονται στο άπειρο (σελ 74-79) φαίνονται τα προβλήματα που ανακύπτουν αν αντιμετωπιστεί το άπειρο με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζονται τα πεπερασμένα αντικείμενα.

Στη συνέχεια υπάρχουν αποδείξεις στα ολοκληρώματα (σελ 81-84) όπου σε κάποιο βήμα εμφανίζεται λάθος, το οποίο οφείλεται στην έλλειψη κατανόησης των διαδικασιών που εφαρμόζονται στα ολοκληρώματα.

Μετά από τις ‘‘αποδείξεις’’ γίνεται αναφορά σε μερικά πολύ χαρακτηριστικά λάθη μαθητών, καθώς και οι τρόποι να αντιμετωπιστούν (σελ 85-88).

Λάθη γίνονται και από μεγάλους μαθηματικούς όπως ο Poncelet (σελ 89), όπου αντιμετώπισε με λάθος τρόπο μια μη αναμενόμενη κατάσταση, καθώς και ένα λάθος συμπέρασμα από τον Euler (σελ 92),

Στην τρίτη κατηγορία παραδόξων είναι τα λογικά παράδοξα οπού σχετίζονται με τη θεωρία συνόλων (σελ 96-98)

Από την ερμηνεία που δίνεται στην ανθυφαίρεση (σελ 99) υπογραμμίζεται πως ο τρόπος παρουσίασης ενός θέματος μπορεί να

απομακρύνει τους μαθητές από τα μαθηματικά, όταν η έννοια παρουσιάζεται με τεχνικό τρόπο μακριά από την αρχική της ερμηνεία.

Επίσης ο τρόπος χρήσης της γλώσσας είναι δυνατόν να προκαλέσει παρανοήσεις όταν οι λέξεις που χρησιμοποιούνται είναι ασαφής ή έχουν διφορούμενη σημασία (σελ 102).

Η αντιμετώπιση των προβλημάτων και η στρατηγική που θα ακολουθηθεί για την επίτευξή του στόχου, περιγράφονται από το μοντέλο της δυναμικής λυτικής προβλήματος (σελ 104).

Τέλος αναφέρεται η αξία των παραδόξων και των αντιφάσεων στη διδασκαλία (σελ 106-113). Πως οι ‘‘αποδείξεις’’ αυτές μπορούν να συμβάλλουν ώστε οι μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και να αναδιοργανώσουν τις γνώσεις τους. Οι μαθητές αποκτούν διαφορετική στάση απέναντι στα μαθηματικά και αποκτούν νέες δεξιότητες καθώς προσπαθούν να ‘‘ανακαλύψουν’’ το σκοτεινό σημείο της απόδειξης.

1) ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το πιο παράδοξο ίσως από όλα είναι ότι υπάρχουν παράδοξα στα μαθηματικά. Στην ιστορία της εξέλιξης των επιστημών όμως τα μαθηματικά παράδοξα διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο. Η ύπαρξη τους οδήγησε στην απαίτηση αυστηρών αποδείξεων καθώς και στην ανάγκη για εκτενή ανάλυση των θεωριών.

Παράδοξο σύμφωνα με τον Sainsbury είναι ένα εμφανώς μη αποδεκτό συμπέρασμα που προκύπτει μέσω ενός εμφανώς αποδεκτού συλλογισμού [20]. Ωστόσο οι έννοιες του αποδεκτού και του μη αποδεκτού στον παραπάνω ορισμό δεν είναι ιδιαίτερα σαφείς και εξαρτώνται και από την εποχή και το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται. Πολλά πράγματα που κάποτε φαίνονταν παράδοξα, σήμερα πια δεν αντιμετωπίζονται ως τέτοια.

Η πρώτη προσπάθεια να παρουσιαστούν τα γεωμετρικά παράδοξα έγινε από τον ίδιο τον Ευκλείδη [5]. Η εργασία του αυτή, η οποία δεν έχει διασωθεί, ονομαζόταν ‘‘Ψευδάρια’. Σύμφωνα με τον Πρόκλο η εργασία προοριζόταν για τους αρχάριους στη γεωμετρία. Ο σκοπός του ήταν να αναγνωρίσουν οι μαθητές τα λάθος συμπεράσματα και να είναι ικανοί να τα αποφύγουν. Για κάθε λανθασμένη απόδειξη ο Ευκλείδης παρέθετε την σωστή και σημείωνε πως πολλές φορές η διαίσθηση μπορεί να αποτελέσει τη πηγή των λαθών.

Υπάρχουν τρία διαφορετικά είδη παραδόξων που έχουν παρουσιαστεί στα μαθηματικά. Υπάρχουν τα θεώρημα που ‘‘μοιάζουν’’ παράξενα αλλά επειδή δεν μπορούν απορριφθούν με βάση τη λογική και τις αποδείξεις, γίνονται δεκτά παρόλο που είναι σε αντίθεση με τη διαίσθηση. Στη δεύτερη κατηγορία είναι αυτά που προκύπτουν από λάθος ισχυρισμούς και έρχονται σε αντίθεση με γνωστές προτάσεις.

Η τρίτη κατηγορία παραδόξων αποτελείται από τα λογικά παράδοξα και τα οποία έχουν προέλθει από τη θεωρία συνόλων. Αυτά τα λογικά παράδοξα δημιούργησαν σύγχυση σε αυτούς που ασχολούνται με τη λογική αλλά και γενικότερα σε όλους τους

μαθηματικούς. Δημιουργήθηκαν προβλήματα ακόμη και σχετικά με τη φύση των μαθηματικών και της λογικής, πολλά από τα προβλήματα δεν έχουν βρει ακόμη μια ικανοποιητική απάντηση.

Στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε στα λάθη και τα παράδοξα που προκύπτουν, από τη χρήση λανθασμένων προτάσεων και ισχυρισμών. Θα παρουσιαστούν παραδείγματα από διαφορετικές ενότητες των μαθηματικών όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, η ανάλυση και η τριγωνομετρία.

Μέσα από τα παραδείγματα παρουσιάζονται λάθη που άλλοτε εύκολα και άλλοτε δύσκολα μπορούν να εντοπιστούν από τους μαθητές και τα οποία μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο για τη διασαφήνιση εννοιών.

Οι αποδείξεις που ακολουθούν καταλήγουν σε παράδοξα αποτελέσματα, ενεργοποιώντας έτσι τη ενεργητική συμμετοχή των μαθητών για τη διόρθωση τους. Γίνονται σαφή τα σημεία που τα λάθη παρουσιάζονται καθώς και τα θεωρήματα και οι ορισμοί που εμφανίζονται ως εμπόδια για την επίλυση της άσκησης.

Επίσης γίνεται αναφορά και στα άλλα δύο είδη παραδόξων που έχουν παρατηρηθεί στην ιστορία των μαθηματικών καθώς και σε λάθη και παραλήψεις που έχουν γίνει από μεγάλους μαθηματικούς.

Στο τέλος της εργασίας παρουσιάζεται ο παιδαγωγικός ρόλος των παράδοξων παραδειγμάτων της εργασίας και πώς αυτά θα μπορέσουν να αξιοποιηθούν στην διδακτική πράξη.

2.Τρείς παράδοξες για την εποχή τους ανακαλύψεις

Στην πρώτη κατηγορία παραδόξων ανήκουν σημαντικές ανακαλύψεις των μαθηματικών. Θα αναφερθούμε σε τρεις ιστορικές ανακαλύψεις οπού εμφανίστηκαν ως παράδοξα, αλλά στη συνέχεια διαδραμάτισαν κεντρικό ρόλο [1]. Οι ανακαλύψεις αυτές είναι: τα ασύμμετρα μεγέθη, οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες και το άπειρο.

2.1 Ασύμμετροι

Δεν είναι γνωστό πως και πότε ακριβώς εμφανίστηκαν τα μεγέθη που δεν έχουν κοινό μέτρο. Η ανακάλυψη ήταν γνωστή από το 399π.Χ. όταν ο Θεαίτητος στον ομώνυμο διάλογο του Πλάτωνα αναφέρεται στις τετραγωνικές ρίζες.

Στο διάλογο ο Θεαίτητος ξεκινά από το $\sqrt{3}$, οπότε το $\sqrt{2}$ θα πρέπει να ήταν γνωστό πριν από αυτόν. Αυτή η ερμηνεία είναι σύμφωνη με την υπόθεση ότι οι ασύμμετροι ανακαλύφθηκαν στην προσπάθεια να βρεθεί το κοινό μέτρο της πλευρά και της διαγώνιου ενός τετραγώνου πλευράς μίας μονάδας.

Είναι γεγονός ότι η ύπαρξη των ασύμμετρων μεγεθών ήταν μια μη αναμενόμενη και καθόλου ευπρόσδεκτη ανακάλυψη για τους πρώτους Πυθαγορείους που θεωρούσαν πως τα πάντα είναι αριθμοί. Για δυο ή περισσότερα μεγέθη η διαίσθηση ότι μπορεί να βρεθεί μια μικρή ποσότητα η οποία θα είναι το κοινό τους μέτρο, βασίζεται στην εμπειρία με τα μέτρα που συναντάμε στη φύση.

Στην πραγματικότητα η ανάγκη να αποδειχθεί η ύπαρξη του κοινού μέτρου δεν υπήρχε στους βαβυλώνιους και τους αιγύπτιους, αφενός γιατί ασχολιόντουσαν με τα θέματα πιο εμπειρικά από τους αρχαίους έλληνες και αφετέρου η δύναμη της διαίσθησης στο συγκεκριμένο θέμα ήταν πολύ ισχυρή.

Η ανακάλυψη προκάλεσε κρίση στους μαθηματικούς, η σοβαρότητα της έκπληξης που επίφερε φαίνεται από την πολύ γνωστή ιστορία του Ίππασου, ο οποίος πνίγηκε μη μπορώντας να δεχθεί αυτή την ανακάλυψη. Ωστόσο καθόρισε σημαντικά τις γεωμετρικές

αποδείξεις μια και ήταν κάτι που δεν μπορούσε να αγνοηθεί. Η λύση δόθηκε από τον Εύδοξο που εισήγαγε την θεωρία αναλογιών για τα μεγέθη σε αντιστοιχία με τη θεωρία αριθμών. Τα γεγονότα που ακολούθησαν έχουν και αυτά σημαντικό παιδαγωγικό ενδιαφέρον.

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρόλο που εμφανίστηκε το μη αναμενόμενο αποτέλεσμα οι μαθηματικοί δεν σταμάτησαν να παράγουν ούτε περιόρισαν το πεδίο δράσης τους σε θέματα που δεν είχαν σχέση με την ασυμμετρία.

Για να ξεπεραστεί η κρίση δε γενικεύτηκε η υπάρχουσα θεωρία αριθμών, αλλά δημιουργήθηκε ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ των αριθμών και των μεγεθών. Αυτός ο διαχωρισμός οφείλεται σε ένα μέρος στον Αριστοτέλη ο οποίος ήταν ο πρώτος που τον όρισε. Τελικά η παλιά αντίληψη του κοινού μέτρου αντικαταστάθηκε από την καινούρια αντίληψη που εισήγαγε ο Εύδοξος.

Αυτή η πορεία θα πρέπει να αποτελεί στόχο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Να ωθήσει τους μαθητές να φύγουν από τον απλοϊκό τρόπο κατανόησης και να υιοθετήσουν ένα νέο βαθύτερο. Ο στόχος και στα επόμενα ιστορικά παραδείγματα είναι να γίνει κατανοητό το φαινόμενο της δημιουργίας μιας νέας αντίληψης.

2.2 Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

Η ανωμαλία που επιτάχυνε την εξέλιξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών δεν ήταν μια εξέλιξη που επέφερε τέτοια θεμελιακή κρίση σαν την ανακάλυψη των ασύμμετρων [1].

Η αλήθεια του αξιώματος της παραλληλίας δεν αμφισβητήθηκε από τους συνεχιστές του Ευκλείδη ούτε από τους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με αυτό τους αιώνες που ακολούθησαν. Οι προσπάθειες που γίνονται ώστε το αξίωμα της παραλληλίας να γίνει πρόταση ή τουλάχιστον να αναδιατυπωθεί, βασίζονταν στο ότι δεν ήταν ικανοποιητική η θέση του στο αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη.

Ο κύριος στόχος των ερευνών από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι και τον 19ο αιώνα [Πρόκλος, Nasir el Din, Umar Khayyam, Tussi, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Taurinius] ήταν να αποδειχθεί το

5ο αίτημα ως θεώρημα, από άλλες θεμελιακές προτάσεις της γεωμετρίας και έτσι να απαλειφθεί εντελώς ως αίτημα. Μέχρι την αρχή του 19ου αιώνα το πρόβλημα της απόδειξης του 5ου αιτήματος παραμένει απρόσιτο.

Το αίτημα της παραλληλίας δεν χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των προτάσεων 1 ως 29 του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη. Αυτό το γεγονός έκανε αρκετούς να ισχυριστούν ότι το αξίωμα της παραλληλίας είναι θεώρημα και όχι αξίωμα. Προσοχή σε αυτή την ανωμαλία έδωσαν οι έρευνες που έκανε ο Ποσειδώνιος από τον πρώτο αιώνα, έπειτα ο Πτολεμαίος και πολλοί άλλοι μετά από αυτούς.

Ένα σημαντικό ωστόσο βήμα στην εξέλιξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών έγινε από τον Saccheri(1677-1773). Ο Saccheri δεν προσπάθησε να αποδείξει το αξίωμα απευθείας όπως οι προγενέστεροί του, αλλά ισχυρίστηκε την άρνηση του αξιώματος. Δέχτηκε τις 28 πρώτες προτάσεις των στοιχείων, οι οποίες δεν απαιτούν το $5^{ο}$ αίτημα για την απόδειξη τους και μελέτησε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ , στο οποίο ΑΓ=ΒΔ και οι γωνίες Α, Β είναι ορθές.

Φέρνοντας τις διαγώνιους ΑΔ και ΒΓ και χρησιμοποιώντας προτάσεις από τις 28 πρώτες των Στοιχείων, δείχνει ότι Γ και Δ είναι μεταξύ τους ίσες. Οι γωνίες είναι ίσες όμως δεν γνωρίζει τίποτα για το μέγεθος τους. Από το $5^{ο}$ αίτημα οι γωνίες είναι ορθές, όμως το αίτημα αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Συνεπώς οι γωνίες μπορούν να είναι αμβλείες ή οξείες.

Ο Saccheri πίστεψε ότι είχε καταφέρει να απορρίψει την υπόθεση της αμβλείας γωνίας, χρησιμοποιώντας όμως αποτελέσματα της ευκλείδειας γεωμετρίας που δεν ισχύουν σε αυτή την περίπτωση. Χωρίς να σκεφτεί τις λογικές συνέπειες ασχολήθηκε με την υπόθεση της οξείας γωνίας και απέδειξε επιτυχώς μια σειρά θεωρημάτων που σήμερα ανήκουν στη μη ευκλείδεια γεωμετρία.

Ο Saccheri θεώρησε μια οικογένεια γραμμών που περνούν από ένα σημείο Α, όταν το Α δεν ανήκει στην ευθεία l και έδειξε ότι υπάρχουν δύο είδη γραμμών p, q που είναι και οι δύο ασύμπτωτες

στην Ι. Το αποτέλεσμα αυτό τον οδήγησε στην διαπίστωση ότι υπάρχουν δύο κάθετες από ένα σημείο προς μία ευθεία.

Ο Saccheri χρησιμοποίησε τη διαίσθηση του και διατύπωσε ότι η υπόθεση για την οξεία γωνία είναι εντελώς λάθος γιατί είναι σε πλήρη αντίθεση με την υπόθεση της ευθείας γραμμής. Η ανικανότητα του Saccheri να ξεφύγει από τη διαίσθηση του για την πλήρη ισχύ της ευκλείδειας γεωμετρίας επαναλήφθηκε από τον Lambert(1728-1777) και τον Legendre(1752-1833), των οποίων οι προσπάθειες να βελτιώσουν τη δουλειά του Saccheri κατέληξαν στην επιβεβαίωση και πάλι της ορθότητας της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Το τέλος της κριτικής σχετικά με την αποδοχή των μη ευκλείδειων γεωμετριών σαν πραγματικές αλλά παράδοξες έγινε από τους Lobachevsky(1793-1856) και Bolyai(1802-1860). Και οι δύο είχαν ως αφετηρία της ερευνάς τους ότι οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι δεκτές. Ο ρώσος μαθηματικός πήρε για υπόθεση την αντίθετη πρόταση της ευκλείδειας γεωμετρίας, ελπίζοντας να καταλήξει σε αντίφαση. Όμως η αναμενόμενη αντίφαση δεν εμφανίστηκε ποτέ.

Ξεκινώντας λοιπόν από την παραδοχή ότι «από ένα σημείο που δεν βρίσκεται πάνω σε δοθείσα ευθεία μπορούμε να φέρουμε όχι μία αλλά τουλάχιστον δύο παράλληλες σ' αυτήν την ευθεία. Με βάση την «αντί-υπόθεση» αναπτύσσεται μια ακολουθία προτάσεων, οι οποίες δεν περιέχουν καμία αντίφαση. Οι προτάσεις αυτές γεννούν μια καινούργια, λογικά δυνατή θεωρία, μη αντιφατική, η οποία είναι μια καινούργια γεωμετρία .

Παρόλο που η δουλειά τους είχε φανερή αντίθεση με τη διαίσθηση, δεν τράβηξε άμεσα την προσοχή. Αυτό ίσως να συνέβη εξαιτίας των συνθηκών. Οι δύο μαθηματικοί ήταν απομονωμένοι γεωγραφικά αλλά και λόγω της γλώσσας.

Αυτή η κατάσταση υπογραμμίζει το ρόλο της προσωπικής εργασίας στην εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης. Χωρίς την προσωπική εργασία και την ανταλλαγή προβλημάτων το σπάσιμο της παράδοσης δε θα είχε πραγματοποιηθεί.

2.3 Άπειρο

Η ιδέα του απείρου αποτελεί ένα ακόμα αίνιγμα που προκαλούσε ήδη από την εποχή των αρχαίων. Η ενασχόληση αυτή χρονολογείται πίσω τουλάχιστον από το διάσημο παράδοξο του Ζήνωνα τον πέμπτου αιώνα π.Χ. Το παράδοξο διατύπωνε τη θεωρία ότι ο χρόνος και ο χώρος μπορούν να διαιρεθούν άπειρες φορές, καθώς και ότι αποτελούνται από άπειρα αδιαίρετα άτομα [1].

Στο παράδειγμα με τον Αχιλλέα και τον αγώνα δρόμου με την χελώνα, ο πιο γρήγορος δρομέας δεν μπορεί ποτέ να ξεπεράσει τον πιο αργό. Αυτό συμβαίνει γιατί αυτός που υπολείπεται πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο από το οποίο ο άλλος ξεκίνησε, όποτε ο αργός τη στιγμή αυτή θα έχει προχωρήσει, άρα πάντα θα προηγείται. Καθώς η διαδικασία συνεχίζεται για άπειρα βήματα, φαίνεται ότι ο δρομέας δεν θα τελειώσει την διαδρομή καθώς δε θα μπορέσει να καλύψει άπειρο αριθμό σημείων σε μια πεπερασμένη χρονική διάρκεια.

Ωστόσο ο Ζήνωνας δεν κατάφερε να προκαλέσει την προσοχή στα προβλήματα που αφορούσαν τις απείρως μικρές και απείρως μεγάλες ποσότητες. Ο Αριστοτέλης ήταν ανάμεσα σε αυτούς που αρνήθηκαν τον ισχυρισμό του Ζήνωνα σχετικά με την κίνηση. Ο Αριστοτέλης δέχθηκε την υπόθεση ότι ο χρόνος και ο χώρος διαιρούνται απείρως αλλά προσπάθησε να αποφύγει το παράδοξο του Ζήνωνα και ισχυρίστηκε ότι η άπειρη διαίρεση είναι μόνο υποθετική πράξη.

Παρόλα αυτά απέρριψε την έννοια του απείρου τόσο από φυσικής όσο και από μαθηματικής πλευράς. Συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης σχολίασε ότι στην πραγματικότητα δεν το χρειαζόμαστε το άπειρο και δεν το χρησιμοποιούμε. Αυτή η απαγόρευση του απείρου από τα μαθηματικά παραμένει για αιώνες, ακόμη και μετά το διαχωρισμό αριθμού και μεγέθους.

Μόλις το 1831 ο Gauss(1777-1855) αναφέρει ότι δεν θα προκύψει κάποιο πρόβλημα στη χρήση του απείρου αν ο πεπερασμένος άνθρωπος δεν κάνει το λάθος να θεωρήσει το άπειρο ως κάτι συγκεκριμένο. Μια παρόμοια αναφορά για τον ‘‘πεπερασμένο’’ άνθρωπο είχε γίνει και νωρίτερα από τον Γαλιλαίο.

Ο Γαλιλαίος(1564-1642) διατύπωσε την ένα προς ένα αντιστοίχηση μεταξύ των φυσικών αριθμών και των τέλειων τετραγώνων. Ανέφερε ότι η δυσκολία προκύπτει όταν προσπαθούμε με το πεπερασμένο μυαλό μας να μιλήσουμε για το άπειρο. Είναι λάθος να δίνουμε όρια στο άπειρο και να χρησιμοποιούμε εκφράσεις όπως μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο.

Ο Cantor(1845-1918) ενδιαφέρθηκε για το άπειρο όταν μελετώντας τις αναπαραστάσεις των τριγωνομετρικών σειρών οδηγήθηκε στην μελέτη των πραγματικών αριθμών. Οι έρευνές οδήγησαν στην παρατήρηση ότι τα σύνολα των πραγματικών αριθμών και των ρητών αριθμών είναι άπειρα, ωστόσο το σύνολό των πραγματικών είναι διαφορετικό. Το πρώτο σύνολο είναι πυκνό, συνεχές και πλήρες, ενώ το δεύτερο είναι μόνο πυκνό.

Στην ουσία οι προηγούμενοι μαθηματικοί μπέρδευαν την ιδέα του συνόλου με τα πεπερασμένα σύνολα που αντιλαμβάνονται με τη διαίσθησή τους. Η διαίσθηση που υπήρχε για τα πεπερασμένα σύνολα ήταν σωστή αλλά είχε λανθασμένα γενικευτεί. Στην πραγματικότητα τα άπειρα σύνολα έχουν την παράξενη ιδιότητα ότι τα στοιχεία τους μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με τα στοιχεία ενός υποσυνόλου τους.

Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη από τέτοιες ρήξεις. Όταν για πρώτη φορά παρατηρήθηκαν αυτά τα φαινόμενα, χαρακτηρίστηκαν ως παράδοξα και δεν εντάχθηκαν στην καθαρά μαθηματική έρευνα [14].

Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι κάποιες πρωταρχικές γνώσεις και αντιλήψεις μπορούν να σταθούν εμπόδιο στην επιστημονική πρόοδο. Και ακόμα δείχνουν ότι η αποδοχή της νέας γνώσης δεν είναι κάτι προφανές ούτε για αυτούς που την ανακαλύπτουν.

Χρειάστηκαν δεκάδες αιώνες για παράδειγμα για να πάρει η έννοια του ορίου τη μορφή που της έδωσε ο Cauchy και ο Waistrass, οπότε είναι φυσικό οι μαθητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν τη συναντούν για πρώτη φορά.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η εξέλιξη της έννοιας των θετικών και αρνητικών αριθμών και του κανόνα των πρόσημων. Χρειάστηκαν 1600 περίπου χρόνια για να γίνει το θέμα αυτό τετριμμένο. Στην αρχή του 20^{ου} αιώνα ολόκληρα βιβλία ήταν αφιερωμένα στους αρνητικούς αριθμούς, ενώ σήμερα βρίσκουμε μόνο λίγες σελίδες στα βιβλία του γυμνασίου.

2.2 Παραλήψεις στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη αποτελεί βάση όλου του οικοδομήματος των στοιχείων. Τα αιτήματα, οι κοινές έννοιες και οι ορισμοί αποτελούν θεμέλια της δημιουργίας του πρώτου αξιωματικού συστήματος.

Ωστόσο ακριβώς επειδή το πρώτο βιβλίο είναι θεμελιώδες, παρατηρούνται κάποιες παραλήψεις καθώς και θεωρήσεις που δεν είχαν οριστεί μέσα στο αξιωματικό σύστημα, πριν χρησιμοποιηθούν.

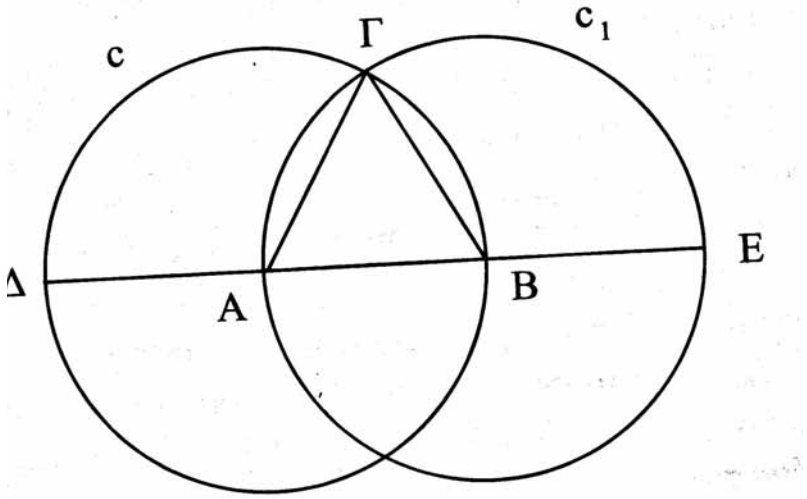
Το μεγαλύτερο ίσως μειονέκτημά των στοιχείων είναι το γεγονός ότι ο Ευκλείδης προσπαθεί να ορίσει όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα, χωρίς να καθιερώσει τις αρχικές έννοιες. Δεν υπάρχει μια βάση κάποιων αρχικών εννοιών, αλλά οι αρχικές έννοιες υπάρχουν μέσα στους ορισμούς [16].

Στη συνέχεια θα αναφερθούν ορισμένες παραλήψεις που εντοπίστηκαν σε αποδείξεις τόσο του πρώτου βιβλίου, όσο και του τρίτου βιβλίου των Στοιχείων.

Πρώτο βιβλίο

Πρόταση 1: Με πλευρά δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο .

Ο Ευκλείδης παίρνει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και φέρνει τους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Β, ΒΑ). Θεωρεί ότι οι κύκλοι τέμνονται σε ένα

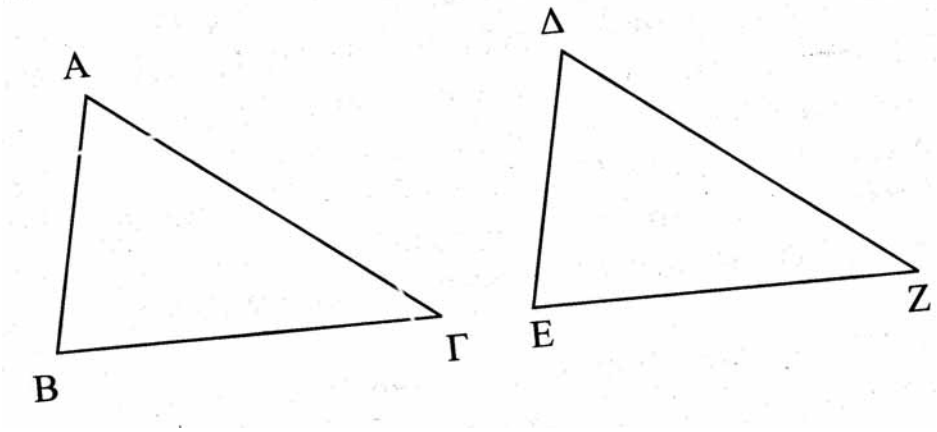


σημείο Γ.

Ο Ευκλείδης υπέθεσε ότι σίγουρα υπάρχει σημείο τομής αυτών των κύκλων, δηλαδή υπέθεσε ότι ο κύκλος είναι μια συνεχής γραμμή, αλλά αυτό δεν αναφέρεται κάπου .

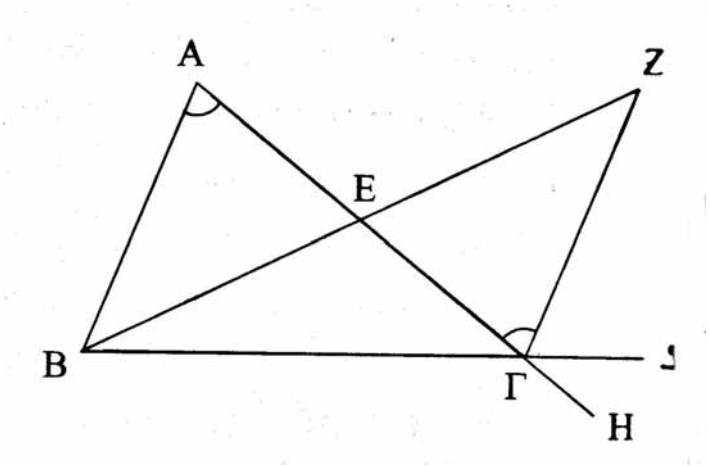
Στα μεταγενέστερα αξιωματικά συστήματα η τομή των δύο κύκλων επιβεβαιώνεται από τα αξιώματα της συνέχειας και του μεταξύ.

Πρόταση 4: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές του ίσες, μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ίσες και θα είναι ίσα.



Στην απόδειξη της πρότασης ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μέθοδο της υπέρθεσης. Δηλαδή εφαρμόζει το ένα τρίγωνο πάνω στο άλλο προκειμένου να αποδείξει την ισότητα τους. Αυτό σημαίνει ότι υποθέτει πως κατά τη μετακίνηση τους τα γεωμετρικά αντικείμενα παραμένουν αμετάβλητα, πράγμα που δεν έχει αναφερθεί πριν. Βέβαια σύμφωνα με τους σύγχρονούς νόμους της φυσικής η αρχή του αναλλοίωτου των σωμάτων όταν αυτά μετακινούνται δεν είναι προφανής.

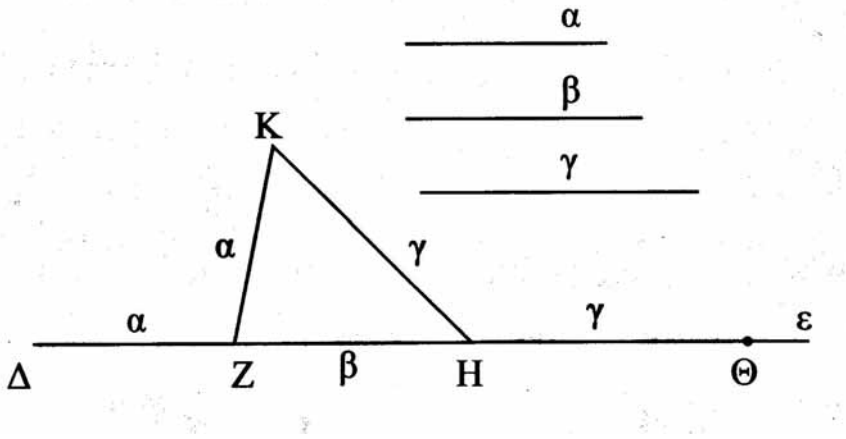
Πρόταση 16: Σε κάθε τρίγωνο, κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία.



Ο Ευκλείδης θεωρεί το τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνει τη διάμεσο ΒΕ κατά ίσο τμήμα ΕΖ, ενώνει το ΖΓ, και δέχεται σιωπηρά ότι η ΖΓ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$, όπου ΓΔ η προέκταση της ΒΓ. Αυτό δεν κάνει αναφορά γιατί συμβαίνει. Στην πραγματικότητα αυτό θα μπορούσε να αποδειχθεί μέσα στα βήματα της πρότασης.

Πρόταση 22: Αν από τρία δεδομένα τμήματα κατασκευαστεί τρίγωνο, τότε είναι αναγκαίο δύο από τα τμήματα να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από το τρίτο τμήμα.

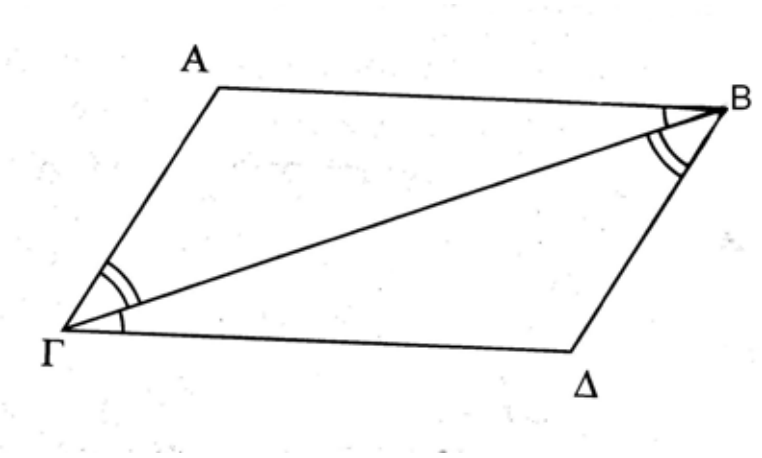
Απόδειξη: Έστω τρία δοθέντα τμήματα α, β, γ και έστω α+β >γ. Έστω η ημιευθεία Δε και τα τμήματα πάνω στη Δε, τα ΔΖ=α , ΖΗ=β , ΗΘ= γ.



Με κέντρο το σημείο Ζ γράφουμε ένα κύκλο c_1, με κέντρο Η κύκλο c_2. Οπότε κατασκευάστηκε το τρίγωνο ΖΗΚ με πλευρές τα α, β, γ.

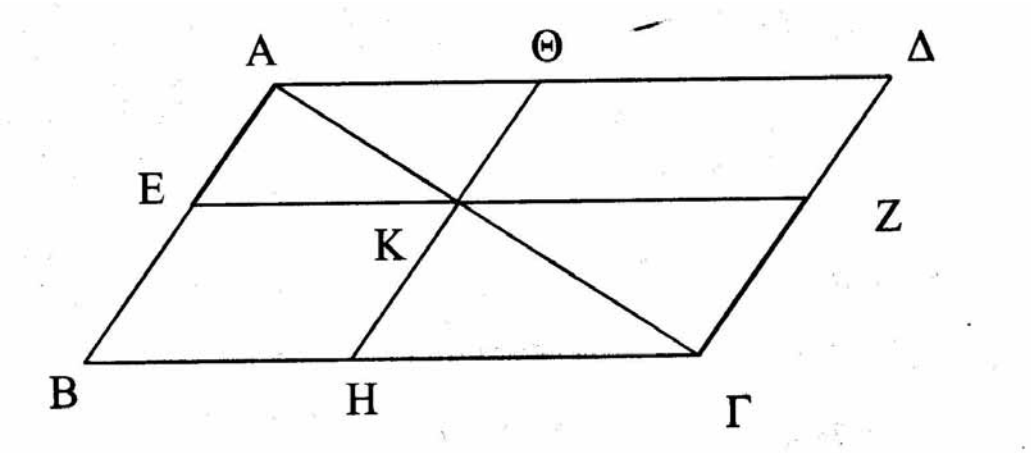
Στην απόδειξη παίρνει δύο κύκλους οι οποίοι θεωρεί ότι τέμνονται. Η απόδειξη σύμφωνα με τον Πρόκλο δεν είναι πλήρης, διότι δεν λαμβάνονται όλες οι περιπτώσεις για την σχετική θέση των κύκλων [5]. Οι κύκλοι δεν είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου ούτε εφάπτονται εξωτερικά, όμως θα πρέπει να ελεγχθεί και η περίπτωση που οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Πρόταση 34: Οι απέναντι πλευρές και γωνίες των παραλληλογράμμων είναι ίσες και οι διαγώνιοι διαιρούν σε ίσα μέρη.



Η πρόταση αυτή είναι μια πρόταση για τα παραλληλόγραμμα χωρίς όμως να έχει οριστεί πριν η έννοια του παραλληλογράμμου. Αυτό συμβαίνει και με άλλες έννοιες. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται και σε άλλους απαραίτητους ορισμούς, όπως το εμβαδό, τα μέτρα τμημάτων και γωνιών. Το ίδιο παρατηρείται και στην πρόταση 43.

Πρόταση 43: Κάθε παραλληλογράμμου τα συμπληρώματα ως προς τη μία διαγώνιο έχουν ίσα εμβαδά.

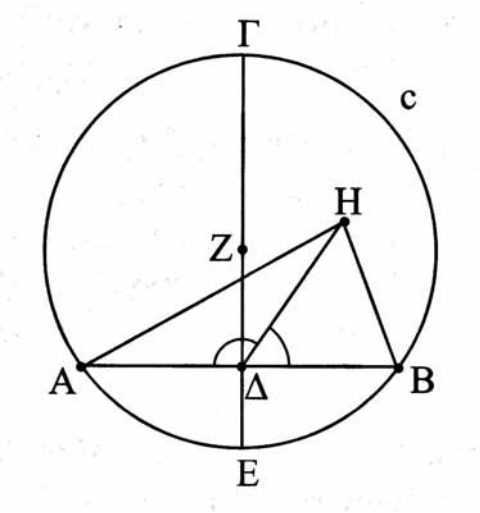


Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την έννοια συμπληρωματικό χωρίς να την ορίζει προηγουμένως. Ωστόσο είναι προφανές τι εννοεί ο Ευκλείδης με την πρόταση αυτή.

Τρίτο Βιβλίο

Πρόταση 1: Να βρεθεί το κέντρο δεδομένου κύκλου.

Απόδειξη: Έστω c ο κύκλος, ΑΒ μια τέμνουσα του κύκλου και Δ το μέσο του ΑΒ. Φέρνουμε την κάθετη ΓΔ στην ΑΒ, η οποία αν προεκταθεί τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.



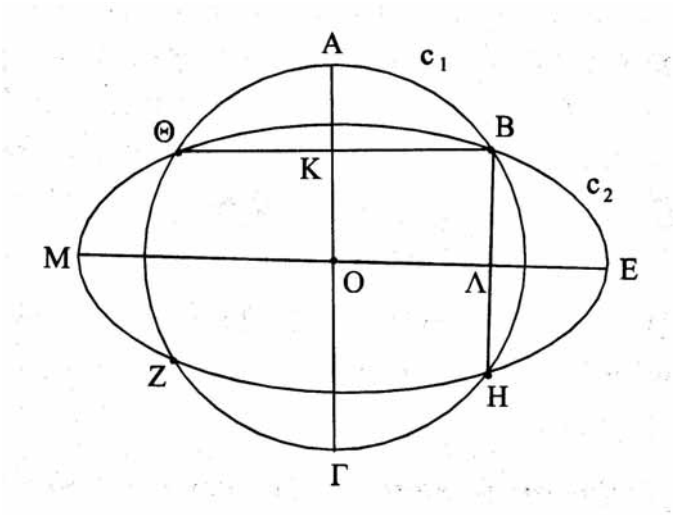
Έστω ότι το Ζ δεν είναι το κέντρο του κύκλου, αλλά το κέντρο του κύκλου είναι το Η. Φέρνουμε τις ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ και προκύπτει ότι τα

τρίγωνα ΗΑΔ και ΗΒΔ είναι ίσα, γιατί ΑΔ=ΔΒ, ΗΑ=ΗΒ. Άρα οι γωνίες $A\hat{\Delta}H, B\hat{\Delta}H$ είναι ίσες και καθεμία από αυτές ισούται με μια ορθή. Και οι γωνίες όμως $Z\hat{\Delta}A$, $Z\hat{\Delta}B$ είναι ορθές. Οπότε οι γωνίες $H\hat{\Delta}B$ και $Z\hat{\Delta}B$ είναι ίσες και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε το Η ταυτίζεται με το Ζ.

Στην απόδειξη ο Ευκλείδης ξεκινά θεωρώντας ένα τυχαίο σημείο Η, ακολουθώντας αποδεικνύει ότι το Η ταυτίζεται με το Ζ και συμπεραίνει ότι δεν υπάρχει άλλο κέντρο εκτός του Ζ. Το σημείο Η μπορεί να βρίσκεται όμως οπουδήποτε στο εσωτερικό του κύκλου αφού στην αποδεικτική διαδικασία υποθέτει ότι το Δ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Αυτό όμως το συμπέρασμα δεν αποδεικνύεται πριν από τη πρόταση 2 του τρίτου βιβλίου των στοιχείων. Η πρόταση 2 αναφέρει ότι το τμήμα που συνδέει δύο σημεία ενός κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Δηλαδή στην απόδειξη της πρότασης 1 χρησιμοποιείται μια πρόταση που αποδεικνύεται παρακάτω.

Πρόταση 10: Ένας κύκλος δεν είναι δυνατόν να τέμνει άλλον κύκλο σε περισσότερα από δύο σημεία.

Απόδειξη: Έστω ο κύκλος c_1 τέμνει τον κύκλο c_2 στα σημεία Β, Η, Ζ, Θ .Φέρνουμε τις ΒΘ, ΒΗ που έχουν μέσα τα Κ, Λ και τις μεσοκάθετες ΑΓ, ΕΜ των ΒΘ, ΒΗ που τέμνονται στο Ο.

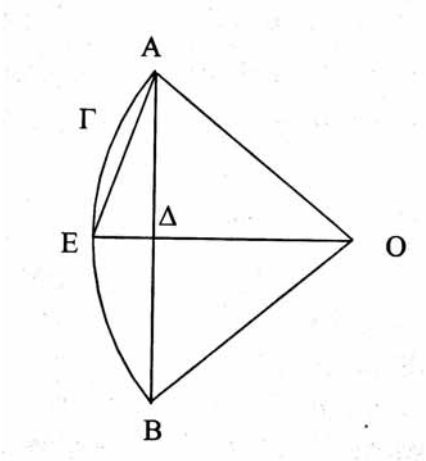


Το Ο λοιπόν είναι κέντρο και των δύο κύκλων, το οποίο είναι άτοπο, αφού οι κύκλοι τέμνονται και έχουν κοινό κέντρο.

Στην απόδειξη παρατηρείται ένα κενό αφού δε δικαιολογείται γιατί οι μεσοκάθετοι ΒΗ, ΒΘ τέμνονται στο Ο. Επίσης η πρόταση δεν κατοχυρώνει ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται άλλα μόνο ότι δεν είναι δυνατό να έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία.

Πρόταση 25: Αν δοθεί κυκλικό τμήμα, να κατασκευάσετε τον κύκλο στον οποίο να ανήκει το τμήμα.

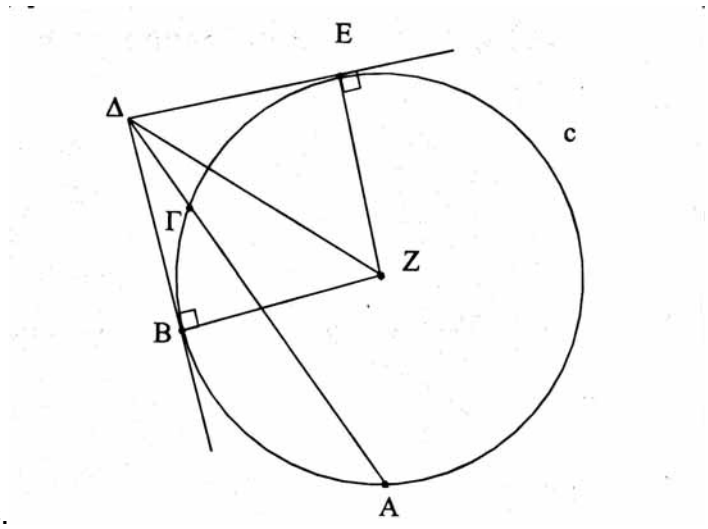
Ο Ευκλείδης προϋποθέτει την ύπαρξη του κύκλου στον οποίο ανήκει το δοσμένο τόξο, χωρίς να αποδεικνύει κάτι τέτοιο.



Επίσης δεν διακρίνει όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις για τις γωνίες $A\hat{E}\Delta$. Η μελέτη όλων των περιπτώσεων έγινε αργότερα.

Πρόταση 37: Από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρουμε μια τέμνουσα και μια προσπίπτουσα και το ορθογώνιο των δύο τμημάτων της τέμνουσας είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της προσπίπτουσας, τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται του κύκλου.

Απόδειξη: Έστω σημείο Δ εκτός κύκλου c, τέμνουσα ΔΓΑ και προσπίπτουσα ΔΒ τέτοια ώστε ΔΓ·ΔΑ=ΔΒ². Φέρνουμε την εφαπτομένη ΔΕ του κύκλου και τα τμήματα ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ όπου Ζ το κέντρο του κύκλου c.



Η γωνία $Z\hat{E}\Delta$ είναι ορθή και ΔΓ·ΔΑ=ΔΕ². Άρα ΔΕ=ΔΒ και τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΒΖ είναι ίσα γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία. Συνεπάγεται ότι η γωνία $\Delta\hat{B}Z$ είναι ορθή. Επομένως η προσπίπτουσα ΔΒ εφάπτεται του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στο άκρο της ακτίνας ΒΖ.

Η απόδειξη αυτή έχει το μειονέκτημα ότι δε διασαφηνίζει αν η εφαπτομένη του κύκλου ΔΕ με την ΔΒ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με τη ΔΖ. Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι τα Β, Ε βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ΔΖ.

3.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αποδείξεις που καταλήγουν σε παράδοξα αποτελέσματα εξαιτίας λανθασμένης χρήσης γνωστών προτάσεων ή δεδομένων. Τα περιεχόμενα μαθηματικά παράδοξα αναφέρονται στην άλγεβρα, την τριγωνομετρία, τη γεωμετρία, τα ολοκληρώματα και το άπειρο. Οι αποδείξεις είναι αρκετά λογικοφανής αλλά υπάρχουν βήματα που εμφανίζεται μία μη ‘‘νόμιμη’’ πράξη.

Ακόμα και τα παραδείγματα που είναι αρκετά προφανή και δεν προκαλούν ίσως την προσοχή, αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος μια και δείχνουν πως η μαθηματική αλυσίδα σπάει από ένα λανθασμένο βήμα.

Για το μαθηματικό η αναζήτηση του λάθους είναι αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας. «*Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος περνάει από δυο αναγκαίες φάσεις: τη σύνταξη μιας απάντησης και τη σκέψη αν η απάντηση αυτή έχει έννοια. Θεωρητικά αν το πρώτο στάδιο θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με κάθε αυστηρότητα από ένα μυαλό προστατευμένο από λάθη, το οποίο θα λειτουργούσε όπως ένας υπολογιστής, το δεύτερο στάδιο θα αποδεικνυόταν περιττό και άχρηστο. Πραγματικά, οι δύο φάσεις είναι απαραίτητες: τόσο τα ασήμαντα όσο και τα σημαντικά λάθη πολλαπλασιάζονται και δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι δεν έμεινε κανένα εάν δεν τα ελέγξουμε*».(Barry Cipra) [22]

3.1 Άλγεβρα

3.1.1 Λάθη στις αναλογίες

1) 7=13

Παίρνουμε την ισότητα $\frac{\chi+5}{\chi-7}-5=\frac{4\chi-10}{13-\chi}$ και κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$\frac{\chi+5-5(\chi-7)}{\chi-7}=\frac{4\chi-40}{13-\chi}$$

$$-\frac{4\chi-40}{\chi-7}=\frac{4\chi-40}{13-\chi}$$

$$-\frac{4\chi-40}{\chi-7}=\frac{4\chi-40}{13-\chi}$$

Οπότε αφού προέκυψε ισότητα δύο κλασμάτων και οι αριθμητές είναι ίσοι και οι παρανομαστές θα είναι ίσοι, δηλαδή 7-χ=13-χ. Από το οποίο καταλήγουμε στη λανθασμένη ισότητα 7=13.

Το λάθος προέκυψε από τη χρήση της εξής ισοδυναμίας:

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\delta}\Leftrightarrow\beta=\delta$

Αυτή η ισοδυναμία που ‘‘φαινομενικά’’ δείχνει να ισχύει, αληθεύει για όλες τις περιπτώσεις εκτός από τη περίπτωση όπου α=0. Διότι τότε $\frac{0}{\beta}=\frac{0}{\delta}$ το οποίο δεν προϋποθέτει φυσικά την ισότητα των παρανομαστών β, δ.

Στην περίπτωση αυτή συναντάμε την εξαίρεση. Αν στην ισότητα θέσουμε οπού χ το 10 καταλήγουμε στο $\frac{0}{3}=\frac{0}{-3}$.

Η ισότητα αυτή ισχύει και είναι ανεξάρτητη από τους παρανομαστές.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει το πόσο προσεκτικός θα πρέπει να είναι κάποιος στη χρησιμοποίηση σχέσεων που θεωρεί γνωστές. Πρέπει κανείς να είναι σε θέση να κατανοεί μια μαθηματική σχέση και

να γνωρίζει το πεδίο που μπορεί να εφαρμοστεί αλλά και τις εξαιρέσεις της.

2) –α >α

Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από ένα θετικό αριθμό που έχει την ίδια απόλυτη τιμή.

Παίρνουμε την αναλογία (+α):(-α)=(-α):(+α)

Ο αριθμητής στο πρώτο λόγο είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή αφού +α>-α οπότε και στο δεύτερο λόγο ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή, άρα –α >+α.

Το παράδοξο αυτό στηρίζεται στην γνωστή πρόταση αναλογίας: αν α >β και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε γ > δ.

Αυτός ο ισχυρισμός είναι σωστός όταν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι θετικοί και δεν γενικεύεται όταν κάποιους από τους αριθμούς είναι αρνητικός. Το παράδειγμα αυτό είχε αναφερθεί και από τον Carnot το 1803.

Στο παράδοξο φαίνεται πόσο εύκολα μπορεί κάποιος να κάνει λάθος εμπιστευόμενος μία σχέση όπου ‘‘φαίνεται’’ να είναι σωστή, χωρίς να ελέγχεται η ισχύ της.

Για αυτό θα είναι καλύτερα να μην θεωρούμε κάτι προφανές αλλά να αναζητούμε αν όντως είναι σωστό με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάθε φορά. Επιπλέον η συγκεκριμένη περίπτωση αποτελεί ερέθισμα ώστε να σημειωθεί ότι αν κάτι αποδεικνύεται για κάποιους αριθμούς ίσως παύει να ισχύει σε ένα ευρύτερο σύνολο αριθμών. Έτσι έχουμε αρχικά τους θετικούς αριθμούς που εφαρμόζεται και στη συνέχεια του ρητούς που δεν εφαρμόζεται.

Ένα παράδοξο που κάνει επίσης χρήση της σχέσης: α > β και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε γ > δ είναι το γνωστό παράδοξο των Ballis, Bernouli, Carnot, D Alembert και πολλών άλλων ακόμη [3].

3) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη της υποτείνουσας.

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma}$ =1ορθή

$AB^2-B\Gamma^2=(AB+B\Gamma)(AB-B\Gamma)$

$AB^2-B\Gamma^2=-(AB+B\Gamma)(B\Gamma-AB)$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το –(ΑΒ+ΒΓ)(ΑΒ-ΒΓ) οπότε προκύπτει η σχέση: $\frac{AB+B\Gamma}{-(AB+B\Gamma)}=\frac{B\Gamma-AB}{AB-B\Gamma}$

Καθώς ένας θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν αρνητικό, στην παραπάνω αναλογία παρατηρούμε ότι ΑΒ +ΒΓ>-(ΑΒ+ΒΓ) τότε και ΒΓ-ΑΒ>ΑΒ-ΒΓ

$2B\Gamma>2AB$

$B\Gamma>AB$

Το οποίο είναι λάθος γιατί η ιδιότητα της αναλογίας που επικαλείται στην απόδειξη, δεν ισχύει αν στους τέσσερις όρους υπάρχουν και αρνητικοί αριθμοί.

3.1.2 Λάθη στις ανισώσεις.

Οι ανισώσεις είναι ένα μαθηματικό κομμάτι που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή. Είναι αναγκαίο να κατανοηθούν καλά όλες οι ιδιότητες των ανισώσεων ώστε να αποφεύγονται τα ‘‘παράξενα’’ αποτελέσματα.

Η ιδιότητα που είναι χαρακτηριστική στην περίπτωση των ανισώσεων είναι ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της με αρνητικό οπότε αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Η παράλειψη αυτής της ιδιότητας είναι αρκετά συχνό φαινόμενο στις τάξεις του γυμνασίου, αλλά και αργότερα όταν η παράσταση που πολλαπλασιάζετε απαιτεί διερεύνηση.

Τα δύο επόμενα παραδείγματα δείχνουν τα παράδοξα αποτελέσματα που οδηγούμαστε όταν δεν γίνεται έλεγχος της παράστασης που πολλαπλασιάζετε.

4) Αν α >β τότε α>2β

Παίρνουμε δύο θετικούς αριθμούς α, β τέτοιους ώστε α >β (1)

πολλαπλασιάζουμε με το β $\alpha\beta > \beta^2$

αφαιρούμε το α^2 $\alpha\beta-\alpha^2>\beta^2-\alpha^2$

παραγοντοποιούμε $\alpha(\beta-\alpha)> (\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$

πολλαπλασιάζουμε με το 1/β-α $\alpha> \beta+\alpha$ (2)

προσθέτοντας

τις ανισότητες (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$2\cdot \alpha>2\beta+\alpha$

$\alpha>2\beta$

5) Ένας θετικός αριθμός είναι μικρότερός από το μηδέν.

Παίρνουμε δύο θετικούς αριθμούς α, β ώστε α>β, . πολλαπλασιάζουμε με β-α

$$(\beta-\alpha)\alpha>(\beta-\alpha)\beta$$
$$\alpha\beta-\alpha^2>\beta^2-\alpha\beta$$
$$0>\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta$$
$$0>(\beta-\alpha)^2$$

Το οποίο δεν ισχύει φυσικά διότι αφού α ≠ β, το τετράγωνο ενός μη μηδενικού αριθμού είναι θετικός.

Το λάθος και στα δύο παραδείγματα που προηγήθηκαν βρίσκεται στον πολλαπλασιασμό της αρχικής ανισότητας με την παράσταση β-α. Δεδομένου ότι αρχίζουμε θεωρώντας ότι α >β, στην ουσία πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ανισότητας με μια αρνητική ποσότητα χωρίς να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

Ιδιαίτερα στο πρώτο παράδειγμα ήδη από την πορεία της απόδειξης βρίσκουμε μια σχέση που δεν είναι αληθή την α>α+β όπου

οδηγεί στο ότι $\beta<0$, παρότι έχουμε θεωρήσει ότι α, β θετικοί αριθμοί. Τονίζοντας αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν πόσο λανθασμένα συμπεράσματα βγαίνουν όταν δε λαμβάνουν υπόψη μία ιδιότητα .

Οι πράξεις μεταξύ ανισοτήτων οδηγεί επίσης σε παράδοξα αποτελέσματα όταν δεν ελέγχονται οι αναγκαίοι περιορισμοί. Αυτό παρουσιάζεται στο παρακάτω παράδειγμα.

6) Αν α και β δύο θετικοί αριθμοί τότε $\alpha > \beta$ και $\alpha < \beta$.

Παίρνουμε δύο θετικούς αριθμούς α και β και γράφουμε τις εξής ανισώσεις: $\alpha>-\beta$ και $\beta>-\beta$.

Τις πολλαπλασιάζουμε κατά μελή

$\alpha\beta > \beta^2$ και επειδή $\beta>0$

$\alpha > \beta$ (1)

τώρα γράφουμε τις εξής ανισότητες για τους θετικούς α, β

$\beta>-\alpha$ και $\alpha>-\alpha$

τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε

$\beta\alpha > \alpha^2$ και επειδή $\alpha>0$

$\beta > \alpha$ (2).

Δηλαδή έχοντας δύο θετικούς αριθμούς ο καθένας από αυτούς είναι μεγαλύτερος του άλλου.

Το λάθος προκύπτει εξαιτίας της παράλειψης των περιορισμών της πρότασης, ότι αν έχουμε δύο ομόρροπες ανισώσεις τότε μπορούμε να τις προσθέσουμε ή να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη και η φορά της ανίσωσης να παραμείνει η ίδια.

Στην πρόσθεση αυτό ισχύει, όχι όμως και στον πολλαπλασιασμό που πρέπει όλα τα μέλη και στις δύο ανισώσεις να είναι θετικοί αριθμοί. Οι μαθητές γνωρίζοντας τι συμβαίνει με την πρόσθεση και θεωρώντας ότι ο πολλαπλασιασμός ανισοτήτων είναι επιτρεπτή πράξη, δε λαμβάνουν την επιπλέον συνθήκη που είναι αναγκαία για τον πολλαπλασιασμό.

Αν δοθούν συγκεκριμένοι αριθμοί στις ποσότητες α και β οι μαθητές θα κατανοήσουν περεταίρω το αντιφατικό αποτέλεσμα που προκύπτει, ώστε να αντιληφθούν τη χρησιμότητα της ιδιότητας.

7) συνα>1

Ξεκινάμε με την ισότητα συνα=συνα όπου α οξεία γωνία και λογαριθμίζουμε με βάση το 10 οπότε logσυνα=logσυνα. Από τη ισότητα αυτή παίρνουμε την ανισότητα 2·logσυνα>logσυνα, κάνοντας χρήση της σχέσης 2·α>α. Έπειτα κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων έχουμε logσυν²α > logσυνα.

Λαμβάνοντας την ιδιότητα ότι αν η βάση είναι μεγαλύτερη του 1, ο μεγαλύτερος αριθμός έχει και τον μεγαλύτερο λογάριθμο, και αντίστροφα έχουμε συν²α>συνα. Διαιρώντας με τον θετικό αριθμό συνα παίρνουμε συνα>1 το οποίο είναι αντίθετο από τον ορισμό του συνημίτονου.

Το παράδοξο έγκειται στο ότι πολλαπλασιάζοντας τον logσυνα με το 2 θεωρούμε όπως η ποσότητα μεγαλώνει. Αυτό με βάση τη διαίσθηση και την αντίληψη που έχουμε διαμορφώσει από τη καθημερινή εμπειρία φαίνεται σωστό. Πολλοί μαθητές δεν θα είχαν πρόβλημα να παραδεχτούν ότι το μισό είναι μικρότερο από το όλο.

Η σχέση όμως 2·α>α δεν ισχύει όταν οι αριθμοί είναι αρνητικοί. Είναι πιθανό οι μαθητές να το γνωρίζουν αυτό. Δηλαδή ξέρουν ότι -1>-2 και την ίδια στιγμή να μην μπορούν να εντοπίσουν το λάθος στην απόδειξη [14]. Το παράδειγμα δείχνει πως κάποιες πρωταρχικές γνώσεις μπορούν να σταθούν εμπόδιο στο να γίνει κατανοητή μία έννοια και να γίνει σωστή χρήση της. Κάποιες δοκιμές με συγκεκριμένους αριθμούς με στόχο να βρεθεί απάντηση στην ερώτηση για ποιους αριθμούς α ικανοποιείται η ανίσωση

2·α>α οδηγούν στην έκφραση : 2·α >α για α≥0 και
2·α <α για α ≤ 0.

Μέσα από αυτό το απλό παράδοξο γίνεται φανερή γνωστική σύγκρουση που μπορεί να δημιουργηθεί στους μαθητές.

Η σύγκρουση αυτή είναι δυνατόν να οδηγήσει στην αναδιοργάνωση των γνώσεων και την ανακατάταξη των ιδεών στο πλαίσιο της οποίας η νέα πληροφορία λαμβάνεται υπόψη.

8) Ένας αρνητικός αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός.

Παίρνουμε δύο θετικούς αριθμούς α, β με α >β. Από τις σχέσεις των ταυτοτήτων γνωρίζουμε ότι: $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$ και
$2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha-\beta)^2$.

Διαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)} \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}$

ή $1 \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}$

ή $(\alpha-\beta)^2 \geq (\alpha+\beta)^2$

ή $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

ή $-4\alpha\beta \geq 0$

Το αποτέλεσμα είναι παράδοξο διότι το γινόμενο -4αβ είναι αρνητικό αφού οι αριθμοί α, β είναι θετικοί.

Το συμπέρασμα προέκυψε από τη διαίρεση των ανισοτήτων κατά μέλη. Οι ανισώσεις είναι ομοιόστροφες και έχουν θετικά μέλη, παρόλα αυτά η διαίρεση ανισοτήτων δεν είναι μια επιτρεπτή πράξη.

3.1.3 Λάθη στις τετραγωνικές ρίζες.

Οι τετραγωνικές ρίζες είναι άλλη μια έννοια που απαιτεί προσοχή διότι μπορεί να οδηγήσει σε απρόβλεπτα αποτελέσματα, όταν δεν έχει κατανοηθεί πλήρως ο ορισμός της. Στα παραδείγματα που ακολουθούν φαίνεται το σύνηθες λάθος που παρατηρείται στη χρησιμοποίηση των ριζών και τα παράδοξα αποτελέσματα που προκύπτουν.

9) Το άθροισμα τυχαίων ίσων αριθμών είναι ίσο με το μηδέν.

Παίρνουμε ένα μη μηδενικό αριθμό και γράφουμε την εξής ισότητα: $\chi=\alpha$

Πολλαπλασιάζουμε με $-4\cdot\alpha$ $\quad -4\alpha\chi=-4\alpha^2$

$-4\alpha\chi+4\alpha^2=0$

Προσθέτουμε το χ^2 $\quad \chi^2-4\alpha\chi+4\alpha^2=\chi^2$

$(\chi-2\alpha)^2=\chi^2$

$\chi-2\cdot\alpha=\chi$

Αντικαθιστούμε όπου χ το α : $\quad \alpha-2\cdot\alpha=\alpha$

$-\alpha=\alpha$

$\alpha+\alpha=0$

10) Ένας αριθμός δεν αλλάζει αν προσθέσουμε σε αυτόν τη μονάδα.

Έστω ένας αριθμός α. Παίρνουμε την εξής αληθή ισότητα

$\alpha^2-\alpha(2\cdot\alpha+1)=(\alpha+1)^2-(\alpha+1)(2\cdot\alpha+1)$

προσθέτουμε τη ποσότητα $\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)^2$ και στα δύο μέλη και έχουμε:

$$\alpha^2-2\alpha\frac{2\alpha+1}{2}+\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)^2=(\alpha+1)^2-2(\alpha+1)\frac{(2\alpha+1)}{2}+\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)^2$$

$$\left(\alpha-\frac{2\alpha+1}{2}\right)^2=\left(\alpha+1-\frac{2\alpha+1}{2}\right)^2$$

$$\alpha - \frac{2\alpha+1}{2} = \alpha + 1 - \frac{2\alpha+1}{2}$$

$$\alpha = \alpha + 1$$

Μια ειδική περίπτωση της παραπάνω απόδειξης είναι η εξής:

11) 4=5

16-36=25-45

16-36+ $\frac{81}{4}$ =25-45+ $\frac{81}{4}$

$$4^2 - 2\cdot 4\cdot\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

4=5

Η απόδειξη ξεκίνα από μια υπόθεση που είναι εμφανώς σωστή (16-36 και 25-45 είναι και τα δύο ίσα με -20) και καταλήγει σε μια σχέση που είναι εμφανώς λανθασμένη, 4=5. [10]

Στις παραπάνω περιπτώσεις η λήψη μόνο της μίας ισότητας μεταξύ των δύο τετραγώνων οδήγησε στο παράδοξο αποτέλεσμα. Έτσι στο πρώτο παράδειγμα από την ισότητα:

$(\chi-2\alpha)^2=\chi^2$ προκύπτει όχι μόνο η $\chi-2\alpha=\chi$ αλλά και η $\chi-2\alpha=-\chi$. Ομοίως και στο δεύτερο και το τρίτο από τα παραπάνω παραδείγματα.

Αυτό οφείλεται στην ελλιπή αφομοίωση της σχέσης που συνδέει τις δυνάμεις με τις ρίζες. Επίσης η σύγχυση γενικά παρουσιάζεται στους μαθητές γιατί η πράξη αυτή ισχύει όταν οι βάσεις των δυνάμεων είναι θετικοί αριθμοί και είχαν μάθει στις προηγούμενες τάξεις. Δεν εξετάζεται εδώ η φύση των βάσεων, αλλά έχοντας μια παλαιότερη γνώση που ‘‘δούλευε’’ σε προηγούμενα προβλήματα, θεωρούν ότι το ίδιο συμβαίνει παντού. Δε λαμβάνεται συχνά υπόψη το πεδίο ορισμού των αριθμών που εμπλέκονται σε μία άσκηση.

12) 2=0

Θεωρούμε την εξίσωση: $\sqrt{5\chi-4}+\sqrt{2\chi-1}=0$

Λύνουμε την εξίσωση υψώνοντας στο τετράγωνο.

$\sqrt{5\chi-4}=-\sqrt{2\chi-1}$

5χ-4=2χ-1

5χ-2χ=-1+4

3χ=3

χ=1

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι το 1. Όμως αν βάλουμε στη θέση του χ το 1 προκύπτει $\sqrt{1}+\sqrt{1}=0$

1+1=0

2=0

Το λάθος που οδήγησε στο αντιφατικό αποτέλεσμα είναι αρκετά εύκολο να διαπιστωθεί. Οφείλεται στο γεγονός ότι η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη μια και εκφράζει το άθροισμα δύο διαφορετικών μη αρνητικών αριθμών. Οπότε το άθροισμα τους δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Οι μαθητές ποιο δύσκολα θα βρουν το λάθος μια και σπάνια ελέγχουν τη δοσμένη άσκηση που δίνεται για λύση, θεωρούν ότι από τη στιγμή που η εξίσωση αυτή δίνεται, είναι υπαρκτή. Επιπλέον είναι πολύ πιθανό να μην αντιληφθούν την ύπαρξη της αντίφασης, αφού μετά τη λύση της εξίσωσης βρίσκουν χ=1 οπότε πιστεύουν ότι δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα. Δεν σκέφτονται να κάνουν επαλήθευση και να δουν αν η λύση αυτή είναι όντως δεκτή.

Είναι γεγονός ότι οι μαθητές μπορείς να προβληματίζονταν αν το αποτέλεσμα ήταν ‘‘παράξενο’’ και τότε ίσως να έκαναν κάποιο έλεγχο. Διότι είναι δυνατό να παρουσιαστεί το ‘‘φαινόμενο’’ της αληθοφάνειας του αριθμού, που βασίζεται κυρίως στη ‘‘διδακτική’’ παρά στην κατηγορία του ως φυσικό

μέγεθος. Δηλαδή είναι πιο πιθανό να βρεις έναν ακέραιο παρά έναν άλλο αριθμό, καθώς και οι αριθμοί από 0 ως 20 είναι πιο πιθανοί από τους υπολοίπους [22].

13) 6=2

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\chi}+\chi=2$. ο συνηθισμένος τρόπος επίλυσης της εξίσωσης από τους μαθητές είναι η εξής:

$\sqrt{\chi}=2-\chi$

$\chi=4-4\chi+\chi^2$

$\chi^2-5\chi+4=0$

οι λύσεις της εξίσωσης είναι 1 και 4.

Οι μαθητές θεωρώντας ότι οι μετασχηματισμοί τους είναι σωστοί θα προβληματιστούν αν αντικαταστήσουν το 4 που βρήκαν ως λύση στην αρχική εξίσωση. Μετά την αντικατάσταση προκύπτει ότι 6=2.

Στην πραγματικότητα οι μαθητές ξεχνούν ότι λύνοντας μια άρρητη εξίσωση είναι δυνατόν να προκύψουν και λύσεις που είναι άσχετες προς την αρχική εξίσωση. Αυτό συμβαίνει γιατί οι περισσότεροι θεωρούν την επαλήθευση ως μια διαδικασία που θα επαληθεύσει την ορθότητα των πράξεων τους, και όχι σαν ένα αναπόσπαστο κομμάτι της λύσης.

Για να διασαφηνιστεί περισσότερο το παράδειγμα αυτό μπορεί να παρουσιαστεί μια επίλυση όπου είναι διαφορετική από τη συνηθισμένη μέθοδο των μαθητών.

Η ισότητα μετασχηματίζεται στη μορφή f(x)=0, και στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με την ποσότητα $\sqrt{\chi}+(2-\chi)$ έχουμε $\chi-(2-\chi)^2=0$

ή $\chi^2-5\chi+4=0$ όπου οι ρίζες της είναι το 1 και το 4. Το 4 δεν έχει σχέση με την αρχική εξίσωση. Εμφανίστηκε εξαιτίας του πολλαπλασιασμού τη με την ποσότητα $\sqrt{\chi}+(2-\chi)$, της οποίας το 4 αποτελεί ρίζα. Με τον τρόπο αυτό δικαιολογείται η παρουσία της ρίζας που οδηγεί στο παράδοξό αποτέλεσμα.

14) 12=6=0

Δίνεται προς λύση η εξής εξίσωση: $3\sqrt{\chi}+\chi+2=0$.

Η εξίσωση που συνήθως χρησιμοποιούν οι μαθητές αλλά και διδάσκονται είναι η παρακάτω.

$3\sqrt{\chi}=-\chi-2$ (1) υψώνοντας στο τετράγωνο

$9\chi=\chi^2+4\chi+4$

$\chi-5\chi+4=0$

$\chi_1=4$ και $\chi_2=1$.

Κάνοντας επαλήθευση, για $\chi=4$ προκύπτει ότι : $3\sqrt{4}+4+2=12$ ή $12=0$

Και για $\chi=1$ προκύπτει $3+1+2=6$ ή $6=0$

Η εξίσωση αυτή συνεπώς δεν παρουσιάζει καμία λύση. Αυτό φαίνεται εύκολα γιατί συμβαίνει .

Στη σχέση (1) στο πρώτο μέλος έχουμε το $3\sqrt{\chi}$ που είναι μη αρνητική ποσότητα και δεν έχει νόημα για $\chi < 0$, ενώ το δεύτερο μέλος είναι το $-\chi-2$ όπου είναι αρνητικό κάτω από τη συνθήκη αυτή. Οι λύσεις 4 και 1 είναι στην πραγματικότητα οι ρίζες της συνάρτησης $g(x)= 3\sqrt{\chi}-(\chi+2)$.

Ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας δημιουργεί πολλές δυσκολίες στους μαθητές και χρειάζεται να τονιστεί ότι η $\sqrt{\alpha}$ ορίζεται ως η θετική τετραγωνική ρίζα του α και όχι μια ποσότητα με δύο τιμές. Είναι σωστό για παράδειγμα να γράψουμε $\sqrt{9}=3$ και $-\sqrt{9}=-3$, αλλά δεν είναι σωστό να γραφτεί ότι $\sqrt{9}=\pm 3$. Η σωστή σχέση είναι $\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

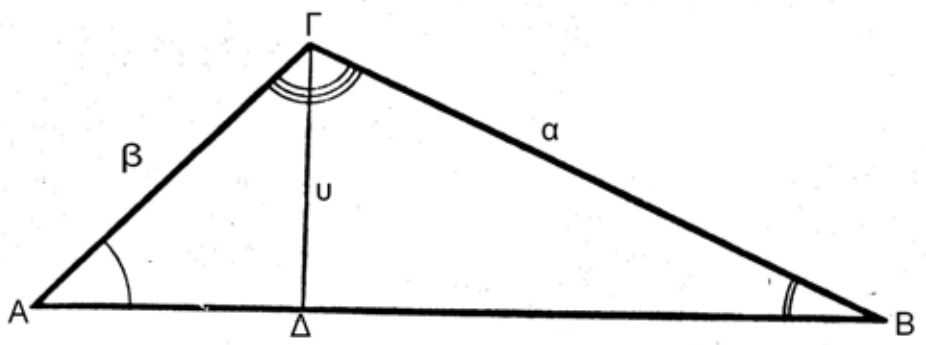
Η σύγχυση σχετικά με τις τετραγωνικές ρίζες, ίσως να δημιουργείται από τη γλώσσα που χρησιμοποιείται για το σύμβολο της έννοιας. Είναι ορθό να πούμε ότι το 9 έχει δύο ρίζες το -3 και το +3 , επειδή το -3 και το +3 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\chi^2=9$. Όμως παρόλο που είναι λάθος η σχέση $\sqrt{9}=-3$ το σύμβολο $\sqrt{9}$ συχνά διαβάζεται ως η τετραγωνική ρίζα του 9, ή απλά η ρίζα του 9. Στην ίδια τάση είναι

ενδεικτικό ότι πολλοί μαθητές γράφουν $\sqrt{9} = \pm 3$,αλλά θεωρούν ότι το $\sqrt{2}$ σαν ένα θετικό αριθμό και όχι σαν ένα ζευγάρι αριθμών [10].

3.2 Τριγωνομετρία

1) Κάθε τρίγωνο είναι ορθογώνιο

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος ΓΔ .



Χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στα τρίγωνα ΑΓΔ ,ΓΔΒ.

ημΑ=υ/β συνΑ =ΑΔ/β

ημΒ=υ/α συνΒ=ΔΒ/α

Αντικαθιστούμε στη σχέση ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu(A+B)=\frac{\upsilon}{\beta}\cdot\frac{\Delta B}{\alpha}+\frac{A\Delta}{\beta}\cdot\frac{\upsilon}{\alpha}=\frac{\upsilon(\Delta B+A\Delta)}{\beta\alpha}=\frac{\upsilon\gamma}{\beta\alpha}$$

Αν θεωρήσουμε ως R την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Τότε α=2·RημΑ, β=2·RημΒ, γ=2·RημΓ

$$\eta\mu(A+B)=\frac{\upsilon\eta\mu\gamma}{R\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$$

Και επειδή υ=βημα=2·Rημαημβ έχουμε ημ(Α+Β)=ημΓ όπου Α+Β=Γ το οποίο ισχύει μόνο σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Το λάθος εδώ εμφανίζεται στη μετάβαση από το ημ(Α+Β)=ημΓ στο Α+Β=Γ. Το γεγονός ότι ίσες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα δε σημαίνει

ότι και τα ίσα ημίτονα αντιστοιχούν σε ίσες γωνίες. Δηλαδή το λάθος υφίσταται λόγω της μη ισχύς του αντιστρόφου μίας πρότασης. Στην πραγματικότητα αν τα ημίτονα είναι ίσα οι γωνίες ίσως και να είναι ίσες. Είναι γεγονός όμως ότι οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν στη δευτέρα γυμνασίου τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξειών γωνιών, όπου διδάσκονται ότι δυο γωνίες που έχουν ίσα τα ημίτονα τους είναι και ίσες. Αν η γνώση αυτή δεν τροποποιηθεί στις επόμενες τάξεις, μένει στο μυαλό των μαθητών και με τις δύο κατευθύνσεις.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι περιπτώσεις που εμφανίζονται, από την ισότητα των ημιτόνων, πέρα από αυτή που αναφέρθηκε είναι και η Α+Β=180°-Γ το οποίο μας οδηγεί στη γνωστή σχέση των γωνιών του τριγώνου. Καθώς και η Α+Β=360°-Γ η οποία δεν ισχύει στο πλαίσιο του προβλήματος, μια και το άθροισμα των γωνιών ξεπερνά τις δύο ορθές.

Το φαινόμενο αυτό που παρουσιάζει το παράδοξο, βασίζεται στο γεγονός ότι στα περισσότερα βιβλία μαθηματικών οι προτάσεις συνοδεύονται μόνο από αυτές που το αντίθετο είναι σωστό. Έτσι οι προτάσεις μένουν στο μυαλό των μαθητών και με τις δύο κατευθύνσεις ακόμα και όταν δεν συμβαίνει, ακριβώς γιατί δεν έχει γίνει ο διαχωρισμός μεταξύ των προτάσεων που έχει νόημα το αντίστροφο και ποιών δεν έχει [3].

Για να εξουδετερωθεί αυτή η αντίληψη θα πρέπει να δίνονται αντιπαραδείγματα που να σημειώνουν ότι το αντίστροφο δεν έχει νόημα σε όλες τις προτάσεις αυτής της μορφής.

2) Το ημίτονο μίας γωνίας μειώνεται αν προστεθούν 360º σε αυτή τη γωνία.

Έστω μια γωνία α που είναι μεταξύ 0° και 180°. Έστω το μισό της είναι η γωνία χ που είναι μεταξύ 0° και 90°. Το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας χ είναι θετικά. Προσθέτουμε 180° στο χ και παίρνουμε μια γωνία που είναι στο τρίτο τεταρτημόριο, στο οποίο το ημίτονο και το συνημίτονο είναι αρνητικά. Άλλα κάθε αρνητική ποσότητα είναι μικρότερη από μια θετική ποσότητα, οπότε

ημ(180°+χ) < ημχ και συν(180°+χ) < συνχ (1)

πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις κατά μέλη προκύπτει η ανισότητα

ημ(180°+χ)·συν(180°+χ) < ημχ·συνχ (2)

Κάνοντας χρήση της σχέσης ημ2α=2ημασυνα

έχουμε 1/2 ημ(360°+2χ) <1/2 ημ2χ

ημ(360°+α) < ημα.

Άρα ‘‘αποδείχθηκε’’ ότι αν προσθέσουμε σε μια γωνία 360° η γωνία μειώνεται. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το γνωστό τύπο ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν αν προσθέσουμε σε αυτούς 360°. Το λάθος αποτέλεσμα προέκυψε από τον πολλαπλασιασμό των ανισοτήτων. Για να πολλαπλασιαστούν οι ανισότητες θα πρέπει όλα τα μέλη τους να είναι θετικά. Στην περίπτωση αυτή ο περιορισμός αυτός δεν ικανοποιείται καθώς ημ(180°+χ)=-ημχ και συν(180°+χ)=-συνχ οπότε η ανισότητα (2) είναι λάθος και αντικαθιστάται από την ισότητα ημ(180°+χ)·συν(180°+χ)=ημχ·συνχ,

η οποία οδηγεί στο γνωστό τύπο ημ(360°+χ)=ημχ και ημ(360°+α)=ημα.

3) $2^2=4^2$

Παίρνουμε την σχέση $συν^2χ=1-ημ^2χ$ (1) και υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δύναμη 3/2:

$$συν^3χ = \left(1 - ημ^2χ\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

Αυξάνουμε κάθε μέλος της ισότητας (2) με τρεις μονάδες και υψώνουμε το άθροισμα στο τετράγωνο: $\left(συν^3χ + 3\right)^2 = \left(\left(1 - ημ^2χ\right)^{\frac{3}{2}} + 3\right)^2$ (3)

Στην σχέση (3) βάζουμε όπου χ το π/2, και ή ισότητα γίνεται

$$\left(0 + 3\right)^2 = \left[\left(1 - 1\right)^{\frac{3}{2}} + 3\right]^2$$

Από όπου προκύπτει η σωστή ισότητα $3^2=3^2$.

Όμως αν στη θέση του χ θέσουμε το π, τότε παίρνουμε μία σχέση που δεν είναι αληθής.

$$\left(-1 + 3\right)^2 = \left[\left(1 - 0\right)^{\frac{3}{2}} + 3\right]^2$$

$2^2=4^2$

Το λάθος στηρίζεται στο ότι έχει παραληφθεί ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας. Διότι $\sqrt{α^2}≠α$ αλλά $|α|$. Στο παράδειγμα που εξετάζουμε έχουμε $\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^6\chi} = \sigma\upsilon\nu^3\chi$ όταν

$-\pi/2+2\kappa\pi \le \chi \le \pi/2 +2\kappa\pi$ και $\sqrt{\sigma\upsilon\nu^6\chi} = -\sigma\upsilon\nu^3\chi$ αν το χ δεν ανήκει στο παραπάνω διάστημα. Άρα στην σχέση (3) όταν το χ πάρει την τιμή π, το αριστερό μέλος γίνεται $(-\sigma\upsilon\nu^3\chi+3)^2$ άρα το παράδοξο αποτέλεσμα εξαφανίζεται [3].

4) π=0

Γνωρίζουμε ότι:

$$e^{2\pi i} = \sigma\upsilon\nu 2\pi + i\eta\mu 2\pi = 1$$

Συνεπάγεται ότι για κάθε τιμή του χ ,

$$e^{ix} = e^{ix} \cdot e^{2\pi i} = e^{i(x+2\pi)}$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δύναμη i και έχουμε:

$$\left(e^{ix}\right)^i = \left(e^{i(x+2\pi)}\right)^i$$

$$e^{-\chi} = e^{-(\chi+2\pi)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{\chi+2\pi}$, που δεν είναι μηδέν για καμία τιμή του χ. Τότε $e^{2\pi} = 1$, άρα 2π=0, π=0 [8].

Τα βήματα της απόδειξης είναι αληθοφανή και δεν εντοπίζεται άμεσα το βήμα το οποίο δεν είναι σωστό. Μέσα από το παράδειγμα αυτό φαίνεται η ανάγκη να διερευνούμε τη φύση των αντικειμένων που χρησιμοποιούμε και να ορίζουμε σαφώς τα όρια τους. Διότι εδώ γίνεται χρήση ουσιαστικά της δύναμης χ^ν. Όπου στην περίπτωση που το ν δεν είναι ακέραιος η δύναμη αυτή είναι μια συνάρτηση με πολλές τιμές.

Το βήμα $e^{ix} = e^{ix} \cdot e^{2\pi i} = e^{i(x+2\pi)}$ είναι σωστό, αλλά απαιτείται διερεύνηση όταν υψωθούν και τα δύο μέλη στη δύναμη i.

Καθώς η συνάρτηση $\left(e^{ix}\right)^{i}$ έχει άπειρο πλήθος τιμών $e^{-\chi} \cdot e^{-2p\pi}$ όπου p=… ,-2,-1,0,1,2,….

Ομοίως η συνάρτηση $\left(e^{i(x+2\pi)}\right)^{i}$ έχει άπειρες τιμές $e^{-(\chi+2\pi)} \cdot e^{-2q\pi}$ όπου q =… ,-2,-1,0,1,2,….

Αν οι τιμές των p,q επιλεγούν σωστά το παράδοξο εξαφανίζεται. Η πιο εύκολη επιλογή για p=0 και q=-1 δίνει $e^{-\chi} = e^{-(\chi+2\pi)} \cdot e^{2\pi}$ [8].

5) 1=-1

Έστω ότι έχουμε δύο γωνίες ω=π/2 και φ=π/4 και παίρνουμε την εφαπτομένη της διαφοράς τους: εφ(ω-φ)=εφ(π/2-π/4)=εφπ/4=1.

Από το γνωστό τριγωνομετρικά τύπο για την διαφορά των γωνιών

$$\varepsilon\phi(\omega-\phi)=\frac{\varepsilon\phi\omega-\varepsilon\phi\phi}{1+\varepsilon\phi\omega\varepsilon\phi\phi}$$

έχουμε:

$$1=\frac{\varepsilon\phi\omega-\varepsilon\phi\phi}{1+\varepsilon\phi\omega\varepsilon\phi\phi}$$

1+εφφωεφφ=εφω-εφφ

Κάνοντας αντικατάσταση των γωνιών έχουμε:

1+0·1=0-1

1=-1

Το πρόβλημα στην απόδειξη αυτή παρουσιάζεται από το γεγονός ότι ο τύπος της εφαπτομένης για την διαφορά γωνιών, δεν ισχύει από τη στιγμή που ω=π/2. Δηλαδή δεν έχει γίνει έλεγχος των περιορισμών του τύπου, φαίνεται ωστόσο πόσο απαραίτητο είναι να μην εφαρμόζεται ένας τύπος μηχανικά αλλά να επεξεργάζεται αν συνάδει με τα υπόλοιπα στοιχεία της άσκησης.

6) συνα<-1

Έστω ότι έχουμε ένα τρίγωνο με πλευρές α=9√2, β=6 και γ=2 και θέλουμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του τριγώνου. Από το νόμο των συνημίτονων έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\text{συν}A$

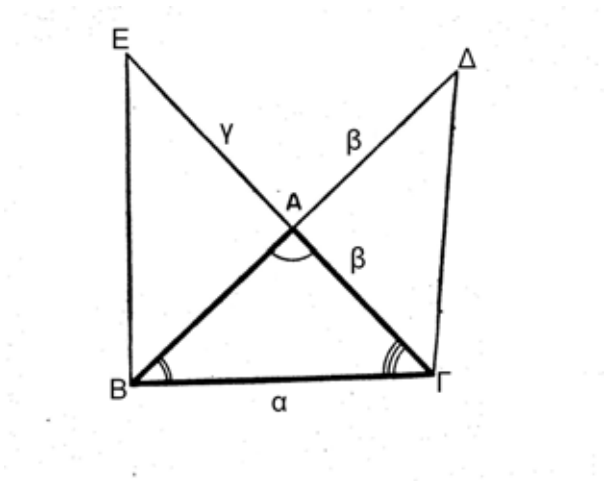
$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{36 + 4 - 162}{24} = \frac{-122}{12} = -10{,}16$$

Το παράδοξο έγκειται στο ότι τα τρία τμήματα α, β, γ δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα και άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με αυτές τις πλευρές. Οπότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο νόμος των συνημίτονων.

7) Όλα τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και α, β, γ τα μήκη των πλευρών του. Στην προέκταση των πλευρών ΒΑ και ΓΑ παίρνουμε τμήματα ΑΔ= β και ΑΕ= γ. Ενώνουμε τα σημεία Δ και Γ, Ε και Β.



Στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε ότι η γωνία $\hat{E}$ ισούται με $\frac{1}{2}\alpha$ και η γωνία $\widehat{\Gamma BE}$ ισούται με $\beta + \frac{1}{2}\alpha$. Σύμφωνα με τον νόμο των ημιτόνων έχουμε: $\frac{\gamma + \beta}{\eta\mu\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$ (1)

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ, η γωνία $\hat{\Delta}$ ισούται με $\frac{1}{2}\alpha$ και η γωνία $\hat{B\Gamma\Delta}$ ισούται με $\gamma+\frac{1}{2}\alpha$. Σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων προκύπτει: $\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\alpha}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$ (2).

Τα δευτέρα μέλη των ισοτήτων (1) και (2) είναι ίσα οπότε και τα πρώτα μέλη είναι ίσα.

$$\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\eta\mu\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\eta\mu\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\beta=\gamma$$

Προεκτείνοντας τις πλευρές ΑΒ, ΓΒ και με τους ανάλογους ισχυρισμούς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι α=γ. Οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Το λάθος βήμα στην απόδειξη βρίσκεται από τη μετάβαση της σχέσης $\eta\mu\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\eta\mu\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$ στη σχέση β=γ.

Από τη σχέση $\eta\mu\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\eta\mu\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$ είναι δυνατόν να γίνουν τρεις υποθέσεις όπως στο παράδειγμα 1.

Δηλαδή :

1) $\beta+\frac{\alpha}{2}=\gamma+\frac{\alpha}{2}$ όπου β=γ

2) $\beta+\frac{\alpha}{2}=\kappa\pi-\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$ το οποίο οδηγεί στην γνωστή πρόταση, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 2 ορθές όταν κ=1.

3) $\beta+\frac{\alpha}{2}=2\kappa\pi+\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)$.

Η πρώτη και η τρίτη υπόθεση απορρίπτονται, μια και η πρώτη καταλήγει σε παράδοξο και η τρίτη καταλήγει στην αδύνατη σχέση ότι η διαφορά δύο θετικών γωνιών που η καθεμία είναι μικρότερη από δύο ορθές ισούται με 2κπ [3].

8) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου πότε δεν είναι μικρότερο από το τετράγωνο της τρίτης πλευράς.

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ όπου α>β. Πολλαπλασιάζουμε και στα δύο μέλη της ανίσωσης με συνΓ και έχουμε: ασυνΓ<βσυνΓ (1).
Από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς έχουμε α=βσυνΓ+γσυνΒ οπότε βσυνΓ=α-γσυνΒ (2) και β=ασυνΓ+γσυνΑ οπότε ασυνΓ=β-γσυνΑ (3).
Η (1) με τη χρήση των (2) και (3) γίνεται

$$\beta\text{-}\sigma\upsilon\nu A>\alpha-\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma\sigma\upsilon\nu B-\gamma\sigma\upsilon\nu A>\alpha-\beta$$

πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 2αβ και εφαρμόζοντας το νόμο των συνημίτονων έχουμε:

$$\beta(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)-\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)>2\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

$$\alpha^3-\beta^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2>\gamma(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)>\gamma(\alpha-\beta)$$

α>β άρα απλοποιώντας το α-β προκύπτει:

$$\alpha^2+\beta^2>\gamma^2.$$

συνεπώς αποδείχθηκε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου πότε δεν είναι μικρότερο από το τετράγωνο της τρίτης πλευράς. Η σχέση αυτή είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που η γωνία Γ είναι οξεία γωνία και φυσικά δεν γενικεύεται σε όλα τα τρίγωνα.

Αν θεωρήσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές α=4, β=3, γ=6 όπου οι τρεις πλευρές ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι 25>36.

Το λάθος στην παραπάνω απόδειξη οφείλεται στον πολλαπλασιασμό της ανίσωσης α>β με το συνΓ. Διότι πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό σε μια δοσμένη ανίσωση. Για παράδειγμα είναι σωστό να γραφεί ότι 5>4, αλλά δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι 5β>4β. Αν το β είναι το 2 τότε έχουμε πως 10>8, αν όμως β=-2 έχουμε -10>-8 το οποίο δεν είναι σωστό.

Συνεπώς είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ότι η πολλαπλασιαζόμενη ποσότητα είναι θετική. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αν η γωνία είναι οξεία το συνημίτονο της είναι θετικό, οπότε οδηγούμαστε στο παραπάνω συμπέρασμα. Αν όμως η γωνία είναι αμβλεία το συνημίτονο της είναι αρνητικό, άρα η φορά της ανίσωσης θα πρέπει να αλλάξει αν πολλαπλασιαστεί με την ποσότητα αυτή.

3.3 Διαίρεση με το μηδέν

1) π/4=0

Γνωρίζοντας ότι ημπ/4=συνπ/4 και εφπ/4=1 δημιουργούμε την ισότητα 1+ημπ/4-συνπ/4=εφπ/4

$$1+\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}$$

$$1+\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}=\eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\left(\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$$

συνπ/4=1 οπότε π/4=2κπ

άρα για κ=0 έχουμε π/4=0

Η απόδειξη αυτή είναι αρκετά λογικοφανή, χρησιμοποιώντας απλές τριγωνομετρικές σχέσεις που είναι γνωστές από το γυμνάσιο.
Το λάθος εισάγεται στη σχέση (3). Η σχέση (2) είναι σωστή και από αυτή πηγαίνουμε στη σχέση (3) ‘‘απλοποιώντας’’ όπως λέγεται την παράσταση ημπ/4-συνπ/4 και από τα δύο μέλη.

Ουσιαστικά αυτό θυμίζει την ιδιότητα της διαγραφής που υπάρχει στην εισαγωγή πολλών μαθηματικών σχολικών βιβλίων. Δηλαδή αν α·γ=β·γ τότε α=β. Η σχέση όμως αυτή δεν είναι σωστή αν γ=0. Έτσι στην απόδειξη απλοποιώντας την παράσταση ημπ/4-συνπ/4, διαιρούμε με το μηδέν. Η παράλειψη αυτή είναι αρκετά συχνή από τους μαθητές αφού ακολουθούν αλγορίθμους που θεωρούν σωστούς και διαιρούν χωρίς τις περισσότερες φορές να ελέγχουν τη φύση της διαιρούμενης ποσότητας.

Αρκεί να σκεφτούμε ότι γενικά στη διαίρεση αν έχουμε τρεις αριθμούς α, β, γ ώστε α:β= γ, αυτό ισχύει αν γ·β=α. Από αυτή τη σχέση δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το αποτέλεσμα του 2:0, καθώς δε

μπορεί να πολλαπλασιαστεί κανένας αριθμός με το μηδέν και να δώσει αποτέλεσμα 2 [9].

Άλλη απόδειξη που περιλαμβάνει τη διαίρεση μιας ποσότητας με το μηδέν είναι η ακόλουθη:

2) Το άθροισμα 2 οποιοδήποτε αριθμών είναι ίσο με το μηδέν.

Θεωρούμε ότι α+β=γ και έστω α=5 και β=2. Πολλαπλασιάζουμε με το (α+β) : $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\gamma(\alpha+\beta)$

$$\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\gamma=-\alpha\beta-\beta^2+\beta\gamma$$

$$\alpha(\alpha+\beta-\gamma)=-\beta(\alpha+\beta-\gamma)$$

και διαιρώντας ή απλοποιώντας την παράσταση α+β-γ από τα δύο μέλη καταλήγουμε ότι α+β=0

Σχετικά με τη διαίρεση του μηδενός υπάρχει και το παράδοξο που πιστώνεται στον Augustus De Morgan αν και υπήρχε και πριν από αυτόν [4].

3) Το παράδοξο αναφέρει πως αν το χ=1 τότε το χ=0.

Ξεκινάμε από την ισότητα χ=1 και πολλαπλασιάζουμε και στα δύο μέλη το χ οπότε $\chi^2=\chi$. Αφαιρούμε και στα δύο μέλη το 1,

$\chi^2-1=\chi-1$

$(\chi-1)(\chi+1)=\chi-1$

Διαιρούμε με το χ-1 και απλοποιούμε

$$\frac{(\chi-1)(\chi+1)}{\chi-1}=\frac{\chi-1}{\chi-1}$$

$$\chi+1=1$$

$$\chi=0 .$$

Το βήμα φυσικά που δεν είναι ‘‘νόμιμο’’ είναι εκείνο που διαιρούμε με το χ-1, μια ποσότητα που είναι ίση με το μηδέν δεδομένου ότι έχουμε ξεκινήσει από την υπόθεση ότι χ=1. Δεν είναι δυνατόν φυσικά να ισχύει ότι χ=0 και χ=1. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις σε

μια εξίσωση όπου το χ μπορεί να πάρει τόσο την τιμή 1 όσο και την τιμή μηδέν.

Παράδειγμα πάνω σε αυτό είναι η εξίσωση χ(χ-1) όπου χ=0 και χ=1. Εδώ μπορούμε να δώσουμε έμφαση στη χρήση της διάζευξης ‘‘ή’’. Είναι εμφανής η αναγκαιότητα του αφού η παράλειψή του οδηγεί σε εσφαλμένη εντύπωση.

Γίνεται για μια ακόμη φορά φανερό η επιτακτική ανάγκη της ακρίβειας στις μαθηματικές αποδείξεις από πλευράς καθηγητών και μαθητών. Σημειώνεται ότι τίποτα δεν είναι περιττό και δεν μπορεί να παραλείπεται.

4) Ο B.Bolzano [3] δίνει ένα παράδειγμα σχετικά με τη διαίρεση του μηδενός και ‘‘αποδεικνύει’’ ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι.

Θεωρούμε δύο διαφορετικούς αριθμούς α και β. Για τους αριθμούς αυτούς παίρνουμε τις εξής ισότητες:

α-β=α-β

β-α=β-α προσθέτουμε και έχουμε

α-α=β-β

α(1-1)=β(1-1)

αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον κοινό παράγοντα παίρνουμε ότι α=β για όλους τους αριθμούς.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Bolzano δεν προσπάθησε να διαιρέσει με το μηδέν, άλλα επισήμανε ότι η διαίρεση θα οδηγήσει σε παράλογο αποτέλεσμα.

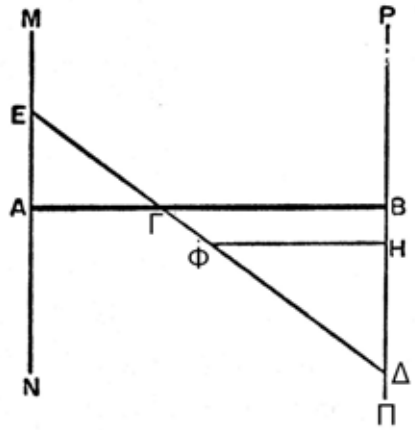
Ωστόσο θα μπορούσαμε να πούμε εναλλακτικά ότι ίσως η απαγόρευση και μόνο των καθηγητών της διαίρεσης με διαιρέτη το μηδέν, να αποτελεί πρόβλημα. Είναι πιθανό αν οι μαθητές έμπαιναν στη διαδικασία να το κάνουν να καταλάβαιναν σε μεγαλύτερη έκταση την ανάγκη αποφυγής αυτής της πράξης.

Διαίρεση με το μηδέν ωστόσο δεν παρατηρείται μόνο σε αλγεβρικά θέματα άλλα είναι δυνατόν να παρουσιαστεί και στην επίλυση γεωμετρικών θεμάτων και να οδηγήσει σε συμπεράσματα τα οποία είναι σε αντίθεση με τη διαίσθηση.

Για παράδειγμα έχουμε την παρακάτω απόδειξη μέσα από την οποία καταλήγουμε στο παράδοξο αποτέλεσμα:

5) Ένα ευθύγραμμο τμήμα μιας ευθείας γραμμής είναι ίσο με ένα τμήμα του μικρότερο από αυτό.

Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στα σημεία Α, Β φέρνουμε τις κάθετες ευθείες και παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ, ΡΠ πάνω στις κάθετες. Φέρουμε μια ευθεία που τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ, ΑΒ, ΡΠ στα σημεία Ε, Γ, Δ αντίστοιχα.



Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΒΔ και ΑΓΕ παίρνουμε ότι

$$\frac{ΒΔ}{ΑΕ} = \frac{ΓΒ}{ΑΓ}$$

$$\frac{ΒΔ}{ΑΕ} = \frac{ΑΒ - ΑΓ}{ΑΓ} \quad (1)$$

Από τα σημεία Ε, Η των πλευρών ΓΔ, ΒΔ παίρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΓΒ και από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΒΔ και ΦΗΔ παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{ΒΔ}{ΗΔ} = \frac{ΒΓ}{ΦΗ}$$

$$\frac{ΒΔ}{ΗΔ} = \frac{ΑΒ - ΑΓ}{ΦΗ} \quad (2)$$

Λύνουμε τις σχέσεις (1), (2) ως προς ΒΔ :

$$\text{ΒΔ} = \frac{\text{ΑΕ}(\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ})}{\text{ΑΓ}} \quad \text{και} \quad \text{ΒΔ} = \frac{\text{ΗΔ}(\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ})}{\text{ΦΗ}}$$

Οπότε $\frac{\text{ΑΕ}(\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ})}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΗΔ}(\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ})}{\text{ΦΗ}}$

ΑΕ·ΑΒ·ΦΗ-ΑΕ·ΑΓ·ΦΗ=ΑΓ·ΗΔ·ΑΓ-ΑΓ²·ΗΔ

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τη διαφορά ΑΕ·ΗΦ·ΑΓ-ΔΗ·ΑΒ·ΑΓ

ΑΕ·ΑΒ·ΦΗ-ΑΕ·ΑΓ·ΦΗ+ΑΕ·ΗΦ·ΑΓ-ΔΗ·ΑΒ·ΑΓ=ΑΓ·ΗΔ·ΑΓ-ΑΓ²·ΗΔ+ΑΕ·ΗΦ·ΑΓ-ΔΗ·ΑΒ·ΑΓ

Και παραγοντοποιώντας

ΑΒ(ΑΕ·ΦΗ-ΑΓ·ΗΔ)=ΑΓ(ΑΕ·ΦΗ-ΑΓ·ΗΔ)

Οπότε τελικά παίρνουμε ότι ΑΒ=ΑΓ.

Το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με το σχήμα και αυτό δεν οφείλεται σε κατασκευαστικό λάθος. Το λάθος εισάγεται στο τελευταίο βήμα, μετά από μια σειρά σωστούς υπολογισμούς. Στην πραγματικότητα η διαφορά ΑΕ·ΦΗ-ΑΓ·ΗΔ που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση στο τελευταίο βήμα είναι ίση με μηδέν. Αυτό ίσως να μην είναι τόσο εύκολο για να το δει κάποιος. Προκύπτει κάνοντας χρήση της αναλογίας για την ομοιότητα των τριγώνων ΑΓΕ, ΗΦΔ η οποία είναι $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΦΗ}}$.

Τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια ωστόσο δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη. Αυτό ίσως καθιστά δύσκολο τον άμεσο εντοπισμό του λάθους.

Διότι παίρνοντας τα βήματα προς τα πίσω δεν παρατηρείται κάποιο λάθος και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η αναλόγια από τη οποία προέρχεται η παρένθεση δεν περιλαμβάνεται στα βήματα, κάνει δυσκολότερη την εύρεση του λάθους δημιουργώντας ερωτηματικά.

Η εστίαση για αυτό πρέπει να γίνει καταρχήν στο γεγονός ότι η ‘‘απλοποίηση’’ των παρενθέσεων είναι η διαίρεση τους, η οποία βέβαια διαίρεση με μία ποσότητα πρέπει να τυγχάνει προσοχής και ελέγχου για το πόσο είναι ευσταθής.

Ένα επιπλέον στοιχείο στο οποίο θα πρέπει να υπογραμμίσουμε είναι ότι όλα τα στοιχεία μιας άσκησης έχουν το ρόλο τους ανεξάρτητα από αυτά που εμείς έχουμε χρησιμοποιήσει για την επίλυση της. Δηλαδή πρέπει να ελέγχονται όλα τα στοιχεία ως προς την ορθότητά τους ακόμα και αν δεν τα έχουμε χρειαστεί.

Η αντίληψη αυτή ίσως βρίσκεται μακριά από την υπάρχουσα αντίληψη τόσο της διδασκαλίας όσο και της νοοτροπίας που κυριαρχεί στους μαθητές. Κάνουμε στην πραγματικότητα χρήση μόνο των όσων μας οδηγούν στην επίλυση της άσκησης ‘‘αγνοώντας’’ κατά κάποιο τρόπο την ισχύ του σχήματος και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των δεδομένων.

3.4 Γεωμετρία

Ο Γάλλος παιδαγωγός και μαθηματικός E.Fourier [3] χώρισε τα παράδοξα αποτελέσματα που προκύπτουν στην γεωμετρία σε 2 κατηγορίες. Σε αυτά που το λάθος στηρίζεται στην κατασκευή του σχήματος και σε αυτά που βασίζονται σε λάθος επιχείρημα. Τα λάθη λόγω επιχειρήματος τα διαχώρισε σε αυτά που οφείλονται στην παρέκκλιση ενός γνωστού κανόνα και σε αυτά που γίνονται εξαιτίας της πραγματοποίησης ανεπίτρεπτων κανόνων της άλγεβρας.

3.4.1 Λάθη λόγω κατασκευής

Στη διδασκαλία της γεωμετρίας πολλά προβλήματα μπορούν να δημιουργηθούν εξαιτίας της λανθασμένης κατασκευής του σχήματος. Συχνά αυτό που δημιουργείται στον πίνακα δεν είναι ένα τετράγωνο για παράδειγμα, αλλά κάτι που μοιάζει με τετράγωνο, δηλαδή δε φέρει πάνω του κατά ανάγκη όλες τις ιδιότητες του τετραγώνου. Αυτό στις μικρότερες τάξεις μπορεί να προκαλέσει κάποια σύγχυση στα παιδιά ως προς τον τρόπο που αντιλαμβάνονται ένα σχήμα και το αναγνωρίζουν. Σε μεγαλύτερες τάξεις όπου τα σχήματα γίνονται περισσότερο πολύπλοκα το λάθος σχήμα μπορεί να αποτελέσει πηγή πολλών παράδοξων αποτελεσμάτων.

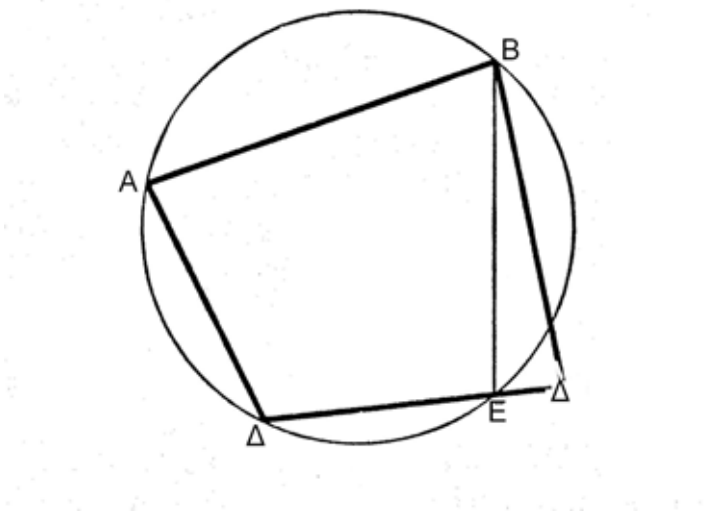
Είναι αναγκαίο λοιπόν ο καθηγητής να βρίσκεται σε ετοιμότητα και να μεταδώσει στους μαθητές την αντίληψη ότι μια σωστή αποτύπωση του σχήματος βοηθάει στη διεξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Δεν πρέπει όμως να κρίνουν τις συνθήκες ενός θεωρήματος από την εντύπωση του σχήματος και μόνο.

Τα παράδοξα λόγω κατασκευής έρχονται για να τονίσουν την αξία των αξιωμάτων και να αναπτύξουν την κριτική ικανότητα των μαθητών.

1) Η εξωτερική γωνία ισούται με την εσωτερική .

Περίπτωση όπου δύο σημεία που συμπίπτουν σχεδιάζονται σε απόσταση.

Έχουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με τα σημεία Α, Β, Δ, αφού δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία, μπορούμε να πάρουμε ένα κύκλο που τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Ε.



Έτσι δημιουργείται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

$$\hat{A} + \hat{E} = 2\text{ορθές}$$

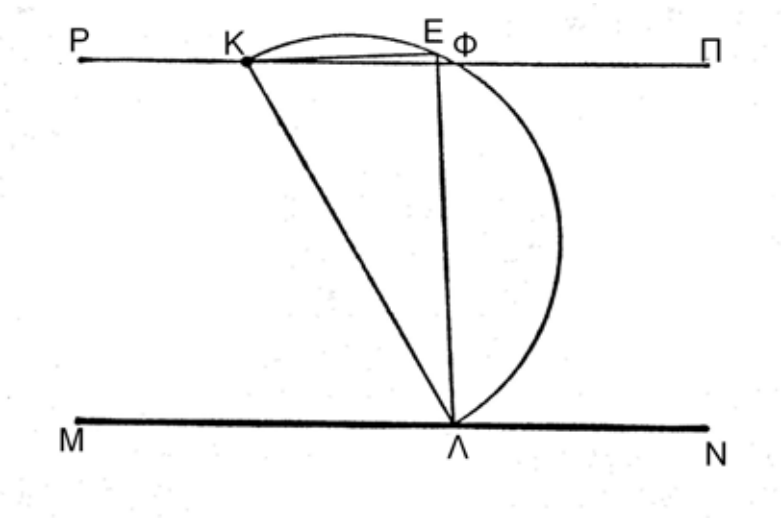
$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\text{ορθές}$$

Οπότε $\hat{E} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή η εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Το λάθος προκύπτει από το γεγονός ότι οι απέναντι γωνίες έχουν άθροισμα 2 ορθές και έτσι όλες οι κορυφές βρίσκονται στην περιφέρεια. Τα σημεία Ε, Γ δηλαδή συμπίπτουν άρα το τρίγωνο ΒΕΓ εξαφανίζεται. Βλέπουμε ότι αφενός οι σκέψεις οι οποίες έγιναν θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν σωστές, η μη αποτύπωση των δεδομένων στο σχήμα οδήγησε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

2) Από ένα σημείο είναι δυνατόν να σχεδιαστούν δύο παράλληλες ευθείες προς μια δοσμένη ευθεία.
Περίπτωση όπου δύο σημεία που συμπίπτουν σχεδιάζονται σε απόσταση.

Έστω ΜΝ η δοσμένη ευθεία και Κ ένα σημείο εκτός αυτής. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην ευθεία ΜΝ.



Ενώνουμε το Κ με ένα τυχαίο σημείο, έστω Λ, της ευθείας ΜΝ. Με διάμετρο το ΚΛ θεωρούμε ένα ημικύκλιο. Έπειτα στο σημείο Λ φέρουμε την κάθετη που τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε.

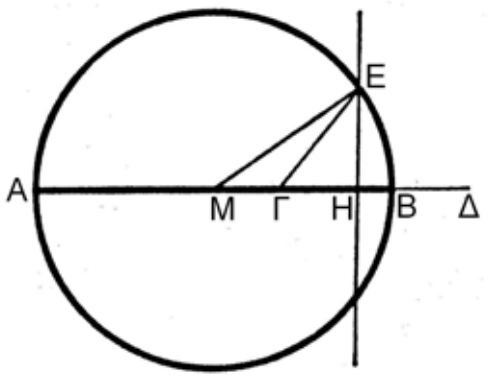
Η ευθεία ΚΕ είναι παράλληλη στην ΜΝ, γιατί η γωνία $\hat{\text{ΚΕΛ}}$ είναι εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.
Οπότε στην ευθεία γραμμή ΜΝ έχουν σχεδιαστεί από το σημείο Κ δύο παράλληλες, η ΠΖ και η ΚΕ. Το παράδοξο αποτέλεσμα οφείλεται στο ότι τα σημεία Ε, Φ θεωρούνται ξεχωριστά, ενώ ταυτίζονται.

Η ευθεία γραμμή ΛΕ οφείλει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες. Καταρχήν το ΛΕ είναι κάθετο είναι κάθετο στο ΠΖ, καθώς σύμφωνα με το σχήμα το ΠΖ είναι κάθετο στο ΜΝ και το ΜΝ είναι παράλληλο στο ΠΖ. Άρα η κάθετη σχηματίζει με αυτή τη γραμμή ορθή γωνία που οι πλευρές της είναι πάνω στο ΠΖ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κορυφή της γωνίας θα πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία γραμμή ΠΖ και το ημικύκλιο. Συγκεκριμένα η κορυφή είναι η τομή αυτών των δύο, δηλαδή το σημείο Φ.

3) Άδειος κύκλος – κάθε σημείο της διαμέτρου του κύκλου βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου.
Περίπτωση που ένα σημείο τοποθετείται εκεί που δεν μπορεί να είναι.

Έστω Γ ένα τυχαίο σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Κατασκευάζουμε το τέταρτο αρμονικό σημείο Δ των Α, Β, Γ.



Οπότε ισχύει $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}$. Παίρνουμε Η το μέσο του ΓΔ.

Σύμφωνα με το θεώρημα ΜΑ²=ΜΓΜΔ.

Την σχέση $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}$ μπορεί βάσει του σχήματος να γραφτεί ως εξής

$$\frac{\text{ΜΑ} + \text{ΜΓ}}{\text{ΜΑ} - \text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΜΑ} + \text{ΜΔ}}{\text{ΜΔ} - \text{ΜΑ}}$$

$$\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΑ}}$$

ΜΑ²=ΜΓΜΔ (1)

Όμως ΜΓ=ΜΗ-ΓΗ

ΜΔ=ΜΗ+ΓΗ

ΜΓΜΔ=$ΜΗ^2$-$ΓΗ^2$ (2)

Από (1) και (2) $ΜΗ^2$-$ΓΗ^2$ = $ΜΑ^2$

Παίρνουμε στη συνέχεια το πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΜΕΗ και ΕΓΗ:

$ΜΕ^2$=$ΜΗ^2$+$ΗΕ^2$ και $ΕΓ^2$=$ΓΗ^2$+$ΗΕ^2$ αντίστοιχα και αφαιρώντας κατά μέλη:

$ΜΕ^2$-$ΕΓ^2$=$ΜΗ^2$-$ΗΓ^2$

$ΜΑ^2$-$ΕΓ^2$=$ΜΑ^2$

$ΕΓ^2$=0

Άρα το Γ είναι σημείο του κύκλου.

Το παράδοξο έγκειται στο γεγονός ότι το ΔΒ είναι μεγαλύτερο του ΓΒ και όχι μικρότερο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτό προκύπτει γιατί στην αναλογία $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ που χρησιμοποιούμε αν αλλάξουμε τους μέσους λόγους παίρνουμε $\frac{ΔΒ}{ΓΒ}=\frac{ΑΔ}{ΑΓ}$

Και αφού ΑΔ>ΑΓ $\Leftrightarrow$ ΔΒ>ΓΒ.

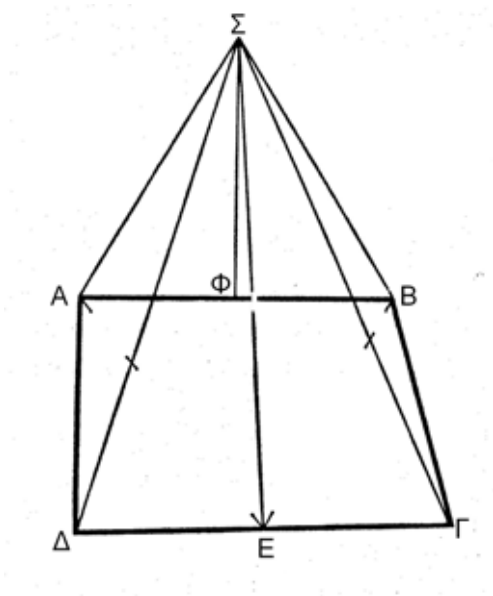
Το συμπέρασμα λοιπόν είναι επακόλουθο του λανθασμένου σχεδιασμού του σχήματός μια και το Η δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στον κύκλο άλλα έξω από αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι στο σχεδιασμό του κύκλου και των σημείων πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη όλα τα δεδομένα της άσκησης. Κάνει τους μαθητές κατά συνέπεια να εμβαθύνουν περισσότερο στα δεδομένα και να ωθούνται να κοιτούν όλες τις παραμέτρους.

4) Μια ορθή γωνία είναι ίση με μια οξεία γωνία.

Περίπτωση όπου η τομή δύο ευθειών δεν υπάρχει.

Παίρνουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ όπου ΑΔ κάθετό στην ΑΒ και ΑΔ=ΒΓ και ΒΓ κάθετο στην ΑΒ. Από το μέσο της πλευράς ΑΒ

φέρουμε κάθετη στο επίπεδο του ΑΒΓΔ και από το μέσο Ε του ΔΓ φέρνουμε κάθετη η οποία τέμνει την κάθετη του ΑΒ σε ένα σημείο Σ.



Ενώνουμε το Σ με τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ του παραλληλογράμμου. Παρατηρούμε ότι ΑΔ κάθετη στην ΣΑ δηλαδή η γωνία $\Sigma\hat{A}\Delta$ είναι ορθή. Σύμφωνα με την κατασκευή ΑΣ=ΣΒ γιατί ΣΗ διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο ΣΑΒ. Όμοια ΔΣ=ΣΓ οπότε από τα κριτήρια τριγώνων τα τρίγωνα ΣΑΔ, ΣΒΓ είναι ίσα, αφού έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε η γωνία $\Sigma\hat{B}\Gamma$ ισούται με την γωνία $\Sigma\hat{A}\Delta$, δηλαδή είναι ορθή.

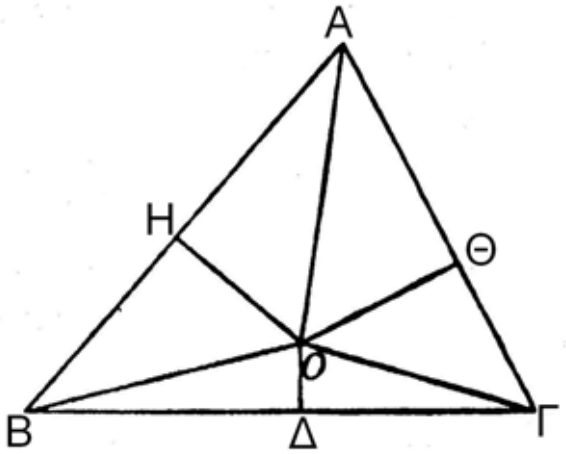
Κατά την κατασκευή θεωρούμε το τρίγωνο ΔΣΓ ισοσκελές, όμως όπως βλέπουμε οι προβολές τους ΔΗ και ΗΓ είναι άνισες, όπως προκύπτει από τα τρίγωνα ΔΑΗ, ΓΒΗ. Οπότε οι ΣΗ και ΣΕ δεν έχουν κοινό σημείο. Η αιτία του λάθους έγκειται στο ότι το Σ θεωρήθηκε ως το σημείο τομής ενός επιπέδου και μιας ευθείας το οποίο δεν συμβαίνει πάντα.

Στην κατασκευή του σχήματος δεν λαμβάνονται υπόψη οι σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων. Έχουμε συνηθίσει κατά κάποιο τρόπο να εργαζόμαστε σε ένα επίπεδο μόνο, παραβλέποντας ότι στη συγκεκριμένη άσκηση εμπλέκονται δύο επίπεδα. Αυτό είναι απόρροια

της γενικότερης παραγκώνισης της επιπεδομετρίας από τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Οι μαθητές από την επισήμανση αυτή μπορούν να δουν ότι αυτά που ισχύουν σε ένα επίπεδο δεν γενικεύονται κατά ανάγκη όταν έχουμε περισσότερα επίπεδα.

5) Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές

Παίρνουμε τρίγωνο ΑΒΓ και την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο του ΒΓ στο σημείο Ο. Φέρουμε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ, ΟΘ, ΟΗ στην πλευρά ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΔΓ που έχουν κοινή την ΟΔ, ΔΒ=ΔΓ γιατί Δ μέσο και οι γωνίες $O\hat{\Delta}B$, $O\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ορθές. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι ΟΒ=ΟΓ. Ομοίως συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΟ και ΑΘΟ που έχουν την ΑΟ κοινή, τις γωνίες $\Theta\hat{A}O$ και $O\hat{A}H$ ίσες γιατί ΑΟ είναι διχοτόμος και οι γωνίες $A\hat{H}O$ και $A\hat{\Theta}O$ είναι ορθές. Από την ισότητα των τριγώνων ΟΗ=ΟΘ. Τα τρίγωνα ΟΒΗ, ΟΘΓ είναι ίσα γιατί : ΟΒ=ΟΓ, ΟΗ=ΟΒ και οι γωνίες $O\hat{H}B$, $O\hat{\Theta}\Gamma$ είναι ορθές.
Συνεπάγεται ότι τα τμήματα ΗΒ, ΘΓ είναι ίσα.

Τελικά ΑΒ=ΑΗ+ΗΒ

ΑΒ=ΑΘ+ΘΓ

ΑΒ=ΑΓ

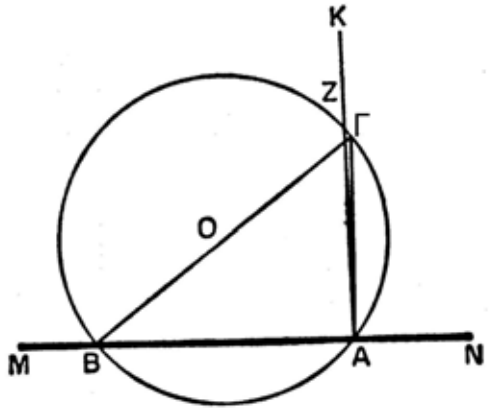
Δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Το λάθος στην κατασκευή στο παραπάνω παράδειγμα οφείλεται στο ότι η διχοτόμος και η μεσοκάθετος δεν τέμνονται σε σημείο εντός του τριγώνου αλλά εκτός αυτού. Αυτή είναι μια κατάσταση αρκετά συνηθισμένη ειδικά στους μαθητές που βρίσκονται στα πρώτα στάδια ενασχόλησης με την γεωμετρία. Εξαναγκάζουν το σχήμα τους έτσι ώστε τα στοιχεία τους να βρίσκονται εντός αυτού, θεωρώντας ότι η επίλυση με αυτό τον τρόπο είναι πιο εύκολη.

Επιπλέον εμφανίζεται κάποιες φορές η τάση των μαθητών να αγνοούν τους ορισμούς και τα δεδομένα κάτω από την έντονη επίδραση που τους ασκούν τα σχήματα. Επιζητούν ένα σχήμα παρόμοιο με αυτά που έχουν ήδη συναντήσει.

6) Από ένα σημείο μιας ευθείας μπορούν να σχεδιαστούν δύο κάθετες ευθείες.

Έστω η ευθεία ΜΝ και Α το δοθέν σημείο. Στο σημείο Α φέρουμε την κάθετο ΑΚ. Έπειτα φέρουμε ένα κύκλο που περνά από το Α και τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ στο Β και σχεδιάζουμε και τη διάμετρο ΒΓ.

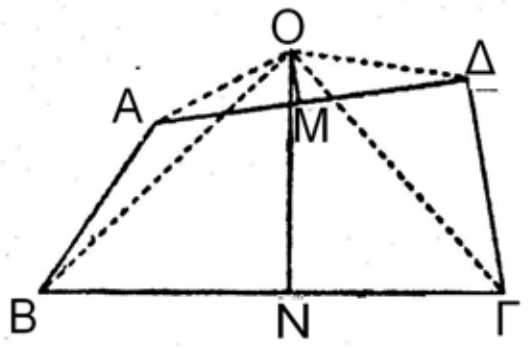


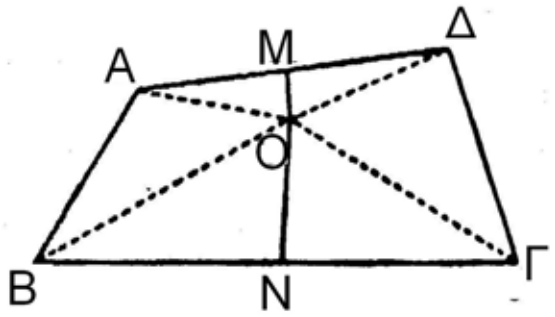
Έπειτα ενώνουμε το Γ με το Α. Η γωνία τότε $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή γιατί βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η ΓΑ κάθετη στην ΜΝ και έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ΑΓ κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ στο σημείο Α, καθώς και η ΑΚ είναι κάθετη στο ίδιο σημείο.

Στην πραγματικότητα αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι ευθείες ΑΓ και ΑΚ συμπίπτουν. Διότι βασιζόμενοι στο σχήμα βγάζουμε ως αποτέλεσμα ότι η ευθεία γωνία είναι πάνω από δύο ορθές. Παίρνουμε το άθροισμα των γωνιών $B\hat{A}K + K\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}N > 2\text{ορθές}$ μια και $B\hat{A}K + K\hat{A}\Gamma = 2\text{ορθές}$. Οπότε η γωνιά $K\hat{A}\Gamma$ είναι η μηδενική γωνία γιατί τότε μόνο ισχύει το συμπέρασμα. Το παράδοξο προέκυψε στο ότι τα σημεία Ζ, Γ θεωρούνται διαφορετικά, ενώ θα έπρεπε να συμπίπτουν.

7) Αν ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο στο οποίο ΑΒ=ΓΔ. Τότε η ΑΔ είναι παράλληλη στην ΒΓ.

Παίρνουμε τις μεσοκαθέτους των ΑΔ, ΒΓ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. Αν είναι παράλληλες τότε η πρόταση έχει αποδειχθεί. Αν όχι έστω ότι οι μεσοκάθετοι τέμνονται στο σημείο Ο, το οποίο μπορεί να είναι εξωτερικό ή εσωτερικό του τετράπλευρου.





Το Ο ως σημείο της μεσοκαθέτου απέχει ίση απόσταση από τα άκρα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ ίσες αποστάσεις.

Ισχύει ΟΑ=ΟΔ και ΟΒ=ΟΓ

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΔΓ έχουμε ότι

ΟΑ=ΟΔ

ΟΒ=ΟΓ

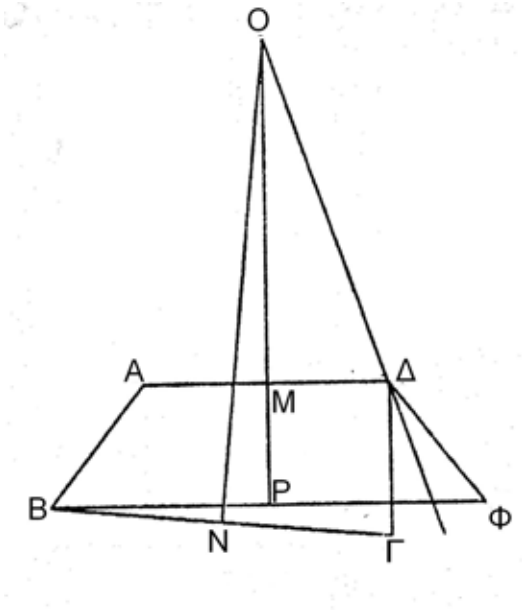
ΑΒ=ΔΓ

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}A$ (1)

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ προκύπτει ότι $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A$ (2).

Αφαιρώντας (όταν το Ο είναι εξωτερικό) ή προσθέτοντας (όταν το Ο είναι εσωτερικό) τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$.
Ομοίως από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΔΓ έχουμε ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta$ (3) και από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, ισχύει $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B$ (4).
Με πρόσθεση των (3) και (4) έχουμε:
$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A + \Delta\hat{\Gamma}B$.
Όμως το άθροισμα των τεσσάρων πλευρών του τετράπλευρου είναι τέσσερις ορθές οπότε: $B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Gamma = 2$ ορθές
Οι γωνίες αυτές είναι εντός και επί τα αυτά των πλευρών ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, άρα η ΑΔ είναι παράλληλη στη ΒΓ.

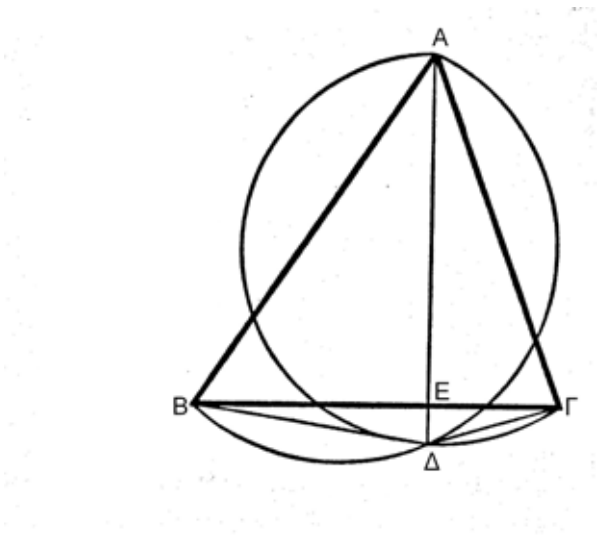
Η παραπάνω πρόταση είναι πιθανόν να ισχύει όταν τηρούνται κάποιες συνθήκες όμως μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις που αυτό δεν είναι αληθές. Στη δεύτερη περίπτωση κάνουμε την εξής κατασκευή. Φέρνουμε από το Β παράλληλη στην ΑΔ και με κέντρο το Δ και ακτίνα το ΑΒ=ΓΔ, σχεδιάζουμε έναν κύκλο που τέμνει την ευθεία που φέραμε από το Β στο σημείο Φ, με ΔΦ να μην είναι παράλληλη στο ΑΒ.



Τότε η ΟΜ είναι και αυτή μεσοκάθετη του ΒΦ, καθώς και η ΟΝ είναι μεσοκάθετη της ΒΓ. Το Ο είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΒΓΦ, συνεπώς, η ΟΔ βρίσκεται στην προέκταση της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας ΓΔΦ.

8) Δύο ευθείες γραμμές μπορούν να σχεδιαστούν από δύο δοσμένα σημεία.

Παίρνουμε ένα τυχαίο τρίγωνο και με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ φέρουμε δύο κύκλους. Οι κύκλοι τέμνονται στο σημείο Α καθώς και στο σημείο Δ. Η γωνία $A\hat{\Delta}B$ είναι ορθή μια και βαίνει σε ημικύκλιο. Ομοίως η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ορθή.



Οι γωνίες $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ έχουν κοινή κορυφή το Δ, μια κοινή πλευρά την ΑΔ και το άθροισμα τους είναι 2 ορθές. Οπότε οι δύο μη κοινές πλευρές του βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Συνεπώς η γραμμή ΒΔΓ δεν είναι τεθλασμένη όπως φαίνεται στο σχήμα, αλλά τα σημεία Β, Δ, Γ είναι στην ίδια ευθεία.

Οπότε στο σχήμα υπάρχουν 2 ευθείες που ενώνουν τα σημεία Β και Γ και αυτές είναι οι ΒΔΓ, ΒΕΓ το οποίο δεν είναι δυνατό να συμβαίνει στην ευκλείδεια γεωμετρία.

Η απόδειξη δείχνει μόνο ότι το σημείο Δ βρίσκεται στην πλευρά ΒΓ, συμπίπτοντας άρα με το σημείο Ε. Οι κύκλοι οι οποίοι κατασκευάστηκαν με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε που είναι στην κάθετη της πλευράς ΒΓ από την κορυφή Α.

3.4.2 Λάθη λόγω έκφρασης

Άλλα λάθη στη γεωμετρία μπορούν να προκύψουν από τον τρόπο που εκφράζουμε ένα θεώρημα, χρησιμοποιώντας απλές εκφράσεις και απλουστεύοντας τον τρόπο που το εκφέρουμε. Χρησιμοποιώντας την καθομιλουμένη διατυπώνουμε μια γεωμετρική έκφραση παραλείποντας σημαντικά δεδομένα που τροποποιούν την ισχύ της έκφρασης αυτής.

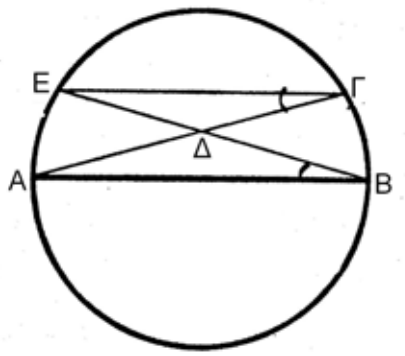
Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας την διατύπωση ‘‘δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες’’ ίσως είναι η αιτία που θα επιφέρει λάθη [3].

Προκειμένου να θυμόμαστε θεωρήματα και να τα μεταδώσουμε ευκολότερα στα παιδιά χρησιμοποιούμε λιτές προτάσεις με τα βασικά σημεία της πρότασης, με αποτέλεσμα καθώς περάσει κάποιο χρονικό διάστημα να χάνεται εντελώς η πραγματική διάσταση του θεωρήματος και να μένει μόνο μια έκφραση όπως αυτή που αναφέρθηκε παραπάνω.

Ένα παράδειγμα όπου οδηγούμαστε σε λάθους εξαιτίας της απλούστευσης του κριτηρίου ισότητας, είναι το εξής:

9) Η χορδή όπου δεν περνά από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με τη διάμετρο.

Δίνεται ένας κύκλος και έστω ΑΒ η διάμετρος του. Παίρνουμε ένα σημείο Γ πάνω στον κύκλο και φέρουμε την ΑΓ. Έστω Δ το μέσο της χορδής ΑΓ και Ε το σημείο που τέμνει τον κύκλο η προέκταση της ΔΒ.



Τέλος ενώνουμε τα σημεία Ε και Γ. Με αυτή την κατασκευή δημιουργούνται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΔΓ. Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά και δύο γωνίες ίσες. Συγκεκριμένα ΑΔ=ΔΓ γιατί Δ είναι μέσο και οι γωνίες Β, Γ είναι ίσες γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ και οι γωνίες $A\hat{\Delta}B$, $E\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

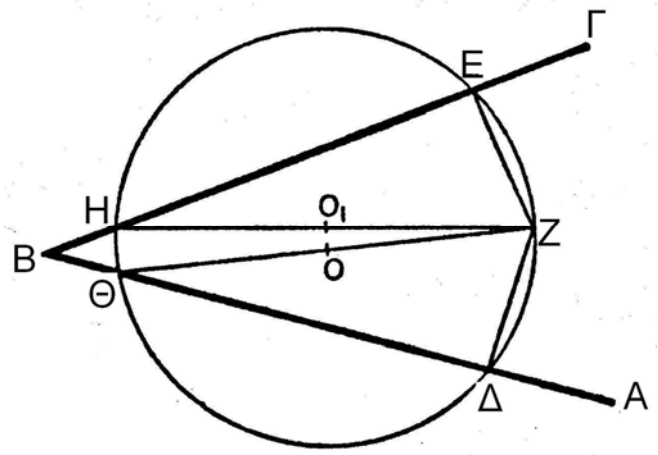
Οπότε κάνοντας χρήση του κριτηρίου με αυτό τον τρόπο που αναφέρθηκε τα τρίγωνα είναι ίσα και άρα ΕΓ=ΑΒ το οποίο δεν είναι ορθό. Το λάθος οφείλεται καθαρά στον τρόπο που διατυπώνουμε, για λόγω ευκολίας, τις γεωμετρικές προτάσεις. Το πρόβλημα παρατηρώντας τα σχήμα βρίσκεται στην ισότητα των γωνιών $\hat{AB\Delta}$ και $\hat{\Delta\Gamma E}$ όπου η $\hat{AB\Delta}$ δεν είναι προσκείμενη στην πλευρά ΑΔ αλλά απέναντι από αυτή.

Το γεγονός λοιπόν, ότι η έκφραση ‘‘προσκείμενες γωνίες’’ ξεχάστηκε φέρνει τους μαθητές και τον καθηγητή μπροστά σε ένα αποτέλεσμα που δεν ευσταθεί. Ότι η χορδή είναι μικρότερη από τη διάμετρο, είναι γνωστό από πολύ μικρές τάξεις και έτσι οδηγεί στην προσεκτική εξέτασης της απόδειξης για να ερευνηθεί το σημείο που δημιουργήθηκε το λάθος.

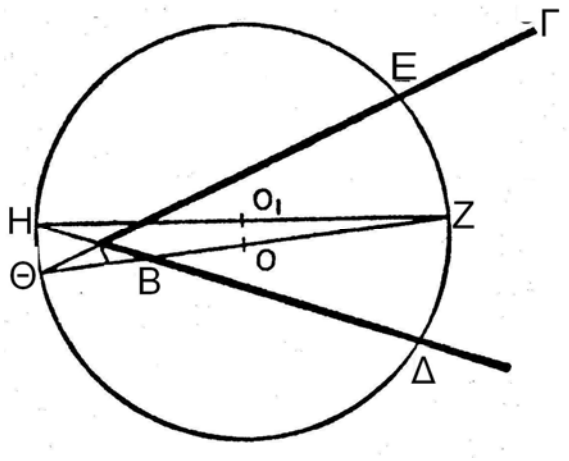
3.4.3 Λάθη από την ύπαρξη πολλών περιπτώσεων

10) Ο κύκλος με τα δύο κέντρα

Δίνεται μία γωνία $\hat{AB\Gamma}$ και έστω Ε και Δ δύο σημεία πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Στα σημεία Ε, Δ φέρνουμε τις κάθετες στις πλευρές της γωνίας. Αυτές οι κάθετες τέμνονται στο σημείο Ζ.
Φέρνουμε τον κύκλο που περνά από τα σημεία Δ, Ε και Ζ. Ο κύκλος τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία Η, Θ. Ενώνοντας τα σημεία Η, Θ με το Ζ παίρνουμε δύο ορθές γωνίες. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΖ και ΘΖ είναι διάμετροι του κύκλου. Οπότε τα σημεία Ο και O_1 είναι τα δύο κέντρα του κύκλου.



Το αντιφατικό αποτέλεσμα αυτής της απόδειξής οφείλεται στη λάθος κατασκευή του σχήματος, εξαιτίας της παράλειψης ελέγχου όλων των περιπτώσεων. Συγκεκριμένα το σημείο Β θεωρήθηκε εξωτερικό του κύκλου, όμως αυτό δεν αποτελεί την μοναδική περίπτωση. Αν το σημείο Β ήταν εσωτερικό του κύκλου τότε σχήμα είναι:



Οπότε πάλι καταλήγουμε στην ίδια αντίφαση. Η τρίτη περίπτωση που πρέπει να εξεταστεί είναι αν το Β βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Με αυτό το δεδομένο τα σημεία Θ και Η ταυτίζονται και οπότε η αντίφαση εξαφανίζεται.

Μέσα από το παράδειγμα υπογραμμίζεται η ανάγκη της διερεύνησης ακόμα και στα γεωμετρικά θέματα, κάτι που δεν είναι τόσο συνηθισμένο στα προβλήματα της γεωμετρίας. Στο μεγαλύτερο ποσοστό των θεμάτων με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές το σχήμα

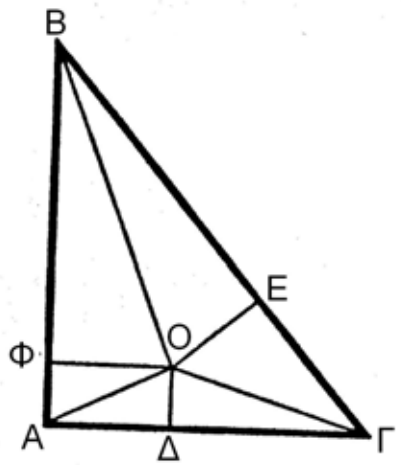
είναι μοναδικό και δεν υπάρχει προβληματισμός για την τοποθέτηση των σημείων πάνω σε αυτό. Η απόδειξη δίνει το έναυσμα στους μαθητές να δουν ότι πρέπει να ελέγχεται το σχήμα και να λαμβάνονται υπόψη όλες οι περιπτώσεις για τα σημεία που έχουν τοποθετηθεί τυχαία.

Το αποτέλεσμα της απόδειξής δημιουργεί ερωτηματικά μια και έρχεται σε αντίθεση με μία γνώση που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση. Είναι γεγονός ότι οι περισσότεροι θα θεωρήσουν ότι έχει γίνει κάποιο λάθος στους συλλογισμούς και όχι στο σχήμα.

Με την παρουσίαση της σωστής απάντησης θα διαπιστωθεί ότι όλες οι πιθανές περιπτώσεις πρέπει να εξεταστούν και ότι τελικά η μόνη περίπτωση που το παράδοξο αποτέλεσμα παύει να υφίσταται είναι η τρίτη, που το Β βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου.

11) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την υποτείνουσα.

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ =1ορθή και ΒΟ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ και φέρουμε την ΔΟ κάθετη στην ΑΓ, ΟΕ κάθετη στην ΒΓ και ΟΘ κάθετη στην ΑΒ.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΟΘ, ΒΟΕ είναι ίσα, γιατί: ΟΘ=ΟΕ αφού Ο σημείο της διχοτόμου και την ΒΟ κοινή. Άρα ΒΘ=ΒΕ (1)

Ομοίως και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΘΟ, ΟΕΓ είναι ίσα γιατί :

ΟΘ=ΟΕ γιατί Ο σημείο της διχοτόμου, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και ΟΑ=ΟΓ, γιατί το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΔ είναι διάμεσος και ύψος. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι ΑΘ=ΕΓ (2).

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε πως

ΒΘ+ ΑΘ= ΒΕ+ ΕΓ

ΑΒ= ΒΓ

Άρα η υποτείνουσα ισούται με την κάθετη πλευρά.

Στην ‘‘απόδειξη’’ αυτή πάλι δεν έχουν ληφθεί όλες οι περιπτώσεις. Στην πραγματικότητα έχουμε περιοριστεί στην υπόθεση ότι η διχοτόμος της γωνία Β και η κάθετη από το μέσο Δ τέμνονται στο εσωτερικό του τριγώνου. Αυτή ίσως είναι η πιο βολική περίπτωση μια και υπάρχει η ‘‘τάση’’ όλα τα στοιχεία να βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο. Ενώ στην άσκηση οφείλουμε να σκεφτούμε και τις άλλες περιπτώσεις για το σημείο τομής που είναι το Ο. Οι άλλες περιπτώσεις είναι ότι το σημείο τομής μπορεί να βρίσκεται επάνω στην πλευρά ΑΓ, και η άλλη να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.

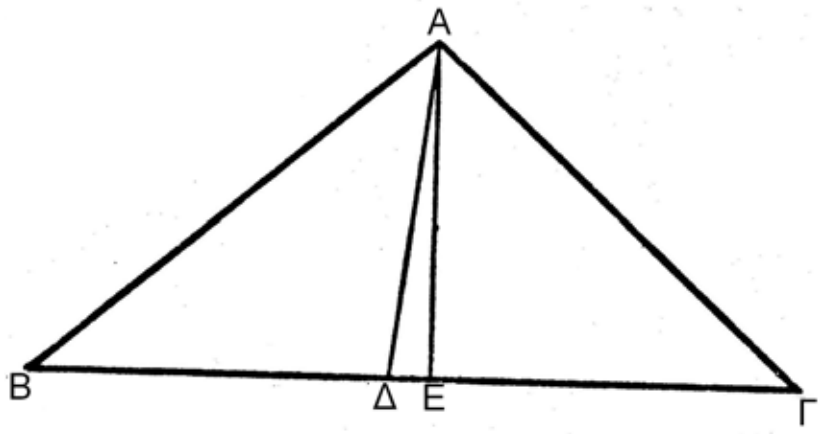
Αν αναλυθούν και αυτές οι περιπτώσεις θα προκύψει πως η μόνη δεκτή είναι η περίπτωση που το Ο βρίσκεται έξω από το τρίγωνο. Δηλαδή σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η τομή της διχοτόμου της γωνία $\hat{B}$ με την μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.

3.4.4 Λάθη εξαιτίας ανεπίτρεπτων αλγεβρικών πράξεων

12) Ένα κομμάτι ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο με όλο το ευθύγραμμο τμήμα.

Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο ώστε η γωνία $\hat{B}$ να είναι οξεία και η γωνία $\hat{A}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Από το Α

φέρνουμε την ΑΔ τέτοια ώστε η γωνία ΒΑΔ να ισούται με την γωνία $\hat{\Gamma}$. Από το Α φέρνουμε την κάθετη στη ΒΓ.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ είναι όμοια οπότε $\frac{E(AB\Gamma)}{E(AB\Delta)} = \left(\frac{A\Gamma}{A\Delta}\right)^2$

Ισχύει και $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$

Άρα $\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$

$\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} = \frac{A\Delta^2}{B\Delta}$ (1)

Από το τρίγωνα ΑΒΓ έχουμε ΑΓ²=ΑΒ²+ΒΓ²-2ΑΒ·ΒΓ·συνΒ (2)

και ΒΕ=ΑΒ·συνΒ .

Από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ΑΔ²=ΑΒ+ΒΔ-2ΒΔ·ΑΒ·συνΒ (3)

Η (1) από (2) και (3) γίνεται

$$\frac{AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot BE}{B\Gamma} = \frac{AB^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot BE}{B\Delta}$$

$$\frac{AB^2}{B\Gamma} + B\Gamma - 2BE = \frac{AB^2}{B\Delta} + B\Delta - 2BE$$

$$\frac{AB^2}{B\Gamma} - B\Delta = \frac{AB^2}{B\Delta} - B\Gamma$$

$$\frac{AB^2 - B\Gamma \cdot B\Delta}{B\Gamma} = \frac{AB^2 - B\Gamma \cdot B\Delta}{B\Delta} \quad (4)$$

$$B\Gamma = B\Delta \quad (5)$$

Το αποτέλεσμα είναι φυσικά αδύνατο να ευσταθεί.

Το λάθος εισάγεται από το βήμα (4) στο βήμα (5). Ουσιαστικά γίνεται χρήση της ιδιότητας των αναλογιών: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\delta} \Leftrightarrow \beta = \delta$. Η σχέση αυτή ωστόσο δεν ισχύει αν το α=0, όπως είδαμε και στο αντίστοιχο παράδειγμα στην άλγεβρα.

Η ποσότητα που βρίσκεται στον αριθμητή ισούται με το μηδέν, γιατί από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουμε την αναλογία $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

3.5 ΑΠΕΙΡΟ

Το άπειρο είναι ένα μαθηματικό κομμάτι που προκαλούσε πολλά ερωτηματικά ακόμα από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων. Ο Ευκλείδης απέφυγε το άπειρο δείχνοντας ότι δεν υπάρχει τελευταίος πρώτος αριθμός στην περίφημη απόδειξη για τους πρώτους αριθμούς. Το άπειρο αποτέλεσε πηγή πολλών δυσκολιών για τη θεμελίωση του και λόγω των δυσκολιών αυτών υπάρχει πλειάδα παραδόξων που σχετίζονται με αυτό, από το παράδοξα του Ζήνωνα μέχρι αυτά του Cantor και του Russell.

Τα άπειρα αντικείμενα είναι πολλά. Το πιο απλό από όλα είναι το σύστημα των φυσικών αριθμών 1,2,3,4….Το σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα ότι αν κάποιος ανήκει σε αυτό το ίδιο ισχύει και για τον επόμενο του. Μια άλλη ιδιότητα του συνόλου είναι ότι δεν μπορείς να το εξαντλήσεις αφαιρώντας κάθε φορά ένα στοιχείο. Όσοι αριθμοί και να διαγραφούν το σύστημα περιμένει άπειρο.

Το άπειρο αποτελεί από τη φύση του ένα επιστημολογικό εμπόδιο για τους μαθητές, για αυτό μέσα από παραδείγματα και αντιφατικά αποτελέσματα που έρχονται σε αντίθεση με τη διαίσθηση, είναι δυνατόν να παρουσιαστούν οι ιδιότητες. Τα παραδείγματα με το άπειρο έχουν σχέση με τον τρόπο που μετράμε τα αντικείμενα.

Υπάρχουν δύο βασικοί μέθοδοι μέτρησης στον κόσμο. Η μία μέθοδος είναι αυτό που συχνά λέμε ότι ένα παιδί μαθαίνει να μετράει. Με αυτό εννοούμε ότι το παιδί γνωρίζει τα ονόματα των αριθμών και μπορεί να τα πει με τη σειρά, μετρώντας ένα σύνολο αντικειμένων. Η άλλη μέθοδος, που είναι ίσως παλαιότερη, εμπλέκει απευθείας τη σύνδεση δύο συνόλων [1].

Η μέθοδος σύγκρισης αριθμών, χωρίς στην πραγματικότητα να τους μετράμε ονομάζεται ένα προς ένα αντιστοίχηση. Είναι σαφές ότι στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων αντικειμένων, αν υπάρχει η ένα προς ένα αντιστοιχία τότε τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό αντικειμένων. Όταν ασχοληθούμε με τα άπειρα σύνολα η μέθοδος αυτή καταλήγει σε παράδοξα.

1) Είναι το ‘‘ολόκληρο’’ πάντα μεγαλύτερο από ένα κομμάτι του;

Ας πάρουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών Ν και έστω Β το σύνολο που αποτελείται από τα τέλεια τετράγωνα.

Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να συνδεθούν με τα τέλεια τετράγωνα με ένα προς ένα αντιστοίχηση.

1 ⇨ 1

2 ⇨ 4

3 ⇨ 9

4 ⇨ 16

.

n ⇨ n^2

καθένα από τα δύο σύνολα είναι άπειρα, αλλά είναι προφανές ότι το δεύτερο σύνολο δεν είναι παρά ένα μέρος του πρώτου συνόλου. Ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς 1,2,3,4...συναντάμε όλους τους τετράγωνους αριθμούς χωρίς εξαιρέσεις :1,4,9,16... , αλλά υπάρχει και μια άλλη σειρά αριθμών που δεν είναι τετράγωνοι αριθμοί όπως 2,3,5,6,7 κ.τ.λ.

Το παράδοξο αυτό παρατηρήθηκε από τον Γαλιλαίο ό οποίος είδε ότι τα τετράγωνα μπορούν να σχηματίσουν ζευγάρια με όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς [4]. Το σύνολο των τετραγώνων συνθέτει ένα υποσύνολο των θετικών ακεραίων, που όπως είδαμε μπορούν να αντιστοιχηθούν με ένα προς ένα αντιστοιχία.

Συγκρίνοντας τις δύο στήλες προκύπτει το απρόσμενο συμπέρασμα ότι τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Με άλλα λόγια υπάρχουν τόσα τέλεια τετράγωνα όσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί. Σαν αποτέλεσμα οπότε το μέρος που είναι το σύνολο Β των τέλειων τετραγώνων είναι ίσο με το όλο που είναι το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών.

Το συμπέρασμα αυτό εγείρει αμφιβολίες για την ορθότητα του, καθώς μια από τις κοινές έννοιες στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι ότι το μέρος είναι μικρότερο από το όλο.

Ωστόσο το αξίωμα αυτό του Ευκλείδη είναι σωστό μόνο στην περίπτωση που τα σύνολα έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Το άπειρο σύνολο προκύπτει ότι έχει την ιδιότητα πως κάθε υποσύνολο του είναι ισοδύναμο με όλο το σύνολο.

Το ίδιο συμβαίνει και αν αντιστοιχίσουμε τους φυσικούς αριθμούς με τους περιττούς αριθμούς. Διαισθητικά θα έπρεπε οι φυσικοί αριθμοί να είναι διπλάσιοι από το πλήθος των περιττών. Με βάση την ιδιότητα των απείρων συνόλων, τα δυο αυτά σύνολα είναι ισοδύναμα.

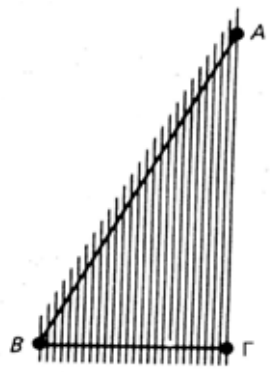
Εκτός από τα αριθμητικά παραδείγματα το πρόβλημα μπορεί να παρουσιαστεί και σε γεωμετρικά θέματα.

2) Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει λιγότερα σημεία από ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερου μήκους;

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Το ΑΒ είναι διπλάσιο από το ΒΓ άρα θα έπρεπε να έχει και διπλάσια σημεία.

Διπλώνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ώστε να δημιουργηθεί μια γωνία.

Ενώνουμε το Α με το Γ με μια ευθεία και στη συνέχεια χωρίζουμε το ΑΒ έστω σε 100 κομμάτια. Από κάθε σημείο φέρνουμε παράλληλη στην ΑΓ και έτσι χωρίζεται και ΒΓ σε 100 σημεία δηλαδή το τμήμα με το μικρότερο μήκος έχει τόσα σημεία όσο το τμήμα με το μεγαλύτερο.



Με βάση τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται κατανοητό ότι μπορεί να εισαχθεί, ότι τα άπειρα σύνολα δεν ακολουθούν τους νόμους των πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή η αριθμητική και οι πράξεις στα πεπερασμένα αντικείμενα δεν γενικεύεται και στο άπειρο. Απειροσύνολο είναι απλά ένα σύνολο που μπορεί να μπει σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολο του εαυτού του [4].

Τα παραδείγματα αυτά μπορούν να αποτελέσουν εισαγωγικό κομμάτι ώστε να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την έννοια του απείρου. Να δημιουργήσουν ένα μοντέλο στο μυαλό τους και να ψηλαφίσουν τη φύση του, έτσι ώστε να το διαχειριστούν καλύτερα σε άλλα μαθηματικά προβλήματα.

3) Το άθροισμα άπειρων ακεραίων αριθμών είναι ρητός.

Παίρνουμε την σειρά 1-2+4-8+16-32+…+$(-2)^{\nu}$. Καθώς υπάρχουν αριθμοί που προστίθενται η σειρά θα έχει κάποιο άθροισμα. Έστω ότι S=1-2+4-8……..

S=1-2(1-2+4-8…)

S=1-2S

3S=1

S=1/3

Άλλα όλοι οι όροι της σειράς είναι ακέραιοί, οπότε πως γίνεται το άθροισμα να βγαίνει ρητός. Το αποτέλεσμα μοιάζει με παράδοξο, αφού με βάση απλές γνώσεις της αριθμητικής αυτό δεν μπορεί να ισχύει.

Επιπλέον μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς προσθέτοντας τους αριθμούς με άλλη σειρά.

S= (1-2)+(4-8)+(16-32)+(64-128)=-1-4-16-64… (1)

Όπου η σειρά αποτελείται από άπειρους αρνητικούς αριθμούς και δεν έχει άθροισμα.

Ομοίως S=1+(-2+4)+(-8+16)+(-32+64)+…=1+2+8+32…(2)

Που είναι μια σειρά με άπειρους θετικούς όρους και δεν έχει άθροισμα.

Συνεπώς φαίνεται παράξενο ότι η ίδια σειρά δε δίνει συγκεκριμένο αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση. Το παράδοξο οφείλεται στο ότι η έννοια του αθροίσματος των απείρων όρων δεν ακολουθεί τους κανόνες που ισχύουν στο άθροισμα των πεπερασμένων αριθμών. Το άθροισμα των πεπερασμένων αριθμών έχει πάντα μοναδικό αποτέλεσμα, με οποίο τρόπο και να προστεθούν οι όροι του.

Αντίθετα το άθροισμα απείρων όρων δεν υπάρχει πάντα. Μπορεί να απειρίζεται, να συγκλίνει ή να αποκλίνει.

Έτσι στα παραπάνω αθροίσματα έχουμε την σειρά (1) ισούται με το -∞ και η σειρά (2) με το +∞. Οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν διαχειριζόμαστε τις άπειρες σειρές, διότι αν αγνοηθούν οι κανόνες αυτό θα οδηγήσει στην αντίφαση.

Όμοια περίπτωση είναι η διάσημα σειρά με την οποία ασχολήθηκε ο Liebniz(1646-1716) : 1-1+1-1+1-1…

Δημιουργώντας κάθε φορά διαφορετικά ζευγάρια, προκύπτει και διαφορετικό άθροισμα σειράς .

Για παράδειγμα:

(1-1)+(1-1)+(1-1)+…=0

1-(1-1)+(1-1)+(1-1)…=1

4) Το σύνολο πολλών μηδενικών είναι μηδέν;

Έστω ότι έχουμε μια πεπερασμένη γραμμή. Η γραμμή αυτή μπορεί να χωριστεί έστω θεωρητικά στη μέση. Τα μισά μπορούμε επίσης να τα χωρίσουμε στη μέση και αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές. Άρα η γραμμή αποτελείται από άπειρα τμήματα. Αν τα τμήματα αυτά έχουν ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο μήκος τότε αφού τα τμήματα είναι άπειρα η πεπερασμένη γραμμή θα έχει αναγκαστικά άπειρο μήκος [21].

Όμως αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει αφού η γραμμή έχει συγκεκριμένο μήκος. Αν τα άπειρα σημεία δεν έχουν καθόλου μήκος από την άλλη πως η γραμμή έχει πεπερασμένο μήκος.

Διαισθητικά το σύνολο πολλών μηδενικών πρέπει να είναι μηδενικό. Αυτό ισχύει ασφαλώς αν ο αριθμός είναι πεπερασμένος. Στη περίπτωση που τα μηδενικά είναι άπειρα δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα για το μήκος της γραμμής.

Το παράδοξο αυτό είναι ένα ακόμα από τα παράδοξα του Ζήνωνα. Η διχοτόμηση της γραμμής γίνεται στο μυαλό μας και όχι στην πραγματικότητα, άρα το παράδοξο αφορά την θεωρητική γεωμετρική γραμμή.

Αριθμοί με 2 αντιπροσώπους.

Στις συνηθισμένες περιπτώσεις οι άνθρωποι πιστεύουν ότι το 0,5 αντιπροσωπεύει τον πραγματικό αριθμό 1/2. Ο αριθμός 0,333… το 1/3 και το 1,4142 το √2. Το εμπόδιο που προκύπτει από την αναπαράσταση των αριθμών των αριθμών φαίνεται παρακάτω.

Μια δεκαδική αναπαράσταση είναι ένας τρόπος να γράψουμε μία σειρά. Έτσι το 0,3333… εκφράζεται με την άπειρη σειρά

$$0+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{3}{10^{\nu-1}}$$

Όλες οι σειρές έχουν άθροισμα. Συγκεκριμένα η άπειρη σειρά

$0+\frac{4}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots\frac{9}{10^{\nu-1}}+\ldots$ έχει άθροισμα $\frac{1}{2}$. Με άλλα λόγια το 0,4999… ισούται με 0,5 [4]. Αυτό το αποτέλεσμα αντιμετωπίζεται από τους μαθητές ως παράδοξο γιατί πολλοί μαθητές είναι συναισθηματικά δεσμευμένοι στο ότι οι αριθμοί μπορούν να παρουσιαστούν με έναν και μόνο τρόπο από ένα δεκαδικό αριθμό. Το ίδιο ισχύει και για όλους τους περιοδικούς δεκαδικούς. Για παράδειγμα 1=0,999… , 0,25=0,249999…

Η εκμάθηση των δεκαδικών ίσως επιφέρει προβλήματα στην δυσκολία κατανόησης του θέματος. Πολλοί μαθητές έχουν δημιουργήσει στο μυαλό τους το μοντέλο των δεκαδικών όπως το μοντέλο των ακεραίων. Αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς σαν ένα ζεύγος ακεραίων χωριζόμενων από ένα κόμμα. Αυτό οδηγεί σε παρανοήσεις της μορφής: ο επόμενος του 1,5 είναι το 1,6 ή το άθροισμα 1,6+1,8=2,14. Συνεπώς δεν μπορούν να δεχτούν ότι 0,25=0,249999….διαισθητικά θεωρούν ότι το 0,24999… είναι πολύ κοντά στο 0,25 άλλα πριν από αυτό.

3.6 Ολοκληρώματα

Τα λάθη στο συγκεκριμένο κομμάτι προκύπτει λόγω της αδυναμίας να αφομοιωθούν επαρκώς μερικοί γνωστοί και στοιχειώδεις περιορισμοί.

1) Το πρώτο παράδοξο οδηγεί στο ότι **0=1** και οφείλεται στην πιο απλή αλλά και ίσως πιο συχνή παράλειψη μαθητών αλλά και καθηγητών κάποιες φορές. Έχει να κάνει με το γεγονός ότι το αόριστο ολοκλήρωμα εκφράζει μια κλάση ισοδυναμίας για αυτό είναι αναγκαία η παρουσία της σταθεράς c στα βήματα της απόδειξης.

Έστω το εξής ολοκλήρωμα I= $\int \frac{dx}{\chi}$

Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε :

$$I = \int 1 \cdot \frac{1}{\chi} dx = x\left(\frac{1}{\chi}\right) - \int x\left(-\frac{1}{\chi^2}\right)dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

$$I = 1 + I$$

$$I = 0$$

Η απουσία δηλαδή της σταθεράς c οδηγεί στο να προκύψει ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι εντελώς λανθασμένο. Υπογραμμίζεται με αυτό τον τρόπο η ανάγκη να έχουμε πάντα στο μυαλό μας τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται στο πρόβλημα. Επίσης γίνεται ακόμη μια φορά αντιληπτό ότι τα ολοκληρώματα είναι κλάσεις ισοδυναμίας και όχι μεμονωμένα στοιχεία. [9]

Θα μπορούσε εδώ να παρουσιαστεί σε αντιπαραβολή με την παραπάνω απόδειξη η ίδια απόδειξη αλλά με ορισμένο ολοκλήρωμα στο οποίο το παράδοξο εξαφανίζεται.

Όντως αν $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$

Κάνοντας τις πράξεις όπως πριν έχουμε:

$$I = \left[x\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\beta}^{\alpha} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[1\right]_{\beta}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$$

$$= 0 + I$$

$$I = I$$

Τονίζεται έτσι η διαφορά μεταξύ του ορισμένου ολοκληρώματος που εκφράζει ένα συγκεκριμένο εμβαδό και του αορίστου το οποίο εκφράζει μια συνάρτηση.

2) Η δεύτερη απόδειξη οδηγεί στο **2=1** και βασίζεται σε μια πολύ συνηθισμένη πρακτική που χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις με ολοκληρώματα. Είναι η διαδικασία όπου θέτουμε μια ποσότητα προκείμενου να απλοποιηθούν οι πράξεις [9].

Έστω f(x) μια δοσμένη συνάρτηση. Γράφουμε την ισότητα

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)d\chi$$

Αν θέσουμε στο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$ όπου χ=2ψ τότε γίνεται

$$\int_0^2 f(x)dx = 2\int_0^1 f(2\psi)d\psi = 2\int_0^1 f(2x)dx$$

Υποθέτουμε τι η συνάρτηση είναι τέτοια ώστε να ισχύει f(2x)=1/2f(x) για κάθε τιμή του χ. Τότε $\int_1^2 f(x)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$.

Η σχέση f(2x)=1/2f(x) ικανοποιείται από τη συνάρτηση f(x)=1/x άρα $\int_1^2 \frac{dx}{\chi} = 0$ $\Rightarrow$ log2=0 $\Rightarrow$ 2=1.

Το λάθος υπάρχει καθώς το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ δεν ισχύει στην περίπτωση της συνάρτησης f(x)=1/χ γιατί η συνάρτηση αυτή δεν

ορίζεται στο μηδέν. Είναι γεγονός ότι για κάθε ποσότητα α >0 ισχύει ότι

$$\int_1^2 \frac{dx}{\chi} = \int_\alpha^2 \frac{dx}{\chi} - \int_\alpha^1 \frac{dx}{\chi}$$ (1) οπότε θέτοντας χ=2ψ

Το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά γίνεται $\int_{\frac{1}{2}\alpha}^1 \frac{2dx}{2x} = \int_{\frac{1}{2}\alpha}^1 \frac{dx}{\chi}$

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{\frac{1}{2}\alpha}^1 \frac{dx}{x} - \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \int_{\frac{1}{2}\alpha}^\alpha \frac{dx}{x}$.

Η υπόθεση που έγινε στην απόδειξη είναι πως το ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν με το α γιατί τότε τα δύο όρια εξαφανίζονται.

Αλλά ξέρουμε ότι

$$\int_{\frac{1}{2}\alpha}^\alpha \frac{dx}{x} = \left[\log x\right]_{\frac{1}{2}\alpha}^\alpha$$ = logα-log1/2 α

$$=\log\left(\frac{\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\right)=\log 2$$

Οπότε και το πρόβλημα έχει λυθεί.

3) π=0

Έστω φ(θ) μια οποιαδήποτε συνάρτηση και $\int_0^\pi \phi(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = 0$.

Θέτουμε ημθ=t , συνθdθ=dt και γράφουμε $\phi\left(\eta\mu^{-1}t\right) = \gamma(t)$.

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι ημ0=0 και ημπ=0 , οπότε $\int_0^0 \gamma(t)dt = 0$.

Η ειδική περίπτωση που φ(θ)=συνθ έχει ενδιαφέρον εδώ. Στην περίπτωση της συνάρτησης αυτής το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)d\theta = \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\eta\mu\theta\right)_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$$

Οπότε $\frac{1}{2}\pi = 0$.

Το λάθος εδώ έγκειται στα άκρα ολοκλήρωσης που μπαίνουν όταν έχουμε θέσει μια ποσότητα σε σχέση με το πεδίο ορισμού της [9]. Αν επεξεργαστούμε με λεπτομέρεια την απόδειξη παρατηρούμε:

Έστω $I = \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta$ θέτουμε ημθ=t $\Rightarrow$ συνθdθ=dt

συνθ=$\pm\sqrt{1-t^2}$, το $\sqrt{1-t^2}$ θα το πάρουμε στο διάστημα (0,1/2π) θετικό και στο διάστημα (1/2π ,π) αρνητικό.

Το ολοκλήρωμα γίνεται $I = \int \sqrt{1-t^2}dt - \int \sqrt{1-t^2}dt$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε 0≤ θ ≤1/2π οπότε τα όρια για το t είναι 0 και 1. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα 1/2π ≤ θ ≤ π, οπότε τα όρια για το t είναι 1 και 0.

Τέλος $I = \int \sqrt{1-t^2}dt - \int \sqrt{1-t^2}dt = 2\int \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\pi$

3.7 Τρία συχνά λάθη μαθητών

$\frac{3}{\chi}$ >2+χ

Σημαντικά λάθη συμβαίνουν στην επίλυση ανισοτήτων όταν οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί εκτελούνται χωρίς κατανόηση, η οποία οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το ανισωτικό σύμβολο δε λαμβάνεται υπόψη του. Οι μαθητές θεωρούν ότι η ανισότητα θα λυθεί με ένα παρόμοιο τρόπο με την εξίσωση εξαιτίας της ομοιότητας τους.

Εξάλλου ο τρόπος που εισάγονται οι ανισώσεις στο γυμνάσιο μετά ακριβώς από τις εξισώσεις, δίνει την εντύπωση ότι οι ανισώσεις είναι σαν ‘‘ειδική περίπτωση’’ των εξισώσεων. Αντιμετωπίζονται αλγοριθμικά χωρίς να δίνεται στους μαθητές τη δυνατότητα να κατανοήσουν την διαδοχή των βημάτων και μετέπειτα να μπορούν να αξιολογήσουν το αποτέλεσμα.

Ακόμα και αν σε θεωρητικό επίπεδο γνωρίζουν τους περιορισμούς που έχει η επίλυση μιας ανίσωσης, παρόλο αυτά υπάρχει έλλειψη ερμηνείας των βημάτων. Για την επίλυση της ανίσωσης $\frac{3}{\chi}$>2+χ πολλοί μαθητές δίνουν την εξής λύση: $3>2\chi+\chi^2$

$0>\chi^2+2\chi-3$

Άρα $\chi \in (-3,1)$

Η λύση αυτή είναι λανθασμένη γιατί πολλαπλασιάζουμε το χ χωρίς να λάβουν υπόψη τους το πρόσημο του χ. Πολλαπλασιάζουν δηλαδή μια ποσότητα που στο πλαίσιο της συγκεκριμένης άσκησης έχει σημασία αν είναι θετική ή αρνητική.

Μια γραφική επίλυση της συγκεκριμένης ανίσωσης θα έδειχνε καθαρά την λύση της ανίσωσης, και θα γινόταν πολύ πιο σαφής στους μαθητές από την αλγοριθμική επίλυση της με τις δύο περιπτώσεις: αν το χ είναι θετικό ή αρνητικό. Μέσω της γραφικής παράστασης οι μαθητές θα αντιληφθούν ικανοποιητικότερα τη συμβολική μορφή των ανισώσεων και θα δουν πολύ πιο σαφή μπροστά τους τις δύο περιπτώσεις.

Δύο ακόμα απλά λάθη των μαθητών είναι τα παρακάτω:

Το πρώτο αναφέρεται στην απλοποίηση ενός κλάσματος όπου οι μαθητές διαγράφουν την ίδια ποσότητα από τον αριθμητή και παρανομαστή χωρίς να είναι οι όροι του κλάσματος παραγοντοποιημένοι.

Για την απλοποίηση του κλάσματος $\frac{\alpha^2\chi}{\beta^2+\gamma\chi}$ διαγράφοντας το χ καταλήγουν στην παράσταση $\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma}$ ξεχνώντας ουσιαστικά ότι η απλοποίηση ενός παράγοντα σημαίνει τη διαίρεση αριθμητή και παρανομαστή με τον ίδιο αριθμό.

Πρέπει δηλαδή να γίνει σαφή διάκριση πως γίνεται απλοποίηση όταν έχουμε έναν μονώνυμο στον αριθμητή και ένα πολυώνυμο στον παρανομαστή. Διότι αν έχουν και στον αριθμητή και τον παρανομαστή μια παράσταση της μορφής $\alpha^2\chi$ μπορούμε να διαγράψουμε το χ. Όμως αν έχουμε την παράσταση $\beta^2+\gamma\chi$ η απλοποίηση έγκειται στη διαίρεση με το χ καθενός από τους όρους δηλαδή $\frac{\beta^2}{\chi}+\gamma$. Οπότε το αρχικό κλάσμα γίνεται $\frac{\alpha^2}{\frac{\beta^2}{\chi}+\gamma}$ το οποίο είναι σε δυσκολότερη μορφή από πριν . Οπότε η απλοποίηση αυτή δεν έχει νόημα με την έννοιά ότι δεν οδήγησε στην απλούστευση της παράστασης.[3]

Οι μαθητές θα πρέπει επομένως να μάθουν αυστηρά ότι για να απλοποιηθεί ένα κλάσμα θα πρέπει να μπορούμε να διαγράψουμε έναν παράγοντα από ‘‘ολόκληρο’’ του αριθμητή και από ‘‘ολόκληρο’’ τον παρανομαστή. Αν αυτός ο κανόνας δε ληφθεί υπόψη τότε μπορούμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές την εξής παράσταση που οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που εύκολα ελέγχεται ότι είναι λανθασμένες. Παίρνουμε την παράσταση.

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\beta}{1+\beta}=\frac{2}{1+1}=1$$

Άρα αποδείξαμε με αυτό τον τρόπο ότι 2αβ=α+β. βάζοντας τιμές στο α, β οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι η σχέση αυτή δεν ικανοποιεί τα ζευγάρια των αριθμών.

Ωστόσο αν κάποιος μαθητής όπου α=β=1 παρατηρείται ότι η σχέση αυτή αληθεύει, οπότε μπορεί να θεωρηθεί πως η σχέση γενικεύεται.

Για την αποφυγή αυτών των καταστάσεων και την πλήρη αποσαφήνιση των εννοιών θα ήταν σκόπιμο να παρουσιαστεί διερεύνηση σχετικά με τη ισχύ της σχέσης $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\gamma}=\frac{1+\beta}{\gamma}$ όπου προέκυψε από τη λάθος απλοποίηση. Κάνοντας πράξεις προκύπτει:

(α+β)γ=αγ(1+β)

αγ+βγ=αγ+αγβ

βγ=αγβ γ≠0

β=βγ

β-αβ=0

β(1-α)=0

η ισότητα αυτή είναι σωστή μόνο σε δύο ειδικές περιπτώσεις.

Αν β=0, η σχέση $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\gamma}=\frac{1+\beta}{\gamma}$ παίρνει την μορφή $\frac{\alpha}{\alpha\gamma}=\frac{1}{\gamma}$

Αν β=1, η σχέση $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\gamma}=\frac{1+\beta}{\gamma}$ γίνεται $\frac{1+\beta}{\alpha\gamma}=\frac{1+\beta}{\gamma}$

Σα συνέπεια της προηγούμενης επεξήγησης μπορεί να δημιουργηθεί ένα δεύτερο λάθος. Ίσως να εισαχθεί από την παραβίαση της επιμεριστικής ιδιότητας με την περίπτωση του διαιρέτη σε μία διαίρεση ενός αλγεβρικού αθροίσματος. Αυτός ο κανόνας λέει ότι προκειμένου να διαιρέσουμε το άθροισμα με έναν αριθμό είναι απαραίτητο να διαιρέσουμε με αυτό τον αριθμό κάθε όρο του αθροίσματος.

Δηλαδή εκφράζει την εξής σχέση : $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}$. Η παρανόηση της ιδιότητας αυτής μπορεί να οδηγήσει στη χρήση της σχέσης $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}$.

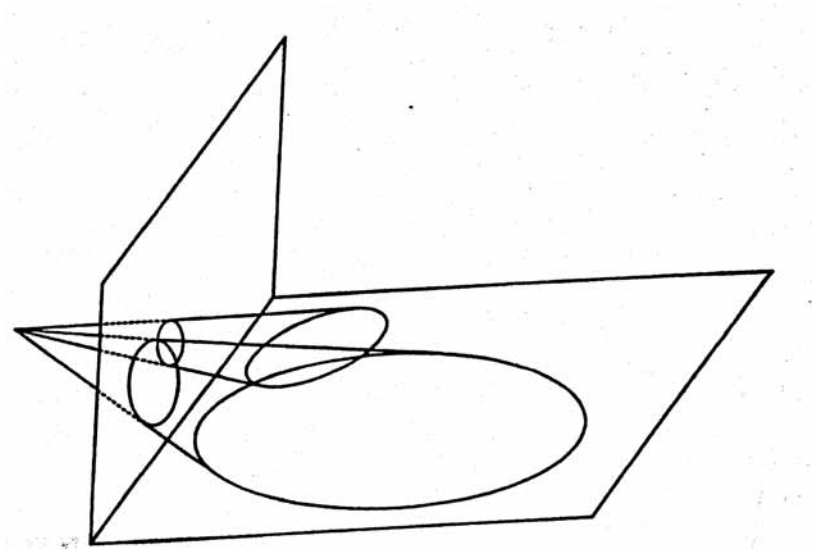
3.8 Λάθος ισχυρισμοί μεγάλων μαθηματικών

3.8.1 Poncelet

Ο Poncelet μελέτησε τις κωνικές τομές: έλλειψη, παραβολή, υπερβολή. Οι κωνικές τομές είναι οι εικόνες που δημιουργεί ο κύκλος μετά την προβολή του. Αν ένας κύκλος τοποθετηθεί μεταξύ μιας φωτεινής πηγής και ενός επιπέδου, δημιουργείται σκιά στο επίπεδο, η οποία σκιά σχηματίζει μια κωνική τομή.

Ο Poncelet πήρε έπειτα ένα ζευγάρι κύκλων. Η προβολή τους των δύο κύκλων με ποικίλα μεγέθη και σε διάφορες θέσεις μεταξύ τους δημιούργησε εικόνες δύο ελλείψεων ή μιας έλλειψης και μιας παραβολής. Οι δύο κωνικές τομές άλλες φορές δεν τέμνονταν και σε άλλες περιπτώσεις είχαν δύο κοινά σημεία.[2]

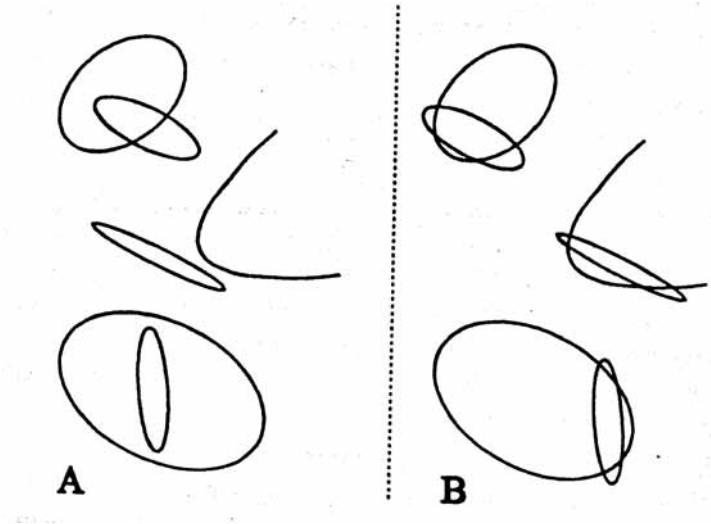
Ο Poncelet τότε διατύπωσε την ερώτηση, αν κάθε ζευγάρι κωνικών τομών μπορεί να δημιουργηθεί με αυτό τον τρόπο. Βρήκε ότι αν οι δύο κωνικές τομές δεν έχουν παραπάνω από δύο κοινά σημεία, τότε πραγματικά μπορούν να δημιουργηθούν από την προβολή δύο



κύκλων.

Επίσης παρατήρησε ότι αν δύο κωνικές τομές έχουν τρία ή τέσσερα κοινά σημεία δεν μπορούν να δημιουργηθούν από την προβολή δύο κύκλων. Το συμπέρασμα αυτό είναι εύκολο να διαπιστωθεί: δύο κύκλοι των οποίων οι προβολές τέμνονται σε τρία ή τέσσερα σημεία θα πρέπει και οι κύκλοι να έχουν τρία ή τέσσερα κοινά

σημεία αντίστοιχα. Όμως δύο κύκλοι δεν μπορούν να έχουν πάνω από δύο σημεία τομής.



Έτσι ο Poncelet ήρθε αντιμέτωπος με μια αδύνατη κατάσταση. Αυτό ήταν μια δύσκολη κατάσταση για αυτόν, διότι η θεωρία που είχε αναπτύξει θα ήταν ευκολότερη αν κάθε ζευγάρι από κωνικές τομές προκύπτει από την προβολή δύο κύκλων. Η κατάσταση αυτή δεν είναι ασυνήθιστη στα μαθηματικά και αυτό που πολλές φορές γίνεται είναι η δημιουργία ενός συστήματος που προέρχεται από την επέκταση ενός ήδη υπάρχοντος προκειμένου να συμπεριληφθούν και άλλες περιπτώσεις.

Αν αποτελεί εμπόδιο ότι στους φυσικούς δεν είναι πάντα δυνατό να βρεθεί η διαφορά τους, τότε επεκτείνεται το σύστημα περιλαμβάνοντας και τους αρνητικούς αριθμούς. Ομοίως αν κάποιος θεώρησε αδύνατη τη τετραγωνική ρίζα των αρνητικών αριθμών, εισήγαγε τους φανταστικούς αριθμούς.

Ίσως να ήταν αναμενόμενο από τον Poncelet να κάνει κάτι αντίστοιχο. Για παράδειγμα να εισάγει φανταστικούς κύκλους. Αλλά ο Poncelet δεν επέκτεινε τα γεωμετρικά αντικείμενα, εισήγαγε μια επέκταση των κανόνων των μαθηματικών επιχειρημάτων. Θεώρησε ότι εφόσον είναι αδύνατο δύο κωνικές τομές με τέσσερα σημεία τομής να προέρχεται από την προβολή δύο κύκλων παρόλα αυτά είπε ότι έστω ότι αυτό ισχύει.

Ο Poncelet κωδικοποίησε την επέκταση αυτή του κανόνα σε μια νέα αρχή. Η αρχή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Καθώς κάθε ζευγάρι από κωνικές τομές με δύο ή λιγότερα κοινά σημεία είναι η εικόνα δυο κύκλων, ισχυρίστηκε ότι αυτή η αρχή ισχύει γενικά και από αυτό μπορεί κάποιος να συνάδει από τον συλλογισμό ότι η ιδιότητα απευθύνεται και για τις κωνικές τομές με τα τέσσερα κοινά σημεία τομής.

Ωστόσο το δεύτερο σκέλος της παραπάνω πρότασης είναι λανθασμένο. Ο τρόπος σκέψης του Poncelet δεν είναι πλέον συνηθισμένος στα μαθηματικά. Ορθά επιχειρήματα δεν μπορούν να παραχθούν από λάθος συλλογισμούς.

3.8.2 Euler

Ο Euler(1707-1785) θεώρησε τη συνάρτηση f(x,y)= $\sqrt{\chi^2 + ny^2}$ και υπολόγισε τις μερικές παραγώγους για χ²+ny² >0 :

$$\frac{\theta f}{\theta x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + ny^2}}$$

$$\frac{\theta f}{\theta y}(x,y) = \frac{yn}{\sqrt{x^2 + ny^2}}$$

$$\frac{\theta^2 f}{\theta y \theta x}(x,y) = \frac{-nxy}{\left(x^2 + ny^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\theta^2 f}{\theta x \theta y}(x,y) = \frac{-nxy}{\left(x^2 + ny^2\right)^{3/2}}$$

Ο Euler τότε ανακοίνωσε ότι ισχύει γενικά $\frac{\theta^2 f}{\theta y \theta x}(x,y) = \frac{\theta^2 f}{\theta x \theta y}(x,y)$.

Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό χωρίς κάποιες επιπλέον προϋποθέσεις όπως φαίνεται από το επόμενο αντιπαράδειγμα.

Το αντιπαράδειγμα αυτό δόθηκε από τον Peano(1858-1932) [6].
Θεώρησε την συνάρτηση f(x,y)=xyg(x,y) όπου η g(x,y) ορίζεται σε μια γειτονιά της αρχικής συνάρτησης. Για αυτή τη συνάρτηση έχουμε

$$\frac{\theta f}{\theta x}(0,y) = \lim_{\chi \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{\chi} = \lim_{\chi \to 0} yg(x,y)$$

Η παραγώγιση της σχέσης ως προς y είναι

$\frac{\theta^2 f}{\theta \chi \theta y}(0,0) = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{\chi \to 0} g(x,y)\right)$, με την προϋπόθεση ότι αυτό το όριο υπάρχει.

Ομοίως έχουμε $\frac{\theta^2 f}{\theta \chi \theta y}(0,0) = \lim_{\chi \to 0}\left(\lim_{\chi \to 0} g(x,y)\right)$.

Πρέπει μόνο να επιλεγεί μια συνάρτηση g(x,y) που τα όρια της να είναι διαφορετικά. Αυτό συμβαίνει με την συνάρτηση $g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, αν $x^2+y^2>0$. για την παραπάνω συνάρτηση ισχύει $\lim_{x\to 0} g(x,y)=-1$ για όλα τα $y\neq 0$.

Το συμπέρασμα του Euler οδηγεί και στο παρακάτω παράδοξο:

Το 1/χ είναι ανεξάρτητο του χ .

Θα αποδείξουμε πρώτα το πιο γενικό συμπέρασμα: Έστω χ, y, z είναι δοσμένες συναρτήσεις ως προς u, v, w. Υπολογίζουμε το $\frac{\theta\chi}{\theta u}$ και το εκφράζομαι σε σχέση με το χ, y, z. Τότε το $\frac{\theta\chi}{\theta u}$ έτσι εκφρασμένο είναι ανεξάρτητο του χ.

Το $\frac{\theta\chi}{\theta u}$ είναι μια συνάρτηση των χ, y, z και είναι ανεξάρτητη του χ αν $\frac{\theta}{\theta\chi}\left(\frac{\theta\chi}{\theta u}\right)=0$

Από τον ορισμό της δεύτερης παραγώγου το πρώτο μέλος είναι $\frac{\theta^2\chi}{\theta\chi\theta u}$ και αν αντιστραφεί η σειρά ολοκλήρωσης, έχουμε $\frac{\theta^2\chi}{\theta u\theta\chi}$. Το κλάσμα αυτό με βάση τον ορισμό είναι $\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{\theta\chi}{\theta\chi}\right)$

Και $\frac{\theta\chi}{\theta\chi}=1$, οπότε $\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{\theta\chi}{\theta\chi}\right)$=0 άρα $\frac{\theta}{\theta\chi}\left(\frac{\theta\chi}{\theta u}\right)=0$, και το $\frac{\theta\chi}{\theta u}$ είναι ανεξάρτητο του χ.

Αν θεωρήσουμε συγκεκριμένα ότι $\chi = (2u)^{\frac{1}{2}}, y = (2v)^{\frac{1}{2}}$, $z = (2w)^{\frac{1}{2}}$.

Οπότε $\frac{\theta\chi}{\theta u} = \frac{\theta\chi}{\theta u} = (2u)^{-\frac{1}{2}} = \chi^{-1}$.

Καθώς το $\frac{\theta\chi}{\theta u}$ είναι ανεξάρτητο του χ, σημαίνει ότι το 1/χ είναι ανεξάρτητο του χ.

Φαίνεται λοιπόν ότι το συμπέρασμα του Euler στο συγκεκριμένο παράδειγμα οδηγεί στο παράδοξο αυτό αποτέλεσμα, γεγονός που υπογραμμίζει το ότι δεν είναι σωστό. Τόσο το αντιπαράδειγμα όσο και το παράδοξο κάνουν σαφές τι ισχύει σχετικά με τις μερικές παραγώγους με ένα τρόπο που μένει στο μυαλό των μαθητές, μια και παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα.

Είναι γεγονός ότι στα περισσότερα βιβλία μαθηματικών οι προτάσεις συνοδεύονται μόνο από αυτές που το αντίθετο είναι σωστό. Οπότε είναι σκόπιμο να παρουσιάζονται και παραδείγματα που το θεώρημα δεν ισχύει για να καλύπτεται έτσι όλο τα φάσμα της γνώσης.
Σαν παράδειγμα χρησιμοποιούμε το έξης θεώρημα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: U → R και χ_0 ανήκει στο U (εσωτερικό σημείο). Αν όλες οι πλευρικές παράγωγοι θf/θχ υπάρχουν σε μια γειτονία του χ_0 και είναι συνεχείς στο χ_0 , η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0.

Αντιπαράδειγμα
Ασυνεχής συνάρτηση της οποίας οι πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν παντού.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $R^2 \to R$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\chi_1\chi_2}{\chi_1^{\,2} + \chi_2^{\,2}}, \chi_1 + \chi_2 > 0 \\ 0, \chi_1 = \chi_2 = 0 \end{cases}$$

Οι πλευρικές παράγωγοι είναι στο μηδέν $f(x_1,0)=0$ για κάθε x_1 και $f(x_2,0)=0$ για όλα τα x_2 εκτός του μηδενός, η ύπαρξη των πλευρικών παράγωγων είναι εμφανής. Η συνάρτηση ωστόσο δεν είναι συνεχής στο μηδέν.

3.9. Λογικά παράδοξα

Στην τρίτη κατηγορία παραδόξων έχουμε τα λογικά παράδοξα τα οποία επέφεραν μεγάλη διαφοροποίηση στον τρόπο σκέψης των μαθηματικών. Η εμφάνιση των λογικών παραδόξων συνοδεύτηκε από μια κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών, εξαιτίας των ερωτημάτων που διατυπώθηκαν και σε ένα βαθμό αμφισβητούσαν όλο το φάσμα της μέχρι τότε παραδεκτής μαθηματικής δραστηριότητας. Τα γνωστότερα από αυτά είναι τα εξής:

Παράδοξο Russell(1872-1970)

Ας θεωρήσουμε το σύνολο Α όλων των συνόλων χ που έχουν την ιδιότητα : το χ δεν ανήκει στο χ. Αν το Α ανήκει στο Α, τότε το Α δεν ανήκει στο Α, γιατί σαν στοιχείο του Α ικανοποιεί την ιδιότητα των στοιχείων του Α, και επομένως το Α ανήκει στο Α. Δηλαδή σε οποιαδήποτε περίπτωση το Α είναι στοιχείο του Α και το Α δεν είναι στοιχείο του Α.

Το παράδοξο έγκειται γιατί δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο που να έχει σα στοιχείο τον εαυτό του.[4]

Το παράδοξο του Russell είναι εντυπωσιακό γιατί σχετίζεται με τη βασική ιδέα των συνόλων που είναι ο αριθμός των μελών του. Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο ορίζεται σαν κάτι για το οποίο ξέρουμε για κάθε δοσμένο αντικείμενο, αν είναι μέλος του συνόλου αυτού ή όχι [4]. Σε αυτό τον ορισμό ωστόσο η έννοια του μέλους δεν ορίζεται.

Για ένα πράγμα, φυσιολογικά, ένα σύνολο δεν είναι μέλος του εαυτού του. Για παράδειγμα ας σκεφτούμε το σύνολο των ποταμιών την Ηνωμένων Πολιτειών. Περιλαμβάνει το Μισσισιπί, τον Μισούρι, τον Κολούμπια και αρκετά άλλα μέλη. Δεν περιλαμβάνεται στο σύνολο ως μέλος το σύνολο όλων των ποταμίων των Ηνωμένων Πολιτειών.

Συνεπώς καλείται ως κανονικό είναι σύνολο που δεν περιλαμβάνει ως μέλος τον εαυτό του. Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα ακόμα κανονικό σύνολο και στα πραγματικότητα τα

περισσότερα σύνολα είναι κανονικά. Αλλά υπάρχουν και μη κανονικά σύνολα, για παράδειγμα το σύνολο όλων των συνόλων με περισσότερα από ένα μέλη.

Παράδοξο Cantor(1845-1918)

Το παράδοξο αυτό αναφέρεται στην πληθικότητα του συνόλου συνόλων και το συμβολίσουμε με Α. Η πληθικότητα του συνόλου όλων των συνόλων είναι Ρ(Α), είναι μεγαλύτερη από την πληθικότητα του Α. Επειδή όμως το Α είναι το σύνολο όλων των συνόλων θα πρέπει η πληθικότητα του να είναι η μέγιστη δυνατή. Οπότε το Α έχει τη μεγαλύτερη δυνατή πληθικότητα και το Α δεν έχει τη μεγαλύτερη δυνατή πληθικότητα.

Το παράδοξο προκύπτει γιατί δεν ορίζεται ως σύνολο το σύνολο όλων των συνόλων.

Σύμφωνα νε το θεώρημα του Cantor το δυναμοσύνολο του περιέχει ακόμα περισσότερα σύνολα. Το μεγαλύτερο σύνολο όλων είναι ταυτόχρονα το μεγαλύτερο και όχι το μεγαλύτερο σύνολο που υπάρχει [4].

Διαισθητικά ο μεγαλύτερος αριθμός που σκεφτόμαστε είναι το άπειρο. Σύμφωνα με την επιχειρηματολογία του Cantor αυτό δεν ισχύει, αλλά τελικά υπάρχουν όλο και μεγαλύτερα άπειρα.

Στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων κάθε τέτοιο σύνολο μπορεί να ξεπεραστεί προσθέτοντας ένα ακόμα στοιχείο.

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει με τα άπειρα σύνολα, διότι ένα τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να αυξηθεί ποσοτικά προσθέτοντας ακόμα ένα στοιχείο. [19]

Παράδοξο Burali –Forti

Το παράδοξο αυτό είναι ανάλογο του παραδόξου του Cantor.

Δεδομένου ενός διατακτικού αριθμού α υπάρχει πάντα ένας καθαρά μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός β. Αλλά ο διατακτικός αριθμός, που καθορίζεται σαν την ένωση όλων των διατακτικών αριθμών είναι ο

μεγαλύτερος δυνατός διατακτικός αριθμός. Έστω ότι αυτός ο αριθμός είναι το γ. Δεδομένου ότι υπάρχει διατακτικός αριθμός δ μεγαλύτερος του γ, ο γ έχει τις αντιφατικές ιδιότητες να είναι και να μην είναι ο μεγαλύτερος διατακτικός αριθμός.

Το παράδοξο αυτό δημιουργείται από το γεγονός ότι μπορεί να σχηματιστεί ένας διατακτικός αριθμός από τον προηγούμενο διατακτικό αριθμό.

4.

4.1 Η ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗΣ

Ένα ακόμη φαινόμενο που μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε δυσκολίες και σε λανθασμένη κατανόηση εννοιών είναι η παρουσίαση τους με πολύπλοκο τρόπο. Τα τεχνητά κατασκευάσματα πολλές φορές απομακρύνουν τις έννοιες από την αρχική τους θεώρηση και οδηγούν σε σύγχυση [12].

Παράδειγμα αποτελεί η παρουσίαση της έννοιας της ανθυφαίρεσης με τη χρήση των συνεχών κλασμάτων. Η χρήση αυτή είναι μια πιο δύσκολη και τεχνητή γραφή του ευκλείδειου αλγορίθμου που δεν εξυπηρετεί στην πραγματικότητα κάποιο σκοπό, παρά μόνο ίσως για να αποκτήσουν τα συνεχή κλάσματα χρηστικότητα μια και είναι ‘‘χαμένα’’ μαθηματικά.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να αποθαρρύνει ακόμη περισσότερο τους μαθητές που ήδη αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά. Μια τέτοια θεωρία είναι δυνατόν να εμποδίσει την ενεργή συμμετοχή των μαθητών, όχι εξαιτίας της φύσης των μαθηματικών θεωριών, αλλά λόγω του τρόπου παρουσίασης τους.

Η ανθυφαίρεση πρόκειται για την συνεχή αφαίρεση ακέραιων πολλαπλασίων ενός μεγέθους ή αριθμού από ένα άλλο, που σε κάθε βήμα είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη. Έχοντας γεωμετρικό χαρακτήρα θα πρέπει να ερμηνευτεί γεωμετρικά με τη βοήθεια του γνώμονα.

Γνώμονας ήταν αρχικά ένα αστρονομικό όργανο. Στη συνέχεια το συναντάμε ως ένα όργανο για την χάραξη ορθών γωνιών. Μπορεί να θεωρηθεί τι είναι το κομμάτι που απομένει, αν από ένα τετράγωνο αφαιρέσουμε ένα άλλο πιο μικρό τετράγωνο.

Στον ορισμό 2 του δευτέρου βιβλίου των στοιχείων, ο Ευκλείδης επεκτείνει την έννοια του γνώμονα για τα παραλληλόγραμμα.

Ο τελικός ορισμός του γνώμονα δίνεται από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα, ως εκείνο το οποίο προστιθέμενο σε οτιδήποτε καθιστά το όλο όμοιο με το αρχικό.

Όπως είναι γνωστό ο αλγόριθμος του Ευκλείδη είναι η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων αριθμών B_0 και B_1 όπου $B_0 > B_1$: $B_0=\alpha_0 B_1+B_2$ $B_1 > B_2$

$$B_1=\alpha_1 B_2+B_3 \quad B_2 > B_3$$

$$B_{i-1}=\alpha_{i-1} B_i+B_{i+1} \quad B_i > B_{i+1}$$

$$B_{n-1}=\alpha_{n-1} B_n+0$$

Άρα ο Μ.Κ.Δ είναι ο B_n.

Χρησιμοποιώντας τη γνωμονική προσέγγιση κάνουμε την έξης διαδικασία. Πολλαπλασιάζουμε την σχέση $B_0=\alpha_0 B_1+B_2$ με B_1 παίρνουμε $B_0 B_1 = \alpha_0 B_1^2+B_2 B_1$ το οποίο σημαίνει ότι το ορθογώνιο με διαστάσεις B_0 και B_1 είναι άθροισμα α_0 τετραγώνων πλευράς B_1 και ενός ορθογωνίου με διαστάσεις B_1 , B_2 .

Πολλαπλασιάζοντας αντίστοιχα με B_2, B_3

προκύπτουν οι σχέσεις $B_1 B_2 = \alpha_1 B_2^2+B_2 B_3$

$$B_2 B_3 = \alpha_2 B_3^2+B_3 B_4$$

Με αυτή τη διαδικασία φθάνουμε στο κοινό μέτρο. Θεωρώντας ως γνώμονα το τετράγωνο και χρησιμοποιώντας κάθε φορά ένα η περισσότερους γνώμονες, προσπαθούμε να φτάσουμε στην αλήθεια. Η ανθυφαίρεση αποτελεί δηλαδή μοντέλο απόκτησης της γνώσης. Η γνωμονική προσέγγιση είναι και γεωμετρική και αρχαϊκή οπότε βρίσκεται πολύ κοντά στην έννοια της ανθυφαίρεσης 12].

Το ότι η γνωμονική που χρησιμοποιεί τετράγωνο γνώμονα αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την αναζήτηση της αλήθειας, επιβεβαιώνεται από τον Αριστοτέλη και τους Πυθαγορείους. Ο Αριστοτέλης, στα Μεγάλα Ηθικά Νικομάχεια, θεωρεί τη δικαιοσύνη ως τετράγωνο αριθμό και μάλιστα ως τον αριθμό 4 για τους πυθαγορείους. Άρα προχωρούμε προς την αλήθεια με γνώμονα τη δικαιοσύνη. Η σχέση της πρακτικής ερμηνείας του ευκλείδειου αλγορίθμου και της δικαιοσύνης φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα [12].

Διότι οι αρχαίοι χρησιμοποιούσαν απλούς και σαφείς τρόπους για την παρουσίαση των θεμάτων και με τις οποίες διευκόλυναν την κατανόηση των ιδεών και της φύσης τους, χωρίς τη χρησιμοποίηση πολύπλοκων τεχνητών κατασκευών, οι οποίες μπορούσαν να προκαλέσουν σύγχυση.

Μέσα από αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι η απομάκρυνση των εννοιών από την αρχική τους μορφή και η αποκοπή τους από την πραγματική τους λειτουργία είναι πιθανό να δυσκολέψει την κατανόηση τους.

4.2 Παρανοήσεις και παράδοξα εξαιτίας της χρήσης διφορούμενων και ασαφών λέξεων.

Γενικά κάθε έννοια στα μαθηματικά δηλώνεται και από έναν ξεχωριστό όρο. Υπάρχουν βέβαια και εξαιρέσεις, όπου μια ονομασία χρησιμοποιείται με διαφορετική έννοια. Τότε είναι απαραίτητες επιπλέον διευκρινήσεις, αν δεν είναι ξεκάθαρο με ποια ιδιότητα εμφανίζεται η συγκεκριμένη έννοια [3].

Για παράδειγμα το τετράγωνο μπορεί να αναφέρεται στο γεωμετρικό σχήμα αλλά και στον εκθέτη μιας δύναμης. Η ρίζα μπορεί να αναφέρεται στη λύση μιας εξίσωσης ή στο συνώνυμο των άρρητων αριθμών.

Ασάφεια στην κατασκευή μιας πρότασης

Παράδειγμα: Πόσο κάνει τρεις φορές το τρία και εφτά;

Η πρόταση αυτή αφήνει να εννοηθούν δύο διαφορετικές διαδικασίες. Μπορούν να θεωρηθούν οι εξής πράξεις: $3\cdot3+7$ και $3\cdot(3+7)$.

Λάθος κατανομής

Το λάθος υφίσταται όταν ο όρος που έχει μια συλλογική ερμηνεία δίνεται με διαζευκτική.

Παράδειγμα: Όλες οι γωνίες του τριγώνου είναι ίσες με δύο ορθές.

Εδώ η λέξη ‘‘όλες’’ αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών. Ωστόσο η επιλογή της έκφρασης ‘‘όλες’’ μπορεί να εκληφθεί και ως ‘‘κάθε’’. Δηλαδή δημιουργείται η έκφραση πως η κάθε μία από τις γωνίες ενός τριγώνου είναι ίση με δύο ορθές.

Λάθος σύνθεσης

Το λάθος αυτό είναι το αντίθετο από το παραπάνω. Προκαλείται όταν μια έκφραση που έχει διαζευκτικό χαρακτήρα χρησιμοποιείται με συλλογικό.

Παράδειγμα: Όλες οι γωνίες ενός τριγώνου είναι μικρότερες από δύο ορθές.

Εδώ η λέξη ‘‘όλες’’ χρησιμοποιείται για να εκφράσει πως κάθε μία από τις γωνίες του τριγώνου είναι μικρότερη από δύο ορθές.
Παρόλα αυτά η έκφραση αυτή μπορεί να μη θεωρείται κατάλληλη, γιατί μπορεί να κατανοηθεί με την έννοια του αθροίσματος και να οδηγηθεί σε λάθος. Διότι στην ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι σωστή η πρόταση, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.

5. Το μοντέλο της δυναμικής λυτικής προβλήματος

Μια οικουμενική μέθοδος προσέγγισης των μαθηματικών ανεξάρτητη από το αντικείμενο που θέλουμε να διδάξουμε είναι το δυναμικό μοντέλο λυτικής προβλήματος, που προτάθηκε από τον C.A Torre το 1994. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στη διδασκαλία οποιουδήποτε θέματος [13].

Το επίθετο λυτικός εμφανίζεται στην κλασσική εποχή έχοντας τη σημασία αυτού που διαλύει κάτι ή απαλλάσσει από κάτι, ενώ στην ελληνιστική εποχή έχει αποκτήσει τη σημασία, αυτός που έχει την ικανότητα να επιλύει μαθηματικά προβλήματα. Επιπλέον στον Αριστοτέλη στα ‘‘προβλήματα’’ 949 α5 και στο ‘‘ρητορική προς Αλέξανδρο’’ 1403 α24 αναφέρεται ο όρος λυτική.

Το δυναμικό μοντέλο της λυτικής προβλήματος περιλαμβάνει 9 περιοχές. Τη διατύπωση προβλήματος, τη συλλογή πληροφοριών, τη διάγνωση, την πρόγνωση, την παραγωγή λύσεων, τη λήψη απόφασης, το σχεδιασμό, την εκτέλεση και την εκτίμηση. Οι τρείς πρώτες εργασίες ονομάζονται γνωστικές διαδικασίες και αποκτώνται με πείραμα παρατήρηση ή εφαρμογή της λογικής. Οι διαδικασίες αυτές χρησιμοποιούνται στην διδασκαλία κυρίως των θετικών επιστημών [17].

Οι τρείς επόμενες εργασίες αποτελούν τις αντιληπτές διαδικασίες οι όποιες προϋποθέτουν ένα συναισθηματικό τρόπο σκέψης. Οι διαδικασίες αυτές έχουν να κάνουν με τη διδασκαλία της τέχνης. Οι τρείς τελευταίες εργασίες είναι οι πραγματιστικές διαδικασίες και αφορούν πειραματικούς ή παρατηρητικούς τρόπους μάθησης. Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να αποτελέσουν εργαλείο στη διδασκαλία ικανοτήτων και επιδεξιοτήτων. Ο λύτης μπορεί να επισκεφτεί οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιοχές ανεξαρτήτως σειράς.

Η λυτική προβλήματος είναι το σύνολο όλων των διαδικασιών που είναι απαραίτητα για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος. Είναι ένα μοντέλο που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν σταθερές συμπεριφορές εξαρχής μέσα από

μια ολοκληρωμένη διαδικασία και όχι μέσα από μεμονωμένες στρατηγικές.

Εξάλλου τα προβλήματα είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι στα μαθηματικά και αποτελούν ξεχωριστό αντικείμενο έρευνας. Ιδιαιτέρα το πρόβλημα έγινε σημείο αναφοράς στη μαθηματική εκπαίδευση μετά την έκδοση του περίφημου βιβλίου του G.Polya, How to solve it (1945).[13]

Κάποιοι ερευνητές θεωρούν την επίλυση προβλήματος ως σκοπό της εκπαίδευσης άρα οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν αυτή τη δεξιότητα. Οι μαθητές καλλιεργούν την ικανότητα τους στην επίλυση προβλήματος η οποία θεωρείται βασική, για τον μετέπειτα τρόπο σκέψης τους μέσα στην κοινωνία.

Μια δεύτερη προσέγγιση αναφέρει ότι η επίλυση προβλήματος είναι μια δυναμική συνεχής διαδικασία. Οι ερευνητές που υποστηρίζουν αυτή την άποψη θεωρούν ότι είναι πιο σημαντική η στρατηγική που ακολουθούν οι μαθητές στην επίλυση, παρά η ορθότητα του αποτελέσματος.

Η τρίτη κατηγορία θεωρεί το problem-solving σαν ένα διδακτικό μοντέλο. Καθώς οι μαθητές προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα έρχονται αντιμέτωποι με ορισμούς και θεωρήματα. Προκύπτουν δυσκολίες μέσα από τις οποίες προβληματίζονται και έτσι δίνεται η ευκαιρία για την διδασκαλία νέων αντικειμένων.

Οι παραπάνω τρεις προσεγγίσεις του problem-solving περιλαμβάνει πολλά περισσότερα από την απλή επίλυση προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε είναι μια διαδικασία με πολλούς δρόμους και εναλλακτικές πορείες, που ο λύτης μπορεί να επιλέξει. Έχει τη δυνατότητα να περάσει από τις περιοχές του προβλήματος με διαφορετική σειρά, προκειμένου να προχωρήσει στην επίτευξη του στόχου. Η αποτελεσματικότητα αυτών των δρόμων που θα επιλέξει στη συνέχεια αξιολογούνται.

Η λυτική προβλήματος έχει το χαρακτηριστικό ότι ο λύτης δεν ξέρει εξαρχής τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος. Επιτυγχάνει το στόχο του μέσα από μία διαδικασία αναζήτησης δρόμων και επιλογών που ανακαλύπτει κάθε φορά ανάλογα με τις συνθήκες.

6. Η αξία των παραδόξων και των λαθών και ο παιδαγωγικός τους ρόλος.

Τα παράδοξα που αναφέρθηκαν εντάσσονται σε αυτά που εύκολα μπορεί ο μαθητής ή ακόμα και ο καθηγητής να οδηγηθεί. Αποτελούν αποτέλεσμα απροσεξίας ή παράληψης συνθηκών, από παρανόηση της εκφώνησης ή δείγμα ότι μια θεωρία ή ένα μαθηματικό πεδίο δεν έχει κατανοηθεί. Δεν έχει, στην περίπτωση των παιδιών, αποκτηθεί η απαιτούμενη γνώση σε όλη την έκτασή εξαιτίας της διδασκαλίας λόγω παλαιοτέρων γνώσεων των παιδιών που ‘‘αντιστέκονται’’ να τροποποιηθούν και να ενταχθούν στις νέες καταστάσεις.

Τα λάθη αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία προκειμένου να κινητοποιηθούν οι μαθητές και να αποκτήσουν κριτική σκέψη. Μπορούν να μάθουν να ελέγχουν σταδιακά τον εαυτό τους και να αντιμετωπίζουν αυτά που γράφουν με μεγαλύτερη προσοχή και επιφύλαξη

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν όπως παρουσιάστηκαν πριν: ο κύκλος χωρίς κανένα σημείο, όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή και ακόμα περισσότερο τα παραδείγματα ότι 7=13 και π/4=0, φέρνουν τους μαθητές απέναντι σε καταστάσεις που δε μπορούν παρά να τους προβληματίσουν. Τα αποτελέσματα έρχονται πολύ έντονα σε αντίθεση με όσα η λογική και η πραγματικότητα μας δείχνει.

Ακόμα και ο λιγότερο καλός μαθητής θα αναρωτηθεί για την απάντηση που προέκυψε ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι, γεγονός που θα οδηγήσει σε έναν έλεγχο των πράξεων και έναν προβληματισμό για τι είναι αυτό στο οποίο οφείλεται το αποτέλεσμα. Σημαντικό είναι ότι όλες οι αποδείξεις εξελίσσονται με έναν αληθοφανή τρόπο γεγονός έτσι που υπαγορεύει τους μαθητές να αναζητήσουν το λάθος σε κάτι βαθύτερο. Έχουν να σκεφτούν τη φύση των εννοιών που έχουν χρησιμοποιηθεί στα βήματα της απόδειξης και στη θεωρία που βρίσκεται πίσω από αυτές.

Η χρήση των παραδόξων λοιπόν αν γίνει με την κατάλληλη προετοιμασία από πλευράς καθηγητή, μπορεί να επιφέρει σημαντικά οφέλη στη διδακτική πράξη. Αν ο καθηγητής είναι εξοικειωμένος με τα τυπικά λάθη των μαθητών και γνωρίζει την αιτία που αυτά δημιουργήθηκαν, μπορεί μέσω των λαθών να κατακτήσει ευκολότερα τους στόχους της διδασκαλίας του.

Καταρχήν γίνονται κατανοητές καίριες θεωρίες των μαθηματικών με έναν διαφορετικό τρόπο από ότι συνήθως. Οι έννοιες παρουσιάζονται μέσα από παραδείγματα. Συναντώνται ως εργαλεία επίλυσης ασκήσεων ή ως θεωρίες που εξυπηρετούν τα στάδια μιας απόδειξης. Έτσι γίνονται πιο αντιληπτές μια και παρουσιάζονται όχι ξεκομμένες άλλα μέσα σε ένα πλαίσιο σχέσεων. Οι μαθητές μέσα από τα παραδείγματα επιτυγχάνουν την καλύτερη αφομοίωση τους μια και βλέπουν την λειτουργία κάθε έννοιας μέσα σε ένα οργανωμένο σύστημα σχέσεων. Η εντύπωση αυτής είναι πιο έντονη και αποτελεσματική από το να μένουν μόνο στην απλή παρουσίαση της έννοιάς και στις άμεσες εφαρμογές της.

Επίσης βλέποντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την λανθασμένη χρησιμοποίηση των θεωρημάτων, οι μαθητές κατανοούν την ανάγκη όλων των συνθηκών για την επίλυση της άσκησης. Συνειδητοποιούν ότι πρέπει να λαμβάνεται η έννοια ως ολότητα και να έχουμε υπόψη μας όλες τις παραμέτρους που ενδεχομένως έχει. Στα μαθηματικά αυτό είναι πολύ συχνό φαινόμενο μιας και πολλοί μαθητές κάνουν χρήση για παράδειγμα ενός τύπου, αδιαφορώντας ή αγνοώντας τους περιορισμούς που έχει.

Η παράλειψη ειδικών περιπτώσεων ή η γενίκευση τύπων που δε μπορούν να γενικευτούν είναι συχνά φαινόμενα μέσα στη στην αίθουσα διδασκαλίας. Με το να έρθουν οι μαθητές αντιμέτωποι με τα παράδοξα επαναπροσδιορίζουν τον τρόπο σκέψης τους. Βλέπουν ότι στον ορισμό για παράδειγμα μιας έννοιας δεν υπάρχουν πρωτεύοντα και δευτερεύοντα στοιχεία, όλα έχουν την βαρύτητα τους και συνθέτουν την έννοια στο σύνολο της.

Παρόμοιο ρόλο παίζει το σχήμα στη γεωμετρία. Οι μαθητές δεν δίνουν συνήθως μεγάλη σημασία στην κατασκευή του. Στις

μεγαλύτερες τάξεις δεν χρησιμοποιούν ούτε τα απαραίτητα γεωμετρικά όργανα. Αυτό οφείλεται βέβαια και στο γενικότερο κλίμα της σχολικής τάξης που δεν έχει δώσει την απαιτούμενη σημασία στην αξία του σχήματος. Συχνά κατασκευάζεται κάτι που ‘‘μοιάζει’’ με ρόμβο ή τετράγωνο και ακριβώς για αυτό μπορεί να οδηγηθεί η απόδειξη σε ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα .

Ο φορμαλιστικός τρόπος που κυρίως αντιμετωπίζονται τα θέματα έχουν περιορίσει την εποπτεία που στην γεωμετρία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο. Μέσα από τα παράδοξα της γεωμετρίας γίνεται αντιληπτό ότι η σωστή κατασκευή του σχήματος βοήθα και στην κατανόηση και στην επίλυση της άσκησης. Οι μαθητές μαθαίνουν σε μεγαλύτερο βάθος τις γεωμετρικές έννοιες και σκέφτονται για την σωστή παρουσίαση των δεδομένων της άσκησης πάνω στο σχήμα. Λαμβάνουν υπόψη τους τις ιδιότητες κάθε στοιχείου καθώς το χαράσουν, ώστε να μην καταλήξουν σε παράδοξα αποτελέσματα.

Αυτό θα είναι ιδιαίτερα αναγκαίο και χρήσιμο γιατί τα παιδιά θα αποκτήσουν μια κριτική στάση απέναντι στα αξιώματα και θα δουν το σκοπό που εξυπηρετούν [3]. Εξάλλου το γρήγορο πέρασμα από τους ορισμούς σε αποδείξεις και παραγωγικούς συλλογισμούς, ίσως εμποδίζει τους μαθητές να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες. Διότι αν δεν δοθεί έμφαση στη συγκρότηση των γεωμετρικών εννοιών, οι ορισμοί κινδυνεύουν να εφαρμοστούν όπως είδαμε λανθασμένα ή σταδιακά να ξεχαστούν.

Η μάθηση στα μαθηματικά πρέπει να είναι εννοιολογική. Ο μαθητής πρέπει όχι μόνο να διδάσκεται ορισμούς, θεωρήματα και διαδικασίες αλλά και να καταβάλλεται προσπάθεια να κατανοεί τις ιδέες που υπάρχουν πίσω από την τυπική περιγραφή αυτών. Να κατανοεί τις βαθύτερες αιτίες που οδηγούν στα μαθηματικά αποτελέσματα.

Επίσης με την παρουσίαση των λαθών δημιουργείται ενδιαφέρον κατά τη διδασκαλία και η τάση στους μαθητές να ανακαλύψουν το ‘‘σκοτεινό’’ σημείο της απόδειξης. Δηλαδή μπορεί να αποτελέσει ένα κίνητρο για τη διδασκαλία η οποία μεταλλάσσεται σε μια διαφορετική μορφή μία και επιτρέπει την παρέμβαση των μαθητών στις αποδείξεις. Ο μαθητής γίνεται ενεργητικός μέσα στο μάθημα

καθώς προσπαθεί να δώσει λύση στα προβλήματα που δημιουργήθηκαν.

Τα παράδοξα αυτά μπορούν να στοχεύσουν στο συναίσθημα κατά κάποιο τρόπο των μαθητών καθώς τους παρακινεί να ανακαλύψουν, να συγκρίνουν, να προβληματιστούν καθώς και να αισθανθούν ικανοποίηση όταν φτάσουν στην αποκάλυψη της αλήθειας.

Επιπλέον τα παράδοξα και η συζήτηση που προκαλούν μέσα στην αίθουσα συμβάλουν στη "απενεχοποίηση'' του λάθους. Για πολλές δεκαετίες το λάθος ήταν εντελώς καταδικαστέο στη σχολική πρακτική. Αποτελούσε πηγή ποινών και αρνητικού κλίματος μέσα στην τάξη. Έπρεπε με κάθε τρόπο να αποφεύγεται μια και μπορεί να εμποδίσει την μάθηση και να δημιουργήσει παρανοήσεις στον μαθητή. Το λάθος εκτιμιόταν ως μια δυσλειτουργία της γνώσης του μαθητή, την οποία η σωστή μάθηση όφειλε να αποτρέψει. Οι μαθητές τα βιώνουν άσχημα γιατί το λάθος είναι συνώνυμο της αποτυχίας.

Με το να παρουσιάζονται αυτά μέσα στη σχολική διαδικασία βοηθούν τους μαθητές να δουν τα λάθη σαν αφορμή για μάθηση και μελέτη των εννοιών που εμπλέκονται στα παραδείγματα. Εξάλλου δεν βοηθάει καθόλου να εξηγηθούν τα λάθη με όρους έλλειψης εξυπνάδας.(Herbert Ginburg) [18]

Τα παράδοξα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν μέσα από μια σειρά αληθοφανών βημάτων προσδίδει στους μαθητές μια πρόσθετη τεχνική για την λύση των ασκήσεων. Είναι συχνό το φαινόμενο που οι μαθητές σε όλες σχεδόν τις βαθμίδες εκπαίδευσης, μόλις λύσουν ένα πρόβλημα συνεχίζουν παρακάτω χωρίς να επεξεργαστούν το αποτέλεσμα. Συνήθως μετά την επίλυση δε δαπανάται χρόνος ώστε να δουν ξανά τα δεδομένα σε σχέση με το αποτέλεσμα και την ισχύ της απάντησης. Αντιμετωπίζονται οι ασκήσεις μηχανικά και τελικά αυτό που ενδιαφέρει είναι να δώσουν μια κάποια απάντηση στο ζητούμενο.

Η ενασχόληση συνεπώς με τα παράδοξα θα δώσει έναυσμα ώστε να καταλάβουν οι μαθητές ότι οφείλουμε να προβληματιζόμαστε για την ορθότητα των όσων γράφουμε στην απόδειξη. Να μην μένουν στην επιφανειακή ισχύ τους, αλλά να διερωτώνται μετά το πέρας της

λύσης την ορθότητα του αποτελέσματος. Δίνεται επομένως έμφαση στην αναγκαιότητα της ‘‘δοκιμής’’ κατά κάποιο τρόπο της λύσης.

Τα παράδοξα που θίγουν σημαντικά θέματα των μαθηματικών είναι δυνατόν να φέρουν στην επιφάνεια τις παρανοήσεις των μαθητών και τις ελλείψεις τους πάνω σε αυτά. Μέσα από τις ερωτήσεις που θα γίνουν αλλά κυρίως μέσα από τα σχόλια των μαθητών στα βήματα των αποδείξεων, θα φανεί ο βαθμός κατανόησης των εννοιών. Γίνεται αντιληπτό η στάση των μαθητών ως προς τα συγκεκριμένα προβλήματα και κατά συνέπεια οι γνώσεις που κατέχουν.

Επίσης ενισχύεται η ανακατασκευή των γνώσεων που είχαν σε μία έννοια για παράδειγμα των ριζών και την προσαρμογή στη νέα θεωρία. Ουσιαστικά οι μαθητές συνειδητοποιούν μόνοι τους τα τυχόν λάθη τους και τις εσφαλμένες αντιλήψεις που είχαν για κάποιες ιδιότητες.

Είναι φανερό επίσης πως μέσα από όλη την διαδικασία επεξεργασίας και ενασχόλησης με τα προβλήματα που προκύπτουν εξαιτίας ελλείψεων και λανθασμένων εφαρμογών, ευνοείται ο διάλογος μέσα στην τάξη. Δίνεται η δυνατότητα στην έκφραση των διαφορετικών απόψεων και μέσα από τη συζήτηση που θα προκύψει να οδηγηθούν οι μαθητές στη γνώση με γόνιμο τρόπο. Εξάλλου η συμμετοχική διδασκαλία έχει θετική επίδραση στην εξέλιξη του μαθήματος. Κρατούνται ισορροπίες στην τάξη, χωρίς να δίνεται έμφαση μόνο στον καθηγητή (δασκαλοκεντρική διδασκαλία) ούτε μόνο στα παιδιά (παιδοκεντρική διδασκαλία). Στο βαθμό που ο διάλογος αυτός θα επιτευχθεί θα υπάρχει μια σωστή συνεργασία μαθητή και διδάσκοντος, καθώς και των μαθητών μεταξύ τους.

Η τάξη μετατρέπεται σε μια μαθητική κοινότητα η οποία αποφασίζει για την αλήθεια και την εγκυρότητα των ιδεών, εξετάζοντας κριτικά τις αιτιολογήσεις που δίνουν οι μαθητές. Ο καθηγητής δεν είναι πλέον ο μοναδικός που κρίνει. Υιοθετεί μια ενεργή στάση απέναντι στα μαθηματικά και οι μαθηματικές αλήθειες δεν θεωρούνται πλέον δεδομένες αλλά διαπραγματεύσιμες. Αντί να ακολουθηθεί από τη τάξη

μια ευθεία απόδειξη ο καθηγητής ωθεί τους μαθητές σε μια περιπέτεια, με σκοπό την ανακάλυψη και δημιουργία νέων μαθηματικών ιδεών.

Είναι γεγονός ότι τα μαθηματικά παράδοξα προϋποθέτουν ότι θα διαβαστούν με μεγάλη προσοχή. Μελετώντας τα πρέπει κάποιος να δει αν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες, την ύπαρξή ανεπίτρεπτων γενικεύσεων, και τη χρήση απαγορευμένων διαδικασιών. Όλα αυτά τα σημεία έχουν μεθοδολογική σημασία, καθώς στοχεύουν στην απόκτηση μιας ολοκληρωτικής γνώσης ενός θέματος, σε αντίθεση με την υπερβολική κυριαρχία της μνήμης που απαιτεί ο κυρίαρχος τύπος μάθησης. Οι μαθητές καλούνται να γνωρίζουν τις εξωτερικές εκφράσεις μιας έννοιας (συμβολική , γραφική) [3] και όχι το περιεχόμενο της.

Επίσης η χρήση των λαθών μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση του τρόπου έκφρασης των μαθητών. Συγκεκριμένα οι μαθητές οδηγούνται σταδιακά στο να μάθουν να εκφράζονται με ακρίβεια και σταθερότητα. Τα παιδιά αρχίζουν να κρίνουν την ορθότητα των όσων λένε και προβληματίζονται για την ορθότητα των ιδεών που προτείνουν οι συμμαθητές τους μέσα στην τάξη. Μέσα από αυτή τη διαδικασία επιστείται η προσοχή των παιδιών στα γεγονός ότι η “αντικανονικότητα’’ στη χρήση των λέξεων και εκφράσεων στα μαθηματικά δημιουργεί όχι μόνο δυσκολίες στη μάθηση τους, αλλά είναι και υπεύθυνη για εσφαλμένα συμπεράσματα.

Οι ασκήσεις που χρησιμοποιούνται για να ξεπεραστούν τα λάθη, φυσικά δεν εγγυώνται την απουσία παρόμοιων λαθών από τους μαθητές. Δίνουν όμως την πιθανότητα στο να καταλάβουν οι μαθητές και να ξεπεράσουν τα λάθη που πιθανόν να παρουσιάζονται, με γρηγορότερο ρυθμό. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενασχόληση με τα εσφαλμένα αποτελέσματα προϋποθέτουν από τους μαθητές όχι μόνο να χρησιμοποιήσουν τους κανόνες για να αποφύγουν τα λάθη, αλλά ελέγχουν το βαθμό που είναι εξοικειωμένοι με τα μαθηματικά αντικείμενα της κάθε απόδειξης.[3]

Ειδικά στην περίπτωση παρουσίασης παραδόξων τα οποία έχουν γίνει από μεγάλους και καταξιωμένους μαθηματικούς, οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι τα λάθη δεν αφορούν μόνο αυτούς άλλα μπορούν να γίνουν από όλους. Τα λάθη δηλαδή δεν είναι απαραίτητο να

σηματοδοτούν έλλειψη κατάρτισης ή γνώσεων, αφού γίνονται και από μαθηματικούς που είναι διακεκριμένοι και έχουν συμβάλλει στην εξέλιξη των επιστημών.

Μια σειρά από μαθηματικούς θεώρησαν τις δυσκολίες που τους παρουσιάστηκαν ως μια δύναμη που θα διαμόρφωνε στην συνέχεια την εξέλιξη των μαθηματικών. Οι ανωμαλίες με τις οποίες ήρθαν αντιμέτωποι αποτέλεσαν ένα πολύτιμο εργαλείο ώστε στη συνέχεια να προβούν σε σημαντικές ανακαλύψεις.

Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι σύμφωνα με την Πιαζετική άποψη είναι παράλληλες οι πορείες μεταξύ του τρόπου που ο κάθε μαθητής κατασκευάζει τη μαθηματική γνώση και του τρόπου που η ανθρωπότητα κατασκευάζει αυτή τη γνώση.[1] Για αυτό είναι σημαντικό να παρουσιάζονται τα λάθη και τα παράδοξα που εμφανίστηκαν στην εξέλιξη των μαθηματικών .Επιπροσθέτως γίνεται αντιληπτό ότι τα λάθη είναι συνυφασμένα με την πορεία των μαθηματικών. Μέσα στην εξέλιξη τους υπάρχουν πληθώρα λαθών, εσφαλμένων αντιλήψεων και συμπερασμάτων τα οποία σε καμία περίπτωση δεν εμπόδισαν την εξέλιξη των θεωριών. Αυτοί που τα έκαναν ήταν άνθρωποι με γνώσεις που μέσα από τα λάθη, τα αδιέξοδα και τις αντιπαραθέσεις έφτασαν στην αλήθεια.

Η σωστή διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει με κάποιο τρόπο να συμπεριλαμβάνει την ιστορία τους, διότι αυτό δείχνει ότι τα μαθηματικά είναι ένα ζωντανό μάθημα. Ίσως αυτό αποτελεί μια εξήγηση γιατί τόσοι πολλοί μαθητές όλων των βαθμίδων βρίσκουν τα μαθηματικά βαρετά, άτονα και χωρίς ενδιαφέρον. Έχει να κάνει με τον τρόπο που συνήθως διδάσκονται, δηλαδή τα μαθηματικά χωρίς την ιστορία τους.[1]

Σύμφωνα με τον Robert L.Hayes *«είναι λάθος στρατηγικής να προσπαθεί κάποιος να διδάξει μαθηματικά χωρίς αναφορά στο κοινωνικό και φιλοσοφικό τους υπόβαθρο»*.[7] Ιδιαίτερα στην περίπτωση ανάπτυξης των λαθών που παρουσιάστηκαν, υπάρχει και η άποψη ότι χρησιμοποιώντας τα παράδοξα ως εργαλείο ενδέχεται να οδηγήσει σε σύγχυση των γνώσεων των μαθητών από ότι να τους οδηγήσει στη μάθηση. Τα ιστορικά ωστόσο παραδείγματα δηλώνουν το

ακριβώς αντίθετο. Παρακινούν την δημιουργία των γνώσεων, δεν την απωθούν.

Η διατύπωση ιστορικών ανεκδότων με παράδοξα είναι ένα ενδιαφέρον τρόπος να δουν οι μαθητές ότι η σύγχυση είναι ένα μαθηματικό κομμάτι που κληρονομείται στη μελέτη των μαθηματικών. Αυτή ακριβώς η δυσκολία που τα λάθη αντιπροσωπεύουν είναι ένας οδηγός που θα φέρει τους μαθητές να εξερευνήσουν την κρυμμένη αλήθεια και να φτάσουν σε μια επιτυχημένη λύση.

Βέβαια πρέπει η ιστορία των παραδόξων και η παρουσίαση των λαθών να γίνει με κάποια, όπως αναφέρθηκε και πριν, προετοιμασία. Το καλύτερο αποσπάσμα μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχία αν δεν συμπεριλαμβάνονται οι σωστές λεπτομέρειες και δε δίνεται έμφαση στα καίρια σημεία.

Διότι η ιστορία δεν είναι σαν ένα κουτί με χρώματα που απλά χρησιμοποιούμε προκειμένου να γίνει η εικόνα των μαθηματικών πιο πολύχρωμη και για να κεντριστεί απλά το ενδιαφέρον των μαθητών.[7] Η ιστορία είναι από μόνη της ένα κομμάτι στα μαθηματικά. Είναι τόσο σημαντικό κομμάτι γιατί δίνει στα μαθηματικά έναν τρόπο ώστε να γίνουν πιο κατανοητά. Η παρουσίαση ανοίγει τους ορίζοντες των μαθητών και τους κάνει να αναρωτηθούν.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στα μαθηματικά το λάθος και η αναζήτηση του λάθους είναι αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας. Μέσα από συγκρούσεις ,αμφιβολίες και παράδοξες καταστάσεις στην ιστορία των μαθηματικών, κατασκευάστηκαν νέες έννοιες που με τη σειρά τους οδήγησαν στη δημιουργία νέων μαθηματικών πεδίων. Η ιστορία των μαθηματικών όπως είδαμε έχει δείξει αμέτρητες φορές ότι κάποιο λάθος ή αποτυχία στο να αναπτυχθεί κάποιος στόχος (πχ η απόδειξη του αιτήματος της παραλληλίας) οδήγησε σε απρόσμενα αποτελέσματα (πχ τη δημιουργία των μη ευκλείδειων γεωμετριών).

Τα λάθη και οι αντιφάσεις έχουν το ρόλο τους μέσα στη σχολική τάξη, αφού μέσα από αυτά ο μαθητής αναδιοργανώνει τις γνώσεις του και αναγνωρίζει τις αδυναμίες του. Τα λάθη μπορούν να αποτελέσουν ένα ισχυρό εργαλείο διάγνωσης των μαθησιακών δυσκολιών και άρα της άμεσης καταπολέμησης τους. Εξάλλου για την αναγνώριση ενός λάθους ή μιας αντίφασης, σημαντικοί παράγοντες είναι οι γνώσεις του μαθητή και η εργασία του. Ο Balacheff τονίζοντας την πρώτη συνθήκη αναφέρει ότι η αντίφαση δεν υπάρχει από μόνη της, αλλά σε σχέση με το γνωστικό σύστημα του μαθητή.[23]

Άρα η αξιοποίηση του μπορεί να φέρει στην επιφάνεια δυσκολίες και λανθασμένες αντιλήψεις, που χωρίς το κατάλληλο ερέθισμα δε θα είχαν την ευκαιρία να αναδειχθούν. Είναι ωφέλιμο να ξεφύγουμε από το δίπολο ότι οι μαθηματικές καταστάσεις στην τελική τους μορφή είναι σωστές ή λανθασμένες.

Εξάλλου ίσως σε μια ιδανική εκπαίδευση ο δάσκαλος δε θα διέπραττε κανένα λάθος και ο μαθητής σε ένα τεστ που θα ακλουθούσε θα έδειχνε, δίνοντας σωστές απαντήσεις ότι τα είχε καταλάβει όλα τέλεια. Αυτή η εικόνα δεν είναι καθόλου ρεαλιστική και ούτε ποτέ θα μπορέσει να γίνει. Οπότε τα μαθηματικά παράδοξα και αντιφάσεις μπορούν να αποτελέσουν ένα ακόμα όχημα που θα οδηγήσουν τους μαθητές στη κατανόηση και αποσαφήνιση πληθώρα μαθηματικών εννοιών.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στην τριμελή επιτροπή και ιδιαίτερα στον επιβλέπων καθηγητή κ. Ιωάννη Αραχωβίτη για την πολύτιμη βοήθεια του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Barnett Janet Haines: *Using history to teach mathematics*, Katz Victor. M.A.A (2000)

[2] Boss J.M.Henk: *Lectures in the history of mathematics*. A.M.S-L.M.S (p 2-5)

[3] Bradis V.M.-Minkovskii V.L.-Kharcheva A.K: *Lapses in mathematical reasoning,* Dover publications, INC. New York.(1937)

[4] Bunch Bryan: *Mathematical fallacies and paradoxes,* Dover publications, INC. New York (1982)

[5] Heath L. Thomas: *The thirteen books of the elements*, Dover publications, INC. New York (1925) .

[6] Hairer –Wanner: *Analysis by its history*, Springer. New York (2000) (p 304,306,312)

[7] Heiede Torki –Calinger Ronald: *Vita mathematica*, M.A.M. New York (1996)

[8] Kasner E.-Newman J.: *Mathematics and imagination*, Dover publications, INC. New York.

[9] Maxwell.E.A : *Fallacies in mathematics*, Cambridge university press. (1958)

[10] Nitsa Movshovitz-Hadar- John Webb: *one equals zero*, Springer-Verlag. New York.(1998)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[11] Αναπολιτάνος Διονύσιος: *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών,* Νεφέλη . Αθήνα (1984)

[12] Αραχωβίτης Ιωάννης: *Ευκλείδειος αλγόριθμος: η πρακτική, η γεωμετρική και η προκύπτουσα φιλοσοφική του ερμηνεία*. 18^{ο} πανελλήνιο συνέδριο μαθηματικής παιδείας.

[13] Γεωργιόπουλος .Γ: *Εφαρμοσμένη λυτική προβλήματος. Πολλαπλές λύσεις και παραλλαγές προβλημάτων στην άλγεβρα και τη γεωμετρία*. Διπλωματική εργασία. Βιβλιοθήκη τμήματος μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α. Αθήνα (2006)

[14] Κολέζα Ευγενία : *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*.Leader books. Αθήνα (2000)

[15] Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. :Ευκλείδη ‘‘Στοιχεία’’ (3 τόμοι), Αθήνα (2001)

[16] Παπαναστασίου Κ. Παπαναστασίου. Κ. Ε.: *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.* Παπαναστασίου. Κ., Ε Παπαναστασίου Κ. Λευκωσία (2005)

[17] Πρίντεζης Γ.: *Η κατηγορική άποψη των VAN HIELE και άλλες οικουμενικές μέθοδοι προσέγγισης των μαθηματικών.* Διπλωματική εργασία. Βιβλιοθήκη τμήματος μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α. Αθήνα (2006)

[18] Σπύρου Παναγιώτης: *Επιστημολογία μαθηματικών-σημειώσεις παραδόσεων*, Αθήνα 2005.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[19] Clark Michel : *Τα παράδοξα από το Α ως το Ω. Ενάλιος* , Αθήνα (2002)

[20] Davis P.J.-Hersh R.: *Μαθηματική εμπειρία*, Τροχαλία. Boston (1981)

[21] Henry Michel: *Διδακτική των μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, τμήμα μαθηματικών (2001)

[22] Margolinas Claire: *Η σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών*, Σαββάλας. Αθήνα (2003)

Πίνακας ονομάτων

Αριστοτέλης 12, 15, 19, 100, 104
Εύδοξος 12
Ευκλείδης 9, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 23,24, 74, 76, 99, 100
Ζήνωνας 15, 74, 79
Ήρωνας 100
Πρόκλος 9,12, 21
Πτολεμαίος 13
Ποσειδώνιος 13

Balacheff 114
Ballis 29
Bernouli 29
Bolyai 14
Bolzano 51
Burali 97
Galileo 16, 75
Cantor 17, 97
Carnot 28,28
Cauchy 17
D Alembert 29
De morgan 50
Euler 92, 94, 95
Forti 97
Fourier 55
Gauss 15
Ginburg 108
Hayes 112
Lambert 13, 14
Legendre 13, 14
Liebniz 78
Lobachevsky 14

Peano 92
Saccheri 13, 14, 15
Poncelet 89, 90, 91
Russell 74, 96
Sainsburry 9
Torre 104
Waistrass 17