Διαπανεπιστημιακο - Διατμηματικο Προγραμμα
Μεταπτυχιακων Σπουδων στη

«Διδακτικη και Μεθοδολογια των Μαθηματικων»

Απο Τη Διαισθηση Του Συνεχους Στη Θεμελιωση Των Πραγματικων Αριθμων

Μορφω Ιακωβου

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Παναγιωτης Σπυρου

Πανεπιστήμιο Αθηνών · Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα · 2006

Αφιερώνεται στους γονείς μου,
Αδάμο και Μαρία

Περιεχόμενα

1 Διαίσθηση του Συνεχούς. 1

1.1 Η διαίσθηση. 1

1.1α′ Διάκριση διαίσθησης αντίληψης. 12

1.1β′ Οι έννοιες της διαίσθησης και της λογικής. 13

1.2 Το συνεχές. 15

1.2α′ Αντιληπτικό και διαισθητικό συνεχές. 20

1.2β′ Μαθηματικό συνεχές. 26

2 Τα παράδοξα του Ζήνωνος και το συνεχές. 39

2.1 Η σχολή των Ελεατών και ο Ζήνων. 39

2.2 Τα παράδοξα του Ζήνωνος. 43

2.3 Η θεωρία της διαίσθησης και τα παράδοξα του Ζήνωνος. 48

3 Οι πραγματικοί αριθμοί. 55

3.1 Εισαγωγικά. 57

3.2 Τι θεωρούμε γνωστό. 61

3.3 Δεκαδικά αναπτύγματα των στοιχείων του $\mathbb{Q}_0^+$ 61

3.3α′ Μετατροπή ρητού $\rho \geq 0$ από κλασματική μορφή σε δεκαδική μορφή. 62

3.3β′ Δεκαδικό ανάπτυγμα ρητού $\rho \geq 0$. 63

3.3γ′ Διάταξη ($<$) των ρητών $\rho \geq 0$ και λεξικογραφική διάταξη του συνόλου των δεκαδικών αναπτυγμάτων τους. 71

3.4 Το σύνολο $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών. 79

3.4α′ Διάταξη των στοιχείων του $\mathscr{G}$. 79

3.4β′ Ιδιότητες των στοιχείων του $\mathscr{G}$. 82

3.4γ′ Προσδιορισμός των $\rho' + \rho''$, $\rho'\rho''$, $\rho' - \rho''$, ρ'/ρ''. 96

3.4δ′ Πρόσθεση στο σύνολο $\mathscr{G}$. 99

3.4ε′ Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathscr{G}$. 105

3.4ς΄ Αφαίρεση στο σύνολο $\mathscr{G}$. 112
3.4ζ΄ Διαίρεση στο σύνολο $\mathscr{G}$. 115
3.5 Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. 119
3.5α΄ Απόλυτη τιμή. 121
3.5β΄ Διάταξη στο σύνολο $\mathbb{R}$. 121
3.5γ΄ Πρόσθεση στο σύνολο $\mathbb{R}$. 124
3.5δ΄ Αφαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$. 129
3.5ε΄ Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathbb{R}$. 133
3.5ς΄ Διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$. 136

Α΄ Τομές Dedekind. 139

Β΄ Το σύνολο $\mathbb{R}$ αξιωματικά θεμελιωμένο. 147

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Διάφοροι τύποι των μαθηματικών. 5
1.2 Εννοιολογική εξέλιξη. 7
1.3 Ανώτερη μαθηματική σκέψη. 9
1.4 Θεώρημα Bolzano 11
1.5 Ισοδυναμία δύο διαστημάτων. 28
1.6 Το άπειρο δυαδικό δένδρο. 37
1.7 Κλιμακωτή συνάρτηση. 38

2.1 Το παράδοξο διχοτομίας 43
2.2 Το παράδοξο Αχιλλέα - χελώνας 44

3.1 Η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού 58
3.2 Γενικό μοντέλο του εννοιολογικού σχηματισμού 59

Α΄.1 Καταμερισμός ρ 139
Α΄.2 Καταμερισμός $\sqrt{2}$ 141
Α΄.3 Καταμερισμοί x, x' 143
Α΄.4 Καταμερισμός x'' 144
Α΄.5 Άθροισμα $x + x'$ 145

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων της διπλωματικής εργασίας κ. *Παναγιώτη Σπύρου* Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ, για το πλούσιο υλικό που μου έδωσε και πρότεινε να διαβάσω· για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε και για τις υποδείξεις που έχει κάνει στην εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. *Διονύσιο Λάππα* Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ, για τις υποδείξεις που έχει κάνει στην εργασία και το βιβλίο που μου πρότεινε να διαβάσω· και τον κ. *Μυτιληναίο Μιχάλη* Καθηγητή του Τμήματος Πληροφορικής Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, που με βοήθησε να κατανοήσω θέματα που αφορούσαν τη Λογική και για τις διορθώσεις που έχει κάνει στις σχετικές παραγράφους. Όπως επίσης, για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν.

Θα ήταν παράληψη μου να μην ευχαριστήσω:
Τον κ. *Διονύσιο Αναπολιτάνο* Καθηγητή και Πρόεδρο του Τμήματος ΜΙΘΕ ΕΚΠΑ για τις εργασίες και το βιβλίο που μου παρείχε, που διαφορετικά δεν θα μπορούσα να τα αποκτήσω.

Τον κ. *Αντώνη Τσολομύτη* Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αιγαίου, που με βοήθησε να λύσω πρόβλημα που είχα αντιμετωπίσει στο πρόγραμμα LaTeX, κατά τη συγγραφή της εργασίας.

Την *κα. Ξένια Βαμβακούση*, μαθηματικό M.Ed, PhD, μεταδιδακτορική ερευνήτρια στο εργαστήριο Βασικής κι Εφαρμοσμένης Γνωσιακής Επιστήμης του τμήματος ΜΙΘΕ ΕΚΠΑ, για τα άρθρα που μου παρείχε.

Τους διδάσκοντες του ΠΜΣ που στα πλαίσια των μαθημάτων τους που παρακολούθησα, με βοήθησαν να εξειδικεύσω και να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου.

Τους συμφοιτητές και τις συμφοιτήτριες, που είχαμε συνεργαστεί σε ομαδικές εργασίες που διεξάχθηκαν στα πλαίσια των μαθημάτων.

Τους φίλους και φίλες που μου συμπαραστάθηκαν και με βοήθησαν με το δικό τους τρόπο.

Τέλος, τους γονείς μου για τη συνεχή στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, με κάθε δυνατό τρόπο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μια βιβλιογραφική μελέτη της διαίσθησης του συνεχούς και της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών. Οι άρρητοι αριθμοί γίνονται γνωστοί στα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συγκεκριμένα στη δευτέρα γυμνασίου διαμέσου συγκεκριμένων παραδειγμάτων· και στη τρίτη τάξη ενιαίου λυκείου (της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης) οι μαθητές μαθαίνουν ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και ότι παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα. Κατά μεγάλο βαθμό οι μέχρι τότε γνώσεις, για τους πραγματικούς αριθμούς, στηρίζονται στη διαίσθηση της συνέχειας της ευθείας γραμμής. Ο αυστηρός συνολοθεωρητικός καθορισμός τους γίνεται μόνο στα πρώτα έτη της ανώτατης εκπαίδευσης.

Ένας από τους βασικούς στόχους της εργασίας είναι η πλήρης ανάπτυξη των πραγματικών αριθμών, με όσο το δυνατόν πιο προσιτό τρόπο· λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη τη θεωρία της διαίσθησης και τις σύγχρονες γνωστικές θεωρίες, οι οποίες εντάσσονται στη Ψυχολογία των Μαθηματικών.

Σχετικά με τη δομή της εργασίας αναφέρεται ότι, στο πρώτο κεφάλαιο διερευνώνται οι έννοιες της διαίσθησης και του συνεχούς. Εξετάζεται το τι θεωρείται διαίσθηση και ποιος είναι ο ρόλος της στη Διδακτική των Μαθηματικών αλλά και στην επιστήμη των Μαθηματικών. Επίσης, γίνεται μια φιλοσοφική προσέγγιση της έννοιας του συνεχούς. Ακολούθως, εξετάζονται οι πηγές των δυσκολιών της κατανόησης και της εξήγησης του συνεχούς. Διερευνάται η έννοια του μαθηματικού συνεχούς, όπως επίσης οι έννοιες του σημείου και του συνόλου. Τελικά παρουσιάζουμε πως από το διαισθητικό συνεχές οδηγηθήκαμε στο μαθηματικό συνεχές· δηλαδή, στην κατασκευή και στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναφερόμαστε στις αντινομίες (ή παράδοξα) του Ζήνωνος· τα οποία αναμφισβήτητα υπήρξαν, κατά καιρούς, η αφορμή για τη μελέτη της συνέχειας (με την ευρεία έννοια) και τα οποία πρόβαλαν τις εννοιολογικές δυσκολίες που σχετίζονται με έννοιες όπως είναι του απείρου και της πυκνότητας. Επίσης, παρουσιάζουμε τις διαισθητικές δυσκολίες που εμφανίζουν σύμφωνα με τη *θεωρία της διαίσθησης* του Fischbein.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη κατασκευή των πραγματικών αριθμών όπως αυτή γίνεται βάση του αριθμητικού ορισμού των θετικών άρρητων αριθμών με τα δεκαδικά αναπτύγματα. Περιγραφικά η πορεία που

ακολουθήσαμε είναι η ακόλουθη: Κατασκευάσαμε το διατεταγμένο σύνολο των απόλυτων αριθμών με τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της αυτοπάθειας, της αντισυμμετρικότητας, της μεταβατικότητας, της τριχοτομίας, της πυκνότητας και της πληρότητας· πήραμε τους «συμμετρικούς» αριθμούς αυτών των αριθμών και δείξαμε ότι το σύνολο που κατασκευάζεται (των πραγματικών αριθμών) επίσης ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες και ότι είναι ένα διατεταγμένο αλγεβρικό σώμα. Σημειώνουμε ότι, η παρούσα πορεία που ακολουθούμε, είναι σύμφωνη με το προτεινόμενο μοντέλο της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού στη *θεωρία εκπαγμάτωσης (reification)* της Sfard.

Επίσης, στο Παράρτημα Α΄, αναφερόμαστε στον εναλλακτικό συνολοθεωρητικό ορισμό των αρρήτων με τομές Dedekind και στον ορισμό της πρόσθεσης βάση των τομών Dedekind. Στο παράρτημα Β΄ παρουσιάζονται τα αξιώματα που χρησιμοποιούνται στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών· τα οποία στην κατασκευαστική πορεία που ακολουθήσαμε, στο τρίτο κεφάλαιο, είχαν παρουσιαστεί υπό τη μορφή θεωρημάτων και ιδιοτήτων.

Κλείνοντας, κρίνεται ότι πρέπει να διευκρινιστεί ο τρόπος γραφής της διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, τα αποσπάσματα που είναι γραμμένα με πλάγια γραμματοσειρά, στα Κεφάλαια 1 και 2, έχουν ληφθεί αυτούσια από την πηγή στην οποία γίνεται αναφορά, χωρίς να έχει γίνει κάποια συνειδητή αλλαγή. Επίσης, οι φράσεις που δεν είναι γραμμένες με πλάγια γραμματοσειρά και έχουν τουλάχιστο μια αναφορά, είναι η γενική ιδέα που έχει δανειστεί από την αντίστοιχη ή τις αντίστοιχες πηγές.

Αθήνα, Μάρτιος 2006
Ιακώβου Μόρφω

Κεφάλαιο 1

Διαίσθηση του Συνεχούς.

Η μαθηματικοποίηση του συνεχούς για αιώνες συναντούσε στη πορεία της τεράστιες δυσκολίες. Συγκεκριμένα από την εποχή του Αριστοτέλη μέχρι τον 19° - 20° αιώνα. Γιατί υπήρξε τόσο μεγάλη δυσκολία να φτάσουμε στο πλήρη καθορισμό του μαθηματικού συνεχούς;

1.1 Η διαίσθηση.

Η σημασία της διαίσθησης για την κατανόηση των μαθηματικών, η συμβολή και ο ρόλος της στην ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής (mathematical reasoning) και κατ' επέκταση της μαθηματικής επιστήμης, επισημαίνεται από μελετητές που ανήκουν στον επιστημονικό χώρο της γνωστικής ψυχολογίας και των μαθηματικών (Bruner 1960 pp. $66-77$, Fischbein 1987 pp. 11, Longo 1998, Poincare 1997, Τουμάσης 1999 σελ: 323).

Η διαίσθηση μας επιτρέπει να βλέπουμε το στόχο από μακριά, δημιουργώντας ένα πλάνο βάση του οποίου μπορεί να κινηθεί με καθορισμένα, βαθμιαία βήματα η αναλυτική σκέψη. Είναι κοινά παραδεκτό ότι δεν μπορεί να μας προσφέρει ούτε την αυστηρότητα, ούτε τη βεβαιότητα. Παρά ταύτα είναι το εργαλείο της επινόησης, αφού επιτρέπει μεγάλα νοητικά άλματα και ελευθερία στο συλλογισμό.

Η λέξη «διαίσθηση» παράγεται από την αρχαία λέξη «διαίσθησις» η οποία παράγεται από το πρόθεμα «διά» και την λέξη «αἴσθησις»· δηλαδή, διαμέσου των αισθήσεων.

Ο λεξικολογικός χαρακτηρισμός της είναι ο ακόλουθος (Vinner 2002):

- *Δράση διαλογισμού.*

1. *Άμεση κατανόηση ή γνώση.*
2. *Γνώση ή πεποίθηση που αποκτάται με τη διαίσθηση.*
3. *Η δύναμη ή η ευχέρεια να επιτυγχάνεται η κατάκτησης της άμεσης γνώσης ή η γνώση χωρίς την έλλογη σκέψη και το συμπερασμό.*

- *Γρήγορη και σε ετοιμότητα ενόραση (insight).*

Κάποιος μπορεί να αντιλαμβάνεται τον όρο «άμεση» (immediate), όπως διατυπώνεται στο πιο πάνω απόσπασμα, ως αυθόρμητη, αυτόματη, αδιαμεσολάβητη από άλλα σκεπτικά ή ότι δεν έχει μεσολαβήσει η λογική. Όμως είναι αυτό; Καμία από αυτές τις ερμηνείες δεν αποδίδει τη σημασία της· ούτε όλες μαζί. Διότι στη διαισθητική σύλληψη μαθηματικών εννοιών, όπως είναι του σημείου, επεμβαίνει και η λογική ή συνδυασμοί της· γίνεται μια επεξεργασία τους από το νου, μια περιγραφή τους, χωρίς αυτή να είναι μαθηματική περιγραφή, η οποία μετά μόνο μέσα στη δομή μπορεί να κατανοηθεί ως αντικείμενο.

Ο Hilbert, στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα, θεώρησε μη ορίσιμες έννοιες του αξιωματικού του συστήματος της γεωμετρίας - αυτές του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου-καθορίζοντας τις με σχέσεις των οποίων η περιγραφή γίνεται εφικτή μέσω των αξιωμάτων της Γεωμετρίας (Hilbert 1995). Η μόνη κατανόηση και εξήγηση αυτών των εννοιών είναι μέσα στη λειτουργία τους, μέσα στα αξιώματα της γεωμετρίας του. Έκτοτε, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση των μαθηματικών ακολουθείται σε γενικά πλαίσια μια εκδοχή του αξιωματικού συστήματος του Hilbert, απαιτώντας έτσι τη διαισθητική προσέγγιση αυτών των εννοιών που παρουσιάζονται ως πρωταρχικές.

Η διαίσθηση έχει μια δομή η οποία έχει τα δικά της σκεπτικά,τους δικούς της συλλογισμούς· έχει μια δομή σκέψης. Η ίδια «βιάζεται» να βρει το συνολικό,το διαμορφωμένο σφαιρικά και εικονικά, έτσι ενδεχομένως να στηρίζεται σε λάθος αρχές. Συγκεκριμένα, μια λανθασμένη διαίσθηση, προκύπτει από μια *«διαδικασία συμπίεσης»* (compression process) που υπόκειται ένα ανεπαρκή *«δομικό σχήμα»* (structural schema) (Fischbein 1999, pp. 49).

Στη διαίσθηση έχουμε διαβαθμίσεις και διαφορετικά πλαίσια του τι εννοούμε διαίσθηση μπορεί να εννοούμε ένα πρόχειρο ορισμό, μπορεί να εννοούμε μια πρόχειρη περιγραφή η οποία δεν είναι τυπικά αποδιδομένη, μπορεί να εννοούμε μια έννοια στην οποία δρα η λογική για να τη προσδιορίσει αλλά τη προσδιορίζει μόνο με περιγραφή και όχι μέσω ενός τυπικού ορισμού.

Ο Bruner αναφέρεται σε μια αμφίβολη εκδοχή που ο Webster λέει: *«Διαίσθηση είναι η άμεση αντίληψη ή γνώση»* (Bruner 1960, σελ: 70). Ένας τέτοιος

ορισμός, όπως ο παραπάνω, μοιάζει να ταυτίζει την έννοια της διαίσθησης με την έννοια της αντίληψης· φαίνεται να υιοθετείται μια σύγχυση μεταξύ των δύο όρων. Αυτός ο ορισμός δεν θα μπορούσε να είναι ολωσδιόλου αποδεκτός από τον Fischbein, αφού διακρίνει ρητά τη διαφορά μεταξύ της διαίσθησης και της αντίληψης.

Για τον Fischbein η διαίσθηση είναι ένας τύπος γνώσης και αναφέρει ως προπαρασκευαστικό ορισμό της ότι, *η διαισθητική γνώση χαρακτηρίζεται από την αυταποδειξιμότητα (self-evidence), του κατα προσέγγιση υπολογισμό (extrpolativeness), την εξαναγκαστικότητα (coerciveness), και τη σφαιρικότητα (globality)* (Fischbein 1987, pp. 14). Στη συνέχεια δίνει ένα νέο ορισμό της αναφέροντας ότι είναι, *ένα είδος γνώσης το οποίο δεν βασίζεται σε επαρκή εμπειρικό πειστήριο ή σε αυστηρά λογικά επιχειρήματα, και παρ΄ όλα αυτά, κάποιος έχει την τάση να την αποδέχεται ως βέβαιη και προφανή* (Fischbein 1987, pp. 26).

Το απόσπασμα που ακολουθεί, εκτός από την περιγραφή που δίνει για τους τρόπους με τους οποίους εφαρμόζεται η διαίσθηση στα μαθηματικά, παρέχει πληροφορίες για το ρόλο και γενικότερα τη φύση της διαίσθησης στη μαθηματική επιστήμη.

Στα μαθηματικά η διαίσθηση χρησιμοποιείται με δύο βασικούς τρόπους. Από τη μια πλευρά, λέμε ότι σκέφτεται κάποιος διαισθητικά όταν ξαφνικά φθάνει στη λύση ενός προβλήματος που του έχει βασανίσει πολύ στο παρελθόν, χωρίς να μπορεί ακόμη να δώσει μια τυπική λύση. Από την άλλη πλευρά θεωρείται κανείς μεγάλος μαθηματικός όταν είναι σε θέση, μέσω της διαίσθησης του, να κάνει γρήγορα επιτυχημένες εικασίες ή να διαισθάνεται ποια από τις διάφορες πιθανές μεθόδους λύσης ενός προβλήματος θα είναι τελικά η πιο αποδοτική και γόνιμη (Τουμάσης 1999, σελ: 146).

Η «τυπική λύση» που αναφέρεται πιο πάνω είναι η λύση που εντάσσεται στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος, ενός μαθηματικού μοντέλου όπως καθορίζεται σε μια μαθηματική θεωρία. Στο πλαίσιο αυτό οι έννοιες καθορίζονται με ακρίβεια προσφέροντας ένα ακλόνητο θεμέλιο για τη μαθηματική θεωρία.

Η ιστορία των Μαθηματικών δείχνει ότι οι έννοιες αναπτύσσονται σταδιακά, κυρίως σε χρονικό διάστημα αιώνων. Μαθητές και φοιτητές δεν έχουν συνείδηση ότι πολλοί ορισμοί (και ομοίως, και εναλλακτικοί προς αυτούς ορισμοί) παρουσιάζουν «αδύνατα σημεία», δηλαδή, αποκλίσεις μεταξύ του τυπικού ορισμού μιας έννοιας και της κατάστασης που θέλουμε να χαρακτηρίσουμε την έννοια αυτή (Kronfellner 2003, σελ: 249).

Ένας «*προσωπικός*» ορισμός έννοιας, μπορεί να είναι ένας αντιλαμβανό-

μενος δοθέν ορισμός έννοιας ή ένας ορισμός που κατασκευάζεται από το ίδιο το άτομο συνδυάζοντας πολλές *«διαδικασίες»* (processes) που ενεργοποιούνται συνειδητά και ασυνείδητα, ενδεχομένως να διαφέρει από ένα *«τυπικό»* ορισμό έννοιας (Tall & Vinner 1981, pp. 152). Ο προσωπικός ορισμός έννοιας μπορεί να διαφέρει από καιρό σε καιρό και από άτομο σε άτομο· ενώ ο τυπικός ορισμός έννοιας είναι ο αντικειμενικός, είναι αυτός που δεν αλλάζει από καιρό σε καιρό ούτε από άτομο σε άτομο. Ο τελευταίος όντας ένας ορισμός έννοιας είναι αυτός που γίνεται αποδεκτός από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα.

Πολλές έννοιες στα μαθηματικά προτού καθοριστούν τυπικά, συναντήθηκαν με διαφορετική μορφή. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στη διαφορετικότητα της γνωστικής δομής που υπάρχει στο μυαλό του κάθε ατόμου, καθώς ενδίδει μια ποικιλία από προσωπικών νοητικών εικόνων (mental images) όταν καλείται μια έννοια (Tall & Vinner 1981, pp. 151).

Σύμφωνα με τον Σπύρου (2005, σελ: 257) μια από τις βασικές *ενεργητικές* (enactive) θεωρίες που καταγίνονται με την εξήγηση της λειτουργίας της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών είναι η θεωρία του procept, σύνθετη λέξη παραγόμενη από το process και concept, των Gray & Tall. Σ' αυτή τη θεωρία *«φαίνεται να αποκαλύπτεται ισχυρή ενόραση μέσα στους πολύ διαφορετικούς τρόπους στους οποίους τα άτομα κατασκευάζουν τις μαθηματικές έννοιες»* (Gray & Tall 2001).

Είναι η αναγνώριση των proceptual δομών που προσφέρει την ευελιξία (Gray & Tall 2001). Η δημιουργία των procepts, στηρίζεται στη *«ψευδοεμπειρική αφαίρεση»* των δράσεων (Tall, Thomas, Davis, Gray & Simpson 2000) και συμπεριφέρεται διαφορετικά σε διάφορα πλαίσια (Tall 1995, pp. 7). Μια δράση γίνεται διαδικασία όταν το υποκείμενο δύναται να περιγράψει όλα τα βήματα στη μεταφορά (transformation) χωρίς αναγκαστικά να τα εκτελεί. Μια διαδικασία γίνεται ένα αντικείμενο, όταν συνειδητοποιεί ότι οι μεταφορές μπορούν να δράσουν σε αυτό και είναι ικανό να κατασκευάσει τέτοιες μεταφορές (Tall, Thomas, Davis, Gray & Simpson 2000, pp. 225).

Με τη χρήση και το νόημα των procepts σχετίζεται η «εικόνα έννοιας» (concept image) (Tall & Vinner 1981, Tall 1995, Gray & Tall 2001). Αυτή περιέχεται σε μια γνωστική δομή, η οποία περιέχει νοητικές εικόνες (mental pictures), συνδυάζει διαδικασίες (processes) και ιδιότητες. Τα αισθητηριακά δεδομένα επηρεάζουν την «εικόνα έννοιας», διαφορετικά ερεθίσματα ενεργοποιούν διαφορετικά μέρη της, γι' αυτό σφαιρικά μπορεί να μην χαρακτηρίζεται από συνοχή και μπορεί να έχει απόψεις που να είναι τελείως διαφορετικές από το τυπικό ορισμό μιας έννοιας (formal concept definion) (Tall & Vinner 1981).

Σχήμα 1.1: Διάφοροι τύποι των μαθηματικών (πίνακας Tall 1995, μετάφραση όρων Σπύρου 2005 σελ: 265).

Κατά τη προκατανόηση ενός συγκεκριμένου θέματος, το υποκείμενο το κατανοεί ορθά ή λανθασμένα χωρίς απαραίτητα να παρουσιάζεται μια συνοχή στη σκέψη του· ενδεχομένως να εμφανίζεται η απουσία των νοητικών συνδέσμων των μερών της σκέψης αυτής. Έχει μια σύντομη διαισθητική εικόνα, μια εσωτερική αναπαράσταση που του επιτρέπει να κατανοεί κατά μέρη το θέμα αυτό.

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς ή εικόνες που οικοδομούν τα υποκείμενα για να αναπαραστήσουν την εξωτερική πραγματικότητα . . . η εσωτερική αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών είναι αναγκαία για την κατανόηση τους (Γαγάτσης & Ηλία 2004, σελ: 92 – 93).

Η γνώση η οποία εμπεριέχει αντικείμενα και αναπαραστάσεις αντικειμένων μέσα σ' ένα χώρο και σ'ενα χρόνο της *«καθαρής εποπτείας»*, αποτελεί επίκεντρο της φιλοσοφίας του Kant (Aquila 2004, pp. 250). Σ' αυτό το θεωρητικό φιλοσοφικό πλαίσιο, όταν μια αναπαράσταση μπορεί να δίνεται μόνο διαμέσου ενός μοναδικού αντικειμένου, αυτή η *«αναπαράσταση (representation) . . . είναι μια διαίσθηση»* (Aquila 2004, pp. 250).

Στην ουσία όταν αναφερόμαστε στη διαίσθηση πρόκειται για εσωτερικές αναπαραστάσεις ανακοινώσιμες ή μη τυπικά διατυπωμένες και συμβατικά

αποδεκτές· με αυτή συχνά συνδέονται οι προέννοιες και η προκατανόηση. Τελικά, η διατυπωμένη ιδέα στηρίζεται πάνω στη διαίσθηση, η οποία έχει ήδη κριθεί από τη λογική· είναι αυτή που είτε τυποποιεί μια διαισθητική περιγραφή, είτε την απορρίπτει.

Ο προ-ευκλείδειος «ορισμός» του σημείου των Πυθαγορείων εκφράζει λεκτικά το νοητικό αντικείμενο που μπορεί να κρύβεται πίσω από οποιαδήποτε εικόνα του εξωτερικού φυσικού κόσμου. Είναι μια περιγραφή που θέλει να ορίσει το σημείο, χωρίς να είναι η ίδια ένας ορισμός.

Ο επόμενος «ορισμός» σημείου που συναντάμε είναι αυτός στους *«Όρους»* του πρώτου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Ο Αρχιμήδης (250 π.Χ.), όπως λέει ο Αριστοτέλης, διαφωνούσε με τον Ευκλείδειο ορισμό του σημείου διότι περιείχε άρνηση· ο ίδιος θεωρούσε ότι ένας ορισμός δεν πρέπει να περιέχει άρνηση (Αριστοτέλης, «Αναλυτικά Ύστερα», [90b3 − 7]). Η φύση του Ευκλείδειου ορισμού προκαλεί την ανάγκη να σχολιαστεί αργότερα από τον Πρόκλο (450 μ.Χ.) (Πρόκλος, *«Σχόλια του εις πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη»*, [85, 1-96, 15]). Ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) αφήνει την έννοια του σημείου στη διαίσθηση, με αποτέλεσμα αυτό να ερμηνευθεί με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους από τους αρχαίους. Ένας τέτοιος «ορισμός» δεν είναι ορισμός με τη σύγχρονη σημασία της λέξης που συναντάται μέσα σε μια μαθηματική θεωρία που είναι θεμελιωμένη σε αξιώματα. Αλλά είναι μόνο μια περιγραφή η οποία βοηθά να αποδοθεί το κρυμμένο νόημα του τέλειου πλατωνικού αντικειμένου.

Είναι βασικό να γίνει η διάκριση μεταξύ των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όπου τα αντικείμενα ***περιγράφονται*** *και των προχωρημένων μαθηματικών όπου τα αντικείμενα* ***ορίζονται****. Και στις δύο περιπτώσεις η γλώσσα χρησιμοποιείται για να τυποποιηθούν οι ιδιότητες των αντικειμένων, αλλά στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης η περιγραφή κατασκευάζεται από την εμπειρία του αντικειμένου, στα προχωρημένα μαθηματικά, οι ιδιότητες του αντικειμένου κατασκευάζονται από του ορισμό* (Tall 1995, pp. 7).

Διακρίνονται λοιπόν δύο διαφορετικές κατασκευές, αυτή των πλατωνικών αντικειμένων και αυτή των αξιωματικών αντικειμένων, που διαφέρουν ουσιωδώς μεταξύ τους. Κατά τη πρώτη κατασκευή, η προσοχή του υποκειμένου εστιάζεται αρχικά στο αντικείμενο, ενώ κατά τη δεύτερη η προσοχή του υποκειμένου εστιάζεται αρχικά στον ορισμό (Tall & Thomas & Davis & Gray & Simpson 2000, pp. 238). Στη πρώτη, *«ο ορισμός είναι κατασκευασμένος από το αντικείμενο»*, *«αντικείμενο → ορισμός»* κατασκευή των πλατωνικών αντικειμένων· ενώ στη δεύτερη *«το αντικείμενο είναι κατασκευασμένο από του*

Σχήμα 1.2: Εννοιολογική εξέλιξη των διαφόρων μαθηματικών δραστηριοτήτων (πίνακας Tall 1995, μετάφραση όρων Σπύρου 2005 σελ: 265).

ορισμό», *«ορισμός → αντικείμενο»* κατασκευή των αξιωματικών αντικειμένων (Gray, Pinto, Pitta & Tall 1999, pp. 125· Tall & Thomas & Davis & Gray & Simpson 2000, pp. 238).

Η αναγκαιότητα της κατασκευής ενός νοητού αντικειμένου και ο ουσιαστικός ρόλος της που διαδραματίζει στη μαθηματική συλλογιστική επισημαίνεται στο κάτωθεν απόσπασμα:

Η τυπική διαδικασία αφαίρεσης, συνδεόμενη με τη κατασκευή της τυπικής έννοιας, όταν επιτυγχάνεται, οδηγεί σε ένα νοητικό αντικείμενο (mental object), το οποίο καθιστά πιο εύκολο στον ειδικό να κάνει επιδέξιους νοητικούς χειρισμούς (Harel & Tall 1991, pp. 39).

Επίσης κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί η ακόλουθη επισήμανση: *Συχνά έχει τονιστεί ... ότι, μπορεί να υπάρχουν* ***πολλές*** *διαδικασίες που ενέχονται στην εκπραγμάτωση (encapsulation) ενός νοητικού αντικειμένου (mental object) εκ των οποίων συνήθως όχι όλες κατατάσσονται να είναι μαθηματικές* (Tall & Thomas & Davis & Gray & Simpson 2000, pp. 233).

Η μετάβαση από την Ευκλείδεια γεωμετρία, σε αξιωματικές γεωμετρίες απαιτεί νοητικές λειτουργίες που διακρίνονται σε προχωρημένα στάδια *εξελικτικών θεωριών.* Μια τέτοια θέση ενισχύει την ανάγκη της πιο πάνω διάκρισης αλλά και επισημαίνει την αναγκαιότητα στη διδακτική των μαθηματικών, για

καθαρά εκπαιδευτικούς λόγους, της εναρμόνισης και της συνάρτησης των μαθηματικών με τις θεωρίες της γνωστικής ανάπτυξης. Έτσι ώστε οι απαιτούμενες νοητικές λειτουργίες των αντίστοιχων πράξεων στα μαθηματικά να συμβαδίζουν με την ήδη υπάρχουσα γνωστική ανάπτυξη, ενδεχομένως και την βιολογική ανάπτυξη, του υποκειμένου.

Κατά καιρούς έχει λεχθεί η άποψη ότι, η γνωστική ανάπτυξη κατά την εξέλιξη του ανθρώπινου βιολογικού εγκεφάλου ακολουθεί την ιστορική εξέλιξη ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. Αν ισχύει το γεγονός αυτό τότε εύλογα έχουν μορφοποιηθεί έτσι τα μαθηματικά μέσα στις βαθμίδες της δημόσιας εκπαίδευσης (πρωτοβάθμια-δευτεροβάθμια).

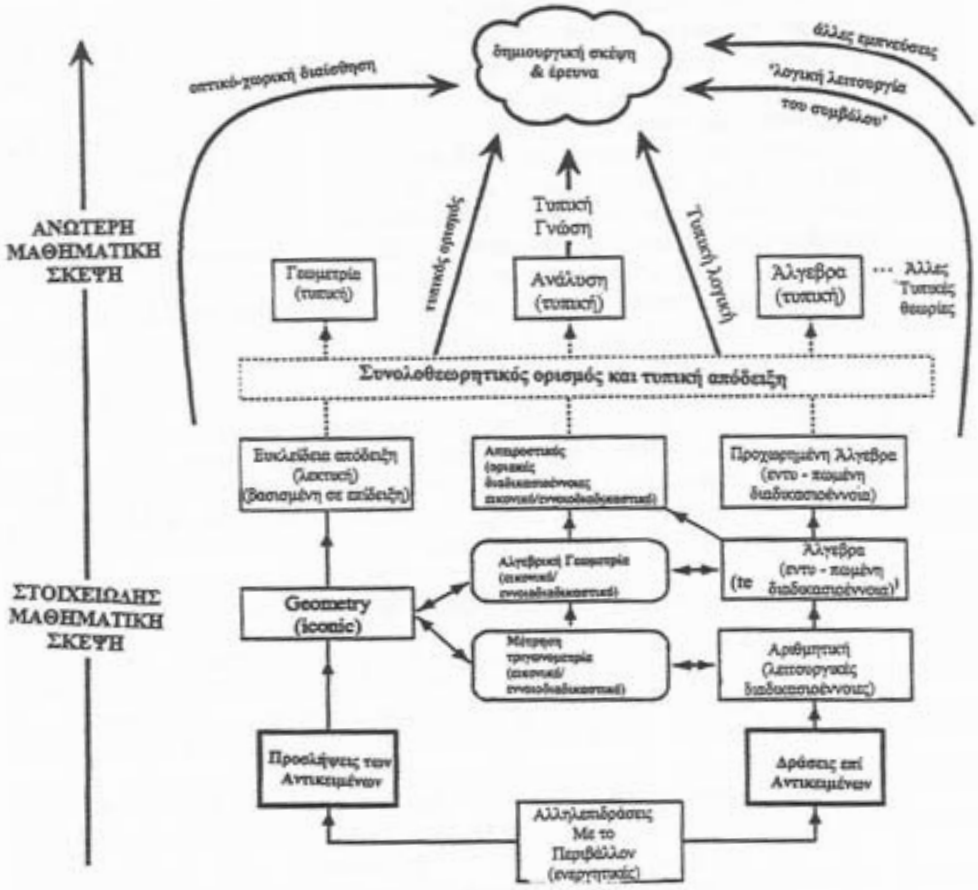
Σήμερα υπάρχουν διάφορες *«απεικονιστικές τεχνικές»* που κάνουν δυνατή τη μελέτη της δομής του εγκεφάλου, αλλά και τη μελέτη της λειτουργίας του εγκεφάλου. Η *«λειτουργική απεικόνιση του εγκεφάλου»* γίνεται δυνατή με την *«τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίων (PET) »* (Βοσνιάδου 2001, σελ: 70 − 72). Υπάρχουν μελέτες που δείχνουν ότι η αρχική λύση προβλήματος προκαλεί δραστηριότητα σε πολλά κέντρα του εγκεφάλου. Καθώς οι διαδικασίες λύσης (solution processes) γίνονται περισσότερο διαδικασίες ρουτίνας, οι περιοχές του εγκεφάλου που απαιτούνται λιγοστεύουν (Gray & Tall 2001, pp. 6).

Αυτό φαίνεται να μας δείχνει μια πιθανή επεξήγηση για το πώς επιτυγχάνεται, σε ατομικό επίπεδο, η ανάπτυξη της λογικής. Μεταβαίνοντας από διαδικασίες λύσεις σε διαδικασίες ρουτίνας, ο εγκέφαλος αποφορτίζεται και εκτελώντας νέες πιο πολύπλοκες νοητικές λειτουργίες δύναται να διεισδύει σε μεγαλύτερα βάθη σκέψης.

Σύμφωνα με το Ζερβό, η εξέλιξη του εγκεφάλου (evolution of brain) είναι πιο βασική από τη λογική που αναπτύσσεται από αυτήν· υπό την έννοια ότι η καθαυτή λογική προϋποθέτει μια πρότερη επαρκή εξέλιξη του εγκεφάλου (Zervos 1972, pp. 403). Επίσης εικάζεται ότι:

Η στάση της ανθρωπότητας προς την επιστήμη είναι επίσης επηρεασμένη από μια βέβαιη εξέλιξη του ανθρώπινου εγκεφάλου. Έτσι, δεν είναι αποδεκτή καμία «βιολογικά στατική» ανακάλυψη της επιστήμης, όταν αναφερόμαστε σε μεγάλες χρονικές περιόδους· και αν αυτές οι περίοδοι είναι πολύ μεγάλες, ακόμη και η αντίληψη της λογικής (και, φυσικά, της μαθηματικής) αλήθειας επηρεάζεται από αυτή την εξέλιξη του εγκεφάλου. Έτσι, δεν υπάρχει ελπίδα να τυποποιήσουμε, μια για πάντα, τα ευρήματα της λογικής, των μαθηματικών και της επιστήμης (Zervos 1972, pp. 402).

Με μια άποψη σαν τη πιο πάνω ενδεχομένως να συμφωνούσε ο Poincare, συμπληρώνοντας ότι η πορεία αυτή δεν είναι μάταιη διότι αν κάποια από αυτές τις διαδοχικές τυποποιήσεις, δηλαδή θεωρίες, *«διδάσκει μια αληθινή*



Σχήμα 1.3: Η ανάπτυξη της ανώτερης μαθηματικής σκέψης (πίνακας Tall 1995 pp. 172, μετάφραση όρων Σπύρου 2005 σελ: 270).

σχέση, αυτή είναι οριστικά βεβαιωμένη» (Poincare 1997, σελ: 197).

Στις μαθηματικές αξιωματικές θεωρίες γίνονται αποδεκτές είτε μαθηματικές αλήθειες που πηγάζουν από τη διαίσθηση και που τεκμηριώνονται με λογικούς συλλογισμούς δηλαδή με αποδείξεις, είτε μαθηματικές προτάσεις οι οποίες αποδεικνύονται. Ένας μαθηματικός μπορεί να αναγνωρίσει εύκολα μια απόδειξη, όμως όταν κληθεί να διαπραγματευτεί ερωτήματα που έχουν σχέση με την φύση της απόδειξης είναι πιθανό να αντιληφθεί ότι η έννοια της απόδειξης είναι επιστημολογικά πολύ περίπλοκη.

[Η] απάντηση στην ερώτηση τι θεωρείται απόδειξη, δεν είναι απόλυτη, αλλά καθορίζεται κοινωνικά από τη μαθηματική κοινότητα. Συνεπώς, μπορεί να εξαρτάται από επιρροές των πλαισίων μέσα στα οποία τίθεται το ερώτημα, όπως η ιστορική περίοδος, το πεδίο εντός των μαθηματικών ή το στόχο της απόδειξης στη δεδομένη περίπτωση (Dreyfus 2003, pp. 126).

Κρίνεται αξιοσημείωτο να αναφερθεί ότι υπήρξε διαφωνία, όσο αφορά του τι συνιστά απόδειξη, ακόμη και μεταξύ σύγχρονων μαθηματικών. Στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα για παράδειγμα, οι φορμαλιστές και οι ιντουισιονιστές είχαν αγεφύρωτη διαφορά πάνω στο θέμα της νομιμότητας των μη κατασκευαστικών αποδείξεων ύπαρξης (Dreyfus 2003, pp. 124). Η ύπαρξη για τα μαθηματικά αντικείμενα ταυτίζεται για τους δεύτερους με την κατασκευή τους (Βασιλείου 1973, σελ: 69). Για τους ιντουισιονιστές, μια απόδειξη που χρησιμοποιεί την αρχή της απόκλισης του τρίτου δεν είναι αποδεκτή· η μη αποδοχή αυτής της αρχής έχει σαν συνέπεια τη μη αποδοχή όλων των αποδείξεων που χρησιμοποιούν απαγωγή σε άτοπο και, επομένως, κάθε θεώρημα ύπαρξης που στην απόδειξη του χρησιμοποιείται κάτι τέτοιο δεν είναι θεώρημα, εκτός αν υποκατασταθεί η προηγούμενη απόδειξη του με μια απόδειξη καθαρά κατασκευαστική (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 278).

Τελικά, τι είναι απόδειξη για τους μαθηματικούς;

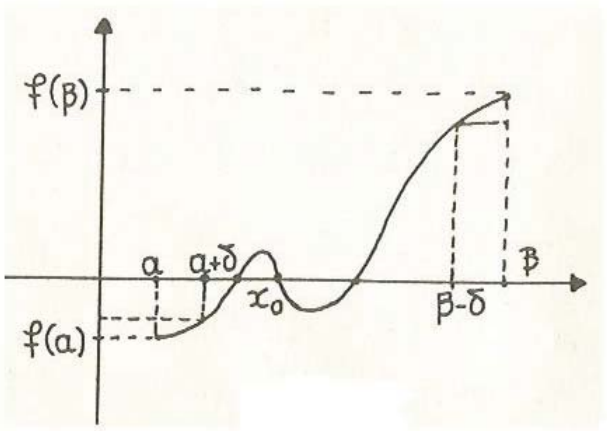
Με τη βοήθεια δύο παραδειγμάτων, γίνεται μια προσπάθεια να διευκρινιστεί και να αναλυθεί ως ένα βαθμό τι θεωρείται απόδειξη στη μαθηματική κοινότητα και τι διαίσθηση

1° Παράδειγμα: Στο δεύτερο ήμισυ του $19^{ου}$ αιώνα ο Jordan δίνει ορισμό της καμπύλης, *«ως το δρόμο που διαγράφει η συνεχής κίνηση ενός σημείου»* (Σπύρου 2005, σελ: 236). Έστω ότι έχουμε μια απλή κλειστή καμπύλη Jordan και δύο σημεία· το ένα μέσα στη καμπύλη και το άλλο έξω από τη καμπύλη. Τώρα η μαθηματική απόδειξη του γεγονότος, ότι μια γραμμή που ενώνει αυτά τα δύο σημεία τέμνει την απλή κλειστή καμπύλη Jordan, αποτέλεσε ένα δυσεπίλυτο πρόβλημα. Η διαισθητική εικόνα όμως που λαμβάνεται από την εξωτερική αναπαράσταση του σχήματος του αντίστοιχου γεγονότος,

δείχνει μια διασταύρωση δημιουργώντας έτσι την αίσθηση της ύπαρξης του σημείου τομής.

2ο Παράδειγμα: Το Θεώρημα Bolzano[1]: *«Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (α, β)»* (Πηχωρίδης 1996, σελ: $57 - 58$).

Η μαθηματική απόδειξη απόδειξη αυτού του Θεωρήματος, έχει ένα βαθμό δυσκολίας για το φοιτητή και δεν θεωρείται από τις πολύ σύντομες αποδείξεις που περιορίζονται σε λίγες γραμμές. Ενώ αν μεταφράσουμε αυτό που λέει το θεώρημα- δηλαδή, ότι αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση η οποία είναι κάτω από τον άξονα και πάνω από τον άξονα τότε αυτή θα τον τέμνει τουλάχιστο μια φορά- σε μια γραφική παράσταση φαίνεται να είναι κάτι το πολύ απλό και αυταπόδεικτο.



Σχήμα 1.4: Μια γραφική παράσταση της διατύπωσης του Θεωρήματος Bolzano (Πηχωρήδης 1996, σελ: 58).

Η γραφική παράσταση είναι μια περιγραφή η οποία, από μόνη της, δεν είναι δυνατή να θεωρηθεί ως απόδειξη στη μαθηματική κοινότητα, διότι δεν έχει τέτοιες συνδέσεις που να αναφέρεται σε εντελώς παραγωγικό, λογικό τρόπο σκέψης. Γίνεται όμως αναφορά σε αυτή για να δημιουργηθεί μια εποπτεία. Η λογική κρίνει αυτή την εποπτεία, γίνεται μια αφαίρεση της εποπτείας μέσα στο νου, λαμβάνοντας έτσι το υποκείμενο μια διαισθητική εικόνα.

Σημειώνεται λοιπόν ότι στη μαθηματική κοινότητα μια ιδέα που συλλαμβάνεται διαισθητικά, από μόνη της δεν είναι αποδεκτή ως μαθηματική γνώση.

[1]Το Θεώρημα αυτό αναφέρεται και σαν Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass.

Η διαισθητική σκέψη ελέγχεται και επενδύεται από τη λογική. Ο ρόλος και η φύση της διαίσθησης είναι συμπληρωματική. Η παρατήρηση αυτή έχει επισημανθεί από τις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, από σημαντικούς επιστήμονες που ανήκουν στο χώρο των μαθηματικών και στο χώρο της ψυχολογίας.

Ο Poincare το 1905 στο βιβλίο του "La valeur de la science" αναφέρει: ... *η λογική δεν αρκεί· πως η επιστήμη της απόδειξης δεν είναι ολόκληρη η επιστήμη, και ότι η εποπτεία*[2] *πρέπει να διατηρεί το ρόλο της ως συμπλήρωμα, θα έλεγα ως αντίβαρο ή ως αντίδοτο της λογικής* (Poincare 1997, σελ: 34).

Επίσης ο Brunner το 1960 στο βιβλίο του "The process of education" αναφέρει: *Πιστεύουμε ότι πρέπει να παραδεχτούμε ότι η διαισθητική σκέψη είναι συμπληρωματικής φύσεως* (Bruner 1960, σελ:69).

1.1α΄ Διάκριση διαίσθησης αντίληψης.

Κάθε άμεση, αυταπόδεικτη γνώση δεν είναι διαισθητική γνώση. Σημειώνεται ότι παρόλο που και η διαίσθηση και η αντίληψη έχουν αυτά τα χαρακτηριστικά (Fischbein 1987, 1999) σαφώς διαφέρουν μεταξύ τους. Η διάκριση είναι λεπτή αλλά ευκρινής.

Η γνώση της ύπαρξης ενός υλικού αντικειμένου διαμέσου των αισθήσεων μας, δεν αμφισβητείται ούτε χρειάζεται απόδειξη. Αυτό το είδος της άμεσης γνώσης ονομάζεται αντίληψη.

Ο Fischbein (1987, pp. 13) το λέει ξεκάθαρα ενώ ταυτόχρονα παραθέτει και ένα παράδειγμα:

Η αντίληψη είναι επίσης μια άμεση γνώση (immediate cognition). Αντιλαμβάνομαι το τραπέζι που είναι μπροστά μου. Δεν αμφιβάλλω για την ύπαρξη του. Δεν είναι ανάγκη να το αποδείξω. Αλλά αυτό δεν θα το ονομάσω διαισθητική γνώση.

Το ίδιο ισχύει και όταν αναφερόμαστε σε νοητά αντικείμενα. Όπως είναι τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται η επιστήμη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, όταν λέμε *βλέπω* ένα τρίγωνο ή μια μαθηματική ιδιότητα.

Η αντίληψη γραπώνεται άμεσα από τις αισθήσεις, γι΄ αυτό το λόγο είναι αισθητηριακή γνώση (sensorial cognition), (Fischbein, 1999 $pp.18$). Ενεργοποιείται από τα αισθητηριακά γεγονότα, δεσμεύεται με τα αισθητηριακά δεδομένα χωρίς ποτέ η γνώση που αποκτάται από την εμπειρία να περνά σ΄ ένα επίπεδο αφαίρεσης και να φθάνει σε μια θεωρία. Για να δημιουργηθεί η

[2] Η εποπτεία έχει ισοδύναμη ερμηνεία με την ενόραση για τον Poincare (Poincare 1997, σελ: 204).

αντίληψη απαιτείται η εμπειρική εποπτεία και τίποτα πέρα από αυτή.

Σε αντίθεση, η διαίσθηση παρά το γεγονός ότι και αυτή ενεργοποιείται από την εμπειρία (Fischbein 1987, Longo 1998, Vinner 2002), δεν περιορίζεται στη γνώση που αποκτάται από την εμπειρία, που κατασκευάζεται από τα αισθητηριακά δεδομένα. Υποδηλώνει ένα συλλογισμό, πέρα από τις πληροφορίες που προσφέρονται άμεσα. Είναι μια θεωρία διότι, γίνεται μια υπέρβαση καθώς αποδεσμεύεται από τα αισθητηριακά δεδομένα της εμπειρίας ώστε να εκφραστεί πλέον η γενική ιδέα. Η δημιουργία της διαίσθησης απαιτεί το πέρασμα από την εμπειρική εποπτεία στην καθαρή εποπτεία· θα μπορούσε να λεχθεί, ότι η διαίσθηση είναι η καθαρή εποπτεία σύμφωνα με την Καντιανή ορολογία. Η διαίσθηση είναι η διαισθητική γνώση η οποία υπερβαίνει τα ήδη δοσμένα γεγονότα που αποκομίζονται από τις δράσεις των εμπειριών.

Κάποιος μπορεί να επιβεβαιώσει ότι οι διαισθήσεις αναφέρονται σε αυταπόδεικτες δηλώσεις οι οποίες υπερβαίνουν τα παρατηρήσιμα γεγονότα (Fischbein 1987, pp. 14).

Εκφράζουν μια γενική ιδέα (μια έννοια, μια αρχή, μια αναπαράσταση, μια πρόβλεψη, μια λύση)...(Fischbein 1999, pp. 18).

Η διάκριση μεταξύ της διαίσθησης και της αντίληψης φαίνεται στο πιο κάτω παράδειγμα που αναφέρει ο Fischbein (1987, pp. 14):

*Αν κάποιος παρατηρήσει δύο ευθείες γραμμές που τέμνονται, **βλέπει** ότι σχηματίζονται ζεύγη απέναντι γωνιών που μεταξύ τους είναι ίσες. Δεν απαιτείται κάποια διαίσθηση. Αλλά ο ισχυρισμός «Δύο ευθείες γραμμές που τέμνονται καθορίζουν ζεύγη από απέναντι ίσες γωνίες», εκφράζει μια διαισθητική γενίκευση. Είναι η καθολικότητα της ιδιότητας που γίνεται αποδεκτή διαισθητικά.*

1.1β΄ Οι έννοιες της διαίσθησης και της λογικής.

Η διαίσθηση και η η λογική είναι γνώσεις, που διαφέρουν ως προς τον τρόπο με τον οποίο γίνονται αποδεκτές από το υποκείμενο. Ο συνήθης διαχωρισμός των δύο εννοιών γίνεται χρησιμοποιώντας τα επίθετα που προστίθενται στη γνώση. Αφενός η διαίσθηση είναι η άμεση γνώση, αφετέρου η λογική είναι έμμεση γνώση. Η διαίσθηση είναι η γνώση που χαρακτηρίζεται από την αυταποδειξιμότητα ενώ η λογική είναι η γνώση η οποία στηρίζεται σε αποδείξεις, λογικές αποδείξεις, οι οποίες περιέχουν παραγωγικούς ή επαγωγικούς συλλογισμούς.

Στα μαθηματικά και στην επιστήμη γενικότερα υπάρχουν ισχυρισμοί οι οποίοι εμφανίζονται είναι αμέσως αποδεκτοί, ως αυταπόδεικτοι, ενώ για κάποιους άλλους ισχυρισμούς μια απόδειξη είναι απαραίτητη ώστε να μπορούν

να γίνουν αποδεκτοί ως αληθείς. Είναι γνωστό ότι στο μαθηματικό συλλογισμό ό,τι φαίνεται να είναι άμεσα αποδεκτό, δεν είναι πάντα αποδεκτό. Κάποιος θα πρέπει να αποδείξει το σχετικό ισχυρισμό.

Η έννοια της διαίσθησης αναλύεται από το Bruner ως εξής:

Η διαίσθηση εξυπακούει αντίληψη του νοήματος, της σημασίας ή της δομής ενός προβλήματος ή καταστάσεως χωρίς να μεσολαβήσει η αναλυτική διαδικασία. Το αν, όμως, η διαίσθηση είναι σωστή ή όχι κρίνεται τελικά, όχι από την ίδια τη διαίσθηση, αλλά με την συνήθη μέθοδο της αποδείξεως. Είναι ωστόσο, η μέθοδος της διαισθήσεως που φθάνει γρήγορα σε υποθέσεις και ανακαλύπτει συνδυασμούς ιδεών πριν ακόμα διαπιστωθεί η αξία τους. Εν τέλει, η διαίσθηση προσκομίζει μια δοκιμαστική κατάταξη γνώσεων που ίσος δίνει την αίσθηση ότι τα γεγονότα είναι αυταπόδεικτά, ωστόσο μας βοηθά, κυρίως επειδή προσφέρει μια βάση εκκινήσεως για τη γνώση της πραγματικότητος (Bruner 1960, σελ: 70).

Επίσης διακρίνει την διαισθητική σκέψη από την αναλυτική σκέψη ως ακολούθως:

Η αναλυτική σκέψη προχωράει, χαρακτηριστικά, με βαθμιαία βήματα. Τα βήματα αυτά είναι σαφή και μπορεί κανείς συνήθως να τα περιγράψει. Αυτός ο τρόπος σκέψεως συνεπάγεται σχεδόν πλήρη συνείδηση των στοιχείων και των λειτουργιών στις οποίες βασίζεται. Μπορεί να βασίζεται στον προσεκτικό και συμπερασματικό λογισμό ή να χρησιμοποιεί συχνά τα μαθηματικά, ή τη λογική και μια σαφή διαδικασία. Ή μπορεί να λειτουργεί με μια κλιμακωτή διαδικασία επαγωγής και πειράματος, χρησιμοποιώντας τις αρχές της έρευνας και της στατιστικής αναλύσεως.

Αντίθετα με την αναλυτική σκέψη, η διαισθητική σκέψη δεν προχωράει με προσεκτικά, σαφή βήματα. Τείνει, μάλιστα, προς τη χρήση ελιγμών που βασίζονται, όπως φαίνεται, σε μια γενική αντίληψη όλου το προβλήματος. Φτάνει στη λύση, ορθή ή εσφαλμένη, με ελάχιστη συνείδηση της διαδικασίας. Σπάνια μπορεί κανείς να εξηγήσει πως έφτασε στη λύση και πιθανός να μην ξέρει σε ποιες απόψεις του προβλήματος βασίστηκε. Συνήθως η διαισθητική σκέψη βασίζεται στην οικειότητα με του σχετικό τομέα της γνώσεως και τη δομή του, πράγμα που επιτρέπει ελευθερία στην κίνηση, άλματα και τη χρήση της σύντομης οδού, ώστε να είναι ανάγκη να ελέγξουμε αργότερα τα συμπεράσματα με αναλυτικότερα μέσα, χρησιμοποιώντας τη συμπερασματική ή επαγωγική μέθοδο (Bruner 1960, σελ: $68-69$).

Αντίστοιχη διάκριση, της διαισθητικής γνώσης και της λογικής γνώσης, κάνει και ο Fischbein αναφέροντας ότι:

Κάποιος μπορεί να γενικεύσει και να υποθέσει ότι η καθαρή εποπτεία εμ-

φανίζεται σε δύο βασικές μορφές (Fischbein 1999, pp.18)*:*

- *Μια κατηγορία γνώσεων η οποία φαίνεται να είναι άμεσα αποδεκτή ως αυταπόδεικτη. Αυτές είναι οι διαισθητικές γνώσεις*[3].

- *Μια κατηγορία γνώσεων η οποία γίνεται έμμεσα αποδεκτή στηριζόμενη σε μια βέβαιη ρητή, λογική απόδειξη. Αυτές είναι οι λογικές γνώσεις ή λογικά βασισμένες γνώσεις (logically-based cognitions).*

Κρίνεται αξιόλογο να αναφερθεί ότι αφενός η χρήση της διαίσθησης σε μαθηματικούς συλλογισμούς επιφυλάσσει κινδύνους, αφετέρου η χρήση των αναλυτικών συλλογισμών σε κάθε στάδιο της διαδικασίας της σκέψης μπορεί να τη παραλύσει εντελώς. Είναι κοινά παραδεκτό ότι στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης συμβάλλουν και η διαίσθηση και η λογική.

Η λογική ... από μόνη της μπορεί να προσφέρει τη βεβαιότητα είναι το εργαλείο της απόδειξης· η εποπτεία είναι το εργαλείο της επινόησης (Poincare 1997, σελ: 37).

Δεν υπάρχει σχεδόν καμιά ανακάλυψη προερχόμενη καθαρά από τη λογική και μόνο. Η παρέμβαση της ενόρασης, που πηγάζει από το ασυνείδητο, είναι αναγκαία τουλάχιστο για την έναρξη της λογικής εργασίας (Hadamard 1995, σελ: $113 - 114$).

Για πολλά προβλήματα η καλύτερη μέθοδος είναι ένας συνδυασμός ενορατικών[4] *και άλλων διαδικασιών* (Bruner, 1960, σελ: 75).

1.2 Το συνεχές.

Η έννοια του συνεχούς εμφανίζεται κατά την αρχαιότητα σε γραπτά του Παρμενίδη (Παρμενίδης, «Παρμενίδου περί φύσεως», [8, $1 - 6$] και [8, $22 - 25$]), ο οποίος ήταν μαθητής του Ξενοφάνη ιδρυτή της Ελεατικής σχολής. Στην συνέχεια ο Ζήνων ο Ελεάτης (450 π.Χ.), μαθητής του Παρμενίδη, έκανε συστηματική χρήση της έννοιας του συνεχούς.

Στην εποχή του Αριστοτέλη το συνεχές χαρακτηρίζεται από τη δυνατότητα μιας άπειρης διαιρετότητας. Η έννοια του συνεχούς ορίζεται από την έννοια της άπειρης διαίρεσης.

[3] Η διαισθητική γνώση ερμηνεύεται ισοδύναμα με τον όρο της διαίσθησης.

[4] Η ενόραση έχει ισοδύναμη ερμηνεία με τη διαίσθηση για τον Bruner (Bruner 1960, pp. 66)

ὡς τό ἄπειρον διαιρετόν συνεχές ὄν
(Αριστοτέλης, «*Φυσική ακρόασις*», [200b, 20]).

Στην εποχή του Αριστοτέλη . . . το συνεχές ήταν ήδη συνδεδεμένο με μια διαδικασία ατελεύτητης διαιρετότητας, όπως άλλωστε πιστοποιείται και από τη διατύπωση των ελεατικών παραδόξων (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 67).

Ο Βέικος διερευνώντας το πρόβλημα του συνεχούς στη φιλοσοφία του Whitehead αναφέρει:

[Τ]ο εκτατικό συνεχές είναι επ΄ άπειρον διαιρετό. Και είναι βέβαια επ΄ άπειρον διαιρετό ως κάτι το δυνατό και όχι ως κάτι το πραγματικό. Το αντινομικό αυτό παιχνίδι τς σκέψης μεταξύ πραγματικού και δυνατού οδηγεί εδώ στο ακόλουθο συμπέρασμα: ενώ «η πραγματικότητα είναι αθεράπευτα ατομική», η δυνατότητα είναι αθεράπευτα συνεχής. . . γιατί τίποτε το πραγματικό δεν υπάρχει που να μην είναι η πραγμάτωση εκείνου που ήταν δυνατό. Επομένως η δυνατότητα είναι η προϋπόθεση κάθε πραγματικότητας, είναι κάτι το δυνάμει πραγματικό και ενεργητικό (Βέικος 1973, σελ: 426).

Από αυτά τα αποσπάσματα φαίνεται ότι η φιλοσοφία του Αριστοτέλη και η φιλοσοφία του Whitehead αποδέχεται το συνεχές ως τη δυνατότητα της άπειρης διαιρετότητας. Σημαντικό εννοιολογικό δίπολο αφενός στη φιλοσοφία του Αριστοτέλη είναι το «*δυνητικότητα-πραγματικότητα*» (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 67), αφετέρου στη φιλοσοφία του Whitehead είναι το «*δυνατότητα-πραγματικότητα*» (Βέικος 1973, σελ: 414). Σημειώνεται ότι τα δύο δίπολα δεν παρουσιάζουν εννοιολογικές διαφορές.

Επίσης σ΄ αυτή την εποχή το συνεχές είναι συνδεδεμένο με την εξωτερική, σε σχέση με μας, καθημερινή πραγματικότητα. Θεωρείται ότι κάθε θεωρητική κατασκευή θα πρέπει να ανταποκρίνεται, σε κάθε δομική της λεπτομέρεια, στο φυσικό κόσμο.

Πρέπει να τονισθεί ότι για του Αριστοτέλη, όπως και για του Ζήνωνα, το συνεχές θεωρείται στο πραγματικό κόσμο. Είναι γνωστόν ότι για του Αριστοτέλη η εσωτερική δομή του πραγματικού κόσμου βασίζεται σε αρχές που πρέπει να εξαχθούν από τον ίδιο του κόσμο (Βασιλείου 1973, σελ: 56).

Αυτή η δοξασία επηρέασε για πολλούς αιώνες την ανθρωπότητα. Το συνεχές φαίνεται από την εποπτεία προφανές, σαφές και απλό. Εξ΄ άλλου είναι κοινά αποδεκτό ότι μας το επέβαλε ο εξωτερικός κόσμος, είναι δημιούργημα της εποπτείας αυτού του κόσμου. Παρά ταύτα, η έννοια του συνεχούς είναι κατ΄ αρχήν μια ιδεατή έννοια με δομή ουσιαστικά διαφορετική από αυτή που έχουν τα αντικείμενα της εμπειρίας.

Ως νοητό αντικείμενο μπορεί να ανεξαρτοποιηθεί από την όποια αισθητο-

ποιημένη εξεικόνιση του και απ΄ αυτή την άποψη να θεωρηθεί απλά ως το διατεταγμένο ζεύγος των δύο συνόλων . . . , δηλαδή του συνόλου των αδιάστατων αντικειμένων-σημείων του και του συνόλου των ιδιοτήτων και σχέσεων τους. Έτσι θεωρούμενο το συνεχές δε μας εμφανίζεται ως προβληματική οντότητα. Εξεικονισμένο, όμως, προκάλεσε και συνεχίζει να προκαλεί ισχυρές αντιδράσεις, οι οποίες αφορμούνται από την αίσθηση παραδόξου που δημιουργεί η γνώση ότι ένα εκτατό αντικείμενο αποτελείται τελικώς και ***μόνον*** *από αδιάστατες και επομένως μη χωροχρονικά υπαρκτές οντότητες* (Αναπολιτάνος, *εργασία:* 38).

Εκτός από τη δομική διαφορά που επισημάνθηκε, άλλη μια πηγή δυσκολιών αποτελεί η ταύτιση της διαίσθησης του συνεχούς που αναπτύσσεται στη καθημερινή ζωή και τη διαίσθησης του συνεχούς που αναπτύσσεται από τον ενεργό μαθηματικό, σε μια και μόνη «καθαρή διαίσθηση».

Η προέλευση των δυσκολιών για την ανάπτυξη μιας όχι καθαρά ψυχολογικής, όχι καθαρά λογικής γνωστικής ανάλυσης των μαθηματικών είναι η συνταύτιση αυτών των δύο ειδών της διαίσθησης, αυτή του εκπαιδευμένου μαθηματικού και αυτή που αναπτύσσεται μόνο στη καθημερινή ζωή, σε μια και μόνη «καθαρή διαίσθηση» (Longo, 1998, pp.10).

Τη διάκριση αυτών των δύο ειδών της διαίσθησης, μεταξύ άλλων, κάνει και ο Fischbein. Ο ίδιος καλεί λαϊκές διαισθήσεις (lay intuitions) αυτές που «*δεν βασίζονται σε ειδικές επιδεξιότητες αλλά κατά μείζονα λόγου στη καθημερινή εμπειρία*» (Fischbein 1987, pp. 60) και ειδικές διαισθήσεις (expert intuitions) αυτές που αναπτύσσουν οι επαγγελματίες, άνθρωποι με πλούσια εμπειρία σ΄ ένα συγκεκριμένο τομέα δραστηριότητας. Αυτά τα δύο είδη τα εντάσσει σε μια ευρύτερη κατηγορία διαισθήσεων την οποία ονομάζει εικοτολογικές διαισθήσεις (conjectural intuitions).

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι οι πηγές των δυσκολιών κατανόησης και εξήγησης του συνεχούς είναι δύο. Η μια δυσκολία ανάγεται στο δομικό επίπεδο, δηλαδή οι «κατασκευαστικές» διαφορές μεταξύ του συνεχούς ως νοητό αντικείμενο και του συνεχούς ως εξεικονισμένο αντικείμενο. Η δεύτερη δυσκολία οφείλεται στην άδηλη δράση δύο ουσιωδώς διαφορετικών διαισθήσεων.

Για την παράκαμψη των δυσκολιών προτείνεται η ακόλουθη διάκριση του συνεχούς. Το συνεχές ως αισθητηριακό αντικείμενο και το συνεχές ως νοητό αντικείμενο. Ως αισθητηριακό αντικείμενο δημιουργείται από τις εμπειρίες του ανθρώπου στη καθημερινή του ζωή και από τον εξωτερικό του κόσμο· είναι εξαρτώμενο από την εποπτεία και εξεικονίζει την αισθητηριακή πραγματικότητα. Ως νοητό αντικείμενο είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε εξεικόνιση ή αναπαράσταση του, που κατασκευάζεται από τις αισθήσεις. Είναι μια επι-

νόηση, η οποία ανάγεται στη καθαρή εποπτεία.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν τελικά είναι εφικτή η ταύτιση αυτών των δύο, με τα μέχρι τώρα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία. Όπως διαπιστώθηκε, από την εποχή του Ζήνωνος του Ελεάτη μέχρι και τον 20° αιώνα, οι θεωρίες που αναπτύσσονταν δεν συμφωνούσαν σε κάθε δομική τους λεπτομέρεια με το συνεχές όπως αυτό υπήρχε και υπάρχει μέσα στη καθημερινή ζωή του ανθρώπου.

Συνήθως αναπαριστάται το $\mathbb{R}$ με μια ευθεία γραμμή. Νομιμοποιείται η πράξη αυτή;

Στις αρχές του 20° αιώνα ο Poincare αναφέρει: *Ό,τι αναπαριστούμε νοητικά υπό το όνομα «ευθεία» είναι μια χουδροειδής εικόνα που μοιάζει τόσο λίγο στη γεωμετρική ευθεία όσο και στο χρόνο καθ΄ εαυτόν* (Poincare 1997, σελ: 103).

Στα τέλη του 20° αιώνα ο Rucker αναφέρει: *Συνηθίζουμε να ταυτίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με το σύνολο όλων των σημείων σε μια ευθεία γραμμή. Πρόκειται για χρήσιμη απεικόνιση· αυτό όμως δεν πρέπει να το εννοούμε απόλυτα. Στον βαθμό που αναφερόμαστε σε μια ιδεατή (σε αντιδιαστολή με μια υλική) γραμμή, δεν είναι δύσκολο να αντιστοιχίσουμε διαφορετικά σημεία της σε διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{R}$. Ωστόσο, δεν είναι απολύτως σίγουρο εάν η συλλογή των αριθμών της μορφής αυτής καλύπτει ολόκληρη τη συνεχή γραμμή . . . στην πραγματικότητα, μια* ***Απόλυτα Συνεχής*** *γραμμή δεν είναι δυνατόν ποτέ να καλυφθεί ευτελώς από* ***κανένα*** *σύνολο διακριτών σημείων, όσο μεγάλο και αν είναι αυτό* (Rucker 2004, pp. 265).

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι το αντιληπτικό και το διαισθητικό συνεχές είναι αμφίβολο εάν συμφωνεί με κάθε δομική λεπτομέρεια της υπάρχουσας μαθηματικής θεωρίας του συνεχούς. Ο ακριβής καθορισμός της έννοιας του συνεχούς απαλλαγμένος από τα ενορατικά στοιχεία ήταν (και είναι) δυσεπίλυτο πρόβλημα.

Γενικά σε αρκετές περιπτώσεις έχει διαπιστωθεί ότι θεωρητικά μοντέλα δεν είναι πάντα εφικτό να έχουν εφαρμογή στο πραγματικό κόσμο. Τα καθαρά μαθηματικά δεν είναι πάντα πιστή απεικόνιση του φυσικού μας κόσμου. Οι ήδη υπάρχουσες μαθηματικές θεωρίες, παρόλο που είναι σημαντικό εργαλείο για τη φυσική, δεν δύναται κάθε μία από αυτές να έχει εφαρμογή στη φυσική, τουλάχιστο τώρα ή στο άμεσο μέλλον.

Ο Longo θεωρεί ότι η μαθηματική αντικειμενικότητα του συνεχούς βασίζεται στην αλληλεπίδραση τριών «επιπέδων»: της διαίσθησης, των μαθηματικών και της λογικής.

Στη περίπτωση του συνεχούς, η μαθηματική αντικειμενικότητα βρίσκεται

στην αλληλεπίδραση των τριών επιπέδων. Η αξία και οι αντικειμενικές πραγματικότητες στη μαθηματική κατασκευή είναι να βρεθούν στη διαδικασία σχηματισμού των ονομαζόμενων οντοτήτων ως εννοιολογικές κατασκευές (conceptual constructions) (Longo 1998, pp. 21).

Οι διαφορετικές μαθηματικές κατασκευές του συνεχούς εν γένη, προκύπτουν από τις διαφορετικές απόψεις που δημιουργούνται κατά την παρατήρηση του φυσικού κόσμου. Βάση ενός μεγάλου μέρος της βιβλιογραφίας, που αφορά τη διαίσθηση και τη σχέση της με το φυσικό κόσμο, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι ο πλούτος αυτού του κόσμου είναι η πηγή των πρωτογενών διαισθήσεων, των οποίων η λανθάνουσα δράση έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία των διαφορετικών απόψεων.

Στο πρώτο επίπεδο η αφθονία του κόσμου και οι απόψεις κατά τη παρατήρηση του, οι κατά σύμβαση απόψεις , μη απομονωμένες, αλλά που οικοδομούνται από ένα διάλογο με την εξέλιξη και την ιστορία, εισηγούνται ένα πλήθος από διαισθητικές προσεγγίσεις και στηρίζουν τα μαθηματικά στη σχέση μας με του κόσμο. Εν μέρει βρίσκουμε αυτές τις απόψεις στις διαφορετικές μαθηματικές κατασκευές του συνεχούς οι οποίες συνιστούν το δεύτερο επίπεδο. Αυτές οι κατασκευές του συνεχούς εμπλουτίζουν και τροποποιούν τις πρωτογενής διαισθήσεις (original intuitions), οι οποίες δεν είναι τόσο απλές όταν προστίθεται σε αυτές το βάθος της μαθηματικής πράξης (mathematical praxis). Αλλά χάρη στη Λογική υπάρχει ένα τρίτο επίπεδο, στο οποίο η ανάλυση της απόδειξης (όπως επίσης οι τυπικές θεωρίες συνόλων, τα αξιώματα τους, οι συμπερασματικοί τους κανόνες) παίζει ουσιαστικό ρόλο. (Longo 1998, pp. 20).

Η κοινή λογική, η οποία θεωρείται συχνά ως η κοινά αποδεχόμενη σκέψη, διαφέρει από τη Λογική που αναφέρεται στο απόσπασμα. *Η Λογική δεν είναι η μελέτη των νόμων της σκέψης, αλλά η μελέτη του τρόπου που μια πρόταση συνεπάγεται από άλλες προτάσεις. Δηλαδή η Λογική ασχολείται με τους κανόνες που χρησιμοποιούμε για να βγάζουμε σωστά συμπεράσματα* (Μυτιληναίος 2003, σελ: 9).

Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στην επιστήμη της λογικής, η σημασιολογική και η συντακτική. Η πρώτη έχει σχέση με τη σημασία δηλαδή την αλήθεια ή το ψεύδος μιας πρότασης, το μοντέλο, την αποτίμηση· και η δεύτερη με τη σύνταξη των προτάσεων. Στα μαθηματικά αποδεικνύονται ορισμένες προτάσεις από άλλες προτάσεις αξιώματα, με τη βοήθεια προκαθορισμένων αποδεικτικών κανόνων. Η μέθοδος αυτή στη ορολογία της Λογικής ονομάζεται συντακτική και ενυπάρχει σ' αυτή μια γλώσσα, οι επιτρεπτές προτάσεις, τα αξιώματα και οι αποδεικτικοί κανόνες.

Η κοινή λογική εκφράζεται προφορικά με κάποια γλώσσα, όπως είναι

η ελληνική γλώσσα, και διατυπώνεται γραπτά με τη βοήθεια των συντακτικών κανόνων και των λέξεων που σχηματίζονται από σύμβολα, όπως είναι τα γραπτά σύμβολα του ελληνικού αλφαβήτου. Στη Λογική, δηλαδή τη τυπική λογική, η γλώσσα που αναφέρθηκε ονομάζεται μεταγλώσσα. *Η γλώσσα της υπό μελέτη λογικής είναι ένα καθορισμένο σύνολο συμβόλων* (Μυτιληναίος 2003, σελ: 11) και καλείται «γλώσσα -αντικείμενο».

Γενικά η μαθηματική λογική παρέχει τα μαθηματικά εργαλεία για τη μελέτη ερωτήσεων για το πόσα και ποια αποτελέσματα θα μπορούσαν ή όχι να ήταν διαθέσιμα εάν η επιλογή των αξιωμάτων ή εάν οι λογικοί κανόνες ήταν διαφορετικοί. Η Λογική *είναι ο πιο θεμελιακός κλάδος των μαθηματικών επειδή στηρίζει όλη τη μαθηματική σκέψη* (Μυτιληναίος 2003, σελ: 10).

1.2α΄ Αντιληπτικό και διαισθητικό συνεχές.

Ένα συνηθισμένο παράδειγμα ακουστικής αίσθησης του συνεχούς θεωρείται η δράση της εμπειρίας καθώς ακούμε μια μελωδία, η οποία δεν περιέχει παύσεις. Κάποια άλλα παραδείγματα αισθητηριακών εμπειριών του συνεχούς θεωρούνται η αντίληψη που αποκτάται από ένα τεντωμένο νήμα· η δράση της εμπειρίας που αποκτάται κατά τη γραφή γραμμών με το μολύβι στο χαρτί ή κατά τη παρατήρηση της κίνησης ενός αντικειμένου.

Όταν κάποιος κρατάει ένα τεντωμένο νήμα, δύναται να έχει την ορατή και την απτική αίσθηση του συνεχούς· αφού δεν έχει εγκοπές. Αν παρουσιαστεί κάτι τέτοιο τότε θα κρατάει τουλάχιστο δύο νήματα. Με παρόμοιο τρόπο αντιλαμβάνεται κάποιος το συνεχές όταν γράφει μια γραμμή. Αυτή απαρτίζεται από ένα πλήθος διαδοχικών υλικών στοιχείων, τα οποία σε αυτή τη περίπτωση είναι τα ίχνη, οι κουκκίδες, που γράφει το μολύβι στο χαρτί χωρίς να φαίνεται να αφήνει κάποιο κενό. Κατά την κατασκευή αυτή κάποιος οπτικά αντιλαμβάνεται το συνεχές στο επίπεδο και ταυτόχρονα αντιλαμβάνεται τη συνέχεια της κίνησης που κάνει το αντικείμενο γραφής. Βλέπει τη κίνηση του αντικειμένου και «βλέπει» το συνεχές στη κίνηση αυτή· δεδομένου ότι το κινητό αντικείμενο δεν κάνει «στάση» ή «επανεκκίνηση».

Επίσης κάποια άλλα παραδείγματα είναι το χρονικό και το χωρικό συνεχές. Ο Αριστοτελικός ορισμός του χρόνου προϋποθέτει κίνηση, αφού αυτή δίνει την αλλαγή, το μέτρο ακόμη και την έννοια του χρόνου.

τοῦτο γάρ ἐστιν ὁ χρόνος, ἀριθμός κινήσεως κατά τό πρότερον καί ὕστερον
(Αριστοτέλης, «*Φυσική ακρόασις*», [219b, 1 − 2])

Για τον Αριστοτέλη φαίνεται ότι ο χρόνος είναι *«το αποτέλεσμα της μέτρησης της αλλαγής»* (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 73). Σ΄ένα θεωρητικό-φιλοσοφικό πλαίσιο όπου τα πάντα υπόκεινται σ΄ένα συνεχές γίγνεσθαί, όπως είναι του Ηράκλειτου ο οποίος διακήρυσσε ότι «τα πάντα ρει», ο χρόνος ως το αποτέλεσμα της μέτρησης της αλλαγής είναι συνεχής, αφού η αλλαγή είναι συνεχής.

Ο Αριστοτελικός χρόνος *«γίνεται αντιληπτός μέσω της θεμελιώδους διατεταγμένης τριάδας «πριν, τώρα, μετά»»* (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 71). Το «πριν», το «τώρα» και το «μετά» από μόνα τους δεν έχουν νόημα. Το νόημα των μερών του χρόνου αποκτάται μόνο με την αμοιβαία αναφορά του ενός στο άλλο και τη μεταξύ τους σχέση από τη σύγκριση τους. Η πρότερη, a priori, ύπαρξη του παρατηρητή είναι απαραίτητη. Τα διάφορα εκάστοτε «τώρα» βρίσκονται ως δυνατότητες και όχι ως πραγματικότητες, σ΄ όλο το μήκος της ροής του χρόνου, διότι το ανθρώπινο ον λόγο της πεπερασμένης φύσης του αδυνατεί να πράξει άπειρο πλήθος διαιρέσεων.

Για τον Weyl το χρονικό συνεχές δεν έχει σημεία, τα εκάστοτε «τώρα» είναι «μεταβάσεις». Συγκεκριμένα αναφέρει ότι: *[Στο] χρονικό παρών ένα ατομικό σημείο μέσα σ΄ αυτό είναι μη-ανεξάρτητο,. . . , είναι καθαρά ανύπαρκτο όταν λαμβάνεται από μόνο του, και υπάρχει μόνο ως ένα «σημείο της μετάβασης» (το οποίο, φυσικά, με κανένα τρόπο δεν μπορεί να κατανοηθεί μαθηματικά)* (Weyl 1987, pp. 92).

Το χρονικό συνεχές, με την υποδειγματική Αριστοτελική έννοια, είναι εξαρτημένο από το νου και υπάρχει μέσα στην εμπειρία, μόνο όταν έχουμε την επίγνωση του. Η σύγκριση του «πριν», «τώρα», «μετά» πραγματώνεται στη συνείδηση του παρατηρητή και απαιτείται η μνήμη για τη πραγμάτωση της. Χωρίς τη μνήμη είναι μη εφικτή η σύγκριση και επομένως η ύπαρξη σχέσης. Κρίνεται αξιόλογο να αναφερθεί ότι το συνεχές της κίνησης σε αντίθεση με αυτό το χρονικό συνεχές δεν έχει ανάγκη να επικαλεσθεί τη μνήμη, διότι το συμβάν είναι άμεσα ορατό.

Ο Poincare δέχεται ότι ο υπό συζήτηση χρόνος είναι ένα φαινόμενο που συμβαίνει μέσα στη συνείδησης του ίδιου ανθρώπου και τον καλεί *«ψυχολογικό χρόνο»*.

[Δ]ιακρίνουμε εύκολα το παρών αίσθημα από την ανάμνηση των παρελθόντων αισθημάτων ή από την πρόβλεψη των μελλοντικών, αλλά γνωρίζουμε τέλεια τι εννοούμε όταν δηλώνουμε ότι, από δύο συνειδητά φαινόμενα, την ανάμνηση των οποίων έχουμε συγκρατήσει, το ένα προηγείται του άλλου, ή καλύτερα ότι από δύο συνειδητά φαινόμενα που έχουν προβλεφθεί, το ένα θα είναι προγενέστερο του άλλου (Poincare 1997, σελ: 41).

Μάλιστα, βάση αυτής της ιδιότητας αναφέρει ρητά ότι ο *«ψυχολογικός*

χρόνος» διαφέρει από το *«φυσικό χρόνο»* ο οποίος δεν συμβαίνει σε καμία συνείδηση (Poincare 1997, σελ: 42).

Ο Weyl καλεί τον υπό συζήτηση χρόνο *«φαινομενικό χρόνο»* (phenomenal time)- ο χαρακτηρισμός «φαινομενικός» χρησιμοποιείται σε αντιπαράθεση του *«αντικειμενικού χρόνου»* (objective time)- ως μια *«αδιάκοπη μορφή των συνειδητών εμπειριών»*, οι οποίες εμφανίζονται στον ίδιο να *«ρέουν διαδοχικά»* (Weyl 1987, pp. 88). Ο ίδιος αναφέρει ότι, *η θεωρητική διευκρίνηση της ροής του χρονικού συνεχούς δεν είναι διαθέσιμη* (Weyl 1987, pp. 90).

Στα πλαίσια της φιλοσοφίας του Kant μπορεί να λεχθεί ότι ο χρόνος θεωρείται *«μια καθαρή μορφή της ... αισθητής εποπτείας»* (sensible intuition) (Aquila 2004, pp. 250).

Ο Whitehead λέει ότι, *πρέπει να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ* (1) *αίσθηση-χρόνου (sense-time) και αίσθηση-χώρου (sense-space), και* (2) *αντίληψη της σκέψης-χρόνου (thought-time of perception) και αντίληψη της σκέψης-χώρου (thought-space of perception).*

Η αίσθηση-χρόνου και η αίσθηση-χώρου είναι οι πραγματικά (actually) παρατηρούμενες σχέσεις-χρόνου (time-relations) και σχέσεις-χώρου (space-relations) μεταξύ των αισθητηριακών αντικειμένων (sense-objects). Η αίσθηση-χρόνου και η αίσθηση-χώρου δεν έχει σημεία εκτός, ίσος, από λίγες διεσπαρμένες στιγμές, που επαρκούν για να εισηγηθούν τη λογική ιδέα· επίσης, η αίσθηση-χρόνου και η αίσθηση-χώρου είναι ασυνεχή και αποτελούμενα από θραύσματα (fragmentary).

Η αντίληψη της σκέψης-χρόνου και η αντίληψη της σκέψης-χώρου είναι οι σχέσεις του χρόνου και το χώρου που ισχύουν μεταξύ των αντικειμένων-σκέψης της αντίληψης (thought-objects of perception). Η αντίληψη της σκέψης-χρόνου και η αντίληψη της σκέψης-χώρου είναι καθ΄ ένα από αυτά συνεχή. Το «συνεχή» εδώ με την έννοια ότι όλα τα αντικείμενα-σκέψης της αντίληψης έχουν μεταξύ τους μια σχέση χρόνου (ή χώρου). (Whitehead 1917, pp. 162)

Εδώ φαίνεται ο Whitehead ήδη να έχει κάνει μια πρώιμη διάκριση της αίσθησης από την αντίληψη συναρτώμενη του συνεχούς. Η αίσθηση του χρόνου (ή χώρου) θεωρείται ισοδύναμη με τις πραγματικά παρατηρούμενες σχέσεις των ενορατικών στοιχείων και είναι διακεκριμένη. Ενώ η αντίληψη της σκέψης του χρόνου (ή χώρου) θεωρείται ισοδύναμη με σχέσεις των νοητικών στοιχείων της αντίληψης και είναι συνεχή.

Συγκρίνοντας τους όρους αντίληψη- αίσθηση με τους όρους του Fischbein διαίσθηση- αντίληψη, φαίνεται ότι η εννοιολογική χρήση της «αντίληψης » να διαφέρει στα δύο θεωρητικά πλαίσια. Ο όρος «αντίληψη» του Whitehead θα ταίριαζε περισσότερο με τον όρο «διαίσθηση» του Fischbein, ενώ ο όρος

«αίσθηση» του Whitehead θα ταίριαζε με περισσότερο με τον όρο «αντίληψη» του Fischbein. Μια τέτοια όμως αντιστοίχηση δεν είναι απολύτως αποδεκτή.

Η βασική καινοτομία του Whitehead συνίσταται στο ότι αυτός υποκατέστησε την έννοια της ύλης (ως ένα «υλικό» που κινείται σ΄ ένα χώρο κενό) με την έννοια μιας πραγματικότητας «συμβάντων» (events) (Βέικος 1973, σελ: 406 − 407). Αυτά τα συμβάντα στη συνάφεια τους χαρακτηρίζονται από τις χρονικές σχέσεις (Βέικος 1973, σελ: 408).

Το υπό συζήτηση χρονικό συνεχές είναι ένα φαινομενολογικό συμβάν το οποίο οφείλει την ύπαρξη του στη συνείδηση. Η διαπίστωση της συνεχούς ροής γίνεται βάση των αισθητηριακών μας δεδομένων και είναι εφικτή μόνο διαμέσου της διαίσθησης. Μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι τα δεδομένα των δράσεων των εμπειριών κρίνονται, δημιουργώντας έτσι σχέσεις διαδοχής μεταξύ στιγμιαίων συμβάντων.

Η πιο πάνω άποψη ενισχύεται από τα κάτωθεν αποσπάσματα:

«[Η] επίγνωση του εσωτερικού χρόνου βασίζεται πάνω στην κατ΄ αρχήν διαίσθηση του συνεχούς» (Longo 1998, pp. 3).

Η διαίσθηση του συνεχούς χτίζεται από τα κοινά ή τα σταθερά στοιχεία, από τα αμετάβλητα που αναδύονται από ένα πλήθος δράσεων των εμπειριών: η αντίληψη του χρόνου, της κίνησης, μιας εκτενής γραμμής... (Longo 1998, pp. 4).

Ποσοτικά ο χρόνος αντιμετωπίζεται εντελώς συμβατικά. Το μέτρο του χρόνου είναι αναγκασμένο να πάρει μια προσεγγιστική τιμή (Αναπολιτάνος, εργασία: 38: Poincare 1997, σελ: 55). Ένα σταθερό χρονικό-σημείο του παρόντος χρόνου δεν είναι ποτέ δυνατό να προσδιοριστεί *«ακριβώς»* αλλά μόνο *«προσεγγιστικά»* (Weyl 1987, pp. 92). Τελικά, ο ο τέλειος ορισμός μιας διάρκειας είναι *«ένα αυθαίρετο αίτημα της σκέψης»* (Βέικος 1973, σελ: 415).

Το ίδιο μας το σώμα δημιουργεί μια υοερή σύλληψη του χώρου (conception of space) και η δική μας φυσική εξέλιξη δημιουργεί μια υοερή σύλληψη του χρόνου (conception of time)- «βιολογικού» χρόνου (Zervos 1972, pp. 412).

Ο Poincare διακρίνει τον «απλό οπτικό χώρο» και τον «απτικό χώρο» με τρεις διαστάσεις (Poincare 1997, σελ: 90). Ο μεν πρώτος γίνεται αισθητός από την όραση, ο δε δεύτερος γίνεται αισθητός από την αφή. Η διαίσθηση «του απλού οπτικού χώρου» χρησιμεύει για τη δόμηση του Ευκλείδειου επιπέδου και η διαίσθηση του «απτικού χώρου» χρησιμεύει για τη δόμηση του Ευκλείδειου χώρου.

Οι αισθητηριακές εμπειρίες που λαμβάνονται από τις δράσεις της όρασης και της αφής, περισσότερο της αφής, δημιουργούν μια αντίληψη του χώρου, η αλλεπάλληλη διαδοχή αυτών των στατικών αντιληπτικών εικόνων γίνεται

αφού αυτές έχουν ήδη κριθεί από το νου. Η ροή αυτών των φαινομενολογικών δεδομένων βασίζεται στη διαίσθηση του συνεχούς.

Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι η διαίσθηση του συνεχούς του χώρου προαπαιτεί το χρονικό συνεχές, διότι διαφορετικά θα ήταν δυνατή μόνο μια στατική αντίληψη του χώρου. Δηλαδή, να υποθέσει ότι η a priori συνέχεια χρόνου κάνει δυνατή, μια αλληλουχία των εσωτερικών αναπαραστάσεων, μια διαισθητική περιγραφή του χώρου.

Ο Rucker όμως, έχοντας υπόψη του την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Αϊνστάιν, δεν θα μπορούσε να είναι σύμφωνος με την πιο πάνω υπόθεση. Ο ίδιος αναφέρει:

[Μ]ία από τις κυριότερες συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι ότι θεμελιώδης είναι ο χωροχρόνος και όχι ο μεμονωμένος χώρος, ο οποίος εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. . . [Σ]ύμφωνα με τη σύγχρονη φυσική, έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε ότι η πάροδος του χρόνου είναι ψευδαίσθηση. το παρελθόν, το παρόν και το μέλλον συνυπάρχουν στο χωροχρόνο (Rucker 2004, σελ: 11).

Επίσης ο Rucker αναφέρει [5] ότι *«[Ο] Γκέντελ επιχειρεί να δείξει ότι η αίσθηση ότι ο χρόνος κυλά είναι ψευδαίσθηση. Το παρελθόν, το παρόν και το μέλλον είναι απλώς διαφορετικές περιοχές ενός τεράστιου χωροχρόνου. Ο χρόνος είναι μέρος του χωροχρόνου, αλλά ο χωροχρόνος είναι μια ανώτερη πραγματικότητα που υπάρχει **έξω από του χρόνο**»* (Rucker 2004, σελ: 183).

Συμπεραίνεται ότι κάποιος, λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, θα μπορούσε να αμφισβητήσει τον χαρακτηρισμό που αποδίδει ο Weyl στο χρόνο *«ως πιο θεμελιώδες συνεχές»* (Weyl 1987, pp. 88) και να χαρακτηρίσει το χωροχρόνο ως το πιο θεμελιώδες συνεχές.

Κλείνοντας το μέρος αυτό, κρίνεται αξιόλογο να αναφερθούν μερικές παρατηρήσεις που αφορούν τη διαίσθηση του συνεχούς.

Μέσα από πολλές εμπειρίες φαίνεται ότι το συνεχές παραμένει αμετάβλητο ανεξαρτήτως της κλίμακας. Για παράδειγμα όλα τα «κομματάκια» του χρόνου, της γραμμής, ακόμη και ενός νήματος, διατηρούν τις ίδιες ιδιότητες με αυτές ενός μεγαλύτερου μέρους χρόνου, γραμμής, ή ακόμη και του νήματος. Όπως αναφέρει ο Longo *«ένας μεγεθυντικός φακός δεν αλλάζει τη διαίσθηση μας για το συνεχές»* (Longo 1998, pp. 6).

Επίσης πρέπει να επισημανθεί ότι το νόημα της συνέχειας εξαρτάται από το υποκείμενο το οποίο την επιδέχεται. Για παράδειγμα μια πέτρα επιδέχε-

[5] Η άποψη του αυτή στηρίζεται στο άρθρο του *Kurt Gödel* που έγραψε το 1949 και τιτλοφορείται "A remark on the relationship between relativity theory and idealistic Philosophy".

ται το συνεχές διαμέσου του χρόνου, παρόλο που λόγο της φύσης της δεν μπορεί η ίδια ούτε να το αντιληφθεί ούτε να το διαισθανθεί. *Η αντίληψη είναι εξ ορισμού ένα συνειδητό γεγονός· αντιλαμβανόμαστε κάτι για το οποίο έχουμε συνείδηση και όχι κάτι για το οποίο δεν έχουμε* (Zeki S. 2002, σελ: 87). Τα ζώα εκλαμβάνουν τελείως διαφορετικά το συνεχές απ' ότι ο άνθρωπος· αισθάνονται αντικείμενα και καταστάσεις με τελείως διαφορετικό τρόπο από τον άνθρωπο. Ενδεχομένως αυτό να οφείλεται όχι μόνο στην ιδιαιτερότητα της ανατομίας του εγκεφάλου τους αλλά και στο γεγονός ότι έχουν πολύ περιορισμένες αντιληπτικές ικανότητες σε σύγκριση με τον άνθρωπο. Αυτό φαίνεται από πειράματα που έχουν γίνει και τα οποία δείχνουν ότι, «*[τ]α ζώα έχουν αριθμητικές ικανότητες*», μπορούν να κάνουν την απλούστερη πρόσθεση και αφαίρεση, όπως ακριβώς την κάνουν τα βρέφη των τεσσεράμισι μηνών (Lakoff & Nunez 2000, pp. 21). Για παράδειγμα, οι χιμπατζήδες μπορούν να διδαχθούν αριθμητικά σύμβολα και να κάνουν απλούς υπολογισμούς και συγκρίσεις με αυτά (Lakoff and Nunez 2000, pp. 22)

Μια πέτρα, ένα δέντρο, ένα ζώο, ένας άνθρωπος, μια εμπειρία, ένα σωμάτιο δεν επιδέχονται την ατομικότητα ή τη συνέχεια με το ίδιο νόημα. Η μικροφυσική ατομικότητα π.χ. δεν είναι ίδια με την βιολογική ατομικότητα ή την ψυχολογική ατομικότητα της εμπειρίας. Και η συνέχεια στο φυσικό γίγνεσθαι δεν είναι σαν τη συνέχεια της εμπειρίας ή της προσωπικότητας, που παραμένει αυτοταυτιζόμενη δια μέσου όλων των συμβάντων της ζωής (Βέικος 1973, σελ: 435).

Επίσης όσο αφορά τη διάκριση μεταξύ του αντιληπτικού συνεχούς και του διαισθητικού συνεχούς, κρίνεται ότι πρέπει να διατυπωθεί ότι το δε πρώτο βασίζεται μόνο σε αντιληπτικά γεγονότα με συστατικά στοιχεία τα αισθητηριακά δεδομένα, στα οποία δεν παρεμβαίνει κάποιος συλλογισμός ώστε να οδηγήσει σε μια αφαίρεση της σκέψης, είναι μόνο μια εποπτεία. Ενώ το δεύτερο απαιτεί μια λογική, με το δικό της σκεπτικό και δομή, η οποία οδηγεί στη καθαρή εποπτεία. Το αντιληπτικό συνεχές ως η αισθητηριακή γνώση του συνεχούς, δεν ξεπερνά τα όρια των αντιληπτικών μηχανισμών· ενώ το διαισθητικό συνεχές ως η διαισθητική γνώση του συνεχούς, υπερβαίνει τα αισθητηριακά δεδομένα των αντιληπτικών μηχανισμών.

Για παράδειγμα, όταν κάποιος παρατηρεί μια ευθεία γραμμή *βλέπει* την συνέχεια, τη μη διακοπή, της ευθείας γραμμής, για την ακρίβεια του ευθύγραμμου τμήματος· αυτό δεν απαιτεί κάποια διαίσθηση. Όμως η γενίκευση αυτού που βλέπει, δηλαδή ο ισχυρισμός ότι μια (οποιαδήποτε) ευθεία γραμμή επεκτείνεται ευθύγραμμα και στα δύο άκρα της επ' άπειρον, ασταμάτητα, απαιτεί τη διαίσθηση· η καθολικότητα του ισχυρισμού γίνεται αποδεκτή με

τη διαίσθηση και όχι με την αντίληψη.

Το αντιληπτικό συνεχές από μόνο του δεν θα μπορούσε να οδηγήσει στην επινόηση του μαθηματικού συνεχούς· όμως είναι απαραίτητο για να έχουμε το διαισθητικό συνεχές, είναι αυτό που αποτελεί τη «πρώτη ύλη» του διαισθητικού συνεχούς. Το διαισθητικό συνεχές είναι αυτό που αποτελεί τη «πρώτη ύλη» για την επινόηση του μαθηματικού συνεχούς· είναι το μόνο που δύναται να οδηγήσει στην δημιουργία του μαθηματικού συνεχούς.

Ο ισχυρισμός ότι το αντιληπτικό συνεχές από μόνο του δεν θα μπορούσε να οδηγήσει στην επινόηση του μαθηματικού συνεχούς, ενισχύεται από την ύπαρξη του ενδεχομένου τα αισθητηριακά δεδομένα να συντίθενται από αδιαίρετα αντιληπτικά minima τα οποία στην ουσία είναι ασυνεχής φάσεις. Άρα σ' αυτή τη περίπτωση ένα αισθητηριακό δεδομένο θα είναι μια σύνθεση από ασυνεχής φάσεις.

Παρατίθεται ως παράδειγμα το πιο κάτω απόσπασμα:

Εάν λοιπόν, ο χώρος και ο χρόνος δεν έχουν συνεχή δομή, εάν δηλαδή συντίθενται από αδιαίρετα αντιληπτικά minima, η αντιληπτικά συνεχής κίνηση δεν είναι καθαρά φυσική κίνηση παρά σύνθεση από ασυνεχείς φάσεις (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: 329).

1.26' Μαθηματικό συνεχές.

Η έννοια του μαθηματικού συνεχούς είναι μια ιδεώδης έννοια. Κρίνονται ενδιαφέρουσες οι ακόλουθες εκφράσεις: *«[Τ]ο μαθηματικό συνεχές είναι μια καθαρά νοητική έννοια δίχως άμεση φυσική εφαρμογή»* (Βασιλείου 1973, σελ: 73), *«το ιδεώδες του συνεχούς»* (Longo 1998, pp. 24).

Ο νοητός διαχωρισμός των καθαρά ιδεατών αντικειμένων της νόησης, που ανήκουν στη σφαίρα της φαντασίας και τα οποία επιδέχονται μόνο εσωτερική αναπαράσταση, από την ύλη, η οποία επιδέχεται και εξωτερική αναπαράσταση, φαίνεται κατά κάποιο τρόπο να είχε γίνει από την αρχαιότητα. Ήδη ο Αριστοτέλης αισθάνεται την ανάγκη να διατυπώσει ότι ένα σημείο[6], μια γραμμή, ένα επίπεδο δεν είναι σώματα και δεν έχουν βάρος.

> Εἰ δή τῶν ἀδυνάτων ἐστίν ἑκατέρου μέρους
> μηδέν ἔχοντος βάρος τά ἄμφω ἔχειν βάρος, τά δ' αἰσθητά
> σώματα ἢ πάντα ἢ ἔνια βάρος ἔχει, οἷον ἡ γῆ καί τό
> ὕδωρ, ὡς κἀν αὐτοί φαῖεν, εἰ ἡ στιγμή μηδέν ἔχει βάρος,

[6]Ο Αριστοτέλης στο έργο του «Περί ουρανού» χωρία [299a25 − 30], [296a16 − 17] και [299a30 − 31] χρησιμοποιεί τον όρο «στιγμή» αντί του όρου «σημείο».

δῆλον ὅτι οὐδ' αἱ γραμμαί, ἐι δέ μή αὗται, οὐδέ τά ἐπί-
πεδα· ὥστ' οὐδέ τῶν σωμάτων οὐθέν.
(Αριστοτέλης, «Περί ουρανού», [299a25 − 30])

Σύμφωνα με τον Ζερβό: *Ο ίδιος ο Αριστοτέλης νιώθει την ανάγκη να πει ότι «ένα σημείο δεν είναι ένα σώμα (De caelo II.* 13, 296 a 17*) και δεν έχει βάρος (ibid. III. I,* 299 a 30*).» Έτσι, ... ο νοητός διαχωρισμός της μορφής από την «ύλη» πρέπει να είχε συμβεί σε προϊστορικές εποχές πρέπει να κατανοήθηκε πολύ γενικά* (Zervos 1972, pp. 419).

οὐθέν γάρ
στιγμή τῶν σωμάτων ἐστίν.
(Αριστοτέλης, «Περί ουρανού», [296a16 − 17])

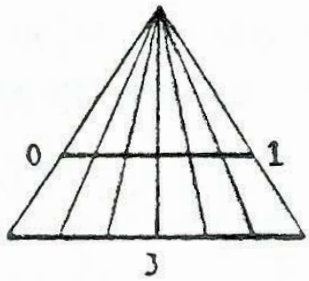
Ἀλλά μήν ὅτι τήν στι-
γμήν οὐχ οἷόν τε βάρος ἔχειν, φανερόν.
(Αριστοτέλης, «Περί ουρανού», [299a30 − 31])

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η κατανόηση του διαχωρισμού της μορφής από την «ύλη» συναρτήσει της έννοιας του συνεχούς, αρχίζει να γίνεται πληρέστερη πολύ αργότερα κατά το 19° αιώνα, με την ανακάλυψη του Cantor ότι τα σύνολα σημείων δύο πεπερασμένων διαστημάτων J_1, J_2 είναι μεταξύ τους ισοδύναμα $J_1 \sim J_2$. Αυτό φαίνεται από το σχήμα 1.5, όπου ένα εκ των δύο διαστημάτων J_1, J_2 τοποθετείται σε ευθεία που είναι παράλληλη προς την ευθεία που κείτεται το μοναδιαίο διάστημα και τα σημεία των διαστημάτων αντιστοιχίζονται ένα προς ένα δια της κεντρικής προβολής (Kamke 1963, σελ: 24). Γενικά, όλα τα τα διαστήματα, οι ημιευθείες και ολόκληρες οι ευθείες είναι σύνολα μεταξύ τους ισοδύναμα και, ιδιαίτερα, προς το διάστημα[7] $[0, 1]$, δηλαδή το συνεχές (Kamke 1963, σελ: 25).

Τα πιο πάνω οδήγησαν στην έννοια του πληθικού αριθμού[8]. Διαπιστώθηκε ότι μια ευθεία γραμμή έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα (ή διάστημα), δηλαδή και με το διάστημα $[0, 1]$. Ακολούθως αυτό αποδείχτηκε να μην αλλάζει σε σχέση με τη διάσταση. Ένα n - διάστατο διάστημα περιέχει το «ίδιο πλήθος σημείων» όσα και το τμήμα $[0, 1]$ (Kamke 1963, σελ: 66)· δηλαδή, θα λέγαμε ότι ένα οποιοδήποτε n - διάστατο

[7]Τα σύνολα σημείων κάθε ενός των διαστημάτων $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ και $(0, 1)$ είναι μεταξύ τους ισοδύναμα, δηλαδή $[0, 1] \sim [0, 1) \sim (0, 1] \sim (0, 1)$ (Kamke 1963, σελ: 23).

[8]Ο πληθικός αριθμός ονομάζεται και πληθάριθμος.



Σχήμα 1.5: Η ισοδυναμία του μοναδιαίου διαστήματος με ένα άλλο διάστημα J (Kamke 1963, σελ: 24).

διάστημα (σε Ευκλείδειο n - διάστατο χώρο) έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το διάστημα $[0, 1]$.

Η δομή του μαθηματικού συνεχούς είναι ένα *«κατάλληλο σύνολο από άπειρο πλήθος μη εκτατών σημείων»* (Βασιλείου 1973, σελ: 72). Τα εν λόγω μη εκτατά σημεία ανήκουν στη «σφαίρα» του ιδεατού και όχι στη «σφαίρα» της φυσικής πραγματικότητας, με την έννοια ότι μπορεί να βρεθεί κάπου στο φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει. Καταρχάς πρέπει να εξεταστεί η έννοια του σημείου.

Ο πρώτος προ-Ευκλείδειος «ορισμός» του σημείου που έχουμε είναι αυτός των Πυθαγορείων, οι οποίοι το καθόριζαν ως τη μονάδα που έχει θέση, *«μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν»* (Πρόκλος, *«Σχόλια του εις πρώτου βιβλίο του Ευκλείδη»*, [95, 22]). Αυτός ο ορισμός *«[χ]ρησιμοποιείται συχνά από του Αριστοτέλη είτε σε αυτή ακριβώς μορφή είτε στην ισοδύναμη του: αυτό το οποίο είναι αδιαίρετο με οποιαδήποτε τρόπο ως προς το μέγεθος και quâ μέγεθος αλλά δεν έχει θέση είναι η **μονάδα**, ενώ αυτό το οποίο είναι παρομοίως αδιαίρετο και έχει θέση είναι το **σημείο**»* (Heath 1956, vol. 1, pp. 155).

Ο δε Πλάτωνας συνδέει το σημείο με τη φύση του απείρου γράφοντας: *Νῦν μέντοι ἄθρει τῆς τοῦ ἀπείρου φύσεως εἰ τοῦτο δεξόμεθα σημεῖον* (Πλάτωνας, *«Φίληβος»*, [24e4 − 5]).

Πριν από του Πλάτωνα, οι Έλληνες συγγραφείς χρησιμοποιούσαν τον όρο στιγμή για να συμβολίζουν ένα γεωμετρικό σημείο. Ο Πλάτων επέμενε να το αντικαταστήσει με τον όρο σημείο. Στον Αριστοτέλη εμφανίζονται και οι δύο όροι. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί μόνο το τελευταίο και αυτό το εγκαθιστά (Ζερβός 1972, σελ: 419).

Στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) αναφέρει ότι «το σημείο είναι ό,τι δεν έχει μέρος». Αυτός ο «ορισμός» του σημείου υπάρχει στους όρους του πρώτου βιβλίου των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη· είναι ο πρώτος

σε σειρά όρος και διατυπώνεται ως εξής:

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐδέν
(Σταμάτης 1975 Τόμος I, σελ: 38).

Ο Πρόκλος στα «Σχόλια του εις πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη», σχολιάζοντας τον ορισμό αυτό στο χωρίο [85, 1-96, 15], συσχετίζει συστηματικά την έννοια του σημείου με την έννοια του απείρου [9]. Αναφέρει ότι το σημείο είναι αμερές, πέρας γραμμής, συμμετέχει παντού, στα πράγματα που συμμετέχει εμφανίζεται άπειρες φορές και ότι έχει την ιδιότητα να είναι γεννήτορας όλων των διαστημάτων. Επίσης ότι είναι μια *«αυτοτελής ύπαρξη»* και η *«πρωτουργός αιτία»* της απειρίας των νοητών.

Στα *«Θεμέλια της Γεωμετρίας»* του Hilbert το σημείο επεξηγείται ως ένα *«ον»* το οποίο βρίσκεται σε αμοιβαίες σχέσεις και που δηλώνονται αυτές οι σχέσεις με τις λέξεις όπως *«κείνται»*, *«μεταξύ»* (Hilbert 1995, σελ: 131).

Ο Weyl λέει ότι τα χωρικά σημεία είναι *«μια καθορισμένη κατηγορία αντικειμένων που είναι «άμεσα δοθείσα»*[10] *(immediately given)»*. Υπό την υπόθεση ότι εφαρμόζονται στα αντικείμενα αυτά κάποιες συγκεκριμένες ιδιαίτερες ιδιότητες και σχέσεις, δηλαδή κάποια *«σχήματα κρίσης»* (judgment schemes). Ένα πλήρες σύστημα από καθορισμένα, υπό υπόθεση αυθύπαρκτα αντικείμενα καθορίζονται από *«τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της υπό εξέταση κατηγορηματικής ουσίας»*, την οποία ονομάζει *επέκταση* αυτής της κατηγορίας (Weyl 1987, pp. 8).

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η έννοια του μη εκτατού σημείου, από μόνη της, είναι μια πρωταρχική έννοια η οποία γίνεται διαισθητικά αποδεκτή, βάση μιας περιγραφής. Πώς γίνεται όμως αυτή η διαισθητική αποδοχή; Κάποιος όταν προσπαθεί να αναπαραστήσει νοητικά ένα τέτοιο σημείο, ουσιαστικά αναπαριστά εσωτερικά τις εντυπώσεις που δημιουργήθηκαν βιώνοντας κάποια πολύ μικρά αντικείμενα, όπως για παράδειγμα είναι οι κουκκίδες που γράφει το μολύβι στο χαρτί. Γενικά θα μπορούσε να διατυπωθεί η άποψη ότι η αναπαράσταση ενός μεμονωμένου μη εκτατού σημείου υπάρχει ως δυνατότητα αλλά όχι ως πραγματικότητα.

Το εν λόγω σημείο συγκεκριμενοποιείται εκ των υστέρων, a posteriori, μόνο μέσα σε μια μαθηματική θεωρία συνόλων.

Το σημείο χωρίς διάσταση είναι μια εννοιολογική κατασκευή (conceptual construction), μια αναγκαία συνέπεια μιας γραμμής ως ένα μονοδιάστατο νόμο.

[9] Συγκεκριμένα χωρία τέτοιων συσχετισμών είναι [88, 5 − 13], [88, 17 − 24]

[10] Ο ίδιος χρησιμοποιεί τη φράση αυτή μέσα σε εισαγωγικά.

Είναι μια ύστερη κατασκευή, συγκεκριμένη σύμφωνα με τη θεωρία συνόλων, η οποία «τοποθετεί μαζί» τα σημεία, για την ανακατασκευή της γραμμής. Από αυτή τη κατασκευή έρχεται η σύνολο-θεωρητική αντιστροφή των προτεραιοτήτων - το συνεχές είναι ένα σύνολο σημείων - μια επινόηση η οποία απορρίφθηκε από τους Weyl, Wittgenstein και Thom, για διαφορετικούς λόγους (Longo 1998, pp. 5).

Εκ των υστέρων τα πραγματικά σημεία μπορούν να απομονωθούν, αλλά ο ορισμός τους και η κατά Cantor-Dedekind Ανάλυση τους απαιτεί μια «σφαιρική ματιά» στο συνεχές, με τον ίδιο τρόπο που η διαίσθηση του παρόντος απαιτεί αυτή του παρελθόντος και του μέλλοντος (Longo 1998, pp. 7).

Όσο αφορά το γραμμικό συνεχές, δηλαδή τη νοητή γραμμή, ο Ζερβός αναφέρει:

Μια γραμμή δεν μπορεί να θεωρηθεί, ως περιέχουσα των ξεχωριστών της σημείων, αλλά ούτε μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ξεχωριστά από τα σημεία της. Όπως μια απόλυτη οντότητα δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αποτελούμενη από τις ξεχωριστές οντότητες στην οποία αντιστοιχούν (ή σε ενυπάρχοντα μέρη που είναι σε κάθε μια από αυτές τις οντότητες), αλλά καένα από αυτά δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ξεχωριστά από αυτές τις οντότητες (Zerbos 1972, pp. 431).

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι η ύπαρξη ενός μεμονωμένου μη εκτατού σημείου είναι υποθετικά αποδεκτή· η κατανόηση και η εξήγηση του αφήνεται στη διαίσθηση. Το σημείο εξ' ανάγκης λαμβάνεται ως μια πλατωνική «ανυπόθετη» αρχή της οποίας δεν επιζητείται η απόδειξη της. Ο Πλάτωνας στο έργο του *«Πολιτεία»* στο χωρίο [510b6 − 7] αναφέρει το «ανυπόθετο»[11], το οποίο στο συγκεκριμένο χωρίο ερμηνεύεται ως *«μια αρχή που δεν στηρίζει τη θεμελίωση της σε άλλη αρχή, αλλά είναι η ίδια πρώτη αρχή»* (Γεωργούλη 1939, σελ: 469). Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, δεν πρέπει να επιζητείται η απόδειξη των πάντων, διότι κάποιος που κάνει κάτι τέτοιο θα βαδίζει προς τα πίσω επ' άπειρον επιζητώντας την απόδειξη κάθε αρχής (Αριστοτέλης, *«Μετά τα Φυσικά»*, [1006a5 − 15]).

Θα μπορούσε να λεχθεί ότι το σημείο στο συνεχές χάνει την ατομικότητα του, έτσι ώστε καμία αναπαράσταση του να είναι δυνατή και να εξαφανίζεται κάθε διαισθητική αναφορά σε αυτό. Συμπληρωματικά αναφέρεται ότι τα σημεία μέσα σε μια μαθηματική θεωρία αντικαθίστανται από τη μορφή των τομών (τομές Dedekind) είτε από τη μορφή των ορίων βασικών ακολουθιών[12].

[11] Το πλατωνικό «ανυπόθετο» στο ίδιο έργο αναφέρεται και στο στίχο [511b7].

[12] Οι βασικές ακολουθίες ονομάζονται και ακολουθίες Cauchy.

Για την υποστήριξη της πιο πάνω άποψης κρίνεται αναγκαίο να παρατεθούν τα ακόλουθα αποσπάσματα:

Το σημείο μέσα στο συνεχές στερείται το απαιτούμενο στήριγμα στη διαίσθηση (Weyl 1987, pp. 90).

Τα σημεία δεν είναι μέρος της διαίσθησης μας του συνεχούς, τουλάχιστο όχι σαφώς από το χρονικό συνεχές (temporal continuum), . . . , όπως επίσης ούτε μέρος του χωρικού συνεχούς (spatial continuum) (Longo 1998, pp. 5).

Επίσης ο Poincare ενδεχομένως λαμβάνοντας υπόψη, εν μέρη, μια αριστοτελική έκφραση του συνεχούς αναφέρει ότι: *[Τ]ο σημείο δεν είναι δυνατό να διαιρεθεί, το σημείο δεν είναι συνεχές* (Poincare 1997, σελ: 66).

Όπως στην αρχαιότητα εγκαταλείφθηκε ο όρος «στιγμή» για το «σημείο» (Ζερβός 1972, σελ: 419), παρόμοια και στα σύγχρονα μαθηματικά αφήνεται το «σημείο» για τον όρο «τομή», για τη φράση «όριο ακολουθίας». Τα όσα συμβαίνουν από το σημείο στη τομή είτε στο όριο ακολουθιών τονίζουν ένα παράγοντα αφαίρεσης στη γλώσσα ώστε να είναι εφικτή μια πιο επαρκή περιγραφή των αφηρημένων εννοιών. Οι αφηρημένες έννοιες, όπως είναι του σημείου, απαιτούν μια πιο αφηρημένη ορολογία και οι πιο αφηρημένες γλωσσικές συνήθειες που θα ωθήσουν στο σχηματισμό περισσότερο αφηρημένων εννοιών.

Με τον όρο «συνεχές»[13] (continuum) εκφραζόταν παλαιότερα αυτό που λέμε σήμερα, «σύνολο των πραγματικών αριθμών». Την εποχή αυτή γενικά είναι αποδεκτό από τη μαθηματική κοινότητα, ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη φυσική του διάταξη είναι ένα συνεχές σύνολο[14] ισοδύναμο με το σύνολο των σημείων μιας ευθείας γραμμής. Μέχρι τα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα δεν είχαν αριθμητικά κατασκευαστεί οι πραγματικοί αριθμοί. Οι ρητοί αριθμοί μπορούσαν να εκφραστούν καθαρά αριθμητικά, αλλά οι αριθμοί αυτοί συγκρινόμενοι με το διαισθητικό συνεχές, δεν αρκούσαν για να το «γεμίσουν», άφηναν κενά. Το σύνολο των ρητών αριθμών παρουσιάζει *χάσματα*[15] (Kamke 1963, σελ: 97). Αυτά τα χάσματα αντικαθίστανται μ' ένα νέο είδος αριθμών.

---

[13]Στην παρούσα εργασία προτιμήθηκε να αναφέρεται ως «μαθηματικό συνεχές» σε αντιδιαστολή με το διαισθητικό συνεχές.

[14]Ένα διατεταγμένο σύνολο καλείται συνεχές αν είναι πυκνό και δεν παρουσιάζει χάσματα (Kamke 1963, σελ: 97).

[15]Μια διάσπαση $M = A + Z$ του διατεταγμένου συνόλου M σε δύο μη κενά σύνολα A και Z χαρακτηρίζεται ως *χάσμα*, όταν το A δεν έχει τελευταίο στοιχείο και το Z δεν έχει πρώτο στοιχείο. Για παράδειγμα, αν οι πραγματικοί αριθμοί των διαστημάτων $(0, 1)$, $(1, 2)$ βρίσκονται κατά τη φυσική τους τάξη, το άθροισμα $(0, 1) + (1, 2)$ είναι ένα χάσμα (Kamke 1963, σελ: 96).

Στόχος του Dedekind ήταν να εκφράσει με αριθμούς τη πληρότητα ή τη συνέχεια της ευθείας γραμμής (Dedekind 1963, pp. 9). Οι ρητοί αριθμοί δεν αρκούσαν για να μελετηθούν αριθμητικά όλα τα φαινόμενα στην ευθεία γραμμή. Μέχρι τότε, συνήθως η εισαγωγή των άρρητων αριθμών βασιζόταν στην αντίληψη των *εκτεταμένων μεγεθών* (extensive magnitudes). Ο Dedekind θέλοντας και θεωρώντας ότι θα έπρεπε η αριθμητική να αναπτυχθεί από μόνη της (Dedekind 1963, pp. 10), για να πετύχει το στόχο του, κατασκεύασε νέους αριθμούς. Αυτό το πετυχαίνει χωρίζοντας όλα τα σημεία της ευθείας γραμμής σε δύο τάξεις, ώστε κάθε σημείο της πρώτης τάξης να είναι στα αριστερά κάθε σημείου της δεύτερης τάξης, τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο το οποίο να πετυχαίνει αυτό τον καταμερισμό όλων των σημείων σε δύο τάξεις. Αυτό το σημείο είναι ένα νέο είδος αριθμού για την εποχή· είναι ένας πραγματικός αριθμός, μια τομή Dedekind.

Η μέθοδος για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$) από τους ρητούς ($\mathbb{Q}$) με χρήση τομών οφείλεται στον Dedekind. Η κατασκευή των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$) από τους ρητούς ($\mathbb{Q}$) με χρήση ακολουθιών Cauchy οφείλεται στον Cantor. Το 1872 εξέδωσαν και οι δυο τους τις αντίστοιχες εργασίες (Rudin 2000, σελ: $30-31$).

Το μαθηματικό συνεχές είναι ένα σύνολο πραγματικών αντικειμένων (με την υπερβατική έννοια) με *σχέσεις* και *ιδιότητες*. Έχει τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της *διάταξης* αυτών των αντικειμένων, της *πυκνότητας* και της *πληρότητας*. Επίσης έχει αλγεβρικές ιδιότητες, αλγεβρικές πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, ύπαρξη 0, 1, ύπαρξη αντιθέτου και αντίστροφου).

Η αλγεβρική δομή των πραγματικών αριθμών και αυτή των ρητών είναι συμβατές μεταξύ τους, καθώς επίσης και σε σχέση με τη διάταξη. Αν θεωρήσουμε την διάταξη στους πραγματικούς και την ίδια στους ρητούς με τις ιδιότητες της αυτοπάθειας, της αντισυμμετρικότητας, της μεταβατικότητας, της τριχοτομίας και της πυκνότητας, τότε δεν υπάρχει πρωτοβάθμια[16] πρόταση που να τις διαχωρίζει. Δηλαδή *δεν* υπάρχει πρωτοβάθμια πρόταση της γλώσσας της διάταξης που να είναι αληθής στη δομή $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$ και ψευδής στη $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$. Το αξίωμα της πληρότητας (ή συνέχειας) των πραγματικών αριθμών είναι η πρόταση που διαχωρίζει τη δομή $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$ από τη $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$. Αυτό το αξίωμα, που λέει ότι κάθε μη κενό φραγμένο από πάνω υποσύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum), ισχύει στη διατεταγμένη δομή $\langle\mathbb{R},\leq\rangle$ αλλά όχι στη $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$. Το αξίωμα αυτό όμως, είναι μια δευτεροβάθμια πρόταση γιατί χρειά-

[16] *Ο όρος πρωτοβάθμια δηλώνει ότι η γλώσσα διαθέτει μεταβλητές μόνο για αντικείμενα (Μυτιληναίος* 2003*, σελ:* 62*).*

ζεται να χρησιμοποιηθεί *και* ποσοδείκτης που τρέχει πάνω σε σύνολα. Άρα οι ρητοί και οι πραγματικοί διαχωρίζονται ως προς τη διάταξη αλλά με μια δευτεροβάθμια πρόταση.

Για τη διατύπωση των πραγματικών αριθμών ως τομών Dedekind χρειάζεται δευτεροβάθμια Λογική, διότι χρησιμοποιούνται ποσοδείκτες *και* για αντικείμενα (πραγματικούς αριθμούς) *και* για σύνολα αντικειμένων (υποσύνολα πραγματικών αριθμών).

Ο Dedekind έχοντας υπόψη του το διαισθητικό συνεχές της ευθείας γραμμής κατασκεύασε το μαθηματικό συνεχές, δηλαδή, το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η έκφραση του συνεχούς βάση της αριθμοθεωρίας καλέστηκε ως αριθμητικό συνεχές και η έκφραση του συνεχούς βάση της γεωμετρίας καλέστηκε ως γεωμετρικό συνεχές. Αυτό που κρίνεται αναγκαίο να τονισθεί είναι ότι πρόκειται για το ίδιο συνεχές, το μαθηματικό συνεχές, με τη διαφορά ότι εφαρμόστηκαν δύο διαφορετικοί μαθηματικοί τρόποι έκφρασης του.

Ο Βασιλείου υποστηρίζει ότι το χάσμα που χωρίζει την έννοια του διακεκριμένου και του την έννοια του συνεχούς δεν διαφέρει ουσιαστικά από το χάσμα μεταξύ της Γεωμετρίας και της Αριθμοθεωρίας. Στόχος της θεωρίας συνόλων ήταν η γεφύρωση αυτού του χάσματος (Βασιλείου σελ: 48). Σε μεγάλο βαθμό η γεφύρωση αυτή ήταν προβληματική· η άποψη αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι κατά τη χρονική περίοδο αυτή εμφανίζεται ένας αριθμός των ονομαζόμενων συνολοθεωρητικών (ή λογικών) και ερμηνευτικών παραδόξων. Τα πρώτα οφείλονταν στην έννοια του συνόλου ενώ τα δεύτερα στην εκφραστική ασάφεια των φυσικών γλωσσών. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των παραδόξων είναι ότι στη διατύπωση τους χρησιμοποιείται κατά βάση μια κοινή και συγκεκριμένη συλλογιστική μέθοδος, η «διαγώνια μέθοδος» (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 211).

Η έννοια του συνόλου είναι πολύ σημαντική για τα μαθηματικά. Τη σημερινή εποχή, η καθαρή έννοια του συνόλου γίνεται αποδεκτή, από τη μαθηματική κοινότητα, όπως αυτή αποδίδεται μέσα από κάποιο αξιωματικό σύστημα της Θεωρίας Συνόλων. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι, η έννοια του σύνολου, από μόνη της, είναι μια πρωταρχική έννοια στη Θεωρία Συνόλων, διαισθητικά δοσμένη (με την έννοια ότι δεν δίνεται γι' αυτήν κάποιος μαθηματικός ορισμός).

Θα λέγαμε ότι, στις απαρχές της Θεωρίας Συνόλων, ο καθορισμός της έννοιας του συνόλου γίνεται βάση, μιας περιγραφής, μιας διαισθητικής αντιμετώπισης. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύεται από τις διαφορετικές διατυπώσεις που δίνουν για την έννοια το συνόλου οι Cantor και Dedekind.

Ο Βασιλείου αναφέρει ότι: *Στήν ἀλληλογραφία μεταξύ Cantor και Dedekind βλέπομε, ὅτι ὁ πρῶτος ἔδινε στό σύνολο τό μεταφυσικό νόημα μιᾶς ἀβύσσου, ἐνῶ ὁ δεύτερος τό θεωροῦσε σάν «ἕνα σάκκο μέ ἄγνωστα πράγματα»* (Βασιλείου 1973, σελ: 65).

Ο Ζερβός αναφέρει μια μετάφραση που έκανε ο Ε. Σταμάτης, στον ορισμό ενός συνόλου που δίνει ο Cantor στο έργο του "Grundlangen einer allegemeinen Mannigfaltigkeitslehre" το 1883: *Καλώ μια ποικιλία ή ένα σύνολο κάθε μεγάλο πλήθος το οποίο είναι κατανοητό ως όλο, δηλαδή κάθε συλλογή από καθορισμένα στοιχεία που, στη βάση ενός συγκεκριμένου νόμου, μπορούν να είναι ενωμένα σε ένα και μόνο σύνολο, και γι΄ αυτό πιστεύω ότι ορίζω κάτι που είναι σχετικό με ένα πλατωνικό πράγμα ή ιδέα και με αυτό που, στο διάλογο του Φίληβος, ο Πλάτων καλεί «μεικτόν»* (Zervos 1972, pp. 437).

Ο Dedekind στο έργο του "Essays on the theory of numbers" περιγράφει το σύνολο, το οποίο δεν το αναφέρει με αυτόν ακριβώς τον όρο αλλά με τον όρο *«σύστημα»* (system). Ακολούθως παρατίθεται ένα μέρος της σχετικής παραγράφου:

Συμβαίνει πολύ συχνά διαφορετικά πράγματα, $a, b, c, \ldots$ για κάποιο λόγο να μπορούν να εξεταστούν από μια κοινή άποψη, μπορούν να συνδυαστούν (associated) μέσα στο μυαλό· και λέμε ότι σχηματίζουν ένα ***σύστημα*** *S· καλούμε τα πράγματα $a, b, c, \ldots$* ***στοιχεία*** *του συστήματος S, τα οποία* ***περιέχονται*** *μέσα στο S· αντιστρόφως, το S* ***αποτελείται***[17] *(consists) από αυτά τα στοιχεία* (Dedekind 1963, pp. 45).

Είναι κοινά αποδεκτό ότι η εισαγωγή της Θεωρίας Συνόλων στα μαθηματικά προκάλεσε τη γέννηση γόνιμων διαφωνιών μεταξύ των μαθηματικών, όπως επίσης την εμφάνιση των παραδόξων. Δημιουργήθηκε η ανάγκη να παρουσιασθεί η Θεωρία Συνόλων ως αξιωματικό σύστημα. *[Η] αφύπνιση της αξιωματικής Θεωρίας Συνόλων (το 1904) περιόρισε αυτές τις αντινομίες* (Kuratowski 1972, pp. 79).

Η πρώτη προσπάθεια αξιωματικοποίησης της Θεωρίας Συνόλων γίνεται από τον Zermelo ($1871 - 1953$) και στη συνέχεια συμπληρώνεται από τον Fraenkel ($1891 - 1967$), γι΄ αυτό και αυτή η αξιωματική Θεωρία Συνόλων είναι γνωστή ως αξιωματική Θεωρία Συνόλων κατά Zermelo-Fraenkel (συντομογραφικά συμβολίζεται με ZF) ή Zermelo-Fraenkel και το αξίωμα της επιλογής[18] (axiom of Choice) (συντομογραφικά συμβολίζεται με ZFC). Χαρακτηριστικό

[17] Οι λέξεις που είναι έντονα γραμμένες, τονίζονται από τον ίδιο τον Dedekind στο έργο του γράφοντας τις με πλάγια γράμματα.

[18] Αξίωμα της Επίλογής: *Το Καρτεσιανό γινόμενο μιας μη-κενής οικογένειας μη-κενών συνόλων είναι μη-κενό* (Halmos 1960, pp. 59).

απόσπασμα είναι το πιο κάτω:

*Πρώτος ο Zermelo, παρακάμπτοντας το ανέφικτο ενός άμεσου ορισμού για την πρωταρχική αυτή έννοια [του συνόλου], εισήγαγε την αξιωματική δόμηση της Θεωρίας των Συνόλων με τη νεότερη εκδοχή των αξιωμάτων, όπως αυτή διαμορφώθηκε από τον Hilbert (*1862 – 1943*), και με τον τρόπο αυτόν εγκαινίασε τις έρευνες προς τη κατεύθυνση αυτή* (Βασιλείου 1973, σελ: 65).

Έτσι, ξεκινάνε οι προσπάθειες να αποδοθεί πλήρως η έννοια του συνόλου, δίνοντας τις βασικές ιδιότητες του συνόλου, έμμεσα ως αξιώματα, σε ένα αξιωματικό σύστημα. Η ZFC δεν είναι αρκετά πλήρης περιγραφή του συνολοθεωρητικού σύμπαντος (Rucker 2004, σελ: 277), αλλά έδωσε στη Θεωρία Συνόλων εκπληκτικές δυνατότητες και μια εντυπωσιακή ανάπτυξη. Προχωρώντας έτσι, αργότερα έκαναν την εμφάνιση τους κλάδοι της Θεωρίας Συνόλων. Έτσι η θεωρία συνόλων, η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και η λογική αλληλεπιδρούν και αμοιβαία εξελίσσονται. Έχουμε τότε και την ανάπτυξη της περιγραφικής θεωρίας συνόλων που συσχετίζει τη θεωρία συνόλων με την ανάλυση, την πρωταρχική πηγή της Καντοριανής έμπνευσης των συνόλων.

Η εργασία του Cantor αποδείχθηκε εξαιρετικά καρποφόρα για πολλούς κλάδους των μαθηματικών, εγκαινιάζοντας μεταξύ άλλων μια καινούργια οπτική της θεωρίας της ολοκλήρωσης συναρτήσει του μέτρου των συνόλων (Mankiewicz 2002, σελ: 152).

Είναι κοινά παραδεκτό ότι, η πρώτη εμφάνιση της επιστήμης των μαθηματικών ως μιας καθαρά παραγωγικής επιστήμης γίνεται με την σύνθεση των «Στοιχείων», από τον Ευκλείδη. Ωστόσο, η πορεία της θεμελίωσης των μαθηματικών ήταν αρκετά δύσκολη, αφού οι πεποιθήσεις για το συνεχές που προέρχονταν από προγενέστερα φιλοσοφικά δόγματα, κυρίως, της Ελεατικής σχολής και του Αριστοτέλη, έθεταν σε σοβαρή αμφιβολία τη θέση των Μαθηματικών ως μίας καθαρά παραγωγικής επιστήμης.

Ως πρώτη μεγάλη κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών θεωρείται η ανακάλυψη των ασύμμετρων, δηλαδή των αρρήτων. Η κρίση αυτή παρακάμφθηκε, στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, με την θεωρία Λόγων του Ευδόξου, μαθητή του Πλάτωνα, και την μέθοδο της εξάντλησης. *Η μέθοδος αυτή μαζί με τη θεωρία των Λόγων, έδωσε στους Έλληνες το μέσο για την αντιμετώπιση του προβλήματος του συνεχούς* (Βασιλείου 1973, σελ: 58).

Πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες επέτυχαν να πλησιάσουν στη σύλληψη μιας αριθμητικής ιδέας του γεωμετρικού συνεχούς με την επινόηση ασύμμετρων αριθμών (Βασιλείου 1973, σελ: 47).

Η θεωρία αυτή συμπληρώθηκε το 1887 από τον Dedekind με την δημιουρ-

γία των *τομών*, οι οποίες εισάγουν την γενική έννοια των ασύμμετρων αριθμών (Βασιλείου 1973, σελ: 48). Ο Dedekind ορίζει την έννοια της *συνέχειας* με βάση τη τομή από την έννοια της *διατάξεως* και της *πυκνότητας*.

Το συνεχές των πραγματικών αριθμών γίνεται «πυκνότερο» από την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών, είναι αυτοί που δίνουν το υπεραριθμήσιμο πλήθος του συνεχούς. Αυτό είχε αρχίσει να φαίνεται με την επινόηση που έκανε ο Cantor μιας νέας αριθμητικής οντότητας, των υπερπεπερασμένων πληθικών αριθμών[19]. Ο ίδιος είχε διατυπώσει την εικασία ότι δεν υπάρχει πληθικός μεταξύ του άλεφ-μηδέν[20] και του άλεφ, δηλαδή την πρόταση $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, η οποία και μεταγενέστερα ονομάστηκε *υπόθεση του συνεχούς (HC)* είτε *πρόβλημα του συνεχούς*. Η απόδειξη της υπόθεσης αυτής όπως υποστηρίζει ο Βασιλείου θα πραγματοποιούσε τη *«γεφύρωση μεταξύ συνεχούς και ασυνεχούς»*, του διακεκριμένου και του συνεχούς (Βασιλείου σελ: 63). Γι' αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μαθηματική συνέχεια (το μαθηματικό συνεχές) δεν έχει εκφράσει πλήρως την διαισθητική συνέχεια (το διαισθητικό συνεχές).

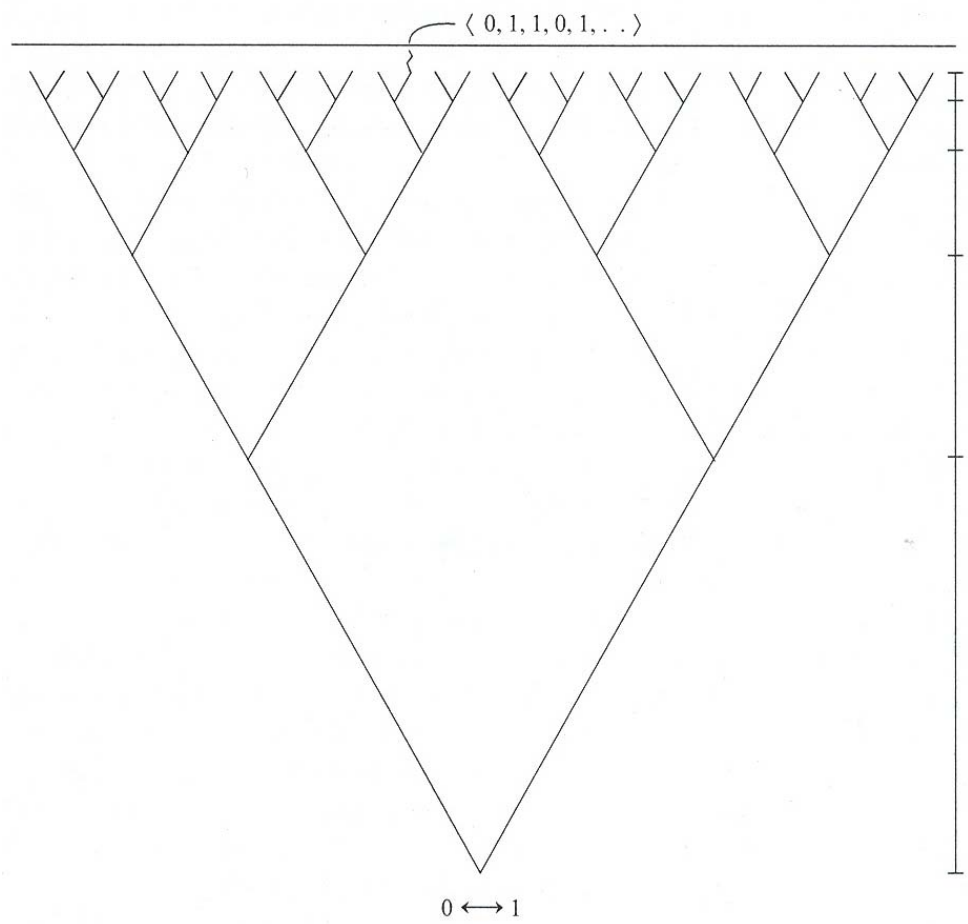
Ένα σχήμα στο οποίο μπορούν φαντασιακά να συνυπάρξουν οι $2^{\aleph_0}$, $\aleph_0$ είναι το άπειρο δυαδικό δένδρο (Σχήμα 1.6). Στο οποίο μπορούν να τοποθετηθούν ω διακλαδώσεις κάτω από την οριζόντια γραμμή του σχήματος. Ένα κλαδί που διατρέχει ολόκληρο το δένδρο αναπαριστάται με μια ω-ακολουθία δυαδικών αποφάσεων. Μια τέτοια δυαδική απόφαση αντιστοιχεί σ' ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος είναι γραμμένος σε δυαδικό σύστημα. Το πλήθος του των μονοπατιών του δένδρου αυτού είναι ο $2^{\aleph_0}$ (το σύνολο των μονοπατιών είναι μη αριθμήσιμο σύνολο), ο αριθμός των κόμβων του δένδρου αυτού είναι $\aleph_0$ (το σύνολο των κόμβων είναι αριθμήσιμο σύνολο) (Rucker 2004, σελ: $263 - 265$).

Επίσης, αναφέρεται ότι, η πορεία κατασκευής του συνόλου Cantor οδηγεί στην κατασκευή ενός δυαδικού δένδρου. Η τελική κατάληξη του δέντρου αυτού είναι το σύνολο του Cantor του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος $I = [0, 1]$ γραμμένοι στο δυαδικό σύστημα (Σπύρου 1994, σελ: 42).

Ένας άλλος τρόπος να δούμε το υπεραριθμήσιμο του συνεχούς, δηλαδή των πραγματικών αριθμών, εκτός από την παράσταση του δυαδικού δέντρου,

[19]Υπερπεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί χαρακτηρίζονται οι πληθικοί αριθμοί που αντιπροσωπεύουν άπειρα σύνολα (Kamke 1963, σελ: 30).

[20]Οι άπειροι διατακτικοί αριθμοί λέγονται και *άλεφ*. Γενικά, γράφουμε $\aleph_a$ για να συμβολίσουμε τον άλεφ τάξης a. Έτσι, $\aleph_0$ είναι ο ω, ο άπειρος διατάκτικός μηδενικής τάξης (Rucker 2004, σελ: 82).



Σχήμα 1.6: Το άπειρο δυαδικό δένδρο (Rucker 2004, σελ: 264).

είναι με το γράφημα της κλιμακωτής συνάρτησης [21](Σχήμα 1.7).

Έστω το σύνολο $\mathscr{C}$ όλων των αριθμών t της μορφής

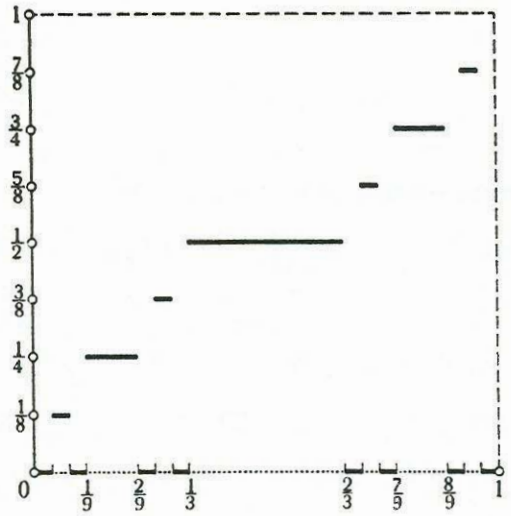
$$t = t_1/3 + t_2/9 + \cdots + t_n/3^n + \cdots,$$

όπου t_n παίρνει μία από τις τιμές 0 ή 2. Θέτουμε

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t_1/2 + t_2/4 + \cdots + t_n/2^n + \cdots\right).$$

[21]Η κλιμακωτή συνάρτηση την αγγλική ορολογία συναντάται ως step function ή staircase fuction.

Η συνάρτηση φ έχει την ίδια τιμή και στα δύο σημεία των άκρων του διαστήματος που διαγράφουμε κατά τη κατασκευή του συνόλου Cantor. Αυτή τη τιμή τη παίρνουμε ως σταθερή τιμή της συνάρτησης f σε αυτό το διάστημα. Δηλαδή, για $t \in \mathscr{C}$, θέτουμε $f(t) = \varphi(t)$ (Kuratowski 1972, pp. $210 - 214$). *Από την συνάρτηση αυτή φαίνεται ότι το σύνολο του Cantor είναι υπεραριθμήσιμο* (Σπύρου 1994, σελ: 42).



Σχήμα 1.7: Το γράφημα της κλιμακωτής συνάρτησης (Engelking & Sieklucki 1992, pp. 200).

Τέλος, από τα όσα έχουν ήδη διατυπωθεί, γίνεται φανερό ότι το αντιληπτικό και το διαισθητικό συνεχές αλλά και το μαθηματικό συνεχές επιδέχονται εξωτερική αναπαράσταση. Όπως επίσης και εσωτερική αναπαράσταση, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα κατάλληλα ερεθίσματα.

Επίσης θα λέγαμε ότι, το μαθηματικό συνεχές είναι ένα σύνολο καθαρά εποπτικών δεδομένων που συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις, με αλγεβρικές πράξεις και τις ιδιότητες της διάταξης, της πυκνότητας και της πληρότητας.

Κεφάλαιο 2

Τα παράδοξα του Ζήνωνος και το συνεχές.

Όπως θα διαπιστωθεί από την μετέπειτα διερεύνηση, βασικό μέλημα του Ζήνωνος του Ελεάτη, ήταν η υπεράσπιση του παρμενίδιου μονιστικού συστήματος. Το ον είναι ένα, το οποίο μεταξύ άλλων, είναι συνεχές και δεν δύναται να συνίσταται - αυτό όπως και η συνέχεια του - από άτομα τα οποία δεν έχουν καμία χαρακτηριστική σχέση μεταξύ τους.

2.1 Η σχολή των Ελεατών και ο Ζήνων.

Η Ελεατική οντολογία ξεπροβάλει από το χώρο της Φυσικής φιλοσοφίας (Ρούσσος 1982, σελ: 43). Δύο σημαντικές θεωρίες που αναπτύχθηκαν στο χώρο της ελληνικής φιλοσοφίας, πριν την εμφάνιση της Ελεατικής θεωρίας, είναι η θεωρία των αντιθέτων των Πυθαγορείων και η θεωρία της αντιθετικής αρμονίας του Ηρακλείτου. Εύλογα, λοιπόν, διατυπώνεται η άποψη ότι η μαθηματική σκέψη των πυθαγορείων και το δυναμικό σύμπαν του Ηρακλείτου συντέλεσαν στη γένεση του Ελεατικού προβληματισμού (Ρούσσος 1982, σελ: 51).

Ένας από τους πιο σπουδαίους αντιπρόσωπους της Ελεατικής σχολής υπήρξε ο Παρμενίδης ο οποίος *«προήγαγε περί του όντος διδασκαλία, διατύπωσε σαφέστερα και επιστημονικότερα την έννοια του όντος»* (Εισαγωγή εις τον «Παρμενίδην» του Πλάτωνος, 1975, σελ: 9).

Ο Παρμενίδης θεωρεί ότι το ον είναι αγέννητο, δηλαδή ότι είναι η πρώτη δημιουργική αρχή, *«ἀνώλεθρον»*, μονογενές, ακίνητο και ότι υπάρχει ως

ένα όλον (Εισαγωγή εις τον «Παρμενίδην» του Πλάτωνος, 1975, σελ: 9 − 10; Ρούσσος 1982, σελ: 52). Επίσης ότι, αυτό είναι τέλειο, πλήρες, αδιαίρετο και συνεχές (Εισαγωγή εις τον «Παρμενίδην» του Πλάτωνος, 1975, σελ: 10; Ρούσσος 1982, σελ: 15). Ο Παρμενίδης απέδιδε κάθε κίνηση και φθορά που παρατηρείται στη φύση στην απάτη των αισθήσεων· έκανε διάκριση μεταξύ του ενιαίου όντος και του μη όντος, το οποίο το θεωρούσε ως απατηλή παρουσία του όντος. Υποστήριζε ότι, το ον είναι αυτό που υπάρχει πραγματικά και ότι μόνο η γνώση του αποτελεί την αληθή γνώση (Εισαγωγή εις τον «Παρμενίδην», του Πλάτωνος, σελ: 10).

Το Ον, νοούμενο σαν αυτικειμενική και υπερβατική πραγματικότητα και σαν απόλυτο σημείο αναφοράς του εμπειρικά δεδομένου φυσικού κόσμου, είναι η έννοια που γεννήθηκε μαζί με τους Ελεάτες φιλοσόφους (Ρούσσος 1982, σελ: 41). Όμως το ον νοούμενο σαν αντικειμενική πραγματικότητα μόνο και σαν σχετικό σημείο αναφοράς του τον εμπειρικά δεδομένο φυσικό κόσμο προϋπήρχε της Ελεατικής οντολογίας στη Φυσική φιλοσοφία και στη Θεογονική ποίηση (Ρούσσος 1982, σελ: 41). *Το Ον ως ειδικός φιλοσοφικός όρος, με καθορισμένο σημασιολογικό περιεχόμενο, είναι αποκλειστικό δημιούργημα των Ελεατών* (Ρούσσος 1982, σελ: 42).

Γενικά, στα πλαίσια του φιλοσοφικού δόγματος της Ελεατικής σχολής το ον καθορίζεται να είναι πλήρες, συνεχές και αδιάκοπο, μονοειδές κάθε όμοιο με αυτό είναι αδιαίρετο, άτμητο, ακίνητο, άτρεπτο, αναλλοίωτο, νοερό (Εισαγωγή εις τον «Παρμενίδην», του Πλάτωνος, σελ: 11 − 12). Ο Ζήνων, μαθητής του Παρμενίδη, ήθελε να αποδείξει με τα επιχειρήματά του, μεταξύ των οποίων είναι και αυτά που είναι γνωστά ως «παράδοξα του Ζήνωνος»[1], ότι οι αισθήσεις είναι απατηλές και εμφανίζουν το ένα ον περισσότερα του ενός. Με αυτά τα επιχειρήματα του «αποδείκνυε», με την εις άτοπο απαγωγή, την ύπαρξη ενός μόνου όντος αδιαίρετου και ακίνητου· υπερασπιζόμενος έτσι το παρμενίδιο μονιστικό φιλοσοφικό σύστημα από τις επιθέσεις των πλουραλιστών της εποχής (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 59).

Συμπληρώνεται ότι ο Ζήνων δεν συμφωνούσε απολύτως με τη διδασκαλία του Παρμενίδη. Αφού όπως αναφέρεται από τον Βασιλείου: *Η επιχειρηματολογία ... του Ζήνωνος, στρέφεται κυρίως εναντίων εκείνων που υποστήριζαν ότι ο χώρος (και ο χρόνος) συνίσταται από άτομα. Για του Ζήνωνα τα άτομα αυτά θα πρέπει κατ΄ ανάγκην να είναι άπειρα το πλήθος. Τούτο ακριβώς, ευρί-*

[1] Ο Βέικος αναφέρει την εξής σημείωση: *Ονομάζονται κοινός «παράδοξα», αλλά αυτό δεν είναι ένα κυριολεκτικά ακριβές όνομα. Οι προτάσεις του Ζήνωνος συνιστούν μάλλον αντινομικά επιχειρήματα παρά φαινομενικά παράλογες προτάσεις* (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: 334).

σκετο σε αντίθεση προς τη διδασκαλία του Παρμενίδη για το ενιαίο του κόσμου (Βασιλείου 1973, σελ: 52).

Επίσης συμπληρώνεται ότι ατομικοί φιλόσοφοι, όπως ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος, δέχτηκαν ότι το ον είναι αγέννητο και άφθαρτο, κάτι το οποίο ήταν σύμφωνο με το Ελεατικό δόγμα· αλλά δεν δέχτηκαν ότι το ον είναι και ακίνητο και αδιαίρετο, κάτι το οποίο ήταν αντίθετο προς το Ελεατικό δόγμα (Ρούσσος 1982, σελ: 55).

Βάση των πιο πάνω αλλά και ενός μεγάλου μέρους της βιβλιογραφίας που αφορά τα παράδοξα του Ζήνωνος ενισχύεται το συμπέρασμα ότι ο Ζήνων με αυτά έμμεσα αντιτίθεται σε μια θεωρία των ατόμων, όπως ενδεχομένως θα μπορούσε να είναι του Δημόκριτου, ακόμη και στην αριθμοθεωρεία των Πυθαγορείων η οποία ενσωματωνόταν με μια μεταφυσική πολυαρχική κοσμοθεωρεία.

Ο σχολιαστής Σιμπλίκιος (αρχές $6^{ου}$ αιώνα μ.Χ.), σε έργο του, αναφέρεται σε αποσπάσματα[2] του συγγράμματος του Ζήνωνος· αυτά τα αποσπάσματα θεωρούνται έγκυρη πηγή αφού όπως δηλώνει ο Σιμπλίκιος *«γράφει ταῦτα κατά λέξιν ὁ Ζήνων»* (Σιμπλίκιος, «Εις το Α΄ Αριστοτέλους Φυσικης Ακροάσεως», [9, 140, 29]), δηλαδή είναι κατά λέξη απόδοση των γραφών του Ζήνωνος. Μέσα από ένα συνδυασμό αυτών ο Ζήνων φαίνεται να θέλει να καταρρίψει τον πλουραλιστικό ισχυρισμό για τη δυνατότητα διαιρέσεως του συνεχούς σε *άτομα* τα οποία δεν έχουν μεταξύ τους συνοχή (Βασιλείου 1973, σελ: 49). Όπως υποστηρίζεται από το Βασιλείου, από τα πιο πάνω αποσπάσματα φαίνεται ο Ζήνων να ξεκινάει, τον συλλογισμό για την κατάρριψη του ισχυρισμού αυτού, θεωρώντας πρώτα ότι κάτι που έχει έκταση συνίσταται από άπειρα μέρη· ακολούθως διακρίνει δύο περιπτώσεις: Στη πρώτη περίπτωση τα έσχατα, άπειρα το πλήθος, αδιαίρετα μέρη που φθάνουμε με τη γενόμενη διαίρεση, δεν έχουν μέγεθος· αυτό αποκλείεται κατά τον Ζήνων. Στη δεύτερη περίπτωση, τα εν λόγο άτομα έχουν μέγεθος· τότε το άθροισμα άπειρου πλήθους μεγεθών, που δεν είναι μηδενικά, είναι άπειρον. Έτσι αποδεικνύεται με εις άτοπο κατά το Ζήνων η μη εγκυρότητα του πλουραλιστικού ισχυρισμού (Βασιλείου 1973, σελ: $49 - 50$).

Επίσης κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί ότι διατυπώνεται από τον Βασιλείου η άποψη ότι η άπειρη διαίρεση του συνεχούς που εφαρμόζει ο Ζήνων είναι διαφορετική από αυτή που εφάρμοζε ο δάσκαλος του Παρμενίδης. Αυτή που εφαρμόζει ο Παρμενίδης καταστρέφει τη συνοχή των μερών του όλου ενώ

[2]Σιμπλίκιος, «Εις το Α΄ Αριστοτέλους Φυσικης Ακροάσεως», $[9, 139, 11 - 15]$, $[9, 140, 29 - 33]$, $[9, 141, 1 - 8]$

αυτή που εφαρμόζει ο Ζήνων είναι μια *«καθαρά νοητική διαίρεση»* η οποία διατηρεί τη συνοχή μεταξύ των μερών του όλου (Βασιλείου 1973, σελ: 49).

Από τη σχετική βιβλιογραφία και βάση των αρχαίων κειμένων του σχολιαστή Σιμπλίκιου και του Αριστοτέλη συμπεραίνεται ότι είναι κοινή παραδοχή ότι οι απόψεις του Ζήνωνος του Ελεάτη φαίνεται να έχουν ως κεντρικό άξονα την μη αποδοχή της σύστασης των διαστατών από αδιάστατες οντότητες. Όπως επίσης, την υπεράσπιση του παρμενίδιου μονιστικού συστήματος έναντι του πλουραλιστικού συστήματος. Σημειώνεται ότι, το ενδιαφέρον του Ζήνωνος είχε εστιαστεί στη φυσική θεώρηση του χώρου και του χρόνου και όχι σε μια μαθηματική θεώρηση αυτών. Παρά ταύτα η αναμφισβήτητα στενή σύνδεση ειδικά των ονομαζόμενων «παραδόξων του Ζήνωνος» με την έννοια του συνεχούς ήταν ικανή να επηρεάσει τη μετέπειτα εξέλιξη των μαθηματικών. Δικαιολογημένα λοιπόν εκφράζεται η κάτωθεν άποψη:

Οι δοξασίες του Αριστοτέλους για το συνεχές, όπως και τα παράδοξα του Ζήνωνος, δεν αφορούσαν τα καθαρά μαθηματικά. Ωστόσο, οι δοξασίες αυτές ήσαν αρκετές για να θέσουν σε σοβαρή αμφιβολία τη θέση των Μαθηματικών ως μια καθαρά παραγωγικής επιστήμης (Βασιλείου 1973, σελ: 57).

Με τα παράδοξα του ο Ζήνων έμμεσα προαναγγέλλει την απαραίτητη διάκριση μεταξύ των καθαρών μαθηματικών και των μαθηματικών που εφαρμόζονται στη φύση. Η σχέση αυτών των δύο δεν είναι αμφίδρομη. Τα μαθηματικά που εφαρμόζονται στη φύση μπορούν να εκφραστούν με όρους των καθαρών μαθηματικών αλλά τα καθαρά μαθηματικά δεν δύναται να εκφράζονται με όρους των μαθηματικών της φύσης.

Μια πρωτογενή, αρχική ατομιστική θεωρία από μόνη της δεν δύναται να εκφράσει ούτε να στηρίξει την έννοια του συνεχούς· αυτό δηλώνει ένα μεγάλο μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας. Το γεγονός αυτό αρχίζει να φαίνεται ήδη από τα παράδοξα του Ζήνωνος αλλά γίνεται πιο καθαρό αργότερα μέσα από τη μαθηματική Θεωρία του Ευδόξου. Όμως κατανοείται και εκφράζεται σαφέστερα με θεμελιωτικό τρόπο πολύ αργότερα κατά το 19° αιώνα από τους Dedekind και Cantor.

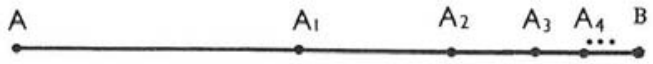
Ο Ζερβός παραθέτει το ακόλουθο απόσπασμα του E. W. Beth: *Έχω δείξει ότι μια αρχική ατομιστική θεωρία του συνεχούς έχει ανατραπεί από τα παράδοξα του Ζήνωνα. Μετά την ανακάλυψη ασυμμέτρων μεγεθών, έγινε καθαρό ότι δεν ήταν πιθανή καμιά επιδιόρθωση της ατομιστικής θεωρίας* (Zervos 1972, pp. 430).

2.2 Τα παράδοξα του Ζήνωνος.

Είναι κοινά αποδεκτό ότι τα παράδοξα του Ζήνωνος του Ελεάτη παρέχουν, κατά κάποιο τρόπο, το έδαφος για τη μελέτη των εννοιών του χρόνου, του χώρου, της κίνησης αλλά και του απείρου, της συνέχειας και της ασυνέχειας. Κατά καιρούς κέρδισαν το ενδιαφέρον ερευνητών από το χώρο της φιλοσοφίας, το χώρο των μαθηματικών ακόμη και το χώρο της ψυχολογίας. Είναι γεγονός ότι έχουν δεχθεί και ακόμη δέχονται πολλαπλές ερμηνείες, για να επιλυθούν οι λογικές και διαισθητικές δυσκολίες που αναδύονται από αυτά.

Οι αποδεικτικοί συλλογισμοί του Ζήνωνος του Ελεάτη που είναι γνωστοί ως «παράδοξα του Ζήνωνος» περιγράφονται από τον Αριστοτέλη στο έργο του *«Φυσική Ακρόασις Α΄»*, στο χωρίο [239b5-240b7]. Ο Αριστοτέλης προτού ξεκινήσει τη περιγραφή τους διατυπώνει τη φράση *«Ζήνων δέ παραλογίζεται»* (Αριστοτέλης, «Φυσική Ακρόασις Α΄», [239b5]), η οποία φαίνεται να δείχνει ότι το αριστοτελικό φιλοσοφικό δόγμα τα δεχότανε, κατά κάποιο τρόπο, ως παράδοξα. Συνολικά είναι τέσσερα η μελέτη θα εστιαστεί σε τρία από αυτά.

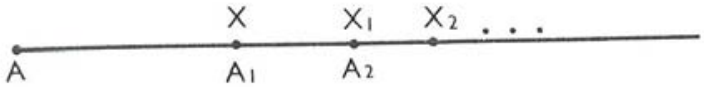
- Το παράδοξο της διχοτομίας ή του δρομέα: Έστω ότι ένας δρομέας πρόκειται να διανύσει την απόσταση AB. Για να τη διανύσει θα πρέπει προηγουμένως να διανύσει την AA_1, όπου A_1 μια ενδιάμεση θέση της διαδρομής, ώστε $AA_1 = AB/2$. Στην συνέχεια την $A_1A_2 = AB/4$, την $A_2A_3 = AB/8$ και ούτω καθεξής (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 59). Για να τελειώσει τη διαδικασία αυτή ο δρομέας θα πρέπει να ολοκληρώσει ένα άπειρο πλήθος μεταβάσεων.



Σχήμα 2.1: Το παράδοξο διχοτομίας (Αναπολιτάνος, σελ: 59).

- Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας: Ο Αχιλλέας και η χελώνα βρίσκονται σ΄ ένα αγώνα δρόμου. Επειδή ο Αχιλλέας είναι πιο γρήγορος δρομέας από τη χελώνα, ο αγώνας ξεκινά με τον Αχιλλέα στη θέση A κα τη χελώνα στη θέση X, ώστε η θέση A να είναι πιο πίσω από τη θέση X. Ο Αχιλλέας δεν θα μπορέσει ποτέ να φτάσει τη χελώνα, διότι όταν ο Αχιλλέας θα έχει μεταβεί στη θέση A_1, που ταυτίζεται με την προηγούμενη θέση X της χελώνας, η χελώνα θα έχει μετακινηθεί ήδη

στη θέση X_1, και νέα προσπάθεια του Αχιλλέα να φτάσει στη θέση A_2, που ταυτίζεται με τη X_1, θα συνοδεύεται από νέα μετακίνηση της χελώνας στη θέση A_2, και ούτω καθεξής (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 59 – 60; Fischbein 2001, pp. 317).



Σχήμα 2.2: Το παράδοξο Αχιλλέα - χελώνας (Αναπολιτάνος, σελ: 60).

- Το παράδοξο του βέλους: Το βέλος δεν κινείται στο χώρο (ή τόπο[3]) στον οποίο βρίσκεται, ούτε στο χώρο (ή τόπο) στον οποίο δεν βρίσκεται. Γι' αυτό το βέλος, το οποίο φαίνεται να κινείται, βρίσκεται σε ακινησία (Vlastos, 11 δευκαλιων, σελ: 301; Fischbein 2001, pp. 317).

Σημειώνεται ότι τα παράδοξα του Ζήνωνος μέσα στο φιλοσοφικό δόγμα του παρμενίδιου μονιστικού συστήματος δεν εμφανίζονται ως παράδοξα, αφού η ύπαρξη του ενός δεν γίνεται αποδεκτή ούτε ως διαστατή οντότητα ούτε ως χωροχρονικά υπαρκτή οντότητα και επομένως μη χωροχρονικά προσδιορίσιμη. Όμως σ' ένα πλουραλιστικό φιλοσοφικό δόγμα εμφανίζονται ως παράδοξα.

Οι προθέσεις του Ζήνωνος γίνονται φανερές ιδιαίτερα με το παράδοξο του βέλους στο οποίο υποστηρίζεται ότι η κίνηση ενός αντικειμένου, επομένως και η αντίστοιχη χρονική διάρκεια, είναι ψευδαισθήσεις και όχι πραγματικά συμβάντα. Στη χουσερλιανή φαινομενολογία η χρονική ροή είναι μια απόλυτη υποκειμενικότητα (Derrida, σελ: 187). Θα μπορούσε να αποφανθεί ότι για τον Ζήνων ο χρόνος και η κίνηση, είναι «ορατά» από μια φαινομενολογική στάση, αλλά δεν είναι και ούτε αποτελούν μέρος της αντικειμενικής πραγματικότητας.

Κάποιος θα μπορούσε να διερωτηθεί, στο συμπέρασμα του παραδόξου του βέλους, που λέει: «Γι' αυτό το βέλος, το οποίο φαίνεται να κινείται, βρίσκεται σε ακινησία»· αν υπονοείται ότι το βέλος βρίσκεται σε ακινησία σε κάθε χρονική στιγμή χωρίς διάρκεια της τροχιάς του ή αν υπονοείται ότι το βέλος βρίσκεται σε ακινησία για κάθε χρονική διάρκεια της τροχιάς του.

[3]Όπως αναφέρει ο Βλαστός: *«[Θ]α ήταν ευτελώς σύμφωνο με την γενική χρήση των όρων στην εποχή του Ζήνωνα (και για μακρά περίοδο αργότερα), όταν μιλούσαν για του «τόπου» όπου βρίσκεται ένα αυτικείμενο, να ενυοούν γενικότερα χώρο ή περιοχή μέσα στην οποία βρίσκεται ή κινείται το αυτικείμενο»* (Vlastos, 11 δευκαλιων, σελ: 303).

Εδώ κρίνεται ενδιαφέρον και θα παρατεθεί ένα απόσπασμα του Βλαστού: *Να πει κανείς ότι το βέλος κινείται μέσα σε μια χρονική στιγμή θα ήταν (με την αυστηρή σημασία των όρων) χωρίς νόημα. Αυτό ούτε κινείται και ούτε ηρεμεί, το ίδιο λ.χ. ένα σημείο δεν είναι ούτε ευθύ ούτε καμπύλο, ούτε κυρτό, ούτε κοίλο - εδώ δεν πρόκειται για το ότι τα κατηγορήματα αυτά έχουν εσφαλμένη εφαρμογή, αλλά για το ότι δεν έχουν εφαρμογή... Οι έννοιες κίνησης και ηρεμίας εφαρμόζονται σε ό,τι συμβαίνει στη διάρκεια και όχι επιμέρους στιγμών, αλλά σε διαστήματα (ή διαταγμένα σύνολα σημείων), το ίδιο όπως η καμπυλότητα είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται όχι στα επιμέρους σημεία, αλλά στις γραμμές και στις επιφάνειες (ή διαταγμένα σύνολα σημείων)* (Vlastos, 11 δευκαλιων, σελ: 310).

Πιο σύντομα, βάση του πιο πάνω αποσπάσματος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το νόημα των όρων «κίνηση» ή «ακινησία» αποκτάται μόνο μέσα σ' ένα περιβάλλον χρονικής διάρκειας· με διαφορετική διατύπωση, η εννοιολογική σημασία των λέξεων «κίνηση» ή «ακινησία» δύναται να υπάρχει όταν έχουμε χρονική διάρκεια και όχι σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή χωρίς διάρκεια.

Επίσης, η απουσία ταχύτητος δεν συνεπάγεται απουσία χρόνου. Όπως γράφει ο Βέικος: *Εάν δεχτούμε ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι συνεχούς δομής, πρέπει να υπολογίζουμε ότι οι τιμές των s και t μπορεί να γίνουν με συνεχή διαίρεση μηδενικές, πράγμα που σημαίνει απουσία ταχύτητος, δηλαδή στάση:*

$$v = 0/0$$

Στάση βέβαια δεν συνεπάγεται απουσία χρόνου

$$v = 0/t$$

πράγμα που σημαίνει ότι σ' ένα οποιοδήποτε χρόνο είναι δυνατό να μην έχει διανυθεί κανένα διάστημα (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: 329).

Τώρα συνεχίζοντας τη διερεύνηση των παραδόξων του Ζήνωνος, έχουμε μια άποψη που υποστηρίζει ότι τα παράδοξα του Ζήνωνος, ιδιαίτερα τα δύο πρώτα, εμφανίζονται ως τέτοια διότι φαίνεται να ταυτίζουν την έννοια του διαστατού με την έννοια του υπαρκτού (Αναπολιτάνος, *εργασία*: 36; Βασιλείου 1973). Πράγματι, ο Ζήνων ο Ελεάτης στο έργο του «Περί φύσεως» διατυπώνει τη φράση *«Εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη»*, δηλαδή, «αν δεν έχει μέγεθος το ον, ούτε θα υπάρχει» (Ρούσσος 1982, σελ: $20-21$). Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ότι τα στοιχεία που έχουν μηδενικό μέγεθος και που επομένως είναι μη υπαρκτά, δεν μπορούν να συνθέσουν ένα διαστατό μέγεθος. Κάτι τέτοιο θεωρούμενο από μια μαθηματική σκοπιά δεν ισχύει. Αυτό,

όπως έχει αποδειχτεί στη Θεωρία Μέτρου, δεν συμβαίνει για όλα τα σημειοσύνολα. Ισχύει για τα σημειόσύνολα που έχουν αριθμήσιμο πλήθος σημείων· για τα πλείστα σημείοσύνολα με μη αριθμήσιμο πλήθος, με υπεραριθμήσιμο πλήθος, ισχύει ότι συνθέτονται από στοιχεία με μηδενικό μέγεθος.

Τα δύο πρώτα παράδοξα που αναφέρθηκαν δηλαδή του δρομέα (ή της διχοτομίας), του Αχιλλέα και της χελώνας θεωρούνται από τον Αναπολιτάνο τελείως ανάλογα και επομένως η ερμηνεία που δίνεται σε αυτά είναι τελείως ανάλογη. Σ' ένα αριστοτελικό φιλοσοφικό πλαίσιο αποδίδει την εμφάνιση τους στη μη πραγματική ύπαρξη των στατικών χρονικών στιγμών «τώρα» και των αντίστοιχων χωρικών σημείων τους αλλά και στη πεπερασμένη φύση του δρομέα.

[Ο] δρομέας δεν μπορεί να βρίσκεται σε όλες αυτές τις θέσεις στα αντιστοιχία εκάστοτε «τώρα», γιατί ούτε τα τώρα ούτε οι θέσεις υπάρχουν ***πραγματικά****. Οι θέσεις αυτές υπάρχουν μόνον σαν δυνατότητες, από τις οποίες ο δρομέας μόνο πεπερασμένα πολλές μπορεί να πραγματώσει* (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 75).

Επίσης θα μπορούσε να λεχθεί με όρους της χουσερλιανής φαινομενολογίας ότι, τα παράδοξα αυτά εμφανίζονται ως τέτοια διότι η κίνηση εκλαμβάνεται ως ένα συνειδησιακό φαινόμενο και τα μέρη της κίνησης αυτής ως συνειδησιακά στοιχεία του φαινομένου. Αυτό υποστηρίζει και ο Αναπολιτάνος διατυπώνοντας την κάτωθεν άποψη:

[Υ]ποτίθεται λαυθασμένα πως κατά τη διάρκεια της κίνησης ο δρομέας έχει συνείδηση άπειρων εγκοπών της αντίστοιχης διαδρομής που διανύει (Αναπολιτάνος 1985, σελ: 75).

Επίσης παρατηρείται ότι τα παράδοξα της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας είναι όμοια μεταξύ τους με την έννοια ότι και τα δύο στηρίζονται στον αριστοτελικό «ορισμό» του συνεχούς· δηλαδή στηρίζονται στην δυνατότητα της *άπειρης* διαιρετότητας.

Το μαθηματικό άπειρο είναι ένα τρομακτικά ισχυρό εργαλείο, πράγμα που για πρώτη φορά φάνηκε με τα παράδοξα του Ζήνωνος (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: 333). Αρκεί να προσπαθήσουμε να φανταστούμε τη Θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών χωρίς την έννοια του απείρου.

Ο Βασιλείου γράφει ότι ο Πλάτων είχε κάνει μια συσχέτιση του απείρου με τη συνέχεια.

Ο Πλάτων έδωκε και μια παραλλαγή για το παράδοξο της διχοτομίας του Ζήνωνος, σύμφωνα με τον οποίον ένα ευθύγραμμο τμήμα ούτε μπορεί να θεωρηθεί συνιστάμενο από τα σημεία του, αλλά ούτε μπορεί να θεωρηθεί υφιστάμενο δίχως αυτά. Η δυνατότητα διαιρέσεως ενός τέτοιου τμήματος χωρίς τέλος, οδήγησε του Πλάτωνα στο να θεωρήσει το άπειρον ως ένα συστατικό στοιχείο του

συνεχούς (Βασιλείου 1973, σελ: 54).

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση που κάνει ο Βέικος, αναφερόμενος στο παράδοξο της διχοτομίας, που έχει σχέση με την έννοια του απείρου είναι: *Εκείνο που έχει σημασία εδώ δεν είναι πως αποδεικνύεται το αδύνατο της κίνησης στην πραγματικότητα παρά ότι η κίνηση λαμβάνει χώραν σε μια έκταση πεπερασμένη ως προς του εξωτερικό της ορίζοντα και άπειρη ως προς του εσωτερικό της ορίζοντα* (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: 326).

Πιθανό με τη πιο πάνω άποψη να ήταν σύμφωνος και ο Πλάτων. Όπως αναφέρεται στις σημειώσεις του Νεγρεπόντη, ο Πλάτων μέσα στο έργο του «Φίληβος» αναφέρει ότι τα όντα είναι μίξεις απείρου και πέρατος (Νεγρεπόντης $2005 - 2006$, σελ: 2).

Έτσι, βάση των πιο πάνω, συμπεραίνεται ότι μια κίνηση, ένα χρονικό διάστημα, ένα χωρικό διάστημα (όπως για παράδειγμα είναι το κλειστό διάστημα μηδέν, ένα· που συμβολίζεται $[0, 1]$) έχει δύο αντιφατικές ιδιότητες: να είναι και πεπερασμένο (ως προς τον εξωτερικό του ορίζοντα) και άπειρο (ως προς τον εσωτερικό του ορίζοντα). Ενδεχομένως, αυτή η συνύπαρξη των αντιθετικών εννοιών του πεπερασμένου και του απείρου, να προκαλεί κάποιες λογικές δυσκολίες που σχετίζονται με τα δύο παράδοξα της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας.

Επίσης, αναφέρεται ότι, ο Βέικος υποστηρίζει ότι τα παράδοξα της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας προβάλλουν τις λογικές δυσχέρειες που συνεπάγεται η υπόθεση του συνεχούς του χώρου και χρόνου (Βέικος, 11 Δευκαλίων, σελ: $326 - 328$).

Οι εννοιολογικές δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια του δυνητικού απείρου και ακόμη περισσότερο με την έννοια του πραγματικού απείρου (Tall 2001; Tall & Tirosh 2001), σχετίζονται και με τη έννοια της πυκνότητας· διότι οι έννοιες του άπειρου, της πυκνότητα είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, Vamvakoussi & Vosniadou (in preparation)). Επίσης, βάση των πιο πάνω μπορεί να αποφανθεί ότι οι έννοιες αυτές (δηλαδή του απείρου και της πυκνότητας) είναι στενά συνδεδεμένες και με την έννοια του συνεχούς. Οι εννοιολογικές δυσκολίες που σχετίζονται με την έννοια του συνέχούς, άρχισαν να προβάλλονται με τα παράδοξα του Ζήνωνος.

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα παράδοξα αυτά είναι «ένα βήμα» πριν τη θεωρία των απειροστών και το Αξίωμα του Ευδόξου-Αρχιμήδους.

Μία διατύπωση του Αξιώματος του Ευδόξου-Αρχιμήδους είναι η ακόλουθη: Ο λόγος δύο ομογενών μεγεθών α, β νοείται μόνον όταν υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $n\alpha > \beta$ και υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $m\beta > \alpha$ (Νεγρεπόντης $2004 - 2005$).

Ο Εύδοξος θέτωντας το πιο πάνω αξίωμα (ή ιδιότητα) είχε στο νου του

ως το απλούστερο μοντέλο τη κερατοειδή γωνία[4] (Νεγρεπόντης $2004-2005$). Δηλαδή, η κερατοειδής γωνία αντιστοιχούσε στο απείρως μικρό θ,

$$0 < \theta < \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Το καλούμενο Αξίωμα του Ευδόξου-Αρχιμήδους ταυτίζεται με το τέταρτο όρο του πέμπτου βιβλίου των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη και ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

> *Λόγον ἔχειν πρός ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν*
> (Σταμάτης Τόμος ΙΙ, σελ: 24).

Η Θεωρεία Ευδόξου, από τα δεδομένα που υπάρχουν, φαίνεται να έχει δημιουργηθεί διότι ο Εύδοξος αισθάνθηκε για κάποιο λόγο την ανάγκη να αλλάξει την ήδη υπάρχουσα Θεωρία Λόγων με βάση την ανθυφαίρεση του Θεαίτητου (Νεγρεπόντης $2004-2005$). Η Θεωρία του Ευδόξου περιέχεται στο πέμπτο βιβλίο των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη. Είναι κοινά αποδεκτό ότι η Θεωρεία του Ευδόξου είναι ισοδύναμη με τη Θεωρία τομών του Dedekind (τομές Dedekind). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο ορισμός των ίσων λόγων, δηλαδή της αναλογίας, που είναι ο πέμπτος όρος του πέμπτου βιβλίου των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη, ο οποίος σχεδόν ταυτίζεται με τη Θεωρεία τόμών του Dedekind (Νεγρεπόντης $2004-2005$; Heath 1956 vol.2, pp. 124).

2.3 Η θεωρία της διαίσθησης και τα παράδοξα του Ζήνωνος.

Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στις διαισθητικές δυσκολίες που αναδύονται από τα τρία παράδοξα του Ζήνωνος που αναφέρθηκαν πιο πάνω και τις αντίστοιχες ερμηνείες που δίνονται.

Ο Fischbein ερμηνεύει τα παράδοξα του Ζήνων, με όρους άδηλων διαισθητικών μοντέλων. Υποστηρίζει ότι τα παράδοξα αυτά ερμηνεύονται μόνο σ'ενα ψυχολογικό πλαίσιο διότι ενέχουν τα συνειδησιακά φαινόμενα του χρόνου και της κίνησης. Η φαινομενολογική ροή του χρόνου, ο ψυχολογικός

[4] Η κερατοειδής γωνία έχει την ιδιότητα να είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία (Πρόκλος, *Σχόλια του εις πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη*, [122, $5-7$]).

χρόνος είναι το συνεχές. Επίσης υποστηρίζει ότι τα παράδοξα αυτά εμφανίζονται ως τέτοια λόγω της άδηλης δράσης του χωρικού μοντέλου (space model) το οποίο ενέχεται κατά τη πράξη των συλλογισμών που αφορούν την έννοια του χρόνου.

Γενικά ζούμε με το άδηλο χωρικό μοντέλο του χρόνου, σκεπτόμαστε με αυτό, με τη βοήθεια του κάνουμε προρρήσεις, διαπραγματευόμαστε με αυτό, συμπράττουμε κοινωνικά χρησιμοποιώντας το συνειδητά. Η χωρική μεταφορά είναι τόσο βαθιά σφηνομένη μέσα στη γλώσσα μας, μέσα στη λογική μας, που δεν αισθανόμαστε κάποια ασυμφωνία όταν μιλάμε και συλλογιζόμαστε για το χρόνο σε χωρικούς όρους (Fischbein, 2001, pp. 319).

Πιο συγκεκριμένα τα δύο πρώτα παράδοξα - της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας - και στο πλαίσιο της ψυχολογίας θεωρούνται από τον Fischbein ότι είναι μεταξύ τους όμοια από την άποψη ότι εμφανίζονται ως τέτοια διότι και τα δύο εκφράζουν την ίδια σύγχυση μεταξύ της εσωτερικής αναπαράστασης του χρόνου και του χωρικού μοντέλου που υπόκειται σε αυτή.

Στο πλαίσιο της ψυχολογίας ο χρόνος θεωρείται πραγματικά άπειρος αλλά όχι απείρως διαιρετός· ενώ το χωρικό μοντέλο θεωρείται άπειρο και απείρως διαιρετό. Όπως αναφέρει ο Fischbein: *Η κίνηση - και αντίστοιχα ο χρόνος - δεν είναι απείρως διαιρετά. Ψυχολογικά δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως η απειρία στιγμών* (Fischbein 2001, pp. 320). Επίσης ερμηνεύοντας το παράδοξο της διχοτομίας αναφέρει ότι: *[Κ]άποιος έχει τη τάση, **φυσικά**, να συγχέει τη κυρίαρχη χρονική διαδικασία που θα είναι πραγματικά άπειρη, αλλά που δεν είναι διαιρέσιμη με του υποκείμενο χωρικό μοντέλο το οποίο είναι απείρως διαιρετό, αλλά δεν υποδηλώνει οποιαδήποτε διαίρεση»* (Fischbein 2001, pp. 320).

Η σύγχυση αυτή, ενδεχομένως και η φαινομενική ταύτιση της εσωτερικής αναπαράστασης και του μέτρου του χρόνου με κάποιο χωρικό μοντέλο, προκαλεί την αντίφαση που ενυπάρχει σ' αυτά τα δύο παράδοξα. Εφόσον τα παράδοξα της διχοτομίας, του Αχιλλέα και της χελώνας θεωρούνται όμοια μεταξύ τους η λύση που προτείνεται γι' αυτά είναι η ίδια και για τα δύο. Για την αντιμετώπιση των παραδόξων αυτών προτείνεται, ο αποχωρισμός της εσωτερικής αναπαράστασης και του μέτρου του χρόνου από το χωρικό μοντέλο. Ο Fischbein για το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας αναφέρει: *Το παράδοξο λύνεται μόνο επιτυγχάνοντας - που είναι ψυχολογικά πολύ δύσκολο - την απόσπαση της καθαρής διαίσθησης της διάρκειας από τη σκλαβιά της εξάρτηση της από το χωρικό μοντέλο (space model) με τους πολύ δυνατούς εξαναγκασμούς του* (Fischbein, 2001, pp. 321).

Το πρόβλημα του Αχιλλέα και της χελώνας λύνεται. Αυτό γίνεται δείχνο-

ντας ότι ο Αχιλλέας φθάνει τη χελώνα· δηλαδή δείχνοντας ότι η απόσταση μεταξύ του Αχιλλέα και της χελώνας μηδενίζεται. Αλλά αυτή η λύση δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η λύση του παραδόξου του Αχιλλέα και της χελώνας.

Τα χωρικά διαστήματα $(AX) = (AA_1)$, (A_1A_2), ... (Βλ. Σχήμα 2.2) συμβολίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{lll} a_0 & \text{η απόσταση} & (AA_1) \\ a_1 & \text{η απόσταση} & (A_1A_2) \\ a_2 & \text{η απόσταση} & (A_2A_3) \\ \vdots & & \vdots \\ a_k & \text{η απόσταση} & (A_nA_n+1) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Οι αποστάσεις $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ για κάθε k φυσικό αριθμό, είναι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ως δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

1. Το μέτρο της ταχύτητας του Αχιλλέα (v_A) είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας της χελώνας (v_χ).

2. Η κίνηση του Αχιλλέα και της χελώνας είναι ομαλή κίνηση. Δηλαδή, ο Αχιλλέας κινείται με σταθερή ταχύτητα (v_A) και η χελώνα επίσης κινείται με σταθερή ταχύτητα (v_χ).

Για να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση a_0 χρειάζεται χρόνο $t_1 = a_0/v_A$· αλλά η χελώνα έχει ήδη φθάσει στη θέση $X_1 = A_2$, καλύπτοντας μια απόσταση a_1

$$a_1 = v_\chi t_1 = a\frac{v_\chi}{v_A}.$$

Για να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση a_1 χρειάζεται χρόνο $t_2 = a_1/v_A$· αλλά η χελώνα έχει ήδη φθάσει στη θέση $X_2 = A_3$, καλύπτοντας μια απόσταση a_2

$$a_2 = v_\chi t_2 = a\left(\frac{v_\chi}{v_A}\right)^2.$$

Για να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση a_{k-1} χρειάζεται χρόνο $t_k = a_{k-1}/v_A$· αλλά η χελώνα έχει ήδη φθάσει στη θέση $X_k = A_{k+1}$, καλύπτοντας μια απόσταση a_k

$$a_k = v_\chi t_k = a\left(\frac{v_\chi}{v_A}\right)^k.$$

Επειδή το μέτρο της ταχύτητας του Αχιλλέα (v_A) είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας της χελώνας (v_χ), έχουμε:

$$0 < \frac{v_\chi}{v_A} < 1.$$

Άρα,

$$\frac{v_\chi}{v_A} > \left(\frac{v_\chi}{v_A}\right)^2 > \cdots > \left(\frac{v_\chi}{v_A}\right)^k > \cdots > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς,

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_k > \ldots > 0$$

δηλαδή, η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη. Κάθε φθίνουσα ακολουθία και φραγμένη συγκλίνει και μάλιστα στο μέγιστο κάτω φράγμα (infimum). Στη προκειμένη περίπτωση, το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι το μηδέν. Δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Σημειώνεται, επίσης, ότι το πρόβλημα της διχοτομίας λύνεται μαθηματικά αλλά αυτή η λύση δεν μπορεί να θεωρηθεί λύση του παραδόξου της διχοτομίας. Το ζητούμενο στο πρόβλημα αυτό είναι να βρεθεί το άπειρο άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Δηλαδή, να βρεθεί το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r + r^2 + r^3 + \cdots, \quad \text{για } r = \frac{1}{2}.$$

Έστω η γεωμετρική σειρά,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots, \quad \text{για } |r| < 1.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τα μερικά αθροίσματα,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \\ rs_n &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1} \end{aligned}$$

παίρνουμε,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \; r \neq 1.$$

Παίρνοντας όρια έχουμε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}, \quad \text{για } |r| < 1.$$

Χρησιμοποιώντας τη πιο πάνω σχέση στην ειδική περίπτωση που μας ενδιαφέρει έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

δηλαδή κάποιος προσθέτοντας όλα τα $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$ παίρνει 1, που είναι το μήκος του αρχικού τμήματος.

Οι αλγεβρικές πράξεις θεωρούνται συμβάντα που δεν έχουν χωροχρονική υπόσταση ούτε ενέχουν την έννοια της κίνησης, ούτε η αντίστοιχη γεωμετρική εσωτερική αναπαράσταση του προβλήματος αυτού ενέχει την έννοια του χρόνου ή της κίνησης· έτσι το πρόβλημα της διχοτόμησης δεν εμφανίζεται ως παράδοξο σε μια μαθηματική θεωρία. Είναι η φαινομενολογική ροή του ψυχολογικού χρόνου και της κίνησης που ενέχονται στο παράδοξο της διχοτομίας που προκαλούν την αντίφαση· όμως αυτά είναι μέρος του παραδόξου αυτού. Συνεπώς μια μαθηματική λύση λύνει ένα εντελώς διαφορετικό πρόβλημα από αυτό που καλείται να λύσει κάποιος όταν δίνει μια ερμηνεία του παραδόξου της διχοτομίας.

Σύμφωνα με τον Fischbein, *[η] λύση του παραδόξου είναι ψυχολογική, όχι μαθηματική, δηλαδή, εξηγώντας τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ του αρχικού,*

που είναι ο χρόνος («διάρκεια») και η αντίστοιχη κίνηση και της υποκείμενης μεταφοράς που είναι το γεωμετρικό άθροισμα των χωρικών διαστημάτων (Fischbein 2001, pp. 320).

Τώρα όσο αφορά το τρίτο παράδοξο - το παράδοξο του βέλους - ο Fischbein το ερμηνεύει με όρους ψυχολογίας ως εξής:

Το όλο επιχείρημα του Ζήνωνα βασίζεται στην ιδέα ότι ο χρόνος είναι, από μόνος του, διαιρέσιμος σε τέτοια μικρά τεμάχια, ότι σε όλες αυτές τις στιγμές, το κινητό αντικείμενο ακινητοποιείται. Η έννοια της διαίρεσης του χρόνου είναι δανεισμένη από το μοντέλο του χώρου. Μια τέτοια διαίρεση έχει νόημα εφ΄ όσον υποδηλώνει τη συμβολή του χωρικού μοντέλου. Με το επινόημα της ιδέας των επ΄ αόριστα μικρών τεμαχίων μιας καθαρής διάρκειας στην οποία ένα χρονικό διάστημα μπορεί να αποσυντίθεται, θα παίρναμε τελικά μια απειρία σημείων του χρόνου, μια απειρία των αδιάστατων στιγμών του χρόνου (Fischbein, 2001, pp. 318).

Συμπερένεται λοιπόν, όσο αφορά το παράδοξο του βέλους, ότι το επιχείρημα του Ζήνων φαίνεται να βασιζόταν στην ιδέα ότι ο χρόνος (η κίνηση) είναι από μόνος του διαιρετός σε χρονικές στιγμές (αντίστοιχα σε στιγμιαίες στάσεις) οι οποίες μπορούν να τον ανασυγκροτήσουν. Η ερμηνεία που δίνεται από το πιο πάνω απόσπασμα σ'ενα ψυχολογικό πλαίσιο, είναι ότι μια τέτοια διαίρεση έχει νόημα μόνο όταν αποδέχεται άδηλα την συμβολή του χωρικού μοντέλου, δηλαδή, όταν γίνεται μια χωρική μεταφορά του χρόνου. Έστω το κινούμενο αντικείμενο με τροχιά AB λαμβάνει τη θέση B διότι ο χρόνος είναι συνεχής, η κίνησή του είναι συνεχής και δεν σταματά σε *κάθε χωρικό σημείο* της τροχιάς του. Το μοντέλο του χώρου δρα άδηλα για να αναπληρώνει την ερμηνεία και τη περιγραφή του χρόνου και της κίνησης.

Όλα τα μέσα με τα οποία διαιρείται ο χρόνος, μετρείται, εκτιμάται είναι επιτεύξιμα μόνο εισάγοντας το ***χωρικό μοντέλο*** *(space model). Το μοντέλο του χώρου δρα ως ένα άδηλο υποκατάστατο για την εσωτερική αναπαράσταση, την περιγραφή και τη μέτρηση του χρόνου* (Fischbein, 2001, pp. 317).

Κεφάλαιο 3

Οι πραγματικοί αριθμοί.

Στο κεφάλαιο αυτό, δείχνουμε τη κατασκευαστική πορεία των πραγματικών αριθμών. Ξεκινάμε τη κατασκευή αυτή βάση των δεκαδικών αναπτυγμάτων των στοιχείων του $\mathbb{Q}_0^+$. Επιλέγουμε αυτή τη παράσταση των ρητών $\rho \geq 0$, αντί τη κλασματική, διότι (α) κάθε περιοδικό (απειροψήφιο) δεκαδικό ανάπτυγμα με αρχική περίοδο $\neq 9$ καθορίζει με μοναδικό τρόπο κάποιο ρητό αριθμό και (β) με αυτή τη παράσταση άμεσα διαπιστώνουμε ποιος από δύο διαφορετικούς ρητούς αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος. Το μειονέκτημα της παράστασης αυτής είναι στην εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων οι οποίες γίνονται σε αποκόμματα των δεκαδικών αναπτυγμάτων· δηλαδή σε δεκαδικά αναπτύγματα με αριθμήσιμο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Το σύνολο των δεκαδικών αναπτυγμάτων των ρητών $\rho \geq 0$ είναι διατεταγμένο· μάλιστα αποδεικνύουμε ότι η διάταξη του (λεξικογραφική διάταξη) ταυτίζεται με τη γραμμική διάταξη του συνόλου $\mathbb{Q}_0^+$.

Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών του οποίου τα στοιχεία να είναι τα απειροψήφια δεκαδικά μορφώματα που έχουν ψηφιακό μέρος απεριοδικό ή περιοδικό με αρχική περίοδο $\neq 9$. Το σύνολο αυτό είναι εφοδιασμένο με τη σχέση ισότητας, όπως επίσης και με τις σχέσεις $<$, $\leq$ οι οποίες αντίστοιχα ορίζουν τη γνήσια γραμμική διάταξη και τη γραμμική διάταξη στο σύνολο αυτό. Σημειώνουμε ότι, αυτές οι σχέσεις ορίζονται να είναι σε ζεύγη *αποκομμάτων* των στοιχείων του συνόλου $\mathscr{G}$. Επίσης, στο σύνολο αυτό ισχύουν οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των πιο πάνω σχέσεων. Για παράδειγμα, η σχέση $<$ χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες της ασυμμετρικότητας, της μεταβατικότητας και της συνοχικότητας.

Επίσης αποδεικνύοντας το Θεώρημα 3.4.11 δείχνουμε ότι μια φθίνουσα ακολουθία, της οποίας οι όροι είναι στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G}$, έχει μέγιστο

κάτω φράγμα στο σύνολο αυτό και είναι μοναδικό. Επιπλέον δείχνουμε ότι το μέγιστο κάτω φράγμα αυτής της ακολουθίας είναι το ίδιο με το μέγιστο κάτω φράγμα κάθε υπακολουθία της. Ακόμη αποδεικνύοντας το Θεώρημα 3.4.14 δείχνουμε ότι ανάμεσα σε δύο άνισα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G}$ βρίσκονται όσα θέλουμε περιοδικά και όσα θέλουμε απεριοδικά στοιχεία του $\mathscr{G}$· το οποίο είναι συνέπεια της ιδιότητας της πυκνότητας του $\mathscr{G}$.

Ακολούθως παρουσιάζουμε πώς προσδιορίζονται τα δεκαδικά αναπτύγματα των $\rho' + \rho''$, $\rho' \cdot \rho''$, $\rho' - \rho''$ (με $\rho' \geq \rho''$) και ρ'/ρ'' (με $\rho'' > 0$), όπου ρ', ρ'' διαφορετικοί μεταξύ τους ρητοί ≥ 0, διότι είναι χρήσιμο σαν εισαγωγή στους ορισμούς των πράξεων πάνω στους θετικούς άρρητους αριθμούς. Αναφέρουμε ότι οι πράξεις στα δεκαδικά αναπτύγματα θετικών ρητών αριθμών καθορίζονται μετά τον ορισμό των απόλυτων αριθμών και τις γενικές ιδιότητες αυτών των αριθμών, για να αποφευχθούν μεταγενέστερες επαναλήψεις.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της αφαίρεσης και της διαίρεσης στο σύνολο $\mathscr{G}$. Όσο αφορά τη πράξη της πρόσθεσης αποδεικνύουμε τις ιδιότητες της αντιμεταθετικότητας, της μονοτονικότητας, της προσεταιριστικότητας, της διαγραφής και της ύπαρξης του ουδέτερου στοιχείου. Όσο αφορά τη πράξη του πολλαπλασιασμού αποδεικνύουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες (πλην της διαγραφής) και την επιμεριστική ιδιότητα του ως προς την πρόσθεση και ως προς την αφαίρεση.

Τα όσα έχουμε περιγραφικά αναφέρει, πιο πάνω, για το σύνολο $\mathscr{G}$ δικαιολογούν την ονομασία «αριθμοί» που δόθηκε στα στοιχεία του. Τα περιοδικά μορφώματα του συνόλου $\mathscr{G}$ ορίζονται να είναι οι σύμμετροι απόλυτοι αριθμοί· τα απεριοδικά μορφώματα του συνόλου αυτού ορίζονται να είναι οι ασύμμετροι απόλυτοι αριθμοί. Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, μεταξύ των ρητών αριθμών $\rho \geq 0$ και των σύμμετρων απόλυτων αριθμών, η οποία διατηρεί τη γνήσια γραμμική διάταξη στα δύο αυτά σύνολα και τα αποτελέσματα των τεσσάρων βασικών πράξεων (δηλαδή, το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο).

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G}$, πλην του 0, ορίζονται να είναι οι θετικοί αριθμοί. Εισάγοντας για κάθε τέτοιο αριθμό ένα αντίστοιχο «συμμετρικό» αριθμό, ορίζουμε τους αρνητικούς αριθμούς. Έτσι, μπορέσαμε να ορίσουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, βάση των δεκαδικών αναπτυγμάτων των στοιχείων του (τα οποία είναι οι θετικοί αριθμοί, το 0 και οι αρνητικοί αριθμοί). Ακολούθως δικαιολογούμε την ονομασία «αριθμοί» που δώσαμε στα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}$, ορίζοντας τις σχέσεις της ισότητας και της ανισότητας (στο σύνολο αυτό ικανοποιούνται οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των σχέσεων αυτών) και τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού

και της διαίρεσης. Επίσης αποδεικνύουμε ότι, ισχύουν και στο σύνολο $\mathbb{R}$ οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές ιδιότητες των πράξεων αυτών (τις οποίες αναφέραμε ονομαστικά πιο πάνω κατά τη κατασκευή του συνόλου $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών).

Με την πιο πάνω πορεία που περιγράψαμε έχουμε κατασκευάσει το γραμμικά διατεταγμένο αλγεβρικό σώμα των πραγματικών αριθμών.

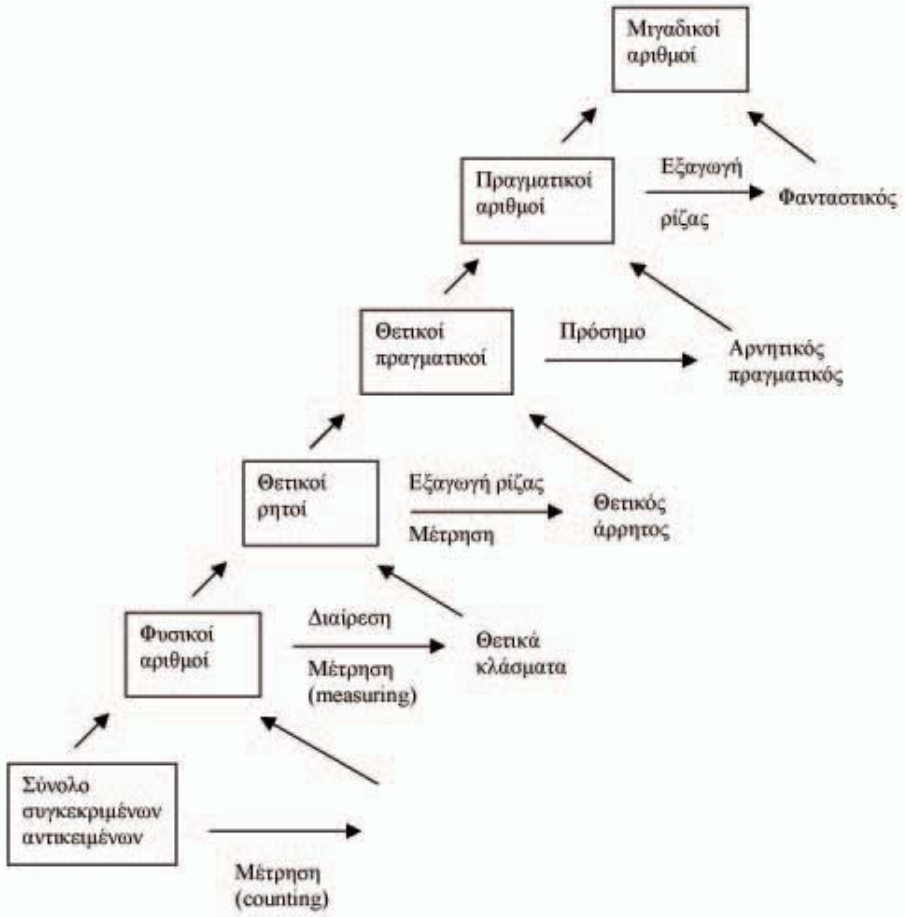
Στο τέλος δείχνουμε πώς ορίζονται τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}$ και η πράξη της πρόσθεσης με τομές Dedekind (στο Παράρτημα Α') και πώς δύναται να θεμελιωθεί αξιωματικά το σύνολο των πραγματικών αριθμών (στο Παράρτημα Β'). Επίσης αναφέρουμε ότι, τα αξιώματα που παρατίθενται στο Παράρτημα Β', στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζονται και εμφανίζονται υπό τη μορφή Θεωρημάτων και ιδιοτήτων.

3.1 Εισαγωγικά.

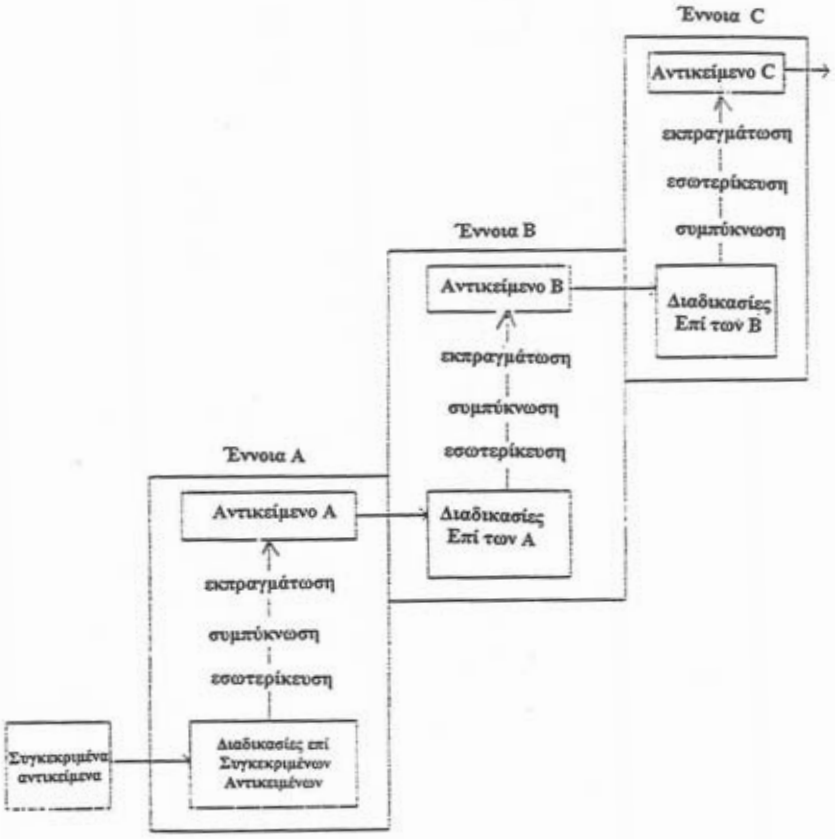
Η πορεία της ανάπτυξης των αριθμών μέσα στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ξεκινά με την εύρεση των φυσικών αριθμών μέσα από την διαδικασία της μέτρησης, η οποία ήταν αναγκαία στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Όταν οι φυσικοί αριθμοί θεωρήθηκαν αφηρημένα αντικείμενα, τους δόθηκαν κάποιοι συμβολισμοί για να είναι πιο εύκολος ο χειρισμός τους καθώς εκτελούνται διάφορες πράξεις με αυτούς. Μέσα από την εκτέλεση αυτών των πράξεων γεννιέται η αναγκαιότητα ύπαρξης ενός νέου είδους αριθμών, των ρητών αριθμών, η οποίοι αρχικά επίσης περιγράφονται μέσα από μια διαδικασία μέτρησης. Οι υποψίες ότι υπάρχει ακόμη ένα άλλο είδος αριθμών, ξεκίνησαν από την αρχαιότητα όταν θέλησαν να βρούνε την διάμετρο του μοναδιαίου τετραγώνου. Το μήκος της οποίας είναι ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$. Όπως μας πληροφορεί ο Πλάτωνας[1] οι αρχαίοι γνώριζαν την αρρητότητα των $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$. Δηλαδή την μη ύπαρξη κοινού μέτρου μεταξύ αυτών και της μονάδας· γι' αυτό και τα είχαν ονομάσει ασσύμετρα. Η γνώση αυτών περιοριζόταν σε διαδικαστικές λειτουργίες· στα Στοιχεία του Ευκλείδη οι άρρητοι αντιμετωπίζονται ως μεγέθη και όχι ως αριθμοί. Μεσολάβησαν αρκετοί αιώνες για να ενσωματωθούν σε μια μαθηματική θεωρία ως αριθμητικά σύμβολα.

Συνοπτικά η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1. Στο σχήμα αυτό παρατηρείται να επαναλαμβάνεται σχεδόν η ίδια

[1] Στο έργο του «Θεαίτητος» χωρίο [145c7 − 148e5].



Σχήμα 3.1: Η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού (Sfard 1991, pp. 13).



Σχήμα 3.2: Γενικό μοντέλο του εννοιολογικού σχηματισμού (σχήμα Sfard 1991 pp. 13, μετάφραση όρων Σπύρου 2005 σελ: 269).

ακολουθία γεγονότων, όποτε ένα νέο είδος αριθμού γεννιέται. Κάθε επανεμφανιζόμενο τμήμα του σχήματος αναπαριστά μια μακρά διαδικασία, η οποία συνίσταται από τρεις φάσεις. Κατά τη πρώτη φάση συνηθίζονται οι συγκεκριμένες διαδικασίες στους ήδη γνωστούς αριθμούς, κατά τη δεύτερη φάση επικρατεί μια μακρά περίοδος μιας λειτουργικής προσέγγισης κατά τη διάρκεια της οποίας ένα νέο είδος αριθμού ξεκινά να αναδύεται από τις οικείες διαδικασίες αλλά παραμένει στενά συνδεδεμένο με συγκεκριμένες διαδικασίες και κατά τη τρίτη φάση ο εν λόγω αριθμός έχει αναγνωριστεί πλήρως ως ένα μαθηματικό αντικείμενο (Sfard 1991, pp. 13 – 14).

Φαίνεται, τόσο η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών όσο και το μοντέλο ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού της Sfard να συμφωνούν με την άποψη ότι: *οι άρρητοι αριθμοί πρέπει να γίνουν κατανοητοί με όρους των ρητών [αριθμών], οι οποίοι με τη σειρά τους πρέπει να γίνουν κατανοητοί με όρους των φυσικών αριθμών* (Lakoff & Nunez 2000, pp. 294).

Στη *θεωρία εκπραγμάτωσης ή πραγμάτοποίησης (reification)* της Sfard υποστηρίζεται ότι, για να μην κινδυνεύει να καταρρεύσει η διαδικασία μάθησης μιας έννοιας (στη προκειμένη περίπτωση είναι η έννοια των πραγματικών αριθμών) θα πρέπει να πραγματοποιηθεί επιτυχώς από το υποκείμενο η εσωτερίκευση, η συμπύκνωση και η εκπραγμάτωση τους (Βλ. Σχήμα 3.2). Χωρίς την παράλειψη κάποιου από αυτά τα στάδια (Sfard 1991, pp. 21). Διαφορετικά αναπτύσσονται *ψευδοδομικές αντίληψεις* (pseudostructural conceptions) (Sfard & Linchevski 1994, pp. 220 – 221).

Το στάδιο της εκπραγμάτωσης δύσκολα επιτυγχάνεται (Sfard 1991, pp. 33, Sfard & Linchevski 1994, pp. 191), ενδεχομένως η δυσκολία αυτή να είναι μια ερμηνεία για την καθυστέρηση, που υπήρξε μέσα στην ιστορία, να αποδοθεί η έννοια των πραγματικών αριθμών με ένα πλήρη δομικό τρόπο.

Στο πλαίσιο της ενεργητικής θεωρίας που αναφερθήκαμε πιο πάνω, υποστηρίζεται ότι η έννοια του αριθμού, προσεγγίζεται με δύο συμπληρωματικούς τρόπους σκέψης· το λειτουργικό ή κατά προτίμηση διαδικαστικό (operational) και το δομικό (structural). Για παράδειγμα, η έννοια του φυσικού αριθμού περιγράφεται διαδικαστικά ως το αποτέλεσμα της μέτρησης[2] (counting) ενώ δομικά ως μια ιδιότητα ενός συνόλου ή η κλάση όλων των συνόλων που έχουν την ίδια πεπερασμένη πληθικότητα (Sfard 1991, pp. 5). Η έννοια του ρητού αριθμού περιγράφεται διαδικαστικά ως το αποτέλεσμα της διαίρεσης των ακεραίων ενώ δομικά ως ένα ζεύγος ακεραίων (Sfard 1991, pp. 5).

[2]Ο όρος counting θα ήταν καλύτερο να μεταφραστεί με τον όρο απαρίθμηση.

3.2 Τι θεωρούμε γνωστό.

Θεωρούμε γνωστούς τους συμβολισμούς:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{3.1}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{3.2}$$

$$\mathbb{Q}_0^+ = \left\{\rho : \rho = \frac{m}{n}, \quad \text{όπου } m \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n \in \mathbb{N}\right\} \tag{3.3}$$

Με την ισότητα (3.1) παριστάνεται το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$). Επισυνάπτοντας στο σύνολο των φυσικών αριθμών το 0 λαμβάνεται το σύνολο των ακεραίων αριθμών που είναι ≥ 0 ($\mathbb{N}_0$), το οποίο παριστάνεται με την ισότητα (3.2). Επισυνάπτοντας στο σύνολο των ακεραίων αριθμών που είναι ≥ 0 τα «κλάσματα» $\frac{m}{n}$, με $m \in \mathbb{N}_0$ και $n \in \mathbb{N}$, λαμβάνεται το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι ≥ 0 ($\mathbb{Q}_0^+$)· το οποίο παριστάνεται με την ισότητα (3.3). Σημειώνεται ότι ο αριθμός $\rho = \frac{m}{n}$, λαμβάνεται ως αντιπροσωπευτικός από μια κλάση ισοδύναμων «κλασμάτων». Για παράδειγμα, μια κλάση ισοδύναμων «κλασμάτων» θεωρούνται τα $\frac{qm}{qn}$, $\frac{pm}{pn}$ όπου $p,\ q \in \mathbb{N}$. Για συντομία ο αριθμός ρ καλείται «ρητός $\frac{m}{n}$» αντί της φράσης «ρητός που έχει αντιπρόσωπο το κλάσμα $\frac{m}{n}$».

Άρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}_0^+.$$

Επίσης θεωρούνται γνωστά, στα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ και $\mathbb{Q}_0^+$, η σχέση διάταξης ($\leq$), οι τέσσερις βασικές αλγεβρικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) και οι βασικές τους ιδιότητες.

3.3 Δεκαδικά αναπτύγματα των στοιχείων του $\mathbb{Q}_0^+$

Γενικά οι ρητοί αριθμοί μπορούν να διατυπωθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους· ο ένας είναι με δεκαδικά αναπτύγματα και ο άλλος είναι με κλάσματα, δηλαδή ως ο λόγος δύο ακεραίων. Τα δεκαδικά αναπτύγματα και τα κλάσματα είναι δύο διαφορετικές μορφές αναπαράστασης των ρητών αριθμών.

[Ο]ι «δεκαδικοί» και τα «κλάσματα» είναι εναλλασσόμενα αναπαραστασιακά σχήματα (alternate representational formats), όχι διαφορετικά είδη αριθμών (O'Connor 2001, pp. 146).

Τόσο οι ρητοί αριθμοί όσο και οι άρρητοι αριθμοί γράφονται σε μορφή δεκαδικού αναπτύγματος. Όμως ως λόγος δύο ακεραίων γράφονται μόνο οι ρητοί αριθμοί· δεν αναπαρίστανται ως λόγος δύο ακεραίων οι άρρητοι αριθμοί.

Κάθε ρητός αριθμός $\rho \geq 0$ που είναι γραμμένος σε δεκαδική μορφή μετατρέπεται σε κλασματική μορφή και κάθε ρητός αριθμός $\rho \geq 0$ που είναι γραμμένος σε κλασματική μορφή μετατρέπεται σε δεκαδική μορφή.

Στη παράγραφο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τη μετατροπή ρητού αριθμού $\rho \geq 0$ που είναι γραμμένος σε μορφή κλάσματός σε δεκαδική μορφή.

3.3α΄ Μετατροπή ρητού $\rho \geq 0$ από κλασματική μορφή σε δεκαδική μορφή.

Έστω ο ρητός ρ που έχει αντιπρόσωπο το ανάγωγο κλάσμα $\frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{N}_0$ και $n \in \mathbb{N}$· δηλαδή,

$$\rho = \frac{m}{n}.$$

Υπάρχει ακέραιος a, $a \in \mathbb{N}_0$, ώστε να ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα

$$an \leq m < (a+1)n.$$

Συνεπώς θα ισχύει η *διαιρετική ισότητα*

$$m = an + \upsilon_1, \quad \text{με } a \geq 0, \quad 0 \leq \upsilon_1 < n, \tag{3.4}$$

με διαιρέτη το n και διαιρετέο το m· ο ακέραιος $a \geq 0$ λέγεται *ακέραιο πηλίκο* της διαίρεσης a δια n (συμβολισμός $a \div n$) και ο ακέραιος υ_1 *υπόλοιπο* της διαίρεσης αυτής. Στη περίπτωση που $\upsilon_1 = 0$ η διαίρεση λέγεται *τέλεια διαίρεση*.

Πολλαπλασιάζοντας με το 10 το αριστερό και δεξιό μέλος της διαιρετικής ισότητας (3.4) παίρνουμε,

$$10m = 10an + 10\upsilon_1, \quad \text{με } 10a \geq 0,\ 0 \leq 10\upsilon_1 < 10n. \tag{3.5}$$

Τώρα διαιρούμε δια n το δεκαπλάσιο του πρώτου υπολοίπου υ_1, δηλαδή $10\upsilon_1 \div n$. Λόγο της διπλής ανισότητας (3.5), το ακέραιο πηλίκο της διαίρεσης $10\upsilon_1 \div n$ θα είναι ένας ακέραιος ≥ 0 και < 10, άρα ένα δεκαδικό ψηφίο

ψ_1. Συμβολίζουμε με υ_2 το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης και έχουμε την αντίστοιχη διαιρετική ισότητα:

$$10\upsilon_1 = \psi_1 n + \upsilon_2, \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_2 < n. \tag{3.6}$$

Έστω ότι προσδιορίσαμε ήδη τα υ_k, ψ_k, ψ_{k+1}, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, ώστε να ισχύει

$$0 \leq \upsilon_k < n, \quad 10\upsilon_k = \psi_k n + \upsilon_{k+1}, \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_{k+1} < n.$$

εκτελώντας την ακολούθως επόμενη διαίρεση, δηλαδή τη διαίρεση $10\upsilon_{k+1} \div n$ έχουμε τη διαιρετική ισότητα

$$10\upsilon_{k+1} = \psi_{k+1} n + \upsilon_{k+2}, \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_{k+2} < n.$$

Έτσι ορίζεται, με επαγωγικό τρόπο, μια ακολουθία διαιρετικών ισοτήτων

$$10\upsilon_k = \psi_k n + \upsilon_{k+1}, \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_{k+1} < n, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

οι οποίες προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο μία ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεκαδικών ψηφίων για το ρητό αριθμό ρ.

□

Σχόλιο 1 *Αν ο αλγόριθμος των διαδοχικών διαιρέσεων ξεκινήσει από ένα μη ανάγωγο αντιπρόσωπο κλάσμα του ρητού*

$$\rho = \frac{m'}{n'} = \frac{mp}{np}, \quad p \in \mathbb{N}$$

λαμβάνεται ο ίδιος ακέραιος a και η ίδια ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεκαδικών ψηφίων για το ρητό ρ, αφού από τις σχέσεις (3.4) και (3.7) συμπεραίνεται ότι:

$$\begin{aligned} m' &= mp = anp + \upsilon_1 p = an' + \upsilon_1', \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_1' = \upsilon_1 p < np = n', \\ 10\upsilon_k' &= 10\upsilon_k p = \psi_k np + \upsilon_{k+1} p = \psi_k n' + \upsilon_{k+1}', \quad \text{με } 0 \leq \upsilon_{k+1}' < n', \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3.3β΄ Δεκαδικό ανάπτυγμα ρητού $\rho \geq 0$.

Ορισμός 3.3.1 *Το ζεύγος που αποτελείται από του ακέραιο a και την ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, καλείται δεκαδικό ανάπτυγμα του ρ και θα σημειώνεται με*

$$a, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \quad \text{είτε} \quad a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots .$$

Η αντιστοίχηση του στο ρ θα σημειώνεται με την ισότητα:

$$\rho = a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots \quad \text{είτε} \quad a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots = \rho.$$

Το a ονομάζεται *ακέραιο μέρος* του αναπτύγματος και η ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ψηφιακό μέρος* του αναπτύγματος.

Ορισμός 3.3.2 *Με $a, \psi_1 \dots \psi_\nu$ θα σημειώνεται το «δεκαδικό κλάσμα»*

$$\frac{a \cdot 10^\nu + \psi_1 10^{\nu-1} + \cdots + \psi_\nu}{10^\nu} = a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \tag{3.8}$$

το οποίο θα καλείται και ν - ψήφιο δεκαδικό αριθμό.

Γενικά, όπως θα δούμε, το δεκαδικό ανάπτυγμα ρητού $\rho \geq 0$ έχει ψηφιακό μέρος το οποίο είτε είναι με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων, δηλαδή το οποίο τερματίζεται[3], είτε είναι με άπειρο αριθμό ψηφίων που είναι περιοδικό.

Παρατήρηση 3.3.3 *Ο αριθμός $0,999\dots = 0,\overline{9}$ είναι ακριβώς ίσος με του αριθμό 1. Δηλαδή, $0,\overline{9} = 1$.*

Ο ισχυρισμός αυτός αιτιολογείται αλγεβρικά ως εξής: Συμβολίζουμε με r του αριθμό $0,999\dots$. Δηλαδή, $r = 0,999\dots$. Πολλαπλασιάζοντας του r με του 10 παίρνουμε $10r = 9,999\dots$ (το αποτέλεσμα λαμβάνεται απλώς μεταφέροντας την υποδιαστολή του r μια θέση προς τα δεξιά). Αφαιρώντας του r από του $10r$ παίρνουμε $9r$, του οποίου το ψηφιακό μέρος είναι μια άπειρη ακολουθία μηδενικών· δηλαδή, ο αριθμός $9r$ είναι ακέραιος αφού το δεκαδικό του ανάπτυγμα έχει μόνο ακέραιο μέρος. Διαιρώντας του $9r$ με του 9 παίρνουμε του r, ο οποίος είναι επίσης ακέραιος ίσος με του 1. Δηλαδή:

$$\begin{array}{rrcl} & 10r & = & 9,999\dots \\ - & r & = & 0,999\dots \\ \hline & 9r & = & 9 \\ & r & = & 1 \end{array}$$

Επειδή $0,\overline{9} = 1$, τα δεκαδικά αναπτύγματα που στο ψηφιακό μέρος τους, από κάποιο ψηφίο κι έπειτα, το στοιχείο 9 επαναλαμβάνεται άπειρες φορές είναι επίσης ίσα με δεκαδικά αναπτύγματα των οποίων το ψηφιακό μέρος τερματίζεται.

[3]Σε αυτή τη περίπτωση στο ψηφιακό μέρος του δεκαδικού αριθμού από κάποιο ψηφίο και μετά επαναλαμβάνεται το 0, το οποίο συνήθως παραλείπεται.

Παρατήρηση 3.3.4 *Αν η αρχική περίοδος, του δεκαδικού αναπτύγματος ενός ρητού αριθμού $\rho \geq 0$, είναι η μονομελής $\overline{9}$ τότε είναι ίσο με δεκαδικό ανάπτυγμα του οποίου το ψηφιακό μέρος έχει πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Πιο συγκεκριμένα:*

Αν

$$\rho = a, \psi_1 \ldots \psi_k \overline{9}, \tag{3.9}$$

με $\psi_k = \beta$ *και* $\beta, k \in \mathbb{N}$ *τότε*

$$\rho = a, \psi_1 \ldots \psi_k \overline{9} = a, \psi_1 \ldots \psi'_k,$$

με $\psi'_k = \beta + 1$ *και* $\beta, k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $\rho = a, \psi_1 \ldots \psi'_k$. Παίρνουμε την ακολουθία $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a, \psi_1 \ldots \psi_k 90 \ldots \\
\rho_2 &= a, \psi_1 \ldots \psi_k 990 \ldots \\
&\vdots \\
\rho_m &= a, \psi_1 \ldots \psi_k \overbrace{9 \ldots 9}^{m \text{ φορές}} 0 \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\rho - \rho_n) &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \rho - \lim_{n\to\infty} \rho_n &= 0 \\
\rho - \lim_{n\to\infty} \rho_n &= 0.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho.$$

□

Οι ρητοί αριθμοί $\rho \geq 0$, που έχουν δεκαδικό ανάπτυγμα της μορφής (3.9), ουσιαστικά, είναι οι μόνες περιπτώσεις που έχουν δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις.

Πρόταση 3.3.5 *Η ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, του δεκαδικού αναπτύγματος ενός ρητού αριθμού $\rho \geq 0$, δηλαδή $\rho \in \mathbb{Q}_0^+$, που παριστάνεται από ανάγωγο κλάσμα $\frac{m}{n}$, είναι περιοδική. Αν η αρχική περίοδος είναι μονομελής, τότε θα είναι διαφορετική από το $\overline{9}$.*

Απόδειξη. Τα υπόλοιπα υ_k των διαιρετικών ισοτήτων (3.4) και (3.7) είναι ακέραιοι ≥ 0 και $\leq n-1$, αφού $0 \leq \upsilon_k < n$ και $n \in \mathbb{N}$. Για τα n πρώτα υπόλοιπα, $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Είτε θα έχουν κάποιο υπόλοιπο υ_μ που θα είναι ίσο με μηδέν, είτε δεν θα έχουν κάποιο υπόλοιπο που θα είναι ίσο με μηδέν.

Στη περίπτωση που υπάρχει $\upsilon_\mu = 0 \Rightarrow \upsilon_k = 0$, με $k > \mu$. Δηλαδή, $\upsilon_k = 0$, για $k \geq \mu$. Άρα από τη διαιρετική ισότητα (3.7) έχουμε, $0 = \psi_k n + 0$. Αφού από τον ορισμό το $n \neq 0$ τότε $\psi_k = 0$ για $k \geq \mu$. Άρα η ακολουθία $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, θα είναι περιοδική με μονομελή αρχική περίοδο το $\overline{0}$.

Στην άλλη περίπτωση, όπου κανένα από τα υπόλοιπα $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ δεν είναι ίσο με μηδέν, αναγκαστικά θα έχουμε $n \geq 3$ διότι,

$$\begin{aligned} \text{αν } \ n = 1 \ &\Rightarrow \ \upsilon_1 = 0 \\ \text{αν } \ n = 2 \ &\Rightarrow \ (\upsilon_1 = 1 \text{ και } \upsilon_2 = 0)\,. \end{aligned}$$

Επίσης, δύο τουλάχιστο από αυτά τα υπόλοιπα θα είναι ίσα μεταξύ τους, διότι τα n υπόλοιπα μπορούν να πάρουν $n-1$ τιμές· τους ακέραιους $1, \ldots, n-1$. Άρα θα

$$\exists\, \mu, p \ \text{ ακέραιοι } : 1 \leq \mu < \mu + p \leq n \quad \text{και} \quad \upsilon_\mu = \upsilon_{\mu+p}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι ακολουθίες $(\upsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, είναι περιοδικές από τη θέση $k = \mu$ και έπειτα. Αρκεί γι' αυτό να δειχθεί ότι

$$\upsilon_k = \upsilon_{k+p} \quad \text{και} \quad \psi_k = \psi_{k+p}, \ \text{ για } k \geq \mu. \tag{3.10}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \upsilon_\mu = \upsilon_{\mu+p} \ &\Rightarrow \ 10\upsilon_\mu = 10\upsilon_{\mu+p} \\ &\Rightarrow \ \psi_\mu n + \upsilon_{\mu+1} = \psi_{\mu+p} n + \upsilon_{\mu+1+p} \\ &\Rightarrow \ (\psi_\mu - \psi_{\mu+p})\, n + (\upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p}) = 0. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} |\psi_\mu - \psi_{\mu+p}|\, n \ &= \ \lambda n, \ \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{N}_0,\ n \neq 0 \\ |\upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p}| \ &< \ n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi_\mu - \psi_{\mu+p} = 0 \quad \text{και} \quad \upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\psi_\mu = \psi_{\mu+p} \quad \text{και} \quad \upsilon_{\mu+1} = \upsilon_{\mu+1+p}.$$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq \mu$, $\upsilon_k = \upsilon_{k+p}$. Θα δειχθεί ότι ισχύει $\psi_k = \psi_{k+p}$ και $\upsilon_{k+1} = \upsilon_{k+1+p}$. Από τις σχέσεις (3.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \upsilon_k = \upsilon_{k+p} \quad &\Rightarrow \quad 10\upsilon_k = 10\upsilon_{k+p} \\ &\Rightarrow \quad \psi_k n + \upsilon_{k+1} = \psi_{k+p} n + \upsilon_{k+1+p} \\ &\Rightarrow \quad (\psi_k - \psi_{k+p})\, n + (\upsilon_{k+1} - \upsilon_{k+1+p}) = 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\psi_k - \psi_{k+p} = 0 \quad \text{και} \quad \upsilon_{k+1} - \upsilon_{k+1+p} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\psi_k = \psi_{k+p} \quad \text{και} \quad \upsilon_{k+1} = \upsilon_{k+1+p}.$$

Έτσι αποδείχτηκε με μαθηματική επαγωγή ότι οι σχέσεις (3.10) αληθεύουν για κάθε $k \geq \mu$. Συνεπώς, το κομμάτι $\psi_\mu \ldots \psi_{\mu+p-1}$ της ακολουθίας $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, είναι περίοδος της ακολουθίας.

Μένει να δεχθεί ότι τα στοιχεία p ψηφία $\psi_\mu, \ldots, \psi_{\mu+p-1}$ δεν είναι όλα ίσα με 9. Αν ήταν όλα ίσα με 9, θα είχαμε

$$\begin{aligned} 10\upsilon_\mu &= 9n + \upsilon_{\mu+1} \\ 10\upsilon_{\mu+1} &= 9n + \upsilon_{\mu+2} \\ &\vdots \\ 10\upsilon_{\mu+p-1} &= 9n + \upsilon_{\mu+p} = 9n + \upsilon_\mu. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη αυτών των p ισοτήτων κατά σειρά με

$$10^{p-1}, 10^{p-2}, \ldots, 10^0$$

αντίστοιχα και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 10^p \upsilon_\mu &= 9 \cdot 10^{p-1} n + 10^{p-1} \upsilon_{\mu+1} \\ 10^{p-1} \upsilon_{\mu+1} &= 9 \cdot 10^{p-2} n + 10^{p-2} \upsilon_{\mu+2} \\ &\vdots \\ 10 \upsilon_{\mu+p-1} &= 9n + \upsilon_\mu. \end{aligned}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 10^p \upsilon_\mu &= \left(9 \cdot 10^{p-1} + \cdots + 9 \cdot 10^0\right) n + \upsilon_\mu \\ \left(10^p - 1\right) \upsilon_\mu &= \left(9 \cdot 10^{p-1} + \cdots + 9 \cdot 10^0\right) n. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^{p-1} + \cdots + 9 \cdot 10^0 &= 9 \left(1 \cdot \frac{10^p - 1}{10 - 1}\right) \\ 9 \cdot 10^{p-1} + \cdots + 9 \cdot 10^0 &= 10^p - 1. \end{aligned}$$

Διότι έχουμε άθροισμα S_p των p πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το 1 και λόγο 10.

Άρα,

$$\begin{aligned} \left(10^p - 1\right) \upsilon_\mu &= \left(10^p - 1\right) n \\ \upsilon_\mu &= n. \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού $\upsilon_\mu < n$.

Άρα η αρχική περίοδος της ακολουθίας $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, δηλαδή του δεκαδικού αναπτύγματος του ρητού $\rho \geq 0$, δεν μπορεί να είναι η μονομελής $\overline{9}$.

□

Λήμμα 3.3.6 *Ο ρητός αριθμός $\rho \geq 0$ έχει δεκαδικό ανάπτυγμα το $a, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \ldots$ και καθορίζεται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} a \leq \quad \rho \quad &< a + \frac{1}{10} \quad \textit{και} \\ a, \psi_1 \ldots \psi_k \leq \quad \rho \quad &< a, \psi_1 \ldots \psi_k + \frac{1}{10^k}, \quad \textit{για } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Οι διαιρετικές ισότητες (3.4), (3.7) γράφονται και έτσι:

$$\rho = \frac{m}{n} = a + \frac{\upsilon_1}{n}, \quad \frac{10\upsilon_k}{n} = \psi_k + \frac{\upsilon_{k+1}}{n} \quad \text{για } k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Θέτοντας,

$$Y_k = \frac{\upsilon_k}{n} \quad \text{για } k \in \mathbb{N},$$

έχουμε,

$$\rho = a + Y_1, \tag{3.13}$$

$$10Y_k = \psi_k + Y_{k+1}, \quad \text{με } 0 \leq Y_k < 1 \quad \text{για } k \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Λύνοντας ως προς Y_k, για $k = 1$, τη σχέση (3.14) και αντικαθιστώντας στη σχέση (3.13) παίρνουμε τη σχέση

$$\rho = a + \frac{\psi_1}{10} + \frac{Y_2}{10}. \tag{3.15}$$

Ομοίως για $k = 2$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (3.15) παίρνουμε τη σχέση

$$\rho = a + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{Y_3}{10^2}.$$

Με μαθηματική επαγωγή:

$$\rho = a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_k}{10^k} + \frac{Y_{k+1}}{10^k} = a, \psi_1 \ldots \psi_k + \frac{Y_{k+1}}{10^k}, \quad \text{για } k \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Ο αριθμός Y_k, $k \in \mathbb{N}$, είναι ένας ρητός που έχει δεκαδικό ανάπτυγμα το

$$Y_k = 0, \psi_k \psi_{k+1} \psi_{k+2} \ldots .$$

Αντίστροφα, αν ένας ρητός ρ' μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\rho' = a' + \frac{\psi'_1}{10} + \cdots + \frac{\psi'_k}{10^k} + \frac{Y'_{k+1}}{10^k}, \quad \text{όπου } a' \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

με $\psi'_1, \ldots, \psi'_k$ δεκαδικά ψηφία και $0 \leq Y'_{k+1} < 1$, τότε το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρ' θα έχει ακέραιο μέρος το a', τα πρώτα k δεκαδικά ψηφία ίσα αντιστοίχως με $\psi'_1, \ldots, \psi'_k$ και τα επόμενα ψηφία ίσα αντιστοίχως με τα δεκαδικά ψηφία του αναπτύγματος $0, \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ του Y'_{k+1}. Δηλαδή,

$$\rho' = a' + \psi'_1 + \cdots + \psi'_k + \psi'_{k+1} + \psi'_{k+2} + \cdots, \quad \text{όπου } k \in \mathbb{N},$$

με $\psi'_{k+\nu} = \omega_\nu$, για k, $\nu \in \mathbb{N}$.

Από τις σχέσεις (3.13), (3.14) και (3.16) έπονται οι σχέσεις (3.11). Αντίστροφα, από τις (3.11) συνάγεται ότι ο ρητός ρ έχει δεκαδικό ανάπτυγμα το $a, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots$.

□

Λήμμα 3.3.7 *Ο αριθμός $\frac{1}{10^\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, είναι μικρότερος από κάθε δοθέν θετικό ρητό αριθμό ρ, όταν ο ν είναι μεγαλύτερος από κατάλληλο φυσικό αριθμό ν_ρ:*

$$\frac{1}{10^\nu} < \rho, \quad \textit{για} \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \textit{και} \quad \nu > \nu_\rho.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\rho = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \text{όπου} \;\; \nu_1,\; \nu_2 \in \mathbb{N}.$$

Έστω ν_ρ το πλήθος των ψηφίων με τα οποία γράφεται στο δεκαδικό σύστημα ο ακέραιος ν_2. Για $\nu > \nu_\rho$ έχουμε,

$$\frac{1}{10^\nu} < \frac{1}{10^{\nu_\rho}} < \frac{1}{\nu_2} \leq \frac{\nu_1}{\nu_2} = \rho.$$

Άρα,

$$\frac{1}{10^\nu} < \rho, \quad \text{για} \quad \nu > \nu_\rho.$$

□

Δύο ρητοί αριθμοί $\rho' \geq 0$ και $\rho'' \geq 0$ είναι ίσοι όταν έχουν ίδια δεκαδικά αναπτύγματα, δηλαδή τα αντίστοιχα στοιχεία του ακέραιου μέρους είναι μεταξύ τους ίσα και τα αντίστοιχα στοιχεία του ψηφιακού μέρους είναι μεταξύ τους ίσα. Η άρνηση αυτής της έκφρασης οδηγεί στη διατύπωση του πιο κάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 3.3.8 *Σε δύο άνισους ρητούς αριθμούς $\rho' \geq 0$ και $\rho'' \geq 0$ αντιστοιχούν διαφορετικά δεκαδικά αναπτύγματα.*

Απόδειξη. Έστω ότι δύο ρητοί ρ', ρ'' έχουν το ίδιο δεκαδικό ανάπτυγμα. Δηλαδή,

$$\rho' = a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots \quad , \quad \rho'' = a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots,$$

Τότε σύμφωνα με τις (3.11) έχουμε

$$a, \psi_1 \dots \psi_k \leq \rho' \quad , \quad \rho'' < a, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{1}{10^k}, \quad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Άρα,

$$|\rho' - \rho''| < a, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{1}{10^k} - a, \psi_1 \dots \psi_k = \frac{1}{10^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Άρα, $|\rho' - \rho''| = 0$, δηλαδή $\rho' = \rho''$.

Διότι, αν ήταν $|\rho' - \rho''| > 0$, από το Λήμμα 3.3.7, θα είχαμε ότι ,

$$\exists k \in \mathbb{N} : \ |\rho' - \rho''| > \frac{1}{10^k}.$$

Άτοπο, αφού από τις (3.18) έχουμε ότι $|\rho' - \rho''| < \frac{1}{10^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

□

3.3γ΄ Διάταξη ($<$) των ρητών $\rho \geq 0$ και λεξικογραφική διάταξη του συνόλου των δεκαδικών αναπτυγμάτων τους.

Κάθε ρητός αριθμός $\rho \geq 0$, εκφράζει κάποιο μέγεθος. Μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς αυτούς κατά αυξανόμενο μέγεθος, εφαρμόζοντας την σχέση $<$. Θεωρούμε η διάταξη στο σύνολο $\mathbb{Q}_0^+$, να είναι η διάταξη κατά το αυξανόμενο μέγεθος των στοιχείων του[4]

Στη συνήθη διαδικασία που ακολουθούμε όταν συγκρίνουμε τα δεκαδικά αναπτύγματα δύο αριθμών, συγκρίνουμε τα ακέραια μέρη των αριθμών αν είναι ίσα συγκρίνουμε τα ψηφία των δεκάτων αν είναι ίσα συγκρίνουμε τα ψηφία των εκατοστών και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε τα πρώτα ομοτάξια δεκαδικά ψηφία που είναι διαφορετικά μεταξύ τους, το μικρότερο από αυτά καθορίζει και τον μικρότερο δεκαδικό αριθμό.

Η διαδικασία αυτή της σύγκρισης, εφαρμόζεται για να επιτύχουμε τη λεξικογραφική διάταξη.

Θεώρημα 3.3.9 *Η σχέση διάταξης $<$ στο σύνολο $\mathbb{Q}_0^+$ των ρητών οι οποίοι είναι ≥ 0, συμπίπτει με τη λεγόμενη λεξικογραφική διάταξη $\prec$ του συνόλου των δεκαδικών αναπτυγμάτων τους. Σύμφωνα με αυτή, από δύο διαφορετικά*

[4]Η συγκεκριμένη διάταξη ονομάζεται από τον Κριτικό *«μεγεθική διάταξη»* (Κριτικός 1969).

αναπτύγματα $A' = a', \psi_1'\psi_2' \ldots$ *και* $A'' = a'', \psi_1''\psi_2'' \ldots$ *προηγείται εκείνο που έχει ακέραιο μέρος μικρότερο ή, σε περίπτωση ίσων ακέραιων μερών, εκείνο του οποίου το πρώτο στη σειρά δεκαδικό ψηφίο που διαφέρει από το ομοτάξιο ψηφίο στο άλλο ανάπτυγμα, είναι μικρότερο από το ομοτάξιο αυτό· δηλαδή*

$A' \prec A''$ *όταν και μόνο όταν ή ακέραιο μέρος του* A' *είναι μικρότερο* ($<$) *του ακέραιου μέρους του* A'' *ή ακέραιο μέρος του* A' *είναι ίσο με το ακέραιο μέρος του* A'' *και πρώτο δεκαδικό ψηφίο του* A' *είναι μικρότερο* ($<$) *από το ομοτάξιο ψηφίο του* A''.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.8, τα δεκαδικά αυτά αναπτύγματα θα διαφέρουν είτε ως προς το ακέραιο είτε[5] προς το ψηφιακό μέρος τους.

1η περίπτωση: $a' \neq a''$. Σύμφωνα με τη σχέση (3.13), για μη μηδενικούς ρητούς ρ', ρ'' θα έχουμε

$$\rho' = a' + Y_1' \quad \text{και} \quad \rho'' = a'' + Y_2'' \quad \text{με} \quad 0 \leq Y_1',\ Y_2' < 1.$$

Άρα,

$$\rho' - \rho'' = (a' - a'') + (Y_1' - Y_2'')\,,$$

με $|a' - a''| \geq 1$ και $|Y_1' - Y_2''| < 1$. Επομένως, το πρόσημο, $\operatorname{sign}(\rho' - \rho'')$, του μη μηδενικού ρητού αριθμού $\rho' - \rho''$ είναι το ίδιο με το πρόσημο, $\operatorname{sign}(a' - a'')$, του μη μηδενικού ακεραίου $a' - a''$. Συνεπώς,

$$\begin{array}{rcll} \rho' & < & \rho'', & \text{όταν} \quad a' < a'' \quad \text{ή} \\ \rho'' & < & \rho', & \text{όταν} \quad a'' < a'. \end{array}$$

2η περίπτωση: $a' = a''$. Η ακολουθία $(\psi_k')_{k\in\mathbb{N}}$ θα είναι διαφορετική από την ακολουθία $(\psi_k'')_{k\in\mathbb{N}}$. Έστω ψ_{k_1}' το πρώτο κατά σειρά στοιχείο της $(\psi_k')_{k\in\mathbb{N}}$, που διαφέρει από το ομοτάξιο του ψ_{k_1}'' της $(\psi_k'')_{k\in\mathbb{N}}$. Σύμφωνα με την ισότητα (3.16) θα έχουμε:

$$\rho' - \rho'' = \left(a', \psi_1' \ldots \psi_{k_1}' - a'', \psi_1'' \ldots \psi_{k_1}''\right) + \frac{1}{10^{k_1}}\left(Y_{k_1+1}' - Y_{k_1+1}''\right),\ k_1 \in \mathbb{N},$$

όπου

$$\left|a', \psi_1' \ldots \psi_{k_1}' - a'', \psi_1'' \ldots \psi_{k_1}''\right| = \frac{\left|\psi_{k_1}' - \psi_{k_1}''\right|}{10^{k_1}} \geq \frac{1}{10^{k_1}}$$

[5]Το είτε... είτε... λαμβάνεται με την «εγκλειστική» σημασία, δηλαδή δεν αποκλείεται να ισχύουν και οι δύο ισχυρισμοί που συνδέονται με τους δύο αυτούς συνδέσμους. Για την «αποκλειστική» διάζευξη χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι ή... ή....

και

$$\frac{1}{10^{k_1}}\left|Y'_{k_1+1}-Y''_{k_1+1}\right|<\frac{1}{10^{k_1}}.$$

Άρα,

$$\operatorname{sign}(\rho'-\rho'')=\operatorname{sign}\left(a',\psi'_1\dots\psi'_{k_1}-a'',\psi''_1\dots\psi''_{k_1}\right)=\operatorname{sign}\left(\psi'_{k_1}-\psi''_{k_1}\right).$$

Συνεπώς,

$$\begin{array}{rcll}\rho' & < & \rho'', & \text{όταν} \quad \psi'_{k_1}<\psi''_{k_1} \quad \text{ή}\\ \rho'' & < & \rho', & \text{όταν} \quad \psi''_{k_1}<\psi'_{k_1}.\end{array}$$

□

Γιατί όμως ένα δεκαδικό μόρφωμα να ταυτίζεται με το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού και να μην είναι κάτι άλλο διαφορετικό; Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα τίθεται ως εξής: Κάθε περιοδικό απειροψήφιο δεκαδικό μόρφωμα, με αρχική περίοδο διαφορετική από τη μονομελή $\overline{9}$, είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός ρητού αριθμού ≥ 0 ή είναι κάτι διαφορετικό; Η απόδειξη του πιο κάτω θεωρήματος νομιμοποιεί την ταύτιση του συγκεκριμένου δεκαδικού μορφώματος με το δεκαδικό ανάπτυγμα ρητού αριθμού ≥ 0.

Από τη πιο κάτω απόδειξη μαζί με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.8 έχουμε ότι ο ρητός αριθμός $\rho\geq 0$, ο οποίος έχει περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα με αρχική περίοδο διαφορετική από τη μονομελή $\overline{9}$, είναι μοναδικός.

Θεώρημα 3.3.10 *Κάθε περιοδικό απειροψήφιο δεκαδικό μόρφωμα*

$$a,\psi_1\dots\psi_k\dots$$

με αρχική περίοδο διαφορετική από τη μονομελή $\overline{9}$ είναι δεκαδικό ανάπτυγμα ενός και μόνο ενός ρητού αριθμού ≥ 0.

Απόδειξη. Έστω η αρχική περίοδος του δοσμένου απειροψήφιου μορφώματος μονομελής και ίση με $\overline{\psi}$, όπου $0\leq\psi\leq 8$. Το μόρφωμα θα έχει τη μορφή $a,\overline{\psi}$ ή την $a,\psi_1\dots\psi_{\mu-1}\overline{\psi}$ με $\mu\geq 2$, $\psi_{\mu-1}\neq\psi$.

1. Στην πρώτη υποπερίπτωση το μόρφωμα θα είναι δεκαδικό ανάπτυγμα ρητού

$$\frac{9a+\psi}{9},$$

αφού εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των διαδοχικών διαιρέσεων, έχουμε τις σχέσεις (3.4), (3.6) με $\upsilon_1 = \upsilon_2$· λύνοντας ως προς υ_1 την (3.4) και αντικαθιστώντας στην (3.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} 10\,(m - an) &= \psi n + (m - an) \\ 10m - 10an &= \psi n + m - an \\ (10-1)\,m &= \psi n + (10-1)\,an \\ (10-1)\,\frac{m}{n} &= \psi + (10-1)\,a, \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{m}{n} = a + \frac{\psi}{10-1} = a + \frac{\psi}{9} = \frac{9a+\psi}{9}.$$

Άρα θα είναι

$$\frac{9a+\psi}{9} = a, \overline{\psi}.$$

Ειδικά, όταν $a = 0$, θα έχουμε

$$\frac{\psi}{10-1} = \frac{\psi}{9} = 0, \overline{\psi}. \tag{3.19}$$

2. Στη δεύτερη υποπερίπτωση θέτουμε

$$\rho = a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_{\mu-1}}{10^{\mu-1}} \cdot \frac{\psi}{9}$$

και συγκρίνουμε αυτόν τον ρητό με τον αριθμό ρ' του (3.17), όπου παίρνουμε το $k = \mu - 1$ και το $Y'_{k+1} = \frac{\psi}{9}$. Από ότι είπαμε τότε και από την (3.19) έπεται ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρ είναι το $a, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1}\overline{\psi}$.

Έστω η αρχική περίοδος $\overline{\psi_\mu \ldots \psi}_{\mu+p-1}$ του δοσμένου απειροψήφιου μορφώματος p - μελής με $p \geq 2$. Το μόρφωμα θα έχει τη μορφή $a, \overline{\psi_1 \ldots \psi}_p$, όταν $\mu = 1$, και τη μορφή $a, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1}\overline{\psi_\mu \ldots \psi}_{\mu+p-1}$ με $\psi_{\mu-1} \neq \psi_\mu$, όταν $\mu \geq 2$.

Στην υποπερίπτωση $\mu = 1$ θεωρούμε το ρητό αριθμό

$$\rho = a + \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}, \quad \text{όπου} \quad 0 < \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} < 1,$$

διότι τα ψηφία $\psi_1 + \ldots + \psi_p$ δεν ταυτίζονται όλα με το 0 ούτε όλα με το 9. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} &= \frac{(\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p)\left((10^p - 1) + 1\right)}{(10^p - 1)\, 10^p} \\
&= \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} \\
&= \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\rho &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} \\
&= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p}\left(\frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p\,(10^p - 1)}\right) \\
&= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{\psi_1}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{2p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα μαθηματική επαγωγή. Ας είναι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\rho &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \cdots + \frac{\psi_1}{10^{kp+1}} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^{(k+1)p}} \\
&\quad + \frac{1}{10^{(k+1)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.20) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\rho &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \cdots + \frac{\psi_1}{10^{(k+1)p+1}} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^{(k+2)p}} \\
&\quad + \frac{1}{10^{(k+2)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι αν για κάποιο $\nu = k \in \mathbb{N}$ ισχύει η (3.21), τότε θα ισχύει και η αντίστοιχη σχέση για $\nu = k+1$. Κατά την αρχή της τέλειας μαθηματικής επαγωγής για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\rho &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^p} + \cdots + \frac{\psi_1}{10^{\nu p+1}} + \cdots + \frac{\psi_p}{10^{(\nu+1)p}} \\
&\quad + \frac{1}{10^{(\nu+1)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε για το ρητό του (3.17), το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρητού ρ έχει ακέραιο μέρος το a και τα $(\nu+1)p$ πρώτα κατά σειρά δεκαδικά ψηφία ίσα αντιστοίχως με

$$\underbrace{\psi_1 \dots \psi_p \psi_1 \dots \psi_p \dots \psi_1 \dots \psi_p}_{\nu+1 \text{ φορές το κομμάτι } \overline{\psi_1 \dots \psi_p}},$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρητού ρ ταυτίζεται με το δοσμένο μόρφωμα $a, \overline{\psi_1 \dots \psi_p}$. Δηλαδή, $\rho = a, \overline{\psi_1 \dots \psi_p}$.
Ειδικά, όταν $a = 0$, θα έχουμε:

$$\frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} = 0, \overline{\psi_1 \dots \psi_p}. \tag{3.22}$$

Θεωρούμε την υποπερίπτωση $\mu \geq 2$ για το δοσμένο περιοδικό μόρφωμα, την

$$a, \psi_1 \dots \psi_{\mu-1} \overline{\psi_\mu \dots \psi}_{\mu+p-1} \quad \text{με} \quad \psi_{\mu-1} \neq \psi_\mu \tag{3.23}$$

Θέτουμε τώρα

$$\rho = a + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_{\mu-1}}{10^{\mu-1}} + \frac{1}{10^{\mu-1}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \cdots + \psi_p}{10^p - 1}. \tag{3.24}$$

Εφαρμόζοντας όσα είπαμε για το ρητό ρ' του (3.17) καθώς και το πιο πάνω αποτέλεσμα (3.22) συμπεραίνουμε ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρ ταυτίζεται με το δοσμένο απειροψήφιο μόρφωμα (3.23). Δηλαδή,

$$\rho = a, \psi_1 \dots \psi_{\mu-1} \overline{\psi_\mu \dots \psi}_{\mu+p-1} \quad \text{με} \quad \psi_{\mu-1} \neq \psi_\mu.$$

□

Σχόλιο 2 *Η συνήθης μεθοδολογία που ακολουθείται για την μετατροπή περιοδικού δεκαδικού αριθμού σε κλασματική μορφή (στη β΄ γυμνασίου) φαίνεται από τα πιο κάτω παραδείγματα:*

Παράδειγμα 1: Θέτουμε $x = 0, \overline{4}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= 0,444\dots \\ 10x &= 4,444\dots \\ 10x - x &= 4,4444\dots - 0,444\dots \quad \textit{(αφού } x = 0,444\dots\textit{)} \\ 9x &= 4 \\ x &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Θέτουμε $x = 1,\overline{64}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= 1,646464\ldots \\ 100x &= 164,646464\ldots \\ 100x - x &= 164,646464\ldots - 1,646464\ldots \quad \textit{(αφού } x = 1,646464\ldots\textit{)} \\ 99x &= 163 \\ x &= \frac{163}{99}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Θέτουμε $x = 2,06\overline{81}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= 2,068181\ldots \\ 10000x &= 20681,8181\ldots \\ 10000x - 100x &= 20681,8181\ldots - 206,8181\ldots \quad \textit{(αφού } x = 2,068181\ldots\textit{)} \\ 9900x &= 20475 \\ x &= \frac{20475}{9900} = \frac{91}{44}. \end{aligned}$$

Τα βήματα της μεθοδολογίας που εφαρμόσαμε είναι τα εξής:

1. *Θέτουμε x του περιοδικό δεκαδικό αριθμό του οποίου θέλουμε να βρούμε τη κλασματική μορφή. Δηλαδή:*

$$x = a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots \tag{3.25}$$

2. *Πολλαπλασιάζουμε με 10^{n+m}, όπου m ($m \neq 0$) το πλήθος των δεκαδικών μη-περιοδικών ψηφίων και n το πλήθος των ψηφίων της περιόδου, κάθε μέλος της εξίσωσης (3.25). Δηλαδή:*

$$10^{n+m}x = 10^{n+m}\left(a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots\right)$$

3. *Πολλαπλασιάζουμε με 10^n κάθε μέλος της εξίσωσης (3.25) και αφαιρούμε από τη προηγούμενη σχέση. Δηλαδή:*

$$10^{n+m}x - 10^n x = 10^{n+m}\left(a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots\right) - 10^n\left(a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots\right).$$

4. *Συμπτύσσουμε τους όρους στο πρώτο μέλος και κάνουμε πράξεις στο δεύτερο μέλος.*

5. *Λύνουμε ως προς* x.

6. *Απλοποιούμε (αν χρειάζεται).*

Αν το πλήθος των δεκαδικών μη-περιοδικών ψηφίων του δεκαδικού περιοδικού αριθμού είναι μηδέν, δηλαδή $m = 0$ *(όπως στα παραδείγματα 1 και 2), τότε αντικαθιστούμε τα βήματα 2 και 3 με το ακόλουθο βήμα: Πολλαπλασιάζουμε με* 10^n *κάθε μέλος της εξίσωσης (3.25) και αφαιρούμε από τη σχέση που προκύπτει την (3.25). Δηλαδή:*

$$10^n x - x = 10^n \left(a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots\right) - \left(a, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots\right).$$

Σχόλιο 3 *Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3.10 στα παραδείγματα του Σχόλιου 2 έχουμε ότι:*

$$0,\overline{4} = a,\overline{\psi} = \frac{9a+\psi}{9} = \frac{9\cdot 0+4}{9} = \frac{4}{9}.$$

$$1,\overline{64} = a,\overline{\psi_1\psi_2} = a + \frac{\psi_1\cdot 10+\psi_2}{10^2-1} = 1 + \frac{6\cdot 10+4}{99} = \frac{163}{99}.$$

$$\begin{aligned} 2,06\overline{81} &= a,\psi_1\psi_2\overline{\psi_3\psi_4} \\ &= a + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\cdot\frac{\psi_3\cdot 10+\psi_4}{10^2-1} \\ &= 2 + \frac{0}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^2}\cdot\frac{8\cdot 10+1}{99} \\ &= \frac{20475}{9900}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.3.11 *Τα στοιχεία του συνόλου* $\mathbb{Q}_0^+$ *μπορούν να αντιστοιχιστούν αμφιμονοσήμαντα (δηλαδή, ένα προς ένα και επί) προς τα στοιχεία του συνόλου των περιοδικών απειροψήφιων δεκαδικών μορφωμάτων με αρχική περίοδο διαφορετική από τη μονομελή* $\overline{9}$.

3.4 Το σύνολο $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών.

Ορισμός 3.4.1 *Τα απειροψήφια δεκαδικά μορφώματα*

$$A \;=\; a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$$

που έχουν ακέραιο μέρος έναν ακέραιο $a \geq 0$ και ψηφιακό μέρος μια ακολουθία $(\psi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεκαδικών ψηφίων απεριοδική ή περιοδική με αρχική περίοδο $\neq \overline{9}$. Τα μορφώματα αυτά καλούνται και απόλυτοι αριθμοί.

Το σύνολο των απόλυτων αριθμών A συμβολίζεται με $\mathscr{G}$.

Άρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathscr{G}.$$

Ορισμός 3.4.2 *Ονομάζουμε απόκομμα τάξης ν, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, του μορφώματος*

$$A \;=\; a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$$

το δεκαδικό αριθμό $a, \psi_1 \ldots \psi_\nu$ καθώς και το περιοδικό μόρφωμα $a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \overline{0}$. Συμβολίζεται με $[A]_\nu$. Δηλαδή,

$$[A]_\nu \;=\; [a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots]_\nu = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \overline{0} \quad \textit{για } \nu \in \mathbb{N}.$$

Το ακέραιο μέρος a του A καθώς και το περιοδικό μόρφωμα $a, \overline{0}$, που είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα του ρητού $\frac{a}{1}$, συμβολίζεται με $[A]_0$. Δηλαδή,

$$[A]_0 \;=\; [a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots]_0 = a = a, \overline{0}.$$

3.4α΄ Διάταξη των στοιχείων του $\mathscr{G}$.

Έστω A', $A'' \in \mathscr{G}$ με $A' = a', \psi'_1 \ldots \psi'_\nu \ldots$ και $A'' = a'', \psi''_1 \ldots \psi''_\nu \ldots$.

Ορισμός 3.4.3 *Τα δύο δεκαδικά μορφώματα A' και A'' ταυτίζονται όταν και μόνο όταν $A' = A''$. Δηλαδή,*

$$A' = A'' \;\Leftrightarrow\; [A']_\nu = [A'']_\nu, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Τα δύο δεκαδικά μορφώματα A' και A'' είναι μεταξύ τους άνισα, δηλαδή $A' \neq A''$, όταν και μόνο όταν υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε να είναι $[A']_k \neq [A'']_k$. Δηλαδή,

$$A' \neq A'' \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N}^* : \ [A']_k \neq [A'']_k) \, .$$

Άρα,

$$A' \neq A'' \quad \Leftrightarrow \quad ([A']_\nu \neq [A'']_\nu \, , \quad \forall \, \nu \geq k) \, .$$

Η σχέση ισότητας, με την οποία είναι εφοδιασμένο το σύνολο $\mathscr{G}$, χαρακτηρίζεται από τις πιο κάτω ιδιότητες:

1. $A = A$, για κάθε $A \in \mathscr{G}$ (αυτοπαθής).
2. Αν $A' = A''$, τότε και $A'' = A'$ (συμμετρική).
3. Αν $A' = A''$ και $A'' = A'''$, τότε και $A' = A'''$ (μεταβατική).

Ορισμός 3.4.4 *Τα δύο δεκαδικά μορφώματα A' και A'' είναι $A' < A''$, όταν και μόνο όταν ή το ακέραιο μέρος του A' είναι μικρότερο από το ακέραιο μέρος του A'' ή, σε περίπτωση ίσων ακέραιων μερών, το πρώτο κατά σειρά δεκαδικό ψηφίο ψ'_k του A' που διαφέρει από το ομοτάξιο του ψ''_k του A'', είναι μικρότερο του ψ''_k. Δηλαδή,*

$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad [A']_0 < [A'']_0 \ \textit{ή}$$
$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad [A']_\nu = [A'']_\nu \, , \ \nu = 0, 1, \ldots, k-1 \ \textit{με} \ k \geq 1 \ \textit{και} \ [A']_k < [A'']_k \, .$$

Από τον ορισμό 3.4.4 ισχύει ότι:

$$\text{Αν } A' < A'' \text{ και } [A']_k < [A'']_k \, , \text{ τότε } [A']_\nu < [A'']_\nu \, , \quad \forall \nu \geq k.$$

Επίσης τα στοιχεία του $\mathscr{G}$ ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. Αν $A' < A''$, τότε δεν αληθεύει $A'' < A'$ (ασυμμετρικότητα).
2. Αν $A' < A''$ και $A'' < A'''$, τότε $A' < A'''$ (μεταβατικότητα).
3. Αληθεύει ακριβώς μια από τις σχέσεις $A' = A''$, $A' < A''$, $A'' < A'$ (συνοχικότητα[6]).

[6] Η ιδιότητα της συνοχικότητας καλείται και ως ιδιότητα της τριχοτομίας.

Η σχέση $<$ που ορίστηκε στο σύνολο $\mathscr{G}$ είναι σχέση *ολικής διάταξης με στενή σημασία*, όπως καλείται από τον Κριτικό (Κριτικός 1969, σελ: 20) και η οποία ταυτίζεται με την καλούμενη, στο βιβλίο του Κάππου, *γνήσια γραμμική διάταξη* (Κάππου 1962, σελ: 26), αφού κάθε ζεύγος απόλυτων αριθμών A', A'' ικανοποιούν την ιδιότητα της συνοχικότητας.

Ορισμός 3.4.5 *Δύο στοιχεία A', A'' του $\mathscr{G}$ είναι $A' \leq A''$, όταν και μόνο όταν $A' < A''$ ή $A' = A''$. Δηλαδή,*

$$A' \leq A'' \quad \Leftrightarrow \quad A' < A'' \quad \text{ή} \quad A' = A''.$$

Επίσης τα στοιχεία του $\mathscr{G}$ ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. Αληθεύει $A \leq A$, για κάθε $A \in \mathscr{G}$ (ανακλαστική).
2. Αν $A' \leq A''$ και $A'' \leq A'$, τότε $A' = A''$ (αντισυμμετρική).
3. Αν $A' \leq A''$ και $A'' \leq A'''$, τότε $A' \leq A'''$ (μεταβατική).

Η σχέση $\leq$ που ορίστηκε στο σύνολο $\mathscr{G}$, είναι σχέση *ολικής διάταξης με ευρεία σημασία*, όπως καλείται από τον Κριτικό (Κριτικός 1969, σελ: 21) και η οποία ταυτίζεται με την καλούμενη, στο βιβλίο του Κάππου, *γραμμική διάταξη* (Κάππου 1962, σελ: 25), αφού για κάθε ζεύγος απόλυτων αριθμών A', A'' ισχύει μια τουλάχιστο από τις σχέσεις: $A' \leq A''$ ή $A'' \leq A'$.

Σε κάθε σχέση διατάξεως αντιστοιχεί πάντοτε και η δυϊκή προς αυτή σχέση (Κάππου 1962, σελ: 25). Δηλαδή, η δυϊκή προς τη σχέση διατάξεως $<$ (μικρότερο) είναι η σχέση $>$ (μεγαλύτερο)· η δυϊκή προς τη σχέση διατάξεως $\leq$ (μικρότερο ή ίσο) είναι η σχέση $\geq$ (μεγαλύτερο ή ίσο). Οι δυϊκές σχέσεις είναι επίσης σχέσεις διατάξεως. Επομένως και η σχέση $>$ (μεγαλύτερο) και η σχέση $\geq$ (μεγαλύτερο ή ίσο) είναι σχέσεις διάταξης.

Παρατήρηση 3.4.6 *Η ανακλαστική ιδιότητα (ή η ιδιότητα της αυτοπάθειας) η οποία ισχύει για τη σχέση $\leq$, δεν ισχύει για την σχέση $<$.*

Ορισμός 3.4.7 *Δύο στοιχεία A', A'' του $\mathscr{G}$ είναι $A' < A''$, όταν και μόνο όταν $A'' > A'$. Δηλαδή,*

$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad A'' > A'.$$

Ορισμός 3.4.8 *Δύο στοιχεία A', A'' του $\mathscr{G}$ είναι $A' \leq A''$, όταν και μόνο όταν $A'' \geq A'$. Δηλαδή,*

$$A' \leq A'' \quad \Leftrightarrow \quad A'' \geq A'.$$

3.46΄ Ιδιότητες των στοιχείων του $\mathscr{G}$.

Ακολούθως, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε μερικές χρήσιμες για τους σκοπούς μας ιδιότητες των στοιχείων του $\mathscr{G}$.

Ιδιότητα 1 *Για κάθε $A \in \mathscr{G}$ και κάθε $\nu \in \mathbb{N}_0$ είναι*

$$[A]_\nu \leq A < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}. \tag{3.26}$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathscr{G}$ με $A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$. Από τους ορισμούς ισχύει,

$$\begin{aligned} [A]_0 &= a, \overline{0} \leq a, \psi_1 \ldots < (a+1), \overline{0} = [A]_0 + \frac{1}{10^0} \\ [A]_0 &\leq A < [A]_0 + \frac{1}{10^0} \end{aligned}$$

Όταν $\psi_1 \leq 8$ έχουμε,

$$[A]_1 = a, \psi_1 \overline{0} \leq a, \psi_1 \ldots < a, (\psi_1 + 1)\, \overline{0} = [A]_1 + \frac{1}{10^1},$$

όταν $\psi_1 = 9$ έχουμε,

$$[A]_1 = a, \psi_1 \overline{0} \leq a, \psi_1 \ldots < (a+1), \overline{0} = [A]_1 + \frac{1}{10^1}.$$

Δηλαδή,

$$[A]_1 \leq A < [A]_1 + \frac{1}{10^1}.$$

Έστω ότι για κάποιο $k \geq 1$ ισχύει

$$[A]_k \leq A < [A]_k + \frac{1}{10^k}.$$

Τότε όταν $\psi_{k+1} \leq 8$ έχουμε,

$$\begin{aligned} [A]_{k+1} = a, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \overline{0} &\leq a, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \psi_{k+2} \ldots \\ &< a, \psi_1 \ldots \psi_k (\psi_{k+1} + 1)\, \overline{0} = [A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}, \end{aligned}$$

όταν $\psi_1 = 9$ έχουμε,

$$\begin{aligned} [A]_{k+1} = a, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \overline{0} &\leq a, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \psi_{k+2} \ldots \\ &< [A]_k + \frac{1}{10^k} = [A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$[A]_{k+1} \leq A < [A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}.$$

□

Ιδιότητα 2 *Για κάθε $A \in \mathscr{G}$ ισχύει ότι*

$$[A]_0 \leq [A]_1 \leq \ldots \leq [A]_\nu \leq [A]_{\nu+1} \leq \ldots \tag{3.27}$$

$$[A]_0 + \frac{1}{10^0} \geq [A]_1 + \frac{1}{10^1} \geq \ldots \geq [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \geq [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}} \geq \ldots \tag{3.28}$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathscr{G}$ με $A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ για $\nu \in \mathbb{N}$. Από τους ορισμούς 3.3.2, 3.4.2 ισχύουν,

$$\begin{aligned}
[A]_0 &= a \leq a + \frac{\psi_1}{10} = [A]_1\,, \\
[A]_\nu &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \leq a + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} = [A]_{\nu+1}\,.
\end{aligned}$$

Ακόμη ισχύουν,

$$\begin{aligned}
[A]_0 + \frac{\psi_1}{10^0} &= a + 1 \geq a + \frac{\psi_1}{10} + \frac{1}{10} = [A]_1 + \frac{1}{10}, \\
[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} &= a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{1}{10^\nu} \\
&\geq a + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} + \frac{1}{10^{\nu+1}} \\
&= [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}}.
\end{aligned}$$

□

Από το Θεώρημα 3.3.9, έχουμε ότι η διάταξη δύο αριθμών ρ', $\rho'' \in \mathbb{Q}_0^+$ (κατά το αυξανόμενο μέγεθος τους), συμπίπτει με τη λεξικογραφική διάταξη των δεκαδικών αναπτυγμάτων αυτών των αριθμών. Άρα και οι σχέσεις (3.27), (3.28) μπορούν να θεωρηθούν και σαν σχέσεις μεγέθους μεταξύ των δεκαδικών αναπτυγμάτων των μελών τους.

Σχόλιο 4 *Η ακολουθία*

$$[A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

όπου $\mathscr{G} \ni A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ και φ φυσικός αριθμός ≥ 2, είναι γνησίως φθίνουσα (δηλαδή, φθίνουσα με τη στενή σημασία).

Απόδειξη. Για να είναι γνησίως φθίνουσα η ακολουθία θα πρέπει

$$[A]_{\nu+1} + \frac{\varphi}{10^{\nu+1}} \quad < \quad [A]_{\nu} + \frac{\varphi}{10^{\nu}}.$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} [A]_{\nu+1} - [A]_{\nu} &< \frac{10\varphi - \varphi}{10^{\nu+1}} \\ \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} &< \frac{9\varphi}{10^{\nu+1}} \\ \psi_{\nu+1} &< 9\varphi. \end{aligned}$$

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\psi_{\nu+1} < 9\varphi$.

Ισχύει,

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad \psi_{\nu+1} &\leq 9 \\ 0 \leq \quad \psi_{\nu+1} &\leq 9 < 9 \cdot 2 \leq 9\varphi \\ \psi_{\nu+1} &< 9\varphi. \end{aligned}$$

□

Ιδιότητα 3 *Για οποιαδήποτε A', $A'' \in \mathscr{G}$ ισχύει η ισοδυναμία*

$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad \textit{υπάρχουν απειράριθμα } n \in \mathbb{N} \textit{ με } [A']_n + \frac{1}{10^n} < [A'']_n. \tag{3.29}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό 3.4.4 έχουμε,

$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ με } [A']_k < [A'']_k.$$

Αλλά

$$[A']_k < [A'']_k \quad \Leftrightarrow \quad [A']_k + \frac{1}{10^k} \leq [A'']_k.$$

Από την Ιδιότητα 2 συμπεραίνεται ότι, υπάρχουν απειράριθμα $n \in \mathbb{N}$, με $n > k$ και

$$[A']_n + \frac{1}{10^n} \quad < \quad [A']_k + \frac{1}{10^k}.$$

Άρα γι' αυτά τα n θα είναι

$$\begin{aligned} [A']_n + \frac{1}{10^n} &< [A'']_k \leq [A'']_n \\ [A']_n + \frac{1}{10^n} &< [A'']_n. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.4.9

$$A' < A'' \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} \text{ με } [A']_\nu + \frac{1}{10^\nu} < [A'']_\nu \text{ για } \nu \geq m.$$

(Η παρατήρηση προκύπτει αμέσως από τις ιδιότητες 2 και 3.)

Παρατήρηση 3.4.10 *Αν $\varphi \in \mathbb{N}$ και $A' < A''$, τότε*

$$\exists \nu_\varphi \in \mathbb{N} \quad \text{με} \quad [A']_{\nu_\varphi} + \frac{1}{10^{\nu_\varphi}} < [A'']_{\nu_\varphi}.$$

Απόδειξη. Για $\varphi = 1$ ισχύει (από την Ιδιότητα 3).
Έστω ότι ισχύει για $\varphi = k$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} [A']_{\nu_k} + \frac{k}{10^{\nu_k}} &< [A'']_{\nu_k} \\ [A']_{\nu_k} + \frac{k+1}{10^{\nu_k}} &\leq [A'']_{\nu_k}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\varphi = k+1$. Υπάρχει $\nu_{k+1} > \nu_k$ με

$$[A']_{\nu_{k+1}} + \frac{1}{10^{\nu_{k+1}}} < [A']_{\nu_k} + \frac{1}{10^{\nu_k}}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} [A']_{\nu_{k+1}} + \frac{1}{10^{\nu_{k+1}}} + \frac{k}{10^{\nu_{k+1}}} &< [A']_{\nu_k} + \frac{1}{10^{\nu_k}} + \frac{k}{10^{\nu_k}} \\ &< [A']_{\nu_k} + \frac{1+k}{10^{\nu_k}} \leq [A'']_{\nu_k} \leq [A'']_{\nu_{k+1}}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$[A']_{\nu_{k+1}} + \frac{k+1}{10^{\nu_{k+1}}} < [A'']_{\nu_{k+1}}.$$

□

Ιδιότητα 4 *Ισχύουν οι συνεπαγωγές*

$$A' \leq A'' \Rightarrow [A']_\nu \leq [A'']_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0, \tag{3.30}$$

και

$$([A']_\nu \leq [A'']_\nu \quad \text{για } \nu \geq k \text{ με } k \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow A' \leq A''. \tag{3.31}$$

Απόδειξη. Έστω $A' \leq A''$. Αν το συμπέρασμα της συνεπαγωγής (3.30) δεν ίσχυε θα είχαμε ότι,

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{ώστε} \quad [A']_n > [A'']_n \,.$$

Άρα,

$$[A'']_n + \frac{1}{10^n} \;\; \leq \;\; [A']_n \,.$$

Άρα, από την Ιδιότητα 2, θα είχαμε

$$\begin{aligned} A'' &< [A'']_n + \frac{1}{10^n} \leq [A']_n \leq A', \\ A'' &< A'. \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $A' \leq A''$.

Έστω $[A']_\nu \leq [A'']_\nu$ για $\nu \geq k$ με $k \in \mathbb{N}_0$. Αν το συμπέρασμα της συνεπαγωγής (3.31) δεν ίσχυε θα είχαμε $A'' < A'$. Από την Ιδιότητα 3 θα είχαμε ότι,

$$\exists n \in \mathbb{N} \;\; \text{με} \;\; n \geq k : \; [A'']_n + \frac{1}{10^n} \;\; < \;\; [A']_n \,.$$

Συνεπώς για $n \geq k$ θα είχαμε,

$$\begin{aligned} [A'']_n &< [A'']_n + \frac{1}{10^n} < [A']_n \,, \\ [A'']_n &< [A']_n \,. \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $[A']_\nu \leq [A'']_\nu$ για $\nu \geq k$.

□

Θεώρημα 3.4.11 *Έστω*

$$A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_\nu \geq A_{\nu+1} \geq \ldots, \tag{3.32}$$

μια φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία στοιχείων του συνόλου $\mathscr{G}$, τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα $A \in \mathscr{G}$ που ικανοποιεί:

1. $A \leq A_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
2. *Αν $A' \in \mathscr{G}$ και $A < A'$, τότε $\exists\, m \in \mathbb{N}$ με $A_m < A'$.*

Απόδειξη. Έστω

$$A_k = a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} \dots, \quad k,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Από την συνεπαγωγή (3.30) της Ιδιότητας 4 και από την υπόθεση (3.32) του θεωρήματος έχουμε,

$$a_k = [A_k]_0 \geq [A_{k+1}]_0 = a_{k+1} \tag{3.33}$$

$$a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} = [A_k]_n \geq [A_{k+1}]_n = a_{k+1}, \psi_{k+1,\,1} \dots \psi_{k+1,\,n} \tag{3.34}$$

για κάθε $k,\ n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον αριθμοπίνακα

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1\nu} & \psi_{1,\,\nu+1} & \cdots \\ a_2 & \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2\nu} & \psi_{2,\,\nu+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_k & \psi_{k1} & \psi_{k2} & \cdots & \psi_{k\nu} & \psi_{k,\,\nu+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{3.35}$$

Θα δειχθεί ότι τα στοιχεία κάθε στήλης του έχουν σταθερή τιμή από κάποια θέση μέσα στη στήλη και έπειτα. Τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι τα στοιχεία της ακολουθίας $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, όπου $a \in \mathbb{N}_0$, τα οποία κατά τις (3.33), (3.34) ικανοποιούν την σχέση

$$a_k \geq a_{k+1}, \quad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Άρα, οι ακέραιοι a_k, θα πάψουν να μικραίνουν από κάποια θέση k_0 μέσα στη στήλη και έπειτα. Δηλαδή, στη πρώτη στήλη, υπάρχει θέση k_0 ώστε

$$a_{k_0} = a_{k_0+1} = a_{k_0+2} = a_{k_0+3} = \dots\ .$$

Θέτοντας $a = a_{k_0}$ έχουμε,

$$a_k = a_{k_0} = a \quad \text{για} \quad k \geq k_0 \quad \text{και} \quad a \leq [A_k]_0 \leq [A_k] \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, του πίνακα (3.35), είναι τα στοιχεία της ακολουθίας $(\psi_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$. Τα στοιχεία της $(\psi_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι δεκαδικά ψηφία που φθίνουν με ευρεία σημασία από τη θέση k_0 μέσα στη στήλη και έπειτα, διότι

$$a_k,\ \psi_{k1} = [A_k]_1 \geq [A_{k+1}]_1 = a_{k+1}\psi_{k+1,\,1} \quad \text{(από τη (3.34), για } n = 1)$$

και

$$a_k = a, \quad \text{για} \;\; k \geq k_0.$$

Άρα,

$$\psi_{k1} \geq \psi_{k+1,\,1}, \quad \text{για} \;\; k \geq k_0.$$

Άρα, οι αριθμοί ψ_{k1} θα πάψουν να μικραίνουν από κάποια θέση $k_1 \geq k_0$ μέσα στη στήλη και έπειτα. Δηλαδή, στη δεύτερη στήλη, υπάρχει θέση $k_1 \geq k_0$ ώστε

$$\psi_{k_1,\,1} = \psi_{k_1+1,\,1} = \psi_{k_1+2,\,1} = \psi_{k_1+3,\,1} = \dots \;.$$

Θέτοντας $\psi_1 = \psi_{k_1,\,1}$ έχουμε,

$$[A_k]_1 = a, \psi_1 \quad \text{για} \quad k \geq k_1 \quad \text{και} \quad a, \psi_1 \leq [A_k]_1 \leq A_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Έστω ότι τα ψηφία $\psi_1, \dots, \psi_\nu$ ορίζονται έτσι, ώστε να είναι

$$[A_k]_\nu = a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k_\nu} = a, \psi_1 \dots \psi_\nu, \quad \text{για } k \geq k_\nu \tag{3.37}$$

και

$$a, \psi_1 \dots \psi_\nu \leq [A_k]_\nu \leq A_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.38}$$

Τα στοιχεία της $\nu + 2$ στήλης, του πίνακα (3.35), είναι τα στοιχεία της ακολουθίας $(\psi_{k,\nu+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Τα στοιχεία της $(\psi_{k,\nu+1})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι δεκαδικά ψηφία που φθίνουν με ευρεία σημασία από τη θέση k_ν μέσα στη στήλη και έπειτα, διότι

$$a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k,\,\nu+1} = [A_k]_{\nu+1} \geq [A_{k+1}]_{\nu+1} = a_{k+1}, \psi_{k+1,\,1} \dots \psi_{k+1,\,\nu} \psi_{k+1,\,\nu+1}$$

(από τη (3.34), για $n = \nu + 1$)
και

$$a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} = a, \psi_1 \dots \psi_\nu \quad \text{για} \quad k \geq k_\nu \quad \text{(από τη (3.37))}.$$

Άρα, οι αριθμοί $\psi_{k,\nu+1}$ θα πάψουν να μικραίνουν από κάποια θέση $k_{\nu+1} \geq k_\nu$ μέσα στη στήλη και έπειτα. Δηλαδή, στη $\nu+2$ στήλη, υπάρχει θέση $k_{\nu+1} \geq k_\nu$ ώστε

$$\psi_{k_{\nu+1},\,\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+1,\,\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+2,\,\nu+1} = \dots \;.$$

Θέτοντας $\psi_{\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1},\,\nu+1}$ έχουμε,

$$[A_k]_{\nu+1} = a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} \psi_{k,\,\nu+1} = a, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1}, \quad \text{για} \quad k \geq k_{\nu+1}$$

και

$$a, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1} \leq [A_k]_{\nu+1} \leq A_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Έτσι, ορίζεται με μαθηματική επαγωγή ένα απειροψήφιο δεκαδικό μόρφωμα

$$a, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1} \dots = A$$

για το οποίο σύμφωνα με τις (3.36), (3.37), (3.38) ισχύουν οι σχέσεις:

$$[A]_0 = a = [A_k]_0\,, \quad \text{για} \quad k \geq k_0 \tag{3.39}$$

$$[A]_\nu = a, \psi_1 \dots \psi_\nu = [A_k]_\nu = a_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu},\ \forall\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ και } \ k \geq k_\nu, \tag{3.40}$$

$$[A]_\nu \leq [A_k]_\nu \leq A_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \ \text{ και } \ \forall\, \nu \in \mathbb{N}_0. \tag{3.41}$$

Δηλαδή, η φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία

$$[A_1]_\nu \geq [A_2]_\nu \geq \dots \geq [A_k]_\nu \geq [A_{k+1}]_\nu \geq \dots\ , \quad \text{όπου} \ \ \nu \in \mathbb{N}_0,$$

έχει ένα ελάχιστο στοιχείο $[A_{k_\nu}]_\nu$ από το οποίο και έπειτα παραμένει στάσιμη.

Τώρα θα δειχθεί ότι το δεκαδικό μόρφωμα A που ορίστηκε πιο πάνω δεν είναι περιοδικό με αρχική περίοδο το $\overline{9}$ και, επομένως, είναι στοιχείο του συνόλου $\mathscr{G}$.

Αν το δεκαδικό μόρφωμα A είχε την περίοδο $\overline{9}$, θα ήταν $\psi_\nu = 9$ για κάποιο $\nu \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. Όμως από τις σχέσεις (3.39), (3.40), για $k = k_n$, έχουμε:

$$[A]_n = a, \psi_1 \dots \psi_\nu = [A_{kn}]_n = a_{kn}, \psi_{kn1} \dots \psi_{kn,\,n}. \ \text{Άρα,} \quad \psi_{kn,\,n} = 9.$$

Από τις σχέσεις (3.41) έπονται τώρα διαδοχικά τα εξής:

$$\begin{aligned}
[A_{kn}]_{n+1} &= a, \psi_1 \dots \psi_n \psi_{kn,\,n+1} \geq a, \psi_1 \dots \psi_n 9. \ \text{Άρα,} \quad \psi_{kn,\,n+1} = 9 \\
[A_{kn}]_{n+2} &= a, \psi_1 \dots \psi_n 9 \psi_{kn,\,n+2} \geq a, \psi_1 \dots \psi_n 99. \ \text{Άρα,} \quad \psi_{kn,\,n+2} = 9 \\
[A_{kn}]_{n+3} &= a, \psi_1 \dots \psi_n 99 \psi_{kn,\,n+3} \geq a, \psi_1 \dots \psi_n 999. \ \text{Άρα,} \quad \psi_{kn,\,n+3} = 9
\end{aligned}$$

και με μαθηματική επαγωγή

$$\psi_{kn,\,n+\mu} = 9, \quad \text{για} \ \ \mu \in \mathbb{N}_0.$$

Κατά συνέπεια το δεκαδικό μόρφωμα A_k θα ήταν περιοδικό με αρχική περίοδο το $\overline{9}$. Άτοπο, αφού στην αρχή υποθέσαμε ότι $A_k \in \mathscr{G}$.

Τώρα θα δειχθεί ότι ο απόλυτος αριθμός A ικανοποιεί την (1) του θεωρήματος. Από τις σχέσεις (3.41), που ισχύουν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}_0$, έπεται ότι

$$A \leq A_k, \quad \text{όποιο και να είναι το θεωρούμενο} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Άρα, ο απόλυτος αριθμός A ικανοποιεί την (1) του θεωρήματος.

Τώρα θα δειχθεί ότι ο απόλυτος αριθμός A ικανοποιεί την (2) του θεωρήματος. Από την υπόθεση $A < A'$ και από την Ιδιότητα 3, έπεται ότι υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} \quad < \quad [A']_n \leq A'.$$

Άρα,

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} \quad < \quad A'.$$

Από τη σχέση (3.40) για $k = k_n$, έχουμε ότι $[A_{kn}]_n = [A]_n$. Άρα

$$[A_{kn}]_n + \frac{1}{10^n} < A'.$$

Όμως, από την Ιδιότητα 1 ισχύει,

$$A_{kn} < [A_{kn}]_n + \frac{1}{10^n}.$$

Άρα, $A_{kn} < A'$. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο A_{kn}, $kn \in \mathbb{N}$, της ακολουθίας (3.32) το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $A_{kn} < A'$. Άρα, ο απόλυτος αριθμός A ικανοποιεί την (2) του θεωρήματος.

Τώρα θα δειχθεί ότι ο απόλυτος αριθμός A που ικανοποιεί τις (1) και (2) του θεωρήματος, είναι μοναδικός. Έστω δύο στοιχεία A, $A^* \in \mathscr{G}$, $A \neq A^*$, που ικανοποιούν τις (1) και (2).

Αν $A < A^*$, σύμφωνα με την (2) του A, έπεται ότι υπάρχει κάποιο $A_{m_1} < A^*$· ενώ, σύμφωνα με την (1) του A^*, έχουμε: $A^* \leq A_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

Αν $A^* < A$, σύμφωνα με την (2) του A^*, έπεται ότι υπάρχει κάποιο $A_{m_2} < A$· ενώ, σύμφωνα με την (1) του A έχουμε: $A \leq A_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

Άρα, $A = A^*$.

□

Ο απόλυτος αριθμός A που ορίστηκε πιο πάνω λέγεται *κάτω πέρας*[7] (infimum) της ακολουθίας $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, καθώς και του συνόλου

$$\{x : \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ με } A_\nu = x\}.$$

Το κάτω πέρας συμβολίζεται με

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu.$$

Πόρισμα 3.4.12 *Το κάτω πέρας A της φθίνουσας ακολουθίας $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, είναι το ίδιο με το κάτω πέρας κάθε υπακολουθίας της*

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu_k}, A_{\nu_{k+1}}, \ldots \quad \textit{όπου} \quad \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{k+1} \ldots .$$

Απόδειξη. Η υπακολουθία $(A_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$, είναι φθίνουσα (με την ευρεία σημασία). Δηλαδή, $A_{\nu_k} \geq A_{\nu_{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, με $\nu_{k+1} > \nu_k$. Άρα υπάρχει το

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} A_{\nu_k} = A'.$$

Έστω ότι το κάτω πέρας A της φθίνουσας ακολουθίας $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, είναι διαφορετικό από το κάτω πέρας της υπακολουθίας της $(A_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Δηλαδή, $A \neq A'$.

Αν $A < A'$ συνεπάγεται, από την (2) του θεωρήματος 3.4.11 για το $A = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$, ότι υπάρχει κάποιο $A_m < A'$. Επομένως για τα $\nu_k \geq m$ έχουμε ότι

$$A_{\nu_k} \leq A_m < A'.$$

Τώρα, από την (1) του θεωρήματος 3.4.11 για το $A' = \inf_{k\in\mathbb{N}} A_{\nu_k}$, έχουμε ότι $A' \leq A_{\nu_k}$, για κάθε A_{ν_k}, $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή ότι $A_{\nu_k} < A'$ και $A' \leq A_{\nu_k}$. Άτοπο.

Αν $A' < A$ συνεπάγεται, από την (2) του θεωρήματος 3.4.11 για το

$$A' = \inf_{k\in\mathbb{N}} A_{\nu_k},$$

ότι υπάρχει κάποιο $A_{\nu_m} < A$. Τώρα, από την (1) του θεωρήματος 3.4.11 για το $A = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$, έχουμε ότι $A \leq A_\nu$, για κάθε A_ν, $\nu \in \mathbb{N}$. Άτοπο. Άρα, $A = A'$.

□

[7] Το κάτω πέρας λέγεται και μέγιστο κάτω φράγμα.

Σχόλιο 5 *Ειδικά ισχύει ότι*

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \inf_{\nu\geq n} A_\nu, \quad \textit{όπου} \quad n \quad \textit{κάποιος φυσικός αριθμός.}$$

Πόρισμα 3.4.13 *Αν για τα A_ν της φθίνουσας με ευρεία σημασία ακολουθίας $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του συνόλου $\mathscr{G}$ ισχύει ότι*

$$B_1 \leq A_\nu \leq B_2, \quad \textit{όπου } B_1,\ B_2 \in \mathscr{G} \ \textit{ και } \ \nu \in \mathbb{N},$$

τότε

$$B_1 \leq \inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = A \leq B_2.$$

Απόδειξη. Από την (1) του θεωρήματος 3.4.11, έχουμε ότι για το κάτω πέρας $A = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$, ισχύει πρώτον ότι $A \leq A_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Όμως από την υπόθεση του πορίσματος ισχύει $A_\nu \leq B_2$. Άρα $A \leq B_2$.

Τώρα, αν η σχέση $B_1 \leq A$ που θέλουμε να αποδείξουμε δεν ίσχυε, θα είχαμε $A < B_1$. Όμως από την (1) του θεωρήματος 3.4.11, έχουμε ότι για το κάτω πέρας A θα υπήρχε κάποιο A_m με $A_m < B_1$. Άτοπο, αφού από την υπόθεση του πορίσματος ισχύει ότι $B_1 \leq A_\nu$ για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$.

□

Το σύνολο $\mathscr{G}$ έχει την ιδιότητα της πυκνότητας· ο ισχυρισμός αυτός επαληθεύεται με την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.14 *Ανάμεσα σε δύο άνισα στοιχεία*

$$A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$$

και

$$B = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots$$

του συνόλου $\mathscr{G}$ βρίσκονται όσα θέλουμε περιοδικά και όσα θέλουμε απεριοδικά στοιχεία του $\mathscr{G}$.

Απόδειξη. Έστω $A < B$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο περιοδικό μόρφωμα $\Gamma \in A$ και ένα τουλάχιστο απεριοδικό $\Delta \in A$, ώστε

$$A < \Gamma < B, \quad A < \Delta < B.$$

Από την Ιδιότητα 1 έχουμε ότι

$$A \ < \ [A]_n + \frac{1}{10^n}. \tag{3.42}$$

Από την Ιδιότητα 3 έχουμε ότι

$$\exists n \in \mathbb{N}: \ [A]_n + \frac{1}{10^n} < [B]_n \, .$$

Άρα,

$$[A]_n + \frac{2}{10^n} \leq [B]_n \leq B. \tag{3.43}$$

Το δεκαδικό ανάπτυγμα του $[B]_n$ είναι το $\beta, \omega_1 \ldots \omega_n \overline{0}$. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του

$$[A]_n + \frac{1}{10^n}$$

ας είναι το $a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* \overline{0}$. Το μόρφωμα

$$\Gamma = a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* 1\overline{0} = [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} \tag{3.44}$$

είναι περιοδικό με αρχική περίοδο το $\overline{0}$, άρα $\Gamma \in \mathscr{G}$. Από τις (3.42), (3.44) για το Γ αυτό ισχύει

$$A < [A]_n + \frac{1}{10^n} < \Gamma,$$

συνεπάγεται η σχέση $A < \Gamma$. Από τις (3.43), (3.44) για το Γ αυτό ισχύει

$$\Gamma < [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} = [A]_n + \frac{2}{10^n} \leq B,$$

συνεπάγεται η σχέση $\Gamma < B$. Επομένως, $A < \Gamma < B$.

Το μόρφωμα

$$\Delta = a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* 10100 \ldots 1 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{\kappa \text{ φορές}} \ 1 \ \underbrace{0 \ldots 00}_{\kappa+1 \text{ φορές}} \ \ldots \tag{3.45}$$

είναι απεριοδικό, άρα $\Delta \in \mathscr{G}$. Από τις (3.42), (3.45) για το Δ αυτό ισχύει

$$\Delta > a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* \overline{0} = [A]_n + \frac{1}{10^n} > A,$$

συνεπάγεται η σχέση $\Delta > A$. Από τις (3.43), (3.45) για το Δ αυτό ισχύει

$$\begin{aligned} \Delta < a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* 2\overline{0} \ldots &= a^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* + \frac{2}{10^{n+1}} \\ &= [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} < [A]_n + \frac{2}{10^n} \leq B \end{aligned}$$

συνεπάγεται η σχέση $\Delta < B$. Επομένως, $A < \Delta < B$.

□

Πόρισμα 3.4.15 *Αν φ ένας οποιοσδήποτε ορισμένος φυσικός αριθμός και $A \in \mathscr{G}$, τότε*

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu} \right) = A.$$

Απόδειξη. Η ακολουθία

$$[A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

είναι φθίνουσα (με ευρεία σημασία αν $\varphi = 1$, με στενή αν $\varphi \geq 2$, σύμφωνα με το σχόλιο 4). Άρα υπάρχει το

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu} \right) = A'.$$

Αν $A' < A$, από την (2) του θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας A' έχουμε,

$$A' < A \Rightarrow \text{ υπάρχει } [A]_m + \frac{\varphi}{10^m} < A.$$

Άτοπο, αφού από την Ιδιότητα 1 και το σχόλιο 4 ισχύει,

$$A < [A]_m + \frac{1}{10^m} \leq [A]_m + \frac{\varphi}{10^m}.$$

Αν $A < A'$ υπάρχουν ρητοί αριθμοί ρ_1, ρ_2 τέτοιοι ώστε να είναι

$$[A]_\nu \leq A < \rho_1 < \rho_2 < A' = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu} \right) \leq [A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, άρα

$$0 < \rho_2 - \rho_1 < \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Άτοπο, από το Λήμμα 3.3.7.

□

Το σύνολο $\mathscr{G}$ έχει την ιδιότητα της πληρότητας· ο ισχυρισμός αυτός επαληθεύεται με την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.4.16 *Ας είναι $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία ρητών αριθμών ≥ 0 και $(\rho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, μια ακολουθία ρητών ≥ 0 και ας ισχύει ότι*

$$0 \leq \sigma_\nu - \rho_\nu \leq \frac{\varphi}{10^\nu} \quad \text{όπου } \varphi \text{ ένας ορισμένος φυσικός αριθμός και } \nu \in \mathbb{N}.$$

Αν για κάποιο μόρφωμα $A \in \mathscr{G}$ αληθεύουν οι σχέσεις

$$\rho_\nu \leq A \leq \sigma_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{3.46}$$

τότε θα είναι

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu = A.$$

Απόδειξη. Τα δεκαδικά αναπτύγματα ρητών αριθμών ≥ 0 είναι στοιχεία του $\mathscr{G}$ Άρα για την φθίνουσα ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, υπάρχει το κάτω πέρας $A^* = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu$.

Αν $A < A^*$, από το Θεώρημα 3.4.14 έπεται ότι υπάρχουν δύο περιοδικά μορφώματα Π_1, $\Pi_2 \in \mathscr{G}$, τέτοια ώστε $A < \Pi_1 < \Pi_2 < A^*$. Τα Π_1 και Π_2 είναι δεκαδικά αναπτύγματα δύο ρητών αριθμών > 0, έστω των τ_1 και τ_2 αντίστοιχα. Για τους ρητούς τ_1, τ_2, λόγω της υπόθεσης (3.46) και της (1) του θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας A^*, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\rho_\nu \quad \leq \quad A < \tau_1 < \tau_2 < A^* = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu \leq \sigma_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \rho_\nu < \tau_1 \quad &< \quad \tau_2 < \sigma_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \\ 0 \quad &< \quad \tau_2 - \tau_1 < \sigma_\nu - \rho_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

και αφού ισχύουν οι σχέσεις

$$0 \leq \sigma_\nu - \rho_\nu \leq \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \varphi, \nu \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$0 < \tau_2 - \tau_1 < \sigma_\nu - \rho_\nu \leq \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Άτοπο, από το Λήμμα 3.3.7.

Αν $A^* < A$, από την (2) του θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας

$$A^* = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma_\nu,$$

έπεται ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $\sigma_m < A$. Τώρα, από την υπόθεση (3.46) του θεωρήματος, ισχύει

$$A \leq \sigma_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Άτοπο.

Επομένως, $A = A^*$.

□

3.4γ΄ Προσδιορισμός των $\rho' + \rho''$, $\rho'\rho''$, $\rho' - \rho''$, ρ'/ρ''.

Πρόσθεση $\rho' + \rho''$: Στη παράγραφο που ακολουθεί θα προσδιορίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα της πρόσθεσης $\rho' + \rho''$, από τα δεκαδικά αναπτύγματα των ρ', ρ''.

Αν ρ' και ρ'' είναι ρητοί αριθμοί ≥ 0, τότε

$$[\rho']_\nu + [\rho'']_\nu \leq \rho' + \rho'' < [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \\ \tau_\nu &= [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Αφού η $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2, είναι μια φθίνουσα ακολουθία (με ευρεία σημασία) ρητών > 0, θα έχουμε $\tau_\nu \leq \rho' + \rho'' < \sigma_\nu$ με $0 < \sigma_\nu - \tau_\nu = 2/10^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 με $\varphi = 2$, λαμβάνουμε

$$\rho' + \rho'' = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left([\rho']_k + [\rho'']_k + \frac{2}{10^k} \right).$$

Πολλαπλασιασμός $\rho' \cdot \rho''$: Στη παράγραφο που ακολουθεί θα προσδιορίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του πολλαπλασιασμού $\rho' \cdot \rho''$, από τα δεκαδικά αναπτύγματα των ρ', ρ''.

Έστω,

$$\begin{aligned} \rho' &= a, \psi_1 \dots \psi_\nu \dots \geq 0 \quad \text{και} \\ \rho'' &= \beta, \omega_1 \dots \omega_\nu \dots \geq 0. \end{aligned}$$

Ισχύουν οι σχέσεις

$$[\rho']_\nu \leq \rho' < [\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu} \quad \text{και} \quad [\rho'']_\nu \geq \rho'' < [\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις 3.47 έχουμε

$$\begin{aligned} [\rho']_\nu [\rho'']_\nu \leq \rho'\rho'' &< \left([\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \\ &= [\rho']_\nu [\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\left([\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \\ &\leq [\rho']_\nu [\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\left([\rho']_0 + [\rho'']_0 + \frac{2}{10^0}\right) \\ &= [\rho']_\nu [\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}(a + \beta + 2). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\tau_\nu = [\rho']_\nu [\rho'']_\nu \quad \text{και} \quad \sigma_\nu = \left([\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

Αφού η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2, είναι μια φθίνουσα ακολουθία (με ευρεία σημασία) ρητών > 0, θα έχουμε

$$\tau_\nu \leq \rho'\rho'' < \sigma_\nu \quad \text{με} \quad 0 < \sigma_\nu - \tau_\nu < \frac{a + \beta + 2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 με $\varphi = a + \beta + 2$, λαμβάνουμε

$$\rho'\rho'' = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right).$$

Διαφορά $\rho' - \rho''$ (με $\rho' \geq \rho''$): Στη παράγραφο που ακολουθεί θα προσδιορίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα της διαφοράς $\rho' - \rho''$, όταν $\rho' \geq \rho''$, από τα δεκαδικά αναπτύγματα των ρ', ρ''.

Θεωρούμε την ακολουθία

$$\sigma_\nu = [\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [\rho'']_\nu\,, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Ο όρος σ_ν, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2, έχει μειωτέο που φθίνει και αφαιρετέο που αυξάνει (με ευρεία σημασία). Άρα η $(\sigma_\nu)_\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία (με ευρεία σημασία) ρητών > 0, και κατά το Θεώρημα 3.4.11, έχει ένα κάτω πέρας $\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu$. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3.4.9, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu} < [\rho']_\nu\,, \quad \text{για} \quad \nu \geq m.$$

Επομένως έχουμε

$$\tau_{m+k} = [\rho']_{m+k} - \left([\rho'']_{m+k} + \frac{1}{10^{m+k}}\right) > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, σύμφωνα με την Ιδιότητα 1, είναι

$$\tau_{m+k} < \rho' - \rho'' < [\rho']_{m+k} + \frac{1}{10^{m+k}} - [\rho'']_{m+k} = \sigma_{m+k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από τις (3.47) και (3.48), για $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &< \sigma_{m+k} - \tau_{m+k} \\ &= [\rho']_{m+k} + \frac{1}{10^{m+k}} - [\rho'']_{m+k} - [\rho']_{m+k} + [\rho'']_{m+k} + \frac{1}{10^{m+k}} \\ &= \frac{2}{10^{m+k}}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 με $\varphi = 2$ και το Πόρισμα 3.4.12, συμπεραίνουμε ότι

$$\rho' - \rho'' = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sigma_{m+k} = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu.$$

Πηλίκο ρ'/ρ'' (με $\rho'' > 0$): Στη παράγραφο που ακολουθεί θα προσδιορίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του πηλίκου ρ'/ρ'', όταν $\rho'' > 0$, από τα δεκαδικά αναπτύγματα των ρ', ρ''.

Έστω,

$$\begin{aligned} \rho' &= a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots \quad \text{και} \\ \rho'' &= \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots > 0. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι είναι

$$[\rho'']_\nu \geq 1/10^n > 0 \quad \text{για} \quad \nu \geq \quad \text{κάποιου } n \in \mathbb{N}.$$

Μπορούμε επομένως να μορφώσουμε την ακολουθία

$$\sigma_{n+k} = \frac{[\rho']_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[\rho'']_{n+k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

που είναι, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2, φθίνουσα (με ευρεία σημασία). Για να δείξουμε ότι $\rho'/\rho'' = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sigma_{n+k}$, παραβάλλουμε το σ_{n+k} με το ρητό

$$\tau_{n+k} = \frac{[\rho']_{n+k}}{[\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k}}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_{n+k} - \tau_{n+k} &= \frac{\left([\rho']_{n+k} + [\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k}\right) 1/10^{n+k}}{[\rho'']_{n+k} \cdot \left([\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k}\right)} \\ &\leq \frac{1}{10^{n+k}} \cdot \frac{a+\beta+2}{1/10^n \cdot 1/10^n} = \frac{10^{2n}\,(a+\beta+2)}{10^{n+k}}. \end{aligned}$$

Εξάλλου είναι

$$\tau_{n+k} \leq \frac{\rho'}{\rho''} \leq \sigma_{n+k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 με $\varphi = 10^{2n}\,(a+\beta+2)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sigma_{n+k} = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu.$$

3.4δ΄ Πρόσθεση στο σύνολο $\mathscr{G}$.

Ορισμός 3.4.17 *Το άθροισμα $A+B$ των απόλυτων αριθμών A, B ορίζεται ως εξής:*

$$A + B = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right). \tag{3.49}$$

Σημείωση 3.4.18 *Η ακολουθία* $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *με*

$$\sigma_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

είναι φθίνουσα με ευρεία σημασία (από την Ιδιότητα 2). Άρα, από το Θεώρημα 3.4.11, υπάρχει το κάτω πέρας $\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu$ *το οποίο είναι στοιχείο του* $\mathscr{G}$.

Σχόλιο 6 *Αν* A *και* B *είναι περιοδικά μορφώματα από το* $\mathscr{G}$*, τότε αυτά θα είναι δεκαδικά αναπτύγματα αριθμών* ρ', $\rho'' \in \mathbb{Q}_0^+$*, αντιστοίχως· και το μόρφωμα* $A+B$ *που ορίστηκε με την (3.49) θα είναι δεκαδικό ανάπτυγμα του αθροίσματος* $\rho' + \rho''$*, δηλαδή του ρητού αριθμού* $\rho' + \rho'' \geq 0$.

Σχόλιο 7 *Για* $m,\ n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$[A]_m + [B]_m \leq A + B = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) < [A]_n + [B]_n + \frac{2}{10^n}. \quad (3.50)$$

Απόδειξη. Από την Ιδιότητα 2, ποριζόμαστε ότι

$$\begin{aligned} [A]_m &\leq A < [A]_n + \frac{2}{10^n}, \quad m,\ n \in \mathbb{N}, \\ [A]_m &< [A]_n + \frac{2}{10^n}, \quad m,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ότι ισχύει

$$[A]_m + [B]_m < [A]_n + [B]_n + \frac{2}{10^n}.$$

Όμως για $\nu \geq n$ ισχύει

$$[A]_m + [B]_m < [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \leq [A]_n + [B]_n + \frac{2}{10^n}.$$

Από το Πόρισμα 3.4.13 έπεται ότι

$$[A]_m + [B]_m \leq \inf_{\nu>n} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) = A + B \leq [A]_n + [B]_n + \frac{2}{10^n}$$

και επειδή

$$\inf_{\nu>n} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right),$$

έχουμε

$$[A]_m + [B]_m \leq \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) = A + B \leq [A]_n + [B]_n + \frac{2}{10^n}. \quad (3.51)$$

Αλλά , για την φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία $\left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ισχύει άπειρες φορές η ανισότητα

$$[A]_{\nu+1} + [B]_{\nu+1} + \frac{2}{10^{\nu+1}} < [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}.$$

Επομένως, στη σχέση (3.51) η ευρεία ανισότητα

$$A + B \leq [A]_n + [B]_n + 2/10^n$$

αντικαθίσταται με τη στενή ανισότητα

$$A + B < [A]_n + [B]_n + 2/10^n.$$

□

Θεώρημα 3.4.19 $A + B = B + A$, *όπου* $A, B \in \mathscr{G}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό 3.4.17, έχουμε

$$A + B = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right)$$

και

$$B + A = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([B]_\nu + [A]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right).$$

Για το άθροισμα των ρητών

$$[A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}$$

και

$$[B]_\nu + [A]_\nu + \frac{2}{10^\nu}$$

ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$[A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} = [B]_\nu + [A]_\nu + \frac{2}{10^\nu}$$

Επομένως, $A + B = B + A$.

□

Θεώρημα 3.4.20 $A < B \Rightarrow A + \Gamma < B + \Gamma$, *όπου* $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$.

Απόδειξη. Αν $A < B$, τότε από την Ιδιότητα 3 έχουμε ότι

$$\exists n\mathbb{N} : \ [A]_n + \frac{1}{10^n} < [B]_n \,,$$

άρα και

$$[A]_n + \frac{2}{10^n} \leq [B]_n \,,$$

Επομένως,

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} < [A]_n + \frac{2}{10^n} \leq [B]_n \leq [B]_{n+1} \,.$$

Όμως από την Ιδιότητα 2 έχουμε ότι ισχύει

$$[A]_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq [A]_n + \frac{1}{10^n},$$

άρα

$$[A]_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} < [B]_{n+1} \,. \tag{3.52}$$

Από τη μονοτονική ιδιότητα της πρόσθεσης στο σύνολο των ρητών αριθμών από την (3.52) έπεται ότι

$$[A]_n + \frac{2}{10^{n+1}} + [\Gamma]_{n+1} < [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} \,.$$

Επίσης από την (3.50) έχουμε

$$A + \Gamma < [A]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} + \frac{2}{10^{n+1}} \quad \text{και} \quad [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} \leq B + \Gamma.$$

Τώρα, λόγω της μεταβατικότητας της σχέσης $<$, παίρνουμε

$$A + \Gamma \ < \ [A]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} + \frac{2}{10^{n+1}} < [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} \leq B + \Gamma,$$

Άρα,

$$A + \Gamma \ < \ B + \Gamma.$$

□

Πόρισμα 3.4.21 *Αν $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathscr{G}$, $A \leq B$ και $\Gamma < \Delta$, τότε $A+\Gamma < B+\Gamma$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \Gamma < \Delta \quad &\Rightarrow \quad A+\Gamma < A+\Delta \quad \text{και} \\ A \leq B \quad &\Rightarrow \quad A+\Delta \leq B+\Delta \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} (A \leq B \ \text{ και } \ \Gamma < \Delta) \quad &\Rightarrow \quad A+\Gamma < A+\Delta \leq B+\Delta \\ &\Rightarrow \quad A+\Gamma <\leq B+\Delta \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.4.22 $A+(B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$, *όπου A, B, $\Gamma \in \mathscr{G}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το σχόλιο 3.4.26 και την Ιδιότητα 2, έχουμε

$$[A]_\nu + [B]_\nu \leq A+B < [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N} \tag{3.53}$$

και

$$[\Gamma]_\nu \leq \Gamma < [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.54}$$

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονική ιδιότητα της πρόσθεσης συμπεραίνουμε από τις (3.53), (3.54) ότι

$$[A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leq (A+B)+\Gamma < [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 με

$$\rho_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu$$

και

$$\sigma_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu}$$

λαμβάνουμε,

$$A+B+\Gamma = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu} \right). \tag{3.55}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$[A]_\nu \leq A < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

και

$$[B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leq B + \Gamma < [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

άρα

$$[A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leq A + (B + \Gamma) < [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 3.4.16 και λόγω της (3.55) θα είναι

$$A + (B + \Gamma) = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu} \right) = (A + B) + \Gamma.$$

□

Θεώρημα 3.4.23 *Το μόρφωμα* $0, \overline{0} = 0$ *είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο* $\mathscr{G}$. *Δηλαδή,* $A + 0 = A, \ \forall\, A \in \mathscr{G}$.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathscr{G}$. Από τον ορισμό 3.4.17 του αθροίσματος έχουμε

$$A + 0 = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + [0]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right).$$

Όμως από το Πόρισμα 3.4.15 έπεται ότι

$$\inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{2}{10^\nu} \right) = A.$$

Άρα

$$A + 0 = A, \quad \forall\, A \in \mathscr{G}.$$

□

Θεώρημα 3.4.24 $A + B = \Gamma + B \Rightarrow A = \Gamma,$ *όπου* $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$.

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει· δηλαδή $A \neq \Gamma$. Επομένως, ή $A < \Gamma$ ή $\Gamma < A$. Ισχύουν, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.20, οι αντίστοιχες συνεπαγωγές

$$A < \Gamma \quad \Rightarrow \quad A + B < \Gamma + B$$

και

$$\Gamma < A \quad \Rightarrow \quad \Gamma + B < A + B.$$

Όμως, τα συμπεράσματα τους $A+B < \Gamma+B$ και $\Gamma+B < A+B$ αντιφάσκουν προς την υπόθεση $A + B = \Gamma + B$. Άρα $A = \Gamma$.

□

3.4ε΄ Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathscr{G}$.

Ορισμός 3.4.25 *Το γινόμενο AB[8] των απόλυτων αριθμών A, B ορίζεται ως εξής:*

$$AB = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \right). \tag{3.56}$$

Σημείωση 3.4.26 *Η ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με*

$$\sigma_\nu = \left(\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \right), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

είναι φθίνουσα με ευρεία σημασία (από την Ιδιότητα 2). Άρα, από το Θεώρημα 3.4.11, υπάρχει το κάτω πέρας $\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu$ το οποίο είναι στοιχείο του $\mathscr{G}$.

Σχόλιο 8 *Αν A και B είναι περιοδικά μορφώματα από το $\mathscr{G}$, τότε αυτά θα είναι δεκαδικά αναπτύγματα αριθμών ρ', $\rho'' \in \mathbb{Q}_0^+$ αντιστοίχως· και το μόρφωμα AB που ορίστηκε με την (3.56) θα είναι δεκαδικό ανάπτυγμα του γινομένου $\rho'\rho''$, δηλαδή του ρητού αριθμού $\rho'\rho'' \geq 0$.*

Σχόλιο 9 *Αν $A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ και $B = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots$ είναι τα μορφώματα των A,$B \in \mathscr{G}$ τότε από την (2) του Θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας ισχύει με m,$n \in \mathbb{N}$ ότι*

$$\begin{aligned} [A]_m [B]_m \leq AB &\leq \left([A]_n + \frac{1}{10^n} \right) \left([B]_n + \frac{1}{10^n} \right) \\ &< [A]_n [B]_n + \frac{a + \beta + 2}{10^n}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

[8] Το γινόμενο AB γράφεται και $A \cdot B$.

Σχόλιο 10 *Αν A, $B \in \mathscr{G}$ με $A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ και $B = \overline{0} = 0$, τότε $AB = 0$.*

Απόδειξη. Αφού $B = 0$, τότε από τις (3.57) για $m = n$ έχουμε

$$0 = [A]_m [0]_m \leq A \cdot 0 < [A]_m [0]_m + \frac{a+0+2}{10^m} = 0 + \frac{a+2}{10^m} = \frac{a+2}{10^m}. \quad (3.58)$$

Τώρα, λόγω των σχέσεων (3.58), σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.16 και το Πόρισμα 3.4.15 θα είναι

$$\begin{aligned} A \cdot 0 &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{a+2}{10^m} \right) = 0, \\ A \cdot 0 &= 0, \quad \forall\, A \in \mathscr{G}. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.4.27 *$AB = BA$, όπου A, $B \in \mathscr{G}$.*

Απόδειξη.
Από τον ορισμό 3.4.25 έχουμε

$$AB = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \right)$$

και

$$BA = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \right) \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right).$$

Για το γινόμενο των ρητών

$$[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \quad \text{και} \quad [B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}$$

ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) = \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right) \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \right).$$

Επομένως, $AB = BA$.

□

Θεώρημα 3.4.28 *Αν A,B,$\Gamma \in \mathscr{G}$, τότε $(A > 0$ και $B < \Gamma) \Rightarrow AB < A\Gamma$.*

Απόδειξη. Επειδή, κατά τις ιδιότητες του κάτω πέρατος (θεωρήματα 3.4.11 - 3.4.16),

$$AB \leq \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \quad \text{και} \quad [A]_\nu [\Gamma]_\nu \leq A\Gamma, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ με

$$\left([A]_m + \frac{1}{10^m}\right)\left([B]_m + \frac{1}{10^m}\right) \;<\; [A]_m [\Gamma]_m ,$$

δηλαδή

$$[A]_m [B]_m + \frac{1}{10^m}\left([A]_m + [B]_m + \frac{1}{10^m}\right) \;<\; [A]_m [\Gamma]_m . \tag{3.59}$$

Από την υπόθεση, $A > 0$, του θεωρήματος συνεπάγεται ότι

$$\exists n \in \mathbb{N} : \; [A]_m \geq \frac{1}{10^n} > 0, \quad \text{για} \;\; \mathbb{N} \ni m \geq n.$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη της (3.59) με το θετικό ρητό αριθμό $[A]_m$ λαμβάνουμε

$$[B]_m + \frac{[A]_m + [B]_m + 1/10^m}{10^m \cdot [A]_m} < [\Gamma]_m , \quad \text{για} \;\; m \geq n. \tag{3.60}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $A = a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ και $B = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots$ είναι τα μορφώματα των A,$B \in \mathscr{G}$ τότε ισχύει

$$\frac{[A]_m + [B]_m + 1/10^m}{10^m \cdot [A]_m} < \frac{a + \beta + 2}{10^m \cdot 1/10^n} = \frac{(a + \beta + 2)\, 10^n}{10^m}$$

Άρα για την αλήθεια της (3.60) αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $m > n$ τέτοιος ώστε

$$[B]_m + \frac{(a + \beta + 2)\, 10^n}{10^m} \leq [\Gamma]_m . \tag{3.61}$$

Όμως η (3.61) είναι συνέπεια της υπόθεσης $B < \Gamma$, σύμφωνα με την παρατήρηση 3.4.10.

□

Πόρισμα 3.4.29 *Αν $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathscr{G}$, $0 < A \leq B$ και $\Gamma < \Delta$, τότε $A\Gamma < B\Delta$.*

Απόδειξη. Αφού $A > 0$ και $\Delta > 0$, από τις υποθέσεις $\Gamma < \Delta$ και $A \leq B$ του πορίσματος, έχουμε

$$A\Gamma < A\Delta \quad \text{και} \quad A\Delta \leq B\Delta.$$

Άρα, $A\Gamma < B\Delta$.

□

Πόρισμα 3.4.30 *Αν $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$, τότε $(\Gamma \neq 0$ και $A\Gamma = B\Gamma) \Rightarrow A = B$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα του πορίσματος δεν ισχύει· δηλαδή $A \neq B$. Επομένως, ή $A < B$ ή $B < A$.

Αν $A < B$, από το Θεώρημα 3.4.28 έπεται ότι $A\Gamma < B\Gamma$. Άτοπο, αφού από την υπόθεση του πορίσματος ισχύει $A\Gamma = B\Gamma$.

Αν $B < A$, από το Θεώρημα 3.4.28 έπεται ότι $B\Gamma < A\Gamma$. Άτοπο, αφού από την υπόθεση του πορίσματος ισχύει $A\Gamma = B\Gamma$.

Επομένως, $A\Gamma = B\Gamma$.

□

Θεώρημα 3.4.31 *$(AB)\,\Gamma = A\,(B\Gamma)$, όπου $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$.*

Απόδειξη. Έστω

$$\begin{aligned} A &= a, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots, \\ B &= \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots, \\ \Gamma &= \gamma, \chi_1 \ldots \chi_\nu \ldots . \end{aligned}$$

Όταν $\Gamma = 0$, σύμφωνα με το σχόλιο 10, $(AB)\,\Gamma = A\,(B\Gamma)$.

Όταν $\Gamma > 0$, σύμφωνα με τις (1), (2) του θεωρήματος 3.4.11 και την Ιδιότητα 1, έχουμε

$$[A]_\nu\,[B]_\nu \;\leq\; AB \leq \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right), \quad \nu \in \mathbb{N}$$

και

$$[\Gamma]_\nu \;\leq\; \Gamma < [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.28 και το Πόρισμα 3.4.29, ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned}\rho_\nu = [A]_\nu [B]_\nu [\Gamma]_\nu &\leq (AB)\Gamma \\ &< \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) = \sigma_\nu,\end{aligned}$$

όπου $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία ρητών > 0. Εξάλλου είναι

$$\begin{aligned}0 &< \sigma_\nu - \rho_\nu \\ &= \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu [B]_\nu + [A]_\nu [\Gamma]_\nu + [B]_\nu [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\right) \\ &< \frac{1}{10^\nu}\left((a+1)(\beta+1) + (a+1)(\gamma+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + a + \beta + \gamma + 4\right) \\ &= \frac{\varphi}{10^\nu}\end{aligned}$$

με $\varphi = (a+1)(\beta+1) + (a+1)(\gamma+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + a + \beta + \gamma + 4$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 συμπεραίνεται ότι,

$$\begin{aligned}(AB)\cdot\Gamma &= \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu \\ &= \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right).\end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε,

$$A\cdot(B\Gamma) = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu.$$

Άρα,

$$(AB)\cdot\Gamma = A\cdot(B\Gamma).$$

□

Θεώρημα 3.4.32 $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$, *όπου* $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$.

Απόδειξη. Όταν $\Gamma = 0$, σύμφωνα με το σχόλιο 10, $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$.

Όταν $\Gamma > 0$ από το σχόλιο 7 έχουμε

$$[A]_\nu + [B]_\nu \leq A + B < [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

και από την Ιδιότητα 1 έχουμε

$$[\Gamma]_\nu \leq \Gamma < [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα από το Θεώρημα 3.4.28 θα είναι

$$\rho_\nu = ([A]_\nu + [B]_\nu)\,[\Gamma]_\nu \leq (A+B)\,\Gamma < \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) = \sigma_\nu$$

όπου $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα με ευρεία σημασία ακολουθία ρητών > 0. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_\nu - \rho_\nu &= \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu + [B]_\nu + 2\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\right) \\ &< \frac{a+1+\beta+1+2\,(\gamma+1)}{10^\nu}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu < \frac{\varphi}{10^\nu} \quad \text{με} \quad \varphi = a + \beta + 2\gamma + 4.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 συμπεραίνεται ότι

$$(A+B)\,\Gamma = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right). \tag{3.62}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\begin{aligned} [A]_\nu\,[\Gamma]_\nu &\leq A\Gamma < \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \\ [B]_\nu\,[\Gamma]_\nu &\leq B\Gamma < \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.20 και την επιμεριστική του πολλαπλασιασμού και ως προς την πρόσθεση στο σύνολο $\mathbb{Q}_0^+$, έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= [A]_\nu\,[\Gamma]_\nu + [B]_\nu\,[\Gamma]_\nu \\ &\leq A\Gamma + B\Gamma \\ &< \left[\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) + \left([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\right]\left([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \\ &= \sigma_\nu. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$A\Gamma + B\Gamma = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_\nu. \tag{3.63}$$

Από τις (3.62) και (3.63) έχουμε

$$A\Gamma + B\Gamma = (A+B)\,\Gamma. \tag{3.64}$$

□

Θεώρημα 3.4.33 *Το μόρφωμα $1, \overline{0} = 1$ είναι ουδέτερο στοιχείο για τη πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathscr{G}$. Δηλαδή, $1 \cdot A = A,\ \forall\, A \in \mathscr{G}$.*

Απόδειξη. Από την Ιδιότητα 1 και το Θεώρημα 3.4.28, για $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho_\nu &= [1]_\nu\,[A]_\nu = [A]_\nu \le 1\cdot A \\
&\le \left(1+\frac{1}{10^\nu}\right)\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right) \\
&= [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu + 1 + \frac{1}{10^\nu}\right) \\
&< [A]_\nu + \frac{a+2}{10^\nu} = \sigma_\nu.
\end{aligned}$$

Η ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, είναι όμως φθίνουσα (από το σχόλιο 4). Επιπλέον έχουμε

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu = \frac{a+2}{10^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 3.4.16, είναι

$$1\cdot A = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{a+2}{10^\nu}\right).$$

Όμως, από το Πόρισμα 3.4.15, είναι

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{a+2}{10^\nu}\right) = A.$$

Επομένως,

$$1\cdot A = A, \quad \forall\, A \in \mathscr{G}.$$

□

3.4ϛ' Αφαίρεση στο σύνολο $\mathscr{G}$.

Ορισμός 3.4.34 *Η διαφορά $A - B$ των απόλυτων αριθμών A, B με $A \geq B$ ορίζεται ως εξής:*

$$A - B = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu \right). \tag{3.65}$$

Σημείωση 3.4.35 *Η ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ με*

$$\sigma_\nu = [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

είναι φθίνουσα με ευρεία σημασία (από την Ιδιότητα 2). Άρα, από το Θεώρημα 3.4.11, υπάρχει το κάτω πέρας $\inf_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma_\nu$ το οποίο είναι στοιχείο του $\mathscr{G}$.

Σχόλιο 11 *Αν τα A και B είναι περιοδικά μορφώματα από το $\mathscr{G}$, τότε αυτά θα είναι δεκαδικά αναπτύγματα αριθμών $\rho', \rho'' \in \mathbb{Q}_0^+$, αντιστοίχως, με $\rho' \geq \rho'' \geq 0$· και το μόρφωμα $A - B$ που ορίστηκε με την (3.65) θα είναι δεκαδικό ανάπτυγμα της διαφοράς $\rho' - \rho''$, δηλαδή του ρητού αριθμού $\rho' - \rho'' \geq 0$.*

Σχόλιο 12 *Αν $A = B$, τότε*

$$\begin{aligned} A - B &= \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [A]_\nu \right) \\ &= \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left(0 + \frac{1}{10^\nu} \right) = 0,\overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Σχόλιο 13 *Σύμφωνα με την (1) του θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας είναι*

$$A - B \leq [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Ισχύει ότι

$$A - B < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu. \tag{3.66}$$

Ως συνέπεια της Ιδιότητας 2, έχουμε ότι για κάθε δοσμένο $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_\nu \in \mathbb{N}$ με $n_\nu > \nu$ και τέτοιο ώστε

$$[A]_{n_\nu} + \frac{1}{10^{n_\nu}} < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}.$$

Επιπλέον είναι $[B]_\nu \leq [B]_{n_\nu}$.

Άρα,

$$A - B \leq [A]_{n_\nu} + \frac{1}{10^{n_\nu}} - [B]_{n_\nu} < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu\,, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.67}$$

Σχόλιο 14 *Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathscr{G}$ είναι επιμεριστικός και ως προς την αφαίρεση. Δηλαδή,*

$$(A - B)\,\Gamma = A\Gamma - B\Gamma.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση $A \geq B$ έπεται, από το Θεώρημα 3.4.28, ότι $A\Gamma \geq B\Gamma$. Άρα η ύπαρξη της διαφοράς $A - B$ συνεπάγεται την ύπαρξη της διαφοράς $A\Gamma - B\Gamma$.

Αν είχαμε $(A - B)\,\Gamma \neq A\Gamma - B\Gamma$, θα ίσχυε

$$(A - B)\,\Gamma + B\Gamma \neq (A\Gamma - B\Gamma) + B\Gamma = A\Gamma.$$

Όμως από το Θεώρημα 3.4.32 έχουμε ότι ισχύει

$$(A - B)\,\Gamma + B\Gamma = ((A - B) + B)\,\Gamma = A\Gamma.$$

Δηλαδή, $A\Gamma \neq A\Gamma$. Άτοπο.

Επομένως, ισχύει $(A - B)\,\Gamma = A\Gamma - B\Gamma$.

□

Πρόταση 3.4.36 *Για X, Y, $Z \in \mathscr{G}$ και $Y \geq X$ είναι $(Y - X) + Z = (Y + Z) - X$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση $Y \geq X$ της πρότασης συνεπάγεται $Y + Z \geq X$. Άρα, από τον ορισμό 3.4.34, υπάρχει η διαφορά $(Y + Z) - X$. Θέτοντας

$$\begin{aligned} A &= (Y - X) + Z \quad \text{και} \\ B &= (Y + Z) - X, \end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} A + X &= (Z + (Y - X)) + X \\ &= Z + ((Y - X) + X) \quad \text{(από το Θεώρημα 3.4.22)} \\ &= Z + Y \quad \text{(από το Θεώρημα 3.4.22 και το σχόλιο 12).} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} B + X &= (Y + Z) - X + X \\ &= Y + Z \quad \text{(από το σχόλιο 12).} \end{aligned}$$

Άρα, λόγω του θεωρήματος 3.4.19, ισχύει

$$\begin{aligned} A + X &= B + X \\ A &= B. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.4.37 *Για $X, Y, Z \in \mathscr{G}$, $Y \geq Z$ και $X \geq Y - Z$ είναι*

$$X - (Y - Z) = (X + Z) - Y.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση $X \geq Y - Z$ της πρότασης συνεπάγεται $X + Z \geq (Y - Z) + Z = Y$. Άρα, από τον ορισμό 3.4.34, υπάρχει η διαφορά $(X + Z) - Y$. Θέτοντας

$$A = X - (Y - Z) \quad \text{και} \tag{3.68}$$

$$B = (X + Z) - Y, \tag{3.69}$$

προσθέτοντας $(Y - Z)$ στα δύο μέλη της (3.68) και από το σχόλιο 12 λαμβάνουμε $A + (Y - Z) = X$· προσθέτοντας Y στα δύο μέλη της (3.69) και από το σχόλιο 12 λαμβάνουμε $B + Y = X + Z$. Έχουμε

$$B + (Y - Z) = (B + Y) - Z = (X + Z) - Z = X.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} A + (Y - Z) &= B + (Y - Z) \\ A &= B. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.4.38 *Για $X, Y, Z \in \mathscr{G}$ και $X \geq Y + Z$ είναι $X - (Y + Z) = (X - Y) - Z$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση $X \geq Y + Z$ της πρότασης συνεπάγεται $X \geq Y$. Άρα, από τον ορισμό 3.4.34, υπάρχει η διαφορά $X - Y$. Έστω, $(X - Y) \geq Z$.

Αν ήταν $(X - Y) < Z$, τότε από το Θεώρημα 3.4.20 θα είχαμε

$$\begin{aligned} (X - Y) + Y &< Z + Y \\ X &< Y + Z. \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού από την υπόθεση της πρότασης $X \geq Y + Z$.

Άρα, από τον ορισμό 3.4.34, υπάρχει η διαφορά $(X - Y) - Z$. Θέτοντας

$$\begin{aligned} A &= X - (Y + Z) \\ B &= (X - Y) - Z. \end{aligned}$$

έχουμε $A + (Y + Z) = X$ (από το σχόλιο 12) και

$$\begin{aligned} B + (Y + Z) &= ((X - Y) - Z) + (Z + Y) \\ &= [((X - Y) - Z) + Z] + Y \\ &= [X - Y] + Y = X. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} A + (Y + Z) &= B + (Y + Z) \\ A &= B. \end{aligned}$$

□

3.4ζ' Διαίρεση στο σύνολο $\mathscr{G}$.

Ορισμός 3.4.39 *Το πηλίκο A/B των απόλυτων αριθμών A, B με $B \neq 0$ ορίζεται ως εξής:*

$$\frac{A}{B} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{[A]_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[B]_{n+k}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.70}$$

Σημείωση 3.4.40 *Η υπόθεση $B \neq 0$ συνεπάγεται ότι*

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ [B]_\nu \geq \frac{1}{10^n} > 0 \quad \textit{για} \ \ \nu \geq n. \tag{3.71}$$

Επομένως δύναται να μορφωθεί η ακολουθία $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *με*

$$\sigma_k = \frac{[A]_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[B]_{n+k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

η οποία είναι φθίνουσα με ευρεία σημασία επειδή ο αριθμητής φθίνει και ο παρονομαστής αυξάνει με ευρεία σημασία, όταν ο k *αυξάνει. Άρα, από το Θεώρημα 3.4.11, υπάρχει το κάτω πέρας* $\inf_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$ *το οποίο είναι στοιχείο του* $\mathscr{G}$.

Σχόλιο 15 *Αν τα* A *και* B *είναι περιοδικά μορφώματα από το σύνολο* $\mathscr{G}$*, τότε αυτά θα είναι δεκαδικά αναπτύγματα αριθμών* ρ', $\rho'' \in \mathbb{Q}_0^+$ *αντιστοίχως, και το μόρφωμα* A/B *που ορίστηκε με την (3.70) θα είναι δεκαδικό ανάπτυγμα του πηλίκου* ρ'/ρ''*, δηλαδή του ρητού αριθμού* $\rho'/\rho'' \geq 0$.

Σχόλιο 16 *Σύμφωνα με την (1) του θεωρήματος 3.4.11 για το κάτω πέρας έχουμε για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{A}{B} \quad \leq \quad \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}}.$$

και μάλιστα

$$\frac{A}{B} \quad < \quad \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}}$$

αφού $[A]_{\nu+1} + 1/10^{\nu+1} < [A]_\nu + 1/10^\nu$ *για άπειρες τιμές του* ν.

Επίσης, έχουμε με $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{[A]_m}{[B]_m + 1/10^m} \quad < \quad \frac{[A]_\nu + 1/10^\nu}{[B]_\nu}, \quad \forall\, \nu \geq n.$$

Άρα, από το Πόρισμα 3.4.13, ισχύει

$$\frac{[A]_m}{[B]_m + 1/10^m} \quad \leq \quad \inf_{\nu\geq n} \frac{[A]_\nu + 1/10^\nu}{[B]_\nu} = \frac{A}{B}, \quad \text{για} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Επομένως ισχύει η σχέση

$$\frac{[A]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}} \quad \leq \quad \frac{A}{B} < \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \qquad (3.72)$$

Σχόλιο 17

$$\frac{A}{B}\cdot B = A, \qquad \textit{όπου } A, B \in \mathscr{G} \textit{ και } B \neq 0.$$

Απόδειξη. Ισχύουν

$$\frac{[A]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}} \leq \frac{A}{B} < \frac{[A]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}}, \quad \nu\in\mathbb{N} \quad \text{και} \tag{3.73}$$

$$[B]_{n+\nu} \leq B < [B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}, \quad \nu\in\mathbb{N} \tag{3.74}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (3.73), (3.74) και, από το Θεώρημα 3.4.28, ποριζόμαστε

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= \frac{[A]_{n+\nu}\,[B]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}}\\ &\leq \frac{A}{B}\cdot B < \frac{\left([A]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)\left([B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)}{[B]_{n+\nu}}\end{aligned} \tag{3.75}$$

Θέτουμε

$$\tau_\nu = \frac{\left([A]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)\left([B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)}{[B]_{n+\nu}}$$

Η ακολουθία $(\tau_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ρητών αριθμών >0, είναι φθίνουσα με ευρεία σημασία, άρα υπάρχει το $\inf_{\nu\in\mathbb{N}}\tau_\nu\in\mathscr{G}$. Επιπλέον έχουμε

$$0<\tau_\nu-\sigma_\nu = \frac{-\,[A]_{n+\nu}\,[B]^2_{n+\nu}\left([A]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)\left([B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)^2}{\left([B]_{n+\nu}+1/10^{n+\nu}\right)[B]_{n+\nu}},$$

λόγω της (3.71)

$$\begin{aligned}\tau_\nu-\sigma_\nu &< \frac{10^{2n}}{10^{n+\nu}}\left[[B]^2_{n+\nu}+2\,[A]_{n+\nu}\,[B]_{n+\nu}+2\frac{[B]_{n+\nu}}{10^{n+\nu}}+\frac{[A]_{n+\nu}}{10^{n+\nu}}+\frac{1}{10^{2(n+\nu)}}\right]\\ &< \frac{10^{2n}}{10^{n+\nu}}\left((\beta+1)^2+2\,(a+1)\,(\beta+1)+2\,(\beta+1)+(a+1)+1\right)\\ &= \frac{\varphi}{10^\nu},\end{aligned}$$

όπου $\varphi = 10^n\left((\beta+1)^2+2\,(a+1)\,(\beta+1)+2\,(\beta+1)+a+2\right)$.
Δηλαδή έχουμε

$$\sigma_\nu \leq \frac{A}{B}\cdot B < \tau_\nu \quad \text{με} \quad 0<\tau_\nu-\sigma_\nu<\frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 3.4.16, είναι

$$\frac{A}{B} \cdot B = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \tau_\nu. \tag{3.76}$$

Επίσης λόγω του ορισμού του σ_ν και του τ_ν είναι

$$\sigma_\nu < [A]_{n+\nu} \leq A < [A]_{n+\nu} + \frac{1}{10^{n+\nu}} < \tau_\nu \tag{3.77}$$

και επομένως

$$\sigma_\nu < A < \tau_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.16 στις (3.77), έχουμε

$$A = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \tau_\nu. \tag{3.78}$$

Από τις (3.76) και (3.78) έχουμε

$$\frac{A}{B} \cdot B = A.$$

□

Σχόλιο 18

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}, \quad \textit{όπου } A, B \in \mathscr{G} \textit{ και } B \neq 0.$$

Απόδειξη. Αφού $B \neq 0$, υπάρχουν τα πηλίκα

$$\frac{A}{B} \in \mathscr{G} \quad \text{και} \quad \frac{1}{B} \in \mathscr{G}.$$

Τώρα, από το σχόλιο 17, έχουμε

$$\frac{A}{B} \cdot B = A.$$

Επίσης έχουμε

$$\left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{B} \cdot B\right) = A \cdot 1 = A.$$

Επομένως

$$\frac{A}{B} \cdot B = \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot B$$

και από το Πόρισμα 3.4.21 έχουμε

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}.$$

□

Το συμπέρασμα από τα προηγούμενα είναι ότι οι τέσσερις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, αφαίρεση και διαίρεση) που ορίσαμε στο $\mathscr{G}$ έχουν όλες τις βασικές ιδιότητες αυτών των πράξεων και τις συνέπειες τους που ξέρουμε ότι ισχύουν για τις πράξεις αυτές στο σύνολο $\mathbb{Q}_0^+$.

3.5 Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Όσο αφορά την ονοματολογία των αριθμών αναφέρεται ότι οι *απόλυτοι* αριθμοί ονομάστηκαν έτσι για να διακρίνονται από τους *πραγματικούς* αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί[9] ονομάστηκαν έτσι για να διακρίνονται από τους φανταστικούς αριθμούς οι οποίοι εισάγονται μετέπειτα στα Μαθηματικά.

Από τους ορισμούς των απόλυτων και των πραγματικών αριθμών (Ορισμοί 3.4.1, 3.5.3 - 3.5.5), έχουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και το μηδέν.

Συμπληρωματικά για τους απόλυτους αριθμούς αναφέρουμε τα ακόλουθα:

Ορισμός 3.5.1 *Τα περιοδικά μορφώματα από το σύνολο $\mathscr{G}$ καλούνται σύμμετροι απόλυτοι αριθμοί. Συμβολίζονται με A_σ.*

Ορισμός 3.5.2 *Τα απεριοδικά μορφώματα από το σύνολο $\mathscr{G}$ καλούνται ασύμμετροι απόλυτοι αριθμοί. Συμβολίζονται με A_a.*

Μεταξύ των ρητών αριθμών $\rho \geq 0$ και των σύμμετρων απόλυτων αριθμών A_σ υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$\rho \leftrightarrow A_\sigma(\rho)$$

[9] Οι πραγματικοί αριθμοί ονομάζονται και σχετικοί αριθμοί (Κριτικός 1969, σελ: 63).

που διατηρεί τη σχέση διάταξης $<$ μεταξύ στοιχείων του καθενός εκ των δύο συνόλων, των $\rho \geq 0$ αντιστοίχως των A_σ, καθώς και τα αποτελέσματα των τεσσάρων βασικών πράξεων· αυτό σημαίνει ότι

$$\rho_1 < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad A_\sigma(\rho_1) < A_\sigma(\rho_2), \tag{3.79}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 \quad \Rightarrow \quad A_\sigma(\rho_1) + A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3), \tag{3.80}$$

$$(\rho_1 \geq \rho_2 \quad \text{και} \quad \rho_1 - \rho_2 = \rho_3) \quad \Rightarrow \quad A_\sigma(\rho_1) - A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3), \tag{3.81}$$

$$\rho_1\rho_2 = \rho_3 \quad \Rightarrow \quad A_\sigma(\rho_1) A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3), \tag{3.82}$$

$$\left(\rho_2 > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_3\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{A_\sigma(\rho_1)}{A_\sigma(\rho_2)} = A_\sigma(\rho_3). \tag{3.83}$$

Έτσι τα δύο σύνολα

$$\{x : \ x \quad \text{ρητός αριθμός} \ \geq 0\}$$

και

$$\{x : \ x \quad \text{περιοδικό μόρφωμα} \ \in \mathscr{G}\}$$

είναι ισομορφικά το ένα του άλλου ως προς τη διάταξη των στοιχείων τους και ως προς τις τέσσερις βασικές πράξεις.

Η μέθοδος κατασκευής των πραγματικών αριθμών που ακολουθούμε βασίζεται στον ορισμό των άρρητων (ή ασύμμετρων) αριθμών με δεκαδικά μορφώματα. Στο Παράρτημα Α', παρουσιάζουμε ένα εναλλακτικό συνολοθεωρητικό ορισμό των αρρήτων.

Ορισμός 3.5.3 *Οι απόλυτοι αριθμοί A που είναι διαφορετικοί από το 0, δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G} - \{0\}$, θα καλούνται στο εξής και θετικοί αριθμοί, παριστάνοντας τους και με $+A$. Δηλαδή, θέτουμε*

$$+A = A, \quad \textit{για} \quad A \in \mathscr{G}, \ A \neq 0.$$

Ορισμός 3.5.4 *Για κάθε $+A$ εισάγεται ένας αντίστοιχος «συμμετρικός» αριθμός που θα καλείται αρνητικός αριθμός και ο οποίος παριστάνεται με $-A$.*

Το 0 (μηδέν) παριστάνεται και με $+0$ είτε -0, γι' αυτό και αυτό δεν θεωρείται στοιχείο του συνόλου θετικών αριθμών ή του συνόλου των αρνητικών αριθμών.

Ορισμός 3.5.5 *Οι θετικοί αριθμοί, το 0 και οι αρνητικοί αριθμοί αποτελούν το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.*

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ από το αρχικό γράμμα της λατινικής λέξης realis που σημαίνει πραγματικός.

Το σύνολο $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου των ρητών αριθμών ρ, με $\rho \geq 0$ ($\mathbb{Q}_0^+$) και είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών ($\mathbb{R}$).

Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathscr{G} \subset \mathbb{R}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ θα συμβολίζονται με τα μικρά ψηφία του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου, τα στοιχεία του $\mathscr{G}$ με τα κεφαλαία ψηφία του ελληνικού αλφαβήτου.

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ μέχρι στιγμής είναι αριθμητικά σημάδια και τίποτα άλλο. Θα πρέπει να δικαιολογηθεί η ονομασία «αριθμοί» που τους δόθηκε. Γι΄ αυτό πρέπει να οριστούν στο $\mathbb{R}$ οι σχέσεις ισότητας και ανισότητας καθώς και οι τέσσερις βασικές αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).

3.5α΄ Απόλυτη τιμή.

Ορισμός 3.5.6 *Έστω ένας απόλυτος αριθμός $A \neq 0$· καλείται απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών $+A$ και $-A$ του απόλυτο αριθμό A από του οποίο παράγονται τα στοιχεία $+A$ και $-A$ του $\mathbb{R}$ με πρόταξη του «προσήμου» $+$ (συν) και $-$ (πλην) αντίστοιχα. Η απόλυτη τιμή ενός στοιχείο $a \in \mathbb{R}$ συμβολίζεται με $|a|$. Δηλαδή,*

$$|+A| = |-A| = A.$$

Η απόλυτη τιμή του 0, επομένως και των $+0$, -0, ορίζεται να είναι το 0. Δηλαδή, $|+0| = |-0| = |0| = 0$.

Επίσης, αναφέρεται ότι η *απόλυτη τιμή* πραγματικού αριθμού a, λέγεται και *μέτρο* πραγματικού αριθμού a.

3.5β΄ Διάταξη στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.7 *Ένας πραγματικός αριθμός a είναι ίσος με ένα πραγματικό αριθμό β, δηλαδή $a = \beta$, όταν και μόνο όταν*

1. *η απόλυτη τιμή του a είναι η ίδια με την απόλυτη τιμή του β· δηλαδή*

$$|a| = |\beta|$$

και

2. *το πρόσημο του a είναι το ίδιο με το πρόσημο του β, στην περίπτωση $|a| \neq 0$· δηλαδή*

$$\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} \beta, \qquad \textit{όταν} \ \ |a| \neq 0.$$

Οι αριθμοί $+0$, -0, 0 είναι από τον ορισμό 3.5.7 ίσοι μεταξύ τους. Δηλαδή, $+0 = -0 = 0$.

Από τον ορισμό 3.5.7 προκύπτει ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. $a = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ (ανακλαστικότητα).

2. Αν $a = \beta$, τότε $\beta = a$ για a, $\beta \in \mathbb{R}$ (συμμετρικότητα).

3. Αν $a = \beta$ και $\beta = \gamma$, τότε $a = \gamma$ για a, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ (μεταβατικότητα).

Ο επόμενος ορισμός ορίζει τη σχέση $<$ (μικρότερο) μεταξύ στοιχείων του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.8 *Ένας αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε αρνητικό αριθμό που έχει μικρότερη απόλυτη τιμή, είναι μικρότερος από το 0 και μικρότερος από κάθε θετικό αριθμό: x αρνητικός αριθμός $< y$ όταν και μόνο όταν ή y αρνητικός με $|y| < |x|$ ή $y = 0$ ή y θετικός αριθμός.*

Το 0 είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό: $0 < y$ για κάθε y θετικό.

Ένας θετικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε θετικό που έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή: x θετικός $< y$ όταν και μόνο όταν y θετικός και $|x| < |y|$.

Από τον ορισμό 3.5.8 προκύπτει ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. Αν $a < \beta$, τότε δεν αληθεύει $\beta < a$ όπου a, $\beta \in \mathbb{R}$ (ασυμμετρικότητα).

2. Αν $a < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $a < \gamma$ όπου a, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ (μεταβατικότητα).

3. Αληθεύει ακριβώς μία από τις σχέσεις $a < \beta$, $a = \beta$, $\beta < a$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ (συνοχικότητα).

Η σχέση $<$ που ορίστηκε στο σύνολο $\mathbb{R}$ είναι σχέση *ολικής διάταξης με στενή σημασία* (Κριτικός 1969, σελ: 66), ή όπως διαφορετικά καλείται *γνήσια γραμμική διάταξη* (Κάππου 1962, σελ: 26), αφού κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών a, β ικανοποιούν την ιδιότητα της συνοχικότητας.

Σε κάθε σχέση διατάξεως αντιστοιχεί πάντοτε και η δυϊκή προς αυτή σχέση (Κάππου 1962, σελ: 25). Δηλαδή, η δυϊκή προς τη σχέση διατάξεως $<$ (μικρότερο) είναι η σχέση $>$ (μεγαλύτερο). Οι δυϊκές σχέσεις είναι επίσης σχέσεις διατάξεως. Επομένως και η σχέση $>$ (μεγαλύτερο) είναι σχέση διάταξης.

Ορισμός 3.5.9 *Δύο στοιχεία a, β του $\mathbb{R}$ είναι $a \leq \beta$, όταν και μόνο όταν $a < \beta$ ή $a = \beta$. Δηλαδή,*

$$a \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad a < \beta \ \text{ ή } \ a = \beta.$$

Ορισμός 3.5.10 *Δύο στοιχεία a, β του $\mathbb{R}$ είναι $a > \beta$, όταν και μόνο όταν $\beta < a$. Δηλαδή,*

$$a > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta < a.$$

Ορισμός 3.5.11 *Δύο στοιχεία a, β του $\mathbb{R}$ είναι $a \geq \beta$, όταν και μόνο όταν $a > \beta$ ή $a = \beta$. Δηλαδή,*

$$a \geq \beta \quad \Leftrightarrow \quad a > \beta \ \text{ ή } \ a = \beta.$$

Ορισμός 3.5.12 *Ο πραγματικός αριθμός x' που έχει την ίδια απόλυτη τιμή με του πραγματικό αριθμό x, $x \neq 0$, αλλά διαφορετικό πρόσημο καλείται αντίθετος του πραγματικού αριθμού x. Δηλαδή,*

$$0 \neq |x'| = |x| \quad \text{και} \quad \operatorname{sign} x \neq \operatorname{sign} x', \quad \text{όταν} \quad x \neq 0.$$

Αντίθετο του 0 ορίζουμε το ίδιο το 0.

Θεώρημα 3.5.13 $(a, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a < \beta) \Leftrightarrow a' > \beta' \Leftrightarrow \beta' < a'$, *όπου a', β' ο αντίθετος του a, β αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς για τις σχέσεις $<$ και $>$, διακρίνοντας τις ακόλουθες τρεις, μόνες δυνατές, περιπτώσεις: Οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι οι εξής:

1. $a < \beta < 0$,

2. $a \leq 0$, $\beta \geq 0$ και $a < \beta$,

3. $0 < a < \beta$.

Στη πρώτη περίπτωση από τους ορισμούς 3.5.8, 3.5.10 έχουμε

$$a < \beta < 0 \Leftrightarrow |a| > |\beta| > 0 \Leftrightarrow a' > \beta' \Leftrightarrow \beta' < a'.$$

Στη δεύτερη περίπτωση από τους ορισμούς 3.5.9, 3.5.11 αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{aligned} a \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a < 0 \ \text{ ή } \ a = 0, \\ \beta \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \beta > 0 \ \text{ ή } \ \beta = 0. \end{aligned}$$

Αφού από υπόθεση ισχύει $a < \beta$ έχουμε $a \neq 0 \neq \beta$. Επομένως από τους ορισμούς 3.5.8, 3.5.10 έχουμε

$$a < \beta \Leftrightarrow \beta' < a' \Leftrightarrow a' > \beta'.$$

Στη τρίτη περίπτωση από τους ορισμούς 3.5.8, 3.5.10 έχουμε

$$0 < a < \beta \Leftrightarrow 0 < |a| < |\beta| \Leftrightarrow \beta' < a' \Leftrightarrow a' < \beta'.$$

□

3.5γ΄ Πρόσθεση στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.14 *Ας είναι $a_1, \ldots, a_\nu$, όπου $\nu \geq 2$, δύο ή περισσότερα στοιχεία του $\mathbb{R}$. Καλούμε άθροισμα*

$$a_1 + \cdots + a_\nu$$

των $a_1, \ldots, a_\nu$ το στοιχείο του $\mathbb{R}$ που ορίζεται μονότροπα ως εξής:

Αν ανάμεσα στους «προσθετέους» $a_1, \ldots, a_\nu$ υπάρχουν δύο ή περισσότεροι ≥ 0, τότε προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές αυτών και καλούμε Θ το άθροισμα που προκύπτει· αν υπάρχει ένας μόνο προσθετέος ≥ 0, ο a_p $(1 \leq p \leq \nu)$, τότε θέτουμε $\Theta = a_p$· τέλος, αν και οι ν προσθετέοι είναι < 0, τότε θέτουμε $\Theta = 0$. Όμοια, αν ανάμεσα στους $a_1, \ldots, a_\nu$ υπάρχουν δύο ή περισσότεροι < 0, τότε προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές αυτών και καλούμε A το άθροισμα που προκύπτει· αν υπάρχει ένας μόνο προσθετέος < 0, ο a_n $(1 \leq n \leq \nu)$,

τότε θέτουμε $A = |a_\nu|$. *Τέλος, αν και οι* ν *προσθεταίοι είναι* ≥ 0, *τότε θέτουμε* $A = 0$.

Από τους δύο απόλυτους αριθμούς Θ *και* A *που ορίσαμε, ο ένας, που συμβολίζεται με* $\max(\Theta, A)$, *θα είναι* $\geq$ *από τον άλλο, που συμβολίζεται με* $\min(\Theta, A)$. *Έστω* Δ *η διαφορά:*

$$\Delta = (\max(\Theta, A) - \min(\Theta, A)) \quad \in \mathscr{G}.$$

Θέτουμε

$$a_1, \ldots, a_\nu = +\Delta \quad \text{ή} \quad -\Delta \quad \text{καθόσον είναι} \quad \Theta \geq A \quad \text{ή} \quad \Theta < A.$$

Σχόλιο 19 *Το άθροισμα των πραγματικών αριθμών* ≥ 0 *είναι πραγματικός αριθμός* ≥ 0.

Σχόλιο 20 *Το άθροισμα πραγματικών αριθμών* ≤ 0 *είναι πραγματικός αριθμός* ≤ 0.

Σχόλιο 21 *Το* 0 *μηδέν είναι ουδέτερο στοιχείο για τη πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο* $\mathbb{R}$. *Δηλαδή,*

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad 0 + a = a, \quad \text{για κάθε} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο 22 *Το άθροισμα* $x + x'$ *δύο αντίθετων αριθμών* x *και* x' *είναι* $= 0$. *Αντίστροφα, αν* $a, \beta \in \mathbb{R}$ *και* $a + \beta = 0$, *τότε οι* a *και* β *είναι αντίθετοι ο ένας του άλλου:* $a = \beta'$ *και* $a' = \beta$.

Σχόλιο 23 *Το άθροισμα* $a_1 + \ldots + a_\nu$ *δεν μεταβάλλεται αν η σειρά των προσθετέων μεταβληθεί. Ειδικά έχουμε* $a + \beta = \beta + a$ *για* $a, \beta \in \mathbb{R}$. *Αυτή η συνέπεια προκύπτει, επειδή κατά του Ορισμό 3.5.14, η σειρά των προσθετέων δεν επηρεάζει την τιμή των απόλυτων αριθμών* Θ *και* A *από τους οποίους και μόνο εξαρτιέται το άθροισμα.*

Θεώρημα 3.5.15 *Ο αντίθετος του αθροίσματος* $(a_1 + \ldots + a_\nu)$ *πραγματικός αριθμός ισούται με το άθροισμα* $(a'_1 + \ldots + a'_\nu)$ *των αντίθετων των προσθετέων. Δηλαδή,*

$$(a_1 + \ldots + a_\nu)' = a'_1 + \ldots + a'_\nu \tag{3.84}$$

Απόδειξη. Αν στο άθροισμα $a_1 + \ldots + a_\nu$ αντιστοιχούν, σύμφωνα με τον ορισμό 3.5.14, απόλυτο αριθμοί Θ, A και Δ, τότε στο άθροισμα $a'_1 + \ldots + a'_\nu$ θα αντιστοιχούν οι απόλυτοι αριθμοί

$$\Theta' = A, \quad A' = \Theta \quad \text{και } \Delta' = \Delta.$$

Επομένως είναι

$$\begin{array}{lll} \Theta' \geq A' & \text{όταν} & \Theta \geq A \quad \text{ή} \\ \Theta' \leq A' & \text{όταν} & \Theta \leq A. \end{array}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a'_1 + \ldots + a'_\nu &= +\Delta' = +\Delta \quad \text{ή} \\ a'_1 + \ldots + a'_\nu &= -\Delta' = -\Delta. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.84).

□

Θεώρημα 3.5.16

$$x + y + z = (x + y) + z, \quad \textit{για οποιαδήποτε} \quad x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{3.85}$$

Απόδειξη. Αν οι προσθετέοι x, y έχουν το ίδιο «πρόσημο», δηλαδή $x \geq 0$ και $y \geq 0$ ή $x \leq 0$ και $y \leq 0$, σύμφωνα με τον ορισμό 3.5.1 μπορούν να αντικατασταθούν με το άθροισμα τους. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} x + y &= \omega, \quad \text{για } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \text{ ή} \\ x + y &= \omega', \quad \text{για } x \leq 0 \text{ και } y \leq 0. \end{aligned}$$

Άρα η (3.85) ισχύει· αφού στη μια περίπτωση έχουμε $\omega + z = \omega + z$, στην άλλη περίπτωση έχουμε $\omega' + z = \omega' + z$.

Αν οι προσθετέοι x, y έχουν διαφορετικό «πρόσημο», δηλαδή $x > 0$ και $y < 0$ ή $x < 0$ και $y > 0$, τότε η περίπτωση όπου $x < 0$ και $y > 0$ ανάγεται στην περίπτωση όπου $x > 0$ και $y < 0$ (από το σχόλιο 23). Άρα αρκεί να αποδειχθεί, ότι η (3.85) ισχύει, για τη μία από από τις δύο περιπτώσεις.

Αν $x < 0$ και $y > 0$, τότε το z μπορεί να είναι ή 0 ή > 0 ή < 0.

Όταν $z = 0$ η (3.85) ισχύει αφού, από το σχόλιο 21, έχουμε

$$x + y + 0 = x + y = (x + y) + 0.$$

Όταν

$$x = -X < 0, \quad y = +Y > 0, \quad z = +Z > 0$$

στο ένα μέλος της (3.85) έχουμε

$$\begin{aligned} x + y + z &= (Y + Z) - X, \quad \text{όταν} \quad Y + Z \geq X && (3.86) \\ x + y + z &= -(X - (Y + Z)), \quad \text{όταν} \quad X \geq Y + Z, && (3.87) \end{aligned}$$

και στο άλλο μέλος της (3.85) έχουμε

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (Y - X) + Z \ \text{ όταν } \ Y \geq X \ \text{ άρα } \ Y + Z \geq X, && (3.88) \\ (x + y) + z &= Z - (X - Y) \ \text{ όταν } \ X \geq Y \ \text{ και } \ Z \geq X - Y \ \text{ άρα} \\ (x + y) + z &= Z - (X - Y) \ \text{ όταν } \ X \geq Y \ \text{ και } \ Y + Z \geq X, && (3.89) \\ (x + y) + z &= -\left((X - Y) - Z\right) \ \text{ όταν } \ X \geq Y \ \text{ και } \ X - Y \geq Z \ \text{ άρα} \\ (x + y) + z &= -\left((X - Y) - Z\right) \ \text{ όταν } \ X \geq Y \ \text{ και } \ X \geq Y + Z. && (3.90) \end{aligned}$$

Παραβάλλοντας τις (3.88), (3.89, (3.90) με τις (3.86), (3.87) βρίσκουμε, με χρήση των προτάσεων 3.4.36 - 3.4.38, ότι ισχύει η (3.85).

Όταν

$$x < 0, \ y > 0, \ z < 0$$

με εναλλαγή των x και y θεωρώντας $x^* = y' < 0$, $y^* = x' > 0$ και $z^* = z' > 0$, γίνεται αναγωγή στη περίπτωση που πραγματευτίκαμε πιο πάνω. Άρα, για τους x^*, y^*, z^* ισχύει

$$x^* + y^* + z^* = (x^* + y^*) + z^*,$$

δηλαδή, από το σχόλιο 23,

$$x' + y' + z' = (x' + y') + z',$$

επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.15

$$x + y + z = (x' + y' + z')' = ((x' + y') + y')' = (x' + y')' + z = (x + y) + z.$$

□

Θεώρημα 3.5.17 $(a + \beta) + \gamma = a + (\beta + \gamma)$, *όπου* $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}(a+\beta)+\gamma &= a+\beta+\gamma \quad \text{(από το Θεώρημα 3.5.16)}\\ &= \beta+\gamma+a \quad \text{(από το σχόλιο 23)}\\ &= (\beta+\gamma)+a \quad \text{(από το Θεώρημα 3.5.16)}\\ &= a+(\beta+\gamma) \quad \text{(από το σχόλιο 23).}\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.5.18 $a+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow a=\beta$, *όπου* $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Προσθέτοντας το γ', το αντίθετο του γ, στην υπόθεση του θεωρήματος $a+\gamma=\beta+\gamma$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}a+\gamma+\gamma' &= \beta+\gamma+\gamma' \Rightarrow\\ a+(\gamma+\gamma') &= \beta+(\gamma+\gamma') \Rightarrow\\ a+0 &= \beta+0 \Rightarrow\\ a &= \beta.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.5.19 $x<y \Rightarrow x+z<y+z$, *για οποιαδήποτε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Διακρίνονται τρεις δυνατές περιπτώσεις:

1. $0 \leq x < y$,
2. $x < 0 < y$,
3. $x < y \leq 0$.

1. Στην περίπτωση $0 \leq x < y$, θέτουμε $x=+X$, $y=+Y$, οπότε $0 \leq X < Y$. Το z μπορεί να είναι ή ≥ 0, ή < 0 με $|z| \leq X$, ή < 0 με $X < |z| \leq Y$, ή < 0 με $|z| > Y$.

   (α') Αν $z=+Z \geq 0$, τότε έχουμε $x+z=X+Z$ και $y+z=Y+Z$. Αφού στο σύνολο $\mathscr{G}$ ισχύει $X<Y \Leftrightarrow X+Z<Y+Z$, έπεται ότι

$$x+z<y+z.$$

(β΄) Αν $z = -Z$ με $Z \leq X < Y$, τότε έχουμε $x + z = X - Z$ και $y + z = Y - Z$. Αφού, $X - Z < Y - Z \Leftrightarrow X < Y$, έπεται ότι $x + z < y + z$.

(γ΄) Αν $z = -Z$ με $0 \leq X < Z \leq Y$, τότε έχουμε $x + z = -(Z - X) < 0$ και $y + z = Y - Z \geq 0$. Επομένως, $x + z < y + z$.

(δ΄) Αν $z = -Z$ με $0 \leq X < Y < Z$, τότε έχουμε $x + z = -(Z - X) < 0$ και $y + z = -(Z - Y) < 0$. Αφού, $Z - X > Z - Y$ και $|x + z| = Z - X$, $|y + z| = Z - Y$· έπεται ότι $|x + z| > |y + z|$, άρα $x + z < y + z$.

2. Στην περίπτωση $x < 0 < y$, έχουμε ότι

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad x + z < z \quad \forall z \in \mathbb{R} \text{ και} \tag{3.91}$$

$$0 < y \quad \Rightarrow \quad z < y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{3.92}$$

Επομένως, $x + z < z < y + z$· άρα $x + z < y + z$.

3. Στην περίπτωση $x < y \leq 0$, τότε θα έχουμε ότι ισχύει $0 \leq y' < x'$ όπου y', x' είναι ο αντίθετος του y, x αντίστοιχα. Άρα, από την (1) έχουμε $y' + z' < x' + z'$ για κάθε $z' \in \mathbb{R}$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.5.13, ισχύει $(x' + z')' < (y' + z')'$. Δηλαδή, $x + z < y + z$.

□

Σχόλιο 24 *Από τα πιο πάνω έπεται ότι για a, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:*

Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $a + \gamma < \beta + \delta$.
Αν $a < \beta$ και $\gamma \leq \delta$, τότε $a + \gamma < \beta + \delta$.
Αν $a \leq \beta$ και $\gamma \leq \delta$, τότε $a + \gamma \leq \beta + \delta$.

3.5δ΄ Αφαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.20 *Θεωρούμε στο σύνολο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $a + x = \beta$ με άγνωστο το x. Η λύση της εξίσωσης $a + x = \beta$ παριστάνεται με το σύμβολο $\beta - a$ και καλείται διαφορά του β ως προς το a. Δηλαδή,*

$$a + (\beta - a) = (\beta - a) + a = \beta.$$

Σημείωση 3.5.21 *Η λύση της εξίσωσης $a + x = \beta$ με άγνωστο το x και με a, β, $x \in \mathbb{R}$ είναι μοναδική και είναι η $x = \beta + a'$, όπου a' ο αντίθετος του a. Διότι, αν ο πραγματικός αριθμός x είναι η λύση της, τότε*

$$\begin{aligned} a' + a + x &= a' + \beta, \\ 0 + x &= x = a' + \beta = \beta + a'. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν θέσουμε $x = \beta + a'$, τότε

$$a + (\beta + a') = a + (a' + \beta) = (a + a') + \beta = 0 + \beta = \beta.$$

Άρα, ο πραγματικός αριθμός $x = \beta + a'$ ικανοποιεί την εξίσωση και είναι ο μόνος που το κάνει αυτό.

Ορισμός 3.5.22 *Η διμελής πράξη, που στο ζεύγος (β, a) αντιστοιχίζει τη διαφορά $\beta - a$, καλείται αφαίρεση του a από το β. Κατά τον ορισμό της διαφοράς είναι*

$$\beta - a = \beta + a' \quad \text{και} \quad \beta + a = \beta - a'.$$

Σημείωση 3.5.23 *Στο σύνολο $\mathbb{R}$ κάθε αφαίρεση αριθμού ανάγεται σε μια πρόσθεση αριθμού αλλά και κάθε πρόσθεση αριθμού ισοδυναμεί με μια αφαίρεση αριθμού αφού, από τον ορισμό 3.5.20, είναι*

$$\beta - a = \beta + a' \quad \text{και} \quad \beta + a = \beta - a'.$$

Κατά σύμβαση, το σύμβολο $-a$ αντικαθίσταται με το σύμβολο a' και η γραφή $\beta - a$ ερμηνεύεται και σαν γραφή του αθροίσματος του β με το $-a$· διότι $\beta - a = \beta + a' = \beta + (-a)$.

Επίσης, κατά σύμβαση, το σύμβολο a αντικαθίσταται με το σύμβολο $-a'$ και η γραφή $\beta + a$ ερμηνεύεται και σαν γραφή της διαφοράς του β ως προς το $-a$· διότι $\beta + a = \beta - a' = \beta - (-a)$.

Η ίδια σύμβαση επιτρέπει να έχει νόημα και η γραφή $-a + \beta$, αφού

$$-a + \beta = a' + \beta = \beta + a' = \beta - a.$$

Σχόλιο 25 *Από τον ορισμό της αφαίρεσης στο σύνολο $\mathscr{G}$, Ορισμός 3.4.34, μια διαδοχή επάλληλων πράξεων πρόσθεσης και αφαίρεσης, όπως για παράδειγμα η*

$$A - B - \Gamma + \Delta - E = (((A - B) - \Gamma) + \Delta) - E,$$

είναι δυνατή, όταν και μόνο όταν

$$\begin{aligned} A &\geq B \\ (A-B) &\geq \Gamma \\ ((A-B)-\Gamma)+\Delta &\geq E. \end{aligned}$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με τους ορισμούς 3.5.20, 3.5.22, δεν υπάρχει τέτοιος περιορισμός· μια γραφή όπως για παράδειγμα η

$$a-\beta-\gamma+\delta-\epsilon = (((a-\beta)-\gamma)+\delta)-\epsilon \ \text{ με } \ a,\beta,\gamma,\delta,\epsilon \in \mathbb{R}, \tag{3.93}$$

παριστάνει πάντα έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό.

Από τη σημείωση 3.5.23 έχουμε

$$a-\beta-\gamma+\delta-\epsilon = a+(-\beta)+(-\gamma)+\delta+(-\epsilon)\,. \tag{3.94}$$

Επίσης, η γραφή

$$-a+\beta+\gamma-\delta+\epsilon$$

παριστάνει του αντίθετο του αριθμού που παριστάνει η (3.93), αφού από το Θεώρημα 3.5.15 και τη (3.94) έχουμε

$$\begin{aligned} (a+(-\beta)+(-\gamma)+\delta+(\epsilon))' &= (-a)+\beta+\gamma+(-\delta)+\epsilon \\ &= -a+\beta+\gamma-\delta+\epsilon. \end{aligned}$$

Επομένως για την αφαίρεση του αθροίσματος (3.94) από ένα πραγματικό αριθμό ζ ισχύει

$$\begin{aligned} \zeta-(a-\beta-\gamma+\delta-\epsilon) &= \zeta+(a-\beta-\gamma+\delta-\epsilon)' \\ &= \zeta-a+\beta+\gamma-\delta+\epsilon. \end{aligned}$$

Σχόλιο 26 *Μια παράσταση της μορφής (3.93), λόγω της (3.94), ονομάζεται αλγεβρικό άθροισμα. Επίσης, από το σχόλιο 23, η μεταβολή της σειράς των προσθετέων σ΄ ένα άθροισμα δεν αλλοιώνει το άθροισμα· γι΄ αυτό και οι παραστάσεις παρεμφερής μορφής (όπως για παράδειγμα: $-\beta+a-\gamma-\epsilon+\delta$) έχουν την ίδια ονομασία.*

Θεώρημα 3.5.24 $a<\beta \Leftrightarrow (\beta-a)>0$, *όπου* $a,\beta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Θα δειχθεί ότι $a < \beta \Rightarrow (\beta - a) > 0$. Αν το συμπέρασμα δεν ίσχυε, τότε από το Θεώρημα 3.5.19 θα είχαμε

$$\begin{aligned} (\beta - a) &\leq 0 \Rightarrow \\ a + (\beta - a) &\leq a + 0 \Rightarrow \\ \beta &\leq a. \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού από την υπόθεση ισχύει $a < \beta$.

Θα δειχθεί ότι $(\beta - a) > 0 \Rightarrow a < \beta$. Αν το συμπέρασμα δεν ίσχυε, τότε από το Θεώρημα 3.5.19 θα είχαμε

$$\begin{aligned} a &\geq \beta \Rightarrow \\ a + (-a) &\geq \beta + (-a) \Rightarrow \\ 0 &\geq \beta - a, \end{aligned}$$

Άτοπο, αφού από την υπόθεση ισχύει $0 < (\beta - a)$.

□

Θεώρημα 3.5.25 $(a + \gamma) - (\beta + \gamma) = a - \beta$, *όπου* $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} (\beta + \gamma) + (a - \beta) &= \beta + \gamma + a + (-\beta) \quad \text{(από τη σημείωση 3.5.23)} \\ &= \beta + (-\beta) + a + \gamma \quad \text{(από το σχόλιο 23)} \\ &= 0 + (a + \gamma) \quad \text{(από το σχόλιο 22)} \\ &= a + \gamma \quad \text{(από το σχόλιο 21).} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (a + \gamma) - (\beta + \gamma) &= (\beta + \gamma) + (a - \beta) - (\beta + \gamma) \\ &= (\beta + \gamma) - (\beta + \gamma) + (a - \beta) \\ &= 0 + (a - \beta) \\ &= a - \beta. \end{aligned}$$

□

3.5ε΄ Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.26 *Καλείται γινόμενο των ν πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_\nu$, όπου $\nu \geq 2$, και παριστάνεται με $a_1 \cdots a_\nu$ του πραγματικό αριθμό που έχει απόλυτη τιμή το γινόμενο $|a_1| \cdots |a_\nu|$ των απόλυτων τιμών των «παραγόντων» $a_1, \ldots, a_\nu$ και πρόσημο το $+$ ή το $-$ όταν το πλήθος των παραγόντων που είναι < 0 είναι αριθμός άρτιος ή περιττός αντίστοιχα.*

Σχόλιο 27 *Το γινόμενο $a_1 \cdots a_\nu$ μηδενίζεται όταν και μόνο όταν ένας τουλάχιστο από τους παράγοντες είναι $= 0$.*

Σχόλιο 28 *Το γινόμενο δύο αριθμών με ίδιο «πρόσημο» είναι ≥ 0, το γινόμενο δύο αριθμών με διαφορετικό «πρόσημο» είναι < 0.*

Σχόλιο 29 *Για το γινόμενο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Για παράδειγμα $a_1 a_2 = a_2 a_1$.*

Σχόλιο 30 *Για το γινόμενο πραγματικών αριθμών ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(a_1 a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 a_3)$.*

Απόδειξη. Αφού είναι εφικτό δύο ή περισσότεροι παράγοντες σ΄ ένα γινόμενο να αντικατασταθούν με το γινόμενο τους είναι

$$(a_1 a_2) \cdot a_3 = a_1 a_2 a_3 = a_1 \cdot (a_2 a_3).$$

□

Θεώρημα 3.5.27 *$(a + \beta)\gamma = a\gamma + \beta\gamma$ και $(a - \beta)\gamma = a\gamma - \beta\gamma$, όπου a, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί το πρώτο, αφού $a - \beta = a + \beta'$ και επομένως $(a - \beta)\gamma = (a + \beta')\gamma = a\gamma + \beta'\gamma = a\gamma + (-\beta\gamma) = a\gamma - \beta\gamma$.

Αν τουλάχιστο ένας από τους a, β, γ είναι $= 0$, τότε $(a + \beta)\gamma = a\gamma + \beta\gamma$.

Αν είναι $a \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, τότε επειδή

$$(a + \beta)\gamma = a\gamma + \beta\gamma \Rightarrow (a' + \beta')\gamma' = a'\gamma' + \beta'\gamma',$$

αφού η αλλαγή του πρόσημου και των δύο παραγόντων ενός γινομένου δεν αλλοιώνει το γινόμενο, από τις ακόλουθες οκτώ μόνες δυνατές κατανομές των

προσήμων $+$ και $-$ στους τρεις αριθμούς a, β, γ:

a	β	γ	a	β	γ
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

αρκεί να μελετηθούν οι τέσσερις πρώτες της πρώτης στήλης.

1. Για $a = +A$, $\beta = +B$, $\gamma = +\Gamma$, είναι

$$a + \beta = A + B,\ (a+\beta)\,\gamma = (A+B)\,\Gamma,\ a\gamma = A\Gamma,\ \beta\gamma = B\Gamma.$$

   Για τα στοιχεία A, B, Γ του συνόλου $\mathscr{G}$ ισχύει, από το Θεώρημα 3.4.32, $(A+B)\,\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$. Επομένως

$$(a+\beta)\,\gamma = a\gamma + \beta\gamma.$$

2. Για $a = +A$, $\beta = +B$, $\gamma = -\Gamma$, είναι

$$\begin{aligned} a+\beta &= A+B, \\ (a+\beta)\,\gamma &= -(A+B)\,\Gamma, \\ a\gamma &= -A\Gamma,\ \ \beta\gamma = -B\Gamma. \end{aligned} \tag{3.95}$$

   Έχουμε όμως

$$-(A+B)\,\Gamma = -(A\Gamma + B\Gamma) \quad \text{και} \tag{3.96}$$

$$a\gamma + \beta\gamma = -(-a\gamma - \beta\gamma) = -(A\Gamma + B\Gamma)\,. \tag{3.97}$$

   Άρα, από τις (3.95), (3.96), (3.97), λαμβάνουμε

$$(a+\beta)\,\gamma = a\gamma + \beta\gamma$$

3. Για $a = +A$, $\beta = -B$, $\gamma = +\Gamma$, είναι $a\gamma = A\Gamma$, $\beta\gamma = -B\Gamma$ και

$$\begin{aligned} a+\beta &= A-B \quad \text{όταν}\ \ A \geq B \\ a+\beta &= -(B-A) \quad \text{όταν}\ \ A < B, \end{aligned}$$

$$(a+\beta)\,\gamma = (A-B)\,\Gamma \quad \text{όταν}\ \ A \geq B \tag{3.98}$$

$$(a+\beta)\,\gamma = -(B-A)\,\Gamma \quad \text{όταν}\ \ A < B, \tag{3.99}$$

Έχουμε όμως

$$\begin{aligned} a\gamma+\beta\gamma &= A\Gamma-B\Gamma=(A-B)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad A\Gamma\geq B\Gamma \Leftrightarrow A\geq B \qquad (3.100)\\ a\gamma+\beta\gamma &= -(B\Gamma-A\Gamma)\\ &= -(B-A)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad B\Gamma>A\Gamma \Leftrightarrow B>A. \qquad (3.101)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.98), (3.100) και τις σχέσεις (3.99), (3.101) έχουμε ότι

$$(a+\beta)\,\gamma=a\gamma+\beta\gamma.$$

4. Για $a=+A$, $\beta=-B$, $\gamma=-\Gamma$, είναι $a\gamma=-A\Gamma$, $\beta\gamma=B\Gamma$ και

$$\begin{aligned} a+\beta &= A-B \quad \text{όταν} \quad A>B\\ a+\beta &= -(B-A) \quad \text{όταν} \quad A\leq B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+\beta)\,\gamma &= -(A-B)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad A>B \qquad (3.102)\\ (a+\beta)\,\gamma &= (B-A)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad A\leq B, \qquad (3.103)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\gamma+\beta\gamma &= B\Gamma-A\Gamma=(B-A)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad A\leq B \qquad (3.104)\\ a\gamma+\beta\gamma &= -(A\Gamma-B\Gamma)=(A-B)\,\Gamma \quad \text{όταν} \quad A>B \qquad (3.105)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.102), (3.105) και τις σχέσεις (3.103), (3.104) έχουμε ότι

$$(a+\beta)\,\gamma=a\gamma+\beta\gamma.$$

□

Με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.27, έχουμε δείξει ότι ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{R}$ είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση.

Θεώρημα 3.5.28 *Αν $a<\beta$ και $\gamma>0$ τότε $a\gamma<\beta\gamma$, όπου $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.24, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\beta\gamma-a\gamma>0.$$

Όμως από το Θεώρημα 3.5.27 είναι $\beta\gamma-a\gamma=(\beta-a)\,\gamma$. Από το Θεώρημα 3.5.24, η υπόθεση $a<\beta$ έχει για συνέπεια τη σχέση $\beta-a>0$. Αφού, $(\beta-a)>0$ και $\gamma>0$, τότε είναι $(\beta-a)\,\gamma>0$. Άρα, $\beta\gamma-a\gamma>0$.

□

Θεώρημα 3.5.29 *Αν $a < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $a\gamma > \beta\gamma$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5.27, είναι $a\gamma - \beta\gamma = (a - \beta)\gamma$. Από υπόθεση του θεωρήματος είναι $a - \beta < 0$ και $\gamma < 0$ άρα $(a - \beta)\gamma > 0$ (από το σχόλιο 28), και επομένως $a\gamma - \beta\gamma > 0$· από το οποίο σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.24 συνεπάγεται $a\gamma > \beta\gamma$.

□

Θεώρημα 3.5.30 *Ο αριθμός 1 είναι ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,*

$$1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Για $a \neq 0$ είναι $|1 \cdot a| = 1 \cdot |a| = |a|$ και $\operatorname{sign}(1 \cdot a) = \operatorname{sign} a$. Για $a = 0$ είναι $1 \cdot 0 = 0$.

Ώστε, $1 \cdot a = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

□

3.5ς΄ Διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.5.31 *Θεωρούμε στο σύνολο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $ax = \beta$ με $a \neq 0$ και άγνωστο το x. Η λύση της εξίσωσης $ax = \beta$ παριστάνεται με το σύμβολο β/a και καλείται πηλίκο του β δια a. Δηλαδή,*

$$a \cdot \frac{\beta}{a} = \frac{\beta}{a} \cdot a = \beta.$$

Σημείωση 3.5.32 *Η λύση της εξίσωσης $ax = \beta$ με άγνωστο το x και $a \neq 0$, όπου $a, \beta, x \in \mathbb{R}$, είναι μοναδική.*

Αφού, αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση έχει τη λύση $x = 0$ (από με το σχόλιο 27). Αν $\beta \neq 0$ και ο πραγματικός αριθμός x είναι λύση της εξίσωσης, τότε πρέπει να έχουμε $|x| \neq 0$ καθώς και $|a||x| = |\beta|$, $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} a\beta$. Δηλαδή, η λύση x πρέπει να έχει απόλυτη τιμή

$$\frac{|\beta|}{|a|}$$

και πρόσημο το $+$ όταν οι αριθμοί a και β έχουν το ίδιο μεταξύ τους πρόσημο ή $-$ όταν οι αριθμοί a και β έχουν διαφορετικό μεταξύ τους πρόσημο.

Αντίστροφα, αν

$$\frac{\beta}{a} = \beta/a$$

ο πραγματικός αριθμός που έχει απόλυτη τιμή

$$\frac{|\beta|}{|a|}$$

και πρόσημο το $+$ όταν $a\beta > 0$ ή το $-$ όταν $a\beta < 0$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 3.5.26 θα είναι

$$a \cdot \frac{\beta}{a} = \frac{\beta}{a} \cdot a = \beta.$$

Ορισμός 3.5.33 *Η πράξη που στο ζεύγος (β, a) με $a \neq 0$ αντιστοιχίζει τον αριθμό β/a λέγεται διαίρεση του β δια a.*

Σημείωση 3.5.34 *Διαίρεση με «διαιρέτη» $a = 0$ δεν εισάγεται, διότι, στην περίπτωση που είναι $\beta \neq 0$, η εξίσωση $0 \cdot x = \beta$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$ και, στην περίπτωση $\beta = 0$, η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ δεν καθορίζει την τιμή του αγνώστου, αλλά επαληθεύεται από κάθε πραγματικό αριθμό x.*

Σχόλιο 31 *Το πηλίκο β/a είναι θετικός αριθμός όταν οι «όροι» β και a της διαίρεσης είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί, είναι αρνητικός αριθμός όταν οι δύο όροι της διαίρεσης έχουν διαφορετικό μεταξύ τους πρόσημο.*

Θεώρημα 3.5.35 *Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\frac{\beta\gamma}{a\gamma} = \frac{\beta}{a} \quad \forall\, \gamma \in \mathbb{R} \ \text{ με } \ \gamma \neq 0.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό 3.5.31 έχουμε ότι υπάρχει ο πραγματικός αριθμός

$$x_1 = \frac{\beta}{a}.$$

Από το σχόλιο 29 ισχύει, $ax_1 \cdot \gamma = a\gamma \cdot x_1$. Επίσης από τον ορισμό 3.5.31 έπεται ότι $a\gamma \cdot x_1 = \beta\gamma$, για κάθε $\gamma \neq 0$. Οπότε και $a\gamma \cdot x_1 = \beta\gamma$, όταν $a\gamma \neq 0$. Άρα,

$$\frac{\beta\gamma}{a\gamma} = \frac{\beta}{a} \quad \text{για κάθε} \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \gamma \neq 0.$$

□

Θεώρημα 3.5.36 *Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\frac{\beta}{a} = \beta \cdot \frac{1}{a} \quad \text{με } a \neq 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left|\beta \cdot \frac{1}{a}\right| = |\beta| \cdot \left|\frac{1}{a}\right| = |\beta| \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{|\beta|}{|a|}$$

και, όταν $\beta \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \frac{\beta}{a} &= \operatorname{sign}\left(\beta \cdot \frac{1}{a}\right) = + \quad \text{όταν} \quad a\beta > 0 \\ \operatorname{sign} \frac{\beta}{a} &= \operatorname{sign}\left(\beta \cdot \frac{1}{a}\right) = - \quad \text{όταν} \quad a\beta < 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\beta}{a} = \beta \cdot \frac{1}{a}, \quad \text{όταν} \quad \beta \neq 0.$$

Για $\beta = 0$ ισχύει η σχέση

$$\frac{\beta}{a} = \beta \cdot \frac{1}{a},$$

αφού

$$\frac{\beta}{a} = \frac{0}{a} = 0 \quad \text{και} \quad \beta \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a} = 0.$$

□

Θεώρημα 3.5.37 *Αν $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\begin{aligned} \frac{a+\beta}{\gamma} &= \frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{με } \gamma \neq 0 \quad \text{και} \\ \frac{a-\beta}{\gamma} &= \frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{με } \gamma \neq 0. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.5.36 και το Θεώρημα 3.5.27 είναι

$$\frac{a+\beta}{\gamma} = (a+\beta)\frac{1}{\gamma} = a \cdot \frac{1}{\gamma} + \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{a}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$$

και πάλι από το Θεώρημα 3.5.36 και το Θεώρημα 3.5.27 είναι

$$\frac{a-\beta}{\gamma} = (a-\beta)\frac{1}{\gamma} = a \cdot \frac{1}{\gamma} - \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{a}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}.$$

□

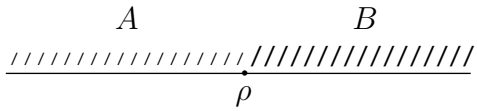
Παράρτημα Α΄

Τομές Dedekind.

Στα νεότερα βιβλία της Πραγματικής Ανάλυσης προτείνεται μια εκδοχή των τομών Dedekind· σύμφωνα με την οποία αρκεί μόνο μία τάξη για να καθοριστεί ένας πραγματικός αριθμός, αφού σ΄ ένα καταμερισμό η μία τάξη καθορίζεται μοναδικά από την άλλη[1].

Η πορεία που θα ακολουθήσουμε πιο κάτω ακολουθεί την αρχική ιδέα του Dedekind, η οποία περιγράφεται στη παράγραφο $1.2\beta'$.

Αν θεωρήσουμε τον ρητόν αριθμό ρ, τότε μπορούμε να σκεφτούμε όλους τους ρητούς (ή σύμμετρους) αριθμούς χωρισμένους σε δύο τάξεις A και B· με τέτοιο τρόπο ώστε, στη μια τάξη A να ανήκουν όλοι οι ρητοί που είναι μικρότεροι του ρ, στην τάξη B όλοι οι υπόλοιποι, δηλαδή οι μεγαλύτεροι του ρ (Σχήμα Α΄.1).



Σχήμα Α΄.1: Καταμερισμός ρ.

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

[1] Η κατασκευή των πραγματικών αριθμών, με τη μέθοδο των τομών Dedekind, βασιζόμενη σε αυτή τη τροποποίηση παρουσιάζεται από τον Rudin (2000, σελ: $24-31$).

- Ο ρητός αριθμός ρ να ανήκει στην πρώτη τάξη A. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} A &= \{\rho, \rho' \in \mathbb{Q} : \rho' \leq \rho\}, \\ B &= \{\rho, \rho'' \in \mathbb{Q} : \rho'' > \rho\}. \end{aligned}$$

- Ο ρητός αριθμός ρ να ανήκει στην δεύτερη τάξη B. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} A &= \{\rho, \rho' \in \mathbb{Q} : \rho' < \rho\}, \\ B &= \{\rho, \rho'' \in \mathbb{Q} : \rho'' \geq \rho\}. \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός ρ δύναται να νοηθεί ως σύμβολο των αντίστοιχων καταμερισμών.

Επίσης, παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Κάθε αριθμός της τάξεως A είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξεως B.

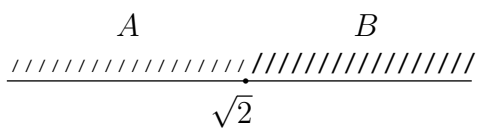
2. Δοθέντος ενός ρητού θετικού αριθμού, οσονδήποτε μικρού ϵ, έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε αριθμό από την τάξη B και από την τάξη A τέτοιους, ώστε η διαφορά τους να είναι μικρότερη του ϵ.

Με τον τρόπο που εργαστήκαμε πιο πάνω μπορούμε να εργαστούμε και με οποιονδήποτε άλλον ρητό. Ώστε για κάθε ρητό έχουμε ένα και μόνο ένα τέτοιον χωρισμό των ρητών σε δύο τάξεις.

Εκτός όμως των καταμερισμών αυτών, μπορούμε να έχουμε καταμερισμούς των ρητών αριθμών σε δύο τάξεις A και B τέτοιες, ώστε οποιοσδήποτε αριθμός της πρώτης να είναι μικρότερος από οποιοδήποτε της δεύτερης, χωρίς να έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε στη πρώτη τάξη αριθμό μεγαλύτερο από όλους τους άλλους (που να ανήκει στη τάξη αυτή), ούτε στη δεύτερη αριθμό μικρότερο από όλους τους άλλους.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε τη θετική λύση της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$ τότε δεν υπάρχει ρητός που να επαληθεύει την εξίσωση αυτή. Θεωρούμε ήδη το σύνολο των θετικών ρητών, που επαληθεύουν την $x^2 - 2 > 0$, και το σύνολο των θετικών ρητών που επαληθεύουν την $x^2 - 2 < 0$· χωρίζουμε τους ρητούς σε δύο τάξεις A και B, τοποθετούμε στην πρώτη τάξη όλους τους θετικούς ρητούς, των οποίων το τετράγωνο είναι μικρότερο του 2, όπως επίσης το μηδέν και όλους τους αρνητικούς ρητούς, στη δε δεύτερη τάξη όλους τους θετικούς ρητούς, των οποίων το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο του του 2.

Προφανώς κάθε ρητός ανήκει στη μία ή στην άλλη τάξη, επίσης ισχύουν στο καταμερισμό αυτό οι ιδιότητες (1) και (2). Όπως προηγουμένως θεωρήσαμε τον ρ ως σύμβολο του καταμερισμού που κατασκευάσαμε, έτσι και εδώ, όπου όμως δεν υπάρχει μεγαλύτερος ρητός της τάξεως A, ούτε μικρότερος ρητός της τάξεως B, θα λέμε ότι *σύμβολο* του καταμερισμού αυτού είναι αριθμός *άρρητος (ή ασύμμετρος)*, που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 - 2 = 0$· δηλαδή, θα εννοούμε ότι η κατασκευή αυτού του καταμερισμού ορίζει *άρρητο (ή ασύμμετρο)* αριθμό, στο συγκεκριμένο παράδειγμα τον σημειώνουμε με $\sqrt{2}$. Με το σύμβολο αυτό εννοούμε αριθμό που είναι μεγαλύτερος όλων των αριθμών της τάξεως A και μικρότερος όλων των αριθμών της τάξεως B, δηλαδή θα εννοούμε ότι αυτός ο αριθμός παρεμβάλλεται μεταξύ των δύο τάξεων (Σχήμα Α΄.2).



Σχήμα Α΄.2: Καταμερισμός $\sqrt{2}$.

Έστω ότι χωρίστηκαν με αυτή τη μέθοδο όλοι οι ρητοί αριθμοί σε δύο τάξεις A και B, ώστε κάθε αριθμός της A να είναι μικρότερος κάθε αριθμού της B. Τότε τρεις είναι οι δυνατές περιπτώσεις:

1. Η τάξη A να περιέχει αριθμό τ μεγαλύτερο από όλους τους άλλους αριθμούς που ανήκουν στη τάξη αυτή.

2. Η τάξη B να περιέχει αριθμό τ μικρότερο από όλους τους άλλους αριθμούς που ανήκουν στην τάξη αυτή.

   Στις περιπτώσεις (1) και (2), ο αριθμός τ έχει τη δυνατότητα να νοηθεί ως το σύμβολο του καταμερισμού και λέμε ότι ο τ προσδιορίζει την *τομή* (A, B) και ότι η *τομή είναι ρητή*.

3. Δεν υπάρχει ούτε μεγαλύτερος στην τάξη A, ούτε μικρότερος στην τάξη B[2]· τότε λέμε ότι η *τομή είναι άρρητη (ή ασύμμετρη)*.

[2]Αν υπήρχε κ μεγαλύτερος ρητός αριθμός στην A και λ μικρότερος ρητός αριθμός στην

Έτσι, έχουμε ότι σε κάθε καταμερισμό των ρητών σε δύο τάξεις A και B, τέτοιες ώστε κάθε αριθμός της A να είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξεως B, αντιστοιχεί, ένας και μόνο ένας αριθμός ρητός ή άρρητος, ο οποίος χρησιμεύει ως σύμβολο του καταμερισμού αυτού και λέγεται *τομή Dedekind*[3]. Ονομάστηκε έτσι λόγω του Julius Wilhelm Richard Dedekind ο οποίος πρώτος είχε δώσει τον αυστηρό ορισμό του άρρητου αριθμού με τη μέθοδο αυτή, δηλαδή του χωρισμού σε δύο τάξεις.

Ισχύει και το αντίστροφο, σε κάθε ρητό ή άρρητο αριθμό (δηλαδή, πραγματικό αριθμό) αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας καταμερισμός· αν θεωρήσουμε τους καταμερισμούς των δύο πρώτων περιπτώσεων ως ένα μόνο.

Παρατηρούμε ότι η παράσταση κάθε ρητού αριθμού με τομές Dedekind γίνεται δισήμαντα, αφού σε κάθε ρητό ρ αντιστοιχούν δύο τομές Dedekind (περιπτώσεις 1 και 2)· ενώ ενός άρρητου αριθμού γίνεται μονοσήμαντα (περίπτωση 3).

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε χωρίσει *όλους τους πραγματικούς* αριθμούς σε δύο τάξεις A και B, τέτοιες, ώστε κάθε αριθμός της τάξης A να είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξης B, τότε θα υπάρχει *πάντοτε* πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε κάθε μικρότερος αριθμός του x να ανήκει στην A και κάθε μεγαλύτερος αριθμός του x να ανήκει στη B, που θα ορίζει την τομή.

Για να το δούμε αυτό, ας θεωρήσουμε τους ρητούς που ανήκουν στη τάξη A, αυτοί να αποτελούν κάποια τάξη A_ρ, και τους ρητούς αριθμούς που ανήκουν στη τάξη B, αυτοί να αποτελούν κάποια τάξη B_ρ. Η τάξη A θα αποτελείται από την τάξη A_ρ και την τάξη A_a των άρρητων αριθμών που ανήκουν στην τάξη A· ομοίως η τάξη B θα αποτελείται από την τάξη B_ρ και την τάξη B_a των άρρητων αριθμών που ανήκουν στην τάξη B.

Οι τάξεις A_ρ και B_ρ ορίζουν μια τομή ένα αριθμό ρητό ή άρρητο, ας τον ονομάσουμε x· ισχυριζόμαστε ότι κάθε μικρότερος του x (ρητός ή άρρητος), ανήκει στην τάξη A και κάθε μεγαλύτερος του x ανήκει στην τάξη B. Η αλήθεια του ισχυρισμού φαίνεται ως εξής: Αφού, κάθε μικρότερος αριθμός του x θα είναι ή ρητός ή άρρητος· αν είναι ρητός αριθμός, σύμφωνα με τον ορισμό στο του x, θα ανήκει στην τάξη A_ρ· αν είναι άρρητος αριθμός κάποιος y, θα υπάρχει μεταξύ των y και x ρητός αριθμός (και επομένως απειρία ρητών)· έστω αυτός να είναι κάποιος ρ. Αυτός ο ρητός αριθμός θα

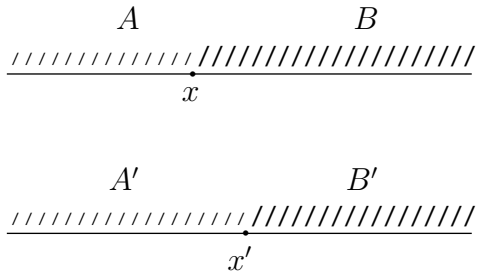
B, τότε θα υπήρχε $\frac{\kappa+\lambda}{2}$ ρητός αριθμός εκτός των δύο τάξεων.

[3]Μια σύντομη κατασκευή των πραγματικών αριθμών, με τη μέθοδο των τομών Dedekind, δηλαδή του καταμερισμού των ρητών σε δύο τάξεις, παρουσιάζεται από τον Ζερβό (1996, σελ: $1-10$).

είναι μικρότερος του x, δηλαδή $\rho < x$, επομένως ανήκει στην τάξη A_ρ· άρα ο ρ θα ανήκει και στην τάξη A· και επομένως θα είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της τάξεως B (σύμφωνα με τον ορισμό των τάξεων A και B). Αν, όμως, ο y άνηκε στην τάξη B θα είχαμε $\rho < y$, ενώ είχαμε υποθέσει ότι $\rho > y$· άτοπο. Άρα ο y ανήκει στην τάξη A. Ομοίως φαίνεται ότι κάθε μεγαλύτερος του x ανήκει στην τάξη B. Δηλαδή, ο x, είναι και τομή των τάξεων A_ρ και B_ρ είναι και τομή των τάξεων A και B.

Έχουμε την δυνατότητα να ορίσουμε τις αλγεβρικές πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς καθώς κάθε ένας από αυτούς συμβολίζει τομή τάξεων (δηλαδή τον καταμερισμό των αριθμών σε δύο τάξεις).

Για παράδειγμα ορίζουμε τη πρόσθεση ως εξής: Έστω x και x' δύο πραγματικοί αριθμοί. Ονομάζουμε A και B τις τάξεις των ρητών που ορίζουν τον x, A' και B' τις τάξεις των ρητών που ορίζουν τον x' (Σχήμα Α΄.3).



Σχήμα Α΄.3: Καταμερισμοί x, x'.

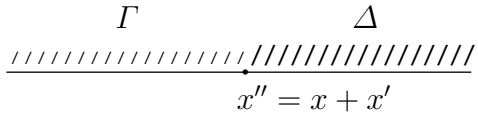
Θεωρούμε τους ρητούς αριθμούς ρ_1, ρ_2, ρ_1', ρ_2' να ανήκουν στις τάξεις αυτές· ο ρ_1 να ανήκει στην τάξη A, ο ρ_2 να ανήκει στην τάξη B, ο ρ_1' να ανήκει στην τάξη A' και ο ρ_2' να ανήκει στην τάξη B'. Άρα οι ρητοί αυτοί επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \rho_1 < \quad x \quad &< \rho_2, \\ \rho_1' < \quad x' \quad &< \rho_2'. \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε

$$\rho_1 + \rho_1' < \rho_2 + \rho_2'.$$

Τώρα, σκεφτόμαστε όλους τους πραγματικούς αριθμούς χωρισμένους σε δύο τάξεις Γ και Δ, οι οποίες ορίζονται ως εξής: Στην τάξη Γ να ανήκει κάθε αριθμός που είναι μικρότερος από ένα οποιοδήποτε αριθμό της μορφής $\rho_2+\rho_2'$, άρα στην τάξη Γ ανήκουν και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\rho_1+\rho_1'$· στη τάξη Δ ανήκουν όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί, δηλαδή σ' αυτή την τάξη ανήκουν και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\rho_2+\rho_2'$. Ας ονομάσουμε x'' τον αριθμό που ορίζει αυτή την *τομή* των δύο τάξεων Γ και Δ· δηλαδή ο x'' νοείται ως σύμβολο του καταμερισμού των αριθμών, που είναι αθροίσματα ρητών, σε δύο τάξεις Γ και Δ (Σχήμα Α΄.4). Αυτός θα είναι μικρότερος κάθε αριθμού $\rho_2+\rho_2'$ (ίσος με κάποιον αριθμό $\rho_2+\rho_2'$ δεν μπορεί να είναι, αφού μεταξύ των αριθμών της μορφής $\rho_2+\rho_2'$ δεν υπάρχει μικρότερος) και μεγαλύτερος κάθε αριθμού $\rho_1+\rho_1'$ (ίσος με κάποιον αριθμό $\rho_1+\rho_1'$ δεν μπορεί να είναι, αφού μεταξύ των αριθμών της μορφής $\rho_1+\rho_1'$ δεν υπάρχει μεγαλύτερος). Έτσι βρήκαμε



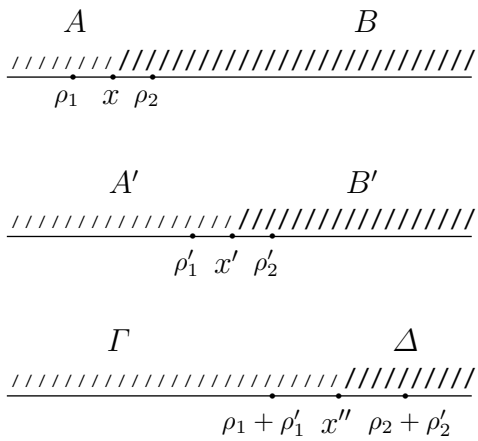
Σχήμα Α΄.4: Καταμερισμός x''.

αριθμό x'', μικρότερο κάθε αριθμού $\rho_2+\rho_2'$ και μεγαλύτερο κάθε αριθμού $\rho_1+\rho_1'$. Δηλαδή, $\rho_1+\rho_1'<x''<\rho_2+\rho_2'$. Αυτός ο αριθμός x'' είναι μοναδικός. Διότι αν υπήρχε κι άλλος αριθμός y τέτοιος, ώστε $\rho_1+\rho_1'<y<\rho_2+\rho_2'$ και $x''\neq y$, θα είχαμε μεταξύ των αριθμών x'', y άπειρους ρητούς. Έστω ρ_3, ρ_3' δύο από αυτούς· αν $\rho_3<\rho_3'$ θα είχαμε $\rho_1+\rho_1'<\rho_3<\rho_3'<\rho_2+\rho_2'$. Άρα η διαφορά $\rho_3'-\rho_3$ θα ήταν κάποιος σταθερός αριθμός ϵ, αφού

$$\rho_3'-\rho_3<(\rho_2+\rho_2')-(\rho_1+\rho_1')\,. \tag{Α΄.1}$$

Όμως η διαφορά $(\rho_2+\rho_2')-(\rho_1+\rho_1')$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε, αρκεί να λάβουμε τις διαφορές $\rho_2-\rho_1$ και $\rho_2'-\rho_1'$ αρκετά μικρές. Άρα δεν ισχύει πάντα η ανισότητα (Α΄.1). Αυτό σημαίνει ότι $x''=y$.

Ο αριθμός x'' καλείται *άθροισμα* των αριθμών x και x' το οποίο γράφεται $x''=x+x'$.



Σχήμα Α΄.5: Άθροισμα $x + x'$.

Στο Σχήμα Α΄.5 (για $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_1' < \rho_2'$) παριστάνεται το άθροισμα $x'' = x + x'$.

Με όμοιο τρόπο, ορίζουμε τις υπόλοιπες πράξεις, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Επίσης, αναφέρουμε ότι το Αξίωμα της συνέχειας (ή πληρότητας) των πραγματικών αριθμών είναι ισοδύναμο με το θεώρημα της συνέχειας των πραγματικών αριθμών κατά Dedekind το οποίο λέει ότι: *Για κάθε τομή* (A, B) *του Dedekind στο* $\mathbb{R}$ *υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός* a*, ο οποίος είναι ο μέγιστος του συνόλου* A *ή ο ελάχιστος του συνόλου* B*, δηλαδή ισχύει μόνο μία από τις δύο σχέσεις:* $\max A = \inf B = a$ *ή* $\sup A = \min B = a$ (Κάππου 1962, σελ: 29).

Παράρτημα Β΄

Το σύνολο $\mathbb{R}$ αξιωματικά θεμελιωμένο.

Η θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών διαμέσου αξιωμάτων δύναται να γίνει ως εξής:

Αξίωμα Ι Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών αποτελεί ένα αλγεβρικό σώμα, δηλαδή είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις: την πρόσθεση η οποία συμβολίζεται με $+$ και τον πολλαπλασιασμό ο οποίος συμβολίζεται με $\cdot$ (Κάππου 1962, σελ: 4).

Στη παράγραφο «Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών» του Κεφαλαίου 3, έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα αλγεβρικό σώμα. Δηλαδή δείξαμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης $(+)$ και του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ είναι τέτοιες, ώστε:

1. Η τριάδα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

2. Αν $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (όπου το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης), τότε το ζεύγος $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι μια ομάδα.

Πιο συγκεκριμένα: Στην υποπαράγραφο «Πρόσθεση στο σύνολο $\mathbb{R}$» του Κεφαλαίου 3 δείξαμε ότι το ζεύγος $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα (δηλαδή, δείξαμε ότι: (α) η πράξη της πρόσθεσης είναι προσεταιριστική στο $\mathbb{R}$, (β) υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$, (γ) κάθε πραγματικός αριθμός έχει αντίθετο και (δ) το άθροισμα δύο προσθετέων δεν αλλάζει αν η σειρά των προσθετέων αλλάξει). Επίσης, στην υποπαράγραφο «Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathbb{R}$» του Κεφαλαίου 3, δείξαμε ότι η πράξη

του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική στο $\mathbb{R}$ και ότι αυτή η πράξη είναι επιμεριστική ως προς τη πράξη της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον ότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη στο $\mathbb{R}$ με ουδέτερο στοιχείο την μονάδα (τον αριθμό 1). Επομένως, δείξαμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Στην υποπαράγραφο «Πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\mathbb{R}$» του Κεφαλαίου 3 δείξαμε ότι (α) η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική, (β) υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο της πράξης αυτής στο $\mathbb{R}$ και (γ) στην υποπαράγραφο «Διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}$» του Κεφαλαίου 3, δείξαμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}$ έχει αντίστροφο. Επομένως, δείξαμε ότι το ζεύγος $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι μια ομάδα.

Αξίωμα II Το σώμα των πραγματικών αριθμών έχει ένα τουλάχιστο στοιχείο διάφορο του 0 (Κάππου 1962, σελ: 5).

Αξίωμα III Το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι γραμμικώς διατεταγμένο, δηλαδή: υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathbb{R}^+$ του $\mathbb{R}$ το οποίο χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ιδιότητες (Κάππου 1962, σελ: 7):

1. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει *ακριβώς*[1] μια από τις κάτωθεν σχέσεις:

$$a = 0 \quad \text{ή} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ή} \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

2. Αν $a \in \mathbb{R}^+$ και $\beta \in \mathbb{R}^+$, τότε $a + \beta \in \mathbb{R}^+$ και $a\beta \in \mathbb{R}^+$.

Οι ιδιότητες που δεχόμαστε στο Αξίωμα III, έχουν αποδειχτεί στη παράγραφο «Το σύνολο $\mathscr{G}$ των απόλυτων αριθμών» του Κεφαλαίου 3.

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}^+$ λέγονται θετικοί αριθμοί (Κάππου 1962, σελ: 7) και ταυτίζονται με τα στοιχεία του συνόλου $\mathscr{G} - \{0\}$. Δηλαδή, αυτό το οποίο έχουμε συμβολίσει εδώ $\mathbb{R}^+$ είναι το ίδιο με αυτό το οποίο συμβολίσαμε στη κατασκευή των πραγματικών αριθμών $\mathscr{G} - \{0\}$.

Αξίωμα IV (Αξίωμα της πληρότητας ή της συνέχειας) Το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι κεκορεσμένο[2] ως προς τη διάταξη του, δηλαδή: για κάθε μη κενό υποσύνολο M του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι άνω φραγμένο, υπάρχει το ανώτερο πέρας[3] στο $\mathbb{R}$ (Κάππου 1962, σελ: 21).

[1] Η έμφαση είναι του πρωτοτύπου.

[2] Διαφορετικά λέγεται και πλήρες.

[3] Διαφορετικά λέγεται και άνω πέρας ή ελάχιστο άνω φράγμα (supremum).

Ισχύει και το δυικό του πιο πάνω αξιώματος: Για κάθε μη κενό και φραγμένο προς τα κάτω υποσύνολο M του $\mathbb{R}$ υπάρχει το κατώτερο πέρας στο $\mathbb{R}$ (Κάππου 1962, σελ: 21).

Το δυϊκό του Αξιώματος IV είχε αποδειχθεί, στη κατασκευαστική πορεία των πραγματικών αριθμών που ακολουθήσαμε στο Κεφάλαιο 3, ως Θεώρημα.

Το Αξίωμα IV και τα Αξιώματα I, II, III, αρκούν για να θεμελιωθεί πλήρως το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ένας διαφορετικός τρόπος θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών διαμέσου αξιωμάτων δύναται να γίνει ως εξής: Να ορισθεί, αφού έχει προηγηθεί η θεωρία συγκλίσεως των ακολουθιών στην περιοχή των ρητών αριθμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως ένα διατεταγμένο σώμα δια των Αξιωμάτων I, II, III, όπως έχουν διατυπωθεί πιο πάνω, και το Αξίωμα IV να αντικατασταθεί με τα ακόλουθα δύο Αξιώματα:

Αξίωμα IV$_1$ (Αξίωμα του Αρχιμήδους - Ευδόξου) Για κάθε πραγματικό αριθμό a υπάρχει φυσικός αριθμός $\nu > a$ (Κάππου 1962, σελ: 62).

Αξίωμα IV$_2$ Στην περιοχή των πραγματικών αριθμών ισχύει το κριτήριο συγκλίσεως των ακολουθιών του Cauchy[4] (Κάππου 1962, σελ: 62).

Στη πρώτη εν δυνάμει θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια του Αξιώματος IV, αποδεικνύονται τα Αξιώματα IV$_1$ και IV$_2$ ως προτάσεις. Στη δεύτερη εν δυνάμει θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια των Αξιωμάτων IV$_1$ και IV$_2$, αποδεικνύεται το Αξίωμα IV ως πρόταση. Επομένως, στη περιοχή των πραγματικών αριθμών, τα Αξιώματα IV$_1$ και IV$_2$ είναι ισοδύναμα με το Αξίωμα IV.

Σημειώνεται ότι στο βιβλίο του Κάππου, το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με Π και το σύνολο των θετικών αριθμών συμβολίζεται με Π^+.

---

[4]Κριτήριο συγκλίσεως ακολουθιών του Cauchy: Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες (Κάππου 1962, σελ: 61):

1. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία, όπως διαφορετικά καλείται).

2. Υπάρχει πραγματικός αριθμός a τέτοιος, ώστε να ισχύει $a_\nu \to a$, δηλαδή: η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία

[1] Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ., Σβερκος Α. (1988). *Μαθηματικά*. Β΄ Γυμνασίου. Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων Αθήνα.

[2] Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος (1985). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Γ΄ έκδοση. Εκδόσεις Νεφέλη. Αθήνα.

[3] Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος. *Η χελώνα και ο υπεράνθρωπος: Φιλοσοφική αποτίμηση των παραδόξων του Ζήνωνος*. Εργασία 36.

[4] Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος. *Το συνεχές και ο χρόνος*. Εργασία 38.

[5] Aquila E. Richard (2004). *The singularity and the unity of transcendental consciousness in Kant*. History of European Ideas, 30, pp. 349 – 376.

[6] Αριστοτέλης. *Αναλυτικά Ύστερα*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[7] Αριστοτέλης. *Μετά τα Φυσικά*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[8] Αριστοτέλης. *Περί Ουρανού*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[9] Αριστοτέλης. *Φυσική Ακρόασις Α΄*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[10] Βασιλείου Φίλων (1973). *Το πρόβλημα για τη φύση του συνεχούς*. Φιλοσοφία, 3, σελ: 47 – 73. Επετηρίς του κέντρου ερεύνης της Ελληνικής φιλοσοφίας. Ακαδημία Αθηνών.

[11] Βέικος Α. Θεόφιλος (1973). *Το πρόβλημα του συνεχούς στη φιλοσοφία του Whitehead*. Φιλοσοφία, 3, σελ: $405-442$. Επετηρίς του κέντρου ερεύνης της Ελληνικής φιλοσοφίας. Ακαδημία Αθηνών.

[12] Βέικος Α. Θεόφιλος. *Τα ζηνώνεια παράδοξα και οι μαθηματικές καυτιανές αυτινομίες*. 11 Δευκαλίων, σελ: $319-336$. Περιοδική έκδοση του Κέντρου Φιλοσοφικών Ερευνών.

[13] Βοσνιάδου Στέλλα (2001). *Εισαγωγή στη ψυχολογία*. Τόμος Α΄. Εκδόσεις Gutenberg.

[14] Bruner S. Jerome (1960). *Η διαδικασία της παιδείας*. Μετάφραση: Χρυσάνθη Κληρίδη. Εκδόσεις Α. Καραβία. Αθήνα.

[15] Γαγάτσης Α. & Ηλία Ι. (2004). *Η αξιοποίηση της εικονικής, της λεκτικής και της συμβολικής αναπαράστασης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος: Μια νέα ερευνητική προσέγγιση*, σελ: $91-132$. Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών. Τόμος Ι. Λευκωσία.

[16] Γεωργούλη Δ. Κ. (1939). *Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι. «Πλάτωνος Πολιτεία»*. Εισαγωγή, ερμηνεία και σημειώσεις. Εκδόσεις Δημ. Εμ. Αλεξίου. Αθήναι-Θεσσαλονίκη.

[17] Dedekind Richard (1963). *Essays on the theory of numbers*. Dover Publications, inc. New York.

[18] Derrida Jacques, E. Husserl (1966). *Η φαινομενολογία και το πέρας της μεταφυσικής*. Η σύγχρονη σκέψη, τ. 34, σελ: $181-200$.

[19] Dreyfus Tommy (2003). *Τι θεωρείται απόδειξη στην τάξη των μαθηματικών*. Πρακτικά $3^{ης}$ διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, σελ: $123-132$. Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[20] Engelking Ryszard & Sieklucki Karol (1992). *Topology. A geometric aprroach*. Heldermann Verlag Berlin.

[21] Gray Eddie, Pinto Marcia, Pitta Demetra & Tall David (1999). *Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 38, pp. $111-133$.

[22] Gray Eddie & Tall David (2001). *Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics*. PME 25.

[23] Fischbein Efraim (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. An educational Approach. Mathematics Education Library.

[24] Fischbein Efraim (1999). *Intuitions and schemata in mathematical reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 38, pp. 11 − 50.

[25] Fischbein Efraim (2001). *Tacit models and infinity*. Educational Studies in Mathematics, 48, pp. 309 − 329.

[26] Hadamard Jacques (1995). *Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά*. Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[27] Halmos R. Paul (1960). *Naive set theory*. Van Nostrand Reinhold Company.

[28] Harel Guershon & Tall David (1991). *The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics*. For the Learning of Mathematics, 11, 1, pp. 38 − 42.

[29] Heath L. Thomas (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol. 1, 2. Second edition. Dover publications, inc. New York.

[30] Hilbert D. (1995). *Θεμέλια της γεωμετρίας*. Εκδόσεις Τροχαλία. Αθήνα.

[31] Kamke E. (1963). *Θεωρία των συνόλων*. Εκδόσεις Α. Καραβια. Αθήνα.

[32] Κάππου Α. Δημητρίου (1962). *Μαθήματα αναλύσεως. Απειροστικός λογισμός*. Τεύχος Α΄. Έκδοση Β΄. Αθήνα.

[33] Κριτικού Ν. (1969). *Εισαγωγή στα ανώτερα μαθηματικά. Οι πραγματικοί αριθμοί*. Αθήνα.

[34] Kronfellner Manfred (2003). *Ορισμός εννοιών ως δραστηριότητες στην τάξη*. Πρακτικά $3^{ης}$ διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, σελ: 249 − 264. Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[35] Kuratowski Kazimierz (1972). *Introduction to set theory and topology*. Second English Edition. Pergamon Press.

[36] Lakoff George & Nunez E. Rafael (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

[37] Linchevski Liora & Sfard Anna (1994). *The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra*. Educational Studies in Mathematics, 26, pp. 191 – 228.

[38] Longo Giuseppe (1998). *The mathematical continuum: From intuition to logic*. Invited paper, in Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science (J. Petitot et al., eds.). Stanford University Press.

[39] Mankiewicz Richard (2002). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.

[40] Μυτιληναίος Μιχάλης (2003). *Λογική*. Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

[41] Νεγρεπόντης Σ. (2004 – 2005). Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων *«Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών»*. ΠΜΣ Διδακτικής των μαθηματικών. Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Μαθηματικών.

[42] Νεγρεπόντης Σ. (2005 – 2006). Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων *«Πλάτων - Μαθηματικά»*. ΠΜΣ Διδακτικής των μαθηματικών. Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Μαθηματικών.

[43] O'Connor C. M. (2001). *"Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion*. Educational Studies in Mathematics, 46, pp. 143 – 185.

[44] Πάπποος. *Συναγωγή*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[45] Παρμενίδης. *Παρμενίδου περι φύσεως*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[46] Πηχωρίδης Κ. Σ. (1996). *Απειροστικός Λογισμός Ι*. Σύγχρονη Εποχή Εκδοτική ΑΕΒΕ. Αθήνα.

[47] Πλάτων. *Θεαίτητος*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[48] Πλάτων. *Παρμενίδης*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[49] Πλάτων. *Παρμενίδης*. Άπαντα αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων. Πλάτωνος διάλογοι-6. Εισαγωγή, μετάφραση, σημειώσεις Δημ. Αναγνωστοπούλου. Εκδόσεις Πάπυρος, 1975.

[50] Πλάτων. *Πολιτεία*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[51] Poincare Henri (1997). *Η αξία της επιστήμης*. Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[52] Πρόκλος. *Σχόλια του εις πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[53] Ρούσσος Ν.Ευάγγελος (1982). *Ελεάτες*. Τα κείμενα. Δευκαλίων 33/34 ανάτυπο. Αθήνα.

[54] Ρουσόπουλος Γιώργος (1988). *Η εποπτεία στα μαθηματικά*. Νεοελληνική Παιδεία, σελ: $116 - 126$.

[55] Rucker Rudy (2004). *Το Άπειρο και ο νους*. Απόδοση στα ελληνικά: Κώστας Χατζηκυριάκου. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[56] Sfard Anna (1991). *On the dual nature of mathemetical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22, pp. $1 - 36$.

[57] Σιμπλίκιος. *Εις το Α της Αριστοτέλους Φυσικής Ακροάσεως*. Αρχαίο κείμενο από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).

[58] Σπύρου Παναγιώτης (1994). *Τοπολογία καμπυλών*. Σημειώσεις παραδόσεων. Ειδικά θέματα Άλγεβρας Γεωμετρίας. Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Μαθηματικών.

[59] Σπύρου Παναγιώτης (2005). *Επιστημολογία των μαθηματικών*. Σημειώσεις παραδόσεων. Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου Μαθηματικών.

[60] Σταμάτης Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετία-Στοιχεία*. Βιβλίο Ι. Τόμος Ι. ΟΕΔΒ.

[61] Tall David & Vinner Slomo (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151 – 169.

[62] Tall David (1995). *Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking*. Prenary Lecture, Conference of the international Group for the Psychology of Learning Mathematics, Vol. I, pp. 161 – 175.

[63] Tall David (2001). *Natural and formal infinities*. Educational Studies in Mathematics, 48, pp. 199 – 238.

[64] Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E.& Simpson A. (2000). *What is the object of the encapsulation of a prosess?*. Journal of Mathematical Behavior (JMB), 18 (2), pp. 223 – 241.

[65] Tall David & Tirosh (2001). *Infinity - the never-ending struggle*. Educational Studies in Mathematics, 48, pp. 129 – 136.

[66] Τουμάσης Μπάμπης (1999). *Σύγχρονη Διδακτική των μαθηματικών*. Εκδόσεις Gutenberg. Αθήνα.

[67] Vamvakoussi Xenia, Vosniadou Stella (2004). *Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach*. Learning and Instruction, 14, pp. 453 – 467.

[68] Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (in preparation). *How many numbers in a rational numbers interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line*. To appear in S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Foundational issues in conceptual change research.

[69] Vinner Slomo (2002). *Satisfying the need for certitude - intuition*. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. An International Journal, Vol. 1 (1), pp. 1 – 10.

[70] Vlastos Gregory. *Σημείωση για το βέλος του Ζήνωνα*. 11 Δευκαλίων, σελ: 301 – 318. Περιοδική έκδοση του Κέντρου Φιλοσοφικών Ερευνών.

[71] Walter Rudin (2000). *Αρχές μαθηματικής αναλύσεως*, (σελ: 22-31). Εκδόσεις Leader Books.

[72] Weyl Hermann (1987). *The continuum: A critical examination of the foundation of analysis*. Translated by Stephen Pollard & Thomas Bole. Dover Publications, inc. New York.

[73] Whitehead N.A. (1975). *The organisation of thought*. Greenwood Presss.

[74] Zeki Semir (2002). *Εσωτερική όραση. Μια εξερεύνηση της τέχνης και του εγκεφάλου*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[75] Ζερβός Παναγιώτης (1996). *Απειροστικός λογισμός*. Εκδόσεις Α. Καραβια. Αθήνα.

[76] Zervos P. S. (1972). *On the development of mathematical intuition; on the genesis of geometry; further remarks*. Tensor, N. S. Vol. 26.