ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Διδακτικό Συμβόλαιο – Στάσεις και Πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά και επίλυση ασυνήθιστων αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων

Διπλωματική εργασία:
ΚΑΓΚΟΥΡΑ ΘΕΩΝΗ
Α.Μ.:Δ200434

Επιβλέπων καθηγητής:
ΓΑΓΑΤΣΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
Καθηγητής της Διδακτικής των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής
Κοσμήτορας της Σχολής Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου

Ιούνιος 2008

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ σελ.. 4

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ σελ. 6

2.1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ σελ. 6

2.1.1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΕΣ σελ. 6

2.1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ. 9

2.1.3 ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΡΗΞΗΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟΥ σελ.14

2.1.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΤΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ σελ. 23

2.2 ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ σελ. 27

2.2.1 ΟΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ σελ . 27

2.2.2 ΟΙ ΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ σελ. 31

2.2.3 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ. 34

2.2.4 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ. 35

3. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ σελ. 36

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ σελ. 39

4.1 ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ: ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α) σελ. 39

4.2 ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ: ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Β) σελ. 50

4.3 ΔΕΥΤΕΡΗ ΦΑΣΗ: ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ - Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (ΔΟΚΙΜΙΟ Γ) σελ. 64

4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΦΑΣΗΣ (ΔΟΚΙΜΙΑ Β ΚΑΙ Γ) σελ. 78

4.5 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α) ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Β) σελ. 86

4.6 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α) ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Γ) σελ. 99

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ σελ. 109

5.1 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ σελ.109

5.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ.110

5.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ – ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ σελ. 111

5.4 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ. 112

5.5 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ σελ. 112

6. ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ σελ. 113

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ σελ. 114

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ σελ. 122

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα αποτελούν ένα σημαντικό τμήμα της μαθηματικής πρωτοβάθμιας κυρίως εκπαίδευσης. Τον κυριότερο λόγο γι' αυτό αποτελεί η εκπαίδευση των μαθητών ώστε να εφαρμόσουν τις δεξιότητες με τις οποίες τους έχει εφοδιάσει η τυπική γνώση των μαθηματικών στο σχολείο, σε καταστάσεις που αφορούν στην καθημερινή ζωή.
Η εφαρμογή των μαθηματικών στη λύση προβλημάτων που αφορούν στην καθημερινότητα, με άλλα λόγια η μαθηματική μοντελοποίηση, αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία η οποία περιλαμβάνει αρκετές φάσεις. Λίγο-πολύ όλοι οι ερευνητές που ασχολούνται με το θέμα (π. χ. Burkhardt, 1994; Mason, 2001; Blum & Niss, 1991; Verscaffel, Greer & De Corte, 2000), συμφωνούν ότι οι φάσεις αυτές περιλαμβάνουν: την κατανόηση της κατάστασης που περιγράφεται λεκτικά, ώστε να γίνει μια εσωτερική αναπαράστασή της, την κατασκευή ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου με βάση τα στοιχεία και τις σχέσεις που περιγράφονται από το κείμενο του προβλήματος, την εκτέλεση των πράξεων που περιλαμβάνονται σ' αυτό το μαθηματικό μοντέλο, έτσι ώστε να καταλήξουμε σε κάποιο μαθηματικό αποτέλεσμα, την ερμηνεία του αποτελέσματος αυτών των πράξεων σε σχέση με την αρχική κατάσταση, ώστε να φθάσει κανείς σε κάποια ή κάποιες λύσεις της κατάστασης που περιγράφεται στο πλαίσιο του προβλήματος, αξιολόγηση και έλεγχος αυτής της λύσης ή λύσεων, και τέλος την ανακοίνωση αυτής της λύσης ή λύσεων αυτού του προβλήματος της καθημερινής ζωής. Προφανώς, αυτή είναι μια κυκλική διαδικασία, στην οποία ο κατασκευαστής του μοντέλου, πρέπει να σκεφτεί πολύ προσεκτικά, ποια στοιχεία της κατάστασης που περιγράφεται λεκτικά θα συμπεριλάβει στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου. Πρέπει να ισορροπήσει ανάμεσα στην υπερβολική πολυπλοκότητα και την υπεραπλούστευση, μια και η λύση ενός λεκτικού προβλήματος αναγκάζει τον μαθητή να μετακινηθεί από κάποιο γλωσσικό κώδικα σε κάποιο συμβολικό κώδικα και αντιστρόφως.
Για πολύ καιρό, τα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα έπαιζαν το ρόλο του συνδετικού κρίκου ανάμεσα στα μαθηματικά του σχολείου και την καθημερινή ζωή, χωρίς κάποιου είδους κριτική ή έλεγχο της αποδοτικότητας τους ως προς το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Στη δεκαετία του 1970, έγιναν προσπάθειες από τους ερευνητές να απομονωθούν οι παράγοντες που έκαναν τα λεκτικά προβλήματα περισσότερο ή λιγότερο δύσκολα για τους μαθητές. Αυτές οι έρευνες βασίζονταν κυρίως σε στατιστικές αναλύσεις. Στη δεκαετία του 1980,

υπήρξε μια σειρά μελετών που βασίζονταν σε μεμονωμένες περιπτώσεις, οι οποίες περιελάμβαναν συνεντεύξεις, καθώς και τη λύση προβλημάτων με πρωτόκολλα της μορφής «σκέψου φωναχτά», για να διαπιστωθούν οι διαφορές προσέγγισης ενός προβλήματος από έμπειρους και άπειρους λύτες. Αυτές έδειξαν ότι οι αδύνατοι λύτες δεν έγιναν καλύτεροι με το να αντιγράφουν αυτό που έκαναν οι δυνατοί λύτες.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων είκοσι χρόνων, πολλοί ερευνητές από διάφορες ειδικότητες, όπως μαθηματικοί, ψυχολόγοι, γλωσσολόγοι, ανθρωπολόγοι και θεωρητικοί της εκπαίδευσης, ισχυρίστηκαν ότι η τρέχουσα πρακτική σχετικά με τη χρήση των λεκτικών προβλημάτων στα μαθηματικά του σχολείου κάθε άλλο παρά προάγει την ουσιαστική μαθηματική μοντελοποίηση. Αντί να λειτουργούν σαν ρεαλιστικό πλαίσιο το οποίο προκαλεί, ή ακόμη και αναγκάζει τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη κοινή λογική και την εμπειρία τους από την αληθινή ζωή, τα σχολικά αριθμητικά λεκτικά προβλήματα έχουν μετατραπεί σε τεχνητές σπαζοκεφαλιές, που προσλαμβάνονται από τα παιδιά σα να μην έχουν καμία σχέση με τη καθημερινότητα. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι το να εφαρμόζουν την κοινή λογική και να κάνουν ρεαλιστικές διαπιστώσεις, όπως συμβαίνει έξω από το σχολείο, περισσότερο εμποδίζει παρά βοηθάει στο να φθάσουν στη σωστή απάντηση σε ένα τυπικό σχολικό πρόβλημα. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση ενός Ιταλού μαθητή της ΣΤ Δημοτικού σε έρευνα του D' Amore (1997): Σημαντικό δεν είναι να καταλαβαίνεις. Σημαντικό είναι να λύσεις το πρόβλημα» (Γαγάτσης et al., 2004).

Εμπειρικές μελέτες έδειξαν, ότι οι μαθητές έχουν αναπτύξει μια προσέγγιση της εφαρμογής των μαθηματικών στα λεκτικά προβλήματα, η οποία δεν περιλαμβάνει καμιά ουσιαστική σκέψη πάνω στις συνθήκες που περιγράφονται στο κείμενο του προβλήματος, παρά μόνον βασίζονται σε λέξεις κλειδιά για να κάνουν κάποια ή κάποιες μαθηματικές πράξεις.

Το δε αποτέλεσμα αυτής της πράξης ή πράξεων, θεωρείται και η απάντηση του προβλήματος, χωρίς να μεσολαβεί κανενός είδους αξιολόγηση του αριθμητικού αποτελέσματος σε σχέση με το πλαίσιο του προβλήματος.

Ακόμη, τα τελευταία πενήντα χρόνια η παιδαγωγική έρευνα δίνει όλο και περισσότερη έμφαση στην κατανόηση του συναισθηματικού τομέα και στη σχέση του με τη μαθησιακή διαδικασία. Οι μέχρι σήμερα έρευνες καταδεικνύουν ότι ο συναισθηματικός τομέας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης και συνεπιδρά με το γνωστικό τομέα, επηρεάζοντας την επίδοση του ατόμου σε διάφορα θέματα, ανάμεσα στα οποία και η επίλυση προβλήματος (De Bellis & Goldin, 1999).

Η παραδοχή ότι οι ενέργειες των ατόμων επηρεάζονται πιο πολύ από τα συναισθήματα, τις πεποιθήσεις και τις προσδοκίες τους παρά από τις

γνώσεις τους, καθώς και η άποψη ότι οι συναισθηματικές ικανότητες αναπτύσσονται, και κατά συνέπεια διδάσκονται (Goldin, 1998), υποδεικνύουν την αναγκαιότητα συμπερίληψης στόχων από το συναισθηματικό τομέα, σε όλα τα προγράμματα της εκπαίδευσης.

Σκοπός της έρευνας μας, ήταν αφενός μεν να διαπιστώσει την ύπαρξη Διδακτικού Συμβολαίου, αφετέρου, να ερευνήσει κατά πόσο η παράθεση γραπτών παραδειγμάτων στην αρχή ενός δοκιμίου με ασυνήθιστα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα θα επέφερε ρήξη του Συμβολαίου. Επίσης να διαπιστώσει αν όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού και της Α Γυμνασίου, η επιτυχία των παιδιών στα προβλήματα, τυπικά ή ασυνήθιστα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν, συνδέονται με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος, καθώς επίσης αν υπάρχουν διαφορές ως προς τα θέματα αυτά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ

2.1.1 Διδακτικό Συμβόλαιο: Θεωρητικά στοιχεία και έρευνες

Ο τομέας της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετίζεται με πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όμως έχει αναπτύξει και άλλες θεωρητικές μεθόδους και έννοιες, που αφορούν στη φύση και την ιδιαιτερότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών (Γαγάτσης, 1992). Έτσι, στο πλαίσιο της προσπάθειας για να ερμηνευθούν τα λάθη και η συμπεριφορά των παιδιών, αναπτύχθηκε η έννοια του «Διδακτικού Συμβολαίου».
Ο Brousseau (1984) δίνει τον εξής ορισμό για το Διδακτικό Συμβόλαιο: «Καλούμε Διδακτικό Συμβόλαιο το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένονται από τον μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από τον διδάσκοντα. Αυτό το συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν, εν μέρει ρητά αλλά κυρίως υπόρρητα, αυτά που ο συμμετέχων στη διδακτική σχέση θα διαχειρίζεται, και για τα οποία θα είναι με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο υπόλογος απέναντι στον άλλο» (Henry, 2003).
Ο M.Henry (2003) κάνει μερικές παρατηρήσεις που ξεκαθαρίζουν αυτόν τον ορισμό. Αναφέρει ότι το διδακτικό συμβόλαιο εξαρτάται από τη στρατηγική διδασκαλίας που έχει υιοθετηθεί. Δηλαδή ο τρόπος εργασίας που απαιτεί ο διδάσκων από τους μαθητές, οι παιδαγωγικές επιλογές του, η επιστημολογία του καθώς και οι διδακτικοί του στόχοι, είναι τμήμα των βασικών χαρακτηριστικών του Διδακτικού Συμβολαίου. Ακόμη, μια πολύ βασική παρατήρηση είναι ότι το Διδακτικό Συμβόλαιο εκδηλώνεται,

όταν παραβιαστεί από έναν από τους «εταίρους» της διδακτικής σχέσης. Επίσης, παραθέτει κάποιους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου που ισχύουν, αν και όχι ρητά εκφρασμένοι, στη βασική εκπαίδευση, οι οποίοι συνοψίζονται στα εξής:
-Στα μαθηματικά, ένα πρόβλημα λύνεται κάνοντας πράξεις.
-Όλα τα προβλήματα έχουν λύση.
-Η λύση αυτή είναι ένας μοναδικός και ακριβής αριθμός.
-Όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για τη λύση ενός προβλήματος παρατίθενται στην εκφώνηση.
-Η εκφώνηση οφείλει να μην έχει περιττά στοιχεία.
-Οι ερωτήσεις που τίθενται δεν έχουν σχέση με την καθημερινή πραγματικότητα, ακόμα και αν εμφανίζονται ως τέτοιες. Εξυπηρετούν μόνο στο να διαπιστωθεί αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει κάτι.
Γενικά, ο όρος διδακτικό συμβόλαιο, αναφέρεται «σε ένα σύνολο κανόνων και αμοιβαίων προσδοκιών το οποίο συνδέει τους μετέχοντες στη διδακτική πράξη. Επιβάλλει το πώς πρέπει να συμπεριφέρονται οι μαθητές και οι δάσκαλοι στο μάθημα των μαθηματικών, πώς πρέπει να σκέφτονται και να επικοινωνούν μεταξύ τους, τι ερωτήσεις επιτρέπονται να γίνονται από το δάσκαλο και τι είδους απαντήσεις αναμένονται από τους μαθητές» (Γαγάτσης &Μάρκου, 2002).
Η μάθηση όμως επιτυγχάνεται, όχι όταν το Συμβόλαιο τηρείται, αλλά όταν επέρχεται η ρήξη του (Brousseau, 1984, 1990, 1997).
Η γένεση της έννοιας του Διδακτικού Συμβολαίου πραγματοποιήθηκε το 1980, όταν 76 από τους 97 μαθητές σε ένα δημοτικό σχολείο της Γαλλίας, έδωσαν απάντηση στο περίφημο πρόβλημα του καπετάνιου: «Πάνω σε ένα καράβι υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;»(Γαγάτσης, 1992), συνδυάζοντας τους αριθμούς που δόθηκαν στο πρόβλημα. Ακόμη διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά είναι απολύτως πρόθυμα να λύσουν ένα πρόβλημα, ακόμα και όταν δεν υπάρχει καμία ερώτηση, όπως αυτό που δόθηκε από τον Kilpatrick (1987) σε παιδιά 5 έως 12 ετών: «Ο κ. Λόρενς και 3 συνάδελφοι έφυγαν από το Μπέλφιλντ στις 9 και ταξίδεψαν για 380 χιλ. μέχρι την Φρακφούρτη, κάνοντας μία στάση για 30 λεπτά»(D' Amore& Martini, 1999).
Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν δέχτηκαν ότι αυτός ο παραλογισμός οφείλεται σε έλλειψη γνώσεων ή έλλειψη κοινής λογικής από την πλευρά των μαθητών, αλλά σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε Διδακτικό Συμβόλαιο. Οι μελέτες για το Διδακτικό Συμβόλαιο έχουν δείξει, ότι αυτή η φαινομενική έλλειψη κοινής λογικής, προκύπτει από τις πρακτικές που αναπτύσσονται μέσα στην τάξη, και αποκτά πολύ βαθιές ρίζες με τη συνήθεια και την πάροδο των χρόνων. Οι Baldisseri, D' Amore et al. (1994), έδωσαν το ακόλουθο αριθμητικό πρόβλημα σε 47 παιδιά προσχολικής ηλικίας: «Η Γκρέτα πήρε 6 μπαλόνια. Τα 2

ξεφούσκωσαν. Πόσα μπαλόνια έχει η Γκρέτα;» Ο σκοπός της έρευνας ήταν να διαπιστωθεί, αν η προσοχή των παιδιών, θα εστιαζόταν στα μαθηματικά στοιχεία του προβλήματος ή στις αφηγηματικές έννοιες, καθώς το κείμενο μπορούσε πολύ εύκολα να προκαλέσει συγκινησιακές αντιδράσεις. Ακόμη, οι ερευνητές ήθελαν να διαπιστώσουν, αν τα παιδιά θα θεωρούσαν απαραίτητο, να βρουν οπωσδήποτε ένα αποτέλεσμα. Διαπιστώθηκε, ότι παιδιά ηλικίας 5-6 ετών, ήταν ικανά να κάνουν τη σχετική αριθμητική πράξη και να απαντήσουν με επιτυχία στο πρόβλημα. Οι απαντήσεις τους ήταν τεσσάρων τύπων: Υπήρξαν παιδιά που ζωγράφισαν τα μπαλόνια (σημειωτική απάντηση), παιδιά που ζωγράφισαν και τη Γκρέτα εκτός από τα μπαλόνια δίνοντας έτσι περισσότερες πληροφορίες (σημειογραφική απάντηση), παιδιά που ως απάντηση έδωσαν μόνο ένα αριθμό (συμβολική απάντηση), και άλλα που συνδύασαν σημειογραφική με συμβολική απάντηση (Γαγάτσης, Λοίζου et al, 2006).

Μόνο 6 από τα 47 παιδιά χρησιμοποίησαν γραφικό σύμβολο για να εκφράσουν έναν αριθμό, και από αυτά, τα 3, έκαναν μαζί με το σύμβολο και ένα σχέδιο. Σημαντικό στοιχείο είναι και το γεγονός, ότι αυτά τα παιδιά που έδωσαν συμβολική απάντηση, προσπαθούσαν να την επιβεβαιώσουν μέσω της συμπεριφοράς της εκπαιδευτικού και των άλλων παιδιών. Η έρευνα αυτή κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας δεν θεωρούν απαραίτητο να δώσουν αριθμητική λύση σε ένα λεκτικό πρόβλημα, «ούτε νοιώθουν πίεση για αριθμητικό αποτέλεσμα πάση θυσία. Η προσοχή των παιδιών επικεντρώνεται στην αφηγηματική και στη συγκινησιακή πλευρά της κατάστασης». Έρευνα των D' Amore et al(1994) έδειξε, ότι η επίδραση της αρνητικής πλευράς του Διδακτικού συμβολαίου, αρχίζει με την είσοδο του παιδιού στο δημοτικό σχολείο (Γαγάτσης, Λοίζου et al, 2006).

Διάφορες έρευνες πιστοποιούν την ύπαρξη του Διδακτικού Συμβολαίου: Το παρακάτω πρόβλημα τέθηκε σε παιδιά 13 χρονών στις Η.Π.Α. στο Third National Assessment of Educational Progress το 1983: Ένα στρατιωτικό λεωφορείο χωράει 36 στρατιώτες. Αν πρέπει να μεταφερθούν 1128 στρατιώτες, πόσα λεωφορεία χρειάζονται;
Από τους 45000 μαθητές, το 70% των μαθητών έκαναν σωστά τη διαίρεση και βρήκαν πηλίκο 31 και υπόλοιπο 12. Από αυτούς μόνο το 23% έδωσε την απάντηση 32 λεωφορεία. Το 19% απάντησε 31 λεωφορεία και το 29% "31 λεωφορεία και περισσεύουν 12."
Οι ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα παιδιά φαίνεται να ακολουθούν κανόνες και σύμβολα με τα οποία τα έχει εφοδιάσει η καθημερινή δίαιτα της λύσης των στερεότυπων λεκτικών προβλημάτων στο σχολείο, χωρίς να σκέπτονται και να αναλύουν πώς λειτουργούν αυτοί οι κανόνες και αυτά τα σύμβολα στο συγκεκριμένο πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζονται. Αυτοί

οι ισχυρισμοί των ερευνητών φαίνεται να επαληθεύονται από νεώτερες εμπειρικές έρευνες σχετικά με το αν τα παιδιά, όταν απαντούν σε λεκτικά προβλήματα, λαμβάνουν υπόψη τους την κοινή λογική, καθώς και ευλογοφανείς και οικείες ρεαλιστικές καταστάσεις, που έγιναν σε παιδιά 10-11 χρονών :
Στη Βόρεια Ιρλανδία από τον Caldwell το 1995 .
Στο Βέλγιο από τους Verschaffel, De Corte, & Lasure το 1994 .
Στη Βόρεια Ιρλανδία από τον Greer το 1993 σε παιδιά 13-14 χρόνων.
Στη Σουηδία από τον Reusser το 1995.
Μερικά από τα προβλήματα που τέθηκαν ήταν κοινά και περιγράφονται παρακάτω. Τα ποσοστά αναφέρονται σε παιδιά, που η απάντησή τους περιείχε **οποιαδήποτε** ένδειξη ότι είχαν λάβει υπόψη τους τα ρεαλιστικά δεδομένα.
Το πρόβλημα των στρατιωτικών λεωφορείων (C 65%, V 37%, G 63%, R 49%)
Ο δρομέας: Ο καλύτερος χρόνος ενός αθλητή για να τρέξει απόσταση ενός μιλίου είναι 4 λεπτά και 7 δευτερόλεπτα. Περίπου πόσο χρόνο θα χρειαζόταν για να τρέξει 3 μίλια;
(C 0%, V 2%, G 6%, R 3%)
Το φλασκί: Ένα φλασκί το γεμίζουμε από μια βρύση που βγάζει συνεχώς την ίδια ποσότητα νερού. Αν το νερό έχει φτάσει σε ύψος 2,4 cm μετά από 10 δευτερόλεπτα, περίπου πόσο θα είναι το ύψος του νερού μετά από 10 δευτερόλεπτα; (C not used, V 3%, G 6%, R 0%)
Το σκοινί: Κάποιος θα ήθελε να έχει ένα σκοινί αρκετά μακρύ ώστε να μπορεί να φθάσει σε ένα σημείο που απέχει 12 μέτρα από ένα άλλο. Όμως έχει μόνο κομμάτια από σκοινί μήκους 1,5 μέτρου. Πόσα τέτοια κομμάτια από σκοινί θα χρειαστεί για να φτιάξει το σκοινί που θα ήθελε;
(C 1%, V 0%, G12%, R 6%)
Ανάλογη έρευνα με παρόμοια αποτελέσματα έγινε στην Ιαπωνία, από τους Yoshida et al το 1997.
Όλες αυτές οι έρευνες κατέδειξαν ότι η επικρατούσα κατάσταση μεταξύ των μαθητών είναι να απαντούν σε τέτοιου είδους λεκτικά προβλήματα, αδιαφορώντας πλήρως για το αν αυτή η απάντηση συμφωνεί με την κοινή λογική, και να αποκλείουν πλήρως τις ρεαλιστικές διαπιστώσεις από την ερμηνεία των αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων. **Επειδή τα ευρήματα των ερευνών σε όλες αυτές τις χώρες ήταν πανομοιότυπα, οι Verscaffel, Greer & De Corte (2000) υποστήριξαν ότι πρόκειται για φαινόμενο παγκόσμιας έκτασης.**

2.1.2 Επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων

Οι Verschaffel et al. (2000) ταξινομούν τα λεκτικά προβλήματα σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

Α. Στα συνηθισμένα (Standard), που λύνονται από τους μαθητές χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες, συνδυάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα με μία ή περισσότερες αριθμητικές πράξεις. Τέτοιου είδους προβλήματα (S) κυριαρχούν στη διδακτική πρακτική.
Β. Στα ασυνήθιστα ή προβληματικά (Problematic) προβλήματα. Σ' αυτά το μαθηματικό μοντέλο δεν είναι εμφανές, εκτός αν ληφθούν υπόψη οι ρεαλιστικές καταστάσεις που εγείρονται από το πλαίσιο του προβλήματος. Τέτοιου είδους προβλήματα (P) σπανίως συναντώνται στα σχολικά εγχειρίδια και δεν χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία από τους μαθηματικούς και τους δασκάλους.
Το φαινόμενο του Διδακτικού Συμβολαίου είναι ιδιαίτερα φανερό όταν οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν αντί των τυπικών σχολικών προβλημάτων ασυνήθιστα προβλήματα. Οι D' Amore και Sandri (1994a) αναφέρουν 4 κατηγορίες ασυνήθιστων προβλημάτων:
-Μη πραγματικά προβλήματα δηλαδή εκείνα που περιγράφουν μια μη ρεαλιστική κατάσταση.
«Μια νοικοκυρά αγόρασε 1000 κιλά μήλα, για να φτιάξει μηλόπιτα. Πλήρωσε 30 € για κάθε κιλό. Πόσα χρήματα πλήρωσε;»
-Αντιφατικά προβλήματα.
«Σε ένα τετράγωνο δωμάτιο, οι δύο πλευρές είναι 4μ. και 6μ. Ποια είναι η περίμετρός του;»
-Απροσδόκητα προβλήματα.
«Τα δύο τμήματα της Α τάξης ενός σχολείου έχουν 45 μαθητές, ενώ τα δύο τμήματα της Β τάξης έχουν 50 μαθητές. Πόσα τμήματα Α και Β τάξης έχει συνολικά το σχολείο αυτό;»
-Αδύνατα προβλήματα.
Δηλαδή προβλήματα που έχουν ελλιπή δεδομένα, είτε είναι αδύνατα από τη φύση τους (Βρείτε 3 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που το άθροισμά τους να μην είναι διαιρετό διά του 3), είτε είναι αδύνατα λόγω του υψηλού επιπέδου των απαιτήσεών τους σε σχέση με την ηλικία των μαθητών (Γαγάτσης, Λοίζου et al, 2006).
Μία διαφορετική κατηγοριοποίηση για τα ασυνήθιστα προβλήματα προτείνεται από τους Verschaffel, Greer,& De Corte (2000).
-Προβλήματα του τύπου της «ηλικίας του καπετάνιου».
-Προβλήματα διαίρεσης όπου χρειάζεται να γίνει ερμηνεία του υπόλοιπου με βάση την κοινή λογική (DWR):
Χρειάζεται να μεταφερθούν 1128 στρατιώτες με στρατιωτικά λεωφορεία που το καθένα από αυτά χωράει 36 στρατιώτες. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;
-Ψευδοαναλογικά προβλήματα:
Ένα αγόρι είναι 10 χρονών και έχει ύψος 1 μέτρο και 40 εκατοστά. Ποιο θα είναι το ύψος του όταν γίνει 20 χρονών;

Συνολικά θα μπορούσε να παραθέσει κανείς 6 κατηγορίες ασυνήθιστων προβλημάτων (Γαγάτσης, 2007):
-Προβλήματα αδύνατα με τη λογική (ηλικία του καπετάνιου).
-Προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο(DWR).
-Προβλήματα απροσδόκητα.
-Αντιφατικά προβλήματα.
-Μη ρεαλιστικά προβλήματα.
-Ψευδοαναλογικά προβλήματα.
Η έρευνά μας βασίζεται σε προβλήματα, αρκετά από τα οποία είναι αυτών των κατηγοριών. Πιο συγκεκριμένα από τα συνολικά 12 ασυνήθιστα προβλήματα στα οποία καλούνται οι μαθητές να απαντήσουν, κάποια είναι προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο, κάποια είναι ψευδοαναλογικά, 2 επιδέχονται πολλαπλές λύσεις, 2 δεν χρειάζονται καμία αριθμητική πράξη παρά μόνον χρήση της κοινής λογικής, και κάποιων άλλων η απάντηση είναι μοναδικός ακριβής αριθμός ο οποίος όμως προκύπτει με λογική επεξεργασία του αποτελέσματος της αριθμητικής πράξης, διότι οι ρεαλιστικές συνθήκες πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Σαν τυπικό παράδειγμα των ερευνών που προαναφέρθηκαν, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η έρευνα των Verschaffel, de Corte, Lasure το 1994. Σε αυτήν πήραν μέρος 75 μαθητές του Βελγίου, 10-11 ετών, αγόρια και κορίτσια, από 3 τάξεις πέμπτης Δημοτικού που ανήκαν σε 3 διαφορετικά σχολεία, τα οποία βρίσκονται σε 3 διαφορετικά μέρη της Φλάνδρας. Συνεντεύξεις με τους δασκάλους των τάξεων έδειξαν ότι οι μαθητές συχνά αντιμετώπιζαν τα παραδοσιακά λεκτικά προβλήματα αλλά όχι και προβλήματα που περιγράφουν μια αυθεντικά ρεαλιστική κατάσταση, και γενικότερα το αντικείμενο της ρεαλιστικής μοντελοποίησης δεν είχε διδαχθεί συστηματικά από τους δασκάλους. Οι μαθητές που πήραν μέρος στη μελέτη αυτή έπρεπε στο γνωστό περιβάλλον της τάξης τους και στο πλαίσιο ενός παραδοσιακού τεστ, να λύσουν με μολύβι και χαρτί 10 ζεύγη προβλημάτων. Χρησιμοποιώντας μια μεθοδολογία παράλληλη με την έρευνα του Greer το 1993, το πρώτο πρόβλημα του ζευγαριού, χαρακτηρίζεται από τους ερευνητές ως στάνταρ πρόβλημα στο οποίο η σύνδεση της κατάστασης και της αντίστοιχης μαθηματικής πράξης είναι απλή και άμεση. Ο μαθητής έπρεπε απλώς να κάνει μία ή περισσότερες αριθμητικές πράξεις με τούς δοσμένους αριθμούς (π.χ. ο Στηβ αγόρασε 5 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;).
Το δεύτερο χαρακτηρίζεται ως παράλληλο πρόβλημα, όπου οι ρεαλιστικές συνθήκες που περιγράφονται από το κείμενο παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη λύση του προβλήματος (π.χ. ο Στηβ αγόρασε 4

σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2.5 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;). Αυτά τα 20 προβλήματα δόθηκαν στους μαθητές σε δύο φάσεις που η κάθε μία περιείχε τα 5 στάνταρ προβλήματα των 5 ζευγών και τα 5 παράλληλα προβλήματα των άλλων 5 ζευγών με διάλειμμα μιας ώρας τουλάχιστον στο ενδιάμεσο. Η παρουσίαση των προβλημάτων έγινε από το δάσκαλο ή τη δασκάλα της τάξης στο πλαίσιο ενός συνηθισμένου μαθήματος μαθηματικών. Δεν δόθηκαν ιδιαίτερες οδηγίες, αλλά τα παιδιά ενθαρρύνθηκαν να γράψουν την απάντηση και πώς έφθασαν σ' αυτήν, ή να εξηγήσουν τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν, ή να γράψουν γιατί δεν μπορούν να λύσουν το πρόβλημα. Ως προς τα αποτελέσματα: 84% των στάνταρ προβλημάτων λύθηκαν σωστά, ενώ το 17% των απαντήσεων των παράλληλων προβλημάτων μπόρεσαν να χαρακτηρισθούν ως ρεαλιστικές είτε γιατί οι μαθητές έγραψαν μια ρεαλιστική απάντηση, είτε γιατί έκαναν ένα ρεαλιστικό σχόλιο. Από τις 750 συνολικά απαντήσεις που δόθηκαν στα στάνταρ προβλήματα, μόνον 8 (1%) περιείχαν κάποιο ρεαλιστικό σχόλιο και προσμετρήθηκαν στις ρεαλιστικές απαντήσεις. Δόθηκαν δε από εκείνους τούς μαθητές που έδωσαν τις περισσότερες ρεαλιστικές απαντήσεις στα παράλληλα προβλήματα.

Για παράδειγμα στο στάνταρ πρόβλημα: «Ένας μανάβης έχει δύο καφάσια με μήλα. Το ένα περιέχει 60 μήλα και το άλλο 90. Βάζει όλα τα μήλα μαζί σε ένα μεγαλύτερο κιβώτιο. Πόσα μήλα περιέχει το μεγαλύτερο κιβώτιο;»

Κάποιος μαθητής έδωσε σε αυτό το στάνταρ πρόβλημα την εξής απάντηση: «Αν το μεγαλύτερο κιβώτιο είναι άδειο τότε η απάντηση είναι 170 μήλα. Αλλά αν το μεγαλύτερο κιβώτιο δεν ήταν άδειο τότε το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί».

Παρακάτω παρατίθενται κάποια από τα παράλληλα προβλήματα:

"Ο Κάρλ έχει 5 φίλους και ο Γιώργος έχει 6 φίλους. Αποφάσισαν να διοργανώσουν ένα κοινό πάρτυ. Κάλεσαν όλους τους φίλους τους. Όλοι οι φίλοι ήταν παρόντες. Πόσοι ήταν οι φίλοι που παραβρέθηκαν στο πάρτυ;"

"Ποια θα είναι η θερμοκρασία του νερού μέσα σε ένα δοχείο στο οποίο έχουμε βάλει 1 λίτρο νερού θερμοκρασίας 80 βαθμών και 1 λίτρο νερού θερμοκρασίας 40 βαθμών;"

(80% των μαθητών αυτής της έρευνας έδωσαν τις απαντήσεις 11 και 120 αντίστοιχα, χωρίς κανένα σχόλιο)

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι απαντήσεις στο έβδομο από τα παράλληλα προβλήματα: «ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και ένα κιβώτιο με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;»

Εικοσιπέντε παιδιά απάντησαν ότι κάθε παιδί πήρε 4.5 μπαλόνια, σαν αποτέλεσμα της διαίρεσης του 18 με το 4. Από αυτά τα 25 μόνο 2

έγραψαν κάποιο σχόλιο που έδειχνε ότι αντιλαμβάνονταν πως αυτή η απάντηση δεν έχει νόημα, όπως «φοβάμαι ότι θα είναι δύσκολο να φουσκώσουν τα μπαλόνια που είναι κομμένα στη μέση».
Άλλοι 7 μαθητές έκαναν λάθος στη διαίρεση. Από αυτούς 2 έκαναν ένα ανάλογο ρεαλιστικό σχόλιο. Τέσσερις δεν έδωσαν καμία απάντηση και 39 έδωσαν τη ρεαλιστική απάντηση 4, από τους οποίους οι 26 τη συνόδευσαν με κάποιο σχόλιο. Συνολικά το 59% των μαθητών έδωσε κάποιας μορφής ρεαλιστική απάντηση.
Ένα ανάλογο πρόβλημα έθεσε και ο Davis (1989). Αναφέρει το εξής περιστατικό: έχει δώσει από 5 μπαλόνια σε κάποια ζεύγη παιδιών για να τα μοιραστούν μεταξύ τους τα μέλη κάθε ζευγαριού. Και ένα αγόρι έκοψε με το ψαλίδι το πέμπτο μπαλόνι για να το μοιραστεί με το ζευγάρι του. Το ερώτημα που εγείρει ο ερευνητής (1989, σ.144) είναι: το αγόρι με αυτή του την ενέργεια πίστευε στ' αλήθεια ότι έτσι θα μοιραστούν πραγματικά τα μπαλόνια ή προσπαθούσε να εναρμονιστεί με τις πρακτικές που είχε δει να αναπτύσσονται μέσα στην τάξη;(Greer, 1997)
Ένα ακόμη παράλληλο πρόβλημα στην έρευνα των Verschaffel, de Corte, Lasure το 1994, έλεγε : «Η Alice και ο Bruce πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Bruce μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Alice σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;»
Οι Treffers και de Moor (1990) χρησιμοποίησαν το ίδιο πρόβλημα για να δείξουν ότι η σχέση μεταξύ μιας προβληματικής κατάστασης όπως περιγράφεται στο κείμενο, και της λανθασμένης αριθμητικής πράξης που επιλέγεται από τα παιδιά να γίνει για να λυθεί το πρόβλημα, οφείλεται στα τυπικά λεκτικά προβλήματα που παραδοσιακά διδάσκονται τα παιδιά σε καθημερινή βάση μέσα στην τάξη.
Υπάρχουν τρεις λύσεις στο πρόβλημα της απόστασης: Αν τα σπίτια των παιδιών είναι εκατέρωθεν του σχολείου η απάντηση είναι 25 χιλιόμετρα, και η πράξη που πρέπει να γίνει είναι πρόσθεση. Αν τα σπίτια είναι και τα δύο στην ίδια πλευρά ως προς το σχολείο, με το σπίτι της Alice ανάμεσα, η πράξη είναι αφαίρεση και η απάντηση είναι 9 χιλιόμετρα. Αν όμως τα σπίτια των παιδιών και το σχολείο, αποτελούν τις κορυφές ενός σκαληνού τριγώνου, τότε η απάντηση είναι άγνωστη.
Από τους 75 μαθητές οι 72 απάντησαν είτε 25, είτε 9 χιλιόμετρα, χωρίς καμία παραπέρα εξήγηση. Ένας μαθητής απάντησε 17, τον μεγαλύτερο από τους δοσμένους αριθμούς, επίσης χωρίς εξήγηση. Δύο μαθητές έγραψαν ότι δεν μπορούσαν να λύσουν το πρόβλημα εξαιτίας της πιθανότητας διαφορετικών λύσεων. Δεν υπήρξαν μαθητές που να έγραψαν ότι το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, ανάλογα με τη θέση των στοιχείων που περιγράφονται στο κείμενο.

Αλλά και προβλήματα τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν ανατρέχοντας στη προσωπική εμπειρία των παιδιών, δεν έδωσαν καλύτερα αποτελέσματα. Τέτοιο ήταν το παρακάτω: Ο Rob γεννήθηκε το 1978. Τώρα έχουμε 1993. Πόσων χρονών είναι τώρα;
Η απάντηση εξαρτάται από την ακριβή ημερομηνία της γέννησης του Rob. Η αφαίρεση των δύο χρονολογιών δίνει την κατάλληλη απάντηση μόνο αν τα γενέθλια του Rob έχουν περάσει. Τα παιδιά γνώριζαν από την εμπειρία τους, ότι όσα έχουν γεννηθεί το 1978 δεν έχουν όλα την ίδια ηλικία μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Παρόλα αυτά προτίμησαν μια απλή αφαίρεση. Δεν ενεργοποιήθηκε η αίσθησή τους της προσωπικής εμπειρίας και της κοινής λογικής. Μόνο 2 μαθητές απάντησαν ότι ο Rob είναι 14 ή 15 χρονών. Και σχολίασαν: « 1978+15=1993. Όμως αν τα γενέθλιά του είναι σε έναν από τους μήνες που απομένουν είναι ακόμη 14 χρονών».

2.1.3 Ερμηνείες του φαινομένου και προσπάθειες ρήξης του Διδακτικού Συμβολαίου

Οι ερευνητές που πήραν μέρος στις έρευνες αυτές, συμφωνούν γενικά στο ότι η τάση των μαθητών οφείλεται στους εξής παράγοντες:
1)Στα στερεότυπα λεκτικά προβλήματα με τα οποία ασχολούνται καθημερινά μέσα στην τάξη και τα οποία πάντοτε μπορούν να λυθούν με την εφαρμογή μίας ή περισσότερων αριθμητικών πράξεων συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται από το κείμενο. Όταν η λύση προβλήματος γίνεται ρουτίνα με τη χρήση στερεότυπων πρακτικών, σε μερικές περιπτώσεις, είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα, από το να καταλάβουν τη λύση και να αντιληφθούν γιατί ταιριάζει στο πρόβλημα (Wyndhamn&Saljo, 1997). Είναι χαρακτηριστικός της στροφής των ερευνητών προς αυτή την κατεύθυνση ο τίτλος ενός άρθρου του Nickson ήδη από το 1992, με τον τίτλο « η κουλτούρα της τάξης των μαθηματικών : ένας παράγοντας που δεν έχουμε υπολογίσει;»
2)Στις πρακτικές που έχουν επικρατήσει κατά τη διδασκαλία σύμφωνα με τις οποίες ο μαθητής αφού αναγνωρίσει τη σωστή πράξη ή πράξεις που πρέπει να κάνει, συνδυάζοντας όλους τους αριθμούς που δίνονται στο κείμενο, πρέπει να δώσει τη μοναδική σωστή απάντηση η οποία είναι ένας και μόνο συγκεκριμένος αριθμός.
3)Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ως μια βασική αιτία, η έλλειψη από τους διδάσκοντες συστηματικής προσοχής προς την οπτική της μοντελοποίησης σαν έναν από τους θεμελιώδεις δομικούς λίθους της μαθηματικής κατάρτισης (Greer, 1997).
Επιπλέον έχει παρατηρηθεί ότι η χρήση των στερεότυπων λεκτικών προβλημάτων και το κλίμα της τάξης που διαμορφώνεται με αυτό τον

τρόπο, συνδέεται με τις πεποιθήσεις των δασκάλων περί των σκοπών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Verschaffel, De Corte, and Borghart, 1997). Από γνωστική άποψη οι απαντήσεις των μαθητών φαίνεται να δείχνουν ότι υπάρχει έλλειψη ικανότητας ή έλλειψη δυνατοτήτων λογικής. Τα παιδιά δείχνουν να βρίσκονται σε δίλημμα, ανάμεσα στο να κάνουν μαθηματικά από τη μια μεριά, και στο να κάνουν ρεαλιστικές υποθέσεις σχετικά με το πως είναι πρακτικά οργανωμένος ο κόσμος από την άλλη (Wyndhamn&Saljo,1997).

Βέβαια, θα ήταν αρκετά βολικό να αποδώσει κανείς τα αποτελέσματα των ερευνών που προαναφέρθηκαν, σε γνωστικό έλλειμμα από την πλευρά των μαθητών που πήραν μέρος σ' αυτές. Όμως οι ερευνητές αποδίδουν την ευθύνη στις εμπειρίες που βιώνουν τα παιδιά μέσα στην τάξη και στο σχολείο γενικότερα. Αυτό που έχουν βιώσει τα παιδιά στην τάξη, είναι, ότι «καλός» είναι ο μαθητής που λύνει τα προβλήματα σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο και όχι αυτός που χρειάζεται χρόνο να σκεφτεί πάνω στο πρόβλημα. Και μάλιστα η λύση του προβλήματος είναι ένας και μοναδικός σωστός αριθμός και όχι μια προσεγγιστική απάντηση. Επίσης η εμπειρία του λέει ότι όλα τα προβλήματα έχουν λύση. Επομένως γιατί όχι και το πρόβλημα με την ηλικία του καπετάνιου; Ο Greer (1997) αναφέρει ότι με τα στερεότυπα λεκτικά προβλήματα που λύνονται μέσα στη τάξη πετυχαίνουμε μόνο μια επιφανειακή επιτυχία με επιπόλαιες μεθόδους. Πόσο μάλλον που η μαθηματικοποίηση μιας ρεαλιστικής κατάστασης που περιγράφεται σε ένα πρόβλημα συχνά χρειάζεται μεγάλη προσοχή.

Κατ' αρχήν τα παιδιά μαθαίνουν ότι είναι νόμιμο να βάζει κανείς ερωτήσεις ενώ ξέρει την απάντηση. Οι ερωτήσεις δεν τίθενται για να πάρει ο διδάσκων πληροφορίες για τη συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση αλλά για να πάρει πληροφορίες για το μαθητή. Και οι μαθητές και οι δάσκαλοι το γνωρίζουν αυτό και ενεργούν ανάλογα. Επιπλέον η ουσιαστική ερμηνεία μιας κατάστασης που περιγράφεται λεκτικά υπακούει σε κανόνες που έχουν ήδη συμφωνηθεί. Πόσο μάλλον που οι κανόνες αυτοί επηρεάζονται από το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο αναπτύσσονται. (Grice, 1975, Rules of conversation, Eco, 1994). Ένα καλό παράδειγμα δίνει το παρακάτω πρόβλημα:

Ο χασάπης είχε 26 κιλά κρέας στο μαγαζί του και παράγγειλε τηλεφωνικά 10 κιλά ακόμη. Πόσα κιλά κρέας έχει τώρα;

Αλλά παρατηρεί ο Freudenthal (1991, σ. 70), το κρέας που παραγγέλθηκε τηλεφωνικά, δεν θα βρεθεί αυτομάτως στο μαγαζί. Και όταν το παραπάνω κρέας φτάσει στο μαγαζί κάποια από τα αρχικά 25 κιλά θα είχαν πουληθεί. Στην πραγματικότητα γι' αυτόν ακριβώς το λόγο ο χασάπης παράγγειλε το επιπλέον κρέας (Greer, 1997).

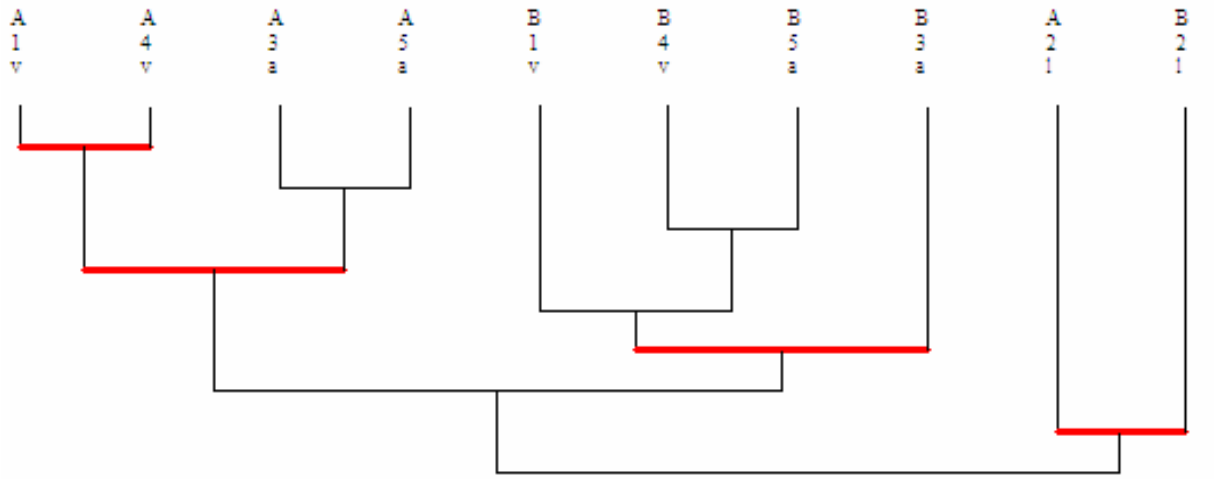
Ένας ακόμα παράγοντας που μπερδεύει τα πράγματα, είναι ότι μια απάντηση που προφανώς δεν έχει κανένα λογικό υπόβαθρο, μπορεί κάποτε να υποστηριχτεί από ένα λογικοφανές σενάριο. Π.χ. στο πρόβλημα: Υπάρχουν 26 πρόβατα και 10 κατσίκες πάνω σε ένα πλοίο. Πόσων χρονών είναι ο καπετάνιος;
Η απάντηση 36 μπορεί να υποστηριχθεί ως εξής: αγόρασε ένα ζώο για κάθε χρόνο της ζωής του. Έτσι πάντα θα ξέρει πόσων χρονών είναι.
Αλλά και τις στρατηγικές με τις λέξεις κλειδιά οφείλουμε να τις αναθεωρήσουμε (Greer, 1997). Διότι ακόμα και τα προβλήματα που έχουν τις λέξεις κλειδιά που οδηγούν στην πρόσθεση, ίσως να χρειάζονται μια πιο προσεκτική ανάγνωση. Όπως στο παρακάτω: Σε ένα μπολ με ποπκόρν προσθέτουμε ένα μπολ γάλα. Πόσα μπολ από το μείγμα θα πάρουμε;
Γενικά το «βάζω μαζί» δεν μοντελοποιείται πάντα από την πράξη της πρόσθεσης.
Και το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας όμως είναι κάτι πολύ επικίνδυνο και οδήγησε μαθητές να θεωρήσουν σωστές προτάσεις όπως η παρακάτω: Αν μία ορχήστρα μπορεί να παίξει μια συμφωνία σε 1 ώρα, τότε 2 ορχήστρες μπορούν να παίξουν την συμφωνία σε 1/2 ώρα.
Γενικά η τυφλή μαθηματικοποίηση μιας κατάστασης που περιγράφεται σε ένα λεκτικό πρόβλημα, μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα όπου πρακτικές λεπτομέρειες αγνοούνται εντελώς.
(Από 0% έως 12% στο πρόβλημα με το σκοινί, πήραν υπόψη τους τους κόμπους.)
Είναι προφανές ότι η σύνδεση ανάμεσα στην καθημερινότητα των μαθητών και στα μαθηματικά της τάξης δεν είναι εύκολη, γιατί τα δύο πλαίσια διαφέρουν σημαντικά.
Όπως έδειξε η έρευνα των Carraaher et al.(1985) στο Ρεσίφε της Βραζιλίας, ο 12 ετών μαθητής του δημοτικού είχε κατακτήσει μία διαδικασία για να ξέρει πόσα χρήματα έπρεπε να ζητήσει από κάποιον που ήθελε να αγοράσει 10 καρύδες, γνωρίζοντας την τιμή της μίας (35). Αλλά σε ένα κλασσικό τεστ με μολύβι και χαρτί δε στάθηκε δυνατό να κάνει σωστά τη πράξη 35 επί 10.
Επειδή στα εκτός σχολείου μαθηματικά, υπάρχει μια εξειδικευμένη πρακτική, οι μαθητές μπορεί να μπορούν να γενικεύσουν μια διαδικασία μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο αλλά να μην μπορούν να κάνουν τη γενίκευση σε ένα άλλο, μια και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τείνουν να έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο. Η γενίκευση που είναι ένας πολύ σημαντικός στόχος στο σχολείο δεν είναι στόχος στα μαθηματικά εκτός σχολείου. Από την άλλη οι αλγεβρικές ρουτίνες που είναι παντοδύναμες στο σχολικό περιβάλλον αποδεικνύονται άχρηστες στα εξωσχολικά πλαίσια.

Έχει αποδειχθεί ότι όταν το πλαίσιο είναι οικείο και τα αριθμητικά δεδομένα μικροί αριθμοί η ανταπόκριση των μαθητών σε ασυνήθιστα προβλήματα είναι πολύ πιο θετική (D'Amore& Martini, 1999). Από τους 28 μαθητές της Ε Δημοτικού κλήθηκαν να απαντήσουν στο πρόβλημα με τα στρατιωτικά λεωφορεία με τα ίδια αριθμητικά δεδομένα, οι 8 έκαναν λάθος την διαίρεση, 1 απάντησε ότι δεν ήξερε να λύσει το πρόβλημα, και από τους 19 που έκαναν σωστά τη διαίρεση , 7 απάντησαν 31 λεωφορεία, 2 απάντησαν 32,33333 λεωφορεία και 10 έδωσαν απάντηση 32.
Στην ίδια έρευνα, 25 μαθητές της Ε Δημοτικού κλήθηκαν να απαντήσουν στο εξής πρόβλημα: Ένα αυτοκίνητο μπορεί να μεταφέρει 4 επιβάτες. Αν 6 παιδιά πρέπει να μεταφερθούν στο σχολείο πόσα αυτοκίνητα θα χρειαστούν; Από τους 25 μαθητές που ρωτήθηκαν 1 απάντησε 24 αυτοκίνητα, 2 απάντησαν ότι 1 αυτοκίνητο θα ήταν αρκετό και οι 22 απάντησαν 2 αυτοκίνητα. Οι ερευνητές καταλήγουν ότι η οικοδόμηση κατάλληλου νοητικού σχήματος αμέσως προσφέρει τη λύση του προβλήματος. Ο λύτης «έχει την εντύπωση ότι δεν αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα γιατί η απάντηση είναι συνδεδεμένη με την εμπειρία».
Όμως, και αυτό είναι ένα σημαντικό θέμα, τα παιδιά πρέπει να μπορούν να γενικεύουν και να κάνουν ρεαλιστικές υποθέσεις, γιατί αυτό είναι κάτι αναπόφευκτο στη ζωή. Εξάλλου, ο μαθητής που δεν έχει αντιληφθεί ότι το θέμα είναι τελικά το να κάνεις ρεαλιστικές υποθέσεις για τον κόσμο, δεν είναι αναγκαστικά μειωμένων προσόντων αντίληψης. Απλώς χρειάζεται να «σπάσει» το Διδακτικό Συμβόλαιο.
Η διδασκαλία των μαθηματικών, μεταξύ άλλων θεωρείται σημαντική, αν θέλουμε να έχουμε ενεργούς και κριτικά σκεπτόμενους πολίτες. Και από αυτή τη σκοπιά η ρήξη αυτού του τμήματος του Διδακτικού Συμβολαίου έχει βαρύνουσα σημασία.

Αρκετοί ερευνητές έκαναν προσπάθειες ρήξης του Διδακτικού Συμβολαίου στηριζόμενοι στην άποψη ότι αν οι μαθητές προειδοποιηθούν για τη φύση των ασυνήθιστων λεκτικών προβλημάτων, η τάση απόκλισης της κοινής λογικής από της απαντήσεις τους θα μειωθεί.
Οι Yoshida et al. (1997) διεξήγαγαν έρευνα σε μαθητές στην Ιαπωνία δίνοντας τα ίδια προβλήματα με εκείνα της έρευνας των Verscaffel et al. (1994), με τη διαφορά ότι δινόταν στους μαθητές της πειραματικής ομάδας επιπλέον η παρακάτω γραπτή οδηγία: «Το τεστ περιέχει αρκετά προβλήματα τα οποία είναι δύσκολο ή αδύνατο να λυθούν λόγω ορισμένων ασαφειών ή περιπλοκών που περιέχουν. Καταγράψτε τις και εξηγείστε γιατί δεν είστε ικανοί να επιλύσετε το πρόβλημα».
Ο Greer (1997) διεξήγαγε έρευνα στη Β. Ιρλανδία στηριζόμενος στην υπόθεση ότι ο τίτλος που αναγράφεται στο επάνω μέρος των δοκιμίων επηρεάζει τη συμπεριφορά των μαθητών. Έτσι δόθηκαν 3 δοκίμια με

τίτλους «Τεστ Μαθηματικών», «Τεστ Υπολογισμού» και «Μαθηματικό Παζλ», υποθέτοντας ότι οι δύο τελευταίοι τίτλοι θα «παρακινήσουν τους μαθητές να κοιτάξουν κάτω από την επιφάνεια».
Οι Van Lie Shout et al (1997), διεξήγαγαν έρευνα στη Δανία υποθέτοντας ότι αν οι μαθητές δεχθούν εισαγωγική διδασκαλία σχετικά με τα ασυνήθιστα προβλήματα είναι δυνατό να αυξηθεί στατιστικά σημαντικά το ποσοστό των ρεαλιστικών απαντήσεών τους. Έκαναν λοιπόν μια εισαγωγική διδασκαλία στην τάξη δίνοντας δύο παραδείγματα προβλημάτων, ένα S και ένα P (Γαγάτσης, & Μάρκου, 2002).
Οι Reusser,& Stebler (1997a), διεξήγαγαν έρευνα στην Ελβετία που είχε αρκετή ποικιλία συνθηκών: Οι μαθητές εργάσθηκαν ομαδικά, υπήρχαν γραπτές παραινέσεις προς τους μαθητές του τύπου, «Μελέτησε την εικόνα προσεχτικά», «Κάνε σχέδιο πριν προχωρήσεις στο επόμενο βήμα». Ακόμη κάθε λεκτικό πρόβλημα συνοδευόταν από πρόσθετες ερωτήσεις στο πίσω μέρος του χαρτιού, οι οποίες έπρεπε να απαντηθούν μετά τη λύση του προβλήματος. Κατόπιν τα ίδια προβλήματα ξαναδίνονταν προς λύση .
Υπόθεση των ερευνητών ήταν ότι οι πρόσθετες ερωτήσεις θα ενεργοποιούσαν τους μαθητές προς τη ρεαλιστική κατεύθυνση. Επίσης δινόταν γραπτώς και με έντονα μαύρα γράμματα η οδηγία: «Να είστε προσεχτικοί. Μερικά από τα παρακάτω προβλήματα δεν είναι τόσο εύκολα όσο φαίνονται. Για την ακρίβεια υπάρχουν προβλήματα για τα οποία υπάρχουν αμφιβολίες αν λύνονται» (Γαγάτσης & Μάρκου,2002).
Οι Γαγάτσης, Παλαίχωρου, Χαραλάμπους (2002) επιχείρησαν παρέμβαση σε μαθητές της Ε και ΣΤ Δημοτικού σχολείων της Κύπρου. Δινόταν το πρόβλημα και ακολουθούσε, η, με ελκυστικό τρόπο δοσμένη, συζήτηση μεταξύ δύο φανταστικών μαθητών όπου ο ένας υποστήριζε την κυρίαρχη παρανόηση και ο άλλος την αμφισβητούσε.
Όλες αυτές οι έρευνες είχαν αρνητικά, ή, στην καλύτερη περίπτωση, πενιχρά αποτελέσματα.
Οι Μοδέστου & Γαγάτσης (2002) επιβεβαίωσαν σε δύο έρευνες την ύπαρξη του φαινομένου της ψευδοαναλογίας στους μαθητές Γυμνασίου Ελλάδας και Κύπρου και είχαν ελαφρώς θετικά αποτελέσματα αλλά όχι μόνιμα, σε παρέμβαση όπου δίνονταν οι διαστάσεις του σχήματος. Στην πρώτη φάση μίας από αυτές τις έρευνες, δόθηκε σε 157 μαθητές το Δοκίμιο Α το οποίο περιείχε 5 γεωμετρικά προβλήματα: 2 προβλήματα όγκου, 2 εμβαδού και 1 μήκους. Στη δεύτερη φάση της έρευνας δόθηκε στους ίδιους μαθητές το Δοκίμιο Β, το οποίο περιείχε τα ίδια προβλήματα με διαφοροποίηση στη ποσότητα των δεδομένων. Επίσης δίνονταν και οι διαστάσεις του σχήματος. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας ανάμεσα στα έργα των Δοκιμίων Α και Β, στο Δοκίμιο Α τα προβλήματα όγκου και τα προβλήματα εμβαδού αποτελούν χωριστές ομάδες, Στο Δοκίμιο Β τα προβλήματα όγκου και εμβαδού

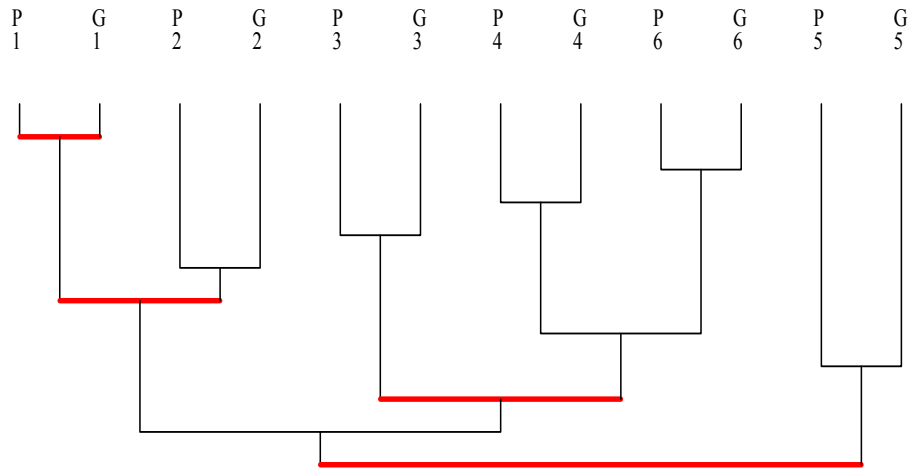
αναμειγνύονται. Τα αναλογικά προβλήματα και στα δύο δοκίμια σχηματίζουν δική τους ομάδα.



- Οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται ότι τα έργα δεν είναι απλά προβλήματα διαφορετικού μαθηματικού περιεχομένου αλλά χαρακτηρίζονται από το ίδιο φαινόμενο ανεξάρτητα από την διαφοροποίηση του αριθμού των διαστάσεων των σχημάτων.

Η χρήση αναπαραστάσεων σε μη αναλογικά προβλήματα εμβαδού σε έρευνα των Θεοδούλου et al.(2003), έδωσε ελαφρώς θετικά αποτελέσματα.

Οι Γαγάτσης & Μάρκου (2004) ερεύνησαν αν μπορεί να υπάρξει ρήξη των όρων του Διδακτικού συμβολαίου, μέσω δοσμένης εικονικής αναπαράστασης του προβλήματος. Τα αποτελέσματα ήταν αρνητικά, εφόσον τα προβλήματα συνοδεύονταν από διακοσμητική εικόνα. Υπήρξε όμως κάποια ενθαρρυντική ένδειξη στη μοναδική περίπτωση που η εικόνα ήταν πληροφοριακή όπως βλέπουμε στο παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας.



Similarity : C:\Documents and Settings\Administrator\My Documents\chic1.2\D.C.P.A.G.csv

Η μορφή του παραπάνω διαγράμματος είναι εκπληκτική, εφόσον σχηματίζονται τόσες ομάδες όσα και τα προβλήματα. Δηλαδή οι στρατηγικές των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων είναι ίδιες είτε το πρόβλημα συνοδεύεται από εικόνα είτε όχι. Όπως δείχνει το παραπάνω διάγραμμα ομοιότητας, οι μαθητές αντιμετώπισαν με αρκετά ανόμοιο τρόπο το πρόβλημα 5 όταν αυτό είχε εικόνα από ό,τι όταν δεν είχε. Το δε πρόβλημα 5 ήταν το μόνο του δοκιμίου αυτής της έρευνας που είχε πληροφοριακή εικόνα.
Ομοίως αρνητικά ήταν τα αποτελέσματα σε έρευνα των Μάρκου & Γαγάτση (2004) όπου υπήρχε παρέμβαση με χρήση εικόνας σε μη αναλογικά προβλήματα. Στα παιδιά εζητείτο να ζωγραφίσουν την απάντηση εκτός από να την γράψουν. Και υπήρξαν απαντήσεις όπου τα παιδιά ζωγράφισαν πρόσωπα με 6 μάτια σε σχετικό πρόβλημα ψευδοαναλογίας..
Οι Ηλία& Γαγάτσης (2002) ερεύνησαν κατά πόσο η ανάγκη να επιλέξουν οι μαθητές ένα πρόβλημα μεταξύ τριών, ενός (S), ενός (P) και ενός παράλληλου (O) προβλήματος, το οποίο θα ήταν κατάλληλο κατά τη γνώμη τους για μια δοσμένη αριθμητική απάντηση θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές να συμπεριλάβουν ρεαλιστικές διαπιστώσεις στους συλλογισμούς τους. Σαν παράλληλο έδιναν ένα πρόβλημα που δεν είχε καμία σχέση με τη δοσμένη αριθμητική απάντηση, αλλά το πλαίσιο του ήταν παρόμοιο με των άλλων δύο. Το (P) πρόβλημα είχε αριθμούς τέτοιους ώστε αν οι μαθητές σκέφτονταν σύμφωνα με την κυρίαρχη παρανόηση θα έδιναν την δοσμένη αριθμητική απάντηση, η οποία ήταν η απάντηση του (S) προβλήματος. Παρατηρήθηκε ότι, παρόλο που το ποσοστό των μαθητών που έλυναν με μη ρεαλιστικό τρόπο το (P) πρόβλημα ήταν ιδιαίτερα υψηλό και έφτασε έως και 80% σε κάποια από τα (P) προβλήματα, οι μαθητές επέλεγαν στην πλειοψηφία τους το (S) πρόβλημα σαν το πλέον ταιριαστό στη δοσμένη αριθμητική απάντηση. Αλλά αυτή η επιλογή δεν ήταν αρκετά ισχυρή ώστε να τους κάνει να αναθεωρήσουν τον τρόπο λύσης τους στα (P) προβλήματα.

Σύμφωνα με τον Greer (1997), οι μαθητές όταν πρόκειται να λύσουν ένα λεκτικό πρόβλημα λειτουργούν σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα (figure 1):

WORD PROBLEMS AND THE MODELLING OF REALITY

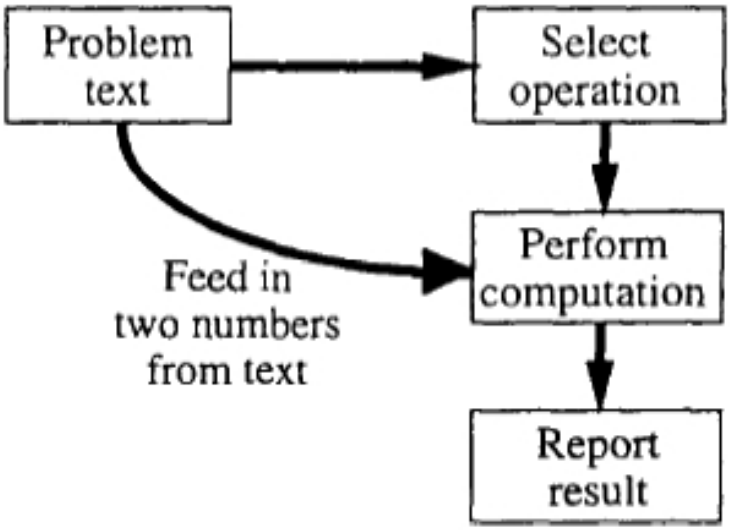


Figure 1. Superficial solutions of word problems.

Ενώ το επιθυμητό θα ήταν να πειστούν να λειτουργήσουν σύμφωνα με το σχήμα της μαθηματικής μοντελοποίησης (figure 2):

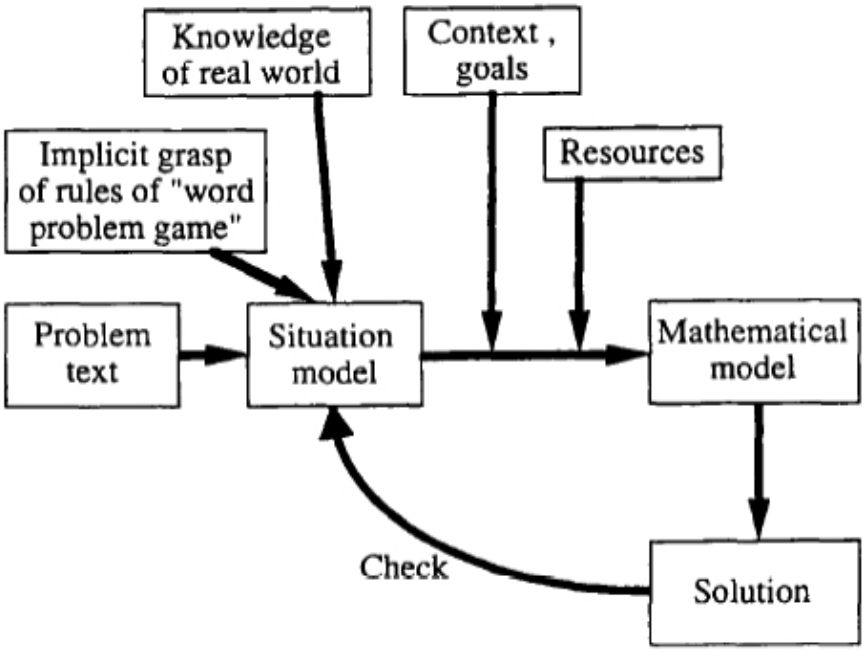


Figure 2. Schematic diagram of factors influencing the modelling of a word problem.

Προς αυτήν την κατεύθυνση, συνηγορεί μια μελέτη που έγινε από τους Verscaffel, και De Corte (1997), η οποία ερεύνησε την υπόθεση «ότι

είναι εφικτό να αναπτύξει κανείς στους μαθητές μια προδιάθεση προς μια περισσότερο ρεαλιστική μαθηματική μοντελοποίηση, εμπλέκοντάς τους στο περιβάλλον μιας τάξης, όπου τα λεκτικά προβλήματα γίνονται αντιληπτά σαν ασκήσεις στη μαθηματική μοντελοποίηση οι οποίες επικεντρώνονται στις παραδοχές και την καταλληλότητα του μοντέλου που βρίσκεται πίσω από κάθε προτεινόμενη λύση».
Σ' αυτό το διδακτικό πείραμα πήραν μέρος 3 τάξεις. Μια πειραματική Ε και δύο τάξεις ελέγχου C1 και C2. Στην πειραματική τάξη διδάχθηκαν από έναν από τους ερευνητές σε 5 συναντήσεις διάρκειας 2,5 ωρών η καθεμία, θέματα που κάλυπταν 5 ενότητες:
1)Ερμηνεία του υπόλοιπου στα προβλήματα της διαίρεσης.
2)Ένωση ή διαχωρισμός ζευγών που αλληλοκαλύπτονται.
3)Προβλήματα όπου χρειαζόταν προσοχή για να καθοριστεί κατά πόσο το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης δύο αριθμών που υπήρχαν στο πρόβλημα χρειαζόταν να προσαρμοστεί προσθέτοντας ή αφαιρώντας τη μονάδα, ώστε να δοθεί μια απάντηση που να ταιριάζει στην κατάσταση που περιέγραφε το πρόβλημα.
4)Ένα πρακτικό πρόβλημα που περιελάμβανε μια απόφαση σχετικά με το μήκος του σχοινιού που χρειάζεται κανείς για να κατασκευάσει μια κούνια.
5)Πότε η αναγωγή εις τη μονάδα είναι το αρμόζον μοντέλο.
Στις τάξεις ελέγχου δόθηκαν οι συνηθισμένες οδηγίες για την ίδια χρονική περίοδο, αλλά στην C1 πρόσθετα και πριν από το αρχικό τεστ έγινε μια δεκαπεντάλεπτη εισαγωγή όπου επέστησαν τη προσοχή των μαθητών, με παραδείγματα, στο γεγονός ότι λύσεις ρουτίνας μπορεί να μην είναι οι κατάλληλες κάτω από ρεαλιστικές συνθήκες.
Υπήρχαν τρεις βασικές αρχές που κυριαρχούσαν στη διδασκαλία στην πειραματική τάξη:
1)Η χρήση περισσότερο ρεαλιστικών και λιγότερο στερεότυπων καταστάσεων προβλήματος.
2)Ποικιλία διδακτικών μεθόδων στις οποίες περιλαμβάνονταν εκτενείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ μικρών ομάδων και συζητήσεις με ολόκληρη την τάξη, οι οποίες βιντεοσκοπήθηκαν.
3)Προσπάθειες να εγκατασταθούν νέες κοινωνικές και κοινωνικο-μαθηματικές πρακτικές στη κοινότητα της τάξης.
Τα αποτελέσματα ήταν υποσχόμενα. Τα τεστ που έγιναν στην αρχή έδωσαν 15% των απαντήσεων να περιέχουν ενδείξεις αναγνώρισης της ρεαλιστικής κατάστασης. Σύμφωνα με το τελικό τεστ η Ε τάξη παρουσίασε βελτίωση από το 7% στο 51%, όταν η C1 πήγε από το 18% μόνο στο 23% και η C2 από το 20% στο 34%. Επιπλέον η βελτίωση που παρουσίασε η Ε τάξη σταθεροποιήθηκε με βάση ένα τεστ που έγινε ένα μήνα αργότερα με θέματα όχι εντελώς όμοια με εκείνα που διδάχθηκαν. Η βελτίωση που παρουσίασε η Ε τάξη δεν ήταν ομοιόμορφη, και όχι ίδια

για όλους τους τύπους προβλημάτων. Περισσότερο βελτιώθηκαν μαθητές με μεγαλύτερες δυνατότητες και ο τύπος του προβλήματος, όπου οι μαθητές έδειξαν τη μεγαλύτερη καλυτέρευση, ήταν η ερμηνεία του υπολοίπου της διαίρεσης.
Στις βιντεοταινίες έχουν καταγραφεί μακρές και πολύ θερμές συζητήσεις, όπου οι μαθητές υπερασπίζονταν τις αρχικές και μη ρεαλιστικές απαντήσεις τους, επινοώντας πανούργες δυνατότητες για να δικαιολογήσουν τα μοντέλα τους.
Γενικά αυτή η μελέτη υπήρξε μια πολλά υποσχόμενη αρχική προσπάθεια επαναδιαπραγμάτευσης του Διδακτικού Συμβολαίου. Αντιγραφή αυτής της μελέτης, έγινε με Γερμανούς μαθητές από τον Renkl το 1999, και έδωσε εξ ίσου υποσχόμενα αποτελέσματα. Τέτοια πειράματα ευρύτερης έκτασης ως προς τους σκοπούς και μεγαλύτερης οικολογικής αξίας έδειξαν πειστικά ότι, αν οι μαθητές εμπλακούν σε ένα περιβάλλον μάθησης που έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές, έχουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα προς την κατεύθυνση της μαθηματικής μοντελοποίησης (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1997, Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts, &Ratinckx, 1999).

Τι προσθέτει η δική μας έρευνα;
Η δική μας έρευνα προσπαθεί να συνδυάσει δύο πολυμελετημένους τομείς: τον συναισθηματικό τομέα και την επίλυση ασυνήθιστων λεκτικών προβλημάτων.

2.1.4 Προτάσεις προς την επιθυμητή και δυνατή κατεύθυνση της αλλαγής

Συνεντεύξεις που έγιναν με 12 παιδιά (Greer (1997), έδειξαν πως οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τη διαφορά ανάμεσα στην απάντηση σε ένα τυπικό μαθηματικό πρόβλημα, και στην απάντηση που ταιριάζει σε κάποιο, που περιγράφει μία ρεαλιστική κατάσταση. Επίσης έδειξαν, ότι σχετικές πληροφορίες, όπως ότι το νερό θα γεμίσει πιο γρήγορα το φλασκί στο επάνω μέρος, ή ότι ένας δρομέας κουράζεται με την απόσταση, τους ήταν γνωστές. Αλλά, όπως παρατήρησε ένας 10-χρονος: «Όλα αυτά τα ξέρω, αλλά ποτέ δεν θα σκεφτόμουνα να τα συμπεριλάβω σε ένα πρόβλημα μαθηματικών. Γιατί τα μαθηματικά, δεν είναι για πράγματα σαν κι αυτά. Είναι για να κάνεις σωστά τα αθροίσματα στο σχολείο. Και δεν χρειάζεται να ξέρεις τέτοια πράγματα για να κάνεις σωστά τα αθροίσματα».
Το παιδί προφανώς ενεργούσε και σκεφτόταν σύμφωνα με το Διδακτικό Συμβόλαιο και τις συνήθειες που είχαν καλλιεργηθεί από την εμπειρία του μέσα στην τάξη. Οπότε από τη σκοπιά αυτή, το παιδί λειτουργούσε απολύτως σύμφωνα με τη λογική.

Σύμφωνα με τον Greer (1997), χρειάζεται μια αναθεώρηση του Διδακτικού Συμβολαίου καθώς και του είδους των Μαθηματικών που πρέπει να διδάσκονται τα παιδιά στα σχολεία, όπως επίσης και του τρόπου διδασκαλίας τους.

Η έρευνά μας καταθέτει μια διπλή πρόταση αλλαγής:
α) Παρέμβαση για βελτίωση των αποτελεσμάτων αντιμετώπισης ασυνήθιστων αριθμητικών προβλημάτων λόγω Διδακτικού Συμβολαίου.
β) Διερεύνηση των σχέσεων Στάσεων και Πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και της ικανότητας αντιμετώπισης ασυνήθιστων αριθμητικών προβλημάτων.
Όσον αφορά στον δεύτερο τομέα, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων έρευνας των L. Mason και L. Scrivani, που έγινε το 2003 και αφορούσε σε μαθητές της Ε Δημοτικού σχολείου στο Μιλάνο, στη βόρεια Ιταλία, προέκυψε μεταξύ άλλων, ότι όσον αφορά στα συνηθισμένα προβλήματα, υπάρχει στατιστικά σημαντική θετική σχέση ανάμεσα στις πεποιθήσεις των μαθητών και την επίδοσή τους σ' αυτά. Ενώ δεν ισχύει κάτι τέτοιο για τα ασυνήθιστα προβλήματα.
Η δική μας έρευνα βρίσκεται σε σχετική συμφωνία με αυτά τα ευρήματα, όσον αφορά τους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού μόνον.
Από τα ευρήματα της έρευνάς μας, υπάρχουν σαφείς ενδείξεις σύνδεσης των θετικών στάσεων και πεποιθήσεων ως προς τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος με την κατανόηση και την επιτυχία των ασυνήθιστων προβλημάτων στους μαθητές της Α Γυμνασίου, ενώ φαίνεται να υπάρχουν λιγότερο σαφείς ενδείξεις για κάτι τέτοιο στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού.
Όσον αφορά στον πρώτο τομέα, από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας, φαίνεται ότι η παρέμβαση και στις δύο βαθμίδες έχει ενδείξεις επιτυχίας. Τα παιδιά φαίνεται να αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη επιτυχία τα ασυνήθιστα προβλήματα όταν έχουν συζητήσει ανάλογο πρόβλημα με μορφή παραδείγματος, ή έχουν αντιμετωπίσει ξανά παρόμοιο πρόβλημα.
Αυτό το εύρημα συμφωνεί με άλλα της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπου υπάρχουν πολλές προτάσεις σχετικά με το τι πρέπει να γίνει (Verscaffel, Greer & De Corte, 2000):
Όπως ότι τα προβλήματα που ένας μαθητής λύνει στο σχολείο, πρέπει να είναι τέτοια ώστε να τον εκπαιδεύουν να λύσει προβλήματα της καθημερινής ζωής. Επίσης προτείνεται οι μαθητές να καλούνται να λύσουν και προβλήματα που θέτουν οι ίδιοι και όχι μόνο αυτά που κάποιος άλλος τους περιγράφει. Ακόμη να υπάρχουν προβλήματα με επιπλέον ή με ελλιπή στοιχεία, όπως και προβλήματα όπου να ζητείται από τους μαθητές μια προσεγγιστική απάντηση.

Οι Wyndhamn & Saljo (1997) υπαινίσσονται, και είχαν σαφείς ενδείξεις που συνηγορούν προς αυτήν την κατεύθυνση, όταν προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα της απόστασης συζητώντας με τέσσερις ομάδες μαθητών, ότι ίσως ο καλύτερος τρόπος να λύνει κανείς τέτοιου είδους προβλήματα, είναι ο διάλογος σε ομάδες όπου οι μαθητές είναι εταίροι σε μία συζήτηση και συνεισφέρουν και σαν ομιλητές και σαν ακροατές. Έγινε αντιληπτό μέσω της συζήτησης, και αυτό ίσχυε και για τις τέσσερις ομάδες μαθητών, ότι με τον όρο απόσταση τα παιδιά εννοούσαν την ευθεία μεταξύ δύο σημείων (as the crows fly) όπως ακριβώς είναι η έννοια της απόστασης δύο σημείων στα μαθηματικά. Όμως σήμερα απόσταση λέμε το μήκος του δρόμου μεταξύ δύο σημείων, ο οποίος δεν είναι απαραιτήτως ευθύς. Ή ακόμη και τον χρόνο που χρειαζόμαστε για να πάμε από ένα μέρος σε ένα άλλο.

Μια θετική συνεισφορά προς τα επιθυμητά αποτελέσματα είναι εκείνη της πολλαπλής μαθηματικής μοντελοποίησης (figure 3): Τα παιδιά ισχυρίζεται ο Greer (1997) ότι χρειάζονται και θα μπορούσαν, να εκπαιδευτούν, ώστε να διακρίνουν μεταξύ καταστάσεων όπου η αριθμητική πράξη μπορεί άλλοτε να μας εφοδιάσει με ένα λίγο-πολύ ακριβές μοντέλο λύσης, άλλοτε με μια λογική προσέγγιση της λύσης, και άλλοτε ότι είναι εντελώς ανεπαρκής για να μας δώσει ένα μοντέλο για την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Μέσα από δραστηριότητες, όπως το να εγείρουν υποθέσεις και να τις αντιπαραβάλλουν, οι μαθητές, είναι δυνατόν να εξελιχθούν σε ευέλικτους συζητητές, οι οποίοι κατανοούν ουσιαστικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα.

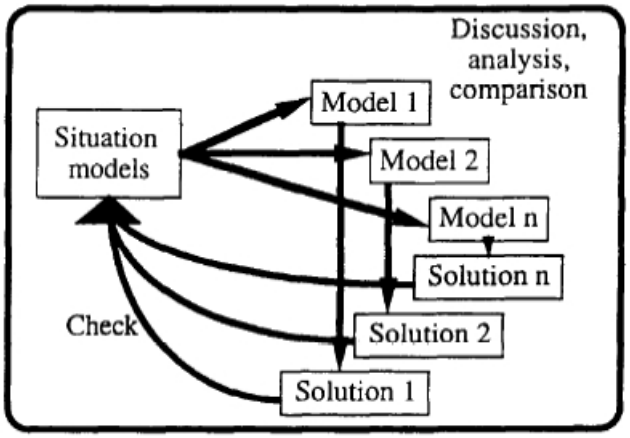


Figure 3. Multiple models and associated social processes.

Γιατί, για να αντιμετωπίσει επιτυχώς ένας μαθητής ένα λεκτικό πρόβλημα, χρειάζεται ουσιαστική γνώση της γλώσσας και του γύρω κόσμου συνδυασμένα με τη γνώση της αριθμητικής. Αντίθετα, η προοπτική της επιπόλαιης μαθηματικοποίησης των πάντων καθιστά υπαίτιο το πρόβλημα για την έλλειψη σύνδεσης ανάμεσα στα μαθηματικά της τάξης και τα μαθηματικά του δρόμου και της καθημερινής ζωής.

Όμως σύμφωνα με τον Greer (1997), η ουσιαστική κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης των κοινωνικών φαινομένων, η ερμηνεία τους και η κριτική αντιμετώπισή τους, θα μπορούσε να είναι ουσιαστικό τμήμα της εκπαίδευσης ενός υπεύθυνου πολίτη.
Βέβαια δεν αρνείται ότι κάτι τέτοιο απαιτεί πολύ σημαντικές προσπάθειες από τη μεριά των δασκάλων, και προϋποθέτει ότι η οπτική τους σχετικά με τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους θα υποστεί ριζική αναδιάρθρωση.
Οι εκπαιδευόμενοι δάσκαλοι, και ενδεχομένως οι δάσκαλοι γενικότερα, θεωρούν ότι ο ρόλος του λεκτικού προβλήματος δεν είναι τίποτε περισσότερο από το να βοηθήσει τους μαθητές στο να εξασκηθούν στις τέσσερις πράξεις.
Διότι, μεγάλο ενδιαφέρον, παρουσιάζουν τα ευρήματα και για το άλλο μέρος του διδακτικού συμβολαίου. Οι απαντήσεις εκπαιδευόμενων δασκάλων σε έρευνα στο Βέλγιο το 1997 (Verschaffel et al., 1997) χαρακτηρίστηκαν ως ρεαλιστικές μόνο στο 48% των περιπτώσεων. Επιπλέον όταν στους ίδιους αυτούς εκπαιδευόμενους δασκάλους, ζητήθηκε να αξιολογήσουν συγκριτικά τις ρεαλιστικές και μη ρεαλιστικές απαντήσεις στα ίδια θέματα, αξιολόγησαν τις μη ρεαλιστικές πολύ υψηλότερα. Το προφανές συμπέρασμα είναι ότι μια μεγάλη αλλαγή στις αντιλήψεις και πεποιθήσεις των δασκάλων είναι αναγκαία αν θέλουμε να υπάρχει αποτέλεσμα στην πλευρά των μαθητών.
Σύμφωνα με τη Bonotto(2003) εκτός από τη μαθηματικοποίηση της καθημερινότητας είναι αναγκαίο να «καθημερινοποιήσουμε» τα μαθηματικά. Αυτό, μπορεί να εδραιωθεί σε μια τάξη, με το να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αναλύουν τα μαθηματικά που είναι ενσωματωμένα σε πολιτισμικά τεχνουργήματα, όπως λογαριασμοί του super market, ετικέτες από μπουκάλια και κονσέρβες, οδικοί χάρτες και άλλα. Αυτά είναι μέρος της καθημερινότητας των παιδιών, έχουν νόημα και παρουσιάζουν μια σαφή κατάσταση, και επιπλέον έχουν το πλεονέκτημα να ανήκουν συγχρόνως στο κόσμο της καθημερινότητας και στο κόσμο των συμβόλων. Επιτρέπουν συνεχείς μετακινήσεις από καταστάσεις καθημερινής χρήσης σε μαθηματικές δομές και αντιστρόφως. Έτσι τα παιδιά θα οδηγηθούν στο να αναγνωρίσουν πλήθος ποικίλων καταστάσεων σαν μαθηματικές καταστάσεις, δηλαδή σαν καταστάσεις που μπορούν να μαθηματικοποιηθούν. Οπότε, με αυτόν τον τρόπο, είναι δυνατόν να έρθει η αλλαγή στη συμπεριφορά και στις πεποιθήσεις των μαθητών ως προς τα μαθηματικά.
Αν θέλουμε να υπάρξει αλλαγή προς την κατεύθυνση της ρεαλιστικής μαθηματικής μοντελοποίησης, σύμφωνα με τις απόψεις της Bonotto (2003), πρέπει:
1.Να αντικαταστήσουμε τα στερεότυπα λεκτικά προβλήματα με περισσότερο ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις που να

εδραιώνονται με τη χρήση συγκεκριμένων υλικών. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπάρξει ιδιαίτερη προσοχή διότι τα στερεότυπα προβλήματα έχουν και αυτά τη θέση τους στη μαθηματική εκπαίδευση (Galbraith and Stillman,2001)
2. Πρέπει να αλλάξουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά. Αυτό σημαίνει να αλλάξουμε τις πεποιθήσεις των δασκάλων πάνω στο ίδιο θέμα.
3. Χρειάζεται μια γενναία αλλαγή της κουλτούρας της τάξης. Αυτή δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στις κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης υπό την έννοια των Yackel και Cobb(1996).

2.2 ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2.2.1 Οι Πεποιθήσεις των μαθητών.

Ο McLeod (1992) διακρίνει τρεις παράγοντες του συναισθηματικού τομέα, συγκινήσεις (emotions), στάσεις (attitudes) και πεποιθήσεις (beliefs), που χαρακτηρίζονται από προοδευτική μείωση της έντασης, και αντίστοιχη αύξηση της γνωστικής συνιστώσας και της διάρκειας. Θεωρεί ότι οι στάσεις είναι μέσης έντασης και μονιμότητας και περιέχουν ισόρροπα γνωστικές και συναισθηματικές συνιστώσες, οι πεποιθήσεις χαρακτηρίζονται από χαμηλή ένταση και αυξημένη διάρκεια και γνωστική συνιστώσα, ενώ οι συγκινήσεις από υψηλή ένταση, μικρή διάρκεια και περιορισμένη γνωστική συνιστώσα.
Οι πεποιθήσεις μπορούν να οριστούν ως η υποκειμενική γνώση του ατόμου, οι θεωρίες και οι αντιλήψεις του, και περιλαμβάνουν οτιδήποτε κάποιος θεωρεί ως αληθινή γνώση, ακόμη κι αν δεν μπορεί να παρέχει πειστικά στοιχεία προκειμένου να αποδείξει κάτι τέτοιο (Pehkonen, 2001). Δηλαδή, μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσωπικές εκτιμήσεις, οι κρίσεις και οι απόψεις, που διαμορφώνουν την υποκειμενική γνώση κάποιου, γύρω από τον εαυτό του και το περιβάλλον. Οι πεποιθήσεις διαχωρίζονται από τον όρο «γνώση», του οποίου η έννοια εμπεριέχει αληθινή γνώση, επικρατούσα και κοινωνικά αποδεκτή. Οι πεποιθήσεις είναι υποκειμενικές, δεν απαιτούν τυπική αιτιολόγηση και εκτός του γνωστικού χαρακτήρα, εμπεριέχουν και συγκινησιακές συνιστώσες. Διαμορφώνονται μέσω των εμπειριών και καλλιεργούνται κατά τη διάρκεια της δράσης. Ο McLeod (1992) αναφέρει, ότι οι πεποιθήσεις έχουν γνωστικό χαρακτήρα από τη φύση τους, και εδραιώνονται σε σχετικά μεγάλο διάστημα, σε αντίθεση με τα συναισθήματα, που έχουν μικρή γνωστική αξία, και είναι δυνατό να εμφανιστούν και να εξαφανιστούν πολύ γρήγορα. Σύμφωνα με τους Χρίστου - Φιλίππου

(1991), οι πεποιθήσεις βρίσκονται στο μέσο μιας συνεχούς κλίμακας, όπου στο ένα άκρο της τοποθετείται η απόλυτη πίστη σε κάτι, ενώ στο άλλο άκρο αντιστοιχούν οι ελπίδες, οι προσδοκίες και οι προσωπικές εκτιμήσεις του ατόμου. Οι πεποιθήσεις δηλαδή, εμπεριέχουν τόσο μία γνωστική όσο και μία συναισθηματική διάσταση, και δεν επιδέχονται τεκμηρίωση. Το άτομο το οποίο τις διατυπώνει, εκφράζει την πίστη του σε κάτι, δίνοντας απλώς μια αόριστη αιτιολόγηση, σε αντίθεση με τις γνώσεις που είναι αντικειμενικές και εμπεριέχουν το στοιχείο της απόδειξης. Επομένως, το σύστημα των πεποιθήσεων κάθε ατόμου προκύπτει από τις προσωπικές του εμπειρίες, το σύστημα των αξιών και τη φιλοσοφία του, είναι δηλαδή υποκειμενικό και υποσυνείδητο, υπάρχει έντονη η παρουσία του συναισθήματος και δεν επιδέχεται αντικειμενική αιτιολόγηση. Σε αντίθεση με τις γνώσεις, που επιδέχονται απόδειξη και επαλήθευση, είναι αντικειμενικές και κοινωνικά αποδεκτές. Ωστόσο, η σημασία του είναι μεγάλη, γιατί επηρεάζει ουσιαστικά τη συμπεριφορά και τη στάση του ατόμου. Γενικά, οι εμπειρίες και η αντανάκλαση των πράξεων, διαμορφώνουν τις πεποιθήσεις του ατόμου, αλλά και οι ίδιες οι πεποιθήσεις του, φαίνεται να καθοδηγούν τις πράξεις του. Ωστόσο, πρέπει να τονίσουμε ότι οι πεποιθήσεις του ατόμου μπορούν να αλλάξουν, καθώς επηρεάζονται από τις νέες εμπειρίες και το περιβάλλον του ατόμου.

Ειδικότερα, το σύστημα των προσωπικών πεποιθήσεων του ατόμου για τα μαθηματικά επηρεάζει το πώς αυτό προσεγγίζει και το πώς αντιδρά σε διάφορες μαθηματικές καταστάσεις.

Τα τελευταία χρόνια, έχουν δοθεί διάφορες διαστάσεις του όρου «μαθηματικές πεποιθήσεις». Ο Schoenfeld (1985) όρισε το σύστημα πεποιθήσεων του ατόμου ως «την οπτική του για τον κόσμο των μαθηματικών, το σύνολο των (όχι απαραίτητα συνειδητών) αιτίων που αποδίδει το άτομο για τη στάση του ως προς τον εαυτό του, το περιβάλλον, το θέμα που μελετάει, και τα μαθηματικά».

Επίσης, από φιλοσοφικής απόψεως, οι πεποιθήσεις γύρω από τη φύση των μαθηματικών, την ανάπτυξη και τη μάθηση των μαθηματικών, είναι πρωταρχικής σημασίας. Διότι οι πεποιθήσεις για το τι είναι τα μαθηματικά, και τι σημαίνει να μαθαίνω και να γνωρίζω μαθηματικά, είναι καθοριστικές για τον τρόπο εμπλοκής του ατόμου με τα μαθηματικά, δηλαδή της ανάπτυξης της εννοιολογικής κατανόησης και της ικανότητάς του στο αντικείμενο. Με άλλα λόγια, οι πεποιθήσεις μπορούν να καθορίσουν τις επιλογές προσέγγισης και στρατηγικής ενός προβλήματος, τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσουμε ή θα αποφύγουμε, το χρόνο που θα αφιερώσουμε, το πόσο επίμονα θα εργαστούμε. Δημιουργούν δηλαδή, το πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι γνώσεις, οι ευρετικές, ο έλεγχος των αποφάσεων, η επαλήθευση και γενικά κάθε βήμα προς την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Έτσι, παραδείγματος χάριν,

ένας επιδέξιος λύτης προβλημάτων έχει ένα σφαιρικά αναπτυγμένο, υποστηρικτικό σύστημα πεποιθήσεων, έχοντας αντιμετωπίσει με επιτυχία πολλές καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Επομένως, οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά ενός ατόμου καθοδηγούν τη στάση του σε διάφορες καταστάσεις επίλυσης προβλήματος.

Οι πεποιθήσεις του ατόμου για τον εαυτό του περιγράφονται ως οι πεποιθήσεις του ατόμου σε σχέση με προσωπικά χαρακτηριστικά και ικανότητες, περιλαμβάνοντας διαστάσεις όπως η αυτοϊδέα, η αυτοαποτελεσματικότητα και αυτοεκτίμηση. Πιο συγκεκριμένα, οι πεποιθήσεις επάρκειας αφορούν: (α) τις κρίσεις ενός ατόμου για την ικανότητά του να επιτύχει σε στόχους ή έργα, ενεργώντας σε συγκεκριμένες καταστάσεις και (β) την αυτοπεποίθηση ενός ατόμου για τις γνωστικές του ικανότητες που θα το βοηθήσουν να μάθει ή να επιτύχει σε ακαδημαϊκούς στόχους ή έργα (Pintrich, 1999).

Ειδικότερα, η αυτοαποτελεσματικότητα μπορεί να οριστεί ως η πεποίθηση του ατόμου, ότι μπορεί να οργανώνει και να εφαρμόζει σχέδια προκειμένου να κατορθώσει ένα συγκεκριμένο στόχο. Υπάρχει δε αντιστοιχία μεταξύ αυτοαποτελεσμτικότητας και του στόχου που πρόκειται να επιτευχθεί. Αντίθετα, η αυτοιδέα είναι η αίσθηση της ικανότητας του ατόμου σε σχέση με πιο γενικούς σκοπούς (Bandura, 1986), ενώ η αυτοεκτίμηση είναι ένα μέτρο των αισθημάτων περηφάνιας του ατόμου για ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό σε σύγκριση με άλλους (Klassen,2004, Bong & Skaalvik,2003).

Με τις πεποιθήσεις επάρκειας ως προς την μάθηση διαφόρων αντικειμένων, περιλαμβανομένων και των μαθηματικών, έχουν ασχοληθεί αρκετές έρευνες στο διεθνή χώρο (Hackett & Betz, 1989, Zimmerman, Bandura & Martinez – Pons, 1992, Pajares & Miller, 1994, 1995, Pajares, 1996b, Pajares & Graham, 1999).
Επίσης διάφορες μελέτες υποδεικνύουν ότι η ατομική αποτελεσματικότητα στα μαθηματικά, είναι το καλύτερο προγνωστικό στοιχείο για τη συμπεριφορά του ατόμου στα μαθηματικά, από ό,τι τα αισθήματα αγωνίας και φόβου για τα μαθηματικά, οι αντιλήψεις του για τη χρησιμότητά τους ή οι προηγούμενες εμπειρίες τους με τα μαθηματικά (Pajares & Miller, 1994), η αυτοϊδέα τους και η προηγούμενη επίδοσή του.
Οι πεποιθήσεις αυτοαποτελεσματικότητας έχουν ήδη μελετηθεί σε σχέση με πολλές πλευρές της μάθησης μαθηματικών και κυρίως την επίλυση και την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Οι Pajares και Miller(1994) υποστήριξαν ότι η πεποίθηση της αυτοαποτελεσματικότητας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος είχε έντονη επίδραση στην επίδοση των μαθητών. Ερευνητικά ευρήματα

υποδεικνύουν, ότι οι μαθητές που έχουν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά έχουν και περισσότερο ακριβείς πεποιθήσεις επάρκειας.
Η έννοια της αυτοεπάρκειας δεν είναι ισοδύναμη με την έννοια της αυτοϊδέας, αν και πολλοί ερευνητές τις χρησιμοποιούν εναλλακτικά. Οι κρίσεις περί της αυτοϊδέας είναι περισσότερο γενικές και λιγότερο συγκεκριμένες όσον αφορά το περιεχόμενο του αντικειμένου, σε σχέση με τις κρίσεις αυτοεπάρκειας. Είναι γενικές περιγραφές κάποιου για τον εαυτό του παρά για συγκεκριμένες ικανότητές του. Η αυτοϊδέα μπορεί να περιγραφεί ως μία γενικότερη μορφή αυτοεπάρκειας (Pajares,1996), ενώ η αυτοεπάρκεια δεν επηρεάζει απαραίτητα την αυτοϊδέα κάποιου. Παραδείγματος χάριν, μπορεί κάποιος να νιώθει επαρκώς ικανός να λύνει δευτεροβάθμιες εξισώσεις, χωρίς αυτό να συνεπάγεται κάποια διαφορά για την αυτοϊδέα του στα μαθηματικά. Οι πεποιθήσεις επάρκειας έχουν πολλές διαστάσεις, αλλά το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι αναφέρονται στην ικανότητα κάποιου να ολοκληρώνει ένα συγκεκριμένο στόχο. Ωστόσο οι πεποιθήσεις ικανότητας εξαρτώνται από τις εμπειρίες του ατόμου σε σχέση με συγκεκριμένες δραστηριότητες.
Οι πεποιθήσεις και οι αντιλήψεις του ατόμου για το γνωστικό υλικό που κατέχει, καθώς και για την ικανότητά του να επιτυγχάνει ένα συγκεκριμένο στόχο, όπως το να λύνει ένα πρόβλημα, έχουν επίσης μελετηθεί σε σχέση με τη δημιουργία κινήτρων, την αυτορύθμιση, τον προσανατολισμό και την αυτοκριτική του ατόμου. Σε αντίστοιχες μελέτες, ο προσανατολισμός στο στόχο και η αυτοκριτική θεωρήθηκαν ως δύο χαρακτηριστικά των ικανών λυτών προβλημάτων και χρήσιμα διδακτικά εργαλεία.
Τα τελευταία χρόνια, η έρευνα στον συναισθηματικό τομέα έχει επικεντρωθεί σε θέματα που αφορούν την κατανόηση και την ανάλυση των συστημάτων πεποιθήσεων και της σχέσης τους με τη διαδικασία μάθησης, περιλαμβάνοντας τη γένεση και την αλλαγή των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά. Διάφορες σχετικές μελέτες (McLeod,1994, Pajares,1992, Thomson,1992) υποστηρίζουν ότι οι συναισθηματικές αντιδράσεις εξαρτώνται από τις εμπειρίες. Η αλλαγή των πεποιθήσεων είναι δυνατή αλλά όχι μία εύκολη υπόθεση. Μπορεί να συμβεί υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, όπου το άτομο έρχεται σε σύγκρουση με τις ήδη υπάρχουσες πεποιθήσεις του. Επίσης, η ανάπτυξη θετικών στάσεων έχει συνδεθεί με το γενικό μαθησιακό κλίμα, το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον, τις ευκαιρίες για εμπειρίες με επιτυχή αποτελέσματα. Η ανάπτυξη των συναισθηματικών ικανοτήτων μέσω της διδασκαλίας είναι ίσως το πιο σημαντικό βήμα, ωστόσο πρέπει ακόμη να γίνουν πολλά προκειμένου να υπάρξει μία πρακτική πρόταση για τη διδασκαλία. Έτσι, αν δεχτούμε τη μάθηση ως απόκτηση ικανοτήτων, τότε προκύπτουν δύο κύρια ερωτήματα

1. Πώς μπορούμε να διδάξουμε αυτές τις ικανότητες;

2. Ποια είδη ικανοτήτων πρέπει να αναπτύξουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να διευκολύνουν τους μαθητές τους στην οικοδόμηση των απαραίτητων εννοιών και ικανοτήτων, περιλαμβάνοντας σε αυτές και τις συναισθηματικές ικανότητες;

Ωστόσο πριν κάποιος αλλάξει μια πεποίθηση που είχε, πρέπει να γνωρίζει καταρχήν την ύπαρξη της. Προκειμένου να αντιμετωπίσουν την επιρροή των αρνητικών πεποιθήσεων οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν πρώτα ότι αυτές οι αρνητικές σκέψεις υπάρχουν και δεύτερον να ενθαρρύνονται ώστε να επικεντρώνονται περισσότερο στις θετικές παρά στις αρνητικές πλευρές των προηγούμενων εμπειριών τους με τα μαθηματικά. Ένα μοντέλο μαθηματικής εξέλιξης που επιτρέπει την υποστήριξη με τη βοήθεια άλλων θα μείωνε την έλλειψη εμπιστοσύνης των μαθητών και θα αύξανε τις πιθανότητες να λύνουν με αποτελεσματικότητα μαθηματικά προβλήματα.

- Ένα άτομο δεν μπορεί να αλλάξει τις πεποιθήσεις του εάν δεν συνειδητοποιήσει την ύπαρξη και το περιεχόμενό τους, καθώς και τον τρόπο που επηρεάζουν τη μαθηματική του ικανότητα.

Οι μαθητές που έχουν θετικό μαθηματικό παρελθόν είναι πιο πιθανό να επιμείνουν στις προσπάθειές τους να λύσουν πιο δύσκολα προβλήματα. Και τούτο διότι η αυτοπεποίθηση που αναπτύσσεται από προηγούμενες μαθηματικές επιτυχίες παρέχει στους μαθητές την υποστήριξη που χρειάζονται προκειμένου να αντιμετωπίσουν άγνωστες γι αυτούς καταστάσεις μαθηματικού προβλήματος.

2.2.2 Οι Στάσεις των μαθητών

Με τον όρο στάσεις εννοούμε τις τάσεις, την προδιάθεση του υποκειμένου να ανταποκρίνεται με κάποιο ομοιόμορφο τρόπο, ευμενώς ή δυσμενώς, έναντι συγκεκριμένων γεγονότων, ατόμων ή φορέων, αντικειμένων ή και μαθημάτων (Φιλίππου - Χρίστου, 1991). Οι στάσεις περιέχουν το στοιχείο της υποκειμενικής αντίληψης και αξιολόγησης βασικών παραμέτρων της κατάστασης που εξετάζεται, προέρχονται από προηγούμενες εμπειρίες, θετικές ή αρνητικές, του ατόμου και επηρεάζουν τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά του.

Ο Husen (1967) στην έκθεση της πρώτης διεθνούς έρευνας για την επίδοση στα μαθηματικά αναφέρει ότι «οι στάσεις των μαθητών προς τα μαθηματικά είναι σχεδόν το ίδιο σημαντικές με τη γνωστική μάθηση του αντικειμένου. Αν ο μαθητής μαθαίνοντας μαθηματικά αποκτά και μία αποστροφή προς το αντικείμενο, η παραπέρα μάθηση καθίσταται απίθανη και μέρος του σκοπού της διδασκαλίας έχει χαθεί». Πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με τη μελέτη των στάσεων. Τα ερωτήματα που διερεύνησαν αφορούσαν τόσο τη δομή και τη γένεση των στάσεων όσο και την εξέλιξή τους, τη σχέση τους με τη μαθηματική διαδικασία και τις

δυνατότητες αλλαγής τους. Ο Schoenfeld (1982) μετά από έρευνες κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι στάσεις των μαθητών επηρεάζονται από την επίδοση και την εικόνα που έχουν για τον εαυτό τους.
Ομοίως διαπιστώθηκε, ότι οι στάσεις αυτές μεταβάλλονται κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, αφού οι μαθητές του Γυμνασίου που είχαν θετικές στάσεις ήταν πολύ λιγότεροι από αυτούς του Δημοτικού. Δηλαδή το ποσοστό των μαθητών που «συμπαθούν» τα μαθηματικά μειώνεται με την πάροδο του χρόνου και αυτό βέβαια δεν είναι ούτε τυχαίο ούτε άσχετο με τη διδασκαλία. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μικρότεροι μαθητές του νηπιαγωγείου και της πρώτης τάξης του Δημοτικού έχουν εμπιστοσύνη στις δυνάμεις τους, αυξημένη αυτοπεποίθηση και πιστεύουν ότι έχουν τη δυνατότητα να πετύχουν σε όλα τα μαθήματα. Αυτή η εντύπωση μπορεί να οφείλεται στις θετικές επιρροές που δέχεται το παιδί από το οικογενειακό περιβάλλον, αφού η πλειοψηφία των γονέων θεωρεί ότι το παιδί τους έχει τις ικανότητες που απαιτούνται, συντελώντας έτσι στη δημιουργία θετικής αυτοεικόνας. Γι' αυτό και η φοβία προς τα μαθηματικά εμφανίζεται συνήθως στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού και στο Γυμνάσιο. Ο Φιλίππου (1991) σε έρευνες σε μαθητές και στην Κύπρο και στην Ελλάδα κατέληξε σε παρόμοια συμπεράσματα.

- Γι' αυτό το λόγο, η έρευνά μας αφορά σε μαθητές της ΣΤ Δημοτικού και της Α Γυμνασίου, ώστε να διαπιστώσουμε τις διαφορές που υπάρχουν κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, όσον αφορά τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά, την επίλυση αριθμητικού προβλήματος και την επιρροή του Διδακτικού Συμβολαίου, καθώς και το αν σχετίζονται αυτά τα θέματα με την κατανόηση και την επιτυχία στα ασυνήθιστα αριθμητικά προβλήματα.

Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τις στάσεις των μαθητών προς τα μαθηματικά και την ενασχόλησή τους με αυτά, είναι κατά πόσο τα θεωρούν χρήσιμα και σημαντικά. Ο Jensen (1993) συμπληρώνει την άποψη του Piaget ότι «τα παιδιά μαθαίνουν γιατί το μυαλό τους είναι φτιαγμένο να μαθαίνει», υποστηρίζοντάς ότι υπάρχουν κι άλλα κίνητρα που επίσης ενισχύουν τη μάθηση. Επί παραδείγματι, τα παιδιά συχνά δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε κάτι που έχει πρακτικές εφαρμογές. Έρευνες των Hart & Walker(1993)έχουν δείξει ότι

- Η μεγάλη διασπορά της επίδοσής τους στα μαθηματικά και η ανάπτυξη της μαθηματικοφοβίας, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στις αντιλήψεις των μαθητών για τη χρησιμότητά τους
- Το ενδιαφέρον και τα κίνητρα των μαθητών για τα μαθηματικά αυξάνεται όταν ασχολούνται με προβλήματα που έχουν σχέση με την καθημερινή ζωή και θα τους φανούν χρήσιμα και εκτός του

σχολικού περιβάλλοντος. Και λέγοντας κίνητρα εννοούμε τις αιτίες που θα ενθαρρύνουν το άτομο να ασχοληθεί ή να επιδιώξει κάτι.

Τα κίνητρα έχουν άμεση σχέση με τη δημιουργία θετικών ή αρνητικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά. Αν ο μαθητής έχει μόνο εξωτερικά κίνητρα, δηλαδή αποβλέπει σε συγκεκριμένα οφέλη που θα αποκομίσει από την επιτυχία του ή στην αποφυγή πιθανής τιμωρίας στην περίπτωση που αποτύχει, τότε θα σταματήσει την προσπάθειά του όταν δεν υπάρχει πλέον το αντίστοιχο κίνητρο. Έτσι χάνει την ευκαιρία να απολαύσει τη χαρά και την ικανοποίηση της δημιουργίας και της επιτυχίας. Αντίθετα, ο μαθητής που πασχίζει για την επίτευξη κάποιου στόχου, επειδή θα του προσφέρει προσωπική εσωτερική ικανοποίηση, γιατί πιστεύει στην αξία της εργασίας του, ανεξάρτητα από κάποια αμοιβή, δηλαδή αν ο μαθητής έχει αναπτύξει εσωτερικά κίνητρα, τότε σταδιακά διαμορφώνει θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά.

Οι Thomson & Thomson(1989) δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην οργάνωση της τάξης καθώς και στο γενικότερο κλίμα που επικρατεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται την τάξη παίζει καθοριστικό ρόλο για τις σχέσεις που καλλιεργούνται μεταξύ των μαθητών και του γνωστικού αντικειμένου. Όταν μέσα στην τάξη επικρατεί ζεστό και φιλικό κλίμα, που συνοδεύεται από αισθήματα θετικής ενίσχυσης από το δάσκαλο, τότε αναπτύσσονται θετικές στάσεις και από τους μαθητές για το μάθημα, όπως θέληση, υπομονή και αυτοπεποίθηση. Επιπλέον, όταν καλλιεργείται η συνεργατική μάθηση δίνεται η ευκαιρία επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών, γεγονός που βοηθάει τους πιο αδύνατους μαθητές να συμμετέχουν στις διαδικασίες επίλυσης ενός προβλήματος, δίνοντάς τους έτσι την ευκαιρία να νιώσουν αισθήματα ικανοποίησης και να αποκτήσουν θετικότερη εικόνα για τον εαυτό τους. Το N.C.T.M. (1991) αναφέρει ότι η επικοινωνία και ο διάλογος πρέπει να είναι πάντα παρόν σε κάθε μαθηματική διαδικασία και μπορεί να είναι η αιτία να αναπτυχθούν θετικές στάσεις.

Ιδιαίτερης σημασίας στη διαμόρφωση του γενικότερου κλίματος στην τάξη αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος αντιμετωπίζει τα λάθη των μαθητών του. Προφανώς το αν κάποιος μαθητής κάνει ή όχι λάθη δεν πρέπει να αποτελεί κριτήριο για το αν θα χαρακτηριστεί περισσότερο ή λιγότερο έξυπνος. Επομένως τα σχόλια των δασκάλων πρέπει να καλλιεργούν την ιδέα ότι τα λάθη είναι θεμιτά και αναμενόμενα στη διαδικασία της μάθησης.

Ένας επιπλέον παράγοντας που επηρεάζει τη στάση και την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά είναι η γνώμη που έχουν οι ίδιοι οι μαθητές για τον εαυτό τους, δηλαδή «η αυτοϊδέα τους». Μακροχρόνιες έρευνες υποδεικνύουν ότι η αυτοϊδέα ενός μαθητή παίζει καθοριστικό ρόλο στη συμπεριφορά του όταν πρόκειται να ασχοληθεί με την επίλυση ενός

προβλήματος. Προφανώς η αυτοϊδέα που σχηματίζει ο μαθητής είναι αποτέλεσμα των κρίσεων των οποίων γίνεται αποδέκτης από τους δασκάλους, τους γονείς ή και τους συμμαθητές του. Παραδείγματος χάριν, αν κάποιοι τον χαρακτηρίζουν συχνά «αδύνατο» στα μαθηματικά, τότε σταδιακά ο μαθητής αποδέχεται το ρόλο που του προσδίδουν και συμπεριφέρεται αντίστοιχα. Η αλυσίδα των καταστάσεων που ακολουθεί οδηγεί με ακρίβεια στη δημιουργία αρνητικών στάσεων και συχνά στην αποστροφή και απόρριψη του μαθήματος. Τότε τα αισθήματα αποστροφής συνεπάγονται απαισιοδοξία και απάθεια, παραίτηση από κάθε προσπάθεια.

- Οι στάσεις στα μαθηματικά μπορούν να δημιουργηθούν και να ενισχυθούν μέσα από την αυτοματοποίηση μιας επαναλαμβανόμενης συναισθηματικής αντίδρασης σε μια μαθηματική κατάσταση. Έτσι, οι προηγούμενες θετικές ή αρνητικές εμπειρίες του ατόμου διαμορφώνουν σταδιακά και τις στάσεις του απέναντι στα μαθηματικά. Ο MacLeod (1989) υποστηρίζει ότι «οι απόψεις προκύπτουν σε μεγάλο βαθμό από τις προηγούμενες εμπειρίες και καλλιεργούνται για σχετικά μεγάλη περίοδο ζωής.

2.2.3 Στάσεις και Πεποιθήσεις των μαθητών και επίλυση αριθμητικών προβλημάτων

Κάποιες επίσης χαρακτηριστικές στάσεις των μαθητών που διαπιστώνονται από τις υπάρχουσες σχετικές έρευνες που αφορούν ειδικότερα στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος, συνοψίζονται στα εξής:

- Οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν μη οικεία μαθηματικά προβλήματα δεν βασίζονται γενικά σε κάποιο μαθηματικό μοντέλο για να προάγει τις λύσεις τους.
- Συχνά ξοδεύουν όλο το χρόνο τους εκτελώντας αναποτελεσματικές απόπειρες εύρεσης των λύσεων, χωρίς να αναζητούν κατάλληλη βοήθεια και χωρίς να ασκούν αποτελεσματικό και συνειδητό έλεγχο των αποφάσεων και των επιλογών που λαμβάνουν.
- Οι μαθητές μπορούν ευκολότερα να εφαρμόζουν αποτελεσματικές στρατηγικές στα πιο οικεία προβλήματα του βιβλίου τους, ώστε να παράγουν κατάλληλες λύσεις σε αυτά τα προβλήματα.
- Οι αποφάσεις που πάρθηκαν κατά τη διάρκεια εύρεσης μιας λύσης εξαρτώνται από το περιεχόμενο των γνώσεων του ατόμου και το σύστημα των προσωπικών τους πεποιθήσεων.
- Η δεξιότητά τους στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος δεν βασίζεται σε μια σταθερή διαδικασία, η οποία έχει

αποκτηθεί από μία οργανωμένη εκπαιδευτική πρακτική, και η οποία θα τους παρείχε την απαραίτητη καθοδήγηση τόσο σε γνωστά όσο και σε άγνωστα προβλήματα.

- Οι μαθητές που έχουν θετικό μαθηματικό παρελθόν είναι πιο πιθανό να επιμείνουν στις προσπάθειές τους να λύσουν πιο δύσκολα προβλήματα. Και τούτο διότι η αυτοπεποίθηση που αναπτύσσεται από προηγούμενες μαθηματικές επιτυχίες παρέχει στους μαθητές την υποστήριξη που χρειάζονται προκειμένου να αντιμετωπίσουν άγνωστες γι αυτούς καταστάσεις μαθηματικού προβλήματος.

Από τα παραπάνω προκύπτει η γενικά αποδεκτή διαπίστωση από την ερευνητική κοινότητα, ότι η καλλιέργεια θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και η παρότρυνσή τους να λαμβάνουν ενεργά μέρος στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων, καθώς και η εμπειρία της απόλαυσης και της γοητείας της μαθηματικής ανακάλυψης, αποτελούν ζητήματα μείζονος ενδιαφέροντος για τη μαθηματική εκπαίδευση. Συμπερασματικά επίσης θα τονίζαμε, ότι ένα σύγχρονο σύστημα σπουδών θα πρέπει να δίνει έμφαση σε ένα ευρύ φάσμα εννοιών όσον αφορά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, έτσι ώστε να κεντρίζει την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών, να εμπλέκει καταστάσεις από την καθημερινή ζωή και να εισάγει νέες έννοιες με τρόπο κατανοητό από τους μαθητές μέσα από την επικοινωνία και τη συνεργασία.

2.2.4 Στάσεις και Πεποιθήσεις των μαθητών και επίλυση ασυνήθιστων αριθμητικών προβλημάτων

Ενώ υπάρχουν πολυάριθμες έρευνες που συνδυάζουν τις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών με την επίλυση συνηθισμένων λεκτικών προβλημάτων, στη βιβλιογραφία, όσο τουλάχιστον είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, αναφέρεται μόνο μία σχετική έρευνα που να συνδέει τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά, με την επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων.

Πρόκειται για την έρευνα των L. Mason και L. Scrivani, που έγινε το 2003 και αφορούσε σε μαθητές της Ε Δημοτικού σχολείου στο Μιλάνο, στη βόρεια Ιταλία. Μεταξύ άλλων ερευνητικών ερωτημάτων, η έρευνα είχε σαν στόχο να διαπιστώσει κατά πόσο οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά μπορούν να επηρεάσουν την επίδοσή τους στη λύση αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων, τυπικών αλλά και ασυνήθιστων. Στην έρευνα πήραν μέρος 86 μαθητές, με κοινωνικό υπόβαθρο μεσαίας τάξης. Από αυτούς οι 46 αποτέλεσαν την τάξη ελέγχου, όπου χωρισμένοι σε δύο τμήματα ακολούθησαν το συνηθισμένο πρόγραμμα μαθηματικών,

το οποίο περιείχε τη λύση ενός σεβαστού αριθμού συνηθισμένων λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων.

Οι άλλοι 40 δέχθηκαν παρέμβαση, επίσης χωρισμένοι σε δύο τμήματα. Η πειραματική ομάδα παρακολούθησε 12 συναντήσεις με τη δεύτερη από τις ερευνήτριες, που η κάθε μία είχε διάρκεια μιάμιση ώρα, κατά την διάρκεια τριών μηνών. Η δασκάλα των τμημάτων ήταν παρούσα και μπορούσε να επέμβει, όπου το έκρινε αναγκαίο.

Ο κύριος στόχος της παρέμβασης ήταν η καλυτέρευση των πεποιθήσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά μέσω της δημιουργίας ενός διαφορετικού, δυναμικού, μαθησιακού περιβάλλοντος. Οι κύριοι άξονες αυτής της διαφοροποίησης ήταν:

α) Η προσπάθεια δημιουργίας μιας διαφορετικής μαθησιακής κουλτούρας, μέσω της επανεξέτασης των ρόλων του δασκάλου και του μαθητή.

β) Η ενθάρρυνση της κοινωνικογνωστικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών.

γ) Η προσπάθεια να έρθει σε επαφή η σκέψη των παιδιών με ασυνήθιστα προβλήματα, όπως προβλήματα που επιδέχονται πολλαπλές λύσεις ή προβλήματα, στα οποία είναι απαραίτητη η μαθηματική μοντελοποίηση βάσει της κοινής λογικής και της γνώσης της καθημερνής πραγματικότητας.

Χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο κλίμακας Likert για τη διερεύνηση των πεποιθήσεων των μαθητών και ερωτηματολόγιο κλίμακας Likert για την αυτοαξιολόγηση. Δόθηκε επίσης δοκίμιο που περιείχε και συνηθισμένα και ασυνήθιστα προβλήματα. Και τα δύο ερωτηματολόγια, και το δοκίμιο, δόθηκαν ως pre-test και post- test και στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου. Δόθηκαν ακόμη και στις δύο ομάδες, ως post-test, 3 ερωτήσεις ανοικτού τύπου που σχετίζονταν με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Στην πειραματική ομάδα οι πεποιθήσεις των μαθητών αλλά και η απόδοση τους βελτιώθηκε σημαντικά. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, προέκυψε μεταξύ άλλων, ότι όσον αφορά στα συνηθισμένα προβλήματα, υπάρχει στατιστικά σημαντική θετική σχέση ανάμεσα στις πεποιθήσεις των μαθητών και την επίδοση τους σ' αυτά. Ενώ δεν ισχύει κάτι τέτοιο για τα ασυνήθιστα προβλήματα.

3.Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα πήραν μέρος συνολικά 276 μαθητές. Από αυτούς οι 138 ήταν μαθητές της Α Γυμνασίου σε δύο σχολεία του νομού Αττικής. Οι άλλοι 138 ήταν μαθητές της ΣΤ Δημοτικού από τέσσερα Δημοτικά

σχολεία του νομού Αττικής και δύο Δημοτικά σχολεία του νομού Κοζάνης. Οι δάσκαλοι ή οι καθηγητές μαθηματικών των τάξεων, στην πλειοψηφία τους, δεν ήταν παρόντες, μετά από επιλογή τους.
Η έρευνα αποτελείται από δύο φάσεις. Στο δείγμα περιλαμβάνονται μόνο μαθητές που ήταν παρόντες και έλαβαν μέρος και στις δύο φάσεις.
Αρχικά, δόθηκε το Ερωτηματολόγιο Α το οποίο περιείχε 20 ερωτήσεις που αφορούσαν στις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος. Από τις 20 ερωτήσεις, οι 11 αφορούσαν στις στάσεις (π.χ. *Όταν δυσκολεύομαι σε ένα πρόβλημα, επιμένω μέχρι να βρω λύση)*, και 9 ερωτήσεις αφορούσαν στις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά (π.χ. *Πιστεύω πως είναι χρήσιμο για μένα να μάθω να λύνω μαθηματικά προβλήματα)*. Συνολικά, 11 ερωτήσεις αφορούσαν στη λύση προβλήματος. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε πενταβάθμια διατακτική κλίμακα (Likert scale).
Τέλος, η ερώτηση 1, η οποία εξέφραζε μια πολύ ισχυρή θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά (*Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα*), ήταν ίδια με την ερώτηση 19, ως ένα κριτήριο αξιοπιστίας .
Αμέσως μετά το Ερωτηματολόγιο Α, δόθηκε στους ίδιους μαθητές το Δοκίμιο Β το οποίο τους ζητούσε να απαντήσουν σε 10 συνολικά προβλήματα, από τα οποία 5 ήταν συνηθισμένα (S) και 5 ασυνήθιστα (U), ανακατεμένα μεταξύ τους. Από τα ασυνήθιστα κάποια ήταν κοινά με εκείνα άλλων ερευνών (στρατιωτικά λεωφορεία, το πάρτυ 2 φίλων, τα μπαλόνια, οι σανίδες). Το πέμπτο ήταν πρόβλημα ψευδοαναλογίας:
(Ο Μανόλης για να παίξει στη κιθάρα του ένα μουσικό κομμάτι χρειάζεται 10 λεπτά. Αν παίξουν το ίδιο μουσικό κομμάτι ο Μανόλης και ο Αντρέας μαζί, με τις κιθάρες τους, πόσο χρόνο χρειάζονται;).
Κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας, δόθηκε στους ίδιους μαθητές το Δοκίμιο Γ μετά από διάστημα μίας εβδομάδας περίπου από την πρώτη φάση. Περιελάμβανε επτά ασυνήθιστα προβλήματα. Από αυτά τα δύο (πρόβλημα 2 και πρόβλημα 4) δεν χρειάζονταν καμία αριθμητική πράξη για να λυθούν (*Ένας χασάπης έχει στο κρεοπωλείο του 50 κιλά μοσχαρίσιο κρέας. Πιστεύει όμως ότι θα υπάρχει μεγάλη ζήτηση από αυτό το κρέας, και τηλεφωνεί στον προμηθευτή του και του παραγγέλνει 30 κιλά ακόμα . Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας έχει στο κρεοπωλείο του, τώρα που μόλις έκλεισε το τηλέφωνο;*) και το ένα από αυτά ήταν ψευδοαναλογικό. Το τρίτο (πρόβλημα 1) ήταν πρόβλημα πολύ απλής διαίρεσης (12:3) όπου όμως το πηλίκο έπρεπε να ερμηνευθεί λογικά για να προκύψει η ορθή απάντηση. Το τέταρτο (πρόβλημα 3) ήταν πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (*Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;*). Το πέμπτο ήταν πρόβλημα μέσου όρου θερμοκρασιών

νερού (πρόβλημα 5). Το έκτο και το έβδομο (προβλήματα 6 και 7) ήταν προβλήματα διαίρεσης, όπου έπρεπε να γίνει ερμηνεία του δεκαδικού πηλίκου, για να προκύψει ορθή απάντηση. Στα προβλήματα αυτά είχε δοθεί προσοχή ώστε το πλαίσιο να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο οικείο.
Από τα 7 ασυνήθιστα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα του Δοκιμίου Γ, κάποια, όπως και στο Δοκίμιο Β, ήταν κοινά με προβλήματα προηγούμενων ερευνών (το σκοινί, ο χασάπης που τηλεφωνεί, η απόσταση των σπιτιών, η θερμοκρασία του νερού). Το πρόβλημα με τα απλωμένα ρούχα (ψευδοαναλογικό) παρουσιάστηκε σε διάλεξη του Greer (Αρχ. Ολυμπία, 2006) και το έκτο πρόβλημα, που στο Δοκίμιο Β σχετιζόταν με τα στρατιωτικά λεωφορεία, παρουσιάστηκε σε πιο οικείο πλαίσιο, σχετικά με λεωφορεία για μαθητές που πηγαίνουν εκδρομή. Το έβδομο πρόβλημα ήταν και αυτό πρόβλημα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου της διαίρεσης, αλλά σε αντίθεση με το πρόβλημα με τα λεωφορεία, το ακέραιο μέρος έπρεπε να μειωθεί κατά μία μονάδα για να προκύψει ορθή απάντηση.

Πριν οι μαθητές αρχίσουν να λύνουν τα προβλήματα προηγήθηκε διδακτική παρέμβαση με την εξής μορφή: Στη πρώτη σελίδα αυτού του δοκιμίου υπήρχαν τυπωμένα με έντονα γράμματα 4 προβλήματα με την απάντησή τους. Το πρώτο ήταν ένα τυπικό (S) πρόβλημα, όπου η απάντηση ήταν ένας μοναδικός και ακριβής αριθμός. Το δεύτερο ήταν αδύνατο με τη λογική, ανάλογο του προβλήματος του καπετάνιου, το τρίτο είχε απάντηση της μορφής «περισσότερο από…», και το τέταρτο ήταν ψευδοαναλογικό πρόβλημα.
Η ερευνήτρια διάβασε δυνατά κάθε πρόβλημα και το σχολίασε με ιδιαίτερα ενεργή τη συμμετοχή των μαθητών, και επεσήμανε τις ιδιαιτερότητες καθενός από τα τρία ασυνήθιστα προβλήματα σε σχέση με το πρώτο που ήταν συνηθισμένο. Τέλος οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να ξαναδιαβάσουν τα τέσσερα παραδείγματα προτού να ασχοληθούν με τα προβλήματα του δοκιμίου. Οι μαθητές απασχολήθηκαν για μία διδακτική ώρα συνολικά και σε όσους το χρειάστηκαν δόθηκε και ο χρόνος του διαλείμματος.
Το ζητούμενο ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο η παρέμβαση αυτή βελτίωσε την επιτυχία των παιδιών στη λύση ασυνήθιστων προβλημάτων σε σχέση με το δοκίμιο Β, το οποίο περιείχε πέντε συνηθισμένα και πέντε ασυνήθιστα προβλήματα και με το οποίο οι ίδιοι μαθητές είχαν ασχοληθεί πριν από επτά έως δέκα ημέρες.
Αξίζει να σημειωθεί ότι το Δοκίμιο Β περιείχε μεταξύ των ασυνήθιστων προβλημάτων, δύο προβλήματα του ίδιου τύπου και με παρόμοιο πλαίσιο, με τα προβλήματα 6 και 7 του Δοκιμίου Γ για τα οποία δεν υπήρχε σχετικό παράδειγμα και ούτε σχολιάστηκε παρόμοιο πρόβλημα

την ημέρα της παρέμβασης. Το δε πρόβλημα 3 του Δοκιμίου Γ, που επιδεχόταν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις δεν είχε ανάλογο μεταξύ των παραδειγμάτων, δεν σχολιάστηκε παρόμοιο πρόβλημα την ημέρα της παρέμβασης και στο Δοκίμιο Β, όπου υπήρχε επίσης ανάλογο ασυνήθιστο πρόβλημα, το πλαίσιο ήταν εντελώς διαφορετικό. Ακόμη, ενώ μεταξύ των παραδειγμάτων της παρέμβασης υπήρχε πρόβλημα αδύνατο με τη λογική, δεν υπήρχε ανάλογο πρόβλημα προς λύση μεταξύ των προβλημάτων του Δοκιμίου Γ.

Τέλος και στα δύο δοκίμια υπήρχε διαφορετικός χώρος για την απάντηση, και άλλος χώρος όπου οι μαθητές ενθαρρύνονταν να γράψουν τη σκέψη ή τις παρατηρήσεις τους.
Και τα τρία δοκίμια ζητούσαν το ονοματεπώνυμο των παιδιών, αλλά τονιζόταν, ότι η επιτυχία ή μη στα προβλήματα των δοκιμίων δεν θα επηρέαζε τη βαθμολογία τους, γιατί ο δάσκαλος/α ή ο καθηγητής /τρια της τάξης δεν θα λάβαινε υπόψη του τα δοκίμια. Δόθηκε όμως η δυνατότητα, την οποία και επέλεξε η πλειοψηφία των μαθητών, να χρησιμοποιηθεί ψευδώνυμο, εφόσον αυτό θα τους έκανε να αισθανθούν μεγαλύτερη άνεση, το ίδιο και για τα τρία δοκίμια.
Έτσι δεν γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό αγοριών και κοριτσιών.

Για την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε η συνεπαγωγική μέθοδος ανάλυσης (Lerman, 1981) με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Προέκυψαν διαγράμματα ομοιότητας και συνεπαγωγικά διαγράμματα (Gras, Peter, Briand, & Philippe, 1997).

4.ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ: ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α)

Στον Πίνακα 1 φαίνονται τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού και Α τάξης Γυμνασίου στις 20 δηλώσεις του ερωτηματολογίου. Οι στάσεις των μαθητών του Δημοτικού απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών ήταν πολύ θετικές, αφού ένα ψηλό ποσοστό μαθητών (65% στην Α1 και 61% στην Α19) δήλωσαν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα. Το ποσοστό αυτό για τους μαθητές Γυμνασίου ήταν χαμηλότερο (51% στην Α1 και 45% στην Α19), επαληθεύοντας τις σχετικές έρευνες. Επιπλέον, μεγαλύτερο

ήταν το ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού που δήλωσαν ότι θα ήθελαν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα όπου θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά (58% για το Δημοτικό και 42% για το Γυμνάσιο). Αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά (An4) εκφράστηκε μόνο από ένα μικρό ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου (25% και 28% αντίστοιχα). Αντίθετα, σχετικά μεγάλο ήταν το ποσοστό των μαθητών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου, που δήλωσαν ότι θα τους άρεσαν περισσότερο τα μαθηματικά αν ήταν πιο εύκολα (54% και 63% αντίστοιχα).

Η επιρροή των εξωτερικών κινήτρων φάνηκε να είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τους μαθητές του Δημοτικού όσο και για τους μαθητές του Γυμνασίου. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου (63% και 69% αντίστοιχα) δήλωσαν ότι αυτό που τους αρέσει περισσότερο σε ένα διαγώνισμα στη λύση προβλήματος είναι να παίρνουν καλό βαθμό. Επιπλέον ένα ψηλό ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού (62%) και του Γυμνασίου (61%) δήλωσαν ότι θέλουν να παίρνουν καλούς βαθμούς στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσουν τους γονείς τους.

Υψηλό ήταν και το ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου (79% και 77%) που δήλωσαν ότι όταν δυσκολεύονται σε ένα πρόβλημα επιμένουν μέχρι να βρουν τη λύση. Υψηλά ήταν επίσης και τα ποσοστά των μαθητών που δήλωσαν ότι δεν ξεχνούν εύκολα ό,τι μαθαίνουν στα μαθηματικά (76% για το Δημοτικό και 69% για το Γυμνάσιο). Αντίθετα, χαμηλά ήταν τα ποσοστά των μαθητών που δήλωσαν ότι θέλουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση σε ένα πρόβλημα (38% για το Δημοτικό και 45% για το Γυμνάσιο).

Ερωτήσεις	***Στ' τάξη***	***Α' τάξη***
1. Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα (A1)	65 %	51 %
2. Η ικανότητα να λύνω μαθηματικά προβλήματα είναι χρήσιμη και σε άλλα μαθήματα του σχολείου (Bp2)	66 %	71 %
3. Νομίζω ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά (An4)	25 %	28 %
4. Αυτό που μου αρέσει περισσότερο σε ένα διαγώνισμα στη λύση προβλήματος είναι να παίρνω καλό βαθμό (Ap4)	63 %	69 %
5. Όταν δυσκολεύομαι σε ένα πρόβλημα επιμένω μέχρι να βρω λύση (Ap5)	79 %	77 %

6. Χρειάζεται να μάθω να λύνω μαθηματικά προβλήματα γιατί θα μου είναι χρήσιμο αργότερα (Βp6)	89 %	89 %
7. Θα ήθελα να ακολουθήσω ένα επάγγελμα, όπου θα χρησιμοποιώ τα μαθηματικά (Α7)	58 %	42 %
8. Μαθαίνω να θυμούμαι λέξεις – κλειδιά (π.χ. λιγότερος/ περισσότερος) για να λύνω κάποια μαθηματικά προβλήματα (Acp8)	69 %	71 %
9. Πιστεύω ότι είμαι ικανός/ή να κατανοήσω τους βασικούς τρόπους επίλυσης προβλήματος που διδάσκει ο δάσκαλος (Βp9)	77 %	70 %
10. Θα μου άρεσαν τα μαθηματικά περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα (Α10)	54 %	63 %
11. Τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός/ή (Β11)	66 %	55 %
12. Θέλω πολύ χρόνο για να βρω τη λύση σε ένα πρόβλημα (Ap12)	38 %	45 %
13. Δεν ξεχνώ εύκολα ό,τι μάθω στα μαθηματικά (Α13)	76 %	69 %
14. Πιστεύω πως είναι χρήσιμο για μένα να μάθω να λύνω μαθηματικά προβλήματα (Βp14)	85 %	85 %
15. Προτιμώ να λύνω μαθηματικά προβλήματα που δεν συναντήσαμε παρόμοια στην τάξη, γιατί μπορώ από αυτά να μάθω κάτι καινούριο (Βp15)	71 %	64 %
16. Θέλω να παίρνω καλούς βαθμούς στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσω τους γονείς μου (Α16)	62 %	61 %
17. Πιστεύω πως είμαι καλός/ή στη λύση μαθηματικών προβλημάτων (Βp17)	65 %	57 %
18. Ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί (Βc18)	48 %	42 %
19. Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα (Α19)	61 %	45 %
20. Ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις (Βcp20)	82 %	76 %

Πίνακας 1. Ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών Στ' τάξης Δημοτικού και Α' τάξης Γυμνασίου στις 20 δηλώσεις του ερωτηματολογίου Α

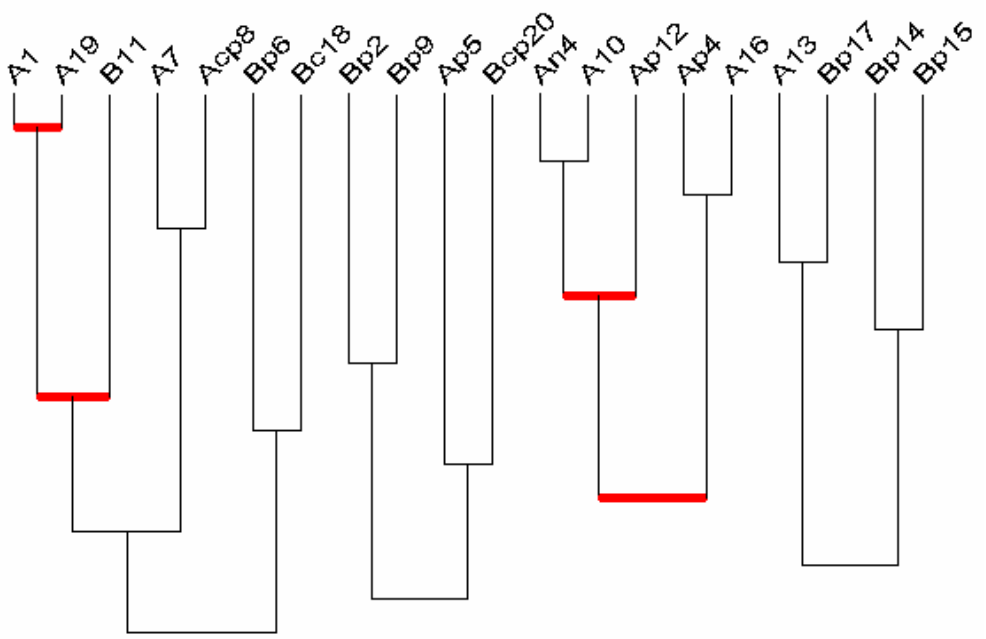
Οι πεποιθήσεις επάρκειας για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών του Δημοτικού ήταν αρκετά υψηλές σε σχέση με τις πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών του Γυμνασίου. Το 66% των μαθητών του δημοτικού και το 55% των μαθητών του Γυμνασίου δήλωσαν ότι τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είναι δυνατοί.

Το 65% των μαθητών του Δημοτικού και το 57% των μαθητών του Γυμνασίου δήλωσαν ότι πιστεύουν πως είναι καλοί στη λύση μαθηματικών προβλημάτων. Το 77% των μαθητών του Δημοτικού και το 70% των μαθητών του Γυμνασίου δήλωσαν ότι πιστεύουν ότι είναι ικανοί να κατανοήσουν τους βασικούς τρόπους επίλυσης προβλήματος που διδάσκει ο δάσκαλος. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών μειώνονται κατά τη μετάβασή τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Οι πεποιθήσεις των μαθητών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου για τη χρησιμότητα των μαθηματικών είναι πολύ υψηλές. Το 66% των μαθητών του Δημοτικού και το 71% των μαθητών του Γυμνασίου αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών προβλημάτων στα άλλα μαθήματα του σχολείου. Το 89% των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου έχουν την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα θα τους είναι χρήσιμα και στη μετέπειτα ζωή τους. Τέλος, το 85% των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου πιστεύουν ότι είναι χρήσιμο για αυτούς να μάθουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα.

Η πλειοψηφία των μαθητών του Δημοτικού (71%) αλλά και ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου (64%) δήλωσαν ότι προτιμούν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα που δεν συναντούν παρόμοια στην τάξη γιατί από αυτά μπορούν να μάθουν κάτι καινούριο. Οι δηλώσεις που άπτονται του Διδακτικού Συμβολαίου είναι οι υπ΄ αριθμόν 8 15, 18, 20. Το 69% των μαθητών του Δημοτικού και το 71% των μαθητών του Γυμνασίου δήλωσαν ότι μαθαίνουν να θυμούνται λέξεις-κλειδιά για να λύνουν κάποια μαθηματικά προβλήματα. Η δήλωση αυτή αποτελεί ισχυρή ένδειξη για την ύπαρξη Διδακτικού Συμβολαίου. Περαιτέρω υποστήριξη για την ύπαρξη του Διδακτικού Συμβολαίου παρέχουν και τα χαμηλά ποσοστά που συγκέντρωσε η δήλωση «Ένα πρόβλημα είναι δυνατό να μην μπορεί να λυθεί». Με τη δήλωση αυτή συμφώνησε το 48% των μαθητών του Δημοτικού και το 42% των μαθητών του Γυμνασίου. Αντίθετα, ένα πολύ υψηλό ποσοστό των μαθητών του Δημοτικού (82%) καθώς και ένα αρκετά υψηλό ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου (76%) δήλωσαν ότι ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, πράγμα το οποίο ενδεχομένως να αποτελεί σημείο ρήξης με το Διδακτικό Συμβόλαιο.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού



Εξαιρετικά θετικές *Χρησιμότητα* *Αρνητικές* *Θετικές-πρόβλημα*

Διάγραμμα 1. Διάγραμμα ομοιότητας των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού

Το διάγραμμα ομοιότητας 1 παρουσιάζει τις ομαδοποιήσεις των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού. Στο διάγραμμα αυτό σχηματίζονται τέσσερις ομάδες ομοιότητας οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει δηλώσεις που αφορούν εξαιρετικά θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Η δήλωση «Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα» (A1 και A19) συνδέεται ισχυρά με την πεποίθηση ότι «Τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός/ή» (B11). Οι δηλώσεις αυτές συνδέονται με τις δηλώσεις A7 «Θα ήθελα να ακολουθήσω ένα επάγγελμα, όπου θα χρησιμοποιώ τα μαθηματικά» και Acp8 «Μαθαίνω να θυμούμαι λέξεις-κλειδιά για να λύνω κάποια μαθηματικά προβλήματα». Στην ίδια ομάδα υπάρχει και η πεποίθηση ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι χρήσιμα και αργότερα στη ζωή (Bp6) η οποία συνδέεται με την πεποίθηση ότι ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί (Bc18).

Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται οι στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών που θεωρούν ότι η ικανότητα να λύνουν μαθηματικά προβλήματα θα τους είναι χρήσιμη και σε άλλα μαθήματα του σχολείου (Bp2) και πιστεύουν ότι είναι ικανοί να κατανοήσουν τους βασικούς τρόπους επίλυσης προβλήματος που διδάσκονται στην τάξη (Bp9). Στην

ίδια ομάδα περιλαμβάνεται η δήλωση που σχετίζεται με την επιμονή στην επίλυση ενός δύσκολου προβλήματος (Ap5) και η δήλωση που σχετίζεται με τη ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου (Bcp20) «Ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μια σωστές απαντήσεις».

Στην τρίτη ομάδα περιλαμβάνονται οι αρνητικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Στην ομάδα αυτή περιλαμβάνεται η δήλωση «Νομίζω ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά» (An4) η οποία συνδέεται με τη δήλωση «Θα μου άρεσαν τα μαθηματικά περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα» (A10). Στην ομάδα αυτή περιλαμβάνεται και η δήλωση που σχετίζεται με τον πολύ χρόνο που χρειάζονται οι μαθητές για να βρουν τη λύση σε ένα πρόβλημα (Ap12). Στην ίδια ομάδα περιλαμβάνονται και οι δύο δηλώσεις που αφορούν εξωτερικά κίνητρα οι οποίες συνδέονται ισχυρά μεταξύ τους (Ap4 και A16).

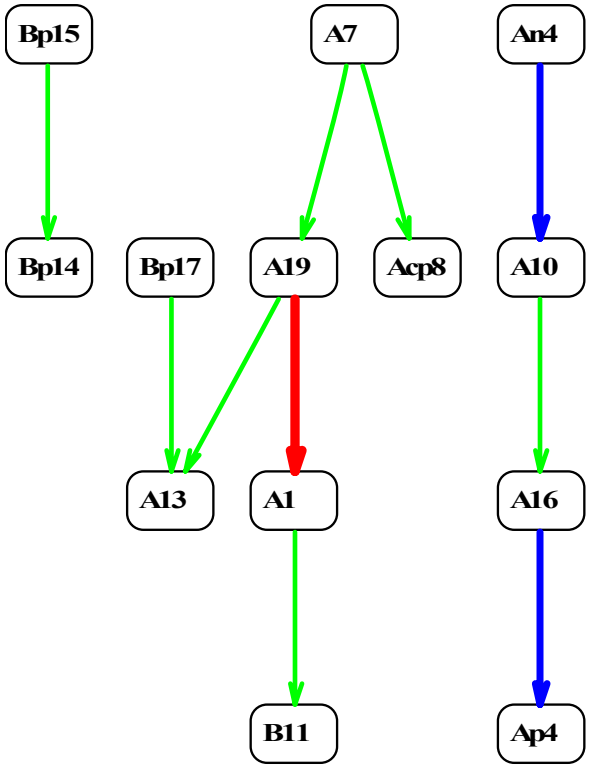
Στην τέταρτη ομάδα περιλαμβάνονται δηλώσεις που αφορούν θετικές στάσεις και πεποιθήσεις. Η δήλωση ότι «Δεν ξεχνώ εύκολα ό,τι μάθω στα μαθηματικά» (A13) συνδέεται με τη δήλωση «Πιστεύω πως είμαι καλός/ή στη λύση μαθηματικών προβλημάτων» (Bp17). Επιπλέον, η δήλωση που αναφέρεται στη χρησιμότητα των μαθηματικών προβλημάτων (Bp14) συνδέεται με τη δήλωση υπέρ των ασυνήθιστων μαθηματικών προβλημάτων (Bp15).

Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 2) δείχνει τις συνεπαγωγές που προέκυψαν ανάμεσα στις στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού.

Οι συνεπαγωγές που προκύπτουν, επαληθεύουν τα ευρήματα του διαγράμματος ομοιότητας 1. Η πρώτη συνεπαγωγική σχέση (Bp15-Bp14) υποδεικνύει ότι αυτοί που δηλώνουν ότι τους αρέσει περισσότερο να λύνουν εκείνα τα προβλήματα που δεν έχουν συναντήσει παρόμοια τους στην τάξη θεωρούν επίσης ότι το να λύνουν μαθηματικά προβλήματα είναι χρήσιμο για αυτούς τους ίδιους. Οι μαθητές εκείνοι που θεωρούν ότι είναι καλοί στη λύση προβλήματος και τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα δηλώνουν επίσης ότι δεν ξεχνούν εύκολα ότι μαθαίνουν στα μαθηματικά (Bp17-A13, A19-A13).

Από τη συνεπαγωγική σχέση (A7-A19-A1-B11) προκύπτει ότι οι μαθητές εκείνοι που δήλωσαν ότι θέλουν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα όπου θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, δηλώνουν επίσης ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα και ότι είναι από τα μαθήματα που θεωρούν τον εαυτό τους δυνατό.



Διάγραμμα2. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού

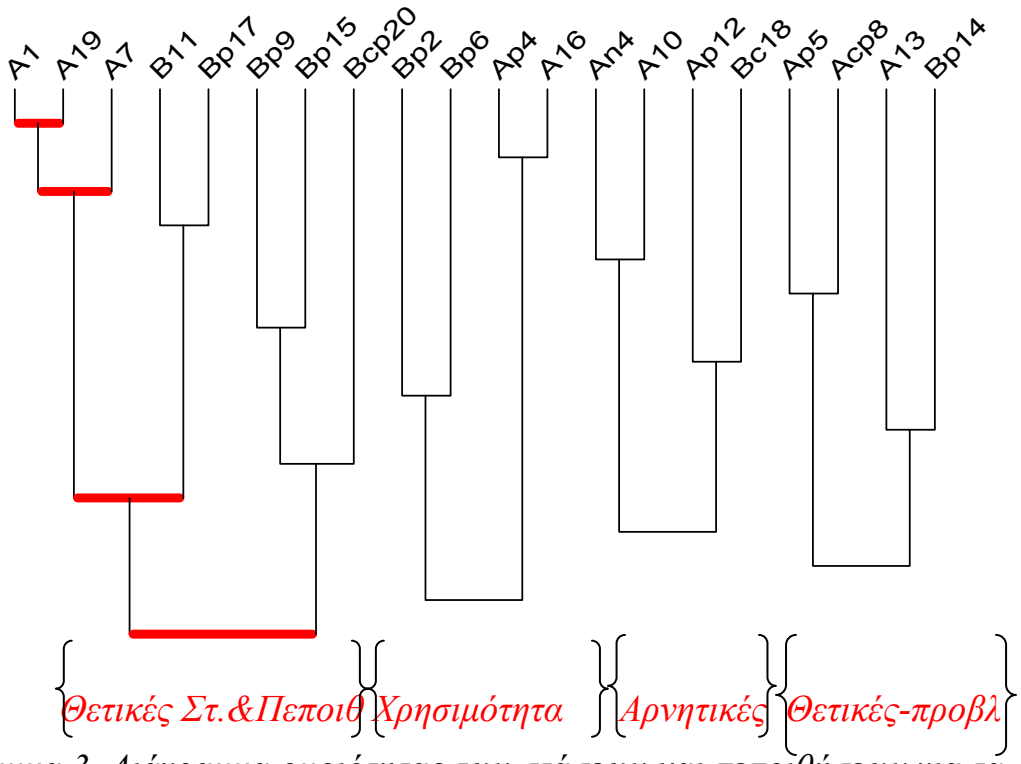
Επίσης, οι μαθητές εκείνοι που δήλωσαν ότι θέλουν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα όπου θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά δηλώνουν επίσης ότι μαθαίνουν να θυμούνται λέξεις – κλειδιά (π.χ. λιγότερος/ περισσότερος) για να λύνουν κάποια μαθηματικά προβλήματα (A7-Acp8).

Η συνεπαγωγική σχέση (An4-A10-A16-Ap4) σχετίζεται με τη τρίτη ομάδα του διαγράμματος ομοιότητας 1. Όσοι μαθητές δηλώνουν ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά, δηλώνουν επίσης ότι θα τους άρεσαν περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα και ότι θέλουν να παίρνουν καλό βαθμό στα διαγωνίσματα που περιέχουν προβλήματα, πράγμα που είναι και το κύριο ενδιαφέρον τους σε αυτά τα διαγωνίσματα, για να ευχαριστήσουν τους γονείς τους. Οι αρνητικές στάσεις για τα μαθηματικά σχετίζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση με τα εξωτερικά κίνητρα των μαθητών.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας Α Γυμνασίου

Το διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 3) παρουσιάζει τις ομαδοποιήσεις των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Στο διάγραμμα αυτό σχηματίζονται τέσσερις ομάδες ομοιότητας, οι οποίες δε συνδέονται μεταξύ τους. Στην πρώτη ομάδα περιλαμβάνονται οι θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Σε αυτή την ομάδα υπάρχουν τρεις υποομάδες οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρούς δεσμούς. Η στάση ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα (A1 και A19) συνδέεται με πολύ ισχυρό τρόπο με τη δήλωση ότι θα ήθελαν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα που θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά (A7). Επίσης η πεποίθηση των μαθητών που θεωρούν τον εαυτό τους δυνατό στα μαθηματικά (B11) συνδέεται πολύ ισχυρά με την πεποίθηση ότι είναι και καλοί στη λύση μαθηματικών προβλημάτων (Bp17) και την πεποίθησή τους ότι είναι ικανοί να κατανοήσουν τους βασικούς τρόπους επίλυσης που διδάσκονται στην τάξη (Bp9).



Διάγραμμα 3. Διάγραμμα ομοιότητας των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Αυτή η πεποίθηση συνδέεται αρκετά ισχυρά με την στάση εκείνων που προτιμούν να λύνουν εκείνα τα προβλήματα που δεν έχουν συναντήσει παρόμοια τους στην τάξη (Bp15) καθώς και με την πεποίθηση ότι ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις (Bpc20).

Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται οι στάσεις και πεποιθήσεις που αφορούν κυρίως στη χρησιμότητα των μαθηματικών και σε εξωτερικά κίνητρα. Η πεποίθηση ότι η ικανότητα να λύνει κανείς μαθηματικά προβλήματα θα είναι χρήσιμη και σε άλλα μαθήματα του σχολείου (Bp2)

συνδέεται με την πεποίθηση ότι χρειάζεται κανείς να μάθει να λύνει μαθηματικά προβλήματα γιατί αυτό θα είναι χρήσιμο και αργότερα (Bp6). Στην ίδια ομάδα περιλαμβάνονται και οι δύο δηλώσεις που αφορούν εξωτερικά κίνητρα οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους (Ap4 και A16).

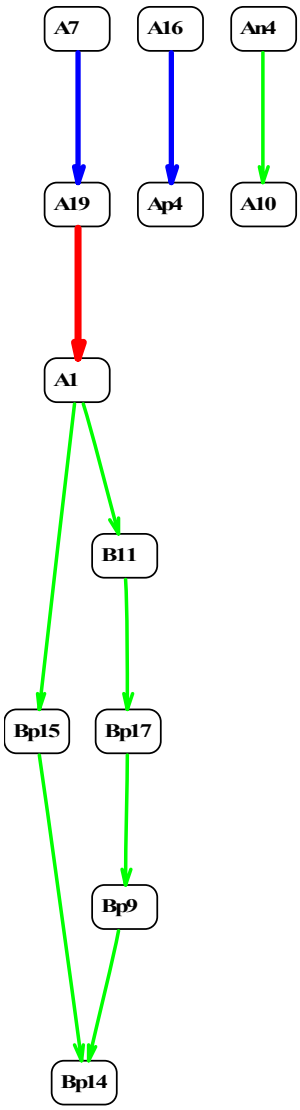
Στην τρίτη ομάδα περιλαμβάνονται οι αρνητικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Η στάση ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά (An4) συνδέεται με τη στάση ότι θα άρεσαν περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα (A10). Στην ομάδα αυτή περιλαμβάνεται και η δήλωση που σχετίζεται με τον πολύ χρόνο που χρειάζονται οι μαθητές για να βρουν τη λύση σε ένα πρόβλημα (Ap12) η οποία συνδέεται με τη δήλωση ότι ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί (Bc18). Εδώ αυτή η σύνδεση είναι αρκετά εντυπωσιακή, εφόσον μία δήλωση, που εκ πρώτης όψεως έρχεται σε ρήξη με το Διδακτικό Συμβόλαιο, περιέχεται στην ομάδα των αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά. Θα ήταν ενδιαφέρον να ερευνηθεί με ποιοτικά εργαλεία το περιεχόμενο που προσδίδουν οι μαθητές σ' αυτή τη δήλωση.

Στην τέταρτη ομάδα περιλαμβάνονται θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Η δήλωση που σχετίζεται με την επιμονή στην επίλυση ενός δύσκολου προβλήματος (Ap5) συνδέεται με τη δήλωση που αφορά τη χρήση λέξεων-κλειδιά για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος (Acp8). Επιπλέον, η δήλωση ότι «Δεν ξεχνώ εύκολα ό,τι μάθω στα μαθηματικά» (A13) συνδέεται με τη δήλωση που αναφέρεται στη χρησιμότητα των μαθηματικών προβλημάτων (Bp14).

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 4) δείχνει τις συνεπαγωγές που προέκυψαν ανάμεσα στις στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Από τη συνεπαγωγική σχέση (A7-A19-A1-B11-Bp17-Bp9-Bp14) προκύπτει ότι οι μαθητές εκείνοι που δήλωσαν ότι θέλουν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα όπου θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, δηλώνουν επίσης ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα και ότι είναι από τα μαθήματα που θεωρούν τον εαυτό τους δυνατό. Επιπλέον, έχουν την πεποίθηση ότι είναι καλοί και στη λύση προβλήματος και ότι αντιλαμβάνονται τους βασικούς τρόπους επίλυσης των προβλημάτων που διδάσκονται στη τάξη. Τέλος, πιστεύουν ότι είναι χρήσιμο για τους ίδιους να μάθουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα (εσωτερικό κίνητρο). Η συνεπαγωγική σχέση (A7-A19-A1-Bp15-Bp14) διαφοροποιείται ως προς το ότι περιλαμβάνει τη μεταβλητή Bp15 που σχετίζεται με την προτίμηση σε μαθηματικά προβλήματα που δεν είναι τα ίδια με αυτά που διδάχτηκαν στην τάξη.



Διάγραμμα 4. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Η συνεπαγωγική σχέση (A16-Ap4) αφορά τις δύο δηλώσεις που σχετίζονται με εξωτερικά κίνητρα. Όσοι έχουν δηλώσει ότι θέλουν να παίρνουν καλό βαθμό στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσουν τους γονείς τους, έχουν επίσης δηλώσει ότι η καλή βαθμολογία αποτελεί το κύριο ενδιαφέρον τους σε ένα διαγώνισμα με μαθηματικά προβλήματα. Από τη συνεπαγωγική σχέση (An4-A10) προκύπτει ότι, όσοι χαρακτηρίζουν τα μαθηματικά ως βαρετά, έχουν δηλώσει επίσης ότι θα τους άρεσαν περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα.

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού και Α Γυμνασίου - Παρατηρήσεις

Η επεξεργασία του Ερωτηματολογίου Α έδειξε ότι με τη μετάβαση στο Γυμνάσιο εμφανίζονται τα πρώτα ίχνη ανησυχίας και φόβου για τα μαθηματικά. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την αύξηση του ποσοστού των αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων. Τόσο οι μαθητές του Δημοτικού όσο και οι μαθητές του Γυμνασίου έχουν αρκετά θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, το ποσοστό των μαθητών που δηλώνει ότι προτιμά τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα είναι σχεδόν διπλάσιο από το ποσοστό των μαθητών που δηλώνει ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά, και στις δύο βαθμίδες. Για το Δημοτικό 65% έναντι 25% και για το Γυμνάσιο 51% έναντι 28%. Οπωσδήποτε όμως το ποσοστό των μαθητών που δηλώνει ισχυρή προτίμηση στα μαθηματικά έχει μειωθεί αρκετά κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο (από 65% σε 51%). Η αρνητική μεταβολή των στάσεων κατά την πορεία των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο είναι κάτι που παρατηρήθηκε σε πάρα πολλές έρευνες (Φιλίππου & Χρίστου, 2001).

Η μεταβολή στις στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών προκύπτει και μέσα από τα διαγράμματα ομοιότητας. Συγκεκριμένα στο διάγραμμα ομοιότητας των μαθητών του Γυμνασίου παρατηρείται η δημιουργία κοινών ομάδων θετικών και αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων. Δηλαδή οι μαθητές του Γυμνασίου απαντούν με όμοιο τρόπο σε δηλώσεις και θετικών και αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων. Στο Δημοτικό οι σχέσεις ομοιότητας στην ομάδα των αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων είναι πιο ισχυρές, και οι μαθητές που δηλώνουν ότι βαριούνται τα μαθηματικά, το συνδέουν με πολύ ισχυρό τρόπο με τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν στο μάθημα και τον πολύ χρόνο που χρειάζονται για να λύσουν ένα πρόβλημα. Αυτό που κυρίως τους απασχολεί σε σχέση με τη λύση προβλήματος είναι ο καλός βαθμός, ώστε να ευχαριστήσουν τους γονείς τους (εξωτερικά κίνητρα). Στο Γυμνάσιο ο δεσμός μεταξύ αυτών που δηλώνουν ότι βαριούνται τα μαθηματικά και της δυσκολίας του αντικειμένου έχει χαλαρώσει.

Η επιρροή των εξωτερικών κινήτρων φάνηκε να είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τους μαθητές του Δημοτικού όσο και για τους μαθητές του Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν και με τα ευρήματα άλλων ερευνών (Φιλίππου & Χρίστου, 2001), που έδειξαν ότι η επίδραση των δασκάλων και των γονιών είναι καθοριστική τόσο στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά όσο και στην ανάπτυξη των στάσεών τους προς το μάθημα. Οι πεποιθήσεις των μαθητών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου για τη χρησιμότητα των μαθηματικών είναι πολύ δυνατές. Η ύπαρξη του Διδακτικού Συμβολαίου ήταν επίσης πιο έντονη στους μαθητές του Γυμνασίου.

Τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο οι μαθητές εκείνοι που δήλωσαν ότι θέλουν να ακολουθήσουν ένα επάγγελμα όπου θα χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, δηλώνουν επίσης ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα και ότι είναι από τα μαθήματα που θεωρούν τον εαυτό τους δυνατό. Όσον αφορά στους μαθητές του Γυμνασίου αυτοί που θεωρούν τον εαυτό τους καλό στα μαθηματικά, έχουν και ισχυρή πεποίθηση στην ικανότητά τους στη λύση προβλήματος. Στο Δημοτικό αυτή η συνεπαγωγή δεν υπάρχει.

Γενικά οι στάσεις και πεποιθήσεις που σχετίζονται με τη χρησιμότητα των μαθηματικών φαίνεται να εκφράζονται με πιο έντονο τρόπο στο Γυμνάσιο. Οι μαθητές που δηλώνουν ότι αγαπούν τα μαθηματικά φαίνεται να αναγνωρίζουν την αξία και χρησιμότητα της λύσης προβλήματος για τον ίδιο τους τον εαυτό. Ενώ στους μαθητές του Δημοτικού δεν υπάρχουν αντίστοιχες συνεπαγωγές που να συνδέουν την προτίμηση στα μαθηματικά με την χρησιμότητά τους.

Στο Δημοτικό οι μαθητές που δηλώνουν ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά, δηλώνουν επίσης ότι θα τους άρεσαν περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα και ότι θέλουν να παίρνουν καλό βαθμό στα διαγωνίσματα που περιέχουν προβλήματα, πράγμα που είναι και το κύριο ενδιαφέρον τους σε αυτά τα διαγωνίσματα, για να ευχαριστήσουν τους γονείς τους. Οι αρνητικές στάσεις για τα μαθηματικά σχετίζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση με τα εξωτερικά κίνητρα των μαθητών. Η συνεπαγωγή αυτή δεν υπάρχει στην περίπτωση των μαθητών του Γυμνασίου.

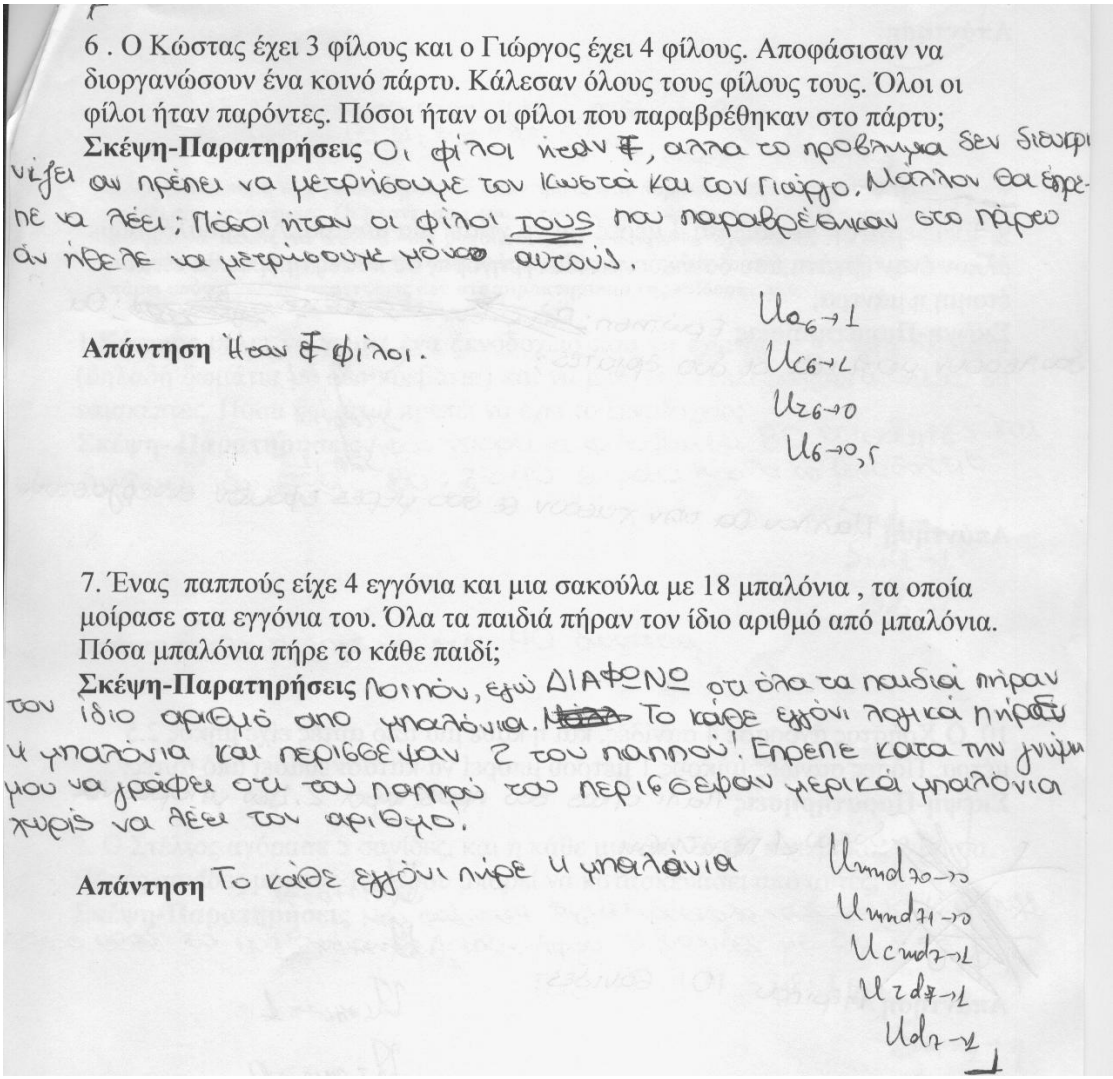
Το σημαντικότερο εύρημα της επεξεργασίας του Ερωτηματολογίου Α ήταν η αρνητική μεταβολή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος, καθώς και η ενίσχυση της επιρροής του Διδακτικού Συμβολαίου, κατά την πορεία τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Λαμβάνοντας υπόψη το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει ο συναισθηματικός τομέας και συγκεκριμένα οι στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών στη γνωστική διαδικασία είναι απαραίτητο η διδασκαλία να στοχεύει στην ανάπτυξη θετικών στάσεων και πεποιθήσεων έναντι των μαθηματικών.

4.2 ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ: ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Β)

Το Δοκίμιο Β περιλαμβάνει πέντε συνηθισμένα προβλήματα από τα οποία το ένα είναι πρόβλημα πρόσθεσης, ένα πολλαπλασιασμού και τρία είναι προβλήματα διαίρεσης. Ακόμη, περιλαμβάνει άλλα πέντε ασυνήθιστα προβλήματα από τα οποία, δύο είναι προβλήματα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου διαίρεσης, όπου στο ένα το πηλίκο πρέπει να

αυξηθεί και στο άλλο να μειωθεί για να προκύψει απάντηση σύμφωνη με την κοινή λογική, ένα επιδέχεται περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, ένα είναι ψευδοαναλογικό και μπορεί να λυθεί και από μαθητές που δεν γνωρίζουν καμία αριθμητική πράξη, και ένα είναι πρόβλημα πολλαπλασιασμού, αλλά πρέπει να γίνει ουσιαστική χρήση της κοινής λογικής για να αντιληφθεί ο μαθητής τους αριθμούς που πρέπει να πολλαπλασιαστούν.

Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν, στην πλειοψηφία τους με ενδιαφέρον. Έκαναν κρίσεις, επικρίσεις, προτάσεις για την «σωστότερη» διατύπωση των προβλημάτων.



6 . Ο Κώστας έχει 3 φίλους και ο Γιώργος έχει 4 φίλους. Αποφάσισαν να διοργανώσουν ένα κοινό πάρτυ. Κάλεσαν όλους τους φίλους τους. Όλοι οι φίλοι ήταν παρόντες. Πόσοι ήταν οι φίλοι που παραβρέθηκαν στο πάρτυ;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Οι φίλοι ήταν 7, αλλά το πρόβλημα δεν διευκρινίζει αν πρέπει να μετρήσουμε τον Κώστα και τον Γιώργο. Καλύτερα θα έπρεπε να λέει; Πόσοι ήταν οι φίλοι τους που παραβρέθηκαν στο πάρτυ αν ήθελε να μετρήσουμε μόνο αυτούς.

Απάντηση Ήταν 7 φίλοι.

Ια6→1
Ις6→1
Ιζ6→0
Ι6→0,5

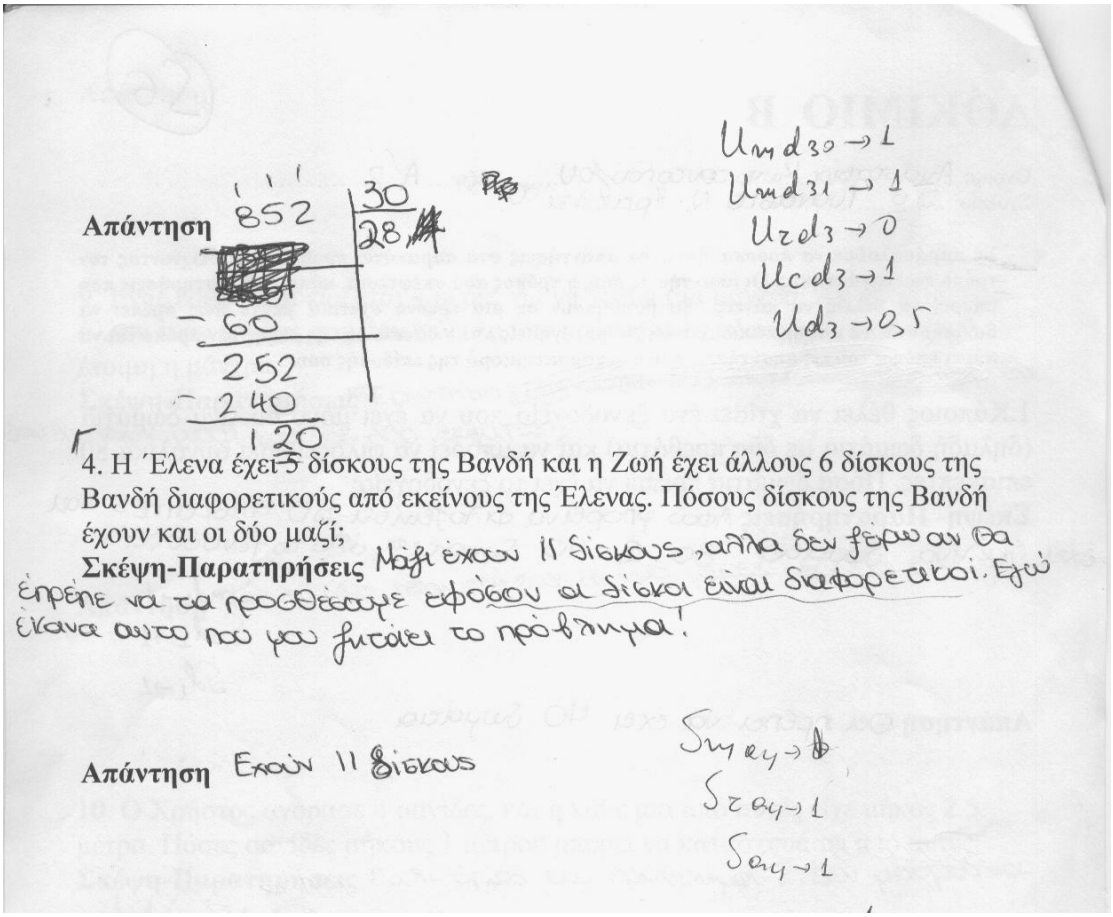
7. Ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και μια σακούλα με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Λοιπόν, εδώ ΔΙΑΦΟΝΟ ότι όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Το κάθε εγγόνι λογικά πήρε 4 μπαλόνια και περίσσεψαν 2 του παππού! Έπρεπε κατά την γνώμη μου να γράφει ότι του παππού του περίσσεψαν μερικά μπαλόνια χωρίς να λέει τον αριθμό.

Απάντηση Το κάθε εγγόνι πήρε 4 μπαλόνια

Ιπμδ70→0
Ιπμδ71→0
Ιςμδ7→1
Ιζδ7→1
Ιδ7→1

Σε κάποιους μαθητές η ισχύς του Διδακτικού Συμβολαίου είναι παραπάνω από φανερή ακόμα και σε τυπικά προβλήματα: η πρόσθεση διαφορετικών δίσκων της τραγουδίστριας είναι άραγε δυνατή;



Απάντηση 852 | 30
28,4
−60
252
−240
120

Μm d30 → 1
Μm d31 → 1
Μz d3 → 0
Μc d3 → 1
Μd3 → 0,5

4. Η Έλενα έχει 5 δίσκους της Βανδή και η Ζωή έχει άλλους 6 δίσκους της Βανδή διαφορετικούς από εκείνους της Έλενας. Πόσους δίσκους της Βανδή έχουν και οι δύο μαζί;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Μαζί έχουν 11 δίσκους, αλλά δεν ξέρω αν θα έπρεπε να τα προσθέσουμε εφόσον οι δίσκοι είναι διαφορετικοί. Εγώ έκανα αυτό που μου ζητάει το πρόβλημα!

Απάντηση Έχουν 11 δίσκους

Sm αγ → 1
Sz αγ → 1
Sα αγ → 1

Χαρακτηριστικό επίσης είναι, ότι το Δοκίμιο Β περιλαμβάνει το ίδιο πρόβλημα και στην τυπική του μορφή, όπου είναι αρκετό να γίνει η σχετική αριθμητική πράξη για να δοθεί η σωστή απάντηση,
(*2. Ο Στέλιος αγόρασε 5 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;*)
αλλά και σε μη τυπική μορφή όπου το αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης πρέπει να το επεξεργαστεί κάποιος λογικά ώστε να δοθεί η σωστή απάντηση: (*10. Ο Χρήστος αγόρασε 4 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2.5 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;*) Ο αριθμός των ορθών απαντήσεων στα δύο αυτά προβλήματα είναι ένας οδυνηρά πολύ διαφορετικός αριθμός, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Ένα από τα προβλήματα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου διαίρεσης, ήταν το γνωστό από άλλες έρευνες πρόβλημα με τα στρατιωτικά λεωφορεία. Υπήρξαν όλες οι εκδοχές απαντήσεων οι σύμφωνες με το Διδακτικό Συμβόλαιο.
Ενώ αρκετοί μαθητές παρατηρούσαν ότι «δεν γίνεται να κόψουμε ένα λεωφορείο στη μέση», έδιναν στο πρόβλημα 3 απάντηση «28,4 λεωφορεία».

3. Ένα στρατιωτικό λεωφορείο χωράει 30 στρατιώτες. Αν πρέπει να μεταφερθούν 852 στρατιώτες, πόσα λεωφορεία χρειάζονται;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Δεν γίνεται να κόψουν το λεωφορείο στη μέση

Απάντηση Χρειαζόμαστε 28,4 λεωφορεία
πρέπει να κάνω 852:30=28,4

Um d30 → 1
Um d31 → 1
Uz d3 → 0
Uc d3 → 1
Ud3 → 9,5

Ακόμη, κάποιοι στρατιώτες «περισσεύουν»:

3. Ένα στρατιωτικό λεωφορείο χωράει 30 στρατιώτες. Αν πρέπει να μεταφερθούν 852 στρατιώτες, πόσα λεωφορεία χρειάζονται;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

852 | 30
252 | 28
002

Um d30 → 1
Um d31 → 0
Uz d3 → 0
Uc d3 → 1
Ud3 → 9,5

Απάντηση

Θα χρειαστούν 28 λεωφορεία και περισσεύουν 2 στρατιώτες

Ασφαλώς υπήρξαν και εκείνοι που «ενοχλούνταν που το αποτέλεσμα δεν είναι τέλειο», αλλά δεν προχωρούσαν στη ρήξη με το Διδακτικό Συμβόλαιο.

3. Ένα στρατιωτικό λεωφορείο χωράει 30 στρατιώτες. Αν πρέπει να μεταφερθούν 852 στρατιώτες, πόσα λεωφορεία χρειάζονται;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

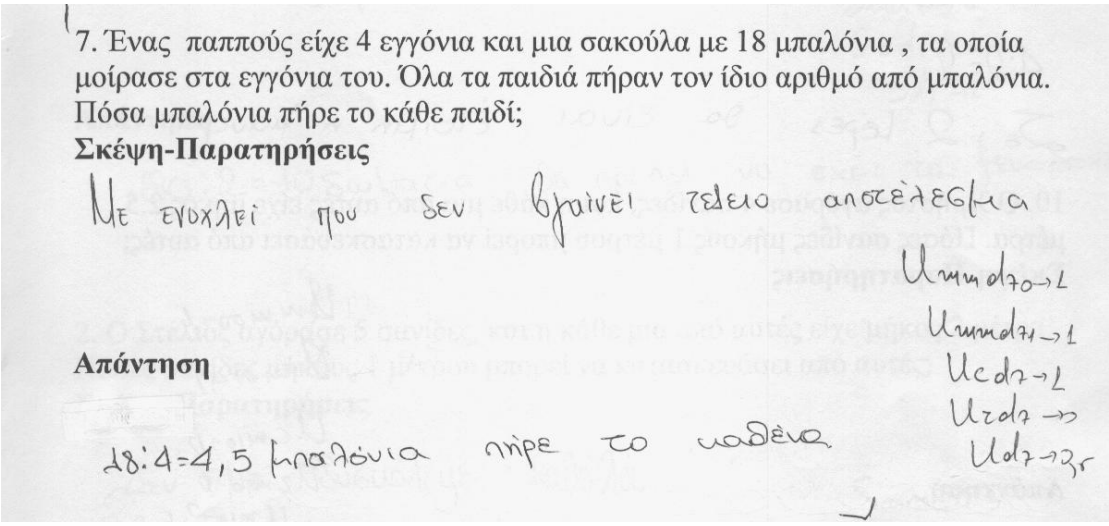
Με ενοχλεί που το αποτέλεσμα δεν είναι τέλειο

Απάντηση

852:30=28,3 ⟹ 852 | 30
252 | 28,3
120

Um d30 → 1
Um d31 → 0
Uz d3 → 0
Uc d3 → 1
Ud3 → 9,5

Ακόμα και όταν το πλαίσιο του προβλήματος τους ήταν πολύ οικείο, όπως στο άλλο πρόβλημα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου διαίρεσης, το Διδακτικό Συμβόλαιο σε κάποιους μαθητές είχε ισχυρή παρουσία.


7. Ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και μια σακούλα με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

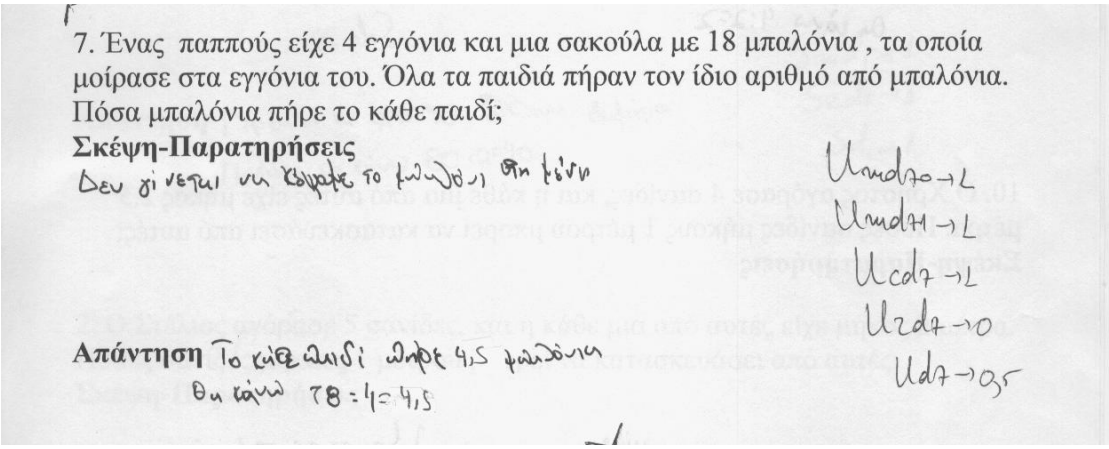
Με ενοχλεί που δεν βγαίνει τέλειο αποτέλεσμα

Umm d70 → L
Umm d71 → 1
Ucd7 → L
Urd7 → 0
Ud7 → 0,5

Απάντηση

18:4=4,5 μπαλόνια πήρε το καθένα

«Δεν γίνεται να κόψουμε το μπαλόνι στη μέση», παρατηρεί ο μαθητής, αλλά η απάντηση που δίνει είναι 4.5 μπαλόνια.


7. Ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και μια σακούλα με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Δεν γίνεται να κόψαμε το μπαλόνι στη μέση

Umd70 → L
Umd71 → L
Ucd7 → L
Urd7 → 0
Ud7 → 0,5

Απάντηση Το κάθε παιδί πήρε 4,5 μπαλόνια
θα κάνω 18 : 4 = 4,5

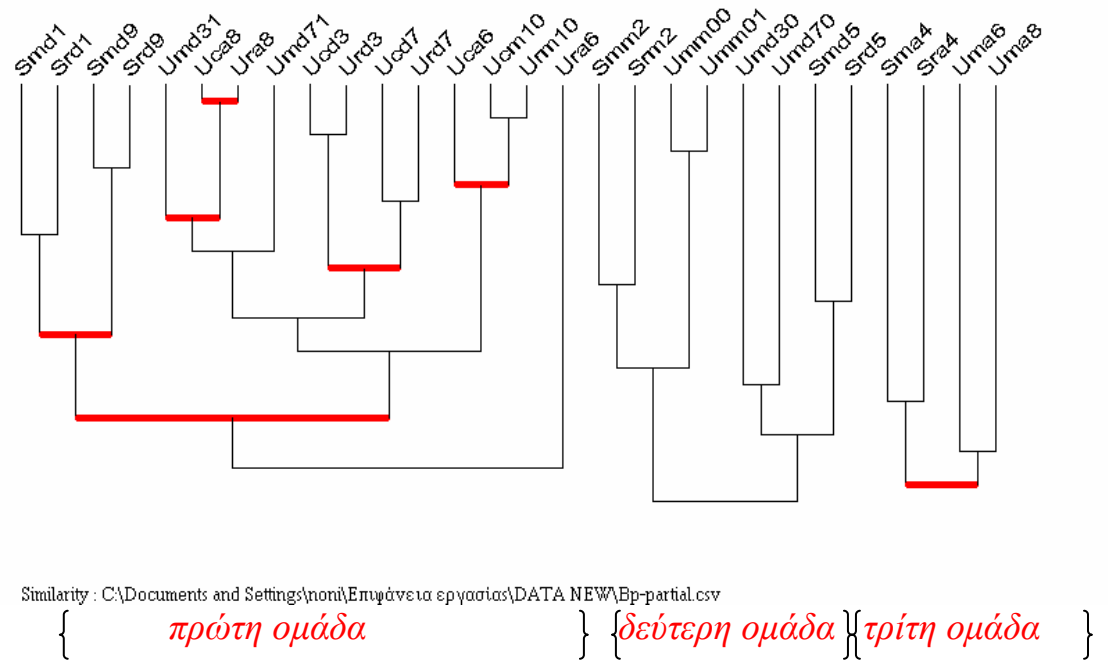
Ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού

Υπάρχουν τρεις διακριτές ομάδες (διάγραμμα 5).

Η πρώτη είναι η ομάδα των ασυνήθιστων προβλημάτων η οποία είναι συνδεδεμένη με δύο από τα προβλήματα της ομάδας των συνηθισμένων προβλημάτων.

Στην ομάδα αυτή υπάρχουν τα ζευγάρια κατανόησης – ορθής απάντησης των τεσσάρων από τα πέντε ασυνήθιστα προβλήματα, όπου οι συνδέσεις μεταξύ τους είναι πολύ ισχυρές: Uca8- Ura8 (δείκτης ομοιότητας 1), Ucd3-Urd3 (δείκτης ομοιότητας 0.999983), Ucd7-Urd7 (δείκτης ομοιότητας 0,998254), Ucm10-Urm10 (δείκτης ομοιότητας 1). Στην ίδια ομάδα εμπλέκονται επιπλέον η κατανόηση και η ορθή απάντηση (Uca6-

Ura6) και του πέμπτου ασυνήθιστου προβλήματος όχι άμεσα συνδεδεμένες.

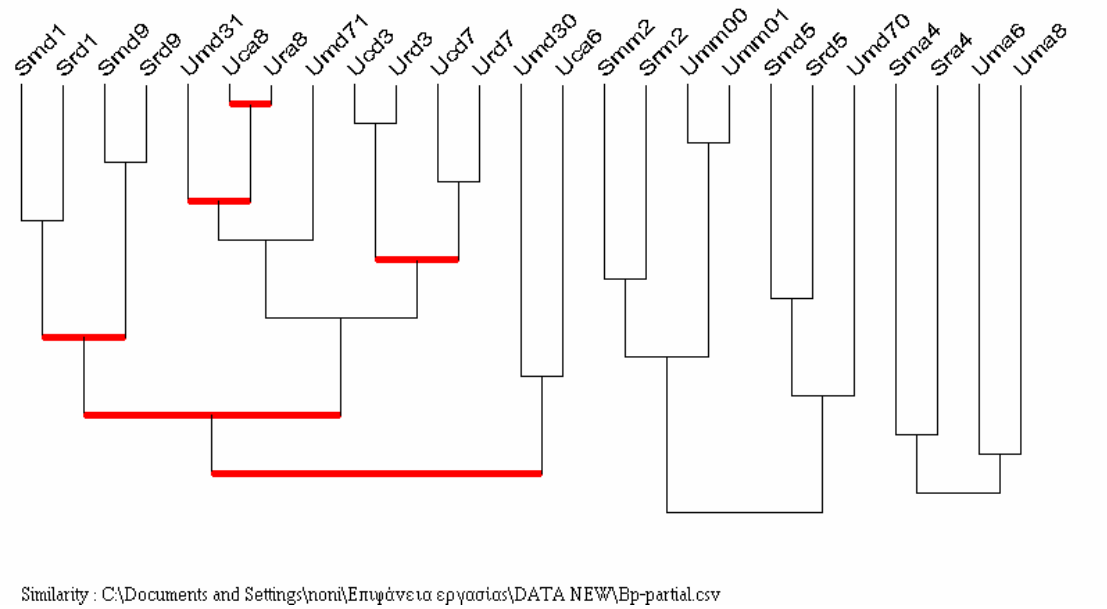


{ πρώτη ομάδα } {δεύτερη ομάδα}{τρίτη ομάδα }

Διάγραμμα 5. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)

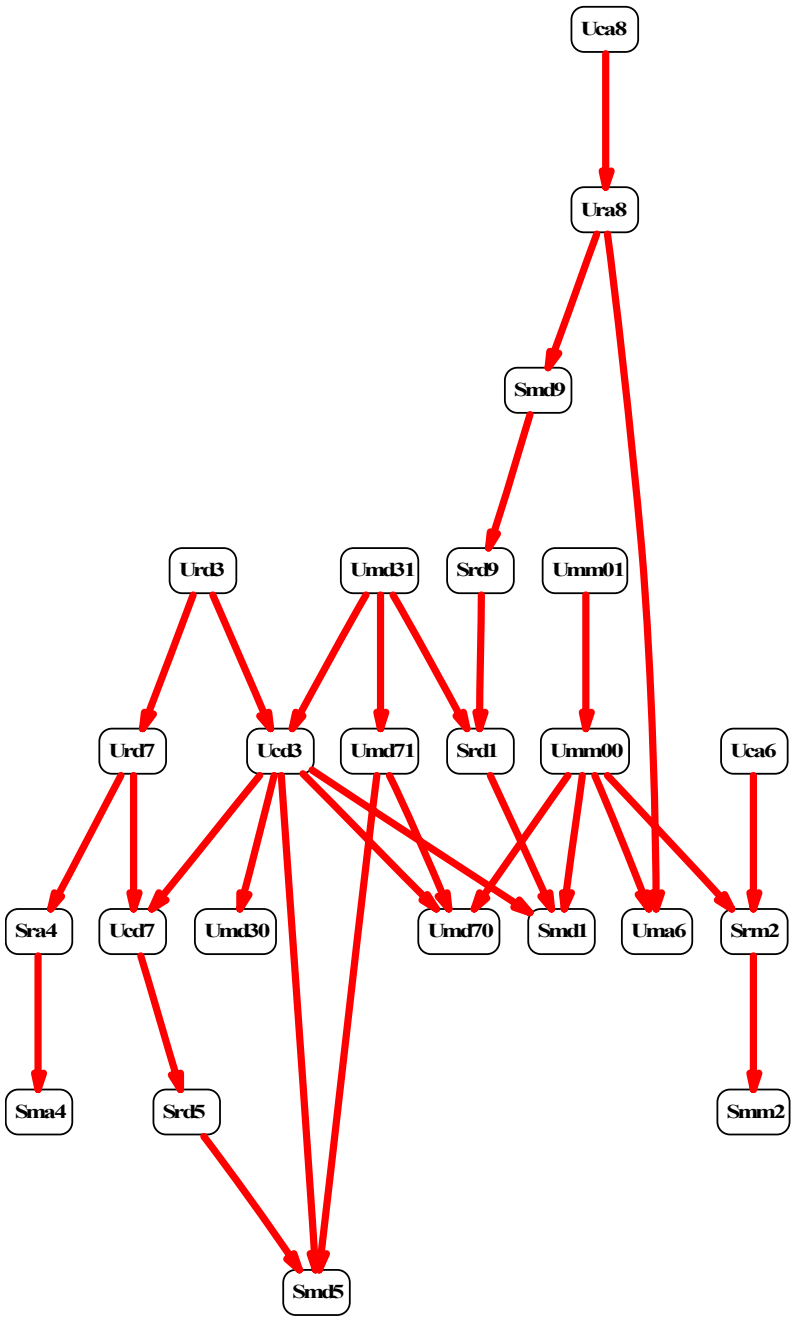
Επίσης, σ' αυτήν την ομάδα εμπλέκονται οι μεταβλητές Umd71, Umd31, που δηλώνουν μοντελοποιήσεις που καταλήγουν σε ορθή εκτέλεση της απαιτούμενης πράξης, για τα ασυνήθιστα προβλήματα 3 και 7(διαίρεση με δεκαδικό αποτέλεσμα).
Οι μόνες μεταβλητές, που αφορούν σε ασυνήθιστα προβλήματα και δεν βρίσκονται σε αυτήν την ομάδα, είναι κάποιες μοντελοποιήσεις πράξεων. Τα συνηθισμένα προβλήματα που περιλαμβάνονται στην ομάδα αυτή είναι το 1 και το 9, που έχουν παρόμοιο τρόπο σκέψης, δεν λύνονται με λέξεις κλειδιά και χρειάζεται ουσιαστική κατανόηση του κειμένου του προβλήματος για να λυθεί σωστά, όπως και ένα ασυνήθιστο πρόβλημα (ξενοδοχείο με δίκλινα, και χρόνος κατασκευής αν διπλασιαστεί ο αριθμός εργατών). Τα δύο αυτά προβλήματα έχουν τα μικρότερα ποσοστά επιτυχίας μεταξύ των συνηθισμένων προβλημάτων. Επίσης σε αυτά τα συνηθισμένα προβλήματα η ορθή μοντελοποίηση είναι πολύ ισχυρά συνδεδεμένη με την ορθή απάντηση:
Smd1-Srd1 δείκτης ομοιότητας 0,995361, Smd9-Srd9 δείκτης ομοιότητας 0,999812. Η υποομάδα αυτή των συνηθισμένων συνδέεται με την ομάδα των ασυνήθιστων προβλημάτων, με δείκτη ομοιότητας αρκετά σημαντικό:0,674533.
Επειδή η συχνότητα εμφάνισης ορισμένων μεταβλητών ήταν πολύ μικρός αριθμός, αφαιρέθηκαν οι μεταβλητές Ura6, Urm10, Ucm10, αλλά το διάγραμμα ομοιότητας που προέκυψε (διάγραμμα 6), επί της ουσίας δεν

άλλαξε, εκτός του ότι στην πρώτη ομάδα δεν υπάρχει προφανώς το ζεύγος Ucm10-Urm10.



Διάγραμμα 6. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Δοκίμιο Β (εκτός Ura6, Urm10, Ucm10)

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τα συνηθισμένα προβλήματα 2 και 5, όπου η ορθή μοντελοποίηση Smm2, Smd5, συνδέεται με την ορθή απάντηση Srm2, Srd5, με ισχυρούς δείκτες ομοιότητας 0,984607 για το πρόβλημα 2 και 0,968055 για το πρόβλημα 5.
Σ' αυτήν την ομάδα περιλαμβάνονται και οι μοντελοποιήσεις των ασυνήθιστων προβλημάτων 3, (Umd30), 10, (Umm00-Umm01) και 7, (Umd7). Παρατηρούμε ότι στην ομάδα αυτή, υπάρχει η ορθή μοντελοποίηση της πράξης και όχι η ορθή εκτέλεση της πράξης, όταν πρόκειται για διαίρεση. Ορθή εκτέλεση πράξης υπάρχει μόνο στην περίπτωση του ασυνήθιστου προβλήματος 10, που είναι πρόβλημα πολλαπλασιασμού.
Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει την ορθή μοντελοποίηση και ορθή απάντηση του συνηθισμένου προβλήματος 4, το οποίο είναι ένα εξαιρετικά απλό πρόβλημα πρόσθεσης που λύθηκε από την συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών (93%), όπως και μοντελοποιήσεις πρόσθεσης των ασυνήθιστων προβλημάτων 6 και 8. Εδώ, αξίζει να παρατηρήσουμε, ότι και στο 6 και στο 8, η πράξη που θα έκανε ένας μαθητής υπακούοντας πλήρως στο Διδακτικό Συμβόλαιο είναι ακριβώς η πρόσθεση.
Γενικά μπορούμε να συνοψίσουμε παρατηρώντας ότι **η κατανόηση και ορθή απάντηση των ασυνήθιστων προβλημάτων αποτελούν ξεχωριστή ομάδα** και ότι **στα συνηθισμένα προβλήματα υπάρχει σύνδεση μοντελοποίησης και ορθής απάντησης.**



Graph : C:\Documents and Settings\noni\Επιφάνεια εργασίας\DATA NEW\Bp-partial.csv 99 95 90 85

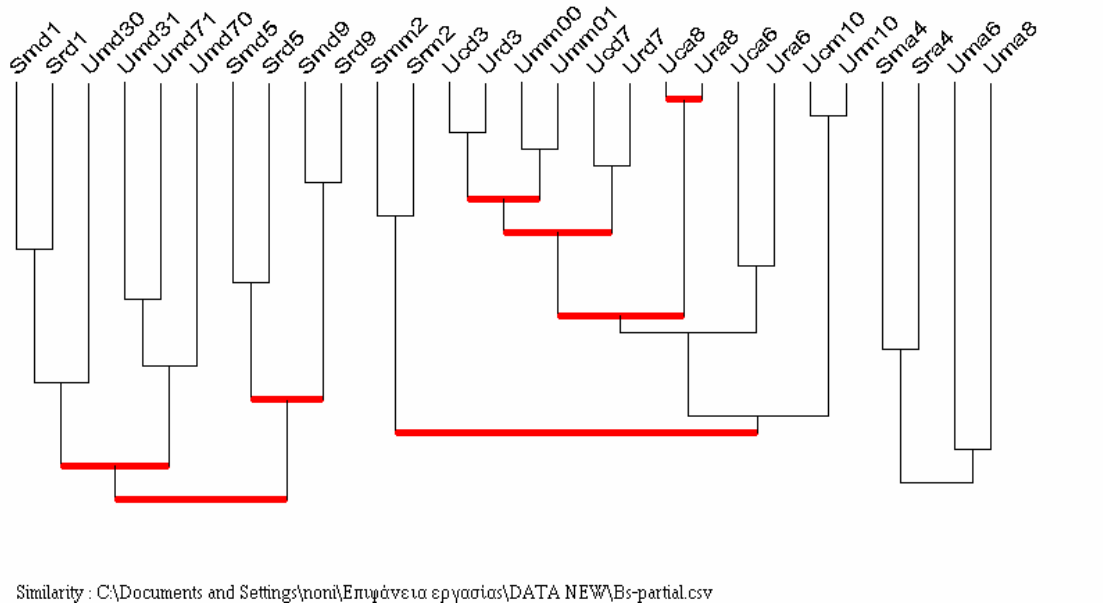
Διάγραμμα 7. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Δοκίμιο Β

Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 7) παρατηρούμε επίσης τρεις ομάδες:
Η μία ομάδα συνεπαγωγών έχει σαν αφετηρία την κατανόηση του ασυνήθιστου προβλήματος 8. Όποιος κατανοεί το 8, δίνει και σωστή απάντηση σ' αυτό και μετά μοντελοποιεί και απαντά ορθά το 9, το 1 και το 2 από τα συνηθισμένα, και μοντελοποιεί το 7 και το 10 από τα ασυνήθιστα προβλήματα.
Η δεύτερη ομάδα έχει ως αφετηρία την ορθή απάντηση στο ασυνήθιστο πρόβλημα 3. Όποιος το κατανοεί, απαντά σωστά στο 3 που είναι πρόβλημα ερμηνείας υπόλοιπου διαίρεσης, κατανοεί και δίνει σωστή απάντηση στο ασυνήθιστο πρόβλημα 7, και λύνει και τα συνηθισμένα 4 και 5. Εδώ, πρέπει να σημειωθεί το εξής: η ορθή απάντηση στο 3 δεν συνδέεται με ορθή εκτέλεση της πράξης διότι επειδή πρόκειται για διαίρεση που αφορά σε ανθρώπους και σε λεωφορεία αρκετά παιδιά δεν προχώρησαν τη διαίρεση βρίσκοντας το δεκαδικό πηλίκο, αλλά ερμήνευσαν σωστά το υπόλοιπο δίνοντας σωστή απάντηση. Γι' αυτό ακριβώς βλέπουμε ότι η πλήρης εκτέλεση της διαίρεσης στο 3, συνεπάγεται και την πλήρη εκτέλεση της διαίρεσης του ασυνήθιστου προβλήματος 7 στην κεντρική ομάδα του συνεπαγωγικού διαγράμματος, η οποία όμως δεν συνδέεται με την ορθή απάντηση ούτε στο 3 ούτε στο 7. **Δηλαδή, το να ξέρει ένας μαθητής να εκτελεί σωστά μια διαίρεση, βρίσκοντας το πλήρες δεκαδικό αποτέλεσμα δεν είναι αρκετό για να σπάσει το Διδακτικό Συμβόλαιο και να δώσει ορθή απάντηση.**
Γενικά **στο τέλος κάθε αλυσίδας είναι συνηθισμένο πρόβλημα και στην κορυφή ασυνήθιστο**, που σημαίνει ότι αν ένας μαθητής επιτύχει σε κάποιο ασυνήθιστο θα επιτύχει και σε κάποιο/α συνηθισμένο/α.

Παρατηρήσεις για το Δημοτικό
Στα συνηθισμένα προβλήματα ορθή απάντηση δόθηκε, στο πρόβλημα 1 από το 75% των μαθητών, στο πρόβλημα 2 από το 78% των μαθητών, στο πρόβλημα 4 από το 93% των μαθητών, στο πρόβλημα 5 από το 78% των μαθητών, στο πρόβλημα 9 από το 70% των μαθητών.
Στα ασυνήθιστα προβλήματα ορθή απάντηση δόθηκε, στο πρόβλημα 3 από το 22% των μαθητών ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 43%. Στο πρόβλημα 6 ορθή απάντηση από το 1% ενώ ένδειξη κατανόησης παρείχε το 23%. Στο πρόβλημα 7 από το 51%, ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 56%. Στο πρόβλημα 8 ορθή απάντηση το 33% ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 29%. Στο πρόβλημα 10 ορθή απάντηση το 1% και οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 3% .
Η απλή σύγκριση, όχι μόνο των ποσοστών επιτυχίας, αλλά και των ποσοστών που υποδεικνύουν **οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης** από την

πλευρά των μαθητών, αποδεικνύει πέρα από κάθε αμφιβολία ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία στα συνηθισμένα προβλήματα από ότι στα ασυνήθιστα. Χαρακτηριστικά υπενθυμίζουμε τα προβλήματα 2 και 10. Πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα (*πρόβλημα με σανίδες*) σε τυπική και σε ασυνήθιστη μορφή. Στην τυπική εκδοχή του προβλήματος, ορθά απάντησαν 108 από τους 138 μαθητές, ενώ στην ασυνήθιστη εκδοχή είχαμε 1 μόνο ορθή απάντηση. **Συνεπώς, παρατηρούμε ισχυρή την παρουσία του Διδακτικού Συμβολαίου.**
Το ασυνήθιστο πρόβλημα που έδωσε σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας σε σχέση με τα άλλα ασυνήθιστα, ήταν το πρόβλημα με τα μπαλόνια όπου η κατάσταση ίσως να φαινόταν στα παιδιά περισσότερο οικεία.
Σημαντική ήταν η διαπίστωση, ότι όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού η καλή γνώση της διαίρεσης, δεν είναι αρκετή για να επέλθει η ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου, και να δοθεί ορθή απάντηση.

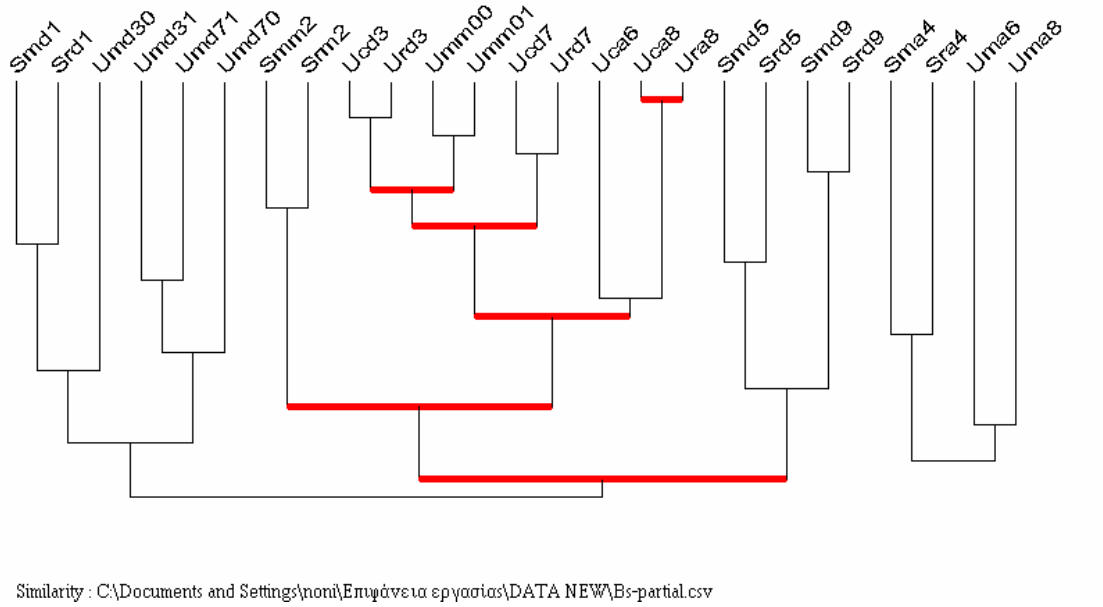
Ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας Α Γυμνασίου



Διάγραμμα 8. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)

Υπάρχουν και εδώ (διάγραμμα 8) τρεις διακριτές ομάδες.
Στη πρώτη ομάδα υπάρχουν οι μοντελοποιήσεις και ορθές απαντήσεις των συνηθισμένων προβλημάτων 1,5 και 9: Smd1-Srd1 δείκτης ομοιότητας 0,994672, Smd5-Srd5 δείκτης ομοιότητας 0,984607 Smd9-Srd9 δείκτης ομοιότητας 0,999087, καθώς και οι μοντελοποιήσεις και ορθές εκτελέσεις των διαιρέσεων στα ασυνήθιστα προβλήματα 3 και 7.

Φαίνεται και εδώ δηλαδή ότι **το να ξέρει ένας μαθητής να εκτελεί σωστά μια διαίρεση, βρίσκοντας το πλήρες δεκαδικό αποτέλεσμα, δεν είναι αρκετό για να λύσει επιτυχώς ασυνήθιστα προβλήματα.**
Η μεσαία ομάδα, είναι η ομάδα των ασυνήθιστων προβλημάτων, η οποία περιλαμβάνει και τη μοντελοποίηση και ορθή απάντηση, ενός συνηθισμένου προβλήματος του 2: Smd2-Srd2 δείκτης ομοιότητας 0,996231.
Στην ομάδα αυτή συνδέεται η υποομάδα, στην οποία υπάρχουν τα ζευγάρια κατανόησης – ορθής απάντησης όλων των ασυνήθιστων προβλημάτων, όπου οι συνδέσεις μεταξύ τους είναι πολύ ισχυρές: Uca8-Ura8 (δείκτης ομοιότητας 1), Ucd3-Urd3 (δείκτης ομοιότητας 0.999996), Ucd7-Urd7 (δείκτης ομοιότητας 0,999953), Ucm10-Urm10 (δείκτης ομοιότητας 1), Uca6-Ura6 (δείκτης ομοιότητας 0,986112).
Η σύνδεση του προβλήματος 2 με την υποομάδα των ασυνήθιστων είναι αρκετά ισχυρή: δείκτης ομοιότητας 0,602404.
Η τρίτη ομάδα είναι ακριβώς ίδια με την τρίτη ομάδα του διαγράμματος ομοιότητας της ΣΤ Δημοτικού. Περιλαμβάνει την ορθή μοντελοποίηση και ορθή απάντηση του συνηθισμένου προβλήματος 4, το οποίο είναι ένα εξαιρετικά απλό πρόβλημα πρόσθεσης που λύθηκε από την μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (88%) και στο Γυμνάσιο, και μοντελοποιήσεις πρόσθεσης των ασυνήθιστων προβλημάτων 6 και 8. Εδώ, θυμίζουμε ότι και στο 6 και στο 8 η πράξη που θα έκανε ένας μαθητής υπακούοντας πλήρως στο Διδακτικό Συμβόλαιο είναι ακριβώς η πρόσθεση. Η σύνδεση ανάμεσα στο συνηθισμένο πρόβλημα 4 και μοντελοποιήσεις των ασυνήθιστων προβλημάτων 6 και 8 είναι ασθενής: δείκτης ομοιότητας 0,210354.

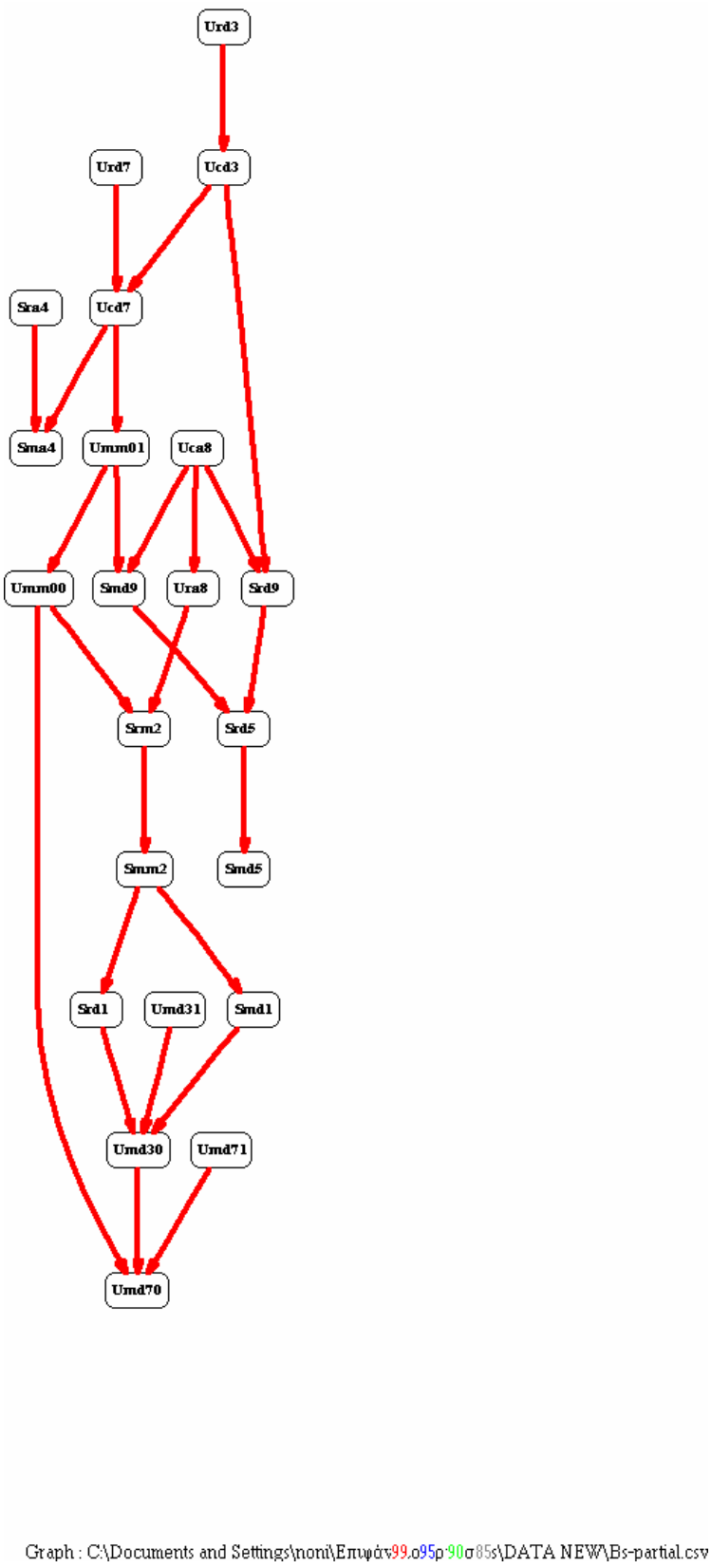


Διάγραμμα 9. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Δοκίμιο Β (εκτός Ura6, Urm10, Ucm10)

Επειδή η συχνότητα εμφάνισης ορισμένων μεταβλητών ήταν πολύ μικρός αριθμός, αφαιρέθηκαν οι μεταβλητές Ura6, Urm10, Ucm10, παρόλο που η τιμή τους είναι υψηλότερη στο Γυμνάσιο σε σχέση με το Δημοτικό (3 αντί 1 ,2 αντί 1 και 4 αντί 4).
Στο διάγραμμα ομοιότητας που προκύπτει (διάγραμμα 9) βλέπουμε ότι η ομάδα 1 του προηγούμενου διαγράμματος έχει συνδεθεί με την δεύτερη ομάδα που περιλαμβάνει τα ασυνήθιστα αλλά η σύνδεση είναι ασθενής. Η πρώην τρίτη ομάδα, δεύτερη τώρα, παραμένει όπως και στο προηγούμενο διάγραμμα ομοιότητας.

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου
Το συνεπαγωγικό διάγραμμα του Γυμνασίου (διάγραμμα 10) δείχνει ότι εδώ υπάρχουν πιο γραμμικές σχέσεις από ότι στο Δημοτικό. Στις κορυφές των τριών αλυσίδων υπάρχει είτε κατανόηση, είτε σωστή απάντηση ασυνήθιστου προβλήματος και κάθε αλυσίδα καταλήγει σε απλή μοντελοποίηση είτε συνηθισμένου είτε ασυνήθιστου προβλήματος.

Παρατηρήσεις για το Γυμνάσιο
Στα συνηθισμένα προβλήματα ορθή απάντηση δόθηκε, στο πρόβλημα 1 από το 78% των μαθητών, στο πρόβλημα 2 από το 74% των μαθητών, στο πρόβλημα 4 από το 88% των μαθητών, στο πρόβλημα 5 από το 78% των μαθητών, στο πρόβλημα 9 από το 72% των μαθητών.
Στα ασυνήθιστα προβλήματα ορθή απάντηση δόθηκε, στο πρόβλημα 3 από το 7% των μαθητών ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 27%. Στο πρόβλημα 6 ορθή απάντηση από το 2% ενώ ένδειξη κατανόησης παρείχε το 16%. Στο πρόβλημα 7 ορθή απάντηση δόθηκε από το 30%, ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 36%. Στο πρόβλημα 8 ορθά απάντησε το 35% των μαθητών, ενώ οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 29%. Στο πρόβλημα 10, ορθά απάντησε το 1% και οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης έδωσε το 3%.
Η απλή σύγκριση, όχι μόνο των ποσοστών επιτυχίας, αλλά και των ποσοστών που υποδεικνύουν **οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης** από την πλευρά των μαθητών, αποδεικνύει ότι και οι μαθητές ανταποκρίνονται με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία στα συνηθισμένα προβλήματα από ότι στα ασυνήθιστα. Υπενθυμίζουμε τα προβλήματα 2 και 10. Πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα (*πρόβλημα με σανίδες*) σε τυπική και σε ασυνήθιστη μορφή. Στην τυπική εκδοχή του προβλήματος, ορθά απάντησαν 102 από τους 138 μαθητές, ενώ στην ασυνήθιστη εκδοχή είχαμε 2 μόνο ορθές απαντήσεις. **Συνεπώς, παρατηρούμε ισχυρή την παρουσία του Διδακτικού Συμβολαίου και στην Α Γυμνασίου.**



Διάγραμμα 10. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Δοκίμιο Β

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού με Α Γυμνασίου

Κατ' αρχήν παρατηρείται μια μείωση των μαθητών που απάντησαν επιτυχώς σε κάθε μεταβλητή και των συνηθισμένων και των ασυνήθιστων προβλημάτων, κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Σε σύνολο 138 μαθητών σε κάθε βαθμίδα απάντησαν:

Δημοτικό	**Γυμνάσιο**
Smd1 : 107.00	Smd1 : 108.00
Srd1 : 104.00	Srd1 : 108.00
Smm2 : 111.00	Smm2 : 106.00
Srm2 : 108.00	Srm2 : 102.00
Umd30 : 113.00	Umd30 : 110.00
Umd31 : 42.00	Umd31 : 30.00
Ucd3 : 60.00	Ucd3 : 37.00
Urd3 : 30.00	Urd3 : 10.00
Sma4 : 130.00	Sma4 : 123.00
Sra4 : 128.00	Sra4 : 122.00
Smd5 : 112.00	Smd5 : 111.00
Srd5 : 108.00	Sra4 : 122.00
Uma6 : 124.00	Uma6 : 128.00
Uca6 : 32.00	Uca6 : 22.00
Ura6 : 1.00	Ura6 : 3.00
Umd70 : 112.00	Umd70 : 111.00
Umd71 : 61.00	Umd71 : 55.00
Ucd7 : 77.00	Ucd7 : 49.00
Urd7 : 71.00	Urd7 : 42.00
Uma8 : 57.00	Uma8 : 59.00
Uca8 : 40.00	Uca8 : 40.00
Ura8 : 46.00	Ura8 : 48.00
Smd9 : 95.00	Smd9 : 100.00
Srd9 : 96.00	Srd9 : 100.00
Umm00 : 90.00	Umm00 : 84.00
Umm01 : 80.00	Umm01 : 66.00
Ucm10 : 4.00	Ucm10 : 4.00
Urm10 : 1.00	Urm10 : 2.00

Πίνακας2. Συχνότητα εμφάνισης των απαντήσεων των μαθητών Στ τάξης Δημοτικού και Α τάξης Γυμνασίου στις μεταβλητές του Δοκιμίου Β

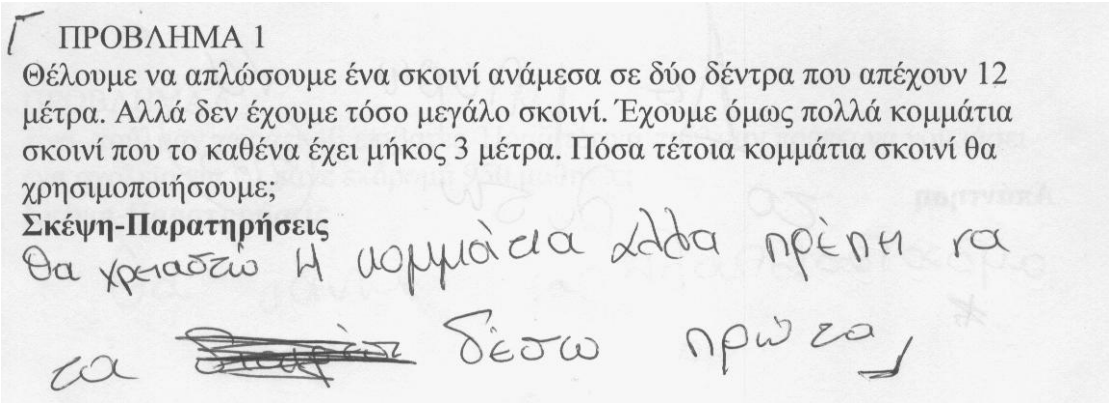
Μεγαλύτερη μείωση παρουσιάζεται στις μεταβλητές που δείχνουν ένδειξη κατανόησης ή ορθή απάντηση ασυνήθιστων προβλημάτων.
Σε τέσσερα από τα συνηθισμένα υπήρξε μείωση της ορθής απάντησης στους μαθητές του Γυμνασίου σε σχέση με τους μαθητές του Δημοτικού, από 0% έως 5%, και σε ένα, το πρόβλημα 9, αύξηση 2%.
Το ποσοστό της μεταβλητής που δηλώνει κατανόηση μειώθηκε κατά 16% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 3, κατά 7% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 6, κατά 20% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 7, και παρέμεινε σταθερή στο ασυνήθιστο πρόβλημα 8 και στο ασυνήθιστο πρόβλημα 10 (29% και 3% αντίστοιχα).

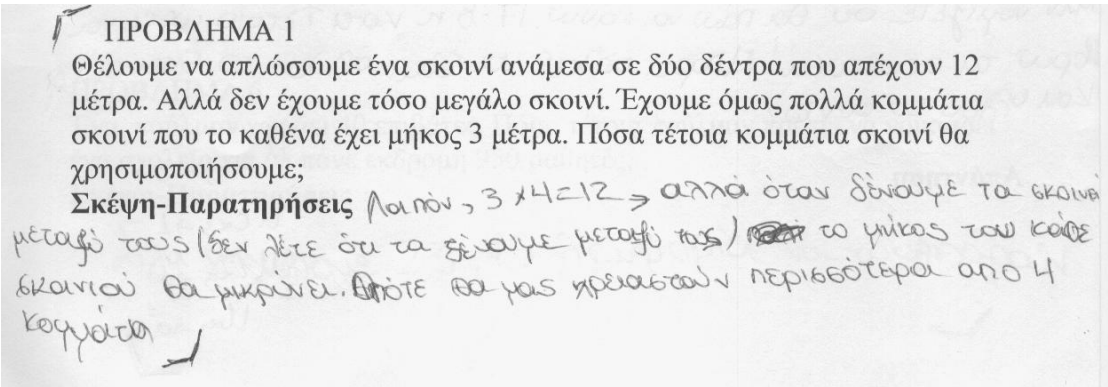
Το ποσοστό της μεταβλητής που δηλώνει ορθή απάντηση, μειώθηκε κατά 15% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 3, κατά 21% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 7, παρέμεινε σταθερή στο ασυνήθιστο πρόβλημα 10 (1%), ενώ υπήρξε μια μικρή αύξηση 2% στο ασυνήθιστο πρόβλημα 8. Στο πρόβλημα 7 ορθή απάντηση έδωσαν τρεις μαθητές έναντι ενός στο Δημοτικό.
Η δομή των διαγραμμάτων ομοιότητας είναι παρόμοια και στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, με τα ασυνήθιστα προβλήματα να συγκροτούν δική τους ομάδα, αλλά στο Γυμνάσιο γίνεται σαφέστερη η διάκριση ασυνήθιστων και συνηθισμένων προβλημάτων.
Και στις δύο βαθμίδες, όπως είναι φυσιολογικό, η μοντελοποίηση και ορθή απάντηση στα συνηθισμένα συνδέονται στενά, όπως και η κατανόηση και ορθή απάντηση στα ασυνήθιστα.

4.3 ΔΕΥΤΕΡΗ ΦΑΣΗ: ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (ΔΟΚΙΜΙΟ Γ)

Το δοκίμιο Γ που δόθηκε στους μαθητές, μία εβδομάδα περίπου μετά τη πρώτη φάση, περιελάμβανε επτά ασυνήθιστα προβλήματα. Οι μαθητές απασχολήθηκαν για μία διδακτική ώρα συνολικά και σε όσους το χρειάστηκαν δόθηκε και ο χρόνος του διαλείμματος.
Το ζητούμενο ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο η παρέμβαση αυτή βελτίωσε την επιτυχία των παιδιών στη λύση ασυνήθιστων προβλημάτων σε σχέση με το δοκίμιο Β, το οποίο περιείχε πέντε συνηθισμένα και πέντε ασυνήθιστα προβλήματα.

Από τα προβλήματα του Δοκιμίου Γ, τα δύο (πρόβλημα 2 και πρόβλημα 4) δεν χρειάζονταν καμία αριθμητική πράξη για να λυθούν και το ένα από αυτά ήταν ψευδοαναλογικό. Το τρίτο (πρόβλημα 1) ήταν πρόβλημα πολύ απλής διαίρεσης (12:3) όπου όμως το πηλίκο έπρεπε να ερμηνευθεί λογικά για να προκύψει η ορθή απάντηση.


Γ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Θέλουμε να απλώσουμε ένα σκοινί ανάμεσα σε δύο δέντρα που απέχουν 12 μέτρα. Αλλά δεν έχουμε τόσο μεγάλο σκοινί. Έχουμε όμως πολλά κομμάτια σκοινί που το καθένα έχει μήκος 3 μέτρα. Πόσα τέτοια κομμάτια σκοινί θα χρησιμοποιήσουμε;
Σκέψη-Παρατηρήσεις
Θα χρειαστώ 4 κομμάτια λόγω πρέπει να
να δέσω πρώτα

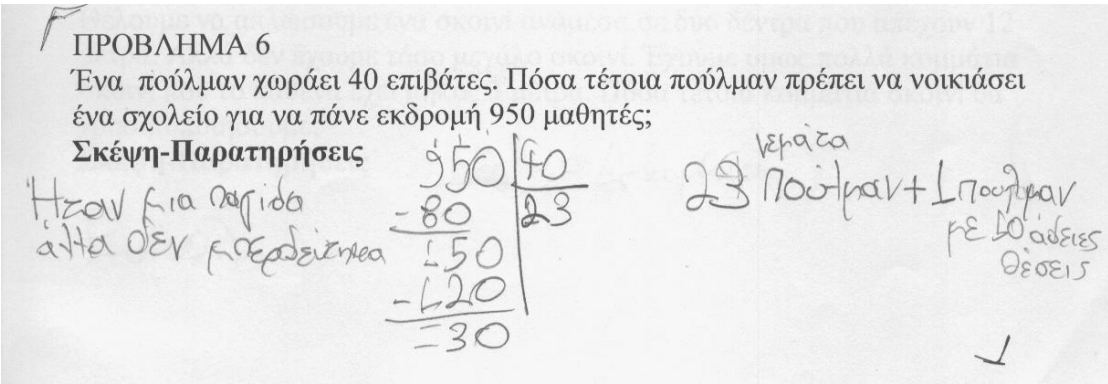


ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θέλουμε να απλώσουμε ένα σκοινί ανάμεσα σε δύο δέντρα που απέχουν 12 μέτρα. Αλλά δεν έχουμε τόσο μεγάλο σκοινί. Έχουμε όμως πολλά κομμάτια σκοινί που το καθένα έχει μήκος 3 μέτρα. Πόσα τέτοια κομμάτια σκοινί θα χρησιμοποιήσουμε;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Λοιπόν, 3 x 4 = 12 → αλλά όταν δένουμε τα σκοινιά μεταξύ τους (δεν λέτε ότι τα ξένουμε μεταξύ τους) το μήκος του κάθε σκοινιού θα μικραίνει. Άρα θα μας χρειαστούν περισσότερα από 4 κομμάτια

Το πέμπτο ήταν πρόβλημα μέσου όρου θερμοκρασιών νερού (πρόβλημα 5). Το έκτο και το έβδομο (προβλήματα 6 και 7) ήταν προβλήματα διαίρεσης όπου έπρεπε να γίνει ερμηνεία του δεκαδικού πηλίκου, στο ένα να μειωθεί και στο άλλο να αυξηθεί το ακέραιο μέρος, για να προκύψει ορθή απάντηση. Στα προβλήματα αυτά είχε δοθεί προσοχή ώστε το πλαίσιο να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο οικείο. Στο ένα από αυτά, το γνωστό μας λεωφορείο που μετέφερε στρατιώτες έγινε πούλμαν που μεταφέρει μαθητές σε εκδρομή. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά καλύτερα σε σχέση με το Δοκίμιο Β.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Ένα πούλμαν χωράει 40 επιβάτες. Πόσα τέτοια πούλμαν πρέπει να νοικιάσει ένα σχολείο για να πάνε εκδρομή 950 μαθητές;

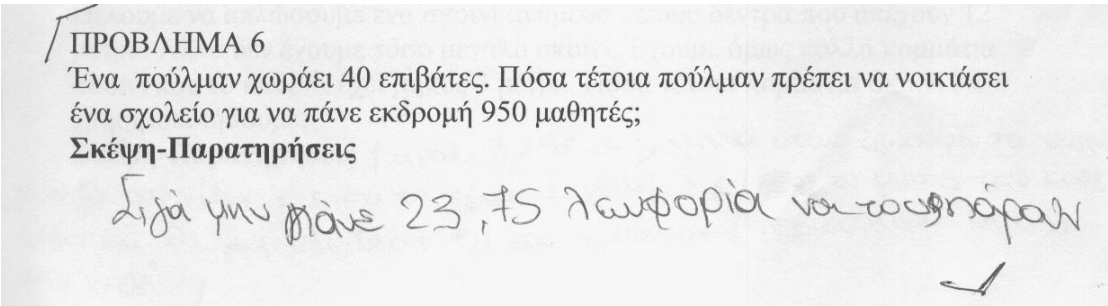
Σκέψη-Παρατηρήσεις

Ήταν για παρτίδα
άντα δεν μπορούσε μια

950 | 40
-80 | 23
150
-120
30

κεφάτα
23 πούλμαν + 1 πούλμαν με 30 άδειες θέσεις

Φυσικά υπήρξαν και οι μαθητές που ήταν μεν δύσπιστοι αλλά δεν τόλμησαν τη ρήξη:



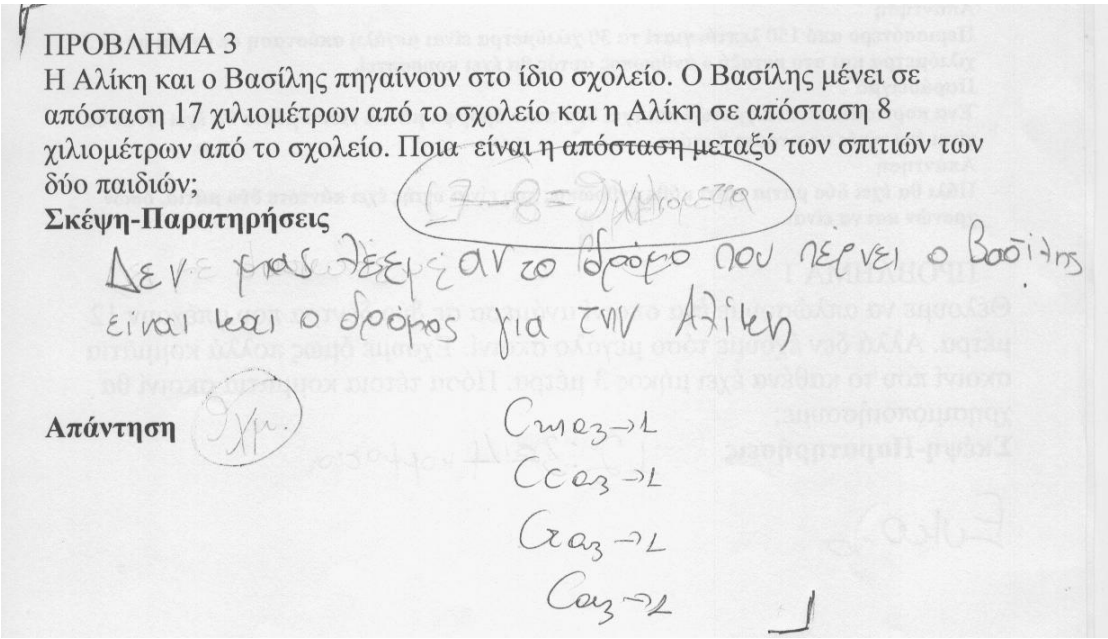
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Ένα πούλμαν χωράει 40 επιβάτες. Πόσα τέτοια πούλμαν πρέπει να νοικιάσει ένα σχολείο για να πάνε εκδρομή 950 μαθητές;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Διότι μου βγάνει 23,75 λεωφορεία και τα υπόλοιπα

Πολλές δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές στο πρόβλημα 3 που ήταν πρόβλημα πολλαπλών λύσεων.
Εδώ η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών αρκέστηκε στις προφανείς λύσεις. Υπήρξαν βέβαια και εξαιρέσεις.

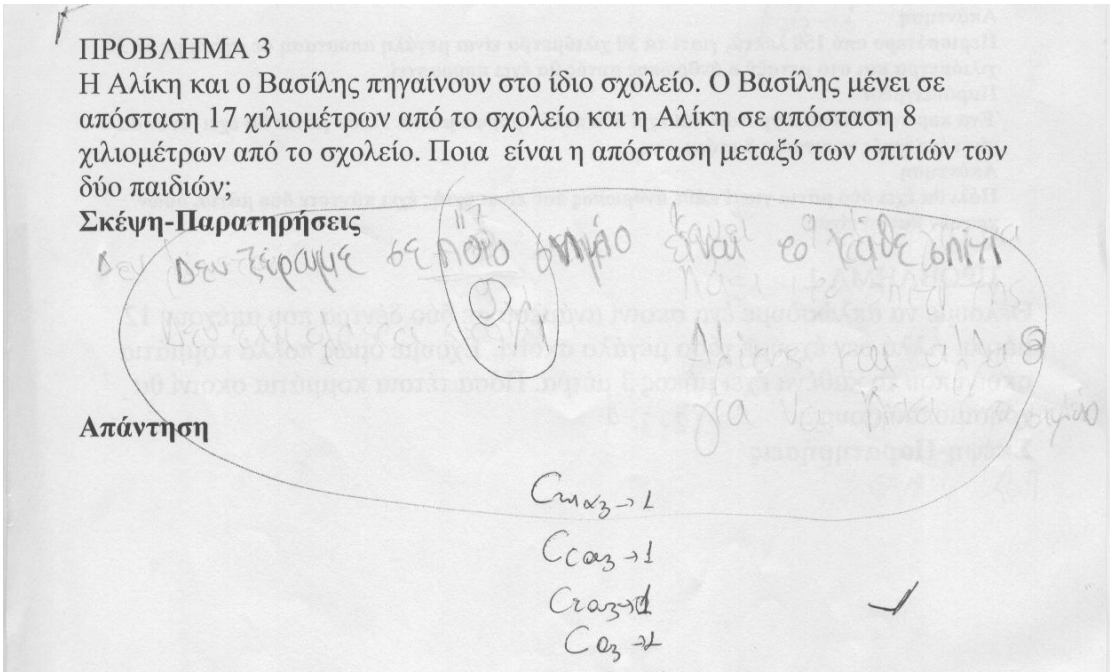

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Δεν μας λέει αν το δρόμο που περνει ο Βασίλης είναι και ο δρόμος για την Αλίκη

Απάντηση

Σωστό → 1
Σωστό → 1
Σωστό → 1
Σωστό → 1


ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;

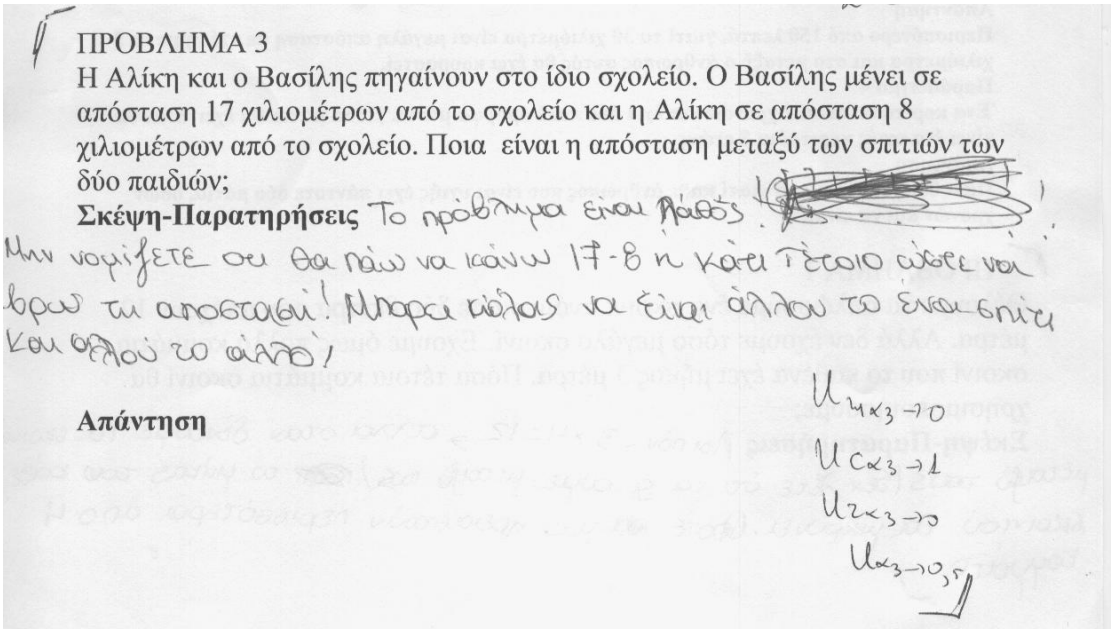
Σκέψη-Παρατηρήσεις

Δεν ξέραμε σε ποιο δρόμο είναι το κάθε σπίτι

Απάντηση

Σωστό → 1
Σωστό → 1
Σωστό → 1
Σωστό → 1

Η παρουσία του Διδακτικού Συμβολαίου οδηγεί τους μαθητές που αντιλαμβάνονται ότι μπορούν να υπάρξουν περισσότερες της μίας και μοναδικής λύσης, να θεωρήσουν πολύ πιο πιθανό το πρόβλημα να είναι λάθος:



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;

Σκέψη-Παρατηρήσεις Το πρόβλημα είναι λάθος!

Μην νομίζετε ότι θα πάω να κάνω 17-8 ή κάτι τέτοιο ώστε να βρω τη απόσταση! Μπορεί κάλλιστα να είναι άλλοτε το ένα σπίτι και άλλοτε το άλλο!

Απάντηση

$U_{4\times3}\to0$

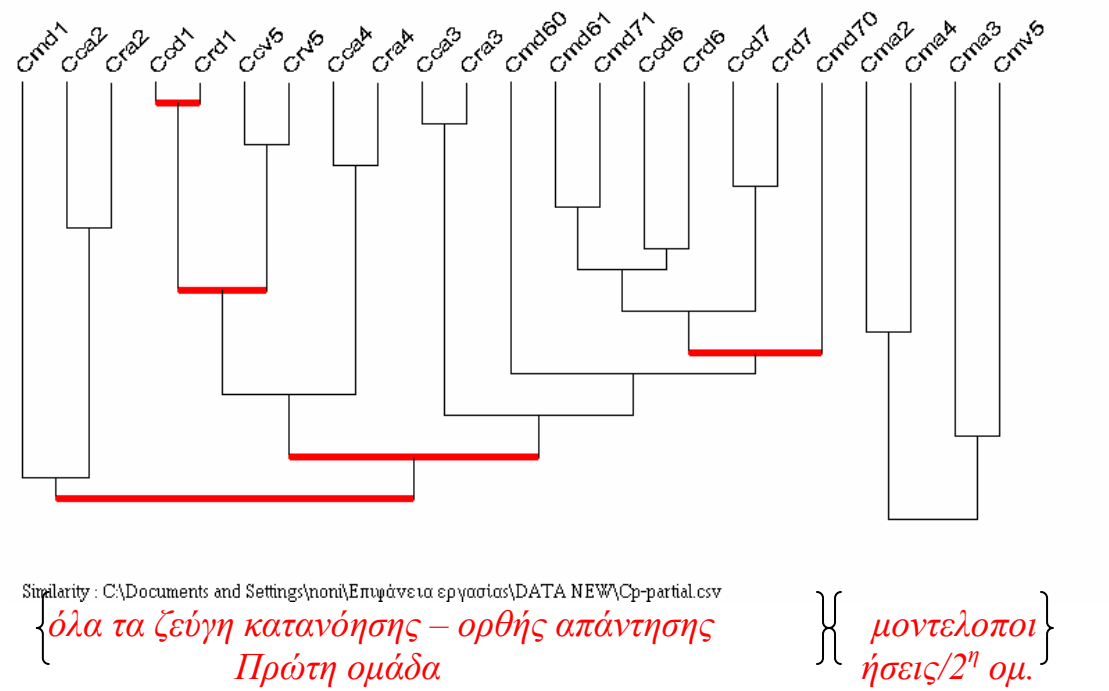
$U_{C\times3}\to1$

$U_{2\times3}\to0$

$U_{\alpha3}\to0,5$

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού

Στο διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 11) υπάρχουν δύο ξεχωριστές ομάδες.



Διάγραμμα 11. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Δοκίμιο Γ

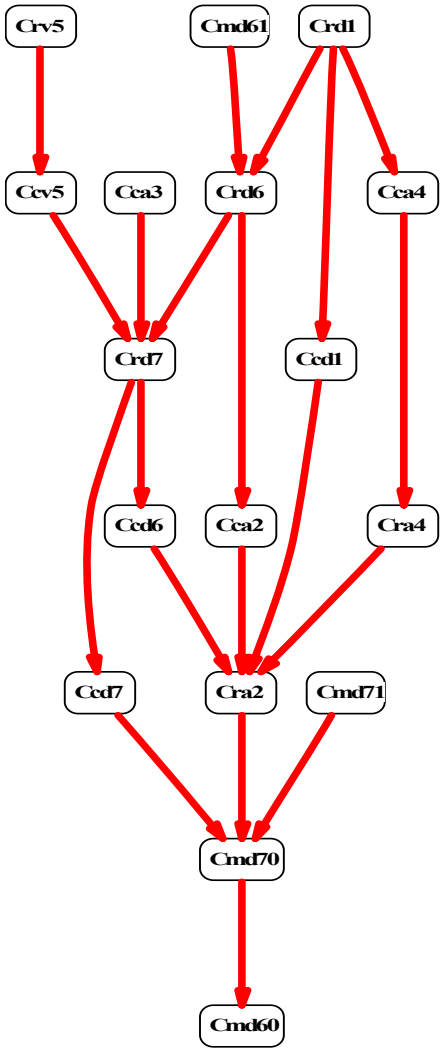
Η κύρια ομάδα περιλαμβάνει σχεδόν όλες τις μεταβλητές του δοκιμίου εκτός από τις μοντελοποιήσεις των προβλημάτων 2,3,4,5. Αποτελείται από τρεις υποομάδες. Σε αυτήν την ομάδα περιέχονται τα ζεύγη

κατανόησης - ορθής απάντησης τα οποία είναι συνδεδεμένα όλα με πολύ ισχυρό δεσμό. Ο δείκτης ομοιότητας μεταξύ αυτών των ζευγών έχει την μεγαλύτερη τιμή 1 στα προβλήματα 1,3,4,5, στο πρόβλημα 6 έχει τιμή 0,999696 και στο πρόβλημα 7 έχει τιμή 0,999968.
Πιο ισχυρά συνδεδεμένα φαίνεται να είναι τα προβλήματα 1 και 5 (δείκτης ομοιότητας 0,997577) που είναι από τα πιο δύσκολα του δοκιμίου.
Με πολύ ισχυρό δεσμό όπως είναι φυσικό συνδέονται και οι ορθές εκτελέσεις των διαιρέσεων με δεκαδικό αποτέλεσμα στα προβλήματα 6 και 7 παρόλο που η διαίρεση στο 7 ήταν ατελής (δείκτης ομοιότητας 0,999959), όπως και τα ίδια τα προβλήματα 6 και 7 μεταξύ τους (δείκτης ομοιότητας 0,97911).
Ο δείκτης ομοιότητας μεταξύ της ορθής εκτέλεσης της διαίρεσης και κατανόησης και ορθής απάντησης στο πρόβλημα 6 είναι 0,997799 και στο πρόβλημα 7 0,99392 που σημαίνει ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών που ήξερε να κάνει σωστή διαίρεση μπόρεσε να κατανοήσει και να απαντήσει στο πρόβλημα. Στο δοκίμιο Β ο αντίστοιχος δείκτης ομοιότητας ήταν 0,952969 στο πρόβλημα 3 και στο πρόβλημα 7 παρόλο που η διαιρέσεις ήταν πιο εύκολες από εκείνες του δοκιμίου Γ.
Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τις μοντελοποιήσεις πρόσθεσης των προβλημάτων 2 και 4 που δεν χρειαζόταν καμία πράξη και λύνονταν με χρήση κοινής λογικής. Μοντελοποίηση πρόσθεσης σ' αυτά τα προβλήματα σημαίνει υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. Οι μοντελοποιήσεις αυτών των δύο προβλημάτων συνδέονται πολύ ισχυρά με δείκτη ομοιότητας 0,982714. Οι άλλες μοντελοποιήσεις αυτής της ομάδας, είναι επίσης προσθέσεις, όπου στο πρόβλημα 3 οδηγούν μόνο στην προφανή λύση και στο πρόβλημα 5, που είναι πρόβλημα μέσου όρου, σημαίνει ότι οι μαθητές έκαναν μόνο πρόσθεση χωρίς να ακολουθήσει διαίρεση. Κατά συνέπεια και αυτές οι μοντελοποιήσεις μπορούν να θεωρηθούν ενδείξεις υπακοής στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. Συνδέονται μεταξύ τους με δείκτη ομοιότητας 0,796873 και με τις μοντελοποιήσεις των προβλημάτων 2 και 4 με δείκτη ομοιότητας 0,227638.
Συνεπώς αυτή η ομάδα μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει τους μαθητές που και μετά την παρέμβαση έμειναν πιστοί στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.

Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού

Και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 12), επιβεβαιώνεται ότι όσοι δίνουν ορθή απάντηση σε ένα πρόβλημα το έχουν κατανοήσει και μοντελοποιήσει σωστά. Όσοι δίνουν σωστή απάντηση στο πρόβλημα 1 με τα σκοινιά, απαντούν και σε όλα τα άλλα πλην του 5 και του 3.

Όσοι απαντούν ορθά το 5, το κατανοούν, δίνουν ορθή απάντηση και στο 7 και μερικές φορές και στο 2.
Ενώ, όσοι μοντελοποιούν και κάνουν σωστή πράξη στο 6, λύνουν και το 2 και συνήθως και το 7.
Τα προβλήματα 3 και 5 λοιπόν φαίνεται να έφεραν στους μαθητές τη μεγαλύτερη δυσκολία, ενώ την μικρότερη αντιμετώπισαν στο πρόβλημα 2. Το πρόβλημα με τον πιο ουσιώδη ρόλο στη γενικότερη επιτυχία του δοκιμίου φαίνεται να είναι το πρόβλημα 1.



Graph : C:\Documents and Settings\noni\Επιφάνεια εργασίας\DATA NEW\Cp-partial.csv

Διάγραμμα 12. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Δοκίμιο Γ

Παρατηρήσεις για το Δημοτικό
Τόσο από το διάγραμμα ομοιότητας όσο και από τα ποσοστά επιτυχίας φαίνεται ότι η παρέμβαση στο Δημοτικό έχει ενδείξεις επιτυχίας. Τα παιδιά φαίνεται να αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη επιτυχία τα ασυνήθιστα προβλήματα, όταν έχουν συζητήσει ανάλογο πρόβλημα με μορφή παραδείγματος, όπως στη περίπτωση των προβλημάτων 1,2,4 ή έχουν αντιμετωπίσει ξανά παρόμοιο πρόβλημα όπως στην περίπτωση των προβλημάτων 6 και 7, όπου είχαν αντιμετωπίσει παρόμοια στο δοκίμιο Β. Στο πρόβλημα 3 του δοκιμίου Β με τα λεωφορεία έδωσαν ορθή απάντηση 30 από τους 138 μαθητές, ενώ στο **πρόβλημα 6** του δοκιμίου Γ έδωσαν ορθή απάντηση 64 από τους 138 ίδιους μαθητές. Στο πρόβλημα 7 του δοκιμίου Β με τα μπαλόνια έδωσαν ορθή απάντηση 71 από τους 138 μαθητές (διαίρεση 18:4), ενώ στο ανάλογο **πρόβλημα 7** του Δοκιμίου Γ με τα τετράδια έδωσαν ορθή απάντηση 69 από τους 138 ίδιους μαθητές (ατελής διαίρεση 50:14) .
Η διαφορά αυτή ίσως πρέπει να αναζητήσει την εξήγηση της είτε στον ζήλο των ίδιων των μαθητών του Δημοτικού που αναζήτησαν την ορθή απάντηση στα προβλήματα 3 και 7 του Δοκιμίου Β που ήταν αντίστοιχα των προβλημάτων 6 και 7 του Δοκιμίου Γ, είτε στην πρωτοβουλία κάποιων από τους δασκάλους /ες, πράγμα που συνιστά κάποιο είδος παρέμβασης ανάλογο με αυτό της έρευνας.
Στα **προβλήματα 2 και 4 όπου υπήρχε ανάλογο παράδειγμα**, με την έννοια ότι και στο παράδειγμα δεν χρειαζόταν αριθμητική πράξη για να λυθούν, ένδειξη κατανόησης παρείχε το 62% και 47% αντιστοίχως και ορθή απάντηση έδωσε το 67% και 49% των μαθητών αντιστοίχως. Στο πρόβλημα 8 του Δοκιμίου Β το οποίο λυνόταν επίσης με την κοινή λογική το ποσοστό των ορθών απαντήσεων ήταν 46% .
Τα **προβλήματα 3 και 5** του Δοκιμίου Γ, **για τα οποία δεν υπήρχε ανάλογο παράδειγμα,** είχαν **ποσοστό ορθών απαντήσεων 4%** και ποσοστό κατανόησης 13% και 18 %.
Το **πρόβλημα 1,** το οποίο δεχόταν προσεγγιστική απάντηση και υπενθυμίζουμε ότι είχε γίνει παράδειγμα προσεγγιστικής απάντησης στη διάρκεια της παρέμβασης, είχε μικρό ποσοστό κατανόησης (13%) και ορθών απαντήσεων(7%). Θεωρούμε όμως ότι στο πρόβλημα αυτό ήταν ιδιαίτερα εύκολο για τους μαθητές, και όχι μόνο, να υπακούσουν στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου και παραθέτουμε το πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θέλουμε να απλώσουμε ένα σκοινί ανάμεσα σε δύο δέντρα που απέχουν 12 μέτρα. Αλλά δεν έχουμε τόσο μεγάλο σκοινί. Έχουμε όμως πολλά κομμάτια σκοινί που το καθένα έχει μήκος 3 μέτρα. Πόσα τέτοια κομμάτια σκοινί θα χρησιμοποιήσουμε;

Συνολικά θεωρούμε λοιπόν ότι η παρέμβαση στο Δημοτικό, αν και πολύ μικρής διάρκειας, έδωσε ενδείξεις επιτυχίας. Και αυτό γεννά βάσιμες ελπίδες για τον επιτυχή τρόπο αντιμετώπισης των λεγόμενων ασυνήθιστων προβλημάτων από τους μαθητές του Δημοτικού αν αυτά ενταχθούν με ουσιαστικό τρόπο στα σχολικά βιβλία και την σχολική πραγματικότητα.

Δοκίμιο Β

Δοκίμιο Γ

Δημοτικό

	Occurrence	Average
Cmd1	: 98.00	0.71
Ccd1	: 18.00	0.13
Crd1	: 10.00	0.07
Cma2	: 36.00	0.26
Cca2	: 85.00	0.62
Cra2	: 92.00	0.67
Cma3	: 87.00	0.63
Cca3	: 13.00	0.09
Cra3	: 6.00	0.04
Cma4	: 48.00	0.35
Cca4	: 65.00	0.47
Cra4	: 67.00	0.49
Cmv5	: 81.00	0.59
Ccv5	: 18.00	0.13
Crv5	: 6.00	0.04
Cmd60	: 101.00	0.73
Cmd61	: 32.00	0.23
Ccd6	: 75.00	0.54
Crd6	: 64.00	0.46
Cmd70	: 95.00	0.69
Cmd71	: 22.00	0.16
Ccd7	: 75.00	0.54
Crd7	: 69.00	0.50

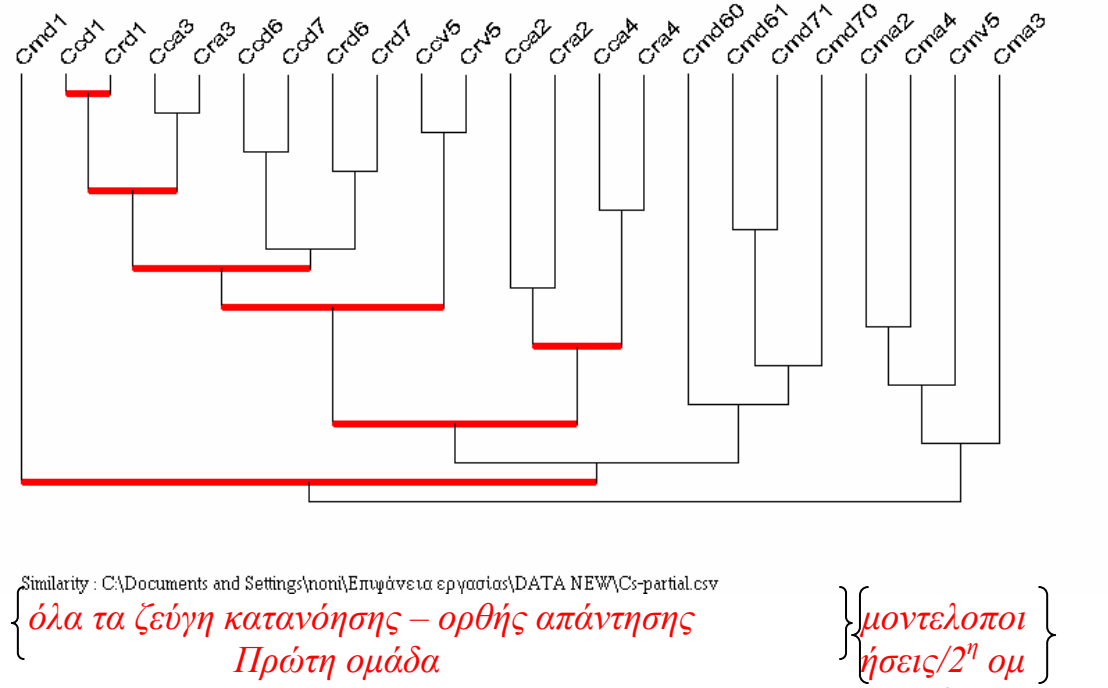
Πίνακας 3. Συχνότητα εμφάνισης των απαντήσεων των μαθητών της ΣΤ τάξης Δημοτικού στις μεταβλητές των ασυνήθιστων προβλημάτων των Δοκιμίων Β και Γ

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας Α Γυμνασίου

Στο διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 13), όλες οι μεταβλητές του δοκιμίου αποτελούν μία ενιαία ομάδα η οποία αποτελείται από τρεις υποομάδες, σε αντίθεση με το Δημοτικό όπου οι υποομάδες δεν συνδέονται μεταξύ τους.

Στην αριστερή πλευρά του διαγράμματος, βρίσκονται τα ζεύγη κατανόησης – ορθής απάντησης, όπου οι δείκτες ομοιότητας είναι 1 για τα αντίστοιχα ζεύγη των προβλημάτων 1,3,5,7, 0.999994 για το αντίστοιχο ζεύγος του προβλήματος 4, και 0,999386 για το ζεύγος

κατανόησης – ορθής απάντησης του προβλήματος 2. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ, ότι αυτά είναι τα δύο προβλήματα που λύνονται χωρίς πράξη, με τη λογική και όπως προέκυψε από τη διόρθωση των δοκιμίων πολλοί μαθητές έδωσαν σ' αυτά τη σωστή απάντηση χωρίς να δώσουν καμία επεξήγηση που θα μπορούσε να θεωρηθεί ένδειξη κατανόησης, ίσως γιατί το θεώρησαν περιττό.



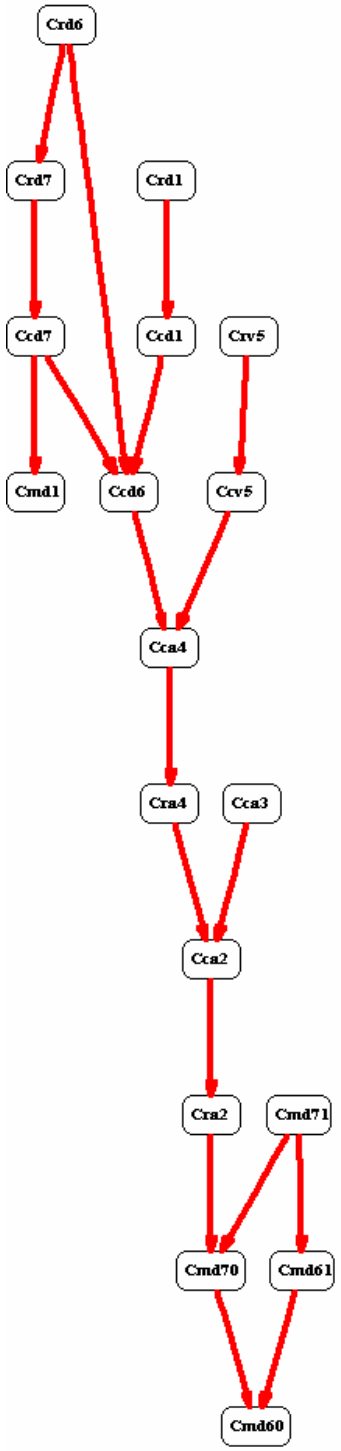
Διάγραμμα 13. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Δοκίμιο Γ

Οι συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων προβλημάτων είναι πολύ ισχυρές, με ισχυρότερη εκείνη μεταξύ των προβλημάτων 1 και 3 που έχει δείκτη ομοιότητας 1. **Αλλά και ο δεσμός που ενώνει τα ζεύγη κατανόησης – ορθής απάντησης όλων των προβλημάτων μεταξύ τους έχει δείκτη ομοιότητας 0,844352.**

Στα δεξιά βρίσκονται οι μοντελοποιήσεις όλων των προβλημάτων, εκτός του προβλήματος 1, οι οποίες αποτελούν δύο υποομάδες που δεν συνδέονται άμεσα μεταξύ τους.

Η μία υποομάδα αποτελείται από τις μοντελοποιήσεις και ορθές εκτελέσεις των διαιρέσεων των προβλημάτων 6 και 7.

Η άλλη υποομάδα αποτελείται από τις μοντελοποιήσεις πρόσθεσης, των προβλημάτων 2,3,4,5, από τις οποίες, οι των προβλημάτων 2 και 4 οδηγούν σε λανθασμένη απάντηση, στο πρόβλημα 3 οδηγεί μόνο στην προφανή λύση και στο 5 είναι απαραίτητη, αλλά αν δεν συνοδεύεται από δυαδική διαίρεση, μόνη της, όχι μόνο δεν οδηγεί στην ορθή απάντηση, αλλά αποδεικνύει και την υποταγή στο Διδακτικό Συμβόλαιο. Συνεπώς, αυτή η υποομάδα, μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει τους μαθητές, που και μετά την παρέμβαση, έμειναν πιστοί στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.



Graph : C:\Documents and Settings\noni\Επιφάν:99r 95 γ90ri.85\DATA NEW\Cs-partial.csv

Διάγραμμα 14. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Δοκίμιο Γ

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου
Και σ' αυτό το συνεπαγωγικό διάγραμμα,(διάγραμμα 14), οι σχέσεις είναι γραμμικές. Όσοι δίνουν ορθή απάντηση, έχουν παράσχει και ένδειξη κατανόησης, όσον αφορά στα προβλήματα 1, 5, 6, 7.
Ενώ όσοι έχουν κατανοήσει τα προβλήματα 2 και 4 έχουν δώσει και ορθή απάντηση.
Κατά τη γνώμη μας αυτό συμβαίνει στη συντριπτική πλειοψηφία, όχι ότι δόθηκε σωστή απάντηση χωρίς να προηγηθεί κατανόηση, αλλά γιατί ορισμένοι μαθητές του Γυμνασίου δεν αισθάνθηκαν την ανάγκη να δικαιολογήσουν την απάντησή τους εφόσον τη θεώρησαν αυτονόητη. Υπενθυμίζουμε ότι αυτά είναι τα δύο προβλήματα που λύνονται χωρίς πράξη με τη λογική.
Στις κορυφές των αλυσίδων βρίσκονται τα προβλήματα 1, 6 και 5 ενώ όλες οι αλυσίδες καταλήγουν στη μοντελοποίηση του προβλήματος 6. Τα προβλήματα 4 και 2 επιβεβαιώνεται και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα ότι αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές με τη μεγαλύτερη επιτυχία

Παρατηρήσεις για το Γυμνάσιο
Και στο Γυμνάσιο, όπως δείχνει και το διάγραμμα ομοιότητας και τα ποσοστά επιτυχίας, φαίνεται ότι η παρέμβαση έχει ενδείξεις επιτυχίας. Τα παιδιά και σε αυτή τη βαθμίδα φαίνεται να αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη επιτυχία τα ασυνήθιστα προβλήματα όταν έχουν συζητήσει ανάλογο πρόβλημα με μορφή παραδείγματος, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων 1,2,4 ή έχουν αντιμετωπίσει ξανά παρόμοιο πρόβλημα. όπως στην περίπτωση των προβλημάτων 6 και 7 όπου είχαν αντιμετωπίσει παρόμοια στο Δοκίμιο Β. Στο πρόβλημα 3 του Δοκιμίου Β, με τα λεωφορεία, έδωσαν ορθή απάντηση 10 από τους 138 μαθητές, ενώ στο ανάλογο **πρόβλημα 6** του Δοκιμίου Γ, έδωσαν ορθή απάντηση 21 από τους 138 ίδιους μαθητές. Στο πρόβλημα 7 του Δοκιμίου Β με τα μπαλόνια, έδωσαν ορθή απάντηση 42 από τους 138 μαθητές (διαίρεση 18:4) ενώ στο ανάλογο **πρόβλημα 7** του Δοκιμίου Γ με τα τετράδια έδωσαν ορθή απάντηση 32 από τους 138 ίδιους μαθητές (ατελής διαίρεση 50:14) .
Το **πρόβλημα 1,** το οποίο δεχόταν προσεγγιστική απάντηση, και υπενθυμίζουμε ότι είχε γίνει παράδειγμα προσεγγιστικής απάντησης στη διάρκεια της παρέμβασης, είχε και στο Γυμνάσιο μικρό ποσοστό κατανόησης (12%) και ορθών απαντήσεων(8%).
Θεωρούμε όμως ότι όπως και για τους μαθητές του Δημοτικού, στο πρόβλημα αυτό ήταν ιδιαίτερα δύσκολο για τους μαθητές του Γυμνασίου, να μην υπακούσουν στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.

Δοκίμιο Β

Γυμνάσιο

Smd1 : 108.00
Srd1 : 108.00
Smm2 : 106.00
Srm2 : 102.00
Umd30 : 110.00
Umd31 : 30.00
Ucd3 : 37.00
Urd3 : 10.00
Sma4 : 123.00
Sra4 : 122.00
Smd5 : 111.00
Sra4 : 122.00
Uma6 : 128.00
Uca6 : 22.00
Ura6 : 3.00
Umd70 : 111.00
Umd71 : 55.00
Ucd7 : 49.00
Urd7 : 42.00
Uma8 : 59.00
Uca8 : 40.00
Ura8 : 48.00
Smd9 : 100.00
Srd9 : 100.00
Umm00 : 84.00
Umm01 : 66.00
Ucm10 : 4.00
Urm10 : 2.00

Δοκίμιο Γ

Γυμνάσιο

	Occurrence	Average
Cmd1	: 90.00	0.65
Ccd1	: 17.00	0.12
Crd1	: 11.00	0.08
Cma2	: 36.00	0.26
Cca2	: 85.00	0.62
Cra2	: 92.00	0.67
Cma3	: 87.00	0.63
Cca3	: 12.00	0.09
Cra3	: 5.00	0.04
Cma4	: 37.00	0.27
Cca4	: 68.00	0.49
Cra4	: 74.00	0.54
Cmv5	: 64.00	0.46
Ccv5	: 14.00	0.10
Crv5	: 6.00	0.04
Cmd60	: 104.00	0.75
Cmd61	: 40.00	0.29
Ccd6	: 49.00	0.36
Crd6	: 21.00	0.15
Cmd70	: 95.00	0.69
Cmd71	: 29.00	0.21
Ccd7	: 47.00	0.34
Crd7	: 32.00	0.23

Πίνακας 4. Συχνότητα εμφάνισης των απαντήσεων των μαθητών της Α τάξης Γυμνασίου στις μεταβλητές των ασυνήθιστων προβλημάτων των Δοκιμίων Β και Γ

Στα **προβλήματα 2 και 4 όπου υπήρχε ανάλογο παράδειγμα**, με την έννοια ότι και στο παράδειγμα δεν χρειαζόταν αριθμητική πράξη για να λυθούν, ένδειξη κατανόησης παρείχε το 62% και 49% αντιστοίχως, και **ορθή** απάντηση έδωσε το 67% και 54% των μαθητών αντιστοίχως. Στο πρόβλημα 8 του δοκιμίου Β, το οποίο λυνόταν επίσης με την κοινή λογική, το ποσοστό των ορθών απαντήσεων ήταν 35%, ενώ ένδειξη κατανόησης είχαν δώσει το 29% .

Τα **προβλήματα 3 και 5** του Δοκιμίου Γ **για τα οποία δεν υπήρχε ανάλογο παράδειγμα** είχαν **ποσοστό ορθών απαντήσεων 4%** και ποσοστό κατανόησης 9% και 10 %.

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού με Α Γυμνασίου

Σε σύνολο 138 μαθητών σε κάθε βαθμίδα, απάντησαν:

Δημοτικό

	Occurrence	Average
Cmd1	98.00	0.71
Ccd1	18.00	0.13
Crd1	10.00	0.07
Cma2	36.00	0.26
Cca2	85.00	0.62
Cra2	92.00	0.67
Cma3	87.00	0.63
Cca3	13.00	0.09
Cra3	6.00	0.04
Cma4	48.00	0.35
Cca4	65.00	0.47
Cra4	67.00	0.49
Cmv5	81.00	0.59
Ccv5	18.00	0.13
Crv5	6.00	0.04
Cmd60	101.00	0.73
Cmd61	32.00	0.23
Ccd6	75.00	0.54
Crd6	64.00	0.46
Cmd70	95.00	0.69
Cmd71	22.00	0.16
Ccd7	75.00	0.54
Crd7	69.00	0.50

Γυμνάσιο

	Occurrence	Average
Cmd1	90.00	0.65
Ccd1	17.00	0.12
Crd1	11.00	0.08
Cma2	36.00	0.26
Cca2	85.00	0.62
Cra2	92.00	0.67
Cma3	87.00	0.63
Cca3	12.00	0.09
Cra3	5.00	0.04
Cma4	37.00	0.27
Cca4	68.00	0.49
Cra4	74.00	0.54
Cmv5	64.00	0.46
Ccv5	14.00	0.10
Crv5	6.00	0.04
Cmd60	104.00	0.75
Cmd61	40.00	0.29
Ccd6	49.00	0.36
Crd6	21.00	0.15
Cmd70	95.00	0.69
Cmd71	29.00	0.21
Ccd7	47.00	0.34
Crd7	32.00	0.23

Πίνακας 5. Συχνότητα εμφάνισης και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών Στ τάξης Δημοτικού και Α τάξης Γυμνασίου στις μεταβλητές των ασυνήθιστων προβλημάτων του Δοκιμίου Γ

Στα προβλήματα 1,2, 3, 4, 5 οι διαφορές μεταξύ των μαθητών που έδωσαν ορθή απάντηση σε κάθε βαθμίδα είναι πολύ μικρές. Είτε υπάρχει μείωση του πληθυσμού που έδωσε ορθή απάντηση κατά 1 άτομο προς όφελος του Δημοτικού (πρόβλημα 3), είτε ο αριθμός των ορθών απαντήσεων είναι ακριβώς ο ίδιος στις δύο βαθμίδες (προβλήματα 2 και 5), είτε υπάρχει αύξηση 1 ή 7 ατόμων προς όφελος του Γυμνασίου (προβλήματα 1 και 4 αντιστοίχως).
Εκεί που υπάρχει μεγάλη διαφορά αριθμού ορθών απαντήσεων μεταξύ των μαθητών του Δημοτικού και των μαθητών του Γυμνασίου, προς όφελος των μαθητών του Δημοτικού, είναι στα προβλήματα 6 και 7 όπου πρέπει να γίνει ερμηνεία του δεκαδικού πηλίκου. Στο πρόβλημα 6 η διαφορά είναι 43 άτομα και στο πρόβλημα 7, 37 άτομα. Επίσης ένδειξη κατανόησης έχει δώσει στο πρόβλημα 6 το 54% των μαθητών της ΣΤ Δημοτικού και το 36% των μαθητών της Α Γυμνασίου. Ενώ στο πρόβλημα 7 το 54% των μαθητών του Δημοτικού και το 34% των μαθητών του Γυμνασίου.

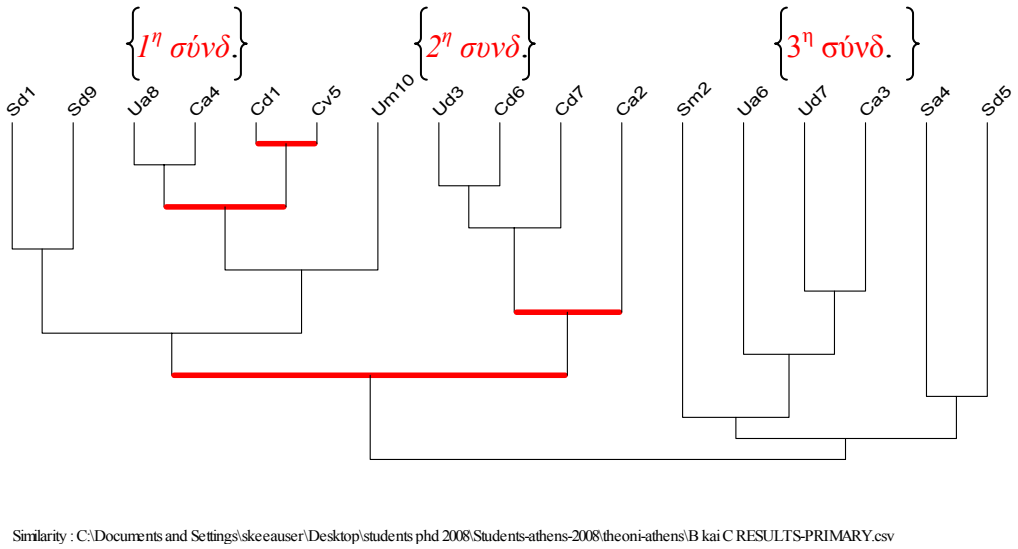
Η διαφορά αυτή ίσως πρέπει να αναζητήσει την εξήγηση της είτε στο ζήλο των ίδιων των μαθητών του Δημοτικού που αναζήτησαν την ορθή απάντηση στα προβλήματα 3 και 7 του Δοκιμίου Β, που ήταν αντίστοιχα των προβλημάτων 6 και 7 του Δοκιμίου Γ, είτε στην πρωτοβουλία κάποιων από τους δασκάλους /ες να επεξεργαστεί τα προβλήματα του Δοκιμίου Β στη τάξη, πράγμα που συνιστά κάποιο είδος παρέμβασης ανάλογο με αυτό της έρευνας. Θα πρέπει όμως συγχρόνως να υποθέσει κανείς ότι δεν υπήρξαν ανάλογες πρωτοβουλίες από την πλευρά των μαθητών και των καθηγητών του Γυμνασίου. Εναντίον αυτής της εξήγησης είναι επίσης το γεγονός ότι την διαίρεση των προβλημάτων 6 και 7 διεκπεραίωσαν σωστά περισσότεροι μαθητές του Γυμνασίου: στο πρόβλημα 6 40 μαθητές έναντι 32 του Δημοτικού, και στο πρόβλημα 7, 29 έναντι 22.
Πρέπει ακόμη να υπενθυμίσουμε ότι η μείωση του ποσοστού που έδειχνε κατανόηση στα ασυνήθιστα προβλήματα του Δοκιμίου Β, ήταν από 0% έως 20%, και του ποσοστού της ορθής απάντησης από 0% έως 15%, στον πληθυσμό των μαθητών της Α Γυμνασίου σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού.
Η μείωση της επίδοσης των μαθητών στην Α Γυμνασίου έχει παρατηρηθεί και σε έρευνα που αφορούσε στα κλάσματα, που διεξήχθη στην Κύπρο με επιστημονικό υπεύθυνο τον Α. Γαγάτση (Γαγάτσης 2007).

Γενικά, και στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο υπήρξε η σύνδεση των μεταβλητών κατανόησης και ορθής απάντησης. Η μοντελοποίηση ασφαλώς παίζει τον ρόλο της, αλλά από μόνη της δεν είναι αρκετή στην επιτυχή αντιμετώπιση των ασυνήθιστων προβλημάτων.
Υπήρξε μία ελαφρά βελτίωση στην απόδοση των μαθητών του Γυμνασίου στα προβλήματα που λύνονται με τη λογική, και χειροτέρευση στα προβλήματα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου, τα αίτια της οποίας μένει να αναζητηθούν.
Η παρέμβαση και στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο κρίνεται ότι έδωσε ενδείξεις επιτυχίας, μια και συνετέλεσε και στις δύο βαθμίδες στην αύξηση του ποσοστού κατανόησης και ορθής απάντησης. Όπως επίσης και γιατί ο αριθμός των μαθητών που αντιμετώπισε επιτυχώς τα προβλήματα των οποίων το είδος είχε συζητηθεί κατά την διάρκεια της παρέμβασης, ήταν σημαντικά μεγαλύτερος από τον αριθμό των μαθητών που απάντησε επιτυχώς σε προβλήματα, για των οποίων το είδος δεν είχε συζητηθεί ανάλογο παράδειγμα κατά την διάρκεια της παρέμβασης.
Αυτό γεννά βάσιμες ελπίδες για τον επιτυχή τρόπο αντιμετώπισης των ασυνήθιστων προβλημάτων από τους μαθητές, αν αυτά ενταχθούν με ουσιαστικό τρόπο στα σχολικά βιβλία και την σχολική καθημερινή πραγματικότητα.

4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΩΤΗΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΦΑΣΗΣ (ΔΟΚΙΜΙΑ Β ΚΑΙ Γ)

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού

Οι μεταβλητές του παρακάτω διαγράμματος ομοιότητας (διάγραμμα 15) δηλώνουν επιτυχία στα προβλήματα των Δοκιμίων Β και Γ. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολύ λίγες συνδέσεις ανάμεσα στα ασυνήθιστα προβλήματα των δύο δοκιμίων (U και C).



Διάγραμμα 15. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού.

Από τις συνδέσεις η πρώτη (Ua8 –Ca4) και η δεύτερη (Ud3 – Cd6) γίνεται για προφανείς λόγους. Τα προβλήματα 8 του Δοκιμίου Β και 4 του Δοκιμίου Γ, δεν χρειάζονται καμία αριθμητική πράξη για να δοθεί ορθή απάντηση, παρά μόνο χρήση της κοινής λογικής. Τα προβλήματα 3 του Δοκιμίου Β και 6 του Δοκιμίου Γ, είναι ίδια. Πρόκειται για λεωφορεία που μεταφέρουν επιβάτες (προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο). Και στις δύο αυτές συνδέσεις ο δείκτης ομοιότητας είναι πολύ μεγάλος: 0,999155 και 0,999154 αντίστοιχα. Το τρίτο ζεύγος (Ud7 - Ca3) έχει εξίσου μεγάλο δείκτη ομοιότητας: 0,922405. Η σύνδεση αυτή μεταξύ του προβλήματος 7 του Δοκιμίου Β και 3 του Δοκιμίου Γ, δεν έχει κάποια προφανή εξήγηση. Δεν πρόκειται για προβλήματα του ίδιου τύπου ή όμοιου πλαισίου. Το πρόβλημα 7 είναι πρόβλημα διαίρεσης με υπόλοιπο, και το πρόβλημα 3 είναι πρόβλημα πολλαπλών λύσεων.

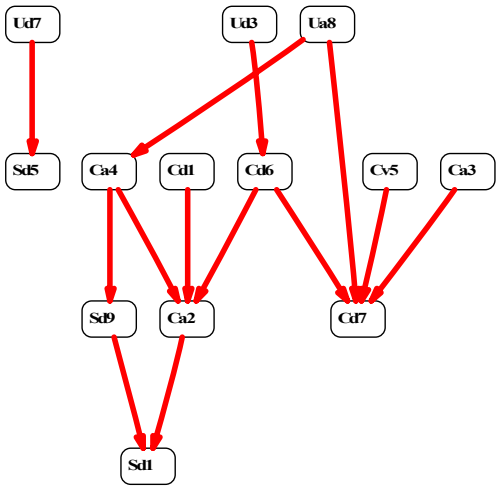
7. Ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και μια σακούλα με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;

8. Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8

χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;

Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού

Αυτές οι συνδέσεις επιβεβαιώνονται και από το παρακάτω συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 16):



Graph : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\students phd 2008\Sd95ts90h85s-2008\theoni-athens\B kai C RESULTS-PRIMARY.csv

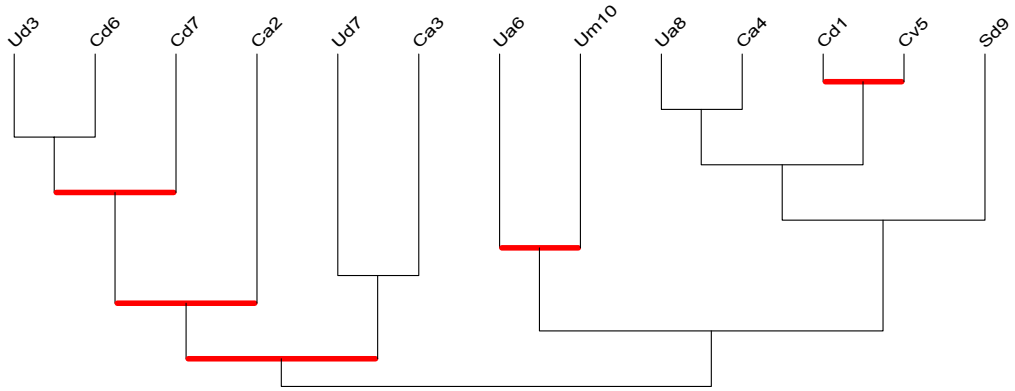
Διάγραμμα 16. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού.

Όποιος λύνει το πρόβλημα 3 του Δοκιμίου Β, το οποίο παρουσιάζει και τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές και βρίσκεται στη κορυφή της αλυσίδας, λύνει και τα προβλήματα 6 και 7 του Δοκιμίου Γ. Και όποιος λύνει το πρόβλημα 8 του Δοκιμίου Β, λύνει και το πρόβλημα 4 του Δοκιμίου Γ. Το τρίτο κοινό ζεύγος (Ud7 - Ca3) του διαγράμματος ομοιότητας μεταξύ του προβλήματος 7 του Δοκιμίου Β και 3 του Δοκιμίου Γ, η οποία δεν είχε κάποια προφανή εξήγηση, δεν υπάρχει στο συνεπαγωγικό διάγραμμα.

Παρατηρούμε ότι όπως είναι αναμενόμενο, στη κορυφή κάθε αλυσίδας βρίσκεται ασυνήθιστο πρόβλημα του Δοκιμίου Β, και στο τέλος συνηθισμένο, πράγμα που επιβεβαιώνει τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να επιτύχουν στα ασυνήθιστα προβλήματα σε σχέση με τα συνηθισμένα.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας συμπληρωματικών μεταβλητών ΣΤ Δημοτικού

Ερευνήσαμε και σχετικά με τον παράγοντα που παίζει τον πιο σημαντικό ρόλο στη δημιουργία των ομάδων των ασυνήθιστων προβλημάτων των δύο δοκιμίων και πήραμε το παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 17).



Similarity : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\students phd 2008\Students-athens-2008\theoni-athens\B kai C RESULTS-PRIMARY-complementary.csv

Διάγραμμα 17. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού. (συμπληρωματικές μεταβλητές)

Χαρακτηριστικά παραθέτουμε από τα δεδομένα:

Contribution to the class: Cd1,Cv5 (1)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.204

Contribution to the class: Ua8,Ca4 (2)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.0488

Contribution to the class: Ud3,Cd6 (3)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.0812

Contribution to the class: Ua8,Ca4,Cd1,Cv5 (1,2,4)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.176

Contribution to the class: Ud3,Cd6,Cd7 (3,5)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.0678

Contribution to the class: Ud7,Ca3 (8)
The most contributive variable to this class is Sd1 with the probability : 0.152

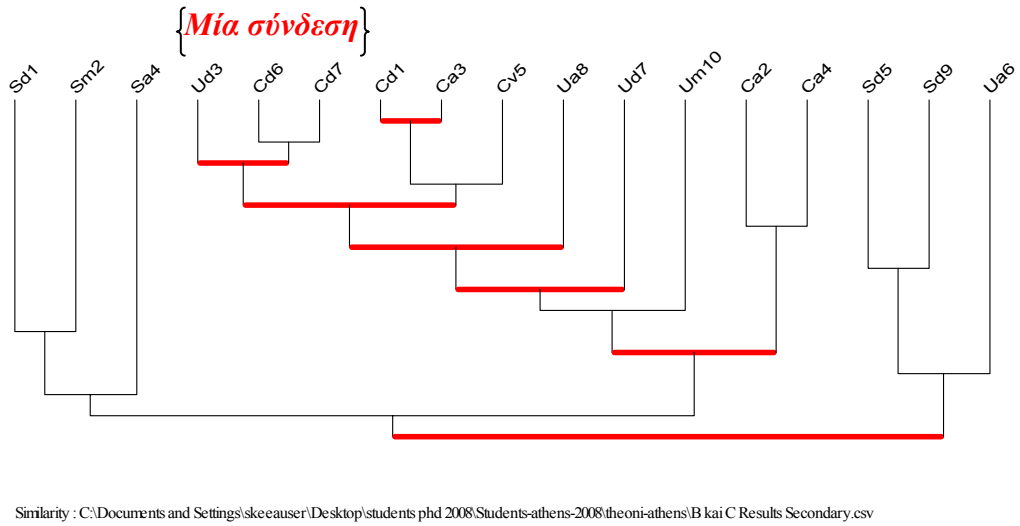
……

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα 1 του Δοκιμίου Β (Sd1) είναι αυτό που συμβάλλει στο σχηματισμό των ομάδων και αυτό συμβαίνει για όλες ανεξαιρέτως τις 12 ομάδες του διαγράμματος ομοιότητας.

Υπενθυμίζουμε το πρόβλημα: *Κάποιος θέλει να χτίσει ένα ξενοδοχείο που να έχει μόνο δίκλινα δωμάτια (δηλαδή δωμάτια με δύο κρεβάτια) και να μπορεί να φιλοξενήσει συνολικά 80 επισκέπτες. Πόσα δωμάτια πρέπει να έχει το ξενοδοχείο;*

Παρατηρούμε ότι ενώ πρόκειται για ένα τυπικό πρόβλημα, χρειάζεται κάποια ενεργοποίηση της κοινής λογικής του λύτη, για να γίνει σωστή επιλογή αριθμητικής πράξης και να δοθεί σωστή απάντηση.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας Α Γυμνασίου

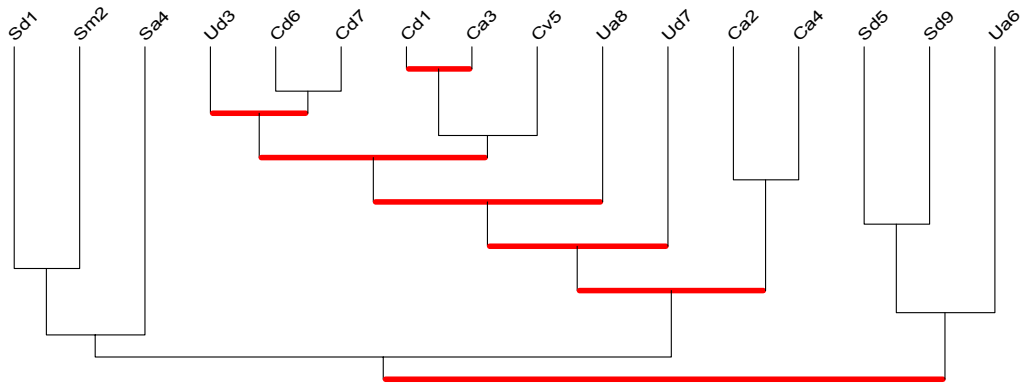


Διάγραμμα 18. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Το διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών που δηλώνουν επιτυχία στα προβλήματα των Δοκιμίων Β και Γ (διάγραμμα 18) είναι αρκετά διαφορετικό για το Γυμνάσιο. Εδώ δεν παρατηρούμε καμία άμεση σύνδεση μεταξύ των προβλημάτων των δύο δοκιμίων. Υπάρχει όμως η ομάδα [Ud3 –(Cd6 – Cd7)]. Και τα τρία είναι προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο. Υπενθυμίζουμε ότι τα προβλήματα 3 του Δοκιμίου Β και 6 του Δοκιμίου Γ, είναι ίδια (πρόκειται για λεωφορεία που μεταφέρουν επιβάτες).

Και στις δύο αυτές συνδέσεις ο δείκτης ομοιότητας είναι πολύ μεγάλος: 0,999932 για τα προβλήματα 6 και 7 του Δοκιμίου Γ, και 0,999308 για τη σύνδεση με το πρόβλημα 3 του Δοκιμίου Β.

Επειδή η συχνότητα εμφάνισης της μεταβλητής Um10 ήταν πολύ μικρός αριθμός, αφαιρέθηκε η μεταβλητή, χωρίς στο διάγραμμα ομοιότητας που προέκυψε (διάγραμμα 19) να αλλάξει τίποτε ουσιαστικό.



Similarity : C:\Documents and Settings\skeeauser\Desktop\students phd 2008\Students-athens-2008\theoni-athens\B kai C Results Secondary.csv

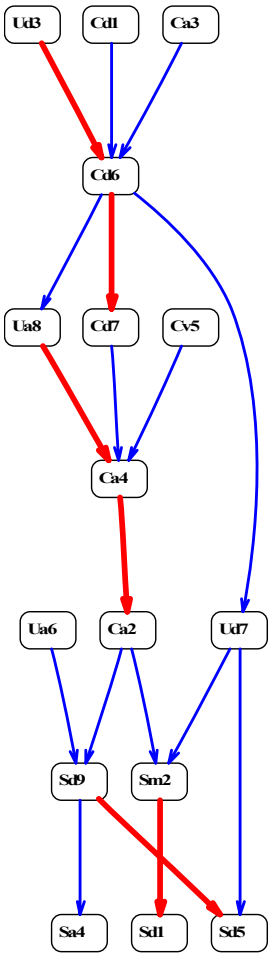
Διάγραμμα 19. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου, χωρίς τη μεταβλητή Um10.

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου

Η ανάλυση του συνεπαγωγικού διαγράμματος (διάγραμμα 20) επιβεβαιώνει το διάγραμμα ομοιότητας, αλλά μας δίνει και μία σύνδεση επιπλέον:

Όποιος λύνει το πρόβλημα 3 του Δοκιμίου Β, το οποίο παρουσιάζει και τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές και βρίσκεται στη κορυφή της αλυσίδας, λύνει και τα προβλήματα 6 και 7 του Δοκιμίου Γ. Και όποιος λύνει το πρόβλημα 8 του Δοκιμίου Β, λύνει και το πρόβλημα 4 του Δοκιμίου Γ. Αυτή τη σύνδεση την είδαμε και στο Δημοτικό και αφορά σε προβλήματα που λύνονται χωρίς αριθμητική πράξη.

Όποιος λύνει το πρόβλημα 4 του Δοκιμίου Γ, λύνει και το πρόβλημα 2 του ίδιου δοκιμίου. Αναμενόμενη σύνδεση μια και τα δύο είναι προβλήματα που λύνονται χωρίς αριθμητική πράξη. Παρατηρούμε ότι όπως είναι αναμενόμενο, στη κορυφή κάθε αλυσίδας βρίσκεται ασυνήθιστο πρόβλημα είτε του Δοκιμίου Β, είτε του Δοκιμίου Γ και στο τέλος συνηθισμένο, πράγμα που επιβεβαιώνει τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να επιτύχουν στα ασυνήθιστα προβλήματα σε σχέση με τα συνηθισμένα.

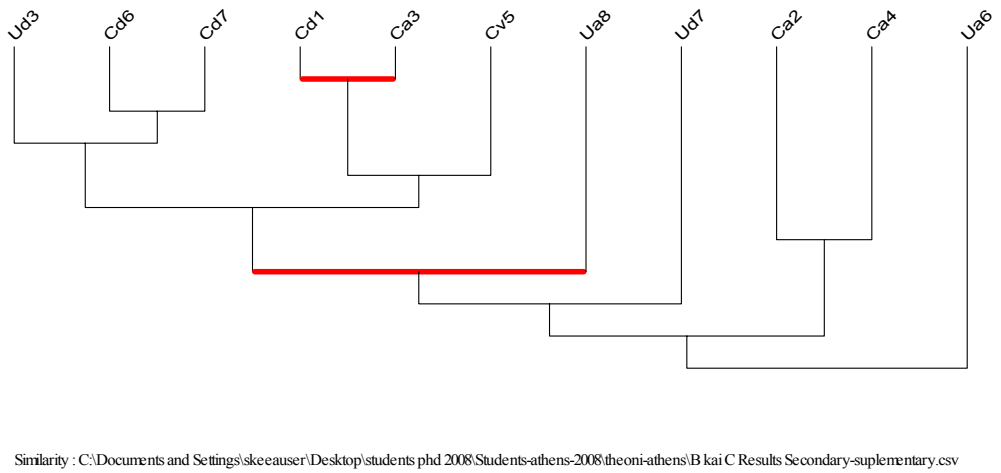


Graph : C:\Documents and Settings\skeeause\Δ\D95\k90\85\dents phd 2008\Students-athens-2008\theoni-athens\B kai C Results Secondary.csv

Διάγραμμα 20. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας συμπληρωματικών μεταβλητών Α Γυμνασίου

Η έρευνα σχετικά με τον παράγοντα που παίζει τον πιο σημαντικό ρόλο στη δημιουργία των ζευγών των ασυνήθιστων προβλημάτων των δύο δοκιμίων απέδωσε διαφορετικό αποτέλεσμα στο Γυμνάσιο από ότι στο Δημοτικό όπως βλέπουμε στο παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 21).



Διάγραμμα 21. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών επιτυχίας στα Δοκίμια Β και Γ, των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου (συμπληρωματικές μεταβλητές χωρίς τη μεταβλητή Um10).

Παραθέτουμε από τα δεδομένα:

Contribution to the class: Cd1,Ca3 (1)
The most contributive variable to this class is Sd9 with the probability : 0.194

Contribution to the class: Cd6,Cd7 (2)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability : 0.0984

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7 (2,3)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability : 0.147

Contribution to the class: Cd1,Ca3,Cv5 (1,4)
The most contributive variable to this class is Sd9 with the probability : 0.273

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7,Cd1,Ca3,Cv5 (1,2,3,4,5)
The most contributive variable to this class is Sd9 with the probability : 0.175

Contribution to the class: Ca2,Ca4 (6)
The most contributive variable to this class is Sd9 with the probability : 0.0122

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7,Cd1,Ca3,Cv5,Ua8 (1,2,3,4,5,7)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7,Cd1,Ca3,Cv5,Ua8,Ud7 (1,2,3,4,5,7,8)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability : 0.0908

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7,Cd1,Ca3,Cv5,Ua8,Ud7,Ca2,Ca4 (1,2,3,4,5,6,7,8,9)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability : 0.0301

Contribution to the class: Ud3 ,Cd6,Cd7,Cd1,Ca3,Cv5,Ua8,Ud7,Ca2,Ca4,Ua6
(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
The most contributive variable to this class is Sm2 with the probability : 0.0301

Παρατηρούμε ότι δύο προβλήματα του Δοκιμίου Β (Sd1) είναι αυτά που συμβάλλουν στο σχηματισμό των ομάδων του διαγράμματος ομοιότητας.

Πρόκειται για τα προβλήματα 2(Sm2) και 9 (Sd9). Από τις 10 κλάσεις που σχηματίζονται, στις 6 συμβάλλει το πρόβλημα 2 και στις υπόλοιπες 4 συμβάλλει το πρόβλημα 9. Με μια δεύτερη ανάγνωση των δεδομένων βλέπουμε ότι το πρόβλημα 9 του Δοκιμίου Β συμβάλλει στο σχηματισμό των ομάδων που αποτελούνται αποκλειστικά από προβλήματα του Δοκιμίου Γ. Ενώ όταν πρόκειται για ευρύτερες ομάδες που αποτελούνται και από προβλήματα του Δοκιμίου Γ και από προβλήματα του Δοκιμίου Β, το καθοριστικό είναι το πρόβλημα 2 του Δοκιμίου Β. Παραθέτουμε το πρόβλημα: *Ο Στέλιος αγόρασε 5 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;*

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού με Α Γυμνασίου

Το γεγονός ότι και στα διαγράμματα ομοιότητας του συνδυασμού των μεταβλητών που δηλώνουν επιτυχία στα προβλήματα των Δοκιμίων Β και Γ της ΣΤ Δημοτικού, και στα αντίστοιχα διαγράμματα ομοιότητας της Α Γυμνασίου υπάρχουν πολύ λίγα ζεύγη τα οποία να αποτελούνται από προβλήματα των δύο δοκιμίων, είναι μία ένδειξη ότι ο τρόπος σκέψης και αντιμετώπισης των ασυνήθιστων προβλημάτων είναι διαφορετικός στο Δοκίμιο Γ από ότι στο Δοκίμιο Β. Αυτό που έχει μεσολαβήσει είναι η παρέμβαση. Έτσι έχουμε μία επιπλέον ένδειξη για την επιτυχία της.

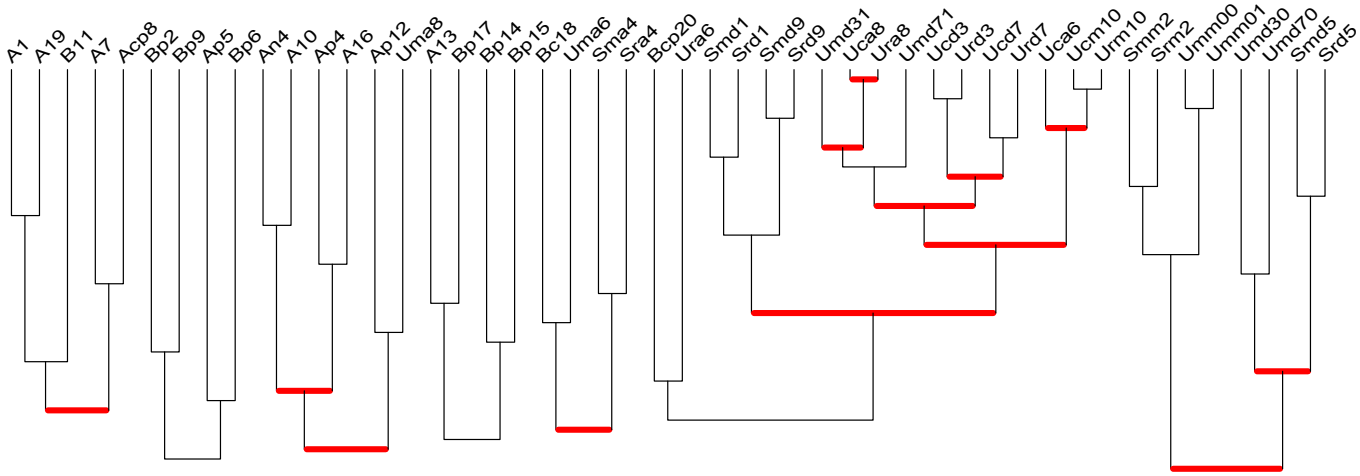
Το καθοριστικό πρόβλημα στη δημιουργία των ζευγών των ασυνήθιστων προβλημάτων των δύο δοκιμίων στην ΣΤ Δημοτικού είναι ένα τυπικό πρόβλημα. Χρειάζεται όμως κάποια ενεργοποίηση της κοινής λογικής του λύτη, για να γίνει σωστή επιλογή αριθμητικής πράξης και να δοθεί σωστή απάντηση (πρόβλημα 1).
Το αντίστοιχο καθοριστικό πρόβλημα στο Γυμνάσιο είναι ένα τυπικό πρόβλημα (πρόβλημα 2) χωρίς αυτό το πρόσθετο στοιχείο. Τα παιδιά για να απαντήσουν ενεργοποιούν κατά κάποιο τρόπο τον «αυτόματο πιλότο». Κάνουν την προφανή πράξη και δίνουν το αποτέλεσμα ως απάντηση. Αυτό επιβεβαιώνεται από την τεράστια διαφορά που υπάρχει στον αριθμό των επιτυχών απαντήσεων ανάμεσα στην τυπική εκδοχή του προβλήματος (πρόβλημα 2) και την ασυνήθιστη εκδοχή του ίδιου προβλήματος (πρόβλημα 10). Η διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο με τη εισαγωγή στην Άλγεβρα, πιθανόν να αποτελεί κάποια εξήγηση γι' αυτό. Πρέπει ακόμη να υπενθυμίσουμε ότι η μείωση του ποσοστού που έδειχνε κατανόηση στα ασυνήθιστα προβλήματα του Δοκιμίου Β, ήταν από 0% έως 20%, στον πληθυσμό των μαθητών της Α Γυμνασίου σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού.

4.5 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α) ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Β)

Επεξεργαστήκαμε το ερωτηματολόγιο Α που αφορούσε σε στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος, σε συνδυασμό με το Δοκίμιο Β που ζητούσε από τους μαθητές να απαντήσουν σε 5 συνηθισμένα (S) και 5 ασυνήθιστα (U) προβλήματα. Το ζητούμενο ήταν να διαπιστωθεί αν όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού και της Α Γυμνασίου, η επιτυχία των παιδιών στα προβλήματα, τυπικά ή ασυνήθιστα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν συνδέονται με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.

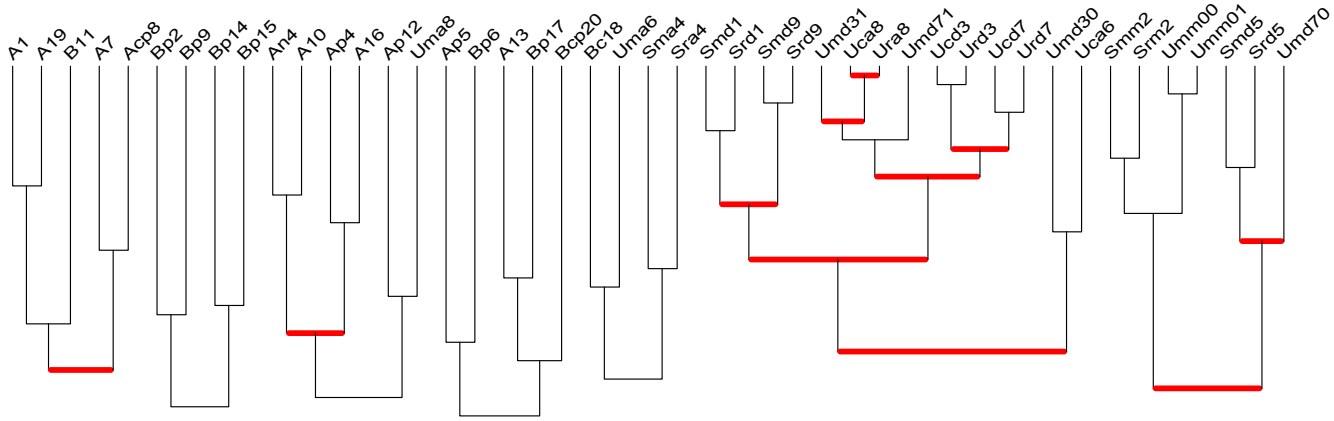
Ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού

Στο παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 22) περιλαμβάνονται όλες οι μεταβλητές του ερωτηματολογίου Α και του Δοκιμίου Β. Συνολικά ασχολήθηκαν 138 μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, πρώτα με το ερωτηματολόγιο Α και αμέσως μετά με το Δοκίμιο Β, χωρίς την παρουσία των δασκάλων τους και για δύο ή δυόμιση διδακτικές ώρες



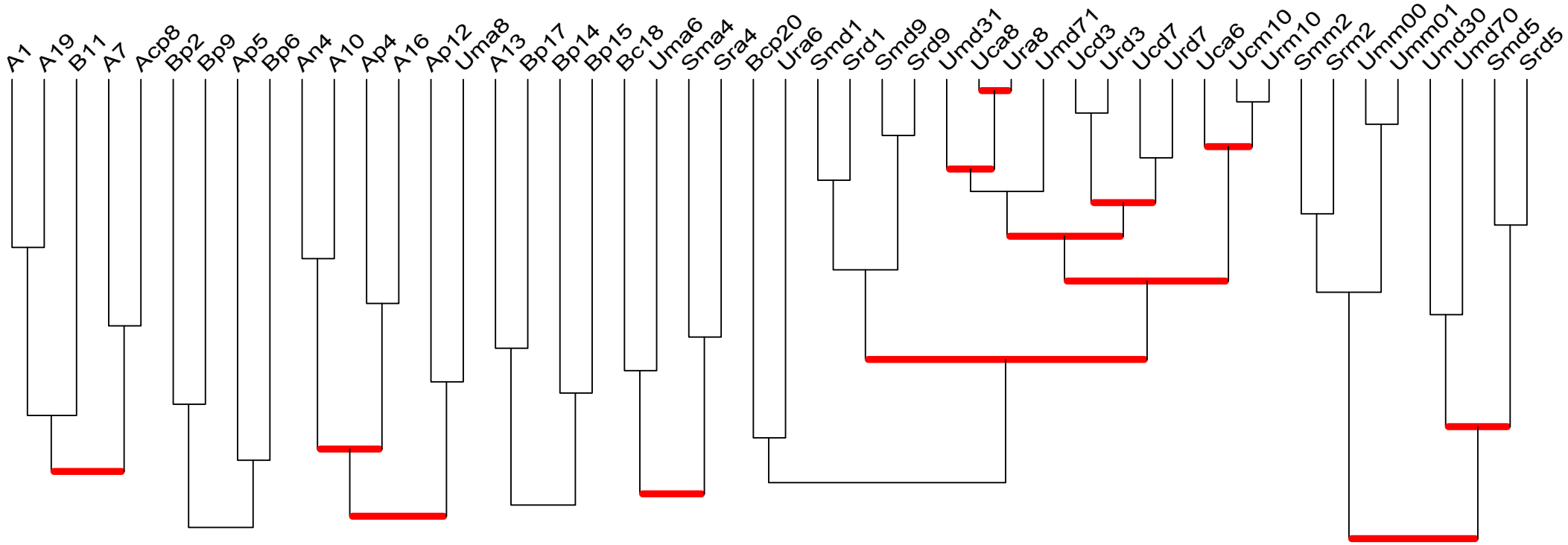
Διάγραμμα 22. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)

Επειδή η συχνότητα εμφάνισης κάποιων μεταβλητών είναι πολύ μικρός αριθμός, αφαιρέθηκαν οι μεταβλητές Ura6, Ucm10, Urm10 που είχαν συχνότητα εμφάνισης μικρότερη ή ίση του 4.

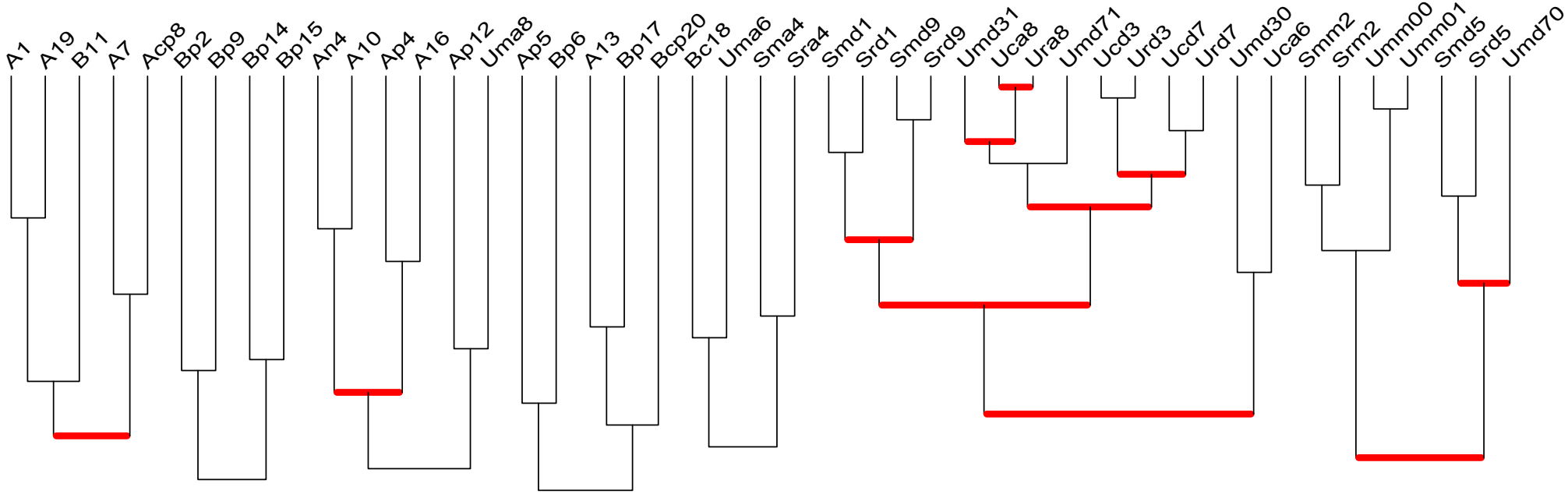


Διάγραμμα 23. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (εκτός των μεταβλητών Ura6, Ucm10, Urm10)

Παρατηρούμε (διάγραμμα 23) ότι ο διαχωρισμός των μεταβλητών του ερωτηματολογίου Α από τις μεταβλητές του Δοκιμίου Β είναι σχεδόν πλήρης. Υπάρχουν μόνο δύο συνδέσεις.
Η πρώτη σύνδεση (δείκτης ομοιότητας 0,662874)αφορά τη μεταβλητή Ap12 (Θέλω πολύ χρόνο για να βρώ τη λύση σε ένα πρόβλημα) με συχνότητα εμφάνισης 52,75 και τη μεταβλητή Uma8, με συχνότητα εμφάνισης 57, που είναι μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ασυνήθιστο πρόβλημα 8 στο οποίο η ορθή απάντηση προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη. Το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. Αυτή η υποομάδα συνδέεται, αν και με πολύ μικρό δείκτη ομοιότητας 0,176791, με την υποομάδα (An4, A10, Ap4, A16) που είναι η ομάδα των αρνητικών στάσεων για τα μαθηματικά.
Η δεύτερη σύνδεση (δείκτης ομοιότητας 0,671834) αφορά τη μεταβλητή Bc18 (Ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί), με συχνότητα εμφάνισης 65,75 και τη μεταβλητή Uma6 που είναι μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ασυνήθιστο πρόβλημα 6. Η μοντελοποίση αυτής της πρόσθεσης είναι απαραίτητη και για τους μαθητές που κατανοούν και επεξεργάζονται με τη λογική αυτό το πρόβλημα, και για εκείνους που προσπαθούν να απαντήσουν υπακούοντας στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.



Διάγραμμα 22. Διάγραμμα ομοιότητας(σε μεγέθυνση) του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)

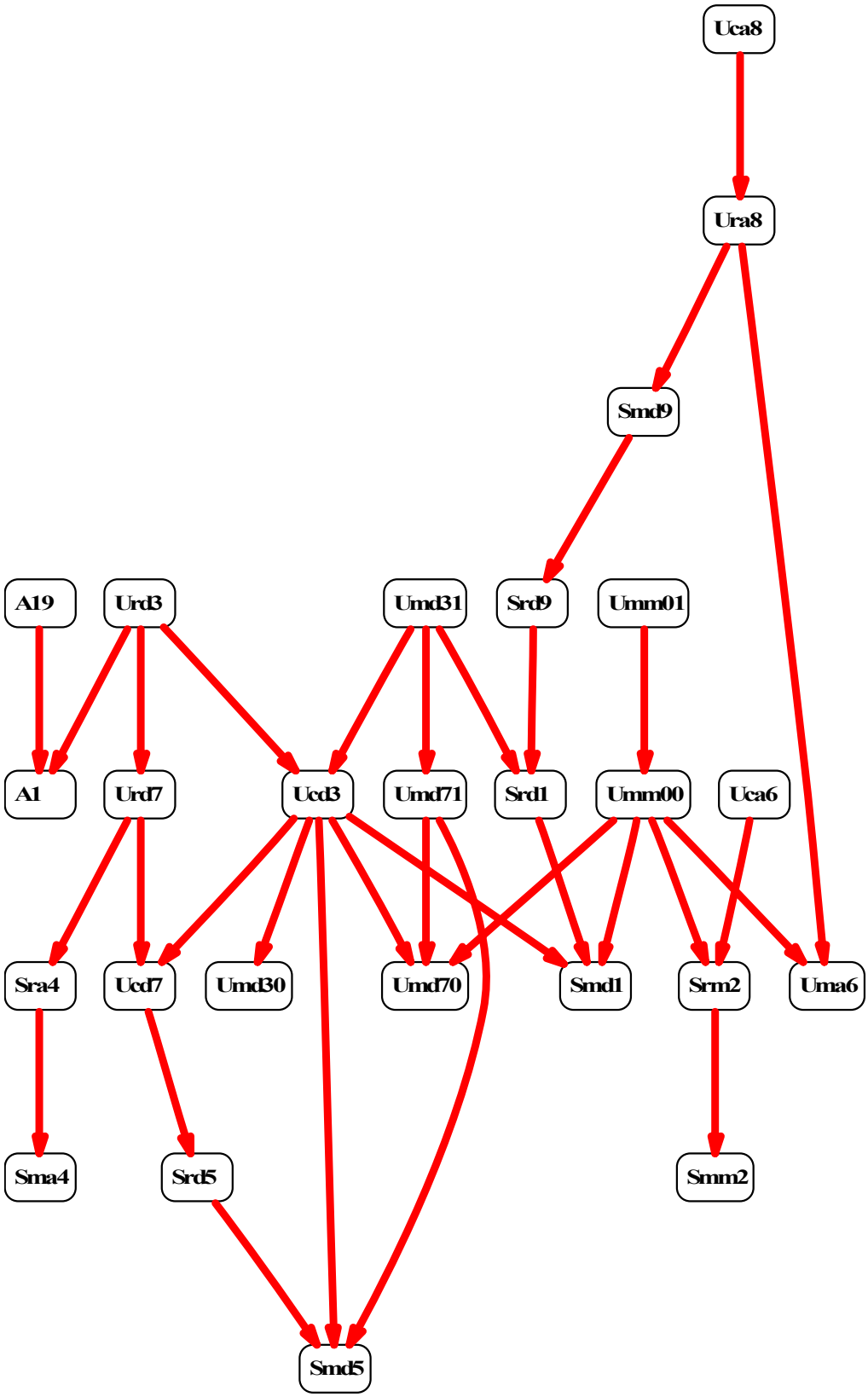


Διάγραμμα 23. Διάγραμμα ομοιότητας (σε μεγέθυνση) του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (εκτός των μεταβλητών Ura6, Ucm10, Urm10)

Όμως από τους 124 μαθητές που έκαναν αυτή τη πρόσθεση μόνο οι 32 έδωσαν κάποια ένδειξη κατανόησης. Η υποομάδα αυτών των δύο μεταβλητών συνδέεται (δείκτης ομοιότητας 0,219409) με την υποομάδα μοντελοποίησης ορθής απάντησης του συνηθισμένου προβλήματος 4, το οποίο είναι και το απλούστερο του δοκιμίου. Ορθή απάντηση σ' αυτό έδωσαν σχεδόν όλοι οι μαθητές (128 από τους 138).
Επομένως αυτές οι συνδέσεις φαίνεται να μην αφορούν σε μαθητές που έχουν εκδηλώσει πολύ θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά ούτε σε εκείνους που έχουν θετική αυτοεικόνα και αυτοεκτίμηση σε σχέση με την ικανότητα τους στα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος.
Με εξαίρεση αυτές τις δύο συνδέσεις το διάγραμμα ομοιότητας αριστερά έχει τις ομάδες του Ερωτηματολογίου Α που έχουν την ίδια δομή όπως όταν αναλύσαμε το διάγραμμα ομοιότητας του Α μόνο του. Και δεξιά είναι οι ομάδες του Δοκιμίου Β που επίσης έχουν την ίδια δομή όπως όταν αναλύσαμε το διάγραμμα ομοιότητας του Β μόνο του.

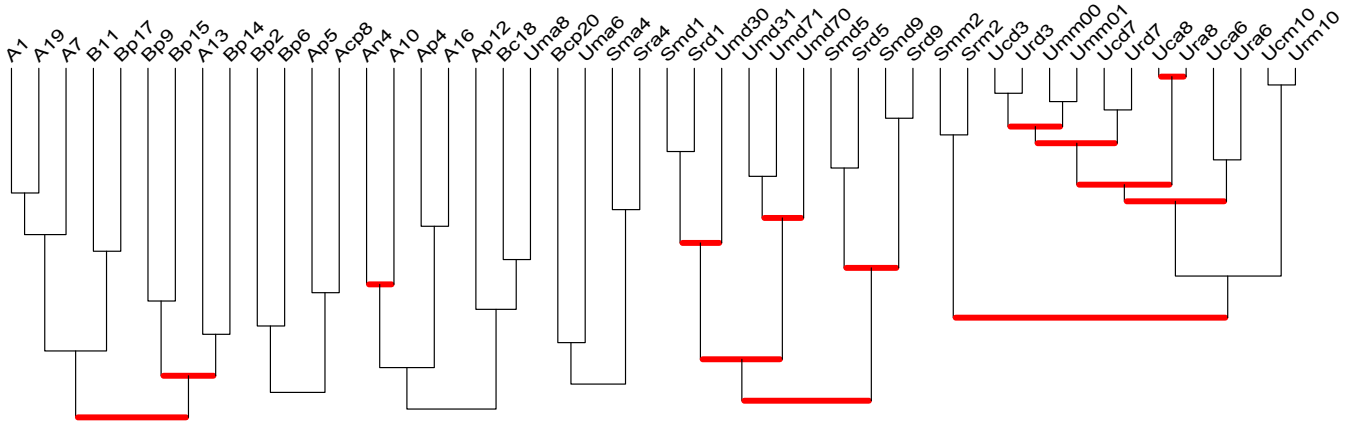
Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού
Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 23) βλέπουμε ότι η μόνη συνεπαγωγή που συνδέει μεταβλητή του Ερωτηματολογίου Α με μεταβλητή του δοκιμίου Β είναι η Urd3-A1.
Δηλαδή αυτοί που έχουν δώσει σωστή απάντηση στο ασυνήθιστο πρόβλημα 3 (με τα λεωφορεία), έχουν δηλώσει ότι προτιμούν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα.
Πράγμα που είναι φυσικό μια και η ορθή απάντηση προϋποθέτει είτε την πλήρη εκτέλεση μιας διαίρεσης με δεκαδικό αποτέλεσμα και την ερμηνεία του δεκαδικού πηλίκου σύμφωνα με τη λογική, είτε την ορθή ερμηνεία του υπόλοιπου της διαίρεσης.

Παρατηρήσεις για το Δημοτικό
Και από το διάγραμμα ομοιότητας και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα εξάγεται το γενικό συμπέρασμα ότι όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, η επιτυχία των παιδιών στα προβλήματα, τυπικά ή ασυνήθιστα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν **ελάχιστα συνδέονται** με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.



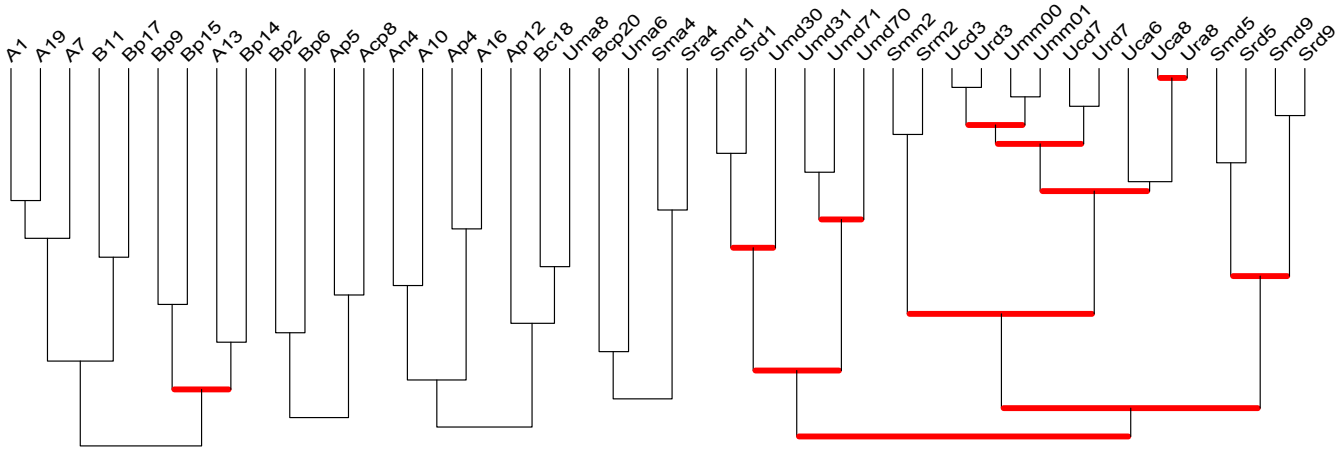
Διάγραμμα 24. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β

Ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας Α Γυμνασίου

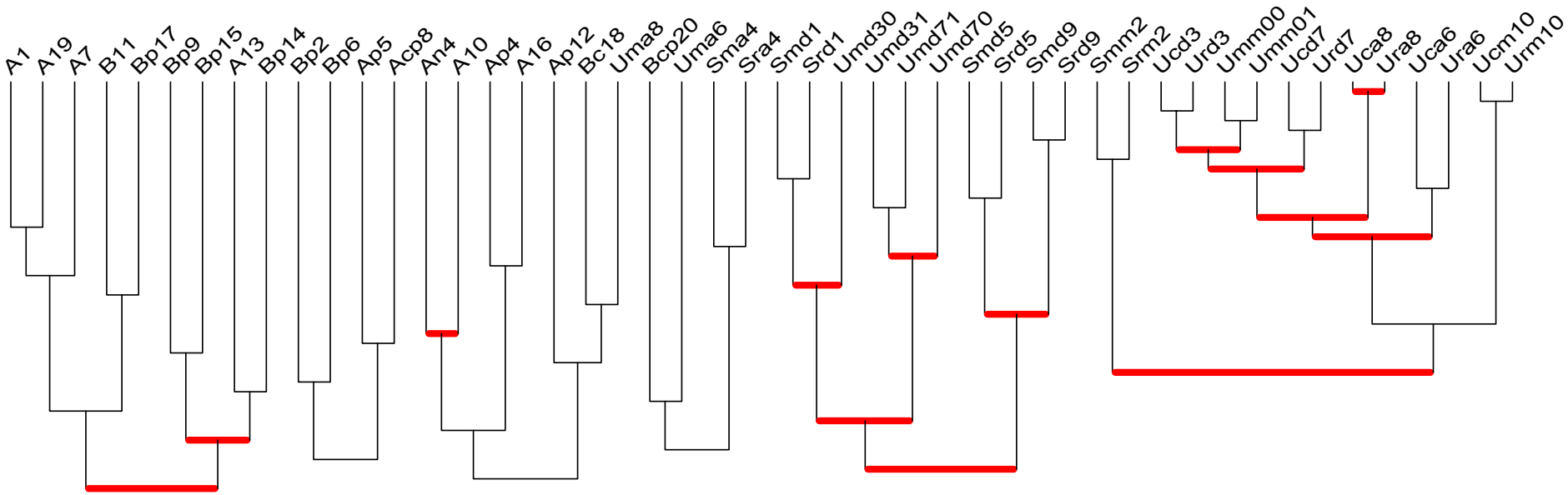


Διάγραμμα 25. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)

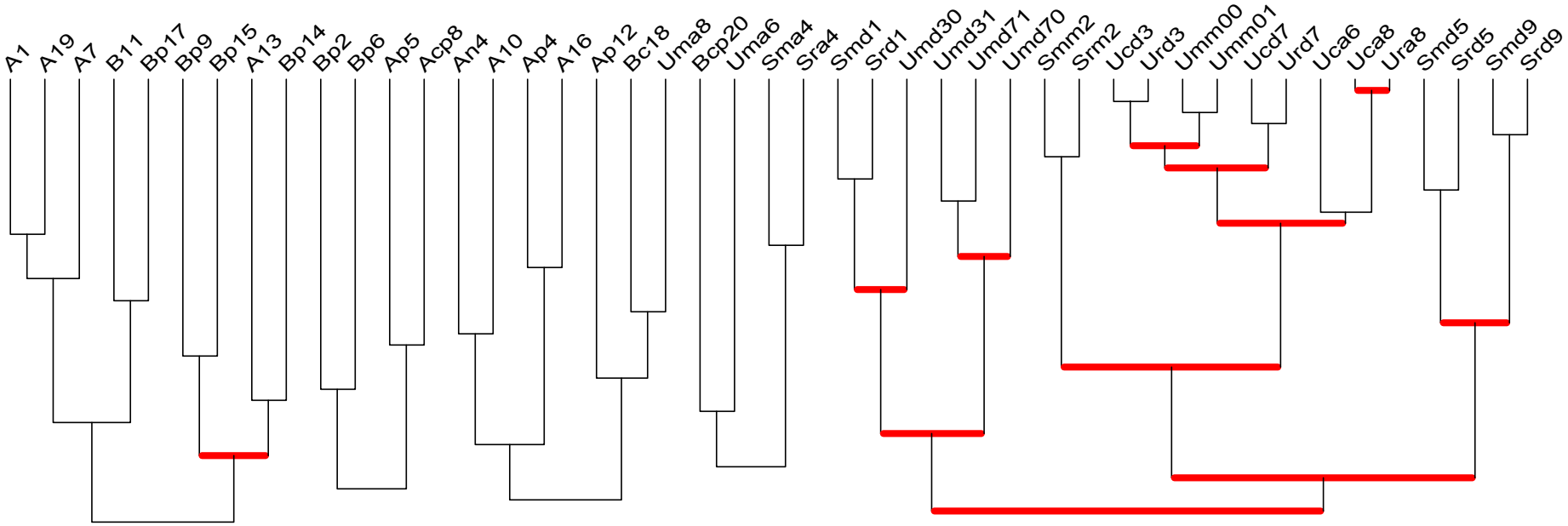
Και από αυτό το διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 25) αφαιρέθηκαν οι μεταβλητές Ura6, Ucm10, Urm10 που είχαν συχνότητα εμφάνισης μικρότερη ή ίση του 4. Αλλά ως προς το θέμα που ερευνάται δεν προέκυψε καμία διαφορά στο επόμενο διάγραμμα (διάγραμμα 26).



Διάγραμμα 26. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (εκτός των μεταβλητών Ura6, Ucm10, Urm10)



Διάγραμμα 25. Διάγραμμα ομοιότητας(σε μεγέθυνση) του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (όλες οι μεταβλητές)



Διάγραμμα 26. Διάγραμμα ομοιότητας (σε μεγέθυνση) του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (εκτός των μεταβλητών Ura6, Ucm10, Urm10)

Και στα δύο διαγράμματα ομοιότητας της Α Γυμνασίου, όπως και σε εκείνα της ΣΤ Δημοτικού, ο διαχωρισμός των μεταβλητών του ερωτηματολογίου Α από τις μεταβλητές του δοκιμίου Β είναι σχεδόν πλήρης. Υπάρχουν μόνο τρεις συνδέσεις.
Η πρώτη σύνδεση (δείκτης ομοιότητας 0,799648)αφορά τη μεταβλητή Bc18 (Ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί), με συχνότητα εμφάνισης 57,50 στους 138, και τη μεταβλητή Uma8 που είναι μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ασυνήθιστο πρόβλημα 8 με συχνότητα εμφάνισης 59, στο οποίο η ορθή απάντηση προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη. Υπενθυμίζουμε ότι το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. Αυτό το ζεύγος συνδέεται αρκετά ισχυρά (δείκτης ομοιότητας 0,630423) με τη μεταβλητή Ap12 του Ερωτηματολογίου Α (Θέλω πολύ χρόνο για να βρώ τη λύση σε ένα πρόβλημα) με συχνότητα εμφάνισης 94,75.
Αυτή η υποομάδα συνδέεται, αν και με πολύ μικρό δείκτη ομοιότητας, με την υποομάδα (An4, A10, Ap4, A16) που είναι η ομάδα των αρνητικών στάσεων για τα μαθηματικά.

Γενικά αυτή η σύνδεση των μεταβλητών του Ερωτηματολογίου Α με μεταβλητές του Δοκιμίου Β αφορά μαθητές που έχουν χαμηλή αυτοεικόνα και αυτοεκτίμηση ως προς την ικανότητα τους να λύνουν μαθηματικά προβλήματα, αλλά που κάποιοι από αυτούς θεωρούν ότι ενδεχομένως η αδυναμία τους αυτή να οφείλεται στο πρόβλημα και όχι στους ίδιους. Και εδώ παρατηρούμε την αντίφαση, μαθητές που κάνουν αριθμητική πράξη υπακούοντας στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου να ασπάζονται άποψη που «σπάει» αυτό το Συμβόλαιο.
Η τρίτη σύνδεση (δείκτης ομοιότητας 0,523184) αφορά στις μεταβλητές Bcp20 (Ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις) με συχνότητα εμφάνισης 104.5 και Uma6 του Δοκιμίου Β που είναι μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ασυνήθιστο πρόβλημα 6. Υπενθυμίζουμε ότι η μοντελοποίση αυτής της πρόσθεσης είναι απαραίτητη και για τους μαθητές που κατανοούν και επεξεργάζονται με τη λογική αυτό το πρόβλημα, και για εκείνους που προσπαθούν να απαντήσουν υπακούοντας στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. Όμως όπως και στο Δημοτικό από τους 128 μαθητές που έκαναν αυτή τη πρόσθεση μόνο οι 22 έδωσαν κάποια ένδειξη κατανόησης. Η υποομάδα αυτών των δύο μεταβλητών συνδέεται (δείκτης ομοιότητας 0,219409) με την υποομάδα Sma4, Sra4, δηλαδή μοντελοποίηση και ορθή απάντηση του συνηθισμένου προβλήματος 4, το οποίο είναι και το απλούστερο του δοκιμίου. Ορθή απάντηση σ' αυτό έδωσε πολύ μεγάλο πλήθος μαθητών (122 από τους 138).

Με εξαίρεση αυτές τις τρεις συνδέσεις το διάγραμμα ομοιότητας αριστερά έχει τις ομάδες του Ερωτηματολογίου Α που έχουν την ίδια δομή όπως όταν αναλύσαμε το διάγραμμα ομοιότητας του Α μόνο του. Και δεξιά είναι οι ομάδες του Δοκιμίου Β που επίσης έχουν την ίδια δομή όπως όταν αναλύσαμε το διάγραμμα ομοιότητας του Β μόνο του.

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 27) του Γυμνασίου περιέχει μερικές πολύ ενδιαφέρουσες συνεπαγωγές.

Υπάρχουν τέσσερις αλυσίδες που συνδέουν την κατανόηση ή την ορθή απάντηση σε ασυνήθιστα προβλήματα με θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Η πρώτη αλυσίδα υποδηλώνει ότι όποιος κατανοεί το ασυνήθιστο πρόβλημα 6 ή δίνει ορθή απάντηση στο ασυνήθιστο πρόβλημα 3 με τα λεωφορεία, κατανοεί επίσης και τα ασυνήθιστα προβλήματα 3 και 8 και έχει δηλώσει στο Ερωτηματολόγιο Α ότι χρησιμοποιεί τις λέξεις κλειδιά για να λύνει μαθηματικά προβλήματα.

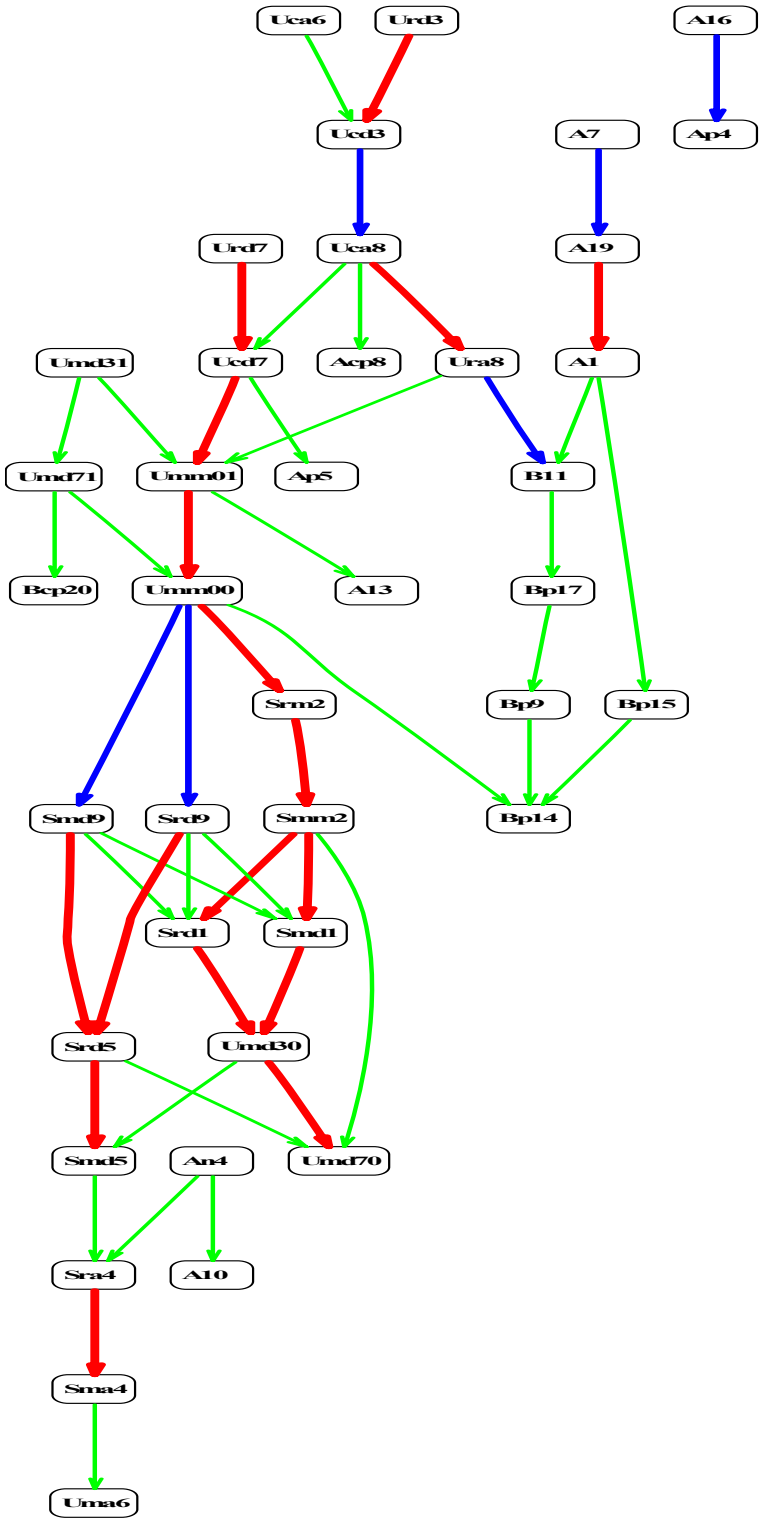
Η δεύτερη και η τρίτη ότι αν επιπλέον κατανοεί το 7 τότε έχει δηλώσει στο Ερωτηματολόγιο Α ότι όταν δυσκολεύεται σε ένα πρόβλημα επιμένει μέχρι να βρει την λύση ή ότι δεν ξεχνά εύκολα ότι μαθαίνει στα μαθηματικά. Η τέταρτη ότι αν μετά την κατανόηση του 8 επιπλέον δίνει και ορθή απάντηση σ' αυτό, έχει ισχυρή πεποίθηση για την ικανότητά του στα μαθηματικά γενικά και στα μαθηματικά προβλήματα ειδικότερα, καθώς και ότι είναι χρήσιμο για αυτόν τον ίδιο να μάθει να λύνει μαθηματικά προβλήματα.

Παρατηρούμε ότι αυτές οι αλυσίδες **συνδέουν θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά με μεταβλητές που υποδηλώνουν κατανόηση και ορθή απάντηση σε ασυνήθιστα προβλήματα** και των δύο τύπων. Δηλαδή και σε εκείνα που χρειάζεται γνώση ορθής διεξαγωγής αριθμητικής πράξης σε συνδυασμό με την κοινή λογική (πρόβλημα 3) και σε εκείνα που χρειάζεται μόνο χρήση κοινής λογικής (πρόβλημα 8).

Υπάρχουν και δύο μικρότερες αλυσίδες συνεπαγωγών, από τις οποίες η μία συνδέει την ορθή διεξαγωγή της διαίρεσης στα ασυνήθιστα προβλήματα 3 και 7 με την πεποίθηση για τις περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις που μπορεί να έχει ένα πρόβλημα. Η άλλη αλυσίδα συνδέει τη στάση ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά με το συνηθισμένο πρόβλημα 4 που έχουμε επισημάνει ήδη ότι είναι το απλούστερο πρόβλημα του Δοκιμίου Β. Δηλαδή η μόνη σύνδεση αρνητικής στάσης για τα μαθηματικά είναι με επιτυχία σε συνηθισμένο πρόβλημα.

Παρατηρούμε ότι και εδώ όπως και στο διάγραμμα ομοιότητας δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ επιτυχίας στο πρόβλημα 8 το οποίο μπορεί να απαντηθεί ορθά και από μαθητές που δεν γνωρίζουν να κάνουν αριθμητικές πράξεις με στάσεις και πεποιθήσεις που φανερώνουν χαμηλό

δείκτη αυτοεικόνας και αυτοεκτίμησης για την ικανότητα στα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.



Διάγραμμα 27. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β (εκτός των μεταβλητών URA6, UCM10, URM10)

Υπάρχουν και τρεις αλυσίδες συνεπαγωγών που συνδέουν μόνο στάσεις και πεποιθήσεις μεταξύ τους καθώς και τρεις αλυσίδες συνεπαγωγών που συνδέουν μόνο μεταβλητές του Δοκιμίου Β μεταξύ τους.

Παρατηρήσεις για το Γυμνάσιο

Η επεξεργασία του διαγράμματος ομοιότητας και του συνεπαγωγικού διαγράμματος μας έδειξε ότι στην Α Γυμνασίου **αρχίζουν να εμφανίζονται** συνδέσεις μεταξύ των στάσεων και των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος, με την ικανότητα ή μη, επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων και συνηθισμένων και ασυνήθιστων. Και οι συνδέσεις αυτές αφορούν σε μαθητές, και με υψηλό και με χαμηλό δείκτη αυτοεικόνας και αυτοεκτίμησης σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού με Α Γυμνασίου

Η συνδυασμένη επεξεργασία του ερωτηματολογίου Α και του δοκιμίου Β εμφάνισε διαφορές μεταξύ των μαθητών στις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης, αν και η έρευνα είχε ολοκληρωθεί στο μέσον της σχολικής χρονιάς.

Και στις δύο βαθμίδες τα διαγράμματα ομοιότητας αποκάλυψαν σύνδεση μεταξύ κυρίως στάσεων και πεποιθήσεων που υποδηλώνουν χαμηλό δείκτη αυτοεικόνας και αυτοεκτίμησης σε σχέση με την ικανότητα στα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος, και μεταβλητών του Δοκιμίου Β που δηλώνουν αποτυχία στην επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων.

Τα συνεπαγωγικά διαγράμματα όμως έδωσαν την δυνατότητα εξαγωγής διαφορετικών συμπερασμάτων μεταξύ των δύο βαθμίδων.

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα της ΣΤ Δημοτικού επιβεβαίωσε ότι η επιτυχία των παιδιών στα προβλήματα, συνηθισμένα ή ασυνήθιστα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν **ελάχιστα συνδέονται** με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος. Και αυτό ισχύει και για εκείνα που χρειάζεται γνώση ορθής διεξαγωγής αριθμητικής πράξης και για εκείνα που χρειάζεται μόνο χρήση κοινής λογικής (πρόβλημα 8).

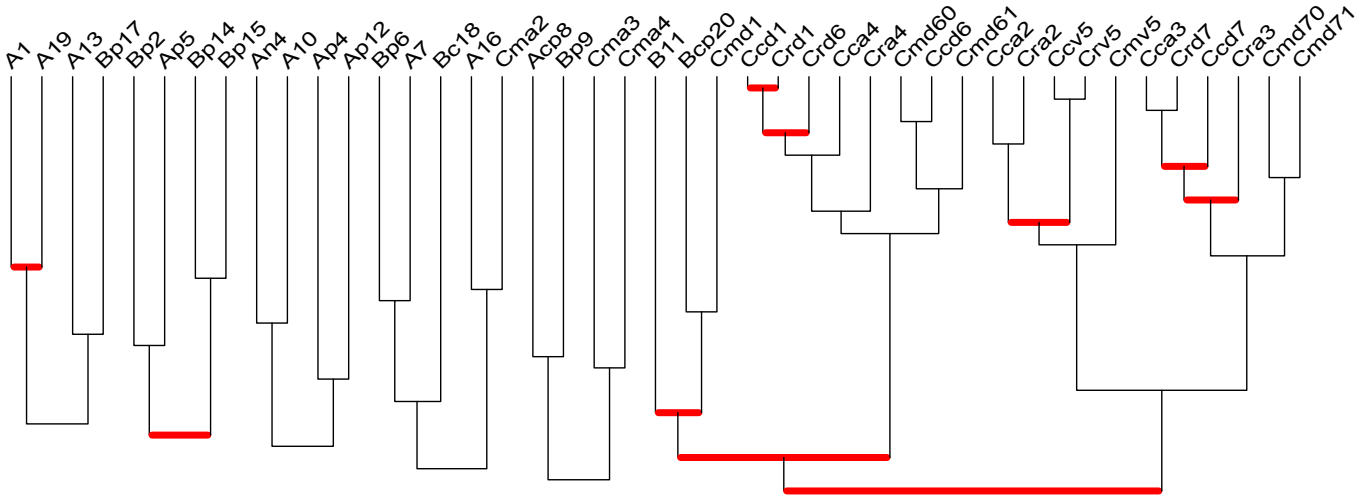
Το συνεπαγωγικό διάγραμμα όμως της Α Γυμνασίου έδωσε **συνεπαγωγές μεταξύ θετικών στάσεων και πεποιθήσεων για τα μαθηματικά και μεταβλητών που υποδηλώνουν κατανόηση και ορθή απάντηση ασυνήθιστων προβλημάτων και ορθή μοντελοποίηση και απάντηση συνηθισμένων προβλημάτων.**

4.6 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ (ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α) ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (ΔΟΚΙΜΙΟ Γ)

Επεξεργαστήκαμε το Ερωτηματολόγιο Α που αφορούσε σε στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος, σε συνδυασμό με το Δοκίμιο Γ που ζητούσε από τους μαθητές να απαντήσουν σε 7 ασυνήθιστα προβλήματα. Τα δοκίμια δόθηκαν στους μαθητές σε διάστημα επτά έως δέκα ημερών από την ημέρα που κλήθηκαν να απαντήσουν στο Ερωτηματολόγιο Α και το Δοκίμιο Β.
Το ζητούμενο ήταν να διαπιστωθεί αν όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού και της Α Γυμνασίου, η επιτυχία των παιδιών στα ασυνήθιστα προβλήματα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν συνδέονται με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος. Καθώς επίσης αν υφίστανται διαφορές ως προς το θέμα αυτό κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Ανάλυση του διαγράμματος ομοιότητας ΣΤ Δημοτικού

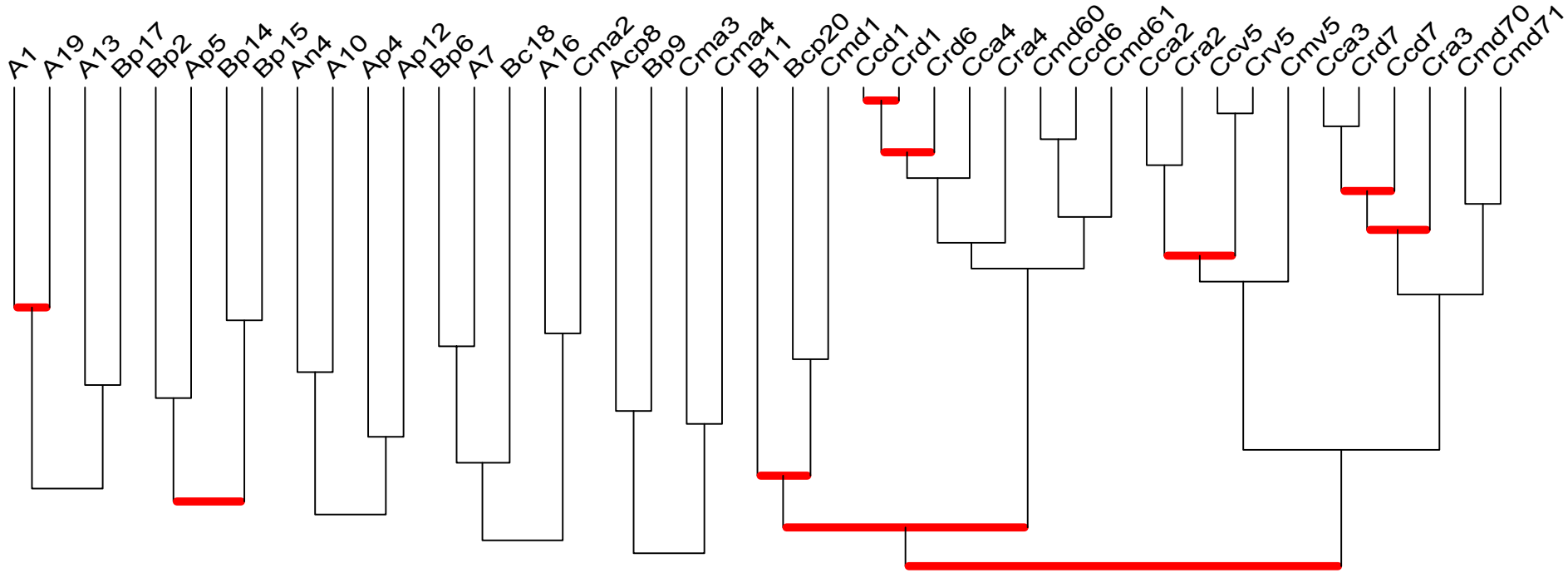
Στο διάγραμμα ομοιότητας με εντροπία (διάγραμμα 28) περιλαμβάνονται όλες οι μεταβλητές που εξετάστηκαν στο Ερωτηματολόγιο Α και το Δοκίμιο Γ.



Διάγραμμα 28. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ

Στο διάγραμμα εμφανίζονται έξι διακριτές ομάδες.
Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές του Ερωτηματολογίου Α διαχωρίζονται σε μεγάλο βαθμό από τις μεταβλητές του Δοκιμίου Γ. Σχηματίζονται έξι

ομάδες οι οποίες δεν συνδέονται μεταξύ τους. Στις τρεις από τις έξι ομάδες περιλαμβάνονται μόνο μεταβλητές του Ερωτηματολογίου Α.
Η πρώτη διακριτή ομάδα που σχηματίζεται, αποτελείται από στάσεις και πεποιθήσεις των μαθητών που δηλώνουν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα, θεωρούν ότι είναι καλοί στη λύση προβλήματος και δεν ξεχνούν εύκολα ότι μάθουν στα μαθηματικά (A1, A19, A13, Bp17).
Στη δεύτερη διακριτή ομάδα περιλαμβάνονται μεταβλητές που αναφέρονται στη λύση προβλήματος και τις πεποιθήσεις σχετικά με αυτήν (Bp2, Ap5, Bp14, Bp15). Συγκεκριμένα, τα παιδιά που πιστεύουν στη χρησιμότητα της λύσης προβλήματος και σε άλλα μαθήματα του σχολείου, όταν δυσκολεύονται σε ένα πρόβλημα επιμένουν μέχρι να βρουν τη λύση (δείκτης ομοιότητας 0,6699) πιστεύουν στη χρησιμότητα της λύσης προβλήματος για αυτούς τους ίδιους και προτιμούν τα ασυνήθιστα προβλήματα (δείκτης ομοιότητας 0,745594).
Κατ' επέκταση, υποδηλώνεται ότι τα παιδιά που έχουν θετική πεποίθηση για τη χρησιμότητα της λύσης προβλήματος γενικά, ίσως να έχουν μία ροπή προς τα ασυνήθιστα προβλήματα.
Η τρίτη ομάδα, αποτελείται από στάσεις και πεποιθήσεις αρνητικές για τα μαθηματικά συνδεδεμένες με εξωτερικά κίνητρα όπως ο καλός βαθμός. Από την ομαδοποίηση των μεταβλητών φαίνεται ότι τα παιδιά που δηλώνουν ότι βαριούνται τα μαθηματικά, χρειάζονται αρκετό χρόνο για να λύσουν τα προβλήματα (An4, A10 με δείκτη ομοιότητας 0,693215), τους ενδιαφέρει κυρίως ο καλός βαθμός και συνδέουν την απαρέσκεια προς τα μαθηματικά με την δυσκολία που αντιμετωπίζουν στο συγκεκριμένο μάθημα (Ap4, , Ap12 δείκτης ομοιότητας 0,528715). Στην τέταρτη ομάδα, υπάρχουν δύο υποομάδες.
Η πρώτη αποτελείται από στάσεις και πεποιθήσεις σχετικά με την χρησιμότητα των μαθηματικών αργότερα, τη χρήση μαθηματικών στο μελλοντικό επάγγελμα (Bp6, A7 δείκτης ομοιότητας 0,71161) καθώς και την πεποίθηση ότι ένα πρόβλημα μπορεί να μην μπορεί να λυθεί, (Bc18).Ο δείκτης ομοιότητας αυτής της πεποίθησης με τις προηγούμενες είναι 0,479811.
Η δεύτερη υποομάδα έχει την πρώτη σύνδεση μεταβλητής του Ερωτηματολογίου Α (*Θέλω να παίρνω καλούς βαθμούς στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσω τους γονείς μου*) με μεταβλητή του Δοκιμίου Γ (A16, Cma2, δείκτης ομοιότητας 0,744065). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αυτή η μεταβλητή είναι μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ασυνήθιστο πρόβλημα 2 στο οποίο η ορθή απάντηση προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη.



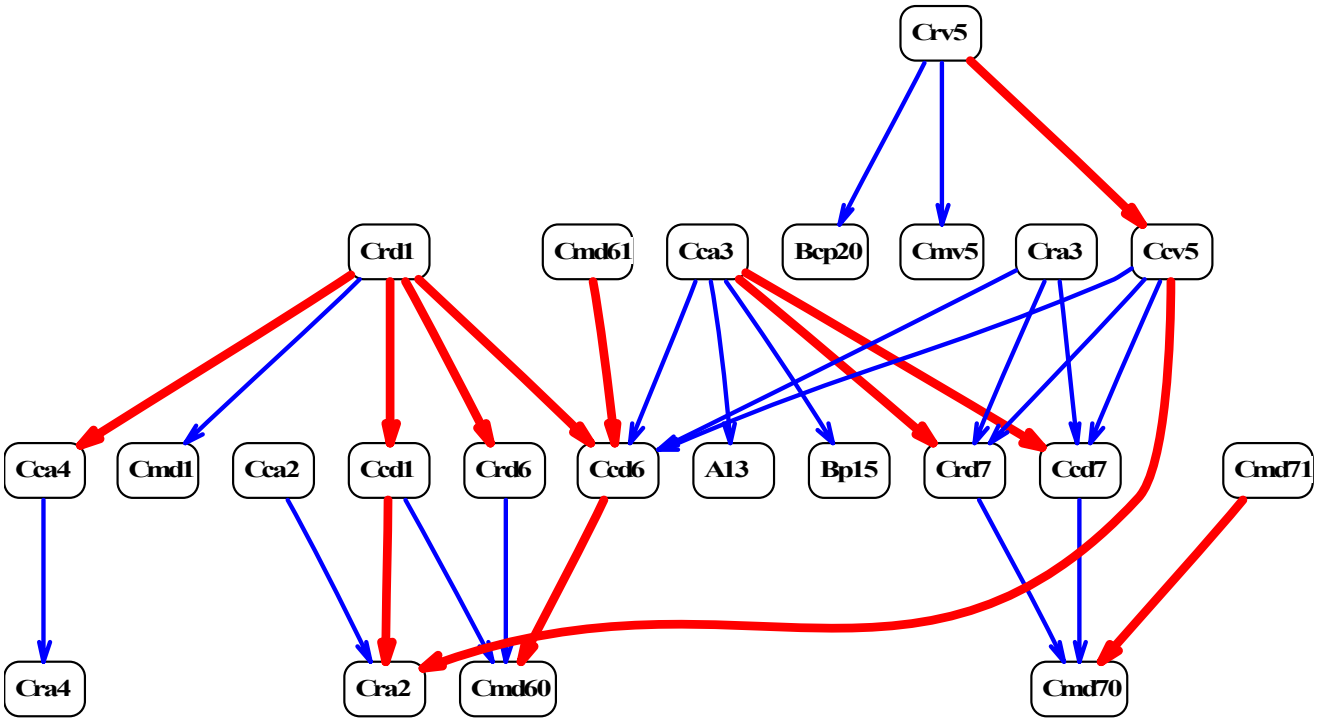
Διάγραμμα 28. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ(σε μεγέθυνση)

Το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου. **Εδώ λοιπόν υπάρχει σύνδεση ενός εξωτερικού κινήτρου με την υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου, με σημαντικό δείκτη ομοιότητας .**
Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται με πολύ μικρό δείκτη ομοιότητας (0,131047).
Στην πέμπτη ομάδα η διαδικασία μοντελοποίησης δύο ακόμη προβλημάτων συνδέεται επίσης με στάση και πεποίθηση που αφορά στη λύση προβλήματος. Η πεποίθηση για την κατανόηση των βασικών τρόπων επίλυσης προβλήματος συνδέεται με την χρήση λέξεων – κλειδιών για τη λύση προβλήματος (Acp8, Bp9 δείκτης ομοιότητας 0,64177) και αποτελούν την πρώτη υποομάδα αυτής της ομάδας.
Η δεύτερη υποομάδα αποτελείται από τις μοντελοποιήσεις πρόσθεσης των προβλημάτων 3 και 4 (Cma3, Cma4 δείκτης ομοιότητας 0,553778). Το πρόβλημα 4 είναι ψευδοαναλογικό και η ορθή απάντηση προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη. Το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.
Το πρόβλημα 3 επιδέχεται πολλαπλές λύσεις, αλλά η μοντελοποίηση αυτής της πρόσθεσης είναι απαραίτητη και για τους μαθητές που κατανοούν αυτό το πρόβλημα, και για εκείνους που δίνουν μόνο την προφανή απάντηση. Όμως από τους 87 μαθητές που έκαναν αυτή τη πρόσθεση μόνο οι 13 έδωσαν κάποια ένδειξη κατανόησης της δυνατότητας και άλλων λύσεων.
Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται με πολύ μικρό δείκτη ομοιότητας (0,113329), ώστε να μπορεί να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα αλλά ίσως εδώ να υπάρχει κάποια ένδειξη για σύνδεση με το Διδακτικό Συμβόλαιο.
Η έκτη ομάδα είναι και η πιο ενδιαφέρουσα μια και περιέχει όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές του Δοκιμίου Γ συνδεδεμένες με τις δηλώσεις περί πεποιθήσεων για την ικανότητα στα μαθηματικά , και τη δυνατότητα πολλαπλών λύσεων σε ένα πρόβλημα.
Η υποομάδα (B11, Bcp20, Cmd1) συνδέεται με την υποομάδα που περιέχει τις μεταβλητές κατανόησης και ορθής απάντησης των προβλημάτων 1, 4 και 6 καθώς και την μοντελοποίηση και ορθή διεξαγωγή της διαίρεσης στο πρόβλημα 6. Και οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται με την τελευταία υποομάδα, που περιέχει τις υπόλοιπες μεταβλητές του δοκιμίου , όπου υπάρχουν σαφείς και ισχυρές συνδέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές που δηλώνει ένδειξη κατανόησης και εκείνες που δηλώνουν σωστή απάντηση.
Πιο αναλυτικά, στην τελευταία ομάδα υπάρχουν 4 υποομάδες.
Στη πρώτη υποομάδα η πεποίθηση ότι *ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις* (Bcp20) συνδέεται με τη

μοντελοποίηση του προβλήματος 1 με δείκτη ομοιότητας 0,706895. Το ζεύγος αυτό συνδέεται με την πεποίθηση *Τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός/ή* (Β11) με δείκτη ομοιότητας 0,463467. Αυτή η υποομάδα συνδέεται με τη δεύτερη, με δείκτη ομοιότητας 0,167449.
Η δεύτερη υποομάδα περιέχει τις μεταβλητές κατανόησης και ορθής απάντησης των προβλημάτων 1, 4 και 6 του δοκιμίου Γ που συνδέονται μεταξύ τους με πολύ ισχυρούς δείκτες ομοιότητας (από 1 έως 0,826421).
Η τρίτη υποομάδα περιέχει τις μεταβλητές κατανόησης και ορθής απάντησης των προβλημάτων 2 και 5 με τις οποίες συνδέεται και η μοντελοποίηση του πέμπτου προβλήματος. Οι δείκτες ομοιότητας είναι πολύ ισχυροί. Η κατανόηση και ορθή απάντηση έχουν δείκτη ομοιότητας 1 για το πρόβλημα 5 και 0,993354 για το πρόβλημα 2, και συνδέονται μεταξύ τους με δείκτη ομοιότητας 0,918469.
Η τέταρτη υποομάδα περιέχει όλες τις μεταβλητές του προβλήματος 7 και την κατανόηση και ορθή απάντηση του προβλήματος 3. Και εδώ οι δείκτες ομοιότητας είναι πολύ ισχυροί: από 0,994908 έως 0,816105.
Η τρίτη με την τέταρτη υποομάδα συνδέονται με δείκτη ομοιότητας 0,528425. Όμως η σύνδεση μεταξύ του ζεύγους πρώτης-δεύτερης και του ζεύγους τρίτης-τέταρτης είναι πολύ ασθενής: 0,0763306.

Συνεπαγωγική ανάλυση ΣΤ Δημοτικού
Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 29) βλέπουμε, ότι οι συνεπαγωγές αφορούν κυρίως σε ζεύγη σχέσεων, με ελάχιστες εξαιρέσεις και αυτές αφορούν σε εμπλοκή τριών μεταβλητών. Τα προβλήματα 1, 3 και 5 παίζουν σημαντικό ρόλο. Όσοι δίνουν σωστή απάντηση στο πρόβλημα 1, το κατανοούν και δίνουν σωστή απάντηση και στο 2, κατανοούν και το 4, και δίνουν σωστή απάντηση και στο 6. Όποιος κατανοεί το 3 κατανοεί και το 6 και κατανοεί και δίνει σωστή απάντηση και στο 7. Όποιος δίνει σωστή απάντηση στο 5, το κατανοεί, και δίνει σωστή απάντηση στο 2.

Από το συνεπαγωγικό διάγραμμα προκύπτει σύνδεση ανάμεσα στη κατανόηση του προβλήματος 3 που είναι από τα δυσκολότερα, με τη δήλωση περί προτίμησης των μαθηματικών περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα, καθώς και με την δήλωση περί προτίμησης ασυνήθιστων προβλημάτων. Επίσης όσοι δίνουν σωστή απάντηση στο πρόβλημα 5, που είναι επίσης από εκείνα στα οποία οι μαθητές βρήκαν τις μεγαλύτερες δυσκολίες, έχουν ανταποκριθεί θετικά στη δήλωση περί ύπαρξης περισσότερων από μία σωστών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα.



Διάγραμμα 29. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών ΣΤ τάξης Δημοτικού στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ

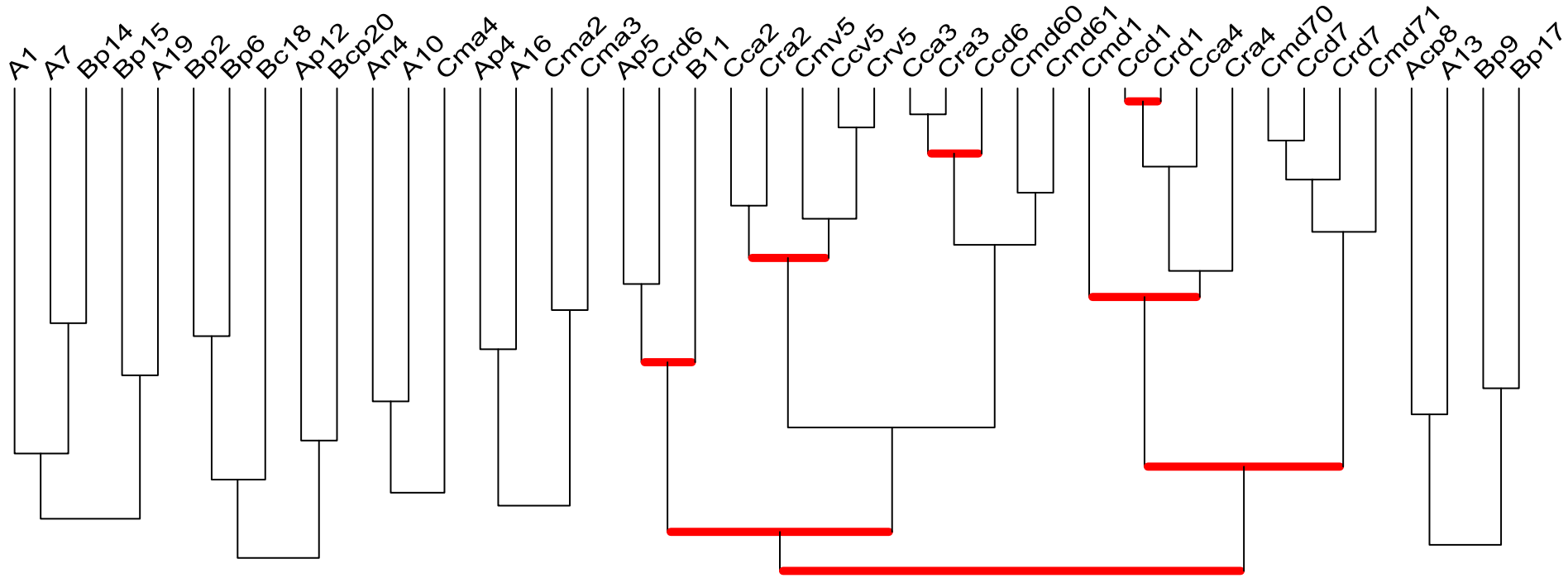
Αυτές είναι οι μόνες συνεπαγωγές που συνδέουν μεταβλητές του Δοκιμίου Γ με μεταβλητές του Ερωτηματολογίου Α.

Παρατηρήσεις για το Δημοτικό

Και από το διάγραμμα ομοιότητας και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα εξάγεται το γενικό συμπέρασμα ότι όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, η επιτυχία των παιδιών στα ασυνήθιστα προβλήματα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν **ελάχιστα συνδέονται** με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος. Υπάρχει όμως **σύνδεση εξωτερικού κινήτρου** όσο αφορά τα μαθηματικά, με την **υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου**. Υπάρχουν επίσης ενδείξεις ότι τα παιδιά με εξαιρετικά θετική στάση ως προς τα μαθηματικά και θετική προδιάθεση ως προς τα ασυνήθιστα προβλήματα ανταποκρίνονται καλύτερα σε αυτά.

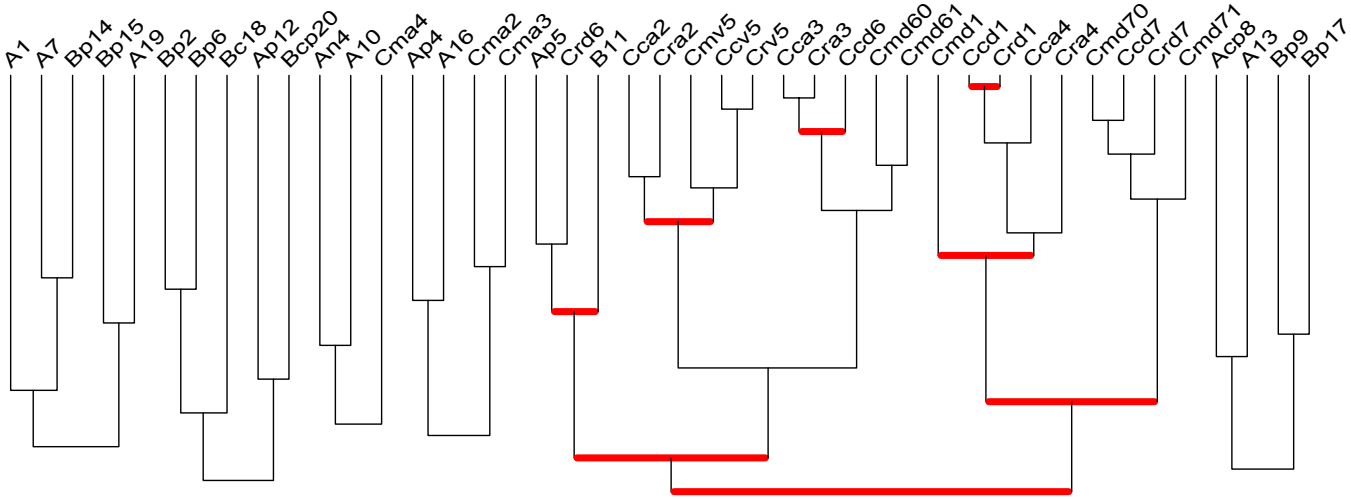
Ανάλυση των διαγραμμάτων ομοιότητας Α Γυμνασίου

Στο διάγραμμα ομοιότητας (διάγραμμα 30) υπάρχουν έξι διακριτές ομάδες.



Διάγραμμα 30. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ (σε μεγέθυνση)

Η πρώτη (A1, A7, Bp14, Bp15, A19) και η δεύτερη ομάδα (Bp2, Bp6, Bc18,Ap12 Bcp20) αποτελούνται από θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος.



Διάγραμμα 30. Διάγραμμα ομοιότητας του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ

Η τρίτη ομάδα (An4, A10, Cma4) περιέχει αρνητικές στάσεις για τα μαθηματικά (*Νομίζω ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά, Θα μου άρεσαν τα μαθηματικά περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα),* συνδεδεμένες αν και όχι ισχυρά (δείκτης ομοιότητας 0,335593), με την μοντελοποίηση πρόσθεσης στο ψευδοαναλογικό πρόβλημα 4. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ορθή απάντηση στο πρόβλημα 4 προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη. Το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.
Η τέταρτη ομάδα συνδέει τα εξωτερικά κίνητρα (*Αυτό που μου αρέσει περισσότερο σε ένα διαγώνισμα στη λύση προβλήματος είναι να παίρνω καλό βαθμό. Θέλω να παίρνω καλούς βαθμούς στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσω τους γονείς μου* δείκτης ομοιότητας 0,735502) με τις μοντελοποιήσεις πρόσθεσης των προβλημάτων 2 και 3. (Cma2, Cma3 δείκτης ομοιότητας 0,798867). Το πρόβλημα 2 είναι ψευδοαναλογικό και η ορθή απάντηση προκύπτει με τη λογική, χωρίς αριθμητική πράξη. Το να κάνει ένας μαθητής πρόσθεση σ' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι υπακούει στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.
Το πρόβλημα 3 επιδέχεται πολλαπλές λύσεις αλλά η μοντελοποίηση αυτής της πρόσθεσης είναι απαραίτητη και για τους μαθητές που κατανοούν αυτό το πρόβλημα, και για εκείνους που δίνουν μόνο την

προφανή απάντηση. Όμως από τους 87 μαθητές που έκαναν αυτή την πρόσθεση μόνο οι 12 έδωσαν κάποια ένδειξη κατανόησης της δυνατότητας και άλλων λύσεων.

Οι δύο αυτές υποομάδες συνδέονται με μικρό δείκτη ομοιότητας (0,27622), ώστε να μπορεί να εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα αλλά ίσως εδώ να υπάρχει κάποια ένδειξη για σύνδεση αρνητικών στάσεων με το Διδακτικό Συμβόλαιο.

Η πέμπτη ομάδα αποτελείται από 3 υποομάδες που περιέχουν όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές του δοκιμίου Γ.

Η πρώτη από αυτές τις υποομάδες συνδέει με πολύ ισχυρό δείκτη ομοιότητας 0,85989, την θετική για τα μαθηματικά στάση Ap5 (*Όταν δυσκολεύομαι σε ένα πρόβλημα επιμένω μέχρι να βρω λύση)* με την ορθή απάντηση του προβλήματος 6, που είναι πρόβλημα ερμηνείας του δεκαδικού πηλίκου. Αυτό το ζεύγος συνδέεται ισχυρά (δείκτης ομοιότητας 0,673649) με την επίσης θετική πεποίθηση *Τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός/ή.* Αυτή η υποομάδα συνδέεται, αν και με ασθενή τρόπο (δείκτης ομοιότητας 0,177483) με τη δεύτερη υποομάδα που περιέχουν την ορθή απάντηση και κατανόηση των προβλημάτων 2 και 3 καθώς και την μοντελοποίηση, κατανόηση και ορθή απάντηση των προβλημάτων 5 και 6.

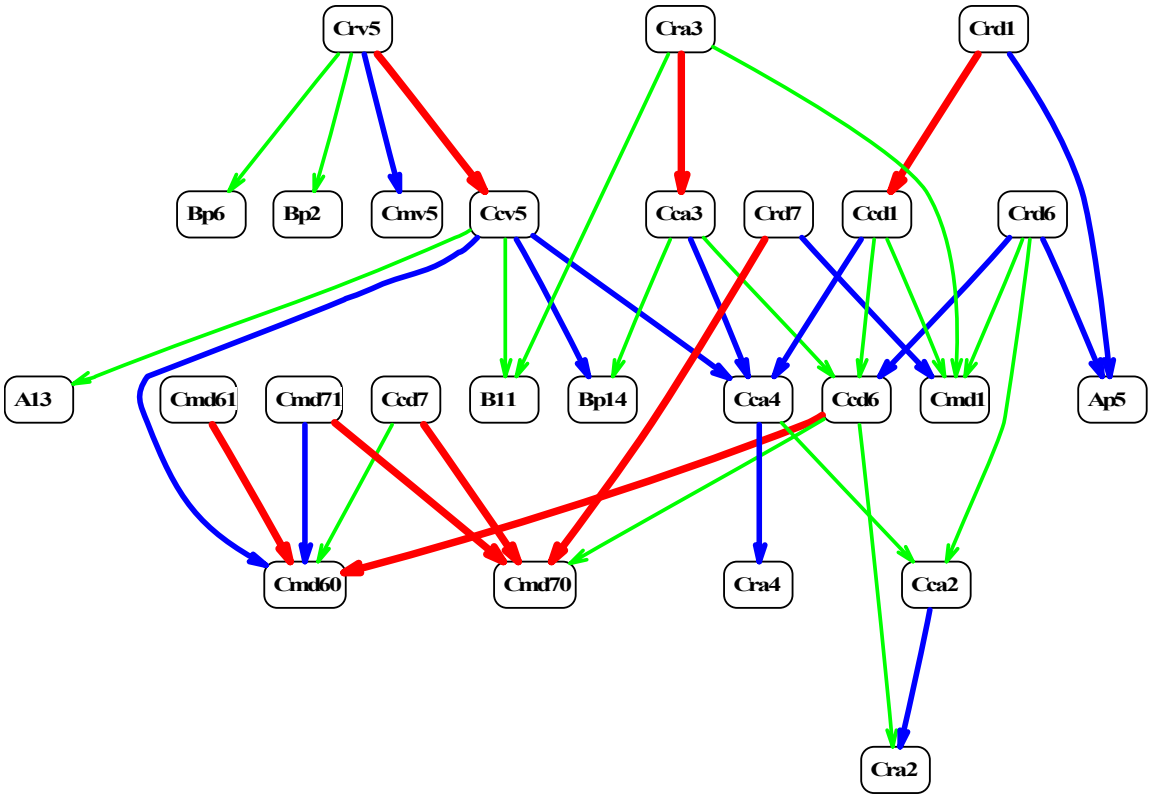
Η τρίτη υποομάδα περιέχει την κατανόηση και ορθή απάντηση του προβλήματος 4 και τη μοντελοποίηση, κατανόηση και ορθή απάντηση των προβλημάτων 1 και 7.

Η τελευταία ομάδα του διαγράμματος ομοιότητας συνδυάζει πεποιθήσεις που δείχνουν υψηλό δείκτη αυτοπεποίθησης σχετικά με τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος με τη χρήση λέξεων-κλειδιών.

Συνεπαγωγική ανάλυση Α Γυμνασίου

Στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (διάγραμμα 31) οι συνεπαγωγές αφορούν κυρίως σε ζεύγη σχέσεων, με ελάχιστες εξαιρέσεις και αυτές αφορούν σε εμπλοκή τριών μεταβλητών. Τα ζεύγη σωστής απάντησης- κατανόησης υπάρχουν για τα προβλήματα 1,3,5,6 ενώ τα αντίστροφα ζεύγη υπάρχουν για τα προβλήματα 2 και 4. Υπενθυμίζουμε ότι επειδή αυτά τα προβλήματα λύνονται χωρίς πράξη, με τη χρήση μόνο κοινής λογικής, κάποιοι μαθητές θεώρησαν την απάντηση αυτονόητη, και δεν τη δικαιολόγησαν, γι' αυτό και προκύπτει η αντιστροφή των ζευγών. Οι λιγοστές αλυσίδες δηλώνουν ότι όποιος έχει δώσει ορθή απάντηση στο 1, το κατανοεί, και ή κατανοεί το 6 και δίνει ορθή απάντηση στο 2 ή κατανοεί και δίνει ορθή απάντηση στο 4. Επίσης υπάρχουν ζεύγη που συνδέουν κατανόηση κάποιου προβλήματος με μοντελοποίηση του ίδιου προβλήματος (7) ή άλλου προβλήματος (κατανόηση 5 ή 7 και μοντελοποίηση 6).

Πολύ ενδιαφέρουσες είναι οι συνεπαγωγές που συνδέουν μεταβλητή του Δοκιμίου Γ με μεταβλητή του Ερωτηματολογίου Α (με αυτή τη φορά). Υπάρχουν 6 ζεύγη ή αλυσίδες τέτοιων συνεπαγωγών.



Διάγραμμα 31. Συνεπαγωγικό διάγραμμα του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών Α τάξης Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ

Κάποιοι από αυτούς που έχουν δώσει σωστή απάντηση στο 5 έχουν δηλώσει *ότι η ικανότητα να λύνουν μαθηματικά προβλήματα είναι χρήσιμη και σε άλλα μαθήματα του σχολείου, ή ότι θα τους είναι χρήσιμη και αργότερα.* Κάποιοι από αυτούς που έχουν δώσει ορθή απάντηση στο 3 πιστεύουν ότι *τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είναι δυνατοί/ές.* Αν κατανοούν επιπλέον το 3 πιστεύουν πως *είναι χρήσιμο για αυτούς τους ίδιους να μάθουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα.* Κάποιοι από αυτούς που έχουν δώσει ορθή απάντηση στο 5 και κατανοούν το 5 πιστεύουν ότι *τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είναι δυνατοί/ές* ή ότι *είναι χρήσιμο για αυτούς τους ίδιους να μάθουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα,* και έχουν δηλώσει ότι *δεν ξεχνούν εύκολα ότι μαθαίνουν στα μαθηματικά.*

Τέλος κάποιοι από αυτούς που έχουν ποιος έχει δώσει σωστή απάντηση στο 1 έχουν δηλώσει ότι *όταν δυσκολεύονται σε ένα πρόβλημα επιμένουν μέχρι να βρουν λύση*.
Υπενθυμίζουμε ότι τα προβλήματα 1, 3, 5 είναι εκείνα στα οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν ισχυρές δυσκολίες να ξεπεράσουν τους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.

Παρατηρήσεις για το Γυμνάσιο
Και από το διάγραμμα ομοιότητας και από το συνεπαγωγικό διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει σαφής σύνδεση ανάμεσα σε θετικές στάσεις και πεποιθήσεις και την κατανόηση και επιτυχία σε ασυνήθιστα προβλήματα.
Επιβεβαιώνεται και το Γυμνάσιο η σύνδεση εξωτερικών κινήτρων ως προς τα μαθηματικά με την υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.
Υπάρχουν επίσης ενδείξεις για την σύνδεση αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων με το Διδακτικό Συμβόλαιο.

Σύγκριση ΣΤ Δημοτικού με Α Γυμνασίου
Από την επεξεργασία του Ερωτηματολογίου Α σε συνδυασμό με το Δοκίμιο Γ φαίνεται να υπάρχει σαφείς ενδείξεις σύνδεσης των θετικών στάσεων και πεποιθήσεων ως προς τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος με την κατανόηση και την επιτυχία των ασυνήθιστων προβλημάτων στους μαθητές της Α Γυμνασίου, ενώ φαίνεται να υπάρχουν λιγότερο σαφείς ενδείξεις για κάτι τέτοιο στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού. Υπάρχουν επίσης ενδείξεις, όχι τόσο ισχυρές όσο οι προηγούμενες, για την σύνδεση αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων με το Διδακτικό Συμβόλαιο κατά την μετάβαση στο Γυμνάσιο.
Για να επιβεβαιωθούν ή όχι αυτές οι ενδείξεις ασφαλώς χρειάζεται μια περισσότερο εκτεταμένη έρευνα που θα περιλαμβάνει και ποιοτικά εργαλεία.
Και στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο είναι σαφής η σύνδεση εξωτερικών κινήτρων ως προς τα μαθηματικά με την υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η επεξεργασία του Ερωτηματολογίου Α έδειξε, ότι τόσο οι μαθητές του Δημοτικού όσο και οι μαθητές του Γυμνασίου έχουν αρκετά θετικές στάσεις και πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Οπωσδήποτε όμως το ποσοστό των μαθητών που δηλώνει ισχυρή προτίμηση στα μαθηματικά

έχει μειωθεί αρκετά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο (από 65% σε 51%).

Η επιρροή των εξωτερικών κινήτρων φάνηκε να είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τους μαθητές του Δημοτικού όσο και για τους μαθητές του Γυμνασίου.

Οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου για τη χρησιμότητα των μαθηματικών είναι πολύ δυνατές. Γενικά όμως, φαίνεται να εκφράζονται με πιο έντονο τρόπο στο Γυμνάσιο. Η ύπαρξη του Διδακτικού Συμβολαίου ήταν επίσης πιο έντονη στους μαθητές του Γυμνασίου.

Οι μαθητές του Γυμνασίου που δηλώνουν ότι αγαπούν τα μαθηματικά φαίνεται να αναγνωρίζουν την αξία και χρησιμότητα της λύσης προβλήματος για τον ίδιο τους τον εαυτό. Ενώ στους μαθητές του Δημοτικού δεν υπάρχουν αντίστοιχες συνεπαγωγές που να συνδέουν την προτίμηση στα μαθηματικά με την χρησιμότητά τους.

Οι αρνητικές στάσεις για τα μαθηματικά σχετίζονται στη περίπτωση των μαθητών του Δημοτικού με τα εξωτερικά κίνητρα. Η συνεπαγωγή αυτή δεν υπάρχει στην περίπτωση των μαθητών του Γυμνασίου.

Το σημαντικότερο εύρημα της επεξεργασίας του Ερωτηματολογίου Α ήταν η αρνητική μεταβολή των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος καθώς και η ενίσχυση της επιρροής του Διδακτικού Συμβολαίου, κατά την πορεία τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Με τη μετάβαση στο Γυμνάσιο εμφανίζονται τα πρώτα ίχνη ανησυχίας και φόβου για τα μαθηματικά και η επιρροή του Διδακτικού Συμβολαίου καθίσταται ισχυρότερη.

5.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η σύγκριση των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών, μεταξύ συνηθισμένων και ασυνήθιστων προβλημάτων του Δοκιμίου Β, αλλά και η «ανάγνωση» των ποσοστών που υποδεικνύουν **οποιαδήποτε ένδειξη κατανόησης** από την πλευρά των μαθητών για τον τρόπο αντιμετώπισης των ασυνήθιστων προβλημάτων του ίδιου δοκιμίου, αποδεικνύει ότι οι μαθητές ανταποκρίνονται με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία στα συνηθισμένα προβλήματα από ό,τι στα ασυνήθιστα. Συνεπώς, παρατηρούμε ισχυρή την παρουσία του Διδακτικού Συμβολαίου και στις δύο βαθμίδες. Σημαντική ήταν η διαπίστωση, ότι όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, η καλή γνώση της διαίρεσης, δεν είναι αρκετή για να επέλθει η ρήξη με το Διδακτικό Συμβόλαιο και να δοθεί ορθή απάντηση.

Παρατηρείται μια μείωση των μαθητών που απάντησαν επιτυχώς σε κάθε μεταβλητή και των συνηθισμένων και των ασυνήθιστων προβλημάτων, κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.
Και στις δύο βαθμίδες, όπως είναι φυσιολογικό, η μοντελοποίηση και ορθή απάντηση στα συνηθισμένα συνδέονται στενά, όπως και η κατανόηση και ορθή απάντηση στα ασυνήθιστα.

5.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ - ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Η παρέμβαση και στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο κρίνεται ότι έδωσε ενδείξεις επιτυχίας, μια και συνετέλεσε και στις δύο βαθμίδες, στην αύξηση του ποσοστού κατανόησης και ορθής απάντησης ασυνήθιστων προβλημάτων. Όπως επίσης, και γιατί ο αριθμός των μαθητών που αντιμετώπισε επιτυχώς τα ασυνήθιστα προβλήματα του Δοκιμίου Γ, των οποίων το είδος είχε συζητηθεί κατά την διάρκεια της παρέμβασης, ήταν σημαντικά μεγαλύτερος, από τον αριθμό των μαθητών που απάντησε επιτυχώς σε ασυνήθιστα προβλήματα, για των οποίων το είδος, δεν είχε συζητηθεί ανάλογο παράδειγμα, κατά την διάρκεια της παρέμβασης.
Γενικά, τα ασυνήθιστα προβλήματα που συναντώνται για πρώτη φορά έχουν μεγάλη αποτυχία, σε αντίθεση με αυτά που είναι παρόμοια με τα παραδείγματα ή τα έχουν αντιμετωπίσει ξανά.
Αυτό γεννά βάσιμες ελπίδες για τον επιτυχή τρόπο αντιμετώπισης των ασυνήθιστων προβλημάτων από τους μαθητές, αν αυτά ενταχθούν με ουσιαστικό τρόπο στα σχολικά βιβλία και την σχολική καθημερινή πραγματικότητα.
Άρα η παρέμβαση έχει μια τοπικού χαρακτήρα επιτυχία, ενώ δεν παρατηρείται το φαινόμενο της μεταφοράς μάθησης σε άλλης μορφής ασυνήθιστα προβλήματα.
Με βάση τη παραπάνω παρατήρηση, θα ήταν ενδιαφέρον, τα ίδια αυτά παιδιά να δοκιμάσουν τις δυνάμεις τους σε ανάλογο δοκίμιο με το Δοκίμιο Γ μετά από 6 μήνες για να διαπιστωθεί αν η τοπική επιτυχία της παρέμβασης έχει μόνιμο ή παροδικό χαρακτήρα.
Με τη παρέμβαση μας επιβεβαιώνονται και όλες οι άλλες παρεμβάσεις που έχουν δείξει το δύσκολο της αλλαγής της μη ρεαλιστικής συμπεριφοράς των μαθητών.
Άξιο προσοχής είναι, ότι από την επεξεργασία του Δοκιμίου Γ διαπιστώθηκε σημαντική μείωση του ποσοστού κατανόησης και ορθής απάντησης σε ένα συγκεκριμένο τύπο ασυνήθιστων προβλημάτων, κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Θα ήταν ενδιαφέρον το θέμα να ερευνηθεί περαιτέρω, μια και στασιμότητα ή μείωση της επίδοσης των μαθητών διαπιστώθηκε σε τρεις διαφορετικές έννοιες ή τομείς των μαθηματικών και σε έρευνα στην Κύπρο (Γαγάτσης, 2007).

5.4 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Από την επεξεργασία του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β, εξάγεται το γενικό συμπέρασμα, ότι όσο αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, η επιτυχία των παιδιών στα προβλήματα, τυπικά ή ασυνήθιστα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν **ελάχιστα συνδέονται** με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.

Υπάρχει όμως **σύνδεση εξωτερικού κινήτρου** όσο αφορά τα μαθηματικά, με την **υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου**. Υπάρχουν επίσης ενδείξεις ότι τα παιδιά με εξαιρετικά θετική στάση ως προς τα μαθηματικά και θετική προδιάθεση ως προς τα ασυνήθιστα προβλήματα ανταποκρίνονται καλύτερα σε αυτά.

Όσο αφορά στους μαθητές του Γυμνασίου, η επεξεργασία του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Β, μας έδειξε ότι στην Α Γυμνασίου, **αρχίζουν να εμφανίζονται** συνδέσεις μεταξύ των στάσεων και των πεποιθήσεων των μαθητών για τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος, με την ικανότητα ή μη, επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων και συνηθισμένων και ασυνήθιστων. Και οι συνδέσεις αυτές αφορούν σε μαθητές, με υψηλό και με χαμηλό δείκτη αυτοεικόνας και αυτοεκτίμησης σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.

5.5 ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΥΝΗΘΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Από την επεξεργασία του συνδυασμού των απαντήσεων των μαθητών στο Ερωτηματολόγιο Α και στο Δοκίμιο Γ, όσον αφορά στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού, επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου. Δηλαδή ότι, η επιτυχία των παιδιών στα ασυνήθιστα προβλήματα, η κατανόησή τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα μοντελοποιούν **ελάχιστα συνδέονται** με τις στάσεις και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλήματος.

Επιβεβαιώνεται και η ύπαρξη **σύνδεσης εξωτερικού κινήτρου** όσο αφορά τα μαθηματικά, με την **υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου**. Επιβεβαιώνονται επίσης και οι ενδείξεις, ότι οι μαθητές της ΣΤ Δημοτικού που έχουν εξαιρετικά θετική στάση ως προς τα μαθηματικά και θετική προδιάθεση ως προς τα ασυνήθιστα προβλήματα, ανταποκρίνονται καλύτερα σε αυτά.

Επιβεβαιώνεται και το Γυμνάσιο η **σύνδεση εξωτερικών κινήτρων ως προς τα μαθηματικά με την υπακοή στους κανόνες του Διδακτικού Συμβολαίου.**
Από την επεξεργασία του ερωτηματολογίου Α σε συνδυασμό με το δοκίμιο Γ φαίνεται να υπάρχει σαφείς ενδείξεις σύνδεσης των θετικών στάσεων και πεποιθήσεων ως προς τα μαθηματικά και τη λύση προβλήματος με την κατανόηση και την επιτυχία των ασυνήθιστων προβλημάτων στους μαθητές της Α Γυμνασίου, ενώ φαίνεται να υπάρχουν λιγότερο σαφείς ενδείξεις για κάτι τέτοιο στους μαθητές της ΣΤ Δημοτικού. Υπάρχουν επίσης ενδείξεις, όχι τόσο ισχυρές όσο οι προηγούμενες, για την σύνδεση αρνητικών στάσεων και πεποιθήσεων με το Διδακτικό Συμβόλαιο κατά την μετάβαση στο Γυμνάσιο.
Όλα αυτά βεβαίως, μένει να επιβεβαιωθούν και με ποιοτικά ερευνητικά εργαλεία, και με έρευνες όπου το δείγμα θα ήταν μεγαλύτερο και περισσότερο αντιπροσωπευτικό.

6. ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Ένα τελικό θέμα που πρέπει να εξεταστεί είναι το κατά πόσο η διδασκαλία και η μάθηση μαθηματικών εφαρμογών, σύμφωνα με την οπτική της μοντελοποίησης, είναι απαραίτητο και εφικτό να αφορά όλους τους μαθητές. Διότι δεδομένων των πολλών φάσεων και του πολυδιάστατου που χαρακτηρίζει τη διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης, συχνά αντιμετωπίζεται σαν δραστηριότητα που είναι στις δυνατότητες των μεγαλύτερων και πιο ικανών μαθητών. Είδαμε όμως προηγουμένως, μέσω των διδακτικών πειραμάτων που αναφέρθηκαν, ότι « η διδασκαλία και η μάθηση μαθηματικών εφαρμογών, σύμφωνα με την οπτική της μοντελοποίησης, μπορεί να έχει ουσιαστικά αποτελέσματα, αλλά είναι επίσης δυνατό να ξεκινήσει κανείς την εφαρμογή της σε όλους τους μαθητές και από πολύ μικρή ηλικία » (Verschaffel, 2002).
Κυρίως όμως, σύμφωνα με τους Mukhopadhyay and Greer (2001), η εμπλοκή όλων των μαθητών είναι αναγκαία, τόσο για την ενδυνάμωση του ατόμου, όσο και για την καλυτέρευση της κοινωνίας. Διότι έτσι είναι δυνατό να βοηθηθούν όσο περισσότεροι άνθρωποι είναι εφικτό, ώστε να αποκτήσουν κριτική σκέψη και να μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά σαν εργαλείο ανάλυσης κοινωνικών και πολιτικών ζητημάτων, σημαντικών για τη προσωπική τους ζωή και για ολόκληρη την κοινωνία.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Γαγάτσης,Α, (2007).*Προβλήματα Μάθησης των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο*, Λευκωσία 2007.

Γαγάτσης, Α.,et al.(2006*). Διδακτικό συμβόλαιο και μάθηση των μαθηματικών*. Στο Α.Γαγάτσης (εκ.), *«Σύγχρονη Έρευνα στη Μαθηματική Παιδεία»* (σ.173-187), Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., & Μάρκου, Α., (2004). *Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση μη ρεαλιστικών προβλημάτων*. Στο Α.Γαγάτσης.(εκ.), *Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σ.125-138), Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α.,& Μοδέστου, Μ.,(2004). *Αναλογία ή Ψευδοαναλογία; Δυσκολίες μαθητών Γυμνασίου στην αναγνώριση τους*. Στο Α.Γαγάτσης (εκ), *Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σ.139-158)), Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Παλαίχωρου, Χ., & Χαραλάμπους, Χ. (2002). Στοχεύοντας στη ρήξη του διδακτικού συμβολαίου: Τα αποτελέσματα δύο παρεμβάσεων. Στο Α. Γαγάτσης, & Γ. Μακρίδης (Εκδ.), *Πρακτικά του Πέμπτου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Β' Συμποσίου Αστροναυτικής και Διαστήματος* (σσ. 383–398). Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Γαγάτσης, Α.,(1992). *Έννοιες και μέθοδοι της διδακτικής των μαθηματικών – Σχέσεις μεταξύ ιστορίας και διδακτικής των μαθηματικών.* Στο Α. Γαγάτσης(Εκ.), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη ERASMUS.

Θεοδούλου, Α., et al.(2003). *Η κυριαρχία του αναλογικού μοντέλου στην επίλυση μη αναλογικών γεωμετρικών προβλημάτων*. Στο Α.Γαγάτσης & Ι.Ηλία (επ), *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών* τόμος ΙΙ, (σ.215-232), Λευκωσία.

Μοδέστου, Μ., & Γαγάτσης, Α. (2004). *Αναλογία ή ψευδοαναλογία: Ένα διαχρονικό πρόβλημα από το «Μένωνα» του Πλάτωνα μέχρι τους σημερινούς μαθητές.* Στο Α. Γαγάτσης, Α. Ευαγγελίδου, Ι. Ηλία & Π. Σπύρου (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και Γεωμετρία, Τόμος 2: Γεωμετρία* (σσ. 141-162). Λευκωσία: Intercollege Press.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2001). *Κείμενα Παιδείας: Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός.

Baldiseri, F., D'Amore, B., et al (1994). Τα μπαλόνια της Γκρέτα. Στο Α. Γαγάτσης(Εκ.), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη ERASMUS.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: W.H. Freeman.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2. Rennes :* Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

Blum, W., & Niss, M., (1991). *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends, and issuesin mathematics education*. Educational Studies in Mathematics, 22, pp.37-68.

Bong, M., & Skaalvik, E. M. (2003). *Academic self-concept and self-efficacy: How different are they really?* Educational Psychology Review, 15(1), pp.1-140.

Bonotto, C.,(2003). *Suspension of sense-making in mathematical word problem solving: A possible remedy.* Proceedings of the 2 International Conference on the Teaching of Mathematics, Crete, Greece: Wiley &Sons Publishers.

Brousseau, G.,(1984).*Le contract didactique :le milieu*, Recherches en Didactique de Mathematiques, 9. pp.308-336.

Brousseau, G., (1990). *Le contrat didactique: le milieu*. *Recherches en Didactique de la Mathématique* **9**, pp. 308–336.

Burkhart, H., (1994). *Mathematical applications in school curriculum*. In T. Husen & T. N. Postlethwaite (Eds.), The international encyclopedia of education (2nd ed.) (pp.3621-3624). Oxford/ New York: Pergamon Press.

Carraher, T. N., Carraher, D. W.,& Schliemann,A. D. (1985). *Mathematics in streets and schools*. British Journal of Developmental Psychology, 3, pp.21-29.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). *The Jasper project: Lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, R. B.,(1989). *The Culture of mathematics and the culture of schools.* Journal of Mathematics Behavior, 8, pp.143-160.
.
D'Amore, B. & Sandri, P. (1994a). Μια κατάταξη των προβλημάτων που θεωρούνται αδύνατα. Στο Α. Γαγάτσης(Εκ.), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη ERASMUS

D'Amore, B. &Martini, B. (1999). *The Didactic Contract, mental models and intuitive models in the resolution of stanrad scholastic problems* . Στο A. Gagatsis (επ.) " A multidimentional approach to learning in Mathematics and Sciences", Intercollege Press, Cyprus.

D'Amore B. (1997).*Matite-Orettole-Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problem influenzano davvero la risolutione ?* L'insecnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A, 3, pp.241-256

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (1999). *Aspects of affect: mathematical intimacy, mathematical integrity.* In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the PME23* Vol. II (pp. 249- 256). Haifa: Technion.

De Corte, E., Verschaffel, L.,&Greer, B., *Connecting mathematics problem solving to the real world.*

Elia, I., & Gagatsis, A.,(2002). *Matching unusual Word Problems with given answers*, Proceedings of the international conference "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education. Palermo, Italy.

Eco, U., (1994). *Six Walks in the Fictional Woods*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Freudental, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Galbraith P., & Stillman G.(2001). *Assumptions and context. Pursuing their role in modelling activity. Modelling and mathematics education.* ICTMA 9 (pp.300-310)

Goldin, G.A. (1998*). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics*. Journal of Mathematical Behavior, *17*(2), pp.137-165.

Gras, R., Peter, P., Briand, H., & Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Greer, B.(1993). *The Modelling Perspective on Wor(l)d Problems*. Journal of Mathematical Behavior, 12, pp.239-250.

Greer, B. (1997). *Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems.* Learning and Instruction, 7, pp.293-307.

Hackett, G., & Betz, N.E. (1989). *An exploration of the mathematics self-efficacy/mathematics performance correspondence*. Journal for Research in Mathematics Education, 20, pp.261-273.

Hart, L. E., & Walker, J. (1993). *The role of affect in teaching and learning mathematics*. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, (pp.22-38). New York: Macmillan-NCTM.

Henry, M., *Η Διδακτική των Μαθηματικών* . Π. Σπύρου (επ) Ενδοπανεπιστημιακή έκδοση Παν. Αθηνών (2006).

Husen, T. (1967). *International study of achievement in mathematics*, Vol. 1, New York: Wiley.

Karageorgos, D., Barkatsas, A, Gialamas, B.,&Kasimatis K.: *Students Mathematics Performance and their attitude toward the learning of Mathematics: An attempt to explore their relationship*, Nordic Studies in Mathematics Education.

Klassen, R. M. (2004). Optimism and realism: *A review of self-efficacy from a cross-cultural perspective.* International Journal of Psychology, 39(3), pp.205-230.

Lerch, C.M.,(2004*):Control decisions and personal beliefs, their effect on mathematical problems*. Journal of mathematical behavior.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et Analyse Ordinale des Données.* Paris: Dunod.

Mason, J., (2001). *Modelling modelling: Where is the center of gravity of-for-when teaching modelling?* In J. F. Matos, W. Blum, S.K. Houston, &S.P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education*. ICTMA 9: Applications in science and technology (pp. 39-61). Chichester, U.K.: Horwood.

Mason, L. &Scrivani L., (2004). *Enhancing students' mathematical beliefs: an intervention study.* Learning and Instruction, v.14, n2, pp(153-176), Apr.2004.

McLeod,D.(1989). *Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education*. In D.McLeod and V. Adams (eds.), Affect and Mathematical Problem Solving (pp 245-258).Springer Verlag.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 39-48), (pp. 575-596). New York: Macmillan.

Mukhopadhyay, S., & Greer, B., (2001). *Modelling with purpose: Mathematics as a critical tool.* In B. Atweh (Eds.), *Socio-cultural aspects in mathematics education* (pp.295-311). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Nicolaou, A., & Philippou, G*,: Efficacy Beliefs, Problem Posing, and Mathematical Achievement.*

Pajares, F. (1992). *Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct*. Review of Educational Research, 62(3),pp. 307-332.

Pajares, F. (1996a). *Self-efficacy beliefs in academic settings*. Review of Educational Research, 66, pp.543-578.

Pajares, F. (1996b). *Self-efficacy beliefs and mathematical problem solving of gifted students*. Contemporary Educational Psychology, 21, pp.325-344.
Pajares, F., & Graham, L. (1999). *Self-Efficacy, Motivation Constructs, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students*. Contemporary Educational Psychology, 24, pp.124-139.

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). *Self – Efficacy Beliefs and General Mental Ability in Mathematical Problem – Solving*. Contemporary Educational Psychology, *20*, pp.426 – 443.

Pajares, F., & Miller, M.D. (1994). *Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving*. Journal of Educational Psychology, 86, pp.193 - 203.

Pajares, F., & Miller, M.D. (1995). *Mathematics self-efficacy and mathematics outcomes: The need of specificity of assessment*. Journal of Counseling Psychology, 42, pp.190 – 198.

Pehkonen, E. (2001). *A Hidden Regulating Factor in Mathematics Classrooms: Mathematics-Related Beliefs*. In M. Ahtee, O. Bjockqvist, E.

Pehkonen, & V. Vatanen (Eds.), *Research on Mathematics and Science Education* (pp. 11-35). Institute for Educational Research. University of Jyvaskyla.

Philippou, G.,& Christou, C., (2002):|*A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teachers*.

Pintrich, P.R. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research*, *33*, pp.459 – 470.

Pintrich, P.R. & Schunk, D. (1996). *Motivation in education: Theory, research, and applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Schoenfeld, A.H. (1982). *Sex, grade level, and the relationship between mathematics attitude and achievement in children*. Journal of Educational Psychology, 75(5), pp.280-284.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press, Inc.

Schunk, D. (1991). *Self-efficacy and academic motivation*. Educational Psychologist, 26, pp.207 – 231.

Thompson, A.G., & Thompson, P.W. (1989). *Affect and problem solving in an elementary school mathematics classroom*. In D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 162-176). New York: Springer-Verlag.

Thomson, A.G.,(1989*). Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers Conceptions and Beliefs*

Treffers, A.,& de Moor, E,.(1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisscool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen. (Towards a national mathematics curriculum for the elementary school. Part 2. Basic skills and written computation)*. Tilburg: Zwijssen.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S., (1994). *Realistic considarations in mathematical modeling of school Arithmetic word problems.* Learning and Instruction. 4. pp.273-294.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E., 2000. *Making sense of word problems*, Sweits & Zeitlinger, Lisse, The Netherlands.

Verschaffel, L., (2002). *Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level : Promises and pitfalls*. Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Norwich, England, July 21-26, 2002)

Wyndhamn, J., & Saljo, R., (1997). *Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities*. Learning and Instruction. Vol. 7, No. 4. pp.361-382.

Yackel, E., & Cobb, P.,(1996), *Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy*. Journal for Research in Mathematics Education, 27 (4), pp.458-477.

Yoshida, H., Verschafell, L., & De Corte, E.(1997). *Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties?* Learning and Instruction, 7, pp.329-338.

Zimmerman, B.J. (2000). Self-Efficacy: An Essential Motive to Learn. *Contemporary Educational Psychology, 25*, pp.82-91.

Zimmerman, B.J., Bandura, A., & Martinez - Pons, M. (1992). Self-motivation for academic attainment: *The role of self-efficacy beliefs and personal goal setting.* American Educational Research Journal, 29, pp.663-676.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΟΚΙΜΙΟ Β

Όνομα:……..Τάξη:……..
Σχολείο:…….

Σε παρακαλούμε να προσπαθήσεις να απαντήσεις στα παρακάτω προβλήματα δείχνοντας τον τρόπο που εργάστηκες. Οι απαντήσεις σου, ο τρόπος που σκέφτεσαι, κάποιες παρατηρήσεις που μπορεί να θέλεις να κάνεις θα βοηθήσουν σε μια έρευνα σχετικά με το πως πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά. Δεν θα βαθμολογηθείς και ο δάσκαλος της τάξης δεν πρόκειται να πάρει υπόψη του τις απαντήσεις σου στο χαρακτηρισμό της επίδοσής σου.

1. Κάποιος θέλει να χτίσει ένα ξενοδοχείο που να έχει μόνο δίκλινα δωμάτια (δηλαδή δωμάτια με δύο κρεβάτια) και να μπορεί να φιλοξενήσει συνολικά 80 επισκέπτες. Πόσα δωμάτια πρέπει να έχει το ξενοδοχείο;
   Σκέψη- Παρατηρήσεις

   Απάντηση

2. Ο Στέλιος αγόρασε 5 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

3.Ένα στρατιωτικό λεωφορείο χωράει 30 στρατιώτες. Αν πρέπει να μεταφερθούν 852 στρατιώτες, πόσα λεωφορεία χρειάζονται;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

4. Η Έλενα έχει 5 δίσκους της Βανδή και η Ζωή έχει άλλους 6 δίσκους της Βανδή διαφορετικούς από εκείνους της Έλενας. Πόσους δίσκους της Βανδή έχουν και οι δύο μαζί;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

5. Ο Μιχάλης και ο Τάκης συμφώνησαν να μοιραστούν 3 παγωτά σοκολάτα κυπελάκι. Πόσα παγωτά θα φάει ο καθένας, για να μην αδικηθεί κανένας;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

6. Ο Κώστας έχει 3 φίλους και ο Γιώργος έχει 4 φίλους. Αποφάσισαν να διοργανώσουν ένα κοινό πάρτυ. Κάλεσαν όλους τους φίλους τους. Όλοι οι φίλοι ήταν παρόντες. Πόσοι ήταν οι φίλοι που παραβρέθηκαν στο πάρτυ;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

7. Ένας παππούς είχε 4 εγγόνια και μια σακούλα με 18 μπαλόνια , τα οποία μοίρασε στα εγγόνια του. Όλα τα παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό από μπαλόνια. Πόσα μπαλόνια πήρε το κάθε παιδί;

Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

8. Ο Μανόλης για να παίξει στη κιθάρα του ένα μουσικό κομμάτι χρειάζεται 10 λεπτά. Αν παίξουν το ίδιο μουσικό κομμάτι ο Μανόλης και ο Αντρέας μαζί, με τις κιθάρες τους, πόσο χρόνο χρειάζονται;

Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

9. Ένας εργάτης χρειάζεται 4 μέρες για να χτίσει μία μάντρα. Αν προσλάβουμε άλλον έναν εργάτη που δουλεύει το ίδιο γρήγορα, σε πόσες ημέρες θα είναι έτοιμη η μάντρα;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

10. Ο Χρήστος αγόρασε 4 σανίδες, και η κάθε μια από αυτές είχε μήκος 2.5 μέτρα. Πόσες σανίδες μήκους 1 μέτρου μπορεί να κατασκευάσει από αυτές;
Σκέψη- Παρατηρήσεις

Απάντηση

Πίνακας κωδικοποίησης του Δοκιμίου Β

Στο δοκίμιο Β εξετάζεται:

1) Κατά πόσο οι μαθητές έχουν κάνει σωστή μοντελοποίηση της πράξης, όπου αυτή απαιτείται, για την επιτυχή λύση του προβλήματος. Τότε η αντίστοιχη μεταβλητή παίρνει την τιμή 1, διαφορετικά παίρνει την τιμή 0. Όταν η απαιτούμενη πράξη είναι διαίρεση και ο διαιρέτης και ο διαιρετέος δεν είναι μονοψήφιοι αριθμοί εξετάζεται επίσης κατά πόσο η διαίρεση έχει γίνει σωστά. Το ίδιο συμβαίνει και στον πολλαπλασιασμό με δεκαδικό. Τιμές της μεταβλητής 1 για την σωστή εκτέλεση της πράξης ή 0 για την λάθος εκτέλεση.
2) Κατά πόσο οι μαθητές έχουν δώσει σωστή απάντηση. Όταν το πρόβλημα είναι συνηθισμένο, η σωστή μοντελοποίηση και εκτέλεση της αριθμητικής πράξης, θεωρήθηκε ότι συνεπάγεται και σωστή απάντηση, ακόμα και αν η σχετική παράγραφος δεν έχει συμπληρωθεί από τον μαθητή. Αντίθετα όταν το πρόβλημα είναι ασυνήθιστο, οπότε η σωστή εκτέλεση της αριθμητικής πράξης δεν δίνει αυτομάτως και την απάντηση του προβλήματος, η σχετική παράγραφος κρίθηκε απαραίτητο να είναι συμπληρωμένη. Τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής :1 ή 0.
3) Όταν το πρόβλημα είναι ασυνήθιστο, εξετάζεται αν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη κατανόησης εκ μέρους του μαθητή/τριας, σχετικά με τη ρεαλιστική κατάσταση που περιγράφεται από το πρόβλημα. Τιμές της μεταβλητής 1 ή 0.
4) Κατά πόσο υπάρχει επιτυχία ή αποτυχία στη λύση του προβλήματος. Εδώ οι τιμές της μεταβλητής είναι 1 για την επιτυχή λύση, 0 για την αποτυχία, και 0,5 αν ο μαθητής/τρια δεν έχει απαντήσει επιτυχώς στο πρόβλημα αλλά υπάρχει ένδειξη κατανόησης εκ μέρους του/της σχετικά με τη ρεαλιστική κατάσταση που περιγράφεται από το πρόβλημα.

Η τιμή για όλες τις μεταβλητές είναι 0, όταν ο μαθητής/τρια δεν έχει ασχοληθεί καθόλου με το πρόβλημα.

Για το Δοκίμιο Β χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω κωδικοποίηση:
Όταν το πρόβλημα προς λύση ήταν συνηθισμένο το αρχικό γράμμα των μεταβλητών είναι S.
Όταν το πρόβλημα προς λύση ήταν ασυνήθιστο το αρχικό γράμμα των μεταβλητών είναι U.
Ο χαρακτήρας στην προτελευταία θέση της κάθε μεταβλητής δηλώνει το είδος της πράξης που απαιτείται για να λυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα ή το είδος της πράξης που μπορεί να θεωρήσει ο μαθητής/τρια ότι

απαιτείται, λόγω της ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου: a για την πρόσθεση, m για τον πολλαπλασιασμό, d για την διαίρεση.
Ο αριθμητικός δείκτης στο τέλος κάθε μεταβλητής δηλώνει το αντίστοιχο πρόβλημα στο δοκίμιο. Συγκεκριμένα:

Πρόβλημα 1
Smd1 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 80:2.
Srd1 για την απάντηση.
Sd1 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2
Smm2 για την μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού 5*2.
Srm2 για την απάντηση.
Sm2 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 3
Umd30 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 852:30.
Umd31 για την σωστή ή όχι εκτέλεση της διαίρεσης.
Ucd3 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Urd3 για την απάντηση.
Ud3 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 4
Sma4 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 6+5.
Sra4 για την απάντηση.
Sa4 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 5
Smd5 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 3:2.
Srd5 για την απάντηση.
Sd5 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 6
Uma6 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 3+4. Εδώ η εκτέλεση της πρόσθεσης θεωρήθηκε ένδειξη ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου.
Uca6 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Ura6 για την απάντηση.
Ua6 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 7
Umd70 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 18:4.
Umd71 για την σωστή ή όχι εκτέλεση της διαίρεσης.
Ucd7 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Urd7 για την απάντηση.
Ud7 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 8
Uma8 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 10+10 ή του πολλαπλασιασμού 10*2. Εδώ η εκτέλεση της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού θεωρήθηκε ένδειξη ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου.

Uca8 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Ura8 για την απάντηση.
Ua8 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 9

Smd9 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 4:2.
Srd9 για την απάντηση.
Sd9 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 10

Umm100 για την μοντελοποίηση του πολλαπλασιασμού 4*2,5.
Umm01 για την σωστή ή όχι εκτέλεση της πράξης.
Ucm10 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Urm10 για την απάντηση.
Um10 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

ΔΟΚΙΜΙΟ Γ

Όνομα:……..Τάξη:……..
Σχολείο:…….

Σε παρακαλούμε να προσπαθήσεις να απαντήσεις τα παρακάτω προβλήματα. Οι απαντήσεις σου, ο τρόπος που σκέφτεσαι, κάποιες παρατηρήσεις που μπορεί να θέλεις να κάνεις θα βοηθήσουν σε μια έρευνα σχετικά με το πως πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά. Μας βοηθήσατε εσύ και οι συμμαθητές σου πολύ μέχρι τώρα, και είμαστε ευγνώμονες για αυτό. Δεν θα βαθμολογηθείς και ο δάσκαλος της τάξης δεν πρόκειται να πάρει υπόψη του τις απαντήσεις σου στο χαρακτηρισμό της επίδοσής σου.

Παρακάτω σου έχουμε γράψει κάποια παραδείγματα, ώστε να έχεις μπροστά σου τις διάφορες μορφές απάντησης που μπορεί να έχει ένα πρόβλημα.
Παράδειγμα 1
Ένα κιλό λιθρίνια κοστίζουν στη ψαραγορά 19 ευρώ. Πόσα ευρώ κοστίζουν τα 4 κιλά από αυτά τα λιθρίνια, εκείνη την ημέρα στη ψαραγορά;
Απάντηση
Αφού το ένα κιλό κοστίζει 19 ευρώ , τα 4 κιλά από αυτά τα ψάρια εκείνη ην ημέρα θα κοστίζουν 4επί19=76 ευρώ
Παράδειγμα 2
Πάνω σε ένα καράβι, μεταξύ των επιβατών υπάρχουν και κάποια ζώα. Συγκεκριμένα υπάρχουν 4 σκυλάκια και δύο γάτες. Πόσων ετών είναι ο καπετάνιος του καραβιού;
Απάντηση
Δεν μπορώ να απαντήσω γιατί το πρόβλημα δεν μου δίνει αρκετά στοιχεία ώστε να υπολογίσω την ηλικία του καπετάνιου.
Παράδειγμα 3
Ένας άνθρωπος περπατά τα 3 χιλιόμετρα, σε 15 λεπτά. Σε πόσο χρόνο θα περπατήσει τα 30 χιλιόμετρα ;
Απάντηση
Περισσότερο από 150 λεπτά, γιατί τα 30 χιλιόμετρα είναι μεγάλη απόσταση σε σχέση με τα 3 χιλιόμετρα και στο μεταξύ ο άνθρωπος αυτός θα έχει κουραστεί.
Παράδειγμα 4
Ένα κοριτσάκι είναι 2 χρονών και έχει δύο πολύ όμορφα μάτια. Πόσα μάτια θα έχει όταν θα γίνει ένα υγιές κοριτσάκι 8 έτών;
Απάντηση
Πάλι θα έχει δύο μάτια γιατί κάθε άνθρωπος που είναι υγιής εχει πάντοτε δύο μάτια, όσων χρονών και να είναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θέλουμε να απλώσουμε ένα σκοινί ανάμεσα σε δύο δέντρα που απέχουν 12 μέτρα. Αλλά δεν έχουμε τόσο μεγάλο σκοινί. Έχουμε όμως πολλά κομμάτια σκοινί που το καθένα έχει μήκος 3 μέτρα. Πόσα τέτοια κομμάτια σκοινί θα χρησιμοποιήσουμε;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας χασάπης έχει στο κρεοπωλείο του 50 κιλά μοσχαρίσιο κρέας. Πιστεύει όμως ότι θα υπάρχει μεγάλη ζήτηση από αυτό το κρέας, και τηλεφωνεί στον προμηθευτή του και του παραγγέλνει 30 κιλά ακόμα. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας έχει στο κρεοπωλείο του, τώρα που μόλις έκλεισε το τηλέφωνο;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η Αλίκη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Αλίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Η μητέρα της Ελένης άπλωσε σε ένα σκοινί 3 ίδιες πετσέτες και έκαναν 2 ώρες να στεγνώσουν. Αν είχε απλώσει 6 πετσέτες ίδιες με τις προηγούμενες, πόσες ώρες θα έκαναν να στεγνώσουν;

Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5
Ποια θα είναι η θερμοκρασία του νερού μέσα σε ένα δοχείο στο οποίο έχουμε βάλει 1 λίτρο νερού θερμοκρασίας 80 βαθμών και 1 λίτρο νερού θερμοκρασίας 40 βαθμών;
Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6
Ένα πούλμαν χωράει 40 επιβάτες. Πόσα τέτοια πούλμαν πρέπει να νοικιάσει ένα σχολείο για να πάνε εκδρομή 950 μαθητές;
Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7
Ένας εκδοτικός οίκος δώρισε 50 διαφημιστικές μπλούζες της UNICEF στην 1η Γυμνασίου του σχολείου των Παξών. Αυτή η τάξη έχει 14 μαθητές. Όλοι οι μαθητές πήραν τον ίδιο αριθμό από μπλούζες. Πόσες μπλούζες πήρε το κάθε παιδί ώστε να μην αδικηθεί κανένα;
Σκέψη-Παρατηρήσεις

Απάντηση

Πίνακας κωδικοποίησης του Δοκιμίου Γ

Στο δοκίμιο Γ εξετάζεται:

1)Κατά πόσο οι μαθητές έχουν κάνει σωστή μοντελοποίηση της πράξης, όπου αυτή απαιτείται, για την επιτυχή λύση του προβλήματος. Τότε η αντίστοιχη μεταβλητή παίρνει την τιμή 1, διαφορετικά παίρνει την τιμή 0. Όταν η απαιτούμενη πράξη είναι διαίρεση και ο διαιρέτης και ο διαιρετέος δεν είναι μονοψήφιοι αριθμοί εξετάζεται επίσης κατά πόσο η διαίρεση έχει γίνει σωστά. Το ίδιο συμβαίνει και στον πολλαπλασιασμό με δεκαδικό. Τιμές της μεταβλητής 1 για την σωστή εκτέλεση της πράξης ή 0 για την λάθος εκτέλεση.

2)Κατά πόσο οι μαθητές έχουν δώσει σωστή απάντηση. Επειδή στο Δοκίμιο Γ όλα τα προβλήματα είναι ασυνήθιστα, οπότε η σωστή εκτέλεση της αριθμητικής πράξης δεν δίνει αυτομάτως και την απάντηση του προβλήματος, η σχετική παράγραφος κρίθηκε απαραίτητο να είναι συμπληρωμένη. Τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής :1 ή 0.

3)Εξετάζεται αν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη κατανόησης εκ μέρους του μαθητή/τριας, σχετικά με τη ρεαλιστική κατάσταση που περιγράφεται από το πρόβλημα. Τιμές της μεταβλητής 1 ή 0.

4)Κατά πόσο υπάρχει επιτυχία ή αποτυχία στη λύση του προβλήματος. Εδώ οι τιμές της μεταβλητής είναι 1 για την επιτυχή λύση, 0 για την αποτυχία, και 0,5 αν ο μαθητής/τρια δεν έχει απαντήσει επιτυχώς στο πρόβλημα αλλά υπάρχει ένδειξη κατανόησης εκ μέρους του/της σχετικά με τη ρεαλιστική κατάσταση που περιγράφεται από το πρόβλημα.

Η τιμή για όλες τις μεταβλητές είναι 0, όταν ο μαθητής/τρια δεν έχει ασχοληθεί καθόλου με το πρόβλημα.

Για το Δοκίμιο Γ χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω κωδικοποίηση:

Ο αρχικός χαρακτήρας όλων των μεταβλητών του Δοκιμίου είναι C, ως ένδειξη ότι πρόκειται για το Δοκίμιο Γ. Εδώ δεν υπάρχει διαχωρισμός συνηθισμένων και ασυνήθιστων προβλημάτων, αφού όλα τα προβλήματα είναι ασυνήθιστα .

Ο χαρακτήρας στην προτελευταία θέση της κάθε μεταβλητής δηλώνει το είδος της πράξης που απαιτείται για να λυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα ή το είδος της πράξης που μπορεί να θεωρήσει ο μαθητής/τρια ότι απαιτείται, λόγω της ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου: a για την πρόσθεση, m για τον πολλαπλασιασμό, d για την διαίρεση.

Ο αριθμητικός δείκτης στο τέλος κάθε μεταβλητής δηλώνει το αντίστοιχο πρόβλημα στο δοκίμιο. Συγκεκριμένα:

Πρόβλημα 1

Cmd1 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 12:3.

Ccd1 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Crd1 για την απάντηση.
Cd1 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2

Cma2 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 50+30. Εδώ η εκτέλεση της πρόσθεσης θεωρήθηκε ένδειξη ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου.
Cca2 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Cra2 για την απάντηση.
Ca2 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 3

Cma3 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 17+8 ή της αφαίρεσης 17-8.
Cca3 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Cra3 για την απάντηση.
Ca3 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 4

Cma4 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 3+3 ή του πολλαπλασιασμού 3*2. Εδώ η εκτέλεση της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού θεωρήθηκε ένδειξη ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου
Cca4 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Cra4 για την απάντηση.
Ca4 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 5

Cma5 για την μοντελοποίηση της πρόσθεσης 80+40. Εδώ η εκτέλεση της πρόσθεσης χωρίς να ακολουθήσει διαίρεση με το 2 θεωρήθηκε ένδειξη ύπαρξης Διδακτικού Συμβολαίου
Cca5 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Cra5 για την απάντηση.
Ca5 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 6

Cmd60 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 950:40.
Cmd61 για την σωστή ή όχι εκτέλεση της διαίρεσης
Ccd6 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Crd6 για την απάντηση.
Cd6 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

Πρόβλημα 7

Cmd70 για την μοντελοποίηση της διαίρεσης 50:14.
Cmd71 για την σωστή ή όχι εκτέλεση της διαίρεσης.
Ccd7 για το αν υπάρχει ένδειξη κατανόησης.
Crd7 για την απάντηση.
Cd7 για την επιτυχία ή αποτυχία στο πρόβλημα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α

Όνομα:……..Τάξη:……..
Σχολείο:…….

Πιο κάτω ακολουθούν δηλώσεις για τους τρόπους με τους οποίους ο καθένας από εμάς σκέφτεται σχετικά με θέματα που αφορούν στα μαθηματικά. Δήλωσε τι ισχύει στην περίπτωσή σου σε όλες τις παρακάτω δηλώσεις βάζοντας ένα Χ σε έναν μόνον αριθμό στην κλίμακα που είναι δεξιά των δηλώσεων στο αντίστοιχο κουτάκι. Το 1 σημαίνει ΔΙΑΦΩΝΩ ΕΝΤΟΝΑ και το 5 ΣΥΜΦΩΝΩ ΠΛΗΡΩΣ. Οι απαντήσεις σου, ο τρόπος που σκέφτεσαι, θα βοηθήσουν σε μια έρευνα σχετικά με το πως πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά. Πάρε υπόψη σου ότι δεν υπάρχει σωστή απάντηση. Σημασία έχει να γράψεις με ειλικρίνεια ό,τι ισχύει στην περίπτωσή σου. Δεν θα βαθμολογηθείς και ο δάσκαλος της τάξης δεν πρόκειται να πάρει υπ'όψη του τις απαντήσεις σου στο χαρακτηρισμό της επίδοσής σου.

		Διαφωνώ έντονα				**Συμφωνώ πλήρως**
	Παράδειγμα Μου αρέσει να κολυμπώ στα παγωμένα νερά το χειμώνα.	1 **X**	2	3	4	5
	Παράδειγμα Είμαι καλός στη φυσική.	1	2	3	4 **X**	5

	Διαφωνώ έντονα				**Συμφωνώ πλήρως**
1. Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα.	1	2	3	4	5
2. Η ικανότητα να λύνω μαθηματικά προβλήματα είναι χρήσιμη και σε άλλα μαθήματα του σχολείου.	1	2	3	4	5
3. Νομίζω ότι τα μαθηματικά είναι βαρετά.	1	2	3	4	5
4. Αυτό που μου αρέσει περισσότερο σε ένα διαγώνισμα	1	2	3	4	5

	στη λύση προβλήματος είναι να παίρνω καλό βαθμό.	1	2	3	4	5
5.	Όταν δυσκολεύομαι σε ένα πρόβλημα επιμένω μέχρι να βρω λύση.	1	2	3	4	5
6.	Χρειάζεται να μάθω να λύνω μαθηματικά προβλήματα γιατί θα μου είναι χρήσιμο αργότερα.	1	2	3	4	5
7.	Θα ήθελα να ακολουθήσω ένα επάγγελμα, όπου θα χρησιμοποιώ τα μαθηματικά	1	2	3	4	5
8.	Μαθαίνω να θυμούμαι λέξεις – κλειδιά (π.χ. λιγότερος/ περισσότερος) για να λύνω κάποια μαθηματικά προβλήματα	1	2	3	4	5
9.	Πιστεύω ότι είμαι ικανός/ή να κατανοήσω τους βασικούς τρόπους επίλυσης προβλήματος που διδάσκει ο δάσκαλος.	1	2	3	4	5
10	Θα μου άρεσαν τα μαθηματικά περισσότερο αν ήταν πιο εύκολα.	1	2	3	4	5
11	Τα μαθηματικά ανήκουν στα μαθήματα που είμαι δυνατός/ή.	1	2	3	4	5
12	Θέλω πολύ χρόνο για να βρω τη λύση σε ένα πρόβλημα.	1	2	3	4	5

		1	2	3	4	5
13	Δεν ξεχνώ εύκολα ό,τι μάθω στα μαθηματικά	1	2	3	4	5
14	Πιστεύω πως είναι χρήσιμο για μένα να μάθω να λύνω μαθηματικά προβλήματα.	1	2	3	4	5
15	Προτιμώ να λύνω μαθηματικά προβλήματα που δεν συναντήσαμε παρόμοια στην τάξη, γιατί μπορώ από αυτά να μάθω κάτι καινούριο.	1	2	3	4	5
16	Θέλω να παίρνω καλούς βαθμούς στα διαγωνίσματα των μαθηματικών για να ευχαριστήσω τους γονείς μου.	1	2	3	4	5
17	Πιστεύω πως είμαι καλός/ή στη λύση μαθηματικών προβλημάτων.	1	2	3	4	5
18	Ένα πρόβλημα είναι δυνατόν να μην μπορεί να λυθεί.	1	2	3	4	5
19	Μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα.	1	2	3	4	5
20	Ένα πρόβλημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις.	1	2	3	4	5

Πίνακας κωδικοποίησης Ερωτηματολογίου Α

Από τις 20 ερωτήσεις οι 11 θεωρήθηκε ότι εκφράζουν Στάση και οι 9 Πεποίθηση.

Ο αρχικός χαρακτήρας κάθε μεταβλητής δηλώνει κατά πόσο πρόκειται για Στάση (Α) ή για Πεποίθηση (Β).

Ο χαρακτήρας p σε μία μεταβλητή δηλώνει ότι πρόκειται για ερώτηση που αφορά και σε πρόβλημα, ο χαρακτήρας n ότι πρόκειται για αρνητική δήλωση, και ο χαρακτήρας c ότι πρόκειται για δήλωση που αφορά και στο Διδακτικό Συμβόλαιο.

Τέλος ο αριθμός στο τέλος κάθε μεταβλητής δηλώνει την αντίστοιχη ερώτηση στο Ερωτηματολόγιο Α.

Συγκεκριμένα:

Ερώτηση 1	A1	Ερώτηση 5	Ap5	Ερώτηση 9	Bp9	Ερώτηση 13	A13	Ερώτηση 17	Bp17
Ερώτηση 2	Bp2	Ερώτηση 6	Bp6	Ερώτηση 10	A10	Ερώτηση 14	Bp14	Ερώτηση 18	Bc18
Ερώτηση 3	An4	Ερώτηση 7	A7	Ερώτηση 11	B11	Ερώτηση 15	Bp15	Ερώτηση 19	A19
Ερώτηση 4	Ap4	Ερώτηση 8	Acp8	Ερώτηση 12	Ap12	Ερώτηση 16	A16	Ερώτηση 20	Bcp20