ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

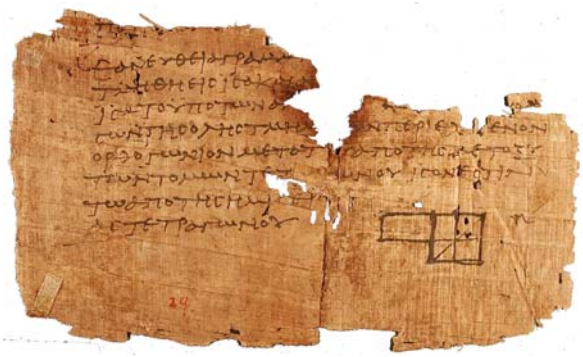
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΘΕΟΔΩΡΟΥ ΚΥΡΗΝΑΙΟΥ.



Εικ.: Στοιχεία Ευκλείδη – II.5

ΚΑΛΗΣΠΕΡΗ ΔΗΜΗΤΡΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: **ΣΤ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ**

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 24η/10/2008 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Στυλιανός Νεγρεπόντης (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής	.....
2) Διονύσιος Αναπολιτάνος	Καθηγητής	.....
3) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Αναπληρωτής Καθηγητής	.....

Στο Βασίλη

► ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ◄

◙ ΠΕΡΙΛΗΨΗ

◙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ *«ΜΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ» ΜΕΘΟΔΟ.*

1.1 **HARDY &WRIGHT**

1.2 **W.R.KNORR**

1.3 **M.F. BURNYEAT**

◙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ *«ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ» ΜΕΘΟΔΟ.*

2.1 H. ZEUTHEN

2.2 B.L. van der WAERDEN

2.3 W.R.KNORR

2.4 D.H. FOWLER

◙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3.1 ΜΕΛΕΤΗ – ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΧΩΡΙΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ, ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ 147c7-148d7 ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ Στ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗ.

3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥΣ ΓΝΩΜΟΝΕΣ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας αποτελεί το κυρίαρχο επίτευγμα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Ως προς το χρονικό πεδίο και τον τρόπο με τον οποίο συντελέστηκε, εκκρεμούν ακόμα ερωτήματα τα οποία επιζητούν σαφείς και εμπεριστατωμένες απαντήσεις. Παρ' όλα αυτά γνωρίζουμε ότι ολοκληρώθηκε σε τρία βήματα – φάσεις . Η αφετηρία εντοπίζεται στη Σχολή των Πυθαγορείων με την απόδειξη ασυμμετρίας της πλευράς προς τη διάμετρο τετραγώνου (δηλαδή του $\sqrt{2}$). Στη συνέχεια ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (470-400 π.Χ.) απέδειξε την ασυμμετρία των πλευρών τετραγώνων εμβαδού 3, 5, 7 …17 τετραγωνικών πόδων προς την ποδιαία (δηλαδή των $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{15}, \sqrt{17}$) και τελικά στη Σχολή του Πλάτωνος, ο Θεαίτητος στοιχειοθετεί τη θεωρία των «**δυνάμει μόνον συμμέτρων**» ευθειών, η οποία είναι καταγεγραμμένη στο $10^{ο}$ βιβλίο των Στοιχείων.

Ο τρόπος με τον οποίο συντελέστηκαν αυτά τα βήματα, αποτελεί αντικείμενο πολυετούς επιστημονικής μελέτης, καθώς τα έγγραφα αλλά και οι μαρτυρίες που έχουν διασωθεί από την αρχαιότητα είναι ελάχιστα. Όσον αφορά στο πρώτο βήμα, πολλοί ισχυρίζονται ότι η αρχική απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς προς διαγώνιο τετραγώνου δεν είναι άλλη από την αυτή που συναντούμε στα *Αριστοτέλους, Αναλυτικά Ύστερα 41a26*-31, σύμφωνα με την οποία υποθέτουμε αρχικά ότι τα μεγέθη είναι σύμμετρα και καταλήγουμε ότι τα περιττά γίνονται ίσα με τα άρτια. Δηλαδή με τη μέθοδο της ατόπου απαγωγής καταλήγουμε στην απόδειξη της ασυμμετρίας. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιεί στοιχεία από τη θεωρία Αριθμών που περιλαμβάνονται στο VII Βιβλίο των Στοιχείων και παρουσιάζει βασικό μειονέκτημα ως προς το ότι γενικεύεται πολύ εύκολα και θα μπορούσε να αποτελεί απόδειξη για όλα τα ασύμμετρα ζεύγη μεγεθών. Η αρχική ανακάλυψη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου όπως έγινε αρχικά από τους Πυθαγόρειους αλλά και ο τρόπος με τον οποίο οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν σε αυτή, περιγράφεται λεπτομερώς στο άρθρο **[Νε2]** του καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη. Όπως αποδεικνύεται οι Πυθαγόρειοι έκαναν χρήση μιας πιο απλής μορφής της πρότασης Χ.2 (**Πυθαγόρεια μορφή της Πρότασης Χ.2:** Αν διαπιστωθεί από τη φύση τους ότι δύο μεγέθη α > β έχουν ανθυφαίρεση και αν η ανθυφαίρεση αυτή είναι **άπειρη**, τότε τα μεγέθη α, β

είναι **ασύμμετρα)**, όπου η άπειρη ανθυφαίρεση των μεγεθών εξασφαλίστηκε από τη διατηρησιμότητα του σχήματος των γνωμόνων που προκύπτουν κάθε φορά.

Στην παρούσα εργασία θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε – ανακατασκευάσουμε τις ασυμμετρίες που απέδειξε ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος. Βασικός άξονας μελέτης σε κάθε περίπτωση αποτελεί το χωρίο του *Πλάτωνος, Θεαίτητος 147c7-148d7*. Ο Θεόδωρος στο διάλογο αυτό, που τοποθετείται χρονικά στο 399 π.Χ. εμφανίζεται ως γέροντας, συνεπώς πρέπει να ήταν σύγχρονος του Ιπποκράτη και του Δημόκριτου. Ο Θεαίτητος έπεσε στο πεδίο της μάχης το 369 π.Χ. και ο διάλογος του Πλάτωνα είναι αφιερωμένος στη μνήμη του νεαρού ήρωα. Στο κείμενο ο χαρακτήρας και τα προσόντα του περιγράφονται δια μακρών. Ο Πλάτων στο χωρίο [Θ] σκιαγραφεί σε μια σύντομη αναφορά *-που δίνει την εντύπωση ότι είχε εισαχθεί σκόπιμα-* μια μαθηματική ανακάλυψη του νεαρού φίλου του και περιγράφει λεπτομερώς τι είχε βρεθεί προηγουμένως από το Θεόδωρο και τι προσθέτει σε αυτό ο Θεαίτητος. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο διαχωρισμός της συνεισφοράς του Θεαίτητου από εκείνη του Θεοδώρου είναι ιστορικώς ακριβή ακόμη και αν τα λεπτομερώς περιγραφόμενα περιστατικά του διαλόγου είναι φανταστικά. Δεν μπορεί ο Πλάτων να είχε πρόθεση να αποδώσει στο Θεόδωρο αυτά που οφείλονται στον Θεαίτητο και αντιστρόφως. Κατόπιν αυτής της διάλεξης ο Θεαίτητος άρχισε να σκέπτεται και βρήκε μια γενική λύση του προβλήματος το οποίο ο Θεόδωρος είχε επεξεργαστεί για λίγες ειδικές περιπτώσεις. Ταξινόμησε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία παράγουν σύμμετρα τετράγωνα, σε αυτά τα οποία είναι σύμμετρα και σε εκείνα τα οποία είναι ασύμμετρα. Όλα αυτά περιέχονται στο διάλογο "Θεαίτητος".

Το περίγραμμα στο οποίο θα κινηθούμε προκειμένου να δώσουμε μία ολοκληρωμένη εικόνα για τα παραπάνω θα είναι το εξής. Αρχικά θα γίνει μία αναδρομή στις ήδη καταγεγραμμένες ανακατασκευές από τους σύγχρονους μελετητές. Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τις απόψεις των μελετητών σε δύο κυρίως ρεύματα που αποκλίνουν ως προς τη μέθοδο εργασίας του Θεόδωρου του Κυρηναίου με ότι συνέπειες φέρει αυτό. Μία ομάδα μελετητών, μεταξύ αυτών και οι Zeuthen, Fowler, Vd Waerden θεωρούν ότι ο Θεόδωρος εργάστηκε ανθυφαιρετικά (Κεφάλαιο $2^{ο}$) ενώ μία άλλη ομάδα μελετητών, δεν πιστεύουν ότι υπάρχει κάποια ανάμιξη της ανφυφαιρετικής διαδικασίας στα όσα έκανε ο Θεόδωρος. Κυρίαρχο παράδειγμα ο W.Knorr ο οποίος πιστεύει ότι η μέθοδος εργασίας αυτού θα ήταν κατασκευαστική –

γεωμετρική (Κεφάλαιο 1^{ο}). Όλοι όμως συγκλίνουν σε ένα κοινό: **Θεωρούν ότι παρόλο που ο Πλάτωνας [Θ] αναφέρει ρητά ότι ο Θεόδωρος ήταν αυτός που απέδειξε τις ασυμμετρίες των συγκεκριμένων ευθυγράμμων τμημάτων, δεν αναφέρει τίποτα για τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε.** Γι' αυτό και δημιουργείται αυτή η διχογνωμία η οποία φέρει σημαντικές συνέπειες, μεταξύ των οποίων η δημιουργία ερωτηματικού στην περίπτωση και στο λόγο για τον οποίο σταμάτησε ο Θεόδωρος. Ενώ γενικά ήταν αποδεκτό ότι ο Θεόδωρος συμπεριέλαβε και την περίπτωση του 17, ο Knorr θεωρεί ότι ο Θεόδωρος βρήκε ανυπέρβλητη δυσκολία κατά τη μελέτη της συγκεκριμένης περίπτωσης και γι' αυτό σταμάτησε.

Στο 3^{ο} Κεφάλαιο της εργασίας **αποκαλύπτεται ότι το ίδιο το κείμενο [Θ] είναι αυτό που μας δείχνει ακριβώς τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος.** Το συμπέρασμα αυτό ήρθε μετά από εξονυχιστική μελέτη των Πλατωνικών κειμένων, και ιδιαίτερα της τριλογίας *Θεαίτητος – Σοφιστής – Πολιτικός*. Το θέμα της τριλογίας αυτής, η γνώση και η φύση της επιστήμης είναι ενιαίο. Η διερεύνηση του ζητήματος αρχίζει στο *Θεαίτητο*, συνεχίζει στο *Σοφιστή* και ολοκληρώνεται στον *Πολιτικό*. Η μελέτη αυτή, που έγινε από τον καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη, παρουσιάστηκε στο μάθημα «Πλάτων και Μαθηματικά» που έγινε στα πλαίσια του ΔΠΣ «Διδακτική και Επιστημολογία των Μαθηματικών». Οι σημειώσεις του μαθήματος αυτού αποτελούν το υπόβαθρο της σύνταξης της παρούσας εργασίας.
Στο δεύτερο μέρος του τρίτου κεφαλαίου παρουσιάζεται μία νέα πρόταση ανθυφαιρετικής πια ανακατασκευής η οποία έρχεται σε απόλυτη συνέχεια της αρχικής ανακάλυψης της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους. Δηλαδή ενώ η απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου εξασφαλίστηκε από την επανάληψη **τετραγώνων** γνωμόνων, η νέα απόδειξη της ασυμμετρίας των συγκεκριμένων ζευγών μεγεθών εξασφαλίζεται με την επανάληψη **ορθογωνίων** γνωμόνων.

◙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ *«ΜΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ» ΜΕΘΟΔΟ.*

G.H.Hardy

1.1 G.H. HARDY & E.M. WRIGHT

Μία διάσημη απόδειξη για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας αποτελεί η απόδειξη που συναντούμε στα *Αναλυτικά Ύστερα 41a26-31 του Αριστοτέλους,* είναι μία λακωνική περιγραφή μιας απόδειξης, σύμφωνα με την οποία, εάν υποθέσουμε ότι η πλευρά και η διαγώνιος του τετραγώνου είναι σύμμετρες, τότε καταλήγουμε στην αντίφαση ότι τα άρτια γίνονται ίσα με τα περιττά. Στο τέλος του Χ. βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη υπάρχει αυτή η απόδειξη η οποία με συνοπτική μορφή έχει ως εξής:

Έστω ότι ΑΓ η διαγώνιος και ΑΒ η πλευρά ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι σύμμετρες, και έστω ότι ο λόγος τους σε ανάγωγη μορφή είναι m:n. Από την σχέση ΑΓ:ΑΒ = m:n συνάγεται ότι $\text{ΑΓ}^2 : \text{ΑΒ}^2 = m^2 : n^2$. Αφού $A\Gamma^2 = 2\text{ΑΒ}^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ), θα είναι $m^2 = 2n^2$, συνεπώς ο m^2 είναι άρτιος. Από αυτό συνάγεται ότι ο m είναι άρτιος, γιατί αν ο m ήταν περιττός, θα συμπεραίναμε από την πρόταση IX.29 των Στοιχείων (εάν περιττός αριθμός πολλαπλασιασθείς περιττόν δίνει ως αποτέλεσμα κάποιον αριθμό, ο γενόμενος θα είναι περιττός) ότι ο m^2 είναι επίσης περιττός. Αλλά από την m = 2h λαμβάνουμε $m^2 = 4h^2$ και συνεπώς $n^2 = 2h^2$. Άρα ο n^2 είναι άρτιος, οπότε η επανάληψη του αρχικού συλλογισμού δείχνει ότι ο αριθμός n είναι και άρτιος και περιττός και αυτό είναι αδύνατο.

Ο Αριστοτέλης αναφέρεται σε αυτή την απόδειξη ως κάτι πολύ γνωστό που όσοι διαβάζουν το ξέρουν. Το κυρίως μειονέκτημα που παρουσιάζει είναι η εύκολη

γενίκευσή της προς όλους τους μη τετραγωνικούς αρρήτους. Εάν ήταν αυτή η απόδειξη της ασυμμετρίας εξ' αρχής τότε δε θα ανέφερε ο Πλάτων ρητά ότι ο Θεόδωρος ανακάλυψε τις ασυμμετρίες των μεγεθών $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{15}, \sqrt{17}$ αφού θα περιλαμβάνονταν στην παραπάνω απόδειξη. Θα μπορούσε ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος να έχει αποδείξει με διαφορετικό τρόπο την ασυμμετρία αυτών των μεγεθών, αλλά αφού δε θα ήταν κάτι που συνέβη για πρώτη φόρα, ούτε θα πρόσθετε τίποτα περισσότερο στην υπάρχουσα γενική απόδειξη, τότε δε θα ήταν άξιο αναφοράς από τον Πλάτωνα.

Μία παραπλήσια απόδειξη που παρουσιάζει όμως το ίδιο μειονέκτημα, δηλαδή είναι γενική μέθοδος και απαντά για όλους του μη τετράγωνος αριθμούς (ξεκινώντας από το $\sqrt{2}$), είναι αυτή του **Heath**:

Έστω N μη τετράγωνος αριθμός. Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{N}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt{N}$ = α/β, με (α,β) = 1. Τότε $N\beta^2 = \alpha^2$. Τότε το N διαιρεί το α^2 , άρα διαιρεί και το α. Έστω α = Nγ. Ισχύει $N\beta^2 = (N\gamma)^2$ ή $N\beta^2 = N^2\gamma^2$ ή $\beta^2 = N\gamma^2$, δηλαδή το N διαιρεί το β. Αυτό είναι άτοπο, διότι καταλήξαμε ότι το N διαιρεί και το α και το β ενώ (α,β) = 1.

Το πρόβλημα αυτό της γενικότητας της απόδειξης, φαίνεται για πρώτη φορά να το υπογραμμίζουν και να το υπερβαίνουν οι **Hardy & Wright**, προτείνοντας την παρακάτω απόδειξη:

- Έστω ότι το N είναι άρτιος (περιπτώσεις : $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ **).**

Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{N}$ είναι σύμμετρος, $\sqrt{N}$ = α/β, όπου (α,β) = 1, δηλαδή $\alpha^2 = N\beta^2$.

Αφού το N είναι άρτιος τότε N=2n, δηλαδή $\alpha^2 = 2n\beta^2$.

$\alpha^2 = 2n\beta^2 \Rightarrow \alpha^2$ άρτιο $\Rightarrow$ α άρτιος, έστω α= 2γ.

$(2\gamma)^2 = 2n\beta^2 \Rightarrow \beta^2$ άρτιος $\Rightarrow$ β άρτιος, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι (α,β) = 1.

- Έστω ότι το N είναι περιττός (περιπτώσεις : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$ **).**

Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{N}$ είναι σύμμετρος, $\sqrt{N}$ = α/β, όπου (α,β) = 1, δηλαδή $\alpha^2 = N\beta^2$.

Αφού το N είναι περιττός τότε τα α, β πρέπει να είναι και τα δύο περιττά, οπότε α=2A+1 και β=2B+1, δηλαδή ισχύει η σχέση $N(2A+1)^2 = (2B+1)^2$ (1).

Επιλέγουμε τις κλάσεις του N που να περιλαμβάνουν τις περιπτώσεις που εξετάζουμε.

Το N θα είναι της μορφής: 4n+3, 8n+5, 8n+1. (Ο Hardy &Wright επιλέγουν αυτές τις κλάσεις και τονίζουν ότι η μέθοδος λειτουργεί για οποιεσδήποτε κλάσεις επιθυμεί να επιλέξει ο αναγνώστης που να απαντούν στις περιπτώσεις υπό εξέταση).

- N = 4n+3 (N=3,7,11) αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε:

  $(4n+3)(2A+1)^2 = (2B+1)^2$ ή

  $(4n+3)(4A^2+4A+1) = 4B^2+4B+1$ ή

  $16nA^2+16nA+4n+12A^2+12A+3 = 4B^2+4B+1$

  8nA(A+1)+6A(A+1)+2n +1 = 2B(B+1), άτοπο διότι το ένα μέλος της ισότητας είναι άρτιο ενώ το άλλο περιττό.

- N = 8n+5 (N=5,13) αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε:

  $(8n+5)(2A+1)^2 = (2B+1)^2$ ή

  $(8n+5)(4A^2+4A+1) = 4B^2+4B+1$ ή

  8nA(A+1)+5A(A+1)+2n +1 = B(B+1), άτοπο διότι το ένα μέλος της ισότητας είναι άρτιο ενώ το άλλο περιττό.

- N = 8n+1 (N=17) αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε:

  $(8n+1)(2A+1)^2 = (2B+1)^2$ ή

  $(8n+1)(4A^2+4A+1) = 4B^2+4B+1$

$17(B^2+B) + 4 = A^2 + A$, όπου και τα δύο μέλη της ισότητας είναι άρτια, δηλαδή δε μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα.

Οι Hardy &Wright δεν παραθέτουν επιχειρήματα υποστηρίζοντας ότι σίγουρα ήταν αυτός ο τρόπος που εργάστηκε ο Θεόδωρος, τουναντίον προσθέτουν ότι υπάρχουν άλλοι λόγοι για τους οποίους πιθανώς δεν είναι αυτή η μέθοδος. Ωστόσο προτείνουν μία μέθοδο η οποία να μοιάζει με την απόδειξη του Αριστοτέλους [ΑΑΥ], δηλαδή η απόδειξη της ασυμμετρίας είναι της μορφής «άρτιος = περιττός» και είναι τροποποιημένη κατά τέτοιο τρόπο ώστε να λειτουργεί κατά περίπτωση βρίσκοντας δυσκολία στο 17.

1.2 W.R.KNORR

Πλάτωνος, Θεαίτητος 147d3-7

ΘΕΑΙ. **Περὶ δυνάμεών** τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε **ἔγραφε**, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος **[ἀποφαίνων]** ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατ ὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· **ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο**. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Στο χωρίο αυτό του Θεαίτητου ο Πλάτων διαχωρίζει δύο θεωρήματα. Αυτό του Θεόδωρου του Κυρηναίου ο οποίος απέδειξε την ασυμμετρία πλευράς τετραγώνου προς την ποδιαία, όπου το εμβαδό του τετραγώνου είναι 3, 5, …17 τετραγωνικά πόδια, και αυτό του μαθητή του Θεαίτητου σύμφωνα με το οποίο προχώρησε και γενίκευσε την εργασία του πρώτου αποδεικνύοντας ότι η ρίζα κάθε μη τετράγωνου φυσικού αριθμού είναι άρρητος.

- Περὶ *δυνάμεών*

Ο Πλάτων αρχικά ξεχωρίζει τους **αριθμούς** σε δύο κατηγορίες. Οι αριθμοί που είναι γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αναπαρίστανται με ένα τετράγωνο και τους ονομάζει ***τετράγωνους*** και ισόπλευρους, και οι αριθμοί που βρίσκονται ενδιάμεσά τους και είναι γινόμενο δύο άνισων αριθμών, αναπαρίστανται με το προμήκες (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) και τους ονομάζει ***προμήκεις***.

Αντίστοιχα αναφέρεται σε δύο κατηγορίες **ευθυγράμμων τμημάτων**. Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδό τετράγωνο αριθμό

λέγεται ***μήκος*** ενώ το ευθύγραμμο τμήμα που είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδό προμήκη αριθμό λέγεται ***δύναμις***.

Ο Knorr ξεχωρίζει με σαφήνεια τη μαθηματική ανακατασκευή του θεωρήματος του Θεοδώρου από τη διεξοδική αναζήτηση και ερμηνεία του παραπάνω χωρίου του Πλάτωνα. (**Before examining** the **mathematical** reconstruction …. I will **first** consider in turn the **principal features of the text**). Θεωρεί – όπως και οι υπόλοιποι μελετητές- ότι ο Πλάτων ενώ μας αναφέρει την ανακάλυψη του Θεοδώρου δεν αποκαλύπτει τίποτα για τη μέθοδο εργασίας με την οποία διεξήγαγε τα προαναφερθέντα.

Ο Θεαίτητος υποδεικνύει ότι το μάθημα του Θεόδωρου αναφερόταν σε δυνάμεις: «περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε». Στη συνέχεια αναφέρει τις 'τρίποδος, πεντέποδος, ποδιαίᾳ' οι οποίες είναι ευθύγραμμα τμήματα και αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα τα ονομάζει «δυνάμεις». Η ποδιαία είναι θα λέγαμε το ευθύγραμμα τμήμα που αντιστοιχεί στο «1 πόδι», η «τρίπους» είναι το ευθύγραμμο τμήμα α όπου $\alpha^2 = 3\rho^2$. Το ρ είναι γραμμή και ο Πλάτωνας το ονομάζει **δύναμις,** σε αντίθεση με τη συνήθη ερμηνεία του «δύναμις» που αναφέρεται σε επιφάνειες.

Ο Knorr αναζητώντας τη σωστή ερμηνεία του όρου αναφέρει παραπλήσιους όρους και εξετάζει τις διαφορές αυτών:

Surd - irrational line (άρρητος πλευρά).

Square root – the line which produces in square the square number .

Δύναμις - signifies 'second power'.

Δύνασθαι - to be equivalent in second power.

Παρατηρεί ότι ο Paul Tannery πρότεινε τη **διόρθωση** και **αντικατάσταση** του όρου «δύναμις» με τον όρο «δυναμένη». Αυτή την τακτική θα την απορρίψουμε σχεδόν άμεσα καθότι στόχος μας είναι η όσο το δυνατό πιο διεξοδική και προσεχτική μελέτη των κειμένων του Πλάτωνα ώστε να ανακαλύψουμε γιατί ο συγγραφέας εκφράζεται με τον ένα τρόπο και όχι με άλλο. *Ειδικά στην περίπτωσή μας όπου ο όρος αυτός είναι πρωταρχικής σημασίας και επαναλαμβάνεται τρεις φορές στο μικρό αυτό χωρίο, δε θα μπορούσε ο Πλάτων να έχει εσφαλμένη διατύπωση.*

Ο Ευκλείδης στο *Χ Βιβλίο (Χ.2-Χ.9)* χρησιμοποιεί τους «δυνάμει σύμμετρο», «μήκη σύμμετρο»:

Χ.2: «Εὐθεῖαι **δυνάμει σύμμετροί** εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι».

Χ.9: «Τὰ ἀπὸ τῶν **μήκει συμμέτρων** εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν **μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν** τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους».

Ο Ιπποκράτης ο Χίος που είναι σύγχρονος του Θεόδωρου κατά των τετραγωνισμό των μηνίσκων χρησιμοποιεί την ίδια ορολογία, για παράδειγμα:

Σιμπλίκιος, Εις Αριστοτέλους Φυσικά, 9,61,6-7

«ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει».

Ο Πλάτων χρησιμοποιεί τον όρο αυτό και σε άλλα συγγράματά του:

Πλάτων, Πολιτικός 266b

ΞΕ. Ἡ φύσις, ἣν τὸ γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτη-
ται, μῶν ἄλλως πως εἰς τὴν πορείαν πέφυκεν ἢ καθάπερ ἡ
διάμετρος ἡ **δυνάμει** δίπους;
ΝΕ. ΣΩ. Οὐκ ἄλλως.
ΞΕ. Καὶ μὴν ἥ γε τοῦ λοιποῦ γένους πάλιν ἐστὶ κατὰ
δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας **δυνάμεως** διάμετρος, εἴπερ δυοῖν γέ
ἐστι ποδοῖν δὶς πεφυκυῖα.

Πλάτων, Τίμαιος 54b

ἀλλὰ τῷ τοῦτο ἐλέγξαντι καὶ ἀνευ-
ρόντι δὴ οὕτως ἔχον κεῖται φίλια τὰ ἆθλα. προῃρήσθω
δὴ δύο τρίγωνα ἐξ ὧν τό τε τοῦ πυρὸς καὶ τὰ τῶν ἄλλων
σώματα μεμηχάνηται, τὸ μὲν ἰσοσκελές, τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ

δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάττονος τὴν μείζω πλευρὰν ἀεί. τὸ δὴ πρόσθεν ἀσαφῶς ῥηθὲν νῦν μᾶλλον διοριστέον. τὰ γὰρ τέτταρα γένη δι' ἀλλήλων εἰς ἄλληλα ἐφαίνετο πάντα γένεσιν ἔχειν, οὐκ ὀρθῶς φανταζόμενα·

Πλάτων, Πολιτεία 587d
Τριπλασίου ἄρα, ἦν δ' ἐγώ, τριπλάσιον ἀριθμῷ ἀληθοῦς ἡδονῆς ἀφέστηκεν τύραννος.
Φαίνεται.
Ἐπίπεδον ἄρ', ἔφην, ὡς ἔοικεν, τὸ εἴδωλον κατὰ τὸν τοῦ μήκους ἀριθμὸν ἡδονῆς τυραννικῆς ἂν εἴη.
Κομιδῇ γε.
Κατὰ δὲ **δύναμιν** καὶ τρίτην αὔξην δῆλον δὴ ἀπόστασιν ὅσην ἀφεστηκὼς γίγνεται.

Ο Knorr μετά από αυτή τη μελέτη του όρου σε συγγράμματα του Πλάτωνα ή συγχρόνων του συμπεραίνει ότι ο Πλάτων κάνει τηλεγραφική χρήση των όρων. Δηλαδή αναφέρει «μήκος» και εννοεί «γραμμή μήκει σύμμετρος με την ποδιαία», αναφέρει «**δύναμις**» και εννοεί «**γραμμή ου σύμμετρος, αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρος με την ποδιαία**».

Όμως ποιος είναι ο λόγος που το κάνει αυτό; Γιατί να βιάζεται να το αναφέρει έτσι και να μη το περιγράφει αναλυτικά; Απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά παρατίθενται στο 3^{ο} Κεφάλαιο.

- ***γράφειν***

Δίνονται δύο διαφορετικές ερμηνείες στη σημασία του «γράφειν» από τους μελετητές. Μία ομάδα μελετητών, μεταξύ αυτών και οι H.Schmidt, H.Vogt, F. Hultsch και J.H.Anderhub υποστηρίζουν ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος απλώς *κατασκεύασε* τις ρίζες 3,5…17. Το ίδιο δε συμβαίνει με τον T.L.Heath και μία άλλη ομάδα μελετητών που θεωρούν ότι το «γράφειν» δε σημαίνει απλώς κατασκεύασε αλλά *απέδειξε* την ασυμμετρία των ριζών αυτών. Άλλωστε, ο Heath σημειώνει ότι και άλλοι συγγραφείς, όπως ο Αριστοτέλης και ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούν το απαρέμφατο «γράφειν» εννοώντας «για να αποδείξει…». Ο Knorr επισημαίνει ότι ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι επαρκής για να δεχτούμε ότι το ίδιο ισχύει και στα

συγγράμματα του Πλάτωνα. Για να το επαληθεύσουμε δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε σε εύρος το έργο του ίδιου του συγγραφέα.

Ο Zeuthen εισάγει την υπόθεση της «κατασκευαστικής απόδειξης» (construction-as-existence-proof) και ο Knorr αντιπαρατίθεται σε αυτό. Υποστηρίζει ότι, αν ο Θεόδωρος απέδειξε την ύπαρξη των ριζών μόνο κατασκευάζοντας τες, τότε ο Πλάτων θα έκανε αναφορά σε αυτό μόνο ως εισαγωγικά και τελείως χωριστά από τη συζήτηση της θεωρίας ασυμμετρίας. Άλλωστε αν το επίπεδο απόδειξης στην εποχή του Θεοδώρου ήταν τέτοιο ώστε να δέχονται τις κατασκευές ως αποδείξεις τότε ο Θεαίτητος δε θα ήταν σε θέση να κάνει τέτοιο άλμα και να καταλήξει στα συμπεράσματα που στοιχειοθετούν τη θεωρία λόγων του Χ. Βιβλίου.

Ο Αριστοτέλης αναφέρει συχνά πως τα διαγράμματα βοηθούν όποιον εξετάζει κάποιο θεώρημα (Μετεορολογικά 375b18): «ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον». Όταν ο Αμμώνιος σχολιάζει την αναφορά του Αριστοτέλη στις 'Κατηγορίες 14α39' , διατυπώνει την άποψη ότι «διαγράμματα και θεωρήματα είναι το ίδιο». Ο Ασκληπιός σε σχόλιο στα 'Μεταφυσικά 998α26' παρατηρεί ότι «τα διαγράμματα είναι συνώνυμα με τα θεωρήματα στη γεωμετρία». Επίσης άλλοι συγγραφείς όπως για παράδειγμα ο Σιμπλίκιος που αναφέρει ότι «ο τετραγωνισμός των μηνίσκων για πρώτη φορά «εγράφησαν» (απεδείχθη) από τον Ιπποκράτη το Χίο» , εναλλάσσουν τα «γράφειν – αποδεικνύειν» ή «διαγράμματα – θεωρήματα», θέλοντας να τονίσουν ότι τα διαγράμματα για παράδειγμα δεν είναι απλώς το καταστευαστικό κομμάτι κάποιας απόδειξης. Αποτελούν ασφαλώς την κατασκευή κάποιου σχήματος, η οποία όμως παίζει καίρειο και καταλυτικό ρόλο στην απόδειξη του εκάστωτε θεωρήματος. Με αυτή τη θέση ευθυγραμμίζεται και ο Πλάτωνας αφού στο 'Μένωνα (82b-85e)', μέσω διαγραμμάτων ο Σωκράτης οδηγεί το Σκλάβο στο σωστό θεώρημα για τη σχέση διαμέτρου – πλευράς τετραγώνου. Παρόμοιες αναφορές υπάρχουν στο Φαίδρο και στο Θεαίτητο.

- ***ἀποφαίνων***

Οι απόψεις των μελετητών διίστανται στην ερμηνεία του «ἀποφαίνων» αφού οι A.Szabo, S.Heller, J.H.Andderhub, F.Hultsch και E.Sachs υποστηρίζουν ότι ο Θεόδωρος «έδειξε ευρυματικά» την ασυμμετρία των μεγεθών, ενώ οι Heath, H.Vogt, H.Zeuthen, B.L. vd Waerden και W.Knorr πιστεύουν ότι ο Θεόδωρος «απέδειξε» τις συγκεκριμένες ασυμμετρίες.

Τα επιχειρήματα που έχουν οι μεν υποστηρίζοντας ότι το ρήμα δεν σημαίνει «αποδεικνύω» είναι ασθενή. Ο Anderhub εύκολα υιοθετεί αυτή τη θέση διότι το λεξικό που συμβουλεύτηκε δε δίνει την ερμηνεία 'αποδεικνύω = prove, demonstrate formally'. Παρομοίως ο Szabo ισχυρίζεται ότι ο Θεόδωρος δεν έκανε αποδείξεις καθότι δεν υπάρχει στο χωρίο το ρήμα «δεικνύναι». Μία πιο προσεκτική μελέτη, αν και εσφαλμένη τελικά, κάνουν οι Heller και Sachs αναζητώντας άλλες χρήσεις – ερμηνείες του όρου αυτού. Σε χωρίο από το κείμενο 'Μέθοδος' ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι «ο Εύδοξος απέδειξε (*εξηύρηκεν πρώτος την απόδειξιν*) σε αυτό που πρώτος ο Δημόκριτος είχε δηλώσει – ισχυριστεί χωρίς απόδειξη (*την απόφασιν την περί του ειρημένου σχήματος χωρίς αποδείξεως* <u>*αποφηναμένω*</u>)». Η επίκληση αυτού του παραδείγματος προκειμένου να δοθεί σωστή και μοναδική ερμηνεία στο «ἀποφαίνων» είναι προβληματική καθώς ο Knorr σωστά παρατηρεί, πως αν ο Αρχιμήδης χρησιμοποιώντας τη λέξη «*αποφηναμένω»* εννοούσε «δηλώνω – ισχυρίζομαι» και *όχι «αποδεικνύω»* τότε δε θα έγραφε επεξηγηματικά «*χωρίς αποδείξεως»* αφού θα ήταν πλεονασμός. Επιπλέον το ρήμα «ἀποφαίνω» στο παραπάνω παράδειγμα εμφανίζεται στη μέση φωνή και όχι στην ενεργητική όπως συμβαίνει με το χωρίο που εξετάζουμε. Ένα ακόμη πολύ σημαντικό επιχείρημα εναντίον του επιχειρήματος των Heller και Sachs αποτελεί η χρονική περίοδος του παραδείγματος που επικαλούνται. Ο Αρχιμήδης είναι μεταγενέστερος του Πλάτωνα. Μάλιστα γνωρίζοντας τη χρήση του «δεικνύναι» από τον Ευκλείδη και αντίστοιχα τη χρήση του «αποδεικνύναι» από τον Αριστοτέλη ευλόγως χρησιμοποιεί αυτά τα ρήματα για να περιγράψει αποδείξεις.

Ο Knorr αναζητώντας τη σωστή ερμηνεία του «αποφαίνων» μελετά τα κείμενα του ίδιου του Πλάτωνα.

Πλάτωνος, Παρμενίδης 128c1-130α2

τί θαυμαστόν; εἰ μὲν γὰρ αὐτὰ τὰ ὅμοιά τις **ἀπ-**
έφαινεν ἀνόμοια γιγνόμενα ἢ τὰ ἀνόμοια ὅμοια, τέρας ἂν
οἶμαι ἦν· εἰ δὲ τὰ τούτων μετέχοντα ἀμφοτέρων ἀμφότερα
ἀποφαίνει πεπονθότα, οὐδὲν ἔμοιγε, ὦ Ζήνων, ἄτοπον δοκεῖ,
οὐδέ γε εἰ □ν ἅπαντα **ἀποφαίνει** τις τῷ μετέχειν τοῦ ἑνὸς
καὶ ταὐτὰ ταῦτα πολλὰ τῷ πλήθους αὖ μετέχειν. ἀλλ' εἰ
ὃ ἔστιν ἕν, αὐτὸ τοῦτο πολλὰ **ἀποδείξει** καὶ αὖ τὰ πολλὰ δὴ
ἕν, τοῦτο ἤδη θαυμάσομαι. καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων
ὡσαύτως· εἰ μὲν αὐτὰ τὰ γένη τε καὶ εἴδη ἐν αὑτοῖς **ἀπο-**
φαίνοι τἀναντία ταῦτα πάθη πάσχοντα, ἄξιον θαυμάζειν·
εἰ δ' ἐμὲ ἕν τις **ἀποδείξει** ὄντα καὶ πολλά, τί θαυμαστόν,
λέγων, ὅταν μὲν βούληται πολλὰ **ἀποφῆναι**, ὡς ἕτερα μὲν
τὰ ἐπὶ δεξιά μού ἐστιν, ἕτερα δὲ τὰ ἐπ' ἀριστερά, καὶ ἕτερα
μὲν τὰ πρόσθεν, ἕτερα δὲ τὰ ὄπισθεν, καὶ ἄνω καὶ κάτω
ὡσαύτως–πλήθους γὰρ οἶμαι μετέχω–ὅταν δὲ ἕν, ἐρεῖ ὡς
ἑπτὰ ἡμῶν ὄντων εἷς ἐγώ εἰμι ἄνθρωπος μετέχων καὶ τοῦ
ἑνός· ὥστε ἀληθῆ **ἀποφαίνει** ἀμφότερα. ἐὰν οὖν τις τοιαῦτα
ἐπιχειρῇ πολλὰ καὶ □ν ταὐτὸν **ἀποφαίνειν**, λίθους καὶ ξύλα
καὶ τὰ τοιαῦτα, τὶ φήσομεν αὐτὸν πολλὰ καὶ □ν **ἀποδεικνύναι**,
οὐ τὸ □ν πολλὰ οὐδὲ τὰ πολλὰ ἕν, οὐδέ τι θαυμαστὸν
λέγειν, ἀλλ' ἅπερ ἂν πάντες ὁμολογοῖμεν· ἐὰν δέ τις ὧν
νυνδὴ ἐγὼ ἔλεγον πρῶτον μὲν διαιρῆται χωρὶς αὐτὰ καθ'
αὐτὰ τὰ εἴδη, οἷον ὁμοιότητά τε καὶ ἀνομοιότητα καὶ πλῆθος
καὶ τὸ □ν καὶ στάσιν καὶ κίνησιν καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα,
εἶτα ἐν ἑαυτοῖς ταῦτα δυνάμενα συγκεράννυσθαι καὶ δια-
κρίνεσθαι **ἀποφαίνῃ**, ἀγαίμην ἂν ἔγωγ', ἔφη, θαυμαστῶς, ὦ
Ζήνων. ταῦτα δὲ ἀνδρείως μὲν πάνυ ἡγοῦμαι πεπραγμα-
τεῦσθαι· πολὺ μεντὰν ὧδε μᾶλλον, ὡς λέγω, ἀγασθείην εἴ
τις ἔχοι τὴν αὐτὴν ταύτην ἀπορίαν ἐν αὐτοῖς τοῖς εἴδεσι
παντοδαπῶς πλεκομένην, ὥσπερ ἐν τοῖς ὁρωμένοις διήλθετε,
οὕτως καὶ ἐν τοῖς λογισμῷ λαμβανομένοις **ἐπιδεῖξαι**.

Στο χωρίο αυτό ο Πλάτων αναφέρει δώδεκα φορές λέξεις που να σημαίνουν «αποδεικνύω». Εναλλάσονται ισοδύναμα οκτώ φορές το «ἀποφαίνειν» τρεις φορές το «ἀποδεικνύναι» και μία φορά το «ἐπιδεικνύναι» καθώς πραγματεύεται αποδείξεις και όχι ευρυματικές δηλώσεις! Αφού στον διάλογο '*Παρμενίδης*' ο Πλάτων χρησιμοποιεί ισοδύναμα τις λέξεις αυτές, τότε και στο χωρίο του διαλόγου '*Θεαίτητος*' που εξετάζουμε, γράφει «ἀποφαίνων» εννοώντας «απέδειξε» και όχι απλώς «υπέδειξε ή δήλωσε ή βρήκε ευρηματικά». *Ο ίδιος ο Πλάτων* λοιπόν μας *δίνει*

την απάντηση στην ερμηνεία του όρου που εξετάζουμε. Άλλωστε θα ήταν απίθανο να κάνει ειδική αναφορά στο επίτευγμα του Θεοδώρου, εάν ο τελευταίος δεν είχε κάνει ακριβείς και αυστηρές αποδείξεις, παρά είχε βρει μόνο κάποιες ευρηματικές με τις οποίες έδειχνε ότι *μάλλον* είναι ασύμμετρα τα προαναφερθέντα μεγέθη.

- **ἐν δὲ ταύτῃ πως *ἐνέσχετο***

Η ερμηνεία που βρίσκουμε συνήθως για αυτή την έκφραση από σχολιαστές είναι «στην περίπτωση του 17 για κάποιο λόγο σταμάτησε» (stopped), δηλαδή απέδειξε και την περίπτωση του 17 και εκεί σταμάτησε. Ο Knorr υποστηρίζει μία άλλη ερμηνεία της παραπάνω έκφρασης: «ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος στην περίπτωση του 17 για κάποιο λόγο αντιμετώπισε ανυπέρβλητη δυσκολία» (encountered difficulty), το οποίο σημαίνει ότι δεν κατάφερε να μελετήσει αυτή τη περίπτωση. Το ερωτηματικό στην περίπτωση του 17 το έθεσε για πρώτη φορά ο **Knorr**.

Την άποψη αυτή τη στηρίζει κυρίως σε παρατήρηση που έκανε ο R.Hackforth ο οποίος τονίζει ότι η συνήθης ερμηνεία που δίνει το Λεξικό Liddell-Scott-Jones για τη λέξη αυτή είναι 'encountered difficulty'. Στο Λεξικό υπάρχουν και άλλες αναφορές που πιστοποιούν αυτήν την ερμηνεία όπως είναι οι παρακάτω:

Ηρόδοτος, Ι.190,12
Κῦρος δὲ ἀπορίῃσι ***ἐνείχετο*** ἅτε χρόνου τε ἐγγινομένου
συχνοῦ ἀνωτέρω τε οὐδὲν τῶν πρηγμάτων προκοπτομένων.

Θεαίτητος, 191c2
συγχωρήσεται, ἴσως δὲ ἀντιτενεῖ. ἀλλὰ γὰρ ἐν τοιούτῳ
ἐχόμεθα, ἐν ᾧ ἀνάγκη πάντα μεταστρέφοντα λόγον βασανί-
ζειν. σκόπει οὖν εἰ τὶ λέγω. ἆρα ἔστιν μὴ εἰδότα τι
πρότερον ὕστερον μαθεῖν;

ενώ η μόνη φορά που βλέπουμε από διάφορους σχολιαστές να ερμηνεύεται ως 'σταμάτησε-stopped' είναι στο χωρίο αυτό που εξετάζουμε!

Επίσης ο Knorr θεωρεί λάθος τον ισχυρισμό κάποιων μελετητών σύμφωνα με τον οποίο ο Θεόδωρος απέδειξε επιτυχώς τις περιπτώσεις 3 έως 17 και αντιμετώπισε δυσκολία στο 19. Η θέση αυτή κατά τον Κ. είναι λανθάνουσα διότι στο κείμενο

υπάρχει η φράση «ἐν δὲ ταύτῃ» η οποία δεν μπορεί παρά να σημαίνει «σε αυτή την περίπτωση» και όχι «μετά από αυτή την περίπτωση». Ο Knorr δικαίως παρατηρεί και δίνει σημασία στην πρόθεση «ἐν», όμως η οπτική γωνία υπό την οποία δίνει την ερμηνεία είναι πιθανώς λανθασμένη αφού στην περίπτωση που ο Θεόδωρος ασχολήθηκε και απέδειξε επιτυχώς την περίπτωση του 17 βρίσκοντας δυσκολία στο 19, τότε θα έγραφε «απέδειξε τις ασυμμετρίες των 3, 7, …17 και σε αυτή την περίπτωση βρήκε δυσκολία και σταμάτησε» και όχι στην αντίθετη περίπτωση. Περισσότερη διερεύνηση αυτής της έκφρασης παρατίθεται στην επόμενη ενότητα.

Η μέθοδος ανακατασκευής που παρουσιάζει ο Knorr είναι «μη-ανθυφαιρετική» και βρίσκει δυσκολία στην περίπτωση του 17. Στο 3^{ο} Κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι ο ίδιος ο Πλάτων περιγράφει ότι η μέθοδος εργασίας του Θεόδωρου ήταν ανθυφαιρετική και με μία τέτοια μέθοδο, η περίπτωση του 17 όχι μόνο δεν παρουσιάζει δυσκολία, αλλά είναι σχεδόν τετριμμένη. Δυσκολία έντονη όμως παρουσιάζεται στην επόμενη περίπτωση του 19.

Ο **KNORR** προκειμένου να στοιχειοθετήσει και να εξηγήσει την ως άνω ανακατασκευή ξεκινά με μία εξαιρετική και χρησιμότατη ***παρατήρηση – μέθοδο απόδειξης***:

Αρχικά οφείλουμε να εξετάσουμε **με ποιο τρόπο κατασκευάζονται** οι «δυνάμεις» του 3, 5, 7… 17 ή αλλιώς οι πλευρές τετραγώνου 3 πόδων, 5 πόδων…. 17 πόδων και **στη συνέχεια να αποδείξουμε** ότι το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι ασύμμετρο προς την ποδιαία.

Διατυπώνοντας με σύγχρονούς όρους το παραπάνω ερώτημα προς εξέταση, καταλήγουμε στην αναζήτηση της απόδειξης της παρακάτω πρότασης:

Αν Ν όχι τετράγωνος αριθμός και $a^2 = N \cdot \beta^2$,τότε α, β είναι ασύμμετρα, Ν = 3, 5, 7, …17.

Αρχικά παραθέτουμε κάποιες προτάσεις – Λήμματα που θα χρειαστούν ως «Εργαλεία» στις κατασκευές – αποδείξεις που ακολουθούν.

Ο Knorr **[Kno,σελ.155]** στο V Κεφάλαιο που αναλύει τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά αναφέρει τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα: Δοθέντος περιττού αριθμού Ν, η τριάδα Ν, $(N^2-1)/2$, $(N^2+1)/2$ αποτελεί Πυθαγόρεια Τριάδα.

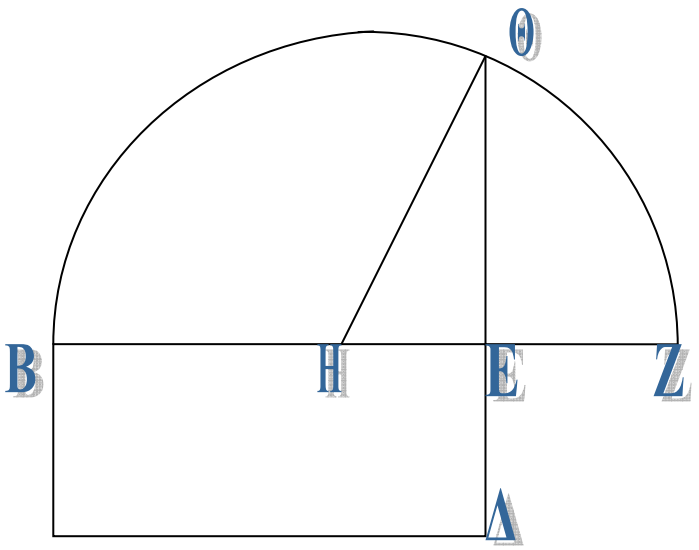
Θεώρημα: Δοθέντος αρτίου αριθμού Ν, η τριάδα Ν, $(N/2)^2-1$, $(N/2)^2+1$ αποτελεί Πυθαγόρεια Τριάδα.

Το πρώτο βήμα προς εξέταση είναι ***πώς*** ο Θεόδωρος ***κατασκεύασε*** τα ευθύγραμμα τμήματα α, β του αρχικού θεωρήματος. **Η απόδειξη της ασυμμετρίας α, β έχει απόλυτη σχέση με την κατασκευή των α, β.** Οι κατασκευές των ευθυγράμμων τμημάτων απορρέουν από την εφαρμογή της **πρότασης ΙΙ.14** των Στοιχείων του Ευκλείδη και αποτελούν πλευρές ορθογωνίων τριγώνων

❖ Πρόταση ΙΙ.14

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

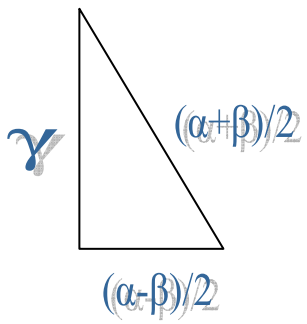
Δοθέντων α, β ευθ. τμημάτων να κατασκευαστεί γ ώστε γ^2 = αβ. Η κατασκευή του ευθύγραμμου τμήματος γ θα προκύψει από το παρακάτω σχήμα.



Έστω ότι α = ΒΕ και β = ΕΔ = ΕΖ. Η μέσο ΒΖ, κέντρο ημικυκλίου ΒΘΖ.

Το γ προκύπτει από την εξής κατασκευή: $\gamma^2 = ΕΘ^2 = ΗΘ^2 - ΗΕ^2$ ή

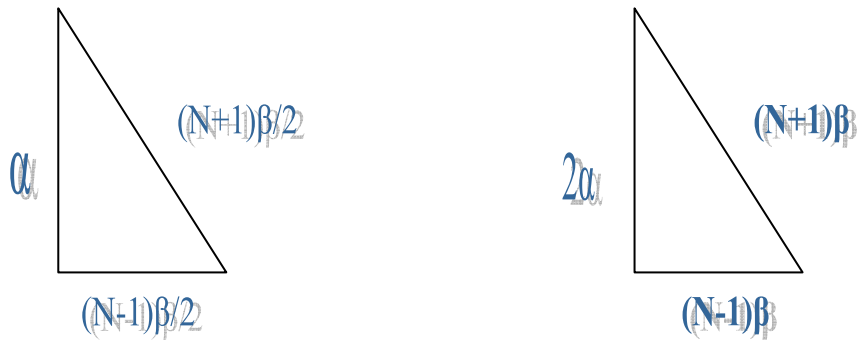
$\gamma^2 = \alpha\beta = [(\alpha + \beta)/2]^2 - [(\alpha - \beta)/2]^2$



Με την εφαρμογή της ως άνω προτάσεως ο Knorr δοθέντων **ευθύγραμμου τμήματος β** και **μη τετραγωνικού αριθμού Ν** κατασκευάζει το 'α' με βάση τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα: Δοθέντος περιττού αριθμού Ν, η πλευρά τετραγώνου Ν μονάδων (΄δύναμις' του Ν) κατασκευάζεται ως η πλευρά ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα (Ν+1)/2 και κάθετη πλευρά (Ν-1)/2.

Θεώρημα: Δοθέντος αρτίου αριθμού N, η ΄δύναμις' του N κατασκευάζεται ως η πλευρά ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα (N+1)/2 και κάθετη πλευρά (N-1)/2.



Δηλαδή αν έχουμε το N, κατασκευάζουμε τα (N-1)/2, (N+1)/2 και με το ορθογώνιο τρίγωνο βρίσκουμε το α/β = $\sqrt{N}$, αφού:

$$N+\left(\frac{N-1}{2}\right)^2=\left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

Παρατήρηση: Στα παραπάνω επιχειρήματα το παρακάτω λήμμα έχει ληφθεί ως δεδομένο, ενώ χρειάζεται μία σύντομη δικαιολόγηση.

✓ **Λήμμα:** Εάν τρεις γραμμές Α, Β, Γ στοιχειοθετούν τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε κάθε πολλαπλάσιο αυτών, έστω dA, dB, dΓ θα στοιχειοθετεί επίσης ορθογώνιο τρίγωνο.

Απόδειξη:

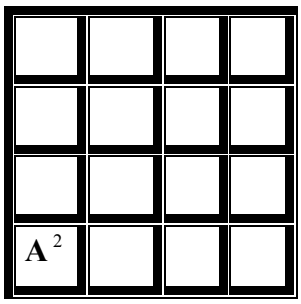
Εάν οι γραμμές Α, Β, Γ βρίσκονται σε αναλογία το συμπέρασμα έπεται άμεσα.

Θεωρούμε ότι οι γραμμές Α, Β, Γ δεν βρίσκονται σε αναλογία.

Από το παρακάτω σχήμα και με την εφαρμογή της ΙΙ.1 έπεται ότι $(dA)^2 = d(dA^2) = d^2A^2$.

(Πρόταση ΙΙ.1

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.)



Οπότε ισχύει η ακόλουθη σχέση: $(dA)^2 + (dB)^2 = d^2 A^2 + d^2 B^2 = d^2 \Gamma^2$ από την οποία έπεται το συμπέρασμα.

- **ΛΗΜΜΑ: (άρτιος)^2 = 4 Μ**

  (περιττός)^2 = 4 Μ + 1

- **Πρόταση Α: ΑΝ Α, Β, Γ είναι Πυθαγόρεια τριάδα και ο Γ άρτιος τότε Α, Β άρτιοι.**

<u>Απόδειξη</u>: $A^2 + B^2 = \Gamma^2$

Τότε ή Α, Β άρτιοι ή Α, Β περιττοί

Αν Α, Β περιττοί τότε $A^2 = 4M + 1$, $B^2 = 4N + 1$,

δηλαδή $A^2 + B^2 = 4K + 2 = \Gamma^2$, Γ^2 δεν διαιρείται δια 4, άτοπο

Άρα Α, Β άρτιοι.

- **Πρόταση Β : Αν Α, Β, Γ αριθμοί και $A^2 + B^2 = \Gamma^2$ & Γ περιττός τότε**

  Ή Α περιττός & Β διαιρείται διά του 4

  Ή Α διαιρείται διά του 4 & Β περιττός.

***<u>Απόδειξη</u>*:** $\Gamma^2 = 8\,M + 1$, οπότε οι μόνες δυνατότητες είναι

Ή Α άρτιος, Β περιττός

Ή Α περιττός, Β άρτιος

$A^2 = 4\,N, \quad B^2 = 8\,P + 1$

$A^2 = \Gamma^2 - B^2 = 4\,M + 1 = 4\,P - 1 = 8\,L$

$A = 2\,q, \; A^2 = 4\,q^2 = 8\,L, \; q^2 = 2\,L$

Άρα q άρτιος, δηλαδή Α διαιρείται δια του 4.

- **Ξεκινώντας θα αποδείξουμε την ασυμμετρία των Α, Β όπου $A^2 = 3 \cdot B^2$.**

Ο Knorr δίνει έμφαση στο ότι δεν πρέπει να αρκεστούμε στην κατασκευή των «δυνάμεων» του 3, 5, …17 αλλά και να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ασυμμετρίας των μεγεθών αυτών με την ποδιαία. Η κατασκευή αυτή καθαυτή δεν αποτελεί απόδειξη, όμως παίζει κυρίαρχο ρόλο στον τρόπο απόδειξης, οπότε:

- **Ως αφετηρία έχουμε την *κατασκευή* της ρίζας του 3:**

Με την εφαρμογή της πρότασης ΙΙ.14 έχουμε την Πυθαγόρεια τριάδα $\sqrt{3}, 1, 2$.

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Έστω ότι Α/Β = $\sqrt{3}$ ρητός, δηλαδή Α, Β είναι σύμμετρα. Θεωρούμε ότι τα Α, Β βρίσκονται σε ελάχιστη αναλογία, με την έννοια ότι το πολύ ένα είναι άρτιος αριθμός. Δε θα μπορούσαν και οι δύο να είναι άρτιοι γιατί τότε θα θεωρούσαμε τα μισά τους ή τα μισά των μισών τους κ.ο.κ. ότι βρίσκονται σε ελάχιστη αναλογία.

- **Θα αποδείξουμε ότι η πλευρά τετραγώνου 3 πόδων είναι** *ασύμμετρη* **προς την ποδιαία.**

Το μήκος της υποτείνουσας του ως άνω ορθογωνίου τριγώνου είναι άρτιο οπότε από Πρόταση Α τα μήκη των καθέτων πλευρών θα είναι άρτια. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι εμείς επιλέξαμε το πολύ ένα από τα Α, Β να είναι άρτιο. Οπότε το ένα θα είναι άρτιο και το άλλο περιττό, δηλαδή ένα από τα Α, Β θα είναι ταυτόχρονα και άρτιο και περιττό, κάτι που είναι αδύνατο. Συνεπώς δεν ισχύει το αρχικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αριθμός που μετράει και το Α και το Β. Άρα τα Α, Β είναι ασύμμετρα ή ο αριθμός $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Ο Knorr λαμβάνοντας ως «αντιπρόσωπο» τον αριθμό '3' συμπεραίνει την ακόλουθη πιο γενική πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

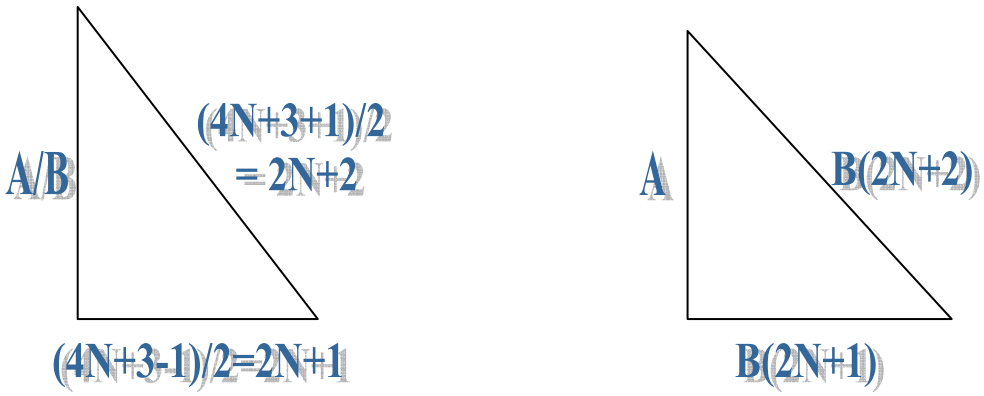
Αν $\alpha^2 = (4N + 3)\beta^2$ τότε α, β ασύμμετρα, δηλαδή

$\sqrt{4N+3}$ **άρρητοι για N = 0, 1, 2,… (& άρα** $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}$ **άρρητοι)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Υποθέτουμε ότι Α/Β = $\sqrt{4N+3}$ ρητός, δηλαδή α, β σύμμετρα (σε ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους). Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι οι εξής:



Η υποτείνουσα του ορθ. Τριγώνου Β(2Ν+2) είναι άρτιος αριθμό. Από την Πρόταση Α συνεπάγεται ότι οι πλευρές Α, Β(2Ν+1) αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό. Τότε όμως προκύπτει ότι τα Α, Β είναι άρτια το οποίο είναι άτοπο γιατί θεωρήσαμε ως δεδομένο ότι βρίσκονται κατά ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους. Συνεπώς δεν ισχύει το αρχικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αριθμός που μετράει και το Α και το Β. Άρα τα Α, Β είναι ασύμμετρα ή οι αριθμοί $\sqrt{4N+3}$ είναι άρρητοι για Ν = 0, 1, 2,… , & άρα $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{15}$ άρρητοι.

Με ανάλογο τρόπο εργάζεται και αποδεικνύει τις ακόλουθες 3 γενικές προτάσεις, ώστε συνολικά και από τις τέσσερις να προκύψουν οι περιπτώσεις ασυμμετριών που αναζητεί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

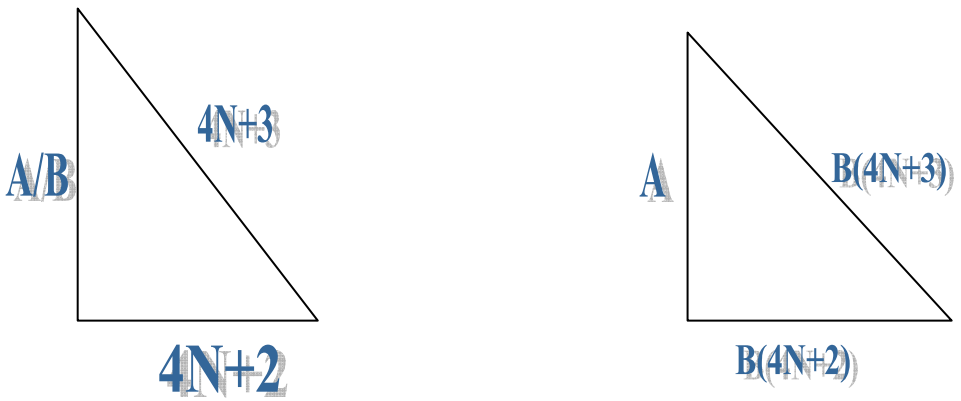
Αν $\alpha^2 = (8N + 5)\beta^2$ τότε α, β ασύμμετρα, δηλαδή

$\sqrt{8N+5}$ άρρητοι για N = 0, 1, 2,… (& άρα $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ άρρητοι)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Υποθέτουμε ότι A/B = $\sqrt{8N+5}$ ρητός, δηλαδή α, β σύμμετρα (σε ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους). Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι οι εξής:



Αν Β είναι άρτιος τότε η υποτείνουσα του ορθ. Τριγώνου Β(4N+3) αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό. Από την Πρόταση Α συνεπάγεται ότι οι πλευρές Α, Β(4N+2) αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό. Τότε όμως προκύπτει ότι τα Α, Β είναι άρτια το οποίο είναι άτοπο γιατί θεωρήσαμε ως δεδομένο ότι βρίσκονται κατά ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους.

Αν Β είναι περιττός τότε Α είναι άρτιος και Β(4N+2) διαιρείται με το 4 ή 4N+2 διαιρείται με το 4 –αφού Β περιττός- ή 2N+1 διαιρείται με το 2 , το οποίο είναι αδύνατο.

Συνεπώς δεν ισχύει το αρχικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αριθμός που μετράει και το Α και το Β. Άρα τα Α, Β είναι ασύμμετρα ή οι αριθμοί $\sqrt{8N+5}$ είναι άρρητοι για N = 0, 1, 2,… , & άρα $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ άρρητοι.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Αν $\alpha^2 = 2(2N + 1)\beta^2$ τότε α, β ασύμμετρα, δηλαδή

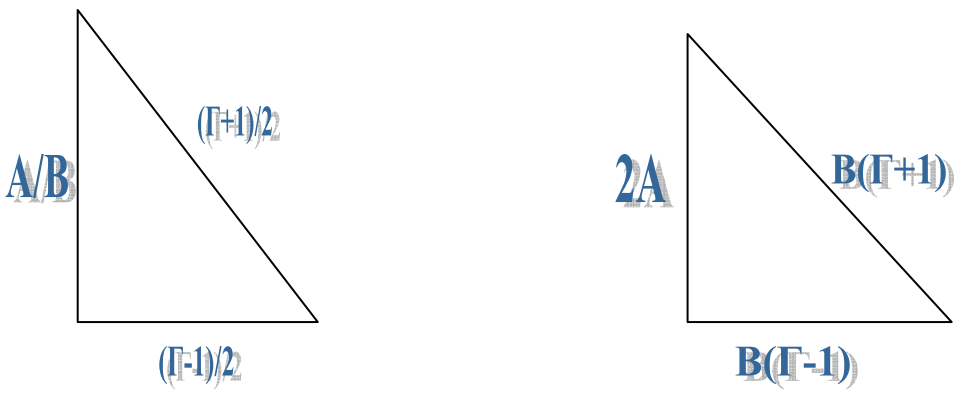
$\sqrt{2(2N+1)}$ **άρρητοι για N = 1, 2,… (& άρα $\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{14}$ άρρητοι)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο της «εις άτοπο απαγωγής».

Υποθέτουμε ότι Α/Β = $\sqrt{2(2N+1)}$ ρητός, δηλαδή α, β σύμμετρα (σε ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους). Θέτω Γ=2(2N+1).

Οι Πυθαγόρειες τριάδες που προκύπτουν είναι οι εξής:



Αν Β είναι άρτιος τότε η υποτείνουσα του ορθ. Τριγώνου Β(Γ+1) αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό. Από την Πρόταση Α συνεπάγεται ότι οι πλευρές 2Α, Β(Γ-1), Β(Γ+1) αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό. Τότε όμως προκύπτει ότι τα Α, Β είναι άρτια το οποίο είναι άτοπο γιατί θεωρήσαμε ως δεδομένο ότι βρίσκονται κατά ελάχιστη αναλογία μεταξύ τους.

Αν Β είναι περιττός τότε 2Α διαιρείται με το 4 ή Α διαιρείται με το 2 –δηλαδή Α άρτιος, οπότε Α = 2Δ. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ως άνω τρίγωνο έχουμε

τελικά $2\Delta^2=(2N+1)B^2$ από το οποίο έπεται ότι το Β δε μπορεί να είναι περιττός, το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς δεν ισχύει το αρχικό συμπέρασμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει αριθμός που μετράει και το Α και το Β. Άρα τα Α, Β είναι ασύμμετρα ή οι αριθμοί $\sqrt{2(2N+1)}$ είναι άρρητοι για N = 0, 1, 2,… , & άρα $\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{14}$ άρρητοι.

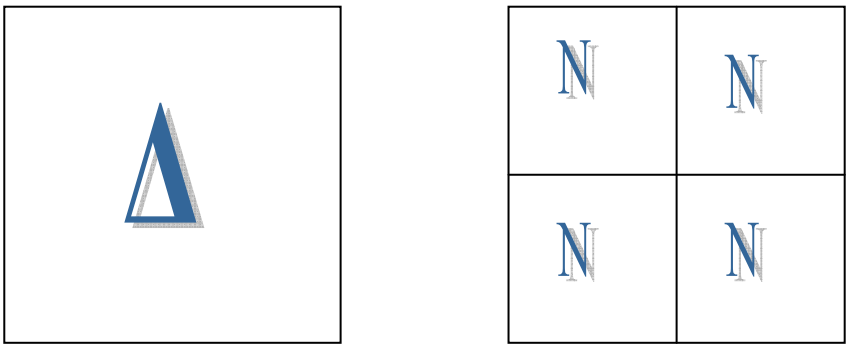
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 4</u>

Αν $\alpha^2 = 4N\beta^2$ τότε α, β ασύμμετρα, δηλαδή

$\sqrt{4N}$ άρρητοι για N = 2,3… (& άρα $\sqrt{8},\sqrt{12}$ άρρητοι).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω Δ = 4N. Θεωρούμε το τετράγωνο Δ μονάδων, το οποίο υποδιαιρούμε σε 4 τετράγωνα N μονάδων.



Η πλευρά του τετραγώνου Δ μονάδων είναι σύμμετρη προς την ποδιαία αν και μόνο αν η πλευρά του τετραγώνου N μονάδων είναι σύμμετρη προς την ποδιαία καθώς έχουν λόγο 2:1.

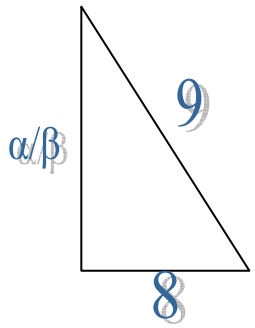
Ομοίως η πλευρά του τετραγώνου Δ μονάδων είναι ασύμμετρη προς την ποδιαία αν και μόνο αν η πλευρά του τετραγώνου N μονάδων είναι ασύμμετρη προς την ποδιαία.

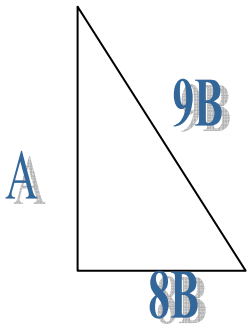
Στόχος των παραπάνω στοιχειωδών παρατηρήσεων είναι να καταδείξουμε ότι η ασυμμετρία κάθε πλευράς τετραγώνου που αποτελεί παράγοντα του 4 μπορεί να εξεταστεί με τον έλεγχο ενός μικρότερου τετραγώνου .

<u>ΤΕΛΙΚΑ:</u>

πρόταση	1	2	3	4
ρίζες	3 – 7 -11 - 15	5 - 13	2 – 6 – 10 - 14	8 - 12

- Καταλήγουμε έτσι στην περίπτωση του $\sqrt{17}$, για την οποία θα εξετάσουμε την ασυμμετρία των α, β όπου $a^2 = 17 \cdot \beta^2$. Η Πυθαγόρεια τριάδα που προκύπτει από την ΙΙ.14 είναι 8, 9, $\sqrt{17}$.





Έστω ότι A/B = $\sqrt{17}$ ρητός, δηλαδή τα Α, Β είναι σύμμετρα. Θεωρούμε ότι η τα Α, Β βρίσκονται σε ελάχιστη αναλογία, με την έννοια ότι το πολύ ένα από τα Α, Β αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό. Δε θα μπορούσαν και τα δύο να αντιστοιχούν σε άρτιο αριθμό γιατί τότε θα θεωρούσαμε τα μισά τους ή τα μισά των μισών τους κ.ο.κ. ότι βρίσκονται σε ελάχιστη αναλογία.

- **Θα αποδείξουμε ότι η πλευρά τετραγώνου 17 πόδων είναι ασύμμετρη προς την ποδιαία.**

Εάν Β άρτιος τότε η υποτείνουσα του ως άνω ορθογωνίου τριγώνου είναι άρτια οπότε από Πρόταση Α τα μήκη των καθέτων πλευρών θα είναι άρτια. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι εμείς επιλέξαμε το πολύ ένα από τα Α, Β να είναι άρτιο. Οπότε το ένα θα είναι άρτιο και το άλλο περιττό, δηλαδή ένα από τα Α, Β θα είναι ταυτόχρονα και άρτιο και περιττό, κάτι που είναι αδύνατο.

Τότε το Β είναι περιττό και αφού και το 8Β διαιρείται με το 4 τότε το Α είναι περιττό από Πρόταση Β. Δεν μπορούμε να συνεχίσουμε τον ισχυρισμό μας και να καταλήξουμε σε κάποιο αδύνατο αποτέλεσμα.

Επιπλέον η γενική μορφή Πρότασης που θα προέκυπτε με αντιπρόσωπο το $\sqrt{17}$ θα ήταν η Πυθαγόρεια Τριάδα (8N+1-1)/2 = 4N, 4N+1, $\sqrt{8N+1}$, για την οποία αν εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο όπως στις παραπάνω, δε μπορούμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα καθότι για διαφορετικά N η δύναμις προκύπτει να είναι είτε τετράγωνος αριθμός είτε μη τετράγωνος αριθμός. Οπότε δε μπορούμε να διατυπώσουμε καμία γενικευμένη μορφή.

Δηλαδή παρατηρούμε ότι με την ανακατασκευή που προτείνει ο Knorr ο Θεόδωρος αντιμετώπισε *ανυπέρβλητη δυσκολία* στην περίπτωση του 17 και *γι' αυτό σταμάτησε.*

Τελικά αυτή η μέθοδος που εφαρμόζει εδώ ο Knorr δεν είναι άλλη παρά να πούμε ότι $\sqrt{N}$ = α/β και να καταλήξουμε ότι α, β ασύμμετρα. **Προσαρμόζοντας αυτή την απόδειξη, την πολύ γενική που δίνει όλες τις ασυμμετρίες, με τον τρόπο ορισμού του $\sqrt{N}$ και με το Πυθαγόρειο τρίγωνο και περνώντας σε Πυθαγόρειες τριάδες βρίσκει κάποιες (Πυθαγόρειες τριάδες) για τις οποίες μπορεί να βγάλει λογικές αποδείξεις για όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις του 17 και κατά**

κάποιο τρόπο να βρει κάποιο εμπόδιο στην περίπτωση του 17 και να κάνει με αυτό τον τρόπο ανακατασκευή.

Δύο είναι τα κύρια μειονεκτήματα της ανακατασκευής αυτής: Κατ' αρχάς γενικεύεται σε άπειρες περιπτώσεις και όχι μόνο σε αυτές που αναφέρει ο Knorr, για την ακρίβεια στις άπειρες περιπτώσεις των μη τετραγωνικών αρρήτων με γενική μορφή $\sqrt{4N+3}$, $\sqrt{8N+5}$, $\sqrt{2(2N+1)}$, $\sqrt{4N}$. Επιπλέον αδυνατεί να ερμηνεύσει σωστά το χωρίο του Πλάτωνος [Θ] το οποίο δεν αφήνει ερωτηματικά στον αναγνώστη, όταν ερμηνευτεί σωστά.

1.3 M. F. Burnyeat

Ο M. Burneat σε αυτοτελές άρθρο του **[Β]** μελετά διεξοδικά το χωρίο [Θ] με σκοπό να ανακατασκευάσει - μελετήσει τη μαθηματική ανακάλυψη που αναφέρεται, μέσα από φιλολογικό – φιλοσοφικό πρίσμα. Κατ' αρχάς τονίζει ότι η άποψή του συγκλίνει με όλων σχεδόν των μελετητών – H.Vogt, E.Sachs, S.T.Heath, K. v Fritz B.L.v d Waerden- στο ότι τα όσα αναφέρονται στο χωρίο αυτό αποτελούν ιστορική πηγή τόσο για το επίτευγμα του Θεοδώρου όσο και του Θεαίτητου **[Β,σελ.490]**. Κύρια διαφωνούσα άποψη είναι αυτή του A.Szabo, σύμφωνα με την οποία ο Θεαίτητος δεν προέβει σε κάποια ανακάλυψη που είναι άξια αναφοράς αφού τα όσα περιγράφονται στο μικρό αυτό χωρίο είναι ήδη γνωστά από παλαιότερους. Οι αντικρουόμενες αυτές θέσεις θα εξηγηθούν διεξοδικά παρακάτω.

Ο Burnyeat μελετάει την ερμηνεία των λέξεων που χρησιμοποιεί ο Πλάτων, επιλέγοντας ως κύριο άξονα τη μετάφραση του J.McDowell. Εξετάζει τις ερμηνείες των λέξεων χωριστά για την εργασία του Θεοδώρου από του Θεαίτητου και είναι της άποψης ότι ο Πλάτων παρόλο που σαφώς θέλει να δηλώσει στο χωρίο αυτό τις λαμπρές ανακαλύψεις των δύο ανδρών **δεν αναφέρει τίποτα για τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν.**

«Δύναμις»:

Ο όρος «δύναμις» αναφέρεται δύο φορές στο χωρίο αυτό και κατά τον Burnyeat έχει δύο ερμηνείες αντίστοιχα, στην πρώτη αναφορά περιγράφει τις αποδείξεις του Θεόδωρου και στη δεύτερη αποτελεί τον ορισμό που κατέληξε να διατυπώσει ο Θεαίτητος. Τα επιχειρήματα που παραθέτει έχουν ως εξής:

Ο Θεόδωρος απέδειξε ότι για συγκεκριμένα τετράγωνα εμβαδού 1 και εμβαδού 3, οι πλευρές αυτών είναι ασύμμετρες. Έκανε το ίδιο για τα τετράγωνα εμβαδού 5, 7 μέχρι 17 συγκρίνοντας τα με το τετράγωνο εμβαδού 1. Στο σημείο αυτό υπάρχει διάσταση απόψεων μεταξύ των Sachs, Vogt, Szabo που πιστεύουν ότι η ερμηνεία είναι «δύναμις = τετράγωνο» και των Heath, von Fritz, vd Waerden και

πολλών άλλων σχολιαστών που πιστεύουν ότι «δύναμις = πλευρά τετραγώνου». Ο όρος «δύναμη», λέει ο Burnyeat ότι δε θα μπορούσε να αναφέρεται στις πλευρές των τετραγώνων αλλά στα ίδια τα τετράγωνα, διότι τότε η ερμηνεία του χωρίου θα ήταν «περί δυνάμεων(πλευρών τετραγώνου) ….3 πόδων, 5 πόδων στο μήκος» που είναι λάθος γιατί οι πλευρές 3, 5 πόδων… είναι σύμμετρες με την πλευρά μήκους 1.

Επικαλείται δύο άλλες χρήσεις του όρου αυτού στον Πολιτικό και στον Τίμαιο όπου ερμηνεύεται ως «τετράγωνο».

Πολιτικός 266αβ

ΞΕ. Καὶ μὴν τό γε ζῷον, ὅσον ἥμερον καὶ ἀγελαῖον,
σχεδὸν πλὴν γενοῖν δυοῖν πᾶν ἤδη κατακεκερμάτισται. τὸ
γὰρ τῶν κυνῶν οὐκ ἐπάξιον καταριθμεῖν γένος ὡς ἐν ἀγελαίοις
θρέμμασιν.
ΝΕ. ΣΩ. Οὐ γὰρ οὖν. ἀλλὰ τίνι δὴ τὼ δύο διαιροῦμεν;
ΞΕ. Ὥιπερ καὶ δίκαιόν γε Θεαίτητόν τε καὶ σὲ διανέμειν,
ἐπειδὴ καὶ γεωμετρίας ἅπτεσθον.
ΝΕ. ΣΩ. Τῷ;
ΞΕ. Τῇ διαμέτρῳ δήπου καὶ πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου
διαμέτρῳ.
ΝΕ. ΣΩ. Πῶς εἶπες;
ΞΕ. Ἡ φύσις, ἣν τὸ γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτη-
ται, μῶν ἄλλως πως εἰς τὴν πορείαν πέφυκεν ἢ καθάπερ ἡ
διάμετρος ἡ **δυνάμει** δίπους;
ΝΕ. ΣΩ. Οὐκ ἄλλως.
ΞΕ. Καὶ μὴν ἥ γε τοῦ λοιποῦ γένους πάλιν ἐστὶ κατὰ
δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος, εἴπερ δυοῖν γέ
ἐστι ποδοῖν δὶς πεφυκυῖα.
ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ' οὐκ ἔστι; καὶ δὴ καὶ σχεδὸν ὃ βούλει
δηλοῦν μανθάνω.
ΞΕ. Πρὸς δὴ τούτοις ἕτερον αὖ τι τῶν πρὸς γέλωτα
εὐδοκιμησάντων ἄν, ὦ Σώκρατες, ἆρα καθορῶμεν ἡμῖν γεγονὸς
ἐν τοῖς διῃρημένοις;
ΝΕ. ΣΩ. Τὸ ποῖον;

Τίμαιος 31c

ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε *ὄγκων*
εἴτε ***δυνάμεων*** ὡντινωνοῦν ᾖ τὸ μέσον, ὅτιπερ τὸ πρῶτον πρὸς
αὐτό, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον, καὶ πάλιν αὖθις, ὅτι τὸ
ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον, τότε τὸ
μέσον μὲν πρῶτον καὶ ἔσχατον γιγνόμενον, τὸ δ' ἔσχατον
καὶ τὸ πρῶτον αὖ μέσα ἀμφότερα, πάνθ' οὕτως ἐξ ἀνάγκης
τὰ αὐτὰ εἶναι συμβήσεται, τὰ αὐτὰ δὲ γενόμενα ἀλλήλοις □ν
πάντα ἔσται.

Αξιοπρόσεχτο είναι ότι ο Burnyeat φαίνεται να τονίζει τη χρήση του όρου στα παραπάνω χωρία από τις οποία δε βγαίνουν ξεκάθαρα συμπεράσματα ενώ αγνοεί άλλες σημαντικές χρήσεις όπως αυτές που συναντούμε στα χωρία Θεαίτητος 156α, Σοφιστής 247e4, 248e5, τις οποίες θα μελετήσουμε στο Κεφ.3.

Ο Θεαίτητος χωρίζει τους αριθμούς σε δύο κατηγορίες, τους τετράγωνους και τους προμήκεις και αντίστοιχα χωρίζει και τις γραμμές σε μήκη και δυνάμεις. Ο όρος «δύναμις» συνήθως αναφέρεται για να ορίσει εμβαδό, επιφάνειες, η μόνη άλλη φορά που βρίσκουμε παραπλήσια χρήση αυτού του όρου είναι οι ορισμοί των «μήκει συμμέτρων» και «δυνάμει συμμέτρων» στο Χ. Βιβλίο των Στοιχείων, το οποίο έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με το ότι γνωρίζουμε ότι συγγραφέας του Βιβλίου αυτού είναι ο ίδιος ο Θεαίτητος.

Ο Burnyeat ονοματίζει τις δυνάμεις «square lines» -σε αντίθεση με τις «length lines» που είναι τα μήκη- θέλοντας να τονίσει με αυτό τον τρόπο, την υπόσταση από την οποία χαρακτηρίζονται. Δηλαδή τα τετράγωνα ενυπάρχουν στον ορισμό των δυνάμεων, όπως τον αποδίδει ο Θεαίτητος.

Τελικά ο Β. συμπεραίνει ότι οι δύο χρήσεις του όρου «δύναμις» επιδέχονται διαφορετικές ερμηνείες. Η εργασία του Θεόδωρου αναφέρεται σε «τετράγωνα» εμβαδού 3, 5…ενώ ο ορισμός που διατυπώνει ο Θεαίτητος στην ουσία είναι ο ορισμός των «Δυνάμει μόνο σύμμετρων» ευθειών.

Δηλαδή κατά τον Burnyeat 147d3 δύναμις = τετράγωνο, ενώ στο
148b1 δύναμις = δυνάμει σύμμετρα.

Αξίζει να αναφέρουμε μία περίτεχνη ερμηνεία, αλλά κάπως *αυθαίρετη* που δίνει ο Szabo, για το πώς προκύπτει γλωσσικά το «δύναμις» να ερμηνεύεται ως «τετράγωνο» **[Bu,σελ498-9]**. Κάθε ευθύγραμμο χωρίο δύναται να τετραγωνιστεί (II.14, VI.13), άρα δύναμις = ικανότητα τετραγωνισμού (square value – όσο δύναται, τετραγωνίζειν) = τετράγωνο!! Μάλιστα αφού διατυπώσει την άποψη ότι οι όροι «δύναμις-μήκος» είναι συντομεύσεις των όρων «δυνάμει σύμμετρο – μήκει σύμμετρο», ισχυροποιεί τη θέση του ότι οι ορισμοί αυτοί δεν αποδίδονται στο Θεαίτητο (??) Ένας τέτοιος ισχυρισμός δε μπορεί παρά να είναι λάθος καθώς οι ορισμοί αυτοί περιέχονται στο Χ Βιβλίο που αποδίδεται στο Θεαίτητο και βρίσκονται

σε πλήρη συμφωνία με όσα περιγράφονται στο [Θ]. Δηλαδή ενώ η αρχική σκέψη του Szabo, ότι οι ορισμοί δύναμις-μήκος αναφέρονται ως συντομεύσεις των ορισμών Χ.2-3 είναι σωστός το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγει είναι ακριβώς το αντίθετο από το αναμενόμενο.

Η χρήση του όρου «δύναμις» είναι πράγματι δυσνόητη στο χωρίο αυτό και έχει προβληματίσει πολύ τους σχολιαστές από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Ο Burnyeat αν και κάνει εύλογες και προσεχτικές παρατηρήσεις εν τούτοις εύκολα υιοθετεί δύο ξεχωριστές ερμηνείες μίας σημαντικής λέξης που χρησιμοποιεί ο Πάτων δύο φορές στο μικρό αυτό χωρίο που εξετάζουμε. Μία τέτοια λύση δεν φαίνεται να είναι σωστή, παρόλα αυτά ο Burnyeat όχι μόνο την προτείνει αλλά με αυτό το κριτήριο σχολιάζει και διορθώνει τις απόψεις άλλων σχολιαστών. Υποστηρίζει ότι τόσο οι Αρχαίοι όσο και σύγχρονοι σχολιαστές στην προσπάθειά τους να δώσουν μία ενιαία ερμηνεία στη λέξη πέφτουν σε σφάλματα. Οι μεν αρχαίοι σωστά ερμηνεύουν το δύναμις στο στίχο 147 ως «Τετράγωνο» αλλά στη συνέχεια προσπαθούν να βγάλουν συμπεράσματα από το διαχωρισμό που κάνει ο Θεαίτητος σε «μήκη» και «δυνάμεις» ως δύο είδη τετραγώνων! Από την άλλη πλευρά οι σύγχρονοι σχολιαστές σωστά ερμηνεύουν το «δύναμις» στο στίχο 148 ως είδος γραμμής αλλά εσφαλμένα – κατά τον Β. για το λόγο που αναφέρθηκε παραπάνω- ερμηνεύουν τις «δυνάμεις» με τις οποίες ασχολήθηκε ο Θεόδωρος ως «πλευρές τετραγώνων».

Ο ισχυρισμός αυτός ισχυροποιείται κατά τον Β. με την ερμηνεία της φράσεως:
«ἐπειδὴ ***ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ***
δυνάμεις *ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν»,*
ως εξής:
«since the ***δυνάμεις*** *were turning out to be* ***unlimited in number****».*

Δηλαδή ο Θεαίτητος καθώς επεξεργαζόταν τα όσα τους έδειξε ο Θεόδωρος -ο οποίος ασχολήθηκε με συγκεκριμένα τετράγωνα δουλεύοντας κατά περίπτωση- σκέφτηκε ότι θα υπάρχουν άπειρες πλευρές τετραγώνων οι οποίες να είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες με την ποδιαία και κάπως έτσι κατέληξε στο συλλογισμό *«δουλεύοντας πιθανώς με μία μέθοδο η οποία να λειτουργεί επ' άπειρο».* Ο Burnyeat σωστά προσπαθεί να ερμηνεύσει το «δύναμις» σε συνδυασμό με την έκφραση

«*ἄπειροι τὸ πλῆθος*», η ερμηνεία της οποίας δεν είναι «επ'άπειρο-άπειρος αριθμός». Διεξοδική μελέτη της τελευταίας έκφρασης παραθέτουμε παρακάτω στο Κεφ. 3.

ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο:

Υπάρχουν 3 ερμηνείες υπό εξέταση για τον όρο αυτό: α) στο σημείο αυτό για κάποιο (κανένα ιδιαίτερο) λόγο σταμάτησε, β) στη σημείο αυτό για κάποιο (ιδιαίτερο) λόγο σταμάτησε και γ) στο σημείο αυτό βρήκε ανυπέρβλητη δυσκολία.

Ο Vogt θεωρεί ότι σωστή ερμηνεία είναι η (α) και μάλιστα πιστεύει ότι αφού ο Θεόδωρος δε σταμάτησε για κάποιο συγκεκριμένο λόγο αυτό σημαίνει πως η μέθοδός του λειτουργεί για όλες τις περιπτώσεις και θα μπορούσε να είναι η απόδειξη που αναφέρεται στο χωρίο *Αριστοτέλους, Αναλυτικά Υστερα* [ΑΥ]. Οπότε στο Θεόδωρο πρέπει να πιστωθεί και η στοιχειοθέτηση θεωρίας ασυμμετρίας και όχι στο Θεαίτητο **[Bu,σελ.504]**.

Σε Ανώνυμα Σχόλια αλλά και σε χωρίο του Ιάμβλιχου υποστηρίζεται η ερμηνεία (α), ενώ το 1957 ο **Hackforth** υποστήριξε ότι το ρήμα στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει τη συνήθη του ερμηνεία που είναι «be held up, **entangled,** βρήκε ανυπέρβλητη δυσκολία». Την ανάλυση του Hackforth δέχεται και ο Knorr όπως αναφέρθηκε προηγούμενα. Ο Β. σε παρατήρηση που παραθέτει στο άρθρο του αναφέρεται διεξοδικά στην ανακατασκευή του Κ. λέγοντας ότι ενώ γενικώς συμφωνούν στην ανάλυση του χωρίου, διαφωνούν στην μελέτη – ερμηνεία αυτής της έκφρασης. Ο Κ. ερμηνεύει την πρόταση αυτή ως «σε αυτή την περίπτωση (17) για κάποιο λόγο αντιμετώπισε ανυπέρβλητη δυσκολία», το '**εν** ταύτη' ισχυρίζεται ότι σημαίνει «σε αυτή την περίπτωση», δηλαδή πιστεύει πως ο Θεόδωρος σταμάτησε γιατί βρήκε δυσκολία στο 17 και όχι ότι απέδειξε και το 17 και βρήκε δυσκολία μετά το 17 (στο 19 δηλαδή). Ο Β. ισχυρίζεται πως αν ο Κ. ήθελε να ερμηνεύσει το αρχαίο αυτό χωρίο με βάση το λεξικό, θα ήταν πιο σωστό να ερμηνεύσει την πρόθεση «εν» σε συνδυασμό με το «ενέσχετο» που σημαίνει 'εξαιτίας του, από αυτό', το «εν» δηλαδή είναι **επεξηγηματικό** και όχι **τοπικό**. Μία τέτοια ερμηνεία όμως δε θα σήμαινε πως στο 17 βρήκε δυσκολία.

Ο Knorr απαντώντας σε αυτή την παρατήρηση λέει ότι οι σχολιαστές στους οποίους αναφέρεται ο Β. (ανώνυμος σχολιαστής στο Θεαίτητο και Ιάμβλιχος) έζησαν 500-700 χρόνια μετά τον Πλάτωνα και δεν αποτελούν καλύτερες πηγές από τα ίδια τα έργα του Πλάτωνα ή συγχρόνων του όπως είναι ο Ηρόδοτος, τους οποίους μελετά το Λεξικό Liddell-Scott-Jones που χρησιμοποιεί ο Hackforth.

Ο Burnyeat επιπλέον υπογραμμίζει ότι το ρήμα ***συνήθως*** σημαίνει αυτό και επιπλέον η σωστή ερμηνεία πρέπει να προκύψει από τη μελέτη όλου του κειμένου και όχι μεμονωμένα από μία λέξη. Δηλαδή πρέπει το ίδιο το κείμενο να μας δώσει κάποια ένδειξη ότι η δυσκολία προέκυψε στο 17 ανεξάρτητη από την ερμηνεία του «ενέσχετο» και αυτό ο Κ. δεν μπορεί να το κάνει. Αντιθέτως ο Β. ισχυρίζεται ότι το κείμενο δεν έχει καμία ένδειξη ότι ο Θεόδωρος δυσκολεύτηκε στο 17 καθώς τη συνέχεια της πρότασης «άπειροι το πλήθος αι δυνάμεις εφαίνονται» την ερμηνεύει ως «επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν να είναι άπειρες στο πλήθος….», δηλαδή σύμφωνα με το Β. ο Θεόδωρος δεν βρήκε δυσκολία στο 17 γιατί αν συνέβη κάτι τέτοιο πώς ο Θεαίτητος θα μπορούσε να βγάλει συμπεράσματα από τη μέθοδο του Θεόδωρου αν αυτή σταματούσε στο 12^{ο} παράδειγμα;;; Πιστεύει ότι η φράση είναι ασαφής και ότι υπάρχουν προβλήματα στην ερμηνεία της. Αφού δεχόμαστε ότι ο Θεαίτητος κατηγοριοποίησε και ομαδοποίησε τα αποτελέσματα του Θεοδώρου στοιχειοθετώντας μία θεωρία ασυμμέτρων μεγεθών, αυτό έρχεται σε αντίθεση με το «ενέσχετο = αντιμετώπισε ανυπέρβλητη δυσκολία» στη περίπτωση του 17 του Θεοδώρου. Από την άλλη πλευρά εάν η μέθοδος του Θεοδώρου λειτουργεί γενικά και δε βρίσκει πρόβλημα στο 17 ή στο 19 τότε οι ορισμοί που ακολουθούν στο κείμενο δεν ανήκουν τόσο πολύ στο Θεαίτητο όσο στο Θεόδωρο. Ο Β. είναι αντίθετος γενικά με την ερμηνεία που δίνει ο Κ. λέγοντας χαρακτηριστικά ότι «δεν είναι δυνατό να θεωρεί κάποιος το χωρίο αυτό ως αδιάψευστη ιστορική πηγή και ταυτόχρονα να αγνοεί κάποια κρίσιμα στοιχεία».

Ο Knorr απαντά και σε αυτή την παρατήρηση λέγοντας πως αν δεχτούμε ότι το χωρίο αποτελεί ιστορική πηγή –και ο Burnyeat συμφωνεί σε αυτό- τότε δεν έχουμε παρά να δεχτούμε ότι ο Θεόδωρος απέδειξε τις ασυμμετρίες από το 3 μέχρι το 17 και ο Θεαίτητος είναι αυτός που ομαδοποίησε τους αριθμούς και τις γραμμές στοιχειοθετώντας θεωρία λόγου. Σύμφωνα με αυτό και αφού δεχτούμε ότι το χωρίο αποτελεί ιστορική πηγή και ταυτόχρονα δεχτούμε ότι ο Θεόδωρος δεν αντιμετώπισε

δυσκολία στην τελευταία περίπτωση με την οποία ασχολήθηκε (κατά τον Κ. το 17) αλλά ότι απλώς σταμάτησε –σύμφωνα με τον Β.- ενώ η μέθοδός του λειτουργεί για όλες τις περιπτώσεις τότε θα πέσουμε στο ατόπημα (στο οποίο πέφτει και ο Β.) να ισχυριστούμε ότι στο Θεόδωρο πρέπει να αποδοθεί η στοιχειοθέτηση θεωρία ασυμμέτρων μεγεθών (Χ.Βιβλίο)!

Σε αυτό το σημείο, πριν κλείσουμε την ενότητα των Knorr – Burnyeat, θα πρέπει να υπογραμμίσουμε πως κανένας από τους προαναφερθέντες δεν εξετάζει τη σημασία του «μέχρι» στο χωρίο αυτό. Οι Hardy &Wright είναι ίσως οι πρώτοι που τονίζουν τη καθοριστική συμβολή και ειδική σημασία που παρουσιάζει στο χωρίο αυτό, χωρίς ωστόσο να παραθέτουν επιχειρήματα για το αν ερμηνεύεται ως «μέχρι και το 17-συμπεριλαμβανομένου του 17» ή «μέχρι το 17-χωρίς να συμπεριλαμβάνεται το 17». Επιχειρήματα υπέρ της πρώτης ερμηνείας παρατίθενται στο Κεφ. 3.

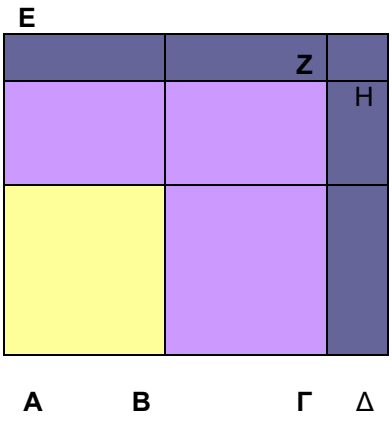
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΔΡΟΜΗ – ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ *«ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗ» ΜΕΘΟΔΟ.*

2.1 Η. ZEUTHEN

Ο Zeuthen είναι ο πρώτος ο οποίος θεωρεί πως ο Θεόδωρος εργάστηκε ανθυφαιρετικά χρησιμοποιώντας και επεξεργάζοντας τις ασύμμετρες επιφάνειες με θεωρήματα γεωμετρικής άλγεβρας –Βιβλία Ι, ΙΙ των Στοιχείων.

❖ $\sqrt{5}$: **Ανθ ($\sqrt{5}$,1)**



ΑΒ = ρ = 1

ΒΓ = ρ = 1

ΑΔ = α = $\sqrt{5}$

Από τη διαφορά των τετραγώνων ΑΔ, ΑΓ προκύπτει ο γνώμων $\alpha^2 - (2\rho)^2 = \rho^2$

α > 2ρ, ΑΔ = 2 ΑΒ + ΓΔ ή α = 2ρ + (α-2ρ)

Το πρώτο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο είναι : **α-2ρ**

ΕΖ = ΓΗ = 2 ΑΒ ΓΔ = 2 ρ (α-2ρ)

Γνώμων ΕΖΗΔ = 4 ΑΒ ΓΔ + $ΓΔ^2$ = 4ρ (α-2ρ) + $(α-2ρ)^2$ = $ρ^2$ = $ΑΒ^2$.

ΑΒ = 4ΓΔ + (ΓΔ/ΑΒ) ΓΔ, έστω ΑΛ = 4ΓΔ άρα το δεύτερο ανθυφαιρετικό υπόλοιπο:

ΑΒ - ΑΛ = ΛΒ ή ρ – 4(α-2ρ) = (α-2ρ)/ρ * (α-2ρ) = $\mathbf{(α-2ρ)^2}$

Παρατηρούμε πως ισχύει ΛΒ/ΓΔ = ΓΔ/ΑΒ ή $(α-2ρ)^2$/(α-2ρ) = (α-2ρ)/ρ, δηλαδή τα διαδοχικά υπόλοιπα βρίσκονται στην ίδια αναλογία και φαίνεται να συνεχίζουν όμοια επ' άπειρον. Από αυτό συμπεραίνουμε πως η ανθυφαίρεση δε θα τελειώσει ποτέ άρα τα αρχικά μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Δηλαδή ο Zeuthen χρησιμοποιώντας τους γνώμονες και επεξεργάζοντας τους με θεωρήματα γεωμετρικής άλγεβρας βρήκε πως τα διαδοχικά ανθυφαιρετικά υπόλοιπα βρίσκονται στην ίδια αναλογία, στην περίπτωση του $\sqrt{5}$ είναι τα ($\sqrt{5}$ -2), $(\sqrt{5}-2)^2$, $(\sqrt{5}-2)^3$… και αναπτύσσοντας την εικασία σύμφωνα με την οποία αρκεί, μετά από ένα ορισμένο αριθμό βημάτων, *η ανθυφαίρεση να οδηγήσει σε ένα ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων ο λόγος των οποίων να είναι ίδιος με το λόγο του ζεύγους από το οποίο ξεκίνησε*. Σε αυτή την περίπτωση συμπεραίνουμε πως **η διαδικασία δε θα τελειώσει ποτέ**.

Ένα πρώτο σχόλιο ως προς τη μέθοδο αυτή είναι πως αποτελεί αναχρονιστικό λάθος η χρήση λόγων, αφού στην εποχή του Θεόδωρου δεν υπήρχε ανεπτυγμένη θεωρία λόγων. Η απόδειξη ασυμμετρίας των μεγεθών υπό εξέταση πρέπει να βρίσκεται σε πιο πρώιμο στάδιο, απαλλαγμένη δηλαδή από κάθε μορφή αναλογίας.

Επίσης ο Knorr παρατηρεί πως απόδειξη ασυμμετριών άλλων ριζών δεν είναι εφικτές με αυτή τη μέθοδο καθώς τα υπόλοιπα αποκτούν ισο λόγο μετά από ένα αριθμό ανθυφαιρετικών σχέσεων όπου οι πράξεις δεν είναι εύκολο να γίνουν με τη βοήθεια γεωμετρικής άλγεβρας. Για παράδειγμα στην περίπτωση της Ανθ ($\sqrt{13}$,1) τα διαδοχικά υπόλοιπα είναι τα εξείς:

$(\sqrt{13}-3), (4-\sqrt{13}), (2\sqrt{13}-7), (11-3\sqrt{13}), (5\sqrt{13}-18), (119-33\sqrt{13})$

Ισχύει: $(\sqrt{13}-3) = (5\sqrt{13}-18):(119-33\sqrt{13})$.

Ο Zeuthen αναπτύσσει τη μέθοδο αυτών των αποδείξεων στο άρθρο '*Sur la constitution des livres arithmetiques des Elements d' Euclide et leur rapport a la question de l' irrationalite*, (1910) 395-435', στο οποίο περιγράφονται αναλυτικά οι αποδείξεις ασυμμετρίες όλων των υπό εξέταση μεγεθών.

2.2 B.L. van der WAERDEN

Ο Van der WAERDEN υπογραμμίζει ότι σαφώς το χωρίο του Πλάτωνος λαμβάνεται ως έγκυρη πηγή για τα όσα αποκαλύπτει τόσο για τον Θεόδωρο όσο και για τον Θεαίτητο διότι το χωρίο έχει εισαχθεί σκόπιμα από το συγγραφέα για να περιγράψει λεπτομερώς τι είχε βρεθεί προηγουμένως από το Θεόδωρο και τι πρόσθεσε σε αυτό ο Θεαίτητος. Ο διαχωρισμός της συνεισφοράς του Θεαίτητου από εκείνη του Θεοδώρου είναι ιστορικώς ακριβή και «δεν μπορεί ο Πλάτων να είχε πρόθεση να αποδώσει στο Θεόδωρο αυτά που οφείλονται στον Θεαίτητο και αντιστρόφως» **[VdW, σελ.160-162]**.

Μελετώντας το χωρίο [Θ] καταλήγει στα παρακάτω συμπεράσματα – ερμηνείες. Κατ' αρχάς επισημαίνει ότι ο όρος "*δύναμις*" υποδεικνύει πλευρά τετραγώνου και όχι εμβαδό τετραγώνου. Στο δέκατο Βιβλίο των Στοιχείων οι εκφράσεις «μήκει – δυνάμει σύμμετρος» αναφέρονται στην ύπαρξη κοινού μέτρου και όχι σε τετράγωνα. Από φιλολογική άποψη ο όρος *δύναμις* μπορεί να σημαίνει πολύ καλά την πλευρά η οποία παράγει ένα τετράγωνο, δεν χρειάζεται, όπως πιστεύει ο Tannery, να αντικατασταθεί η λέξη *δύναμις* με τη λέξη *δυναμένη*.

Στη συνέχεια αναφέρει, σε αντίθεση με τα όσα ισχυρίζεται ο Knorr, ότι «λίγο ενδιαφέρει *πώς ο Θεόδωρος κατασκεύασε τις πλευρές των τετραγώνων* εμβαδού 3, 5, 7…17 τετραγωνικών πόδων. Περισσότερο σημαντικό είναι *πώς έδειξε ότι οι πλευρές αυτές είναι ασύμμετρες προς την ποδιαία*».

Το "*αποφαίνων*" υπογραμμίζει ότι σημαίνει «απέδειξε» και όχι απλώς «υπέδειξε» ή «έκανε φανερό». Άλλωστε στην εποχή του Θεόδωρου, προς τα τέλη του 5^{ου} αι. όχι μόνο οι απαιτήσεις για αυστηρές αποδείξεις είχαν φτάσει σε υψηλό

επίπεδο, αλλά και στο χωρίο γίνεται σαφής διαχωρισμός από τον Πλάτωνα μεταξύ του επιτεύγματος του Θεοδώρου, που ήταν η απόδειξη της ασυμμετρίας συγκεκριμένων μη τετραγωνικών αρρήτων, και του επιτεύγματος του Θεαίτητου, που ήταν η σύσταση θεωρία αλόγων μεγεθών.

Ο Θεόδωρος δεν ήταν αριθμοθεωρητικός αλλά γεωμέτρης, οπότε ο v.d. Waerden κινείται προς την κατεύθυνση της γεωμετρικής απόδειξης. Ένα γεωμετρικό κριτήριο για την ασυμμετρία δύο ευθυγράμμων τμημάτων αποτελεί η πρόταση Χ.2. Η ιδέα της διαδοχικής αφαίρεσης ξεκινάει από την περίοδο των Πυθαγορείων και περιγράφεται στο VII Βιβλίο. *Εάν ο Θεόδωρος χρησιμοποίησε αυτό το κριτήριο, τότε γίνεται αμέσως κατανοητό γιατί έπρεπε να ασχοληθεί χωριστά με καθεμιά από τις περιπτώσεις υπό εξέταση.*

Η πρόταση ανακατασκευής του v.d. Waerden βασίζεται στην πρόταση Χ.2 και σε μία εικασία στην οποία κατέληξε ο ίδιος αναπτύσσοντας την υπόθεση του Zeuthen. Η Πρόταση Χ.2 διατυπώνεται ως εξής: *εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από του μεγαλυτέρου, το εκάστοτε δε υπόλοιπο ουδέποτε καταμετρεί το προηγούμενο αυτού, τα μεγέθη τότε θα είναι ασύμμετρα*. Για να μπορέσει να δείξει κάποιος όμως ότι *η ανθυφαίρεση ενός ζεύγος μεγεθών θα είναι άπειρη* ο v.d. Waerden ανέπτυξε την υπόθεση του Zeuthen, σύμφωνα με την οποία αρκεί, μετά από ένα ορισμένο αριθμό βημάτων, *η ανθυφαίρεση να οδηγήσει σε ένα ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων ο λόγος των οποίων να είναι ίδιος με το λόγο του ζεύγους από το οποίο ξεκίνησε*. Σε αυτή την περίπτωση θα συμπεραίνει ότι **η διαδικασία δε θα τελειώσει ποτέ**.

Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά τις αποδείξεις που συνοπτικά παρουσιάζει ο Van der Waerden στην Αφύπνιση της Επιστήμης **[VdW, σελ.166-7]**.

❖ $\sqrt{3}$: **Ανθ ($\sqrt{3}$,1)**

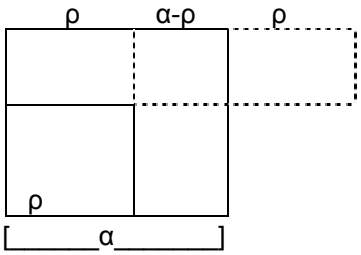
Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 3 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Τότε έχουμε $a^2 = 3\rho^2$.

$\alpha^2 > 3\rho^2 \Rightarrow \alpha > \rho$, άρα

$\alpha = 1\times\rho + (\alpha-\rho)$.

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζέυγος (ρ, α-ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - \rho^2$ είναι ένας τετράγωνος **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-ρ και α+ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι $(\alpha-\rho)(\alpha+\rho) = 2\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

$$\rho:(\alpha-\rho) = (\alpha+\rho):2\rho. \qquad (1)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,2ρ).

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και αντικαθιστούμε το ζεύγος (α+ρ,2ρ) από ένα άλλο ζεύγος που να έχει τον ίδιο λόγο με τον λόγο (α+ρ):2ρ. Έχουμε:

$$(\alpha+\rho) : 2\rho = \rho:(\alpha-\rho) \quad (2)$$

Η αναλογία (2) αποδεικνύεται ακριβώς όπως η αναλογία (1).

Αντικαθιστούμε το ζεύγος (α+ρ,2ρ) με το ζεύγος (ρ,α-ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στην ίδια αναλογία από την οποία ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται συνεχώς άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

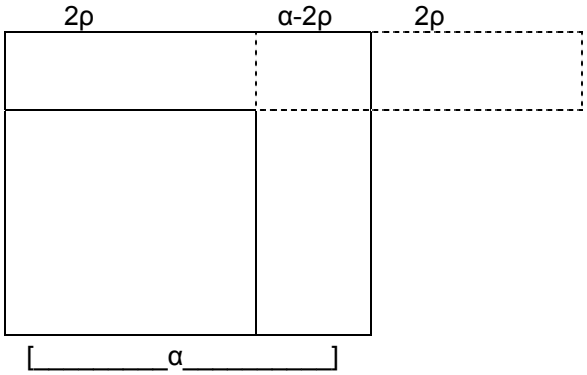
❖ $\sqrt{5}$: **Ανθ ($\sqrt{5}$,1)**

$a^2 = 5\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 5 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 4\rho^2$ => α > 2ρ, άρα α = 2×ρ + (α-2ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-2ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 4\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-2ρ και α+2ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-2ρ)(α+2ρ) = ρ^2 αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-ρ) = (α+ρ):ρ. (1)

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,ρ).

α+ρ = 3ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ, α-2ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

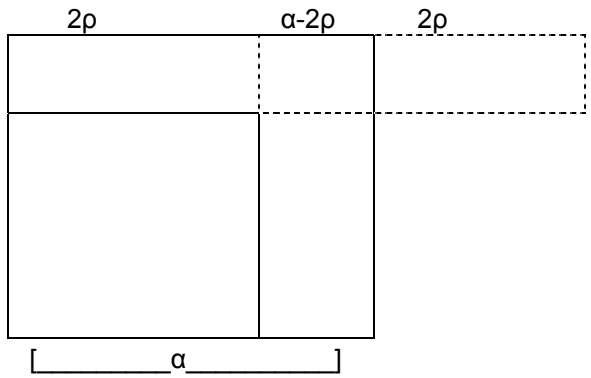
❖ $\sqrt{6}$: **Ανθ ($\sqrt{6}$,1)**

$a^2 = 6\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 6 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 4\rho^2$ => α > 2ρ, άρα α = 2×ρ + (α-2ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-2ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 4\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-2ρ και α+2ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-2ρ)(α+2ρ) = $2\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):2ρ. (1)

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,2ρ).

α+2ρ = 2x2ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (2ρ, α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

2ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,ρ).

α+2ρ = 4ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ, α-2ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

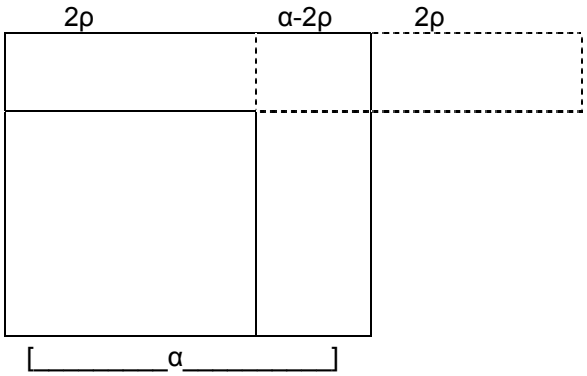
❖ $\sqrt{7}$: **Ανθ ($\sqrt{7}$,1)**

$a^2 = 7\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 7 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 4\rho^2$ => α > 2ρ, άρα α = 2×ρ + (α-2ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-2ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 4\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-2ρ και α+2ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-2ρ)(α+2ρ) = $3\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):3ρ. (1)

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,3ρ).

α+2ρ = 3ρ + (α-ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

3ρ:(α-ρ) = (α+ρ):2ρ.

Ατικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,2ρ).

α+ρ = 2ρ + (α-ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,2ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (2ρ,α-ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

2ρ:(α-ρ) = (α+ρ):3ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,3ρ).

α+ρ = 3ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ3,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

3ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,ρ).

α+2ρ = 4ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ, α-2ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

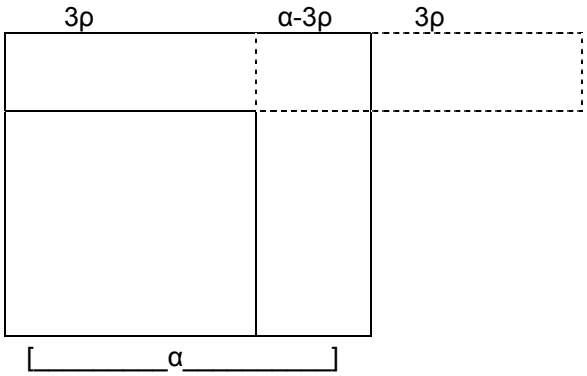
❖ $\sqrt{10}$: **Ανθ ($\sqrt{10}$,1)**

$a^2 = 10\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 10 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 9\rho^2$ => α > 3ρ, άρα α = 3ρ + (α-3ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-3ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 9\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-3ρ και α+3ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-3ρ)(α+3ρ) = ρ^2 αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ).

α+3ρ = 6ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

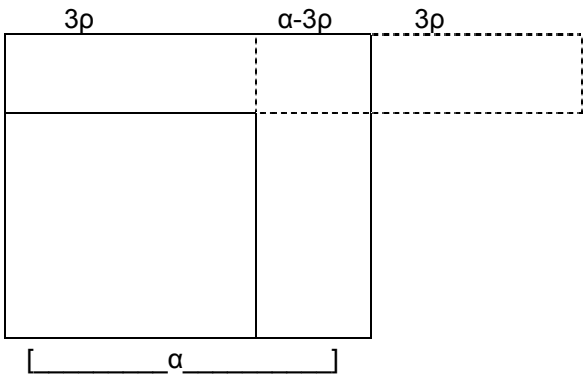
❖ $\sqrt{11}$: **Ανθ ($\sqrt{11}$,1)**

$a^2 = 11\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 11 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 9\rho^2$ => α > 3ρ, άρα α = 3ρ + (α-3ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-3ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 9\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-3ρ και α+3ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-3ρ)(α+3ρ) = $2\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):2ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,2ρ).

α+3ρ = 3x2ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,2ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (2ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

2ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ).

α+3ρ = 6ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

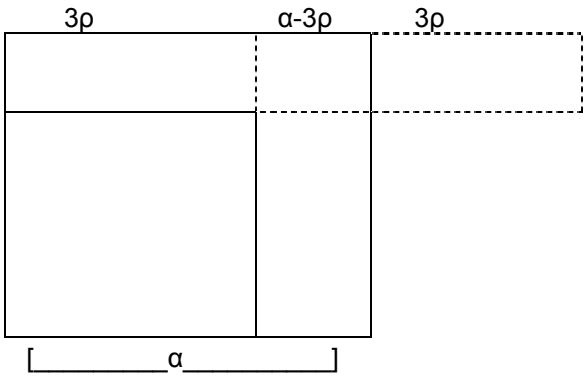
❖ $\sqrt{13}$: **Ανθ ($\sqrt{13}$,1)**

$a^2 = 13\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 13 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 9\rho^2$ => α > 3ρ, άρα α = 3ρ + (α-3ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-3ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 9\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-3ρ και α+3ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-3ρ)(α+3ρ) = $4\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):4ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,4ρ).

α+3ρ = 4ρ + (α-ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,4ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (4ρ,α-ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (4ρ,α-ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

4ρ:(α-ρ) = (α+ρ):3ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (4ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,3ρ).

α+ρ = 3ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,3ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

$$3\rho:(\alpha-2\rho) = (\alpha+2\rho):3\rho.$$

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,3ρ).

$\alpha+2\rho = 3\rho + (\alpha-\rho)$.

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,3ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

$$3\rho:(\alpha-\rho) = (\alpha+\rho):4\rho.$$

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,4ρ).

$\alpha+\rho = 4\rho + (\alpha-3\rho)$.

Το ζεύγος μεγεθών (α+ρ,4ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (4ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (4ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

$$4\rho:(\alpha-3\rho) = (\alpha+3\rho):\rho.$$

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (4ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ).

$\alpha+3\rho = 6\rho + (\alpha-3\rho)$.

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

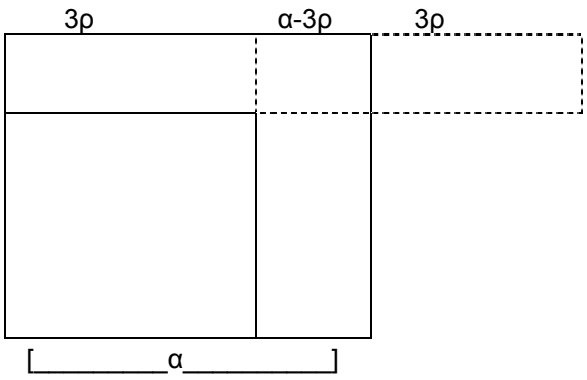
❖ $\sqrt{14}$: **Ανθ ($\sqrt{14}$,1)**

$a^2 = 14\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 14 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 9\rho^2 \Rightarrow \alpha > 3\rho$, άρα $\alpha = 3\rho + (\alpha-3\rho)$.

Το αρχικό ζεύγος μεγεθώς (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-3ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 9\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-3ρ και α+3ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-3ρ)(α+3ρ) = $5\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):5ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,5ρ).

α+3ρ = 5ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,5ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (5ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

5ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):2ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,2ρ).

α+2ρ = 2x2ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,2ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (2ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

2ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):5ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,5ρ).

α+2ρ = 5ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,5ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (5ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

5ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ).
α+3ρ = 6ρ + (α-3ρ).
Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

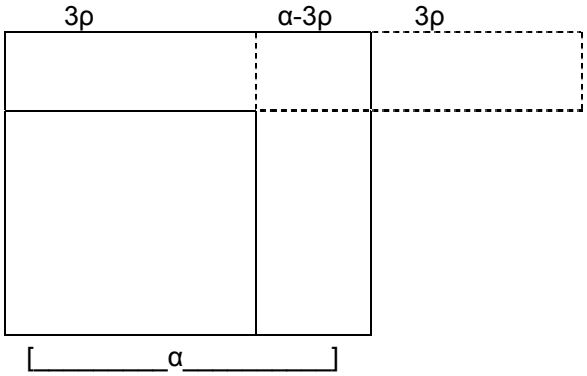
❖ $\sqrt{15}$: **Ανθ ($\sqrt{15}$,1)**

$a^2 = 15\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 15 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 9\rho^2$ => α > 3ρ, άρα α = 3ρ + (α-3ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθών (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-3ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 9\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-3ρ και α+3ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-3ρ)(α+3ρ) = $6\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):6ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,6ρ).

α+3ρ = 6ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,6ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (6ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (6ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

6ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (6ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ).

α+3ρ = 6ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-3ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

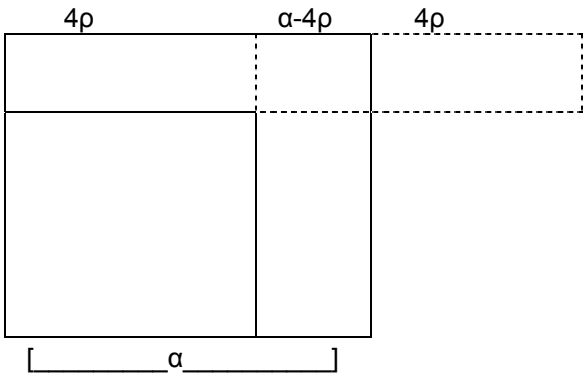
❖ $\sqrt{17}$: **Ανθ ($\sqrt{17}$,1)**

$a^2 = 17\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 17 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 16\rho^2$ => α > 4ρ, άρα α = 4ρ + (α-4ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθών (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-4ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-4ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 16\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-4ρ και α+4ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-4ρ)(α+4ρ) = ρ^2 αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-4ρ) = (α+4ρ):ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-4ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,ρ).

α+4ρ = 8ρ + (α-4ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-4ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

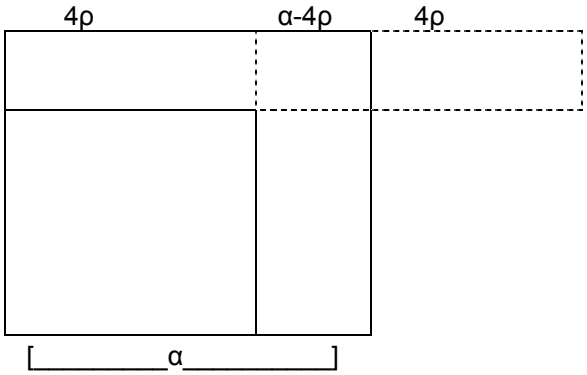
❖ $\sqrt{19}$: **Ανθ ($\sqrt{19}$,1)**

$a^2 = 19\rho^2$:

Έστω ότι α είναι η πλευρά ενός τετραγώνου 19 τετραγωνικών ποδών και έστω ότι ρ είναι η μονάδα μήκους. Ισχύει $\alpha^2 > 16\rho^2$ => α > 4ρ, άρα α = 4ρ + (α-4ρ).

Το αρχικό ζεύγος μεγεθών (α, ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος (ρ, α-4ρ).

Αντικαθιστούμε τα μεγέθη (ρ, α-4ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που να έχουν τον ίδιο λόγο.



Η διαφορά $a^2 - 16\rho^2$ είναι ένας **«γνώμων».** Αν το επάνω μέρος αφαιρεθεί και κατόπιν προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-4ρ και α+4ρ. Από το σχήμα προκύπτει ότι (α-4ρ)(α+4ρ) = $3\rho^2$ αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων, δηλαδή

ρ:(α-4ρ) = (α+4ρ):3ρ.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-4ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,3ρ).

α+4ρ = 2x3ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,3ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

3ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):5ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,5ρ).

α+2ρ = 5ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,5ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (5ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

5ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):2ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,2ρ).

α+3ρ = 3x2ρ + (α-3ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,2ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-3ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (2ρ,α-3ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

2ρ:(α-3ρ) = (α+3ρ):5ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (2ρ,α-3ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,5ρ).

α+3ρ = 5ρ + (α-2ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+3ρ,5ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-2ρ).

Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (5ρ,α-2ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

5ρ:(α-2ρ) = (α+2ρ):3ρ.

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (5ρ,α-2ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,3ρ).

α+2ρ = 2x3ρ + (α-4ρ).

Το ζεύγος μεγεθών (α+2ρ,3ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-4ρ).
Θα αντικαταστήσουμε όμοια, με χρήση γνώμονα, τα μεγέθη (3ρ,α-4ρ) με δύο οποιαδήποτε άλλα μεγέθη που να έχουν τον ίδιο λόγο.

$$3\rho:(\alpha-4\rho) = (\alpha+4\rho):\rho.$$

Αντικαθιστούμε το ζεύγος μεγεθών (3ρ,α-4ρ) από το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,ρ).
α+4ρ = 8ρ + (α-4ρ).
Το ζεύγος μεγεθών (α+4ρ,ρ) αντικαθίσταται από το ζεύγος μεγεθών (ρ,α-4ρ) και παρατηρούμε ότι φτάσαμε στο ίδιο ζεύγος μεγεθών από το οποίο ξεκινήσαμε. Οπότε τα βήματα της ανθυφαίρεσης θα επαναλαμβάνονται με την ίδια διαδικασία συνεχώς, άρα η ανθυφαίρεση δεν θα τερματίσει ποτέ. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α και ρ από τα οποία άρχισε η διαδικασία είναι ασύμμετρα.

Ο vd Waerden εξηγεί πως η περίπτωση του $\sqrt{19}$ είναι εξαιρετικά πολύπλοκη, γιατί αποτελεί αλληλουχία έξι αναλογιών οι οποίες πρέπει να αποδειχθούν μία προς μία με τη βοήθεια του λογισμού των εμβαδών, με αποτέλεσμα να γίνεται απολύτως κατανοητό γιατί ο Θεόδωρος σταμάτησε στο $\sqrt{17}$. Ο Knorr θεωρεί, *δικαίως,* πως ο vd Waerden υπερβάλλει στη δυσκολία της περίπτωσης του $\sqrt{19}$ με αυτή τη μέθοδο, καθώς διαφέρει μόνο κατά μία αναλογία από την περίπτωση του $\sqrt{13}$ ή κατά δύο αναλογίες από τις περιπτώσεις των $\sqrt{7}$, $\sqrt{14}$ **[Kno,σελ.121]**.

Στις παραπάνω αποδείξεις παρατηρούμε πως υπάρχει αναχρονιστικό λάθος καθώς ο vd Waerden κάνει συνεχή χρήση λόγων, ενώ στην εποχή του Θεόδωρου δεν υπήρχε ανεπτυγμένη θεωρία λόγων. Η απόδειξη ασυμμετρίας των μεγεθών υπό εξέταση πρέπει να βρίσκεται σε πιο πρώιμο στάδιο, απαλλαγμένη δηλαδή από κάθε μορφή αναλογίας.

Παρά ταύτα, αρκεί να τονίσουμε ότι η ανακατασκευή του vd Waerden είναι πολύ σημαντική διότι δεν είναι απλώς ανθυφαιρετική, αλλά χρησιμοποιεί την ανθυφαιρετική διαδικασία με τρόπο που να αρμόζει στη φιλοσοφία του Πλάτωνος. Προχωρεί τις διαδοχικές διαιρέσεις αντικαθιστώντας συνεχώς λόγους και κατόπιν μέσω του κριτήριο του λόγου πετυχαίνει την απόδειξη της περιοδικότητας και συνεπώς τη «γνώση του όντως». Άλλωστε ο vd Waerden γενικότερα μελετώντας τα Αρχαία Μαθηματικά αντιπαραβάλει καθ' όλες τις χρονικές περιόδους την ανάπτυξη των μαθηματικών με τα φιλοσοφικά ρεύματα της εποχής εξασφαλίζοντας έτσι την εγκυρότητα και αρτιότητα των συμπερασμάτων του.

2.3 W.R.KNORR

Μετά τον v.d. Waerden, περίτεχνη ανθυφαιρετική ανακατασκευή παραθέτει ο Fowler. Με μία μέθοδο που την ονομάζει «μέθοδο των γνωμόνων» ανακατασκευάζει τις ασυμμετρίες των μεγεθών που εξετάζουμε, επιτυγχάνοντας όχι μόνο την απόδειξη της ασυμμετρίας αλλά και την πλήρη περιγραφή του κάθε μεγέθους. Στο τελευταίο βήμα αυτής της μεθόδου ο Fowler αναφέρεται σε μία «ενδιάμεση» θεωρία λόγων μεγεθών την οποία όπως χαρακτηριστικά λέει «περιγράφει λεπτομερώς ο Knorr στο Παράρτημα Β **[Kno,σελ.332-342]**, γι' αυτό δεν υπάρχει ανάγκη να την αντιγράψει αυτούσια, παρά τη θεωρεί ως δεδομένη». Την ανάλυση αυτή παραθέτουμε σε αυτό το σημείο αφ' ενός για να γίνει πλήρως κατανοητή η «μέθοδος των γνωμόνων» και αφ' ετέρου για να επισημάνουμε και να υπογραμμίσουμε ένα αναχρονιστικό λάθος που υπάρχει στην εν λόγο ανακατασκευή, το οποίο ο Fowler δε φαίνεται να παρατηρεί.

Κύρια πηγή για την «ενδιάμεση» θεωρία λόγων μεγεθών (ανθυφαιρετική) αποτελεί το παρακάτω χωρίο των Τοπικών, Αριστοτέλους [ΑΤ] όπου αναφέρεται σε μία θεωρία μεγεθών που χρησιμοποιούσαν οι «Αρχαίοι».

Αριστοτέλους Τοπικά 158b24-159a2

ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθή-
μασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον
ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥη-
θέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· τὴν γὰρ αὐτὴν ***ἀντ-***
αναίρεσιν **ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί·** ἔστι **δ' ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος**. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τι-
θεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος,
ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπι-
χειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι)· ἂν δὲ μὴ
τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως
ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους
ἔχει.

Ο Αριστοτέλης καθώς εξετάζει την αξιωματική θεμελίωση και διατυπώνει παρατηρήσεις, αναφέρει ότι «όταν υπάρχει έλλειψη του κατάλληλου ορισμού δεν

είναι εύκολο να τα αποδείξουμε κάποιες θέσεις». Δηλαδή όταν έχουμε κάποιο πρόβλημα αποδείξεως πρότασης ή εξάλειψης αιτήματος, από ότι μας λέει ο Αριστοτέλης ο κατάλληλος τρόπος να το κάνουμε αυτό δεν είναι να ασχοληθούμε με κάποιου είδους δύσκολες αποδείξεις και περίπλοκους υπολογισμούς, αλλά να αναζητήσουμε τον κατάλληλο ορισμό. Τότε τα αναπόδεικτα γίνονται προφανή και μπορούμε με ευκολία να προχωρήσουμε σε αποδείξεις προτάσεων. Προκειμένου να στηρίξει αυτό το συλλογισμό παραθέτει το **εξής παράδειγμα**. **Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή** ανέκυψε το πρόβλημα απόδειξης της προτάσεως **«η τέμνουσα πλευρά ενός χωρίου διαιρεί όμοια το χωρίο και την ευθεία»**, η οποία δεν ήταν δυνατό να αποδειχθεί πρωτού βρεθεί ο κατάλληλος ορισμός. Ο ορισμός αυτός είναι ότι τα χωρία και οι γραμμές έχουν τον ***ίδιο λόγο***.

Αλεξάνδρου Αφροδισέως, Εις Τοπικά Αριστοτέλους 545,1-31

p. 158b29 **Ἔοικε δὲ κἀν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι.**

Ὅτι οὐ μόνον **ἐν τοῖς λόγοις** καὶ ἐν τῷ διαλέγεσθαι ἀλλὰ καὶ **ἐν τοῖς μαθήμασιν** ἔνια δι' **ὁρισμοῦ ἔλλειψιν δυσαπολόγητά** ἐστιν· τὸ γὰρ οὐ ῥᾴδιον ἀπογράφεσθαι εἶπεν ἀντὶ τοῦ '**οὐ ῥᾴδιον ἀποδείκνυσθαι**', συνιστὰς ὅτι ἐν πολλοῖς τῶν ὄντων προβλήμασιν ὁρισμοῦ δεῖ. **παρα-δείγματι** δὲ τοῦδε ὡς δεικνυμένῳ καὶ ἀσαφεῖ κέχρηται τῷ ὅτι **ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον**. ἔστι δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι ἐὰν ἐπίπεδον παραλληλόγραμμον ᾖ, ἀχθῇ δ' ἐν αὐτῷ μιᾷ τῶν πλευρῶν παράλληλος, ἡ παράλληλος **ὁμοίως διαιρεῖ τὴν γραμμὴν καὶ τὸ πᾶν χωρίον, τουτέστιν ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ**. τοῦτο γὰρ ὁμοίως μὲν λεγόμενον οὐκ ἔστι γνώριμον· ῥηθέντος μέντοι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀνάλογον γνώριμον γίνεται ὅτι ἀνάλογον ὑπὸ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου τέμνεται ἥ τε γραμμὴ καὶ τὸ χωρίον. **ἔστι δὲ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο**, οὗτος· ***ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις***· **αὐτὸς δὲ τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀνταναίρεσιν εἴρηκε**.

Ο Αλέξανδρος εξηγεί πιο αναλυτικά όσα διατυπώθηκαν παραπάνω από τον Αριστοτέλη. Αναφέρει την πρόταση «αν έχουμε ένα παραλληλόγραμμο χωρίο και φέρουμε μία παράλληλη σε μία από τις πλευρές, η παράλληλος αυτή ομοίως διαιρεί τη γραμμή και το όλο το χωρίο». Δηλαδή «η γραμμή και το χωρίο έχουν την ίδια αναλογία. **Ο ορισμός της αναλογίας 'που χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι' είναι, ότι**

οι γραμμές και τα χωρία έχουν την *ίδια ανθυφαίρεση*». Η ανταναίρεση που αναφέρει ο Αριστοτέλης ταυτίζεται με τον όρο ανθυφαίρεση.

Ο Αλέξανδρος στο σχόλιο που κάνει στο χωρίο του Αριστοτέλη τονίζει '*ο ορισμός που χρησιμοποιούσαν οι Αρχαίοι*' θέλοντας να μας δηλώσει ότι υπήρχε κάποια θεωρία λόγων μεγεθών προηγούμενης αυτής που μαθαίνουμε στον Ευκλείδη στο 5^{ο} βιβλίο, δηλαδή της θεωρίας του Ευδόξου. Η θεωρία αυτή στηριζόταν στην ανταναίρεση όπου στον Ευκλείδη στα βιβλία VII-X την μαθαίνουμε ως ανθυφαίρεση.

Ο Knorr στο Παράρτημα Β που έχει στο βιβλίο του παραθέτει μία ανακατασκευή θεωρίας λόγων μεγεθών ανθυφαιρετικού χαρακτήρα. Η ανακατασκευή αυτή τοποθετείται χρονικά **πριν** από τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου (*V. Βιβλίο των Στοιχείων*).

Ο Knorr θέτει ως ορισμό σύμφωνα με το χωρίο των Τοπικών του Αριστοτέλη τον παρακάτω:

Ορισμός ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ:

Έστω α>β, γ>δ μεγέθη, α/β = γ/δ αν και μόνο αν ΑΝΘ(α,β) = ΑΝΘ(γ,δ).

Αυτόν τον ορισμό χρησιμοποιεί ο Fowler στη «μέθοδο των Γνωμόνων». Παρακάτω παραθέτουμε τις βασικές προτάσεις που στοιχειοθετούν την «ενδιάμεση» Θεωρία Λόγων, προκειμένου να διαπιστώσουμε ένα σημαντικό αναχρονιστικό λάθος στο οποίο ολισθαίνει ο Knorr καθώς αποδεικνύει μία θεμελιώδη πρόταση.

Θεωρία λόγων μεγεθών με βάση τον παραπάνω ορισμό.

❖ Πρόταση Α: **Για δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ ισχύει α/β = αγ / βγ.**

Απόδειξη:

Έστω Ανθ(α,β) = $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots]$, ισχύει τότε **α =** κ_1**β+** β_1**,** β_1 **< β (1)**

Αρκεί να δείξουμε ότι **Ανθ(αγ,βγ) = [**$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$**,…].**

Από Πρόταση ΙΙ.1 υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα γ τέτοιο ώστε:

[**Πρόταση ΙΙ.1**
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις].

$\boldsymbol{\alpha}\,\gamma = \kappa_1 \boldsymbol{\beta}\,\gamma + \beta_1\gamma,\ \ \beta_1\gamma < \boldsymbol{\beta}\,\gamma$,

από όπου λαμβάνουμε **Ανθ(αγ,βγ) = [** κ_1**,Ανθ (βγ,** $\beta_1\gamma$**)]**

(1) => $\boldsymbol{\beta} = \kappa_2\ \beta_1 + \beta_2,\ \beta_2 < \beta_1$

Από Πρόταση ΙΙ.1 υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα γ τέτοιο ώστε:

(2) $\boldsymbol{\beta}\,\gamma = \kappa_2\ \beta_1\ \gamma + \beta_2\ \gamma,\ \beta_2\ \gamma < \beta_1\ \gamma,$

από όπου λαμβάνουμε **Ανθ(αγ,βγ) = [** κ_1, κ_2 **Ανθ (** $\beta_1\gamma,\ \beta_2\gamma$**)].**

Συνεχίζοντας όμοια την διαδικασία λαμβάνουμε τελικά τα διαδοχικά πηλίκα της Ανθ(αγ,βγ) καταλήγοντας ότι:

Ανθ(αγ,βγ) = [$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots$**].**

Όμως δεν αρκεί να θεωρήσουμε προφανές ότι αν συνεχίσουμε όμοια την διαδικασία όλα τα πηλικά θα ισούνται επ' άπειρο. Αυτό χρειάζεται επαγωγική απόδειξη.

Έστω ότι κάποιο πηλίκο κ_n της **Ανθ(α,β)** διαφέρει από το πηλίκο $\kappa_n{}'$ της **Ανθ(αγ,βγ)**. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανθυφαιρετικές σχέσεις:

$\beta_{n-2} = \kappa_n\ \beta_{n-1} + \beta_n,\ \ \beta_n < \beta_{n-1}\ \ => \ \ \beta_{n-2}\ \gamma = \kappa_n\ \beta_{n-1}\gamma + \beta_n\gamma,\ \ \ \beta_n\ \gamma < \beta_{n-1}\gamma$

Όμως από την n-οστή διαίρεση της **Ανθ(αγ,βγ)** έχουμε ότι

$\beta_{n-2}\ \gamma = \kappa_n{}'\ \beta_{n-1}\gamma + \beta_n{}'\gamma,\ \ \ \beta_n{}'\ \gamma < \beta_{n-1}\gamma.$

Έστω ότι $\kappa_n > \kappa_n{}'$**, τότε** $(\kappa_n - \kappa_n{}')\ \beta_{n-1}\gamma = \beta_n{}'\gamma - \beta_n\gamma$ **.**

Ισχύει ότι $(\kappa_n - \kappa_n{}')\ \beta_{n-1}\gamma$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $\beta_{n-1}\gamma$, ενώ $\beta_n{}'\gamma - \beta_n\gamma$ είναι μικρότερο από το $\beta_{n-1}\gamma$ αφού κάθε ένα από τα $\beta_n\gamma$, $\beta_n{}'\gamma$ είναι μικρότερα του $\beta_{n-1}\gamma$.

Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο διότι δεχτήκαμε ότι σε κάποιο βήμα διαίρεσης το πηλίκο της διαίρεσης ή ο όρος της Ανθ(α,β) θα διαφέρει από το πηλίκο της αντίστοιχης διαίρεσης ή τον αντίστοιχο όρο της Ανθ(αγ,βγ). Οπότε καταλήγουμε ότι Ανθ(α,β) = Ανθ(αγ,βγ).

❖ Πρόταση Β: **Αν για δοθέντα μεγέθη Α, Β, Γ,Δ ισχύει Α / Β = Γ / Δ,**

τότε Α / Γ = Β / Δ.

(εναλλάξ ιδιότητα, VII. 13 – V.16)

Απόδειξη:

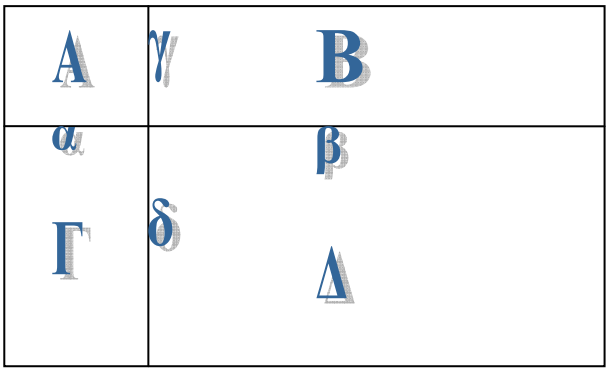
Έστω ΑΝΘ(Α,Β) = Ανθ(Γ,Δ).

Αρκεί να δείξουμε ότι **ΑΝΘ(Α,Γ) = Ανθ(Β,Δ).**

Θέτουμε Α = αxβ και από πρόταση Ι.44 Στοιχείων προκύπτουν:

[**Πρόταση Ι.44**
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον *παραβαλεῖν* ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ].

$B = \beta x \gamma$, $\Gamma = \alpha x \delta$, $\Delta = \beta x \delta$.



Από Πρόταση Α έπεται ότι Γ' και Δ΄ έχουν το ίδιο ύψος, δηλαδή δ = δ'. Οπότε Α/Γ' = γ/δ = Β'/Δ', δηλαδή Α/Γ = Β/Δ.

❖ Πρόταση Γ: **Αν για δοθέντα μεγέθη Α, Β, Γ ισχύει Α / Γ = Β / Γ, τότε Α = Β .**

(V.9)

Απόδειξη:

Υποθέτουμε αρχικά Α $\neq$ Β, έστω Α = Β + Δ.

Αφού Α / Γ = Β / Γ τότε από ορισμό αναλογία έχουμε

ΑΝΘ(Α,Γ) = Ανθ(Β,Γ), οπότε ισχύουν τα παρακάτω:

Α = μ Γ + α, Β = μ Γ + β α, β < Γ (1)
οπότε Δ = α – β.

Γ = ν α + α_1 Γ = ν β + β_1 α_1 **< α και** β_1 **< β** **(2)**
οπότε $\beta_1 - \alpha_1$ **= ν (α – β) = ν Δ > Δ.**

α = $\nu_1 \alpha_1 + \alpha_2$ **β =** $\nu_1 \beta_1 + \beta_2$ $\alpha_2 < \alpha_1$ **και** $\beta_2 < \beta_1$ **(3)**
οπότε α – β = $\nu_1(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$ **ή** $\alpha_2 - \beta_2 =$ **Δ +** ν_1**ν Δ > ν Δ > Δ, το οποίο όμως είναι *άτοπο*, διότι η διαφορά** $\alpha_\kappa - \beta_\kappa$ **πρέπει να μικραίνει τείνοντας στο μηδέν αφού** $\alpha_\kappa <$ **½** $\alpha_{\kappa-2}$ **και** $\beta_\kappa <$ **½** $\beta_{\kappa-2}$ ***(αρχή Αρχιμήδους – Ευδόξου)* και όχι να αυξάνεται συνεχώς (αφού ισούται με πολλαπλάσιο του Δ που καθώς προχωρούμε αυξάνεται).**

Η παραπάνω πρόταση θεωρείται ως θεμελιώδης πρόταση της θεωρίας που αναπτύσσεται διότι από αυτή την πρόταση προκύπτουν οι υπόλοιπες προτάσεις και αντίστοιχα είναι η βασική πρόταση και στο *V Βιβλίο των Στοιχείων* όπου θεμελιώνεται η θεωρία λόγων μεγεθών. **Αν αποδειχθεί αυτή η πρόταση τότε αποδεικνύεται όλο το βιβλίο.**

Η θεμελιώδης πρόταση από μαθηματικής πλευράς είναι απολύτως σωστή, όμως από χρονολογικής πλευράς παρουσιάζει σοβαρό μειονέκτημα. Για την

απόδειξη ο Knorr χρησιμοποιεί τον ορισμό της αναλογίας (Αριστοτέλους, Τοπικά) και την αρχή Αρχιμήδους – Ευδόξου. Η απόδειξη όμως τοποθετείται χρονικά *πριν* από την *εποχή του Ευδόξου*.

Ο Αριστοτέλης μας λέει ότι υπήρχε μία τέτοια θεωρία πριν από τη θεωρία του Ευδόξου «ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο». Η απόδειξη που έχει ο **Knorr** χρησιμοποιεί οπωσδήποτε την ιδιότητα Αρχιμήδους – Ευδόξου. Επομένως δεν είναι πιστευτή η ανακατασκευή ως έχει σε επίπεδο πριν από τον Εύδοξο.

Πώς μπορεί να αποδειχθεί η θεμελιώδης πρόταση χωρίς την Αρχή Α-Ε ;

Οι περιορισμοί έχουν ως εξής:

- **Υπήρχε μία θεωρία λόγων**
- **Αυτή η θεωρία ήταν πριν από τη θεωρία του Ευδόξου (χωρίς ιδιότητα Αρχιμήδους - Ευδόξου)**

Στο μάθημα «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά – Στοιχεία Ευκλείδη» από τον καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη προτάθηκε η παρακάτω διέξοδος από το αναχρονιστικό πρόβλημα που ανέκυψε. Αρκεί να βρούμε μία **κλάση** ζευγαριών **μεγεθών** για τα οποία η συνθήκη Α-Ε να ικανοποιείται αυτόματα. Δηλαδή χρειαζόμαστε για την **ενδιάμεση θεωρία** να ***περιοριστούμε*** σε μία κλάση ζευγαριών (δε μπορούμε να το κάνουμε για όλα τα ζεύγη) **α > β** για τα οποία η ύπαρξη της ανθυφαίρεσης να προκύπτει χωρίς να χρειάζεται η επίκληση της αρχής του Ευδόξου. Μέχρι της χρονικής περιόδου του Θεοδώρου του Κυρηναίου είναι γνωστά τα εξής δύο ζεύγη για τα οποία γνωρίζουμε ότι έχουν άπειρη ανθυφαίρεση και γνωρίζουμε ακριβώς την ανθυφαίρεσή τους (Ανθ(α,β)) χωρίς να χρειάζεται να **υποθέσουμε**, οπότε και εξαλείφεται η Αρχή Αρχιμήδους - Ευδόξου:

$$a^2 = 2 \cdot \beta^2 \qquad\qquad a^2 = a \cdot \beta + \beta^2$$

Οδηγούμαστε στο ότι η πιο φυσιολογική συνθήκη είναι η δυνάμει συμμετρία, δηλαδή $Ma^2 = N \cdot \beta^2$,

Δηλαδή η **κλάση**

C = {α > β : υπάρχει αριθμός Μ, Ν ώστε α, β δυνάμει σύμμετρα, δηλαδή $Ma^2 = N \cdot \beta^2$ **ασύμμετρα}.**

Αν α = κβ +γ, γ < δ τότε (κ+1)β > α, αυτό συμβαίνει όταν ξέρουμε ότι έχουμε ανθυφαιρετική σχέση.

Έστω α, β δύο μεγέθη. Η Ανθ(α,β) υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει φυσικός αριθμός Ν ώστε Νβ > α. Δηλαδή α = κβ + γ, γ < β. Επομένως η συνθήκη Αρχιμήδους-Ευδόξου μπορεί να απαλειφθεί με τη **γνώση-ύπαρξη** της ανθυφαιρετικής σχέσης.

Η συνθήκη της δυνάμει συμμετρίας όπως μας λέει ο Πλάτων ορίστηκε από το Θεαίτητο. Στο *Χ βιβλίο* υπάρχει ο ορισμός από το Θεαίτητο.

Καταλήγουμε τελικά στο ότι η μόνη διέξοδος είναι ότι η ενδιάμεση θεωρία λόγων **δεν ήταν για όλα τα μεγέθη αλλά για μία κλάση ζευγών**, δηλαδή για τα **δυνάμει σύμμετρα μεγέθη**. Αν υπάρχει αυτή η συνθήκη μπορεί να αναπτυχθεί γι' αυτή την κλάση η ενδιάμεση θεωρία λόγων. Επομένως **η Θεωρία λόγων που αναφέρει ο Αριστοτέλης δεν αναφέρεται σε όλα τα μεγέθη.**

Αν μείνουμε σε αυτή την κλάση -αυτή η κλάση εμφανίζεται στο Χ βιβλίο και στο διάλογο Θεαίτητος- επομένως αυτή την θεωρία θα την τοποθετήσουμε χρονικά στην **περίοδο του Θεόδωρου και του Θεαίτητου**.

Από αυτή την πρόταση μπορούν να γίνουν οι ανθ των ρίζα 9, 11…17 όχι όμως του ρίζα 19 που είναι αρκετά πιο δύσκολη.

❖ Πρόταση Δ: **Αν α,β,γ,δ ευθύγραμμα τμήματα & αδ=βγ**

τότε ΑΝΘ(α,β) = ΑΝΘ(γ,δ).

(VII. 19 – VI.16)

Απόδειξη:

Έστω Ανθ(α,β) = $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots]$

& θέλουμε να δείξουμε ότι Ανθ(γ,δ) = $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots]$

α = $\kappa_1 \beta + j_1$, $j_1 < \beta$ & Ανθ(β, j_1) = $[\kappa_2, \kappa_3, \ldots]$

Από την υπόθεσή μας $\beta\gamma = \delta\alpha = \kappa_1 \beta\delta + j_1 \delta$

Υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα η_1 ώστε $j_1 \delta = \beta \eta_1$ (Ι.43)

Άρα $\beta\gamma = \kappa_1 \beta\delta + \beta \eta_1$, $\gamma = \kappa_1 \delta + \eta_1$,

Χρειαζόμαστε να έχουμε $\eta_1 < \delta$. Αυτό καθίσταται σαφές από τη σχέση $j_1 \delta = \beta \eta_1$

Άρα Ανθ(γ,δ) = [κ, ΑΝΘ(δ, η_1)]

Οπότε έχουμε την εξής κατάσταση $\beta > j_1$, $\delta > \eta_1$ και $j_1 \delta = \beta \eta_1$

Άρα Ανθ(δ, η_1) = $[\kappa_2, \kappa_3, \ldots]$.

2.4 D.H. FOWLER

Ο D.H. Fowler περιγράφει **[F]** τις ρίζες των μη τετραγωνικών ακεραίων εργαζόμενος με ανθυφαιρετική μέθοδο. Χρησιμοποιώντας τις προτάσεις του ΙΙ Βιβλίου των Στοιχείων πραγματεύεται τους γνώμονες ονομάζοντας τη διαδικασία που ξετυλίγει με σκοπό την απόδειξη της ασυμμετρίας μη τετραγωνικών αρρήτων ως «**μέθοδο των γνωμόνων**». Θα περιορίσουμε την έρευνά μας στις περιπτώσεις με τις οποίες καταπιάστηκε ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος και θα αναρωτηθούμε αν είναι όντως αυτή η μέθοδος με την οποία εργάστηκε και ο ίδιος.

Αρχικά περιγράφουμε συνοπτικά μία γενική εικόνα των βημάτων που ακολουθεί ο Fowler και κατόπιν παραθέτουμε αναλυτικά τις αποδείξεις για κάθε μία εκ των περιπτώσεων.

Η διαδικασία που ακολουθείται για τις αποδείξεις όλων των ριζών είναι η παρακάτω:

1) Αποδεικνύεται το ισοδύναμο συμπέρασμα ώστε στο ανάπτυγμα της ανθυφαίρεσης να υπάρχει μόνο το περιοδικό ανάπτυγμα. Με αυτό το βήμα ελλαττώνονται κατά οι ανθυφαιρετικές σχέσεις που περιγράφουν την ασυμμετρία ενός ζεύγους μεγεθών, με αποτέλεσμα την απλούστευση των υπολογισμών.

Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση ($\sqrt{3}$) το ισοδύναμο συμπέρασμα είναι:

$$(1+\sqrt{3}):1 = \text{Αν}\theta\ (1+\sqrt{3}\ ,1) = [1+1,\ \overline{1,2}] = [2,\ \overline{1,2}] = [\ \overline{2,1}]$$

Άλλα παραδείγματα είναι:

- $\sqrt{5}:1 = \text{Αν}\theta\ (\sqrt{5}\ ,1) = [2,\ \overline{4}]$ $\Leftrightarrow$

  $(2+\sqrt{5}):1 = \text{Αν}\theta\ (2+\sqrt{5}\ ,1) = [2+2,\ \overline{4}] = [\overline{4}]$
- $\sqrt{11}:1 = \text{Αν}\theta\ (\sqrt{11}\ ,1) = [3,\ \overline{3,6}]$ $\Leftrightarrow$

  $(3+\sqrt{11}):1 = \text{Αν}\theta\ (3+\sqrt{11}\ ,1) = [3+3,\ \overline{3,6}] = [\overline{6,3}]$
- $\sqrt{17}:1 = \text{Αν}\theta\ (\sqrt{17}\ ,1) = [4,\ \overline{8}]$ $\Leftrightarrow$

$(4+\sqrt{17})$: 1 = Ανθ $(4+\sqrt{17}$,1) = [4+4, $\bar{8}$]= [$\bar{8}$]

2) Θεωρούμε το μοναδιαίο τετράγωνο Ρ και προστείθεται σε αυτό γνώμονας P_n τέτοιος ώστε το εμβαδό του γνώμονα να ισούται με το (Ν-1)-πλάσιο του μοναδιαίου γνώμονα, P_n = (Ν-1) Ρ. Κατασκευάζεται έτσι τετράγωνο εμβαδού Ε = ΝΡ, δηλαδή η πλευρά του έχει μήκος $\sqrt{N}$, όπου Ν μη τετραγωνικός ακέραιος. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζεται η άρρητος πλευρά τετραγώνου που μελετούμε.
(Η κατασκευή του ως άνω τετραγώνου γίνεται σύμφωνα με την Πρόταση ΙΙ.4, «Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ»).

3) Προστίθεται νέος γνώμονας με σκοπό την προέκταση της πλευράς του «μεγάλου τετραγώνου» ώστε το μήκος της να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδος, με σκοπό την εκτέλεση των ανθυφαιρετικών υπολογισμών.

4) Στη συνέχεια προστίθεται προέκταση της πλευράς του γνώμονα με τμήμα μήκους πολλαπλάσιο του μοναδιαίου, ώστε να προκύψει μήκος πλευράς ίσο με το ισοδύναμο συμπέρασμα που θέλουμε να αποδείξουμε.

5) Από το σχήμα θα προκύψουν οι ανθυφαιρετικές σχέσεις που μελετώνται.

6) Η «μέθοδος των γνωμόνων» ολοκληρώνεται με την εξασφάλιση της περιοδικότητας των διαδοχικών πηλίκων που προκύπτει από την ισότητα εμβαδών παραλληλογράμμων με μήκη πλευρών διαδοχικά υπόλοιπα.

Αποδείξεις ασυμμετριών με τη «μέθοδο των γνωμόνων»:

$a^2 = 3 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα άρα '**α ρητή'.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

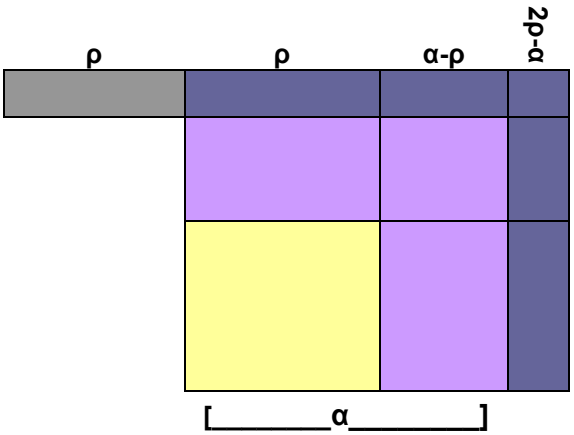
$\alpha^2 = \mathbf{3}\rho^2$ ή $\alpha^2 > \rho^2$ ή $\alpha > \rho$

- Προσθέτω Γνώμονα Γο: $\alpha^2 - \rho^2 = 2\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γο': $(2\rho)^2 - \alpha^2$

  $(2\rho)^2 - \alpha^2 = 4\rho^2 - 3\rho^2 = \rho^2$ ή $2\rho > \alpha$ ή $3\rho > \alpha + \rho$

- Προεκτείνω κατά 'ρ'.



$\alpha + \rho = \mathbf{2}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1 = \alpha - \rho$, αποτομή)

πρέπει $\kappa_1 < 2\rho$ ή $\alpha - \rho < 2\rho$ ή $\alpha < 3\rho$ ισχύει.

Άρα Ανθ (α+ρ,ρ) = [2, Ανθ(ρ,α-ρ)]

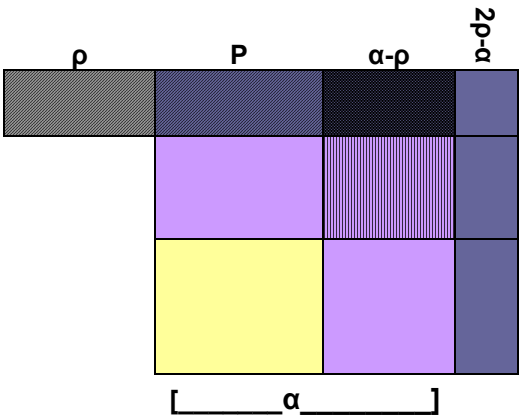
$\rho = \mathbf{1}*(\alpha - \rho) + \kappa_2$ **,** $(\kappa_2 = \rho - \alpha + \rho = 2\rho - \alpha$, αποτομή)

πρέπει $\kappa_2 < \alpha - \rho$ ή $2\rho - \alpha < \alpha - \rho$ ή $9\rho^2 < 12\rho^2$ ισχύει

άρα Ανθ(α+ρ,ρ) = [2,1, Ανθ(α-ρ,2ρ-α)]

- **Ισχύει α+ρ > ρ & α-ρ > 2ρ – α, αρκεί νδο (α+ρ)(2ρ-α) = ρ(α-ρ)**

⇨ **Ανθ(α+ρ,ρ) = Ανθ(α-ρ,2ρ-α).**



(α+ρ)(2ρ-α) = ρ(α-ρ) ή $2\rho(2\rho-\alpha) = (\alpha-\rho)^2$

Όμως $\alpha^2 - \rho^2 = 2\rho^2$ ή $2\rho(\alpha-\rho) + (\alpha-\rho)^2 = 2\rho^2$

$2\rho(\alpha-\rho) + (\alpha-\rho)^2 + 2\rho(2\rho-\alpha) = 2\rho^2 + 2\rho(2\rho-\alpha)$

$2[\rho(\alpha-\rho) + \rho(2\rho-\alpha)] + (\alpha-\rho)^2 = 2\rho^2 + 2\rho(2\rho-\alpha)$

$2\rho^2 + (\alpha-\rho)^2 = 2\rho^2 + 2\rho(2\rho-\alpha)$

$(\alpha-\rho)^2 = 2\rho(2\rho-\alpha)$.

$a^2 = 5 \cdot \rho^2$, ρ: προτεθείσα ευθεία, (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, α: ρητή.

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

$\alpha^2 = 5\rho^2$, $\alpha^2 > 4\rho^2$ ή $\alpha > 2\rho$

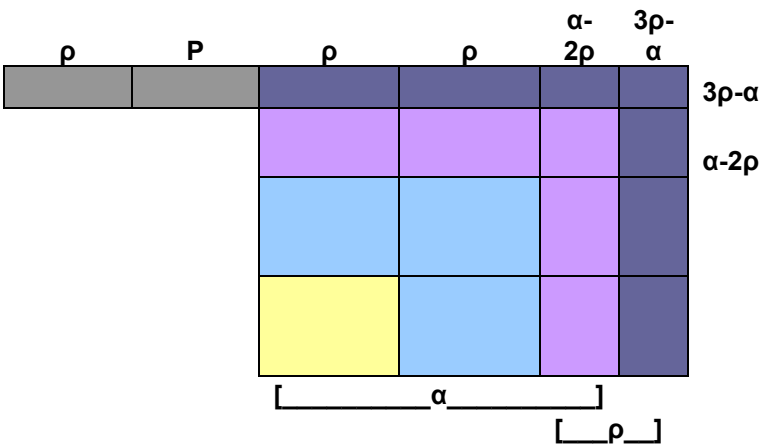
- Προσθέτω Γνώμονα Γ1: $(2\rho)^2 - \rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ2: $\alpha^2 - (2\rho)^2 = \rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ3: $(3\rho)^2 - \alpha^2 = 4\rho^2$, $(3\rho)^2 > \alpha^2$ ή $3\rho > \alpha$

- Προεκτείνω κατά '2ρ'.

  $3\rho > \alpha > 2\rho$ ή $\alpha + 2\rho > 4\rho$



$\alpha + 2\rho = \mathbf{4}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1 = \alpha + 2\rho - 4\rho = \alpha - 2\rho$, αποτομή)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 2\rho < \rho$ ή $\alpha < 3\rho$ ή $5\rho^2 < 9\rho^2$ ισχύει.

Άρα Ανθ $(\alpha + 2\rho, \rho) = [4, \text{Ανθ}(\rho, \alpha - 2\rho)]$

- Ισχύει $\alpha+2\rho > \rho$

  & $\rho > \alpha-2\rho$, αρκεί νδο $(\alpha+2\rho)(\alpha-2\rho) = \rho^2$

Όμως από κατασκευή ισχύει:

$\alpha^2 - (2\rho)^2 = \rho^2$ ή

$4\rho(\alpha-2\rho) + (\alpha-2\rho)^2 = \rho^2$

$(\alpha-2\rho)(4\rho + \alpha - 2\rho) = \rho^2$

$(\alpha-2\rho)(\alpha+2\rho) = \rho^2$, **ισχύει.**

$a^2 = 7 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, 'α **ρητή'.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 6\rho^2$ ή $\alpha^2 > 6\rho^2 > 4\rho^2$ ή $\alpha > 2\rho$ ή $\alpha + 2\rho > 4\rho$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ_1: $(2\rho)^2 - \rho^2$

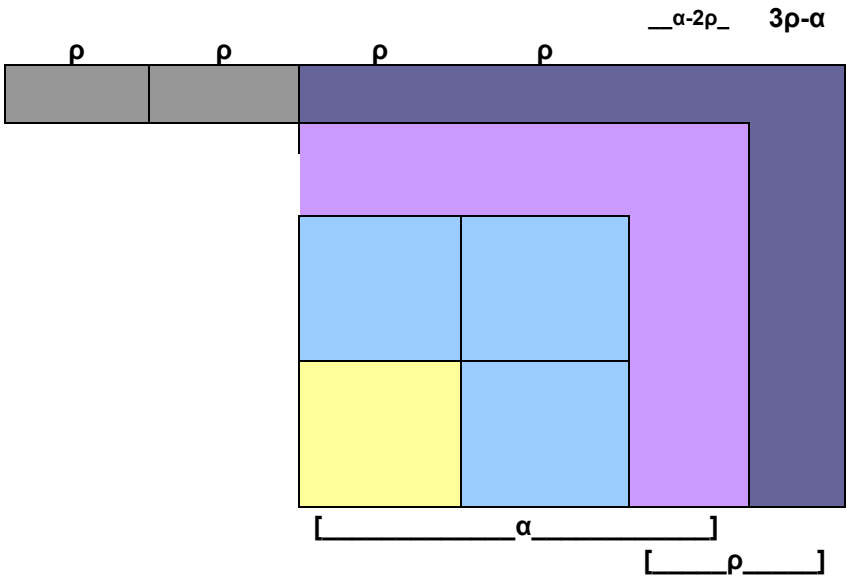
- Προσθέτω Γνώμονα Γ_2: $\alpha^2 - (2\rho)^2 = 3\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ_3: $(3\rho)^2 - \alpha^2$

  $(3\rho)^2 - \alpha^2 = 9\rho^2 - \rho^2 = 8\rho^2$ ή $3\rho > \alpha > 2\rho$

- Προεκτείνω κατά '2ρ'.

  $3\rho > \alpha > 2\rho$ ή $\alpha + 2\rho > 4\rho$



α + 2ρ = **4**ρ + κ_1, (κ_1= **α – 2ρ, αποτομή**)

πρέπει κ_1< ρ ή α – 2ρ < ρ ή α < 3ρ ή $\alpha^2 < 9\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ (α + 2ρ,ρ) = [4, Ανθ(ρ,α-2ρ)]

ρ = **1***(α- 2ρ) + κ_2 **, (** κ_2 **=** ρ – α + 2ρ = **3ρ – α, αποτομή**)

πρέπει κ_2 **<** α – 2ρ ή 3ρ – α < α – 2ρ ή $25\rho^2 < 28\rho^2$ ισχύει

άρα Ανθ(α+2ρ,ρ) = [4,1, Ανθ(α-2ρ,3ρ-α)]

α-2ρ = **1***(3ρ-α) + κ_3**, (** κ_3 = α – 2ρ – 3ρ + α = **2α – 5ρ, αποτομή)**

πρέπει κ_3 **<** 3ρ – α ή 2α – 5ρ < 3ρ – α ή 3α < 8ρ ή $9\alpha^2 < 64\rho^2$ ή

$63\rho^2 < 64\rho^2$, ισχύει

άρα Ανθ(α+2ρ,ρ) = [4,1,1,Ανθ(3ρ-α,2α-5ρ)].

3ρ-α = **1***(2α-5ρ) + κ_4 **, (** κ_4 = 3ρ – β -2α + 5ρ = **8ρ -3α, αποτομή)**

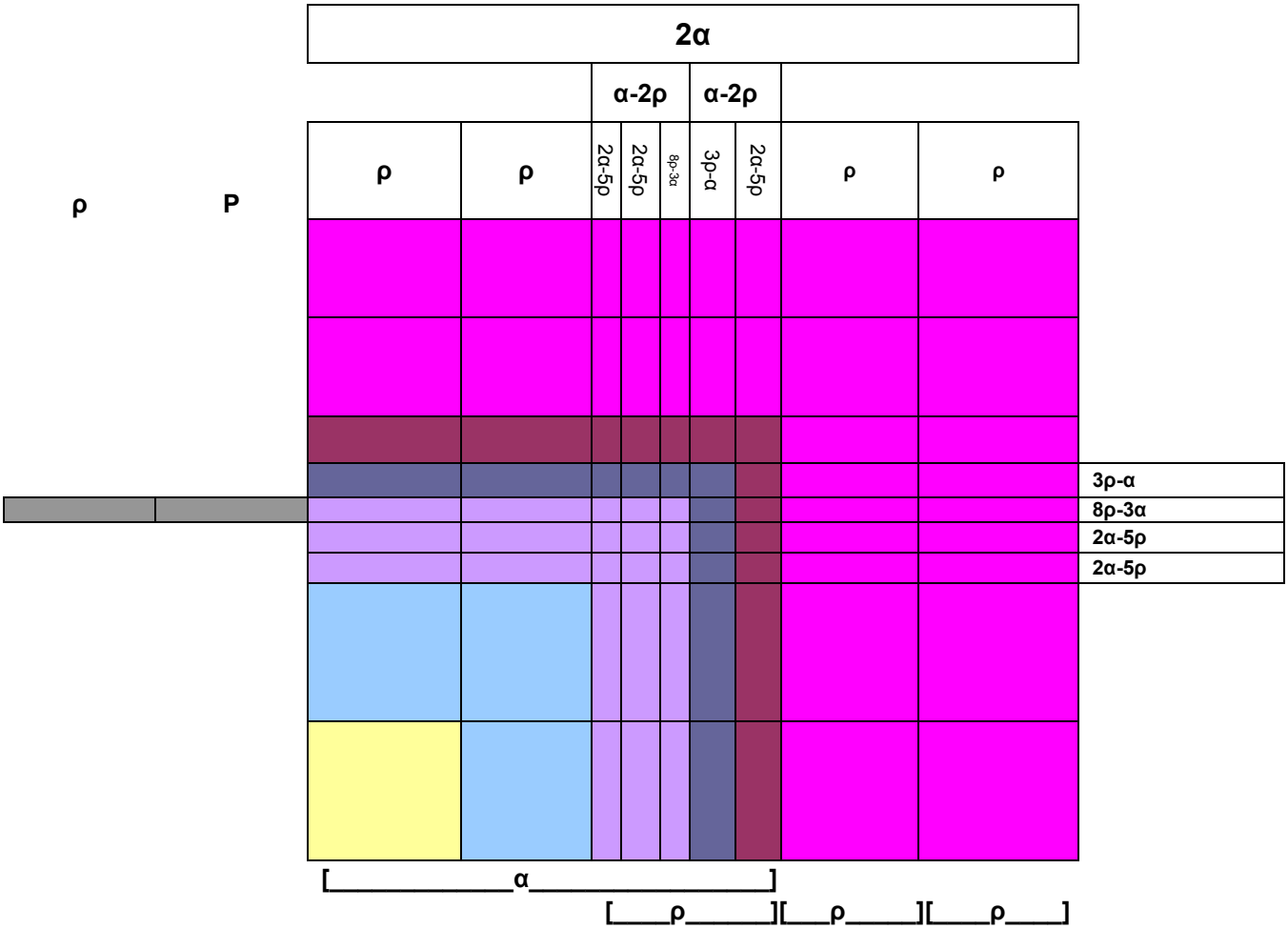
Πρέπει κ_4 **<** 2α – 5ρ ή 8ρ – 3α < 2α – 5ρ ή 12ρ < 5α ή $144\rho^2 < 175\rho^2$ **,** ισχύει

Άρα ΑΝΘ(α+2ρ,ρ) = [4,1,1,1,Ανθ(2β-5ρ,8ρ-3α)

- Ισχύει α + 2ρ > ρ

  & 2α - 5ρ > 8ρ – 3α,

  αρκεί νδο (α+2ρ)(8ρ – 3α) = ρ(2α - 5ρ)



Θέλω νδο (α+2ρ)(8ρ – 3α) = ρ(2α - 5ρ) ή

(α+2ρ) [(3ρ-α)-(2α-5ρ)] = ρ(2α-5ρ) ή

(α+2ρ)(3ρ-α) = (2α-5ρ)α + 3ρ(2α-5ρ)

(α+2ρ)[(α-2ρ) -(2α-5ρ)] = (2α-5ρ)α + 3ρ(2α-5ρ)

(α+2ρ)(α-2ρ) – (α+2ρ)(2α-5ρ) = (2α-5ρ)α + 3ρ(2α-5ρ)

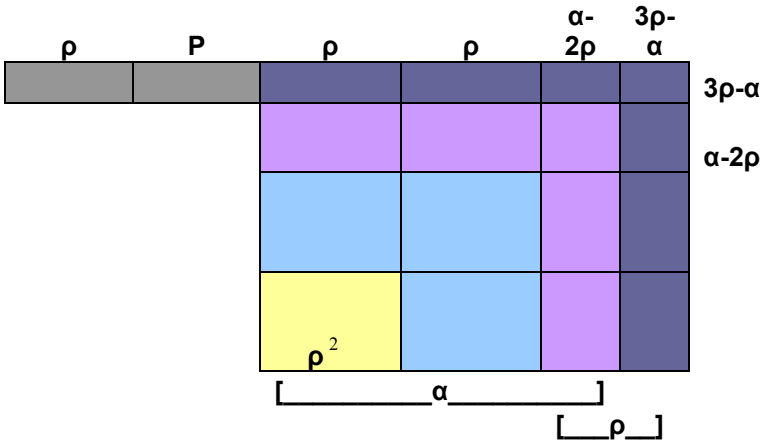
$\alpha^2 - 4\rho^2 = (2\alpha-5\rho)(2\alpha+5\rho)$

$a^2 = 8 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (β, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα άρα '**α ρητή'.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 7\rho^2$ ή $\alpha > 2\rho$ ή $\alpha + 2\rho > 4\rho$
- Προσθέτω Γνώμονα Γ1: $(2\rho)^2 - \rho^2$
- Προσθέτω Γνώμονα Γ2: $\alpha^2 - (2\rho)^2 = 4\rho^2$
- Προσθέτω Γνώμονα Γ3: $(3\rho)^2 - \alpha^2$
- Προεκτείνω κατά '2ρ'.

  $(3\rho)^2 - \alpha^2 = 9\rho^2 - \rho^2 = 8\rho^2$ ή $3\rho > \alpha$ ή $5\rho > \alpha + 2\rho > 4\rho$.



$\alpha + 2\rho = \mathbf{4}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1$ = **α – 2ρ, αποτομή**)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 2\rho < \rho$ ή $\alpha < 3\rho$ ή $\alpha^2 < 9\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ (α + 2ρ,ρ) = [4, Ανθ(ρ,α-2ρ)]

$\rho = \mathbf{1}*(\alpha - 2\rho) + \kappa_2$, ($\kappa_2$ = ρ – α + 2ρ = **3ρ – α, αποτομή**)

πρέπει $\kappa_2 < \alpha - 2\rho$ ή $3\rho - \alpha < \alpha - 2\rho$ ή $25\rho^2 < 32\rho^2$ ισχύει

άρα Ανθ(α+2ρ,ρ) = [4,1, Ανθ(α-2ρ,3ρ-α)]

- Ισχύει $\alpha + 2\rho > \rho$

  & $\alpha - 2\rho > 3\rho - \alpha$,

αρκεί νδο $(\alpha+2\rho)(3\rho-\alpha)=\rho(\alpha-2\rho)$ ή $4\rho(3\rho-\alpha)=(\alpha-2\rho)^2$

Ισχύει $\alpha^2-(2\rho)^2=4\rho^2$ ή

$$4\rho(\alpha-2\rho)+(\alpha-2\rho)^2=4\rho^2$$

$$4\rho(\alpha-2\rho)+4\rho(3\rho-\alpha)+(\alpha-2\rho)^2=4\rho^2+4\rho(3\rho-\alpha)$$

$$4\rho(\alpha-2\rho+3\rho-\alpha)+(\alpha-2\rho)^2=4\rho^2+4\rho(3\rho-\alpha)$$

$$4\rho^2+(\alpha-2\rho)^2=4\rho^2+4\rho(3\rho-\alpha)$$

$$4\rho(3\rho-\alpha)=(\alpha-2\rho)^2$$

$a^2=10\cdot\rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, **'α ρητή'.**

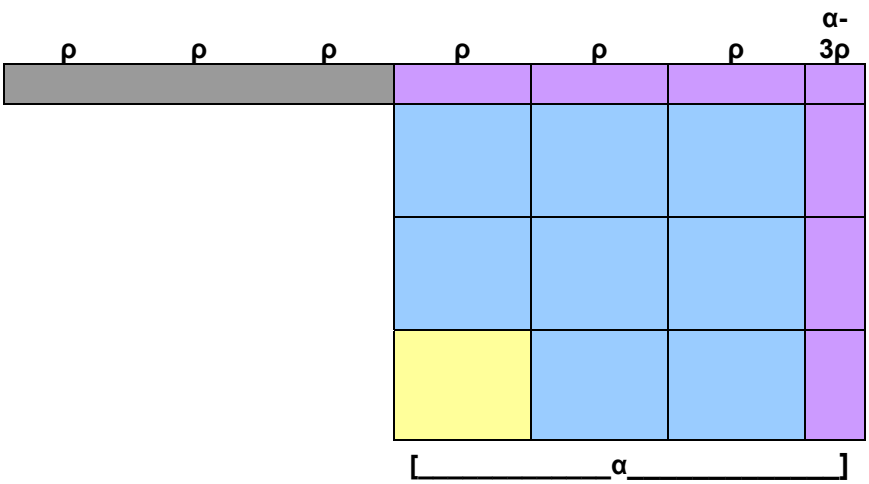
- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2-\rho^2=9\rho^2$ ή $\alpha>3\rho$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ1: $(3\rho)^2-\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ2: $\alpha^2-(3\rho)^2=\rho^2$

- Προεκτείνω κατά '3ρ'.



$\alpha+3\rho=\mathbf{6}\rho+\kappa_1$, ($\kappa_1=$ **α – 3ρ, αποτομή**)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 3\rho < \rho$ ή $\alpha < 4\rho$ ή $\alpha^2 < 16\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ $(\alpha + 3\rho, \rho) = [6, \text{Ανθ}(\rho, \alpha - 3\rho)]$

- Ισχύει $\alpha + 3\rho > \rho$

  & $\rho > \alpha - 3\rho$, αρκεί νδο $(\alpha+3\rho)(\alpha - 3\rho) = \rho^2$

Από κατασκευή του σχήματος ισχύει:

$6\rho(\alpha-3\rho) + (\alpha-3\rho)^2 = \rho^2$ ή

$(\alpha - 3\rho)(6\rho + \alpha - 3\rho) = \rho^2$

$(\alpha - 3\rho)(\alpha+3\rho) = \rho^2$.

$a^2 = 11 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, 'α **ρητή'.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 10\rho^2$ ή $\alpha^2 - 2\rho^2 = 9\rho^2$ ή $\alpha^2 > 9\rho^2$ ή $\alpha > 3\rho$ ή $\alpha + 3\rho > 6\rho$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ_1: $(3\rho)^2 - \rho^2$

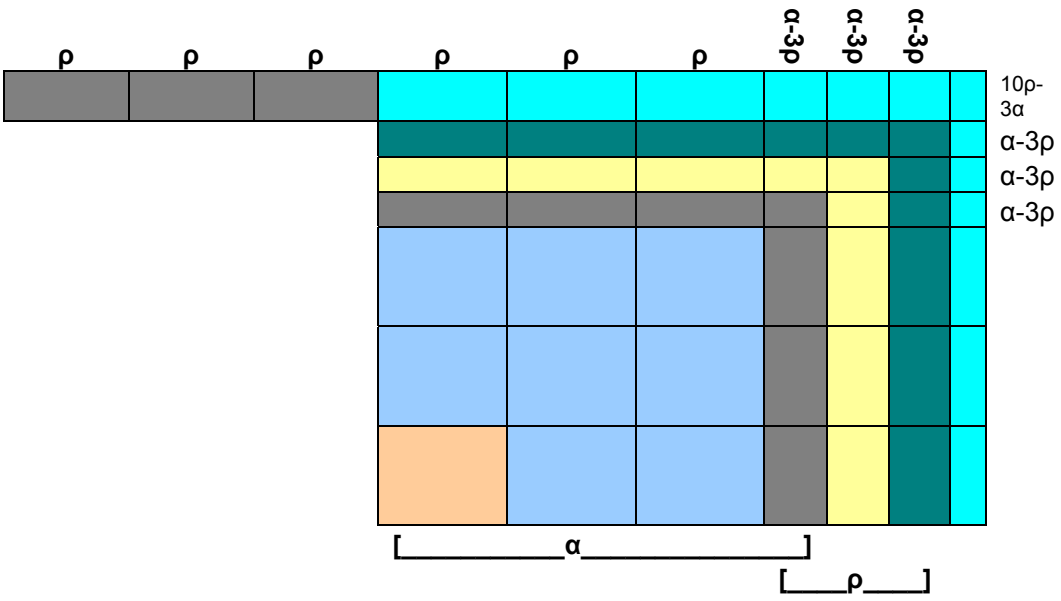
- Προσθέτω Γνώμονα Γ_2: $\alpha^2 - (3\rho)^2 = 2\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονες Γ_3: μήκους $(\alpha - 3\rho)$

  Γ_4: μήκους $(\alpha - 3\rho)$

  Γ_5: μήκους $(\alpha - 3\rho)$

- Προεκτείνω κατά '3ρ'.



$\alpha + 3\rho = \mathbf{6}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1 = \boldsymbol{\alpha - 3\rho}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 3\rho < \rho$ ή $\alpha < 4\rho$ ή $\alpha^2 < 16\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ $(\alpha + 3\rho, \rho) = [6, \text{Ανθ}(\rho, \alpha - 3\rho)]$

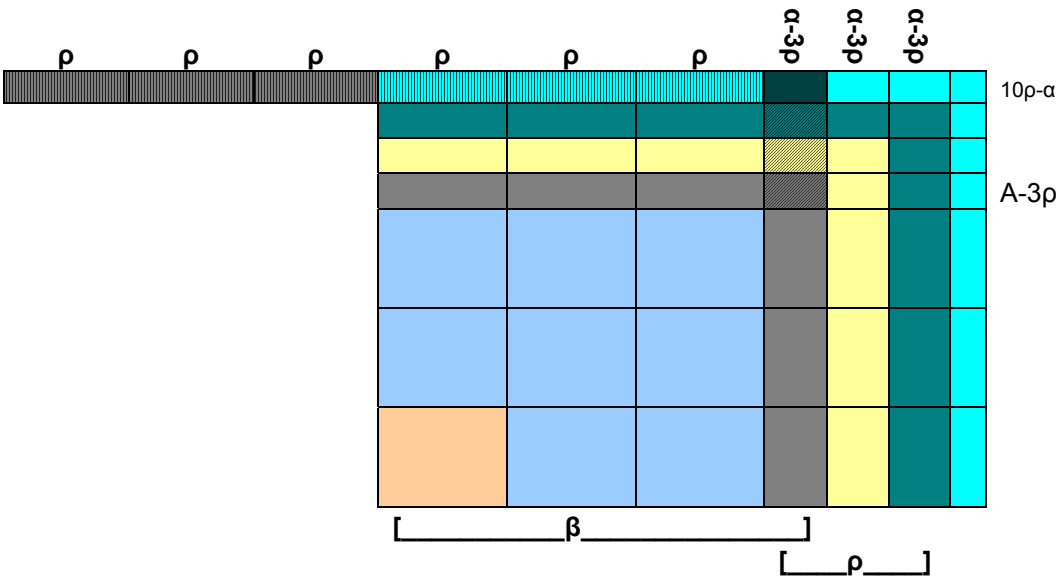
$\rho = \mathbf{3}*(\alpha - 3\rho) + \kappa_2$, ($\kappa_2 = \rho - 3\alpha + 9\rho = \boldsymbol{10\rho - 3\alpha}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_2 < \alpha - 3\rho$ ή $10\rho - 3\alpha < \alpha - 3\rho$ ή $13\rho < 4\alpha$ ή $169\rho^2 < \mathbf{176}\rho^2$ ισχύει

άρα Ανθ$(\alpha + 3\rho, \rho) = [6,3, \text{Ανθ}(\alpha - 3\rho, 10\rho - 3\alpha)]$

- Ισχύει $\alpha + 3\rho > \rho$

  & $\alpha - 3\rho > 10\rho - 3\alpha$, αρκεί νδο $(\alpha + 3\rho)(10\rho - 3\alpha) = \rho(\alpha - 3\rho)$



Θέλω νδο $(\alpha+3\rho)(10\rho-3\alpha) = \rho(\alpha - 3\rho)$ ή

$6\rho(10\rho-3\alpha) = 3(\alpha-3\rho)^2$ ή

$2\rho(10\rho-3\alpha) = (\alpha-3\rho)^2$.

Όμως ισχύει $6\rho(\alpha-3\rho) + (\alpha-3\rho)^2 = 2\rho^2$ ή

$2\rho(3\alpha - 9\rho) + (\alpha - 3\rho)^2 = 2\rho^2$ ή

$2\rho(3\alpha - 9\rho) + 2\rho(10\rho-3\alpha) + (\alpha - 3\rho)^2 = 2\rho^2 + 2\rho(10\rho - 3\alpha)$

$2\rho^2 + (\alpha - 3\rho)^2 = 2\rho^2 + 2\rho(10\rho-3\alpha)$

$(\alpha-3\rho)^2 = 2\rho(10\rho-3\alpha).^2$

$a^2 = 13 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, ‘α **ρητή’.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 12\rho^2$ ή $\alpha^2 > 9\rho^2$ ή $\alpha > 3\rho$

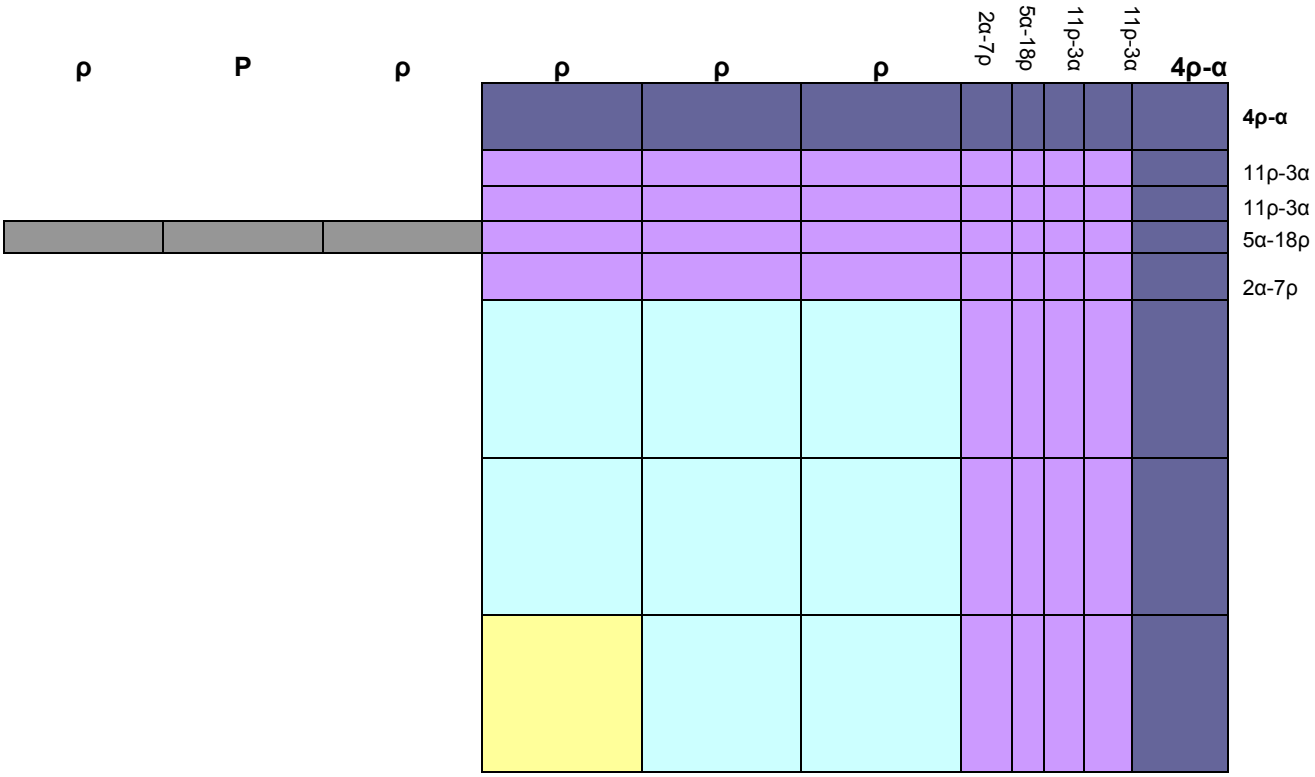
- Προσθέτω Γνώμονα Γ_1: $(3\rho)^2 - \rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ_2: $\alpha^2 - (3\rho)^2 = 4\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ3: $(4\rho)^2 - \alpha^2 = 3\rho^2$

  $(4\rho)^2 - \alpha^2 = 16\rho^2 - 13\rho^2 = 3\rho^2$ ή $4\rho > \alpha > 3\rho$ ή $\alpha + 3\rho > 6\rho$

- Προεκτείνω κατά '3ρ'.



$\alpha + 3\rho = \mathbf{6}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1 = \boldsymbol{\alpha - 3\rho}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 3\rho < \rho$ ή $\alpha < 4\rho$ ή $\alpha^2 < 16\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ $(\alpha + 3\rho, \rho) = [6, \text{Ανθ}(\rho, \alpha - 3\rho)]$

$\rho = \mathbf{1}*(\alpha - 3\rho) + \kappa_2$, ($\kappa_2 = \rho - \alpha + 3\rho = \boldsymbol{4\rho - \alpha}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_2 < \alpha - 3\rho$ ή $4\rho - \alpha < \alpha - 3\rho$ ή $49\rho^2 < \mathbf{5}2\rho^2$ ισχύει

άρα $\text{Ανθ}(\alpha + 3\rho, \rho) = [6{,}1, \text{Ανθ}(\alpha - 3\rho, 4\rho - \alpha)]$

α-3ρ = **1***(4ρ-α) + κ_3, **(**κ_3 = α – 3ρ – 4ρ + α = **2α – 7ρ, αποτομή)**

πρέπει κ_3 < 4ρ – α ή 2α – 7ρ < 4ρ – α ή 3α < 11ρ ή $9\alpha^2 < 121\rho^2$ ή

$117\rho^2 < 121\rho^2$, ισχύει

άρα Ανθ(α+3ρ,ρ) = [6,1,1,ΑΝθ(4ρ-α,2α-7ρ)].

4ρ-α = **1***(2α-7ρ) + κ_4 **,** (**κ_4** = 4ρ – α -2α + 7ρ = **11ρ -3α, αποτομή)**

Πρέπει κ_4 < 2α – 7ρ ή 11ρ – 3α < 2α – 7ρ β ή 18ρ < 5α ή $324\rho^2 < 325\rho^2$ **,**

ισχύει

Άρα Ανθ(α+3α,ρ) = [6,1,1,1,Ανθ(2α-7ρ,11ρ-3α)

2α-7ρ = **1***(11ρ-3α) + κ_5 **,** (**κ_5** = 2α – 7ρ – 11ρ + 3β = **5α – 18ρ, αποτομή)**

πρέπει κ_5 < 11ρ – 3α ή 5α – 18ρ < 11ρ – 3α ή 8α < 29ρ ή $832\rho^2 < 841\rho^2$

ισχύει

άρα Ανθ(α+3ρ,ρ) = [6,1,1,1,1Ανθ(11ρ-3α,5α-18ρ)].

- Ισχύει α+3ρ > ρ

  & 11ρ-3α > 5α-18ρ, αρκεί νδο (α+3ρ)(5α-18ρ) = ρ(11ρ-3α).

(α+3ρ)(5α-18ρ) = ρ(11ρ-3α) ή

(α+3ρ)(2α-7ρ) = (α+4ρ)(11ρ-3α)

(α+3ρ)(2α-7ρ) = (α+4ρ)(4ρ-α) – (α+4ρ)(2α-7ρ)

(2α+7ρ)(2α-7ρ) = (4ρ-α)(4ρ+α)

$(2\alpha)^2 - (7\rho)^2 = (4\rho)^2 - \alpha^2$ ή $3\rho^2 = 3\rho^2$.

$a^2 = 15 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα,‘α **ρητή’.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 14\rho^2$ ή $\alpha^2 > 9\rho^2$ ή α > 3ρ

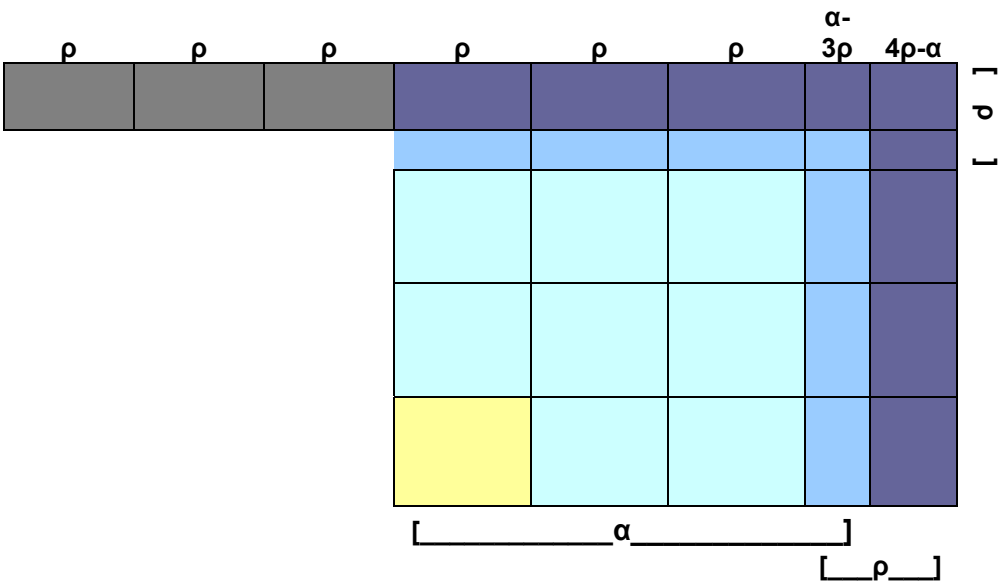
- Προσθέτω Γνώμονα Γ1: $(3\rho)^2 - \rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ2: $\alpha^2 - (3\rho)^2 = 4\rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ3: $(4\rho)^2 - \alpha^2$

  $(4\rho)^2 - \alpha^2 = 16\rho^2 - 15\rho^2 = \rho^2$ ή $4\rho > \alpha$ ή $4\rho > \alpha > 3\rho$ ή $\alpha+3\rho > 6\rho$

- Προεκτείνω κατά '3ρ'.



$\alpha + 3\rho = \mathbf{6}\rho + \kappa_1$, ($\kappa_1 = \boldsymbol{\alpha - 3\rho}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_1 < \rho$ ή $\alpha - 3\rho < \rho$ ή $\alpha < 4\rho$ ή $\alpha^2 < 16\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ $(\alpha + 3\rho,\rho) = [6, \text{Ανθ}(\rho,\alpha-3\rho)]$

$\rho = \mathbf{1}*(\alpha - 3\rho) + \kappa_2$, ($\kappa_2 = \rho - \alpha + 3\rho = \boldsymbol{4\rho - \alpha}$, **αποτομή**)

πρέπει $\kappa_2 < \alpha - 3\rho$ ή $4\rho - \alpha < \alpha - 3\rho$ ή $49\rho^2 < 60\rho^2$ ισχύει

άρα $\text{Ανθ}(\alpha+3\rho,\rho) = [6,1, \text{Ανθ}(\alpha-3\rho,4\rho-\alpha)]$

- Ισχύει $\alpha+3\rho > \rho$

  & $\alpha-3\rho > 4\rho - \alpha$, αρκεί νδο $(\alpha+3\rho)(4\rho-\alpha) = \rho(\alpha-3\rho)$ ή $6\rho(4\rho-\alpha) = (\alpha-3\rho)^2$

  Από κατασκευή του σχήματος ισχύει:

  $6\rho(\alpha - 3\rho) + (\alpha - 3\rho)^2 = 6\rho^2$

  $6\rho(\alpha - 3\rho) + 6\rho(4\rho - \alpha) + (\alpha - 3\rho)^2 = 6\rho^2 + 6\rho(4\rho - \alpha)$

  $6\rho(\alpha - 3\rho + 4\rho - \alpha) + (\alpha - 3\rho)^2 = 6\rho^2 + 6\rho(4\rho - \alpha)$

  $6\rho(4\rho - \alpha) = (\alpha-3\rho)^2$

$a^2 = 17 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, ‘α **ρητή’.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

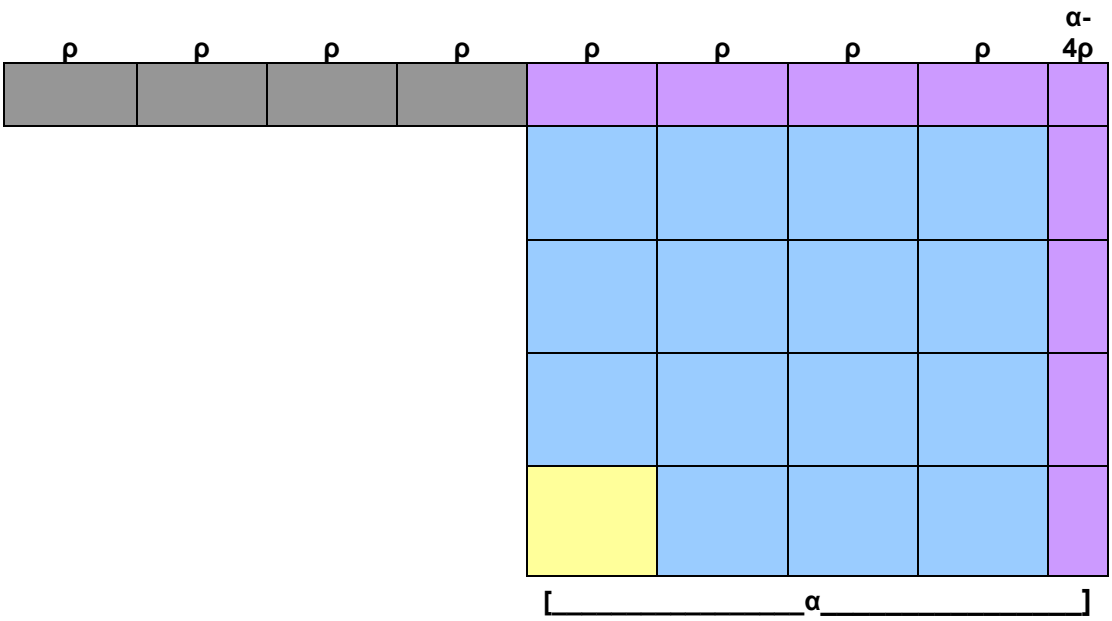
  $\alpha^2 - \rho^2 = 16\rho^2$ ή $\alpha^2 > 16\rho^2$ ή $\alpha > 4\rho$

- Προσθέτω Γνώμονα Γ_1: $(4\rho)^2 - \rho^2$

- Προσθέτω Γνώμονα Γο: $\alpha^2 - (4\rho)^2 = \rho^2$

  $\alpha^2 - \rho^2 = 16\rho^2$ ή $\alpha^2 > 16\rho^2$ ή $\alpha > 4\rho$ ή $\alpha + 4\rho > 8\rho$

- Προεκτείνω κατά ‘4ρ’.



α + 4ρ = **8**ρ + κ_1, (κ_1**= α – 4ρ, αποτομή**)

πρέπει κ_1< ρ ή – 4ρ < ρ ή α < 5ρ ή $\alpha^2 < 25\,\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ (α + 4ρ,ρ) = [8, Ανθ(ρ,α-4ρ)]

- Ισχύει α+4ρ > ρ

  & ρ > α - 4ρ, αρκεί νδο (α+4ρ)(α - 4ρ) = ρ^2

Από κατασκευή του σχήματος ισχύει:

8ρ(α-4ρ) + $(\alpha-4\rho)^2 = \rho^2$ ή

(α-4ρ) (8ρ + α – 4ρ) = ρ^2

(α+4ρ)(α-4ρ) = ρ^2 .

$a^2 = 19 \cdot \rho^2$, **ρ: προτεθείσα ευθεία ,** (α, ρ) Δυνάμει Μόνο Σύμμετρα, 'α **ρητή'.**

- Θεωρώ ρητό χωρίο ρ^2

  $\alpha^2 - \rho^2 = 18\rho^2$ ή $\alpha^2 > 16\rho^2$ ή α > 4 ρ
- Προσθέτω Γνώμονα Γ1: $(4\rho)^2 - \rho^2$
- Προσθέτω Γνώμονα Γ2: $\alpha^2 - (4\rho)^2 = 5\rho^2$
- Προσθέτω Γνώμονα Γ3: $(5\rho)^2 - \alpha^2 = 6\rho^2$

  $(5\rho)^2 - \alpha^2 = 25\rho^2 - 19\rho^2 = 6\rho^2$ ή 5ρ > α > 4ρ ή α + 4ρ > 8ρ
- Προεκτείνω κατά '4ρ'.

α + 4ρ = **8**ρ + κ_1, (κ_1**= α – 4ρ, αποτομή**)

πρέπει κ_1< ρ ή α – 4ρ < ρ ή α < 5ρ ή $\alpha^2 < 25\,\rho^2$, ισχύει.

Άρα Ανθ (α + 4ρ,ρ) = [8, Ανθ(ρ,α-4ρ)]

ρ = **2***(α- 4ρ) + κ_2**, (**κ_2 **=** ρ – 2α + 8ρ = **9ρ – 2α, αποτομή**)

πρέπει κ_2 **<** α – 4ρ ή 9ρ – 2α < α – 4ρ ή 13ρ <3α ή $169\rho^2$ **< 172**ρ^2 ισχύει

άρα Ανθ(α+3ρ,ρ) = [8,2, Ανθ(α-4ρ,9ρ-2α)]

α-4ρ = **1***(9ρ-2α) + κ_3 **, (** κ_3 = α – 4ρ – 9ρ + 2α = **3α – 13ρ, αποτομή)**

πρέπει κ_3 < 9ρ – 2α ή 3α – 13ρ < 9ρ – 2α ή 5α < 22ρ ή $475\rho^2 < 484\rho^2$,

ισχύει

άρα Ανθ(α+4ρ,ρ) = [8,2,1,ΑΝθ(9ρ-2α,3α-13ρ)].

9ρ-2α = **3***(3α-13ρ) + κ_4 **, (** κ_4 **=48ρ -11α, αποτομή)**

Πρέπει κ_4 **<** 3α – 13ρ ή 48ρ -11α < 3α-13ρ β ή 61ρ < 14α**,** ισχύει

Άρα Ανθ(α+4β,ρ) = [8,2,1,3,Ανθ(3α-13ρ, 48ρ -11α)

3α-13ρ = **1***(48ρ -11α) + κ_5 **, (** κ_5 **=14α-61ρ, αποτομή)**

πρέπει κ_5 < 48ρ -11α ή 14α-61ρ < 48ρ -11α ή 25α < 109ρ, ισχύει

άρα Ανθ(α+4ρ,ρ) = [8,2,1,3,1,ΑΝθ(48ρ -11α, 19α-109ρ)]

48ρ -11α = **2***(14α-61ρ) + κ_6 **, (** κ_6 **=170ρ-39α, αποτομή)**

πρέπει κ_5 < 14α-61ρ ή 170ρ-39α < 14α-61ρ ή 231ρ < 53α, ισχύει

άρα Ανθ(α+4ρ,ρ) = [8,2,1,3,1,2,ΑΝθ(48ρ -11α, 19α-109ρ)]

- Ισχύει α+4ρ > ρ
  & 14α-61ρ > 170ρ-39α, αρκεί νδο (α+4ρ)(170ρ-39α) = ρ(14α-61ρ).

(α+4ρ)(170ρ-39α) = ρ(14α-61ρ)

(α+4ρ) [(48ρ-11α)-2(14α-61ρ)] = ρ(14α-61ρ)

(α+4ρ)(48ρ -11α) = ρ(14α-61ρ) + 2(α+4ρ)(14α-61ρ)

(α+4ρ)(48ρ -11α) = [ρ+2(α+4ρ)](14α-61ρ)

(α+4ρ)(48ρ -11α) = [ρ+2(α+4ρ)][(3α-13ρ)- (48ρ -11α)]

(48ρ -11α)[(α+4ρ)+ρ+2(α+4ρ)] = [ρ+2(α+4ρ)](3α-13ρ)

(48ρ -11α)[ρ+3(α+4ρ)] = [ρ+2(α+4ρ)](3α-13ρ)

[(9ρ-2α)-3(3α-13ρ)][ρ+3(α+4ρ)] = [ρ+2(α+4ρ)](3α-13ρ)

(9ρ-2α)(ρ+3(α+4ρ) = (3α-13ρ)[ρ+2(α+4ρ)+3ρ+3(α+4ρ)]

(9ρ-2α)(ρ+3(α+4ρ) = [(α-4ρ)-(9ρ-2α)][4ρ+11(α+4ρ)]

(9ρ-2α)[ρ+3(α+4ρ)+4ρ+11(α+4ρ)] = (α-4ρ)[4ρ+11(α+4ρ)]

$(9\rho-2\alpha)[5\rho+14(\alpha+4\rho)] = (\alpha-4\rho)[4\rho+11(\alpha+4\rho)]$

$[\rho-2(\alpha-4\rho)][5\rho+14(\alpha+4\rho)] = (\alpha-4\rho)[4\rho+11(\alpha+4\rho)]$

$P(5\rho+14(\alpha+4\rho)] = (\alpha-4\rho)[10\rho+28(\alpha+4\rho)+4\rho+11(\alpha+4\rho)]$

$\rho[5\rho+14(\alpha+4\rho)] = (\alpha-4\rho)[14\rho+39(\alpha+4\rho)]$

$5\rho^2+14\rho(\alpha+4\rho) = 14\rho(\alpha-4\rho)+39(\alpha-4\rho)(\alpha+4\rho)$

$5\rho^2+14\rho8\rho = 39(\alpha^2-16\rho^2)$

$117\rho^2 = 117\rho^2$.

Με τη «μέθοδο των γνωμόνων» παρατηρούμε ότι το σχήμα είναι πάρα πολύ δύσκολο να σχεδιαστεί και κατόπιν να γίνουν οι παραπάνω περίπλοκες πράξεις προκειμένου να υπολογίσουμε το ανθυφαιρετικό ανάπτυγμα. *Στην περίοδο του Θεόδωρου του Κυρηναίου όπου ο συμβολισμός θα ήταν περιορισμένος θα ήταν σχεδόν αδύνατο να γίνουν οι πράξεις αυτές, οπότε καθίσταται κατανοητό γιατί ο Θεόδωρος βρήκε εμπόδιο και σταμάτησε στην περίπτωση του 19.*

Με τη «μέθοδο των γνωμόνων» που εισάγει ο Fowler επιτυγχάνει μία ανθυφαιρετική ανακατασκευή που βρίσκει σημαντική δυσκολία στην περίπτωση του 19, εξηγώντας γιατί ο Θεόδωρος σταμάτησε στο 17, όπως ρητά αναφέρει ο Πλάτων.

Η μελέτη του Fowler ως προς τα Αρχαία Μαθηματικά εμβαθείνει σημαντικά στο αυστηρά μαθηματικό μέρος αλλά μειονεκτεί ως προς το φιλοσοφικό κομμάτι. Η συμβολλή του ως προς τη μελέτη και το διαχωρισμό των θεωριών λόγων και αλόγων αριθμών – μεγεθών, η ανακατασκευή του ΙΙ Βιβλίου τω Στοιχείων είναι λίγα μόνο από τις σημαντικές περιγραφές – ανακατασκευές που περιγράφει στις εργασίες και στο βιβλίο του. Ταυτόχρονα αρέσκεται να αντιπαραβάλλει με επιτυχία τα αρχαία με τα σύγχρονα μαθηματικά. Στην περίπτωση των αποδείξεων των ασυμμετριών του Θεόδωρου του Κυρηναίου ο Fowler χρησιμοποιεί στο τελικό βήμα, της απόδειξης της περιοδικότητας, θεωρία λόγων όπως περιγράφεται από τον Knorr –και παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.3. Όμως όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.1 η απόδειξη των υπό εξέταση ασυμμετριών δεν πρέπει να περιέχει θεωρία λόγων αλλά να μοιάζει περισσότερο ως συνέχεια, επακόλουθο της αρχικής ανακάλυψης της ασυμμετρίας, δηλαδή της απόδειξης ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

◙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3.1 ΜΕΛΕΤΗ – ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΧΩΡΙΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ, ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ 147c7-148d7 ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ Στ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗ.

Όπως είδαμε η μετάφραση του ‘‘διάσημου’’ χωρίου [Θ] επιδέχεται προσεχτική μελέτη καθότι τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι κομβικά τόσο για το μαθηματικό κομμάτι των αρχαίων Ελληνικών όσο και για τη φιλοσοφία της εποχής εκείνης και τη σύνδεση ή μη, φιλοσοφίας και μαθηματικών. Πολλοί μελετητές έχουν διαφορετικές απόψεις αναφορικά με τη μετάφραση-ερμηνεία κάποιων λέξεων η οποία έχει ως αποτέλεσμα μια διαφορετική μέθοδο εργασίας. Έτσι παραμένουν ακόμη προς αναζήτηση κάποια ουσιαστικά ερωτήματα.

Το καθοριστικό στοιχείο στο οποίο φαίνεται να συγκλίνουν οι απόψεις των σύγχρονων μελετητών είναι ότι το χωρίο - παρόλο που αποτελεί ιστορική πηγή για την αναφορά της ανακάλυψης του Θεόδωρου του Κυρηναίου - *δεν δίνει ισχυρές ενδείξεις για τον τρόπο εργασίας αυτού*. Πιο συγκεκριμένα:

Ο Cherniss [C,p.411] έχει την πρώτη αναφορά στην οποία διατυπώνεται ξεκάθαρα αυτή η θέση: ‘*The sole evidence for Theodorus’ demonstration is the passage of the Theaetetus, and that reveals only that he began with square root of 3 and selecting one surd after another up to square root of seventeen there somehow stopped.* ***This tells us nothing of the method that he used’***.

Ο Burnyeat [Bu] γράφει: ‘*There is no good reason to expect that the answer (what methods would be available to Theodorus for proving various case of incommensurability) is to be* ***squeezed out of one ambiguous sentence’***.

Ο Knorr αναφέρει ότι η μελέτη του κειμένου θα μας δώσει κάποια κριτήρια που θα μας βοηθήσουν στην ανακατασευή χωρίς να πιστεύει όμως ότι το κείμενο μας δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε χωρίς να αφήνει ερωτήματα. Γι’ αυτό άλλωστε ενώ η εργασία που κάνει είναι πολύ σημαντική εν τούτοις παρουσιάζει

σημαντικό σφάλμα πρώτα πρώτα ως προς τη μέθοδο ανακατασκευής που θεωρεί ότι δεν είναι ανθυφαιρετική.

Η θέση αυτή φαίνεται να καταρρίπτεται από τη μελέτη του καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη σύμφωνα με την οποία, ο Πλάτων στο μικρό αυτό χωρίο μας δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε τόσο για την ανακάλυψη του Θεόδωρου του Κυρηναίου όσο και για τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκε. Το συμπέρασμα αυτό ήρθε μετά από εξονυχιστική μελέτη των Πλατωνικών κειμένων, και ιδιαίτερα της τριλογίας *Θεαίτητος – Σοφιστής – Πολιτικός*. Το θέμα της τριλογίας αυτής, η γνώση και η φύση της επιστήμης, είναι ενιαίο. Η διερεύνηση του ζητήματος αρχίζει στο *Θεαίτητο*, συνεχίζει στο *Σοφιστή* και ολοκληρώνεται στον *Πολιτικό*.

Παρακάτω ξετυλίγουμε αρχικά το συλλογισμό που οδηγεί στη διαπίστωση ότι η μέθοδος εργασίας του Θεόδωρου του Κυρηναίου ήταν ανθυφαιρετική και στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία σε σχέση με την εργασία του Θεαίτητου προκειμένου *να περιγράψουμε αναλυτικά και να αποδείξουμε την ερμηνεία του όρου 'δύναμις'* που δυσκόλεψε και δυσκολεύει ακόμα τους σύγχρονους μελετητές. Πράγματι έγιναν αρκετές αναφορές παραπάνω, αναφορικά με την ερμηνεία που δίνουν στον όρο αυτό, χωρίς ωστόσο να μπορέσουν να ερμηνεύσουν με επαρκή επιχειρήματα την επιλογή του Πλάτωνα να αναφέρει τον όρο αυτό με δυσνόητο εκ πρώτης όψεως τρόπο.

ΘΕΑΙ. **Περὶ δυνάμεών** τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς
τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ
σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω **κατ ὰ μίαν ἑκάστην προαιρού-**
μενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.
ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ
δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας
ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

- **Περὶ δυνάμεών:**

Όπως είδαμε παραπάνω ο Knorr αναφερόμενος στον όρο αυτό λέει ότι ο Πλάτων το «δύναμις» δεν το χρησιμοποιεί ως αυστηρό ορισμό, αλλά ως τηλεγραφική έννοια. Αναφέρεται στον όρο «δυναμένη σύμμετρη», εννοώντας έτσι τα τετράγωνά τους.

Όμως ποιος είναι ο λόγος που το κάνει αυτό; Γιατί να βιάζεται να το αναφέρει έτσι και να μη το περιγράφει αναλυτικά; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα τη δώσουμε στο τέλος του κεφαλαίου αυτού αφού μελετήσουμε τη μέθοδο που εργάστηκαν οι Θεόδωρος – Θεαίτητος και τη σύνδεση των Μαθηματικών όρων με τη φιλοσοφία.

- **Μέχρι:**

Δεν είδαμε πουθενά στη μελέτη του χωρίου [Θ] όπως έγινε από τους Knorr, Fowler να δίνεται βάρος στην σημασία της πρόθεσης 'μέχρι'. Οι Hardy &Wright παρατηρούν ότι το «μέχρι» αποτελεί καθοριστικό παραάγοντα για τη μέθοδο εργασίας, όμως δεν παραθέτουν επιχειρήματα υπέρ της μίας ή της άλλης άποψης.

Ο καθηγητής Στ. Νεγρεπόντης κατόπιν εξονυχιστικού ελέγχου κατά μήκους των έργων του Πλάτωνα (και γενικότερα της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας) διαπίστωσε ότι το **«μέχρι»** σε όλο το εύρος του έργου του Πλάτωνα σημαίνει **«μέχρι και-συμπεριλαμβανομένου»** **[Ν-Τ,σελ.6]**. Ο Πλάτων χρησιμοποιώντας τη λέξη «μέχρι» δεν μας αφήνει περιθώρια αμφισβήτησης εάν ο Θεόδωρος απέδειξε την περίπτωση του 17.

«…μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος», σημαίνει ότι ο Θεόδωρος απέδειξε τις ασυμμετρίες από το ρίζα 3 μέχρι και (συμπεριλαμβάνοντας) το ρίζα 17.

Δηλαδή στο σημείο αυτό ο Knorr σφάλει. Μάλιστα αν δεχτούμε (όπως αποδεικνύεται παρακάτω) ότι η μέθοδος ερασίας του Θεόδωρου του Κυρηναίου ήταν ανθυφαιρετική, τότε όντως η περίπτωση του 17 είναι σχεδόν τετρμμένη χωρίς να παρουσιάζει δυσκολία, ενώ αντιθέτως η περίπτωση του 19 εμφανίζει ιδιαίτερη δυσκολία.

- ἀποφαίνων - ἐφαίνοντο:

Δεχόμαστε την αναφερθείσα ερμηνεία του «ἀποφαίνων» όπως διατυπώθηκε από τον Knorr ο οποίος κατέληξε ότι σημαίνει **απέδειξε**, χρησιμοποιώντας κύριο παράδειγμα το χωρίο Πλάτωνος, Παρμενίδης 127-130α2, στο οποίο χρησιμοποιείται ισοδύναμα το 'αποφαίνων' και το 'αποδεικνύω'.

«Οι δυνάμεις (η σωστή ερμηνεία του όρου αυτού παραμένει ανοιχτή) **φαίνονταν** να είναι άπειρες το πλήθος». Το «ἐφαίνοντο» θα μας δώσει σημαντικές ενδείξεις κατ' αρχάς για την ερμηνεία της «δυνάμεως» αλλά και για τη μέθοδο εργασίας. Ας δούμε πώς μπορεί να προκύψει η σωστή ερμηνεία:

- ❖ Υπάρχουν δύο είδη γραμμών τα μήκη και οι δυνάμεις τα οποία αντιστοιχούν στα δυο είδη αριθμών.

Αριθμός πας αντιστοιχίζεται σε δύο κατηγορίες

- **μη τετράγωνοι** αριθμοί
- **τετράγωνοι** αριθμοί.

Ευθύγραμμο τμήμα

- α **δύναμις**, α2 = Νρ2, Ν όχι τετράγωνος
- α **μήκος** αν α2 = Ν2ρ2.

Πρώτα διαιρούμε τους αριθμούς σε δύο κατηγορίες και βάση αυτού χωρίζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα σε μήκος και δυνάμεις. Ο Πλάτων λέει ότι αυτές οι γραμμές, οι δυνάμεις **φαίνονταν** να είναι άπειρες στο πλήθος, δηλαδή υπάρχουν άπειρες τέτοιες δυνάμεις γιατί υπάρχουν άπειροι μη τετράγωνοι αριθμοί. Η δύναμη εξαρτάται από το Ν, υπάρχουν άπειροι μη τετράγωνοι αριθμοί Ν άρα υπάρχουν άπειρες δυνάμεις. Αυτή η ερμηνεία όμως υστερεί σημαντικά. Υστερεί στο «ἐφαίνοντο». Δεν θα έλεγε ο Πλάτων, **φαίνονται** οι δυνάμεις να είναι άπειρες. Θα έλεγε **είναι** όχι **φαίνονταν**. Προφανώς είναι άπειρες με αυτή την ερμηνεία.

❖ Μία άλλη ερμηνεία που μπορούμε να εξετάσουμε για τα *δυνάμεις - εφαίνοντο* είναι το εξής: Οι δυνάμεις είναι ασύμμετρες ως προς την ποδιαία ενώ τα τετράγωνά τους είναι σύμμετρα ως προς την ποδιαία. Δηλαδή ερμηνεύουμε τον όρο 'δύναμη' με τον όρο 'δυναμένη σύμμετρη'. Αυτό όμως δεν είναι προφανής δήλωση. Δηλαδή δεν είναι προφανές ότι μία δύναμη έτσι όπως την όρισε ο Πλάτων να είναι ασύμμετρη, ότι το τετράγωνο του ευθύγραμμου τμήματος θα είναι σύμμετρο. Οπότε θα μπορούσαμε κάπως να δεχτούμε την ερμηνεία ότι «φαίνονταν να είναι άπειρες οι δυνάμεις», σημαίνει «τα ευθύγραμμα τμήματα που ήταν ασύμμετρα προς την ποδιαία αλλά τα τετράγωνά τους ήταν σύμμετρα». Αυτό χρειάζεται απόδειξη και μάλιστα αποτελεί την πρόταση Χ.9, η οποία αποδίδεται από τους Αρχαίους στο Θεαίτητο και επιπλέον αποτελεί το περιεχόμενο αυτής της ανακάλυψης στην οποία αναφέρεται εδώ ο Πλάτωνας (από το Θεαίτητο).

❖ Θα εξετάσουμε την ερμηνεία των **«ἀποφαίνων - ἐφαίνοντο»** συνδέοντας τις δύο παρακάτω εκφράσεις:

(α) **[ἀποφαίνων]** ὅτι **[αἱ δυνάμεις]**

οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ

(β) ἐπειδὴ **ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο**

Ο Θεόδωρος «**αποφαίνονταν**» ότι η τρίπους, η πεντάπους, οι δυνάμεις αυτές είναι μήκει σύμμετρες με τη ποδιαία και γι' αυτό το λόγο οι δυνάμεις αυτές «**εφαίνοντο**» άπειρες το πλήθος. Δηλαδή οι εκφράσεις (α) και (β) λόγω των «αποφαίνων» – «εφαίνοντο» συνδέονται.

Η έκφραση «η τρίπους μήκει ου σύμμετροι τη ποδιαία» στα σύγχρονα μαθηματικά μεταφράζεται ως «η ρίζα 3 είναι άρρητος». Γενικά θα λέγαμε κάθε ρίζα μη τετραγωνικού αριθμού είναι άρρητος. Στο χωρίο όμως αναφέρει '**αι** δυνάμ**εις**'. **ΑΝ τα Α και Β συνδέονται τότε γιατί να μην υποθέσουμε όχι ότι όλες οι δυνάμεις μαζί «εφαίνοντο» άπειρες αλλά *κάθε μία δύναμη χωριστά* «εφαίνοντο» άπειρη;**

Δηλαδή αν συνεχίσουμε το συλλογισμό μας θα ισχυριστούμε ότι υπάρχει μία απειρία σε κάθε μία δύναμη η οποία δε μπορεί παρά να συνδέεται με την ανθυφαίρεση. Έτσι οδηγούμαστε στην πρόταση Χ.2.

Κάθε Μία Δύναμις → Άπειρη το Πλήθος

Οπότε αν ισχυροποιήσουμε την παραπάνω θέση μας τότε ο Πλάτων σαφώς μας αποκαλύπτει και τη μέθοδο με την οποία ο Θεόδωρος απέδειξε την ασυμμετρία. Απόδειξη για τη θέση αυτή αποτελεί η μελέτη της παρακάτω έκφρασης.

Διερεύνηση της έκφρασης «ἄπειροι τὸ πλῆθος» στον Πλάτωνα.

Υπάρχουν περίπου 13 χρήσεις συναφείς προς αυτήν.

1) **Πολιτεία 525^{α}3-5**

ἀλλὰ μέντοι, ἔφη, τοῦτό γ' ἔχει οὐχ ἥκιστα ἡ περὶ αὐτὸ ὄψις· ἅμα γὰρ ταὐτὸν ὡς ἕν τε ὁρῶμεν καὶ ὡς ἄπειρα τὸ πλῆθος.

2) **Θεαίτητος 136^{α}5-7, α7-β1**

τὸ πᾶν κίνησις ἦν καὶ ἄλλο παρὰ τοῦτο οὐδέν, τῆς δὲ κινή-σεως δύο εἴδη, πλήθει μὲν ἄπειρον ἑκάτερον, δύναμιν δὲ τὸ μὲν ποιεῖν ἔχον, τὸ δὲ πάσχειν. ἐκ δὲ τῆς τούτων ὁμιλίας

3) **Σοφιστής 256e5-6**

ΞΕ. Περὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εἰδῶν πολὺ μέν ἐστι τὸ ὄν,
ἄπειρον δὲ πλήθει τὸ μὴ ὄν.

(Το έκαστον είναι δύο πράγματα, τα όντα και τα μη όντα και κάθε ένα από αυτά είναι άπειρο).

4) **Παρμενίδης 132β1-2**

πᾶσιν ἕτερον, ᾧ ταῦτα πάντα μεγάλα ἔσται· καὶ **οὐκέτι** δὴ

□ν**[εν] ἕκαστόν** σοι **τῶν εἰδῶν** ἔσται, **ἀλλὰ ἄπειρα τὸ πλῆθος**.

5) Παρμενίδης 143 α2

οὖν. – Οὐκοῦν(άρα) **ἄπειρον** ἂν **τὸ πλῆθος** οὕτω τὸ □**ν[εν]** ὂν εἴη; –

Αναφέρεται σε μία οντότητα και λέει ότι αυτή είναι άπειρη το πλήθος.

6) Παρμενίδης 144 ε3-5

ἴσα, ὡς ἔοικε, τῷ ἑνί· οὔτε γὰρ τὸ ὂν τοῦ ἑνὸς ἀπολείπεται

οὔτε τὸ □ν τοῦ ὄντος, ἀλλ' ἐξισοῦσθον δύο ὄντε ἀεὶ παρὰ

πάντα. – Παντάπασιν οὕτω φαίνεται. – Τὸ □**ν(εν)** ἄρα **αὐτὸ**

κεκερματισμένον ὑπὸ τῆς οὐσίας πολλά τε καὶ **ἄπειρα τὸ**

πλῆθός ἐστιν. – Φαίνεται. – Οὐ μόνον ἄρα τὸ ὂν □ν πολλά

7) Παρμενίδης 145 α2-3

Πῶς δ' οὔ; – Τὸ □ν ἄρα ὂν **ἕν** τέ **ἐστί** που καὶ **πολλά**, καὶ

ὅλον καὶ μόρια, καὶ πεπερασμένον καὶ **ἄπειρον πλήθει**. –

8) Παρμενίδης 158 c5-7

Ἀνάγκη. – Οὐκοῦν οὕτως ἀεὶ σκοποῦντες αὐτὴν καθ' αὑτὴν
τὴν **ἑτέραν** φύσιν τοῦ **εἴδου**ς ὅσον ἂν αὐτῆς ἀεὶ ὁρῶμεν **ἄπειρον**
ἔσται πλήθει; – Παντάπασι μὲν οὖν. – Καὶ μὴν ἐπειδάν γε

9) Παρμενίδης 164c8-d1

γὰρ οὐκ ἂν οἷά τε εἴη, μὴ ὄντος ἑνός. ἀλλ' **ἕκαστος,** ὡς
ἔοικεν, ὁ ὄγκος αὐτῶν **ἄπειρός ἐστι πλήθει**, κἂν τὸ σμικρό-

10) Παρμενίδης 165 b7-c2

Πάνυ μὲν οὖν. – Οὐκοῦν τό γε τοιοῦτον πόρρωθεν μὲν
ὁρῶντι καὶ ἀμβλὺ □ν φαίνεσθαι ἀνάγκη, ἐγγύθεν δὲ καὶ ὀξὺ
νοοῦντι **πλήθει ἄπειρον** □**ν ἕκαστον φανῆναι**, εἴπερ στέρεται

11) Φίληβος 17b3-4

ΣΩ. Φωνὴ μὲν ἡμῖν ἐστί που μία διὰ τοῦ στόματος
ἰοῦσα, καὶ ἄπειρος αὖ πλήθει, πάντων τε καὶ ἑκάστου.

12) Φίληβος 27e7-9

ΦΙ. Ναί, τῶν τὸ μᾶλλον, ὦ Σώκρατες· οὐ γὰρ ἂν ἡδονὴ
πᾶν ἀγαθὸν ἦν, εἰ μὴ ἄπειρον ἐτύγχανε πεφυκὸς καὶ πλήθει
καὶ τῷ μᾶλλον.

13) Φίληβος 17e3-6

τὸ δ' ἄπειρόν σε ἑκάστων καὶ ἐν ἑκάστοις πλῆθος ἄπειρον ἑκάστοτε ποιεῖ τοῦ φρονεῖν καὶ οὐκ ἐλλόγιμον οὐδ'
ἐνάριθμον, ἅτ' οὐκ εἰς ἀριθμὸν οὐδένα ἐν οὐδενὶ πώποτε
ἀπιδόντα.

[Υπάρχουν δύο λέξεις που έχουν σχέση με αριθμό: ἐνάριθμον, εἰς ἀριθμὸν.
Το άπειρο πλήθος [αν εμφανιστεί σε κάποια πράγματα] σε καθιστά [εσένα δηλαδή] αόριστο στη σκέψη και χωρίς λόγο ή αριθμό εφόσον δε κοιτάζει κανείς και δε θεωρεί κάποιο αριθμό.
Ο συνήθης τρόπος μετάφρασης της παραπάνω έκφρασης από τους διαφόρους μελετητές είναι ισοδύναμος με **άπειρος αριθμός = unlimited in number**, αυτό είναι εντελώς λάθος. (***Μάλιστα στην περίπτωση αυτή είναι αντιφατικό - ακριβώς το αντίθετο σημαίνει.*** Αυτή η ερμηνεία (άπειρος αριθμός) ενώ μπορεί σε κάποιον να φαίνεται κάτι το φυσιολογικό, στον Πλάτωνα είναι *εντελώς λάθος* και δείχνει ότι κάποιος δεν έχει καταλάβει καθόλου πώς βλέπει ο Πλάτων τον αριθμό. Στον Πλάτωνα αυστηρά ο αριθμός **πρέπει** να αποτελείται από αμερείς/αδιαίρετες και ίσες μονάδες].

Τελικά παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η έκφραση «ἄπειροι τὸ πλῆθος» σημαίνει ότι ***το ίδιο ον/η ίδια έννοια είναι άπειρη το πλήθος***. Άρα στο χωρίο που εξετάζουμε δεν αναφέρεται σε όλες τις δυνάμεις μαζί αλλά *σε κάθε μία δύναμη χωριστά*. Κανένας σύγχρονος μελετητής δε φαίνεται να δίνει αυτή την ερμηνεία, μάλιστα θεωρείται ως τετριμμένη η ερμηνεία «άπειρος αριθμός». Για πρώτη φορά από τον καθηγητή Στ. Νεγρεπόντη προτείνεται και θεμελιώνεται η

ερμηνεία **'κάθε μία δύναμη «ἐφαίνοντο» «ἄπειροι τὸ πλῆθος»'**. Αυτό ερμηνεύεται σαφώς με το ότι η ***ανθυφαίρεση*** της κάθε μία δύναμης φαίνονταν να είναι ***άπειρη***, με αποτέλεσμα να *γίνεται φανερός ο τρόπος εργασίας με τον οποίο εργάστηκε ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος, τον οποίο τελικά ο Πλάτων μας τον περιγράφει πλήρως στο μικρό αυτό χωρίο*.

- **'κατὰ μίαν ἑκάστην [δύναμις] προαιρούμενος':**

Η συνήθης μετάφραση από τους μελετητές είναι 'επιλέγοντας κάθε μία δύναμη', η οποία δε φαίνεται να είναι εντελώς σωστή αφού δεν υπάρχει επιλογή με την έννοια πχ. από το 5 στο 6, αντιθέτως υπάρχει υποχρεωτική σειρά κατά την οποία πρέπει να προχωρήσει όποιος εργαστεί για την απόδειξη της ασυμμετρίας των συγκεκριμένων ριζών. Το ''**κατά** μία εκάστην'' σημαίνει ότι η προαίρεση πραγματοποιείται **εντός** (μέσα σε μία δύναμη) της δυνάμεως.

Μία απλή πρώτη σκέψη είναι ότι από τη στιγμή που μιλάμε για προ**αίρεση** κάποια σχέση έχει να κάνει με ανθυφ**αίρεση,** αντα**ν**αίρεση και όλες αυτές οι λέξεις κάποια σχέση έχουν με τη **διαίρεση**. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το ''**κατά** μία εκάστην'' σημαίνει ότι η προαίρεση πραγματοποιείται **εντός** (μέσα σε μία δύναμη) της δυνάμεως.

Θα εξετάσουμε μήπως ο Θεόδωρος μέσα σε κάθε μία δύναμη, μέσα σε κάθε τετραγωνική ρίζα προαιρούμενος, προχωρούσε σε διαίρεση, επιλέγοντας τη σωστή δυαδική διαίρεση.

Διερεύνηση της λέξης «προαίρεσις» στον Πλάτωνα.

- **Πολιτικός 292β6-c4**

ΝΕ. ΣΩ. Πῇ;

ΞΕ. Τῷ ῥηθέντι κατὰ πρώτας πότερον ἐμμενοῦμεν ἢ διαφωνήσομεν;

ΝΕ. ΣΩ. Τῷ δὴ ποίῳ λέγεις;

ΞΕ. Τὴν βασιλικὴν ἀρχὴν τῶν ἐπιστημῶν εἶναί τινα ἔφαμεν, οἶμαι.

ΝΕ. ΣΩ. Ναί.

ΞΕ. Καὶ τούτων γε οὐχ ἁπασῶν, ἀλλὰ **κριτικὴν** δήπου τινὰ καὶ **ἐπιστατικὴν** ἐκ τῶν ἄλλων **προειλόμεθα *(προαίρεσις)***.

ΝΕ. ΣΩ. Ναί.

ΞΕ. Κἀκ τῆς ἐπιστατικῆς τὴν μὲν ἐπ' **ἀψύχοις** ἔργοις, τὴν δ' ἐπὶ **ζῴοις**· καὶ κατὰ τοῦτον δὴ τὸν τρόπον μερίζοντες δεῦρ' ἀεὶ **προεληλύθαμεν**, ἐπιστήμης οὐκ ἐπιλανθανόμενοι, τὸ δ' ἥτις οὐχ ἱκανῶς πω δυνάμενοι διακριβώσασθαι.

ΝΕ. ΣΩ. Λέγεις ὀρθῶς.

- **Πολιτικός, 279α1-8β3** (Υφαντική)

ΞΕ. Πότερον οὖν ἡμῖν ὁ περὶ τῆς **ὑφαντικῆς λόγος**, οὗ **προειλόμεθα** μέρους,

(Θέλουμε να φτάσουμε στο λόγο της Υφαντικής του οποίου προειλόμεθα μέρος)

ἱκανῶς ἔσται διωρισμένος

ἐὰν ἄρ' αὐτὴν τῶν ἐπιμελειῶν ὁπόσαι περὶ τὴν ἐρεᾶν ἐσθῆτα, εἰς τὴν καλλίστην καὶ μεγίστην πασῶν τιθῶμεν· ἢ λέγοιμεν μὲν ἄν τι ἀληθές, οὐ μὴν σαφές γε οὐδὲ τέλεον, πρὶν ἂν καὶ ταύτας αὐτῆς πάσας **περιέλωμεν**;

ΝΕ. ΣΩ. Ὀρθῶς.

- **Πολιτικός 268c5-9**

ΞΕ. Οὐκοῦν ὀρθῶς ὀλίγον ἔμπροσθεν ἐφοβήθημεν ὑποπτεύσαντες μὴ λέγοντες μέν τι τυγχάνοιμεν σχῆμα **βασιλικόν,** οὐ μὴν ἀπειργασμένοι γε εἶμέν πω δι' ἀκριβείας τὸν πολιτικόν, ἕως ἂν τοὺς περικεχυμένους αὐτῷ καὶ τῆς συννομῆς αὐτῷ **ἀντιποιουμένους περιελόντες** καὶ **χωρίσαντες** ἀπ' ἐκείνων **καθαρὸν μόνον** αὐτὸν ἀποφήνωμεν;

- **Σοφιστής 264d10-265a2**

ΞΕ. Πάλιν τοίνυν ἐπιχειρῶμεν, **σχίζοντες διχῇ**
τὸ προτεθὲν γένος, πορεύεσθαι κατὰ τοὐπὶ δεξιὰ ἀεὶ μέρος τοῦ
τμηθέντος, ἐχόμενοι τῆς τοῦ σοφιστοῦ κοινωνίας, ἕως ἂν
αὐτοῦ τὰ κοινὰ πάντα **περιελόντες,**
(διαιρούμε συνεχώς έως τα κοινά μέρη περιελόντες- δηλ. περιαίρεση είναι το τελευταίο βήμα της διαίρεσις)
τὴν οἰκείαν λιπόντες
φύσιν ἐπιδείξωμεν μάλιστα μὲν ἡμῖν αὐτοῖς, ἔπειτα καὶ
τοῖς ἐγγυτάτω γένει τῆς τοιαύτης μεθόδου πεφυκόσιν.
ΘΕΑΙ. Ὀρθῶς.

Στα χωρίο αυτά φαίνεται ξεκάθαρα ότι **προαίρεσις** σημαίνει **επιλογή**, και μάλιστα **επιλογή σωστής δυαδικής διαίρεσης.** Μάλιστα παρατηρούμε πως έχοντας κάνει την **προ-**αίρεση ακολουθεί η **περι-**αίρεση. Η περιαίρεση εμφανίζεται σαν 2^{ο} βήμα του οποίου η προαίρεση είναι το πρώτο.

ΠΕΡΙ- είναι κάτι το κυκλικό. -ΑΙΡΕΣΙΣ είναι κάτι το διαιρετικό.
[Taking away sth that surrownds].

ΠΕΡΙ - ΑΙΡΕΣΙΣ
Κυκλικό - διαιρετικό

Ο Σοφιστής και Πολιτικός είναι τα κατεξοχείν χωρία που η μέθοδος που περιγράφουν είναι η Διχοτομία (με τη σωστή επιλογή διαίρεσης – προαίρεση) και η περιαίρεση. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η διαίρεση γίνεται **μέσα** στη δύναμη και η περιαίρεση είναι το **τελευταίο βήμα**. Η μέθοδος λοιπόν που περιγράφει ο Πλάτων για τη μελέτη των όντων η «**διαίρεση και συναγωγή**». Αξίζει να αναφέρουμε και πάλι ότι η συνήθης ερμηνεία που δίνεται από τους μελετητές στο «**προαίρεσις**» είναι επιλογή κάθε μία δύναμις, ενώ η νέα ερμηνεία που τεκμηριώθηκε είναι επιλογή **μέσα** σε κάθε δύναμη, η οποία έρχεται σε συμφωνία με την ερμηνεία της εκφράσεως **«ἄπειροι τὸ πλῆθος»** η οποία ερμηνεύεται ως απειρεία **μέσα** σε κάθε μία δύναμη.

Περιγραφή ***«διαίρεση και συναγωγή»:***

1) Πολιτικός 283β2-3

εἶναι κρόκης ***(το μαλακό μέρος)*** καὶ στήμονος **(το πολύ δυνατό- αυτό που συγκρατεί)** ὑφαντικήν, ἀλλὰ περιήλθομεν ἐν κύκλῳ πάμπολλα διοριζόμενοι μάτην; ***(γιατί δεν το είπαμε κατευθείαν αλλά κάνοντας συνεχείς κυκλικές διαιρέσεις;;)***

2) Πολιτικός 285a4-b6

διὰ δὲ τὸ μὴ **κατ' εἴδη** συνειθίσθαι *(ισοδύναμο με διαίρεση &συναγωγή)*
σκοπεῖν **διαιρουμένους** ταῦτά τε τοσοῦτον διαφέροντα συμ-
βάλλουσιν εὐθὺς εἰς ταὐτὸν ὅμοια νομίσαντες, καὶ τοὐναντίον
αὖ τούτου δρῶσιν ἕτερα οὐ κατὰ μέρη διαιροῦντες, δέον, ὅταν
μὲν τὴν τῶν πολλῶν τις πρότερον αἴσθηται κοινωνίαν,*(= αν κανείς αισθάνεται ότι υπάρχει μία κοινωνία των πολλών, ότι τα πολλά συνδέονται μεταξύ του και μπορούν να γίνουν ένα)*
μὴ προαφίστασθαι *(=αν μη σταματάει)* πρὶν ἂν ἐν αὐτῇ τὰς διαφορὰς ἴδῃ πάσας
ὁπόσαιπερ *(= εάν δεν ελέγξει όλες τις διαφορές)* ἐν εἴδεσι κεῖνται, τὰς δὲ αὖ
παντοδαπὰς ἀνομοιότητας *(=διαφόρων ειδών πουλιά)*, ὅταν ἐν πλήθεσιν
ὀφθῶσιν, μὴ δυνατὸν εἶναι δυσωπούμενον *(=δεν θα σταματήσουμε)* παύεσθαι
πρὶν ἂν σύμπαντα τὰ οἰκεῖα ἐντὸς μιᾶς ὁμοιότητος *(=εάν δεν κλείσουμε όλα τα οικία σε μία ομοιότητα)* ἕρξας*(=φυλακή)* γένους τινὸς οὐσίᾳ **περιβάληται**.

Επομένως οι διαιρέσεις δεν έχουν τελειώσει εάν
«ἂν **σύμπαντα τὰ οἰκεῖα ἐντὸς μιᾶς ὁμοιότητος ἕρξας** γένους τινὸς οὐσίᾳ **περιβάληται**».

Δηλαδή αρχικά πρέπει να κάνουμε τις διαιρέσεις και κατόπιν όλα τα οικία να τα περιβάλουμε σε ***ένα,*** δηλαδή πρώτα κάνουμε **διαίρεση** και μετά **συναγωγή**.

3) Φαίδρος 266α2-β4

δεξιὰ κληθέντα, οὕτω καὶ τὸ τῆς παρανοίας ὡς <□ν> ἐν ἡμῖν
πεφυκὸς εἶδος ἡγησαμένω τὼ λόγω, ὁ μὲν τὸ ἐπ' ἀριστερὰ (=το κακό)
τεμνόμενος μέρος, πάλιν τοῦτο τέμνων **οὐκ ἐπανῆκεν πρὶν ἐν**
αὐτοῖς *(=συνεχίζοντας την διαίρεση δεν επανέρχεται ποτέ στο αρχικό, δηλαδή η περιοδικότης περιγράφεται αριστερά)* ἐφευρὼν ὀνομαζόμενον σκαιόν*(= αριστερός)*
τινα ἔρωτα ἐλοιδόρησεν
μάλ' ἐν δίκῃ, ὁ δ' εἰς τὰ ἐν δεξιᾷ τῆς μανίας ἀγαγὼν ἡμᾶς,
ὁμώνυμον μὲν ἐκείνῳ, θεῖον δ' αὖ τινα ἔρωτα ἐφευρὼν καὶ
προτεινάμενος ἐπῄνεσεν ὡς μεγίστων αἴτιον ἡμῖν ἀγαθῶν.

ΦΑΙ. Ἀληθέστατα λέγεις.

ΣΩ. Τούτων δὴ ἔγωγε αὐτός τε ἐραστής, ὦ Φαῖδρε, τῶν
διαιρέσεων καὶ συναγωγῶν, ἵνα οἷός τε ὦ λέγειν τε καὶ

4) Σοφιστής, 235b8-c4

ΞΕ. Δέδοκται τοίνυν ὅτι τάχιστα ***διαιρεῖν*** τὴν εἰδωλο-
ποιικὴν τέχνην, καὶ καταβάντας εἰς αὐτήν, ἐὰν μὲν ἡμᾶς εὐθὺς
ὁ σοφιστὴς ὑπομείνῃ, ***συλλαβεῖν*** αὐτὸν κατὰ τὰ ἐπεσταλμένα
ὑπὸ τοῦ βασιλικοῦ ***λόγου,*** κἀκείνῳ παραδόντας ἀποφῆναι
τὴν ἄγραν· ἐὰν δ' ἄρα κατὰ μέρη τῆς μιμητικῆς δύηταί πῃ,
συνακολουθεῖν αὐτῷ διαιροῦντας ἀεὶ τὴν ὑποδεχομένην αὐτὸν
μοῖραν, ἕωσπερ ἂν ληφθῇ.

5) Φαίδρος, 273e1 -3

μένων τὰς φύσεις διαριθμήσηται, καὶ **κατ' εἴδη τε διαιρεῖσθαι**
τὰ ὄντα καὶ **μιᾷ ἰδέᾳ** δυνατὸς ᾖ καθ' ἓν ἕκαστον **περιλαμβάνειν**, οὔ ποτ' ἔσται
τεχνικὸς λόγων πέρι καθ' ὅσον

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε δικαιολογήσει μέχρι στιγμής ότι ο Θεόδωρος μέσα σε κάθε δύναμη έκανε προαιρέσεις. Είναι σαφές ότι το «προαιρούμενο» χρησιμοποιείται ως επιλογή σωστής δυαδικής διαίρεσης, είναι δηλαδή διαιρετικό. Το ΠΡΟ- είναι το προκατακτικό βήμα για να φτάσουμε στη περιαίρεση. Η προαίρεση από μόνη της δεν τελειώνει στη διαίρεση αλλά χρειάζεται

και την περιαίρεση. Αυτή η μέθοδος λοιπόν του Πλάτωνα είναι η **«διαίρεση και συναγωγή»**.

Η «διαίρεση και συναγωγή» ως μέθοδος χρησιμοποιείται όμοια ως μαθηματική – φιλοσοφική μέθοδος. Ειδικότερα ισχύουν τα εξής:

Αριστοτέλους Τοπικά, 158b24-159a2

ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθή-
μασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον
ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον **ὁμοίως**
διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥη-
θέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· **τὴν γὰρ αὐτὴν ἀντ-**
αναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι **δ' ὁρισμὸς**
τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τι-
θεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος,
ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπι-
χειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι)· ἂν δὲ μὴ
τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ' ὅλως
ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους
ἔχει.

Η θεωρία του Αριστοτέλη έχει άμεσο αποτέλεσμα το κριτήριο λόγου. Στη χρονική περίοδο αυτή υπήρχε μία Θεωρία Λόγων για την οποία θα υποθέτουμε τελικά ότι είναι η θεωρία που ξεκίνησε ο Θεόδωρος και συνέχισε ο Θεαίτητος. Δεν υπάρχει και κάποιος άλλος που να την ανέπτυξε αυτή τη θεωρία. Αυτή η θεωρία έχει ως άμεσο πόρισμα το **κριτήριο λόγου**. Εάν έχουμε αναλογία στα δύο υπόλοιπα τότε οι ανθυφαιρέσεις είναι ίσες οπότε έχουμε **περιοδικότητα**.

$\alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1$

$\alpha = \kappa_2\gamma_1 + \gamma_2$

α εξομοιούται με β διότι $\alpha/\beta = \beta/\gamma_1$.

- Η Διαίρεση και Συναγωγή όπως την περιγράψαμε παραπάνω είναι η μέθοδος που τελικά «συλλαβείν εις εν» τα νοητά όντα. Με ποιο τρόπο γίνονται ένα; Αν αυτό

γίνεται μέσω της περιοδικότητας τότε ο μόνος τρόπος να το ισχυριστούμε αυτό είναι με το **κριτήριο του λόγου**. (Όχι με περιοδικότητα πηλίκων, με την περιοδικότητα πηλίκων δεν μπορώ να είμαι σίγουρος ότι θα συνεχίζονται το ίδιο επ' άπειρο αφού δε μπορώ να υπολογίσω όλα τα άπειρα πηλίκα, μόνο με το κριτήριο λόγου διασφαλίζεται αυτό). Στο χωρίο της γεωμετρίας παρουσιάζεται το κατόρθωμα του Θεαίτητου να είναι ότι «συλλαβείν εις εν» όλες τις δυνάμεις. Οπότε η Διαίρεση και Συναγωγή σα μέθοδος είναι μία «μίμηση» (πειρώ μιμούμενος) της φιλοσοφίας από τη γεωμετρία και συγκεκριμένα έχουμε Διαίρεση και Συναγωγή στη φιλοσοφία που μιμείται τη Διαίρεση και Συναγωγή που έκανε ο Θεαίτητος στη γεωμετρία. Αν έχουμε περιοδικότητα τότε οδηγούμαστε στην πλήρη γνώση των νοητών όντων και έτσι γίνεται κατανοητός ο συσχετισμός του αρχικού ερωτήματος που τίθεται στο Διάλογο «Θεαίτητος» **'τι είναι γνώση'** με την ιδέα του Θεαίτητου (μέσω της περιοδικότητας). Για κάθε ον είναι κατανοητό πως όταν έχει πεπερασμένη φύση μπορώ να αποκτήσω γνώση σε πεπερασμένο χρόνο που είναι η μόνη γνώση που μπορώ να αποκτήσω. Οι Πυθαγόρειοι έλεγαν για το $\sqrt{2}$ ότι υπάρχει επανάληψη άρα υπάρχει γνώση. Ο Θεόδωρος αρχικά με συγκεκριμένες ρίζες και ο Θεαίτητος στη συνέχεια βρήκε μία πλήρη μέθοδο περιοδικότητας και αυτό θεωρήθηκε ότι είναι το πρότυπο της γνώσης φιλοσοφικά.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι και η μέθοδος του Θεόδωρου – Θεαίτητου και η Διαίρεση και Συναγωγή έχουν σχέση με περιοδικότης και αυτή η περιοδικότης η μαθηματική είναι λογικό να συνδεθεί με τη φιλοσοφία γιατί όταν έχεις κάτι άπειρο που δεν το ξέρεις ($\sqrt{19}$) αυτό σου γίνεται γνωστό μέσω της ανθυφαίρεσης.

Θεώρημα Θεαίτητου

Αν Ν όχι τετράγωνος αριθμός, α,β γραμμές τότε $a^2 = N \cdot \beta^2$, Τότε η ανθ(α,β) είναι *τελικά περιοδική*.

Ο Θεόδωρος εργάστηκε εξετάζοντας μία μία τις δυνάμεις, ο Θεαίτητος δε θα μπορούσε να έχει κάνει το ίδιο αφού η απόδειξη συμπεριλάμβανε όλες τις δυνάμεις, ενώ αν λειτουργούσε κατά περίπτωση κάπου θα αναγκαζόταν να σταματήσει.

Η συνήθης ερμηνεία αυτής της πρότασης είναι ότι τα α, β είναι τελικά ασύμμετρα, ο Θεαίτητος όμως απέδειξε όχι μόνο ότι τα (α,β) είναι ασύμμετρα αλλά ότι η ανθυφαίρεσή τους είναι περιοδική. Το επιχείρημα που αναπτύξαμε λέει ότι το θεώρημα τελικά είναι αυτό όχι άλλο. Για να το κάνουμε αυτό δε περιοριστήκαμε μόνο στο ότι η προαίρεση μοιάζει με διαίρεση η λέξη το συλλαβείν, περιλλαβείν μοιάζει με κυκλικό αλλά εξετάσαμε σε εύρος τον Πλάτωνα καταλήξαμε στο ότι το προαιρούμενος δε *μοιάζει* απλώς με διαίρεση αλλά *είναι* διαίρεση. Τα επιχειρήματα αυτά δεν είναι μόνο μαθηματικά αλλά αποτελούν σύνδεση και αντιπαραβολή μεταξύ του χωρίου του Θεαίτητου με την Πλατωνική διαλεκτική. Αυτό έχει επιπτώσεις όχι μόνο στο μαθηματικό κομμάτι αλλά και στη διαλεκτική του Πλάτωνος. **Εφόσον αυτό είναι περιοδικό και εφόσον βρήκαμε αυτή την αντιστοιχία, αυτό σημαίνει ότι και στη Πλατωνική Διαλεκτική η μέθοδος της ΔκΣ είναι ο τρόπος με τον οποίο αποκτάται η γνώση των όντων.**

ΔκΣ = Ανθυφαίρεση &κριτήριο λόγου

Πλάτωνος, Σοφιστής 220α (Διαίρεση ασπαλιευτή)

ΞΕ. Πῶς δὲ οὐκ ἔστον; καὶ δεῖ γε ἡμᾶς τὸ μὲν
τῶν ἀψύχων, ἀνώνυμον ὂν πλὴν κατ' ἔνια τῆς κολυμ-
βητικῆς ἄττα μέρη καὶ τοιαῦτ' ἄλλα βραχέα, χαίρειν
ἐᾶσαι, τὸ δέ, τῶν ἐμψύχων ζῴων οὖσαν θήραν, προσειπεῖν
ζῳοθηρικήν.
ΞΕ. Ζῳοθηρικῆς δὲ ἆρ' οὐ διπλοῦν εἶδος ἂν λέγοιτο ἐν
δίκῃ, τὸ μὲν πεζοῦ γένους, πολλοῖς εἴδεσι καὶ ὀνόμασι
διῃρημένον, **πεζοθηρικόν**, τὸ δ' ἕτερον νευστικοῦ ζῴου πᾶν
ἐνυγροθηρικόν;

Πτηνοθυρευτική / ενυγροθυρευτική = εκ των άνω / εκ των κάτω

Σοφιστής, 221α

ΞΕ. Τὸ τῆς ἐναντίας ταύτῃ πληγῆς, **ἀγκίστρῳ** τε γιγνό-
μενον καὶ τῶν ἰχθύων οὐχ ᾗ τις ἂν τύχῃ τοῦ σώματος, ὥσπερ
τοῖς **τριόδουσιν**, ἀλλὰ περὶ τὴν κεφαλὴν καὶ τὸ στόμα τοῦ
θηρευθέντος ἑκάστοτε, καὶ **κάτωθεν εἰς τοὐναντίον ἄνω**
ῥάβδοις καὶ καλάμοις ἀνασπώμενον· οὗ τί φήσομεν, ὦ
Θεαίτητε, δεῖν τοὔνομα λέγεσθαι;

Τριδοντία / αγκυστρευτική = άνωθεν εις το κάτω = κάτωθεν εις το άνω = *εκ των άνω / εκ των κάτω*

Σοφιστής, 221b-c

ΞΕ. Νῦν ἄρα τῆς ἀσπαλιευτικῆς πέρι σύ τε κἀγὼ **συνωμολογήκαμεν οὐ μόνον τοὔνομα, ἀλλὰ καὶ τὸν λόγον** περὶ αὐτὸ τοὖργον εἰλήφαμεν ἱκανῶς. συμπάσης γὰρ τέχνης τὸ μὲν ἥμισυ μέρος κτητικὸν ἦν, κτητικοῦ δὲ χειρωτικόν, χειρωτικοῦ δὲ θηρευτικόν, τοῦ δὲ θηρευτικοῦ ζῳοθηρικόν, ζῳοθηρικοῦ δὲ ἐνυγροθηρικόν, **ἐνυγροθηρικοῦ δὲ τὸ κάτωθεν τμῆμα ὅλον ἁλιευτικόν,** ἁλιευτικῆς δὲ πληκτικόν, πληκτικῆς δὲ ἀγκιστρευτικόν· **τούτου δὲ τὸ περὶ τὴν κάτωθεν ἄνω πληγὴν ἀνασπωμένην(4)**, ἀπ' αὐτῆς τῆς πράξεως ἀφομοιωθὲν τοὔνομα, ἡ νῦν ἀσπαλιευτικὴ ζητηθεῖσα ἐπίκλην γέγονεν.

Ο Πλάτωνας αναφέρει ότι «βρήκαμε όχι μόνο το όνομα αλλά και το λόγο. **Διότι….».** Προσθέτει ότι **αλιευτικόν = κάτωθεν τμήμα όλου του ενυγροθυρικού** και επαναλάβει ότι **αγκυστρευτικόν = κάτωθεν εις την άνω πληγή ανασπωμένην.**

Δηλαδή **Πτηνοθυρευτική / ενυγροθυρευτική = Τριδοντία / αγκυστρευτική.**

Ο Πλατωνικός λόγος λοιπόν είναι συγκεκριμένος λόγος, το κριτήριο του λόγου δηλαδή που μας δίνει τη πλήρη γνώση. Ο Πλάτων προσθέτει το λόγο επειδή θέλει να μας το πει ότι αυτό το κριτήριο του λόγου είναι που μας δίνει τη γνώση.

Αξίζει να προσθέσουμε και την εξής παρατήρηση στη διαίρεση του Σοφιστή:

Αρχίζει με τις **Ποιητικές Τέχνες**, τις χωρίζει σε ***θείες*** και ***ανθρώπινες***, τις ανθρώπινες τις χωρίζει σε ***αυτές καθ'εαυτές*** και ***ειδωλοποιητικές***. Αργότερα πηγαίνει στη ***μιμητική*** και τη ***δοξομιμητική***. Σε αυτά τα δύο ζεύγη προκύπτει και το κριτήριο του λόγου. Ο Πλάτων παραθέτει μία μεγάλη συζήτηση για τα δύο πρώτα αυτά βήματα. Αναφέρει ότι θα διαιρέσουμε κατά πλάτος και κατά μήκος τις 'ειδωλοποιητικές' και τις 'αυτές καθ'εαυτες' και κάνει πολύ συζήτηση για να καταλήξει στο παρακάτω σχήμα.

ΕΙΔΩΛΟΠΟΗΤΙΚΕΣ	Χ	Χ (ζωγραφιά σπιτιού)
ΑΥΤΕΣ ΚΑΘΕΑΥΤΕΣ	Χ	Χ (κατασκευή σπιτιού)
	ΘΕΙΕΣ	ΑΝΘΡΩΠΙΝΕΣ

Αυτό το σχήμα το κάνει διότι θέλει να χρησιμοποιήσει το λόγο της τετμημένης γραμμή που περιγράφει στην Πολιτεία:

Αυτά καθ'εαυτά / ομοιώματα = επιστήμη / (γνώση) δόξα

Για να φτάσουμε στην ισότητα του λογο στο Σοφιστή απαιτείται η χρήση της ισότητας στην Πολιτεία. Στο λόγο της Πολιτείας έχουμε όλα τα ομοιώματα ενώ στο Σοφιστή έχουμε μόνο τα ανθρώπινα όχι όλα. Πώς είμαστε σίγουροι ότι αν περιοριστούμε στα ανθρώπινα διατηρείται ο λόγος;;; Αυτό που μας εξηγεί ο Πλάτων με το παραπάνω σχήμα είναι ότι τα ανθρώπινα μπορώ να τα δω κάπως ανεξάρτητα και με αυτό τον τρόπο να διατηρηθεί ο λόγος που έχω στην Πολιτεία, δηλαδή ο Πλάτων σε αυτό το σημείο κάνει χρήση της ιδιότητας που αναφέρεται στα Τοπικά. για να μπορέσει να συμπεράνει ότι οι ανθρώπινες ποιήσεις διαιρούμενες με αυτόν τον τρόπο μας δίνουν ακριβώς τον απόλυτο λόγο.

Η διαίρεση του Σοφιστή παρουσιάζει έναν έντεχνο λόγο (τετμημένη γραμμή) και όχι προφανή λόγο (άνωθεν/κάτωθεν). Πέραν αυτού προσαρμόζει το λόγο της τετμημένης γραμμής στις ανάγκες της διαίρεσης και σε αυτό είναι πάρα πολύ προσεχτικός και επικαλείται τη φιλοσοφική ιδιότητα των Τοπικών. Αυτή είναι πολύ σημαντική ιδιότητα.

- **Περὶ δυνάμεών:**

Τελειώνοντας θα εξετάσουμε το ερώτημα που έχει μείνει ανοιχτό σχετικά με τη χρήση του όρου «**δύναμις**» στο χωρίο αυτό. 'Δύναμις' σύμφωνα με την ορολογία του Θεαίτητου είναι αυτό που λέει ο Ευκλείδης 'δυνάμει **μόνο** σύμμετρος στην ρ'. Αυτό χωρίς να είναι λάθος, αποτελεί μόνο μέρος της ερμηνείας.

Θα εξετάσουμε ποια είναι όλη η ερμηνεία και γιατί επιλέγει να χρησιμοποιήσει αυτόν τον όρο ο Πλάτων.

Μία άλλη χρήση του όρου 'δύναμις' από τον Πλάτωνα είναι αυτή που συναντούμε στο Σοφιστή:

Σοφιστής 247d-e:
ΞΕ. Λέγω δὴ τὸ καὶ ὁποιανοῦν [τινα] κεκτημένον **δύναμιν**
εἴτ' **εἰς τὸ ποιεῖν** ἕτερον ὁτιοῦν πεφυκὸς εἴτ' **εἰς τὸ παθεῖν**
καὶ σμικρότατον ὑπὸ τοῦ φαυλοτάτου, κἂν εἰ μόνον εἰς ἅπαξ,
πᾶν τοῦτο ὄντως εἶναι· τίθεμαι γὰρ **ὅρον [ὁρίζειν] τὰ ὄντα**
ὡς ἔστιν οὐκ ἄλλο τι πλὴν δύναμις.

Το Μόνο πράγμα που υπάρχει για να ορίσουμε τα νοητά όντα είναι η δύναμις.

Νοητό ον = δύναμις είτε εις το παθέιν είτε εις το ποιείν έστω και μόνο μία φορά.

Έχουμε δύο όντα, έστω ότι το α ποιεί και το β πάσχει. Το α είναι δύναμις είτε εις το ποιείν το β (ως προς το β), είτε εις το παθείν ως προς το β. Κι ας είναι τρομερά μικρά αυτά πάλι ισχύει αυτό.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι στο χωρίο του Θεαίτητου έχουμε τον Γεωμετρικό Ορισμό Δύναμις ενώ στο χωρίο του Σοφιστή το Φιλοσοφικό Ορισμό Δύναμις.

Σοφιστής 248c: 2ος ορς του οντος
ΞΕ. Ἱκανὸν ἔθεμεν ὅρον που τῶν ὄντων, ὅταν τῳ παρῇ
ἡ τοῦ **πάσχειν ἢ δρᾶν** καὶ πρὸς τὸ σμικρότατον **δύναμις**;
Έχουμε ορίσει καλώς το «ον» όταν παρουσιάζεται η δύναμις προς το πάσχειν ή δραν.
ΞΕ. Πρὸς δὴ ταῦτα τόδε λέγουσιν, ὅτι γενέσει μὲν
μέτεστι τοῦ πάσχειν καὶ ποιεῖν δυνάμεως, πρὸς δὲ οὐσίαν

τούτων οὐδετέρου τὴν δύναμιν ἁρμόττειν φασίν.

Η γένεση του όντος έχει σχέση με το ποιεί και το πάσχει αλλά οι ιδεολόγοι δε δέχονται ότι ένας τέτοιος ορισμός είναι καλός.

Ας δούμε τι συμβαίνει στα μαθηματικά:
Έστω ότι έχουμε την Ανθ(α,β) με α>β
Το α διαιρείται από β, το β διαιρεί το α.
Στο επόμενο βήμα αυτό που ήταν ενεργητικό γίνεται παθητικό και αντιστρόφως.

Αυτό ακριβώς το «**ποιεί**» και «**πάσχει**» έχει εμφανιστεί στο Θεαίτητο σε χωρίο όπου γίνεται περιγραφή της κίνησης, ως «δύναμη του ποιείν και του πάσχειν». Δηλαδή παρατηρούμε ότι το «ποιείν» και το «πάσχειν» που αναφέρεται εδώ είναι διαιρετικό. Όταν λέμε «ποιειν/πάσχειν» θα το συσχετίσουμε με το «διαιρεί/διαιρούμενο» οπότε ασφαλώς αναφερόμαστε στο διαιρετικό μέρος και αυτή η αντίρρηση που έχουν οι φίλοι των νοητών πραγμάτων είναι ότι αυτό το διαιρετικό κομμάτι υπάρχει, αλλά δεν χαρακτηρίζει τα όντα που έχουν και τη **συναγωγή**. Τη δύναμη της συναγωγής. Ο ορισμός αυτός, ο οποίος εκ πρώτης όψεως φαίνεται να αναφέρεται στη διαίρεση και όχι στη συναγωγή.

ΘΕΑΙ. Οὐκοῦν λέγουσί τι;
ΞΕ. Πρὸς ὅ γε λεκτέον ἡμῖν ὅτι δεόμεθα παρ' αὐτῶν
ἔτι πυθέσθαι σαφέστερον εἰ προσομολογοῦσι τὴν μὲν ψυχὴν
γιγνώσκειν, τὴν δ' οὐσίαν γιγνώσκεσθαι.
ΘΕΑΙ. Φασὶ μὴν τοῦτό γε.
ΞΕ. Τί δέ; τὸ γιγνώσκειν ἢ τὸ γιγνώσκεσθαί φατε
ποίημα ἢ πάθος ἢ ἀμφότερον; ἢ τὸ μὲν **πάθημα**, τὸ δὲ
θάτερον; ἢ παντάπασιν οὐδέτερον οὐδετέρου τούτων μετα-
λαμβάνειν;

ΞΕ. Μανθάνω· τόδε γε, ὡς τὸ γιγνώσκειν εἴπερ ἔσται
ποιεῖν τι, τὸ γιγνωσκόμενον ἀναγκαῖον αὖ συμβαίνει **πάσχειν.**
τὴν οὐσίαν δὴ **κατὰ τὸν λόγον τοῦτον γιγνωσκομένη**ν ὑπὸ τῆς

γνώσεως, καθ' ὅσον γιγνώσκεται, κατὰ τοσοῦτον **κινεῖσθα**ι διὰ
τὸ **πάσχειν**, ὃ δή φαμεν οὐκ ἂν γενέσθαι περὶ τὸ **ἠρεμοῦν**.

Αν πρόκειται κάποιος να μάθει ή να γνωρίσει την Πλατωνική Ιδέα πρέπει να την κινήσει. Η κίνηση δεν είναι τίποτα άλλο από βήματα ποιεί και πάσχει και επομένως πρέπει να τη διαιρέσει.
Στην αρχή του Σοφιστή γνωρίσαμε την Ιδέα του Ασπαλιευτή κάνοντας μία διαίρεση και στο τέλος βρήκαμε το λόγο. Η ψυχή η οποία αναζητεί τη γνώση πρέπει να κινήσει αυτά τα πράγματα, δηλαδή να «πάθουν», συνεπώς η γνώση έρχεται ως αποτέλεσμα «ποιείν και πάσχειν».

ἡμῖν λόγοις τιθῶμεν; ἢ πάντα εἰς ταὐτὸν **συναγάγωμεν** ὡς
δυνατὰ ἐπικοινωνεῖν ἀλλήλοις; ἢ τὰ μέν, τὰ δὲ μή; τούτων,

Συναγωγή των πολλών σε ένα, **η συναγωγή λοιπόν είναι «δύναμις επικοινωνίας μεταξύ των μερών** (του α και του β, του ποιούντος και του πάσχοντος)». Το 'ποιείν' και το 'πάσχειν' το περιγράψαμε ως κάτι το διαιρετικό, όμως δε θέλουμε μόνο αυτό, θέλουμε και τη συναγωγή. Όταν λέει ο Πλάτων ότι δύο πράγματα επικοινωνούν μεταξύ τους αυτό σημαίνει ότι γίνονται κοινά. Η «δύναμις» του Σοφιστή είναι δύναμη επικοινωνίας.

Θα επανέλθουμε τώρα στο Θεαίτητο. Το 'α' είναι «δύναμις», δηλαδή «δυνάμει μόνο σύμμετρο με την προτεθείσα ρ».

$a^2 = N \cdot \rho^2$, Ν όχι τετράγωνος αριθμός. Ο Θεαίτητος απέδειξε ότι η ανθ(α,β) είναι περιοδική και γι' αυτό ονομάζει δύναμη το α, εφόσον το α έχει τη δύναμη επικοινωνίας με το ρ. **Με φιλοσοφικό τρόπο χρησιμοποιεί τον όρο αυτό ο Πλάτων γιατί θέλει να δείξει ότι το α έχει με το ρ τη δύναμη επικοινωνίας με διαίρεση και συναγωγή.**

Δηλαδή «δύναμις» ορίζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει **τη δύναμη επικοινωνίας με το ρ.**

Το γεγονός ότι οι γεωμέτρες δίνουν τη λέξη 'δύναμη' σε αυτό εξηγείται διότι δίνεται η δυνατότητα της επικοινωνίας στα α,β και αντικατοπτρίζουν με αυτό τον ορισμό τη φιλοσοφική έννοια της δύναμης.

Τελικά διαπιστώσαμε ότι και ο ορισμός αυτός ερμηνεύεται κάνοντας την αντιστοιχία ή αλλιώς τη «μίμηση» της Πλατωνικής φιλοσοφίας στη γεωμετρία.

3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΤΙΚΗΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥΣ ΓΝΩΜΟΝΕΣ.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστεί μία πρόταση ανακατασκευής η οποία διαφέρει, θα λέγαμε ίσως ότι υπερέχει ως προς την εξής πολύ σημαντική συνθήκη:

Δεν περιέχει κριτήριο λόγου ή οποιαδήποτε άλλη χρήση λόγου. Η πρόταση αυτή πηγάζει κυρίως από το Β' Μέρος του άρθρου «The anthyphairetic Reconstuction of the Method of Application of Areas in Excess» όπου οι συγγραφείς Στ. Νεγρεπόντης, Γ. Τασσόπουλος πραγματεύονται μεταξύ άλλων δευτεροβάθμιες εξισώσεις και ειδικότερα την καθ' υπερβολή εφαρμογή χωρίου. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι δύο ευθυγρ. τμήματα α,β με α>β ικανοποιούν τη δευτεροβάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολή εφαρμογή χωρίου) $Α\alpha^2 = \beta\,(Β\alpha + Γ\beta)$, όπου Α, Β, Γ φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη συνθήκη Α+Β > Γ **[N-T,sec. 5-6]**.

Η ανακατασκευή αυτή αποτελεί θα λέγαμε συνέχεια της ανακατασκευής ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου με την έννοια ότι η απειρία της ανθυφαίρεσης των μεγεθών στην περίπτωση του $\sqrt{2}$ προέκυψε από τη διαφύλαξη του σχήματος του (τετράγωνου) γνώμονος **[Νε2, σελ.29-31]** ενώ η απόδειξη των ασυμμετριών των $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ...\sqrt{13}, \sqrt{17}$ θα προκύψει από την επανάληψη της καθ' υπερβολήν εφαρμογής χωρίου, η οποία εκφράζεται γεωμετρικά με ορθογώνιους γνώμονες.

Ας εξετάσουμε μία προς μία τις περιπτώσεις:

$$a^2 = 3 \cdot \rho^2$$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - \rho^2 = 2\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα α > ρ και άρα στη διαίρεση του α διά το ρ,

$\alpha = \mathbf{1}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = \rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο και λαμβάνουμε $\alpha^2 = (\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (**τετράγωνος γνώμων**):

$\rho^2 + 2\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - \rho^2 = 2\rho^2$ ή

- $\mathbf{2\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 = 2\rho^2}$ **, 2 + 2 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+2>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $2\rho^2 > 2\rho\ \kappa_1$ ή $\rho > \kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το κ_1,

$\rho = \mathbf{1}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (**καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου**):

$2(\kappa_1+\kappa_2)\ \kappa_1 + \kappa_1^{\ 2} = 2(\kappa_1+\kappa_2)^2$ ή $2\kappa_1^{\ 2} + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^{\ 2} = 2\kappa_1^{\ 2} + 4\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2^{\ 2}$

- $2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2^{\ 2} = \kappa_1^{\ 2}$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+2>1).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1^{\ 2} > 2\kappa_1\ \kappa_2$ ή $\kappa_1 > 2\ \kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το $2\ \kappa_2$,

$\kappa_1 = \mathbf{2}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = 2\kappa_2 + \kappa_3$ στη 2-βάθμια εξίσωση και λαμβάνουμε $\kappa_1^{\ 2} = (2\kappa_2 + \kappa_3)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (**καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου**) .

$(2\kappa_2 + \kappa_3)^2 = 2(2\kappa_2 + \kappa_3)\kappa_2 + 2\kappa_2^{\ 2}$ ή

$4\kappa_2^{\ 2} + \kappa_3^{\ 2} + 4\kappa_2\ \kappa_3 = 4\kappa_2^{\ 2} + 2\kappa_2\ \kappa_3 + 2\kappa_2^{\ 2}$

- $\kappa_3^{\ 2} + \mathbf{2}\kappa_2\ \kappa_3 = \mathbf{2}\kappa_2^{\ 2}$**, 2 + 2 > 1** (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+2>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 5 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 4\rho^2 = \rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 2\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 2ρ,

$\alpha = \mathbf{2}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 2\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (2\rho+\kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (**τετράγωνος γνώμων**):

$(2\rho+\kappa_1)^2 - 4\rho^2 = \rho^2$ ή $4\rho^2 + 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 4\rho^2 = \rho^2$

- $\boldsymbol{\rho^2 = 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 1 + 4 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $\rho^2 > 4\rho\kappa_1$ ή $\rho > 4\kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το $4\kappa_1$,

$\rho = \mathbf{4}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = 4\kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου):

$(4\kappa_1+\kappa_2)^2 = 4(4\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $16\kappa_1^2 + 8\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 = 16\kappa_1^2 + 4\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1^2$

- $\boldsymbol{\kappa_1^2 = 4\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}$ **, 1+4 > 1** (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή

$$a^2 = 7 \cdot \rho^2$$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 4\rho^2 = 3\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 2\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 2ρ,

$\alpha = \mathbf{2}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 2\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (2\rho+\kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (**τετράγωνος γνώμων**):

$(2\rho+\kappa_1)^2 - 4\rho^2 = 3\rho^2$ ή $4\rho^2 + 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 4\rho^2 = 3\rho^2$

- $\mathbf{3\rho^2 = 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 3 + 4 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $3\rho^2 > 4\rho\kappa_1$ ή $\rho > \kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το κ_1,

$\rho = \mathbf{1}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(\kappa_1+\kappa_2)^2 = 4(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $3\kappa_1^2 + 6\kappa_1\kappa_2 + 3\kappa_2^2 = 4\kappa_1^2 + 4\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $2\kappa_1^2 = 2\kappa_1\kappa_2 + 3\kappa_2^2$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+2>3).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $2\kappa_1^2 > 2\kappa_1\kappa_2$ ή $\kappa_1 > \kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το κ_2,

$\kappa_1 = \mathbf{1}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = \kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$2(\kappa_2+\kappa_3)^2 = 2(\kappa_2+\kappa_3)\kappa_2 + 3\kappa_2^2$ ή $2\kappa_2^2 + 4\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_3^2 = 2\kappa_2^2 + 2\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_2^2$

- $3\kappa_2^2 = 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_3^2$ (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 3+2>2).

Από την (3) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_2 > \kappa_3$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_2 διά το κ_3,

$\kappa_2 = \mathbf{1}\,\kappa_3 + \kappa_4$ (Πρόταση Ι.3). **(4η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_2 = \kappa_3 + \kappa_4$ στην (3) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(\kappa_3+\kappa_4)^2 = 2(\kappa_3+\kappa_4)\kappa_3 + 2\kappa_3^{\ 2}$ ή $3\kappa_3^{\ 2} + 6\kappa_3\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2} = 2\kappa_3^{\ 2} + 2\kappa_3\kappa_4 + 2\kappa_3^{\ 2}$

- $\kappa_3^{\ 2} = 4\kappa_3\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2}$ (4)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>3).

Από την (4) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_3^{\ 2} > 4\kappa_3\kappa_4$ ή $\kappa_3 > 4\kappa_4$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_3 διά το $4\kappa_4$,

$\kappa_3 = \mathbf{4}\,\kappa_4 + \kappa_5$ (Πρόταση Ι.3). **(5η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_3 = 4\kappa_4 + \kappa_5$ στην (4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(4\kappa_4+\kappa_5)^2 = 4(4\kappa_4+\kappa_5)\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2}$ ή $16\kappa_4^{\ 2} + 8\kappa_4\kappa_5 + \kappa_5^{\ 2} = 16\kappa_4^{\ 2} + 4\kappa_4\kappa_5 + 3\kappa_4^{\ 2}$

- $\mathbf{3}\,\kappa_4^{\ 2} = \mathbf{4}\,\kappa_4\kappa_5 + \kappa_5^{\ 2}$ **, 3+4>1** (5)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+2>3).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (5) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 8 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα α > 2ρ και άρα στη διαίρεση του α διά το 2ρ,

α = **2**ρ + κ_1 (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση α = 2ρ + κ_1 στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (2\rho+\kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (τετράγωνος γνώμων):

$(2\rho+\kappa_1)^2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$ ή $4\rho^2 + 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$

- $\mathbf{4\rho^2 = 4\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 4 + 4 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $4\rho^2 > 4\rho\kappa_1$ ή $\rho > \kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το κ_1,

ρ = **1** $\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3)**.** **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση ρ = $\kappa_1+\kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου):

$4(\kappa_1+\kappa_2)^2 = 4(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1+\kappa_1^2$ ή $4\kappa_1^2+8\kappa_1\kappa_2+4\kappa_2^2 = 4\kappa_1^2+4\kappa_1\kappa_2+\kappa_1^2$

- $\kappa_1^2 = 4\kappa_1\kappa_2 + 4\kappa_2^2$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+4>4).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1^2 > 4\kappa_1\kappa_2$ ή $\kappa_1 > 4\kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το $4\kappa_2$,

$\kappa_1 =$ **4** $\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3)**.** **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = 4\kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου):

$2(4\kappa_2+\kappa_3)^2 = 4(\kappa_2+\kappa_3)\kappa_2+4\kappa_2^2$ ή $16\kappa_2^2+8\kappa_2\kappa_3+\kappa_3^2 = 16\kappa_2^2+4\kappa_2\kappa_3+4\kappa_2^2$

- $\mathbf{4\kappa_2^2 = 4\kappa_2\kappa_3+\kappa_3^2}$**, 4+4>1** (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 4+4>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 10 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 9\rho^2 = \rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 3\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 3ρ,

$\alpha = \mathbf{3}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 3\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (3\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (τετράγωνος γνώμων): $(\mathbf{3}\rho + \kappa_1)^2 - 9\rho^2 = \rho^2$ ή $9\rho^2 + 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 9\rho^2 = \rho^2$

- $\boldsymbol{\rho^2 = 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 1 +6 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+6>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $\rho^2 > 6\rho\kappa_1$ ή $\rho > \mathbf{6}\kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το $6\kappa_1$,

$\rho = \mathbf{6}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \mathbf{6}\kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου):

$(6\kappa_1 + \kappa_2)^2 = 6(6\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $36\kappa_1^2 + 12\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 = 36\kappa_1^2 + 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $\boldsymbol{\kappa_1^2 = 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}$ **, 1+6>1** (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+6>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 11 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 9\rho^2 = 2\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 3\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 3ρ,

$\alpha = \mathbf{3}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 3\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (3\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(\mathbf{3}\rho + \kappa_1)^2 - 9\rho^2 = 2\rho^2$ ή $9\rho^2 + 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 9\rho^2 = 2\rho^2$

- $\mathbf{2\rho^2 = 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 2 +6 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+6>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $2\rho^2 > 6\rho\kappa_1$ ή $\rho > \mathbf{3}\kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το $3\kappa_1$,

$\rho = \mathbf{3}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \mathbf{3}\kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$2(3\kappa_1 + \kappa_2)^2 = 6(3\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $18\kappa_1^2 + 12\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2^2 = 18\kappa_1^2 + 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $\kappa_1^2 = 6\kappa_1\kappa_2 + 2\mathbf{2}^2$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+6>1).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1^2 > 6\kappa_1\kappa_2$ ή $\kappa_1 > \mathbf{6}\kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το $\mathbf{6}\kappa_2$,

$\kappa_1 = \mathbf{6}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = \mathbf{6}\kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(6\kappa_2+\kappa_3)^2 =$ $4(6\kappa_2+\kappa_3)\kappa_2 + \mathbf{2}\kappa_2^{\ 2}$ ή $36\kappa_2^{\ 2} + 12\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3^{\ 2} =$ $36\kappa_2^{\ 2} + 6\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2^{\ 2}$

- $\mathbf{2}\kappa_2^{\ 2} = \mathbf{6}\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3^{\ 2}$**, 2+6>1** (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+6>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 13 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 9\rho^2 = 4\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα α > 3ρ και άρα στη διαίρεση του α διά το 3ρ,

$\alpha = \mathbf{3}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 3\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (3\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(\mathbf{3}\rho + \kappa_1)^2 - 9\rho^2 = 4\rho^2$ ή $9\rho^2 + 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^{\ 2} - 9\rho^2 = 4\rho^2$

- $\mathbf{4}\rho^2 = \mathbf{6}\rho\kappa_1 + \kappa_1^{\ 2}$**, 4 +6 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 4+6>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $\rho > \kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το κ_1,

$\rho = \mathbf{1}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3)**.** **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$4(\kappa_1+\kappa_2)^2 = 6(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^{\ 2}$ ή $4\kappa_1^{\ 2} + 8\kappa_1\kappa_2 + 4\kappa_2^{\ 2} = 6\kappa_1^{\ 2} + 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^{\ 2}$

- $3\kappa_1^{\ 2} = 2\kappa_1\kappa_2 + 4\kappa_2^{\ 2}$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 3+2>4).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1 > \kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το κ_2,

$\kappa_1 = \mathbf{1}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = \kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(\kappa_2+\kappa_3)^2 = 2(6\kappa_2+\kappa_3)\kappa_2 + \mathbf{4}\kappa_2^{\ 2}$ ή $3\kappa_2^{\ 2} + 6\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_3^{\ 2} = 2\kappa_2^{\ 2} + 2\kappa_2\kappa_3 + 4\kappa_2^{\ 2}$

- $3\kappa_2^{\ 2} = 4\kappa_2\kappa_3 + \mathbf{3}\kappa_3^{\ 2}$ (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 3+4>3).

Από την (3) προκύπτει η ανισότητα $3\kappa_2^{\ 2} > 4\kappa_2\kappa_3$ ή $\kappa_2 > \kappa_3$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_2 διά το κ_3,

$\kappa_2 = \mathbf{4}\kappa_3 + \kappa_4$ (Πρόταση Ι.3). **(4η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_2 = \kappa_3 + \kappa_4$ στην (3) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(\kappa_3+\kappa_4)^2 = 4(\kappa_3+\kappa_4)\kappa_3 + \mathbf{3}\kappa_3^{\ 2}$ ή $3\kappa_3^{\ 2} + 6\kappa_3\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2} = 4\kappa_3^{\ 2} + 4\kappa_3\kappa_4 + 3\kappa_3^{\ 2}$

- $4\kappa_3^{\ 2} = 2\kappa_3\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2}$ (4)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 4+2>3).

Από την (4) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_3 > \kappa_4$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_3 διά το κ_4,

$\kappa_3 = \mathbf{1}\kappa_4 + \kappa_5$ (Πρόταση Ι.3). **(5η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_3 = \kappa_4 + \kappa_5$ στην (4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$4(\kappa_4+\kappa_5)^2 = 2(\kappa_4+\kappa_5)\kappa_4 + 3\kappa_4^{\ 2}$ ή $4\kappa_4^{\ 2} + 8\kappa_4\kappa_5 + \mathbf{4}\kappa_5^{\ 2} = 2\kappa_4^{\ 2} + 2\kappa_4\kappa_5 + 3\kappa_4^{\ 2}$

- $\kappa_4{}^2 = 6\kappa_4\ \kappa_5 + \mathbf{4}\kappa_5{}^2$ (5)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+6>4).

Από την (5) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_4{}^2 > 6\kappa_4\ \kappa_5$ ή $\kappa_4 > \mathbf{6}\kappa_5$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_4 διά το $6\kappa_5$,

$\kappa_4 = \mathbf{6}\ \kappa_5 + \kappa_6$ (Πρόταση Ι.3). **(6η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_4 = \mathbf{6}\ \kappa_5 + \kappa_6$ στην (5) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(6\kappa_5 + \kappa_6)^2 = 6(6\kappa_5 + \kappa_6)\kappa_5 + \mathbf{4}\kappa_5{}^2$ ή $36\kappa_5{}^2 + 12\kappa_5\ \kappa_6 + \kappa_6{}^2 = 36\kappa_5{}^2 + 6\kappa_5\ \kappa_6 + \mathbf{4}\kappa_4{}^2$

- $\mathbf{4}\kappa_5{}^2 = \mathbf{6}\kappa_5\ \kappa_6 + \kappa_6{}^2$**, 4+6>1** (6)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 4+6>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (6) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 15 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 9\rho^2 = 6^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα α > 3ρ και άρα στη διαίρεση του α διά το 3ρ,

$\alpha = \mathbf{3}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 3\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (3\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(\mathbf{3}\rho + \kappa_1)^2 - 9\rho^2 = 6\rho^2$ ή $9\rho^2 + 6\rho\kappa_1 + \kappa_1{}^2 - 9\rho^2 = 6\rho^2$

- $\mathbf{6\rho^2 = 6\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **,** $\mathbf{6+6>1}$ (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 4+6>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $6\rho^2 > 6\rho\kappa_1$ ή $\rho > \kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το κ_1,

$\rho = \mathbf{1}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$6(\kappa_1+\kappa_2)^2 = 6(\kappa_1+\kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $6\kappa_1^2 + 12\kappa_1\kappa_2 + 6\kappa_2^2 = 6\kappa_1^2 + 6\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $\kappa_1^2 = 6\kappa_1\kappa_2 + 6\kappa_2^2$ (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+6>6).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1^2 > 6\kappa_1\kappa_2$ ή $\kappa_1 > \mathbf{6}\kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το $\mathbf{6}\kappa_2$,

$\kappa_1 = \mathbf{6}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = \mathbf{6}\kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(6\kappa_2+\kappa_3)^2 = 6(6\kappa_2+\kappa_3)\kappa_2 + \mathbf{6}\kappa_2^2$ ή $36\kappa_2^2 + 12\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3^2 = 36\kappa_2^2 + 6\kappa_2\kappa_3 + 6\kappa_2^2$

- $\mathbf{6}\kappa_2^2 = \mathbf{6}\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3^2$ **,** $\mathbf{6+6>1}$ (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 6+6>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 17 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 16\rho^2 = \rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 4\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 4ρ,

$\alpha = \mathbf{4}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 4\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (\mathbf{4}\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(\mathbf{4}\rho + \kappa_1)^2 - 16\rho^2 = \rho^2$ ή $16\rho^2 + 8\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 16\rho^2 = \rho^2$

- $\boldsymbol{\rho^2 = 8\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 1 +8 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+8>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $\rho^2 > 8\rho\kappa_1$ ή $\rho > \mathbf{8}\kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το $8\kappa_1$,

$\rho = \mathbf{8}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \mathbf{8}\kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(8\kappa_1 + \kappa_2)^2 = 8(8\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $64\kappa_1^2 + 16\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 = 64\kappa_1^2 + 8\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $\boldsymbol{\kappa_1^2 = 8\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}$ **, 1+8>1** (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+8>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

$a^2 = 19 \cdot \rho^2$

Μεταβαίνουμε από το τετράγωνο α^2 στον αντίστοιχο γνώμονα:

Γο: $\alpha^2 - 16\rho^2 = 3\rho^2$

Ο Γνώμων Γο οδηγεί στην ανισότητα $\alpha > 4\rho$ και άρα στη διαίρεση του α διά το 4ρ,

$\alpha = \mathbf{4}\rho + \kappa_1$ (Πρόταση Ι.3). **(1η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = 4\rho + \kappa_1$ στο Γνώμονα Γο, λαμβάνουμε $\alpha^2 = (4\rho + \kappa_1)^2$ (Πρόταση ΙΙ.4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(4\rho + \kappa_1)^2 - 16\rho^2 = 3\rho^2$ ή $16\rho^2 + 8\rho\kappa_1 + \kappa_1^2 - 16\rho^2 = 3\rho^2$

- $\mathbf{3\rho^2 = 8\rho\kappa_1 + \kappa_1^2}$ **, 3 +8 > 1** (1)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+8>1).

Από την (1) προκύπτει η ανισότητα $3\rho^2 > 8\rho\kappa_1$ ή $\rho > \mathbf{2}\kappa_1$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του ρ διά το $2\kappa_1$,

$\rho = \mathbf{2}\kappa_1 + \kappa_2$ (Πρόταση Ι.3). **(2η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\rho = \mathbf{2}\kappa_1 + \kappa_2$ στην (1) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(2\kappa_1 + \kappa_2)^2 = 8(2\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_1 + \kappa_1^2$ ή $12\kappa_1^2 + 12\kappa_1\kappa_2 + 3\kappa_2^2 = 16\kappa_1^2 + 8\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^2$

- $5\kappa_1^2 = 4\kappa_1\kappa_2 + 3\kappa_2^2$, 5+4>3 (2)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 5+4>3).

Από την (2) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_1 > \kappa_2$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_1 διά το κ_2,

$\kappa_1 = \mathbf{1}\kappa_2 + \kappa_3$ (Πρόταση Ι.3). **(3η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_1 = \kappa_2 + \kappa_3$ στην (2) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$5(\kappa_2 + \kappa_3)^2 = 4(\kappa_2 + \kappa_3)\kappa_2 + \mathbf{3}\kappa_2^2$ ή $5\kappa_2^2 + 10\kappa_2\kappa_3 + 5\kappa_3^2 = 4\kappa_2^2 + 4\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_2^2$

- $2\kappa_2^2 = 6\kappa_2\kappa_3 + \mathbf{5}\kappa_3^2$, 2+6>5 (3)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+6>5).

Από την (3) προκύπτει η ανισότητα $2\kappa_2{}^2 > 6\kappa_2\,\kappa_3$ ή $\kappa_2 > \mathbf{3}\kappa_3$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_2 διά το $3\kappa_3$,

$\kappa_2 = \mathbf{3}\kappa_3 + \kappa_4$ (Πρόταση Ι.3). **(4η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_2 = \mathbf{3}\kappa_3 + \kappa_4$ στην (3) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$2(3\kappa_3 + \kappa_4)^2 = 6(3\kappa_3 + \kappa_4)\kappa_3 + \mathbf{5}\kappa_3{}^2$ ή $18\kappa_3{}^2 + 12\kappa_3\,\kappa_4 + 2\kappa_4{}^2 = 18\kappa_3{}^2 + 6\kappa_3\,\kappa_4 + 5\kappa_3{}^2$

- $5\kappa_3{}^2 = 6\kappa_3\,\kappa_4 + 2\kappa_4{}^2$, 5+6>2 (4)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 5+6>2).

Από την (4) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_3 > \kappa_4$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_3 διά το κ_4,

$\kappa_3 = \mathbf{1}\kappa_4 + \kappa_5$ (Πρόταση Ι.3). **(5η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_3 = \kappa_4 + \kappa_5$ στην (4) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$5\kappa_4 + \kappa_5)^2 = 6(\kappa_4 + \kappa_5)\kappa_4 + \mathbf{2}\kappa_4{}^2$ ή $5\kappa_4{}^2 + 10\kappa_4\,\kappa_5 + \mathbf{5}\kappa_5{}^2 = 6\kappa_4{}^2 + 6\kappa_4\,\kappa_5 + \mathbf{2}\kappa_4{}^2$

- $\mathbf{3}\kappa_4{}^2 = 4\kappa_4\,\kappa_5 + \mathbf{5}\kappa_5{}^2$ (5)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 3+4>5).

Από την (5) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_4 > \kappa_5$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_4 διά το κ_5,

$\kappa_4 = \kappa_5 + \kappa_6$ (Πρόταση Ι.3). **(ανθυφαιρετική σχέση;;;)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_4 = \kappa_5 + \kappa_6$ στην (5) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(\kappa_5 + \kappa_6)^2 = 4(\kappa_5 + \kappa_6)\kappa_5 + \mathbf{5}\kappa_5{}^2$ ή $3\kappa_5{}^2 + 6\kappa_5\,\kappa_6 + 3\kappa_6{}^2 = 4\kappa_5{}^2 + 4\kappa_5\,\kappa_6 + \mathbf{5}\kappa_5{}^2$

- $6\kappa_5{}^2 = 2\kappa_5\,\kappa_6 + 3\kappa_6{}^2$, 2+3<6

(δεν ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 2+3<6).

Αν διαιρέσουμε το κ_4 διά το $2\kappa_5$, αν δηλαδή κάνουμε δοκιμή με το επόμενο ανθυφαιρετικό πηλίκο "2" θα δούμε πως γίνεται ο υπολογισμός της ανθυφαίρεσης:

$\kappa_4 = \mathbf{2}\ \kappa_5 + \kappa_6$ (Πρόταση Ι.3). **(6η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_4 = \mathbf{2}\ \kappa_5 + \kappa_6$ στην (5) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$3(2\kappa_5+\kappa_6)^2 = 4(2\kappa_5+\kappa_6)\kappa_5 + \mathbf{5}\kappa_5^{\ 2}$ ή $12\kappa_5^{\ 2} + 12\kappa_5\kappa_6 + \mathbf{3}\kappa_6^{\ 2} = 8\kappa_5^{\ 2} + 4\kappa_5\kappa_6 + \mathbf{5}\kappa_4^{\ 2}$

- $\kappa_5^{\ 2} = 8\kappa_5\kappa_6 + 3\kappa_6^{\ 2}$, 1+8>3 (6)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 1+8>3).

Από την (6) προκύπτει η ανισότητα $\kappa_5 > 8\kappa_6$ και οδηγούμαστε στη διαίρεση του κ_5 **διά το** κ_6,

$\kappa_5 = \mathbf{8}\ \kappa_6 + \kappa_7$ (Πρόταση Ι.3). **(7η ανθυφαιρετική σχέση)**

Εφαρμόζουμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\kappa_5 = \mathbf{8}\ \kappa_6 + \kappa_7$ στην (6) και οδηγούμαστε στη 2-βάθμια εξίσωση (καθ' υπερβολήν εφαρμογή χωρίου ΙΙ.8/9/9):

$(8\kappa_6+\kappa_7)^2 = 8(8\kappa_6+\kappa_7)\kappa_6 + \mathbf{3}\kappa_6^{\ 2}$ ή

$64\kappa_6^{\ 2} + 16\kappa_6\kappa_7 + \kappa_7^{\ 2} = 64\kappa_6^{\ 2} + 8\kappa_6\kappa_7 + \mathbf{3}\kappa_6^{\ 2}$

- $\mathbf{3}\kappa_6^{\ 2} = \mathbf{8}\kappa_6\kappa_7 + \kappa_7^{\ 2}$, **3+8>1** (6)

(ικανοποιείται η συνθήκη των συντελεστών 3+8>1).

Παρατηρούμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση (6) είναι ακριβώς της ίδια μορφής με τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1). Δηλαδή ενώ τα διαδοχικά ανθυφαιρούμενα μεγέθη συνεχώς μειώνονται, η σχέση μεταξύ τους μετά από ένα διαδοχικό αριθμό βημάτων παραμένει σταθερή.

Τελικά η ως άνω μέθοδος:

- ***Ως ιδέα αποτελεί συνέχεια της απόδειξης ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου ($\sqrt{2}$),***
- ***Δεν χρειάζεται πουθενά στην απόδειξη κριτήριο λόγου,***
- ***Λειτουργεί για τις περιπτώσεις των $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ... \sqrt{13}, \sqrt{17}$, βρίσκει όμως σημαντικό εμπόδιο στο $\sqrt{19}$.***

► ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ◄

[Bu] M. F. Burnyeat, The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics *Isis*, Vol. 69, No. 4 (Dec., 1978), pp. 489-513.

[C] H. Cherniss, *Plato as Mathematician*, The Review of Metaphysics 4 (1951) 395-425.

[F] Fowler, D. (1987), The Mathematics of Plato' Academy, Oxford.

[Hea] Heath, T. (1925), The thirteen Books of Elements, USA. (Επανέκδοση: Dover, New York, 1956).

[HW] Hardy, G., Wright E. (1979), An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford.

[Kno] W. R. Knorr, *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel, Dordrecht, 1975.

[Kno,Bu] Wilbur Knorr, M. F. Burnyeat, Methodology, Philology, and Philosophy**,** *Isis*, Vol. 70, No. 4 (Dec., 1979).

[Z] H. G. Zeuthen, *Sur la constitution des livres arithmetiques des Elements d' Euclide et leur rapport a la question de l' irrationalite*, Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 5 (1910) 395-435.

[vdW] V.d.Waerden, B. (1963), Science Awakening I, Kluwer. (Μετάφραση στα Ελληνικά: Η Αφύπνιση της Επιστήμης, Ι. Χριστιανίδης, Π.Ε. Κρήτης, 2000).

[N1] S. Negrepontis, *The foundation of Pythagorean Philosophy ('everything is number') on Pythagorean Geometry ('incommensurability of diameter of square'*), to appear [in Greek].

[N2] Νεγρεπόντης, Σ. (2007-2008), Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων «Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» και «Πλάτων και Μαθηματικά», ΠΜΣ Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

[N-T] S. Negrepontis , G.Tassopoulos, *The Anthyphairetic Reconstruction of the Method of Application of Areas in Excess.*

[Στα] Σταμάτης, Ε. (1975), Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων – Στοιχεία, ΟΕΔΒ.

ΑΡΧΑΙΑ ΚΕΙΜΕΝΑ

[ΑΥ] *Αριστοτέλους, Αναλυτικά Ύστερα 41a26*-31

[ΑΜετ] *Αριστοτέλους, Μετεορολογικά 375b18*

[ΑΤ] *Αριστοτέλους, Τοπικά 158b24-159a2*

[ΕΣτΙ.44] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση Ι.44*

[ΕΣτΙΙ.1] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση ΙΙ.1*

[ΕΣτΙΙ.4] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση ΙΙ.4*

[ΕΣτΙΙ.14] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση ΙΙ.14*

[ΕΣτΧ.2] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση Χ.2*

[ΕΣτΧ.9] *Ευκλείδους, Στοιχεία, Πρόταση Χ.9*

[Θ1] *Πλάτωνος, Θεαίτητος 136α5-7, α7-β1*

[Θ] *Πλάτωνος, Θεαίτητος 147c7-148d7*

[Θ2] *Πλάτωνος, Θεαίτητος 191c1-4*

[Παρ1] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 128c1-129c4*

[Παρ2] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 132β1-2*

[Παρ3] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 143 α2*

[Παρ4] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 144 ε3-5*

[Παρ5] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 145 α2-3*

[Παρ6] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 158 c5-7*

[Παρ7] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 164c8-d1*

[Παρ8] *Πλάτωνος, Παρμενίδης 165 b7-c2*

[Παρ9] *Πλάτωνος, Παρμενίδης* 525^{α}*3-5*

[Πολ] *Πλάτωνος, Πολιτεία 587d*

[Π1] *Πλάτωνος, Πολιτικός 266b*

[Π2] *Πλάτωνος, Πολιτικός* 268c5-9

[Π3] *Πλάτωνος, Πολιτικός 279α1-8β3*

[Π4] *Πλάτωνος, Πολιτικός* 283b2-3

[Π5] *Πλάτωνος, Πολιτικός* 285a4-b6

[Π6] *Πλάτωνος, Πολιτικός 292β6-c4*

[Σ1] *Πλάτωνος, Σοφιστής, 220α*

[Σ1] *Πλάτωνος, Σοφιστής, 221a-c*

[Σ1] *Πλάτωνος, Σοφιστής, 235b8-c4*

[Σ1] *Πλάτωνος, Σοφιστής, 247d-e*

[Σ1] *Πλάτωνος, Σοφιστής, 248c*

[Σ2] *Πλάτωνος, Σοφιστής 256e5-6*

[Τιμ1] *Πλάτωνος,* Τίμαιος 31c

[Τιμ2] *Πλάτωνος,* Τίμαιος 54b

[Φ1] *Πλάτωνος, Φαίδρος 266α2-β4*

[Φ2] *Πλάτωνος, Φαίδρος, 273e1 -3*

[Φιλ1] *Πλάτωνος, Φίληβος 17b3-4*

[Φιλ2] *Πλάτωνος, Φίληβος 17e3-6*

[Φιλ3] *Πλάτωνος, Φίληβος 27e7-9*

[Α εΤΑ] *Αλεξάνδρου Αφροδισέως, εις Τοπικά Αριστοτέλους, 545,1-31*

[Η] *Ηρόδοτος, Ι.190,12-13*

[Σι] *Σιμπλίκιος, Εις Αριστοτέλους Φυσικά, 9,61,6-7*