ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΜΟΥΔΗ ΑΡΤΕΜΙΣ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Φαρμάκη Βασιλική

Αθήνα

Οκτώβριος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)…….……(επιβλέπων Καθηγητής)	……..……	…….
2)……	……..……	……..…
3)……	……..……	……...…

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Καμούδη Άρτεμις

Αθήνα

Οκτώβριος 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κα. Βασιλική Φαρμάκη για τις πολύτιμες συμβουλές της. Ευχαριστώ επίσης θερμά τον κ. Νικόλαο Κλαουδάτο για την συνεχή του καθοδήγηση και αμέριστη συμπαράστασή του σε όλα τα στάδια εκπόνησης αυτής της εργασίας. Θα ήθελα τέλος να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον κ. Διονύσιο Λάππα για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

Την εργασία αυτή την αφιερώνω στους δικούς μου ανθρώπους, οικογένεια και φίλους, για την συμπαράσταση και την πίστη που μου έδειξαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ 9
1.1. Ο αριθμητικός και γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών 9
1.2. Ο τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα 11
1.3. Ο τύπος του Ήρωνα για τετράπλευρα 12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 14
2.1. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για τρίγωνα και εφαρμογές του 17
2.2. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για πολύγωνα και εφαρμογές του 26
2.3. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για επίπεδες καμπύλες και εφαρμογές του 33

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ-Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ) 44
3.1. Το Πρόβλημα του Ήρωνα και εφαρμογές του 47
3.2. Εφαρμογή της συμμετρίας σε τρίγωνα 54
3.3. Εφαρμογή της συμμετρίας σε πολύγωνα 71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ 76
4.1. Ο νόμος της διάθλασης του φωτός (ή νόμος του Snell) 76
4.2. Ελάχιστος χρόνος καθόδου 78
4.3. Η βραχυστόχρονη 80
4.4. Βεληνεκές ενός βλήματος 86

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 89

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα μαθηματικά, η μελέτη προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου χρονολογείται από πολύ παλαιά, περίπου πριν από είκοσι πέντε αιώνες. Το ενδιαφέρον των ανθρώπων εστιαζόταν κυρίως σε καταστάσεις που είχαν σχέση με αξιοσημείωτες ομαδικές συμπεριφορές σε συγκεκριμένα είδη ζώων, για παράδειγμα ο κύκλος που σχηματίζει ένα κοπάδι ελαφιών όταν τους επιτίθενται λύκοι, τα εξάγωνα κελιά κεριθρών που κατασκευάζουν οι μέλισσες κτλ., αλλά και σε πιο πρακτικά προβλήματα όπως το να εκτιμήσουν το πλήθος των πολεμιστών ανάλογα με την περιοχή που κάλυπτε το στρατόπεδό τους. Πολλές φορές οι μέθοδοι που εφάρμοζαν οδηγούσαν σε λανθασμένα συμπεράσματα, επομένως αναζητούσαν πιο αξιόπιστους τρόπους απάντησης με την βοήθεια μαθηματικών μεθόδων.

Για αρκετό χρονικό διάστημα δεν υπήρχαν ομοιόμορφοι τρόποι λύσης προβλημάτων που αφορούσαν την εύρεση ακρότατων (οι όροι μέγιστο-maximum και ελάχιστο-minimum περιγράφονται από κοινού με τον όρο ακρότατο-extremum). Μόλις πριν από τρεις περίπου αιώνες άρχισαν να λύνονται με επιτυχία τέτοιου είδους προβλήματα, στην οποία επιτυχία συνέβαλαν οι ιδέες μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Ζηνόδωρος, αλλά και άλλων πολύ νεώτερων όπως ο Tartaglia, οι Johan και Jakob Bernoulli, ο Leibniz, ο Νεύτων. Η ανάγκη επίλυσης τέτοιων προβλημάτων που αντλούσαν το περιεχόμενο τους από την γεωμετρία, την άλγεβρα, την μηχανική, την φυσική αλλά και από άλλες επιστήμες, οδήγησε στην ανάπτυξη των πρώτων γενικών μεθόδων διερεύνησης και επίλυσης, στην δημιουργία δηλαδή ενός νέου κλάδου της μαθηματικής ανάλυσης, γνωστός ως λογισμός των μεταβολών. Οι συνθήκες όμως, οι πρακτικές ανάγκες αλλά και η διατύπωση όλο και πιο σύνθετων προβλημάτων, επέβαλλαν την περαιτέρω πρόοδο και την δημιουργία νέων κλάδων της μαθηματικής ανάλυσης όπως η ‘κυρτή ανάλυση’ και εν συνεχεία η θεωρία του ‘βέλτιστου ελέγχου’. Η ανάγκη λοιπόν να λυθούν τα πολυάριθμα και ποικίλα προβλήματα αυτού του είδους μέσω μίας και μόνο μεθόδου δημιούργησε τις προϋποθέσεις για τη σύσταση μίας γενικής θεωρίας.

Μεγάλη πρόοδο στην περαιτέρω ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης φαίνεται ότι προκάλεσε ένα λάθος που εντόπισε ο Karl Weierstrass στις αποδείξεις του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος που είχε παρουσιάσει ο Steiner, του οποίου οι μέθοδοι ήταν κυρίως γεωμετρικές. Το λάθος αυτό εντοπίστηκε στο ζήτημα της ύπαρξης ενός

ακρότατου, την οποία ύπαρξη οι μαθηματικοί μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα θεωρούσαν δεδομένη. Προκειμένου να συμπληρώσει το κενό, ο Weierstrass ανέπτυξε περαιτέρω την μαθηματική ανάλυση και στήριξε το όλο θέμα σε μια αυστηρή και έγκυρη βάση.

Τα προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου είχαν σοβαρή παρουσία στο ελληνικό σχολικό πρόγραμμα μέχρι τις δεκαετίες του ‘50 και ‘60, αλλά σταδιακά υποβαθμίστηκαν και η επίλυσή τους αντικαταστάθηκε από την ενιαία μεθοδολογία που διδάσκεται σήμερα στην Ανάλυση της Γ’ Λυκείου. Η υποβάθμιση αυτή όμως είχε σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να χάσουν ένα σημαντικό μέρος της μαθηματικής τους παιδείας. Θεωρούμε λοιπόν ότι η αναβίωση μερικών κλασικών προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου, όχι απαραίτητα των πιο απαιτητικών, λυμένα με αλγεβρικές και γεωμετρικές μεθόδους, θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους μαθητές να προσεγγίζουν με πιο βαθύ και πιο ουσιαστικό τρόπο τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να προσφέρουμε στον καθηγητή των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ιδιαίτερα στο Λύκειο, μία συλλογή προσεκτικά επιλεγμένων προβλημάτων μεγίστου και ελαχίστου, τα οποία συμπληρωματικά θα μπορούσαν να διδαχθούν ή να χρησιμοποιηθούν από τον καθηγητή κατά την διδασκαλία του. Για το λόγο αυτό, ταυτόχρονα με την παρουσίαση και λύση των προβλημάτων, κάνουμε παραπομπή και στα αντίστοιχα σημεία των σχολικών βιβλίων όπου υπάρχουν οι απαιτούμενες γνώσεις, προκειμένου να παρουσιαστούν στους μαθητές και να λυθούν, ενδεχομένως, και από τους ίδιους τους μαθητές. Τέλος, σε πολλά από αυτά τα προβλήματα παρουσιάζουμε περισσότερες από μία λύσεις προκειμένου να δώσουμε και εναλλακτικούς τρόπους σκέψης οι οποίοι έχουν μεγάλη σημασία στα μαθηματικά.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα:

Στο **πρώτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδέες ως απαραίτητες γνώσεις για τα επόμενα κεφάλαια.

Το **δεύτερο κεφάλαιο** έχει ως κεντρικό άξονα το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα και με βάση αυτό παρουσιάζουμε διάφορες προτάσεις στα τρίγωνα, στα πολύγωνα και στις επίπεδες καμπύλες.

Στο **τρίτο κεφάλαιο**, με βάση την συμμετρία στο επίπεδο, παρουσιάζουμε ως κεντρικό πρόβλημα το γνωστό πρόβλημα του Ήρωνα και τις συνέπειές του στην ανάκλαση του φωτός, καθώς επίσης και διάφορες εφαρμογές σε άλλες σχετικές προτάσεις.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** περιέχει προτάσεις οι οποίες κατ΄ αρχάς είναι μαθηματικές και οι οποίες λύνονται με τη βοήθεια ιδεών από τη φυσική. Με τον τρόπο αυτό αποκτούμε μια πιο σαφή ιδέα της αλληλεπίδρασης και αλληλοσυσχέτισης μαθηματικών και φυσικής δεδομένου ότι η αντίστροφη πορεία, δηλαδή επίδραση των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων φυσικής είναι αρκετά γνωστή.

Τέλος, τα περισσότερα από τα προβλήματα που παρουσιάζουμε, στη βιβλιογραφία αναφέρονται ως θεωρήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ

1.1. Ο αριθμητικός και γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών

Ένα από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθηματικών είναι ο σημαντικός ρόλος που παίζουν οι ανισότητες. Η λύση ενός προβλήματος μεγίστου πάντα οδηγεί σε μια ανισότητα η οποία εκφράζει το γεγονός ότι η μεταβλητή ποσότητα είναι μικρότερη ή ίση με την μέγιστη τιμή που δίνεται από την λύση. Σε πολλές περιπτώσεις αυτές οι ανισότητες έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η ανισότητα μεταξύ του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου.

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό πρόβλημα μεγίστου που το συναντάμε πολύ συχνά στα μαθηματικά. Στη γλώσσα της Γεωμετρίας μεταφράζεται ως εξής: **Μεταξύ των ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο, να βρούμε αυτό με το μέγιστο εμβαδόν.** Η λύση είναι το τετράγωνο. Για να το αποδείξουμε εργαζόμαστε ως εξής: Έστω 2a η δοθείσα περίμετρος του ορθογωνίου. Τότε το άθροισμα των δύο διαστάσεων x και y είναι $x + y = \frac{2a}{2} = a$ όπου a σταθερά, ενώ το γινόμενο xy πρέπει να είναι μέγιστο. Ο αριθμητικός μέσος των x και y είναι $m = \frac{x + y}{2}$.

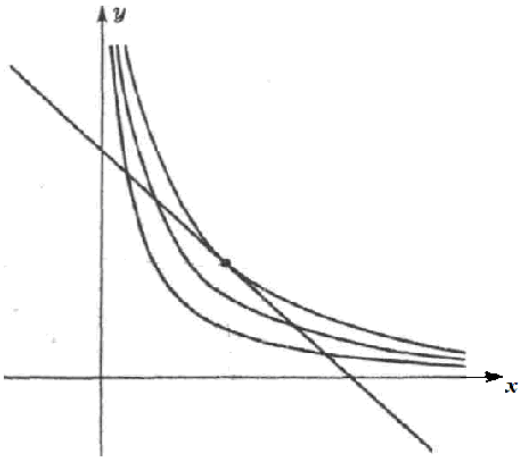
Πρέπει επίσης να εισάγουμε και την ποσότητα $d = \frac{x - y}{2}$ έτσι ώστε x=m+d, y=m-d, επομένως $xy = (m + d)(m - d) = m^2 - d^2 = \frac{(x + y)^2}{4} - d^2$. Αφού $d^2 \geq 0$ προκύπτει η ανισότητα $\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$ όπου η ισότητα ισχύει όταν $d^2 = 0 \Leftrightarrow d = 0$ και x=y=m. Αφού το άθροισμα x+y είναι σταθερό, από υπόθεση τότε συνεπάγεται ότι το $\sqrt{xy}$ και συνεπώς το εμβαδόν xy, είναι μέγιστο όταν x=y. Η παράσταση g=$\sqrt{xy}$ όπου ορίζεται η θετική τετραγωνική ρίζα, ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των θετικών ποσοτήτων x και y.

Η ανισότητα $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ εκφράζει τη *θεμελιώδη σχέση μεταξύ του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου*.

Η παραπάνω ανισότητα προκύπτει και από το γεγονός ότι η παράσταση $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = x+y-2\sqrt{xy}$ είναι μη-αρνητική αφού είναι υψωμένη στο τετράγωνο, και ίση με το μηδέν εάν x=y.

Μία γεωμετρική ένδειξη της συγκεκριμένης ανισότητας μπορεί να δοθεί θεωρώντας την ευθεία x+y=2m στο επίπεδο, μαζί με την οικογένεια των καμπυλών xy=c (υπερβολές), όπου το c είναι σταθερό για κάθε μία από αυτές τις καμπύλες και ποικίλει από καμπύλη σε καμπύλη (σχήμα 1.1.a). Όπως φαίνεται στο σχήμα, η καμπύλη με την μέγιστη τιμή c η οποία έχει ένα κοινό σημείο με την δοθείσα ευθεία θα είναι η υπερβολή που είναι εφαπτόμενη της ευθείας στο σημείο x=y=m. Για την υπερβολή αυτή θα ισχύει $c=m^2$. Επομένως $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε ανισότητα μπορεί να διαβαστεί και από τις δύο πλευρές και έτσι δίνει μέγιστη αλλά και ελάχιστη ιδιότητα. Παραδείγματος χάριν, η ανισότητα $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ εκφράζει και το γεγονός ότι μεταξύ των ορθογωνίων με σταθερό εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.



(1.1.a)

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει και για περισσότερες από δύο θετικές ποσότητες. Συγκεκριμένα:

- **Έστω A και G ο αριθμητικός και ο γεωμετρικός μέσος αντίστοιχα των μη-αρνητικών αριθμών** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **που ορίζονται ως:**

  $$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n}, G = (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n)^{\frac{1}{n}}$$

  Τότε ισχύει A ≥ G, με ισότητα ανν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$

1.2. Ο τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα

Έστω a, b, c τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου και $s = \frac{a+b+c}{2}$ **η ημιπερίμετρός του, τότε για το εμβαδόν του E ισχύει:** $E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Απόδειξη:

Έστω ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές a, b, c και γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ είναι $E = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εμβαδόν τριγώνου, σελ. 219).

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε: $E^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2\gamma = \frac{1}{4} a^2 b^2 (1 - \cos^2\gamma)$ [από την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, σελ. 165)].

Από νόμο συνημιτόνων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.192) έχουμε: $E^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \left[1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2 b^2}\right] = \frac{1}{16}\left[4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\right]$.

Από διαφορά τετραγώνων έχουμε:

$$16E^2 = \left[2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\right] \cdot \left[2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16E^2 = \left[(a+b)^2 - c^2\right] \cdot \left[c^2 - (a-b)^2\right] (*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16E^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) = 2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) =$$
$$= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \Leftrightarrow E^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

1.3. Ο τύπος του Ήρωνα για τετράπλευρα

Έστω a, b, c, d τα μήκη των πλευρών ενός τετραπλεύρου, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ **η ημιπερίμετρός του και** $\hat{\theta}$ **και** $\hat{\lambda}$ **δύο απέναντι εσωτερικές του γωνίες. Τότε για το εμβαδόν του Ε ισχύει:**

$$E = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd[1+\cos(\theta+\lambda)]}$$

Απόδειξη:

Δεν παίζει ρόλο ποιο ζεύγος απέναντι γωνιών θα θέσουμε $\hat{\theta}$ και $\hat{\lambda}$ γιατί εάν το άλλο ζεύγος είναι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ τότε έχουμε: $(\hat{\theta}+\hat{\lambda})+(\hat{\alpha}+\hat{\beta}) = 360°$ και $\cos(\theta+\lambda) = \cos(\alpha+\beta)$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, ο τριγωνομετρικός κύκλος, σελ. 159).

[Σημείωση: Εάν το τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχουμε ότι $\hat{\theta}+\hat{\lambda} = 180° \Leftrightarrow \cos(\theta+\lambda) = -1$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 130)] και τότε ο τύπος για το εμβαδόν του τετραπλεύρου μπορεί να γραφτεί $E = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$**].**

Για να επανέλθουμε στην απόδειξη του τύπου του Ήρωνα για τα τετράπλευρα σχεδιάζουμε την διαγώνιο, έστω με μήκος x, με τη γωνία $\hat{\theta}$ να βρίσκεται μεταξύ των πλευρών a και b, και την γωνία $\hat{\lambda}$ μεταξύ των πλευρών c και d, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.a. Από νόμο συνημιτόνων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 192) έχουμε:

$$x^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta = c^2+d^2-2cd\cos\lambda \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\theta - 2cd\cos\lambda$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε:

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = (2ab\cos\theta - 2cd\cos\lambda)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 8abcd\cos\theta\cos\lambda = 4a^2b^2\cos^2\theta + 4c^2d^2\cos^2\lambda\end{aligned} \qquad (1)$$

Το εμβαδόν Ε του τετραπλεύρου δίνεται και από τον τύπο $E = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\lambda$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εμβαδόν τριγώνου, σελ. 219)

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και πολλαπλασιάζοντας με το 16 έχουμε:

$$\begin{aligned}16E^2 &= 4a^2b^2\sin^2\theta + 4c^2d^2\sin^2\lambda + 8abcd\sin\theta\sin\lambda = \\ &= 4a^2b^2(1-\cos^2\theta) + 4c^2d^2(1-\cos^2\lambda) + 8abcd\sin\theta\sin\lambda = \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4a^2b^2\cos^2\theta - 4c^2d^2\cos^2\lambda + 8abcd\sin\theta\sin\lambda\end{aligned}$$

[από τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ και $\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, σελ. 165)]

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

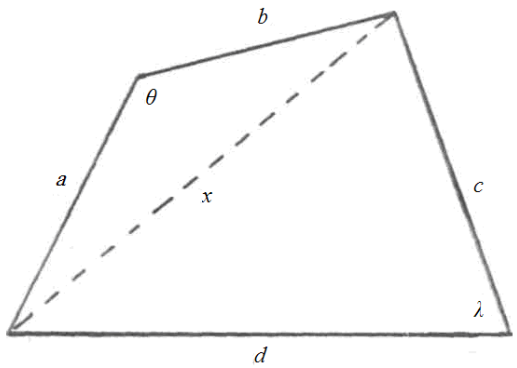
$$16E^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - 8abcd\cos\theta\cos\lambda + 8abcd\sin\theta\sin\lambda =$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - 8abcd\cos(\theta + \lambda)$$

Στη συνέχεια προσθαφαιρούμε τον όρο 8abcd στο δεύτερο μέλος, οπότε:

$$16E^2 = (2ab + 2cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 - 8abcd[1 + \cos(\theta + \lambda)] \quad (2)$$

$$\text{Επιπλέον}: (2ab + 2cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 =$$
$$= \left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\cdot\left(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right) =$$
$$= \left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right]\cdot\left[-(a-b)^2 + (c+d)^2\right] =$$
$$= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) =$$
$$= (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a) = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow 16E^2 = 16(s-a)(s-b)(s-b)(s-d) - 8abcd[1 + \cos(\theta + \lambda)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\theta + \lambda)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\theta + \lambda)]}$$



(1.3.a)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι Έλληνες γεωμέτρες από αρχαιοτάτων χρόνων ενδιαφέρονταν κυρίως για προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου που προέρχονταν από την φύση, όπως τα εξάγωνα κελιά σε μία κερήθρα μελλισών. Ασχολούνταν όμως και με πρακτικά προβλήματα, όπως το να εκτιμήσουν το μέγεθος ενός εχθρικού στρατοπέδου (ο αριθμός των πολεμιστών ήταν περίπου ανάλογος με την περιοχή που κάλυπτε το στρατόπεδό τους). Αυτό όμως οδηγούσε τις περισσότερες φορές σε λανθασμένα συμπεράσματα επομένως αναζητούσαν μία πιο μαθηματική λύση.

Τα μαθηματικά ερωτήματα που προκύπτουν από τα παραπάνω προβλήματα είναι δύο ειδών: Από όλα τα γεωμετρικά σχήματα που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα ποιά έχουν το μέγιστο εμβαδόν, και από όλα τα γεωμετρικά σχήματα που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα ποιά έχουν την ελάχιστη περίμετρο; Μπορούμε να πούμε ότι και τα δύο αυτά προβλήματα ονομάζονται 'ισοπεριμετρικά'. Το γνωστό Ισοπεριμετρικό Θεώρημα, του οποίου η απόδειξη έγινε πολλά χρόνια μετά την ανακάλυψή του, δίνει την λύση σε μια ευρεία κλάση τέτοιων προβλημάτων.

Το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα:

- Από όλα τα επίπεδα σχήματα με σταθερή περίμετρο, ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδόν.
- Από όλα τα επίπεδα σχήματα με σταθερό εμβαδόν, ο κύκλος έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Κάτι αντίστοιχο ισχύει και στον 3-διάστατο χώρο με τον οποίο όμως δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία.

Η απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος για τα ορθογώνια ήταν ήδη γνωστή στον Ευκλείδη (300 π.Χ.) και συγκεκριμένα εντοπίζεται στην Πρόταση VI.27 των Στοιχείων του Ευκλείδη. Ο K.M. Tikhomirov στο βιβλίο του Ιστορίες για τα μέγιστα και ελάχιστα (σελ. 42-43), παραθέτει ένα ισοδύναμο πρόβλημα με την Πρόταση VI.27, το οποίο ονομάζει Πρόβλημα του Ευκλείδη. Η σύγχρονη διατύπωσή του έχει ως εξής:

Σε δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ να εγγραφεί ένα παραλληλόγραμμο ΑΔΕΖ (ΕΖ || ΑΒ και ΔΕ || ΑΓ) με το μέγιστο εμβαδόν.

Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), σύμφωνα με τον Kazarinoff (σελ. 31) γνώριζε την διατύπωση του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος, αλλά τα σωζόμενα έργα του δεν περιέχουν καμία αναφορά σε αυτό. Επιπλέον, ο Ζηνόδωρος (200-90 π.Χ.) είχε γράψει ένα βιβλίο με τίτλο 'Isoperimetric Figures' (αντίγραφα του οποίου δεν υπάρχουν) όπου περιείχε προβλήματα τα οποία αποδείχθηκαν και αργότερα από τον Πάππο της Αλεξάνδρειας, στο έργο του Mathematical Collection, Book V.

Μικρή πρόοδος σημειώθηκε από την δουλειά των Ελλήνων γεωμετρών μέχρι αυτή του Simon Lhuilier και αργότερα του Jacob Steiner. Οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν είχαν μεγάλη επίδραση στην εξέλιξη των μαθηματικών και χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα. Οι μέθοδοι του Steiner ήταν κυρίως γεωμετρικές και όχι τόσο αλγεβρικές ή αναλυτικές, μέσω των οποίων ο Steiner έλυσε πολλά προβλήματα τα οποία παρέμεναν άλυτα ακόμα και με την βοήθεια της Ανάλυσης που 'επινοήθηκε' από τους Newton και Leibniz τον 17^{ο} αιώνα. Διαδοχικά, το έργο του Steiner οδήγησε σε μια ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης, κυρίως του λογισμού των μεταβολών. Αυτό προέκυψε από το λάθος στις αποδείξεις του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος που εντόπισε πρώτος ο Γερμανός μαθηματικός Karl Weierstrass και που έπρεπε να καλύψει βελτιώνοντας την μαθηματική ανάλυση.

Πιο συγκεκριμένα, εξαιτίας της επιφανειακά προφανούς προϋπόθεσης της ύπαρξης ενός μεγίστου ή ελαχίστου, οι μαθηματικοί μέχρι τον 19^{ο} αιώνα υπέθεταν ότι η ύπαρξη λύσης στα συγκεκριμένα προβλήματα είναι ένα γεγονός αναμενόμενο. Κάποιοι από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα, όπως οι Gauss, Dirichlet και Riemman, χρησιμοποιούσαν αυτήν την υπόθεση ανεμπόδιστα ως την βάση πολύ σημαντικών θεωρημάτων. Σύμφωνα με τους Courant και Robbins (σελ. 367) *«η κορύφωση ήρθε όταν ο Riemann, το 1849, δημοσίευσε την διατριβή του πάνω στα θεμέλια της θεωρίας των συναρτήσεων. Αυτή η διατριβή ήταν τόσο ανορθόδοξη ως προς την προσέγγιση του θέματος που πολλοί την αγνόησαν. Ο Karl Weierstrass ήταν την εποχή εκείνη ο σπουδαιότερος μαθηματικός στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και ο πιο αναγνωρισμένος πρωτεργάτης στην δημιουργία της θεωρίας συναρτήσεων. Εντυπωσιασμένος αλλά και με μια αμφιβολία, ανακάλυψε ένα κενό στο συγγραφικό έργο του Riemann το οποίο ο συγγραφέας δεν ενδιαφέρθηκε να καλύψει. Παρόλο που η κριτική του δεν ενόχλησε τον Riemann, οδήγησε σε μία γενική παραμέληση της θεωρίας του. Η καριέρα του έληξε με τον θάνατό του αλλά οι ιδέες του βρήκαν ανταπόκριση από κάποιους, και 50 χρόνια μετά την δημοσίευση της διατριβής του, ο Hilbert άνοιξε ένα δρόμο προς μία πλήρη απάντηση στα ερωτήματα που είχαν μείνει ανολοκλήρωτα».*

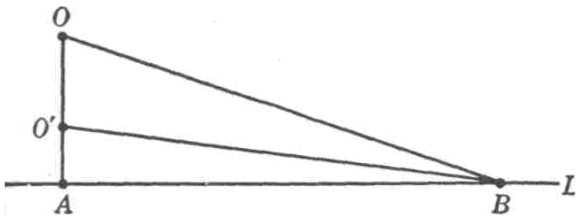
Στο έργο του Riemann το 'μελανό' σημείο είναι το θέμα της ύπαρξης μεγίστου ή ελαχίστου. Πολλά από τα προβλήματα που περιείχε και πολλά από αυτά που θα αναφέρουμε και παρακάτω μπορούν να αποδειχθούν πιο εύκολα εάν η ύπαρξη λύσης θεωρείται δεδομένη. Παρόλα αυτά όμως οι λύσεις θα έχουν κάποια κενά. Ας αναφέρουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα όπου η απόδειξη ύπαρξης μεγίστου ή ελαχίστου είναι απαραίτητη. Για περισσότερα παραδείγματα βλ. Courant and Robbins, σελ. 366.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Σημειώνουμε πάνω σε μια ευθεία L δύο σημεία A και B με μεταξύ τους απόσταση d, και ζητάμε να βρούμε ένα πολύγωνο με ελάχιστη περίμετρο όπου ξεκινάει από το σημείο A με κατεύθυνση κάθετη στην L και καταλήγει στο σημείο B.

Λύση:

(Είναι ένα παράδειγμα ενός προβλήματος το οποίο, με τις συνθήκες που ορίζει το πρόβλημα, δεν έχει λύση).

Αφού γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η πιο σύντομη διαδρομή από το A στο B (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, τριγωνική ανισότητα, σελ. 54), τότε κάθε άλλη αποδεκτή διαδρομή AOB ή AO΄B έχει μεγαλύτερο μήκος από το d (βλ. σχήμα). Αφού η ελάχιστη διαδρομή είναι η d, η οποία όμως παραβιάζει τον περιορισμό που μας δίνεται (με κατεύθυνση κάθετη στην L), τότε δεν είναι αποδεκτή υπό τους όρους του προβλήματος. Δηλαδή για να έχουμε την ελάχιστη διαδρομή θα πρέπει το σημείο O΄ να ταυτιστεί με το σημείο A αλλά τότε δεν θα έχουμε πολύγωνο. Επομένως το συγκεκριμένο πρόβλημα ελαχίστου δεν έχει λύση.



Τέλος θα αναφερθούμε σε μια λιγότερο βασική ερώτηση, ως προς την μοναδικότητα της λύσης. Εάν υπάρχει λύση στο πρόβλημα, θα μπορούσε να υπάρχει παραπάνω από μία; Η απάντηση είναι ναι. Η μοναδικότητα επομένως είναι ένα θέμα που καθορίζεται από το εάν ένα πρόβλημα έχει μία λύση ή περισσότερες (βλ. Niven, σελ. 87).

Στα προβλήματα που ακολουθούν, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης θεωρούνται δεδομένες.

Θα αναφερθούμε λοιπόν σε κάποια πιο απλά ισοπεριμετρικά προβλήματα και θα ακολουθήσει η διατύπωση και απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος.

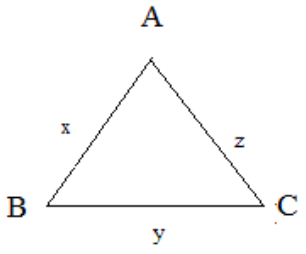
2.1. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για τρίγωνα και εφαρμογές του

2.1.1. Μεταξύ των τριγώνων με σταθερή περίμετρο, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη:

Θεωρούμε οποιοδήποτε τρίγωνο ABC με πλευρές x, y, z, έτσι ώστε η περίμετρος Π=x+y+z να έχει σταθερή τιμή (σχήμα 2.1.1.a). Άρα και η ημιπερίμετρος $s = \frac{x+y+z}{2}$ είναι σταθερή. Μεγιστοποιώντας το εμβαδόν αντιστοιχεί στο να μεγιστοποιήσουμε το: E^2 =s(s-x)(s-y)(s-z) (τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα, βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.2 ή Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 218). Αγνοώντας τον σταθερό παράγοντα s, αναζητούμε την μέγιστη τιμή του γινομένου (s-x)(s-y)(s-z). Παρατηρούμε ότι οι παράγοντες του γινομένου έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή (s-x)+(s-y)+(s-z)=3s-x-y-z=s. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο είναι μέγιστο όταν οι παράγοντες είναι ίσοι, δηλαδή s-x=s-y=s-z (βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.1). Αυτό δίνει x=y=z. Επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Είναι απαραίτητο να αγνοήσουμε τον σταθερό παράγοντα s, διότι διαφορετικά οι τέσσερις παράγοντες του γινομένου έχουν σταθερό άθροισμα s+s-x+s-y+s-z=4s-x-y-z=2s και η προσπάθεια να μεγιστοποιήσουμε το E^2 εξισώνοντας τους τέσσερις παράγοντες οδηγεί σε άτοπο, διότι οι ισότητες s=s-x=s-y=s-z έχουν ως λύση μόνο την x=y=z=0.



(2.1.1.a)

2.1.2. Μεταξύ των τριγώνων με σταθερό εμβαδόν, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Απόδειξη:

Μεταξύ των τριγώνων με σταθερό εμβαδόν k, θεωρούμε αρχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο T_1 με περίμετρο p_1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο τρίγωνο με εμβαδόν k που έχει περίμετρο μικρότερη ή ίση της p_1. Υποθέτουμε αντιθέτως ότι υπάρχει ένα άλλο τρίγωνο T_2 , όχι ισόπλευρο, με εμβαδόν k και περίμετρο $p_2 \leq p_1$.

Αν $p_2=p_1$, τότε έχουμε δύο τρίγωνα T_1 και T_2, το ένα ισόπλευρο και το άλλο όχι, με περίμετρο p_1 και εμβαδόν k. Αυτό είναι αδύνατο διότι σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα το ισόπλευρο τρίγωνο είναι το μοναδικό που έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ των τριγώνων με περίμετρο p_1.

Αν $p_2<p_1$, τότε έστω ισόπλευρο τρίγωνο T_3 με περίμετρο p_2 και εμβαδόν k_3. Αφού τα T_3 και T_2 έχουν την ίδια περίμετρο p_2, συμπεραίνουμε ότι $k_3 >k$ επειδή το T_3 είναι ισόπλευρο ενώ το T_2 όχι. Απ' την άλλη, εάν συγκρίνουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα T_1 και T_3, βλέπουμε ότι το T_3 έχει μικρότερη περίμετρο και τότε το μικρότερο εμβαδόν. Δηλαδή $k_3 <k$ που έρχεται σε αντίθεση με το προηγούμενο συμπέρασμα. Επομένως $p_2 >p_1$.

2.1.3. Μεταξύ των τριγώνων που έχουν σταθερή βάση και περίμετρο, το ισοσκελές τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

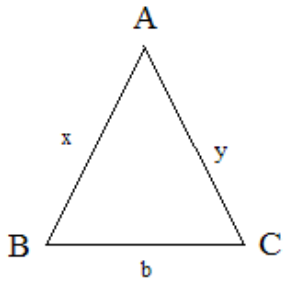
Απόδειξη:

1ος τρόπος:

Έστω ότι το μήκος της βάσης BC του τριγώνου ABC είναι σταθερό και ίσο με b και οι άλλες δύο πλευρές ορίζονται με x και y (σχήμα 2.1.3.a). Αφού η περίμετρος Π=b+x+y είναι σταθερή από υπόθεση τότε και η ημιπερίμετρος $s = \frac{b+x+y}{2}$ είναι σταθερή. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με:

$E^2 =s(s-b)(s-x)(s-y)$ (τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα, βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.2 ή Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 218). Για να το μεγιστοποιήσουμε αγνοούμε τους σταθερούς παράγοντες s και s-b και επιχειρούμε να μεγιστοποιήσουμε το (s-x)(s-y). Οι παράγοντες αυτοί έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή

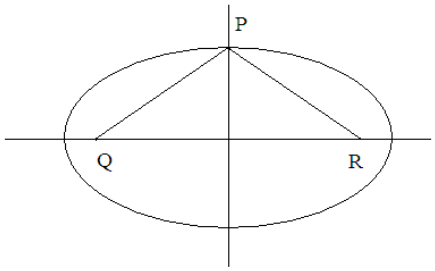
s-x+s-y=2s-x-y=(b+x+y)-x-y=b. Έτσι το μέγιστο ισχύει εάν s-x=s-y ή x=y. Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



(2.1.3.a)

2^{ος} τρόπος:

Ορίζουμε τις κορυφές του τριγώνου P, Q, R, όπου QR είναι η βάση του με σταθερό μήκος b. Τότε Q και R είναι σταθερά σημεία και θεωρούμε όλες τις πιθανές θέσεις για το P με την προϋπόθεση ότι $\Pi = PQ + PR + b = 2s \Leftrightarrow PQ + PR = 2s - b$. Τότε το σημείο P παίρνει θέσεις κατά μήκος μίας έλλειψης με εστίες Q και R όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.3.b [αφού η έλλειψη με εστίες τα σημεία Q και R είναι ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Q και R είναι σταθερό (βλ. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου, ορισμός έλλειψης, σελ. 100)]. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι (PQR)=$\frac{1}{2}$bh και είναι μέγιστο εάν το ύψος h είναι μέγιστο, αφού η βάση είναι σταθερή και ίση με b. Αυτό ισχύει εάν το σημείο P τοποθετείται στο ένα άκρο του μικρού άξονα της έλλειψης έτσι ώστε PQ=PR. Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

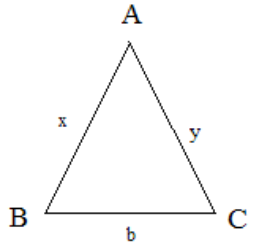


(2.1.3.b)

2.1.4. Μεταξύ των τριγώνων που έχουν σταθερή βάση και εμβαδόν, το ισοσκελές τρίγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Απόδειξη:

Έστω ότι το μήκος της βάσης BC του τριγώνου ABC είναι σταθερό και ίσο με b και οι άλλες δύο πλευρές ορίζονται με x και y (σχήμα 2.1.4.a). Αφού η βάση b είναι σταθερή από υπόθεση, η περίμετρος Π=x+y+b και άρα η ημιπερίμετρος $s = \frac{b+x+y}{2}$ είναι ελάχιστη όταν το άθροισμα x+y είναι ελάχιστο. Αφού το εμβαδόν E είναι σταθερό τότε από σχέση (*)(τύπος του Ήρωνα για τρίγωνα, βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.2) το γινόμενο των δύο όρων $[(x+y)^2-b^2][b^2-(x-y)^2]$ είναι σταθερό. Επομένως ο πρώτος όρος είναι ελάχιστος όταν ο δεύτερος είναι μέγιστος. Αλλά ο πρώτος όρος στον τύπο του Ήρωνα είναι ελάχιστος όταν το άθροισμα x+y είναι ελάχιστο. Άρα x+y είναι ελάχιστο όταν ο δεύτερος όρος είναι μέγιστος, δηλαδή όταν $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



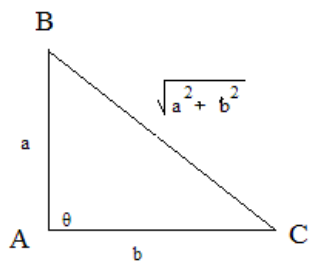
(2.1.4.a)

2.1.5. Μεταξύ των τριγώνων με δύο πλευρές σταθερού μήκους και την τρίτη πλευρά με αυθαίρετο μήκος, το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το ορθογώνιο, με αυθαίρετη πλευρά την υποτείνουσα. Δηλαδή, αν τα σταθερά μήκη είναι a και b, τότε το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν έχει πλευρές $a, b, \sqrt{a^2+b^2}$ και εμβαδόν $\frac{ab}{2}$.

Απόδειξη:

Έστω $\hat{\theta}$ η γωνία ανάμεσα στις πλευρές AB και AC του τριγώνου ABC με σταθερά μήκη a και b αντίστοιχα (σχήμα 2.1.5.a). Τότε η γωνία $\hat{\theta}$ είναι μεταβλητή και πρέπει να

βρούμε την $\hat{\theta}$ έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν. Το εμβαδόν έχει τύπο $E=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εμβαδόν τριγώνου, σελ. 219) επομένως το πρόβλημα είναι να μεγιστοποιήσουμε το sinθ, αφού a και b σταθερά. Η μέγιστη τιμή του sinθ είναι το 1, που ισχύει ανν $\hat{\theta}=90^o$ [αφού $-1 \le \sin\theta \le 1$ και $\sin 90^o=1$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, ιδιότητες τριγωνομετρίας, σελ. 160, 162)]. Δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά απέναντι από την γωνία $\hat{\theta}$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{a^2 + b^2}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα ΙΙ, σελ. 183) και $E = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab \cdot 1 = \frac{ab}{2}$.



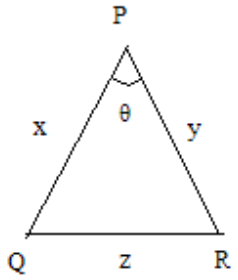
(2.1.5.a)

2.1.6. Μεταξύ των τριγώνων που έχουν μία σταθερή γωνία και σταθερό εμβαδόν, το ισοσκελές τρίγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο, με σταθερή τη γωνία που είναι περιεχόμενη στις ίσες πλευρές.

Απόδειξη:

Έστω x, y, z τα μήκη των πλευρών PQ, PR, QR αντίστοιχα του τριγώνου PQR, και $\hat{\theta}$ η σταθερή γωνία στην κορυφή P (σχήμα 2.1.6.a). Το εμβαδόν E και η περίμετρος Π δίνονται από τους τύπους $E=\frac{1}{2}xy\sin\theta$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.219), $\Pi=x+y+z$ ή $\Pi=x+y+(x^2+y^2-2xy\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ από νόμο συνημιτόνων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.192). Αφού η γωνία $\hat{\theta}$ και το

εμβαδόν Ε είναι σταθερά τότε και το γινόμενο xy είναι σταθερό. Επιπλέον, αφού ο όρος 2xycosθ είναι σταθερός τότε, γνωρίζοντας ότι x+y είναι ελάχιστο αν x=y, τότε και ο όρος $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ είναι ελάχιστος αν x=y. Δηλαδή η περίμετρος είναι ελάχιστη αν PQ=PR (με $\hat{\theta}$ την περιεχόμενη γωνία) όπου τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



(2.1.6.a)

2.1.7. Μία αφίσσα κρέμεται στον τοίχο πάνω από το επίπεδο του ματιού ενός παρατηρητή. Πόσο μακριά από την αφίσσα θα πρέπει να σταθεί ο παρατηρητής έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η γωνία παρατήρησης, δηλαδή η γωνία που αντιστοιχεί στο μάτι του παρατηρητή από την κορυφή μέχρι την βάση της αφίσσας;

Λύση:

Έστω τα σημεία Q και R που αναπαριστούν την βάση και την κορυφή της αφίσσας αντίστοιχα, και TS η οριζόντια γραμμή στο επίπεδο του ματιού του παρατηρητή (σχήμα 2.1.7.a). Το πρόβλημα είναι να τοποθετήσουμε το σημείο P πάνω στην TS έτσι ώστε η γωνία $Q\hat{P}R$ να είναι η μέγιστη.

Σχεδιάζουμε βοηθητικό κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία Q και R, και είναι εφαπτόμενος στην ευθεία TS. Έστω ότι το σημείο P θα πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο επαφής της TS με τον κύκλο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην TS, θα αποδείξουμε ότι $Q\hat{P}R > Q\hat{K}R$.

Έστω Η το σημείο τομής της ευθείας RK με τον κύκλο, και $Q\hat{P}R = Q\hat{H}R$ σύμφωνα με την ιδιότητα ότι όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.124). Τότε έχουμε:

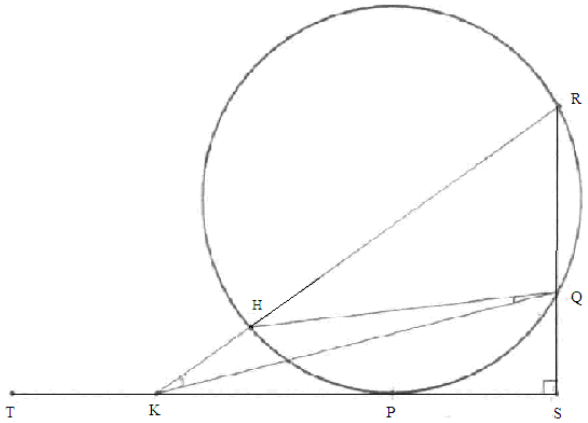
$Q\hat{P}R = Q\hat{H}R = Q\hat{K}R + H\hat{Q}K > Q\hat{K}R$ [αφού κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.83)].

Έτσι αποδείξαμε ότι η γωνία παρατήρησης είμαι μέγιστη αν το μάτι του παρατηρητή βρίσκεται στο εφαπτόμενο σημείο Ρ.

Απομένει να δείξουμε πώς τοποθετούμε το σημείο Ρ στην επιθυμητή θέση. Έστω QS=b και RS=c με b και c σταθερές. Θέλουμε να βρούμε την απόσταση PS (2.1.7.a).

Από ιδιότητα σχετική με τις τέμνουσες κύκλου έχουμε:

$SP^2 = SQ \cdot SR \Leftrightarrow SP^2 = bc \Leftrightarrow SP = \sqrt{bc}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα ΙΙ,σελ.200)



(2.1.7.a)

2.1.8. Δοθέντος σημείου Μ εσωτερικό σε γωνία $B\hat{A}C$, να επιλεγούν τα σημεία D (πάνω στην AB) και E (πάνω στην AC) έτσι ώστε τα D, M, E να είναι συνευθειακά και η περίμετρος του τριγώνου ADE να είναι η ελάχιστη.

Λύση:

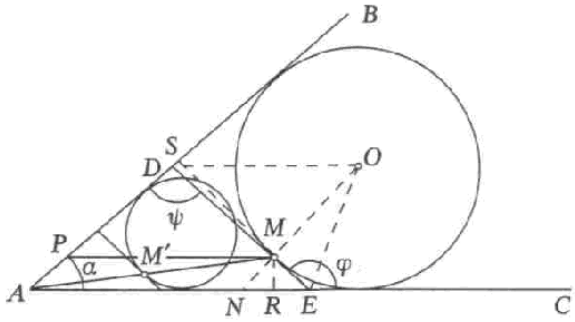
Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη ευθεία DE έχει την εξής ιδιότητα: ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ADE εφάπτεται στο τμήμα DE, στο σημείο M (σχήμα 2.1.8.α). Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε μια τέτοια ευθεία.

Εγγράφουμε στη γωνία $B\hat{A}C$ έναν κύκλο και ονομάζουμε Μ΄ το σημείο τομής της ευθείας ΑΜ και του κύκλου που βρίσκεται πλησιέστερα στο Α. Κατόπιν φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου μας στο σημείο Μ΄ και, έπειτα, την ευθεία που διέρχεται από το δοθέν σημείο Μ και είναι παράλληλη προς την εν λόγω εφαπτομένη. Αυτή είναι και η ζητούμενη ευθεία.

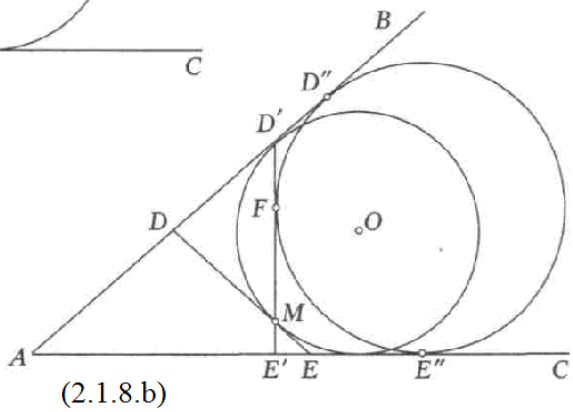
Απομένει να δείξουμε ότι η ευθεία που μόλις κατασκευάσαμε ορίζει το τρίγωνο ελάχιστης περιμέτρου. Χαράσσουμε μιαν ευθεία D΄Ε΄ που διέρχεται από το Μ (σχήμα 2.1.8.b). Θεωρούμε τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AD΄Ε΄ που εφάπτεται στο τμήμα D΄Ε΄, στο σημείο F, και στις πλευρές ΑΒ και ΑC της γωνίας, στα σημεία D΄΄ και Ε΄΄, αντιστοίχως. Τα μήκη των τμημάτων Ε΄F και Ε΄Ε΄΄ είναι ίσα, διότι πρόκειται για τα μήκη εφαπτόμενων τμημάτων που άγονται από το ίδιο σημείο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου, Θεώρημα ΙΙ, σελ.62). Το ίδιο ισχύει και για τα μήκη των τμημάτων D΄F και D΄D΄΄. Επομένως, η περίμετρος του τριγώνου AD΄Ε΄ ισούται με:

$$AD' + D'E' + E'A = AD' + D'F + FE' + E'A = AD' + D'D'' + E'E'' + E'A = AD'' + AE''$$

Φυσικά, $|AD''| = |AE''|$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι για να είναι ελάχιστη η περίμετρος του τριγώνου AD΄Ε΄, τα σημεία Ε΄΄ και D΄΄ πρέπει να βρίσκονται όσο γίνεται πιο κοντά στο Α. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται ακριβώς όταν ο παρεγγεγραμμένος κύκλος «ακουμπά» στο σημείο Μ, δηλαδή όταν το τμήμα της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ και ο κύκλος εφάπτονται στο σημείο Μ.



(2.1.8.a)



(2.1.8.b)

2.1.9. Μεταξύ των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δοθέν κύκλο, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη:

Αρχικά θεωρούμε ένα εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒC, όχι ισόπλευρο, έτσι ώστε το κέντρο του κύκλου με σταθερή ακτίνα r να βρίσκεται *στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒC* (σχήμα 2.1.9.a). Τότε αν οι τρεις πλευρές αντιστοιχούν σε επίκεντρες γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ βλέπουμε ότι $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 360°$.

Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ και έχουμε μέγιστο ανν $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = 120°$ (άρα και τα αντίστοιχα τόξα $A\overset{\frown}{B} = A\overset{\frown}{C} = B\overset{\frown}{C}$ και οι αντίστοιχες χορδές, ΑΒ=ΑC=ΒC-βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα Ι, σελ. 23 και Πόρισμα IV, σελ. 37), δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

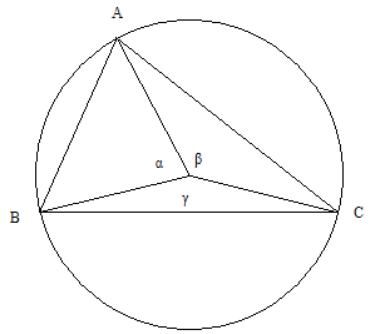
Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒC, όχι ισόπλευρο, εγγεγραμμένο σε κύκλο με σταθερή ακτίνα r έτσι ώστε το κέντρο του κύκλου να είναι *εξωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒC* όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.9.b. Εάν οι δύο μικρότερες πλευρές του τριγώνου αντιστοιχούν στις επίκεντρες γωνίες α, β, τότε η μεγαλύτερη πλευρά θα αντιστοιχεί σε γωνία α+β. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒC είναι ίσο με:

$$E = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin\beta - \frac{1}{2}r^2\sin(\alpha+\beta) < \frac{1}{2}r^2\sin\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin\beta \le r^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} < r^2\sin 90° =$$
$$= r^2 \cdot 1 = r^2$$

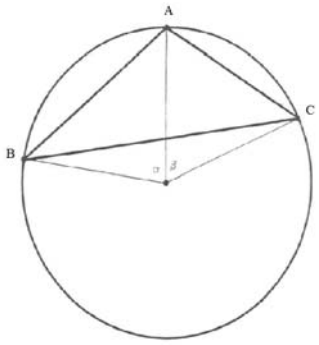
(βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, ιδιότητες τριγωνομετρίας, σελ. 162 και Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου, μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο, σελ. 40). Αλλά αυτό είναι μικρότερο από το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου που ισούται με $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$ και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εφαρμογή $1^{η}$, σελ. 215 και εγγραφή ισόπλευρου τριγώνου σε κύκλο, σελ. 239). Επομένως και σε αυτήν την περίπτωση το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

[Σημείωση: Στην περίπτωση όπου το κέντρο του κύκλου με σταθερή ακτίνα r βρίσκεται *πάνω στο τρίγωνο ΑΒC*, έστω στην πλευρά ΒC, τότε το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την διάμετρο του κύκλου (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα ii), σελ. 124). Θα ισχύει $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$ και $E = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta)$ όπου

έχουμε μέγιστο ανν $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} = 90°$ δηλαδή το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν σε αυτήν την περίπτωση].



(2.1.9.a)



(2.1.9.b)

2.2. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για πολύγωνα και εφαρμογές του

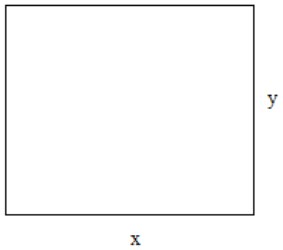
2.2.1. Μεταξύ των ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη:

1ος τρόπος:

Θεωρούμε οποιοδήποτε ορθογώνιο με πλευρές x, y (σχήμα 2.2.1.a), έτσι ώστε η περίμετρος Π=2x+2y να έχει σταθερή τιμή c, δηλ. 2x+2y=c.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: E= xy. Παρατηρούμε ότι οι παράγοντες του γινομένου έχουν σταθερό άθροισμα, δηλ. x+y= $\frac{c}{2}$. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο xy είναι μέγιστο όταν οι παράγοντες είναι ίσοι, δηλαδή όταν x=y (βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.1). Επομένως το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.



(2.2.1.a)

2^{ος} τρόπος (αλγεβρική απόδειξη):

Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο 2x+2y=c, οπότε $y=\frac{c}{2}-x$.

Το εμβαδόν E=xy, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x)=x(\frac{c}{2}-x)$ με $0<x<\frac{c}{2}$.

Για κάθε $x\in(0, \frac{c}{2})$ είναι $E'(x)=\frac{c}{2}-2x$ οπότε $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{c}{4}$.

Το πρόσημο της E΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{c}{4}$		$\frac{c}{2}$
E΄(x)		+	0	-	
E(x)		↗	$\frac{c}{16}$	↘	

Δηλαδή το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x=\frac{c}{4}$. Από τη σχέση $y=\frac{c}{2}-x$ για $x=\frac{c}{4}$ έχουμε $y=\frac{c}{4}$, οπότε το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο.

2.2.2. Μεταξύ των ορθογωνίων με σταθερό εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Απόδειξη:

Μεταξύ των ορθογωνίων με εμβαδόν k, θεωρούμε αρχικά ένα τετράγωνο Π_1 με περίμετρο p_1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο ορθογώνιο με εμβαδόν k που έχει περίμετρο μικρότερη ή ίση της p_1. Υποθέτουμε αντιθέτως ότι υπάρχει ένα ορθογώνιο Π_2 με εμβαδόν k και περίμετρο $p_2\leq p_1$.

Αν $p_2=p_1$, τότε έχουμε δύο ορθογώνια Π_1 και Π_2, το ένα τετράγωνο και το άλλο όχι , με περίμετρο p_1 και εμβαδόν k. Αυτό είναι αδύνατο διότι σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα το τετράγωνο είναι το μοναδικό που έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ των ορθογωνίων με περίμετρο p_1.

Αν $p_2<p_1$, τότε έστω τετράγωνο Π_3 με περίμετρο p_2 και εμβαδόν k_3. Αφού τα Π_3 και Π_2 έχουν την ίδια περίμετρο p_2, συμπεραίνουμε ότι $k_3 >k$ επειδή το Π_3 είναι τετράγωνο ενώ το Π_2 όχι. Απ' την άλλη, εάν συγκρίνουμε τα τετράγωνα Π_1 και Π_3, βλέπουμε ότι το Π_3 έχει μικρότερη περίμετρο και τότε το μικρότερο εμβαδόν. Δηλαδή $k_3 <k$ που έρχεται σε αντίθεση με το προηγούμενο συμπέρασμα. Επομένως $p_2 >p_1$.

2.2.3. Ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από κάθε άλλο τετράπλευρο μη-εγγεγραμμένο με πλευρές ίδιου μήκους και με την ίδια σειρά.

Απόδειξη:

Έστω τετράπλευρο με πλευρές a, b, c, d. Το εμβαδόν E συνδέεται με τις πλευρές, την ημιπερίμετρο s και ένα ζεύγος απέναντι γωνιών $\hat{\theta}$ και $\hat{\lambda}$ του τετραπλεύρου, με τον τύπο $E^2 =(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{2}abcd[1+\cos(\theta+\lambda)]$ (τύπος του Ήρωνα για τετράπλευρα, βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.3). Το εμβαδόν θα είναι μέγιστο εάν η παράσταση $[1+\cos(\theta+\lambda)]$ πάρει την ελάχιστη τιμή, αφού a, b, c, d σταθερές. Η ελάχιστη πιθανή τιμή της παράστασης $[1+\cos(\theta+\lambda)]$ είναι το 0 αφού $\cos(\theta+\lambda)= -1$ διότι $-1\leq \cos(\theta+\lambda)\leq 1$ που ισχύει ανν $\hat{\theta}+\hat{\lambda}=180^o$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, σελ. 159, 160), δηλαδή ανν το τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 130).

2.2.4. Εάν ένα n-γωνο P δεν είναι κανονικό, υπάρχει ένα άλλο n-γωνο P_1 με ίδια περίμετρο και μεγαλύτερο εμβαδόν.

Απόδειξη:

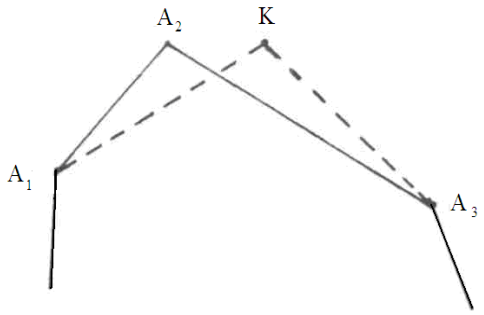
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- *Οι πλευρές του n-γώνου P δεν έχουν όλες το ίδιο μήκος.* Τότε υπάρχουν δύο διαδοχικές άνισες πλευρές, π.χ. $A_1A_2\neq A_2A_3$, όπου A_1, A_2, A_3, είναι διαδοχικές κορυφές (σχήμα 2.2.4.a). Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.3, μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα σημείο K στο ίδιο ημιεπίπεδο του ευθυγράμμου τμήματος A_1A_3, με το A_2, έτσι ώστε $A_1K=KA_3$ και $A_1K+KA_3 = A_1A_2+A_2A_3$, όπως φαίνεται

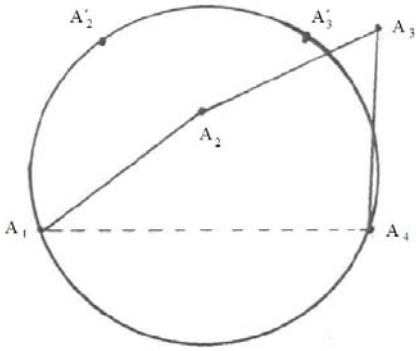
στο σχήμα 2.2.4.a. Τότε το τρίγωνο A_1KA_3 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το τρίγωνο $A_1A_2A_3$. Οπότε το n-γωνο P_1 που προέκυψε από το P αντικαθιστώντας την κορυφή A_2 με την K ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος.

- *Οι πλευρές του n-γώνου P έχουν όλες το ίδιο μήκος.* Αφού το P δεν είναι κανονικό, τότε οι κορυφές δεν είναι όλες σημεία κύκλου (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, ορισμός κανονικού πολυγώνου, σελ. 233). Επομένως υπάρχουν τέσσερις διαδοχικές κορυφές, έστω A_1, A_2, A_3, A_4, οι οποίες δεν βρίσκονται πάνω σε κύκλο, διότι εάν κάθε τέσσερις διαδοχικές κορυφές ήταν σημεία του κύκλου, τότε όλες οι κορυφές θα βρίσκονταν πάνω στον κύκλο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα Ι και απόδειξη, σελ. 234). Αυτό ισχύει διότι τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν μοναδικό κύκλο που διέρχεται από αυτά. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.3, ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, με πλευρές ίδιου μήκους με του τετραπλεύρου $A_1A_2A_3A_4$, έχει μεγαλύτερο εμβαδόν. Έστω $A_1A_2'A_3'A_4$ το εγγεγραμμένο τετράπλευρο όπου οι κορυφές A_2' και A_3' έχουν αντικαταστήσει τις A_2 και A_3 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.4.b (για διευκόλυνση σχεδιάσαμε ένα τετράπλευρο). Όλες οι πλευρές είναι ίσες: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_1A_2' = A_2'A_3' = A_3'A_4$.

  Το ζητούμενο n-γωνο P_1 προκύπτει επομένως από το n-γωνο P αντικαθιστώντας τις κορυφές A_2, A_3 με τις A_2' και A_3' αντίστοιχα.



(2.2.4.a)



(2.2.4.b)

2.2.5. Θεωρείστε το σύνολο όλων των n-γώνων με σταθερή περίμετρο. Υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα με το μέγιστο εμβαδόν, τότε αυτό είναι το κανονικό n-γωνο και είναι μοναδικό.

Απόδειξη:

Έστω P ένα n-γωνο με σταθερή περίμετρο c και μέγιστο εμβαδόν. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.4, το n-γωνο P πρέπει να είναι κανονικό, αλλιώς θα υπάρχει ένα n-γωνο P_1 με μεγαλύτερο εμβαδόν και σταθερή περίμετρο c. Επομένως το P είναι μοναδικό.

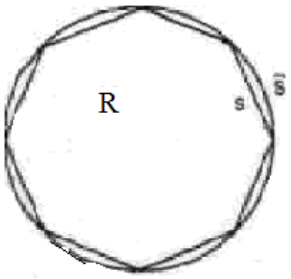
2.2.6. Μεταξύ των n-γώνων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο, το κανονικό n-γωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη:

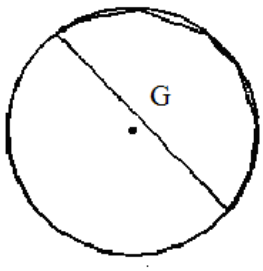
Για n=3 το αποδείξαμε στο θεώρημα 2.1.9. Επομένως για n>3 έχουμε: Έστω R ένα κανονικό n-γωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο Q με ακτίνα r, και ονομάζουμε s το μήκος κάθε πλευράς του R και $\hat{s}$ το μήκος κάθε αντίστοιχου τόξου (σχήμα 2.2.6.a). Αφού ο κύκλος Q έχει μήκος 2πr, τότε $\hat{s} = \frac{2\pi r}{n}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 243, 244). Έστω G ένα οποιοδήποτε n-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο Q (σχήμα 2.2.6.b). Εάν το κέντρο του κύκλου Q είναι εξωτερικό του n-γώνου G τότε το εμβαδόν του G είναι σίγουρα μικρότερο από $\frac{\pi r^2}{2}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 246) αφού σε αυτήν την περίπτωση το G θα βρίσκεται στο μισό του κύκλου. Αλλά ένα κανονικό n-γωνο, n>3, έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το μισό του περιγεγραμμένου του κύκλου. Συνεπώς, το θεώρημα ισχύει εάν το κέντρο του κύκλου Q δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του G. Έτσι υποθέτουμε ότι το κέντρο του κύκλου Q είναι εσωτερικό του G.

Ας ονομάσουμε a_i τα μήκη των πλευρών του n-γώνου G και με $\hat{a}_i$ τα μήκη των αντίστοιχων τόξων. Εάν το G δεν είναι κανονικό, τότε έχει μία τουλάχιστον πλευρά μήκους μικρότερο από s και μία τουλάχιστον πλευρά μήκους μεγαλύτερο από s. Διότι, εάν $a_i \le s$ (i=1, 2, …,n) τότε $a_i < s$ για ένα τουλάχιστον i, έστω $a_1 < s$, αλλιώς το G θα ήταν κανονικό. Τότε, εάν $a_1 < s$ και $a_i \le s$ (i=2, …,n) τότε $\hat{a}_1 < \hat{s}$ και $\hat{a}_i \le \hat{s}$ (i=2, …,n),

και συνεπώς, $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + ... + \hat{a}_n < n\hat{s} = 2\pi r$. Αλλά $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + ... + \hat{a}_n = 2\pi r$ όπου είναι η περίμετρος του κύκλου Q. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $a_i \leq s$ για κάθε i από το 1 έως το n. Ομοίως και για το $a_i \geq s$ για κάθε i από το 1 στο n.



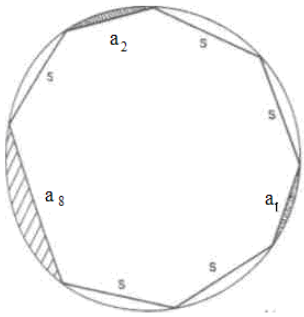
(2.2.6.a)



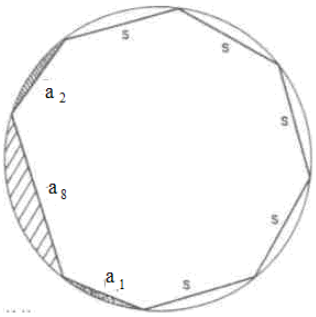
(2.2.6.b)

Κατασκευή:

- Αρχικά υποθέτουμε ότι η μεγαλύτερη πλευρά του G έχει μήκος a_n και ότι η μικρότερη πλευρά έχει μήκος a_1 ($a_1 < s < a_n$) (σχήμα 2.2.6.c-σχεδιάζουμε για διευκόλυνση ένα 8-γωνο). Κατασκευάζουμε ένα άλλο n-γωνο G_1, αλλάζοντας τη σειρά των πλευρών έτσι ώστε η μεγαλύτερη πλευρά να είναι διαδοχική με την μικρότερη πλευρά (σχήμα 2.2.6.d). Είναι προφανές ότι το n-γωνο G_1 έχει το ίδιο εμβαδόν με το G διότι το εμβαδόν του καθενός είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου Q εάν αφαιρέσουμε το εμβαδόν των ίσων κυκλικών τμημάτων (των περιοχών του ορίζονται από τους χορδές και τα αντίστοιχα τόξα τους-βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 247).

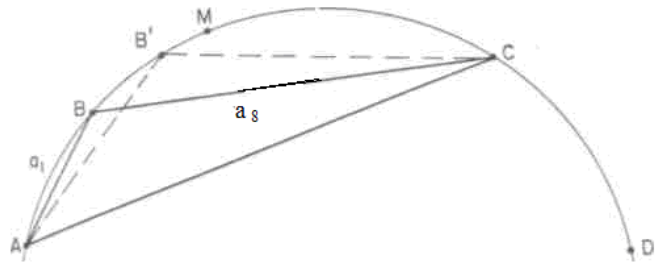


(2.2.6.c)



(2.2.6.d)

- Έπειτα θα κατασκευάσουμε ένα άλλο n-γωνο G_1', εγγεγραμμένο στον κύκλο Q, έτσι ώστε το εμβαδόν του να είναι μεγαλύτερο από του G_1 και συνεπώς μεγαλύτερο από του G (σχήμα 2.2.6.e).



(2.2.6.e)

Θεωρούμε λοιπόν τα τόξα ΑΒ και ΒC που ορίζονται από τις χορδές a_1 και a_n αντίστοιχα. Ας αναφέρουμε και πάλι ότι $\widehat{a}_1 < \widehat{s}$ και $\widehat{a}_n > \widehat{s}$ και ας θεωρήσουμε το σχήμα 2.2.6.e ως μεγέθυνση ενός μέρους του G_1 από το σχήμα 2.2.6.d. Διατηρούμε τα Α και C σταθερά και μετακινούμε το σημείο Β κατά μήκος του τόξου σε ένα άλλο σημείο Β΄ έτσι ώστε $\widehat{AB'} = \widehat{s}$. Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒC και ΑΒ΄C. Θα πρέπει τώρα να δείξουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒ΄C είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒC δείχνοντας ότι το ύψος από την κορυφή Β΄ είναι μεγαλύτερο από το ύψος από την κορυφή Β. Είναι λογικό να θεωρούμε ότι το ύψος αυξάνεται καθώς το Β πλησιάζει το μέσο Μ του τόξου $\widehat{ABC}$, έτσι θα πρέπει να περιοριστούμε στο να δείξουμε ότι το σημείο Β΄ βρίσκεται πιο κοντά στο Μ από ότι το Β, ή ότι $\widehat{B'M} < \widehat{BM}$.

Αφού $\widehat{a}_1 < \widehat{s}$ και $\widehat{a}_n > \widehat{s}$ έχουμε $\widehat{a}_1 = \widehat{s} - h$ και $\widehat{a}_n > \widehat{s} + k$ με h>0, k>0. Αλλά $\widehat{AM} = \frac{1}{2}(\widehat{a}_1 + \widehat{a}_n)$. Και έτσι έχουμε:

$$\widehat{BM} = \widehat{AM} - \widehat{AB} = \frac{1}{2}(\widehat{a}_1 + \widehat{a}_n) - \widehat{a}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{a}_n - \widehat{a}_1) = \frac{1}{2}(\widehat{s} + k - \widehat{s} + h) = \frac{1}{2}(k + h)$$ και

$$\widehat{B'M} = \left|\widehat{AM} - \widehat{AB'}\right| = \frac{1}{2}\left|\widehat{a}_1 + \widehat{a}_n - 2\widehat{s}\right| = \frac{1}{2}\left|\widehat{s} - h + \widehat{s} + k - 2\widehat{s}\right| = \frac{1}{2}\left|k - h\right|.$$ Αφού τα k και h είναι θετικά τότε ισχύει $|k - h| < k + h$ [από τριγωνική ανισότητα (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 54)].

Επομένως $\widehat{B'M} < \widehat{BM}$.

Έχουμε λοιπόν τώρα ένα n-γωνο G_1' εγγεγραμμένο στον κύκλο Q το οποίο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το G και έχει περισσότερες πλευρές μήκους s από το G (τουλάχιστον μία παραπάνω). Το εμβαδόν του G_1' ξεπερνάει το εμβαδόν του G_1 αφού το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒ΄C είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του

τριγώνου ABC και αφού τα G_1' και G_1 συμπίπτουν εκτός κατά μήκος των πλευρών AB και BC και AB΄ και B΄C αντίστοιχα. Εάν το G_1' είναι κανονικό τότε το θεώρημα έχει αποδειχθεί. Εάν όμως δεν είναι κανονικό, τότε θα πρέπει να επαναλάβουμε τις προηγούμενες κατασκευές το πολύ n-1 φορές μέχρις ότου αποκτήσουμε ένα κανονικό n-γωνο το οποίο θα είναι εγγεγραμμένο σε δοθέν κύκλο και θα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το n-γωνο G.

2.3. Ισοπεριμετρικό Θεώρημα για επίπεδες καμπύλες και εφαρμογές του

'Ο κύκλος είναι το πρώτο, το πιο απλό και το πιο τέλειο σχήμα'-Proclus

'Lo cerchio e perfettissima figura'-Dante

Σύμφωνα με τον Polya (σελ. 168) στο ανολοκλήρωτο έργο του Descartes "Regulae ad Directionem Ingenii (or Rules for the Direction of the Mind") βρίσκουμε το ακόλουθο απόσπασμα: «*Προκειμένου να δείξουμε αριθμητικά ότι* ***η περίμετρος του κύκλου είναι μικρότερη από κάθε άλλου σχήματος με το ίδιο εμβαδόν****, δεν χρειαζόμαστε πλήρη αξιολόγηση όλων των πιθανών σχημάτων, αλλά αρκεί να το αποδείξουμε για συγκεκριμένα σχήματα, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα επαγωγικά και για τα υπόλοιπα σχήματα».*

Έτσι προκύπτει η ακόλουθη λίστα (υποθέτοντας ότι όλα τα σχήματα έχουν εμβαδόν 1 τετραγωνική ίντσα):

Κύκλος	3.55
Τετράγωνο	4.00
Τεταρτημόριο	4.03
Ορθογώνιο 3:2	4.08
Ημικύκλιο	4.10
Εξάντας	4.21
Ορθογώνιο 2:1	4.24
Ισόπλευρο τρίγωνο	4.56
Ορθογώνιο 3:1	4.64
Ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο	4.68

Παρατηρώντας τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι ο κύκλος που βρίσκεται στην κορυφή έχει την ελάχιστη περίμετρο. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε επαγωγικά ότι *ο κύκλος έχει την ελάχιστη περίμετρο από όλα τα επίπεδα σχήματα με σταθερό εμβαδόν* ***(Ισοπεριμετρικό Θεώρημα)***, αλλά δεν μπορούμε να αρνηθούμε επίσης ότι η μικρή αυτή λίστα τείνει να γενικεύσει το συμπέρασμα.

Παρακάτω διατυπώνουμε το **Ισοπεριμετρικό Θεώρημα** σε μια άλλη:
Δοθείσας οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης C_1, η οποία δεν είναι κύκλος, υπάρχει άλλη καμπύλη C_2, με το ίδιο μήκος η οποία εσωκλείει μεγαλύτερο εμβαδόν. Επομένως εάν υπάρχει μια απλή κλειστή καμπύλη με σταθερό μήκος η οποία εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν, αυτή είναι ο κύκλος.

Θα αναβάλουμε την απόδειξη αυτής της μορφής του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος για το τέλος της παραγράφου 2.3. και θα συνεχίσουμε με κάποιες εφαρμογές του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος.

2.3.1. Το Ισοπεριμετρικό Πηλίκο

Για κάθε περιοχή στο επίπεδο με εμβαδόν Ε και περίμετρο Π η ανισότητα $4\pi E \le \Pi^2$ ή $\frac{4\pi E}{\Pi^2} \le 1$ είναι αληθής, και η ισότητα ισχύει ανν η περιοχή είναι ένας κυκλικός δίσκος, δηλαδή, ένας κύκλος μαζί με το εσωτερικό του.

Απόδειξη:

Ο κύκλος με μήκος Π έχει ακτίνα $r = \frac{\Pi}{2\pi}$ και εμβαδόν $\pi r^2 = \pi(\frac{\Pi}{2\pi})^2 = \frac{\Pi^2}{4\pi}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 243, 246). Αφού ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ των περιοχών (επίπεδων σχημάτων) με σταθερό μήκος (βλ. διατύπωση Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος), το εμβαδόν Ε οποιασδήποτε άλλης περιοχής θα είναι μικρότερο από $\frac{\Pi^2}{4\pi}$. Δηλαδή $E \le \frac{\Pi^2}{4\pi} \Leftrightarrow \frac{4\pi E}{\Pi^2} \le 1$ με ισότητα ανν η περιοχή είναι ένας κυκλικός δίσκος.

Έχει ενδιαφέρον να δούμε παρακάτω την λίστα με κάποια από τα πιο βασικά σχήματα και το ισοπεριμετρικό τους πηλίκο (IQ).

Κύκλος	1.0
Κανονικό 8-γωνο	0.948
Κανονικό 6-γωνο	0.907
Κανονικό 5-γωνο	0.865
Τετράγωνο	0.785
Τεταρτημόριο	0.774
Ορθογώνιο 3:2	0.754
Ημικύκλιο	0.747
Ορθογώνιο 2:1	0.698
Ισόπλευρο τρίγωνο	0.605
Ορθογώνιο 3:1	0.589
Ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο	0.539
Τρίγωνο με πλευρές 1, 2, $\sqrt{3}$	0.486

2.3.2. Το Πρόβλημα της Διδούς

Σύμφωνα με τον Tikhomirov (σελ. 23) *«η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης προσπαθώντας να ξεφύγει από την καταδίωξη του αδελφού της, αναχώρησε προς τα δυτικά παραπλέοντας τις ακτές της Μεσογείου, σε αναζήτηση ασύλου. Μία συγκεκριμένη τοποθεσία στα παράλια που σήμερα είναι γνωστά ως κόλπος της Τύνιδας, τράβηξε την προσοχή της. Η Διδώ ήρθε σε διαπραγματεύσεις με τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα, για να αγοράσει γη. Οι απαιτήσεις της περιορίζονταν στο ελάχιστο —δεν ζητούσε παρά μόνον όση έκταση κατά μήκος της όχθης της θάλασσας μπορούσε να 'κυκλωθεί με τη δορά ενός ταύρου'. Η Διδώ κατάφερε να πείσει τον Ιάρβα, και η συμφωνία κλείστηκε. Τότε η πριγκίπισσα τεμάχισε τη δορά του ταύρου σε λεπτές λωρίδες και τις έδεσε τη μία με την άλλη δημιουργώντας ένα σχοινί».* Αλλά μετά η Διδώ αντιμετώπισε ένα γεωμετρικό πρόβλημα:

Τι καμπύλη θα έπρεπε να σχηματίσει με το δοθέν σκοινί, από ένα σημείο της παραλίας σε ένα άλλο, έτσι ώστε να περικλείσει το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν;

Παρακάτω διατυπώνουμε το πρόβλημα και γεωμετρικά:

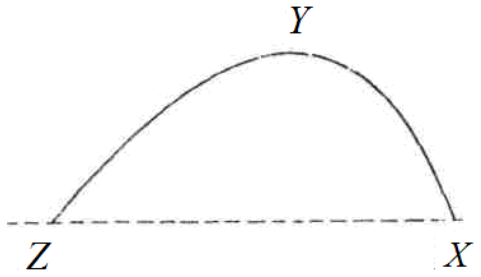
Για κάθε θετικό σταθερό αριθμό c θεωρείστε το πρόβλημα του να βρείτε την καμπύλη μήκους c η οποία εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ αυτής και δοθείσας ευθείας γραμμής. Εάν η καμπύλη δεν είναι ημικύκλιο, τότε μπορεί να αντικατασταθεί από άλλη καμπύλη μήκους c η οποία εσωκλείει μεγαλύτερο εμβαδόν. Επομένως εάν υπάρχει μια καμπύλη που εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν, αυτή είναι το ημικύκλιο.

Λύση:

1ος τρόπος:

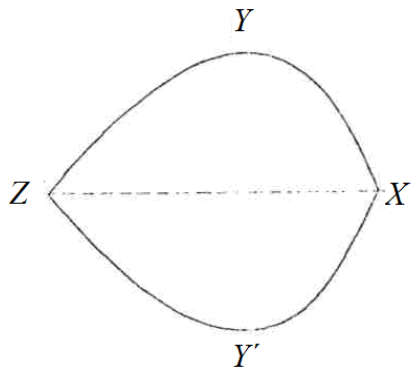
(Στο πρόβλημα που αντιμετώπισε η Διδώ, αν αφορούσε στο εσωτερικό μιας περιοχής, η απάντηση θα ήταν ο κύκλος. Αλλά στην όχθη της θάλασσας το πρόβλημα είναι διαφορετικό).

Υποθέτουμε ότι η όχθη είναι μία ευθεία. Το τόξο $X\hat{Y}Z$ (σχήμα 2.3.2.a) έχει σταθερό μήκος. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ του τόξου και της ευθείας XZ, η οποία μπορεί να σμικρυνθεί ή να επιμηκυνθεί όσο επιθυμούμε.



(2.3.2.a)

Παίρνουμε την εικόνα της καμπύλης XYZ ως προς την ευθεία XZ (σχήμα 2.3.2.b). Προκύπτει λοιπόν η κλειστή καμπύλη XYZY΄ με σταθερό μήκος που περικλείει το διπλάσιο από το εμβαδόν που επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε. Αυτό το εμβαδόν είναι το μέγιστο όταν η κλειστή καμπύλη είναι ένας κύκλος (βλ. διατύπωση Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος) όπου η ευθεία XZ είναι ο άξονας συμμετρίας. Επομένως, η λύση του προβλήματος της Διδούς είναι ένα ημικύκλιο.



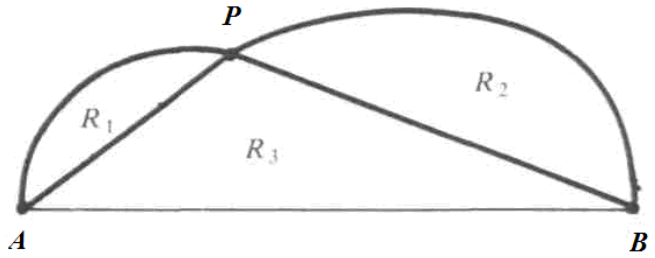
(2.3.2.b)

2^{ος} τρόπος (μέθοδος του Jacob Steiner):

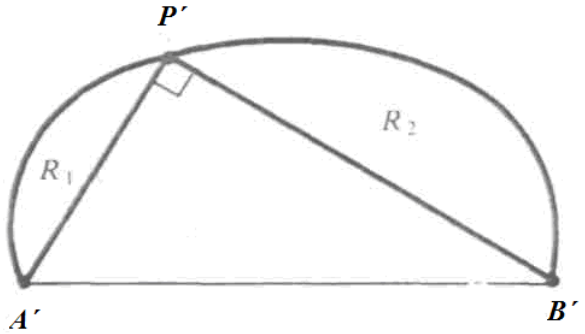
Εάν η καμπύλη από το Α στο Β, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.2.c. δεν είναι ημικύκλιο, τότε υπάρχει σημείο Ρ της καμπύλης τέτοιο ώστε $A\hat{P}B \neq 90°$ [αφού κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα ii), σελ. 124)]. Ενώνοντας το σημείο Ρ με τα Α και Β, η συνολική περιοχή χωρίζεται σε τρεις επιμέρους περιοχές: η περιοχή R_1 μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΡ και της καμπύλης, η περιοχή R_2 μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΡ και της καμπύλης, και η περιοχή R_3 που εσωκλείεται από το τρίγωνο ΑΡΒ.

Εν συνεχεία, κατασκευάζουμε άλλη καμπύλη, η οποία προκύπτει ξανασχεδιάζοντας τα τόξα ΑΡ και ΡΒ ως Α΄Ρ΄ και Ρ΄Β΄ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.2.d., με $A'\hat{P}'B' = 90°$. Πιο συγκεκριμένα, τα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Ρ΄ και Ρ΄Β΄ είναι σχεδιασμένα υπό ορθή γωνία, με Α΄Ρ΄=ΑΡ και Ρ΄Β΄=ΡΒ. Στο Α΄Ρ΄ κατασκευάζουμε με οριακές διαδικασίες μια περιοχή με εμβαδόν ίσο με της περιοχής R_1 και στο Ρ΄Β΄ μια περιοχή με εμβαδόν ίσο με της περιοχής R_2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου Α΄Ρ΄Β΄ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΡΒ σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.5. Επομένως η καμπύλη από το Α΄ στο Ρ΄ και ως το Β΄ εσωκλείει μεγαλύτερο εμβαδόν μεταξύ αυτής και της ευθείας.

Συνεπώς μπορούμε πάντοτε να βρούμε μία άλλη καμπύλη με ίδιο μήκος και μεγαλύτερο εμβαδόν, όπου η περίπτωση του ημικυκλίου είναι η οριακή περίπτωση.



(2.3.2.c)



(2.3.2.d)

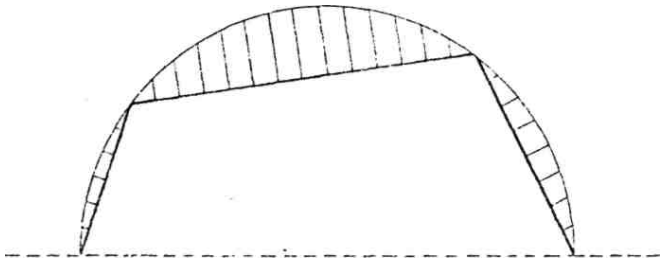
2.3.3. Δίνεται πολύγωνο με πλευρές σταθερού μήκους, εκτός από μία πλευρά αυθαίρετου μήκους. Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο η διάμετρος του οποίου είναι η αυθαίρετη πλευρά του πολυγώνου.

Απόδειξη:

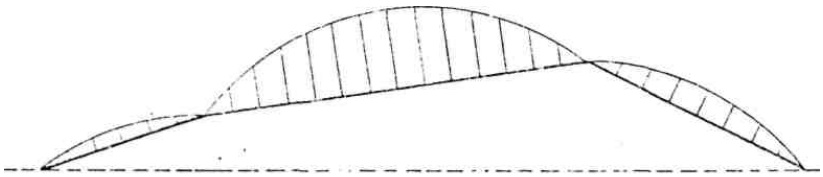
***1^{ος} τρόπος (συνδυασμός του προβλήματος της Διδούς με την μέθοδο του Jacob Steiner)*:**

Εγγράφουμε σε δοθέν ημικύκλιο μια πολυγωνική γραμμή όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.3.a. Θεωρούμε τα γραμμοσκιασμένα τμήματα του ημικυκλίου που δημιουργούνται από τα αντίστοιχα τμήματα της πολυγωνικής γραμμής, ως σταθερά (με σταθερό εμβαδόν). Θεωρούμε επίσης τις γωνίες που δημιουργούνται από τις κορυφές της πολυγωνικής γραμμής ως μεταβαλλόμενες και αφήνουμε τα δύο άκρα της γραμμής να αλλάζουν θέση κατά μήκος της διαμέτρου. Μεταβάλλουμε λοιπόν τις γωνίες τις πολυγωνικής γραμμής και αποκτάμε έτσι μία καινούρια καμπύλη, όχι ημικύκλιο, που αποτελείται από κυκλικά τόξα ίδιου συνολικού μήκους με του ημικυκλίου αλλά

εσωκλείει με την ευθεία μικρότερο εμβαδόν από αυτό του ημικυκλίου (σχήμα 2.3.3.b.), σύμφωνα με το πρόβλημα της Διδούς. Το εμβαδόν όμως των γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων παραμένει σταθερό, επομένως η πολυγωνική γραμμή 'ευθύνεται' για την μείωση του εμβαδού.



(2.3.3.a)



(2.3.4.b)

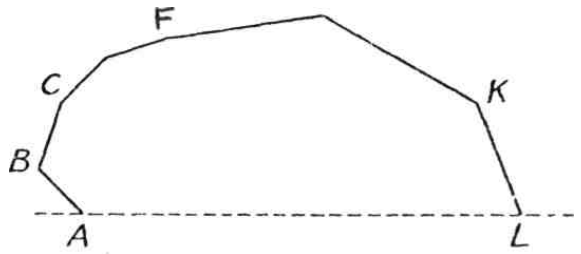
2^{ος} τρόπος:

Δίνεται πολύγωνο ABC…F…KL με πλευρές AB, BC, CF,…, KL σταθερές και πλευρά LA αυθαίρετου μήκους (σχήμα 2.3.3.c.). Επίσης θεωρούμε όλες τις γωνίες των κορυφών B, C,…, K ως σταθερές εκτός από την γωνία στην κορυφή F.

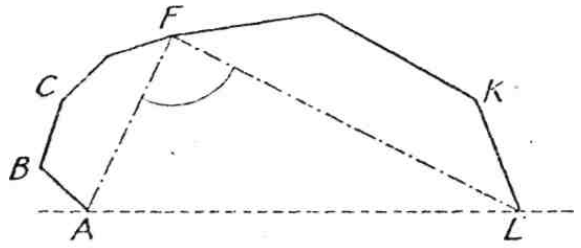
Ενώνουμε τα τμήματα FA και FL, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.3.d., των οποίων τα μήκη είναι σταθερά. Τα πολύγωνα ABC…F και LK…F είναι σταθερά (ως προς το εμβαδόν) και το τρίγωνο AFL έχει δύο πλευρές σταθερού μήκους, την περιεχόμενη γωνία τους $\hat{F}$ μεταβλητή και την τρίτη πλευρά με αυθαίρετο μήκος. Το εμβαδόν του τριγώνου AFL και κατ΄ εξακολούθηση το εμβαδόν όλου του πολυγώνου ABC…F…KL γίνεται μέγιστο όταν η γωνία $A\hat{F}L$ είναι ορθή (=90°), σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.5.

Το ίδιο μπορεί να γίνει και στις άλλες γωνίες $\hat{B}, \hat{C}, ...\hat{F}, ...\hat{K}$ και έτσι μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδόν ενός πολυγώνου ABC…KL γίνεται μέγιστο ανν η αυθαίρετη πλευρά LA φαίνεται από τις απέναντι κορυφές B, C,…F,…K υπό ορθή γωνία.

Και αυτό ισχύει ανν το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο, η διάμετρος του οποίου είναι η αυθαίρετη πλευρά του πολυγώνου (ακολουθώντας την μέθοδο του Jacob Steiner στον 2^{ο} τρόπο λύσης του προβλήματος της Διδούς).



(2.3.3.c)



(2.3.3.d)

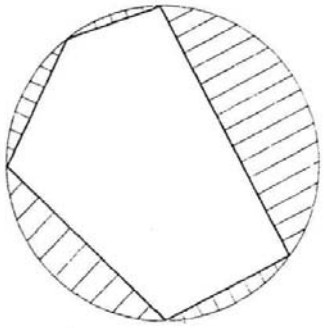
2.3.4. Ένα πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν από κάθε άλλο πολύγωνο μη-εγγεγραμμένο σε κύκλο με πλευρές ίδιου μήκους και στην ίδια σειρά.

Απόδειξη:

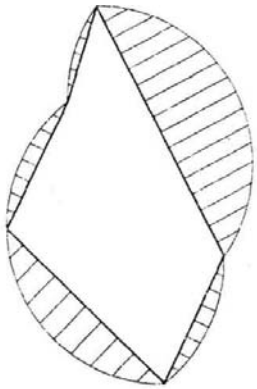
1^{ος} τρόπος (μέθοδος του Jacob Steiner):

Εγγράφουμε σε κύκλο ένα πολύγωνο με εμβαδόν Ε όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.4.a. Θεωρούμε τα γραμμοσκιασμένα τμήματα του κύκλου που δημιουργούνται από τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, ως σταθερά, και με συνολικό εμβαδόν Κ. Παραμορφώνουμε αυτό το σχήμα αλλάζοντας τις εσωτερικές γωνίες του πολυγώνου (σχήμα 2.3.4.b). Έτσι αποκτάμε μία καινούργια καμπύλη η οποία δεν είναι κύκλος, αλλά αποτελείται από τα ίδια διαδοχικά κυκλικά τμήματα και έχει το ίδιο μήκος με τον αρχικό

κύκλο. Έτσι, από το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα, αν Τ το εμβαδόν της καινούργιας καμπύλης έχουμε: $E + K > T + K \Leftrightarrow E > T$.



(2.3.4.a)



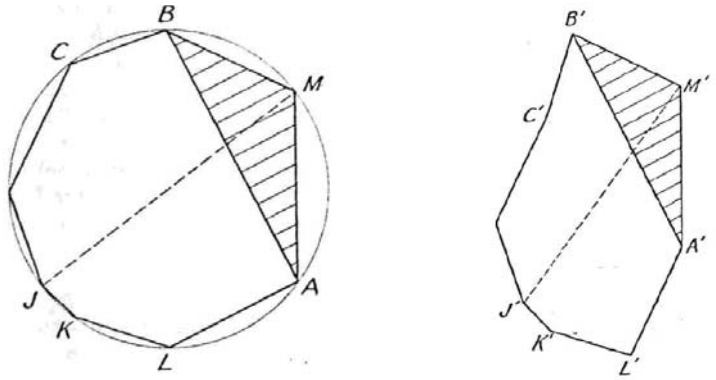
(2.3.4.b)

2^{ος} τρόπος:

Συγκρίνουμε δύο πολύγωνα ΑΒC…KL και Α΄Β΄C΄…K΄L΄ (σχήμα 2.3.4.c). Οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ=Α΄Β΄, BC=B΄C΄…KL=K΄L΄, LA=L΄A΄, αλλά κάποιες από τις γωνίες είναι διαφορετικές διότι το ΑΒC…KL είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ενώ το Α΄Β΄C΄…K΄L΄ δεν είναι. Ενώνουμε την κορυφή J του πολυγώνου ΑΒC…KL με το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου και σχεδιάζουμε την διάμετρο JM. Εάν κατά τύχη το σημείο M συμπίπτει με μία από τις κορυφές του ΑΒC…KL τότε το θεώρημα απλοποιείται και η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 2.3.3. Εάν όχι, τότε το M είναι σημείο του κύκλου μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του εγγεγραμμένου πολυγώνου, έστω των A και B. Ενώνοντας τις κορυφές M, A και B προκύπτει το τρίγωνο AMB. Σχεδιάζουμε έπειτα στην πλευρά Α΄Β΄ του πολυγώνου Α΄Β΄C΄…K΄L΄ ένα τρίγωνο Α΄M΄Β΄ ίσο με το AMB και ενώνουμε τις κορυφές J΄ και M΄. Τα πολύγωνα AMBC…KL και Α΄M΄Β΄C΄…K΄L΄ είναι χωρισμένα σε δύο μέρη το καθένα από τις ευθείες JM και J΄M΄ αντίστοιχα. Το εμβαδόν του πολυγώνου MBC…J που είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο, είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του M΄Β΄C΄…J΄ (σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.3). Οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες εκτός από την διάμετρο του ημικυκλίου MJ που διαφέρει από την ευθεία M΄J΄. Το ίδιο ισχύει και για τα εμβαδά των πολυγώνων MALK…J και M΄A΄L΄K΄…J΄. Έτσι έχουμε: (MBC…J) > (M΄Β΄C΄…J΄) και (MALK…J) > (M΄A΄L΄K΄…J΄). Επομένως με πρόσθεση των δύο ανισοτήτων κατά μέλη έχουμε: (AMBC…KL) > (Α΄M΄Β΄C΄…K΄L΄) και αφού τα τρίγωνα AMB και Α΄M΄Β΄ είναι ίσα τότε έχουμε:

(AMBC…KL)−(AMB)>(A΄M΄B΄C΄…K΄L΄)−(A΄M΄B΄)⇔

⇔ (ABC…KL)>(A΄B΄C΄…K΄L΄).



(2.3.4.c)

Παρακάτω επιχειρούμε να δώσουμε μια απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος που διατυπώσαμε στην αρχή της παραγράφου 2.3, την απόδειξη του οποίου αναβάλαμε για αργότερα.

2.3.5. Το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα:

Δοθείσας οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης C_1, η οποία δεν είναι κύκλος, υπάρχει άλλη καμπύλη C_2, με το ίδιο μήκος η οποία εσωκλείει μεγαλύτερο εμβαδόν. Επομένως εάν υπάρχει μια απλή κλειστή καμπύλη με σταθερό μήκος η οποία εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν, αυτή είναι ο κύκλος.

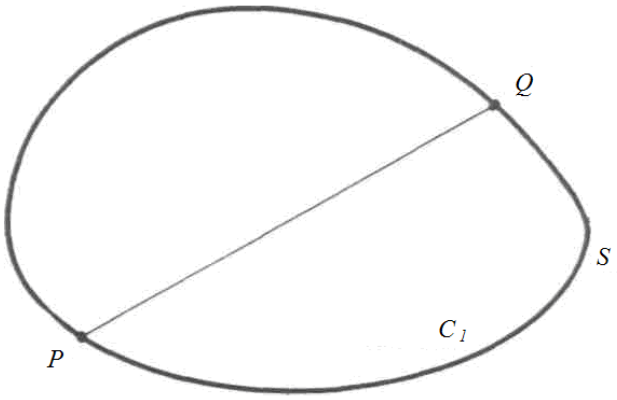
Απόδειξη (μέθοδος του Jacob Steiner):

Θεωρούμε k το μήκος της καμπύλης C_1 (σχήμα 2.3.5.a). Έστω P σημείο της καμπύλης και Q το σημείο που βρίσκεται στα μισά της περιμέτρου της. Έτσι το τόξο $P\widehat{Q}$ έχει μήκος $\frac{k}{2}$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι το ευθύγραμμο τμήμα PQ χωρίζει ολόκληρο το εμβαδόν σε δύο άνισα μέρη. Τότε αφαιρούμε το μέρος με το μικρότερο εμβαδόν και το αντικαθιστούμε με την εικόνα του μεγαλύτερου (ως προς το ευθύγραμμο τμήμα PQ) έτσι ώστε να δημιουργήσουμε μια περιοχή περιορισμένη από μια καμπύλη C_2 μήκους k, με μεγαλύτερο εμβαδόν από την περιοχή που περιορίζεται από την καμπύλη C_1.

Από τη άλλη, έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα PQ χωρίζει το εμβαδόν σε δύο ίσα μέρη. Αφού η καμπύλη C_1 δεν είναι κύκλος, τουλάχιστον ένα από τα τόξα από το P στο Q δεν είναι ημικύκλιο, έστω το τόξο $P\overset{\frown}{S}Q$. Τότε σύμφωνα με το πρόβλημα της Διδούς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το τόξο $P\overset{\frown}{S}Q$ με ένα ίδιου μήκους που εσωκλείει περιοχή με μεγαλύτερο εμβαδόν μεταξύ αυτού και ενός ευθύγραμμου τμήματος, και αυτό το τόξο μαζί με την εικόνα του ως προς το ευθύγραμμο τμήμα δίνει την απλή κλειστή καμπύλη C_2 που ζητάμε. Δηλαδή η C_2 έχει μήκος k αλλά εσωκλείει περιοχή με μεγαλύτερο εμβαδόν από ότι η C_1.

Επομένως εάν υπάρχει μία απλή κλειστή καμπύλη με σταθερό μήκος η οποία εσωκλείει το μέγιστο εμβαδόν, πρέπει να είναι συμμετρική ως προς κάθε ευθεία η οποία χωρίζει την περίμετρό της σε δύο ίσα μέρη, και τότε πρέπει να είναι ο κύκλος, αφού κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα i), σελ. 24).



(2.3.5.a)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
(ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ - Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ)

'Η συμμετρία, όσο γενικά ή συγκεκριμένα μπορεί να την ορίζεις, είναι μία ιδέα με την οποία ο άνθρωπος εδώ και χρόνια προσπαθεί να καταλάβει και να δημιουργήσει τάξη, ομορφιά και τελειότητα'

έγραψε, σύμφωνα με τον Kazarinoff (σελ. 65), ο Hermann Weyl, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς της εποχής μας. Η συμμετρία επηρέασε την τέχνη των πολιτισμών. Η χρήση της στα μαθηματικά ξεκίνησε από τους Έλληνες και τους οδήγησε στην ανακάλυψη των κανονικών πολυέδρων: τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο. Διαδοχικά, η συμμετρία των πολυέδρων έγινε υπεύθυνη για την δημιουργία της αλγεβρικής τοπολογίας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το ρόλο που παίζει το απλούστερο είδος της συμμετρίας στην μελέτη των ανισοτήτων όπου ένα επίπεδο σχήμα δέχεται συμμετρία ως προς μία ευθεία γραμμή (η οποία χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, όπου το ένα είναι εικόνα του άλλου). Η συμμετρία είναι αισθητικά ευχάριστη και πολλά υπέροχα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να προκύψουν μέσω κατασκευών που περιέχουν ανακλάσεις. Ωστόσο, η μαθηματική αρχή η οποία συνδέεται με την έννοια της ανάκλασης και χρησιμοποιούμε περισσότερο, είναι η περίφημη **Αρχή της Ανάκλασης του φωτός *(όταν μία ακτίνα φωτός ανακλάται σε επίπεδη επιφάνεια, η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).***

Ένα αρχαίο γεωμετρικό πρόβλημα ελαχίστου, στο οποίο εφαρμόζεται και η Αρχή της Ανάκλασης του φωτός, είναι το εξής: Στο επίπεδο δίνονται τα σημεία Α και Β που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας L. Να βρεθεί ένα σημείο Ρ της L τέτοιο, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Ρ από τα Α και Β να είναι ελάχιστο.

Το παραπάνω γεωμετρικό πρόβλημα που θέσαμε το συναντάμε σε όλα σχεδόν τα εγχειρίδια γεωμετρίας. Αλλά πότε και γιατί πρωτοεμφανίστηκε; Θεωρείται ότι το διατύπωσε πρώτος ο περίφημος μαθηματικός της αρχαιότητας Ήρων ο Αλεξανδρεύς (γι΄αυτό και ονομάζεται *Πρόβλημα του Ήρωνα).* Τον γνωρίζουμε όλοι από τον

φερώνυμο τύπο που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου (βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.2 ή Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 218).

Ο Ήρωνας, μέσα από το έργο του, ερευνά τους νόμους της ανάκλασης του φωτός και εφαρμόζει τα συμπεράσματά του σε προβλήματα σχετικά με τις ιδιότητες των κατόπτρων. Ειδικότερα, αποδεικνύει ότι *μια δέσμη φωτεινών ακτινών που προσπίπτουν σε παραβολικό κάτοπτρο παράλληλα προς τον άξονά του εστιάζεται σε ένα σημείο.*

Την εποχή του Ήρωνα, οι θεράποντες της γνώσης προσπαθούσαν να κατανοήσουν τους νόμους της φύσης μέσω εικασιών και λογικών επιχειρημάτων, χωρίς να προσφεύγουν στο πείραμα. Ο πρώτος μεγάλος πειραματιστής στην ιστορία της επιστήμης υπήρξε ο Γαλιλαίος —έζησε τον 17ο αιώνα. Σε αντίθεση με αυτόν, ο Ήρωνας προσπάθησε να στηρίξει τις εξηγήσεις του για τους νόμους της ανάκλασης σε λογικά θεμέλια. Φαίνεται ότι υπέθεσε πως η φύση ακολουθεί πάντοτε τον συντομότερο δρόμο. Ο Δαμιανός (έζησε τον 6ο μ.Χ. αιώνα), ένας σχολιαστής του Ήρωνα, αναφέρει ότι:

«*Ο Ήρων έδειξε ότι τα υπό ίσες γωνίες κεκλιμένα τμήματα είναι*
τα μικρότερα [ως άθροισμα] από όλα τα ενδιάμεσα τα κεκλιμένα
προς το ίδιο μέρος της ευθείας. Αφού δε το απέδειξε αυτό, είπε
ότι, αν η φύση δεν επιθυμεί να περιπλανά άσκοπα μια ακτίνα
φωτός, τότε τη θλα υπό ίσες γωνίες».

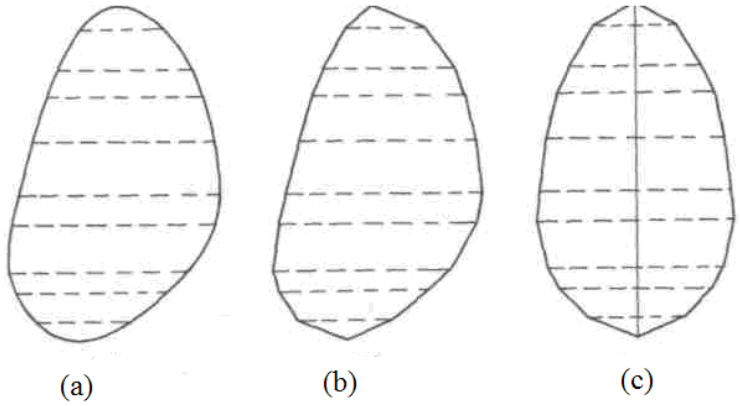
(βλ. Tikhomirov, σελ. 19)

Στο παραπάνω χωρίο οι ιστορικοί της επιστήμης εντοπίζουν την πρώτη νύξη για την άποψη ότι η φύση καθοδηγείται από *αρχές ακροτάτων.*

Πριν προχωρήσουμε σε προβλήματα στα οποία εφαρμόζονται το πρόβλημα του Ήρωνα και η συμμετρία ας αναφέρουμε κάτι σχετικό με την συμμετρικοποίηση του Steiner και το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα. Υποθέτοντας ότι υπάρχει ένα σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ αυτών με σταθερή περίμετρο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάκλαση για να αποδείξουμε το Ισοπεριμετρικό Θεώρημα. Μία από τις ιδέες του Steiner ήταν να αποδείξει ότι το μέγιστο σχήμα πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς κάθε ευθεία η οποία χωρίζει την περίμετρο του σε δύο ίσα μέρη (βλ. θεώρημα 2.3.5 και απόδειξη).

Μία άλλη ιδέα του Steiner για την απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος ήταν ότι το μέγιστο σχήμα πρέπει να έχει έναν άξονα συμμετρίας σε κάθε κατεύθυνση. Για να περιγράψουμε την ιδέα αυτή, ας θεωρήσουμε ένα κυρτό σώμα [σχήμα (a)]. Ας το

χωρίσουμε σε λεπτές οριζόντιες λωρίδες των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες και ας υποθέσουμε ότι κάθε κομμάτι είναι τραπέζιο [σχήμα (b)]. Κατασκευάζουμε στη συνέχεια ένα άλλο σχήμα μετατρέποντας το κάθε τραπέζιο σε ισοσκελές με ίδιες βάσεις και εμβαδόν και στοιχίζουμε τα καινούρια τραπέζια έτσι ώστε να έχουν μια κοινή μεσοκάθετο [σχήμα (c)]. Προκύπτει λοιπόν (από το θεώρημα 3.3.3 για τα τραπέζια το οποίο αποδεικνύουμε παρακάτω) ότι το σχήμα (c) έχει το ίδιο εμβαδόν με το σχήμα (b) αλλά μικρότερη περίμετρο. Εάν χωρίσουμε το αρχικό κυρτό σώμα σε όλο και πιο λεπτές λωρίδες, τα πολύγωνα που προκύπτουν [σχήμα (b)] θα έχουν εμβαδά και περιμέτρους τα οποία προσεγγίζουν αυτά του αρχικού σχήματος (a). Τα μετακινημένα πολύγωνα [σχήμα (c)] θα προσεγγίζουν ένα κυρτό σώμα με άξονα συμμετρίας. Έτσι εάν μας δίνεται ένα κυρτό σώμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο με το ίδιο εμβαδόν, όχι μεγαλύτερη περίμετρο και με άξονα συμμετρίας σε δοθείσα κατεύθυνση. Αυτό το συμμετρικό κυρτό σώμα μπορεί να δημιουργηθεί και με την παρακάτω κατασκευή.

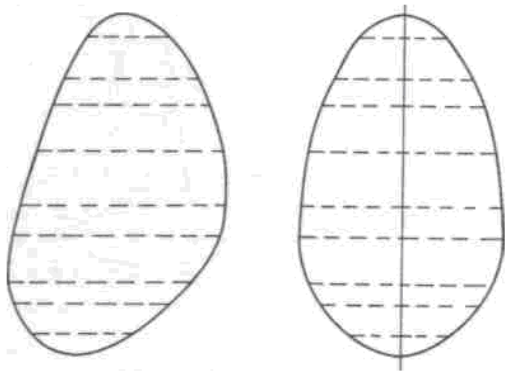


Κατασκευή: Σχεδιάζουμε μια ευθεία στη δοθείσα κατεύθυνση και θεωρούμε τις χορδές του αρχικού σώματος οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία [σχήμα (d), (e)]. Μετακινούμε κάθε χορδή έτσι ώστε η ευθεία γραμμή που σχεδιάσαμε να γίνει μεσοκάθετος του σώματος. Τα άκρα των μετακινημένων χορδών σχηματίζουν ένα νέο συμμετρικό σώμα, με το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό αλλά με μικρότερη περίμετρο. Αυτή η κατασκευή ονομάζεται *Συμμετρικοποίηση του Steiner* και παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των κυρτών σωμάτων.

Είμαστε τώρα σε θέση να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Ισοπεριμετρικού Θεωρήματος. Εάν μας δοθεί ένα κυρτό σώμα το οποίο δεν έχει άξονα συμμετρίας σε κάποια κατεύθυνση, εφαρμόζουμε συμμετρικοποίηση του Steiner ως προς έναν άξονα

συμμετρίας σε αυτήν την κατεύθυνση και αποκτάμε ένα νέο κυρτό σώμα με το ίδιο εμβαδόν και μικρότερη περίμετρο. Στη συνέχεια μεγεθύνουμε το νέο σώμα μέχρις ότου η περίμετρός του να είναι η ίδια με το αρχικό σώμα.

Επομένως, εάν ένα σχήμα δεν έχει έναν άξονα συμμετρίας σε κάθε κατεύθυνση, δεν μπορεί να είναι το σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ αυτών με την ίδια περίμετρο. Από αυτό προκύπτει και το γεγονός ότι εάν υπάρχει ένα μέγιστο σχήμα, τότε ο κύκλος είναι το μέγιστο σχήμα, αφού οποιαδήποτε διάμετρος κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.



(d) (e)

3.1. Το Πρόβλημα του Ήρωνα και εφαρμογές του

3.1.1. Το Πρόβλημα του Ήρωνα:

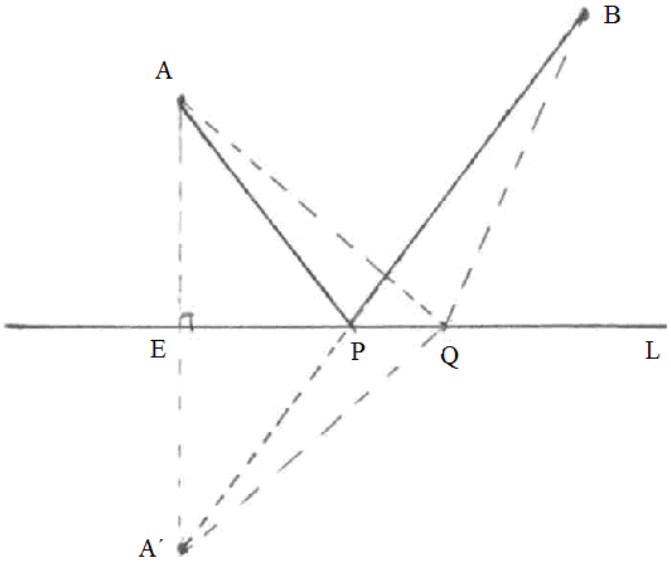
Δοθέντων δύο σημείων Α και Β στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας L, βρείτε ένα σημείο Ρ της L έτσι, ώστε το άθροισμα ΑΡ + ΡΒ να είναι ελάχιστο.

Λύση:

1^{ος} τρόπος:

Ο πιο γρήγορος τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να πάρουμε την εικόνα ενός εκ των σημείων Α και Β, έστω την εικόνα Α΄ του Α ως προς την ευθεία L, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1.1.a). Τότε η ευθεία ΒΑ΄ τέμνει την L στο επιθυμητό σημείο Ρ. Η ευθεία ΑΑ΄ είναι κάθετη στην L και διχοτομείται από αυτήν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17). Για να αποδείξουμε ότι το Ρ είναι το σημείο που

θέλουμε, θεωρούμε ένα άλλο σημείο Q πάνω στην ευθεία L. Τότε παρατηρούμε ότι AQ=A΄Q και AP=A΄P. Έτσι έχουμε AQ+QB=A΄Q+QB>A΄B=A΄P+PB=AP+PB, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 54).



(3.1.1.a)

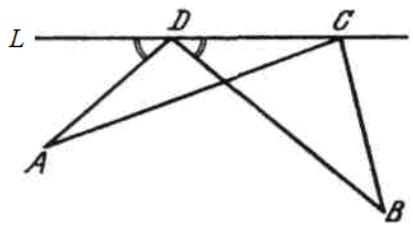
2^{ος} τρόπος:

Είναι γνωστό ότι εάν τοποθετήσουμε στο σημείο A (σχήμα 3.1.1.b) μία φωτεινή πηγή και στοχεύσουμε πάνω στην οριζόντια επιφάνεια L του καθρέφτη τότε το φως αντανακλάται σε ένα σημείο D έτσι ώστε η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με την γωνία ανάκλασης και καταλήγει στο B (Αρχή της Ανάκλασης του φωτός). Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ότι το μονοπάτι ADB που διανύει το φως είναι συντομότερο από κάθε άλλο μονοπάτι ACB.

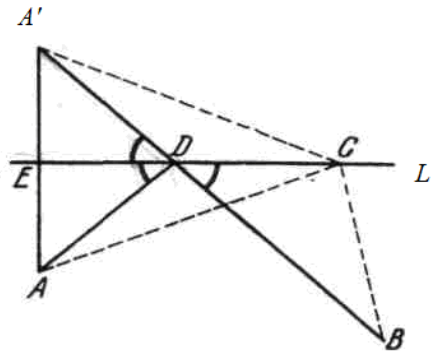
Παίρνουμε την εικόνα του σημείου A ως προς την επιφάνεια L του καθρέφτη (σχήμα 3.1.1.c). Εάν A΄ είναι η εικόνα του A τότε A΄D είναι η εικόνα του AD και A΄C είναι η εικόνα του AC έτσι, ώστε A΄D=AD, A΄C=AC και A΄E=AE όπου E είναι το σημείο τομής του AA΄ με την L [αφού η AA΄ είναι κάθετη στην L και διχοτομείται από αυτήν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17)]. Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα EDA και EDA΄ είναι ίσα [AD=A΄D και ED κοινή (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 44)] τότε και $E\hat{D}A = E\hat{D}A'$.

Σύμφωνα με την Αρχή της Ανάκλασης του φωτός έχουμε $E\hat{D}A = C\hat{D}B$ ως γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης. Επομένως οι γωνίες $C\hat{D}B$ και $E\hat{D}A'$ είναι ίσες και παίζουν το ρόλο των κατακορυφήν γωνιών και άρα το μονοπάτι A΄DB είναι ευθεία. Επίσης ισχύει ADB=A΄DB και ACB=A΄CB. Αφού η A΄DB είναι ευθεία που ενώνει τα A΄ και B, και είναι συντομότερο μονοπάτι από το A΄CB τότε συνεπάγεται ότι το ADB είναι συντομότερο από το ACB. Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ευθεία είναι το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ δύο σημείων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία A΄ και B΄ Ενιαίου Λυκείου, τριγωνική ανισότητα, σελ. 54).

<u>Σημείωση:</u> Η απόδειξη αυτή μας δείχνει ότι ισχύει και η ακόλουθη πρόταση: Δοθέντων δύο σημείων A και B στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας L, εάν το D είναι ένα σημείο της L έτσι ώστε το άθροισμα AD+BD να είναι ελάχιστο, τότε τα AD και BD σχηματίζουν ίσες γωνίες με την L (σχήμα 3.1.1.b ή 3.1.1.c).



(3.1.1.b)



(3.1.1.c)

3^{ος} τρόπος (αλγεβρική λύση):

Έστω ότι η ευθεία L αποτελεί τον x-άξονα συντεταγμένων με το O ως αρχή των αξόνων τα σημεία A και B με συντεταγμένες (a,b) και (c,d) αντίστοιχα, και b>0, d>0. Θεωρώντας ως (x,0) τις συντεταγμένες κάθε σημείου που βρίσκεται πάνω στην L, το πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα της απόστασης από το (x,0) στο (a,b) και στο (c,d). Δηλαδή πρέπει να βρούμε την τιμή του x έτσι ώστε το άθροισμα $\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ να είναι ελάχιστο. Οι συντεταγμένες του A΄ είναι (a,-b) όπου A΄ είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την L.

Το επιθυμητό σημείο P είναι το σημείο τομής της ευθείας A΄B με την L. Έτσι η εξίσωση της ευθείας A΄B είναι $y+b=\frac{-b-d}{a-c}(x-a)$. Θέτοντας y=0 και λύνοντας ως προς x, βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου P στο οποίο η A΄B τέμνει τον x-άξονα, δηλαδή έχουμε:

$$0+b=\frac{-b-d}{a-c}(x-a)\Leftrightarrow -(b+d)(x-a)=ab-cb\Leftrightarrow x-a=-\frac{ab-cb}{b+d}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{ab-cb}{b+d}+a\Leftrightarrow x=-\frac{ab-cb}{b+d}+\frac{ab+ad}{b+d}\Leftrightarrow x=\frac{-ab+cb+ab+ad}{b+d}\Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{ad+cb}{b+d}$$

Άρα $P=\left(\frac{ad+cb}{b+d},0\right)$.

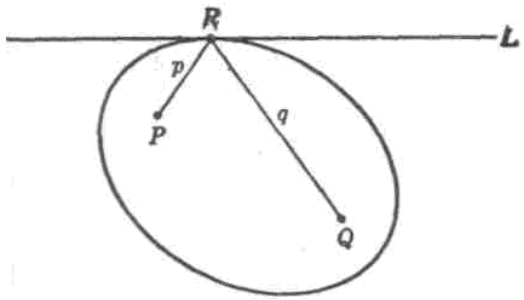
3.1.2. Η εφαπτομένη μίας έλλειψης σχηματίζει ίσες γωνίες με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις εστίες P και Q της έλλειψης με το σημείο επαφής R.

Απόδειξη:

1ος τρόπος:

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι δοθέντων δύο σημείων P και Q στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας L, εάν το R είναι σημείο της L έτσι ώστε το άθροισμα RP+RQ να είναι ελάχιστο, τότε τα RP και RQ σχηματίζουν ίσες γωνίες με την L (βλ. πρόβλημα του Ήρωνα και απόδειξη). Αυτό το ελάχιστο άθροισμα ας το ονομάσουμε 2a. Ας ορίσουμε p και q τις αποστάσεις από κάθε σημείο του επιπέδου προς τα σημεία P και Q αντίστοιχα και θεωρούμε τον γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει p+q=2a (σχήμα 3.1.2.a). Αυτός ο γεωμετρικός τόπος είναι μία έλλειψη (βλ. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου, ορισμός έλλειψης, σελ. 100), P και Q είναι οι εστίες της, και η οποία περνάει από το σημείο R της ευθείας L. Επιπλέον, η ευθεία L πρέπει να είναι εφαπτόμενη στην έλλειψη στο σημείο R. Εάν η L ήταν τέμνουσα της έλλειψης, τότε θα υπήρχε ένα τμήμα της ευθείας όπου θα κείτονταν στο εσωτερικό της έλλειψης. Τότε για κάθε σημείο του τμήματος αυτού θα ίσχυε p+q<2a το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την υπόθεση. Ομοίως εάν η ευθεία δεν είχε κανένα κοινό σημείο με την έλλειψη, δηλαδή βρισκόταν εκτός αυτής, τότε θα ίσχυε p+q>2a κάτι

το οποίο είναι επίσης άτοπο. Επομένως η ευθεία L εφάπτεται της έλλειψης και σύμφωνα με την Αρχή της Ανάκλασης του φωτός σχηματίζει ίσες γωνίες με τα ευθύγραμμα τμήματα RP και RQ.

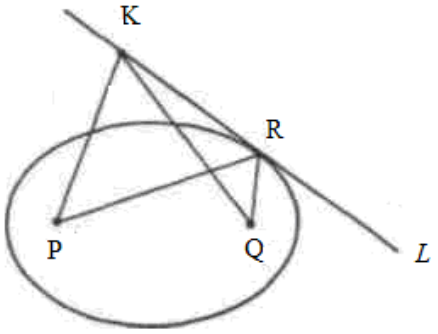


(3.1.2.a)

2^{ος} τρόπος:

Έστω L μία ευθεία εφαπτόμενη σε έλλειψη με εστίες P και Q. Θεωρούμε R το σημείο επαφής και υποθέτουμε ότι K είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο πάνω στην L (σχήμα 3.1.2.b). Αφού το K βρίσκεται έξω από την έλλειψη, ισχύει: $KP + KQ > RP + RQ = 2a$ [αφού έλλειψη με εστίες P και Q είναι ένας γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα P και Q είναι σταθερό και μεγαλύτερο του PQ (βλ. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου, ορισμός έλλειψης, σελ. 100)]. Έτσι το μονοπάτι PRQ είναι το συντομότερο από το P στο Q μέσω της L.

Από την Αρχή της Ανάκλασης του φωτός έχουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα RP και RQ σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη L.



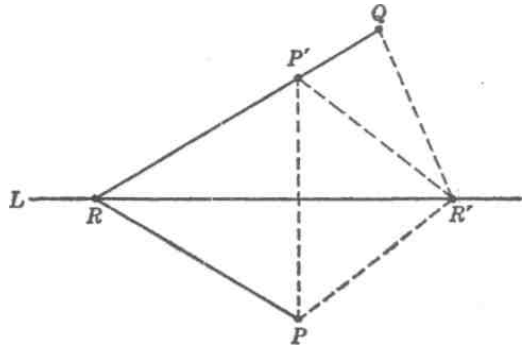
(3.1.2.b)

3.1.3. Δοθείσας μία ευθείας L και δύο σημείων P και Q που βρίσκονται εκατέρωθεν της L, υπάρχει ένα σημείο R της L έτσι ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων των P και Q από το R αντίστοιχα, δηλαδή η $|p-q|$, είναι μέγιστη και οι γωνίες που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα RP και RQ με την L είναι ίσες.

Απόδειξη:

[Θεωρούμε ότι η L δεν είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος PQ γιατί αλλιώς p-q=0 και το πρόβλημα δεν θα έχει νόημα (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17)].

Παίρνουμε την εικόνα P΄ του σημείου P ως προς την ευθεία L, το οποίο βρίσκεται στην ίδια μεριά της L με το σημείο Q (σχήμα 3.1.3.a). Έστω ότι για κάθε σημείο R΄ της L έχουμε p=R΄P=R΄P΄, q=R΄Q. Αφού τα R΄, Q, P΄ μπορούν να θεωρηθούν ως κορυφές ενός τριγώνου τότε από τριγωνική ανισότητα (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 54) ισχύει ότι $|p-q| = |R'P' - R'Q| \le |P'Q|$ με ισότητα εάν τα σημεία R΄, Q, P΄ είναι συνευθειακά. Επομένως το επιθυμητό σημείο R είναι το σημείο τομής της L με την προέκταση της ευθείας QP΄. Επιπλέον αφού τα τρίγωνα RPR΄ και RP΄R΄ είναι ίσα [RR΄ κοινή, RP=RP΄, R΄P΄=R΄P (Π-Π-Π), (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 39)] τότε οι γωνίες που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα RP και RQ με την L είναι ίσες.



(3.1.3.a)

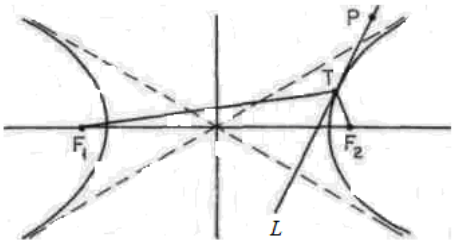
3.1.4. Η ευθεία που διχοτομεί την γωνία η οποία σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν ένα σημείο Τ της ευθείας με τις εστίες F_1 και F_2 μιας υπερβολής, είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο αυτό και η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων των F_2 και F_1 από το Τ αντίστοιχα, δηλαδή η $|TF_2 - TF_1|$, είναι ελάχιστη.

Απόδειξη:

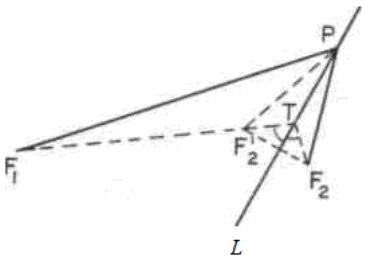
Έστω Τ ένα οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής. Το ενώνουμε με τις εστίες F_1 και F_2 και σχεδιάζουμε την διχοτόμο L της γωνίας $F_1\hat{T}F_2$ (σχήμα 3.1.4.a). Θα δείξουμε ότι η L είναι η εφαπτομένη αποδεικνύοντας ότι οποιοδήποτε άλλο σημείο Ρ της L δεν είναι σημείο της υπερβολής.

Έστω F_2' η εικόνα του F_2 ως προς την ευθεία L (σχήμα 3.1.4.b). Ενώνουμε τα σημεία Ρ και Τ με τα F_1, F_2 και F_2' και ισχύει: $PF_2 = PF_2'$ και $TF_2 = TF_2'$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17). Οπότε έχουμε:

$|PF_2 - PF_1| = |PF_2' - PF_1| \le |F_1F_2'| = |TF_1 - TF_2'| = |TF_2' - TF_1| = |TF_2 - TF_1|$ με ισότητα εάν τα σημεία Ρ, F_2', F_1 είναι συνευθειακά. Αυτό ισχύει μόνο εάν τα Ρ και Τ ταυτίζονται. Γι' αυτό το λόγο η διχοτόμος L έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την υπερβολή και κάθε άλλο σημείο της L βρίσκεται στην πλευρά της υπερβολής όπου $|PF_2 - PF_1| < |TF_2 - TF_1| = 2a$ με a σταθερό (βλ. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου, ορισμός υπερβολής, σελ. 113).



(3.1.4.a)



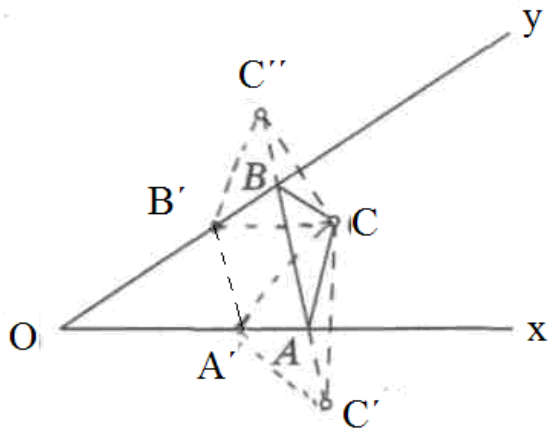
(3.1.4.b)

3.2. Εφαρμογή της συμμετρίας σε τρίγωνα

3.2.1. Έστω C εσωτερικό σημείο μιας δεδομένης γωνίας. Να βρεθούν σημεία A και B επί των πλευρών της γωνίας τέτοια, ώστε η περίμετρος του τριγώνου ABC να είναι ελάχιστη.

Απόδειξη:

Έστω C το δοθέν σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.1.a. Παίρνουμε την εικόνα C΄ του σημείου C ως προς την ημιευθεία Ox και την εικόνα C΄΄ του σημείου C ως προς την ημιευθεία Oy. Τότε η ευθεία C΄C΄΄ τέμνει τις Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα. Επίσης η ευθεία CC΄ είναι κάθετη στην Ox και διχοτομείται από αυτήν, και η CC΄΄ είναι κάθετη στην Oy και διχοτομείται από αυτήν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17). Επομένως ισχύει AC=AC΄ και BC=BC΄΄. Για να αποδείξουμε ότι τα A και B είναι τα σημεία που ζητάμε, θεωρούμε δύο άλλα σημεία A΄ και B΄ πάνω στις Ox και Oy αντίστοιχα. Τότε παρατηρούμε ότι A΄C=A΄C΄ και B΄C=B΄C΄΄. Έχουμε επομένως CA΄+A΄B΄+B΄C= C΄A΄+ A΄B΄+ B΄C΄΄ > C΄C΄΄= C΄A+AB+BC΄΄= CA+AB+BC=Π, όπου Π η περίμετρος του τριγώνου ABC.



(3.2.1.a)

3.2.2. Δίνεται μια γωνία και δύο εσωτερικά της σημεία C και D. Να βρεθούν σημεία A και B επί των πλευρών της γωνίας τέτοια, ώστε το άθροισμα $CA + AB + BD$ να είναι ελάχιστο.

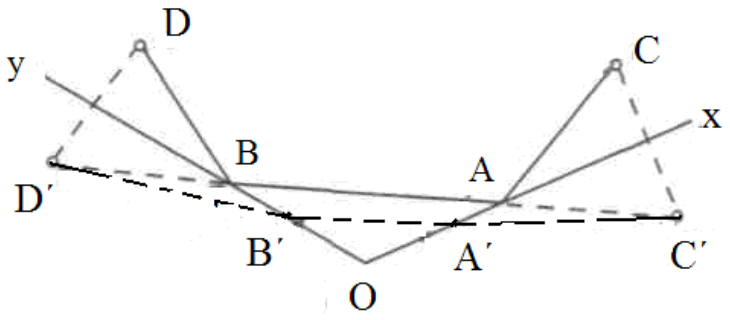
Απόδειξη:

Έστω C και D τα δοθέντα σημεία. Παίρνουμε την εικόνα C΄ του σημείου C και D΄ του σημείου D ως προς τις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.2.a.

Τότε η ευθεία C΄D΄ τέμνει τις Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα. Επίσης η ευθεία CC΄ είναι κάθετη στην Ox και διχοτομείται από αυτήν και η ευθεία DD΄ είναι κάθετη στην Oy και διχοτομείται από αυτήν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα, σελ. 17). Επομένως ισχύει AC=AC΄ και BD=BD΄.

Για να αποδείξουμε ότι τα A και B είναι τα σημεία που ζητάμε, θεωρούμε δύο άλλα σημεία A΄ και B΄ πάνω στις Ox και Oy αντίστοιχα. Τότε παρατηρούμε ότι A΄C=A΄C΄ και B΄D=B΄D΄. Έχουμε επομένως:

$$CA' + A'B' + B'D = C'A' + A'B' + B'D' > C'D' = C'A + AB + BD' = CA + AB + BD.$$



(3.2.2.a)

3.2.3. Το Θεώρημα του Fermat:

Δοθέντος τριγώνου ΑΒC, υπάρχει μοναδικό σημείο P τέτοιο ώστε το άθροισμα PA+PB+PC είναι το ελάχιστο. Εάν όλες οι γωνίες του τριγώνου είναι μικρότερες από 120°, το σημείο P είναι εσωτερικό του τριγώνου και τοποθετείται έτσι ώστε $A\hat{P}B = B\hat{P}C = A\hat{P}C = 120°$**. (Μία εναλλακτική περιγραφή της τοποθεσίας του σημείου P είναι ότι αποτελεί το σημείο τομής των τριών ευθειών AA΄, BB΄, CC΄, όπου τα σημεία A΄, B΄, C΄, τοποθετούνται εξωτερικά του τριγώνου ABC έτσι, ώστε τα τρίγωνα BCA΄, CAB΄, ABC΄ να είναι ισόπλευρα όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.3.a). Αντιθέτως, εάν μία γωνία του τριγώνου ABC είναι 120° ή μεγαλύτερη, τότε το σημείο P θα πρέπει να ταυτίζεται με την κορυφή της γωνίας αυτής για να ελαχιστοποιείται το άθροισμα PA+PB+PC.**

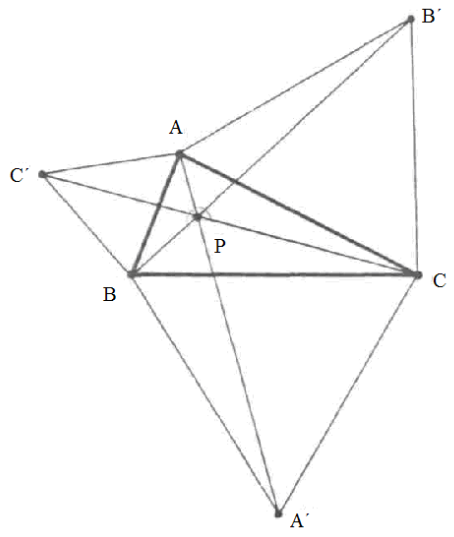
Απόδειξη (μέθοδος του Buckner):

- *Έστω ότι όλες οι γωνίες του τριγώνου ABC είναι μικρότερες από 120°.*

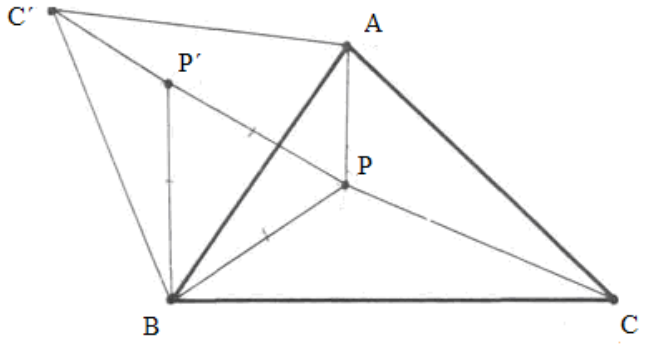
  Παίρνουμε σημείο P εσωτερικό του τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.3.b. Με κέντρο περιστροφής το σημείο B, περιστρέφουμε το ευθύγραμμο τμήμα BA κατά γωνία 60° αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα BC΄. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο και για το ευθύγραμμο τμήμα BP και παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα BP΄. Έτσι τα τρίγωνα ABC΄ και BPP΄ είναι ισόπλευρα. Αφού, σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία, είχαμε και περιστροφή του τριγώνου ABP ως τη θέση C΄BP΄, έχουμε ότι AP=C΄P΄. Επίσης BP=PP΄ και έτσι έχουμε AP+BP+CP=C΄P΄+P΄P+PC. Για να ελαχιστοποιήσουμε το αριστερό μέλος πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το δεξί. Το άθροισμα C΄P΄+P΄P+PC αποτελεί ένα μονοπάτι από το C΄ ως το C μέσω των σημείων P΄ και P. Εάν μπορέσουμε και μετατρέψουμε το μονοπάτι αυτό σε ευθεία τότε το άθροισμα θα ελαχιστοποιηθεί. Αυτό θα συμβεί εάν τοποθετήσουμε το P έτσι ώστε οι γωνίες $A\hat{P}B, B\hat{P}C, A\hat{P}C$ να είναι 120° η κάθε μία διότι τότε θα έχουμε $C'\hat{P}'B = A\hat{P}B = 120°, C'\hat{P}'B + B\hat{P}'P = 120° + 60° = 180° = B\hat{P}P' + B\hat{P}C$ και έτσι η C΄P΄PC είναι ευθεία.

  Στη συνέχεια αναφέρουμε πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε το σημείο P έτσι ώστε οι γωνίες που εκτείνονται από το P μέχρι τις πλευρές AB, AC και BC να είναι 120°. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους κύκλους των ισόπλευρων

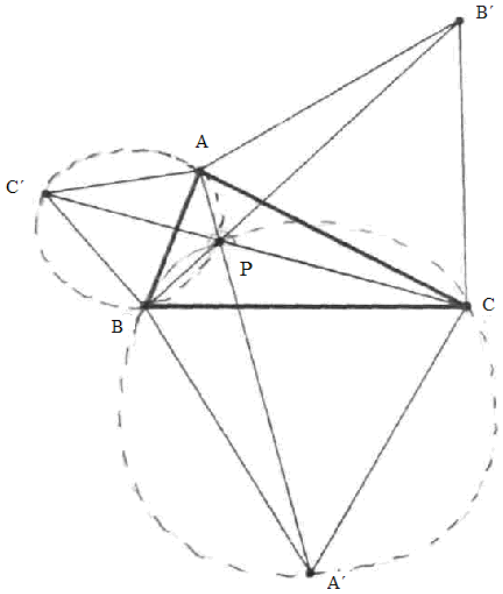
τριγώνων C΄AB και A΄BC (σχήμα 3.2.3.c). Αυτοί οι κύκλοι τέμνονται στο σημείο B και επίσης στο σημείο P το οποίο ελαχιστοποιεί το άθροισμα PA+PB+PC. Αφού τα τέσσερα σημεία C΄, A, P, B είναι σημεία του κύκλου, οι απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου C΄APB έχουν άθροισμα 180° (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 130), έχουμε δηλαδή $A\hat{C}'B + A\hat{P}B = 180°$. Αλλά $A\hat{C}'B = 60°$ (αφού τα τρίγωνα BCA΄, CAB΄, ABC΄ είναι ισόπλευρα από υπόθεση) οπότε $A\hat{P}B = 120°$. Ομοίως τα σημεία A΄, B, P, C είναι σημεία ενός κύκλου και κορυφές του τετραπλεύρου A΄BPC και έτσι έχουμε $B\hat{P}C = 120°$. Επομένως $A\hat{P}C = 360° - A\hat{P}B - B\hat{P}C = 360° - 120° - 120° = 120°$.



(3.2.3.a)



(3.2.3.b)



(3.2.3.c)

- *Έστω μία γωνία του τριγώνου είναι 120° ή μεγαλύτερη.*

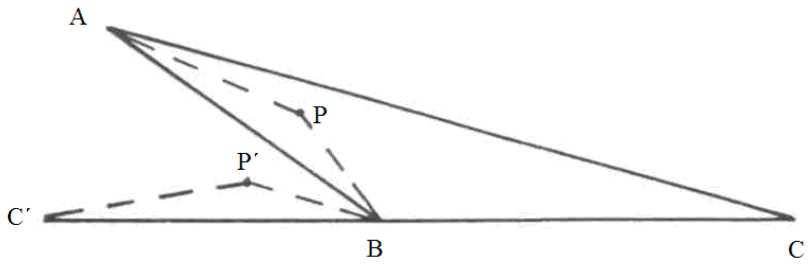
  Υποθέτουμε ότι η $\hat{B}$ είναι η δοθείσα γωνία, δηλαδή $\hat{B} \geq 120°$.

  Στην περίπτωση όπου $\hat{B} = 120°$ τότε τα σημεία C΄, B και C είναι συνευθειακά αφού $C'\hat{B}A + A\hat{B}C = 60° + 120° = 180°$ και το σημείο P συμπίπτει με το B.

  Στην περίπτωση όπου $\hat{B} > 120°$ τότε παίρνουμε σημείο P≠B στο εσωτερικό του τριγώνου ABC. Αποδεικνύουμε ότι AP+BP+CP>AB+BC. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.3.d, επιλέγουμε το σημείο C΄ στην προέκταση του CB έτσι ώστε C΄B=AB. Το σημείο P΄ επιλέγεται έτσι ώστε το τρίγωνο C΄P΄B να προκύψει περιστρέφοντας το τρίγωνο APB, αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού, κατά γωνία $A\hat{B}C'$. Έτσι έχουμε C΄P΄=AP, $P\hat{B}P' = A\hat{B}C' < 60°$. Ισχύει επομένως BP>P΄P [διότι σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 54)] και άρα:

  AP+BP+CP>C΄P΄+P΄P+PC>C΄C=C΄B+BC=AB+BC.

  Επομένως το ελάχιστο άθροισμα PA+PB+PC προκύπτει όταν το σημείο P συμπίπτει με την κορυφή B του τριγώνου και $\hat{B} \geq 120°$.



(3.2.3.d)

3.2.4. Το Πρόβλημα του Steiner:

Δοθέντων τριών σημείων Α, Β, C, να βρεθεί ένα τέταρτο σημείο Χ έτσι ώστε το άθροισμα ΑΧ+ΒΧ+CΧ να είναι ελάχιστο. (Ή τρεις πόλεις Α, Β, C, πρόκειται να συνδεθούν με ένα οδικό δίκτυο ελάχιστου συνολικού μήκους).

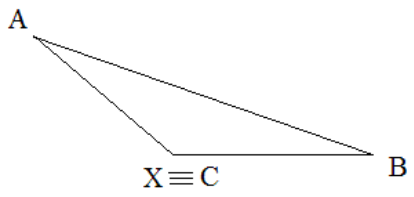
Λύση:

Έστω Α, Β και C τα τρία δοθέντα σημεία (πόλεις) και Χ ένα αυθαίρετο σημείο στο επίπεδο που καθορίζεται από τα Α, Β, και C. Αναζητούμε το ελάχιστο του αθροίσματος ΑΧ+ΒΧ+CΧ.

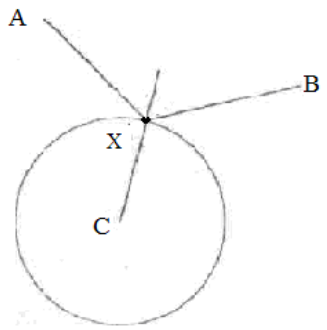
- Έστω ότι το Χ συμπίπτει με ένα από τα δοθέντα σημεία (σχήμα 3.2.4.a). Τότε το Χ θα πρέπει να είναι η κορυφή που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒC, έστω την $\hat{C}$ γιατί τότε το άθροισμα CΑ+CΒ είναι μικρότερο από κάθε άλλο άθροισμα ανά δύο οποιονδήποτε πλευρών του τριγώνου.
- Έστω ότι το Χ διαφέρει από τα δοθέντα σημεία (σχήμα 3.2.4.b). Εάν θεωρήσουμε σταθερή την απόσταση CΧ=r τότε θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο του ΑΧ+ΒΧ, δηλαδή του αθροίσματος των αποστάσεων ενός αυθαίρετου σημείου από δύο σταθερά σημεία. Έστω ότι το Χ θα κινείται κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο C και ακτίνα r. Έχουμε λοιπόν ανάκλαση ως προς κυκλικό καθρέφτη (σε αντίθεση με το πρόβλημα του Ήρωνα όπου το Χ κινείται κατά μήκος μιας ευθείας). Αναζητούμε λοιπόν την πιο σύντομη διαδρομή από το Α στο Β μέσω του κυκλικού καθρέφτη.

  Έτσι θα πρέπει τα ΧΑ και ΧΒ να σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον κύκλο δηλαδή με την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Χ (σύμφωνα με την Αρχή της Ανάκλασης) και άρα με την ακτίνα ΧC. Το ίδιο ισχύει και αν θεωρήσουμε σταθερή την απόσταση ΑΧ ή ΒΧ. Προκύπτει λοιπόν ότι και οι τρεις γωνίες που

δημιουργούνται από τα τμήματα AX, BX, CX είναι ίσες δηλαδή $A\hat{X}B = B\hat{X}C = C\hat{X}A = \frac{360°}{3} = 120°$. Για την τοποθέτηση του σημείου X ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που αναφέραμε στην πρώτη περίπτωση της απόδειξης του προβλήματος του Fermat).



(3.2.4.a)



(3.2.4.b)

3.2.5. Το Θεώρημα του Fagnano:

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC, με ύψη AP, BQ, CR. Τότε μεταξύ των τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα στο τρίγωνο ABC, το τρίγωνο PQR (ορθικό τρίγωνο) έχει την ελάχιστη περίμετρο. Στην περίπτωση όπου μία από τις γωνίες του τριγώνου ABC είναι 90° ή μεγαλύτερη, δεν υπάρχει εγγεγραμμένο τρίγωνο με ελάχιστη περίμετρο: κάθε εγγεγραμμένο τρίγωνο έχει περίμετρο που υπερβαίνει το 2h, όπου h είναι το μήκος του μικρότερου ύψους του τριγώνου, και υπάρχουν εγγεγραμμένα τρίγωνα με περιμέτρους τόσο κοντά στο 2h όσο επιθυμούμε.

Απόδειξη:

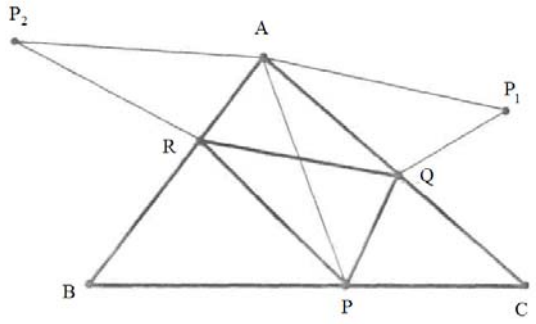
$1^{ος}$ τρόπος:

- Για να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος, όπου έστω $\hat{A} < 90^o$, χρησιμοποιούμε την Αρχή της Ανάκλασης του φωτός. Έστω τρίγωνο PQR εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ABC όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.5.a. Έστω ότι το τρίγωνο AP_1Q είναι η εικόνα του τριγώνου APQ ως προς την πλευρά AC, και τρίγωνο AP_2R η εικόνα του τριγώνου APR ως προς την πλευρά AB.

  Επομένως έχουμε:

  $PQ=P_1Q$, $PR=P_2R$, $AP_1=AP=AP_2$ και $PQ+QR+RP=P_1Q+QR+RP_2 \geq P_1P_2$ (1)

Το άθροισμα PQ+QR+RP μπορεί να ελαχιστοποιηθεί εάν τα P_1, Q, R, P_2 είναι συνευθειακά και εάν η απόσταση P_1P_2 είναι η ελάχιστη μεταξύ των άπειρων μηκών που προκύπτουν από τις διάφορες θέσεις του P. Τώρα θα αποδείξουμε ότι οι δύο αυτές συνθήκες ικανοποιούνται. Για κάθε θέση του P πάνω στην BC διαλέγουμε τα σημεία R και Q στις πλευρές AB και AC αντίστοιχα ως σημεία τομής των πλευρών αυτών με το ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 (το ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 τέμνει τις AC και AB διότι $P_1\hat{A}Q = Q\hat{A}P$ και $P\hat{A}R = R\hat{A}P_2$. Έτσι η γωνία $P_1\hat{A}P_2$ είναι δύο φορές η γωνία $B\hat{A}C\,(=\hat{A} < 90°)$ και επομένως $P_1\hat{A}P_2 < 180^o$). Εάν $B\hat{A}C = \hat{\alpha}$ τότε $P_1\hat{A}P_2 = 2\hat{\alpha}$ όπως είδαμε προηγουμένως. Από νόμο συνημιτόνων και με τη βοήθεια της σχέσης $AP_1=AP=AP_2$ έχουμε:
$(P_1P_2)^2 = (AP_1)^2 + (AP_2)^2 - 2(AP_1)(AP_2)\cos 2\alpha = 2(1-\cos 2\alpha)\ (AP)^2$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ.192). Αφού το α είναι σταθερό τότε για να ελαχιστοποιήσουμε το P_1P_2 κοιτάμε για το ελάχιστο του μήκους AP και αυτό ισχύει ανν AP είναι το ύψος του τριγώνου ABC από την κορυφή A [αφού το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα II(i), σελ.59)]. Και αν τοποθετήσουμε το σημείο P έτσι ώστε το AP να είναι ύψος από την κορυφή A, τα σημεία P_1, P_2 δίνουν την ελάχιστη απόσταση P_1P_2. Έτσι παίρνουμε και τα σημεία R και Q ως σημεία τομής του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 με τις πλευρές AB και AC αντίστοιχα και έχουμε ένα μοναδικό εγγεγραμμένο τρίγωνο PQR με την ελάχιστη περίμετρο. Εάν στη σχέση (1) είχαμε ξεκινήσει με τις γωνίες $\hat{B}$ ή $\hat{C}$ να παίξουν το ρόλο της γωνίας $\hat{A}$ τότε η μοναδικότητα του τριγώνου εγγυάται ότι τα BQ και CR είναι ύψη από τις κορυφές B και C αντίστοιχα.



(3.2.5.a)

- Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, υποθέτουμε ότι $\hat{A} \geq 90°$.

  Στην περίπτωση όπου $\hat{A} > 90^o$ παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 δεν τέμνει τις πλευρές AB και AC όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.5.b. Θα αποδείξουμε ότι

  $PQ+QR+RP=P_1Q+QR+RP_2 \geq P_1A+AP_2 = 2AP$ (2)

  Θεωρούμε δύο κύκλους με κέντρα P_1 και P_2 οι οποίοι έχουν ίσες ακτίνες P_1A και P_2A αντίστοιχα. Εκτός από το σημείο A, οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται και σε ένα δεύτερο σημείο που βρίσκεται εκατέρωθεν του ευθύγραμμου τμήματος P_1P_2 (σε σχέση με το σημείο A). Επομένως το άθροισμα $P_1Q+QR+RP_2$ είναι το μήκος του μονοπατιού από το P_1 στο P_2 που περνάει έξω από τους κύκλους, και υπερβαίνει το άθροισμα P_1A+AP_2 των δύο ακτίνων, δηλ. ισχύει:

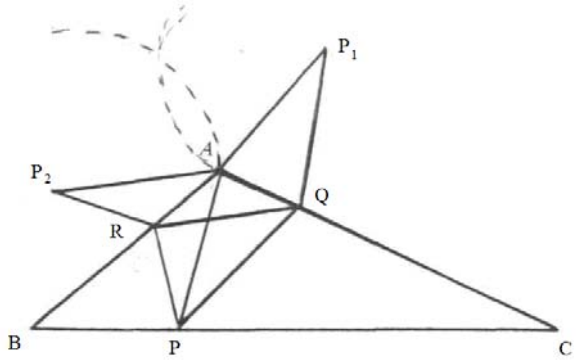
  $PQ+QR+RP \geq P_1A+AP_2 = 2AP$.

  Έχοντας αποδείξει την σχέση (2) παρατηρούμε οτι η ελάχιστη τιμή του AP είναι το ύψος h από την κορυφή A στην πλευρά BC. Έτσι για κάθε εγγεγραμμένο τρίγωνο PQR έχουμε $PQ+QR+RP \geq 2h$ και αυτή η ανισότητα τείνει όσο θέλουμε στην ισότητα παίρνοντας ως P το σημείο τομής του ύψους h με την βάση BC και τοποθετώντας τα Q και R πολύ κοντά στην κορυφή A. Αλλά εάν τα Q και R συμπίπτουν με το σημείο A, τότε δεν θα έχουμε τρίγωνο PQR.

  Στην περίπτωση όπου $\hat{A} = 90^o$ τα σημεία P_1, A και P_2 είναι συνευθειακά διότι αφού η $P_1\hat{A}P_2$ είναι δύο φορές η γωνία $B\hat{A}C$ όπως αναφέραμε στην αρχή της απόδειξης τότε $P_1\hat{A}P_2 = 180°$, όπου και πάλι τα σημεία Q και R συμπίπτουν με το σημείο A, και δεν έχουμε τρίγωνο PQR.

  Έτσι για κάθε εγγεγραμμένο τρίγωνο PQR έχουμε:

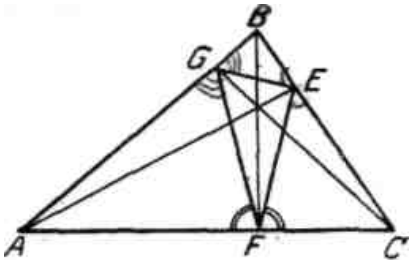
  $PQ+QR+RP=P_1Q+QR+RP_2 > P_1P_2 = 2AP$, με γνήσια ανισότητα διότι τα Q και R δεν μπορούν να συμπίπτουν με το A. Τοποθετώντας το σημείο P έτσι ώστε AP=h συμπεραίνουμε και πάλι ότι $PQ+QR+RP>2h$.



(3.2.5.b)

2ος τρόπος (μέθοδος του Schwarz):

ΛΗΜΜΑ: Έστω το ορθικό τρίγωνο FGE εγγεγραμμένο στο ABC, τότε οι γωνίες $A\hat{F}G$ και $C\hat{F}E$ είναι ίσες και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τις αντίστοιχες γωνίες στο σημείο E και στο σημείο G.



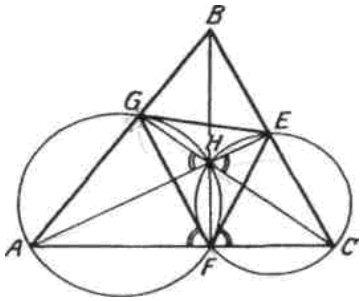
Απόδειξη λήμματος:

Για να αποδείξουμε αυτό το λήμμα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια θεωρήματα της γεωμετρίας, όπως ότι:

- κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα ii), σελ.124),
- οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα (iii), σελ.124)
- και τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο ονομάζεται ορθόκεντρο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ.108).

Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτά τα θεωρήματα βλέπουμε στο σχήμα (3.2.5.c) ότι ο κύκλος με διάμετρο AH περνάει από τα σημεία G και F, και ο κύκλος με διάμετρο CH περνάει από τα σημεία E και F. Επιπλέον $A\hat{F}G = A\hat{H}G$ διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο AG. Ομοίως $C\hat{F}E = C\hat{H}E$. Όμως $A\hat{H}G = C\hat{H}E$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επομένως $A\hat{F}G = C\hat{F}E$.

Ομοίως προκύπτει ότι $C\hat{E}F = B\hat{E}G$ και $B\hat{G}E = A\hat{G}F$



(3.2.5.c)

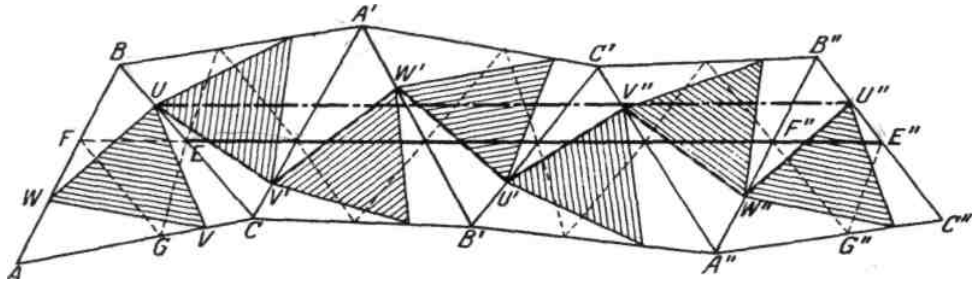
Διαισθητικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι τα ίχνη των υψών του τριγώνου ABC φαίνεται να είναι οι κορυφές του εγγεγραμμένου τριγώνου με την ελάχιστη περίμετρο. Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε αφού διαπιστώσαμε ότι οι GF, FE, EG, σχηματίζουν ίσες γωνίες με κάθε πλευρά. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή του Fermat (ή αρχή του ελαχίστου χρόνου*). Εάν θεωρήσουμε ότι το φως κινείται σε ένα ομογενές υλικό (αέρας) τότε η αρχή του ελαχίστου χρόνου ταυτίζεται με την αρχή του ελαχίστου μήκους.* Οπότε το τρίγωνο GFE έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Ας προχωρήσουμε όμως στην απόδειξη του θεωρήματος του Fagnano αναλυτικά:

Σχεδιάζουμε την εικόνα του τριγώνου ABC ως προς την πλευρά BC (σχήμα 3.2.5.d), έπειτα την εικόνα του ανακλώμενου τριγώνου ως προς την πλευρά του CA΄, την εικόνα του επόμενου τριγώνου ως προς την πλευρά A΄B΄ κ.ο.κ. σε σύνολο έξι ανακλάσεων. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η τελική θέση του τριγώνου A΄΄B΄΄C΄΄ είναι ίδια με την αρχική θέση του τριγώνου ABC κινούμενο παράλληλα χωρίς περιστροφή. Οι δύο πρώτες ανακλάσεις μεταφέρουν το τρίγωνο στην τρίτη θέση A΄B΄C. Αυτή η αλλαγή θέσης θα μπορούσε να προκύψει χωρίς ανακλάσεις, αλλά με περιστροφή του με τη φορά του ρολογιού και με κέντρο περιστροφής το σημείο C κατά γωνία $2\hat{C}$. Ομοίως η αλλαγή θέσης από την τρίτη στην πέμπτη θα μπορούσε να προκύψει με περιστροφή κατά γωνία $2\hat{B}$ με κέντρο περιστροφής το B΄. Τέλος η περιστροφή κατά γωνία $2\hat{A}$ με κέντρο περιστροφής A΄΄ θα οδηγούσε στην τελική θέση. Συνολικά το τρίγωνο θα έχει κάνει μια

πλήρη περιστροφή αφού $2\hat{C}+2\hat{B}+2\hat{A}=2\left(\hat{C}+\hat{B}+\hat{A}\right)=2\cdot 180°=360°$. Έχει λοιπόν κινηθεί αλλά παραμένει παράλληλο με τον εαυτό του. Έτσι BC//B΄΄C΄΄. Τώρα θέλουμε να παρακολουθήσουμε τις διάφορες θέσεις του ορθικού τριγώνου FGE (με κορυφές τα ίχνη των υψών του τριγώνου ABC), και του τριγώνου UVW όπου είναι ένα άλλο τυχαίο εγγεγραμμένο τρίγωνο. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, βλέπουμε ότι η δεύτερη θέση της πλευράς EG δημιουργεί μία ευθεία με την αρχική θέση της FE. Κατά τον ίδιο τρόπο κάθε πλευρά του τριγώνου FGE θα βρίσκεται στην συνέχεια αυτής της ευθείας. Επομένως η ευθεία EE΄΄ έχει σχηματιστεί από έξι τμήματα: 2 ίσα με το FG, 2 ίσα με το GE, και 2 ίσα με το EF. Έτσι είναι ίση με τη διπλάσια περίμετρο του ορθικού τριγώνου FGE.

Παρατηρώντας στη συνέχεια τις διάφορες θέσεις του εγγεγραμμένου τριγώνου UVW, βλέπουμε ομοίως ότι η τεθλασμένη γραμμή UV΄W΄U΄V΄΄W΄΄U΄΄ που ενώνει τα σημεία U και U΄΄ είναι ίση με την διπλάσια περίμετρο του τριγώνου UVW. Έχουμε ήδη διαπιστώσει UE//U΄΄E΄΄ αφού βρίσκονται πάνω στις παράλληλες πλευρές BC και B΄΄C΄΄. Επιπλέον UE=U΄΄E΄΄ αφού είναι αντίστοιχα τμήματα στις δύο ίδιες θέσεις του τριγώνου, την αρχική και την τελική. Τότε αφού UE//=U΄΄E΄΄ το EE΄΄U΄΄U είναι παραλληλόγραμμο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Κριτήριο (ii), σελ.98) και συνεπώς οι άλλες δύο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, δηλαδή UU΄΄//=EE΄΄. Τότε η UU΄΄ είναι ίση με τη διπλάσια περίμετρο του τριγώνου FGE και μικρότερη από τη τεθλασμένη γραμμή UU΄΄ η οποία είναι ίση με την διπλάσια περίμετρο του τριγώνου UVW. Άρα η περίμετρος του τριγώνου FGE είναι μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου UVW.



(3.2.5.d)

3.2.6. Έστω P, Q, R σημεία των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα, ενός τριγώνου ABC. Έστω x, y, z, w, τα εμβαδά των τριγώνων ARQ, BRP, CPQ, PQR, αντιστοίχως. Τότε w> min(x, y, z) εκτός αν τα σημεία P, Q, R βρίσκονται στο μέσο των αντίστοιχων πλευρών του τριγώνου ABC, όπου τότε θα ισχύει x=y=z=w

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα, σημειώνουμε αρχικά ότι μπορούμε να ορίσουμε την μονάδα μήκους έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABC να είναι ίσο με 1, δηλ. $\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin A = 1$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εμβαδόν τριγώνου, σελ.108). Έτσι υποθέτουμε ότι x+y+z+w=1, σχήμα 3.2.6.a. Έστω p, q, r οι λόγοι των μηκών των πλευρών που ορίζονται ως $p = \frac{BP}{BC}, q = \frac{CQ}{CA}, r = \frac{AR}{AB}$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα, σελ.147).

Έχουμε AQ=AC-QC=AC-qAC=(1-q)AC, AR=rAB και το εμβαδόν του τριγώνου ARQ είναι ίσο με $x=\frac{1}{2}(AR)(AQ)\sin A = r(1-q)\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin A = r(1-q)\cdot 1 = r(1-q)$.

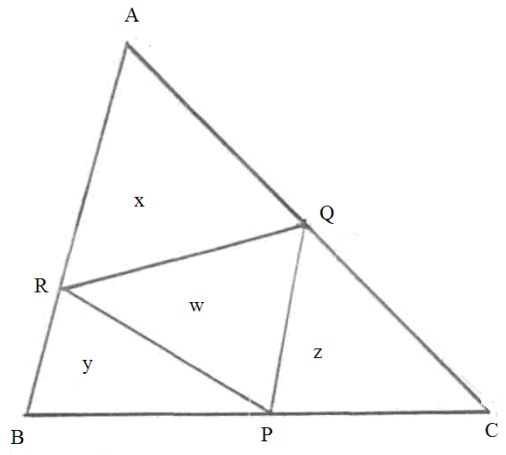
Όμοια αποτελέσματα ισχύουν και για τα τρίγωνα BPR και CPQ, και έτσι έχουμε:

x=r(1-q), y=p(1-r), z=q(1-p), w=1-x-y-z=(1-p)(1-q)(1-r)+pqr. Εφαρμόζοντας την ανισότητα $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.1) στο τελευταίο άθροισμα έχουμε $w\geq 2\sqrt{pqr(1-p)(1-q)(1-r)} = 2\sqrt{xyz}$ (1).

Έστω ότι w≤min(x, y, z), θα δείξουμε ότι καταλήγουμε ως προς την ανίσωση σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι z=max(x, y, z, w) τότε $z \geq \frac{1}{4}$. Επομένως $x \geq w$ και $y \geq w$ και άρα $xy \geq w^2$ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε $xy \geq w^2 \geq 4xyz \geq xy$. Άρα ως προς την ανίσωση οδηγούμαστε σε άτοπο και ισχύει w> min(x, y, z).

Ισχύει όμως η ισότητα και επομένως έχουμε $x=y=z=w=\frac{1}{4}$, όπου το $\frac{1}{4}$ είναι και ο μέσος όρος των εμβαδών. Επομένως τα σημεία P, Q, R βρίσκονται στο μέσο των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.



(3.2.6.a)

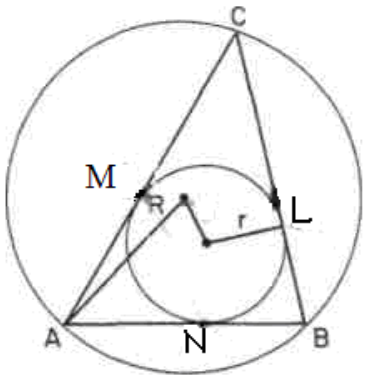
3.2.7. Το Θεώρημα του Euler:

Εάν r και R είναι οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, ενός τριγώνου ABC, τότε R≥2r, με ισότητα ανν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη:

Έστω L, M, N, τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα, του τριγώνου ABC (σχήμα 3.2.7.a). Τότε το τρίγωνο LMN είναι όμοιο με το τρίγωνο ABC και οποιοδήποτε μήκος του τριγώνου LMN είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου μήκους του τριγώνου ABC (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα Ι, σελ. 104 και 3° κριτήριο ομοιότητας, σελ.173). Αφού R είναι η ακτίνα που περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, προκύπτει ότι $\frac{R}{2}$ είναι η ακτίνα που περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου LMN. Αλλά ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC είναι ο μικρότερος κύκλος που έχει ένα κοινό σημείο με καθεμιά από τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Επομένως $r \le \frac{R}{2} \Leftrightarrow R \ge 2r$. Επιπλέον η ισότητα ισχύει ανν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου LMN είναι εφαπτόμενος σε όλες τις πλευρές του τριγώνου ABC δηλαδή είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Άρα συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο [αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο ο εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος κύκλος είναι ομόκεντροι. Αυτό ισχύει διότι το περίκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του τριγώνου και το έγκεντρο το

σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεωρήματα, σελ.80). Και αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο, όπως και στο ισοσκελές, οι διχοτόμοι είναι και διάμεσοι και ύψη τότε το έγκεντρο και το περίκεντρο συμπίπτουν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα Ι, σελ. 45)].



(3.2.7.a)

3.2.8. Το Θεώρημα των Erdos και Mordell:

Έστω P οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ABC και R_1, R_2, R_3 οι αποστάσεις του σημείου P από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Έστω r_1, r_2, r_3 οι αποστάσεις του σημείου P από τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Τότε $R_1+R_2+R_3 \geq 2(r_1+r_2+r_3)$, με ισότητα ανν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και το σημείο P είναι ορθόκεντρο.

Απόδειξη:

Έστω PL, PM, PN οι αποστάσεις του σημείου P από τις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα του τριγώνου ABC, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.8.a. Ορίζουμε R_1=PA, R_2=PB, R_3=PC, r_1=PL, r_2=PM, r_3=PN. Έστω $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ οι γωνίες των κορυφών A, B, C αντίστοιχα. Από νόμο ημιτόνων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 219) στα τρίγωνα AMN και AMP έχουμε: $\frac{MN}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin A\hat{N}M}$ και $\frac{AM}{\sin A\hat{P}M} = \frac{PA}{\sin 90°}$ (1). Αφού οι γωνίες $A\hat{N}P$ και $A\hat{M}P$ είναι 90°, το τετράπλευρο AMPN είναι εγγράψιμο σε κύκλο και άρα οι γωνίες $A\hat{N}M$ και $A\hat{P}M$ είναι ίσες διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο AM (βλ. Ευκλείδεια

Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 131 και Πόρισμα (iii), σελ. 124).

Έτσι οι σχέσεις (1) γίνονται: $\frac{MN}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin A\hat{N}M}$ και $\frac{AM}{\sin A\hat{N}M} = \frac{R_1}{\sin 90°}$.

Αν τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{MN}{\sin\alpha}\cdot\frac{AM}{\sin A\hat{N}M} = \frac{AM}{\sin A\hat{N}M}\cdot\frac{R_1}{\sin 90°} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{MN\cdot AM}{\sin\alpha\cdot\sin A\hat{N}M} = \frac{AM\cdot R_1}{\sin A\hat{N}M\cdot\sin 90°} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow MN\cdot AM\cdot\sin A\hat{N}M\cdot\sin 90° = AM\cdot R_1\cdot\sin\alpha\cdot\sin A\hat{N}M \Leftrightarrow MN = R_1\cdot\sin\alpha$$

Επίσης αφού το ΑΜΡΝ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο τότε ισχύει $M\hat{P}N + \hat{\alpha} = 180°$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 130). Συνεπώς έχουμε ότι $\cos M\hat{P}N = -\cos\alpha$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, ιδιότητες τριγωνομετρίας, σελ. 171), και επομένως από νόμο συνημιτόνων (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, σελ. 192) στο τρίγωνο ΝΡΜ έχουμε: $MN^2 = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\cos\alpha$ (2). Επίσης ισχύει $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180°$ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 83), επομένως $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = \sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\beta\cdot\cos\gamma$ (βλ. Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου, σελ. 26).

Έτσι η (2) [την βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, σελ. 165)] γίνεται :

$$MN^2 = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3\cos\alpha =$$
$$= r_2^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + r_3^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 2r_2r_3(\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\beta\cdot\cos\gamma) =$$
$$= r_2^2\sin^2\gamma + r_2^2\cos^2\gamma + r_3^2\sin^2\beta + r_3^2\cos^2\beta + 2r_2r_3\sin\beta\cdot\sin\gamma - 2r_2r_3\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 + (r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta)^2 \geq (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 \quad (3)$$

Αλλά $MN = R_1\cdot\sin\alpha$ και έτσι έχουμε $R_1 \geq r_2\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r_3\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (4)

Ομοίως εργαζόμαστε και για τα R_2, R_3 και έχουμε $R_2 \geq r_1\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + r_3\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ και $R_3 \geq r_1\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + r_2\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Επίσης ισχύει $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε θετικό αριθμό x, με ισότητα ανν x=1 (αφού $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$).

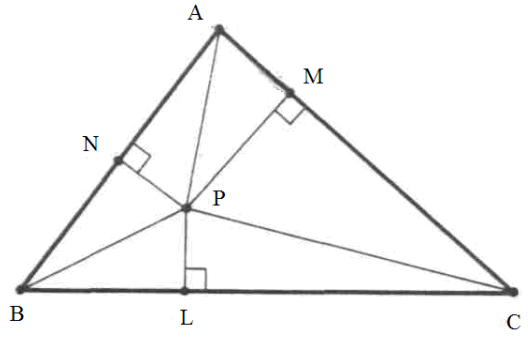
Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση με

$x=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=1, x=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=1, x=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=1$ (5) παίρνουμε την ανισότητα:

$$R_1+R_2+R_3 \geq r_1\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)+r_2\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)+r_3\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)=2(r_1+r_2+r_3)$$

Αλλά πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα στην σχέση $R_1+R_2+R_3 \geq 2(r_1+r_2+r_3)$ ανν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και το σημείο P είναι ορθόκεντρο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα, σελ. 108). Βλέπουμε ότι αυτές οι συνθήκες συνεπάγονται ότι αφού στο ισόπλευρο όπως και στο ισοσκελές το έγκεντρο και το περίκεντρο συμπίπτουν [αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο ο εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος κύκλος είναι ομόκεντροι. Αυτό ισχύει διότι το περίκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του τριγώνου και το έγκεντρο το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεωρήματα, σελ.80). Και αφού στο ισόπλευρο τρίγωνο, όπως και στο ισοσκελές, οι διχοτόμοι είναι και διάμεσοι και ύψη τότε το ορθόκεντρο, έγκεντρο και το περίκεντρο συμπίπτουν (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα Ι, σελ. 45)] τότε $R_1=R_2=R_3$ και $r_1=r_2=r_3$ και $R_1=2r_1$ (από Θεώρημα Euler), οι οποίες δίνουν ισότητα στην σχέση $R_1+R_2+R_3 \geq 2(r_1+r_2+r_3)$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει η ισότητα στην σχέση $R_1+R_2+R_3 \geq 2(r_1+r_2+r_3)$. Τότε στη σχέση (3) θα πρέπει να ισχύει η ισότητα δηλαδή θα πρέπει $r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta = 0 \Leftrightarrow r_2\cos\gamma = r_3\cos\beta$. Επίσης από τις σχέσεις (5) έχουμε ότι $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ που συνεπάγεται ότι $\hat{\alpha}=\hat{\beta}=\hat{\gamma}=60°$.

Τότε η σχέση $r_2\cos\gamma = r_3\cos\beta$ δίνει ότι $r_2 = r_3$ και ομοίως έχουμε ότι $r_3 = r_1$ και $r_1 = r_2$. Το τρίγωνο επομένως είναι ισόπλευρο και το σημείο P είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, και άρα, όπως αναφέραμε και παραπάνω είναι και ορθόκεντρο.



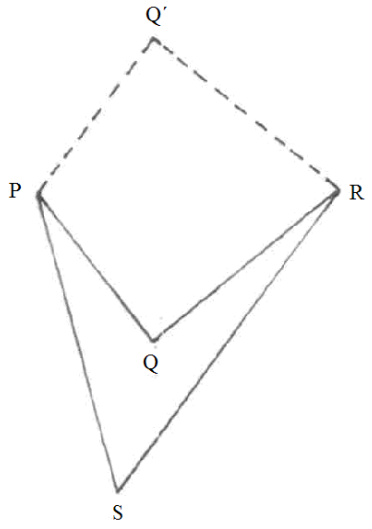
(3.2.8.a)

3.3. Εφαρμογή της συμμετρίας σε πολύγωνα

3.3.1. Μεταξύ των τετραπλεύρων με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

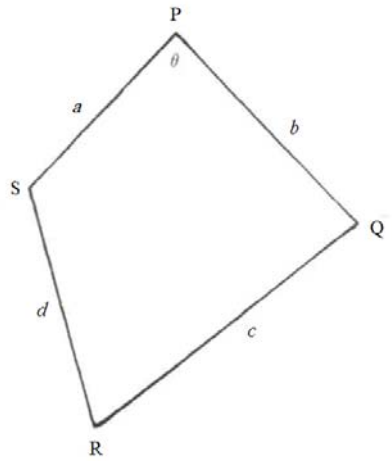
Απόδειξη:

Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε τα τετράπλευρα ως κυρτά, διότι κάθε μη κυρτό τετράπλευρο μπορεί να αντικατασταθεί από ένα κυρτό τετράπλευρο με πλευρές ίδιου μήκους αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν. Αυτό αναπαρίσταται στο σχήμα 3.3.1.a όπου η κορυφή Q στο μη κυρτό τετράπλευρο PQRS κείται στο εσωτερικό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις άλλες τρεις κορυφές. Έστω Q΄ η εικόνα του σημείου Q ως προς την ευθεία PR. Τότε το κυρτό τετράπλευρο PQ΄RS έχει πλευρές ίδιου μήκους αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν.



(3.3.1.a)

Έπειτα θεωρούμε κάθε κυρτό τετράπλευρο PQRS με πλευρές μήκους a, b, c, d (σχήμα 3.3.1.b). Σε ένα τετράγωνο με ίδια περίμετρο, κάθε πλευρά του έχει μήκος $\frac{a+b+c+d}{4}$ και το εμβαδόν του είναι ίσο με $\frac{(a+b+c+d)^2}{16}$. Ορίζοντας το εμβαδόν του τετραπλεύρου PQRS με E, θέλουμε να αποδείξουμε ότι $E \le \frac{(a+b+c+d)^2}{16}$ (1) με ισότητα ανν το PQRS είναι τετράγωνο.



(3.3.1.b)

Έστω θ η γωνία της κορυφής P, ανάμεσα στις πλευρές a και b. Τότε το τρίγωνο PQS έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}$absinθ (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, εμβαδόν τριγώνου, σελ. 219), που είναι μέγιστο ανν sinθ=1 ή θ=90° [αφού $-1 \le \sin\theta \le 1$ και sin90^o=1, (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, ιδιότητες τριγωνομετρίας, σελ. 160, 162)]. δηλαδή (PQS)= $\frac{1}{2}$ab. Ομοίως (QRS)= $\frac{1}{2}$cd. Επομένως το εμβαδόν E του τετραπλεύρου ικανοποιεί την ανισότητα E≤ $\frac{1}{2}$ab+$\frac{1}{2}$cd, με ισότητα ανν οι γωνίες $\hat{P}$ και $\hat{R}$ είναι 90°. Ομοίως, για τα τρίγωνα PSR και PQR ισχύει η ανισότητα E≤ $\frac{1}{2}$ad+$\frac{1}{2}$bc.

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο ανισότητας με το 2 έχουμε 2E≤ab+cd και 2E≤ ad+bc. Έπειτα, προσθέτοντας τις δύο ανισότητες κατά μέλη και παραγοντοποιώντας έχουμε:

$4E \le ab + cd + ad + bc \Leftrightarrow 4E \le b(a+c) + d(a+c) \Leftrightarrow 4E \le (a+c)(b+d)$ με ισότητα ανν όλες οι γωνίες του PQRS είναι 90° δηλαδή ανν το PQRS είναι ορθογώνιο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, κριτήρια ορθογωνίου, σελ. 101).

Ισχύει $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ με ισότητα ανν $x = y$ (βλ. βασικές ιδέες, παράγραφος 1.1.)

Αντικαθιστώντας το x με a+c και το y με b+d σε αυτήν την ανισότητα έχουμε:

$4E \le (a+c)(b+d) \le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$ (2) και αυτό οδηγεί στην (1). Από την αλυσίδα των ανισοτήτων που οδηγούν στην (2) παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει ανν το PQRS είναι ορθογώνιο και a+c=b+d. Επομένως το PQRS είναι τετράγωνο.

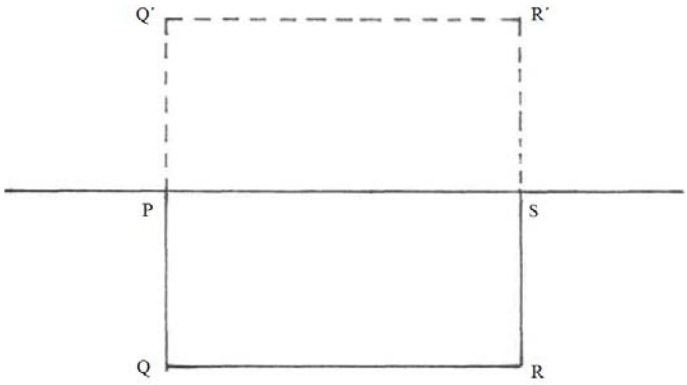
3.3.2. Μεταξύ των ορθογωνίων με μία πλευρά αυθαίρετου μήκους και τις άλλες τρεις πλευρές με σταθερό άθροισμα μηκών, ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν;

Λύση:

Έστω ότι η απάντηση είναι το ορθογώνιο PQRS όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3.2.a, όπου PS είναι η πλευρά αυθαίρετου μήκους και PQ+QR+RS=c (1). Παίρνοντας την εικόνα αυτού του ορθογωνίου ως προς την ευθεία PS έχουμε το ορθογώνιο PQ΄R΄S. Αγνοώντας το αυθαίρετο μήκος PS, θα πρέπει το ορθογώνιο QRR΄Q΄ να έχει το μέγιστο εμβαδόν ανάμεσα στα ορθογώνια με περίμετρο 2c. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.1 το QRR΄Q΄ είναι τετράγωνο, έτσι το PQRS θα πρέπει να είναι το μισό του τετραγώνου, με

$$PQ = \frac{QQ'}{2} = \frac{\frac{2c}{4}}{2} = \frac{2c}{8} = \frac{c}{4} = SR \text{ και άρα}$$

$$QR = c - PQ - RS = c - \frac{c}{4} - \frac{c}{4} = \frac{4c}{4} - \frac{2c}{4} = \frac{2c}{4} = \frac{c}{2} = PS \text{ [από σχέση (1)].}$$



(3.3.2.a)

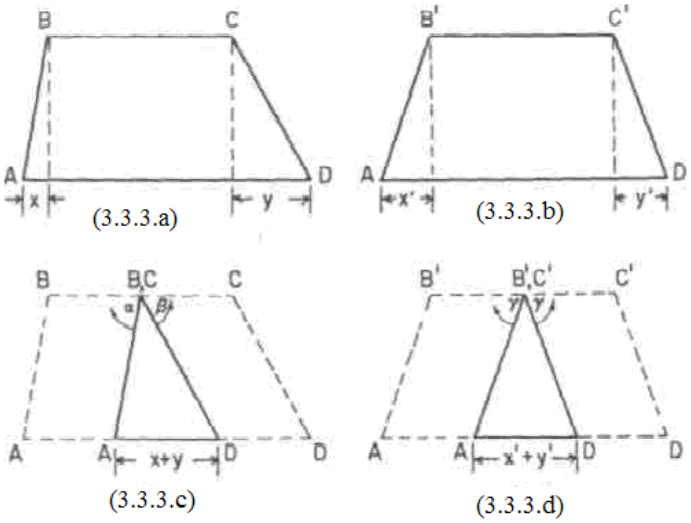
3.3.3. Μεταξύ των τραπεζίων με σταθερό εμβαδόν, το ισοσκελές τραπέζιο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Απόδειξη:

Έστω ABCD ένα τραπέζιο (σχήμα 3.3.3.a). Υποθέτουμε ότι AB΄C΄D είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο με τις ίδιες βάσεις και ύψος με το ABCD (σχήμα 3.3.3.b). Το AB΄C΄D είναι λοιπόν συμμετρικό ως προς την μεσοκάθετο της βάσης AD.

Μπορούμε να πούμε λοιπόν, ως μία αναδιατύπωση της Αρχής της Ανάκλασης του φωτός, ότι η περίμετρος ενός τριγώνου με δοθείσα βάση και δοθέν ύψος [άρα δοθέν εμβαδόν (βλ. θεώρημα 2.1.4), είναι ελάχιστη όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές (σχήματα 3.3.3.c, 3.3.3.d)], όπου το σημείο A μπορεί να θεωρηθεί η φωτεινή πηγή και το D η κατάληξή της αφού ανακλαστεί στο B΄C΄.

Έτσι το εμβαδόν του AB΄C΄D είναι ίσο με το εμβαδόν του ABCD ενώ η περίμετρος του AB΄C΄D είναι μικρότερη ή ίση με την περίμετρο του ABCD.



3.3.4. Μεταξύ των εξαγώνων με σταθερή περίμετρο, το κανονικό εξάγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με ένα κυρτό μη-κανονικό εξάγωνο H_1 όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3.4.a (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, ορισμός κανονικού πολυγώνου, σελ. 233) σταθερής περιμέτρου k. Αντικαθιστούμε συνεχόμενα ζευγάρια πλευρών με ίσες πλευρές (σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.3), και προκύπτει το εξάγωνο H_2 (σχήμα 3.3.4.b) με πλευρές με σειρά μηκών a, a, b, b, c, c, όπου:

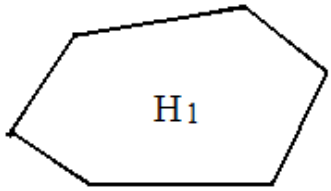
$2a+2b+2c=k \Rightarrow a+b+c=\frac{k}{2}$ (1). Έτσι το εξάγωνο H_2 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το H_1.

Έστω P η κορυφή μεταξύ των πλευρών a, a και Q η απέναντι κορυφή, μεταξύ των πλευρών με μήκη b, c (σχήμα 3.3.4.a). Τότε το ευθύγραμμο τμήμα PQ χωρίζει το

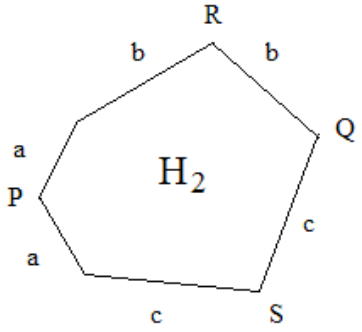
εξάγωνο σε δύο τετράπλευρα, το ένα με πλευρές a, b, b, PQ, και το άλλο με πλευρές a, c, c,PQ.

Στη συνέχεια παίρνουμε την εικόνα ενός από τα τετράπλευρα ως προς την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος PQ, αφήνοντας το άλλο τετράπλευρο ίδιο. Τώρα έχουμε ένα εξάγωνο H_3 με πλευρές με σειρά μηκών a, b, b, a, c, c, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3.4.c. Στο H_3 έστω R η κορυφή μεταξύ των πλευρών με μήκη b, b, και S η απέναντι κορυφή, μεταξύ των πλευρών με μήκη c, c. Το ευθύγραμμο τμήμα RS χωρίζει το εξάγωνο H_3 σε δύο τετράπλευρα που έχουν ίση περίμετρο RS+a+b+c. Έστω RS η πλευρά αυθαίρετου μήκους, τότε οι άλλες πλευρές αντικαθίστανται από τρία μήκη $\frac{a+b+c}{3}$ έτσι ώστε να πάρουμε δύο μισά-εξάγωνα και να σχηματίσουμε ένα κανονικό εξάγωνο H_4 (σχήμα 3.3.4.d) με πλευρές μήκους $\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{k}{2}}{3} = \frac{k}{6}$ [από σχέση (1)].

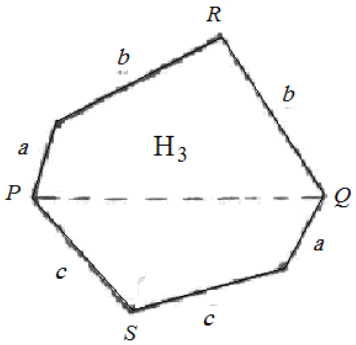
Τα βήματα από το αρχικό εξάγωνο στο H_1 και έπειτα στο κανονικό εξάγωνο H_4 περιλαμβάνουν μία αύξηση στο εμβαδόν και σύμφωνα και με το θεώρημα 2.2.4, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.



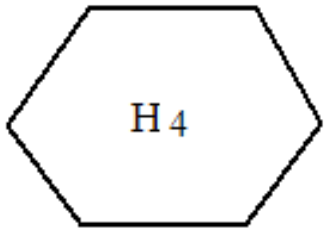
(3.3.4.a)



(3.3.4.b)



(3.3.4.c)



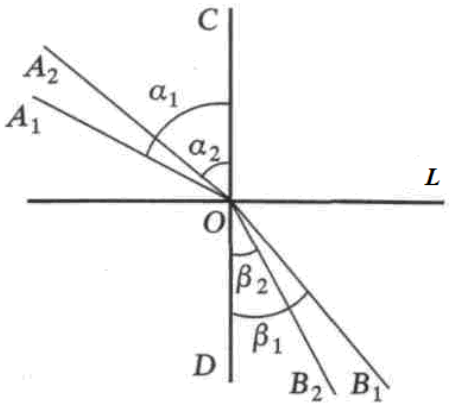
(3.3.4.d)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

4.1. Ο νόμος της διάθλασης του φωτός (ή νόμος του Snell):

Έστω A_1OB_1 και A_2OB_2 δύο ακτίνες (που κατευθύνονται από πάνω προς τα κάτω) οι οποίες διαθλώνται στο σημείο Ο (σχήμα 4.1.a). Οι γωνίες α_1 και α_2 που σχηματίζονται από την κατακόρυφο ΟC και τις αντίστοιχες ευθείες A_1O και A_2O λέγονται γωνίες πρόσπτωσης. Οι γωνίες β_1 και β_2 που σχηματίζονται από την κατακόρυφο OD και τις αντίστοιχες ευθείες B_1O και B_2O ονομάζονται γωνίες διάθλασης. Ισχύει λοιπόν ότι $\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\beta_1} = \frac{\eta\mu\alpha_2}{\eta\mu\beta_2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$ δηλαδή ότι ο λόγος του ημιτόνου της γωνίας πρόσπτωσης προς το ημίτονο της γωνίας διάθλασης ισούται με μία σταθερά, η οποία δεν εξαρτάται από την γωνία πρόσπτωσης.



(4.1.a)

Σύμφωνα με τον Tikhomirov (σελ. 36), *«για να εξηγήσει το νόμο της διάθλασης, ο Fermat διατύπωσε μία αρχή ακροτάτου για τα οπτικά φαινόμενα. Η εν λόγω αρχή, που αργότερα πήρε το όνομά του, ορίζει ότι* ***το φως, όταν διαδίδεται μέσα σε ανομοιογενές μέσο,***

οδεύει από το ένα σημείο στο άλλο ακολουθώντας τη διαδρομή που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο. *Η αρχή του Fermat επιτρέπει την ακριβή διατύπωση και επίλυση ενός προβλήματος ελαχίστου το οποίο οδηγεί στη συναγωγή του νόμου του Snell».*

Ο Fermat, λοιπόν, απέδειξε το νόμο του Snell εκκινώντας από την αρχή ακροτάτου που διατύπωσε ο ίδιος, αλλά η λύση του ήταν εξαιρετικά περίπλοκη. Παρακάτω λοιπόν παρουσιάζουμε μία κατά πολύ απλούστερη λύση η οποία βασίζεται στην αρχή του Fermat, και οφείλεται στον Huygens.

Ας θέσουμε επακριβώς το πρόβλημα:

Δίνονται δύο σημεία Α και Β εκατέρωθεν μιας οριζόντιας ευθείας L, η οποία διαχωρίζει δύο μέσα. Ζητείται να βρεθεί ένα σημείο D τέτοιο ώστε ο χρόνος που χρειάζεται μια φωτεινή ακτίνα για να διανύσει τη διαδρομή ADB να είναι ελάχιστος, δοθέντος ότι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο πάνω μέσο ισούται με u_1 και στο κάτω με u_2.

Λύση:

Έστω D ένα σημείο για το οποίο ισχύει $\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2} = \frac{u_1}{u_2}$=σταθερά (σχήμα 4.1.b). Θα δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε άλλο σημείο D΄, διάφορο του D, το φως διανύει τη διαδρομή AD΄B σε χρόνο μεγαλύτερο από εκείνον που απαιτείται για να διανύσει τη διαδρομή ADB. Για το λόγο αυτό, φέρουμε καθέτους στην ευθεία AD στα A και D. Έστω P η τομή του τμήματος AD΄ και της καθέτου που φέραμε στο D. Χαράζουμε ευθεία παράλληλη προς το AD η οποία διέρχεται από το D΄, και ονομάζουμε P΄ και R, αντιστοίχως τα σημεία τομής με τις καθέτους (στην AD) στα D και A. Τέλος, φέρουμε την κάθετο D΄Q από το D΄ στο DB. Από το σχήμα 4.1.b βλέπουμε ότι οι γωνίες PDD΄ και D΄DQ είναι αντίστοιχα ίσες με α_1 και $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$.

Άρα, $|D'P'| = |D'D| \cdot \eta\mu\alpha_1, |DQ| = |D'D| \cdot \eta\mu\alpha_2$ (1).

Εν συνεχεία, συγκρίνουμε τους χρόνους που απαιτούνται για να διανύσει το φως τις διαδρομές ADB και AD΄B.

Η σχέση (1) και οι ανισότητες $|AP| > |AD|, |D'P| > |D'P'|$ και $|D'B| > |BQ|$ [το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Θεώρημα ΙΙ(i), σελ.59)] συνεπάγονται ότι:

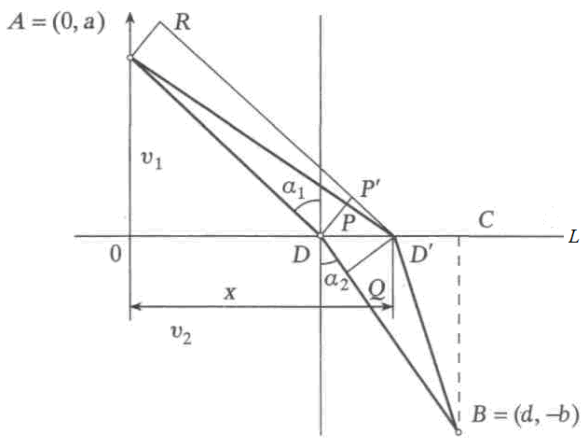
$$\frac{|AD'|}{u_1} > \frac{|RD'|}{u_1} = \frac{|RP'|+|P'D'|}{u_1} = \frac{|AD|+|P'D'|}{u_1} = \frac{|AD|}{u_1} + |D'D| \cdot \frac{\eta\mu\alpha_1}{u_1},$$

$$\frac{|D'B|}{u_2} > \frac{|BQ|}{u_2} = \frac{|DB|-|DQ|}{u_2} = \frac{|DB|}{u_2} - |DD'| \cdot \frac{\eta\mu\alpha_2}{u_2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και αφού ισχύει ότι

$\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2} = \frac{u_1}{u_2}$ έχουμε: $\frac{|AD'|}{u_1} + \frac{|D'B|}{u_2} > \frac{|AD|}{u_1} + \frac{|DB|}{u_2}$.

Άρα, το σημείο διάθλασης που ελαχιστοποιεί το χρόνο διάνυσης της τεθλασμένης διαδρομής από το A στο B χαρακτηρίζεται από το ότι ο λόγος των ημιτόνων των γωνιών πρόσπτωσης και διάθλασης ισούται με $\frac{u_1}{u_2}$ δηλαδή με μια σταθερά. Αλλά αυτός ακριβώς είναι ο νόμος του Snell.



(4.1.b)

4.2. Ελάχιστος χρόνος καθόδου:

Δοθέντος σημείου A και μιας ευθείας L, τοποθετήστε ένα σημείο P πάνω στην L έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος καθόδου από το A στο P διαγράφοντας ένα ευθύγραμμο μονοπάτι, όπου η κίνηση καθορίζεται από την δύναμη της βαρύτητα χωρίς τριβή.

Λύση:

Ορίζοντας ως g την επιτάχυνση της βαρύτητας, η επιτάχυνση a κατά μήκος της ευθείας AP είναι gcosθ, όπου είναι η συνιστώσα της g η οποία σχηματίζει γωνία $\hat{\theta}$ με την κάθετο

Ax (σχήμα 4.2.a). Έστω $s = \frac{1}{2}at^2$, όπου s η απόσταση που διανύει ένα σώμα κατά μήκος μίας ευθείας σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα 0, και με σταθερή επιτάχυνση a.

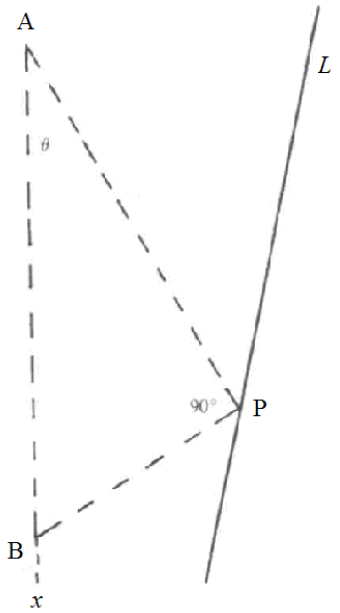
Έχουμε: s=(AP) και a=gcosθ, επομένως $(AP) = \frac{1}{2}(g\cos\theta)t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2\sec\theta \cdot (AP)}{g}$.

Ο ελάχιστος χρόνος μπορεί να καθοριστεί, ελαχιστοποιώντας το t^2 στην τελευταία εξίσωση. Αφού το g είναι σταθερό αρκεί να ελαχιστοποιηθεί το γινόμενο $(AP)\cdot\sec\theta$ όπου ισχύει $\cos\theta = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \sec\theta = \frac{AB}{AP} \Leftrightarrow AB = AP\sec\theta$.

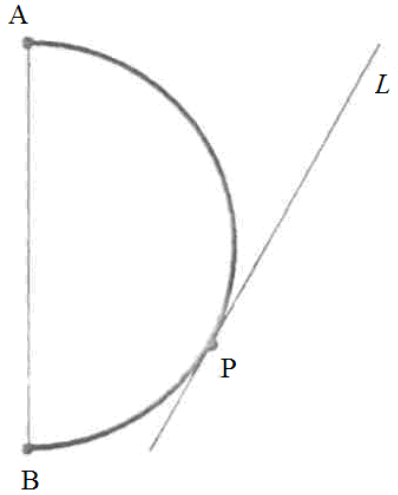
Τοποθετούμε λοιπόν το σημείο B πάνω στην Ax έτσι ώστε η $A\hat{P}B$ να είναι 90°.

Η θέση του σημείου B εξαρτάται από την θέση του σημείου P, όπως φαίνεται στην κατασκευή, έτσι το πρόβλημα περιορίζεται στο να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση AB, καθώς η θέση του P μεταβάλλεται πάνω στην ευθεία L.

Το 'κλειδί' είναι να παρατηρήσουμε ότι ένας κύκλος με διάμετρο AB περνάει από το σημείο P [αφού κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή (βλ. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Πόρισμα ΙΙ, σελ. 124)], έτσι μπορούμε να πούμε ότι για να έχουμε τον ελάχιστο χρόνο καθόδου, το σημείο P θα πρέπει να είναι το σημείο επαφής του κύκλου με κέντρο πάνω στην κάθετη ευθεία που περνάει από το σημείο A, και της εφαπτομένης L (σχήμα 4.2.b).



(4.2.a)



(4.2.b)

4.3. Η βραχυστόχρονη

Αν κανείς θεωρήσει κινήσεις που όλες αρχίζουν από το ίδιο σημείο και τερματίζονται στο ίδιο τελικό σημείο, τότε, εφόσον ο βραχύτερος δρόμος που ενώνει τα δύο σημεία είναι η ευθεία γραμμή, πιθανόν να σκεφθεί ότι η κίνηση κατά μήκος αυτής απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο. Αποδεικνύεται όμως πως κάτι τέτοιο δεν αληθεύει.

Γαλιλαίος

Ο V. M. Tikhomirov στο βιβλίο του Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα (σελ. 69) παραθέτει το παρακάτω απόσπασμα από το κύριο έργο της ζωής του Γαλιλαίου *Δύο νέες επιστήμες:*

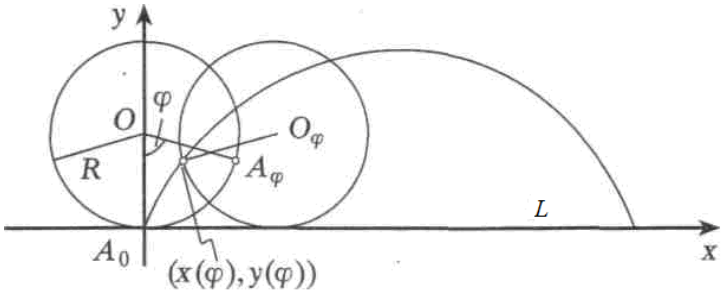
Η εμπειρία δείχνει ότι τα σώματα που πέφτουν ακολουθώντας κυκλικά τόξα τα οποία αντιστοιχούν σε χορδές κεκλιμένες ως προς τον ορίζοντα [...] εκτελούν κινήσεις που επίσης διαρκούν ίσα χρονικά διαστήματα και, μάλιστα, μικρότερα από τα απαιτούμενα για τις κινήσεις που εκτελούνται κατά μήκος των χορδών.

Έτσι το ερώτημα που τίθεται είναι: **ποια καμπύλη αντιστοιχεί στο *βραχύτερο* χρονικό διάστημα, δηλαδή ποια καμπύλη είναι η *βραχυστόχρονη;***

Ο πρώτος που έθεσε το πρόβλημα της βραχυστόχρονης ήταν ο Johann Bernoulli, στην 'πρόσκληση' του οποίου ανταποκρίθηκαν ο Leibniz, ο Jacob Bernoulli,ο l'Hospital, ο Νεύτωνας κ.α. Όλοι αυτοί οι μαθηματικοί κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα:

Η βραχυστόχρονη είναι η κυκλοειδής καμπύλη.

(Η κυκλοειδής είναι η τροχιά που διαγράφει κάποιο συγκεκριμένο σημείο ενός κύκλου που κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε μια ευθεία γραμμή)



(4.3.a)

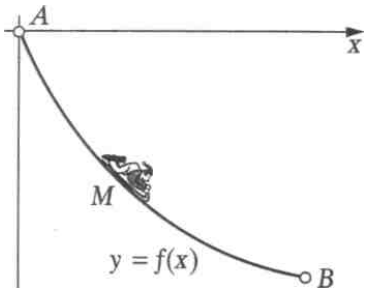
'Εστω L μια οριζόντια ευθεία, και ας θεωρήσουμε έναν κύκλο ακτίνας R και κέντρου O που κυλιέται κατά μήκος της L (σχήμα 4.3.a). Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το σημείο που πρόκειται να παρακολουθήσουμε είναι το σημείο επαφής του κύκλου και της ευθείας. Το ονομάζουμε A_0. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που έχει ως αρχή των αξόνων το A_0 και ως άξονα των x την ευθεία L. Θέλουμε να καθορίσουμε τη θέση που θα καταλάβει το A_0 όταν ο κύκλος στραφεί κατά γωνία φ προς τα δεξιά. Έτσι, σημειώνουμε στον αρχικό κύκλο το σημείο A_φ, έτσι ώστε η $A_0\hat{O}A_\varphi$ να ισούται με τη φ. Όταν ο κύκλος θα έχει στραφεί κατά γωνία φ, το A_φ θα είναι το νέο σημείο επαφής του με την ευθεία L. Εφόσον το μήκος του τόξου από το A_0 ως το A_φ ισούται με Rφ, την ίδια τιμή θα έχει και η τετμημένη της νέας θέσης του κέντρου του κύκλου. Η νέα θέση του σημείου A_0 θα είναι τέτοια, ώστε η 'νέα εκδοχή' της $A_0\hat{O}A_\varphi$ να ισούται και πάλι με φ. Επομένως, οι συντεταγμένες (x(φ),y(φ)) του A_0 θα δίνονται στη γενική μορφή από τους τύπους

$$\mathbf{x(\varphi) = R(\varphi - \eta\mu\varphi)+C_1,\ \ y(\varphi) = R(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)} \quad (*)$$

Αυτή είναι η εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων για φ=0.

Παρακάτω διατυπώνουμε το πρόβλημα της βραχυστόχρονης όπως το έθεσε ο Johann Bernoulli:

Έστω δύο δοθέντα σημεία A και B σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Να βρεθεί η καμπύλη την οποία πρέπει να διαγράψει ένα σημείο M που κινείται στη διαδρομή AMB υπό την επίδραση τον βάρους του, έτσι ώστε, ξεκινώντας από το A, να φτάσει στο B στον ελάχιστο χρόνο.



Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Ο άξονας των x λαμβάνεται οριζόντιος, ο άξονας των y κατακόρυφος και με τη θετική φορά προς τα κάτω. Τοποθετούμε το σημείο Α στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων (σχήμα 4.3.b). Έστω y=f(x) η εξίσωση της καμπύλης που συνδέει το σημείο Α με το σημείο Β, το οποίο έχει συντεταγμένες (a, b). Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται ώστε ένα σώμα Μ μάζας m να πέσει (χωρίς τριβή) από το Α στο Β κατά μήκος της καμπύλης y=f(x).

Από τη μηχανική γνωρίζουμε το νόμο του Γαλιλαίου ο οποίος ορίζει ότι, προκειμένου για ένα σώμα που κινείται χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους του, η ταχύτητα του σε κάποιο σημείο με συντεταγμένες (x, f(x)) δεν εξαρτάται από τη μορφή της καμπύλης που συνδέει το Α με το σημείο (x, f(x)) αλλά αποκλειστικά και μόνο από την τεταγμένη f(x). Η κινητική ενέργεια του σώματος στο σημείο (x, f(x)) είναι $\frac{mu^2}{2}$ και ισούται με τη διαφορά $mgf(x)$ των δυναμικών ενεργειών (βλ. Φυσική γενικής παιδείας Α΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου, σχέση 2.2.8, σελ. 229). Επομένως, η ταχύτητα στο σημείο (x, f(x)) ισούται με $\frac{mu^2}{2} = mgf(x) \Leftrightarrow u^2 = 2gf(x) \Leftrightarrow u = \sqrt{2gf(x)}$ όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

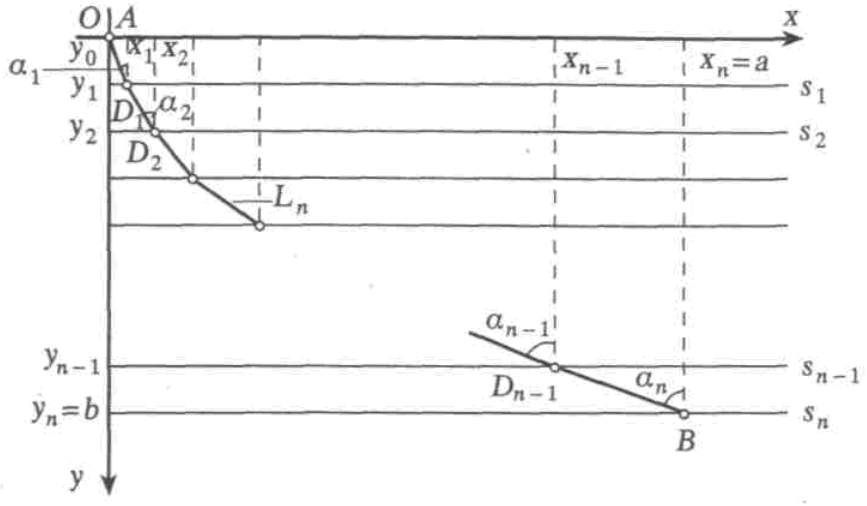
Εν συνεχεία, θεωρούμε το τμήμα της τροχιάς μεταξύ των σημείων (x, f(x)) και (x+dx, f(x+dx) όπου το dx συμβολίζει μία ελάχιστη μεταβολή της τετμημένης. Το μήκος ds αυτού του τμήματος της τροχιάς ισούται κατά προσέγγιση με $\sqrt{dx^2 + (f(x+dx) - f(x))^2}$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, τύπο απόστασης σημείων, σελ. 71).

Βάσει της προσεγγιστικής ισότητας $f(x+dx) + f(x) \approx f'(x)dx$, έχουμε $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. Εφόσον περιοριζόμαστε σε ένα ελάχιστο τμήμα της τροχιάς, φαίνεται εύλογο να θεωρήσουμε την ταχύτητα σταθερή και ίση με $\sqrt{2gf(x)}$. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί το συγκεκριμένο τμήμα ισούται κατά προσέγγιση με $dt \approx \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx$ (αφού $dt = \frac{ds}{du}$).

Επομένως, η συνολική χρονική διάρκεια Τ της κίνησης από το Α στο Β δίνεται από το ολοκλήρωμα $T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx$.

Έτσι οδηγούμαστε στην εξής αναλυτική μορφή του προβλήματος της βραχυστόχρονης (και στην διατύπωσή του σε μαθηματική γλώσσα-πιο συγκεκριμένα στη γλώσσα του ολοκληρωτικού λογισμού):

Να βρούμε το ελάχιστο του ολοκληρώματος $T = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx$ (1) επί όλων των συναρτήσεων f με f(0)=0 και f(a)=b.



(4.3.b)

Διαιρούμε το διάστημα [O, b] του άξονα των τεταγμένων σε n μέρη με τη βοήθεια των σημείων 0= y_0, y_1, y_2,…, y_n=b και βρίσκουμε τετμημένες x_i τέτοιες, ώστε $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$,…, $f(x_{n-1})=y_{n-1}$, x_n=a (σχήμα 4.3.b). Συνδέουμε τα σημεία (x_i, y_i) και (x_{i+1}, y_{i+1}), í = 0, 1, ..., n - 1, με ευθύγραμμα τμήματα. Κατ' αυτό τον τρόπο, εκτός από τη συνάρτηση y=f(x), λαμβάνουμε και μια τεθλασμένη γραμμή L_η που επίσης συνδέει τα A και B. Όσο μεγαλύτερος γίνεται ο αριθμός n τόσο καλύτερα προσεγγίζει η τεθλασμένη γραμμή τη συνάρτηση y=f(x). Επιπλέον, ο χρόνος που διαρκεί η ολίσθηση του σώματος M κατά μήκος της τεθλασμένης θα διαφέρει ολοένα και λιγότερο από το χρόνο που διαρκεί η ολίσθησή του κατά μήκος της καμπύλης την οποία περιγράφει η συνάρτηση y=f(x).

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα στο i-οστό τμήμα διατηρείται σταθερή και ίση με $\sqrt{2gy_{i+1}}$, í = 0, 1, ..., n – 1. Ο ακριβής χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί η τεθλασμένη L_n, ισούται με:

$$T_n = \frac{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \frac{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{2gy_2}} + \ldots + \frac{\sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}{\sqrt{2gy_n}} \quad (2)$$

Και αυτό το χρόνο πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε.

Το όριο του T_n καθώς το n τείνει στο άπειρο είναι ο χρόνος που απαιτείται για την κίνηση του σώματος M κατά μήκος της καμπύλης y=f(x). Αυτό το όριο ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα (1) που εισαγάγαμε νωρίτερα.

Αλλά δεν θα επιλύσουμε το πρόβλημα που διατυπώσαμε στη γλώσσα του ολοκληρωτικού λογισμού. Αντ' αυτού, και ακολουθώντας τον Johann Bernoulli, θα λύσουμε το προσεγγιστικό «διακριτό» πρόβλημα:

Δίνονται δύο σημεία A και B με συντεταγμένες (0, 0) και (a, b), αντιστοίχως. Πάνω σε ευθείες $s_1,\ldots,s_n$ παράλληλες στον άξονα των x, οι οποίες έχουν αντιστοίχως τεταγμένες $y_1,\ldots,y_n$, να βρεθούν σημεία $D_1=(x_1, y_1),\ldots, D_{n-1}=(x_{n-1}, y_{n-1})$ τέτοια, ώστε το άθροισμα T_n να είναι το ελάχιστο δυνατό (υποθέτοντας ότι $x_0 = y_0 = 0$, $x_n = a$ και $y_n = b$).

Λύση:

Έστω ένα ανομοιογενές οπτικό μέσο που αποτελείται από n ομογενή στρώματα $s_1,\ldots,s_n$ (σχήμα 4.3.b), παραδείγματος χάριν, n φύλλα από διαφορετικά είδη γυαλιού. Έστω ότι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο φύλλο s_1 ισούται με $\sqrt{2gy_1}$, στο φύλλο s_2 με $\sqrt{2gy_2}$,..., στο φύλλο s_n με $\sqrt{2gy_n}$. Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί για τη διάδοση του φωτός αν το εξαναγκάσουμε να κινηθεί κατά μήκος της τεθλασμένης L_n; Φυσικά, η απάντηση είναι

$$T_n = \frac{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \frac{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{2gy_2}} + \ldots + \frac{\sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}}{\sqrt{2gy_n}}.$$

Ξεκινώντας λοιπόν με ένα πρόβλημα μηχανικής φτάσαμε σε ένα πρόβλημα οπτικής, για την λύση του οποίου ο Johann Bernoulli εφάρμοσε την παρακάτω η οποία ονομάζεται από τον Tikhomirov (σελ. 74) οπτικομηχανική αναλογία.

Εφαρμόζουμε λοιπόν το νόμο του Snell. Έστω α_i η γωνία πρόσπτωσης στο i-οστό στρώμα. Τότε έχουμε: $\frac{\eta\mu\alpha_1}{\sqrt{2gy_1}} = \frac{\eta\mu\alpha_2}{\sqrt{2gy_2}} = \ldots = \frac{\eta\mu\alpha_n}{\sqrt{2gy_n}} =$ σταθερά (3)

Αν επιτρέψουμε στα στρώματα να γίνονται διαρκώς λεπτότερα και επομένως πολυπληθέστερα οριακά η (3) δίνει $\frac{\eta\mu\alpha(x)}{\sqrt{2gf(x)}} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$ (4) όπου η α(x) είναι η γωνία που σχηματίζουν ο άξονας των y και η εφαπτομένη της καμπύλης y=f(x) στο σημείο (x, f(x)). Η εφαπτομένη της γωνίας αυτής ισούται με $\frac{1}{f'(x)}$.

Έπεται ότι $f'(x) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha(x)\right) = \sigma\varphi\alpha(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha(x)}{\eta\mu\alpha(x)}$, οπότε $\eta\mu\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$ (5)

Η (5) σε συνδυασμό με την (4) συνεπάγεται ότι $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \sqrt{f(x)} = D$ όπου D είναι κάποια σταθερά.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}$ όπου ολοκληρώνοντας έχουμε: $y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{C-y}} = dx$.

Αντικαθιστώντας τη σχέση $y = C\eta\mu^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{C(1-\sigma\upsilon\nu t)}{2}$ στον παραπάνω τύπο

έχουμε: $dx = \frac{\sqrt{C}\eta\mu\left(\frac{t}{2}\right)d\left(C\cdot\eta\mu^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\sqrt{C}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t}{2}\right)} = C\cdot\eta\mu^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{C(1-\sigma\upsilon\nu t)}{2}dt$.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει: $x = \frac{C}{2}(t-\eta\mu t) + C_1, y = \frac{C}{2}(1-\sigma\upsilon\nu t)$.

Εάν στους τελευταίους τύπους αντικαταστήσουμε το $\frac{C}{2}$ με R και το t με φ, τότε παίρνουμε την εξίσωση (*) της κυκλοειδούς.

4.4. Βεληνεκές ενός βλήματος:

Να βρεθεί το μέγιστο βεληνεκές ενός βλήματος, με σταθερή αρχική ταχύτητα V.

Λύση:

Αρχικά θεωρούμε ότι το βλήμα εκτοξεύεται από ένα κανόνι με σταθερή αρχική ταχύτητα V και το κανόνι αποκλίνει από το έδαφος υπό σταθερή γωνία $\hat{A}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4.a. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Αρχικός μας στόχος είναι να βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις που εκφράζουν την κίνηση του βλήματος. Επιλέγουμε τους άξονες όπως φαίνονται στο σχήμα και ως αρχή συντεταγμένων Ο το σημείο από το οποίο εκσφενδονίζεται το βλήμα.

Ας ορίσουμε u_x την οριζόντια ταχύτητα του βλήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Αφού η αρχική ταχύτητα V αποκλίνει από τον άξονα των x υπό γωνία $\hat{A}$, τότε η οριζόντια ταχύτητα του βλήματος είναι VcosA (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου, τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας, σελ. 157). Επειδή η μόνη ταχύτητα του εκτελείται στην οριζόντια κατεύθυνση είναι η VcosA, τότε σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα (βλ. Φυσική γενικής παιδείας Α΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου, σελ. 83), το βλήμα θα συνεχίσει να κινείται επ' αόριστον σε οριζόντια κατεύθυνση με αυτή τη σταθερή ταχύτητα. Τότε $u_x = V\cos A$.

Επομένως, αφού $u_x = \frac{dx}{dt}$ (βλ. Φυσική γενικής παιδείας Α' τάξης Ενιαίου Λυκείου, σελ. 43), η οριζόντια απόσταση που διανύεται είναι $x = (V\cos A)t = Vt\cos A$ (1)

Τώρα ας μελετήσουμε την κατακόρυφη κίνηση του βλήματος. Η βαρύτητα δρα έτσι ώστε να παράγει επιτάχυνση g=9,81 m/sec^2 προς τα κάτω. Ορίζοντας ως θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση, η επιτάχυνση a_y στον y- άξονα είναι $a_y = -g$. Εάν θεωρήσουμε ως u_y την κατακόρυφη ταχύτητα τότε $a_y = \frac{du_y}{dt}$ (βλ. Φυσική γενικής παιδείας Α΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου, σελ. 50). Με ολοκλήρωση έχουμε: $u_y = -gt + C$.

Για να προσδιορίσουμε τον σταθερό όρο C της ολοκλήρωσης γνωρίζουμε ότι για t=0, το βλήμα έχει κατακόρυφη προς τα πάνω ταχύτητα VsinA (όπως φαίνεται στο σχήμα), όπου είναι η κάθετη συνιστώσα της V. Έτσι $u_y = -gt + V\sin A$.

Για να βρούμε το ύψος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μπορούμε και πάλι να ολοκληρώσουμε, διότι $u_y = \frac{dy}{dt}$ Έχουμε λοιπόν: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + Vt\sin A + C$ και αφού για t=0 ισχύει και y=0, τότε C=0 και $y = -\frac{1}{2}gt^2 + Vt\sin A$ (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης ή τροχιάς κατά μήκος της οποίας κινείται ένα βλήμα, με παράμετρο το t.

Λύνοντας την (1) ως προς t έχουμε: $x = Vt\cos A \Leftrightarrow t = \frac{x}{V\cos A}$

και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει:

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x^2}{V^2\cos^2 A}\right) + V\sin A\frac{x}{V\cos A} \Leftrightarrow y = -\frac{g}{2V^2\cos^2 A}x^2 + x\tan A$$

Αφού οι όροι V και A είναι σταθεροί βλέπουμε ότι η εξίσωση για το μονοπάτι που διανύει το βλήμα είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + bx$ όπου $\alpha = -\frac{g}{2V^2\cos^2 A}$ και $b = \tan A$ και απεικονίζει μία παραβολή. Συνεπώς το μονοπάτι είναι ένα τόξο μιας παραβολής.

Για να βρούμε το βεληνεκές ενός βλήματος πρέπει να γνωρίζουμε ότι όταν το βλήμα ακουμπήσει στο έδαφος θα ισχύει y=0. Ποια είναι η τιμή του t για y=0;

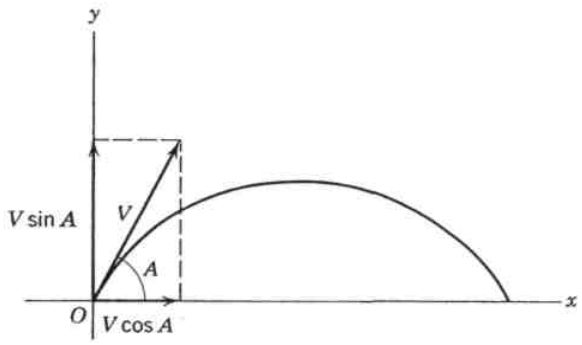
Έστω t_1 η ζητούμενη τιμή. Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$-\frac{1}{2}gt_1^2 + Vt_1\sin A = 0 \Leftrightarrow t_1\left(-\frac{1}{2}gt_1 + V\sin A\right) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0$ (όπου είναι η στιγμή όπου το βλήμα ξεκινάει) ή $t_1 = \frac{2V\sin A}{g}$ (όπου είναι ο χρόνος που χρειάζεται το βλήμα για να αγγίξει και πάλι το έδαφος). Για να βρούμε το μέγιστο βεληνεκές πρέπει να αντικαταστήσουμε το $t_1 = \frac{2V\sin A}{g}$ στην εξίσωση (1). Τότε εάν x_1 είναι το μέγιστο βεληνεκές έχουμε: $x_1 = V\cos A\frac{2V\sin A}{g} = \frac{2V^2}{g}\sin A\cos A \Leftrightarrow x_1 = \frac{V^2}{g}\sin 2A$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι διατηρούμε σταθερή την αρχική ταχύτητα V αλλά θεωρούμε μεταβλητή την γωνία $\hat{A}$, την γωνία υπό την οποία αποκλίνει το κανόνι από το έδαφος. Για ποια τιμή της γωνίας $\hat{A}$ είναι το βεληνεκές μέγιστο;

Αρκεί να παρατηρήσουμε στην $x_1 = \frac{V^2}{g}\sin 2A$ ότι το sin2A παίρνει το πολύ την τιμή 1 (αφού -1≤sin2A≤1), και αυτό ισχύει όταν $2\hat{A} = 90^0 \Leftrightarrow \hat{A} = 45^0$ (βλ. Άλγεβρα Α΄ Γενικού

Λυκείου, ο τριγωνομετρικός κύκλος, σελ. 159). Επομένως το μέγιστο βεληνεκές εξασφαλίζεται όταν το κανόνι βρίσκεται υπό γωνία 45^0 όπου τότε το βεληνεκές είναι $x_2 = \frac{V^2}{g}$.



(4.4.a)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Courant, R. & Robbins H. *What is Mathematics?* An Elementary Approach to Ideas and Methods, Oxford University Press, New York, 1941

Kazarinoff, N. D. *Geometric Inequalities*. The Mathematical Association of America, 1961

Kline, M. *Calculus: An Intuitive and Physical Approach*, John Wiley and Sons, New York·Chichester·Brisbane·Toronto, second edition, 1977

Maor, E. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998

Niven, I. *Maxima and Minima Without Calculus*. Dolciani Mathematical Expositions No. 6, The Mathematical Association of America, 1981

Polya, G. *Induction and Analogy in Mathematics*; Vol. I: Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press, Princeton, 1954

Rademacher, H. & Toeplitz, O. *The Enjoyments of Mathematics*. Selections from Mathematics for the Amateur, Dover, 1990

Tikhomirov, V. M. *Ιστορίες για Μέγιστα και Ελάχιστα*. Από τους αρχαίους γεωμέτρες στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου. Μετάφραση-Επιστημονική επιμέλεια Γαβράς Κ. & Κατσιλιέρης Γ., Κάτοπτρο, 1999

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2007

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. *Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2007

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α. *Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2007

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π. *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2006

Βλάχος, Ι., Γραμματικάκης, Ι., Καραπαναγιώτης, Β., Κόκκοτας, Π., Περιστερόπουλος, Π., Τιμοθέου, Γ. *Φυσική, γενικής παιδείας, Α΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 2005

Σταμάτης Ε. *Ευκλείδου Γεωμετρία-Θεωρία Αριθμών*. Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, τόμος ΙΙ, Εισαγωγή-Αρχαίον Κείμενον-Μετάφρασις-Επεξηγήσεις. Οργανισμός Εκδόσεων Σχολικών Βιβλίων, Αθήνα, 1953, 68-131