ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ,

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Διπλωματική Εργασία

ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΑΥΣΤΗΡΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ LAGRANGE – BOLZANO – CAUCHY

Ανδρομάχη Καραγιαννίδου

Επιβλέπων Καθηγητής

Γιαννακούλιας Ευστάθιος

Αθήνα

Ιούνιος, 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Γιαννακούλιας Ευστάθιος (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	.....
2) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Αν. Καθηγητής	.....
3) Λάππας Διονύσιος	Αν. Καθηγητής	.....

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

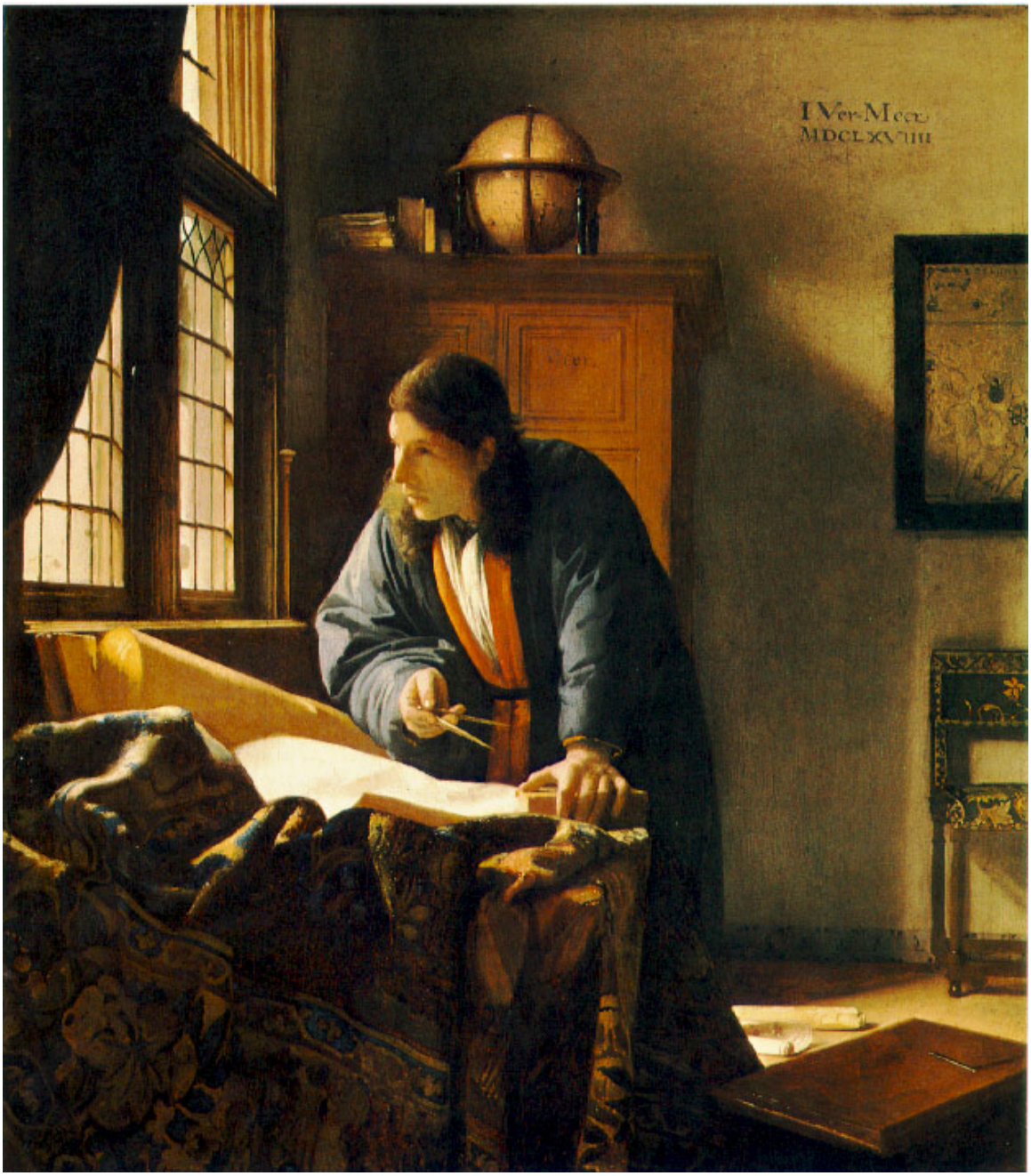
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΑΥΣΤΗΡΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ LAGRANGE – BOLZANO – CAUCHY

Ανδρομάχη Καραγιαννίδου

Επιβλέπων Καθηγητής
Γιαννακούλιας Ευστάθιος

Αθήνα
Ιούνιος, 2006



The Geographer

Johannes Vermeer

Transit umbra, lux permanet.

Ad lux sempiterna

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ ΑΝΔΡΟΜΑΧΗ , Ιούνιος 2006

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΑΥΣΤΗΡΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ LAGRANGE – BOLZANO – CAUCHY (σελ. 153)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών αποτελεί ένα εξαιρετικό «εργαλείο» για την διδασκαλία. Η πορεία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης αναδεικνύει τα λάθη, τις μαθηματικές αβαρίες, τις αμφιβολίες, την γένεση της αναγκαιότητας της απόδειξης, την εισαγωγή και εξέλιξη νέων εννοιών, την πορεία προς την αξιωματική θεμελίωση.

Στην εξέλιξη του λογισμού εμφανίζονται τέσσερις διαφορετικοί τρόποι θεμελίωσης οι οποίοι χρονολογικά είναι:

(1) Οι «ροές» του Newton (από το 1660) κατά την οποία αναπτύσσεται η θεωρία των ορίων αλλά όχι πειστικά,

(2) Ο «διαφορικός» και «ολοκληρωτικός» λογισμός του Leibniz που βασίζεται στα dx και dy (από το 1670) με κεντρικά τα απειροστά και τα όρια να απουσιάζουν από όλες τις βασικές έννοιες, ο οποίος αναδιατυπώθηκε από τον Euler γύρω στο 1750 με την πρόσθεση του «διαφορικού συντελεστή», πρόδρομο της παραγώγου,

(3) Η αλγεβροποίηση της θεωρίας από τον Lagrange σε μία προσπάθεια να αποφύγει και τα όρια και τα απειροστά με μία νέα θεμελίωση βασισμένη στο ανάπτυγμα Taylor (από το 1770) και τους διαδοχικούς διαφορικούς συντελεστές να γίνονται κατανοητοί με όρους συντελεστών της σειράς ως «παραγόμενες συναρτήσεις» και

(4) Η προσέγγιση του Cauchy βασισμένη σε μία στέρεα *θεωρία* (και όχι απλά διαίσθηση) των ορίων (από το 1810), με την οποία όρισε τις βασικές έννοιες του λογισμού (συμπεριλαμβανομένης της παραγώγου ως της οριακής τιμής του διαφορικού πηλίκου).

Σταδιακά αυτή η τελευταία παράδοση έτυχε μεγάλης αποδοχής με τελειοποιήσεις από τον Weierstrass και τους διαδόχους του.

Η εργασία αυτή εξετάζει την ιστορική περίοδο από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα έως και τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, εστιάζοντας στις προσεγγίσεις των Lagrange, Bolzano και Cauchy και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Επικεντρώνεται στο μαθηματικό τους έργο όσον αφορά στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα

Οι αντιλήψεις τους για τις θεμελιώδεις έννοιες του λογισμού εξετάζονται από την οπτική σύγχρονων θεωριών διδακτικής και γίνονται κάποιες διδακτικές παρατηρήσεις οι οποίες απορρέουν από την ιστορική μελέτη.

ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΑΥΣΤΗΡΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ LAGRANGE – BOLZANO – CAUCHY

Ανδρομάχη Καραγιαννίδου

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ελλάδα
Ιούνιος, 2006

© Ανδρομάχη Καραγιαννίδου , 2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της πορείας προς την αυστηρή θεμελίωση του λογισμού, μια πορεία που διήρκησε σχεδόν έναν αιώνα, η ανίχνευση της εξέλιξης των βασικών του εννοιών, ορίου, παραγώγου και ολοκληρώματος και η διδακτική αξιοποίηση της.

Αποτελείται από τρία μέρη:

1. Μαθηματικό έργο των Lagrange, Bolzano, Cauchy
2. Αποτίμηση της μαθηματικής εξέλιξης
3. Διδακτική αξιοποίηση .

Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος:

Παρουσιάζονται οι αντιλήψεις που επικρατούσαν όσον αφορά στον λογισμό και η βαθμιαία αυστηρή θεμελίωση του.

Επικεντρώνεται στο έργο (που αφορά στη συνέχεια, την παράγωγο και το ολοκλήρωμα) τριών κορυφαίων μαθηματικών αυτής της περιόδου, των Lagrange, Bolzano, Cauchy και εστιάζει στην εξέλιξη των βασικών εννοιών του λογισμού. Επιπλέον γίνεται προσπάθεια να ανιχνευθούν οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις .

Στο δεύτερο μέρος αναλύεται το μαθηματικό έργο από την οπτική σύγχρονων θεωριών της διδακτικής.

Στο τρίτο μέρος, γίνονται συγκεκριμένες διδακτικές παρατηρήσεις οι οποίες απορρέουν από την μελέτη της παραπάνω ιστορικής περιόδου.

Στο τέλος υπάρχουν δύο παραρτήματα. Το παράρτημα Α είναι μετάφραση του έργου του Bolzano *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzles Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* και το παράρτημα Β είναι μεταφράσεις των αποδείξεων του Cauchy του θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, του θεωρήματος για τις παραγώγους, της ύπαρξης ορισμένου ολοκληρώματος και του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ

Α ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΩΝ LAGRANGE, BOLZANO, CAUCHY 1

Οι απαρχές του λογισμού ……..….. 3

Ερευνητική δραστηριότητα τον 18^{ο} αιώνα……..… 5

Τα θεμέλια των Μαθηματικών τον 18^{ο} αιώνα……..… 7

Joseph Louis LAGRANGE 1736-1813 ……..… 9

Αλγεβρική Ανάλυση του Lagrange……..….. 11

Η παράγωγος συνάρτηση και το ανάπτυγμα Taylor……. 15

Θεμελιώδες θεώρημα ……..… 19

Bernard BOLZANO 1781-1848……..… 22

Συνέχεια……..….. 24

Παράγωγος……..….. 30

Η επίδραση του Lagrange στον Bolzano……..... 32

Bolzano και Cauchy……... 36

Augustin Louis CAUCHY 1789-1857……..….. 38

Όρια και Σύγκλιση……... 42

Συνέχεια……... 48

Συγκλίνουσες σειρές Θεώρημα Ι……..…… 52

Παράγωγος……..…… 58

Ολοκλήρωμα……..... 67

Θεμελιώδες Θεώρημα……..…. 75

Τα απειροστά στον Cauchy……..… 77

Β ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ……..… 83

Δυϊσμός εργαλείου – έννοιας……... 84

Ήταν ο Cauchy προάγγελος των θεωριών του Weierstrass ή του Robinson ;……..... 89

Γ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ…….. 91

Διδακτικές παρατηρήσεις……..… 93

Μια πρόταση διδασκαλίας βασισμένη σε πρωτότυπα κείμενα……. 101

ΕΠΙΛΟΓΟΣ……... 105

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. Α……. 107

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. Β…….. 137

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…… 147

Α ΜΕΡΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΩΝ LAGRANGE , BOLZANO, CAUCHY

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί ένα σημαντικό και διεθνές ενδιαφέρον σχετικά με την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση, προκειμένου να αντισταθμιστεί η εικόνα των μαθηματικών ως ζώνη ελεύθερη από ανθρώπους, όλο απαντήσεις αλλά καθόλου ερωτήσεις, όλο λύσεις αλλά καθόλου προβλήματα. Πολλά βιβλία και ειδικά τεύχη σε επιστημονικά περιοδικά έχουν παρουσιαστεί περιέχοντα υλικά διαφόρων ειδών: συνοπτικές ιστορίες διαφόρων αναπτύξεων, ανασκοπήσεις βιογραφιών και έργων σημαντικών μαθηματικών προσωπικοτήτων, διεθνείς και πολιτισμικές συγκρίσεις ανάπτυξης λίγο ως πολύ παρόμοιων θεωριών, μεταφράσεις πρωτότυπων κειμένων με σχόλια, προτεινόμενες στρατηγικές για τη χρήση της ιστορίας στην διδακτική πρακτική. Η έμφαση συνήθως δίνεται στα κίνητρα και στο περιεχόμενο, στο να καταδειχθεί ότι τα μαθηματικά είναι τελικά μία ανθρώπινη δραστηριότητα και ότι πολλά από αυτά δεν είναι Δυτικής καταγωγής (Grattan-Guinness, 2004).

Η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών θα έπρεπε να απαντά στα παρακάτω κρίσιμα ερωτήματα :

- Ποιες είναι οι διαδικασίες με τις οποίες η νέα γνώση γίνεται αντιληπτή, διατυπώνεται και κατανοείται;

- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η νέα γνώση θεωρείται έγκυρη αφού γίνει αποδεκτή; (Τζανάκης & Κούρκουλος, 2000).

Η ιστορική μελέτη της θεμελίωσης του λογισμού συμβάλει στην κατανόηση των πραγματικών κινήτρων και αναδεικνύει τις έννοιες που ήταν - και άρα είναι - δύσκολες.

Ο λογισμός, ως ο κλάδος των μαθηματικών που μελετά τις σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων, των παραγώγων τους και των ολοκληρωμάτων τους, έχει σημαντικές εφαρμογές σε εφαπτόμενες, εμβαδά, όγκους, μήκη τόξων, ταχύτητες, αποστάσεις. Ως εκ τούτου έχει μια διπλή υπόσταση: μπορεί να γίνει κατανοητός

ως ένα σύνολο διαισθητικά κατανοητών τεχνικών επίλυσης προβλημάτων, με ευρεία εφαρμογή στη γεωμετρία και τα φυσικά συστήματα, αλλά ταυτόχρονα είναι ένα σύνολο θεωρημάτων που βασίζονται σε ακριβείς ορισμούς για τα όρια, την συνέχεια, τις σειρές, τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα. Η λογική του βάση βρίσκεται στην άλγεβρα των ανισοτήτων.

Αυτές οι **δύο διαφορετικές όψεις – χρήση και αιτιολόγηση** – που συνυπάρχουν ταυτόχρονα σήμερα, είναι στη πραγματικότητα κληροδοτήματα δύο διαφορετικών ιστορικών περιόδων : του 18^{ου} και του 19^{ου} αιώνα.

Τον **18^{ο} αιώνα** εμφανίζονται πολλοί μαθηματικοί που παράγουν σημαντικά αποτελέσματα: οι Johann, Jacob και Daniel Bernoulli, ο L' Hôpital, ο Brook Taylor, ο Leonhard Euler, ο Joseph Louis Lagrange, ο Pierre Simon Laplace. Παρόλο που δεν είναι αδιάφοροι ως προς την αυστηρότητα, οι προσπάθειες τους κυρίως επικεντρώνονται στην ανάπτυξη και εφαρμογή ισχυρών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων, μερικές από τις οποίες δεν μπορούν να τις αιτιολογήσουν πλήρως. Παράλληλα με την ανάπτυξη νέων τεχνικών, εισήγαγαν νέες έννοιες στον λογισμό, συμπεριλαμβανομένου του λογισμού των μεταβολών και της μελέτης των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αυτές οι αναπτύξεις άλλαξαν βαθιά τον λογισμό και ανέπτυξαν ακούσια πολλές από τις ιδέες και μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν μετά για την αυστηρή θεμελίωση του.

Ειδικότερα, ο Euler ανέπτυξε πολλές τεχνικές που θα χρησιμοποιούσε αργότερα ο Cauchy και ο Lagrange ήταν η κρίσιμη μεταβατική προσωπικότητα ανάμεσα στις απόψεις του 18^{ου} και 19^{ου} αιώνα. Ήταν αυτός που πρώτος έθεσε δημόσια το ζήτημα της θεμελίωσης των μαθηματικών και πολλές τεχνικές του χρησιμοποιήθηκαν αποτελεσματικά από τον Cauchy.

Σε αντίθεση, μαθηματικοί του **19^{ου} αιώνα** όπως οι Cauchy, Abel, Bolzano και Weierstrass δίνουν αυστηρούς ορισμούς των βασικών εννοιών και το πλέον σημαντικό, αυστηρές αποδείξεις των αποτελεσμάτων του λογισμού. Οι αποδείξεις κατέστησαν ακριβείς τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες οι σχέσεις μεταξύ των εννοιών του λογισμού είχαν ισχύ. Η ακρίβεια του 19^{ου} αιώνα έκανε δυνατή την ανακάλυψη και εφαρμογή ιδεών όπως της ομοιόμορφης σύγκλισης , της ομοιόμορφης συνέχειας, της αθροιστικότητας και των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, οι οποίες δεν θα μπορούσαν ούτε να μελετηθούν ούτε να εκφραστούν στο εννοιολογικό πλαίσιο των μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα.

Η πλέον σημαντική προσωπικότητα στην εισαγωγή της αυστηρής ανάλυσης ήταν ο Augustin-Louis Cauchy οι διαλέξεις του οποίου καθιέρωσαν μία νέα τακτική απέναντι στην αυστηρότητα. Οι σημαντικές ιδέες του Bernhard Bolzano επίσης, εάν είχαν διαδοθεί θα είχαν επιταχύνει την αυστηρή θεμελίωση. Πολλοί μαθηματικοί ακολούθησαν το πνεύμα του Cauchy: ο Niels Henrik Abel επεξέτεινε την θεωρία σύγκλισης, ο Bernhard Riemann αποσαφήνισε και επεξέτεινε την έννοια του ολοκληρώματος, ο Karl Weierstrass συστηματοποίησε τις ε-δ μεθόδους δίνοντας έμφαση στη διάκριση μεταξύ συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας. Οι Weierstrass, Eduard Heine, Richard Dedekind, Charles Méray και Georg Cantor ανέπτυξαν την σύγχρονη θεωρία των πραγματικών αριθμών.

Οι απαρχές του λογισμού

Κατά τη διάρκεια μιας μακράς και γόνιμης περιόδου που άρχισε από τους Newton και Leibniz και διήρκεσε μέχρι τους Cauchy και Weierstrass ο λογισμός προσεγγίζετο και αναπτύσσετο σε διαφορετικούς δρόμους και υπήρχε διαφωνία μεταξύ των μαθηματικών ως προς τη φύση του.

Ο αρχικός λογισμός των Newton και Leibniz ($17^{ος}$ αι.) ασχολήθηκε κυρίως με τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων (τυπικά, καμπύλων) : ερεύνησε τις σχέσεις μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων x, y και z που αντιπροσώπευαν γεωμετρικές γραμμές, επιφάνειες και γωνίες.
Οι βασικές έννοιες του λογισμού ήταν το Διαφορικό πηλίκο και το Ολοκλήρωμα. Ολες οι εφαρμογές του λογισμού συνίσταντο στη μετάφραση του δοσμένου προβλήματος σε μία αναλυτική ή αλγεβρική έκφραση η οποία είτε μπορούσε να διαφοριστεί είτε μπορούσε να δειχθεί ότι είναι το διαφορικό πηλίκο κάποιας έκφρασης (Grabiner, 1981). Η αιτιολόγηση των κανόνων διαφόρισης στηρίζετο είτε στα απειροστά (Leibniz, l' Hôpital, Johann Bernoulli), είτε στις ροές (Newton, Maclaurin).

Το 1696 ο l' Hôpital δημοσίευσε το πρώτο βιβλίο για τον διαφορικό λογισμό: *Analyse des infiniment petits pour l' intélligence des lignes courbes* (*Ανάλυση των άπειρα μικρών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών*) βασισμένο στις διαλέξεις του Johann Bernoulli το οποίο είχε μία τεράστια επιτυχία και για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα αποτελούσε το μόνο προσβάσιμο δρόμο στο διαφορικό λογισμό. Παρόλο που ο l' Hôpital δεν συζητά σε αυτό το βιβλίο τη φύση βασικών εννοιών του λογισμού έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εκλαΐκευση του νέου αντικειμένου και επειδή κυκλοφόρησε σε πολλές εκδόσεις και λόγω της επιρροής που άσκησε στην Journal des savants (Boyer, 1949).

Στο βιβλίο εμφανίζονται οι ορισμοί:

Ορισμός Ι: Ονομάζουμε μεταβλητές ποσότητες αυτές που αυξάνουν ή ελαττώνονται συνεχώς και αντιθέτως σταθερές ποσότητες αυτές που παραμένουν ίδιες ενώ οι άλλες αλλάζουν.

Ορισμός ΙΙ: Το άπειρα μικρό τμήμα κατά το οποίο μία μεταβλητή αυξάνει ή ελαττώνεται συνεχώς ονομάζεται η Διαφορά.

Επίσης τα αξιώματα:

Ι. Απαίτηση ή Υπόθεση: Αιτούμαστε ότι μπορούμε να πάρουμε αδιακρίτως την μία αντί της άλλης δύο ποσότητες που δεν διαφέρουν μεταξύ τους παρά κατά μία άπειρα μικρή ποσότητα ή (πράγμα που είναι το ίδιο), ότι μία ποσότητα που δεν αυξάνει ή δεν ελαττώνεται παρά κατά μία ποσότητα άπειρα μικρότερη από αυτήν, μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει η ίδια.

Δηλαδή το αξίωμα Ι λέει ότι $x + dx = x$

ΙΙ. Απαίτηση ή Υπόθεση: Αιτούμαστε ότι μία καμπύλη γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως η συλλογή άπειρων ευθειών γραμμών, κάθε μία από τις οποίες είναι άπειρα μικρή ή (κάτι που είναι το ίδιο πράγμα), ως ένα πολύγωνο με άπειρο αριθμό πλευρών, κάθε μία άπειρα μικρή, οι οποίες καθορίζουν με τις μεταξύ τους γωνίες, την καμπυλότητα της γραμμής.

Τα αξιώματα αντιπροσωπεύουν μία επέκταση εννοιών: επέκταση της έννοιας της ισότητας που θεωρείται τώρα ως μία σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων που διαφέρουν κατά μία άπειρα μικρή ποσότητα και της έννοιας του πολυγώνου που επεκτείνεται τώρα για να συμπεριλάβει καμπύλες. Ο l' Hôpital προσπαθεί με την αξιωματική του δομή να τυποποιήσει την διαισθητική έννοια των απειροστών ποσοτήτων και τις πράξεις που αφορούν στην χρήση τους (Mancosu, 1989).

Ερευνητική δραστηριότητα τον 18^{ο} αιώνα

Τον 18^{ο} αιώνα , άλγεβρα είναι η θεωρία των εξισώσεων – ειδικά η μελέτη των σχέσεων ριζών-συντελεστών και η μελέτη επίλυσης εξισώσεων, ακριβής επίλυση αν είναι δυνατόν ή με προσεγγιστικές διαδικασίες.

Ο **Euler** θεωρούσε την άλγεβρα ως γενικευμένη Αριθμητική, αλλά έκανε διάκριση μεταξύ των δύο. Στα *Στοιχεία της Άλγεβρας* (1770) εξήγησε τη διαφορά ως εξής: «Η Αριθμητική χρησιμοποιεί τους αριθμούς συγκεκριμένα και είναι η επιστήμη των αριθμών και κατάλληλα ονομάζεται έτσι. Η Άλγεβρα, αντίθετα, περιλαμβάνει γενικά όλες τις περιπτώσεις που μπορούν να υπάρχουν στο δόγμα και στον υπολογισμό των αριθμών».

«Η ανάλυση του απείρου» ένας κλάδος των μαθηματικών που ονομάστηκε έτσι από τον Euler εμπεριείχε την εύρεση αθροισμάτων άπειρων σειρών και την μετατροπή τους από μία μορφή σε μία άλλη καθώς επίσης και την εύρεση των ορίων άπειρων γινομένων και συνεχών κλασμάτων.

Δεν υπήρχαν απόπειρες διατύπωσης γενικής θεωρίας σύγκλισης παρόλο που η ταχύτητα σύγκλισης συγκεκριμένων σειρών συζητείτο και είχαν αναπτυχθεί κάποια κριτήρια σύγκλισης.

Ο διαφορικός λογισμός μελετούσε την εύρεση διαφορικών όλων των τάξεων, τις αμοιβαίες τους σχέσεις και τις εφαρμογές τους σε προβλήματα γεωμετρίας και φυσικής.

Ο ολοκληρωτικός λογισμός έλυνε κλάσεις διαφορικών εξισώσεων και υπολόγιζε ορισμένα ολοκληρώματα αλλά δεν απεδείκνυε την ύπαρξη λύσεων σε κανένα από αυτά τα προβλήματα.

Ο λογισμός του 18^{ου} αιώνα δεν είχε μία άμεση γεωμετρική ερμηνεία: οι μαθηματικοί άρχισαν να σκέπτονται κυρίως για εξισώσεις (π.χ. διαφορικές ή μερικά διαφορικές εξισώσεις), πως να τις κατηγοριοποιήσουν, πως να τις λύσουν. Εν τω μεταξύ από τη μηχανική εμφανίστηκε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συγκεκριμένων συναρτησοειδών (functionals) , και αυτό υπέβαλε τη μελέτη του λογισμού των μεταβολών. Η πρώτη συστηματική μελέτη αυτού του νέου τομέα βρίσκεται στο *Methodus inveniendi lineas curvas* (1744) του Euler. Σε αυτό το νέο πλαίσιο εμφανίστηκε η σημασία της έννοιας της συνάρτησης: ο λογισμός για

μεταβλητές ποσότητες και τα διαφορικά τους (ή τις ροές τους) έγινε ο λογισμός για τις συναρτήσεις και τις παραγώγους τους (Youschkevitch, 1976).

Τον 18^{ο} αιώνα η λέξη **συνάρτηση** προσδιόριζε μία έκφραση η οποία μπορούσε να γραφεί απλά, με όρους μεταβλητών και συμβόλων πράξεων. Οι συναρτήσεις δηλαδή ταυτίζονταν με τους τύπους που τις αντιπροσώπευαν – συνήθως άπειρες σειρές.

Ίσως ο άνθρωπος που είχε την πιο σημαντική συνεισφορά στη διαμόρφωση αυτού του νέου λογισμού των συναρτήσεων ήταν ο Euler.

Ο Euler έγραψε ένα τεράστιο αριθμό βιβλίων και άρθρων προωθώντας τη νέα ανάλυση, οργανώνοντας την, θέτοντας την σε τυπική βάση. Οι περισσότεροι από τους προκατόχους του θεωρούσαν τον διαφορικό λογισμό δεμένο πολύ με την γεωμετρία αλλά ο Euler μετέτρεψε το αντικείμενο σε τυπική θεωρία συναρτήσεων η οποία δεν είχε καμία ανάγκη να ανατρέχει σε διαγράμματα ή σε γεωμετρικές αντιλήψεις. Ήταν ο πρώτος που έθεσε σε εξέχουσα θέση την έννοια της συνάρτησης και μελέτησε συστηματικά και κατηγοριοποίησε όλες τις στοιχειώδεις συναρτήσεις μαζί με τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα τους (Boyer, 1949)

Στο *Introductio in analysin infinitorum* υιοθέτησε τον ορισμό του Johann Bernoulli : «συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μία αναλυτική έκφραση που συντίθεται καθ' οιονδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή και από αριθμούς και σταθερές ποσότητες» (Euler, 1748)

Η λέξη συνάρτηση για τον Euler δεν σήμαινε τόσο πολύ μία ποσότητα που γίνεται κατανοητή ως εξαρτώμενη από μεταβλητές , όσο μία αναλυτική έκφραση σταθερών και μεταβλητών η οποία μπορούσε να αναπαρασταθεί από απλά σύμβολα. Η **συναρτησιακή σχέση ήταν θέμα τυπικής αναπαράστασης περισσότερο παρά εννοιολογική αναγνώριση μιας σχέσης**. Η σχεδόν αυτόματη ανάπτυξη του λογισμού κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα ήταν σε μεγάλο βαθμό αποτέλεσμα αυτής της τυπικής θεώρησης, στην οποία προσαρμόστηκε τόσο καλά ο συμβολισμός του Leibniz (Boyer, 1949).

Ο Euler δεν εγκατέλειψε την έννοια του διαφορικού: είδε τον λογισμό ως πολύ στενά συνδεόμενο με τη μηχανική, και σε αυτό το πλαίσιο η έννοια του διαφορικού είναι πολύ χρήσιμη (Grattan-Guinness, 1994).

Θεωρούσε ότι οι έννοιες του **άπειρα μεγάλου και άπειρα μικρού** δεν έκρυβαν τόσο πολύ μυστήριο όσο πιστεύετο γενικά. Μία ποσότητα άπειρα μικρή ή μία εκλιπούσα ποσότητα θεωρούσε απλά ότι είναι μία ποσότητα η οποία θα γίνει μηδέν *(Opera Omnia*, X, 69) Ένας αριθμός μικρότερος από όποια δοθείσα ποσότητα πρέπει εξ ανάγκης να είναι μηδέν (*Opera Omnia*, X, 69-70). Τα διαφορικά dx και dy ήταν γι αυτό τον λόγο απλά μηδέν. Παρόλο που δεχόταν την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού απειροστών, όπως εμφανίζονται στα διαφορικά ανώτερων τάξεων, θεωρούσε ότι όλα ήταν μηδέν. Τα μηδενικά που αντιπροσωπεύονται από τα διαφορικά έπρεπε να διακρίνονται μέσω του αποδεκτού γεγονότος ότι ο λόγος 0/0 μπορούσε κατά μία έννοια να αντιπροσωπεύει όποιο λόγο πεπερασμένων αριθμών. Για τον Euler ο λογισμός ήταν απλά ο καθορισμός του λόγου των εκλιπόντων (evanescent) ελάχιστων μεταβολών- μία ευρετική διαδικασία για την εύρεση της τιμής της έκφρασης 0/0 (Boyer, 1949).

Τα θεμέλια των μαθηματικών τον 18ο αιώνα

Κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα, η ανάλυση επεκτάθηκε πολύ και χρησιμοποιείτο κυρίως για τη πρόβλεψη της μηχανικής συμπεριφοράς των αντικειμένων. Τα πειραματικά αποτελέσματα πρόσφεραν ένα τρόπο επαλήθευσης των αναλυτικών θεωρημάτων γι αυτό τον λόγο δεν ήταν αυξημένο το ενδιαφέρον για τα θεμέλια της Ανάλυσης. Υπήρχαν βεβαίως αντιδικίες για τα θεμέλια του Λογισμού, αλλά μέχρι τα μέσα του αιώνα σπάνια αποσπούσαν πολύ την προσοχή των μαθηματικών. Ωστόσο γύρω στα μέσα του αιώνα (από το 1780 και μετά), ξεκίνησαν να συζητούν κάποιες πλευρές της θεμελίωσης του Λογισμού. Οι λόγοι ήταν ποικίλοι :

- Ο Λογισμός ήταν ένα νέο αντικείμενο και για αυτό κάθε κείμενο που τον παρουσίαζε περιελάμβανε εισαγωγικό υλικό που εξηγούσε τα βασικά μέρη του.
- Δεύτερος λόγος ήταν το αυξανόμενο ενδιαφέρον του κοινού για τα μαθηματικά και την επιστήμη που οδήγησε στην συγγραφή πολλών εισαγωγικών εγχειριδίων. Η επιτυχία της Νευτώνειας φυσικής στην εξήγηση των φυσικών φαινομένων αύξησε την περιέργεια του κοινού για επιστημονικά και μαθηματικά ζητήματα.

- Τρίτος λόγος ήταν η διαμάχη των οπαδών των θεωριών του Newton και του Leibniz. Προκειμένου να υπερασπιστούν την Νευτώνεια άποψη για τον Λογισμό, πολλοί μαθηματικοί της Αγγλίας οδηγήθηκαν στην λεπτομερή εξέταση των αρχών του Λογισμού, τονίζοντας κάποια σημεία της θεμελίωσης του Λογισμού στην ηπειρωτική Ευρώπη, στα οποία η αντιμετώπιση του Newton ήταν καλύτερη.
- Ως τέταρτος λόγος θα μπορούσε να θεωρηθεί η διαρκής μείωση της απασχόλησης των μαθηματικών σε βασιλικές αυλές αφού οι τελευταίες διαρκώς λιγόστευαν. Πριν τα μέσα του 18ου αιώνα, οι μαθηματικοί συχνά κέρδιζαν τα προς το ζην μέσω της προσκόλλησης τους σε βασιλικές αυλές. Ωστόσο στα τέλη του αιώνα οι βασιλικές αυλές άρχισαν να λιγοστεύουν με αποτέλεσμα πολλοί να αναγκαστούν να διδάσκουν (σε στρατιωτικές σχολές ή στην École Polytechnique του Παρισιού) σε φοιτητές μηχανικούς ή άλλων επιστημών. Και επειδή η διδασκαλία αναγκάζει κάποιον να θέτει βασικά ερωτήματα πάνω σε θεμελιώδεις έννοιες, η αλλαγή του οικονομικού περιβάλλοντος, η ανάγκη για διδασκαλία, και η συνακόλουθη απαίτηση για συγγραφή εγχειριδίων για τους φοιτητές, οδήγησε πολλούς μαθηματικούς στην πιο στενή εξέταση των θεμελίων των μαθηματικών.
- Τελευταίος αλλά εξίσου σημαντικός λόγος ήταν η επίθεση που εξαπόλυσε στα θεμέλια των μαθηματικών, ο Berkeley. Με σκοπό να θέσει σε αμφιβολία τα δόγματα του Διαφωτισμού, ο Berkeley επιτέθηκε στο επιστέγασμα της λογικής : τα μαθηματικά. Έτσι, πολλοί μαθηματικοί αναγκάστηκαν να επανεξετάσουν τις αρχές του Λογισμού προκειμένου να σιγουρέψουν το οικοδόμημα από τη διαβρωτική επίδραση της κριτικής του Berkeley.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια το μαθηματικό έργο των Lagrange, Bolzano και Cauchy. Θα περιοριστούμε σε ότι αφορά στα μαθηματικά που αντιστοιχούν σε αυτά που διδάσκονται στο λύκειο , δεδομένου ότι το μαθηματικό τους έργο είναι τεράστιο και δεν μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μιας και μοναδικής μελέτης και επειδή μας ενδιαφέρει η διδακτική αξιοποίηση.

ŒUVRES

DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES DE

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME NEUVIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC LXXXI

(Göttinger Digitalisierungs Zentrum)

Joseph Louis LAGRANGE 1736-1813

Μέσα σε αυτό το κλίμα, ο Lagrange προσπάθησε να αντιμετωπίσει πολλές φορές και με διαφορετικές μεθόδους το πρόβλημα της θεμελίωσης.

Οι θεμελιώδεις έρευνες του Lagrange παρουσιάστηκαν σε δύο εργασίες: *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute consideration d'infiniment petit ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantities finies* (*Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων περιέχουσα τις αρχές του διαφορικού λογισμού, ελεύθερες από κάθε θεώρηση του άπειρα μικρού ή εκλιπόντων, ορίων ή ροών, και αναγόμενες στην αλγεβρική ανάλυση των πεπερασμένων ποσοτήτων*) και *Leçons sur le calcul des fonctions* (*Μαθήματα στο λογισμό των συναρτήσεων*).

Το πρώτο κυκλοφόρησε σε δύο εκδόσεις, το 1797 και το 1813. Εκτός από καθαρή Ανάλυση περιέχει εκτεταμένες εφαρμογές στη γεωμετρία και τη μηχανική.

Το δεύτερο κυκλοφόρησε σε δύο εκδόσεις, το 1801 και το 1806 και περιέχει ένα πιο λεπτομερή χειρισμό των αναλυτικών θεμάτων του πρώτου.

Τα έργα του βασίστηκαν στις σημειώσεις του από τις διαλέξεις του ως καθηγητή. Με δεδομένο ότι έπρεπε να διδάξει ανάλυση σε μηχανικούς, αναζωογόνησε τις ιδέες που είχε μερικά χρόνια πριν σχετικά με τη θεμελίωση της ανάλυσης και τις επεξεργάστηκε με μεγάλη ταχύτητα. Με δεδομένο το μικρό διάστημα της σύνθεσης τους και το ακροατήριο στο οποίο απευθύνονταν αυτά τα κείμενα είναι αξιοσημείωτα. Τα συνήθη θέματα - παράγωγοι, διαφορικές εξισώσεις, εφαρμογές κλπ - συζητιούνται και η παρουσίαση είναι πολύ κατανοητή ακόμα και για αρχάριους. Η παιδαγωγική του προσέγγιση είχε μεγάλη επιτυχία. Το πλέον ενδιαφέρον είναι οι προσπάθειες του να εισάγει αυστηρότητα στη παρουσίαση του και η επεξεργασία τυποποιήσεων εννοιών-κλειδιά καθώς και τεχνικών αποδείξεων. Τα λάθη του ήταν τέτοια που απαιτείτο σκληρή δουλειά και ενόραση για να ξεκαθαριστούν (Rusnock, 1999).

Η Αλγεβρική Ανάλυση του Lagrange

Η διαφορετική αντίληψη που ο Lagrange είχε για την Άλγεβρα είναι ένα βασικό στοιχείο που διαπερνά το έργο του και για αυτό θα αναλυθεί διεξοδικότερα.
Η συνήθης άποψη που επικρατούσε κατά τον 18ο αιώνα έβλεπε την Άλγεβρα ως «καθολική Αριθμητική» (Fraser, 1987). Στην καθολική Αριθμητική, οι πράξεις της συνήθους Αριθμητικής εφαρμόζονταν στα γράμματα, τα οποία μπορούσαν να αναπαραστήσουν οποιουσδήποτε αριθμούς.
Η Αριθμητική θεωρείτο καλά θεμελιωμένη και ως εκ τούτου το ίδιο πίστευαν για την Άλγεβρα που ήταν ένα είδος γενικευμένης Αριθμητικής. Ο όρος «Άλγεβρα» εκείνη τη εποχή αναφερόταν στην θεωρία των πολυωνυμικών εξισώσεων, τον καθορισμό δηλαδή των τύπων που εκφράζουν τις ρίζες τέτοιων εξισώσεων ως συνάρτηση των συντελεστών. Παράλληλα οποιαδήποτε άλλη μέθοδος η οποία μπορούσε να δώσει λύση, ακριβώς ή προσεγγιστικά σε μια εξίσωση, ήταν αποδεκτό τμήμα της Άλγεβρας. Η μελέτη έτσι των προσεγγιστικών λύσεων αλγεβρικών εξισώσεων οδήγησε αναπόφευκτα στην μελέτη των ανισοτήτων. Επιπλέον οι τελευταίες μπορούσαν εύκολα, όπως και η μελέτη των απειροσειρών, να θεωρηθούν μέρος της καθολικής Αριθμητικής, εφόσον αποτελούσαν έναν σύντομο τρόπο για την έκφραση απλών σχέσεων διάταξης μεταξύ ποσοτήτων.
Ο Lagrange επεκτείνοντας την άποψη της εποχής του, έβαλε ως στόχο του προγράμματος του την θεμελίωση και ανάπτυξη του Λογισμού στη βάση Αλγεβρικών μεθόδων.

Χρησιμοποιώντας τον όρο «Αλγεβρική Ανάλυση» αναφερόταν στον κλάδο των μαθηματικών που προκύπτει από την εισαγωγή ευρύτερων κλάσεων συναρτήσεων στην Άλγεβρα. Ως «αναλυτική συνάρτηση» ορίζει στο *Leçons sur le calcul des fonctions* (Lagrange, 1806) κάθε έκφραση του Λογισμού (expression de calcul) στην οποία υπεισέρχονται σταθερές και μεταβλητές.
Στο *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrées*, το 1798 (περιλαμβάνεται στο *Oeuvres* vol.8, 14-15), που είναι μία πραγματεία για τις αριθμητικές εξισώσεις, εξηγεί την αντίληψη του για την Άλγεβρα :
«Ο βασικός χαρακτήρας [της Άλγεβρας] συνίσταται στο γεγονός ότι τα αποτελέσματα των πράξεων της δεν δίνουν τις ξεχωριστές τιμές των ποσοτήτων που αναζητούνται, όπως αυτές των αριθμητικών πράξεων ή των γεωμετρικών

κατασκευών, αλλά αντιπροσωπεύουν μόνο τις πράξεις, είτε αριθμητικές είτε γεωμετρικές, που πρέπει να εκτελεστούν στις δοθείσες ποσότητες προκειμένου να επιτύχουμε τις τιμές που αναζητούμε...

Το αντικείμενο [της Άλγεβρας] δεν είναι να βρεθούν συγκεκριμένες τιμές των ποσοτήτων που αναζητούνται, αλλά το σύστημα των πράξεων να εκτελεστεί στις δοθείσες ποσότητες προκειμένου από αυτές να παραχθούν οι τιμές των ποσοτήτων που αναζητούνται. Το σκηνικό αυτών των πράξεων που αναπαριστώνται από αλγεβρικούς χαρακτήρες είναι αυτό που στην Άλγεβρα καλείται τύπος. Και όταν μία ποσότητα εξαρτάται από άλλες ποσότητες, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να εκφραστεί με ένα τύπο ο οποίος να περιέχει αυτές τις ποσότητες, λέμε τότε ότι είναι συνάρτηση αυτών των ίδιων ποσοτήτων».

Παρόλο που δεν εξηγεί αυτόν τον ορισμό, η αντίληψη του φαίνεται στα αρχικά μαθήματα. Εκτός από τα πολυώνυμα και τις ρητές συναρτήσεις, που αναπτύσσονται χρησιμοποιώντας τις τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις, οι αναλυτικές συναρτήσεις περιλαμβάνουν την εκθετική συνάρτηση a^x που ικανοποιεί την αλγεβρική σχέση :

$a^{x+y} = a^x a^y$ και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις cosx και sinx που ικανοποιούν τις αλγεβρικές σχέσεις cos(x+y) = cosx cosy-sinx siny και sin(x+y)=sinx cosy+cosx siny. Από τις συναρτήσεις x^n, a^x, cosx, sinx παίρνουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις $\sqrt[n]{x}$, $\log_a x$, arccosx, arcsinx. Όποια έκφραση σχηματίζεται από άλλες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, είναι επίσης συνάρτηση.

Για τον Lagrange οι αναλυτικές εκφράσεις δημιουργούνται από τις στοιχειώδεις αλγεβρικές και υπερβατικές συναρτήσεις με σύνθεση και αντιστροφή. Επιπλέον μια συνάρτηση που είναι αντιπαράγωγος ή αρχική δοθείσης συνάρτησης καθώς και η παραγόμενη συνάρτηση ή παράγωγος της, μπορούν να θεωρηθούν ως αντικείμενο της αλγεβρικής ανάλυσης. Ωστόσο πουθενά δεν εξηγεί πώς ένας τύπος που προκύπτει με αυτό τον τρόπο μπορεί εκφραστεί μέσω στοιχειωδών πράξεων και συναρτήσεων (Fraser, ibid.). Επίσης δεν είναι καθαρό εάν στον όρο «αναλυτική συνάρτηση» περιελάμβανε και τις άπειρες σειρές. Αν και ο Lagrange στα *Leçons* χρησιμοποιούσε την αναπαράσταση κάθε συνάρτησης f(x+i) ως δυναμοσειρά , δεν είχε ορίσει σε κανένα σημείο κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση μέσω δεδομένου

άπειρου αναπτύγματος, κάτι το οποίο κάνει αρκετούς ερευνητές να διαφωνήσουν με την άποψη της Grabiner (1981) ότι ως αναλυτική συνάρτηση εννοούσε και τις απειροσειρές (Fraser, ibid).

Η σημασία που είχε ο υπολανθάνων αλγεβρικός φορμαλισμός στις αποδείξεις του Lagrange φαίνεται και από την επικρατούσα τότε αντίληψη σχετικά με τις μεμονωμένες τιμές : εάν μια πρόταση δεν ίσχυε σε κάποιες μεμονωμένες τιμές αυτό δεν επηρέαζε την ορθότητα της πρότασης. Η μη ισχύς για παράδειγμα του αναπτύγματος κάποιας δυναμοσειράς σε ένα σημείο απεδίδετο στην «κατάρρευση» στο σημείο αυτό της αλγεβρικής μορφής της. Έτσι, η αυστηρότητα μιας απόδειξης όπως του Lagrange για τις σειρές Taylor ουσιαστικά ταυτιζόταν με την απαίτηση ύπαρξης αλγεβρικής μορφής της σχέσης.

Συνοπτικά, στο σύμπαν της Αλγεβρικής Ανάλυσης του Lagrange, κάθε συνάρτηση δίδεται από μια απλή αναλυτική έκφραση από μεταβλητές και σταθερές και με τη χρήση των πράξεων της Ανάλυσης. Έτσι κάθε συνάρτηση διαθέτει μια καλά ορισμένη και σταθερή αλγεβρική μορφή η οποία και την διακρίνει από τις άλλες συναρτήσεις και καθορίζει τις ιδιότητες της.

Το πρόγραμμα του Lagrange είχε επίσης το προσόν να εστιάζει μόνο στην έννοια της συνάρτησης και των «παραγώγων» της. Η παράγωγος της f(x) είναι μία άλλη συνάρτηση, που αποκτάται από (αλγεβρική) πράξη που εκτελείται στην f(x): η υποτιθέμενη αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος του Taylor ήταν ο τρόπος να περάσει κανείς από μία συνάρτηση στις παραγώγους της. Παρόλο που η απόδειξη του Lagrange του θεωρήματος του Taylor ήταν εσφαλμένη, αυτή η νέα προσέγγιση του λογισμού ως μαθηματική θεωρία συναρτήσεων και πράξεων σε συναρτήσεις κατέγραψε ένα σημαντικό βήμα προς τα μπρος (Grattan-Guinness, 1994).

Ο Lagrange ήταν ανάμεσα στους πρώτους που αναγνώρισε τα προβλήματα που ενεμπλέκοντο στην βεβαιότητα του Λογισμού και προσπάθησε να κάνει τη μαθηματική κοινότητα να δώσει προσοχή στα προβλήματα θεμελίωσης, μέσω του βραβείου της Ακαδημίας του Βερολίνου το 1784.

Η απάντηση δεν ικανοποίησε τον Lagrange και για αυτό το 1797 τύπωσε το *Théorie des Fonctions Analytiques* στο οποίο αναφέρει ότι η θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων, αποστασιοποιημένη από οποιαδήποτε θεώρηση απείρως μικρών ποσοτήτων, ορίων ή ροών, ανάγεται στην αλγεβρική ανάλυση πεπερασμένων ποσοτήτων. Έτσι αποπειράται να θεμελιώσει αλγεβρικά ολόκληρο

το οικοδόμημα του Λογισμού αφού πρώτα απορρίπτει μια προς μια τις προϋπάρχουσες έννοιες (1797):

- τα απειροστά δεν είναι αυστηρά θεμελιωμένα και ο Απειροστικός Λογισμός παράγει ακριβή αποτελέσματα μόνο από την αλληλοακύρωση των λαθών, και αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως θεμελίωση του Λογισμού
- οι ροές του Νεύτωνα είναι απαράδεκτες γιατί βασίζονται στην ταχύτητα και την έννοια της κίνησης που δεν είναι μαθηματικές ιδέες αλλά της φυσικής
- η έννοια του ορίου είναι ασαφής, στενή και περισσότερο γεωμετρική παρά αλγεβρική.

Για παράδειγμα ο λόγος δυο πεπερασμένων ποσοτήτων δεν εκφράζει με καθαρό τρόπο τι συμβαίνει όταν και οι δυο είναι πολύ κοντά στο μηδέν, ενώ η προσέγγιση μια καμπύλης ως το όριο ακολουθίας πολυγώνων είναι γεωμετρική ιδέα εκτός του πνεύματος της Ανάλυσης. Πίστευε ότι ο ορισμός του D′ Alembert της εφαπτομένης ως το όριο της τέμνουσας ήταν μη ικανοποιητικός εφόσον, αφού η τέμνουσα έχει γίνει εφαπτομένη, τίποτα δεν την εμποδίζει από το να συνεχίσει ως τέμνουσα στην άλλη πλευρά του σημείου (*Oeuvres*, VII, 325).

Με αυτό τον τρόπο ήλπιζε να απαλλάξει τον Λογισμό από διαισθητικές γεωμετρικές έννοιες και να αποφύγει διαδικασίες που ενέπλεκαν την αμφισβητούμενη από τη λογική χρήση των απειροστών ολοτήτων.

Το *Théorie des Fonctions Analytiques* διαφέρει από τα προηγούμενα εγχειρίδια σε ένα κρίσιμο θέμα: είχε σκοπό κυρίως να εγκαθιδρύσει την αυστηρότητα στον λογισμό. Το σημαντικό δεν είναι ότι ο Lagrange έδινε ορισμούς, αυτό γινόταν και από άλλους, το σημαντικό είναι ότι παρήγαγε τα υπάρχοντα αποτελέσματα από την θεμελίωση του (Grabiner, 1981).

Γιατί όμως ο Lagrange επεδίωξε θεμελίωση του Λογισμού μέσω της Άλγεβρας ;

- Ένας λόγος, όπως ήδη αναφέρθηκε, ήταν ότι η Άλγεβρα ως γενικευμένη Αριθμητική θεωρείτο καλά θεμελιωμένη και επομένως κατάλληλη για να βασιστεί επάνω της ο Λογισμός.
- Δεύτερος πιθανός λόγος σύμφωνα με την Grabiner (1981), ήταν ότι οι απειροσειρές εκείνη την εποχή, θεωρούνταν πεδίο μελέτης της Άλγεβρας. Αλγεβρικές μέθοδοι που εφαρμόζονταν σε πεπερασμένα μεγέθη, μπορούσαν να

επεκταθούν και σε άπειρες διαδικασίες (όπως η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση οδηγεί σε άθροισμα άπειρων όρων κλπ) με αποτέλεσμα η φιλοσοφία της Άλγεβρας να περιλαμβάνει τόσο πεπερασμένες όσο και άπειρες διαδικασίες.

- Ένα ακόμα κίνητρο του Lagrange για την αλγεβρική θεμελίωση σχετιζόταν με εκπαιδευτικά θέματα. Συγκεκριμένα, δίδασκε στην École Polytechnique, ένα πρόσφατα ιδρυμένο στρατιωτικό ίδρυμα, όπου, για πρώτη φορά, ανώτερα μαθηματικά έπρεπε να διδαχθούν με ένα συστηματικό τρόπο. Ήταν απαραίτητο να υπάρχουν εγχειρίδια και προκειμένου να γράψει κανείς ένα καλό εγχειρίδιο για τον Λογισμό έπρεπε να σκεφθεί μία λογική και συστηματική παρουσίαση των βασικών εννοιών και προτάσεων. Η επιλογή του συγγραφέα Lagrange ήταν να βασίσει τον Λογισμό στους οικείους κανόνες της Άλγεβρας (Grattan-Guinness, 1994).
- Μια χαρακτηριστική ιδιότητα που διαπερνά όλο του το έργο είναι η αίσθηση γενίκευσης που έχει : δηλαδή η ιδέα ότι κάθε αποτέλεσμα πρέπει να δειχθεί ότι είναι ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής αρχής. Η ξεχωριστή αυτή πεποίθηση του για την αξία της γενικότητας, συνάδει και με την θεώρηση της Άλγεβρας ως κατάλληλης για την θεμελίωση του Λογισμού. Το σχέδιο του Lagrange να συνάγει τον Λογισμό χρησιμοποιώντας μόνο αλγεβρικά εργαλεία και μετατρέποντας τον τελικά σε θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων, είχε οπωσδήποτε ως κίνητρο την πεποίθηση για την ισχύ της Άλγεβρας : θα έκανε το Λογισμό τόσο με ασφάλεια θεμελιωμένο όσο η Άλγεβρα.

Η παράγωγος συνάρτηση και το ανάπτυγμα Taylor

Ο Lagrange βάσισε την εργασία του στην υπόθεση ότι όποια συνεχής (με σύγχρονους όρους διαφορίσιμη) συνάρτηση $f(x)$ μπορούσε να γραφεί ως $f(x+i) = f(x) + P\,i$ όπου P ήταν μία συνάρτηση των x και i. Αφού με αυτή την υπόθεση $f(x+i) – f(x) = P\,i$ μπορούσε κανείς να συμπεράνει ότι $f(x+i) – f(x) /i$ υπήρχε και έτσι θα έπαιρνε κάποια τιμή p (εξαρτώμενη μόνο από το x) για i=0. Με τη σειρά του το $p(x+i)$ μπορούσε να γραφεί ως $p(x) + Q\,i$. Η επανάληψη του επιχειρήματος κατέληγε σε κάτι που έμοιαζε πολύ με τις γνωστές σειρές Taylor :

$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \ldots$ (1)

Ο Lagrange χρησιμοποιούσε i για την (πραγματική) ελάχιστη αύξηση, όπου εμείς θα χρησιμοποιούσαμε h ή Δx.

Η «παραγόμενη συνάρτηση» ή παράγωγος $f'(x)$ ορίζεται να είναι ο συντελεστής $p(x)$ του γραμμικού όρου i σε αυτό το ανάπτυγμα. Πράγματι, αυτή είναι η ιστορική καταγωγή του συμβολισμού $f'(x)$ για τη παράγωγο της $f(x)$, όπως επίσης και του ίδιου του όρου «παράγωγος». Η $f'(x)$ είναι μία νέα συνάρτηση του x με μία καλά ορισμένη αλγεβρική μορφή, διαφορετική αλλά σχετιζόμενη με τη μορφή της αρχικής συνάρτησης $f(x)$. Η παραγόμενη συνάρτηση της $f'(x)$ δηλώνεται με τη σειρά της $f''(x)$ και αναφέρεται ως η δεύτερη παραγόμενη συνάρτηση της $f(x)$ κ.ο.κ.

Χρησιμοποιώντας τις αρχές της αλγεβρικής ανάλυσης ο Lagrange επιχειρεί στο δεύτερο *Leçon* να δείξει ότι κάθε συνάρτηση $f(x)$ έχει ανάπτυγμα της μορφής (1). Ελπίζει με αυτό το τρόπο να καθιερώσει την ύπαρξη της παραγόμενης συνάρτησης, χωρίς καμία έκκληση στα απειροστά ή σε γεωμετρικές έννοιες όπως κλίση ή εφαπτομένη. Αναγνωρίζει ότι για δεδομένη συνάρτηση $f(x)$ το ανάπτυγμα (1) μπορεί να αποτυγχάνει σε μεμονωμένες τιμές του ορίσματος x. Ο στόχος του είναι να δείξει ότι η αναπαράσταση (1) είναι παρόλα αυτά έγκυρη «γενικά» δηλαδή αλγεβρικά και θέλει να το δείξει με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχει μία εύλογη εξήγηση μέσα στο αλγεβρικό του θεωρητικό πλαίσιο της δυνατότητας εξαιρούμενων τιμών (Fraser, 1987).

Ως επεξήγηση ο Lagrange υπολόγισε μερικές από αυτές τις παραγώγους. Η παράγωγος της $f(x) = x^m$ ήταν mx^{m-1}, αφού $(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \ldots + i^m$. Με αυτό τον τρόπο, συνεχώς αναφερόμενος στον ορισμό του, ο Lagrange υπολόγισε τις παραγώγους για τις $f(x)=\log x$ και $f(x)=a^x$ και απέδειξε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$ και $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (Beckers, 1999).

Πώς προκύπτουν οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Taylor του Lagrange;

Προκειμένου να προσδιορίσει τους συντελεστές στην (1) ο Lagrange αντικαθιστά το i με το i+o και έχει

$f(x+i+o) = f(x) + p\,(i + o) + q\,(i + o)^2 + r\,(i + o)^3 + \ldots$

$f(x+i+o) = f(x) + pi + qi^2 + ri^2 + \ldots + po + 2qio + 3ri^2o + \ldots$(2)

Μετά αντικαθιστά στην (1) το x με x+o και έχει

$f(x+i+o) = f(x+o) + p(x+o)i + q(x+o)i^2 + r(x+o)i^3 + \ldots$

$= [f(x) + f'(x)o + \ldots] + [p(x) + p'(x)o + \ldots]i + [q(x) + q'(x)o + \ldots]i^2 + ..$

$f(x+i+o) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \ldots$(3)

Η σύγκριση των συντελεστών των (2) και (3) δίνει

$q(x) = ½ p'(x) = ½ f''(x)$

$r(x) = ⅓ q'(x) = ⅓!f'''(x)$

$s(x) = ¼ r'(x) = ¼!f^{(4)}(x)$ κλπ

όπου $f''(x)$ δηλώνει την πρώτη παραγόμενη συνάρτηση της $f'(x)$ κοκ. Κατά συνέπεια η σειρά (1) γίνεται

$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + ½!f''(x)i^2 + ⅓!f'''(x)i^3 + \ldots$

δηλαδή η σειρά Taylor.

Τέλος ο Lagrange παρατηρεί (1797, σελ.19) ότι μόνο λίγη γνώση του διαφορικού λογισμού είναι απαραίτητη για να αναγνωρίσει κανείς ότι οι παραγόμενες συναρτήσεις $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,…συμπίπτουν με τις διαδοχικές παραγώγους της $f(x)$. Στη πραγματικότητα η επαλήθευση απαιτεί την υπόθεση ότι η κατά όρους παραγώγιση της (1) ως προς i είναι έγκυρη (Edwards, 1979).

Το υπόλοιπο για τον τύπο του Taylor εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Κεφάλαιο VII (ibid., σελ.67).

Αρχίζει αντικαθιστώντας το x με x-i στην

$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + 1/2!f''(x)i^2 + 1/3!f'''(x)i^3 + \ldots$(4) και έχει

$f(x) = f(x-i) + if'(x-i) + i^2/2!f''(x-i) + \ldots$

Αντικατάσταση του i με xz δίνει

$f(x) = f(x-xz) + xz f'(x-xz) + x^2z^2/2!f''(x-xz) + \ldots x^nz^n/n! f^{(n)}(x-xz) + x^{n+1}z^{n+1}/(n+1)!f^{(n+1)}(x-xz) + \ldots.$

$f(x) = f(x-xz) + xz f'(x-xz) + x^2z^2/2!f''(x-xz) + \ldots x^nz^n/n! f^{(n)}(x-xz) + x^{n+1} R(x,z)$ (5)

Παρατηρούμε ότι $R(x,0) = 0$. (Για ένα σύγχρονο υπολογισμό του τύπου του Taylor με υπόλοιπο, θα ορίζαμε $R(x,z)$ για $z \neq 0$ μέσω της (5) αντί να υποθέσουμε την (4) για να αρχίσουμε.)

Στη συνέχεια παραγωγίζει την (5) ως προς z

$0 = - xf'(x-xz) + xf'(x-xz) - x^2z\, f''(x-xz) + x^2z\, f''(x-xz) - \ldots -x^{n+1}z^n /n!\, f^{(n+1)}(x-xz) + x^{n+1} R'(x,z)$ από όπου

$R'(x,z) = z^n/n!\, f^{(n+1)}(x-xz)$ (6) για τη μερική παράγωγο του R(x,z) ως προς z. Τώρα, έστω M και N η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της $f^{(n+1)}(x-xz)$ για z στο [0,1]. Τότε η (6) δίνει

$Mz^n/n! \leq R'(x,z) \leq Nz^n/n!$ για z στο [0,1]. Επειδή R(x,0) = 0, αντιδιαφόριση αυτής της ανισότητας δίνει

$Mz^{n+1}/(n+1)! \leq R(x,z) \leq Nz^{n+1}/(n+1)!$ για z στο [0,1].

Παίρνοντας z = 1 ειδικότερα, έχουμε

$M/(n+1)! \leq R(x,1) \leq N/(n+1)!$

Σε αυτό το σημείο ο Lagrange υποθέτει αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για να συμπεράνει ότι

$R(x,1) = f^{(n+1)}(x-x\bar{z}) / (n+1)!$ για κάποιο $\bar{z}$ στο [0,1]. Αντικατάσταση αυτής της τιμής με z = 1 στην (5) δίνει τελικά:

$f(x) = f(0) + f'(0) + ½!\, f''(0)x^2 + \ldots +1/n!\, f^{(n)}(0)\, x^n + 1/(n+1)!\, f^{(n+1)}(u)\, x^{n+1}$

όπου $u = x-x\bar{z} \in [o,x]$. Φυσικά ο τελευταίος όρος αυτής είναι η «μορφή Lagrange» του υπολοίπου. Ο Lagrange χειρίζεται ρητά μόνο τις ειδικές περιπτώσεις n = 0,1,2 υποδεικνύοντας ότι το γενικό αποτέλεσμα προκύπτει με ανάλογο τρόπο. Με ακρίβεια αναγνωρίζει τον δικό του τύπο Taylor με υπόλοιπο ως «ένα νέο θεώρημα αξιοσημείωτο για την απλότητα και τη γενικότητα του» (Edwards, ibid.).

Η απόδειξη περιέχει κάποια αδύναμα σημεία. Υποθέτει ότι η f' είναι φραγμένη και μοιάζει να νομίζει ότι για αυτό είναι αρκετό η f' να είναι πεπερασμένη και ποτέ ίση με μηδέν.

Η εργασία του Lagrange παρείχε μία λογικά σταθερή θεμελίωση των σειρών Taylor που είχε τυποποιήσει τον κεντρικό ρόλο των αναπτυγμάτων άπειρων σειρών στις έρευνες του 18ου αιώνα, και ταυτόχρονα κατέδειξε την ανάγκη για μελέτη των βασικών ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων (δηλαδή ακρότατα και ενδιάμεση τιμή) που σύντομα ακολούθησαν τον 19ο αιώνα (Edwards, ibid.).

Η χρήση των ανισοτήτων από τον Lagrange στον Λογισμό ήταν αντίστοιχη της χρήσης που γινόταν στην Άλγεβρα : **οι ανισότητες δεν υπεισέρχονταν στον ορισμό αλλά μόνο στον καθορισμό των πεπερασμένων προσεγγίσεων** που ήταν

αναγκαίες για τις εφαρμογές και την επίλυση προβλημάτων. Για τον Lagrange το υπόλοιπο μια σειράς Taylor αντιπροσώπευε έναν άλλο τρόπο εύρεσης του λάθους που προκύπτει όταν μια απειροσειρά αντικαθίσταται από μια πεπερασμένη προσέγγιση.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της δυναμοσειράς της f κατάλαβε ότι η θεμελιώδης αρχή στην οποία βασίζονται οι εφαρμογές του Λογισμού στην Μηχανική και Γεωμετρία είναι το γεγονός ότι το πηλίκο $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ προσεγγίζει την παράγωγο συνάρτηση f′ οσοδήποτε κοντά θέλουμε για κατάλληλα μικρό i. Στο ένατο *Leçon*, χρησιμοποίησε ανισότητες για να συνάγει αποτελέσματα σχετικά με μια συνάρτηση από την συμπεριφορά της παραγώγου της.

Συνολικά επιχείρησε μία άλλη μορφή παρουσίασης βασισμένη στην έννοια της συνάρτησης και κάνοντας αυτό, εστίασε τη προσοχή σχεδόν για πρώτη φορά στην ποσότητα που είναι σήμερα στο κέντρο του λογισμού, την παράγωγο συνάρτηση (Boyer, 1949).

Θεμελιώδες Θεώρημα

Ο Lagrange απέδειξε μία εκδοχή του θεωρήματος: $f(x) = F'(x)$ για μία συνάρτηση $F(x)$ ορισμένη ως το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη $y = f(x)$ μέχρι κάποιο x. Η απόδειξη του είναι τεχνικά παρόμοια με αυτή του Cauchy παρόλο που τα λογικά πλαίσια των δύο αποδείξεων είναι τελείως διαφορετικά.

Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ από x έως $x + i$ δίνεται, λέει ο Lagrange από $F(x+i) - F(x)$ όπου η F αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση εμβαδού. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα $[x, x+i]$. Σε αυτή τη περίπτωση η γεωμετρία της κατάστασης κάνει καθαρό ότι το εμβαδόν κάτω από το τμήμα της καμπύλης μεταξύ x και $x+i$ βρίσκεται μεταξύ $if(x)$ και $if(x+i)$. Δηλαδή,

$if(x) \leq F(x+i) - F(x) \leq if(x+i)$ (1) (*Fonctions analytiques,* αναφέρθηκε και στην περίπτωση φθίνουσας) Φυσικά το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αλλά, συνέχισε ο Lagrange, η σειρά Taylor με υπόλοιπο υποδηλώνει ότι

$f(x+i) = f(x) + if'(x+j_f)$

$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + (i^2/2)F''(x+j_F)$

(Ο Lagrange χρησιμοποίησε μόνο j και για τις δύο ποσότητες j_f και j_F , αλλά αναγνώρισε ρητά ότι είναι ξεχωριστές). Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$if(x) \leq iF'(x) + (i^2/2)F''(x + j_F) \leq if(x) + i^2 f'(x+j_f)$ Για αυτό,

$0 \leq i\,[F'(x) - f(x)] + (i^2/2)\,F''(x+j_F) \leq i^2\, f'(x+j_f)$ (2)

Η (2) ισχύει για όλα τα i, ανεξάρτητα του πόσο μικρά είναι. Άρα, λέει ο Lagrange, $F'(x) - f(x)$ πρέπει να είναι μηδέν. Αν όχι, επισήμανε,

$|i| < |\,[F'(x) - f(x)]/[f'(x + j_f) - (1/2)\,F''(x + j_F)]\,|$ θα έκανε την (2) λανθασμένη. Άρα συνεπάγεται ότι $F'(x) = f(x)$.

Η έκφραση της σειράς Taylor παίζει για τον Lagrange τον ίδιο λογικό ρόλο στην απόδειξη που παίζει το θεώρημα μέσης τιμής για τις παραγώγους στην απόδειξη του Cauchy. Αλλά η απόδειξη του έχει όρια. Ο Lagrange υπέθεσε ότι η συνάρτηση F έχει δύο παραγώγους δηλαδή χρησιμοποίησε ρητά την υπόθεση ότι η f είχε και παράγωγο και αντιπαράγωγο. Επιπλέον δεν είχε ορίσει ούτε εμβαδόν ούτε ολοκλήρωμα και η απόδειξη του απαιτεί η συνάρτηση να είναι μονότονη (Grabiner, 1981).

Η εργασία του Lagrange παρέχει την σύνδεση μεταξύ της άλγεβρας του Lagrange και της ανάλυσης του Cauchy, παρέχοντας άμεση απόδειξη ότι η άλγεβρα του 18^{ου} αιώνα βοήθησε τον Cauchy να έχει ευχέρεια σε υψηλού βαθμού συνθετότητας ανισότητες, τις οποίες χρειαζόταν για την θεωρία του για την σύγκλιση σειρών.

Ο θρίαμβος της καθαρής ανάλυσης απαλλαγμένης από τη γεωμετρική δράση του Newton, επιβεβαιώνεται στο πλέον αξιόλογο βιβλίο του Lagrange, την Αναλυτική Μηχανική. Στο σύγγραμμα αυτό (στο οποίο ο συγγραφέας τονίζει στον πρόλογο: «δεν θα βρεθεί κανένα σχήμα σε αυτό το έργο, μονάχα αλγεβρικές πράξεις») εφαρμόζεται η πλήρης δύναμη της νεοαναπτυγμένης ανάλυσης στη μηχανική των σημείων και των στερεών σωμάτων. Η πλήρης χρησιμοποίηση των μεθόδων του λογισμού των μεταβολών του Lagrange έκανε δυνατή την ενοποίηση των διάφορων αρχών της στατικής και της δυναμικής (Struik, 1966).

Στα αρνητικά της μεθόδου του, βασίζεται στην αδικαιολόγητη υπόθεση ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτόν τον τρόπο. Επιπλέον, η διαφυγή από το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό και από την έννοια του ορίου είναι απατηλή αφού αυτές οι έννοιες υπεισέρχονται στο κρίσιμο ερώτημα της σύγκλισης το οποίο δεν πήρε υπόψη του επαρκώς ο Lagrange. Ακόμα, η μέθοδος του

στερείται της ευκολίας των πράξεων που παρείχαν οι ιδέες και ο συμβολισμός του Leibniz.

Σύντομα άρχισαν να υπάρχουν αμφιβολίες ως προς την ορθότητα της αρχής ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις μπορούν να επεκταθούν σε σειρές Taylor. Επισημάνθηκε ότι μία τέτοια επέκταση είναι δυνατή μόνο για τις πιο απλές συναρτήσεις και κατά συνέπεια η μέθοδος ήταν περιορισμένης εφαρμογής. Οι απόψεις για την σύγκλιση, τη συνέχεια και την συνάρτηση που επικρατούσαν εκείνη την εποχή δεν ήταν επαρκώς σαφείς για να επιτρέψουν μία βαθύτερη αποσαφήνιση αυτών των ιδεών (Boyer, 1949).

Οι παραδόσεις του Lagrange αναπτύχθηκαν στην Γαλλία, τη Γερμανία, την Ολλανδία και τελικά και την Αγγλία. Αυτό που φαίνεται ότι ενοποιούσε τους μαθηματικούς σε αυτές τις χώρες ήταν η πεποίθηση τους ότι η Άλγεβρα μπορούσε να παρέχει γνήσια θεμέλια για τον Λογισμό. Η πίστη στις δυναμοσειρές ως ορισμένης ιδιότητας της παραγώγου εξαφανίστηκε σύντομα μετά τον θάνατο του Lagrange το 1813.

Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes,

daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.

Von

Bernard Bolzano.

[3] Vorrede.

Zwey Sätze in der Lehre von den Gleichungen gibt es, in Betreff deren man noch vor Kurzem sagen konnte, daß ein völlig richtiger Beweis derselben unbekannt sey. Der eine ist der Satz: daß zwischen je zwey Werthen der unbekannten Größe, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, allemahl wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegen müsse. Der andere lautet: daß jede algebraische rationale ganze Function einer veränderlichen Größe sich in reale Factoren des ersten oder zweyten Grades zerlegen lasse. — Von dem letzteren Satze hat uns, nach mehreren mißlungenen Versuchen eines *d'Alembert*, *Euler*, *de Foncenex*, *La Grange*, *La Place*, *Klügel* u. A., im vorigen Jahre [4] endlich *Hr. Gauß* ein paar Beweise geliefert, die kaum mehr etwas zu wünschen übrig lassen dürften. Es beschenkte uns zwar dieser vortreffliche Gelehrte schon in dem Jahre 1799 mit einem Beweise für diesen Satz*), der aber noch den von ihm selbst eingestandenen Fehler hatte, daß er die rein analytische Wahrheit auf eine geometrische Betrachtung

*) Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii. 4°. 1799.

1*

(School of Mathematics and Statistics, University St. Andrews)

Bernard BOLZANO 1781-1848

Ο Bolzano (1781-1848) ήταν καθηγητής της Θεολογίας στο Πανεπιστήμιο της Πράγας από το 1807 μέχρι την απομάκρυνση του το 1819 μετά από μία μακρά φιλονικία που ήταν αποτέλεσμα των μάλλον ριζοσπαστικών του απόψεων για την πολιτική και τη θεολογία. Τα Μαθηματικά και η φιλοσοφία ήταν τα πρωταρχικά του ενδιαφέροντα από νωρίς, παρόλο που μελέτησε και είχε συνεισφορά και σε άλλα αντικείμενα μεταξύ των οποίων ηθική και λογική. Το μεγαλύτερο έργο του *Wissenschaftslehre* (*Θεωρία της Επιστήμης*), δημοσιευμένο το 1837, είναι πρωταρχικά ένα εγχειρίδιο λογικής (Russ, 1980).

Η έκταση των μαθηματικών του συνεισφορών, η πρωτοτυπία τους και τα κίνητρα του δεν είναι γενικά γνωστά.

Οι μαθηματικές ανακαλύψεις του Bolzano εντάσσονται σε ένα πλαίσιο λογικού και επιστημολογικού στοχασμού σχετικά με την έννοια της αλήθειας, την έννοια της απόδειξης και του γεγονότος ότι η απόδειξη παρέχει μία αντικειμενική και αυστηρή θεμελίωση της επιστήμης (Sinaceur, 1999).

Τονίζει την αντιστοιχία μεταξύ του ρόλου του ως πρακτικού, αφιερωμένου στην αναζήτηση αυστηρών αποδείξεων και ως θεωρητικού που εστιάζει στον ουσιαστικό ρόλο της απόδειξης στην επιστήμη.

Για τον Bolzano **μαθηματικά και φιλοσοφία αποτελούν και τα δύο εννοιολογικές γνώσεις** δηλαδή προέρχονται αποκλειστικά από έννοιες χωρίς προσφυγή στη διαίσθηση. Και στα δύο η μέθοδος είναι η ίδια: συνίσταται στην αναζήτηση των αιτιών και των συνεπειών και στην ανάδειξη της αντικειμενικής σχέσης των αληθειών (Sinaceur, 1999).

Στο έργο του «*Συνεισφορές σε μία καλύτερα θεμελιωμένη παρουσίαση των μαθηματικών*» ο Bolzano διακρίνει μεταξύ δύο ειδών παρουσίασης μίας επιστήμης, την αυστηρά επιστημονική και την πρακτική. Η δεύτερη – η οποία περιλαμβάνει πολλά χαρακτηριστικά που υπαγορεύονται από παιδαγωγικές απαιτήσεις – είναι πολύ πιο σημαντική κατά την άποψη του : γιατί οι επιστήμες δημοσιεύονται στα βιβλία πρώτα απ'όλα για να ανακοινωθούν έτσι ώστε η γνώση που περιέχεται σε αυτά να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο ανθρώπινο είδος. Παρόλα αυτά αφοσιώθηκε στο πρώτο είδος ανάπτυξης. Αυτό εν μέρει προήλθε από τη πεποίθηση του ότι προκειμένου να γράψει κανείς μια πραγματικά θαυμάσια πρακτική πραγματεία θα πρέπει να κατέχει αυστηρά την επιστήμη. Αλλά υπήρχαν και άλλοι

λόγοι. Η ενστάλαξη λογικής σειράς σε μία επιστήμη μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τις έννοιες της με μεγαλύτερη ευκολία και ακρίβεια, και επιπλέον να ανακαλύψουμε νέες αλήθειες γιατί «περισσότερα μπορούν να συναχθούν από τις πρώτες ιδέες όταν εκτίθενται σωστά και ευκρινώς παρά όταν είναι διασκορπισμένες με σύγχυση» (Rusnock, 1999).

Ο Bolzano ήταν ένας από τους πρωτοπόρους στο ζήτημα της αυστηρότητας των θεμελιωδών ιδεών του Λογισμού – της αριθμητικοποίησης του και της προσεκτικής μελέτης του απείρου. Το 1799 ο Gauss είχε δώσει μια απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας - ότι κάθε ρητή, ακέραια αλγεβρική εξίσωση έχει μία ρίζα - χρησιμοποιώντας θεωρήσεις από τη γεωμετρία. Ο Bolzano επιθυμούσε μία απόδειξη που να εμπλέκει μόνο θεωρήσεις από την αριθμητική, την άλγεβρα και την ανάλυση. Όπως ο Lagrange πίστευε ότι η εισαγωγή του χρόνου και της κίνησης στα μαθηματικά είναι άχρηστη, έτσι και ο Bolzano επιδίωκε να αποφύγει στις αποδείξεις του όποιες θεωρήσεις προέρχονταν από χωρική διαίσθηση (*Rein analytischer Beweis* σελ. 9-10).

Συνέχεια

Αυτή η στάση απαιτούσε καταρχήν ένα ικανοποιητικό ορισμό της **συνέχειας**, τον οποίο και έδωσε μαζί με τον ορισμό της σύγκλισης στο *Rein analytischer Beweis,* αποφεύγοντας τα απειροστά. (Ο Newton είχε αποφύγει μία τέτοια ενόχληση κάνοντας έκκληση στην διαίσθηση της συνεχούς κίνησης και ο Leibniz κάνοντας έκκληση στο αξίωμα της συνέχειας (Boyer, 1949)). Η έλλειψη θεωρίας για τη συνέχεια τον 18^{ο} αιώνα δεν οφείλεται σε τεχνικές ελλείψεις από την πλευρά του Lagrange ή από τους σύγχρονους του (Youschkevitch, 1976).

Η περιγραφή της συνέχειας του Euler που ήταν δημοφιλής, ο νόμος ή η έκφραση της f(x) συνεχίζει να ισχύει όταν μεταβάλλεται το x, δεν ήταν ικανοποιητική όταν παρατηρήθηκε ότι μία έκφραση ως τριγωνομετρική σειρά μπορεί να αντιπροσωπεύει μία συνάρτηση με διαφορετικούς νόμους για τις διάφορες τιμές του x (Grattan-Guinness, 1994).

Η έννοια της **συνέχειας** ήταν συγκεχυμένη. Μία συνάρτηση θεωρείτο συνεχής αν πληρούσε κάποιο από τα παρακάτω:

- είχε την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής
- αντιπροσωπευόταν από ένα μόνο τύπο
- ήταν διαφορίσιμη
- δεν είχε «πηδήματα»
- δοθείσης μιας «ανεπαίσθητης» μεταβολής της ανεξάρτητης μεταβλητής, η ίδια η συνάρτηση υφίστατο μια «ανεπαίσθητη» μεταβολή.

Στα μέσα του 18^{ου} αιώνα χρειάστηκε να αντιμετωπιστούν συναρτήσεις που παρουσιάζονταν όχι ως αναλυτικές εκφράσεις αλλά ως λύσεις σε μερικές διαφορικές εξισώσεις από τη φυσική. Αυτές οι συναρτήσεις μπορεί να μη δίνονταν καθόλου από ρητούς τύπους.

Επιπλέον, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, η εργασία του Fourier έδειξε ότι αρκετά αυθαίρετες ασυνεχείς καμπύλες μπορούσαν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω άπειρων σειρών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ο Fourier στο έργο του *Αναλυτική θεωρία της θερμότητας* (1822) απέδειξε ότι μία «αυθαίρετη» συνάρτηση (εννοώντας συνάρτηση παραστάσιμη από ένα τόξο συνεχούς καμπύλης ή από μία διαδοχή τέτοιων τόξων) μπορούσε να παρασταθεί με μία τριγωνομετρική σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nax) + B_n \sin(nax)$. Η χρησιμοποίηση της από τον Fourier συντέλεσε στον προβληματισμό σχετικά με το τι εννοούμε λέγοντας «συνάρτηση» (Struik, 1966).

Ως αποτέλεσμα η συμπεριφορά προς την έννοια της συνάρτησης έγινε ευρύτερη. Άρχισε να γίνεται κατανοητό ότι θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε σχέση μεταξύ μεταβλητών και μαζί με αυτό άρχισε να αναγνωρίζεται ότι η συνέχεια σε μία καμπύλη δεν εξαρτάται από το αν μπορούσε να εκφραστεί με μία ισότητα. Άρα ήταν απαραίτητος ένας νέος ορισμός της συνέχειας.

Ο Bolzano παρατήρησε ότι ο όρος συνεχής συνάρτηση είχε χρησιμοποιηθεί με πολλές διαφορετικές έννοιες: Από τον Lacroix με την έννοια ότι ο λόγος $\Delta F(x)/\Delta x$ είναι φραγμένος, από τους Kastner και Fries με την έννοια ότι η συνάρτηση έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, από τον Eytelwein με την έννοια ότι η συνάρτηση είναι πραγματική και πεπερασμένη. Αυτές οι ιδιότητες είναι όλες σημαντικές είπε ο Bolzano, και πρέπει να διακρίνονται η μία από την άλλη.

Ο Bolzano έδωσε ένα ορισμό της συνεχούς συνάρτησης, ο οποίος για πρώτη φορά έδειχνε καθαρά ότι η βάση της ιδέας της συνέχειας θα βρισκόταν στην έννοια του ορίου. Όρισε μία συνάρτηση f(x) ως συνεχή σε ένα διάστημα αν για όποια τιμή του x σε αυτό το διάστημα, η διαφορά f(x+Δx) - f(x) γίνεται και παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα για Δx επαρκώς μικρό, είτε θετικό είτε αρνητικό:

«Μία συνάρτηση f(x) για όλες τις τιμές του x, μέσα ή έξω από συγκεκριμένα φράγματα, μεταβάλλεται σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας μόνο στο βαθμό που, εάν x είναι όποια τέτοια τιμή, η διαφορά f(x+ω) - f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, όταν το ω παρθεί όσο μικρό επιθυμούμε» (*Rein analytischer Beweis*, σελ.11-12). Αυτός ο ορισμός δεν είναι βασικά διαφορετικός από αυτόν που έδωσε ο Cauchy λίγο αργότερα.

Πέντε μαθηματικά του έργα δημοσιεύθηκαν από τον Bolzano μεταξύ 1804 και 1817, οπότε υπήρχε μία διακοπή στην απόδοση του κυρίως λόγω της λογοκρισίας που του επιβλήθηκε από τη Βιέννη.

Οι πέντε πρώιμες εργασίες του Bolzano είναι:

(1) *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* [*Θεωρήσεις σε κάποια θέματα της στοιχειώδους γεωμετρίας*] 1804, Πράγα. (63 σελίδες)

(2) *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik Erste Lieferung.* [*Συνεισφορές σε μία καλύτερα θεμελιωμένη παρουσίαση των μαθηματικών*] 1810, Πράγα (152 σελίδες)

(3) *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung des Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen* [*Το διωνυμικό θεώρημα και ως συνέπεια αυτού το πολυωνυμικό θεώρημα και οι σειρές που χρησιμεύουν για τον υπολογισμό λογαριθμικών και εκθετικών ποσοτήτων, αποδεδειγμένα πιο αυστηρά από πριν*] 1816, Πράγα (144 σελίδες.)

(4) *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt* [*Τα τρία προβλήματα της ευθυγράμμισης, complanation, και cubature,*

επιλυμένα χωρίς θεώρηση του άπειρα μικρού, χωρίς την υπόθεση του Αρχιμήδη και χωρίς καμία υπόθεση η οποία δεν είναι αυστηρά αποδείξιμη. Ταυτόχρονα είναι παρουσιασμένα στην προσεκτική εξέταση όλων των μαθηματικών ως ένα δείγμα πλήρους αναδιοργάνωσης της επιστήμης του χώρου] 1817, Leipzig. (80 σελίδες.)
(5) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengsetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* [*Καθαρά αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ότι μεταξύ όποιων δύο τιμών που δίνουν αποτελέσματα διαφορετικών προσήμων βρίσκεται τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης*] 1817, Πράγα (60 σελίδες.)

Το έργο του ***Rein analytischer Beweis***, (παρατίθεται αυτούσιο στο παράρτημα) είναι το μαθηματικά πλέον σημαντικό, αποτελεί ένα σημαντικό στάδιο στην αυστηρή θεμελίωση της ανάλυσης, και είναι ένα από τα πρώτα όπου η συνέχεια της συνάρτησης και η σύγκλιση άπειρων σειρών ορίζονται και χρησιμοποιούνται σωστά (Russ, 1980).

Στην Εισαγωγή του περιγράφει το υπόβαθρο και τα κίνητρα όχι μόνο αυτής αλλά σχεδόν όλων των προηγούμενων εργασιών του. Υπογραμμίζει την ουσιώδη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών αποτελεσμάτων και των στοχασμών του για την επιστήμη.

Τα κύρια μαθηματικά επιτεύγματα της εργασίας περιλαμβάνουν:

(α) Τον τυπικό ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, σωστά κατανοητού και εφαρμοσμένου (Πρόλογος).

(β) Το κριτήριο για την (κατά σημείο) σύγκλιση άπειρης σειράς, παρόλο που η απόδειξη της επάρκειας του πριν από όποιο ορισμό ή κατασκευή των πραγματικών αριθμών είναι αναπόφευκτα ανεπαρκής. (Τμήμα 7) Αν η σειρά $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, … ,$F_n(x)$,…, $F_{n+r}(x)$ είναι τέτοια που η διαφορά μεταξύ $F_n(x)$ και $F_{n+r}(x)$ γίνεται και παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα καθώς το n αυξάνει επ' αόριστον, τότε υπάρχει μία και μόνο μία τιμή την οποία προσεγγίζει η σειρά όσο κοντά θέλει κανείς.

(γ) Τη πρωτότυπη μορφή του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass (Τμήμα 12). Ως ένα κρίσιμο λήμμα ο Bolzano υπέθεσε ότι εάν M είναι μία ιδιότητα των πραγματικών αριθμών η οποία δεν ισχύει για όλα τα x, και υπάρχει αριθμός u τέτοιος ώστε όλοι οι αριθμοί $x < u$ έχουν την ιδιότητα M τότε υπάρχει ένα μέγιστο U τέτοιο ώστε όλοι οι αριθμοί $x < U$ έχουν την ιδιότητα M. Στην απόδειξη που αποπειράθηκε με την τώρα γνωστή μέθοδο της διχοτόμησης, κατασκεύασε μία «ακολουθία Cauchy» $\{u_n\}_1^\infty$ προοριζόμενη να συγκλίνει στο επιθυμητό U. Παρόλο που και αυτός (και αργότερα και ο Cauchy) δήλωσε σωστά από που σήμερα ονομάζουμε «κριτήριο σύγκλισης του Cauchy» [η $\{u_n\}_1^\infty$ συγκλίνει εάν και μόνον εάν δοθέντος $\varepsilon > 0$, $|u_m - u_n| < \varepsilon$ για m και n επαρκώς μεγάλα] δεν μπόρεσε (ούτε ο Cauchy) να παρέχει μία πλήρη απόδειξη λόγω έλλειψης της ιδιότητας της πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών (Edwards, 1979).

Το θεώρημα περιγράφεται συνήθως, ως το θεώρημα ύπαρξης ελάχιστου άνω φράγματος ενός φραγμένου συνόλου πραγματικών αριθμών. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971) , ωστόσο, τα μόνα φραγμένα σύνολα που θεωρούνται είναι κατώτερες κλάσεις που χρησιμοποιούνται στις τομές Dedekind γι αυτό θα ήταν καλύτερα να το ονομάζουμε θεώρημα ύπαρξης του αριθμού τομής. Από παλιά χρησιμοποιείτο ρητά ή υπόρρητα. Ήταν ιδέα του Bolzano η προσπάθεια απόδειξης του. Η απόδειξη, που χρησιμοποιεί μία ακολουθία διχοτομιών και το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy είναι σωστή.

(δ) Μία αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής (Τμήμα 15). Ο Bolzano χρησιμοποίησε το παραπάνω λήμμα για να αποδείξει την παρακάτω γενίκευση του θεωρήματος του τίτλου του: Εάν f(x) και g(x) είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [a,b] με $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$, τότε $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ για κάποιο $\bar{x}$ μεταξύ a και b (Edwards, 1979).

Το θεώρημα παράγεται θεωρώντας το υποσύνολο των y τέτοιων ώστε $f(x) < \varphi(x)$ για όλα τα $x \leq y$ και εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα σε αυτό. Πάλι, η ιδέα της απόδειξης οφείλεται στον Bolzano.

Το θεώρημα στον τίτλο του άρθρου, όπου η «εξίσωση» γίνεται κατανοητή ως «πολυωνυμική εξίσωση μιας πραγματικής μεταβλητής» συμπεραίνεται στην τελική παράγραφο (Τμήμα 18) από το αποτέλεσμα (δ).

Ο Bolzano δεν ήταν ο πρώτος που δεν ήταν ικανοποιημένος από γεωμετρικές αποδείξεις και που έβλεπε την ανάγκη για αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, αλλά οπωσδήποτε ήταν ο σπουδαιότερος στην ανάπτυξη των εννοιών και μεθόδων προκειμένου να καλυφθεί αυτή η ανάγκη. Κάνοντας το ανταποκρινόταν άμεσα και ρητά στις ειδικές του φιλοσοφικές απαιτήσεις (Russ, 1980).

Συνοπτικά, ο Bolzano έδωσε μία απόδειξη ότι η ύπαρξη του ορίου μιας ακολουθίας Cauchy δεν περιέχει καμία αντίφαση (στην πραγματικότητα αποδεικνύοντας την αναγκαιότητα του κριτηρίου σύγκλισης του Cauchy). Στη συνέχεια χρησιμοποίησε την επάρκεια του κριτηρίου για να αποδείξει ότι ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ένα τουλάχιστον άνω φράγμα. Τέλος, χρησιμοποίησε την ιδιότητα του ελάχιστου άνω φράγματος για να αποδείξει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Ο χειρισμός του κριτηρίου από τον ίδιο τον Cauchy αφορά στις σειρές. Απέδειξε πρώτα την αναγκαιότητα του και στη συνέχεια δήλωσε - χωρίς απόδειξη - την επάρκεια του στο *Cours d' analyse*. Το χρησιμοποίησε, αν και σπάνια, συζητώντας την σύγκλιση συγκεκριμένων σειρών (Grabiner, 1981).

Εξοπλισμένος με τον ακριβή του ορισμό της συνέχειας ο Bolzano, ανέλαβε μία προσεκτική **εξέταση των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων**: διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ συνέχειας και μονοτονίας, διαφορισιμότητας, φραγμένου, ύπαρξης και κατανομής των μέγιστων και ελάχιστων κλπ. Επιπροσθέτως του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, αποδεικνύει ότι μία συνάρτηση συνεχής σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη και έχει ακρότατα σε αυτό, ότι μία συνεχής συνάρτηση μπορεί να έχει είτε τοπικά είτε ολικά ακρότατα ένα αυθαίρετο αριθμό φορών σε κάθε διάστημα, ότι μία συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα μονότονη σε όποιο υποδιάστημα δοθέντος διαστήματος, ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα διάστημα και όμως να μην έχει παράγωγο σε ένα σύνολο σημείων πυκνό στο διάστημα. Οι αποδείξεις, οι οποίες περιλαμβάνουν την κατασκευή έξυπνων αντιπαραδειγμάτων και την επιδέξια χρήση τοπολογικών και ποσοτικοποιημένων εννοιών, αναγγέλλουν την αρχή ενός νέου είδους μαθηματικών και αποτελούν την καλύτερη εργασία του Bolzano ως μαθηματικού (Rusnock, 1999).

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την απόδειξη του ότι μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα [a,b] επιτυγχάνει μέγιστο στο διάστημα. Η απόδειξη του περιέχει τα παρακάτω τρία αποτελέσματα: 1. Μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη σε αυτό. (ibid.). 2. Ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών (τους ονομάζει «μετρήσιμους») αριθμούς έχει *τουλάχιστον* ένα άνω φράγμα (*Rein Analytischer Beweis*) και 3. Εάν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [a,b] και έρχεται αυθαίρετα κοντά σε μία τιμή C στο διάστημα, τότε f(x)=C για κάποιο x στο [a,b]. Το 3 αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι f έρχεται αυθαίρετα κοντά σε μία τιμή C σε ένα διάστημα [a,b]. Τότε είτε f(x)=C για κάποιο x στο [a,b] είτε υπάρχουν x_1, x_2, … τέτοια ώστε $|C-f(x_n)|< 1/n$ για n=1,2,3,… Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass (ο Bolzano αναφέρεται σε μία απόδειξη αυτού του αποτελέσματος στη θεωρία μετρήσιμων αριθμών αλλά δεν έχει βρεθεί εκεί, ωστόσο δεν υπάρχει λόγος να υποθέσει κανείς ότι δεν είχε μία απόδειξη), το x_i θα έχει ένα όριο c στο [a,b]. Αφού η f είναι επίσης συνεχής στο c προκύπτει ως αναγκαίο συμπέρασμα ότι f(c)=C. Το κύριο αποτέλεσμα αποδεικνύεται τότε παρατηρώντας ότι (από το 1) οι τιμές της f είναι φραγμένες στο [a,b] και άρα (από το 2) το σύνολο τιμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα M. Αφού το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα για την f, η f είτε θα επιτυγχάνει είτε θα φθάνει αυθαίρετα κοντά στο M στο [a,b]. Από το θεώρημα 3, προκύπτει ότι f(x)=M για κάποιο x στο [a,b] (Rusnock, 1999).

Παράγωγος

Ο Bolzano αναγνώρισε καθαρά ότι το αντικείμενο του λογισμού έπρεπε να επεξηγηθεί με όρους ορίων λόγων πεπερασμένων διαφορών. **Όρισε την παράγωγο** της F(x) για όποια τιμή του x ως την ποσότητα F΄(x) την οποία ο λόγος $\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ πλησιάζει επ' αόριστον κοντά ή όσο κοντά επιθυμούμε, καθώς το Δx πλησιάζει το μηδέν, είτε το Δx είναι θετικό είτε αρνητικό. (*Paradoxien des Unendlichen*, σελ.66). Αυτός ο ορισμός είναι κατ' ουσίαν ίδιος με αυτόν του L' Huilier, αλλά ο Bolzano προχώρησε περισσότερο εξηγώντας την φύση της έννοιας του ορίου. Ο Lagrange και άλλοι μαθηματικοί νόμιζαν ότι η έννοια του

ορίου ήταν συνδεδεμένη με ένα λόγο εκλιπόντων ποσοτήτων ή μηδέν. Ο Euler είχε εξηγήσει το dy/dx ως ένα λόγο μηδενικών και ο Lacroix συμφώνησε μαζί του. Ο Bolzano ωστόσο έδωσε έμφαση στο γεγονός ότι αυτό δεν έπρεπε να ερμηνευτεί ως ένας λόγος του dy ως προς dx ή ως το πηλίκο του μηδενός δια μηδέν αλλά ήταν μάλλον ένα σύμβολο για μία συνάρτηση. Υποστήριζε ότι μία συνάρτηση δεν έχει καθορισμένη τιμή σε ένα σημείο αν ελαττώνεται στο 0/0. Ωστόσο, μπορεί να έχει μία οριακή τιμή καθώς προσεγγίζεται αυτό το σημείο και σωστά υπέδειξε ότι υιοθετώντας την οριακή τιμή ως το νόημα του 0/0, η συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε αυτό το σημείο (Boyer, 1949).

Το 1834 έδωσε ένα παράδειγμα **μιας μη διαφορίσιμης συνεχούς συνάρτησης**. Αυτή βασίστηκε σε μία βασική διαδικασία η οποία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Έστω PQ ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Έστω M το μέσον του, και διαιρούμε τα τμήματα PM και MQ σε τέσσερα ίσα μέρη, με τα σημεία P_1, P_2, P_3, και Q_1, Q_2,Q_3. . Έστω P'_3 η ανάκλαση του σημείου P_3 ως προς το οριζόντιο επίπεδο μέσω του M και Q'_3 η ανάκλαση του Q_3 μέσω του Q. Σχηματίζεται η τεθλασμένη γραμμή $PP'_3MQ'_3Q$. Τώρα εφαρμόζουμε σε κάθε ένα από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα αυτής της τεθλασμένης την ίδια διαδικασία, και έχουμε μία τεθλασμένη που αποτελείται από 4^2 τμήματα. Συνεχίζοντας έτσι αυτή τη διαδικασία επ' αόριστον , η τεθλασμένη θα συγκλίνει προς μία καμπύλη που αντιπροσωπεύει μία συνεχή συνάρτηση πουθενά διαφορίσιμη, (σε αντίθεση με τη γεωμετρική και φυσική διαίσθηση) (Boyer, 1949).

Για τον Bolzano όπως και τον Cauchy η άλγεβρα των ανισοτήτων έπαιξε σημαντικό ρόλο στις αποδείξεις. Αλλά ο Bolzano τόνισε πολύ περισσότερο από τον Cauchy ότι έσπαζε τους δεσμούς με το παρελθόν. Για παράδειγμα, σκόπιμα απέφυγε την χρήση του όρου απειροστό. Τα πάντα έπρεπε να αναχθούν στην άλγεβρα, χωρίς αναφορές σε απειροστά, γεωμετρία, ιδέες χώρου ή χρόνου, ή όποιες διαισθητικές ιδέες.

Η επίδραση του Lagrange στον Bolzano

Ο Bolzano , όπως και ο Cauchy μελετούσε με προσοχή τα κείμενα του Lagrange από τη στιγμή που εμφανίζονταν, μαθαίνοντας από αυτά πολλά σημεία τεχνικής και γενικής αντίληψης ενώ ταυτόχρονα σημείωνε σοβαρά προβλήματα λογικής αλληλουχίας και οργάνωσης.

Εκτιμούσε πολύ την εργασία του Lagrange και έμαθε πολλά από αυτόν. Ανταποκρινόμενος σε αυτή, επεδίωξε πάνω από όλα να διατηρήσει όσο περισσότερα μπορούσε από τη δομή του, όσα ήταν συμβατά με τη μεθοδολογία του. Κυρίως ήταν ζήτημα κατάλληλου ορισμού των νοημάτων των εννοιών και περισσότερο ακριβούς διατύπωσης των θεωρημάτων. Ο Lagrange είχε πραγματικά ταλέντο στο να διατυπώνει σημαντικά θεωρήματα, ο Bolzano στο να τα αιτιολογεί (Rusnock, 1999).

Το έργο του [το οποίο πάντως δεν δημοσιεύθηκε κατά τη διάρκεια της ζωής του] συνιστά μια λεπτομερή απάντηση στον Lagrange. Κατά μία έννοια είναι πολύ γνωστό, κατά άλλη όχι. Πολύ γνωστό επειδή από πολλές απόψεις μοιάζει πολύ με την καθιερωμένη προσέγγιση στην πραγματική ανάλυση που συνδέεται με τα ονόματα των Cauchy και Weierstrass. Όχι τόσο γνωστό, γιατί δημοσιεύθηκε το 1930 και δεδομένου ότι δεν είχε ανιχνεύσιμη επίδραση στα μαθηματικά του 19^{ου} αιώνα, δεν απέσπασε μεγάλη προσοχή από τους ιστορικούς των μαθηματικών.

Ο Bolzano αρχίζει, με ερωτήματα που αφορούν στο νόημα: Τι είναι ένας πραγματικός αριθμός; Τι είναι συνάρτηση; Τι σημαίνει ότι μία άπειρη σειρά αντιπροσωπεύει μία δοθείσα συνάρτηση; κοκ. Για παράδειγμα ο **ορισμός του της συνάρτησης**, είναι πολύ ευρύτερος του ορισμού του Lagrange. Οι πραγματικές συναρτήσεις για αυτόν είναι απεικονίσεις: η **αλγεβρική μορφή** με την έννοια του Lagrange - εάν υπάρχει καθόλου - είναι μία **παράγωγη ιδιότητα** αυτών. Οι **σειρές**, θεωρούνται όχι μόνο ως εξελίξεις των αναλυτικών συναρτήσεων αλλά ως **ανεξάρτητα μαθηματικά αντικείμενα** ιδίω δικαιώματι (Fraser, 1987). Το **άθροισμα άπειρης σειράς** ορίζεται με όρους σύγκλισης, και μία σειρά λέγεται ότι αντιπροσωπεύει μία συνάρτηση σε ένα πεδίο αν και μόνον αν συγκλίνει στη τιμή της συνάρτησης για κάθε πραγματικό αριθμό στο πεδίο. Αυτές οι αποφάσεις υπαγορεύονται εκ των προτέρων από την απαίτηση να είναι εφαρμόσιμη η ανάλυση: γιατί αν (όπως με τον Lagrange) δεν γίνεται καμία αριθμητική αναπαράσταση στη θεμελίωση, είναι δύσκολο να δει κανείς πως μπορεί να

εγκαθιδρυθεί αργότερα. Η γενική αξίωση του Lagrange όσον αφορά στην ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά - ήδη λαθεμένη με τους δικούς της όρους, όπως τόνισε ο Bolzano - πρέπει να εγκαταλειφθεί πολύ περισσότερο εξαιτίας της γενικότερης κλάσης των συναρτήσεων που θεωρούνται. Από όπου, προκειμένου να αιτιολογηθεί το θεώρημα του Taylor επιπλέον προϋποθέσεις πρέπει να καθοριστούν, επιπλέον ορισμοί να τεθούν: για παράδειγμα η συνέχεια της συνάρτησης, η παράγωγος κλπ. Μόνο μετά από όλη αυτή την εργασία, και την απόδειξη των απαραίτητων λημμάτων, είναι σε θέση ο Bolzano να δώσει ακριβή διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος με το οποίο ο Lagrange άρχισε την εργασία του στη θεωρία συναρτήσεων (Rusnock, 1999).

Προκειμένου να φανεί η φύση της μετατροπής της ανάλυσης του Lagrange από τον Bolzano ας θεωρήσουμε την **έννοια της συνέχειας**. Η αίσθηση του Lagrange για την συνάρτηση, ήταν πολύ κοντά σε αυτήν του Euler στο *Introductio* – οι συναρτήσεις συνδέονταν και συχνά ταυτίζονταν με πεπερασμένες αναλυτικές εκφράσεις. Αυτές οι συναρτήσεις – εκτός από μεμονωμένες τιμές – είναι συνεχείς και ίσως δεν αποτελεί έκπληξη ότι σε αυτή την ιδιότητα δόθηκε τόσο λίγη προσοχή από τους αναλυτές του 18^{ου} αιώνα. Με τον Bolzano η διεύρυνση της έννοιας της συνάρτησης σήμαινε ότι αυτή η ιδιότητα έπρεπε να οριστεί και να διερευνηθεί (Rusnock, 1999).

Παρόλο που ο Lagrange δεν είχε θεωρία συνεχών συναρτήσεων σημαντικά χαρακτηριστικά μιας τέτοιας θεωρίας υπήρχαν στην εργασία του και ανέμεναν να βρεθούν. Ο Bolzano μπορούσε να βρει - και πιθανώς όντως βρήκε - ένα τελείως επαρκή ορισμό της συνέχειας σε ένα σημείο των πραγματειών του Lagrange. Το να είναι κανείς ικανός να παράγει μία τέτοια διατύπωση είναι ένα πράγμα. Το να εκτιμήσει πλήρως τον λογικό της ρόλο στη θεμελίωση της συναρτησιακής ανάλυσης είναι κάτι τελείως διαφορετικό (Rusnock, 1999).

Ο Lagrange στο νούμερο 6 του *Théorie des fonctions analytiques* επεχείρησε να βρει μία γενική εκτίμηση του λάθους για το ανάπτυγμα της δυναμοσειράς ως εξής: έχουμε $f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$

Ας γράψουμε $iP = pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$

$iQ = qi^2 + ri^3 + \ldots$ για τα υπόλοιπα

Ο Lagrange ζητά τώρα να θεωρήσουμε την καμπύλη με τετμημένη i και τεταγμένη iP και ισχυρίζεται ότι :

«... αφού τα υπόλοιπα iP, iQ, ... [...] είναι συναρτήσεις του i που γίνονται μηδέν από την ίδια τη φύση της εξέλιξης , όταν i = 0, συνάγεται ότι [...] αυτή η καμπύλη θα τμήσει τον άξονα των x στην αρχή των τετμημένων και [...] η πορεία αυτής της καμπύλης θα είναι υποχρεωτικά συνεχής από αυτό το σημείο και μετά. Για αυτό τον λόγο θα πλησιάζει τον άξονα λίγο λίγο πριν να τον τμήσει, και κατά συνέπεια θα τον πλησιάζει κατά μία ποσότητα μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, με τέτοιο τρόπο ώστε κανείς να μπορεί πάντα να βρει μία τετμημένη i που θα αντιστοιχεί σε μία τεταγμένη μικρότερη από μία δοθείσα ποσότητα, ενώ σε κάθε μικρότερη τιμή του i θα αντιστοιχούν πάλι τεταγμένες μικρότερες από τη δοθείσα ποσότητα». (Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*).

Μπορεί κανείς ειδικότερα, ισχυρίζεται, να πάρει το i έτσι ώστε το iP να είναι μικρότερο από το f(x) , το οποίο ήταν για να δειχθεί. Το πρόβλημα όπως τόνισε ο Bolzano στο *Contributions,* είναι ότι ο Lagrange αναζητά να παράγει αυτή την αναλυτική ιδιότητα της συνάρτησης από την συνέχεια της γραφικής της παράστασης, μία τεχνική απόδειξης η οποία (αφού η γεωμετρία γίνεται κατανοητή ως εφαρμογή της ανάλυσης) απλά μας βάζει να κινούμαστε σε ένα κύκλο (Rusnock, 1997). Για τον **Bolzano μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο εάν και μόνον εάν ικανοποιεί την ιδιότητα του Lagrange** σε αυτό το σημείο. Και συνεχής σε ένα διάστημα εάν και μόνον εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (Rusnock, 1999).

Μία άλλη σημαντική διάκριση που παρατήρησε ο Bolzano, αυτή μεταξύ της κατά σημείο και της ομοιόμορφης συνέχειας σε ένα διάστημα, μπορεί να προκλήθηκε από τη προσεκτική του ανάγνωση του Lagrange. Ο Lagrange στο 9° των *Leçons sur le calcul des fonctions* για το υπολογισμό του υπολοίπου Taylor χρησιμοποιεί ένα λήμμα σύμφωνα με το οποίο αν οι τιμές της f΄ διατηρούν πρόσημο και δεν γίνονται άπειρες και f(0) = 0 , τότε αν το x αυξάνεται θετικά (αρνητικά) η f(x) έχει τιμές ίδιου (αντίθετου) προσήμου με τη f΄. Στη απόδειξη του λήμματος (σελ.60 σε αυτή τη εργασία) χρησιμοποιεί ότι το

f(x+ni) - f(x) περιορίζεται μεταξύ των ορίων

if΄(x) + if΄(x+i) + if΄(x+2i) + …+ if΄(x +(n-1)i) ± niD

Σημειώνοντας αρχικά και στη συνέχεια αγνοώντας το γεγονός ότι το V (η απόδειξη αρχίζει από τη σχέση f(x+) - f(x) = i [f΄(x)+V]) είναι συνάρτηση τόσο του x όσο και του i ο Lagrange οδηγεί σε ένα συμπέρασμα το οποίο – αν όχι γι αυτόν τουλάχιστον για τον Bolzano απαιτεί απόδειξη. Αν διαιρέσουμε τις ανισότητες του Lagrange με i , βλέπουμε ότι αυτό το συμπέρασμα ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η f΄ είναι το *ομοιόμορφο* όριο του διαφορικού πηλίκου στο διάστημα. Όταν στο II, παράγραφος 27 της *Θεωρίας συναρτήσεων* ο Bolzano ξεκίνησε να αποδείξει μία εκδοχή του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού, έκανε ότι καλύτερο μπορούσε για να γεμίσει αυτό το κενό, ανακοινώνοντας με σταθερότητα και επιχειρώντας (ανεπιτυχώς) να αποδείξει ότι εάν μία συνάρτηση είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα, τότε η f΄ είναι το ομοιόμορφο όριο του διαφορικού πηλίκου εκεί. Σε ένα χειρόγραφο που περιείχε διορθώσεις και προσθέσεις στην *Θεωρία συναρτήσεων* ο Bolzano ανακοίνωσε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για συναρτήσεις συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα (συνήθως καλείται θεώρημα του Heine): εάν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. Σε αυτή τη περίπτωση, παρόλο που δεν παρείχε μία ικανοποιητική απόδειξη, ο Bolzano κατάφερε να παρέχει ένα χρήσιμο απόσπασμα μιας απόδειξης. Στο I, παράγραφος 13 της ίδιας εργασίας, είχε σημειώσει ότι το ίδιο δεν ισχύει για ανοικτό διάστημα:

«Απλά επειδή μία συνάρτηση F(x) είναι συνεχής για όλες τις τιμές της μεταβλητής της x που βρίσκονται μεταξύ a και b, δεν σημαίνει ότι για όλα τα x μεταξύ αυτών των τιμών υπάρχει σταθερός αριθμός e ο οποίος είναι αρκετά μικρός έτσι ώστε να μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι το Δx δεν πρέπει να παρθεί ποτέ μικρότερο κατ' απόλυτη τιμή από το e προκειμένου να εξασφαλίσει ότι η διαφορά F(x + Δx) - F(x) θα προκύψει μικρότερη από 1/N.»

Αποδεικνύει τον ισχυρισμό του θεωρώντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης f(x) = 1/(1-x) σε ένα διάστημα (a,1).

Εδώ πάλι, σε ένα χάσμα που είχε υποδειχθεί από τον Lagrange αντιστοιχεί ένα απόσπασμα θεωρίας στην ανάλυση του Bolzano (Rusnock, 1999, Rusnock & Kerr-Lawson, 2005).

Bolzano και Cauchy

Έχει υποστηριχτεί από τον Grattan-Guinness (1970), ότι οι συμπτώσεις ανάμεσα στις εργασίες των Bolzano και Cauchy είναι πολύ μεγάλες για να είναι τυχαίες και ότι ολόκληρο το πρόγραμμα του Cauchy περί αναγωγής του λογισμού στην αλγεβρική ανάλυση, και ο χειρισμός των βασικών εννοιών μέσω ανισοτήτων, δεν μπορούν να ερμηνευτούν με όρους της προηγούμενης εργασίας του Cauchy. Συμπεραίνει ότι ο Cauchy είχε δει την εργασία του Bolzano και χρησιμοποίησε το υλικό χωρίς να τον αναφέρει. Δηλώνει επίσης ότι ο Cauchy «δανείστηκε» τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης, το κριτήριο Cauchy και την απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις.
Στον Edwards, επίσης διαβάζουμε: «Το άρθρο του Bolzano δεν κυκλοφόρησε ευρέως μεταξύ των συγχρόνων του και η έκταση της επίδρασης του είναι ακαθόριστη. Παρόλα αυτά στο *Cours d'analyse* ο Cauchy ουσιαστικά αντέγραψε (duplicated) τον ορισμό και τις άμεσες εφαρμογές της συνέχειας του Bolzano.» (Edwards, 1979).

Ωστόσο σύμφωνα με την Grabiner (1981) η κοινή επιρροή που είχαν από τους προγενέστερους τους είναι αρκετή για να ερμηνεύσει τις συγκεκριμένες ομοιότητες μεταξύ τους. Η επίδραση των προγενέστερων μαθηματικών στον Bolzano ήταν παρόμοια με την επίδραση που είχαν στον Cauchy. Πράγματι, η ταυτόχρονη ανακάλυψη ορισμών και ιδιοτήτων μας καθιστά ικανούς να διαπιστώσουμε τι θα μπορούσε να είχε επιτευχθεί το 1820 και τι ρεύματα στην μαθηματική εργασία του 18^{ου} αιώνα έκαναν δυνατά τα επιτεύγματα των Cauchy και Bolzano.

Ειδικότερα, όσον αφορά στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, το οποίο σύμφωνα με τον Grattan-Guinness, ο Cauchy «δανείστηκε» από τον Bolzano, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει γιατί ο Cauchy είχε διαβάσει ο ίδιος τον Lagrange που ρητά καλεί για μία απόδειξη με αλγεβρικές μεθόδους. Επιπλέον η τεχνική της απόδειξης του Cauchy δεν μοιάζει καθόλου με αυτήν του Bolzano. Ο Bolzano αρχίζει την απόδειξη του προσπαθώντας να αποδείξει ότι κάθε ακολουθία που έχει αυτό που ονομάζουμε κριτήριο Cauchy έχει όριο. Χρησιμοποίησε αυτό το αποτέλεσμα για να δείξει ότι κάθε φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα και με αυτό το αποτέλεσμα απέδειξε το ισχυρότερο θεώρημα για ζεύγη συναρτήσεων

που δηλώθηκε το 1798 από τον Lagrange. Τέλος, όπως ο Lagrange, παρήγαγε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ως πόρισμα του ισχυρότερου θεωρήματος. Ο Cauchy αμέσως μετά την απόδειξη συζητά πως η ίδια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του σφάλματος στην αντίστοιχη προσέγγιση.

Την άποψη του Grattan-Guinness έχει απορρίψει αναλυτικά σε άρθρο του το 1971 και ο Freudenthal. Μεταξύ των επιχειρημάτων του αναφέρει ότι το κριτήριο σύγκλισης ήταν περισσότερο μια έκφραση λογικής βαθύτητας παρά ένα πρακτικό εργαλείο και ότι όσον αφορά στα ελάχιστα άνω φράγματα δεν υπάρχει κανένα κοινό στοιχείο.

Ο Bolzano επιχείρησε επίσης μία θεωρία πραγματικών αριθμών συμπεριλαμβανομένης και της ιδιότητας της πληρότητας. Η θεωρία του για τις αριθμητικές εκφράσεις, η οποία περιελάμβανε μέχρι και άπειρα μικρές και μεγάλες ποσότητες, αναπτύχθηκε μετά το 1830 και ήρθε στη δημοσιότητα στα 1960. Ο Bolzano δεν επηρέασε τους σύγχρονους του. Εργαζόταν σε σχετική απομόνωση στην Πράγα, δεν είχε σημαντική καθηγητική θέση και ήταν περισσότερο γνωστός ως φιλόσοφος και θεολόγος και όχι ως μαθηματικός (Grabiner, 1981).

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

SUR

LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'École royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette École sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre

(Bibliothèque nationale de France)

Augustin Louis CAUCHY 1789-1857

Ο Cauchy ήταν εξέχουσα μαθηματική προσωπικότητα στο Παρίσι καθηγητής στην École Polytechnique η οποία ήταν το πρώτο και πλέον επιστημονικό ίδρυμα στην Ευρώπη. Ιδρύθηκε από την Επαναστατική κυβέρνηση το 1795. Οι ιδρυτές της αναγνώριζαν ότι η επιστήμη και τα μαθηματικά ήταν πολύτιμα για το κράτος και ότι τα σχολεία και τα πανεπιστήμια έπρεπε να εκπαιδεύουν επιστήμονες και μηχανικούς. Οι περισσότεροι από τους κύριους μαθηματικούς και μαθηματικούς φυσικούς ήταν εκεί και πολλοί μαθηματικοί διάβαζαν τα κείμενα των διαλέξεων αμέσως μόλις δημοσιεύονταν. Το Παρίσι ήταν το κέντρο του μαθηματικού κόσμου και σε αυτό συνέρεαν μαθηματικοί από όλο το κόσμο.
Συνεχίζοντας την παράδοση της École Polytechnique, συνέγραψε τρία σπουδαία εγχειρίδια τα: *Cours d' analyse de l' école polytechnique* (*Μάθημα Ανάλυσης της Πολυτεχνικής Σχολής*) (1821), *Résumé des leçons données à l' école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* (*Περίληψη των μαθημάτων που δόθηκαν στη βασιλική πολυτεχνική σχολή για το απειροστικό λογισμό*) (1823), *Leçons sur le calcul différentiel* (*Μαθήματα στον διαφορικό λογισμό*) (1829) .
Το όριο, η συνέχεια και η σύγκλιση πραγματεύονται στο πρώτο, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα στο δεύτερο.

Τι εννοεί ο Cauchy με τον όρο «άλγεβρα» φαίνεται στο Mémoire sur la résolution numérique des équations et sur la théorie de l'élimination, (*Exercices mathématiques,* 40e et 41e livraisons, (1829) στο *Oeuvres complètes* (2), IX, 87-161).
Πρόκειται για απλούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού, και σε ότι αφορά εξισώσεις όποιου βαθμού μία αλγεβρική εκδοχή του θεωρήματος του Bolzano διατυπωμένη ως εξής: ένα πολυώνυμο που αλλάζει πρόσημο ανάμεσα σε δύο πραγματικές τιμές α και β μηδενίζεται για κάποια τιμή που ανήκει στο διάστημα [α,β]. Δίνει σε τέσσερις γραμμές μια «απόδειξη» που βασίζεται στο γεγονός ότι «μεταβαλλόμενο κατά ανεπαίσθητους βαθμούς» το πολυώνυμο εξαφανίζεται αναγκαστικά τη στιγμή που περνά από θετικό σε αρνητικό ή αντίστροφα. Υποθέτοντας υπόρρητα ότι ένα πολυώνυμο είναι μία συνεχής συνάρτηση ο Cauchy δεν νοιώθει ότι χρησιμοποιεί μία έννοια ξένη προς τις

«πρώτες αρχές της Άλγεβρας». Η διάκριση του μεταξύ άλγεβρας και ανάλυσης δεν συμπίπτει με αυτή του Lagrange που είναι πλησιέστερη προς τη σημερινή. Οι «πρώτες αρχές» του συνιστούν περισσότερο ένα είδος χαρακτηρισμού για ένα αριθμό προτάσεων που κρίνονται θεμελιώδεις δηλαδή απαραίτητες για την απόδειξη ενός μεγάλου αριθμού άλλων προτάσεων διασκορπισμένων στο μαθηματικό πεδίο και όχι περιορισμένων σε ένα μόνο τομέα της θεωρίας εξισώσεων (Sinaceur, 1992).

Ο Cauchy έδωσε στην εργασία του μία λογική δομή, βασίζοντας τις αποδείξεις των θεωρημάτων στους ορισμούς του. Ωστόσο, οι τεχνικές του όφειλαν πάρα πολλά στην άλγεβρα. Αντιλήφθηκε ότι ήταν η άλγεβρα των ανισοτήτων και όχι των ισοτήτων που θα μπορούσε να παρέχει μία βάση για τον λογισμό. (Γι αυτό και στο *Cours* συστηματοποίησε και παρείχε συγκεκριμένες ανισότητες που του χρειάζονταν για τις αποδείξεις του).

Οι **ανισότητες** χρησιμοποιούντο ευρέως στις μεθόδους προσέγγισης που είχαν αναπτυχθεί τον 18^{ο} αιώνα. Βασικοί στόχοι των προσεγγίσεων ήταν η παραγωγή άπειρων αναλυτικών εκφράσεων για τις ρίζες όποιας πολυωνυμικής εξίσωσης και ο ακριβής υπολογισμός σφαλμάτων και μέτρων της ταχύτητας σύγκλισης. Το «ε» στις σύγχρονες αποδείξεις μπορεί να θεωρηθεί ως μία κληρονομιά από την εποχή που οι ανισότητες ανήκαν στις προσεγγίσεις (πιθανόν από την γαλλική λέξη για το σφάλμα «erreur») και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Cauchy σε πολλές αποδείξεις του.

Ο Cauchy έδωσε τον πρώτο αυστηρό ορισμό του ορίου και τον χρησιμοποίησε για να εγκαθιδρύσει μία αυστηρή θεωρία για την σύγκλιση σειρών, να ορίσει την συνέχεια και να αποδείξει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις. Επίσης ήταν αυτός που έδωσε αυστηρές αποδείξεις εισάγοντας τις ε-δ μεθόδους στην ανάλυση.

Η πρωτοτυπία των μεθόδων του και η ανωτερότητα της εργασίας του έναντι των προγενεστέρων του οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο Cauchy είναι σε εμφανή ρήξη με το παρελθόν. Τα μαθηματικά συχνά αναπτύσσονται με την πρόσθεση νέων θεωριών ή με τροποποιήσεις και διορθώσεις υπαρχόντων θεωριών. Αλλά εδώ δεν πρόκειται για κάτι τέτοιο. Η εννοιολογική διαφορά μεταξύ της θεώρησης και της πρακτικής του λογισμού του 18^{ου} αιώνα και του 19^{ου} αιώνα είναι πολύ μεγάλη.

Πριν τον Cauchy ο λογισμός ασχολείτο **με εκφράσεις.** Τα αντικείμενα της νέας ανάλυσης του Cauchy του 1821 δεν είναι εκφράσεις αλλά **μεταβλητές ποσότητες**. **Τα αναλυτικά συμπεράσματα δεν εξάγονται από εκφράσεις αλλά από έννοιες ή από ιδιότητες** (Grattan-Guinness, 1994).

Ο Cauchy (όπως και ο Weierstrass) προσπάθησε να **επανεξετάσει τη θεμελίωση των μαθηματικών.** Επηρεάστηκε έντονα από την άποψη του Lagrange ότι ο λογισμός μπορούσε να αναχθεί στην άλγεβρα, αλλά δεν αποδέχθηκε την συγκεκριμένη θεμελίωση. Είχε κατανοήσει ότι «οι περισσότεροι [αλγεβρικοί] τύποι έχουν ισχύ μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις και για ειδικές τιμές των ποσοτήτων που περιέχουν» (*Cours*, 1821). Ειδικότερα, σχέσεις για άπειρες σειρές ισχύουν μόνον όταν οι σειρές συγκλίνουν (ibid). Παρατήρησε επιπλέον ότι διαφορετικές συναρτήσεις μπορεί να έχουν το ίδιο ανάπτυγμα σειράς Taylor, για παράδειγμα οι e^{-x^2} και $e^{-x^2} + e^{-1/x^2}$ στο x = 0.

Πολλοί μαθηματικοί του 19ου αιώνα δεν αποδέχονταν πλέον την διαίσθηση ως μέρος μιας μαθηματικής απόδειξης ή δεν επέτρεπαν την δύναμη του συμβολισμού να υποκαταστήσει την αυστηρότητα της απόδειξης. Βεβαίως πολλοί μαθηματικοί συχνά αξιοποιούσαν αποδοτικές μεθόδους χωρίς την μέγιστη δυνατή αυστηρότητα. Ο ίδιος ο Cauchy δεν ήταν πάντα με συνέπεια αυστηρός στις ερευνητικές του εργασίες. Ωστόσο, η **αυστηρότητα στην ανάλυση** ήταν ένας ρητά διατυπωμένος στόχος του. Θεωρούσε την απόδειξη ενός θεωρήματος αυστηρή όταν κάθε βήμα αιτιολογείται με ένα αξίωμα, ή με ένα ορισμό ή με ένα προηγούμενο αποδεδειγμένο θεώρημα. Επιπλέον, η επιλογή των ορισμών και των θεωρημάτων προς απόδειξη πρέπει να είναι επαρκώς ευρεία προκειμένου όλα τα έγκυρα αποτελέσματα να αιτιολογηθούν επαρκώς.

Ο Cauchy ρητά **διέκρινε μεταξύ ευρετικής και αιτιολόγησης**. Διαχώριζε την ανακάλυψη αποτελεσμάτων μέσω της «γενικότητας της άλγεβρας» δηλαδή την ανακάλυψη αποτελεσμάτων μέσω εξαγωγής συμπερασμάτων από πεπερασμένες συμβολικές εκφράσεις σε άπειρες ή από πραγματικές σε μιγαδικές, από την απόδειξη των θεωρημάτων. Η αυστηρότητα της γεωμετρίας, δηλαδή η λογική δομή της ήταν το ιδεώδες του (*Cours d' analyse*, 1821).

Περιέγραψε το μεθοδολογικό του ιδεώδες ως εξής:

« Όσον αφορά στις μεθόδους, επεδίωξα να τους παρέχω όλη την αυστηρότητα η οποία υπάρχει στην γεωμετρία, έτσι ώστε να μην αναφέρομαι ποτέ σε αιτίες προερχόμενες από την γενικότητα της άλγεβρας. Τέτοιου είδους αιτίες, αν και πολύ συχνά γίνονται αποδεκτές, ειδικά περνώντας από συγκλίνουσες σειρές σε αποκλίνουσες, και από πραγματικές ποσότητες σε μιγαδικές εκφράσεις, μπορούν να θεωρηθούν μόνο... ως επαγωγές, μερικές φορές κατάλληλες για να δείξουν την αλήθεια, αλλά έχουσες μικρή συμφωνία με την πολύ επαινούμενη ακρίβεια των μαθηματικών επιστημών... Οι περισσότεροι [αλγεβρικοί] τύποι έχουν ισχύ μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, και για συγκεκριμένες τιμές των ποσοτήτων τις οποίες περιέχουν. Καθορίζοντας αυτές τις προϋποθέσεις και αυτές τις τιμές, και καθορίζοντας με ακρίβεια το νόημα όλων των συμβολισμών που χρησιμοποιώ, κάνω να εξαφανιστεί κάθε αβεβαιότητα» (ibid).

Τέλος, χαρακτηριστική είναι η γνωστή «απόδειξη» το 1821, του λανθασμένου θεωρήματος ότι μία άπειρη σειρά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Απόδειξη για την οποία υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις από τους ιστορικούς των μαθηματικών.

Όρια και Σύγκλιση

Στην επιτυχή θεμελίωση του λογισμού κεντρικό ρόλο έπαιξε η ταυτόχρονη αναγνώριση από τον Cauchy δύο γεγονότων:

1. Η έννοια του ορίου του 18^{ου} αιώνα μπορούσε να γίνει κατανοητή με όρους ανισοτήτων

2. Αφού γίνει αυτό, όλος ο λογισμός μπορούσε να βασιστεί στα όρια μετασχηματίζοντας ως εκ τούτου προηγούμενα αποτελέσματα για τις συνεχείς συναρτήσεις, άπειρες σειρές, παράγωγο και ολοκληρώματα σε θεωρήματα (Grabiner, 1981).

Προηγούμενες αντιλήψεις για το όριο

Ορισμοί του ορίου είχαν ήδη δοθεί από προηγούμενους μαθηματικούς αλλά η έννοια δεν ήταν κατανοητή και η εγκυρότητα των τεχνικών που είχαν αναπτυχθεί για τη διαφόριση, τον υπολογισμό λόγων διαφορικών και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων δεν είχε αποδειχθεί μέσω της έννοιας του ορίου.

Η έννοια του ορίου εκφράστηκε από τον Newton στο Principia, θεωρήθηκε από τους Robins, D' Alembert, L' Huilier ως βασική έννοια του λογισμού και ως τέτοια εμφανίστηκε στα εγχειρίδια του Lacroix. Παρόλα αυτά έλειπε η ακρίβεια στη διατύπωση του. Αυτό οφείλετο στο γεγονός ότι **βασιζόταν στη γεωμετρική διαίσθηση.** Όταν ζητούντο επεξηγήσεις της έννοιας, το πιο πιθανό να έρθει στο μυαλό ήταν ο κύκλος ορισμένος ως το όριο ενός πολυγώνου. Μία τέτοια εικόνα έγειρε ερωτήματα: Οι πλευρές του πολυγώνου θα ταυτιστούν με τα σημεία που αντιπροσωπεύουν τον κύκλο μέσω αυτής της προσέγγισης; Γίνεται ποτέ το πολύγωνο κύκλος; Οι ιδιότητες του πολυγώνου είναι ίδιες με αυτές του κύκλου ; (Boyer, 1949).

Δεν θα μπορούσε να είναι αλλιώς, αφού αυτή τη περίοδο οι ιδέες της αριθμητικής και της άλγεβρας είχαν καθιερωθεί κυρίως σε ιδέες γεωμετρικού μεγέθους. Ο λογισμός ερμηνεύετο από τους εφευρέτες του ως ένα εργαλείο που χειρίζεται σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που εμπλέκονται σε γεωμετρικά προβλήματα.

Οι **Euler** και **Lagrange** είναι εξαιρέσεις αυτού του κανόνα επειδή προσπάθησαν να καθιερώσουν ένα λογισμό βασισμένο στον φορμαλισμό της έννοιας της αναλυτικής συνάρτησης. Και αυτοί όμως **απέρριψαν την ιδέα του ορίου**. Επιπλέον, ασυναίσθητα επηρεάστηκαν από τις προκαταλήψεις της γεωμετρικής διαίσθησης, όταν συμπέραναν άκριτα ότι οι μέθοδοι τους ήταν εφαρμόσιμες σε όλες τις συνεχείς καμπύλες (Boyer, 1949).

Ο D' Alembert θεώρησε τη μέθοδο των ορίων ως θεμελιώδη στο λογισμό και μετέφρασε την πρόταση του Newton "prime and ultimate ratio" όχι κυριολεκτικά ως πρώτο ή έσχατο λόγο δύο ποσοτήτων ακριβώς τη στιγμή που έρχονται στην ύπαρξη αλλά ως ένα όριο. Μια ποσότητα καλείται **όριο** μιας άλλης αν η δεύτερη μπορεί να προσεγγίσει την πρώτη πλησιέστερα από όποια δοθείσα ποσότητα, ή

έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ τους να είναι απολύτως μη προσδιορίσιμη (absolutely inassignable) (Boyer, 1949).

Ο **ορισμός του D' Alembert** εμφανίζεται στην *Encyclopédie* (1758) μαζί με τον αντίστοιχο ορισμό του de la Chapelle σε άρθρο με τίτλο «Όριο»:

«Ένα μέγεθος λέγεται ότι είναι το όριο ενός άλλου μεγέθους όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίσει κοντά στο πρώτο κατά ένα μικρό μέγεθος, όσο μικρό και να υποτεθεί το [δοθέν] μέγεθος. Παρόλα αυτά, χωρίς το μέγεθος που προσεγγίζει να είναι ποτέ ικανό να ξεπεράσει το μέγεθος το οποίο προσεγγίζει, έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ μιας ποσότητας και του ορίου της είναι απολύτως μη προσδιορίσιμη.... Κατάλληλα μιλώντας, το όριο ποτέ δεν συμπίπτει ούτε ποτέ γίνεται ίσο με την ποσότητα της οποίας είναι το όριο, αλλά η δεύτερη μπορεί πάντα να προσεγγίσει πλησιέστερα και πλησιέστερα, και μπορεί να διαφέρει από αυτό όσο λίγο επιθυμούμε» (Η πρώτη πρόταση είναι του de la Chapelle και η δεύτερη του D' Alembert).

Σύμφωνα με τον D' Alembert το διαφορικό πηλίκο είναι το όριο του λόγου των πεπερασμένων διαφορών.

«Η διαφόριση εξισώσεων συνίσταται απλά στην εύρεση των ορίων του λόγου των πεπερασμένων διαφορών των δύο μεταβλητών που περιλαμβάνονται στην εξίσωση» (Différentiel, σελ.977). Αυτό θεωρούσε ότι είναι η αληθινή μεταφυσική του λογισμού, παραδεχόμενος, παρεμπιπτόντως, ότι αυτό ήταν πολύ πιο δύσκολο να αναπτυχθεί παρά οι κανόνες εφαρμογής (Boyer, 1949).

Ο D' Alembert ήθελε να απελευθερώσει το όριο από τη φυσική, να το κάνει αλγεβρική έννοια. Για τον υπολογισμό της κλίσης της εφαπτομένης της $y^2 = ax$, υπολόγιζε στην κλίσης της τέμνουσας a/2y+z. Αφού μπορούμε να πάρουμε το z όσο μικρό θέλουμε, μπορούμε να κάνουμε τον λόγο a/2y+z να πλησιάζει το a/2y όσο κοντά επιθυμούμε. Άρα το a/2y είναι το όριο και άρα η κλίση της εφαπτομένης (Struik, 1969).

Εξαιτίας της **γεωμετρικής του ιδεολογίας,** η επεξεργασία του D' Alembert της **έννοιας του ορίου στερείτο σαφούς φρασεολογίας** η οποία είναι απαραίτητη για να το κάνει αποδεκτό ως υποκατάστατο της απειροστικής ερμηνείας. Έτσι το να πει κανείς σύμφωνα με τον D' Alembert ότι η τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη όταν τα δύο σημεία είναι ένα και γι αυτό είναι το όριο της τέμνουσας επιβάλλει την αναγκαιότητα της οπτικοποίησης της διαδικασίας με την οποία τα δύο σημεία

γίνονται ένα, αφήνοντας έτσι την ερμηνεία ανοικτή στη κριτική του Ζήνωνα (Boyer, 1949).

Ο **Sylvestre Lacroix** (1765-1843) διάδοχος του Lagrange στην École Polytechnique το 1799, έγραψε μία πραγματεία τριών τόμων με τον τίτλο *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (*Πραγματεία του διαφορικού λογισμού και του ολοκληρωτικού λογισμού*). Ήταν το πιο φημισμένο και φιλόδοξο βιβλίο που είχε εμφανιστεί ως τότε. Στην εισαγωγή δήλωνε ότι τον ενέπνευσε η νέα μέθοδος του Lagrange αλλά ερμήνευε την μέθοδο των σειρών του Lagrange με όρους ορίων του D'Alembert και του L'Huilier. Συγκάλυψε όμως τη σημασία αυτής της σχέσης μιλώντας για το όριο αποκλινόντων σειρών, ακολουθώντας τον Euler στη μελέτη τέτοιων άπειρων σειρών όπως 1-1+2-6+24-120+... (*Traité* III, 389). Παραδεχόταν ανοικτά ότι έκανε χρήση απειροστών (*Traité* I, 242). Παρόλο που αποδέχτηκε τη μεταφυσική του Lagrange υιοθέτησε το διαφορικό συμβολισμό του Leibniz. Αυτό το γεγονός του προκαλούσε σύγχυση στη σκέψη και τον οδήγησε όπως και τον Euler να θεωρήσει το διαφορικό συντελεστή (όπως τον ονόμαζε) ως λόγο μηδενικών (*Traité* I, 344) (Boyer, 1949).

Προκειμένου να διευκολύνει τη μελέτη των φοιτητών της μαθηματικής φιλολογίας, παρουσίασε δίπλα δίπλα τις προσεγγίσεις και τους συμβολισμούς των Newton, Leibniz και Lagrange. Για παράδειγμα το dy/dx το εμφάνιζε είτε ως όριο, είτε ως λόγο απειροστών είτε ως τον συντελεστή του πρωτοβάθμιου όρου στις σειρές Taylor, ισχυριζόμενος ότι μπορούσε να δειχθεί ότι όλα είναι ισοδύναμα (Grabiner, 1981).Ο Laplace επαίνεσε αυτή τη συμπεριφορά λέγοντας ότι μία τέτοια αντιπαραβολή μεθόδων εξυπηρετούσε αμοιβαίες αποσαφηνίσεις και πιθανόν η αληθινή μεταφυσική ήταν ότι είχαν κοινό. (Letter to Lacroix, δημοσιευμένο στο *Le Nouveau Traité du calcul différentiel*, 2η εκδ., πρόλογος, σελ. XIX). Φαίνεται πάντως ότι αυτή την εποχή αυτό ήταν οικτρό λάθος και οδήγησε σε σύγχυση της σκέψης σε ένα αντικείμενο ακριβώς τη στιγμή που αυτό που χρειαζόταν ήταν η λογική ακρίβεια (Boyer, 1949).

Αυτή η πραγματεία παρέχει μία καθαρή εικόνα των **εναλλακτικών προσεγγίσεων** που **συνυπήρχαν** πριν δύο αιώνες στο κόσμο των μαθηματικών (Grattan-Guinness, 1994).

Σε σύνολο 28 εκδόσεων που εμφανίστηκαν από το 1754 έως το 1784, τα 15 ερμήνευαν τον λογισμό με την ορολογία του Leibniz, 6 με όρους ορίων, 4 με όρους των μηδενικών του Euler, 2 με όρους ροών και ένα του Lagrange, με τη μέθοδο του (Boyer, 1949).

Στο ακόμα πιο δημοφιλές του έργο το 1802, *Traité élémentaire*, μία σύντμηση του προηγούμενου έργου του, ο Lacroix παρέλειψε τη μέθοδο του Lagrange και έκανε βασική την ερμηνεία με όρους ορίου, πάλι βέβαια με έλλειψη αυστηρότητας η οποία καθιστούσε δυνατή την ερμηνεία με όρους απειροστών. Η επιτυχία αυτής της εργασίας η οποία κυκλοφόρησε σε πολλές εκδόσεις, η ένατη γαλλική έκδοση έγινε το 1881, και μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες, οδήγησε σε άλλα κείμενα του ίδιου τύπου. Και μέσω αυτών των κειμένων η μέθοδος των ορίων έγινε οικεία, αν και όχι αυστηρή. Μέσω αυτών των κειμένων ο συμβολισμός του Leibniz και η αρχή των ορίων εκτόπισε στην Αγγλία τη μέθοδο των ροών και ερμηνείες του άπειρα μικρού που είχαν οδηγηθεί σε αδιέξοδο (Boyer, 1949).

Στη σκέψη του Cauchy, όπως και του Bolzano η έννοια του ορίου έγινε καθαρά και οριστικά αριθμητική . Ο ορισμός του Cauchy έκανε έκκληση στις έννοιες του αριθμού, της μεταβλητής και της συνάρτησης, και όχι στις διαισθήσεις της γεωμετρίας και της κίνησης.

Η έννοια του **ορίου ορίζεται για μεταβλητές** στο ***Cours d' Analyse*** (1821): «Όταν οι διαδοχικές τιμές που αποδίδονται με μία μεταβλητή προσεγγίζουν επ'αόριστον μία σταθερή τιμή έτσι ώστε να καταλήγουν να διαφέρουν από αυτή όσο επιθυμεί κανείς, αυτή η τελευταία σταθερή τιμή καλείται το όριο των άλλων. Έτσι για παράδειγμα, ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο διάφορων κλασμάτων που παρέχουν όλο και περισσότερο προσεγγιστικές τιμές αυτού» (Edwards, 1979).
Συγκρίνοντας τον ορισμό του ορίου των D' Alembert και de la Chapelle με αυτόν του Cauchy παρατηρούμε τα εξής:

- Οι προηγούμενοι ορισμοί δεν μεταφράστηκαν σε ανισότητες και ακόμα πιο σημαντικό δεν χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν ποτέ για να αποδειχθεί κάτι ουσιώδες.
- Ο όρος μέγεθος είναι λιγότερο ακριβής από τον όρο μεταβλητή του Cauchy.

- Οι D' Alembert και de la Chapelle θέτουν δύο πολύ ισχυρούς περιορισμούς: το μέγεθος ποτέ δεν ξεπερνά το όριο του και ποτέ δεν μπορεί να γίνει ίσο με το όριο του. (Το 1810 ο L' Huilier εγκατέλειψε την απαίτηση «ποτέ δεν ξεπερνά το όριο της»).
- Ο Cauchy όταν χρησιμοποιεί τον ορισμό του ορίου σε μια απόδειξη συχνά το μεταφράζει στη γλώσσα των ανισοτήτων. Ένα τέτοιο παράδειγμα, είναι η μετάφραση της δήλωσης «το όριο, καθώς το x πάει το άπειρο του f(x+1) - f(x) είναι κάποιος πεπερασμένος αριθμός k» ως εξής: «Αφού οι αυξανόμενες τιμές του x θα κάνουν τη διαφορά f(x+1) - f(x) να συγκλίνει στο όριο k, μπορούμε να δώσουμε στο h μια τιμή επαρκώς μεγάλη ώστε, αν το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του h, η εν λόγω διαφορά περικλείεται μεταξύ k - ε και k +ε» (*Cours*, 1821).

Το **όριο σειρών**, για σειρές με όρους u_0, u_1, u_2, ... ορίζεται: «Έστω $s_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$ το άθροισμα των πρώτων n όρων , n ακέραιος. Αν, για αυξάνουσες τιμές του n το άθροισμα s_n προσεγγίζει ένα συγκεκριμένο όριο s η σειρά θα καλείται συγκλίνουσα και το υπό συζήτηση όριο θα καλείται το άθροισμα της σειράς» (ibid).

Η ανάλυση του Cauchy ασχολείται με σειρές συναρτήσεων, οι σειρές αριθμών εμφανίζονται ως ειδικές περιπτώσεις (Grattan-Guinness, 1994).

Τα **απειροστά δεν εμφανίζονται στους ορισμούς, αλλά εισάγονται ως χρήσιμα εργαλεία**, για πρώτη φορά στο περίφημο κριτήριο σύγκλισης στο *Cours*:
«με άλλα λόγια, είναι απαραίτητο και επαρκές ότι για άπειρα μεγάλες τιμές του αριθμού n, τα αθροίσματα s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, να διαφέρουν από το όριο s και κατά συνέπεια και μεταξύ τους, κατά άπειρα μικρές ποσότητες». (Η συνθήκη ότι s_n - s_m να είναι άπειρα μικρή για άπειρα μεγάλα n,m είναι επαρκής και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση είχε διατυπωθεί και χρησιμοποιηθεί από τον Euler από το 1735) (Laugwitz, 1987).

Συνέχεια

Ο Cauchy δεν ορίζει την κατά σημείο συνέχεια. Υπάρχουν ορισμοί σφαιρικής συνέχειας (σε διάστημα) και ένα είδος τοπικής συνέχειας (σε μία περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής).

Η σφαιρική συνέχεια ορίζεται για συναρτήσεις σε διαστήματα με άκρα (Cauchy, 1821) :

«Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit a, la fonction elle- même recevra pour accroissement la différence f(x + a) - f(x),

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable a et de la valeur de x. Cela posé, la fonction f(x) sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence f(x + a) - f(x) décroît indéfiniment avec celle de a. En d'autres termes, *la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement petit de la fonction elle-même*.» (η έμφαση από τον Cauchy) (Laugwitz, 1987).

«Αν αρχίζοντας από μία τιμή του x που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτών των ορίων εκχωρήσει κάποιος στη μεταβλητή x μία άπειρα μικρή αύξηση a, η ίδια η συνάρτηση θα πάρει ως αύξηση τη διαφορά f(x + a) - f(x), η οποία θα εξαρτάται ταυτοχρόνως από τη νέα μεταβλητή a και από τη τιμή του x. Με αυτό δεδομένο η συνάρτηση f(x) θα είναι, μεταξύ των δύο ορίων που εκχωρήθηκαν στη μεταβλητή x, μια συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής αν για κάθε ενδιάμεση τιμή του x μεταξύ αυτών των ορίων, η αριθμητική τιμή της διαφοράς f(x+a) - f(x) ελαττώνεται επ'αόριστον με αυτή του a. Με άλλους όρους, *η συνάρτηση f(x) θα παραμείνει συνεχής ως προς το x ανάμεσα στα δοθέντα όρια, εάν, μεταξύ αυτών των ορίων, μία άπειρα μικρή μεταβολή της μεταβλητής παράγει πάντα μία άπειρα μικρή μεταβολή της ίδιας της συνάρτησης».*

Η τελευταία πρόταση με τα πλάγια γράμματα δεν αναφέρεται σε σταθερά απειροστά. Λέει απλά ότι η μεταβλητή f(x+a) - f(x) είναι μία άπειρα μικρή ποσότητα (όπως ορίστηκε προηγουμένως) οποτεδήποτε η μεταβλητή a είναι,

δηλαδή ότι η f(x+a) - f(x) προσεγγίζει το μηδέν όπως και το a. Έτσι, ο Cauchy χρησιμοποιεί την δήλωση «f(x+a) - f(x) είναι άπειρα μικρό όταν το a είναι» με τον ίδιο τρόπο που το κάνει κανείς συχνά σήμερα - ως μία συντόμευση μιας περισσότερη περίπλοκης δήλωσης που περιέχει όρια (Edwards, 1979).

Αμέσως μετά ακολουθεί ο ορισμός της **τοπικής συνέχειας**.

"On dit encore que la fonction f(x) est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit."

«Λέμε ακόμα ότι η συνάρτηση f(x) είναι, στη περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής αποδιδομένης στη μεταβλητή x, συνεχής συνάρτηση αυτής της μεταβλητής, κάθε φορά που είναι συνεχής μεταξύ δύο ορίων του x, ακόμα και πολύ κοντινών, που περικλείουν την τιμή για την οποία πρόκειται».

[Η αντίστοιχη μετάφραση στα αγγλικά, σύμφωνα με τους Laugwitz, 1987 και Grabiner, 1981, αποδίδει το «comprise» ως «included» δηλαδή αν c περιλαμβάνεται μεταξύ των ορίων (δηλ. φραγμάτων) a και b τότε $a \leq c \leq b$ και το «renfermé» ως «lying between» δηλαδή το c κείται μεταξύ των a και b αν $a<c<b$].

Αυτό σημαίνει ότι η f(x) είναι συνεχής στη περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής του x, έστω για $x = x_0$, εάν υπάρχουν a , b με $a < x_0 < b$ έτσι ώστε η f(x) να είναι συνεχής μεταξύ των ορίων a και b. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Cauchy ρητά μιλά για συγκεκριμένη τιμή του x όποτε το εννοεί. Αλλιώς το valeur (τιμή) θα μπορούσε να σημαίνει το ίδιο όπως variable (μεταβλητή) (Laugwitz, 1987).

Βρίσκουμε επίσης στο *Résumé des leçons* (Cauchy, 1823) τον ακόλουθο ορισμό: "Lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x + i) - f(x) est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit." «Όταν, η συνάρτηση f(x) δεχόμενη μία τιμή μοναδική και πεπερασμένη για όλες τις τιμές του x που περιλαμβάνονται ανάμεσα σε δύο δεδομένα όρια, η διαφορά f(x + i) - f(x) είναι πάντα ανάμεσα σε αυτά τα όρια μία ποσότητα άπειρα μικρή, λέμε ότι η f(x) είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x μέσα στα όρια για τα οποία πρόκειται»

(Δηλαδή μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής μέσα σε δοσμένα όρια αν μεταξύ αυτών των ορίων μια άπειρα μικρή αύξηση i της μεταβλητής x παράγει πάντα μικρή αύξηση f(x+i) - f(x) της ίδιας της συνάρτησης). Σύμφωνα με τον Boyer (1949) οι εκφράσεις άπειρα μικρές πρέπει εδώ να γίνουν κατανοητές όπως και σε όλη την εργασία του Cauchy, με όρους που επ'αόριστον μικρού και των ορίων: δηλαδή η f(x) είναι συνεχής στο διάστημα, αν το όριο της μεταβλητής f(x) καθώς το x προσεγγίζει το a είναι f(a), για οποιαδήποτε τιμή σε αυτό το διάστημα. **Σε αυτό τον ορισμό η θεώρηση των προηγούμενων αιώνων αντιστρέφεται.** Ο Newton (υπόρρητα) και ο Leibniz (ρητά) βάσιζαν την εγκυρότητα του λογισμού στην υπόθεση, την οποία η ελληνική σκέψη είχε αποφύγει, ότι εξαιτίας μιας ασαφούς αίσθησης συνέχειας, οι οριακές καταστάσεις θα υπακούουν στους ίδιους κανόνες με αυτούς που ακολουθούν οι μεταβλητές που τις προσεγγίζουν. Ο Cauchy έκανε την έννοια της συνέχειας ακριβώς μαθηματική και έδειξε ότι αυτή εξαρτάται από την ιδέα του ορίου και όχι αντίστροφα. Επιπλέον, η ουσία της δεν βρίσκεται σε κάποιο ασαφή συνδυασμό ή ενότητα ή σύμπτωση των μερών, όπως φαίνεται να υπονοεί η διαίσθηση αλλά σε τυπικές ξεχωριστές αριθμητικές σχέσεις, οι οποίες μετά έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας στην θεωρία συνόλων και με τη σειρά τους οδήγησαν στον ορισμό του συνεχούς (continuum) (Boyer, 1949).

Ο Cauchy (*Cours*, 1821) συζητά μετά την **συνέχεια σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων**. Ωστόσο, σφάλλει στην επιχειρούμενη απόδειξη ότι μία συνεχής συνάρτηση από διαφορετικές συνεχείς παραγώγους είναι συνεχής, πιστεύοντας λανθασμένα ότι έχει αποδείξει ότι f(x,y,z) είναι συνεχής δηλαδή ότι

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma \to 0} f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = f(x,y,z)$$

με τη προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής σε κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x,y,z, ξεχωριστά (Edwards, 1979).

Ο Cauchy δηλώνει **το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** ως Θεώρημα IV: (παρατίθεται στο παράρτημα)

Εάν f(x) είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0,X]$ και b είναι ένας αριθμός μεταξύ $f(x_0)$ και f(X), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x του διαστήματος τέτοιο ώστε f(x) = b.

Παρέχει μια διαισθητική γεωμετρική απόδειξη, αλλά μία σημείωση στην αριθμητική επίλυση εξισώσεων (*Cours,* 1821) περιλαμβάνει μία εναλλακτική απόδειξη μέσω «μιας μεθόδου άμεσης και καθαρά αναλυτικής»

Παίρνοντας b=0 και m ακέραιο μεγαλύτερο του ένα, αρχικά υποδιαιρεί το $[x_0,X]$ σε m ίσα υποδιαστήματα. Αφού η f(x) αλλάζει πρόσημο στο $[x_0,X]$ πρέπει να αλλάζει πρόσημο σε κάποιο υποδιάστημα $[x_1,X_1]$. Στη συνέχεια το $[x_1,X_1]$ υποδιαιρείται σε m ίσα υποδιαστήματα, σε ένα από τα οποία, έστω το$[x_2, X_2]$ η f(x) πάλι αλλάζει πρόσημο. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο κατασκευάζει μία αύξουσα ακολουθία $\{x_n\}_1^\infty$ σημείων του $[x_0,X]$ τέτοια ώστε κάθε τιμή $f(x_n)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(x_0)$ και μία φθίνουσα ακολουθία $\{X_n\}_1^\infty$ τέτοια ώστε κάθε $f(X_n)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το f(X). Επειδή $X_n - x_n=(X-x_0)/m^n \to 0$ καθώς το $n\to\infty$, συμπεραίνει ότι αυτές οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν σε ένα κοινό οριακό σημείο a που ανήκει στο (x_0, X). Λόγω της συνέχειας, $f(x_n) > 0$ (έστω) για κάθε n υποδηλώνει $f(a) = \lim f(x_n)\geq 0$, ενώ $f(X_n) < 0$ υποδηλώνει $f(a)\leq 0$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι f(a) = 0. (Edwards, 1979).

Η απόδειξη οφείλεται σε μία ειδική προσεγγιστική διαδικασία, απλή αλλά επαναστατική και είναι χαρακτηριστική της αλλαγής οπτικής που επέφερε ο Cauchy: Ο Cauchy μετέτρεψε την προσεγγιστική τεχνική σε κάτι τελείως διαφορετικό, σε μία απόδειξη ύπαρξης του ορίου (Grabiner, 1981).

Τα **βασικά επιτεύγματα** των Cauchy και Bolzano όσον αφορά στην **συνέχεια** ήταν:

1. Επέλεξαν την βασική ιδιότητα για να ορίσουν τις συνεχείς συναρτήσεις
2. Μετέφρασαν αυτή την ιδιότητα σε ακριβή ορισμό βασισμένο στις ανισότητες
3. Χρησιμοποίησαν τον ορισμό ως τη βάση της απόδειξης θεωρημάτων για συνεχείς συναρτήσεις.

Συγκλίνουσες σειρές Θεώρημα Ι

Οι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα είχαν δείξει τυπικά πολλά αποτελέσματα - αθροίσματα, γινόμενα - για τις δυναμοσειρές και τις χρησιμοποιούσαν στην εύρεση ριζών αλγεβρικών εξισώσεων, στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και στον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Ο Lagrange, παρόλο που είχε παράγει την πρώτη ρητή μορφή του υπολοίπου των σειρών Taylor, δεν παρείχε καμία γενική θεωρία σύγκλισης. Ο D' Alembert χρησιμοποιούσε το κριτήριο του λόγου αλλά μόνο για τις διωνυμικές σειρές, η αυστηρή έρευνα του Gauss το 1813 για τη σύγκλιση αφορούσε μόνο τις υπεργεωμετρικές σειρές. Η θεωρία του Cauchy ήταν εντελώς γενική (Grabiner, 1981).

Η έννοια της σύγκλισης είναι σημαντική για δύο λόγους:

1. Είναι η πιο λεπτομερής εφαρμογή από τον Cauchy της έννοιας του ορίου
2. Ήταν ο πρώτος που δεν αντιμετώπιζε τις σειρές ως μία επέκταση της άλγεβρας των πολυωνύμων.

Συνοπτικά, όρισε το άθροισμα συγκλίνουσας σειράς, διατύπωσε το κριτήριο Cauchy και απέδειξε ότι ήταν αναγκαία προϋπόθεση για την σύγκλιση, και δήλωσε και έδειξε μέσω παραδειγμάτων ότι ήταν και επαρκές – παρόλο που δεν το απέδειξε. Απέδειξε την εγκυρότητα αρκετών κριτηρίων σύγκλισης μεταξύ των οποίων του κριτηρίου της ρίζας και του κριτηρίου του λόγου (Grabiner, 1981).

Ο Cauchy έδωσε τον ορισμό για τη **σύγκλιση σειράς ως** εξής: « Έστω $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ το άθροισμα των πρώτων n όρων, n ακέραιος. Εάν, για αυξάνουσες τιμές του n, το άθροισμα S_n προσεγγίζει ένα συγκεκριμένο όριο S, η σειρά θα καλείται συγκλίνουσα και το υπό ερώτημα όριο θα καλείται το άθροισμα της σειράς» (*Cours*, 1821).

Ο Cauchy στη συνέχεια εφιστά τη προσοχή στις διαφορές μεταξύ διαδοχικών μερικών αθροισμάτων $S_{n+1} - S_n = u_n$

$$S_{n+2} - S_{n+1} = u_n + u_{n+1}$$

$$S_{n+3} - S_{n+2} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

……..

Προκειμένου να συγκλίνει η σειρά, ήταν γνωστό ότι ήταν απαραίτητο τα πρώτα από αυτά, u_n , να πάνε στο μηδέν. Αλλά ήταν επίσης γνωστό, όπως τόνισε ο Cauchy ότι αυτό δεν ήταν αρκετό:

Είναι απαραίτητο επίσης, για αυξανόμενες τιμές του n, τα διαφορετικά αθροίσματα, $u_n + u_{n+1}$, $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$,... δηλαδή τα αθροίσματα των ποσοτήτων, u_n , u_{n+1} , u_{n+2},. αρχίζοντας από το πρώτο, έως όποιο αριθμό επιθυμούμε, να καταλήγουν να έχουν σταθερά αριθμητικές [δηλαδή απόλυτες] τιμές μικρότερες από όποιο εκχωρούμενο όριο. Αντίστροφα, όταν αυτές οι διάφορες προϋποθέσεις πληρούνται, η σύγκλιση της σειράς είναι εγγυημένη (*Cours*, 1821).

[Τέσσερα χρόνια πριν την δημοσίευση του *Cours*, ο Bolzano είχε δηλώσει ρητά το «κριτήριο Cauchy» και είχε προσπαθήσει να το αποδείξει. (*Rein analytischer Beweis*, 1817)]

Ο Cauchy χρησιμοποίησε σε αποδείξεις στο *Cours* χωρίς να τις αιτιολογεί και χωρίς να τις διατυπώνει γενικά:

1. Την ιδιότητα της μονότονης ακολουθίας – κάθε φραγμένη μονότονη ακολουθία συγκλίνει
2. Το κριτήριο σύγκρισης – εάν μία δοθείσα σειρά με θετικούς όρους είναι, όρο με όρο φραγμένη από μία δεύτερη συγκλίνουσα σειρά, τότε η δοθείσα σειρά επίσης συγκλίνει
3. Το lim sup – μία φραγμένη ακολουθία έχει ένα limit superior, ονομαζόμενο από τον Cauchy «το μεγαλύτερο από τα όρια»

Το 1, χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις, το 2, παίζει σημαντικό ρόλο σε αποδείξεις σύγκλισης και το 3, στην απόδειξη του κριτηρίου ρίζας για συγκλίνουσες σειρές (Grabiner, 1981).

Οι βασικές έννοιες, συνέχεια και σύγκλιση, είναι συμβατές μεταξύ τους σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα, **Θεώρημα Ι από τον Cauchy 1821**: αν μία σειρά (1) συνεχών συναρτήσεων $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ συγκλίνει σε κάποιο διάστημα τότε το άθροισμα της s είναι πάλι συνεχής συνάρτηση σε αυτό το διάστημα.

Αυτό το θεώρημα το οποίο αναφέρθηκε προηγουμένως έχει γίνει γνωστό ως το πιο διάσημο «λάθος θεώρημα» του Cauchy. Επιπλέον έχει κάποιο ενδιαφέρον για το εννοιολογικό υπόβαθρο του Cauchy, ότι το πρώτο του θεώρημα για τη σύγκλιση

ασχολείται με ακολουθίες συναρτήσεων και όχι αριθμών. Η εκδοχή της απόδειξης κατανοητής με όρους απειροστών, έχει ως ακολούθως:

Έστω ότι η σύγκλιση υποτίθεται για όλες τις τιμές x της μεταβλητής στο δοθέν διάστημα και επιπλέον για όλα τα x+a, a απειροστά. Η τελευταία υπόθεση χρειάζεται στην απόδειξη, αλλά δεν είναι φανερή στη διατύπωση του θεωρήματος.

Έστω $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$ και $s(x+a) = s_n(x+a) + r_n(x+a)$ όπου $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$

Τότε το s_n είναι, για πεπερασμένο n, μια συνεχής συνάρτηση και το $s_n(x+a) - s_n(x)$ είναι απειροστό. Σύμφωνα με τη σύγκλιση και το $r_n(x)$ και (!) το $r_n(x+a)$ θα γίνουν «ανεπαίσθητα» για πολύ μεγάλους, αλλά πάντα πεπερασμένους, αριθμούς n. Με άλλα λόγια, για κάθε δοθέν πεπερασμένο $\varepsilon > 0$, $| r_n(x)| < \varepsilon$ και $| r_n(x+a) | < \varepsilon$ για κάποιο πεπερασμένο n. Απ' όπου, $| s(x+a) - s(x)| \leq | s_n(x+a) - s_n(x)| + | r_n(x+a) | + | r_n(x)| < 3\varepsilon$ για κάθε πεπερασμένο $\varepsilon > 0$ δηλαδή $s(x+a) - s(x)$ είναι απειροστό. Από όπου προκύπτει ότι η $s(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση. (Laugwitz, 1987)

Ο αναγνώστης θα έπρεπε να συγκρίνει με το πρωτότυπο:

"Lorsque, les termes de la série (1) renferment une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée a cette variable,

s_n r_n et s

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsque'on fait croître x d'une quantité infiniment petite a. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n si l'on attribue à n une valeur très considerable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite." (Cauchy, 1821) (Laugwitz, 1987).

«Όταν οι όροι της σειράς (1) περιλαμβάνουν την ίδια μεταβλητή x, αυτή η σειρά είναι συγκλίνουσα και οι διαφορετικοί της όροι είναι συνεχείς συναρτήσεις του x στην περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής αποδιδόμενης στην μεταβλητή x , s_n , r_n, s είναι πάλι τρεις συναρτήσεις της μεταβλητής x, από τις οποίες η πρώτη είναι προφανώς συνεχής ως προς το x στην περιοχή της συγκεκριμένης τιμής για την οποία πρόκειται. Αυτών τιθεμένων, ας θεωρήσουμε τις αυξήσεις που δέχονται αυτές οι τρεις συναρτήσεις, όταν αυξήσουμε το x κατά μία άπειρα μικρή

ποσότητα a. Η αύξηση του s_n θα είναι για όλες τις δυνατές (πιθανές) τιμές του n, μία ποσότητα άπειρα μικρή και αυτή του r_n θα γίνει ανεπαίσθητη ταυτόχρονα με το r_n αν αποδώσουμε στο n μία τιμή πολύ σημαντική. Επομένως, η αύξηση της συνάρτησης s δεν θα μπορεί να είναι παρά μία ποσότητα άπειρα μικρή».

Οι μεταφράσεις του Laugwitz είναι: n πεπερασμένο για "valeur possible de n" (πιθανή, δυνατή τιμή του n) n επαρκώς μεγάλο αλλά πεπερασμένο για "valeur très considerable de n" (πολύ αξιοσημείωτη τιμή του n), το r_n γίνεται ανεπαίσθητο δηλαδή μικρότερο από όποιο δοθέν πεπερασμένο $\varepsilon > 0$ για επαρκώς μεγάλο πεπερασμένο n, για "r_n deviendra insensible." Άλλοι έχουν δώσει διαφορετικές ερμηνείες. Ο ίδιος θεωρεί ότι οι μεταφράσεις του οδηγούν σε μία σωστή απόδειξη η οποία είναι απλή και ευθεία. Επιπλέον είναι συμβατές με την ορολογία του Cauchy σε όλο το *Cours*. Για παράδειγμα εάν, " très considerable" σήμαινε άπειρα μεγάλο ο Cauchy θα το είχε πει έτσι . Στο [Cauchy 1821, 116-117], δηλώνει ότι για πραγματικό $|x| < 1$, οι τιμές των x^n , x^n /1-x γίνονται απειροστές για άπειρα μεγάλα n.

Στη εκδοχή του Laugwitz της απόδειξης του Θεωρήματος I υπεισέρχονται μόνο πεπερασμένες τιμές του n όπως κάνουν στον ορισμό της σύγκλισης, και τα απειροστά χρησιμοποιούνται όπως στον ορισμό της συνέχειας. Το κείμενο που θεωρήματος I είναι, συμφωνα με τον Laugwitz, τουλάχιστον παραπλανητικό. Ο πρώτος που ανέφερε αυτό το γεγονός ήταν ο Abel, ο οποίος δημοσίευσε το 1826 ένα αντιπαράδειγμα χωρίς ωστόσο να προσδιορίζει το λάθος στη απόδειξη του Cauchy.

Στην απόδειξη του ο Cauchy χρειάζεται σύγκλιση των σειρών στο x όπως και στο x+a, όπου a είναι απειροστό. Οι υποθέσεις όπως διατυπώνονται στο θεώρημα είναι ασθενέστερες: "dans le voisinage d' une valeur particulière pour laquelle la série est convergente". («Στη περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής για την οποία η σειρά συγκλίνει»). Αυτό που πραγματικά χρησιμοποιεί στην απόδειξη και στις εφαρμογές του θεωρήματος ισοδυναμεί με το "laquelle," που αναφέρεται σε ολόκληρη την απειροστή περιοχή της συγκεκριμένης τιμής και αυτό το λέει αρκετά καθαρά: "cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière." («Αυτή η σειρά είναι συγκλίνουσα και οι διάφοροι όροι της, συνεχείς συναρτήσεις του x, στην περιοχή μιας συγκεκριμένης τιμής»). Εδώ, όπως και στις επόμενες ανισότητες, και η σύγκλιση της σειράς και η

συνέχεια των όρων της υποτίθεται. Ο Abel παρέλειψε να αναφέρει την ορθότητα της απόδειξης. Μάλλον αργά στη ζωή του ο Cauchy (1853) παραδέχθηκε ότι η διατύπωση του θεωρήματος (αλλά όχι η απόδειξη του) ήταν εσφαλμένη: "Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l' énonce du théorème, pour qu'il n'y plus lieu a aucune exception". «Όσον αφορά στα υπόλοιπα, είναι εύκολο να δούμε πως πρέπει να τροποποιήσουμε τη διατύπωση του θεωρήματος, προκειμένου να μην υπάρχει πια καμία εξαίρεση».

Παρόλο που δεν αποσύρει την παλιά απόδειξη, σκιαγραφεί μία νέα. Έστω ότι $n' > n$, τότε η απόλυτη τιμή του $s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$ υποτίθεται, για επαρκώς μεγάλα n και όλα τα x, n΄, να είναι μικρότερη από έναν αριθμό ε τον οποίο κανείς μπορεί να επιλέξει αυθαίρετα μικρό (Laugwitz, 1987).

Αυτή είναι μία από τις σπάνιες ρητές χρήσεις των ε που έκανε ποτέ ο Cauchy. Μοιάζει πολύ με ομοιόμορφη σύγκλιση και θα οδηγούσε αμέσως σε μία σωστή απόδειξη και θεώρημα. Αλλά ο Cauchy δεν σταματά εδώ. Μένει προσδεδεμένος με τα απειροστά του. Επιπλέον, σε αντίθεση με το κείμενο στο *Cours* εισάγει μέχρι και άπειρα μεγάλους αριθμούς: "il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction $s = s_n + r_n$" (« Είναι καθαρό ότι θα αρκέσει να αποδώσουμε στον αριθμό n μια τιμή άπειρα μεγάλη, και στην αύξηση του x μια τιμή άπειρα μικρή, για να αποδείξουμε, μέσα στα δοσμένα όρια, την συνέχεια της συνάρτησης $s = s_n + r_n$») (Cauchy, 1853). Υποθέτει ότι η έκφραση $s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$ γίνεται άπειρα μικρή για άπειρα μεγάλα n, το οποίο είναι μία εκδοχή του κριτηρίου του σύγκλισης. Ως συνέπεια η πρόταση διατυπώνεται ως Θεώρημα Ι: Αν οι διαφορετικοί όροι της σειράς (1) είναι συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής x, οι οποίες είναι συνεχείς ως προς αυτή τη μεταβλητή ανάμεσα στα δοθέντα όρια και επιπλέον το άθροισμα $s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n'-1}$ γίνεται πάντα άπειρα μικρό για άπειρα μεγάλες τιμές των ακεραίων n και $n' > n$, τότε η σειρά (1) θα είναι συγκλίνουσα και το άθροισμα της σειράς (1) θα είναι, ανάμεσα στα δοθέντα όρια, μία συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x (Laugwitz, 1987).

Φαίνεται ότι η απόδειξη είναι πιο σύνθετη από αυτή στο *Cours*. Επιπλέον, η διατύπωση του θεωρήματος είναι σωστή μόνο αν ερμηνεύεται πάντα για όλα x+a από το διάστημα, x πραγματικός και a απειροστό. Αυτό διευκρινίζεται με μία σαφή συζήτηση ενός παραδείγματος του τύπου που έχει αναφέρει ο Abel (Cauchy, 1853):

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{x}$ δεν συγκλίνει για απειροστό $x \neq 0$. Έστω $x = 1/n$ για n άπειρα μεγάλο. Τότε το υπόλοιπο $r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k}{n})}{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$ διαφέρει κατά ένα απειροστό από τη τιμή του $\int_1^{\infty} ((\sin t)/t)dt$ που είναι πεπερασμένο αν και το $r_n(x)$ θα έπρεπε να είναι ένα απειροστό για μία συγκλίνουσα σειρά και n άπειρα μεγάλο. Έπεται το συμπέρασμα ότι η σειρά δεν είναι αντιπαράδειγμα δεδομένου ότι η υπόθεση της σύγκλισης παραβιάζεται στο $x = 1/n$ (Laugwitz, 1987).

Ο Lacroix είχε αναπτύξει μεθόδους για τον υπολογισμό μερικών αθροισμάτων, χρησιμοποιούσε το κριτήριο του λόγου και συνέκρινε σειρές με συγκλίνουσες γεωμετρικές προόδους και οι Euler, d' Alembert και Lagrange είχαν αναπτύξει τεχνικές για τις άπειρες σειρές ειδικά τις δυναμοσειρές.

Δεν έγκειται στον ορισμό της σύγκλισης σειράς η πρωτοτυπία του Cauchy. Ο Lacroix στο *Traité* εκφράζει τις ίδιες απόψεις, παρατηρώντας ότι η σειρά για τη συνάρτηση a/(a-x) ανεπτυγμένη σε δυνάμεις του x , είναι $1+ x + x^2/a^2 + \ldots$ η οποία δεν δίνει τη σωστή τιμή εκτός αν το x είναι («αφαιρώντας το πρόσημο») μικρότερο από a. Αυτό το παράδειγμα τον οδήγησε στην παρατήρηση ότι για να είμαστε σίγουροι όταν χρησιμοποιούμε τέτοιο ανάπτυγμα σειράς «πρέπει να συζητάμε με προσοχή τη σύγκλιση των αριθμητικών σειρών... και οφείλουμε να υπολογίζουμε σε τέτοιους προσδιορισμούς μόνο όταν μπορούμε να προσδιορίσουμε τα φράγματα της διαφοράς που μπορεί να βρεθεί μεταξύ της σειράς και της πραγματικής τιμής». Πρόσθεσε ότι για να είναι χρήσιμο το όποιο ανάπτυγμα σειράς η διαφορά μεταξύ της σειράς και της πραγματικής της τιμής θα έπρεπε «να γίνεται μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, ανεξάρτητα του πόσο μικρή», όσο παίρνονται όλο και περισσότεροι όροι. Αυτός ο ορισμός του

αθροίσματος σειράς είναι υπόρρητος στις περισσότερες εργασίες στις σειρές του 18^{ου} αιώνα (Grabiner, 1981).

Η συνεισφορά του Cauchy συνίσταται στην αναγνώριση της χρησιμότητας των τεχνικών, την σωστή γενίκευση και την εξερεύνηση μεθόδων απόδειξης γενικών θεωρημάτων για τις σειρές. Ειδικότερα, τα κριτήρια σύγκλισης του, ήταν η βάση για ένα τελείως νέο αντικείμενο. Η θεωρία του Weierstrass των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής εξαρτάται από την αυστηρή θεωρία σύγκλισης των δυναμοσειρών.

Παράγωγος

Όπως είχε κάνει και με τις έννοιες του ορίου και του αθροίσματος σειράς, ο Cauchy πήρε την προηγούμενη έννοια του διαφορικού πηλίκου και της έδωσε ένα νέο ακριβές νόημα. Όρισε την παράγωγο ακολουθώντας τη παράδοση του 18^{ου} αιώνα, ως το όριο του λόγου του πηλίκου διαφορών, αλλά ο ορισμός βασίζετο στην νέα, ξεκάθαρη κατανόηση του ορίου. Επιπλέον η θεωρία του των παραγώγων αιτιολόγησε τις εφαρμογές τους στην εύρεση εφαπτομένων, ακρότατων κλπ. (Grabiner, 1981).

Οι **απαρχές** του μπορούν να βρεθούν στην **εργασία του Lagrange** που αφορά προσέγγιση εμπεριέχουσα παραγώγους. Μέχρι τα τέλη του 18^{ου} αιώνα, ο Lagrange είχε αποδείξει δύο κρίσιμες ιδιότητες της παραγώγου. Στηριζόμενος στην άποψη του ότι κάθε f(x) έχει ένα ανάπτυγμα της μορφής $f(x+i) = f(x) + ip + i^2q + \ldots$ δήλωσε ότι υπάρχει κάποιο i αρκετά μικρό έτσι ώστε όποιος όρος της σειράς «αφαιρώντας το πρόσημο» θα υπερέβαινε το άθροισμα των υπόλοιπων όρων στη σειρά.

[Στη πραγματικότητα, πρόκειται για το κριτήριο του Euler όπως αυτό εμφανίστηκε στο έργο του *Institutiones calculi differentialis* (1768), για το πότε μπορούμε *να* χρησιμοποιούμε ένα πεπερασμένο αριθμό όρων σε μια δυναμοσειρά, αγνοώντας το υπόλοιπο: Δοθείσης μιας συνάρτησης y του x και ω μια μεταβολή του x, $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + ..$ «Εάν η μικρή αύξηση ω η οποία προστίθεται στη

μεταβλητή ποσότητα, είναι πολύ μικρή, οι όροι $Q\omega^2$, $R\omega^3$, επίσης γίνονται πολύ μικροί, μέχρι που το $P\omega$ υπερβαίνει κατά πολύ το άθροισμα όλων των υπολοίπων».]

Ο Lagrange προσπάθησε να το αποδείξει, χειριζόμενος το f(x+i) ως το άθροισμα δύο εκφράσεων, η μία εξαρτώμενη από το i η άλλη όχι:

f(x+i) = f(x)+iP όπου P συνάρτηση και του x και του i. Ανάλογα όρισε Q, με P = p+iQ, R, με Q = q+iR και κατέληξε ότι για i επαρκώς μικρό

$f(x) > iP$ ή για κάποιο i, $ip > i^2Q$

Έκανε έκκληση στη συνέχεια των iP, iQ, ... για να συμπεράνει ότι μπορεί να βρεθεί i επαρκώς μικρό ώστε να ισχύει κάποια από τις προηγούμενες ανισότητες. Αυτό, σύμφωνα με τον Lagrange αποδεικνύει το f(x) > iP γιατί αν «μπορούμε πάντα να δώσουμε στο i μια αρκετά μικρή τιμή έτσι ώστε κάθε όρος της σειράς ... να γίνεται μεγαλύτερος από το άθροισμα όλων των όρων που ακολουθούν» τότε «κάθε τιμή του i μικρότερη από αυτή ικανοποιεί πάντα την ίδια συνθήκη» (*Fonctions analytiques*).

Ο Lagrange αναγνώρισε το αποτέλεσμα f(x) > iP ως θεμελιώδες. Ο απειροστικός λογισμός επιτρέπει στο i να γίνει «άπειρα μικρό» ή «να εξαφανιστεί» ή «να έχει το 0 ως όριο». Ότι και να σημαίνουν αυτές οι φράσεις φαίνεται να απαιτούν τουλάχιστον το i να είναι ένας πολύ μικρός πεπερασμένος αριθμός αρκετά μικρός ώστε | iQ| να μπορεί να γίνει μικρότερο από το | p|. Έτσι ώστε όποιο αποτέλεσμα του διαφορικού λογισμού που δεν απαιτεί τίποτα παραπάνω από το να κάνει | iQ| < | p| θα προκύπτει κατά τον Lagrange από την αλήθεια αυτής της ανισότητας (Grabiner, 1981).

Μετέφρασε το κριτήριο του Euler στη δήλωση ότι εάν $f(x+i) = f(x) + if'(x) + i^2/2\, f''(x) + \ldots$ τότε το $if'(x)$ υπερβαίνει το υπόλοιπο της σειράς $i^2/2\, f''(x) + \ldots$ και αυτό το γεγονός για το υπόλοιπο είναι ισοδύναμο με την

$f(x+i) = f(x) + if'(x) + iV$, όπου V είναι συνάρτηση του x και του i που πάει στο μηδέν όταν το i πάει. Το V πάει στο μηδέν όταν το i πάει, σημαίνει λέει ο Lagrange ότι μπορούσε να βρεθεί κάποιο i ώστε η αντίστοιχη τιμή του V «αφαιρώντας το πρόσημο» θα ήταν μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα. Και ακολούθησε αυτή τη λεκτική δήλωση με τον ακόλουθο χειρισμό ανισοτήτων:

Έστω D μία δοθείσα ποσότητα που μπορούμε να πάρουμε όσο μικρή επιθυμούμε. Μπορούμε πάντα να δώσουμε στο i μια τιμή αρκετά μικρή ώστε η τιμή του V να περιλαμβάνεται μεταξύ των ορίων D και –D. Τότε, αφού

$f(x+i) - f(x) = i[f'(x) + V]$ προκύπτει ότι η ποσότητα

$f(x+i) - f(x)$ θα περιλαμβάνεται μεταξύ των ποσοτήτων $if'(x) \pm iD$ (*Calcul des fonctions*).

Αυτή είναι ακριβώς η ιδιότητα που χρησιμοποίησε ο Cauchy στην απόδειξη των θεωρημάτων του για τις παραγώγους στο *Calcul infinitésimal* το 1823.

Ο Lagrange χρησιμοποιεί την παραπάνω ιδιότητα της $f'(x)$ για να δείξει ένα λήμμα το οποίο με σύγχρονη ορολογία λέει ότι μία συνάρτηση με θετική (ή αρνητική) παράγωγο σε διάστημα, είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) σε αυτό. Η διατύπωση του λήμματος έχει ως εξής: «Μία συνάρτηση που είναι 0 όταν η μεταβλητή είναι 0 θα έχει απαραίτητα, όταν η μεταβλητή αυξάνεται θετικά, πεπερασμένες τιμές του ιδίου προσήμου όπως η παράγωγος συνάρτηση της ή αντίθετου προσήμου αν η μεταβλητή αυξάνει αρνητικά, ενόσω οι τιμές της παραγώγου συνάρτησης διατηρούν το ίδιο πρόσημο και δεν γίνονται άπειρες» (*Calcul des fonctions*, 1806).

Η απόδειξη είναι ότι πιο κοντινό σε ε - δ απόδειξη μπορεί να βρεθεί στον λογισμό πριν τον Cauchy.

Στην απόδειξη εφαρμόζει το ότι η $f(x+i) - f(x)$ βρίσκεται μεταξύ $i[f'(x) - D]$ και $i[f'(x) + D]$ για κάποιο i επαρκώς μικρό. Εφαρμόζει το «επαρκώς μικρό» i σε διάφορα σημεία στο σημεία που ορίζεται η f:

$f(x+2i) - f(x+i)$ βρίσκεται μεταξύ $i[f'(x+i) \pm D]$

$f(x+3i) - f(x+2i)$ βρίσκεται μεταξύ $i[f'(x+2i) \pm D]$

…….

[Ας σημειωθεί ότι άπαξ και δοθεί το D, ο Lagrange υπέθετε ότι το ίδιο i θα δούλευε πάντα για όποιο x στο δοθέν διάστημα]

Αφού οι $f'(x)$, $f'(x+i)$, … $f'(x +[n-1]i)$ έχουν όλες το ίδιο πρόσημο από την υπόθεση του λήμματος, το $f(x+ni) - f(x)$ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των ποσοτήτων

$\{if'(x) + if'(x+i) + \ldots +if'(x+ [n-1]i)\} \pm niD$

Ο Lagrange εξέφρασε αυτό το συμπέρασμα λέγοντας ότι το τηλεσκοπικό άθροισμα

$f(x+i) - f(x) + f(x+2i) - f(x+i) + \ldots f(x+ni) - f(x +[n-1]i)$ «θα έχει ως όριο το άθροισμα των ορίων» [εννοεί φράγμα], δηλαδή

$\{if'(x) + if'(x+i) + \ldots +if'(x+ [n-1]i)\} - niD$ και

$\{if'(x) + if'(x+i) + \ldots +if'(x+ [n-1]i)\} + niD$

Ο Lagrange παρατήρησε ότι αφού το D είναι αυθαίρετο, μπορεί να παρθεί μικρότερο από τη τιμή του [f΄(x) + f΄(x+i) + … +f΄(x+ [n-1]i)]/n, «αφαιρώντας το πρόσημο». Δεν έδωσε κάποιο λόγο για τον οποίο ήταν σε θέση να επιλέξει ένα τέτοιο D. Εάν το D επιλεγεί έτσι, θα είναι σίγουρα μικρότερο σε απόλυτη τιμή από [f΄(x) + f΄(x+i) + … +f΄(x+ [n-1]i)]/n. [Η ύπαρξη ενός μη μηδενικού ελάχιστου για την |f΄(x) | απαιτεί, πάντως, όχι μόνο ότι |f΄(x) | > 0 αλλά ότι είναι φραγμένη μακριά από το 0. Άρα θα έπρεπε να ενισχύσει την υπόθεση του ο Lagrange για να είναι δυνατή η εκλογή του, του D].

Υποθέτοντας ότι το D επιλέγεται με αυτό τον τρόπο, ο Lagrange συμπέρανε ότι το f(x+ni) - f(x) θα είναι μεταξύ 0 και 2i[f΄(x) + f΄(x+i) + … +f΄(x+ [n-1]i)]. Μετά όρισε P να είναι η μεγαλύτερη θετική ή αρνητική τιμή των n ποσοτήτων f΄(x), f΄(x+i), …. f΄(x+ [n-1]i). Για τέτοιο P , τότε, f(x+ni) - f(x) βρίσκεται μεταξύ 0 και 2inP.

Ο Lagrange εξήγησε τι σήμαινε αυτό το τελευταίο συμπέρασμα. Ας υποθέσουμε ότι αντιπροσωπεύουμε όποια συνάρτηση του z με f(x+z) - f(x) και έστω z = ni. Έτσι το z έχει το ίδιο πρόσημο με το i. Αν το i παρθεί όσο μικρό επιθυμούμε, το n μπορεί να γίνει όσο μεγάλο επιθυμούμε. Η απόδειξη του δείχνει ότι το f(x+z) - f(x) βρίσκεται μεταξύ 0 και 2zP, και έτσι αποδεικνύει το λήμμα.

Ο Lagrange ανέπτυξε σε αυτή την απόδειξη μία εξαιρετικά χρήσιμη τεχνική για να πάει από μία ιδιότητα της f΄(x) στο διάστημα [x, x+i] σε μια ιδιότητα της f΄(x) σε ένα μεγαλύτερο διάστημα [x, x+ni] χειριζόμενος τη f(x+ni) - f(x) ως το τηλεσκοπικό άθροισμα f(x+ni) - f(x+[n-1]i) + … +f(x+i) - f(x). Αυτή η διαδικασία ξαναεμφανίζεται στην εργασία του Cauchy.

Η απόδειξη έχει αρκετές αδυναμίες: Υποθέτει υπόρρητα ότι η f΄(x) είναι και φραγμένη και φραγμένη μακριά από το μηδέν, υποθέτοντας ότι όποια επιλογή του i θα έκανε το V αρκετά μικρό για όλες τις τιμές του x στο δοθέν διάστημα, συγχέει την σύγκλιση με την ομοιόμορφη σύγκλιση (λάθος το οποίο αναπαρήγαγε ο Cauchy) και τέλος, βασίζεται στην ιδιότητα f(x+i) = f(x) + if΄(x) + iV, όπου το V πάει στο 0 όταν το i πάει. Ο Cauchy υπερπήδησε αυτό το εμπόδιο ορίζοντας την f΄(x) έτσι που να ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

[Η απόδειξη που εμφανίζεται στο τμήμα της εργασίας που αφορά στον Lagrange είναι από το βιβλίο *Théorie des fonctions analytiques*, ενώ αυτή που παρατίθεται εδώ είναι από το *Calcul des fonctions* στο οποίο ο Lagrange αφού δηλώσει ότι «ενόσω το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης δεν χρησιμεύει παρά μόνο για την

παραγωγή των παραγώγων συναρτήσεων είναι αδιάφορο αν η σειρά είναι άπειρη ή όχι ... αλλά αν θέλουμε να την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την τιμή της συνάρτησης σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ... είναι σημαντικό να έχουμε ένα μέσο για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο της σειράς που αγνοούμε ή το λιγότερο να βρούμε τα όρια του λάθους που διαπράττουμε αγνοώντας το υπόλοιπο». Και συνεχίζει :
« Στη λύση που έδωσα σε αυτό το πρόβλημα στο δηλωθέν έργο (δηλαδή στο *Théorie des fonctions analytiques*), άρχισα αναζητώντας την ακριβή έκφραση του υπολοίπου της σειράς και στην συνέχεια καθόρισα τα όρια αυτής της έκφρασης. Αλλά μπορούμε να βρούμε αμέσως αυτά τα όρια με ένα τρόπο πιο στοιχειώδη και εξίσου αυστηρό»]

Στη συνέχεια ο Lagrange χρησιμοποίησε το λήμμα για να παράγει το υπόλοιπο Lagrange της σειράς Taylor:

Το λήμμα το χρειαζόταν για να βρει τα «όρια» δηλαδή τα φράγματα για το υπόλοιπο της σειράς Taylor. Η διαδικασία που ακολουθεί έχει ως εξής:
Έστω το max της $f'(x)$ σε ένα δοθέν διάστημα είναι το $f'(q)$ και το min της $f'(x)$, το $f'(p)$. Προσδιορίζει δύο βοηθητικές συναρτήσεις g και h σύμφωνα με τις εξισώσεις
$g'(i) = f'(x+i) - f'(p)$
$h'(i) = f'(q) - f'(x+i)$
Ο ορισμός των g' και h' κάνουν τις $g'(i)$ και $h'(i)$ θετικές για x στο δοθέν διάστημα, έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί το λήμμα. Πηγαίνοντας από αυτές τις παραγώγους g' και h' στις «αρχικές τους συναρτήσεις» και υποθέτοντας ότι $g(0) = h(0) = 0$, πήρε
$g(i) = f(x+i) - f(x) - if'(p)$
$h(i) = if'(q) - f(x+i) + f(x)$ οι οποίες από το λήμμα πρέπει να είναι θετικές ενόσω η f' παραμένει πεπερασμένη. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(x+i) - f(x) - if'(p) \geq 0 \\ if'(q) - f(x+i) + f(x) \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f(x+i) \geq f(x)+if'(p) \\ f(x+i) \leq if'(q)+f(x) \end{array}$$

Δηλαδή,
$f(x) + if'(p) \leq f(x+i) \leq f(x) + if'(q)$ το οποίο θέτει «όρια» [δηλαδή φράγματα] στο $f(x+i)$. Αυτό είναι το αντίστοιχο θεώρημα του Cauchy.

Ο Lagrange επανέλαβε την διαδικασία για να πάρει της n-οστής τάξης το υπόλοιπο. Γενικά,

$f(x) + if'(x) + \ldots + (i^u/u!)\, f^{(u)}(p) \leq f(x+i) \leq f(x) + if'(x) + \ldots + (i^u/u!)\, f^{(u)}(q)$ όπου p και q είναι αντίστοιχα το min και max της u-στής παραγώγου της f στο διάστημα [x, x+i] . Από αυτό συμπέρανε ότι υπάρχει μία ποσότητα X στο διάστημα τέτοια ώστε $f(x+i) = f(x) + if'(x) + \ldots + (i^u/u!)\, f^{(u)}(X)$ αυτό που καλούμε σήμερα σειρά Taylor με υπόλοιπο Lagrange.

Ο Cauchy όρισε την παράγωγο ώστε να έχει την ιδιότητα του Lagrange .

Ο πρώτος ορισμός του (Cauchy, 1823) λέει:

«Όταν μία συνάρτηση y = f(x) παραμένει συνεχής μεταξύ δύο δοσμένων ορίων της μεταβλητής x, και όταν κανείς εκχωρήσει σε μία τέτοια μεταβλητή μία τιμή που εσωκλείεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων, τότε μία άπειρα μικρή μεταβολή που εκχωρείται στη μεταβλητή παράγει μία άπειρα μικρή μεταβολή στην ίδια τη συνάρτηση. Κατά συνέπεια αν κάποιος θέσει Δx = i οι δύο όροι του *λόγου των διαφορών* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ θα είναι άπειρα μικρές ποσότητες. Αλλά παρόλο που αυτοί οι δύο όροι θα προσεγγίζουν το όριο μηδέν επ' αόριστον και ταυτόχρονα, ο ίδιος ο λόγος μπορεί να συγκλίνει προς ένα άλλο όριο, είτε θετικό είτε αρνητικό. Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μία ορισμένη τιμή για κάθε x. Η μορφή της νέας συνάρτησης που εξυπηρετεί ως το όριο του λόγου f(x+i) - f(x) /i θα εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης y = f(x). Προκειμένου να υποδηλωθεί αυτή η εξάρτηση δίνει κανείς στην νέα συνάρτηση το όνομα της παραγώγου συνάρτησης και τη προσδιορίζει ως f΄(x) ή y΄.» (Laugwitz, 1987).

Η πρόταση **«αυτό το όριο, όταν υπάρχει»** είναι ένα σαφές παράδειγμα της αυστηρής διατύπωσης του Cauchy.

Οι ορισμοί της παραγώγου και του διαφορικού του Cauchy δεν είναι νέοι πραγματικά. Περισσότερο δείχνουν μια αποσαφήνιση, με την εφαρμογή των εννοιών της συνάρτησης, της μεταβλητής και του ορίου μιας μεταβλητής (Boyer, 1949).

Ο ορισμός του Cauchy της παραγώγου είναι ακριβώς αυτός που δόθηκε από τον Bolzano. Το $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ φυσικά είναι το διαφορικό πηλίκο του L'Huilier αποσαφηνισμένο με την εφαρμογή της έννοιας της συνάρτησης του Euler και του Lagrange. Έγινε η κεντρική έννοια του διαφορικού λογισμού και η έκφραση «διαφορικό» ορίζεται στη συνέχεια με όρους της παραγώγου. Το διαφορικό έτσι αντιπροσωπεύει απλά μία βολική βοηθητική έννοια που επιτρέπει την εφαρμογή του συμβολισμού που εισηγήθηκε ο Leibniz χωρίς τη σύγχυση μεταξύ αυξήσεων και διαφορικών που είχε δημιουργήσει αυτός ο συμβολισμός. Ο Leibniz είχε θεωρήσει τα διαφορικά ως τις θεμελιώδεις έννοιες, και το διαφορικό πηλίκο να ορίζεται με όρους αυτών. **Ο Cauchy αντέστρεψε αυτή τη σχέση**. Έχοντας ορίσει τη παράγωγο με όρους ορίου, εξέφρασε μετά το διαφορικό με όρους παραγώγου. Αν dx είναι μια πεπερασμένη σταθερή ποσότητα h τότε το διαφορικό dy της y = f(x) ορίζεται ως f΄(x) dx. Με άλλα λόγια τα διαφορικά dy και dx είναι ποσότητες επιλεγμένες έτσι ώστε ο λόγος τους dy/dx να συμπίπτει με αυτόν του "derniere raison" ή το όριο y΄= f΄(x) του λόγου Δy/Δx.

Ο Cauchy έδωσε στην παράγωγο και στο διαφορικό την τυπική ακρίβεια που έλειπε από τους ορισμούς των προγενέστερων του. Μπόρεσε με αυτό τον τρόπο να δώσει ικανοποιητικούς **ορισμούς των διαφορικών μεγαλύτερων τάξεων**. Το διαφορικό dy = f΄(x)dx είναι φυσικά συνάρτηση του x και του dx. Θεωρώντας το dx σταθερό, η συνάρτηση f΄(x)dx θα έχει με τη σειρά της μία παράγωγο f΄΄(x)dx και ένα διαφορικό $d^2y = f''(x)dx^2$. Γενικά $d^ny = f^n(x)dx^n$. Αυτό δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι δείχνει ότι οι παράγωγοι ανώτερης τάξης πρέπει να ορίζονται με όρους διαφορικών ανώτερης τάξης. Προφανώς ισχύει το αντίστροφο. Τα διαφορικά δεν έχουν κανένα λογικό νόημα ανεξάρτητο από αυτό των παραγώγων. Τα διατήρησε απλά ως βοηθητική έννοια για να προσφέρει μεγαλύτερη ευκολία στις πράξεις από αυτή που παρέχεται από τις παραγώγους (Boyer, 1949).

Ο Cauchy χρησιμοποίησε τον ορισμό του εφαρμόζοντας την ιδιότητα του Lagrange για να αποδείξει θεωρήματα για τις παραγώγους. Το κρίσιμο θεώρημα της θεωρίας παραγώγων αφορά στα **φράγματα του διαφορικού πηλίκου**: «Εάν f(x) είναι συνεχής μεταξύ $x = x_0$ και x = X, και εάν A είναι το ελάχιστο της f΄(x) σε αυτό το διάστημα ενώ B είναι το μέγιστο, τότε $A \leq [f(X) - f(x_0)] / (X - x_0) \leq B$.» (*Calcul*

infinitésimal, 1823) (Ο Cauchy εξέφραζε το ≤ λεκτικά). Στην απόδειξη του μετέφρασε τον ορισμό της παραγώγου στην γλώσσα των ε-δ ανισοτήτων.

Μία σύντομη εκδοχή της απόδειξης (η πλήρης απόδειξη εμφανίζεται στο παράρτημα) είναι: « Έστω δ και ε δύο πολύ μικροί αριθμοί, ο πρώτος επιλεγμένος με τέτοιο τρόπο ώστε, για αριθμητικές τιμές του i μικρότερες από δ και για όποια τιμή του x μεταξύ x_0 και X, ο λόγος [f(x+i) - f(x)] / i παραμένει πάντα μεγαλύτερος από f΄(x) - ε και μικρότερος από f΄(x) + ε». Αυτή η ανισότητα είναι έγκυρη γιατί είναι απλά μια μετάφραση του ορισμού του της παραγώγου. Πήρε τον ορισμό της f΄(x) για ένα συγκεκριμένο x και τον εφάρμοσε σε όλο το διάστημα, υποθέτοντας ότι δοθέντος ενός ε μπορούσε να βρει ένα δ που δουλεύει για κάθε x στο διάστημα. Αυτό υποθέτει ότι η f΄(x) είναι το ομοιόμορφο όριο των πηλίκων [f(x+i) - f(x)] / i στο διάστημα, μία σύγχυση που εμφανίζεται και στην εργασία του Lagrange. Μετά ο Cauchy παρέμβαλε n - 1 νέες τιμές της μεταβλητής x δηλαδή, $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ μεταξύ x_0 και X με τέτοιο τρόπο ώστε $(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \ldots (X - x_{n-1})$ να είναι όλα μικρότερα από δ.

Εφαρμόζοντας την

$f'(x) - \varepsilon < [f(x+i) - f(x)] / i < f'(x) + \varepsilon$ σε κάθε υποδιάστημα είχε,

$f'(x_0) - \varepsilon < [f(x_1) - f(x_0)] / x_1 - x_0 < f'(x_0) + \varepsilon$

$f'(x_1) - \varepsilon < [f(x_2) - f(x_1)] / x_2 - x_1 < f'(x_1) + \varepsilon$

...

$f'(x_{n-1}) - \varepsilon < [f(X) - f(x_{n-1})] / X - x_{n-1} < f'(x_{n-1}) + \varepsilon$

Εάν A και B είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f΄(x) στο δοθέν διάστημα, τότε κάθε ένα από τα παραπάνω κλάσματα είναι μεγαλύτερο από A - ε και μικρότερο από B + ε.

Ο Cauchy εφαρμόζει τώρα τη δική του εκδοχή του λήμματος του Ampere , στα κλάσματα $f(x_1) - f(x_0)/x_1-x_0, \ldots, f(X) - f(x_{n-1})/ X-x_{n-1}$ τα οποία έχουν όλα θετικούς παρονομαστές. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με την τηλεσκοπική ιδιότητα του αθροίσματος $f(X) - f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1) - f(x_0)$ που είχε χρησιμοποιήσει ο Lagrange πέρασε στην ανισότητα

$A - \varepsilon < f(X) - f(x_0) / X-x_0 < B + \varepsilon$ Αλλά αφού αυτή αληθεύει για όποιο ε συμπέρανε

$A \leq f(X) - f(x_0) / X-x_0 \leq B$

[Λήμμα του Ampere: Σε ένα δοθέν διάστημα [a,k] ορίζουμε b,c,d,… τέτοια ώστε a<b<c<d<…<h<k και ορίζουμε B,C,….,H τέτοια ώστε f(b) = B, f(c) = C, … f(h) = H. Τώρα θεωρούμε τα κλάσματα B-A/b-a, C-B/c-b ,… ,K-H/k-h. Ανάμεσα σε αυτά τα κλάσματα μπορούμε πάντα να βρούμε ένα ζεύγος τέτοιο ώστε το ένα κλάσμα του ζεύγους να είναι μεγαλύτερο από το K-A/k-a, ενώ το άλλο μικρότερο.]

Σε αυτή την **ε-δ ανισότητα - την πρώτη εμφάνιση στην ιστορία -** η μόνη ατέλεια είναι ότι υπέθεσε ότι το δ του θα δούλευε για όλα τα x στο δοθέν διάστημα, μία υπόθεση ισοδύναμη με αυτή της ομοιόμορφης σύγκλισης του διαφορικού πηλίκου. Παρόλα αυτά η χρήση του της ανισότητας προκειμένου να μεταφράσει τον ορισμό είναι ένα μεγάλο επίτευγμα (Grabiner, 1981).

Μετά από μερικούς τυπικούς υπολογισμούς παραγώγων στοιχειωδών συναρτήσεων, ο Cauchy εισάγει αυτόν που σήμερα ονομάζουμε **κανόνα της αλυσίδας** για τον υπολογισμό της παραγώγου της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (Cauchy, 1823):

Έστω z μία δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεδεμένη με την πρώτη y = f(x) με τον τύπο z = F(y). Το z ή F[f(x)] θα είναι αυτό που καλεί κανείς συνάρτηση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής x. Και αν κάποιος ονομάσει τις άπειρα μικρές και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z με Δx, Δy, Δz θα βρει :

$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και περνώντας στα όρια, $z' = y' F'(y) = f'(x) F'[f(x)]$.

Στο τέταρτο μάθημα του *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) ο Cauchy αρχίζει την προσέγγιση του στο **θεώρημα μέσης τιμής**, ερευνώντας αρχικά την σημασία του **προσήμου της παραγώγου**. Επειδή $y' = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ παρατηρεί ότι αν $y' > 0$ στο x_0 τότε Δy, Δx πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο για Δx επαρκώς μικρό (και διαφορετικά πρόσημα αν $y' < 0$). Για αυτό το λόγο, η y = f(x) αυξάνει καθώς το x αυξάνει μέσω του x_0. Γι αυτό, λέει, αν αυξήσει κανείς το x κατά «ανεπαίσθητους βαθμούς» από $x = x_0$ σε x = X, η συνάρτηση f(x) θα αυξάνει κάθε φορά που η παράγωγός της είναι θετική, και θα μειώνεται όταν είναι αρνητική. Ειδικότερα, $f(X) > f(x_0)$ εάν $f'(x) > 0$ στο $[x_0, X]$ (Edwards, 1979).

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι πόρισμα του πρώτου θεωρήματος και του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών: Αν $f'(x)$ συνεχής μεταξύ $x = x_0$ και $x = x_0+h$ τότε υπάρχει ένα θ μεταξύ 0 και 1 τέτοιο ώστε $[f(x_0 +h) - f(x)] /h = f' (x_0 +\theta h)$ (Grabiner, 1981).

Με αυτή την προετοιμασία ο Cauchy είναι έτοιμος για το «γενικευμένο του θεώρημα μέσης τιμής»: Έστω f(x) και F(x) είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[x_0, X]$ και έστω ότι $F'(x)$ είναι μη μηδενική σε αυτό το διάστημα. Τότε $(f(X) - f(x_0))/ (F(X) - F(x_0)) = f'(\xi) /F'(\xi)$ για κάποιο σημείο ξ στο (x_0, X) (ibid).

Ολοκλήρωμα

Κατά τον 18° αιώνα είχε επικρατήσει η άποψη ότι το ολοκλήρωμα είναι το αντίστροφο της παραγώγου, σε βάρος της θεώρησης του ως άθροισμα. Δηλαδή μία συνάρτηση f(x) ολοκληρωνόταν μέσω της εύρεσης μίας αντιπαραγώγου ή αρχικής συνάρτησης F(x) έτσι ώστε $F'(x) = f(x)$. Το ολοκλήρωμα της f(x) σε ένα διάστημα [a,b] δίνονταν σύμφωνα με το ακόμα ευρετικά κατανοητό θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού από, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Edwards, 1979).

Προηγούμενες απόψεις για το ολοκλήρωμα

Οι περισσότεροι μαθηματικοί απέρριπταν τον ορισμό του Leibniz του ολοκληρώματος ως άπειρο άθροισμα απειροστών γιατί εμπεριείχε και άπειρο άθροισμα και απειροστά.

Ο Johann Bernoulli το ονόμασε ρητά ως το αντίστροφο του διαφορικού. Θεωρούσε ότι το αντικείμενο του ολοκληρωτικού λογισμού ήταν αυτό της εύρεσης από μία δοθείσα σχέση μεταξύ διαφορικών, της σχέσης των ίδιων των ποσοτήτων (*Di erste Intergralrechnung*). Ο Euler χρησιμοποίησε την αντίληψη του αθροίσματος για να βρει την προσεγγιστική τιμή των ορισμένων ολοκληρωμάτων αλλά επειδή ερμήνευε το διαφορικό ως μηδέν, απέρριψε την άποψη του Leibniz

της ολοκλήρωσης ως διαδικασία αθροίσματος και ακολούθησε τον Johann Bernoulli ορίζοντας το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο της παραγώγου. (*Opera omnia*, XI,7). Ο L' Huilier έδωσε έμφαση στο γεγονός ότι το ολοκλήρωμα είναι το αντίστροφο της παραγώγου (*Exposition élémentaire*), ο Lagrange επίσης θεώρησε το πρόβλημα του ολοκληρωτικού λογισμού ως αυτό του καθορισμού των "fonctions dérivées" της αρχικής συνάρτησης (*Oeuvres*, III, 443). Σύμφωνα με τον Lacroix είπε ότι το αντικείμενο του ολοκληρωτικού λογισμού είναι να καθορίσει από τους διαφορικούς συντελεστές τις συναρτήσεις από τις οποίες είχαν προκύψει (*Traité du calcul*, II, 1-2). Ο Bolzano παρόμοια όρισε το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο της παραγώγου. (*Bolzano's Schriften*, σελ.83-84) (Boyer, 1949).

Παρόλα αυτά αναγνωρίζετο ότι το ολοκλήρωμα μπορούσε να υπολογιστεί τουλάχιστον προσεγγιστικά από αθροίσματα. Οι Euler, Legendre, Lacroix, Poisson προσπάθησαν να βρουν φράγματα για τα σφάλματα της προσέγγισης μέσω αθροισμάτων των τιμών ορισμένων ολοκληρωμάτων. Ο καθένας προσπάθησε να δείξει, τουλάχιστον σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, ότι το σφάλμα μπορούσε να γίνει μικρότερο από όποια δοθείσα ποσότητα (Grabiner, 1981).

Η πρώτη συστηματική συζήτηση του 18^{ου} αιώνα της προσέγγισης του ολοκληρώματος ως το όριο αθροίσματος βρίσκεται στο *Institutiones calculi integralis* (1768) του Euler. Παρόλο που το είχε ορίσει ως το αντίστροφο του διαφορικού πηλίκου αναγνώρισε ότι μερικές φορές είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσει κανείς άλλες ιδιότητες του ολοκληρώματος για να το υπολογίσει έστω και προσεγγιστικά. Ο Euler θεώρησε X μια συνάρτηση του x της οποίας το ολοκλήρωμα $\int Xdx$ πρέπει να υπολογιστεί μεταξύ των ορίων α και x. Διαίρεσε το διάστημα [α,x] σε υποδιαστήματα μήκους α΄- α, α΄΄- α΄, ... ,x - ΄x, όπου α<α΄<α΄΄<... <΄x < x. Για να αντιπροσωπεύσει τις τιμές της συνάρτησης X στα σημεία α, α΄, α΄ ΄, ... ,΄x, x, έγραψε A, A΄, A΄΄, ... ΄ ,X και X. Θεώρησε b τη σταθερά ολοκλήρωσης που σχετίζεται με το ολοκλήρωμα $\int Xdx$. Ο Euler είπε ότι μεταξύ δύο τιμών του x που διαφέρουν κατά μία μικρή ποσότητα, μπορούμε να χειριστούμε τη συνάρτηση ως σταθερά, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα $\int Xdx$ σε αυτό το μικρό διάστημα είναι η τιμή της συνάρτησης εκεί πολλαπλασιασμένη με το

μήκος του μικρού διαστήματος. Έτσι, η τιμή του ολοκληρώματος $\int Xdx$ μεταξύ των ορίων α και x μπορεί να προσεγγιστεί από το άθροισμα

$y = b + A(\alpha' - \alpha) + A'(\alpha'' - \alpha') + ... + ' X(x - 'x)$ (Grabiner, 1981).

Αν ξαναγράψουμε αυτή τη σχέση με τον συμβολισμό του Cauchy θεωρώντας την σταθερά ολοκλήρωσης b=0, την συνάρτηση X ως f(x), $\alpha = x_0$, $\alpha' = x_1$,…, $'x = x_{n-1}$ και x = X τότε η προηγούμενη σχέση του Euler γίνεται

$y = f(x_0)(x_1-x_0) +\ldots +f(x_{n-1}) (X-x_{n-1})$ δηλαδή ο ορισμός του Cauchy.

Ο Euler δεν διατύπωσε ένα γενικό υπολογισμό του σφάλματος για την παραπάνω προσέγγιση. Συζήτησε πάντως διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους η εγγύτητα της προσέγγισης μπορεί να εξασφαλιστεί. Πρώτα είπε, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι ή πάντα αύξουσα ή πάντα φθίνουσα στο συγκεκριμένο διάστημα. Τότε το ολοκλήρωμα $y = \int Xdx$ μεταξύ των δοθέντων ορίων περιλαμβάνεται πάντα μεταξύ του αθροίσματος των μηκών των υποδιαστημάτων πολλαπλασιασμένων με τις τιμές του X στα αριστερά άκρα του υποδιάστηματος και του αντίστοιχου αθροίσματος για τις τιμές του X στα δεξιά άκρα του υποδιαστήματος.

Ο Lacroix στο *Traité du calcul* προχώρησε περισσότερο από τον Euler στην συζήτηση για την εγγύτητα της προσέγγισης στην πραγματική τιμή. Όπως και ο Cauchy ξεκίνησε με ένα διάστημα. Μετά όπως έδειξε ο Euler, ο Lacroix είπε ότι το ολοκλήρωμα φράσσεται από τις προσεγγίσεις $Y + Y' (\alpha_1 - \alpha)$ και $Y + Y_1' (\alpha_1 - \alpha)$ [Έγραψε $Y' = X(\alpha)$ και $Y_1' = X(\alpha_1)$]. Στη συνέχεια, ο Lacroix διαίρεσε το ίδιο διάστημα από α έως α_1 μέσω των ενδιάμεσων σημείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, έτσι ώστε $\alpha_1<\alpha_2< \ldots <\alpha_m$ Έτσι, το ολοκλήρωμα βρίσκεται μεταξύ

$Y + Y'(\alpha_1-\alpha) + Y'(\alpha_2-\alpha_1) + \ldots+ Y'(\alpha_1-\alpha_m)$ και $Y + Y_1'(\alpha_1-\alpha) + Y_1'(\alpha_2-\alpha_1) + \ldots+ Y_1'(\alpha_1-\alpha_m)$ Αλλά επειδή η συνάρτηση X υποθέσαμε ότι είναι πάντα αύξουσα ή φθίνουσα, τα $X(\alpha_1), X(\alpha_2), \ldots X(\alpha_m)$ βρίσκονται όλα μεταξύ $X(\alpha)$ και $X(\alpha_1)$.

Έστω $X(\alpha_1) = y_1'$, $X(\alpha_2) = y_2' \ldots X(\alpha_m) = y_m'$ Τότε η έκφραση

$Y + Y'(\alpha_1-\alpha) + y_1'(\alpha_2-\alpha_1) + y_2' (\alpha_3-\alpha_2) + \ldots + y_m' (\alpha_1-\alpha_m)$

πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των $Y + Y' (\alpha_1-\alpha) + Y' (\alpha_2-\alpha_1) + \ldots+ Y'(\alpha_1-\alpha_m)$ και $Y + Y_1' (\alpha_1-\alpha) + Y_1' (\alpha_2-\alpha_1) + \ldots+ Y_1'(\alpha_1-\alpha_m)$.

Η διαμέριση μέσω των α_k στην $Y+Y'(\alpha_1-\alpha)+y_1'(\alpha_2-\alpha_1)+y_2'(\alpha_3-\alpha_2)+ \ldots + y_m' (\alpha_1-\alpha_m)$ είναι μια υποδιαμέριση της αρχικής διαμέρισης και αφού η

$Y+Y'(\alpha_1-\alpha) + y_1'(\alpha_2-\alpha_1) + y_2' (\alpha_3-\alpha_2) + \ldots + y_m' (\alpha_1-\alpha_m)$ βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων εκφράσεων που φράσσουν το ολοκλήρωμα και η ίδια πρέπει να είναι κοντά

στο ολοκλήρωμα και στην πραγματικότητα είπε ο Lacroix μπορεί να γίνει όσο κοντά στο ολοκλήρωμα επιθυμούμε εάν τα σημεία α_1, α_2, ... ,α_m παρθούν επαρκώς κοντά το ένα στο άλλο.

Ο Lacroix όχι μόνο έδειξε ότι το ολοκλήρωμα μιας μονότονης συνάρτησης περιλαμβάνεται μεταξύ δύο υπολογίσιμων πεπερασμένων φραγμάτων αλλά είχε διατυπώσει ένα αλγεβρικό επιχείρημα ότι λεπτότερες υποδιαιρέσεις μπορεί να δειχθεί ότι παράγουν εγγύτερες προσεγγίσεις. Δήλωσε επίσης ότι το διάστημα στο οποίο υπολογίζεται μία συνάρτηση μπορεί να χωριστεί σε τμήματα με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε τμήμα η συνάρτηση να είναι αύξουσα ή φθίνουσα και έτσι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης μπορεί να χωριστεί σε άθροισμα ολοκληρωμάτων με τέτοιο τρόπο που το κάθε ένα να έχει φράγματα. Αυτές οι διαισθήσεις ήταν απαραίτητες για την εργασία του Cauchy (Grabiner, 1981).

Γιατί εγκατέλειψε ο Cauchy τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ως αντιπαράγωγο υπέρ του ορισμού του ως όριο αθροισμάτων;

Ούτε τα όρια αθροισμάτων ούτε τα εμβαδά συνόλων του επιπέδου ήταν επαρκώς κατανοητά προκειμένου να παρέχουν μία στέρεα βάση για ένα λογικό χειρισμό του ολοκληρώματος. Ειδικότερα, η έννοια του εμβαδού ήταν τελείως διαισθητική – θεωρείτο μία αυταπόδεικτη έννοια, και δεν είχε γίνει ακόμη αντιληπτή η ανάγκη για ένα ακριβή ορισμό. Πράγματι, το αναλυτικό ολοκλήρωμα με την έννοια της αντιπαραγώγου του Newton, ήταν επαρκές στη πράξη όσο οι μόνες συναρτήσεις προς ολοκλήρωση ήταν συνεχείς με την έννοια του Euler δηλαδή, κάθε συνάρτηση ορίζετο από μία μοναδική σαφή αναλυτική έκφραση (Edwards, 1979).

Αλλά στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, η εργασία του Fourier έφερε στο φως την ανάγκη να αποκτήσει η ολοκλήρωση νόημα για συναρτήσεις ασυνεχείς (τουλάχιστον με την έννοια του Euler). Τέτοιες συναρτήσεις εμφανίζονταν φυσικά σε εφαρμοσμένα προβλήματα και οι συντελεστές των σειρών τους Fourier εκφράζονταν ως ολοκληρώματα που δεν ταίριαζαν στο στενά αναλυτικό μοντέλο της ολοκλήρωσης του 18^{ου} αιώνα (Edwards, 1979).

Η εργασία του Fourier έκανε καθαρό ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που αντιπροσωπεύεται από μία τριγωνομετρική σειρά μπορεί να υπάρχει, παρόλο που η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το ολοκλήρωμα δεν είναι παντού διαφορίσιμη (Grabiner, 1981).

Οι δυσκολίες με το ολοκλήρωμα ως αντιπαράγωγο δεν περιορίζονταν σε μεμονωμένα σημεία. Ακόμα περισσότερα προβλήματα εμφανίζονταν στην μιγαδική ολοκλήρωση και ο Cauchy ενδιαφερόταν πολύ γι αυτό το θέμα και είχε συχνά εκφράσει την δυσαρέσκειά του με τις καθαρά τυπικές αναλογίες στον μαθηματικό συλλογισμό. Τόνισε ότι δεν μπορεί κανείς να καθιερώσει θεωρήματα στη μιγαδική ανάλυση απλά μεταφέροντας γνωστά θεωρήματα της πραγματικής ανάλυσης. Ονόμαζε τον συλλογισμό από την πραγματική στη μιγαδική ανάλυση απλά «ένα είδος επαγωγής» και δήλωσε ρητά (για πρώτη φορά) ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων είναι η διαφορά μεταξύ των τιμών της αντιπαραγώγου σε αυτά τα σημεία :
«μόνο ... στη περίπτωση μιας συνάρτησης η οποία αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς μεταξύ των υπό ερώτηση ορίων» (*Oeuvres complètes*). Δύο χρόνια αφού έδωσε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος ως άθροισμα, ο Cauchy εφάρμοσε τις ιδέες του στη μιγαδική ολοκλήρωση σε ένα άρθρο το 1825 (Grabiner, 1981).

Ήταν ο **Cauchy** αυτός που **πρώτος** αναγνώρισε την αναγκαιότητα να **«δειχθεί η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων** ή αρχικών συναρτήσεων πριν να γίνουν γνωστές οι διάφορες ιδιότητες τους», δηλαδή πρώτα η παροχή ενός *γενικού* ορισμού και απόδειξης της ύπαρξης του ολοκληρώματος για μία ευρεία κλάση συναρτήσεων που θα μπορούσε να παρέχει τη βάση για συζήτηση *ειδικών* ολοκληρωμάτων και των ιδιοτήτων τους. (Η πλήρης απόδειξη παρατίθεται στο παράρτημα)
Ίσως αυτός να ήταν και ο βασικός λόγος που επέλεξε να ορίσει το ολοκλήρωμα ως όριο αθροίσματος. Με αυτόν το ορισμό μπορούσε να αποδείξει την ύπαρξη ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης, να θεωρήσει ολοκληρώματα συναρτήσεων που δεν ήταν παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων και να εξηγήσει την συμπεριφορά ολοκληρωμάτων κατά μήκος μιας διαδρομής.

Στο *Résumé des leçons données a l' École royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* το 1823 διατύπωσε τον ορισμό του ολοκληρώματος .
Στο 21° leçon ο Cauchy αρχίζει με μία συνάρτηση f(x) η οποία είναι συνεχής (με τη σύγχρονη έννοια) στο διάστημα $[x_0, X]$, και υποδιαιρεί αυτό το διάστημα σε n υποδιαστήματα μέσω των σημείων $x_0, x_1, x_2, \ldots ,x_n = X$. Με αυτή την διαμέριση P του $[x_0, X]$ συνδέει το προσεγγιστικό άθροισμα

$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})$ (1) που αποκτάται από την άθροιση των εμβαδών των ορθογωνίων βασισμένων στα υποδιαστήματα της διαμέρισης, με βάση $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος $f(x_{i-1})$. Θέλει να ορίσει το $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ ως το όριο του προηγούμενου αθροίσματος καθώς το μέγιστο των μηκών $x_i - x_{i-1}$ των υποδιαστημάτων προσεγγίζει το μηδέν. Προφανώς η ύπαρξη αυτού του ορίου πρέπει να αποδειχθεί. Για αυτό τον σκοπό λέει:

«Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι εάν οι αριθμητικές τιμές [μήκη] αυτών των στοιχείων [υποδιαστημάτων] γίνουν πολύ μικρές και ο αριθμός n πολύ μεγάλος ο τρόπος της υποδιαίρεσης θα έχει μόνο μία ανεπαίσθητη επίδραση στην τιμή του S» (Edwards, 1979).

Για να το αποδείξει αυτό χρησιμοποιεί το παρακάτω στοιχειώδες αριθμητικό αποτέλεσμα από το *Cours d' analyse* (1821): Εάν $\alpha_1, ..., \alpha_n$ είναι θετικοί αριθμοί και $a_1, \ldots, a_n$ είναι αυθαίρετοι αριθμοί, τότε $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = \bar{a}\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$ όπου $\bar{a}$ είναι μία «μέση τιμή» των $a_1, \ldots, a_n$, δηλαδή $\bar{a}$ κείται μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου από αυτούς. Με $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ και $a_i = f(x_{i-1})$ από τη προηγούμενη ισότητα προκύπτει

$S = f(x_0 + \theta\,(X - x_0))\,(X - x_0)$ (*) για κάποιο θ στο (0,1), γιατί από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής κάθε μέσος όρος των αριθμών $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})$ είναι μία τιμή της συνεχούς συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του διαστήματος.

Τώρα, θεωρεί μία εκλέπτυνση P΄ της προηγούμενης διαμέρισης P δηλαδή κάθε υποδιάστημα της διαμέρισης P΄ βρίσκεται σε κάποιο υποδιάστημα της P. Τότε το αντίστοιχο άθροισμα S΄μπορεί να γραφεί ως $S' = S'_1 + S'_2 + \ldots S'_n$

όπου S'_i είναι το άθροισμα αυτών των όρων του S΄ που αντιστοιχούν στα υποδιαστήματα του P΄ που βρίσκονται στο i-στο υποδιάστημα του P. Τότε η (*) εφαρμοσμένη σε αυτό το i-στο υποδιάστημα δίνει

$S' = f(x_{i-1} + \theta_i\,(x_i - x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$ για κάποιο θ_i στο (0,1), i =1,2,…, n έτσι,

$$S' = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + \theta_i\,(x_i - x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \quad (2)$$

Αν γράψουμε $\varepsilon_i = f(x_{i-1} + \theta_i (x_i - x_{i-1})) - f(x_{i-1})$ για κάθε i =1,2,…, n τότε από τη σύγκριση των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει

$S' - S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - x_{i-1}) = \bar{\varepsilon} (X - x_0)$ (3) για κάποιο μέσο όρο $\bar{\varepsilon}$ των ε_i.

Ο Cauchy συμπεραίνει από αυτή την τελευταία σχέση ότι «δεν θα μεταβάλλει κανείς αισθητά την τιμή του S που υπολογίζεται με μία μέθοδο διαίρεσης [διαμέριση] στην οποία τα στοιχεία [υποδιαστήματα] της διαφοράς $X - x_0$ έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές, αν περάσει κανείς σε μία δεύτερη μέθοδο διαίρεσης στην οποία κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία υποδιαιρεθεί σε πολλά άλλα» (ibid). Εδώ είναι που παραβλέπει την ανάγκη να αποδείξει ότι η συνεχής συνάρτηση f είναι *ομοιόμορφα* συνεχής στο $[x_0,X]$, δηλαδή ότι δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $| f(x') - f(x'') | < \varepsilon$ για όποια x', x'' στο $[x_0, X]$ με $| x' - x''| < \delta$. Γνωρίζοντας αυτό, οι αριθμοί ε_i που ορίστηκαν με την προηγούμενη σχέση μπορούσαν αν γίνουν όσο μικροί θέλαμε επιλέγοντας τη P με επαρκώς μικρά υποδιαστήματα.

Έστω τώρα P_1 και P_2 αυθαίρετες διαμερίσεις του $[x_0, X]$ και έστω P' η κοινή εκλέπτυνση που παίρνουμε συγχωνεύοντας τα σημεία των διαμερίσεων P_1 και P_2. Εάν S_1, S_2, S είναι τα αντίστοιχα προσεγγιστικά αθροίσματα τότε η (3) δίνει

$S' - S_1 = \bar{\varepsilon}_1 (X - x_0)$ και $S' - S_2 = \bar{\varepsilon}_2 (X - x_0)$ έτσι,

$S_1 - S_2 = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) (X - x_0)$

Γι αυτό το λόγο η διαφορά μετά των S_1 και S_2 μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή επιλέγοντας P_1 και P_2 με επαρκώς μικρά υποδιαστήματα.

Ο Cauchy συνοψίζει την κατάσταση ως εξής: «Ας θεωρήσουμε προς το παρόν ότι θεωρεί κανείς ταυτόχρονα δύο μεθόδους διαίρεσης της διαφοράς $X - x_0$ σε κάθε μία από τις οποίες τα στοιχεία της διαφοράς έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές. Θα είναι ικανός να συγκρίνει αυτές τις δύο μεθόδους με μία τρίτη με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο, είτε από τη πρώτη είτε από τη δεύτερη μέθοδο να σχηματίζεται από την ένωση διαφόρων στοιχείων της τρίτης. Προκειμένου να ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση θα επαρκεί ότι κάθε τιμή του x τοποθετούμενη εναλλάξ στις πρώτες δύο μεθόδους μεταξύ των ορίων x_0 και X να χρησιμοποιείται στην τρίτη και θα αποδείξει κανείς ότι μεταβάλλει την τιμή S πολύ λίγο περνώντας από τη πρώτη ή τη δεύτερη μέθοδο στη τρίτη. Γι αυτό το λόγο όταν τα στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$ γίνουν άπειρα μικρά, η μέθοδος διαίρεσης δεν έχει πια παρά μια

ανεπαίσθητη επίδραση στην τιμή του S. Και αν κανείς κάνει τις αριθμητικές τιμές αυτών των στοιχείων να μειώνονται επ'αόριστον, αυξάνοντας το πλήθος τους, η τιμή του S θα καταλήξει να είναι αισθητά σταθερή ή με άλλα λόγια, θα καταλήξει επιτυγχάνοντας ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο θα εξαρτάται μόνο από τη μορφή της συνάρτησης f(x) και από τις ακραίες τιμές x_0 και X που εκχωρούνται στη μεταβλητή x. Αυτό το όριο είναι αυτό που ονομάζει κανείς *ορισμένο ολοκλήρωμα.*»

Για να σταθεροποιήσει αυτό το τελευταίο επιχείρημα -την πραγματική ύπαρξη του ορίου- ο Cauchy θα χρειαζόταν την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών (ακριβώς όπως στο πρόβλημα της ύπαρξης ορίου μιας Cauchy ακολουθίας αριθμών) (Edwards, 1979).

Όσον αφορά στο ολοκλήρωμα η άποψη του Laugwitz είναι η εξής:
Είναι κοινή πεποίθηση ότι όποια απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας μιας συνεχούς συνάρτησης απαιτεί την ομοιόμορφη συνέχεια. Η απόδειξη του Cauchy συνήθως δηλώνεται ότι είναι λάθος.

Το **κρίσιμο βήμα** είναι, όταν ο Cauchy περνά στη κοινή εκλέπτυνση δύο υποδιαιρέσεων ενός διαστήματος $x_0 \leq x \leq X$, $x_0<x_1<\ldots< x_{n-1} <X$ και όταν πρέπει να θεωρήσει τη διαφορά των προσεγγιστικών αθροισμάτων S που ανήκουν σε ένα υποδιάστημα και στην εκλέπτυνση του. Αυτή η διαφορά θα είναι:
$D = \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) + \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$
Κάθε ε_κ είναι η διαφορά τιμών της f(x). Μόλις το $x_{k+1} - x_k$ γίνει άπειρα μικρό, το ε_κ θα είναι απειροστό, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης. Τώρα, από την διάσημη θεωρία μέσων όρων του Cauchy. (Cauchy, 1821) προκύπτει ότι $D = \varepsilon(X-x_0)$ όπου ε είναι ο μέσος όρος των $\pm \varepsilon_\kappa$. Προφανώς χρησιμοποιεί ένα κρυφό λήμμα ότι κάθε μέσος όρος απειροστών είναι επίσης απειροστό και συμπεραίνει:
Γι αυτό τον λόγο, όταν τα στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$ γίνουν άπειρα μικρά, ο τρόπος της διαίρεσης δεν έχει παρά μια ανεπαίσθητη επίδραση στη τιμή του S. Και αν κανείς κάνει τις αριθμητικές τιμές αυτών των στοιχείων να μειώνονται επ'αόριστον, αυξάνοντας τον αριθμό τους, η τιμή του S θα καταλήξει να είναι αισθητά σταθερή ή, με άλλα λόγια, θα καταλήξει να επιτύχει ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο θα εξαρτάται αποκλειστικά από τη μορφή της συνάρτησης f(x) και

από τις οριακές τιμές x_0 και X που αποδίδονται στη μεταβλητή x. Αυτό το όριο είναι αυτό που ονομάζει κανείς ορισμένο ολοκλήρωμα.

Το κρυφό λήμμα είναι αλήθεια σε κάθε λογική θεωρία απειροστών. Θα είναι δύσκολο να δοθεί νόημα στη δήλωση ότι κάθε μέσος όρος άπειρα πολλών ακολουθιών με όριο το μηδέν θα συγκλίνει πάλι στο μηδέν. Για άλλη μια φορά, η άμεση θεώρηση των απειροστών είναι ανώτερη της ερμηνείας με όρους ακολουθιών. Η ομοιόμορφη συνέχεια αποφεύγεται με τη χρήση του κρυφού λήμματος (Laugwitz, 1987).

Θεμελιώδες Θεώρημα

Ο Cauchy παρείχε την **πρώτη αυστηρή απόδειξη** του θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού.

Εάν f(x) είναι πεπερασμένη και συνεχής στο διάστημα $[x_0, X]$ και $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$

Τότε $F'(x) = f(x)$ (*Calcul infinitésimal*)

Ο Cauchy απέδειξε το θεμελιώδες συνδυάζοντας δύο πράγματα: το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, ήδη γνωστό στον Lagrange, και την προσθετικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος στα διαστήματα, ένα γεγονός γνωστό και για τον Cauchy μια εύκολη συνέπεια του ορισμού του ολοκληρώματος ως άθροισμα. (Η απόδειξη υπάρχει στο παράρτημα). Η ιδέα κλειδί είναι

$$F(x+\alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+a} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+a} f(x)dx = \alpha f(x+\theta\alpha) \text{ όπου } 0 \le \theta \le 1$$

Οι **πηγές της απόδειξης** του Cauchy είναι δύο: Η αντίστοιχη απόδειξη του Lagrange και οι διατυπώσεις του Lagrange και του Lacroix του θεωρήματος μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα.

Προκειμένου να προσαρμόσει την απόδειξη του Lagrange στους δικούς του σκοπούς ο Cauchy έπρεπε να ορίσει και να αποδείξει την ύπαρξη της F, κάτι το οποίο έκανε, και έπρεπε να βρει και να αποδείξει ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο της $if(x) \le F(x+i) - F(x) \le if(x+i)$ (σχέση του Lagrange)

αλλά που να μην αφορά μόνο μονότονες συναρτήσεις. Και αυτό το έκανε δηλώνοντας το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα (το οποίο είχαν παράγει και ο Lagrange και ο Lacroix από το λήμμα του Lagrange ότι μία συνάρτηση με θετική παράγωγο σε διάστημα είναι αύξουσα σε αυτό, αλλά δεδομένου ότι και οι δύο είχαν ορίσει το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο της παραγώγου θεωρούσαν αυτό το θεώρημα ως μία παραλλαγή του θεωρήματος μέσης τιμής για παραγώγους). Επειδή ο Cauchy είδε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα χρειαζόταν μία νέα απόδειξη. Το διατύπωσε ως εξής:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta(X - x_0)],\ 0 \le \theta \le 1$$

Παρήγαγε το θεώρημα από ένα από τα βήματα της απόδειξης του ότι ο τύπος της διαμέρισης δεν επηρεάζει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος. Για άλλη μία φορά ο Cauchy πήρε ένα προηγούμενο αποτέλεσμα, του έδωσε μία διαφορετική λογική βάση και το χρησιμοποίησε για ένα τελείως διαφορετικό σκοπό.

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971) το *Cours d' Analyse* είναι ένα μη-τυπικό έργο του Cauchy και σε σύγκριση με τα προηγούμενα και σε σύγκριση με τα επόμενα έργα του. Στα μετέπειτα ερευνητικά του κείμενα, δεν στάθηκε στο ύψος των απαιτήσεων που ο ίδιος είχε θέσει στο *Cours*. Παρόλο που είχε δώσει ορισμό συνέχειας δεν απέδειξε ποτέ τυπικά τη συνέχεια καμίας συνάρτησης. Αν και είχε τονίσει την σημασία της σύγκλισης των σειρών, έκανε πράξεις με σειρές, με μετασχηματισμούς Fourier σαν να μην είχε θέσει ποτέ θέμα αυστηρότητας. Φαίνεται να είναι σε αντίφαση με τον εαυτό του, αλλά απλά είναι ένας καιροσκόπος στα μαθηματικά. Μπορούσε να ανεχθεί τον καιροσκοπισμό του επειδή με το υπόβαθρο της τεράστιας εμπειρίας του, είχε μία βέβαιη αίσθηση για το τι ήταν αλήθεια ακόμα και αν δεν ήταν διατυπωμένο ή αποδεδειγμένο σύμφωνα με τα κριτήρια του *Cours*.

Επιπλέον τονίζει ο Freudenthal (1971), το *Cours* είναι τόσο διαφορετικό από τα προηγούμενα έργα του, όχι γιατί είναι περισσότερο θεμελιώδες αλλά επειδή ήταν ένα εγχειρίδιο στο οποίο όχι μόνο επικοινωνούσε τα αποτελέσματα του αλλά επίσης έκανε ρητή την προηγούμενη εμπειρία του. Ο Cauchy δεν ήταν λάτρης της έρευνας της σχετικής με την θεμελίωση όπως ο Bolzano αλλά προκειμένου να

διδάξει μαθηματικά σε αρχάριους έπρεπε να αναλύσει και να παρουσιάσει τεχνικές υπόρρητες στο υπόβαθρο του. Μία παρόμοια κατάσταση είναι συνήθης σήμερα όταν ένα δάσκαλος των μαθηματικών θα δηλώσει ρητά τις λογικές του συνήθειες παρόλο που δεν είναι λογικιστής.

Τα απειροστά στον Cauchy

Ο Cauchy όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιεί σε αποδείξεις αρκετών θεωρημάτων τα απειροστά. Ο Laugwitz (1987), παρομοιάζει τη λειτουργία τους για το σύστημα του Cauchy, με τον σοβά που δένει τα διαφορετικά μέρη του οικοδομήματος και είναι πανταχού παρόν. Ο ίδιος ο Cauchy στην εισαγωγή του αναφέρει: "En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propretés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal." («Μιλώντας για τη συνέχεια των συναρτήσεων δεν μπορώ να απαλλαγώ από το να κάνω γνωστές τις βασικές ιδιότητες των απείρως μικρών ποσοτήτων, οι οποίες αποτελούν θεμέλιο του απειροστικού λογισμού»).
Ο Cauchy θεωρεί το απειροστό ως μια μεταβλητή που έχει το μηδέν ως όριο :
"On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décrois indéfiniment de manière a converger vers la limite zéro" (Cauchy, 1821) («Λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή όταν η αριθμητική τιμή της – *δηλαδή η απόλυτη τιμή* – μειώνεται ασταμάτητα έτσι ώστε να συγκλίνει στο μηδέν»).
Ως μοναδικό παράδειγμα απειροστού αναφέρει την ακολουθία $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\ldots$
Ωστόσο από τα επόμενα έργα του Cauchy, γίνεται φανερό ότι δεν θεωρούσε τις ακολουθίες ως τις μοναδικές αναπαραστάσεις των απειροστών. Για παράδειγμα, στο Addition (Cauchy, 1823) τα απειροστά αναπαρίστανται ως συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε μια περιοχή του 0 και μηδενίζονται στο 0.
Εκτός από το μάλλον ασαφές «μεταβλητές που τείνουν στο μηδέν» ο Cauchy δεν λέει ποτέ τι είναι τα απειροστά του. Μας λέει μόνο πως μπορούν να αναπαρασταθούν τα απειροστά. Το ίδιο συμβαίνει και με τους πραγματικούς αριθμούς : ενώ οι μαθηματικοί το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα ανέπτυξαν θεωρίες

των πραγματικών αριθμών ο Cauchy παρέμενε ικανοποιημένος με τις αναπαραστάσεις μέσω δεκαδικών αριθμών. Εφόσον οι σημαντικές ιδιότητες μπορούν να προκύψουν από τις αναπαραστάσεις αυτό δεν έχει καμία διαφορά στον Λογισμό.

Μια τελική θεωρία απειροστών παρουσιάστηκε στο (Cauchy, 1829). Η επικεφαλίδα του Κεφαλαίου 6 είναι "Sur les dérivées des fonctions qui représentent des quantités infiniment petites" «Σχετικά με τις παραγόμενες των συναρτήσεων που αντιπροσωπεύουν ποσότητες άπειρα μικρές».

Χωρίς σχόλιο ο Cauchy χρησιμοποιεί τον πληθυντικό αριθμό - συστήματα απειροστών - και συνήθως μιλά για «ένα κάποιο σύστημα» "un système quelconque." Με το i δηλώνει τη βάση του συστήματος: "Soit toujours i la base du système adopté". «Έστω πάντα i η βάση που αποδεχόμενου συστήματος» Το γράμμα i είναι απλά ένα σύμβολο για κάτι το οποίο καλείται απειροστό. Γενικά ένα απειροστό αναπαριστάται με f(i) όπου f(x) είναι μία συνάρτηση ορισμένη σε μία περιοχή του x=0 που εξαφανίζεται στο x = 0. Παραδείγματα είναι $e^{-1/i}$ και 1/log i. Πιθανώς η f(x) θα έπρεπε να είναι συνεχής στην περιοχή του x = 0. Όλα αυτά συνάγονται από τα κείμενα.

Ο Cauchy (1829) αρχίζει ορίζοντας την έννοια της τάξης ενός απειροστού:

"Nous terminerons ces Préliminaires en expliquant ce qu'on doit entendre par des quantités infinement petites de divers ordres. Désignons par a un nombre constant, rationnel ou irrationnel; par i une quantité inifinement petite, et par r un nombre variable. Dans le système de quantités inifiment petites dont i sera la base, une fonction de i représentée par f(i) sera un infiniment petit de l'ordre a, si la limite du rapport $f(i)/i^r$ est nulle pour toutes les valeurs de r plus petite que a, et infinie pour toutes les valeurs de r plus grandes que a". («Θα ολοκληρώσουμε τα Εισαγωγικά επεξηγώντας τι εννοούμε με ποσότητες άπειρα μικρές διαφόρων τάξεων. Ας ορίσουμε με a ένα σταθερό αριθμό, ρητό ή άρρητο, με i μια ποσότητα άπειρα μικρή και με r ένα αριθμό μεταβλητό. Μέσα στο σύστημα των άπειρα μικρών ποσοτήτων των οποίων το i είναι η βάση, μια συνάρτηση του i αναπαραστώμενη με f(i) θα είναι άπειρα μικρή τάξης a αν το όριο του λόγου $f(i)/i^r$ είναι μηδέν για όλες τις τιμές του r (που είναι) πιο μικρές από το a και άπειρο για όλες τις τιμές του r (που είναι) πιο μεγάλες από το a»).

Αυτό σημαίνει ότι η τάξη του απειροστού f(i) είναι ο μοναδικά οριζόμενος πραγματικός αριθμός a (ή $+\infty$ όπως στην e^{-1/i^2}) τέτοιος ώστε $f(i)/i^r$ είναι απειροστό για $r < a$ και άπειρα μεγάλο για $r > a$.

Ο Cauchy προχωρά στην απόδειξη μερικών πολύ απλών ιδιοτήτων της τάξης του απειροστού. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι: η τάξη του γινομένου ισούται με το άθροισμα των τάξεων των μελών του. Προφανώς, οι πράξεις με τα απειροστά ορίζονται από τις αντίστοιχες πράξεις στις αναπαραστώμενες συναρτήσεις. Το πρώτο θεώρημα είναι για τη σχέση <: (Théorème I.) 'Si, dans un système quelconque, l'on considère deux quantités infiniment petites d'ordres différents, pendant que ces deux quantités s'approcheront indéfiniment de zéro, celle qui sera d'un ordre plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique' (Cauchy, 1829) («Σε κάθε σύστημα, αν θωρήσουμε δύο απειροστά διαφορετικών τάξεων ενόσω αυτές οι ποσότητες προσεγγίζουν το μηδέν επ'αόριστον, αυτό που έχει μεγαλύτερη τάξη θα καταλήξει να έχει διαρκώς μικρότερη απόλυτη τιμή»).

Σύμφωνα με τον Edwards (1979), παρόλο που ο Cauchy περιπλέκει την εξήγηση του συζητώντας τις άπειρα μικρές ποσότητες με την γλώσσα των απειροστών μάλλον παρά με αυτή των συναρτήσεων είναι φανερό από τις φράσεις "un infiniment petit" («ένα άπειρα μικρό») και "une quantité infiniment petite" («μία ποσότητα άπειρα μικρή») τα οποία συχνά και τα δύο αποδίδονται στα αγγλικά "an infinitesimal" («ένα απειροστό») ότι εννοεί μία εξαρτημένη μεταβλητή ή συνάρτηση a(h) η οποία προσεγγίζει το μηδέν καθώς $h \to 0$. Συγκεκριμένα, τα «απειροστά» του δεν είναι πλέον οι άπειρα μικροί σταθεροί αριθμοί που είχαν προκαλέσει προηγούμενα τόση σύγχυση και τόση αμφισβήτηση.

Με αυτή την άποψη του Edwards συμφωνεί και ο Boyer (1949) σύμφωνα με τον οποίο: «Στη βάση του αριθμητικού του ορισμού του ορίου ο Cauchy, όρισε το απειροστό. Αυτή η έννοια ήταν δεμένη με τη γεωμετρική διαίσθηση των ιδιοτήτων του χώρου και είχε θεωρηθεί λίγο ή πολύ ως μία σταθερή ελάχιστη επέκταση. Η ανάπτυξη τον 18^{ο} αιώνα της έννοιας της συνάρτησης οδήγησε τον Cauchy να κάνει το απειροστό απλά μία μεταβλητή. «Λέει κανείς ότι μία μεταβλητή ποσότητα γίνεται άπειρα μικρή όταν η αριθμητική της τιμή ελαττώνεται επ' αόριστον με τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει προς το όριο μηδέν» (*Oeuvres,* (2), III,19; IV, 16).

Ένα απειροστό δηλαδή, δεν ήταν διαφορετικό από άλλες μεταβλητές εκτός από τη κατανόηση ότι έπαιρνε τιμές που συγκλίνουν στο μηδέν ως όριο».

Σύμφωνα με τον Fisher (1978) αντιθέτως, ο Cauchy παράπαιε μεταξύ της απόρριψης και της αποδοχής των απειροστών. Φαίνεται ότι απέρριπτε μία προσέγγιση (αυτή των απειροστών) που θα μπορούσε να γίνει αυστηρή, αποδεχόμενος μία προσέγγιση την οποία δεν κατάφερε ολοκληρωτικά να κάνει αυστηρή.

Οι άπειρα μεγάλες ποσότητες ορίζονται με ένα παρόμοιο τρόπο, η ακολουθία 1,2,3,4,5,...είναι ένα παράδειγμα (Cauchy, 1821).

Όσον αφορά στο άπειρο, ενώ ο Bolzano σκεπτόμενος με όρους συσσώρευσης είχε συμπεράνει την πιθανότητα ενός πραγματικού απείρου, ο Cauchy δίνοντας έμφαση στην μεταβλητότητα, αρνήθηκε αυτή τη πιθανότητα εξαιτίας των παραδόξων στα οποία φαίνεται ότι οδηγούσε αυτή η υπόθεση. Παραδέχθηκε μόνο το δυνητικό άπειρο του Αριστοτέλη και μαζί με τον D'Alembert ερμήνευσε το άπειρο ως απλά επ' αόριστο μεγάλο – μια μεταβλητή της οποίας οι διαδοχικές τιμές αυξάνουν πέρα από όποιο δοσμένο αριθμό (*Oeuvres,* (2), III, 19). Όρισε βαθμούς του απείρου με ένα τρόπο ακριβώς ανάλογο αυτού των απειροστών (Boyer, 1949).

Όλες οι προσπάθειες να γίνουν κατανοητές οι αποδείξεις του Cauchy χρησιμοποιώντας σύγχρονες μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού όπως η ομοιόμορφη σύγκλιση, ο αποκλεισμός των απειροστών και η χρήση των ε-δ συμβόλων κλπ δεν μπορεί να στεφθούν από επιτυχία αν δεν επιτευχθεί μια εκ των έσω ανάγνωση τους στο πνεύμα του ίδιου του Cauchy (Grabiner, 1981, Laugwitz, 1987, 1994, Giusti, 1984).

Οι πραγματικοί αριθμοί του Cauchy συμπεριλαμβάνουν όλους τους πραγματικούς που δεχόμαστε και σήμερα (πραγματικούς που όρισε ο Weierstrass και αποτελούν αρχιμήδειο σώμα) αλλά επιπλέον τα απειροστά και απείρως μεγάλους αριθμούς. Έτσι, το συνεχές των πραγματικών κατά Cauchy είναι μια (μη-αρχιμήδεια) επέκταση του συνεχούς του Weierstarss στο πνεύμα των απειροστών του Leibniz (Lakatos, 1978). Οι κατά Weierstarss αριθμοί δεν ήταν τίποτα άλλο παρά πεπερασμένοι αριθμοί Cauchy χωρίς τις απειροστές περιοχές τους.

Ερμηνεύοντας με αυτό τον τρόπο τις αμφισβητούμενες αποδείξεις του Cauchy είναι πιο εύκολο να ερμηνεύσουμε ή να επανεκτιμήσουμε μερικά από τα θεωρούμενα ως «λάθη» του. Για παράδειγμα, το θεώρημα ότι όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση αν στους όρους συνέχεια και περιοχή συμπεριλάβουμε τον τρόπο που χρησιμοποιούσε τις έννοιες αυτές ο Cauchy :
έστω $\lim s_n(x) = s(x)$ όπου $s_n(x)$ συνεχείς. Για να δειχθεί ότι το όριο είναι συνεχής συνάρτηση σε κάποιο x_1 αρκεί να δειχθεί ότι η διαφορά $s_n(x+a) - s_n(x_1)$ είναι απειροστό για κάθε απειροστό α. Έχουμε :

$$|s_n(x+a) - s_n(x_1)| =$$

$$|s_n(x_1+a) - s_n(x_1) + r_n(x_1+a) - r_n(x_1) \le |s_n(x_1+a) - s_n(x_1)| +$$

$$|s_n(x_1+a) - s_n(x_1)| + |r_n(x_1+a)| + |r_n(x_1)|$$

όπου r_n είναι τα υπόλοιπα. Ο Cauchy θεωρούσε την αριστερή πλευρά ως απειροστό για κάθε απειροστό α εφόσον η $s_n(x+a) - s_n(x_1)$ είναι απειροστό για κάθε n λόγω του ορισμού του της συνέχειας και αντίστοιχα τα $|r_n(x_1+a)|, |r_n(x_1)|$ ότι ήταν πάλι απειροστά για απείρως μεγάλα n λόγω του ορισμού του για το όριο. Είναι φανερό ότι η συνέχεια κάθε $s_n(x)$ και η σύγκλιση της ακολουθίας αυτής, αφορά σε όλα τα σημεία του πυκνού συνεχούς του Cauchy ενώ οι δείκτες n μπορούν να είναι απείρως μεγάλοι. Με αυτές τις προϋποθέσεις είναι φανερή η ισχύς του θεωρήματος του μόνο που αφορά σε υπεραριθμήσιμες ακολουθίες συνεχών κατά Cauchy συναρτήσεων, που συγκλίνουν στο συνεχές του Cauchy.

Η επίδραση του Cauchy στους σύγχρονους και μεταγενέστερους μαθηματικούς ήταν καταλυτική. Η εργασία του επηρέασε τους μαθηματικούς του δεύτερου μισού του 19^{ου} αιώνα: Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass. Τα βιβλία του μεταφράστηκαν σε άλλες γλώσσες, και σχολικά εγχειρίδια βασίστηκαν στην προσέγγιση του.
Μετά τον Cauchy η θεμελίωση αποτέλεσε ένα σημαντικό μέρος της ανάλυσης.

Ωστόσο η προσέγγιση του είχε θεμελιώδεις δυσκολίες:
1. Οι λεκτικοί του ορισμοί του ορίου και της συνέχειας και η συχνή χρήση της γλώσσας των απειροστών. Οι ορισμοί του υπονοούν συνεχή κίνηση- μια διαισθητική ιδέα. Επιπλέον απέτυχε να διακρίνει μεταξύ συνέχειας και

ομοιόμορφης συνέχειας και μεταξύ σύγκλισης και ομοιόμορφης σύγκλισης μιας άπειρης σειράς συναρτήσεων. Οι λεκτικές διατυπώσεις των ορίων και της συνέχειας που χρησιμοποιήθηκαν από τον Cauchy και τον Bolzano συγκάλυψαν την διαφορά μεταξύ του «για κάθε ε υπάρχει δ που δουλεύει για όλα τα x» και του «για κάθε ε και για κάθε x, υπάρχει ένα δ».

2. Η διαισθητική του έκκληση στην γεωμετρία στην απόδειξη της ύπαρξης διαφόρων ορίων. Η ύπαρξη πολλών ορίων προκύπτει από το αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, το οποίο ο Cauchy θεώρησε δεδομένο. Ενώ κατανόησε ότι ένας πραγματικός αριθμός μπορούσε να παρθεί ως όριο ρητών, δεν ανέπτυξε αυτή την διαίσθηση σε ένα ορισμό των πραγματικών αριθμών ή σε μία λεπτομερή περιγραφή των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών.

Οι Weierstrass και Dedekind μεταξύ άλλων, αποφάσισαν να διορθώσουν αυτό το μη ικανοποιητικό μίγμα αριθμητικών - αλγεβρικών διατυπώσεων και διαισθητικών γεωμετρικών αιτιολογήσεων (Kleiner, 2001). Αναγνώρισαν ότι ένας αυστηρός, αριθμητικός ορισμός των πραγματικών αριθμών θα έλυνε το μεγάλο πρόβλημα και θα παρείχε μία αυστηρή θεμελίωση για τον λογισμό.

Β ΜΕΡΟΣ
ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Πόσο σημαντικές ήταν οι αλλαγές στην θεμελίωση του Λογισμού που έλαβαν χώρα αυτή την εποχή; Πόσο άλλαξε η φυσιογνωμία του Λογισμού μετά από τις αλλαγές αυτές; Πόσο διαφορετικός έγινε ο Λογισμός μετά τους Lagrange, Cauchy και Bolzano σε σχέση με την κατάσταση που υπήρχε πριν ;
Είναι μερικά ερωτήματα που ανακύπτουν από την μελέτη της συγκεκριμένης περιόδου που περιγράψαμε προηγουμένως. Θα προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε κάποιες πλευρές των παραπάνω ερωτημάτων προκειμένου ευκολότερα να εκτιμηθούν οι αλλαγές που έλαβαν χώρα.
Θα κωδικοποιήσουμε την ανάλυση που θα ακολουθήσει μέσα από την μορφή γενικών ερωτημάτων που αφορούν στο είδος των βαθύτερων αλλαγών που επήλθαν εκείνη την εποχή, στο κατά πόσο ο Cauchy μπορεί να θεωρηθεί ως ο προάγγελος των θεωριών του Weiersrass ή του Robinson και τέλος τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τον τρόπο ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών.

Η αποτίμηση κάθε μαθηματικής εξέλιξης μπορεί να γίνει αρχικά σε δυο επίπεδα : στο καθαρό μαθηματικό πεδίο με άξονα τις καθαυτό μαθηματικές αλλαγές που συντελούνται και σε ένα δεύτερο επίπεδο όπου το επίκεντρο ενδιαφέροντος αναφέρεται στο πώς της μαθηματικής εξέλιξης, μέσα από το πρίσμα κάποιων θεωρητικών εργαλείων.

Είναι η δεύτερη προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ και για αυτό αρχικά θα χρειαστεί να περιγράψουμε σε συντομία κάποια θεωρητικά εργαλεία που θα μας βοηθήσουν στην συνέχεια.

Δυϊσμός εργαλείου – έννοιας

Πολλοί ερευνητές στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών (π.χ. Sfard, 1991,1994, Freudenthal, 1983, Kaput, 1979) διακρίνουν δυο βασικά στάδια στην εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών: το λειτουργικό (operational) και το δομικό (structural). Σύμφωνα με την Sfard (1991), η διάταξη είναι αυστηρά ιεραρχική από το επίπεδο της λειτουργίας στο επίπεδο της δομής. Η λειτουργική σύλληψη μιας έννοιας αφορά σε διαδικασίες αλγοριθμικές και δράσεις επί αντικειμένων και όχι σε θεώρηση εννοιών ως αντικειμένων. Όταν μια έννοια γίνεται αντιληπτή ως διαδικασία (process) σε ένα στάδιο, στην συνέχεια η ίδια μπορεί να θεωρηθεί ως αντικείμενο σε ένα υψηλότερο επίπεδο. Η ιδέα που ενυπάρχει σε αυτήν την θεώρηση είναι ότι τα μαθηματικά είναι μια πολυεπίπεδη κατασκευή όπου οι ίδιες ιδέες μπορεί να ειδωθούν διαφορετικά όταν παρατηρούνται από διαφορετικές θέσεις. Η ανάπτυξη μιας μαθηματικής έννοιας τόσο σε ιστορικό επίπεδο όσο και στο ατομικό – γνωστικό, απαιτούν σύμφωνα με την Sfard (ibid.) την κατανόηση σε διεργασιακό και ταυτόχρονα σε δομικό επίπεδο.

Επιπλέον υποστηρίζει ότι οι ίδιες οι έμφυτες ιδιότητες της γνώσης και η φύση της σχέσης μεταξύ των διαφορετικών της επιπέδων, έχουν ως αποτέλεσμα να μπορεί κανείς να ανιχνεύσει παρόμοια επαναλαμβανόμενα φαινόμενα στην ιστορική εξέλιξη και στη ατομική ανακατασκευή της γνώσης (Sfard, 1995).

Παράλληλα, οι Gray και Tall (1994) ανέπτυξαν την ιδέα της διεργασίας – έννοιας (procept από τις λέξεις process και concept) η οποία εκφράζει την έννοια η οποία εκφράζεται ταυτόχρονα και ως διεργασία διαμέσου του συμβολισμού. Το σύμβολο περικλείει σε συμπυκνωμένη μορφή την διαδικασία αλλά και την έννοια ως αντικείμενο που εκφράζει, και αυτό συμβαίνει κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας και σε ιστορικό επίπεδο.

Ο Freudenthal (ibid.) παρατηρεί ότι οι στιγμές που έχουν την μεγαλύτερη αξία όταν παρατηρούμε την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών σε ατομικό ή ιστορικό επίπεδο, είναι αυτές όπου εμφανίζονται ασυνέχειες ή άλματα στην εξελικτική διαδικασία.

Η μετάβαση από το αλγοριθμικό – λειτουργικό στάδιο στο δομικό, κατά την Sfard (1991), περιλαμβάνει τρία διακριτά στάδια: της εσωτερίκευσης (interiorization), της συμπύκνωσης (condensation) και της υποστασιοποίησης (reification). Εσωτερίκευση είναι το στάδιο κατά το οποίο γίνεται κατανοητή στα πρώτα της στάδια η διαδικασία που θα οδηγήσει αργότερα στην δημιουργία μιας νέας έννοιας. Κατά το επόμενο στάδιο της συμπύκνωσης, μακρές αλυσίδες διαδικασιών συμπυκνώνονται σε μονάδες που μπορούν ευκολότερα να αντιμετωπιστούν οπότε και οι συμπυκνωμένες αυτές διεργασίες αποκτούν ένα νέο όνομα. Υποστασιοποίηση είναι το τελευταίο στάδιο όπου η έννοια μπορεί να ειδωθεί ως πλήρες αντικείμενο με ξεχωριστή υπόσταση. Η αλλαγή αυτή είναι οντολογικού χαρακτήρα και απαιτεί ένα διακριτό άλμα στην θεώρηση του μαθηματικού αντικειμένου.

Η περίπτωση του ορισμού της παραγώγου κατά Cauchy είναι χαρακτηριστική της παραπάνω ερμηνείας. Η παράγωγος από την εποχή των Newton και Leibniz χρησιμοποιείτο χωρίς επακριβή ορισμό και κυρίως μέσω μιας διαισθητικής αντίληψης όπου η φυσική της ερμηνεία είχε να κάνει κυρίως με μεγέθη όπως η ταχύτητα και η επιτάχυνση (Grabiner, 1981). Ο Lagrange ανέπτυξε έναν πολύ ισχυρό μηχανισμό αλγεβρικών αποδείξεων μέσω ανισοτήτων στις παραγώγους, χωρίς ωστόσο να έχει καταφέρει να δικαιολογήσει θεωρητικά την χρήση των ιδιοτήτων της παραγώγου (Grabiner, 1978). Έτσι θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την περίοδο εκείνη μέχρι και τον Lagrange ως περίοδο της διεργασικής αντιμετώπισης της έννοιας της παραγώγου. Οι μαθηματικοί έκαναν χρήση της προσέγγισης της παραγώγου από το πηλίκο των διαφορών των τιμών της συνάρτησης και των x και ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν σημαντικές άλλες ιδιότητες της παραγώγου (όπως στις σειρές Taylor, στα θεωρήματα μέσης τιμής κλπ) χωρίς ωστόσο να έχουν φτάσει το σημείο να ολοκληρώσουν την έννοια της παραγώγου και τη λειτουργία της μέσω ενός ορισμού.
Η εποχή ήταν πλέον ώριμη και ο Cauchy έδωσε τον τυπικό ορισμό της παραγώγου με τρόπο ώστε στην συνέχεια να είναι επιτρεπτή η χρήση των τεχνικών απόδειξης των Lagrange και Ampere.

Ο ορισμός της παραγώγου κατά Cauchy εμπίπτει σε αυτό που περιγράφει ο Dubinsky (1991) ως ενθυλάκωση της διεργασίας χρήσης της έννοιας σε αντικείμενο. Ο ορισμός που δίνεται θεωρείται ο πιο κατάλληλος να ενθυλακώσει όλες τις προηγούμενες πλευρές της διαφορισιμότητας σε ένα συμπαγές δομικά αντικείμενο στο οποίο με την σειρά τους μπορούν να εφαρμοστούν νέες δράσεις και ενέργειες.

Έτσι, η έννοια της παραγώγου πλέον είχε περάσει στο δομικό επίπεδο και στα επόμενα χρόνια ο δομημένος ορισμός του Cauchy θα ήταν η βάση της διαπραγμάτευσης όλων των νέων ερωτημάτων που αφορούσαν στην παράγωγο αλλά και το σκαλοπάτι για την περαιτέρω γενίκευση της διαφορισιμότητας σε άλλους χώρους.
Παράλληλα, ακολουθώντας την Sfard (1998), θα μπορούσαμε να διακρίνουμε στην περίπτωση του ορισμού της παραγώγου την συνήθη ιστορική πρακτική γέννησης των ορισμών. Η εισαγωγή ενός νέου μαθηματικού σημαίνοντος, σύμφωνα με την Sfard (ibid., σελ.17), ιστορικά σχεδόν ποτέ δεν έπεται της διατύπωσης ενός τυπικού ορισμού αλλά αντίθετα για μια μεγάλη χρονική περίοδο, ένα σύμβολο μπορεί να έχει εισαχθεί και να χρησιμοποιείται από την μαθηματική κοινότητα (όπως της παραγώγου από την εποχή των Νεύτωνα και Leibniz), χωρίς ωστόσο οι μαθηματικοί να έχουν μια κοινά αποδεκτή «περιγραφή» του σημαινόμενου πίσω από το σύμβολο. Αντίθετα δηλαδή με ότι παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια, οι μαθηματικοί συμβολισμοί και οι έννοιες συχνά γίνονται «αποδεκτό» τμήμα της μαθηματικής πρακτικής χωρίς ακόμα οι μαθηματικοί να έχουν ακριβώς ορίσει και κατανοήσει τα αντίστοιχα σημαινόμενα.

Ο Cauchy συμπύκνωσε την προηγούμενη χρήση της παραγώγου μέσα από τον πετυχημένο ορισμό που έδωσε, ανυψώνοντας την συζήτηση (discourse) των ιδιοτήτων της παραγώγου σε ένα μετα - επίπεδο όπου οι προηγούμενες διαδικασίες που απλώς εκτελούνταν μετατράπηκαν σε ένα νέο υποστασιοποιημένο αντικείμενο μελέτης. Σε αυτό το υψηλότερο επίπεδο, η εστία του μαθηματικού διαλόγου αλλάζει και επικεντρώνεται στις ισοδυναμίες και συνεπαγωγές της ορισθείσας έννοιας της παραγώγου, με αποτέλεσμα η έρευνα να οδηγείται σε κατασκευή και μελέτη νέων δομών.

Ένα εξίσου διαφωτιστικό παράδειγμα ήταν και η θεώρηση του ολοκληρώματος από τον Cauchy με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο από αυτόν που χρησιμοποιούσαν οι προγενέστεροι του. Όλοι οι μαθηματικοί από τον Νεύτωνα μέχρι τον Euler, τον Lagrange, τον Poisson και τον Legendre (με εξαίρεση τον Leibnitz ο οποίος όμως δεν είχε τα εργαλεία για να μετουσιώσει την σκέψη του σε εφαρμόσιμη ιδέα) χρησιμοποιούσαν το ολοκλήρωμα ως τη διαδικασία που αντιστρέφει την παραγώγιση. Αν και αρκετές φορές οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν χωρίου κάτω από καμπύλη, προσεγγίζοντας το μέσω αθροισμάτων, κανένας δεν σκέφτηκε να το ορίσει με αυτόν τον τρόπο. Αυτό συνιστούσε περισσότερο άλμα παρά φυσική εξέλιξη σύμφωνα με την Grabiner (ibid, σελ. 141). Ο Cauchy συμπυκνώνοντας την συζήτηση για το ολοκλήρωμα που υπήρχε μέχρι τότε, είδε με διαφορετική ματιά την δυνατότητα προσέγγισης του ολοκληρώματος από αθροίσματα, μετατρέποντας σε ορισμό αυτήν την ιδιότητα και υποστασιοποιώντας μέσω της μεθόδου αυτής την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Όπως υποστηρίζει ο Tall (2005), η αλλαγή στην εστίαση μιας μαθηματικής θεωρίας συντελεί στην αποτελεσματικότερη συμπύκνωση διαφορετικών τεχνικών και διαδικασιών με αποτέλεσμα την ενθυλάκωση του σε ένα συμβολισμό που περικλείει κάθε μια από τις παλαιότερες θεωρήσεις. Και είναι αυτό ακριβώς που συνέβη και με τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά Cauchy.

Μια άλλη περίπτωση εργαλειακής θεώρησης μαθηματικών εννοιών ήταν η εφαρμογή των απειροστών στις αποδείξεις του Cauchy. Ενώ οι περισσότερες αποδείξεις του τελευταίου έκαναν σημαντική χρήση των απείρως μικρών ή μεγάλων ποσοτήτων (Grabiner, ibid.), ωστόσο διαισθανόμενος ο Cauchy την θεωρητικά ανεπαρκή θεμελίωση τους δεν χρησιμοποίησε στις υποθέσεις ή τα συμπεράσματα κανενός θεωρήματος του απειροστά. Ο Baumann (στο Fraser, 1987) είχε γράψει : «απορρίπτουμε την λογική και μεταφυσική δικαίωση που ο Leibniz έδωσε στον Λογισμό, αλλά δεν αγγίζουμε τον ίδιο τον Λογισμό». Αυτή ήταν η διαδικασιακή αντίληψη του Cauchy για την θεωρία των απειροστών ως ένα απαραίτητο εργαλείο στις αποδείξεις που δεν έπρεπε ωστόσο να εισχωρήσει στις διατυπώσεις των θεωρημάτων.

Έτσι, συνειδητά χρησιμοποιώντας την έννοια και τις ιδιότητες των απειροστών εργαλειακά – διαδικασιακά, έκανε φανερό ότι τα σύμβολα δεν περιείχαν ακόμα κάποιο συμπυκνωμένο και αυθύπαρκτο νόημα, παρά μόνο σε σχέση με τον σκοπό της χρήσης τους. Όπως παρατηρούν και οι Gray και Tall (1994), το σύμβολο μιας μαθηματικής έννοιας προτού αποκτήσει συμπυκνωμένο περιεχόμενο παράλληλα με την λειτουργία της, χρειάζεται να περάσει καιρός μέχρι η χρήση της να οδηγήσει στην αναγκαιότητα θεωρητικής θεμελίωσης της.

Στην περίπτωση του Lagrange και συγκεκριμένα στον τρόπο που θεωρούσε τις συναρτήσεις μπορούμε να διακρίνουμε αυτό που οι Gray και Tall (1994, 2001) ονόμασαν «ενσώματη έννοια» (embodied concept) που χρησιμεύοντας ως αντικείμενο βάσης εξελίσσεται άμεσα σε αφηρημένη και γενικευμένη έννοια. Πιο συγκεκριμένα, στην Αλγεβρική Ανάλυση του Lagrange, ο όρος συνάρτηση σήμαινε αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται μέσω σταθερών και μεταβλητών και με τη χρήση των πράξεων της Ανάλυσης (Fraser, 1987). Κάθε συνάρτηση κατά τον Lagrange διαθέτει μια καλά ορισμένη και αναλλοίωτη αλγεβρική έκφραση. Με αυτόν τον τρόπο ο Lagrange προχωρά στον χειρισμό των απειροσειρών, στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων κλπ έχοντας ως αντιπροσωπευτικό χαρακτηρισμό της συνάρτησης την αναλυτική της έκφραση. Η ενσώματη και χειροπιαστή επομένως έννοια της συνάρτησης με αναλυτική έκφραση ή ως «πολυώνυμο με άπειρους όρους», (Fraser, ibid.), είναι αυτή που επιτρέπει στον Lagrange να γενικεύει τα αποτελέσματα του (αν και με μη επαρκώς αυστηρό τρόπο) περνώντας άμεσα από το ενσώματο στο αφηρημένο (χωρίς να έχει υποστασιοποιηθεί η ίδια η έννοια της συνάρτησης στο μεταξύ). Επομένως η παρατήρηση των Gray και Tall παραπάνω φαίνεται να έχει ισχύ και στην περίπτωση της φυλογένεσης δηλαδή της ιστορικής ανάπτυξης μιας έννοιας.

Ήταν ο Cauchy προάγγελος των θεωριών του Weierstrass ή του Robinson ;

Πολλοί μαθηματικοί σχολιαστές του Cauchy (όπως οι Abel, F. Klein, Boyer, Bourbaki, Bell κλπ) ερμηνεύουν τα θεωρήματα και τις αποδείξεις του Cauchy ως τις απαρχές της κατά Weierstrass επανάστασης που οδήγησαν στην αυστηροποίηση των θεμελίων του Λογισμού. Έτσι ενώ επαινείται η εισαγωγή αυστηρότερων κριτηρίων από τον Cauchy στην διαπραγμάτευση θεμελιωδών εννοιών, παράλληλα επισημαίνεται η ατελής αντιμετώπιση από τον τελευταίο κάποιων ζητημάτων για τα οποία χρειάσθηκε η πλήρης επίλυση τους από τους επόμενους μαθηματικούς. Για παράδειγμα, η περίφημη λανθασμένη απόδειξη του Cauchy για την σύγκλιση ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων σε συνεχή συνάρτηση, θεωρείται ότι υποκρύπτει την ύπαρξη του κρυφού λήμματος της ομοιόμορφης συνέχειας των συναρτήσεων, κάτι που – σύμφωνα με την ανάλυση τους – διέφυγε από τον Cauchy.

Ωστόσο, όπως επισημάνθηκε και παραπάνω, η ανάλυση αυτή δεν λαμβάνει υπόψη της την οπτική του ίδιου του Cauchy και ιδιαίτερα σε ότι αφορά την χρήση των απειροστών και του μη-αρχιμήδειου συνεχούς των Leibniz-Cauchy. Αντίθετα αποτελεί μια ανακατασκευή «δικαιωτικής» λογικής (justificationist reconstruction) κατά τον Lakatos (1978), η οποία στηρίζεται στην υπόθεση ότι μια άτυπη απόδειξη είναι μια τυπική απόδειξη με χάσματα και κρυμμένα λήμματα. Αυτή η οπτική δεν συμπεριλαμβάνει στην ανάλυση της το εννοιολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο ο Cauchy δημιουργεί και αποδεικνύει τα αποτελέσματα του και μπορεί να παρομοιαστεί με την άποψη ότι ένα παιδί δεν είναι τίποτα άλλο από έναν μικρό ενήλικο. Έτσι, δεν βοηθά σε τίποτα να βλέπουμε τον Cauchy ως μαθηματικό πρόγονο της θεωρίας της non-standard analysis του Robinson ή της εψιλοντικής θεωρίας του Weiersrass, αφού και με τους δυο υπάρχουν σοβαρές διαφορές (Lakatos, ibid.). Ένας τέτοιος τρόπος θεώρησης υποκρύπτει την διάκριση κάθε μαθηματικής θεωρίας ανάμεσα σε ένα σκληρό πυρήνα που είναι αδιαμφισβήτητος και αιώνια αληθής και σε μια «μεταφυσική» ερμηνεία του φορμαλισμού που μπορεί να είναι αμφισβητήσιμη και διαψεύσιμη. Για παράδειγμα ο ισχυρισμός του Bourbaki (1960) ότι οι «λανθασμένες» αποδείξεις του Cauchy μπορούν να διορθωθούν με την χρήση κρυφών λημμάτων και της μεταφοράς σε εψιλοντικό συμβολισμό των αποδείξεων με απειροστά, ή η ερμηνεία του Robinson (1966), για

τη χρήση των απειροστών από τον Cauchy ως non-standard σημεία με την δική του ορολογία, αποτελούν παραδείγματα τέτοιας αντίστροφης ανάγνωσης της ιστορίας. Άλλωστε όπως σημειώνει και ο Lakatos (1963), η απόδειξη του ίδιου θεωρήματος σε διαφορετικά εννοιολογικά πλαίσια οδηγεί σε διαφορετικά θεωρήματα, όπως παρατηρούμε και στις προαναφερθείσες περιπτώσεις με τις «λανθασμένες» αποδείξεις του Cauchy.
Η θεωρία επομένως των απειροστών όπως χρησιμοποιήθηκαν από τον Cauchy, μπορεί να θεωρηθεί ότι μερικώς συνηχεί με την θεωρία της non-standard analysis όσο και με την εψιλοντική θεωρία του Weierstrass (Laugwitz, 1987).

Γενικότερα, αντικαθιστώντας μια θεωρία με κάποιες υποσυλλογές προτάσεων της, μπορούμε να διαγνώσουμε συχνά μεγάλο ποσοστό συνάφειας ανάμεσα σε οντολογικά διαφορετικές θεωρίες. Αυτό ωστόσο σε καμιά περίπτωση δεν οδηγεί σε πλήρη ισομορφισμό ολόκληρων των θεωριών όπως επισημαίνει ο Laugwitz (ibid.).

Έτσι, αν και πολλές απόπειρες δημιουργίας μερικώς ισομορφισμών μεταξύ διαφορετικών κομματιών της θεωρίας του Cauchy και σύγχρονων μαθηματικών (για παράδειγμα από τον Robinson, (1966) μεταξύ της non-standard analysis και των απειροστών του Cauchy, από τον Boyer ανάμεσα στην θεωρία της συνέχειας του Cauchy και της σύγχρονης έννοιας κλπ) έχουν γίνει, καμία δεν είναι ικανή να δημιουργήσει έναν ολικό ισομορφισμό ανάμεσα στην θεωρία του Cauchy και κάποιο κλάδο των κατοπινών μαθηματικών.

Γ ΜΕΡΟΣ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η ανάγκη αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία έχει αποτελέσει τα τελευταία χρόνια διακηρυγμένο στόχο διάφορων οργανισμών υπεύθυνων για το αναλυτικό πρόγραμμα. Χαρακτηριστική είναι η έμφαση που δόθηκε από το 1989 από το Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, στο οποίο οικοδομήθηκαν τα Principles and Standards for School Mathematics. Σε αυτό τονιζόταν ότι η προσοχή θα έπρεπε να εστιάσει «στην ανάγκη για επίγνωση από τους μαθητές της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθηματικών και ιστορικών καταστάσεων από τις οποίες προέκυψαν και της επίδρασης που είχε αυτή η αλληλεπίδραση στον πολιτισμό μας και τη ζωή μας». (σελ.6). Επίσης στα *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM 2000) γίνεται έκκληση προς τους δασκάλους να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν και να εκτιμήσουν τα μαθηματικά ως «ένα από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά και πνευματικά επιτεύγματα του ανθρώπινου γένους και οι πολίτες θα έπρεπε να αναπτύξουν μία εκτίμηση και μία κατανόηση αυτού του επιτεύγματος, συμπεριλαμβανομένων των αισθητικών και ψυχαγωγικών πλευρών του». (σελ. 4)

Η ιστορία μας δείχνει τους πολλούς τρόπους με τους οποίους γίνονται αλλαγές στις έννοιες, σε θεωρήματα και θεωρίες. Αυτοί περιλαμβάνουν την επέκταση γνωστών εννοιών, την γενίκευση τους, την αφαίρεση τους. Την νέα κατηγοριοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται, την αντίδραση σε αντιπαραδείγματα αναζητώντας τις ελλιπείς συνιστώσες της αναιρούμενης θεωρίας, την έκθεση μη παρατηρηθέντων υποθέσεων. Την επινόηση νέων αλγορίθμων, ή την τροποποίηση παλαιών. Τη δημιουργία νέων εφαρμογών ή των επέκταση παλαιών. Τη δημιουργία νέων συνδέσεων μεταξύ κλάδων των μαθηματικών (Grattan-Guinness, 2004).
Παρέχει ένα τεράστιο απόθεμα ερωτημάτων, προβλημάτων και εκθέσεων τα οποία μπορεί να είναι πολύτιμα και με όρους περιεχομένου και με την δυναμική τους να κινητοποιήσουν, να προκαλέσουν το ενδιαφέρον και να εμπλέξουν τον μαθαίνοντα (van Maanen 1991 , Ransom et al. 1991 , Ernest 1994).

Οι μαθητές μπορεί και πρέπει να μάθουν ότι λάθη, επιχειρήματα ευρετικών, αβεβαιότητες, αμφιβολίες, διαισθητικά επιχειρήματα, αδιέξοδα, αμφισβητήσεις και εναλλακτικές προσεγγίσεις σε προβλήματα όχι μόνο είναι νόμιμα, αλλά αποτελούν ένα αναπόσπαστο μέρος στην κατασκευή των μαθηματικών (Arcavi et al., 1987).

Χαρακτηριστική είναι η τοποθέτηση του Guzmán (1993), στο 7° συνέδριο για την Μαθηματική Εκπαίδευση σύμφωνα με την οποία η ιστορία των μαθηματικών μας προσφέρει:

- Ένα ανθρώπινο όραμα της επιστήμης και των μαθηματικών: όχι μόνο αλήθειες, μεθόδους και τεχνικές που έρχονται από το πουθενά, όχι απλά γεγονότα και δεξιότητες χωρίς ψυχή, χωρίς ιστορία, αλλά αποτελέσματα προσπαθειών ανθρώπων κινητοποιημένων από βαθύ ενδιαφέρον και πάθος. Όχι θεϊκή επιστήμη αλλά ανθρώπινη και γι αυτό ατελής και σφαλερή. Την ανθρώπινη πλευρά των μεγάλων ανακαλύψεων και αυτών που τις έκαναν.
- Ένα πλαίσιο στο οποίο όλα τα στοιχεία εμφανίζονται στην σωστή τους θέση: όχι γεγονότα αιώνες μακριά από τις απαρχές τους παρουσιασμένα μαζί στον ίδιο σάκο χωρίς μια απλή παρατήρηση, αλλά διερευνήσεις στο δικό τους πλαίσιο και με τα δικά τους κίνητρα.
- Ένα δυναμικό όραμα της εξέλιξης των μαθηματικών: τα κίνητρα και τις κινητήριες δυνάμεις στις ρίζες των ιδεών και των μεθόδων ενός θέματος. Την πρωτογενή δημιουργικότητα γύρω από κάθε ειδικό θέμα, την γένεση και την πρόοδο τους. Ένα άρωμα περιπέτειας και συγκίνησης. Μία δημιουργική βύθιση στις δυσκολίες του παρελθόντος προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τα δικά μας προβλήματα. Ένας οδηγός για μία δυναμική αίσθηση των εκπαιδευτικών μας καθηκόντων.

Στη διεθνή βιβλιογραφία και πρακτική, έχουν προταθεί και εφαρμοστεί διάφοροι τρόποι αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Στη παρούσα εργασία η αξιοποίηση της ιστορίας γίνεται από δύο οπτικές:
διδακτικές παρατηρήσεις που απορρέουν από τη μελέτη της συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου και ένα παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης πρωτοτύπων κειμένων.

Διδακτικές παρατηρήσεις

Αναλύοντας την συγκεκριμένη ιστορική περίοδο μπορούμε να επισημάνουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά που μπορούν να βοηθήσουν στον σχεδιασμό διδακτικών καταστάσεων, στο βαθμό που η αναγνώριση των εμπλεκόμενων εννοιών και των σχετικών ιδιοτήτων των θεωρημάτων είναι κρίσιμα για την γνωστική ανάλυση των δραστηριοτήτων και συμπεριφορών.
Πιο συγκεκριμένα, θα επιχειρήσουμε να σχολιάσουμε κάποια ιστορικά μοτίβα που αναδείχθηκαν στις προηγούμενες σελίδες μέσα από το πρίσμα της διδακτικής αξιοποίησης τους. Η διδακτική πρακτική αποτελεί σε τελευταία ανάλυση τον στόχο κάθε διδακτικής έρευνας.

Ο ρόλος και η έννοια της απόδειξης

Σύμφωνα με τον Thurston ορθή απόδειξη είναι αυτό που η μαθηματική κοινότητα τη δεδομένη χρονική στιγμή αποδέχεται ως ορθή (Thurston, 1990). Στην ιστορία των μαθηματικών είναι πολλά τα παραδείγματα αποδείξεων που ενώ στην εποχή τους ήταν αποδεκτές σε μεταγενέστερα χρόνια θεωρήθηκαν ελλιπείς και ανακριβείς (οι αποδείξεις του Euler, αλλά και του Lagrange και του Cauchy όπως είδαμε αναλυτικότερα προηγουμένως, τα απειροστά του Cauchy, η αναλυτική γραφή κάθε συνάρτησης του Lagrange κλπ). Η σχετικότητα επομένως της ορθότητας ή μη μιας απόδειξης ως προς την εποχή στην οποία διατυπώνεται είναι κάτι που έχει επαληθευτεί ξανά και ξανά και αποτυπώνει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της ερευνητικής μαθηματικής δραστηριότητας. Η μαθηματική κοινότητα είναι ουσιαστικά αυτή που καθορίζει τις νόρμες αποδοχής μιας απόδειξης και αναδεικνύει μέσα από την διαπραγμάτευση των εννοιών τα όρια του αποδεκτού ή μη.
Οι ελλείψεις ή λανθασμένες παρουσιάσεις του Λογισμού στην υπό εξέταση ιστορική περίοδο είχαν το πλεονέκτημα ότι οι συγγραφείς συχνά πριν παρουσιάσουν την θεωρία τους αναφέρονταν σε θεωρίες άλλων και επιχειρηματολογούσαν ως προς το γιατί αυτές δεν μπορούσαν να γίνουν αποδεκτές. (π.χ. Lagrange, Bolzano). Μία τέτοιου τύπου παρουσίαση συνέβαλε στο «ξεκαθάρισμα του τοπίου».

Σήμερα, που δεν τίθεται θέμα αμφισβήτησης, η παρουσίαση π.χ. ενός αποσπάσματος μιας τέτοιας εισαγωγής και η σύγκριση παλαιότερων ορισμών με τους σύγχρονους δεν έχει «μουσειακή» αξία αλλά δείχνει ακριβώς το τι μπορεί να γίνει αποδεκτό και τι όχι στα μαθηματικά, τι είναι αυτό που τελικά διαμορφώνει έναν ορισμό ή τι χρήζει απόδειξης και τι όχι.
Ειδικότερα, θεωρήματα των οποίων η γεωμετρική εποπτεία καθιστά την απόδειξη «προφανή» θα πρέπει να αποτελούν αντικείμενο αναλυτικής συζήτησης με τους μαθητές ως προς το γιατί η γεωμετρική εποπτεία δεν επαρκεί.

Το συμπέρασμα για την διδακτική επομένως είναι η αναγκαιότητα της διαπραγμάτευσης της ορθότητας κάθε απόδειξης μέσα από επιχειρήματα που είναι σχετικά με το συγκεκριμένο πλαίσιο μάθησης των μαθητών και όχι με αναφορά σε απόλυτα και αφηρημένα κριτήρια που μπορεί να μην έχουν καμία σχέση με το υπόβαθρο των παιδιών. Με την επιχειρηματολογία και την συζήτηση μέσα στον μαθηματικό μικρόκοσμο της τάξης τους οι μαθητές μπορούν να πειστούν για την ορθότητα ή μη ενός επιχειρήματος, αναπαράγοντας την ίδια την εξέλιξη κάποιων αποδείξεων όπως για παράδειγμα του Cauchy για το όριο συνεχών συναρτήσεων.
Η καλύτερη άλλωστε απόδειξη για τους μαθητές όπως έχει αποδειχθεί από σχετικές έρευνες (π.χ. Healy & Hoyles, 2000) είναι αυτή που είναι κατανοητή και επεξηγηματική και όχι κατά ανάγκη αυτή που πείθει, κάτι που παρατηρήσαμε και στην ιστορική πορεία των αποδείξεων του Cauchy.

Ένα άλλο σημείο που αναδεικνύεται σε αυτήν την ιστορική περίοδο και έχει σημασία για την διδακτική προσέγγιση, είναι η έννοια του αντιπαραδείγματος.
Όπως εξετάστηκε και προηγούμενα, οι όποιες εξαιρέσεις δεν θεωρούντο σημαντικές από τους μαθηματικούς εκείνης της περιόδου. Αντίθετα θεωρούνταν ως μεμονωμένες, ιδιάζουσες περιπτώσεις που δεν ήταν ικανές να αλλάξουν την ισχύ μιας θεωρίας. Και πέρασαν αρκετά χρόνια έως ότου οι μαθηματικοί αποκτήσουν άλλη θεώρηση (Grabiner, 1981). Αντίθετα σήμερα, αρκεί ένα αντιπαράδειγμα για να αποφανθούμε για την μη ισχύ ενός θεωρήματος.

Επομένως η διαπιστωμένη από έρευνες (Dreyfus, 1999, Knuth & Elliott, 1998) αδυναμία των μαθητών της κατανόησης του ρόλου των αντιπαραδειγμάτων δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει. Και η αναζήτηση του τρόπου με τον οποίο θα

δημιουργηθεί η ανάγκη στους μαθητές να απορρίψουν το θεώρημα που αντικρούει σε αντιπαράδειγμα (αντίστοιχα με τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα που μέσα από αντίστοιχους προβληματισμούς οδηγήθηκαν στην σημερινή αντίληψη), οφείλει να είναι ένα από τα ζητούμενα της διδακτικής πρακτικής.

Ο ρόλος της αναλογικής σκέψης

Ο αναλογικός τρόπος σκέψης είναι βασικό μέρος της σκέψης του Lagrange. Μάλιστα χρησιμοποιεί τις αναλογίες τόσο ως μέθοδο ανακάλυψης όσο και ως τρόπο δικαιολόγησης. Λόγω της απουσίας ύπαρξης μιας βάσης θεμελίωσης του Λογισμού, οι αναλογίες αναπαριστούσαν την ύπαρξη συνάφειας και συγγένειας ανάμεσα σε διαφορετικούς κλάδους, υπογραμμίζοντας μια υπόρρητη ενότητα ανάμεσα σε ξένα μεταξύ τους πεδία των μαθηματικών. Ο Lagrange υποστήριζε ότι στην φορμαλιστική αλγεβρική παρουσίαση του Λογισμού ανακάλυψε την πραγματική μεταφυσική του Λογισμού (Fraser, 1987).
Αντίστοιχα στους μαθητές είναι διαπιστωμένη από πολλούς ερευνητές (π.χ. Caravita, 2001) η χρησιμότητα της αναλογικής μορφής διδασκαλίας. Θεωρείται ότι χρησιμεύει ως γνωστική γέφυρα ανάμεσα στις προηγούμενες γνώσεις και στην νέα πληροφορία και δρα ενισχυτικά στην τόνωση του ενδιαφέροντος των μαθητών και την ανάπτυξη δυναμικής για γνωσιολογική αλλαγή (Cocking, Mestre & Brown, 2000).

Ωστόσο, το «σκεφθείτε αναλογικά» μπορεί να είναι και επικίνδυνο. Η διάκριση του Cauchy μεταξύ ευρετικής και αιτιολόγησης έχει αυτό ακριβώς αυτό το νόημα. Η μεταφορά αποτελεσμάτων μέσω της «γενικότητας της άλγεβρας» (π.χ. από πεπερασμένες συμβολικές εκφράσεις σε άπειρες, ή από πραγματικές ποσότητες σε μιγαδικές εκφράσεις) είναι σύμφωνα με τον τελευταίο κάτι εντελώς διαφορετικό από την ίδια την απόδειξη θεωρημάτων και δεν πρέπει να συγχέονται μεταξύ τους (Cauchy, 1821).
Η ιστορία έτσι μπορεί να αξιοποιηθεί για την ενθάρρυνση διάφορων τύπων συλλογισμών: επαγωγικό συλλογισμό και αναλογική σκέψη: η κρίσιμη διαφορά μεταξύ επαγωγικής σκέψης και αναλογίας είναι ότι η πρώτη βασίζεται στην

εξέταση αντικειμένων ίδιας φύσης ως προς κάποια δοσμένα κρίσιμα κριτήρια ενώ η δεύτερη βασίζεται στην εξέταση αντικειμένων μιας διαφορετικής φύσης. Αυτή η διαφορά έχει σχετικό χαρακτήρα αφού είναι δυνατόν αλλάζοντας τα δοσμένα κριτήρια να μετασχηματίσουμε την αναλογία σε επαγωγική επέκταση. Ο ρόλος της επαγωγικής σκέψης και της αναλογίας υποτιμάται στην σημερινή μαθηματική εκπαίδευση η οποία δίνει έμφαση στην απορρόφηση της γνώσης στην τελική της μορφή και αγνοεί την ευρετική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας, που είναι τόσο σημαντική για την κατανόηση της νέας γνώσης. Αυτή η απαξίωση καθιστά δύσκολο τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που να βασίζονται στην επαγωγή και την αναλογία που θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις αντίστοιχες δεξιότητες. Αυτό είναι κρίσιμο για την ανάπτυξη των μαθητών στα μαθηματικά αφού και επαγωγή και αναλογία ήταν βασικά για την ανάπτυξη τους.

Ο ρόλος των ορισμών και του συμβολισμού

Όπως επεξηγήθηκε και στην παράγραφο της αποτίμησης των αλλαγών της περιόδου αυτής, ο ορισμός σε έννοιες όπως το όριο, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα, διαμορφώθηκαν αφού επί χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τις έννοιες αυτές με τρόπο αρκετά «ελαστικό». Δηλαδή έκαναν χρήση ιδιοτήτων της υπό εξέταση έννοιας, χωρίς να ξέρουν ακόμα ποιες από αυτές τις ιδιότητες είναι αρκετά σημαντικές ώστε να μπορούν να στοιχειοθετήσουν έναν ορισμό.

Παράδειγμα το όριο: Ο Cauchy κατανόησε ότι η έννοια του ορίου ήταν αυτή στην οποία μπορούσε να οικοδομηθεί ένας αυστηρός ορισμός. Για να φθάσει σε αυτό είχαν προηγηθεί πολλές απόπειρες ορισμού του ορίου, και πολλές εφαρμογές των ιδιοτήτων του (π.χ. D' Alembert).

Ενώ δόθηκαν ορισμοί, η έννοια δεν ήταν κατανοητή και η εγκυρότητα των τεχνικών (διαφόρισης, ολοκλήρωσης κλπ) δεν είχε αποδειχθεί μέσω της έννοιας του ορίου.

Έλειπε η ακρίβεια στην διατύπωση του επειδή βασιζόταν στην γεωμετρική διαίσθηση.

Οι διαισθητικές έννοιες της γεωμετρίας, της κίνησης και της ταχύτητας, απορρίπτονται ως ορισμοί – ως θεμελίωση. Οι δικές μας προσεγγίσεις (και σωστά) ξεκινούν από αυτές. Ωστόσο η ιστορία δείχνει ότι το βήμα από την διαισθητική προσέγγιση στον ορισμό δεν είναι βήμα είναι άλμα. Όπως η δημιουργία ενός ορισμού απαιτούσε την χρησιμοποίηση από τους μαθηματικούς για πολλά χρόνια (ακόμα και αιώνες) κάθε έννοιας μέχρι να αναδειχθεί ο κατάλληλος ορισμός, έτσι και στο επίπεδο της διδακτικής πράξης, απαιτείται η ενασχόληση του μαθητή πρώτα με τις βασικές ιδιότητες της υπό εξέταση έννοιας πριν την παρουσίαση του αυστηρού ορισμού. Σύμφωνα με τους Mariotti & Fischbein (1997) η διαδικασία εισαγωγής των μαθητών στην δημιουργία ενός ορισμού είναι ιδιαίτερα κρίσιμη διδακτική πράξη : ο ορισμός οφείλει να εξετάζεται τόσο από την συνιστώσα της μαθηματικής αυστηρότητας όσο και από την πλευρά της μαθηματικής πρακτικής και διαίσθησης. Και είναι η δεύτερη συνιστώσα που συνήθως μας διαφεύγει γι αυτό και καταλήγουμε συχνά στην αλγοριθμοποίηση.
Επομένως πριν να ορίσουμε, να γενικεύσουμε και να αποδείξουμε πρέπει να προηγηθούν πολλά παραδείγματα σε διαφορετικά πλαίσια.

Τα μαθηματικά χωρίς ένα καλά αναπτυγμένο συμβολισμό θα ήταν αδιανόητα για μας. Ο συμβολισμός συμβάλλει στην ανακάλυψη και φέρνει στις δυνατότητες των μαθητών προβλήματα που απαιτούσαν την ιδιοφυΐα μεγάλων μαθηματικών.
Η περιγραφή της άλγεβρας ως καθολική αριθμητική καλούσε τη προσοχή στον αλγεβρικό συμβολισμό και για αυτό στην ευρετική δύναμη του συμβολισμού. Η εκτεταμένη εμπιστοσύνη στον συμβολισμό οδηγούσε στην υπόθεση ότι η τυπική δραστηριότητα είχε ενσωματωμένη την αλήθεια. Η πίστη στη δύναμη του συμβολισμού ενθάρρυνε τους μαθηματικούς να εφαρμόζουν τις ίδιου είδους τεχνικές σε άπειρες διαδικασίες που εφάρμοζαν και σε πεπερασμένες. Όλο τον 18^{ο} αιώνα οι άπειρες δυναμοσειρές προστίθεντο, πολλαπλασιάζοντο και μετατρέπονταν σε πεπερασμένα γινόμενα, σαν να ήταν πολύ μακρά πολυώνυμα. Αυτές οι διαδικασίες δικαιώνοντο από τον πλούτο των αποτελεσμάτων που είχαν σε εφαρμογές (Grabiner, 1981).

Το αλγεβρικό στυλ της ανάλυσης αξιοποιημένο με ένα ιδιοφυή τρόπο από τον Euler και εφαρμοσμένο από τους περισσότερους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα, δείχνει ότι εμπιστεύονταν τα σύμβολα. Γιατί; Πρώτον, γιατί είχαν σημαντικά

αποτελέσματα, δεύτερον, γιατί η λογικοφάνεια των λύσεων υπονοούσε ότι και η μέθοδος ήταν σωστή και τρίτο μία φιλοσοφική οπτική προερχόμενη από τον Newton, η πίστη ότι οι μαθηματικοί ανακάλυπταν το μεγάλο μαθηματικό σχέδιο της φύσης (Kleiner, 2001).

Έχουμε λοιπόν αμφισβητήσιμες μαθηματικές τεχνικές, οι οποίες δίνουν σωστά αποτελέσματα. Εδώ τίθεται το ζήτημα της ανακάλυψης. Πριν την απόδειξη προηγείται η ανακάλυψη. Τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα οι μαθηματικοί είχαν εξαιρετικά μαθηματικά επιτεύγματα μέσω διαισθητικού, ευρετικού συλλογισμού. Η αυστηρότητα, η τυπικότητα και η λογική ανάπτυξη μιας έννοιας ή μιας θεωρίας συνήθως έρχεται στο τέλος μιας διαδικασίας μαθηματικής εξέλιξης. Η παρουσίαση του αποτελέσματος χωρίς τη διαδικασία της ανακάλυψης πολύ λίγα έχει να προσφέρει.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα η παράγωγος: Η Grabiner (1983b) συνοψίζει με ένα πολύ εύστοχο τρόπο την εξέλιξη της παραγώγου: «Η παράγωγος πρώτα *χρησιμοποιήθηκε*, μετά *ανακαλύφθηκε,* μετά *διερευνήθηκε και αναπτύχθηκε* και τέλος *ορίστηκε*.» (Από τον αλγεβρικό ορισμό του Lagrange στα 1790, στον ορισμό του Cauchy με όρια και απειροστά στα 1820, σε αυτόν του Weierstrass με ε-δ όρους στα 1870).

Το να αρχίζουμε μια διδασκαλία με ορισμούς μπορεί να είναι λογικά σωστό αλλά παιδαγωγικά λάθος. Οι μαθητές θα πρέπει να πειστούν για την χρησιμότητα και τη σημασία των αυστηρών ορισμών και θεωρημάτων αυτών που φαίνεται να είναι διαισθητικές έννοιες και αποτελέσματα.

Ο Λογισμός περιλαμβάνει αλγορίθμους, θεωρία και εφαρμογές. Οι μαθητές θα πρέπει να έρθουν σε επαφή με την τεχνική του δύναμη, την λογική του αρμονία και την χρησιμότητα του.

Ενώ οι εμπνευστές της αυστηρής θεμελίωσης είχαν ως κίνητρο την ανάγκη αποστασιοποίησης από την γεωμετρία ή την διαίσθηση (αφού όμως προηγουμένως ο Λογισμός είχε αναπτυχθεί στηριζόμενος ακριβώς στη γεωμετρία, την κίνηση και τη διαίσθηση) η διδακτική τα θεωρεί απαραίτητα για την εισαγωγή και κατανόηση των εννοιών. Η όποια παρουσίαση των ορισμών αλλά και θεωρημάτων εκτός ενός τέτοιου πλαισίου οδηγεί αναπόφευκτα σε μερική ή και σε λάθος κατανόηση.

Ο ρόλος των ανισοτήτων

Οι ανισότητες δεν πρωτοεισήχθησαν στους ορισμούς αλλά στον καθορισμό πεπερασμένων προσεγγίσεων που ήταν αναγκαίες για τις εφαρμογές και την επίλυση προβλημάτων (Euler, Lagrange).
Το υπόλοιπο μιας σειράς Taylor αντιπροσώπευε ένα άλλο τρόπο εύρεσης του λάθους.
Στην διαδικασία αυστηρής θεμελίωσης του Λογισμού όπως φάνηκε στα προηγούμενα, σημαντικό ρόλο έπαιξε η αναγνώριση του ρόλου των ανισοτήτων στους ορισμούς και τις αποδείξεις. Όπως έγινε αντιληπτό κυρίως από τους Cauchy και Bolzano, οι ορισμοί της συνέχειας, του ορίου και της παραγώγου έπρεπε να εμπεριέχουν ανισοτικές σχέσεις κατά ουσιαστικό τρόπο. Οποιοσδήποτε χειρισμός των εννοιών αυτών απαιτούσε πλήρη ικανότητα χειρισμού των ανισοτήτων με πολλή μεγάλη ευχέρεια. Η κληρονομιά που άφησαν πίσω τους οι Lagrange, Cauchy και Bolzano επηρέασε όλο το οικοδόμημα του σύγχρονου Λογισμού, με αποκορύφωμα τους ε-δ ορισμούς του Weirestarss.

Είναι σήμερα οι μαθητές το ίδιο καλά εξοικειωμένοι με την ουσιαστική λειτουργία των ανισοτικών σχέσεων σε σχέση με τις θεμελιώδεις έννοιες του Λογισμού ;
Η εμπειρία δείχνει ότι κάτι τέτοιο μοιάζει να μην ισχύει. Άλλωστε οι ανισότητες θεωρούνται από τους μαθητές, εξαιτίας της θέσης τους στο αναλυτικό πρόγραμμα, ως μία επέκταση των εξισώσεων. Οι ανισότητες με απόλυτη τιμή αντιμετωπίζονται ως «εφαρμογή» (αλγοριθμική) των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών: οι $|x - 5| < 8$ και $|f(x) - 1| < \varepsilon$ δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους.
Θα ήταν ουσιαστική συμβολή στην κατανόηση της Ανάλυσης επομένως, η αναβάθμιση της διδασκαλίας των ανισοτήτων με τρόπο που να εντάσσεται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο από αυτό που υπάρχει σήμερα.

Η διαθεματική προσέγγιση

Οι σειρές Fourier που συναντήσαμε κατά την σύντομη αναφορά μας στα επιτεύγματα της εποχής του Cauchy, είναι ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά παραδείγματα αλληλεπίδρασης φυσικής και μαθηματικών. Ένα «φυσικό»

αποτέλεσμα «αμφισβητεί» τις καθιερωμένες απόψεις των μαθηματικών : ο Fourier ισχυρίστηκε ότι *όποια* συνάρτηση ορισμένη π.χ. στο (-π, π) αντιπροσωπεύεται σε αυτό το διάστημα από μία άπειρη σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Ένα αποτέλεσμα της εργασίας του Fourier είναι ότι δύο συναρτήσεις μπορεί να συμφωνούν αναλυτικά σε ένα διάστημα και όχι σε άλλα.

[π.χ. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ και $g(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa x}{\kappa}$ είναι ίσες για $x \in (0,2\pi)$ και όχι αλλού]

Οι Euler και Lagrange γνώριζαν ότι *μερικές* συναρτήσεις έχουν τέτοιες αναπαραστάσεις. Η «αρχή της συνέχειας» έλεγε ότι το παραπάνω δεν μπορεί να είναι αλήθεια για *όλες* τις συναρτήσεις: αφού το ημίτονο και το συνημίτονο είναι συνεχείς και περιοδικές το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το άθροισμα τέτοιων όρων (άπειρες και πεπερασμένες σειρές θεωρούνται αναλογικά). Το αποτέλεσμα του Fourier ήταν μερικά σωστό και έθεσε σε λειτουργία μία διαδικασία εύρεσης κάτω από ποιες συνθήκες ίσχυε. Σε αυτή τη διαδικασία οι έννοιες της σύγκλισης, της συνέχειας και του ολοκληρώματος έπρεπε να ξεκαθαριστούν και αυτό ακριβώς επεδίωξε ο Cauchy.

Η πορεία : φυσικό πρόβλημα → μαθηματικό πρόβλημα → ανακατασκευή και δημιουργία νέων μαθηματικών εννοιών είναι χαρακτηριστική της πορείας που συχνά έχει η μαθηματική εξέλιξη.

Ο Λογισμός έχει αναδειχθεί από διαφορετικούς δρόμους βαθιά επηρεασμένος από προβλήματα που δεν προέρχονται από τα ίδια τα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά και ειδικότερα ο Λογισμός και η Φυσική συχνά αλληλοεμπλέκονται. Η πηγή και η αφορμή μαθηματικών προβληματισμών είναι συχνά η Φυσική και η Μηχανική και αυτό είναι κάτι που δεν πρέπει να μας ξεφεύγει από τον διδακτικό σχεδιασμό. Άλλωστε η διαθεματικότητα είναι μια έννοια που τα τελευταία χρόνια έχει βρει το δρόμο της και στο ελληνικό σχολείο (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2005) και το ιστορικό προηγούμενο είναι πλούσιο σε παραδείγματα.

Αυτή η διαπλοκή δεν μπορεί να αγνοηθεί κατά τη διδασκαλία. Πρέπει να παρθεί υπόψη κυρίως στην εισαγωγή αλλά και την επεξήγηση των εννοιών. Αντίστροφα, μαθηματικές έννοιες μπορούν να βρουν μία φυσική ή γεωμετρική ερμηνεία.

Μια πρόταση διδασκαλίας βασισμένη σε πρωτότυπα κείμενα

Η διδακτική πρόταση την οποία θα παρουσιάσουμε, βασίζεται στη θέση ότι το νόημα της μαθηματικής γνώσης καθορίζεται όχι μόνο από τις συνθήκες στις οποίες αυτή η γνώση μετατρέπεται σε μαθηματική θεωρία δομημένη παραγωγικά, αλλά επίσης από τη διαδικασία η οποία οδήγησε πρωταρχικά ή μπορούσε να είχε οδηγήσει σε αυτή και η οποία είναι απολύτως αναγκαία για την κατανόηση της (Brousseau, 1986, Hadamard, 1949). Παρόλο που υπάρχουν «καθαρά» μαθηματικά οι προσεγγίσεις που οδηγούν στην ανακάλυψη τέτοιων ιδεών εμπεριέχονται σε πολιτισμικά πλαίσια (Katz, 1997).

Συνεπώς, η μάθηση των μαθηματικών δεν γίνεται κατανοητή μόνο ως η διαδικασία με την οποία κάποιος γνωρίζεται με μία θεωρία και γίνεται ικανός στον χειρισμό των συμβόλων και της λογικής σύνταξης της, αλλά περιλαμβάνει και την κατανόηση των υπόρρητων κινήτρων ορισμένων προβλημάτων και ερωτημάτων. Η διδασκαλία των μαθηματικών με αυτό τον τρόπο γίνεται μια πολύ πιο σύνθετη επιχείρηση από την απλή έκθεση καλά οργανωμένων μαθηματικών αναπτυγμάτων. Τα μαθηματικά εξελίσσονται όχι μόνο όσον αφορά στο περιεχόμενο τους αλλά επίσης και στη μορφή τους, τον συμβολισμό, την ορολογία, τις επικρατούσες υπολογιστικές μεθόδους, τους τρόπους έκφρασης και τις αναπαραστάσεις. Η μαθηματική (λεκτική ή συμβολική) γλώσσα μιας δοθείσης περιόδου συμβάλλει στην επανεκτίμηση του ρόλου των οπτικών, διαισθητικών και μη τυπικών προσεγγίσεων οι οποίες είχαν προταθεί παλιά (van Maanen, 1991). Με την βοήθεια πρωτότυπου υλικού ή ακόμα απλών αποσπασμάτων από αυτό, και ο δάσκαλος και ο μαθητής μπορεί να συνειδητοποιήσουν τα πλεονεκτήματα και /ή τα μειονεκτήματα της σύγχρονης μορφής των μαθηματικών .

Η μελέτη των πρωτότυπων πηγών επιτρέπει στους μαθητές να εκτιμήσουν πραγματικά την πρόοδο που επιτεύχθηκε όσον αφορά την διαύγεια και την αιτιολόγηση των εννοιών και των τεχνικών και επίσης αποκαλύπτει πως η πρόοδος αποθαρρύνεται κατ' επανάληψη από συγκεκριμένους τρόπους σκέψης μέχρις ότου κάτι νέο ξεπηδά σε μια νέα περιοχή. Επιτρέπει μία ματιά «από πρώτο χέρι» στο διανοητικό πεδίο της εποχής και επιπλέον καμία άλλη μέθοδος δεν μπορεί να δείξει τόσο καθαρά την εξέλιξη της μαθηματικής αυστηρότητας και της αντίληψης του τι συνιστά μία αποδεκτή απόδειξη (Laubenbacher & Pengelley, 1992).

Τα αποσπάσματα των Cauchy, Euler και Bolzano που ακολουθούν είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση όπου το ιστορικό παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει το κίνητρο για μια πιο εμπεριστατωμένη συζήτηση και εξερεύνηση από τους μαθητές της έννοιας της συνέχειας.
Ευρήματα ερευνών (π.χ. Tall, & Vinner, 1981) έχουν δείξει ότι τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν πολλές φορές οι μαθητές για να χαρακτηρίσουν μια συνάρτηση συνεχή ή ασυνεχή είναι: «είναι συνεχής γιατί η συνάρτηση δίνεται μόνο από ένα τύπο», «είναι όλη σε ένα κομμάτι», «υπάρχει μια ξαφνική αλλαγή στη κλίση», «έχει ένα συνεχές μοτίβο ορισμού». Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι τα επιχειρήματα των μαθητών υπήρξαν ορισμοί της συνέχειας κατά καιρούς.

Απόσπασμα από το ***Υπόμνημα για τις συνεχείς συναρτήσεις*** (*Mémoire sur les fonctions continues*, 1844) του Cauchy:

«*Στα έργα του Euler και του Lagrange, μία συνάρτηση ονομάζεται συνεχής ή ασυνεχής , ανάλογα με το αν οι διάφορες τιμές αυτής της συνάρτησης, που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της μεταβλητής, υπόκεινται ή δεν υπόκεινται στον ίδιο νόμο, παρέχονται ή όχι από την ίδια εξίσωση. Με αυτούς τους όρους η συνέχεια ορίστηκε από αυτούς τους επιφανείς γεωμέτρες, όταν έλεγαν ότι «οι αυθαίρετες συναρτήσεις που εισάγονται από την ολοκλήρωση μερικών διαφορικών εξισώσεων, μπορεί να είναι συναρτήσεις συνεχείς ή ασυνεχείς». Εν τούτοις, ο ορισμός που μόλις υπενθυμίσαμε, απέχει πολύ από το να προσφέρει μία μαθηματική ακρίβεια. Επειδή, εάν οι διάφορες τιμές μίας συνάρτησης, που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές μιας μεταβλητής, εξαρτώνται από μία ή περισσότερες διακριτές εξισώσεις, τίποτε δεν θα εμποδίσει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων και ακόμα και να τις*

αντικαταστήσουμε από μία μοναδική εξίσωση της οποίας η διάσπαση θα παρέχει όλες τις άλλες. Υπάρχουν κι άλλα: οι αναλυτικοί νόμοι στους οποίους μπορεί να υπόκεινται οι συναρτήσεις, γενικά εκφράζονται από αλγεβρικούς ή υπερβατικούς τύπους και μπορεί να συμβεί, διαφορετικοί τύποι να αντιπροσωπεύουν για συγκεκριμένες τιμές μιας μεταβλητής x την ίδια συνάρτηση, και για άλλες τιμές του x διαφορετικές συναρτήσεις. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε τον ορισμό του Euler και του Lagrange ως εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, είτε αλγεβρικές είτε υπερβατικές, συχνά θα αρκεί μια απλή αλλαγή του συμβολισμού για να μετασχηματίσουμε μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή, και αντίστροφα. Έτσι, για παράδειγμα, αν το x παριστάνει μια πραγματική μεταβλητή, μια συνάρτηση η οποία ανάγεται άλλοτε στο +x άλλοτε στο –x, ανάλογα με το αν η μεταβλητή x είναι θετική ή αρνητική, θα όφειλε με αυτή την αιτία, να καταταχθεί στην κλάση των ασυνεχών συναρτήσεων και όμως η ίδια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής, όταν την αναπαριστάνουμε με το ορισμένο ολοκλήρωμα $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{t^2+x^2}dt$ *ή ακόμα με την* $\sqrt{x^2}$ *που είναι η ειδική τιμή της συνεχούς συνάρτησης* $\sqrt{x^2+t^2}$ *που αντιστοιχεί στη μηδενική τιμή του t. Με αυτό τον τρόπο, η ιδιότητα της συνέχειας σε μία συνάρτηση, ιδωμένη από την οπτική των γεωμετρών, είναι ένας χαρακτήρας αόριστος και απροσδιόριστος. Αλλά η απροσδιοριστία θα πάψει αν τον ορισμό του Euler αντικαταστήσουμε με αυτόν που έδωσα στο Κεφάλαιο ΙΙ του Analyse Algébrique. Σύμφωνα με τον νέο ορισμό, μία συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x θα είναι συνεχής μεταξύ δύο ορίων a και b αυτής της μεταβλητής αν, μεταξύ αυτών των ορίων, η συνάρτηση πετυχαίνει συνεχώς μια τιμή μοναδική και πεπερασμένη, με τέτοιο τρόπο ώστε μία αύξηση άπειρα μικρή της μεταβλητής παράγει πάντα μια αύξηση άπειρα μικρή της ίδιας της συνάρτησης. Έτσι, αν η μεταβλητή παρθεί ως τετμημένη, η πραγματική συνάρτηση που υποθέσαμε θα είναι η τεταγμένη ενός κλάδου μιας συνεχούς καμπύλης, που περιέχεται μεταξύ δύο ευθειών καθέτων στον άξονα των τετμημένων και που συναντάται σε ένα μοναδικό σημείο από κάθε μία από τις παράλληλες που θα μπορούσαμε να χαράξουμε ανάμεσα στις δύο πρώτες ευθείες. Η συνέχεια των συναρτήσεων ορισμένη με αυτό τον τρόπο είναι για αυτό τον λόγο μία ιδιότητα της οποίας η σημασία εκτιμάται σήμερα γενικά από τους γεωμέτρες».*

Σύμφωνα με τον Euler : «*μία συνάρτηση είναι συνεχής εάν ο νόμος ή η έκφραση της f(x) συνεχίζει να ισχύει όταν μεταβάλλεται το x*». (*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748).

Ενώ σύμφωνα με τον Bolzano : «*Μία συνάρτηση f(x) για όλες τις τιμές του x, μέσα ή έξω από συγκεκριμένα φράγματα, μεταβάλλεται σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας μόνο στο βαθμό που, εάν x είναι όποια τέτοια τιμή, η διαφορά f(x+ω) - f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, όταν το ω παρθεί όσο μικρό επιθυμούμε*» (*Rein analytischer Beweis*, σελ.11-12).

Τα προηγούμενα αποσπάσματα μπορούν να δοθούν στους μαθητές συνοδευόμενα από ερωτήματα όπως τα παρακάτω, προκειμένου να αποτελέσουν αντικείμενο συζήτησης και μελέτης αναφορικά με τις ιδιότητες και τον ορισμό της συνέχειας.

Ερωτήματα :

1. Ποια η αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης που είχαν εκείνη την εποχή ;
2. Σύγκριση ορισμών Euler, Lagrange και Cauchy.
3. Ο ορισμός του Cauchy είναι λεκτικός. Αν τον μεταφράζαμε σε σύμβολα τι θα γράφαμε; Είναι ίδιος με τον σημερινό ορισμό; Ο Cauchy περιγράφει λεκτικά και μία γεωμετρική αναπαράσταση του ορισμού του: Πως την κατανοούμε; Πως βοηθά στην κατανόηση του ορισμού του;
4. Ποιά η εξέλιξη της έννοιας της συνέχειας;
5. Χαρακτηρισμός ενός ορισμού ως «ασαφή και απροσδιόριστου». Ποια χαρακτηριστικά πρέπει να έχει ένας ορισμός για να είναι αποδεκτός;
6. Πως αντιμετωπίζουμε σήμερα την συνάρτηση $\sqrt{x^2}$; Πως ελέγχουμε την συνέχεια της; Έχει δίκιο ο Cauchy όταν ισχυρίζεται ότι ο ορισμός του Euler δεν οδηγεί σε σωστά συμπεράσματα για τέτοιου είδους συναρτήσεις;

Τέλος στην συνέχεια και υπό την μορφή συνθετικής εργασίας – project μπορούν να τεθούν κάποια γενικότερα ερωτήματα με σκοπό την κινητοποίηση των μαθητών και την πραγματοποίηση ερευνητικής διαδικασίας.

Γενικότερα ερωτήματα:

- Γιατί ο Cauchy χαρακτηρίζει τους Euler και Lagrange «γεωμέτρες» ;
- Σχολιασμός του τρόπου παρουσίασης από τον Cauchy της συνέχειας. Μοιάζει με τον σημερινό; Τι πλεονεκτήματα και τι μειονεκτήματα έχει;
- Γιατί ο τίτλος του βιβλίου του Cauchy είναι «Αλγεβρική Ανάλυση» ; Τι σχέση έχει η Άλγεβρα με την Ανάλυση;

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η σχέση μεταξύ των τομέων έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ιστορίας των μαθηματικών είναι προβληματική.

Η λέξη «ενσωμάτωση» της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση υπονοεί μία χρήση που αναπτύσσεται με τα ακόλουθα βήματα: απομόνωση των κοινών στόχων της μάθησης των μαθηματικών και της μάθησης της ιστορίας των μαθηματικών – ανάπτυξη τους αφού εξερευνηθούν οι ιδιαιτερότητες των δύο πεδίων – ανάλυση των γνωστικών αποτελεσμάτων υπό το φως patterns εκπαιδευτικής και επιστημολογικής έρευνας. (Furinghetti, 1999)

Στην πρόσκληση για την μελέτη του ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) (1997-2000) για τον ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάστηκαν στο Διεθνές Συνέδριο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στην Ιαπωνία το 2000, οι Fauvel & Van Maanen εφιστούσαν την προσοχή στα ακόλουθα θέματα:

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των ιστορικών των μαθηματικών και αυτών που ενδιαφέρονται κυρίως για την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση; Είναι σημαντικό οι ιστορικοί των μαθηματικών και οι εκπαιδευτικοί να εργάζονται συνεργατικά αφού η ιστορική μάθηση και η εμπειρία της τάξης δεν συνυπάρχουν συνήθως στο ίδιο άτομο.

Θα έπρεπε διαφορικά τμήματα του αναλυτικού προγράμματος να εμπεριέχουν την ιστορία των μαθηματικών με ένα διαφορετικό τρόπο;

Ποιες είναι οι συνέπειες στην οργάνωση της τάξης και την πρακτική;
Οι δάσκαλοι μπορεί να χρειαστούν πρακτική καθοδήγηση και υποστήριξη και όσον αφορά στους τρόπους αξιολόγησης και όσον αφορά στην οργάνωση της διδασκαλίας.
Πως μπορεί η ιστορία των μαθηματικών να είναι χρήσιμη στον ερευνητή της μαθηματικής εκπαίδευσης; Ένα παράδειγμα είναι η χρήση της ιστορίας προκειμένου και ο δάσκαλος και οι μαθητές να υπερπηδήσουν επιστημολογικά κενά στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης. Μία κριτική ανάλυση της άποψης ότι «η οντογένεση ανακεφαλαιώνει την φυλογένεση» - ότι η ανάπτυξη της ατομικής μαθηματικής κατανόησης ακολουθεί την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών, μπορεί να είναι κατάλληλη. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η έρευνα των μαθηματικών εννοιών. Σε αυτή την περίπτωση ο ερευνητής εφαρμόζει την ιστορία ως πιθανό φακό των μηχανισμών που έθεσαν την μαθηματική σκέψη σε κίνηση.
Θεωρούμε ότι παρόλη τη σημαντική έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί, πολλά από τα ερωτήματα παραμένουν ανοικτά και ιδιαίτερα για την εκπαίδευση στην χώρα μας. Τέτοιοι συνδυασμοί ιστορικών και ψυχολογικών οπτικών αξίζουν ιδιαίτερη προσοχή.

Ιδιαίτερης προσοχής χρήζει τέλος η αποκάλυψη στους μαθητές της διασύνδεσης της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού στην ανθρώπινη κοινωνία, η επίδραση της ιστορίας της ανθρωπότητας στα μαθηματικά και αντίστροφα, οι επιρροές των μαθηματικών στην ανθρωπότητα, τον πολιτισμό της, την φιλοσοφία, την τεχνολογία, τις τέχνες.

Η ιστορικο-επιστημολογική ανάλυση μπορεί να μας παρέχει ενδιαφέρουσες πληροφορίες για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης σε ένα πολιτισμό και για τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται και τροποποιούνται τα νοήματα. Πρέπει να κατανοήσουμε τις διαπραγματεύσεις και τις πολιτιστικές αντιλήψεις που αποτελούν την βάση αυτών των νοημάτων. Ο τρόπος με τον οποίο μια παλιά ιδέα αναπτύχθηκε μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε παλιά νοήματα και μέσω διδακτικής επεξεργασίας να την ξανασχεδιάσουμε και να την κάνουμε συμβατή με τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα. (Radford, 1997).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ ΤΟΥ BOLZANO

ΚΑΘΑΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΟΤΙ ΜΕΤΑΞΥ ΟΠΟΙΩΝ ΔΥΟ ΤΙΜΩΝ ΠΟΥ ΔΙΝΟΥΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΜΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
ΤΟΥ BERNARD BOLZANO

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Υπάρχουν δύο προτάσεις στη θεωρία των εξισώσεων για τις οποίες μπορεί ακόμη να ειπωθεί , μέχρι πρόσφατα, ότι μία εντελώς σωστή απόδειξη ήταν άγνωστη. Η μία είναι η πρόταση: ότι μεταξύ δύο όποιων τιμών της άγνωστης ποσότητας που δίνουν αποτελέσματα διαφορετικού προσήμου πρέπει πάντα να βρίσκεται μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης. Η άλλη είναι: ότι κάθε αλγεβρική ρητή ακέραιη συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας μπορεί να διαιρεθεί σε δύο πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού. Μετά από διάφορες ανεπιτυχείς απόπειρες απόδειξης της δεύτερης πρότασης από τους D'Alembert, Euler, de Foncenex, Lagrange, Laplace, Klügel, και άλλους, ο Gauss τελικά παρείχε, πέρυσι, δύο αποδείξεις οι οποίες αφήνουν πολύ λίγα να επιθυμήσει κανείς. Πράγματι, αυτός ο εξέχων λόγιος μας είχε ήδη παρουσιάσει μία απόδειξη της πρότασης, το 1799 [1], αλλά είχε, όπως παραδέχθηκε, την έλλειψη ότι απεδείκνυε μία καθαρά αναλυτική αλήθεια στη βάση μιας γεωμετρικής θεώρησης. Αλλά οι δύο πιο πρόσφατες αποδείξεις του [2] είναι εντελώς απαλλαγμένες από αυτή την έλλειψη. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που εμφανίζονται σε αυτές πρέπει και μπορούν να γίνουν κατανοητές με μία καθαρά αναλυτική έννοια

Η άλλη πρόταση που αναφέρεται προηγουμένως δεν είναι μία πρόταση που έχει απασχολήσει μέχρι στιγμής σε κάποια μεγάλη έκταση τους λογίους. Παρόλα αυτά μπορούμε να βρούμε μαθηματικούς μεγάλης φήμης που ασχολούνται με τη πρόταση, και ήδη έχουν γίνει απόπειρες για διάφορα είδη αποδείξεων. Για να πειστεί κανείς γι αυτό χρειάζεται μόνο να συγκρίνει τις διάφορες πραγματεύσεις της πρότασης που έχουν δοθεί για παράδειγμα από τους Kastner [3], Clairaut [4],

Lacroix [5], Metternich [6], Klügel [7], Lagrange [8], Rosling [9], και διάφορους άλλους.

Ωστόσο, μία πιο προσεκτική εξέταση δείχνει σύντομα ότι καμιά από αυτές τις αποδείξεις δεν μπορεί να θεωρηθεί ως επαρκής.

Ι. Το πλέον κοινό είδος απόδειξης εξαρτάται από μία αλήθεια δανεισμένη από τη γεωμετρία, δηλαδή, ότι κάθε συνεχής γραμμή απλής καμπυλότητας της οποίας οι τεταγμένες είναι πρώτα θετικές και μετά αρνητικές (ή αντίστροφα) πρέπει αναγκαστικά να τέμνουν τον άξονα των x κάπου σε κάποιο σημείο που βρίσκεται μεταξύ αυτών των τεταγμένων. Βέβαια δεν τίθεται θέμα που να αφορά στην ορθότητα ή ούτε στο προφανές αυτής της γεωμετρικής πρότασης. Αλλά είναι καθαρό ότι αυτό είναι μία ανυπόφορη προσβολή κατά της σωστής μεθόδου εξαγωγής αλήθειας των καθαρών (ή γενικών) μαθηματικών (δηλαδή, αριθμητικής, άλγεβρας, ανάλυσης) από θεωρήσεις οι οποίες ανήκουν σε ένα απλά εφαρμοσμένο (ή ειδικό) τμήμα δηλαδή τη γεωμετρία. Πράγματι δεν έχουμε εδώ και καιρό νοιώσει και αναγνωρίσει την ασυμφωνία τέτοιων 'μετάβασης εις άλλο γένος'; (ελληνικά στο κείμενο). Δεν το έχουμε ήδη αποφύγει αυτό οποτεδήποτε ήταν δυνατό σε εκατοντάδες άλλες περιπτώσεις και έχουμε θεωρήσει αυτή την αποφυγή ως προσόν; [10] Έτσι, αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς δεν πρέπει να προσπαθήσουμε να κάνουμε το ίδιο εδώ; Γιατί πράγματι, εάν κάποιος θεωρεί ότι οι αποδείξεις της επιστήμης δεν θα έπρεπε να είναι απλά επιβεβαιώσεις [Gewissmachungen], αλλά μάλλον αιτιολογήσεις [Begründungen], δηλαδή παρουσιάσεις της αντικειμενικής αιτίας της αλήθειας που ενδιαφέρει, τότε είναι αυταπόδεικτο ότι η αυστηρά επιστημονική απόδειξη ή η αντικειμενική αιτία μιας αλήθειας η οποία έχει εξίσου ισχύ για όλες τις ποσότητες, είτε στο χώρο είτε όχι, δεν μπορεί κατά το δυνατόν να βρίσκεται σε μία αλήθεια η οποία έχει ισχύ μόνο για ποσότητες που βρίσκονται στο χώρο. Με αυτή την οπτική μπορεί αντιθέτως να δούμε ότι μία τέτοια γεωμετρική απόδειξη είναι, σε αυτή όπως και στις περισσότερες περιπτώσεις, στην πραγματικότητα κυκλική. Γιατί ενώ η γεωμετρική απόδειξη στην οποία αναφερόμαστε εδώ είναι (όπως έχουμε ήδη πει) εξαιρετικά προφανής, και γι αυτό τον λόγο δεν χρειάζεται απόδειξη με την έννοια της επιβεβαίωσης, χρειάζεται παρόλα αυτά αιτιολόγηση. Γιατί οι συνιστώσες της έννοιας είναι προφανώς συνδυασμένες έτσι που κανείς δεν μπορεί να διστάσει ούτε λεπτό για να πει ότι είναι μία από αυτές τις απλές αλήθειες που καλούνται βασικές προτάσεις, [Grundsatze], ή βασικές αλήθειες γιατί είναι μόνο η αιτία για άλλες

αλήθειες και ποτέ οι ίδιες συνέπειες. Αντιθέτως είναι ένα θεώρημα ή αλήθεια - εκ - συνέπειας [Folgewahrheit] δηλαδή μία τέτοια αλήθεια που έχει τη βάση της σε ορισμένες άλλες αλήθειες και ως εκ τούτου πρέπει να αποδειχθεί μέσω παραγωγής από αυτές τις άλλες αλήθειες. [11]

Θεωρείστε τώρα τον αντικειμενικό λόγο γιατί μία γραμμή στις παραπάνω αναφερόμενες συνθήκες τέμνει τον άξονα των x. Όλοι αναμφίβολα θα δούνε πολύ σύντομα ότι αυτή η αιτία δεν βρίσκεται πουθενά αλλού παρά σε αυτή τη γενική αλήθεια ως αποτέλεσμα της οποίας, κάθε συνεχής συνάρτηση του x η οποία είναι θετική για μία τιμή του x, και αρνητική για μία άλλη, πρέπει να είναι μηδέν για κάποια ενδιάμεση τιμή του x. Και αυτή είναι ακριβώς η αλήθεια που πρέπει να αποδειχθεί. Γι αυτό το λόγο είναι τελείως λάθος να έχει επιτρέψει κανείς τη δεύτερη να παραχθεί από την πρώτη (όπως συμβαίνει στο είδος της απόδειξης που εξετάζουμε). Μάλλον αντίστροφα, η πρώτη πρέπει να παραχθεί από τη δεύτερη εάν επιθυμούμε να απεικονίζουμε τις αλήθειες στην επιστήμη με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους στην αντικειμενική τους συνέπεια.

II. Εξίσου αντικρούσιμη είναι η απόδειξη που έχουν κατασκευάσει μερικοί από την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης με τον συνυπολογισμό των εννοιών της κίνησης και του χρόνου. «Εάν δύο συναρτήσεις fx και φx», λένε, «μεταβάλλονται σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας και εάν για $x = \alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, αλλά για $x = \beta$, $f\beta > \varphi\beta$, τότε πρέπει να υπάρχει κάποια τιμή u ευρισκόμενη μεταξύ α και β για την οποία $fu = \varphi u$. Γιατί αν φανταστεί κανείς ότι η μεταβλητή ποσότητα x, και στις δύο αυτές συναρτήσεις, σταδιακά παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ α και β, και η ίδια τιμή παίρνεται πάντα και από τις δύο στις ίδιες στιγμές, τότε στην αρχή αυτής της συνεχούς αλλαγής στο x, $fx < \varphi x$, και στο τέλος $fx > \varphi x$. Αλλά αφού και οι δύο αυτές συναρτήσεις, ως συνέπεια της συνέχειας τους, πρέπει πρώτα να περάσουν δια μέσου όλων των ενδιάμεσων τιμών πριν φθάσουν μία μεγαλύτερη τιμή, πρέπει να υπάρχει κάποια ενδιάμεση στιγμή κατά την οποία η μία είναι ίση με την άλλη». Αυτό επεξηγείται περαιτέρω με το παράδειγμα της κίνησης δύο σωμάτων, ένα από τα οποία είναι αρχικά πίσω από το άλλο και αργότερα μπροστά από το άλλο. Έπεται αναγκαστικά ότι κάποια στιγμή πρέπει να πήγαινε δίπλα στο άλλο. Κανείς δεν θα αρνηθεί ότι οι έννοιες του χρόνου και της κίνησης είναι εξίσου ξένες στα γενικά μαθηματικά όσο και η έννοια του χώρου.

Παρόλα αυτά, εάν αυτές οι δύο έννοιες είχαν εισαχθεί εδώ μόνο χάριν αποσαφήνισης, δεν θα είχαμε τίποτα εναντίον τους. Γιατί με κανένα τρόπο δεν μετέχουμε σε μία τέτοια υπερβολική καθαρολογία , η οποία απαιτεί, προκειμένου να κρατήσει την επιστήμη μακριά από οτιδήποτε ξένο, στην παρουσίαση της να μην μπορεί κανείς ποτέ να χρησιμοποιήσει μία έκφραση δανεισμένη από άλλο πεδίο, αν και μόνο με μεταφορική έννοια και με σκοπό να περιγράψει ένα γεγονός πιο σύντομα και καθαρά από ότι θα μπορούσε να γίνει με μία αυστηρή κυριολεκτική περιγραφή. Ούτε ακόμα και αν είναι μόνο για να αποφύγει κανείς την ηχώ της σταθερούς επανάληψης της ίδιας λέξης, ή για να θυμάται, απλά από το όνομα που δίνεται σε ένα πράγμα, ένα παράδειγμα το οποίο θα χρησίμευε για την επιβεβαίωση ενός ισχυρισμού. Έτσι πρέπει να σημειωθεί ότι δεν θεωρούμε ότι τα παραδείγματα και οι εφαρμογές μας αποσπούν στο ελάχιστο από την τελειότητα της επιστημονικής παρουσίασης. Από την άλλη, απαιτούμε αυστηρά μόνο αυτό: να μην προτείνονται τα παραδείγματα αντί για αποδείξεις και ότι η ουσία [Wesenheit] ενός συμπεράσματος να μη βασίζεται ποτέ σε απλά μεταφορική χρήση φράσεων ή ιδεών σχετιζόμενων με αυτές, έτσι ώστε το ίδιο το συμπέρασμα να γινόταν κενό αμέσως μόλις άλλαζαν. Σε συμφωνία με αυτές τις απόψεις, η συμπερίληψη του χρόνου στη παραπάνω απόδειξη μπορεί ίσως ακόμα να δικαιολογηθεί επειδή κανένα συμπέρασμα δεν βασίζεται σε φράσεις που τον περιέχουν οι οποίες επίσης δεν θα είχαν ισχύ χωρίς αυτόν. Αλλά σε καμία περίπτωση η τελευταία επεξήγηση η σχετική με τη κίνηση ενός σώματος δεν μπορεί να θεωρηθεί ως οτιδήποτε περισσότερο παρά ένα απλό παράδειγμα το οποίο δεν αποδεικνύει τη πρόταση αλλά μάλλον είναι για να αποδειχθεί από αυτή.

(α) Γι αυτό ας εγκαταλείψουμε αυτό το παράδειγμα και ας εξετάσουμε το υπόλοιπο του συλλογισμού. Ας σημειώσουμε καταρχήν ότι αυτό βασίζεται σε μία λανθασμένη έννοια συνέχειας. Σύμφωνα με ένα σωστό ορισμό, η έκφραση ότι *μία συνάρτηση fx μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x μέσα ή έξω από δοσμένα όρια* [12] σημαίνει ακριβώς αυτό: x είναι κάποια τέτοια τιμή, η διαφορά

$f(x + \omega) - fx$ μπορεί να γίνει μικρότερη από όποια δοσμένη ποσότητα, με τη προϋπόθεση ότι το ω μπορούμε να το πάρουμε όσο μικρό θέλουμε (*). Με τον συμβολισμό που εισήγαγα στο Τμήμα 14 του *Binomische Lehrsatz, κλπ.* (Πράγα, 1816) αυτό είναι $f(x + \omega) = fx + \Omega$. Αλλά όπως έγινε η υπόθεση σε αυτή την απόδειξη, συνεχής συνάρτηση είναι αυτή που ποτέ δεν φθάνει μία

μεγαλύτερη τιμή πριν να περάσει πρώτα διαμέσου όλων των μικρότερων τιμών: δηλαδή, η $f(x + n\Delta x)$ μπορεί να πάρει κάθε τιμή μεταξύ fx και $f(x + \Delta x)$ καθώς το n παίρνει αυθαίρετες τιμές μεταξύ 0 και 1. Αυτός είναι βέβαια ένας πολύ σωστός ισχυρισμός, αλλά δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένας ορισμός της έννοιας της συνέχειας: μάλλον είναι ένα θεώρημα σχετικό με τη συνέχεια. Πράγματι, είναι ένα θεώρημα το οποίο μπορεί να αποδειχθεί μόνο με την υπόθεση που εδώ ήταν επιθυμητό να αποδειχθεί από το θεώρημα. Γιατί αν M είναι κάποια ποσότητα μεταξύ fx και $f(x + \Delta x)$, τότε ο ισχυρισμός ότι υπάρχει μία τιμή του n μεταξύ 0 και 1 για την οποία $f(x + n\Delta x) = M$ είναι μόνο μία ειδική περίπτωση της γενικής αλήθειας ότι εάν, $fx < \varphi x$, και $f(x + \Delta x) > \varphi(x + \Delta x)$, τότε πρέπει να υπάρχει κάποια ενδιάμεση τιμή $x + n\Delta x$ για την οποία $f(x + n\Delta x) = \varphi(x + n\Delta x)$. Ο πρώτος ισχυρισμός προέρχεται από αυτή τη γενική αλήθεια στη περίπτωση που η συνάρτηση φx έχει σταθερή τιμή M.

(β) Αλλά ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι κάποιος μπορούσε να αποδείξει αυτή την πρόταση με κάποιο άλλο τρόπο, η απόδειξη που εξετάζουμε θα είχε ένα άλλο λάθος.

Από το γεγονός ότι $f\alpha > \varphi\alpha$ και $f\beta < \varphi\beta$, θα συνεπάγετο μόνο ότι εάν u ήταν κάποια τιμή ευρισκόμενη μεταξύ α και β για την οποία φu είναι $> \varphi\alpha$ αλλά $< \varphi\beta$ τότε fx θα γινόταν ίση με φu πηγαίνοντας από το $f\alpha$ στο $f\beta$, δηλαδή για κάποιο x ευρισκόμενη μεταξύ α και β, $fx = \varphi u$. Αλλά αν αυτό συμβαίνει για ακριβώς την ίδια τιμή του x που είναι ίση με το u, δηλαδή, (επειδή το u μπορεί να είναι όποια αυθαίρετη τιμή ευρισκόμενη μεταξύ α και β που κάνει $\varphi u > \varphi\alpha$ και $< \varphi\beta$, εάν υπάρχει κάποια τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β για την οποία και οι δύο συναρτήσεις fx φx είναι ίσες μεταξύ τους, αυτό πάλι δεν θα ήταν επακόλουθο.

(γ) Η παραπλανητικότητα της όλης απόδειξης βρίσκεται κυρίως στον συνυπολογισμό της έννοιας του χρόνου. Γιατί αν αυτό παρελείπετο, θα φαινόταν αμέσως ότι η απόδειξη δεν είναι τίποτα παρά μία επανάληψη, με διαφορετικά λόγια, της πρότασης που είναι προς απόδειξη. Γιατί το να πει κανείς ότι η συνάρτηση fx πριν περάσει από τη κατάσταση του να είναι μικρότερη από φx σε αυτή του να είναι μεγαλύτερη, πρέπει πρώτα να περάσει μέσω της κατάστασης του να είναι ίση με φx είναι σαν να λέει, χωρίς την έννοια του χρόνου, ότι ανάμεσα στις τιμές που παίρνει η fx εάν κάποιος βάλει κάθε τιμή του x μεταξύ α και β υπάρχει μία που κάνει $fx = \varphi x$. Αυτή ακριβώς είναι η προς απόδειξη πρόταση.

III. Άλλοι αποδεικνύουν την πρόταση μας στη βάση του ακόλουθου (είτε εντελώς χωρίς απόδειξη ή απλά υποστηριζόμενοι από κάποια παραδείγματα δανεισμένα από τη γεωμετρία): «Κάθε μεταβλητή ποσότητα μπορεί να περάσει από μία θετική σε μία αρνητική κατάσταση μόνο μέσω της κατάστασης του μηδέν ή του απείρου». Τώρα, δεδομένου ότι η τιμή της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι άπειρα μεγάλη για καμία πεπερασμένη τιμή της ρίζας, συμπεραίνουν ότι η όποια μετάβαση εδώ πρέπει να συμβεί μέσω του μηδενός..

(α) Αν επιθυμούμε να αφαιρέσουμε από την παραπάνω πρόταση την μεταφορική ιδέα μιας μετάβασης, η οποία περιέχει την έννοια της αλλαγής στον χρόνο και το χώρο, ως εκ τούτου παραλείποντας την χωρίς νόημα έκφραση μιας κατάστασης μη ύπαρξης τότε τελικά καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση: «Εάν μία μεταβλητή ποσότητα η οποία εξαρτάται από μία άλλη ποσότητα x είναι θετική για x = α και αρνητική για x = β, υπάρχει πάντα μία τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β για την οποία η ποσότητα είναι μηδέν ή μία για την οποία είναι άπειρη». Τώρα ο καθένας αντιλαμβάνεται ότι ένας τέτοιος σύνθετος ισχυρισμός δεν είναι βασικά αλήθεια αλλά θα έπρεπε να αποδειχθεί, και ότι η απόδειξη του δεν θα μπορούσε να είναι ευκολότερη από την ίδια την πρόταση που θέλουμε να επαληθεύσουμε.

(β) Πράγματι, μία εξέταση με μεγαλύτερη ακρίβεια δείχνει ότι ο ισχυρισμός είναι θεμελιωδώς ταυτόσημος με τη πρόταση. Γιατί δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι πράγματι αλήθεια μόνο για ποσότητες που μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο. Έτσι για παράδειγμα, η συνάρτηση $x + \sqrt{(x-2)(x+1)}$ είναι θετική για x = +2 και αρνητική για x = -1. Και όμως επειδή δεν μεταβάλλεται μέσα σε αυτά τα όρια σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας, δεν υπάρχει τιμή x μεταξύ 2 και -1 για την οποία η συνάρτηση να είναι μηδέν ή άπειρο. Ωστόσο, εάν περιορίσουμε τον ισχυρισμό απλά σε ποσότητες οι οποίες μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο, θα πρέπει επίσης να εξαιρέσουμε αυτές τις συναρτήσεις που γίνονται άπειρο για μια συγκεκριμένη τιμή της ρίζας τους. Γιατί μία συνάρτηση όπως η a/(b-x) δεν μεταβάλλεται στην πραγματικότητα με συνεχή τρόπο για όλες τις τιμές του x, αλλά μόνο για όλες τις τιμές που είναι μεγαλύτερες ή μικρότερες του b. Γι αυτό η συνάρτηση δεν έχει καθορισμένη τιμή όταν x = b, αλλά γίνεται αυτό που ονομάζουμε άπειρα μεγάλη. Έτσι, δεν μπορεί να ειπωθεί ότι οι τιμές που παίρνει για x = b + ω, όλες από τις οποίες είναι καθορισμένες, μπορούν να έρθουν

όσο κοντά επιθυμούμε στην τιμή που έχει για $x = b$. Και αυτό είναι ένα μέρος της έννοιας της συνέχειας. (ΙΙ α).

Τώρα ας προσθέσουμε την έννοια της συνέχειας στον προηγούμενο ισχυρισμό, ενώ παραλείπουμε την περίπτωση για την οποία η συνάρτηση γίνεται άπειρη. Τότε γίνεται, λέξη προς λέξη, η αρχική πρόταση που είχαμε να αποδείξουμε: δηλαδή, ότι κάθε με συνεχή τρόπο μεταβαλλόμενη συνάρτηση του x η οποία είναι θετική για $x = \alpha$ και αρνητική για $x = \beta$ πρέπει να είναι μηδέν για κάποια τιμή μεταξύ α και β.

IV. Σε μερικά έργα μπορεί να βρεθεί το ακόλουθο επιχείρημα: «Επειδή η fx είναι θετική για $x = \alpha$ και αρνητική για $x = \beta$, πρέπει να υπάρχουν μεταξύ α και β δύο ποσότητες a και b στις οποίες η μετάβαση από θετικές τιμές σε αρνητικές τιμές της fx λαμβάνει χώρα, έτσι ώστε μεταξύ των a και b δεν υπάρχουν άλλες τιμές του x για τις οποίες η fx θα είναι ακόμα θετική ή αρνητική κλπ»

Αυτό το λάθος μόλις και μετά βίας χρειάζεται να αντικρουστεί και δεν θα εισαγόταν εδώ εάν δεν χρησίμευε για να αποδείξουμε πόσο ασαφείς είναι οι έννοιες ακόμα και πολύ φημισμένων μαθηματικών γι αυτό το θέμα. Είναι αρκετά γνωστό ότι μεταξύ δύο κοντινών τιμών μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, τέτοιας όπως η ρίζα x μιας συνάρτησης, υπάρχουν πάντα άπειρα πολλές ενδιάμεσες τιμές. Και με τον ίδιο τρόπο που δεν υπάρχει ένα τελευταίο x για μία συνεχή συνάρτηση και ούτε πρώτο x που την κάνει αρνητική, έτσι και δεν υπάρχουν αριθμοί a και b όπως περιγράφονται εδώ!

V. Η αποτυχία αυτών των προσπαθειών να αποδείξουν άμεσα την πρόταση η οποία μας ενδιαφέρει οδηγεί στην ιδέα να τη παράγουμε από την δεύτερη πρόταση την οποία αναφέραμε στην αρχή, δηλαδή, από τη διαιρετότητα κάθε συνάρτησης σε συγκεκριμένους παράγοντες. Δεν υπάρχει επίσης αμφιβολία ότι εάν η δεύτερη γίνει αποδεκτή, η πρώτη μπορεί να προκύψει ως συμπέρασμα από αυτή. Αλλά το γεγονός είναι ότι μία τέτοια παραγωγή δεν θα μπορούσε να ονομαστεί αυστηρά επιστημονική αιτιολόγηση, στο ότι η δεύτερη πρόταση εκφράζει καθαρά μία πολύ πιο σύνθετη αλήθεια από τη πρώτη. Γι αυτό το λόγο, η δεύτερη μπορεί βέβαια να βασιστεί στην πρώτη, αλλά όχι αντίστροφα, η πρώτη στην δεύτερη. Κανείς δεν έχει επιτύχει πραγματικά ακόμα, να επιτύχει την δεύτερη χωρίς να προϋποθέτει τη πρώτη. Όσον αφορά στις αποδείξεις, την απορριπτικότητα των οποίων ο Gauss έχει ήδη δείξει στην εργασία του το 1799, είναι επειδή έχει ήδη δειχθεί ότι είναι

απαράδεκτες, που είναι αναγκαίο να διερευνήσουμε εάν ή όχι βασίζονται στην παρούσα μας πρόταση. Η απόδειξη του Laplace [13], ομοίως έχει τα λάθη της, τα οποία δεν χρειάζεται να τονίσουμε εδώ επειδή η απόδειξη βασίζεται ρητά στην πρόταση μας. Επίσης δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε την πρώτη απόδειξη του επειδή βασίζεται σε γεωμετρικές θεωρήσεις. Επιπλέον θα ήταν εύκολο να δείξουμε ότι ακόμα και σε εκείνη την απόδειξη η πρόταση μας γίνεται υπόρρητα αποδεκτή, στο ότι οι γεωμετρικές θεωρήσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται σε αυτή είναι αρκετά παραπλήσιες σε αυτές τις οποίες αναφέραμε στο Ι. Έτσι, όλα εξαρτώνται από το *Demonstratio nova altera and tertia* του Gauss. Ο προηγούμενος αναφέρεται ρητά στην πρόταση μας, όταν προϋποθέτει στη σελίδα 30: aequationem ordinis imparis certo solubilem esse («μια εξίσωση περιττού βαθμού είναι σίγουρα επιλύσιμη» (Σημ.μετ)

Ένας ισχυρισμός που είναι πολύ γνωστό ότι δεν είναι τίποτα παρά μία εύκολη συνέπεια της πρότασης μας. Δεν είναι τόσο προφανές ότι το *Demonstratio nova tertia* εξαρτάται από τη πρόταση μας. Βασίζεται, ανάμεσα σε άλλα πράγματα, στο ακόλουθο θεώρημα: εάν μία συνάρτηση παραμένει θετική για όλες τις τιμές της μεταβλητής της ποσότητας x η οποία βρίσκεται μεταξύ α και β, τότε το ολοκλήρωμα της από x = α σε x = β έχει ένα θετικό άθροισμα. Τώρα, στην απόδειξη που δόθηκε από τον Lagrange [14] για αυτό το θεώρημα, δεν μπορεί να βρεθεί καμία ρητή αναφορά στη πρόταση μας. Ωστόσο, αυτή η απόδειξη του Lagrange έχει ακόμα ένα κενό. Απαιτείται η ποσότητα i να παρθεί επαρκώς μικρή έτσι ώστε $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ - f΄x < $\frac{f''x + f'(x+i) + f'(x+2i) + \ldots + f'(x+(n-l)i)}{n}$

όπου το γινόμενο in είναι να παραμείνει ίσο με μία δοθείσα ποσότητα, και ο πολύ γνωστός συμβολισμός f΄x αντιπροσωπεύει την πρώτη παραγόμενη συνάρτηση της fx. Τώρα εγείρεται το ερώτημα, είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί αυτή η απαίτηση; Όσο μικρό πάρει κανείς το i, έτσι ώστε να μειωθεί η διαφορά $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ - f΄x ο διαιρέτης του δεξιού μέρους, n, πρέπει να παρθεί τόσο πολύ μεγαλύτερος, εάν το in είναι να παραμείνει σταθερό. Επιπλέον το σύνολο των όρων του αριθμητή αυξάνει. Αλλά εάν αυτή η αύξηση στον αριθμητή είναι αναλογική με μία αύξηση στον παρονομαστή, ή εάν η τιμή όλου του κλάσματος ελαττώνεται από την

ελάττωση του i, εξίσου, ή περισσότερο, η έκφραση $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ - f΄x μένει να αποδειχθεί. Τώρα, αν αυτό το κενό είναι να καλυφθεί μπορεί με βεβαιότητα να καλυφθεί μόνο σε αναφορά με την παρούσα μας πρόταση, αφού έπρεπε να αναφερθούμε στην δεύτερη για την απόδειξη ενός θεωρήματος [15] το οποίο αν και πολύ απλούστερο σχετίζεται με αυτή την απόδειξη του Lagrange.

Έτσι, όλες οι προηγούμενες αποδείξεις της πρότασης που αποτελεί τον τίτλο αυτής της εργασίας είναι ελλιπείς. Τώρα αυτή την οποία προτείνω εδώ για κρίση των λογίων περιέχει, κολακεύω τον εαυτό μου, όχι απλά μία επιβεβαίωση, αλλά την αντικειμενική αιτιολόγηση της αλήθειας προς απόδειξη, δηλαδή είναι αυστηρά επιστημονική. [16]

Το παρακάτω είναι μία σύντομη περίληψη της μεθόδου που υιοθετήθηκε.

Η προς απόδειξη αλήθεια, ότι μεταξύ όποιων δύο τιμών α και β που δίνουν αποτελέσματα αντίθετου προσήμου υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, καθαρά βασίζεται στην πιο γενική αλήθεια ότι εάν δύο συνεχείς συναρτήσεις του x, fx και φx, έχουν την ιδιότητα ότι για x = α, fα < φα και για x = β, fβ > φβ, πρέπει πάντα να υπάρχει κάποια τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β για την οποία fx = φx. Ωστόσο, εάν fa < φa, τότε από τον νόμο της συνέχειας είναι δυνατόν f(a+i) < φ(a+i), εάν το i παρθεί αρκετά μικρό. Η ιδιότητα του να είναι μικρότερο, για αυτό, ανήκει στην συνάρτηση του i που αντιπροσωπεύεται από την έκφραση f(α+i), για όλες τις τιμές τις μικρότερες από μία συγκεκριμένη τιμή. Παρόλα αυτά αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για όλες τις τιμές του i χωρίς περιορισμό, δηλαδή όχι για ένα i = β-α, επειδή fβ είναι ήδη > φβ. Τώρα το θεώρημα ισχυρίζεται ότι κάθε φορά που μία συγκεκριμένη ιδιότητα M ανήκει σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας i οι οποίες είναι μικρότερες από μια δοθείσα τιμή και όμως όχι για όλες τις τιμές γενικά, τότε υπάρχει πάντα μία μεγαλύτερη τιμή u, για την οποία μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι όλα τα i < u κατέχουν την ιδιότητα M. Για αυτή τη τιμή του ίδιου του i, f(α+u) δεν μπορεί να είναι < φ(α+u), επειδή τότε, από τον νόμο της συνέχειας f(α+u+ω) < φ(α+u+ω) εάν το ω παρθεί επαρκώς μικρό. Και κατά συνέπεια δεν θα ήταν αλήθεια ότι το u είναι η μεγαλύτερη τιμή για την οποία ισχύει ο ισχυρισμός, ότι όλες οι μικρότερες τιμές του i κάνουν f (α + i) < φ(α + i), γιατί το u + ω θα ήταν μια ακόμα μεγαλύτερη τιμή για την οποία αυτό ισχύει. Αλλά ακόμα λιγότερο μπορεί να είναι αλήθεια ότι f(α+u) > φ(α+u), γιατί τότε f (α+u-ω) > φ(α+ u-ω) θα ήταν επίσης αλήθεια αν το ω

παρθεί επαρκώς μικρό, και κατά συνέπεια δεν θα ήταν αλήθεια ότι για όλες τις τιμές $i < u$, $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$. Γι αυτό πρέπει να είναι ότι $f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+ u)$, δηλαδή υπάρχει μία τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β δηλαδή $\alpha + u$ για την οποία οι συναρτήσεις fx και φx είναι ίσες μεταξύ τους. Τώρα τίθεται μόνο θέμα απόδειξης του θεωρήματος που αναφέρθηκε. Το θεώρημα αποδεικνύεται δείχνοντας ότι αυτές οι τιμές του i για τις οποίες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι όλες οι μικρότερες τιμές έχουν την ιδιότητα M και αυτές για τις οποίες δεν μπορούμε να το ισχυριστούμε μπορούν να έρθουν όσο κοντά μεταξύ τους η μία με την άλλη όσο επιθυμούμε. Από όπου προκύπτει, για όποιον έχει μία σωστή έννοια της ποσότητας, ότι η ιδέα μιας μεγαλύτερης τιμής i για την οποία μπορεί να ειπωθεί ότι όλα κάτω από αυτή έχουν την ιδιότητα M είναι η ιδέα μιας αληθινής δηλαδή πραγματικής, ποσότητας.

Πριν ολοκληρώσω αυτή την εισαγωγή θα μου επιτραπεί να κάνω μία εξομολόγηση και μία αίτηση τα οποία ταιριάζουν όχι μόνο στα παρόντα αλλά σε όλα τα γραπτά μου και, Θεού θέλοντος, στα μελλοντικά μου επίσης.

Ένας προσεκτικός αναγνώστης θα μπορούσε ήδη να έχει συγκεντρώσει από τα λίγα γραπτά που έχουν εμφανιστεί μέχρι στιγμής, αλλά ειδικά από αυτή την υπογράμμιση μιας νέας λογικής που παρέχεται στο πρώτο τεύχος του *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* στο δεύτερο τμήμα του, με τίτλο: *"Über die mathematische Methode*," ότι έχω κάποιες απόψεις οι οποίες, αν δεν βρεθούν να είναι τελείως λανθασμένες, πρέπει να οδηγήσουν σε μία πλήρη επαναοργάνωση σε όλες τις καθαρές a priori επιστήμες. Το μεγαλύτερο και πλέον σημαντικό τμήμα αυτών των απόψεων το έχω ήδη εξετάσει για ένα τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα και με τόσο μεγάλη αμεροληψία που δεν είναι ανώριμο εκ μέρους μου να διακινδυνεύσω να μιλήσω πιο ανοικτά για αυτές. Απόψεις που περιλαμβάνουν ολόκληρο τομέα μιας ή περισσότερων επιστημών μπορούν να γίνουν γνωστές με δύο τρόπους. Μπορεί να δηλωθούν είτε άπαξ δια παντός σε μία συνθετική εργασία ή σταδιακά σε ξεχωριστά κείμενα. Ο πρώτος τρόπος είναι ο πλέον συνηθισμένος, μέχρι σήμερα, και είναι σίγουρα η διαδικασία που θα έπρεπε να υιοθετήσει κάποιος αν απλά θέλει να επιτύχει μία φήμη ανάμεσα στους ακαδημαϊκούς συγχρόνους του όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Αλλά για την τελειότητα των επιστημών θεωρώ την δεύτερη διαδικασία ως έχουσα περισσότερα πλεονεκτήματα για τους ακόλουθους λόγους.

Πρώτον, επειδή με αυτό τον τρόπο ο συγγραφέας ο οποίος έχει ανακαλύψει μερικές νέες ιδέες διατρέχει πολύ μικρότερο κίνδυνο να βιαστεί. Επειδή η σταδιακή παρουσίαση των απόψεων του, του επιτρέπει να αναβάλει για αργότερα την επεξήγηση των σημείων για τα οποία αρχικά είχε αμφιβολία και ο ίδιος. Μπορεί να μάθει από την κριτική που δέχεται μία δημοσιευμένη εργασία, και να διορθώσει μερικά πράγματα που ήταν λάθος.

Δεύτερον, με μία τέτοια σειριακή ανάπτυξη των απόψεων του, μπορεί να αναμένει μία ακόμα αυστηρότερη εξέταση από μέρους του αναγνώστη. Επειδή ο συγγραφέας ο οποίος παρέχει μία πλήρη θεωρία δείχνει, ή τουλάχιστον θα μπορούσε να δείξει πως αυτές οι αδιαφιλονίκητες αλήθειες κοινής λογικής μπορούν να παραχθούν από τις ασυνήθεις προτάσεις του. Αλλά αυτό μας εναρμονίζει αμέσως με αυτές τις προτάσεις, και συμφωνούμε με αυτές πολύ πιο γρήγορα παρά αν τις είχε παρουσιάσει ξεχωριστά και μας είχε επιτρέψει να μελετήσουμε εάν και σε ποιο βαθμό συμφωνούν με τα υπόλοιπα που θεωρούμε ότι είναι αλήθεια. Τέλος, δεν μπορεί να αρνηθεί κανείς, ότι η απλή θέα ενός μεγάλου, χοντρού βιβλίου που υπόσχεται ένα πλήρες σύστημα αυτής ή της άλλης επιστήμης, ενσταλάζει σε μας ένα είδος ευλάβειας πριν καν το διαβάσουμε. Τώρα, αν ανακαλύψουμε μέσω της ανάγνωσης του, μία συγκεκριμένη συνέπεια στα συμπεράσματα, εάν η δομή της ανθρώπινης γνώσης που σκιαγραφείται εκεί έχει μια ευχάριστη μορφή, και εάν όλα εκτίθενται σύμφωνα με το μέγεθος και το πλήθος και τη συμμετρία, τότε η κρίση μας επηρεάζεται και ακόμα αρχίζουμε να ευχόμαστε ότι εδώ, επιτέλους, μπορεί να βρίσκεται εκείνο το μοναδικό σωστό σύστημα το οποίο αναζητούσαμε για τόσο καιρό. Και το ελάχιστο που συμβαίνει είναι ότι εξαιτίας της παρατηρούμενης συνέπειας, φανταζόμαστε ότι πρέπει ή να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε ολόκληρο το σύστημα, όταν στην πραγματικότητα ούτε το ένα ούτε το άλλο θα έπρεπε να συμβεί!

Αυτοί είναι οι κύριοι λόγοι για τους οποίους αποφάσισα το 1804 να μην αρχίσω σε καμία επιστήμη με την δημοσίευση ενός πλήρους εγχειριδίου, αλλά πρώτα να γνωστοποιήσω τις ασυνήθιστες αντιλήψεις μου σε ξεχωριστά κείμενα. Και εάν, μετά από πολύ διόρθωση, αυτές κριθούν ευνοϊκά από ένα μέρος του κοινού, μόνο τότε θα έπρεπε να θεωρηθεί η προετοιμασία ενός ολόκληρου συστήματος. Αυτό δηλαδή, εκτός και αν ο θάνατος μας υποχρεώσει να αφήσουμε αυτό το δεύτερο καθήκον σε άλλους.

Άρχισα την γραπτή μου παραγωγή με ένα κείμενο που αφορά στα μαθηματικά, με τον τίτλο *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* (Prague: C. Barth, 1804). Σε αυτό πρότεινα μία νέα θεωρία παραλλήλων [17] καθώς και άλλες απόψεις. Κατόπιν, χρόνια μετά, αποφάσισα να δημοσιεύσω όλες τις απόψεις μου στο πεδίο των μαθηματικών σε σειριακή μορφή, υπό τον τίτλο *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Αλλά το πρώτο από αυτά τα τεύχη Prague: C. Widtmann, (1810) είχε την ατυχία, παρόλη την σημαντικότητα των περιεχομένων του, να μην ανακοινωθεί καν ή δημοσιευθεί σε μερικές λόγιες εφημερίδες και σε άλλες μόνο επιφανειακά. Αυτό με υποχρέωσε να αναβάλω την συνέχιση αυτών των συνεισφορών για αργότερα και στο εν τω μεταξύ απλά να επιχειρήσω να κάνω τον εαυτό μου καλύτερα γνωστό στον λόγιο κόσμο δημοσιεύοντας μερικά κείμενα τα οποία, μέσω των τίτλων τους θα ήταν πιο πιθανό να προκαλέσουν την προσοχή. Έτσι, το κείμενο που ήδη αναφέρθηκε, *Der binomische Lehrsatz,* κλπ. εμφανίστηκε το 1816 (Prague: Enders). Η ελπίδα μου είναι ότι το παρόν κείμενο επίσης θα εξυπηρετήσει αυτό το σκοπό. Επιπροσθέτως, η δημοσίευση του ήταν υποχρεωτική επειδή το προηγούμενο κείμενο αναφέρθηκε στην πρόταση που αποδεικνύεται εδώ. Μερικά άλλα κείμενα είναι επίσης γραμμένα και έτοιμα για δημοσίευση π.χ. ένα με τον τίτλο *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation, und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelost.*

Αυτά ακόμα περιμένουν τον εκδότη τους .

Εάν συνεχίσω με αυτό τον τρόπο, που μου φαίνεται ο καλύτερος, τότε η μόνη χάρη που πρέπει ζητήσω από το κοινό, είναι αυτό το μοναδικό κείμενο να μην παραβλεφθεί εξαιτίας της μικρής του έκτασης αλλά μάλλον να εξεταστεί με κάθε δυνατή αυστηρότητα, και τα αποτελέσματα αυτής της εξέτασης να γίνουν γνωστά δημοσίως. Με αυτό τον τρόπο ότι είναι ίσως μη καθαρό μπορεί να εξηγηθεί καθαρά, και ότι είναι λάθος θα ανακληθεί. Οσο πιο σύντομα η αλήθεια και η ορθότητα κερδίσουν την γενική συναίνεση τόσο το καλύτερο.

1

Σύμβαση: Υποθέτουμε ότι για μία ακολουθία ποσοτήτων η ειδική περίπτωση δεν συμβαίνει ότι όλοι οι όροι μετά από ένα συγκεκριμένο όρο είναι μηδέν όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, μετά τον (n + 1)-οστό όρο των διωνυμικών σειρών για

κάθε θετικό εκθέτη n. Τότε είναι φανερό ότι η τιμή αυτής της σειράς, δηλαδή η ποσότητα που προκύπτει από την άθροιση των όρων της, δεν μπορεί πάντα να παραμένει η ίδια εάν το σύνολο των όρων αυξάνει αυθαίρετα. Αντιθέτως, αυτή η τιμή πρέπει σίγουρα να αλλάζει κάθε φορά που το πλήθος των όρων αυξάνει κατά ένα που δεν είναι μηδέν. Από όπου η τιμή μιας σειράς εξαρτάται όχι μόνο από τον κανόνα που καθορίζει την κατασκευή των ξεχωριστών όρων, αλλά επίσης από το πλήθος τους. Έτσι η τιμή αντιπροσωπεύει μία μεταβλητή ποσότητα παρόλο που η μορφή και το μέγεθος των ξεχωριστών όρων παραμένει αμετάβλητο. Έχοντας αυτό κατά νου δηλώνουμε μια συνάρτηση του x η οποία αποτελείται από μία αυθαίρετα μακριά σειρά όρων και της οποίας η τιμή γι αυτό τον λόγο εξαρτάται, εκτός από το x, από το πλήθος των όρων r, με $F_{(r)}$ x ή F_r (x). Για παράδειγμα,

$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^r = F_r(x)$ και από την άλλη,

$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^r + \ldots Sx^{r+s} = F_{r+s}(x)$

2

Πρώτο Λήμμα. Η αλλαγή στη τιμή δηλαδή η αύξηση ή η μείωση στη τιμή που συμβαίνει σε μία σειρά με την αύξηση του πλήθους των όρων της από ένα πεπερασμένο σύνολο (π.χ. κατά ένα) μπορεί να είναι, ανάλογα με τις συνθήκες, μία σταθερή ποσότητα (εάν δηλαδή οι όροι της σειράς είναι όλοι ίσοι) αλλά επίσης μπορεί να είναι μεταβλητή. Στη δεύτερη περίπτωση η αλλαγή μπορεί να είναι μία ποσότητα που αυξάνει για λίγο και μειώνεται για λίγο, η μία που αυξάνει ή μειώνεται σταθερά. Έτσι, η αλλαγή στη σειρά

$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$εάν αυξηθεί κατά ένα όρο είναι μία σταθερή ποσότητα. Η αλλαγή στη σειρά

$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots$ με την αύξηση ενός όρου είναι μία μεταβλητή ποσότητα με την προϋπόθεση ότι $e \neq 1$.

Γίνεται μεγαλύτερη εάν $e > \pm 1$, και ακόμα μικρότερη αν $e < \pm 1$

3

Δεύτερο λήμμα. Εάν η αλλαγή (αύξηση ή μείωση) σε μία σειρά που οφείλεται στην αύξηση του συνόλου των όρων της από ένα πεπερασμένο αριθμό (π.χ. ένα), παραμένει πάντα η ίδια ή ακόμα αν αυξάνει πάντα – και αν και στις δύο περιπτώσεις διατηρεί το ίδιο πρόσημο- τότε είναι καθαρό ότι η τιμή αυτής της σειράς θα γίνει μεγαλύτερη από όποια δοθείσα ποσότητα εάν συνεχιστεί αρκετά

μακριά. Γιατί ας υποθέσουμε ότι η ανάπτυξη στη σειρά από μία αύξηση κάθε n όρων είναι $\geq$d και απαιτείται η σειρά να γίνει μεγαλύτερη από μία δοθείσα ποσότητα D. Τότε αρκεί κανείς να πάρει ένα ολόκληρο αριθμό r ο οποίος είναι $\geq$ D/d και να επεκτείνει τη σειρά κατά rn όρους, πετυχαίνοντας έτσι μία αύξηση η οποία είναι $\geq$(r.d $\geq$ (D/d) d = D).

4

Τρίτο Λήμμα. Αλλά υπάρχουν επίσης σειρές, των οποίων οι τιμές, ανεξάρτητα του πόσο μακριά συνεχίζονται, δεν υπερβαίνουν ποτέ μία δοθείσα ποσότητα. Η σειρά

a - a + a - a +…,

είναι αυτού του τύπου. Η τιμή, όσο μακριά και αν συνεχιστεί είναι πάντα ή 0 ή a και γι αυτό δεν υπερβαίνει ποτέ το a.

5

Τέταρτο Λήμμα. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ανάμεσα σε τέτοιες σειρές είναι η κλάση των σειρών που έχουν την ιδιότητα ότι η αλλαγή στη τιμή (αύξηση ή μείωση) που οφείλεται σε περαιτέρω συνέχιση των όρων, πάντα παραμένει μικρότερη από μία συγκεκριμένη ποσότητα, η οποία μπορεί να παρθεί όσο μικρή επιθυμούμε, με τη προϋπόθεση η σειρά να έχει συνεχιστεί αρκετά μακριά εκ των προτέρων. Το ότι υπάρχουν τέτοιες σειρές αποδεικνύεται όχι μόνο από σειρές στις οποίες οι όροι μετά από ένα συγκεκριμένο σημείο είναι όλοι μηδέν (και οι οποίοι γι αυτό δεν έχουν στη πραγματικότητα συνέχεια μετά από αυτό τον όρο και δεν έχουν περισσότερο την ικανότητα να αλλάξουν τιμή από ότι η διωνυμική σειρά στο τμήμα 1) αλλά επίσης από σειρές στις οποίες οι όροι ελαττώνονται με τον ίδιο ρυθμό, ή γρηγορότερα από, τους όρους μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο ένα γνήσιο κλάσμα.

Γιατί η τιμή της γεωμετρικής σειράς

$a + ae + ae^2 + ... + ae^r$ είναι γνωστό ότι είναι = $a(1-e^{r+1})/(1-e)$

Και αν αυτή η σειρά επεκταθεί κατά s όρους, τότε η αύξηση είναι $ae^{r+1} + ae^{r+2} + \ldots + ae^{r+s} = ae^{r+1}(1-e^s)/(1-e)$

Τώρα εάν e $<\pm$ 1, και το r παρθεί επαρκώς μεγάλο, τότε αυτή η αύξηση παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, όσο μεγάλο και να γίνει το s. Γιατί επειδή το e^s παραμένει πάντα $<\pm 1$, τότε το $a(1-e^{r+1})/(1-e)$ είναι προφανώς πάντα μικρότερο από $ae^{r+1}(2/(1-e))$. Αλλά το δεύτερο μπορεί να γίνει μικρότερο από

όποια δοθείσα ποσότητα αυξάνοντας το r, επειδή η τιμή που παίρνει για την επόμενη μεγαλύτερη τιμή του r είναι απλά το προηγούμενο αποτέλεσμα πολλαπλασιασμένο επί e, ένα σταθερό γνήσιο κλάσμα. (*Der binomische Lehrsatz, Section 22*). Γι αυτό τον λόγο κάθε γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο λόγος είναι ένα γνήσιο κλάσμα μπορεί να συνεχιστεί αρκετά μακριά έτσι ώστε η αύξηση που προκαλείται από κάθε πρόσθετη συνέχιση πρέπει να παραμένει μικρότερη από κάποια δοθείσα ποσότητα. Έτσι, αυτό πρέπει να ισχύει ακόμη περισσότερο για σειρές των οποίων οι όροι ελαττώνονται πιο γρήγορα από τους όρους μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

6

Πέμπτο Λήμμα. Εάν οι τιμές των αθροισμάτων των πρώτων n, n+l,n+2, ... n+r όρων μία σειράς τέτοιας όπως οι σειρές στο τμήμα 5 δηλώνονται (τμήμα 1) αντίστοιχα, με $F_n x$, $F_{n+1}x$, $F_{n+2}x$, … F_{n+r} x,……τότε θεωρούμε τις ποσότητες

F_1x, F_2x, F_3x, …..F_{n+r} x

ως μία σειρά (που ονομάζεται η σειρά των αθροισμάτων της προηγούμενης σειράς). Εδώ έχουμε υποθέσει την ειδική ιδιότητα ότι η διαφορά μεταξύ του n-οστού όρου $F_n x$ και κάθε μετά όρου $F_{n+r}x$ (ανεξάρτητα του πόσο μακριά από τον n-οστό όρο) παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα εάν το n έχει παρθεί αρκετά μεγάλο από μιας αρχής. Αυτή η διαφορά είναι η αύξηση της αρχικής σειράς μέσω της συνέχισης πέρα από τον n-οστό όρο, και αυτή η αύξηση μπορεί να παραμένει, λόγω της υπόθεσης, όσο μικρή επιθυμούμε αν το n παρθεί αρκετά μεγάλο εξ αρχής.

7

Θεώρημα Εάν μία σειρά ποσοτήτων F_1x, F_2x, … F_nx, $F_{n+r}x$ …έχει την ιδιότητα ότι η διαφορά μεταξύ του n-οστού όρου F_nx, και κάθε επόμενου όρου , $F_{n+r}x$, ανεξάρτητα του πόσο μακριά από τον πρώτο, παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα εάν το n παρθεί αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχει πάντα μία συγκεκριμένη σταθερή ποσότητα, και πράγματι μόνο μία, την οποία προσεγγίζουν οι όροι αυτής της σειράς και στην οποία μπορούν να έρθουν όσο κοντά επιθυμούμε εάν η σειρά συνεχιστεί αρκετά μακριά.

Απόδειξη.

Είναι καθαρό από το τμήμα 6 ότι μία σειρά σαν και αυτή που περιγράφηκε στο θεώρημα είναι δυνατή. Επίσης, δεν υπάρχει σίγουρα τίποτα αδύνατο στην υπόθεση της ύπαρξης της ποσότητας X την οποία οι όροι της σειράς προσεγγίζουν αυθαίρετα κοντά, με την προϋπόθεση ότι η ποσότητα δεν υποτίθεται να είναι μοναδική και αμετάβλητη. Γιατί, αν είναι μία ποσότητα η οποία μπορεί να μεταβάλλεται τότε μπορεί, φυσικά, πάντα να παρθεί έτσι ώστε να είναι κατάλληλα κοντά, ή ακόμα και ακριβώς η ίδια όπως ο όρος $F_n x$ με τον οποίο συγκρίνεται. Αλλά η υπόθεση μιας αμετάβλητης ποσότητας με αυτή την ιδιότητα της εγγύτητας στους όρους της σειράς μας δεν είναι αδύνατη γιατί αυτή η υπόθεση είναι δυνατόν να καθορίσει την ποσότητα με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Γιατί ας υποθέσουμε ότι απαιτείται η X με τέτοια ακρίβεια ώστε η διαφορά από την πραγματική τιμή του X δεν θα υπερβαίνει μια μικρή ποσότητα d. Τότε απλά κοιτά κανείς στη δοθείσα σειρά για ένα όρο $F_n x$ με την ιδιότητα ότι κάθε όρος $F_{n+r} x$ που ακολουθεί από αυτόν, να διαφέρει λιγότερο από $\pm d$. Πρέπει να υπάρχει ένα τέτοιο $F_n x$ από την υπόθεση. Λέω τώρα ότι η τιμή του $F_n x$ διαφέρει από την πραγματική τιμή του X κατά το πολύ $\pm d$. Γιατί αν το r αυξηθεί αυθαίρετα, με το ίδιο n, η διαφορά $X - F_{n+r} x = \pm \omega$ μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμούμε. Αλλά η διαφορά $F_n x - F_{n+r} x$ πάντα παραμένει $< \pm d$, όσο μεγάλο και αν παρθεί το r . Γι αυτό η διαφορά $X - F_n x = (X - F_{n+r} x) - (F_n x - F_{n+r} x)$ πρέπει πάντα να παραμένει $< \pm (d + \omega)$. Αλλά αφού για το ίδιο n αυτή είναι μία σταθερή ποσότητα, και το ω μπορεί να γίνει όσο μικρό απαιτείται αυξάνοντας το r, τότε $X - F_n x$ πρέπει να είναι $\leq \pm d$. Γιατί αν ήταν μεγαλύτερο και π.χ. ίσο με $\pm (d+e)$ θα ήταν αδύνατον για την σχέση $d+e < d+\omega$ δηλαδή $e < \omega$ να ισχύει εάν το ω ελαττωνόταν κι άλλο.

Για αυτό η πραγματική τιμή του X διαφέρει από την τιμή του όρου $F_n x$ το πολύ κατά d, και για αυτό μπορεί να καθοριστεί με όση ακρίβεια απαιτείται αφού το d μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό. Υπάρχει γι αυτό μια πραγματική ποσότητα την οποία οι όροι της σειράς, εάν συνεχιστεί αρκετά μακριά, προσεγγίζουν όσο κοντά επιθυμούμε. Αλλά υπάρχει μία μόνο τέτοια ποσότητα. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι εκτός από το X υπάρχει μία άλλη σταθερή ποσότητα Y την οποία οι όροι της σειράς, εάν συνεχιστεί αρκετά μακριά, προσεγγίζουν όσο κοντά επιθυμούμε, τότε οι διαφορές $X - F_{n+r} x = \omega$ και $Y - F_{n+r} x = \omega_1$ μπορεί να γίνουν όσο μικρές επιθυμούμε αν το r παρθεί αρκετά μεγάλο. Γι αυτό, το ίδιο επίσης ισχύει και για τη

δική τους διαφορά δηλαδή, για X - Y= ω-ω_1 η οποία, εάν X και Y είναι σταθερές ποσότητες, είναι αδύνατη εάν δεν υποθέσει κανείς ότι X = Y.

8

Παρατήρηση. Εάν κάποιος προσπαθήσει να καθορίσει την τιμή της ποσότητας X με τον τρόπο που περιγράφηκε στο προηγούμενο τμήμα, δηλαδή, μέσω ενός από τους όρους από τους οποίους συντίθεται η δοθείσα σειρά, τότε ποτέ δεν θα καθορίσει το X εντελώς με ακρίβεια εκτός και αν οι όροι της σειράς από ένα σημείο και μετά είναι όλοι ίσοι. Αλλά πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός στο να συμπεραίνει από αυτό ότι η ποσότητα X είναι πάντα άρρητη. Γιατί αν θεωρήσουμε τη σειρά

0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, . . .

(η οποία είναι η σειρά των αθροισμάτων της γεωμετρικής προόδου

l/10, l/100, l/1000, 1/10000, . ..)

τότε η ποσότητα την οποία οι όροι προσεγγίζουν όσο κοντά επιθυμούμε δεν είναι άρρητη αλλά το κλάσμα l/9. Έτσι από το γεγονός ότι μία ποσότητα δεν μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια με ένα συγκεκριμένο τρόπο, δεν έπεται ότι δεν μπορεί να καθοριστεί εντελώς με ένα άλλο τρόπο και ότι γι αυτό είναι άρρητη.

9

Λήμμα. Εάν για αυτό τον λόγο, κάθε δοθείσα σειρά έχει την ιδιότητα, ότι κάθε όρος είναι πεπερασμένος, αλλά η αλλαγή την οποία υφίσταται σε κάθε περαιτέρω συνέχιση είναι μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα, με την μόνη προϋπόθεση ότι το πλήθος των όρων που παίρνονται εξαρχής είναι αρκετά μεγάλο, τότε υπάρχει πάντα μία και μόνο μία σταθερή ποσότητα η οποία έρχεται όσο κοντά στη τιμή της σειράς επιθυμούμε, εάν συνεχιστεί αρκετά μακριά Διότι, μία τέτοια σειρά είναι το είδος που περιγράφηκε στο Τμήμα 5. Και γι αυτό οι τιμές που είναι τα αθροίσματα των n, n+l, n+2, . . . όρων σχηματίζουν μία σειρά σαν και αυτές των τμημάτων 6 και 7. Για αυτό τον λόγο μία τέτοια σειρά έχει την ιδιότητα που αποδείχθηκε στο Τμήμα 7.

10

Παρατήρηση. Δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι στην πρόταση του τμήματος 9 η προϋπόθεση - «ότι η αλλαγή (αύξηση ή μείωση) την οποία υφίσταται η σειρά σε κάθε συνέχιση πρέπει να παραμένει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα εάν έχει συνεχιστεί αρκετά εξαρχής» - είναι περιττή και η πρόταση θα μπορούσε ίσως να εκφραστεί με μεγαλύτερη γενικότητα: «Εάν είναι δυνατόν να κάνουμε τους όρους μιας σειράς, όταν συνεχιστεί, ακόμα μικρότερους και όσο μικρούς επιθυμούμε, τότε υπάρχει πάντα μία σταθερή ποσότητα την οποία η τιμή της σειράς, όταν συνεχίζεται, προσεγγίζει όσο κοντά επιθυμούμε» Αυτός ο ισχυρισμός θα αντικρουστεί αμέσως από το ακόλουθο παράδειγμα. Οι όροι της σειράς

$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots$

μπορούν να γίνουν όσο μικροί επιθυμούμε, και όμως είναι ένα πολύ γνωστό γεγονός, από τις ιδιότητες της ορθογώνιας υπερβολής (αλλά επίσης μπορεί να παραχθεί από καθαρά αριθμητικές θεωρήσεις), ότι εάν, η σειρά συνεχιστεί αρκετά μακριά η τιμή της μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από όποια δοθείσα ποσότητα.

11

Προεισαγωγική παρατήρηση. Σε έρευνες των εφαρμοσμένων μαθηματικών εμφανίζεται συχνά μία κατάσταση στην οποία μία ορισμένη ιδιότητα M είναι γνωστό ότι ανήκει σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας x που είναι μικρότερες από ένα συγκεκριμένο u, χωρίς να είναι γνωστό αν αυτή η ιδιότητα ανήκει σε όλες τις τιμές που είναι μεγαλύτερες από το u. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να υπάρχει κάποιο $u_1 > u$ για το οποίο, με τον ίδιο τρόπο που ισχύει για το u, όλες οι τιμές του x κάτω από αυτήν έχουν την ιδιότητα M. Αυτή η ιδιότητα M μπορεί ακόμα και να ανήκει σε όλες τις τιμές του x χωρίς εξαίρεση. Αλλά εάν είναι γνωστό ότι η M δεν ανήκει στα x γενικώς, τότε συνδυάζοντας αυτές τις δύο συνθήκες θα είναι σωστό να συμπεράνουμε: υπάρχει μία συγκεκριμένη ποσότητα U η οποία είναι η μεγαλύτερη από αυτές για τις οποίες είναι αλήθεια ότι όλες οι μικρότερες τιμές του x έχουν την ιδιότητα M. Αυτό αποδεικνύεται στο ακόλουθο θεώρημα.

12

Θεώρημα. Εάν μία ιδιότητα M δεν ανήκει σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής x, αλλά ανήκει σε όλες τις τιμές που είναι μικρότερες από κάποιο u, τότε υπάρχει πάντα μια ποσότητα U η οποία είναι η μεγαλύτερη από αυτές για τις οποίες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι όλες οι μικρότερες του x έχουν την ιδιότητα M.

Απόδειξη.

1. Επειδή η ιδιότητα M ισχύει για όλα τα x τα μικρότερα από u, αλλά όχι για όλα τα x γενικά, υπάρχει κάποια ποσότητα $V = u + D$ (όπου D αντιπροσωπεύει κάτι θετικό) για την οποία μπορεί να ειπωθεί ότι η M δεν ανήκει σε όλα τα $x < V = u + D$. Εάν μετά θέσω το ερώτημα – εάν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^m$, όπου ο εκθέτης m είναι πρώτα 0, μετά 1, μετά 2, μετά 3, κλπ – είμαι βέβαιος ότι τη πρώτη ερώτηση θα πρέπει να την αρνηθούμε. Γιατί η ερώτηση αν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^0$, είναι η ίδια με την ερώτηση αν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D$, η οποία απορρίπτεται από την υπόθεση. Επομένως τίθεται θέμα κατά πόσον όλες οι επόμενες ερωτήσεις καθώς το m γίνεται μεγαλύτερο και μεγαλύτερο, θα απορριφθούν. Εάν αυτή είναι η περίπτωση, είναι καθαρό ότι το ίδιο το u είναι η μεγαλύτερη τιμή για την οποία ισχύει η υπόθεση ότι όλα τα μικρότερα x έχουν την ιδιότητα M. Γιατί εάν υπήρχε ένα μεγαλύτερο π.χ. $u + d$, η υπόθεση θα ίσχυε ότι όλα τα $x < u + d$ έχουν την ιδιότητα M. Αλλά τότε είναι καθαρό ότι εάν πάρω m αρκετά μεγάλο, $u + D/2^m$ θα είναι κάποια στιγμή $< u + d$, και κατά συνέπεια εάν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + d$, ανήκει επίσης σε όλα τα $x < u + D/2^m$. Γι αυτό δεν θα είχαμε απορρίψει αυτή την ερώτηση αλλά θα έπρεπε να την έχουμε επιβεβαιώσει. Έτσι, αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση (όπου όλες οι παραπάνω ερωτήσεις απορρίπτονται) υπάρχει μία συγκεκριμένη ποσότητα V (δηλαδή η ίδια η u) η οποία είναι η μεγαλύτερη για την οποία ισχύει η υπόθεση ότι όλα τα x κάτω από αυτήν κατέχουν την ιδιότητα M.

2. Παρόλα αυτά, εάν μία από τις παραπάνω ερωτήσεις επιβεβαιωθεί, και το m είναι η ορισμένη τιμή του εκθέτη για τον οποίο επιβεβαιώνεται για πρώτη φορά, (το m μπορεί να είναι 1 αλλά, όπως είδαμε, όχι 0) τότε γνωρίζω ότι η ιδιότητα M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^m$, αλλά όχι σε όλα τα $x < u + D/2^{m-1}$. Αλλά η διαφορά μεταξύ $u + D/2^m$ και $u + D/2^{m-1}$ είναι ίση με $D/2^m$. Γι αυτό, εάν, όπως πριν με τη διαφορά D, θέσω το ερώτημα εάν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^m + D/2^{m+n}$ και εδώ ο εκθέτης n είναι πρώτα 0, μετά 1, μετά 2 κλπ, τότε

είμαι πάλι βέβαιος ότι τουλάχιστον η πρώτη ερώτηση θα πρέπει να απαντηθεί αρνητικά. Γιατί το να ρωτάμε εάν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^{m} + D/2^{m+0}$ είναι το ίδιο με το ρωτάμε αν η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^{m-1}$, στην οποία έχουμε ήδη απαντήσει αρνητικά. Αλλά εάν όλες οι επόμενες ερωτήσεις μου απορριφθούν καθώς κάνω το n μεγαλύτερο και μεγαλύτερο, τότε όπως πριν, $u + D/2^{m}$ είναι η μεγαλύτερη τιμή, ή το U, για το οποίο ισχύει η υπόθεση ότι όλα τα x κάτω από αυτή έχουν την ιδιότητα M.

3. Ωστόσο, εάν μία από αυτές τις ερωτήσεις επιβεβαιωθεί, και αυτό συμβεί πρώτα για τη ορισμένη τιμή n, τότε γνωρίζω τώρα ότι η M ανήκει σε όλα τα $x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n}$, αλλά όχι σε όλα τα $x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n-1}$. Η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο ποσοτήτων είναι ίση με $D/2^{m+n}$, και επαναλαμβάνω την διαδικασία όπως πριν με $D/2^{m}$ κλπ.

4. Εάν συνεχίσω με αυτό τον τρόπο όσο μακριά επιθυμώ, μπορεί να φανεί ότι το αποτέλεσμα που έχω τελικά πρέπει να είναι ένα από δύο πράγματα.

(α) Μπορεί να βρω μία τιμή της μορφής $u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots D/ 2^{m+n+\ldots+r}$ η οποία είναι η μεγαλύτερη για την υπόθεση ότι τα όλα τα x κάτω από αυτή έχουν την ιδιότητα M ισχύει. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση για την οποία οι ερωτήσεις, εάν η M ανήκει σε όλα τα

$x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots D/ 2^{m+n+\ldots+r+s}$ απαντηθούν αρνητικά για κάθε τιμή του s.

(β) Μπορεί να βρω ότι η M ανήκει σε όλα τα

$x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots D/ 2^{m+n+\ldots+r}$

αλλά όχι σε όλα

$x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots D/ 2^{m+n+\ldots+r-1}$

Εδώ είμαι πάντα ελεύθερος να κάνω το πλήθος των όρων σε αυτές τις δύο ποσότητες ακόμα μεγαλύτερο μέσω νέων ερωτήσεων.

5. Τώρα εάν συμβεί η πρώτη περίπτωση η αλήθεια του θεωρήματος έχει ήδη αποδειχθεί. Στην δεύτερη μπορεί να σημειωθεί ότι η ποσότητα

$u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots D/ 2^{m+n+\ldots+r}$

αντιπροσωπεύει μία σειρά της οποίας μπορώ να αυξήσω αυθαίρετα το πλήθος των όρων και η οποία ανήκει στην κλάση που περιγράφηκε στο Τμήμα 5. Γιατί, ανάλογα με το αν τα m,n ,...,r είναι όλα ίσα με 1 ή μερικά είναι μεγαλύτερα από 1, ελαττώνεται με τον ίδιο ρυθμό, ή πιο γρήγορα από μία γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο λόγος είναι το γνήσιο κλάσμα ½. Από αυτό προκύπτει ότι έχει την ιδιότητα του Τμήματος 9 δηλαδή, υπάρχει μία συγκεκριμένη σταθερή ποσότητα την οποία μπορεί να προσεγγίσει όσο κοντά επιθυμούμε εάν το πλήθος των όρων της αυξηθεί επαρκώς. Έστω ότι αυτή η ποσότητα είναι U. Τότε ισχυρίζομαι ότι η ιδιότητα M ισχύει για όλα τα x < U. Γιατί αν δεν ίσχυε για μερικά x < U δηλαδή για U – δ, τότε η ποσότητα $u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r}$

πρέπει πάντα να κρατά την απόσταση δ από το U , επειδή για όλα τα x που είναι μικρότερα από αυτή η M θα έπρεπε να ισχύει. Επειδή κάθε

$x = u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r} - \omega$,

όσο μικρό κι αν είναι το ω, έχει την ιδιότητα M. Από την άλλη, η M δεν ανήκει στα

$x = U - \delta$, για αυτό

$U - \delta > u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r} - \omega$, ή,

$U - [u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r}] > \delta - \omega$.

Όθεν, η διαφορά μεταξύ U και της σειράς δεν μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμούμε, αφού δ – ω δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από όποια δοθείσα ποσότητα. Αλλά ούτε και η M μπορεί να ισχύει για όλα τα x < U + ε. Γιατί η τιμή της σειράς

$u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r-1}$

μπορεί να έρθει όσο κοντά στη τιμή της σειράς

$u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r}$

επιθυμούμε επειδή η διαφορά μεταξύ των δύο είναι μόνο $D/2^{m+n+\ldots+r}$. Επιπλέον, επειδή η τιμή της δεύτερης σειράς μπορεί να έρθει όσο κοντά στο U επιθυμούμε, η τιμή της πρώτης σειράς μπορεί να έρθει όσο κοντά στο U επιθυμούμε. Ως εκ τούτου, το $u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+r-1}$

μπορεί σίγουρα να γίνει < U + ε. Αλλά τώρα, από την υπόθεση, η M δεν ισχύει για όλα τα $x < u + D/2^{m} + D/2^{m+n} + \ldots + D/2^{m+n+\ldots+2^{m+n+\ldots r-1}}$ έτσι, πολύ λιγότερο, ισχύει η M για όλα τα x <U + ε. Ως εκ τούτου, U είναι η μεγαλύτερη τιμή για την οποία ισχύει η υπόθεση ότι όλα τα x κάτω από αυτή έχουν την ιδιότητα M.

13

Πρώτη παρατήρηση. Το τελευταίο θεώρημα είναι μεγίστης σημασίας και χρησιμοποιείται σε όλες τις περιοχές των μαθηματικών, τόσο στην ανάλυση όσο και στα εφαρμοσμένα μέρη, γεωμετρία, χρονογραφία (chronometry) και μηχανική. Όχι σπάνια, στο παρελθόν έχει χρησιμοποιηθεί αντί γι αυτό, αυτή η λάθος πρόταση: «Εάν μία ιδιότητα M ισχύει όχι για όλα τα x αλλά για όλα τα μικρότερα από μία συγκεκριμένη τιμή, τότε υπάρχει πάντα κάποιο μέγιστο x στο οποίο ανήκει η ιδιότητα M». Αυτό λέω ότι είναι λάθος εν όψει του θεωρήματος το οποίο μόλις αποδείχθηκε. Γιατί αν υπάρχει κάποια ποσότητα U η οποία είναι η μεγαλύτερη από αυτές για τις οποίες μπορεί να ειπωθεί ότι όλα τα x κάτω από αυτές έχουν την ιδιότητα M τότε δεν υπάρχει μέγιστο x στο οποίο ανήκει αυτή η ιδιότητα με την προϋπόθεση ότι x είναι είτε ελεύθερα είτε με συνεχή τρόπο μεταβλητή ποσότητα. Γιατί είναι πολύ γνωστό ότι για μία ποσότητα που μεταβάλλεται ελεύθερα ή σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας δεν υπάρχει ποτέ μία μέγιστη τιμή που είναι μικρότερη, από ένα συγκεκριμένο όριο U, επειδή όσο κοντά κι αν είναι σε αυτό το όριο μπορεί πάντα να το φέρουμε κοντύτερα. Προκειμένου να το δείξουμε αυτό με ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια ορθογώνια υπερβολή. Ας πάρουμε μία από τις ασύμπτωτες της στον άξονα των x και ας πάρουμε την αρχή, όχι στο κέντρο c, αλλά σε ένα άλλο σημείο a σε αυτή την ασύμπτωτη που είναι σε μία απόσταση D από το c. Τώρα ας ορίσουμε την κατεύθυνση ac ως το θετικό άξονα των x και την κατεύθυνση ab η οποία είναι η κάθετη τεταγμένη στο a ως το θετικό άξονα των y. Τότε κάθε x συντεταγμένη η οποία είναι μικρότερη από μία συγκεκριμένη, ας πούμε από D/2, έχει την ιδιότητα ότι η αντίστοιχη τεταγμένη της είναι θετική. Ωστόσο αυτή η ιδιότητα (M) δεν θα ισχύει για όλες τις θετικές x-συντεταγμένες, δηλαδή, όχι για αυτές που είναι μεγαλύτερες από D. Τώρα, υπάρχει μία μέγιστη x-συντεταγμένη ή μία μέγιστη τιμή του x στην οποία ανήκει η ιδιότητα M; Όχι, αλλά υπάρχει βεβαίως ένα U, δηλαδή μία x-συντεταγμένη η οποία είναι η μέγιστη μεταξύ αυτών για τις οποίες μπορεί να ειπωθεί ότι όλες οι μικρότερες από αυτή έχουν θετικές τεταγμένες δηλαδή έχουν την ιδιότητα M. Αυτή η x-συντεταγμένη είναι +D.

14

Δεύτερη παρατήρηση. Ίσως συμπεράνει κανείς ότι η απόδειξη του θεωρήματος στο τμήμα 12 να μπορούσε να ολοκληρωθεί αρκετά σύντομα με τον ακόλουθο τρόπο: "Εάν δεν υπάρχει μέγιστο U για το οποίο ισχύει ο ισχυρισμός ότι τα x κάτω από αυτό έχουν την ιδιότητα M, θα μπορεί πάντα κανείς να πάρει το u μεγαλύτερο και μεγαλύτερο και έτσι όσο μεγάλο επιθυμεί κανείς και συνεπώς το M πρέπει να ισχύει για όλα τα x χωρίς εξαίρεση». Παρόλα αυτά αυτό θα ήταν ένα πολύ λανθασμένο συμπέρασμα γιατί θα βασιζόταν στον συγκαλυμμένο ισχυρισμό «ότι μία ποσότητα η οποία μπορεί πάντα να παρθεί μεγαλύτερη από ότι ήδη είναι μπορεί να γίνει όσο μεγάλη επιθυμούμε». Πόσο λάθος είναι αυτό μπορεί να δειχθεί για παράδειγμα με τη γνωστή σειρά 1/2 + 1/4 +1/8 + ...της οποίας η τιμή μπορεί πάντα να γίνει μεγαλύτερη από ότι ήδη είναι και παρόλα αυτά πάντα παραμένει <1! Δεν θα αναφέραμε καν ένα τέτοιο ευδιάκριτο λάθος αν οι μαθηματικοί δεν ήταν ένοχοι γι αυτό από καιρό σε καιρό – όπως ήταν ένας πρόσφατα στην «πλήρη θεωρία του των παραλλήλων».

15

Θεώρημα. Εάν δύο συναρτήσεις του x, fx και φx, μεταβάλλονται σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας είτε για όλες τις τιμές του x είτε μόνο για αυτές που βρίσκονται μεταξύ α και β και εάν fα < φα και fβ > φβ, τότε υπάρχει πάντα μία συγκεκριμένη τιμή του x μεταξύ α και β για την οποία fx = φx.

Απόδειξη.

Πρέπει να θυμηθούμε ότι σε αυτό το θεώρημα οι τιμές των συναρτήσεων fx και φx πρέπει να συγκριθούν η μία με την άλλη απλά με τις απόλυτες τιμές τους, δηλαδή χωρίς αναφορά σε πρόσημα ή σαν να ήταν ποσότητες ανίκανες να είναι αντίθετων προσήμων. Αλλά τα πρόσημα των α και β είναι σημαντικά.

Ι.1. Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι τα α και β είναι και τα δύο θετικά και ότι (χωρίς να χάνεται η γενικότητα) β είναι το μεγαλύτερο από τα δύο. Έτσι, β = α + i, όπου i, δηλώνει μία θετική ποσότητα. Τώρα επειδή fα < φα, εάν το ω δηλώνει μία θετική ποσότητα η οποία μπορεί να παρθεί όσο μικρή επιθυμούμε, τότε f(α + ω) < φ(α + ω) επίσης. Γιατί επειδή fx και φx μεταβάλλονται συνεχώς για όλα τα x μεταξύ α και β και α + ω βρίσκεται μεταξύ α και β όποτε ω < i , πρέπει κανείς να μπορεί να κάνει f (α + ω) - fα και φ(α + ω) - φα όσο μικρά επιθυμεί αν το ω παρθεί αρκετά μικρό.

Όθεν, αν Ω και Ω΄ δηλώνουν ποσότητες οι οποίες μπορεί να γίνουν όσο μικρές επιθυμούμε, $f(\alpha + \omega) - f\alpha = \Omega$, και $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi\alpha = \Omega'$. Από όπου,

$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = \varphi\alpha - f\alpha + \Omega' - \Omega$.

Αλλά $\varphi\alpha - f\alpha$ είναι ίσο, από την υπόθεση, με κάποια θετική ποσότητα μιας σταθερής τιμής Α. Γι αυτό,

$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = A + \Omega' - \Omega$,

το οποίο παραμένει θετικό αν τα Ω και Ω΄ παρθούν αρκετά μικρά δηλαδή, αν δοθεί στο ω μια πολύ μικρή τιμή, και αυτό επίσης ισχύει για όλες τις μικρότερες τιμές.

Επομένως για όλες τις τιμές του ω που είναι μικρότερες από μία συγκεκριμένη τιμή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δύο συναρτήσεις $f(\alpha + \omega)$ and $\varphi(\alpha + \omega)$ έχουν τη σχέση της μικρότερης ποσότητας προς τη μεγαλύτερη. Ας ορίσουμε αυτή την ιδιότητα της μεταβλητής ω με Μ. Τότε μπορούμε να πούμε ότι όλα τα ω τα οποία είναι μικρότερα από μία συγκεκριμένη τιμή έχουν την ιδιότητα Μ. Αλλά παρόλα αυτά είναι καθαρό ότι αυτή η ιδιότητα Μ δεν ανήκει σε όλες τιμές του ω, δηλαδή όχι για τη τιμή $\omega = i$, επειδή $f(\alpha + i) = f\beta$, το οποίο από την υπόθεση δεν είναι μικρότερο αλλά μεγαλύτερο από $\varphi(\alpha + i) = \varphi\beta$. Κατά συνέπεια το θεώρημα του Τμήματος 12 δίνει ένα συγκεκριμένο U το οποίο είναι το μεγαλύτερο από αυτές τις τιμές για τις οποίες μπορεί να υποτεθεί ότι τα $\omega < U$ έχουν την ιδιότητα Μ.

Ι.2. Αυτό το U πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 0 και i. Επειδή καταρχήν δεν μπορεί να είναι ίσο με το i επειδή αυτό θα σήμαινε $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$ όποτε το $\omega < i$, όσο κοντά και αν έρθει στη τιμή i. Αλλά ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που έχουμε αποδείξει ότι, από την υπόθεση $f\alpha < \varphi\alpha$, μπορούμε να συνάγουμε την $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$ εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό, με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να αποδείξει ότι, από την υπόθεση $f(\alpha + i) > \varphi(\alpha + i)$, ακολουθεί ως συνέπεια η $f(\alpha + i - \omega) > \varphi(\alpha + i - \omega)$ εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό. Γι αυτό δεν είναι αλήθεια ότι οι δύο συναρτήσεις fx και φx έχουν τη σχέση της μικρότερης ως προς την μεγαλύτερη για όλες τις τιμές του $x < \alpha + i$.

Δεύτερον, ακόμα λιγότερο μπορεί να είναι αλήθεια ότι $U > i$, γιατί τότε το i θα ήταν μία από τιμές του $\omega < U$, και γι αυτό το επίσης $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, το οποίο έρχεται σε άμεση αντίθεση με την υπόθεση του θεωρήματος. Συνεπώς, αφού είναι θετικό, το U σίγουρα βρίσκεται μεταξύ 0 και i, και κατά συνέπεια το $\alpha + U$ βρίσκεται μεταξύ α και β.

I.3. Μπορεί τώρα να ερωτηθεί τι σχέση ισχύει μεταξύ fx και φx για τη τιμή x = α + U; Καταρχήν, δεν μπορεί να είναι αλήθεια ότι f(α + U) < φ(α + U), γιατί αυτό θα έδινε επίσης f(α + U + ω) < φ(α + U + ω) εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό, και έτσι το α + U δεν θα ήταν η μεγαλύτερη τιμή για την οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα x κάτω από αυτή έχουν την ιδιότητα M. Ούτε, κατά δεύτερο λόγο, μπορεί να είναι αλήθεια ότι f (α + U) > φ(α + U), επειδή θα έδινε επίσης f(α + U - ω) > φ(α + U - ω) εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό και ως εκ τούτου θα ήταν κατά της υπόθεσης ότι η ιδιότητα M διατηρείται για όλα τα x που είναι κάτω από α + U. Έτσι, απομένει μόνο f(α + U) = φ(α + U) και έτσι αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β, δηλαδή η α + U, για την οποία fx = φx.

II. Η ίδια απόδειξη είναι επίσης εφαρμόσιμη όταν α και β είναι και τα δύο αρνητικά, αν πάρει κανείς ω, i και U ως αρνητικές ποσότητες, γιατί τότε με τον ίδιο τρόπο, α + ω, α + i, α + U, και α + U – ω αντιπροσωπεύουν ποσότητες μεταξύ α και β.

III. Εάν α = 0 και β είναι θετικό, τότε απλά πάρτε i (=β), ω και U θετικά. Και εάν το β είναι αρνητικό, πάρτε αυτά τα άλλα αρνητικά και η απόδειξη I μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά λέξη.

IV. Τέλος, αν α και β είναι αντίθετου προσήμου και (χωρίς να χάνεται η γενικότητα) π.χ. α είναι αρνητικό και β θετικό, τότε η υπόθεση του θεωρήματος που αφορά στην συνέχεια των συναρτήσεων fx και φx δηλώνει ότι αυτή η συνέχεια αναφέρεται σε όλες τιμές του x οι οποίες, εάν είναι αρνητικές, είναι < α, και εάν είναι θετικές είναι < β [Δες σημείωση 4]. Τότε ανάμεσα σε αυτές υπάρχει η τιμή x = 0. Διερευνά για αυτό κανείς την σχέση που ισχύει μεταξύ f(0) και φ(0). Εάν f(0) = φ(0) τότε το θεώρημα έχει ήδη αποδειχθεί. Αλλά εάν f(0) > φ(0) τότε αφού fα < φα έχουμε από την απόδειξη III, μία τιμή μεταξύ 0 και α και εάν f(0) < φ(0) μία τιμή μεταξύ 0 και β για την οποία fx = φx. Γι αυτό τον λόγο σε κάθε περίπτωση υπάρχει μία τιμή του x μεταξύ α και β που κάνει fx = φx .

16

Παρατήρηση. Με κανένα τρόπο δεν ισχυριζόμαστε εδώ ότι υπάρχει μία μοναδική τιμή του x η οποία κάνει fx = φx. Δηλαδή, εάν fα < φα και f (α + U) = φ(α + U) πρέπει πράγματι να έχουμε f(α + U + ω) > φ(α + U + ω) εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό δηλαδή η συνάρτηση fx η οποία προηγουμένως ήταν μικρότερη από την φx πρέπει, μετά που θα είναι ίσες η μία με την άλλη, σύντομα να γίνει μεγαλύτερη από τη φx. Ωστόσο με ακόμα μεγαλύτερη αύξηση στο ω είναι βεβαίως δυνατό ότι πριν το α+ U + ω γίνει ίσο με το β να υπάρχει μία τιμή για την οποία πάλι fx < φx. Σε μία τέτοια περίπτωση προκύπτει αμέσως από το θεώρημά μας ότι πρέπει να υπάρχουν δύο άλλες τιμές του x μεταξύ α και β εκτός από U, που κάνουν fx = φx. Γιατί εάν f(α+ U +χ) < φ(α + U +χ), τότε επειδή f (α + U + ω) ήταν ήδη > φ(α+ U + ω), πρέπει να υπάρχει μία τιμή του x μεταξύ α + U + ω και α + U + χ δηλαδή μεταξύ α και β για την οποία fx = φx . Και με τον ίδιο τρόπο, επειδή f(a + i), ή fβ είναι πάλι > φβ, υπάρχει επίσης μία τιμή του x μεταξύ α + U + χ και β για την οποία fx = φx. Με αυτό τον τρόπο γίνεται καθαρό ότι πρέπει γενικά να υπάρχει περιττός αριθμός τιμών του x που κάνουν fx = φx.

17

Θεώρημα. Κάθε συνάρτηση της μορφής $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$ στην οποία τα m,n,... ,r δηλώνουν ολόκληρους θετικούς εκθέτες, είναι μία ποσότητα η οποία μεταβάλλεται σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x .

Απόδειξη. Αν το x μεταβληθεί σε x + ω, η αλλαγή στην συνάρτηση είναι καθαρά ίση με $b[(x + \omega)^m - x^m] + c[(x+\omega)^n - x^n] + \ldots + p[(x + \omega)^r - x^r]$, μία ποσότητα για την οποία μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι μπορεί να γίνει όσο μικρή επιθυμούμε εάν το ω παρθεί αρκετά μικρό. Γιατί από το διωνυμικό θεώρημα, του οποίου η εγκυρότητα για ολόκληρες θετικές δυνάμεις (Τμήμα 8 του *Der Binomische Lehrsatz*) είναι ανεξάρτητη των ερευνών με τις οποίες ασχολείται το παρόν άρθρο, αυτή η ποσότητα ισούται με

$$\omega \left\{ \begin{array}{l} mbx^{m-1} + m\,\dfrac{m-1}{2}\,bx^{m-2}\omega + \ldots + b\omega^{m-1} \\ \\ + ncx^{n-1} + n\,\dfrac{n-1}{2}\,cx^{n-2}\omega + \ldots + c\omega^{n-1} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ + rpx^{r-1} + r\,\dfrac{r-1}{2}\,px^{r-2}\omega + \ldots + p\omega^{r-1} \end{array} \right\}$$

Το σύνολο των όρων από τους οποίους αποτελείται ο παράγοντας που περιέχεται στις αγκύλες είναι γνωστό ότι είναι πάντα πεπερασμένο και ανεξάρτητο των τιμών των ποσοτήτων x και ω. Αφού αυτοί απαντώνται μόνο με θετικές δυνάμεις, η τιμή κάθε όρου, και κατά συνέπεια ολόκληρη η έκφραση, για κάθε τιμή του x (επίσης για x = 0) είναι πάντα πεπερασμένη. Αλλά εάν για το ίδιο x η τιμή του ω μειωθεί, τότε οι όροι στους οποίους εμφανίζεται το ω ελαττώνονται, ενώ οι άλλοι παραμένουν αμετάβλητοι. Ας δηλώσουμε λοιπόν με S τη ποσότητα στην οποία φθάνουμε βάζοντας μια πεπερασμένη τιμή, ας πούμε ω_1, για ω σε όλους τους μονούς όρους της έκφρασης , μετά αθροίζοντας σαν να είχαν όλοι το ίδιο πρόσημο. Τότε η πραγματική τιμή που έχει αυτή η έκφραση για το ίδιο ω_1 δεν είναι σίγουρα > S. Αλλά η τιμή που παίρνει για κάθε μικρότερο ω είναι σίγουρα < S. Γι αυτό τον λόγο αν απαιτείται η μεταβολή που υφίσταται η συνάρτηση $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$ να γίνει < D, τότε πάρτε ένα $\omega < \omega_1$ και επίσης < D/S. Τότε ω.S, και ακόμα πιο σίγουρα το γινόμενο του ω με μία ποσότητα που είναι < S, πρέπει να είναι < D.

18

Θεώρημα Εάν μία συνάρτηση της μορφής $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q$
στην οποία το n δηλώνει ένα ολόκληρο θετικό αριθμό είναι θετική για x = α και αρνητική για x = β, τότε η εξίσωση
$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα ευρισκόμενη μεταξύ α και β.

Απόδειξη.

1. Εάν α και β έχουν το ίδιο πρόσημο (είτε και τα θετικά είτε και τα δύο αρνητικά), τότε είναι καθαρό ότι οι όροι των συναρτήσεων που είναι θετικοί ή αρνητικοί για x = α διατηρούν τα πρόσημα τους για x = β για όλες τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ α και β. Τώρα ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι θετική για x = α αλλά αρνητική για x = β. Αυτή η μεταβολή μπορεί μόνο να προκύψει επειδή το άθροισμα των θετικών όρων σε αυτή καταλήγει να είναι μεγαλύτερο από αυτό των αρνητικών όρων για x = α, αλλά μικρότερο από αυτό των αρνητικών όρων για x = β. Αλλά το άθροισμα του πρώτου, καθώς επίσης και αυτό του δεύτερου, είναι της μορφής
$a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$

του Τμήματος 17, δηλαδή, μία συνεχής συνάρτηση. Ας ορίσουμε γι αυτό το ένα με φx και το άλλο με fx. Τότε επειδή fα < φα και fβ > φβ, από το Τμήμα 15 πρέπει να υπάρχει κάποια τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ α και β και για την οποία fx = φx. Αλλά για αυτή τη τιμή fx - φx, δηλαδή, η δοθείσα συνάρτηση είναι μηδέν. Γι αυτό αυτή η τιμή είναι μία ρίζα της εξίσωσης

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$

2. Αλλά αν α και β είναι αντίθετου πρόσημου, ας θεωρήσουμε τη τιμή που παίρνει η δοθείσα συνάρτηση για x = 0. Αν αυτή είναι μηδέν, τότε είναι γνωστό, ότι η δοθείσα εξίσωση έχει μια πραγματική ρίζα ευρισκόμενη μεταξύ α και β, δηλαδή, x = 0. Αλλά αν αυτή η τιμή (η ποσότητα q) είναι θετική, τότε είναι γνωστό ότι η δοθείσα συνάρτηση είναι θετική για x = 0 αλλά αρνητική για x = β, και, επειδή οι ίδιοι όροι που είναι θετικοί ή αρνητικοί για x = β διατηρούν αυτά τα πρόσημα για όλες τις τιμές που βρίσκονται μεταξύ 0 και β, μπορεί να αποδείξει κανείς, μέσω των ίδιων επιχειρημάτων με αυτά του μέρους 1 της απόδειξης, ότι πρέπει να υπάρχει μία τιμή του x ευρισκόμενη μεταξύ 0 και β η οποία κάνει τη συνάρτηση μηδέν. Τέλος, εάν το q είναι αρνητικό, τότε αυτό που είπαμε μόλις, ισχύει ακόμα με την προϋπόθεση ότι το β αντικαταστείται από το α. Τώρα αφού μια τιμή ευρισκόμενη μεταξύ 0 και β ή μεταξύ 0 και α βρίσκεται επίσης μεταξύ α και β, εάν είναι αντίθετου προσήμου, τότε η αλήθεια του θεωρήματος μας αποδεικνύεται για κάθε περίπτωση.

Η μετάφραση έγινε από το αγγλικό κείμενο όπως αυτό εμφανίζεται στο άρθρο του Russ 1980:

Οι συμβολισμοί του Bolzano $\overset{n}{Fx}\ \overset{(n)}{Fx}\ \overset{1}{u}\ \overset{1}{\omega}$ έχουν αποδοθεί ως $F_n x\ F_{(n)}\ x\ u_1\ \omega_1$

(*) Σημ. Μετ. Ο Bolzano χρησιμοποιεί πάντα τα ανισοτικά σύμβολα να εφαρμόζονται μόνο στο μέγεθος των ποσοτήτων και όχι στην θέση τους στην ευθεία των αριθμών. Αυτό ήταν κοινή πρακτική εκείνη την εποχή καθώς δεν υπήρχε δεδομένο σύμβολο για το modulus. Έτσι, στην χρήση του Bolzano x > -1 σημαίνει το εύρος που εμείς θα περιγράφαμε τώρα ως x < -1. Για παράδειγμα., στο Τμήμα 2 δηλώνει ότι ο γενικός όρος μιας γεωμετρικής προόδου ae^r γίνεται «ακόμα μεγαλύτερος όταν e > ± 1» και «ακόμα μικρότερος όταν e < .± 1» Και στο Τμήμα 15.IV περιγράφει το εύρος των τιμών του x μεταξύ α και β όταν το α είναι

αρνητικό και το β θετικό ως «όλες οι τιμές του x που εάν αρνητικές είναι < α, και εάν θετικές είναι < β».

Σημειώσεις (του Bolzano)

[1]. *Demonstratio nova Theorematis, omnes functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadii. 4ο 1799.

[2]. *Demonstratio nova altera,* κλπ, και *Demonstratio nova tertia* : και τα δύο 1816

[3]. *Anfangsgrunde der Analysis endlicher Grossen,* $3^{η}$ εκδ. Τμήμα 316.

[4]. *Eléments d' algèbre,* $5^{η}$ έκδ. Κεφ.Ι, Νο 16.

[5]. *Eléments d' algèbre*, $7^{η}$ έκδ.

[6]. Στην μετάφραση του της παραπάνω εργασίας του Lacroix, Mainz, 1811, Τμήμα 211.

[7]. Στο έργο του *Mathematisches Wörterbuch*, Τόμος 2, σελ. 447.

[8]. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrées* Παρίσι, 1808.

[9]. *Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialen und Integralen der Funktionen,* Teil I, Τμήμα 49.

[10]. Τα κείμενα του καθηγητή Gauss που αναφέρθηκαν προηγούμενα παρέχουν ένα παράδειγμα.

[11]. Σύγκρινε με *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, [$1^{ο}$ τεύχος (Πράγα, 1810), Τμήμα ΙΙ, υποτμήματα 2,10, 20, 21], όπου οι λογικές έννοιες τις οποίες υποθέτω εδώ ως γνωστές, αναπτύσσονται περαιτέρω.

[12]. Υπάρχουν συναρτήσεις που μεταβάλλονται συνεχώς για όλες τις τιμές των ριζών τους π.χ. α + βx. Αλλά υπάρχουν άλλες που είναι συνεχείς μόνο για τιμές των ριζών τους μέσα ή έξω από συγκεκριμένα όρια. Έτσι, x + $\sqrt{(1-x)(2-x)}$ είναι συνεχής μόνο για τιμές του x < +1 ή > +2 αλλά όχι για τις τιμές μεταξύ +1 και +2.

[13]. Στην Journal de l' École Normale ή επίσης στο S.F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral*, T.I. Nos. 162,163.

[14]. *Leçons sur le calcul des fonctions*, Παρίσι, 1806, Νέα έκδ. Μάθ.9, σελ.89.

[15]. Δηλαδή, η πρόταση του Τμήματος 29 στο άρθρο: *Der Binomische Lehrsatz* κλπ.

[16]. Παρόλα αυτά, δεν πρέπει να αναμένεται ότι συμμορφώνομαι εδώ με όλους τους κανόνες τους οποίους εγώ ο ίδιος έθεσα στο *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* για την κατασκευή μιας αυστηρά μαθηματικής έκθεσης. Γιατί παρόλο που είμαι απόλυτα πεπεισμένος για την ορθότητα αυτών των κανόνων, να τους ακολουθήσω με ακρίβεια είναι δυνατόν μόνο όταν αρχίζει κανείς την έκθεση μιας επιστήμης από την πρώτη της πρόταση και έννοιες, όχι όταν κανείς ασχολείται με μερικές θεωρίες παρμένες από το περιεχόμενο ενός όλου. Αυτή η παρατήρηση προφανώς, αφορά επίσης στο άρθρο για το διωνυμικό θεώρημα.

[17]. Αυτή η θεωρία ίσως αξίζει προσοχή για τουλάχιστον δύο λόγους: πρώτον, επειδή είναι η μόνη στην οποία δεν έχει ανιχνευθεί κανένα σοβαρό λάθος, δεύτερον, επειδή ο μεγαλύτερος εν ζωή Γάλλος μαθηματικός Legendre έφθασε στην ίδια άποψη εντελώς ανεξάρτητα από εμένα στην δέκατη έκδοση του έργου του *Eléments de géométrie*, (Παρίσι, 1813).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΤΟΥ CAUCHY

Απόδειξη του **Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής** για Συνεχείς συναρτήσεις . *Cours d'analyse, 1821,* Note III (*Oeuvres,* Séries 2, Vol. 3, σελ. 378-380)

Θεώρημα Έστω $f(x)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση της μεταβλητής x συνεχής ως προς αυτή τη μεταβλητή μεταξύ $x = x_0$, $x = X$. Αν οι δυο ποσότητες $f(x_0)$, $f(X)$ έχουν αντίθετο πρόσημο , η εξίσωση

(I) $f(x) = 0$

μπορεί να ικανοποιηθεί από μια η περισσότερες πραγματικές τιμές του x μεταξύ x_0 και X.

Απόδειξη. Έστω x_0 είναι η μικρότερη από τις δύο ποσότητες x_0 , X. Θα θέσουμε $X- x_0 = h$ και θα καθορίσουμε με m οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο από το ένα .

Επειδή μια από τις δύο ποσότητες $f(x_0)$, $f(X)$ είναι θετική , η άλλη αρνητική , συνεπάγεται ότι αν σχηματίσουμε την ακολουθία

$f(x_0)$, $f(x_0 + h/m)$, $f(x_0 + 2h/m)$, ..., $f(X -h/m)$, $f(X)$,

και συγκρίνουμε διαδοχικά το πρώτο όρο της ακολουθίας με το δεύτερο , το δεύτερο με το τρίτο , το τρίτο με το τέταρτο κλπ, αναγκαστικά θα τελειώσουμε βρίσκοντας μια ή περισσότερες φορές, δύο διαδοχικούς όρους οι οποίοι είναι αντίθετου προσήμου.

Έστω $f(x_1)$, $f(X')$ είναι δυο τέτοιοι όροι , όπου x_1 είναι η μικρότερη από τις δύο αντίστοιχες τιμές του x . Ξεκάθαρα θα έχουμε $x_0 < x_1 < X' < X$

και

$X' - x_1 = h/m = 1/m\ (X- x_0)$.

[Ο Cauchy χρησιμοποιεί το σύμβολο < για *μικρότερο από ή ίσον με*]. Έχοντας ορίσει x_1 και X' με το τρόπο που μόλις περιγράψαμε , παρόμοια μπορούμε να θέσουμε μεταξύ αυτών των δύο νέων τιμών του x δύο άλλες *τιμές* x_2 , X'', οι οποίες όταν αντικατασταθούν στη $f(x)$, δίνουν αποτελέσματα αντίθετου προσήμου

και ικανοποιούν τις συνθήκες

$x_1 < x_2 < X'' < X'$

και

$X'' - x_2 = 1/m \ (X' - x_1) = 1/m^2 \ (X - x_0).$

Συνεχίζοντας έτσι, παίρνουμε αρχικά , μια σειρά αυξανομένων τιμών του x, δηλαδή

(2) $x_0 ,, x_1 , x_2 ,,...;$

δεύτερο, μια σειρά μειωνόμενων τιμών

(3) $X, X', X'',...$

των οποίων οι όροι εφ όσον υπερβαίνουν τους όρους της πρώτης σειράς κατά ποσότητες ίσες , αντίστοιχα , με τα γινόμενα

(1) $(X- x_0), (1/m)(X- x_0), (1/m^2)(X- x_0),...,$

τελικά θα διαφέρουν από τις τιμές στη πρώτη σειρά τόσο λίγο όσο επιθυμούμε.

Πρέπει να συμπεράνουμε από αυτό , ότι οι γενικοί όροι των σειρών (2) και (3) συγκλίνουν προς ένα κοινό όριο. Έστω a αυτό το όριο. Εφ όσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής μεταξύ $x = x_0$ και $x = X,$ οι γενικοί όροι των ακόλουθων σειρών ,

$f(x_0), f(x_1), f(x_2) ...,f(X), f(X'), f(X''),...$

και οι δύο συγκλίνουν προς το κοινό όριο $f(a)$. Και εφ όσον πάντα παραμένουν αντίθετου προσήμου , όταν πλησιάζουν αυτό το όριο, είναι ξεκάθαρο ότι η ποσότητα $f(a)$, η οποία πρέπει να είναι πεπερασμένη , δεν μπορεί να διαφέρει από το μηδέν.

Συνεπώς, η εξίσωση

(I) $f(x) = 0$

θα ικανοποιείται αν δώσουμε στη μεταβλητή x την συγκεκριμένη τιμή $a,$ η οποία βρίσκεται μεταξύ x_0 και $X.$ Με άλλα λόγια ,

(4) $x = a$ θα είναι μια *ρίζα* της εξίσωσης (1).

Η **Πρώτη Αυστηρή Απόδειξη για τις Παραγώγους** *Calcul infinitésimal,* Leçon 7 (*Oeuvres,* Séries 2, Vol 4, σελ. 44-45)

Θεώρημα. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής μεταξύ των ορίων [δηλαδή φραγμάτων ή άκρων] $x = x_0$, $x = X$, και αν έστω A η μικρότερη , B η μεγαλύτερη τιμή της παραγώγου $f'(x)$ σε αυτό το διάστημα , ο λόγος των πεπερασμένων διαφορών

(4) $[f(X) - f(x_0)] / (X - x_0)$

πρέπει να περιέχεται μεταξύ A και B [1]

Απόδειξη Έστω δ, ε είναι δυο πολύ μικροί αριθμοί . Ο πρώτος επιλέγεται έτσι ώστε για όλες τις αριθμητικές [δηλαδή, απόλυτες] τιμές του i μικρότερες του δ, και για οποιαδήποτε τιμή του x που περιέχεται μεταξύ των ορίων x_0, X, ο λόγος

$f(x + i) - f(x)/i$

θα είναι πάντοτε μεγαλύτερος από $f'(x) - \varepsilon$ και μικρότερος από $f'(x) + \varepsilon$. Αν παρεμβάλουμε n -1 νέες τιμές της μεταβλητής x μεταξύ των ορίων x_0 , X, δηλαδή,

$x_1 , x_2 , \ldots, x_{n-1},$

έτσι ώστε η διαφορά $X - x_0$ να διαιρεθεί σε στοιχεία

$x_1 - x_0 , x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$

τα οποία όλα έχουν το ίδιο πρόσημο και αριθμητικές τιμές μικρότερες του δ, τότε , αφού από τα κλάσματα

(5) $f(x_1) - f(x_0)/ x_1 - x_0,, f(x_2) - f(x_1)/ x_2 - x_1 ,\ldots, f(X) - f(x_{n-1})/X - x_{n-1}$

το πρώτο θα περιέχεται μεταξύ των ορίων $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, το δεύτερο μεταξύ των ορίων $f'(x_1) - \varepsilon$, $f'(x_1) + \varepsilon$, ..., κλπ ., κάθε ένα από τα κλάσματα θα είναι μεγαλύτερο από $A - \varepsilon$ και μικρότερο από $B + \varepsilon$. Επιπλέον , αφού τα κλάσματα (5) έχουν παρανομαστές με το ίδιο πρόσημο , αν διαιρέσουμε το άθροισμα των αριθμητών τους με το άθροισμα των παρανομαστών, παίρνουμε ένα *μέσο* κλάσμα, δηλαδή, ένα κλάσμα μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου των θεωρουμένων κλασμάτων . (*Analyse algébrique,* Note II, Theorem XII). [2]

Συνεπώς , η έκφραση (4), με τη οποία αυτός ο μέσος όρος συμπίπτει, θα βρίσκεται μεταξύ των ορίων $A - \varepsilon$, $B + \varepsilon$, και αφού αυτό το συμπέρασμα ισχύει ανεξάρτητα του πόσο μικρό μπορεί να είναι το ε, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η έκφραση (4) θα περιέχεται μεταξύ των A και B.

Πόρισμα . Αν η παραγόμενη συνάρτηση $f'(x)$ είναι η ίδια συνεχής μεταξύ των ορίων $x = x_0$, $x = X$, αυτή η συνάρτηση , καθώς πηγαίνει , από το ένα όριο στο άλλο, θα μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο , ώστε πάντα να περιέχεται μεταξύ των δύο τιμών A και B και να παίρνει διαδοχικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Συνεπώς, οποιαδήποτε ποσότητα ενδιάμεση των A και B θα είναι μία τιμή της $f'(x)$ η οποία θα αντιστοιχεί σε μία τιμή του x μεταξύ των ορίων x_0 και $X = x_0 + h$, ή, κάτι που είναι ισοδύναμο , σε μία τιμή του x τη μορφής

$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0)$,

όπου θ ορίζεται ένας αριθμός μικρότερος του ένα. Αν εφαρμόσουμε αυτή την παρατήρηση στη έκφραση (4), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μεταξύ των ορίων 0 και 1, μία τιμή του θ , η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$[f(X) - f(x_0)]/(X - x_0) = f' [x_0 + \theta (X - x_0)]$, ή κάτι που είναι ισοδύναμο, την εξίσωση

(6) $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h = f' (x_0 + \theta h)$.

Εφ όσον αυτός ο τελευταίος τύπος συνεχίζει να ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του x αντιπροσωπεύεται από x_0 , ενόσω η συνάρτηση $f(x)$ και η παράγωγος της $f'(x)$ παραμένουν συνεχείς μεταξύ των ορίων $x = x_0$, $x = x_0 + h$, έχουμε γενικά, αν αυτή η συνθήκη ισχύει ,

(7) $[f(x + h) - f(x)] / h = f' (x + \theta h)$.

Τότε , γράφοντας Δx *αντί* h, έχουμε

(8) $f(x + \Delta x) - f(x) = f' (x + \theta\Delta x) \Delta x$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις εξισώσεις (7) και (8) το θ πάντοτε δηλώνει ένα άγνωστο [μη αρνητικό] αριθμό μικρότερο του ένα .

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις εξισώσεις (7) και (8) θ πάντα δηλώνει έναν άγνωστο (μη αρνητικό) αριθμό μικρότερο από το ένα.

Ύπαρξη Ορισμένων Ολοκληρωμάτων: *Calcul Infinitésimal,* Leçon 21 (*Oeuvres,* Séries 2, Vol. 4, σελ. 122-125)

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής ως προς τη μεταβλητή x μεταξύ των δύο πεπερασμένων ορίων $x = x_0$, $x = X$. Ορίζουμε με x_1 , x_2 , ..., x_{n-1}, νέες τιμές του x τις οποίες θέτουμε μεταξύ αυτών των ορίων και υποθέτουμε ότι ή πάντοτε αυξάνονται ή πάντοτε μειώνονται μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου ορίου. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές για να διαιρέσουμε την

διαφορά $X- x_0$ σε στοιχεία

(1) $x_1- x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 –x_2$, ..., $X- x_{n-1}$

τα οποία όλα έχουν το ίδιο πρόσημο. Μόλις γίνει αυτό, ας πολλαπλασιάσουμε το κάθε στοιχείο με τη τιμή του $f(x)$ η οποία αντιστοιχεί με το αριστερό άκρο (*αρχικό*) αυτού του στοιχείου : δηλαδή, το στοιχείο $x_1- x_0$ θα πολλαπλασιαστεί με $f(x_0)$ το στοιχείο $x_2 - x_1$ με $f(x_1)$,... και τελικά το στοιχείο $X- x_{n-1}$ με $f(x_{n-1})$

και έστω

(2) $S = (x_1- x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1)+ ... (X- x_{n-1}) f(x_{n-1})$

είναι το άθροισμα των γινομένων τα οποία θα προκύψουν.

Η ποσότητα S καθαρά θα εξαρτάται από

Πρώτο: το πλήθος n των στοιχείων στα οποία έχουμε διαιρέσει τη διαφορά $X - x_0$

Δεύτερο: τις τιμές αυτών των στοιχείων και συνεπώς τη μέθοδο της διαίρεσης που υιοθετήθηκε.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν οι αριθμητικές τιμές αυτών των στοιχείων γίνουν πολύ μικρές και το πλήθος n πολύ μεγάλος, η μέθοδος της διαίρεσης θα έχει μόνο μία ασήμαντη επίδραση στη τιμή του S . Αυτό στη πραγματικότητα μπορεί να αποδειχθεί ως εξής.

Εάν υποθέταμε ότι όλα τα στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$ ανάγονται σε ένα και μοναδικό στοιχείο, το οποίο θα ήταν ακριβώς αυτή η διαφορά, θα είχαμε απλά ότι

(3) $S = (X - x_0) f(x_0)$.

Όταν αντιθέτως παίρνουμε τις εκφράσεις (1) ως στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$, η τιμή του S, οριζόμενη σε αυτή τη περίπτωση από την εξίσωση (2), θα είναι ίση με το άθροισμα των στοιχείων πολλαπλασιασμένων με το μέσο των συντελεστών $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_{n-1})$ [3]

Επιπλέον , αφού αυτοί οι συντελεστές [οι $f(x_k)$] είναι συγκεκριμένες τιμές της έκφρασης $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ για τιμές του θ μεταξύ μηδέν και ένα, μπορούμε να αποδείξουμε με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στη έβδομη διάλεξη [στην απόδειξη του θεωρήματος σχετικά με τα φράγματα του διαφορικού πηλίκου προηγουμένως] ότι ο εν λόγω μέσος όρος είναι μια άλλη τιμή της ίδιας έκφρασης , η οποία αντιστοιχεί σε μία τιμή του θ μεταξύ των ίδιων ορίων.

Μπορούμε έπειτα να αντικαταστήσουμε το ακόλουθο στη εξίσωση (2) :

(4) $S = (X- x_0) f [x_0 + \theta(X- x_0)]$,

όπου θ θα είναι ένας [μη αρνητικός] αριθμός μικρότερος του ένα.

Για να πάμε από τη μέθοδο της διαίρεσης , που μόλις θεωρήσαμε, σε μία άλλη όπου οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων του $X - x_0$ είναι ακόμα μικρότερες, επαρκεί να διαιρέσουμε κάθε μία από τις εκφράσεις (1) [δηλαδή, τις (x_k-x_{k-1})] σε νέα στοιχεία. Πρέπει μετά να αντικαταστήσουμε στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (2) το γινόμενο $(x_1 - x_0) f(x_0)$ με ένα άθροισμα παρόμοιων γινομένων, για το οποίο άθροισμα μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια έκφραση της μορφής

$(x_1 - x_0)f [x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)]$,

όπου θ_0 είναι ένας [μη αρνητικός] αριθμός μικρότερος του ένα . Ας σημειωθεί ότι θα έχουμε μία σχέση μεταξύ αυτού του αθροίσματος και του γινομένου $(x_1 - x_0) f(x_0)$, η οποία είναι παρόμοια με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των τιμών του S , οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις (4) και (3)

Παρόμοια, πρέπει να αντικαταστήσουμε για το γινόμενο $(x_2-x_1) f(x_1)$ ένα άθροισμα όρων που μπορούν να γραφούν στη μορφή $(x_2-x_1) f [x_1 + \theta_1 (x_2-x_1)]$ όπου θ_1 ξανά ορίζεται ως ένας [μη αρνητικός] αριθμός μικρότερος του ένα. Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο, τελικά συμπεραίνουμε ότι στη νέα μέθοδο διαίρεσης η τιμή του S είναι της μορφής

(5) $S = (x_1-xo)f[x_0 \theta_0 (x_1-x_o)]$

$+ (x_2-x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2-x_1)] + ...$

$+ (X -x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X-x_{n-1})]$.

Αν στη εξίσωση (5) θέσουμε

$f[x_0+ \theta_0 (x_1-x_o)] = f(x_0)\pm \varepsilon_0$

$f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1$

.

.

.

$f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}$,

μπορούμε να παράγουμε

(6) $S = (x_1-x_0) [f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2-x_1) [f(x_1) \pm \varepsilon_1] + ...+ (X-x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$

Έπειτα , υπολογίζοντας αυτά τα γινόμενα .

(7) $S = (x_1-x_0)f(x_0) + (x_2-x_1)f(x_1)+\ldots(X-x_{n-1})(fx_{n-1}) \pm \varepsilon_0(x_1-x_0) \pm \varepsilon_1(x_2-x_1) \pm\ldots\pm \varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1})$

Μπορούμε να προσθέσουμε ότι , αν τα στοιχεία $x_1- x_0$, x_2-x_1 ,..., $X-x_{n-1}$ έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές, κάθε ποσότητα $\pm \varepsilon_0$, $\pm \varepsilon_1$,... $\pm \varepsilon_{n-1}$ θα είναι πολύ κοντά στο μηδέν , και συνεπώς το ίδιο θα είναι αληθινό για το άθροισμα $\pm \varepsilon_0 (x_1-x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2-x_1) \pm\ldots\pm \varepsilon_{n-1} (X-x_{n-1})$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το γινόμενο $X- x_0$ επί ένα μέσο όρο μεταξύ αυτών των ποσοτήτων. Δεδομένου αυτού, όταν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (2) και (7) , βλέπουμε ότι δεν θα αλλάζαμε αισθητά τη τιμή του S , η οποία υπολογίστηκε με μία μέθοδο διαίρεσης στη οποία τα στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$ έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές αν πηγαίναμε σε μία δεύτερη μέθοδο διαίρεσης στη οποία κάθε ένα από τα στοιχεία είχε εκ νέου διαιρεθεί σε άλλα.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε δύο ξεχωριστές μεθόδους διαίρεσης της διαφοράς $X - x_0$, όπου και στις δυο τα στοιχεία της διαφοράς έχουν πολύ μικρές αριθμητικές τιμές. Μπορούμε να συγκρίνουμε αυτές τις δύο μεθόδους με μία τρίτη επιλεγμένη έτσι ώστε κάθε στοιχείο, είτε από τη πρώτη είτε από τη δεύτερη μέθοδο, να σχηματίζεται συγκεντρώνοντας διάφορα στοιχεία από τη τρίτη μέθοδο. Για να ικανοποιηθεί αυτή η προϋπόθεση , επαρκεί κάθε τιμή του x βρισκόμενη μεταξύ των ορίων x_0 και X στις δύο πρώτες μεθόδους να χρησιμοποιηθεί στη τρίτη. Και μπορούμε να αποδείξουμε ότι αλλάζουμε την τιμή του S πολύ λίγο πηγαίνοντας από τη πρώτη ή τη δεύτερη μέθοδο στη τρίτη μέθοδο και συνεπώς πηγαίνοντας από τη πρώτη στη δεύτερη. Έτσι, όταν τα στοιχεία της διαφοράς $X - x_0$ γίνουν απείρως μικρά, η μέθοδος της διαίρεσης έχει μόνο μία ανεπαίσθητη επίδραση στη τιμή του S .

Και , αν αφήσουμε τις αριθμητικές τιμές αυτών των στοιχείων να μειωθούν ενώ το πλήθος τους αυξάνεται , η τιμή του S τελικά γίνεται , για όλους τους πρακτικούς σκοπούς [*sensiblement*] , σταθερή. Ή με άλλα λόγια, αυτή τελικά φτάνει ένα συγκεκριμένο όριο το οποίο εξαρτάται μοναδικά από τη μορφή της συνάρτησης $f(x)$ και τις οριακές τιμές των x_0 , X της μεταβλητής x. Αυτό το όριο είναι αυτό που ονομάζεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* .

Το **Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού:** *Calcul infinitésimal* (*Oeuvres,* Séries 2, Vol 4, σελ. 151-152):

Αν στο ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ αφήσουμε το ένα από τα δύο όρια ολοκλήρωσης , για παράδειγμα *X,* να μεταβάλλεται , το ίδιο το ολοκλήρωμα θα μεταβάλλεται με αυτή τη ποσότητα. Και αν το όριο *X,* τώρα μεταβλητό, αντικατασταθεί από *x,* έχουμε σαν αποτέλεσμα μια νέα συνάρτηση του *x,* η οποία θα είναι αυτό που ονομάζεται ολοκλήρωμα που παίρνεται από τη αρχή $x = x_0$.

Έστω

(I) $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$

αυτή η νέα συνάρτηση. Παράγουμε από τον τύπο (19) (Διάλεξη 22) [δηλαδή,

$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]]$

(2) $F(x) = (x - x_o)f[x_o + \theta\,(x - x_0)]$, $F(x_0) = 0$,

θ είναι ένας [μη αρνητικός] αριθμός μικρότερος του ένα. Επίσης από το τύπο (7) (Διάλεξη 23) [δηλαδή, $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\, dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\, dx$, όπου $x_0 \leq \xi \leq X$]

$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\, dx = af(x + \theta x)$,

ή

(3) $F(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$.

Συνεπάγεται από τις εξισώσεις (2) και (3) ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι πεπερασμένη και συνεχής στη γειτονιά κάποιας συγκεκριμένης τιμής της μεταβλητής *x,* η νέα συνάρτηση $F(x)$ όχι μόνο θα είναι πεπερασμένη αλλά επίσης και συνεχής στη γειτονιά αυτής της τιμής, αφού μία άπειρα μικρή αύξηση του *x* θα αντιστοιχεί σε μία άπειρα μικρή αύξηση της $F(x)$. Συνεπώς αν η συνάρτηση $f(x)$ παραμένει πεπερασμένη και συνεχής από $x = x_0$ σε $x = X$, το ίδιο θα ισχύει για τη συνάρτηση $F(x)$. Επιπρόσθετα, αν και τα δύο μέλη του τύπου (3) διαιρεθούν με *a,* μπορούμε να συμπεράνουμε περνώντας στα όρια ότι

(4) $F'(x) = f(x)$.

Συνεπώς το ολοκλήρωμα (l) θεωρούμενο σαν συνάρτηση του x έχει σαν παράγωγο του τη συνάρτηση $f(x)$ κάτω από το σύμβολο ολοκληρώματος $\int$

Σημειώσεις (Η μετάφραση έχει γίνει από το αγγλικό κείμενο, όπως εμφανίζεται στο Grabiner , 1981. Οι σημειώσεις εμφανίζονται στο ίδιο κείμενο).

[1] Το comprise του Cauchy έχει μεταφραστεί ως " περιέχονται " και το referme ως "βρισκόμενοι μεταξύ"

Το περιεχόμενο της απόδειξης ξεκαθαρίζει ότι το c περιέχεται μεταξύ a και b εννοεί $a \leq c \leq b$.

Και ότι το c κείται μεταξύ a και b εννοεί $a < c < b$.

[2] Εδώ ο Cauchy αναφέρεται σε αυτό το θεώρημα: «Αν b,b',b'', ...είναι n ποσότητες με το ίδιο πρόσημο και αν a,a',a'', ...είναι οποιοσδήποτε n ποσότητες, έχουμε

$$\frac{a + a' + a' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = M(a/b,\ a'/b',\ a''/b'',\ \ldots)$$»

Είχε ορίσει το *μέσο* των $c,c',c'',\ldots = M(c,c',c'',\ldots)$ ως «μία νέα ποσότητα περιλαμβανομένη μεταξύ της μικρότερης και μεγαλύτερης των θεωρουμένων» στο *Cours d'analyse;* έκδοση του Cauchy *Oeuvres,* séries 2, vol. 3, σελ. 27, 368.

[3] Ο Cauchy είχε ορίσει ένα *μέσο* ενός συνόλου στοιχείων $\{\alpha_{1,\ldots}\alpha_n\}$ το οποίο δήλωσε ως $M(\alpha_{1,\ldots}\alpha_n)$, να είναι μια ποσότητα περιλαμβανομένη μεταξύ του ελάχιστου και μέγιστου των στοιχείων του συνόλου. Σε αυτό το σημείο στη συζήτηση για το ολοκλήρωμα , για να αιτιολογήσει το ανωτέρω συμπέρασμα, ο Cauchy αναφέρετο στο *Cours d'analyse,* Theorem III, Corollary (*Oeuvres,* séries 2, vol. 3, σελ 28). Αυτό το πόρισμα , αναδιατυπωμένο με σύγχρονο συμβολισμό για σαφήνεια, είναι το ακόλουθο : έστω ότι μας δίνεται ένα σύνολο n ποσοτήτων όλες έχουσες το ίδιο πρόσημο $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$

Ας θεωρήσουμε ένα άλλο σύνολο $\{\alpha_{1,\ldots}\alpha_n\}$ n ποσοτήτων και ας θυμηθούμε ότι ο μέσος τους $M(a_1, \ldots, a_n.)$ περιέχεται μεταξύ του ελάχιστου και μέγιστου του a_k . Τότε το πόρισμα δηλώνει $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = (y_1 + \ldots + y_n)\ M(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Εφαρμόζοντας αυτό στο πρόβλημα του κειμένου , έστω $\alpha_k = f(x_{k-1}),\ k = 1,2,\ldots,n$ και $y_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,2, \ldots, n-1$, $y_n = X - x_{n-1}$. Χρησιμοποιώντας το πόρισμα, το

συμπέρασμα του Cauchy είναι $f(x_0)(x_1-x_0)+\ldots+f\ (x_{n-1})(X-x_{n-1}) = (X-x_0\ )\ M[f(x_0)\ldots f(x_{n-1})]$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of Irrational Numbers. *For the Learning of Mathematics*, *7*, n°2, 18-23.

Beckers, D. (1999). Lagrange in the Netherlands: Dutch Attempts to Obtain Rigor in Calculus, 1797–1840. *Historia Mathematic, 26*, 224– 238.

Bolzano, B. (1810). *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik Erste Lieferung* , Prague.

Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzles Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.*

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications, Inc.

Brousseau, G. (1986). Basic Theory and Methods in the Didactics of Mathematics, in P.F.L.Verstappen (ed.), *Second Conference on Systematic Co-operation Between Theory and Practice in Mathematics Education,* 2-7 *November* 1986. *Lochem, The Netherlands. Part1. Report* (pp.109-161), Enschede: Instituut voor Leerplanontwikkeling, 1988.

Brousseau, G. (1986b). Fondenets et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2) 33-55.

Bourbaki, N. (1960). *Eléments de théorie mathématique*, Paris, Hermann.

Caravita, S.(2001). A re-framed conceptual change theory? *Learning and Instruction, 11,* 421–429.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l' École royale polytechnique*. Paris: Debures. In *Oeuvres complètes*, Series 2, Vol. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1897. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90195m

Cauchy, A. L. (1823). *Résumé des leçons données à 1' École royale polytechnique sur le calcu1 infinitésimal.* In *Oeuvres complètes*, Series 2, Vol. 4. pp. 4-261. Paris: Gauthier-Villars, 1899. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90196z

Cauchy, A. L. (1826). *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.* Paris: Debures. In *Oeuvres complètes*, Series 2, Vol. 5. Paris: Gauthier-Villars, 1903. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k901979

Cauchy, A. L. (1829). *Leçons sur le calcul différentiel*. Paris: Debures. In *Oeuvres complètes*, Series 2, Vol. 4, pp. 263-609. Paris: Gauthier-Villars, 1899. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90196z

Cauchy, A. L. (1833). *Résumés analytiques a Turin.* Turin: Imprimerie royale. In *Oeuvres complètes,* Series 2. Vol. 10, pp. 7-184. Paris: Gauthier-Villars, 1895. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k902022

Cauchy, A. L. (1844). *Mémoire sur les fonctions continues.* In *Oeuvres complètes,* Series 2. Vol. 8, pp. 145-160. Paris: Gauthier-Villars, 1895. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90188b

Cauchy, A. L. (1853). Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable reelle ou imaginaire. entre des limites donntes. In *Oeuvres complètes*, Series 1, Vol. 12, pp. 30-36. Paris: Gauthier-Villars, 1900. (Bibliothèque nationale de France). Retrieved December 15, 2005, from:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90192k

Cocking, R. R., Mestre, J. P., & Brown, A. L. (2000). New developments in the science of learning: using research to help students learn Science and Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21* (1), 1–13.

D' Alembert, J.le Rond. (1780-1782). Preface and articles "Différentiel", "Exhaustion" and "Limite" in *Encyclopedie ou Dictionnaire raisonne des sciences, des arts et des métiers.* 36 vols., Lausanne and Berne. Retrieved February 2, 2006, from:
http://diderot.alembert.free.fr/L.html

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 85–109.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Edwards, C. H., Jr. (1979). *The historical development of the calculus*. New York/Berlin: Springer - Verlag.

Ernest, P. (1994). *Constructing Mathematical knowledge: Epistemology and Mathematics Education.* London: The Falmer Press.

Euler, L .(1770). *Elements of Algebra*. New York: Springer-Verlag, 1984.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne: Bousquet, 1748, in *Opera omnia*, 3 series, Leipzig, Berlin, and Zurich: Teubner, 1911 [series 1, vols. 8-9]. Retrieved January 10, 2006, from:
http://www.eulerarchive.com

Euler, L.(1748). *Introduction to Analysis of the Infinite Book 1*, tr. by John B.Blanton, Springer –Verlarg, 1988.

Euler, L. (1775). *Institutiones calculi differentialis*, St. Petesburg: in *Opera omnia*, 3 series, Leipzig, Berlin, and Zurich: Teubner, 1911 [series 1, vol.10]. Retrieved January 12, 2006, from:
http://www.eulerarchive.com

Euler, L. (1775). *Foundations of Differential Calculus*, New York:Springer-Verlag, 2000 translation of first nine chapters of *Institutiones calculi differentialis.*

Fisher, G.M. (1978). Cauchy and the infinitely small. *Historia Mathematica, 5* (3), 313–331.

Fraser, G.C. (1987). Joseph Louis Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus. *Historia Mathematica, 14*, 38-53.

Freudenthal, H. (1971). Did Cauchy plagiarize Bolzano? *Archive for History of Exact Sciences, 7.*

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F. (1999). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case studies in Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics, 17*, 1.

Giusti, E. (1984). Gli "errori" di Cauchy e i fondamenti dell'analisi. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 4* (2), 24–54.

Grabiner, J. V. (1974). Is mathematical truth time-dependent? *American Mathematical Monthly, 81*, 354-365.

Grabiner, J. V. (1978). The origins of Cauchy's Theory of the Derivative, *Historia Mathematica, 5,* pp 379-409.

Grabiner, J. V. (1981). *The origin of Cauchy's rigorous calcu1us.* Cambridge, MA: MIT Press.

Grabiner, J. V. (1983 b). "The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weirstrass". *Mathematics Magazin, 56*, 195-206.

Grattan-Guinness, I. (1970). Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century. *Archive for History of Exact Sciences, 6.*

Grattan-Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica*, *31* , 163–185.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 2, 115–141.

Gray, E. & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procept: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings of PME,* 25 Utrecht 65 –72.

Guzmán, de M. (1993). Origin and Evolution of Mathematical Theories: Implications for Mathematical Education. *Newsletter of the International Study Group on the History and Pedagogy of Mathematics, 8*, 2-3.

Hadamard, J.S. (1949) *The Psychology of Invention in the Mathematics Field* , Prinston University Press, NJ.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *4*, 396-428.

ICMI Study, (2000). *History in Mathematics Education*, (ed.) Fauvel, J & Maanen, J. van, Dordrecht: Kluwer Academic Publications .

Kaput, J.J. (1979). Mathematics and Learning: Roots of epistemological status, in Lochhead, J and Clement, J (eds.) *Cognitive Process Institution*, Franklin Institute Press.

Katz, J. V. (1997). Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics *For the Learning of Mathematics, 17* (1).

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely small and the Infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

Knuth, E.J. & Elliot, R.L. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher, 91*, 14–17.

Lagrange, J.L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, degagé es de toute consideration d'infiniment petits ou d'' evanouissans, de limites ou de fluxions, et réduites ` al'analyse algébrique des quantité es finies*, in *Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A.Serret,* Vol. 9, Paris: Gauthiers–Villars, 1881. (Göttinger Digitalisierungs Zentrum). Retrieved January 8, 2006, from:
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D41005.html

Lagrange, J.L. (1798). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrées*, in *Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A.Serret,* Vol. 9, Paris: Gauthiers–Villars, 1881. (Göttinger Digitalisierungs Zentrum). (Göttinger Digitalisierungs Zentrum). Retrieved January 8, 2006, from:
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D41005.html

Lagrange, J.L.. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*, in *Oeuvres de Lagrange*, t.10 (Paris, 1884), 10. (Göttinger Digitalisierungs Zentrum). Retrieved January 8, 2006, from:
http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D41005.html

Lakatos, I. (1963). Proofs and Refutations. *British Journal for the Philosophy of Science, 14,* pp. 1-25, 120-139, 221-243.

Lakatos, I. (1978). *Philosophical Papers,* (ed). John Worrall and Gregory Currie, 2 vols., Cambridge : Cambridge Univ. Press.

Laubenbacher., R & Pengelley, D. (1992). Great Problems of Mathematics: A course based on Original Sources. *The American Mathematical Monthly*, *99* (4).

Laugwitz, D. (1987). Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica*, *14,* 258-274.

Laugwitz, D. (1994). Real-variable analysis from Cauchy to non-standard analysis. In: Grattan-Guinness, I. (Ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London. Ch. 3.3, pp. 318–330.

Maanen, J. van (1991). L' Hospital's weight problem. *For the Learning of Mathematics, 11* n° 2 44-47.

Mancosu, P. (1989). The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706. *Historia Mathematica, 16*, 224-248.

Mariotti, M. & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 219–248.

NCTM (1989, 2000). Curriculum and Evaluation Standards, *for School Mathematics* the National Council of teachers of Mathematics Reston, Virginia.

Radford, L.(1997). On psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17* (1).

Ransom, P., Arcavi, A., Barbin, E. & Fowler, D. (1991). The experience of History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 11* n°2, 7-16.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis.* Amsterdam: North-Holland.

Rusnock, P. (1997). Remaking mathematics: Bolzano reads Lagrange. *Acta Analytica, 18,* 51-72.

Rusnock, P. (1999). Philosophy of mathematics: Bolzano's responses to Kant and Lagrange. *Revue d'Histoire des Sciences, 52* (3/4).

Rusnock, P. & Kerr-Lawson, A. (2005). Bolzano and uniform continuity. *Historia Mathematica, 32*, 303-311.

Russ, S.B. (1980). A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. *Historia Mathematica, 7*, 156–185.

School of Mathematics and Statistics University St. Andrews, Scotland. Retrieved January 20, 2006, from :
(http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Bookpages/Bolzano10a.gif)

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Sfard, A. (1994). "What history of mathematics has to offer to psychology of mathematics learning?", in J.P. da Ponte & J.F. Matos (eds.). *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Volume I, Lisbon: University of Lisbon, 129-132.

Sfard, A. (1995). The development of Algebra: Confronting Historical and Psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (1998). Symbolizing mathematical reality into being - or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other. In P. Cobb, K. Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sinaceur, H. (1992). Cauchy, Sturm et les racines des équations. *Revue d' Histoire des Sciences*, Tome XLV-1, Janvier – Mars.

Sinaceur, H. (1999). Réalisme mathématique, réalisme logique chez Bolzano. *Revue d' Histoire des Sciences*, *52*/3-4, 457-477.

Struik, D. J. (1966). Συνοπτική Ιστορία των μαθηματικών, Αθήνα: Εκδ. Δαίδαλος.

Struik, D.J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151-169.

Tall, D. (1991). Preface. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. xiii±xv). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishing.

Tall, D. (2005). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof . Retrieved January 10, 2006, from: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005e-crem-child-adult.pdf

Thurston, W. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society, 37* , 7, 844-850.

Tzanakis, C. & Kourkoulos, M. (2000). Justification in mathematics and procedures on which it is based: A historical approach for didactical purposes *Proceedings of the HPM Conference : "History in Mathematics Education: Challenges for a new millenium"* W-S Horng, F-L Lin (eds), Taipei: National Taiwan Normal University.

Youschkevitch, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*, 37-85.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο . Οδηγίες για τη διδασκαλία, έκδοση 2005.

The Astronomer

Johannes Vermeer