ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική μελέτη

ΟΛΥΜΠΙΑ ΚΑΡΑΛΗ

Θέμα

Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ

Αθήνα, Δεκέμβριος 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) **Φιλίππου Γεώργιος** (επιβλέπων Καθηγητής)	Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου	…….
2) **Γιαννακούλιας Ευστάθιος**	Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ	……
3) **Σακονίδης Χαράλαμπος**	Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Θράκης	……

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Γιώργο Φιλίππου για την πολύτιμη βοήθειά του, την καθοδήγηση και τις συμβουλές του κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, κ. Χ. Σακονίδη για τις πολύτιμες συμβουλές του ως μέλους της τριμελούς επιτροπής. Ακόμη, ευχαριστώ τον αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Ε. Γιαννακούλια, που με τίμησε με τη συμμετοχή τους ως μέλους της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον διευθυντή του σχολείου στο οποίο χρειάστηκε να χορηγήσω τα δοκίμια για την εκπόνηση της μελέτης.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για την αμέριστη υποστήριξή τους.

Καραλή Ολυμπία

Αθήνα, 15 Δεκεμβρίου 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εισαγωγή.....10

Επίλυση μαθηματικού προβλήματος και διδασκαλία των μαθηματικών.....13

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya.....15

Το πρόγραμμα της διεθνούς αξιολόγησης των μαθητών (PISA).....16

Η κλίμακα αξιολόγησης του PISA.....18

Σκοπός της έρευνας.....19

Η αναγκαιότητα της έρευνας.....20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη.....24

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya.....24

Βασικές ικανότητες για την επίλυση προβλήματος.....27

Εννοιολογικά Μοντέλα και επίλυση προβλήματος.....32

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος.....36

Η διδασκαλία που βασίζεται στην Επίλυση Προβλήματος.....39

Επίλυση προβλήματος και Αναλυτικό πρόγραμμα.....48

Η επίλυση προβλήματος στο ελληνικό σχολείο.....54

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή.....57

Επιλογή μεθόδου και συμμετεχόντων.....57

Μέσα συλλογής δεδομένων.....58

Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας.....60

Αξιολόγηση των φύλλων εργασίας.....61

Β΄ Φάση της έρευνας.....62

Σχεδιασμός πρωτοκόλλου συνεντεύξεων.....65

Διεξαγωγή συνεντεύξεων.....65

Πρωτόκολλο ανάλυσης δεδομένων 66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή..... 72

Ο βαθμός κατανόησης των πρωτότυπων προβλημάτων και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους..... 73

Ο βαθμός κατανόησης των προβλημάτων ρουτίνας και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους..... 79

Η επίδοση των μαθητών στα πρωτότυπα προβλήματα και στα προβλήματα ρουτίνας 95

Η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων ρουτίνας σε σχέση με τις στρατηγικές επίλυσης πρωτότυπων προβλημάτων..... 97

Ανασκόπηση της λύσης 100

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη 103

Ο βαθμός κατανόησης και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στα πρωτότυπα προβλήματα και στα προβλήματα ρουτίνας 103

Η επίδοση των μαθητών στα δυο δοκίμια 105

Η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών επίλυσης των προβλημάτων στα δυο δοκίμια 109

Έλεγχος απάντησης – Ανασκόπηση λύσης 110

Εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες 111

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 115

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄ 118

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄ 125

Στους γονείς μου,

Χρήστο και Βάσω

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί έντονη αύξηση του ενδιαφέροντος των ερευνητών στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Τα προβλήματα διακρίνονται σε προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις και σε πρωτότυπα προβλήματα.

Πολλοί ερευνητές πρότειναν τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω ρεαλιστικών προβλημάτων (Problem-Based Learning, PBL), ένας τρόπος διδασκαλίας που συμβάλλει στην ανάπτυξη ευρείας γνώσης των μαθηματικών. Σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλήματος διαδραματίζουν η εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος, αλλά και οι αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές, εσωτερικές είτε εξωτερικές. Τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται, πρέπει να είναι ρεαλιστικά και να αναφέρονται σε καθημερινές εμπειρίες των μαθητών.

Αν και η σημαντικότητα της επίλυσης προβλήματος είναι δεδομένη εδώ και χρόνια, ωστόσο η θέση της στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών διαφέρει από χώρα σε χώρα. Σε ορισμένες χώρες μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα, η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως βασικός στόχος της εκπαίδευσης των

Αφορμή για την παρούσα μελέτη αποτέλεσαν τα αποτελέσματα του διαγωνισμού PISA (2003). Ο διαγωνισμός αυτός έχει στόχο να εξετάσει αν οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές είναι ικανοί να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής και όχι στο αν απλώς μπορούν να αναπαράγουν τις σχολικές γνώσεις. Στο διαγωνισμό του 2003 οι μαθητές εξετάστηκαν μεταξύ άλλων και στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στο διαγωνισμό ήταν πολύ χαμηλές. Κρίθηκε, λοιπόν χρήσιμο να εξετάσουμε τους τρόπους με τους οποίους αντιμετωπίζουν οι δεκαπεντάχρονοι μαθητές πρωτότυπα προβλήματα από το PISA (2003) καθώς και προβλήματα ρουτίνας. Τα ερωτήματα στα οποία αναζητήθηκαν απαντήσεις ήταν τα ακόλουθα:

1. Μέχρι ποιού βαθμού κατανοούν οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου ένα πρωτότυπο πρόβλημα ή ένα πρόβλημα ρουτίνας και ποιες συγκεκριμένες δυσκολίες αντιμετωπίζουν κατά την επίλυσή τους;
2. Πως συγκρίνεται η επίδοση των μαθητών σε πρωτότυπα προβλήματα και σε προβλήματα ρουτίνας; Ο μαθητές χρησιμοποιούν πιο αποτελεσματικές

στρατηγικές στα προβλήματα ρουτίνας απ' ότι στα πρωτότυπα προβλήματα;

3. Μέχρι ποιού βαθμού οι μαθητές αναστοχάζονται πάνω στις λύσεις των προβλημάτων, δηλαδή εξετάζουν τις λύσεις τους και ελέγχουν αν αυτές ταιριάζουν με τα δεδομένα;

Στην παρούσα έρευνα έλαβαν μέρος 55 μαθητές της Γ΄ τάξης του γυμνασίου και κλήθηκαν να απαντήσουν σε δυο δοκίμια. Το πρώτο δοκίμιο περιείχε προβλήματα ρουτίνας, ενώ το δεύτερο δοκίμιο περιείχε πρωτότυπα προβλήματα από το διαγωνισμό του PISA 2003. Στη συνέχεια, ανάλογα με τις επιδόσεις των μαθητών στα δυο δοκίμια, επιλέχτηκαν 21 από αυτούς για προσωπική συνέντευξη, με σκοπό να εμβαθύνουμε στον τρόπο σκέψης τους αλλά και στις δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά την επίλυση των προβλημάτων. Τα ποσοτικά δεδομένα που συλλέχθηκαν επεξεργάστηκαν και αναλύθηκαν με περιγραφική και επαγωγική στατιστική μέσω του λογισμικού πακέτου SPSS.

Οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν ορισμένα από τα πρωτότυπα προβλήματα. Αντίθετα, κατανόησαν τα προβλήματα ρουτίνας, ωστόσο παρατηρήθηκε σύγχυση ή και η άγνοια των εννοιών και των συμβόλων. Οι επιδόσεις των μαθητών στα δυο δοκίμια ήταν πολύ χαμηλές, με τις επιδόσεις τους στα πρωτότυπα προβλήματα να είναι σχετικά καλύτερες από τις επιδόσεις τους στα προβλήματα ρουτίνας. Παρατηρήθηκε επίσης, πως οι μαθητές επέλεγαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης και στα δυο δοκίμια αν και στο δεύτερο δοκίμιο οι αποτελεσματικές στρατηγικές ήταν περισσότερες απ' ότι στο πρώτο. Τέλος, παρατηρήθηκε ότι ελάχιστοι μαθητές έλεγχαν την ορθότητά της απάντησής τους σε σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος.

Συμπερασματικά λοιπόν, προέκυψε πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών κατανόησε τα προβλήματα ρουτίνας, αλλά αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες με τις προτάσεις που εξέφραζαν σχέσεις ανάμεσα σε ποσοτικές μεταβλητές. Το γεγονός ότι στο δεύτερο δοκίμιο χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες αποτελεσματικές στρατηγικές, επιβεβαιώνει έρευνες σύμφωνα με τις οποίες, όταν οι μαθητές δεν χρειάζεται να κατασκευάσουν κάποιο αλγεβρικό ή γεωμετρικό μοντέλο αλλά να κρίνουν με βάση τις προσωπικές τους εμπειρίες, ώστε να λύσουν ένα πρόβλημα, σημειώνουν μεγαλύτερη επιτυχία. Βρέθηκε επίσης, πως οι μαθητές τείνουν να μην ελέγχουν την

ορθότητα των απαντήσεών τους, ανεξάρτητα από το είδος του προβλήματος που έλυναν.

Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας παρατηρήθηκε πως οι μαθητές έδειχναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην επίλυση των πρωτότυπων προβλημάτων. Αυτό το ενδιαφέρον των μαθητών θα μπορούσε να αξιοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς, για παρουσίαση μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια ρεαλιστικών προβλημάτων. Οι μαθητές μέσω της διδασκαλίας που βασίζεται σε πρωτότυπα προβλήματα της καθημερινής ζωής, θα εμπλέκουν στη διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών και θα αντιληφθούν το σκοπό της διδασκαλίας τους και τη χρησιμότητά τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά προβλήματα κατέχουν κεντρική θέση στα προγράμματα των σχολικών μαθηματικών εδώ και πολλά χρόνια σε όλες τις χώρες του κόσμου. Μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο παρατηρήθηκε μια τάση για ανανέωση των Μαθηματικών που διδάσκονταν στα σχολεία, η οποία οδήγησε στην κίνηση "των νέων Μαθηματικών". Τα νέα μαθηματικά βασίζονταν κυρίως στη θεωρία συνόλων και στη δομή της μαθηματικής γνώσης, ωστόσο θεωρήθηκαν αποτυχία πριν κλείσει η δεκαετία του 1960. Η γενική αντίληψη ήταν ότι οι μαθητές δεν κατανοούσαν τις αφηρημένες έννοιες των νέων μαθηματικών και αποτύγχαναν να αφομοιώσουν τις βασικές δεξιότητες που αποκτούσαν οι προηγούμενες γενιές. Έτσι λοιπόν επικράτησε το σύνθημα "πίσω στα βασικά" (back to the basics) με το σκεπτικό ότι έχει ιδιαίτερη σημασία να διασφαλιστεί η κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών από όλους ως προϋπόθεση για ανώτερες μορφές σκέψης. Η έμφαση που δόθηκε όμως σε μηχανικές δεξιότητες κατέληξε σε μια γενιά που είχε μειωμένη επίδοση στη μαθηματική σκέψη και την επίλυση προβλημάτων, χωρίς να είναι καλύτερη ούτε και στα βασικά. Έτσι, το εκκρεμές άρχισε να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση, προς την επίλυση προβλήματος. Η πρώτη μεγάλη πρόσκληση προήλθε από το National Council of Supervisors of Mathematics το 1977 και ακολούθησε το National Council of Teachers of Mathematics το 1980 (NCTM, Agenda for Action). Τη δεκαετία του 1980 ξεκίνησε στις ΗΠΑ μια κίνηση που είχε ως βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης την ΕΜΠ.

Από το 1980 που εντάθηκε η μελέτη της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, πολλοί ερευνητές επιχείρησαν να δώσουν τον κατάλληλο ορισμό, στις έννοιες «πρόβλημα» και «επίλυση μαθηματικού προβλήματος». Καμία από αυτές τις προσπάθειες όμως δεν κατάφερε να δώσει ακριβές νόημα στις δυο έννοιες. Για τον Mayer (1985) «πρόβλημα» εμφανίζεται όταν κάποιος αντιμετωπίζει μια δεδομένη κατάσταση, θέλει να φθάσει σε μια άλλη ζητούμενη, αλλά δεν γνωρίζει άμεσο τρόπο

πρόσβασης ή επίτευξης του σκοπού αυτού. Βασικό στοιχείο είναι η άγνοια της μεθόδου επίλυσης.

Ο Schoenfeld (1992) ορίζει ως προβλήματα τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, για εξάσκηση και για μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων. Ο συγγραφέας, διακρίνει τα προβλήματα σε "προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις" και σε "προβληματικές καταστάσεις ή πρωτότυπα προβλήματα".

Τα προβλήματα ρουτίνας είναι ασκήσεις που έχουν ως βασικό στόχο την ανάπτυξη μιας πολύ συγκεκριμένης τεχνικής για την εκτέλεση πράξεων από μνήμης. Η τεχνική υποδεικνύεται αρχικά με ένα λυμένο παράδειγμα και ακολουθούν πολλά όμοια προβλήματα για εμπέδωση. Μετά από ένα σύνολο όμοιων ασκήσεων αναμένεται πως ο μαθητής θα έχει αποκτήσει ένα πρόσθετο μαθηματικό εργαλείο. Σύμφωνα με αυτή την άποψη γίνεται έμμεσα αποδεκτό ότι η μαθηματική γνώση και κατανόηση απαρτίζεται από ένα σύνολο τέτοιων δεξιοτήτων και τεχνικών (Schoenfeld, 1992).

Τα πρωτότυπα προβλήματα είναι προβλήματα με ένα βαθμό πολυπλοκότητας, που περιγράφουν μια προβληματική κατάσταση. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης, αλλά οι μαθητές πρέπει να συνδυάσουν τις γνώσεις τους και τις ικανότητές τους, ώστε να οδηγηθούν στη λύση (Schoenfeld, 1992). Μια πιο πρόσφατη έρευνα ορίζει τα πρωτότυπα προβλήματα ως μη τετριμμένα προβλήματα τα οποία δεν έχουν μια συνηθισμένη στρατηγική επίλυσης, αλλά παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν νέες στρατηγικές επίλυσης. Πιο συγκεκριμένα, τα πρωτότυπα προβλήματα μέσα από μια παραστατική εκφώνηση περιγράφουν στο μαθητή προβληματικές καταστάσεις οικείες με τις εμπειρίες του. Η λύση αυτών των προβλημάτων δεν βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο αλλά απαιτείται από τους μαθητές να δημιουργήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις και να συνδυάσουν ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων. Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν τα δικά τους μοντέλα λύσης και να αποκτήσουν πολύ σημαντικές μαθηματικές αρχές (Doorman, et al., 2007)

Η επίλυση προβλήματος, σύμφωνα με τον Mayer (1985) αναφέρεται στο σχεδιασμό της διαδικασίας μετάβασης από μια υφιστάμενη κατάσταση σε μια ζητούμενη. Η επίλυση προβλήματος είναι μια σειρά από νοητικές ενέργειες, οι οποίες

οδηγούν σε κάποιο σκοπό ή στην εύρεση του κατάλληλου τρόπου να συμπληρωθεί το κενό ανάμεσα στη δεδομένη κατάσταση και στον τελικό προορισμό. Ο συγγραφέας διακρίνει δυο κύρια συστατικά της διαδικασίας ΕΜΠ· τη νοητική αναπαράσταση του προβλήματος και την ανακάλυψη των μέσων για την επίλυσή του.

Λίγο αργότερα, ο όρος "επίλυση μαθηματικού προβλήματος" χρησιμοποιείται με τρεις λειτουργικές έννοιες: η ΕΜΠ ως περιεχόμενο, η ΕΜΠ ως δεξιότητα και η ΕΜΠ ως τέχνη (Stanik & Kilpatrick, 1988, στο Schoenfeld, 1992, σελ.4-5). Στην πρώτη περίπτωση τα προβλήματα χρησιμοποιούνται με σκοπό την επιτυχία άλλων στόχων του αναλυτικού προγράμματος, όπως για αιτιολόγηση της διδασκαλίας των μαθηματικών ή για πνευματική απόλαυση. Επίσης τα προβλήματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν και ως μέσα για την ανάπτυξη νέων δεξιοτήτων αλλά και για εξάσκηση.

Η δεύτερη λειτουργία δίνει έμφαση στην ανάπτυξη δεξιότητας στην ΕΜΠ. Για την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων απαιτούνται δεξιότητες ανώτερου νοητικού επιπέδου οπότε η ΕΜΠ τίθεται στο ανώτερο επίπεδο μιας ιεραρχίας δεξιοτήτων προς απόκτηση. Η διδασκαλία τεχνικών επίλυσης μαθηματικού προβλήματος περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως η κατασκευή διαγράμματος, η παρατήρηση μοτίβων, η επίλυση απλούστερης περίπτωσης και η εξάσκηση με κατάλληλα προβλήματα. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, διευρύνεται το σύνολο των δεξιοτήτων και τεχνικών που συναποτελούν τη μαθηματική γνώση και κατανόηση, ώστε να περιλαμβάνει και δεξιότητες ανώτερου νοητικού επιπέδου.

Η τρίτη λειτουργία αναφέρεται στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος ως τέχνης. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, η διαδικασία της ΕΜΠ αναβαθμίζεται ως την "καρδιά των μαθηματικών", αν όχι και ισοδύναμη με τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά τώρα θεωρούνται το μέσον για την καλλιέργεια και την εξάσκηση ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος.

Ένας πιο σύγχρονος ορισμός για την επίλυση προβλήματος παρουσιάζεται στην έκθεση του προγράμματος για τη διεθνή αξιολόγηση των μαθητών (PISA, 2003). Η επίλυση προβλήματος ορίζεται ως: «*Η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν πραγματικές καταστάσεις με αλληλοεξαρτώμενους περιορισμούς, όπου η πορεία της λύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που*

απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δεν κατατάσσονται σε μια και μοναδική περιοχή των μαθηματικών, της επιστήμης ή της ανάγνωσης» (PISA, 2003, σελ.24).

Παρατηρώντας τους παραπάνω ορισμούς συμπεραίνουμε πως υπάρχει ασυμφωνία για το ακριβές νόημα του όρου επίλυση προβλήματος. Ενοποιό στοιχείο όμως των παραπάνω ορισμών είναι η ομογνωμία που παρατηρείται αναφορικά με τη σημασία της δραστηριότητας. Ενδεικτική είναι η άποψη του Halmos (1980) πως η επίλυση μαθηματικού προβλήματος αποτελεί την «καρδιά των Μαθηματικών» (Schoenfeld,1992; Stacey, 2005)». Συγκεκριμένα ο Halmos αναφέρει:

«*Από τι αποτελούνται πράγματι τα μαθηματικά; Από αξιώματα, θεωρήματα, ορισμούς, τύπους και μεθόδους; Ασφαλώς τα συστατικά αυτά είναι απαραίτητα, χωρίς αυτά δεν μπορούν να υπάρξουν τα μαθηματικά. Είναι, ωστόσο, μια άποψη ότι κανένα από αυτά δεν είναι η καρδιά του αντικειμένου, ότι η κύρια αιτία ύπαρξης του μαθηματικού είναι να επιλύει προβλήματα και κατά συνέπεια το πραγματικό περιεχόμενο των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και η επίλυσή τους* (αναφορά στο Schoenfeld, 1992, σελ.5)».

Επίλυση μαθηματικού προβλήματος και διδασκαλία των μαθηματικών

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992), η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να αντιληφθούν την επιστήμη των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν το σκοπό της διδασκαλίας τους, και τη δύναμη των μαθηματικών, καθώς και να γνωρίσουν την ιστορία τους. Ακόμη, η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να δίνει στους μαθητές μια αίσθηση του τι ακριβώς είναι τα Μαθηματικά και πώς γίνονται στο επίπεδο που μπορούν να κατανοήσουν και να βιώσουν τα παιδιά. Το αποτέλεσμα της διδασκαλίας των μαθηματικών θα πρέπει να είναι πρώτα απ’ όλα η εκτίμηση των μαθηματικών και η αίσθηση αυτοπεποίθησης και αυτεπάρκειας. Η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει ακόμη να συμβάλλει ώστε:

- Να κατανοήσουν οι μαθητές τις βασικές μαθηματικές έννοιες. Στόχος είναι η εννοιολογική κατανόηση και η ικανότητα δυναμικής και ευέλικτης εφαρμογής των εννοιών, παρά η ανάπτυξη μηχανικών δεξιοτήτων.

- Οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να διερευνούν ένα ευρύ φάσμα προβληματικών καταστάσεων, ώστε να αναπτύξουν τις ανάλογες , τεχνικές και στρατηγικές.

- Να αποκτήσουν οι μαθητές "μαθηματική οπτική θεώρηση", μια προδιάθεση δηλαδή να αναλύουν και να κατανοούν μαθηματικές δομές και σχέσεις.

- Οι μαθητές να μάθουν να ακριβολογούν τόσο στο γραπτό όσο και στον προφορικό λόγο. Επίσης, να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα να παρουσιάζουν τα επιχειρήματα και τις αιτιολογήσεις τους με καθαρότητα και συνέπεια, ανάλογα με το επίπεδό τους.

- Να αναπτύξουν οι μαθητές την ικανότητα ανάγνωσης και χρήσης κειμένων και άλλου μαθηματικού υλικού, ώστε να καταστούν ανεξάρτητοι χρήστες και ερμηνευτές των μαθηματικών.

Στην αναφορά του NCTM (1991) τονίζεται πως η ουσία της μελέτης των Μαθηματικών είναι η άσκηση στην έρευνα, στην εικασία και στον έλεγχο. Όλα αυτά όμως αποτελούν φάσεις της ΕΜΠ. Η ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στην ΕΜΠ μπορεί επιτευχθεί όταν οι μαθητές δουλεύουν σε διαφορετικές καταστάσεις στις οποίες προτρέπονται να διατυπώσουν και να δημιουργήσουν καινούρια προβλήματα, πριν, κατά τη διάρκεια, ή αφού λύσουν το πρόβλημα. Έτσι λοιπόν, σε ένα περιβάλλον που επιτρέπει την ενεργή συμμετοχή στην έρευνα και την ΕΜΠ, οι μαθητές γίνονται ανεξάρτητοι, ικανοί να θέσουν προβλήματα στον εαυτό τους μέσω των μεταγνωστικών ικανοτήτων και να αναρωτηθούν και να κατευθύνουν μόνοι τους τις τεχνικές τους (NCTM, 1991, σελ.95, αναφορά στο Thom & Pirie, 2002).

Ο Davis (1992) θεωρεί την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ως έναν από τους κύριους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τονίζει ότι είναι προτιμότερο οι δάσκαλοι να έχουν ως αφετηρία τα προβλήματα και δουλεύοντας πάνω σε αυτά να καταλήγουν στα Μαθηματικά, παρά να ξεκινούν από τις μαθηματικές ιδέες και στη συνέχεια να τις εφαρμόζουν. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές θα θεωρήσουν τα Μαθηματικά ως το αποτέλεσμα δουλειάς πάνω σε προβλήματα. Τα Μαθηματικά για τον Davis δεν περιλαμβάνουν απλώς τις λύσεις που δίνουν οι μαθητές στα μαθηματικά διλήμματα, αλλά και τις μεθόδους που ανακαλύπτουν για να λύσουν ένα πρόβλημα. Δηλαδή, τους μαθηματικούς όρους και τις πράξεις που εφαρμόζουν οι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα, τις θεωρίες και τις αρχές που δημιουργήθηκαν από την έρευνα των μαθητών και τις νοητικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν.

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya

Ο πιο γνωστός μαθηματικός στον τομέα της αντίληψης των μαθηματικών ως διαδικασίας επίλυσης προβλήματος είναι ο George Polya. Το σχετικό του έργο βρίσκεται στα βιβλία How to Solve it (1945), Mathematics and Plausible Reasoning (1954) και Mathematical Discovery (1962). Ο Polya θεωρούσε τα μαθηματικά ως δραστηριότητα και τόνιζε ότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες που θα έδιναν αναλυτικές συνταγές για την πιο χρήσιμη επιστήμη σκέψης. Αλλά και να μπορούσαν να διατυπωθούν τέτοιοι κανόνες, δεν θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμοι, διότι θα έπρεπε κάποιος να τους κάνει σάρκα και αίμα του, ώστε να μπορεί να τους εφαρμόζει. Εκείνο που χρειάζεται περισσότερο είναι η δραστήρια εμπλοκή στην επίλυση προκλητικών προβλημάτων παρά κανόνες, οι οποίοι βέβαια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία.

Μέρος αυτής της εμπλοκής είναι για τον Polya η δραστηριότητα ανακάλυψης, η οποία λαμβάνει χώρα κυρίως μέσα από εικασίες και έλεγχο. Η φύση των μαθηματικών γίνεται αντιληπτή ως όμοια με τις φυσικές επιστήμες παρά ως τυπική και τυποποιημένη επιστήμη. Για τον Polya η επιστημολογία των μαθηματικών και η παιδαγωγική τους είναι στενά συνυφασμένες. Η αντίληψη των μαθηματικών που θα αποκτήσει ο μαθητής είναι ανάλογη με τις πραγματικές του εμπειρίες.

Ο Polya θεωρεί την επίλυση προβλήματος θεμελιώδη ικανότητα για το ανθρώπινο είδος καθώς το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής μας σκέψης αφορά τα προβλήματα. Στο βιβλίο του «How to solve it» διακρίνει τέσσερα ιεραρχικά στάδια που ακολουθούν οι επιτυχημένοι λύτες προβλημάτων. Το πρώτο στάδιο αφορά στην κατανόηση του προβλήματος. Το στάδιο αυτό σύμφωνα με τον συγγραφέα είναι βασικό καθώς δεν είναι δυνατό κάποιος να απαντήσει μια ερώτηση που δεν έχει κατανοήσει. Το δεύτερο στάδιο αφορά στην επινόηση ενός σχεδίου λύσης. Το στάδιο αυτό θεωρείται ιδιαίτερα κρίσιμο, καθώς η σύλληψη ενός σχεδίου ενδέχεται να είναι μια χρονοβόρα διαδικασία. Συχνά θα χρειαστεί οι μαθητές να επιχειρήσουν αρκετές αποτυχημένες προσπάθειες μέχρι να καταλήξουν σε μια αποτελεσματική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος.

Στο τρίτο στάδιο επίλυσης προβλήματος ο μαθητής θα πρέπει να εφαρμόσει τη στρατηγική στην οποία κατέληξε στο δεύτερο στάδιο. Το στάδιο αυτό θεωρείται από το συγγραφέα πιο εύκολο από τα προηγούμενα. Ο μαθητής κυρίως χρειάζεται υπομονή ώστε να εφαρμόσει σωστά τη στρατηγική του. Το τελευταίο στάδιο αναφέρεται στην ανασκόπηση της λύσης από το μαθητή. Ο μαθητής στη φάση αυτή πρέπει να κοιτάξει ξανά τη λύση που εφάρμοσε και να επανεξετάσει το αποτέλεσμα, ώστε να βεβαιωθεί για την ορθότητα του. Το στάδιο αυτό συχνά παραλείπεται, τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από τους μαθητές. Ο συγγραφέας θεωρεί το στάδιο αυτό πολύ σημαντικό, καθώς συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος.

Το πρόγραμμα της διεθνούς αξιολόγησης των μαθητών (PISA)

Το Πρόγραμμα PISA (Program for International Student Assessment) που έγινε το έτος 2003 είχε στόχο να αξιολογήσει τις επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά, την επιστήμη και τη μητρική γλώσσα. Σκοπός του διαγωνισμού ήταν να εξετάσει αν οι μαθητές έχουν διαθεματικές ικανότητες, αλλά και ικανότητες που αφορούν στην ανάγνωση, στην επιστήμη και στα Μαθηματικά και κατά πόσο οι μαθητές είναι ικανοί να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Ένα κομμάτι του διαγωνισμού αφορούσε τις διαδικασίες Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος. Η προσπάθεια αυτή διαφέρει αρκετά από τις κλασσικές μορφές αξιολόγησης σε συγκεκριμένες ενότητες της σχολικής ύλης. Το PISA έχει στόχο να αξιολογήσει κατά πόσο οι μαθητές στην ηλικία των 15 χρονών, τελειώνοντας την υποχρεωτική τους εκπαίδευση, είναι έτοιμοι να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις της καθημερινής ζωής. Αυτό το εγχείρημα εκφράζει την αλλαγή που επιχειρείται στους στόχους των προγραμμάτων σπουδών, οι οποίοι πλέον εστιάζουν στο πως οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις του σχολείου και όχι στο αν απλώς μπορούν να αναπαράγουν αυτά που μαθαίνουν. Τα βασικά χαρακτηριστικά που οδήγησαν στην ανάπτυξη του PISA είναι:

- Η πολιτική προσανατολισμού, σχεδιάζοντας και εκθέτοντας μεθόδους που έχουν καθοριστεί από τις ανάγκες των κυβερνήσεων να σχεδιάσουν υψηλού επιπέδου μαθήματα.
- Η καινοτόμος ιδέα γνώσης γραφής και ανάγνωσης σε σχέση με την ικανότητα των μαθητών να παρουσιάσουν τις γνώσεις τους σε συγκεκριμένες θεματικές

περιοχές. Οι μαθητές αναλύουν και να αιτιολογούν ενώ θέτουν, λύνουν και ερμηνεύουν προβλήματα σε διάφορες καταστάσεις.

- Η δια βίου μάθηση, η οποία δεν περιορίζεται στις ικανότητες της διδακτέας ύλης, αλλά, απαιτεί από τους μαθητές να αναφέρουν τα κίνητρά τους για μάθηση, την προσωπική τους γνώμη για τις επιδόσεις τους καθώς και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.
- Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της, σύμφωνα με τα οποία οι χώρες θα μπορέσουν να κατευθύνουν την πρόοδό τους συναντώντας τους αντικειμενικούς στόχους τους.
- Η γεωγραφική έκταση που κάλυψε˙ περίπου το ένα τρίτο του πληθυσμού της γης πήρε μέρος στην έρευνα της PISA.

Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού του PISA διακρίνονται από ένα μεγάλο βαθμό αξιοπιστίας και μπορούν να μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα της εκπαιδευτικής διαδικασίας στις πιο αναπτυγμένες χώρες του κόσμου. Στο διαγωνισμό έλαβαν μέρος 41 χώρες μεταξύ των οποίων και οι 30 χώρες του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ). Το θέμα του διαγωνισμού ήταν τα Μαθηματικά, οι φυσικές επιστήμες καθώς και η μητρική γλώσσα. Τα αποτελέσματα αυτού του διαγωνισμού χρησιμοποιούνται για:

1. Την εκτίμηση των ικανοτήτων γραφής και ανάγνωσης των μαθητών μιας χώρας σε σύγκριση με τους μαθητές των υπόλοιπων χωρών.
2. Τη δημιουργία ενός σημείου αναφοράς των επιδόσεων των μαθητών με στόχο την ενίσχυση της εκπαιδευτικής διαδικασίας.
3. Την κατανόηση των δυνατών σημείων αλλά και των αδυναμιών των εκπαιδευτικών συστημάτων των χωρών που συμμετείχαν στο διαγωνισμό.

Τα έργα του PISA είχαν στόχο να αξιολογήσουν τις ικανότητες των μαθητών ως προς την κατανόηση των προβλημάτων, την αναγνώριση των σχετικών πληροφοριών αλλά και των περιορισμών τους, την αναπαράσταση πιθανών εναλλακτικών και μεθόδων επίλυσης, την επιλογή κατάλληλης λύσης, και τέλος τον έλεγχο της λύσης. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτει πως ένας στους έξι μαθητές των OECD χωρών μπορούν μόνο να διαπραγματευτούν προβλήματα τα οποία δίνουν απευθείας τις πληροφορίες, και δεν απαιτούν την ανάλυση πολύπλοκων καταστάσεων. Ακόμη, αδυνατούν να διαπραγματευτούν προβλήματα που περιέχουν πληροφορίες από

πολλές διαφορετικές πηγές. Οι μαθητές αυτοί χαρακτηρίζονται ως αδύναμοι ή ανερχόμενοι λύτες προβλημάτων.

Η κλίμακα αξιολόγησης του PISA

Η κλίμακα αξιολόγησης του PISA έχει 3 διαφορετικά επίπεδα· ξεκινάει από τους πιο αδύνατους λύτες (επίπεδο 1) και φτάνει έως τους πιο δυνατούς (επίπεδο 3). Οι μαθητές που αξιολογούνται κάτω από το επίπεδο 1 αδυνατούν να κατανοήσουν ακόμη και τα πιο εύκολα θέματα. Οι ικανότητές τους περιορίζονται στην επίλυση πολύ απλών προβλημάτων που δεν απαιτούν πολλές αιτιολογήσεις. Επίσης, έχουν πολλές δυσκολίες στη λήψη αποφάσεων, στην ανάλυση ή εκτίμηση συστημάτων αλλά και στην αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων. Οι μαθητές του επιπέδου 1 έχουν σκορ από 405 έως 499. Οι μαθητές αυτοί μπορούν να διαπραγματευτούν σωστά μόνο προβλήματα που αφορούν μόνο μια πηγή πληροφοριών η οποία περιέχει ξεκάθαρα και καλά ορισμένα στοιχεία. Ακόμη, μπορούν να διαχειριστούν τις πληροφορίες και να τις μεταφέρουν από μια μορφή σε άλλη, π.χ. να πάρουν πληροφορίες από ένα πίνακα και να φτιάξουν ένα γράφημα.

Οι μαθητές που συγκαταλέγονται στο επίπεδο 2 έχουν σκορ από 499 έως 592. Οι μαθητές αυτοί μπορούν να χρησιμοποιούν αιτιολογικές και αναλυτικές προσεγγίσεις για να λύσουν προβλήματα που απαιτούν ικανότητες λήψης απόφασης. Είναι σε θέση να δώσουν επαγωγικούς και παραγωγικούς τρόπους αιτιολόγησης αλλά και να συγκρίνουν εναλλακτικές πιθανές περιπτώσεις. Ακόμη, οι μαθητές αυτοί μπορούν να συνδέουν πληροφορίες πολλών αναπαραστάσεων καθώς και να χειρίζονται διαφορετικού είδους αναπαραστάσεις. Τέλος, συμπληρώνουν σωστά και τα θέματα του επιπέδου 1.

Οι μαθητές που ανήκουν στο επίπεδο 3, έχουν σκορ πάνω από 592 πόντους. Είναι ικανοί να αναλύσουν σωστά τις καταστάσεις του προβλήματος, να πάρουν αποφάσεις, να φτιάξουν τις δικές τους αναπαραστάσεις ώστε να λύσουν το πρόβλημα. Επίσης λαμβάνουν υπ’ όψιν τους όλους τους περιορισμούς και στο τέλος μπορούν να διαβιβάσουν τη λύση τους σε τρίτα πρόσωπα. Ακόμη, οι μαθητές αυτού του επιπέδου, συντονίζοντας τη σκέψη τους μπορούν να χειριστούν ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών καταστάσεων που υπάρχουν στο πρόβλημα. Τα προβλήματα αυτού του επιπέδου είναι πολύ απαιτητικά και οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να

συντονίσουν τη δουλειά τους. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας συμπληρώνουν σωστά και τα θέματα του επιπέδου 2.

Το 34% των μαθητών των χωρών του OECD κυμαίνεται στο επίπεδο 2. Οι μαθητές που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία *χαρακτηρίζονται* ως *λύτες βασικών προβλημάτων* (basic problem solvers) και όπως αναφέραμε τα χαρακτηριστικά τους είναι πως δεν μπορούν να συγκρίνουν διαφορετικά στοιχεία του προβλήματος και αδυνατούν να χειριστούν πολύπλοκες καταστάσεις. Αυτές οι ικανότητες όμως είναι πολύ σημαντικές καθώς απαιτούνται στους περισσότερους εργασιακούς χώρους. Καθώς οι μαθητές προοδεύουν και μετατρέπονται σε πιο ικανούς λύτες, έχουν περισσότερες πιθανότητες να πετύχουν στον ραγδαία αναπτυσσόμενο κόσμο. Καμία από τις χώρες που συμμετείχαν δεν είχε μέση επίδοση των μαθητών της στο επίπεδο 3. Παρόλα αυτά το 25% περίπου των μαθητών της Φινλανδίας, του Βελγίου της Ιαπωνίας, της Κορέας, της Αυστραλίας, και του Χονγκ Κονγκ ανήκουν σε αυτό το επίπεδο.

Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού δεν είναι καθόλου ενθαρρυντικά για πολλές χώρες μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα. Οι πιο ψηλές επιδόσεις παρουσιάστηκαν στην Φιλανδία, στην Ιαπωνία, στην Κορέα και το Χονγκ Κονγκ. Οι χώρες όπως η Αυστρία, η Ουγγαρία και η Ιρλανδία είχαν μέτρια επίδοση, ενώ η Ελλάδα, η Ιταλία, και το Μεξικό ήταν από τις χώρες που είχαν τις πιο χαμηλές επιδόσεις. Συγκεκριμένα η Ελλάδα κατέλαβε στην επίλυση προβλήματος του 2003 την 32^{η} θέση ανάμεσα σε 40 χώρες.

Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στην επίλυση προβλήματος του διαγωνισμού του PISA γεννούν ορισμένα βασικά ερωτήματα. Γιατί οι Έλληνες μαθητές έχουν τόση δυσκολία με τα προβλήματα του PISA; Γιατί οι μαθητές μας δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν πρωτότυπα προβλήματα, παρόλο που αυτά δεν απαιτούν υψηλού επιπέδου επιστημονικές γνώσεις; Οι μαθητές αυτοί εμφανίζουν τις ίδιες δυσκολίες και όταν αντιμετωπίζουν μαθηματικά προβλήματα, τα οποία είναι πιο κοντά σε αυτά που διδάσκονται;

Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι να εξεταστούν οι επιδόσεις των μαθητών της Γ’ τάξης του Γυμνασίου στην επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων και κυρίως με εστίαση στους τρόπους με τους οποίους αντιμετωπίζουν τα συγκεκριμένα προβλήματα. Στη συνέχεια εξετάζεται η συμπεριφορά των ίδιων μαθητών, όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα

ρουτίνας - που μοιάζουν με αυτά του σχολικού εγχειριδίου, ώστε να συγκριθεί η ικανότητα των μαθητών στα δύο είδη προβλημάτων. Βάση για την έρευνα αυτή αποτέλεσαν τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος του Polya. Πιο συγκεκριμένα προσπαθήσαμε να απαντήσουμε στα ακόλουθα *ερευνητικά ερωτήματα*:

1. Μέχρι ποιού βαθμού κατανοούν οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου ένα πρωτότυπο πρόβλημα και ποιες συγκεκριμένες δυσκολίες αντιμετωπίζουν κατά την επίλυσή του;
2. Μέχρι ποιου βαθμού κατανοούν οι μαθητές αυτοί ένα πρόβλημα ρουτίνας και ποιες συγκεκριμένες δυσκολίες αντιμετωπίζουν κατά την επίλυσή του;
3. Πως συγκρίνεται η επίδοση των μαθητών σε πρωτότυπα προβλήματα και σε προβλήματα ρουτίνας;
4. Ο μαθητές χρησιμοποιούν πιο αποτελεσματικές στρατηγικές στα προβλήματα ρουτίνας απ' ότι στα πρωτότυπα προβλήματα;
5. Αναστοχάζονται πάνω στις λύσεις των προβλημάτων, δηλαδή οι μαθητές εξετάζουν τις λύσεις τους και ελέγχουν αν αυτές ταιριάζουν με τα δεδομένα;

Η αναγκαιότητα της έρευνας

Το πρόγραμμα PISA είναι μία από τις μεγάλες εκπαιδευτικές έρευνες που διοργανώνει ο ΟΟΣΑ με τη συμμετοχή πολλών χωρών από ολόκληρο τον κόσμο. Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας είναι να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών που έχουν ολοκληρώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση στο χειρισμό προβλημάτων που σχετίζονται με τα Μαθηματικά, τη Γλώσσα και τις Φυσικές Επιστήμες. Το 2003 στην αξιολόγηση PISA προστέθηκε η ικανότητα επίλυσης προβλήματος που αποτελεί μια διαθεματική δεξιότητα αναγκαία για όλα τα γνωστικά αντικείμενα. Σκοπός του προγράμματος είναι να εξετάσει όχι απλώς τι γνωρίζουν οι μαθητές από το σχολείο, αλλά ποιες δεξιότητες έχουν αποκτήσει και πόσο αποτελεσματικά μπορούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους στην καθημερινή τους ζωή και στις προκλήσεις της. Το σημαντικό λοιπόν δεν είναι το πόσο καλά έχουν διδαχτεί οι μαθητές όσα ορίζει το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά πόσο καλά έχουν κατανοήσει και εμπεδώσει τη σημασία, την εφαρμογή και τη σχέση των γνώσεων αυτών με τη ζωή.

Ο διαγωνισμός ξεκίνησε το 2000 και διενεργείται κάθε τρία χρόνια. Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στο διαγωνισμό κατέταξαν το 2000 την Ελλάδα στην 25η θέση σε σύνολο 31 χωρών, ενώ το 2003 η Ελλάδα οπισθοχώρησε στην κατάταξή της καταλαμβάνοντας την 30η θέση σε σύνολο 40 χωρών. Το 2006 η Ελλάδα ήρθε 38η σε σύνολο 57 χωρών που συμμετείχαν.

Η αφορμή για τη μελέτη αυτή δόθηκε από τα αποτελέσματα του διαγωνισμού του PISA (2003) με θέμα την επίλυση προβλήματος. Τα Ελληνόπουλα αξιολογήθηκαν κάτω από το επίπεδο 1 της κλίμακας αξιολόγησης του PISA. Οι μαθητές μας σύμφωνα με την έκθεση του PISA (2003) αδυνατούν να κατανοήσουν ακόμη και τα πιο εύκολα θέματα. Έχουν πολλές δυσκολίες στη λήψη αποφάσεων, στην ανάλυση ή εκτίμηση συστημάτων αλλά και στην αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων. Οι ικανότητές τους περιορίζονται στην επίλυση πολύ απλών προβλημάτων που δεν απαιτούν πολλές αιτιολογήσεις. Θεωρήθηκε λοιπόν απαραίτητο να μελετηθούν σε βάθος οι επιδόσεις των δεκαπεντάχρονων μαθητών μας στα προβλήματα του PISA. Επίσης, κρίθηκε απαραίτητο να συγκριθούν οι επιδόσεις τους στα πρωτότυπα προβλήματα με τις επιδόσεις τους σε προβλήματα ρουτίνας, τα οποία είναι κοντά στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος.

Ένα επιπλέον κίνητρο για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας είναι το γεγονός ότι μέσα από την ανασκόπηση της σχετικής με το θέμα βιβλιογραφίας, δεν βρέθηκαν έρευνες που να επικεντρώνονται στα αίτια αποτυχίας των Ελλήνων μαθητών στο διαγωνισμό επίλυσης προβλήματος του PISA. Με ποιον τρόπο όμως θα μπορούσε να βοηθήσει μια έρευνα σχετική με τις δυσκολίες των μαθητών στα πρωτότυπα προβλήματα; Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος θεωρείται ο βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών (Schoenfeld, 2002; Polya, 1945). Επίσης, οι ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας δεν απαιτούν απλώς την πρόσληψη ακαδημαϊκών γνώσεων αλλά την ανάπτυξη δεξιοτήτων για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Είναι σημαντικό λοιπόν να εντοπιστούν και να ερευνηθούν οι αδυναμίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μας στα πρωτότυπα προβλήματα, ώστε να περιοριστεί η σχολική αποτυχία αλλά και η ενδεχόμενη αποτυχία στον μετέπειτα επαγγελματικό χώρο.

Ο πιο γνωστός μαθηματικός στον τομέα των μαθηματικών γύρω από την επίλυση προβλήματος είναι ο Polya. Σύμφωνα με τον Polya τέσσερα είναι τα ιεραρχικά στάδια που ακολουθούν οι επιτυχημένοι λύτες προβλημάτων. Το πρώτο

στάδιο είναι η κατανόηση του προβλήματος και θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυσή του (Schoenfeld, 2002; Polya, 1945; Jonassen, 2003). Το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει σχεδιασμό της λύσης, δηλαδή στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης του προβλήματος. Το τρίτο στάδιο αναφέρεται στην εφαρμογή του σχεδίου λύσης. Στο στάδιο αυτό κρίνεται απαραίτητο οι μαθητές να ελέγχουν κάθε βήμα της διαδικασίας εφαρμογής του σχεδίου τους προκειμένου να μην οδηγηθούν σε λάθος αποτέλεσμα. Το τέταρτο στάδιο είναι η ανάδρομη επισκόπηση της λύσης, όπου ο μαθητής πρέπει να ελέγξει τη λύση του και να βεβαιωθεί ότι αυτή ταιριάζει με τα δεδομένα του προβλήματός του.

Θεωρήθηκε λοιπόν σημαντικό, να διερευνηθεί ο βαθμός δυσκολίας των μαθητών στην κατανόηση τόσο των πρωτότυπων προβλημάτων όσο και των προβλημάτων ρουτίνας. Στη συνέχεια, θελήσαμε να ερευνηθεί αν οι μαθητές εφαρμόζουν αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης στα δυο είδη προβλημάτων αλλά και ποιες μεθόδους διαθέτουν, ώστε να ελέγχουν την αποτελεσματικότητα τους. Τέλος, κρίθηκε σημαντικό να ερευνηθεί αν οι μαθητές μας έχουν την τάση να αναστοχάζονται πάνω στην απάντησή τους.

Μόλις εντοπιστούν και αναλυθούν σε βάθος οι αδυναμίες των μαθητών στην επίλυση προβλήματος, θα μπορούσαν να σχεδιαστούν επαρκείς εκπαιδευτικές παρεμβάσεις με βασικό στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους. Το αποτέλεσμα των παρεμβάσεων αυτών θα μπορούσε να είναι η σταδιακή βελτίωση των σχολικών επιδόσεων των μαθητών, και συνακόλουθα η βελτίωση των επιδόσεών τους σε διεθνείς διαγωνισμούς. Το πιο σημαντικό όμως είναι πως οι παρεμβάσεις αυτές μπορούν να συμβάλουν ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν τα απαραίτητα εφόδια, για να ανταπεξέλθουν στις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές μας θα μάθουν να ανιχνεύουν, να εντοπίζουν και να κατανοούν το ρόλο που διαδραματίζουν τα Μαθηματικά στον κόσμο. Ακόμη μέσα από αυτές τις παρεμβάσεις είναι δυνατό να επιτευχθεί η κρίση με τεκμηρίωση και η εμπλοκή με τη μαθηματική σκέψη με τρόπο που να ανταποκρίνεται στις ανάγκες της ζωής του ατόμου ως εποικοδομητικού, σκεπτόμενου και ενεργού πολίτη. Επίσης, οι παρεμβάσεις αυτές θα μπορούσαν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες για να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν πραγματικές διαθεματικές προβληματικές καταστάσεις.

Μέσα από την έρευνά μας θα προσπαθήσουμε να εμβαθύνουμε στον τρόπο σκέψης δεκαπεντάχρονων μαθητών και να εντοπίσουμε βασικές αδυναμίες τους κατά την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων. Επίσης, θα εξετάσουμε τις επιδόσεις και τις αδυναμίες των μαθητών αυτών σε προβλήματα ρουτίνας, τα οποία είναι κοντά στα πλαίσια των προβλημάτων του σχολικού εγχειριδίου. Δεδομένης της σημαντικότητας που έχει η επίλυση πρακτικών προβλημάτων στην καθημερινή κοινωνική, οικονομική και πολιτική ζωή των ανθρώπων, η αναγκαιότητα της έρευνας είναι προφανής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανασκόπηση της σύγχρονης βιβλιογραφίας σχετικά με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Ο πιο γνωστός μαθηματικός στον τομέα της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος είναι ο Polya, ο οποίος πρότεινε τέσσερα βασικά στάδια επίλυσης προβλήματος. Για την επίλυση ενός προβλήματος απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η εννοιολογική κατανόησή του (Polya, 1945˙ Mayer, 1985). Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έκφραση σχέσεων μεταξύ των ποσοτικών μεταβλητών. Τα εννοιολογικά μοντέλα που απαιτούνται για την επίλυση προβλήματος δεν είναι συγκεκριμένα, αλλά διαφέρουν από πρόβλημα σε πρόβλημα. Μετά την εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος, οι μαθητές πρέπει να δημιουργήσουν και να χειριστούν τις κατάλληλες αναπαραστάσεις. Οι αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να οργανώσουν και να κατανοήσουν το πρόβλημα, αλλά και να μεταδώσουν τις σκέψεις τους στους άλλους. Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν πως η διδασκαλία που βασίζεται στην επίλυση προβλήματος (PBL) κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών και ενισχύει τη μάθηση των μαθηματικών (Chapman, 2004; Hmelo-Silver, 2004). Σημαντικό ρόλο στην PBL διαδραματίζουν τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται, η στάση του δασκάλου αλλά και οι συνεργατικές ομάδες.

Το κεφάλαιο που ακολουθεί αποτελείται από επτά βασικές ενότητες. Στην πρώτη ενότητα αναλύεται η επίλυση προβλήματος σύμφωνα με τον Polya, εστιάζοντας στα τέσσερα ιεραρχικά στάδια επίλυσης προβλήματος. Η δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου αναφέρεται στα εννοιολογικά μοντέλα που πρέπει να κατασκευάσουν και να βασίσουν τη λύση τους οι μαθητές. Στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου αναλύεται ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος. Η τέταρτη ενότητα εστιάζει στα βασικά χαρακτηριστικά που πρέπει να πληροί η διδασκαλία που βασίζεται στην ΕΜΠ. Στην πέμπτη ενότητα υπάρχει αναλυτική περιγραφή των βασικών ικανοτήτων που απαιτούνται για την ΕΜΠ, όπως αυτές προέκυψαν από τη σχετική βιβλιογραφία. Στην έκτη ενότητα του κεφαλαίου παρουσιάζεται η επίλυση μαθηματικού προβλήματος και η θέση της στα αναλυτικά προγράμματα χωρών όπως η Αγγλία, η Αυστραλία, η Σιγκαπούρη, η Γερμανία κ.α. Στην τελευταία ενότητα παρουσιάζεται η θέση της επίλυσης προβλήματος στο ελληνικό σχολείο.

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya

Ο Polya στο βιβλίο του «How to solve it», αναφέρει πως η επίλυση προβλημάτων είναι θεμελιώδης ικανότητα για το ανθρώπινο είδος και πως το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής μας σκέψης αφορά τα προβλήματα. Η επίλυση προβλημάτων απαιτεί περισσότερες ικανότητες και δεξιότητες από την απλή μετάφραση τιμών σε αλγορίθμους. Για την επιτυχή επίλυση προβλήματος απαιτείται η αντίληψη σχετικών πληροφοριών, η ικανότητα να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα, να αναγνωρίσουν τη δομή του προβλήματος, να κατευθύνουν σωστά τη λύση τους και να εκτιμήσουν τη διαδικασία που χρησιμοποίησαν ώστε να λύσουν τα προβλήματα. Ο Polya διακρίνει τέσσερα ιεραρχικά στάδια που ακολουθούν οι επιτυχημένοι λύτες προβλημάτων:

Πρώτο στάδιο: Κατανόηση του Προβλήματος.

Στο πρώτο στάδιο ο λύτης εστιάζει την προσοχή του στην κατανόηση του προβλήματος. Εξετάζει με προσοχή και αναλύει τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, ώστε να κατανοήσει τις σχέσεις και διασυνδέσεις ανάμεσα στα δεδομένα, με τελικό σκοπό να αντιληφθεί τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα. Είναι προφανές ότι ο τελικός στόχος θα πρέπει να είναι ξεκάθαρος, αφού αν ο λύτης δεν καταλάβει σωστά το πρόβλημα τότε σίγουρα θα απαντήσει λανθασμένα.

Δεν αρκεί όμως οι μαθητές να κατανοήσουν ένα πρόβλημα, θα πρέπει επίσης να ενδιαφερθούν να το λύσουν. Για το λόγο αυτό λοιπόν ο Polya προτείνει να χρησιμοποιούνται προβλήματα τα οποία δεν είναι ούτε πολύ δύσκολα αλλά ούτε και πολύ απλά.

Πολύ σημαντικός για την κατανόηση του προβλήματος είναι ο ρόλος του δασκάλου. Σε αυτό το στάδιο μια συνήθης στρατηγική είναι να ζητείται από τους μαθητές να επαναλάβουν το πρόβλημα με δικά τους λόγια, να το αναδιατυπώσουν με πιο απλό και κατανοητό τρόπο. Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διατυπώνουν με ευχέρεια τα δεδομένα του προβλήματος και το ζητούμενο. Ακόμη, αν απαιτείται, οι μαθητές στη φάση αυτή θα πρέπει να φτιάξουν και ένα σχήμα σχετικό με το πρόβλημα.

Δεύτερο στάδιο: Σχεδιασμός της λύσης.

Στο στάδιο αυτό ο λύτης αναμένεται να εκπονήσει ένα σχέδιο λύσης του προβλήματος. Προφανώς το στάδιο αυτό είναι το πιο κρίσιμο και βέβαια το πιο δύσκολο. Η σύλληψη της ιδέας ενός σχεδίου μπορεί να γίνει με αργούς ρυθμούς. Οι μαθητές εφαρμόζουν πολλές διαφορετικές στρατηγικές και προσεγγίσεις, ανάλογα με

τις εμπειρίες και ικανότητες που έχουν ήδη αναπτύξει, ώστε τελικά να καταλήξουν σε ένα αποτελεσματικό σχέδιο.

Ο εκπαιδευτικός με τη διακριτική του βοήθεια μπορεί να διευκολύνει στη σύλληψη της επιτυχούς μεθόδου επίλυσης από το μαθητή. Οι καλές ιδέες σύμφωνα με τον Polya βασίζονται σε προγενέστερες γνώσεις. Έτσι λοιπόν για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος τα απαραίτητα στοιχεία είναι οι προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις ή προβλήματα που έχουν λυθεί παλαιότερα ή και σχετικά θεωρήματα που έχουν αποδειχθεί. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ξεκινήσει με την ερώτηση: *Γνωρίζετε κάποιο σχετικό πρόβλημα;* Ακόμη για τη μεγαλύτερη διευκόλυνση των μαθητών ο εκπαιδευτικός μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να εξετάσουν σχολαστικά το ζητούμενο και να προσπαθήσουν να εντοπίσουν ένα γνωστό πρόβλημα που να έχει το ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο. Αν ωστόσο οι μαθητές δυσκολεύονται να βρουν την κατάλληλη στρατηγική ο εκπαιδευτικός μπορεί να τους παροτρύνει να λύσουν πρώτα κάποιο σχετικό απλούστερο πρόβλημα, με στόχο να εμβαθύνουν στις σχέσεις που συνδέουν τα δεδομένα με τα ζητούμενα και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα να καταλήξουν στη σωστή μέθοδο επίλυσης.

Τρίτο στάδιο: Εφαρμογή του σχεδίου λύσης.

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές εκτελούν το σχέδιο που έχουν εκπονήσει. Το στάδιο αυτό είναι σχετικά εύκολο. Αυτό που πρέπει να προσέχουν οι μαθητές είναι να ελέγχουν κάθε βήμα κατά τη διαδικασία εφαρμογής του σχεδίου τους προκειμένου να μην οδηγηθούν σε λάθος αποτέλεσμα. Στο στάδιο αυτό χρειάζεται κυρίως υπομονή. Στη φάση αυτή οι μαθητές θα πρέπει να ελέγχουν υπομονετικά κάθε λεπτομέρεια ώστε να αποφύγουν την πιθανότητα σφάλματος. Ο μεγαλύτερος κίνδυνος στο στάδιο αυτό είναι να ξεχάσει ο μαθητής το σχέδιο λύσης του. Αυτό μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που ο μαθητής δανειστεί τη μέθοδο επίλυσης από κάπου αλλού. Για το λόγο αυτό ο δάσκαλος θα πρέπει να επιμένει ώστε οι μαθητές να ελέγχουν κάθε τους βήμα.

Οι λύτες θα πρέπει να είναι βέβαιοι ότι κάθε τους βήμα είναι απόλυτα σωστό. Αυτό μπορούν να το επιβεβαιώσουν είτε «διαισθητικά» είτε «τυπικά», δηλαδή με τη βοήθεια τυπικής απόδειξης. Είναι δυνατό ο δάσκαλος να επισημάνει τη διαφορά του

«βλέπω» και του «αποδεικνύω» με κατάλληλες ερωτήσεις: *Μπορείτε να δείτε καθαρά ότι το βήμα είναι σωστό; Όμως μπορείτε και να αποδείξετε ότι το βήμα είναι σωστό;*

Τέταρτο στάδιο: Ανάδρομη Επισκόπηση.

Το τέταρτο και τελευταίο στάδιο που διακρίνει ο Polya περιλαμβάνει την ανασκόπηση της λύσης, τον έλεγχο της απάντησης και την προέκταση του προβλήματος. Αν και το στάδιο αυτό είναι εξαιρετικά σπουδαίο, ωστόσο πολύ συχνά παραλείπεται τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δίνονται απαντήσεις που αγνοούν το πλαίσιο του προβλήματος αλλά και να μην αξιοποιείται η εμπειρία που προέκυψε από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Όταν ο μαθητής κοιτάξει ξανά τη λύση του προβλήματος και επανεξετάσει το αποτέλεσμα και το δρόμο που τον οδήγησε σε αυτό, τότε θα σιγουρευτεί περισσότερο για τη γνώση που απέκτησε και θα αναπτύξει περισσότερο την ικανότητά του να λύνει προβλήματα. Στο σημείο αυτό είναι εξίσου σημαντικό οι μαθητές να προχωρήσουν στην επαλήθευση της λύσης τους. Ακόμη και αν ελέγχουν κάθε βήμα στη διαδικασία επίλυσης, η επαλήθευση είναι απαραίτητη.

Η ανασκόπηση της λύσης δίνει επίσης στους μαθητές τη δυνατότητα να εξετάσουν τη συνάφεια του προβλήματός τους με άλλα προβλήματα και να καταλάβουν πως τα μαθηματικά προβλήματα σχετίζονται μεταξύ τους. Αν οι μαθητές έχουν εργαστεί ουσιαστικά με το πρόβλημα θα βρουν αυτή τη διαδικασία εξαιρετικά ενδιαφέρουσα. Ο δάσκαλος στο σημείο αυτό μπορεί να παρακινήσει τους μαθητές να σκεφτούν περιπτώσεις στις οποίες μπορούν να εφαρμόσουν τη μέθοδό τους ή να εφαρμόσουν το αποτέλεσμα που βρήκαν.

Βασικές ικανότητες για την επίλυση προβλήματος

Η πρώτη βασική ικανότητα για την επιτυχημένη επίλυση ενός προβλήματος είναι η κατανόησή του. Ο Mayer (1985) αναφέρει πως οι μαθητές για την ορθή επίλυση ενός προβλήματος θα πρέπει αρχικά να κατανοήσουν το κείμενο γλωσσικά και στη συνέχεια να το ερμηνεύσουν και να το αναπαραστήσουν. Πολύ συχνά στη σχολική τάξη κατά τη διδασκαλία της ΕΜΠ τονίζεται η επίλυση, η κατάληξη δηλαδή στον τελικό στόχο, χωρίς όμως να γίνεται πολύς λόγος για τη φάση της κατανόησης του προβλήματος. Ωστόσο, απαραίτητη προϋπόθεση για την ορθή επίλυση ενός προβλήματος είναι η πλήρης κατανόηση της γλωσσικής ή άλλης διατύπωσής του

αλλά και η εσωτερική - νοητική αναπαράστασή του από το λύτη. Κάθε πρόταση λοιπόν, πρέπει να κωδικοποιηθεί και να αναπαρασταθεί στη μνήμη.

Η σημασία της γλωσσικής κατανόησης ως βασικής προϋπόθεσης για την ορθή επίλυση μαθηματικού προβλήματος φαίνεται από τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με προτάσεις που εκφράζουν σχέσεις ανάμεσα σε ποσοτικές μεταβλητές. Πολλά πειράματα που έγιναν από γνωστούς ερευνητές (Mayer, 1985) έδειξαν πως οι μαθητές δυσκολεύονταν τόσο να συγκρατήσουν ένα πρόβλημα αμέσως μετά την ακρόασή του όσο και να αναπαραστήσουν ένα πρόβλημα σε αλγεβρική μορφή. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της δυσκολίας των μαθητών αποτελεί το παράδειγμα των Soloway et. al. (αναφορά στο Mayer, 1985) οι οποίοι ζήτησαν από φοιτητές κολεγίου να γράψουν την αλγεβρική σχέση που αποδίδει τη δήλωση «Υπάρχουν έξι φορές περισσότεροι φοιτητές απ΄ ότι καθηγητές στο πανεπιστήμιο», (“There are six times as many students as professors at this university”). Περίπου το ένα τρίτο από αυτούς έγραψαν τη λανθασμένη σχέση 6Φ = Κ. Όταν όμως ζητήθηκε από τους φοιτητές να γράψουν ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή για το ίδιο ερώτημα, το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων περιορίστηκε στο μισό του προηγούμενου. Φαίνεται, δηλαδή, πως η διαδικαστική γλώσσα του υπολογιστή επιτρέπει καλύτερη κατανόηση των σχεσιακών δηλώσεων απ’ ότι ο στατικός συμβολισμός των αλγεβρικών αναπαραστάσεων.

Αφού οι μαθητές κατανοήσουν ένα πρόβλημα στη συνέχεια θα πρέπει να το λύσουν. Ο Mayer (1985) αναφέρει πως η κατανόηση ενός προβλήματος και στη συνέχεια η δυνατότητα επίλυσής του εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ύπαρξη της αντίστοιχης δομής ή γνωστικού σχήματος στο ρεπερτόριο του λύτη. Μάλιστα, εκτός από την πρόταση – με - πρόταση κατανόηση και τη μετάφραση του κειμένου ενός προβλήματος είναι απαραίτητη και η αντίστροφη πορεία σύνθεσης των μερών σε ενιαίο σύνολο με νόημα. Η κατανόηση λοιπόν ενός προβλήματος συνδέεται με την οικοδόμηση ή αναδιαμόρφωση του γνωστικού σχήματος και την ταξινόμηση των γνωστικών σχημάτων σε κατηγορίες. Έχει ερευνητικά διαπιστωθεί (Hinsley et. al., 1977, αναφορά στο Mayer 1985) ότι οι μαθητές ταξινομούν μια σειρά από προβλήματα με μεγάλο βαθμό ομοιομορφίας και στη συνέχεια χρησιμοποιούν υφιστάμενα σχήματα για να προσεγγίσουν νέα προβλήματα.

Ο Mayer (1981, αναφορά στο Mayer, 1985) ταξινόμησε τα προβλήματα άλγεβρας σε πάνω από 100 βασικούς τύπους, οι οποίοι ανήκουν σε γενικές

κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα προβλήματα κίνησης (γενική κατηγορία) κατατάσσονται σε τύπους όπως: "προσπέρασμα", "κυκλική πορεία", "αλλαγή ταχύτητας", κλπ. Όταν όμως οι μαθητές κλήθηκαν να απομνημονεύσουν μια σειρά από οκτώ προβλήματα, έκαναν πολλά σφάλματα σε τύπους που στο βιβλίο τους εμφανίζονται με μικρότερη συχνότητα (Mayer, 1982, αναφορά στο Mayer, 1985). Φαίνεται λοιπόν, πως η επιτυχία αναπαραγωγής του σωστού τύπου επίλυσης είναι συνάρτηση της έκτασης της εμπειρίας και συνεπώς του βαθμού συγκρότησης ή διαμόρφωσης του νοητικού σχήματος.

Μια άλλη βασική ικανότητα για την ορθή επίλυση προβλήματος, είναι η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Ο Siegler (2003) παρομοιάζει τη σκέψη των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων με μια «σκάλα» όπου αρχικά οι μαθητές χρησιμοποιούν μια απλή προσέγγιση και με την πάροδο του χρόνου υιοθετούν πιο αναβαθμισμένες στρατηγικές. Για παράδειγμα στην αριθμητική αρχικά ξεκινούν αθροίζοντας από το ένα *(απλή προσέγγιση)* αργότερα αθροίζουν από τον μεγαλύτερο προσθετέο *(αναβαθμισμένη προσέγγιση)* και σε μεγαλύτερες τάξεις αθροίζουν με σκοπό να επιλύουν προβλήματα *(πιο αναβαθμισμένη προσέγγιση).*

Ωστόσο, πρόσφατες μελέτες δείχνουν πως η σκέψη των παιδιών διαφέρει από αυτή του μοντέλου της «σκάλας». Οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν πολλαπλές στρατηγικές που είχαν αποκτήσει είτε στο ξεκίνημα της εκπαίδευσης τους είτε στη μετέπειτα εκπαιδευτική εμπειρία τους. Κατά ένα φυσικό τρόπο εγκαταλείπουν τις αρχικές στρατηγικές για άλλες πιο εξελιγμένες. Η χρήση διαφορετικών στρατηγικών επιτρέπει στα παιδιά να χειρίζονται πολλά είδη ερωτημάτων και να διαπιστώνουν ότι διαφορετικές στρατηγικές οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές οδηγούνται σταδιακά στη βαθιά γνώση / κατανόηση.

Για την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να συνδυάσουν τις κατά περίπτωση στρατηγικές με τις διαφορές ανάμεσα στα προβλήματα. Η επιλογή τους σχετίζεται με τους χρονικούς περιορισμούς που τους δίνονται, τις οδηγίες αλλά και την σημαντικότητα του θέματος. Για παράδειγμα αν απαιτείται από τα παιδιά να απαντήσουν γρήγορα τότε θα εφαρμόσουν μια γρήγορη στρατηγική χωρίς όμως να είναι βέβαιοι για την ορθότητα της απάντησής τους. Αντίθετα, σε πιο σύνθετα προβλήματα επιλέγουν πιο χρονοβόρες αλλά αποτελεσματικές μεθόδους.

Η λανθασμένη επιλογή στρατηγικής οφείλεται κυρίως στη χαμηλή εξάσκηση στην επίλυση προβλημάτων και στη χρήση μέτριων στρατηγικών παρά στο επίπεδο σκέψης των μαθητών. Για τη βελτίωση των αριθμητικών τους δεξιοτήτων απαιτείται περισσότερη εξάσκηση και οδηγίες γύρω από τη χρήση των διάφορων στρατηγικών.

Σύμφωνα με τις Thom & Pirie (2002) οι καλοί λύτες προβλημάτων, αξιολογούν επακριβώς τις προβληματικές καταστάσεις, διακρίνουν καταστάσεις στις οποίες μπορούν να εφαρμόσουν τις ικανότητές τους και εφαρμόζουν επιτυχημένες στρατηγικές για να επιλύσουν διλημματικές καταστάσεις. Ο πιο έμπειρος λύτης παρακολουθεί την εξέλιξη και διαμορφώνει τις στρατηγικές του σύμφωνα με την επιτυχία ή όχι της εκάστοτε στρατηγικής που έχει επιλέξει. Αντίθετα ο λιγότερο έμπειρος λύτης δεν παρακολουθεί την εξέλιξη της λύσης τόσο αποτελεσματικά και ενδεχομένως συνεχίζει με λάθη και αποτυχημένες στρατηγικές. Σημαντικό ρόλο στη φάση αυτή διαδραματίζει η επιμονή. Η επιμονή αναφέρεται στην αίσθηση των μαθητών να γνωρίζουν πότε να συνεχίζουν τη στρατηγική που επέλεξαν, αλλά και πότε να την εγκαταλείπουν κρίνοντάς την ως μη αποτελεσματική.

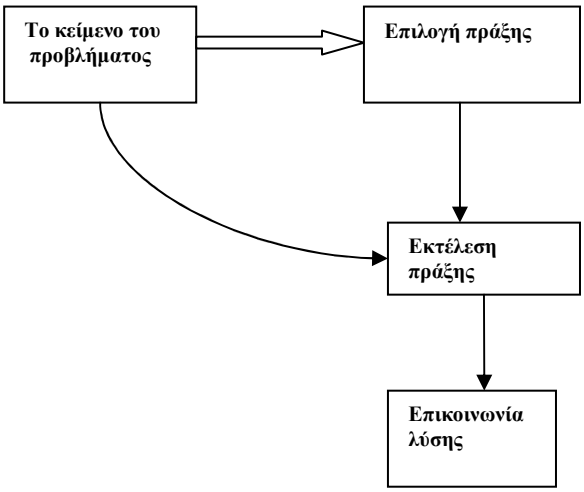
Η Lerch (2004) τονίζει πως οι μαθητές είναι ικανοί να χρησιμοποιούν το στοιχείο της στρατηγικής ενός μαθηματικού μοντέλου επίλυσης προβλήματος όταν εργάζονται πάνω σε οικεία προς σε αυτούς προβλήματα. Όμως δεν διαθέτουν ένα γενικευμένο μοντέλο που θα καθοδηγεί τις μαθηματικές τους ενέργειες όταν δουλεύουν πάνω σε μη οικεία προβλήματα. Όταν οι μαθητές εργάζονται σε μη συνηθισμένα προβλήματα, οι αποφάσεις ελέγχου βασίζονται μερικώς, στο σύστημα των προσωπικών τους πεποιθήσεων το οποίο αναπτύχθηκε σε όλη τη διάρκεια των προσωπικών τους εμπειριών.

Μια τρίτη ικανότητα επίλυσης προβλήματος, είναι η ικανότητα σύνδεσης της απάντησης με το πλαίσιο του προβλήματος. Στη μελέτη του ο Greer (1997) αναφέρεται στην αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σωστά σε λεκτικά προβλήματα Μαθηματικών, που συνδέονται με κάποιες ρεαλιστικές καταστάσεις, οι οποίες περιγράφονται στο κείμενο του προβλήματος. Έρευνες που έχουν γίνει στην Ιρλανδία, το Βέλγιο, τη Σουηδία, τη Γαλλία, τις Η.Π.Α., και την Ιαπωνία δείχνουν ότι δεν πρόκειται για πρόβλημα τοπικού χαρακτήρα. Όλες αυτές οι έρευνες κατέδειξαν ότι η επικρατούσα κατάσταση μεταξύ των μαθητών είναι να απαντούν σε λεκτικά προβλήματα, αδιαφορώντας πλήρως για το αν αυτή η απάντηση συμφωνεί με την κοινή λογική. Οι μαθητές διαβάζουν επιφανειακά το κείμενο του προβλήματος,

επιλέγουν μια πράξη που τους υποδεικνύεται από κάποιες λέξεις ή φράσεις κλειδιά, και μετά τον υπολογισμό δίνουν την απάντηση χωρίς να επιστρέψουν ξανά στο κείμενο. Τα παιδιά είναι τόσο καλά εκπαιδευμένα σε αυτές τις πρακτικές, ώστε είναι πρόθυμα να λύσουν προβλήματα όπως το παρακάτω: *Σε ένα κοπάδι υπάρχουν 125 πρόβατα και 5 σκύλοι. Ποια είναι η ηλικία του βοσκού;*

Οι μαθητές όταν πρόκειται να λύσουν ένα λεκτικό πρόβλημα λειτουργούν σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

ΛΕΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



Σχήμα 2: επιφανειακή επίλυση προβλήματος (Greer, 1997)

Οι ερευνητές αποδίδουν την ευθύνη στις εμπειρίες που βιώνουν τα παιδιά μέσα στη τάξη και στο σχολείο γενικότερα. Αυτό που έχουν βιώσει τα παιδιά στην τάξη είναι ότι καλός είναι ο μαθητής που λύνει τα προβλήματα σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο και όχι αυτός που χρειάζεται χρόνο να σκεφτεί πάνω στο πρόβλημα. Ακόμη οι μαθητές θεωρούν πως η λύση του προβλήματος είναι ένας και μοναδικός σωστός αριθμός και όχι μια προσεγγιστική απάντηση. Ακόμη, από την εμπειρία του οι μαθητές θεωρούν πως όλα τα προβλήματα έχουν λύση, επομένως γιατί όχι και το πρόβλημα με την ηλικία του βοσκού;

Ο Greer θεωρεί πως οι μαθητές ενεργούν και σκέφτονται σύμφωνα με το «διδακτικό συμβόλαιο» και τις συνήθειες που καλλιεργούνται μέσα στην τάξη και μέσα στο ίδιο το σχολείο. Οπότε από τη σκοπιά αυτή τα παιδιά λειτουργούν

απολύτως σύμφωνα με τη λογική. Σύμφωνα με τον συγγραφέα, χρειάζεται μια αναθεώρηση του διδακτικού συμβολαίου καθώς και του είδους των Μαθηματικών που διδάσκονται τα παιδιά στα σχολεία, όπως επίσης και του τρόπου διδασκαλίας τους.

Επίσης, ο Greer θεωρεί πως με τα στερεότυπα λεκτικά προβλήματα, επιτυγχάνεται μόνο μια επιφανειακή επιτυχία βασισμένη σε επιπόλαιες μεθόδους. Το άρθρο προτείνει πως η λύση ενός λεκτικού προβλήματος πρέπει να πηγάζει από ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο να προέρχεται από ένα μοντέλο της κατάστασης που περιγράφει το πρόβλημα. Τα παιδιά, σύμφωνα με το συγγραφέα θα μπορούσαν να εκπαιδευτούν ώστε να διακρίνουν πότε μια αριθμητική πράξη μπορεί να τους εφοδιάσει με ένα λίγο-πολύ ακριβές μοντέλο λύσης, πότε με μια λογική προσέγγιση της λύσης και πότε είναι εντελώς ακατάλληλη για να δώσει ένα μοντέλο για την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Μέσα από δραστηριότητες, όπως το να εγείρουν υποθέσεις και να τις αντιπαραβάλλουν οι μαθητές είναι δυνατόν να εξελιχθούν σε ευέλικτους συζητητές οι οποίοι κατανοούν ουσιαστικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Γιατί για να αντιμετωπίσει επιτυχώς ένας μαθητής ένα λεκτικό πρόβλημα, χρειάζεται ουσιαστική γνώση της γλώσσας και του γύρο κόσμου συνδυασμένα με τη γνώση της αριθμητικής.

Σύμφωνα με τον Greer, η ουσιαστική κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης των κοινωνικών φαινομένων, η ερμηνεία τους και η κριτική αντιμετώπισή τους, θα μπορούσε να είναι ουσιαστικό κομμάτι της εκπαίδευσης ενός υπεύθυνου πολίτη. Κάτι τέτοιο βέβαια απαιτεί πολύ σημαντικές προσπάθειες από την πλευρά των δασκάλων, και προϋποθέτει τη ριζική αναδιάρθρωση της οπτικής τους σχετικά με τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Εννοιολογικά Μοντέλα και επίλυση προβλήματος

Όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, η εννοιολογική κατανόηση ενός προβλήματος, αποτελεί το πρώτο από τα τέσσερα ιεραρχικά στάδια επίλυσης προβλήματος κατά τον Polya. Ο λύτης πρέπει να εξετάσει και να αναλύσει με προσοχή τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος, ώστε να κατανοήσει τις σχέσεις και διασυνδέσεις ανάμεσα στα δεδομένα, με τελικό σκοπό να αντιληφθεί τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα. Αν ο λύτης δεν καταλάβει σωστά το πρόβλημα τότε σίγουρα θα απαντήσει λανθασμένα.

Η έρευνα του Jonassen (2003) αφορά την επίλυση αφηγηματικών προβλημάτων και συγκεκριμένα αναφέρεται στα εννοιολογικά μοντέλα που πρέπει να δημιουργηθούν για την ορθή επίλυσή τους. Είναι κοινά αποδεκτό πως η μεγαλύτερη δυσκολία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων είναι η δυσκολία τους να επιλέξουν και να κάνουν την κατάλληλη αριθμητική πράξη. Όταν οι μαθητές προσπαθούν απευθείας να μεταφράσουν τις προτάσεις κλειδιά σε υπολογισμούς, τότε είναι πιο πιθανό πως θα κάνουν λάθος. Γιατί;

Η επίλυση αφηγηματικών προβλημάτων, απαιτεί πολλά παραπάνω από τη μετάφραση τιμών σε αλγορίθμους. Για την επιτυχή επίλυση προβλήματος απαιτείται η αντίληψη σχετικών πληροφοριών του προβλήματος, η ικανότητα να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα, να αναγνωρίσουν τη δομή του προβλήματος, να κατευθύνουν σωστά τη λύση τους και να εκτιμήσουν τη διαδικασία που χρησιμοποίησαν ώστε να λύσουν το πρόβλημα (Lucangeli, Tressoldi, & Cendron, 1998, αναφορά στο Jonassen, 2003).

Οι Riley & Greeno (1988) όρισαν ως εννοιολογικά μοντέλα- σχήματα τις νοητικές αναπαραστάσεις των πληροφοριών που αντιπροσωπεύονται στο πρόβλημα. Τα σχήματα δηλαδή, περιλαμβάνουν εννοιολογικές πληροφορίες καθώς και πληροφορίες σχετικές με την κατάσταση του προβλήματος, οι οποίες σχετίζονται με τις διαδικασίες επίλυσης (Jonassen, 2003).

Για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων οι μαθητές πρέπει να επιδείξουν εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος, καθώς έχει αποδειχθεί πως οι μαθητές που κατανοούν εννοιολογικά τη δομή του προβλήματος σημειώνουν μεγαλύτερη επιτυχία. Έτσι λοιπόν πρέπει να κατασκευάσουν ένα εννοιολογικό μοντέλο που περιλαμβάνει, ένα σχετικό μοντέλο του προβλήματος, ένα διαρθρωτικό μοντέλο και ένα αλγοριθμικό μοντέλο που προκύπτει από το κείμενό του (Reusser, 1993, αναφορά στο Jonassen, 2003). Επειδή όμως υπάρχουν διαφορετικά είδη προβλημάτων οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να κατασκευάζουν διαφορετικά εννοιολογικά μοντέλα για να αναπαριστούν κάθε πρόβλημα.

Σχήματα και μοντέλα προβλημάτων

Σύγχρονες μελέτες για τα λεκτικά προβλήματα συμφωνούν πως όταν οι μαθητές κατανοούν εννοιολογικά τη δομή του προβλήματος, λύνουν καλύτερα τα προβλήματα. Σύμφωνα με τους Riley, Greeno, & Heller (1983, αναφορά στο Jonassen, 2003) η κατανόηση των ποσοτικών σχέσεων των προβλημάτων απαιτεί

περισσότερα από κάποιες απλές αντιπροσωπευτικές εξισώσεις. Οι διάφοροι τύποι προβλημάτων διαφέρουν ως προς την εννοιολογική δομή και ως προς την τοποθεσία της άγνωστης ποσότητας στη φόρμουλα. Έτσι λοιπόν η κατανόηση ενός προβλήματος περιλαμβάνει δυο διαδικασίες· την αναπαράσταση της μορφής των πληροφοριών του προβλήματος και την κατασκευή ενός εννοιολογικού μοντέλου το οποίο αντιπροσωπεύει την κατάσταση που περιγράφεται στο κείμενο.

Π.χ. *Ο Πέτρος έχει 3 μήλα. Η Μαρία του έδωσε μερικά μήλα. Μαζί έχουν 9 μήλα. Πόσα μήλα έχει η Μαρία;*

Πρόκειται για ένα πρόβλημα που ο άγνωστος βρίσκεται στο αποτέλεσμα. Ένα άλλο πρόβλημα σύγκρισης με τον άγνωστο στο μέγεθος μεταβολής είναι:

Ο Πέτρος έχει 4 μήλα. Η Μαρία του έδωσε μερικά μήλα ακόμη. Μαζί έχουν 9 μήλα. Πόσα μήλα έχει η Μαρία;

Η αναπαράσταση της σχέσης των πληροφοριών είναι μια διαδικασία η οποία βασίζεται σε εννοιολογικές σχέσεις ανάμεσα στις οντότητες του προβλήματος. Τα προβλήματα μεταβολής και τα προβλήματα σύγκρισης μπορούν να περιγραφούν από παρόμοια εννοιολογικά μοντέλα. Η βασική διαφορά σε αυτά τα μοντέλα είναι οι δεσμοί μεταξύ των ενοτήτων προκειμένου να συνδυάσουν τα δεδομένα περιλαμβάνουν δεσμούς σύγκρισης ή μεταβολής. Ο σκοπός της οπτικοποίησης των εννοιολογικών μοντέλων είναι να διευκρινιστεί πόσο σημαντικό είναι να κατανοηθούν και να αναπαρασταθούν οι σχέσεις μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος. Αν οι μαθητές δεν μπορούν να αναγνωρίσουν τα σχετικά σύνολα στην αναπαράσταση του προβλήματος, ακόμη και να τους αναθέσουμε ένα είδος εννοιολογικού μοντέλου που βασίζεται σε καίριες αρχές, είναι απίθανο να καταλάβουν το νόημα του προβλήματος και ακόμη πιο απίθανο να μεταφέρουν κάποια διαδικασία επίλυσης σε νέες προβληματικές καταστάσεις.

Εκτός από την κατανόηση των βασικών σημείων των λεκτικών προβλημάτων, θα πρέπει επίσης να κατασκευαστούν γενικές αρχές, όπως *ποσοτικές σχέσεις* (αριθμοί, ορισμένα πόσα), *σχέσεις κτήσης* (έχω, δίνω), *σύγκρισης* (περισσότερα, λιγότερα) και *χρονικές* (παρελθόν, απαρχή, τότε). Οι λύτες κατασκευάζουν την κατανόηση ενός προβλήματος ρυθμίζοντας τις δομικές και γενικές αρχές του κειμένου σε ένα συμβατό εννοιολογικό μοντέλο.

Διάφοροι ερευνητές όπως οι Briars & Larkin (1984) και οι Riley & Greeno (1988) κατασκεύασαν γνωστικά μοντέλα για την κατανόηση των λεκτικών προβλημάτων. Για παράδειγμα, στο μοντέλο των Riley & Greeno αποσπώνται λέξεις από το κείμενο και κατασκευάζεται έτσι το μοντέλο που αντιπροσωπεύει το πρόβλημα. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι αυτό των Briars & Larkin (1984), οι οποίοι για να προσθέσουν έναν αριθμό σε ένα μοντέλο κίνησης κατασκεύασαν τον κανόνα:

Αν η τρέχουσα λέξη είναι αριθμός
Και υπάρχει ένα μοντέλο κίνησης
Και ο αριθμός που σχετίζεται με την τελική κατάσταση είναι άγνωστος
ΤΟΤΕ πρόσθεσε τον αριθμό στο μοντέλο κίνησης.

Οι Hall, Kibler,Wenger, & Truax (1989) κατασκεύασαν για την άλγεβρα τρία γενικά είδη εντολών που περιγράφουν τα σύνολα και τη σχέση μεταξύ τους.

1. Η εντολή που προσδιορίζει μια ανεξάρτητη αριθμητική τιμή σε μια μεταβλητή. *(Π.χ. Η τιμή ενός ζαχαρωτού είναι 1.70.)*
2. Η εντολή – σχέση που προσδιορίζει την αριθμητική σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών. Πρόκειται για την πιο δύσκολη εντολή. (*Π.χ. το μήκος είναι δυόμιση φορές το πλάτος).*
3. Η εντολή- ερώτηση που προσδιορίζει την αριθμητική τιμή για ορισμένες μεταβλητές. (Π.χ. πόσος χρόνος χρειάζεται για να αδειάσει η δεξαμενή;)

Τύποι Προβλημάτων

Κάθε θεματική περιοχή έχει διαφορετικά μοντέλα για τους διάφορους τύπους προβλημάτων. Αυτά τα μοντέλα ενδέχεται να περιέχουν τα ίδια σύνολα ή προτάσεις αλλά να αλληλεπιδρούν διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα τα διαφορετικά προβλήματα κίνησης χρησιμοποιούν τα ίδια σύνολα, αλλά προσδιορίζουν διαφορετικές προτάσεις. Είναι απαραίτητο, λοιπόν, οι μαθητές να κατανοούν αυτές τις προτάσεις και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση ώστε να κατασκευάσουν το εννοιολογικό μοντέλο για τη δομή του προβλήματος. Η ταξινόμηση του τύπου προβλήματος είναι χρήσιμη για την κατανόηση και τη μεταφορά στην επίλυση προβλήματος. Οι Mayer et al. (1984, αναφορά στο Jonassen, 2003) ανακάλυψαν πως όταν οι μαθητές δεν κατηγοριοποιούν σωστά ένα πρόβλημα, είναι πιο πιθανό ότι θα κάνουν λάθη.

Η σπουδαιότητα της κατηγοριοποίησης προβλημάτων οδήγησε πολλούς ερευνητές να δουλέψουν πάνω στους τύπους προβλημάτων. Οι Riley, Greeno, Heller (1983) κατηγοριοποίησαν στοιχειώδη μαθηματικά λεκτικά προβλήματα, προσδιορίζοντας προβλήματα μεταβολής, σύγκρισης και συνδυασμού, τα οποία διαφέρουν ως προς τη δομή και ως προς τη θέση του αγνώστου. Η Marshall (1995), διεύρυνε τη λίστα αυτή για να συμπεριλάβει τα προβλήματα μεταβολής, τα προβλήματα ομαδοποίησης όπου μικρότερες ομάδες ή σύνολα ενώνονται σε μεγαλύτερες, τα προβλήματα σύγκρισης, και τα προβλήματα επαναπροσδιορισμού (restate problems). Στα προβλήματα επαναπροσδιορισμού τα δεδομένα συνδέονται με μια σχέση του τύπου «διπλάσιος από…» και η σχέση αυτή επαναπροσδιορίζεται με μαθηματικούς όρους. Τέλος, έχουμε τα προβλήματα τροποποίησης, όπου δυο δεδομένα εκφράζονται με μια σχέση και στη συνέχεια η σχέση αυτή γενικεύεται σε νέες καταστάσεις. Το κοινό στοιχείο όλων των παραπάνω τύπων προβλημάτων είναι πως ασχολούνται κυρίως με τη θέση του αγνώστου στο πρόβλημα (Jonassen, 2003) .

Ο Mayer (1982) επιχείρησε μια πιο περίπλοκη κατηγοριοποίηση των προβλημάτων Άλγεβρας. Διέκρινε οχτώ κατηγορίες προβλημάτων: **α)** προβλήματα μεταβολής χρόνου, **β)** προβλήματα μεταβολής κόστους, **γ)** προβλήματα με ποσοστά μεταβολής κόστους, **δ)** προβλήματα συνεχούς μεταβολής, **ε)** γεωμετρικά προβλήματα, **στ)** προβλήματα φυσικής, **ζ)** προβλήματα στατιστικής, **η)** προβλήματα αριθμητικής. Η κατηγοριοποίηση του Mayer είναι η πιο αναλυτική μέχρι σήμερα. Το γεγονός πως οι παραπάνω τύποι προβλημάτων κυριαρχούν σε τόσο λίγα πεδία δηλώνει την παραδοσιακή έλλειψη ενδιαφέροντος για κατηγοριοποίηση στην επίλυση προβλημάτων (Jonassen, 2003).

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλήματος

Ο όρος αναπαράσταση είναι ένας αρκετά ασαφής όρος που επιδέχεται διάφορες ερμηνείες. Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά, τα οποία ονομάζονται σχήματα συμβόλων ή συστήματα αναπαράστασης. Υπάρχουν δυο είδη αναπαραστάσεων, οι εσωτερικές / νοητικές και οι εξωτερικές / σημειωτικές.

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι νοητικοί σχηματισμοί που εκτελούν τα υποκείμενα – λύτες προβλημάτων για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα. Η φύση των εσωτερικών αναπαραστάσεων πολλές φορές δεν τις καθιστά άμεσα παρατηρήσιμες. Η ύπαρξή τους δηλώνεται από την εξωτερική συμπεριφορά των

υποκειμένων. Σκοπός της διδασκαλίας πολλές φορές είναι η δημιουργία συγκεκριμένων εσωτερικών αναπαραστάσεων.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι οι εξωτερικές δηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει οι μαθητές τις διάφορες έννοιες. Σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος υπάρχουν πέντε είδη αναπαραστάσεων:

- Κείμενα, στα οποία η γνώση οργανώνεται με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν πλαίσιο για την ερμηνεία και την επίλυση άλλων προβλημάτων.
- Χειριστικά αντικείμενα / μοντέλα, όπως η αριθμητική γραμμή ή κύβοι αριθμητικής, τα οποία από μόνα τους δεν έχουν νόημα, αλλά οι σχέσεις και οι λειτουργίες των βασικών τους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
- Εικόνες ή διαγράμματα τα οποία μπορούν να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
- Γλώσσες που σχετίζονται με διάφορα πεδία, όπως για παράδειγμα η γλώσσα της μαθηματικής λογικής.
- Γραπτά σύμβολα, τα οποία περιλαμβάνουν εξειδικευμένες φράσεις αλλά και καθημερινές φράσεις της ομιλούμενης γλώσσας.

Η μελέτη των Cai & Lester (2005) εστιάζει στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν συνήθως οι μαθητές για να λύσουν προβλήματα. Σύμφωνα με αυτούς, ανάμεσα στα βασικά χαρακτηριστικά που απαιτούνται για την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων είναι η δημιουργία και η κατάλληλη χρήση των αναπαραστάσεων, εσωτερικών και εξωτερικών. Αναφέρουν πως οι αναπαραστάσεις θα πρέπει να δημιουργηθούν όχι μόνο για να βοηθηθούν οι μαθητές να οργανώσουν και να κατανοήσουν το πρόβλημα, αλλά και για να μεταδώσουν τις σκέψεις τους στους άλλους. Αφού λυθεί το πρόβλημα, ο λύτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μια άλλη αναπαράσταση για να εξηγήσει τη λύση του. Για το λόγο αυτό οι αναπαραστάσεις είναι οι εμφανείς καταγραφές που δημιουργήθηκαν από τον λύτη, ώστε να αναστοχαστεί πάνω στον τρόπο με τον οποίο έλυσε το πρόβλημα. Επίσης, οι αρχικές και οι τελικές αναπαραστάσεις μπορεί να διαφέρουν σε κάθε λύτη.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές μπορεί να είναι οπτικές ή συμβολικές. Σύμφωνα με τους Cai & Lester (2005) οι οπτικές αναπαραστάσεις περιορίζουν την κατανόηση, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ειδικές μόνο στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Μπορεί να περιορίσουν τη σκέψη και τη μάθηση των παιδιών, γι' αυτό οι μαθητές θα πρέπει να βοήθιουνται ώστε να χρησιμοποιούν πιο γενικές προσεγγίσεις. Για το λόγο αυτό οι συμβολικές προσεγγίσεις θεωρούνται ανώτερου επιπέδου. Σύμφωνα με τους αναπτυξιακούς ψυχολόγους (Bennett, 1999; Case, 1985; Gardner, 1991; Piaget, 1964), τα παιδιά αρχικά χρησιμοποιούν οπτικές αναπαραστάσεις του κόσμου και αργότερα προχωρούν σε πιο αφηρημένες αναπαραστάσεις. Καθώς οι μαθητές ωριμάζουν, αρχίζουν να σκέφτονται και να χειρίζονται πνευματικά τα μαθηματικά αντικείμενα και να τα αναπαριστούν αριθμητικά και συμβολικά (Cai & Lester, 2005).

Παιδαγωγικές αναπαραστάσεις (pedagogical representations)

Ο τρόπος που οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν και κατασκευάζουν τις οπτικές αναπαραστάσεις ώστε να διδάξουν την επίλυση μαθηματικού προβλήματος φαίνεται πως επηρεάζει αρκετά τους μαθητές. Οι παιδαγωγικές αναπαραστάσεις, είναι οι αναπαραστάσεις που οι δάσκαλοι και οι μαθητές χρησιμοποιούν στην τάξη και μεταφέρουν τη γνώση και τα εργαλεία σκέψης για να εξηγήσουν μια ιδέα μια σχέση, ένα σύνδεσμο ή μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Στη διδασκαλία των μαθηματικών ορισμένες αναπαραστάσεις μπορεί να είναι πιο επαρκείς από άλλες, ως φορείς εργαλείων γνώσης και σκέψης, που εξηγούν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Διάφορες μελέτες (Greeno, 1987; Leinhardt, 2001, αναφορά στους Cai & Lester 2005) έχουν συμπεράνει πως οι παιδαγωγικές αναπαραστάσεις βασίζονται στη θεωρία και την έρευνα για την κατανόηση και βρήκαν πως η διδασκαλία με παιδαγωγικές θεωρήσεις για την αναπαράσταση προβλήματος, μπορεί να διευκολύνει τους μαθητές να κατανοήσουν και να λύσουν τα προβλήματα. Για παράδειγμα οι παιδαγωγικές αναπαραστάσεις, είναι δραστικές σε μια σχολική τάξη αν είναι γνωστές από τους μαθητές ή εύκολα γνωστές.

Οι Cai & Lester (2005) μελετούν τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν Κινέζοι και Αμερικανοί μαθητές όταν λύνουν προβλήματα και τις συγκρίνουν με αυτές που χρησιμοποιούν οι δάσκαλοί τους. Στην έρευνά τους έλαβαν μέρος 320

Κινέζοι και 232 Αμερικανοί μαθητές, οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε προβλήματα ρουτίνας και προβλήματα μη ρουτίνας. Τα προβλήματα ρουτίνας ήταν τύπου πολλαπλής επιλογής, ενώ τα προβλήματα μη ρουτίνας ήταν ανοιχτού τύπου. Από τα αποτελέσματα της έρευνας, φάνηκε να υπάρχει μεγάλη σχέση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές και στις παιδαγωγικές αναπαραστάσεις των καθηγητών τους. Οι Αμερικανοί καθηγητές χρησιμοποιούν περισσότερο οπτικές αναπαραστάσεις από τους Κινέζους, και μάλιστα σπάνια ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να χρησιμοποιήσουν πιο αφηρημένες αναπαραστάσεις και στρατηγικές.

Ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι Αμερικανοί δάσκαλοι, είναι πως θεωρούν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις διευκολύνουν στην εννοιολογική κατανόηση. Σύμφωνα με τους συγγραφείς όμως ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνται οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι για να προκληθεί η εννοιολογική κατανόηση της αφηρημένης φύσης των Μαθηματικών. Ωστόσο, οι οπτικές αναπαραστάσεις από μόνες τους δεν οδηγούν αυτόματα σε γενικεύσεις και σε εννοιολογική κατανόηση. Δυστυχώς οι Αμερικανοί δάσκαλοι δεν παροτρύνουν καθόλου τους μαθητές τους να μεταβούν από τις οπτικές, πραγματικές αναπαραστάσεις σε συμβολικές.

Από την άλλη πλευρά, η μέτρια επίδοση των Κινέζων σε πρωτότυπα προβλήματα, δείχνει πως οι Κινέζοι διδάσκοντες δίνουν υπερβολική έμφαση στη συμβολική και την αφηρημένη σκέψη. Μάλιστα, ορισμένοι διδάσκοντες θεωρούν μόνο τις αριθμητικές και συμβολικές λύσεις σωστές. Ο συγγραφέας, ωστόσο θεωρεί πως οι μαθητές θα πρέπει να έχουν ευκαιρία να φτιάχνουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες, κανόνες και σχέσεις, καθώς η υπερβολική έμφαση στο συμβολισμό, ίσως συμβάλλει στη μηχανική αποστήθιση των διαδικασιών.

Προκύπτει λοιπόν πως οι μαθητές χρησιμοποιούν το ίδιο είδος αναπαραστάσεων με τους καθηγητές τους, διότι έχουν μάθει να εκτιμούν ό,τι και οι καθηγητές τους (Leikin, 2003; Cai & Lester, 2005). Τα ευρήματα αυτών των μελετών προτείνουν πως, όταν οι δάσκαλοι επιτρέπουν στους μαθητές να κατασκευάσουν τις δικές τους αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες, θα πρέπει επίσης να τους ενθαρρύνουν να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις πέρα από τις οπτικές. Για παράδειγμα, μπορούν να αρχίσουν από τις οπτικές ή φυσικές αναπαραστάσεις και

σταδιακά να παροτρύνουν τους μαθητές τους να χρησιμοποιούν τις δικές τους στρατηγικές ώστε να λύσουν προβλήματα και να κατανοήσουν τα Μαθηματικά. Όμως η περαιτέρω εννοιολογική ανάπτυξη απαιτεί από τους καθηγητές να βοηθήσουν τους μαθητές, να αναπτύξουν πιο γενικευμένες αναπαραστάσεις και μεθόδους λύσης.

Η διδασκαλία που βασίζεται στην Επίλυση Προβλήματος

Ο Chapman (2006) υποστηρίζει πως το πλαίσιο του προβλήματος είναι πολύ σημαντικό τόσο στη μάθηση των Μαθηματικών όσο και στην ανάπτυξη των Μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, αναφέρει πως τα λεκτικά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την εφαρμογή και την αλληλεπίδραση με τον πραγματικό κόσμο και να συμβάλλουν στην εξάσκηση με ρεαλιστικές καταστάσεις. Στο ίδιο άρθρο αναφέρεται και η άποψη του Verschaffel (2002) ο οποίος θεωρεί πως ο στόχος του προβλήματος είναι να φέρει την πραγματικότητα στην τάξη των Μαθηματικών. Να δημιουργηθούν δηλαδή ευκαιρίες για μάθηση και εξάσκηση σε διαφορετικές προβληματικές καταστάσεις, χωρίς τα πρακτικά εμπόδια της άμεσης επαφής με πραγματικές καταστάσεις.

Ο Boaler (1994) προσθέτει πως όταν οι μαθητές διδάσκονται σε ένα πλαίσιο προβλημάτων κινητοποιείται το ενδιαφέρον τους και ενισχύεται η μεταφορά της μάθησης μαθηματικών διαμέσου μιας παρουσίασης των δεσμών ανάμεσα των σχολικών μαθηματικών και των ρεαλιστικών λεκτικών προβλημάτων. Η αποτυχία των μαθητών να αποτιμήσουν τις κινήσεις επίλυσης προβλήματος με την πραγματική ζωή δεν βασίζεται κυρίως σε γνωστική ανεπάρκεια, αλλά στην αντίληψή τους γύρω από την παραδοσιακή διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων. Όταν οι μαθητές συμμετείχαν απευθείας σε μια προβληματική κατάσταση, τότε ενισχύονταν η προδιάθεσή τους να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους γύρω από τον κόσμο στη λύση τους. Ακόμη, όταν το περιεχόμενο των προβλημάτων ανακλούσε την πραγματική ζωή των παιδιών τότε οι μαθητές χρησιμοποιούσαν πιο ρεαλιστικές προσεγγίσεις (Chapman, 2004).

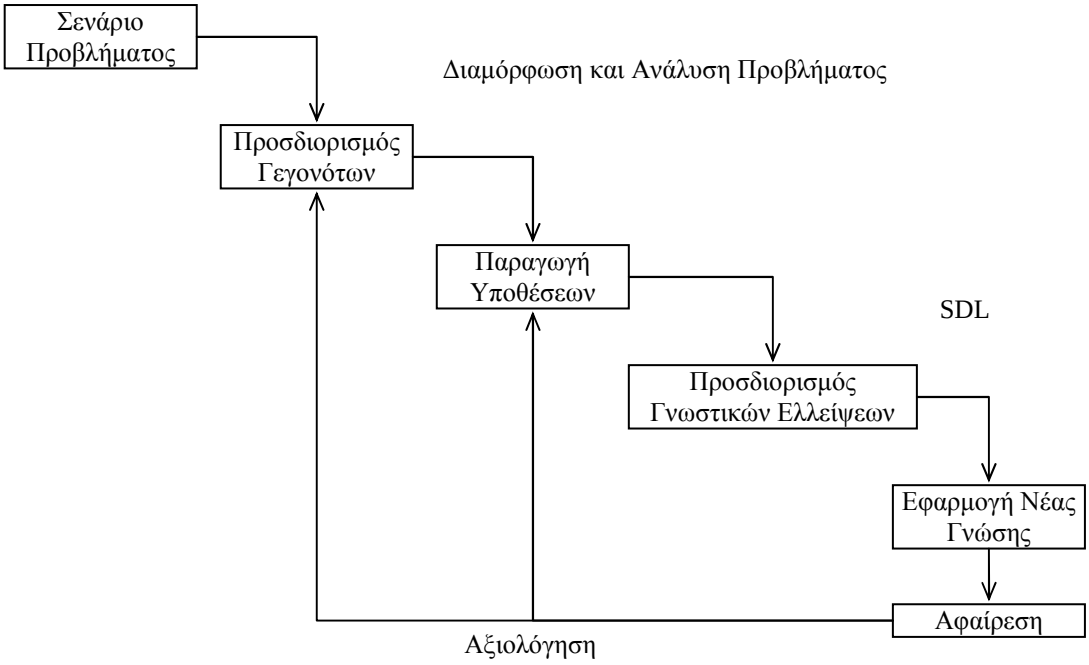
Η έρευνα της Hmelo-Silver (2004) επικεντρώνεται στη μάθηση που βασίζεται στο πρόβλημα (Problem-Based Learning, PBL). Πρόκειται για μια διδακτική μέθοδο στην οποία οι μαθητές μαθαίνουν μέσω διευκολυνόμενης επίλυσης προβλήματος. Η θεωρία αυτή, προτείνει ότι, αν οι μαθητές μαθαίνουν μέσω της εμπειρίας πάνω στην

επίλυση προβλημάτων, μπορούν να μάθουν τόσο στρατηγικές για το συγκείμενο όσο και στρατηγικές σκέψης.

Η μάθηση επικεντρώνεται σε ένα σύνθετο πρόβλημα με νόημα το οποίο δεν έχει μοναδική σωστή απάντηση. Παρουσιάζεται, λοιπόν, στους μαθητές ένα σενάριο προβλήματος. Οι μαθητές δουλεύουν σε μικρές συνεργατικές ομάδες, ώστε να προσδιορίσουν τι απαιτείται να μάθουν για να λύσουν το πρόβλημα. Διαμορφώνουν και αναλύουν το πρόβλημα καθορίζοντας τα σχετικά γεγονότα από το σενάριο. Αυτό το βήμα βοηθά τους μαθητές να αναπαραστήσουν το πρόβλημα. Καθώς οι μαθητές κατανοούν καλύτερα το πρόβλημα παράγουν υποθέσεις για πιθανές λύσεις.

Σημαντικό μέρος της διαδικασίας της PBL αποτελεί ο προσδιορισμός των γνωστικών ελλειμμάτων, σχετικών με το πρόβλημα οι οποίες θα αποτελέσουν και τα θέματα μάθησης που θα ερευνήσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της αυτοκατευθυνόμενης μάθησής τους (self-directed learning, SDL). Οι μαθητές ανεξάρτητα ερευνούν τα θέματα μάθησης που έχουν επιλέξει και στη συνέχεια ενώνονται και πάλι σε ομάδα για να μοιραστούν τι έχουν μάθει, να αναθεωρήσουν τις υποθέσεις τους και / ή να παράγουν νέες υποθέσεις. Στη συνέχεια *εφαρμόζουν* τη νέα τους γνώση στο πρόβλημα και αξιολογούν τις υποθέσεις τους με βάση αυτά που έχουν μάθει. Τέλος, αναστοχάζονται πάνω σε αυτά που έμαθαν και στην αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν. Η εκπαιδευτική διαδικασία της PBL που αναλύσαμε, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Εκπαιδευτική Διαδικασία της PBL



Σχήμα 1: *Ο κύκλος της PBL* (Hmelo – Silver, 2004)

Η PBL έχει σχεδιαστεί ώστε να βοηθά τους μαθητές να κατασκευάσουν μια *ευρεία και ευέλικτη βάση γνώσης*. Ευρεία με την έννοια ότι η γνώση δεν περιορίζεται στα γνωστικά θέματα μιας μοναδικής περιοχής, αλλά να είναι οργανωμένη γύρω από τις βαθιές αρχές μιας περιοχής και ευέλικτη με την έννοια της δυνατότητας ανάκλησης και εφαρμογής της σε άλλες καταστάσεις. Η συζήτηση προβλημάτων σε μια ομάδα της PBL ενεργοποιεί σχετική προηγούμενη γνώση με τη βοήθεια της οποίας κατασκευάζεται η νέα γνώση.

Ένας άλλος στόχος της PBL είναι οι μαθητές να αναπτύξουν *αποτελεσματικές δεξιότητες επίλυσης προβλήματος*. Η επίτευξη αυτού του στόχου εμπεριέχει την ικανότητα εφαρμογής κατάλληλων μεταγνωστικών στρατηγικών (διαδικασίες εκτελεστικού ελέγχου του σχεδίου επίλυσης, παρακολούθηση της προόδου και αξιολόγηση) και συλλογιστικών (υποθετική-συμπερασματική αιτιολόγηση) στρατηγικών.

Οι μεταγνωστικές στρατηγικές είναι επίσης σημαντικές για τον τρίτο στόχο της PBL που είναι να αναπτύξουν οι μαθητές *αυτοκατευθυνόμενες και μακροχρόνιες δεξιότητες μάθησης*. Ένας άλλος στόχος της PBL είναι να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν αποτελεσματικοί συνεργάτες, γεγονός που προϋποθέτει την εγκαθίδρυση

κοινού εδάφους, καθολική συμμετοχή, επίλυση των διαφορών, ανταλλαγή ιδεών, διαπραγμάτευση και την κατάληξη σε μία συμφωνία.

Ο τελευταίος στόχος της PBL είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν εσωτερικά κίνητρα για μάθηση. Οι μαθητές θα πρέπει να κινητοποιούνται από τα δικά τους ενδιαφέροντα και να εμπλέκονται σε έργα με προσωπικό νόημα. Όταν το αποτέλεσμα της μάθησης βρίσκεται κάτω από τον έλεγχο των μαθητών και όταν καλούνται να εφαρμόσουν τη γνώση τους αυτή σε ένα πραγματικό πρόβλημα, τότε κινητοποιούνται περισσότερο.

Οι διδακτικές τεχνικές της PBL υποθέτουν ότι όλοι αυτοί οι στόχοι επιτυγχάνονται ως μέρος του κύκλου μάθησης της PBL. Υπάρχει αξιόλογη απόδειξη που επιβεβαιώνει ότι η εκπαιδευτική διαδικασία της PBL επιτυγχάνει τους τρεις πρώτους στόχους αλλά όχι το ίδιο ισχυρή απόδειξη που να υποστηρίζει τους δύο τελευταίους στόχους. Η PBL έχει το πλεονέκτημα του να προτείνει μια μέθοδο για την προώθηση της ενεργητικής και αναστοχαστικής δόμησης της γνώσης για δράση, απαιτείται, όμως, προσεκτική έρευνα για να κατανοήσουμε αν και πώς αυτές οι δυνατότητες μπορούν να πραγματοποιηθούν.

Ο ρόλος του προβλήματος στη διδασκαλία που βασίζεται στην επίλυση προβλήματος

Στην επίλυση προβλημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντική η επιλογή του κατάλληλου προβλήματος. Ένα καλό πρόβλημα θα πρέπει να είναι σύνθετο, χωρίς μοναδική σωστή λύση και ανοικτό ώστε να υποκινεί την ευέλικτη σκέψη. Θα πρέπει να είναι ρεαλιστικό και να αντηχεί τις εμπειρίες των μαθητών, ώστε να τους παρέχει εσωτερικά κίνητρα. Θα πρέπει να υποκινεί τις επικοινωνιακές δεξιότητες κάνοντας το μαθητή να εκφράζει δημόσια την εκάστοτε κατάσταση της νόησής του. Επιπλέον, θα πρέπει να παρέχει ανατροφοδότηση στους μαθητές, να τους επιτρέπει να αξιολογούν την αποτελεσματικότητα της γνώσης τους, να κινητοποιεί την ανάγκη τους να μάθουν και να προωθεί την εικασία και την επιχειρηματολογία. Τέλος, ένα καλό πρόβλημα θα πρέπει να αντλεί γνώσεις από πολλές και διαφορετικές πηγές, ώστε να βοηθά στην οικοδόμηση ευρείας και ευέλικτης γνώσης. Σε ένα αναλυτικό πρόγραμμα της PBL οι προς μάθηση έννοιες απαντώνται σε μια ποικιλία προβλημάτων (Silver, 2004).

Στο ίδιο πνεύμα κινείται και η Lerch (2004) η οποία θεωρεί πως τα προβλήματα που δίνονται στους μαθητές θα πρέπει να είναι οικεία σε αυτούς και να αντιπροσωπεύουν καταστάσεις που είναι πιθανό να αντιμετωπίσουν στη ζωή τους.

Έτσι θα προκληθούν εσωτερικά κίνητρα και ο κάθε μαθητής θα αντιμετωπίσει το κάθε πρόβλημα με τον προσωπικό του τρόπο. Τα ευρήματα της έρευνά της καταδεικνύουν ότι οι μαθητές είναι ικανοί να χρησιμοποιούν το στοιχείο της στρατηγικής ενός μαθηματικού μοντέλου επίλυσης προβλήματος, όταν εργάζονται πάνω σε οικεία προς αυτούς προβλήματα. Αντίθετα, όταν δουλεύουν πάνω σε μη οικεία προβλήματα δεν διαθέτουν ένα γενικευμένο μοντέλο, που θα καθοδηγήσει τις μαθηματικές τους ενέργειες.

Η λογική αυτή επικράτησε και στο διαγωνισμό του PISA το 2003. Τα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές δεν βασίστηκαν σε συγκεκριμένες ενότητες της ύλης, αλλά απαιτούνταν από τους μαθητές να ερευνήσουν αρκετά ώστε να βρουν τον κατάλληλο τρόπο αντιμετώπισης. Επιπλέον, τα προβλήματα βασίζονταν σε γενικότερες γνώσεις και όχι σε συγκεκριμένα σχολικά μαθήματα. Τα βασικά κριτήρια που πληρούσαν τα θέματα που δόθηκαν στους μαθητές ήταν (Pisa, 2003):

Τύπος προβλήματος. Υπήρχαν οι ακόλουθοι τρεις τύποι προβλημάτων: Προβλήματα λήψης απόφασης, προβλήματα ανάλυσης και σχεδιασμού συστήματος, και προβλήματα αντιμετώπισης προβληματικών καταστάσεων.

Το πλαίσιο των προβλημάτων. Τα προβλήματα ήταν βασισμένα σε καταστάσεις που οι μαθητές δυνατό να αντιμετωπίσουν στη ζωή τους, στη δουλειά τους και στην κοινωνία γενικότερα.

Διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Οι διαδικασίες ήταν τέτοιες ώστε να συλλέξουν στοιχεία για τις γνώσεις και τις ικανότητες των μαθητών.

Ο σχεδιασμός των προβλημάτων έγινε έτσι ώστε το κείμενο να μην είναι δύσκολο, και να χρησιμοποιεί απλή καθημερινή γλώσσα. Επίσης, οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνταν ήταν κάποιες πολύ απλές, ενώ δεν υπήρχαν καθόλου επιστημονικά περιεχόμενα. Συμπερασματικά λοιπόν, οι διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, διαφέρουν από τα άλλα μαθήματα που εξετάστηκαν στην PISA στο γεγονός πως για να απαντήσουν σωστά οι μαθητές, δεν χρειάζεται να γνωρίζουν συγκεκριμένα θέματα της σχολικής ύλης. Οι βασικές δεξιότητες που εξετάζονται είναι αυτές που σχετίζονται με τη συμπερασματική αιτιολόγηση. Οι μαθητές πρέπει να οργανώσουν και να αναλύσουν τις πληροφορίες που δίνονται, και να επιλέξουν τη λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς. Ο λόγος αυτής της επιλογής είναι πως στην

καθημερινή ζωή δεν απαιτούνται υψηλού επιπέδου γνώσεις της σχολικής ύλης, αλλά η ικανότητα αντιμετώπισης προβλημάτων και η αιτιολόγηση.

Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού παρέχουν κάποιες αρχικές πληροφορίες γύρω από τις ικανότητες των μαθητών να χειριστούν το σύνολο των γνώσεών τους ώστε να αντιμετωπίσουν ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες δεν συνδέονται μόνο με ένα συγκεκριμένο μέρος του προγράμματος σπουδών. Στη συνέχεια, μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, είναι δυνατό να εντοπιστούν τα δυνατά σημεία αλλά και οι αδυναμίες των προγραμμάτων σπουδών στις διάφορες χώρες.

Ο ρόλος του δασκάλου στη διδασκαλία που βασίζεται στην επίλυση προβλήματος

Στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος πολύ σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός. Σύμφωνα με τη Hmelo- Silver (2004) ο ρόλος του δασκάλου είναι αυτός του διευκολυντή. Ο διευκολυντής είναι υπεύθυνος τόσο για τη μετάβαση των μαθητών μέσα από τα διάφορα στάδια της PBL, όσο και για την παρακολούθηση της διαδικασίας της ομάδας. Ο διευκολυντής, δηλαδή πρέπει να βεβαιώνεται ότι όλα τα μέλη της ομάδας εμπλέκονται και να τα ενθαρρύνει να εξωτερικεύουν τη σκέψη τους και να σχολιάζουν τη σκέψη των άλλων. Ο ρόλος του διευκολυντή συνίσταται στο να καθοδηγεί την ανάπτυξη των δεξιοτήτων σκέψης ανώτερου επιπέδου, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να αιτιολογούν τη σκέψη τους και να προκαλεί την εξωτερίκευση του αυτό-αναστοχασμού απευθύνοντας κατάλληλες ερωτήσεις. Ο δάσκαλος / διευκολυντής παρέχει στήριγμα-σκαλωσιά (scaffolding) στη μάθηση των μαθητών μέσω της μοντελοποίησης της επίλυσης προβλήματος και των διαδικασιών της SDL, αρχικά με τη χρήση στρατηγικών μέσω ερωτήσεων (οι οποίες οδηγούν τους μαθητές είτε στον καθορισμό θεμάτων μάθησης είτε στην αυτό-αξιολόγηση), διαδικασία όμως που εξασθενεί καθώς οι μαθητές εξοικειώνονται με την PBL και φθάνουν σε σημείο να υιοθετήσουν πολλούς από τους ρόλους του διευκολυντή. Ένας καλός διευκολυντής θα πρέπει να είναι σε θέση να καταλαβαίνει πότε απαιτείται μια κατάλληλη ερώτηση, πότε οι μαθητές φεύγουν από την πορεία τους και πότε η διαδικασία της PBL σταματά. Βέβαια το έργο του διευκολυντή καθίσταται συνθετότερο όταν απευθύνεται σε περισσότερες από μία ομάδες ή σε μία τάξη με λιγότερο ώριμους μαθητές.

Η Cai (2004) μελέτησε πως ο τρόπος διδασκαλίας, οι απόψεις των δασκάλων και η διδακτέα ύλη επηρεάζουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Αφορμή για τη μελέτη αυτή αποτέλεσαν προγενέστερες μελέτες οι οποίες έδειξαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη των Κινέζων και Αμερικανών μαθητών όταν λύνουν αλλά και όταν θέτουν προβλήματα (Cai, 2000; Cai & Lester, 2005; Siegler, 2003).

Τα αποτελέσματα της μελέτης της Cai (2004) δείχνουν πως τόσο οι Αμερικανοί δάσκαλοι όσο και οι Κινέζοι εκτιμούν τις αλγεβρικές προσεγγίσεις περισσότερο από άλλες προσεγγίσεις του ίδιου προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι Κινέζοι έπαιρναν υπ' όψη τους τις στρατηγικές που εφάρμοζαν οι μαθητές τους και δεν έδιναν υψηλές βαθμολογίες στις απαντήσεις που χρησιμοποιούσαν κάποια οπτική προσέγγιση ή περιείχαν μόνο υπολογισμούς. Θεωρούσαν πως οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν να εφαρμόζουν πιο γενικές μεθόδους. Οι Κινέζοι θεωρούν πολύ σημαντικές τις λεπτομέρειες στην απάντηση των μαθητών και στον τρόπο που θα περιγράψουν το αποτέλεσμά τους. Πιστεύουν πως αυτό βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν πιο λογικό τρόπο σκέψης. Αντίθετα, για τους Αμερικανούς αυτό που μετρούσε περισσότερο είναι η ορθότητα του αποτελέσματος ανεξάρτητα από τον τρόπο που εφαρμόζεται κάθε φορά. Ο στόχος τους είναι οι μαθητές να λύνουν σωστά τα προβλήματα.

Ο τρόπος που αξιολογεί ένας δάσκαλος την απάντηση σε ένα πρόβλημα αποτελεί ένδειξη για το τι πιστεύει πως είναι πιο χρήσιμο στα Μαθηματικά. Συνεπώς ο τρόπος σκέψης και τα πιστεύω των εκπαιδευτικών έχουν αντίκτυπο στη διδασκαλία τους και κατά συνέπεια επηρεάζει τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν και μαθαίνουν τα Μαθηματικά. Η Leikin (2003) εξετάζει τους παράγοντες που επηρεάζουν τις προτιμήσεις των δασκάλων στην ΕΜΠ κατά τη διάρκεια που λύνουν ένα πρόβλημα, όταν το εξηγούν, και όταν το διδάσκουν. Για το σκοπό της έρευνας σχεδιάστηκε μια ειδική επιστημονική δραστηριότητα με τίτλο «Λύνοντας προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους». Η δραστηριότητα είχε ως θέμα την έννοια της συμμετρίας. Η έρευνα ξεκίνησε με αφορμή την πεποίθηση που υπάρχει γύρω από το ότι οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι προωθούν την ΕΜΠ δραστικά θα πρέπει να είναι και οι ίδιοι καλοί λύτες. Και αυτό γιατί η επίλυση προβλημάτων με πολλούς διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συνδέσει όλη τη μαθηματική γνώση (NCTM, 2000). Η Ma (1999, αναφορά στο Leikin, 2003) υποστηρίζει πως η επίλυση

προβλημάτων με πολλούς τρόπους είναι ένδειξη ικανότητας για τους δασκάλους. Η Dhombres (1993, αναφορά στο Leikin, 2003) πρότεινε πως η διδασκαλία δυο διαφορετικών αποδείξεων ενός θεωρήματος συμβάλλει στη διεύρυνση της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Τονίζεται επίσης, πως οι στρατηγικές αυτές θα είναι διαθέσιμες όταν χρειαστεί. Στο ίδιο άρθρο αναφέρεται και η άποψη του Schoenfeld πως οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης προβλήματος βοηθούν τους μαθητές να μην παραιτούνται όταν λύνουν ένα πρόβλημα.

Ένας από τους κύριους παράγοντες που επηρέασαν τις προτιμήσεις των δασκάλων στην έρευνα ήταν ο τρόπος που οι δάσκαλοι χαρακτηρίζουν τις διάφορες στρατηγικές επίλυσης. Από την έρευνα φάνηκε πως ορισμένα χαρακτηριστικά επίλυσης επηρεάζουν πολύ τις προτιμήσεις των καθηγητών. Τέτοια χαρακτηριστικά ήταν η δυσκολία εξήγησης μια λύσης καθώς και η πειστικότητά της.

Ένας δεύτερος παράγοντας ήταν τάση των δασκάλων να εφαρμόζουν κλασσικούς τρόπους επίλυσης. Για παράδειγμα ορισμένοι από τους δασκάλους της έρευνας προσέγγισαν τα προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου είτε με την παράγωγο είτε με χρήση καθετότητας. Όταν κλήθηκαν να εξηγήσουν το λόγο αυτής της επιλογής επικαλέστηκαν την ανάγκη των μαθητών για πειστικές μεθόδους.

Ένας τρίτος παράγοντας είναι η τάση των εκπαιδευτικών να δρουν σύμφωνα με τις προσωπικές πεποιθήσεις τους για την ΕΜΠ. Τα πιστεύω των δασκάλων φαίνεται πως έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην επιλογή κατάλληλων εργαλείων. Για παράδειγμα ορισμένοι από τους συμμετέχοντες δεν χρησιμοποίησαν τη συμμετρία διότι θεωρούσαν πως δεν ήταν μαθηματικά επαρκής για τη λύση, ενώ κάποιοι άλλοι διότι θεωρούσαν τη χρήση συμμετρίας καλή για τους δασκάλους αλλά όχι για τους μαθητές.

Η έρευνα έδειξε πως οι δάσκαλοι προτιμούν εκείνους τους τρόπους επίλυσης που έχουν πιο εύκολη λύση και είναι πιο πειστικοί. Επίσης, προτιμούν να εξηγήσουν ένα πρόβλημα με τρόπους που θεωρούν πιο εύκολους, πιο πειστικούς, πιο ενδιαφέροντες, και πιο προκλητικούς. Οι δάσκαλοι προτιμούν τον τρόπο που έχει πιο εύκολη λύση, εξηγείται και κατανοείται πιο εύκολα από τους μαθητές. Τέλος, οι δάσκαλοι προτιμούν να διδάξουν ένα πρόβλημα με τρόπο που θεωρούν πιο πειστικό.

<u>Ο ρόλος των συνεργατικών ομάδων στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος</u>

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος είναι οι

συνεργατικές ομάδες. Στη διδακτική μέθοδο της PBL το γνωστικό φορτίο (θέματα μάθησης) διανέμεται στα μέλη της ομάδας ανάλογα με την ικανότητα του καθενός σε κάποιους τομείς, επιτρέποντας σε ολόκληρη την ομάδα το χειρισμό προβλημάτων που φυσιολογικά θα ήταν αδύνατο για κάθε μαθητή χωριστά. Οι συζητήσεις και οι διαμάχες που λαμβάνουν χώρα σε μία ομάδα προωθούν την επίλυση προβλήματος και τη σκέψη ανώτερου επιπέδου. Βέβαια, η αρμονική και αποτελεσματική συνεργασία δεν είναι δεδομένη, γεγονός που ενισχύει το ρόλο του διευκολυντή αλλά και στρατηγικών όπως η ανάθεση στους μαθητές διαφορετικών γνωστικών ρόλων (Hmelo-Silver, 2004).

Ο Siegler (2003), θεωρεί πως όταν τα παιδιά συνεργάζονται με άλλους μαθητές ανακαλύπτουν νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Ένα πιο έξυπνο άτομο βοηθά ένα λιγότερο έξυπνο, με τον ίδιο τρόπο που οι γονείς βοηθούν τα παιδιά τους, οι καθηγητές τους μαθητές τους, οι προπονητές τους αθλητές τους κλπ. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις έχουν ως αποτέλεσμα οι λιγότερο έξυπνοι μαθητές να κατασκευάσουν καλύτερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων. Οι συνεργατικές ομάδες όμως μπορεί να αποτελούνται και από μαθητές του ίδιου επιπέδου. Αυτός ο συνδυασμός εμπλουτίζει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων περισσότερο από ότι αν οι μαθητές δουλεύουν μόνοι τους. Οι Rosenshine και Meister (1994, αναφορά στο Siegler, 2003) εφάρμοσαν τον παραπάνω συνδυασμό σε μαθητές εύρους 4ης τάξης του δημοτικού μέχρι και ενήλικες, και είχαν θετικά αποτελέσματα τόσο σε γκρουπ μαθητών χαμηλού επιπέδου αλλά και σε μαθητές μεσαίου επιπέδου, που είχαν το δάσκαλο ως καθοδηγητή.

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η συνεργατική μάθηση δεν έχει θετικά αποτελέσματα. Η Brown (1998 αναφορά στο Siegler, 2003) επεσήμανε πως η αποτελεσματική συνεργατική μάθηση απαιτεί τουλάχιστον όση τέχνη όση απαιτεί και μια ιδανική διδασκαλία σε τάξη, αφού τα προβλήματα αποδιάρθρωσης οδηγούν σε κατώτερη μάθηση. Για το λόγο αυτό στη συνεργατική μάθηση απαιτούνται περισσότερα από έναν απλό ορισμό των γκρουπ των μαθητών και να την ανάθεση να δουλέψουν ομαδικά σε ένα πρόβλημα.

Οι Damon και Phelps (1989, αναφορά στο Siegler, 2003) πρότειναν τρεις τύπους συνεργατικού διακανονισμού.

α) *Ισότιμη κατάρτιση*, στην οποία ένα παιδί που γνωρίζει καλά ένα θέμα διδάσκει ένα άλλο το οποίο δεν γνωρίζει τόσα πολλά.

β) *Συνεργατική μάθηση:* Οι τάξεις χωρίζονται σε ομάδες των τριών έως έξι ατόμων διαφορετικών ικανοτήτων η κάθε μια που προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Κάθε παιδί γίνεται ο "ειδικός" της ομάδας πάνω σε ένα συγκεκριμένο κομμάτι της αποστολής, και η λύση απαιτεί τη συνεισφορά όλων των "ειδικών".

γ) *Ισότιμη συνεργασία:* Περιλαμβάνει ένα ζευγάρι αρχάριων που δουλεύουν μαζί για να λύσουν προβλήματα τα οποία αρχικά δεν θα μπορούσαν να λύσουν μόνοι τους. Οι Damon και Phelps τονίζουν πως πρέπει να ενθαρρύνεται η από κοινού επίλυση προβλημάτων και να αποθαρρύνεται ο ανταγωνισμός μεταξύ των μαθητών.

Επίσης, οι Ellis et al. (1993, αναφορά στο Siegler, 2003) ανακάλυψαν πως τα παιδιά μαθαίνουν καλύτερα αν δουλεύουν σε ομάδες και συντονίζονται από το δάσκαλό τους. Συμπερασματικά λοιπόν, παρατηρείται πως τόσο οι γνωστικές όσο και οι κοινωνικές μεταβλητές συμβάλλουν στην επιτυχημένη συνεργατική μάθηση.

Επίλυση προβλήματος και Αναλυτικό πρόγραμμα

Η θέση της επίλυσης προβλήματος στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, διαφέρει από χώρα σε χώρα. Σε ορισμένες χώρες η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως βασικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αντίθετα, σε κάποιες άλλες χώρες η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως βασικός στόχος της εκπαίδευσης των Μαθηματικών. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η θέση της επίλυσης προβλήματος με την πάροδο των χρόνων σε χώρες, όπως η Αυστραλία, η Σιγκαπούρη, η Γερμανία και άλλες.

<u>Η επίλυση προβλήματος στο αναλυτικά προγράμματα των χωρών που έχουν ως βασική γλώσσα τα Αγγλικά</u>

Το πρόγραμμα σπουδών της Αυστραλίας από το 1990 επικεντρώθηκαν γύρω από το τι πρέπει να γνωρίζουν και να μπορούν να κάνουν οι μαθητές στο τέλος της σχολικής περιόδου. Οι βασικές ικανότητες που πρέπει να αποκτηθούν καθορίζονται από το National Profile (Australian Educational Council, 1994) σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές πρέπει να μάθουν να *δουλεύουν μαθηματικά* σε:

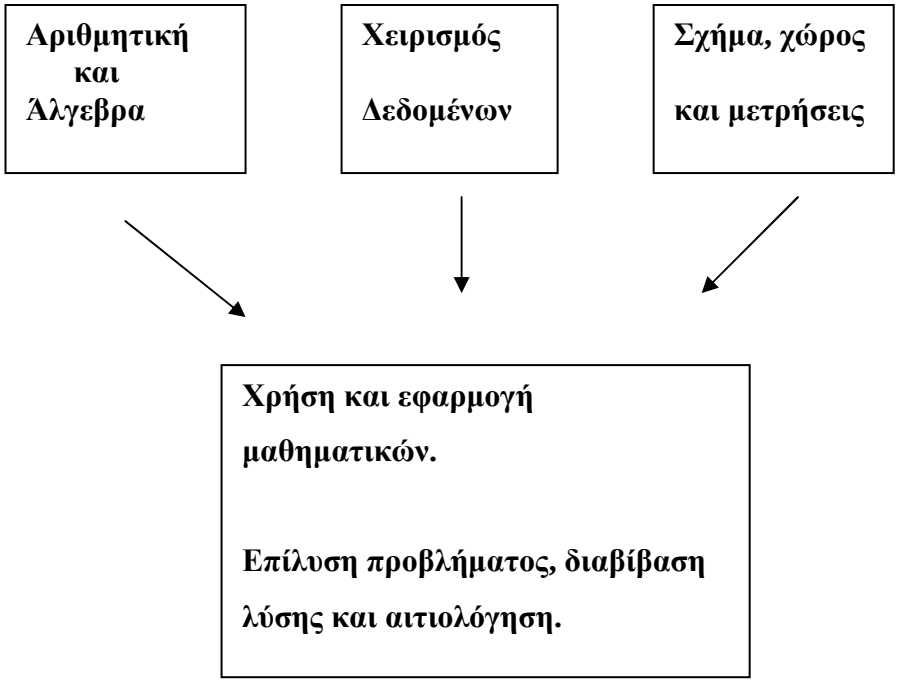
- Έρευνα
- Υποθέσεις

- Χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλήματος
- Εφαρμογή και επαλήθευση
- Χρήση μαθηματικής γλώσσας
- Εργασία σε συγκεκριμένο πλαίσιο

Αρχικά στη Victoria της Αυστραλίας το πρόγραμμα σπουδών διαμορφώθηκε με βάση τις παραπάνω 6 ικανότητες. Όμως το έργο των δασκάλων επιβαρύνθηκε αρκετά. οπότε το αναλυτικό πρόγραμμα περιορίστηκε στην αιτιολόγηση και στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές.

Στο New South Wales της Αυστραλίας τα Μαθηματικά θεωρούνται σαν αντικείμενο το οποίο πρέπει να *μάθεις* και σαν αντικείμενο που πρέπει να *κάνεις*. Στη δυτική Αυστραλία υπάρχουν δυο επίπεδα πάνω στα οποία δουλεύουν οι καθηγητές των Μαθηματικών. Το πρώτο λέγεται *Εκτιμώντας τα Μαθηματικά* (appreciating mathematics) και έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να αισθανθούν ωραία για τα Μαθηματικά. Το δεύτερο είναι το επίπεδο του *δουλεύω με Μαθηματικό τρόπο* (working mathematically) και έχει στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να εξερευνήσουν, να χρησιμοποιήσουν κατάλληλες στρατηγικές, να γενικεύσουν και να αιτιολογήσουν, ώστε να γίνουν καλοί λύτες προβλημάτων.

Σε αντίθεση με την Αυστραλία, στις ΗΠΑ, η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως μια ξεχωριστή διαδικασία η οποία τοποθετείται στο ίδιο επίπεδο με τη γνώση του να δουλεύεις με αναπαραστάσεις ή να επεξεργάζεσαι τα αποτελέσματα και δεν θεωρείται ως στόχος των διαδικασιών αυτών. Στην Αγγλία επίσης, η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως μέρος του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών και όχι ως στόχος της Μαθηματικής εκπαίδευσης.



Σχήμα 3: Στο αναλυτικό πρόγραμμα της Αγγλίας η επίλυση προβλήματος είναι τμήμα μιας σωστής μαθηματικής εκπαίδευσης (Stacey, 2005).

Στη Σιγκαπούρη, όπου οι μαθητές σημείωσαν αρκετά υψηλές επιδόσεις στο διαγωνισμό της PISA (2003), η επίλυση προβλήματος θεωρείται ως βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης, μαζί με τη μεταγνώση, την αιτιολόγηση και την εύρεση στρατηγικών. Πιο συγκεκριμένα το αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών αντιμετωπίζεται από τρεις όψεις, το *στοχευόμενο (intended)* αναλυτικό πρόγραμμα, το *εφαρμοζόμενο (implemented)* αναλυτικό πρόγραμμα και το αναλυτικό πρόγραμμα που τελικά επιτυγχάνεται *(attained)* (Ho & Hedberg, 2005).

Η επίλυση προβλήματος στο αναλυτικό πρόγραμμα της Γερμανίας

Στη Γερμανία αυτός που επηρέασε σημαντικά τη διδασκαλία των μαθηματικών ήταν ο διάσημος μαθηματικός Felix Klein. Τα σχολικά εγχειρίδια της δεκαετίας 1950 και 1960 περιείχαν θέματα που απαιτούσαν ξεκάθαρη επιχειρηματολογία ή απόδειξη και ήταν πολύ πιο ενδιαφέροντα από τα λεκτικά προβλήματα. Τα θέματα αυτά θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως προβλήματα, αλλά οι διδάσκοντες δεν τα διαχειρίστηκαν με αυτόν τον τρόπο. Το 1970 μπορεί να θεωρηθεί ως αφετηρία ένταξης της επίλυσης προβλήματος στα Γερμανικά αναλυτικά προγράμματα, και έναρξης εθνικών διαγωνισμών που κρίνουν τις ικανότητες μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αν και στη Γερμανία ήταν γνωστή η συζήτηση που γινόταν στις ΗΠΑ από το 1980 για την επίλυση προβλήματος, ωστόσο οι διαφορετικές σημασίες της λέξης *επίλυση προβλήματος* και η άμεση μετάφρασή της στα Γερμανικά, προκάλεσαν σύγχυση. Η κατάσταση άλλαξε με τη συμβολή του βιβλίου *Αρχές και πρότυπα* του NCTM, το οποίο όρισε σαφώς την επίλυση προβλήματος. Έτσι τις τελευταίες δεκαετίες σημειώθηκαν σημαντικές αλλαγές στην επίλυση προβλήματος που επηρέασαν τόσο τα θέματα που διδάσκονταν στην τάξη όσο και τον τρόπο με τον οποίο οι διδάσκοντες αντιμετωπίζουν τα προβλήματα.

Η κατάσταση στη Γερμανία άλλαξε ακόμη περισσότερο τα δυο τελευταία χρόνια με αφορμή τις φτωχές επιδόσεις των μαθητών στους διεθνείς διαγωνισμούς του PISA. Οι χαμηλές επιδόσεις των Γερμανών μαθητών έλαβαν μεγάλη δημοσιότητα και οι πολιτικοί έκριναν πως έπρεπε να αντιδράσουν άμεσα. Έτσι η επίλυση προβλήματος αποτελεί πλέον τμήμα του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών στη Γερμανία ως μια δραστηριότητα. Παρόλα αυτά πολλοί είναι αυτοί που προτείνουν πως η επίλυση προβλήματος δεν θα πρέπει να θεωρείται ως ανεξάρτητη δραστηριότητα, αλλά ως μια συνηθισμένη δραστηριότητα στην τάξη των μαθηματικών (Reiss & Torner, 2007).

Η επίλυση προβλήματος στο αναλυτικό πρόγραμμα της Ολλανδίας

Στην Ολλανδία η επίλυση προβλήματος μέχρι τη δεκαετία του ’80 δεν αποτελούσε ξεχωριστό μέρος του αναλυτικού προγράμματος. Τη δεκαετία του εβδομήντα οι ειδικοί αντιλήφθηκαν πως το αναλυτικό πρόγραμμα ήταν πιο κοντά στους μαθητές που προετοιμαζόντουσαν για διάφορες επιστήμες, αλλά όχι για γι’ αυτούς που ενδιαφέρονταν για άλλους τομείς όπως οι κοινωνικές επιστήμες. Έτσι λοιπόν αποφασίστηκε να δοθεί σ’ αυτούς τους μαθητές μια προσέγγιση των μαθηματικών βασισμένη στα προβλήματα, τις μαθηματικές εφαρμογές και τα μαθηματικά μοντέλα. Στο πρόγραμμα των μαθητών που κατευθύνονταν προς τις επιστήμες δεν έγινε κάποια αλλαγή και οι εξετάσεις παρέμειναν τυπικές.

Για τους μαθητές που προετοιμαζόντουσαν για τις κλασσικές μελέτες, δημιουργήθηκαν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δυο αναλυτικά προγράμματα. Το αναλυτικό πρόγραμμα Α βασίστηκε στα ρεαλιστικά μαθηματικά και αφορούσε τους μαθητές που κατευθύνονταν στις κοινωνικές ή οικονομικές επιστήμες. Το δεύτερο πρόγραμμα ήταν τα μαθηματικά Β με κύριο άξονα τον υπολογισμό. Το πρόγραμμα αυτό αφορούσε μαθητές που κατευθύνονταν σε τεχνικές σχολές ή στις επιστήμες.

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση δεν δίνεται πολύ σημασία στην επίλυση προβλήματος. Στα βιβλία σήμερα, συναντώνται κυρίως πολύπλοκα ρεαλιστικά προβλήματα, ενώ προβλήματα τύπου γρίφων στα οποία δεν είναι προφανής ο τρόπος αντιμετώπισης συναντώνται σπάνια. Τα προβλήματα μη ρουτίνας δεν συναντώνται ούτε στα τεστ του Cito- διεθνές ινστιτούτο αξιολόγησης της εκπαιδευτικής προόδου. Η άποψη που επικρατεί είναι πως μόνο οι καλοί μαθητές μπορούν να λύσουν προβλήματα και αυτοί οι μαθητές δεν χρειάζονται βοήθεια για να λύσουν προβλήματα μη ρουτίνας. Η άποψη αυτή όμως ανατράπηκε το 2004 με τη μελέτη Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, τα αποτελέσματα της οποίας ανάγκασαν ερευνητές και εκπαιδευτικούς στην Ολλανδία να αναθεωρήσουν την άποψή τους. Συνέπεια αυτής της επαγρύπνησης είναι *Η μεγάλη μέρα αριθμητικής*, που οργανώνεται από το ινστιτούτο του Freudenthal, όπου τη μέρα αυτή χιλιάδες μαθητές του δημοτικού λύνουν προβλήματα.

Όπως και στη πρωτοβάθμια εκπαίδευση έτσι και στη δευτεροβάθμια, η επίλυση προβλήματος είναι υποβαθμισμένη. Όπως προαναφέραμε ακόμη και το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών Α περιέχει θέματα ρουτίνας, ενώ στις κρατικές εξετάσεις δεν ενισχύεται η επίλυση προβλήματος.

Σημαντικές πρωτοβουλίες ενίσχυσης της επίλυσης προβλήματος αποτελούν οι διαγωνισμοί A-lympiad και Mathemetics B-day. Σκοπός των διαγωνισμών αυτών ήταν να σχεδιαστεί ένα σύστημα που περικλείει τους αντικειμενικούς σκοπούς του συστήματος των μαθηματικών Α και απαιτεί ομαδική εργασία. Ο διαγωνισμός αναφέρεται σε μαθητές ηλικίας 16-18 χρονών. Περιλαμβάνει την ενασχόληση με ένα πρόβλημα με ομαδική συνεργασία τριών ή τεσσάρων μαθητών. Χωρίζεται σε προκαταρτικό και τελικό διαγωνισμό. Οι ομάδες πρέπει να προσδιορίσουν το πρόβλημα και τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν και στη συνέχεια να το λύσουν και να επιχειρηματολογήσουν παρουσιάζοντας τη λύση τους.

Στα πρώτα χρόνια του διαγωνισμού δεν ήταν συνηθισμένο να απαιτούνται από τους μαθητές ικανότητες όπως, επίλυση προβλημάτων, διάβασμα, γράψιμο, έρευνα, επιχειρηματολογία, αιτιολόγηση, μαθηματικοί μετασχηματισμοί, ομαδική εργασία και σχέδιο εργασίας. Όλα τα παραπάνω με τη συμβολή του διαγωνισμού εφαρμόστηκαν στα σχολεία της Ολλανδίας, αφού πλέον έγινε ξεκάθαρο πως οι μαθητές στην κοινωνία θα έχουν να αντιμετωπίσουν αυτού του είδους τα μαθηματικά. Με το πέρασμα των χρόνων ο διαγωνισμός έγινε όλο και πιο διάσημος και πλέον συμμετέχουν 6000 Ολλανδοί μαθητές. Επίσης, έχει καθιερωθεί και διεθνής

τελικός διαγωνισμός στον οποίο παίρνουν μέρος μαθητές από άλλες χώρες, όπως Δανία, και Γερμανία (Doorman et al., 2007)

Η επίλυση προβλήματος στο αναλυτικό πρόγραμμα της Ουγγαρίας

Η Ουγγαρία είναι μια χώρα που έχει αναδείξει αρκετούς σημαντικούς μαθηματικούς και ερευνητές των μαθηματικών, όπως ο Polya, ο Neumann κ.α. Από το 1950 η ΕΜΠ θεωρείται ως βασικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο πιο σημαντικός ερευνητής των μαθηματικών στην Ουγγαρία ήταν ο Vagra, ο οποίος δημιούργησε το σχέδιο OPI, (Εθνικό ινστιτούτο εκπαίδευσης). Ο Vagra ανέπτυξε μια γνωστή μέθοδο κατά την οποία η επίλυση προβλήματος ήταν κεντρική δραστηριότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλα τα επίπεδα. Η πιο σημαντική έρευνα που έγινε από το OPI μελέτησε γενικώς τα μαθηματικά στα σχολεία. Σκοπός της έρευνας ήταν να δημιουργήσει νέο περιβάλλον στη διδασκαλία των μαθηματικών, να κρίνει πότε η κοινωνία είναι έτοιμη να αλλάξει το σύστημα της μαθηματικής εκπαίδευσης, και να αποφασίσει ποιες ενέργειες είναι απαραίτητες γι' αυτό. Οι συμμετέχοντες στόχευαν να παροτρύνουν τους μαθητές να κάνουν λάθη, να αυτενεργήσουν και να ενισχύσουν την επιθυμία τους να πετύχουν. Οι δάσκαλοι χειρίζονται τις ατομικές διαφορές των μαθητών και δημιουργούν μια φιλική ατμόσφαιρα στην οποία μαθητές και δάσκαλοι είναι συνεργάτες. Η άλγεβρα και η γεωμετρία αλλά και βασικές έννοιες, τοπολογίας, συνόλων, πιθανοτήτων εισάγονται από το δημοτικό, ώστε με τον καιρό οι έννοιες να ωριμάσουν στο μυαλό των μαθητών. Η ουσία του σχεδίου είναι να διασφαλίσει τη συνεχόμενη ανάπτυξη κάθε παιδιού σε συναισθηματικό και γνωστικό επίπεδο στο σημείο που μπορούν να συμβάλλουν τα σχολικά μαθηματικά.

Η OPI έρευνα βασίστηκε στη συνεργασία δασκάλων και ερευνητών. Αν και η ηγεσία του τμήματος μαθηματικών του εθνικού ινστιτούτου εκπαίδευσης της Ουγγαρίας πρόσφερε αρκετά στην έρευνα, το εκπαιδευτικό περιβάλλον όμως δεν ήταν καθόλου φιλικό. Οι αιτίες ήταν η ρουτίνα των τεσσάρων πρώτων χρόνων της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, το γεγονός ότι πλέον ο δάσκαλος δεν θεωρείται μοναδική αυθεντία, αλλά και ο θόρυβος που πλέον επιτρέπεται στη σχολική αίθουσα. Όλα τα παραπάνω προκάλεσαν το φόβο του νέου και της αποτυχίας σε δάσκαλους, μαθητές, γονείς και επιθεωρητές. Για την αντιμετώπιση αυτού του αρνητικού κλίματος οι ερευνητές δούλεψαν σε βάθος ώστε να βεβαιωθούν πως οι νέες διδακτικές μέθοδοι δεν απαιτούν ιδιαίτερα προικισμένους δάσκαλους ή μαθητές ώστε να πετύχουν. Επίσης, έπρεπε να αποδείξουν πως με τη νέα μέθοδο οι μαθητές πετυχαίνουν τα ίδια ή και καλύτερα αποτελέσματα απ' ότι με την παραδοσιακή μέθοδο. Επιπροσθέτως οι

μαθητές δεν αισθάνονται αγχωμένοι αλλά είναι πιο πρόθυμοι να εργαστούν πάνω στην επίλυση προβλήματος (Klein, 1987, αναφορά στο Szendrei, 2007).

Το σύστημα του Vagra ήταν το πρώτο αναλυτικό πρόγραμμα στην Ουγγαρία που περιέγραφε τη μέθοδο, το περιεχόμενο, τα εγχειρίδια, με τον δάσκαλο να καθοδηγεί και τους μαθητές να ακολουθούν. Από τα αποτελέσματα της εφαρμογής του νέου σχεδίου προέκυψε πως οι μαθητές που είχαν εκπαιδευτεί με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα ξεπέρασαν τους υπόλοιπους μαθητές ακόμη και στα προβλήματα που απαιτούσαν παραδοσιακό τρόπο λύσης.

Στο διαγωνισμό του IEA (Διεθνής Ένωση για την Αξιολόγηση των Εκπαιδευτικών Επιτευγμάτων), για 14τράχρονους μαθητές η Ουγγαρία ήταν στις τρεις πρώτες χώρες μεταξύ την Ιαπωνίας και της Ολλανδίας (Szendrei 1991, σελ. 99, αναφορά στο Szendrei, 2007). Πλέον τα πλεονεκτήματα του νέου αναλυτικού προγράμματος ήταν προφανή σε κάθε μελέτη. Ωστόσο τα αποτελέσματα της SIMS (Szendrei 1991, σελ. 87, αναφορά στο Szendrei, 2007) έδειξαν πολύ πιο χαμηλό επίπεδο απάντησης σε προβλήματα που απαιτούσαν εφαρμογή μαθηματικής γνώσης. Η έρευνα του PISA (2000) έδειξε πως οι Ούγγροι μαθητές είχαν πολύ καλή επίδοση στα προβλήματα που ήταν όμοια με αυτά που συναντούσαν στο σχολείο, ενώ είχαν χαμηλή επίδοση στα ρεαλιστικά προβλήματα που απαιτούσαν εφαρμογή της γνώσης (Vari 2003, σελ. 98, αναφορά στο Szendrei, 2007).

Η επίλυση προβλήματος στο ελληνικό σχολείο

Στην Ελλάδα η επίλυση προβλήματος δεν αποτελεί ξεχωριστή ενότητα στο αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά θεωρείται ως βασικό στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η μαθηματική εκπαίδευση δηλαδή έχει στόχο να προσφέρει στους μαθητές τα απαραίτητα εφόδια, ώστε να μετατραπούν σε καλούς λύτες προβλημάτων.

Τα μαθηματικά προβλήματα έχουν κεντρική θέση στα σχολικά εγχειρίδια του δημοτικού σχολείου. Τα προβλήματα που λύνουν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου είναι προβλήματα πρακτικής αριθμητικής. Στο γυμνάσιο επεκτείνονται σε προβλήματα που επιλύονται με τη βοήθεια εξισώσεων. Συγκεκριμένα, στην πρώτη και τη δεύτερη τάξη του γυμνασίου οι μαθητές μαθαίνουν να λύνουν προβλήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού. Στην τρίτη τάξη η ύλη επεκτείνεται στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, αλλά και προβλημάτων που για την επίλυσή τους απαιτείται η κατασκευή ενός συστήματος εξισώσεων.

Από τη μελέτη του αναλυτικού προγράμματος προκύπτει πως οι μαθητές μας καλούνται συχνά να αντιμετωπίσουν προβλήματα, οπότε θα αναμέναμε να είναι εξοικειωμένοι με αυτά. Ωστόσο είναι κοινά αποδεκτό πως η πλειοψηφία των μαθητών αποτυγχάνει στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Μια πρώτη αιτία είναι η δυσκολία των μαθητών με τη γλωσσική και την εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος. Τα προβλήματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια συχνά δεν είναι κατάλληλα για τους μαθητές. Περιέχουν δυσκολίες στη σύνταξη και το λεξιλόγιο και αναφέρονται σε πραγματικά προβλήματα της κοινωνικής ζωής των ενηλίκων, και λιγότερο σε καθημερινές εμπειρίες των μαθητών. Επίσης, στην ελληνική σχολική τάξη κατά την επίλυση προβλήματος δεν τονίζεται η φάση της κατανόησής του, αλλά η κατάληξη στον τελικό στόχο (Κόσυβας, 1996). Πολύ συχνά όμως παρατηρείται οι μαθητές να μην λύνουν σωστά ένα πρόβλημα επειδή δεν το έχουν κατανοήσει γλωσσικά. Επίσης, αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις προτάσεις του προβλήματος, με αποτέλεσμα να τις μεταφράζουν σε λανθασμένες μαθηματικές εκφράσεις (Mayer, 1985; Jonassen, 2003). Είναι απαραίτητο λοιπόν κατά την επίλυση προβλήματος να δίνεται έμφαση στην κατανόησή του, καθώς η κατανόηση του προβλήματος καθορίζει την ορθή επίλυσή του.

Ένας δεύτερος λόγος στον οποίο οφείλονται πολλές δυσκολίες των μαθητών σήμερα είναι η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Τα διδακτικά εγχειρίδια δίνουν έμφαση σε τυποποιημένες γνώσεις και σε μια εκτεταμένη ασκησιολογία, τα οποία παραπέμπουν στη μηχανιστική μάθηση και στην παγίωση της αντίληψης ότι τα Μαθηματικά είναι χειρισμός συμβόλων χωρίς νόημα. Η βασική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών στο ελληνικό σχολείο σήμερα, ξεκινά από μια σειρά παραδειγμάτων τα οποία επιλύονται από το διδάσκοντα. Αυτό που πρέπει να κάνουν οι μαθητές είναι να κατανοήσουν τις μεθόδους που προτείνει ο δάσκαλός τους και να μάθουν πότε θα πρέπει να τις εφαρμόζουν. Γίνεται δηλαδή μια κατηγοριοποίηση των μαθηματικών προβλημάτων με βάση τη μέθοδο επίλυσής τους και ο μαθητής πρέπει να μάθει να ξεχωρίζει πότε μια μέθοδος είναι κατάλληλη ή όχι. Η κριτική σκέψη και η διερεύνηση περιορίζονται στην εύρεση της κατηγορίας στην οποία ανήκει το πρόβλημα (Κόσυβας, 1996). Οι μαθητές όμως θα πρέπει να εκπαιδευτούν, ώστε να διακρίνουν πότε μια αριθμητική πράξη μπορεί να τους οδηγήσει στην ακριβή λύση

του προβλήματος και πότε είναι εντελώς ακατάλληλη για την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Μέσα από δραστηριότητες και συζήτηση στην τάξη οι μαθητές θα μάθουν να εγείρουν υποθέσεις και να τις αντιπαραβάλλουν, θα αποκτήσουν κριτική σκέψη, ώστε σταδιακά να εξελιχθούν σε καλούς λύτες προβλημάτων (Siegler, 2003; Thom & Pirie, 2002; Lerch, 2004; Greer, 1997) .

Μια τρίτη βασική αιτία για τη δυσκολία των μαθητών με την επίλυση προβλήματος είναι η ανασκόπηση της λύσης. Οι μαθητές έχουν μάθει να απαντούν σε λεκτικά προβλήματα, χωρίς να ελέγχουν αν η απάντησή τους συμφωνεί με τα δεδομένα του προβλήματος. Αυτή η συνήθεια των μαθητών είναι δικαιολογημένη καθώς στο ελληνικό σχολείο σήμερα δεν τονίζεται η σημασία της ανασκόπηση της λύσης. Αυτό που βιώνουν τα παιδιά στην τάξη είναι ότι οι καλοί μαθητές δεν χρειάζονται χρόνο να σκεφτούν πάνω στο πρόβλημα και μπορούν να το λύσουν σε όσο το δυνατό λιγότερο χρόνο. Η άποψη αυτή ωθεί εδώ και πολλά χρόνια τους μαθητές να μελετούν επιπόλαια την εκφώνηση του προβλήματος και να απαντούν χωρίς να ελέγχουν την ορθότητα του αποτελέσματός τους.

Τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, λοιπόν, συμβάλουν ώστε οι μαθητές να αποκτούν κάποιες ασύνδετες μεταξύ τους μαθηματικές γνώσεις χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι αυτές είναι εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων. Όταν απαιτείται να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις αυτές σε ένα διαφορετικό πλαίσιο τα αποτελέσματα είναι απογοητευτικά. Οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη σκοπιμότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και οι γνώσεις που αποκτούν πολύ γρήγορα ξεχνιούνται (Κόσυβας, 1996).

Η παρούσα έρευνα μελετά τις επιδόσεις των μαθητών της Γ’ Γυμνασίου στην οποίους αντιμετωπίζουν τα επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων και κυρίως εστιάζει στους τρόπους με τους προβλήματα αυτά. Στη συνέχεια, εξετάζεται η συμπεριφορά των ίδιων μαθητών στην επίλυση προβλημάτων ρουτίνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της μελέτης ήταν να διερευνήσει τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου αποτυγχάνουν όταν αντιμετωπίζουν πρωτότυπα προβλήματα παρόμοια με αυτά του διαγωνισμού PISA 2003. Πιο αναλυτικά, η παρούσα μελέτη εξετάζει τις επιδόσεις των μαθητών αυτών σε προβλήματα όπως εκείνα του PISA και τις συγκρίνει με τις επιδόσεις τους σε συνήθη προβλήματα ρουτίνας, τα οποία είναι κοντά στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου. Μαθητές δύο τμημάτων κλήθηκαν να επιλύσουν προβλήματα ρουτίνας και προβλήματα από το PISA. Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν και στη συνέχεια διενεργήθηκαν συνεντεύξεις με επιλεγμένο υποσύνολο του δείγματος, με σκοπό να εμβαθύνουμε στον τρόπο σκέψης των μαθητών και να εντοπίσουμε τις αδυναμίες τους. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και μαζί με τα γραπτά των μαθητών αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό της μελέτης.

Επιλογή μεθόδου και συμμετεχόντων

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε αρχές Μαΐου 2008, λίγο πριν τις τελικές εξετάσεις του Ιουνίου, σε ένα Γυμνάσιο της Αθήνας. Έλαβαν μέρος συνολικά 55 μαθητές, της Γ΄ τάξης Γυμνασίου και συγκεκριμένα 26 αγόρια και 29 κορίτσια από δυο διαφορετικά τμήματα. Τα δυο τμήματα είχαν τον ίδιο διδάσκοντα στα Μαθηματικά, ο οποίος ενημέρωσε την ερευνήτρια πως οι επιδόσεις των μαθητών ήταν παρόμοιες. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε κάθε τμήμα ξεχωριστά και περιλάμβανε δυο φάσεις. Στην πρώτη φάση τα υποκείμενα κλήθηκαν να απαντήσουν σε δυο δοκίμια με συγκεκριμένα προβλήματα, ενώ στη δεύτερη φάση συγκεκριμένες ομάδες μαθητών, ανάλογα με τις επιδόσεις τους στα δυο δοκίμια, κλήθηκαν σε συνέντευξη. Πριν από την έναρξη λύσης των προβλημάτων διευκρινίσαμε στους μαθητές το σκοπό της έρευνάς μας και τονίσαμε πως τα στοιχεία που θα συλλέγαμε θα χρησιμοποιούνταν ανώνυμα. Αφού τους ευχαριστήσαμε για την πολύτιμη βοήθειά τους συνεχίσαμε στη διεξαγωγή της πρώτης φάσης.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν όπως προαναφέρθηκε δυο δοκίμια. Το πρώτο δοκίμιο περιείχε προβλήματα ρουτίνας, παρόμοια με αυτά του σχολικού εγχειριδίου. Το δεύτερο δοκίμιο περιείχε πρωτότυπα προβλήματα από το διαγωνισμό του PISA 2003. Τα δυο δοκίμια δοκιμάστηκαν πιλοτικά σε τρεις μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου (2 κορίτσια και 1 αγόρι) που δεν ανήκαν στο δείγμα της έρευνας. Η πιλοτική χορήγηση των δοκιμίων έγινε με στόχο να εντοπιστούν τυχόν αδυναμίες στη διατύπωση των έργων και να εκτιμηθεί ο απαιτούμενος χρόνος για τη συμπλήρωσή τους. Μετά την πιλοτική χορήγηση τροποποιήθηκαν οι εκφωνήσεις των τριών προβλημάτων στο 1^{ο} δοκίμιο, ώστε να γίνει πιο κατανοητό στα παιδιά.

Το πρώτο φύλλο βασίστηκε σε προβλήματα από το άρθρο *Understanding των* Buxkemper και Hartfiel (2003). Στο δοκίμιο αυτό οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τρία προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά είναι τυπικά μαθηματικά προβλήματα παρόμοια με αυτά του σχολικού εγχειριδίου (Δείτε Παράρτημα Α). Η επιλογή των προβλημάτων αυτών έγινε με βάση το σχολικό βιβλίο και συγκεκριμένα προτιμήσαμε προβλήματα που βασίζονταν σε καταστάσεις που ενδεχομένως οι μαθητές είχαν αντιμετωπίσει στο παρελθόν.

Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν μια εξίσωση. Ο στόχος του προβλήματος είναι να ελέγξουμε κατά πόσον οι μαθητές κατανοούν το λεκτικό πρόβλημα, είναι δηλαδή σε θέση να το εκφράζουν και να το αντιλαμβάνονται με διαφορετικούς τρόπους. Συγκεκριμένα, εξετάζεται σε ποιο βαθμό οι μαθητές είναι σε θέση να μεταφράσουν σωστά τις λεκτικές περιγραφές σε μαθηματική εξίσωση. Στο δεύτερο πρόβλημα οι μαθητές καλούνταν να σχολιάσουν τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος και να κρίνουν την ορθότητα ή όχι της λύσης του. Ζητώντας από τους μαθητές να βρουν λογικά λάθη είναι ένας καλός τρόπος να ελεγχθεί η κατανόηση των διάφορων συνεπαγωγών στο πρόβλημα, αλλά και να εντοπιστούν λογικά λάθη. Τέλος, το τρίτο πρόβλημα είναι ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν ένα τμήμα μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου. Το πρόβλημα αυτό έχει δυο στόχους. Ο πρώτος στόχος είναι να εξεταστεί αν οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν τα μέρη του υλικού τα οποία μπορούν να «συναρμολογηθούν» και να τους οδηγήσουν στη λύση. Επίσης, με το πρόβλημα αυτό εξετάζεται αν οι μαθητές προσπαθώντας να «συναρμολογήσουν» το

υλικό που τους δόθηκε μπορούν να σχηματίσουν ένα μοντέλο λύσης του προβλήματος.

Το δεύτερο δοκίμιο περιέχει τρία προβλήματα από το διαγωνισμό του PISA (2003) (δείτε Παράρτημα Α). Το πρώτο πρόβλημα (Cinema) ανήκει στην κατηγορία *προβλημάτων λήψης απόφασης* και επιλέχθηκε γιατί η πλειοψηφία των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγωνισμό του PISA σημείωσε καλές επιδόσεις. Το πρόβλημα αναφέρεται σε μια παρέα συμμαθητών που θέλουν να πάνε στον κινηματογράφο. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές πρέπει να διαβάσουν και να αναλύσουν τις πληροφορίες που δίνονται και να κατανοήσουν τους περιορισμούς του. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε δυο ερωτήσεις. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να αποφασίσουν αν η παρέα των μαθητών του προβλήματος μπορεί ή όχι να παρακολουθήσει τις ταινίες που αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος. Η δεύτερη ερώτηση είναι μια ερώτηση του τύπου πολλαπλής επιλογής. Πλέον οι απαιτήσεις του προβλήματος αυξάνουν καθώς οι μαθητές πρέπει να χειριστούν πολλούς περιορισμούς. Σύμφωνα με την κλίμακα αξιολόγησης που προτείνεται στο PISA οι μαθητές που απαντούν σωστά τη δεύτερη ερώτηση είναι ικανοί να χειριστούν πολύπλοκους περιορισμούς και κατατάσσονται στο δεύτερο επίπεδο δυσκολίας.

Το δεύτερο πρόβλημα (Βιβλιοθήκη) ανήκει στην κατηγορία *ανάλυση και σχεδιασμός συστήματος* και είναι ένα πρόβλημα στο οποίο οι μαθητές του διαγωνισμού γενικά διεθνώς είχαν μέτριες επιδόσεις. Το πρόβλημα αυτό περιγράφει τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος δανεισμού της βιβλιοθήκης ενός Πανεπιστημίου. Στην πρώτη ερώτηση του προβλήματος οι μαθητές έπρεπε να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν τους κανόνες λειτουργίας του συστήματος, ώστε να αποφασίσουν για το επιτρεπόμενο χρονικό διάστημα δανεισμού συγκεκριμένης έκδοσης. Στη δεύτερη ερώτηση οι μαθητές έπρεπε να φτιάξουν ένα παρόμοιο διάγραμμα ροής για μια άλλη βιβλιοθήκη και να εκτελέσουν συγκεκριμένους κανόνες. Η πρώτη ερώτηση ανήκει στο πρώτο επίπεδο της κλίμακας αξιολόγησης του PISA, ενώ η δεύτερη ερώτηση ήταν πιο δύσκολη και ήταν του επιπέδου 3. Μάλιστα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του PISA, η δεύτερη ερώτηση του προβλήματος αυτού, ήταν η δεύτερη σε επίπεδο δυσκολίας ερώτηση του διαγωνισμού.

Τέλος, το τρίτο πρόβλημα (Άρδευση) ανήκει στην κατηγορία *αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων* και είναι από τα προβλήματα που δυσκόλεψαν αρκετά

τους μαθητές. Στο πρόβλημα παρουσιάζεται ένα σύστημα άρδευσης. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τα κύρια χαρακτηριστικά και τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος. Η πρώτη ερώτηση αναθέτει στους μαθητές μια έρευνα, ώστε να σχεδιάσουν την πιθανή ροή του νερού στο σύστημα. Τα αποτελέσματα από αυτή την ερώτηση μας πληροφορούν αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει το σύστημα των πυλών και τον τρόπο με τον οποίο το νερό διαχέεται στο σύστημα. Η ερώτηση αυτή είναι του πρώτου επιπέδου της κλίμακας αξιολόγησης του PISA. Η δεύτερη ερώτηση εξετάζει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πυλών και της ροής του νερού. Οι απαιτήσεις του προβλήματος πλέον αυξάνουν, καθώς οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν και να αιτιολογήσουν τη λειτουργία κάθε πύλης και να αποφασίσουν αν το νερό θα τρέξει σε όλο το σύστημα. Η ερώτηση αυτή είναι του δεύτερου επιπέδου της κλίμακας αξιολόγησης. Η τρίτη ερώτηση του προβλήματος, θεωρήθηκε η πιο δύσκολη ερώτηση του διαγωνισμού. Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές πρέπει να φτιάξουν ένα τεστ, ώστε να ελέγξουν αν η πύλη που έχει κολλήσει και εμποδίζει το νερό να τρέξει στο σύστημα είναι η D.

Διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Η έρευνα όπως προαναφέραμε διεξήχθη σε δυο φάσεις. Για την πρώτη φάση χρειάστηκαν δυο διδακτικές ώρες, οι οποίες μάλιστα ήταν συνεχόμενες, ώστε να μην διακοπεί η ροή της διαδικασίας. Ξεκινήσαμε με το πρώτο φύλλο εργασίας, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν τρία προβλήματα. Αρχικά εξηγήσαμε το πρώτο πρόβλημα στους μαθητές και αφού λύθηκαν οι απορίες τους, αφέθηκαν να λύσουν το πρόβλημα μόνοι τους. Περαιτέρω βοήθεια δεν δόθηκε. Αφού έλυσαν το πρόβλημα όλοι οι μαθητές συνεχίσαμε στα δυο άλλα προβλήματα, εφαρμόζοντας την ίδια τακτική. Τελειώνοντας με το πρώτο φύλλο εργασίας, συνεχίσαμε στο δεύτερο ακολουθώντας και πάλι την ίδια τακτική.

Τα φύλλα εργασίας δόθηκαν στους μαθητές κατά τη διάρκεια του σχολικού ωραρίου χωρίς αυτοί να έχουν ενημερωθεί για τη διεξαγωγή της έρευνας. Πριν από την έναρξη της διαδικασίας τονίσαμε στους μαθητές πως ο σκοπός της έρευνας ήταν να μελετήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων, με απώτερο σκοπό να τους βοηθήσουμε να ξεπεράσουν τα εμπόδια αυτά και να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων. Παράλληλα, τονίσαμε στους μαθητές ότι σκοπός της έρευνας δεν ήταν η αξιολόγησή τους και ότι ο λόγος που τους ζητήσαμε να γράψουν το ονοματεπώνυμό τους στα φύλλα εργασίας ήταν ώστε να

μπορέσουμε εύκολα να εντοπίσουμε τους μαθητές που οι απαντήσεις τους παρουσίαζαν ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Έπειτα από τις παραπάνω οδηγίες ξεκίνησε η διαδικασία. Η ερευνήτρια μαζί με τη διδάσκουσα παρέμειναν στην τάξη, ώστε να επιτηρούν την ομαλή διεξαγωγή της διαδικασίας. Με το πέρας της Α΄ φάσης στο πρώτο τμήμα συνεχίστηκε η ίδια ακριβώς διαδικασία και στο δεύτερο τμήμα.

Αξιολόγηση των φύλλων εργασίας

Αφού ολοκληρώθηκε η επίλυση των φύλλων εργασίας και στα δυο τμήματα προχωρήσαμε στην αξιολόγησή τους. Για την αξιολόγηση του δεύτερου δοκιμίου χρησιμοποιήσαμε τη φόρμα που χρησιμοποιήθηκε και στον διαγωνισμό του PISA 2003, ενώ για το πρώτο δοκίμιο δημιουργήθηκε μια ανάλογη φόρμα (Δείτε Παράρτημα Α). Πιο συγκεκριμένα για το πρώτο δοκίμιο η αξιολόγηση είχε ως εξής: Για κάθε πρόβλημα η πλήρης απάντηση βαθμολογούνταν με δέκα μονάδες. Στο πρώτο πρόβλημα πλήρης θεωρείται η απάντηση που δίνει απευθείας τη μορφή της εξίσωσης που οδηγεί στη λύση, δηλαδή $\chi + 2\chi + 3 = 12$ ή η απάντηση με μορφή συστήματος, δηλαδή «αν χ ο μικρότερος αριθμός και ψ ο μεγαλύτερος τότε $2\chi = \psi - 3$, οπότε η εξίσωση είναι $\chi + 2\chi + 3 = 12$». Αν δοθούν οι ζητούμενοι αριθμοί χωρίς να γραφεί η εξίσωση τότε η απάντηση θεωρείται μερικώς ορθή και βαθμολογείται με πέντε μονάδες. Απαντήσεις της μορφής «αν χ το μικρότερο μέρος τότε το μεγαλύτερο θα είναι $2\chi-3$» θεωρούνται λανθασμένες. Επίσης λανθασμένες θεωρούνται οποιεσδήποτε άλλες απαντήσεις.

Στο δεύτερο πρόβλημα πλήρης απάντηση θεωρείται αυτή που περιγράφει σωστά τα βήματα της λύσης και απορρίπτει το συμπέρασμα αιτιολογημένα. Μερικώς ορθές (5 μονάδες) θεωρούνται οι απαντήσεις που έχουν ένα λάθος στην περιγραφή των βημάτων, αλλά το συμπέρασμα είναι σωστό και αιτιολογείται πλήρως. Επίσης, μερικώς ορθές θεωρούνται οι απαντήσεις που περιγράφουν σωστά τα βήματα της λύσης, αλλά δέχονται την ορθότητα του συμπεράσματος. Οι απαντήσεις που περιγράφουν λάθος τα βήματα της λύσης και το συμπέρασμα θεωρούνται λανθασμένες και βαθμολογούνται με μηδέν μονάδες. Επίσης, μηδέν μονάδες παίρνουν και οι μη αιτιολογημένες απαντήσεις.

Στο τρίτο πρόβλημα, με δέκα μονάδες βαθμολογήθηκε μια περιγραφική λύση του προβλήματος όπως «Στο τρίγωνο ACB εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρω το χ. Στο τρίγωνο ABD εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρω την πλευρά AD. Από το AD αφαιρώ το χ και βρίσκω το ψ». Επίσης, με δέκα μονάδες

βαθμολογήθηκε και η ορθή αριθμητική λύση του προβλήματος. Μερικώς ορθές απαντήσεις (5 μονάδες) θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που είχαν κάποιο αριθμητικό λάθος, αλλά ο τρόπος σκέψης είναι σωστός. Επίσης, με πέντε μονάδες βαθμολογήθηκαν και οι απαντήσεις που είχαν βρει το χ, την πλευρά AD αλλά δεν είχαν αφαιρέσει από το AD το χ, ώστε να βρουν το ψ. Οι απαντήσεις στις οποίες εφαρμόστηκε Π.Θ στο τρίγωνο BCD θεωρούνται λανθασμένες και δεν πήραν καθόλου βαθμό. Επίσης, όλες οι άλλες απαντήσεις θεωρούνται λανθασμένες.

Τα αποτελέσματα αναλύθηκαν με το λογισμικό πρόγραμμα SPSS, για να διαφανεί ο βαθμός επιτυχίας των υποκειμένων της έρευνας στο καθένα από τα δύο είδη προβλημάτων και να γίνει η σχετική σύγκριση.

Β΄ Φάση της έρευνας

Η δεύτερη φάση της έρευνας περιλάμβανε τις συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στα τέλη Μαΐου, κατά τη διάρκεια των τελικών εξετάσεων των μαθητών και έπειτα από συνεννόηση με το διευθυντή του σχολείου και τους ίδιους τους μαθητές. Η επιλογή των μαθητών που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις βασίστηκε στις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στα προβλήματα των δυο δοκιμίων. Το κριτήριο επιλογής ήταν οι λύσεις τους να παρουσιάζουν ειδικό ενδιαφέρον, όπως για παράδειγμα, να διακρίνονται βασικές δυσκολίες των μαθητών στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης του προβλήματος ή και δυσκολίες που αφορούν στην κατανόηση του προβλήματος ή στην αναπαράσταση των δεδομένων. Από τους μαθητές αυτούς λήφθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις, ώστε να δοθεί η δυνατότητα πληρέστερης αιτιολόγησης, ανάλυσης και κατανόησης των απαντήσεων και παράλληλα να έχει ο ερωτώμενος την ευκαιρία να εκφράσει τις απόψεις του και προφορικά.

Στη συνέχεια περιγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά και οι επιδόσεις των μαθητών που συμμετείχαν στο ποιοτικό μέρος της έρευνας κατά ομάδα. Η ομαδοποίηση έγινε με βάση τα αποτελέσματα στα δύο δοκίμια. Συγκεκριμένα, στην ομάδα Α εντάχθηκαν μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση και στα δύο δοκίμια, στην ομάδα Β εντάχθηκαν μαθητές που είχαν ψηλότερη επίδοση στο δεύτερο δοκίμιο, στην ομάδα Γ μαθητές με καλύτερη επίδοση στο πρώτο δοκίμιο και στην ομάδα Δ μαθητές με χαμηλή επίδοση και στα δύο δοκίμια.

Ομάδα Α’: Έξι μαθητές με υψηλή επίδοση και στα δυο φύλλα εργασίας

Συμμετέχων 1: Άριστος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 19 και βαθμολογία στα δυο φύλλα εργασίας 30 / 30.

Συμμετέχων 2 : Πολύ καλή μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 17 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 30/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο 27,5/30.

Συμμετέχων 3: Άριστος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 19 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 30/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο 28 /30.

Συμμετέχων 4: Άριστος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 20 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 30/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 27,5/30.

Συμμετέχων 5 : Καλή μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα τρίμηνα 16 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 25/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 27,5/30.

Συμμετέχων 6 : Καλός μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 16 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 25/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 27,5/30.

Ομάδα Β’ : Δέκα μαθητές με μέτριες επιδόσεις και στα δυο φύλλα εργασίας

Συμμετέχων 1: Άριστος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας 19 στα δυο πρώτα τρίμηνα και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 15/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο 25/30.

Συμμετέχων 2: Άριστη μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 19 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 20/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο 30/30.

Συμμετέχων 3: Μέτριος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 15 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 5/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο 20/ 30.

Συμμετέχων 4: Καλή μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 18 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 15/ 30, ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 21/30.

Συμμετέχων 5: Μέτρια μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 16 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 10/ 30, ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 18,5/30.

Συμμετέχων 6: Μέτριος μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα τρίμηνα 16 και βαθμολογία στα δυο φύλλα εργασίας 15/ 30.

Συμμετέχων 7: Μέτρια μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 15 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 20/ 30 βαθμούς ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 17/30.

Συμμετέχων 8: Μέτρια μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 14 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 15/30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 17/30.

Συμμετέχων 9: Όχι καλός μαθητής με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 13 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 15/ 30, ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 16/30.

Συμμετέχων 10: Μέτρια μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα δυο πρώτα τρίμηνα 14 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 20/ 30 ενώ στο δεύτερο και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας φύλλο εργασίας 17/ 30 βαθμούς.

<u>Ομάδα Γ’ : Πέντε μαθητές με κακές επιδόσεις και στα δυο φύλλα εργασίας</u>

Συμμετέχων 1: Μαθητής με χαμηλή επίδοση (μέσο όρο στα δυο πρώτα τρίμηνα 13) και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 15/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 0/ 30.

Συμμετέχων 2: Μαθητής με χαμηλή επίδοση (μέσο όρο στα δυο πρώτα τρίμηνα 11) και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 5/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 14,5/ 30.

Συμμετέχων 3: Μαθήτρια με χαμηλή επίδοση (μέσο όρο στα δυο πρώτα τρίμηνα 12) και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 10/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 12/ 30.

Συμμετέχων 4: Μέτρια μαθήτρια με μέσο όρο βαθμολογίας στα τρίμηνα 15 και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 5/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 12/ 30.

Συμμετέχων 5: Μαθητής με χαμηλή επίδοση (μέσο όρο στα δυο πρώτα τρίμηνα 11) και βαθμολογία στο πρώτο φύλλο εργασίας 5/ 30 ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας 7,5/ 30.

Σχεδιασμός πρωτοκόλλου συνεντεύξεων

Έχοντας καταλήξει στη μέθοδο που εφαρμόστηκε καθώς και στην επιλογή των συμμετεχόντων, το βήμα που ακολούθησε ήταν ο προσδιορισμός και η επιλογή των ερωτήσεων που θα χρησιμοποιούνταν στις συνεντεύξεις, ώστε να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Όπως προαναφέραμε η συνέντευξη ήταν ημιδομημένη. Έτσι λοιπόν τέθηκαν στους μαθητές οχτώ ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, αλλά ταυτόχρονα υποβλήθηκαν και συμπληρωματικές ερωτήσεις για πληρέστερη κατανόηση των απαντήσεων που δόθηκαν (Παράρτημα Β). Η πρώτη ερώτηση αφορούσε στην κατανόηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν το πρόβλημα και να αναφέρουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Στη δεύτερη και την τρίτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν τη λύση που εφάρμοσαν αλλά και να κρίνουν τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποίησαν για τη λύση τους. Στην τέταρτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να ελέγξουν αν έχουν χρησιμοποιήσει όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς του προβλήματος. Στην πέμπτη ερώτηση ρωτήσαμε τους μαθητές για ποιο λόγο εφάρμοσαν τη συγκεκριμένη μέθοδο, ενώ στην έκτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα με ένα διαφορετικό τρόπο. Τέλος, ρωτήσαμε τους μαθητές αν έχουν ελέγξει ότι τα αποτελέσματά τους ταιριάζουν με τους περιορισμούς του προβλήματος, ενώ με την όγδοη ερώτηση ελέγξαμε αν έγινε ανασκόπηση της μεθόδου επίλυσης. Οι ερωτήσεις τέθηκαν σε όλους τους μαθητές με την ίδια σειρά, όμως όπως τονίσαμε και παραπάνω οι συνεντεύξεις εμπλουτίστηκαν και με επιπλέον ερωτήσεις, ανάλογα με τις ανάγκες της κάθε περίπτωσης.

Διεξαγωγή συνεντεύξεων

Μετά την ολοκλήρωση της δομής της συνέντευξης, η διαδικασία δοκιμάστηκε πιλοτικά σε ένα μαθητή, ώστε να συμπληρωθούν πιθανά κενά, αλλά και να αντιμετωπιστούν καλύτερα πιθανά προβλήματα που ενδεχομένως παρουσιάζονταν στις κανονικές συνεντεύξεις. Μετά από κάποιες παρατηρήσεις και βελτιώσεις καταλήξαμε στην τελική μορφή της συνέντευξης. Έπειτα από συνεννόηση με το διευθυντή του σχολείου και τους συμμετέχοντες, ορίστηκαν οι μέρες και οι ώρες των

συναντήσεων. Για την ακριβή καταγραφή των συνεντεύξεων χρησιμοποιήθηκε φορητό ψηφιακό μαγνητόφωνο. Ο σκοπός της μαγνητοφώνησης ήταν να αποδοθεί πλήρως η όλη ατμόσφαιρα της συνέντευξης και να ερευνηθούν σε βάθος οι απαντήσεις των μαθητών. Αφού η ερευνήτρια εξήγησε στους μαθητές τη σκοπιμότητα του μαγνητοφώνου, προχώρησε στην κυρίως διαδικασία.

Κυρίως διαδικασία

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στο χώρο του σχολείου και η καθεμιά διήρκεσε κατά μέσο όρο 45 λεπτά. Αναλυτικότερα, τα 2-3 πρώτα λεπτά αναλώθηκαν για τη δημιουργία άνετης ατμόσφαιρας, ώστε η επικοινωνία να πάρει τη μορφή ευχάριστης συνομιλίας. Έτσι λοιπόν υπενθυμίσαμε στους μαθητές το σκοπό της έρευνας, τους διαβεβαιώσαμε ότι όσα θα ειπωθούν θα χρησιμοποιηθούν μόνο για την έρευνα και προσπαθήσαμε να προκαλέσουμε το ενδιαφέρον τους για συνεργασία. Οι ερωτήσεις όπως προαναφέραμε, αρχικά αφορούσαν την αιτιολόγηση των απαντήσεων που δόθηκαν γραπτώς. Βέβαια, ανάλογα με τον συμμετέχοντα και τα λεγόμενά του οι ερωτήσεις προσαρμόζονταν αντίστοιχα, προκειμένου να υπάρξει αναλυτική και πλούσια σε πληροφορίες συζήτηση. Για να ελαχιστοποιηθούν οι εξωγενείς επιδράσεις έγινε προσπάθεια ώστε οι ερωτήσεις σε όλους τους συμμετέχοντες να τεθούν με ουδέτερο τρόπο ώστε να μην υπάρξει πιθανότητα να καθοδηγηθούν οι θέσεις του ερωτώμενου. Οι συνεντεύξεις έλαβαν μέρος στο σχολείο των ανωτέρω συμμετεχόντων και η όλη διαδικασία διήρκεσε από 21 Μαΐου έως 11 Ιουνίου 2008.

Πρωτόκολλο ανάλυσης δεδομένων

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων ήταν οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές τόσο γραπτά όσο και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Στην ενότητα αυτή επεξηγείται το πρωτόκολλο ανάλυσης των δεδομένων, για κάθε έργο ξεχωριστά.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 1 του πρώτου φύλλου εργασίας.

Οι απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο έργο κατατάχθηκαν στις εξής κατηγορίες:

Πλήρης απάντηση: όταν ο μαθητής έγραφε σωστά την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα ή όταν ο μαθητής έδινε την απάντηση με τη βοήθεια συστήματος δυο εξισώσεων.

Μερικώς ορθή απάντηση: όταν οι μαθητές έδιναν τους ζητούμενους αριθμούς χωρίς όμως να γράψουν την εξίσωση.

Λανθασμένη απάντηση: όταν οι μαθητές έγραφαν «αν χ το μικρότερο μέρος τότε το μεγαλύτερο θα είναι 2χ-3» ή έδιναν οποιαδήποτε άλλη απάντηση.

Όσον αφορά την κατανόηση του προβλήματος, οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σε τρία επίπεδα. Το *επίπεδο κατανόησης 1* περιλαμβάνει τους μαθητές που κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα. Οι μαθητές του 1^{ου} επιπέδου κατανόησης είτε απάντησαν σωστά στο πρόβλημα είτε προσπάθησαν να φτιάξουν τη ζητούμενη εξίσωση, αλλά έκαναν λάθη στην κωδικοποίηση και στην αναπαράσταση των δεδομένων. Στο *επίπεδο κατανόησης 2* κατατάχθηκαν οι μαθητές που κατανόησαν μερικώς το πρόβλημα. Στο επίπεδο αυτό περιλαμβάνονται οι απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι δεν κατανόησαν ότι το ζητούμενο του προβλήματος ήταν η κατασκευή εξίσωσης και έδωσαν αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Επίσης, στο επίπεδο κατανόησης 2 περιλαμβάνονται και οι απαντήσεις της μορφής χ+ψ=12 => χ=3, ψ=9 καθώς οι μαθητές αυτοί κατασκεύασαν μια εξίσωση η οποία όμως δεν μπορεί να λυθεί. Τέλος στο *επίπεδο κατανόησης 3* κατατάχθηκαν οι μαθητές οι οποίοι δεν είχαν κατανοήσει καθόλου το πρόβλημα και δεν έδωσαν καμία απολύτως απάντηση.

Ως προς την εφαρμογή της κατάλληλης στρατηγικής διακρίναμε δυο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία ονομάστηκε *αποτελεσματική στρατηγική* και περιλάμβανε όσους μαθητές χρησιμοποίησαν κατάλληλες στρατηγικές οι οποίες θα τους οδηγούσαν στη σωστή λύση. Η δεύτερη κατηγορία περιλάμβανε τις *μη αποτελεσματικές στρατηγικές*, οι οποίες δεν μπορούσαν να οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα που αφορά τον έλεγχο του αποτελέσματος διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Έλεγχος αποτελέσματος: αν οι μαθητές έλεγχαν το αποτέλεσμα που βρήκαν ώστε να ταιριάζει με τα δεδομένα του προβλήματος.

Όχι έλεγχος: αν οι μαθητές δέχονταν το αποτέλεσμά τους άκριτα.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 2 του πρώτου φύλλου εργασίας

Οι απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα αυτό κατατάχτηκαν σε τρεις κατηγορίες:

Πλήρης απάντηση: αν η λύση των μαθητών ήταν απολύτως σωστή σύμφωνα με τη φόρμα αξιολόγησης που δημιουργήθηκε.

Μερικώς ορθή απάντηση: αν οι μαθητές είχαν ένα λάθος στην περιγραφή των βημάτων αλλά το συμπέρασμα ήταν σωστό και αιτιολογήθηκε πλήρως. Επίσης μη

πλήρεις θα θεωρηθούν απαντήσεις που περιγράφουν σωστά τα βήματα της λύσης αλλά δέχονται την ορθότητα του συμπεράσματος.

Λάθος απάντηση: αν οι μαθητές περιγράφουν λάθος τα βήματα της λύσης και αποδέχονται την ορθότητα του συμπεράσματος. Επίσης στην κατηγορία αυτή εντάσσονται και οι μη αιτιολογημένες απαντήσεις.

Όσον αφορά την κατανόηση του προβλήματος διακρίναμε και πάλι τρία επίπεδα:

Επίπεδο κατανόησης 1: οι μαθητές που κατανόησαν πλήρως το ζητούμενο του προβλήματος.

Επίπεδο κατανόησης 2: οι μαθητές που κατανόησαν μερικώς το πρόβλημα. Στο επίπεδο αυτό περιλαμβάνονται οι μαθητές οι οποίοι δεν κατανόησαν ακριβώς το ζητούμενο του προβλήματος. Για παράδειγμα ορισμένοι μαθητές οι οποίοι περιέγραψαν τα βήματα επίλυσης της ανίσωσης, αλλά δεν κατανόησαν τι ακριβώς έπρεπε να κάνουν με το συμπέρασμα.

Επίπεδο κατανόησης 3: οι μαθητές που δεν κατανόησαν τι ακριβώς ζητούσε το πρόβλημα και δεν έδωσαν απάντηση.

Για την απάντηση του ερωτήματος που αφορά τον έλεγχο της λύσης διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Έλεγχος απάντησης: αν οι μαθητές έλεγχαν την απάντησή τους, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητά της.

Όχι έλεγχος: όταν οι μαθητές δεν έλεγχαν την απάντησή τους.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 3 του πρώτου φύλλου εργασίας.

Στο τρίτο πρόβλημα του πρώτου φύλλου εργασίας οι απαντήσεις των μαθητών ως προς την ορθότητά τους κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

Πλήρης απάντηση: η ορθή αριθμητική λύση του προβλήματος αλλά και οι περιγραφικές λύσεις των μαθητών.

Μερικώς ορθή απάντηση: οι απαντήσεις που έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος αλλά ο τρόπος σκέψης είναι σωστός. Επίσης οι απαντήσεις που έχουν βρει το χ, την πλευρά AD αλλά δεν έχουν αφαιρέσει από το AD το χ, ώστε να βρουν το ψ.

Λάθος απάντηση: οι απαντήσεις που εφαρμόζουν Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο BCD και όλες οι άλλες απαντήσεις.

Για τον έλεγχο της κατανόησης του προβλήματος διακρίναμε και πάλι τρία επίπεδα:

Επίπεδο κατανόησης 1: οι μαθητές που κατανόησαν πλήρως τι ζητούσε το πρόβλημα.

Επίπεδο κατανόησης 2: οι μαθητές που κατανόησαν μερικώς το πρόβλημα.

Επίπεδο κατανόησης 3: οι μαθητές που δεν κατανόησαν τι ακριβώς ζητούσε το πρόβλημα.

Για να εκτιμηθεί η στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διακρίναμε τις στρατηγικές τους σε δυο κατηγορίες:

Αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος.

Μη αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος.

Για την απάντηση του ερωτήματος που αφορά στον έλεγχο του αποτελέσματος διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Έλεγχος αποτελέσματος: οι μαθητές έλεγχαν αν το αποτέλεσμα που βρήκαν ταιριάζει με τα δεδομένα του προβλήματος.

Όχι έλεγχος: αν οι μαθητές δέχονταν το αποτέλεσμά τους άκριτα.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 1 του δεύτερου φύλλου εργασίας.

Στο πρώτο πρόβλημα του δεύτερου φύλλου εργασίας οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν ως προς την ορθότητά τους ως εξής:

Πλήρης απάντηση: Οι μαθητές έχουν απαντήσει σωστά και στις δυο ερωτήσεις του προβλήματος.

Μερικώς ορθή απάντηση: Οι μαθητές έχουν δώσει μια λανθασμένη απάντηση στην πρώτη ερώτηση του προβλήματος.

Λάθος απάντηση: Οι μαθητές έχουν απαντήσει λάθος στις δυο ερωτήσεις του προβλήματος.

Τα τρία επίπεδα ελέγχου κατανόησης του προβλήματος έχουν ως εξής:

Επίπεδο κατανόησης 1: Οι μαθητές που κατανόησαν πλήρως τα δεδομένα και τα ζητούμενα.

Επίπεδο κατανόησης 2: Οι μαθητές που κατανόησαν μερικώς τις ερωτήσεις του προβλήματος, με αποτέλεσμα να δώσουν λάθος απαντήσεις.

Επίπεδο κατανόησης 3: Οι μαθητές που δεν κατανόησαν τις ερωτήσεις και τα στοιχεία του προβλήματος και δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα που αφορά στον έλεγχο του αποτελέσματος διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Έλεγχος αποτελέσματος: Οι μαθητές έλεγχαν αν η απάντησή τους ταιριάζει με τα στοιχεία του προβλήματος.

Όχι έλεγχος: Οι μαθητές δίνουν την απάντησή τους χωρίς να ελέγξουν ξανά τα στοιχειά του προβλήματος, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητά της.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 2 του δεύτερου φύλλου εργασίας.

Οι απαντήσεις των μαθητών ως προς την ορθότητά τους κατηγοριοποιούνται ως εξής:

Πλήρης απάντηση: Οι μαθητές απαντούν και στις δυο ερωτήσεις σωστά.

Μερικώς ορθή απάντηση: Οι μαθητές απαντούν σωστά στην πρώτη ερώτηση. Στη δεύτερη ερώτηση τα 4 βασικά βήματα είναι σωστά αλλά υπάρχει ένα μικρό λάθος του τύπου: μια περίοδος δανεισμού είναι λάθος ή μια περίοδος δανεισμού λείπει ή λείπουν ένα ή περισσότερα ΝΑΙ / ΟΧΙ

Λάθος απάντηση: Οι μαθητές απαντούν λάθος στην πρώτη ερώτηση, ενώ το σύστημα που έχουν κατασκευάσει για τη δεύτερη ερώτηση είναι πλήρες, αλλά έχει περισσότερα από πέντε βήματα.

Όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης του προβλήματος διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες:

Επίπεδο κατανόησης 1: Οι μαθητές κατανοούν το πρόβλημα και απαντούν σωστά και στις δυο ερωτήσεις.

Επίπεδο κατανόησης 2: Οι μαθητές δεν κατανοούν πλήρως τα στοιχεία του προβλήματος και το σύστημα που τους ζητείται να κατασκευάσουν, με αποτέλεσμα να δίνουν λάθος απάντηση.

Επίπεδο κατανόησης 3: Οι μαθητές δεν κατανοούν το σύστημα λειτουργίας της βιβλιοθήκης που τους δίνεται, με αποτέλεσμα να απαντούν λάθος στην πρώτη ερώτηση και να μην μπορούν να κατασκευάσουν το σύστημα που τους ζητείται στη δεύτερη ερώτηση του προβλήματος.

Για να εκτιμηθεί η στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος.

Μη αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος. Για παράδειγμα, μη αποτελεσματικές θεωρήθηκαν οι στρατηγικές στις οποίες κάθε βήμα του συστήματος περιείχε περισσότερες από δυο επιλογές.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα που αφορά τον έλεγχο του αποτελέσματος διακρίναμε δυο κατηγορίες:

Έλεγχος αποτελέσματος: Οι μαθητές έλεγχαν αν η απάντησή τους ταιριάζει με τα στοιχεία του προβλήματος και ανταποκρίνεται στους περιορισμούς του προβλήματος.
Όχι έλεγχος: Οι μαθητές δίνουν την απάντησή τους χωρίς να ελέγξουν ξανά τα στοιχειά και τους περιορισμούς του προβλήματος, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητά της.

Πρωτόκολλο ανάλυσης των απαντήσεων στο έργο 3 του δεύτερου φύλλου εργασίας.

Στο τρίτο πρόβλημα οι απαντήσεις των μαθητών ως προς την ορθότητά τους κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:
Πλήρης απάντηση: Οι μαθητές απαντούν σωστά και στις τρεις ερωτήσεις του προβλήματος.
Λάθος απάντηση: Οι μαθητές απαντούν λάθος σε μια από τις τρεις ερωτήσεις του προβλήματος.

Για τον έλεγχο της κατανόησης του προβλήματος διακρίναμε τα επίπεδα:
Επίπεδο κατανόησης 1: Οι μαθητές κατανοούν πλήρως τον τρόπο λειτουργίας των πυλών του αρδευτικού συστήματος και απαντούν σωστά στις ερωτήσεις.
Επίπεδο κατανόησης 2: Οι μαθητές κατανοούν μερικώς τον τρόπο λειτουργίας του αρδευτικού συστήματος με αποτέλεσμα να μην απαντούν σωστά σε ορισμένες ερωτήσεις του προβλήματος.
Επίπεδο κατανόησης 3: Οι μαθητές δεν κατανοούν το σύστημα άρδευσης και τις ερωτήσεις του προβλήματος, με αποτέλεσμα να απαντούν λάθος.

Για να εκτιμηθεί η στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές διακρίναμε δυο κατηγορίες:
Αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική που εφαρμόστηκε ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος.
Μη αποτελεσματική στρατηγική: αν η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε δεν ήταν κατάλληλη για την ορθή λύση του προβλήματος.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα που αφορά τον έλεγχο του αποτελέσματος διακρίναμε δυο κατηγορίες:
Έλεγχος αποτελέσματος: Οι μαθητές ελέγχουν αν η απάντησή τους ταιριάζει με τα στοιχεία του προβλήματος και ανταποκρίνεται στους περιορισμούς του προβλήματος.
Όχι έλεγχος: Οι μαθητές δίνουν την απάντησή τους χωρίς να ελέγξουν ξανά τα στοιχειά και τους περιορισμούς του προβλήματος, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητά της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει τις επιδόσεις δεκαπεντάχρονων μαθητών στην επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων σε σύγκριση με τις επιδόσεις τους στα προβλήματα ρουτίνας. Αφορμή για την έρευνα αποτέλεσαν οι πολύ κακές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στο διαγωνισμό του PISA 2003, με θέμα την επίλυση προβλήματος. Έγινε λοιπόν προσπάθεια να μελετηθεί ο τρόπος που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στο διαγωνισμό του PISA 2003 σε σύγκριση με τη συμπεριφορά των ίδιων μαθητών όταν επιλύανε προβλήματα ρουτίνας, παρόμοια με αυτά του σχολικού βιβλίου. Μέσα από προσωπικές συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν με ένα υποσύνολο του δείγματος, παρατηρήθηκε ο βαθμός δυσκολίας των μαθητών να κατανοήσουν ένα πρόβλημα, αλλά και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά την επίλυσή του. Επίσης, μελετήθηκαν οι στρατηγικές που επέλεξαν οι μαθητές κατά την επίλυση των προβλημάτων, καθώς επίσης και οι μέθοδοι που εφάρμοσαν, ώστε να ελέγχουν πως ότι κάνουν έχει νόημα. Ένα ακόμη στοιχείο που εξετάστηκε είναι αν οι μαθητές αφού έλυναν το πρόβλημα, αναστοχάζονταν πάνω στη λύση.

Στην πρώτη φάση της έρευνας οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε δυο δοκίμια, το πρώτο από τα οποία περιλάμβανε τρία προβλήματα ρουτίνας, ενώ το δεύτερο περιλάμβανε τρία πρωτότυπα προβλήματα. Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν και αναλύθηκαν με το λογισμικό πρόγραμμα SPSS. Στη συνέχεια, το πλήθος του δείγματος χωρίστηκε σε τρεις ομάδες. Στην ομάδα Α εντάχθηκαν μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση και στα δύο δοκίμια, στην ομάδα Β εντάχθηκαν μαθητές που είχαν μέτριες επιδόσεις και στα δυο δοκίμια, ενώ στην ομάδα Γ μαθητές με χαμηλές επιδόσεις και στα δυο δοκίμια. Στη συνέχεια, έγινε επιλογή των 21 μαθητών που οι απαντήσεις τους παρουσίαζαν ειδικό ενδιαφέρον και πάρθηκαν απ’ αυτούς προσωπικές συνεντεύξεις, ώστε να δοθεί η δυνατότητα πληρέστερης αιτιολόγησης, ανάλυσης και κατανόησης των απαντήσεων.

Τα αποτελέσματα στα τέσσερα πρώτα ερευνητικά αποτελέσματα προέκυψαν από την ανάλυση των απαντήσεων των 55 μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται σε ξεχωριστή ενότητα για κάθε ερευνητικό ερώτημα. Στο ξεκίνημα κάθε ενότητας δίνεται μια συνολική εικόνα του τρόπου με

τον οποίο απαντήθηκαν όσα έργα αφορούσαν στο ερευνητικό ερώτημα που εξετάζει η συγκεκριμένη ενότητα. Σε κάθε ενότητα παρουσιάζονται γι' αυτό ενδεικτικές απαντήσεις στα συγκεκριμένα έργα. Η παρουσίαση των ενδεικτικών απαντήσεων πλαισιώνεται από ένα πίνακα ο οποίος συνοψίζει τη συχνότητα των απαντήσεων ανά ομάδα για κάθε έργο, όπως αυτές καθορίστηκαν στο πρωτόκολλο ανάλυσης δεδομένων.

Μετά από την ανάλυση των ερευνητικών αποτελεσμάτων ακολουθούν χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις προσωπικές συνεντεύξεις της ερευνήτριας με ορισμένους μαθητές του δείγματος.

Ο βαθμός κατανόησης των πρωτότυπων προβλημάτων και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους.

Για την εύρεση του βαθμού κατανόησης των πρωτότυπων προβλημάτων αναλύθηκαν σε βάθος οι απαντήσεις των μαθητών σε κάθε έργο του δεύτερου δοκιμίου και έγινε διαχωρισμός των απαντήσεων σε πλήρεις, μερικώς ορθές και λανθασμένες απαντήσεις. Στη συνέχεια οι απαντήσεις αυτές μελετήθηκαν σε βάθος, ώστε να διαφανεί το επίπεδο κατανόησης των μαθητών για κάθε έργο και να εντοπιστούν οι βασικές δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές. Μέσα από χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν με τους μαθητές παρουσιάζονται αναλυτικότερα οι δυσκολίες τους.

Έργο 1

Το έργο 1 του δεύτερου δοκιμίου αναφέρεται σε μια παρέα μαθητών οι οποίοι σχεδιάζουν να πάνε στον κινηματογράφο. Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές πρέπει να διαβάσουν και να αναλύσουν τις πληροφορίες που δίνονται και να κατανοήσουν τους περιορισμούς, ώστε να απαντήσουν σωστά στις ερωτήσεις του προβλήματος. Το πρόβλημα περιλαμβάνει δυο ερωτήσεις. Η πρώτη ερώτηση του προβλήματος απαντήθηκε σωστά από 48 μαθητές, ενώ οι υπόλοιποι 7 μαθητές έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση. Κανένας μαθητής δεν απάντησε λάθος στην ερώτηση αυτή. Στη δεύτερη ερώτηση του προβλήματος απάντησαν σωστά 53 στους 55 μαθητές, ενώ 2 μαθητές απάντησαν λάθος. Το έργο 1 είναι ένα σχετικά εύκολο πρόβλημα το οποίο κατανοήθηκε πλήρως απ' όλους τους μαθητές. Οι μαθητές που απάντησαν λάθος κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα, ωστόσο δεν ανέλυσαν σωστά τους περιορισμούς του προβλήματος και απάντησαν λάθος.

Έργο 2

Στο δεύτερο έργο του δεύτερου φύλλου εργασίας περιγράφεται το σύστημα δανεισμού μιας βιβλιοθήκης. Οι μαθητές αρχικά καλούνται να απαντήσουν σε μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής που αφορά το χρονικό περιθώριο δανεισμού ενός βιβλίου. Στη δεύτερη ερώτηση οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα σύστημα δανεισμού όμοιο με αυτό που περιγράφεται στο πρόβλημα. Στην πρώτη ερώτηση του προβλήματος απάντησαν σωστά 52 από τους 53 μαθητές. Στη δεύτερη ερώτηση απάντησαν σωστά 8 μαθητές, ενώ 14 μαθητές έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις. Οι υπόλοιποι 33 μαθητές έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Στον πίνακα 13 παρουσιάζονται οι χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη ερώτηση του έργου 2.

Οι μαθητές που έδωσαν πλήρεις απαντήσεις κατασκεύασαν ένα πλήρες σύστημα το οποίο περιείχε τέσσερα βασικά βήματα. Τρεις μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις κατασκεύασαν σωστά τα τέσσερα βασικά βήματα του συστήματος, όμως παρέλειψαν μια περίοδο δανεισμού. Έξι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις δημιούργησαν ένα σύστημα που περιλάμβανε πέντε βήματα. Οι υπόλοιποι πέντε μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις κατασκεύασαν ένα πλήρες σύστημα, όμως ο έλεγχος για την επιστροφή βιβλίων βρισκόταν εκτός διαγράμματος. Ορισμένοι από τους μαθητές που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, κατασκεύασαν διαγράμματα τα οποία περιείχαν περισσότερα από πέντε βήματα. Σε κάποιες άλλες λανθασμένες απαντήσεις, κάποιο βήμα του συστήματος είχε περισσότερες από δυο επιλογές.

Πίνακας 6

Χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών στη 2η ερώτηση του έργου 2

Πλήρης απάντηση	Το σύστημα είναι πλήρες και έχει 4 βήματα.
Μερικώς ορθή απάντηση	α) Τα τέσσερα βήματα είναι σωστά, αλλά λείπει η περίοδος δανεισμού που αφορά τα μέλη του προσωπικού. β) Το σύστημα είναι πλήρες αλλά περιέχει 5 βήματα. γ)Το σύστημα είναι πλήρες αλλά ο έλεγχος για την καθυστέρηση βιβλίων είναι εκτός

	διαγράμματος.
Λάθος απάντηση	α) Το σύστημα περιέχει περισσότερα από 5 βήματα β) Ένα βήμα έχει περισσότερες από δυο επιλογές

Όλοι οι μαθητές που έδωσαν πλήρεις απαντήσεις κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα. Οι μαθητές που κατασκεύασαν πλήρες σύστημα με πέντε βήματα, βρίσκονται στο δεύτερο επίπεδο κατανόησης, καθώς δεν έχουν κατανοήσει πως ο ελάχιστος αριθμός βημάτων του συστήματος πρέπει να είναι 4. Οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις τύπου (α), βρίσκονται επίσης, στο επίπεδο κατανόησης 2. Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν κατανοήσει πως για να είναι πλήρες το σύστημά τους θα πρέπει να περιέχει όλους τους περιορισμούς και να δίνει απάντηση σε κάθε ερώτηση. Οι μαθητές που έδωσαν τη (γ) απάντηση κατασκεύασαν ένα πλήρες και σύντομο σύστημα, ωστόσο δεν κατάφεραν να ενσωματώσουν σε αυτό τον περιορισμό που αφορούσε στην καθυστέρηση επιστροφής των βιβλίων. Οι μαθητές αυτοί έχουν κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα. Οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις βρίσκονται στο επίπεδο κατανόησης 3. Οι συγκεκριμένοι μαθητές, δεν κατανόησαν τους βασικούς περιορισμούς του προβλήματος, δηλαδή, ότι το σύστημα που θα φτιάξουν πρέπει να περιέχει τον ελάχιστο αριθμό βημάτων καθώς και ότι κάθε βήμα θα πρέπει να έχει δυο μόνο επιλογές. Άρα, 13 μαθητές κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 1), ενώ 9 μαθητές κατανόησαν το πρόβλημα μέχρι ένα βαθμό (επίπεδο κατανόησης 2). Οι υπόλοιποι 33 μαθητές δεν έχουν κατανοήσει καθόλου το ζητούμενο του προβλήματος (επίπεδο κατανόησης 3).

<u>1ο Απόσπασμα: Διάλογος με μια μαθήτρια του τρίτου επιπέδου κατανόησης</u>

Ε: Πώς κρίνεις το διάγραμμα που έκανες; Ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος;

Μ: Δεν ξέρω αν είναι σωστό αλλά νομίζω πως κάπως έτσι πρέπει να είναι.

Ε: Είναι το διάγραμμά σου αποτελεσματικό;

Μ: Νομίζω ναι. Περιέχει όλες τις ερωτήσεις που μου λέει το πρόβλημα.

Ε: Στο πρώτο βήμα μια από τις τρεις επιλογές σου είναι «αν έχει αργήσει να επιστρέψει δεν επιτρέπεται δανεισμός». Στο βήμα αυτό δεν κάνεις κάποια ερώτηση.

Μ: Τι ερώτηση να κάνω;

Ε: Αν υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος δεν έχει καθυστερήσει την επιστροφή κάποιου βιβλίου, τότε τι γίνεται;

Μ: Τότε θα πάμε από την αρχή ξανά.

Από το προηγούμενο απόσπασμα προκύπτει πως η μαθήτρια δεν κατανόησε τις βασικές απαιτήσεις του προβλήματος. Συγκεκριμένα, δεν έχει κατανοήσει πως κάθε βήμα του συστήματος πρέπει να έχει τη μορφή ερώτησης καθώς και να περιέχει τρεις επιλογές. Επίσης, παρατηρούμε πως η μαθήτρια έχει εντάξει τον έλεγχο για την καθυστέρηση βιβλίων στο εσωτερικό του συστήματος, με αποτέλεσμα το σύστημα που έχει δημιουργήσει να μην είναι σύντομο. Αυτό που ελέγχει κυρίως είναι αν το διάγραμμα περιλαμβάνει όλες τις ερωτήσεις - συνθήκες που αναφέρονται στην αρχή του προβλήματος και παραβλέπει τους περιορισμούς που αφορούν την επάρκεια του διαγράμματος και τον ελάχιστο αριθμό βημάτων.

2^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του πρώτου επιπέδου κατανόησης

Ο συγκεκριμένος μαθητής έχει φτιάξει σωστά τα βασικά βήματα του προβλήματος, αλλά έχει τοποθετήσει τον έλεγχο για την επιστροφή βιβλίων στο τέλος του διαγράμματος.

Ε: Θα μπορούσες να μου εξηγήσεις τι ζητάει αυτή η ερώτηση;

Μ: Πρέπει να κατασκευάσω ένα διάγραμμα σαν το προηγούμενο για το δανεισμό της βιβλιοθήκης του Μαθηματικού τμήματος. Το σύστημα να με βοηθά να ξέρω πόσες μέρες θα δανείσω κάποιο βιβλίο σε ένα φοιτητή για παράδειγμα.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις το διάγραμμα που κατασκεύασες;

Μ: …

Ε: Θα μπορούσε αυτός ο έλεγχος να γίνει πιο σύντομα; Να έχει δηλαδή το σύστημα λιγότερα βήματα;

Μ: Δεν νομίζω. Δεν γίνεται το σύστημα να είναι πιο μικρό.

Ε: Αν ένα μέλος του προσωπικού έχει καθυστερήσει την επιστροφή κάποιου βιβλίου τι γίνεται;

Μ: Τότε δεν επιτρέπεται να δανειστεί.

Ε: Χρειάζεται λοιπόν όλος ο έλεγχος που έκανες προηγουμένως;

Μ: Όχι. Μάλλον, θα έπρεπε να ρωτήσω από την αρχή.

Ο παραπάνω μαθητής έχει κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα. Ωστόσο δεν έχει τοποθετήσει σε σωστή θέση τον περιορισμό για την καθυστέρηση βιβλίων, με αποτέλεσμα το σύστημά του να μην είναι πάντα σύντομο.

Έργο 3

Το έργο 3 του δεύτερου φύλλου εργασίας αναφέρεται σε ένα σύστημα άρδευσης. Το πρόβλημα αποτελείται από τρεις ερωτήσεις. Οι δυο πρώτες ερωτήσεις δεν δυσκόλεψαν ιδιαίτερα τους μαθητές. Ιδιαίτερη δυσκολία παρουσιάστηκε στην τρίτη ερώτηση του προβλήματος η οποία απαιτεί τη δημιουργία ενός τεστ ώστε οι μαθητές να αποφασίσουν αν η πύλη D έχει κολλήσει.

Η πρώτη ερώτηση του προβλήματος απαντήθηκε σωστά από 44 μαθητές του δείγματος. Άρα το 80% των μαθητών του δείγματος κατανόησαν το σύστημα των πυλών και τον τρόπο που το νερό διαχέεται στο σύστημα και σχεδίασαν σωστά τη ροή του νερού. Η δεύτερη ερώτηση απαντήθηκε σωστά από 26 μαθητές, ενώ οι υπόλοιποι 29 μαθητές απάντησαν λάθος. Στην ερώτηση αυτή φάνηκε πως αρκετοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πυλών και της ροής του νερού. Οι μαθητές δεν ανέλυσαν σωστά τη λειτουργία κάθε πύλης, με αποτέλεσμα να παίρνουν λάθος απόφαση για το αν το νερό τρέξει σε όλο το σύστημα.

Στην τρίτη ερώτηση του προβλήματος οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν ένα σύστημα ελέγχου της λειτουργίας των πυλών όμοιο με αυτό της ερώτησης 1, ώστε να ελέγξουν αν η πύλη που έχει κολλήσει είναι η D. Η ερώτηση αυτή δυσκόλεψε πάρα πολύ τους μαθητές. Συγκεκριμένα, από τους 55 μαθητές του δείγματος, απάντησαν σωστά μόνο 8 μαθητές, ενώ όλοι οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν λάθος. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται ορισμένες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών.

Πίνακας 7

Ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 3

Πλήρης απάντηση	a) A: κλειστή, E: ανοιχτή, D: ανοιχτή, B: ανοιχτή, C: κλειστή, F: ανοιχτή, G: ανοιχτή, H: ανοιχτή b) A: ανοιχτή, E: κλειστή, D: ανοιχτή, B: ανοιχτή, C: ανοιχτή, F: ανοιχτή, G: ανοιχτή, H: κλειστή c) H: κλειστή και όλες οι άλλες πύλες είναι ανοιχτές
Λάθος	a) A: ανοιχτή, E: κλειστή, **D: κλειστή**, B: ανοιχτή, C: ανοιχτή, F: ανοιχτή, G: ανοιχτή, H: ανοιχτή b) A:ανοιχτή, E: ανοιχτή, D: ανοιχτή, B: κλειστή, C:

απάντηση	ανοιχτή, F: κλειστή, G: κλειστή, H: ανοιχτή c) **A: κλειστή, E: κλειστή,** D: ανοιχτή, B: κλειστή, C: ανοιχτή, F: ανοιχτή, G: κλειστή, H: ανοιχτή

Από τους μαθητές που απάντησαν λάθος στην ερώτηση αυτή 6 έχουν δώσει ως απάντηση την (α). Για τους μαθητές αυτούς θεωρούμε πως δεν έχουν κατανοήσει την ερώτηση καθώς η πύλη D πρέπει να είναι ανοιχτή. Επίσης, 12 μαθητές έδωσαν ως απάντηση την (β). Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν κατανοήσει την ερώτηση του προβλήματος καθώς θέτοντας ταυτόχρονα τις πύλες B, F, G κλειστές το νερό δεν περνάει μέσα στο σύστημα. Τέλος, 10 μαθητές έδωσαν ως απάντηση την (c). Οι μαθητές αυτοί θεωρείται πως δεν έχουν κατανοήσει την ερώτηση καθώς θέτοντας ταυτόχρονα τις πύλες A και E κλειστές, δεν περνάει καθόλου νερό από το σύστημα. Οι υπόλοιποι 19 μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση, οπότε θεωρούμε πως δεν κατανόησαν την ερώτηση αυτή. Άρα συνολικά από τους 55 μαθητές μόνο οι 8 κατανόησαν πλήρως την τρίτη ερώτηση του προβλήματος.

<u>1^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του τρίτου επιπέδου κατανόησης .</u>

Ο μαθητής αυτός θεωρεί την πύλη D κλειστή.

E: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα;

M: Αυτή την ερώτηση δεν την πολυκατάλαβα. Θέλει να βρω ποια πύλη έχει κολλήσει αν υποτίθεται πως η D είναι ανοιχτή.

E: Μου εξηγείς την απάντηση που έδωσες; Με ποιον τρόπο σκέφτηκες;

M: Πήρα τις πιθανές ροές και είδα τι γίνεται αν η D είναι κλειστή.

E: Η πύλη D πρέπει να είναι κλειστή;

M: Ναι για να δούμε αν έχει κολλήσει.

E: Μπορείς να διαβάσεις ξανά το πρόβλημα και να μου πεις αν η D είναι ανοιχτή ή κλειστή;

M: Ναι πρέπει να είναι ανοιχτή;

E: Ποιες πύλες πρέπει να είναι ανοιχτές;

M: Η A, η C, η F, η H, και η D.

E: Η E πρέπει να είναι ανοιχτή;

M: Όχι.

E: Γιατί;

Μ: Γιατί σύμφωνα με τον προηγούμενο πίνακα η Ε πρέπει να είναι κλειστή…

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται η δυσκολία του μαθητή στην κατανόηση του προβλήματος. Η πρώτη δυσκολία που αντιμετωπίζει ο μαθητής είναι η εκφώνηση του προβλήματος. Ενώ το πρόβλημα ζητάει η πύλη D να θεωρηθεί ανοιχτή, ο μαθητής θεωρεί λανθασμένα την πύλη D κλειστή. Στη συνέχεια ο μαθητής για να απαντήσει στην ερώτηση θεωρεί τις πύλες ανοιχτές ή κλειστές σύμφωνα με τον πίνακα που χρησιμοποίησε στις δυο πρώτες ερωτήσεις του προβλήματος. Ωστόσο, το πρόβλημα απαιτεί τη δημιουργία ενός νέου αντίστοιχου πίνακα, ώστε να εντοπίσει την πύλη που έχει κολλήσει κλειστή.

Ο βαθμός κατανόησης των προβλημάτων ρουτίνας και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους.

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στο βαθμό κατανόησης των προβλημάτων ρουτίνας από τους μαθητές καθώς και στις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την επίλυσή τους. Για την απάντηση του ερωτήματος αυτού αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών σε κάθε έργο του πρώτου δοκιμίου, ώστε να διαφανεί το επίπεδο κατανόησης για κάθε έργο. Στη συνέχεια εντοπίστηκαν οι βασικές δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές σε κάθε έργο και μέσα από χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τους διαλόγους που είχαν διενεργηθεί με τους μαθητές, αναλύθηκαν σε βάθος.

<u>Έργο 1</u>

Το έργο 1 του πρώτου φύλλου εργασίας ζητάει την κατασκευή της εξίσωσης με την οποία λύνεται το πρόβλημα «*Χωρίστε τον αριθμό 12 σε δυο μέρη, ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο*».

Από την αξιολόγηση των απαντήσεων φάνηκε πως το έργο αυτό δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές. Από τους 55 μαθητές του δείγματος μόνο 6 απάντησαν σωστά (10.9%), ενώ 33 μαθητές έδωσαν μερικώς ορθή λύση (60%), όπως για παράδειγμα το ζεύγος των αριθμών (3, 6), το οποίο επαληθεύει το πρόβλημα. Οι υπόλοιποι 16 μαθητές απάντησαν λάθος (29.1%).

Οι μαθητές που έδωσαν πλήρεις απαντήσεις, είτε κατασκεύασαν απ’ ευθείας τη ζητούμενη εξίσωση, είτε δημιούργησαν ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. Από τους μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις ορισμένοι έδωσαν απευθείας το ζεύγος των αριθμών που επαληθεύουν την εξίσωση, ενώ οι υπόλοιποι προσπάθησαν να κατασκευάσουν την εξίσωση, όμως η εξίσωση που

έφτιαξαν ήταν λάθος και τελικά έδωσαν αριθμητική απάντηση. Στις λανθασμένες απαντήσεις περιλήφθηκαν οι απαντήσεις που είχαν λάθη στη μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, όπως π.χ. η φράση «*το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο*» μεταφράζεται στη μαθηματική έκφραση $\psi^2 = \chi - 3$. Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 1.

Πίνακας 2

Ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 1

Πλήρεις απαντήσεις	α) χ + 2χ + 3 = 12 β) Αν χ, ψ οι αριθμοί τότε 2χ=ψ-3 οπότε η εξίσωση είναι χ+2χ+3=12 γ) Αν χ, ψ οι αριθμοί τότε $\begin{cases} x+\psi=12 \\ 2\chi=\psi-3 \end{cases}$
Μερικώς ορθές απαντήσεις	α) χ+ψ=12 => χ=3, ψ=9 β) χ=3, ψ=9
Λανθασμένες απαντήσεις	α) $\begin{cases} \psi+\chi=12 \\ \psi^2=\chi-3 \end{cases}$ β) (2χ – 3) + χ = 12 άρα χ = 3 και ψ = 9 γ) $\begin{cases} x+\psi=12 \\ 7+5=12 \\ 5+5=10-3=7 \end{cases}$ άρα οι αριθμοί είναι το 5 και το 7 δ)Καμία απάντηση

Οι μαθητές που έδωσαν πλήρεις απαντήσεις θεωρήθηκαν ότι κατανόησαν εννοιολογικά το πρόβλημα. Από τους 33 μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις, 11 μαθητές προσπάθησαν να κατασκευάσουν τη ζητούμενη εξίσωση, ωστόσο δεν τα κατάφεραν και τελικά κάνοντας τους σωστούς νοητικούς

υπολογισμούς με τους περιορισμούς του προβλήματος, έδωσαν ως απάντηση το ζεύγος των αριθμών που επαληθεύουν την εξίσωση. Οι μαθητές αυτοί φαίνεται να έχουν κατανοήσει το πρόβλημα, όμως δυσκολεύονται να μεταφράσουν τη λεκτική περιγραφή σε μαθηματικά σύμβολα, γι' αυτό και έδωσαν ως απάντηση την αριθμητική λύση του προβλήματος. Οι υπόλοιποι 22 μαθητές έδωσαν απευθείας ως απάντηση το ζεύγος των αριθμών που επαληθεύουν το πρόβλημα. Οι μαθητές αυτοί, έχουν κατανοήσει μερικώς το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 2) αφού, κωδικοποίησαν σωστά τα δεδομένα του προβλήματος και βρήκαν το σωστό ζεύγος αριθμών, αλλά δεν έκαναν καμία προσπάθεια να φτιάξουν τη ζητούμενη εξίσωση.

Από τους 16 μαθητές που απάντησαν λάθος, οι 7 απάντησαν σύμφωνα με τον (α) τρόπο του πίνακα και 2 μαθητές απάντησαν σύμφωνα με τον (β) τρόπο. Οι μαθητές αυτοί έχουν κατανοήσει το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 1), όμως απάντησαν λάθος εξαιτίας των γνωστικών εμποδίων που αφορούν στη μετάφραση των λεκτικών περιγραφών στα σωστά αριθμητικά σύμβολα. Οι μαθητές που απάντησαν με τον τρόπο (α) δεν μπορούν να μεταφράσουν σωστά τη φράση «το διπλάσιο», ενώ οι μαθητές που απάντησαν με τον τρόπο (β) δεν κατανόησαν τη σχέση των αριθμών που κρύβεται πίσω από τη φράση «*το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο*». Ένας από τους μαθητές που απάντησαν λάθος, έδωσε την απάντηση που φαίνεται στον πίνακα ως (γ), φαίνεται ότι κατανόησε μερικώς το ζητούμενο του προβλήματος (επίπεδο κατανόησης 2), αφού κατασκεύασε μια εξίσωση, η οποία όμως ήταν λάθος. Τέλος, έξι μαθητές δεν έδωσαν καμία απολύτως απάντηση, οπότε θεωρούμε πως οι μαθητές αυτοί δεν κατανόησαν το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 3). Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η συχνότητα των μαθητών κατά το επίπεδο κατανόησης του έργου 1 του πρώτου δοκιμίου.

Πίνακας 3

Το επίπεδο κατανόησης των μαθητών για το έργο 1

Επίπεδο Κατανόησης	Συχνότητες	Ποσοστά
Πλήρης κατανόηση (Επίπεδο 1)	26	47.27
Μερική κατανόηση (Επίπεδο 2)	23	41.82
Μηδενική κατανόηση (Επίπεδο 3)	6	10.9
Σύνολο	55	100

Κατά τη βαθμολόγηση των γραπτών δοκιμίων των μαθητών, εντοπίστηκαν κάποιες απαντήσεις που φανέρωναν σε μεγαλύτερο βάθος τις δυσκολίες τους σχετικά με το πρώτο έργο. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές αυτούς.

1^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του πρώτου επιπέδου κατανόησης;

Ο μαθητής αυτός έδωσε την απάντηση $\begin{cases} \psi + \chi = 12 \\ \psi^2 = \chi - 3 \end{cases}$.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα;

Μ: Πρέπει να φτιάξω μια εξίσωση με την οποία το 12 χωρίζεται σε δυο μέρη ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τη λύση που έδωσες;

Μ: Λοιπόν, είπα ότι χ + ψ πρέπει να κάνουν 12, γιατί μου λέει να χωρίσω το 12 σε δυο μέρη. Άρα το ένα είναι το χ και το άλλο το ψ. Αφού τώρα το διπλάσιο του ενός είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο θα είναι $\psi^2 = \chi - 3$.

Ε: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, πως κρίνεις τη λύση που έφτιαξες; Είναι σωστή;

Μ: Νομίζω ότι είναι σωστή. Δεν είμαι σίγουρος για το $\psi^2 = \chi - 3$.

Ε: Για ποιο πράγμα δεν είσαι τόσο σίγουρος;

Μ: Για το τετράγωνο, γιατί λέει το διπλάσιο του ενός - Α! όχι στο τετράγωνο, στο διπλάσιο θέλει. Πως το βάζω αυτό; Μμμ … το ψ θα το βάλω -3ψ αφού λέει 3 φορές μικρότερο, ή μήπως θέλει ψ^{-3}*;*

Ο παραπάνω μαθητής, έχει κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα και κατασκεύασε ένα σύστημα εξισώσεων. Όμως δεν είναι σίγουρος για την ορθότητα της δεύτερης εξίσωσης, με την οποία περιγράφει τη φράση « το διπλάσιο του ενός αριθμού είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο». Συγκεκριμένα θεωρεί πως η έκφραση το διπλάσιο του χ είναι το x^2. Ο μαθητής συνεχίζει τη μετάφραση των πληροφοριών και θεωρεί πως η φράση «τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο» είναι ίδια με τη φράση «τρεις φορές μικρότερο», ενώ δεν είναι σίγουρος για την αναπαράστασή της στα σωστά μαθητικά σύμβολα. Από το παραπάνω απόσπασμα προκύπτει πως ο μαθητής αντιμετωπίζει ένα γνωστικό εμπόδιο που αφορά στη μετάφραση των λεκτικών περιγραφών στο σωστό μαθηματικό αλγόριθμο. Με τη βοήθεια της ερευνήτριας και

με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα ο μαθητής στη συνέχεια καταφέρνει να κατασκευάσει τη ζητούμενη εξίσωση.

2ο Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του δεύτερου επιπέδου κατανόησης

Η λύση που έδωσε ο μαθητής στο έργο 1 είναι « $\chi + \psi = 12 \Rightarrow \chi = 3,\ \psi=9$».

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τη λύση σου;

Μ: Ζητάει να χωρίσω το 12 σε δυο μέρη. Άρα χ+ψ πρέπει να κάνουν 12. Αφού το διπλάσιο του ενός είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο, ο ένας είναι το 3 και ο άλλος το 9.

Ε: Τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα; Θα μπορούσες να διαβάσεις την εκφώνηση και να μου απαντήσεις τώρα;

Μ: Να κατασκευάσω μια εξίσωση με την οποία λύνεται το πρόβλημα…

Ε: Η εξίσωση που έφτιαξες οδηγεί στη λύση του προβλήματος;

Μ: Ναι. Αφού χ+ψ πρέπει να κάνουν 12 και το διπλάσιο του ενός είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο, ο ένας είναι το 3 και ο άλλος το 9.

Ο παραπάνω μαθητής φαίνεται να έχει κατανοήσει μερικώς το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, κατασκεύασε μια γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους στην οποία αναπαρίσταται ένας μόνο περιορισμός του προβλήματος. Ο μαθητής θεωρεί πως η γραμμική εξίσωση με τους δυο αγνώστους μπορεί να τον οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Κάνοντας νοητικούς υπολογισμούς με το δεύτερο περιορισμό, δίνει το ζεύγος των αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση. Παρατηρούμε πως ο συγκεκριμένος μαθητής δεν κατανοεί πως όλες οι λεκτικές περιγραφές του προβλήματος πρέπει να κωδικοποιηθούν σωστά και να μεταφραστούν σε μια εξίσωση, η λύση της οποίας θα οδηγεί στο σωστό ζεύγος αριθμών.

3ο Απόσπασμα: Διάλογος με μια μαθήτρια του δεύτερου επιπέδου κατανόησης

Η μαθήτρια έδωσε την απάντηση $\begin{cases} x+\psi=12 \\ 7+5=12 \\ 5+5=10-3=7 \end{cases}$ άρα οι αριθμοί είναι 5 και 7.

Ε: Μπορείς να εξηγήσεις τη λύση που έδωσες;

Μ: Πρέπει να χωρίσω το 12 σε δυο μέρη, ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι 3 μονάδες μικρότερο από το άλλο. Παρατηρώ ότι 7+5=12 και δυο φορές το 5 κάνει 10, οπότε αφού 10-3=7, αριθμοί είναι το 7 και το 5.

Ε: Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, πως κρίνεις τη λύση σου;

Μ: Νομίζω ότι είναι σωστό.

Ε: Τι ακριβώς ζητάει το πρόβλημα;

Μ: Να χωρίσω το 12 σε δυο μέρη, ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι 3 μονάδες μικρότερο από το άλλο.

Ε: Μπορείς να διαβάσεις πιο προσεκτικά την εκφώνηση.

Μ: Ναι, πρέπει να φτιάξω μια εξίσωση με την οποία θα λύσω το πρόβλημα.

Ε: Γιατί επέλεξες το 7 και το 5;

Μ: Γιατί 7 +5=12 και το διπλάσιο του 5 είναι το 10. Αν από το 10 αφαιρέσω 3 βρίσκω το 7.

Ε: Ποιος είναι ο περιορισμός του προβλήματος;

Μ: Το διπλάσιο του ενός αριθμού να είναι τρεις μονάδες μικρότερο του άλλου.

Ε: Οπότε ας δούμε ξανά τους αριθμούς που πήρες. Το διπλάσιο του 5 είναι το 10. Τι πρέπει να ισχύει για το 10 σύμφωνα με το πρόβλημα;

Μ: Να είναι 3 μονάδες μικρότερο του 7. Έκανα λάθος, γιατί το 10 είναι 3 μονάδες μεγαλύτερο από το 7. Άρα δεν είναι αυτοί οι αριθμοί.

Από τις απαντήσεις της μαθήτριας προέκυψε αρχικά πως δεν έχει κατανοήσει τι ακριβώς πρέπει να κάνει. Η μαθήτρια θεωρεί ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι η εύρεση των αριθμών που ικανοποιούν το πρόβλημα και όχι η κατασκευή της εξίσωσης. Μέσα από τη συζήτηση διαφαίνεται η αδυναμία της μαθήτριας να κατανοήσει τη φράση «το διπλάσιο του ενός να είναι 3 μονάδες μικρότερο από το άλλο». Θεωρεί πως οι κατάλληλοι αριθμοί είναι το 7 και το 5, διότι το διπλάσιο του 5 είναι το 10 και 10 – 3 = 7.

<u>4^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του δεύτερου επιπέδου κατανόησης</u>

Ο συγκεκριμένος μαθητής έδωσε ως απάντηση αριθμητική λύση στο πρόβλημα, χωρίς να κατασκευάσει τη ζητούμενη εξίσωση.

Ε: Η απάντηση που έδωσες στο πρόβλημα ήταν χ= 9, ψ= 3. Γιατί επέλεξες αυτούς τους αριθμούς;

Μ: Γιατί είναι η λύση.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα, και ποια τα ζητούμενα;

Μ: Να χωρίσω το 12 σε δυο μέρη ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο.

Ε: Το πρόβλημα τι ακριβώς ζητάει;

Μ: (Παύση), *ναι έπρεπε να φτιάξω την εξίσωση, αυτό θέλει, όχι να το λύσω.*

Το παραπάνω απόσπασμα είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση ενός μαθητή που δεν διαβάζει προσεκτικά την εκφώνηση του προβλήματος. Από την απάντηση του μαθητή φαίνεται πως αρχικά δεν είχε κατανοήσει τι ακριβώς ζητούσε το πρόβλημα. Ενώ το πρόβλημα απαιτεί τη μετάφραση των λεκτικών περιγραφών σε μαθηματική εξίσωση ο συγκεκριμένος μαθητής, θεωρεί πως πρέπει να βρει τους αριθμούς που το επαληθεύουν.

Έργο 2

Στο έργο αυτό οι μαθητές καλούνται να σχολιάσουν τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος και να κρίνουν την ορθότητα ή όχι της λύσης του. Στο πρόβλημα αυτό απάντησαν σωστά μόνο 4 από τους 55 μαθητές, ενώ 45 μαθητές έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση. Οι υπόλοιποι 6 μαθητές απάντησαν λάθος. Οι μαθητές που έδωσαν πλήρη απάντηση περιέγραψαν σωστά τα βήματα της ανίσωσης και απέρριψαν το συμπέρασμα. Όλοι οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση έκαναν σωστή περιγραφή των βημάτων επίλυσης της ανίσωσης, όμως αποδέχτηκαν την ορθότητα του συμπεράσματος. Τέλος οι μαθητές που απάντησαν λάθος, έκαναν λάθη τόσο στην περιγραφή των βημάτων όσο και στο συμπέρασμα. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται ορισμένες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 2.

Πίνακας 4

Ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 2

Πλήρης απάντηση	$-\frac{1}{x} > x+2$ *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το* x *και βρίσκουμε:* $-1 > x^2+2x$ *τα μεταφέρουμε όλα στο δεύτερο μέλος* $0 > x^2+2x+1$ *παραγοντοποιούμε το* 2° *μέλος* $0 > (x+1)^2$ <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Η λύση είναι λάθος. Το λάθος βρίσκεται στο πρώτο βήμα που πολλαπλασιάζουμε με το χ. Δεν γνωρίζουμε*

	το πρόσημο του χ. Αν είναι αρνητικός θα πρέπει να αλλάξει η φορά της ανίσωσης».
Μερικώς ορθή απάντηση	α) Σωστή περιγραφή βημάτων <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Όχι γιατί στα βήματα 2 προς 3, επειδή μεταφέρθηκε αρνητικός αριθμός θα έπρεπε να αλλάξει η φορά και επομένως να καταλήξουμε το βήμα 4 να είναι* $0 < x^2 + 2x + 1$*, άρα και να είναι ορθό».* β) Σωστή περιγραφή βημάτων <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Δεν συμφωνώ γιατί έχει κάνει λάθος στις πράξεις, αφού μετά τον πολλαπλασιασμό των 2 μελών με το χ βρίσκουμε το αποτέλεσμα* $1 > x^2 + 2x$ *και όχι* $-1 > x^2 + 2x$*».* γ) Σωστή περιγραφή βημάτων <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Όχι, διότι η ανίσωση μπορεί να συνεχιστεί».* δ) Σωστή περιγραφή βημάτων <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Ναι, είναι σωστό».* ε) Σωστή περιγραφή βημάτων <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Όχι».*
	α) $-\frac{1}{x} > x + 2$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με το χ και βρίσκουμε $-1 > x^2 + 2x$ *Κάνει τον πολλαπλασιασμό και προσθέτει το* x^2 *με το* $2x$ $0 > x^2 + 2x + 1$ *Χωρίζει γνωστούς από*

Λάθος απάντηση	*αγνώστους* $0 > (x+1)^2$ *Προσθέτει το χ με το 1* <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Όχι».* β) $-\frac{1}{x} > x+2$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με το χ και βρίσκουμε $-1 > x^2+2x$ *Χωρίζει γνωστούς από αγνώστους* $0 > x^2+2x+1$ $0 > (x+1)^2$ *Είναι ταυτότητα* <u>Συμπέρασμα:</u> Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί; *«Ναι».* γ) Καμία απάντηση

Το συγκεκριμένο πρόβλημα κατανοήθηκε πλήρως από όλους τους μαθητές του δείγματος. Από τους 45 μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, 3 μαθητές έδωσαν την απάντηση (α) και 2 μαθητές έδωσαν την απάντηση (β). Οι μαθητές που έδωσαν την απάντηση (α) δεν έχουν κατανοήσει πότε αλλάζει η φορά μιας ανίσωσης, αφού θεωρούν πως όταν μεταφέρεται από το ένα μέλος στο άλλο ένας αρνητικός αριθμός, θα πρέπει να αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Για τους μαθητές που έδωσαν την απάντηση (β), μέσα από τη διαδικασία της συνέντευξης προέκυψε πως παρέβλεψαν το – που υπήρχε στο πρώτο βήμα της ανίσωσης. Επίσης, ένας μαθητής έδωσε την απάντηση (γ), 25 μαθητές έδωσαν την απάντηση (δ) και 14 μαθητές έδωσαν την απάντηση (ε). Οι μαθητές αυτοί κατανόησαν τη μετάβαση από το ένα βήμα της ανίσωσης στο άλλο, αλλά δεν λαμβάνουν υπ' όψη τους ή αγνοούν τον περιορισμό για τον κατά μέλη πολλαπλασιασμό ανισοτήτων, με αποτέλεσμα να απαντούν λάθος στο συμπέρασμα ή να μην αιτιολογούν καθόλου την απάντησή τους.

Άρα όλοι οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση κατανόησαν τι ζητούσε το πρόβλημα, ωστόσο δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος τις ιδιότητες των ανισώσεων με αποτέλεσμα να μην απαντούν σωστά.

Από τους 6 μαθητές που έδωσαν λάθος απάντηση, ένας μαθητής έδωσε την απάντηση (α), ένας μαθητής την απάντηση (β) και οι υπόλοιποι μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση. Ο μαθητής που έδωσε την απάντηση (α) έχει κατανοήσει το πρόβλημα, ωστόσο στο τρίτο βήμα επίλυσης της ανίσωσης, συγχέει τη μεταφορά αριθμών από το ένα μέλος στο άλλο με το διαχωρισμό γνωστών ποσοτήτων από αγνώστων. Επίσης, ο συγκεκριμένος μαθητής δεν κατανοεί τι γίνεται στο τελευταίο βήμα της ανίσωσης και απορρίπτει την ορθότητα του συμπεράσματος, λέγοντας πως η ανίσωση μπορεί να συνεχιστεί. Ο μαθητής που έδωσε την απάντηση (β), όπως και ο προηγούμενος μαθητής συγχέει τη μεταφορά αριθμών από το ένα μέλος στο άλλο με το διαχωρισμό γνωστών ποσοτήτων από αγνώστων. Επίσης, αποδέχεται την ορθότητα του συμπεράσματος χωρίς ωστόσο να αιτιολογεί την απάντησή του. Οι υπόλοιποι τέσσερις μαθητές δεν δίνουν καμία απολύτως απάντηση στο πρόβλημα, οπότε θεωρούμε πως δεν το έχουν κατανοήσει.

Συνολικά, λοιπόν 51 μαθητές κατανοούν πλήρως το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 1), ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις μαθητές δεν κατανοούν καθόλου το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 3).

<u>$1^{ο}$ Απόσπασμα: Διάλογος με μια μαθήτρια του δεύτερου επιπέδου κατανόησης</u>

Η μαθήτρια αυτή_περιγράφει σωστά τα βήματα της λύσης και απορρίπτει το συμπέρασμα λέγοντας: «στα βήματα 2 προς 3 επειδή μεταφέρθηκε αρνητικός αριθμός θα έπρεπε να αλλάξει η φορά και επομένως να καταλήξουμε το βήμα 4 να είναι $0 < x^2 + 2x + 1$, άρα και να είναι ορθό».

Μ: Αρχικά σκέφτηκα να λύσω την ανίσωση, αλλά είδα ότι δεν ζητούσε αυτό.

Ε: Μπορείς να μου πεις τι ζητάει το πρόβλημα αυτό;

Μ: Μου δίνει μια λύση της ανίσωσης και μου ζητάει να περιγράψω πως πάω από το ένα βήμα στο άλλο. Στο τέλος λέει πως δεν υπάρχουν λύσεις και ρωτάει αν συμφωνώ… να βρω δηλαδή αν έχει κάνει κάποιο λάθος. Στις πράξεις δεν έκανε κάποιο λάθος, ίσως πρέπει να κοιτάξω τις φορές.

Ε: Μπορείς να περιγράψεις πως μεταβαίνει από το ένα βήμα στο άλλο;

Μ: Από το 1^{ο} βήμα στο 2^{ο} πολλαπλασιάζει με χ για να κάνει απαλοιφή παρονομαστών. Από το 2^{ο} βήμα στο 3^{ο} μεταφέρει το -1 στο δεύτερο μέλος. Προκύπτει μια ταυτότητα και παραγοντοποιεί.

Ε: Στο 4^{ο} βήμα γράφεις «συμπεραίνουμε πως δεν υπάρχει αποτέλεσμα». Γιατί το λες αυτό;

Μ: Γιατί το $(x+1)^2$ δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Ε: Στο συμπέρασμα γράφεις πως δεν συμφωνείς με το αποτέλεσμα γιατί στα βήματα 2 προς 3 επειδή μεταφέρθηκε αρνητικός αριθμός θα έπρεπε να αλλάξει η φορά. Ποιος ήταν ο τρόπος σκέψης σου;

Μ: Όταν μεταφέρουμε έναν αρνητικό αριθμό στο άλλο μέλος η φορά αλλάζει.

Από το παραπάνω απόσπασμα προκύπτει πως η συγκεκριμένη μαθήτρια έχει κατανοήσει τι ζητάει το πρόβλημα. Η μαθήτρια θεωρεί πως ο τρόπος επίλυσης της ανίσωσης είναι λανθασμένος, και εντοπίζει το λάθος στο δεύτερο βήμα, λέγοντας πως όταν αλλάζει μέλος ένας αρνητικός αριθμός τότε θα πρέπει να αλλάξει και η φορά της ανίσωσης. Ο διάλογος συνεχίζεται και η μαθήτρια με τη βοήθεια της ερευνήτριας αντιλαμβάνεται το λάθος της. Στην προσπάθειά της να εντοπίσει το λάθος στη διαδικασία επίλυσης της ανίσωσης η μαθήτρια λέει:

Μ:….Έχει κάνει λάθος στο πρώτο βήμα που πολλαπλασιάζει με χ, γιατί το $-\frac{1}{x}$ είναι αρνητικός αριθμός.

Ε: Πως το ξέρεις αυτό;

Μ: Επειδή έχει (-)…

Η μαθήτρια θεωρεί πως ο αριθμός $-\frac{1}{x}$ επειδή έχει μπροστά του το (-) είναι αρνητικός. Προκύπτει λοιπόν, πως οι λανθασμένες απαντήσεις της μαθήτριας οφείλονται σε γνωστικά εμπόδια που αφορούν στην έννοια της μεταβλητής και στην έννοια της διάταξης. Ενώ λοιπόν η μαθήτρια έχει κατανοήσει σε βάθος το πρόβλημα, τα γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζει την οδηγούν σε λάθος απάντηση. Μετά από συζήτηση με την ερευνήτρια η μαθήτρια κατάλαβε το λάθος στους συλλογισμούς της και οδηγήθηκε στη σωστή απάντηση του προβλήματος.

<u>2^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του τρίτου επιπέδου κατανόησης</u>

Ο μαθητής αυτός έχει κάνει λάθος στην περιγραφή των βημάτων και απορρίπτει το συμπέρασμα λέγοντας: «Είναι λάθος, διότι η ανίσωση μπορεί να συνεχιστεί».

Ε :Μπορείς να μου εξηγήσεις τη λύση που εφάρμοσες;

Μ: Αρχικά κάνει τον πολλαπλασιασμό με το χ και προσθέτει το x^2 *με το* $2x$. *Στο επόμενο βήμα χωρίζει γνωστούς από αγνώστους. Και στο τελευταίο προσθέτει το χ με το 1.*

Ε: Στο τρίτο βήμα λες ότι χωρίζει γνωστούς από αγνώστους. Πως το σκέφτηκες αυτό;

Μ: Γιατί, μετέφερε όλους τους αριθμούς δεξιά.

Ε:…

Ε: Στο συμπέρασμα γράφεις πως δεν συμφωνείς. Μπορείς να μου εξηγήσεις τη σκέψη σου;

Μ: Είναι λάθος, διότι η ανίσωση $0 > (x+1)^2$ *μπορεί να συνεχιστεί. Δηλαδή, μπορεί να φτιάξει την ταυτότητα* $(x+1)^2$ *και συνεχιστεί η λύση.*

Ε: Το αποτέλεσμα $0 > (x+1)^2$ *είναι σωστό;*

Μ: Ναι, δεν έκανε κάποιο λάθος.

Από το παραπάνω απόσπασμα προκύπτει πως ο μαθητής συγχέει την έννοια του διαχωρισμού των γνωστών ποσοτήτων από τις άγνωστες, με τη μεταφορά όλων των όρων στο ένα από τα δυο μέλη της ανίσωσης. Στη συνέχεια φαίνεται ότι ο μαθητής κάνει έναν κύκλο στους συλλογισμούς του, καθώς μετά από την παραγοντοποίηση του τριωνύμου $x^2 + 2x + 1$ προτείνει πως πρέπει να φτιάξει ξανά το ανάπτυγμα της παράστασης $(x+1)^2$. Επίσης, ο μαθητής θεωρεί σωστή την παράσταση $0 > (x+1)^2$, αφού κατά τη διαδικασία επίλυσης της ανίσωσης δεν παρατήρησε κάποιο λάθος. Φαίνεται πως η παράσταση $0 > (x+1)^2$ αντιμετωπίζεται από το μαθητή καθαρά συμβολικά και δεν γίνεται προσπάθεια να κατανοήσει τη βαθύτερη σημασία των συμβόλων. Η ερευνήτρια προσπαθώντας να οδηγήσει το μαθητή στη σωστή απάντηση λέει:

Ε: Πως κρίνεις το πρώτο βήμα επίλυσης της ανίσωσης; Είναι σωστό;

Μ: Νομίζω ναι. Πολλαπλασιάζει με χ για να διώξει τους παρονομαστές. Σωστό είναι.

Ε: Μπορώ πάντα να πολλαπλασιάζω μια ανίσωση με έναν αριθμό;

Μ: Ναι μπορώ.

Ε: Αν το χ είναι ο αριθμός -5 τι γίνεται;

Μ: (Παύση), *να αλλάξω τη φορά, γιατί είναι αρνητικός.*

Στη συνέχεια του διαλόγου αναδεικνύονται τα γνωστικά εμπόδια του μαθητή γύρω από το θέμα της διάταξης. Ο μαθητής θεωρεί πως δεν υπάρχει κάποιος

περιορισμός για τον κατά μέλη πολλαπλασιασμό ανισοτήτων και μόνο όταν η ερευνήτρια του έδωσε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, θυμήθηκε τον κανόνα που είχε μάθει.

Έργο 3

Στο έργο αυτό δίνεται ένα σχήμα με κάποια ορθογώνια τρίγωνα. Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσουν την τιμή της μεταβλητής ψ, η οποία αντιστοιχεί στην πλευρά CD. Το πρόβλημα αυτό εξετάζει αν οι μαθητές προσπαθώντας να «συναρμολογήσουν» το υλικό που τους δόθηκε μπορούν να σχηματίσουν μια λογική ολότητα που θα τους οδηγήσει στη λύση. Στο πρόβλημα αυτό απάντησαν σωστά 18 από τους 55 μαθητές (32.73%). Μερικώς ορθή απάντηση έδωσαν 8 μαθητές (14.55%) ενώ, 29 μαθητές απάντησαν λάθος στο πρόβλημα (52.72%).

Από τους μαθητές που έλυσαν σωστά το πρόβλημα, ορισμένοι μαθητές έλυσαν το πρόβλημα αλγεβρικά, ενώ οι υπόλοιποι περιέγραψαν λεκτικά τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να λυθεί το πρόβλημα. Από τους μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθή απάντηση, ορισμένοι ενώ υπολόγισαν το μήκος της AD πλευράς και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος χ (πλευρά AC), δεν αφαίρεσαν, ώστε να υπολογίσουν την τιμή του ψ. Ένας μαθητής εφάρμοσε με λάθος τρόπο το Π.Θ. στο τρίγωνο ABC, και συνέχισε τη λύση του περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο λύνεται το πρόβλημα. Το βασικό πρόβλημα που αντιμετώπισαν αρκετοί μαθητές είναι ότι δεν διέκριναν τα ορθογώνια τρίγωνα με αποτέλεσμα να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο BCD, που περιέχει την άγνωστη πλευρά, αλλά δεν είναι ορθογώνιο. Κάποιες άλλες λανθασμένες απαντήσεις θεωρούν ως υποτείνουσα την πλευρά AC του τριγώνου ABC και εφαρμόζουν λάθος το θεώρημα. Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται ορισμένες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 3.

Πίνακας 5

Ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών στο έργο 3

Πλήρης Απάντηση	α) Για να βρω το χ εφαρμόζω Π.Θ. στο τρίγωνο ABC. Στη συνέχεια εφαρμόζω το Π.Θ. στο τρίγωνο ABD ώστε να βρω το χ+ψ. για να βρούμε το ψ αφαιρώ από

	το χ+ψ το χ. β) Αλγεβρική λύση του προβλήματος
Μερικώς ορθή απάντηση	α) Εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒC τρίγωνο: $3^2 = 2^2 + \chi^2$ ή $\chi^2 = 5$ ή $\chi = \sqrt{5}$ εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒD τρίγωνο: $BD^2 = AD^2 + AB^2$ ή $4^2 = (\chi + \psi)^2 + 2^2$ ή $\psi = ...$ β) Εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒC τρίγωνο για να βρω το χ. Στη συνέχεια εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒD τρίγωνο για να βρω το χ+ψ.
Λάθος απάντηση	α) Εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒC τρίγωνο: $\chi^2 = AB^2 + BC^2$ ή $\chi^2 = 2^2 + 3^2$ ή $\chi^2 = 13$ ή $\chi = \sqrt{13}$ Εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒD τρίγωνο: $BD^2 = DA^2 + AB^2$ ή $\psi = ...$ β) Εφαρμόζω Π.Θ. στο ΑΒC τρίγωνο για να βρω το χ και στη συνέχεια εφαρμόζω Π.Θ. στο BCD τρίγωνο για να βρω το ψ. γ) Θα συγκρίνουμε τα δυο τρίγωνα, θα κάνουμε το Π.Θ. και τέλος θα κάνουμε πράξεις και θα βρούμε την τιμή του ψ. δ) Καμία απάντηση

Όλοι οι μαθητές που έδωσαν πλήρεις απαντήσεις κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα. Οι μαθητές που έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις έχουν κάνει μικρές παραλείψεις στην επίλυση του προβλήματος, οπότε θεωρείται ότι έχουν κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα. Από το σύνολο των μαθητών που απάντησαν λάθος στο

πρόβλημα 8 μαθητές έδωσαν την (α) απάντηση και 9 μαθητές έδωσαν τη (β) απάντηση. Οι μαθητές αυτοί έχουν κατανοήσει τι ζητάει το πρόβλημα, ωστόσο αντιμετωπίζουν γνωστικά εμπόδια με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την εφαρμογή του. Ένας μαθητής έδωσε την απάντηση (γ) και 11 μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση. Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν κατανοήσει καθόλου το πρόβλημα. Συνολικά, λοιπόν 43 μαθητές κατανόησαν πλήρως το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 1), ενώ οι υπόλοιποι 12 μαθητές δεν κατανόησαν καθόλου το πρόβλημα (επίπεδο κατανόησης 3).

<u>1^{ο} Απόσπασμα: Διάλογος με μια μαθήτρια του πρώτου επιπέδου κατανόησης</u>

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα, και ποια τα ζητούμενα;

Μ: Μου δίνει το σχήμα αυτό και μου ζητάει να βρω την πλευρά ψ.

Ε: Γνωρίζεις κάποια στοιχεία στο σχήμα;

Μ: Μου δίνει ορισμένες πλευρές.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τη λύση που εφάρμοσες;

Μ: Έκανα Π.Θ στο ΑΒC και βρήκα το χ. Μετά δεν μπόρεσα να βρω το ψ.

Ε: Τι βρήκες από το Π.Θ.;

Μ: $x^2 = 2^2 + 3^2$

Ε: Είναι αυτό σωστό;

Μ: Νομίζω ναι.

Ε: Γιατί δεν συνέχισες να βρεις το ψ;

Μ: Γιατί δεν μου φαινόταν σωστό. Βασικά έκανα και στα άλλα τρίγωνα Π.Θ μήπως βγάλω κάτι πιο σωστό αλλά δεν έβγαινε και το άφησα έτσι.

Ε: Ποια Π.Θ. έκανες;

Μ: Στο εεε είπα ότι $\psi^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2$ *για να βρω το ψ.*

Ε: Είναι αυτό σωστό;

Μ: Όχι γι΄ αυτό δεν το έκανα. Δεν είναι πυθαγόρειο αυτό.

Ε: Θα μπορούσες να εξηγήσεις τι λέει το Π.Θ.

Μ: …

Ε: Στο ΑΒC τρίγωνο, ποια είναι η υποτείνουσα;

Μ: Η 3, η ΒC, άρα έπρεπε να πω $BC^2 = AC^2 + AB^2$ *και βρίσκω έτσι το χ.*

Ε: Έχει λυθεί το πρόβλημα;

Μ: Εεμ όχι, θέλω το ψ άρα λέω $BD^2 = DA^2 + AB^2$ *και μετά θα τα αφαιρέσω γιατί έχω βρει και το χ , άρα θα βρω το ψ.*

Η παραπάνω μαθήτρια έχει κατανοήσει το ζητούμενο του προβλήματος. Αρχικά εφαρμόζει λάθος το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒC τρίγωνο θεωρώντας ως υποτείνουσα τη ζητούμενη κάθετη πλευρά. Συγκεκριμένα, η μαθήτρια προσπαθώντας να βρει την άγνωστη πλευρά χ θεώρησε ότι αυτή είναι η υποτείνουσα χωρίς να ελέγξει την υπόθεσή της. Μέσα από το διάλογο φαίνεται ότι η μαθήτρια διαισθάνεται ότι η απάντησή της δεν είναι σωστή, χωρίς όμως να μπορεί να ελέγξει γιατί. Στη συνέχεια η μαθήτρια επιχειρεί να βρει τη ζητούμενη πλευρά ψ με τη σχέση $\psi^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}D^2$, ωστόσο και πάλι διαισθάνεται ότι η σχέση αυτή δεν είναι ορθή και δεν την εφαρμόζει. Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα πως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει η μαθήτρια στο πρόβλημα οφείλονται στο γεγονός ότι δεν έχει κατανοήσει σε βάθος το πυθαγόρειο θεώρημα και την εφαρμογή του. Επίσης, η μαθήτρια κατά την πορεία επίλυσης του προβλήματος, ενώ διαισθάνεται ότι έχει κάνει λάθος, δεν ελέγχει τη μέθοδο που εφαρμόζει με αποτέλεσμα να συνεχίζει με τη λανθασμένη στρατηγική και να οδηγείται σε λάθος αποτέλεσμα. Εδώ παρατηρείται μια γενική συμπεριφορά των μαθητών οι οποίοι δεν έχουν αναπτύξει τους μηχανισμούς εκείνους που τους επιτρέπουν να ελέγχουν την ορθότητα της απάντησής τους αλλά και να επαληθεύουν το συμπέρασμά τους.

<u>$2^{ο}$ Απόσπασμα: Διάλογος με ένα μαθητή του πρώτου επιπέδου κατανόησης</u>

Ο συγκεκριμένος μαθητής εφάρμοσε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒC τρίγωνο θεωρώντας ως υποτείνουσα την πλευρά ΑΒ και γράφοντας $2^2 = 3^2 + \gamma^2$. Στη συνέχεια των υπολογισμών του έγραψε $\gamma^2 = 3^2 - 2^2$ και κατέληξε στο αποτέλεσμα $\gamma^2 = 5$.

Ε: Σε ποιο τρίγωνο εφάρμοσες το Π.Θ.;

Μ: Στο ΑΒC για να βρω το χ

Ε: πως κρίνεις την απάντησή σου; Είναι σωστή;

Μ: Νομίζω ναι

Ε: Ποια είναι η υποτείνουσα στο τρίγωνο ΑΒC;

Μ: Η ΒC. Έχω κάνει λάθος.

Ε: Πως μπορείς να βρεις τη ζητούμενη πλευρά;

Μ: Παίζει ρόλο η ΒC γιατί είναι ύψος.

Ε: Πως το ξέρεις αυτό;

Μ: Φαίνεται

Ε: Το ύψος δεν σημαίνει καθετότητα;

Μ: Σωστά. Μήπως είναι διάμεσος;

Ε: Μας λέει κάτι τέτοιο το πρόβλημα;

Μ: Όχι.

Ε: Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Π.Θ σε κάποιο άλλο τρίγωνο;

Μ: Ίσως στο BCD.

Ε: Είναι το τρίγωνο αυτό ορθογώνιο;

Μ: Όχι. Άρα δεν γίνεται. Μήπως στο ABD;

Ε: Είναι το τρίγωνο αυτό ορθογώνιο;

Μ: Ναι, η Α είναι ορθή, άρα η BD είναι υποτείνουσα.

Ο παραπάνω μαθητής εφαρμόζει αρχικά το Π.Θ, θεωρώντας λάθος πλευρά ως υποτείνουσα. Κάνοντας τις πράξεις, ενώ κανονικά πρέπει να γράψει $\gamma^2 = 2^2 - 3^2$, αντιλαμβάνεται πως θα οδηγηθεί στο αδύνατο αποτέλεσμα $\gamma^2 = -5$, οπότε αλλάζει τη θέση των όρων και βρίσκει $\gamma^2 = 5$. Άρα ο μαθητής, ενώ αντιλαμβάνεται πως έχει κάνει κάποιο λάθος, ωστόσο δεν ελέγχει τη στρατηγική που έχει εφαρμόσει με αποτέλεσμα να συνεχίζει να δουλεύει στη λανθασμένη αναπαράσταση. Στη συνέχεια ο μαθητής λέει πως η πλευρά BC έχει κάποια ιδιότητα, ύψος ή διχοτόμος, χωρίς όμως να αναφέρεται κάτι τέτοιο στην εκφώνηση του προβλήματος. Στην προσπάθειά του να βρει τη ζητούμενη πλευρά αναφέρει πως θα μπορούσε να εφαρμόσει το Π.Θ. στο BCD τρίγωνο. Μετά από ερώτηση της ερευνήτριας ο μαθητής αντιλαμβάνεται πως το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο και απορρίπτει τον ισχυρισμό του. Από το παραπάνω απόσπασμα διαφαίνεται πως ο μαθητής αντιμετωπίζει σημαντικές αδυναμίες με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την εφαρμογή του, με αποτέλεσμα να το εφαρμόζει σε οποιοδήποτε είδος τριγώνου. Επίσης, μέσα από το διάλογο φαίνεται πως ο μαθητής αντιμετωπίζει βασικά γνωστικά εμπόδια που αφορούν στα βασικά στοιχειά των τριγώνων και τις ιδιότητές τους (ύψος, διάμεσος).

Η επίδοση των μαθητών στα πρωτότυπα προβλήματα και στα προβλήματα ρουτίνας

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στα πρωτότυπα προβλήματα και στα προβλήματα ρουτίνας. Για την απάντηση του ερωτήματος αυτού συγκρίθηκαν οι απαντήσεις των 55 μαθητών του δείγματος στα δυο δοκίμια. Κάθε δοκίμιο περιείχε τρία προβλήματα και η μέγιστη βαθμολογία κάθε

δοκιμίου ήταν 30 μονάδες, μέχρι και δέκα μονάδες για κάθε έργο. Στον πίνακα 1 φαίνεται ο βαθμός επιτυχίας των μαθητών στο καθένα από τα δυο είδη προβλημάτων.

Πίνακας 1

Η επίδοση των μαθητών στα δυο είδη προβλημάτων

Επίδοση	Προβλήματα ρουτίνας	Πρωτότυπα Προβλήματα
0-5	13	0
6-10	17	1
11-15	11	27
16-20	8	13
21-25	2	6
26-30	4	8
Σύνολο	**55**	**55**

Είναι προφανές ότι υπάρχει διαφορά στην επίδοση των μαθητών στα δύο είδη προβλημάτων, αφού η πλειοψηφία των μαθητών στα προβλήματα ρουτίνας είχαν επίδοση κάτω από το 10, ενώ μόνο ένας μαθητής είχε επίδοση κάτω από το δέκα στα πρωτότυπα προβλήματα. Για να ελεγχθεί κατά πόσο οι διαφορές στην επίδοση μεταξύ των δυο δοκιμίων ήταν στατιστικά σημαντικές, πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του κριτηρίου t-test ο έλεγχος της υπόθεσης $H_o : \mu = \mu_o$ (η μέση επίδοση στο πρώτο δοκίμιο είναι ίση με τη μέση επίδοση στο δεύτερο δοκίμιο) έναντι της υπόθεσης $H_1 : \mu \neq \mu_o$ (οι μέσες επιδόσεις στα δυο δοκίμια διαφέρουν). Η μέση επίδοση των μαθητών στο πρώτο δοκίμιο ήταν 12.9 μονάδες, ενώ στο δεύτερο δοκίμιο 17.17 μονάδες. Η τιμή του κριτηρίου t βρέθηκε -6.083, ενώ τα επίπεδα σημαντικότητας πήραν πολύ χαμηλές τιμές (p=0.000). Άρα η υπόθεση H_o απορρίπτεται, δηλαδή, υπάρχει σημαντική στατιστική διαφορά στις μέσες επιδόσεις των μαθητών στα δυο δοκίμια. Οπότε προκύπτει το συμπέρασμα πως η επίδοση στα πρωτότυπα προβλήματα ήταν σημαντικά μεγαλύτερη από την επίδοση στα προβλήματα ρουτίνας, παρ' όλο που και οι δυο βρίσκονταν σε χαμηλό επίπεδο.

Με τη βοήθεια του συντελεστή συσχέτισης Pearson εξετάστηκε αν υπήρχε συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στα δυο δοκίμια. Μεταξύ της επίδοσης

στα δυο δοκίμια βρέθηκε στατιστικά σημαντική θετική συσχέτιση, με συντελεστή συσχέτισης r = 0.747 και επίπεδο σημαντικότητας p=0,000. Από τα στοιχεία αυτά προκύπτει το συμπέρασμα πως οι μαθητές που είχαν υψηλή επίδοση στα προβλήματα ρουτίνας είχαν και υψηλή επίδοση στα πρωτότυπα προβλήματα.

Η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων ρουτίνας σε σχέση με τις στρατηγικές επίλυσης πρωτότυπων προβλημάτων

Το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στην αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων ρουτίνας και πρωτότυπων προβλημάτων. Για την απάντηση του ερωτήματος εξετάστηκαν τα ποσοστά των αποτελεσματικών στρατηγικών στο πρώτο δοκίμιο και συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα ποσοστά στο δεύτερο δοκίμιο.

Δοκίμιο 1

Το πρώτο δοκίμιο περιλαμβάνει προβλήματα ρουτίνας. Για την απάντηση του ερωτήματος λήφθηκαν υπόψη οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα 1 και 3, καθώς το έργο 2 δεν απαιτούσε την εφαρμογή κάποιας στρατηγικής.

Στο πρώτο έργο του πρώτου δοκιμίου, ως αποτελεσματικές στρατηγικές θεωρήθηκαν η κατασκευή της ζητούμενης εξίσωσης ή δημιουργία συστήματος δυο εξισώσεων. Οι εξισώσεις της μορφής (2χ – 3) + χ = 12 ή $\begin{cases} \psi + \chi = 12 \\ \psi^2 = \chi - 3 \end{cases}$ αν και θεωρούνται λανθασμένες ως απαντήσεις, ωστόσο θεωρούνται αποτελεσματικές στρατηγικές. Ως μη αποτελεσματικές θεωρούνται οι στρατηγικές όπως χ+ψ=12 => χ=3, ψ=9. Τέλος, για τους μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση θεωρούμε πως εφάρμοσαν μη αποτελεσματική στρατηγική. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται αναλυτικά το είδος των στρατηγικών που εφάρμοσαν οι μαθητές.

Πίνακας 8

Οι στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές στο έργο 1

Αποτελεσματικές στρατηγικές	α) χ + 2χ + 3 = 12 β) Αν χ, ψ οι αριθμοί τότε $\begin{cases} x + \psi = 12 \\ 2\chi = \psi - 3 \end{cases}$ γ) (2χ – 3) + χ = 12

	δ) $\begin{cases} \psi + \chi = 12 \\ \psi^2 = \chi - 3 \end{cases}$
Μη αποτελεσματικές στρατηγικές	α) χ+ψ=12 => χ=3, ψ=9 β)χ=3, ψ=9 γ) $\begin{cases} x + \psi = 12 \\ 7 + 5 = 12 \\ 5 + 5 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$ άρα οι αριθμοί είναι 5 & 7

Από τους 55 μαθητές μόλις οι 15 εφάρμοσαν αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυση του προβλήματος. Οι υπόλοιποι 40 μαθητές εφάρμοσαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές.

Στο έργο 2 οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τα βήματα επίλυσης μιας ανίσωσης και όχι να εφαρμόσουν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική. Στην απάντηση, λοιπόν, του συγκεκριμένου ερευνητικού ερωτήματος δεν θα ληφθεί υπ' όψη το έργο αυτό.

Στο έργο 3 του πρώτου δοκιμίου, αποτελεσματικές θεωρήθηκαν οι στρατηγικές που εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ABD και ACB για να βρουν τις πλευρές AD και AC και στη συνέχεια αφαίρεσαν τα δυο ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να βρουν την τιμή του ψ. Επίσης, αποτελεσματικές θεωρούνται οι στρατηγικές που εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ABD και ACB για να βρουν τις πλευρές AD και AC αλλά δεν αφαίρεσαν τα δυο ευθύγραμμα τμήματα, ώστε να βρουν την τιμή του ψ. Οι μαθητές που εφάρμοσαν το Π.Θ. στα τρίγωνα ABD και ACB θεωρώντας όμως μια από τις κάθετες πλευρές ως υποτείνουσα θεωρείται ότι έχουν εφαρμόσει μη αποτελεσματική στρατηγική. Επίσης, μη αποτελεσματικές θεωρούνται οι στρατηγικές που εφαρμόζουν Π.Θ. στα τρίγωνα ACB και BCD. Για τους μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση θεωρούμε πως εφάρμοσαν μη αποτελεσματική στρατηγική.

Από τους 55 μαθητές οι 26 εφάρμοσαν αποτελεσματικές στρατηγικές, ενώ οι υπόλοιποι 30 εφάρμοσαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές. Από τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει πως συνολικά στο πρώτο δοκίμιο εφαρμόστηκαν 41 αποτελεσματικές στρατηγικές, έναντι 69 μη αποτελεσματικών. Άρα κατά μέσο όρο το

37,27% των μαθητών εφάρμοσαν αποτελεσματικές στρατηγικές στα προβλήματα ρουτίνας.

Δοκίμιο 2

Το δοκίμιο 2 περιλαμβάνει τα πρωτότυπα προβλήματα. Για την απάντηση του ερευνητικού ερωτήματος εξετάστηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα 2 και 3, καθώς στο έργο 1 δεν χρειαζόταν να εφαρμόσουν οι μαθητές κάποια στρατηγική.

Το έργο 1 του δεύτερου δοκιμίου αποτελείται από δυο ερωτήσεις. Οι μαθητές στο πρόβλημα αυτό δεν χρειάζεται να εφαρμόσουν κάποια συγκεκριμένη στρατηγική, αλλά πρέπει να αναλύσουν τις πληροφορίες που δίνονται και να κατανοήσουν τους περιορισμούς, ώστε να επιλέξουν τις σωστές απαντήσεις. Οπότε το έργο 1 δεν θα ληφθεί υπ' όψη για την απάντηση αυτού του ερευνητικού ερωτήματος.

Το έργο 2 αποτελείται από δυο ερωτήσεις. Η πρώτη ερώτηση είναι πολλαπλής επιλογής, οπότε δεν λαμβάνεται υπ' όψη για την απάντηση αυτού του ερευνητικού ερωτήματος. Στη δεύτερη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν ένα σύστημα δανεισμού για τη βιβλιοθήκη μιας σχολής. Οι βασικές απαιτήσεις του προβλήματος είναι το σύστημα να περιέχει τέσσερα βήματα και κάθε βήμα να έχει δυο μόνο επιλογές. Οι μαθητές που κατασκεύασαν πλήρη συστήματα με τέσσερα ή πέντε βήματα έχουν εφαρμόσει αποτελεσματική στρατηγική. Επίσης, αποτελεσματικές στρατηγικές θεωρούνται αυτές που το σύστημα περιείχε τέσσερα σωστά βήματα, αλλά είτε έλειπε μια περίοδος δανεισμού είτε ο έλεγχος για την καθυστέρηση βιβλίων ήταν εκτός διαγράμματος. Τα συστήματα που περιείχαν περισσότερα από πέντε βήματα ή κάποιο βήμα είχε περισσότερες από δυο επιλογές θεωρήθηκαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές. Τέλος, για τους μαθητές που δεν έδωσαν καμία απάντηση θεωρούμε πως εφάρμοσαν μη αποτελεσματική στρατηγική.

Από τους 55 μαθητές οι 22 εφάρμοσαν αποτελεσματικές στρατηγικές στην επίλυση του προβλήματος αυτού. Οι υπόλοιποι 33 μαθητές εφάρμοσαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές.

Το έργο 3 αποτελείται από τρεις ερωτήσεις και αναφέρεται σε ένα σύστημα άρδευσης. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές πρέπει να σχεδιάσουν τη ροή του νερού σε ένα χωράφι βασιζόμενοι σε ένα πίνακα που τους δίνεται, ενώ στη δεύτερη ερώτηση πρέπει να αποφασίσουν αν το νερό θα τρέξει στο σύστημα ή όχι. Στις δυο πρώτες ερωτήσεις λοιπόν οι μαθητές δεν πρέπει να εφαρμόσουν κάποια στρατηγική, οπότε δεν θα ληφθούν υπ' όψη για την απάντηση αυτού του ερωτήματος.

Στην τρίτη ερώτηση του προβλήματος οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν ένα πίνακα ελέγχου της λειτουργίας των πυλών όμοιο με αυτό της ερώτησης 1, ώστε να ελέγξουν αν η πύλη που έχει κολλήσει είναι η D. Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές πρέπει να χειριστούν με ορθό τρόπο τις αλληλοσυνδεόμενες σχέσεις των πυλών, ώστε να αποφασίσουν αν η πύλη που έχει κολλήσει είναι η D. Οι μαθητές που απάντησαν στην ερώτηση θέτοντας την πύλη D κλειστή, έχουν εφαρμόσει μη αποτελεσματική στρατηγική, αφού η ερώτηση διευκρινίζει ότι η πύλη αυτή πρέπει να είναι ανοιχτή. Επίσης, μη αποτελεσματική στρατηγική θεωρείται και αυτή που θέτει ταυτόχρονα τις πύλες A και E κλειστές καθώς τότε δεν περνάει καθόλου νερό από το σύστημα. Όλες οι άλλες στρατηγικές θεωρούνται αποτελεσματικές.

Από τους 55 μαθητές 20 μαθητές εφάρμοσαν αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης, ενώ οι υπόλοιποι 36 μαθητές εφάρμοσαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές. Από τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει πως στο δεύτερο δοκίμιο εφαρμόστηκαν συνολικά 42 αποτελεσματικές στρατηγικές έναντι 68 μη αποτελεσματικών. Άρα κατά μέσο όρο στο δεύτερο δοκίμιο εφαρμόστηκαν 38,18% αποτελεσματικές στρατηγικές έναντι 61,82% μη αποτελεσματικών.

Συμπερασματικά, λοιπόν, στο πρώτο δοκίμιο εφάρμοσε αποτελεσματικές στρατηγικές το 37,27% των μαθητών, ενώ στο δεύτερο δοκίμιο το αντίστοιχο ποσοστό είναι 38,18%. Προκύπτει, λοιπόν, πως τα ποσοστά των αποτελεσματικών στρατηγικών στα δυο δοκίμια είναι σχεδόν ίσα και μάλιστα βρίσκονται σε εξαιρετικά χαμηλό επίπεδο.

Ανασκόπηση της λύσης

Με το πέμπτο ερευνητικό ερώτημα εξετάστηκε αν οι μαθητές αναστοχάζονταν πάνω στις λύσεις τους. Η απάντηση του ερωτήματος βασίστηκε στις απαντήσεις που έδωσαν 21 μαθητές κατά τη διάρκεια των προσωπικών τους συνεντεύξεων. Συγκεκριμένα, εξετάστηκε αν οι μαθητές μετά την επίλυση των προβλημάτων έλεγξαν αν οι απαντήσεις τους ταιριάζουν με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος.

<u>Δοκίμιο 1</u>

Στο πρώτο έργο του δοκιμίου μόνο δυο μαθητές είπαν ότι στο τέλος της λύσης τους έκαναν επαλήθευση.

Ερ.: Στο τέλος της λύσης σου έλεγξες αν τα αποτελέσματά σου ταιριάζουν με τα δεδομένα του προβλήματος;

Μ1.: Ναι. Έλυσα την εξίσωση που έφτιαξα και βρήκα τους αριθμούς 9 και 3 οι οποίοι επαληθεύουν το πρόβλημα.

Δέκα μαθητές απάντησαν πως διάβασαν ξανά την εκφώνηση του προβλήματος και έλεγξαν αν υπήρχε κάποιο λάθος στις πράξεις τους, ενώ οι υπόλοιποι εννέα απάντησαν πως δεν έκαναν κανέναν έλεγχο.

Ερ.: Στο τέλος της λύσης σου έλεγξες αν τα αποτελέσματά σου ταιριάζουν με τα δεδομένα του προβλήματος;

Μ3: Ναι. Διάβασα ξανά την εκφώνηση και έλεγξα αν είχα κάποιο λάθος στις πράξεις.

Μ3.: Διάβασα ξανά την εκφώνηση και έλεγξα αν η εξίσωση ήταν σωστή.

Μ4: Όχι δεν έκανα κάποιο έλεγχο.

Στο δεύτερο έργο οι μαθητές έπρεπε να σχολιάσουν τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος και να κρίνουν την ορθότητα ή όχι της λύσης του. Όλοι οι μαθητές απάντησαν πως έλεγξαν τις απαντήσεις τους, λόγω της ιδιαίτερης μορφής του προβλήματος.

Στο τρίτο πρόβλημα οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Από τους 21 μαθητές που ερωτήθηκαν μόνο δυο μαθητές απάντησαν πως είχαν κάνει επαλήθευση, ενώ 7 μαθητές είπαν πως έλεγξαν τις πράξεις τους. Οι υπόλοιποι 12 μαθητές δεν έλεγξαν την απάντησή τους.

Μ1:Ναι, έκανα επαλήθευση, ώστε να βεβαιωθώ ότι το αποτέλεσμα που βρήκα ήταν σωστό.

Μ2:Έλεγξα ξανά τις πράξεις μου.

Μ3:Όχι δεν έλεγξα την απάντησή μου.

<u>Δοκίμιο 2</u>

Στο πρώτο έργο του δοκιμίου 18 από τους 21 μαθητές απάντησαν πως έλεγξαν τις απαντήσεις τους. Οι μαθητές υποστήριξαν πως διάβασαν πολλές φορές την εκφώνηση του προβλήματος, ώστε να βεβαιωθούν πως είχαν επιλέξει τη σωστή απάντηση.

Ερ: Στο τέλος της λύσης του προβλήματος έλεγξες την απάντησή σου;

Μ1: Ναι. Σύγκρινα τις απαντήσεις μου με τα δεδομένα του προβλήματος.

Μ2:Διάβασα ξανά την εκφώνηση και έλεγξα αν είχα απαντήσει σωστά στις ερωτήσεις.

Το δεύτερο έργο αποτελείται από δυο ερωτήσεις. Η πρώτη ερώτηση ήταν τύπου πολλαπλής επιλογής και όλοι οι μαθητές απάντησαν πως είχαν ελέγξει την απάντησή τους. Στη δεύτερη ερώτηση του προβλήματος, όλοι οι μαθητές απάντησαν

πως είχαν ελέγξει πολλές φορές τις λύσεις τους καθώς η συγκεκριμένη ερώτηση τους δυσκόλεψε αρκετά και επιχείρησαν πολλές φορές να την απαντήσουν.

Μ1:Έλεγξα την απάντησή μου πολλές φορές γιατί δεν ήμουν σίγουρη πως ακριβώς έπρεπε να φτιάξω το διάγραμμα.

Μ2:Έλεγξα την απάντησή μου αφού έλυσα το πρόβλημα τρεις φορές μέχρι να φτιάξω το σωστό διάγραμμα.

Το έργο 3 αναφέρεται σε ένα σύστημα άρδευσης και αποτελείται από τρεις ερωτήσεις. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές βασιζόμενοι σε ένα πίνακα πρέπει να κατασκευάσουν το διάγραμμα ροής του νερού σε ένα χωράφι. Από τους 21 μαθητές που ερωτήθηκαν αν έλεγξαν την απάντησή τους οι 15 απάντησαν πως έλεγξαν αν είχαν σχεδιάσει σωστά τη ροή του νερού. Στη δεύτερη ερώτηση οι μαθητές βασιζόμενοι στον ίδιο πίνακα έρεπε να απαντήσουν σε τρεις ερωτήσεις επιλέγοντας τη σωστή απάντηση. Στην ερώτηση αυτή 16 μαθητές απάντησαν πως έλεγξαν την ερώτησή τους.

Στην τρίτη ερώτηση του προβλήματος οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν ένα πίνακα όμοιο με αυτό της ερώτηση 1, ώστε να ελέγξουν αν η πύλη που έχει *κολλήσει* είναι η D. Από τους 21 μαθητές που ερωτήθηκαν οι 17 απάντησαν πως έλεγξαν τις απαντήσεις τους, ώστε να βεβαιωθούν ότι είναι σωστές. Οι υπόλοιποι 4 μαθητές απάντησαν πως δεν έλεγξαν τις απαντήσεις τους καθώς δεν γνώριζαν πως να συμπληρώσουν τον πίνακα, οπότε απάντησαν την ερώτηση αυτή στην τύχη.

Μ1: Έλεγξα πολλές φορές την απάντησή μου γιατί δεν είχα καταλάβει τι ακριβώς έπρεπε να κάνω.

Μ2: Έλεγξα την απάντησή μου γιατί δεν ήμουν σίγουρος ότι είναι σωστή.

Μ3: Όχι δεν την έλεγξα γιατί απάντησα στην τύχη.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει πως στο πρώτο δοκίμιο ο έλεγχος των περισσότερων μαθητών περιορίστηκε στον έλεγχο για την ορθότητα των πράξεών τους. Μόνο δυο μαθητές από τους 21 που ερωτήθηκαν έκαναν επαλήθευση στα έργα 1 και 3. Όμως η ασυνήθιστη για τους μαθητές μορφή του έργου 2 είχε ως αποτέλεσμα όλοι οι μαθητές να ελέγξουν τις απαντήσεις τους, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητά τους. Κάτι αντίστοιχο παρατηρήθηκε και με τα προβλήματα του δοκιμίου 2, τα οποία ήταν αρκετά διαφοροποιημένα από τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στο σχολείο τους, με αποτέλεσμα οι περισσότεροι να δηλώνουν πως έλεγξαν τις απαντήσεις τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι οι μαθητές είχαν χαμηλές επιδόσεις στην ΕΜΠ. Αν και οι επιδόσεις τους στα πρωτότυπα προβλήματα ήταν λίγο καλύτερες από τις επιδόσεις τους στα προβλήματα ρουτίνας, ωστόσο και τα δύο είδη προβλημάτων αποδείχθηκαν αρκετά δύσκολα για τους μαθητές που συμμετείχαν. Όσον αφορά στην κατανόηση των προβλημάτων οι μαθητές έδειξαν να κατανοούν και τις δυο κατηγορίες προβλημάτων στον ίδιο βαθμό. Ωστόσο στα προβλήματα ρουτίνας φάνηκε πως οι μαθητές αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες που αφορούσαν σε βασικές έννοιες της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Γενικά φάνηκε πως οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν μη αποτελεσματικές στρατηγικές, αν και στα πρωτότυπα προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες αποτελεσματικές στρατηγικές από ότι στα προβλήματα ρουτίνας. Τα αποτελέσματα που αφορούσαν στην ανασκόπηση της λύσης έδειξαν πως οι μαθητές τείνουν να μην αναστοχάζονται πάνω στη λύση τους στα προβλήματα ρουτίνας. Ο έλεγχος της απάντησης τον οποίο έκαναν οι περισσότεροι μαθητές περιοριζόταν σε έλεγχο για την ορθότητα των πράξεών τους, χωρίς να εμβαθύνουν στην ουσία της προβληματικής κατάστασης. Ωστόσο στα πρωτότυπα προβλήματα οι περισσότεροι μαθητές δήλωσαν πως έλεγχαν τις απαντήσεις τους.

Ο βαθμός κατανόησης και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στα πρωτότυπα προβλήματα και στα προβλήματα ρουτίνας

Η παρούσα έρευνα είχε στόχο να μελετήσει τη συμπεριφορά των δεκαπεντάχρονων μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος. Για το σκοπό αυτό χορηγήθηκαν στους μαθητές δυο δοκίμια, το πρώτο είχε τρία προβλήματα ρουτίνας και το δεύτερο είχε τρία πρωτότυπα προβλήματα, που είχαν χρησιμοποιηθεί στο διαγωνισμό του PISA 2003. Αρχικά έγινε σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών στα δυο δοκίμια. Στη συνέχεια, διερευνήθηκε ο βαθμός δυσκολίας των μαθητών στην κατανόηση ενός προβλήματος (ρουτίνας ή πρωτότυπο), αλλά και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυσή του. Επίσης, μελετήθηκαν οι στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές κατά την επίλυση των προβλημάτων και η αποτελεσματικότητά τους. Τέλος, εξετάστηκε αν οι μαθητές μετά την επίλυση κάθε προβλήματος έκαναν ανασκόπηση της λύσης τους, ώστε να βεβαιωθούν για την ορθότητα της απάντησής τους.

Τα αποτελέσματα από τη βαθμολογία των μαθητών στο δεύτερο δοκίμιο ως προς την κατανόηση των προβλημάτων διαφοροποιήθηκαν ανάλογα με τις ερωτήσεις κάθε προβλήματος. Συγκεκριμένα, το πρώτο έργο κατανοήθηκε πλήρως από όλους

τους μαθητές. Στο δεύτερο έργο όμως ενώ όλοι οι μαθητές κατανόησαν πως δουλεύει το σύστημα δανεισμού της βιβλιοθήκης που δίνεται στην πρώτη ερώτηση, ένας μεγάλος αριθμός μαθητών (35) δεν κατανόησαν καθόλου το ζητούμενο της ερώτησης 2. Κάτι αντίστοιχο παρατηρήθηκε και με το έργο 3. Συγκεκριμένα, οι περισσότεροι μαθητές κατανόησαν πλήρως την ερώτηση 1, ενώ οι μισοί περίπου μαθητές κατανόησαν και τη δεύτερη ερώτηση του προβλήματος. Ωστόσο η τρίτη ερώτηση κατανοήθηκε μόνο από 8 μαθητές. Παρατηρούμε, λοιπόν πως σε γενικές γραμμές οι μαθητές κατανόησαν τα προβλήματα του δεύτερου δοκιμίου, όμως δυο συγκεκριμένες ερωτήσεις δεν κατανοήθηκαν από τους περισσότερους μαθητές.

Οι περισσότεροι μαθητές θεώρησαν τα προβλήματα του δεύτερου δοκιμίου πιο οικεία σε αυτούς καθώς αντιπροσώπευαν καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Έτσι προκλήθηκαν εσωτερικά κίνητρα και κάθε μαθητής αντιμετώπισε κάθε πρόβλημα με τον προσωπικό του τρόπο. Στο πνεύμα αυτό κινείται και η έρευνα της Lerch (2004) η οποία θεωρεί πως τα προβλήματα που δίνονται στους μαθητές θα πρέπει να είναι οικεία σε αυτούς και να αντιπροσωπεύουν καταστάσεις που είναι πιθανό να αντιμετωπίσουν στη ζωή τους. Ένα οικείο προς τις εμπειρίες των μαθητών πρόβλημα θα τους προκαλέσει εσωτερικά κίνητρα ώστε να το επιλύσουν.

Από την ανάλυση των συνεντεύξεων προέκυψε πως το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών κατανόησε τα προβλήματα ρουτίνας. Οι μαθητές οι οποίοι έδειξαν να μην έχουν κατανοήσει τα προβλήματα, όπως φάνηκε μέσα από τις συνεντεύξεις, διάβαζαν βιαστικά την εκφώνηση των προβλημάτων με αποτέλεσμα να απαντούν σε διαφορετική ερώτηση από αυτή που διατυπώνονταν κάθε φορά. Για παράδειγμα στο πρώτο πρόβλημα του πρώτου δοκιμίου οι περισσότεροι από τους μαθητές που απάντησαν λάθος ή έδωσαν μερικώς ορθές απαντήσεις, αναζητούσαν τους αριθμούς που πληρούσαν την προϋπόθεση του προβλήματος, ενώ το πρόβλημα ζητούσε την εξίσωση με την οποία λύνεται. Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα που ακολουθεί από το διάλογο με μια μαθήτρια:

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα, και ποια τα ζητούμενα;

Μ: Το πρόβλημα ζητάει να χωρίσω τον αριθμό 12 σε δυο μέρη ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο.

Από το προηγούμενο απόσπασμα φαίνεται πως η μαθήτρια θεωρούσε λανθασμένα πως το πρόβλημα ζητούσε να βρει τους αριθμούς που ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος. Αυτό είναι κάτι που προκάλεσε εντύπωση διότι, οι

συνεντεύξεις των μαθητών πραγματοποιήθηκαν μερικές ημέρες μετά από την επίλυση των προβλημάτων. Ακόμη και τότε όμως οι μαθητές δεν διάβαζαν προσεκτικά το πρόβλημα, ώστε να κατανοήσουν ποιο ακριβώς ήταν το ζητούμενο, αλλά έκαναν μια γρήγορη ανάγνωση και επικεντρώνονταν στον τρόπο λύσης που είχαν εφαρμόσει. Η επιπόλαια από την πλευρά των μαθητών ανάγνωση του προβλήματος είναι κάτι που παρατηρήθηκε επίσης και στο τρίτο πρόβλημα ρουτίνας. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ζητούσε να περιγράψουν οι μαθητές τον τρόπο με τον οποίο θα βρουν την πλευρά ψ ενός τριγώνου. Ωστόσο, οι περισσότεροι μαθητές επιχείρησαν να λύσουν το πρόβλημα αριθμητικά, με αποτέλεσμα οι αδυναμίες τους στις αριθμητικές πράξεις και στο πυθαγόρειο θεώρημα να τους εμποδίζουν να απαντήσουν σωστά. Αντίθετα, όσοι μαθητές έδωσαν περιγραφική λύση στο πρόβλημα, όπως ακριβώς ζητούνταν, βαθμολογήθηκαν με άριστα, αφού οι πιθανές αδυναμίες τους δεν είχαν τη δυνατότητα να έρθουν στο φως.

Παρόλο, που τα προβλήματα του πρώτου δοκιμίου θεωρούνται προβλήματα ρουτίνας για τους μαθητές της τρίτης γυμνασίου, οι μαθητές της έρευνας αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες. Μια δυσκολία πολλών μαθητών που παρατηρήθηκε κατά την επίλυση των προβλημάτων ρουτίνας ήταν η σύγχυση ή και η άγνοια των εννοιών και των συμβόλων. Η δυσκολία στην εννοιολογική κατανόηση φάνηκε από τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές με τις προτάσεις που εκφράζουν σχέσεις ανάμεσα σε ποσοτικές μεταβλητές. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δίνονται απαντήσεις όπως: «*το διπλάσιο του αριθμού χ είναι το* x^2» ή «*μειώνω το ψ κατά 3 αποδίδεται συμβολικά ως* ψ^{-3}». Αυτή η δυσκολία των μαθητών σχετίζεται με τη γλωσσική και εννοιολογική κατανόηση του προβλήματος, που αναφέρονται στις έρευνες των Mayer (1985) και Jonassen (2003) αντίστοιχα, οι οποίοι λένε πως οι μαθητές που κατανοούν εννοιολογικά τη δομή του προβλήματος σημειώνουν μεγαλύτερη επιτυχία. Επίσης, η δυσκολία των μαθητών να μεταφράσουν τις λεκτικές περιγραφές σε σωστές μαθηματικές εκφράσεις σχετίζεται και με τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν. Σύμφωνα με τους Cai & Lester (2005) οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές αποτελούν βασικό χαρακτηριστικό για την αποτελεσματική επίλυση ενός προβλήματος.

Η επίδοση των μαθητών στα δυο δοκίμια

Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο δοκίμιο διαπιστώθηκε πως οι μαθητές αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες με τα προβλήματα που θεωρήσαμε

ως ρουτίνας. Στο έργο 1 του πρώτου δοκιμίου δόθηκε στους μαθητές ένα πρόβλημα και τους ζητήθηκε να φτιάξουν την εξίσωση με την οποία λύνεται το πρόβλημα. Η επίλυση προβλήματος με τη βοήθεια εξισώσεων είναι μια ενότητα που έχει διδαχθεί και στις τρεις τάξεις του γυμνασίου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές διδάχτηκαν την επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις πρώτου βαθμού στην πρώτη και στη δεύτερη τάξη του γυμνασίου. Στην τρίτη τάξη, επαναλαμβάνεται το κεφάλαιο αυτό και μάλιστα επεκτείνεται στην επίλυση προβλημάτων με δευτεροβάθμιες εξισώσεις αλλά και με τη χρήση συστήματος εξισώσεων. Επομένως το συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρήθηκε αρκετά οικείο στους μαθητές, αφού είχαν έρθει σε επαφή με παρόμοιου είδους προβλήματα πολλές φορές στο παρελθόν. Το έργο 2 αναφέρονταν στο αντίστοιχο κεφάλαιο των ανισώσεων. Δόθηκε στους μαθητές μια ανίσωση με τα βήματα επίλυσής της. Οι μαθητές έπρεπε να περιγράψουν τα βήματα της επίλυσης και να σχολιάσουν το αποτέλεσμα. Το γεγονός πως οι μαθητές είχαν διδαχτεί το κεφάλαιο των ανισώσεων στη δεύτερη και την τρίτη τάξη του γυμνασίου αιτιολογεί το χαρακτηρισμό του ως προβλήματος ρουτίνας. Το έργο 3 του πρώτου δοκιμίου ήταν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Στο πρόβλημα αυτό δόθηκε ένα σχήμα με κάποια ορθογώνια τρίγωνα και οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσουν το μήκος μιας πλευράς ενός τριγώνου. Πρόκειται για ένα πρόβλημα βασισμένο στο πυθαγόρειο θεώρημα, το οποίο διδάσκεται στη δεύτερη τάξη του γυμνασίου. Επίσης, οι μαθητές αντιμετώπισαν παρόμοια προβλήματα και στην τρίτη γυμνασίου στο κεφάλαιο των τετραγωνικών ριζών. Άρα και το τελευταίο πρόβλημα ήταν οικείο στους μαθητές.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε πως οι μαθητές αντιμετώπισαν αρκετές δυσκολίες στα προβλήματα ρουτίνας. Κάτι τέτοιο προκάλεσε έκπληξη, διότι οι μαθητές από τη σχολική τους εμπειρία είχαν έρθει αρκετές φορές σε επαφή με τέτοιου είδους προβλήματα. Αναμενόταν λοιπόν πως οι μαθητές θα είχαν καλύτερες επιδόσεις στο πρώτο δοκίμιο. Οι χαμηλές επιδόσεις στα προβλήματα ρουτίνας έφεραν στο φως δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην εφαρμογή τους. Αυτό οδήγησε στο συμπέρασμα πως η καθιερωμένη στο ελληνικό σχολείο διδασκαλία τυπικών ασκήσεων δεν συμβάλει στην ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Αποτέλεσμα αυτής της τακτικής είναι οι μαθητές να αποτυγχάνουν όταν έρχονται αντιμέτωποι ακόμη και με απλά προβλήματα. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με πολλές έρευνες (Chapman, 2006; Boaler, 1994; Silver, 2004) οι οποίες υποστηρίζουν

πως η διδασκαλία των μαθηματικών δεν πρέπει να βασίζεται στη διδασκαλία τυπικών ασκήσεων, αλλά να γίνεται σε ένα πλαίσιο προβλήματος το οποίο κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών και ενισχύει τη μεταφορά της μάθησης των μαθηματικών.

Συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών στα δυο δοκίμια προέκυψε το συμπέρασμα πως οι μαθητές είχαν σχετικά καλύτερες επιδόσεις στα πρωτότυπα προβλήματα από ότι στα προβλήματα ρουτίνας, παρόλο που και στα δύο είδη οι επιδόσεις τους βρίσκονταν σε χαμηλό επίπεδο. Ένα έργο που δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές στο δεύτερο δοκίμιο ήταν το έργο 2. Οι μαθητές εδώ έπρεπε να σχεδιάσουν ένα διάγραμμα ροής και να εκτελέσουν κάποιους κανόνες, ώστε να μπορούν να αποφασίζουν εύκολα για το δανεισμό βιβλίων και περιοδικών μιας βιβλιοθήκης. Για το σκοπό αυτό έπρεπε να κατανοήσουν τις πολλαπλές ρυθμίσεις του συστήματος, να οργανώσουν και να κατευθύνουν τη σκέψη τους συνδυάζοντας σωστά τις πληροφορίες του προβλήματος, ώστε να κατασκευάσουν το διάγραμμα. Αν και το πρόβλημα αυτό διέφερε αρκετά από τη λογική των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν καθημερινά οι μαθητές, η ανταπόκρισή τους ήταν αρκετά ευχάριστη.

Ένα άλλο πρωτότυπο πρόβλημα που δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές ήταν το έργο 3. Στο έργο αυτό οι μαθητές έπρεπε να κατανοήσουν τα κύρια χαρακτηριστικά και τον τρόπο λειτουργίας ενός αρδευτικού συστήματος. Η πρώτη ερώτηση που ανέθετε στους μαθητές μια έρευνα αποδείχθηκε αρκετά εύκολη. Τα αποτελέσματα μας έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν κατανοήσει το σύστημα των πυλών και τον τρόπο με τον οποίο το νερό διαχέονταν στο σύστημα. Η δεύτερη ερώτηση είχε σκοπό να εξετάσει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πυλών και της ροής του νερού. Οι απαιτήσεις του προβλήματος πλέον αυξήθηκαν, καθώς οι μαθητές έπρεπε να αναλύσουν και να αιτιολογήσουν τη λειτουργία κάθε πύλης και να αποφασίσουν αν το νερό θα τρέξει σε όλο το σύστημα. Η τρίτη ερώτηση, που δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές, απαιτούσε τη δημιουργία ενός τεστ ώστε να αποφασίσουν μια πύλη είχε κολλήσει. Στο σημείο αυτό οι μαθητές θα έπρεπε να αναγνωρίσουν τις τυχαίες σχέσεις μεταξύ των συνδεόμενων τμημάτων του συστήματος και το ρόλο που διαδραματίζουν αυτοί οι δεσμοί στη λειτουργία του μηχανισμού, ώστε να διαγνώσουν την πιθανή αιτία του προβλήματος και να προτείνουν μια υποθετική λύση. Κάθε ενέργεια θα έπρεπε να αξιολογηθεί και να ελεγχθεί σύμφωνα με τη λογική και τις πληροφορίες σωστής λειτουργίας που δόθηκαν αρχικά. Οι μαθητές όμως δεν κατανόησαν ποιες ακριβώς ενέργειες έπρεπε να κάνουν ώστε να απαντήσουν την

ερώτηση αυτή. Αυτό που τους δυσκόλεψε ιδιαίτερα ήταν τόσο η διατύπωση της ερώτησης αλλά και ο τρόπος με τον οποίο έπρεπε να κάνουν τον έλεγχό τους.

Γιατί όμως οι μαθητές είχαν λίγο καλύτερες επιδόσεις στα πρωτότυπα προβλήματα; Το γεγονός ότι στο δεύτερο φύλλο εργασίας δεν χρειαζόταν οι μαθητές να γνωρίζουν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, φαίνεται πως τους ανακούφισε. Οι μαθητές τώρα έπρεπε να συνδυάσουν τις γνώσεις τους και να ανακαλέσουν τις προσωπικές τους εμπειρίες, ώστε να απαντήσουν στα προβλήματα. Δεν χρειαζόταν πλέον απαραίτητα να κατασκευάσουν κάποιο μαθηματικό αλγόριθμο ή να γνωρίζουν συγκεκριμένες ενότητες της σχολικής ύλης. Η πιο εύκολη κωδικοποίηση των πληροφοριών του προβλήματος και η γνώση της κατάλληλης στρατηγικής που εφαρμόστηκε κάθε φορά είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν καλύτερες επιδόσεις στα πρωτότυπα προβλήματα απ' ότι στα προβλήματα ρουτίνας. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με την έρευνα της (Silver, 2004) η οποία υποστηρίζει πως ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που έχει να κάνει με τις εμπειρίες των μαθητών τους παρέχει εσωτερικά κίνητρα και κάθε μαθητής το αντιμετωπίζει με τον προσωπικό του τρόπο.

Το παραπάνω συμπέρασμα ωστόσο, δημιουργεί πολλά ερωτηματικά διότι οι μαθητές μας δεν είχαν καθόλου καλές επιδόσεις στον διαγωνισμό του PISA, ενώ τώρα φαίνεται να αντιμετώπισαν καλύτερα αυτά τα προβλήματα. Κατά τη διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας οι μαθητές αντιμετώπισαν πρώτα το δοκίμιο με τα προβλήματα ρουτίνας και στη συνέχεια τα πρωτότυπα προβλήματα. Κατά την επίλυση του πρώτου δοκιμίου παρατηρήθηκε πως οι μαθητές είχαν αρκετή αγωνία. Προσπαθούσαν να θυμηθούν και να συνδέσουν κάθε πρόβλημα με συγκεκριμένες ενότητες της σχολικής ύλης, ώστε να βρουν το σωστό τρόπο επίλυσής του. Χαρακτηριστικές είναι οι ερωτήσεις των μαθητών γύρω από το πρώτο πρόβλημα, «αυτό λύνεται με σύστημα;». Επίσης, οι μαθητές έδειξαν μεγάλη αδυναμία στο συνδυασμό των μαθηματικών γνώσεων, ώστε να απαντήσουν σωστά. Αυτή η συμπεριφορά των μαθητών επιβεβαιώνει τα πορίσματα του Mayer (1985), ο οποίος παρατηρώντας τις δυσκολίες που είχαν οι μαθητές με προτάσεις που εκφράζουν σχέσεις ανάμεσα σε ποσοτικές μεταβλητές, τόνισε τη σημαντικότητα της γλωσσικής κατανόησης ενός προβλήματος. Στο τρίτο έργο αρκετοί μαθητές, αντέδρασαν μόλις αντίκρισαν το τρίγωνο στο τρίτο πρόβλημα, και χωρίς πρώτα να έχουν διαβάσει την εκφώνηση διαμαρτυρήθηκαν, «Όχι γεωμετρία!». Αφού οι μαθητές ολοκλήρωσαν το πρώτο δοκίμιο, συνέχισαν με το δεύτερο. Μετά την ανάγνωση των προβλημάτων,

παρατηρήθηκε πως οι μαθητές ήταν πιο χαλαροί και πιο θετικοί απέναντι στα προβλήματα. Το γεγονός ότι δεν απαιτούνταν πλέον να γνωρίζουν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην καλύτερη επίλυση των προβλημάτων του δεύτερου δοκιμίου, γεγονός που επιβεβαιώνει την άποψη της Lerch (2004), η οποία θεωρεί πως τα προβλήματα που δίνονται στους μαθητές θα πρέπει να είναι οικεία σε αυτούς και να αντιπροσωπεύουν καταστάσεις που είναι πιθανό να αντιμετωπίσουν στη ζωή τους, ώστε να προκληθούν εσωτερικά κίνητρα και ο κάθε μαθητής να αντιμετωπίσει το κάθε πρόβλημα με τον προσωπικό του τρόπο.

Η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών επίλυσης των προβλημάτων στα δυο δοκίμια

Η ελλιπής εννοιολογική κατανόηση των προβλημάτων ρουτίνας είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να κωδικοποιούν λάθος τις πληροφορίες του προβλήματος και να επιλέγουν μη αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης. Η παρατήρηση αυτή συνάδει με τη μελέτη της English (1997) η οποία βρήκε πως η βασικότερη αιτία για την εφαρμογή μη αποτελεσματικών στρατηγικών επίλυσης είναι η πρώτη λανθασμένη κωδικοποίηση των πληροφοριών, η οποία γίνεται λόγω της περιορισμένης κατανόησης της λογικής δομής του προβλήματος. Επίσης, επιβεβαιώνεται και η έρευνα των Thom & Pirie (2002), οι οποίοι βρήκαν ότι οι καλοί λύτες προβλημάτων, αξιολογούν επακριβώς τις προβληματικές καταστάσεις, διακρίνουν καταστάσεις στις οποίες μπορούν να εφαρμόσουν τις ικανότητές τους και εφαρμόζουν επιτυχημένες στρατηγικές για να επιλύσουν διλημματικές καταστάσεις.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί φαίνεται ο διάλογος μιας μαθήτριας με την ερευνήτρια γύρω από το πρόβλημα 3. Η συγκεκριμένη μαθήτρια εφάρμοσε το Π.Θ. στο ABD τρίγωνο θεωρώντας ως υποτείνουσα την πλευρά AD. Το ίδιο λάθος παρατηρήθηκε από αρκετούς μαθητές οι οποίοι θεωρούσαν ως υποτείνουσα την άγνωστη πλευρά. Με τον ίδιο τρόπο και θεωρώντας ως υποτείνουσα του τριγώνου ABC την AC η μαθήτρια υπολόγισε τον άγνωστο χ, όμως επειδή διαισθάνθηκε ότι είχε κάνει κάποιο λάθος δεν προχώρησε στην αφαίρεση των δυο τμημάτων, ώστε να βρει το ψ. Επίσης, στο συγκεκριμένο πρόβλημα τόσο η συγκεκριμένη μαθήτρια όσο και οι υπόλοιποι μαθητές, ξεκινούσαν τη λύση εφαρμόζοντας απευθείας το Π.Θ. χωρίς πρώτα να αναφέρουν ποια τρίγωνα ήταν ορθογώνια και ποιες πλευρές έπαιζαν το ρόλο της υποτείνουσας.

Ε: Μπορείς να εξηγήσεις τη λύση που εφάρμοσες;

Μ: Στο τρίγωνο ABD εφάρμοσα Πυθαγόρειο θεώρημα για να βρω την AD.

Μετά εφάρμοσα πάλι Πυθαγόρειο θεώρημα στο ABC για να βρω το χ.

Ε: Βρήκες την πλευρά ψ που ζητάει το πρόβλημα;

Μ: Όχι. Είναι περίεργα τα νούμερα, δεν ξέρω αν είναι σωστό.

Αν και τα ποσοστά των αποτελεσματικών στρατηγικών στα δυο δοκίμια βρέθηκαν πολύ χαμηλά, τα αποτελέσματα που αφορούσαν στις στρατηγικές επίλυσης που επέλεξαν οι μαθητές στο δοκίμιο 2 ήταν λίγο καλύτερα από τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο δοκίμιο 1. Σε αντίθεση με τα προβλήματα ρουτίνας, όταν οι μαθητές εργάζονταν πάνω στα πρωτότυπα προβλήματα τα οποία ήταν πιο οικεία σε αυτούς, επέλεγαν πιο αποτελεσματικές στρατηγικές. Πλέον οι μαθητές δεν χρειαζόταν να κατασκευάσουν κάποιο αλγεβρικό ή γεωμετρικό μοντέλο ώστε να λύσουν το πρόβλημα, αλλά να κρίνουν με βάση τις προσωπικές τους εμπειρίες. Η διαφορά αυτή στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής και στον έλεγχο της διαδικασίας εφαρμογής της στα δυο είδη προβλημάτων επαληθεύει την έρευνα της Lerch (2004) η οποία βρήκε ότι όταν οι μαθητές λύνουν πρωτότυπα προβλήματα ελέγχουν τις ενέργειές τους βασιζόμενοι κατά ένα μεγάλο μέρος, στο σύστημα των προσωπικών τους πεποιθήσεων το οποίο αναπτύχθηκε σε όλη τη διάρκεια των προσωπικών τους εμπειριών.

Έλεγχος απάντησης – Ανασκόπηση λύσης

Αξιοσημείωτα ήταν τα αποτελέσματα που αφορούσαν τον έλεγχο της απάντησης των μαθητών στα προβλήματα ρουτίνας. Παρατηρήθηκε πως κυρίως οι πολύ καλοί μαθητές είχαν την τάση να ελέγχουν την απάντησή τους κάνοντας επαλήθευση. Οι περισσότεροι μαθητές δήλωσαν πως όταν δυσκολεύονταν πολύ σε ένα πρόβλημα ο έλεγχός τους περιοριζόταν σε γρήγορη ανάγνωση της λύσης τους, ώστε να εντοπίσουν αν είχαν κάνει κάποιο αριθμητικό λάθος ή μήπως κατά την ανάγνωση ανακάλυπταν κάποιο διαφορετικό τρόπο που θα τους οδηγούσε στη σωστή απάντηση. Οι υπόλοιποι μαθητές αφού έλυναν το πρόβλημα προχωρούσαν στο επόμενο, χωρίς να ελέγξουν καθόλου την απάντησή τους. Αυτή η τάση των μαθητών να μην αναστοχάζονται πάνω στη λύση τους είναι κάτι που δεν πρέπει να αγνοείται από τους διδάσκοντες καθώς, σύμφωνα με μελέτες (Polya; Greer 1997) η μη ανασκόπηση της λύσης έχει ως αποτέλεσμα να δίνονται απαντήσεις που αγνοούν το πλαίσιο του προβλήματος. Όταν ο μαθητής κοιτάξει ξανά τη λύση του προβλήματος και επανεξετάσει το αποτέλεσμα και το δρόμο που τον οδήγησε σε αυτό, τότε θα

σιγουρευτεί περισσότερο για τη γνώση που απέκτησε και θα αναπτύξει περισσότερο την ικανότητά του να λύνει προβλήματα.

Τα αποτελέσματα που αφορούσαν τον αναστοχασμό πάνω στη λύση ήταν ίδια και για τα δυο είδη προβλημάτων. Όπως και στα προβλήματα ρουτίνας, έτσι και στα πρωτότυπα προβλήματα παρατηρήθηκε πως ορισμένοι μόνο από τους καλούς μαθητές έλεγχαν στο τέλος της απάντησή τους την ορθότητά της και κατά πόσο αυτή ταιριάζει με τα δεδομένα του προβλήματος. Η πλειοψηφία των μαθητών δήλωσε πως όταν ένα πρόβλημα τους δυσκόλευε αρκετά και δεν ήταν σίγουροι για τη λύση τους, τότε διάβαζαν πολλές φορές την εκφώνηση και προσπαθούσαν να βελτιώσουν την απάντησή τους. Αυτή η τάση των μαθητών, λοιπόν, ήταν γενική και ανεξάρτητη από το είδος του προβλήματος που κάθε φορά έλυναν. Φαίνεται λοιπόν, πως η ανασκόπηση της λύσης δεν εξαρτήθηκε από το είδος του προβλήματος. Συγκεκριμένα, η επικρατούσα κατάσταση μεταξύ των μαθητών ήταν να απαντούν σε λεκτικά προβλήματα και να ελέγχουν τις απαντήσεις τους μόνο όταν τα προβλήματα τους φαίνονται δύσκολα, ενώ σε αντίθετη περίπτωση δεν έλεγχαν τις απαντήσεις τους.

Εισηγήσεις για περαιτέρω έρευνες

Η παρούσα έρευνα έφερε στο φως συμπεράσματα που επιβεβαίωσαν παλαιότερες έρευνες αλλά και διάφορα θέματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο για περαιτέρω έρευνα.

Στο ξεκίνημα της έρευνάς μας περιμέναμε οι μαθητές να αντιμετωπίσουν περισσότερες δυσκολίες στα πρωτότυπα προβλήματα παρά στα προβλήματα ρουτίνας. Ο λόγος αυτής της σκέψης ήταν πως οι μαθητές αρκετά συχνά στο σχολείο αντιμετωπίζουν προβλήματα παρόμοια με αυτά του πρώτου δοκιμίου. Ωστόσο, από τα αποτελέσματα φάνηκε πως οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στα προβλήματα ρουτίνας.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο τέλος της σχολικής χρονιάς 2007- 2008 πράγμα το οποίο σημαίνει πως οι μαθητές είχαν σχεδόν ολοκληρώσει την υποχρεωτική τους εκπαίδευση. Κατά την επίλυση των προβλημάτων ρουτίνας από τους μαθητές αλλά και κατά τη διαδικασία των συνεντεύξεων ήρθαν στο φως σημαντικές αδυναμίες των μαθητών σε βασικά στοιχεία της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Στο σημείο αυτό ανακύπτει το ερώτημα: «Γιατί οι μαθητές δεν κατανοούν σε βάθος αυτά που έχουν διδαχθεί ενώ κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας φαίνεται ότι τα έχουν εμπεδώσει;». Για την απάντηση του ερωτήματος αυτού αλλά

και για την προσπάθεια υπέρβασης του εμποδίου θα ήταν χρήσιμο να σχεδιαστεί και να εφαρμοστεί ένα παρεμβατικό πρόγραμμα ανάμεσα σε δυο ομάδες μαθητών. Στην πρώτη ομάδα οι μαθητές να διδαχτούν τις έννοιες της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας με τον παραδοσιακό τρόπο. Στη τη δεύτερη ομάδα οι μαθητές να διδαχτούν τις έννοιες αυτές μέσω της ΕΜΠ, ώστε να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των εννοιών αυτών και να τις συνδέσουν με καταστάσεις της πραγματικής ζωής, όπως προτείνουν οι Verschaffel (2002), Chapman(2004) και Silver (2004). Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να οδηγήσει σε αξιόπιστα συμπεράσματα σε σχέση με την ωφέλεια του τρόπου διδασκαλίας μέσω της ΕΜΠ.

Στην παρούσα έρευνα φάνηκε πως οι περισσότεροι μαθητές εφάρμοσαν μη αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης και στα δυο δοκίμια. Βέβαια, στα πρωτότυπα προβλήματα τα αποτελέσματα ήταν κάπως καλύτερα καθώς οι μαθητές μπορούσαν να κρίνουν την ορθότητα της στρατηγικής τους βασισμένοι στις προσωπικές εμπειρίες και πεποιθήσεις τους. Οι μαθητές, λοιπόν, θα μπορούσαν να εκπαιδευτούν ώστε να διακρίνουν πότε μια συγκεκριμένη αριθμητική πράξη μπορεί να τους οδηγήσει σε ένα ακριβές μοντέλο λύσης, πότε σε μια λογική προσέγγιση της λύσης και πότε είναι εντελώς ακατάλληλη για να τους οδηγήσει στο απαιτούμενο μοντέλο για την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Θα ήταν χρήσιμο, λοιπόν, να σχεδιαστεί μια μελέτη η οποία να εξετάζει αν μέσα από δραστηριότητες των μαθητών, όπως το να διατυπώνουν και εξετάζουν υποθέσεις και να τις αντιπαραβάλλουν, είναι δυνατόν οι μαθητές να εξελιχθούν σε ευέλικτους συζητητές οι οποίοι κατανοούν ουσιαστικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα και είναι ικανοί να το αντιμετωπίζουν με αποτελεσματικό τρόπο. Η μελέτη αυτή επίσης, θα μπορούσε να εξετάσει αν η χρήση μη αποτελεσματικών στρατηγικών από τους μαθητές οφείλεται στη χαμηλή εξάσκηση στην επίλυση προβλημάτων ή στο επίπεδο σκέψης των μαθητών.

Κατά τη διαδικασία της έρευνας και ιδιαίτερα κατά τη διαδικασία διεξαγωγής των συνεντεύξεων φάνηκε πως ένας μεγάλος αριθμός μαθητών αφού έλυναν ένα πρόβλημα, δεν έλεγχαν την απάντησή τους. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει πολλές παλαιότερες έρευνες, (Polya; Greer, 1997) που έδειξαν πως οι μαθητές έχουν συνηθίσει να απαντούν σε λεκτικά προβλήματα, αδιαφορώντας πλήρως για το αν η απάντησή τους συμφωνεί με την κοινή λογική. Η τάση αυτή των μαθητών βέβαια είναι ως ένα βαθμό δικαιολογημένη και αναμενόμενη καθώς αυτό που βιώνουν τα

παιδιά στην τάξη είναι ότι καλός είναι ο μαθητής που λύνει τα προβλήματα σε όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο και όχι αυτός που χρειάζεται χρόνο να σκεφτεί πάνω στο πρόβλημα. Ακόμη, οι μαθητές θεωρούν πως η λύση ενός προβλήματος μπορεί να είναι ένας μοναδικός σωστός αριθμός και όχι μια προσεγγιστική απάντηση. Τα ευρήματα των ερευνών αυτών λοιπόν θα πρέπει να γίνουν γνωστά στους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι με τη σειρά τους θα πρέπει να τα λάβουν σοβαρά υπόψη τους και να σταματήσουν να σκέφτονται και να ενεργούν με βάση τις συνήθειες που καλλιεργούνται μέσα στην τάξη και μέσα στο ίδιο το σχολείο.

Κατά τη διαδικασία διεξαγωγής των συνεντεύξεων, καταγράφηκαν από την ερευνήτρια πολλοί ενδιαφέροντες διάλογοι, μεταξύ της ερευνήτριας και των μαθητών. Η ανάλυση των διαλόγων αυτών σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο μοντέλο, θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω έρευνας. Τα αποτελέσματα μίας τέτοιας ανάλυσης θα μπορούσαν να συμβάλουν στην κατανόηση της σκέψης και του τρόπου έκφρασης των παιδιών.

Τελειώνοντας δεν θα μπορούσε να μείνει ασχολίαστη η ευχαρίστηση που έδειξαν οι μαθητές κατά την επίλυση των πρωτότυπων προβλημάτων, σε αντίθεση με το άγχος και το φόβο που τους διακατείχε στα προβλήματα ρουτίνας. Τα πρωτότυπα προβλήματα ακριβώς επειδή είναι ρεαλιστικά και αντηχούν τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών, τους παρείχαν εσωτερικά κίνητρα επίλυσης. Οι δάσκαλοι μπορούν να αξιοποιήσουν αυτό το ενδιαφέρον των μαθητών για τα πρωτότυπα προβλήματα και να παρουσιάσουν τις διάφορες μαθηματικές έννοιες μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα. Κάτι τέτοιο θα οδηγήσει σε θετικά αποτελέσματα και στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία. Δεν είναι αναγκαίο η διδασκαλία μέσω της ΕΜΠ να εφαρμόζεται σε όλες τις ενότητες της σχολικής ύλης, αλλά αρκεί η εφαρμογή της σε ενότητες που σχετίζονται με την εισαγωγή νέων εννοιών. Τα παιδιά δεν μαθαίνουν μαθηματικά μέσα από την ενασχόληση με τυποποιημένες πολύπλοκες ασκήσεις που βελτιώνουν την διαδικαστική τους γνώση, αλλά μέσα από πρωτότυπα προβλήματα της καθημερινής ζωής, που τα εμπλέκουν στη διαδικασία της μάθησης και τα βοηθούν να καταλάβουν ότι τα μαθηματικά δεν διακρίνονται σε σχολικά και μη. Με τον τρόπο αυτό θα δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να αντιληφθούν την επιστήμη των Μαθηματικών, να κατανοήσουν το σκοπό της διδασκαλίας τους, τη χρησιμότητά τους αλλά και τη δύναμη τους. Σταδιακά, οι μαθητές θα εκτιμήσουν τα μαθηματικά και θα αποκτήσουν μια αίσθηση αυτοπεποίθησης και αυτεπάρκειας.

Αυτό θα πρέπει να είναι και το ζητούμενο μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Buxkemper, A., & Hartfiel, D. (2003). Understanding. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(6),* 801-812.

Cai, J. (2004). Why do U.S. and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *Journal of Mathematical Behaviour, 23,* 135 - 167.

Cai, J. & Lester, F. K. (2005). Solution representations and pedagogical representations in Chinese and U.S. classrooms. *Journal of Mathematical Behaviour, 24,* 221-237.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational studies in mathematics, 62,* 211-230.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T. , Heuvel-Panhuizen, M., De Lange, & Wijers, M., (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *Mathematics Education, 39,* 405-418.

English, L. D. (1997). Interventions in Children's Deductive Reasoning with Indeterminate Problems. *Contemporary educational psychology, 22,* 338 -362.

Eurybase, (2007-2008). Οργάνωση του Εκπαιδευτικού συστήματος στην Ελλάδα.*The Information Database on Education Systems in Europe.*

Eurybase, (2007- 2008). The education System in Finland. *The Information Database on Education Systems in Europe.*

Evens H. & Houssart J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: "I know but I can't explain". *Educational Research, 46,* 269-282.

Greer, (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and instruction, 7,* 293-307.

Hmelo – Silver C.E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review, 16(3).*

Ho, K. F. & Hedberg, J. G. (2005). Teachers' pedagogies and their impact on students' mathematical problem solving. *Journal of Mathematical Behaviour, 24,* 238-252.

Johanssen, D. H. (2003). Designing research based-instructions for story problem. *Educational Psychology Review, 15(3),* 267-296.

Leikin, R. (2003). Problem solving preferences of mathematics teachers: Focusing on symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6,* 297-329.

Lerch, C. M. , (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 23,* 21–36.

Mayer, R., (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. *In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving* (pp. 123-145). *Lawrence Erlbaum.*

NCTM (2000). Principles and Standards for school mathematics. *Reston, VA: NCTM, 2000.*

PISA, (2003). Problem Solving for tomorrow's World. *Organisation for economic co-operation and development.*

Polya, G. (1991). Πώς να το λύσω. (Ξ. Ψυακκή, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα. (Πρωτότυπη έκδοση, 1957).

Reiss, K. & Torner G., (2007). Problem solving in the mathematics classroom: the German perspective. *Mathematics Education, 39,* 431-441.

Schoenfeld, H. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-368). New York: Macmillan.

Siegler, (2003). Implications of cognitive science research for mathematics Education. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 119-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathmatics.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behaviour, 24,* 341-350.

Szendrei, J., (2007). When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: research and theory, practice and politics. *Mathematics Education, 39,* 443-458.

Thom, J. S. & Pirie, S. E. B. (2002). Problems, Perseverance, and mathematical residue. *Educational Studies in Mathematics 50,* 1–28.

Βοσνιάδου, Σ. (2005). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοιχτού προβλήματος στο δημοτικό σχολείο*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄- ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα **…….**
Τμήμα **…….**
Ημερομηνία **……**

<u>Πρόβλημα 1</u>

Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία λύεται το ακόλουθο πρόβλημα:
«Χωρίστε τον αριθμό 12 σε δύο μέρη τέτοια ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο».

……
……
…….
…….
…….
……..
……
……..

<u>Πρόβλημα 2</u>

Πιο κάτω δίνεται μια λύση της ανισότητας $-\frac{1}{x} > x+2$. Να εξηγήσετε με ποια διαδικασία μεταβαίνουμε από ένα βήμα στο επόμενο και να αναλύστε κατά πόσο η λύση είναι ορθή ή όχι.

<u>Λύση:</u>

$-\frac{1}{x} > x+2$ *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με* x *και βρίσκουμε:*

$-1 > x^2 + 2x$ ……

$0 > x^2 + 2x + 1$ ……..

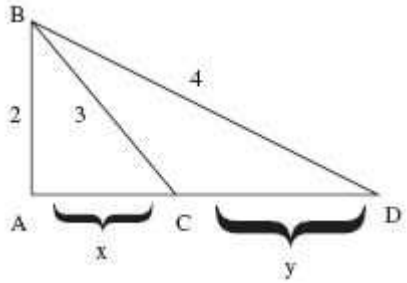
$0 > (x+1)^2$ ……..

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί;

……
……

Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα έχουν σημειωθεί τα δεδομένα και τα άγνωστα. Να εξηγήστε πώς θα βρείτε την αριθμητική τιμή του y.



……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Όνομα…….....

Τμήμα…….....

Ημερομηνία……..

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: *CINEMA*

Ο Γιώργος, ένας δεκαπεντάχρονος μαθητής, θέλει να κανονίσει με ακόμη δύο φίλους του να πάνε στον κινηματογράφο μια από τις μέρες των διακοπών του καλοκαιριού, από το Σάββατο 1 Ιουνίου έως την Κυριακή 9 Ιουνίου. Ο Γιώργος ρώτησε τους φίλους του ποια μέρα θα μπορούσαν να βγουν και έλαβε τις εξής απαντήσεις:

Μαρία: Δευτέρα και Τετάρτη απόγευμα 2:30 – 3:30, έχω μάθημα κιθάρας στο σπίτι.
Πέτρος: Κάθε Κυριακή πηγαίνω στη γιαγιά μου, άρα δεν μπορούμε να κανονίσουμε Κυριακή. Α! Έχω δει το «**Pokamin**» και δεν θα ήθελα να το ξαναδώ.
Οι γονείς της Μαρίας της επιτρέπουν να βλέπει μόνο κατάλληλες για την ηλικία της ταινίες. Επίσης, της επιτρέπουν να είναι μέχρι τις 10 το βράδυ έξω και πηγαίνουν να την πάρουν με το αυτοκίνητο.
Ο Γιώργος κοίταξε τις ταινίες της εβδομάδας και βρήκε τις εξής πληροφορίες:

VILLAGE CENTER

Τηλέφωνα κρατήσεων: 210- 7765879, 24ωρη εξυπηρέτηση: 210 – 7745324
Ειδική προσφορά: Κάθε Τρίτη όλες οι ταινίες 3 ευρώ

Οι ταινίες από την Παρασκευή 1 Ιουνίου και για 2 εβδομάδες:

Παιδιά στο διαδίκτυο, (113 λεπτά) Κατάλληλο για άτομα άνω των 12 14:00 Δευτ- Παρ 21:35 Σάβ/ Κυρ	**Pokamin,** (105 λεπτά) Γονική συναίνεση. Κατάλληλο για όλους, ίσως κάποιες σκηνές είναι ακατάλληλες για παιδιά 13:40 Καθημερινά 16:35 Καθημερινά
Ο εκτελεστής (164 λεπτά) Κατάλληλο για άτομα άνω των 18 19:55 Παρ/ Σαβ	**Οι ζωές των άλλων** (144 λεπτά) Κατάλληλο για άτομα άνω των 12 15:00 Δευτ-Παρ 18:00 Σαβ/ Κυρ
Βαμμένο Πέπλο (148 λεπτά) Κατάλληλο για άτομα άνω των 18 18:36 Καθημερινά	**Ο βασιλιάς του δάσους** (117 λεπτά) Κατάλληλο για όλους 14:35 Δευτ-Παρ 18:50 Σαβ/ Κυρ

Ερώτηση 1

Αν λάβετε υπ' όψη τις πληροφορίες που βρήκε ο Γιώργος για τις ταινίες και αυτές που του έδωσαν οι φίλοι του, ποιες από τις 6 ταινίες μπορεί να δει η παρέα;

Ταινία	**Μπορούν τα παιδιά δουν την ταινία;**
Παιδιά στο διαδίκτυο	Ναι / Όχι
Ο εκτελεστής	Ναι / Όχι
Βαμμένο πέπλο	Ναι / Όχι
Pokamin	Ναι / Όχι
Οι ζωές των άλλων	Ναι / Όχι
Ο βασιλιάς του δάσους	Ναι / Όχι

Ερώτηση 2

Αν η παρέα αποφασίσει να δει το *Παιδιά στο διαδίκτυο*, ποιες από τις παρακάτω ημερομηνίες είναι κατάλληλες;

Α. Δευτέρα 3 Ιουνίου

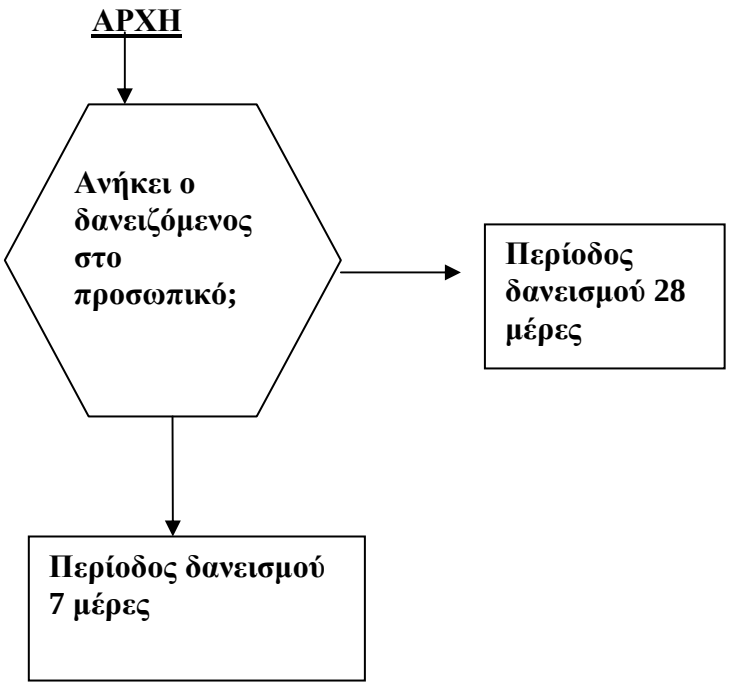
Β. Τετάρτη 5 Ιουνίου

Γ. Παρασκευή 7 Ιουνίου

Δ. Κυριακή 9 Ιουνίου

Πρόβλημα 2: ***Βιβλιοθήκη***

Η Κεντρική βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου Αθηνών λειτουργεί με ένα απλό σύστημα δανεισμού. Για το προσωπικό που εργάζεται εκεί η περίοδος δανεισμού είναι 28 ημέρες. Για τους φοιτητές η περίοδος δανεισμού είναι 7 ημέρες. Δίνεται ένα από διάγραμμα που παριστάνει το σύστημα δανεισμού:



Η βιβλιοθήκη του Μαθηματικού τμήματος λειτουργεί με έναν πιο περίπλοκο τρόπο:

- Οι εκδόσεις που χαρακτηρίζονται ως *εφεδρικά* έχουν περίοδο δανεισμού 2 μέρες.
- Τα βιβλία (όχι τα περιοδικά) που δεν είναι εφεδρικά, έχουν περίοδο δανεισμού 28 μέρες για τα μέλη προσωπικού και 14 μέρες για τους φοιτητές.
- Τα περιοδικά που δεν είναι εφεδρικά έχουν περίοδο δανεισμού 7 ημέρες για όλους.
- Άτομα που έχουν καθυστερήσει την επιστροφή βιβλίων δεν επιτρέπεται να δανειστούν οτιδήποτε.

Ερώτηση 1

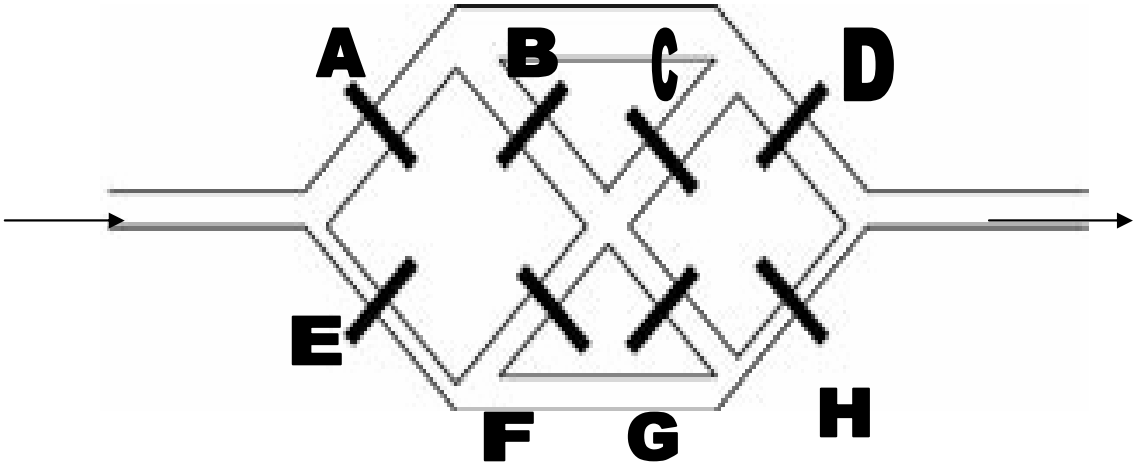
Ας υποθέσουμε πως είστε φοιτητές στο Μαθηματικό τμήμα και δεν έχετε καθυστερήσει κανένα βιβλίο. Θέλετε να δανειστείτε ένα βιβλίο που είναι στα *εφεδρικά*. Για πόσο καιρό μπορείτε να το κρατήσετε;

Ερώτηση 2

Κατασκευάστε ένα διάγραμμα για το σύστημα δανεισμού της βιβλιοθήκης του Μαθηματικού τμήματος με βάση το οποίο θα σχεδιαστεί ένα αυτόματο σύστημα δανεισμού βιβλίων και περιοδικών. Το σύστημα θα πρέπει να είναι επαρκές και να περιλαμβάνει τον ελάχιστο αριθμό βημάτων. Σε κάθε βήμα θα πρέπει να έχει μόνο δυο επιλογές, **ναι ή όχι**

Πρόβλημα 3: ***Άρδευση***

Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται ένα σύστημα άρδευσης για το πότισμα χωραφιών. Οι πύλες Α και Η ανοίγουν και κλείνουν ώστε το νερό να κυλάει όπου πρέπει. Όταν μια πύλη είναι κλειστή δεν περνάει καθόλου νερό από αυτή. Μια πύλη είναι κλειστή και έχει κολλήσει, εμποδίζοντας το νερό να περάσει ανάμεσα από τα άλλα κανάλια. Ο Μιχάλης, παρατήρησε πως το νερό δεν πηγαίνει πάντα όπου πρέπει. Πιστεύει πως μια πύλη έχει κολλήσει κλειστή και όταν πρέπει να ανοίξει δεν ανοίγει.



Ερώτηση 1

Ο Μιχάλης χρησιμοποίησε τον παρακάτω πίνακα ώστε να ελέγξει τις πύλες.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Ανοιχτή	Κλειστή	Ανοιχτή	Ανοιχτή	Κλειστή	Ανοιχτή	Κλειστή	Ανοιχτή

Με τη βοήθεια του πίνακα και του διαγράμματος σχεδιάστε την πιθανή ροή του νερού. Υποθέστε πως όλες οι πύλες δουλεύουν έτσι όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

Ερώτηση 2

Ο Μιχάλης βρήκε πως όταν οι πύλες δουλεύουν σύμφωνα με τον πίνακα 1, τότε δεν περνάει καθόλου νερό. Αυτό δείχνε πως τουλάχιστον μια από τις πύλες έχει κολλήσει κλειστή.

Για κάθε περίπτωση του προβλήματος, αποφασίστε αν το νερό θα τρέξει σε όλο το δίκτυο.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	**Θα τρέξει το νερό σε όλο το δίκτυο;**
Η πύλη **A** έχει κολλήσει. Όλες οι άλλες πύλες δουλεύουν κανονικά σύμφωνα με τον πίνακα 1.	ΝΑΙ / ΟΧΙ
Η πύλη **D** έχει κολλήσει. Όλες οι άλλες πύλες δουλεύουν κανονικά σύμφωνα με τον πίνακα 1.	ΝΑΙ / ΟΧΙ
Η πύλη **F** έχει κολλήσει. Όλες οι άλλες πύλες δουλεύουν κανονικά σύμφωνα με τον πίνακα 1.	ΝΑΙ / ΟΧΙ

Ερώτηση 3

Ο Μιχάλης θέλει να ελέγξει αν η πύλη **D** έχει κολλήσει. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα μπορείτε να ελέγξετε αν η **D** έχει κολλήσει όταν υποτίθεται πως πρέπει να είναι ανοιχτή;

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄ - ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Βαθμολόγηση Α΄ φύλλου εργασίας

Το άριστα για κάθε πρόβλημα είναι 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1

Να γράψετε μια εξίσωση με την οποία λύεται το ακόλουθο πρόβλημα:
«Χωρίστε τον αριθμό 12 σε δύο μέρη τέτοια ώστε το διπλάσιο του ενός να είναι τρεις μονάδες μικρότερο από το άλλο».

Σωστή απάντηση (10 Μονάδες): α) χ +2χ +3 = 12

β) Αν χ ο μικρότερος και ψ ο μεγαλύτερος τότε 2χ = ψ – 3, οπότε η εξίσωση είναι χ +2χ+3 = 12

Μη πλήρης απάντηση (5 μονάδες): α) Αν δοθούν οι ζητούμενοι αριθμοί χωρίς να γραφεί η εξίσωση

Λάθος απάντηση (0 μονάδες): α) Αν χ το μικρότερο μέρος τότε το μεγαλύτερο θα είναι 2χ-3

β) οποιαδήποτε άλλη απάντηση

Πρόβλημα 2

Πιο κάτω δίνεται μια λύση της ανισότητας $-\frac{1}{x} > x+2$. Να εξηγήσετε με ποια διαδικασία μεταβαίνουμε από ένα βήμα στο επόμενο και να αναλύστε κατά πόσο η λύσης είναι ορθή ή όχι.

Σωστή απάντηση (10 μονάδες):

$-\frac{1}{x} > x+2$ *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το* x *και βρίσκουμε:*

$-1 > x^2 + 2x$ ***τα μεταφέρουμε όλα στο δεύτερο μέλος***

$0 > x^2 + 2x + 1$ ***παραγοντοποιούμε το 2° μέλος / εφαρμόζουμε την ταυτότητα*** $(\alpha + \beta)^2$

$0 > (x+1)^2$

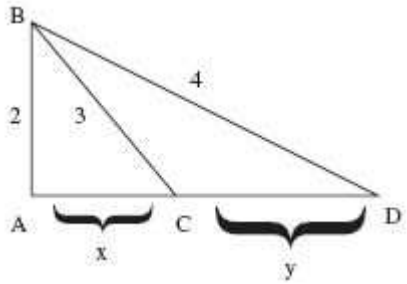
Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν λύσεις. Συμφωνείτε ναι ή όχι και γιατί;
Η λύση είναι λάθος. Το λάθος βρίσκεται στο πρώτο βήμα που πολλαπλασιάζουμε με το χ. Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του χ. Αν είναι αρνητικός θα πρέπει να αλλάξει η φορά της ανίσωσης.

Λάθος απάντηση (0 μονάδες): *Οι απαντήσεις που περιγράφουν λάθος τα βήματα της λύσης και το συμπέρασμα θα θεωρηθούν λανθασμένες.*
Επίσης λάθος θα θεωρηθούν απαντήσεις που περιγράφουν σωστά τα βήματα της λύσης αλλά δέχονται την ορθότητα του συμπεράσματος.
Οι μη αιτιολογημένες απαντήσεις.

Μη πλήρης απάντηση (5 μονάδες): *Μερικά σωστές απαντήσεις θα θεωρηθούν αυτές που έχουν ένα λάθος στην περιγραφή των βημάτων αλλά το συμπέρασμα είναι σωστό και αιτιολογείται πλήρως.*

<u>Πρόβλημα 3</u>

Στο πιο κάτω σχήμα έχουν σημειωθεί τα δεδομένα και τα άγνωστα. Να εξηγήστε πώς θα βρείτε την αριθμητική τιμή του y.



Σωστή απάντηση (10 μονάδες): Στο τρίγωνο ACB εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρω το χ. Στο τρίγωνο ABD εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα για να βρω την πλευρά AD. Από το AD αφαιρώ το χ και βρίσκω το ψ.
Επίσης σωστή θα θεωρηθεί και η ορθή αριθμητική λύση του προβλήματος.

Μη πλήρης απάντηση (5 μονάδες): Μερικά σωστές απαντήσεις θα θεωρηθούν αυτές που έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος αλλά ο τρόπος σκέψης είναι σωστός. Επίσης οι απαντήσεις που έχουν βρει το χ, την πλευρά AD αλλά δεν έχουν αφαιρέσει από το AD το χ, ώστε να βρουν το ψ.

Λάθος απαντήσεις (0 μονάδες): Όλες οι άλλες απαντήσεις θεωρούνται λάθος. Λάθος επίσης θεωρούνται οι απαντήσεις που εφαρμόζουν Π.Θ στο τρίγωνο BCD.

Βαθμολόγηση Β΄ φύλλου εργασίας

Κάθε πρόβλημα παίρνει 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1 «Cinema»

Έχει 2 ερωτήσεις, κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

$1^{η}$ ερώτηση

Σωστή απάντηση (5 μονάδες): ΝΑΙ, ΟΧΙ, ΟΧΙ, ΟΧΙ, ΝΑΙ, ΝΑΙ

Μέτρια απάντηση (2,5 μονάδες): Αν υπάρχει μια λάθος απάντηση ή αν λείπει μια απάντηση.

Λάθος απάντηση (0 μονάδες): Περισσότερες από μια λανθασμένες απαντήσεις.

$2^{η}$ ερώτηση

Είναι πολλαπλής επιλογής, οπότε μόνο μια απάντηση θεωρείται σωστή **(5μονάδες)**. Άλλες απαντήσεις ή αν δεν υπάρχει απάντηση η ερώτηση είναι λάθος **(0 μονάδες)**.

Πρόβλημα 2 «Βιβλιοθήκη»

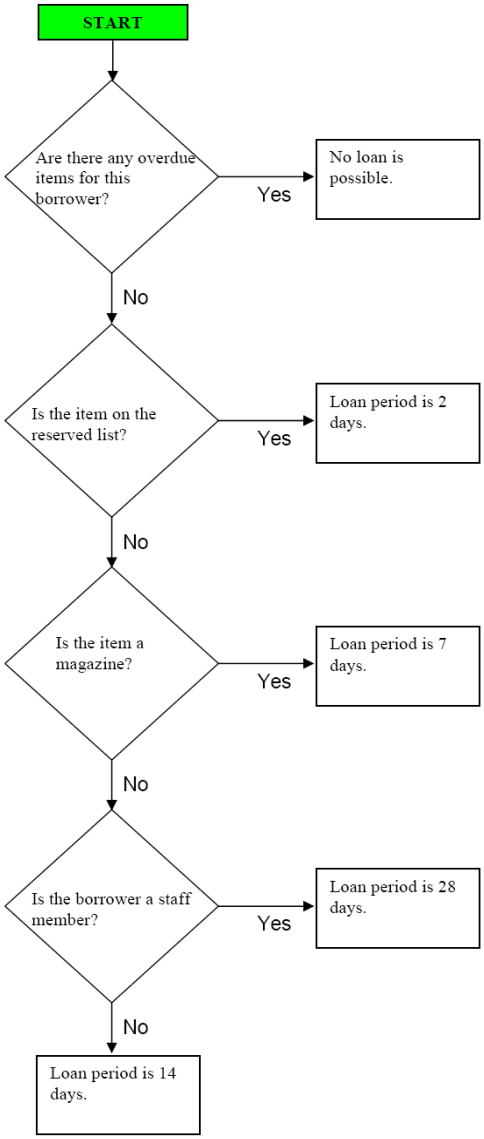
Η πρώτη ερώτηση βαθμολογείται με 2 βαθμούς ενώ η δεύτερη με 8.

$1^{η}$ ερώτηση

Η σωστή απάντηση είναι 2 ημέρες **(2 μονάδες)**. Άλλες απαντήσεις ή καμία απάντηση θεωρούνται λάθος **(0 μονάδες)**.

2η ερώτηση

Σωστή απάντηση (8 μονάδες)



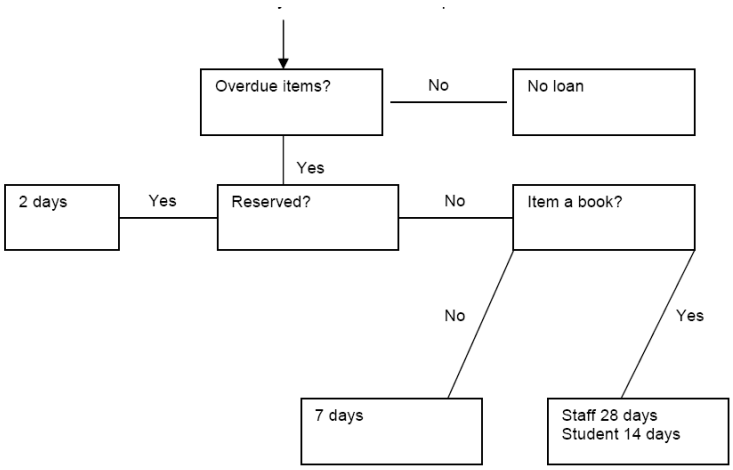
Πιθανές μικροαλλαγές που δεν αλλάζουν το νόημα στη διατύπωση των ερωτήσεων θεωρούνται σωστές.

Μέτρια απάντηση (4 μονάδες):

-Τα 4 βασικά βήματα είναι σωστά αλλά υπάρχει ένα μικρό λάθος του τύπου:

- Μια περίοδος δανεισμού είναι λάθος
- Μια περίοδος δανεισμού λείπει
- Ένα ή περισσότερα ΝΑΙ / ΟΧΙ λείπουν
- Ένα ή περισσότερα ΝΑΙ / ΟΧΙ λείπουν

π.χ.



- Αν ο έλεγχος για «καθυστέρηση» βρίσκεται εκτός διαγράμματος, αλλά τα υπόλοιπα τρία βήματα είναι σωστά και στη σωστή σειρά.
- Αν δυο βήματα δεν είναι στη σωστή σειρά και προκύπτουν 5 βήματα, τότε το σύστημα είναι πλήρες αλλά όχι τόσο δυναμικό.
- Αν στη σειρά των βημάτων υπάρχει η αλλαγή,
    - Ο έλεγχος για τα *εφεδρικά* και τα *περιοδικά* έχει αλλάξει αντίστοιχα
    - Ο έλεγχος για την *καθυστέρηση* και τα *εφεδρικά* έχει αλλάξει αντίστοιχα
- Αν ο έλεγχος για «καθυστέρηση» βρίσκεται εκτός διαγράμματος, αλλά τα υπόλοιπα τρία βήματα είναι στη σωστή σειρά με ένα μικρό λάθος.
- Αν ο έλεγχος για «καθυστέρηση» λείπει αλλά τα υπόλοιπα τρία βήματα είναι σωστά και στη σωστή σειρά.

Λάθος απάντηση (0 μονάδες):

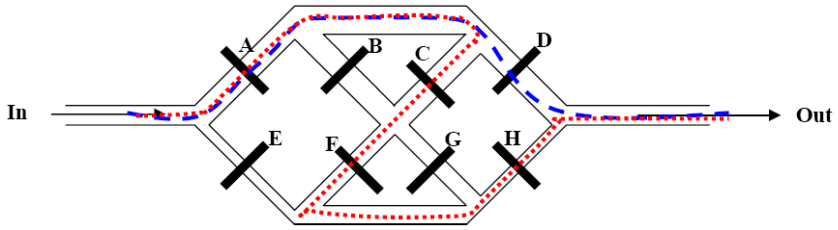
- Αν το σύστημα είναι πλήρες αλλά έχει περισσότερα από 5 βήματα
- Απαντήσεις όπως:
    - Αν υπάρχουν 5 ή περισσότερα βήματα και το σύστημα μη πλήρες
    - Αν έχει 5 βήματα και το βήμα για την «καθυστέρηση επιστροφής» λείπει
    - Αν ένα βήμα έχει περισσότερα από 2 βήματα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 «Άρδευση»

Το πρόβλημα έχει 3 ερωτήσεις. Οι δυο πρώτες βαθμολογούνται με 2,5 μονάδες και η τρίτη ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1η ερώτηση

Σωστή απάντηση (2,5 μονάδες):



Λάθος απάντηση (0 μονάδες)

Οποιοδήποτε άλλο σχέδιο

2η ερώτηση

Σωστή απάντηση (2,5 μονάδες): ΟΧΙ, ΝΑΙ, ΝΑΙ

Λάθος απάντηση (0 μονάδες): οποιαδήποτε άλλη απάντηση

3η ερώτηση

Σωστή απάντηση (5 μονάδες):

- Η Α και η Ε είναι και οι δυο κλειστές. Η D πρέπει να είναι ανοιχτή. Η Η μπορεί μόνο να είναι ανοιχτή αν το νερό δεν μπορεί να φτάσει εκεί, όλες οι άλλες πύλες είναι κλειστές εμποδίζοντας το νερό να φτάσει στην Η. Διαφορετικά η Η πρέπει να είναι κλειστή.
- Η Η κλειστή και όλες οι άλλες ανοιχτές
- Η Η κλειστή, οι Α και D ανοιχτές οι υπόλοιπες πύλες ανοιχτές, κλειστές ή μη καθορισμένες.

Λάθος απάντηση (0 μονάδες):

- Άλλες απαντήσεις όπως:
    - Α και Ε κλειστές και οι δυο
    - Η D κλειστή

Ερωτήσεις Συνέντευξης

- Μπορείτε να μου εξηγήσετε το πρόβλημα; Ποια είναι τα δεδομένα, και ποια τα ζητούμενα;

- Μπορείτε να εξηγήσετε τη λύση που εφαρμόσατε;

- Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, πως κρίνετε τις αναπαραστάσεις που κάνατε; Είναι σωστές; Υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης;

- Θεωρείτε ότι έχετε χρησιμοποιήσει όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς του προβλήματος;

- Γιατί εφαρμόσατε τη συγκεκριμένη μέθοδο; Ποιος ήταν ο τρόπος σκέψης σας;

- Θα μπορούσατε να αντιμετωπίσετε το πρόβλημα με ένα διαφορετικό τρόπο;

- Έχετε ελέγξει αν τα αποτελέσματά σας ταιριάζουν με τους περιορισμούς του προβλήματος; Αν όχι θα μπορούσατε να το κάνετε τώρα;

- Στο τέλος της λύσης έγινε ανασκόπηση της μεθόδου που εφαρμόσατε;