ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Ανάλυση του 10^{ου} Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και τεκμηρίωση της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βασιλική Κλεφτάκη
Επιβλέπων Καθηγητής: Στυλιανός Νεγρεπόντης

ΑΘΗΝΑ 2004

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την **13-10-2004** από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) **Στυλιανός Νεγρεπόντης** (επιβλέπων Καθηγητής)	**Καθηγητής**	…….
2) **Βασιλική Φαρμάκη**	**Αναπλ. Καθηγήτρια**	…….….
3) **Ευστάθιος Γιαννακούλιας**	**Αναπλ. Καθηγητής**	…….….

Στους γονείς μου
Νίκο και Μαρία
και στο σύζυγό μου
Αντώνη.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη τόσο για τη βοήθειά του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας όσο και για τα νέα πεδία γνώσης στα οποία μας οδήγησε, κάνοντάς μας κοινωνούς των ερευνών του.

Ευχαριστώ όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος γιατί με μεγάλο ζήλο μας έδωσαν τα εφόδια και την έμπνευση για να γίνουμε καλύτεροι δάσκαλοι των Μαθηματικών. Επίσης ευχαριστώ τη γραμματέα κα Κ. Κατσαρού που ήταν πάντα δίπλα μας.

Τέλος ευχαριστώ τους γονείς μου Νίκο και Μαρία Κλεφτάκη καθώς και το σύζυγό μου Αντώνη Οικονόμου για την αμέριστη υπομονή, κατανόηση και υποστήριξη, υλική και ηθική, που μου προσέφεραν καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Είμαι ευγνώμων.

Βάσω Κλεφτάκη

Αθήνα, Οκτώβριος 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ Χ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ Σύμμετρα-Δυνάμει Σύμμετρα-Ασύμμετρα. Ρητά-Άλογα. 7

2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ1-8 Διχοτομία πέρατος – απείρου. 15

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Χ9 Δυνάμει σύμμετρες ευθείες. 22

4. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ10-16 Ιδιότητες συμμετρίας - ασυμμετρίας. 30

4/5. Ρητές και Άλογες Ευθείες. 36

5. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ19-20 Ε-ρητές ευθείες. 38

6. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ21-26 Ε-μέσες ευθείες. 43

7. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ36-41 & Χ73-78 49

Ορισμός των δώδεκα προσθετικών και αφαιρετικών αλόγων γραμμών $x \pm y$.

8. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ42-47 & Χ79-84 58

Μοναδικότητα των δύο ονομάτων x, y.

9. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ66-70 & Χ103-107 63

Αναλλοίωτο ως προς τη συμμετρία.

10. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ17-18, Χ48-53 & Χ85-90 67

Κατασκευή των έξι διωνύμων $\alpha + \beta$ και των έξι αποτομών $\alpha - \beta$.

11. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ54-65 & Χ91-102 75

Αντιστοίχιση των έξι ειδών αλόγων γραμμών.

12. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ27-35 88

Κατασκευαστικές προτάσεις για τα x, y.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ 93

13. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ112-115 94

Συζυγία των διωνύμων και των αποτομών.

ΜΙΑ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗΣ 98
ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 117

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την παρούσα εργασία επιχειρείται μια παρουσίαση του Βιβλίου Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη το οποίο ασχολείται με την έννοια της ασυμμετρίας-αρρητότητας και ειδικότερα με τους τετραγωνικούς άρρητους. Η έννοια της ασυμμετρίας πρωτοανακαλύφθηκε από τους Πυθαγόρειους, αναπτύχθηκε από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο και έλαβε τελική μορφή στο υπό μελέτη Βιβλίο Χ των Στοιχείων. Το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού οφείλεται αδιαμφισβήτητα στον Θεαίτητο, μαθητή του Θεόδωρου του Κυρηναίου, πράγμα που προκύπτει από τρεις διαφορετικές αρχαίες πηγές.

Η παλαιότερη από τις τρεις πηγές που τεκμηριώνουν την απόδοση του Βιβλίου Χ στον Θεαίτητο είναι ο ομώνυμος διάλογος του Πλάτωνα και συγκεκριμένα το χωρίο 147d-148b. Σ΄ αυτό χρησιμοποιείται από τον ίδιο τον Θεαίτητο ορολογία αντίστοιχη του όρου «δυνάμει σύμμετρα» και σκιαγραφείται για πρώτη φορά η έννοια της «δυνάμει συμμετρίας». Αυτή η ίδια έννοια πρωτοεμφανίζεται με ξεκάθαρο ορισμό στο Βιβλίο Χ και παίζει μάλιστα καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας του. Επίσης σε ένα ακόμη αρχαίο κείμενο και συγκεκριμένα στα Ανώνυμα Σχόλια στα Στοιχεία (σχόλιο Χ62 που αναφέρεται στην πρόταση Χ9) έχουμε την πληροφορία ότι η σημαντική πρόταση Χ9 ανήκει στο Θεαίτητο.

Τέλος, σύμφωνα με τον Πάππο «Ο Εύδημος ο περιπατητικός αναφέρει ότι ο Θεαίτητος διαίρεσε τις πιο γνωστές άλογες γραμμές σύμφωνα με τους διαφορετικούς μέσους αντιστοιχώντας τη μέση γραμμή στη γεωμετρία, την εκ δύο ονομάτων στην αριθμητική και την αποτομή στην αρμονία». Αυτό βρίσκεται καταγεγραμμένο στη σελίδα 63 του βιβλίου των Gustav Junge και William Thomson, *The commentary of Pappus on Book X,* Cambridge: Harvard University Press, 1930, που είναι μετάφραση από τα αραβικά .

Με 115 προτάσεις το Βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι το μεγαλύτερο σε έκταση βιβλίο των Στοιχείων και μπορεί να χαρακτηριστεί ταυτόχρονα γεωμετρικό και αριθμητικό. Έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης

πολλών ειδικών και υπάρχουν διατυπωμένες απόψεις γι' αυτό τόσο σχετικά με το περιεχόμενο του όσο και με τις φιλοσοφικές του προεκτάσεις. Έχουνε γίνει προσπάθειες αναδιοργάνωσης και διαφορετικής παρουσίασης του, έχουν αναζητηθεί τα κίνητρα της ανάπτυξης της συγκεκριμένης θεωρίας και έχει επιχειρηθεί η σύνδεσή της με την πλατωνική φιλοσοφία αλλά και με τα σύγχρονα μαθηματικά.

Δύο είναι τα κύρια ζητήματα που απασχόλησαν σχετικά με το Βιβλίο Χ. Το πρώτο είναι η δυσκολία στην πλήρη κατανόηση του περιεχομένου του και το δεύτερο η δυσκολία στην αποκάλυψη του σκοπού και στόχου της δημιουργίας του, άλλωστε αυτό είναι το μόνο βιβλίο των Στοιχείων του οποίου ο στόχος δεν είναι ευδιάκριτος.

Όσον αφορά τη δυσκολία του βιβλίου πρέπει να πούμε ότι αυτή οφείλεται στο ίδιο το περιεχόμενό του, στη μεγάλη του έκταση αλλά και στον κάπως άκαμπτο τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης το παρουσιάζει. Μπορούμε να πούμε ότι τη δυσκολία αυτή αντιμετώπισε αποτελεσματικά ο C.M. Taisbak κάνοντας μια πολύ καλή ανάλυση και παρουσίαση στο βιβλίο του με τίτλο, *Coloured Quadrangles: A guide to the tenth book of Euclid΄s Elements.* Το πόσο μεγάλη είναι η δυσκολία του βιβλίου Χ περιγράφηκε πολύ νωρίτερα και πολύ γλαφυρά από τον Simon Stevin το 1585 και καταγράφηκε στο βιβλίο με τίτλο, *Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin, ou sont inseres les Memoires Mathematiques des quelles s'est exerse le Tres-haut et Tres-illustre Prince Maurice de Nassau* (Λέυδεν 1634, σελ.10a). Σύμφωνα λοιπόν με τον Simon Stevin «Η δυσκολία του δεκάτου βιβλίου προκάλεσε τρόμο σε πολλούς που έφτασαν μέχρι του σημείου να το χαρακτηρίσουν ως *τον σταυρό του μαρτυρίου των μαθηματικών*, με περιεχόμενο πολύ δύσκολο να αφομοιωθεί και χωρίς να διακρίνουν σ'αυτό καμία χρησιμότητα».

Ο Simon Stevin που έζησε τον 16^{ο} αιώνα είναι από τους πρώτους σύγχρονους μελετητές του βιβλίου Χ που αναφέρονται. «Θεωρούσε ότι έχει ένα κλειδί για την αποτελεσματική προσέγγισή του και ότι δεν θα του ήταν δύσκολο να περιγράψει το Βιβλίο Χ» [Knorr 3, σελ.41]. Αυτό όμως ήταν το να εκφράσει τις προτάσεις του Ευκλείδη μέσω του λογισμού ποσοτήτων που είναι άθροισμα αρρήτων ριζικών (surd quantities) και πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε μέχρι και τετάρτου βαθμού ριζικά – εργαλεία που σε καμία περίπτωση δεν είχαν στη διάθεσή τους οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.

Τον ακολούθησε τόσο χρονικά όσο και ως προς τον τρόπο παρουσίασης του βιβλίου ο Thomas Heath. Στο βιβλίο του με τίτλο «*The thirteen Books of Elements*» κάνει μια πλήρη καταγραφή του περιεχομένου του βιβλίου Χ την οποία πλαισιώνει με πολλά σχόλια και αναφορές στις πηγές. Πάντως ακολουθεί κι αυτός το δρόμο του Simon Stevin και χρησιμοποιεί μέχρι και τετάρτου βαθμού ριζικά.

Επόμενη αξιοσημείωτη αναφορά στο Βιβλίο Χ κάνει ο B.L.Van Der Waerden στο βιβλίο του «Η Αφύπνιση της Επιστήμης». Πρόκειται απλώς για μια σύντομη μεν αλλά πολύπλευρη αναφορά που ακολουθεί σαφώς το σκεπτικό των δύο προηγούμενων μελετητών. Όσον αφορά στη δυσκολία, το χαρακτηρίζει « ογκώδες, μονολιθικό και απαγορευτικό » [B.L.Van Der Waerden, σελ172]

Ακολουθούν κατά σειρά οι Wilbur Knorr και C.M. Taisbak οι οποίοι επιχειρούν μια διαφορετική προσέγγιση του βιβλίου Χ μέσω της γεωμετρίας, η οποία είναι πιο συνεπής με την αρχαία μαθηματική και φιλοσοφική πραγματικότητα. Είπαμε ήδη ότι ο Taisbak ήταν αυτός που αντιμετώπισε αποτελεσματικά τη δυσκολία του βιβλίου ενώ η άποψη του Knorr γι'αυτή περιγράφεται με δύο λέξεις «pedagogical disaster» [Knorr 3, σελ.59]. Ο David Fowler ακολουθώντας πολύ πιστά το δρόμο του C.M. Taisbak, παρουσιάζει το Βιβλίο Χ γεωμετρικά και βασισμένος κατά κύριο λόγο στην περιγραφή του Taisbak.

Συγκεκριμένα, ο Wilbur Knorr δημοσίευσε άρθρο με τίτλο «*La Croix des Mathematiciens: The Euclidean theory of irrational lines*» όπου ασχολείται αποκλειστικά με το βιβλίο Χ, το χαρακτηρίζει ως «το πιο γνωστό κομμάτι των Στοιχείων του Ευκλείδη για την έκτασή του και την ασάφεια των τεχνικών και των κινήτρων του» [Knorr 3, σελ.41], κάνει μια ιστορική αναδρομή και τοποθέτηση του βιβλίου μέσα σ'αυτή και καταλήγει σε μια συνοπτική παρουσίασή του χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία. Ο Knorr στο άρθρο που αναφέραμε πιο πάνω ξεκινά κάνοντας κριτική στον Simon Stevin για χρήση εργαλείων που δεν ήταν γνωστά στους αρχαίους. [Knorr 3, σελ.41].

Ειδική όμως μνεία πρέπει να γίνει στην προσπάθεια του C.M. Taisbak που ήταν αυτός που πραγματικά ανέλυσε το Βιβλίο Χ. Ο Taisbak επιλέγει, όπως και ο

Knorr τη γεωμετρική παρουσίαση αναφέροντας μάλιστα στην αρχή τα γεωμετρικά προβλήματα, η αντιμετώπιση των οποίων θεωρεί ότι αποτέλεσε το κίνητρο για την ανάπτυξη της εν λόγω θεωρίας. Σε συνδυασμό με τη χρήση του Βιβλίο VI των Στοιχείων του Ευκλείδη και συγκεκριμένα αναδεικνύοντας τη χρησιμότητα των δευτεροβαθμίων εξισώσεων που υπάρχουν σ'αυτό έδωσε τελικά μια πλήρη και αναλυτικότατη προσέγγιση και παρουσίαση του περιεχομένου του βιβλίου. Στη δική μας προσέγγιση με την εισαγωγή δύο νέων προτάσεων (βλ. προτάσεις Α και Β) γίνεται ανάδειξη της χρήσης των προτάσεων VI27 και VI28, βελτίωση της προσέγγισης Taisbak και διευκολύνεται η κατανόηση του Βιβλίου Χ.

Το δεύτερο ζήτημα που, όπως ήδη αναφέραμε, απασχόλησε τους μελετητές είναι ο σκοπός του βιβλίου Χ. Ο B.L.Van Der Waerden πιστεύει ότι «ο συγγραφέας κρύβει τη σκέψη του»[B.L.Van Der Waerden, σελ.172]. Ο I. Mueller στο βιβλίο του *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,* (Cambridge, MIT Press 1981) ισχυρίζεται ότι « το Βιβλίο Χ φαίνεται να ασχολείται με ένα ειδικό πρόβλημα και ταυτόχρονα με ένα μαθηματικό αδιέξοδο» [Mueller, σελ. 270-1]. Οι Knorr και Taisbak εκφράζουν σε πολλά σημεία των μελετών τους την ίδια άποψη, ότι το Βιβλίο Χ αποτελεί το απαραίτητο εργαλείο για την ανάπτυξη της θεωρίας του Βιβλίου XIII δηλαδή της μελέτης αρχικά των κανονικών πολυγώνων και εν συνεχεία των κανονικών στερεών. Αυτό όμως βασίζεται μόνο στο γεγονός ότι στις προτάσεις XIII 6,11,16,17,18 χρησιμοποιείται η *αποτομή* ή η *ελάσσων*, άλογες γραμμές που ορίζονται και κατασκευάζονται στο Βιβλίο Χ. Καμία άλλη από τις άλογες γραμμές, προσθετικές και αφαιρετικές, του Βιβλίο Χ δεν χρησιμοποιούνται εκεί. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα αν αυτό το στοιχείο είναι αρκετό για να θεωρήσει κανείς ότι το Βιβλίο Χ γράφτηκε για να βοηθήσει στη μελέτη του Βιβλίου XIII.

Αυτό που διαφέρει όμως στον David Fowler σε σχέση με όλους τους προηγούμενους είναι ο προβληματισμός και η άποψη του σχετικά με το σκοπό της δημιουργίας αυτής της τόσο εκτενούς και δύσκολης θεωρίας από τους αρχαίους Έλληνες. Κάνει μια πολύ σπουδαία παρατήρηση όσον αφορά το κίνητρο της δημιουργίας του βιβλίου αυτού. Παρατηρεί ότι « η καλή ανθυφαιρετική έκφραση των λόγων πλευρών τετραγώνων $\sqrt{n}/\sqrt{m}$ και η αδυναμία τέτοιας καλής ανθυφαιρετικής

έκφρασης για οποιονδήποτε άλλο γεωμετρικό λόγο τον οδηγεί στη σκέψη μήπως οι πλευρές τετραγώνου είναι βασικά γεωμετρικά αντικείμενα μέσω των οποίων μπορούν να περιγραφούν όλα τα άλλα » και αναρωτιέται « μήπως το Βιβλίο Χ γράφτηκε μ'αυτό το σκεπτικό » [Fowler, σελ.161]. Με άλλα λόγια ο Fowler είναι ο πρώτος που συνδέει την έννοια της «δυνάμει μόνο συμμετρίας», που κυριαρχεί στο Βιβλίο Χ, με την περιοδική ανθυφαίρεση. Όμως η ανθυφαίρεση των δυνάμει μόνο συμμέτρων γραμμών δεν είναι απλώς περιοδική αλλά η περίοδός της παρουσιάζει παλινδρομικότητα, πράγμα πολύ εντυπωσιακό και αξιοπρόσεκτο. Ο Fowler λέει ξεκάθαρα ότι « δεν έχει κανένα στοιχείο που να τον οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν γι' αυτή την παλινδρομικότητα » [Fowler, σελ.74]. Άλλωστε άποψη του είναι ότι «οι αρχαίοι δεν είχαν στη διάθεση τους πολλές και μεγάλου μήκους ανθυφαιρέσεις οπότε στις μικρές ανθυφαιρέσεις ήταν δύσκολο να διακρίνουν την παλινδρομικότητα.» [Fowler, σελ.74].

Σε αντίθεση με αυτή την άποψη η έρευνα που γίνεται από τον καθηγητή κ. Σ. Νεγρεπόντη τα τελευταία χρόνια μέσα από τη μελέτη των διαλόγων του Πλάτωνα και της πλατωνικής φιλοσοφίας εν γένει, έχει αποδείξει ότι οι αρχαίοι Έλληνες όχι απλώς γνώριζαν την παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση των τετραγωνικών αρρήτων αλλά ότι η έννοια αυτή διέπει την πλατωνική φιλοσοφία. Στον ορισμό του σοφιστή στον ομώνυμο διάλογο του Πλάτωνα παίζει κυρίαρχο ρόλο η περιοδικότητα, στον ορισμό του πολιτικού, στον αντίστοιχο ομώνυμο διάλογο, υπάρχει και παίζει σημαντικό ρόλο η παλινδρομικότητα [Μπασιάκου,Α.]. Παλινδρομικότητα παρουσιάζεται επίσης στους πλατωνικούς διάλογους Φαίδρος (248c8-e3), όπου έχουμε την παλινρομικά περιοδική κίνηση της ψυχής και Παρμενίδης (151e3-153b7). Γίνεται έτσι ξεκάθαρο ότι στην πλατωνική διαλεκτική η γνώση και η κατάκτησή της είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση.

Παράλληλα, το γεγονός ότι οι προτάσεις Χ1-9 και Χ36,42,66,73,79, 103,112,113,114 του Βιβλίου Χ χρησιμοποιούνται για μια ανακατασκευή της απόδειξης της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων – όπως αυτή έχει επίσης αποδειχθεί από τον καθηγητή κ. Σ. Νεγρεπόντη – μας οδηγεί στην έκφραση της άποψης ότι η χρησιμότητα του Βιβλίου Χ δεν περιορίζεται στη μελέτη του Βιβλίου XIII των Στοιχείων αλλά ότι ο σκοπός του πάει ακόμη πιο μακριά.

Θα μπορούσε μάλιστα κανείς εν κατακλείδι να πει ότι η τριλογία των πλατωνικών διαλόγων Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός συσχετίζεται με το Βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη μέσω της ιδιότητας της παλινδρομικής περιοδικότητας που χαρακτηρίζει την ανθυφαίρεση των δυνάμει μόνο συμμέτρων γραμμών. Κι αυτό είναι ένα ακόμη στοιχείο που ενισχύει τη γενικότερη άποψη ότι η αρχαία ελληνική φιλοσοφία και ιδιαίτερα η πλατωνική διαλεκτική είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Στην εργασία αυτή γίνεται μια παρουσίαση του βιβλίου με ομαδοποίηση και ταξινόμηση των προτάσεων βάσει του μαθηματικού περιεχομένου τους και όχι με τη σειρά που αναφέρονται στα Στοιχεία έτσι ώστε να γίνεται πιο εύκολη η κατανόησή του. Παρεμβάλλονται σχόλια των μελετητών καθώς και αρχαίες πηγές για την καλύτερη δυνατή κατανόηση τόσο αυτού καθ' αυτού του περιεχομένου όσο και του σκοπού που οδήγησε στη δημιουργία του. Επίσης με την εισαγωγή και χρήση των νέων προτάσεων Α και Β επιχειρούμε να αναδείξουμε τον ακριβή ρόλο των προτάσεων VI27 και VI28 που σχετίζονται με την κατ' έλλειψη δευτεροβάθμια εξίσωση.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι στην εργασία αυτή γίνεται μια εκ νέου οργάνωση και παρουσίαση του Βιβλίου Χ τόσο ακολουθώντας την προσέγγιση Taisbak όσο και με την προσθήκη νέων στοιχείων. Με τη νέα αυτή προσέγγιση πιστεύουμε πως γίνεται πιο εύκολα κατανοητό το περιεχόμενό του. Παράλληλα αναδεικνύεται ο σαφής συσχετισμός του Βιβλίου Χ και του ανθυφαιρετικού περιεχομένου του, όπως το είχε υπαινιχθεί και ο Fowler, με το διάλογο Πολιτικός του Πλάτωνα. Συνδέονται τέλος οι όροι «δυνάμει σύμμετρα», «εκ δύο ονομάτων», «αποτομή» καθώς και η συζυγία διωνύμων και αποτομών με την απόδειξη της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων. Μένει όμως προς διερεύνηση ο ρόλος των έξι κατηγοριών αλόγων γραμμών και η χρήση τους πέρα από κάποιες προτάσεις του Βιβλίου XIII καθώς και το ερώτημα αν αυτός ο ρόλος είναι ανθυφαιρετικός.

1. ΟΡΙΣΜΟΙ Χα΄-δ΄

ΣΥΜΜΕΤΡΑ-ΔΥΝΑΜΕΙ ΣΥΜΜΕΤΡΑ-ΑΣΥΜΜΕΤΡΑ ΡΗΤΑ-ΑΛΟΓΑ

Το Βιβλίο Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη ξεκινά με τέσσερις ορισμούς και συγκεκριμένα με τον καινούριο όρο «σύμμετρα μεγέθη» ο οποίος αν και αναφέρεται σε όλα τα γεωμετρικά σχήματα (μεγέθη) κάποια στιγμή εστιάζεται η χρήση του για γραμμές (ευθύγραμμα τμήματα).

Συγκεκριμένα, μόνο στον όρο α΄ και στις προτάσεις 1-8, 11-13 και 15-16 ο όρος σύμμετρα μεγέθη αφορά τα μεγέθη γενικώς, στις υπόλοιπες περιπτώσεις αφορά ευθύγραμμα τμήματα ή ορθογώνια παραλληλόγραμμα όπως άλλωστε συμβαίνει και με τους όρους β΄-δ΄ και τις προτάσεις 2-4, 9, 10 και 14. [Taisbak, σελ.21]

Η ιδιότητα της συμμετρίας σχετίζεται άμεσα με την ιδιότητα του «μετρείν» μέσω της οποίας φτάνουμε στον πρώτο ορισμό των συμμέτρων μεγεθών. [Taisbak, σελ.21]

Όρος α΄

Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ
μετρούμενα, **ἀσύμμετρα** δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν
μέτρον γενέσθαι.

Σύμμετρα λέγονται τα μεγέθη που μετρώνται από το ίδιο μέτρο ενώ ***ασύμμετρα*** αυτά για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο.

Αν Α, Β είναι σύμμετρα μεγέθη θα συμβολίζουμε: Α *com* Β, από τον αγγλικό όρο commensurable.
Αντίστοιχα αν Α, Β είναι ασύμμετρα μεγέθη θα συμβολίζουμε: Α *inc* Β, από τον αγγλικό όρο incommensurable.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η σχέση αυτή (σύμμετρο με) αφορά μόνο ομοειδή μεγέθη ενώ ο Taisbak σπεύδει να επισημάνει την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών η βεβαιότητα της οποίας προκύπτει από τις προτάσεις Χ1-2 και με την επίκληση της ιδιότητας της άπειρης ανθυφαίρεσης. [Taisbak, σελ.21]

Όσο για τις αποδείξεις του Βιβλίου γενικά μας λέει ότι δεν στηρίζονται κυρίως στον ορισμό αυτό αλλά στον χαρακτηρισμό για τα σύμμετρα μεγέθη που δίνεται παρακάτω στις προτάσεις Χ5 και Χ6. [Taisbak, σελ 22]

Μια ακόμη παρατήρηση είναι το ότι η σχέση της συμμετρίας δύο μεγεθών είναι σχέση ισοδυναμίας (η πρόταση Χ12 είναι η μεταβατικότητα). Όσο για την πρόσθεση και την αφαίρεση σύμμετρων ή ασύμμετρων μεγεθών υπάρχουν οι προτάσεις Χ15 και Χ16.

Στη συνέχεια εισάγεται από τον Θεαίτητο ο πολύ σημαντικός όρος της δυνάμει συμμετρίας ένας όρος που πρωτοχρησιμοποίησε ο ίδιος στον ομώνυμο διάλογο του Πλάτωνα. Αφορά <u>μόνο</u> γραμμές (ευθύγραμμα τμήματα) και καθώς είναι δυνατόν δύο ασύμμετρες γραμμές να είναι δυνάμει σύμμετρες προκύπτει μια νέα κατηγορία-σχέση γραμμών που όπως θα δούμε στη συνέχεια έχει σημαντικές ιδιότητες.

Όρος β΄

Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

Ευθείες δυνάμει σύμμετρες ονομάζονται οι ευθείες (ευθύγραμμα τμήματα) που τα τετράγωνά τους είναι σύμμετρα μεγέθη και αντίστοιχα *ευθείες δυνάμει ασύμμετρες* ονομάζονται οι ευθείες που τα τετράγωνά τους είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Δηλαδή:

Αν *α, β* ευθύγραμμα τμήματα με *α inc β* και a^2 *com* β^2 τότε τα *α, β* λέγονται *δυνάμει μόνο σύμμετρα*. Αν a^2 *inc* β^2 τότε τα *α, β* λέγονται *δυνάμει ασύμμετρα.*

Πρέπει κανείς να επισημάνει τη χρήση της λέξης «*δυνάμει*» ενώ πρόκειται για τα τετράγωνα των ευθυγράμμων τμημάτων - στην αγγλική δεν μεταφράζεται επακριβώς αλλά χρησιμοποιείται ο όρος «in square»- δίνεται δε η αφορμή να αναζητηθεί ο ρόλος και η χρήση του όρου «δύναμις» στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά αλλά και στην πλατωνική διαλεκτική. Μια τέτοια προσπάθεια προσέγγισης κάνει και ο ίδιος ο Taisbak. [στο παράρτημα Β' του βιβλίου του, σελ. 72-76]

Ο Taisbak υποστηρίζει ότι η έννοια αυτή είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη θεωρία του Βιβλίου Χ μιας και τα αντικείμενα αυτής της θεωρίας είναι που της έδωσαν ιδιαίτερο νόημα. Επισημαίνει ότι περιέργως ο όρος *δύναμις* δεν χρησιμοποιείται αλλού στα Στοιχεία παρά μόνο στα Βιβλία Χ και XIII. Το σίγουρο είναι επίσης ότι πουθενά δεν εμφανίζεται ο όρος τετράγωνοι σύμμετροι και κυρίως ότι για τον συγγραφέα του Βιβλίου Χ οι λέξεις τετράγωνο και δύναμις **δεν** είναι συνώνυμες.

Στη συνέχεια ο Taisbak επικαλείται τον Πλάτωνα και συγκεκριμένα τα χωρία Θεαίτητος 147e5-148b2 και Τίμαιος 31c4. Στο μεν πρώτο ο όρος *δύναμις* αποδίδεται ξεκάθαρα σε ευθύγραμμα τμήματα στο δε δεύτερο δηλώνει αριθμούς που είναι γινόμενο δύο άλλων και αποτελούν το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας επίπεδης επιφάνειας άρα με τη σημερινή ορολογία θα λέγαμε ότι δηλώνει εμβαδόν.

- **Πλάτωνος Θεαίτητος 147e5-148b2**

ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

ΘΕΑΙ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Το χωρίο αυτό είναι το αμέσως επόμενο από εκείνο που ο Θεαίτητος μιλά για την προσπάθεια του « συλλαβείν εις εν » όλες τις δυνάμεις οι οποίες εφαίνοντο άπειρες - ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν .

Μιλά για δύο κατηγορίες αριθμών: αυτούς που είναι γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αναπαρίστανται με ένα τετράγωνο και ονομάζονται τετράγωνοι και ισόπλευροι αριθμοί και γι' αυτούς που βρίσκονται ενδιάμεσά τους, δεν είναι γινόμενο δύο ίσων αριθμών αλλά δύο άνισων, αναπαρίστανται με το προμήκες (ορθογώνιο παρ/μο) και ονομάζονται προμήκεις αριθμοί.

Στη συνέχεια μιλά για δύο κατηγορίες ευθυγράμμων τμημάτων. Το ευθ. τμήμα που είναι πλευρά τετράγωνου με εμβαδόν τετράγωνο αριθμό λέγεται *μήκος* ενώ το ευθ. τμήμα που είναι πλευρά τετράγωνου με εμβαδόν προμήκη αριθμό λέγεται *δύναμις* (π.χ. *δύναμις* είναι η πλευρά του τετραγώνου που έχει εμβαδόν 8).

- **Πλάτωνος Τίμαιος 31b8-32b3**

θεὸς ἐποίει. δύο δὲ μόνω καλῶς συνίστασθαι τρίτου χωρὶς
οὐ δυνατόν· δεσμὸν γὰρ ἐν μέσῳ δεῖ τινα ἀμφοῖν συναγωγὸν
γίγνεσθαι. δεσμῶν δὲ κάλλιστος ὃς ἂν αὑτὸν καὶ τὰ συνδού-
μενα ὅτι μάλιστα εν ποιῇ, τοῦτο δὲ πέφυκεν ἀναλογίο
κάλλιστα ἀποτελεῖν. **ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὄγκων
εἴτε δυνάμεων** ὡντινωνοῦν ᾖ τὸ μέσον, ὅτιπερ τὸ πρῶτον πρὸς
αὐτό, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον, καὶ πάλιν αὖθις, ὅτι τὸ
ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον, τότε τὸ
μέσον μὲν πρῶτον καὶ ἔσχατον γιγνόμενον, τὸ δ' ἔσχατον
καὶ τὸ πρῶτον αὖ μέσα ἀμφότερα, πάνθ' οὕτως ἐξ ἀνάγκης
τὰ αὐτὰ εἶναι συμβήσεται, τὰ αὐτὰ δὲ γενόμενα ἀλλήλοις εν
πάντα ἔσται. εἰ μὲν οὖν ἐπίπεδον μέν, βάθος δὲ μηδὲν ἔχον
ἔδει γίγνεσθαι τὸ τοῦ παντὸς σῶμα, μία μεσότης ἂν ἐξήρκει
τά τε μεθ' αὑτῆς συνδεῖν καὶ ἑαυτήν, νῦν δὲ στερεοειδῆ
γὰρ αὐτὸν προσῆκεν εἶναι, τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε,
δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν·

Στο χωρίο αυτό ο Πλάτωνας θέλει να μιλήσει για την αναλογία και όπως μας λέει πρέπει να θεωρήσουμε αρχικά τρεις αριθμούς ή τρεις δυνάμεις ή τρεις όγκους. Ο Κάλφας θεωρεί ότι η σύνταξη που χρησιμοποιείται εκλαμβάνει αυτά τα τρία ως ισοδύναμα μέρη του λόγου. Αναφέρει επίσης απόψεις του Pritchard σύμφωνα με τις οποίες ο όρος *δύναμις* σπανίως χρησιμοποιείται στην αρχαία ελληνική γραμματεία και μάλιστα ως γεωμετρική και όχι ως αριθμητική έννοια.. Ο Pritchard καταλήγει ότι στο χωρίο αυτό θέλει απλώς να επισημανθεί ο κάλλιστος δεσμός-η αναλογία μεταξύ ομοειδών.[Κάλφας, Τίμαιος σελ. 363].

Καταλήγει πάντως μετά από όλα αυτά, ο Taisbak, σε δική του άποψη ότι στο Βιβλίο Χ ο όρος *δύναμις* χρησιμοποιείται για ευθύγραμμα τμήματα πράγμα που τεκμηριώνει με τον συνδυασμό όλων των παραπάνω, δηλώνει ότι ακολουθεί τις

ξεκάθαρες θέσεις του Πλάτωνα και ότι επιβεβαιώνεται από το περιεχόμενο των Στοιχείων σχετικά με τα τετράπλευρα. [Taisbak, σελ.76]

Οι δύο ορισμοί που είδαμε ως τώρα καθόρισαν σχέσεις μεταξύ δύο τυχαίων ομοειδών μεγεθών ή και πιο συγκεκριμένα δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Ο επόμενος ορισμός αφορά τη σχέση συμμετρίας ή ασυμμετρίας ενός τυχαίου ευθυγράμμου τμήματος με ένα εκ των προτέρων καθορισμένο ευθύγραμμο τμήμα (προτεθείσα ευθεία) που ουσιαστικά παίζει το ρόλο μιας μονάδας μέτρησης-σύγκρισης. Η ευθεία αυτή αναφέρεται από τον Θεαίτητο στον ομώνυμο διάλογο του Πλάτωνα ως «ποδιαία».

Όρος γ΄

Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα **ῥητή,** καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον **ῥηταί,** αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι **ἄλογοι** καλεί-σθωσαν.

Αν ρ μια προτεθείσα (δοθείσα) ευθεία τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες σύμμετρες με τη ρ και άπειρες ασύμμετρες με τη ρ. Μάλιστα υπάρχουν άπειρες δυνάμει ασύμμετρες και άπειρες δυνάμει μόνο ασύμμετρες.

Η ρ θα καλείται *ρητή* ευθεία και αν μια ευθεία α είναι σύμμετρη ή έστω δυναμει μόνο σύμμετρη με τη ρ τότε θα καλείται κι αυτή *ρητή*. Κάθε άλλη ευθεία θα καλείται *άλογος* (άρρητη).

Δηλαδή:

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία. Αν α *com* ρ ή (α *inc* ρ και a^2 *com* ρ^2) τότε η α ονομάζεται *ρητή*. Αν μια ευθεία δεν είναι ρητή θα ονομάζεται *άλογος*.

Άρα ρητή καλείται τόσο η προτεθείσα ευθεία όσο και κάθε ευθεία που είναι σύμμετρη ή τουλάχιστον δυνάμει μόνο σύμμετρη μ' αυτή. Κάθε άλλη καλείται άλογος. Έτσι έχουμε εδώ μια διχοτομία των γραμμών σε ρητές και άλογες. Αυτός ο ορισμός είναι επίσης μια πρώτη ένδειξη του πόσο σημαντική είναι η ιδιότητα της δυνάμει συμμετρίας μιας και αρκεί για να χαρακτηριστεί ρητή μια ευθεία.

Ένα ερώτημα που προκύπτει από τον όρο γ΄ είναι το πως ο Θεαίτητος ισχυρίζεται ότι υπάρχουν, και μάλιστα άπειρες, δυνάμει ασύμμετρες ευθείες προς την προτεθείσα. Η απάντηση θα έρθει λίγο πιο μετά με την πρόταση Χ10.

Ακολουθεί τέλος ο ορισμός ρητών και αλόγων σχημάτων. Εδώ η σύγκριση γίνεται με το τετράγωνο της προτεθείσας που θεωρείται πάντα ρητό.

Όρος δ΄

Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον **ῥητόν**, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα **ῥητά,** τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα **ἄλογα** καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Το τετράγωνο της ρ είναι επίσης *ρητό* οπότε τα σύμμετρα μ΄αυτό καλούνται *ρητά* και τα ασύμμετρα *άλογα*. Οι ευθείες που είναι πλευρές αλόγων τετραγώνων είναι επίσης *άλογες* καθώς και όλες οι πλευρές ευθυγράμμων σχημάτων που δίνουν τετράγωνα ίσα (δηλ. ισοδύναμα) με άλογα.

Δηλαδή:

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία. Αν R = □ ρ, όπου με □ ρ συμβολίζουμε το τετράγωνο με πλευρά ρ, τότε το R ονομάζεται *ρητό*.

Αν Q *com* R τότε το Q ονομάζεται ρητό.

Αν Q *inc* R τότε το Q ονομάζεται άλογο.

2. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ1-8

ΔΙΧΟΤΟΜΙΑ ΠΕΡΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΠΕΙΡΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗ

Σύμφωνα με τον Taisbak οι προτάσεις Χ1 και Χ2 είναι μακράν τα καλύτερα μαθηματικά κομμάτια ολόκληρου του βιβλίου.[Taisbak, σελ.17]. Η πρόταση Χ1 περιγράφει μια ανθυφαιρετική διαδικασία που παράλληλα έχει κοινά γνωρίσματα με τη μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου. Εμπεριέχεται δε σ΄αυτήν η έννοια του απείρου ως άπειρη διαιρετότητα.

Πρόταση Χ1

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος
ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου
μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι
μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος με-
γέθους.

Έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόποιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικροτέρου από τα αρχικά δεδομένα μεγέθη.

Η πρόταση Χ2 που ακολουθεί μας δίνει ένα χαρακτηρισμό για τα ασύμμετρα μεγέθη και αυτός είναι ότι η ανθυφαίρεσή τους δεν τελειώνει ποτέ.

Πρόταση Χ2

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δεν μετρά το προηγούμενό του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Πρόκειται για άπειρη ανθυφαίρεση αν και στον Ευκλείδη δεν εμφανίζονται σαν όροι το άπειρο και το πέρας. Όμως αν παραβάλει κανείς τις προτάσεις VII 1-3 για την πεπερασμένη ανθυφαίρεση καταλαβαίνει ότι η φράση «μετρήσει κάποτε» που εμφανίζεται εκεί και η άρνηση της «μηδέποτε καταμετρεί» που εμφανίζεται στη Χ2 αναφέρονται αντίστοιχα στο πέρας και στο άπειρο. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η λέξη «αεί» που υπάρχει στην πρόταση Χ2 δεν έχει έννοια απείρου αλλά συνεχούς επανάληψης. Τελικά η συνεπαγωγή που προκύπτει από την πρόταση αυτή είναι:

(Χ2) Άπειρη ανθυφαίρεση $\Rightarrow$ Ασύμμετρα μεγέθη

Οι δύο επόμενες προτάσεις αφορούν στην εύρεση του κοινού μέτρου δύο ή τριών συμμέτρων μεγεθών.

Πρόταση Χ3

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Αν δίνονται δύο σύμμετρα μεγέθη, να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Στην απόδειξη της πρότασης που μοιάζει με τις αποδείξεις στο αριθμητικό βιβλίο VII περιλαμβάνεται η συνεπαγωγή:

Πεπερασμένη ανθυφαίρεση $\Rightarrow$ Σύμμετρα μεγέθη

και με αντιθετοαντιστροφή παίρνουμε:

Ασύμμετρα μεγέθη $\Rightarrow$ Άπειρη ανθυφαίρεση

Πρόταση Χ4

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον
αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Αν δίνονται τρία σύμμετρα μεγέθη, να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Οι τέσσερεις επόμενες προτάσεις Χ5-Χ8 περιγράφουν πολύ αναλυτικά μια ισοδυναμία και την άρνηση τους.

Πρόταση Χ5

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν
ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο όπως έχει (φυσικός) αριθμός προς (φυσικό) αριθμό.
Δηλαδή:
Αν *A com B* τότε υπάρχουν *κ, λ* φυσικοί αριθμοί ώστε: $A/B = \kappa/\lambda$

Από εδώ προκύπτει η συνεπαγωγή:

(Χ5) Σύμμετρα μεγέθη $\Rightarrow$ Λόγος αριθμός / αριθμό

ενώ ακολουθεί αμέσως μετά η αντίστροφή της.

Πρόταση Χ6

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς
πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Αν δύο μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο όπως έχει (φυσικός) αριθμός προς (φυσικό) αριθμό, τότε τα μεγέθη είναι σύμμετρα.
Δηλαδή:
Αν *A, B* μεγέθη και υπάρχουν *κ, λ* φυσικοί αριθμοί ώστε: $A/B = \kappa/\lambda$ τότε *A com B* .

(Χ6) Λόγος αριθμός / αριθμό ⇒ Σύμμετρα μεγέθη

Η πρόταση Χ7 που ακολουθεί είναι η αντιθετοαντίστροφη της Χ6 και αφορά ασύμμετρα μεγέθη.

Πρόταση Χ7

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει,
ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τα ασύμμετρα μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο όπως έχει (φυσικός) αριθμός προς (φυσικό) αριθμό.
Δηλαδή:
Αν *A inc B* τότε <u>δεν</u> υπάρχουν φυσικοί αριθμοί *κ, λ* ώστε: $A/B = \kappa/\lambda$.

Η συνεπαγωγή που προκύπτει εδώ είναι:

(Χ7) Ασύμμετρα μεγέθη ⇒ Όχι λόγος αριθμός / αριθμό

ενώ αμέσως ακολουθεί και η αντίστροφή της.

Πρόταση Χ8

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς
πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Αν δύο μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο όπως έχει (φυσικός) αριθμός προς (φυσικό) αριθμό, τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Δηλαδή:

Αν *A, B* μεγέθη και <u>δεν</u> υπάρχουν *κ, λ* φυσικοί αριθμοί ώστε: $A/B = \kappa/\lambda$ τότε *A inc B*

.

(Χ8) Όχι λόγος αριθμός / αριθμό ⇒ Ασύμμετρα μεγέθη

Είναι προφανές ότι σ' αυτές τις προτάσεις έχουμε σύνδεση λόγων μεγεθών και λόγων αριθμών. Όμως ο Taisbak με αφορμή αυτές τις προτάσεις επισημαίνει το μη ορισμό της ισότητας λόγου μεγεθών με λόγο αριθμών και την αναγκαιότητα ύπαρξης του, προτείνει έναν τέτοιο αντίστοιχο με τον ορισμό της αναλογίας αριθμών του Ευδόξου και τελικά προχωρά στην προσαρμογή και άλλων προτάσεων ή ιδιοτήτων που αφορούν στις αναλογίες αριθμών που πλέον θα αφορούν αριθμούς και μεγέθη, κυρίως ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή ευθύγραμμα τμήματα. .[Taisbak, σελ.22].

Ο ορισμός που δίνει ο Taisbak είναι ο εξής:

« Δύο μεγέθη Α και Β έχουν λόγο αριθμό προς αριθμό, έστω *α* προς *β*,
αν τα Α και Β έχουν κοινό μέτρο Μ το οποίο μετρά το Α *α* φορές και το Β *β* φορές,
δηλαδή αν Α=*α*Μ και Β=*β*Μ ». [Taisbak, σελ.22]

Πράγματι, ενώ υπάρχει στο Βιβλίο V ο ορισμός της αναλογίας μεγεθών και στο Βιβλίο VII ο ορισμός της αναλογίας αριθμών δεν υπάρχει πουθενά στα Στοιχεία του Ευκλείδη ο ορισμός της ισότητας λόγου αριθμών με λόγο μεγεθών, η αναγκαιότητα του οποίου εμφανίζεται από νωρίς στο Βιβλίο Χ και συγκεκριμένα από την πρόταση Χ5. Χρειαζόμαστε έναν καλό ορισμό ο οποίος να είναι μάλιστα απόλυτα συμβατός με τους άλλους ορισμούς των αναλογιών. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα αν ο παραπάνω ορισμός του Taisbak έχει αυτή τη συμβατότητα.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το κοινό μέτρο Μ που εμφανίζεται στον ορισμό να είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των δύο μεγεθών, η ύπαρξη του οποίου

εξασφαλίζεται με τη χρήση της πρότασης Χ3 και της ανθυφαιρετικής θεωρίας λόγων. Εφόσον τα μεγέθη Α και Β είναι σύμμετρα έχουμε ότι η ανθυφαίρεσή τους είναι πεπερασμένη, άρα θα υπάρχει το μέγιστο κοινό τους μέτρο όπως άλλωστε προκύπτει από την πρόταση Χ3. Έτσι ο ορισμός γίνεται απόλυτα συμβατός με τη θεωρία λόγων του Βιβλίου VII και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις προτάσεις του Βιβλίου Χ που αφορούν ταυτόχρονα λόγους μεγεθών και λόγους αριθμών. Πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι ο ορισμός αυτός διαφέρει από τον αντίστοιχο ορισμό του Βιβλίου V στο ότι είναι ανθυφαιρετικός. Άλλωστε και στο Ββλίο Χ γενικότερα δεν χρησιμοποιείται η θεωρία λόγων του Βιβλίου V αλλά η ανθυφαιρετική θεωρία λόγων.

Κάτι πολύ σημαντικό επίσης που προκύπτει και από τις οκτώ παραπάνω προτάσεις είναι οι διχοτομία πέρατος και απείρου.

Σύμμετρα μεγέθη ⇔ Πεπερασμένη ανθυφαίρεση ⇔ Λόγος αριθμός / αριθμό

Ασύμμετρα μεγέθη ⇔ Άπειρη ανθυφαίρεση ⇔ Όχι λόγος αριθμός / αριθμό

Η διχοτομία αυτή είναι αντίστοιχη με τη διχοτομία πέρατος και απείρου που εμφανίζεται στον Πλατωνικό διάλογο Φίληβος, έναν διάλογο που μας εισάγει άμεσα σε ανθυφαιρετικό περιβάλλον. Πιο συγκεκριμένα, εκεί μια δυάδα (η αόριστος δυάς) προχωρά διαιρετικά στο άπειρο και αν εμφανιστεί το ποσό έχουμε πέρας, αν όχι τότε πηγαίνουμε στο άπειρο. Είναι πολύ εμφανής η αντιστοιχία με την πεπερασμένη και την άπειρη ανθυφαίρεση του βιβλίου Χ και προς ενίσχυση αυτής της άποψης επικαλούμαστε ένα χωρίο από τα σχόλια του Πρόκλου εις Ευκλείδην.

Πρόκλος, εις Ευκλείδην 6,19-7,5

γειαν πεπέρασται τὰ μόρια τοῦ ὅλου. καὶ **τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὔσης τά τε μεγέθη πάντα σύμμετρα ἂν ἦν καὶ οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον,** οἷς δὴ δοκεῖ διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ, καὶ οἱ

ἀριθμοὶ τὴν γόνιμον τῆς μονάδος δύναμιν οὐκ ἂν ἐδύναντο δεικνύναι οὐδὲ ἂν πάντας εἶχον τοὺς λόγους ἐν ἑαυτοῖς τῶν ὄντων, οἷον τοὺς πολλαπλασίους ἢ τοὺς ἐπιμορίους. πᾶς γὰρ ἀριθμὸς ἐξαλλάττει τὸν λόγον πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ γενόμενον ἐξεταζόμενος. **τοῦ δὲ πέρατος ἀναιρεθέντος συμμετρία** τε καὶ κοινωνία λόγων καὶ ταυτότης εἰδῶν καὶ ἰσότης καὶ ὅσα τῆς ἀμείνονός ἐστι συστοιχίας **οὐκ ἄν ποτε ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο,**

Το χωρίο αυτό δρα συμπληρωματικά στο σκέλος «άπειρο» του Φίληβου. Μας λέει επίσης ότι η ασυμμετρία και η αρρητότητα-αλογία είναι απόρροια της απειρίας (πρβλ. Πρόταση Χ2). Τέλος ένα γενικό και ενδιαφέρον συμπέρασμα που υπάρχει στο χωρίο αυτό είναι ότι η ασυμμετρία κάνει τη διαφορά αριθμητικής και γεωμετρίας, σε αντίθεση με αυτό που πίστευαν οι Πυθαγόρειοι ότι αριθμητική και γεωμετρία είναι το ίδιο.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Χ9

ΔΥΝΑΜΕΙ ΣΥΜΜΕΤΡΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Ακολουθεί η πρόταση Χ9 η οποία αφορά μόνο ευθύγραμμα τμήματα. Σύμφωνα με τον Taisbak είναι «ζωτικής σημασίας για την έρευνα του βιβλίου Χ» [Taisbak, σελ.25]

Η μελέτη των αποδείξεων του βιβλίου αποκαλύπτει το γεγονός ότι χρησιμοποιείται σε όλες στις κατασκευαστικές προτάσεις Χ10 (κατασκευή ασυμμέτρων ευθειών), Χ29-30 (κατασκευή της άλογης ευθείας μέσης), Χ48-53 (κατασκευή των διώνυμων αλόγων γραμμών), Χ85-90 (κατασκευή των αφαιρετικών αλόγων γραμμών) πράγμα που αποδεικνύει τη σπουδαιότητα της πρότασης αυτής. Άλλωστε η Χ9 που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη δυνάμει μόνο σύμμετρων ευθειών.

Πρόταση Χ9

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Τα τετράγωνα μήκει συμμέτρων ευθειών έχουνε λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό και τα τετράγωνα που έχουνε λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό έχουν πλευρές μήκει σύμμετρες. Ενώ τα τετράγωνα μήκει ασυμμέτρων ευθειών δεν έχουνε λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό και τα τετράγωνα που δεν έχουνε λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό ούτε τις πλευρές έχουνε μήκει σύμμετρες.

Δηλαδή:

Τα ευθύγραμμα τμήματα Α, Β είναι σύμμετρα αν και μόνο αν υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ και

τα ευθύγραμμα τμήματα Α, Β είναι ασύμμετρα αν και μόνο αν <u>δεν</u> υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ ».

Η απόδειξη της πρότασης που υπάρχει στα Στοιχεία δεν χρησιμοποιεί προηγούμενες προτάσεις του Βιβλίου Χ αλλά μόνο τις προτάσεις VI20 και VII11 . Ο Taisbak επικαλείται τον Heath σύμφωνα με τον οποίο αυτή η απόδειξη παρουσιάζει κάποια ελαττώματα, επισημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε σίγουρη άποψη για το πως έγινε η απόδειξη από τον ίδιο τον Θεαίτητο και παρουσιάζει μια δική του απλούστερη απόδειξη. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιεί την πρόταση V9, στην ουσία την V8, και τον ορισμό της ισότητας λόγου μεγεθών με λόγο αριθμών που εισάγει ο Taisbak και είναι ο εξής: « Δύο μεγέθη Α και Β έχουν λόγο αριθμό προς αριθμό, έστω α προς β**,** αν τα Α και Β έχουν κοινό μέτρο Μ το οποίο μετρά το Α α φορές και το Β β φορές ». (Δηλαδή αν Α=αΜ και Β=βΜ). [Taisbak, σελ.71]

Ο ορισμός αυτός, όπως αναφέρθηκε πιο αναλυτικά προηγούμενα προέκυψε μετά από την παρατήρηση του Taisbak ότι δεν υπάρχει στα Στοιχεία διατυπωμένος ορισμός για την ισότητα λόγου μεγεθών με λόγο αριθμών και την διατύπωσή του από τον ίδιο σε πλήρη αντιστοιχία με τον ορισμό της αναλογίας αριθμών. Όπως έχουμε

ήδη περιγράψει αναλυτικά, για να είναι αυτός ο ορισμός απόλυτα συμβατός με τον ορισμό της αναλογίας αριθμών πρέπει να αναζητείται όχι απλώς ένα κοινό μέτρο των δύο μεγεθών αλλά το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Ακολουθεί η απόδειξη του Taisbak για την Χ9 αλλά πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτή δεν θα μπορούσε να είναι η πρώτη απόδειξη μιας και οι προτάσεις που χρησιμοποιεί ανήκουν στο Βιβλίο V- Θεωρία Λόγων του Ευδόξου που είναι μεταγενέστερο ιστορικά του Βιβλίου Χ.

Η πρόταση Χ9 λέει ότι: « Τα ευθύγραμμα τμήματα Α, Β είναι σύμμετρα αν και μόνο αν υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ ».

Απόδειξη του Taisbak:

($\Rightarrow$) Έστω Α, Β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα τότε υπάρχει τμήμα Ε (προσθέτουμε την υπόθεση αυτό να είναι μέγιστο) τέτοιο ώστε

$\mathrm{A} = \mathrm{E} \cdot \alpha$ και $\mathrm{B} = \mathrm{E} \cdot \beta$ όπου *α, β* ακέραιοι.

Οπότε το A^2 περιέχει α^2 το πλήθος τετράγωνα ίσα με E^2 και το B^2 περιέχει β^2 το πλήθος τετράγωνα ίσα με E^2.

Άρα από τον παραπάνω ορισμό έχουμε: $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ και a^2, β^2 τεράγωνοι ακέραιοι αριθμοί.

Θα δείξουμε ότι Α, Β σύμμετρα.

Έστω ότι το Α χωρίζεται σε *α* το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα ίσα με Ε, τότε το A^2 περιέχει α^2 το πλήθος τετράγωνα ίσα με E^2.

Έστω Γ το ευθύγραμμο τμήμα για το οποίο ισχύει $\Gamma = \mathrm{E} \cdot \beta$ τότε $\frac{\mathrm{A}}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$ και το Γ^2 περιέχει β^2 το πλήθος τετράγωνα ίσα με E^2.

Οπότε από τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\Gamma^2}$.

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$.

Άρα από την πρόταση V9 παίρνουμε $\mathrm{B}^2 = \Gamma^2 \Rightarrow \mathrm{B} = \Gamma \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

Άρα Α, Β σύμμετρα.

Τέλος παραθέτουμε και την απόδειξη της πρότασης Χ9 όπως αυτή είναι καταγεγραμμένη στα Στοιχεία του Ευκλείδη:

Απόδειξη στα Στοιχεία:

$(\Rightarrow)$ Έστω Α, Β σύμμετρα μεγέθη.

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$.

Αφού Α, Β σύμμετρα μεγέθη από την Χ5 έχουμε ότι υπάρχουν αριθμοί *α,β* ώστε $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Λόγω της VI20 (που λέει ότι ο λόγος ομοίων σχημάτων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομολόγων πλευρών) παίρνουμε ότι $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$ και

λόγω της VII11 (που λέει ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς *κ,λ* ισχύει η σχέση $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$) παίρνουμε ότι $\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 = \frac{a^2}{\beta^2}$.

Από τις πιο πάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ που είναι και το ζητούμενο.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ και a^2, β^2 τεράγωνοι αριθμοί.

Θα δείξουμε ότι Α, Β σύμμετρα.

Λόγω της VI20 παίρνουμε $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$ και λόγω της VII11 παίρνουμε $\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 = \frac{a^2}{\beta^2}$

από τις οποίες προκύπτει ότι: $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ = αριθμός / αριθμό και από την πρόταση X5 έχουμε ότι Α, Β σύμμετρα που είναι και το ζητούμενο.

Αντίστοιχα για τα ασύμμετρα μεγέθη έχουμε:

$(\Rightarrow)$ Έστω Α, Β ασύμμετρα μεγέθη.

Θα δείξουμε ότι <u>δεν</u> υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$.

Έστω ότι υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$ τότε από το πρώτο μέρος της πρότασης έχουμε ότι Α, Β σύμμετρα μεγέθη, άτοπο.

Άρα <u>δεν</u> υπάρχουν a^2, β^2 τετράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι δεν υπάρχουν a^2, β^2 τεράγωνοι αριθμοί ώστε $\frac{a^2}{\beta^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}$,

τότε από το πρώτο μέρος της πρότασης έχουμε άμεσα ότι Α, Β ασύμμετρα μεγέθη.

Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να διατυπωθεί με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό ως εξής: « Αν *α,ρ* είναι ευθύγραμμα τμήματα και ισχύει $\alpha^2 = \mathrm{N} \cdot \rho^2$, Ν όχι τετράγωνος αριθμός, τότε τα *α,ρ* είναι ασύμμετρα, δηλ. είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα ».

Η αλήθεια είναι ότι τα δυνάμει μόνο σύμμετρα μεγέθη έχουν μεν άπειρη ανθυφαίρεση όμως αυτή έχει την εξαιρετική ιδιότητα να είναι παλινδρομικά περιοδική πράγμα που διέπει άλλωτε ξεκάθαρα και άλλωτε όχι την Πλατωνική

φιλοσοφία. Η πρόταση Χ9 χρησιμοποιείται στην απόδειξη της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης των δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών μαζί με άλλες προτάσεις του βιβλίου Χ. Συγκεκριμένα, η Χ9 είναι αυτή που εξασφαλίζει την απαραίτητη προυπόθεση ότι τα δύο ανθυφαιρούμενα μεγέθη έχουν άπειρη ανθυφαίρεση. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο λόγος των τετραγώνων τους δεν είναι τετράγωνος αριθμός, άρα είναι ασύμμετρα και έχουν άπειρη ανθυφαίρεση πράγμα που αποτελεί το πρώτο βήμα στην απόδειξη της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσής τους.

Όπως προκύπτει από Ανώνυμα σχόλια στα Στοιχεία η πρόταση αυτή είναι του Θεαίτητου και είναι η πιο ολοκληρωμένη μορφή μιας πρότασης που αναφέρει ο Πλάτωνας στο διάλογο Θεαίτητος. Προκύπτει εύλογα το ερώτημα για το ποιός είναι ο ρόλος και η σημασία αυτής της πρότασης στην πλατωνική διαλεκτική.

Ανώνυμα Σχόλια στα Στοιχεία Χ62

Τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου· ἐκεῖ γὰρ τὰ τετράγωνα τὰ ὑπὸ τετραγώνων ἀριθμῶν μετρούμενα συμμέτρους ἔχειν καὶ τὰς πλευράς φησιν. μερικὴ δὲ αὕτη ἡ πρότασις· οὐ γὰρ πάντα τὰ σύμμετρα χωρία, ὧν καὶ αἱ πλευραί εἰσι σύμμετροι, περιλαμβάνει. τετραγώνων γὰρ χωρίων συμμέτρων τοῦ ιη καὶ τοῦ η αἱ πλευραί, εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ μέτρον τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκονται, ἀλλ' οὖν ἄλλως εἰσὶ σύμμετροι· ὅμως ὑπὸ τετραγώνων ἀριθμῶν τὰ χωρία οὐ μεμέτρηται, εἰ καὶ μετρεῖσθαι δύναται. εἰκότως οὖν ἐνταῦθα οὐ τοῦτον τὸν τρόπον ὡρίσατο, ἀλλὰ τὰ λόγον φησὶν ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐνταῦθα δὲ οὐ μάτην ἡ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ γεγένηται μνήμη· εἰ γὰρ ἦν μόνον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ὁρισάμενος, ἐπλεόναζεν ὁ ὅρος. τὰ γὰρ διπλασίονα

λόγον ἔχοντα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα συμμέτρους ἔδει τὰς πλευρὰς ἔχειν. οὐκ ἔχουσι δέ· καὶ γὰρ ἡ τοῦ μείζονος τῆς τοῦ παράλλης διαγώνιός ἐστιν. εἰ τοίνυν διὰ μὲν τοῦ φάναι ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἐπλεόναζεν ὁ ὅρος περιλαμβάνων καὶ τὰ μὴ συμμέτρους ἔχοντα τὰς πλευράς, διὰ δὲ τοῦ εἰπεῖν ὑπὸ τετραγώνων ἀριθμῶν μετρούμενα ἐλλιπῶς εἶχεν μὴ περιέχων τὰ συμμέτρους ἔχοντα τὰς πλευρὰς ὑπὸ τετραγώνων μὲν μὴ μετρηθέντα ἀριθμῶν, λόγον δὲ τῶν ἀριθμῶν ἐχόντων, ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἰκότως πρόσκειται τὸ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· περιλήψεται γὰρ πάντα τὰ χωρία, ἅ, εἰ καὶ μὴ ὑπὸ τετραγώνων μετρεῖται, ἀλλ' οὖν σύμμετρα ὄντα συμμέτρους ἔχει καὶ τὰς πλευράς. τοῦ δ' οὖν ιη καὶ τοῦ η συμμέτρων ὄντων διὰ τὸ καὶ ἐκ πλευρῶν συμμέτρων ἀναγεγράφθαι εὑρήσεις τὰς πλευράς, διότι λόγον ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὡς γὰρ ὁ θ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ιη πρὸς τὸν η. λαβὼν δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ θ καὶ δ ἰσάκις τέμνω τῶν ἐκκειμένων τετραγώνων τὰς πλευρὰς καὶ ἔχω τὴν συμμετρίαν· ὡς γὰρ τὰ τετράγωνα πρὸς τὰ τετράγωνα, οὕτως αἱ πλευραὶ πρὸς τὰς πλευράς.

Τα δύο επόμενα Ανώνυμα σχόλια για την πρότση Χ9 περιγράφουν την αναγκαιότητα των υποθέσεων ώστε να καταλήξουμε στην πρόταση αυτή από την οποία σε συνδυασμό με τις προτάσεις Χ5 και Χ6 προκύπτει ότι: για δύο ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να συμβαίνει ακριβώς ένα από τα παρακάτω ή είναι *μήκει σύμμετρα* ή είναι *δυνάμει μόνο σύμμετρα* ή είναι *ασύμμετρα και μήκει και δυνάμει*.

Ανώνυμα Σχόλια στα Στοιχεία Χ63

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα

πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον· οὐ μάτην ἡ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ γεγένηται μνήμη. εἰ γὰρ εἴρηκε μόνως ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἐπλεόναζεν ἂν ὁ ὅρος· τὰ γὰρ διπλασίονα λόγον ἔχοντα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα συμμέτρους ἔδει τὰς πλευρὰς ἔχειν· οὐκ ἔχουσι δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς.

Ανώνυμα Σχόλια στα Στοιχεία Χ64

Ἰστέον, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐ μὴν καὶ ἀντιστρέφει, ἵνα, ἐὰν τὰ τετράγωνα λόγον ἔχῃ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς δυναμένας εὐθείας τὰ τετράγωνα μήκει συμμέτρους εἶναι. ὁ γὰρ ιη πρὸς τὸν η λόγον ἔχει τετραγωνικὸν διπλασιεπιτέταρτον, ὃν ὁ θ τετράγωνος πρὸς τὸν δ τετράγωνον, καὶ ὅμως ἡ πλευρὰ τοῦ η οὐκ ἔστι σύμμετρος μήκει τῇ τοῦ ιη πλευρᾷ· ἔστι δὲ τοῦ μὲν ἡ πλευρὰ β μθ μβ, τοῦ δὲ ιη δ ιδ λγ.

4. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ10-16

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Η πρόταση που ακολουθεί είναι κατασκευαστική και εξασφαλίζει την ύπαρξη ασύμμετρων ευθειών προς την προτεθείσα. Δίνεται έτσι η απάντηση στο ερώτημα που προέκυψε από τον όρο γ΄ για το πως ο Θεαίτητος ισχυρίζεται ότι υπάρχουν, και μάλιστα άπειρες, δυνάμει ασύμμετρες ευθείες προς την προτεθείσα.

Είναι επίσης αξιοσημείωτο το γεγονός ότι τόσο σ' αυτή την πρόταση όσο και στις υπόλοιπες κατασκευαστικές προτάσεις του βιβλίου δεν γίνεται μια κατασκευή συγκεκριμένης γραμμής-παραδείγματος που απλά εξασφαλίζει το μη κενό της κλάσης τους αλλά με έναν γενικό τρόπο κατασκευάζονται «όλες» οι ζητούμενες ευθείες ή καλύτερα δίνεται ο γενικός τρόπος κατασκευής τους.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη που κάνει ο Ευκλείδης παίζει η πρόταση Χ9, είναι η μόνη που χρησιμοποιείται εδώ από τις προηγούμενες προτάσεις του Βιβλίου Χ.

Πρόταση Χ10

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμ-
μέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Να βρεθούν δύο ευθείες ασύμμετρες με την προτεθείσα, η μία μήκει μόνο ασύμμετρη η άλλη μήκει και δυνάμει ασύμμετρη.

Δηλαδή:

Αν ρ είναι η προτεθείσα ευθεία, να βρεθούν ευθείες α και β ώστε ρ, β ασύμμετρες και ρ, α μήκει μόνο ασύμμετρες. (ο όρος μήκει μόνο ασύμμετρες ταυτίζεται όπως είναι προφανές με τον όρο δυνάμει μόνο σύμμετρες)

Απόδειξη:

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία.

Θεωρούμε κ, λ αριθμούς τέτοιους ώστε κ / λ όχι τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό.

Λόγω του πορίσματος της Χ6 [που λέει ότι αν έχω αριθμούς κ, λ και ευθεία α μπορώ να βρώ ευθεία β ώστε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa}{\lambda}$ και με χρήση μέσης αναλόγου να περάσω σε αντίστοιχη αναλογία για το τετράγωνο της α] μπορούμε να πάρουμε την ευθεία α και το τετράγωνό της, οπότε να έχουμε : $\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\rho^2}{\alpha^2}$ απ' όπου προκύπτει ότι α^2, ρ^2 σύμμετρα.

Όμως αφού τα κ, λ δεν έχουν λόγο όπως τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό, λόγω της πρότασης Χ9 παίρνουμε ότι α, ρ ασύμμετρα.

Άρα βρήκαμε την α που είναι δυνάμει μόνο σύμμετρη με τη ρ.

Θεωρούμε τη μέση ανάλογο των α και ρ, έστω β.

Τότε από τον όρο V9 είναι: $\frac{\rho}{\alpha}=\frac{\rho^2}{\beta^2}$ και επειδή α, ρ ασύμμετρα θα είναι και β^2, ρ^2 ασύμμετρα. Άρα ρ, β μήκει και δυνάμει ασύμμετρα.

Έτσι βρήκαμε τη β που είναι μήκει και δυνάμει ασύμμετρη με τη ρ.

Οι προτάσεις που ακολουθούν Χ11-16 περιλαμβάνουν τις ιδιότητες των συμμέτρων και των ασυμμέτρων μεγεθών και τις αποδείξεις τους.

Πρόταση Χ11

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ
δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον
ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ
τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Αν τέσσερα μεγέθη είναι σε αναλογία και το πρώτο είναι σύμμετρο με το δεύτερο, τότε και το τρίτο θα είναι σύμμετρο με το τέταρτο, ενώ αν το πρώτο είναι ασύμμετρο με το δεύτερο, τότε και το τρίτο θα είναι ασύμμετρο με το τέταρτο.

Δηλαδή:

Έστω *Α, Β*, Γ, Δ μεγέθη για τα οποία ισχύει: $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ τότε ισχύουν τα εξής:

Αν *Α, Β* σύμμετρα τότε και Γ, Δ σύμμετρα.

Αν *Α, Β* ασύμμετρα τότε και Γ, Δ ασύμμετρα.

Η πρόταση Χ12 είναι η μεταβατική ιδιότητα της αναλογίας μετά την απόδειξη της οποίας συνάγουμε προφανώς ότι η συμμετρία μεγεθών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Χ12

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Τα μεγέθη που είναι σύμμετρα προς το ίδιο μέγεθος είναι και μεταξύ τους σύμμετρα.

Δηλαδή:

Έστω *Α, Β*, Γ, μεγέθη. Αν *Α, Β* σύμμετρα και *Α,* Γ, σύμμετρα τότε *Β*, Γ, σύμμετρα μεγέθη.

Πρόταση Χ13

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν
μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμ-

μετρον ἔσται.

Αν δύο μεγέθη είναι μεταξύ τους σύμμετρα και ένα από αυτά είναι ασύμμετρο με κάποιο άλλο μέγεθος τότε και το δεύτερο από τα σύμμετρα θα είναι ασύμμετρο με αυτό.

Δηλαδή:
Έστω *Α, Β*, Γ, μεγέθη. Αν *Α, Β* σύμμετρα και *Α,* Γ, ασύμμετρα τότε *Β*, Γ, ασύμμετρα μεγέθη.

Πρόταση Χ14

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει].

Αν τέσσερεις ευθείες είναι σε αναλογία και το τετράγωνο της πρώτης είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της δεύτερης κατά το τετράγωνο ευθείας μήκει συμμέτρης με την πρώτη τότε και το τετράγωνο της τρίτης είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της τέταρτης κατά το τετράγωνο ευθείας μήκει συμμέτρης με την τρίτη. Αν το τετράγωνο της πρώτης είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της δεύτερης κατά το τετράγωνο ευθείας μήκει ασυμμέτρης με την πρώτη τότε και το τετράγωνο της τρίτης είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της τέταρτης κατά το τετράγωνο ευθείας μήκει ασυμμέτρης με την τρίτη.
Δηλαδή:

Έστω *α, β, γ, δ* ευθείες (ευθύγραμμα τμήματα) για τα οποία ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε :

- Αν $\alpha^2 > \beta^2$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \kappa^2$ όπου α, κ σύμμετρα τότε είναι $\gamma^2 > \delta^2$ και

υπάρχει ευθεία λ τέτοια ώστε $\gamma^2 = \delta^2 + \lambda^2$ όπου γ, λ σύμμετρα.

- Αν $\alpha^2 > \beta^2$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \tau^2$ όπου α, τ ασύμμετρα τότε είναι $\gamma^2 > \delta^2$ και υπάρχει ευθεία σ τέτοια ώστε $\gamma^2 = \delta^2 + \sigma^2$ όπου γ, σ ασύμμετρα.

Πρόταση Χ15

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον
ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν
σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Αν προστεθούν δύο σύμμετρα μεγέθη τότε και το άθροισμά τους θα είναι σύμμετρο με καθένα απ' αυτά. Αντίστροφα, αν το άθροισμα δύο μεγεθών είναι σύμμετρο με ένα από αυτά τότε τα δύο μεγέθη θα είναι σύμμετρα.

Δηλαδή:
Έστω *A, B*, μεγέθη.
Αν *A, B* σύμμετρα τότε είναι επίσης *A, A+B* σύμμετρα και *B, A+B* σύμμετρα.
Αντίστροφα, αν *A, A+B* σύμμετρα ή *B, A+B* σύμμετρα τότε και *A, B* σύμμετρα.

Πρόταση Χ16

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον
ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν
ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Αν προστεθούν δύο ασύμμετρα μεγέθη τότε και το άθροισμά τους θα είναι ασύμμετρο με καθένα απ' αυτά. Αντίστροφα, αν το άθροισμα δύο μεγεθών είναι ασύμμετρο με ένα από αυτά τότε τα δύο μεγέθη θα είναι ασύμμετρα.

Δηλαδή:

Έστω A, B, μεγέθη.

Αν A, B ασύμμετρα τότε είναι επίσης A, $A+B$ ασύμμετρα και B, $A+B$ ασύμμετρα.

Αντίστροφα, αν A, $A+B$ ασύμμετρα ή B, $A+B$ ασύμμετρα τότε και A, B ασύμμετρα.

Οι δύο τελευταίες προτάσεις Χ15-16 αφορούν στην πρόσθεση συμμέτρων και ασυμμέτρων μεγεθών. Προκύπτει λοιπόν εύλογα το ερώτημα: Τι συμβαίνει με το <u>άθροισμα δυνάμει μόνο συμμέτρων ευθειών</u>; Η απάντηση υπάρχει στη συνέχεια του βιβλίου, στη θεωρία των αλόγων γραμμών.

4/5. ΡΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΛΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

Οι προτάσεις 17 εως 115 του βιβλίου Χ αφορούν τις ρητές και κυρίως τις άλογες γραμμές όπως αυτές παρουσιάστηκαν στους ορισμούς 3 και 4. Η παρουσίαση τους, όπως επισημαίνεται από όλους τους μελετητές του βιβλίου Χ , είναι πολύ εκτενής, ενίοτε πολύπλοκη και κυρίως με πολλές επαναλήψεις.

Για το λόγο αυτό γίνεται εδώ μια παρουσίασή τους βασισμένη στη μελέτη του Δανού C.M.Taisbak με τίτλο Coloured Quandrangles-A Guid to the Tenth Book of Euclid's Elements η οποία είναι κατά κοινή ομολογία η πιο ολοκληρωμένη αλλά ταυτόχρονα και πιο συμπυκνωμένη παρουσίασή τους χωρίς νεωτερισμούς και σύγχρονα μαθηματικά. Πρόκειται για γεωμετρική παρουσίαση, όπως γίνεται και από τον ίδιο τον Ευκλείδη και χωρίς εισαγωγή σύγχρονης άλγεβρας όπως έκανε ο Stevin παλαιότερα και ο Fowler μεταγενέστερα.

Ξεκινώντας πρέπει να εξηγήσει κανείς την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Taisbak και έτσι να δώσει και μια εξήγηση για τον περίεργο τίτλο του βιβλίου του Coloured Quandrangles. Για να αποφευχθούν παρανοήσεις με τη σημασία των όρων *ρητός, μέσος* και *άλογος* που θα ωφείλονταν στη σημερινή ορολογία και χρήση, ο Taisbak χρησιμοποιεί τα επίθετα red (κόκκινο), amber (πορτοκαλί, ο μεσαίος από τους φωτεινούς σηματοδότες στους δρόμους) και obscure (σκοτεινό) για τους αντίστοιχους αρχαίους ελληνικούς όρους. Δεν πρόκειται για μετάφραση των όρων αλλά για λέξεις που θα χρησιμοποιούμε προκειμένου να ανάγεται η σκέψη μας στους ορισμούς του βιβλίου Χ και όχι σ'αυτό που εμείς σήμερα ονομάζουμε ρητό, μέσο, άρρητο κ.τ.λ.

Στην παρούσα μελέτη δεν θα ακολουθήσουμε την ορολογία του Taisbak μέσω των χρωμάτων, θέλωντας όμως κι εμείς να αποφύγουμε τις παρανοήσεις θα χρησιμοποιούμε αντίστοιχα τους όρους, Ε-ρητό, Ε-μέσο και Ε-άλογο για τους όρους ρητό, μέσο και άλογο όπως εμφανίζονται σ'αυτό το βιβλίο του Ευκλείδη. (το Ε-σημαίνει «κατά Ευκλείδη»). Πάντως το σημαντικό πρόβλημα σύγχυσης αφορά κυρίως τον όρο «ρητό» όπως τον χρησιμοποιούμε σήμερα και τον όρο «ρητό» όπως

τον χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης, αυτό θα γίνει φανερό και κατανοητό στην πορεία της μελέτης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι amber-μέσες ευθείες είναι επίσης άλογες αλλά ο Taisbak, χωρίς να δίνει κάποιο ειδικό λόγο, τις εξετάζει ανεξάρτητα από τις obscure. Μια πιθανή εξήγηση θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι μια amber-μέση ευθεία προκύπτει ως ο γεωμετρικός μέσος δύο ευθειών και η μελέτη και προσέγγισή της γίνεται μέσω μιας θεωρίας με την οποία είμαστε αρκετά εξοικιωμένοι. Πάντως και με τον όρο obscure δεν αναφέρονται όλες οι υπόλοιπες άλογες γραμμές αλλά μόνο αυτές που προκύπτουν ως άθροισμα (διώνυμες) ή διαφορά (αποτομές) ρητών ευθειών δυνάμει μόνο συμμέτρων με την προτεθείσα.

Άρα θα αναφερθούμε σε ρητές γραμμές και σε άλογες. Στην κατηγορία των αλόγων γραμμών θα εξετάσουμε μόνο τις μέσες γραμμές καθώς και εκείνες τις άλογες που προκύπτουν ως άθροισμα ή διαφορά ευθειών. Έτσι θα οδηγηθούμε και στην κατηγοριοποίηση και ταξινόμηση αυτών των γραμμών ανάλογα με τις ιδιότητες αλλά και την προέλευσή τους.

5. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ19-20:

Ε-ρητές Ευθείες

Ορισμός Τ201

Υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα **r** το οποίο καθορίζεται εκ των προτέρων (προτεθείσα ευθεία). Το ευθύγραμμο τμήμα **r** είναι *Ε-ρητό* και το τετράγωνό του □ **r** είναι επίσης *Ε-ρητό*. [πρβλ. Στοιχεία όρος γ΄και δ΄]

Ορισμός Τ202

Ένα τετράπλευρο είναι *Ε-ρητό* αν και μόνο αν είναι σύμμετρο με το □ **r** . [πρβλ. Στοιχεία όρος δ΄]
Σημειώνουμε εδώ ότι ο όρος δ΄ των Στοιχείων είναι γενικότερος και δεν αφορά μόνο ρητά τετράπλευρα αλλά ρητά ευθύγραμμα σχήματα.

Ορισμός Τ203

Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι *Ε-ρητό* αν και μόνο αν είναι πλευρά ενός *Ε-ρητό* τετραγώνου. [πρβλ. Στοιχεία όρος δ΄]

Πρέπει εδώ να επισημανθεί ότι η προτεθείσα ευθεία δεν είναι μονάδα μέτρησης με την σημερινή έννοια του όρου. Θα μπορούσε κανείς να την χαρακτηρίσει «ποιοτική μονάδα μέτρησης» αφού στο Βιβλίο Χ δεν γίνονται ακριβώς μετρήσεις αλλά κατά κάποιο τρόπο γίνονται συγκρίσεις μ' αυτή την ποιοτική μονάδα μέτρησης. Άλλωστε η προτεθείσα ευθεία μπορεί κάλλιστα να αντικατασταθεί με

οποιαδήποτε άλλη ευθεία σύμμετρη με αυτή. Άρα τόσο η **r** όσο και το □ **r** είναι μέσα σύγκρισης.

Επίσης, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς μια ευθεία λέγεται *Ε-ρητή* όταν είναι πλευρά ενός *Ε-ρητού* τετραπλεύρου και ως επί το πλείστον η ίδια δεν είναι ρητή με τη σημερινή έννοια. Παραδείγματος χάριν, η πλευρά $\sqrt{5}$ του τετραγώνου με εμβαδόν 5 είναι *Ε-ρητό*. Όμοια και οι πλευρές $\sqrt{3}$ και $\sqrt{27}$ του *Ε-ρητού* ορθογωνίου με εμβαδόν 81 είναι *Ε-ρητό* ενώ δεν είναι ρητές με τη σημερινή έννοια. Το ορθογώνιο με εμβαδόν 81 είναι πράγματι *Ε-ρητό* γιατί είναι σύμμετρο με το *Ε-ρητό* τετράγωνο πλευράς 9.

Ακολουθούν τα θεωρήματα που αφορούν τα *Ε-ρητά* τετράπλευρα και τις *Ε-ρητές* ευθείες. Το Θεώρημα Τ204 δεν αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη πρόταση του Βιβλίου Χ αλλά συγκεντρώνει κάποιες προφανείς και άμεσες συνέπειες των ορισμών Τ202 και Τ203 οι οποίες δεν διατυπώνονται ξεκάθαρα στα Στοιχεία, χρησιμοποιούνται όμως σιωπηρώς. [Taisbak, σελ29]

Θεώρημα Τ204

1) *Ε-ρητά* τετράπλευρα είναι σύμμετρα.
2) Τετράπλευρο σύμμετρο με *Ε-ρητό* τετράπλευρο είναι *Ε-ρητό*. Τετράπλευρο ασύμμετρο με *Ε-ρητό* τετράπλευρο δεν είναι *Ε-ρητό*.
3) Άθροισμα *Ε-ρητών* τετραπλεύρων είναι *Ε-ρητό*.
4) *Ε-ρητά* ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα αν και μόνο αν τα τετράγωνα τους έχουν λόγο όπως τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό.
5) Τα ασύμμετρα με την προτεθείσα *Ε-ρητά* ευθύγραμμα τμήματα είναι *δυνάμει μόνο σύμμετρα* με αυτή.
6) Ένα ευθύγραμμο τμήμα σύμμετρο με *Ε-ρητό* ευθύγραμμο τμήμα είναι επίσης *Ε-ρητό*.

Απόδειξη:

1) και 2) προκύπτουν από την Τ202 και τις Χ12 και Χ13.
3) προκύπτει από την Τ204.1 και την Χ15.
4) και 5) είναι συνέπειες των Τ203 και Χ9.
6) προκύπτει από τις Τ203, Τ202 και τις Χ9 και Χ12..

[Taisbak, σελ29]

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει και η συνθήκη υπό την οποία δύο ευθείες είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες. Δυνάμει μόνο σύμμετρες είναι δύο *Ε-ρητές* ευθείες που μεταξύ τους είναι ασύμμετρες. Αντίθετα δύο *Ε-ρητά* τετράπλευρα είναι πάντα σύμμετρα.

Στις αποδείξεις των θεωρημάτων που ακολουθούν ο Taisbak χρησιμοποιεί μία πρόταση την οποία θεωρεί απαραίτητο συνοδευτικό της πρότασης Χ11 των Στοιχείων. Την ονομάζει Τ-VI1 και λέει ότι: « Ορθογώνια με το ίδιο ύψος έχουν λόγο ίσο με το λόγο των βάσεων τους ». Δεν μας δίνει απόδειξη της πρότασης αυτής, μας παραπέμπει όμως στα **Τοπικά του Αριστοτέλη158b 29f**:

ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθή-
μασιν ἔνια δι' ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον
ὅτι **ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως**
διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥη-
θέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον· **τὴν γὰρ αὐτὴν ἀντ-**
αναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί· ἔστι δ' ὁρισμὸς
τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.

[Taisbak, σελ 22,23]

Θεώρημα Τ205-Χ19

Ένα ορθογώνιο με *Ε-ρητές* πλευρές μήκει σύμμετρες είναι *Ε-ρητό*.

.

Πρόταση Χ19

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προ-
ειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ῥητόν ἐστιν.

Απόδειξη:

Έστω ορθογώνιο με πλευρές *α, β Ε-ρητές* και μήκει σύμμετρες.

Από την Τ-VI1 παίρνουμε ότι: $\frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ και επειδή *α, β* σύμμετρα από την Χ11 παίρνουμε ότι και $\alpha \cdot \beta$, α^2 είναι σύμμετρα.

Όμως από την Τ203 έχουμε ότι α^2 είναι *Ε-ρητό* οπότε από την Τ204.2 παίρνουμε ότι και $\alpha \cdot \beta$ είναι *Ε-ρητό.*

Άρα το ορθογώνιο με πλευρές *α, β* είναι *Ε-ρητό* . [Taisbak, σελ29]

Μετά από αυτή την πρόταση ο Taisbak δηλώνει ότι από εδώ και στο εξής δεν θα αναφέρεται γενικώς σε τετράπλευρα αλλά σε ορθογώνια και επικαλείται την πρόταση Τ-Ι44 που λέει: « Σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί (*παραβαλείν*) ορθογώνιο ισοδύναμο με δοθέν τετράπλευρο ». Έτσι το τυχαίο τετράπλευρο αντικαθίστατε από ισοδύναμό του ορθογώνιο. [Taisbak, σελ30 και 20]

Θεώρημα Τ206-Χ20

Αν ένα *Ε-ρητό* τετράπλευρο γραφτεί σαν ορθογώνιο με *Ε-ρητό* ύψος τότε και το μήκος του είναι επίσης *Ε-ρητό* και μήκει σύμμετρο με το ύψος.

Πρόταση Χ20

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ
ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Απόδειξη:

Έστω *Ε-ρητό* ορθογώνιο $\alpha \cdot \beta$ με πλευρές *α, β* όπου η πλευρά *α* είναι *Ε-ρητή*..

Θεωρούμε το α^2 το οποίο είναι επίσης *Ε-ρητό*.

Τότε $\alpha \cdot \beta$, α^2 είναι σύμμετρα.

Επίσης από την Τ-VI1 έχουμε ότι: $\frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Άρα λόγω της Χ11 παίρνουμε ότι *α, β* σύμμετρα και επειδή η *α* είναι *Ε-ρητή* θα είναι και η *β Ε-ρητή*.

Θεώρημα Τ207

Ένα ορθογώνιο με πλευρές *Ε-ρητά* ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει μόνο σύμμετρα δεν είναι *Ε-ρητό* .

Απόδειξη:

Όμοια με την Τ205 μόνο που τώρα η υπόθεση είναι ότι τα *α, β* είναι ασύμμετρα.

Μετά το παραπάνω θεώρημα γεννάται το ερώτημα ποιές είναι οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των τετραπλεύρων που έχουν *Ε-ρητές* πλευρές οι οποίες όμως είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες. Έτσι οδηγούμαστε στη μελέτη των *Ε-μέσων* τετραπλεύρων.

6. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ21-26:

Ε-μέσες ευθείες

Ορισμός Τ208 (-Χ21)

Ένα τετράπλευρο που ισοδυναμεί με ορθογώνιο με πλευρές *Ε-ρητές δυνάμει μόνο σύμμετρες* είναι άλογο και ονομάζεται *Ε-μέσο*.

Ορισμός Τ209(- Χ21)

Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι *Ε-μέσο* αν και μόνο αν είναι πλευρά *Ε-μέσου* τετραγώνου.
Η πλευρά *Ε-μέσου* τετραγώνου είναι άλογος γραμμή και καλείται *Ε-μέση.*

Πρόταση Χ21

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη
αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ο λόγος ενός τετραπλεύρου *Ε-μέσου* με ένα *Ε-ρητό* είναι λόγος όπως ρίζας μη τετραγωνικού ακεραίου προς ρίζα τετραγωνικού ακεραίου. [Taisbak, σελ31]

Θεώρημα Τ210-Χ22

Αν ένα *Ε-μέσο* τετράπλευρο γραφτεί σαν ορθογώνιο με *Ε-ρητό* ύψος τότε και το μήκος του είναι επίσης *Ε-ρητό* δυνάμει μόνο σύμμετρο με το ύψος.

Πρόταση Χ22

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται,
μήκει.

Απόδειξη:

Έστω *Ε-μέσο* ορθογώνιο $\alpha \cdot \beta$ με πλευρές *α, β* όπου η πλευρά *α* είναι *Ε-ρητή*.

Τότε, λόγω της 208, υπάρχουν γραμμές *γ, δ* δυνάμει μόνο σύμμετρες τέτοιες ώστε:

$\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta$ οπότε έχουμε $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\gamma}{\beta}$ και τελικά $\frac{\alpha^2}{\delta^2} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Όμως τα α^2 και δ^2 είναι *Ε-ρητά* άρα α^2 και δ^2 σύμμετρα.

Άρα λόγω της Χ11 θα είναι και β^2 και γ^2 σύμμετρα.

Όμως γ^2 είναι *Ε-ρητό* οπότε και το β^2 θα είναι *Ε-ρητό* και το β θα είναι *Ε-ρητό*.

Τελικά *α, β* είναι *Ε-ρητά* αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρα αφού το $\alpha \cdot \beta$ είναι *Ε-μέσο*.

Θεώρημα Τ211-Χ23

Ένα τετράπλευρο σύμμετρο με ένα *Ε-μέσο* τετράπλευρο είναι επίσης *Ε-μέσο* και ένα ευθύγραμμο τμήμα σύμμετρο με ένα *Ε-μέσο* ευθύγραμμο τμήμα είναι επίσης *Ε-μέσο*.

Πρόταση Χ23

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το α^2 το οποίο να είναι *Ε-μέσο* και β^2 σύμμετρο με το α^2 .

Θα δείξουμε ότι και το και β^2 είναι *Ε-μέσο*.

Έστω μια *Ε-ρητή* γραμμή γ για την οποία ισχύει $\alpha^2 = \gamma \cdot \delta$ και $\beta^2 = \gamma \cdot \varepsilon$

Τότε λόγω της Τ210 η *δ* είναι *Ε-ρητή* και δυνάμει μόνο σύμμετρη με τη *γ*.

Από την υπόθεση είναι β^2 σύμμετρο με το α^2 οπότε και $\gamma \cdot \delta$ σύμμετρο με το $\gamma \cdot \varepsilon$.

Όμως λόγω της Τ-VI1 έχουμε ότι: $\frac{\gamma \cdot \delta}{\gamma \cdot \varepsilon} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ οπότε από την Χ11 παίρνουμε *δ, ε* σύμμετρα.

Άρα λόγω της Χ13 η *ε* είναι *Ε-ρητή* και δυνάμει μόνο σύμμετρη με τη *γ*.

Άρα το $\beta^2 = \gamma \cdot \varepsilon$ είναι *Ε-μέσο*.

Θεώρημα Τ212-Χ24

Ένα ορθογώνιο με πλευρές *Ε-μέσες* μήκει σύμμετρες είναι *Ε-μέσο*.

Πρόταση Χ24

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.

Απόδειξη:

Έστω ορθογώνιο με πλευρές *α, β Ε-μέσες* και μήκει σύμμετρες.

Από την Τ-VI1 παίρνουμε ότι: $\frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ και επειδή *α, β* σύμμετρα από την Χ11 παίρνουμε ότι και $\alpha \cdot \beta$, α^2 είναι σύμμετρα.

Όμως από την Τ209 έχουμε ότι α^2 είναι *Ε-μέσο* οπότε από την Τ211 παίρνουμε ότι και $\alpha \cdot \beta$ είναι *Ε-μέσο*.

Άρα το ορθογώνιο με πλευρές *α, β* είναι *Ε-ρητό*. [Taisbak, σελ29]

Λήμμα Τ213- Χ53/54

Κάθε ορθογώνιο είναι το μέσο ανάλογο των τετραγώνων των δύο πλευρών του.

Λήμμα Χ53/54

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ

καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Απόδειξη:

Έστω ορθογώνιο με πλευρές *α, β*.

Από την Τ-VI1 παίρνουμε ότι: $\frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Άρα $\frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2}$ που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα Τ214-Χ25

Ένα ορθογώνιο με πλευρές *Ε-μέσες* δυνάμει μόνο σύμμετρες είναι ή *Ε-ρητό* ή *Ε-μέσο* .

Πρόταση Χ25

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Απόδειξη:

Έστω *α, β Ε-μέσα* και δυνάμει μόνο σύμμετρα

Θα δείξουμε ότι το ορθογώνιο $\alpha \cdot \beta$ είναι είτε *Ε-ρητό* είτε *Ε-μέσο*.

Θεωρούμε τα α^2 , $\alpha \cdot \beta$ και β^2 και μια *Ε-ρητή* γραμμή γ για την οποία ισχύει $\alpha^2 = \gamma \cdot \delta$, $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \varepsilon$ και $\beta^2 = \gamma \cdot \zeta$.

Τότε λόγω της Τ210 οι δ και ζ είναι *Ε-ρητές*.

Επίσης δ και ζ είναι σύμμετρα αφού $\frac{\delta}{\zeta} = \frac{\gamma \cdot \delta}{\gamma \cdot \zeta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ και από την υπόθεση έχουμε β^2 σύμμετρο με το α^2.

Εφόσον το $\alpha \cdot \beta$ είναι το μέσο ανάλογο των α^2 και β^2 (λόγω της Τ213) το ε θα είναι το μέσο ανάλογο των δ και ζ οπότε από την πρόταση VI17 είναι $\varepsilon^2 = \delta \cdot \zeta$
Άρα λόγω της Τ205 το ε^2 είναι *Ε-ρητό* και λόγω της Τ203 και το ε είναι *Ε-ρητό.*
Αν ε, γ είναι σύμμετρα τότε το $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \varepsilon$ θα είναι *Ε-ρητό* .
Αν ε, γ είναι ασύμμετρα τότε το $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \varepsilon$ θα είναι *Ε-μέσο.*

Οι αντίστροφες προτάσεις των Θεωρημάτων Τ12-Χ24 και Τ14-Χ25 δεν υπάρχουν στα Στοιχεία, είναι όμως το εξής:

Θεώρημα Τ215

Αν ένα *Ε-ρητό* ορθογώνιο έχει μια *Ε-μέση* πλευρά τότε η άλλη πλευρά είναι επίσης *Ε-μέση* και δυνάμει μόνο σύμμετρη με την πρώτη.
Αν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο έχει μια *Ε-μέση* πλευρά τότε η άλλη πλευρά είναι επίσης *Ε-μέση* και είτε μήκει σύμμετρη είτε δυνάμει μόνο σύμμετρη με την πρώτη.
[Taisbak, σελ34]

Τέλος έχουμε ένα θεώρημα που συνδέει *Ε-μέσα* και *Ε-ρητά* τετράπλευρα.

Θεώρημα Τ219-Χ26
Το άθροισμα δύο *Ε-μέσων* τετραπλεύρων δεν είναι *Ε-ρητό* . Επίσης η διαφορά δύο *Ε-μέσων* τετραπλεύρων δεν είναι *Ε-ρητό*.

Πρόταση Χ26
Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Έτσι ως τώρα έχουμε δεί:

- *Ε-ρητές* γραμμές σύμμετρες δίνουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο (Χ19)
- *Ε-ρητές* γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες δίνουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο (Χ21)
- *Ε-μέσες* γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες δίνουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο (Χ25,Χ27)
- *Ε-μέσες* γραμμές σύμμετρες ή δυνάμει μόνο σύμμετρες δίνουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο (Χ24,Χ25,Χ28)

Αν ένα τετράπλευρο δεν είναι ούτε *Ε-ρητό* ούτε *Ε-μέσο* τότε το ονομάζουμε *Ε-άλογο* και οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό

Ορισμός Τ216

Τετράπλευρα τα οποία δεν είναι ούτε *Ε-ρητά* ούτε *Ε-μέσα* είναι *Ε-άλογα.*

Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι *Ε-άλογο* αν και μόνο αν είναι πλευρά ενός *Ε-αλόγου* τετραγώνου.

7. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ36-41&Χ73-78

Ορισμοί και αποδείξεις της αλογίας των έξι προσθετικών και των έξι αφαιρετικών αλόγων γραμμών.

Η μελέτη των αλόγων γραμμών ξεκινά με τον ορισμό τους και την απόδειξη της αλογίας τους. Αυτό γίνεται για τις μεν προσθετικές στις προτάσεις Χ36-41, για δε τις αφαιρετικές στις προτάσεις Χ73-78 αντίστοιχα.

Όσον αφορά στην παρουσίαση αυτών των προτάσεων εδώ, θα παραθέτουμε ταυτόχρονα τις προτάσεις για τις αφαιρετικές μαζί με τις προτάσεις για τις προσθετικές. Έτσι δεν ακολουθείται η σειρά της παρουσίασης του Ευκλείδη, γίνεται όμως πιο εύκολη, πιο προσιτή και με οικονομία η μελέτη τους. Γίνεται δε αντιπροσωπευτικά η απόδειξη της πρώτης από τις έξι προτάσεις κάθε ομάδας, οι υπόλοιπες πέντε προκύπτουν ανάλογα.

Θεώρημα Τ217-Χ36

Το άθροισμα δύο *Ε-ρητών* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*εκ δύο ονομάτων*».

Πρόταση Χ36

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν,
ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Δηλαδή:

Αν x, y είναι *Ε-ρητές* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες τότε η ευθεία $x + y$ είναι άλογος και καλείται «*εκ δύο ονομάτων*».

Απόδειξη:

Έστω x, y δύο *Ε-ρητά* ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Θέτουμε $q = x + y$.

Έτσι λόγω της ΙΙ4 θα είναι $q^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$.

Το άθροισμα $x^2 + y^2$ είναι *Ε-ρητό* (λόγω της Τ204.3) και το ορθογώνιο $x \cdot y$ είναι *Ε-μέσο* (λόγω της Τ208).

Οπότε, λόγω της Τ211, το $2x \cdot y$ είναι επίσης *Ε-μέσο* και ασύμμετρο με το *Ε-ρητό* άθροισμα $x^2 + y^2$ (εμμέσως από την Τ204.2).

Επομένως το q^2 δεν είναι *Ε-ρητό* (από την Χ16).

Επίσης το q^2 δεν είναι *Ε-μέσο* αφού η διαφορά δύο *Ε-μέσων* τετραπλεύρων, q^2 και $2x \cdot y$, δεν είναι *Ε-ρητά* (από την Τ219).

Άρα, λόγω της Τ216, το q^2 είναι *Ε-άλογο* και το q είναι επίσης *Ε-άλογο.*

Θεώρημα Χ37

Το άθροισμα δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περιέχουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*εκ δύο μέσων πρώτη»*..

Πρόταση Χ37

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι
ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ
δύο μέσων πρώτη.

Δηλαδή:

Αν x, y είναι *Ε-μέσες* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες και $x \cdot y$ ρητό τότε η ευθεία $x + y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*εκ δύο μέσων πρώτη»*..

Θεώρημα Χ38

Το άθροισμα δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περιέχουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*εκ δύο μέσων δευτέρα».*

Πρόταση Χ38

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι
μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ
δύο μέσων δευτέρα.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι *Ε-μέσες* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες και $x \cdot y$ *Ε-μέσο* τότε η ευθεία $x + y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*εκ δύο μέσων δευτέρα».*

Θεώρημα Χ39

Το άθροισμα δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-ρητό* και περιέχουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο είναι *Ε-μέσο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*μείζων».*

Πρόταση Χ39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι
τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων

ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν,
καλείσθω δὲ μείζων.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-ρητό* και $x \cdot y$ *Ε-μέσο* τότε η ευθεία $x + y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*μείζων*».

Θεώρημα Χ40

Το άθροισμα δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και περιέχουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*ρητόν και μέσον δυναμένη*».

Πρόταση Χ40

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι
τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον,
τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν,
καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-μέσο* και $x \cdot y$ *Ε-ρητό* τότε η ευθεία $x + y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*ρητόν και μέσον δυναμένη*».

Θεώρημα Χ41

Το άθροισμα δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και το ορθογώνιο που περιέχουν είναι ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους, είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*δύο μέσα δυναμένη*».

Πρόταση Χ41

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι
ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ
συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα
ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-μέσο* και $x \cdot y$ ασύμμετρο με το $x^2 + y^2$ τότε η ευθεία $x + y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*δύο μέσα δυναμένη*».

Αντίστοιχα έχουμε τις προτάσεις για τον ορισμό και την απόδειξη της αλογίας των έξι γραμμών που προκύπτουν ως διαφορά δύο γραμμών που είτε είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες ή αν και ασύμμετρες έχουν κάποιες επιλπέον ιδιότητες μαζί.

Θεώρημα Τ218-Χ73

Η διαφορά δύο *Ε-ρητών* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα και ονομάζεται «*αποτομή*».

Πρόταση Χ73

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος
οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι *Ε-ρητές* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται *«αποτομή»*.

Απόδειξη:

Έστω x, y δύο *Ε-ρητά* ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Θέτουμε $q = x - y$.

Έτσι λόγω της ΙΙ7 θα είναι $q^2 + 2x \cdot y = x^2 + y^2$.

Το άθροισμα $x^2 + y^2$ είναι *Ε-ρητό* (λόγω της Τ204.3) και το ορθογώνιο $x \cdot y$ είναι *Ε-μέσα* (λόγω της Τ208).

Οπότε, λόγω της Τ211, το $2x \cdot y$ είναι επίσης *Ε-μέσο* και ασύμμετρο με το *Ε-ρητό* άθροισμα $x^2 + y^2$ (εμμέσως από την Τ204.2).

Επομένως το q^2 δεν είναι *Ε-ρητό* (από την Χ16).

Επίσης το q^2 δεν είναι *Ε-μέσο* αφού το άθροισμα δύο *Ε-μέσων* τετραπλεύρων, q^2 και $2x \cdot y$, δεν είναι *Ε-ρητά* . (από την Τ219).

Άρα, λόγω της Τ216, το q^2 είναι *Ε-άλογο* και το q είναι επίσης *Ε-άλογο*.

Θεώρημα Χ74

Η διαφορά δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περιέχουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*μέσης αποτομή πρώτη*»..

Πρόταση Χ74

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος
οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ
λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Δηλαδή:

Αν x, y είναι *Ε-μέσες* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες και $x \cdot y$ *Ε-ρητό* τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*μέσης αποτομή πρώτη*»..

Θεώρημα Χ75

Η διαφορά δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περιέχουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*μέσης αποτομή δεύτερη*».

Πρόταση Χ75

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος
οὖσα τῇ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ
ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι *Ε-μέσες* ευθείες δυνάμει μόνο σύμμετρες και $x \cdot y$ *Ε-μέσο* τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε- άλογος* και καλείται «*μέσης αποτομή δεύτερη*».

Θεώρημα Χ76

Η διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-ρητό* και περιέχουν *Ε-μέσο* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται «*ελάσσων*».

Πρόταση Χ76

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος
οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν
ἅμα ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν·
καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Δηλαδή:

Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-ρητό* και $x \cdot y$ *Ε-μέσο* τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται «*ελάσσων*».

Θεώρημα Χ77

Η διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και περιέχουν *Ε-ρητό* ορθογώνιο είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται *«η μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα»*.

Πρόταση Χ77

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος
οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκεί-
μενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς
ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ
μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Δηλαδή:
Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-μέσο* και $x \cdot y$ *Ε-ρητό* τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται *«η μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα»*.

Θεώρημα Χ78

Η διαφορά δύο ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει ασυμμέτρων που το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και το ορθογώνιο που περιέχουν είναι ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους, είναι *Ε-άλογο* ευθύγραμμο τμήμα (*άλογος* ευθεία) και ονομάζεται *«η μετά μέσου μέσον το όλον ποιούσα »*.

Πρόταση Χ78

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Δηλαδή:

Αν x, y είναι ευθείες δυνάμει ασύμμετρες με $x^2 + y^2$ *Ε-μέσο* και $x \cdot y$ ασύμμετρο με το $x^2 + y^2$ τότε η ευθεία $x - y$ είναι *Ε-άλογος* και καλείται *«η μετά μέσου μέσον το όλον ποιούσα »*.

8. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ42-47 & Χ79-84

Μοναδικότητα των δύο ονομάτων των έξι προσθετικών και των έξι αφαιρετικών αλόγων γραμμών.

Στη συνέχεια παρατίθενται οι προτάσεις σχετικά με τη μοναδικότητα της γραφής των αλόγων γραμμών. Αποδεικνύεται δηλαδή ότι κάθε άλογη γραμμή από αυτές που ορίστηκαν προηγουμένως προκύπτει κατα μοναδικό τρόπο ως άθροισμα (ή ως διαφορά αντίστοιχα) δύο γραμμών. Δηλαδή, δοθείσης μιας άλογης γραμμής που προκύπτει ως άθροισμα δύο άλλων, δεν υπάρχουν κι άλλες γραμμές που προστιθέμενες να δίνουν την ίδια άλογη γραμμή.

Για τις αποδείξεις ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την ανισότητα που αποδεικνύεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα Χ41/42

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον·

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Δηλαδή:

Αν $x+y=x'+y'$ και τα x', y' διαιρούν την ευθεία $x+y$ πιο κοντά στο μέσον της (δηλαδή αν ισχύει $x>y$ και $x'>y'$ τότε $x'<x$), τότε $x^2+y^2>x'^2+y'^2$

Οι αποδείξεις που δίνονται αμέσως πιο κάτω ανήκουν στον Taisbak.

Θεώρημα Τ225-Χ42&Χ79

Τα μέρη-ονόματα μιας «εκ δύο ονομάτων» ή μιας «αποτομής» είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ42

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ εν μόνον σημεῖον διαιρεῖται
εἰς τὰ ὀνόματα.

Απόδειξη:

Έστω ότι $x+y$ και $u+v$ είναι οι δύο τρόποι γραφής μιας γραμμής εκ δύο ονομάτων ως αθροισμα δύο *Ε-ρητών* γραμμών με $x>y$ και $x>u>v$.
Τότε θα είναι $x+y=u+v$ και λόγω της πρότασης ΙΙ4 παίρνουμε $x^2+y^2+2x\cdot y=u^2+v^2+2u\cdot v$ και τελικά $(x^2+y^2)-(u^2+v^2)=2u\cdot v-2x\cdot y$.
Έτσι στο πρώτο μέλος έχουμε διαφορά αθροισμάτων τετραγώνων που είναι *Ε-ρητό* ενώ στο δεύτερο μέλος έχουμε διαφορά διπλσίων ορθογωνίων που λόγω της Χ26 δεν είναι *Ε-ρητό*.
Άρα τα μέρη-ονόματα μιας εκ δύο ονομάτων είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ79

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Απόδειξη:
Ανάλογη με την απόδειξη της Χ42

Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες πέντε κατηγορίες τόσο των προσθετικών όσο και των αφαιρετικών αλόγων γραμμών. Βρίσκεται στις προτάσεις Χ43-47 και Χ80-84 αντίστοιχα.

Πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι στην αφαιρετική άλογη γραμμή $x - y$ η x ονομάζεται «όλη» και η y ονομάζεται «προσαρμόζουσα». Η ακριβής μάλιστα μετάφραση της Χ79 είναι η εξής: «Για κάθε αποτομή υπάρχει μοναδική *Ε-ρητή* «προσαρμόζουσα» δυνάμει μόνο σύμμετρη με την «όλη»».

Πρόταση Χ43

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' εν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Τα μέρη-ονόματα μιας «*εκ δύο μέσων πρώτης»* είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ44

Ἡ ἐκ μέσων δευτέρα καθ' εν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Τα μέρη-ονόματα μιας «*εκ δύο μέσων δευτέρας»* είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ45

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Τα μέρη-ονόματα μιας «*μείζωνος»* είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ46

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' εν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Τα μέρη-ονόματα μιας «*ρητόν και μέσον δυναμένης»* είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Πρόταση Χ47

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' εν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.
Τα μέρη-ονόματα μιας *«δύο μέσα δυναμένης»* είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Αντίστοιχα για τις υπόλοιπες πέντε αφαιρετικές έχουμε τις προτάσεις:

Πρόταση Χ80

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει
εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ
δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Για κάθε *«μέσης αποτομή πρώτη»* υπάρχει μοναδική «προσαρμόζουσα» που είναι δυνάμει μόνο σύμμετρη με την «όλη» και περιέχουν *Ε-ρητό* χωρίο.

Πρόταση Χ81

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει
εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς
ὅλης μέσον περιέχουσα.

Για κάθε *«μέσης αποτομή δευτέρα»* υπάρχει μοναδική «προσαρμόζουσα» που είναι δυνάμει μόνο σύμμετρη με την «όλη» και περιέχουν *Ε-μέσο* χωρίο.

Πρόταση Χ82

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει
ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν
ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ'
αὐτῶν μέσον.

Για κάθε *«ελάσσωνα»* υπάρχει μοναδική «προσαρμόζουσα» που είναι ασύμμετρη με την «όλη» , το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-ρητό* και περιέχουν *Ε-μέσο* χωρίο.

Πρόταση Χ83

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον
προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ,
μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Για κάθε *«μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα»* υπάρχει μοναδική «προσαρμόζουσα» που είναι ασύμμετρη με την «όλη», το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και περιέχουν *Ε-ρητό* χωρίο.

Πρόταση Χ84

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνη
προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ,
μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ
ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Για κάθε *«μετά μέσου μέσον το όλο ποιούσα»* υπάρχει μοναδική «προσαρμόζουσα» που είναι ασύμμετρη με την «όλη», το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο* και το χωρίο που περιέχουν είναι ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους.

9. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ66-70 & Χ103-107

Αναλλοίωτο ως προς τη συμμετρία των έξι προσθετικών και των έξι αφαιρετικών αλόγων γραμμών.

Μια ακόμη παρατήρηση είναι ότι **οι σύμμετρες γραμμές ανήκουν στην ίδια κατηγορία**. Δηλαδή όπως μια γραμμή σύμμετρη με ρητή (ή μέση) είναι επίσης ρητή (ή μέση) αντίστοιχα έτσι και μια γραμμή σύμμετρη με μια αθροιστική (ή αφαιρετική) άλογη γραμμή είναι επίσης αθροιστική (ή αφαιρετική) άλογη γραμμή και μάλιστα του ιδίου είδους. Αυτό αποδεικνύεται στις προτάσεις Χ66-Χ70 οι οποίες σύμφωνα με τον Heath και τα σχόλιά του στα Χ66 (και Χ103 για αποτομές) είναι εύκολες.[Taisbak, σελ. 57]

Ο Fowler επισημαίνει ότι αυτό που δεν αποδεικνύεται στα Στοιχεία, αν και φαίνεται να χρειάζεται στην πρόταση XIII18, είναι ότι **και η δυνάμει μόνο συμμετρία δύο γραμμών αρκεί για να ανήκουν αυτές στην ίδια κατηγορία**. Οπότε, δύο γραμμές που είναι σύμμετρες ή δυνάμει μόνο σύμμετρες μεταξύ τους ανήκουν στην ίδια κατηγορία. Αν μάλιστα πρόκειται για διώνυμες ή αποτομές τότε **επιπλέον χωρίζονται στον ίδιο λόγο από τα ονόματά τους**.[Fowler, σελ.181]

Οι προτάσεις που αναφέρονται στο αναλλοίωτο ως προς τη συμμετρία των προσθετικών αλόγων γραμμών είναι οι Χ66-70 και αντίστοιχα για τις αφαιρετικές είναι οι προτάσεις Χ103-107.

Θεώρημα Χ66

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*εκ δύο ονομάτων*» είναι και αυτή «*εκ δύο ονομάτων*» και μάλιστα της ίδιας κατηγορίας.

Πρόταση Χ66

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Θεώρημα Χ67

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*εκ δύο μέσων*» είναι και αυτή «*εκ δύο μέσων*» και μάλιστα της ίδιας κατηγορίας.

Πρόταση Χ67

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Θεώρημα Χ68

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*μείζωνα*» είναι και αυτή «*μείζων*».

Πρόταση Χ68

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Θεώρημα Χ69

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*ρητόν και μέσον δυναμένη*» είναι και αυτή «*ρητόν και μέσον δυναμένη*».

Πρόταση Χ69

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος [καὶ αὐτὴ] ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Θεώρημα Χ70

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*δύο μέσα δυναμένη»* είναι και αυτή «*δύο μέσα δυναμένη»*.

Πρόταση Χ70

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Θεώρημα Χ103

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*αποτομή*» είναι και αυτή «*αποτομή*» και μάλιστα της ίδιας κατηγορίας.

Πρόταση Χ103

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ
τάξει ἡ αὐτή.

Θεώρημα Χ104

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την «*μέσης αποτομή»* είναι και αυτή «*μέσης αποτομή»* και μάλιστα της ίδιας κατηγορίας.

Πρόταση Χ104

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή
ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Θεώρημα Χ105

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την«*ελάσσωνα»* είναι και αυτή «*ελάσσων»*.

Πρόταση Χ105

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Θεώρημα Χ106

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την*« μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα»* είναι και αυτή *« μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα».*

Πρόταση Χ106

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος
μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Θεώρημα Χ107

Η ευθεία που είναι μήκει σύμμετρη με την *« μετά μέσου μέσον το όλον ποιούσα »* είναι και αυτή *« μετά μέσου μέσον το όλον ποιούσα ».*

Πρόταση Χ107

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος
καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

10. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ X17-18 και X48-53, X85-90

Ορισμός και κατασκευή των έξι κατηγοριών διωνύμων και των έξι κατηγοριών αποτομών

[Πρόταση Α, χρήση των προτάσεων VI27 και VI28]

Θα δούμε τώρα τον ορισμό X47/48 που αφορά έξι κατηγορίες διωνύμων ευθειών $\alpha + \beta$ διακρίνοντας περιπτώσεις για τις ιδιότητες και τη σχέση των α, β και τον αντίστοιχο ορισμό X84/85 για τις αποτομές. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις προτάσεις X48-53 και X85-90 στις οποίες γίνεται η κατασκευή όλων αυτών των γραμμών.

Ορισμός X47/48

Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω [ἡ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

Δηλαδή:

Αν ρ είναι η προτεθείσα ευθεία και $\alpha+\beta$ είναι μια διώνυμη ευθεία με $\alpha>\beta$ τότε:

I. Αν $\alpha,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα τότε:

   i. Αν α,ρ σύμμετρα τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 1^{η} διώνυμος.

   ii. Αν β,ρ ασύμμετρα τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 2^{η} διώνυμος.

   iii. Αν α,β ασύμμετρα με τη ρ τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 3^{η} διώνυμος.

II. Αν $\alpha,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ ασύμμετρα τότε:

   i. Αν α,ρ σύμμετρα τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 4^{η} διώνυμος.

   ii. Αν β,ρ ασύμμετρα τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 5^{η} διώνυμος.

   iii. Αν α,β ασύμμετρα με τη ρ τότε η $\alpha+\beta$ ονομάζεται 6^{η} διώνυμος.

Προφανώς αν $\rho\ com\ \alpha \quad \& \quad \rho\ com\ \beta \quad \& \quad \alpha\ com\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ τότε δεν προκύπτει διώνυμη γι' αυτό και δεν υπάρχει αντίστοιχη κατηγορία.

Ορισμός Χ84/85

Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

Δηλαδή:

Αν ρ είναι η προτεθείσα ευθεία και $\alpha-\beta$ είναι μια αποτομή με $\alpha>\beta$ τότε:

III. Αν $\alpha,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα τότε:

i. Αν α,ρ σύμμετρα τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 1^{η} αποτομή.

ii. Αν β,ρ ασύμμετρα τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 2^{η} αποτομή.

iii. Αν α,β ασύμμετρα με τη ρ τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 3^{η} αποτομή.

IV. Αν $\alpha,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ ασύμμετρα τότε:

i. Αν α,ρ σύμμετρα τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 4^{η} αποτομή.

ii. Αν β,ρ ασύμμετρα τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 5^{η} αποτομή.

iii. Αν α,β ασύμμετρα με τη ρ τότε η $\alpha-\beta$ ονομάζεται 6^{η} αποτομή.

Προφανώς αν $\rho\ com\ \alpha$ & $\rho\ com\ \beta$ & $\alpha\ com\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ τότε δεν προκύπτει διώνυμη γι' αυτό και δεν υπάρχει αντίστοιχη κατηγορία.

Στις προτάσεις που ακολουθούν θα αποδειχθεί ότι αυτές οι κατηγορίες δεν είναι κενές και μάλιστα, κατά την τακτική του Ευκλείδη, δεν θα κατασκευαστεί απλώς ένα παράδειγμα αλλά θα δοθεί ο γενικός τρόπος κατασκευής τους. Γι' αυτό χρειάζονται οι προτάσεις Χ17 και Χ18 οι οποίες χρησιμοποιούν μια ειδική περίπτωση της πρότασης VI28 που αφορά την κατ' έλλειψιν παραβολή χωρίου.

Στη δική μας προσέγγιση αυτών των προτάσεων η εφαρμογή της πρότασης VI28 (κατ' έλλειψιν δευτεροβάθμια εξίσωση) περιλαμβάνεται, τόσο για τις διώνυμες όσο και για τις αποτομές, στην απλή πρόταση Α που ακολουθεί και η οποία απομονώθηκε από τα πιο σύνθετα θεωρήματα Τ220 και Τ221 που εισάγει ο Taisbak στη δικιά του προσέγγιση.) Η πρόταση Α καλύπτει τις ανάγκες της εύρεσης-κατασκευής των έξι κατηγοριών διώνυμων γραμμών και αποτομών και χαρακτηρίζεται από απλότητα και οικονομία.

Πρόταση Α

Έστω α, β ευθύγραμμα τμήματα με $\alpha > \beta$ τότε κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα u, v ώστε: $u > v$

$$u + v = \alpha$$

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$$

Αντίστροφα, αν u, v ευθύγραμμα τμήματα με $u > v$ τότε κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα α, β ώστε: $\alpha > \beta$

$$u + v = \alpha$$

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$$

Απόδειξη

1. Το ευθύγραμμο τμήμα α πρέπει να χωριστεί σε άνισα τμήματα u, v που να περιέχουν ορθογώνιο $u \cdot v$ ίσο με δοθέν τετράγωνο $\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2$.

Αυτό είναι η κατ' έλλειψιν παραβολή χωρίου η οποία δίνεται άμεσα από την πρόταση VI 28 των Στοιχείων του Ευκλείδη.

2. Το ευθύγραμμο τμήμα α πρόκύπτει άμεσα ως άθροισμα δύο δοθέντων τμημάτων ενώ για το β πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε το $\frac{1}{2}\beta$ ως μέσο ανάλογο των u, v με χρήση της πρότασης VI 13 των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Με βάση την πρόταση Α έπονται εύκολαοι προτάσεις Χ17 και Χ18 των Στοιχείων. Γράφονται δε πιο απλά και πιο σύντομα όπως μας τις δίνει ο Taisbak στο θεώρημα Τ222.

Θεώρημα Τ222-Χ17

Έστω α, β ευθύγραμμα τμήματα με $\alpha > \beta$ και u, v ευθύγραμμα τμήματα ώστε: $u > v$, $u + v = \alpha$, $u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$.

Τότε αν *u, v* σύμμετρα θα είναι επίσης *α, δ* σύμμετρα όπου *δ* είναι η «τετραγωνική διαφορά»: $\delta = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ και αντίστροφα.

Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία: u, v σύμμετρα $\Leftrightarrow$ $\alpha, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ σύμμετρα

Πρόταση Χ17

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι,[$\alpha > \beta$] τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ [αν $u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$] ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει [και ισχύουν $u + v = \alpha$ με u, v σύμμετρα], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. [τότε $\alpha, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ σύμμετρα]

καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει] [αν $\alpha, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ σύμμετρα], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον

παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ [και $u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$] ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει [τότε $u + v = \alpha$ και u, v σύμμετρα],

Η πρόταση Χ18 είναι αντίστοιχη της Χ17 και αφορά την ασυμμετρία.

Πρόταση Χ18

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Εφ' όσον έχουμε στη διάθεσή μας τις προτάσεις Χ17,18 οι παρακάτω δύο εξάδες Χ48-53 και Χ85-90 των έξι διωνύμων και αποτομών αντίστοιχα έπονται εύκολα. Δίνουμε μια απόδειξη όπως την κάνει ο Taisbak καθώς και τα αριθμητικά παραδείγματα που δίνει επίσης ο ίδιος.

Θεώρημα Τ224.1-Χ48&Χ85

Η 1η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ48

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Πρόταση Χ85

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Απόδειξη: (του Taisbak)

Θεωρούμε τον τετράγωνο αριθμό r^2 και τους αριθμούς a,b,d ώστε $b^2 = c + d^2$ όπου c όχι τετράγωνος αριθμός.

Αν ρ είναι η προτεθείσα ευθεία κατασκευάζουμε α,β ευθείες ώστε:

$\frac{\rho^2}{\alpha^2} = \frac{r^2}{a^2}$, $\frac{\rho^2}{\beta^2} = \frac{r^2}{b}$, $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{b}{a^2}$ οπότε από την πρόταση Χ9 έχουμε ότι:

ρ,α σύμμετρα, ρ,β ασύμμετρα και α,β ασύμμετρα.

Είναι $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{a^2}{a^2 - b} = \frac{a^2}{d^2}$ = τετρ. αριθμός / τετρ. αριθμός

άρα $\alpha, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ σύμμετρα.

Παράδειγμα: $\rho^2 = 4$, $\alpha^2 = 9$, $\beta = 5$, $\delta^2 = 4$.

Θεώρημα Τ224.2-Χ49&Χ86

Η 2η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ49

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Πρόταση Χ86

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Παράδειγμα: $\rho^2 = 4$, $\alpha^2 = 4$, $\beta = 3$, $\delta^2 = 1$.

Θεώρημα Τ224.3-Χ50&Χ87

Η 3η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ50

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Πρόταση Χ87

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Παράδειγμα: $\rho = 2$, $\alpha^2 = 9$, $\beta = 5$, $\delta^2 = 4$.

Θεώρημα Τ224.4-Χ51&Χ88

Η 4η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ51

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Πρόταση Χ88

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Παράδειγμα: $\rho^2 = 4$, $\alpha^2 = 9$, $\beta = 6$, $\delta = 3$.

Θεώρημα Τ224.5-Χ52&Χ89

Η 5η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ52

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Πρόταση Χ89

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Παράδειγμα: $\rho^2 = 4$, $\alpha = 3$, $\beta^2 = 1$, $\delta = 2$.

Θεώρημα Τ224.6-Χ53&Χ90

Η 6η κατηγορία δεν είναι κενή.

Πρόταση Χ53

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Πρόταση Χ90

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Παράδειγμα: $\rho = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\delta = 2$.

11. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ54-59 & Χ91-96, Χ60-65 & Χ97-102

Σύνδεση-αντιστοίχιση των προσθετικών και αφαιρετικών αλόγων γραμμών με τις διώνυμες και αποτομές

[Πρόταση Β, χρήση των προτάσεων VI27 και VI28]

Στις προτάσεις που ακολουθούν γίνεται η συσχέτιση των διωνύμων και αποτομών με τις αθροιστικές και αφαιρετικές άλογες γραμμές που ορίστηκαν πιο πριν. Εδώ για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη των γραμμών (ευθυγράμμων τμημάτων) που θα αποδεικνύουν τη σύνδεση και εν τέλει την πλήρη αντιστοίχιση των γραμμών αυτών χρειάζεται η Πρόταση Β.

Πρόταση Β

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία

1. Αν α, β ευθύγραμμα τμήματα με $\alpha > \beta$ τότε κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα x, y ώστε: $x > y$ και

$$\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$$

$$\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$$

2. Αν x, y ευθύγραμμα τμήματα με $x > y$ τότε κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα α, β ώστε: $\alpha > \beta$ και

$$\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$$

$$\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$$

Απόδειξη

1. Από την πρόταση Α κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα u, v ώστε:

$u > v$, $u + v = \alpha$, $u \cdot v = \frac{1}{4}\beta^2$.

Κατόπιν με χρήση της πρότασης VI 13 (κατασκευή μέσης αναλόγου) κατασκευάζονται ευθύγραμμα τμήματα x, y ώστε : $\rho \cdot u = x^2$ $\rho \cdot v = y^2$.

Γι' αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα x, y ισχύει: $x > y$ (αφού $u > v$) και $\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$, $\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$ άρα είναι τα ζητούμενα.

2. Θέτουμε $q = x + y$.

Από την πρόταση ΙΙ4 έχουμε: $q^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$.

Με χρήση των προτάσεων Ι 44 και Ι 45 (κατασκευή παραλληλογράμμου όταν δίνεται το εμβαδόν, η μια πλευρά ρ και γωνιά 90 μοιρών) κατασκευάζουμε ευθύγραμμα τμήματα u, v, β ώστε: $\rho \cdot u = x^2$, $\rho \cdot v = y^2$, $\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$.

Θέτουμε $\alpha = u + v$.

Έτσι, έχουμε τα ζητούμενα τμήματα α, β ώστε: $\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$, $\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$.

Επίσης ισχύει $\alpha > \beta$ αφού άμεσα από το λήμμα Χ59/60 (ή έμμεσα από την πρόταση ΙΙ 7) έχουμε ότι: $x^2 + y^2 > 2x \cdot y$.

Στην προσέγγισή μας η Πρόταση Β αντικαθιστά τις πιο σύνθετες προτάσεις Τ220 και Τ221 του Taisbak οι οποίες είναι οι ακόλουθες.

Θεώρημα Τ220 (για τις διώνυμες)

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία.

Αν $q^2 = \rho \cdot w$ και $q = x + y$ με $x > y$ τότε το w είναι διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων $w = \alpha + \beta$, $\alpha > \beta$ ώστε $\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$ και $\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$.

Αντίστροφα,

Αν $\rho \cdot w = q^2$ και $w = \alpha + \beta$ με $\alpha > \beta$ τότε το q είναι άθροισμα ευθυγράμμων τμημάτων ώστε $q = x + y$, $x > y$ και $x^2 + y^2 = \rho \cdot \alpha$ και $2x \cdot y = \rho \cdot \beta$.

Θεώρημα Τ221 (για τις αποτομές)

Έστω ρ η προτεθείσα ευθεία.

Αν $q^2 = \rho \cdot w$ και $q = x - y$ με $x > y$ τότε το w είναι διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων $w = \alpha - \beta$, $\alpha > \beta$ ώστε $\rho \cdot \alpha = x^2 + y^2$ και $\rho \cdot \beta = 2x \cdot y$.

Αντίστροφα,

Αν $\rho \cdot w = q^2$ και $w = \alpha - \beta$ με $\alpha > \beta$ τότε το q είναι διαφορά ευθυγράμμων τμημάτων ώστε $q = x - y$, $x > y$ και $x^2 + y^2 = \rho \cdot \alpha$ και $2x \cdot y = \rho \cdot \beta$.

Με χρήση της πρότασης Β αποδεικνύονται οι προτάσεις Χ54-59 που συσχετίζουν τις διώνυμες με τις αθροιστικές άλογες γραμμές και αντίστοιχα οι προτάσεις Χ91-96 συσχετίζουν τις αποτομές με τις αφαιρετικές άλογες γραμμές.

Σύμφωνα με τον Taisbak τα θεωρήματα που αφορούν τις έξι κατηγορίες διωνύμων και τις έξι κατηγορίες αποτομών είναι ομοιόμορφα και μονότονα αν όχι βαρετά. Θεωρεί ότι ο σκοπός της όλης θεωρίας είναι η $1^{η}$ κατηγορία, οι υπόλοιπες παίρνουν το όνομά τους από τις γραμμές που τις συνθέτουν και αξίζει να σταθεί κανείς μόνο στη μείζονα και στην ελλάσονα.[Taisbak, σελ.49]

Παρόλα αυτά, ο Taisbak δίνει τα αντίστοιχα θεωρήματα με πιο αναλυτική περιγραφή στην εκφώνηση απ' ότι ο Ευκλείδης. Ο δε Fowler περιγράφει σχηματικά αυτή τη διαδικασία ως πέρασμα από ένα ορθογώνιο σε ένα ισοδύναμο τετράπλευρο. Πιο συγκεκριμένα, πηγαίνουμε από ένα ορθογώνιο με πλευρές μια Ε-ρητή ρ και μια

διώνυμη $\alpha+\beta$ σε ισοδύναμο τετράγωνο με πλευρά αθροιστική άλογη $x+y$. Η μαθηματική σχέση που περιγράφει τη διαδικασία αυτή είναι η $(x+y)^2=\rho\cdot(\alpha+\beta)$ όπου ρ είναι η προτεθείσα ευθεία, $\alpha+\beta$ είναι η διώνυμος πλευρά του ορθογωνίου και $x+y$ είναι η πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο $\rho\cdot(\alpha+\beta)$. Η αντίστροφη πορεία θα περιγραφεί στις προτάσεις Χ60-65.

Θεώρημα Τ226-Χ54&Χ91(αντιστ. Χ36&Χ73)

Αν η $\alpha+\beta$ είναι $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x+y$ είναι άθροισμα δύο *Ε-ρητών* τετραγώνων και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x+y$ είναι *εκ δύο ονομάτων*.

Αν η $\alpha-\beta$ είναι $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x-y$ είναι διαφορά ενός αθροίσματος δύο *Ε-ρητών* τετραγώνων και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x+y$ είναι *αποτομή*.

Πρόταση Χ54

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο
ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν
ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Πρόταση Χ91

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς
πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Απόδειξη Χ54

Αφού $\alpha+\beta$ είναι $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη θα είναι

$\alpha,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα, α,ρ σύμμετρα και β,ρ σύμμετρα.

Επίσης είναι $x^2=\rho\cdot u$ Ε-ρητό και $y^2=\rho\cdot v$ Ε-ρητό άρα θα είναι και το x^2+y^2 Ε-ρητό.

Είναι επίσης $2x \cdot y = \rho \cdot \beta$ οπότε $2x \cdot y$ Ε-μέσο.

Άρα x, y ρητές και δυνάμει μόνο σύμμετρες (αφού το $x \cdot y$ είναι Ε-μέσο).

Άρα η $x + y$ είναι *εκ δύο ονομάτων*.

Θεώρημα Τ227-Χ55&Χ92(αντίστ. Χ37&Χ74)

Αν η $\alpha + \beta$ είναι $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x + y$ είναι άθροισμα δύο σύμμετρων *Ε-μέσων* τετραγώνων και ενός *Ε-ρητού* ορθογωνίου, οπότε η $x + y$ είναι άθροισμα δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περικλείουν ένα *Ε-ρητό* ορθογώνιο. Η $x + y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *εκ δύο μέσων πρώτη*.

Αν η $\alpha - \beta$ είναι $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x - y$ είναι διαφορά δύο σύμμετρων *Ε-μέσων* τετραγώνων και ενός *Ε-ρητού* ορθογωνίου, οπότε η $x - y$ είναι διαφορά δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περικλείουν ένα *Ε-ρητό* ορθογώνιο. Η $x - y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *μέσης αποτομή πρώτη*.

Πρόταση Χ55

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο
ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν
ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Πρόταση Χ92

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς
δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι
πρώτη.

Θεώρημα Τ228-Χ56&Χ93(αντιστ Χ38&Χ75)

Αν η $\alpha+\beta$ είναι $3^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x+y$ είναι άθροισμα δύο σύμμετρων *Ε-μέσων* τετραγώνων και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου ασυμμέτρου μ'αυτά, οπότε η $x+y$ είναι άθροισμα δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περικλείουν ένα *Ε-μέσου* ορθογώνιο. Η $x+y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *εκ δύο μέσων δεύτερη*.

Αν η $\alpha-\beta$ είναι $3^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x-y$ είναι διαφορά δύο σύμμετρων *Ε-μέσων* τετραγώνων και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου ασυμμέτρου μ'αυτά, οπότε η $x-y$ είναι διαφορά δύο *Ε-μέσων* ευθυγράμμων τμημάτων δυνάμει μόνο συμμέτρων που περικλείουν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο. Η $x-y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *μέσης αποτομή δεύτερη*.

Πρόταση Χ56

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο
ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν
ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Πρόταση Χ93

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς
τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Θεώρημα Τ229-Χ57&Χ94(αντιστ. Χ39&Χ76)

Αν η $\alpha+\beta$ είναι $4^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x+y$ είναι άθροισμα δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-ρητό* και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x+y$ είναι άθροισμα δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-ρητό*. Η $x+y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *μείζων*.

Αν η $\alpha - \beta$ είναι $4^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x - y$ είναι διαφορά δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-ρητού* και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x - y$ είναι διαφορά δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-ρητο*. Η $x - y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *ελάσσων*.

Πρόταση Χ57

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο
ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν
ἡ καλουμένη μείζων.

Πρόταση Χ94

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς
τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Θεώρημα Τ230-Χ58&Χ95(- Χ40&Χ77)

Αν η $\alpha + \beta$ είναι $5^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x + y$ είναι άθροισμα δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-μέσο* και ενός *Ε-ρητού* ορθογωνίου, οπότε η $x + y$ είναι άθροισμα δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-ρητό* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο*. Η $x + y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται *ρητόν και μέσον δυναμένη*.

Αν η $\alpha - \beta$ είναι $5^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x - y$ είναι διαφορά δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-μέσο* και ενός *Ε-ρητού* ορθογωνίου, οπότε η $x - y$ είναι διαφορά δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-ρητό* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο*. Η $x - y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται η *μετά ρητού μέσον το όλον ποιούσα*.

Πρόταση Χ58

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Πρόταση Χ95

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Θεώρημα Τ231-Χ59&Χ96(- Χ41&Χ78)

Αν η $\alpha+\beta$ είναι 6ης κατηγορίας διώνυμη τότε το τετράγωνο με πλευρά $x+y$ είναι άθροισμα δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-μέσο* και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x+y$ είναι άθροισμα δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο*. Η $x+y$ είναι Ε-άλογη και θα ονομάζεται *δύο μέσα δυναμένη*.

Αν η $\alpha-\beta$ είναι 6ης κατηγορίας αποτομή τότε το τετράγωνο με πλευρά $x-y$ είναι διαφορά δύο ασύμμετρων τετραγώνων το άθροισμα των οποίων είναι *Ε-μέσο* και ενός *Ε-μέσου* ορθογωνίου, οπότε η $x-y$ είναι διαφορά δύο ασυμμέτρων ευθυγράμμων τμημάτων που περικλείουν ένα *Ε-μέσο* ορθογώνιο ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι *Ε-μέσο*. Η $x-y$ είναι *Ε-άλογη* και θα ονομάζεται η *μετά μέσου μέσον το όλον ποιούσα*.

Πρόταση Χ59

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Πρόταση Χ96

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς
ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον
ποιοῦσά ἐστιν.

Η επόμενη ομάδα προτάσεων αντιστοιχεί σ'αυτό που, όπως αναφέραμε, περιγράφει ο Fowler ως αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή από τετράγωνο σε ορθογώνιο. Ξεκινώντας από ένα τετράγωνο με πλευρά μια αθροιστική (ή αφαιρετική) άλογη γραμμή από αυτές που ορίσαμε αρχικά πηγαίνουμε σε ισοδύναμο ορθογώνιο με μια πλευρά την προτεθείσα ρ και αποδεικνύουμε ότι η άλλη του πλευρά θα είναι διώνυμος (ή αποτομή αντίστοιχα) της ίδιας αντίστοιχης κατηγορίας.

Θεώρημα Τ223-Χ60&97

Αν το τετράγωνο μιας *εκ δύο ονομάτων* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Αν το τετράγωνο μιας *αποτομής* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή $1^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ60

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλό-
μενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Πρόταση Χ97

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Πρόταση Χ61

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν

Αν το τετράγωνο μιας *εκ δύο μέσων πρώτης* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ98

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Αν το τετράγωνο μιας *μέσης αποτομής πρώτης* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ62

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Αν το τετράγωνο μιας *εκ δύο μέσων δευτέρας* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη $3^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ99

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Αν το τετράγωνο μιας *μέσης αποτομής δευτέρας* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή $3^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ63

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον
πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Αν το τετράγωνο μιας *μείζωνος* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη $4^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ100

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Αν το τετράγωνο μιας *ελάσσονος* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή $4^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ64

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν
παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Αν το τετράγωνο μιας *ρητόν και μέσον δυναμένης* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη $5^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

Πρόταση Χ101

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ
ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην

Αν το τετράγωνο μιας *μετά ρητού μέσον το όλον ποιούσας* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή $5^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας.

.

Πρόταση Χ65

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην

Αν το τετράγωνο μιας *δύο μέσα δυναμένης* $x+y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha+\beta$ του ορθογωνίου είναι διώνυμη 6^{ης} κατηγορίας.

Πρόταση Χ102

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ
ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Αν το τετράγωνο μιας *μετά μέσου μέσον το όλο ποιούσας* $x-y$ γραφτεί σαν ορθογώνιο με ύψος ρ τότε το μήκος $\alpha-\beta$ του ορθογωνίου είναι αποτομή 6^{ης} κατηγορίας.

Τώρα που ολοκληρώθηκε η προσέγγιση των προτάσεων αυτών πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι προτάσεις Χ36-41, Χ42-47, Χ66-70 που αφορούν τις προσθετικές άλογες γραμμές $x+y$ και οι προτάσεις Χ73-78, Χ79-84, Χ103-107 που αφορούν αντίστοιχα τις αφαιρετικές άλογες γραμμές $x-y$ είναι πιο στοιχειώδεις από τις υπόλοιπες με την έννοια ότι δεν υπεισέρχεται σ' αυτές η χρήση των προτάσεων VI 27 και VI 28 δηλαδή οι κατ' έλλειψιν δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Αντίθετα οι εξάδες προτάσεων Χ48-53 και Χ85-90 χρησιμοποιούν την πρόταση Α και οι Χ54-59, Χ60-65 και Χ91-96, 97-102 την πρόταση Β που και οι δύο βασίζονται στις προτάσεις VI 27 και VI 28 δηλαδή στις κατ' έλλειψιν δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Ο Taisbak κάνει μια σύνοψη προσθέτοντας μια πρόταση που δεν υπάρχει στον Ευκλείδη και η οποία αναφέρεται στην πλήρη αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των έξι κατηγοριών διωνύμων γραμμών και των έξι προσθετικών αλόγων γραμμών, αντίστοιχα των έξι κατηγοριών αποτομών και των έξι αφαιρετικών αλόγων γραμμών.

Θεώρημα Τ232

Υπαρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των έξι αθροιστικών κατηγοριών των $x+y$ και των έξι ειδών διώνυμων $\alpha+\beta$ καθώς και μια ένα προς ένα αντιστοιχία των έξι αφαιρετικών κατηγοριών των $x-y$ και των έξι ειδών αποτομών $\alpha-\beta$.

Τέλος για την ολοκλήρωση όλων των προηγουμένων γίνεται και η διευκρύνηση μέσω της πρότασης Χ111 ότι μια αποτομή δεν μπορεί να γραφτεί ως διώνυμη. Δηλαδή, μία άλογη γραμμή δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και διώνυμη και αποτομή.

Θεώρημα Τ235

Μια αποτομή δεν μπορεί να είναι και εκ δύο ονομάτων.

Πρόταση Χ111

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

12. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ27-35

Κατασκευαστικές προτάσεις για τα *x,y*

Οι προτάσεις Χ27-35 εξασφαλίζουν κατασκευαστικά την ύπαρξη γραμμών x, y που έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες και προστιθέμενες ή αφαιρούμενες μας δίνουν τις αθροιστικές και αντίστοιχα τις αφαιρετικές άλογες γραμμές.

Τις παρουσιάζουμε τελευταίες γιατί η ύπαρξη και κατασκευή τέτοιων γραμμών x, y προκύπτει ούτως ή άλλως από τις προτάσεις Χ54-59 και Χ91-96 όπου από τις διώνυμες και αποτομές $\alpha \pm \beta$ παίρνουμε τις αθροιστικές και αντίστοιχα τις αφαιρετικές άλογες γραμμές $x \pm y$.

Πρόταση Χ27

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περι-
εχούσας.

Να βρεθούν μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που να περιέχουν ρητό χωρίο.
Δηλαδή:
Να βρεθούν x, y μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες ώστε $x \cdot y$ ρητό.

Πρόταση Χ28

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περι-
εχούσας.

Να βρεθούν δύο μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που να περιέχουν μέσο χωρίο.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες ώστε $x \cdot y$ μέσο.

Πρόταση Χ29

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Να βρεθούν δύο ρητές γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που το τετράγωνο της μεγαλύτερης να υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τεράγωνο του οποίου η πλευρά είναι σύμμετρη με τη μεγαλύτερη.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y ρητές γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες με $x > y$ ώστε $x, \sqrt{x^2 - y^2}$ σύμμετρα.

Πρόταση Χ30

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Να βρεθούν δύο ρητές γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που το τετράγωνο της μεγαλύτερης να υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τεράγωνο του οποίου η πλευρά είναι ασύμμετρη με τη μεγαλύτερη.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y ρητές γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες με $x > y$ ώστε $x, \sqrt{x^2 - y^2}$ ασύμμετρα.

Πρόταση Χ31

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Να βρεθούν δύο μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που περιέχουν ρητό χωρίο και που το τετράγωνο της μεγαλύτερης να υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τεράγωνο του οποίου η πλευρά είναι σύμμετρη με τη μεγαλύτερη.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες με $x > y$ ώστε $x \cdot y$ ρητό και $x, \sqrt{x^2 - y^2}$ σύμμετρα.

Πρόταση Χ32

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Να βρεθούν δύο μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες που περιέχουν μέσο χωρίο και που το τετράγωνο της μεγαλύτερης να υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τεράγωνο του οποίου η πλευρά είναι σύμμετρη με τη μεγαλύτερη.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y μέσες γραμμές δυνάμει μόνο σύμμετρες με $x > y$ ώστε $x \cdot y$ μέσο και $x, \sqrt{x^2 - y^2}$ σύμμετρα.

Πρόταση Χ33

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Να βρεθούν δύο γραμμές δυνάμει ασύμμετρες που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ρητό και να περιέχουν μέσο χωρίο.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y γραμμές δυνάμει ασύμμετρες ώστε $x^2 + y^2$ ρητό και $x \cdot y$ μέσο.

Πρόταση Χ34

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ
μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον,
τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Να βρεθούν δύο γραμμές δυνάμει ασύμμετρες που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι μέσο και να περιέχουν ρητό χωρίο.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y γραμμές δυνάμει ασύμμετρες ώστε $x^2 + y^2$ μέσο και $x \cdot y$ ρητό.

Πρόταση Χ35

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό
τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ
τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ
ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ.

Να βρεθούν δύο γραμμές δυνάμει ασύμμετρες που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι μέσο και να περιέχουν μέσο χωρίο ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους.

Δηλαδή:

Να βρεθούν x, y γραμμές δυνάμει ασύμμετρες ώστε $x^2 + y^2$ μέσο , $x \cdot y$ μέσο και $x^2 + y^2$, $x \cdot y$ ασύμμετρα.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στις αποδείξεις των περισσοτέρων προτάσεων γίνεται χρήση της πρότασης II6 που σχετίζεται με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις ενώ ιδιαιτέρως στις αποδείξεις των προτάσεων X33 και X34 γίνεται χρήση των προτάσεων VI27 και VI28 (κατ' έλλειψιν παραβολή χωρίου). Η ύπαρξη των X27-35 θα μπορούσε να χαρακτηριστεί πλεονασμός μιας και όπως είπαμε η ύπαρξη και κατασκευή τέτοιων γραμμών x, y προκύπτει ούτως ή άλλως από τις προτάσεις X54-59 και X91-96, στις αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιείται η πρόταση B άρα εμμέσως και οι VI27 και VI28. Αυτό έχει διαφύγει της προσοχής των Taisbak και Fowler και δεν κάνουν κανένα σχετικό σχόλιο.

Στον συγκεντρωτικό πίνακα των προτάσεων που ακολουθεί φαίνεται και η αντιστοιχία αυτών με τις υπόλοιπες προτάσεις του βιβλίου και συγκεκριμένα φαίνεται αναλυτικά σε ποιά κατασκευή των ονομάτων x, y αθροιστικής ή αφαιρετικής άλογης γραμμής χρησιμοποιείται η καθεμιά.

Πίνακας των Προτάσεων του Βιβλίου Χ για τις άλογες γραμμές.

	X36,X73	X37,X74	X38,X75	X39,X76	X40,X77	X41,X78
Ορισμός και απόδειξη της αλογίαςτων έξι προσθετικών και αφαιρετικών άλογων γραμμών $x \pm y$	x, y ρητές x, y δυνάμει μόνο σύμμετρες «εκ δύο ονομάτων»- «αποτομή»	x, y μέσες x, y δυνάμει μόνο σύμμετρες xy ρητό «εκ δύο μέσων πρώτη»- «μέσης αποτομή πρώτη»	x, y μέσες x, y δυνάμει μόνο σύμμετρες xy μέσο «εκ δύο μέσων δεύτερη»- «μέσης αποτομή δεύτερη»	x, y δυνάμει ασύμμετρες $x^2 + y^2$ ρητό xy μέσο «μείζων»- «ελάσσων»	x, y δυνάμει ασύμμετρες $x^2 + y^2$ μέσο xy ρητό «ρητόν και μέσον δυναμένη»- «μετά ρητού μέσον το όλο ποιούσα»	x, y δυν. ασύμμετρες $x^2 + y^2$ μέσο $x^2 + y^2$ και xy ασύμμετρα «δύο μέσα δυναμένη»- «μετά μέσου μέσον το όλο ποιούσα»
Απόδειξη της μοναδικότητας των ονομάτων x, y	X42,X79	X43,X80	X44,X81	X45,X82	X46,X83	X47,X84
Αναλλοίωτο ως προς τη συμμετρία των $x \pm y$	X66,X103	X66,X103	X67,X104	X68,X105	X69,X106	X70,X107
Κατασκευή των έξι τύπων διωνύμων και αποτομών $\alpha \pm \beta$	X48,X85 1η διώνυμη- 1η αποτομή	X49,X86 2η διώνυμη- 2η αποτομή	X50,X87 3η διώνυμη- 3η αποτομή	X51,X88 4η διώνυμη- 4η αποτομή	X52,X89 5η διώνυμη- 5η αποτομή	X53,X90 6η διώνυμη- 6η αποτομή
Από τις $\alpha \pm \beta$ στις $x \pm y$	X54,X91	X55,X92	X56,X93	X57,X94	X58,X95	X59,X96
Από τις $x \pm y$ στις $\alpha \pm \beta$	X60,X97	X61,X98	X62,X99	X63,X100	X64,X101	X65,X102
Κατασκευή των ονομάτων x, y	X29 & X30	X27 & X31	X28 & X32	X33	X34	X35

13. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Χ112-115

Σύζυγία των διωνύμων και των αποτομών

Φτάνοντας προς το τέλος της μελέτης των αλόγων γραμμών και του βιβλίου Χ παρατηρούμε ότι όλες οι μέχρι τώρα προτάσεις και τα θεωρήματα αφορούν αποκλειστικά είτε τις διώνυμες είτε τις αποτομές χωρίς να γίνεται κάποια σύνδεσή τους ή ανάδειξη των ιδιοτήτων που δίνουν οι συνδυασμοί τους.

Μάλιστα ο Taisbak θεωρεί ότι τα όσα είδαμε μέχρι τώρα ήταν απλώς ευχάριστα μαθηματικά και ότι ένα καλό κομμάτι μαθηματικών είναι οι προτάσεις Χ112, Χ113 και Χ114 όπου γίνεται η σύνδεση των δύο ειδών αλόγων γραμμών.[Taisbak, σελ.58]

Ο Heath στα σχόλια της Χ112 μιλά για σκοτεινό και μυστηριώδη τρόπο ανακάλυψης αυτών των προτάσεων και θεωρεί πιο πιθανή τη χρήση κάποιας αναλυτικής μεθόδου από τους αρχαίους Έλληνες. Ο Taisbak δηλώνει ότι δεν έχει άποψη περί αναλυτικής μεθόδου αλλά είναι σχεδόν σίγουρος ότι δεν πρόκειται για τη μέθοδο δοκιμής και λάθους. Επιχειρεί πάντως την παρουσίαση των προτάσεων Χ112 και Χ113 ακολουθώντας απλώς το κείμενο. Τέλος δίνει μια πιο απλή απόδειξη για την Χ114 την οποία θα δούμε πιο κάτω. [Taisbak, σελ.58]

Πρόταση Χ112

Αν ένα *Ε-ρητό* τετράπλευρο γραφτεί σαν ορθογώνιο με τη μια πλευρά εκ δύο ονομάτων τότε η άλλη πλευρά θα είναι αποτομή τα μέρη-ονόματα της οποίας θα είναι σύμμετρα με τα αντίστοιχα ονόματα-μέρη της εκ δύο ονομάτων και με τον ίδιο λόγο. Θα ανήκουν δε και οι δύο στην ίδια αντίστοιχη κατηγορία.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλό-
μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά
ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ
αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει
τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Δηλαδή:
Αν ρ^2 είναι ένα *Ε-ρητό* τετράπλευρο και $\rho^2 = x \cdot y$ όπου η x είναι εκ δύο ονομάτων, τότε η y είναι αποτομή της ίδιας αντίστοιχης κατηγορίας και οι ευθείες x, y έχουν σύμμετρα ονόματα και με τον ίδιο λόγο.

Πρόταση Χ113

Αν ένα *Ε-ρητό* τετράπλευρο γραφτεί σαν ορθογώνιο με τη μια πλευρά αποτομή τότε η άλλη πλευρά θα είναι εκ δύο ονομάτων τα μέρη-ονόματα της οποίας θα είναι σύμμετρα με τα αντίστοιχα ονόματα-μέρη της αποτομής και με τον ίδιο λόγο. Θα ανήκουν δε και οι δύο στην ίδια αντίστοιχη κατηγορία.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι
τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι
δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ
ἀποτομῇ.

Δηλαδή:
Αν ρ^2 είναι ένα *Ε-ρητό* τετράπλευρο και $\rho^2 = x \cdot y$ όπου η x είναι αποτομή, τότε η y είναι εκ δύο ονομάτων της ίδιας αντίστοιχης κατηγορίας και οι ευθείες x, y έχουν σύμμετρα ονόματα και με τον ίδιο λόγο.

Πρόταση Χ114

Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά αποτομή και την άλλη πλευρά εκ δύο ονομάτων τα μέρη-ονόματα της οποίας θα είναι σύμμετρα με τα αντίστοιχα ονόματα-μέρη της αποτομής και με τον ίδιο λόγο τότε το ορθογώνιο θα είναι *Ε-ρητό*.

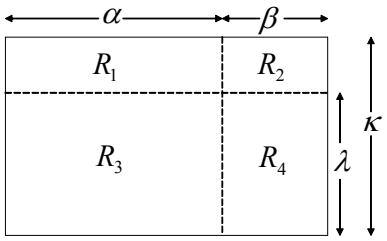
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Δηλαδή:
Αν η x είναι εκ δύο ονομάτων, η y είναι αποτομή της ίδιας αντίστοιχης κατηγορίας και οι ευθείες x, y έχουν σύμμετρα ονόματα και με τον ίδιο λόγο τότε το ορθογώνιο με πλευρές x, y είναι *Ε-ρητό* τετράπλευρο και ισχύει $\rho^2 = x \cdot y$.

Απόδειξη: (του Taisbak)

Έστω $x = \alpha + \beta$ είναι η εκ δύο ονομάτων και $y = \kappa - \lambda$ είναι η αποτομή.

Τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\kappa}{\lambda}$ και α, κ σύμμετρα και β, λ σύμμετρα.



Από το σχήμα έχουμε: $R_3 = R_2 + R_4$ (αφού $\alpha \cdot \lambda = \beta \cdot \kappa$) και

$$R_1 + R_3 = \beta \cdot \kappa = \text{Ε-ρητό.}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε: $R_1 + R_2 + R_4 =$ Ε-ρητό

και εφόσον $R_4 = \beta \cdot \lambda =$ Ε-ρητό από την Χ15 παίρνουμε $R_1 + R_2 =$ Ε-ρητό.

Άρα $x \cdot y = (\alpha + \beta) \cdot (\kappa - \lambda) =$ Ε-ρητό.

Οι προτάσεις X112, X113 και X114 δίνοντας τη συζυγία αποτομής και εκ δύο ονομάτων παίζουν καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων πράγμα που δεν έχει ως τώρα επισημάνει κανείς από όσους έχουν ασχοληθεί με το Βιβλίο X και τη σημαντικοότητα της οποίας αναφέραμε ήδη στην εισαγωγή αυτής της εργασίας.

Το Βιβλίο X τελειώνει με την πρόταση X115 αν και σε χειρόγραφα υπάρχουν προσθήκες όπως εναλλακτικές αποδείξεις των X115,106,107, δύο αποδείξεις για την ασυμμετρία πλευράς-διαγωνίου τετραγώνου, κατασκευές συμμέτρων ευθυγράμμων ή στερεών σχημάτων. Ο Fowler πάντως αναφέρει την πιθανότητα και οι προτάσεις X112-115 να είναι μεταγενέστερες προσθήκες [Fowler, σελ.182] πράγμα όμως που δεν συνάδει με τη σπουδαιότητα των προτάσεων X112-114 όπως αυτή αναδεικνύεται μέσω της χρήσης τους στην απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων. Η πρόταση X115 είναι με μεγάλη πιθανότητα προσθήκη.

Πρόταση X115

Οι άλογες ευθείες είναι άπειρες τον αριθμό.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία
οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Μια Ανακατασκευή τηςΑπόδειξης της Παλινδρομικής Περιοδικότητας της Ανθυφαίρεσης Δύο Δυνάμει Μόνο Σύμμετρων Γραμμών

Τελειώνοντας τη μελέτη του Βιβλίου Χ θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη για την παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση δυο δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών (ευθυγράμμων τμημάτων). Πρόκειται για μια ανακατασκευή της απόδειξης αυτής με χρήση μόνο των αποτελεσμάτων του Βιβλίου Χ των Στοιχείων του Ευκλείδη. Έτσι ενισχύεται η άποψη ότι στην Αρχαία Ελλάδα γνώριζαν αυτό το θεώρημα και η συγγραφή του Βιβλίου Χ πιθανώς να ήταν η συλλογή των εργαλείων που απαιτούνταν για την απόδειξή της. Επομένως, παρόλο που δεν έχει βρεθεί καταγεγραμμένη αυτή η απόδειξη μπορούμε να εικάσουμε-συμπεράνουμε ότι τους ήταν γνωστή. Η απόδειξη που ακολουθεί έγινε από τον καθηγητή κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη και παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο Θερινό Σχολείο που οργανώθηκε από το Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών των Πανεπιστημίων Αθηνών και Κύπρου στο Ναύπλιο από 21 έως 28 Αυγούστου 2003.

1. Εισαγωγή

Η ανθυφαίρεση είναι η πλέον βασική πυθαγόρεια έννοια και προέκυψε μέσα από τη μουσική και συγκεκριμένα μέσα από την αναζήτηση μέτρου για την αρμονία. Με την ανάπτυξη θεωρίας λόγων εμφανίζεται, στην πεπερασμένη της μορφή, στο Βιβλίο VII των Στοιχείων του Ευκλείδη, ως διαδικασία εύρεσης ΜΚΔ δύο αριθμών, ο γνωστός ευκλείδειος αλγόριθμος. Τέλος, αποτελεί μια από τις σημαντικότερες έννοιες του Βιβλίου Χ, όπου πλέον ως άπειρη διαδικασία αποτελεί χαρακτηρισμό για τα ασύμμετρα μεγέθη. Εκτός όμως από τα μαθηματικά, η ανθυφαίρεση φαίνεται να έχει σημαντική θέση και στην πλατωνική φιλοσοφία όπως μπορεί κανείς να διακρίνει μελετώντας τους διαλόγους του Πλάτωνα.

Στο άρθρο αυτό γίνεται λόγος για την ειδική περίπτωση άπειρης ανθυφαίρεσης που όμως έχει τις επιπλέον ιδιότητες να είναι περιοδική και μάλιστα με παλινδρομική περίοδο. Από φιλοσοφικής απόψεως, θα πρέπει να επισημανθεί η εμφάνιση αυτής της μορφής της ανθυφαίρεσης στους διαλόγους του Πλάτωνα και κυρίως στη διαιρετική διαδικασία του ορισμού του πολιτικού στον ομώνυμο διάλογο. Από μαθηματικής απόψεως πρέπει να επισημανθεί ότι η παλινδρομικά περιοδική ανθυφαίρεση είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των τετραγωνικών αρρήτων η μελέτη της οποίας ξεκινά από το Βιβλίο Χ των Στοιχείων και φτάνει μέχρι τις μέρες μας με τη σύγχρονη θεωρία των συνεχών κλασμάτων.

Μία απόδειξη της παλινδρομικά περιοδικής ανθυφαίρεσης υπάρχει στο βιβλίο του David Fowler “The Mathematics of Plato’s Academy”, όπου χρησιμοποιούνται όμως και στοιχεία των σύγχρονων μαθηματικών. Εδώ παρουσιάζεται μια ανακατασκευή της απόδειξης όπως αυτή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μόνο τη θεωρία του Βιβλίου Χ, πράγμα που νοηματοδοτεί την ύπαρξη και το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού και μας κάνει να πιστεύουμε πως οι αρχαίοι μελετητές ήξεραν την απόδειξη αυτή παρόλο που δεν βρέθηκε ποτέ καταγεγραμμένη.

2. Προαπαιτούμενα

Στην παράγραφο αυτή συνοψίζουμε τους βασικούς ορισμούς και τα κύρια αποτελέσματα που υπάρχουν σε διάφορες πηγές των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών σχετικά με την ανθυφαίρεση και τις ιδιότητές της.

Ορισμός 1 (Ανθυφαίρεση δύο γραμμών).

Έστω a, ρ γραμμές (δηλαδή ευθύγραμμα τμήματα) με $a > \rho$. Η διαδικασία της κατ' επανάληψη εφαρμογής του Ευκλειδείου αλγορίθμου, ξεκινώντας με διαιρετέο το α και διαιρέτη το ρ και θεωρώντας σε κάθε επανάληψη ως διαιρετέο και διαιρέτη, τον διαιρέτη και το υπόλοιπο αντίστοιχα της προηγούμενης επανάληψης (Ευκλείδειας διαίρεσης) ονομάζεται ανθυφαιρετική διαίρεση των α και ρ. Πιο συγκεκριμένα έχουμε την ακολουθία διαιρέσεων:

$$a = \mu_1 \rho + a_1 \qquad a_1 < \rho$$

$$\rho = I_1 a_1 + \rho_1 \qquad \rho_1 < a_1$$

$$a_1 = I_2 \rho_1 + a_2 \qquad a_2 < \rho_1$$

$$\rho_1 = I_3 a_2 + \rho_2 \qquad \rho_2 < a_2$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_n = I_{2n} \rho_n + a_{n+1} \qquad a_{n+1} < \rho_n$$

$$\rho_n = I_{2n+1} a_{n+1} + \rho_{n+1} \qquad \rho_{n+1} < a_{n+1}$$

$$\ldots\ldots$$

Αν η διαδικασία δεν τελειώνει, δηλαδή το υπόλοιπο είναι πάντα διάφορο του μηδενός, τότε η διαδικασία αναφέρεται ως άπειρη ανθυφαίρεση, ενώ διαφορετικά αναφέρεται ως πεπερασμένη.

Η ακολουθία των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των a, ρ είναι η γνησίως φθίνουσα ακολουθία γραμμών

$$a > \rho > a_1 > \rho_1 \ldots\ldots a_n > \rho_n > a_{n+1} > \rho_{n+1} \ldots\ldots$$

Η ακολουθία των πηλίκων της ανθυφαίρεσης των a, ρ είναι η ακολουθία

$$\mu_1, I_1, I_2, \ldots\ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots\ldots$$

οπότε γράφουμε

$$Ανθ(a,\rho) = [\mu_1, I_1, I_2, \ldots\ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots\ldots].$$

■

Παρατήρηση 1. *Από τον ορισμό της ανθυφαιρετικής διαίρεσης είναι φανερό ότι η ανθυφαίρεση δυο γραμμών είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις*

$$\text{Ανθ}(a_n, \rho_n) = [I_{2n}, I_{2n+1}, \ldots\ldots],$$

$$\text{Ανθ}(\rho_n, a_{n+1}) = [I_{2n+1}, I_{2n+2}, \ldots\ldots].$$

Η πεπερασμένη ανθυφαίρεση εμφανίζεται στο Βιβλίο VII των Στοιχείων του Ευκλείδη και η διάκριση ανάμεσα σε άπειρη και πεπερασμένη ανθυφαίρεση στο Βιβλίο Χ. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τις προτάσεις Χ2 και Χ3 των Στοιχείων έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό της ασυμμετρίας δυο γραμμών.

Θεώρημα 2 (Ανθυφαιρετικό κριτήριο ασυμμετρίας δυο γραμμών). *Οι* a, ρ *είναι ασύμμετρες γραμμές, δηλαδή δεν υπάρχει γραμμή* δ *και αριθμοί* n, m *με* $a = n\delta$, $\rho = m\delta$ *, αν και μόνον αν η ανθυφαίρεση των* a, ρ *είναι άπειρη.* ■

Η ανθυφαίρεση οδηγεί επιπλέον σε ένα κριτήριο για την ισότητα των λόγων γράμμων. Υπενθυμίζουμε πρώτα τον Ευκλείδειο ορισμό της αναλογίας:

Ορισμός 2 (Αναλογία γραμμών). *Για τις γραμμές* a, β, γ, δ *ισχύει:*

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \ \textit{(ισότητα χωρίων).}$$ ■

Η θεμελιώδης ιδιότητα που αφορά τις αναλογίες και εμφανίζεται στα Τοπικά του Αριστοτέλη (158b24-159a2) είναι η εξής:

Θεώρημα 3 (Ανθυφαιρετικό κριτήριο ισότητας λόγων γραμμών). *Για τις γραμμές* a, β, γ, δ *με* $a > \beta$ *και* $\gamma > \delta$ *ισχύει*

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow Av\theta(a, \beta) = Av\theta(\gamma, \delta). \qquad \blacksquare$$

Σημειώνουμε εδώ ότι το θεώρημα αυτό δεν υπάρχει στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ακολούθως περιγράφουμε μια διαδικασία που θα αναφέρεται ως γραμμικοποίηση της ανθυφαίρεσης. Η βασική ιδέα της γραμμικοποίησης είναι να εκφραστούν όλοι οι λόγοι των διαδοχικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης ως πολλαπλάσια του αρχικού διαιρέτη ρ. Με τον τρόπο αυτό οι λόγοι των διαδοχικών υπολοίπων ανάγονται σε γραμμές και η μονάδα που χρησιμοποιείται για τη μέτρησή τους είναι ο αρχικός διαιρέτης ρ. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3 (Γραμμικοποίηση Ανθυφαίρεσης). *Έστω*

$$a > \rho > a_1 > \rho_1 \ldots\ldots a_n > \rho_n > a_{n+1} > \rho_{n+1} \ldots\ldots$$

η ακολουθία των υπολοίπων την ανθυφάιρεσης των α και ρ. Ορίζουμε τότε την αντίστοιχη ακολουθία των γραμικοποιημένων πηλίκων των υπολοίπων (x_n) *ως εξής:*

$$x_1 = a_1$$

$$\frac{\rho}{x_{2n}} = \frac{a_n}{\rho_n} \quad ή \quad x_{2n} = \frac{\rho_n}{a_n} \cdot \rho, \qquad n \geq 1$$

$$\frac{\rho}{x_{2n+1}} = \frac{\rho_n}{a_{n+1}} \quad ή \quad x_{2n+1} = \frac{a_{n+1}}{\rho_n} \cdot \rho, \qquad n \geq 1. \qquad \blacksquare$$

Οι βασικές ιδιότητες της γραμμικοποίησης της ανθυφαίρεσης συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση. Οι ιδιότητες αυτές αφορούν τρία βασικά χαρακτηριστικά της ακολουθίας (x_n) που ορίστηκε παραπάνω. Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι ότι η

ακολουθία είναι άνω φραγμένη από τον πρώτο διαιρέτη της ανθυφαίρεσης ρ. Το δεύτερο αφορά τις ανθυφαιρέσεις του ρ ως προς τους διαφόρους όρους της ακολουθίας (x_n). Προκύπτει ότι οι ανθυφαιρέσεις αυτές αντιστοιχούν σε τμήματα της ανθυφαίρεσης των α και ρ. Τέλος, θεωρώντας τη γραμμή ρ ως μονάδα μέτρησης, εκφράζεται ο αντίστροφος κάθε όρου της ακολουθίας (x_n) σε ανθυφαιρετική μορφή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 4 (Ιδιότητες γραμμικοποίησης της ανθυφαίρεσης). *Για την ακολουθία* (x_n) *των γραμικοποιημένων πηλίκων των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης ισχύουν τα παρακάτω*

i. $x_n < \rho, \quad n = 1,2,...$

ii. $Ανθ(\rho, x_n) = [I_n \ , I_{n+1} \ , \ldots\ldots \ ], \quad n = 1,2,...$

iii. $x_n(I_n\rho + x_{n+1}) = \rho^2, \quad n = 1,2,\ldots.$

Απόδειξη.

i. Είναι εξ' ορισμού $\dfrac{\rho}{x_{2n}} = \dfrac{a_n}{\rho_n}$ και $a_n > \rho_n$ άρα $\rho > x_{2n}$.

Επίσης $\dfrac{\rho}{x_{2n+1}} = \dfrac{\rho_n}{a_{n+1}}$ και $\rho_n > a_{n+1}$ άρα $\rho > x_{2n+1}$.

Άρα $x_n < \rho$ για κάθε n.

ii. Η σχέση $\dfrac{\rho}{x_{2n}} = \dfrac{a_n}{\rho_n}$ από το ανθυφαιρετικό κριτήριο ισότητας λόγων των Τοπικών του Αριστοτέλη γράφεται ισοδύναμα $\text{Ανθ}(\rho, x_{2n}) = \text{Ανθ}(a_n, \rho_n)$ και έτσι παίρνουμε $\text{Ανθ}(\rho, x_{2n}) = [I_{2n}, I_{2n+1}, \ldots\ldots]$.

Όμοια η σχέση $\dfrac{\rho}{x_{2n+1}} = \dfrac{\rho_n}{a_{n+1}}$ γράφεται ισοδύναμα $\text{Ανθ}(\rho, x_{2n+1}) = \text{Ανθ}(\rho_n, a_{n+1})$ και παίρνουμε $\text{Ανθ}(\rho, x_{2n+1}) = [I_{2n+1}, I_{2n+2}, \ldots\ldots]$.

Άρα γενικά είναι $\text{Ανθ}(\rho, x_n) = [I_n \ , I_{n+1} \ , \ldots\ldots \ ]$.

iii. Είναι $a_n = I_{2n}\rho_n + a_{n+1}$ άρα

$$\frac{a_n}{\rho_n} = \frac{I_{2n}\rho_n + a_{n+1}}{\rho_n}.$$

Όμως εξ' ορισμού είναι $\frac{\rho}{x_{2n+1}} = \frac{\rho_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \rho \cdot a_{n+1} = \rho_n \cdot x_{2n+1}$.

Οπότε $\frac{I_{2n}\rho_n + a_{n+1}}{\rho_n} = \frac{I_{2n}\rho + x_{2n+1}}{\rho} \Leftrightarrow (I_{2n}\rho_n + a_{n+1}) \cdot \rho = (I_{2n}\rho + x_{2n+1}) \cdot \rho_n$

$$\Leftrightarrow I_{2n}\rho_n\rho + a_{n+1}\rho = I_{2n}\rho\rho_n + x_{2n+1}\rho_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}\rho = x_{2n+1}\rho_n \quad \text{που ισχύει.}$$

Επομένως, η σχέση $\frac{a_n}{\rho_n} = \frac{I_{2n}\rho_n + a_{n+1}}{\rho_n}$ ανάγεται στην $\frac{a_n}{\rho_n} = \frac{I_{2n}\rho + x_{2n+1}}{\rho}$ και

επειδή $\frac{\rho}{x_{2n}} = \frac{a_n}{\rho_n}$ (ορισμός του x_{2n}) έχουμε

$$\frac{\rho}{x_{2n}} = \frac{I_{2n}\rho + x_{2n+1}}{\rho} \Leftrightarrow \rho^2 = x_{2n} \cdot (I_{2n}\rho + x_{2n+1}).$$

Όμοια έχουμε $\rho^2 = x_{2n-1} \cdot (I_{2n-1}\rho + x_{2n})$, οπότε τελικά $\rho^2 = x_n \cdot (I_n\rho + x_{n+1})$. ■

Ένα βασικό εργαλείο είναι ο επόμενος χαρακτηρισμός της τελικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης δυο γραμμών.

Θεώρημα 5 (Κριτήριο λόγου για την τελική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης)
Έστω a, ρ γραμμές με $a > \rho$ και

$$a > \rho > a_1 > \rho_1 \ldots\ldots a_n > \rho_n > a_{n+1} > \rho_{n+1} \ldots\ldots$$

η ακολουθία των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των a, ρ. Αν ένα ζεύγος υπολοίπων έχει τον ίδιο λόγο με κάποιο άλλο ζεύγος υπολοίπων, π.χ. αν για κάποια $n < m$ ισχύει

$$\frac{a_n}{\rho_n} = \frac{a_m}{\rho_m},$$

τότε η ανθυφαίρεση των a και ρ είναι τελικά περιοδική.

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από τη θεμελιώδη ιδιότητα των Τοπικών του Αριστοτέλη (ανθυφαιρετικό κριτήριο ισότητας λόγων). ■

Παρατήρηση 2. *Με βάση τη διαδικασία της γραμμικοποίησης της ανθυφαίρεσης που περιγράψαμε παραπάνω το κριτήριο λόγου γίνεται: Η ανθυφαίρεση των* a, ρ *είναι τελικά περιοδική αν υπάρχουν* n, m *με* $n < m$ *τέτοια ώστε* $x_n = x_m$.

Δυο άλλες βασικές έννοιες που παρουσιάζονται στο βιβλίο Χ του Ευκλείδη είναι οι έννοιες της αποτομής και της γραμμής εκ δύο ονομάτων (βλέπε Στοιχεία Χ36 και Χ73 αντίστοιχα).

Ορισμός 4 (Αποτομή) *Αν* a, β *γραμμές με* $a > \beta$ *και* a, β *ασύμμετρες ενώ* a^2, β^2 *σύμμετρα (ως χωρία) τότε η διαφορά* $a - \beta$ *ονομάζεται αποτομή.*

Ορισμός 5 (Γραμμή εκ δύο ονομάτων) *Αν* a, β *γραμμές με* $a > \beta$ *και* a, β *ασύμμετρες ενώ* a^2, β^2 *σύμμετρα (ως χωρία) τότε η γραμμή* $\alpha+\beta$ *ονομάζεται γραμμή εκ δύο ονομάτων.*

Οι δυο αυτές έννοιες θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω για την απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης δυο δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών.

3. Θεώρημα Περιοδικότητας

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε δυο γραμμές α και ρ που ικανοποιούν τη σχέση

$$a^2 = N \cdot \rho^2$$

όπου ο N είναι ένας μη-τετράγωνος αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος ώστε $\kappa^2 = N.$ Τότε, από την πρόταση Χ9 των Στοιχείων προκύπτει ότι οι a, ρ είναι ασύμμετρες γραμμές και επομένως από την πρόταση Χ2 που αναφέρθηκε παραπάνω έχουμε ότι η ανθυφαίρεση των a, ρ είναι άπειρη, έστω

$$Av\theta(a, \rho) = [\mu_1, I_1, I_2, \ldots\ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots\ldots]$$

με ακολουθία υπολοίπων

$$a > \rho > a_1 > \rho_1 \ldots\ldots a_n > \rho_n > a_{n+1} > \rho_{n+1} \ldots\ldots$$

Πρόταση 1 *Η* x_1 *είναι αποτομή, ως προς τη* ρ.

Απόδειξη. Από την ανθυφαιρετική σχέση $a = \mu_1\rho + a_1$ έχουμε ότι $x_1 = a_1 = a - \mu_1\rho$ και επιπλέον ότι $a > \mu_1\rho.$

Επίσης είναι και a, ρ ασύμμετρες ενώ από τη σχέση $a^2 = N\rho^2$ έχουμε ότι a^2, ρ^2 σύμμετρα.

Άρα η x_1 είναι αποτομή, ως προς τη ρ. ■

Με βάση την Παρατήρηση 2 που αναφέραμε παραπάνω, η τελική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης των δυνάμει μόνο σύμμετρων αριθμών α και ρ που ικανοποιούν τη σχέση $a^2 = N\rho^2$, μπορεί να αποδειχθεί μέσω της ακολουθίας (x_n) των γραμμικοποιημένων πηλίκων των υπολοίπων της ανθυφαίρεσης. Συγκεκριμένα, αν αποδείξουμε ότι υπάρχουν n, m με $n < m$ ώστε $x_n = x_m$ τότε από το Θεώρημα 5

έχουμε το συμπέρασμα. Προς το σκοπό αυτό θα αποδείξουμε ότι οι όροι x_n ικανοποιούν σχέσεις της μορφής $\lambda_n x_n = a - \mu_n \rho$, όπου τα λ_n και τα μ_n είναι (ακέραιοι) αριθμοί που παίρνουν πεπερασμένες το πλήθος τιμές. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 6 (Έκφραση της γραμμικοποιημένης ακολουθίας ως ακολουθίας αποτομών) *Έστω $a > \rho$ δύο γραμμές, N όχι τετράγωνος αριθμός και $a^2 = N\rho^2$. Έστω (x_n) η γραμμικοποιημένη ακολουθία της ανθυφαίρεσης των α και ρ. Τότε υπάρχουν αριθμοί λ_n, μ_n με $\lambda_1 = 1$ και $\mu_1 \rho < a < (\mu_1 + 1)\rho$ που ικανοποιούν τα εξής:*

i. $\lambda_n \lambda_{n+1} = N - \mu_n^2$ *ώστε* $\lambda_n \le N$.

ii. $\lambda_n \bar{x}_n = a + \mu_{n-1}\rho = \lambda_n (I_{n-1}\rho + x_n)$.

iii. $\mu_{n-1} < I_{n-1}\lambda_n$ *και* $\mu_n + \mu_{n-1} = I_{n-1}\lambda_n$.

iv. $\lambda_n x_n = a - \mu_n \rho$ *έτσι ώστε* x_n *αποτομή και* $\mu_n \le \mu_1$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\lambda_1 = 1$, οπότε $\lambda_1 x_1 = x_1 = a - \mu_1 \rho \Rightarrow \lambda_1 x_1 = a - \mu_1 \rho$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι από την ανθυφαιρετική σχέση $a = \mu_1 \rho + a_1$ με $a_1 < \rho$ παίρνουμε

$$a = \mu_1 \rho + a_1 \Rightarrow \mu_1 \rho < a \quad \text{και}$$

$$a_1 < \rho \Rightarrow \mu_1 \rho + a_1 < \mu_1 \rho + \rho \Rightarrow a < (\mu_1 + 1) \cdot \rho$$

οπότε $\mu_1 \rho < a < (\mu_1 + 1) \cdot \rho$.

Συνεπώς, αν για κάποιο μ είναι $\mu\rho < a$, τότε είναι και $\mu \le \mu_1$. Η παρατήρηση αυτή θα φανεί χρήσιμη παρακάτω για την απόδειξη της ιδιότητας (iv).

Η κατασκευή των ακολουθιών (λ_n) και (μ_n) και η απόδειξη των ιδιοτήτων (i)-(iv) θα γίνει επαγωγικά. Για ευκολία, η κατασκευή και η απόδειξη θα διαχωριστούν στα παρακάτω δύο λήμματα που αντιστοιχούν στην αρχή και στο βήμα της επαγωγής αντίστοιχα. Με την απόδειξη των δύο λημμάτων συμπληρώνεται και η απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 1 (Αρχή της επαγωγής)

i. Είναι $\lambda_1 = 1$ οπότε $\lambda_1 \mid N - \mu_1^2$ και ορίζουμε το λ_2 ως εξής $\lambda_2\lambda_1 = N - \mu_1^2$ έτσι ώστε να είναι $\lambda_2 \le N$.

ii. Ορίζουμε $\bar{x}_1 = a + \mu_1\rho$ δηλαδή είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων και ισχύει $a + \mu_1\rho = \bar{x}_1 = \lambda_2(I_1\rho + x_2)$.

iii. Είναι $\mu_1 < I_1\lambda_2$ και ορίζουμε το μ_2 ως εξής $\mu_2 + \mu_1 = I_1\lambda_2$.

iv. Ισχύει $\lambda_2 x_2 = a - \mu_2\rho$ οπότε $\mu_2 \le \mu_1$ και η x_2 είναι αποτομή.

Απόδειξη.

i. Εφόσον $\lambda_1 = 1$ έχουμε άμεσα ότι $\lambda_1 \mid N - \mu_1^2$.

ii. Είναι

$$x_1\bar{x}_1 = (a - \mu_1\rho)(a + \mu_1\rho) = a^2 - \mu_1^2\rho^2 = (N - \mu_1^2)\rho^2 = \lambda_2\rho^2.$$

Όμως

$$x_1(I_1\rho + x_2) = \rho^2 \Rightarrow x_1\lambda_2(I_1\rho + x_2) = \lambda_2\rho^2$$

Από τις παραπάνω έπεται ότι $\bar{x}_1 = \lambda_2(I_1\rho + x_2)$ οπότε τελικά έχουμε ότι

$$a + \mu_1\rho = \bar{x}_1 = \lambda_2(I_1\rho + x_2).$$

iii. Είναι

$$2\mu_1\rho = \mu_1\rho + \mu_1\rho < a + \mu_1\rho = \bar{x}_1 = \lambda_2(I_1\rho + x_2) = \lambda_2 I_1\rho + \lambda_2 x_2$$
$$< \lambda_2 I_1\rho + \lambda_2\rho \le 2\lambda_2 I_1\rho,$$

οπότε

$$\mu_1\rho < \lambda_2 I_1\rho \Rightarrow \mu_1 < \lambda_2 I_1.$$

Έτσι μπορούμε και ορίζουμε $\mu_2 = \lambda_2 I_1 - \mu_1$.

iv. Είναι

$$a + \mu_1\rho = \lambda_2 I_1\rho + \lambda_2 x_2 \Rightarrow \lambda_2 x_2 = a + \mu_1\rho - \lambda_2 I_1\rho \Rightarrow$$
$$\lambda_2 x_2 = a - (\lambda_2 I_1 - \mu_1)\rho \Rightarrow \lambda_2 x_2 = a - \mu_2\rho$$

Άρα είναι x_2 αποτομή και $\mu_2 \le \mu_1$.

Λήμμα 2 (το επαγωγικό βήμα από το κ στο $\kappa+1$) *Έστω ότι*

i. $\lambda_{k-1} \mid N-\mu_{k-1}^2$ *και ορίζουμε το* λ_k *ως εξής* $\lambda_k\lambda_{k-1} = N-\mu_{k-1}^2$ *έτσι ώστε να είναι* $\lambda_k \le N$.

ii. *Ορίζουμε το* $\bar{x}_{k-1}$ *ως εξής* $\lambda_{k-1}\bar{x}_{k-1} = a+\mu_{k-1}\rho$ *δηλαδή είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων και ισχύει* $\lambda_{k-1}\bar{x}_{k-1} = a+\mu_{k-1}\rho = \lambda_k(I_{k-1}\rho + x_k)$.

iii. Είναι $\mu_{k-1} < I_{k-1}\lambda_k$ *και ορίζουμε το* μ_k *ως εξής* $\mu_k + \mu_{k-1} = I_{k-1}\lambda_k$.

iv. *Ισχύει* $\lambda_k x_k = a-\mu_k\rho$ *οπότε* $\mu_k \le \mu_1$ *και η* x_k *είναι αποτομή.*

Τότε

I. $\lambda_k \mid N-\mu_k^2$ *και ορίζουμε το* λ_{k+1} *ως εξής* $\lambda_{k+1}\lambda_k = N-\mu_k^2$ *έτσι ώστε να είναι* $\lambda_{k+1} \le N$.

II. *Ορίζουμε το* $\bar{x}_k$ *ως εξής* $\lambda_k\bar{x}_k = a+\mu_k\rho$ *δηλαδή είναι γραμμή εκ δύο ονομάτων και ισχύει* $\lambda_k\bar{x}_k = a+\mu_k\rho = \lambda_{k+1}(I_k\rho + x_{k+1})$.

III. *Είναι* $\mu_k < I_k\lambda_{k+1}$ *και ορίζουμε το* μ_{k+1} *ως εξής* $\mu_{k+1} + \mu_k = I_k\lambda_{k+1}$.

IV. *Ισχύει* $\lambda_{k+1}x_{k+1} = a-\mu_{k+1}\rho$ *οπότε* $\mu_{k+1} \le \mu_1$ *και η* x_{k+1} *είναι αποτομή.*

Απόδειξη

I. Από τη σχέση (iv) έχουμε

$$\mu_k \le \mu_1 \Rightarrow \mu_k^2 \le \mu_1^2 < N$$

και

$$\begin{aligned} N-\mu_k^2 &= (N-\mu_{k-1}^2)+(\mu_{k-1}^2-\mu_k^2) \\ &= \lambda_k\lambda_{k-1} + (\mu_{k-1}-\mu_k)(\mu_{k-1}+\mu_k) && \text{(λόγω της (i))} \\ &= \lambda_k\lambda_{k-1} + (\mu_{k-1}-\mu_k)I_{k-1}\lambda_k && \text{(λόγω της (iii))} \\ &= \lambda_k(\lambda_{k-1} + I_{k-1}(\mu_{k-1}-\mu_k)) \\ &= \lambda_k\lambda_{k+1}. && \text{(από τον ορισμό του } \lambda_{k+1}\text{)} \end{aligned}$$

II. Από τη σχέση (iv) έχουμε

$$\lambda_k x_k = a-\mu_k\rho.$$

Επίσης είναι

$$\lambda_k\bar{x}_k = a+\mu_k\rho$$

οπότε παίρνουμε

$$\lambda_k^2 x_k \bar{x}_k = (a - \mu_k \rho)(a + \mu_k \rho) = a^2 - \mu_k^2 \rho^2 = \lambda_{k+1} \lambda_k \rho^2 \quad \text{(λόγω της (I))}$$

Διαγράφοντας το λ_k έχουμε

$$\lambda_k x_k \bar{x}_k = \lambda_{k+1} \rho^2 .$$

Όμως από την ανθυφαιρετική σχέση

$$x_k (I_k \rho + x_{k+1}) = \rho^2$$

παίρνουμε

$$x_k (I_k \rho + x_{k+1}) \lambda_{k+1} = \lambda_{k+1} \rho^2 .$$

Άρα τελικά

$$x_k (I_k \rho + x_{k+1}) \lambda_{k+1} = \lambda_k x_k \bar{x}_k \Rightarrow \lambda_k \bar{x}_k = \lambda_{k+1} (I_k \rho + x_{k+1}) .$$

III. Από τη (II) έχουμε

$$\lambda_k \bar{x}_k = \lambda_{k+1} (I_k \rho + x_{k+1}) < \lambda_{k+1} (I_k + 1) \rho \qquad (\text{αφού } x_{k+1} < \rho).$$

Επίσης

$$(\mu_1 + \mu_k) \rho < a + \mu_k \rho = \lambda_k \bar{x}_k$$

Άρα

$$(\mu_1 + \mu_k) \rho < \lambda_{k+1} (I_k + 1) \rho \Rightarrow (\mu_1 + \mu_k) < \lambda_{k+1} (I_k + 1) \le 2 \lambda_{k+1} I_k .$$

Έστω, προς το άτοπο, ότι $I_k \lambda_{k+1} \le \mu_k$. Τότε θα έχουμε

$$\mu_1 + \mu_k < 2 \lambda_{k+1} I_k \le 2 \mu_k \Rightarrow \mu_1 < \mu_k ,$$

άτοπο αφού $\mu_1 \ge \mu_k$. Επομένως

$$\mu_k < I_k \lambda_{k+1} .$$

IV. Από τη (II) έχουμε

$$a + \mu_k \rho = \lambda_{k+1} (I_k \rho + x_{k+1}) \Rightarrow$$

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = a + \mu_k \rho - \lambda_{k+1} I_k \rho \Rightarrow$$

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = a - (-\mu_k + \lambda_{k+1} I_k) \rho \Rightarrow$$

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = a - \mu_{k+1} \rho$$

Άρα η x_{k+1} είναι αποτομή και $\mu_{k+1} \le \mu_1$. ■

Χρησιμοποιώντας την έκφραση των όρων της ακολουθίας (x_n) ως αποτομών, είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 7 (Τελική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης δυο δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών) *Έστω* $a > \rho$ *δυο γραμμές,* N *όχι τετράγωνος αριθμός και* $a^2 = N\rho^2$. *Τότε η Ανθ*(a, ρ) *είναι τελικά* ***περιοδική***.

Απόδειξη. Το σύνολο $\{(\lambda, \mu) : \lambda \le N, \mu \le \mu_1\}$ όπου λ, μ αριθμοί είναι προφανώς πεπερασμένο. Επιπλέον, λόγω της προηγούμενης πρότασης, Για κάθε n υπάρχουν λ_n και μ_n με $\lambda_n \le N, \mu_n \le \mu_1$ τέτοιοι ώστε $\lambda_n x_n = a - \mu_n \rho$.

Από την αρχή του περιστερεώνα συνάγουμε ότι υπάρχουν αριθμοί *n,m* με $n < m$ τέτοιοι ώστε $x_n = x_m$. Με βάση το Θεώρημα 5 (κριτήριο λόγου) και την παρατήρηση 2 έχουμε ότι η Ανθ(a, ρ) είναι τελικά περιοδική. ■

4. Θεώρημα Παλινδρομικότητας

Στην παράγραφο αυτή θα αποδειχτεί ότι η τελικά περιοδική ανθυφαίρεση δυο δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών είναι παλινδρομική. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε μια ακόμη ακολουθία (ω_n) της οποίας οι όροι είναι οι «αντίστροφοι» των συζυγών $\bar{x}_n$ των x_n (θεωρώντας ως μονάδα μέτρησης το ρ).

Ορισμός 6 (Αντίστροφοι συζυγών της (x_n)) *Ορίζουμε ακολουθία (ω_n) ως εξής* $\bar{x}_n\omega_n = \rho^2$.

Παρατήρηση 3. *Παρατηρούμε ότι θα ισχύει* $x_n\overline{\omega}_n = \rho^2$.

Πρόταση 2. *Η ω_n είναι αποτομή και ισχύει:* $\lambda_{n+1}\omega_n = a - \mu_n\rho$.

Απόδειξη. Εξ' ορισμού της (ω_n) έχουμε

$$\frac{\omega_n}{\rho} = \frac{\rho}{\bar{x}_n} = \frac{\lambda_n\rho}{\lambda_n\bar{x}_n} = \frac{\lambda_n\rho}{a+\mu_n\rho} = \frac{\lambda_n\rho(a-\mu_n\rho)}{(a+\mu_n\rho)(a-\mu_n\rho)} =$$

$$= \frac{\lambda_n\rho(a-\mu_n\rho)}{\lambda_{n+1}\lambda_n\rho^2} = \frac{a-\mu_n\rho}{\lambda_{n+1}\rho}.$$

Άρα

$$\frac{\omega_n}{1} = \frac{a-\mu_n\rho}{\lambda_{n+1}} \Rightarrow \lambda_{n+1}\omega_n = a - \mu_n\rho. \qquad \blacksquare$$

Πρόταση 3. *Ισχύει* $\omega_n < \rho$.

Απόδειξη. Είναι

$$\lambda_n \bar{x}_n = a + \mu_n \rho > (\mu_1 + \mu_n)\rho \geq (\mu_{n-1} + \mu_n)\rho =$$

$$= I_{n-1}\lambda_n \rho \geq \lambda_n \rho.$$

Επομένως

$$\bar{x}_n > \rho.$$

Όμως

$$\frac{\omega_n}{\rho} = \frac{\rho}{\bar{x}_n}$$

άρα είναι και

$$\rho > \omega_n.$$

Πρόταση 4. *Ισχύει* $\omega_1(x_1 + 2\mu_1\rho) = \rho^2$.

Απόδειξη. Ισχύουν οι σχέσεις $x_1 = a - \mu_1\rho$ και $\lambda_2\omega_1 = a - \mu_1\rho$ οπότε με απ'ευθείας υπολογισμό έχουμε

$$\lambda_2\omega_1(x_1 + 2\mu_1\rho) = (a - \mu_1\rho)(a - \mu_1\rho + 2\mu_1\rho) = (a - \mu_1\rho)(a + \mu_1\rho) =$$

$$= a^2 - \mu_1^2\rho^2 = (N - \mu_1^2)\rho^2 = \lambda_2\rho^2.$$

Άρα

$$\omega_1(x_1 + 2\mu_1\rho) = \rho^2. \qquad \blacksquare$$

Πρόταση 5. *Ισχύει* $\omega_{n+1}(I_n\rho + \omega_n) = \rho^2$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lambda_{n+2}\omega_{n+1} = a - \mu_{n+1}\rho$$

και

$$\lambda_{n+1}(I_n\rho + \omega_n) = \lambda_{n+1}I_n\rho + (a - \mu_n\rho) = a - \mu_{n+1}\rho.$$

Οπότε είναι

$$\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}\omega_{n+1}(I_n\rho + \omega_n) = (a + \mu_{n+1}\rho)(a - \mu_{n+1}\rho) = (N - \mu_{n+1}^2)\rho^2 =$$

$$= \lambda_{n+1}\lambda_{n+2}\rho^2.$$

Άρα

$$\omega_{n+1}(I_n\rho + \omega_n) = \rho^2. \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα 8 (Παλινδρομικότητα της περιόδου της ανθυφαίρεσης δυο δυνάμει μόνο σύμμετρων γραμμών) *Έστω $a > \rho$ δύο γραμμές, N όχι τετράγωνος αριθμός και $a^2 = N\rho^2$. Τότε υπάρχουν αριθμοί $\mu_1, I_1, I_2, ..., I_k$ ώστε*

$$Ανθ(a,\rho) = [\mu_1, \overline{I_1, I_2, ..., I_{k-1}, (I_k), I_{k-1}, ..., I_2, I_1, 2\mu_1}].$$

Γενικότερα το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν οι a, ρ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες γραμμές.

Απόδειξη. Διατάσσουμε τις ακολουθίες (x_n) και (ω_n) ως εξής

$$x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_n, \omega_n, ...$$

Από την αρχή του περιστερεώνα έχουμε ότι υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο στην κατ'αυτό τον τρόπο διαταχθείσα ακολουθία τέτοιο ώστε

1) Όλα τα προηγούμενα στοιχεία της ακολουθίας είναι ανά δύο διαφορετικά και
2) Το στοιχείο που μας ενδιαφέρει ταυτίζεται με ένα προηγούμενο.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε:

<u>1η περίπτωση</u>

Τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικά και το x_k ταυτίζεται με ένα προηγούμενο.

Τότε η υπόθεση που κάνουμε είναι ότι $x_k = \omega_{k-1}$.

<u>2η περίπτωση</u>

Τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}, x_k$ είναι ανά δύο διαφορετικά και το ω_k ταυτίζεται με ένα προηγούμενο.

Τότε η υπόθεση που κάνουμε είναι ότι $\omega_k = x_k$.

Απόδειξη της υπόθεσης της 1ης περίπτωσης

Α. Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι $x_k = x_1$.

Τότε είναι $\overline{x}_k = \overline{x}_1$ και επειδή $\overline{x}_k\omega_k = \overline{x}_1\omega_1 = \rho^2$ παίρνουμε $\omega_1 = \omega_k$.

Όμως είναι $\omega_1(x_1 + 2\mu_1\rho) = \rho^2$ και $\omega_k(\omega_{k-1} + I_{k-1}\rho) = \rho^2$

Άρα $x_1 + 2\mu_1\rho = \omega_{k-1} + I_{k-1}\rho$ και αφού πρόκειται για ανθυφαιρετικές σχέσεις προκύπτει ότι $x_1 = \omega_{k-1}$ που είναι άτοπο γιατί έχουμε υποθέσει ότι τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

Άρα $x_k \neq x_1$.

B. Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι $x_k = x_l$ για l με $1 < l < k$.

Τότε είναι $\bar{x}_k = \bar{x}_l$ και επειδή $\bar{x}_k\omega_k = \bar{x}_l\omega_l = \rho^2$ παίρνουμε $\omega_l = \omega_k$.

Όμως είναι $\omega_l(\omega_{l-1} + I_{l-1}\rho) = \rho^2$ και $\omega_k(\omega_{k-1} + I_{k-1}\rho) = \rho^2$

Άρα $\omega_{l-1} + I_{l-1}\rho = \omega_{k-1} + I_{k-1}\rho$ και αφού πρόκειται για ανθυφαιρετικές σχέσεις προκύπτει ότι $\omega_{l-1} = \omega_{k-1}$ που είναι άτοπο γιατί έχουμε υποθέσει ότι τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_l, \omega_l, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

Άρα $x_k \neq x_l$ για $1 < l < k$.

C. Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι $x_k = \omega_l$ για l με $1 \leq l < k-1$.

Τότε είναι $\bar{x}_k = \bar{\omega}_l$ και επειδή $\bar{x}_k\omega_k = \bar{x}_l\omega_l = \rho^2$ παίρνουμε $x_l = \omega_k$.

Όμως είναι $x_l(x_{l+1} + I_{l+1}\rho) = \rho^2$ και $\omega_k(\omega_{k-1} + I_{k-1}\rho) = \rho^2$

Άρα $x_{l+1} + I_{l+1}\rho = \omega_{k-1} + I_{k-1}\rho$ και αφού πρόκειται για ανθυφαιρετικές σχέσεις προκύπτει ότι $x_{l+1} = \omega_{k-1}$ που είναι άτοπο γιατί έχουμε υποθέσει ότι τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_l, \omega_l, x_{l+1}, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

Άρα $x_k \neq \omega_l$ για $1 \leq l < k-1$.

Άρα εφόσον το x_k ισούται με ένα από τα $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, ..., x_{k-1}, \omega_{k-1}$ απομένει να είναι $x_k = \omega_{k-1}$.

Όμοια προκύπτει και η απόδειξη της υπόθεσης της 2ης περίπτωσης από όπου παίρνουμε ότι $\omega_k = x_k$. Ολοκληρώνουμε τώρα αποδεικνύοντας την παλινδρομικότητα στην 1η περίπτωση.

Έχουμε αποδείξει ότι $x_k = \omega_{k-1}$.

Όμως είναι $x_k(x_{k+1} + I_k\rho) = \rho^2$ και $\omega_{k-1}(\omega_{k-2} + I_{k-2}\rho) = \rho^2$

Άρα $x_{k+1} + I_k\rho = \omega_{k-2} + I_{k-2}\rho$ και αφού πρόκειται για ανθυφαιρετικές σχέσεις προκύπτει ότι $I_k = I_{k-2}$ και $x_{k+1} = \omega_{k-2}$.

Παρόμοια παίρνουμε ότι $I_{k+1} = I_{k-3}$ και $x_{k+2} = \omega_{k-3}$.

Συνεχίζοντας παίρνουμε ότι $I_1 = I_{2k-3}$ και $x_{2k-2} = \omega_1$.

Όμως είναι $x_{2k-2}(x_{2k-1} + I_{2k-2}\rho) = \rho^2$ και $\omega_1(x_1 + 2\mu_1\rho) = \rho^2$

Άρα $x_1 + 2\mu_1\rho = x_{2k-1} + I_{2k-2}\rho$ και αφού πρόκειται για ανθυφαιρετικές σχέσεις προκύπτει ότι $x_1 = x_{2k-1}$ και $I_{2k-2} = 2\mu_1$.

Από τη σχέση $x_1 = x_{2k-1}$ και το Κριτήριο Λόγου προκύπτει η περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης ενώ από τη σχέση $I_{2k-2} = 2\mu_1$ καθώς και από τις ισότητες

$$I_1 = I_{2k-3}$$

$$I_2 = I_{2k-4}$$

$$\vdots$$

$$I_{k+1} = I_{k-3}$$

$$I_k = I_{k-2}$$

προκύπτει η παλινδρομικότητα στην περίοδο της ανθυφαίρεσης.

Άρα $\text{Ανθ}(a,\rho) = [\mu_1, \overline{I_1, I_2, ..., I_{k-2}, I_{k-1}, I_{k-2}, ..., I_2, I_1, 2\mu_1}]$.

Όμοια στη 2η περίπτωση θα πάρουμε

$$\text{Ανθ}(a,\rho) = [\mu_1, \overline{I_1, I_2, ..., I_{k-1}, I_{k-1}, ..., I_2, I_1, 2\mu_1}].$$

Παραδείγματα

Στην 1η περίπτωση: Έστω ότι $a^2 = 46\rho^2$ τότε

$$\text{Ανθ}(a,\rho) = [\ 6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}\ ]$$

Στη 2η περίπτωση: Έστω ότι $a^2 = 13\rho^2$ τότε

$$\text{Ανθ}(a,\rho) = [\ 3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}\ ]$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Fowler, D. (1987), *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford.

2. Heath, T. (1925), *The thirteen Books of Elements,* USA. (Επανέκδοση: Dover, New York, 1956)

3. Junge G & Thomson T, (1930) *The commentary of Pappus on Book X,* Cambridge: Harvard University Press.

4. Knorr, W. (1975) *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of theTtheory of Incommesurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry,* Dordrecht: Reidel.

5. Knorr, W. (1983) *"La Croix des Mathematiciens":The Euclidean theory of irrational lines,* Bulletin of the American Mathematical Society, **9**, 41-69.

6. Mueller, I. (1981), *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,* Cambridge, MIT Press.

7. Stevin, S. (1634), *Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin, ou sont inseres les Memoires Mathematiques des quelles s'est exerse le Tres-haut et Tres-illustre Prince Maurice de Nassau.*

8. Taisbak, C. (1982) , *Coloured Quadrangles: A guide to the tenth book of Euclid´s Elements,* Copenhagen.

9. V.d.Waerden, B. (1963), *Science Awakening I*, Kluwer. (μετάφραση στα ελληνικά: Η Αφύπνιση της Επιστήμης, Π. Ε. Κρήτης, 2000).

10. Κάλφας, Β. (1995), *Πλάτων-Τίμαιος,* ΠΟΛΙΣ.

11. Μπασιάκου, Α. (2004), *Ο Πολιτικός του Πλάτωνος και η παλιδρομική περιοδικότητα της ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων,* Διπλωματική Εργασία, ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Πανεπ. Αθηνών.

12. Νεγρεπόντης, Σ. (2000), *Η Ανθυφαιρετική Φύση της Διαλεκτικής του Πλάτωνος,* Διεπιστημονική Προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους, Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών V , Αιγαίου-Gutenberg, 15-77.

13. Νεγρεπόντης, Σ. (2002-2003), Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων *«Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών»* και *«Πλάτων και Μαθηματικά»,* ΠΜΣ Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

14. Σταμάτης, Ε. (1975), *Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων – Στοιχεία Βιβλίο Χ,* ΟΕΔΒ.

15. *Ανώνυμα σχόλια στα Στοιχεία του Ευκλείδη* (αρχαίο κείμενο).

16. Ευκλείδου, *Στοιχεία* (αρχαίο κείμενο).

17. Πλάτωνος, *Θεαίτητος* (αρχαίο κείμενο).

18. Πλάτωνος, *Παρμενίδης* (αρχαίο κείμενο).

19. Πλάτωνος, *Πολιτικός* (αρχαίο κείμενο).

20. Πλάτωνος, *Σοφιστής* (αρχαίο κείμενο).

21. Πλάτωνος, *Τίμαιος* (αρχαίο κείμενο).

22. Πλάτωνος, *Φαίδρος* (αρχαίο κείμενο).

23. Πλάτωνος, *Φίληβος* (αρχαίο κείμενο).

Σημείωση:

Τα αρχαία κείμενα είναι από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios).