ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η προβολική υφή της μετρικής στις κλασσικές γεωμετρίες και διδακτικές προεκτάσεις

ΚΩΣΤΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΜ:Δ200723

Επιβλέπων Καθηγητής : ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ

Ρόδος , Μάρτιος 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Λάππας Διονύσιος……(επιβλέπων Καθηγητής)	Αν Καθηγητής	…….
2)Μελάς Αντώνιος	Καθηγητής	……
3)Σπύρου Παναγιώτης	Επ.Καθηγητής	……

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστώ

- Τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Διονύση Λάππα για την τιμή που μου έκανε , να μου εμπιστευτεί την ανάπτυξη του θέματος της διπλωματικής εργασίας και για όλη την υποστήριξη που μου έδωσε.
- Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής τον καθηγητή κύριο Αντώνη Μελά και τον επίκουρο καθηγητή κύριο Παναγιώτη Σπύρου , για την τιμή που μου έκαναν , να είναι μέλη της επιτροπής.
- Όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος
- Τους συμφοιτητές μου για την απεριόριστη βοήθεια που μου προσφέρανε και για τις δημιουργικές συζητήσεις που είχαμε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος ……σελ7

Κεφάλαιο 1^{ο} : Στοιχεία της αναλυτικής προβολικής γεωμετρίας……σελ8

Το προβολικό επίπεδο……σελ 8

Η αρχή του δυισμού……σελ 11

Ευθείες και σημεια στο προβολικό επίπεδο ……σελ 11

Συντεταγμένες ευθείας ……σελ 13

Εξάρτηση – ανεξαρτησία σημείων και ευθειών……σελ 14

Αλλαγή συντεταγμένων ……σελ 14

Συντεταγμένες σημείων ευθείας ……σελ 17

Μια εφαρμογή των συντεταγμένων-αρμονική τετράδα……..σελ18

Κεφάλαιο 2^{ο}:Προβολικοί μετασχηματισμοί και κωνικές τομές στην προβολική γεωμετρία……σελ20

Διπλός λόγος…….. ……σελ20

Ιδιότητες διπλού λόγου ……..σελ23

Προβολικοί μετασχηματισμοί ……..σελ26

Οι προβολικότητες μιας ευθείας στον εαυτό της……..σελ32

Προβολικότητες στο επίπεδο ……..σελ33

Ομολογίες και αρμονικές ομολογίες στο επίπεδο……σελ34

Αξονική προοπτικότητα ……σελ35

Δέσμη ευθειών ……..σελ37

Κωνικές τομές ……σελ38

Πολικότητες……σελ46

Κεφάλαιο 3^{ο} : Στοιχεία συσχετισμένης γεωμετρίας……σελ50

Ορισμός συσχετισμένης γεωμετρίας……σελ50

Συσχετισμένος λόγος ……..σελ52

Οι κωνικές τομές στη συσχετισμένη γεωμετρία ……..σελ54

Εμβαδό στη συσχετισμένη γεωμετρία ……σελ56

Κεφάλαιο 4^{ο} : Μετρικοί χώροι……σελ58

Ο μετρικός χώρος ……σελ58

Κυρτά σύνολα ……..σελ60

Στοιχεία μετρικού χώρου ……σελ62

Ισομετρίες σε μετρικούς χώρους ……..σελ65

Κεφάλαιο 5^{ο}: Μέτρο Minkowski – Ευκλείδεια γεωμετρία……σελ68

Μέτρο Minkowski ……..σελ68

Εμβαδό στη γεωμετρία Minkowski ……σελ73

Συμμετρίες στη γεωμετρία Minkowski ……σελ73

Ορισμός Ευκλείδειας γεωμετρίας……σελ74

Κεφάλαιο 6^{ο}: Υπερβολική και ελλειπτική γεωμετρία……σελ77

Γεωμετρία του Hilbert ……σελ77

Ισομετρίες στη γεωμετρία του Hilbert . Υπερβολική γεωμετρία ……σελ80

Ελλειπτική γεωμετρία……..σελ82

Κεφάλαιο 7^{ο}: Διδακτικές προεκτάσεις……σελ84

Το θεώρημα Πάππου σε μια ειδική περίπτωση με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας ……σελ84

Κατασκευή κωνικών από δέσμες ευθειών……σελ85

Βιβλιογραφία – πηγές……..σελ88

Πρόλογος

Η πρώτη γεωμετρία που αναπτύχθηκε μετά την Ευκλείδεια είναι η προβολική . Αρχικά ενδιέφεραν μόνο οι σχέσεις σύμπτωσης , όμως αυτό έδωσε έναυσμα στην εισαγωγή μεθόδων από τους μετασχηματισμούς . Πολύ αργότερα διαπιστώθηκε ότι μέσω της προβολικής μπορούμε να «κατασκευάσουμε» τις τρεις κλασσικές γεωμετρίες μαζί με τις μετρικές τους .Στην παρούσα εργασία θα αυτή η διαδικασία και συγκεκριμένα:

Στο 1^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζουμε στοιχεία της αναλυτικής προβολικής γεωμετρίας όπως η εισαγωγή συντεταγμένων στο προβολικό επίπεδο και στην προβολική ευθεία και η αλλαγή συντεταγμένων .
Στο 2^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται ο διπλός λόγος , οι προβολικοί μετασχηματισμοί και οι κωνικές τομές στην προβολική γεωμετρία μαζί με τις πολικότητες

Στο 3^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται η συσχετισμένη γεωμετρία ως συνέπεια της προβολικής καθώς και η μορφή των κωνικών τομών στη συσχετισμένη γεωμετρία

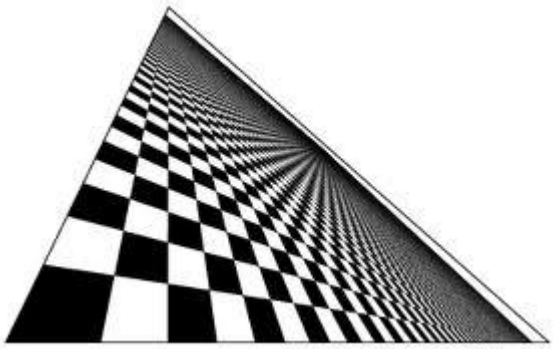
Στο 4^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μετρικοί χώροι και στο 5^{ο} κεφάλαιο η γεωμετρία και το μέτρο Minkowski από όπου με τη βοήθεια της έλλειψης οδηγούμαστε στην Ευκλείδεια γεωμετρία και στο 6^{ο} κεφάλαιο τη Γεωμετρία του Hilbert που μας οδηγεί στην υπερβολική γεωμετρία και στη συνέχεια στην ελλειπτική γεωμετρία.

Στο 7^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο διδακτικές προεκτάσεις και συγκεκριμένα το θεώρημα Πάππου σε μια ειδική περίπτωση με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας και κατασκευή κωνικών από δέσμες ευθειών μιμούμενοι τον ορισμό των κωνικών τομών από την προβολική γεωμετρία.

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία της αναλυτικής προβολικής γεωμετρίας

<u>Το προβολικό επίπεδο</u>

Η προβολική γεωμετρία αναπτύχθηκε μέσα από τις εργασίες του Kepler στις κωνικές τομές τον 16 και 17 αιώνα , όταν ένας αρχιτέκτονας ο Desarques δημοσίευσε μια εργασία του σχετικά με την προοπτική.

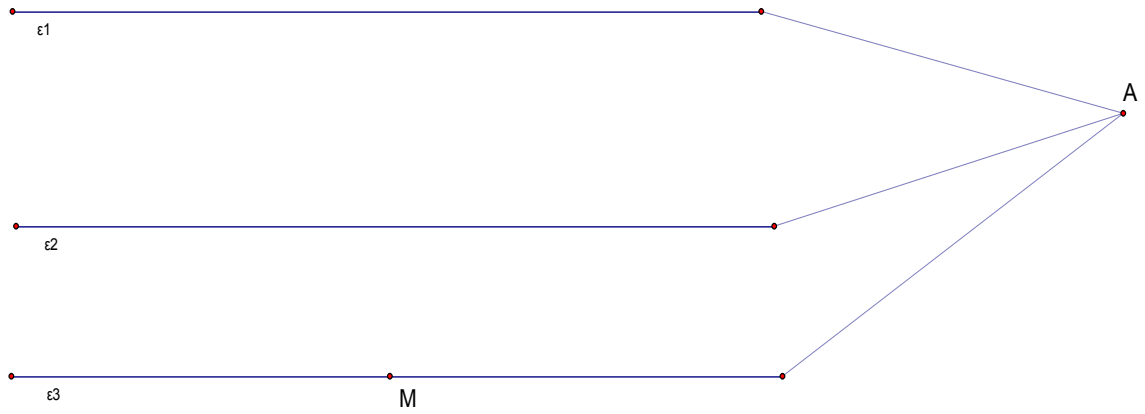


Η κόσμος μας είναι μάλλον προβολικός παρά Ευκλείδειος αφού αν βλέπουμε για παράδειγμα τις ράγες μιας σιδηροδρομικής γραμμής αυτές "τέμνονται" .Έτσι αφού θεωρούμε ότι οι παράλληλες τέμνονται στο άπειρο μπορούμε να προσαρτήσουμε σημεία στο Ευκλείδειο επίπεδο που τα ονομάζουμε ιδεατά σημεία.

Επειδή όμως θα πρέπει η παραδοχή ότι δύο σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία να συνεχίσει να ισχύει και το γεγονός ότι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα μόνο σημείο , θα πρέπει όλες οι παράλληλες με την ίδια διεύθυνση να τέμνονται στο ίδιο σημείο .Μπορούμε να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό ως εξής :

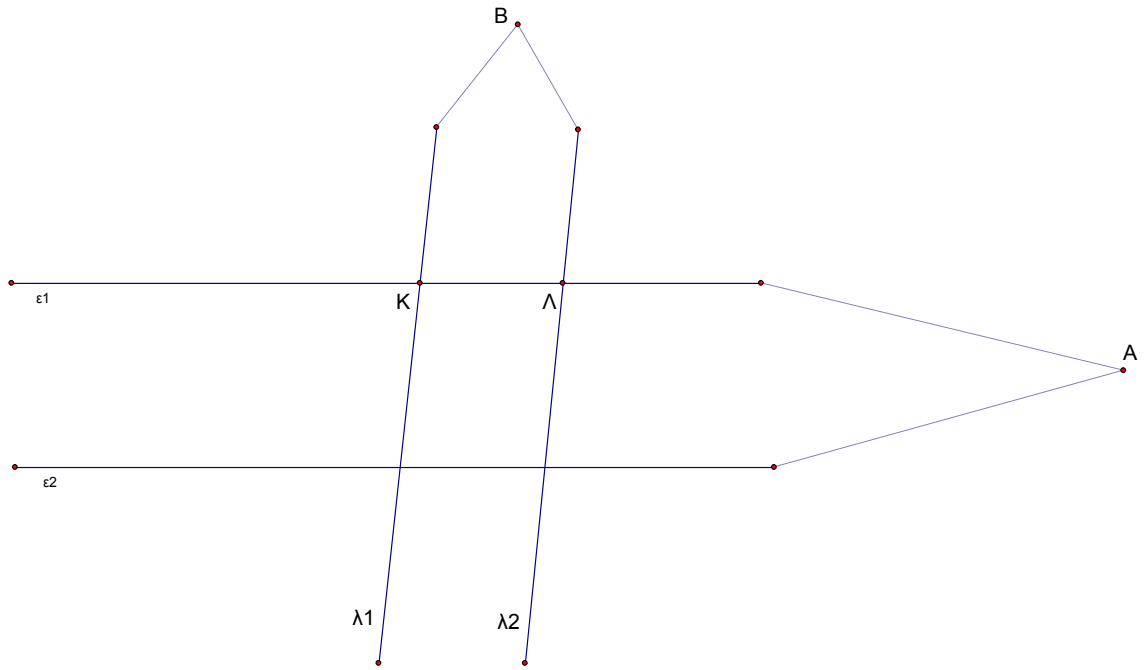
Έστω λοιπόν ε_1 *και* ε_2 *είναι δύο παράλληλες που τέμνονται στο ιδεατό σημείο Α και Μ ένα σημείο του Ευκλείδειου επιπέδου . Αφού τα Α και Μ είναι διαφορετικά ,*

ορίζουν μια ευθεία ε_3 η οποία δε μπορεί να ξανατέμνει τις ε_1 και ε_2 (αφού τις τέμνει στο Α) , επομένως είναι παράλληλη προς αυτές.



Επομένως κάθε ιδεατό σημείο προκύπτει από μια οικογένεια παράλληλων ευθειών. Τα ιδεατά σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους

Αν θεωρήσουμε τις ευθείες λ_1 και λ_2 παράλληλες μεταξύ τους που τέμνουν την ε_1 στα Κ και Λ , όπου η ε_1 δεν είναι παράλληλη με τις δύο άλλες ευθείες . Τότε αν Β είναι το ιδεατό σημείο που αντιστοιχεί στην οικογένεια παραλλήλων των λ_1 και λ_2 , το Β πρέπει να είναι διαφορετικό του Α γιατί σε διαφορετική περίπτωση οι ε_1 και η λ_1 θα τέμνονται σε δύο σημεία .



Η ευθεία που δημιουργείται από δύο ιδεατά σημεία δε διέρχεται από Ευκλείδεια σημεία.

Έστω Α και Β δύο ιδεατά σημεία και Μ ένα Ευκλείδειο σημείο .Αν λ είναι η ευθεία που ορίζουν τα Α και Β , λ_1 η ευθεία που ορίζουν τα Α και Μ και λ_2 η ευθεία που ορίζουν τα Β και Μ Αν η λ διέρχεται από το Μ , τα Α,Β,Μ θα είναι συνευθειακά και οι λ_1 ,λ_2 θα συμπίπτουν.

Έτσι δύο ιδεατά σημεία ορίζουν μια ιδεατή ευθεία για την οποία ισχύει ότι:

Υπάρχει μια μόνο ιδεατή ευθεία

Έστω λ_1 και λ_2 δυο διαφορετικές ιδεατές ευθείες που τέμνονται στο ιδεατό σημείο Α και Μ ένα Ευκλείδειο σημείο . Μια ευθεία που διέρχεται από το Μ και όχι από το Α θα τέμνει τις λ_1 και λ_2 στα Ιδεατά σημεία Κ , Λ και τώρα η ιδεατή ευθεία που δημιουργείται από τα Κ , Λ θα περιέχει και Ευκλείδεια σημεία που είναι άτοπο σύμφωνα με τα παραπάνω.

Η προβολική γεωμετρία στηρίζεται στα παρακάτω τρία αξιώματα

Α) Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μια και μοναδική ευθεία

Β) Δύο διαφορετικές ευθείες τέμνονται πάντοτε σε ένα σημείο

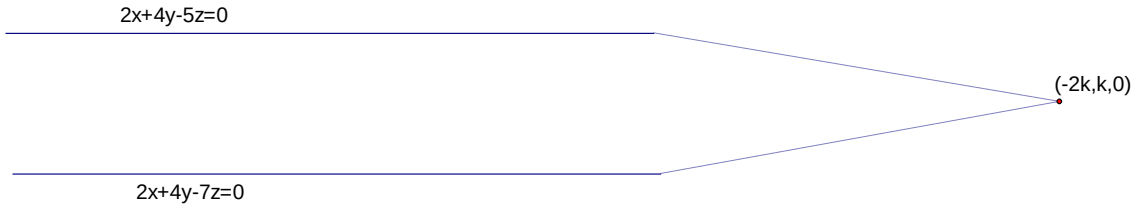
Γ) Υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικά σημεία που ανά τρία είναι μη συνευθειακά

Η αρχή του δυισμού

Αν παρατηρήσουμε στα αξιώματα Α και Β οι λέξεις σημείο και ευθεία μπορούν να αντικαταστήσουν η μια την άλλη . αυτό είναι ένα γενικότερο συμπέρασμα της προβολικής γεωμετρίας όπου αν μια πρόταση είναι αληθής τότε και η δυική της αληθεύει , όπου ως δυική εννοούμε την πρόταση που προκύπτει αν αντικατασταθούν τα σημεία με ευθείες και οι ευθείες με σημεία .

Ευθείες και σημεία στο προβολικό επίπεδο

Ας θεωρήσουμε τις ευθείες του Ευκλείδειου επιπέδου 2x+4y=5 και 2x+4y=7 με την απαίτηση της προβολικής γεωμετρίας , να τέμνονται στο ιδεατό σημείο. Το σύστημα των δύο εξισώσεων με τους δύο άγνωστους είναι αδύνατο , όμως αν πάρουμε τις εξισώσεις 2x+4y-5z=0 και 2x+4y-7z=0 θα έχουμε ένα ομογενές σύστημα με λύση (x,y,z)=(-2k,k,0) . Επαυξήσαμε λοιπόν τους αγνώστους κατά ένα και τώρα η απαίτηση του προβολικού επιπέδου ικανοποιείται .



Γενικά αν έχουμε δύο παράλληλες ευθείες στη γενική τους μορφή μπορούν να γραφούν

$$Ax+By+Γ=0 \quad (1)$$

$$Ax+By+Γ'=0 \quad (2)$$

Όπου ένας τουλάχιστον από τους Α και Β είναι μη μηδενικός και Γ≠Γ' αφού οι ευθείες δεν ταυτίζονται. Με την προσθήκη μιας ακόμα μεταβλητής z οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$Ax+By+Γz=0 \quad (3)$$

$$Ax+By+Γ'z=0 \quad (4)$$

Και για τα σημεία αναφερόμαστε στην τριάδα (x,y,z) .Έτσι αν ένα σημείο του Ευκλείδειου επιπέδου με συντεταγμένες (x,y) ικανοποιεί την εξίσωση (1) τότε η τριάδα (x,y,1) θα ικανοποιεί την εξίσωση (3) . Όμως και η τριάδα (αx,αy,α) με

$α \neq 0$ ικανοποιεί την (3) αφού A(αx)+B(αy)+Γα=α(Ax+By+Γ)=0 .Επομένως κάθε τριάδα με συντεταγμένες ανάλογες προς (x,y,1) θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες του Ευκλείδειου σημείου (x,y) . Συμπερασματικά **κάθε τριάδα ανάλογη προς το (x,y,1) παριστάνει το ίδιο σημείο .**

Έστω η ευθεία του Ευκλείδειου επιπέδου y=mx+b (5) και η νέου τύπου εξίσωση y=mx+bz (6)

- Το σημείο (1,m+b,1) ικανοποιεί την (6) γιατί το Ευκλείδειο σημείο (1,m+b) ικανοποιεί την (5)
- Το σημείο (1,m,0) ικανοποιεί την (6) , χωρίς να υπάρχει ένα αντίστοιχο Ευκλείδειο σημείο . Το σημείο (1,m,0) θα είναι το ιδεατό σημείο του προβολικού επιπέδου

Οι κατακόρυφες ευθείες της μορφής x=c θα πάρουν τη μορφή x=cz και για αυτές το ιδεατό σημείο θα είναι κάθε τριάδα της μορφής (0,α,0) . Επειδή η τριάδα (0,0,0) είναι ανάλογη προς οποιαδήποτε τριάδα θεωρούμε ότι δεν ανήκει στο σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε στον παρακάτω

Ορισμός : Το σύνολο των τριάδων (x_1,x_2,x_3) ,όπου εξαιρείται η τριάδα (0,0,0) αποτελούν τις ομογενείς συντεταγμένες στο προβολικό επίπεδο και οι συντεταγμένες (x_1,x_2,x_3) αντιστοιχούν

- Αν $x_3 \neq 0$, στο Ευκλείδειο σημείο (x,y) με $x = \frac{x_1}{x_3}$ και $y = \frac{x_2}{x_3}$
- Αν $x_3=0$, $x_1 \neq 0$, στο ιδεατό σημείο της ευθείας με κλίση m , όπου $m = \frac{x_2}{x_1}$
- Αν $x_1 = x_3 = 0$, στο ιδεατό σημείο των κατακόρυφων ευθειών

Έτσι το σημείο με Ευκλείδειες συντεταγμένες (4,-3) έχει ομογενείς συντεταγμένες (4,-3,1) ή (-4,3,-1) ή (-8,6,-2) ή οποιαδήποτε τριάδα ανάλογη προς τις παραπάνω και μη μηδενική .Η τριάδα (6,-2,4) είναι οι ομογενείς συντεταγμένες του Ευκλείδειου σημείου $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ενώ η τριάδα (-2,3,0) είναι οι συντεταγμένες του ιδεατού σημείου των ευθειών με κλίση $-\frac{3}{2}$.

<u>Συντεταγμένες ευθείας</u>

Θεωρούμε μια ευθεία όπως έχουμε κατασκευάσει για το προβολικό επίπεδο με εξίσωση $2x_1+4x_2-5x_3=0$. Κάθε άλλη εξίσωση με συντελεστές ανάλογους προς την τριάδα 2 , 4 , -5 θα παριστάνει την ίδια ευθεία π.χ. η εξίσωση $6x_1+12x_2-15x_3=0$. έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ως ευθεία τη τριάδα [2 , 4 , -5] οπότε καταλήγουμε γενικά να θεωρήσουμε την τριάδα $[u_1 , u_2 , u_3]$ ως τις ομογενείς συντεταγμένες ευθείας στο προβολικό επίπεδο που παριστάνει την ευθεία με εξίσωση $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 =0$.

Η παραπάνω εξίσωση πέρα από τη συμμετρία που εκφράζει ως προς τα u και τα x έχει και μια ενδιαφέρουσα δυική ανάλυση.

Αν έχουμε μια σταθερή τριάδα $[u_1 , u_2 , u_3]$ τότε η $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 =0$ είναι η εξίσωση της ευθείας με συντεταγμένες $[u_1 , u_2 , u_3]$ που ικανοποιείται από όλα τα σημεία που ανήκουν πάνω στη συγκεκριμένη ευθεία.

Αν έχουμε ένα σταθερό σημείο (x_1,x_2,x_3) τότε η $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 =0$ παριστάνει την εξίσωση του σημείου , δηλαδή παριστάνει όλες τις τριάδες που οι αντίστοιχες ευθείες που δημιουργούν διέρχονται από το σταθερό σημείο .

Για παράδειγμα η παραπάνω εξίσωση $2x_1+4x_2-5x_3=0$ ικανοποιείται από όλα τα σημεία της ευθείας με ομογενείς συντεταγμένες [2 , 4 , -5] . Αντίστοιχα η εξίσωση $2u_1+4u_2-5u_3=0$ ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των ευθειών που διέρχονται από το σημείο (2, 4, -5).

Εξάρτηση – ανεξαρτησία σημείων και ευθειών

Αν δύο σημεία P_1 και P_2 έχουν συντεταγμένες (x_1,x_2,x_3) , (y_1,y_2,y_3) αντίστοιχα τότε ορίζουμε ως $c_1P_1+c_2P_2$ το σημείο με συντεταγμένες ($c_1x_1+c_2y_1$, $c_1x_2+c_2y_2$, $c_1x_3+c_2y_3$). Ο παραπάνω ορισμός είναι συμβατός με την γραμμική άλγεβρα αλλά έχει το μειονέκτημα , ότι μπορεί διαφορετική επιλογή συντεταγμένων να δώσει τελικά δύο διαφορετικά σημεία . Για παράδειγμα αν το P_1 έχει συντεταγμένες (1, 2, 3) και το P_2 είναι το (2 , 3 , -1) τότε το σημείο P_1+2P_2 θα έχει συντεταγμένες(1, 2, 3) + 2 (2 , 3 , -1) = (5 , 8 , 1) , που σε Ευκλείδεια μορφή είναι το (5 , 8) .

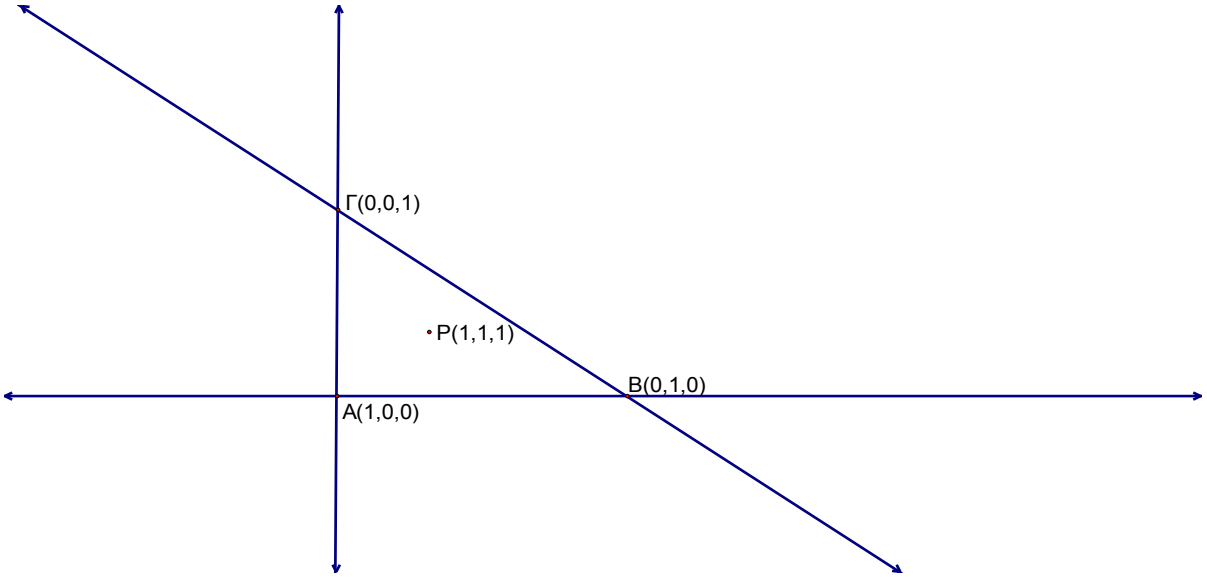
Ενώ αν για το P_1 θεωρήσουμε τις συντεταγμένες (3 , 6 ,9) τότε το σημείο P_1+2P_2 θα έχει συντεταγμένες (3 ,6, 9)+ 2 (2 , 3 , -1) =(7 , 12 ,7) που σε Ευκλείδειες συντεταγμένες είναι το (1 , 12/7) .

Αντίστοιχα αν η τριάδα $[u_1 , u_2 , u_3]$ παριστάνει την ευθεία ε_1 και η τριάδα $[v_1 , v_2 ,v_3]$ παριστάνει την ευθεία ε_2 τότε $c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2$ είναι η ευθεία που αντιστοιχεί στην τριάδα των συντελεστών [$c_1u_1+c_2v_1$, $c_1u_2+c_2v_2$, $c_1u_3+c_2v_3$]

Αλλαγή συντεταγμένων

Στον Ευκλείδειο χώρο οι τριάδες (1,0,0) , (0,1,0) και (0,0,1) αποτελούν βάση του χώρου . Κάθε σημείο του Ευκλείδειου χώρου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω τριάδων .Αν θεωρήσουμε τις παραπάνω τριάδες ως σημεία Α(1,0,0) , Β(0,1,0) , Γ(0,0,1) και με βάση αυτά που ισχύουν για τα σημεία του προβολικού επιπέδου ένα σημείο του επιπέδου θα γράφεται με όχι μοναδικό τρόπο γραμμικός συνδυασμός των Α , Β , Γ . Αν έχουμε για παράδειγμα το σημείο Ρ με

συντεταγμένες (3,5,-6) στο προβολικό επίπεδο τότε P=3A+5B-6Γ , ενώ αν θεωρήσουμε τις τριάδες (3,0,0) , (0,5,0) , (0,0,3) ως συντεταγμένες των A,B,Γ θα είναι P=A+B-2Γ .



Θεωρούμε ακόμα το σημείο P(1,1,1) που για το σύστημα αναφοράς που έχουμε , ισχύει P=A+B+Γ .Το τρίγωνο με κορυφές τα A ,B, Γ ονομάζεται τρίγωνο αναφοράς για το σύστημα συντεταγμένων και το P είναι το μοναδιαίο σημείο .Η ύπαρξη του μοναδιαίου σημείου είναι απαραίτητη για να είναι καλά ορισμένες οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου στο προβολικό επίπεδο .

Στο προβολικό επίπεδο το σημείο A μπορεί να παρασταθεί ως οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του (1,0,0,) π.χ. (4,0,0) ή(3,0,0) οπότε θα καταλήγουμε σε διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου σημείου . Για παράδειγμα το σημείο M(10,20,30) θα είχε συντεταγμένες (10,20,30) ως προς τα A(1,0,0) B (0,1,0) ,Γ(0,0,1) και (5,1,1) ως προς τα (2,0,0) , (0,20,0) , (0,0,30) που όμως είναι τα A ,B ,Γ .Ακόμα παρατηρούμε ότι η τριάδα (5,1,1) δεν είναι ανάλογη της(10,20,30) .Το μοναδιαίο σημείο λοιπόν μας εξασφαλίζει τη σταθερότητα επιλογής των συντεταγμένων των σημείων A ,B ,Γ .Στο παράδειγμα που έχουμε αναφέρει αν το μοναδιαίο σημείο είναι P(5,2,-6) και το τρίγωνο αναφοράς είναι το ABΓ , είναι P=(5,0,0)+(0,2,0)+(0,0,-6) και επιλέγουμε για τα A , B , Γ τις συντεταγμένες A(5,0,0) , B(0,2,0) , Γ(0,0,-6) και έτσι το M έχει συντεταγμένες (2,10,-5) ως προς το τρίγωνο αναφοράς .

Έστω τυχαίο σημείο Μ του προβολικού επιπέδου και P_1 ,P_2 ,P_3 είναι οι κορυφές του τριγώνου αναφοράς και ότι υπάρχουν x'_1 ,x'_2 ,x'_3 με $M=x'_1P_1+x'_2P_2+x'_3P_3$. (1)

Για μια σταθερή επιλογή των P_1 ,P_2 ,P_3 ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω σημείων με συντελεστές $\kappa x'_1$,$\kappa x'_2$,$\kappa x'_3$ θα παριστάνει το ίδιο σημείο Μ . Επομένως η σωστή γραφή για την σχέση (1) είναι

$\kappa M=x'_1P_1+x'_2P_2+x'_3P_3$ (2)

Αν τα P_1 ,P_2 ,P_3 έχουν σταθερές ομογενείς συντεταγμένες (α_{11}, α_{21} ,α_{31}) ,(α_{12}, α_{22}, α_{32}) ,(α_{13} ,α_{23}, α_{33}) τότε από τη σχέση (2) θα έχουμε

$\kappa x_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_{13}x'_3$

$\kappa x_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_{23}x'_3$

$\kappa x_1 = \alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2+\alpha_{33}x'_3$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να παρασταθεί με εξίσωση πινάκων

$$\kappa X=AX'$$

όπου $X=\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{bmatrix}$ $X'=\begin{bmatrix}\chi'_1\\ \chi'_2\\ \chi'_3\end{bmatrix}$ και $A=[\alpha_{ij}]$

Αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος μπορεί να λυθεί ως προς τα x'_1 ,x'_2 ,x'_3

Με $\kappa'X'=A^{-1}X$ όπου $\kappa'=1/\kappa$

Ας δούμε τα παραπάνω με τη βοήθεια ενός παραδείγματος

Τα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες (1,1,0) ,(1,0,1) ,(0,1,1) και (5,1,2) είναι ανά τρία μη συνευθειακά και θα δημιουργήσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων όπου τα τρία πρώτα σημεία θα είναι οι κορυφές του τριγώνου αναφοράς και το τελευταίο σημείο θα είναι το μοναδιαίο σημείο

Είναι (5,1,2)=2(1,1,0)+3(1,0,1)-(0,1,1) ή

(5,1,2)=(2,2,0)+(3,0,3)+(0,-1,-1)

Ο πίνακας για την αλλαγή είναι $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ και οι 'παλιές' συντεταγμένες δίνονται σε σχέση με τις νέες ως εξής :

$$Kx_1=2x'_1+3x'_2$$

$$Kx_2=2x'_1 \qquad -x'_3$$

$$Kx_3= \qquad 3x'_2-x'_3$$

Αφού $k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$ (1)

Η ευθεία με εξίσωση $x_1+3x_2-x_3=0$ θα έχει εξίσωση

$(2x'_1+3x'_2)+3(2x'_1 -x'_3)-(3x'_2-x'_3)=0$ ή $8x'_1-2x'_3=0$

Αν τώρα λύσουμε τις παραπάνω ως προς x_1, x_2 ,x_3 θα πάρουμε

με τη βοήθεια του αντίστροφου πίνακα από τη σχέση (1) θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}=k\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

<u>Συντεταγμένες σημείων ευθείας</u>

Σε αντιστοιχία με τον ορισμό για τις ομογενείς συντεταγμένες του προβολικού επιπέδου ορίζουμε το σύνολο των ζευγών (χ_1 , χ_2) ως τις ομογενείς συντεταγμένες των σημείων μιας ευθείας όπου το ζεύγος παριστάνει

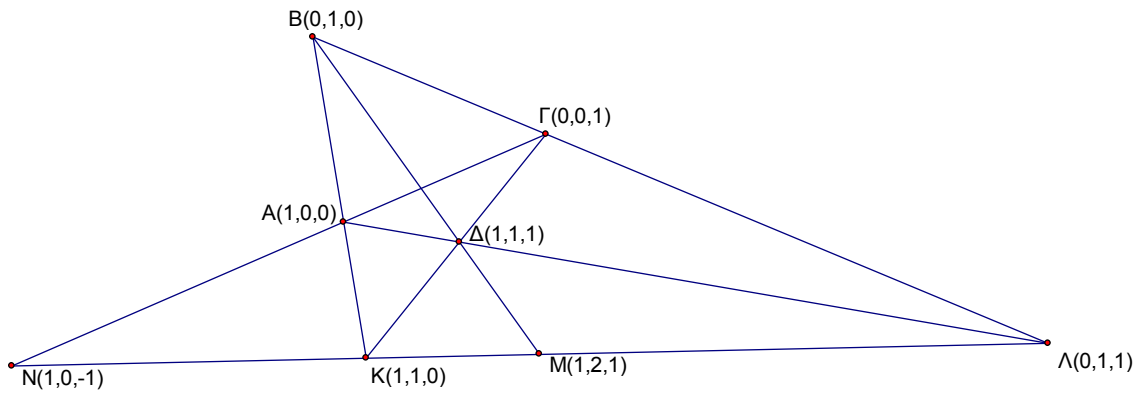
i) Το Ευκλείδειο σημείο της ευθείας με τετμημένη χ_1/χ_2 αν $\chi_2\neq 0$

ii) Το ιδεατό σημείο της ευθείας αν $\chi_2=0$

Επίσης με την διαδικασία που περιγράψαμε στην αλλαγή συντεταγμένων στο προβολικό επίπεδο μπορούμε να αλλάξουμε τα σύστημα συντεταγμένων και σε μια προβολική ευθεία με τη βοήθεια ενός πίνακα 2x2.

<u>Μια εφαρμογή των συντεταγμένων-αρμονική τετράδα</u>

Στην προβολική γεωμετρία το αντίστοιχο θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας είναι το τετράπλευρο , όπως στο παρακάτω σχήμα όπου στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι πλευρές ΑΒ , ΓΔ τέμνονται στο Κ και οι πλευρές ΑΔ , ΒΓ στο Λ .



Ακόμα ονομάζουμε Μ το σημείο τομής της ΚΛ με την ΒΔ και Ν το σημείο τομής της ΚΛ με την ΑΓ .**Τα σημεία Κ,Λ,Μ,Ν λέμε ότι δημιουργούν μια αρμονική τετράδα** .Ας δούμε το τετράπλευρο από την οπτική γωνία των συντεταγμένων .Υποθέτουμε ότι το Α έχει συντεταγμένες (1,0,0) , το Β με (0,1,0) , το Γ με (0,0,1) και το Δ είναι το μοναδιαίο σημείο με συντεταγμένες (1,1,1) .Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $\chi_3=0$ και η ΓΔ έχει εξίσωση $\chi_1-\chi_2=0$. Επομένως το Κ θα έχει συντεταγμένες (1,1,0) .Αντίστοιχα η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση $\chi_1=0$ και η ΑΔ :$\chi_2-\chi_3=0$.Άρα το Λ θα έχει συντεταγμένες (0,1,1) .Η ΚΛ έχει εξίσωση $\chi_1-\chi_2+\chi_3=0$ και η ΒΔ : $\chi_1-\chi_3=0$. Άρα το Μ έχει συντεταγμένες (1,2,1). Η ΓΝ : $\chi_2=0$ και επομένως το Ν έχει συντεταγμένες (1,0,-1) .

Πάνω στην ευθεία ΚΛ παρατηρούμε ότι Μ=Κ+Λ , δηλαδή αν θεωρήσουμε τα Κ ,Λ ως βάση για τα σημεία της ΚΛ , το μοναδιαίο σημείο είναι το Μ . Ακόμα Ν=Κ-Λ , δηλαδή το

σημείο Ν έχει συντεταγμένες (1,-1) . Με βάση τον ορισμό που δώσαμε **παραπάνω αν τα σημεία Κ,Λ,Μ βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία και είναι τα σημεία αναφοράς τότε το τέταρτο αρμονικό σημείο στα Κ,Λ,Μ έχει συντεταγμένες (1,-1) .**

Κεφάλαιο 2ο:Προβολικοί μετασχηματισμοί και κωνικές τομές στην προβολική γεωμετρία

Διπλός λόγος

Σε αντιστοιχία με την γραμμική άλγεβρα λέμε ότι

Ένα σύνολο από σημεία ή ένα σύνολο από ευθείες του προβολικού επιπέδου είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα αν το σύνολο των διανυσμάτων που δημιουργούν οι συντεταγμένες των παραπάνω σημείων ή των ευθειών είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή γραμμικώς ανεξάρτητα .

Αν θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία Α και Β που είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε κάθε έκφραση της μορφής λΑ+μΒ είναι ένα σημείο της ευθείας ΑΒ .Είδαμε παραπάνω ότι για διαφορετικές επιλογές συντεταγμένων των Α και Β προκύπτουν διαφορετικά σημεία . Αν είναι x,y συντεταγμένες των Α και Β τότε θα είναι u=λx+μy οι συντεταγμένες ενός άλλου σημείου της ευθείας ΑΒ .Αν επιλέξουμε για συντεταγμένες του Α την τριάδα x'=γx και για το Β την τριάδα y'=δy τότε θα έχουμε

$$u = \lambda_1 x' + \mu_1 y', \mu\varepsilon \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{\gamma}, \mu_1 = \frac{\mu}{\delta}$$

Αντίστοιχα αν θεωρήσουμε το v=λ'x+μ'y και επιλέξουμε τις νέες τριάδες θα είναι

$v = \lambda_1' x' + \mu_1' y'$ με $\lambda_1' = \frac{\lambda'}{\gamma}, \mu_1 = \frac{\mu'}{\delta}$ και παρατηρούμε τώρα ότι

$\frac{\lambda'_1/\mu'_1}{\lambda_1/\mu_1} = \frac{\frac{\lambda'/\gamma}{\mu'/\delta}}{\frac{\lambda/\gamma}{\mu/\delta}} = \frac{\lambda'/\mu'}{\lambda/\mu}$ που σημαίνει ότι **ο λόγος** $\frac{\lambda'/\mu'}{\lambda/\mu}$ **είναι ανεξάρτητος από την επιλογή συντεταγμένων των σημείων Α και Β .**

Όμως μπορούμε να δώσουμε ένα πιο εύχρηστο ορισμό που θα μας βοηθήσει στη χρήση των συντεταγμένων και που χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες των σημείων στο προβολικό επίπεδο όπως τις έχουμε ήδη ορίσει .

Αν Α , Β , Γ , Δ είναι τέσσερα συνευθειακά σημεία για τα οποία είναι $Γ=λ_1Α+λ_2β$ και $Δ=μ_1Α+μ_2Β$ τότε ορίζουμε ως διπλό λόγο $R(Α,Β:Γ,Δ)=λ_2μ_1/λ_1μ_2$ που όπως έχουμε δει είναι ανεξάρτητος από τν παράσταση των σημείων σε μορφή συντεταγμένων.

Είναι όμως αναλλοίωτος και στην αλλαγή συστήματος συντεταγμένων που μπορούμε να το δείξουμε ως εξής

Έστω κΧ'=ΑΧ η εξίσωση πινάκων που εκφράζει την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων και Υ , Ζ οι συντεταγμένες των Α και Β . Επομένως $λ_1Υ+λ_2Ζ$ και

$μ_1Υ+μ_2Ζ$ θα είναι οι συντεταγμένες των Γ ,Δ αντίστοιχα . Αν Υ' , Ζ' οι συντεταγμένες των Α και Β στο νέο σύστημα θα είναι

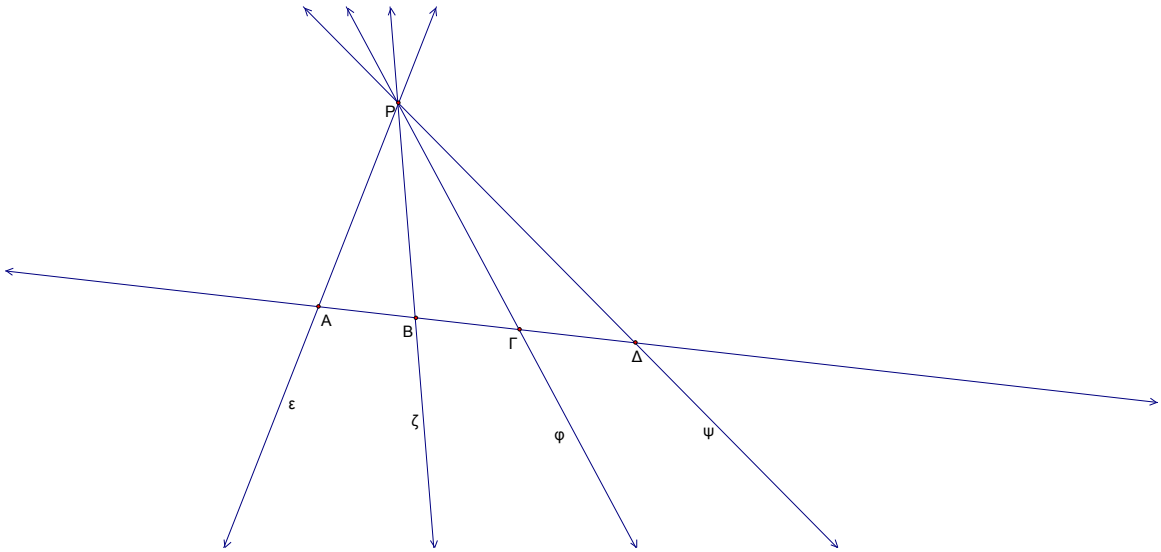
κΥ'=ΑΥ

κΖ'=ΑΖ και άρα $κ(λ_1Υ'+λ_2Ζ')=Α(λ_1Υ+λ_2Ζ)$, $κ(μ_1Υ'+μ_2Ζ')= Α(μ_1Υ+μ_2Ζ)$

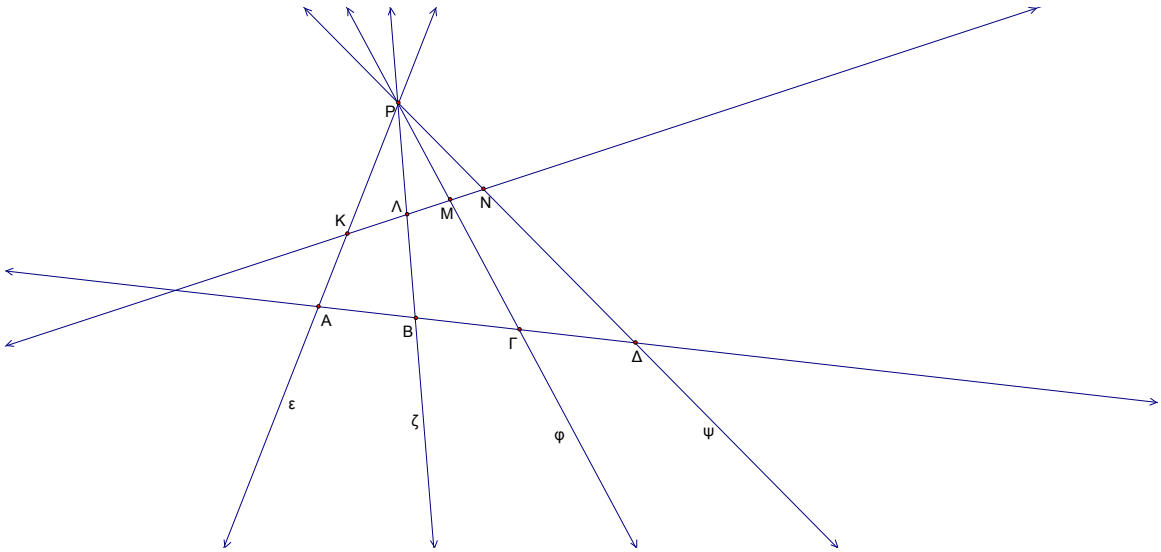
δηλαδή για τα σημεία Α , Β , Γ , Δ είναι πάλι είναι $Γ=λ_1Α+λ_2β$ και $Δ=μ_1Α+μ_2Β$ και έτσι ο διπλός λόγος είναι σταθερός .

όμως ο διπλός λόγος έχει νόημα και στις ευθείες που συντρέχουν . Συγκεκριμένα αν οι ευθείες ε και ζ τέμνονται σε σημείο Ρ του προβολικού επιπέδου τότε κάθε ευθεία της μορφής λε+μζ θα διέρχεται από το Ρ (ο συμβολισμός λε+μζ αφορά τις συντεταγμένες των ευθειών που έχουμε ορίσει στα προηγούμενα)μπορούμε να δώσουμε και το δυικό ορισμό του διπλού λόγου που θα αφορά ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο .
Αν ε , ζ είναι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ και $φ=λ_1ε+λ_2ζ$ και $ψ=μ_1ε+μ_2ζ$ τότε ο διπλός λόγος των ευθειών με τη δοσμένη σειρά είναι $R(ε,ζ,φ,ψ)=\frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$.

Ο διπλός λόγος των ευθειών και ο διπλός λόγος των σημείων συνδέονται μεταξύ τους . Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε , ζ , φ , ψ διέρχονται από το Ρ και μια άλλη ευθεία τις τέμνει στα σημεία Α , Β , Γ , Δ . Για τα σημεία είναι $Γ=λ_1Α+λ_2Β$ και $Δ=μ_1Α+μ_2Β$. Οι συντεταγμένες των Α και Ρ ικανοποιούν την εξίσωση της ε και το ίδιο συμβαίνει για τα Ρ και Β και την ευθεία ζ . Επομένως οι συντεταγμένες του Ρ επαληθεύουν την ευθεία $λ_1ε+λ_2ζ$ και το ίδιο συμβαίνει για το σημείο $Γ= λ_1Α+λ_2Β$. Όμως από τα Ρ και Γ διέρχεται μοναδική ευθεία και επομένως $φ= λ_1ε+λ_2ζ$. Με τα ίδια επιχειρήματα καταλήγουμε $ψ=μ_1ε+μ_2ζ$. Τελικά **ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων και των τεσσάρων ευθειών είναι ίσοι**



Αν ακόμα θεωρήσουμε δύο ευθείες που τέμνουν τις ε , ζ , φ , ψ τότε οι διπλοί λόγοι των σημείων κάθε ευθείας θα είναι ίσοι , αφού καθένας θα είναι ίσος με το διπλό λόγο των ευθειών



Δηλαδή έχουμε R(A,B:Γ,Δ)=R(K,Λ: M,N)=R(ε,ζ,φ,ψ) και από αυτή την σχέση φαίνεται ότι **ο διπλός λόγος είναι ένα σημαντικό αναλλοίωτο της προβολικής γεωμετρίας**

<u>Ιδιότητες διπλού λόγου</u>

Αν είναι $\Gamma=\lambda_1 A+\lambda_2 B$ και $\Delta=\mu_1 A+\mu_2 B$ τότε ο ορισμός του διπλού λόγου μας δίνει $R(A,B:\Gamma,\Delta)=\lambda_2\mu_1/\lambda_1\mu_2$ και $R(A,B:\Delta,\Gamma)=\mu_2\lambda_1/\lambda_2\mu_1$ δηλαδή R(A,B:Γ,Δ) R(A,B:Δ,Γ)=1 .

Αν τα σημεία Γ και Δ δεν ταυτίζονται τότε η ορίζουσα $D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{vmatrix}\neq 0$ γιατί σε διαφορετική περίπτωση οι λ_1 , λ_2 θα ήταν ανάλογοι προς τους μ_1 , μ_2 και τα σημεία A , Γ θα ήταν τα ίδια . Έτσι αν δούμε τις σχέσεις $\Gamma=\lambda_1 A+\lambda_2 B$ και $\Delta=\mu_1 A+\mu_2 B$ σαν ένα σύστημα εξισώσεων , αυτό μπορεί να λυθεί ως προς τα A και B ως εξής :

$$\begin{bmatrix}\Gamma\\ \Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\mu_2 & -\lambda_2\\ -\mu_1 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$A=\frac{\mu_2}{D}\Gamma-\frac{\lambda_2}{D}\Delta$ και $B=-\frac{\mu_1}{D}\Gamma+\frac{\lambda_1}{D}\Delta$ και επομένως R(Γ,Δ:A,B)=

$$\frac{(-\lambda_2/D)(-\mu_1/D)}{(\mu_2/D)(\lambda_1/D)}=\frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2\lambda_1}$$

Δηλαδή R(Γ,Δ:A,B)= (A,B:Γ,Δ)

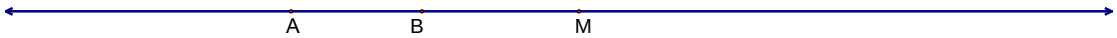
Πάνω σε μια ευθεία του επιπέδου αφού κάθε σημείο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων σημείων θεωρούμε ότι τα σημεία της ευθείας έχουν ομογενείς συντεταγμένες το ζεύγος (α,β) και σε μη ομογενείς συντεταγμένες το πηλίκο α/β .Έτσι αν τα Α και Β έχουν συντεταγμένες (α_1,α_2) , (β_1,β_2) , για τα Γ και Δ θα είναι $Γ=\lambda_1 A+\lambda_2 B$, ή σε μορφή συντεταγμένων $(\gamma_1,\gamma_2)= \lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda_2 (\beta_1,\beta_2) =(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1 , \lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2)$, $Δ=\mu_1 A+\mu_2 B$ και ομοίως θα έχουμε $(\delta_1,\delta_2) =(\mu_1\alpha_1+\mu_2\beta_1 ,\mu_1\alpha_2+\mu_2\beta_2)$.

Αν θεωρήσουμε την ορίζουσα που προκύπτει από τις συντεταγμένες των Α και Γ θα έχουμε

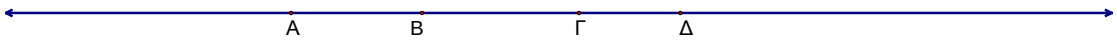
$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1 & \lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2\end{Vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \lambda_1\alpha_1 & \lambda_1\alpha_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \lambda_2\beta_1 & \lambda_2\beta_2\end{vmatrix}=\lambda_1 0+\lambda_2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\lambda_2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$$

Και ο λόγος $\dfrac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}$ εκφράζει το διπλό λόγο σε μορφή συντεταγμένων .

Αν υπολογίσουμε τις ορίζουσες θα είναι $R(A,B:Γ,Δ)=\dfrac{(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)(\beta_1\delta_2-\beta_2\delta_1)}{(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)(\alpha_1\delta_2-\alpha_2\delta_1)}$ που ονομάζεται αναλυτική έκφραση του διπλού λόγου και σε μη ομογενείς συντεταγμένες παίρνει τη μορφή $R(A,B:Γ,Δ)=\dfrac{(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\gamma_1}{\gamma_2})(\frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\delta_1}{\delta_2})}{(\frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\gamma_1}{\gamma_2})(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\delta_1}{\delta_2})}=\dfrac{(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})(\bar{\delta}-\bar{\beta})}{(\bar{\gamma}-\bar{\beta})(\bar{\delta}-\bar{\alpha})}$ όπου $\bar{\gamma}$ οι συντεταγμένες του Γ σε μη ομογενή μορφή . Η παραπάνω μορφή είναι η μορφή που παίρνει ο διπλός λόγος στην Ευκλείδεια γεωμετρία όπου αν έχουμε τρία σημεία μιας ευθείας ορίζουμε τον απλό λόγο των (Α , Β, Μ) ως τον αριθμό λ για τον οποίο $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$



Πολλές φορές γράφουμε $\lambda=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$, με την υπενθύμιση ότι δεν πρόκειται για πηλίκο διανυσμάτων .Σε αναλογία με τον απλό λόγο ορίζουμε και το διπλό λόγο



Αν έχουμε λοιπόν 4 σημεία πάνω σε μια ευθεία τότε ορίζουμε ως διπλό λόγο (cross ratio)τον αριθμό R(Α,Β:Γ,Δ) $=\frac{\overline{\overline{A\Gamma}}}{\overline{\overline{A\Delta}}}\cdot\frac{\overline{\overline{B\Gamma}}}{\overline{\overline{B\Delta}}}$.

Με τη βοήθεια της έκφρασης του διπλού λόγου σε μη ομογενείς συντεταγμένες θα είναι R(Α,Ε:Γ,Δ) R(Ε,Β:Γ,Δ) = $\frac{(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})(\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}{(\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon})(\bar{\delta}-\bar{\alpha})}\cdot\frac{(\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon})(\bar{\delta}-\bar{\beta})}{(\bar{\gamma}-\bar{\beta})(\bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}=\frac{(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})(\bar{\delta}-\bar{\beta})}{(\bar{\gamma}-\bar{\beta})(\bar{\delta}-\bar{\alpha})}$ = R(Α,Β:Γ,Δ)

Μια σχέση που μας είναι απαραίτητη στην υπερβολική γεωμετρία .

Ακόμα αν τα Α,Β,Γ,Δ συνιστούν μια αρμονική τετράδα (με τη σειρά που δίνονται τα σημεία) ή είναι αρμονικά συζυγή όπως είδαμε στα προηγούμενα Γ=Α+Β και Δ=Α-Β οπότε και με βάση τον ορισμό είναι R(Α,Β:Γ,Δ)= -1 .

Θα επικεντρωθούμε τώρα στην αναλυτική έκφραση του διπλού λόγου και έτσι αν Α(α_1 , α_2) , Β(β_1 , β_2) , Γ(γ_1 , γ_2) , Δ(δ_1 , δ_2) είναι οι συντεταγμένες στο ευκλείδειο επίπεδο τεσσάρων συνευθειακών σημείων τότε ο διπλός λόγος παίρνει τη μορφή R(Α,Β:Γ,Δ) = $\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \delta_1 & \delta_2\end{vmatrix}}$

Θα αποδείξουμε ένα σπουδαίο αποτέλεσμα με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης που αναφέρει ότι ο διπλός λόγος είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση που μας δίνει την αλλαγή των συντεταγμένων είναι κΧ=ΑΧ' και ότι οι νέες συντεταγμένες των σημείων είναι Α(α'_1 , α'_2) , Β(β'_1 , β'_2) ,

Γ(γ'_1 , γ'_2) , Δ(δ'_1 , δ'_2) . Τότε θα έχουμε

$$\kappa_\alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\end{pmatrix} \text{ και } \kappa_\gamma\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\gamma'_1\\ \gamma'_2\end{pmatrix}$$

Οι οποίες σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν σε μια σχέση

$$\begin{pmatrix} \kappa_\alpha \alpha_1 & \kappa_\gamma \gamma_1 \\ \kappa_\alpha \alpha_2 & \kappa_\gamma \gamma_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \gamma'_2 \end{pmatrix}$$

Όπου αν εφαρμόσουνε ορίζουσες στην παραπάνω σχέση θα έχουμε

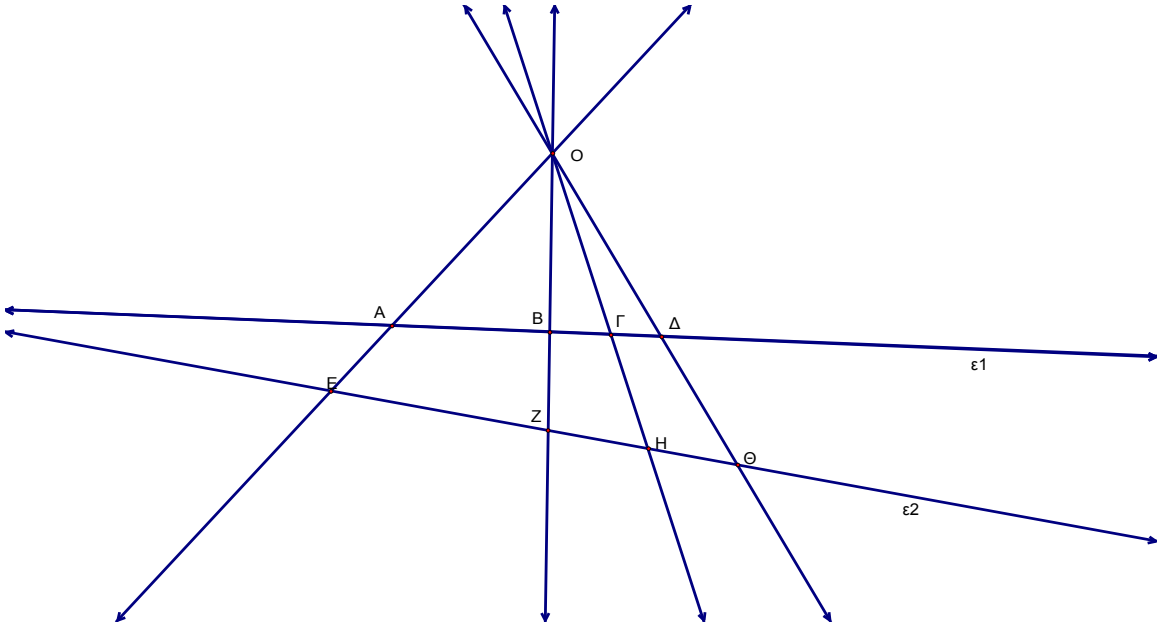
$$\kappa_\alpha \kappa_\gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{|A|}{\kappa_\alpha \kappa_\gamma}\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}\frac{|A|}{\kappa_\beta \kappa_\delta}\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{vmatrix}}{\frac{|A|}{\kappa_\beta \kappa_\gamma}\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}\frac{|A|}{\kappa_\alpha \kappa_\delta}\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \delta'_1 & \delta'_2 \end{vmatrix}}.$$

<u>**Προβολικοί μετασχηματισμοί**</u>

Θα δώσουμε τους ορισμούς των προβολικών μετασχηματισμών που έχουν κεντρική θέση στη προβολική γεωμετρία

Ορισμός : Ονομάζουμε **κεντρική προοπτικότητα** το μετασχηματισμό των σημείων μιας ευθείας , στα σημεία μιας άλλης ευθείας με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ζεύγος σημείων να είναι συνευθειακά με ένα άλλο σταθερό σημείο



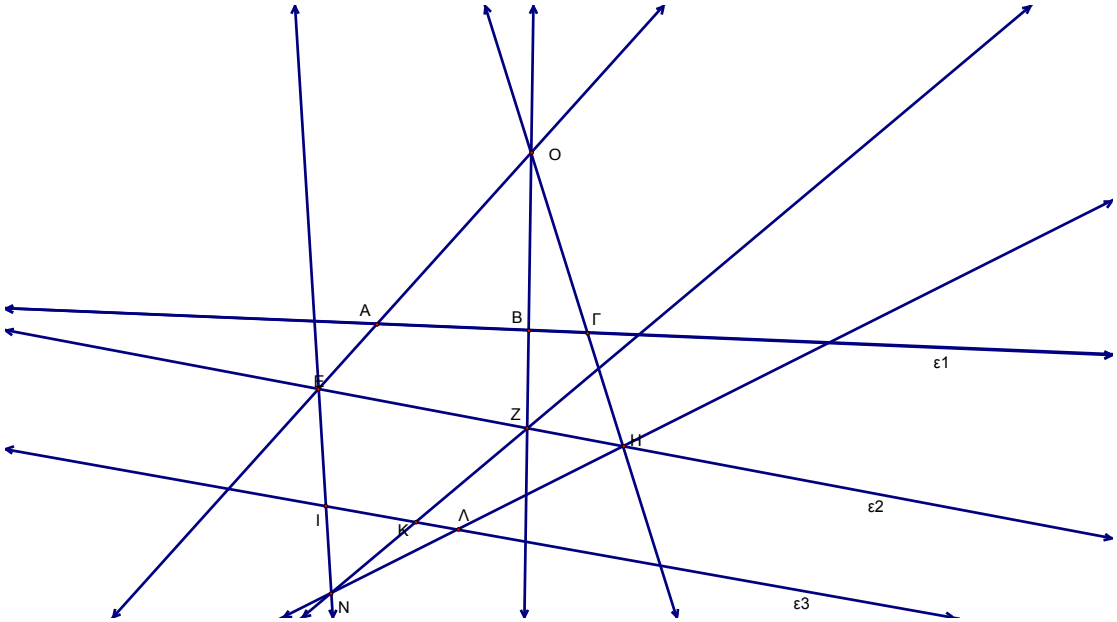
που ονομάζεται κέντρο της προοπτικότητας

Στο παραπάνω σχήμα το Ο είναι το κέντρο της προοπτικότητας και αν ορίσουμε Τ τον μετασχηματισμό θα είναι Τ(Α)=Ε , Τ(Β)=Ζ , Τ(Γ)=Η , Τ(Δ)=Θ και με αυτό τον τρόπο

απεικονίζουμε κάθε σημείο της ε1 σε σημεία της ε2. Είναι προφανές ότι και ο T^{-1} ορίζεται. Παρατηρούμε ότι τα σημεία των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ έχουν τον ίδιο διπλό λόγο αφού έχουμε ήδη δείξει ότι R(Α,Β:Γ,Δ)=R(Ε,Ζ:Η,Θ)

Προβολικός μετασχηματισμός

Αν θεωρήσουμε τη σύνθεση δύο κεντρικών προοπτικοτήτων θα έχουμε μια απεικόνιση από σημεία μιας ευθείας σε σημεία μιας άλλης ευθείας .



Στο παραπάνω σχήμα εκτός του Τ έχουμε και την κεντρική προοπτικότητα Π όπου τα σημεία της $ε_2$ απεικονίζονται στα σημεία της $ε_3$ με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συνευθειακά με το Ν . Δηλαδή Π(Ε)=Ι , Π(Ζ)=Κ , Π(Η)=Λ

Οπότε Π(Τ(Α))=Ι , Π(Τ(Β))=Κ , Π(Τ(Γ))=Λ και με αυτό τον τρόπο κάθε σημείο της $ε_1$ απεικονίζεται σε σημείο της $ε_3$.Με τη βοήθεια των προοπτικοτήτων συμπεραίνουμε για τους διπλούς λόγους ότι **R(Α,Β:Γ,Δ)=R(Ι,Κ:Λ,Μ) .**Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση που μεταφέρει τα σημεία της $ε_1$ στα σημεία της $ε_2$ αφήνει αναλλοίωτο το διπλό λόγο . Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται προβολικότητα.

Αν είναι τα Α,Β βάση για την $ε_1$, Γ είναι το μοναδιαίο σημείο της βάσης και $Δ = λ_1Α+μ_1Β$, αντίστοιχα τα Ι,Κ είναι βάση για την $ε_3$, Λ είναι το μοναδιαίο σημείο και $Μ=λ_2Ι+μ_2Κ$,θα πρέπει οι διπλοί λόγοι να είναι ίσοι και άρα $\frac{\mu_1}{\lambda_1}=\frac{\mu_2}{\lambda_2}$.Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται προβολικότητα.

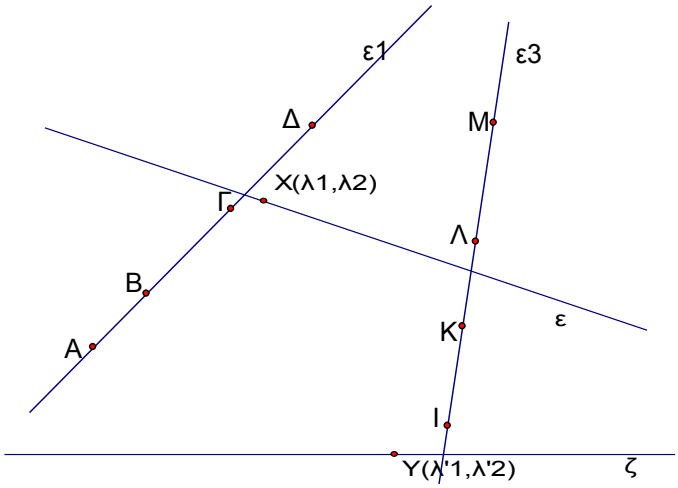
Η προβολικότητα είναι απεικόνιση 1-1 και επί από τα σημεία μιας ευθείας $ε_1$ στα σημεία μιας άλλης ευθείας $ε_3$. Από τον ορισμό που έχουμε δώσει προκύπτει ότι και η αντίστροφη μιας προβολικότητας έχει νόημα και είναι επίσης προβολικότητα.

Αν δούμε την προβολικότητα από αναλυτική άποψη με τη βοήθεια των συντεταγμένων ευθείας η απεικόνιση θα εκφράζεται από το σύστημα εξισώσεων

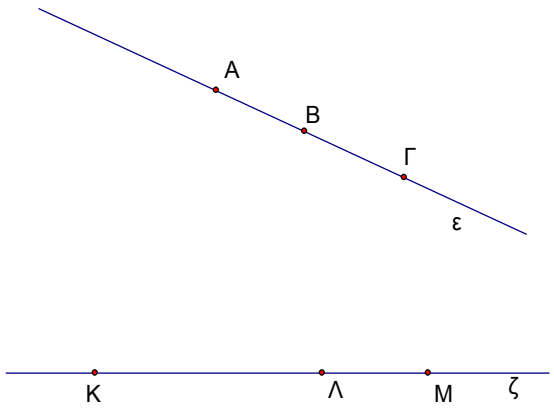
$$λ'_1=α_{11}λ_1+α_{12}λ_2$$

$$λ'_2=α_{21}λ_1+α_{22}λ_2$$

όπου $λ_1$, $λ_2$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου Χ της ε και λ'1 , λ'2 οι συντεταγμένες του Υ σημείου της ευθείας ζ . Αφού θέλουμε η απεικόνιση να είναι 1-1 και επί θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος να είναι μη μηδενική δηλαδή $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.



Μια προβολικότητα μεταξύ δύο ευθειών ε και ζ είναι καλά ορισμένη αν είναι γνωστές οι εικόνες τριών σημείων της ε . Στο διπλανό σχήμα αν Φ(Α)=Κ , Φ(Β)=Λ , Φ(Γ)=Μ και θεωρήσουμε τα σημεία Α,Β ως τη βάση της ευθείας ε και το Γ ως το μοναδιαίο σημείο και αντίστοιχα τα Κ,Λ βάση της ζ και Μ το μοναδιαίο σημείο τότε η απεικόνιση $\lambda'_1=\lambda_1$ και $\lambda'_2=\lambda_2$ εκφράζει μια προβολικότητα μεταξύ των ε και ζ όπου οι εικόνες των Α,Β,Γ είναι τα Κ,Λ,Μ . Η παραπάνω προβολικότητα που κατασκευάσαμε είναι **και μοναδική** γιατί αν πάρουμε τη γενική μορφή , όπως έχει οριστεί παραπάνω ,



$$\lambda'_1=\alpha_{11}\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2$$

$$\lambda'_2=\alpha_{21}\lambda_1+\alpha_{22}\lambda_2$$

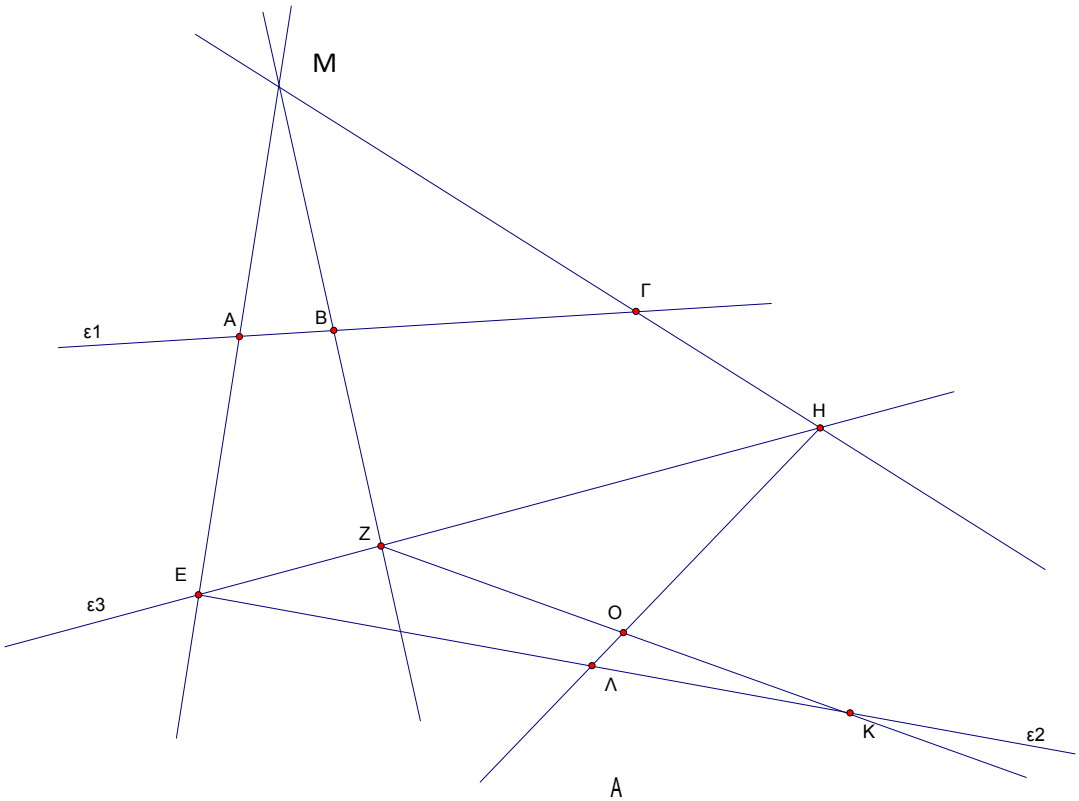
θα πρέπει Φ(Α)=Κ και αφού το Α είναι μέλος της βάσης της ε θα έχει συντεταγμένες (1,0) και το Κ είναι μέλος της βάσης της ζ θα είναι πάλι το (1,0) και από το σύστημα έχουμε $\begin{matrix} 1=\alpha_{11}\cdot 1+\alpha_{12}\cdot 0 \\ 0=\alpha_{21}\cdot 1+\alpha_{22}\cdot 0 \end{matrix}$ ή $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{21}=0$. Ομοίως για τα Β και Λ $\begin{matrix} 0=\alpha_{11}\cdot 0+\alpha_{12}\cdot 1 \\ 1=\alpha_{21}\cdot 0+\alpha_{22}\cdot 1 \end{matrix}$

που δίνει $\alpha_{12}=0$ και $\alpha_{22}=1$.Για τα μοναδιαία σημεία $\begin{matrix} 1=\alpha_{11}\cdot 1+\alpha_{12}\cdot 1 \\ 1=\alpha_{21}\cdot 1+\alpha_{22}\cdot 1 \end{matrix}$ που ικανοποιούνται από τις τιμές που έχουμε προσδιορίσει . Τελικά προκύπτει η απεικόνιση με $\lambda'_1=\lambda_1$ και $\lambda'_2=\lambda_2$.

Θεώρημα : Μια προβολικότητα ευθειών μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση από δύο κεντρικές προοπτικότητες

Μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη για το παραπάνω θεώρημα ως εξής : Αν Τ είναι η προβολικότητα που απεικονίζει τα σημεία της ε_1 στα σημεία της ε_2 με Τ(Α,Β,Γ)=Ε,Κ,Λ , θεωρούμε σημείο τυχαίο Μ της ευθείας ΑΕ , διαφορετικό από τα Α και Ε και μια τυχαία ευθεία ε_3 που διέρχεται από το Ε και είναι διαφορετική της ε_2 .Ονομάζουμε Ζ και Η τα

σημεία τομής των ΜΒ και ΜΓ αντίστοιχα με την ε_3 .Αν Σ είναι η κεντρική προοπτικότητα (διαμέσου του Ο που θεωρούμε το σημείο τομής των ΖΚ και ΛΗ) για την οποία Σ(Ε,Ζ,Η)=Ε,Κ,Λ και Π είναι η προοπτικότητα μεταξύ των ε1 και ε3 με κέντρο το Μ , όπου Π(Α,Β,Γ)=Ε,Ζ,Η

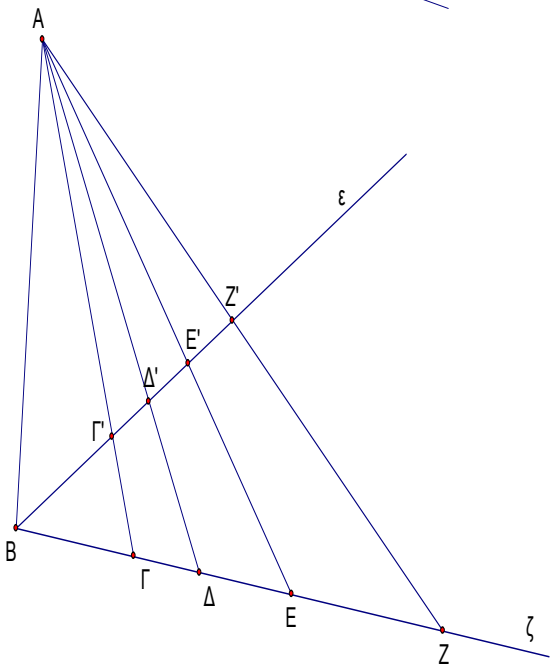


Θα είναι (ΣοΠ)(Α,Β,Γ)=Ε,Κ,Λ

Αφού από τρία σημεία ορίζεται μια μόνο προβολικότητα και η ΣοΠ είναι προβολικότητα θα είναι ΣΠ=Τ

Αν μια προοπτικότητα έχει ένα σταθερό σημείο τότε είναι προβολικότητα

Απόδειξη : Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα προβολικό μετασχηματισμό από τα σημεία της ζ στα σημεία της ε όπου εικόνα

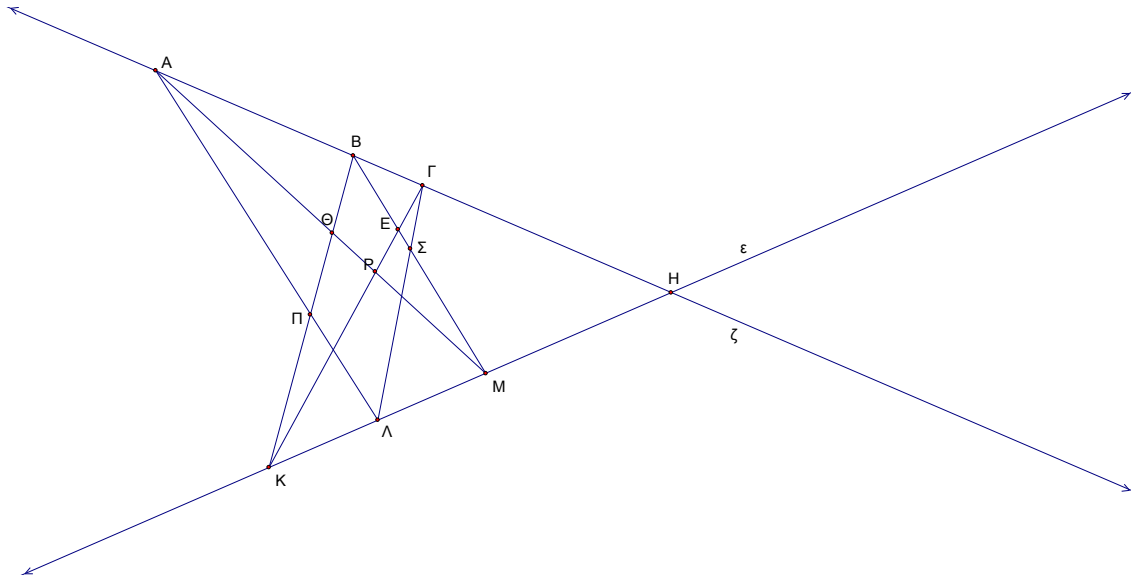


του Β είναι ο εαυτός του και οι εικόνες των Γ , Δ είναι τα Γ’ , Δ’ .Αν ονομάσουμε Α το σημείο τομής των ΓΓ’ και ΔΔ’ . Τότε τα Β , Γ , Δ μέσω της προοπτικότητας , με κέντρο το Α , από τη ζ προς την ε θα απεικονίζονται στα Β , Γ’ , Δ’ . Όμως αν είναι γνωστά τρία σημεία ενός προβολικού μετασχηματισμού , τότε ο μετασχηματισμός είναι καλά ορισμένος και έτσι ο μετασχηματισμός είναι προοπτικότητα .

Οι προβολικοί μετασχηματισμοί έχουν πολλές εφαρμογές και μπορούμε να αποδείξουμε σπουδαία θεωρήματα της γεωμετρίας . Ένα από αυτά είναι και το ***θεώρημα του Πάππου*** :

Αν τα Α , Β , Γ είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας , Κ, Λ ,Μ είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας άλλης ευθείας και Π , Ρ , Σ είναι τα σημεία τομής των ΑΛ με ΚΒ , ΑΜ με ΓΚ , ΓΛ με ΒΜ τότε τα Π , Ρ , Σ είναι συνευθειακά

Απόδειξη : Ας ονομάσουμε Φ την προοπτικότητα, με κέντρο το Α της ΒΚ στην ευθεία ε . Είναι Φ(Κ)=Κ , Φ(Π)=Λ , Φ(Β)=Η και Φ(Θ)=Μ . Η προοπτικότητα Τ , με κέντρο το Γ , της ευθείας ε στη ΒΜ μας δίνει Τ(Λ)=Σ , Τ(Η)=Β ,Τ(Κ)=Σ και Τ(Μ)=Μ . Η σύνθεση ΤοΦ μας δίνει μια προβολικότητα από τη ΒΚ προς τη ΒΜ με ΤοΦ(Κ)=Ε , ΤοΦ(Π)=Σ , ΤοΦ(Θ)=Μ και ΤοΦ(Β)=Β . Επειδή ο μετασχηματισμός ΤοΦ έχει ένα σταθερό σημείο το Β , θα είναι προοπτικότητα με κέντρο το σημείο τομής των ΚΕ και ΜΘ που είναι το Ρ . Όμως επειδή η εικόνα του Π μέσω του μετασχηματισμού είναι το Σ υποχρεωτικά η ΠΣ διέρχεται από κέντρο της προοπτικότητας το Ρ .



Οι προβολικότητες μιας ευθείας στον εαυτό της

Η γενική μορφή που εκφράζει μια προβολικότητα Φ των σημείων μιας ευθείας ε στα σημεία της ε εκφράζονται από τις σχέσεις $\Phi:\begin{cases} u'_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u'_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$ με $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

όπου (u_1 , u_2) είναι οι συντεταγμένες των σημείων πάνω στην ευθεία ε

Οι προβολικότητες μιας ευθείας ε αποτελούν ομάδα και η ΦοΦ θα έχει πίνακα

$$A^2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2{}_{11}+a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12}+a^2{}_{22} \end{bmatrix}$$

Η ΦοΦ=Φ^2 αν είναι η ταυτοτική , λέμε ότι η Φ είναι ενέλιξη.Αν υποθέσουμε ότι η Φ δεν είναι η ταυτοτική , θα πρέπει ο πίνακας της προβολικότητας να έχει τη μορφή $\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ με $\beta \neq 0$.Έτσι καταλήγουμε

$$a^2{}_{11}+a_{12}a_{21}=a_{21}a_{12}+a^2{}_{22}$$
$$a_{21}a_{11}+a_{22}a_{21}=0 \qquad \text{ή } a_{21}(a_{11}+a_{22})=0 \ , \ a_{12}(a_{11}+a_{22})=0$$
$$a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}=0$$

Αν $a_{11}+a_{22}\neq 0$ θα έχουμε τον πίνακα Α να έχει τη μορφή $\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ δηλαδή η Φ είναι ταυτοτική που απορρίπτεται. Οπότε $a_{11}+a_{22}=0$.

Αν η Φ είναι ενέλιξη και Φ(Α)=Β τότε Φ(Β)=Α .Αλλά και αν για μια προβολικότητα της ε στον εαυτό της και για τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Α και Β είναι Φ(Α)=Β και Φ(Β)=Α , τότε η Φ είναι ενέλιξη .Αυτό μπορεί να αποδειχθεί από το διπλό λόγο ως εξής: Αν Γ σημείο της ε με Φ(Γ)=Δ τότε
R(Α,Β;Γ,Δ)=R(Φ(Α),Φ(Β);Φ(Γ),Φ(Δ))=R(Β,Α;Δ,Φ(Δ))=R(Α,Β;Φ(Δ),Γ) .Επομένως Φ(Δ)=Γ και η Φ είναι ενέλιξη .

<u>Προβολικότητες στο επίπεδο</u>

Η έννοια της προβολικότητας μεταξύ δύο ευθειών του προβολικού επιπέδου γενικεύεται στην προβολικότητα μεταξύ δύο επιπέδων ή και μεταξύ του ίδιου επιπέδου , όπου τα σημεία του επιπέδου απεικονίζονται στα σημεία του επιπέδου και θα είναι 1-1 και επί. Η αναλυτική έκφραση μιας προβολικότητας στο επίπεδο θα έχει τη μορφή

$$x_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_{13}x'_3$$

$$x_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_{23}x'_3$$

$$x_3 = \alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2+\alpha_{33}x'_3 \quad .$$

Δηλαδή σε κάθε σημείο (x'_1,x'_2,x'_3) θα αντιστοιχεί ένα σημείο (x_1,x_2,x_3) και σε εξίσωση πινάκων θα πάρουν τη μορφή

$X=AX'$ με $|A|\neq 0$

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε προβολικότητες μεταξύ ευθειών ή μεταξύ των σημείων του προβολικού επιπέδου και ευθειών και αντίστροφα. Συγκεκριμένα οι σχέσεις

$v_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_{13}x'_3$ απεικονίζουν κάθε σημείο (x'_1,x'_2,x'_3) στην ευθεία με

$v_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_{23}x'_3$ συντεταγμένες $[v_1,v_2,v_3]$.

$v_3 = \alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2+\alpha_{33}x'_3$

Σε αναλογία με τις προβολικότητες ευθειών , αν δοθούν τέσσερα σημεία Α ,Β , Γ , Δ στο προβολικό επίπεδο όπου ανά τρία δεν είναι συνευθειακά και άλλα τέσσερα σημεία Κ , Λ , Μ , Ν που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που απεικονιζει τα Α,Β,Γ,Δ στα Κ,Λ,Μ,Ν με αυτή τη σειρά . Αυτό προκύπτει άμεσα από την αλλαγή συντεταγμένων όπως έχει περιγραφεί θεωρώντας σαν ένα σύστημα συντεταγμένων τα Α,Β,Γ και μοναδιαίο σημείο το Μ και αντίστοιχα τα Κ,Λ,Μ σημεία αναφοράς και το Ν μοναδιαίο σημείο για το άλλο σύστημα αναφοράς .

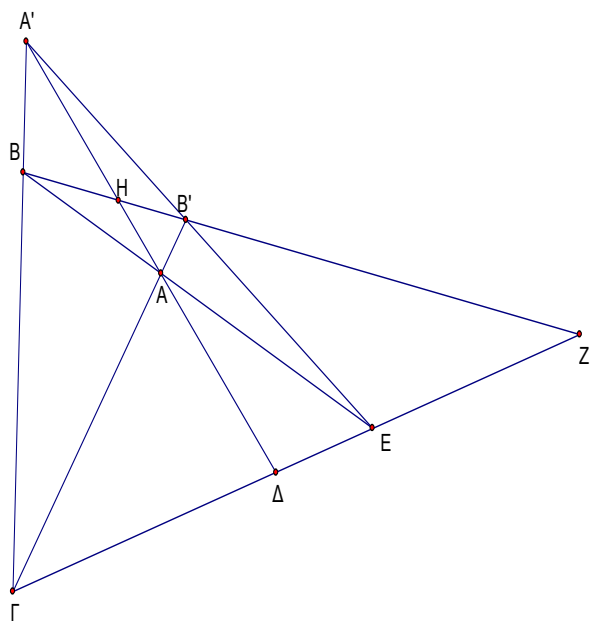
<u>Ομολογίες και αρμονικές ομολογίες στο επίπεδο</u>

Στο προβολικό επίπεδο μια προβολικότητα Φ , διαφορετική από την ταυτοτική , ονομάζεται ομολογία αν αφήνει σταθερά όλα τα σημεία μιας ευθείας ε και αφήνει σταθερές όλες τις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ε . Η ευθεία ε ονομάζεται άξονας και το σημείο Α κέντρο της ομολογίας .

Μια ομολογία λέγεται αρμονική ομολογία αν έχει την ιδιότητα τα σημεία Β και Φ(Β) να δημιουργούν αρμονική τετράδα μαζί , με το κέντρο Α και το σημείο της ε που τέμνει η ευθεία που ορίζεται από τα Β και Φ(Β) την ε .

Θεώρημα: Αν ε είναι μια δοσμένη ευθεία και τα συνευθειακά σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά , που δεν ανήκουν στην ε , τότε υπάρχει μοναδική ομολογία Φ με άξονα την ε , κέντρο το Α και που απεικονίζει το Β στο Γ .

Απόδειξη: Αν Κ,Λ είναι σημεία της ε , όπου κανένα δεν ανήκει στις ευθείες ΑΒ,ΑΓ , τότε καμία από τις τετράδες Α,Κ,Λ,Β και Α,Κ,Λ,Γ δεν περιέχει τρία συνευθειακά σημεία και επομένως υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τη μια τετράδα πάνω στην άλλη με αυτή τη σειρά . Αφού η Φ αφήνει σταθερά δύο σημεία της ε , τα Κ,Λ θα αφήνει σταθερό οποιοδήποτε σημείο της ε . Ακόμα οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το Α παραμένει αναλλοίωτη και έτσι η Φ είναι ομολογία.



Μια αρμονική ομολογία είναι ενέλιξη . Όμως ισχύει το

Θεώρημα: Οι αρμονικές ομολογίες είναι οι μόνοι προβολικοί μετασχηματισμοί που είναι ενελίξεις

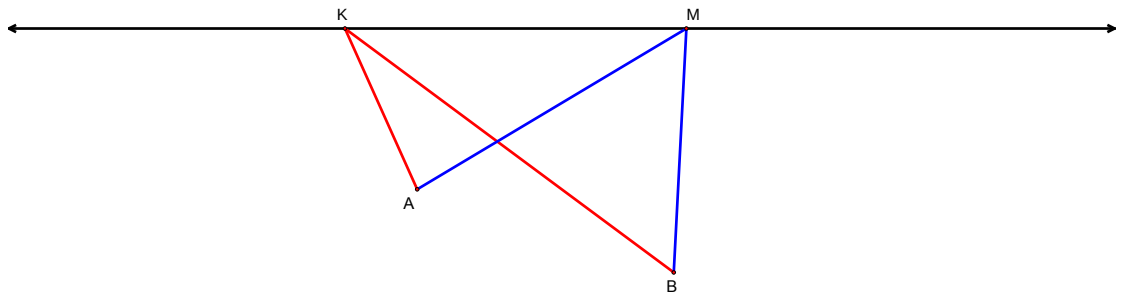
Απόδειξη: Αν Φ(Α)=Α’ , Φ(Β)=Β’ τότε η Φ θα είναι η μοναδική απεικόνιση που απεικονίζει την τετράδα Α,Α’,Β,Β’ στην Α’,Α,Β’,Β , με αυτή την σειρά.
Οι τετράδες Α,Α’,Β,Β’ και Β,Β’,Η,Ζ είναι αρμονικές και η αρμονική ομολογία με κέντρο το Η και άξονα τη ΓΖ απεικονίζει το Α στο Α’ , το Β στο Β’ και επομένως είναι η Φ.

<u>Αξονική προοπτικότητα</u>

Αν τώρα στηριχθούμε στην αρχή του δυισμού οι παραπάνω μετασχηματισμοί θα

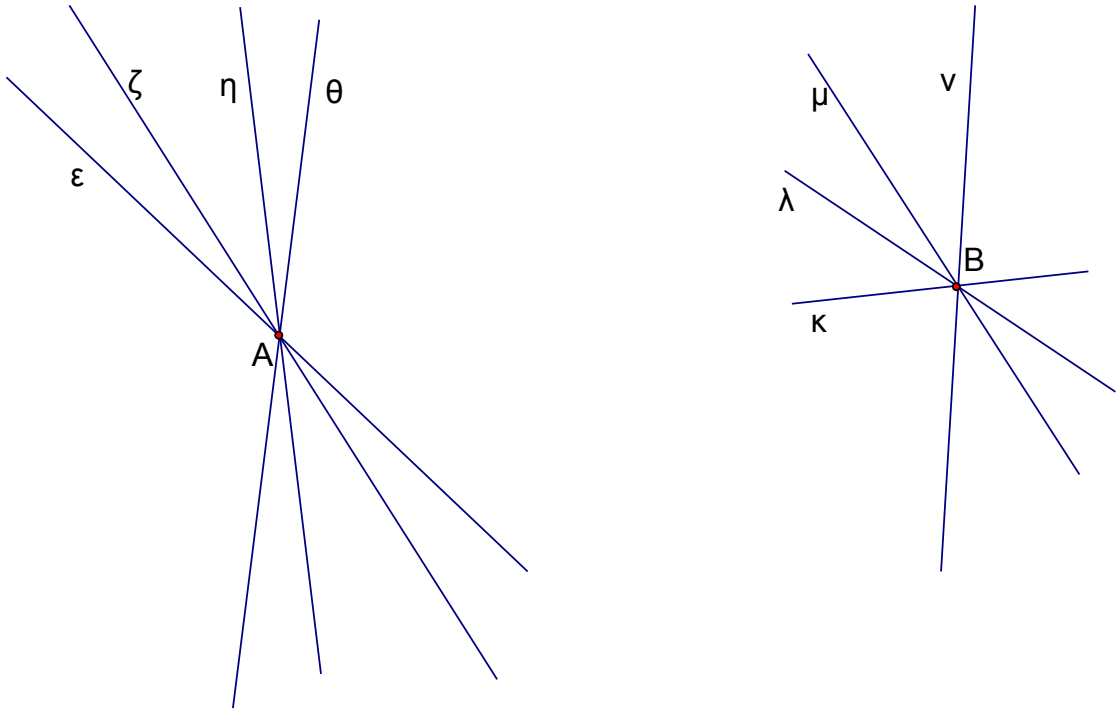
έχουν την εξής μορφή:

Στην κεντρική προοπτικότητα εναλλάσσουμε τον ρόλο του σημείου και των δύο ευθειών με μια ευθεία και δύο σημεία



Έτσι στο παραπάνω σχήμα η ευθεία ΑΚ αντιστοιχεί στην ευθεία ΚΒ και η ευθεία ΑΜ στην ΜΒ.Η σύνθεση δυο από τις παραπάνω προοπτικότητες θα μας απασχολήσουν και παρακάτω αφού οδηγούν στις κωνικές τομές.

Η αξονική προβολικότητα απεικονίζει τις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο Α στις ευθείες που διέρχονται από ένα άλλο σταθερό σημείο Β με τέτοιο τρόπο που αν θεωρήσουμε τέσσερις ευθείες μαζί με τις εικόνες τους τότε οι διπλοί λόγοι των τεσσάρων ευθειών θα είναι ίσοι .



Στο παραπάνω σχήμα αν οι ευθείες ε,ζ,η,θ απεικονίζονται , μέσω του προβολικού μετασχηματισμού στις κ,λ,μ,ν τότε είναι R(ε,ζ,η,θ)=R(κ,λ,μ,ν).

Δέσμη ευθειών

Στους προβολικούς μετασχηματισμούς που είδαμε στα προηγούμενα είχαμε την αντιστοίχιση σημείων που ανήκουν σε μια ευθεία σε σημεία που ανήκουν σε μια άλλη ευθεία . Αν σκεφτούμε δυικά θα πρέπει να έχει νόημα και η αντιστοίχηση ευθειών που διέρχονται από σημείο , σε ευθείες που διέρχονται από άλλο σημείο

Αρχικά θα διερευνήσουμε την έννοια 'ευθείες που διέρχονται από σημείο' με τη γνωστή έννοια της δέσμης ευθειών . Έστω Α το σημείο (1 , 0 , -1) και ε_1 , ε_2 οι ευθείες

[1 , 1 , 1] και [2 , 3 ,2] που διέρχονται από το παραπάνω σημείο αφού οι συντεταγμένες του σημείου ικανοποιούν τις εξισώσεις

$x_1+x_2+x_3=0$ και $2x_1+3x_2+2x_3=0$

Κάθε έκφραση της μορφής $c_1[1 , 1 , 1] + c_2[2 , 3 , 2]$ παριστάνει μια ευθεία της δέσμης και αντίστροφα αν μια τρίτη ευθεία ε διέρχεται από το Α τότε οι ε , ε_1 , ε_2 θα είναι εξαρτημένες επομένως οι συντεταγμένες της ε θα είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων των , ε_1 , ε_2 .

Λέμε ακόμα ότι οι συντεταγμένες της ευθείας ε ως προς τη δέσμη ευθειών είναι το ζεύγος (c_1 , c_2) .

Αν ακόμα θεωρήσουμε ένα άλλο σημείο Β με συντεταγμένες (2 , -3 , 1) παρατηρούμε ότι οι ευθείες με συντεταγμένες [1 , 1, 1] και [3 , -1 , -6] , διέρχονται από το Β και η δέσμη ευθειών από το Β θα πάρει τη μορφή $c_1'[1 , 1 , 1]+c_2'[3 , -1 , -6]$

Η σχέση $\kappa\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c'_1\\c'_2\end{bmatrix}$ μας προσδιορίζει ένα μετασχηματισμό όπου η [1 , 1 , 1] της πρώτης δέσμης απεικονίζεται στον εαυτό της ως ευθεία της δεύτερης δέσμης , η ευθεία [2 , 3 ,2] απεικονίζεται στην [3 , -1 , -6] και η μοναδιαία ευθεία της πρώτης δέσμης , η [3 , 4 , 3] στη μοναδιαία ευθεία της δεύτερης δέσμης , την [4 , 0 , -5] .

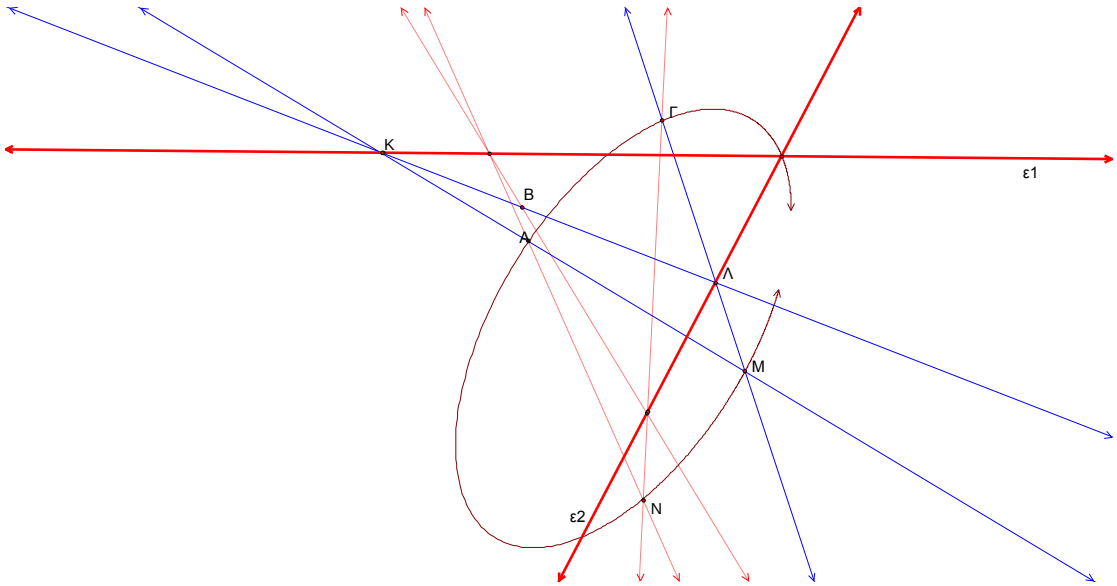
Κωνικές τομές

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη σύνθεση δύο αξονικών προοπτικοτήτων , δηλαδή μια αξονική προβολικότητα στην οποία:

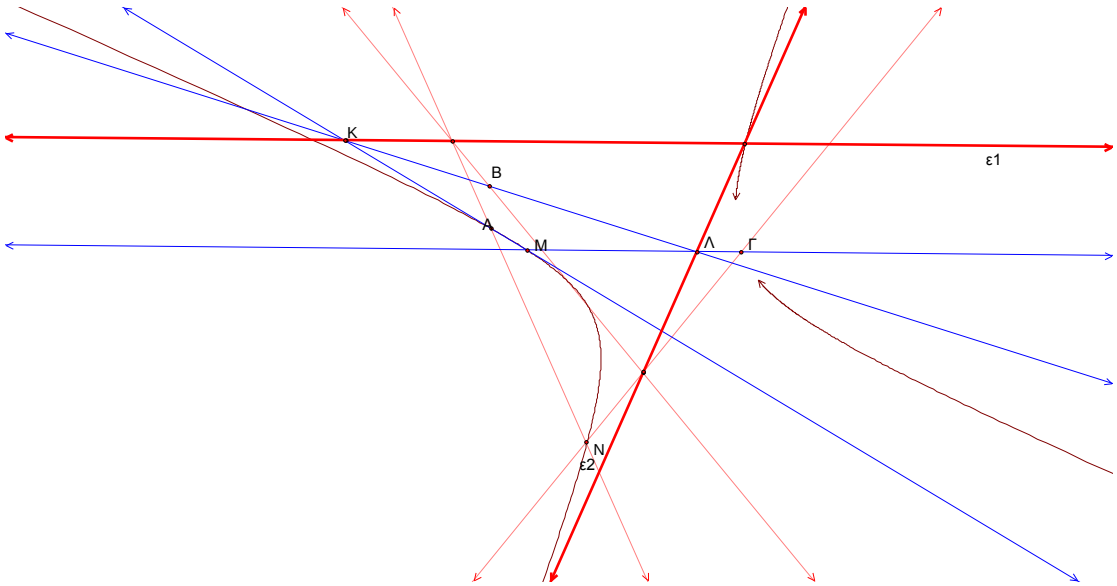
Έχουμε δύο σταθερές ευθείες τις ε_1 και ε_2 και τρία σταθερά σημεία τα Α , Β , Γ .

Μια τυχαία ευθεία από τη δέσμη ευθειών του Α , η ΑΚ τέμνει την ε_1 στο Κ και αντιστοιχεί στην ευθεία ΚΒ που ανήκει στη δέσμη ευθειών του σημείου Β . Η ΚΒ τώρα τέμνει την ε_2 στο Λ και επομένως αντιστοιχεί στη ΓΛ που είναι μια ευθεία από τη δέσμη του σημείου Γ .

Με αυτό τον τρόπο έχουμε μια αντιστοιχία των ευθειών της δέσμης του σημείου Α με τις ευθείες της δέσμης του σημείου Γ .Στην παραπάνω περιγραφή οι δύο αντίστοιχες ευθείες τέμνονται στο Μ . Αν τώρα θεωρήσουμε δυο άλλες ευθείες , που στο σχήμα είναι οι διακεκομμένες ευθείες με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε το σημείο Ν. Με τη χρήση του λογισμικού παρατηρούμε το σχηματιζόμενο γεωμετρικό τόπο που είναι μια έλλειψη.

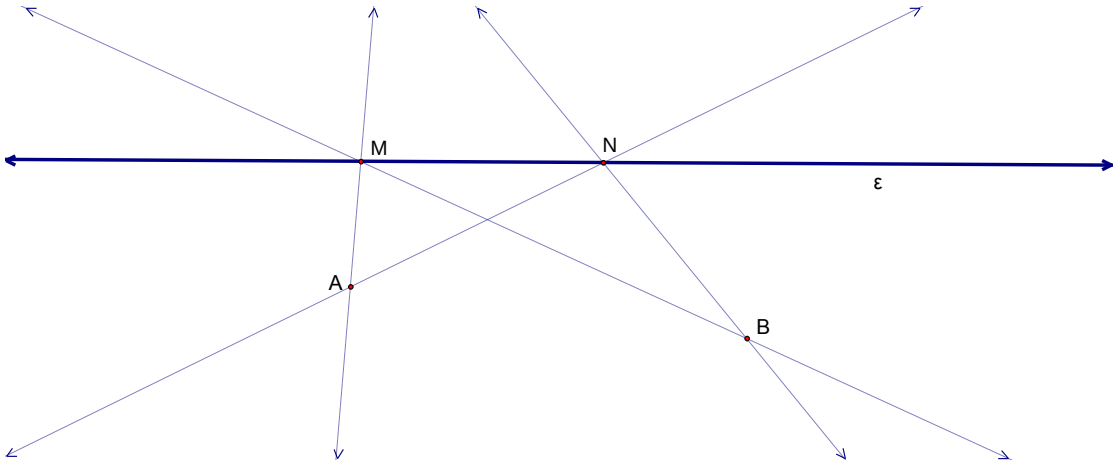


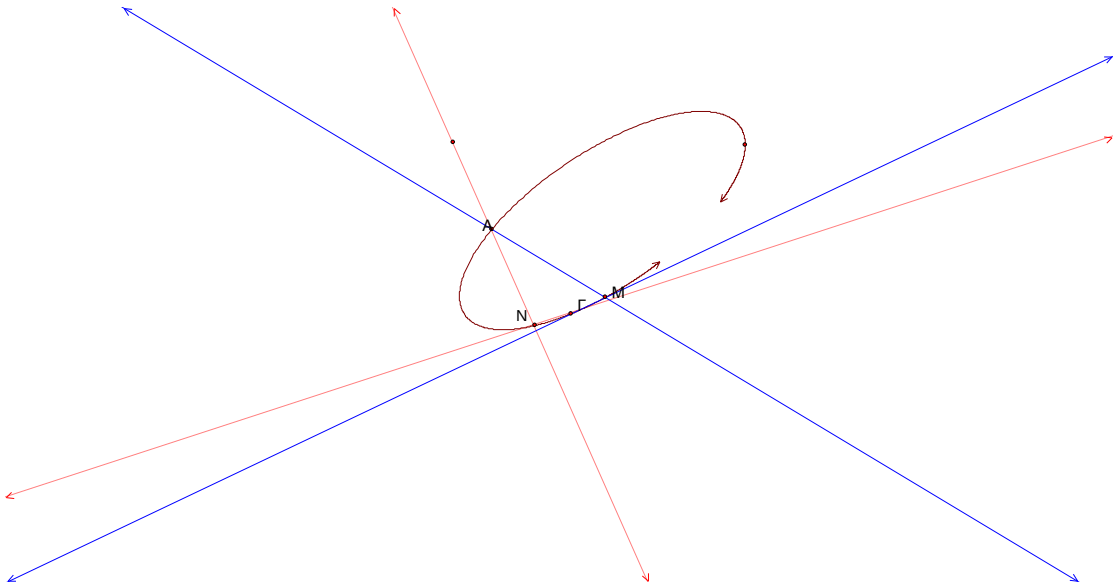
Αν μεταβάλουμε τη θέση ενός από τα τρία σημεία παρατηρούμε και τη μεταβολή του γεωμετρικό τόπου όπου εμφανίζεται τώρα η υπερβολή .



Ορισμός : Κωνική είναι το σύνολο των σημείων τομής συσχετιζόμενων ευθειών από δύο δέσμες ευθειών που συνδέονται μέσω μιας προβολικότητας .Αν οι δέσμες είναι διαφορετικές και η προβολικότητα δεν είναι μια αξονική προοπτικότητα τότε η κωνική είναι μη εκφυλισμένη . Σε διαφορετική περίπτωση είναι μια εκφυλισμένη κωνική

Αν έχουμε μια μόνο αξονική προοπτικότητα , η εκφυλισμένη κωνική είναι ο άξονας της προοπτικότητας ‘όπως φαίνεται στο σχήμα





Αν στο αρχικό σχήμα αφήσουμε μόνο τις ευθείες από τις δέσμες των Α και Γ θα έχουμε το παραπάνω σχήμα στο οποίο παρατηρούμε ότι τα Α και Γ ανήκουν στην κωνική

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αν θεωρήσουμε την ευθεία της δέσμης του Γ που διέρχεται από το Α , οπότε αυτή θα τέμνει την αντίστοιχη ευθεία της δέσμης του Α υποχρεωτικά στο Α

Θεώρημα : Μια ευθεία τέμνει μια μη εκφυλισμένη κωνική το πολύ σε δυο σημεία

Απόδειξη Αν η ευθεία τέμνει την κωνική σε τρία σημεία , αυτά θα είναι σημεία τομής από τρία διαφορετικά ζεύγη ευθειών των δυο δεσμών . Αυτά τα ζεύγη συμφώνα με το θεμελιώδες θεώρημα της προβολικής γεωμετρίας ορίζουν μια μοναδική προβολικότητα αλλά ταυτόχρονα ορίζουν και μια αξονική προοπτικότητα με άξονα τη δοσμένη ευθεία , όποτε η κωνική είναι εκφυλισμένη που είναι άτοπο

Το παραπάνω θεώρημα μας δείχνει τη δευτεροβάθμια φύση των κωνικών

Αναλυτική παράσταση κωνικής

Ας υποθέσουμε ότι οι συντεταγμένες των ευθειών σε δύο δέσμες έχουν τη μορφή

$c_1[u_1 , u_2 , u_3]+c_2[v_1 , v_2 , v_3]$ και

$c'_1[u'_1 , u'_2 , u'_3]+c'_2[v'_1 , v'_2 , v'_3]$

και ότι η προβολικότητα δίνεται από τις σχέσεις $kc_1=c'_1$, $kc_2=c'_2$. Αν ένα σημείο

(x_1 , x_2 , x_3) ανήκει σε ευθείες από τις δύο δέσμες θα πρέπει να ισχύει

$(c_1u_1+c_2v_1)x_1+(c_1u_2+c_2v_2)x_2+(c_1u_3+c_2v_3)x_3 =0$ και

$(c'_1u'_1+c'_2v'_1)x_1+(c'_1u'_2+c'_2v'_2)x_2+(c'_1u'_3+c'_2v'_3)x_3 =0$ που η καθεμιά από τις παραπάνω σχέσεις παίρνει τη μορφή

$c_1(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)+c_2(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3) =0$,

$c'_1(u'_1x_1+u'_2x_2+u'_3x_3)+c'_2(v'_1x_1+v'_2x_2+v'_3x_3) =0$.

Οπότε καταλήγουμε $\frac{c_1}{c_2} = -\frac{v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3}{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3}$ και

$$\frac{c'_1}{c'_2} = -\frac{v'_1x_1 + v'_2x_2 + v'_3x_3}{u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3x_3}$$

Όμως οι λόγοι $\frac{c_1}{c_2}$ και $\frac{c'_1}{c'_2}$ είναι ίσοι και επομένως

$\frac{v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3}{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3} = \frac{v'_1x_1+v'_2x_2+v'_3x_3}{u'_1x_1+u'_2x_2+u'_3x_3}$ που παίρνει τη μορφή

$$b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{21}x_2x_1 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 + b_{31}x_3x_1 + b_{32}x_3x_2 = 0 \quad (1)$$

Όπου $b_{ij} = u_i v'_j - u'_j v_i, i, j = 1,2,3$

Παρατηρούμε ότι γενικά οι συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης είναι άνισοι , δηλαδή $b_{ij} \neq b_{ji}$ αν $i \neq j$. Επειδή μας ενδιαφέρει η δευτεροβάθμια εξίσωση της κωνικής

Που προκύπτει να είναι ομογενής θα εξισώσουμε τους συντελεστές με την

αντικατάστασή τους από τους $a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

Οπότε η αρχική μας εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 \text{ , με } \alpha_{ij}=\alpha_{ji} \qquad (2)$$

Το πλεονέκτημα της παραπάνω γραφής είναι ότι μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε την εξίσωση της κωνικής σε μια απλή αλλά εύχρηστη εξίσωση πινάκων. Συγκεκριμένο αν με Α συμβολίσουμε το πίνακα των συντελεστών , δηλαδή $A=[\alpha_{ij}]$ και Χ ο πίνακας στήλη των συντεταγμένων , δηλαδή $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ τότε η (2) γράφεται

$$X^T A X = [0] ,$$

όπου X^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του Χ .Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

μια κωνική έχει εξίσωση $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$, με $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ ή σε μορφή εξίσωσης πινάκων $X^T A X = [0]$ όπου ο πίνακας Α είναι συμμετρικός .

Ας δούμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα

Από το σημείο (1 , 0 , -1) διέρχονται οι ευθείες με συντεταγμένες [2 , 2 , 2] και [1 , 2 , 1] όποτε η δέσμη ευθειών που διέρχεται από το παραπάνω σημείο έχει συντεταγμένες

$c_1[2 , 2 , 2]+c_2[1 , 2 , 1] = [2c_1+c_2 , 2c_1+2c_2 , 2c_1+c_2]$ και η αντίστοιχη εξίσωση είναι :

$(2c_1+c_2)x_1+(2c_1+2c_2)x_2+(2c_1+c_2)x_3=0 \quad (3)$

Ομοίως από το σημείο (2 , 1 , 2) διέρχονται οι ευθείες με συντεταγμένες [-1 , 2 , 0] και [1 , -4 , 1] όποτε η δέσμη ευθειών που διέρχεται από το παραπάνω σημείο έχει συντεταγμένες $c_1'[-1 , 2, 0]+c_2'[1 , -4 , 1] = [-c_1'+c_2' , 2c_1'-4c_2' , c_2']$ η αντίστοιχη εξίσωση ευθείας είναι

$(-c_1'+c_2')x_1+(2c_1'-4c_2')x_2+ c_2' x_3 = 0 \qquad (4)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι λόγοι $\frac{c_1}{c_2}$ και $\frac{c'_1}{c'_2}$ είναι ίσοι προσδιορίζοντας τους από τις (3) και (4) έχουμε

$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3}$ και $\frac{c_1'}{c_2'} = -\frac{-x_1 + 2x_2}{x_1 - 4x_2 + x_3}$ οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη είναι $\frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} = \frac{-x_1 + 2x_2}{x_1 - 4x_2 + x_3}$ ή

$(2x_1 + 2x_2 + 2x_3)(x_1 - 4x_2 + x_3) = (-x_1 + 2x_2)(x_1 + 2x_2 + x_3)$ ή

$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_1 - 8x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 - 8x_3x_1 + 2x_3^2 =$

$-x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 + 2x_2x_3$ η οποία γράφεται

$3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_1x_3 - 12x_2^2 + 2x_3x_1 - 8x_3x_2 - 2x_3^2 = 0$ (5)

και σε συμμετρική μορφή γίνεται

$3x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{5}{2}x_1x_3 - 3x_2x_1 - 12x_2^2 - 4x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3x_1 - 4x_3x_1 - 2x_3^2 = 0$

Ας δούμε η εξίσωση (5) πως μπορεί να μετασχηματιστεί με τη βοήθεια της αλλαγής συντεταγμένων . Αρχικά τη γράφουμε

$3(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + 5(x_1 - x_2) - 3x_2x_3 - 9x_2^2 - 2x_3^2 = 0$ (6)

Θα εισάγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (x_1' , x_2' , x_3') με

$$\kappa x_1' = x_1 - x_2$$

$$\kappa x_2' = x_2$$

$$\kappa x_3' = x_3$$

για το οποίο παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα είναι

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ που σημαίνει ότι η αλλαγή είναι επιτρεπτή και επομένως η (6)

γίνεται

$3x'^2_1 + 5x'_3\, x'_1 - 3x'_2\, x'_3 - 9x'^2_2 - 2x'^2_3 = 0$ ή (7)

$3(x'_1 + \frac{5}{6}x'_3)^2 - \frac{49}{12}x'^2_3 - 3x'_2\, x'_3 - 9x'^2_3 = 0$ όπου θέτοντας πάλι

$Kx_1'' = x'_1 + (5/6)x'_3$

$Kx_2'' = x'_2$

$Kx_3'' = x'_3$

Με ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ η εξίσωση (7) γίνεται

$3x''^2_1 - 3x''_2x''_3 - 9x''^2_2 - (49/12)x''^2_3 = 0$ ή

$3x''^2_1 - 9(x''_2 + \frac{1}{6}x''_3)^2 - \frac{1}{12}x''^2_3 = 0$ (8)

Όπου πάλι θέτοντας

$K\chi'''_1 = \chi''_1$

$K\chi'''_2 = \chi''_2 + 1/6\chi''_3$

$K\chi'''_3 = \chi''_3$

Με ορίζουσα πάλι διάφορη του μηδενός η (8) γίνεται

$3x'''^2_1 - 9x'''^2_2 - \frac{1}{12}x'''^2_3 = 0$ και αν ακόμα

$kx_1 = \sqrt{3}x'''_1$

$kx_2 = 3x'''_2$ με ορίζουσα πάλι διάφορη του μηδενός

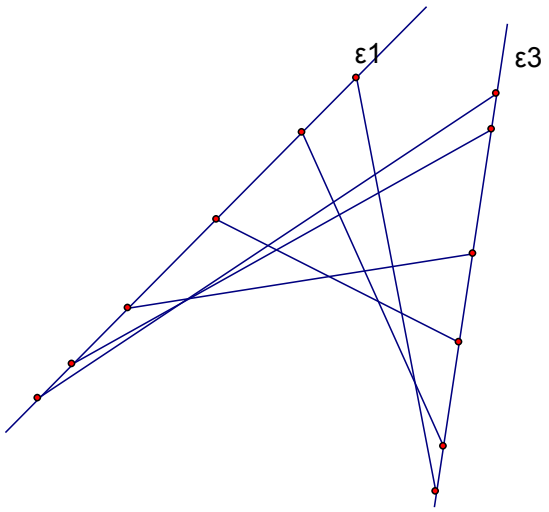
$kx_3 = \sqrt{\frac{1}{12}}x'''_3$

Τελικά η κωνική παίρνει τη μορφή

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 .$$

Γενικά με την παραπάνω διαδικασία μια κωνική θα έχει εξίσωση $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$ με τους συντελεστές α_i να έχουν τιμή 1 ή -1 .

Η κωνική όπως έχει οριστεί παραπάνω είναι μια κωνική από σημεία .Αν θεωρήσουμε το δυικό ορισμό όπου θεωρούμε μια προβολικότητα μεταξύ δύο ευθειών θα έχουμε μια **κωνική ευθειών** όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Πολικότητες

Αν έχουμε μια κωνική , που έχει τη τετραγωνική μορφή , τότε από την εξίσωση της κωνικής μπορεί να προκύψει μια διγραμμική εξίσωση που παρουσιάζει ενδιαφέρον όπως στο παρακάτω παράδειγμα :

Από την εξίσωση $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ προκύπτει η διγραμμική εξίσωση $x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3=0$

την οποία ικανοποιούν τα σημεία (1, 1, 1) και (1, 1, 2) τα οποία και ονομάζουμε **συζυγή ως προς την παραπάνω κωνική .**

Ένα οποιοδήποτε σημείο της κωνικής θα είναι συζυγές με τον εαυτό του και έτσι το ονομάζουμε αυτοσυζυγές ως προς την κωνική.

Αν θεωρήσουμε ένα σταθερό σημείο το Α (1, 2, -3) και μια συγκεκριμένη κωνική ,

με εξίσωση $x_1^2+x_1x_2+x_2x_1-x_2^2+2x_3^2=0$, τότε η αντίστοιχη διγραμμική εξίσωση θα είναι : $x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2+2x_3y_3=0$ και τα σημεία που θα είναι συζυγή με το Α θα ικανοποιούν την εξίσωση $y_1+y_2+2y_1-2y_2-6y_3=0$ ή $3y_1-y_2-6y_3=0$ που είναι μια ευθεία .

Γενικά τα σημεία που είναι συζυγή με το (x_1, x_2, x_3) σε σχέση με μια κωνική με εξίσωση $\Sigma\alpha_{ij}x_iy_j=0$, ανήκουν σε ευθεία αν η διγραμμική εξίσωση που προκύπτει είναι γραμμική ως προς τα y .Αλλά υπάρχει και η περίπτωση όλοι οι συντελεστές των y να είναι 0 και τότε τα συζυγή σημεία ανήκουν σε όλο το επίπεδο. Για παράδειγμα δίνουμε την εξίσωση $x_1^2+x_1x_2+x_2x_1=0$ και το Β(0, 0, 6) όπου η αντίστοιχη διγραμμική θα είναι της μορφής $0y_1+0y_2+0y_3=0$ που παριστάνει όλο το επίπεδο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν τα σημεία που είναι συζυγή με ένα σταθερό σημείο Α σε σχέση με μια κωνική , ανήκουν σε μια ευθεία τότε η ευθεία ονομάζεται **πολική ευθεία** του σημείου Α σε σχέση με την κωνική και το σημείο Α ονομάζεται **πόλος** της ευθείας σε σχέση με την κωνική . Η σχέση μεταξύ ευθείας και σημείου λέμε ότι δημιουργεί μια πολικότητα .

Η πολικότητα μπορεί να μην ορίζεται για όλα τα σημεία του επιπέδου όπως έχουμε δει παραπάνω , όπου η διγραμμική εξίσωση παριστάνει όλο το επίπεδο . Σε μια μη εκφυλισμένη κωνική όμως έχει νόημα παντού

Θεώρημα : Η πολικότητα που ορίζεται σε μια μη εκφυλισμένη κωνική είναι μια αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου και τις ευθείες του επιπέδου της κωνικής

Απόδειξη : Αν η κωνική έχει εξίσωση $\sum \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ και για ένα συγκεκριμένο σημείο (x_1, x_2, x_3) έστω [u_1 , u_2 , u_3] οι συντεταγμένες της πολικής ευθείας τότε θα έχουμε

$$u_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3$$
$$u_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3$$
$$u_1 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

Επειδή η κωνική που έχουμε θεωρήσει είναι μη εκφυλισμένη πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι διάφορη του μηδενός .

Δηλαδή $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Όμως η ίδια ορίζουσα είναι και ορίζουσα του συστήματος που έχουμε αναφέρει παραπάνω και το οποίο θα έχει μοναδική λύση ως προς τα u που θα είναι και μη μηδενική , γιατί αν όλα τα u_i ήταν 0 τότε και όλα τα χ_i θα ήταν 0 , που είναι άτοπο.

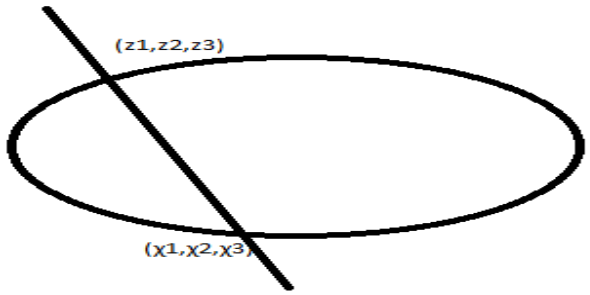
Επομένως κάθε σημείο έχει μοναδική πολική

Αντίστροφα : Για μια δοσμένη ευθεία όπου οι συντεταγμένες της δε θα είναι όλες 0 το παραπάνω σύστημα θα έχει πάλι μοναδική , μη μηδενική λύση ως προς τα χ_i .

Η διγραμμική εξίσωση που ορίσαμε στην αρχή μπορεί να γραφεί και σαν εξίσωση πινάκων στη μορφή $X^T AY=[0]$ όπου X , Y είναι ο πίνακας στήλη των συντεταγμένων των σημείων (x_1, x_2, x_3) , (y_1 , y_2 , y_3) και ο παραπάνω τρόπος γραφής της εξίσωσης θα μας βοηθήσει στην απόδειξη του

Θεώρημα : Η πολική ευθεία ενός σημείου που βρίσκεται πάνω σε μια μη εκφυλισμένη κωνική είναι η εφαπτομένη της κωνικής στο παραπάνω σημείο

Απόδειξη:



Έστω (x_1, x_2, x_3) σημείο πάνω στη κωνική , οπότε θα έχουμε $X^TAX=[0]$ και ας υποθέσουμε ότι η πολική του σημείου τέμνει την κωνική και σε ένα άλλο σημείο

(z_1 , z_2 , z_3) . Έτσι θα έχουμε $Z^TAZ=[0]$ γιατί το σημείο ανήκει στην κωνική και $X^TAZ=[0]$ γιατί το σημείο ανήκει στην πολική .Οποιοδήποτε σημείο της πολικής ευθείας θα έχει συντεταγμένες της μορφής c_1X+c_2Z και θα είναι

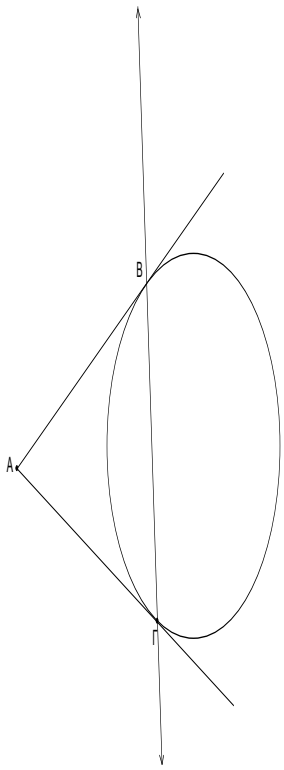
$X^TA\,(c_1X+c_2Z) =X^TAc_1X+X^TAc_2Z= [0]$

Η ευθεία που έχουμε όμως είναι και πολική για το σημείο Z γιατί περιέχει δύο σημεία συζυγή ως προς το Z . Δηλαδή

$Z^TA(c_1X+c_2Z)=[0]$ και επομένως $(c_1X+c_2Z)^TA(c_1X+c_2Z)=[0]$

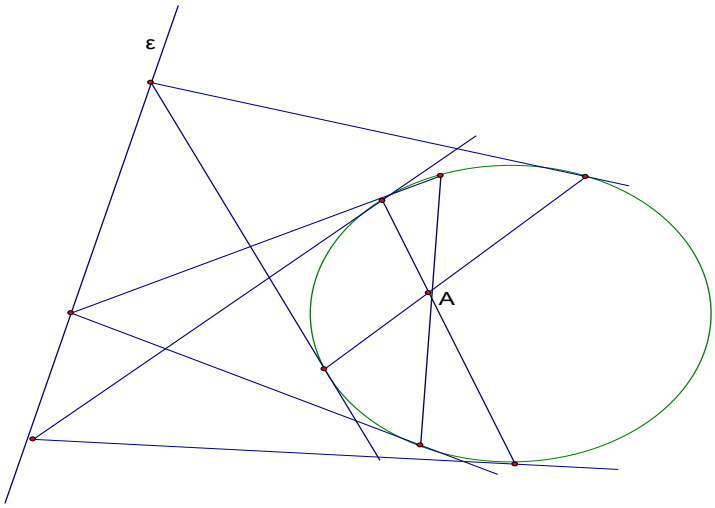
Που σημαίνει ότι κάθε σημείο της πολικής ευθείας είναι σημείο της κωνικής . Αυτό όμως είναι άτοπο αφού έχουμε μια μη εκφυλισμένη κωνική .

Θεώρημα : Αν από ένα σημείο που βρίσκεται έξω από μια κωνική ορίζονται οι εφαπτόμενες προς την κωνική τότε η ευθεία που δημιουργείται από τα σημεία επαφής είναι η πολική του σημείου Α



Απόδειξη : Από το προηγούμενο θεώρημα η ΑΒ είναι η πολική ευθεία του Β και η ΑΓ είναι η πολική ευθεία του Γ .Δηλαδή X^TΑΒ=[0] και X^TΑΓ=[0] . Επομένως για κάθε σημείο κΒ+λΓ της ευθείας ΒΓ , ισχύει X^TΑ(κΒ+λΓ)=[0] , που σημαίνει ότι η ΒΓ είναι η πολική του Α .

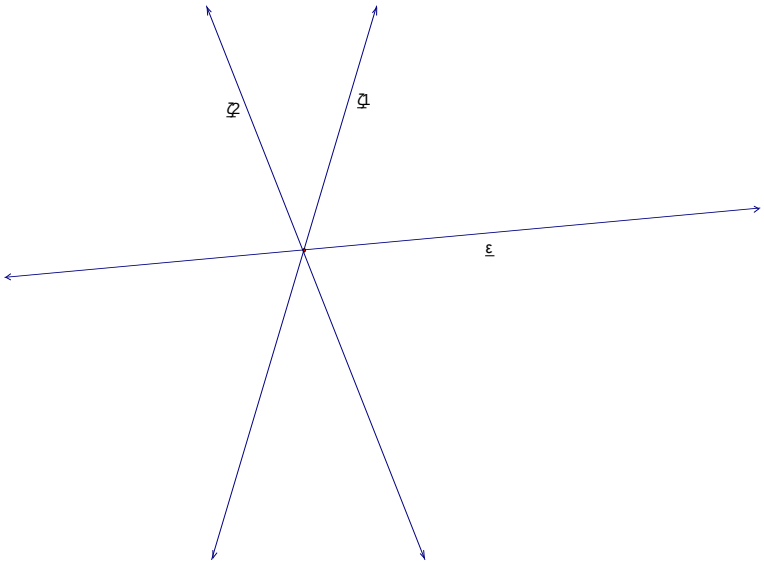
Αν από το σημείο Α δε μπορούμε να φέρουμε εφαπτόμενες προς την κωνική τότε η πολική του Α είναι το σύνολο των σημείων τομής των εφαπτόμενων της κωνικής που φέρνουμε από τα σημεία που τέμνει την κωνική μια τέμνουσα της που διέρχεται από το Α . Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα αφού κάθε σημείο τομής των εφαπτόμενων θα είναι συζυγές με το Α και έτσι υποχρεωτικά θα ανήκουν σε μια ευθεία που θα είναι η πολική του σημείου Α



Κεφάλαιο 3ο : Στοιχεία συσχετισμένης γεωμετρίας

<u>Ορισμός συσχετισμένης γεωμετρία</u>

Αν θεωρήσουμε το προβολικό επίπεδο από το οποίο αφαιρούμε μια ευθεία έχουμε αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα . Από το προβολικό επίπεδο εξαιρούμε τα σημεία μιας ευθείας ε που μας επιτρέπει να έχουμε την έννοια της παραλληλίας .Αν οι ευθείες $ζ_1$ και $ζ_2$ 'τέμνονται' πάνω στην ε τότε για το συσχετισμένο επίπεδο που δημιουργήσαμε οι $ζ_1$ και $ζ_2$ θεωρούνται 'παράλληλες'.



Αν εξαιρέσουμε την ιδεατή ευθεία ζ όπως έχει οριστεί στην προβολική γεωμετρία τότε δύο ευθείες που 'τέμνονται' στη ζ θα είναι παράλληλες και έτσι ορίζουμε το συσχετισμένο(ή ομοπαρραλληλικό) επίπεδο ως το προβολικό με εξαίρεση την ιδεατή ευθεία ζ.

Σε αντιστοιχία με την προβολική γεωμετρία ορίζουμε τους συσχετισμένους (ή ομοπαρραλληλικούς) μετασχηματισμούς του επιπέδου ως τους προβολικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου που αφήνουν την ευθεία ζ αναλλοίωτη . Έχοντας εξαιρέσει την ιδεατή ευθεία και τα ιδεατά σημεία , ένα σημείο του συσχετισμένου επιπέδου θα έχει συντεταγμένες της μορφής $(χ_1,χ_2,χ_3)$ με $χ_3≠0$ ή σε ισοδύναμη γραφή $(y_1,y_2,1)$ με $y_1= χ_1/ χ_3$, $y_2= χ_2/ χ_3$.Όταν αναφερόμαστε στο σημείο $(χ_1,χ_2)$ θα εννοούμε το σημείο $(χ_1,χ_2,1)$. Αν έχουμε ένα προβολικό μετασχηματισμό που αφήνει τη ζ

αναλλοίωτη θα πρέπει τα σημεία της ευθείας $\chi_3=0$ να απεικονίζονται σε σημεία της ίδιας ευθείας ή στο σύστημα

$x_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_{13}x'_3$

$x_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_{23}x'_3$

$x_3 = \alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2+\alpha_{33}x'_3$

αν $x'_3=0$ θα είναι και $x_3=0$.Οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται $\alpha_{31}x'_1+\alpha_{32}x'_2=0$ για οποιαδήποτε x'_1, x'_2 . Επομένως $\alpha_{31}=\alpha_{32}=0$.Ακόμα αφού έχουμε θεωρήσει ότι για όλα τα σημεία του συσχετισμένου επιπέδου είναι $x_3=1$, θα πρέπει $\alpha_{33}=1$. Τελικά οι μετασχηματισμοί θα έχουν τη μορφή

$x_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_1$

$x_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_2$ με $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Όπως και στο προβολικό επίπεδο η διαδικασία αλλαγής συντεταγμένων είναι ουσιαστικά ένας προβολικός μετασχηματισμός έτσι και στο συσχετισμένο επίπεδο η παραπάνω διαδικασία περιγράφει και την αλλαγή συντεταγμένων στο συσχετισμένο επίπεδο .

Οι μετασχηματισμοί του συσχετισμένου επιπέδου όπως έχουν περιγραφεί παραπάνω αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση και η μορφή τους σε συσχετισμένες συντεταγμένες είναι $\begin{cases} x'_1 = \beta x_1 + a_1 \\ x'_2 = \beta x_2 + a_2 \end{cases} \quad \beta \neq 0$

- Αν $\beta=1$ έχουμε μεταφορά
- Αν $\alpha_1=\alpha_2=0$ έχουμε διαστολή και στην ειδική περίπτωση όπου $\beta= -1$, έχουμε κεντρική συμμετρία

Συσχετισμένος λόγος

Ο συσχετισμένος λόγος μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια του διπλού λόγου. Αν τα Α , Β , Γ είναι σημεία της ευθείας ε τότε ορίζουμε Α(Α,Β,Γ)=R(P_∞ ,Α,Β,Γ) , όπου P_∞ είναι το ιδεατό σημείο της ευθείας ε .Αν έχουμε ένα συσχετισμένο μετασχηματισμό από την ευθεία ε σε μια ευθεία ζ τότε η εικόνα του P_∞ θα είναι το ιδεατό σημείο της ζ , έστω P'_∞. Για τον συσχετισμένο λόγο έχουμε :

Α(Α,Β,Γ)= R(P_∞ ,Α,Β,Γ)=R(P'_∞ ,Α’,Β’,Γ’)=Α(Α’,Β’,Γ’)

Οπότε , όπως και ο διπλός λόγος **, ο συσχετισμένος λόγος είναι ένα αναλλοίωτο της συσχετισμένης γεωμετρίας .**

Έχοντας εξαιρέσει την ιδεατή ευθεία και τα ιδεατά σημεία , ένα σημείο του συσχετισμένου επιπέδου θα έχει συντεταγμένες της μορφής (χ_1,χ_2,χ_3) με $\chi_3\neq 0$ ή σε ισοδύναμη γραφή ($y_1,y_2,1$) με $y_1= \chi_1/ \chi_3$, $y_2= \chi_2/ \chi_3$.Αν τα Α , Β έχουν στο συσχετισμένο επίπεδο συντεταγμένες ($\alpha_1,\alpha_2,1$) και ($\beta_1,\beta_2,1$) τότε κάθε σημείο της ευθείας που ορίζουν τα Α και Β θα έχει συντεταγμένες Χ=κΑ+λΒ=($\kappa\alpha_1+\lambda\beta_1$, $\kappa\alpha_2+\lambda\beta_2$, κ+λ) . Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κ+λ=1 και επομένως Χ=κΑ+(1-κ)Β .Στην τελευταία σχέση όπως έχει οριστεί το σημείο Χ , σε κάθε τιμή του κ αντιστοιχεί μοναδικό σημείο Χ με συντεταγμένες ($\chi_1,\chi_2,1$) , για τις οποίες είναι

($\chi_1,\chi_2,1$) =κ($\alpha_1,\alpha_2,1$)+(1-κ)($\beta_1,\beta_2,1$)=($\kappa\alpha_1+(1-\kappa)\beta_1$, $\kappa\alpha_2+(1-\kappa)\beta_2$, 1) όπου λύνοντας ως προς το κ παίρνουμε κ= $\frac{\chi_1-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}=\frac{\chi_2-\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}$.

Αφού τα Α , Β είναι σημεία της ε και το Α-Β θα είναι επίσης σημείο της ε .
Όμως Α-Β=($\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,0$) ,που σημαίνει ότι το σημείο Α-Β είναι το ιδεατό σημείο P_∞ .Έχουμε Α-Β= P_∞ ήΑ=Β+ P_∞ , Χ=κΑ+(1-κ)Β=κ P_∞ +Β και ο συσχετισμένος λόγος γίνεται
Α(Α,Β,Χ)= R(P_∞ ,Α,Β,Χ)=R(P_∞ , Β+ P_∞ ,Β , κ P_∞ +Β)=κ/1=κ

Επομένως ο συσχετισμένος λόγος τριών σημείων μιας ευθείας Α,Β,Χ είναι ο αριθμός κ

A(A,B,X)=κ= $\frac{\chi_1-\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}=\frac{\chi_2-\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}$. Αυτή η έκφραση είναι και η έκφραση του απλού λόγου της Ευκλείδειας γεωμετρίας

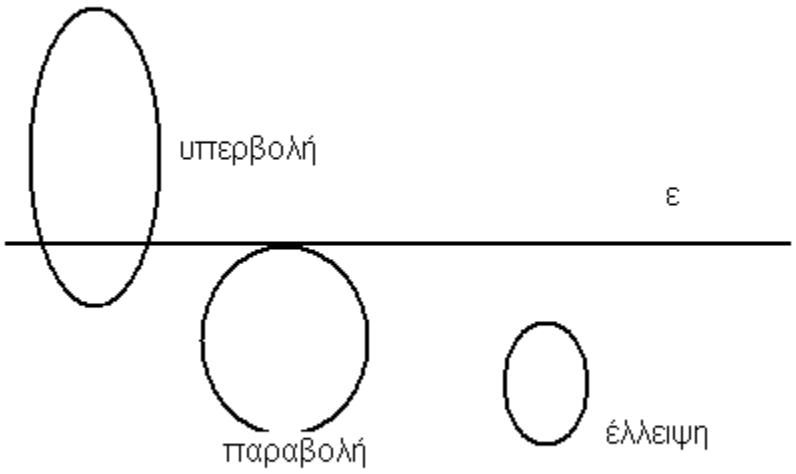
Αν θεωρήσουμε κ = $\frac{1}{2}$, τότε όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία , το σημείο

X= $\frac{1}{2}$ (A+B) είναι το συσχετισμένο μέσο του AB και η σχέση

R(A,B, $\frac{1}{2}$ (A+B) , P_∞)=R(A,B, $\frac{1}{2}$ (A+B) , A-B) = $\frac{\lambda_2\cdot\mu_1}{\lambda_1\cdot\mu_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot(-1)}=-1$ μας δείχνει ότι τα σημεία A,B, το μέσο του AB και το ιδεατό σημείο της AB είναι αρμονικά συζυγή

Οι κωνικές τομές στη συσχετισμένη γεωμετρία

Στη συσχετισμένη γεωμετρία οι μη εκφυλισμένες κωνικές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρείς κατηγορίες ανάλογα με τη σχέση της κωνικής με την ιδεατή ευθεία ε . Έτσι αν η ε τέμνει την κωνική σε δύο σημεία έχουμε υπερβολή , σε ένα έχουμε παραβολή ενώ αν δε την τέμνει έχουμε έλλειψη .



Ας θεωρήσουμε τη γενική μορφή εξίσωσης μιας κωνικής που δείξαμε ότι είναι η

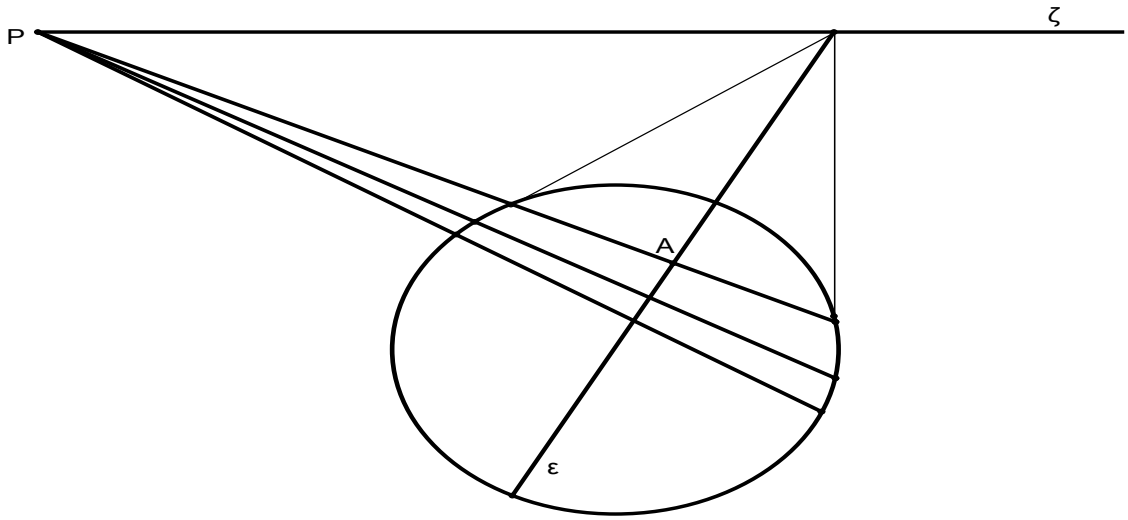
$\alpha_{11}\chi_1^2+\alpha_{22}\chi_2^2+\alpha_{33}\chi_3^2+2\,\alpha_{12}\chi_1\chi_2+2\,\alpha_{13}\chi_1\chi_3+2\,\alpha_{23}\chi_2\chi_3=0$ και αναζητούμε τα κοινά σημεία με την ιδεατή ευθεία που έχει εξίσωση $\chi_3=0$, οπότε καταλήγουμε στη εξίσωση

$\alpha_{11}\chi_1^2+2\,\alpha_{12}\chi_1\chi_2+\alpha_{22}\chi_2^2=0$ με διακρίνουσα $\Delta=4(\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22})$. Επομένως

- $\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22} < 0$ έχουμε έλλειψη
- $\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22} = 0$ έχουμε παραβολή
- $\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22} > 0$ έχουμε υπερβολή

Θεώρημα : Τα μέσα παράλληλων χορδών που τέμνουν μια κωνική ανήκουν σε ευθεία

Απόδειξη: αν θεωρήσουμε την ιδεατή ευθεία ζ και ονομάσουμε Α τον πόλο της ζ και θεωρήσουμε Ρ ένα σημείο της ζ από το οποίο φέρνουμε ευθείες από το Ρ (που για τη συσχετισμένη γεωμετρία είναι μεταξύ τους παράλληλες ,τότε τα άκρα της χορδής με το μέσο και το Ρ θα αποτελούν αρμονική τετράδα.



Έτσι τα μέσα θα είναι συζυγή με το Ρ και επομένως θα ανήκουν στην πολική ευθεία του Π που περιέχει και το σημείο Α.

Όταν η κωνική δεν είναι παραβολή τότε η ιδεατή ευθεία ζ δεν περιέχει τον πόλο της Α. Η αρμονική ομολογία με κέντρο το Α και άξονα τη ζ απεικονίζει την κωνική στον εαυτό της. Σε όρους της συσχετισμένης γεωμετρίας η κωνική απεικονίζεται στον εαυτό της με συμμετρία ως προς κέντρο , με κέντρο το Α . Έτσι το Α ονομάζεται κέντρο της κωνικής και κάθε ευθεία που διέρχεται από το Α είναι διάμετρος της κωνικής.

Παράσταση κωνικής σε συσχετισμένες συντεταγμένες

Όπως και στο προβολικό επίπεδο , με κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων καταλήγουμε ότι η γενική μορφή

- παραβολής είναι $\chi_2^2=\chi_1$
- έλλειψης είναι $\chi_1^2+ \chi_2^2=1$
- υπερβολής είναι $\chi_1^2- \chi_2^2=1$

Εμβαδό στη συσχετισμένη γεωμετρία

Στη στοιχειώδη γεωμετρία το εμβαδό ορίζεται με τη βοήθεια της απόστασης. Στη συσχετισμένη γεωμετρία ορίζουμε το εμβαδό ως εξής:

Θεωρούμε ένα χωρίο D .Αν A(D) = $\left|\iint_D dx_1 dx_2\right|$ είναι το εμβαδό του χωρίου και

$x_1 = \alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2+\alpha_1$

$x_2 = \alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2+\alpha_2$ με Δ= $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ είναι ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός

που απεικονίζει το D σε ένα σύνολο D' , τότε A(D') = $\left|\iint_{D'} dx'_1\, dx'_2\right|$ που από τις ιδιότητες

του διπλού ολοκληρώματος γράφεται A(D') = $\left|\iint_D \Delta dx_1 dx_2\right|$. Το εμβαδό παρουσιάζει

ενδιαφέρον στη περίπτωση της έλλειψης που αν έχει τύπο $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 1$ με α>0 και

β>0 τότε A(D) = $\left|\iint_D dx_1 dx_2\right| = \iint_{\alpha x_1^2+\beta x_2^2 \le 1} dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα Loewner και Behrend

Θεώρημα: Αν K είναι μια κλειστή , κυρτή γραμμή , τότε από όλες τις ελλείψεις που έχουν ένα δοσμένο κέντρο Z και περιέχουν το K υπάρχει ακριβώς μια με ελάχιστο εμβαδόν.

Απόδειξη: Αν E , E' είναι δύο ελλείψεις με την παραπάνω ιδιότητα , δηλαδή ότι έχουν το ελάχιστο εμβαδό τότε αυτές συμπίπτουν . Αν E: $\alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_2^2 = 1$ και E' : $\alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 = 1$, θα είναι $\alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_2^2 \le 1$ και $\alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 \le 1$ για οποιοδήποτε σημείο του K αφού οι E και E' περιέχουν το K. Τότε και η εξίσωση

$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}x_1^{\ 2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}x_2^{\ 2}=1$ θα παριστάνει έλλειψη με το ίδιο κέντρο και θα περιέχει το Κ .Τα εμβαδά των τριών χωρίων που ορίζουν οι ελλείψεις θα είναι $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\beta_1}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_2\beta_2}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)}}$. Αφού υποθέσαμε ότι οι Ε και Ε' έχουν ελάχιστο εμβαδό πρέπει $\frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)}} \geq \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\beta_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_2\beta_2}}$.Δηλαδή $(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)\leq 4\alpha_1\beta_1=4\alpha_2\beta_2$ ή $(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)\leq 4\sqrt{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}$. Όμως από την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου είναι $2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\leq\alpha_1+\alpha_2$ και $2\sqrt{\beta_1\beta_2}\leq\beta_1+\beta_2$ και οι ισότητες ισχύουν αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$.Δηλαδή οι Ε και Ε' συμπίπτουν.

Κεφάλαιο 4ο : Μετρικοί χώροι

<u>Ο Μετρικός χώρος</u>

Η εξαίρεση μιας ευθείας από το προβολικό επίπεδο μας έδωσε τη συσχετισμένη γεωμετρία η οποία μας έδωσε την έννοια της παραλληλίας και τώρα είναι φυσικό να αναζητήσουμε την έννοια της απόστασης και τον τρόπο που μπορεί να εισαχθεί.

Η απόσταση δύο σημείων Α και Β πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

- Η απόσταση ΑΒ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός , και ΑΒ=0 Αν και μόνο αν τα Α και Β ταυτίζονται
- Είναι ΑΒ=ΒΑ
- Ισχύει η τριγωνική ανισότητα , δηλαδή ΑΒ+ΒΓ≥ΑΓ

Αν για παράδειγμα ΑΒ=1 , αν Α και Β είναι διαφορετικά και ΑΒ=0 αν Α , Β ταυτίζονται τότε οι παραπάνω προϋποθέσεις ικανοποιούνται .

Ένα σύνολο από σημεία R εφοδιασμένο με μια 'απόσταση' που ορίζεται όπως παραπάνω ονομάζεται μετρικός χώρος.

Ένα άλλο παράδειγμα μετρικού χώρου αποτελεί ο R^{ν} όπου περιέχει τις ν-αδες

$\chi=(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\nu)$ και είναι εφοδιασμένος με την απόσταση $d_2(x,y)=\max\{|x_i - y_i|\}$, i=1,2,…,ν .Αν ακόμα θεωρήσουμε το ίδιο σύνολο με διαφορετική απόσταση

$d_3=\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$

Στο ίδιο σύνολο σημείων ορίζεται και η γνωστή μας Ευκλείδεια απόσταση

$d_4=\left(\sum_{i=1}^{i=n}(xi-yi)^2\right)^{1/2}$ η οποία ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα από την ανισότητα Cauchy-Schwartz: $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right)$

αν θέσουμε $\alpha_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$ γίνεται

$$\left(\sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)]\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\right)^2 \text{ ή}$$

$$d_4{}^2(X,Y)+2\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\right)+d_4{}^2(X,Y)\le d_4{}^2(X,Y)+2d_4(X,Y)d_4(Y,Z)+d_4{}^2(X,Y)$$

και με συμπλήρωση τετραγώνου στο β μέλος έχουμε :

$$d_4{}^2(X,Y)+2\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\right)+d_4{}^2(X,Y)\le d_4{}^2(X,Y)+2d_4(X,Y)d_4(Y,Z)+d_4{}^2(X,Y) \quad (1)$$

Όμως $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\right)^2=[\sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)]]^2$ που είναι το αριστερό μέλος της (1) και

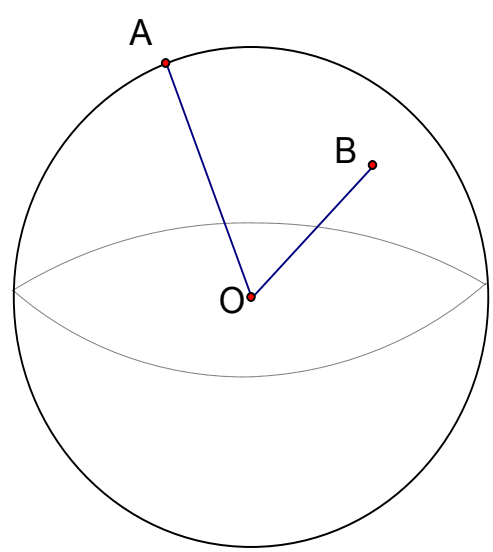
έτσι η (1) γίνεται $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\right)^2 \le [d_4(X,Y)+d_4(Y,Z)]^2$ ή $d_4(X,Z)\le d_4(X,Y)+d_4(Y,Z)$

Ακόμα στο ίδιο σύνολο μπορεί να οριστεί η απόσταση

$d_5=\left(\sum_{i=1}^{i=n}(xi-yi)^2\right)^{1/4}=\sqrt{d_4(X,Y)}$ είναι

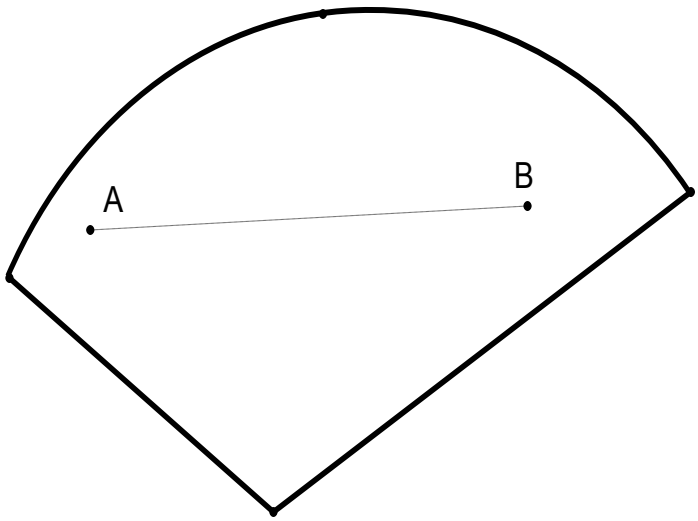
μέτρο , γιατί αν για τους θετικούς κ ,λ ,μ είναι

$\kappa \le \lambda+\mu$ τότε $\sqrt{\kappa}\le\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}$



Στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων $\Re^3$ αν θεωρήσουμε τη σφαίρα κέντρου O(0,0,0) και ακτίνας r , θα έχει εξίσωση $\sum_{i=1}^{3}x_i{}^2=r^2$ και αν $A(x_1,x_2,x_3)$, $B(y_1,y_2,y_3)$ είναι σημεία της σφαίρας ορίζουμε ως

απόσταση των A και B την ποσότητα s(A,B)= $rArc(\cos[\sum_{i=1}^{3} x_i y_i / r^2])$ που εκφράζει το γινόμενο rθ όπου θ η γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες OA , OB της σφαίρας .



<u>Κυρτά σύνολα</u>

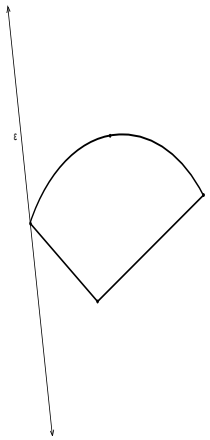
Σε αναλογία με την Ευκλείδεια ιδέα του ευθύγραμμου τμήματος , ορίζουμε και στο συσχετισμένο επίπεδο τα τμήματα ως εξής

Έστω A , B σημεία του συσχετισμένου επιπέδου . Το σύνολο των σημείων της μορφής (1-θ)A+θB όπου 0<θ<1 ονομάζεται ανοικτό τμήμα S^*(A,B) . Αν για το θ έχουμε τις τιμές $0 \le \theta \le 1$ τότε ορίζουμε το κλειστό τμήμα S(A,B)

Ακόμα ορίζουμε την έννοια της κυρτότητας όπως και στην Ευκλείδεια γεωμετρία

Ένα σύνολο σημείων M στο συσχετισμένο επίπεδο λέμε ότι είναι κυρτό αν για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων A και B που ανήκουν στο M τότε και το τμήμα S(A,B) ανήκει στο M .

Μια βασική έννοια στην κυρτότητα είναι και οι γραμμές στήριξης που σε ένα κυρτό σύνολο K ορίζεται ως εξής: Η ε τέμνει το K σε ένα τουλάχιστον σημείο και η ε 'αφήνει' το K στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ε. Από τον ορισμό η ε δεν περιέχει εσωτερικά σημεία του K .Αποδεικνύεται ότι αν το A είναι συνοριακό σημείο ενός κυρτού



συνόλου Κ τότε ορίζεται η γραμμή στήριξης του Κ που διέρχεται από το Α.

Κάθε εφαπτομένη της έλλειψης είναι γραμμή στήριξης της έλλειψης.

Θα εστιάσουμε κυρίως στη κυρτότητα που έχει σχέση με τις κωνικές τομές μια και θα μας δώσει ουσιώδη συμπεράσματα στο μέτρο στα παρακάτω .

Σε σχέση με μια κωνική C οι ευθείες χωρίζονται σε τρεις κλάσεις :

- Οι εφαπτόμενες της C
- Οι τέμνουσες της C , που τέμνουν τη κωνική σε δύο σημεία
- Οι ευθείες που δεν τέμνουν τη C

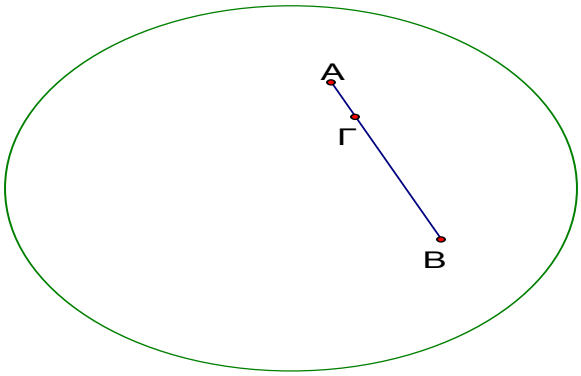
Αν δούμε την παραπάνω κατηγοριοποίηση δυικά θα χωρίσουμε τα σημεία σε τρείς κατηγορίες :

- Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην κωνική .
- Τα σημεία που ανήκουν σε δύο εφαπτόμενες της C .
- Τα σημεία που δεν ανήκουν σε καμιά εφαπτομένη της C.

Τα τελευταία λέμε ότι είναι τα μη εφαπτόμενα σημεία της C για τα οποία ισχύει :

Τα μη εφαπτόμενα σημεία μιας έλλειψης ή μιας παραβολής αποτελούν ένα κυρτό σύνολο .

Απόδειξη : Αν τα Α , Β είναι σημεία που δεν ανήκουν σε καμία εφαπτομένη τότε η ΑΒ θα είναι τέμνουσα της κωνικής και αν υποθέσουμε ότι το Γ είναι σημείο του τμήματος ΑΒ από το οποίο μπορούμε να φέρουμε εφαπτόμενες προς την κωνική . Αυτό σημαίνει ότι η ιδεατή ευθεία ζ τέμνει την κωνική και επομένως η κωνική είναι υπερβολή που είναι άτοπο



Στοιχεία μετρικού χώρου

Σε ένα μετρικό χώρο αν το σημείο X(t) , $\alpha \leq t \leq \beta$ όπου X(t_i)→ $X(t_o)$ καθώς $t_i \to t_o$ λέμε ότι το σύνολο X(t) είναι μια γραμμή στο μετρικό χώρο. Μπορούμε να ορίσουμε το μήκος μιας γραμμής αν θεωρήσουμε μια διαμέριση Δ του [α,β] με

Δ: $\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta$ και το μήκος της γραμμής είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{n} X(t_i)X(t_{i-1})$.Από την τριγωνική ανισότητα κάθε άθροισμα της παραπάνω μορφής θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την απόσταση X(α)X(β) .Αν ισχύει η ισότητα η γραμμή θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα X(α)X(β) .

Μια (μετρικά) ευθεία L στο μετρικό χώρο R λέμε ότι είναι ένα σύνολο από σημεία X(t) που είναι ισομετρικό με τον άξονα των πραγματικών αριθμών .Δηλαδή η απόσταση X(t_1)X(t_2)= $|t_1 - t_2|$

Για τον ορισμό της καθετότητας θα εργαστούμε αναλυτικά θεωρώντας μια μετρικά ευθεία L στον R και ένα σημείο A .Τότε AX(t) $\to \infty$ καθώς t→ $\pm\infty$.Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε AX(t)+ AX(0) $\geq$ X(t)X(0)= $|t|$

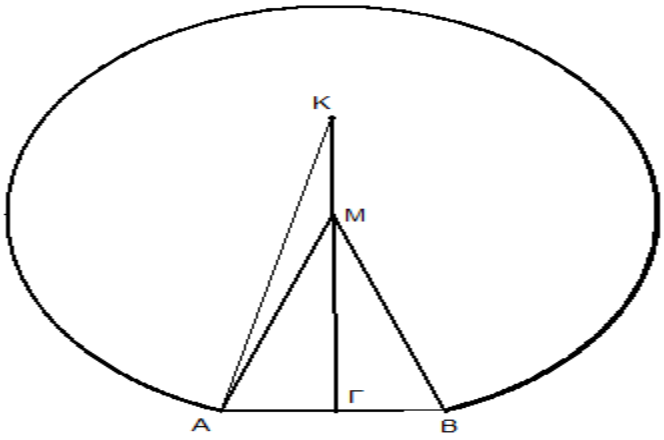
Επίσης AX(t_1)+X(t_1)X(t_2) >AX(t_2) και AX(t_2)+X(t_1)X(t_2)>AX(t_1) που γράφονται

$|AX(t_1) - AX(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$.Αυτό δείχνει ότι η AX(t) είναι μια συνεχής συνάρτηση και επομένως παίρνει ελάχιστη τιμή (αφού οι τιμές της είναι θετικές) σε κάποιο σημείο H=X(t_0) .Το σημείο αυτό ονομάζεται ίχνος του σημείου A στη μετρική ευθεία L.H

παραπάνω διαδικασία μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ίχνους και επομένως της κάθετης ευθείας αλλά δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα αυτής .Η καθετότητα έχει άμεση σχέση με τους κύκλους και την κυρτότητά τους .

Κύκλος Κ(Μ,δ) σε μετρικό χώρο είναι το σύνολο των σημείων Χ για τα οποία ΜΧ=δ>0 .Το εσωτερικό του κύκλου συμβολίζεται U(M,X)<δ , ενώ ο δίσκος που περιέχει τα σημεία του κύκλου μαζί με τα εσωτερικά σημεία συμβολίζεται $\overline{U}$ (Μ,δ) $\leq$ δ .

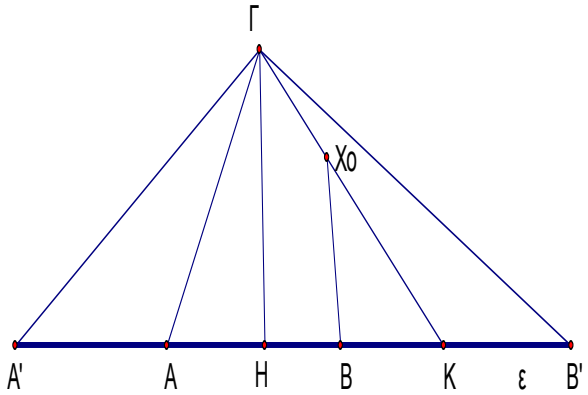
Αν όλοι οι κύκλοι στο μετρικό χώρο R είναι κυρτοί τότε όλοι είναι γνήσια κυρτοί

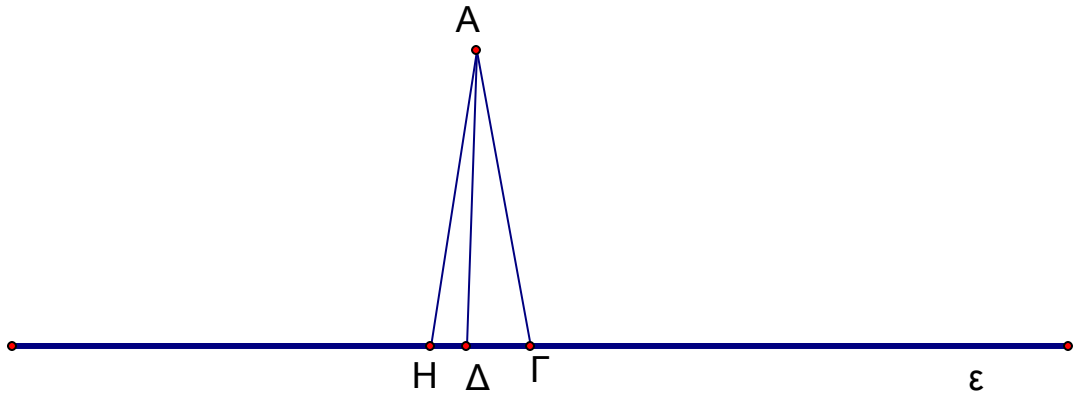


Στο παραπάνω σχήμα υποθέτουμε ότι ο κύκλος Κ(Μ,δ) είναι κυρτό σχήμα αλλά όχι γνήσια κυρτό .Επομένως περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα S(A,B).Επιλέγουμε ένα σημείο Γ του ΑΒ διαφορετικό από τα άκρα και Κ σημείο του δίσκου ώστε το ΚΓ να περιέχει το Μ .Από την τριγωνική ανισότητα ΚΑ<ΚΜ+ΜΑ=ΚΜ+ΜΓ=ΚΓ και ΚΑ<ΚΒ.Αν σ είναι το μέγιστο των ΚΑ και ΚΒ τότε ο δίσκος $\overline{U}$ (Μ,σ) περιέχει τα Α και Β αλλά όχι το Γ .Δηλαδή ο δίσκος (Μ,σ) είναι μη κυρτός άρα και ο δίσκος (Μ,δ) είναι μη κυρτός , που είναι άτοπο.

Οι κύκλοι στο μετρικό χώρο R είναι κυρτοί αν και μόνο αν οποιοδήποτε σημείο του R έχει μοναδικό ίχνος σε οποιαδήποτε ευθεία.

Απόδειξη: Έστω ότι όλοι οι κύκλοι είναι κυρτοί .Στο παρακάτω σχήμα υποθέτουμε ότι το Α έχει δύο ίχνη Η,Γ στην ε .Τότε για οποιοδήποτε σημείο Δ του τμήματος ΗΓ είναι ΑΔ≥ΑΗ=ΑΓ=σ .Ο δίσκος (Α,σ) από την υπόθεση είναι κυρτός και θα περιέχει το τμήμα ΑΓ .Άρα θα είναι ΑΔ=σ που σημαίνει ότι ο κύκλος (Α,σ) δε θα είναι γνησία κυρτός που είναι άτοπο





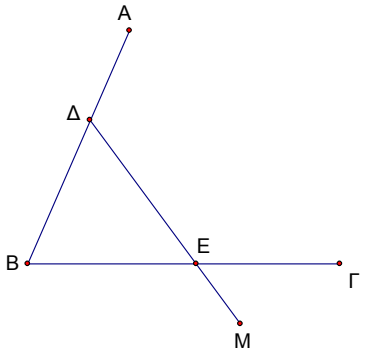
Αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι κάθε σημείο του R έχει μοναδικό ίχνος σε οποιαδήποτε ευθεία και υποθέτουμε ότι υπάρχει κύκλος (Γ,δ) που δεν είναι κυρτός και επομένως ο δίσκος θα περιέχει δύο σημεία Α’ και Β’ για τα οποία κάποιο από τα σημεία του Α’Β’ δε θα βρίσκεται στο δίσκο . Έτσι ΓΑ’ και ΓΒ’ θα είναι μικρότερα ή ίσα του δ και ΓΒ>δ .Όμως η απόσταση ΓΧ , όπου Χ τυχαίο σημείο του Α΄Β’ είναι συνεχής συνάρτηση και θα μηδενίζεται ανάμεσα στα Α’ και Β και ανάμεσα στα Β και Β’ .Άρα θα υπάρχουν σημεία Α και Κ με ΓΑ=0 , ΓΚ=0.Το Γ θα έχει μοναδικό ίχνος στην ευθεία έστω το Η που δε μπορεί να είναι το Α ή το Β ή το Κ και ας υποθέσουμε ότι βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Β .Καθώς ένα σημείο κινείται στο ΓΚ , το ίχνος του κινείται στο ΗΚ και επομένως υπάρχει σημείο X_0 του ΓΚ που έχει ίχνος το Β. Είναι $X_0B>=ΓΒ-ΓX_0>=ΓΚ-ΓX_0=X_oK$ και αφού το Β είναι ίχνος $X_0B<X_0K$ που είναι άτοπο.

Ισομετρίες σε μετρικούς χώρους

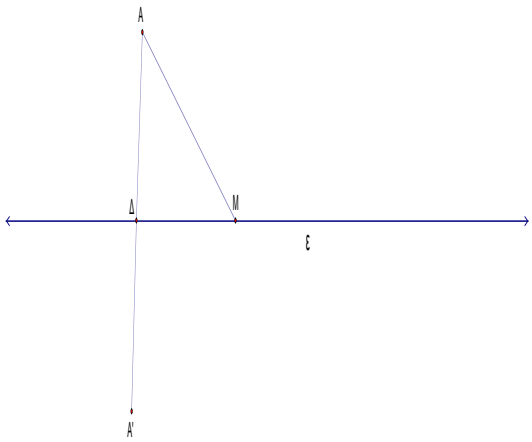
Σε ένα μετρικό χώρο όπου d(A,B) είναι η απόσταση δύο σημείων του μετρικού χώρου , η απεικόνιση f λέμε ότι είναι ισομετρία στον μετρικό χώρο αν d(f(A),f(B))=d(A,B) για οποιαδήποτε σημεία του μετρικού χώρου . Δηλαδή μια ισομετρία διατηρεί τα μήκη . Μια ισομετρία είναι πάντοτε 1-1 γιατί αν A≠B θα είναι d(A,B)≠ 0 αρα και d(f(A),f(B))≠0 και επομένως f(A)≠f(B).Ακόμα οι ισομετρίες σε ένα μετρικό χώρο με πράξη τη σύνθεση είναι ομάδα . Θα εξετάσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες των ισομετριών

- Μια ισομετρία που αφήνει σταθερά δύο σημεία μιας ευθείας , τότε έχει σταθερά σημεία όλα τα σημεία της ευθείας. Αυτό προκύπτει άμεσα από τη σχέση M=λA+(1-λ)B
- Αν μια ισομετρία έχει τρία μη συνευθειακά σημεία A,B,Γ σταθερά , τότε είναι η ταυτοτική. Αν θεωρήσουμε τυχαίο σημείο M του επιπέδου και ένα σημείο Δ του τμήματος AB και E είναι το σημείο τομής του ΔM με το BΓ ,τότε τα Δ και E με βάση την πρώτη ιδιότητα θα είναι σταθερά σημεία της απεικόνισης άρα και η ΔE θα περιλαμβάνει μόνο σταθερά σημεία και τελικά η απεικόνιση θα είναι ταυτοτική
- Τρία μη συνευθειακά σημεία μαζί με τις εικόνες τους προσδιορίζουν μια ισομετρία. Αν f , g απεικονίζουν τα A ,B ,Γ στα A' , B' , Γ' τότε η $g^{-1}$of θα έχει σταθερά σημεία τα A , B , Γ και με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα θα είναι η ταυτοτική απεικόνιση , δηλαδή f = g .

Συμπερασματικά μια ισομετρία θα έχει είτε κανένα σταθερό σημείο είτε ένα ακριβώς σταθερό σημείο είτε μια ευθεία που όλα της τα σημεία θα είναι σταθερά . Όταν η ισομετρία είναι ενέλιξη , δηλαδή η f^2 = fof είναι η ταυτοτική τότε θα έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο , αφού αν f(A)=B θα είναι fof(A)=A και το κέντρο M του τμήματος S(A,B) θα είναι σταθερό . Σε αυτή την



περίπτωση λέμε ότι έχουμε συμμετρία ως προς κέντρο με κέντρο το Μ και το Μ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της απεικόνισης.



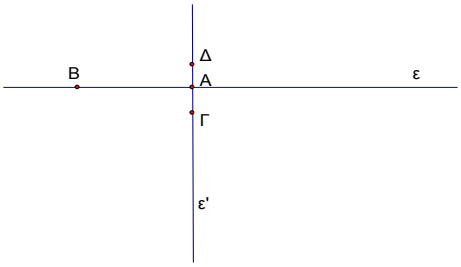
Στην περίπτωση που για την ενέλιξη , τα σταθερά σημεία είναι σημεία μιας ευθείας ε τότε έχουμε συμμετρία ως προς την ευθεία ε που θα δείξουμε ότι είναι μοναδική. Στο παραπάνω σχήμα αν Α' είναι η εικόνα του Α τότε το κέντρο του ΑΑ' Δ θα βρίσκεται πάνω στην ε και για ένα τυχαίο σημείο της ε, Μ διαφορετικό του Δ θα είναι

2d(A,M)=d(A,M)+d(f(A),f(M))=d(A,M)+d(A',M)>d(A,A')=2d(A,Δ) .Δηλαδή

d(A,M)>d(A,Δ) , που σημαίνει ότι το Δ είναι το ίχνος του Α πάνω στην ε που είναι μοναδικό άρα και η απεικόνιση είναι μοναδική.

Σε αντίθεση με την Ευκλείδεια γεωμετρία η συμμετρία ως προς μια οποιαδήποτε ευθεία δεν ορίζεται πάντα αλλά αποδεικνύεται ότι **αν μια ισομετρία έχει σταθερή μια ευθεία ε τότε αυτή είναι η συμμετρία ως προς την ε.** Μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τις συμμετρίες ως προς ευθεία είναι τα εξής:

- Αν ορίζεται η συμμετρία Φ ως προς μια ευθεία ε , τότε ορίζονται οι κάθετες ευθείες στην ε και η Φ απεικονίζει κάθε κάθετη της ε στον εαυτό της.
- Αν οι κύκλοι είναι κυρτά σχήματα και η συμμετρία ως προς μια ευθεία ε ορίζεται τότε η καθετότητα είναι συμμετρική .Δηλαδή αν $\varepsilon' \perp \varepsilon$ τότε και $\varepsilon \perp \varepsilon'$ Αν Α είναι το σημείο τομής των ε και ε' και Β τυχαίο σημείο της ε .Αν Γ είναι το ίχνος του Β στην ε' τότε η συμμετρία απεικονίζει το Γ σε σημείο Δ της ε' με ΒΓ=ΒΔ. Η μοναδικότητα του Γ μας δίνει ότι τα Γ και Δ συμπίπτουν και άρα συμπίπτουν και με το Α.



Μια ισομετρία που έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο P που λέγεται κέντρο , ονομάζεται στροφή γύρω από το P και περιλαμβάνει τη συμμετρία ως προς το P. Για τις στροφές έχουμε τα παρακάτω γεωμετρικά συμπεράσματα

- Μια στροφή με κέντρο το P είναι προσδιορίσιμη από το P και ένα σημείο A μαζί με την εικόνα του .
- Η σύνθεση δύο στροφών f , g γύρω από ένα σημείο P είναι είτε η ταυτοτική απεικόνιση είτε μια στροφή γύρω από το P . Αν f , g είναι δύο στροφές γύρω από το P τότε θα έχει σταθερό σημείο το P . Αν δεν έχει άλλο σταθερό σημείο τότε η σύνθεση fog θα είναι στροφή γύρω από το P. Αν υπάρχει και άλλο σταθερό σημείο εκτός του P , το A τότε f(g(A))=A ή f^{-1}(A)=g(A) , δηλαδή θα έχουμε δύο στροφές τις f^{-1} και g που έχουν κοινό κέντρο , κοινό σημείο A και κοινή εικόνα f(A) οπότε σύμφωνα με το παραπάνω συμπέρασμα προσδιορίζουν ακριβώς μια στροφή . Άρα f^{-1}=g και fog=I .
- Αν οι f , g είναι συμμετρίες ως προς τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που τέμνονται στο P τότε η σύνθεση fog είναι στροφή με κέντρο το P . Η fog είναι ισομετρία που έχει το P σταθερό σημείο και αν έχει και άλλο σταθερό σημείο A διαφορετικό του P , θα είναι : f^{-1}(A)=g(A) .Όμως η συμμετρία ως προς ευθεία είναι ενέλιξη και επομένως f=f^{-1} , οπότε f(A)=g(A) και τώρα το κέντρο του S(A,f(A) θα ανήκει στην ε1 και στην ε2 δηλαδή θα είναι το P , που είναι άτοπο . Τελικά δε θα υπάρχει άλλο σταθερό σημείο και η ισομετρία fog θα είναι στροφή με κέντρο το P

Κεφάλαιο 5ο: Μέτρο Minkowski – Ευκλείδεια γεωμετρία

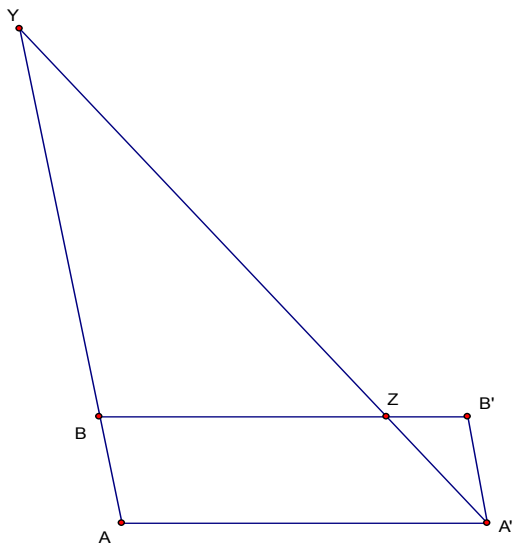
Μέτρο Minkowski

Στη συσχετισμένη γεωμετρία δείξαμε ότι ο συσχετισμένος λόγος τριών συνευθειακών σημείων ικανοποιεί τη σχέση $\left|\mathrm{A}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\right| = \dfrac{d_4(X,Z)}{d_4(X,Y)}$

Όπου $d_4(X,Y)=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}$

Το πρόβλημα που έθεσε ο H. Minkowski (1864-1909) είναι να προσδιοριστούν τα προβολικά μέτρα m(A,B) που είναι ορισμένα στο συσχετισμένο επίπεδο και ικανοποιούν τη σχέση $\left|\mathrm{A}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\right| = \dfrac{m(X,Z)}{m(X,Y)}$.

Επομένως στα παρακάτω όταν αναφερόμαστε σε μέτρο , αυτό θα είναι μέτρο Minkowski και η αντίστοιχη γεωμετρία στο συσχετισμένο επίπεδο ως η γεωμετρία Minkowski .



Αρχικά θα αποδείξουμε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα AB και A’B’ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και Y είναι σημείο στην προέκταση του S(A,B) , ενώ Z είναι το σημείο τομής των S(B,B’) και S(Y,A’) .Τότε από τον ορισμό του μέτρου Minkowski

$$\frac{m(A,B)}{m(A,Y)} = \left|A(A,Y,B)\right| = \left|A(A',Y,Z)\right| = \frac{m(A',Z)}{m(A',Y)}$$

$$\frac{m(A,B)}{m(A,Y)} = \frac{m(A',Z)}{m(A',Y)}$$ ή

$$\frac{m(A,Y)}{m(A',Y)} = \frac{m(A,B)}{m(A',Z)} \quad (1)$$

Αν εφαρμόσουμε την τριγωνική ανισότητα για τα σημεία Α , Α' ,Υ θα έχουμε:

$$m(A,Y) - m(A,A') \le m(A',Y) \le m(A,Y) + m(A,A')$$

Αν διαιρέσουμε με το m(A,Y) και πάρουμε όριο θα είναι

$$1 - \frac{m(A,A')}{m(A,Y)} \le \frac{m(A',Y)}{m(A,Y)} \le 1 + \frac{m(A,A')}{m(A,Y)}$$

Και αν $m(A,Y) \to \infty$ τότε $\frac{m(A',Y)}{m(A,Y)} \to 1$ (2)

Αν εργαστούμε όμοια για τα σημεία Α' , Ζ , Β' είναι

$$m(A',\mathrm{B}) - m(\mathrm{Z},\mathrm{B}') \le m(A',\mathrm{Z}) \le m(A',\mathrm{B}') + m(\mathrm{Z},\mathrm{B}')$$

$$1 - \frac{m(\mathrm{Z},\mathrm{B}')}{m(A',\mathrm{B}')} \le \frac{m(A',\mathrm{Z})}{m(A',\mathrm{B}')} \le 1 + \frac{m(\mathrm{Z},\mathrm{B}')}{m(A',\mathrm{B}')}$$ και αν $m(A,Y) \to \infty$ $\frac{m(A',\mathrm{Z})}{m(A',\mathrm{B}')} \to 1$ (3)

Από τις (2) και(3) θα είναι $\frac{m(A',Y)}{m(A,Y)} \frac{m(A',\mathrm{Z})}{m(A',\mathrm{B}')} \to 1$ και λόγω της (1)

$\frac{m(A,\mathrm{B})}{m(A',\mathrm{B}')} \to 1$.Όμως m(A,B) , m(A',B') είναι σταθερά και επομένως είναι m(A,B)=m(A',B') .

Αν στο παρακάτω σχήμα το σημείο Α ανήκει στο S(P , A') , το Β στο S(P,B')και το ΑΒ είναι παράλληλο στο Α'Β' θα είναι $\mathrm{A}(\mathrm{P},\mathrm{A}',\mathrm{A}) = \mathrm{A}(\mathrm{P},\mathrm{B}',\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\mathrm{A}',\mathrm{B}',\Delta)$

Ή $\frac{m(\mathrm{P},\mathrm{A})}{m(\mathrm{P},\mathrm{A}')} = \frac{m(\mathrm{P},\mathrm{B})}{m(\mathrm{P},\mathrm{B}')} = \frac{m(\mathrm{A}',\Delta)}{m(\mathrm{A}',\mathrm{B}')}$

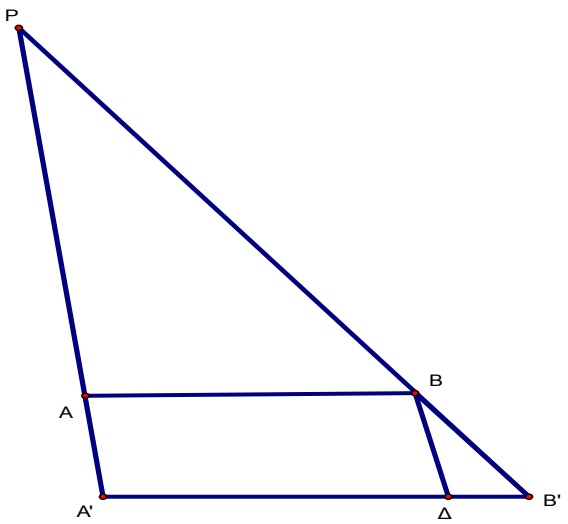
Όμως m(A , B)=m(A’, Δ) και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{m(\mathrm{P},\mathrm{A})}{m(\mathrm{P},\mathrm{A}')}=\frac{m(\mathrm{P},\mathrm{B})}{m(\mathrm{P},\mathrm{B}')}=\frac{m(\mathrm{A},\mathrm{B})}{m(\mathrm{A}',\mathrm{B}')} \quad (4)$$

Που μας παραπέμπει

στην ομοιοθεσία της Ευκλείδειας

Γεωμετρίας .Με τον παραπάνω τρόπο έχουμε ορίσει την ομοιοθεσία



Αν θεωρήσουμε στο παραπάνω σχήμα το P ως κέντρο , παρατηρούμε ότι τα σημεία A’ και B’ ικανοποιούν τη σχέση $X_i'= \lambda X_i+(1-\lambda)P$ με λ=m(P,A’)/m(P,A)

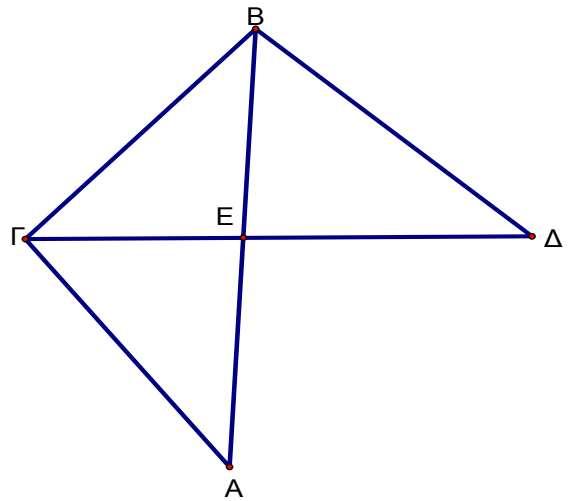
Και λόγω της (4) θα είναι m(A’,B’)=λm(A,B)

Επομένως με το μετασχηματισμό $x_i'=\lambda x_i+\alpha_i$ όλα τα μέτρα Minkowski πολλαπλασιάζονται με $|\lambda|$.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα:

Όλοι οι κύκλοι είναι γνήσια κυρτοί που θα το αποδείξουμε ως εξής:

Έστω (Γ , δ) κύκλος με κέντρο Γ και ακτίνα δ και A , B είναι σημεία με $m(A,\Gamma)\le\delta$ και $m(\mathrm{B},\Gamma)\le\delta$.Για να είναι γνήσια κυρτός ο κύκλος θα πρέπει κάθε σημείο E του τμήματος S^*(A,B) να ικανοποιεί τη



σχέση $m(\mathrm{E},\Gamma)<\delta$, η οποία αληθεύει αν τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Αν τα Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά ας υποθέσουμε ότι $m(\mathrm{B},\Gamma)\geq m(\Gamma,\mathrm{A})$

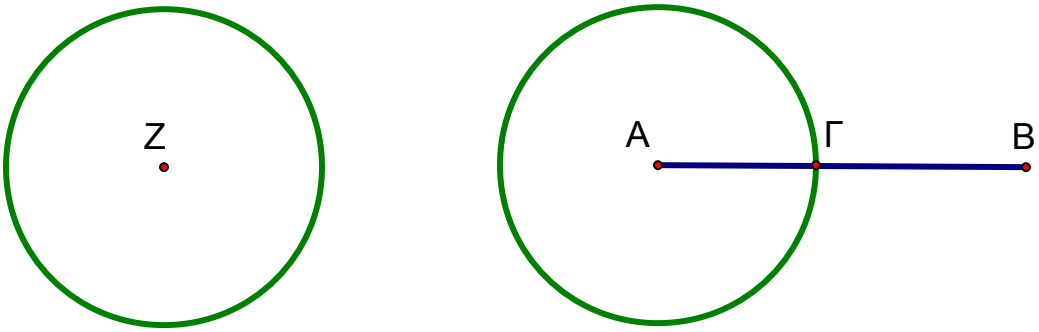
Αν Δ είναι το σημείο τομής της ΓΕ με την παράλληλη που φέρνουμε από το Β προς τη ΓΑ , σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι $\frac{m(\mathrm{B},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{A})}=\frac{m(\mathrm{E},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{E})}$ που με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας γράφεται $\frac{m(\mathrm{B},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{B})}\leq\frac{m(\mathrm{E},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{E})}$. Από την τριγωνική ανισότητα και τα παραπάνω είναι:

$$\frac{m(\mathrm{B},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{B})}<\frac{m(\Gamma,\mathrm{B})+m(\mathrm{B},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{B})}=1+\frac{m(\mathrm{B},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{B})}\leq 1+\frac{m(\Delta,\mathrm{E})}{m(\Gamma,\mathrm{E})}=\frac{m(\Gamma,\mathrm{E})+m(\mathrm{E},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{E})}=\frac{m(\Delta,\Gamma)}{m(\Gamma,\mathrm{E})}$$

Άρα m(Γ,Ε)<m(Γ,Β) $\leq$δ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

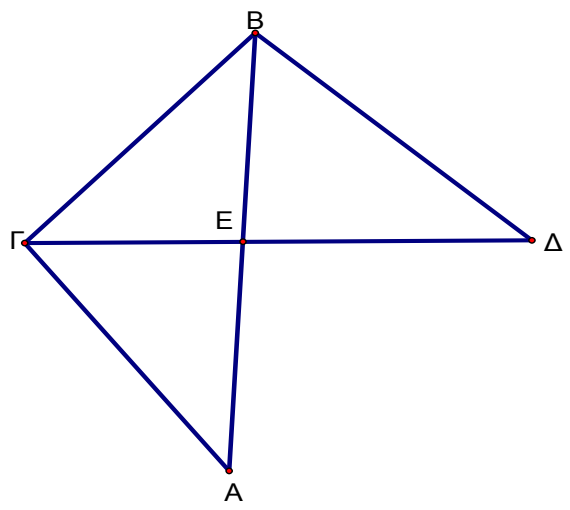
δηλαδή αν ο μοναδιαίος κύκλος είναι γνωστός (Ζ,1) όπου Ζ=(0,0) , τότε όλοι οι κύκλοι είναι γνωστοί και το μέτρο m(Α,Β) είναι προσδιορίσιμο για οποιοδήποτε ζευγάρι των Α και Β .

Ένας τρόπος για να οριστεί το μέτρο m(Α,Β) για οποιαδήποτε σημεία του επιπέδου είναι ο εξής : Με τη μεταφορά $x'_i = x_i+\alpha_i$ με i=1,2 μεταφέρουμε το μοναδιαίο κύκλο σε μια καμπύλη με τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο Ζ να μεταφερθεί στο Α που έχει συντεταγμένες (α_1,α_2)



Η καμπύλη που μεταφέραμε τέμνει την ημιευθεία ΑΒ στο Γ και ορίζουμε m(Α,Β)=Α(Α,Γ,Β) . Εδώ φαίνεται και η εμμονή στα κυρτά σύνολα αφού η μοναδικότητα

του σημείου Γ εξασφαλίζεται με το γεγονός ότι ο μοναδιαίος κύκλος είναι γνήσια κυρτή καμπύλη . Έτσι ορίζουμε το μέτρο ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία του συσχετισμένου επιπέδου .Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι το μέτρο που κατασκευάσαμε έχει τις ιδιότητες του μετρικού χώρου . Το m(Α,Β)=Α(Α,Γ,Β) είναι αναλλοίωτο με τη συμμετρία ως προς κέντρο το (Α+Β)/2 και



έτσι m(Α,Β)= m(Β,Α) . Η απόδειξη για την τριγωνική ανισότητα μοιάζει με την απόδειξη ότι οι κύκλοι είναι γνήσια κυρτοί . Συγκεκριμένα θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ και ένα σημείο Β που δεν ανήκει στο τμήμα ΓΔ και πρέπει να δείξουμε ότι m(Γ,Β)+m(Β,Δ)>m(Γ,Δ)

Στην παράλληλη από το Γ προς τη ΒΔ θεωρούμε σημείο Α με m(Α,Γ)=m(Β,Γ) και Ε το σημείο τομής ΓΔ και ΑΒ . Είναι

$$\frac{m(B,\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{B})}=\frac{m(B,\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{A})}=\frac{m(\mathrm{E},\Delta)}{m(\Gamma,\mathrm{E})}$$ (1) γιατί οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες και οι συσχετισμένοι λόγοι είναι ίσοι όπως έχουμε δείξει παραπάνω .Αν θεωρήσουμε τον κύκλο Κ(Γ,δ) , όπου δ= m(Α,Γ)=m(Β,Γ) που είναι γνήσια κυρτός , τότε το Ε θα είναι εσωτερικό σημείο του δίσκου , δηλαδή m(Γ,Ε)<δ=m(Γ,Β) και από την (1) έχουμε m(Ε,Δ)<m(Β,Δ) και επομένως

m(Γ,Δ)= m(Γ,Ε)+m(Ε,Δ)<m(Γ,Δ)+m(Δ,Β)

Η παραπάνω κατασκευή μπορεί να πραγματοποιηθεί αν στη θέση του κύκλου θεωρήσουμε μια κλειστή , γνήσια κυρτή γραμμή με κέντρο Γ που έχει συντεταγμένες (γ_1,γ_2) . Η μεταφορά θα έχει μορφή $\chi'_i=\chi_i+(\alpha_i-\gamma_i)$.

Εμβαδό στη γεωμετρία Minkowski

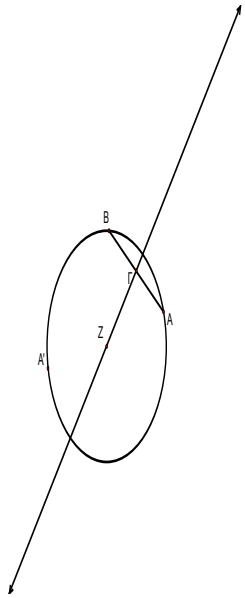
Επειδή η καθετότητα στη γεωμετρία Minkowski δεν είναι τόσο απλή όσο στην Ευκλείδεια γεωμετρία , το εμβαδό ορίζεται με τη βοήθεια του μοναδιαίου κύκλου , σε αντιστοιχία με το τετράγωνο της Ευκλείδειας . Επιλέγουμε συσχετισμένες συντεταγμένες x_1 , x_2 ώστε $\iint\limits_{\overline{U(z,1)}} dx_1 dx_2 = \pi$ και ορίζουμε το εμβαδό μιας επιφάνειας D ως $\mathrm{A}(D) = \iint\limits_{D} dx_1 dx_2$.

Συμμετρίες στη γεωμετρία Minkowski

Στη γεωμετρία του Minkowski , όπως είδαμε στα προηγούμενα οι μεταφορά και η συμμετρία ως προς σημείο είναι καλά ορισμένες και είναι ισομετρίες . Η συμμετρία ως προς ευθεία δεν ορίζεται πάντα και όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κλειδί για το πέρασμα στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Θεώρημα : Σε μια γεωμετρία του Minkowski είναι δυνατή η συμμετρία ως προς μια οποιαδήποτε ευθεία αν και μόνο αν οι κύκλοι είναι ελλείψεις .

Απόδειξη : Αν ένας κύκλος είναι έλλειψη , τότε επειδή οι κύκλοι είναι ομοιόθετοι μεταξύ τους θα είναι όλοι οι κύκλοι ελλείψεις . Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι αν οι συμμετρίες σε όλες τις ευθείες έχουν νόημα τότε ο κύκλος (Z , 1) θα είναι η έλλειψη E με κέντρο Z που περιέχει το μοναδιαίο δίσκο (Z , 1) και έχει το ελάχιστο εμβαδό .Η έλλειψη E και ο κύκλος (Z , 1) θα έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο γιατί , διαφορετικά η E θα μπορούσε να συρρικνωθεί περιέχοντας το δίσκο οπότε δε θα ίσχυε η απαίτηση του



ελάχιστου εμβαδού . Αν Α είναι το κοινό σημείο τότε και το αντιδιαμετρικό του Α’ θα βρίσκεται στον κύκλο και στην έλλειψη αφού έχουν το ίδιο κέντρο . Αν Β είναι ένα σημείο του κύκλου διαφορετικό από τα Α και Α’ και Γ είναι το μέσο ου S(A,B) . Είναι m(A,Z)=m(B,Z) , m(A,Γ)=m(B,Γ) που σημαίνει ότι η συμμετρία προς την ευθεία που ορίζουν τα Z και Γ μεταφέρει το Α στο Β και αφού είναι ισομετρία σε μια έλλειψη ελάχιστου εμβαδού μεταφέρει την Ε στον εαυτό της και έτσι ο κύκλος είναι έλλειψη.

Ορισμός Ευκλείδειας γεωμετρίας

Θα ορίσουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία με τη βοήθεια της γεωμετρίας Minkowski ως εξής :

Μια γεωμετρία Minkowski όπου οι ορίζονται συμμετρίες ως προς ευθεία , σε κάθε ευθεία , ονομάζεται Ευκλείδεια γεωμετρία. Ή με βάση το προηγούμενο θεώρημα :

Μια γεωμετρία Minkowski είναι Ευκλείδεια αν και μόνο αν οι κύκλοι είναι ελλείψεις.

Ο παραπάνω ορισμός μας οδηγεί στην ύπαρξη πολλών Ευκλείδειων γεωμετριών που εξαρτώνται από την επιλογή της έλλειψης που θα ορίσουμε ως το μοναδιαίο κύκλο .Θα δείξουμε όμως ότι όλες οι Ευκλείδειες γεωμετρίες είναι ισοδύναμες . Με την έννοια ισοδύναμες εννοούμε την ύπαρξη ενός ισομορφισμού μεταξύ των στοιχείων του συσχετισμένου επιπέδου , δηλαδή μια 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί τα μήκη.

Θεώρημα: Δύο γεωμετρίες του Minkowski m , m’ στο συσχετισμένο επίπεδο με μοναδιαίους κύκλους K(Z,1) και K’(Z’,1) είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν στο συσχετισμένο επίπεδο ορίζεται συσχετισμένος μετασχηματισμός όπου μεταφέρει τον K(Z,1) στον K’(Z’,1)

Απόδειξη: Αν οι m , m’ είναι ισοδύναμες τότε από τον ορισμό θα υπάρχει 1-1 απεικόνιση Φ στο συσχετισμένο επίπεδο με Φ(X)=X’ με m(X,Y)=m’(X’,Y’) .Αφού η Φ μεταφέρει τις ευθείες σε ευθείες είναι συσχετισμένος μετασχηματισμός . Επειδή οι αποστάσεις παραμένουν ίδιες η εικόνα του K(Z,1) θα είναι K’(Φ(Z),1) .Αν θεωρήσουμε

τη μεταφορά Y με Y(Φ(Z))=Z’ τότε η σύνθεση YοΦ μεταφέρει τον ένα κύκλο πάνω στον άλλο.

Αντίστροφα , υποθέτουμε ότι ορίζεται η Φ που μεταφέρει τον K(Z,1) στον K’(Z’,1) . Επειδή η Φ διατηρεί το συσχετισμένο λόγο και τα Z,Z’ είναι μέσα θα είναι Z=φ(Z)=Z’ .Απομένει δείξουμε ότι m(Z,X)=m’(Z’,X’) .Αν E είναι το σημείο τομής του K(Z,1)με την ημιευθεία ZX και E’ η τομή του K’(Z’,1) με τη Z’X’ , τότε αφού η Φ μεταφέρει τη ZX στην Z’X’ θα είναι E’=Φ(E) και από το συσχετισμένο λόγο έχουμε :

$$m(Z,X)=\frac{m(Z,X)}{m(Z,E)}=A(Z,E,X)=A(Z',E',X')=\frac{m'(Z,X)}{m'(Z,E)}=m'(Z',X').$$

Πόρισμα : Όλες οι Ευκλείδειες γεωμετρίες είναι ισοδύναμες

Αφού στη συσχετισμένη γεωμετρία κάθε έλλειψη μπορεί να γραφεί στη μορφή $x_1^2+x_2^2=1$ τότε ο μετασχηματισμός $x'_1=x_1$ και $x'_2=x_2$ μεταφέρει την έλλειψη K(Z,1) στην K’(Z’,1) και από το προηγούμενο θεώρημα οι γεωμετρίες θα είναι ισοδύναμες .

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έχουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία και το Ευκλείδειο μέτρο

Θεώρημα : Έστω F μια συνάρτηση από τα σημεία του συσχετισμένου επιπέδου στους πραγματικούς αριθμούς .Αν $F(x_1,x_2)>0$ όταν $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ και $F(\lambda x_1,\lambda x_2)=|\lambda|\cdot F(x_1,x_2)$ και αν η εξίσωση $F(x_1,x_2)=1$, παριστάνει μια κυρτή γραμμή τότε η παράσταση $m(A,B) = F(y_1-x_1, y_2-x_2)$, όπου (x_1,x_2) , (y_1,y_2) είναι οι συντεταγμένες των A , B στο συσχετισμένο επίπεδο , είναι μέτρο Minkowski .Κάθε μέτρο Minkowski μπορεί να πάρει την παραπάνω μορφή ορίζοντας $F(x_1,x_2) = m(A,Z)$ όπου Z=(0,0) .

Απόδειξη : Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $F(B-A)= F(y_1-x_1, y_2-x_2)$ και αν $X=(1-\lambda)A+\lambda B$, έχουμε $\frac{m(A,X)}{m(A,B)}=\frac{F(X-A)}{F(B-A)}=\frac{F(\lambda(B-A))}{F(B-A)}=|\lambda|=|\mathrm{A(A,B,X)}|$.

Ακόμα ο μοναδιαίος κύκλος $m(Z,X)=F(X-Z)= F(x_1,x_2)=1$ είναι γνήσια κυρτός , που επιτρέπει την κατασκευή του μέτρου σε όλο το συσχετισμένο επίπεδο .

Αντίστροφα , αν έχουμε ένα δοσμένο μέτρο Minkowski , ορίζοντας $F(x_1,x_2) = m(A,Z)$ όπου Z=(0,0) τότε $F(x_1,x_2)>0$ αν $Z\neq A$ από τον ορισμό του μέτρου και αφού είναι λA=(1-λ)Z+λA από τον ορισμό πάλι έχουμε $\frac{m(\mathrm{Z},\lambda\mathrm{A})}{m(\mathrm{Z},\mathrm{A})}=|\mathrm{A}(\mathrm{Z},\mathrm{A},\lambda\mathrm{A})|=|\lambda|$ δηλαδή $F(\lambda x_1,\lambda x_2)= |\lambda| \cdot F(x_1,x_2)$ και ακόμα η εξίσωση $F(x_1,x_2)=1$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος που είναι γνήσια κυρτός .

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να καταλήξουμε στο Ευκλείδειο μέτρο ως εξής : Η γενική μορφή εξίσωσης της έλλειψης στο συσχετισμένο επίπεδο είναι

$\alpha_{11}\chi^2{}_1+2\alpha_{12}\chi_1\chi_2+\alpha_{22}\chi^2{}_2+2\alpha_{13}\chi_1+2\alpha_{23}\chi_2+\alpha_{33}=0$ με $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha^2{}_{12}>0$ και η πολική ευθεία που θα αντιστοιχεί στο κέντρο της έλλειψης , που σε προβολική μορφή θα είναι (0,0,1), είναι η : $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{bmatrix}=[0]$ ή $\alpha_{13}\chi_1+\alpha_{23}\chi_2+\alpha_{33}\chi_3=0$ που όμως πρέπει να είναι η ιδεατή ευθεία που έχει εξίσωση $\chi_3=0$, που σημαίνει ότι $\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$ και $\alpha_{33}\neq 0$.Επομένως η εξίσωση της έλλειψης γίνεται $\alpha_{11}\chi^2{}_1+2\alpha_{12}\chi_1\chi_2+\alpha_{22}\chi^2{}_2+\alpha_{33}=0$ ή $\mathrm{A}\chi^2{}_1+2\mathrm{B}\chi_1\chi_2+\Gamma\chi^2{}_2=1$ με A>0 , Γ>0 και $A\Gamma-B^2>0$. Έτσι με βάση το προηγούμενο θεώρημα αν ορίσουμε $F(x_1,x_2)= \mathrm{A}\chi^2{}_1+2\mathrm{B}\chi_1\chi_2+\Gamma\chi^2{}_2$, η Ευκλείδεια απόσταση γίνεται $e(X,Y)= \sqrt{F(X-Y)}$.

Κεφάλαιο 6ο: Υπερβολική και ελλειπτική γεωμετρία

<u>Γεωμετρία του Hilbert</u>

Στο προβολικό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Χ και Υ μιας ευθείας ε και τα σημεία Α , Β του τμήματος ΧΥ ώστε το Β να βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Χ

Τότε για το διπλό λόγο θα έχουμε

R(A,B,X,Y)>1 και R(A,A,X,Y)=1 (1)

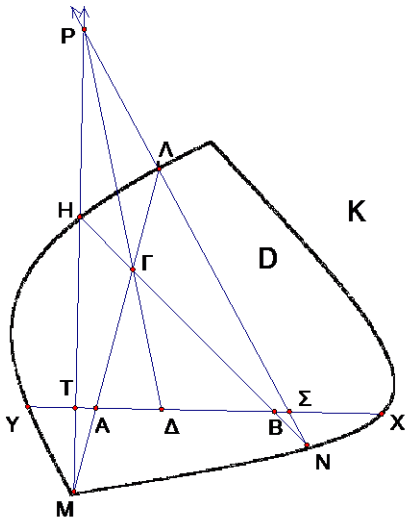
Ακόμα αν Δ είναι σημείο της ε έχουμε δείξει ότι

R(A,Δ,X,Y) R(Δ,B,X,Y) = R(A,B,X,Y) (2)

Για τα σημεία Α και Β μπορούμε να ορίσουμε την απόστασή τους ως

h(A,B) = $\frac{\kappa}{2}$ log(R(A,B,X,Y)) με κ>0 , οπότε και h(B,A) = $\frac{\kappa}{2}$ log(R(B,A,Y,X)) . Από την (1) είναι h(A,B)> 0 αν τα Α και Β δεν ταυτίζονται και h(A,B)=0 αν τα Α και Β ταυτίζονται .Ακόμα έχουμε δείξει ότι R(A,B,X,Y) = R(B,A,Y,X) επομένως h(A,B)= h(B,A) .Αν το σημείο Δ είναι ανάμεσα στα Α και Β όπως στο παραπάνω σχήμα αν λογαριθμήσουμε τη σχέση (2) θα είναι : log(R(A,Δ,X,Y))+ log(R(Δ,B,X,Y))= log(R(A,B,X,Y)) ή h(A,Δ)+h(Δ,B)=h(A,B) .

Με τον παραπάνω τρόπο καταφέραμε να ορίσουμε ένα μέτρο πάνω σε μια ευθεία , που αφορά τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά σε ένα ευθύγραμμο τμήμα



Θα επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό σε ένα κυρτό D που έχει το K σύνορο. Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία A , B του D και ονομάζουμε X το σημείο τομής της ημιευθείας AB με το K και Y το σημείο που τέμνει η ημιευθεία BA το K . Σύμφωνα με τα παραπάνω h(A,B) = $\frac{\kappa}{2}$ log(R(A,B,X,Y)) .Για τα σημεία του D ισχύουν οι δύο πρώτες ιδιότητες του μέτρου και απομένει να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Γ στο D ,που να μην ανήκει στο τμήμα XY όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα . Η περίπτωση το Γ να ανήκει στο XY έχει εξεταστεί παραπάνω.

Έχουμε : R(A,Γ,Λ,M) = R(A,Δ,Σ,T) ≥ R(A,Δ,X,Y)

R(Γ,B,N,H) = R(Δ,B,Σ,T) ≥ R(Δ,B,X,Y)

Πολλαπλασιάζοντας τα πρώτα με τα τελευταία μέλη στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

R(A,Γ,Λ,M) R(Γ,B,N,H) ≥ R(A,Δ,X,Y) R(Δ,B,X,Y)

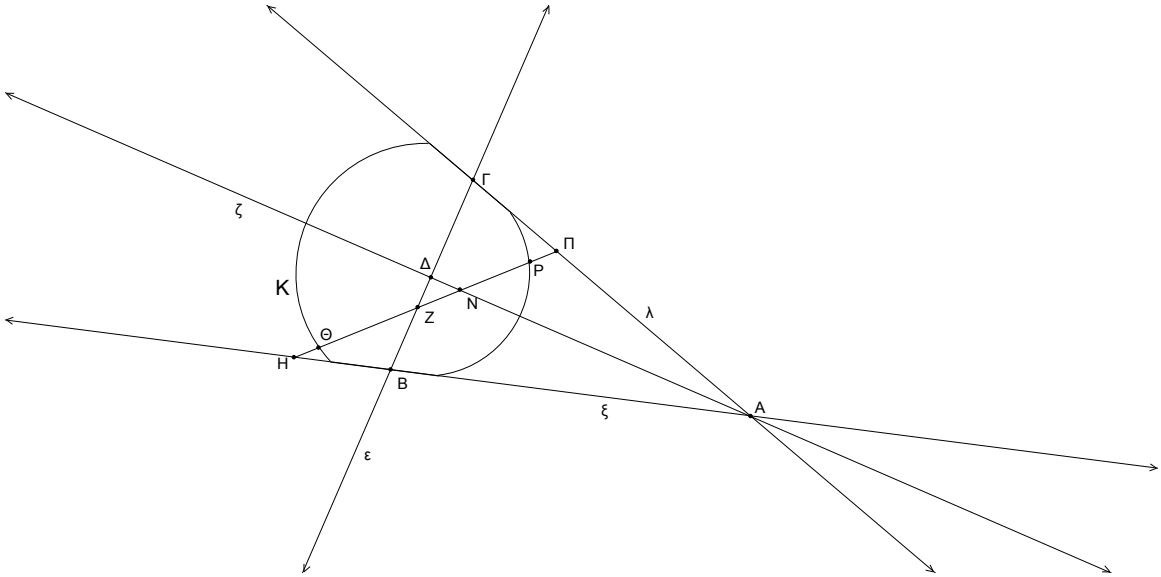
Όμως R(A,Δ,X,Y) R(Δ,B,X,Y) = R(A,B,X,Y) και λογαριθμώντας είναι

h(A,B) ≤ h(A,Γ) + h(Γ,B)

Στα προηγούμενα είχαμε αποδείξει ότι οι κύκλοι είναι γνήσια κυρτοί αν έχει νόημα η καθετότητα των ευθειών . Θα εξετάσουμε αν αυτό είναι εφικτό στη γεωμετρία Hilbert

Αρχικά έχουμε το θεώρημα:

Στη γεωμετρία Hilbert η ευθεία ε είναι κάθετη με την ευθεία ζ αν και μόνο αν το Κ έχει στα σημεία τομής με την ε ευθείες στήριξης που συντρέχουν με τη ζ.



Απόδειξη: Στο παραπάνω σχήμα έστω Β,Γ τα σημεία τομής της ε με το Κ και ξ,λ οι ευθείες στήριξης του Κ στα Β και Γ .Ας υποθέσουμε ότι οι ξ , λ , ζ τέμνονται στο Α και Δ είναι το σημείο τομής των ε και ζ. Για να είναι οι ε και ζ κάθετες πρέπει να δείξουμε ότι h(Z,N)>h(Z,Δ) για οποιαδήποτε σημεία των ε και ζ (που βρίσκονται εσωτερικά στο D).Από την προοπτικότητα του σημείου Α έχουμε R(Z,Δ,Γ.B)=R(Z,N,Π,H)>R(Z,N,P,Θ) που σημαίνει ότι h(Z,N)>h(Z,Δ).

Στην περίπτωση που το Κ είναι έλλειψη , τα σημεία Δ και Α είναι συζυγή και έχουμε το συμπέρασμα:

Αν το Κ είναι έλλειψη , η καθετότητα είναι συμμετρική και δύο ευθείες που τέμνονται στο D είναι κάθετες αν και μόνο αν είναι συζυγείς σε σχέση με το Κ

Ισομετρίες στη γεωμετρία Hilbert . Ορισμός της υπερβολικής γεωμετρίας

Στη γεωμετρία Hilbert η απόσταση ορίστηκε με τη βοήθεια του διπλού λόγου , ο οποίος είναι αναλλοίωτος σε μια προβολικότητα . Έτσι κάθε προβολικότητα Φ (του προβολικού επιπέδου)που απεικονίζει το D στον εαυτό του είναι μια ισομετρία στη γεωμετρία Hilbert και αντίστροφα.

Όπως και στη γεωμετρία Minkowski , οι ελλείψεις έχουν κεντρικό ρόλο στη γεωμετρία Hilbert αφού ισχύει το Θεώρημα :

Στη γεωμετρία Hilbert που ορίζεται σε πεδίο D με σύνορο την κυρτή γραμμή Κ τότε , ορίζονται οι συμμετρίες γύρω από κάθε ευθεία αν το Κ είναι έλλειψη και αντίστροφα.

Σύμφωνα με το παραπάνω μια γεωμετρία Hilbert ορίζεται ως **υπερβολική** αν και μόνο αν το πεδίο D είναι το εσωτερικό μιας έλλειψης.

Όπως και στη περίπτωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας γεννιέται το ερώτημα , πόσες υπερβολικές γεωμετρίες υπάρχουν , στο οποίο έχουμε το

Θεώρημα: Δύο γεωμετρίες του Hilbert που ορίζονται σε γνήσια κυρτά πεδία D_1 , D_2 με τα μέτρα $h_1(A,B)$, $h_2(A,B)$ αντίστοιχα ικανοποιούν τη σχέση $h_1(A,B)=c\, h_2(A,B)$ αν και μόνο αν μια προβολικότητα του προβολικού επιπέδου μεταφέρει το πεδία D_1 στο πεδίο D_2.

Απόδειξη: Έστω Φ μια προβολικότητα που μεταφέρει το D_1 στο D_2 .Αν A,B σημεία του D_1 και Χ , Ψ είναι τα σημεία τομής της ΑΒ με το K_1 , τότε η ευθεία που ορίζουν τα Φ(Α) και Φ(Β) πρέπει να τέμνει το K_2 στα Φ(Χ) και Φ(Ψ) .Δηλαδή από το αναλλοίωτο του

διπλού λόγου εχουμε R(A,B,X,Ψ)=R(Φ(A),Φ(B),Φ(X),Φ(Ψ)) ή

$$\frac{2h_1(A,B)}{k_1} = \frac{2h_2(\Phi(A),\Phi(B))}{k_2}$$, δηλαδή $h_1(A,B) = \frac{\kappa_1}{k_2} h_2(\Phi(A),\Phi(B))$

Αντίστροφα αν μια απεικόνιση μεταφέρει το D_1 στο D_2 με τη σχέση $h_1(A,B)=c\ h_2(A,B)$ τότε μια μετρική ευθεία του D_1 μεταφέρεται σε μια μετρική ευθεία του D_2 .Επομένως η τομή του D_1 με μια προβολική ευθεία απεικονίζεται στην τομή του D_2 με μια προβολική ευθεία και έτσι η απεικόνιση είναι προβολικότητα.

Ελλειπτική γεωμετρία

Υπενθυμίζουμε ότι στο προβολικό επίπεδο ένα σημείο δεν έχει μοναδική αναπαράσταση αλλά οι αναπαραστάσεις είναι ανάλογες προς μια τριάδα συντεταγμένων .Από όλες τις τριάδες που αναπαριστούν το σημείο Α υπάρχουν μόνο δύο (χ_1 , χ_2 , χ_3) για τις οποίες είναι $\chi_1^2+\chi_2^2+\chi_3^2=1$. Στη δυική αναπαράσταση , για τις ευθείες , αν θεωρήσουμε [v_1 , v_2 , v_3] τις συντεταγμένες μιας ευθείας , τότε θα υπάρχουν ακριβώς δύο αναπαραστάσεις των συντεταγμένων , για τις οποίες $v_1^2+v_2^2+v_3^2=1$.Έτσι μπορούμε να απεικονίσουμε οποιοδήποτε σημείο του προβολικού επιπέδου με ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της μοναδιαίας σφαίρας .Αν για δύο σημεία Α , Β με συντεταγμένες (χ_1 , χ_2 , χ_3) (y_1 , y_2 , y_3) αντίστοιχα , όπως έχουν οριστεί παραπάνω συμβολίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των τριάδων με AB= $\chi_1 y_1+\chi_2 y_2+\chi_3 y_3$ τότε ορίζουμε ένα μέτρο που ονομάζεται ελλειπτικό $\varepsilon(A,B)=\kappa \mathrm{Arc}\cos|(AB)|$.Από τη ανισότητα Caushy-Swartz έχουμε

$$|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=1 \qquad (1)$$

,που σημαίνει ότι το μέτρο είναι καλά ορισμένο . Για δύο ευθείες ε,η δυικά με τον παραπάνω ορισμό η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν θα είναι ίση με $\mathrm{Arc}\cos|(\varepsilon\eta)|$. Οπότε για το κ δίνουμε την τιμή 1 και στους δύο ορισμούς. Αν θεωρήσουμε τα σημεία Α και Β πάνω στη μοναδιαία σφαίρα τότε η τομή του επιπέδου που σχηματίζουν τα ΟΑ και ΟΒ με τη σφαίρα θα είναι μοναδιαίος κύκλος και το ελλειπτικό μέτρο $\varepsilon(A,B)=\kappa \mathrm{Arc}\cos|(AB)|$, εκφράζει την γεωμετρική γωνία (τη μικρότερη από τις δύο)των ευθειών ΑΑ’ και ΒΒ’

Από τον ορισμό που έχουμε δώσει για το ελλειπτικό μέτρο είναι : $0 \le \varepsilon(\mathrm{A},\mathrm{B}) \le \frac{\pi}{2}$ και αν για τα σημεία Α και Β είναι ε(Α,Β)=0 , θα πρέπει στη σχέση (1) να ισχύει η ισότητα , που αληθεύει αν οι τριάδες (χ_1 , χ_2 , χ_3) , (y_1 , y_2 , y_3) είναι ανάλογες ή τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

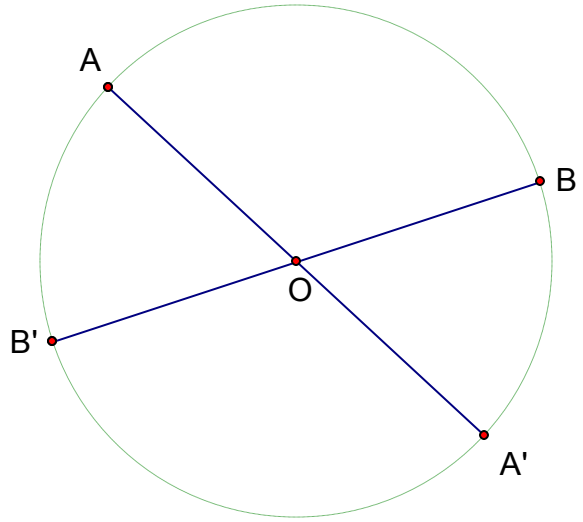
Η σχέση ε(Α,Β)=ε(Β,Α) είναι προφανής και απομένει να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα

Είναι $(\vec{x}\times\vec{w})\cdot(\vec{z}\times\vec{y}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{w}\cdot\vec{y}) - (\vec{x}\cdot\vec{y})(\vec{w}\cdot\vec{z})$ και για $\vec{w}=\vec{z}$ γίνεται $(\vec{x}\times\vec{z})\cdot(\vec{z}\times\vec{y}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{z}\cdot\vec{y}) - (\vec{x}\cdot\vec{y})(\vec{z}\cdot\vec{z})$ ή

$(\vec{x}\times\vec{z})\cdot(\vec{z}\times\vec{y}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{z}\cdot\vec{y}) - (\vec{x}\cdot\vec{y})\left|\vec{z}\right|^2$.Αν $\vec{x}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{y}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{z}=\overrightarrow{O\Gamma}$ και αφού $\left|\vec{z}\right|=1$ η τελευταία σχέση μας δίνει $\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right| = \left|(\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{z}\cdot\vec{y}) - (\vec{x}\times\vec{z})\cdot(\vec{z}\times\vec{y})\right| \ge \left|\vec{x}\cdot\vec{z}\right|\left|\vec{y}\cdot\vec{z}\right| - \left|\vec{x}\times\vec{z}\right|\left|\vec{z}\times\vec{y}\right|$ ή

$\cos(Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|) \ge \cos(Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{z}\right|)\cos(Arc\cos\left|\vec{z}\cdot\vec{y}\right|) - \sin(Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{z}\right|)\sin(Arc\cos\left|\vec{z}\cdot\vec{y}\right|)$

ή $\cos(Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|) \ge \cos[(Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{z}\right|) + (Arc\cos\left|\vec{z}\cdot\vec{y}\right|)]$ και επειδή η cosx είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ έχουμε $Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right| \le Arc\cos\left|\vec{x}\cdot\vec{z}\right| + Arc\cos\left|\vec{z}\cdot\vec{y}\right|$ και η απόδειξη είναι πλήρης .



Κεφάλαιο 7ο: Διδακτικές προεκτάσεις

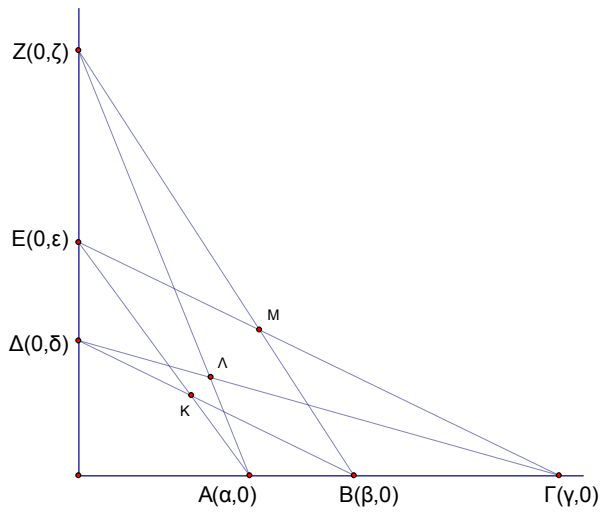
<u>Το θεώρημα Πάππου σε μια ειδική περίπτωση με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας</u>

Θεωρούμε τα σημεία Α(α,0) , Β(β,0) , Γ(γ,0) πάνω στο χ'χ με α<β<γ και τα σημεία Δ(0,δ) , Ε(0,ε) , Ζ(0,ζ) πάνω στον ψ'ψ με δ<ε<ζ .

Η εξίσωση της ευθείας ΑΕ: $y=-\frac{\varepsilon}{\alpha}(x-\alpha)$ Εξίσωση ΒΔ: $y=-\frac{\delta}{\beta}(x-\beta)$

και από το σύστημα εξισώσεων των ΑΕ

και ΒΔ παίρνουμε $x_{\mathrm{K}}=\frac{a\beta(\varepsilon-\delta)}{\beta\varepsilon-\delta\alpha}$



$$y_{\mathrm{K}}=\frac{\varepsilon\delta(\alpha-\beta)}{\alpha\delta-\beta\varepsilon}$$

Αντίστοιχα $x_{\Lambda}=\frac{a\gamma(\zeta-\delta)}{\gamma\zeta-\delta\alpha}$,

$y_{\Lambda}=\frac{\delta\zeta(\gamma-\alpha)}{\gamma\zeta-\delta\alpha}$.Για το σημείο Μ

$\chi_{\mathrm{M}}=\frac{\beta\gamma(\zeta-\varepsilon)}{\gamma\zeta-\beta\varepsilon}$ και $y_{\mathrm{M}}=\frac{\zeta\varepsilon(\gamma-\beta)}{\gamma\zeta-\beta\varepsilon}$

Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}=(x_{\Lambda}-x_{\mathrm{K}},y_{\Lambda}-y_{K})$ $\overrightarrow{KM}=(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{K}},y_{\mathrm{M}}-y_{K})$ πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη συγγραμικότητας: $\det(\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}},\overrightarrow{\mathrm{KM}})=0$

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}},\overrightarrow{\mathrm{KM}})=\begin{vmatrix} x_{\Lambda}-x_{\mathrm{K}} & y_{\Lambda}-y_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{K}} & y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{K}} \end{vmatrix}=x_{\Lambda}y_{M}-x_{\Lambda}y_{K}-x_{K}y_{M}-x_{M}y_{\Lambda}+x_{\mathrm{M}}y_{\Lambda}+x_{\mathrm{K}}y_{\Lambda}=$$

$$\frac{a\gamma(\zeta-\delta)}{(\gamma\zeta-\delta\alpha)}\frac{\zeta\varepsilon(\gamma-\beta)}{(\gamma\zeta-\beta\varepsilon)}-\frac{a\gamma(\zeta-\delta)}{(\gamma\zeta-\delta\alpha)}\frac{\varepsilon\delta(\alpha-\beta)}{(\alpha\delta-\beta\varepsilon)}-\frac{a\beta(\varepsilon-\delta)}{(\beta\varepsilon-\delta\alpha)}\frac{\zeta\varepsilon(\gamma-\beta)}{(\gamma\zeta-\beta\varepsilon)}-\frac{\beta\gamma(\zeta-\varepsilon)}{(\gamma\zeta-\beta\varepsilon)}\frac{\delta\zeta(\gamma-\alpha)}{(\gamma\zeta-\delta\alpha)}+\frac{\beta\gamma(\zeta-\varepsilon)}{(\gamma\zeta-\beta\varepsilon)}\frac{\varepsilon\delta(\alpha-\beta)}{(\alpha\delta-\beta\varepsilon)}+\frac{a\beta(\varepsilon-\delta)}{(\beta\varepsilon-\delta\alpha)}\frac{\delta\zeta(\gamma-\alpha)}{(\gamma\zeta-\delta\alpha)}=0$$

Επειδή οι πράξεις είναι αρκετές για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα που επιβεβαιώνει την ισχύ του θεωρήματος.

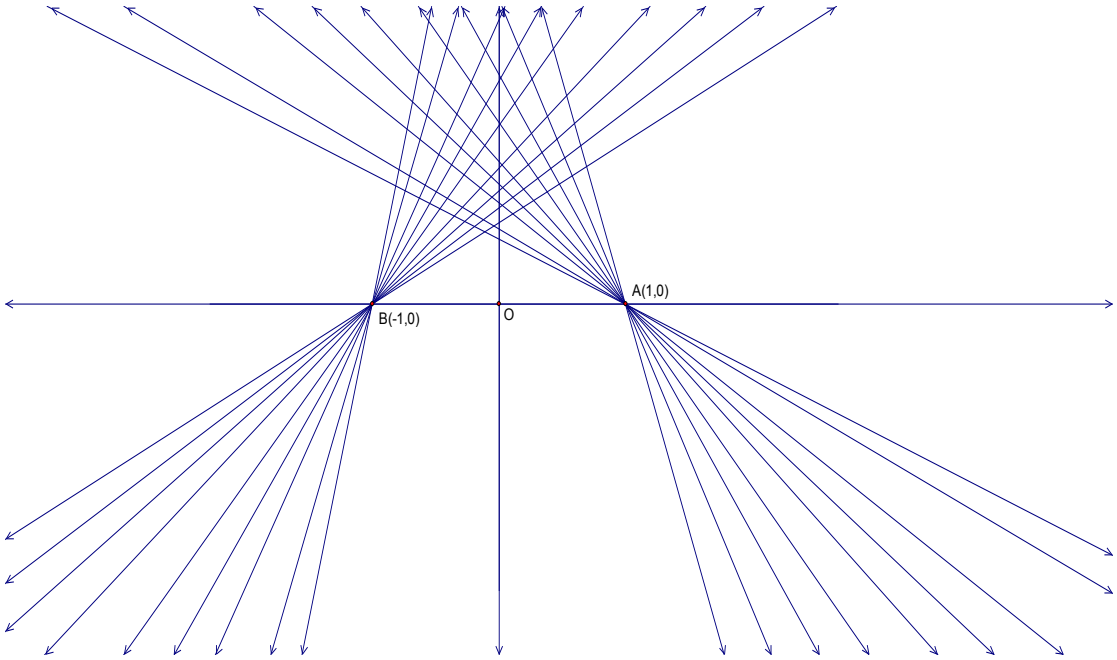
<u>Κατασκευή κωνικών από δέσμες ευθειών</u>

Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου Α(1,0) και Β(-1,0) και τις δέσμες ευθειών που διέρχονται από τα Α και Β . Οι εξισώσεις των δεσμών είναι :

Δ_A : y=λ(x-1)

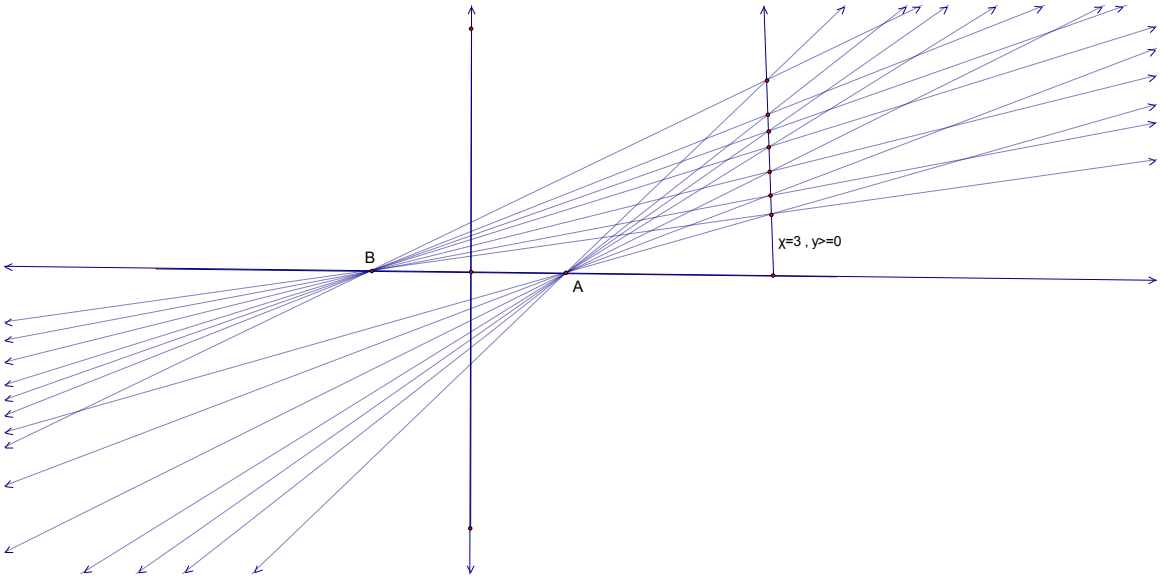
Δ_B : y=μ(x+1)

Όπου μ και λ οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών .



Αν θεωρήσουμε δύο ευθείες , μια από κάθε δέσμη και αν τα μ και λ είναι διαφορετικά τότε θα τέμνονται στο σημείο $K(\frac{\mu+\lambda}{\lambda-\mu},\frac{2\mu\lambda}{\lambda-\mu})$. Ας δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις

- Αν λ=2μ το σημείο Κ θα έχει τη μορφή Κ(3,2μ^2) που θα κινείται στην ημιευθεία με εξίσωση χ=3 και $y \geq 0$.



- Αν μλ=1 με μ,λ $\neq$ 1 το σημείο Κ θα είναι $K(\frac{\frac{1}{\lambda}+\lambda}{\lambda-\frac{1}{\lambda}},\frac{2}{\lambda-\frac{1}{\lambda}})$ ή $K(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1},\frac{2\lambda}{\lambda^2-1})$

  που ανήκει στη υπερβολή $x^2-y^2=1$.Εδώ αξίζει να αναφέρουμε ότι , το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(λ)= $\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$ σε καθένα από τα σύνολα $\Delta_1=[0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\Delta_2=(-\infty,-1)\cup(-1,0]$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ,που σημαίνει ότι και κάθε σημείο της υπερβολής γράφεται στη μορφή των συντεταγμένων του Κ. Τελικά η υπερβολή $x^2-y^2=1$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που είναι οι τομές από δύο δέσμες ευθειών που διέρχονται από τα Α και Β και συσχετίζονται από τη σχέση μλ=1 με μ,λ $\neq$ 1 , όπου μ,λ οι συντελεστές διεύθυνσης.

- Αν μλ=-2 οι συντεταγμένες του Κ θα είναι $\mathrm{K}(\frac{-\frac{2}{\lambda}+\lambda}{\lambda+\frac{2}{\lambda}},\frac{-4}{\lambda+\frac{2}{\lambda}})$ ή

  $\mathrm{K}(\frac{\lambda^2-2}{\lambda^2+2},\frac{-4\lambda}{\lambda^2+2})$ που ανήκει στην έλλειψη $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ και όπως στο προηγούμενο με την υπερβολή το Κ 'καλύπτει' την έλλειψη .

- Αν $\mu=\frac{\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}}$ με $\lambda\neq 0$ το Κ θα είναι $\mathrm{K}(\frac{1+\sqrt{4\lambda^2+1}}{\sqrt{4\lambda^2+1}-1},\frac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1}-1})$ ή

  $\mathrm{K}(\frac{4\lambda^2+2+2\sqrt{4\lambda^2+1}}{4\lambda^2},\frac{1+\sqrt{4\lambda^2+1}}{2\lambda})$ που ανήκει στην παραβολή $y^2=x$ εξαιρουμένου του σημείου (0,0)

Βιβλιογραφία – πηγές

Busemann H. & Kelly P. Projective Geometry and Projective Metrics , Dover Editions

W. Fishback Projective and Euclidean Geometry , John Wiley & Sons

Λάππας Δ. Σημειώσεις του μαθήματος Ιστορία των νεότερων Μαθηματικών

Χ. Στράντζαλος Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών Ι , Εκδόσεις Καρδαμίρσα

Davis D. Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών , Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/