ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Χρυσούλα Κοτσοβού

Επιβλέπων Καθηγητής:
Διονύσιος Λάππας

Αθήνα
Φεβρουάριος, 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (επιβλέπων καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	……
2) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αναπλ. Καθηγητής	……
3) Παναγιώτης Σπύρου	Επίκ. Καθηγητής	……

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ:
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Χρυσούλα Κοτσοβού

Επιβλέπων Καθηγητής:
Διονύσιος Λάππας

Αθήνα
Φεβρουάριος, 2008

ΚΟΤΣΟΒΟΥ ΧΡΥΣΟΥΛΑ, Φεβρουάριος 2008

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ (σελ. 106)

Το πιο αξιοσημείωτο και επαναστατικό γεγονός στα μαθηματικά στο τέλος του 18^{ου} και στις αρχές του 19^{ου} αιώνα ήταν η ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών. Οι προσπάθειες των μαθηματικών να αποδείξουν το 5^{ο} Αίτημα του Ευκλείδη άρχισαν από πολύ νωρίς (Κλαυδιος Πτολεμαίος 150 π.Χ.) και συνεχίστηκαν μέχρι το 19^{ο} αιώνα. Στην παρούσα εργασία θα σταθούμε στις προσπάθειες εκείνων των μαθηματικών που κατέληξαν σε συμπεράσματα των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών ανέξαρτητα από το αν τα αποδέχθηκαν ή όχι.

Η σπουδαιότητα αυτής της ανακάλυψης είναι ανυπολόγιστη. Για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια κυριαρχούσε η αίσθηση ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν απαραίτητα η γεωμετρία του χώρου. Τα Μαθηματικά και η Φυσική συνυφαίνονταν τόσους αιώνες με αυτή την πίστη. Οι Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες έδειξαν ότι υπάρχουν και άλλες περιγραφές του χώρου που είναι προσιτές στην ανθρώπινη νόηση. Μέσα στα πλαίσια αυτά θα εξετάσουμε ποιές ήταν οι επιπτώσεις της εμφάνισης των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών στην έννοια του γεωμετρικού χώρου.

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Χρυσούλα Κοτσοβού

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών.

Αθήνα, Ελλάδα
Φεβρουάριος, 2008

© Χρυσούλα Κοτσοβού, 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει την ανακάλυψη, την ιστορική ανάπτυξη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και τις συνέπειες αυτού του γεγονότος στη διαμόρφωση της έννοιας γεωμετρικός χώρος. Θα παρουσιασθεί η μετάβαση από την παλιά στη νέα αντίληψη μέσα από τις εργασίες των Saccheri, Legendre, Lambert και τα γεωμετρικά συστήματα που βασίζονται στην άρνηση του Πέμπτου Αιτήματος μέσα από τις εργασίες κυρίως των Gauss, Lobachevsky, Bolyai και Riemann. Τέλος, θα εξετασθούν οι επιπτώσεις στην έννοια του χώρου και τις επεκτάσεις του.

Αποτελείται από τρία μέρη:

1. Η ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών: μια ιστορική διαδρομή.
2. Οι επιπτώσεις στην έννοια του γεωμετρικού χώρου από την ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.
3. Επιλογές σχετικές με τη θεωρία των παραλλήλων από το μαθηματικό έργο των Gauss, Lobachevsky και Bolyai.

Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται πως οι προσπάθειες των Saccheri, Lambert και Legendre να αποδείξουν το 5° Αίτημα οδήγησαν σε προτάσεις Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και τους λόγους για τους οποίους αυτές απορρίφθηκαν. Γίνεται αναφορά της συνεισφοράς των Schweikart και Taurinus στη γεωμετρία. Επίσης, περιγράφονται αναλυτικά πως οι ουσιαστικοί θεμελιωτές των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών Gauss, Lobachevsky, Bolyai και Riemann κατέληξαν στις σημαντικές τους ανακαλύψεις.

Στο δεύτερο μέρος, εξετάζονται τι επιπτώσεις επέφεραν οι νέες ανακαλύψεις στην έννοια του χώρου.

Τέλος, στο τρίτο μέρος έχει γίνει μια επιλογή από το μαθηματικό έργο των Gauss, Lobachevsky και Bolyai που σχετίζεται με τη θεωρία των παραλλήλων, η μελέτη της οποίας οδήγησε σε νέες μορφές γεωμετρίας.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου κ. Διονύσιο Λάππα για την πολύτιμη βοηθεία και καθοδήγηση που μου προσέφερε, καθώς και την οικογενειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή της σε αυτή μου την προσπάθεια.

Χρυσούλα Κοτσοβού

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΚΑΚΩΝ.....v

ΜΕΡΟΣ

Α Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ. 1

Gerolamo Saccheri1667-1733 1

Johann Heinrich Lambert 1728-1777 17

Adrien Marie Legendre 1752-1833 24

Carl Friedrich Gauss 1777-1855 31

Ferdinand Karl Schweikart 1780-1859 37

Franz Adolf Taurinus 1794-1874 40

Nicolai Ivanovitsch Lobachevsky 1793-1856 44

János Bolyai 1802-1860 53

Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866 60

Β ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ.....65

Γ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΩΝ GAUSS, LOBACHEVSKY ΚΑΙ BOLYAI.....74

Η θεωρία των παραλλήλων του Gauss. 74

Η θεωρία των παραλλήλων του Lobachevsky. 80

Ο νόμος των ημιτόνων και ο «τετραγωνισμός» του κύκλου από τον Bolyai. 93

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....105

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Σελίδα

1. Πίνακας που συγκρίνει την Ευκλείδεια και τη Μη Ευκλείδεια Επιπεδομετρία.....64

ΜΕΡΟΣ Α

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ: ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

Gerolamo Saccheri

Ο Gerolamo Saccheri (1667-1733), Ιησουΐτης ιερέας και καθηγητής των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Παβίας, στην Ιταλία ήταν ένας ικανός μαθηματικός, που διακρινόταν για την ευρυμάθειά του. Είχε, όμως το σοβαρό μειονέκτημα να διακατέχεται από την «έμμονη ιδέα» ότι το 5^{ο} Αίτημα αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αν δεν ήταν τόσο σίγουρος γι' αυτό, θα είχε πιθανότατα ανακαλύψει εκείνος πρώτος την «Υπερβολική Γεωμετρία» εκατό χρόνια πριν την τελική της ανακάλυψη. Η άποψη αυτή στηρίζεται σε συγκεκριμένα συμπεράσματα του έργου του, που αποτελούν προτάσεις της «Υπερβολικής Γεωμετρίας» αλλά απορρίφθηκαν από τον ίδιο για διαισθητικούς λόγους. Δικαίως, λοιπόν, ο Beltrami (1889) τον αποκαλεί πρόδρομο του Legendre και του Lobachevsky.

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS;
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Mathesim Professore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

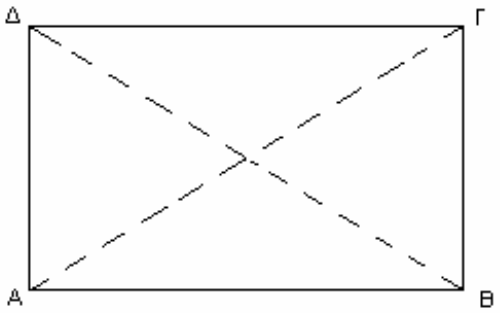
Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας του Saccheri : *Euclides ab omni naevo vindicatus* [Ο Ευκλείδης απαλλαγμένος από κάθε σφάλμα] (Milan, 1733) είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος. Η εργασία αυτή έχει εκδοθεί στα γερμανικά *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, από τους Engel και Stäckel (1895) και στα ιταλικά σε μια συντετμημένη και σχολιασμένη έκδοση *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, από τον G. Boccardini στο Μιλάνο το 1904.

Ο Saccheri χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής (reductio ad absurdum), υπέθεσε ότι το 5^{ο} Αίτημα δεν ισχύει και προσπάθησε να εντοπίσει ανάμεσα στις συνέπειες αυτής της υπόθεσης μια αντίφαση που τελικά θα επιβεβαίωνε την αλήθεια του 5^{ου} αιτήματος.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της δουλειάς του Saccheri είναι απαραίτητο να αναφέρουμε τα μαθηματικά στα οποία βασίζεται ο Ιταλός γεωμέτρης. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί τα αιτήματα του Ευκλείδη, τις πρώτες 28 προτάσεις του Πρώτου Βιβλίου των «Στοιχείων», οι οποίες δεν απαιτούν το 5^{ο} Αίτημα για την απόδειξη

τους, εφαρμόζει το Αξίωμα Αρχιμήδους–Ευδόξου και ένα αξίωμα «συνέχειας – πληρότητας» που είχε περισσότερο εποπτικό χαρακτήρα: κάθε γεωμετρικό μέγεθος, μεταβαλλόμενο από μια τιμή του προς μια άλλη παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές[1]. Επίσης, δέχεται σιωπηρά ότι η ευθεία γραμμή είναι άπειρη, εφόσον χρησιμοποιεί την πρόταση I 16[2] του Ευκλείδη που υπονοεί κάτι τέτοιο. Τέλος, χρησιμοποιεί το Αξίωμα του Pasch[3], χωρίς να το αναφέρει.

Το έργο του Saccheri στηρίχθηκε σε μια έννοια, που διαφαίνεται στο έργο του Giordano Vitale (1633-1711) και σήμερα είναι γνωστή ως τετράπλευρο Saccheri:



<u>Ορισμός</u>

Τετράπλευρο Saccheri λέγεται το τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και κάθετες στην ίδια πλευρά.

Οι ιδιότητες αυτού του τετραπλεύρου περιγράφονται στο επόμενο λήμμα:

<u>Λήμμα 1</u>

Σε ένα τετράπλευρο Saccheri ΑΒΓΔ, όπου οι γωνίες ∠Α, ∠Β είναι ορθές και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες, η γωνία ∠Γ είναι ίση με την γωνία ∠Δ. (Sac. 1)[4]

<u>Απόδειξη</u>

Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. Επειδή ΑΔ = ΒΓ και ΑΒ = ΒΑ από το κριτήριο ισότητας τριγώνων Πλευρά-Γωνία-Πλευρά, τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΒΔΑ είναι ίσα. Επομένως, ΑΓ = ΒΔ. Όμως, από το κριτήριο ισότητας τριγώνων Πλευρά-Πλευρά-Πλευρά, τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, απ' όπου έπεται το ζητούμενο.■

---

[1] Το αξίωμα αυτό χρησιμοποιήθηκε κυρίως κατά τη διερεύνηση της ύπαρξης κοινής καθέτου ανάμεσα σε δύο ευθείες.

[2] Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.

[3] Το αξίωμα του Pasch (1843 – 1930): Αν μια ευθεία δεν περιέχει καμιά από τις κορυφές ενός τριγώνου και περνάει από ένα σημείο μιας πλευράς του, τότε θα τέμνει μια τουλάχιστον από τις άλλες πλευρές. Δημοσιεύτηκε το 1882.

[4] Στην παρούσα εργασία οι προτάσεις του Saccheri θα δηλώνονται με τα γράμματα Sac. Η αρίθμηση τους είναι σύμφωνη με την σειρά που διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν από τον ίδιο (1733).

Σημειώνουμε ότι αν οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι άνισες τότε οι γωνίες ∠Γ και ∠Δ είναι ομοιοτρόπως άνισες, δηλαδή απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία.

Έστω ένα τετράπλευρο Saccheri ΑΒΓΔ που έχει τις γωνίες ∠Α και ∠Β ορθές και τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ ίσες. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια υπόθεση οι γωνίες ∠Γ και ∠Δ είναι επίσης ορθές γωνίες. Όμως αν υποθέσουμε ότι και οι δύο γωνίες είναι αμβλείες ή και οι δύο οξείες, τότε ουσιαστικά αρνούμαστε το $5^{ο}$ Αίτημα. Ο Saccheri διερευνά αυτές τις τρεις περιπτώσεις αναφορικά με τις γωνίες ∠Γ και ∠Δ, τις οποίες ονομάζει ως εξής :

1. Η υπόθεση της Ορθής γωνίας : ∠Γ= ∠Δ = 1ορθή γωνία
   (που αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια Γεωμετρία).
2. Η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας : ∠Γ= ∠Δ > 1ορθή γωνία
   (που αντιστοιχεί στην Ελλειπτική Γεωμετρία)
3. Η υπόθεση της Οξείας γωνίας : ∠Γ= ∠Δ < 1ορθή γωνία
   (που αντιστοιχεί στην Υπερβολική Γεωμετρία).

Το σκεπτικό του Saccheri ήταν ότι το $5^{ο}$ Αίτημα, το οποίο ισοδυναμεί με την (1), θα είχε αποδειχθεί πλήρως, εάν τα συμπεράσματα που προέκυπταν από τις δύο τελευταίες υποθέσεις οδηγούσαν σε κάποια αντίφαση, γεγονός που θα σήμαινε ότι η μόνη αποδεκτή υπόθεση είναι αυτή της Ορθής γωνίας.

Εργαζόμενος προς αυτή την κατεύθυνση, ένα από τα πρώτα και πιο σημαντικά αποτελέσματα αποτελεί η ακόλουθη:

<u>Πρόταση</u>

Ανάλογα με την υπόθεση που ισχύει, της Ορθής, της Αμβλείας ή της Οξείας γωνίας, στο τετράπλευρο Saccheri ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις ΑΒ=ΓΔ, ΑΒ>ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ αντίστοιχα. (Sac. 3)

<u>Απόδειξη</u>

Με την υπόθεση της Ορθής γωνίας και το προηγούμενο λήμμα έπεται αμέσως ότι ΑΒ=ΓΔ.

Έστω ότι ισχύει η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας. Η κάθετος ΟΟ΄ στο μέσο του τμήματος ΑΒ χωρίζει το τετράπλευρο Saccheri σε δύο ίσα τετράπλευρα με ορθές γωνίες στις κορυφές Ο και Ο΄. Επειδή η γωνία ∠Δ είναι μεγαλύτερη από την γωνία ∠Α, τότε ισχύει ΑΟ > ΔΟ΄. Επομένως ΑΒ>ΓΔ.

Στην περίπτωση της υπόθεση της Οξείας γωνίας, οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν

με αντίθετη φορά και τελικά προκύπτει ότι ΑΒ<ΓΔ. ■

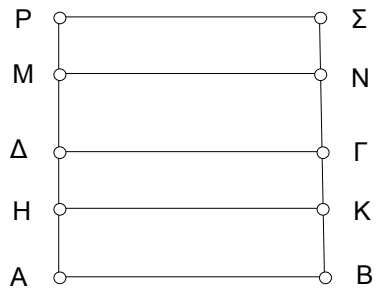
Χρησιμοποιώντας την εις άτοπον απαγωγή, αποδεικνύεται το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος.

<u>Θεώρημα</u>

Εάν η υπόθεση της Ορθής γωνίας είναι αληθής για μια μόνο περίπτωση, τότε είναι αληθής και για κάθε άλλη περίπτωση. (Sac. 5)

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι στο τετράπλευρο Saccheri ΑΒΓΔ η υπόθεση της Ορθής γωνίας επαληθεύεται.



Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε σημεία Η και Κ που ισαπέχουν από την πλευρά ΑΒ, φέρνουμε το τμήμα ΗΚ και σχηματίζεται το τετράπλευρο ΑΒΚΗ.

Εάν η ΗΚ είναι κάθετη στις ΑΗ και ΒΚ, η υπόθεση της Ορθής γωνίας επαληθεύεται και στο νέο τετράπλευρο.

Στην αντίθετη περίπτωση, έστω ότι η γωνία ∠ΑΗΚ είναι οξεία, οπότε η παραπληρωματική της, η ∠ΔΗΚ, είναι αμβλεία. Επομένως, στο τετράπλευρο ΑΒΚΗ, σύμφωνα με την υπόθεση της Οξείας γωνίας, ισχύει ΑΒ<ΗΚ, ενώ στο τετράπλευρο ΗΚΓΔ, από την υπόθεση της Αμβλείας γωνίας, ισχύει ΗΚ<ΓΔ.

Οι δύο αυτές ανισότητες είναι αντιφατικές, διότι από την υπόθεση της Ορθής γωνίας στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΒ=ΓΔ.

Επομένως, η γωνία ∠ΑΗΚ δεν μπορεί να είναι οξεία. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η γωνία ∠ΑΗΚ δεν μπορεί να είναι αμβλεία. Έπεται λοιπόν ότι η υπόθεση της Ορθής γωνίας ισχύει στο τετράπλευρο ΑΒΚΗ.

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ και στις προεκτάσεις παίρνουμε σημεία Μ και Ν τα οποία ισαπέχουν από τη βάση ΑΒ.

Θα αποδείξουμε ότι η υπόθεση της Ορθής γωνίας ισχύει και στο τετράπλευρο ΑΒΝΜ. Πράγματι, αν το ΑΜ είναι πολλαπλάσιο του ΑΔ, η πρόταση είναι προφανής. Εάν το ΑΜ δεν είναι πολλαπλάσιο του ΑΔ, παίρνουμε ένα πολλαπλάσιο του ΑΔ που είναι

μεγαλύτερο του ΑΜ (αξίωμα του Αρχιμήδη-Ευδόξου) και στις προεκτάσεις των ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΑΡ και ΒΣ ίσα με το πολλαπλάσιο του ΑΔ. Επειδή, όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, η υπόθεση της Ορθής γωνίας ισχύει στο τετράπλευρο ΑΒΣΡ, η ίδια υπόθεση είναι αληθής και για το τετράπλευρο ΑΒΝΜ. Τέλος, η εν λόγω υπόθεση πρέπει να ισχύει και για ένα τετράπλευρο Saccheri με βάση οποιαδήποτε πλευρά κάθετη στην ΑΒ.

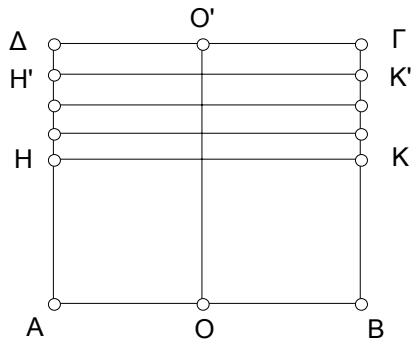
Όμως από την πρώτη σχέση έπεται ότι οι δύο ευθείες γραμμές ΔΓ, ΑΒ ισαπέχουν. Επομένως , η εγκυρότητα της υπόθεσης της Ορθής γωνίας σε όλα τα τετράπλευρα Saccheri, των οποίων το ύψος είναι ίσο με το τμήμα ΔΑ, έχει εδραιωθεί. Η ίδια υπόθεση είναι επίσης αληθής και για κάθε τετράπλευρο με οποιοδήποτε ύψος εφόσον το τμήμα που αρχικά καλείται βάση στη συνέχεια μπορεί να θεωρηθεί ύψος. ■

<u>Θεώρημα</u>

Εάν η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας είναι αληθής σε μια μόνο περίπτωση, τότε είναι αληθής και σε κάθε άλλη περίπτωση. (Sac. 6)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ένα σταθερό τετράπλευρο ΑΒΓΔ όπου οι γωνίες ∠Γ και ∠Δ είναι αμβλείες. Πάνω στις ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε σημεία Η και Κ που ισαπέχουν από την ΑΒ.



Παρατηρούμε ότι το τμήμα ΗΚ δεν μπορεί να είναι κάθετο στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ, διότι σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση της Ορθής γωνίας θα επαληθευόταν στο τετράπλευρο ΑΒΚΗ και κατά συνέπεια και στο αρχικό τετράπλευρο.

Ας υποθέσουμε ότι η γωνία ∠ΑΗΚ είναι οξεία. Τότε από την υπόθεση της Οξείας γωνίας έχουμε ΗΚ>ΑΒ. Αλλά επειδή ισχύει η υπόθεση της Ορθής γωνίας στο ΑΒΓΔ, έχουμε ΑΒ>ΓΔ.

Δηλαδή ΗΚ>ΑΒ>ΓΔ.

Μετακινούμε την ευθεία ΗΚ *συνεχώς*, έτσι ώστε να παραμένει κάθετη στην ΟΟ΄ του αρχικού τετραπλεύρου. Παρατηρούμε ότι το τμήμα ΗΚ, που περιέχεται ανάμεσα στις

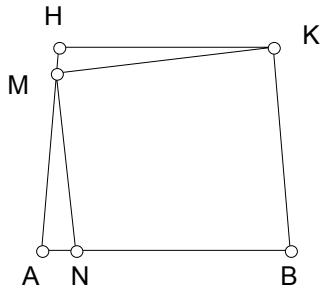
απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ, στην αρχική του θέση είναι μεγαλύτερο από το ΑΒ ενώ στην τελική του θέση ΔΓ είναι μικρότερο από το ΑΒ. Από το αξίωμα της συνέχειας μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μεταξύ της αρχικής θέσης ΗΚ και της τελικής ΔΓ πρέπει να υπάρχει μια ενδιάμεση θέση Η΄Κ΄ για την οποία ισχύει Η΄Κ΄=ΑΒ.

Επομένως, στο τετράπλευρο ΑΒΚ΄Η΄ ισχύει η υπόθεση της Ορθής γωνίας (Sac. 3) και συνεπώς μαζί με το προηγούμενο θεώρημα η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας δεν μπορεί να είναι αληθής στο ΑΒΓΔ.

Το επιχείρημα είναι επίσης έγκυρο αν τα τμήματα ΑΗ, ΒΚ είναι μεγαλύτερα από το ΑΔ, εφόσον είναι αδύνατο η γωνία ∠ΑΗΚ να είναι οξεία. Επομένως η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας ισχύει τόσο στο ΑΒΚΗ όσο και στο ΑΒΓΔ.

Έχοντας αποδείξει το θεώρημα για οποιοδήποτε τετράπλευρο ανεξάρτητα από το μέγεθος των πλευρών του, προχωρούμε στην απόδειξη του θεωρήματος για τετράπλευρο με οποιαδήποτε βάση π.χ. τη ΒΚ.

Επειδή οι γωνίες ∠Η και ∠Κ είναι αμβλείες, η κάθετη στην ΚΒ στο σημείο Κ θα τέμνει την ΑΗ στο Μ, σχηματίζοντας την αμβλεία γωνία ∠ΑΜΚ (θεώρημα εξωτερικής γωνίας).



Τότε, στο ΑΒΚΜ έχουμε ΑΒ>ΚΜ, από το λήμμα. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΝ ίσο με το ΜΚ. Έτσι, κατασκευάζεται το τετράπλευρο Saccheri ΒΚΜΝ, με τη γωνία ∠ΜΝΒ αμβλεία, εφόσον είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΝΜ. Έπεται ότι η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας ισχύει και στο νέο τετράπλευρο. Επομένως το θεώρημα έχει πλήρως αποδειχθεί. ■

<u>Θεώρημα</u>

Αν η υπόθεση της Οξείας γωνίας είναι αληθής σε μια μόνο περίπτωση τότε είναι αληθής και σε κάθε άλλη περίπτωση. (Sac. 7)

Αυτό το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Από τα προηγούμενα θεωρήματα ο Saccheri παίρνει το ακόλουθο αποτέλεσμα που

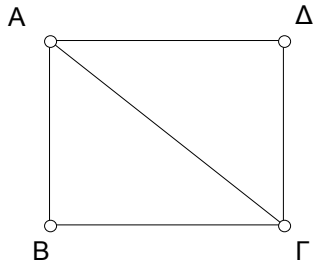
αφορά τα τρίγωνα :

Πρόταση

Σύμφωνα με την υπόθεση της Ορθής, της Αμβλείας ή της Οξείας γωνίας ισχύει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από δύο ορθές γωνίες. (Sac. 9)

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία ∠Β=90º. Φέρουμε την ΑΔ κάθετη στην ΑΒ και ίση με τη ΒΓ, και ενώνουμε το Δ με το Γ.



Από την υπόθεση της Ορθής γωνίας, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα. Επομένως, ισχύει: ∠ΒΑΓ = ∠ΔΓΑ.

Άρα έπεται ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

∠Α + ∠Β + ∠Γ = 2 ορθές γωνίες.

Με την υπόθεση της Αμβλείας γωνίας, λόγω της ΑΒ > ΔΓ, έχουμε:

∠ΑΓΒ > ∠ ΔΑΓ [5].

Αυτό συνεπάγεται ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

∠Α + ∠Β + ∠Γ > 2 ορθές γωνίες.

Με την υπόθεση της Οξείας γωνίας, επειδή ΑΒ < ΔΓ, έχουμε

∠ΑΓΒ < ∠ ΔΑΓ.

Συνεπώς, στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

∠Α + ∠Β + ∠Γ < 2 ορθές γωνίες. ■

Το θεώρημα που αποδείξαμε μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση οποιοδήποτε τριγώνου, με το να χωρίσουμε το τυχαίο τρίγωνο σε δύο ορθογώνια. Ο Saccheri αποδεικνύει το αντίστροφο του τελευταίου θεωρήματος με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

[5] Η ανισότητα αυτή έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη πρόταση από τον Saccheri και εδώ χρησιμεύει ως λήμμα. Είναι η πρόταση Ι25 του Ευκλείδη.

Το επόμενο θεώρημα, που είναι ένα απλό λογικό συμπέρασμα των προηγούμενων αποτελεσμάτων, ο Saccheri δεν το εκφράζει ρητά ενώ ο Legendre το ανακάλυψε εκ νέου και το δημοσίευσε για την πρώτη και την τρίτη υπόθεση περίπου έναν αιώνα αργότερα.

Θεώρημα

Εάν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από δύο ορθές σε ένα μόνο τρίγωνο, τότε αυτό το άθροισμα θα είναι αντίστοιχα ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από δύο ορθές και σε οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα προηγούμενα θεωρήματα για τα τετράπλευρα Saccheri έχουν αποδειχθεί και από άλλους γεωμέτρες με τη βοήθεια του αξιώματος του Αρχιμήδη και του αξιώματος της συνέχειας (βλ. Sac. 5, 6). Όμως, ο Dehn έδειξε ότι τα εν λόγω θεωρήματα είναι ανεξάρτητα από τα συγκεκριμένα αξιώματα.

Στη συνέχεια θα περάσουμε από τα θεωρήματα για τα τετράπλευρα Saccheri στα αντίστοιχα για τα τρίγωνα. Θα χρειαστεί μόνο να αναφερθούμε στην απόδειξη του Saccheri (βλ. σελ. 6), η οποία δεν στηρίζεται στο Αξίωμα του Αρχιμήδη.

Πριν την απόδειξη του βασικού θεωρήματος παραθέτουμε δύο λήμματα που είναι απαραίτητα.

Λήμμα 2

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle$Γ= 90°. Αν Η είναι το μέσο της ΑΒ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Η στην ΑΓ, τότε:

ΑΚ=ΚΓ, αν ισχύει η υπόθεση της Ορθής γωνίας.

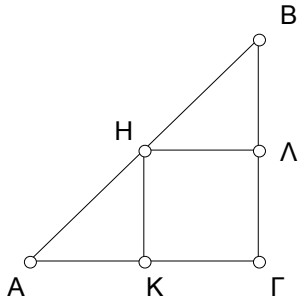
ΑΚ<ΚΓ, αν ισχύει η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.

ΑΚ>ΚΓ, αν ισχύει η υπόθεση της Οξείας γωνίας.

Απόδειξη

Αν ισχύει η υπόθεση της Ορθής γωνίας, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

Έστω ότι ισχύει η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.



Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο από

τέσσερις ορθές, έπεται ότι ∠ΑΗΚ < ∠ΗΒΓ. Έστω ότι ΗΛ είναι η κάθετη από το Η στην ΒΓ. Από την τελευταία ανισότητα και το γεγονός ότι τα τρίγωνα ΑΗΚ, ΗΒΛ έχουν ίσες υποτείνουσες, έπεται η ανισότητα ΑΚ<ΗΛ. Όμως το τετράπλευρο ΗΚΓΛ έχει τρεις ορθές γωνίες και η γωνία ∠Η είναι αμβλεία (υπόθεση της Αμβλείας γωνίας). Προκύπτει τότε ότι ΗΛ<ΚΓ, και συνεπώς ΑΚ<ΚΓ.

Το τρίτο συμπέρασμα του λήμματος αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. ■

Το λήμμα 2 μπορεί να επεκταθεί και στο επόμενο:

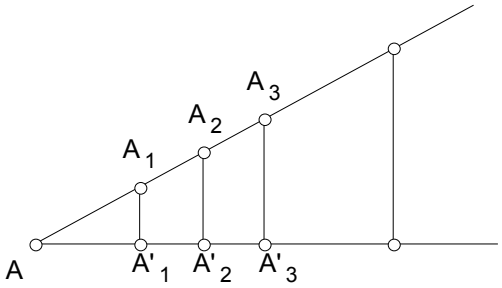
<u>Λήμμα 3</u>

Αν στην πλευρά Αχ μιας γωνίας Α πάρουμε ίσα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... και AA_1', $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, ...είναι οι προβολές αρχικών τμημάτων στην Αψ, τότε τα επόμενα αποτελέσματα είναι αληθή.

$AA_1 = A_1'A_2' = A_2'A_3' = \ldots$, αν ισχύει η υπόθεση της Ορθής γωνίας.

$AA_1' < A_1'A_2' < A_2'A_3' < \ldots$, αν ισχύει η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.

$AA_1' > A_1'A_2' > A_2'A_3' > \ldots$, αν ισχύει η υπόθεση της Οξείας γωνίας.

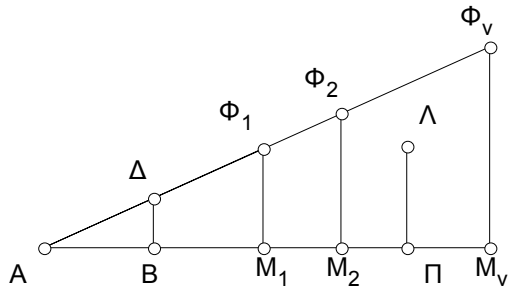


Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του επόμενου βασικού θεωρήματος.

<u>Θεώρημα</u>

Υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση της Ορθής ή της Αμβλείας γωνίας. Έστω δύο ευθείες που τέμνονται κάθετα μεταξύ τους και μια τρίτη που τέμνει τη μια από τις δύο δοθείσες ευθείες σχηματίζοντας οξεία γωνία, τότε θα τέμνει και την άλλη ευθεία.

<u>Απόδειξη</u>



Έστω ΛΠ και ΑΔ είναι οι δύο ευθείες εκ των οποίων η ΛΠ είναι κάθετη στην ΑΠ και η ΑΔ σχηματίζει με την ΑΠ οξεία γωνία ∠ΔΑΠ. Παίρνουμε πάνω στην ΑΔ ίσα διαδοχικά τμήματα ΑΔ, $ΔΦ_1$, φέρουμε τις κάθετες ΔΒ, $ΦΜ_1$ στην ΑΠ. Από το λήμμα 3 έχουμε:

$$BM_1 \geq AB \text{ ή } AM_1 \geq 2\ AB.$$

Στην προέκταση της $AΦ_1$ παίρνουμε τμήμα $Φ_1Φ_2$ ίσο με $AΦ_1$ και M_2 το ίχνος της κάθετης από το $Φ_2$ στην ΑΠ. Τότε έχουμε:

$$AM_2 \geq 2\ AM_1 \text{ και συνεπώς } AM_2 \geq 2^2\ AB.$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε ένα σημείο $Φ_ν$ πάνω στην ΑΔ τέτοιο ώστε η προβολή του πάνω στην ΑΠ να καθορίζει ένα τμήμα $AM_ν$ που να ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$AM_ν \geq 2^ν\ AB.$$

Αν όμως το ν είναι αρκετά μεγάλο, από το Αξίωμα του Αρχιμήδη[6], έχουμε $2^ν$ AB >ΑΠ και έτσι $AM_ν$ > ΑΠ.

Επομένως, το σημείο Π βρίσκεται πάνω στην πλευρά $AM_ν$ του ορθογωνίου τριγώνου $AM_νΦ_ν$. Η κάθετη ΠΛ δεν μπορεί να τέμνει την άλλη πλευρά του τριγώνου, άρα τέμνει την υποτείνουσα. ■

Η μέθοδος που ακολουθεί ο Saccheri στην παραπάνω απόδειξη έχει χρησιμοποιηθεί και από τον Nasîr-Eddîn.

Σε αυτό το σημείο μπορεί να αποδειχθεί το εξής :

<u>Θεώρημα</u>

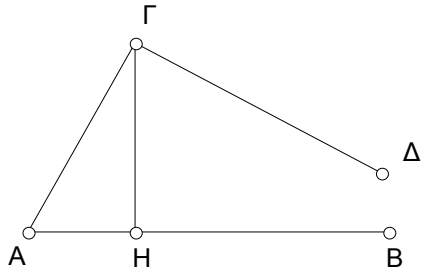
Το Πέμπτο Αίτημα ισχύει υπό την υπόθεση της Ορθής και της Αμβλείας γωνίας.

(Sac. 13)

[6] Με την χρήση του Αξιώματος του Αρχιμήδη σε αυτό το σημείο ο Saccheri δέχεται σιωπηρά ότι η ευθεία γραμμή είναι άπειρη.

Απόδειξη

Έστω οι ευθείες γραμμές ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ευθεία ΑΓ.



Ας υποθέσουμε ∠ΒΑΓ + ∠ΑΓΔ < 2 ορθές γωνίες. Τότε μια από τις ∠ΒΑΓ, ∠ΑΓΔ, έστω η πρώτη, είναι οξεία. Από το Γ φέρουμε την κάθετη ΓΗ στην ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΓΗ, από τις υποθέσεις έχουμε ότι ∠Α + ∠Γ + ∠Η ≥ 2 ορθές γωνίες. Όμως έχουμε υποθέσει ∠ΒΑΓ + ∠ΑΓΔ < 2 ορθές γωνίες, επομένως προκύπτει ότι ∠ΑΗΓ > ∠ΗΓΔ. Οπότε η γωνία ∠ΗΓΔ πρέπει να είναι οξεία εφόσον η ∠Η είναι ορθή. Άρα οι γραμμές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται. ■

Αυτό το αποτέλεσμα επιτρέπει στον Saccheri να συμπεράνει ότι η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας είναι ψευδής. Το επιχείρημα του είναι το εξής: με την εν λόγω υπόθεση το αξίωμα του Ευκλείδη ισχύει, άρα ισχύουν και τα συνήθη θεωρήματα που προκύπτουν από αυτό. Συνεπώς ισχύει και ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με τέσσερις ορθές γωνίες. Η τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι η υπόθεση της Ορθής γωνίας είναι αληθής. Άρα η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας «αυτοκαταστρέφεται».

Με άλλα λόγια, η λογική του Saccheri είναι ότι εφόσον τα τέσσερα πρώτα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και το Αίτημα της παραλληλίας υπονοούν την υπόθεση της Ορθής γωνίας, η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας υπό την οποία ισχύει το Αίτημα της παραλληλίας, έρχεται σε αντίθεση με τα υπόλοιπα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. (Rosenfeld, 1988)

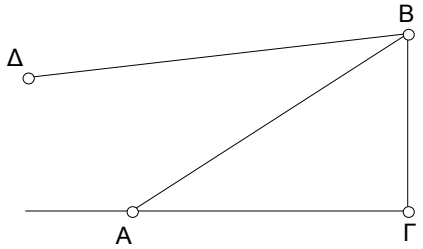
Όμως ο Saccheri θέλει να αποδείξει ότι το Πέμπτο Αίτημα ισχύει σε κάθε περίπτωση. Γι' αυτό θέλει να «καταστρέψει» και την υπόθεση της Οξείας γωνίας. Για να το πετύχει αυτό, δείχνει πρώτα την εξής :

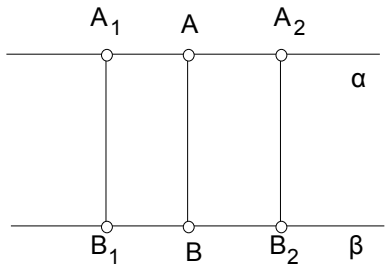
Πρόταση

Έστω ότι ισχύει η υπόθεση της Οξείας γωνίας. Σε δοθείσα ευθεία μπορούμε να φέρουμε μια κάθετη που να τέμνεται από μια τρίτη ευθεία σχηματίζοντας οξεία γωνία, αλλά να μην τέμνει την δοθείσα ευθεία. (Sac. 17)

Απόδειξη

Για την κατασκευή των εν λόγω ευθειών ακολουθείται η εξής διαδικασία:





Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο με ∠Γ = 90°. Από το Β φέρουμε ευθεία ΒΔ τέτοια ώστε ∠ΑΒΔ= ∠ΒΑΓ. Τότε σύμφωνα με την υπόθεση της Οξείας γωνίας, η ∠ΓΒΔ είναι οξεία και από τις δύο ευθείες ΓΑ, ΒΔ οι οποίες δεν τέμνονται, η μια σχηματίζει ορθή γωνία με τη ΒΓ. Σε ό,τι ακολουθεί λαμβάνουμε υπόψη μόνο την υπόθεση της Οξείας γωνίας.

Έστω δύο ευθείες α, β που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν τέμνονται. Από τα σημεία A_1, A_2, της ευθείας α φέρουμε κάθετες A_1B_1, A_2B_2 στην β. Για τις γωνίες $\angle A_1$, $\angle A_2$ του τετραέδρου $A_1A_2B_2B_1$, που σχηματίστηκε, υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις:

i. Μια ορθή και μια οξεία.
ii. Και οι δύο οξείες.
iii. Μια οξεία και μια αμβλεία.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει ήδη μια κοινή κάθετη στις δύο ευθείες α, β.

Στη δεύτερη περίπτωση, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας κοινής καθέτου χρησιμοποιώντας την ιδέα της συνέχειας (Sac. 22). Πράγματι, αν η ευθεία A_1B_1 κινηθεί συνεχώς, παραμένοντας κάθετη στη β, μέχρι να φτάσει στη θέση A_2B_2, τότε η γωνία $\angle B_1A_1A_2$ αρχίζοντας από οξεία γωνία αυξάνεται μέχρι να γίνει αμβλεία. Επομένως πρέπει να υπάρχει μια ενδιάμεση θέση ΑΒ στην οποία η γωνία $\angle BAA_2$ είναι ορθή. Άρα η ΑΒ είναι η κοινή κάθετη στις δύο ευθείες α, β.

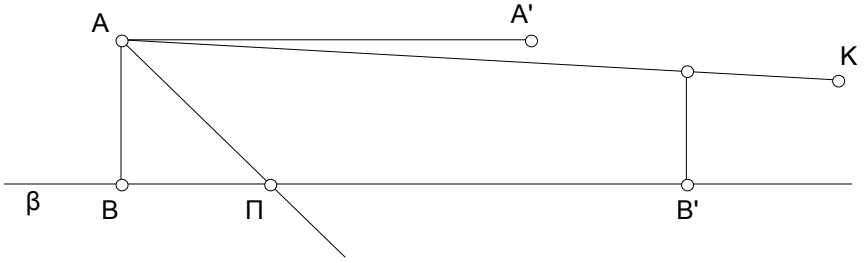
Στην τρίτη περίπτωση, είτε δεν υπάρχει κοινή κάθετος, είτε υπάρχει αλλά δεν βρίσκεται μεταξύ των B_1 και B_2.

Προφανώς, δεν υπάρχει τέτοια κάθετος, αν για όλα τα σημεία A_ρ της α που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του A_1, το τετράπλευρο $B_1A_1A_\rho B_\rho$ έχει πάντα μια αμβλεία γωνία στην κορυφή A_ρ.

Με αυτή την υπόθεση, της ύπαρξης δύο συνεπίπεδων ευθειών οι οποίες δεν τέμνονται και δεν έχουν κοινή κάθετο, ο Saccheri αποδεικνύει ότι οι εν λόγω ευθείες προσεγγίζουν η μια την άλλη όλο και πιο κοντά (Sac. 23) και ότι η απόσταση μεταξύ τους

τελικά γίνεται μικρότερη από οποιοδήποτε δοθέν τμήμα όσο μικρό θέλουμε (Sac. 25). Με άλλα λόγια, αν υπάρχουν δύο συνεπίπεδες ευθείες οι οποίες δεν τέμνονται και δεν έχουν κοινή κάθετο, τότε πρέπει να είναι ασύμπτωτες. Για να αποδείξει αποτελεσματικά ότι οι εν λόγω ασύμπτωτες υπάρχουν, προχώρησε ως εξής[7]:

Ανάμεσα στις ευθείες που διέρχονται από το Α και είναι συνεπίπεδες με την ευθεία β, υπάρχουν ευθείες που την τέμνουν, όπως π.χ. η ΑΒ που είναι κάθετη στη β, και άλλες που έχουν κοινή κάθετο με τη β, όπως π.χ. η ΑΑ΄.



Αν η ΑΠ τέμνει τη β, τότε κάθε άλλη ευθεία που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με την ΑΒ γωνία μικρότερη από την οξεία γωνία ∠ΒΑΠ, επίσης τέμνει τη β. Από την άλλη μεριά, αν η ευθεία ΑΚ, διάφορη της ΑΑ΄, έχει κοινή κάθετη με τη β, τότε κάθε άλλη ευθεία που σχηματίζει με την ΑΒ μεγαλύτερη οξεία γωνία από τη γωνία ∠ΒΑΚ, έχει κοινή κάθετο με τη β.

Επίσης είναι σαφές ότι αν πάρουμε τις ευθείες που διέρχονται από το Α από τη διεύθυνση της ΑΒ προς τη διεύθυνση της ΑΑ΄, δεν θα βρούμε μια ευθεία ανάμεσα σε αυτές που τέμνουν τη β, η οποία να είναι η «τελευταία» του παραπάνω συνόλου. Με άλλα λόγια, οι γωνίες ∠ΒΑΠ, που σχηματίζονται από τις ευθείες ΑΠ, που τέμνουν τη β, και την ΑΒ, έχουν άνω όριο τη γωνία ∠ΒΑΧ όπου η ΑΧ δεν τέμνει τη β.

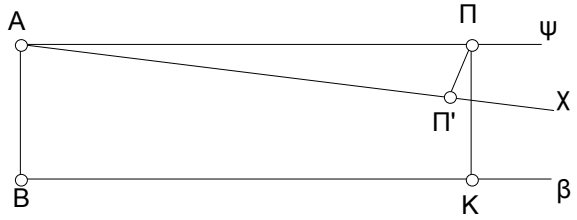
Στη συνέχεια ο Saccheri αποδεικνύει ότι αν ξεκινήσουμε με την ΑΑ΄ και από τις ευθείες που διέρχονται από το Α και κινηθούμε προς την αντίθετη κατεύθυνση από ότι προηγουμένως, δεν θα βρούμε μια οριακή ευθεία στο σύνολο των ευθειών που έχουν κοινή κάθετη με τη β. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες ∠ΒΑΚ, όπου η ΑΚ έχει κοινή κάθετη με τη β, έχουν κάτω όριο, τη γωνία ∠ΒΑΨ για την οποία ισχύει ότι η πλευρά της ΑΨ δεν τέμνει και δεν έχει κοινή κάθετη με τη β. (Sac. 30) Έπεται ότι η ΑΨ είναι ασύμπτωτη στη β.

[7] Η διατύπωση του επιχειρήματος του Saccheri σχετικά με τις ασύμπτωτες στο βιβλίο του Bonola διαφέρει από εκείνη στην ιταλική και γερμανική έκδοση. Οι αλλαγές προτάθηκαν στον Bonola από τον καθηγητή Carslaw.

Επιπλέον, ο Saccheri αποδεικνύει ότι οι ευθείες ΑΧ και ΑΨ συμπίπτουν (Sac. 32). Το επιχείρημα του βασίζεται πάνω στη θεώρηση των σημείων στο άπειρο και είναι καλύτερα να αντικατασταθεί από το περιεχόμενο της Sac. 21 :

Με την υπόθεση της Ορθής και της Αμβλείας γωνίας, η απόσταση ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στην πλευράς μιας γωνίας από την άλλη πλευρά, αυξάνεται απεριόριστα καθώς αυτό απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας κατά μήκος της πλευράς.

Το προτεινόμενο επιχείρημα σχηματικά αποδίδεται ως εξής :



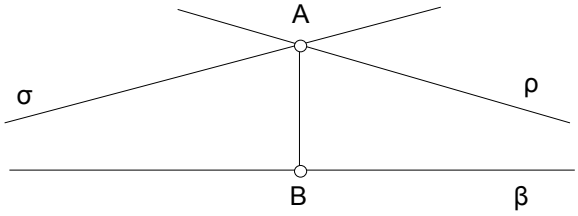
Εάν η ΑΧ δεν συμπίπτει με την ΑΨ, μπορούμε να πάρουμε ένα σημείο Π στην ΑΨ, τέτοιο ώστε η κάθετη ΠΠ΄ από το Π στην ΑΧ να ικανοποιεί την ανισότητα ΠΠ΄>ΑΒ (1) (Sac. 21).

Από την άλλη μεριά, αν η ΠΚ είναι η κάθετη από το Π στη β, η ιδιότητα των ασύμπτωτων γραμμών (Sac. 23) δείχνει ότι ΑΒ>ΠΚ. Όμως το Π και η β είναι εκατέρωθεν της ΑΧ, άρα ΠΚ>ΠΠ΄. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι ΑΒ>ΠΠ'. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τη (1). Επομένως, οι ΑΧ και ΑΨ συμπίπτουν.

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στο ακόλουθο :

<u>Θεώρημα</u>

Με την υπόθεση της Οξείας γωνίας, από όλες τις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο Α υπάρχουν δύο ευθείες ρ και σ που είναι ασύμπτωτες και εκατέρωθεν της β. Οι ευθείες ρ και σ χωρίζουν το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το Α σε δύο υποσύνολα. Το πρώτο υποσύνολο αποτελείται από τις ευθείες που τέμνουν τη β και το δεύτερο από εκείνες που έχουν κοινή κάθετη με τη β.



Στο σημείο αυτό ο Saccheri προσπαθεί να πάρει μια απόφαση, εμπιστεύεται περισσότερο τη διαίσθησή του και την πίστη στην ισχύ του Πέμπτου Αιτήματος και

λιγότερο τη λογική του. Το επιχείρημά του για την απόρριψη της υπόθεσης της Οξείας γωνίας ισοδυναμεί με τη δήλωση: υπό την υπόθεση της Οξείας γωνίας, οι ευθείες ρ και β έχουν κοινή κάθετη στο κοινό τους σημείο στο άπειρο, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τη φύση της ευθείας γραμμής. Ο Saccheri ουσιαστικά θεωρεί ότι στο άπειρο ισχύουν οι ιδιότητες που ισχύουν και σε πεπερασμένη απόσταση.

Για την απόρριψη της υπόθεσης της Οξείας γωνίας ο Saccheri πλησιάζει πολύ στη Γεωμετρία του Lobachevsky. Δείχνει ότι με την εν λόγω υπόθεση, δύο ευθείες γραμμές που τέμνονται είτε έχουν κοινή κάθετη προς την κατεύθυνση που αποκλίνουν είτε αποκλίνουν από τη μια μεριά και από την άλλη πλησιάζουν ασυμπτωτικά η μια την άλλη. Στη δεύτερη περίπτωση ο Saccheri συμπεραίνει ότι οι ευθείες γραμμές πρέπει να έχουν ένα κοινό σημείο και μια κοινή κάθετη στο άπειρο. Το σκεπτικό του είναι: αν από ένα σημείο της μιας ευθείας φέρουμε κάθετη στην άλλη, τότε καθώς το σημείο αυτό τείνει στο άπειρο το μήκος της κάθετης τείνει στο μηδέν και η γωνία ανάμεσα στην πρώτη ευθεία και την κάθετη τείνει στις 90º. Ο Saccheri αντιμετωπίζει το κοινό σημείο και την κοινή κάθετη στο άπειρο όπως ένα συνηθισμένο σημείο και μια συνηθισμένη κάθετη ευθεία. Άρα οι δύο ευθείες τέμνονται στο άπειρο. Επομένως, η υπόθεση της Οξείας γωνίας είναι απολύτως ψευδής, διότι έρχεται σε αντίθεση με τη φύση της ευθείας γραμμής. (Rosenfeld, 1988)

Παρόλα αυτά, ο Saccheri δεν είναι ικανοποιημένος με την αιτιολόγησή του και προσπαθεί να φθάσει στην επιθυμητή απόδειξη υιοθετώντας εκ νέου την παλιά ιδέα της ίσης απόστασης.

Στη δεύτερη προσπάθεια του, ο Saccheri θεωρεί το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από μια ευθεία γραμμή. Σε αντίθεση με τους προγενέστερους, γνωρίζει ότι υπό την υπόθεση της Οξείας γωνίας, ο εν λόγω γεωμετρικός τόπος δεν είναι ούτε ευθεία γραμμή ούτε κύκλος. Στον υπολογισμό του μήκους του τόξου της καμπύλης διαμέσου των απειροελάχιστων ο Saccheri κάνει το λάθος και συμπεραίνει ότι το ζητούμενο μήκος είναι ίσο με την απόσταση ανάμεσα στα ίχνη των καθέτων που φέρουμε από τα άκρα του τόξου στην ευθεία γραμμή.

Όμως, ο Saccheri έχει δείξει ότι οι κάθετες κινούνται χωριστά, έτσι η απόσταση ανάμεσα στα άκρα του τόξου είναι μεγαλύτερη από την απόσταση ανάμεσα στα ίχνη των καθέτων. Έχοντας δείξει αυτή την αντίφαση ο Saccheri δηλώνει για άλλη μια φορά ότι: Η υπόθεση της Οξείας γωνίας είναι απολύτως ψευδής, διότι «αυτοκαταστρέφεται». (Rosenfeld, 1988)

Συνοψίζοντας, αν και ο Saccheri απέτυχε στο στόχο του, η δουλειά του ήταν πολύ σημαντική. Αποτέλεσε ίσως την πιο καθοριστική προσπάθεια απόδειξης του Πέμπτου Αιτήματος. Το γεγονός ότι δεν κατάφερε να ανακαλύψει κάποια αντίφαση ανάμεσα στις συνέπειες της υπόθεσης της Οξείας γωνίας, δεν τον έκανε να αντιληφθεί ότι είναι δυνατόν πάνω σε αυτή την υπόθεση να στηριχθεί ένα συνεπές γεωμετρικό σύστημα τόσο λογικό όσο και το ευκλείδειο καθώς και ότι το Πέμπτο Αίτημα είναι αδύνατο να αποδειχθεί. Ο Heath γράφει χαρακτηριστικά:

> *«ο Saccheri ... υπήρξε θύμα της προκατάληψης της εποχής του ότι η μόνη δυνατή Γεωμετρία ήταν η Ευκλείδεια, και παρουσιάζει το περίεργο θέαμα ενός ανθρώπου που αναγείρει ένα οικοδόμημα πάνω σε καινούργια θεμέλια με σπουδή και εργατικότητα, σκοπεύοντας να το γκρεμίσει μετά».* (Davis D., 2001)

Παρ' όλη την ανακρίβεια των συμπερασμάτων τους, οι έρευνες του Saccheri στο χώρο της Γεωμετρίας αποτέλεσαν ένα σημαντικό βήμα προς την ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Johann Heinrich Lambert

Ο J. H. Lambert, ελβετογερμανός μαθηματικός, αστρονόμος, φυσικός και φιλόσοφος (Αλσατία 1728 - Βερολίνο 1777), αν και είναι γνωστός περισσότερο για την αυστηρή απόδειξη ότι ο αριθμός π είναι άρρητος, είχε ασχοληθεί μεταξύ άλλων και με την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος.

Είναι δύσκολο να πούμε πόση επιρροή άσκησε η δουλειά του Saccheri πάνω στους γεωμέτρες του 18^{ου} αιώνα. Όμως, είναι πιθανό, ο Lambert να γνώριζε το έργο του Saccheri εφόσον στο βιβλίο του *Theorie der Parallellinien* (1766) παραθέτει μια εργασία του G. S. Klügel (1739-1812), όπου η εργασία του Ιταλού γεωμέτρη αναλύεται προσεκτικά.

Ο Lambert, όπως και ο Saccheri, χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Αρνούμενος την ισχύ του 5^{ου} αιτήματος, δημιούργησε ένα νέο υποθετικό σύστημα όπου θα μπορούσε κανείς να αποδείξει την ύπαρξη μιας απόλυτης μονάδας μήκους. Όμως ο Lambert ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει τέτοια μονάδα μήκους, γι' αυτό και όλο το εγχείρημα είναι εσφαλμένο.

Το βιβλίο του Lambert *Theorie der Parallellinien* δημοσιεύτηκε 11 χρόνια μετά το θάνατό του και εκδόθηκε από τους J.Bernoulli και C.F.Hindenburg. Είναι χωρισμένο σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος έχει περισσότερο κριτικό και φιλοσοφικό χαρακτήρα. Ασχολείται με το διπλό ερώτημα που αναδύεται από το Πέμπτο Αίτημα: μπορεί να αποδειχθεί μόνο με τη βοήθεια των προηγούμενων προτάσεων ή απαιτείται η χρήση άλλων υποθέσεων ; Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στη συζήτηση διαφόρων προσπαθειών απόδειξης του Ευκλείδειου Αιτήματος. Σε αυτές το αίτημα ανάγεται σε πιο απλές προτάσεις, που πρέπει να αποδειχθούν. Το τρίτο και πιο σημαντικό μέρος περιέχει μια έρευνα, παρόμοια με εκείνη του Saccheri, την οποία και θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

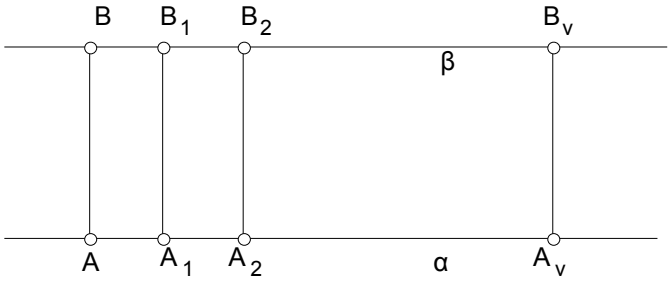
Το θεμελιώδες σχήμα του Lambert είναι ένα τετράπλευρο με τρεις ορθές γωνίες. Ο Lambert διατυπώνει τρεις υποθέσεις για το είδος της τέταρτης γωνίας, τις εξής:

I. Η υπόθεση της Ορθής γωνίας.
II. Η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.

III. Η υπόθεση της Οξείας γωνίας.

Ο τρόπος που χειρίζεται ο Lambert τις παραπάνω υποθέσεις δεν διαφέρει και πολύ από τη μέθοδο του Saccheri. Σκοπός του είναι να απορρίψει τις δύο τελευταίες υποθέσεις ώστε τελικά να ισχύει μόνο η πρώτη, η οποία οδηγεί στο Ευκλείδειο σύστημα.

Για την απόρριψη της δεύτερης υπόθεσης ο Lambert βασίζεται στο επόμενο σχήμα.



Έστω δύο ευθείες α, β, κάθετες σε μια τρίτη ευθεία ΑΒ. Παίρνει διαδοχικά σημεία Β, B_1, B_2, ... , B_ν στην β, και τις κάθετες ΒΑ, B_1A_1, B_2A_2, ..., $B_\nu A_\nu$ στην α. Αποδεικνύει, αρχικά, ότι αυτές οι κάθετες συνεχώς μειώνονται, αρχίζοντας από την κάθετη ΒΑ, και έπειτα ότι αυτή η μείωση συνεχώς αυξάνεται.

Έτσι έχουμε : $BA - B_\nu A_\nu > \nu(BA - B_1A_1)$.

Αλλά, αν πάρουμε το ν αρκετά μεγάλο, το δεύτερο μέλος της ανισότητας γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε, από το Αξίωμα του Αρχιμήδη[8], ενώ το πρώτο μέλος είναι πάντα μικρότερο από το ΒΑ. Αυτή η αντίφαση επιτρέπει στον Lambert να ισχυριστεί ότι η δεύτερη υπόθεση είναι ψευδής.

Εξετάζοντας την τρίτη υπόθεση ο Lambert επωφελείται ξανά από το προηγούμενο σχήμα. Αποδεικνύει ότι οι κάθετες ΒΑ, B_1A_1, B_2A_2, ..., $B_\nu A_\nu$ συνεχώς αυξάνονται και συγχρόνως η διαφορά μεταξύ των καθέτων επίσης αυξάνεται. Καθώς όμως αυτό το αποτέλεσμα δεν οδηγεί σε αντιφάσεις, όπως και ο Saccheri, ήταν υποχρεωμένος να προχωρήσει το συλλογισμό του. Έτσι βρίσκει ότι με την τρίτη υπόθεση το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από δύο ορθές γωνίες. Προχωρώντας ένα βήμα πιο πέρα από τον Saccheri, ανακαλύπτει ότι το έλλειμμα ενός πολυγώνου, δηλαδή η διαφορά 2(ν-2) ορθές και του αθροίσματος των γωνιών του, όπου ν το πλήθος των πλευρών του, είναι ανάλογο προς το εμβαδόν του. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί πιο εύκολα παρατηρώντας ότι και το εμβαδόν και το έλλειμμα ενός πολυγώνου, είναι αντίστοιχα το άθροισμα των εμβαδών και των ελλειμμάτων των τριγώνων που συνθέτουν

[8] Το Αξίωμα του Αρχιμήδη χρησιμοποιείται ξανά με τρόπο που υποθέτει ότι η ευθεία γραμμή είναι άπειρη.

το αρχικό πολύγωνο. Αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν διατύπωσε το συμπέρασμα ότι το εν λόγω εμβαδόν είναι ανάλογο προς το έλλειμμα του.

Μια άλλη αξιοσημείωτη ανακάλυψη που έγινε από τον Lambert μελετώντας την υπόθεση της Οξείας γωνίας, σχετίζεται με τη μέτρηση γεωμετρικών μεγεθών. Πιο συγκεκριμένα, στη συνήθη Γεωμετρία η σημασία της επιλογή μιας συγκεκριμένης μονάδας μέτρησης γραμμών είναι σχετική, ενώ στη Γεωμετρία που στηρίζεται πάνω στην τρίτη υπόθεση είναι απόλυτη. Ο Lambert αναφέρει χαρακτηριστικά:

> *«… η πιο εντυπωσιακή συνέπεια είναι ότι υπό την τρίτη υπόθεση θα μπορούσαμε να έχουμε μια απόλυτη μονάδα για το μήκος κάθε γραμμής, το εμβαδόν κάθε επιφάνειας και τον όγκο κάθε φυσικού αντικειμένου. Αυτό αντικρούει τον ισχυρισμό ότι μερικά [συμπεράσματα] τα θεωρούσαν απερίσκεπτα ως αξίωμα της γεωμετρίας, ενώ κανείς μέχρι τώρα δεν είχε αμφισβητήσει ότι δεν υπάρχει απόλυτη μονάδα αυτού του είδους...»*

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να εξηγήσουμε τη διάκριση ανάμεσα στην απόλυτη και τη σχετική σημασία της μονάδας μέτρησης.

Στη Γεωμετρία, παρατηρούμε ότι για την αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος παίρνουμε συγκεκριμένα σχήματα ως δεδομένα και κατ' επέκταση τα μεγέθη των στοιχείων τους. Επιπλέον, σε αυτά τα μεταβλητά δεδομένα, που επιλέγονται τυχαία, υποθέτουμε πάντοτε χωρίς ιδιαίτερη αναφορά, την παρουσία θεμελιωδών σχημάτων, ευθειών γραμμών, επιπέδων κ.τ.λ.. Έτσι, κάθε κατασκευή, κάθε μέτρηση, κάθε ιδιότητα οποιουδήποτε σχήματος πρέπει να θεωρείται σχετική, αν αναφέρεται ουσιαστικά στα μεταβλητά δεδομένα. Από την άλλη μεριά, πρέπει να μιλάμε για απόλυτη κατασκευή, αν αυτή έχει να κάνει μόνο με σταθερά δεδομένα ή υπάρχει ρητή δήλωση για τα μεταβλητά δεδομένα.

Επομένως, μέσα σε αυτά τα πλαίσια, στη συνήθη Γεωμετρία, οι μετρήσεις των γραμμών έχουν σχετική σημασία, ενώ των γωνιών απόλυτη. Πράγματι, η ύπαρξη των όμοιων σχημάτων δεν μας επιτρέπει με κανένα τρόπο να εξατομικεύσουμε το μέγεθος μιας γραμμής στα πλαίσια των θεμελιώδη σχημάτων. Με πιο απλά λόγια, επειδή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία υπάρχουν όμοια αλλά άνισα σχήματα, τα μήκη μπορούν να μετρηθούν μόνο με βάση κάποια αυθαίρετη μονάδα που δεν έχει δομική σύνδεση με τη Γεωμετρία, όπως το μέτρο ή το πόδι. Οι γωνίες από την άλλη έχουν μια φυσική μονάδα

μέτρησης, όπως την ορθή γωνία ή το ακτίνιο, που μπορούν να οριστούν γεωμετρικά. Άρα με βάση αυτό το συλλογισμό τα μήκη είναι σχετικά αλλά οι γωνίες είναι απόλυτες. (Eves, 1990)

Μετά από τη μικρή παρένθεση, επιστρέφουμε στον Lambert και στη Γεωμετρία που ανταποκρίνεται στην τρίτη υπόθεση. Ο Lambert παρατήρησε ότι κάθε τμήμα μπορεί να συνδεθεί με μια συγκεκριμένη γωνία. Από αυτό έπεται ότι κάθε τμήμα αντιστοιχεί σε ένα θεμελιώδες σχήμα. Επομένως, στη νέα (υποθετική) γεωμετρία δικαιούμαστε να αποδώσουμε μια απόλυτη σημασία στη μέτρηση των τμημάτων.

Για να δείξουμε με απλό τρόπο πως σε κάθε τμήμα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια γωνία, πετυχαίνοντας έτσι την απόλυτη αριθμητική μέτρηση του, κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πάνω στο τμήμα. Έτσι, συνδέουμε το τμήμα με τη γωνία του ισόπλευρου τριγώνου και στη συνέχεια με το μέτρο της. Επομένως, υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα τμήματα και στις γωνίες που περιέχονται σε συγκεκριμένα όρια.

Όμως, η αριθμητική αναπαράσταση των τμημάτων με τον παραπάνω τρόπο δεν ικανοποιεί τη γραμμική ιδιότητα των μηκών. Δηλαδή, το άθροισμα δύο τμημάτων δεν αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντίστοιχων γωνιών τους. Παρόλα αυτά, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση της γωνίας που να ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα και να συνδέει το τμήμα με τη συνάρτηση της γωνίας, όχι με την εν λόγω γωνία. Για κάθε τιμή της γωνίας ανάμεσα σε συγκεκριμένα όρια, μια τέτοια συνάρτηση δίνει μια απόλυτη μέτρηση των τμημάτων. Η απόλυτη μονάδα μήκους είναι το τμήμα για το οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 1.

Τώρα αν μια συγκεκριμένη συνάρτηση της γωνίας είναι γραμμική, η τιμή της συνάρτησης και μια αυθαίρετη σταθερά επίσης ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα. Είναι επομένως ξεκάθαρο ότι μπορούμε πάντα να επιλέγουμε αυτή τη σταθερά έτσι ώστε η απόλυτη μονάδα τμήματος θα είναι εκείνο το τμήμα που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε δοθείσα γωνία, π.χ. 45º. Η πιθανότητα κατασκευής της απόλυτης μονάδας τμήματος, δοθείσας μιας γωνίας, εξαρτάται από τη λύση του ακόλουθου προβλήματος.

Αν ισχύει η υπόθεση της Οξείας γωνίας, να κατασκευαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο με δοθέν έλλειμμα.

Όμως, σύμφωνα με τη διαίσθηση που έχουμε για τον χώρο η απόλυτη μέτρηση όλων αυτών των γεωμετρικών μεγεθών μας φαίνεται αδύνατη. Άρα, κατά τον Lambert, αν αρνηθούμε την ύπαρξη μιας απόλυτης μονάδας μήκους τμημάτων, μπορούμε να

απορρίψουμε την τρίτη υπόθεση.

Καθώς ο Lambert διαπίστωσε την αυθαίρετη φύση του παραπάνω συλλογισμού, δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι πίστεψε ότι με τον τρόπο αυτό είχε αποδείξει το 5° Αίτημα.

Για να πετύχει την πολυπόθητη απόδειξη, προχώρησε την έρευνά του πάνω στις συνέπειες της τρίτης υπόθεσης, αλλά το μόνο που κατάφερε ήταν να ανάγει το ερώτημα του σε άλλα εξίσου δύσκολα να απαντηθούν.

Στο βιβλίο του Lambert *Theorie der Parallellinien* περιέχονται μερικά πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Ο Lambert, προχωρώντας πιο πέρα από τον Saccheri στη συναγωγή προτάσεων με βάση τις υποθέσεις της Αμβλείας και Οξείας γωνίας, έδειξε επιπλέον, ότι το πλεόνασμα από τις δύο ορθές γωνίες στην υπόθεση της Αμβλείας γωνίας, και το έλλειμμα στην υπόθεση της Οξείας γωνίας είναι ανάλογο προς το εμβαδόν του τριγώνου. Παρατήρησε την ομοιότητα της Γεωμετρίας που προκύπτει από την υπόθεση της Αμβλείας γωνίας με τη Σφαιρική Γεωμετρία, όπου το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ανάλογο με το πλεόνασμα. Διατύπωσε τη σωστή εικασία ότι η Γεωμετρία που προκύπτει από την υπόθεση της Οξείας γωνίας μπορεί ίσως να επαληθευτεί πάνω σε μια σφαίρα φανταστικής ακτίνας. Πιο συγκεκριμένα, ο Lambert αναφέρει τα εξής:

«...υπό την τρίτη υπόθεση ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι λιγότερο από 180° ή δύο ορθές γωνίες. Αλλά η διαφορά μέχρι τις 180° αυξάνεται με το εμβαδόν του τριγώνου. Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής : αν ένα τρίγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από ένα άλλο, τότε το πρώτο έχει μικρότερο άθροισμα γωνιών από το δεύτερο...

Θα προσθέσω το επόμενο αξιοσημείωτο. Εντελώς ανάλογα θεωρήματα ισχύουν υπό τη δεύτερη υπόθεση εκτός από το ότι το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο από 180°. Το πλεόνασμα είναι πάντα ανάλογο προς το εμβαδόν του τριγώνου.

Πιστεύω ότι είναι αξιοσημείωτο ότι η δεύτερη υπόθεση ισχύει κι αν αντί για ένα επίπεδο τρίγωνο πάρουμε ένα σφαιρικό, διότι το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο από 180° και το πλεόνασμα είναι επίσης ανάλογο προς το εμβαδόν του τριγώνου.

Αυτό που με εντυπωσιάζει ακόμη περισσότερο είναι ό,τι έχω πει για τα σφαιρικά τρίγωνα μπορούν να αποδειχθούν ανεξάρτητα από την δυσκολία που

δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες και υποθέτοντας αποκλειστικά το αξίωμα κάθε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μιας σφαίρας την χωρίζει σε δύο ίσα μέρη. Από αυτό θα μπορούσα σχεδόν να συμπεράνω ότι η τρίτη υπόθεση θα μπορούσε να παρουσιαστεί στην περίπτωση μιας φανταστικής σφαίρας».

Ίσως αυτός ο τρόπος σκέψης να προέρχεται από τον τύπο $(A+B+\Gamma-\pi)r^2$, που δίνει το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου. Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε την ακτίνα r με τη φανταστική ακτίνα ir προκύπτει ο τύπος $(\pi-A-B-\Gamma)r^2$, που μας δίνει το εμβαδόν επίπεδου τριγώνου όταν ισχύει η τρίτη υπόθεση του Lambert.

Ο Lambert όμως άφησε το ερώτημα μετέωρο. Το γεγονός ότι δεν δημοσίευσε την έρευνά του μας επιτρέπει να εικάσουμε ότι ίσως να είχε ανακαλύψει έναν άλλο τρόπο θεώρησης του θέματος.

Επιπλέον, πρέπει να σημειωθεί ότι από τη γενική επιθυμία για επιτυχία αυτών των προσπαθειών, στο δεύτερο μισό του 18^{ου} αιώνα άρχισε να διαμορφώνεται η πεποίθεση για την αποδοχή του Ευκλείδειου Αιτήματος ή κάποιου άλλου ισοδύναμου αιτήματος χωρίς απόδειξη. Την παραπάνω άποψη τη συναντάμε τόσο στο έργο του A.G. Kästner (1719-1812) όσο και σε εκείνο του μαθητή του G.S. Klügel (1739-1812), που έγραψε μια αξιόλογη κριτική των πιο γνωστών προσπαθειών απόδειξης του Πέμπτου Αιτήματος. Στο εν λόγω έργο ο Klügel βρίσκει κάθε μια από τις προτεινόμενες αποδείξεις ανεπαρκή και προτείνει την πιθανότητα να αποκλίνουν οι ευθείες γραμμές που δεν τέμνονται. Προσθέτει ότι η προφανής αντίφαση που αυτό παρουσιάζει δεν είναι αποτέλεσμα μιας αυστηρής απόδειξης αλλά ούτε και συνέπεια των ορισμών της ευθείας γραμμής και της καμπύλης, αλλά μάλλον κάτι που απορρέει από την εμπειρία και την κρίση των αισθήσεων μας.

Οι έρευνες των Saccheri και Lambert τείνουν να επιβεβαιώσουν την άποψη του Klügel, αλλά δεν μπορούν να θεωρηθούν ως απόδειξη ότι η Ευκλείδεια υπόθεση δεν αποδεικνύεται. Ούτε θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε κάτι τέτοιο, αν ακολουθούσαμε το δρόμο που χάραξαν οι δύο αυτοί γεωμέτρες παράγοντας άλλες προτάσεις μη αντιφατικές με τα θεμελιώδη θεωρήματα της γεωμετρίας.

Επιπλέον, το ότι θα έπρεπε κάποιος να ακολουθήσει αυτό το δρόμο χωρίς την προϋπόθεση του Saccheri ότι αντιφάσεις θα βρεθούν, αποτελεί ιστορικά το αποφασιστικό βήμα για την ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και τη διαπίστωση ότι το Αίτημα του Ευκλείδη δεν μπορεί να αποδειχθεί.

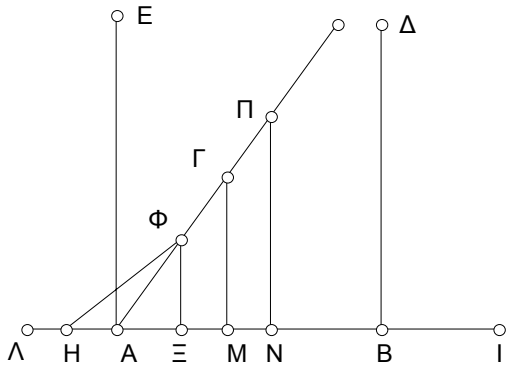
Όμως από τη δουλειά των Saccheri και Lambert μέχρι εκείνη των Lobaschevsky και Bolyai, που βασίζονται πάνω σε αυτή την ιδέα, θα χρειαστεί να περάσει τουλάχιστον μισός αιώνας ακόμη.

Adrien Marie Legendre

Ο Γάλλος μαθηματικός A. M. Legendre (1752–1833) έγραψε ένα δημοφιλέστατο εγχειρίδιο επιπεδομετρίας *Eléments de Géométrie*[9], το οποίο γνώρισε δώδεκα επανεκδόσεις. Στους περισσότερους από αυτούς τους τόμους, παρουσίαζε ένα επιχείρημα που φαινόταν να αποδεικνύει το Πέμπτο Αίτημα του Ευκλείδη, η επόμενη όμως έκδοση περιείχε μια ανασκευή του προηγούμενου επιχειρήματος και την παρουσίαση ενός άλλου. Οι έρευνες του έργου του *Eléments de Géométrie*, συγκεντρώθηκαν όλες μαζί στο *Refléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*. Το έργο του Legendre άσκησε επίδραση στο έργο άλλων, αν και τη φήμη του την οφείλει κυρίως στη συνεισφορά του στη θεωρία αριθμών και στην ανάλυση.

Στην πρώτη έκδοση του βιβλίου *Eléments de Géométrie* ο Legendre δίνει την επόμενη απόδειξη για το Αίτημα της Παραλληλίας:

Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία γραμμή ΒΔ είναι κάθετη στην ευθεία γραμμή ΑΒ και η ευθεία ΑΓ σχηματίζει με αυτήν οξεία γωνία ∠ΒΑΓ. Τότε το ίχνος Ξ της καθέτου ΦΞ που φέρουμε από κάποιο σημείο Φ στην ΑΓ δεν μπορεί να συμπίπτει με το σημείο Α και δεν μπορεί να καταλήγει στην προέκταση ΑΛ της ΑΒ από την άλλη μεριά του Α.



Η πρώτη περίπτωση δεν υφίσταται, διότι η γωνία ∠ΒΑΦ είναι οξεία. Ομοίως και η δεύτερη περίπτωση, διότι αν το σημείο Ξ συμπίπτει με το Η πάνω στην ΑΛ, τότε η

[9] Η πρώτη έκδοση του βιβλίου *Eléments de Géométrie* έγινε το 1794 και η τελευταία το 1823.

κάθετη ΦΗ θα έτεμνε την κάθετη ΑΕ στο Α σε κάποιο σημείο Κ και θα είχαμε δύο κάθετες από το ίδιο σημείο στην ΑΛ. Έπεται ότι το ίχνος Ξ είναι πάνω στην ευθεία γραμμή ΑΙ. Ανάλογα το ίχνος Μ της καθέτου που φέρουμε από το σημείο Γ στην ευθεία ΑΒ δεν μπορεί να συμπίπτει με το Ξ ή να πέφτει πάνω στην ΞΛ και το ίχνος Ν της καθέτου ΠΝ που φέρουμε από κάποιο σημείο Π της προέκτασης της ΑΓ, δεν μπορεί να συμπίπτει με το Μ ή να πέφτει πάνω στη ΜΛ κ.ο.κ. Επίσης, αν ένα σημείο της ευθείας ΑΓ απομακρύνεται από το Α τότε το ίχνος της καθέτου από αυτό το σημείο στην ΑΒ επίσης απομακρύνεται από το Α. Κανένα από τα παραπάνω ίχνη δεν μπορεί να είναι το τελευταίο. Πράγματι, έστω ότι το Ν είναι το τελευταίο. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι υπάρχουν σημεία πάνω στην ΑΓ που είναι πιο μακριά από το Α απ' ότι είναι το αντίστοιχο σημείο Π και τα ίχνη των καθέτων από τέτοια σημεία είναι πιο μακριά από το Α απ' ότι το Ν. Από αυτό ο Legendre συμπεραίνει ότι οι αποστάσεις από το Α των ιχνών των καθέτων που φέρουμε από τα σημεία της ΑΓ στην ΑΒ μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλες και επομένως ένα από αυτά μπορεί να συμπίπτει με το Β. Αλλά τότε και η κάθετη ΒΔ στην ΑΒ πρέπει να έρχεται από κάποιο σημείο της ΑΓ και αυτό το συγκεκριμένο σημείο είναι το σημείο τομής των ΑΓ και ΑΒ. Έτσι ο Legendre «απέδειξε» ότι μια κάθετη και μια πλάγια γραμμή πρέπει να τέμνονται και δεν είναι δύσκολο από αυτό να συμπεράνει τη γενική περίπτωση του αιτήματος της παλαλληλίας.

Το λάθος του παραπάνω συλλογισμού έφερε γρήγορα στο φως ο Ρώσος ακαδημαϊκός Semen Emelyanovic Gur'ev (1746 – 1813) στο έργο του *An attempt to perfect the elements of geometry* (Petersburg, 1798). Ο Gur'ev έδειξε ότι η μονότονη αύξηση των μερικών αθροισμάτων μιας συγκλίνουσας σειράς θετικών όρων δεν συνεπάγεται ότι αυτά τα μερικά αθροίσματα μπορούν να υπερβούν το άθροισμα της σειράς. Ανάλογα, η μονότονη αύξηση των αποστάσεων των ιχνών των καθέτων από το Α δεν συνεπάγεται ότι αυτές οι αποστάσεις μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μεγάλες.
Ο ίδιος ο Legendre δεν ήταν ικανοποιημένος με την απόδειξη του και στην τρίτη έκδοση του *Elements of Geometry* πρότεινε μια νέα «απόδειξη» βασισμένη στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. (Rosenfeld, 1988)

Έτσι στη δεύτερη και πιο ενδιαφέρουσα προσπάθεια του, ο Legendre, όπως και ο Saccheri, ασχολήθηκε συστηματικά με τη διερεύνηση της σχέσης $5^{ου}$ αιτήματος προς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

Πιο συγκεκριμένα, πίστευε ότι αν αποδείκνυε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°, υπόθεση που ισοδυναμεί με εκείνη της Ορθής γωνίας του

Saccheri, θα πετύχαινε την απόδειξη του Ευκλείδειου Αιτήματος.

Έχοντας αυτό ως στόχο του, στην αρχή της εργασίας του επιδιώκει την απόρριψη της υπόθεσης της Αμβλείας γωνίας, καθώς θέλει να αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι είτε λιγότερο (υπόθεση της Οξείας γωνίας) είτε ίσο (υπόθεση της Ορθής γωνίας) με δύο ορθές γωνίες.

Οι προσπάθειες του Legendre, που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία βασίζονται:

- Στο αξίωμα του Αρχιμήδους – Ευδόξου.
- Στις 26 πρώτες προτάσεις των Στοιχείων.

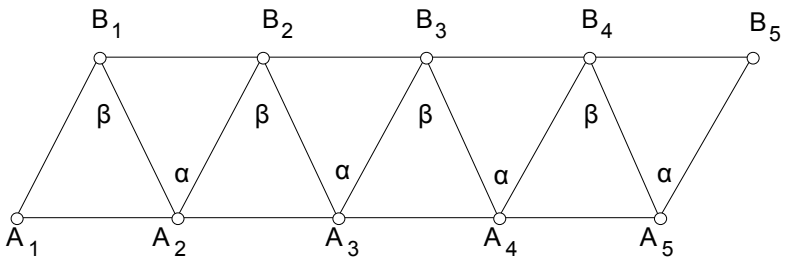
Αναπαράγουμε την έξυπνη και απλή απόδειξη του Legendre για το επόμενο :

<u>Θεώρημα</u>

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από δυο ορθές γωνίες.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ν ίσα και διαδοχικά τμήματα A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_\nu A_{\nu+1}$, πάνω σε μια ευθεία γραμμή.



Από το ίδιο μέρος της γραμμής κατασκευάζουμε ν ίσα τρίγωνα που έχουν ως τρίτη κορυφή τα σημεία B_1, B_2, ... , B_ν. Τα τμήματα B_1B_2, B_2B_3, ... , $B_{\nu-1}B_\nu$, που ενώνουν αυτές τις κορυφές, είναι ίσα και μπορούν να θεωρηθούν οι βάσεις των ν ίσων τριγώνων $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, ... , $B_{\nu-1}A_\nu B_\nu$. Το σχήμα συμπληρώνεται προσθέτοντας το τρίγωνο $B_\nu A_{\nu+1}B_{\nu+1}$, που είναι ίσο με τα υπόλοιπα.

Ισχυρισμός: Έστω $\beta = \angle A_1B_1A_2$ και $\alpha = \angle B_1A_2B_2$. Τότε ισχύει $\beta \leq \alpha$.

Απόδειξη ισχυρισμού:

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\beta > \alpha$. Τότε συγκρίνοντας τα δύο τρίγωνα $A_1B_1A_2$ και $B_1A_2B_2$, τα οποία έχουν δύο ίσες πλευρές, προκύπτει:

$$A_1A_2 > B_1B_2 .$$

Επιπλέον, επειδή η τεθλασμένη γραμμή $A_1B_1B_2$ ... $B_{\nu+1}A_{\nu+1}$ είναι μεγαλύτερη από το τμήμα $A_1A_{\nu+1}$, έχουμε:

$$A_1B_1 + \nu\, B_1B_2 + A_{\nu+1}B_{\nu+1} > \nu\, A_1A_2$$

Π.χ. $2\ A_1B_1 > \nu\ (A_1A_2 - B_1B_2)$.

Αλλά αν πάρουμε το ν αρκετά μεγάλο, η παραπάνω ανισότητα έρχεται σε αντίθεση με το αξίωμα του Αρχιμήδη. Επομένως ισχύει $A_1A_2 < B_1B_2$ και κατά συνέπεια δεν ισχύει $\beta > \alpha$. Άρα αποδείχθηκε ότι $\beta \leq \alpha$. ■

Από αυτό έπεται εύκολα ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $A_1B_1A_2$ είναι λιγότερο από ή ίσο με δύο ορθές γωνίες.

Το παραπάνω θεώρημα συνήθως καλείται *πρώτο θεώρημα* του Legendre. Αυτό όμως είναι λάθος διότι ο Saccheri το είχε θεμελιώσει ένα σχεδόν αιώνα νωρίτερα όταν απέδειξε ότι η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας είναι ψευδής.

Το λεγόμενο *δεύτερο θεώρημα* του Legendre είχε επίσης δοθεί από τον Saccheri σε μία πιο γενική μορφή και είναι το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u>

Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο ή ίσο με δύο ορθές γωνίες σε ένα μόνο τρίγωνο, τότε είναι μικρότερο ή ίσο με δύο ορθές αντίστοιχα και σε κάθε άλλο τρίγωνο.

Δεν θα επαναλάβουμε την απόδειξη του θεωρήματος διότι δεν διαφέρει ουσιαστικά από την απόδειξη του Saccheri.

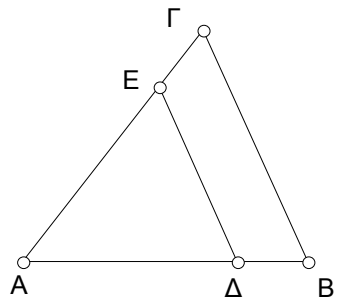
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πως ο Legendre απέδειξε το επόμενο:

<u>Θεώρημα</u>

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\angle A + \angle B + \angle \Gamma < 2$ ορθές γωνίες. Παίρνουμε ένα σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ και φέρουμε την ΔΕ έτσι ώστε $\angle A\Delta E = \angle B$.



Στο τετράπλευρο ΔΒΓΕ, το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο από τέσσερις ορθές. Επομένως $\angle AE\Delta > \angle A\Gamma B$. Η γωνία $\angle E$ του τριγώνου ΑΔΕ είναι πλήρως ορισμένη (φθίνουσα) συνάρτηση της πλευράς ΑΔ ή με άλλα λόγια το μήκος της πλευράς ΑΔ είναι

καλά ορισμένο όταν είναι γνωστό το μέγεθος (σε ορθές γωνίες) της γωνίας ∠Ε και των δύο σταθερών γωνιών ∠Α και ∠Β.

Αλλά αυτό το αποτέλεσμα ο Legendre το θεωρεί παράλογο, διότι το μήκος μιας γραμμής έχει νόημα μόνο αν είναι γνωστή η μονάδα μέτρησης του, και η φύση του θέματος δεν υποδηλώνει αυτή τη μονάδα με κανένα τρόπο. Άρα η υπόθεση ∠Α + ∠Β + ∠Γ < 2 ορθές γωνίες απορρίπτεται, και συνεπώς ισχύει ∠Α + ∠Β + ∠Γ = 2 ορθές γωνίες.

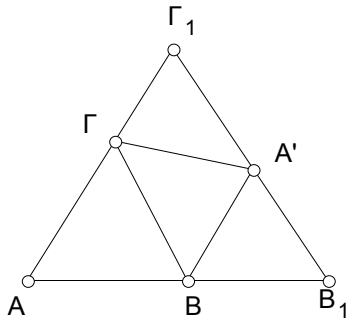
■

Από την τελευταία ισότητα η απόδειξη του Ευκλείδειου Αιτήματος έπεται εύκολα.

Η μέθοδος του Legendre βασίζεται στο αξίωμα του Lambert, το οποίο απορρίπτει την ύπαρξη απόλυτης μονάδας μήκους.

Σε μια άλλη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, ο Legendre χρησιμοποιεί την υπόθεση: από οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή που να τέμνει και τις δύο πλευρές της γωνίας.

Ο Legendre απέδειξε την παραπάνω υπόθεση χρησιμοποιώντας το Αξίωμα του Αρχιμήδη ως εξής :



Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο το άθροισμα των γωνιών του είναι λιγότερο από δύο ορθές και έστω α = 2∟ - ∠Α - ∠Β - ∠Γ (το έλλειμμα). Βρίσκουμε το συμμετρικό σημείο Α' του Α ως προς την πλευρά ΒΓ.

Το έλλειμμα του νέου τριγώνου ΒΓΑ' είναι επίσης α. Λόγω της υπόθεσης που αναφέρθηκε παραπάνω, από το Α' σχεδιάζουμε μια ευθεία που τέμνει τις πλευρές της γωνίας ∠Α στα σημεία B_1 και $Γ_1$. Μπορεί να δειχθεί ότι το έλλειμμα του τριγώνου $AB_1Γ_1$ είναι το άθροισμα των ελλειμμάτων των τεσσάρων τριγώνων από τα οποία αποτελείται. Άρα το έλλειμμα είναι μεγαλύτερο από 2α.

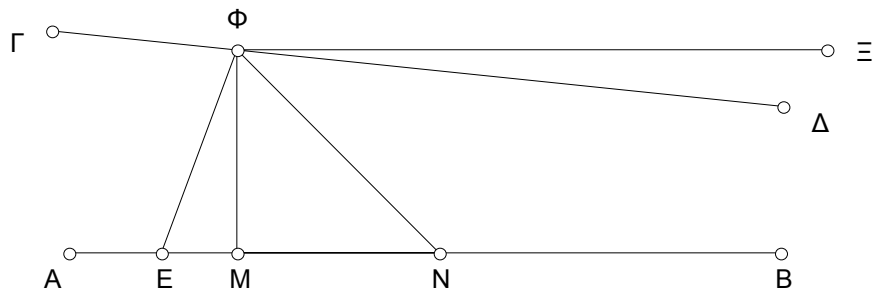
Αρχίζοντας τώρα με το τρίγωνο $AB_1Γ_1$ και επαναλαμβάνοντας την ίδια κατασκευή, παίρνουμε ένα νέο τρίγωνο του οποίου το έλλειμμα είναι μεγαλύτερο από 4α. Μετά από ν τέτοιες κατασκευές θα έχουμε κατασκευάσει ένα τρίγωνο του οποίου το

έλλειμμα θα είναι μεγαλύτερο από $2^{\nu}\alpha$. Αλλά για ν αρκετά μεγάλο, αυτό το έλλειμμα $2^{\nu}\alpha$, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές (Αξίωμα του Αρχιμήδη) κάτι που είναι παράλογο. Έπεται λοιπόν ότι α = 0 και ∠Α + ∠Β + ∠Γ = 2 ορθές γωνίες. ■

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη της τελευταίας υπόθεσης μπορεί να γίνει και χωρίς τη χρήση του Αξιώματος του Αρχιμήδη.

Σε κάποιες άλλες αποδείξεις ο Legendre υιοθετεί μεθόδους της ανάλυσης και κάνει εσφαλμένη χρήση του απείρου.

Το επιχείρημα του Legendre που συνδέει την πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180º, με το Ευκλείδειο Αίτημα είναι το εξής:



Έστω οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ σχηματίζουν με την ευθεία ΕΦ γωνίες ∠ΒΕΦ και ∠ΔΦΕ που έχουν άθροισμα λιγότερο από 2 ορθές γωνίες. Στη συνέχεια φέρουμε την ευθεία ΕΞ έτσι ώστε να σχηματίζεται η γωνία ∠ΕΦΞ, που είναι η παραπληρωματική της ∠ΒΕΦ, δηλαδή ∠ΕΦΞ + ∠ΒΕΦ = 180º. Τότε όμως ∠ΕΦΔ < ∠ΕΦΞ. Στη συνέχεια φέρουμε μια τυχαία ευθεία ΦΜ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΜΝ = ΦΜ και φέρουμε τη ΦΝ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΦΜΝ κάθε γωνία της βάσης είναι ίση με το μισό της γωνίας ∠ΦΜΕ=∠ΜΦΓ. Έτσι η γωνία ∠ΝΦΞ είναι επίσης ίση με το μισό της γωνίας ∠ΜΦΞ. Στην συνέχεια παίρνουμε πάνω στην ΑΒ τμήμα ΝΠ = ΦΝ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΝΦΠ κάθε γωνία της βάσης είναι ίση με το μισό της γωνίας ∠ΦΝΕ, που σημαίνει ότι είναι ¼ της γωνίας ∠ΜΦΞ. Ακόμη ισχύει ότι ∠ΠΦΞ = ¼ ∠ΦΝΕ. Αν κάποιος συνεχίσει αυτή την διαδικασία, θα πετύχει μια ακολουθία ισοσκελών τριγώνων που οι γωνίες της βάσης αποτελούν τους όρους μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο ½. Αυτό σημαίνει ότι μετά από ένα επαρκή αριθμό βημάτων μπορούμε να πετύχουμε μια γωνία που θα είναι μικρότερη από οποιαδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος, και πιο συγκεκριμένα, μικρότερη από τη γωνία ∠ΔΦΞ. Όταν συμβεί αυτό, η

γραμμή ΦΔ θα έχει καταλήξει μέσα σε ένα από αυτά τα τρίγωνα και θα τέμνει την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία με κορυφή το σημείο Φ. Άρα θα τέμνει την ευθεία ΑΒ. (Rosenfeld,1988)

Με αυτές τις «διαφορετικές» έρευνες ο Legendre πίστεψε ότι είχε επιτέλους άρει όλες τις σοβαρές δυσκολίες που αφορούσαν τη θεμελίωση της Γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν πρόσθεσε ουσιαστικά κάτι καινούργιο στο υλικό και τα αποτελέσματα που είχαν ήδη πετύχει οι προγενέστεροί του.

Η σπουδαιότερη προσφορά του έγκειται στο γεγονός ότι το έργο αυτό είναι μια παιδαγωγική βελτίωση των Στοιχείων του Ευκλείδη, διότι περιέχει μια σημαντική ανακατάταξη και απλοποίηση των προτάσεων. Έτσι κέρδισε μεγάλη εκτίμηση, τόσο στην Ευρώπη, όσο και στην Αμερική. Η ευνοϊκή αποδοχή του έργου του Legendre το καθιέρωσε ως πρότυπο στοιχειώδους εγχειριδίου γεωμετρίας. Ως τα τελευταία σχεδόν χρόνια, κάθε αμερικανός σπουδαστής της Γεωμετρίας τη μάθαινε από κάποια έκδοση του βιβλίου του Legendre. Τέλος, επειδή οι προσπάθειες απόδειξης του Αιτήματος των Παραλλήλων του Γάλλου μαθηματικού ήταν γραμμένες με ένα τόσο απλό και ευθύ τρόπο στο *Eléments de Géométrie*, ο Legendre κατάφερε να δημιουργήσει ένα έντονο ενδιαφέρον για το Αίτημα του Ευκλείδη. (Eves, 1990)

Carl Friedrich Gauss

Ο Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ήταν ο πρώτος που είχε μια ξεκάθαρη άποψη για μια Γεωμετρία ανεξάρτητη από το 5^{ο} Αίτημα, αλλά εξίσου έγκυρη με την Ευκλείδεια και ως λογικό σύστημα και ως περιγραφή του σύμπαντος. Όμως αυτή η άποψη παρέμεινε θαμμένη στο μυαλό του γεωμέτρη για περίπου πενήντα χρόνια και αποκαλύφθηκε μόνο μετά από τη δημοσίευση των έργων του Lobachevsky (1829) και του Bolyai (1832).

Τα έγγραφα που μας επιτρέπουν μια κατά προσέγγιση ανακατασκευή των παράλληλων γραμμών από τον Gauss ερευνώντας το ζήτημα του 5^{ου} Αιτήματος, είναι η αλληλογραφία του (1799-1844) με τους W.Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus και Bessel, δύο σύντομα άρθρα στο Göttigelehrten Anzeigen (1816, 1822) και μερικές σημειώσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στα χαρτιά του (1831).

Από τη μελέτη των παραπάνω κειμένων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το 1792 ήταν η χρονιά που άρχισε το έργο του Meditations.

Το επόμενο απόσπασμα από ένα γράμμα που έστειλε ο Gauss στον W.Bolyai στις 17-Δεκεμβρίου του 1799, αποδεικνύει ότι ο Gauss, όπως ο Saccheri και ο Lambert πριν από αυτόν, είχε προσπαθήσει να αποδείξει την αλήθεια του 5^{ου} Αιτήματος με το να υποθέσει ότι δεν ισχύει.

«Όσο με αφορά, έχω ήδη κάνει κάποια πρόοδο στη δουλειά μου. Όμως το μονοπάτι που έχω επιλέξει δεν οδηγεί καθόλου στο στόχο που έχουμε θέσει και τον οποίο με διαβεβαίωσες ότι έχεις κατακτήσει. Φαίνεται μάλλον να με υποχρεώνει να αμφιβάλλω για την εγκυρότητα της ίδιας της Γεωμετρίας.

Έχω φτάσει σε αποτελέσματα τα οποία οι περισσότεροι άνθρωποι θα μπορούσαν να εκλάβουν ως απόδειξη (του 5^{ου} αιτήματος), που για μένα όμως δεν αποδεικνύουν τίποτα. Για παράδειγμα, αν μπορέσει κάποιος να αποδείξει ότι υπάρχει τρίγωνο του οποίου το εμβαδόν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο εμβαδόν, τότε θα ήμουν έτοιμος να αποδείξω όλη την Γεωμετρία με απόλυτη αυστηρότητα. Οι περισσότεροι άνθρωποι θα το έθεταν αυτό ως αξίωμα,

αλλά εγώ όχι! Θα ήταν, βεβαίως, πιθανό το εμβαδόν ενός τριγώνου να παραμένει μικρότερο από ένα συγκεκριμένο φράγμα, ανεξάρτητα από το πόσο μακριά βρίσκονται οι κορυφές του τριγώνου. Έχω στην κατοχή μου διάφορα θεωρήματα αυτού του είδους αλλά κανένα τους δεν με ικανοποιεί.»

Από όλα τα παραπάνω οι Stäckel και Engel, οι οποίοι συγκέντρωσαν και επαλήθευσαν την αλληλογραφία του Gauss πάνω στο θέμα, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο σπουδαίος γεωμέτρης δεν αναγνώρισε την ύπαρξη μιας λογικής Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας διαισθητικά ή σε μια στιγμή ευφυΐας. Αντίθετα, αφιέρωσε πολλές ώρες κοπιαστικής εργασίας πάνω στο θέμα μέχρι να ξεπεράσει την κληροδοτημένη προκατάληψη ενάντια στη Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Μετά το 1813, αρχίζει μια δεύτερη περίοδος προσπαθειών για το εν λόγω ζήτημα από τον Gauss. Οι γνώσεις μας για το έργο του προέρχονται από μερικά γράμματα, ένα από τον Watcher προς τον Gauss το 1816 και άλλα από τον ίδιο τον Gauss στους Gerling (1819), Taurinous (1824) και Schumacher (1831), καθώς επίσης και από κάποιες σημειώσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στα χειρόγραφά του.

Τα κείμενα αυτά μας δείχνουν ότι ο Gauss, τη δεύτερη περίοδο, είχε ξεπεράσει τις αμφιβολίες του και είχε προχωρήσει στην ανάπτυξη θεμελιωδών θεωρημάτων μιας νέας Γεωμετρίας, την οποία αρχικά είχε ονομάσει Αντί - Ευκλείδεια, έπειτα Αστρική Γεωμετρία και τελικά Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τότε πείστηκε ότι η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν περιείχε καμία αντίφαση, παρόλο που με την πρώτη ματιά ορισμένα αποτελέσματα είχαν τη μορφή παραδόξων.

Όμως είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι ο Gauss συνήθιζε να κρατά μυστικές πολλές από τις ανακαλύψεις παρά τη σπουδαία φήμη του. Τις κοινοποιούσε μόνο σε λίγους συναδέλφους του με τους οποίους αλληλογραφούσε. Ένας λόγος γι' αυτή του τη συμπεριφορά αποτελούσε η εμμονή του σε πλήρεις και άψογες από άποψης αυστηρότητας παρουσιάσεις. Η αφοσίωση του στην τέλεια δουλειά εκφράζεται και από το ρητό πάνω στη σφραγίδα του pauca sed matura, που σημαίνει «λίγα αλλά ώριμα». Μια άλλη αιτία ίσως ήταν η αποφυγή διενέξεων. Το 1829 έγραψε στο F.W. Bessel ότι φοβότανε την «κατακραυγή των Βοιωτών[10]», εάν δημοσιοποιούσε τις επαναστατικές του ανακαλύψεις. Επίσης, αναφέρει στον H.C.Schumacher ότι δεν ήθελε να γίνει αντικείμενο κανενός είδους έντονης επίκρισης. Εδώ ο Gauss αναφέρεται κυρίως στους οπαδούς του

[10] Οι Βοιωτοί στην αρχαία Ελλάδα θεωρούνταν ανόητοι.

Immanuel Kant (1724-1804), του σπουδαιότερου φιλοσόφου στο τέλος του 18ου και αρχές του 19ου αιώνα. Η ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας ερχόταν σε αντίθεση με τη θέση του Kant ότι ο Ευκλείδειος χώρος είναι ο μόνος χώρος που μπορεί να συλλάβει το μυαλό μας. Περισσότερα γι' αυτό θα αναφέρουμε σε επόμενη ενότητα.

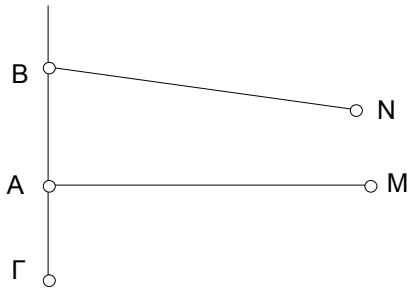
Οι σημειώσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στα χειρόγραφα του Gauss περιέχουν δύο σύντομες περιλήψεις της νέας θεωρίας των παραλλήλων και πιθανώς ανήκουν στην προβολική παρουσίαση της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σχετικά με αυτές ο Gauss έγραψε στον Schumacher (17 Μαΐου 1831):

> *«τις τελευταίες εβδομάδες έχω αρχίσει να σημειώνω μερικούς από τους δικούς μου στοχασμούς, οι οποίοι είναι ήδη κοντά 40 χρονών. Αυτούς δεν τους έχω γράψει ποτέ, για να είμαι υποχρεωμένος να κοιτάξω όλο το θέμα εκ νέου στο μυαλό μου ... εύχομαι να μην χαθεί μαζί με μένα».*

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε εν συντομία χαρακτηριστικά σημεία από την θεωρία των παραλλήλων που ανέπτυξε ο Gauss. Οι αποδείξεις των προτάσεων που έχουν σωθεί αλλά και κάποιες που αποδίδονται στον σπουδαίο μαθηματικό θα παρουσιαστούν στο τρίτο μέρος της παρούσας εργασίας.

<u>Ορισμός</u>

Αν οι συνεπίπεδες ευθείες γραμμές ΑΜ, ΒΝ δεν τέμνονται μεταξύ τους και κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από το Α και βρίσκεται μεταξύ των ΑΜ και ΑΒ τέμνει τη ΒΝ, τότε λέμε ότι η ΑΜ είναι παράλληλη με τη ΒΝ.



Ο Gauss με τον ορισμό αυτό υποθέτει μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από το Α ξεκινώντας από τη θέση ΑΒ και στη συνέχεια περιστρεφόμενη συνεχώς προς το μέρος της ΒΝ μέχρι να φτάσει στη θέση ΑΓ όπου Γ είναι σημείο της προέκτασης της ΒΑ. Αυτή η γραμμή στην αρχή τέμνει τη ΒΝ και στο τέλος όχι. Επομένως υπάρχει μια και μόνο μια θέση που διαχωρίζει τις ευθείες που τέμνουν τη ΒΝ από εκείνες που δεν την τέμνουν. Η

εν λόγω ευθεία πρέπει να είναι η πρώτη από τις ευθείες που δεν τέμνουν τη ΒΝ και συνεπώς από τον ορισμό είναι η παράλληλη ΑΜ, μιας και δεν μπορεί να υπάρξει μια «τελευταία» γραμμή του συνόλου των ευθειών που τέμνουν τη ΒΝ.

Ο ορισμός του Gauss διαφέρει από τον ορισμό του Ευκλείδη[11]. Αν το 5^{ο} Αίτημα απορριφθεί, θα μπορούσαν να υπάρξουν διάφορες ευθείες που να διέρχονται από το Α και μετακινούμενες προς τη ΒΝ να μην τέμνουν. Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη όλες αυτές οι ευθείες είναι παράλληλες στη ΒΝ. Όμως σύμφωνα με τον ορισμό του Gauss μόνο η πρώτη από αυτές είναι παράλληλη στη ΒΝ.

Προχωρώντας με το επιχείρημα του ο Gauss δείχνει στη συνέχεια:

I. Η παραλληλία των γραμμών ΑΜ και ΒΝ είναι ανεξάρτητη από τα σημεία Α και Β, εξασφαλίζοντας αμετάβλητη τη λογική σύμφωνα με την οποία οι γραμμές προεκτείνονται απεριόριστα.
II. Η παραλληλία των γραμμών ικανοποιεί την αυτοπαθή ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι αν η ΑΜ είναι παράλληλη στη ΒΝ, τότε και η ΒΝ είναι παράλληλη στην ΑΜ.
III. Η παραλληλία των γραμμών ικανοποιεί τη μεταβατική ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι αν η ευθεία (1) είναι παράλληλη προς τις (2) και (3), τότε οι (2) και (3) είναι επίσης παράλληλες μεταξύ τους.

Αυτό το σύντομο υπόμνημα του Gauss για τις παράλληλες ολοκληρώνεται με το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u>

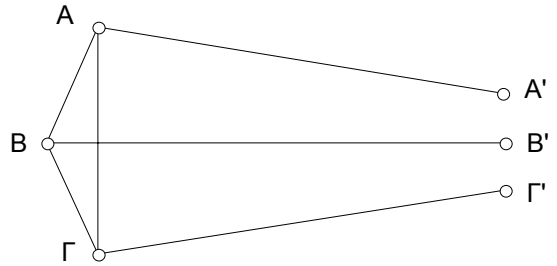
Αν δύο ευθείες ΑΜ και ΒΝ είναι παράλληλες, τότε αυτές οι ευθείες αν προεκταθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση δεν θα συναντηθούν.

Μέχρι εδώ διαφαίνεται ότι η παραλληλία του Gauss σημαίνει παραλληλία με μια συγκεκριμένη λογική. Πράγματι ο ορισμός των παραλλήλων σχετίζεται με μια γραμμή που σχεδιάζεται από το Α προς συγκεκριμένο μέρος της τέμνουσας ΑΒ. Για παράδειγμα, αν η ΑΜ είναι η παράλληλη προς τη ΒΝ στο δεξιό ημιεπίπεδο της ΑΒ, αυτό δεν σημαίνει ότι η παράλληλη από το Α προς τη ΒΝ στο αριστερό ημιεπίπεδο της ΑΒ είναι απαραιτήτως η προέκταση της ΜΑ. Αν ίσχυε κάτι τέτοιο, θα είχαμε πετύχει την Ευκλείδεια υπόθεση.

Η παραπάνω λογική ισχύει και την πρόταση ΙΙΙ.

[11] Ορισμός 23: Παράλληλες ευθείες είναι εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και αν προεκταθούν στο άπειρο και προς τα δύο μέρη δεν θα συναντηθούν από καμία μεριά. (Σταμάτης, 1975)

Σε ένα δεύτερο υπόμνημα πάνω στο ζήτημα των παραλλήλων, ο Gauss διατηρεί όλα τα προηγούμενα και προσθέτει την ιδέα των ανάλογων σημείων (corresponding points) πάνω σε δύο παράλληλες ΑΑ΄, ΒΒ΄. Δύο σημεία Α, Β λέγονται ανάλογα, όταν η ΑΒ σχηματίζει ίσες εσωτερικές γωνίες με τις παράλληλες προς το ίδιο μέρος της ΑΒ.



Σχετικά με τα ανάλογα σημεία ο Gauss αναφέρει τα επόμενα θεωρήματα:

i. Αν Α, Β είναι δύο ανάλογα σημεία πάνω σε δύο παράλληλες και Μ είναι το μέσο της ΑΒ, η ευθεία ΜΝ, κάθετη στην ΑΒ, είναι παράλληλη στις δύο δοθείσες ευθείες, και κάθε σημείο προς το ίδιο μέρος της ΜΝ, έστω προς το Α είναι πιο κοντά στο Α από το Β.

ii. Αν Α, Β είναι δύο ανάλογα σημεία πάνω στις παράλληλες (1) και (2), και Α΄, Β΄ δύο άλλα ανάλογα σημεία πάνω στις ίδιες ευθείες, τότε ΑΑ΄= ΒΒ΄ και αντιστρόφως.

iii. Αν Α, Β, Γ είναι τρία σημεία πάνω στις παράλληλες (1), (2) και (3) αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα Α, Β και Β, Γ να είναι ανάλογα, τότε και τα Α, Γ είναι ανάλογα.

Η ιδέα των ανάλογων σημείων όταν τη συνδυάσουμε με τρεις γραμμές μιας δέσμης (δηλαδή με τρεις συντρέχουσες ευθείες) μας επιτρέπει να ορίσουμε το κύκλο ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων πάνω σε μια δέσμη ευθειών που είναι ανάλογα με ένα δοθέν σημείο. Αλλά ο εν λόγω γεωμετρικός τόπος μπορεί να κατασκευαστεί και όταν οι ευθείες της δέσμης είναι παράλληλες. Στην Ευκλείδεια περίπτωση ο γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία γραμμή. Αν όμως απορρίψουμε την Ευκλείδεια υπόθεση, τότε ο παραπάνω γεωμετρικός τόπος παρόλο που έχει αρκετές κοινές ιδιότητες με τον κύκλο, δεν είναι κύκλος. Πράγματι, αν πάρουμε τρία οποιαδήποτε σημεία του γεωμετρικού τόπου, τότε δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα κύκλο που να διέρχεται από αυτά. Αυτή η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση ενός κύκλου όταν η ακτίνα του γίνεται άπειρη. Στη Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία του Lobachevsky και του Bolyai, ο συγκεκριμένος γεωμετρικός τόπος παίζει ένα σημαντικό ρόλο και καλείται ορόκύκλος (horocycle).

Ο Gauss δεν χρειάστηκε να ολοκληρώσει αυτή την εργασία διότι το 1832 έλαβε από τον Farkas Bolyai ένα αντίγραφο της δουλειάς του γιου του János πάνω στην Απόλυτη Γεωμετρία.

Από γράμματα πριν και μετά από την ημερομηνία κατά την οποία διέκοψε ο Gauss την εργασία του, γνωρίζουμε ότι είχε ανακαλύψει στη δική του Γεωμετρία μια Απόλυτη Μονάδα Μήκους και ότι μια σταθερά k εμφανιζόταν στον τύπο του μέσω του οποίου όλα τα προβλήματα της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούσαν να λυθούν (γράμμα στον Taurinus, 8 Νοεμβρίου 1824).

Μιλώντας πιο ολοκληρωμένα γι' αυτά τα θέματα το 1831 (γράμμα στον Schumacher), δίνει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας ρ από τον τύπο:

$$\pi k (e^{\rho/k} - e^{-(\rho/k)}).$$

Σχετικά με το k αναφέρει, αν επιθυμούμε να φτιάξουμε μια νέα Γεωμετρία που να συμφωνεί με τα γεγονότα της εμπειρίας, πρέπει να υποθέσουμε ότι το k είναι απείρως μεγάλο συγκριτικά με όλες τις γνωστές μετρήσεις.

Για $k = \infty$, ο τύπος του Gauss παίρνει την συνήθη μορφή της περιμέτρου του κύκλου. Το ίδιο συμβαίνει και με ολόκληρο το γεωμετρικό σύστημα του Gauss. Περιέχει το ευκλείδειο σύστημα ως οριακή περίπτωση, όταν το $k = \infty$.

Ferdinand Karl Schweikart

Οι έρευνες του F. K. Schweikart (1780 - 1859), καθηγητή του Jurisprudence, χρονολογούνται την ίδια περίοδο με εκείνες του Gauss, όμως είναι ανεξάρτητες από αυτές. Το 1807 δημοσίευσε το *Die Theorie der Parallellinien nebst den Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* [Η θεωρία των παραλλήλων μαζί με προτάσεις που εξαιρούνται από τη Γεωμετρία]. Σε αντίθεση με το τι «υπόσχεται» ο τίτλος, αυτή η εργασία δεν περιέχει μια αντιμετώπιση των παραλλήλων ανεξάρτητη από το 5° Αίτημα. Η απόδειξη του Ευκλείδειου Αιτήματος που περιέχει είναι λάθος και βασίζεται πάνω σε μια ιδέα του παραλληλογράμμου.

Αργότερα ο Schweikart, έχοντας ανακαλύψει μια νέα τάξη ιδεών ανέπτυξε μια νέα Γεωμετρία ανεξάρτητη από την Ευκλείδεια υπόθεση. Το Δεκέμβριο του 1818 στο Marburg, παρέδωσε στο συνάδελφο του Gerling ένα υπόμνημα και του ζήτησε να επικοινωνήσει με τον Gauss για να μάθει τη γνώμη του σχετικά με την εργασία του.

Το υπόμνημα του Schweikart ανέφερε τα εξής:

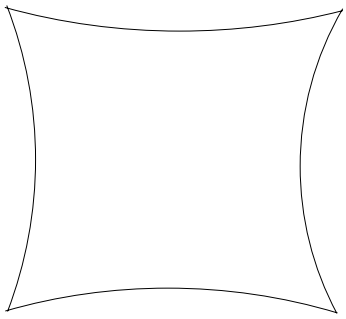
Υπάρχουν δύο είδη γεωμετριών , μια γεωμετρία με την αυστηρή σημασία- η Ευκλείδεια, και μια Αστρική Γεωμετρία (Astralische Größenlehre).

Στο δεύτερο είδος γεωμετρίας, τα τρίγωνα έχουν την εξής ιδιότητα: το άθροισμα των τριών γωνιών δεν είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

Υποθέτοντας κάτι τέτοιο, μπορούμε να αποδείξουμε αυστηρά τα εξής:

i. Το άθροισμα των τριών γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από δύο ορθές γωνίες.
ii. Το άθροισμα ελαττώνεται, όσο μεγαλώνει το εμβαδόν του τριγώνου.
iii. Το ύψος ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου συνεχώς αυξάνεται καθώς αυξάνονται οι πλευρές του, αλλά δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από ένα συγκεκριμένο μήκος, το οποίο το ονομάζω *Σταθερά*.

Τα τετράγωνα έχουν, επομένως, την ακόλουθη μορφή:



Αν αυτή η *Σταθερά* ήταν για μας η ακτίνα της γης, (έτσι ώστε κάθε γραμμή σχεδιασμένη στο σύμπαν από ένα σταθερό αστέρι σε ένα άλλο, σε απόσταση 90° από το πρώτο, θα μπορούσε να ήταν εφαπτόμενη στην επιφάνεια της γης), θα ήταν απείρως μεγάλη συγκριτικά με τους χώρους οι οποίοι προκύπτουν στην καθημερινή ζωή.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ισχύει μόνο με την υπόθεση ότι η Σταθερά είναι άπειρη. Μόνο σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι οι τρεις γωνίες κάθε τριγώνου είναι ίσες με δύο ορθές γωνίες. (Bonola, 1955)

Η *Astral Geometry* του Schweikart και η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία του Gauss είναι ανάλογες με τα συστήματα των Saccheri και Lambert για την υπόθεση της Οξείας γωνίας. Πράγματι, το περιεχόμενο του παραπάνω υπομνήματος μπορεί να συναχθεί απευθείας από τα θεωρήματα του Saccheri όπως αναφέρονται στην εργασία *Conatum* του Klügel και από το θεώρημα του Lambert για το εμβαδόν του τριγώνου. Επίσης, η άμεση επιρροή του Lambert και τουλάχιστον η έμμεση επιρροή του Saccheri στις έρευνες του Schweikart επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι ο Schweikart στην αρχική του θεωρία (1807) αναφέρει τη δουλειά των δύο προηγούμενων μαθηματικών.

Το Μάρτιο του 1819, ο Gauss απάντησε στον Gerling σχετικά με την *Astral Geometry* του Schweikart:

> *«Το σημείωμα του καθηγητή Schweikart μου έδωσε μεγάλη χαρά και σου ζητώ να του διαβιβάσεις γι' αυτό τις θερμότερες ευχές μου. Σχεδόν όλο αυτό (το σημείωμα) είναι αντιγραφή από την ψυχή μου.»*

Ο Gauss, αφού επαίνεσε τον Schweikart και δήλωσε ότι ήταν απόλυτα σύμφωνος με όσα περιείχε η εργασία του, πρόσθεσε ότι είχε αναπτύξει την *Astral Geometry* σε τέτοιο βαθμό που θα μπορούσε να λύσει όλα τα προβλήματα, αν του δινόταν η σταθερά του Schweikart. Συμπερασματικά, δίνει το άνω όριο για το εμβαδόν του τριγώνου στο τύπο:

$$\frac{\pi \cdot C \cdot C}{\left(\log\left(\mathrm{hyp}\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\right)^2}$$

Η σταθερά C που εμφανίζεται στον τύπο είναι η σταθερά του Schweikart και όχι η σταθερά του k του Gauss. Οι δύο σταθερές συνδέονται με την επόμενη σχέση:

$$k = \frac{C}{\log\left(1 + \sqrt{2}\right)} .$$

Ο Schweikart δεν δημοσίευσε τις τελευταίες του έρευνες.

Franz Adolf Taurinus

Ο Schweikart θέλοντας να βρει κάποιον να συνεχίσει τις έρευνές του, έπεισε τον ανιψιό του Franz Adolf Taurinus (1794 - 1874) να ασχοληθεί με την Αστρική Γεωμετρία. Ο Taurinus φαίνεται ότι άρχισε να ασχολείται σοβαρά με το συγκεκριμένο θέμα για πρώτη φορά το 1824, αλλά με απόψεις πολύ διαφορετικές από εκείνες του θείου του. Είχε πειστεί για την απόλυτη αλήθεια του 5^{ου} αιτήματος, μια άποψη την οποία διατήρησε ως το τέλος, και όλες οι προσπάθειες του αποσκοπούσαν στην απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος. Αν και απέτυχε στην πρώτη του προσπάθεια, υπό την επιρροή των Gauss και Schweikart, συνέχισε να μελετά το ζήτημα. Το 1825 δημοσίευσε το *Theorie der Parallellnien* που περιείχε μια μελέτη του θέματος των μη ευκλείδειων γραμμών, την απόρριψη της υπόθεσης της Αμβλείας γωνίας και μερικές έρευνες παρόμοιες με εκείνες των Saccheri και Lambert πάνω στην υπόθεση της Οξείας γωνίας. Με αυτό τον τρόπο βρήκε την *Σταθερά* του Schweikart, την οποία ονόμασε *Παράμετρο*. Σκέφτηκε ότι μια απόλυτη μονάδα μήκους είναι αδύνατη και συμπέρανε ότι όλα τα συστήματα που αντιστοιχούν στον άπειρο αριθμό των τιμών της *παραμέτρου*, θα έπρεπε να ισχύουν ταυτόχρονα. Αλλά αυτό με την σειρά του θα οδηγούσε σε σκέψεις ασυμβίβαστες με την δική του άποψη για την έννοια του χώρου. Έτσι ο Taurinus οδηγήθηκε στο να απορρίψει την υπόθεση της Οξείας γωνίας παρόλο που αναγνώριζε την λογική συμβατότητα των προτάσεων οι οποίες έπονταν από την παραπάνω υπόθεση.

Το 1826 ο Taurinus δημοσίευσε το *Geometriae Prima Elimenta*, το οποίο περιείχε μια βελτιωμένη εκδοχή των ερευνών της προηγούμενης χρονιάς. Αυτή η εργασία περιλαμβάνει ένα πολύ σημαντικό παράρτημα, στο οποίο ο συγγραφέας δείχνει πως ένα σύστημα αναλυτικής Γεωμετρίας μπορεί να κατασκευασθεί πάνω στην υπόθεση της Οξείας γωνίας.

Έχοντας αυτό ως στόχο του ο Taurinus ξεκινάει από τον θεμελιώδη τύπο της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας:

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cdot\cos\left(\frac{c}{k}\right) - \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\cdot\cos(A)$$

αντικαθιστά την πραγματική ακτίνα k με την φανταστική ik και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των υπερβολικών συναρτήσεων καταλήγει στον εξής τύπο:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right)\cdot\cosh\left(\frac{c}{k}\right) - \sinh\left(\frac{b}{k}\right)\sinh\left(\frac{c}{k}\right)\cdot\cos(A) \qquad (1)$$

Ο τύπος (1) είναι ο θεμελιώδης τύπος της Λογαριθμικής-Σφαιρικής Γεωμετρίας του Taurinus.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι σε αυτή τη Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από 180°.

Απόδειξη: Για διευκόλυνση και μόνο παίρνουμε την περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου. Θέτοντας a=b=c στην (1) και λύνοντας ως προς cos(A), προκύπτει:

$$\cos(A) = \frac{\cosh\left(\frac{a}{k}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{k}\right) + 1} \qquad (1^*)$$

όμως επειδή

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) < 1$$

έπεται cos(A) > ½ .

Επομένως η γωνία ∠A είναι λιγότερο από 60°, και συνεπώς το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι λιγότερο από 180°. ■

Αξίζει να σημειώσουμε ότι από τον τύπο (1*) προκύπτει:

$$\lim_{a \to 0} \cos(A) = \frac{1}{2}$$

Επομένως, στη Λογαριθμική-Σφαιρική Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου τείνει στις 180° όταν οι πλευρές τείνουν στο μηδέν. Ακόμη, όταν το a γίνει 0, τότε η ∠A είναι ίση με 60°.

Παρατηρούμε επίσης από την (1*) ότι:

$$\lim_{k \to \infty} \cos(A) = \frac{1}{2}$$

που σημαίνει ότι όταν το k είναι άπειρο τότε η γωνία ∠A είναι ίση με 60°. Επομένως, όταν η σταθερά k τείνει στο άπειρο, οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° η καθεμία, όπως και στη συνήθη Γεωμετρία.

Πιο γενικά, χρησιμοποιώντας την εκθετική μορφή των υπερβολικών συναρτήσεων από την σχέση (1) προκύπτει ότι όταν το k απειρίζεται, έχουμε:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Η τελευταία ισότητα αποτελεί τον θεμελιώδη τύπο της Ευκλείδειας Επίπεδης Τριγωνομετρίας που εκφράζει τον Νόμο των Συνημιτόνων.

Αν στο δεύτερο θεμελιώδη τύπο της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos (a/k)$$

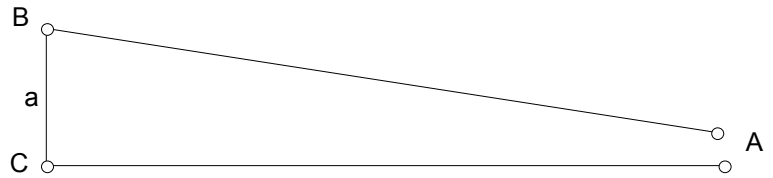
αντικαταστήσουμε το συνημίτονο cos(a/k) με το υπερβολικό συνημίτονο cosh(a/k), προκύπτει ο δεύτερος θεμελιώδες τύπος της Λογαριθμικής-Σφαιρικής Γεωμετρίας:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh (a/k). \qquad (2)$$

Για $\angle A = 0°$ και $\angle \Gamma = 90°$ έχουμε:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{1}{\sin(B)} \qquad (3)$$

Ένα τρίγωνο, στο οποίο ισχύει ο τύπος (3) δείχνει το επόμενο σχήμα.



Έχει μια γωνία 0° ενώ οι δύο πλευρές που την περιέχουν είναι άπειρες και παράλληλες (ασύμπτωτες).

Η γωνία ανάμεσα στη μια παράλληλη πλευρά BA και στην πλευρά BC, που είναι κάθετη στη CA, λόγω της (3), έπεται ότι είναι συνάρτηση της πλευράς BC≡a. Η εν λόγω γωνία από εδώ και στο εξής θα καλείται *Γωνία Παραλληλίας* για την απόσταση a.

Για $\angle B = 45°$ από τον τύπο (3), το τμήμα BC≡a είναι η σταθερά του Schweikart. Επομένως, αν τη συμβολίσουμε με το γράμμα P, τότε από τον τύπο:

$$\cosh\left(\frac{P}{k}\right) = \sqrt{2}$$

λύνοντας ως προς k, προκύπτει:

$$k = \frac{P}{\log\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

Η τελευταία σχέση, που συνδέει τις σταθερές P και k, δόθηκε από τον Taurinus. Η σταθερά k είναι η ίδια που εφάρμοσε ο Gauss για να βρει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου.

Ο Taurinus παρήγαγε και άλλα σημαντικά θεωρήματα της Λογαριθμικής–Σφαιρικής Γεωμετρίας αντικαθιστώντας την πραγματική ακτίνα με τη φανταστική στους τύπους της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής:

i. Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ανάλογο προς το έλλειμμα του.

ii. Το άνω όριο αυτού του εμβαδού είναι:

$$\frac{\pi \cdot P^2}{\left(\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2}$$

iii. Το μήκος της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r είναι:

$$2\cdot\pi\cdot k\cdot\sinh\left(\frac{r}{k}\right)$$

iv. Το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας r είναι:

$$2\cdot\pi\cdot k^2\cdot\left(\cosh\left(\frac{r}{k}\right)-1\right).$$

v. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας και ο όγκος της είναι αντίστοιχα:

$$4\cdot\pi\cdot k^2\cdot\left(\sinh\left(\frac{r}{k}\right)\right)^2$$

$$2\cdot\pi\cdot k^3\cdot\left(\sinh\left(\frac{r}{k}\right)\cdot\cosh\left(\frac{r}{k}\right)-\frac{r}{k}\right).$$

Τα αποτελέσματα του Taurinus επιβεβαιώνουν την «προφητεία» του Lambert για την τρίτη υπόθεση, εφόσον οι τύποι της Λογαριθμικής-Σφαιρικής Γεωμετρίας, ερμηνευμένοι αναλυτικά, δίνουν τις θεμελιώδες σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία ενός τριγώνου που βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα φανταστικής ακτίνας.

Ο Taurinus, όπως και ο Lambert, αναγνώρισε ότι η Σφαιρική Γεωμετρία αντιστοιχεί ακριβώς σε ένα σύστημα στο οποίο ισχύει η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας. Επιπλέον, η συνήθη Γεωμετρία αποτελεί μια σύνδεση ανάμεσα στην Σφαιρική και Λογαριθμική-Σφαιρική Γεωμετρία. Πράγματι, αν η ακτίνα k περάσει συνεχόμενα από μια πραγματική σε μια καθαρά φανταστική περιοχή, μέσω του απείρου, αυτό σημαίνει ότι προχωρούμε από τη Σφαιρική στη Λογαριθμική-Σφαιρική Γεωμετρία, μέσω της Ευκλείδειας.

Παρόλο που ο Taurinus, συμπέρανε το ενδεχόμενο η Λογαριθμική-Σφαιρική Γεωμετρία να ισχύει στο επίπεδο, το θεωρητικό ενδιαφέρον που προκύπτει από αυτό δεν διέφυγε της προσοχής του. Το γεγονός ότι προσπάθησε να κινήσει το ενδιαφέρον των γεωμετρών της εποχής γύρω από τους τύπους του, δείχνει ότι μάλλον μάντευε την ύπαρξη κάποιας διακριτής περίπτωσης στην οποία θα μπορούσαν να έχουν νόημα. Η σημαντική προσφορά των Schweikart και Taurinus στην ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναγνωρίστηκε αρχικά και έγινε γνωστή από τους Engel και Stäckel.

Nicolai Ivanovitsch Lobachevsky

Ο Nicolai Lobachevsky (1793-1856) σπούδασε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Kasan, υπήρξε μαθητής του Γερμανού J.M.Bartels (1769-1836), ο οποίος ήταν φίλος του Gauss. Πήρε το πτυχίο το 1813 και παρέμεινε στο πανεπιστήμιο αρχικά ως καθηγητής και στη συνέχεια ως πρύτανης. Στην τελευταία του θέση έδωσε διαλέξεις για τα μαθηματικά, τη φυσική και την αστρονομία.

Ήδη από το 1815 ο Lobachevsky δούλευε πάνω στις παράλληλες ευθείες. Σε ένα αντίγραφο των σημειώσεων του για τις διαλέξεις του (1815-1817) βρέθηκαν αρκετές προσπάθειες απόδειξης του $5^{ου}$ αιτήματος όπως επίσης και έρευνες παρόμοιες με εκείνες του Legendre.

Παρόλα αυτά, μόνο μετά το 1823 σκέφτηκε τη *Φανταστική Γεωμετρία*. Αυτό μπορεί να συναχθεί από το χειρόγραφα του βιβλίου του Στοιχειώδη Γεωμετρία, όπου αναφέρει ότι δεν έχουμε καμία απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος αλλά μια τέτοια απόδειξη μπορεί να υπάρχει.

Από το 1823 έως το 1825 ο Lobachevsky έστρεψε την προσοχή του σε μια Γεωμετρία ανεξάρτητη από την Ευκλείδεια υπόθεση. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της μελέτης ανακοινώθηκε στις 12 Φεβρουαρίου 1826 στο Φυσικό-Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου του Kasan. Σε αυτή τη διάλεξη, τα χειρόγραφα της οποίας δεν έχουν ανακαλυφθεί, ο Lobachevsky εξηγεί τις αρχές μιας Γεωμετρίας πιο γενικής από τη συνηθισμένη, όπου από ένα σημείο εκτός δοθείσας ευθείας μπορούν να σχεδιαστούν δύο παράλληλες ευθείες καθώς επίσης και ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από δύο ορθές (η υπόθεση της Οξείας γωνίας των Saccheri και Lambert).

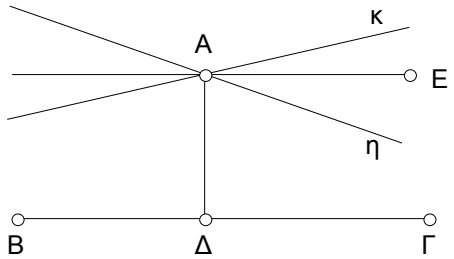
Αργότερα, το 1829-30, δημοσίευσε ένα υπόμνημα *On the Principles of Geometry*, που περιείχε ουσιαστικά τμήματα της προηγούμενης διάλεξης και επιπλέον εφαρμογές της νέας θεωρίας στην ανάλυση. Έπειτα, παρουσίασε διαδοχικά τα επόμενα έργα *Imaginary Geometry* (1835), *New Principles of Geometry, with a Complete Theory of Parallels* (1835-38), *The Applications of the Imaginary Geometry to some Integrals* (1837). Το 1840 δημοσίευσε το *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* [Γεωμετρικές έρευνες πάνω στη Θεωρία των Παραλλήλων], ένα μικρό βιβλίο, γραμμένο στα γερμανικά που περιείχε μια περίληψη της δουλειάς του και είχε ως

στόχο να τραβήξει την προσοχή ενός ευρύτερου κύκλου αναγνωστών, μαθηματικών και μη, πάνω στις έρευνές του. Τέλος το 1855, ένα χρόνο πριν το θάνατό του, όντας σχεδόν τυφλός, υπαγόρευσε και δημοσίευσε στα ρωσικά και στα γαλλικά μια πλήρη έκθεση του γεωμετρικού του συστήματος με τον τίτλο: *Pangéomtrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*.

Η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, ακριβώς όπως την αντιλήφθηκαν οι Gauss και Schweikart το 1816 και μελετήθηκε ως ένα αφηρημένο σύστημα από τον Taurinus το 1826, έγινε το 1829-30 ένα αναγνωρισμένο κομμάτι της γενικής επιστημονικής κληρονομιάς.

Για να περιγράψουμε τη μέθοδο που ακολούθησε ο Lobachevsky στην κατασκευή της Φανταστικής Γεωμετρίας ή αλλιώς Πανγεωμετρίας, θα αντλήσουμε στοιχεία από το έργο του *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.*

Σε αυτή την εργασία ο Lobachevsky, πρώτα από όλα δηλώνει μια ομάδα θεωρημάτων ανεξάρτητα από την θεωρία των παραλλήλων. Στη συνέχεια θεωρεί μια δέσμη συνεπίπεδων ευθειών που διέρχονται από την κορυφή Α και μια ευθεία γραμμή ΒΓ που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τη δέσμη, αλλά δεν ανήκει σ' αυτήν. Έστω ΑΔ μια ευθεία της δέσμης που είναι κάθετη στη ΒΓ και ΑΕ η κάθετη στην ΑΔ. Παρατηρούμε ότι στο Ευκλείδειο σύστημα η γραμμή ΑΕ είναι η μόνη γραμμή που δεν τέμνει τη ΒΓ. Στη Γεωμετρία του Lobachevsky υπάρχουν και άλλες γραμμές της δέσμης που δεν τέμνουν τη ΒΓ.



Οι γραμμές που τέμνουν τη ΒΓ χωρίζονται από εκείνες που δεν την τέμνουν από δύο γραμμές η και κ. Οι η και κ επίσης δεν τέμνουν τη ΒΓ. Ο συγγραφέας αποκαλεί τις η και κ παράλληλες και αποδίδει σε καθεμία μια συγκεκριμένη *κατεύθυνση παραλληλίας*. Η ευθεία η του σχήματος είναι παράλληλη στα δεξιά και η κ στα αριστερά. Η γωνία που σχηματίζεται από την κάθετη ΑΔ και με μια από τις παράλληλες καλείται *Γωνία Παραλληλίας* για το μήκος ΑΔ. Ο Lobachevsky χρησιμοποιεί αρχικά το σύμβολο F(α) και αργότερα το Π(α) για να δηλώσει την γωνία παραλληλίας που αντιστοιχεί στο μήκος α. Στη συνήθη Γεωμετρία ισχύει πάντα Π(α)=90°. Στη Γεωμετρία του Lobachevsky, η γωνία

παραλληλίας είναι μια συνάρτηση Π του α, η οποία τείνει στις 90° όταν το α τείνει στο μηδέν και στις 0° όταν το α αυξάνεται απεριόριστα.

Ο Lobachevsky επεκτείνει αυτή τη συνάρτηση σε όλες τις πραγματικές τιμές του α, θέτοντας Π(0) = π/2 και Π(-α) = π - Π(α). Έδειξε ακόμη ότι για κάθε γωνία Α, αμβλεία ή οξεία, υπάρχει μια τιμή α τέτοια ώστε Α = Π(α). Μάλιστα ισχύει α > 0, αν η γωνία ∠Α είναι οξεία και α < 0, αν η γωνία ∠Α είναι αμβλεία.

Από τον ορισμό των παραλλήλων ο συγγραφέας συνάγει τις πρωταρχικές τους ιδιότητες:

- Αν η ΑΕ είναι η παράλληλη στη ΒΓ για το σημείο Α, τότε είναι η παράλληλη στη ΒΓ προς αυτή την κατεύθυνση για κάθε σημείο της ΑΕ (μονιμοποίηση).
- Αν η ΑΕ είναι η παράλληλη στην ΒΓ, τότε και η ΒΓ είναι η παράλληλη στην ΑΕ (αυτοπαθής ιδιότητα).
- Αν οι ευθείες (1) και (2) είναι παράλληλες στη (3), τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες (μεταβατικότητα).
- Αν οι ΑΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, τότε η ΑΕ είναι ασύμπτωτη στη ΒΓ.

Στην συνέχεια, η εργασία προχωρεί με θεωρήματα που αφορούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, όπως εκείνα που είχαν δοθεί αρχικά από τον Saccheri και έπειτα από τον Legendre.

Όμως, το πιο σημαντικό κομμάτι της Φανταστικής Γεωμετρίας είναι η κατασκευή των τύπων της τριγωνομετρίας.

Για την κατασκευή των τύπων ο Lobachevsky εισάγει δύο νέα σχήματα: τον ορόκυκλο (horocycle) και την οροσφαίρα (horosphere). Ο ορόκυκλος και η οροσφαίρα είναι αντίστοιχα ο κύκλος και η σφαίρα με άπειρη ακτίνα. Τα προηγούμενα σχήματα, στην συνήθη Γεωμετρία, αντιστοιχούν στην ευθεία και στο επίπεδο. Πάνω στην οροσφαίρα, η οποία είναι φτιαγμένη από άπειρους ορόκυκλους, υπάρχει μια γεωμετρία ανάλογη με τη συνήθη Γεωμετρία, όπου οι ορόκυκλοι έχουν πάρει τη θέση των ευθειών. Έτσι ο Lobachevsky πετυχαίνει το πρώτο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα:

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία και συγκεκριμένα η συνήθη Επίπεδη Τριγωνομετρία ισχύει πάνω στην οροσφαίρα.

Η παραπάνω σημαντική ιδιότητα και μια άλλη σχετική με τους ομόκεντρους ορόκυκλους εφαρμόστηκαν από τον Lobachevsky για παραγωγή των τύπων της νέας Επίπεδης και Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Οι τύποι της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας στο νέο σύστημα βρέθηκε ότι είναι ακριβώς οι ίδιοι με εκείνους της συνήθης Σφαιρικής

Τριγωνομετρίας, όταν τα στοιχεία του τριγώνου μετριούνται σε ορθές γωνίες.

Ο τρόπος που εκφράζει τα προηγούμενα αποτελέσματα ο Lobachevsky θα περιγραφεί στη συνέχεια.

Έστω ένα επίπεδο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου οι πλευρές συμβολίζονται με α, β, γ και γωνίες με Α, Β, Γ. Έστω Π(α), Π(β), Π(γ) είναι οι γωνίες παραλληλίας που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β, γ.

Ο θεμελιώδης τύπος του Lobachevsky είναι:

$$\cos(A)\cdot\cos(\Pi(\beta))\cdot\cos(\Pi(\gamma)) + \frac{\sin(\Pi(\beta))\cdot\sin(\Pi(\gamma))}{\sin(\Pi(\alpha))} = 1 \qquad (4)$$

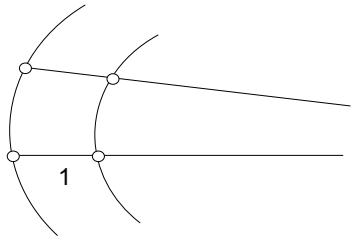
Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο αυτός τύπος είναι ισοδύναμος με τον τύπο του Taurinus:

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right)\cdot\cosh\left(\frac{c}{k}\right) - \sinh\left(\frac{b}{k}\right)\sinh\left(\frac{c}{k}\right)\cdot\cos(A)$$

Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3) της σελίδας 42, παρατηρώντας ότι η γωνία ∠Β είναι η Π(α), τότε από τον τύπο του Taurinus προκύπτει ο τύπος του Lobachevsky. Για την αντίστροφη πορεία είναι αρκετό να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα αποτελέσματα του Lobachevsky, κυρίως:

$$\tan\left(\frac{\Pi(\chi)}{2}\right) = \alpha^{-\chi} \qquad (5)$$

Η τελευταία σχέση είναι ίδια με την ισότητα (3) του Taurinus αλλά με διαφορετική μορφή. Η σταθερά α που εμφανίζεται στο τύπο (5) δεν έχει καθοριστεί. Αναπαριστά το σταθερό λόγο των τόξων που σχηματίζονται από την τομή δύο ομόκεντρων ορόκυκλων με ένα ζεύγος ευθειών και η απόσταση των δύο τόξων είναι ίση με την μονάδα μήκους.



Μπορούμε να επιλέξουμε μια κατάλληλη μονάδα για το α. Κατά τον Lobachevsky, μπορούμε να πάρουμε το α ίσο με e, τη βάση των φυσικών λογαρίθμων. Αν όμως θελήσουμε να μετατρέψουμε τα αποτελέσματα του Lobachevsky στα αντίστοιχα της Λογαριθμικής-Σφαιρικής Γεωμετρίας του Taurinus ή της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας του

Gauss, τότε θα πρέπει να πάρουμε: $\alpha=e^{1/k}$. Άρα η (5) γίνεται:

$$\tan\left(\frac{\Pi(\chi)}{2}\right) = e^{\frac{-\chi}{k}} \qquad (5^*)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη :

$$\cosh\left(\frac{\chi}{k}\right) = \frac{1}{\sin(\Pi(\chi))} \qquad (6)$$

Με την τελευταία ισότητα, η ισότητα (4) του Lobachevsky μετασχηματίζεται στη (1) του Taurinus. Επομένως έπεται ότι:

Η Λογαριθμική-Σφαιρική Γεωμετρία του Taurinus είναι η ίδια με την Φανταστική Γεωμετρία (Πανγεωμετρία) του Lobachevsky.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα αποτελέσματα που ο Lobachevsky συνάγει από τους τύπους του.

i. Στην περίπτωση των τριγώνων που οι πλευρές τους είναι πολύ μικρές (απειροελάχιστες) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους συνηθισμένους τριγωνομετρικούς τύπους ως τύπους της Φανταστικής Γεωμετρίας. Απειροελάχιστα ανώτερης τάξης παραλείπονται.

ii. Αν αντικαταστήσουμε τις πλευρές α, β, γ με τα iα, iβ, iγ, οι τύποι της Φανταστικής Τριγωνομετρίας μετατρέπονται σε τύπους της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας.[12]

iii. Αν εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στις δύο και τρεις διαστάσεις όμοιο με τις συνήθη καρτεσιανές συντεταγμένες, μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας καμπύλης, το εμβαδόν μιας επιφάνειας και τον όγκο ενός στερεού με μεθόδους της αναλυτικής Γεωμετρίας.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στο πως ο Lobachevsky παρακινήθηκε να διερευνήσει τη θεωρία των παραλλήλων και να ανακαλύψει τελικά τη Φανταστική Γεωμετρία.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Bartels, ο καθηγητής του Lobachevsky στο Πανεπιστήμιο του Kasan, ήταν φίλος του Gauss. Ο Bartels και ο Gauss ήταν μαζί στο Brunswick για δύο χρόνια πριν καλέσουν τον πρώτο στο Kasan (1807) και αργότερα αλληλογραφούσαν τακτικά. Επομένως, η υπόθεση ότι μπορεί να άσκησαν κάποια επιρροή πάνω στη δουλειά του Lobachevsky δεν φαίνεται τελείως αβάσιμη.

---

[12] Αυτό το αποτέλεσμα αιτιολογεί την μέθοδο του Taurinus στην κατασκευή της λογαριθμική-σφαιρική γεωμετρίας.

Παρόλα αυτά, πριν το 1807, ο Gauss είχε προσπαθήσει να λύσει το πρόβλημα των παραλλήλων και οι προσπάθειές του μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν είχαν αποδώσει κάτι σημαντικό και συνεπώς ο Bartels αποκλείεται να είχε μάθει κάτι από τον Gauss. Επιπλέον, όσο αφορά τις μετέπειτα απόψεις του Gauss, φαίνεται ότι ο Bartels δεν τις γνώριζε επομένως μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ο Lobachevsky ανέπτυξε τη Γεωμετρία του ανεξάρτητα από οποιαδήποτε επιρροή του Gauss. Κάποια άλλη επιρροή που μπορεί να δέχτηκε ο Ρώσος γεωμέτρης εκτός από εκείνη του Legendre, είναι από τη δουλειά των Saccheri και Lambert, την οποία είναι πιθανό να γνώριζε είτε άμεσα είτε έμμεσα από τους Klügel και Montucla. Παρόλα αυτά, σε κάθε περίπτωση, είτε η αποτυχία των αποδείξεων των προγενέστερων του, είτε οι πρώτες ανώφελες δικές του έρευνες (1815-17), παρακίνησαν τον Lobachevsky να πιστέψει ότι οι δυσκολίες που έπρεπε να ξεπεραστούν οφείλονταν σε λόγους διαφορετικούς από εκείνους που μέχρι τότε είχαν διατυπωθεί. Ο Lobachevsky εκφράζει αυτή τη σκέψη του καθαρά στο έργο του *The New Principles of Geometry* του 1825, όπου αναφέρει:

> *«Οι άκαρπες προσπάθειες που έγιναν, από την εποχή του Ευκλείδη, για ένα διάστημα 2000 χρόνων, αναδύουν μέσα μου την υποψία ότι η αλήθεια που επιθυμούμε να αποδείξουμε, δεν περιέχεται στα ίδια τα δεδομένα. Για να εδραιώσουμε κάτι τέτοιο η βοήθεια του πειράματος θα ήταν απαραίτητη, όπως π.χ. οι αστρονομικές παρατηρήσεις στην περίπτωση μελέτης άλλων νόμων της φύσης. Όταν τελικά πείστηκα για την ορθότητα του συλλογισμού μου και πίστεψα ότι είχα λύσει αυτό το δύσκολο ζήτημα, έγραψα, το 1826, ένα υπόμνημα γι' αυτό το θέμα».*

Τα λόγια του Lobachevsky αποτελούν απόδειξη μιας φιλοσοφικής θεώρησης της έννοιας του χώρου, που έρχεται σε αντίθεση με την άποψη του Kant, η οποία ήταν γενικά αποδεκτή την εποχή εκείνη. Όμως για το ζήτημα αυτό θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά σε επόμενη ενότητα.

Απομένει να εξετάσουμε την σχέση της Πανγεωμετρίας του Lobachevsky με το ζήτημα του Ευκλείδειου αιτήματος. Αυτή η διερεύνηση στοχεύει στην κατασκευή της θεωρίας των παραλλήλων με τη χρήση μόνο των 28 πρώτων προτάσεων του Ευκλείδη.

Όσο αφορά αυτό το πρόβλημα, ο Lobachevsky έχοντας ορίσει την γωνία παραλληλίας, αναθέτει σε αυτή τα διακριτικά γνωρίσματα της αυτοπαθής και της μεταβατικής ιδιότητας. Τότε η ιδιότητα της ίσης απόστασης παρουσιάστηκε στον

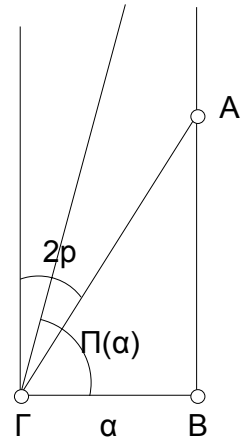
Lobachevsky ως κάτι απόλυτα φυσιολογικό. Μακριά από το να είναι άρρηκτα δεμένος με τις 28 πρώτες προτάσεις του Ευκλείδη, περιέχει ένα στοιχείο εντελώς καινούργιο.

Η αλήθεια αυτής της δήλωσης έπεται απευθείας από την ύπαρξη της Πανγεωμετρίας, μιας λογικής επαγωγικής επιστήμης θεμελιωμένης πάνω στις 28 πρώτες προτάσεις του Ευκλείδη και την άρνηση του 5^{ου} αιτήματος, όπου οι παράλληλες ευθείες δεν είναι ισαπέχουσες αλλά ασύμπτωτες. Επιπλέον, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η Πανγεωμετρία είναι μια επιστήμη στην οποία τα αποτελέσματα ακολουθούν λογικά το ένα το άλλο χωρίς π.χ. «εσωτερικές» αντιφάσεις. Για να αποδείξουμε κάτι τέτοιο, σύμφωνα με τον Lobachevsky, χρειάζεται μόνο να λάβουμε υπόψη την αναλυτική μορφή των στοιχείων της Πανγεωμετρίας.

Ο Lobachevsky εκφράζει την παραπάνω άποψη, προς το τέλος της εργασίας του, με τον ακόλουθο τρόπο:

> *«Τώρα που έχουμε δείξει, σε ό,τι προηγήθηκε, τον τρόπο με τον οποίο τα μήκη των καμπυλών, και οι επιφάνειες και οι όγκοι των στερεών μπορούν να υπολογιστούν, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, όπως προκύπτει από αυτές, η Πανγεωμετρία είναι ένα πλήρες σύστημα γεωμετρίας. Μια απλή ματιά στις εξισώσεις, που εκφράζουν τις υπάρχουσες σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές και τις γωνίες των επίπεδων τριγώνων, είναι αρκετή για να διαπιστωθεί ότι η Πανγεωμετρία γίνεται ένας κλάδος της ανάλυσης, περιλαμβάνοντας και επεκτείνοντας τις αναλυτικές μεθόδους της συνήθης Γεωμετρίας. Μπορούμε να αρχίσουμε την έκθεση της Πανγεωμετρίας από αυτές τις εξισώσεις. Έπειτα μπορούμε να προσπαθήσουμε να αντικαταστήσουμε αυτές τις εξισώσεις με άλλες που να μπορούν να εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα τις πλευρές και τις γωνίες κάθε επίπεδου τριγώνου. Όμως, στην τελευταία περίπτωση, είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι αυτές οι νέες εξισώσεις είναι σύμφωνες με τις θεμελιώδης έννοιες της γεωμετρίας. Οι σταθερές εξισώσεις που παρήχθησαν από τις θεμελιώδης έννοιες, πρέπει απαραιτήτως να είναι σύμφωνες με αυτές, και όλες οι εξισώσεις που θα τις αντικαταστήσουν , αν δεν μπορούν να παραχθούν από τις εξισώσεις, μπορεί να οδηγήσουν σε αποτελέσματα που έρχονται σε αντίθεση με τις εν λόγω έννοιες. Οι εξισώσεις μας είναι, επομένως, το θεμέλιο της πιο γενικής γεωμετρίας, μια και δεν στηρίζονται πάνω στην υπόθεση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες». (Bonola, 1955)*

Για να σχηματίσουμε μια ολοκληρωμένη άποψη για τη φύση της σταθεράς k που υπονοείται στον τύπο του Lobachevsky και αναφέρεται σαφώς στον τύπο του Taurinus, πρέπει να εφαρμόσουμε τη νέα τριγωνομετρία σε μια πραγματική περίπτωση. Ο Lobachevsky χρησιμοποίησε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η πλευρά ΒΓ≡α είναι ίση με την ακτίνα της τροχιάς της γης και η κορυφή Α ένα σταθερό άστρο, ο Σείριος, του οποίου η κατεύθυνση είναι κάθετη στη ΒΓ.



Συμβολίζουμε με 2p τη μέγιστη παράλλαξη του άστρου Α. Τότε, έχουμε:

Π(α) > ∠ΒΑΓ = (π/2) – 2p.

Επομένως,

$$\tan\left(\frac{\Pi(\alpha)}{2}\right) > \tan\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \tan(p)}{1 + \tan(p)}$$

Αλλά,

$$\tan\left(\frac{\Pi(\alpha)}{2}\right) = e^{\frac{-\alpha}{k}}$$

Επομένως,

$$e^{\frac{\alpha}{k}} < \frac{1 + \tan(p)}{1 - \tan(p)}$$

Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση p < π/4, έχουμε

$$\frac{\alpha}{2} < \log\left(\frac{1 + \tan(p)}{1 - \tan(p)}\right) = 2\cdot\left(\tan(p) + \frac{\tan(p)^3}{3} + \frac{\tan(p)^5}{5} + ...\right).$$

Επίσης, ισχύει

$$\tan(2p) = \frac{2\cdot\tan(p)}{1-\tan(p)^2} = 2\cdot\left(\tan(p) + \tan(p)^3 + \tan(p)^5 + ...\right)$$

Άρα, έχουμε: $\alpha/k < \tan(2p)$.

Σύμφωνα με τον Lobachevsky, η παράλλαξη του Σείριου είναι 1΄΄,24. Από την τιμή της tan(2p), προκύπτει $\alpha/k < 0.000006012$. Αυτό το αποτέλεσμα δεν μας επιτρέπει να βρούμε μια τιμή για το k, αλλά συμπεραίνουμε ότι είναι πολύ μεγάλη συγκρινόμενη με τη διάμετρο της τροχιάς της γης. Επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό για πολύ μικρότερες παραλλάξεις, π.χ. για 0΄΄,1, διαπιστώνουμε ότι το k είναι ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερο από τη διάμετρο της τροχιάς της γης.

Επομένως, αν η Ευκλείδεια Γεωμετρία και το Πέμπτο Αίτημα ισχύουν στον πραγματικό χώρο, τότε το k πρέπει να είναι απείρως μεγάλο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχουν αστέρια των οποίων οι παραλλάξεις είναι απείρως μικρές. Παρόλα αυτά, αποδεικνύεται ότι δεν μπορούμε να δηλώσουμε αν ισχύει η παραπάνω υπόθεση ή όχι, διότι οι αστρονομικές παρατηρήσεις θα είναι πάντα αληθινές μέσα σε συγκεκριμένα όρια. Ακόμη, σύμφωνα με τον Lobachevsky, γνωρίζοντας το τεράστιο μέγεθος του k, συγκριτικά με μετρήσιμα μήκη, πρέπει να δεχτούμε ότι η Ευκλείδεια υπόθεση ισχύει για όλα τα πρακτικά ζητήματα.

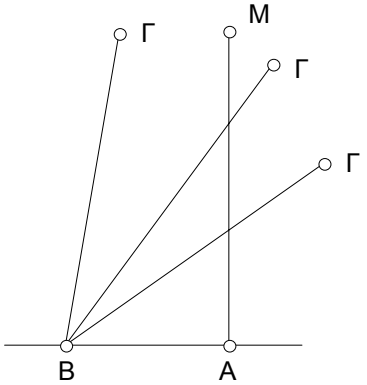
Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα, αν εξετάζαμε το θέμα από την οπτική γωνία του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου. Τα αποτελέσματα των αστρονομικών παρατηρήσεων δείχνουν ότι το έλλειμμα ενός τριγώνου του οποίου οι πλευρές πλησιάζουν την απόσταση της γης από τον ήλιο, δεν μπορούν να είναι περισσότερο από 0΄΄,0003. Ας θεωρήσουμε αντί για ένα αστρονομικό τρίγωνο, ένα τρίγωνο σχεδιασμένο πάνω στην επιφάνεια της γης, οι γωνίες του οποίου μπορούν να μετρηθούν απευθείας. Ως συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος, το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ανάλογο προς το έλλειμμα του, το εν λόγω έλλειμμα μπορεί να πέσει μέσα στα όρια του πειραματικού λάθους. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε το έλλειμμα ίσο με το μηδέν στην πειραματική εργασία, γεγονός που σημαίνει ότι το Ευκλείδειο Αίτημα ισχύει στον εμπειρικό χώρο.

Όσο ζούσε ο Lobachevsky δεν είδε το έργο του να αποκτάει πλατιά αναγνώριση. Η καταξίωση ήρθε μετά το θάνατό του. Η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία που ανέπτυξε συχνά αναφέρεται και ως Λομπατσέφκεια Γεωμετρία ενώ στον ίδιο έχει αποδοθεί ο τίτλος «ο Κοπερνικός της Γεωμετρίας».

János Bolyai

Ο János Bolyai (1802-1860), Ούγγρος αξιωματικός του Αυστριακού στρατού και γιος του Farkas Bolyai, μοιράζεται μαζί με τον Lobachevsky την τιμή της ανακάλυψης της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο Bolyai διδάχθηκε μαθηματικά από τον πατέρα του και από πολύ νωρίς έδειξε ότι είχε κλίση σε αυτή την επιστήμη. Η διδασκαλία του Farkas τράβηξε γρήγορα την προσοχή του János πάνω στο Πέμπτο Αίτημα, το οποίο θεώρησε ότι έπρεπε να το αποδείξει, αγνοώντας την προσπάθεια του πατέρα του να τον αποθαρρύνει. Με αυτό τον τρόπο η θεωρία των παραλλήλων μετατράπηκε στην αγαπημένη ασχολία του νεαρού μαθηματικού στη διάρκεια φοίτησης του στο Royal College for Engineers στη Βιέννη (1817-22).

Την ίδια εποχή, ο Bolyai ήταν στενός φίλος με τον Carl Szász (1798-1853). Οι σπόροι αρκετών ιδεών που οδήγησαν τον Bolyai στη δημιουργία της *Απόλυτης Επιστήμης του Χώρου,* είχαν φυτευτεί στη διάρκεια συζητήσεων των δύο φοιτητών. Φαίνεται ότι στον Szász οφείλεται η ιδέα να θεωρήσει την παράλληλη από ένα σημείο Β σε μια άλλη ευθεία ΑΜ, ως οριακή θέση της τέμνουσας ΒΓ στρεφόμενης γύρω από το Β προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.



Με άλλα λόγια, θεωρούμε τη ΒΓ παράλληλη της ΑΜ, όταν η ΒΓ, σύμφωνα με την ορολογία του Szász, *αποσπάται* (απομακρύνεται) από την ΑΜ. Σε αυτή την παράλληλη ο Bolyai έδωσε το όνομα ασυμπτωτική παράλληλη ή ασύμπτωτη. Από τις συζητήσεις των δύο φίλων απορρέει η έννοια της ισαπέχουσας γραμμής από μια ευθεία καθώς και η σημαντική ιδέα του *Παρακύκλου* (οριακή καμπύλη ή ορόκυκλος του Lobachevsky). Επιπλέον, διαπίστωσαν ότι το Πέμπτο Αίτημα θα μπορούσε να αποδειχθεί, αν έδειχναν

ότι ο Παρακύκλος είναι ευθεία γραμμή.

Στις αρχές του 1821, ο Szász έφυγε από τη Βιέννη για να αναλάβει θέση καθηγητή της νομικής στο Κολέγιο της Nagy-Enyed στην Ουγγαρία και ο Bolyai συνέχισε μόνος τις εικασίες του. Μέχρι το 1820, ήταν αφοσιωμένος στην απόδειξή του 5^{ου} αιτήματος, ακολουθώντας μεθόδους παρόμοιες με εκείνες των Saccheri και Lambert. Μάλιστα από την αλληλογραφία που είχε με τον πατέρα του φαίνεται ότι κάποια στιγμή πίστεψε ότι είχε πετύχει αυτό το στόχο.

Η αναγνώριση των λαθών του ήταν η αφορμή για την αποφασιστική αλλαγή στη θεώρηση των πραγμάτων, που τον οδήγησαν τελικά στις μελλοντικές του ανακαλύψεις. Διατηρώντας πάντα την άποψη ότι «δεν πρέπει κάποιος να φέρεται βίαια στη φύση ούτε και να τη μοντελοποιεί σύμφωνα με οποιαδήποτε τυφλά διαμορφωμένη χίμαιρα. Από την άλλη μεριά πρέπει να θεωρήσει τη φύση ως κάτι δικαιολογημένο και φυσιολογικό, όπως την αλήθεια, και να ικανοποιείται μόνο με μια αναπαράσταση της, που της επιφέρει τη μικρότερη δυνατή απόκλιση».

Από εκείνη τη στιγμή και έπειτα, ο Bolyai ασχολήθηκε με την κατασκευή της απόλυτης θεωρίας του χώρου, ακολουθώντας τις κλασσικές μεθόδους των Ελλήνων και πιο συγκεκριμένα, την επαγωγική μέθοδο, χωρίς να αποφασίσει εκ των προτέρων για την αλήθεια ή το ψεύδος του Πέμπτου Αιτήματος.

Ήδη από το 1823 ο Bolyai είχε αντιληφθεί την πραγματική φύση του προβλήματος. Οι μετέπειτα προσθήκες του αφορούσαν το υλικό και την τυπική έκφρασή του. Μέχρι τότε, είχε ανακαλύψει τον τύπο που συνδέει τη γωνία παραλληλίας με τη γραμμή στην οποία αντιστοιχεί:

$$\tan\left(\frac{\Pi(\alpha)}{2}\right) = e^{\frac{-\alpha}{k}}.$$

Αυτή η εξίσωση είναι το κλειδί όλης της Μη Ευκλείδειας Τριγωνομετρίας. Για να αποσαφηνίσουμε τις ανακαλύψεις που έκανε ο János Bolyai την εποχή εκείνη, παραθέτουμε ένα απόσπασμα από ένα γράμμα που έστειλε ο ίδιος στον πατέρα του στις 3 Νοεμβρίου 1823:

«Έχω αποφασίσει να δημοσιεύσω μια εργασία στη θεωρία των παραλλήλων, αμέσως μόλις βάλω σε τάξη το υλικό και μου το επιτρέψουν οι περιστάσεις. Δεν έχω ακόμη ολοκληρώσει αυτή την εργασία, αλλά ο δρόμος που έχω πάρει καθιστά

βέβαιο ότι ο στόχος θα επιτευχθεί... Έχω προχωρήσει σε τόσες θαυμάσιες ανακαλύψεις που με έχουν σχεδόν συνεπάρει και θα ήταν λόγος διαρκούς λύπης, αν χαθούν. Όταν θα τις δεις, θα το καταλάβεις. Εν τω μεταξύ, μπορώ να πω μόνο αυτό: έχω δημιουργήσει ένα νέο σύμπαν από το τίποτα ...».

Ο Farkas Bolyai εξέφρασε την επιθυμία του να προσθέσει τη θεωρία του γιου του ως παράρτημα στο βιβλίο του *Πραγματεία επί των στοιχείων των Μαθηματικών για μελετηρούς νέους.* Πιο συγκεκριμένα, αναφέρει:

«Εάν έχεις πράγματι πετύχει σε αυτό το θέμα, είναι σωστό να μη χάσουμε χρόνο και να το δημοσιεύσουμε αμέσως για δύο λόγους: πρώτον, διότι οι ιδέες εύκολα περνούν από τον έναν στον άλλον, και μπορεί κάποιος να σε προλάβει στη δημοσίευση τους, και δεύτερον, υπάρχει κάποια αλήθεια στο ότι ορισμένα πράγματα έχουν την εποχή τους, κατά την οποία ευδοκιμούν συγχρόνως σε πολλά διαφορετικά μέρη, όπως οι βιολέτες την άνοιξη. Επίσης, κάθε επιστημονική διαμάχη συνιστά ένα σοβαρό πόλεμο, του οποίου το τέλος δεν μπορώ να πω πότε έρχεται. Γι' αυτό οφείλουμε να προχωρούμε σε κατακτήσεις όταν είμαστε σε θέση, μια και το πλεονέκτημα ανήκει πάντα στον πρώτο».

Ο Farkas Bolyai δεν μπορούσε να φανταστεί ότι τα λόγια του θα επαληθεύονταν από τη σχεδόν ταυτόχρονη ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τους Gauss, Taurinus και Lobachevsky.

Η ανάπτυξη και τακτοποίηση των ιδεών προχώρησε πιο αργά απ' ό,τι είχε προβλέψει ο János. Το 1825 έστειλε μια περίληψη της εργασίας του, μεταξύ άλλων, στον πατέρα του και στον παλιό καθηγητή του J. Walter von Eckwehr (1789-1857). Το 1829, ολοκλήρωσε το έργο του και το γνωστοποίησε στον Farkas. Ο τελευταίος δεν έμεινε απόλυτα ικανοποιημένος, διότι δεν μπορούσε να καταλάβει γιατί μια ακαθόριστη σταθερά έπρεπε να εισαχθεί στον τύπο του János. Παρόλα αυτά, πατέρας και γιος συμφώνησαν να δημοσιεύσουν τη νέα θεωρία ως παράρτημα στον πρώτο τόμο της *Πραγματείας* του Farkas το 1832. Ο τίτλος της εικοσιεξασέλιδης εργασίας του János Bolyai ήταν ο εξής: *«Συμπλήρωμα που περιέχει την απολύτως αληθή επιστήμη του χώρου, ανεξάρτητη από την αλήθεια ή το ψεύδος του Αξιώματος XI του Ευκλείδη (το οποίο δεν μπορεί να αποφασιστεί a priori)»* (Davis, 2001).

Η εργασία αυτή περιέχει 43 παραγράφους, που ομαδοποιούνται σε 5 ενότητες:

i. §§ 1-10: Παραλληλία.
ii. §§ 11-24: Παρακύκλος και Παρασφαίρα.
iii. §§ 25-31: Τριγωνομετρία.
iv. §§ 32-33: Εφαρμογές της ανάλυσης και συσχετισμός της Γεωμετρίας και της πραγματικότητας.
v. §§ 34-43: Κατασκευές.

(Στράντζαλος, 2002)

Ο János Bolyai δε δημοσίευσε τίποτα περισσότερο πάνω σε αυτό το θέμα, αλλά άφησε πλήθος χειρόγραφες σελίδες σχετικά με αυτό.

Το «Παράρτημα», όπως έχει επικρατήσει να λέγεται η παραπάνω εργασία, στάλθηκε για πρώτη φορά τον Ιούνιο του 1831 στον Gauss, αλλά δεν έφτασε ποτέ στον προορισμό του, γι' αυτό ένα δεύτερο αντίτυπο στάλθηκε τον Ιανουάριο του 1832. Επτά εβδομάδες αργότερα, στις 6 Μαρτίου του 1832, ο Gauss απάντησε στον Farkas τα εξής:

> *«Αν ξεκινούσα λέγοντας ότι δεν μπορώ να επαινέσω αυτή την εργασία, θα μένατε, φυσικά, εμβρόντητος για λίγο. Αλλά δεν μπορώ να κάνω διαφορετικά. Επαινώντας την θα ήταν σαν να επαινούσα τον εαυτό μου. Πράγματι, το πλήρες περιεχόμενο της εργασίας, το μονοπάτι που ακολούθησε ο γιος σας, τα αποτελέσματα στα οποία αυτό τον οδήγησε, συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα με τις σκέψεις που διακατείχαν εν μέρει το νου μου τα τελευταία τριάντα με τριάντα πέντε χρόνια. Γι' αυτό η αντίδρασή μου υπήρξε αρκετά ψύχραιμη. Έως τώρα και σε σχέση με το έργο μου, μικρό μέρος του οποίου υπάρχει τυπωμένο, πρόθεσή μου ήταν να μην επιτρέψω τη δημοσίευσή του όσο ζω. Πράγματι η πλειονότητα των ανθρώπων δεν έχει ξεκάθαρη ιδέα για το θέμα περί του οποίου συζητούμε, και έχω καταλήξει στο συμπέρασμα ότι πολύ λίγοι είναι εκείνοι που θα μπορούσαν να δείξουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ό,τι θα τους ανέφερα έπ' αυτού. Για την επίδειξη ενός τέτοιου ενδιαφέροντος θα έπρεπε πρωτίστως να έχουν σκεφτεί προσεκτικά για την πραγματική φύση του ζητουμένου, όπου όμως όλα είναι ρευστά και αβέβαια. Από την άλλη, σκόπευα να τα γράψω όλα αυτά αργότερα τουλάχιστον, ώστε να μη χαθούν μαζί μου. Είναι συνεπώς ευχάριστη έκπληξη το ότι γλιτώνω από αυτήν έγνοια, και χαίρομαι που ο γιος του παλιού μου φίλου είναι εκείνος ο οποίος παραλαμβάνει τη σκυτάλη από μένα με τέτοιο αξιοσημείωτο τρόπο»* (Davis, 2001).

Ο Farkas έμεινε ικανοποιημένος με αυτή την απάντηση, ο János όμως όχι. Δεν μπορούσε και δεν ήθελε να πείσει τον εαυτό του ότι κι άλλοι, πριν και ανεξάρτητα από τον ίδιο, είχαν ανακαλύψει τη Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Επιπλέον, υποπτευόταν ότι ο πατέρας του είχε μεταφέρει στον Gauss τις ανακαλύψεις του πριν του στείλει το «Παράρτημα» και ότι ο τελευταίος επιθυμούσε να οικειοποιηθεί την πατρότητα της ανακάλυψης. Έτσι, παρόλο που αργότερα κατάλαβε ότι μια τέτοια υποψία ήταν αβάσιμη, ο János πάντα αντιμετώπιζε τον «Πρίγκιπα των Μαθηματικών» με μια αδικαιολόγητη αντιπάθεια.

Στην συνέχεια παραθέτουμε βασικές έννοιες και τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της δουλειάς του János Bolyai:

i. Ο ορισμός των παραλλήλων και οι ιδιότητες τους είναι ανεξάρτητα από το Ευκλείδειο Αίτημα.
ii. Κύκλος και σφαίρα με άπειρη ακτίνα. Η γεωμετρία πάνω στην σφαίρα άπειρης ακτίνας ταυτίζεται με την συνήθη Επίπεδη Γεωμετρία.
iii. Η Σφαιρική Τριγωνομετρία είναι ανεξάρτητη από το Ευκλείδειο Αίτημα. Άμεση απόδειξη των τύπων.
iv. Επίπεδη τριγωνομετρία στην Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία και εφαρμογές στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων.
v. Προβλήματα που μπορούν να λυθούν με στοιχειώδης μεθόδους. Τετραγωνισμός του κύκλου υπό την υπόθεση ότι το Πέμπτο Αίτημα δεν ισχύει.

Ενώ ο Lobachevsky ανέπτυξε πλήρως τη Φανταστική Γεωμετρία κυρίως από την πλευρά της ανάλυσης, ο Bolyai μελέτησε σε βάθος το ζήτημα της ανεξαρτησία των θεωρημάτων της Γεωμετρίας από το Ευκλείδειο Αίτημα. Επιπλέον, ο Lobachevsky επιχείρησε να κατασκευάσει ένα σύστημα γεωμετρίας πάνω στην άρνηση του $5^{ου}$ Αιτήματος, ενώ ο Bolyai ανέδειξε προτάσεις και κατασκευές της συνήθης Γεωμετρίας που είναι ανεξάρτητες από το $5^{ο}$ Αίτημα. Τέτοιες προτάσεις, τις οποίες καλεί *απολύτως αληθείς*, αφορούν την *Απόλυτη Επιστήμη του χώρου*. Θα μπορούσαμε να βρούμε προτάσεις της εν λόγω επιστήμης συγκρίνοντας τη Γεωμετρία του Ευκλείδη με εκείνη του Lobachevsky. Οτιδήποτε έχουν κοινό ανήκει στην Απόλυτη Γεωμετρία[13], π.χ. οι τύποι της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας, Όμως ο János Bolyai δεν ακολούθησε αυτό το δρόμο.

[13] Απόλυτη Γεωμετρία είναι η γεωμετρία στην οποία ισχύουν τα τέσσερα πρώτα αιτήματα και όσες προτάσεις έπονται από αυτά.

Έδειξε ότι οι προτάσεις είναι απολύτως αληθής με το να τις αποδείξει χωρίς την χρήση του 5ου Αιτήματος ή κάποιας πρότασης που έπεται από αυτό.

Μετά το 1831 ο Bolyai συνέχισε την εργασία του πάνω στη Γεωμετρία του, και πιο συγκεκριμένα, ασχολήθηκε με τα επόμενα προβλήματα:

1. Σύνδεση της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας και της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
2. Μπορεί κάποιος να αποδείξει ότι το Αίτημα του Ευκλείδη δεν είναι συνέπεια των όσων έχουν προηγηθεί;
3. Ο όγκος ενός τετράεδρου στην Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Όσο αφορά το πρώτο από τα προβλήματα, πέρα από την εδραίωση της αναλυτικής σύνδεσης των δύο τριγωνομετριών , ο Bolyai διαπίστωσε ότι στη μη ευκλείδεια υπόθεση υπάρχουν τρεις κλάσεις Αμετάβλητων Επιφανειών[14] (Uniform Surfaces) στις οποίες ισχύουν αντίστοιχα η Μη Ευκλείδεια, η συνήθης και η Σφαιρική Τριγωνομετρία. Στην πρώτη κλάση ανήκουν τα επίπεδα και οι υπερσφαίρες (hyper-spheres), που είναι επιφάνειες που ισαπέχουν από ένα επίπεδο. Στη δεύτερη κλάση ανήκουν οι παρασφαίρες και στην τρίτη οι σφαίρες. Οι παρασφαίρες είναι η οριακή περίπτωση της μετάβασης από τις υπερσφαιρικές επιφάνειες στις σφαιρικές. Αυτό το πέρασμα μπορεί να δειχθεί αναλυτικά με την κατασκευή μιας παραμέτρου που εμφανίζεται στον τύπο και η τιμή της μεταβάλλεται *συνεχώς* από μια πραγματική περιοχή σε μια καθαρά φανταστική μέσω του απείρου.

Σχετικά με το δεύτερο πρόβλημα, δηλαδή τη δυνατότητα απόδειξης του Ευκλείδειου Αιτήματος, ο Bolyai δεν κατάφερε ούτε να το λύσει, αλλά ούτε και να διαμορφώσει μια συγκεκριμένη άποψη γι' αυτό. Για αρκετό καιρό πίστευε ότι δεν μπορούμε να αποφασίσουμε ποια υπόθεση είναι αληθής, η Ευκλείδεια ή η Μη Ευκλείδεια. Αρχικά, όπως και ο Lobachevsky, βασίστηκε πάνω στην αναλυτική δυνατότητα της νέας τριγωνομετρίας. Στην συνέχεια, όμως επιστρέφει ξανά σε παλιές ιδέες και επιχειρεί μια νέα απόδειξη του Ευκλείδειου Αιτήματος. Σε αυτή την προσπάθεια εφαρμόζει μη ευκλείδειους τύπους σε ένα σύστημα πέντε συνεπίπεδων σημείων. Πιστεύει ότι πρέπει να υπάρχει απαραιτήτως κάποια σχέση ανάμεσα στις αποστάσεις αυτών των σημείων. Εξαιτίας ενός υπολογιστικού λάθους, ο Bolyai δεν βρήκε αυτή τη σχέση και για κάποιο διάστημα πίστεψε ότι έτσι είχε αποδείξει το ψεύδος της Μη Ευκλείδειας υπόθεσης και συνεπώς την απόλυτη αλήθεια του Πέμπτου Αιτήματος.

[14] Ο Bolyai με τον όρο αυτό φαίνεται να εννοεί τις επιφάνειες που συμπεριφέρονται ως επίπεδα σε σχέση με την μετατόπιση επάνω τους.

Αν και αργότερα εντόπισε το λάθος του, δεν συνέχισε τις έρευνές του προς αυτή την κατεύθυνση. Ο λόγος ήταν ότι η εφαρμογή της μεθόδου σε έξι ή περισσότερα σημεία οδήγησε σε πολύπλοκους υπολογισμούς.

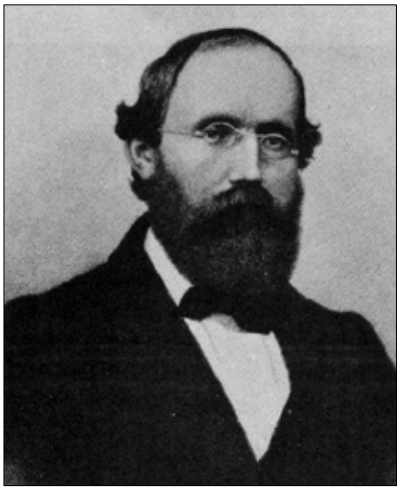
Το τρίτο πρόβλημα, που αφορά τον όγκο του τετραέδρου, είναι ένα καθαρά γεωμετρικής φύσεως πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό το είχε προτείνει ο Gauss στον γράμμα που έστειλε στον Farkas Bolyai (6 Μαρτίου 1832) ως απάντηση σχετικά με το «Παράρτημα». Οι λύσεις του Bolyai ανακαλύφθηκαν και δημοσιεύτηκαν από τον Stäckel.

Τελειώνοντας, να προσθέσουμε ότι ο János Bolyai άκουσε για το έργο του Lobachevsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* το 1848 το οποίο αποτέλεσε αντικείμενο κριτικής μελέτης. Σύμφωνα με τον Kagan, ο János μελέτησε προσεκτικά την δουλειά του Lobachevsky και την ανέλυσε γραμμή προς γραμμή, για μην πούμε λέξη προς λέξη, με τόση φροντίδα όση έδωσε και στο Παράρτημα. Η δουλειά ξεσήκωσε μια θύελλα μέσα στην ψυχή του και έδωσε διέξοδο στην θλίψη του στα σχόλια που πρόσθεσε στο Geometrical Examinations. Τα Σχόλια στο Geometrical Examinations είναι κάτι περισσότερο από μια κριτική ανάλυση της δουλειάς. Εκφράζουν τις σκέψεις και τις ανησυχίες του János που προήλθαν από την ανάγνωση του βιβλίου. Περιλαμβάνουν το παράπονό του ότι κάνει λάθος και την υποψία του ότι ο Lobachevsky δεν υπήρχε στην πραγματικότητα και ότι όλα ήταν κακόβουλες μηχανορραφίες του Gauss. Είναι το τραγικό μοιρολόι ενός ιδιοφυούς γεωμέτρη που γνώριζε την σπουδαιότητα της ανακάλυψής του αλλά απέτυχε να δεχθεί την υποστήριξη από το μοναδικό άνθρωπο που θα μπορούσε να εκτιμήσει την αξία του.

Παρά την ψυχική του κατάσταση ο János έδειξε αρκετή αντικειμενικότητα ώστε να εκτιμήσει τη δουλειά του ανταγωνιστή του. Σε σχόλιο του στο θεώρημα 35, σημειώνει ότι οι αποδείξεις του Lobachevsky που αφορούν τη σφαιρική τριγωνομετρία υποδηλώνουν μια ιδιοφυΐα και ότι η δουλειά του πρέπει να θεωρηθεί ως αριστοτεχνικό επίτευγμα.

Τέλος, ο János προσπάθησε να συνθέσει μια εργασία σχετικά με την αναμόρφωση των Αρχών των Μαθηματικών με την ελπίδα να υπερισχύσει του Ρώσου μαθηματικού. Αυτή η εργασία σχεδιάστηκε την εποχή που δημοσιεύτηκε το «Παράρτημα», αλλά ποτέ δεν κατάφερε να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα.

Georg Friedrich Bernhard Riemann



Μέχρι τώρα έχουμε δει ότι η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας απορρίφθηκε από όλους εκείνους που ερεύνησαν το θέμα, επειδή ερχόταν σε αντίθεση με την παραδοχή ότι μια ευθεία γραμμή έχει άπειρο μήκος. Η αναγνώριση μιας δεύτερης Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας που να βασίζεται στην υπόθεση της Αμβλείας γωνίας δεν έγινε δυνατή παρά μόνο όταν ο γερμανός μαθηματικός Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), καθηγητής μαθηματικών στο Göttingen, συζήτησε τις έννοιες του *απεριόριστου* (unboundlessness) και του *απείρου* (infiniteness). (Eves, 1990)

Το 1854 ο Riemann έπρεπε να δώσει μια δοκιμαστική διάλεξη για να καταλάβει θέση λέκτορα στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, κάτι που δεν θα του εξασφάλιζε κάποιο μισθό αλλά μόνο μερίδιο από τα δίδακτρα των τυχόν σπουδαστών που θα επέλεγαν να παρακολουθήσουν τα μαθήματά του. Έπρεπε να δώσει στον Gauss και στους υπόλοιπους εξεταστές τρία θέματα για τα οποία είχε ετοιμάσει μια διάλεξη, και εκείνοι θα επέλεγαν το ένα. Το τρίτο θέμα με τίτλο: *Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [Για τις υποθέσεις στις οποίες στηρίζονται τα θεμέλια της Γεωμετρίας], ήταν εκείνο για το οποίο είχε κάνει τη λιγότερη προετοιμασία αλλά και εκείνο που ενδιέφερε περισσότερο τον Gauss.

Η διάλεξη αυτή αποδείχθηκε ένα αριστούργημα και στο μαθηματικό της περιεχόμενο και στον τρόπο της παρουσίασης της. Παραλείποντας περίπλοκες τεχνικές λεπτομέρειες για να μην αποθαρρύνει τους μη μαθηματικούς του Πανεπιστημίου, ο Riemann εξέθεσε ένα σημαντικό αριθμό νέων και γόνιμων ιδεών που τράβηξαν την προσοχή των ερευνητών για τα επόμενα χρόνια μέχρι σήμερα. Στο τέλος της διάλεξης ο Riemann εξήγησε ότι η αξία μιας τέτοιας έρευνας βρίσκεται ίσως στη δυνατότητά της να μας απελευθερώσει από έτοιμες ιδέες, όταν έρθει κάποτε ο καιρός που η εξερεύνηση των φυσικών νόμων θα απαιτήσει κάποια γεωμετρία διαφορετική από την Ευκλείδεια. Αυτά τα προφητικά λόγια έγιναν πραγματικότητα κάπου πενήντα χρόνια μετά το θανατό του, με τη γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein. (Eves, 1990)

Στην παρούσα ενότητα θα σταθούμε κυρίως στη διασάφηση των εννοιών του

απεριόριστου (unboundlessness) και του απείρου (infiniteness). Μολονότι το 2° Αίτημα του Ευκλείδη βεβαιώνει ότι μια ευθεία γραμμή μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα, για τον Riemann, αυτό δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι μια ευθεία γραμμή έχει άπειρο μήκος, απλώς σημαίνει πως η εν λόγω είναι χωρίς τέλος ή χωρίς όριο. Παραδείγματος χάριν, το τόξο ενός μέγιστου κύκλου που συνδέει δύο σημεία μιας σφαίρας μπορεί να προεκτείνεται απεριόριστα κατά μήκος του μέγιστου κύκλου, κάνοντας το προεκτεινόμενο τόξο χωρίς τέλος, αλλά σίγουρα δεν είναι άπειρο σε μήκος. Είναι φανερό ότι μια ευθεία γραμμή μπορεί να συμπεριφέρεται όμοια και ότι μια πεπερασμένη προέκτασή της μπορεί να επιστρέψει στον εαυτό της.

Με αυτή την ερμηνεία του Riemann για τις έννοιες του απεριόριστου και του απείρου, αποδείχθηκε ότι μπορεί κανείς να κατανοήσει και να αναπτύξει μια εσωτερικά συνεπή Γεωμετρία στην οποία ικανοποιείται η υπόθεση της Αμβλείας γωνίας.

Πιο συγκεκριμένα, αν τα αιτήματα 1, 2 και 5 του Ευκλείδη τροποποιηθούν κατάλληλα ώστε:

1΄. Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν τουλάχιστον μια ευθεία γραμμή.

2΄. Μια ευθεία γραμμή είναι απεριόριστη.

5΄. Δύο οποιεσδήποτε ευθείες γραμμές ενός επιπέδου τέμνονται.

Και διατηρήσουμε τα άλλα δύο αιτήματα του Ευκλείδη ως έχουν:

3. Με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο και με οποιαδήποτε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.

4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Τότε προκύπτουν τα αξιώματα μιας δεύτερης Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας που σήμερα είναι γνωστή ως Γεωμετρία Riemann.

Επομένως, από τη δεύτερη υπόθεση του Saccheri προέκυψε μια νέα γεωμετρία που ταυτίζεται με τη Γεωμετρία μιας σφαίρας, όπως το είχαν προβλέψει οι Lambert και Taurinus και στην οποία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες. (Eves, 1990)

Ο Riemann δεν ήταν ένας καθαρός γεωμέτρης ούτε και εξέτασε το πρόβλημα με το γεωμετρικό τρόπο που ακολούθησαν οι Lobachevsky και Bolyai στα δικά τους γεωμετρικά συστήματα. Ήταν ένας μαθηματικός της Ανάλυσης που απλώς χρησιμοποίησε μια γεωμετρική υπόθεση σαν υπόβαθρο της. Η Γεωμετρία του Riemann δεν είναι τίποτα άλλο από ένα αξίωμα της εργασίας στην Ανάλυσης με εξαίρεση τους τύπους που συνιστούν την αναπαράσταση μιας συνάρτησης μέσω τριγωνομετρικών

σειρών. Αυτό το μέρος της δουλειάς του δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, αλλά μόνο οι θεμελιώδεις υποθέσεις του.

Ο Riemann δεν ασχολήθηκε διεξοδικά με τις εφαρμογές της νέας του Γεωμετρίας. Κάτι που έκαναν πολλοί μαθηματικοί στη συνέχεια, όπως οι A. Cayley (1821-1895) και F. Klein (1849-1925). Ο Klein ήταν αυτός που έδωσε τις σημερινές ονομασίες των τριών γεωμετριών: Υπερβολική, Ελλειπτική, Παραβολική. Η πρώτη είναι η Γεωμετρία των Lobachevsky και Bolyai, η δεύτερη του Riemann και η τρίτη του Ευκλείδη.

Ο Klein ήταν επίσης εκείνος που διέκρινε τα δύο είδη της Γεωμετρίας του Riemann: την Απλή και τη Διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία, ανάλογα με το είδος του επιπέδου που μελετάται κάθε φορά. Η πρώτη περίπτωση αφορά επιφάνειες μιας όψεως (one-sided surface) και η δεύτερη, σφαιρικές επιφάνειες ή επιφάνειες δύο όψεων (two-sided surface). (Callahan, 1931)

Η Ελλειπτική Γεωμετρία είναι πιο πολύπλοκη στη θεμελίωση της από ότι η Υπερβολική. Γενικά, αναφέρεται ότι στην Ελλειπτική Γεωμετρία αρνούμαστε καθ' ολοκληρίαν την ύπαρξη των παραλλήλων. Όμως, αν το το $5^{ο}$ Αίτημα αντικατασταθεί από το ελλειπτικό αξίωμα:

(5΄) Δύο ευθείες γραμμές πάντοτε τέμνονται.

και κρατήσουμε τα άλλα τέσσερα αξιώματα του Ευκλείδη, τότε μέσω του $2^{ου}$ αιτήματος και των σχετικών προτάσεων που συνάγονται από αυτό, καταλήγουμε στην ύπαρξη παραλλήλων! Επομένως, για να θεμελιωθεί μια γεωμετρία που να μη διαθέτει παράλληλες θα πρέπει να διατηρήσουμε τα αξιώματα 1, 3, 4 της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να αντικαταστήσουμε το $5^{ο}$ με το ελλειπτικό αξίωμα (5΄) και το $2^{ο}$ με το επόμενο αίτημα:

(2΄) Ένα περασμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί σε μια ευθεία.

Η ευθεία αυτή μπορεί να είναι χωρίς όρια αλλά όχι απαραιτήτως απείρου μήκους.

Όμως, όλα τα παραπάνω δεν είναι αρκετά. Πρέπει να καταργηθεί και μια από τις επόμενες προτάσεις, διότι αποδεικνύεται ότι η ταυτόχρονη ισχύς τους οδηγεί στην ύπαρξη παραλλήλων:

A. Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο.

B. Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία.

Στο σημείο αυτό μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός των δύο ειδών της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Στην <u>Απλή Ελλειπτική Γεωμετρία</u> ισχύουν τα αιτήματα 1, 2΄, 3, 4 και 5΄ και οι παρακάτω προτάσεις:

Α. Μια ευθεία δε χωρίζει το επίπεδο.

Β. Δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία.

Στη Διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία ισχύουν τα αιτήματα 1, 2΄, 3, 4, 5΄ και οι επόμενες προτάσεις:

Α. Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο.

Β. Δύο διαφορετικά σημεία δεν ορίζουν μοναδική ευθεία.

(Βασιλείου, 2003)

Πίνακας που συγκρίνει την Ευκλείδεια και τη Μη Ευκλείδεια Επιπεδομετρία. (P.J. Davis & R. Hersh, 1980. Από το βιβλίο των Prenowitz και Jordan, Basic Cocepts of Geometry)

	Γεωμετρία του			
	Ευκλείδη	**Lobachevsky**	**Riemann**	
Δύο διαφορετικές ευθείες τέμνονται	το πολύ σε ένα	το πολύ σε ένα	σε ένα (απλή ελλειπτική)	σημείο.
			σε δύο (διπλή ελλειπτική)	σημεία.
Με δεδομένη την ευθεία Ε και ένα σημείο Σ έξω από την Ε, υπάρχει(ουν)	μια και μόνο μια	δύο ευθείες τουλάχιστον	καμία ευθεία	που περνά(ουν) από το Σ και είναι παράλληλη(ες) στην Ε.
Μια ευθεία	χωρίζεται σε	χωρίζεται σε	δε χωρίζεται σε	δύο τμήματα από ένα σημείο.
Παράλληλες ευθείες	ισαπέχουν	δεν ισαπέχουν ποτέ	δεν υπάρχουν	
Αν μια ευθεία τέμνει τη μια από τις δύο παράλληλες, τότε	πρέπει	μπορεί ή δε μπορεί		να τέμνει την άλλη.
Η υπόθεση του Saccheri που ισχύει είναι η υπόθεση	της Ορθής γωνίας.	της Οξείας γωνίας.	της Αμβλείας γωνίας.	
Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια γραμμή είναι	παράλληλες.	παράλληλες.	τέμνονται.	
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου	ίσο με	λιγότερο από	μεγαλύτερο από	180°.
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι	ανεξάρτητο	ανάλογο με το έλλειμμα	ανάλογο με το πλεόνασμα	του αθροίσματος των γωνιών του.
Δύο τρίγωνα με ίσες τις αντίστοιχες γωνίες είναι	όμοια.	ισοδύναμα.	ισοδύναμα.	

ΜΕΡΟΣ Β

ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ

Στο δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις αξιοσημείωτες επιπτώσεις που είχε η ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην έννοια του χώρου.

Η σημασία της ανακάλυψης της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας συγκρίνεται συχνά με τη θεωρία του Copernicus, ότι η Γη δεν αποτελεί το κέντρο του σύμπαντος ή με εκείνη του Einstein που αναφέρει ότι ο χρόνος δεν είναι ο ίδιος για όλους τους παρατηρητές. Η αναλογία, βέβαια, έγκειται στο ότι η κάθε θεωρία αποδέσμευσε τη σκέψη του ανθρώπου από πλαίσια παραδεκτά επί μακρόν. (Davis D., 2001)

Μια μακροχρόνια αποδεκτή αντίληψη ήταν και ότι η Γεωμετρία του φυσικού μας χώρου είναι Ευκλείδεια. Ο κύριος υποστηρικτής αυτής της άποψης υπήρξε ο Immanuel Kant (1724 – 1804). Ο Kant ήταν δεσπόζουσα φιλοσοφική φυσιογνωμία του αιώνα που προηγήθηκε της ανακάλυψης της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι ιδέες του σχετικά με το χώρο και τη Γεωμετρία λειτούργησαν ως τροχοπέδη για την αποδοχή της νέας Γεωμετρίας, η οποία καθυστέρησε έτσι σημαντικά. Ορισμένοι μάλιστα αποδίδουν την απόφαση του Gauss να μην προχωρήσει στη δημοσίευση των ιδεών του για τη Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία στην απροθυμία του να αντιμαχήσει με τον Kant. Η μετέπειτα αποδοχή της νέας Γεωμετρίας κατάφερε ένα αποφασιστικό πλήγμα σε ορισμένες από τις κεντρικές ιδέες του Kant.

Στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου* ο Kant διατύπωσε την άποψη ότι η Γεωμετρία είναι η μελέτη του χώρου, και η γνώση μας για το χώρο δεν είναι εμπειρική αλλά μάλλον συνέπεια του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένο το μυαλό μας. Μάλιστα η δομή του μυαλού μας είναι τέτοια ώστε η Ευκλείδεια Γεωμετρία να αποτελεί τη μόνη Γεωμετρία που αυτό μπορεί να συλλάβει. Κατά συνέπεια, ο λόγος που κάνει κάποιον να αισθάνεται μια φυσική ροπή στην κατεύθυνση της αποδοχής του Πέμπτου Αιτήματος του Ευκλείδη δεν οφείλεται σε πειραματικές παρατηρήσεις αλλά στη δομή του εγκεφάλου μας.

Αυτή η θεωρία μετέτρεψε τις διατυπώσεις της Γεωμετρίας, αιτήματα και προτάσεις, σε a priori συνθετικές κρίσεις. A priori σημαίνει ότι προηγούνται της εμπειρίας, δηλαδή η επαλήθευσή τους δεν απαιτεί την εμπειρία. Συνθετικές σημαίνει ότι η επαλήθευσή τους απαιτεί κάτι περισσότερο από την σημασία των λέξεων, άρα δεν είναι τετριμμένες. Στην περίπτωση της Γεωμετρίας, η δομή του εγκεφάλου είναι αυτή που τον υποχρεώνει να την δει ως ευκλείδεια και μόνο. Φυσικά, η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία έδειξε ότι οι ισχυρισμοί του Kant δεν ήταν ορθοί. (Davis, 2001)

Σύμφωνα με τον Max Jammer, η ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδήγησε σε μια πληρέστερη κατανόηση της υποθετικής φύσης της καθαρής αξιωματικής Γεωμετρίας, και έτσι σε μια κατανόηση της φύσης των μαθηματικών γενικά. Επιπλέον, αποσαφήνισε την έννοια του φυσικού χώρου σε αντιδιαστολή με την έννοια του μαθηματικού χώρου. Με την ανακάλυψη της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας έγινε φανερό ότι δεν υπάρχουν a priori τρόποι να αποφανθεί κανείς από λογική και μαθηματική σκοπιά ποιος τύπος γεωμετρίας αναπαριστά πραγματικά τις χωρικές σχέσεις μεταξύ των σωμάτων. Γι' αυτόν τον λόγο, η επίκληση του πειράματος ήταν φυσιολογική, προκειμένου να διαπιστωθεί αν το ζήτημα της αληθινής γεωμετρίας μπορούσε να διευθετηθεί a posteriori.

Από τη στιγμή που αναγνωρίστηκε η ισχύς της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ανέκυψε το ερώτημα κατά πόσο ο φυσικός χώρος ήταν Ευκλείδειος ή όχι. Στην εμπροσθοφυλακή της επίθεσης σε αυτό το πρόβλημα βρέθηκε ο F. K. Schweikart, ο οποίος όπως είδαμε και στο πρώτο μέρος της εργασίας, συγκαταλέγεται μεταξύ των πρώτων ανεξάρτητων εξερευνητών αυτής της επιστήμης. Ο Schweikart με το γεωμετρικό σύστημα που δημοσίευσε με τον τίτλο Astral geometry θέλησε να δείξει ότι μόνο μέσω πειραμάτων ή παρατηρήσεων σε αστρονομική κλίμακα θα μπορούσε να ανιχνευθεί η διαφορά ανάμεσα στη δική του και την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Βέβαια περισσότερο γνωστή είναι η απόπειρα του Gauss να προσδιορίσει αν ο χώρος της εμπειρίας μας είναι ευκλείδειος ή όχι. Ο Gauss προσπάθησε να μετρήσει απευθείας, μέσω ενός συνηθισμένου τριγωνισμού με τοπογραφικό εξοπλισμό, αν το άθροισμα των γωνιών ενός μεγάλου τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες ή όχι. Έτσι μέτρησε ένα τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από τα όρη Brocken, Hoher Hagen και Inselberg, με πλευρές μήκους 69, 85 και 107 χιλιομέτρων. Αποτέλεσμα αυτού ήταν ότι το άθροισμα των γωνιών βρέθηκε να υπερβαίνει τις 180° περίπου κατά 15 δεύτερα, που είναι σχεδόν το 1/240 του βαθμού. Η διαφορά αυτή όμως θεωρήθηκε ότι είναι εντός των ορίων του σφάλματος και συνεπώς δεν

υπάρχει απόκλιση από τις 180º. Έτσι συμπέρανε ότι η δομή του πραγματικού χώρου είναι ευκλείδεια, με βάση την εμπειρία.

Αυτή ήταν η πρώτη ακριβής τοπογραφική αποτύπωση ενός γεωδαιτικού τριγώνου σε πολύ μεγάλη κλίμακα, και απαιτούσε σημαντική εργασία. Το αποτέλεσμα, αν και πρέπει να ήταν μάλλον απογοητευτικό για τον Gauss, δεν μπορούσε να οδηγήσει σε οριστικά συμπεράσματα, δηλαδή δεν μπορούσε ούτε να επιβεβαιώσει ούτε να καταρρίψει κατηγορηματικά τις ιδέες του για το χώρο, οι οποίες τον απασχολούσαν από το 1817, όπως φαίνεται και από ένα γράμμα του στον H. W. M. Olbers:

> *«Πείθομαι όλο και περισσότερο ότι η αναγκαιότητα της γεωμετρίας μας δεν μπορεί να αποδειχθεί, τουλάχιστον από, ή για την ανθρώπινη διάνοια. Ίσως, σε κάποια μελλοντική ζωή, να αποκτήσουμε άλλες ιδέες για τη φύση του χώρου, οι οποίες, προς το παρόν, δεν μας είναι προσιτές. Επομένως, μέχρι τότε, η γεωμετρία δεν πρέπει να κατατάσσεται μαζί με την αριθμητική, η οποία έχει καθαρά a priori φύση, αλλά με τη μηχανική».*

Επομένως, η πειραματική διερεύνηση του Gauss για τη γεωμετρική δομή του χώρου βασιζόταν στην πίστη ότι η Γεωμετρία είναι ουσιωδώς διαφορετική από την αριθμητική και την ανάλυση, άποψη που του υπέβαλλε η αναγνωρισμένη εγκυρότητα της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ενώ οι δύο αυτοί κλάδοι των μαθηματικών βασίζονται στην ιδέα του καθαρού αριθμού, και, άρα παραμένουν καθαρά λογική γνώση, η Γεωμετρία γίνεται εμπειρική επιστήμη, εφόσον απαιτεί πειραματική διερεύνηση. Σε ένα γράμμα του στον Bessel, ο Gauss έγραφε ότι πρέπει να αναγνωρίσουμε πως ο αριθμός είναι ένα προϊόν της σκέψης, ενώ ο χώρος είναι μια πραγματικότητα έξω από την σκέψη, της οποίας τους νόμους δεν μπορούμε να γνωρίζουμε a priori.

Για τον Gauss, η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν από λογικής πλευράς άψογη, αλλά το πείραμα φαίνεται να αποκλείει την εφαρμογή της στο φυσικό χώρο. Ο Lobachevsky, που είχε την ίδια γνώμη με τον Gauss, υποστηρίζει ότι στη Γεωμετρία οι έννοιες δεν συνεπάγονται καθ' αυτές την αλήθεια της οποίας την απόδειξη ψάχνουμε καθώς και ότι η δικαίωση αυτής της αλήθειας θα έρθει μόνο μέσω της εμπειρίας, παραδείγματος χάριν από την αστρονομική παρατήρηση. Επιπλέον, ο Ρώσος μαθηματικός αναφέρει ότι αν ο φυσικός χώρος ήταν διαφορετικός από τον ευκλείδειο, τότε η διαφορά τους θα μπορούσε να πιστοποιηθεί μόνο μέσω παρατηρήσεων μεγάλης κλίμακας.

Ο Lobachevsky προσπάθησε κι αυτός ανεπιτυχώς να αποδείξει εμπειρικά τη μη ευκλείδεια δομή του χώρου. Οπότε συμπέρανε ότι για όλους τους πρακτικούς σκοπούς μόνο η Ευκλείδεια Γεωμετρία είχε σημασία. Μάλιστα στο έργο του *The New Principles of Geometry*, γράφει χαρακτηριστικά:

> *«Σε κάθε περίπτωση, η νέα γεωμετρία της οποίας τα θεμέλια βρίσκονται σε αυτή εδώ την εργασία, αν και δεν έχει εφαρμογή στη φύση, μπορεί ωστόσο να αποτελέσει αντικείμενο της φαντασίας μας· παρ' όλο που δεν χρησιμοποιείται σε πραγματικές μετρήσεις, ωστόσο ανοίγει ένα νέο πεδίο για την εφαρμογή της γεωμετρίας στην ανάλυση και αντιστρόφως».*

Το πρόβλημα του κατά πόσο η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει εφαρμογή στο φυσικό χώρο έγινε αντικείμενο διαμάχης μεταξύ των επιστημόνων και των φιλοσόφων της επιστήμης ιδίως μετά την δημοσίευση της διάλεξης του Riemann: «Για τις υποθέσεις στις οποίες στηρίζονται τα θεμέλια της Γεωμετρίας». Στη φημισμένη αυτή διάλεξη, παρουσιάζεται μια αναλυτική προσέγγιση της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σε αντίθεση με την αξιωματική προσέγγιση των προγενέστερών του. Αναλύοντας τις μαθηματικές ιδιότητες μιας πολλαπλότητας μη καθορισμένων αντικειμένων, που αποκαλούνται σημεία και προσδιορίζονται από ένα σύνολο συντεταγμένων, ο Riemann έδωσε έμφαση για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών στη σημαντική διάκριση ανάμεσα στο απεριόριστο και το άπειρο. Από την εποχή του Pierre Gassendi (1592-1655) ο χώρος, ως ομογενές συνεχές, θεωρούνταν πάντοτε απεριόριστος, και ένα σύνορο αποτελούσε προφανώς μια ιδιομορφία, από μαθηματικής απόψεως. Ο Riemann έδειξε ότι η ομογένεια και το πεπερασμένο είναι συμβατά μεταξύ τους. Η γενίκευση που έκανε στη γκαουσιανή θεωρία των επιφανειών, με αποκορύφωμα την έννοια του καμπύλου χώρου, έδειξε ότι ο χώρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ο χώρος της Γεωμετρίας των Lobachevsky και Bolyai ήταν απλώς ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου χώρου, δηλαδή χώροι σταθερής μηδενικής καμπυλότητας ή σταθερής αρνητικής καμπυλότητας. Ο Riemann, εισάγοντας μια κατάλληλη μετρική, έδειξε ότι μπορούμε να συλλάβουμε ένα χώρο σταθερής μηδενικής καμπυλότητας, δηλαδή ένα σφαιρικό χώρο.

Αυτή η μαθηματική ανάλυση της δομής του χώρου, που ξεκίνησε από τους Gauss και Riemann, έχει μεγάλη σημασία για την διαμόρφωση των σύγχρονων αντιλήψεων για το χώρο στα μαθηματικά.

Ο Riemann γενίκευσε με επιτυχή τρόπο την γκαουσιανή θεωρία της εσωτερικής γεωμετρίας πάνω σε μια επιφάνεια. Ο Gauss, ωθούμενος από το ενδιαφέρον για τη γεωδαισία και τη χαρτογραφία, έστρεψε την προσοχή του στο πρόβλημα μέχρι ποιου σημείου είναι δυνατόν να εκφραστούν οι γεωμετρικές ιδιότητες των καμπυλών, χωρίς να καταφύγει κανείς στη Γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου. Αυτές οι ιδιότητες των καμπυλών επιφανειών, που ονομάζονται εσωτερικές, θα πρέπει να μην επηρεάζονται από μια παραμόρφωση της επιφάνειας μέσα στο περιέχοντα χώρο. Για παράδειγμα, ένας κώνος ή ένας κύλινδρος έχουν τις ίδιες τοπικές εσωτερικές ιδιότητες με ένα επίπεδο, διότι ένα επίπεδο μπορεί να διπλωθεί έτσι ώστε να σχηματίσει ένα κώνο ή έναν κύλινδρο χωρίς να τεντωθεί ή να σχιστεί (δηλ., χωρίς να παραμορφωθούν οι μετρικές του σχέσεις). Από την άλλη, όμως μια σφαίρα δεν μπορεί ποτέ να ξεδιπλωθεί σε ένα επίπεδο χωρίς να υποστεί παραμόρφωση. Επομένως, οι τοπικές εσωτερικές ιδιότητες της σφαίρας διαφέρουν από αυτές του επιπέδου.

Ο Gauss ήταν ο πρώτος που διαχώρισε τις εσωτερικές ιδιότητες μιας επιφάνειας από τις εξωτερικές. Οι εξωτερικές ιδιότητες είναι αυτές που σχετίζονται με το πώς μια επιφάνεια είναι εμβαπτισμένη σε ένα χώρο ανώτερης διάστασης. Επίσης, ο Gauss συνειδητοποίησε πως οι εσωτερικές ιδιότητες των επιφανειών είναι αυτές που «αξίζουν επιμελή μελέτη από τους γεωμέτρες».

Το ενδιαφέρον του Gauss εστιάστηκε ακόμη περισσότερο στο θέμα αυτό, μετά τη γεωδαιτική μελέτη που του ανατέθηκε. Τα αποτέλεσμα των μαθηματικών του ερευνών σχετικά με τη μελέτη, δημοσιεύτηκαν στο άρθρο: "Disquisitiones generales circa superficies curves" (1827), όπου ο Gauss μελετά το πρόβλημα στη γενικότητά του. Το άρθρο αυτό αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη συστηματική παρουσίαση των τετραγωνικών διαφορικών μορφών και εξετάζει τη δυνατότητα ενός εσωτερικού καθορισμού της καμπυλότητας μιας επιφάνειας, η οποία σήμερα αποκαλείται «γκαουσιανή καμπυλότητα».

Στη περίφημη διάλεξη του 1854, ο Riemann υποστήριξε την ιδέα της θεώρησης ν-διάστατων πολλαπλοτήτων[15] για κάθε αριθμό ν, και έδειξε πως να μελετήσουμε την απόσταση και να ορίσουμε την καμπυλότητα σε αυτές, κατά τρόπο που να γενικεύει το *Theorema Egregium* («Εξαιρετικό Θεώρημα») του Gauss που αφορά την καμπυλότητα και δημοσιεύτηκε το 1828. Αν και άλλοι μαθηματικοί είχαν μιλήσει πριν για τον ν-διάστατο Ευκλείδειο χώρο, η ιδέα μιας ν-διάστατης πολλαπλότητας ήταν νέα. Σύμφωνα με αυτή ένας χώρος μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια ν συντεταγμένων για την

[15] Η λέξη «πολλαπλότητα» γενικεύει την ιδέα της «επιφάνειας».

εξακρίβωση της θέσης ενός σημείου, όμως αυτές οι συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητο να συνδέονται με την απόσταση κατά το συνήθη ευκλείδειο τρόπο. Ο σύγχρονος ορισμός μιας πολλαπλότητας απαιτεί μόνο να υπάρχουν τοπικά αυτά τα συστήματα συντεταγμένων, με επιπρόσθετη πληροφορία σχετική με τον τρόπο συμβατικής συνυπαρξή τους, δηλαδή να μην υπάρχουν προβλήματα σε περιοχές της πολλαπλότητας επικαλυπτόμενες από περισσότερα του ενός τέτοια συστήματα.

Για να κατανοήσει κανείς την καμπυλότητα, δεν είναι απαραίτητο να φανταστεί την πολλαπλότητα εμφυτευμένη σε Ευκλείδειο χώρο μεγαλύτερης διάστασης. Η καμπυλότητα μετρά το βαθμό κατά τον οποίο η Γεωμετρία αποκλίνει από την Ευκλείδεια. Γενικά, η καμπυλότητα μπορεί να ποικίλλει από σημείο σε σημείο, αν όμως επιθυμούμε να είναι η πολλαπλότητα ομοιογενής, δηλαδή τα σχήματα να μπορούν να κινούνται πάνω στην πολλαπλότητα χωρίς να μεταβάλλονται μήκη ή γωνίες, τότε η καμπυλότητα θα είναι σταθερή.

Με την εμφάνιση της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας έγινε φανερό ότι τα καθαρά μαθηματικά, τα οποία δεν περιορίζονται από λογικής πλευράς στις τρεις διαστάσεις, θα μπορούσαν να εφαρμοστούν με συνεπή τρόπο σε έννοιες χώρου με οποιοδήποτε αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων. Το ερώτημα γιατί ο συνηθισμένος χώρος έχει μόνο τρεις διαστάσεις θεωρήθηκε από αυτό το σημείο και πέρα πρόβλημα της φυσικής.

Ο Kant ήταν ένας από του πρώτους για τους οποίους η τριδιαστικότητα του χώρου έγινε πρόβλημα της φυσικής. Στην εργασία του "Gedanken von der wahren Schätzung des lebendigen Kraft", εξετάζει τη δυνατότητα ύπαρξης χώρων με διαφορετικές διαστάσεις. Ωστόσο, πίστεψε ότι είχε ανακαλύψει το λόγο για την τριδιαστατικότητα του φυσικού χώρου της εμπειρίας μας στο νευτώνειο νόμο της βαρύτητας, σύμφωνα με τον οποίο, η ένταση της δύναμης μειώνεται με το τετράγωνο της απόστασης.

Ο Gauss, σε ένα γράμμα του στον Gerling (8 Απριλίου 1844), αναφέρεται σε μια γενίκευση των μελετών του σχετικά με τη συμμετρία και τη σύμπτωση σε μια Γεωμετρία περισσότερων διαστάσεων, *«για την οποία εμείς οι άνθρωποι δεν διαθέτουμε καμία εποπτεία, αλλά η οποία, θεωρούμενη in abstracto, δεν είναι ασυνεπής»*. Ο Gauss φαίνεται να έχει κατανοήσει ότι το πρόβλημα αν ο χώρος έχει τρεις ή περισσότερες διαστάσεις έχει την ίδια βάση με το πρόβλημα του ευκλείδειου ή μη ευκλείδειου χαρακτήρα του χώρου. (Jammer, 1993)

Ο Riemann, που ασχολήθηκε και με τη Γεωμετρία του Σύμπαντος, διατύπωσε την άποψη ότι το Σύμπαν είναι προφανώς τρισδιάστατο και, κατά τα φαινόμενα, ομοιογενές

(δηλαδή τα αντικείμενα μπορούν να κινούνται χωρίς να υφίστανται παραμορφώσεις). Δεν είναι όμως σαφές ότι η Γεωμετρία του είναι Ευκλείδεια. Θα έπρεπε να απασχολήσει κυρίως τους φυσικούς το τι είδος τρισδιάστατης πολλαπλότητας είναι. Οι μαθηματικοί μπορούν να βοηθήσουν, δείχνοντάς τους τις δυνατές εκδοχές μιας τρισδιάστατης πολλαπλότητας. (Davis D., 2001)

Ωστόσο το 19^{ο} αιώνα έγινε μια σημαντική πρόοδος στα μαθηματικά όσον αφορά την αποσαφήνιση της έννοιας της διάστασης, ιδιαίτερα μετά την ανάπτυξη της Ομοπαραλληλικής και της Προβολικής Γεωμετρίας. Ο J.Pluecker, γενικεύοντας τη βασική ιδέα της αρχής του δυϊσμού στην Προβολική Γεωμετρία, έδειξε ότι η διάσταση ενός χώρου δεν εξαρτάται μόνο από τοπολογικές ιδιότητες, αλλά και από την επιλογή των στοιχείων από τα οποία κατασκευάζεται ο χώρος. Έτσι, παραδείγματος χάριν, ένα ευκλείδειο επίπεδο είναι τρισδιάστατο, αν θεωρηθεί ως μια πολλαπλότητα κύκλων (δύο συντεταγμένες καθορίζουν το κέντρο και η τρίτη την ακτίνα του). Από την άλλη μεριά, αν επιλεγούν ως βασικά στοιχεία του χώρου κωνικές τομές, το επίπεδο εμφανίζεται ως πενταδιάστατη πολλαπλότητα. Εν συντομία, η άποψη του Pluecker είναι ότι η διαστατικότητα δεν αποτελεί μια απόλυτη ιδιότητα του χώρου, αλλά εξαρτάται από τα βασικά στοιχεία που συνιστούν το χώρο. Ωστόσο, το 1911 ο L. E. J.Brouwer έδειξε ότι, όσον αφορά τις καρτεσιανές συντεταγμένες, η διαστατικότητα του χώρου είναι ένα τοπολογικό αναλλοίωτο, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από οποιονδήποτε συνεχή μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Επομένως οι εξελίξεις στο χώρο της Γεωμετρίας προκάλεσαν νέο ενδιαφέρον μεταξύ των φιλοσόφων και των επιστημόνων για το αντίστοιχο πρόβλημα της διαστατικότητας του φυσικού χώρου. Μάλιστα, φαίνεται ότι αυτές οι μαθηματικές γενικεύσεις της διαστατικότητας του χώρου θεωρήθηκαν κατά κάποιο τρόπο από τους επιστήμονες ως μια πρόκληση για να αποδείξουν την τριδιαστατικότητα του συνηθισμένου χώρου. Έτσι, κατά το 19^{ο} αιώνα έγιναν πάμπολλες απόπειρες να αποδειχθεί ότι ο χώρος της φυσικής έχει μόνο τρεις διαστάσεις. Αν και οι αξιόλογες προσπάθειες ήταν αρκετές εδώ θα σταθούμε στην προσπάθεια του Η. Poincaré (1854-1912).

Ο Poincaré επιχείρησε να αποδείξει την τριδιαστατικότητα του χώρου της εμπειρίας με τον ακόλουθο συλλογισμό, που περιγράφεται από τον ίδιο σε ένα άρθρο του, γραμμένο τον τελευταίο χρόνο της ζωής του:

«το πιο σημαντικό από όλα τα θεωρήματα της τοπολογικής γεωμετρίας είναι η πρόταση ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις ... Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις; Για να διαχωρίσουμε το χώρο σε μέρη, είναι απαραίτητες τομές τις οποίες αποκαλούμε επιφάνειες, για να διαχωρίσουμε τις επιφάνειες είναι απαραίτητες τομές τις οποίες αποκαλούμε γραμμές για να διαχωρίσουμε τις γραμμές είναι απαραίτητες τομές τις οποίες αποκαλούμε σημεία. Δεν μπορούμε, όμως, να προχωρήσουμε παραπέρα, αφού ένα σημείο, από τη στιγμή που δεν αποτελεί ένα συνεχές, δεν μπορεί να διαιρεθεί. Επομένως, οι γραμμές, οι οποίες μπορούν να διαχωριστούν από τομές που οι ίδιες δεν είναι συνεχή, είναι συνεχή μιας διάστασης. Οι επιφάνειες, οι οποίες μπορούν να διαχωριστούν σε μέρη από μονοδιάστατα συνεχή, είναι συνεχή δύο διαστάσεων. Και εν τέλει ο χώρος, ο οποίος μπορεί να διαχωριστεί από δισδιάστατα συνεχή, είναι ένα συνεχές τριών διαστάσεων.»

Αν και ο Poincaré πίστεψε ότι είχε ανακαλύψει μια θεμελιώδη ποιοτική βάση για να αποδώσει στο συνηθισμένο χώρο τριδιαστατικότητα, είναι προφανές ότι η απόδειξή του στην καλύτερη περίπτωση δείχνει απλώς την ύπαρξη ενός κάτω ορίου στον αριθμό των διαστάσεων.

Η αξία ωστόσο του παραπάνω συλλογισμού έγκειται στο ότι μπορεί να θεωρηθεί ως η απαρχή της σύγχρονης τοπολογικής έρευνας σχετικά με το μαθηματικό πρόβλημα της διαστατικότητας. Ο Poincaré αν και δεν απέβλεπε σε έναν αυστηρό ορισμό της έννοιας της διάστασης προέβλεψε σωστά τα δύο ουσιώδη στοιχεία του σύγχρονου ορισμού της: τη χρήση των διαχωριστικών υποχώρων και τον επαγωγικό χαρακτήρα του ορισμού. Πράγματι, ο γνωστός ορισμός της διάστασης από τον L. E. J.Brouwer ως τοπολογικού αναλλοίωτου, βασίζεται στη θεώρηση του Poincaré. Με την ανάπτυξη της σύγχρονης θεωρίας συνόλων, οι μαθηματικοί που μέχρι τότε χρησιμοποιούσαν την έννοια της διάστασης με ασαφή τρόπο, άρχισαν να ενδιαφέρονται για ένα ακριβή ορισμό. Η περίφημη ένα προς ένα αντιστοιχία του Cantor ανάμεσα στα σημεία μιας γραμμής και τα σημεία ενός επιπέδου, και η συνεχής απεικόνιση ενός διαστήματος σε όλο το χώρο, από το Peano, έδειξαν τις ατέλειες του παραδοσιακού ορισμού της διαστατικότητας ως του μικρότερου αριθμού συνεχών πραγματικών παραμέτρων που επαρκούν για να προσδιορίσουν τη θέση του σημείου. Μόλις το 1911 ο Brouwer κατάφερε να αποδείξει

ότι οι ευκλείδειοι χώροι με διαφορετικές διαστατικότητες είναι μη ομοιομορφικοί, δηλαδή δεν είναι δυνατόν να απεικονιστούν ο ένας στον άλλον μέσω μιας συνεχούς, ένα προς ένα, αντιστοιχίας. Οι σημαντικές συνεισφορές των H. L. Lebesque, K. Menger, P. Urysohn και W. Hurewicz οδήγησαν σε μια περαιτέρω αποσαφήνιση της μαθηματικής έννοιας της διάστασης. (Jammer, 2001)

ΜΕΡΟΣ Γ

ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΤΩΝ GAUSS, LOBACHEVSKY ΚΑΙ BOLYAI.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας θα παραθέσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά αποτελέσματα της δουλειάς των τριών μαθηματικών που ουσιαστικά ανακάλυψαν την πρώτη Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Πιο συγκεκριμένα, από το έργο του Gauss θα δούμε τον ορισμό της παραλληλίας και την απόδειξη κάποιων βασικών ιδιοτήτων των παράλληλων ευθειών, από τις λίγες που αποδίδονται στον ίδιο. Από τη δουλειά του Lobachevsky, θα εξετάσουμε τη θεωρία των παραλλήλων όπως παρουσιάζεται από τον ίδιο στο έργο του *Geometrical Researches on the Theory of Parallels.* Η αγγλική μετάφραση του βιβλίου αυτού βρίσκεται στο παράρτημα του βιβλίου του Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (1955). Τέλος, από το *Παράρτημα* του Bolyai θα δούμε πως αποδεικνύεται ο Νόμος των Ημιτόνων και πως ένα άλυτο πρόβλημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ο Τετραγωνισμός του κύκλου, επιλύεται στα πλαίσια της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

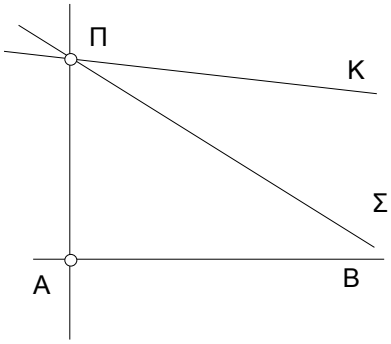
Η Θεωρία των Παραλλήλων του Carl F. Gauss

Από τις σημειώσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στα χειρόγραφα του Gauss σχετικά με τη θεωρία των παραλλήλων παραθέτουμε δείγματα της δουλειάς του.

Ο Gauss αναπτύσσει τη νέα Γεωμετρία ξεκινώντας με ένα διαφορετικό ορισμό των παραλλήλων.

Ορισμός

Έστω μια ευθεία ΑΒ, Π ένα σημείο εκτός αυτής και ΑΠ είναι η κάθετη από το Π στην ΑΒ. Τότε, η ευθεία ΠΚ είναι παράλληλη στην ΑΒ, αν για κάθε ευθεία ΠΣ με Σ ένα σημείο που κείται στο ΒΑΠΚ και $0 < \angle$ΑΠΣ $< \angle$ΑΠΚ, η ΠΣ τέμνει την ΑΒ.



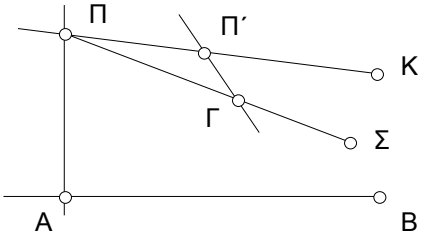
Αν θεωρήσουμε το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το Π, η παράλληλη ΠΚ είναι η «πρώτη» από τις ευθείες που διέρχονται από το Π και μετακινούμενες προς συγκεκριμένη κατεύθυνση, π.χ. τη θετική φορά, δεν τέμνει την ΑΒ. Παρατηρούμε ότι χωρίς το Πέμπτο Αίτημα δεν γνωρίζουμε αν αυτή η «πρώτη» ευθεία είναι μοναδική. Ακόμη η κατεύθυνση που μετακινούμε την ευθεία προσδιορίζει και την παράλληλη της ΑΒ, άρα από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο παράλληλες στην ΑΒ. Οι ευθείες που διέρχονται από το Π και δεν τέμνουν την ΑΒ θα καλούνται μη-τέμνουσες ευθείες.

<u>Θεώρημα</u>

Σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, η παραλληλία είναι σχέση ισοδυναμίας.

<u>Απόδειξη</u>

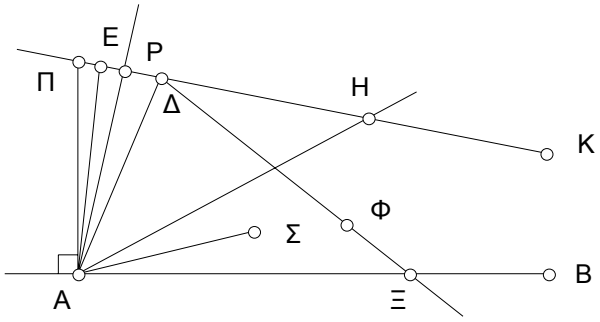
Ι. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η παραλληλία ευθειών προς μια κατεύθυνση είναι καλά ορισμένη.



Πιο συγκεκριμένα, αν η ΠΚ είναι παράλληλη στην ΑΒ τότε για οποιοδήποτε σημείο Π΄ μεταξύ των Π και Κ, η Π΄Κ είναι παράλληλη στην ΑΒ.

Έστω μια ευθεία που διέρχεται από το Π΄, η Π΄Γ, τέτοια ώστε το σημείο Γ να βρίσκεται μέσα στο ΒΑΠ΄Κ. Ενώνουμε το Π με το Γ και υποθέτουμε ότι η ΠΓ τέμνει την ΑΒ. Όμως η Π΄Γ εισέρχεται σε τρίγωνο και σύμφωνα με το αξίωμα του Pasch, και πρέπει να εξέρχεται από την ΑΒ.

ΙΙ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι αν η ΠΚ είναι παράλληλη στην ΑΒ, τότε και η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΠΚ.

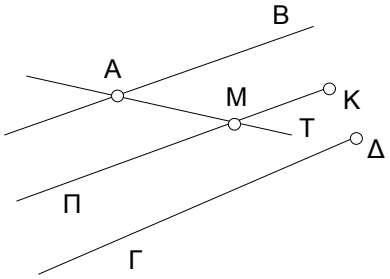


Έστω Ρ ένα σημείο της ΠΚ, τέτοιο ώστε η ΑΡ να είναι κάθετη στην ΠΚ. Έστω ΑΣ μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από το Α και το Σ βρίσκεται στο ΚΠΑΒ. Επιλέγουμε την ΑΓ τέτοια ώστε να ισχύει ∠ΡΑΓ = ½ ∠ΣΑΒ. Τότε, είτε η ΑΓ τέμνει την ΠΚ, είτε όχι. Ας υποθέσουμε ότι την τέμνει στο σημείο Δ και έστω Ε ένα σημείο τέτοιο ώστε ΡΕ= ΡΔ και Ε≠Δ. Τότε ∠ΕΑΔ = ∠ΣΑΒ. Επιλέγουμε ΔΦ ώστε ∠ΑΔΦ = ∠ΑΕΔ. Η ευθεία ΠΚ είναι παράλληλη στην ΑΒ και έτσι η ΔΦ τέμνει την ΑΒ, έστω Ξ. Έστω Η σημείο της ΠΚ με ΕΗ = ΔΞ. Τότε από το κριτήριο ισότητας τριγώνων Πλευρά-Γωνία-Πλευρά τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΑΔΞ είναι ίσα. Επομένως ∠ΕΑΗ =∠ΔΑΞ. Άρα, ∠ΕΑΗ = ∠ΕΑΔ + ∠ΔΑΗ = ∠ΣΑΒ + ∠ΔΑΗ = ∠ΔΑΓ από όπου προκύπτει ότι ∠ΣΑΒ = ∠ΗΑΒ και συνεπώς η ΑΗ συμπίπτει με την ΑΣ.

ΙΙΙ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΠΚ και η ΠΚ είναι παράλληλη στη ΓΔ, τότε και η ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

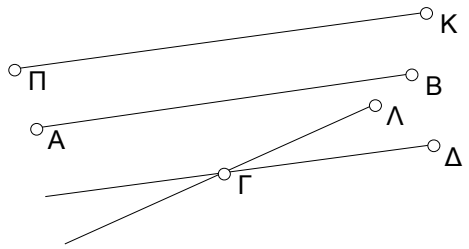
<u>Περίπτωση 1</u>:Η ΠΚ είναι ανάμεσα στις ΑΒ και ΓΔ.



Υποθέτουμε την ημιευθεία ΑΣ προς το μέρος του Β με Σ να κείται στο ΒΑΓΔ. Επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΠΚ, η ΑΣ τέμνει την ΠΚ σε ένα σημείο, έστω Μ. Έστω Τ ένα σημείο της ΑΣ με ΑΤ > ΑΜ. Επειδή η ΠΚ είναι παράλληλη στη ΓΔ, η ΜΤ

τέμνει τη ΓΔ και επομένως η ΑΣ τέμνει τη ΓΔ.

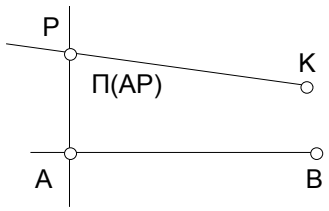
<u>Περίπτωση 2</u>: Η ΑΒ είναι ανάμεσα στις ΠΚ και ΓΔ.



Αν η ΑΒ δεν είναι παράλληλη στη ΓΔ, τότε υπάρχει ευθεία ΓΛ με ΑΒ παράλληλη στη ΓΛ. Το Λ δε βρίσκεται μέσα στο ΓΔΒΑ, διότι η ΠΚ είναι παράλληλη στη ΓΔ, που σημαίνει ότι η ΓΛ τέμνει την ΠΚ, άτοπο. Επίσης το Λ δεν βρίσκεται έξω από το ΓΔΒΑ, διότι επειδή η ΓΛ// ΑΒ και ΑΒ // ΠΚ, από την περίπτωση 1 έπεται ότι ΓΛ // ΠΚ και συνεπώς η ΓΔ τέμνει την ΠΚ, άτοπο. ■

<u>Ορισμός</u>

Έστω οι παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΡΚ. *Γωνία παραλληλίας* Π(ΑΡ) είναι η γωνία ανάμεσα στην παράλληλη ΡΚ και την κάθετη από το Ρ στην ΑΒ στο σημείο Α.



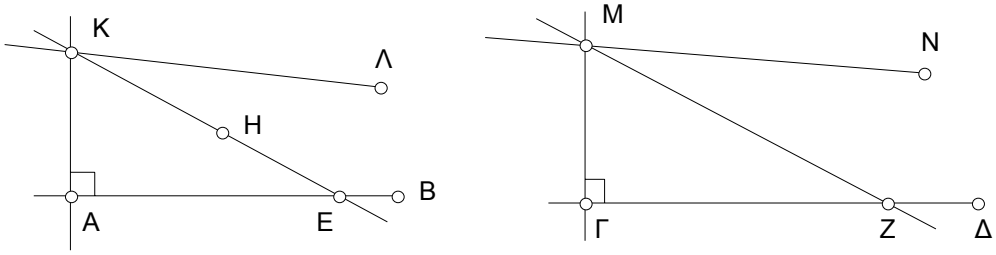
Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την υπόθεση της Ορθής γωνίας η Π(ΑΡ) είναι ίση με μια ορθή γωνία για οποιοδήποτε τμήμα ΑΡ, ενώ από την υπόθεση της Οξείας γωνίας έπεται ότι η Π(ΑΡ) είναι γνήσια μικρότερη από μια ορθή γωνία. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες της γωνίας παραλληλίας για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας.

Οι αποδείξεις των παρακάτω ιδιοτήτων δεν είναι καταγεγραμμένες ως αποδείξεις του Gauss, αλλά ο συλλογισμός τους είναι σύμφωνος με τις ιδέες του.

Ι. Η γωνία παραλληλίας Π(χ) εξαρτάται μόνο από το μήκος χ. Δηλαδή, αν ΑΚ = ΓΜ, τότε Π(ΑΚ) = Π(ΓΜ).

Απόδειξη:

Έστω ότι ισχύει Π(ΑΚ) < Π(ΓΜ).



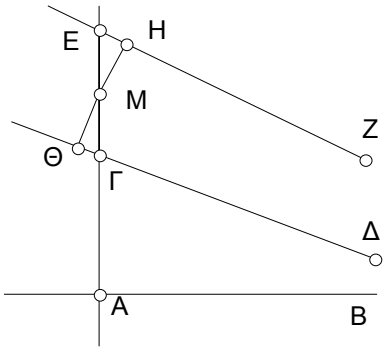
Τότε υπάρχει μια ημιευθεία ΚΗ τέτοια ώστε ∠ΑΚΗ = ∠ΓΜΝ (1) και τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Έστω Ζ ένα σημείο της ΓΔ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΑΕ. Τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΓΖΜ έχουν: ΑΚ = ΓΜ, ΑΕ = ΓΖ και ∠ΚΑΕ = ∠ΜΓΖ = 1∟,επομένως είναι ίσα. Άρα ∠ΑΚΕ = ∠ΓΜΖ. Όμως λόγω της (1), έπεται ∠ΓΜΖ = ∠ΓΜΝ, δηλαδή οι ευθείες ΜΖ και ΜΝ συμπίπτουν, άτοπο.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι Π(ΑΚ) > Π(ΓΜ).■

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει μια μονάδα μήκους και υπάρχει μια μέτρηση τμημάτων πάνω σε ευθεία. Η παραπάνω ιδιότητα της γωνίας παραλληλίας μας επιτρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση Π : [0, ∞] → [0, π/2] με Π(χ) = Π(ΑΡ), όπου ΑΡ είναι οποιοδήποτε τμήμα μήκους χ.

ΙΙ. Αν ισχύει η υπόθεση της οξείας γωνίας, η γωνία παραλληλίας είναι μια γνήσια φθίνουσα συνάρτηση του μήκους χ. Δηλαδή, αν ισχύει η υπόθεση της Οξείας γωνίας και ΑΕ > ΑΓ, τότε Π(ΑΕ) < Π(ΑΓ).

Απόδειξη:

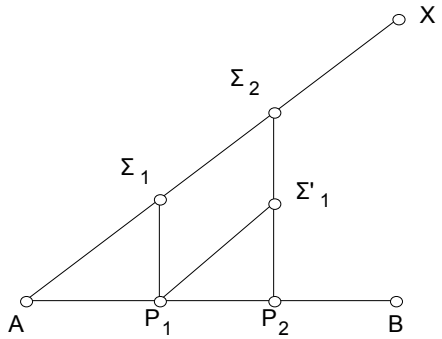


Έστω ότι ισχύει Π(ΑΕ) = Π(ΑΓ). Αν Μ είναι το μέσο της ΓΕ, κατασκευάζουμε τη ΜΗ κάθετη στην ΕΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει τη ΓΔ στο Θ. Επειδή Π(ΑΕ) = Π(ΑΓ), έπεται ∠ΜΕΗ = ∠ΜΓΘ. Επίσης έχουμε ΜΕ = ΜΓ και ∠ΕΜΗ = ∠ΓΜΘ. Επομένως τα τρίγωνα ΜΕΗ και ΜΓΘ είναι ίσα. Άρα η ΜΘ είναι κάθετη στη ΓΔ. Αυτό σημαίνει ότι οι παράλληλες ΓΔ και ΕΖ έχουν κοινή κάθετη υπό την υπόθεση της Οξείας γωνίας, που είναι άτοπο.

Έστω ότι ισχύει Π(ΑΕ) > Π(ΑΓ), τότε υπάρχει μια ευθεία που διέρχεται από το Ε, π.χ. η ΕΚ, τέτοια ώστε ∠ΓΕΚ = ∠ΑΓΔ. Επομένως, ∠ΑΕΚ = ∠ΑΕΖ, που σημαίνει ότι η ΕΚ τέμνει την ΑΒ και άρα τέμνει και τη ΓΔ. Όμως, αυτό είναι άτοπο, διότι σύμφωνα με την πρόταση Ι. 27[16], η ΕΚ δεν τέμνει τη ΓΔ.■

ΙΙΙ. Κάθε οξεία γωνία είναι γωνία παραλληλίας για κάποιο μήκος.

<u>Απόδειξη</u>:



Κατασκευάζουμε τη γωνία ∠ΒΑΧ. Υποθέτουμε ότι η $Σ_1P_1$ είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο P_1 και το $Σ_1$ είναι σημείο της ΑΧ. Έστω δ>0 το έλλειμμα του τριγώνου $AP_1Σ_1$. Έστω ένα σημείο P_2 πάνω στην ΑΒ τέτοιο ώστε $AP_1 = P_1P_2$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο P_2 τέμνει την ΑΧ στο σημείο $Σ_2$, τότε $P_2Σ_2 > P_1Σ_1$ και μπορούμε να κατασκευάσουμε σημείο $Σ'_1$ πάνω στη $P_2Σ_2$ τέτοιο ώστε $P_2Σ'_1 = P_1Σ_1$. Επειδή το τρίγωνο $AP_2Σ_2$ περιέχει τα ίσα τρίγωνα $AP_1Σ_1$ και $P_1P_2Σ'_1$, που το καθένα έχει έλλειμμα ίσο με δ, έπεται ότι το έλλειμμα του είναι τουλάχιστον 2δ. Αν κάθε κάθετη στην ΑΒ μέσα στη γωνία ∠ΒΑΧ τέμνει την ΑΧ, τότε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με έλλειμμα γωνιών μεγαλύτερο από νδ και κατά συνέπεια μεγαλύτερο και από δύο ορθές γωνίες, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως η γωνία ∠ΒΑΧ είναι γωνία παραλληλίας για κάποιο μήκος λ, δηλαδή Π(λ) = ∠ΒΑΧ.

[16] Πρόταση Ι 27: Αν δύο ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία, ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Η Θεωρία των Παραλλήλων του Lobachevsky.

Στην παρούσα ενότητα γίνεται αναφορά στη *Θεωρία των Παραλλήλων* όπως αναπτύχθηκε από τον Lobachevsky και παρουσιάζεται στο παράρτημα που υπάρχει στο τέλος του βιβλίου του Bonola, Non-*Euclidean Geometry* (1955).

Ο Lobachevsky ξεκινάει το έργο του με ένα σύντομο σχόλιο για τους λόγους που η επιστήμη της Γεωμετρίας, εκτός από τη χρήση της ανάλυσης, δεν έχει σημειώσει καμία πρόοδο από την εποχή του Ευκλείδη. Ο Ρώσος γεωμέτρης το αποδίδει σε συγκεκριμένες «ατέλειες», όπως στην ασάφεια των θεμελιωδών εννοιών των γεωμετρικών μεγεθών και στον τρόπο και τη μέθοδο μέτρησης τους.

Κάνει ειδική αναφορά στο έργο του Legendre, λέγοντας ότι οι προσπάθειες του δεν έφεραν κάποιο αποτέλεσμα, διότι αναγκάστηκε να «εγκαταλείψει το μόνο αυστηρό δρόμο και να στρίψει σε κάποιο παράδρομο» και να βρει καταφύγιο σε βοηθητικά θεωρήματα, τα οποία πάλευε παράλογα να τα παρουσιάσει ως απαραίτητα αξιώματα.

Επίσης, αναφέρει ότι με το έργο του προσπαθεί να απαλλάξει τη Γεωμετρία από τις «ατέλειες» της εκτός από εκείνες που θεωρεί ότι είναι ξένες προς αυτήν και δεν έχουν καμία επιρροή πάνω στη θεωρία των παραλλήλων, όπως π.χ. ο ορισμός της ευθείας.

Τέλος, για να διευκολύνει τον αναγνώστη του, ο Lobachevsky παραθέτει χωρίς απόδειξη δεκαπέντε θεωρήματα που πρέπει να είναι γνωστά, για την καλύτερη κατανόηση των όσων θα ακολουθήσουν. Από τα θεωρήματα αυτά θα αναφέρουμε μόνο όσα χρειάζονται.

Η ουσιαστική δουλειά του Lobachevsky ξεκινάει με το θεώρημα 16. Αποδεικνύοντας αυτό το θεώρημα ουσιαστικά ορίζει την παραλληλία ευθειών και με τις παρατηρήσεις που κάνει αποσαφηνίζει τον ορισμό στα πλαίσια της νέας Γεωμετρίας.

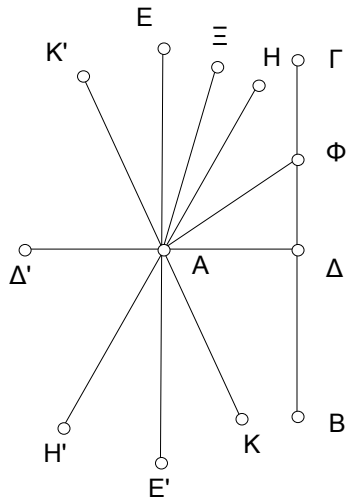
Θεώρημα 16:

Όλες οι ευθείες γραμμές που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και διέρχονται από ένα σημείο ως προς μία δοθείσα ευθεία του ίδιου επιπέδου μπορούν να χωριστούν σε δύο κλάσεις, σε εκείνες που τέμνουν την ευθεία και σε εκείνες που δεν την τέμνουν.

Οι οριακές ευθείες αυτών των κλάσεων θα ονομάζονται *παράλληλες ευθείες* προς τη δοθείσα ευθεία.

Απόδειξη

Έστω η ευθεία ΒΓ και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε κάθετη ευθεία ΑΔ στη ΒΓ, και στη συνέχεια την ΑΕ κάθετη στην ΑΔ.



Μέσα στην ορθή γωνία ∠ΕΑΔ όλες οι ευθείες που διέρχονται από το Α είτε τέμνουν τη ΔΓ (π.χ. η ΑΦ), είτε όχι (π.χ. η κάθετη ΑΕ).

Στο ερώτημα αν η ΑΕ είναι η μόνη που δεν τέμνει τη ΔΓ, θα υποθέσουμε ότι είναι δυνατό να υπάρχουν και άλλες ευθείες που δεν την τέμνουν όσο και αν τις προεκτείνουμε (π.χ. η ΑΞ).

Περνώντας από τις ευθείες που τέμνουν σε εκείνες που δεν τέμνουν, πρέπει να συναντήσουμε μια ευθεία *οριακή* με την ιδιότητα όλες οι ευθείες που βρίσκονται από το ένα μέρος της να τέμνουν τη ΔΓ και όλες οι ευθείες που βρίσκονται από το άλλο να μην την τέμνουν. Αν ΑΗ είναι αυτή η ευθεία τότε η ΑΗ είναι παράλληλη στη ΔΓ. Η γωνία ∠ΗΑΔ, ανάμεσα στην παράλληλη ΑΗ και την ΑΔ καλείται *γωνία παραλληλίας* που αντιστοιχεί στο τμήμα ΑΔ και θα συμβολίζεται με Π(ρ), όπου ρ =ΑΔ.

Αν Π(ρ) = π/2, τότε η προέκταση ΑΕ΄ της κάθετης ΑΕ, θα είναι παράλληλη στην προέκταση ΔΒ της ΔΓ. Επιπλέον, όσο αφορά τις τέσσερις ορθές γωνίες που σχηματίζονται στο σημείο Α από τις κάθετες ΑΕ και ΑΔ και τις προεκτάσεις ΑΕ΄ και ΑΔ’, σημειώνουμε ότι κάθε ευθεία γραμμή που διέρχεται από το Α, είτε η ίδια είτε η προέκτασή της, βρίσκεται σε μια από τις δύο ορθές γωνίες που «βλέπουν» τη ΒΓ. Ως εκ τούτου, εκτός από την παράλληλη ΕΕ΄, όλες οι υπόλοιπες ευθείες αν προεκταθούν αρκετά και προς τις δύο κατευθύνσεις πρέπει να τέμνουν τη ΒΓ.

Αν Π(ρ)< π/2, τότε από την άλλη μεριά της ΑΔ σχηματίζοντας τη γωνία ∠ΔΑΚ = Π(ρ) θα κείται μια ευθεία ΑΚ, παράλληλη στην προέκταση ΔΒ της ευθείας ΔΓ.

Επομένως, με αυτή την υπόθεση πρέπει να κάνουμε ένα διαχωρισμό της παραλληλίας ανάλογα με την κατεύθυνση των ευθειών.

Όλες οι ευθείες ή οι προεκτάσεις τους, μέσα στις δύο ορθές γωνίες στραμμένες προς τη ΒΓ, είτε ανήκουν σε αυτές που τέμνουν , αν βρίσκονται μέσα στη γωνία ∠ΗΑΚ =2 Π(ρ) ανάμεσα στις παράλληλες, είτε ανήκουν σε αυτές που δεν τέμνουν, αν βρίσκονται από την άλλη μεριά των παραλλήλων ΑΗ και ΑΚ, στο άνοιγμα των δύο γωνιών ∠ΕΑΗ= π/2- Π(ρ), ∠Ε΄ΑΚ = π/2- Π(ρ), ανάμεσα στις παράλληλες και την ΕΕ', που είναι κάθετη στην ΑΔ. Με ανάλογο σκεπτικό, από το άλλο μέρος της ΕΕ΄ οι προεκτάσεις ΑΗ΄ και ΑΚ΄ των παραλλήλων ΑΗ και ΑΚ θα είναι παράλληλες στη ΒΔ. Οι εναπομείναντες ευθείες ανήκουν στις τέμνουσες αν είναι μέσα στη γωνία ∠Κ'ΑΗ' ή στις μη τέμνουσες αν είναι μέσα στις γωνίες ∠Κ΄ΑΕ, ∠Η΄ΑΕ΄.

Συνοψίζοντας, για την υπόθεση Π(ρ) = π/2 οι ευθείες μπορεί να είναι μόνο τέμνουσες ή παράλληλες, ενώ για την υπόθεση Π(ρ) < π/2, πρέπει να επιτρέψουμε την ύπαρξη δύο παραλλήλων, μια σε κάθε μέρος. Επιπλέον οι εναπομείναντες ευθείες πρέπει να διαχωριστούν σε τέμνουσες και μη τέμνουσες.

Τέλος, και οι δύο υποθέσεις εξυπηρετούνται από το γεγονός ότι μια ευθεία γίνεται τέμνουσα με τη μικρότερη δυνατή απόκλιση της προς το μέρος που βρίσκεται η παράλληλη. Δηλαδή, αν η ΑΗ είναι παράλληλη στη ΔΓ τότε κάθε ευθεία ΑΦ τέμνει τη ΔΓ, όσο μικρή κι αν είναι η γωνία ∠ΗΑΦ.

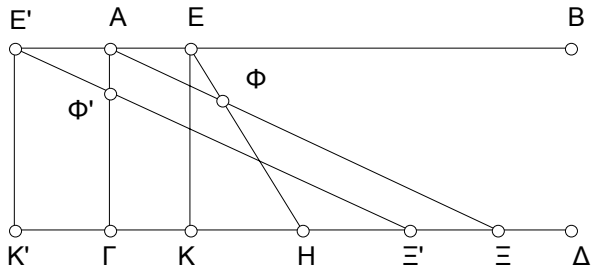
Το τελευταίο συμπέρασμα αποδεικνύεται στο ακόλουθο:

<u>Θεώρημα 17:</u>

Μια ευθεία διατηρεί το χαρακτηριστικό της παραλληλίας σε όλα τα σημεία της.

Αυτό σημαίνει ότι αν οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και έστω Ε ένα τυχαίο σημείο της ΑΒ, τότε οι ευθείες ΕΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

<u>Απόδειξη</u>



Έστω η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ και η ΑΓ είναι κάθετη στη ΓΔ. Παίρνουμε δύο τυχαία σημεία πάνω στην ΑΒ την οποία προεκτείνουμε πέρα από την κάθετη. Έστω Ε το σημείο της ΑΒ προς το μέρος της κάθετης που η ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ. Από το Ε φέρουμε κάθετη ΕΚ στην ΓΔ και μια ευθεία ΕΦ μέσα στη γωνία ∠ΒΕΚ. Ενώνουμε τα σημεία Α και Φ και η προέκταση της ΑΦ (από το θεώρημα 16) τέμνει τη ΓΔ στο Ξ. Έτσι σχηματίζεται τρίγωνο ΑΓΞ που περιέχει την ΕΦ. Λόγω του τρόπου κατασκευής, η ΕΦ δεν μπορεί να τέμνει την ΑΓ όπως επίσης δεν μπορεί να τέμνει την ΑΞ ή ΕΚ για δεύτερη φορά (θεώρημα 2)[17]. Άρα πρέπει να τέμνει τη ΓΔ, έστω στο Η (θεώρημα 3)[18].

Αν Ε΄ είναι ένα σημείο στην προέκταση της ΑΒ και Ε΄Κ΄ κάθετη στην προέκταση της ΓΔ. Φέρουμε την Ε΄Φ΄ έτσι ώστε η γωνία ∠ΑΕ΄Φ΄ να είναι αρκετά μικρή που να τέμνει την ΑΓ, έστω στο Φ΄. Σχηματίζοντας την ίδια γωνία με την ΑΒ, σχεδιάζουμε από το Α την ευθεία ΑΦ η προέκταση της οποίας τέμνει τη ΓΔ στο Ξ (Θεώρημα 16).

Επομένως, παίρνουμε τρίγωνο ΑΞΓ στο οποίο περιέχεται η προέκταση της Ε΄Φ΄. Επειδή αυτή η ευθεία δεν μπορεί να τέμνει την ΑΓ σε δεύτερο σημείο και επίσης δεν τέμνει την ΑΞ, εφόσον οι γωνίες ∠ΒΑΞ και ∠ΒΕ΄Ξ΄ είναι ίσες (Θεώρημα 7), τότε πρέπει να τέμνει τη ΓΔ, έστω στο Ξ΄.

Επομένως, από οποιαδήποτε σημεία Ε και Ε' οι ευθείες ΕΦ και Ε΄Φ΄, όσο μικρή κι αν είναι η απόκλιση από την ευθεία ΑΒ, πάντα θα τέμνουν τη ΓΔ.

<u>Θεώρημα 18:</u>

Δύο ευθείες είναι πάντα αμοιβαία παράλληλες.

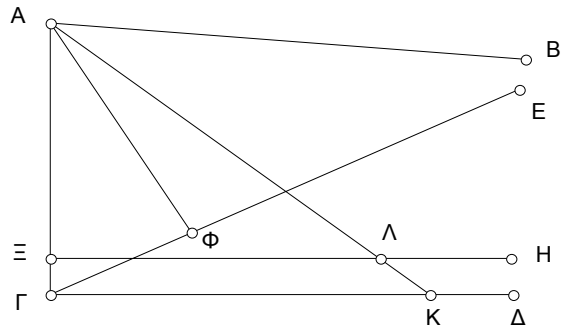
Δηλαδή, αν η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ευθεία ΓΔ, τότε και η ΓΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ.

[17] <u>Θεώρημα 2</u>: Δύο ευθείες γραμμές δεν τέμνονται σε δύο σημεία.

[18] <u>Θεώρημα 3</u>: Μια ευθεία γραμμή προεκτινόμενη αρκετα και προς τις δύο μεριές πρέπει να προχωρήσει πέρα από τα σύνορα, και με τέτοιο τρόπο ώστε να χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη.



Από το Α φέρουμε κάθετη ευθεία ΑΓ στη ΓΔ και από το Γ φέρουμε ευθεία ΓΕ τέτοια ώστε να σχηματίζεται μια (τυχαία) οξεία γωνία ∠ΑΓΔ με τη ΓΔ. Επίσης από το Α φέρουμε την ΑΦ κάθετη στη ΓΕ, και έτσι σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΦ στο οποίο η ΑΓ, ως υποτείνουσα, είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΑΦ (Θεώρημα 9). Παίρνουμε ΑΞ = ΑΦ, και μετακινούμε το σχήμα ΕΦΑΒ έτσι ώστε η ΑΦ να συμπέσει με την ΑΞ. Όταν η ΑΒ και η ΦΕ θα πάρουν τις θέσεις ΑΚ και ΞΗ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει ∠ΒΑΚ = ∠ΦΑΚ, έπεται ότι η ΑΚ πρέπει να τέμνει την ευθεία ΔΓ, έστω στο Κ (θεώρημα 16). Επομένως σχηματίζεται τρίγωνο ΑΚΓ, από τη μια πλευρά του οποίου η κάθετη ΞΗ τέμνει την ΑΚ στο Λ (θεώρημα 3) και άρα ορίζει την απόσταση ΑΛ του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΕ πάνω στην ΑΒ από το σημείο Α.

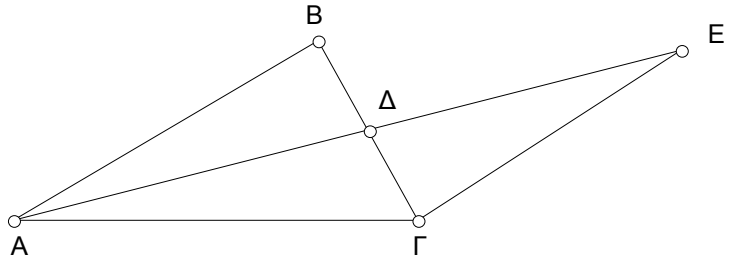
Έπεται λοιπόν ότι η ΓΕ θα τέμνει πάντα την ΑΒ, όσο μικρή κι αν είναι η γωνία ∠ΕΓΔ. Άρα η ΓΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ (θεώρημα 16).

<u>Θεώρημα 19</u>

Σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο το άθροισμα των τριών γωνιών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές γωνίες.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π+α.



Επιλέγουμε τη μικρότερη πλευρά ΒΓ και έστω Δ το μέσο της, ενώνουμε τα Α και Δ και στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ ίσο με ΑΔ. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ. Στα ίσα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΔΕ έχουμε ∠ΑΒΔ = ∠ΔΓΕ και ∠ΒΑΔ = ∠ΔΕΓ (θεωρήματα 6 και 10)[19]. Έπεται λοιπόν ότι στο τρίγωνο ΑΓΕ το άθροισμα των τριών γωνιών πρέπει να είναι ίσο με π+α. Αλλά επίσης η μικρότερη γωνία ∠ΒΑΓ (θεώρημα 9)[20] του τριγώνου ΑΒΓ, σχηματίζοντας το τρίγωνο ΑΓΕ έχει χωριστεί σε δύο μέρη, ∠ΕΑΓ και ∠ΑΕΓ.

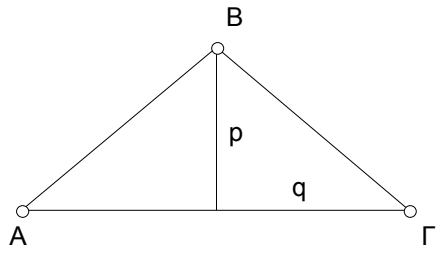
Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, χωρίζοντας δηλαδή συνεχώς στη μέση την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη γωνία, πρέπει τελικά να καταλήξουμε σε ένα τρίγωνο όπου το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π+α, αλλά έχει δύο γωνίες, που η κάθε μια είναι λιγότερο από α/2 ως απόλυτα μεγέθη. Επειδή όμως, η τρίτη γωνία δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από π προκύπτει ότι το α πρέπει να είναι είτε μηδέν είτε αρνητικός αριθμός.

Θεώρημα 20:

Αν σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες, τότε αυτή η υπόθεση ισχύει και σε κάθε άλλο τρίγωνο.

Απόδειξη

Αν σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π, τότε τουλάχιστον δύο από τις γωνίες του πρέπει να είναι οξείες, έστω οι ∠Α και ∠Γ.

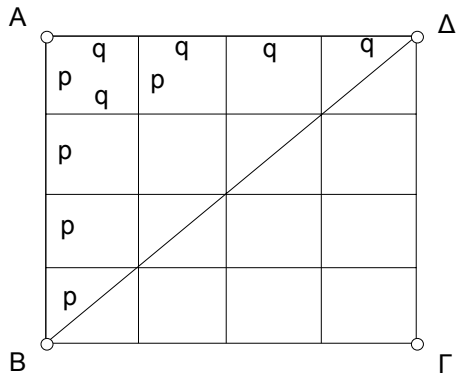


[19] Θεώρημα 6: Κατακόρυφα τρίγωνα, οπού οι πλευρές του ενός είναι προεκτάσεις των πλευρών του άλλου, είναι ίσα. Αυτό ισχύει για επίπεδες ευθυγραμμές γωνίες όπως επίσης και για γωνίες επίπεδων επιφανειών (π.χ. δίεδρες γωνίες).
Θεώρημα 10: Ευθύγραμμα τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μια πλευρά και δύο γωνίες ίσες ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίση ή δύο πλευρές και τη γωνία απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά ίση ή τρεις πλευρές ίσες.

[20] Θεώρημα 9: Σ' ένα ευθύγραμμο τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από τις άλλες δύο πλευρές και οι δύο γωνίες που είναι παραπληρωματικές της ορθής, είναι οξείες.

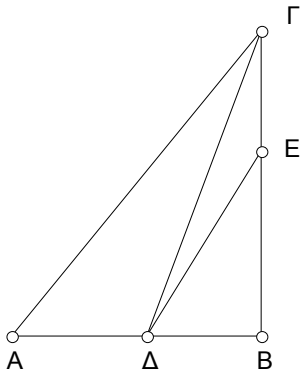
Από την κορυφή της γωνίας ∠Β φέρουμε κάθετη p στην απέναντι πλευρά ΑΓ. Τότε, το αρχικό τρίγωνο χωρίζεται σε δύο ορθογώνια τρίγωνα σε καθένα από τα οποία το άθροισμα των τριών γωνιών είναι επίσης π, εφόσον δεν μπορεί σε κανένα να είναι μεγαλύτερο από π και το άθροισμά τους λιγότερο από π.

Επομένως, έχουμε φτιάξει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές p και q. Από αυτό μπορεί να προκύψει ένα τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές ίσες με p και q και μεταξύ δυο διαδοχικών πλευρών p και q να περιέχεται ορθή γωνία.



Με επανάληψη του ίδιου τετραπλεύρου μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο με πλευρές np και q και από αυτό ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες πλευρές και ίσες με ΑΒ = np, ΑΔ = mq, ΔΓ = np, ΒΓ = mq, όπου m, n είναι ακέραιοι αριθμοί. Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ διαιρείται από τη διαγώνιο ΔΒ σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα, ΒΑΔ και ΒΓΔ, στα οποία το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π.

Οι αριθμοί m, n μπορούν να γίνουν αρκετά μεγάλοι ώστε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = np, ΒΓ = mq, να περιέχει μέσα του ένα άλλο δοθέν (ορθογώνιο) τρίγωνο ΒΔΕ, όταν οι ορθές γωνίες συμπέσουν.



Φέρνοντας την ευθεία ΔΓ, σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα τα οποία ανά δύο διαδοχικά έχουν κοινή πλευρά.

Το τρίγωνο ΑΒΓ σχηματίζεται από την ένωση των δύο τριγώνων ΑΓΔ και ΔΓΒ,

στα οποία το άθροισμα των τριών γωνιών δεν είναι μεγαλύτερο από π. Συνεπώς, πρέπει να είναι ίσο με π, εφόσον το άθροισμα στο σύνθετο τρίγωνο είναι ίσο με π.

Με ανάλογο τρόπο το τρίγωνο ΒΔΓ αποτελείται από δύο τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΕ, άρα στο τρίγωνο ΔΒΕ πρέπει το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π. Γενικά, αυτό πρέπει να είναι αληθές για κάθε τρίγωνο, διότι κάθε τρίγωνο μπορεί να χωριστεί σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.

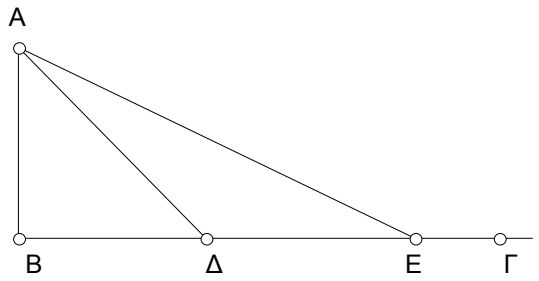
Συνοψίζοντας, από τα παραπάνω έπεται ότι μόνο δύο υποθέσεις είναι δυνατές: είτε το άθροισμα των τριών γωνιών σε όλα τα ευθύγραμμα τρίγωνα είναι ίσο με π, είτε το ίδιο άθροισμα σε όλα τα ευθύγραμμα τρίγωνα είναι λιγότερο από π.

Θεώρημα 21

Από ένα δοθέν σημείο μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ευθεία γραμμή που θα σχηματίζει με δοθείσα ευθεία γωνία όσο μικρή θέλουμε.

Απόδειξη

Έστω μια ευθεία ΒΓ και ένα σημείο Α εκτός αυτής.



Από το Α φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ στη ΒΓ και το ενώνουμε με το Α. Έπειτα, πάνω στη ΒΓ παίρνουμε τμήμα ΔΕ ίσο με ΑΔ και ενώνουμε τα Α και Ε. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ θέτουμε τη γωνία ∠ΑΔΒ = α, τότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ η γωνία ∠ΑΕΔ είναι είτε α/2 ή λιγότερο (θεωρήματα 8[21] και 20). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε τελικά σε μια γωνία ∠ΑΕΒ που είναι μικρότερη από οποιαδήποτε δοθείσα γωνία.

Θεώρημα 22

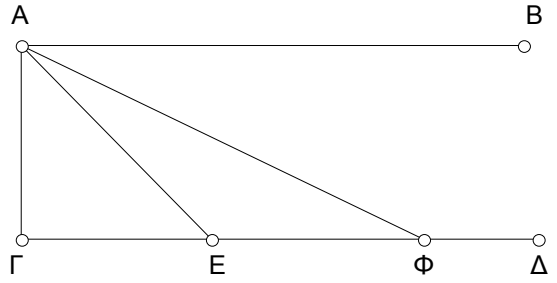
Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία και παράλληλες μεταξύ τους, τότε το άθροισμα των τριών γωνιών σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

[21] Σε ένα ευθύγραμμο τρίγωνο, ίσες πλευρές βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Στο θεώρημα 22, ο Lobachevsky με την όχι και τόσο ξεκάθαρη διατύπωση ουσιαστικά αποδεικνύει ότι αν η γωνία παραλληλίας Π(α) δύο ευθειών είναι 90°, τότε η Γεωμετρία που ισχύει είναι η Ευκλείδεια.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στην ΑΓ



Από το σημείο Α φέρουμε ευθείες ΑΕ και ΑΦ, όπου Ε και Φ είναι σημεία της ΓΔ, τέτοια ώστε ΦΓ > ΕΓ.

Υποθέτουμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π-α, και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΦ το αντίστοιχο άθροισμα είναι π-β. Τότε στο τρίγωνο ΑΓΦ το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με π-α-β, όπου τα α, β δεν μπορούν να είναι αρνητικοί αριθμοί. Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με a = ∠ΒΑΦ, b = ∠ΑΦΓ, τότε έχουμε α+β =a –b.

Περιστρέφοντας τώρα την ΑΦ μακριά από την κάθετη ΑΓ μπορούμε να φτιάξουμε τη γωνία a, ανάμεσα στην ΑΦ και την παράλληλη ΑΒ, όσο μικρή θέλουμε. Ταυτόχρονα, όμως, μπορούμε να ελαττώσουμε και τη γωνία b. Επομένως, οι δύο γωνίες α και β δεν μπορούν να πάρουν άλλη τιμή εκτός από α=0 και β=0.

Κατά τον Lobachevsky, έπεται ότι σε όλα τα ευθύγραμμα τρίγωνα το άθροισμα των τριών γωνιών είναι: είτε π και συγχρόνως η γωνία παραλληλίας Π(p) ίση με π/2 για κάθε ευθεία p, είτε μικρότερο από π και συγχρόνως ισχύει Π(p) < π/2.

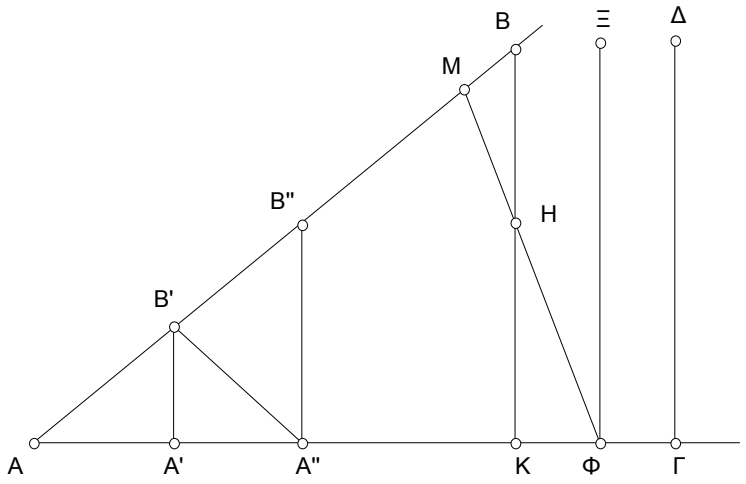
Η πρώτη υπόθεση αποτελεί θεμέλιο της συνήθης Γεωμετρίας και της Επίπεδης Τριγωνομετρίας. Η δεύτερη υπόθεση μπορεί επίσης να γίνει δεκτή και να μην προκύψει οποιαδήποτε αντίφαση ανάμεσα στα αποτελέσματά της αλλά να οδηγήσει σε μια νέα γεωμετρική επιστήμη, που θα καλείται *Φανταστική Γεωμετρία*. Η ανάπτυξη αυτής της Γεωμετρίας φτάνει μέχρι τη δημιουργία εξισώσεων που συνδέουν τις πλευρές και τις γωνίες των ευθύγραμμων και σφαιρικών τριγώνων.

Θεώρημα 23

Για κάθε δοθείσα γωνία α υπάρχει μια ευθεία p τέτοια ώστε Π(p) = α.

Απόδειξη

Έστω δύο ευθείες ΑΒ και ΑΓ που στο σημείο τομής Α σχηματίζουν την οξεία γωνία α. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Β΄ πάνω στην ΑΒ και φέρουμε τη ευθεία Β΄Α΄ κάθετη στην ΑΓ.



Πάνω στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα Α΄Α΄΄ = ΑΑ΄ και υψώνουμε στο Α΄΄ κάθετη Α΄΄Β΄΄. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να πετύχουμε μια κάθετη ΓΔ η οποία δε θα τέμνει πλέον την ΑΒ. Αυτό θα συμβεί αναγκαστικά διότι αν στο τρίγωνο ΑΑ΄Β΄ το άθροισμα των τριών γωνιών είναι π-a, τότε στο τρίγωνο ΑΒ΄Α΄΄ το αντίστοιχο άθροισμα είναι π - 2a και στο τρίγωνο ΑΑ΄΄Β΄΄ λιγότερο από π – 2a (θεώρημα 20) κ.ο.κ. μέχρι να γίνει τελικά αρνητικό και ως εκ τούτου δείχνεται η αδυναμία κατασκευής του τριγώνου.

Η κάθετη ΓΔ μπορεί να είναι η πιο κοντινή στο σημείο Α από όλες εκείνες που τέμνουν την ΑΒ. Περνώντας από τις ευθείες που τέμνουν σε εκείνες που δεν τέμνουν υπάρχει τουλάχιστον μια τέτοια κάθετη ΦΞ.

Φέρουμε την ευθεία ΦΗ, που σχηματίζει με τη ΦΞ, την οξεία γωνία ∠ΗΦΞ προς το μέρος του Α. Από το Η φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, την ΗΚ, η προέκτασή της οποίας πρέπει να τέμνει την ΑΒ, έστω στο Β. Έτσι σχηματίζεται τρίγωνο ΑΚΒ, στο οποίο εισέρχεται η προέκταση της ΦΗ και πρέπει να συναντά την υποτείνουσα ΑΒ, έστω στο Μ. Επειδή, η γωνία ∠ΞΦΗ είναι τυχαία και μπορούμε να τη θεωρήσουμε όσο μικρή θέλουμε, έπεται ότι η ΦΞ είναι παράλληλη στη ΑΦ = p (θεωρήματα 16 και 18).

Σύμφωνα με τον Lobachevsky, εύκολα κάποιος παρατηρεί ότι μειώνοντας το p η

γωνία α αυξάνεται, ενώ για p = 0 προσεγγίζει την τιμή π/2. Αντίθετα, όταν το p αυξάνεται η γωνία α μειώνεται, ενώ προσεγγίζει την τιμή 0 για p = ∞.

Επειδή μπορούμε να επιλέξουμε όποια γωνία θέλουμε για το σύμβολο Π(p), όταν το p εκφράζεται από αρνητικό αριθμό θα υποθέτουμε ότι:

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για όλες τις τιμές του p, θετικές, αρνητικές και μηδέν.

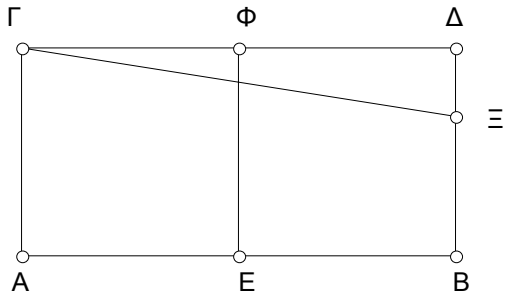
Θεώρημα 24

Οι παράλληλες ευθείες προεκτεινόμενες προς το μέρος της παραλληλίας προσεγγίζουν η μια την άλλη.

Με άλλα λόγια, αν οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, τότε αν τις προεκτείνουμε προς την κατεύθυνση παραλληλίας πλησιάζουν η μια την άλλη ασυμπτωτικά.

Απόδειξη

Στην ευθεία ΑΒ φέρουμε κάθετες ΑΓ και ΒΔ, τέτοιες ώστε ΑΓ = ΒΔ. Ενώνουμε τα σημεία Γ και Δ, σχηματίζοντας το τετράπλευρο ΑΒΔΓ με δύο ορθές γωνίες στα Α και Β και δύο οξείες γωνίες στα Γ και Δ (θεώρημα 22) που είναι ίσες μεταξύ τους, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα αν υπερθέσουμε το τετράπλευρό στο εαυτό του έτσι ώστε η ΒΔ να συμπέσει με την ΑΓ και η ΑΓ με τη ΒΔ.



Χωρίζουμε στη μέση την ΑΒ και στο μέσο της Ε υψώνουμε ευθεία ΕΦ κάθετη στη ΑΒ. Αυτή η ευθεία πρέπει να είναι επίσης κάθετη στη ΓΕ, εφόσον τα τετράπλευρα ΓΑΦΕ και ΦΔΒΕ ταυτίζονται, αν τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο κρατώντας σταθερή την ευθεία ΕΦ. Συνεπώς, η ευθεία ΓΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΑΒ, αλλά έστω ΓΞ, η παράλληλη από το σημείο Γ στην ΑΒ, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα 16, πρέπει να πλησιάζει την ΑΒ και κόβει τη ΒΔ κατά τμήμα ΒΞ < ΓΑ.

Επειδή το Γ είναι τυχαίο σημείο της ΓΞ, έπεται ότι η ίδια η ΓΞ πλησιάζει την ΑΒ όλο και

πιο πολύ καθώς την προεκτείνουμε.

Θεώρημα 25

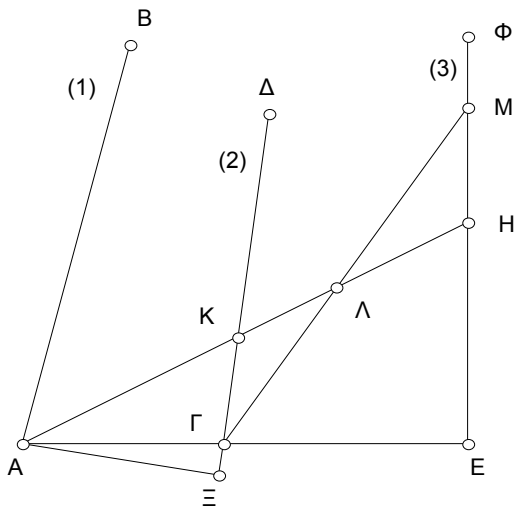
Δύο ευθείες που είναι παράλληλες σε μια τρίτη ευθεία, είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Εδώ ο Lobachevsky αποδεικνύει την μεταβατική ιδιότητα των παράλληλων ευθειών. Δηλαδή, αν οι ευθείες (1) και (2) είναι παράλληλες προς τη (3), τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη

Αρχικά θα υποθέσουμε ότι οι τρεις ευθείες (1), (2), (3) βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν οι δύο από αυτές, οι (1) και (2), είναι παράλληλες στην (3), τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Θεωρούμε ότι η (3) δεν βρίσκεται μεταξύ των (1) και (2), όπως στο παρακάτω σχήμα.



Από ένα τυχαίο σημείο της (1), έστω το Α φέρουμε την κάθετη ΑΕ στην (3), η οποία τέμνει τη (2) στο Γ (θεώρημα 3) και σχηματίζει γωνία $\angle$ΔΓΕ < π/2 προς το μέρος της (3) (θεώρημα 22).

Μια κάθετη ΑΞ από το Α στη ΓΔ πρέπει να «πέφτει» μέσα στην οξεία γωνία $\angle$ΑΓΞ (θεώρημα 9). Κάθε άλλη ευθεία ΑΗ από το Α σχεδιασμένη μέσα στη γωνία ΒΑΓ πρέπει να τέμνει την (3), την παράλληλη της (1), έστω στο Η, όσο μικρή κι αν είναι η γωνία ΒΑΗ. Συνεπώς, η (2) μέσα στο τρίγωνο ΑΕΗ θα τέμνει την ΑΗ, έστω στο Κ, εφόσον είναι αδύνατον να τέμνει την (3). Αν η ΑΗ από το Α έβγαινε από τη γωνία ΓΑΞ, τότε πρέπει να τέμνει την προέκταση της (2) μεταξύ των σημείων Γ και Ξ στο τρίγωνο ΓΑΞ. Έπεται λοιπόν ότι οι (1) και (2) είναι παράλληλες (θεωρήματα 16 και 18).

Αν υποθέσουμε τώρα ότι οι ευθείες (1) και (3) είναι παράλληλες προς τη (2). Τότε κάθε ευθεία ΑΚ από το Α σχεδιασμένη μέσα στη γωνία ∠ΒΑΕ, θα τέμνει τη (2), έστω στο Κ, όσο μικρή κι αν είναι η γωνία ∠ΒΑΚ.

Πάνω στην προέκταση της ΑΚ παίρνουμε τυχαίο σημείο Λ και το ενώνουμε με το Γ που τέμνει την (3) στο Μ σχηματίζοντας τρίγωνο ΜΓΕ. Η προέκταση της ΑΛ μέσα στο τρίγωνο ΜΓΕ δεν μπορεί να τέμνει ούτε την ΑΓ, ούτε τη ΓΜ για δεύτερη φορά. Επομένως πρέπει να τέμνει την (3), έστω στο Η. Άρα οι (1) και (3) είναι παράλληλες.

Ο «Τετραγωνισμός» του κύκλου και ο Νόμος των Ημιτόνων από τον János Bolyai.

Αρχικά, θα αναφέρουμε όσα στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι απαραίτητα για την καλύτερη κατανόηση των θεωρημάτων.

Η θεμελίωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας βασίζεται στα τέσσερα πρώτα αιτήματα του Ευκλείδη[22] και στο επόμενο:

Αίτημα 5: Δοθέντων μιας ευθείας και ενός σημείου εκτός αυτής, υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες που διέρχονται από το σημείο και όσο κι αν προεκταθούν δεν τέμνουν τη δοθείσα ευθεία.

Λόγω της ισχύος των τεσσάρων πρώτων αιτημάτων του Ευκλείδη, οι πρώτες είκοσι οκτώ προτάσεις του Πρώτου Βιβλίου των Στοιχείων, αποτελούν θεωρήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας όπως επίσης και όλα τα θεωρήματα της Απόλυτης Γεωμετρίας.

Σημειώνουμε ότι οι λέξεις *σημείο* και *ευθεία* είναι απροσδιόριστοι όροι, ενώ δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα στους όρους «γραμμή» και «ευθεία». Η λέξη «μοίρα» διατηρεί το νόημα που είχε και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, ότι δηλαδή μια ευθεία γωνία έχει 180° μοίρες.

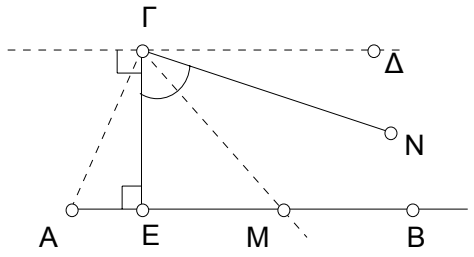
Στην §1 του Παραρτήματος δίνεται ο επόμενος:

Ορισμός

Έστω Γ ένα σημείο εκτός της ημιευθείας ΑΒ. Καθώς, η ΓΜ στρέφεται περί το Γ κινούμενη προς τη ΓΔ, θα υπάρξει μια πρώτη θέση της, έστω η ΓΝ, με την ιδιότητα: κάθε

[22] Αίτημα 1: Από δύο σημεία άγεται μόνο μια ευθεία.
Αίτημα 2: Το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκταθεί συνεχώς και ευθυγράμμως.
Αίτημα 3: Με κέντρο οποιοδήποτε σημείο και ακτίνα οποιοδήποτε τμήμα γράφεται κύκλος.
Αίτημα 4: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

ημιευθεία με αρχή το Γ μέσα στη γωνία ∠ΕΓΝ τέμνει την ΑΒ, ενώ κάθε ημιευθεία εκτός της ∠ΕΓΝ δεν την τέμνει.

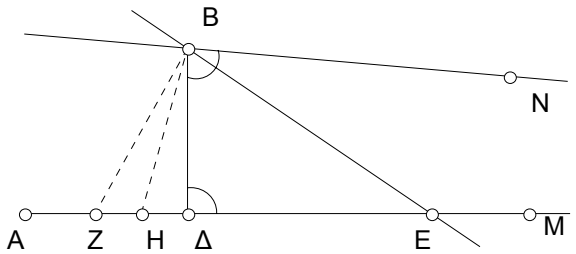


Η ημιευθεία ΓΝ ονομάζεται *(οριακή) παράλληλη* προς την ΑΒ. Η παραλληλία αυτή ανάμεσα σε ημιευθείες είναι η μόνη που θεωρεί ο Bolyai και συμβολίζεται με ΑΒ//ΓΝ.

Προφανώς ισχύει η ∠ΕΓΝ ≤1∟ και συνεπώς ∠ΕΓΝ +∠ΑΓΝ ≤2∟.

<u>Πρόταση</u> (§5)

Αν ΒΝ//ΑΜ, υπάρχει σημείο Δ της ΑΜ τέτοιο ώστε να ισχύει ∠ΔΒΝ = ∠ΒΔΜ.



<u>Απόδειξη</u>

Έστω Ε και Ζ δύο σημεία της ΑΜ τέτοια ώστε, ∠ΒΕΜ > ∠ΕΒΝ και ΒΕ = ΖΕ. Τότε ισχύει ∠ΒΖΜ = ∠ΖΒΕ < ∠ΖΒΝ. Αν ένα σημείο, έστω Η, διατρέχει τη ΖΕ, παρατηρούμε ότι στη θέση Η ≡ Ζ ισχύει ∠ΒΗΜ < ∠ΗΒΝ και στη θέση Η ≡ Ε ισχύει ∠ΒΗΜ > ∠ΗΒΝ. Επομένως υπάρχει μια θέση Η ≡ Δ για την οποία οι δύο γωνίες είναι ίσες.■

Στην προηγούμενη απόδειξη παρατηρούμε ότι ο Bolyai δέχεται σιωπηρά ότι οι γωνίες μεταβάλλονται συνεχώς. Την ίδια άποψη έχει και για όλα τα γεωμετρικά μεγέθη.

Στις § 11 και 12 δίνεται ο ορισμός της παρασφαίρας και του παρακύκλου.

<u>Ορισμός</u>

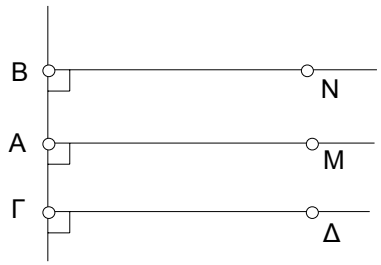
Έστω μια τυχαία ημιευθεία ΑΜ, τότε:

- Η *παρασφαίρα* Π ορίζεται ως το σύνολο των σημείων {Α} U {Β : αν η ημιευθεία ΒΝ είναι παράλληλη στην ημιευθεία ΑΜ, τότε οι εντός και επί τα ταυτά γωνίες είναι ίσες}.

- Ο *παρακύκλος* L ορίζεται ως η τομή του επιπέδου που περιέχει την ΑΜ με την παρασφαίρα Π.

Έχοντας αποδείξει τη μεταβατική ιδιότητα των παράλληλων ευθειών που ικανοποιούν συγχρόνως και την ιδιότητα: οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους (§10), έπεται το συμπέρασμα ότι τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην Π, η οποία προσδιορίζεται από καθεμιά χωριστά από τις ημιευθείες ΑΜ, ΒΝ και ΓΔ. Οι ημιευθείες αυτές καλούνται άξονες της παρασφαίρας Π. Οι άξονες μιας παρασφαίρας είναι και «άξονες συμμετρίας» της, κατά ανάλογο τρόπο με τις διαμέτρους μιας σφαίρας. Οι άξονες μιας παρασφαίρας που βρίσκονται στο επίπεδο ενός παρακύκλου αποτελούν «άξονες συμμετρίας» του και αντιστοιχούν στις διαμέτρους του κύκλου.
Σύμφωνα με τον Bolyai, η περιστροφή ενός παρακύκλου γύρω από ένα άξονα του δημιουργεί μια παρασφαίρα.

Σύμφωνα με τον Bolyai (§16), αν μεταφέρουμε τους παραπάνω ορισμούς στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (όπου ΓΝ ≡ ΓΔ), ο παρακύκλος που ορίζει η ΑΜ είναι η ευθεία ΒΓ που είναι κάθετη στην ΑΜ (βλ. σχήμα).



Η «παρασφαίρα» στην περίπτωση αυτή είναι το επίπεδο που περνάει από το Α και είναι κάθετο στην ΑΜ.

Στην § 21, θεωρώντας «ευθείες» τους παρακύκλους και γωνίες τις δίεδρες γωνίες που ορίζουν τα επίπεδα των παρακύκλων, αποδεικνύεται ότι η Γεωμετρία της παρασφαίρας Π είναι Ευκλείδεια, διότι ικανοποιείται το $5^{ο}$ Αίτημα : Έστω ότι οι παρακύκλοι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από τον παρακύκλο ΑΓ, και οι δίεδρες γωνίες ∠ΒΑΓ και ∠ΑΓΔ των επιπέδων τους, που περιέχουν τους άξονες ΑΜ και ΓΝ της Π αντίστοιχα, έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Τότε τα επίπεδα αυτά θα τέμνονται κατά μια ευθεία ΕΡ και η ημιευθεία ΕΡ θα είναι (οριακά) παράλληλη προς τις ημιευθείες ΑΜ, ΓΝ. Επομένως, θα τέμνει την Π σε κάποιο σημείο Ζ (§5) που θα είναι κοινό των δύο αρχικών παρακύκλων.

Ο Νόμος των Ημιτόνων στην Υπερβολική Γεωμετρία.

Ο Bolyai απέδειξε το εν λόγω θεώρημα στην ειδική περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου (§25), απ' όπου έπεται η γενική περίπτωση (§26).

Θεώρημα (§25)

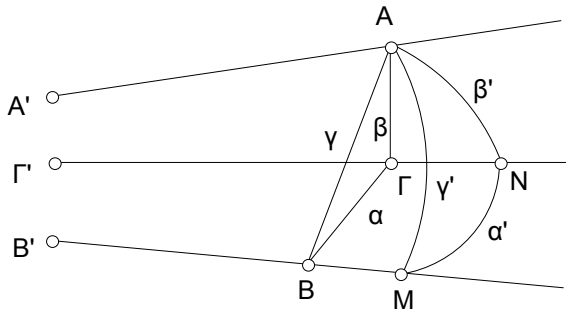
Σε κάθε ευθύγραμμο τρίγωνο, τα μήκη των περιφερειών των κύκλων που έχουν ακτίνες ίσες με τις πλευρές του τριγώνου είναι ανάλογα προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών.

Ο νόμος των ημιτόνων περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\mu(B\Gamma)}{\sin(A)} = \frac{\mu(BA)}{\sin(\Gamma)} = \frac{\mu(\Gamma A)}{\sin(B)} \qquad (1)$$

όπου με μ(α) συμβολίζεται το μήκος της περιφέρειας του κύκλου (ευθύγραμμης) ακτίνας α.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με την γωνία ∠Γ να είναι ορθή και ΒΒ΄ είναι η κάθετη ευθεία στο επίπεδο του τριγώνου που διέρχεται από το Β. Σχεδιάζουμε τις ευθείες ΑΑ΄ και ΓΓ΄ που είναι παράλληλες στη ΒΒ΄ και διέρχονται από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Στη συνέχεια θεωρούμε παρασφαίρα Π που διέρχεται από το Α και τέμνει τις ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ στα σημεία Α, Μ, και Ν αντίστοιχα. Έτσι οι δίεδρες γωνίες ω = ∠ΑΜΝ και ψ = ∠ΜΝΑ της (Ευκλείδειας) Γεωμετρίας της παρασφαίρας Π να προβάλλονται στις ∠ΑΒΓ και ∠ΒΓΑ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ.

Το Μ είναι το σημείο τομής ΒΒ΄ , που είναι (οριακά) παράλληλη με την ΑΑ΄, με την παρασφαίρα Π και τα L-τόξα ΜΑ, ΜΝ και ΝΑ είναι οι τομές της Π με τα επίπεδα ΑΒΒ΄, ΒΓΓ΄ και ΓΑΑ΄ αντίστοιχα. Το τρίγωνο που ορίζουν τα L-τόξα αυτά βρίσκεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της παρασφαίρας Π, επομένως από το γνωστό Νόμο των

Ημιτόνων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θα ισχύει:

$$\frac{(\text{L} - \text{τοξοΝΑ})}{\sin(\omega)} = \frac{(\text{L} - \text{τοξοΜΑ})}{\sin(\psi)} = \frac{(\text{L} - \text{τοξοΜΑ})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{(I)}$$

εφόσον η γωνία ψ μετριέται από τη δίεδρη γωνία που μετράει η $\angle\Gamma = \pi/2$.

Ο κύκλος με κέντρο Μ και ακτίνα L-τόξοΜΑ της Γεωμετρίας της παρασφαίρας Π ταυτίζεται με τον κύκλο κέντρου Β και ακτίνας ΒΑ της γεωμετρίας που μελετάμε. Το μήκος της περιφέρειάς του στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της παρασφαίρας Π είναι ίσο με 2π L-τόξοΜΑ. Αν συμβολίσουμε με μ(ΒΑ) το μήκος της περιφέρειας αυτής μετρημένης στα πλαίσια της Υπερβολικής Γεωμετρίας, θα έχουμε:

μ(ΒΑ) = 2π L-τόξοΜΑ ή L-τόξοΜΑ = μ(ΒΑ) / 2π.

Με ανάλογη διαδικασία προκύπτει:

μ(ΓΑ) = 2π L-τόξοΝΑ ή L-τόξοΝΑ = μ(ΓΑ) / 2π.

Αν αντικαταστήσουμε στην (I) τα L-τόξοΜΑ και L-τόξοΝΑ με τις τιμές που προκύπτουν από τις δύο τελευταίες ισότητες, καταλήγουμε στην επόμενη αναλογία:

$$\frac{\mu(\Gamma\text{A})}{\sin(\omega)} = \frac{\mu(\text{BA})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Όμως, η γωνία ω ως προς τη Γεωμετρία της παρασφαίρας είναι ίση με τη δίεδρη γωνία των επιπέδων ΜΒΓ και ΜΒΑ, δηλαδή με $\angle\text{ΑΒΓ} = \angle\text{B}$, ενώ η $\angle\text{ΒΓΑ} = \angle\Gamma = \pi/2$. Άρα, η τελευταία αναλογία γίνεται:

$$\frac{\mu(\Gamma\text{A})}{\sin(\text{B})} = \frac{\mu(\text{BA})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Με ανάλογη διαδικασία αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\frac{\mu(\text{B}\Gamma)}{\sin(\text{A})} = \frac{\mu(\text{BA})}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{\mu(\text{B}\Gamma)}{\sin(\text{A})} = \frac{\mu(\text{BA})}{\sin(\Gamma)} = \frac{\mu(\Gamma\text{A})}{\sin(\text{B})}. \blacksquare$$

Παρατηρούμε ότι:

I. Στην περίπτωση της Ευκλείδειας υπόθεσης ισχύει: $\mu(\chi) = 2\pi\chi$.

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$\frac{\sin(A)}{\alpha} = \frac{\sin(B)}{\beta} = \frac{\sin(\Gamma)}{\gamma} \qquad (1')$$

II. Στην περίπτωση της Μη Ευκλείδειας υπόθεσης ισχύει:

$$\mu(\chi) = \pi \cdot k \cdot \left(e^{\frac{\chi}{k}} - e^{\frac{-\chi}{k}}\right) = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \sinh\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

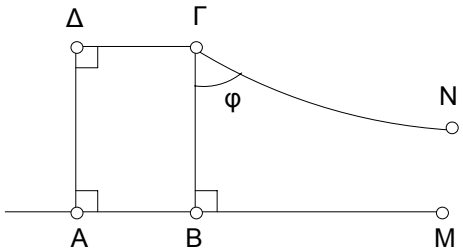
Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$\frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{k}\right)}{\sin(A)} = \frac{\sinh\left(\frac{\beta}{k}\right)}{\sin(B)} = \frac{\sinh\left(\frac{\gamma}{k}\right)}{\sin(\Gamma)} \qquad (1'')$$

Η τελευταία σχέση καλείται το *Θεώρημα των Ημιτόνων της Γεωμετρίας των Bolyai – Lobachevsky.*

Από τον τύπο (1), ο Bolyai συμπεραίνει την αναλογία των ημιτόνων των γωνιών προς τις απέναντι πλευρές σε ένα σφαιρικό τρίγωνο με τον ίδιο τρόπο που προκύπτουν από την (1΄) ο νόμος των ημιτόνων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Από το τελευταίο συμπέρασμα έπεται ότι η Σφαιρική Γεωμετρία είναι ανεξάρτητη του Ευκλείδειου Αιτήματος (Παράρτημα § 26). Γεγονός που καθιστά ακόμα πιο σημαντικό το συγκεκριμένο θεώρημα του Bolyai.

Αξιοποιώντας το Νόμο των Ημιτόνων, ο Bolyai αποδεικνυεί στην §27, μεταξύ άλλων και το εξής:



Αν ισχύουν: ΓΝ//ΒΜ, οι ΓΒ και ΔΑ είναι κάθετες στην ΑΒ και η ΓΔ είναι κάθετη στη ΔΑ, τότε ισχύει

$$\frac{\mu(\Gamma\Delta)}{\mu(AB)} = \frac{1}{\sin(\phi)} > 1$$

όπου φ είναι η γωνία παραλληλίας στο Γ, δηλαδή φ = Π(ΒΓ).

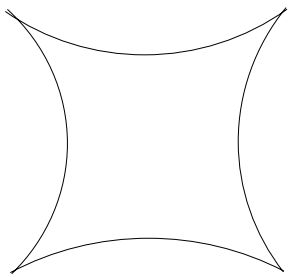
Η παραπάνω πρόταση είναι απαραίτητη στην ενότητα που αφορά τις κατασκευές στην Υπερβολική Γεωμετρία γενικά, αλλά και ειδικά στον τετραγωνισμό του κύκλου που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Ο Τετραγωνισμός του Κύκλου στην Υπερβολική Γεωμετρία (§43)

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες και μη αναμενόμενη κατασκευή της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Bolyai είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, ενός άλυτου προβλήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που απασχόλησε πολλούς μαθηματικούς για αιώνες.

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου συνίσταται στο εξής: να κατασκευαστεί τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας k σε μια παρασφαίρα Π, δηλαδή ενός κύκλου που έχει εμβαδόν πk^2 όταν θεωρηθεί ως κύκλος της Υπερβολικής Γεωμετρίας (και όχι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της παρασφαίρας).

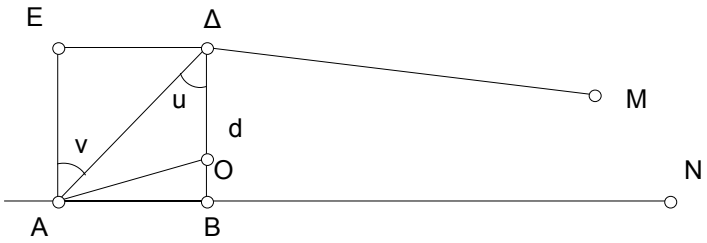
Επίσης, ένα «τετράγωνο» της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και τέσσερις ίσες γωνίες αλλά όχι ορθές, όπως στο σχήμα:



Για την επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτούνται ορισμένες κατασκευές. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε δύο κατασκευές:

I. Κατασκευή παράλληλης ευθείας που διέρχεται από δοθέν σημείο σε δοθείσα ευθεία. (§ 34)
II. Κατασκευή τμήματος που αντιστοιχεί σε δοθείσα (οξεία) γωνία παραλληλίας.

I. Κατασκευή παράλληλης ευθείας που διέρχεται από δοθέν σημειο σε δοθείσα ευθεία.



Έστω μια ευθεία ΑΝ και Δ σημείο εκτός αυτής , θα κατασκευάσουμε ευθεία που διέρχεται από το Δ και είναι παράλληλη στην ΑΝ.

Φέρουμε τις κάθετες ΒΔ και ΑΕ στην ΑΝ καθώς επίσης και την κάθετη ΔΕ στην ευθεία ΑΕ. Η γωνία ∠ΕΔΒ του τετραπλεύρου ΑΒΔΕ, το οποίο έχει τις άλλες τρεις γωνίες ορθές, είναι είτε ορθή αν η ΕΔ είναι ίση με την ΑΒ, είτε οξεία, αν η ΕΔ είναι μεγαλύτερη από την ΑΒ.

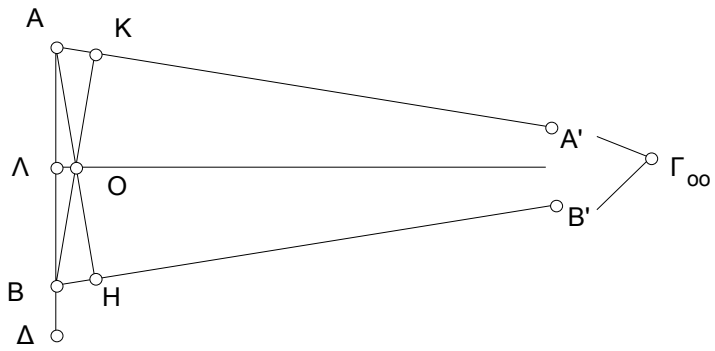
Με κέντρο το Α και ακτίνα ίση με ΕΔ σχεδιάζουμε κύκλο, που τέμνει τη ΔΒ στο σημείο Ο. Το σημείο Ο, είτε θα συμπίπτει με το Β, είτε θα βρίσκεται μεταξύ των Β και Δ.

Από την πρόταση της §27 που ήδη έχουμε αναφέρει συμπεραίνουμε ότι :
Η γωνία που σχηματίζεται από τις ευθείες ΑΟ και ΔΒ είναι η γωνία παραλληλίας που αντιστοιχεί στο τμήμα ΒΔ.
Επομένως, η παράλληλη στην ΑΝ που διέρχεται από το Δ μπορεί να κατασκευαστεί με το να σχεδιάσουμε μια ευθεία ΔΜ τέτοια ώστε ∠ΒΔΜ = ∠ΑΟΒ. (Bonola, 1955)

II. Κατασκευή τμήματος που αντιστοιχεί σε δοθείσα (οξεία) γωνία παραλληλίας.

Αρχικά υποθέτουμε ότι και στη Γεωμετρία των Bolyai - Lobaschewsky ισχύει ότι οι κάθετες από τις κορυφές ενός τριγώνου στις απέναντι πλευρές, δηλαδή τα ύψη, τέμνονται τελικά.

Έστω η οξεία γωνία ∠ΔΑΑ΄= γ θέλουμε να κατασκευάσουμε τμήμα χ τέτοιο ώστε Π(χ) = γ. Πάνω στην ευθεία ΑΔ παίρνουμε σημείο Β τέτοιο ώστε η ευθεία ΒΒ΄ να είναι παράλληλη στην ΑΑ΄ και η γωνία ∠ΑΒΒ΄ που σχηματίζεται να είναι οξεία.



Οι παράλληλες ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄ και το τμήμα ΑΒ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ$_\infty$, όπου η κορυφή Γ$_\infty$ είναι το σημείο τομής των παραλλήλων στο άπειρο. Οι κάθετες από τις κορυφές του τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές τέμνονται στο εσωτερικό του τριγώνου, έστω στο σημείο Ο.

Επομένως αν φέρουμε την κάθετη ΟΛ από το Ο στην ΑΒ, τότε το τμήμα ΑΛ που προκύπτει είναι το ζητούμενο τμήμα χ που αντιστοιχεί στη γωνία παραλληλίας ∠ΒΑΑ΄=γ, δηλαδή Π(ΑΛ) = ∠ΒΑΑ΄. [23]

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι αυτό που αποδείξαμε είναι το εξής:
Δοθείσας μιας οξείας γωνίας, να κατασκευαστεί ευθεία που να είναι παράλληλη στη μια πλευρά της γωνίας και κάθετη στην άλλη. (§35)

Ο Bolyai έχει αποδείξει, με τη χρήση ορίων, ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο (ΑΒΓ) = k^2 (π -∠Α -∠Β -∠Γ) και ότι το εμβαδόν ενός τριπλά ασυμπτωτικού τριγώνου ισούται με k^2 π, γεγονός που αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση που το άθροισμα ∠Α +∠Β +∠Γ τείνει στο μηδέν.
Η κατασκευή του εν λόγω τετραγώνου γίνεται ως εξής:
Αρχικά, κατασκευάζονται δύο κάθετα τεμνόμενες ευθείες, οι ΔΒ και ΓΕ. Στη συνέχεια κατασκευάζονται σε ίσες αποστάσεις από το σημείο τομής Α κάθετες ευθείες, που αποτελούν τις πλευρές του «τετραγώνου».

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι οκτώ φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή,

$$(ΑΒΓ) = k^2 (\pi - \pi/2 - \pi/4 - \omega) = k^2(\pi/4 - \omega)$$

προκύπτει η εξίσωση:

$$k^2 \pi = 8 k^2(\pi/4 - \omega),$$

[23] Στην ειδική περίπτωση που η ∠γ είναι 45°, τότε το μήκος του τμήματος ΑΛ είναι είναι ίσο με τη σταθερά του Schweikart.

από την οποία έχουμε: ω=π/8.

Με αυτά τα δεδομένα, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή του τμήματος ΑΒ. Στην §31 αποδεικνύεται, ως εφαρμογή του Νόμου των Ημιτόνων, ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, όπως στο διπλανό σχήμα, ισχύει

$$\frac{\cos(\Gamma)}{\sin(A)} = \frac{1}{\tan(\phi)}$$

όπου φ είναι η γωνία παραλληλίας της ΑΜ//ΕΝ. Η ισότητα αυτή δίνει στην περίπτωση που θεωρούμε

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan(\phi)}$$

ή ισοδύναμα

$$\sin(\phi) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Όμως, το sinφ, άρα και η γωνία παραλληλίας φ, κατασκευάζεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της παρασφαίρας (§25) και κατ' επέκταση και στην Υπερβολική Γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, το ΑΒ προκύπτει αν κατασκευάσουμε τη ΒΓ έτσι ώστε να είναι ίση με τη ΒΝ, κάθετη στην πλευρά ΑΒ της γωνίας ∠ΒΑΜ και παράλληλη στην άλλη της πλευρά, την ΑΜ (§35).

Στη συνέχεια μπορούμε να παρουσιάσουμε την κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός τριπλά ασυμπτωτικού τριγώνου, δηλαδή ενός τριγώνου που έχει και τις τρεις κορυφές του στο άπειρο, σύμφωνα με τον Bonola (1955).

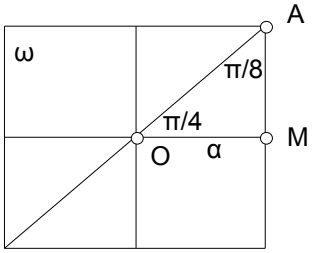
Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι: k^2 (π-∠Α -∠Β -∠Γ). Το τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο θα έχει εμβαδόν π k^2. Για να βρούμε τη γωνία ω του τετραγώνου με εμβαδόν π k^2, απαιτείται η πρόταση: το εμβαδόν ενός πολυγώνου, άρα και ενός τριγώνου, είναι ανάλογο προς το έλλειμμα του. Οπότε, προκύπτει η εξίσωση:

$$k^2 \pi = k^2 (2\pi - 4\omega).$$

Λύνοντας ως προς ω, έπεται:

$$\omega = \pi/4 \text{ ή } \omega = 45°.$$

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΜ, που είναι το 1/8 του ζητούμενου τετραγώνου.



Θέτουμε ΟΜ = α και εφαρμόζοντας το θεμελιώδη τύπο της Λογαριθμικής-Σφαιρικής Γεωμετρίας:

$$\cos(A) = -\cos(B)\cdot\cos(\Gamma) + \sin(B)\cdot\sin(\Gamma)\cdot\cosh\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

προκύπτει ότι:

$$\cosh\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \frac{\cos(22.30)}{\sin(45)} \quad \text{ή} \quad \cosh\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \frac{\sin(67.30)}{\sin(45)}.$$

Αν τώρα σχεδιάσουμε τα τμήματα β΄ και γ΄ που αντιστοιχούν στις γωνίες 67°30΄ και 45° και εφαρμόσουμε τον τύπο

$$\cosh\left(\frac{\chi}{k}\right) = \frac{1}{\sin(\Pi(\chi))}$$

τότε η επόμενη σχέση πρέπει να ισχύει για τα τμήματα α, β΄ και γ΄:

$$\cosh\left(\frac{\alpha}{k}\right)\cdot\cosh\left(\frac{\beta'}{k}\right) = \cosh\left(\frac{\gamma'}{k}\right).$$

Τελικά, παίρνοντας το β΄ ως κάθετη πλευρά και το γ΄ ως υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, η άλλη κάθετη πλευρά αυτού του τριγώνου καθορίζεται από την εξίσωση:

$$\cosh\left(\frac{\alpha'}{k}\right)\cdot\cosh\left(\frac{\beta'}{k}\right) = \cosh\left(\frac{\gamma'}{k}\right)$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται ότι α = α΄. Επομένως, έχοντας κατασκευάσει το α, μπορούμε να βρούμε τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με εκείνο του τριπλά ασυμπτωτικού τριγώνου.

Για την κατασκευή κύκλου με εμβαδόν ίσου με του παραπάνω τετραγώνου, πρέπει να μετασχηματίσουμε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν κύκλου ακτίνας r:

$$2\cdot\pi\cdot k^2\cdot\left(\cosh\left(\frac{r}{k}\right) - 1\right)$$

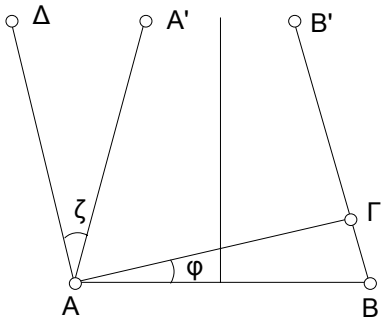
έτσι ώστε να περιέχει τη γωνία παραλληλίας Π(r/2) που αντιστοιχεί σε τμήμα μήκους r/2. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\tan\left(\frac{\Pi(\chi)}{2}\right) = e^{\frac{-\chi}{k}}.$$

Επομένως, το εμβαδόν του εν λόγω κύκλου είναι:

$$\frac{4\cdot\pi\cdot k^2}{\left(\tan\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right)\right)^2}.$$

Έπειτα σχεδιάζουμε τις δύο παράλληλες ευθείες ΑΑ΄ και ΒΒ΄ έτσι ώστε να σχηματίζουν ίσες γωνίες με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, δηλαδή ∠Α΄ΑΒ = ∠Β΄ΒΑ = Π(r/2), όπου ΑΒ = r.



Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τις κάθετες ευθείες ΑΓ και ΑΔ στις ΒΒ΄ και ΑΓ αντίστοιχα και θέτουμε ∠ΓΑΒ = φ, ∠ΔΑΑ΄ = z.

Τότε έχουμε:

$$\tan(z) = \cot\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \phi\right) = \frac{\cot\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right)\cdot\cot(\phi) + 1}{\cot(\phi) - \cot\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$$

Από την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς τύπους στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει:

$$\tan(z) = \frac{2}{\tan\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right)}.$$

Με αντικατάσταση στον τύπο του εμβαδού του κύκλου, έπεται ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$\pi\, k^2 \tan^2 z.$$

Ο τελευταίος τύπος επιτρέπει το συσχετισμό μιας πεπερασμένης γωνίας z με κάθε κύκλο.

Αν $z = 45°$, τότε το εμβαδόν του αντίστοιχου κύκλου είναι πk^2.

Επομένως, το εμβαδόν του κύκλου που αντιστοιχεί σε γωνία $z = 45°$, είναι ίσο με το εμβαδόν του τριπλά ασυμπτωτικού τριγώνου, συνεπώς και με το εμβαδόν του τετραγώνου που ζητάμε.

Συνοψίζοντας, αν δίνεται η γωνία ∠Α΄ΑΔ, μπορούμε να κατασκευάσουμε το r ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

1. Φέρουμε την ευθεία ΑΓ κάθετη στην ΑΔ.
2. Φέρουμε την ευθεία ΒΒ΄ παράλληλη στην ΑΑ΄ και κάθετη στην ΑΓ.
3. Φέρουμε τη διχοτόμο μεταξύ των ΑΑ΄ και ΒΒ΄ (με τη χρήση του θεωρήματος ότι οι διχοτόμοι ενός ασυμπτωτικού τριγώνου συντρέχουν).
4. Τέλος φέρουμε την κάθετη ΑΒ σε αυτή τη διχοτόμο. Το τμήμα ΑΒ, μεταξύ των ΑΑ΄ και ΒΒ΄, είναι η ζητούμενη ακτίνα r.

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός πολυγώνου ίσου με ένα κύκλο εμβαδού $\pi k^2 \tan^2 z$, είναι σύμφωνα με τον Bolyai, στενά συνδεδεμένο με την αριθμητική τιμή του $\tan z$. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί για κάθε ακέραια τιμή του $\tan^2 z$ και για κάθε κλασματική τιμή, δεδομένου ότι ο παρανομαστής του κλάσματος μειώνεται στο απειροελάχιστο, περιέχεται στον τύπο του Gauss για την κατασκευή των κανονικών πολυγώνων.

Ο Bolyai τελειώνοντας την παραπάνω κατασκευή αναφέρει:

«...είτε το Πέμπτο Αίτημα του Ευκλείδη ισχύει, είτε ο γεωμετρικός τετραγωνισμός του κύκλου, παρόλο που δεν έχει αποφασιστεί ποιό από τα δύο έχει θέση στην πραγματικότητα».

Βιβλιογραφία

1. Boi, L., Flament, D., & Salanskis, J. -M. (1992). *1830 – 1930: A Century of Geometry.* Berlin Heidelberg: Springer – Verlag.
2. Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean Geometry.* New York: Dover.
3. Callhan, J.J. (1931). *Euclid or Einstein. A proof of the parallel theory and a critique of metageometry*. Retrieved January 7, 2008, from http://www.reciprocalsystem.com/euclid/callahan/front.htm
4. Davis, D. M. (2001). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών.* (Δ. Καραγιαννάκης, & Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1993).
5. Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *Η μαθηματική εμπειρία*. (Γ. Αναστασιάδης, μετάφραση). Αθήνα: Τροχαλία. (Πρωτότυπη έκδοση, 1980).
6. Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών. Μετά το 1650.* (Μ. Κωνσταντινίδης, & Ν. Λιλής, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία. (Πρωτότυπη έκδοση, 1983).
7. Jammer, M. (2001). *Έννοιες του χώρου. Η ιστορία των θεωριών του χώρου στη φυσική.* (Τζ. Λάζαρη, & Θ. Χριστακόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις.
8. Kagan, V. F. (1948). *The construction of non-Euclidean geometry by Lobachevsky, Gauss and Bolyai*. Proc. Inst. History of Science **II**, 323-399. Retrieved January 7, 2008, from http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bolyai.html
9. Laugwitz, D. (1999). *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning Points in the Conception of Mathematics.* (Translated by Abe Shenitzer). Berlin: Birkhäuser.
10. Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1993).
11. McCleary, J. (1994). *Geometry from a differentable viewpoint*. U.S.A.: Cambridge University Press.
12. Rosenfeld, B. A. (1988). *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space.* New York: Springer – Verlag.
13. Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
14. Wilkins, D. R.(1998). *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry.*

Bernhard Riemann. Translated by William Kingdon Clifford. Nature, Vol. VIII. Nos. 183, 184, pp. 14-17, 36, 37. Preliminary Version: December 1998. from www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/WKCGeom.html

15. Βασιλείου, Ε. (2003). Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος: *Γεωμετρία για τη Διδακτική*. Τμήμα Μαθηματικών. Ε.Κ.Π.Α.
16. Λάππας, Δ. (2006). *Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών*. Παραδόσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος. (Εαρινό εξάμηνο). Τμήμα Μαθηματικών. Ε.Κ.Π.Α.
17. Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία Βιβλία 1, 2, 3, 4.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.
18. Στράντζαλος, Χ. (1987). *Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών. Μέρος Πρώτο*. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
19. Στράντζαλος, Χ. (2002). *Στοιχεία από τη νεότερη ιστορία των μαθηματικών. Η εξέλιξη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών μετά το 1750.* (Σημειώσεις Εαρινού Εξαμήνου). Τμήμα Μαθηματικών. Ε.Κ.Π.Α.