ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ &ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"Οι διδακτικές και επικοινωνιακές επιλογές του καθηγητή των Μαθηματικών και πώς αυτές επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών του κατά τη Λύση Προβλήματος."

Στεφανία Κυριακίδου

Αθήνα 2004

1. Εισαγωγή

Μερικές δεκαετίες πριν, η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών περιοριζόταν σ' αυτό που καλούμε «Γνωστική Επιστήμη». Το αντικείμενο της προσοχής ήταν οι προσωπικοί τρόποι μάθησης του κάθε μαθητή. Την τελευταία δεκαετία όμως η έρευνα άρχισε να αποδεσμεύεται από γνωστικές σταθερές, να εκτείνεται πέρα από τις προσωπικές γνώσεις του κάθε μαθητή, και να περιλαμβάνει κοινωνικο – πολιτισμικές όψεις της μάθησης των Μαθηματικών. Οι ερευνητές άρχισαν πλέον να εστιάζουν την προσοχή τους στη συμμετοχή μαθητών και καθηγητών σε γνωσιακές δραστηριότητες, και στα διαφορετικά είδη αλληλεπίδρασης: μεταξύ μάθησης και διδασκαλίας, και μεταξύ γνώσης και πρακτικής.

Οι Κονστρουκτιβιστικές θεωρίες που επικρατούσαν στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης μέχρι πρόσφατα, έδιναν έμφαση στην ενεργή κατασκευή της γνώσης, και προτεραιότητα στις νοητικές διαδικασίες του ατόμου για την εσωτερική ανάδειξη του νοήματος των εννοιών. Ρόλος του δασκάλου ήταν να ακούει το μαθητή, να κατασκευάζει μοντέλα των νοητικών διεργασιών του και να προσαρμόζει το μάθημα με βάση αυτά τα μοντέλα σκέψης. Μεγάλο πρόβλημα όμως του Κονστρουκτιβισμού αποτέλεσε η αδυναμία του να ερμηνεύσει τα φαινόμενα της τάξης. Ο μαθητής θεωρούνταν ως ένα άτομο που προσπαθεί να δώσει νόημα στις εμπειρίες του χωρίς να εξετάζεται η σχέση του με το δάσκαλο και με τους υπόλοιπους συμμαθητές του. Γενικότερα, η επικοινωνία μέσα στην τάξη αποτελεί για τον Κονστρουκτιβισμό ένα θεωρητικό πρόβλημα γιατί ορίζεται ως δοκιμαστική ερμηνεία των λέξεων και των προτάσεων των άλλων ανθρώπων, από το υποκείμενο.

> *«Στην καλύτερη περίπτωση μπορούμε να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι, η ερμηνεία που εμείς δίνουμε για τις λέξεις και τις προτάσεις άλλων ανθρώπων, φαίνονται συμβατές με το μοντέλο σκέψης και λειτουργίας τους, έτσι όπως το έχουμε σχηματίσει στην πορεία των αλληλεπιδράσεων μαζί τους»* Von Glasersfeld, 1988.

Για το λόγο αυτό η επικοινωνία γίνεται κατανοητή με διαφορετικό τρόπο από τον καθένα ο οποίος συμμετέχει σ' αυτήν. Συνεπώς η αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη δεν παίζει πρωταρχικό ρόλο στην ανάπτυξη των γνωστικών σχημάτων του μαθητή. Οι περισσότεροι Κονστρουκτιβιστές, όπως π. χ. ο Von Glasersfeld, δίνουν έμφαση στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, δεδομένου ότι γι' αυτούς είναι ο κυριότερος παράγοντας που προκαλεί ανισορροπίες (disequilibrium – διαταράσσουν την ισορροπία της

υπάρχουσας γνώσης). Ωστόσο, το γεγονός αυτό δεν εμφανίζεται στο αποτέλεσμα της γνωστικής ανάλυσης, καθώς αυτή η ανάλυση εστιάζει στις γνωστικές λειτουργίες του ατόμου και όχι στο αποτέλεσμα των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων (Lerman,2001).

Ο Κονστρουκτιβισμός, απομονώνοντας τις γνωστικές δραστηριότητες από το πλαίσιό τους, απέτυχε να εξηγήσει επαρκώς τα φαινόμενα της μάθησης. Για το λόγο αυτό οι κοινωνικο – πολιτισμικοί ψυχολόγοι μετατόπισαν το κέντρο βάρους της μαθηματικής εκπαίδευσης από τις αποπλαισιοποιημένες γνωσιακές σταθερές, στη μελέτη της διαδικασίας της μάθησης ως συμμετοχή κάποιου σε ορισμένες δραστηριότητες επικοινωνιακού τύπου. Ο Vygotsky, βασικός εκφραστής των κοινωνικο – πολιτισμικών θεωρήσεων της γνώσης, εστίασε την έρευνά του, μεταξύ άλλων, στα είδη των επικοινωνιακών δραστηριοτήτων, καθώς θεώρησε ότι η μάθηση αρχίζει και τελειώνει στην κοινωνία, παρακινούμενη από την ανάγκη για αλληλεπίδραση και επικοινωνία. Έτσι για παράδειγμα εισήγαγε τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Zone of Proximal Development ή ZPD), ένα φαινόμενο που αναπτύσσεται μέσα στη σχολική τάξη από τη στιγμή που όλοι οι συμμετέχοντες κατανοούν ο ένας τη σκέψη του άλλου, οπότε αποκαθίσταται και μία ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ τους. Η ZPD αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη έννοια της θεωρίας του Vygotsky, καθώς μόνο μετά την ανάπτυξή της μπορούμε να μιλάμε για μάθηση, όπως θα δούμε και αργότερα.

Στις μέρες μας, και οι δύο θεωρητικές προσεγγίσεις παρουσιάζονται σε ερευνητικές εργασίες, χωρίς μέχρι στιγμής οι προσεγγίσεις αυτές να έχουν βρει ένα κοινό σημείο «συνάντησης», δεδομένου ότι απαντούν σε διαφορετικά ερευνητικά ερωτήματα. Ειδικότερα, το θέμα που φαίνεται να κυριαρχεί στην επικοινωνιακή προσέγγιση είναι η έρευνα στη συνεργασία μεταξύ ζευγών μαθητών και στα μοντέλα επικοινωνίας μεταξύ τους, π. χ. Sfard (2002) και ο Lerman (2001), οι οποίοι επικέντρωσαν την έρευνά τους στις μορφές επικοινωνίας ζευγών μαθητών κατά τη λύση προβλήματος. Αντίθετα, η έρευνα των μοντέλων επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου και μαθητών, καθώς και οι συνέπειές τους στη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος, είναι αρκετά λιγότερες, π. χ. Tudge (1990), Even & Schwartz (2003). Γενικότερα, φαίνεται να επικρατεί μία υπονοούμενη συμφωνία ανάμεσα στους ερευνητές και εκπαιδευτικούς της μαθηματικής εκπαίδευσης, ότι πράγματι υπάρχει επίδραση των επικοινωνιακών μοντέλων και των διδακτικών στρατηγικών που ακολουθεί ο δάσκαλος των μαθηματικών, στη λύση προβλημάτων από τους μαθητές του. Αλλά, όλα αυτά ανακλώνται και έρχονται στην επιφάνεια όταν μελετάμε τις

ενέργειες των μαθητών. Υπάρχούν όμως ακόμη πολλά αναπάντητα ερωτήματα. Ποια είναι τελικά εκείνα τα μοντέλα και οι στρατηγικές που διευκολύνουν την ανάπτυξη της γνώσης και ποια όχι; Γιατί οι μαθητές του ενός δασκάλου λύνουν ένα πρόβλημα ενώ του άλλου όχι; Σε τι διαφέρουν τα επικοινωνιακά μοντέλα και οι στρατηγικές των δύο; Η σημασία των ερωτημάτων αυτών για τη διδακτική πρακτική είναι περιττό να τονιστεί.

Ο Tudge (1990) δικαιολογεί την εμμονή στην έρευνα σε ζεύγη ή ομάδες μαθητών ισχυριζόμενος ότι η έμφαση σε έρευνες για μοντέλα επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου – μαθητή μπορεί να προσανατολίσει τους αναγνώστες σε αντιλήψεις μεταφοράς της γνώσης. Οι Forman & McPail (1993) προσφεύγουν στην εξέταση των στρατηγικών του δασκάλου, μόνον όταν διαπιστώνουν την αδυναμία των μαθητών να αναπτύξουν την Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Lerman 2001). Τέλος, οι Even & Schwartz (2003) προκειμένου να αναγνωρίσουν γενικά μοντέλα επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, θεωρούν το σύνολο των μαθητών ως μία ενότητα που αλληλεπιδρά με τον καθηγητή. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να είναι κατάλληλη για τους σκοπούς της έρευνάς τους, αλλά έτσι χάνεται η επαφή με συγκεκριμένους μαθητές που λύνουν ή όχι ένα πρόβλημα.

Το ερευνητικό μας ερώτημα διατυπώνεται λοιπόν ως εξής: ***Ποιες διδακτικές και επικοινωνιακές στρατηγικές του δασκάλου των μαθηματικών επηρεάζουν θετικά και ποιες αρνητικά την ικανότητα λύσης προβλήματος των μαθητών του και γιατί;***

Με άλλα λόγια ποιοι τύποι αλληλεπίδρασης αναπτύσσονται μεταξύ δασκάλου και μαθητών και ποιες συνέπειες έχουν στη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη λύση προβλήματος; Θα αναζητήσουμε λοιπόν ενδείξεις οι οποίες θα μας επιτρέψουν να συνδέσουμε τις διδακτικές και επικοινωνιακές επιλογές του δασκάλου των Μαθηματικών με τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών τους με όσο το δυνατόν πιο πειστικό τρόπο, στηριγμένοι αποκλειστικά στα ευρήματα της έρευνας.

2. Το Θεωρητικό Πλαίσιο

Για τη μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την κοινωνικό – πολιτισμική / επικοινωνιακή θεώρηση της γνώσης, όπως αναπτύχθηκε από τον Vygotsky και μεταγενέστερους ερευνητές. Μέσα στα πλαίσια αυτής της θεώρησης, ο άνθρωπος

παύει να θεωρείται ένα μεμονωμένο υποκείμενο και αποτελεί πλέον ένα κόμβο στον ιστό των κοινωνικών σχέσεων. Οι πράξεις του πηγάζουν από, και στοχεύουν στην αλληλεπίδραση με το κοινωνικό του περιβάλλον, και καθορίζονται από τις επιμέρους συνθήκες τις οποίες το άτομο βιώνει. Επειδή η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα σε μία πολιτισμική κοινότητα, το σχολείο, θεωρούμε ότι κι αυτή παρακινείται από την ανάγκη για αλληλεπίδραση και επικοινωνία και προσαρμόζεται προς τη συνεχή βελτίωση της επικοινωνίας αυτής.

Η επικοινωνιακή θεώρηση της γνώσης, αποτελεί ένα από τα πιο πρόσφατα προϊόντα των προσπαθειών διαμόρφωσης ενός ώριμου κοινωνικό – πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο θα μπορέσει να μελετηθεί η φύση της μάθησης. Ως επικοινωνία ορίζεται η προσπάθεια ενός ατόμου να κάνει τον συνομιλητή του να πράξει σύμφωνα με τις προθέσεις του. Επιπλέον, η σκέψη υπακούει στην απαίτηση του υποκειμένου να γίνει αυτή η επικοινωνία αποτελεσματική. Ο διάλογος αποτελεί μία περίπτωση επικοινωνίας, εσωτερική ή κοινωνική, λεκτική ή με τη βοήθεια οποιουδήποτε άλλου συμβολικού συστήματος. Συνεπώς, η μάθηση των Μαθηματικών ορίζεται ως μία εισαγωγή στο μαθηματικό διάλογο.

Σύμφωνα με τη Θεωρία της Δραστηριότητας (Leont'ev, 1981) η πηγή της δόμησης της ανθρώπινης σκέψης είναι η ίδια η δομή της κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι ότι στοχεύει σε κάποιο αντικείμενο, το οποίο και αποτελεί το πραγματικό κίνητρο της δραστηριότητας. Οι πράξεις που απαρτίζουν μία δραστηριότητα ενεργοποιούνται από το κίνητρό της και κατευθύνονται προς συνειδητούς στόχους. Οι διαδικασίες είναι τα μέσα με τα οποία πραγματοποιείται μία ενέργεια. Για τη Θεωρία της Δραστηριότητας η αποτυχία ενός μαθητή στα Μαθηματικά ερμηνεύεται ως αποτυχία να συνδέσει το διδακτικό υλικό με τις δραστηριότητες στην τάξη. Ταυτόχρονα μπορεί να είναι αποτέλεσμα πρακτικών ή αντιλήψεων που εμπόδισαν τη συμμετοχή του στις δραστηριότητες. Επειδή η δραστηριότητα συνδέεται με τη διαλεκτική ανάμεσα στο άτομο και το κοινωνικό του περιβάλλον, σχετίζεται άμεσα και με την έννοια της επικοινωνίας.

Ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα που παρουσιάζονται μέσα στη σχολική αίθουσα και καθορίζουν την πορεία της μάθησης των μαθητών σύμφωνα με τον Vygotsky, είναι η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης (Zone of proximal development). Η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης (ZPD) είναι ένας συμβολικός χώρος που αποτελείται από τα άτομα, τις πρακτικές τους και τις ιδιαίτερες συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται οι δραστηριότητες. Η ZPD εμφανίζεται τη στιγμή που όλα

τα μέλη της μαθητικής κοινότητας, συμπεριλαμβανομένου του καθηγητή, κατανοούν ο ένας τη σκέψη του άλλου, δηλαδή από τη στιγμή που επιτυγχάνεται η επικοινωνία. Η μάθηση μπορεί να αναπτυχθεί μόνον αφού εμφανιστεί η ZPD, καθώς μόνον τότε αποκτούν νόημα οι δραστηριότητες, και πραγματοποιείται η εσωτερίκευση των εννοιών, με τη διαμεσολάβηση των συμβόλων. Ως εσωτερίκευση εννοούμε την κατανόηση των εννοιών, αλλά κυρίως τη συνειδητοποίηση των δυνατοτήτων και των νέων επιλογών που παρέχονται. Σύμφωνα με τον Vygotsky η Ζώνη της Επικείμενης Ανάπτυξης είναι ένα μέσο πρόβλεψης των μελλοντικών ικανοτήτων των μαθητών. Η συνεργασία του μαθητή με τους ενήλικους, τους καθηγητές, αλλά και με τους συμμαθητές του είναι η βάση της ανάπτυξης των ανώτερων νοητικών λειτουργιών και της προσωπικότητας του. Έτσι, θεωρείται ότι αυτό που σήμερα κάνει ο μαθητής σε συνεργασία με τον καθηγητή ή τους συμμαθητές του, αύριο θα μπορεί να το κάνει και μόνος του. Κατά τον Lerman (2001) μία μαθησιακή δραστηριότητα μπορεί να ξεκινήσει μία ZPD. Η μαθησιακή δραστηριότητα είναι βέβαια η εργασία που ορίζει ο καθηγητής. Ταυτόχρονα όμως είναι συνάρτηση του τύπου αλληλεπιδράσεων μέσα στην τάξη, του βιβλίου, των δυνατοτήτων που γεννιούνται από το συγκεκριμένο σύνολο συμμετεχόντων στο μάθημα εκείνης της ημέρας, ακόμη και εκείνης της στιγμής, κ. τ. λ. Η ZPD δεν υφίσταται για την τάξη, για τον καθηγητή ή για κανέναν από τους μαθητές, προτού υπάρξει αλληλεπίδραση μεταξύ τους.

Βασικό λοιπόν στοιχείο της μάθησης των Μαθηματικών μέσα στο επικοινωνιακό πλαίσιο, γίνεται η διαπραγμάτευση των θεμάτων μέσα στην τάξη. Η Sfard (2002) ξεχωρίζει δύο πολύ σημαντικούς παράγοντες που υπαγορεύουν το τι πρέπει να γνωρίζει ένα άτομο ώστε να γίνει επιδέξιος συμμέτοχος σε έναν δεδομένο μαθηματικό διάλογο. Πρώτος παράγων είναι τα εργαλεία διαμεσολάβησης που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν ως μέσα επικοινωνίας, δηλαδή τα μαθηματικά σύμβολα και οι αναπαραστάσεις. Αυτά χρησιμεύουν όπως αναφέραμε στην εσωτερίκευση των εννοιών, και στον έλεγχο των ψυχικών και νοητικών λειτουργιών του ανθρώπου. Μέσα στο επικοινωνιακό πλαίσιο τα σύμβολα είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τις έννοιες που αναπαριστούν, συνεπώς και με την κατανόηση και αφομοίωσή τους. Για παράδειγμα ο τρόπος που εκτελούμε νοητικά τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με το 10: εάν ο αριθμός είναι ακέραιος τότε απλά σημειώνουμε ένα μηδενικό μετά το τελευταίο του ψηφίο, ενώ αν είναι δεκαδικός μετακινούμε την υποδιαστολή μία θέση δεξιά.

Δεύτερος βασικός παράγοντας της μάθησης είναι οι μεταδιαλογικοί κανόνες, εκείνες οι πτυχές της επικοινωνίας που δεν σχετίζονται άμεσα με το περιεχόμενο του διαλόγου, αλλά ορίζουν τη θέση του κάθε συνομιλητή μέσα στο διάλογο. Σε συντονισμό με τους κανόνες αυτούς οι άνθρωποι αναλαμβάνουν τις ενέργειες που θεωρούν κατάλληλες σε ένα δεδομένο πλαίσιο και αποφεύγουν συμπεριφορές που θα βρίσκονταν εκτός πλαισίου. Πιο συγκεκριμένα, οι μεταδιαλογικοί κανόνες που διέπουν μία συνομιλία, ορίζονται από τη στάση των συνομιλητών, τον τρόπο που απευθύνονται ο ένας στον άλλον, και τον τύπο της διαπροσωπικής ανταλλαγής την ώρα της συζήτησης. Συνεπώς μ' αυτόν τον τρόπο καθορίζεται το αν ο κάθε ομιλητής θα έχει πιο ενεργητικό ή παθητικό ρόλο στη συζήτηση, αν θα αναλαμβάνει πρωτοβουλίες, ή αν θα εξαρτάται από τις ενέργειες του συνεργάτη του κ. τ. λ. Έτσι οι κανόνες αυτοί περιορίζουν τις πιθανές διαλογικές κινήσεις των συνομιλητών, αφήνοντάς τους με έναν πιο εύχρηστο αριθμό επιλογών.

Τα δύο αυτά συστατικά στοιχεία του μαθηματικού διαλόγου, καθώς και βέλτιστη χρήση τους, διδάσκονται και μαθαίνονται στις σχολικές αίθουσες. Συνήθως καθηγητές και μαθητές είναι αρκετά απληροφόρητοι για αυτή τη μάθηση, μολονότι αυτή μπορεί να διαδραματίσει καίριο ρόλο στην επιτυχία ή την αποτυχία των μαθητών σε δραστηριότητες γνωσιακού τύπου. Όπως αναφέρει η Sierpinska (1998)

> «*Αν το καθετί που μαθαίνει ο μαθητής, όπως τα μαθηματικά, γίνεται με κάποια διαπραγμάτευση, τότε ο τρόπος μάθησης των μαθηματικών από τον μαθητή είναι συνάρτηση των χαρακτηριστικών της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης, στις οποίες συμμετέχει στην πορεία της μάθησης*».

Πιο συγκεκριμένα,

> «*Ποιος τύπος αλληλεπίδρασης εδραιώνεται και εξελίσσεται μεταξύ των συμμετεχόντων στην επικοινωνία, ποια είναι η κοινοτυπία ή το προβλέψιμο σχήμα ή σενάριο της αλληλεπίδρασης – είναι η ανάκριση ή είναι μία συνέντευξη, είναι η εξάσκηση των ικανοτήτων ή η εκμαίευση του στοχασμού, είναι η επανάληψη και η αποστήθιση ή η αμοιβαία πρόκληση ενδιαφέροντος, μέσω προκλητικών ερωτημάτων; Σε κάθε περίπτωση, μια διαφορετική διαπραγμάτευση θα κατανοηθεί και μαθευτεί.*»

Η A. Sfard (2001) ασχολείται με τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές επιτυγχάνουν ή αποτυγχάνουν στις μαθηματικές εργασίες, και με τη φύση και τους

μηχανισμούς της επιτυχίας ή της αποτυχίας αυτής. Η ερευνήτρια αναλύει το διάλογο δύο μαθητών που συνεργάζονται για τη λύση ενός προβλήματος και προσπαθεί να ερμηνεύσει την επιτυχία του ενός και την αποτυχία του άλλου μαθητή να φτάσει στη λύση και να την κατανοήσει. Ο διάλογος των μαθητών αναλύεται αρχικά γνωστικά, κι έπειτα με βάση τους μεταδιαλογικούς κανόνες που διέπουν τη συνομιλία τους. Τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης περιορίζονται στην κατανόηση του διδιάστατου μηχανισμού της αποτυχίας των δύο μαθητών. Με βάση την επικοινωνιακή προσέγγιση, αυτό που τώρα φαινόταν ως άμεσο παράγωγο της «μαθηματικής δυνατότητας» του ατόμου, τώρα θεωρείται ως προϊόν μίας συλλογικής δράσης. Όταν δύο άνθρωποι συμμετέχουν σε ένα διάλογο η επιτυχία ή η αποτυχία του διαλόγου οφείλεται και στους δύο. Συνεπώς, εφόσον οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών φαίνεται να επηρεάζουν τη μάθηση, οι επικοινωνιακές δεξιότητες των μαθητών θα πρέπει να διδαχθούν.

Οι P. Cobo και J. M. Fortuny (2000) στοχεύουν ειδικότερα στην αναγνώριση των τύπων αλληλεπίδρασης μεταξύ ζευγών μαθητών κατά τη λύση προβλήματος και την επιρροή αυτών των αλληλεπιδράσεων στη γνωστική εξέλιξη των μαθητών. Η μελέτη τους οδηγεί στην ανάλυση της φύσης και της ποιότητας των αλληλεπιδράσεων, διευκρινίζοντας τα διαφορετικά μοντέλα που τείνουν να κυριαρχούν στη συζήτηση των μαθητών. Έπειτα παρατηρούν πως αυτά τα μοντέλα οδηγούν στη βελτίωση των μαθηματικών ικανοτήτων τους. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι κατά τη λύση προβλήματος από ζεύγη μαθητών, εμφανίζεται πληθώρα ευκαιριών μάθησης. Αυτές οι ευκαιρίες συσχετίζονται άμεσα με την πιθανότητα βελτίωσης κατά τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών ζητημάτων. Πιθανόν έτσι να παρουσιαστούν γνωστικά οφέλη στους μαθητές σε τομείς όπως οι ευρετικές, οι τρόποι προσέγγισης των προβλημάτων και παραγωγής νέων ιδεών.

Οι R. Even και B. Schwartz (2003) ερευνούν το ζήτημα της αλληλεξάρτησης της θεωρίας και των ερευνητικών συμπερασμάτων, και εξηγούν πως οι αναλύσεις ενός μαθήματος χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές θεωρητικές οπτικές, οδηγούν σε διαφορετικές ερμηνείες και αντιλήψεις του ίδιου μαθήματος. Το μάθημα αναλύεται από μία γνωστική και μία κοινωνικο – πολιτισμική προοπτική. Σύμφωνα με την πρώτη οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι αν και η πολλαπλότητα των εξωτερικών αναπαραστάσεων διευκολύνει τη μάθηση των εννοιών, ταυτόχρονα αποτελεί ένα γνωστικό φορτίο που εμποδίζει τις διαδικασίες της μάθησης. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τη θεωρία δραστηριότητας, καθηγητής και μαθητές συμμετείχαν στο ίδιο

μάθημα αλλά σε διαφορετικές δραστηριότητες. Τα κίνητρά τους ήταν διαφορετικά συνεπώς και οι ενέργειες που αποτελούν τη δραστηριότητα, και ενεργοποιήθηκαν από αυτά τα κίνητρα, είναι διαφορετικές. Η μελέτη ασχολείται λοιπόν εν μέρει με την ανάλυση των αίτιων αποτυχίας των μαθητών, όπως αυτά απορρέουν από τον τρόπο που εξελίχθηκε το μάθημα, όμως δε γίνεται σαφής αναφορά στα συγκεκριμένα στοιχεία της συμπεριφοράς του καθηγητή που ίσως να οδήγησαν στα αποτελέσματα αυτά.

Όπως παρατηρούμε στις προαναφερθείσες μελέτες, οι ερευνητές του τομέα έχουν ασχοληθεί αρκετά με την ανάλυση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την επίλυση προβλήματος από ζεύγη μαθητών. Ωστόσο ελάχιστα λαμβάνεται υπ' όψιν η συνεισφορά του καθηγητή στις γνωσιακές και τις επικοινωνιακές ικανότητες των μαθητών αυτών. Η συμπεριφορά του καθηγητή μέσα στην τάξη αποτελεί συχνά μοντέλο για τη συμπεριφορά που θα υιοθετήσουν οι μαθητές του και έτσι η επιτυχία ή η αποτυχία τους δεν μπορεί να ερμηνευτεί αγνοώντας τα πρότυπα που προωθεί ο καθηγητής.

3. Μεθοδολογία της Έρευνας

Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερευνητικό μας ερώτημα, υιοθετήσαμε την ακόλουθη μεθοδολογία: Η ερευνήτρια παρακολούθησε και κατέγραψε τα μαθήματα δύο τμημάτων Β' Γυμνασίου διαφορετικών σχολείων, επάνω στις συναρτήσεις και ειδικότερα επάνω στη γραμμική συνάρτηση $y = ax + \beta$. Στη συνέχεια πήρε συνέντευξη από τους δύο καθηγητές, συζητώντας μαζί τους για τις αντιλήψεις τους επάνω στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Τέλος ζητήθηκε από δύο μαθητές από κάθε τμήμα να συνεργαστούν για την επίλυση ενός προβλήματος. Η εργασία των δύο ομάδων μαγνητοφωνήθηκε, και μετά την απομαγνητοφώνηση αναλύθηκε με βάση τις γνωστικές τους ενέργειες, και με βάση την επικοινωνία των συνομιλητών, χρησιμοποιώντας την Εστιακή Ανάλυση και την Ανάλυση Μεταδιαλογικών Κανόνων αντίστοιχα, όπως περιγράφονται από τη Sfard (2001). Όπως αναφέρθηκε, στόχος αυτής της εργασίας είναι να ερευνήσουμε το αν οι ενέργειες του καθηγητή κατά τη διάρκεια των σχολικών μαθημάτων αντικατοπτρίζονται στις ενέργειες των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος. Με άλλα λόγια σε ποιο βαθμό επηρεάζουν οι τρόποι διδασκαλίας τον τρόπο σκέψης και

τους χειρισμούς των μαθητών κατά την συνεργασία τους. Επομένως κρίνεται απαραίτητο να περιγραφούν τα βασικά χαρακτηριστικά των μαθημάτων που παρακολουθήθηκαν από την ερευνήτρια στα δύο σχολεία. Για την αναγνώριση των χαρακτηριστικών στοιχείων των μαθημάτων αλλά και των αντιλήψεων των καθηγητών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, χρησιμοποιούμε το μοντέλο Φάσης – Διάστασης όπως περιγράφεται από τις A. F. Artzt και E. Armour – Thomas (1998, 1999). Οι τελευταίες διακρίνουν τρεις διαφορετικές όψεις του μαθήματος, που αποτελούν τις κατευθύνσεις προς τις οποίες πρέπει να ερευνήσουμε για παράγοντες που καθορίζουν την μάθηση και την κατανόηση των μαθητών. Οι τρεις αυτές ***διαστάσεις*** του μαθήματος είναι οι *εργασίες (tasks)*, το *μαθησιακό περιβάλλον (learning environment)* και ο *διάλογος – διαπραγμάτευση (discourse)* των θεμάτων. Όσον αφορά στις αντιλήψεις των καθηγητών για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, αυτές προκύπτουν μέσα από τις συνεντεύξεις των καθηγητών και αναφέρονται στις τρεις ***φάσεις*** του μαθήματος, την *έναρξη (initiation)*, την *ανάπτυξη (development)* και το *κλείσιμο (closure)*.

3.1 Πρακτικές και αντιλήψεις του 1ου καθηγητή

Η διδακτική του πρώτου καθηγητή δε φαίνεται να προάγει τη μάθηση με κατανόηση. Ταυτόχρονα παρουσιάζει αρκετά σημεία ασυνέπειας με τα όσα απορρέουν από τη συνέντευξή του σχετικά με τις αντιλήψεις του για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Κυριότερα στοιχεία της διδακτικής του αυτής, είναι ότι βασίζεται στη μεταφορά της γνώσης με το λόγο, στερείται πολλαπλών προσεγγίσεων στα μαθηματικά θέματα, και έχει ως στόχο την ταχεία εκμάθηση των εκάστοτε καταλληλότερων διαδικασιών.

Εστιάζοντας σε καθεμία από τις τρεις διαστάσεις του μαθήματος, παρατηρήθηκε αρχικά ότι οι εργασίες που έδινε στους μαθητές του δεν ευνόησαν την βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου του μαθήματος. Δεδομένου ότι η σειρά παρουσίασης των αναπαραστάσεων της συνάρτησης ήταν: αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, αυτή η σειρά ακολουθήθηκε και σε κάθε άλλη περίπτωση μελέτης συνάρτησης. Όπως ανέφερε ο καθηγητής στο μάθημα, όταν έλεγε «*θα εξετάσουμε την συνάρτηση*» εννοούσε ότι «*θα κάνουμε έναν πίνακα τιμών και έπειτα μία γραφική παράσταση*». Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της συνάρτησης εισήχθη ως διαδικασία αντιστοίχησης δύο συνόλων. Ο πίνακας τιμών της ήταν μία μορφή

καταγραφής ζευγών που προκύπτουν από την αντικατάσταση τυχαίων τιμών στη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής στον αλγεβρικό τύπο. Τα διατεταγμένα ζεύγη αυτά τοποθετήθηκαν έπειτα στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, χωρίς ωστόσο να εξηγηθούν οι λόγοι κατασκευής της γραφικής παράστασης. Η γραφική παράσταση αντιμετωπίστηκε σαν ένα αντικείμενο, παρά ως μία απειρία ζευγών που ορίζουν μία συνάρτηση, και που ικανοποιούν έναν αλγεβρικό τύπο. Ταυτόχρονα η μελέτη της συνάρτησης ολοκληρώθηκε με την εστίαση στα δύο σημεία τομής με τους άξονες, γεγονός που αποτρέπει τους μαθητές από τη θεώρησή της ως απειροσύνολο σημείων με κάποιες κοινές ιδιότητες.

Αντίστοιχα με τη γενική διαδικασία μελέτης της έννοιας της συνάρτησης, η τάξη εργάστηκε και για την $y = ax + \beta$. Όσον αφορά τα επιμέρους στοιχεία της, οι μαθητές δεν γνώριζαν τη σημασία του α, καθώς δεν είχε προηγηθεί η διδασκαλία της $y = ax$. Το β συνδέθηκε με το σημείο τομής της ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα, καθώς προκύπτει από την αντικατάσταση του x = 0 στον αλγεβρικό τύπο. Μετά από την πρώτη αναφορά όμως, δόθηκε μεγαλύτερη έμφαση στην αποστήθιση του ορισμού της γραφικής παράστασης, και τον προσδιορισμό του μέσω του ορισμού αυτού. Δεν επιχειρήθηκαν μεταβάσεις από τη μία αναπαράσταση στην άλλη προς άλλες κατευθύνσεις, και έτσι φαίνεται πως τελικά οι μαθητές δεν κατάφεραν να κάνουν τις κατάλληλες διασυνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα παρουσίασαν αδυναμία να συνδέσουν το σημείο (0, β) της γραφικής παράστασης της $y = ax + \beta$, με το β του αλγεβρικού τύπου, αν και όπως είπαμε είχε προηγηθεί η διαδικασία εύρεσής του και ο ορισμός της γραφικής παράστασης αυτής.

Όπως ανέφερε ο καθηγητής κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ένας από τους αρχικούς του στόχους στη Β΄ Γυμνασίου είναι

> «*Να μπορούν τα παιδιά σε σύντομο χρόνο να κάνουν τη γραφική παράσταση όλων των συναρτήσεων*».

Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι ακολουθούσε τη ίδια πορεία κατά τη μελέτη της κάθε συνάρτησης με τελικό προορισμό τη γραφική παράσταση. Ακόμη ένας πολύ βασικός του στόχος όπως φαίνεται, είναι να φτάνουν οι μαθητές στα σωστά αποτελέσματα και να εξασφαλίσει την βέλτιστη επίδοσή τους σε μελλοντικές εξετάσεις:

> «*Γιατί αν αύριο τους βάλω μία άσκηση σε ένα τεστάκι, σε ένα διαγώνισμα, να μου βρουν τα σημεία τομής, και κάποιος δε θυμηθεί τη*

θεωρία, θα χάσει τη μισή άσκηση… Εγώ θέλω πρακτικά να μάθουν τα παιδιά να δουλεύουν…»

Όμως η απουσία εμβάθυνσης στη σημασία των διαδικασιών, και η επιμονή του στην απομνημόνευση και αναπαραγωγή του δικού του χειρισμού των θεμάτων, δεν οδήγησε στην επίτευξη αυτού του στόχου. Ένα περιστατικό που δείχνει την απουσία πολλαπλών προσεγγίσεων στα μαθηματικά θέματα, ήταν όταν κάποιος μαθητής τον ρώτησε για την εύρεση του σημείου τομής από τον αλγεβρικό τύπο. Τότε ο καθηγητής τους πρότεινε να «*ξεχάσουν τη θεωρία*» και εξήγησε ότι το (0, β) προκύπτει αντικαθιστώντας το x = 0 στον αλγεβρικό τύπο. Όπως δήλωσε,

«*όταν θέλω να περάσει κάτι στα παιδιά το φέρνω και από διαφορετικές πλευρές*».

Ωστόσο αυτή η προσέγγιση μπορεί και να μην είχε αναφερθεί για δεύτερη φορά αν δεν έκανε τη συγκεκριμένη ερώτηση ο μαθητής.

Ταυτόχρονα, οι εργασίες ήταν καθαρά μαθηματικές, και εν γένει δεν παρείχαν κίνητρα στους μαθητές ώστε να κάνουν εικασίες και να τις διερευνήσουν. Ελάχιστες φορές χρησιμοποιήθηκαν πραγματικά προβλήματα στην τάξη, και πάντα αυτό οδηγούσε και πάλι σε μία απλή εφαρμογή του θεωρητικού μέρους του μαθήματος. Η θεωρία είναι για τον καθηγητή όπως δήλωσε «*το Α και το Ω*», και μόνο αφού οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη θεωρία, θα προχωρήσουν και στη λύση προβλημάτων. Οι μαθητές ασχολούνται με προβλήματα στο τέλος κάθε κεφαλαίου, σαν μέρος της επανάληψης. Μάλιστα τα προβλήματα αυτά περιορίζονται στα προτεινόμενα από το σχολικό βιβλίο, και απαιτούν την απλή εφαρμογή του θεωρητικού μέρους. Σ' αυτό το σημείο παρατηρείται μία ασυμβατότητα μεταξύ της πρακτικής του καθηγητή και τα όσα δήλωσε αργότερα στην ερευνήτρια. Σύμφωνα με τα λόγια του, βασικό στοιχείο του μαθήματος είναι ο προβληματισμός των μαθητών:

«*Προβληματισμός για να μην τους το δίνω έτοιμο εγώ, να ψάχνουν τα ίδια τα παιδιά, τότε τους μένει πιο πολύ*».

Τα κίνητρα όμως που δινόταν στους μαθητές για τον προβληματισμό και την ενασχόλησή τους με τις εργασίες ήταν πενιχρά. Η κινητοποίηση των μαθητών γινόταν περισσότερο με απώτερο σκοπό την καλή τους συμπεριφορά μέσα στο μάθημα και την καλύτερη επίδοσή τους στο μέλλον. Ταυτόχρονα, ο καθηγητής σε κάθε περίπτωση ήταν αυτός που τελικά υπεδείκνυε το «σωστό» και το «λάθος» και δεν έδινε την ευκαιρία στους μαθητές να αναρωτηθούν επί της ορθότητας των απόψεών τους. Αυτό όπως θα δούμε και κατά την ανάλυση των συνεντεύξεων των μαθητών, τους οδήγησε

σε έλλειψη αυτοπεποίθησης και βεβαιότητας των πράξεών τους και άμεση εξάρτηση από τα λόγια του «μαθηματικά ανώτερού» τους, δηλαδή της ερευνήτριας.

Όσον αφορά στο μαθησιακό περιβάλλον της τάξης, κι αυτό δεν κρίνεται ευνοϊκό για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Οι μαθητές σπάνια παρουσίασαν ενεργή συμμετοχή στην ανάπτυξη του περιεχομένου του μαθήματος. Από την άλλη πλευρά ο καθηγητής όπως προαναφέραμε θεωρείτο κάτοχος της «ορθής» γνώσης, την οποία προσπάθησε λεκτικά να τους μεταφέρει, χωρίς να τους παρακινήσει ποτέ να αναλάβουν οι ίδιοι την ευθύνη εξαγωγής των συμπερασμάτων. Η τάξη στο σύνολό της δεν λειτουργούσε σαν μία μικρή επιστημονική κοινότητα, καθώς οι εργασίες εκτελούνταν ατομικά, και οι μαθητές είχαν άμεση επαφή ο καθένας προσωπικά μόνο με τον καθηγητή. Ταυτόχρονα, ο τελευταίος συνειδητά δεν έδωσε στους μαθητές του επαρκή χρονικά περιθώρια ώστε να διερευνήσουν τις δικές τους ιδέες. Πράγματι, όπως δήλωσε, ένας ακόμη από τους βασικούς του στόχους είναι

«*το να μπουν τα παιδιά στη χρονική διαδικασία»,*

καθώς όπως πιστεύει,

«δεν έχει νόημα για μία γραφική παράσταση $y = 2x$ *να τους αφήσεις 5΄»*.

Θεωρούσε λοιπόν ότι το μαθηματικό περιεχόμενο του μαθήματος ήταν αρκετά απλό ώστε να μπορούν οι μαθητές να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σε σύντομο χρονικό διάστημα.

Ο καθηγητής δεν εκμεταλλεύτηκε με το βέλτιστο τρόπο τα χρονικά περιθώρια που είχε στη διάθεσή του, ούτε για την μεγιστοποίηση της συμμετοχής των μαθητών, ούτε για την ανάλυση εις βάθος των μαθηματικών εννοιών. Σε κάποιες περιπτώσεις προχώρησε αρκετά γρήγορα στην ύλη καθώς το μόνο που ζητούσε εν τέλει από τους μαθητές ήταν να μάθουν μέσα από την αναπαραγωγή του δικού του τρόπου σκέψης. Για παράδειγμα στο δεύτερο μάθημα επάνω στη συνάρτηση $y = ax + \beta$, ζήτησε από 4 μαθητές του να πουν τον ορισμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και θεώρησε ότι αυτό ήταν αρκετό ώστε να προχωρήσουν σε ασκήσεις. Μάλιστα, μετά από αυτή την εξέταση των 4 μαθητών ανέφερε:

«*Το είπαμε τέσσερις φορές και για κάποιον που δεν το είχε καταλάβει, τώρα δεν υπάρχει δικαιολογία*».

Κατ' αυτόν τον τρόπο όμως αρκετοί μαθητές δεν μπορούσαν να προχωρήσουν ενεργά στο υπόλοιπο του μαθήματος, καθώς όπως φαίνεται δεν κατανοούσαν αυτό που οι ίδιοι είχαν απομνημονεύσει. Όπως δήλωσε αργότερα ο καθηγητής, ο ρυθμός

ενασχόλησης με τις εργασίες κατά τη διάρκεια του μαθήματος προσαρμόζεται ανάλογα με την επίδοση των μαθητών. Ωστόσο η έλλειψη ουσιαστικής παρακολούθησης της πορείας της μάθησης των μαθητών, οδήγησε συχνά τον καθηγητή σε εσφαλμένη εκτίμησή της. Έτσι πίστευε ότι ο ρυθμός αυτός ήταν για το δεδομένο σχολικό τμήμα ικανοποιητικός.

Ειδικότερα, σχετικά με τον τύπο των διαλόγων που λάβαιναν χώρα μέσα στη σχολική αίθουσα, αυτοί περιορίζονταν αυστηρά μεταξύ καθηγητή και κάθε μαθητή ξεχωριστά. Όπως προαναφέρθηκε, οι μαθητές δεν είχαν κάποια μορφή επικοινωνίας μεταξύ τους βασισμένη στη μαθηματική εργασία. Γενικότερα στόχος του καθηγητή όπως φαίνεται από το μάθημα αλλά και από τη συνέντευξή του, ήταν το να δίνουν οι μαθητές του σωστές απαντήσεις και να φτάνουν γρήγορα στα σωστά αποτελέσματα. Οι ερωτήσεις που υπέβαλε είχαν περισσότερο μορφή εξέτασης παρά διαλόγου για τη μελέτη των μαθηματικών αντικειμένων, ή παρακολούθησης της μάθησης των μαθητών. Αυτό το δείχνει η αρνητική του αντίδραση στις λάθος απαντήσεις. Η έντονη αποδοκιμασία του κάθε φορά που οι μαθητές απαντούσαν σε κάποιο από τα ερωτήματά του εσφαλμένα, ή με τρόπο άλλο από τον προτεινόμενο από τον ίδιο τον καθηγητή, ίσως να τους αποθάρρυνε από την ενεργό δράση. Για παράδειγμα όταν τους ζητήθηκε να αναφέρουν ποιο είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της $y = ax + \beta$ με τον άξονα yy' , η απάντηση «το β» αντιμετωπίστηκε επικριτικά από τον καθηγητή, χωρίς να γνωρίζει εάν ο συγκεκριμένος μαθητής εννοούσε το (0, β), που είναι και το σωστό.

Όπως είπαμε οι μαθητές δεν είχαν καμία μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ τους κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Όταν ρωτήθηκε ο καθηγητής σχετικά με τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών, απάντησε ότι την επιτρέπει, κάποιες φορές λέγοντάς τους «συνεργαστείτε», άλλες χωρίς να χρειαστεί να το πει. Συνεχίζοντας όμως προσδιόρισε ότι αυτή η συνεργασία περιορίζεται στο να μπορούν όλοι να έχουν τα κατάλληλα εργαλεία ώστε να εργαστούν:

> «*Ένας μαθητής που δεν έχει το δικό του κομπιουτεράκι θα χρησιμοποιεί του διπλανού του ... ή δεν έχει χάρακα θα πάρει από τον διπλανό του*».

Όσον αφορά το θεωρητικό κομμάτι του μαθήματος όμως, ήταν απόλυτα αρνητικός για τη συνεργασία των μαθητών. Έτσι και κατά τη διάρκεια του μαθήματος απουσίαζε ο μαθηματικός διάλογος και οι μαθητές στερούνταν των ευκαιριών για ανάπτυξη και διερεύνηση των δικών τους τρόπων σκέψης.

Διατρέχοντας όλη τη συνέντευξη του καθηγητή διακρίνονται κάποιες γενικές αντιλήψεις του σχετικά με τους μαθητές, το μαθηματικό περιεχόμενο και τη διδακτική, ανεξάρτητα από την εκάστοτε φάση του μαθήματος. Απ' ότι φάνηκε ο καθηγητής γνωρίζει σε μέτριο βαθμό τις ικανότητες των μαθητών του. Μάλιστα θα λέγαμε ότι τους υπερεκτιμά, καθώς πιστεύει ότι, στο συγκεκριμένο τομέα, τη συνάρτηση $y = ax + \beta$, οι μαθητές κατανόησαν

> «*το περίπου 90% αυτών που θέλω να πάρουν σε μέσο όρο, γιατί τα πιο πολλά παιδιά έχουν πάρει το 100% αυτών που θέλω*».

Όπως θα δούμε παρακάτω όμως, δύο από τους καλύτερους μαθητές του τμήματος αυτού απέτυχαν να αντιμετωπίσουν ακόμη και κάποια στοιχειώδη μαθηματικά ζητήματα, στο πρόβλημα που τους ζητήθηκε να λύσουν. Σχετικά με το ρόλο των μαθητών κατά την ώρα του μαθήματος, θα λέγαμε ότι αυτός περιορίζεται στο να είναι απασχολημένοι με τις εργασίες. Άλλωστε, όπως φάνηκε και νωρίτερα, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην εκμάθηση των διαδικασιών και όχι τόσο στη διερεύνηση και κατανόηση του νοήματός τους. Από την άλλη πλευρά ο ρόλος του καθηγητή είναι πιο ενεργητικός, ως χορηγός της γνώσης. Αυτό διαφαίνεται και από τις συγκεκριμένες λέξεις που ανέφερε ο καθηγητής για να περιγράψει τη διδασκαλία του: «*να τους δώσω*», «*να πάρουν*», «*θα τους πω*». Στο τέλος της συνέντευξης ο καθηγητής δήλωσε την ικανοποίησή του για την εξέλιξη των μαθημάτων και δεν έκανε καμία πρόταση για μελλοντική βελτίωση της διδακτικής του. Βέβαια η συνέντευξη έλαβε χώρα μετά τη λήξη των μαθημάτων και θα ήταν δύσκολο για τον καθηγητή να θυμάται ξεχωριστά για κάθε μάθημα ποια σημεία πιθανώς να επιδέχονται βελτίωσης ή αλλαγής. Ειδικότερα, επισήμανε ότι μετά από κάθε διδακτική ώρα κάνει μία σύντομη ανασκόπηση του μαθήματος, ώστε στο επόμενο μάθημα να μπορέσει να καλύψει τυχόν κενά. Πιθανότατα όμως η ελλιπής παρακολούθηση της κατανόησης των μαθητών του να τον οδηγεί σε εσφαλμένη εντύπωση σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδακτικής του προσέγγισης.

3.2 Πρακτικές και αντιλήψεις του 2ου καθηγητή

Αντίθετα με τον πρώτο καθηγητή, η διδακτική του δεύτερου φαίνεται να προάγει τη μάθηση με κατανόηση, με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Αν και τυπικά είχε στοιχεία ενός συνηθισμένου παραδοσιακού μαθήματος, όπως και στον πρώτο καθηγητή, ακολουθήθηκε μία πιο επικοινωνιακή προσέγγιση, που διευκόλυνε

αφενός στην κατανόηση των μαθητών, αφετέρου στην παρακολούθηση της πορείας τους και την προσαρμογή του μαθήματος στις ανάγκες τους. Βασικό διαφοροποιητικό στοιχείο του μαθήματος ήταν η εισαγωγή της συνάρτησης $y = ax + \beta$ με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, καθώς και οι πολλαπλές μεταβάσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της συνάρτησης, που προσέδιναν το ίδιο κύρος σε καθεμία από αυτές.

Κατ' αρχάς η συνάρτηση ορίστηκε συνολοθεωρητικά. Ξεκινώντας από δύο σύνολα αντικειμένων, ορίστηκε η έννοια της διμελούς σχέσης ως ένα σύνολο ζευγών αυτών των αντικειμένων. Ωστόσο κάθε αντικείμενο του πρώτου συνόλου μπορούσε να αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός αντικείμενα του δευτέρου. Σε επόμενη φάση ορίστηκε η απεικόνιση ως μονότιμη διμελής σχέση, και στη συνέχεια η συνάρτηση ως απεικόνιση αριθμητικών συνόλων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι δε δόθηκε έμφαση στον ορισμό της συνάρτησης ως «αντιστοίχιση», ή «διαδικασία», καθώς αργότερα αναφέρθηκε και χρησιμοποιήθηκε κυρίως ως σύνολο ζευγών αριθμών. Έτσι δεν συνδέθηκε αυστηρά με τον αλγεβρικό τύπο και οι μαθητές έδειξαν μεγάλη ευκολία μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Οι μεταβάσεις αυτές επιδιώχτηκαν από τον ίδιο τον καθηγητή, ο οποίος εγκατέστησε τους απαραίτητους συνδέσμους μεταξύ των αναπαραστάσεων. Όπως ανέφερε ο ίδιος ο καθηγητής

> «*Ήθελα τα παιδιά να κρατήσουν στο μυαλό τους ότι συνάρτηση δεν είναι μόνο ένας τύπος, αλλά είναι τρία διαφορετικά πράγματα τα οποία το ένα εμπλέκεται μέσα στο άλλο και στην ουσία μας δίνουν μία έννοια η οποία ονομάζεται συνάρτηση*».

Για παράδειγμα ξεκινώντας από τον ορισμό της συνάρτησης ως ζεύγη αριθμών προχώρησε στην εισαγωγή ενός αλγεβρικού τύπου ως τρόπο έκφρασης της σχέσης που συνδέει τους αριθμούς του κάθε ζεύγους, στη μαθηματική γλώσσα. Η γραφική παράσταση παρουσιάστηκε ως μέσο εικονικής αναπαράστασης, δίνοντάς τους ένα πραγματικό παράδειγμα χρησιμότητας μίας τέτοιας αναπαράστασης. Από την άλλη πλευρά τόνισε ότι δεδομένης της γραφικής παράστασης μπορούμε να γνωρίζουμε όλα τα ζεύγη αριθμών που ορίζουν μία συνάρτηση. Ομοίως ο αλγεβρικός τύπος μπορεί να παράγει όλα τα ζεύγη της συνάρτησης. Αντίστροφα, τα ζεύγη με τη σειρά τους ικανοποιούν έναν αλγεβρικό τύπο. Αυτή ήταν και η μόνη μετάβαση που δεν έγινε ολοκληρωμένα μέσα στην τάξη, δηλαδή από πίνακα τιμών σε αλγεβρικό τύπο. Μοναδική παραπλήσια εργασία που συζητήθηκε ήταν όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν το β της συνάρτησης $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \beta$ όταν ένα σημείο της είναι το (6, 5). Η

λύση δόθηκε αλγεβρικά, αντικαθιστώντας το σημείο στον αλγεβρικό τύπο και λύνοντας ως προς β.

Η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή (The Geometers' Sketchpad) για την εισαγωγή της $y = ax + \beta$ ως παράλληλη μετατόπιση της $y = ax$ κατά β κατακόρυφα, διευκόλυνε τη σύνδεση του νέου αντικειμένου με τα παλαιότερα, καθώς και την μελέτη των επιμέρους στοιχείων της συνάρτησης από διαφορετικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα το α παρουσιάστηκε ως αλγεβρικός συντελεστής του x στον τύπο, ως η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον xx΄ , και ως ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x}$ στην $y = ax$. Στο σημείο αυτό δημιουργήθηκε μία σύγχυση στους μαθητές καθώς δεν τονίστηκε αρκετά ότι ο λόγος αυτός αναφέρεται στην $y = ax$, όμως επέμειναν οι ίδιοι στη διασαφήνιση του θέματος αυτού. Αν και μαθητές και καθηγητής δεν μπόρεσαν να αποκαταστήσουν άριστη επικοινωνία, στο τέλος φάνηκε να κατανοούν αυτό που ο καθηγητής τους παρουσίασε.

Οι εργασίες, και στην περίπτωση αυτού του καθηγητή, ήταν πάντα καθαρά μαθηματικές και δεν ήταν βασισμένες στα ενδιαφέροντα των μαθητών. Οι μαθητές ασχολήθηκαν με επίλυση προβλήματος μόνο στο τέλος του κεφαλαίου. Όπως είπε:

> «*θέλω πρώτον και κύριον να ξέρουν πολύ καλά τις έννοιες, να ξέρουν καλή άλγεβρα και μετά σαν εφαρμογή όλων αυτών κάνουμε και προβλήματα*».

Τα κίνητρα όμως που παρείχε στα παιδιά ήταν περισσότερο επικοινωνιακού χαρακτήρα, καθώς τους ενέπλεκε, όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω, σε μία έντονη συζήτηση περί του μαθηματικού αντικειμένου. Οι εργασίες δεν είχαν κλιμακούμενη δυσκολία, καθώς στην ουσία αποτελούσαν πρότυπα μεταβάσεων από μία αναπαράσταση στην άλλη, τα οποία ωστόσο συνίσταται για την βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση των διαδικασιών.

Το μαθησιακό περιβάλλον της τάξης ευνοούσε την ανάπτυξη διαλόγου και μαθηματικής σκέψης. Ο καθηγητής ζητούσε την εμπλοκή των μαθητών του στις εργασίες, έδειχνε σε κάθε περίπτωση σεβασμό για τις απόψεις τους, και προσάρμοζε την πορεία του μαθήματος στις ανάγκες τους. Χρησιμοποιούσε στρατηγικές που ενθάρρυναν την εμπλοκή όλων των μαθητών στις εργασίες. Για παράδειγμα σε περίπτωση που απευθυνόταν σε κάποιο μαθητή που απείχε μέχρι εκείνη τη στιγμή από τις δραστηριότητες της τάξης, επαναλάμβανε με λίγα λόγια όσα είχαν προηγηθεί, δίνοντάς του την ευκαιρία να αναλάβει δράση από εκείνη τη στιγμή και έπειτα:

«*Πολλές φορές ρωτάω μία εύκολη ερώτηση σε έναν αδύναμο μαθητή για να αρχίσει να συμμετέχει*».

Ο χρόνος που έδινε στους μαθητές του για να απαντήσουν στις ερωτήσεις του, ήταν ελαστικός και εξαρτιόταν από την ανταπόκριση των μαθητών. Κατά το χρονικό αυτό περιθώριο ο ίδιος ο καθηγητής επαναλάμβανε πολλές φορές την ερώτηση, εκφραζόμενος με διαφορετικούς τρόπους, αν και συχνά καθ' αυτόν τον τρόπο έδινε πολλά στοιχεία στους μαθητές του καθοδηγώντας τους στη σωστή απάντηση. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό του μαθήματος που θα πρέπει να τονιστεί είναι ότι οι μαθητές είχαν το δικαίωμα ανά πάσα στιγμή να απευθύνουν τις απορίες τους στον καθηγητή, ακόμη και όταν αυτές ήταν σχετικές με κάτι που ήδη έχει ειπωθεί. Ο καθηγητής έδειξε μεγάλο σεβασμό στις απορίες αυτές, και επέμεινε στα θέματα που προβλημάτιζαν τους μαθητές, προσπαθώντας να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης τους και να διαλευκάνει τα θολά σημεία, μέχρις ότου διασφαλίσει την κατανόησή τους.

Ειδικότερα επάνω στο θέμα του διαλόγου, ο καθηγητής απευθυνόταν στους μαθητές του ενθαρρύνοντάς τους να συμμετέχουν ενεργά στην εξέλιξη του μαθήματος, χωρίς να έχει επικριτική ή αποδοκιμαστική στάση απέναντι στις απόψεις τους. Άκουγε προσεκτικά τα λόγια των μαθητών του προσπαθώντας να «μεταφράσει» αυτά που λένε στην ορθή μαθηματική γλώσσα. Γενικότερα κατά τη διάρκεια του μαθήματος κυριαρχούσε η επικοινωνία μεταξύ μαθητών και καθηγητή. Οι μαθητές δεν εργάστηκαν κατά ομάδες, και δεν έλαβε χώρα άμεσος διάλογος μεταξύ τους. Όμως δεν τους απαγορευόταν να συνεργαστούν:

«*Άμα δω ότι είναι κάποια παιδιά τα οποία κάνουν μία ψιλοσυζήτηση, δηλαδή «τι γνώμη έχεις εσύ» κ. τ. λ. , δεν το αποθαρρύνω, το αφήνω.*»

Οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις είχαν μία έμμεση επικοινωνία, με τον καθηγητή να εκτελεί ρόλο διαμεσολαβητή για την επικοινωνία τους αυτή. Κάθε φορά που κάποιος μαθητής απαντούσε σε μια ερώτηση του καθηγητή, ο τελευταίος επαναλάμβανε τα λόγια του μαθητή στην τάξη αναφέροντας το όνομά του, και χρησιμοποιούσε αυτήν την απάντηση, σωστή ή λάθος, ως αφορμή για την επόμενη ερώτησή του. Έτσι οι μαθητές είχαν το ρόλο ισοδύναμων μελών της κοινωνίας της τάξης που διαμόρφωναν οι ίδιοι την έκβαση του μαθήματος, έβγαζαν συμπεράσματα και έφταναν σε αποτελέσματα. Πρέπει να αναφέρουμε ότι το είδος των ερωτήσεων που απηύθυνε ο καθηγητής στους μαθητές του συχνά ήταν καθοδηγητικό προς τη σωστή απάντηση. Αυτό γινόταν μάλιστα μερικές φορές συνειδητά από τον καθηγητή:

«Αν δω ότι παίρνει πολύ λαθεμένο δρόμο προσπαθώ να τον βοηθήσω… όχι να τον κατευθύνω τελείως, αλλά… να μου απαντήσει μέσω βοηθητικών ερωτήσεων»

Οι ερωτήσεις αυτές ωστόσο αποτέλεσαν το μέσο παρακολούθησης της πορείας των μαθητών, αλλά και κίνητρο ενεργής συμμετοχής όλων των μαθητών.

Ο καθηγητής δήλωσε ευχαριστημένος από την πορεία των μαθημάτων. Το μόνο μάθημα για το οποίο δεν ένιωθε αρκετά ικανοποιημένος ήταν αυτό που πραγματοποιήθηκε στο εργαστήρι πολυμέσων. Αιτία ήταν τα τεχνικά προβλήματα που δημιουργήθηκαν από την αδυναμία χειρισμού του λογισμικού από τους μαθητές, που οδήγησε σε δαπάνη πολύτιμου χρόνου. Ωστόσο το μάθημα προσαρμόστηκε κατάλληλα ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να αποκομίσουν τα απαραίτητα οφέλη. Τέλος, δεν έκανε κάποια σχόλια για βελτίωση της διδακτικής του, πιθανότατα για τον ίδιο λόγο με τον πρώτο καθηγητή. Δήλωσε ότι δεν το έχει αναλογιστεί ως τώρα, αν και θα έπρεπε στο τέλος κάθε μαθήματος να γίνεται μία ανασκόπηση της εξέλιξής του. Φάνηκε όμως μέσα στη σχολική αίθουσα ότι οι αποφάσεις για την καλύτερη εξέλιξη του μαθήματος λαμβάνονταν επιτόπου για την ικανοποίηση των αναγκών των μαθητών.

4. Συνεντεύξεις μαθητών και Ανάλυση

Οι συνεντεύξεις των μαθητών έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια μίας σχολικής ώρας, σε μία σχολική αίθουσα. Οι μαθητές επιλέχθηκαν ούτως ώστε να έχουν καλή επίδοση στα μαθηματικά, σύμφωνα με την κρίση του καθηγητή τους. Ταυτόχρονα έπρεπε να διατηρούν μία καλή σχέση και εκτός σχολικού πλαισίου, ώστε να μπορούν να επικοινωνήσουν όσο το δυνατόν καλύτερα κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Έτσι για την πρώτη περίπτωση επιλέχθηκαν μαθητές που κάθονται στο ίδιο θρανίο, ενώ για τη δεύτερη περίπτωση, επειδή τα θρανία ήταν ατομικά, δύο μαθήτριες που κάθονται σε πολύ κοντινά θρανία και κάνουν παρέα. Παρούσα στη συνέντευξη ήταν η ερευνήτρια (Ε.) η οποία συμμετείχε στο διάλογο των μαθητών, τις περισσότερες φορές προτρέποντας τους μαθητές να ενεργήσουν, να περιγράψουν ή να εξηγήσουν τις πράξεις τους, ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή καταγραφή του τρόπου σκέψης τους. Η πρώτη συνέντευξη περιλαμβάνει το διάλογο του Κωνσταντίνου (Κ.) και του Γιώργου (Γ.), μαθητών του πρώτου καθηγητή, και η διάρκειά της ήταν 35΄. Η δεύτερη

συνέντευξη περιλαμβάνει το διάλογο της Αποστολίας (Απ.) και της Αμαλίας (Αμ.), που αντιστοιχούν στο δεύτερο καθηγητή και είχε διάρκεια 21΄. Το πρόβλημα που τους

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μίας συνάρτησης.

α) Να συμπληρώσετε το κουτάκι.

β) Να βρείτε ποια είναι η συνάρτηση.

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***;***
y	***-4***	***-2***	***0***	***2***	***4***	***12***

ζητήθηκε να λύσουν ήταν το εξής:

Και στις δύο περιπτώσεις, οι μαθητές είχαν αντιμετωπίσει παρόμοια θέματα. Οι μαθητές του πρώτου καθηγητή, κατά τη διάρκεια του μαθήματος είχαν αντιμετωπίσει την εξής άσκηση του σχολικού βιβλίου:

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = ax + \beta$ *είναι ο*

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
y	*2*	*5*	*8*	*11*	*14*

Να υπολογίσετε τα α και β.

Αντίστοιχα, οι μαθήτριες του δεύτερου καθηγητή είχαν αντιμετωπίσει την εξής εργασία:

Να βρεθεί το β της συνάρτησης $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \beta$ *όταν ένα σημείο της είναι το (6, 5).*

Ωστόσο, το νέο πρόβλημα ήταν μία άγνωστη κατάσταση και για τα δύο ζεύγη μαθητών, καθώς δε δινόταν ο γενικός τύπος της συνάρτησης.

Τα φύλλα εργασίας των μαθητών παρατίθενται στις σελ. 27 και σελ. 58. Στα πρωτόκολλα των συνεντεύξεων, στην πρώτη στήλη αριθμούνται οι εκφράσεις των συνομιλητών, στη δεύτερη αναφέρεται το ποιος μιλάει τη δεδομένη στιγμή και στην τέταρτη σε τι αναφέρεται ο συνομιλητής, σε ποιόν απευθύνονται τα λόγια του, ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ των εκφράσεων των συνομιλητών, και οποιαδήποτε άλλα σχόλια που θεωρήθηκαν απαραίτητα για την ανάγνωση του διαλόγου.

4.1 Συνέντευξη 1

1	Ε	Είχατε κάνει πίνακα τιμών	Έχει περάσει 1’ κατά το οποίο διάβασαν την εκφώνηση του προβλήματος.
2	Κ	Ναι, ναι	
3	Ε	Κάντε ότι σκεφτείτε	
			25’’
4	Ε	Θυμάστε κάποια...	
5	Κ	Συνάρτηση;	
6	Ε	Ή κάποια συνάρτηση, ή άμα είχατε κάνει στο μάθημα κάποια παρόμοια άσκηση, κάτι να σας θυμίζει...	
7	Κ	Ναι...	Πολύ χαμηλόφωνα
8	Ε	Όχι ότι πρέπει απαραίτητα, απλά ότι θυμίζει	
			20’’, ο Κ. αρχίζει να γράφει
9	Ε	Θα μου πεις τι γράφεις;	
10	Κ	Ναι, εε, θα δοκιμάσουμε να δούμε άμα αυτή, αυτός ο πίνακας τιμών είναι στη συνάρτηση $y = a \cdot x$	$y = a \cdot x$
11	Ε	Ωραία, δοκιμάστε το	
12	Κ	Όταν το y είναι –4, τότε...	$-4 = x$
13	Γ	Θα βάλουμε το x	
14	Κ	Το x θα είναι μηδέν...	$-4=0$
			10’’
15	Γ	Αν η συνάρτηση είναι αυτή δε θα χρειαστούμε αυτό;	Δείχνει το α
			20’’
16	Ε	Προχώρα το. Δε βγαίνει αυτό; Δε μας αρέσει;	
17	Κ	Εεμ, ας πούμε επί... 1	$-4=0\cdot 1$
			28’’ Γράφει $y = a \cdot 0$, $y = 0$ και σταματάει
18	Ε	Άλλη ιδέα. Γιώργο;	
19	Γ	Να δοκιμάσω την $y = \frac{a}{x}$;	
20	Ε	Δοκιμάστε μαζί	

			35’’,ο Γ. γράφει $y = \frac{a}{x}$
21	Ε	Τι θα το κάνουμε; Μην το σκέφτεστε τόσο... κάντε κάτι! Συζητήστε το...	
22	Γ	Αν y = 4…	$-4 = \frac{a}{0}$
23	Ε	Δε χρειάζεται να τα κάνουμε όλα με το μυαλό μας...	
			37’’
24	Ε	Βγαίνει κάτι από αυτό; Δε μας αρέσει;	
25	Κ	Δε μας αρέσει	
26	Ε	Γιατί δε μας αρέσει; Πείτε μου κι εμένα	
27	Κ	Μμμ... Ναι...	
			13’’
28	Ε	Από εκεί δε μπορούμε να προχωρήσουμε;	
29	Κ	Μπορούμε	
30	Ε	Μπορούμε;	
31	Κ	Ναι..Εεε.... Παίρνουμε το 1 κάτω από το –4. –4 επί 1 ίσον α επί 0	$\frac{-4}{1} = \frac{a}{0}$ $-4 \cdot 1 = a \cdot 0$
32	Γ	Γιατί να μην το κάνουμε χιαστί;	
33	Κ	Μμμμ.. Εεε... περίμενε...	
			6’’
34	Γ	Κάνουμε τα χιαστί; Δε θυμάμαι...	
35	Κ	Μμ.	
			9’’
36	Ε	Στην ουσία τι ψάχνουμε να βρούμε;	
37	Κ - Γ	Το κουτάκι	
38	Ε	Ναι, εκεί που γράφετε αυτά…	
39	Κ	Να βρούμε τη συνάρτηση...	
40	Γ	Ποιά είναι	
41	Κ	Ποιά είναι η συνάρτηση που μας δίνει αυτό το...	
42	Ε	Ωραία. Εκεί που έγραψες, εντάξει... θα το προχωρήσεις; Δε σου λέω εγώ, κατάλαβες; Απλά μη το σκέφτεσαι τόσο πολύ, δοκίμασε και συζητήστε το και μεταξύ σας. Ή τέλος πάντων ότι σκέφτεστε πείτε το, να ξέρουμε πως σκέφτεστε...	Αστειευόμενη
43	Κ	Μμμ.	
			14’’
44	Ε	Άμα βλέπετε οτι δεν πάει άλλο ή δεν μπορείτε άλλο δοκιμάστε κάποια άλλη ιδέα. Συζητήστε κάτι άλλο	
45	Γ	Γιατί να μην είναι αυτό χιαστί;	Πολύ χαμηλόφωνα στον Κ.
			5’’, ο Κ. δεν κάνει τίποτα
46	Ε	Τι είπες Γιώργο;	
47	Γ	Να το κάνουμε χιαστί	
48	Ε	Πως δηλαδή;	

49	Γ	Το x είναι 4, το y είναι 4, όταν το x είναι ένας αριθμός, το x είναι 12	Κοιτάνε την ερευνήτρια περιμένοντας
50	Ε	Δοκιμάστε το, δεν ξέρω..	
51	Κ	Εε, είπαμε 4 προς 4 ίσον x προς 12. 4x ίσον ..	$\frac{4}{4}=\frac{x}{12}$ $4\cdot x=12\cdot 4$
52	Γ	4 επί 12	
53	Κ	12 επί 4 4x ίσον 48 Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου x ίσον..	$4\cdot x=48$ $\frac{4\cdot x}{4}=\frac{48}{4}$
54	Γ	48 δια 4	
55	Κ	48 δια 4. Ίσον.... x=12	Κάνει τη διαίρεση με το χέρι Κοιτάνε την ερευνήτρια περιμένοντας.
56	Ε	Αυτό μπορείτε να το επαληθεύσετε; Είστε σίγουροι;	
57	Κ	Ναι, μπορούμε να πούμε τέσσερα τέταρτα ισούται με δώδεκα δωδέκατα	
58	Ε	Ναι, αλλά δεν είναι μόνο αυτά τα νούμερα στον πίνακα. Άμα μπορείτε να το επαληθεύσετε... Πάντα στα μαθηματικά αν μπορούμε να το επαληθεύσουμε κι αλλιώς είναι καλύτερα, να είμαστε πιο σίγουροι.	
			28’’
59	Κ	...	Μιλάει χαμηλόφωνα στο Γ.
60	Γ	Αυτό;	
			Η ερευνήτρια πλησιάζει προσπαθώντας να ακούσει και οι μαθητές σταματάνε.
61	Ε	Σκεφτείτε, σκεφτείτε...	
			38’’
62	Ε	Σκεφτείτε και λίγο γενικά τι κάνατε σε όλες τις συναρτήσεις. Σε όλα τα μαθήματα.	
63	Κ	Μμμμ... εεε...	
64	Ε	Μήπως σας θυμίζει κάτι άλλο...	
65	Κ	Κάναμε διάφορα με σχέση τις συναρτήσεις	
66	Ε	Ναι. Κάποια άλλη ιδέα μήπως σου ‘ρθει, γενικά, σκέψου όλα τα μαθήματα.	
			7’’
67	Κ	Έχουμε πει κι άλλες συναρτήσεις όπως η y=…	
68	Γ	αx + β	
69	Κ	αx + β	
70	Ε	Δηλαδή την ιδέα αυτή την παρατήσαμε	Για την $y=a\cdot x$
71	Κ	Ναι, εεε...	
72	Ε	Ή.. Δε θέλετε να την επαληθεύσετε, να προσπαθήσετε; Ή όχι; Άμα είναι να ξεκινήσουμε κάτι άλλο να ξέρουμε γιατί παρατήσαμε το προηγούμενο.	
73	Κ	Ναι	

			10’’
74	Ε	Νιώθετε απλά ότι δε βγαίνει, ή δεν ξέρετε πως να το επαληθεύσουμε;	
75	Κ	Ναι	
			15’’
76	Κ	Άμα πούμε τέσσερα τέταρτα ισούται και στη θέση του x βάλουμε αυτό το δώδεκα που βρήκαμε, άμα τα πολλαπλασιάσουμε θα βρούμε τον ίδιο αριθμό	Στην ερευνήτρια.
77	Ε	Ναι, αλλά για την επαλήθευση...	
78	Κ	Μμμ, μμμ....	
79	Ε	Μήπως πρέπει να πάρουμε κάτι άλλο. Γιατί έτσι το λύσαμε. Για την επαλήθευση κάνουμε κάτι διαφορετικό συνήθως.	
80	Γ	Να γράψουμε $\frac{3}{2}=\frac{x}{12}$ και να δούμε άμα βρούμε πάλι το ίδιο	Το λέει στην ερευνήτρια και ο Κ. την κοιτάει.
81	Ε	Ωραία, κάντε το	
82	Κ	Τρία δεύτερα ίσον x προς 12 Δύο x ίσον 3 επί 12 Δύο x ίσον 36 x ίσον 18 μου βγαίνει Ωχ... κάτι δεν πάει καλά..	$\frac{3}{2}=\frac{x}{12}$ $2\cdot x=3\cdot 12$ $2\cdot x=36$ $\frac{8x}{8}=\frac{36}{12}$ $x=18$
83	Ε	Γιώργο τι λες εσύ; Πες μας κι εσύ κάτι..	
			7’’
84	Ε	Άρα αυτό τι σημαίνει που βρήκαμε διαφορετικό το νούμερο;	
85	Κ	Ότι δεν είναι αυτός ο τρόπος...	
86	Ε	Α, ωραία	
87	Κ	Πρέπει να κάνουμε κάτι άλλο δηλαδή για να βρω το ...	
88	Ε	Ωραία, γράψατε τώρα αυτήν. Θέλετε να δοκιμάσετε αυτήν;	Για την $y=ax+\beta$
89	Κ	Η αx + β.	
90	Ε	Τι μπορούμε να κάνουμε;	
91	Κ	Μμμμ	
			16’’
92	Ε	Τι θα ψάξουμε να βρούμε; Τι θέλετε να βρείτε εσείς;	
93	Κ	Να δούμε αν αυτή η συνάρτηση ... εε... πώς το λένε;	
94	Ε	Λοιπόν συζητήστε το μεταξύ σας περισσότερο, μη μιλώ εγώ	
95	Κ	Ναι, ναι	
96			35’’ στο τέλος κάτι ψιθυρίζουν
97	Ε	Καλέ μην ψιθυρίζετε! Είπαμε να ακουγόμαστε.. Πες μου τι είπες; Δεν άκουσα...	
98	Κ	Ναι, εε... στο α...στο β. Τον ζήταγε τον αριθμό;	
99	Γ	Όχι, μας έδινε. Σου έλεγε τον τύπο.. το 5..συν...εε...	

			15’’
100	Γ	Να δοκιμάσουμε κάτι; Να βάλουμε εδώ το 5	
			15’’
101	Κ	Πρέπει να βρούμε πόσο είναι για να έχουμε το x γι’ αυτό το y.	
102	Γ	Το y το έχουμε... εδώ	
			13’’
103	Ε	Πες μου λίγο Γιώργο ποια ιδέα είπες τώρα εσύ;	
104	Γ	Να βρούμε την y = αx και να βάλουμε για παράδειγμα εδώ πέρα το 5 και να δοκιμάσουμε	
			19’’
105	Ε	Κωνσταντίνε τι λες;	Καμία αντίδραση από τον Κ.
106	Κ	Εεεε..	
			30’’
107	Γ	Και να τα κάνουμε χιαστί πάλι;	
108	Κ	Μμμμ	
			19’’
109	Κ	Να σου πω. Άμα στη συνάρτηση y=αx αν βάλουμε στο x το μηδέν, y=α 0, πρέπει να βγαίνει y=0 άρα δεν είναι αυτή η συνάρτηση	Ξεκινάει να μιλάει στο Γ, αλλά στο τέλος κοιτάει την ερευνήτρια.
110	Ε	Το Γιώργο κοίτα, μην κοιτάς εμένα. Μη μου το λες εμένα.	
111	Κ	Εε;	Στο Γ.
112	Ε	Συμφωνείς Γιώργο; Για σκέψου το	
			Ο Γ. γνέφει καταφατικά
113	Ε	Ωραία, οπότε;	
114	Κ	Πάμε σε άλλη συνάρτηση	
115	Ε	Ωραία	
			32’’
116	Ε	Λοιπόν, επειδή κολλήσατε. Μήπως υπάρχει κάτι άλλο που κάνατε στην τάξη, σκεφτείτε γενικά… τι άλλο κάνατε με τις συναρτήσεις; Τον πίνακα τιμών... Στις ασκήσεις τι είχε μέσα, τι άλλα πράγματα; Μήπως υπάρχει κάτι άλλο που να σας βοηθήσει	
117	Κ	Μμ	
118	Ε	Εκτός από τον πίνακα τιμών, άλλο τι κάνατε;	
119	Κ	Κάναμε διαγράμματα.	
120	Ε	Α!	
121	Κ	Ε...ε...	
122	Ε	Αυτό που είπες μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε κάπως; Διαγράμματα, όταν λες; Γραφική παράσταση;	
123	Κ	Ναι	
			13’’
124	Κ	Θα μπορούσαμε να κάνουμε αυτές τις τιμές επάνω στο διάγραμμα, άμα βγαίνει ευθεία θα είναι ή η συνάρτηση y=αx ή η συνάρτηση y=αx + β.	
125	Ε	Ναι;	

126	Κ	Και να δούμε άμα είναι...	
127	Ε	Δοκιμάστε το	
128	Κ	Να βγάλω χάρακα;	
129	Ε	Άμα έχεις, πάρε, όπως θες. Γιώργο συμφωνείς;	
130	Γ	Ναι!	
131	Ε	Δε σε βλέπω και πολύ σίγουρο…	
			Ο Κ. κάνει τη γραφική παράσταση
132	Κ	Όταν το x είναι 0 το y είναι –4 ...εδώ » 1 » -2 » 2 » 0 » 3 » 2 » 4 » 4 Βγαίνει μία ευθεία. Άρα είναι η συνάρτηση y=αx +β . Επειδή είπαμε ότι είναι η y=…	Ο Γ. προφέρει μικρές λέξεις συναίνεσης
133	Γ	Κι εκεί που τέμνεται είναι το σημείο β	
134	Κ	Κι εδώ πέρα είναι το ...δε θυμάμαι	
135	Κ	Όταν y=αx +β	
			43’’
136	Κ	y =α επί 0 συν β	$y = ax + \beta$
			10’’
137	Ε	Τώρα που κάνατε τη γραφική παράσταση πως μπορεί να σας βοηθήσει; Γιατί την κάνατε; Απλά για να πείτε ότι είναι η y=αx +β;	
138	Κ	Εεε.. Α, μπορούμε να πούμε ότι... όταν το y είναι 12,... Εδώ, τότε το x θα είναι... αν προεκτείνουμε την ευθεία...εδώ.	Βρίσκει στην γραφική παράσταση το 12, και μετά το σημείο (8,12)
139	Γ	Πόσο είναι;	
140	Κ	Άρα... 8. Τότε το x είναι 8.	
141	Γ	Κι αν δεν είναι 8;	Στην γραφική παράσταση το x δεν βγαίνει ακριβώς 8 γιατί η γραμμή τους είναι λίγο στραβή
142	Κ	Πως θα το δοκιμάσουμε; Μμμ..	
143	Γ	Θα βάλεις το x, στη θέση του 12 το y, α επί 8	
144	Κ	α επί 8 συν β Μείον α...	Μαζί με τον Γ: $12= a \cdot 8+ \beta$ $- a \cdot 8= -12+ \beta$
145	Γ	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους..	
146	Κ	Ναι...	
			30’’, μουρμουρίζουν κάτι
147	Κ	Τώρα; Αυτό που είχαμε βάλει, θυμάσαι, στο β;	
148	Γ	Μάλλον, ότι το β είναι το (2,0), το ξέρουμε... εκεί που τέμνει	
			35’’
149	Κ	Άρα βρήκαμε ότι το κουτάκι είναι το 8	Στην ερευνήτρια
150	Ε	Εντάξει	

151	Γ	Η συνάρτηση y=α...	
152	Κ	Θέλουμε..	
153	Ε	Θέλουμε λίγο πιο ακριβώς	
154	Κ	Ναι.	
155	Γ	...όταν τέμνεται στο x ή τον y ... δεν θυμάμαι καλά, δε θυμάμαι..	
			47’’
156	Ε	Αυτή την ιδέα που είπες Γιώργο...	
157	Γ	Είχαμε κάνει στην τάξη κάτι που λέγαμε... είχαμε πει κάτι, όταν τέμνεται στο x κάτι κάνουμε, αλλά δε θυμάμαι..	
158	Κ	Εε..	
159	Ε	Σκεφτείτε μήπως μπορείτε να κάνετε κάτι εκεί	
			28’’
160	Ε	Κωνσταντίνε;	
161	Κ	Μμμ... Εεε..	
162	Ε	Τι σκέφτεσαι; Την ιδέα που είχες; Θυμάσαι καθόλου πως το είχατε κάνει;	
			18’’, χτυπάει το κουδούνι για διάλειμμα. Η ερευνήτρια ρωτάει αν μπορεί να τους κρατήσει 5΄και δέχονται
163	Ε	Γιώργο μήπως θέλεις να δοκιμάσεις κάτι;	
164	Γ	Ναι	
165	Ε	Από αυτά που είπες;	
166	Γ	Όταν τέμνονταν στον y έμπαινε το 0 μπροστά. Εεμ... Το θυμάσαι;	
			37’’, χτυπάει ένα άλλο κουδούνι η ερευνήτρια τους ρωτάει αν είναι για να μπούνε και λένε ότι είναι του Λυκείου. Ακολουθούν άλλα 10’’
167	Γ	Έβγαλες τίποτε άλλο;	
168	Ε	Δοκίμασέ το απλά κι ας είναι και ανοησίες! Δεν πειράζει αν βγει και λάθος, δοκιμή κάνουμε.	
			30’’
169	Ε	Κωνσταντίνε; Δεν το θυμάσαι καθόλου;	
170	Κ	Ναι, εε, δε θυμάμαι... θυμάμαι στο... στο β... όχι...	
171	Ε	Αυτά συνήθως σας τα έδινε υποτίθεται, τα α και τα β	
172	Κ - Γ	Ναι	
173	Ε	Τώρα τα ψάχνουμε. Άμα θυμάστε κάτι από το μάθημα που μπορεί να βοηθήσει να το ψάξουμε. Αυτό που είπε ο Γιώργος, ας πούμε, η ιδέα που είπε, θυμάσαι εσύ πως το κάνατε, με το 0 και το β;	
174	Κ	Εεεε..	
175	Ε	Όχι; Αυτό τι ήταν το (0,β);	

176	Γ	Όταν τέμνεται το β με την xx' κάναμε κάτι, ενώ...εεεε...σε.. πως το κάναμε; Δε θυμάμαι.	
177	Κ	Ναι...	
178	Ε	Λοιπόν, εντάξει, τέλος.	

Φύλλο εργασίας 1

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας συνάρτησης .
α) Να συμπληρώσετε το κουτάκι .
β) Να βρείτε ποια είναι η συνάρτηση .

x	0	1	2	3	4	;8
y	-4	-2	0	2	4	12

$y = a \cdot x$ $\quad y = \frac{a}{x}$ $\quad y = ax + B$ $\quad y = a \cdot$

$y = a \cdot 0 + B$

$-4 = \frac{a}{1}$ $\quad \frac{}{0}$

$y = a \cdot 1$

$y = a \cdot 0$

$y = 0$

$12 = a \cdot 8 + B$

$-4 \cdot 1 = a \cdot 0$ $\quad -a \cdot 8 = -12 + B$

$\frac{4}{4} = \frac{x}{12}$ $\quad \frac{4}{4} = \frac{12}{12}$

$4x = 12 \cdot 4$

$\frac{4x}{4} = \frac{48}{4}$

$x = 12$

$\frac{3}{2} = \frac{x}{12}$

$2x = 3 \cdot 12$

$2x = 36$

$\frac{2x}{2} = \frac{36}{2}$

$x = 18$

Εικόνα 1

4.1.1 Εστιακή Ανάλυση

Μία ματιά στα αντικείμενα εστίασης της προσοχής των μαθητών και τον τρόπο μετάβασης από το ένα στο άλλο, θα μας αποκαλύψει το κατά πόσο αυτά που έγιναν στο μάθημα τούς έχουν εφοδιάσει με στρατηγικές και ικανότητες επίλυσης προβλήματος, ή όχι. Στόχος μας είναι να παρατηρήσουμε το αν και κατά πόσο ο καθένας από αυτούς τους μαθητές έχει μία σταθερή επιδιωκόμενη εστίαση, δηλαδή το αν έχουν ένα σαφώς καθορισμένο στόχο ο οποίος ενσωματώνεται στο πλαίσιο του δεδομένου προβλήματος. Ταυτόχρονα θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τους μαθηματικούς χειρισμούς τους οποίους επιχειρούν οι μαθητές, με τους αντίστοιχους που έγιναν κατά τη διάρκεια του σχολικού μαθήματος.

Σαφώς και πρέπει να αναφέρουμε ότι το πρόβλημα που ζητήθηκε από τους μαθητές να αντιμετωπίσουν, ήταν μία εν μέρει γνωστή γι' αυτούς κατάσταση. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, στα πλαίσια μίας άσκησης του σχολικού βιβλίου, δινόταν στους μαθητές ο γενικός τύπος μίας συνάρτησης, $y = \alpha x + \beta$, και ένας πίνακας τιμών της, και τους ζητούνταν να βρουν τον ακριβή αλγεβρικό τύπο (βλέπε σελ.19). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που τους ζητήθηκε εδώ να λύσουν, ο γενικός τύπος της συνάρτησης δεν δίνεται. Είναι λοιπόν μία άσκηση που προσφέρεται για τη μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

Επεισόδιο 1^{ο}: Η συνάρτηση $y = \alpha x$ (στ. 10 – 17)

Από τα πρώτα λεπτά της συνέντευξης ο ένας μαθητής, ο Κωνσταντίνος, εκδηλώνει τις προθέσεις του ως προς την εύρεση κάποιας συνάρτησης, σε αλγεβρική μορφή, από την οποία να προκύπτει ο πίνακας τιμών. Μόνος του προφέρει τη λέξη «συνάρτηση» (στ. 5), όταν η ερευνήτρια κάνει την πρώτη προσπάθεια να δραστηριοποιήσει τους μαθητές. Αυτός ο προσανατολισμός του είναι εμφανής καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης, όπως θα δούμε παρακάτω. Από το στ. 10 λοιπόν, ξεκινάει, κάνοντας την εικασία ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι της μορφής $y = \alpha x$, ώστε να προσπαθήσει με αντικατάσταση τιμών από τον πίνακα να επιβεβαιώσει ή να ακυρώσει αυτή του την εικασία.

Το γεγονός ότι στο μάθημα η πορεία επεξεργασίας των ασκήσεων ήταν πάντα καθορισμένη γραμμικά: αλγεβρικός τύπος συνάρτησης → πίνακας τιμών → γραφική παράσταση, τον ωθεί στην ανάγκη εύρεσης ενός αλγεβρικού τύπου ο οποίος

θα αποτελέσει αφετηρία στην πορεία της μελέτης της συνάρτησης. Ο Κωνσταντίνος στην ουσία δεν «διαβάζει» τον πίνακα τιμών, αλλά τον θεωρεί αποτέλεσμα της αντικατάστασης τιμών στο x του αλγεβρικού τύπου, απ' όπου προκύπτουν τιμές για το y. Αυτή είναι η μόνη διαδικασία που συνέδεε τον αλγεβρικό τύπο μίας συνάρτησης, με τον πίνακα τιμών της. Προφανώς, εάν η ζητούμενη συνάρτηση ήταν όντως της μορφής αυτής, ή εάν στον πίνακα δεν περιεχόταν σημείο με συντεταγμένη 0, η επεξεργασία αυτή δεν θα απέφερε κάποιο αποτέλεσμα, εφόσον το α θα ήταν άγνωστο. Φαίνεται πως ο Κωνσταντίνος οδεύει εξαρχής προς την απόρριψη της $y = \alpha x$, όπως θα δούμε και παρακάτω. Πιθανότατα το έχει υποψιαστεί, αλλά χρειάζεται να καταγράψει τη διαδικασία, δείχνοντας είτε μία έλλειψη εμπιστοσύνης προς τις σκέψεις του είτε την ανάγκη του να ακολουθήσει το συνιστώμενο από τον καθηγητή του γραπτό τρόπο χειρισμού των μαθηματικών θεμάτων.

Έτσι λοιπόν, κάνοντας την εικασία της $y = \alpha x$, αντικαθιστά το πρώτο ζεύγος τιμών που βλέπει στον πίνακα, στον τύπο. Αυτό μπορεί να μην είναι και τόσο τυχαίο. Ο καθηγητής είχε τονίσει στο μάθημα ότι για να φτιάξουμε ένα πίνακα τιμών, προτιμούμε να θέσουμε τις τιμές x = 0 και y = 0 στον αλγεβρικό τύπο, γιατί χρησιμοποιώντας αυτές θα χρειαστεί να εκτελέσουμε και τις λιγότερες πράξεις. Έτσι λοιπόν αντικαθιστά το y = - 4 και γράφει αρχικά –4 = x . Αυτό κατά πάσα πιθανότητα το κάνει κατά λάθος, αφού αμέσως μετά τα λόγια του Γιώργου, «Θα βάλουμε το x» (στ.13), αντικαθιστά το x = 0 και γράφει κατ' ευθείαν το αποτέλεσμα της πράξης $\alpha \cdot 0$. Προφανώς καταλήγει στο πρώτο άτοπο –4 = 0. Το γεγονός ότι ο συντελεστής του x, α, είναι άγνωστος, δεν τον απασχολεί καθόλου, ένδειξη ότι επιδιώκει καταρχάς να διερευνήσει αν η συνάρτηση είναι αυτής της μορφής, και όχι να ανακαλύψει την τιμή του α. Φτάνοντας λοιπόν στο άτοπο σταματάει.

Στο σημείο αυτό έχουμε την πρώτη ενεργή συμμετοχή του Γιώργου. Ο Γιώργος σε όλη τη συνέντευξη εστιάζει σε πιο επιμέρους στοιχεία της συνάρτησης, όπως εδώ το άγνωστο α. Ακόμη και στο σημείο αυτό, όπου πλέον η τιμή του α δεν τους χρειάζεται, εφόσον πολλαπλασιάζεται με το 0, είναι απαραίτητο γι' αυτόν να έχει μία συγκεκριμένη τιμή προτού κάνει οποιαδήποτε αντικατάσταση. Έτσι ρωτάει τον Κωνσταντίνο σχετικά με την ανάγκη εύρεσής του, αφού αυτός το αγνόησε εντελώς. Η παρατήρησή του είναι πολύ εύστοχη, καθώς, όπως προαναφέρθηκε, εάν η συνάρτηση τελικά ήταν της μορφής $y = \alpha x$, μία αντικατάσταση τιμών όπως αυτή που μόλις έκανε ο Κωνσταντίνος δεν θα έφτανε για την εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος. Παρ' όλα

αυτά όμως, φαίνεται ότι ο Γιώργος εξαρτάται τόσο από ένα επιμέρους στοιχείο του αλγεβρικού τύπου, το α, που δεν βλέπει ότι, τυχαία ή όχι, φτάσαμε στην απόρριψη της περίπτωσης της $y = \alpha x$.

Ο Κωνσταντίνος δεν αντιδράει καθόλου στην ερώτηση, παρά μόνο μετά την επέμβαση της ερευνήτριας. Στόχος της ερευνήτριας στο σημείο αυτό (στ. 16) είναι να αναγκάσει τον Κωνσταντίνο σε μία εκδήλωση των σκέψεών του, του προβληματισμού του ή της απόρριψης της $y = \alpha x$. Λέγοντας όμως «προχώρα το» ο Κωνσταντίνος το λαμβάνει ως προτροπή για την εύρεση του α όπως μόλις είχε προτείνει ο Γιώργος στο στ. 15. Έτσι θέτει α=1 στον τύπο της $y = \alpha x$. Σύντομα όμως επανέρχεται στη δική του ιδέα, κάνει και πάλι αντικατάσταση του x = 0 στον τύπο καταγράφοντας τώρα πιο αναλυτικά τις πράξεις που κάνει, δηλαδή την παράσταση $y = \alpha \cdot 0$, και καταλήγει στο y = 0. Αυτό φαίνεται να τον προβληματίζει ή, ακόμα πιο πιθανόν, να τον οδηγεί στην απόρριψη αυτής της περίπτωσης κάνοντας πράξεις νοερά, και παραμένοντας σιωπηλός, να αναζητάει μία άλλη οδό για την εύρεση της συνάρτησης. Βρισκόμαστε στο πρώτο από μία πληθώρα σημείων καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας, όπου έχουμε ενδείξεις για την προσωπική φύση της προσπάθειας επίλυσης του προβλήματος από τον Κωνσταντίνο, ο οποίος δεν ενδιαφέρεται ακόμα για το να αρχίσει μία επικοινωνία με την ερευνήτρια ή με το συμμαθητή του.

Επεισόδιο 2^{ο}: Η συνάρτηση y = α / x (στ. 18 – 35)

Η ερευνήτρια βλέποντας το αδιέξοδο προτείνει να ασχοληθούν με μία νέα ιδέα, και συγκεκριμένα ζητάει τη συμμετοχή του Γιώργου. Έτσι στο στ. 18 οι μαθητές αρχίζουν να ασχολούνται με μία νέας μορφής συνάρτηση, την $y = \frac{\alpha}{x}$. Ο Γιώργος προτείνει μόνος του αυτή την οδό και αναλαμβάνει να επαναλάβει τη διαδικασία που ακολούθησε προηγουμένως ο Κωνσταντίνος, δηλαδή την αντικατάσταση του ζεύγους (0, -4) στον αλγεβρικό τύπο. Φτάνοντας όμως στην κατάσταση $-4 = \frac{\alpha}{0}$ σταματάει. Δεν είναι σαφές το αν ο λόγος που σταμάτησε ήταν το μηδέν στον παρονομαστή, ή το ότι το α του είναι άγνωστο. Από τη μία πλευρά είχε τονιστεί επανειλημμένα στο μάθημα ότι δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή το 0. Από την άλλη πλευρά, στο προηγούμενο επεισόδιο, ο Γιώργος έδειξε να ενοχλείται και να μην καταλαβαίνει τους χειρισμούς που έκανε ο Κωνσταντίνος με άγνωστο το α. Τώρα όμως είναι ο ίδιος που αναλαμβάνει να μιμηθεί τον τρόπο του Κωνσταντίνου, αναγνωρίζοντας την

ανωτερότητα του συμμαθητή του, καθώς και την αποδοχή της ερευνήτριας για τις πράξεις του τελευταίου.

Τα λόγια της ερευνήτριας και πάλι οδηγούν τον Κωνσταντίνο να προχωρήσει από εκεί που σταμάτησε ο Γιώργος. Βλέποντας την παράσταση $-4=\frac{\alpha}{0}$, την αντιμετωπίζει ως μία εξίσωση με άγνωστο το α, και το επόμενό του βήμα είναι να τη λύσει. Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο Κωνσταντίνος αρχικά δεν νιώθει άνετα με την κατάσταση $-4=\frac{\alpha}{0}$, καθώς, στο στ. 25, αναφέρει ότι αυτό «*Δε μας αρέσει*». Ωστόσο παρερμηνεύει τα επόμενα λόγια της ερευνήτριας ως ένδειξη αποδοχής αυτής της παράστασης, οπότε πιστεύει πως πρέπει να βρει έναν τρόπο να την αντιμετωπίσει. Έτσι, αποδέχεται ότι μπορεί να συνεχίσει από αυτό το σημείο (στ. 29), και το επόμενό του βήμα είναι να φέρει την παραπάνω παράσταση σε μία μορφή που να μπορεί να χειριστεί. Αρχικά γράφει το πρώτο μέρος της παράστασης υπό τη μορφή κλάσματος, δηλαδή $\frac{-4}{1}=\frac{\alpha}{0}$, η οποία ενδεχομένως να είναι η πιο προσιτή γι' αυτόν μορφή. Εφ' όσον η ερευνήτρια έχει δείξει να μην ενοχλείται από το 0 στον παρονομαστή, και ο Κωνσταντίνος έχει αναλάβει να επιλύσει αυτή την εξίσωση, η αναμενόμενη επόμενη κίνησή του θα ήταν να πολλαπλασιάσει χιαστί. Όμως ο ίδιος μάλλον ενοχλείται από το 0 (στ. 25), οπότε βρίσκει μία διαφορετική μέθοδο αντιμετώπισής του. Αυτό που εκτιμάται ότι κάνει, είναι ότι, παρατηρώντας ότι ισχύει η ισότητα $\frac{-4}{1}=-4\cdot 1$, θεωρεί ότι θα συμβαίνει το ίδιο και στο δεύτερο κλάσμα, δηλαδή $\frac{\alpha}{0}=a\cdot 0$. Έτσι καταλήγει στην ισότητα $-4\cdot 1=\alpha\cdot 0$. Η ισότητα όμως $-4\cdot 1=\alpha\cdot 0$ αποτελεί ένα αδιέξοδο, απ' όπου δεν ξέρει πώς να ξεφύγει. Ακόμη και όταν ο Γιώργος προτείνει κάτι που ίσως να βοηθήσει, στ. 32 «*Γιατί να μην το κάνουμε χιαστί;*», δεν δείχνει ούτε να ανταποκρίνεται, ούτε καν να ασχολείται με αυτό που πρότεινε ο συμμαθητής του.

Επεισόδιο 3^{ο}: Αναδιατύπωση του ζητούμενου (στ. 36 – 48)

Στους στ. 36 – 48 ακολουθεί μία συζήτηση μεταξύ των μαθητών και της ερευνήτριας για τον επαναπροσδιορισμό του στόχου τους. Κατά τη διάρκεια αυτής της συζήτησης έχουμε νέες ενδείξεις ότι οι δύο μαθητές έχουν διαφορετική επιδιωκόμενη εστίαση. Αρχικά αναφέρουν και οι δύο ότι ο στόχος τους είναι να βρουν το ζητούμενο x , η ερευνήτρια όμως τους ρωτάει σχετικά με τις τελευταίες εργασίες που είχαν

αναλάβει, ώστε να προσδιορίσει αν εντέλει προσπαθούν να επιβεβαιώσουν την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης, ή αν ψάχνουν το α. Συνεχίζοντας τη συζήτηση λοιπόν, ενώ ο Κωνσταντίνος αναφέρεται στον προσδιορισμό της μορφής της συνάρτησης, στ. 39 «*Να βρούμε τη συνάρτηση*», ο Γιώργος αναφέρεται στην εύρεση του ζητούμενου x, στ. 47 «*Να το κάνουμε χιαστί*» και αργότερα, στ. 49 «*Το x είναι 4, το y είναι 4, όταν το x είναι ένας αριθμός, το y είναι 12*». Μάλιστα, ενώ με την υπόθεση της $y = \alpha x$ έχουν φτάσει σε αδιέξοδο, ο Γιώργος ακόμη δεν έχει πειστεί, και επαναφέρει τη συζήτηση στα ανάλογα ποσά. Επιδιώκει δηλαδή να χρησιμοποιήσει την ισότητα λόγων δύο ζευγαριών από τον πίνακα τιμών ώστε να βρει το ζητούμενο x, χωρίς ωστόσο να κάνει λόγο για «ανάλογα ποσά» και, στην ουσία, χωρίς να παρατηρεί ότι τα ποσά x και y δεν είναι ανάλογα. Αυτό δείχνει ότι στην αρχή του πρώτου επεισοδίου ο Γιώργος δεν είχε καμία συμμετοχή στη διαδικασία που είχε αναλάβει ο Κωνσταντίνος. Άλλωστε η όποια θέληση ενεργής συμμετοχής και κατανόησης των πράξεων του Κωνσταντίνου, είχε απορριφθεί από την άρνηση του τελευταίου να του απαντήσει στις ερωτήσεις του (στ. 15). Ακόμη κι έτσι όμως, η $y = \alpha x$ είναι κάτι που τελικά δεν έδωσε κάποιο αποτέλεσμα, έστω και αν η απόρριψη αυτής της περίπτωσης δεν έγινε ρητά. Η επιμονή του στα ανάλογα ποσά και η αναφορά του ως «τα χιαστί» ίσως να υποδηλώνει ότι δεν έχει συνδέσει την έννοια της αναλογίας με την $y = \alpha x$. Το «χιαστί» όπως το αναφέρει (στ. 47), είναι μία διαδικασία που θα τον οδηγήσει στην εύρεση του x, το οποίο άλλωστε είναι και ο στόχος του. Η επιδιωκόμενη εστίαση λοιπόν του Γιώργου σ' αυτό το σημείο είναι σαφώς η εύρεση του x αλλά το εννοιολογικό πλαίσιο μέσα από το οποίο θα το καταφέρει αυτό δεν είναι ακόμα σαφές.

Επεισόδιο 4^{ο}: Ανάλογα ποσά (στ. 49 – 61)

Στο 49 λοιπόν ο Γιώργος αναφέρει την ιδέα του στο δάσκαλο και, με τη δική του συμφωνία, ο Κωνσταντίνος και πάλι αναλαμβάνει τη διεκπεραίωση των πράξεων. Με τα συναινετικά λόγια της ερευνήτριας, ο Κωνσταντίνος δείχνει να επανέρχεται κι αυτός στο πλαίσιο των ανάλογων ποσών, αν και ήταν ο ίδιος που στην αρχή δύο φορές οδηγήθηκε σε άτοπο χρησιμοποιώντας την $y = \alpha x$. Θα λέγαμε καλύτερα ότι απλά ακολουθεί τις οδηγίες της ερευνήτριας, προς την κατεύθυνση που είχε προτείνει ο Γιώργος. Λύνει λοιπόν την εξίσωση $\frac{4}{4} = \frac{x}{12}$, όπου (4, 4) είναι το αμέσως προηγούμενο ζεύγος της συνάρτησης στον πίνακα τιμών πριν το (x, 12). Σημειώνουμε

ότι σ' αυτό το σημείο ο Κωνσταντίνος πολλαπλασιάζει τον αριθμητή του κάθε κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου (χιαστί), και δεν κάνει το ίδιο λάθος όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης $\frac{-4}{1} = \frac{\alpha}{0}$.

Εδώ τα παιδιά εστιάζουν στην εύρεση του αγνώστου, όμως το αντιμετωπίζουν μέσα από διαφορετικό πρίσμα ο καθένας. Ο Κωνσταντίνος βλέπει το x μεμονωμένο πλέον, σαν λύση της εξίσωσης $\frac{4}{4} = \frac{x}{12}$. Διότι, όταν του ζητείται να επαληθεύσει με κάποιο τρόπο την τιμή x = 12 που βρήκε, δηλαδή στην ουσία να επαληθεύσει ότι το ζεύγος (12, 12) ανήκει στη συνάρτηση που αναπαρίσταται από το δεδομένο πίνακα τιμών, αυτός αντιλαμβάνεται την επαλήθευση αυτή ως επιβεβαίωση της ορθότητας των πράξεών του κατά την επίλυση της εξίσωσης. Έτσι αντικαθιστά το x = 12 στην εξίσωση, και αυτό του αρκεί για την προσωπική του βεβαιότητα. Ο Κωνσταντίνος λοιπόν σ' αυτό το σημείο λειτουργεί εκτός του πλαισίου της συγκεκριμένης εργασίας. Κατά τη διάρκεια όλων των μαθημάτων πρέπει να αναφερθεί ότι ο καθηγητής ήταν αυτός που υπεδείκνυε πάντα τα διαδοχικά βήματα επεξεργασίας και χειρισμού ενός προβλήματος. Με αυτόν τον τρόπο ίσως να απέκοπτε το κάθε σκέλος επεξεργασίας από το άλλο, και αυτό να οδήγησε το μαθητή να οργανώνει τις επιμέρους εργασίες του ανεξάρτητα από το πλαίσιο του εκάστοτε προβλήματος, χωρίς η σκέψη του να διαθέτει τα κατάλληλα μεταγνωστικά χαρακτηριστικά που θα ενσωματώνουν τις διαδικασίες που αναλαμβάνει, στο ζητούμενο του προβλήματος. Αντίθετα όπως θα δούμε αργότερα στο 80, ο Γιώργος, εστιάζοντας πάντα στην εύρεση του x υπό τις προϋποθέσεις που ορίζει η εργασία, έχει τους κατάλληλους μηχανισμούς ελέγχου ώστε να οδηγηθεί στην αποδοχή ή την απόρριψη της τιμής x = 12, σύμφωνα πάντα όμως με τη δική του μέθοδο, «τα χιαστί».

Συζήτηση – Επεισόδιο 5^{ο}: Πρώτη αναφορά στην y = αx+β (στ. 62 – 69)

Πριν φτάσουν όμως εκεί, μεσολαβεί πάλι μία συζήτηση μεταξύ μαθητών και ερευνήτριας (στ.59 – 69), η οποία φέρνει στο προσκήνιο την $y = \alpha x + \beta$ για πρώτη φορά. Τα λόγια της ερευνήτριας ωστόσο παρερμηνεύονται επανειλημμένα. Η ερευνήτρια θέλει να τους οδηγήσει σε κάποιο άλλο τρόπο επαλήθευσης της τιμής που βρήκαν, ή κάποια δήλωση λήξης ασχολίας με την $y = \alpha x$. Οι μαθητές, δεδομένου ότι φτάνουν σε διαδοχικά αδιέξοδα, το λαμβάνουν ως προτροπή μετακίνησης σε άλλο πλαίσιο και ίσως γι' αυτό αναφέρουν την $y = \alpha x + \beta$ (στ. 67 – 69). Όταν όμως τους

ζητείται ξεκάθαρα να δοθεί, αν το θεωρούν σωστό, ένα τέλος στη συζήτηση για τα ανάλογα ποσά, οι μαθητές επανέρχονται σ' αυτό το πλαίσιο.

Επεισόδιο 6^{ο}: Ανάλογα ποσά (στ. 70 - 87)

Δεδομένων λοιπόν των ερωτήσεων της ερευνήτριας σχετικά με την επαλήθευση του x, οι μαθητές ξαναγυρίζουν στα ανάλογα ποσά, με την έννοια βέβαια που δίνει ο Γιώργος στη διαδικασία «χιαστί». Ο Κωνσταντίνος επιμένει να βλέπει το x = 12 ως λύση της μεμονωμένης εξίσωσης $\frac{4}{4} = \frac{x}{12}$. Εδώ είναι και το σημείο που, όπως προαναφέρθηκε, ο Γιώργος αναλαμβάνει την πρωτοβουλία να δώσει μία λύση στο θέμα της επαλήθευσης (στ. 80). Ο Γιώργος βλέπει το x μέσα στο πλαίσιο της άσκησης, και προτείνει να επαναλάβουν τη διαδικασία χρησιμοποιώντας τώρα το ζεύγος (3, 2), αντί για το (4, 4). Φτάνουν έτσι σε ένα νέο, διαφορετικό αποτέλεσμα για το x, το οποίο θα έπρεπε να τους αποτρέψει από το να ασχοληθούν ξανά με την $y = \alpha x$. Ωστόσο θα δούμε ότι αυτό θα γίνει και πάλι παρακάτω. Αυτό μας δείχνει ότι «τα χιαστί», δηλαδή η χρήση της αναλογίας, και η συνάρτηση $y = \alpha x$ είναι δύο εντελώς ασύνδετα μαθηματικά αντικείμενα για το Γιώργο . Καταλήγουν στην παραδοχή ότι «*δεν είναι αυτός ο τρόπος*» (στ. 85), και με την επιβεβαίωση της ερευνήτριας: «*Α, ωραία*» (στ. 86), αποφασίζουν να μετακινηθούν σε άλλο πλαίσιο: «*Πρέπει να κάνουμε κάτι άλλο δηλαδή για να βρω το …*» (στ. 87).

Επεισόδιο 7^{ο}: Η συνάρτηση y = αx + β (στ. 88 – 99)

Δεδομένης της εκτενέστατης ενασχόλησης με την $y = \alpha x$ και τα ανάλογα ποσά, η ερευνήτρια τους υπενθυμίζει την $y = \alpha x + \beta$, την οποία οι μαθητές έχουν ήδη σημειώσει από πριν στην κόλλα τους. Τους ρωτάει τι μπορούν να κάνουν μ' αυτή, τι θέλουν να βρουν. Ωστόσο εμφανίζεται έντονα η αδυναμία των μαθητών να χειριστούν τη $y = \alpha x + \beta$ αλγεβρικά, μία παράσταση με δύο αγνώστους, παρόμοια της οποίας δεν έχουν αντιμετωπίσει ποτέ στο παρελθόν. Συγκεκριμένα στους στ. 98-99 κάνουν σαφή αναφορά στα όσα έκαναν στο μάθημα, και μάλιστα στο τι έδινε ή ζητούσε ο καθηγητής: «*Τον ζήταγε τον αριθμό;*» «*Όχι, μας έδινε. Σου έλεγε τον τύπο…*» αναφερόμενοι στα α και β συναρτήσεων αυτής της μορφής. Προσπαθούν λοιπόν να θυμηθούν το πώς διαπραγματευόντουσαν αυτά τα θέματα στην τάξη ώστε να το μιμηθούν, αλλά τελικά μ' αυτόν τον τρόπο αδυνατούν να βρουν τρόπους να

αντιμετωπίσουν τη νέα προβληματική κατάσταση. Ταυτόχρονα, στο μάθημα πάντα η λέξη «συνάρτηση» συνοδευόταν από έναν αλγεβρικό τύπο και οι μαθητές δεν έχουν δει κανένα παράδειγμα χειρισμού μίας συνάρτησης ελλείψει αυτού. Έτσι, ίσως οι μαθητές να θεωρούν ότι δεν υπάρχει καν λύση.

Επεισόδιο 8^{ο}: Ανάλογα ποσά (στ. 100 – 115)

Από τον στ. 100 λοιπόν επανέρχονται στα ανάλογα ποσά, ή μάλλον καλύτερα, «τα χιαστί». Ο Γιώργος έχει μία νέα ιδέα. Εφόσον στον πίνακα τιμών το x παίρνει ακέραιες τιμές μέχρι το 4, προτείνει να δοκιμάσουν την αμέσως επόμενη τιμή για το x, το 5, και «να τα κάνουμε χιαστί πάλι» (στ. 100, 104, 107), δηλαδή να χρησιμοποιήσουν μία στρατηγική δοκιμής – λάθους. Υπενθυμίζουμε για ακόμη μια φορά ότι, όχι μόνο χρησιμοποιώντας την $y = \alpha x$ έχουν φτάσει σε αδιέξοδο, αλλά και χρησιμοποιώντας «τα χιαστί» σαν ανεξάρτητη διαδικασία (στ. 80 – 83), και μάλιστα μετά από πρόταση του ίδιου του Γιώργου. Φαίνεται λοιπόν πως ακόμη δεν έχει πειστεί ότι αυτός δεν είναι ο τρόπος επίλυσης. Το «χιαστί» δεν αναφέρεται γι' αυτόν ούτε καν σε ανάλογα ποσά. Απλά είναι μία διαδικασία που μπορεί να επαληθεύσει ή όχι την ισότητα δύο κλασμάτων. Η μορφή του πίνακα με τις τιμές για το x στην πρώτη γραμμή, και για το y στη δεύτερη, σε συνδυασμό με τον όρο «λόγος των x προς y» ή «y προς x», ο οποίος συχνά αναφέρεται στα σχολικά μαθήματα και βιβλία κατά τη διδασκαλία των συναρτήσεων, παραπέμπει τον Γιώργο σε κατασκευή κλάσματος τιμών $\frac{x}{y}$, ακόμη και όταν δεν υπάρχει αναλογία ανάμεσα στα μεγέθη x και y. Έχει αγνοήσει εντελώς το ότι για κάθε αύξηση του x κατά 1,το y αυξάνει κατά δύο, οπότε, όταν το x γίνει από 4, 5, η αύξηση του y δεν μπορεί να είναι 8, δηλαδή από 4 σε 12. Άρα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μιλάει για ανάλογα ποσά.

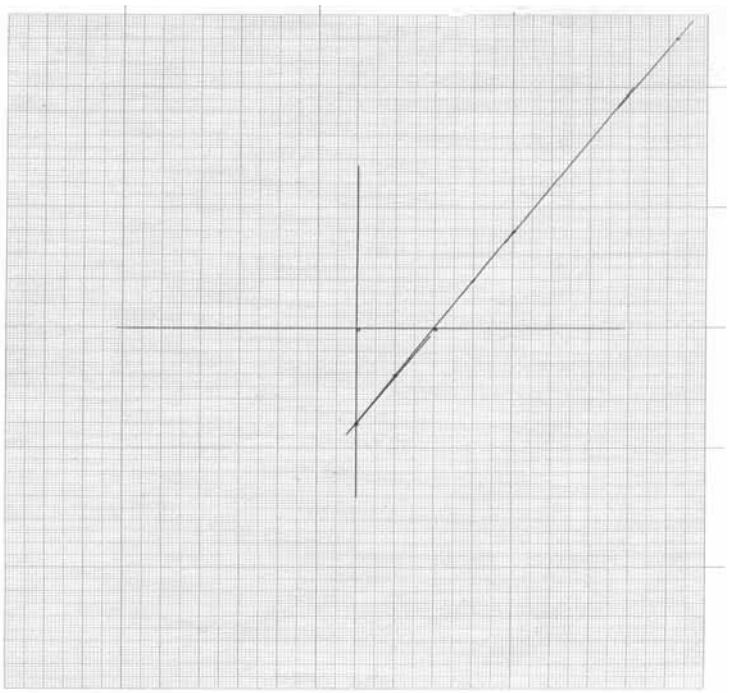
Ο Κωνσταντίνος από την άλλη πλευρά εξακολουθεί να επιδιώκει την εύρεση της αλγεβρικής μορφής της συνάρτησης. Έτσι η απάντηση που δίνει στο Γιώργο (στ. 109) αφορά το γεγονός ότι ένα ζεύγος της $y = \alpha x$ θα έπρεπε να ήταν το (0, 0), πράγμα που εδώ δεν υφίσταται. Αυτή είναι και η τελειωτική απόρριψη της $y = \alpha x$. Αυτή η σκέψη είχε εμφανιστεί από την αρχή της συνέντευξης στο στ.17, μέσα από αυτά που έκανε ο Κωνσταντίνος. Εκείνη τη στιγμή, αν και ο Κωνσταντίνος μπορεί να το είχε ήδη σκεφτεί, δεν ειπώθηκε, πιθανότατα για κάποιο λόγο που έχει να κάνει με τις

παρεμβάσεις της ερευνήτριας, οι οποίες, άθελά της, προκάλεσαν την εκτροπή της πορείας του Κωνσταντίνου προς μία τέτοια δήλωση.

Επεισόδιο 9ο: Η $y = \alpha x + \beta$ – Γραφική Παράσταση (στ. 116 – 150)

Έπειτα από τη συμφωνία της ερευνήτριας με τα λόγια του Κωνσταντίνου, ο Γιώργος αποδέχεται την άποψή του, και ξεκινάει ένα νέο επεισόδιο, στ. 116-150, όπου οι μαθητές για πρώτη φορά κάνουν χρήση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Η κατασκευή της γραφικής παράστασης αποτελεί το αμέσως επόμενο βήμα μετά τον πίνακα τιμών, κατά τη μελέτη μίας συνάρτησης όπως διδάχθηκε στην τάξη. Χρειάστηκε όμως πολύς χρόνος και πολλές άκαρπες προσπάθειες, ώστε να ελευθερωθούν οι μαθητές από την ανάγκη ύπαρξης αλγεβρικού τύπου ώστε να κάνουν οτιδήποτε άλλο. Στόχος βέβαια του Κωνσταντίνου είναι μέσω της μορφής που θα έχει η γραφική παράσταση, να βρει τη μορφή του αλγεβρικού τύπου. Όπως αναφέρει στο στ.124, «*άμα βγαίνει ευθεία θα είναι ή η συνάρτηση* $y = \alpha x$ *ή η συνάρτηση* $y = \alpha x + \beta$». Σημειώνουμε ότι αυτό πλέον αποτελεί ένα εντελώς ξεχωριστό τρόπο μελέτης της συνάρτησης για τον Κωνσταντίνο, μια νέα στρατηγική που δεν συσχετίζεται γι' αυτόν με τα όσα έχουν ειπωθεί νωρίτερα. Διότι, η περίπτωση να μιλάμε για την $y = \alpha x$ έχει ήδη απορριφθεί από τον ίδιο, οπότε τώρα ο στόχος του θα έπρεπε να είναι αποκλειστικά η εύρεση του ζητούμενου x.

Ο Κωνσταντίνος λοιπόν σχεδιάζει τη γραφική παράσταση και συνειδητοποιεί ότι είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Σαν φυσικό ακόλουθο αυτής της διαπίστωσης, ο Γιώργος προφέρει «*Κι εκεί που τέμνεται είναι το σημείο β*» (στ. 133). Ο Γιώργος σ' αυτό το σημείο φαίνεται να αναπαράγει τη διαδικασία που ακολουθούσαν στο μάθημα. Δεδομένου ενός αλγεβρικού τύπου, ο καθηγητής τους ζητούσε να αναπαράγουν τον ορισμό της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$, χρησιμοποιώντας τα συγκεκριμένα δεδομένα της εκάστοτε άσκησης – τις συγκεκριμένες τιμές για τα α και β. Καθώς λοιπόν ένα σκέλος αυτού του ορισμού αναφέρεται στο σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα yy΄, ο Γιώργος αυτή τη στιγμή είναι σα να συμπληρώνει μηχανικά τον ορισμό της γραφικής παράστασης. Ο Κωνσταντίνος παρασυρόμενος από αυτά τα λόγια, κάνει μία προσπάθεια να το επαναλάβει, αλλά διαπιστώνει ότι δεν θυμάται τον ακριβή ορισμό. Θυμάται όμως τη διαδικασία προσδιορισμού του σημείου τομής, δηλαδή το να θέσει όπου x το 0 στον τύπο, πράγμα που κάνει (στ. 136). Όμως και πάλι εμφανίζεται το πρόβλημα των άγνωστων α και β, οπότε σταματά.



Εικόνα 2

Στη συνέχεια διαπιστώνει ότι μπορεί να βρει το x μέσω της γραφικής παράστασης, και το κάνει. Λόγω σφάλματος όμως στο σχεδιασμό της προκύπτουσας ευθείας (βλέπε εικόνα 2), ο Γιώργος ζητάει την αλγεβρική επιβεβαίωση της τιμής x = 8 που ισχυρίζεται ο Κωνσταντίνος (στ. 141), και έτσι οι μαθητές επανέρχονται σε αλγεβρικές διαδικασίες. Ο Κωνσταντίνος αποδέχεται με μεγάλη ευκολία και χωρίς αμφισβήτηση την ακέραια τιμή, άσχετα αν στην εικόνα, η παρέκκλιση της ευθείας από το σημείο (8, 12) είναι εμφανής. Αυτό πιθανόν οφείλεται στο ότι οι μαθητές στην τάξη χειρίζονται αλγεβρικές παραστάσεις με ακεραίους ως επί το πλείστον. Η ιδιότητα της γραμμικότητας της συνάρτησης δε φαίνεται να υποστηρίζει την αποδοχή του αυτή, καθώς όταν ο Γιώργος του ζητάει να το επαληθεύσει, παρασύρεται σε μία αλγεβρική αντικατάσταση των τιμών x = 8, και y = 12 στον τύπο (στ. 143 – 144). Ο Γιώργος χαρακτηριστικά αναφέρει «*Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους*» (στ. 145). Διαπιστώνουμε πλέον ότι έχουν εγκαταλείψει τη διαδικασία της επαλήθευσης του σημείου, καθώς αυτό που προκύπτει από την αντικατάσταση, το αντιμετωπίζουν ως μία εξίσωση με άγνωστο το α. Λόγω του ότι το β ουσιαστικά δίνεται από τον ορισμό της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$, και οι μαθητές το γνωρίζουν αυτό, αντιμετωπίζουν το β ως γνωστό, αφήνοντάς το στο δεξιό μέλος της ισότητας.

Αρχίζουν λοιπόν πλέον τις προσπάθειες να θυμηθούν ποια ήταν η τιμή του β και πως αυτή συσχετιζόταν με τη γραφική παράσταση.

Επεισόδιο 10^{ο}: Το β του αλγεβρικού τύπου (στ. 151 – 178)

Έτσι ξεκινάει το τελευταίο επεισόδιο της συνέντευξης, στ. 151-178, όπου στόχος τους είναι η εύρεση των α και β. Οι μαθητές έχουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μπροστά τους, γνωρίζουν ότι αυτή είναι που θα τους δώσει τη λύση για τον ένα τουλάχιστον από τους δύο αγνώστους, το β, και επίσης γνωρίζουν ότι σ' αυτό θα συμβάλλει και ο ορισμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$. Ο Κωνσταντίνος λίγο νωρίτερα, στο στ. 136, είχε κάνει κάποια απόπειρα να εφαρμόσει τη μέθοδο της αντικατάστασης x = 0 στον τύπο της συνάρτησης, για την εύρεση του σημείου τομής, αλλά αυτή ήταν καταδικασμένη να μην οδηγήσει σε κάποιο αποτέλεσμα, εφόσον προϋποθέτει τη γνώση του αριθμού β. Χρησιμοποιεί δηλαδή μία τεχνική που οδηγεί από τον αλγεβρικό τύπο σε συμπεράσματα σχετικά με τη γραφική παράσταση, ενώ στην ουσία εδώ πρέπει να κάνει την αντίστροφη πορεία. Η διαδικασία αυτή όμως διεκόπη, και θα φανεί παρακάτω ότι ο Κ. αδυνατεί να επανέλθει σ' αυτήν ώστε να βοηθηθεί. Συνεπώς η διαδικασία αυτή ήταν απλά μία αναπαραγωγή της διαδικασίας που ανεφέρθη στο μάθημα (βλέπε σελ.10), χωρίς να υπάρχουν σημάδια βαθύτερης κατανόησής της.

Η συνέντευξη αυτή έλαβε χώρα κατά τη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας του σχολείου, και τη συγκεκριμένη στιγμή χτυπάει το κουδούνι για διάλειμμα, σημάδι λήξης αυτής της εργασίας. Πιεσμένοι από τη λήξη των χρονικών τους περιθωρίων, και από τα συνεχή εμπόδια που είχαν αντιμετωπίσει νωρίτερα, οι μαθητές πλέον κάνουν τις τελευταίες τους προσπάθειες να θυμηθούν τη διατύπωση του ορισμού της γραφικής παράστασης χωρίς επιτυχία: «*Όταν τέμνονταν στον y έμπαινε το 0 μπροστά. Εεμ.. Το θυμάσαι;*» (στ. 166), «*Ναι, εε, δε θυμάμαι.. θυμάμαι στο.. στο β.. όχι..*» (στ. 170), «*Όταν τέμνεται το β με την x'x κάναμε κάτι, ενώ.. εε.. σε.. πως το κάναμε; Δε θυμάμαι.*» (στ. 176).

Συνοψίζοντας, ας συσχετίσουμε το πώς έγινε το μάθημα επάνω στις συναρτήσεις, με το πώς χειρίστηκαν το πρόβλημα οι μαθητές στη συνέντευξη. Αυτό που θεωρείται σημαντικό για να προαχθεί η μαθηματική σκέψη των μαθητών, είναι το να κάνουν τις κατάλληλες διασυνδέσεις μεταξύ εννοιών αλλά και μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της κάθε έννοιας. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στη

συνάρτηση, ο μαθητής είναι απαραίτητο να βλέπει αλγεβρικό τύπο, πίνακα τιμών και γραφική παράσταση ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, και να έχει τη δυνατότητα πολλαπλών μεταβάσεων από τη μία μορφή στην άλλη. Οι μαθητές της συνέντευξης δεν εμφανίζουν αντικειμενικοποιημένο λόγο, δηλαδή δεν παρουσιάζεται στο λόγο τους αυτό το γνώρισμα της ολοκληρωμένης μαθηματικής κατανόησης που αναφέρθηκε.

Στα μαθήματα που έγιναν στη σχολική αίθουσα, η μελέτη της συνάρτησης παρουσιάστηκε σαν μία διαδικασία που ξεκινάει από έναν αλγεβρικό τύπο, ή στην καλύτερη περίπτωση από ένα λεκτικό πρόβλημα που είχε στόχο τη διατύπωση ενός αλγεβρικού τύπου, συνέχιζε με την κατασκευή ενός πίνακα τιμών και κατέληγε στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης και την εύρεση των σημείων τομής της ευθείας με τους άξονες. Η πορεία αυτή ακολουθήθηκε πιστά σε όλα τα μαθήματα σχετικά με την $y = \alpha x + \beta$. Έτσι οι μαθητές δεν έμαθαν να «διαβάζουν» τον πίνακα τιμών ή τη γραφική παράσταση και δεν έχουν τη δυνατότητα εύκολης μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι πριν κάνουν οτιδήποτε, χρειάζεται να βρουν έναν αλγεβρικό τύπο, μόνο αυτό θα τους επιτρέψει να συνεχίσουν.

Μάλιστα, ξεκινούν να κάνουν υποθέσεις σχετικά με την μορφή του αλγεβρικού τύπου εξετάζοντας μία – μία τις συναρτήσεις που είχαν διδαχθεί, από τις πιο εύκολες στο χειρισμό, $y = \alpha \cdot x$ και $y = \frac{\alpha}{x}$, αφήνοντας τελευταία την $y = \alpha x + \beta$, που σαφώς και θεωρείται δυσκολότερη. Επίσης είναι απαραίτητο να αναφέρουμε, ότι ο καθηγητής τους, είχε αλλάξει τη σειρά των μαθημάτων, όπως αυτή προτείνεται από το σχολικό βιβλίο, διδάσκοντας πρώτα την $y = \alpha x + \beta$, και μετά τις άλλες δύο, σε συνδυασμό με τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Τα παιδιά είναι φυσικό να ασχοληθούν πρωτίστως με αυτά που διδάχθηκαν πιο πρόσφατα από τη μέρα αυτή, ωστόσο το κάνουν αγνοώντας κύρια χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $y = \alpha \cdot x$ και $y = \frac{\alpha}{x}$, που εξαρχής θα τους οδηγούσαν στην απόρριψη των αντίστοιχων εικασιών τους.

Ο καθηγητής χειριζόταν την διδακτική του πρακτική μόνο ως λεκτική πληροφόρηση των μαθητών για τη σημασία των εννοιών και του «σωστού» τρόπου αντιμετώπισης των ζητημάτων. Έτσι απέτρεπε, άθελά του, τους μαθητές από το να κάνουν παίρνουν πρωτοβουλία στην επίλυση προβλημάτων, ή έστω να διερευνήσουν

τους λόγους της ορθότητας αυτού που τους υπεδείκνυε. Η επιμονή του καθηγητή σ' αυτή τη «σωστή» οδό, το γεγονός ότι στην ουσία ζητούσε από τους μαθητές να μιμηθούν τις διαδικασίες που αυτός ακολουθεί ώστε να φτάσουν στην επιτυχία όταν τους ζητηθεί κάτι αντίστοιχο σε κάποια εξέταση, τους αποτρέπει από το να αναλάβουν τη διερεύνηση των δικών τους εικασιών και στρατηγικών. Μάλιστα οι μαθητές είναι σχεδόν σίγουροι, ότι στην εξέταση θα τους ζητηθεί να κάνουν κάτι παρόμοιο, κι έτσι δεν αναρωτιούνται για διαφορετικές περιπτώσεις εργασιών, όπως για παράδειγμα η εργασία που τους ζητήθηκε να λύσουν κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Ειδικότερα όσον αφορά στην εύρεση του β, η πάγια τακτική στο μάθημα ήταν η χρήση του ορισμού της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$. Ο καθηγητής ζήτησε ρητά μέσα στην τάξη την απομνημόνευση του ορισμού, χωρίς όμως να επιμένει στους λόγους για τους οποίους το β του αλγεβρικού τύπου είναι η τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα yy΄. Αυτό έγινε μόνο μία φορά μετά από ερώτηση ενός μαθητή, που έκανε τον καθηγητή να διαπιστώσει την αδυναμία κατανόησης από τους μαθητές του. Στη συνέντευξη αυτό αντικατοπτρίζεται σε όλο το τελευταίο επεισόδιο όπου τα παιδιά ασχολούνται με την εύρεση του β. Όχι μόνο παρουσιάζουν αδυναμία αναπαραγωγής του ορισμού, αλλά δεν κάνουν οποιαδήποτε προσπάθεια να θυμηθούν ή να ανακαλύψουν επί τόπου ένα νέο τρόπο αντιμετώπισης της κατάστασης, όπως για παράδειγμα η εύρεση του σημείου τομής από την ίδια τη γραφική παράσταση.

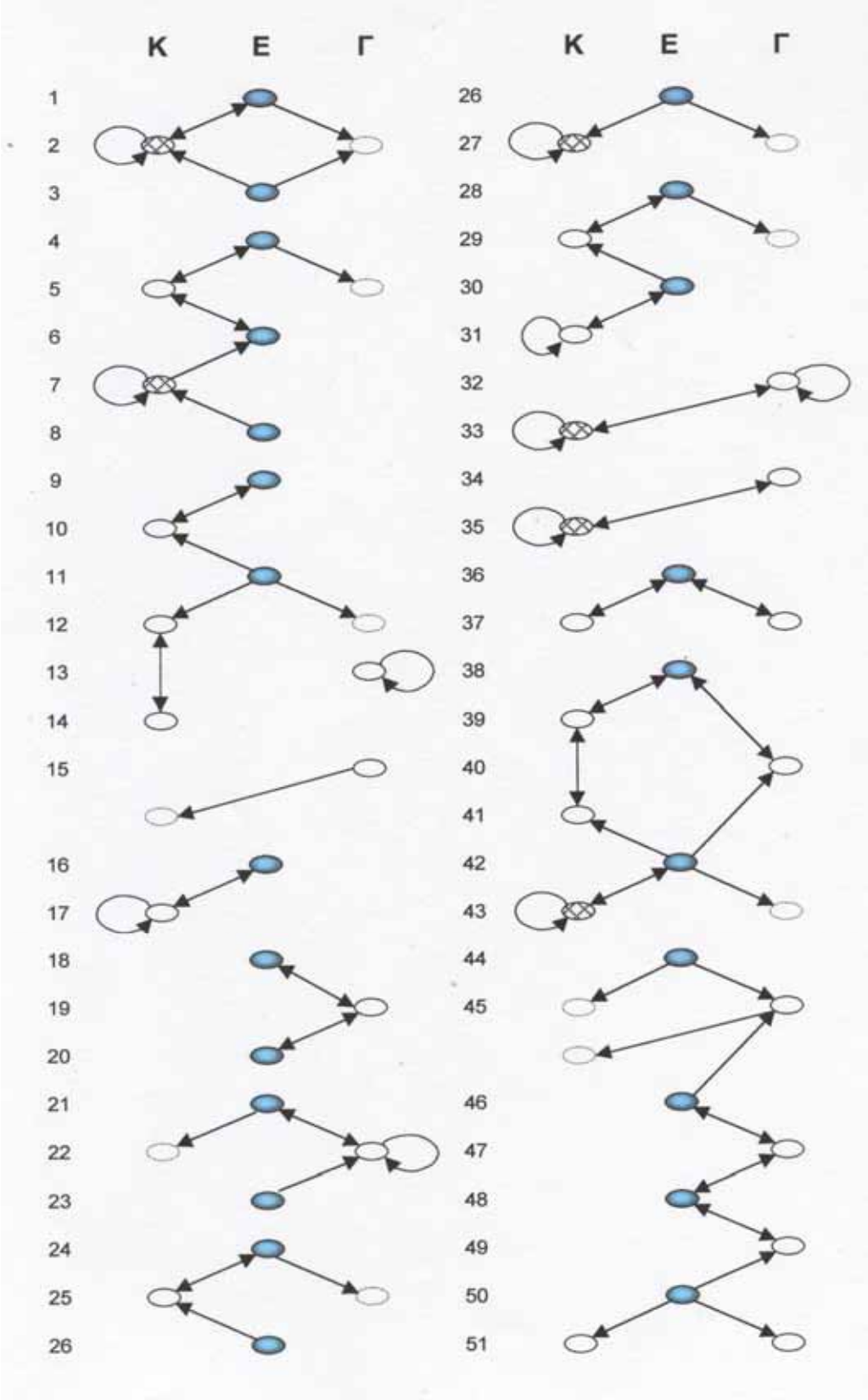
Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να κάνουμε αναφορά στα κίνητρα των πράξεων καθηγητή και μαθητών στη σχολική αίθουσα. Κίνητρο του καθηγητή είναι σαφώς το να κατανοήσουν οι μαθητές του τα μαθηματικά, με απώτερο στόχο όμως, όπως φαίνεται από τα ίδια του τα λόγια στο μάθημα, η επιτυχία τους σε κάποια εξέταση. Από την άλλη πλευρά, κίνητρο των μαθητών είναι όχι τόσο η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά η πραγμάτωση του στόχου του καθηγητή τους, και η επιβεβαίωση των προσδοκιών του. Έτσι επικεντρώθηκαν περισσότερο στην αναπαραγωγή των διαδικασιών που παρουσίαζε ο καθηγητής ώστε να φτάσουν σε σωστά αποτελέσματα όποτε τους ζητηθεί. Συγχρόνως, για να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις του καθηγητή τους για καλή συμπεριφορά μέσα στην τάξη, αποδέχονται την αυθεντία του όσον αφορά στο τι έπρεπε να μάθουν, πειθόμενοι στην μία οδό που αυτός πρότεινε και αποσιωπώντας οποιαδήποτε σχεδόν δική τους πρωτοβουλία ή ακόμη και παρανόηση. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτή η συμπεριφορά των μαθητών παρατηρείται και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, όπου τώρα το ρόλο του δασκάλου αναλαμβάνει η ερευνήτρια.

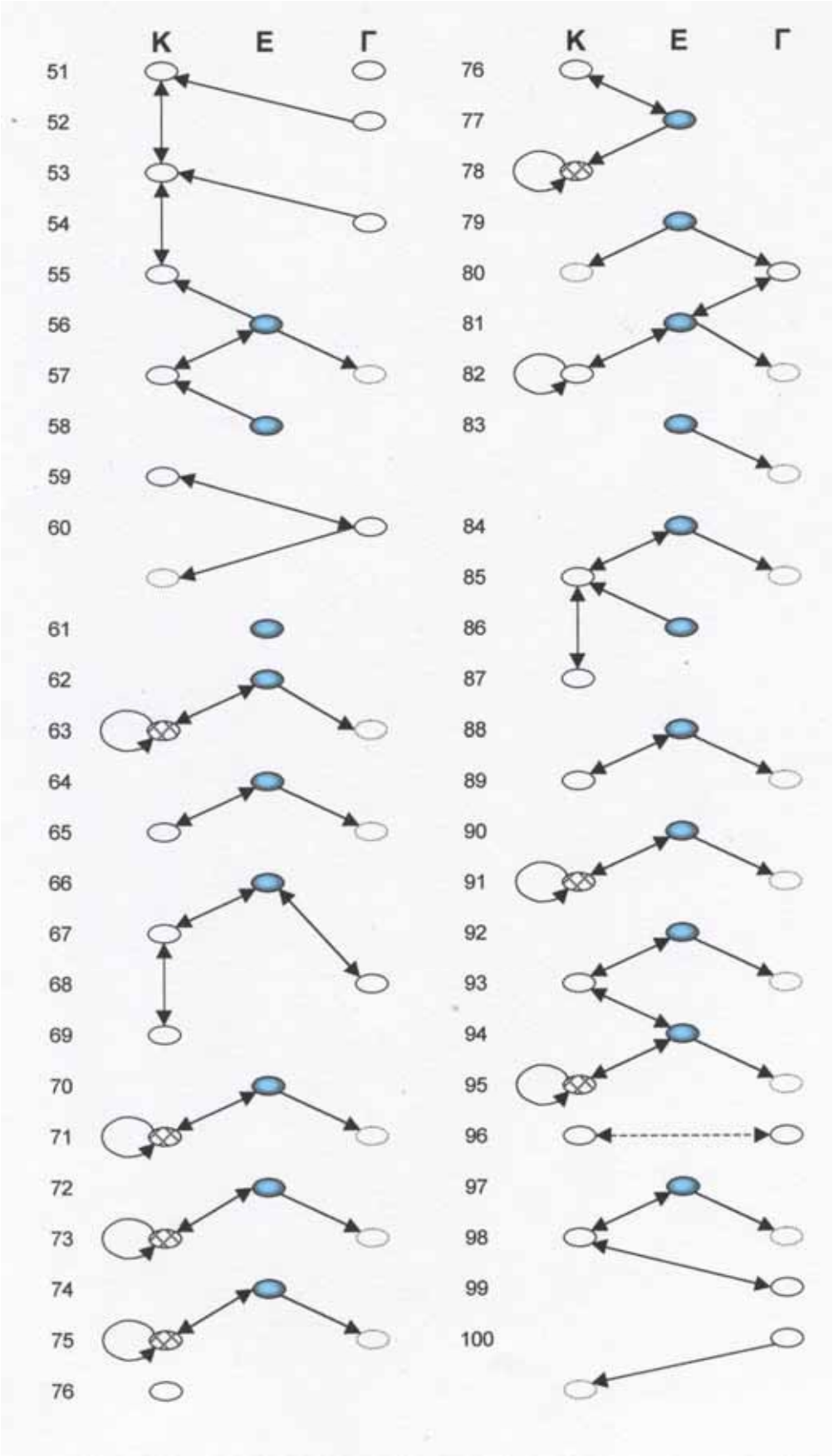
4.1.2 Ανάλυση Μεταδιαλογικών Κανόνων

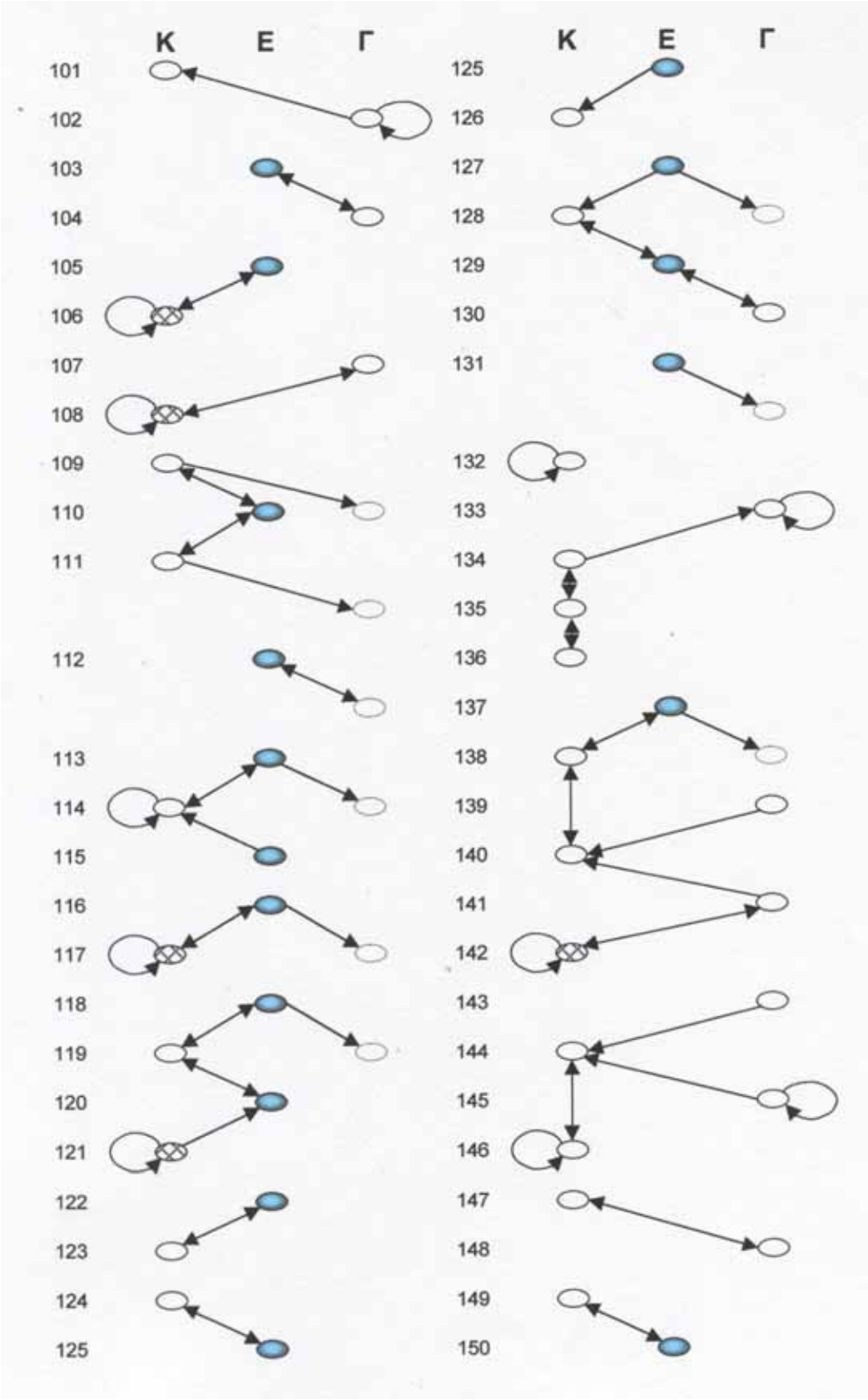
Καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης οι μαθητές, όπως προαναφέραμε, φαίνεται να έχουν διαφορετικό αντικείμενο προσήλωσης, διαφορετικούς στόχους και αναλαμβάνουν διαφορετικές στρατηγικές ώστε να φτάσουν στην λύση. Ο Κωνσταντίνος ασχολείται με την εύρεση της αλγεβρικής μορφής της συνάρτησης, ενώ ο Γιώργος ασχολείται με τον προσδιορισμό επιμέρους στοιχείων και ζητούμενων της άσκησης, του x ή του α για παράδειγμα. Τα σημεία όπου οι μαθητές φαίνεται να κάνουν ένα διάλογο είναι ελάχιστα, αλλά και πάλι, λόγω της διαφορετικής τους εστίασης αυτός δεν είναι ουσιαστικός και λειτουργικός. Ακόμη πιο καθοριστικός όμως, για την πορεία της επίλυσης της άσκησης, από τις γνωστικές διαδικασίες που αναλαμβάνουν οι δύο μαθητές, ίσως να είναι ο τρόπος επικοινωνίας μεταξύ τους και με την ερευνήτρια. Θα μελετήσουμε το διάλογό τους με βάση την επικοινωνιακή προσέγγιση στη μάθηση, δηλαδή τη μεταφορική έννοια «η μάθηση ως επικοινωνία». Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε την αποτυχία τους με κριτήριο την αποτελεσματικότητα της επικοινωνίας τους και να συνδέσουμε τη συμπεριφορά τους με την επικοινωνιακή συμπεριφορά του καθηγητή στην τάξη.

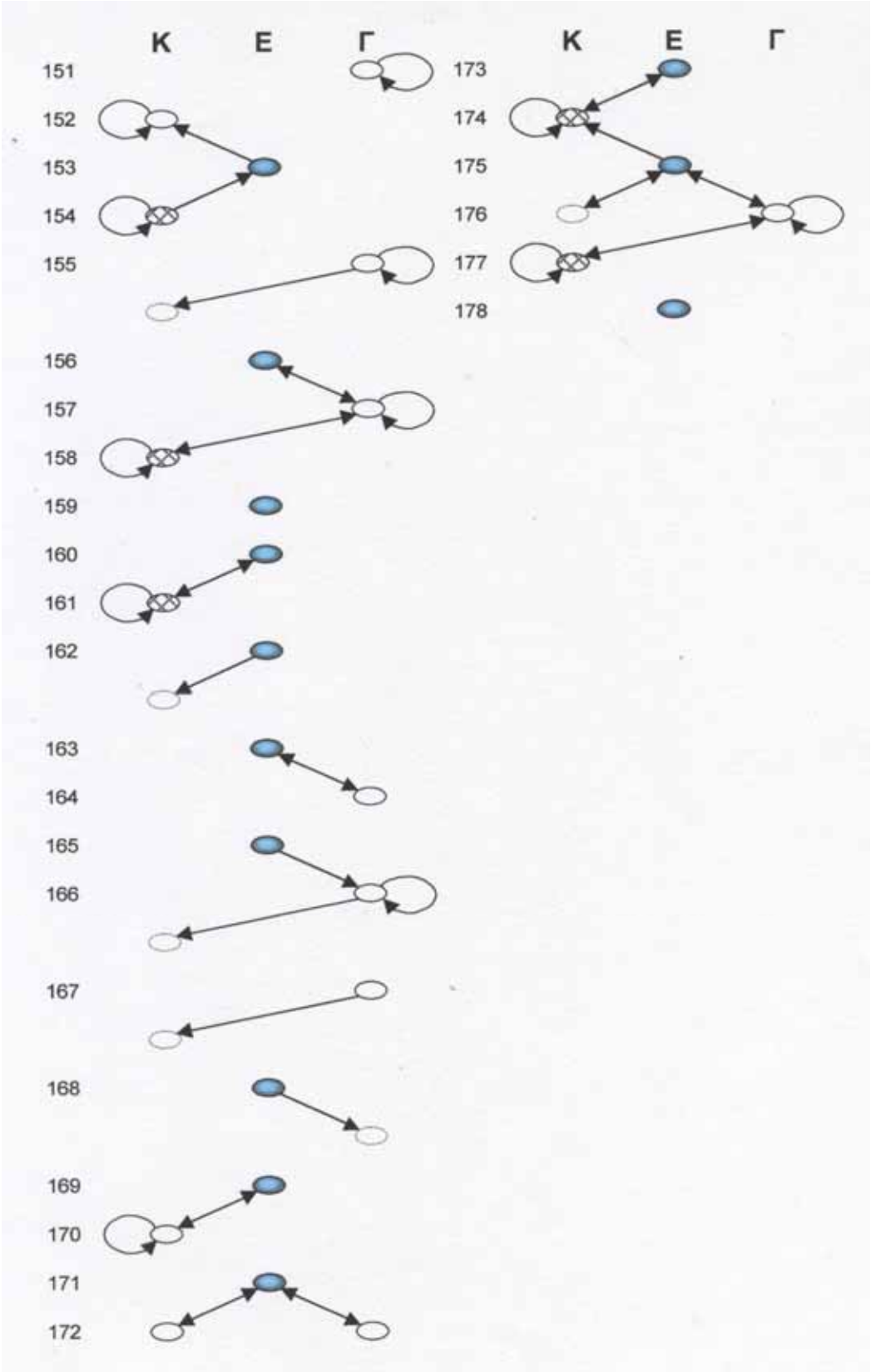
Για την ανάλυση του διαλόγου τους θα χρησιμοποιήσουμε το ροοδιάγραμμα αλληλεπίδρασης όπως περιγράφεται από τη Sfard (2001), με κάποιες μικρές προσθήκες.

Ροοδιάγραμμα Αλληλεπίδρασης 1




К Е Г
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
К Е Г
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100


К Е Г
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
К Е Г
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150


K E Γ
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
K E Γ
173
174
175
176
177
178

Εικόνα 3

Κάθε κυκλάκι στο διάγραμμα ροής αναπαριστά την έκφραση του εκάστοτε συνομιλητή τη δεδομένη στιγμή της συνέντευξης. Οι εκφράσεις είναι αριθμημένες ομοίως όπως στο πρωτόκολλο. Η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στις εκφράσεις του Κωνσταντίνου (Κ), η μεσαία στήλη στην ερευνήτρια (Ε), και η τρίτη στον Γιώργο (Γ). Τα βέλη που ενώνουν τους κύκλους χαρακτηρίζουν την ποιότητα και την κατεύθυνση της κάθε έκφρασης.

- Ενεργητικά βέλη, είναι τα βέλη που έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω, κάθετα ή διαγώνια. Τα ενεργητικά βέλη δηλώνουν ότι ο ομιλητής που προφέρει την έκφραση – αφετηρία του βέλους απευθύνεται στον ομιλητή που αντιστοιχεί στην έκφραση – στόχο του βέλους, και περιμένει μία ανταπόκριση από αυτόν.
- Αντενεργά βέλη, είναι τα βέλη που έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω, κάθετα ή διαγώνια. Εδώ η έκφραση – αφετηρία του βέλους αποτελεί αντίδραση στην έκφραση – στόχο του βέλους.
- Τα διακεκομμένα βέλη αναπαριστούν διάλογο ανάμεσα στους συνομιλητές που έγινε πολύ χαμηλόφωνα, και δεν έχουμε στοιχεία για το περιεχόμενό τους.
- Κυκλικό βέλος σε λευκό κυκλάκι συμβολίζει έκφραση που ο ομιλητής φαίνεται να απευθύνει στον εαυτό του, για παράδειγμα στον στ.13.
- Κυκλικό βέλος σε διαγραμμισμένο κυκλάκι συμβολίζει τυπικές, μη ουσιώδεις εκφράσεις όπως «*Μμμ*», «*Ναι*», «*Εε*», για παράδειγμα στ. 7. Θα μελετηθούν παρακάτω.
- Τα κυκλάκια με διακεκομμένη γραμμή συμβολίζουν τη σιωπή του συνομιλητή στον οποίο αντιστοιχούν, σε ενεργητική δήλωση κάποιου άλλου, για παράδειγμα στο στ. 1 η ερευνήτρια απευθύνεται και στους δύο μαθητές, κοιτώντας τους εξίσου καθώς κάνει την ερώτηση, αλλά ο Γιώργος δεν αντιδρά καθόλου.

Ας επικεντρωθούμε αρχικά στα λόγια του κάθε μαθητή ξεχωριστά, και μετά θα προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε αν υπάρχουν κάποια επικοινωνιακά στοιχεία ή μεταδιαλογικοί κανόνες του μαθήματος που εφαρμόζονται και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης των μαθητών αυτών.

Ο Κωνσταντίνος φαίνεται να κρατάει κλειστούς τους διαύλους επικοινωνίας του με τον Γιώργο. Οι ενεργητικές του δηλώσεις προς το Γιώργο είναι ελάχιστες (στ. 59, 98, 111, 147). Αυτές έχουν γνωστικό χαρακτήρα, είναι σα να ψάχνει κάποιο τρόπο να καλύψει τα δικά του κενά μνήμης, ώστε να προχωρήσει στην εργασία του: «*Τον*

ζήταγε τον αριθμό;» (στ. 98), «*Τώρα; Αυτό που είχαμε βάλει, θυμάσαι, στο β;*» (στ. 147). Αυτό δείχνει αφενός ότι βασίζεται εξ' ολοκλήρου τόσο στις δικές του μαθηματικές ικανότητες, όσο και στην επικοινωνία του με το δάσκαλο, αφετέρου ότι δεν ενδιαφέρεται για την κατανόηση των δικών του πράξεων από το Γιώργο. Άλλωστε, δείχνει αδιαφορία προς κάθε σχεδόν ενεργητική δήλωση του τελευταίου. Στους στ. 15, 45, 100, 155, 166, 167 του πρωτοκόλλου δεν ανταποκρίνεται καθόλου στις ερωτήσεις του Γιώργου, ο οποίος κάνει προσπάθειες να κατανοήσει τις πράξεις του Κωνσταντίνου. Συγχρόνως, στους στ. 33, 35, 108, 142, 158, 177, του απαντά με ένα «*Ναι*» ή «*Μμμ*» χωρίς αυτό ωστόσο να αποτελεί ουσιαστική απάντηση. Για παράδειγμα στους στ. 32 – 35:

Γ.: «*Γιατί να μην το κάνουμε χιαστί;*»

Κ.: «*Μμμ… εε.. περίμενε…*»

…

Γ.: «*Κάνουμε τα χιαστί; Δε θυμάμαι*»

Κ.: «*Μμ.*»

Είναι περισσότερο σαν να θέλει να δείξει ότι συμμετέχει σε ένα διάλογο μαζί του, λόγω της έκκλησης της ερευνήτριας για συνεργασία, αλλά και ταυτόχρονα να προστατέψει τη ροή της σκέψης του από εξωτερικές παρεμβάσεις.

Πιο μεγάλο ενδιαφέρον όμως φαίνεται να έχει ο τρόπος που αντιμετωπίζει την παρουσία της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια της συνέντευξης. Ο Κωνσταντίνος τείνει να ακολουθεί πιστά τις προτροπές της ερευνήτριας. Το πρώτο παράδειγμα εμφανίζεται μόλις στον στ. 17, όπου ο Κωνσταντίνου παρερμηνεύει τα λόγια της σαν συναίνεση ενασχόλησης με το α, οπότε αλλάζει τον προσανατολισμό του ανάλογα, ακόμα και αν μέχρι εκείνη τη στιγμή ο ίδιος δε φάνηκε να προβληματίζεται καθόλου. Ενώ δεν ακούει σχεδόν καθόλου τα λόγια του συμμαθητή του, όταν η ερευνήτρια δείχνει σημάδια επιδοκιμασίας, φαίνεται πρόθυμος να εκπληρώσει τις προσδοκίες της και ευθυγραμμίζει τους στόχους του με αυτές, έστω και για λίγο. Ένα ακόμη πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής του της επιθυμίας να εκπληρώσει τις προσδοκίες της ερευνήτριας, εμφανίζεται στους στ. 24 – 31 όπου ο Κωνσταντίνος προσαρμόζει τις απόψεις του στα λόγια της, κάνοντας όμως τελικά αντικρουόμενες δηλώσεις. Όταν η ερευνήτρια ρωτάει απευθυνόμενη και στους δύο μαθητές αν τελικά έχουν κάποιο αποτέλεσμα από την αντικατάσταση του σημείου (0, -4) στη συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, χρησιμοποιεί μία έκφραση που οδηγεί τον Κωνσταντίνο σε αρνητική απάντηση:

Ε.: «*Βγαίνει κάτι από αυτό; Δε μας αρέσει;*»

Κ.: «*Δε μας αρέσει.*»

Αμέσως μετά όμως η ερευνήτρια αλλάζει τον τόνο της φωνής της δείχνοντας θετική προδιάθεση απέναντι στη χρήση της $y = \frac{\alpha}{x}$, και ο Κωνσταντίνος και πάλι συμφωνεί μαζί της χωρίς όμως να δείχνει ότι καταλαβαίνει την αντίθεση των δύο δηλώσεών του, ή ότι αλλάζει την πεποίθησή του για κάποιο λόγο γνωστικού χαρακτήρα:

Ε.: «*Από εκεί δε μπορούμε να συνεχίσουμε;*»

Κ.: «*Μπορούμε.*»

Κοιτάζοντας πίσω στα μαθήματα μέσα στη σχολική αίθουσα, διαπιστώνουμε ότι ο καθηγητής διατηρεί τη θέση της αυθεντίας. Αυτός γνωρίζει τη λύση σε όλες τις ασκήσεις και το δρόμο να φτάσουμε σ' αυτήν. Ρόλος του, σιωπηρά, ήταν η καθοδήγηση στο «σωστό» τρόπο διαπραγμάτευσης των ζητημάτων. Στην ανάγκη του να οδηγήσει τους μαθητές του σ' αυτή τη «σωστή» οδό, συχνά, και άθελά του ίσως, άλλαζε τον τόνο της φωνής του και τον τύπο των ερωτήσεων, κατά τέτοιο τρόπο που οι μαθητές έμαθαν να υποψιάζονται ποια είναι η σωστή απάντηση και να ανταποκρίνονται ανάλογα. Κατά τον ίδιο τρόπο και στη συνέντευξη, όπου, από την οπτική γωνία των μαθητών, αντικαταστάτης του καθηγητή είναι η ερευνήτρια, αυτή είναι η αυθεντία, διότι έχει ανώτερες μαθηματικές γνώσεις και προφανώς γνωρίζει τη λύση του προβλήματος. Οι μαθητές θεωρούν δεδομένο ότι κίνητρό της είναι να φτάσουν στην επιτυχία και ότι δεν υπάρχει περίπτωση να επιτρέψει κάποια εκτροπή από τη σωστή πορεία. Έτσι, με αυτή την υπόθεση, και με κίνητρο των μαθητών τώρα την ικανοποίηση των προσδοκιών της ερευνήτριας, ο Κωνσταντίνος λειτουργεί με τρόπο αντίστοιχο του μαθήματος. Ανάλογα με τις λέξεις και τον τόνο της φωνής της ερευνήτριας, απαντά σύμφωνα με την ερμηνεία που δίνει όσον αφορά στις προσδοκίες της.

Πολλές φορές όμως ο Κωνσταντίνος ενώ φαίνεται να ανταποκρίνεται στα λόγια της ερευνήτριας, με μία προσεκτική ματιά καταλαβαίνουμε ότι οι απαντήσεις του δεν είναι ουσιαστικές. Στους στ. 6, 27, 43, 63, 71, 73, 75 ,78, 91, 95, 106, 117, 121, 154, 161, 174, απαντά με ένα «*Ναι*» ή «*Μμμ*», όπως ακριβώς έκανε και με το Γιώργο, χωρίς να δίνει μία ουσιώδη απάντηση. Σε κάποια από αυτά τα σημεία η ερευνήτρια στην ουσία δεν περιμένει κάποια απάντηση, αλλά ίσως ο Κωνσταντίνος να νιώθει υποχρεωμένος να δείξει ότι συμμετέχει. Υπάρχουν όμως και σημεία (στ. 70 – 75) όπου του προτείνονται από την ερευνήτρια δύο εναλλακτικές απαντήσεις σε ένα

ερώτημα , έτσι ώστε αυτός να διαλέξει, όμως και πάλι αυτός απαντάει «Ναι», πράγμα που υποδηλώνει ότι στην πραγματικότητα ούτε καν ακούει την ερώτηση εκείνη τη στιγμή:

Ε.: «*Δηλαδή την ιδέα αυτή την παρατήσαμε.*»

Κ.: «*Ναι, εε…*»

Ε.: «*Ή.. Δε θέλετε να την επαληθεύσετε, να προσπαθήσετε; Ή όχι;…*»

Κ.: «*Ναι*»

Ε.: «*Νιώθετε απλά ότι δε βγαίνει, ή δεν ξέρετε πώς να το επαληθεύσουμε;*»

Κ.: «*Ναι.*»

Γενικότερα, κατά την πορεία των μαθημάτων, κάθε ερώτηση του καθηγητή απαιτούσε μία απάντηση από τους μαθητές ακόμη και αν αυτή ήταν ανειλικρινής. Στην ερώτησή του αν κατάλαβαν, είναι εμφανής η προσδοκία του να ακούσει το «ναι», και οι μαθητές του το χαρίζουν, αν και αργότερα φαίνεται ότι η αληθινή απάντηση ήταν «όχι». Όταν οι μαθητές λένε «ναι» ο καθηγητής μένει ικανοποιημένος και δε χρησιμοποιεί άλλα μέσα παρακολούθησης της κατανόησης των μαθητών του. Αντίθετα, χρησιμοποιεί τις ασκήσεις και τα παραδείγματα είτε σαν μία μορφή επανάληψης, είτε σαν εξέταση. Αυτό φαίνεται στο ότι αν και διαπιστώνει και ο ίδιος τις παρανοήσεις των μαθητών του, δεν αλλάζει τον τρόπο που προσεγγίζει τα θέματα. Για παράδειγμα τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όσον αφορά στις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ με τον άξονα yy΄. Στα σχετικά μαθήματα, ο καθηγητής απαιτούσε από τους μαθητές να «καταλάβουν», να μάθουν τι είναι το β μέσα από την απομνημόνευση του ορισμού της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$. Ωστόσο, τόσο μέσα από το μάθημα, όσο και κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, φαίνεται ότι αυτοί δεν έχουν κατανοήσει ούτε καν τι αναπαριστά η κάθε συντεταγμένη σε ένα διατεταγμένο ζεύγος που αναπαριστά σημείο στο επίπεδο. Όπως προαναφέραμε, η μόνη φορά που ο καθηγητής αλλάζει οπτική γωνία είναι μετά από ερώτηση ενός μαθητή, όπου αναγκάζεται να εγκαταλείψει αυτή του την προσέγγιση, και να τους υποδείξει ένα νέο τρόπο εύρεσης των σημείων τομής με τους άξονες yy΄ και xx΄, μέσω την αντικατάστασης των τιμών x = 0 και y = 0 αντίστοιχα. Η εμφανής δυσαρέσκειά του σε περιπτώσεις όπου αντιλαμβάνεται τις παρανοήσεις και την αποτυχία επίτευξης του στόχου του, που είναι η συμμετοχή των μαθητών και τελικά η μάθηση, σε συνδυασμό με τις προθέσεις των μαθητών να δείξουν καλή συμπεριφορά

στο μάθημα, έχει ως αποτέλεσμα το να εκδηλώνουν ενδείξεις κατανόησης, χωρίς όμως αυτή τελικά να έχει επιτευχθεί.

Όσον αφορά τις ενέργειες του Γιώργου, αυτός δείχνει πιο παθητικός, καθώς έχει παραχωρήσει την κόλλα και την καταγραφή των μαθηματικών διεργασιών αποκλειστικά στον Κωνσταντίνο, χωρίς να αναλαμβάνει δράση, παρά μόνο μία φορά, στην περίπτωση της $y = \frac{\alpha}{x}$. Από τη μία προσπαθεί να συμβάλλει σε κάποια κρίσιμα σημεία με το να προτείνει ιδέες, από την άλλη θέλει να κατανοήσει τις εργασίες του Κωνσταντίνου, κι έτσι του κάνει ερωτήσεις ώστε να καταφέρει να ακολουθήσει το ρυθμό του. Για παράδειγμα, στο στ. 15, «*Αν η συνάρτηση είναι αυτή δε θα χρειαστούμε αυτό;*» (το α), ή στο στ. 141, «*Κι αν δεν είναι 8;*». Γενικά κάνει πληθώρα ενεργητικών δηλώσεων προς τον Κωνσταντίνο, στ.15, 32, 34, 45, 60, 100, 107, 139, 141, 143, 155, 166, 167, 176, ωστόσο δεν λαμβάνει απάντηση από αυτόν. Οι δηλώσεις γνωστικού χαρακτήρα του Γιώργου έχουν διπλή μορφή. Τίθενται υπό μορφή ερώτησης προς τον εαυτό του, αφού κι αυτός σπάνια κοιτάει τον Κωνσταντίνο, αλλά ταυτόχρονα και προς τον τελευταίο, ζητώντας την επιβεβαίωσή του. Είναι σα να σέβεται το γεγονός ότι ο Κωνσταντίνος, έχει την κόλλα μπροστά του και παρουσιάζει μία εικόνα έντονης μαθηματικής σκέψης, και δε θέλει να τον διακόψει, αλλά από την άλλη θέλει να πει την ιδέα του, που ίσως και να βοηθήσει στην πορεία της λύσης. Συγχρόνως, η αδιαφορία του Κωνσταντίνου απέναντί του δεν τον κάνει να αντιδρά. Όλα αυτά αποτελούν μία ισχυρή ένδειξη της αποδοχής της μαθηματικής ανωτερότητας του Κωνσταντίνου από το Γιώργο.

Ίσως το πιο σημαντικό στοιχείο του μαθήματος είναι ο τύπος επικοινωνίας που είχε εγκαθιδρύσει ο καθηγητής. Συχνά ο καθηγητής αποδοκίμασε τη μη συμμετοχή των μαθητών, αλλά και, ακόμη συχνότερα, τις λανθασμένες τους απαντήσεις. Αυτό ίσως να αποτρέπει τους δύο μαθητές από το να δοκιμάσουν κάτι. Η ερευνήτρια κατά τη συνέντευξη είναι η πρώτη που τους προτρέπει να δοκιμάσουν τις ιδέες τους «*ακόμη και αν είναι ανοησίες*», και φαίνεται πως δεν εμπιστεύονται ότι τους το λέει ειλικρινά. Συγχρόνως, η όποια επικοινωνία λάβαινε χώρα μέσα στην τάξη ήταν αυστηρά μεταξύ μαθητών – καθηγητή. Ο καθηγητής ποτέ δε ζήτησε από κάποιο μαθητή να σχολιάσει τα λόγια κάποιου άλλου, ή τη συνεργασία των μαθητών. Πάντα αυτός ήταν που θα επιβεβαίωνε ή θα απέρριπτε κάποια απάντηση, ή θα εξηγούσε κάποια ασαφή σημεία. Έτσι οι μαθητές εκτός από το ότι παρουσιάζουν αδυναμία στο να διατυπώσουν ή να διερευνήσουν πλήρως τις δικές τους εικασίες, λειτουργούν

μεμονωμένα, δεν απευθύνονται το ένα στο άλλο, γιατί στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουν τον τρόπο. Ίσως μάλιστα να το θεωρούν και μη κατάλληλη συμπεριφορά, παρότι κατά τη διάρκεια της συνέντευξης τους ζητήθηκε να συνεργαστούν, αφού ο καθηγητής τους ζητούσε πάντα ατομική εργασία. Άλλωστε, όπως και ο ίδιος δήλωσε, πιστεύει ότι η μάθηση των Μαθηματικών χρειάζεται αυστηρά ατομική προσπάθεια. Έτσι λοιπόν δικαιολογείται η απουσία ουσιαστικού διαλόγου μεταξύ των μαθητών η αδυναμία κατανόησης των στόχων του ενός από τον άλλο. Μάλιστα, οι μαθητές κατά κάποιο τρόπο χρησιμοποιούν την ερευνήτρια σαν μέσο επικοινωνίας καθώς απευθύνονται περισσότερο σ' αυτήν, και ο καθένας αντιδράει στα λόγια του άλλου ανάλογα με τις προτροπές της ερευνήτριας. Για παράδειγμα στο στ. 80, όπου ο Γιώργος κάνει μία πρόταση απευθυνόμενος στην ερευνήτρια, και ο Κωνσταντίνος περιμένει την αντίδρασή της προτού κινητοποιηθεί για την υλοποίηση της ιδέας αυτής. Ομοίως στους στ. 109 – 112 , όπου έχουμε την απόρριψη της $y = \alpha x$:

> Κ.: «*Να σου πω. Άμα στη συνάρτηση* $y = \alpha x$ *, αν βάλουμε στο x το μηδέν, y ίσον α επί 0, πρέπει να βγαίνει y ίσον 0, άρα δεν είναι αυτή η συνάρτηση.*»

Ο Κωνσταντίνος ξεκινάει να μιλάει στον Γιώργο, σύντομα όμως γυρνάει το βλέμμα του προς την ερευνήτρια και περιμένει τη δική της ανταπόκριση.

> Ε.: « *Το Γιώργο κοίτα, μην κοιτάς εμένα.*»

Η ερευνήτρια αρνείται να συμμετέχει στο διάλογο, προτρέποντας τον Κωνσταντίνο να μιλήσει με τον Γιώργο.

> Κ.: «*Εε;*»

Ο Κωνσταντίνος τώρα απευθύνεται στον Γιώργο, αλλά αυτός δεν δείχνει να ανταποκρίνεται άμεσα.

> *Ε.: « Συμφωνείς Γιώργο; Για σκέψου το.»*

Μετά την τελευταία ερώτηση της ερευνήτριας πλέον ο Γιώργος απαντάει γνέφοντας καταφατικά, δείχνοντας το σεβασμό του απέναντι στους δύο συνομιλητές του που φαίνεται να συμφωνούν. Κίνητρό του είναι να ευχαριστήσει αυτούς που θεωρεί ανώτερούς του, και να δείξει ότι συνεργάζεται, όπως έμαθε την έννοια της συνεργασίας μέσα στο μάθημα, δηλαδή να ακολουθεί την οδό που οι ανώτεροί του του προτείνουν. Η ερευνήτρια λοιπόν αποτελεί το μέσο ανταλλαγής απόψεων και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών οι οποίοι παρουσιάζουν μία πλήρη αδυναμία να αποκτήσουν μία επαφή, να λειτουργήσουν ομαδικά, και να προχωρήσουν μαζί στην λύση του προβλήματος.

4.2 Συνέντευξη 2

1	Απ	Παρατηρείς...;	Έχουν περάσει 14’’ που έχουν πάρει το πρόβλημα.
			20’’
2	Απ	Μπορούμε να γράψουμε κάπου;	
3	Ε	Επάνω, ότι θέλετε.	
			Και οι δύο αρχίζουν να μετράνε με τα δάχτυλα ανά δύο αριθμούς
4	Ε	Τι κάνετε;	
5	Απ	Θέλω να δω.. μμ..	
6	Ε	Προσπαθήστε να δουλέψετε και μαζί όμως.	
7	Απ	Να συνεχίσουμε, να δούμε αυτό που βγάζει	Στην Αμαλία
8	Αμ	Ναι	
9	Απ	Πιστεύω πως είναι το 8	
10	Αμ	Ναι γιατί βγαίνει...	
11	Απ	Γιατί μας βγήκε με ανά ένα	
12	Αμ	Ανά ένα	
			Κοιτάνε την ερευνήτρια και περιμένουν
13	Ε	Μη με κοιτάτε, κάντε ότι πιστεύετε.	
14	Απ	Να το βάλουμε;	Στην Αμαλία
15	Αμ	Ναι	Η Αποστολία γράφει το 8
16	Απ	Γιατί, ξέρεις, ανεβαίνει προς τα δύο..	Το «δύο» το λέει ταυτόχρονα με την Αμαλία
17	Αμ	Δύο..	
18	Απ	..κι εδώ πάει δεξιά... διαδοχικοί	Δείχνει στα x
			20’’, ψίθυροι
19	Ε	Μην ψιθυρίζετε!	
20	Απ	y=…x	Γράφει y =
21	Αμ	Ναι	Γράφουν στο κάτω μέρος της κόλλας
22	Ε	Εντάξει, γράψτε και πρόχειρα, δεν χρειάζεται να τα γράφετε πρόχειρα εκεί κάτω... Προσπαθήστε ιδέες...	
23	Απ	Αν κάναμε και απεικόνιση θα βλέπαμε...	
24	Αμ	Να κάνουμε ένα ορθοκανονικό...	Στην ερευνήτρια
25	Ε	Έχω χαρτί μιλιμετρέ, να σας δώσω αν θέλετε, εντάξει;	
26	Απ	Αν το παραστήσουμε, ξέρεις, θα το βρούμε	
			Ξεκινούν τη γραφική παράσταση
27	Ε	Πείτε μου τι θα κάνετε	
28	Απ	Θα αναπαραστήσουμε τα σημεία πάνω στο ορθοκανονικό για να προσπαθήσουμε να βρούμε τη συνάρτηση	
			Η Αμαλία κάνει τους άξονες και η Αποστολία

			βάζει τα σημεία
29	Απ	Όταν το x είναι 0, είναι –4, είναι το πρώτο σημείο	
			Η Αμαλία παρακολουθεί και κάνει «μμ» ή γνέφει καταφατικά. Μετράνε μαζί τις συντεταγμένες για τα υπόλοιπα σημεία και ρωτάνε η μία την άλλη «εδώ;», λένε «ναι», «σωστό»
30	Απ	Εδώ;	
31	Αμ	Όχι... Το κάναμε αυτό..	Αναφέρεται σε κάποιο σημείο
32	Απ	Ναι	
33	Αμ	Ναι	
34	Απ	Σωστό	Μετράνε
35	Αμ	Ευθεία πάει να βγει	
36	Απ	Α, βγαίνει μία ευθεία.	
			Ψίθυροι
37	Απ	Παρατηρούμε πως η γραφική παράσταση είναι μία ευθεία, δηλαδή τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.	Απευθύνονται στην ερευνήτρια και σταματούν κοιτώντας την ευθεία για λίγες στιγμές
38	Ε	Ωραία, τι μπορείτε να σκεφτείτε τώρα για τη συνάρτηση;	
			Η Αμαλία μιλάει πολύ χαμηλόφωνα στην Αποστολία
39	Ε	Μην ψιθυρίζετε!	
40	Αμ	Την ρωτάω αν είναι σωστό	
41	Ε	Δεν πειράζει και να είναι λάθος, απλά συζητήστε το, κανονικά, σαν να μην είμαι εδώ.	
			Ακολουθεί 1’17’’ δουλειάς. Η Αμαλία γράφει y=αx +β και μετά κάνουν την αντικατάσταση του σημείου (0,-4)
42	Αμ	αx;	Στην Αποστολία
43	Απ	Ναι. y είναι –4...	
			Έχει γράψει y=αx+β -4 = α0 + β -4 = 0 Σταματούν λίγο και σκέφτονται
44	Ε	Είναι λάθος, νομίζεις εκείνο που έγραψες;	
45	Απ	Εντάξει, προσπαθούμε τώρα να αντικαταστήσουμε για να βρούμε τη συνάρτηση.	

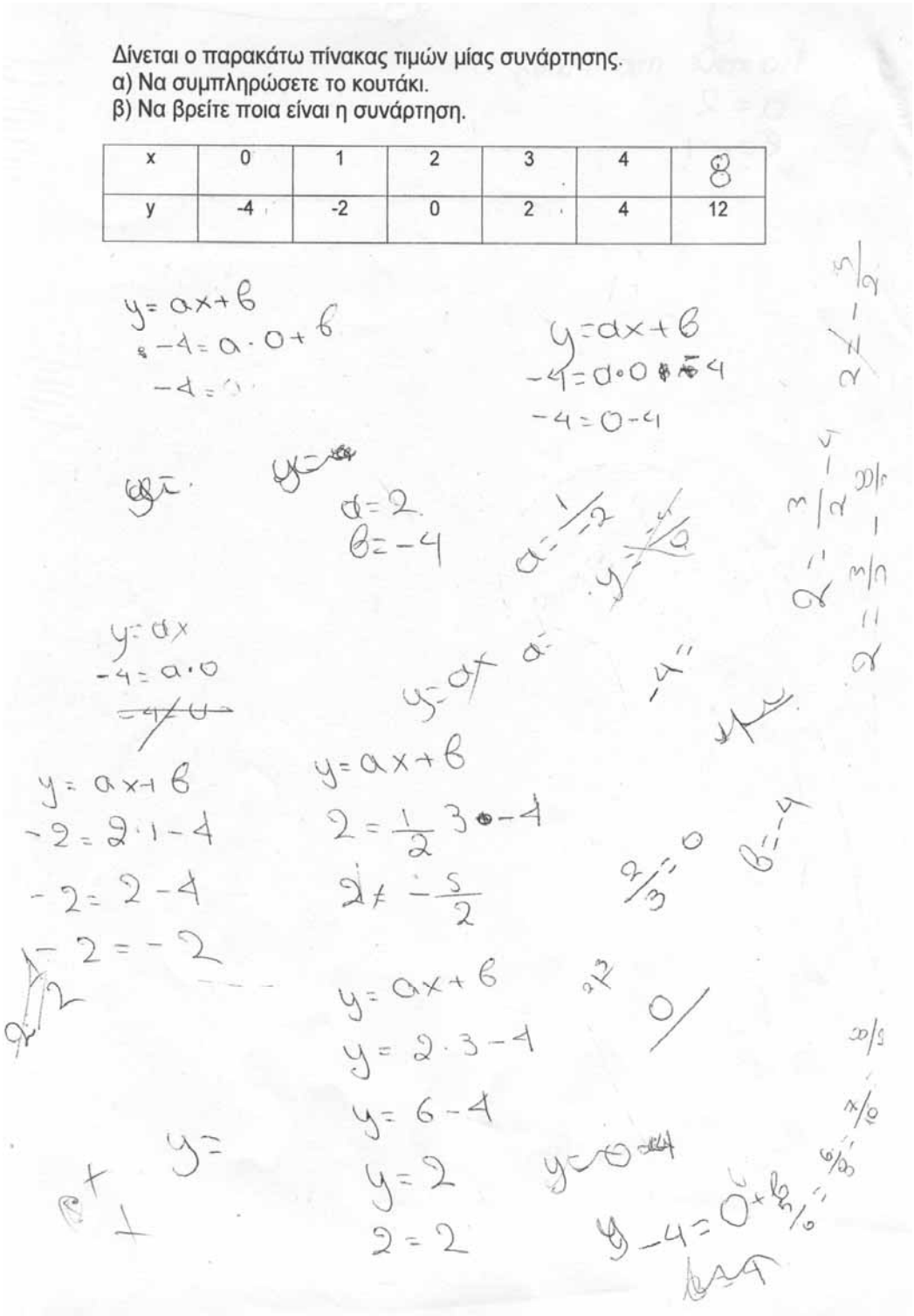
46	Ε	Ωραία, ίσως κάποια σημεία σας βοηθήσουνε.	
47	Απ	Είναι το β;	Στην Αμαλία. Γράφει β = -4
			19’’
48	Ε	Εντάξει, κάντε μια δοκιμή και μετά την επαληθεύετε. Με αυτά που κάνατε, ας πούμε, ήδη ένα β βγάλατε. Μπορεί να είναι αυτό. Γιατί δε δοκιμάζετε να...	
49	Απ	Ας πούμε αυτό το ζευγάρι;	Στην Αμαλία, δείχνει το (0,-4) στον πίνακα
50	Αμ	Ναι	
			Η Αποστολία γράφει: $y = ax + \beta$ $-4 = a \cdot 0 - 4$ $-4 = 0 - 4$ και στο κάτω μέρος της σελίδας ξανά: $y = 0 - 4$ $-4 = 0 + \beta$ $\beta = -4$ και το μουτζουρώνει από πάνω
51	Ε	Αυτό γιατί το σβήσατε;	
			Μικρό κενό αμφιβολίας
52	Ε	Δεν είναι ότι κάνατε λάθος, απλά... Δε σας αρέσει αυτό το αποτέλεσμα;	
53	Απ	Μας αρέσει	
54	Ε	Επειδή σας βλέπω που το απορρίπτετε.	
55	Απ	Ας δοκιμάσουμε	
56	Αμ	Πάρε αυτό	
57	Ε	Τώρα έχετε βρει τη συνάρτηση;	
58	Απ	Όχι	Σταματούν
59	Ε	Τι άλλο πρέπει να κάνετε; Ας πούμε ότι το βρήκατε το β, ότι έχετε βρει ένα β, μπορεί να μην είναι αυτό, αλλά είναι ένας αριθμός. Τι άλλο πρέπει να κάνουμε για να βρούμε τη συνάρτηση;	
60	Απ	Να πάρουμε ένα... εε.... Να συγκρίνουμε δύο ζευγάρια;	
61	Ε	Πώς να τα συγκρίνετε δηλαδή;	
			20’’
62	Ε	Πρέπει να βρείτε κάτι ακόμα.	
63	Απ	Το α;	Στην Αμαλία, η οποία γνέφει καταφατικά
			28’’
64	Ε	Πως μπορούμε να βρούμε το α; Καμιά ιδέα;	
65	Αμ	Αφού ξέρουμε το y και το x, τα ξέρουμε, μπορούμε να βρούμε και το α. Σκέφτεσαι εσύ κάτι;	
66	Απ	Μμ	«όχι»
			50’’

67	Απ	Θα είναι ή (2) ή ($\frac{1}{2}$)	Έχει γράψει 2, $\frac{1}{2}$, το λέει στην Αμαλία
68	Ε	Αυτό πως το σκέφτηκες;	
69	Απ	Γιατί βλέπουμε πως...	
70	Ε	Το δοκίμασες στο μυαλό σου; Έκανες πράξεις; Ή...	
71	Απ	Εντάξει, όπως και το... πιστεύω δηλαδή, δεν είμαι σίγουρη	
72	Ε	Εσύ Αμαλία συμφωνείς;	
73	Αμ	Μεγαλώνει διαδοχικά το x οπότε... το y…	
74	Αμ - Απ	Είναι συνάρτηση ανάλογων ποσών!	
75	Ε	Ανάλογων ποσών;	
76	Απ	Όχι, όχι, αν είναι ανάλογων όμως θα πέρναγε στο...	
77	Ε	Αφού είπατε ότι είναι η αx + β	
78	Απ	Δεν μεγαλώνει όμως τόσο... γιατί εδώ μεγαλώνει 1 ...εδώ μεγαλώνει 2	Στα x του πίνακα Στα y του πίνακα
79	Αμ	Μμ	«ναι»
80	Ε	Εντάξει, μην τα μπλέξετε τώρα, καλά τα πηγαίνατε. Ότι είναι η αx + β το βρήκαμε. Για το 2 ή το $\frac{1}{2}$ ... Ή πως το σκεφτήκατε πείτε μου, ή άμα θέλετε δοκιμάστε το κιόλας.	
81	Αμ	Ναι, γιατί αυξάνεται εδώ κατά ένα, αυξάνεται εδώ κατά δύο...	
82	Απ	Κατά δύο	Ταυτόχρονα με την Αμαλία
83	Ε	Ωραία, θέλετε να το δοκιμάσετε; Μήπως είναι κάποιο από τα δύο;	
84	Απ	Να δοκιμάσουμε;	
85	Αμ	Αυτό;	Δείχνει το 2
86	Απ	Να δοκιμάσουμε με κάποιο από αυτά... Δοκίμασε	Δείχνει στον πίνακα
			Η Αμαλία γράφει : $y = ax + \beta$ $-2=$
87	Αμ	Το α το ξέρουμε;	
88	Απ	Υποθέτουμε τώρα ότι.. το..	
			Η Αποστολία κοιτάει την ερευνήτρια
89	Ε	Ωραία, δοκιμάστε το	
90	Αμ	-2 πλην 4	Συνεχίζει να γράφει
91	Απ	Είναι –4	Για το β
			Η Αμαλία γράφει: $-2=2\cdot1-4$ $-2=2-4$ $-2=-2$

			Ακολουθούν 50’’. Στην αρχή κάτι ψιθυρίζουν, και η Αμαλία δοκιμάζει και για α $=\frac{1}{2}$. Μετά σταματούν και η Αποστολία ξανακάνει τις πράξεις για το $\frac{1}{2}$ στην άκρη της κόλλας: $y = ax + \beta$ $2=\frac{1}{2}\cdot 3-4$ $2\neq -\frac{5}{2}$
92	Απ	Άρα βρήκαμε α το 2	
93	Ε	Ωραία. Είστε σίγουρες;	
94	Απ	Το ‘χες βάλει, 2	
95	Αμ	Το ‘βαλα εδώ	Δείχνει το $-2=2\cdot 1-4$
96	Απ	Ναι, το είπαμε..	
97	Αμ	Εντάξει	
98	Απ	Άρα α=2, β είναι –4 και y και x παίρνουμε ανάλογα κάθε φορά	
99	Ε	Ωραία. Τέλος; Θέλετε να κάνετε κάτι ακόμα; Θέλετε να το επαληθεύσετε ή ...είστε σίγουρες;	
100	Απ	Θες κάτι ακόμα;	
101	Αμ	Όχι, εντάξει.	
102	Απ	Να παίρναμε το σημείο λες...	
103	Ε	Δε σας λέω ότι είναι λάθος, απλά άμα μου πείτε «τέλος», τότε δεν θα μπορείτε να κάνετε άλλη επαλήθευση, γι’ αυτό....	
104	Απ	Το α είναι ο λόγος του...	
105	Αμ	Του...	
106	Απ	Του y προς x είναι; Ή x προς... y προς x.	
107	Αμ	y προς x	
108	Απ	Δεν ορίζεται αυτό...	Πάει να φτιάξει το λόγο $\frac{y}{x}$: $y=\frac{4}{0}$ και το διαγράφει από πάνω.
			Ξαναπροσπαθεί με το $\frac{2}{3}=0$. Ακολουθούν 50’’ σιωπής
109	Ε	Θέλετε να κάνετε επαλήθευση τώρα;	
			Γνέφουν καταφατικά
110	Ε	Ωραία. Κάντε... ότι θέλετε...	

			Η Αποστολία γράφει τους λόγους: $\frac{5}{6}=\frac{6}{8}=\frac{7}{10}=\frac{8}{12}$
111	Απ	Βλέπεις; Κάθε φορά είναι διαφορετικός... Αλλά παίζει και το β εδώ...	
112	Ε	Εντάξει, μην μπλέκεστε , δε μ' αρέσουν εμένα οι λόγοι κ.τ.λ., άλλος τρόπος επαλήθευσης δεν υπάρχει; Δεν πιστεύετε ότι υπάρχει; Υπάρχει; Τι άλλο μπορείτε να κάνετε; Ας πούμε ότι τη βρήκατε τη συνάρτηση. Πως θα ξέρετε ότι είναι όντως σωστή;	
113	Απ	Θα επαληθεύσουμε στο καρτεσιανό;	Κοιτάει την Αμαλία
			15''
114	Απ	Αν είναι αυτή πρέπει να είναι παράλληλες.	Στην ερευνήτρια
			Μικρό κενό
115	Ε	Με ποια;	
116	Απ	Δηλαδή κάθε φορά η συνάρτηση, πρέπει να είναι... επειδή έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης πρέπει να είναι παράλληλη	
117	Ε	Με ποια;	
118	Απ	Ας πούμε να πάρουμε τα σημεία αυτά...	
			36''
119	Ε	Για να μην το πάμε πολύ μακριά και μπερδευτείτε, σκεφτείτε άμα υπάρχει άλλος τρόπος επαλήθευσης πιο εύκολος, χωρίς να μπλέξουμε άλλες ευθείες. Για την ίδια τη συνάρτηση. Τι κάνατε ας πούμε για να τη λύσετε;	
120	Αμ	Να βάλουμε άλλο σημείο!	
121	Ε	Α! Να μια ιδέα, δοκιμάστε τη	
122	Αμ	Ποιο;	
123	Απ	Εδώ... προσπάθησε	
			Ακολουθούν 20'' κατά τα οποία η Αμαλία γράφει: $y = ax + \beta$ $y = 2\cdot 3 - 4$ $y = 6 - 4$ $y = 2$ $2=2$ Σηκώνουν τα κεφάλια ικανοποιημένες και αφήνουν τα στυλό
124	Ε	Εντάξει;	Γνέφουν καταφατικά
125	Ε	Είμαστε σίγουροι;	
126	Αμ - Απ	Νομίζουμε...Ναι	

Φύλλο εργασίας 2



Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μίας συνάρτησης.
α) Να συμπληρώσετε το κουτάκι.
β) Να βρείτε ποια είναι η συνάρτηση.

x	0	1	2	3	4	8
y	-4	-2	0	2	4	12

$y = ax + b$
$-4 = a \cdot 0 + b$
$-4 = 0$

$y = ax + b$
$-4 = a \cdot 0 - 4$
$-4 = 0 - 4$

$a = 2$
$b = -4$

$y = ax$
$-4 = a \cdot 0$

$y = ax + b$
$-2 = 2 \cdot 1 - 4$
$-2 = 2 - 4$
$-2 = -2$

$y = ax + b$
$2 = \frac{1}{2} 3 - 4$
$2 \neq -\frac{5}{2}$

$y = ax + b$
$y = 2 \cdot 3 - 4$
$y = 6 - 4$
$y = 2$
$2 = 2$

Εικόνα 4

4.2.1 Εστιακή Ανάλυση

Στην περίπτωση αυτών των δύο μαθητριών, τα πράγματα διαφοροποιούνται αρκετά. Ο τύπος του μαθήματος ήταν διαφορετικός, όπως αναφέραμε προηγουμένως. Οι μαθήτριες αυτές δεν είχαν αντιμετωπίσει παρόμοιο πρόβλημα, παρά μόνο σε μία περίπτωση (βλέπε σελ. 19) . Γενικότερα για τις διάφορες προσεγγίσεις των θεμάτων από τον καθηγητή στη σχολική αίθουσα έχουμε αναφέρει νωρίτερα. Θα ερευνήσουμε, ομοίως όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το αν και κατά πόσο αυτές αντικατοπτρίζονται στη σκέψη των μαθητριών κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

Επεισόδιο 1^{ο}: Η γραμμικότητα της συνάρτησης (στ.1 – 18)

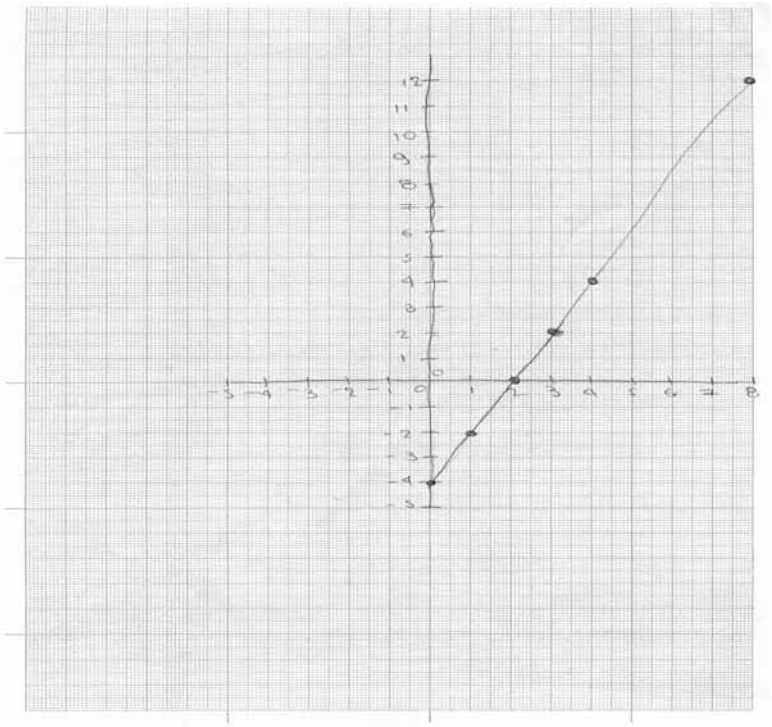
Στους πρώτους 18 στίχους του πρωτοκόλλου οι μαθήτριες αντιμετωπίζουν με επιτυχία το πρώτο ερώτημα του προβλήματος, σχετικά με την εύρεση του ζητούμενου x από τον πίνακα τιμών. Φαίνεται ότι εξ αρχής έχουν τον ίδιο στόχο, καθώς χωρίς καμία προηγούμενη ομιλία και συνεννόηση, εκτελούν την ίδια διαδικασία. Αφού έχουν μελετήσει τον πίνακα τιμών για περίπου 35΄΄ από την έναρξη της εργασίας, αρχίζουν να μετρούν με τα δάχτυλά τους ανά δύο αριθμούς. Προφανώς, ξεκινώντας από το x = 3 το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη θετική τιμή y = 2, αντιστοιχίζουν κάθε δύο δάχτυλα σε μία αύξηση για το x. Μάλιστα, μετά την έκκληση της ερευνήτριας για συνεργασία, αναφέρουν μόνες τους τη στρατηγική τους: «*Να συνεχίσουμε, να δούμε αυτό πού βγάζει*» (στ.7). Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να φτάσουν στα 12 δάχτυλα, οπότε και η αντίστοιχη τιμή για το x είναι 8. Τέλος, για την επιβεβαίωση αυτού του αποτελέσματος, περιγράφουν σχεδόν ταυτόχρονα η μία στην άλλη αυτήν την αύξηση του x κατά μία μονάδα, «*μας βγήκε με ανά ένα*» (στ. 11 – 12) και «.. *κι εδώ πάει δεξιά.. διαδοχικοί*» (στ. 18), κάθε φορά που το y αυξάνεται κατά 2, «*ανεβαίνει προς τα 2..*» (στ. 16).

Η εκφώνηση του προβλήματος ευνοούσε αυτή τη διαδικασία. Όπως φαίνεται, οι μαθήτριες εκτός από κοινό στόχο, έχουν την ίδια επιδιωκόμενη εστίαση, καθώς και οι δύο αναγνωρίζουν το νόμο από τον οποίο παράγονται τα ζεύγη της συνάρτησης, και χρησιμοποιούν την ίδια μέθοδο για να φτάσουν στο αποτέλεσμα, ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθήτριες αναγνωρίζουν τον πίνακα τιμών σαν επαρκή αναπαράσταση μίας συνάρτησης, από την οποία μπορούν να κάνουν κάποιες παρατηρήσεις και να βγάλουν συμπεράσματα. Στην ουσία «διαβάζουν» τον πίνακα τιμών. Η έννοια της συνάρτησης στο σχολικό μάθημα, είχε εισαχθεί

συνολοθεωρητικά, ως απεικόνιση αριθμητικών συνόλων. Κατά τη διάρκεια όμως της επεξεργασίας διαφόρων ζητημάτων, είχε δοθεί έμφαση στην θεώρησή της ως σύνολο ζευγών αριθμών. Έτσι οι μαθήτριες δεν έχουν συνδέσει την έννοια της συνάρτησης αυστηρά με τον αλγεβρικό της τύπο, και μπορούν να χειριστούν εξίσου και τις άλλες μορφές της.

Επεισόδιο 2^{ο}: Γραφική Παράσταση (στ. 19 – 41)

Αμέσως μετά το στ. 18 οι μαθήτριες κάνουν έναν σύντομο διάλογο πολύ χαμηλόφωνα, του οποίου το περιεχόμενο δεν γνωρίζουμε ακριβώς. Ωστόσο παρακάτω φαίνεται ότι αυτός είχε να κάνει με τη μετατόπιση της εστίασης των μαθητριών στο δεύτερο ερώτημα του προβλήματος, την εύρεση της συνάρτησης υπό αλγεβρική μορφή, καθώς η Αποστολία αναφέρει και γράφει «y = ...». Διαπιστώνει όμως ότι δεν μπορεί να συνεχίσει καθώς της λείπουν βασικά στοιχεία της συνάρτησης, και έτσι κάνει αμέσως τη μετάβαση στη γραφική παράσταση της συνάρτησης: «*Αν κάναμε και απεικόνιση θα βλέπαμε..*» (στ. 23) και «Θα αναπαραστήσουμε τα σημεία πάνω στο ορθοκανονικό για να προσπαθήσουμε να βρούμε τη συνάρτηση.» (στ. 28).



Εικόνα 5

Οι μαθήτριες ολοκληρώνουν μαζί το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης (βλέπε εικόνα 5). Παρατηρούμε ότι κατά το σχεδιασμό αυτό συνυπολογίζουν ως

ζεύγος της συνάρτησης και το (8, 12) που είχε προκύψει στο πρώτο ερώτημα. Το σημειώνουν όπως και τα προηγούμενα ζεύγη και έπειτα σχεδιάζουν την ευθεία που ενώνει όλα αυτά τα σημεία. Άρα δεν χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση ως μέσο επαλήθευσης του x = 8 που προέκυψε στην αρχή της επίλυσης. Αυτό επιβεβαιώνει για ακόμη μία φορά ότι ο πίνακας τιμών που τους δόθηκε ήταν επαρκής για την κατανόηση της σχέσης που συνδέει τις μεταβλητές x και y.

Οι μαθήτριες κάνουν την παρατήρηση ότι τα σημεία είναι συνευθειακά και η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι ευθεία (στ. 37). Αμέσως μετά ακολουθεί και πάλι ένας σύντομος πολύ χαμηλόφωνος διάλογος. Μετά το στ. 41 του πρωτοκόλλου, η Αμαλία γράφει τον γενικό τύπο $y = ax + \beta$. Άρα πιθανότατα σ' αυτό τους τον χαμηλόφωνο διάλογο συμπεραίνουν από τη γραφική παράσταση ότι η συνάρτηση είναι αυτής της μορφής. Όσον αφορά στις γραφικές παραστάσεις, κατά τη διάρκεια των σχολικών μαθημάτων είχε τονιστεί ότι μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε και μόνο όταν αναπαριστά μία συνάρτηση της μορφής $y = ax$. Αυτό παρακάτω οι μαθήτριες δείχνουν να το θυμούνται: «*αν είναι ανάλογων ποσών θα πέρναγε στο…*» εννοώντας προφανώς ότι η ευθεία θα πέρναγε από το (0, 0) (στ. 76). Εφόσον αυτό στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει, η περίπτωση της $y = ax$ αποκλείεται άμεσα, χωρίς καν να αναφερθεί, με τις μαθήτριες σίγουρες ότι η συνάρτηση είναι της μορφής $y = ax + \beta$.

Επεισόδιο 3ο: Το β του αλγεβρικού τύπου y = αx + β (στ. 42 – 56)

Κατά τη διάρκεια του τελευταίου χαμηλόφωνου διαλόγου τους, εκτός από τη διαπίστωση της γενικής μορφής του αλγεβρικού τύπου της συνάρτησης, οι μαθήτριες φαίνεται να αποφασίζουν και για τις επόμενες ενέργειές τους. Η Αμαλία, αφού έχει καταγράψει τον τύπο $y = ax + \beta$, προχωράει στην αντικατάσταση των συντεταγμένων του σημείου (0, -4) στον τύπο. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, στο μάθημα ποτέ δεν αντιμετώπισαν κάποιο παρόμοιο πρόβλημα όπου να τους ζητείται η εύρεση των α, β του αλγεβρικού τύπου. Ωστόσο οι μαθήτριες γνωρίζουν ότι τα ζεύγη αριθμών που ορίζουν μία συνάρτηση, θα πρέπει να ικανοποιούν και τον αλγεβρικό της τύπο. Ταυτόχρονα, κατά την κατασκευή μίας γραφικής παράστασης δεδομένου του αλγεβρικού τύπου, ο καθηγητής πρότεινε την αντικατάσταση του x = 0 για την εύρεση ενός σημείου της ευθείας, λόγω της ευκολίας που αυτή η τιμή προσφέρει στις πράξεις. Τα παραπάνω στοιχεία του μαθήματος φαίνεται να αντικατοπτρίζονται στις ενέργειες

των μαθητριών σ' αυτό το σημείο. Εφόσον τα ζεύγη αριθμών που δίνονται από τον πίνακα τιμών ικανοποιούν τον τύπο της συνάρτησης, αντικαθιστούν στον τύπο τις συντεταγμένες του σημείου (0, -4), καθώς αυτό θα οδηγήσει και στις ευκολότερες αλγεβρικές πράξεις.

Το πρώτο τους εμπόδιο εμφανίζεται όταν η Αμαλία εκτελεί τον πολλαπλασιασμό $a \cdot 0$, οπότε και καταλήγουν στη σχέση $-4=0+\beta$ (αμέσως μετά το στ. 43 του πρωτοκόλλου). Μάλιστα η σχέση αυτή δεν καταγράφεται ολόκληρη. Η Αμαλία σταματάει αμέσως μετά το 0 καθώς διαπιστώνει ότι έτσι θα καταλήξει σε κάποιο αποτέλεσμα για την τιμή του β, ενώ μάλλον δεν ήταν αυτός ο στόχος τους στην αρχή. Το γεγονός ότι η τιμή του α είναι άγνωστη δε φαίνεται να τους απασχολεί. Η Αποστολία στο στ. 45 αναφέρει «*Προσπαθούμε τώρα να αντικαταστήσουμε για να βρούμε τη συνάρτηση*». Ωστόσο, εύρεση της συνάρτησης σημαίνει προσδιορισμός των α και β, ενώ η εξαγωγή της τιμής β = -4 παραξενεύει τις μαθήτριες. Μέχρι τώρα συνήθως τους ζητούνταν να επαληθεύσουν αν ένα σημείο του επιπέδου ανήκει στη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Έτσι η τυπική διαδικασία ήταν η αντικατάσταση των συντεταγμένων του σημείου στον αλγεβρικό τύπο, και η εκτέλεση των πράξεων μέχρις ότου να καταλήξουν σε μία ταυτότητα. Φαίνεται πως σ' αυτό το σημείο οι μαθήτριες προσπαθούν να επαναλάβουν αυτή τη διαδικασία. Μόλις όμως φτάνουν στη σχέση β = -4, διαπιστώνουν ότι αυτή οδηγεί σε ένα άλλο αποτέλεσμα από το αναμενόμενο, τον προσδιορισμό του β: «*Είναι το β;*» (στ. 47).

Λόγω της μικρής στασιμότητας των μαθητριών σ' αυτό το σημείο, η ερευνήτρια τους προτείνει να κάνουν κάποιου είδους επαλήθευση αυτής της τιμής. Ως επαλήθευση εννοεί να χρησιμοποιήσουν την τιμή αυτή για να προχωρήσουν μέχρι τέλους τη διαδικασία εύρεσης της συνάρτησης, και αν εμφανιστεί κάποιο πρόβλημα, τότε να την απορρίψουν. Όμως η Αποστολία, η οποία φαίνεται και να είναι και η πιο δραστήρια κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή, επιλέγει τυχαία το ίδιο σημείο από τον πίνακα τιμών, το (0, -4) και το αντικαθιστά στον τύπο με την υπόθεση ότι β = -4, ούτως ώστε να το επαληθεύσει ή να το απορρίψει άμεσα. Ισχυριζόμαστε ότι το επιλέγει τυχαία γιατί η ίδια αναφέρει «*Ας πούμε αυτό το ζευγάρι;*» (στ. 49), μη συνειδητοποιώντας ότι η χρήση οποιουδήποτε άλλου ζεύγους τιμών δεν θα απέφερε αποτέλεσμα, διότι δεν θα οδηγούσε σε απαλοιφή του α. Αυτήν την επαλήθευση την κάνει τρεις φορές (αμέσως μετά το στ. 50). Την πρώτη φορά αντικαθιστά στον γενικό τύπο τις συντεταγμένες του ζεύγους (0, -4) και την τιμή του β και καταλήγει σε κάτι που ισχύει, την ισότητα –4 = -4. Τη δεύτερη φορά αντικαθιστά το x = 0 και την τιμή

του β, οπότε το αποτέλεσμα που προκύπτει, y = -4, συμφωνεί με τα δεδομένα του πίνακα. Την τρίτη φορά επαναλαμβάνει τη διαδικασία που είχε ακολουθήσει αρχικά η Αμαλία και καταλήγει και πάλι στην τιμή β = -4. Αμέσως μετά την καταγραφή αυτού του αποτελέσματος όμως, μουτζουρώνει αυτό που είχε γράψει δείχνοντας ότι βρίσκεται σε μία σύγχυση. Όπως αναφέραμε στην αρχή, κατά πάσα πιθανότητα δεν ήταν αυτός ο στόχος τους και το αποτέλεσμα δεν ήταν αναμενόμενο.

Με την παρότρυνση της ερευνήτριας, δείχνουν να αρχίζουν να αποδέχονται αυτήν την τιμή: «*Μας αρέσει*» (στ. 53). Αμέσως μετά δείχνουν να είναι έτοιμες να επαναλάβουν τη διαδικασία αντικατάστασης συντεταγμένων και με κάποιο άλλο ζεύγος, συνεπώς ακόμη δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι τους λείπει ένα ακόμη πολύ βασικό στοιχείο, το α. Οι μαθήτριες δηλαδή δεν είχαν επινοήσει μία στρατηγική που θα οδηγούσε τα βήματά τους μέχρι την εύρεση του αλγεβρικού τύπου επιτυχώς. Αυτό θα φανεί περισσότερο παρακάτω, στο σύντομο διάλογο που μεσολαβεί με την ερευνήτρια.

Συζήτηση – Επεισόδιο 5^{ο}: Προσανατολισμός στην εύρεση του α (στ. 57 – 61)

Η ερευνήτρια παρασυρόμενη από τα λόγια των μαθητριών σχετικά με μία νέα αντικατάσταση (στ. 56), τους ρωτάει αν έχουν καταλήξει κάπου, αν έχουν βρει τη συνάρτηση, οπότε οι μαθήτριες σταματούν. Διαπιστώνουν ότι δεν έχουν ακόμη τα επαρκή στοιχεία για τον αλγεβρικό τύπο, και ως επόμενο βήμα η Αποστολία προτείνει «*να συγκρίνουμε δύο ζευγάρια*». Εδώ φαίνεται όπως προαναφέραμε, ότι στόχος της αντικατάστασης που σκόπευαν να κάνουν δεν ήταν η αλγεβρική εύρεση του α, γιατί αν ήταν έτσι, θα το δήλωναν αμέσως. Όταν η Αποστολία προτείνει τη σύγκριση δύο ζευγαριών όμως, δείχνει να βρίσκεται πολύ κοντά σ' αυτό που θα λέγαμε «βήμα» της συνάρτησης, δηλαδή την κατακόρυφη μετατόπισή της για αύξηση του x κατά 1. Στα μαθήματα σχετικά με τα ανάλογα ποσά και τη συνάρτηση $y = ax$ ο καθηγητής τόνισε ιδιαίτερα τη σχέση των αναλόγων ποσών ως εξής: «*Όσο μεγαλώνει το x τόσο μεγαλώνει και το y*». Η έκφραση «όσο… τόσο…» σαφώς και παραπέμπει σε σύγκριση του ρυθμού αύξησης των τιμών των x και y όπως αυτά δίνονται στον πίνακα τιμών. Πράγματι, στα ανάλογα ποσά, διπλασιάζοντας την τιμή του x, διπλασιάζεται και η τιμή του y. Αν δε αυτό γίνει με το διπλασιασμό του x από 1 σε 2, τότε η διαφορά της παλιάς από τη νέα τιμή του y θα μας δώσει και το «βήμα» της συνάρτησης, δηλαδή το συντελεστή α του αλγεβρικού της τύπου. Ομοίως και στην $y = ax + \beta$. Αυτή η

μέθοδος προσδιορισμού του α δεν αναφέρθηκε ποτέ στην τάξη. Ωστόσο η Αποστολία και στο 1^{ο} επεισόδιο και στο 6^{ο} όπως θα δούμε αργότερα, παρουσιάζει μία αρκετά βαθιά κατανόηση της έννοιας του συντελεστή διεύθυνσης, αλλά και της συνάρτησης γενικότερα. Άρα είναι πολύ πιθανό να εννοεί κάτι σχετικό με την εύρεση του α, όταν λέει «*να συγκρίνουμε δύο ζευγάρια*», αν και ακόμη δεν το έχει συνειδητοποιήσει πλήρως, καθώς δυσκολεύεται να εξηγήσει τη σκέψη της στην ερευνήτρια (στ. 61).

Επεισόδιο 6^{ο}: Το α του αλγεβρικού τύπου (στ. 62 – 92)

Από τα λόγια της ερευνήτριας και πάλι ξεκινάει ένα νέο επεισόδιο, κατά το οποίο οι μαθήτριες ασχολούνται με τον προσδιορισμό του α. Η ερευνήτρια δίνει ένα στοιχείο στις μαθήτριες, λέγοντας «*Πρέπει να βρείτε κάτι ακόμα*» (στ 62). Η διατύπωση αυτής της πρότασης υπονοεί ότι απαιτείται ο προσδιορισμός ενός ακόμη συγκεκριμένου στοιχείου. Οπότε και η Αποστολία αμέσως συνειδητοποιεί ότι ο επόμενος στόχος της είναι το α. Η Αμαλία όπως φαίνεται και από το σύνολο των εργασιών που αναλαμβάνει, προτιμά τις αλγεβρικές διαδικασίες. Όπως αναφέρει γνωρίζοντας το x και το y, δηλαδή τις συντεταγμένες κάποιων ζευγών της συνάρτησης, μπορούμε να βρούμε και το α (στ. 65). Με μία αλγεβρική αντικατάσταση ενός ζεύγους τιμών στον γενικό τύπο, δεδομένου ότι β = -4 όπως έχουν ήδη βρει, μπορούν να λύσουν ως προς α και να το προσδιορίσουν. Το προτείνει στην Αποστολία, ρωτώντας την ταυτόχρονα αν έχει κάτι άλλο κατά νου. Προφανώς αυτό που έχει προτείνει η Αμαλία είναι σωστό, ωστόσο η Αποστολία δεν δείχνει άμεσα μία συναινετική στάση ώστε να προχωρήσουν με αλγεβρικές διαδικασίες. Έτσι, αν και απαντά «*όχι*» στο τελευταίο ερώτημα της Αμαλίας, φαίνεται να προσπαθεί να βρει κάποια άλλη στρατηγική για την εκπλήρωση του στόχου τους. Μετά από περίπου ένα λεπτό περισυλλογής, εκδηλώνει το δικό της τρόπο σκέψης, ο οποίος είναι μη αλγεβρικός.

Η Αποστολία σημειώνει στην κόλλα τους αριθμούς 2 και $\frac{1}{2}$. Αυτή είναι η εικασία της σχετικά με την τιμή του α. Στους στίχους που ακολουθούν, φαίνεται αυτό που είχε προαναφερθεί σχετικά με την θεώρηση του α ως «βήμα» της συνάρτησης. Η Αποστολία δείχνει αφενός να το κατανοεί, αφετέρου να μπερδεύεται με την άλλη θεώρηση του α ως λόγος των y προς x, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να εξηγήσει τη σκέψη της στην ερευνήτρια. Αυτή η τελευταία θεώρηση του α είχε τονιστεί στο μάθημα, ωστόσο είχε δημιουργηθεί σύγχυση στους μαθητές (βλέπε σελ. 16). Έτσι η

Αποστολία αν και κατανοεί ότι το α έχει κάποια σχέση με τον τρόπο μεταβολής των ποσών, προσπαθεί να το εκφράσει ως λόγο, γιατί γνωρίζει ότι έτσι ορίστηκε εξ αρχής. Γι' αυτό και αναφέρει τους δύο αριθμούς, 2 και $\frac{1}{2}$, που εκφράζουν το λόγο του ρυθμού αύξησης των y προς το ρυθμό αύξησης των x , και των x προς y αντίστοιχα. Στο επόμενο επεισόδιο θα δούμε πώς οι μαθήτριες φτάνουν στην απόρριψη της θεώρησης του α ως λόγο $\frac{y}{x}$ στα πλαίσια της συνάρτησης $y = ax + \beta$.

Η Αμαλία ευθυγραμμίζεται με τον τρόπο σκέψης της Αποστολίας, κατανοώντας τον κι αυτή, και ψάχνοντας λόγια για να δικαιολογήσει αυτήν την εικασία. Όπως εξ αρχής είχαν παρατηρήσει, το x μεγαλώνει διαδοχικά, και σε κάθε αύξησή του, αντιστοιχεί αύξηση του y κατά 2. Προς στιγμήν παρασύρονται από αυτήν την ταυτόχρονη αύξηση των x και y και αναφέρουν τα ανάλογα ποσά (στ. 73 – 74), όμως αμέσως αυτοδιορθώνονται. Μάλιστα δεν ακούν καν την παρατήρηση της ερευνήτριας στο στ. 77, που θα τις επανέφερε στο πλαίσιο της $y = ax + \beta$, και συνεχίζουν να δικαιολογούν η μία στην άλλη την απόρριψη της περίπτωσης των ανάλογων ποσών: «*Αυξάνεται εδώ κατά ένα, αυξάνεται εδώ κατά δύο*...» (στ. 81). Εδώ βέβαια δεν συνειδητοποιούν ότι αυτή η αύξηση του y είναι το στοιχείο που θα τους δώσει την τιμή του α. Άλλωστε αυτή η προσέγγιση του συντελεστή διεύθυνσης, ως ρυθμός αύξησης του y, όπως αναφέραμε παραπάνω, δεν είχε αναφερθεί στην τάξη. Λόγω της αδυναμίας τους να δικαιολογήσουν επαρκώς την εικασία των δύο αυτών αριθμών, η ερευνήτρια τους προτείνει να δοκιμάσουν κάποια από αυτές τις τιμές. Έτσι οι μαθήτριες, με την εικασία α = 2, αντικαθιστούν το ζεύγος (1, -2) στον αλγεβρικό τύπο.

Η Αμαλία αναλαμβάνει την αντικατάσταση των συντεταγμένων του σημείου στον τύπο, έχοντας υποθέσει ότι α = 2 και β = -4, και καταλήγει σε μία ταυτότητα. Αυτό δεν τους αρκεί για τη βεβαιότητα αυτής της τιμής. Αν και στην ουσία αυτό που έκαναν είναι να λύσουν μία εξίσωση ως προς α με τη μέθοδο δοκιμής – λάθους, δείχνουν μία ανασφάλεια ως προς το αποτέλεσμα. Η ταυτότητα στην οποία φτάσανε θα έπρεπε να είναι επαρκής για την απόρριψη της περίπτωσης α = $\frac{1}{2}$. Ωστόσο συνεχίζουν δοκιμάζοντας και την τιμή $\frac{1}{2}$, με το ζεύγος (3, 2). Αντίθετα, λίγο νωρίτερα, όταν διατύπωσαν την εικασία σχετικά με την τιμή του α, η οποία ήταν

περισσότερο διαισθητική, έδειξαν σαφώς και μεγαλύτερη πίστη σ' αυτή, γι' αυτό και συνέχισαν. Ειδικά για την Αποστολία, αυτό ίσως να αποτελεί στοιχείο της χρήσης των αλγεβρικών διαδικασιών περισσότερο ως εργαλείο δοκιμής και επαλήθευσης των εικασιών της, παρά ως την οδό για την άφιξη σε κάποια αποτελέσματα. Άλλωστε όταν η Αμαλία στο στ. 65 είχε προτείνει την επίλυση μίας απλής εξίσωσης για την εύρεση του α, η Αποστολία δεν το αποδέχτηκε. Τελειώνοντας το καθαρά πρακτικό κομμάτι αυτής της εργασίας, η Αποστολία δείχνει να έχει την ανάγκη να επαναλάβει μόνη της τα αποτελέσματα της Αμαλίας, και έτσι επαναλαμβάνει την αντικατάσταση του σημείου (3, 2) στον τύπο, σε ξεχωριστό μέρος της κόλλας, μόνη της. Προφανώς και τις δύο φορές καταλήγουν στο άτοπο $2=-\frac{5}{2}$. Έτσι δηλώνουν ότι η τελική τιμή του α είναι 2.

Επεισόδιο 7ο: Το α ως λόγος $\frac{y}{x}$ (στ. 93 – 111)

Οι μαθήτριες έχουν καταλήξει στην τιμή α = 2 και το δηλώνουν με αρκετά μεγάλη σιγουριά. Ωστόσο η ερώτηση της ερευνήτριας «*Είστε σίγουρες;*» τους δημιουργεί αμφιβολίες. Η ερευνήτρια στόχευε στην οριστική λήξη της εργασίας, καθώς γνώριζε ότι τα αποτελέσματα των μαθητριών ήταν σωστά. Το μόνο που περίμενε πλέον ήταν μία δήλωση αυτής της λήξης και τη καταγραφή του τελικού αλγεβρικού τύπου της συνάρτησης. Οι μαθήτριες ρίχνουν μία ματιά στο γραπτό τους και επιβεβαιώνουν η μία στην άλλη ότι η χρήση του α = 2 οδήγησε σε μία ταυτότητα. Έτσι καταλήγουν: «*Άρα α = 2, β είναι –4 και y και x παίρνουμε ανάλογα κάθε φορά*». Για την ερευνήτρια αυτό σήμαινε τη λήξη του επεισοδίου, ωστόσο, εντελώς τυπικά πλέον τους ξαναρωτάει αν θέλουν να κάνουν κάτι άλλο, κάποια άλλη επαλήθευση. Η επιμονή της στην επαλήθευση πιθανότατα βάζει την Αποστολία σε υποψίες για την ορθότητα του αποτελέσματος, κι έτσι αρχίζει να ανακαλεί σχεδόν ότι είχε ειπωθεί μέσα στην τάξη για το α.

Ξεκινάει από τη θεώρηση του α ως λόγο των y προς x. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, στο μάθημα είχε παραβλεφθεί η διευκρίνιση ότι αυτός ο λόγος αναφέρεται στην συνάρτηση $y = ax$ που είναι η αντίστοιχη της εκάστοτε $y = ax + \beta$. Έτσι η Αποστολία, για την επαλήθευση της τιμής του α, δημιουργεί τους λόγους $\frac{y}{x}$ από τις τιμές του πίνακα. Η κατασκευή λόγων όμως παραπέμπει σε αναλογία. Παρασυρόμενη

από αυτό, ελέγχει εάν οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι. Ο πρώτος λόγος $\frac{-4}{0}$ δεν ορίζεται προφανώς κι έτσι αποφασίζει να μην τον χρησιμοποιήσει. Συνεχίζει με τους δύο λόγους $\frac{0}{2}$ και $\frac{2}{3}$. Γράφοντας όμως $\frac{2}{3}$ = 0 (=$\frac{0}{2}$) διαπιστώνει ότι δεν ισχύει η ισότητα και σταματάει. Φαίνεται ότι η γραφή της «αναλογίας» γίνεται εντελώς μηχανικά. Γιατί λογικά η Αποστολία θα έπρεπε να σταματήσει αμέσως μετά το πρώτο άτοπο $\frac{2}{3}$ = 0. Παρατηρούμε επίσης ότι αποφεύγει το ζεύγος (1, -2) και ασχολείται με τους θετικούς λόγους, καθώς οι θετικοί θεωρούνται από τους μαθητές πάντα πιο εύκολοι στο χειρισμό. Παραβλέπει έτσι ακόμη και το πιο απλό στοιχείο που θα την έκανε να σταματήσει αυτήν την επαλήθευση, ότι δηλαδή ένας θετικός λόγος δεν μπορεί να ισούται με έναν αρνητικό, για παράδειγμα $\frac{-2}{1} \neq \frac{2}{3}$.

Μετά από περίπου ένα λεπτό περισυλλογής, η Αποστολία καταγράφει και τους λόγους των τιμών που δεν αναγράφονται στον πίνακα τιμών, αλλά μεσολαβούν μέχρι τον τελευταίο : $\frac{5}{6} = \frac{6}{8} = \frac{7}{10} = \frac{8}{12}$ και επαναλαμβάνει ότι δεν ισχύει η ισότητα (στ. 111). Αυτό αποτελεί ακόμη μία ένδειξη ότι η γραφή της «αναλογίας» γίνεται μηχανικά. Είναι εμφανές ότι οι λόγοι αυτοί δεν είναι ίσοι, πράγμα που διαπιστώνει και μόνη της. Το = ανάμεσα στα κλάσματα είναι ένδειξη σύγχυσης ανάμεσα στη θεώρηση του α ως το λόγο $\frac{y}{x}$ στα ανάλογα ποσά, και τη σημασία του α στην $y = ax + \beta$. Πολύ γρήγορα όμως η Αποστολία διαπιστώνει το λάθος της και επανέρχεται στο πλαίσιο της $y = ax + \beta$, κάνοντας την παρατήρηση ότι «*παίζει και το β εδώ*» (στ. 111). Έτσι φαίνεται να απορρίπτει τελικά αυτή την προσέγγιση του α ως μέσο επαλήθευσης της τιμής που βρήκαν.

Επεισόδιο 8^{ο}: Οι παράλληλες ευθείες y=αx και y=αx+β (στ. 112 – 118)

Η ερευνήτρια γνωρίζοντας τους λόγους αυτής της σύγχυσης των μαθητριών σχετικά με τη θεώρηση του α ως λόγο $\frac{y}{x}$, σταματάει αυτήν την εργασία ωθώντας τους προς την εύρεση κάποιου άλλου τρόπου επαλήθευσης του αλγεβρικού τύπου στον οποίο έχουν καταλήξει οι μαθήτριες. Η Αποστολία, συνεχίζοντας να ανακαλεί αυτά

που έχουν ειπωθεί στην τάξη, αναφέρεται στην παραλληλία των ευθειών $y = ax$ και $y = ax + \beta$ (στ. 114):

Απ.:«*Αν είναι αυτή πρέπει να είναι παράλληλες*»

Ε.: «*Με ποια;*»

Η Αποστολία απευθύνεται στην ερευνήτρια, αλλά δεν ανταποκρίνεται στην ερώτησή της. Στην ουσία κάνει ένα διάλογο με τον εαυτό της, αναπαράγοντας τον τρόπο εισαγωγής της συνάρτησης $y = ax + \beta$ στην σχολική τάξη.

Απ.:«*Δηλαδή κάθε φορά η συνάρτηση, πρέπει να είναι… Επειδή έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης πρέπει να είναι παράλληλη*»

Ε. :«*Με ποια;*»

Απ.:«*Ας πούμε να πάρουμε τα σημεία αυτά…*»

Τα όσα αναφέρει δεν μπορούν άμεσα να την βοηθήσουν. Αυτό δείχνει να το συνειδητοποιεί στο τέλος, καθώς σωπαίνει για ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Είναι χαρακτηριστικό της Αποστολίας πλέον ότι αν και έχει άνεση με τις αλγεβρικές διαδικασίες, προτιμά να αναλογίζεται επάνω στη σημασία των εννοιών, όπως εδώ για παράδειγμα κάνει με το α. Αντίθετα η Αμαλία, ακριβώς όπως έκανε και νωρίτερα (στ. 65) χρησιμοποιεί την άλγεβρα ως μέσο άφιξης στα αποτελέσματά της και είναι αυτή που θα δώσει τελικά τη λύση όσον αφορά στην επαλήθευση αυτή.

Επεισόδιο 9^{ο}: Η αλγεβρική επαλήθευση (στ. 119 – 126)

Οι δύο μαθήτριες φαίνεται να έχουν απομακρυνθεί αρκετά από το στόχο τους, καθώς η Αποστολία ανακαλεί ένα – ένα τα όσα έχουν αναφερθεί στο μάθημα σχετικά με τον συντελεστή διεύθυνσης της. Η ερευνήτρια τους επαναφέρει στα πλαίσια της εργασίας, αποδοκιμάζοντας αυτήν την ανάκληση των πληροφοριών από τα μαθήματα, και υπενθυμίζοντάς τους τον τρόπο που βρήκαν τα α και β εξ αρχής (στ. 119). Έτσι η Αμαλία, παρουσιάζοντας για άλλη μία φορά την προτίμησή της στις αλγεβρικές διαδικασίες, προτείνει να αντικαταστήσουν ένα άλλο σημείο στον αλγεβρικό τύπο (στ. 120), ώστε να δουν αν μετά τις πράξεις καταλήγουν σε ταυτότητα. Αυτό είναι που στην ουσία η ερευνήτρια περίμενε να κάνουν, και έτσι επιδοκιμάζει έντονα την πρόταση της Αμαλίας, ενώ νωρίτερα δεν είχε δείξει συναινετική στάση απέναντι στις προτάσεις της Αποστολίας: «*Α! Να μια ιδέα, δοκιμάστε τη.*» (στ. 121).

Σχεδόν σίγουρες πλέον οι μαθήτριες για την ικανοποίηση των προσδοκιών της ερευνήτριας, αναλαμβάνουν άμεσα να αντικαταστήσουν την τιμή x = 3 στον

αλγεβρικό τύπο, φτάνουν στο αποτέλεσμα y = 2, και διαπιστώνουν ότι αυτό συμφωνεί με τα δεδομένα του πίνακα. Έτσι βεβαιώνονται για την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους και λήγουν την εργασία.

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, το μάθημα περιελάμβανε την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις που απαιτούσαν τον χειρισμό διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Τα προβλήματα δεν είχαν πάντα έναν προκαθορισμένο στόχο. Αντίθετα αποτελούσαν αφορμή για τη εννοιολογική μελέτη της συνάρτησης και των επιμέρους στοιχείων της. Από τη στιγμή που ολοκληρώθηκε η παρουσίαση όλων των μορφών της, ζεύγη αριθμών – πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, οι εργασίες στην τάξη συνήθως περιελάμβαναν την μετάβαση από τη μία μορφή στην άλλη και προς όλες τις κατευθύνσεις: από τον αλγεβρικό τύπο στη γραφική παράσταση, από γραφική παράσταση σε ζεύγη αριθμών κ. ο. κ.. Το μόνο που δεν είχε συζητηθεί ήταν η εύρεση του αλγεβρικού τύπου από τον πίνακα τιμών, πράγμα που απαιτούσε το πρόβλημα στη συνέντευξη. Κατά τη μελέτη της γραφικής παράστασης είχε αναλυθεί η σημασία των α και β του αλγεβρικού τύπου, οπότε, αν και δεν είχαν κάνει κάτι παρόμοιο, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα δεδομένης της γραφικής παράστασης να τα προσδιορίσουν. Ωστόσο οι δύο μαθήτριες κατά τη διάρκεια της συνέντευξης δεν το έκαναν. Αντίθετα βασίστηκαν περισσότερο η μεν Αμαλία σε αλγεβρικές διαδικασίες, η δε Αποστολία στην βαθύτερη θεωρητική σημασία των εννοιών. Αυτό ίσως να έχει σχέση και με τη δηλωμένη προτίμηση του καθηγητή τους στην άλγεβρα. Όπως ανέφερε και ο ίδιος στη συνέντευξή τους, ένας από τους βασικούς του στόχους είναι να «*ξέρουν τα παιδιά καλή άλγεβρα*». Έτσι τελικά οι μαθήτριες χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση μόνο ως μέσο επιβεβαίωσης της γενικής μορφής της συνάρτησης.

Η θεώρηση της συνάρτησης ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών αριθμών απέτρεψε τους μαθητές από την προσκόλληση σε έναν αλγεβρικό τύπο. Γνωρίζοντας μερικά ζεύγη τιμών της συνάρτησης οι μαθήτριες παρουσίασαν ικανότητες αναγνώρισης βασικών ιδιοτήτων της, όπως η γραμμικότητα, ή η γενική αλγεβρική της μορφή. Ταυτόχρονα δείχνουν να αντιλαμβάνονται ως ένα βαθμό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της συνάρτησης συσχετίζεται με τον ρυθμό αύξησης της τιμής του y. Το α είχε προσεγγιστεί ως λόγος $\frac{y}{x}$, ως εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον άξονα xx΄, και αλγεβρικά ως συντελεστής του x στον τύπο. Συνδυάζοντας όλα αυτά, οι

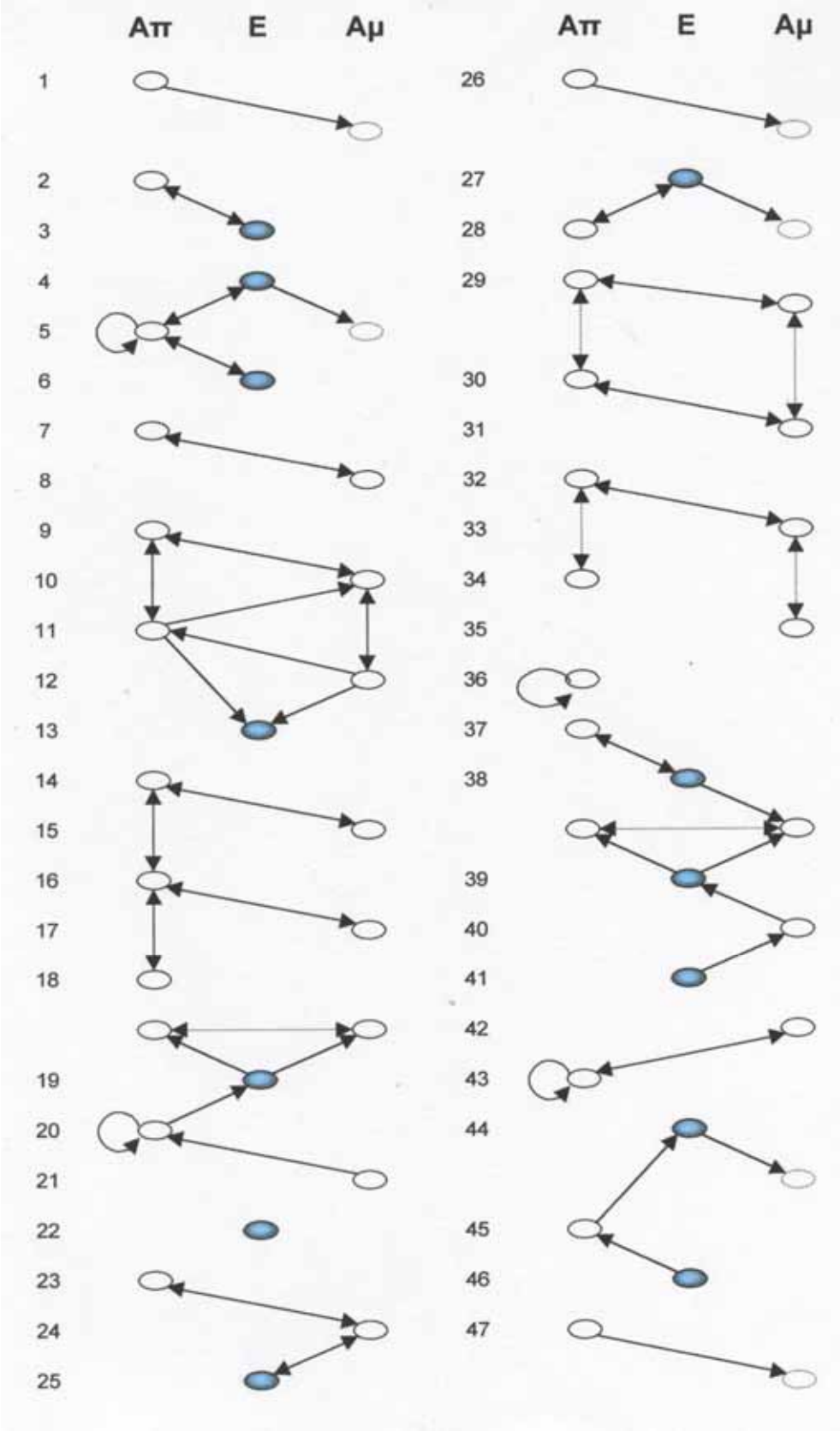
μαθήτριες κατασκεύασαν τη δική τους προσέγγιση στο α, ως «βήμα».Αυτό βέβαια έγινε ασυνείδητα, και με φανερά σημάδια σύγχυσης λόγω της ήδη συγκεχυμένης εικόνας του α ως λόγο $\frac{y}{x}$. Δεν παύει όμως να αποτελεί ένδειξη αναπτυγμένης μαθηματικής σκέψης και βαθύτερης κατανόησης των εννοιών.

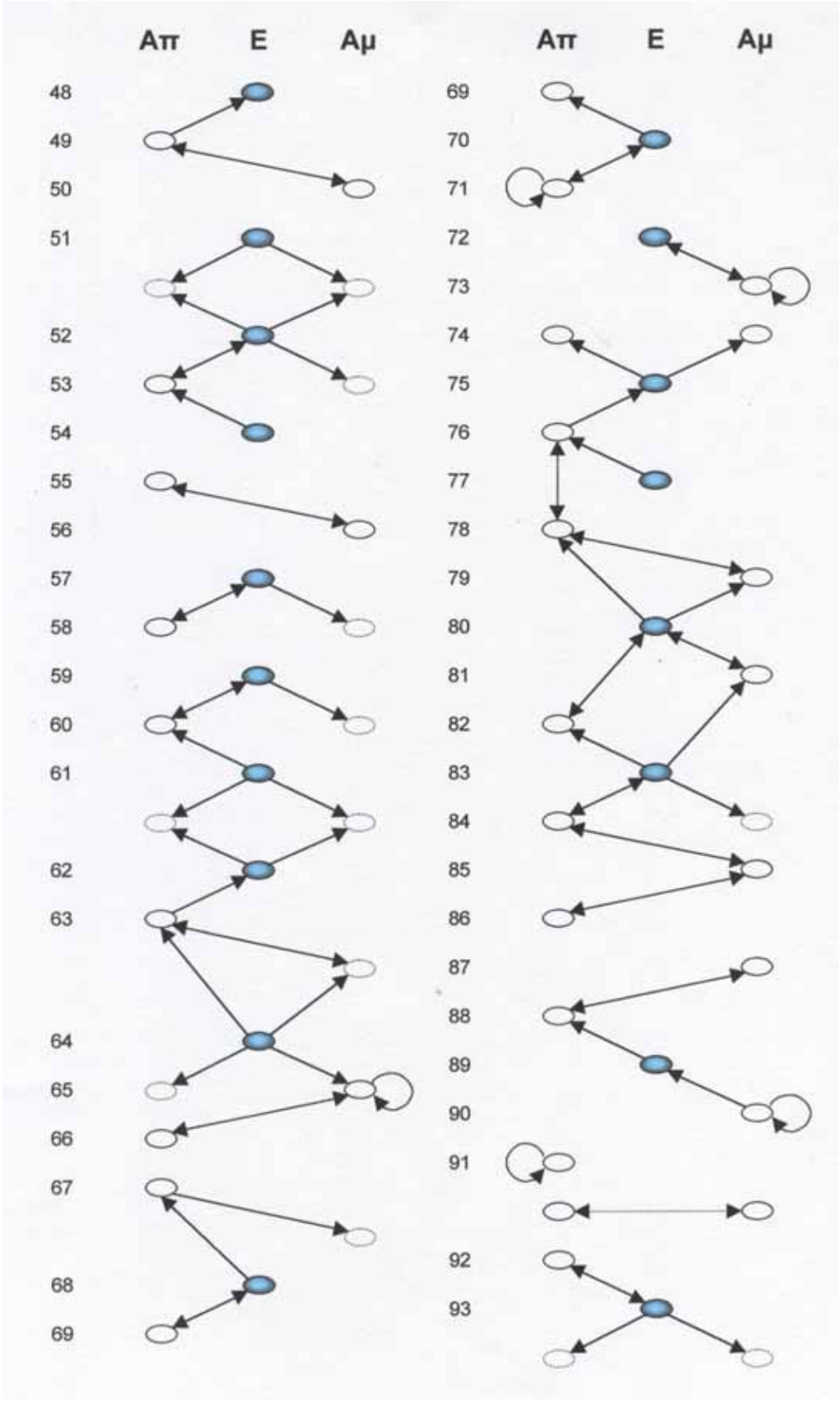
Οι δύο μαθήτριες καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης δείχνουν να συμβαδίζουν στην πορεία της επίλυσης. Η επιδιωκόμενη εστίασή τους σε κάθε επεισόδιο φαίνεται να είναι κοινή. Αυτό που τις διαφοροποιεί είναι ο τρόπος με τον οποίο χειρίζονται τα αντικείμενα εστίασής τους (attended focus). Όπως συχνά αναφέρθηκε νωρίτερα, οι μαθήτριες προσηλώνονται με διαφορετικό τρόπο στα αντικείμενα εστίασής τους (αλγεβρικά και εννοιολογικά). Ωστόσο αυτό δεν αποτελεί εμπόδιο στην επικοινωνία τους, καθώς η καθεμία τους αποδέχεται και κατανοεί τη σύλληψη της άλλης. Ο καθηγητής τους είχε δώσει έμφαση ταυτόχρονα στη σημασία των εννοιών και την κατανόηση των διαδικασιών που οδηγούν σε σωστά αποτελέσματα. Τα στοιχεία αυτά αντικατοπτρίζονται στην εργασία των μαθητριών καθώς εμφανίζουν μία ταυτόχρονη εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου.

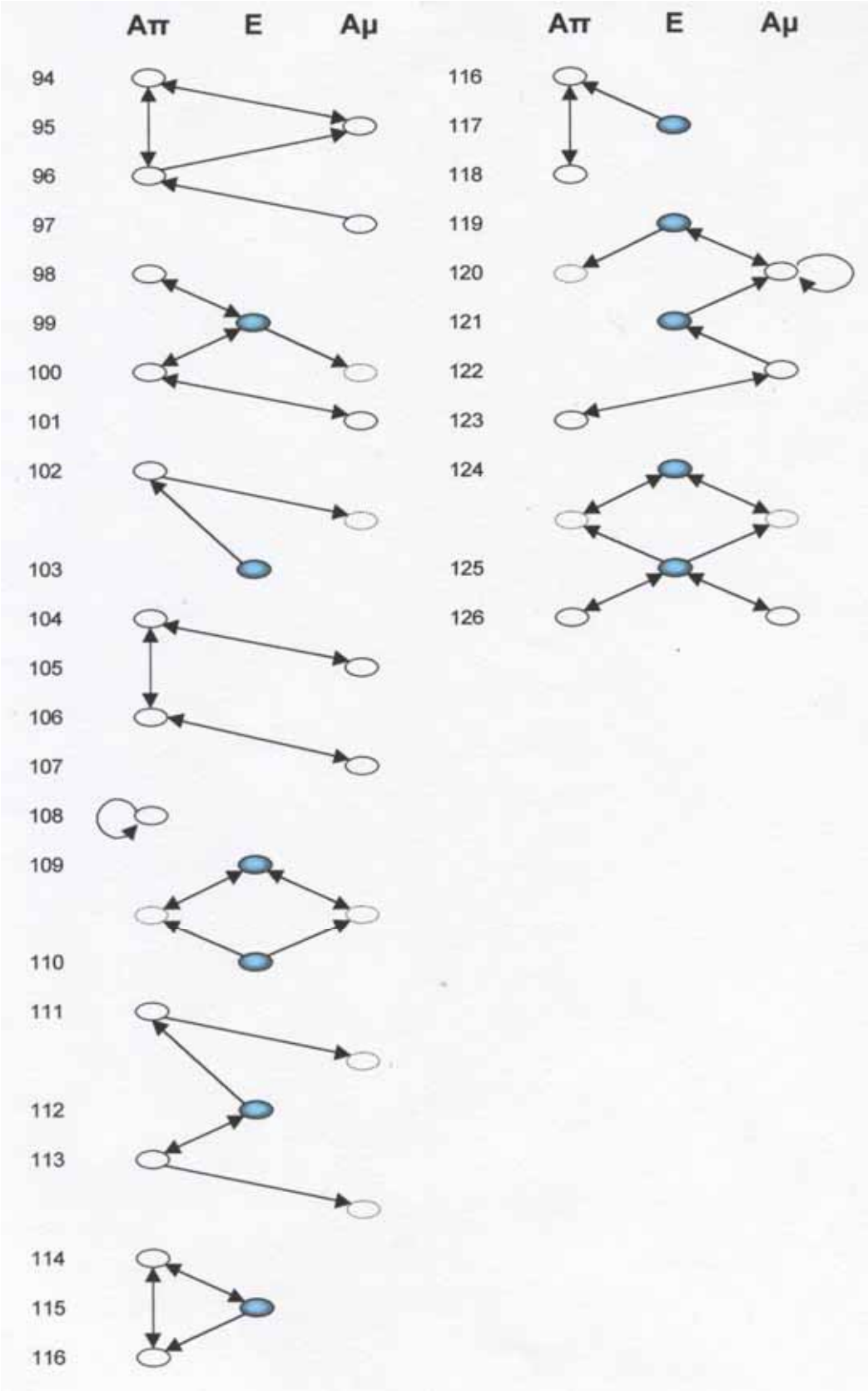
4.2.2 Ανάλυση Μεταδιαλογικών Κανόνων

Χρησιμοποιώντας τα ίδια εργαλεία όπως και στην προηγούμενη συνέντευξη, θα εξετάσουμε την επικοινωνία μεταξύ των δύο μαθητριών. Το ροοδιάγραμμα αλληλεπίδρασης θα μας οδηγήσει στην αναγνώριση της μορφής του διαλόγου τους.

Ροοδιάγραμμα Αλληλεπίδρασης 2




Απ
Ε
Αμ
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
Απ
Ε
Αμ
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93


Απ
Ε
Αμ
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
Απ
Ε
Αμ
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126

Εικόνα 6

Γενικά σε σχέση με τους δύο προηγούμενους μαθητές, παρατηρούνται αρκετά μεγάλες διαφορές, όχι μόνο στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών ζητημάτων, αλλά και στο γεγονός ότι οι μαθήτριες καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης διατηρούν μία αρκετά καλή επικοινωνία. Αυτό εν μέρει οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν κοινή επιδιωκόμενη εστίαση και, καθώς φαίνεται, περίπου το ίδιο επίπεδο μαθηματικής γνώσης. Εκτός από αυτό όμως, οι μαθήτριες διατηρούν έναν ουσιαστικό διάλογο σχεδόν μέχρι τέλους, και συμβαδίζουν στην πορεία της λύσης.

Πιο αναλυτικά, με τη βοήθεια του ροοδιαγράμματος παρατηρούμε ότι η Αποστολία είναι η πιο ενεργητική και παίρνει πρωτοβουλία στην επικοινωνία τους. Κάνει πληθώρα ενεργητικών δηλώσεων προς την Αμαλία (στ.1, 7, 9, 14, 16, 23, 26, 47, 49, 55, 63, 67, 78, 84, 94, 100, 102, 104, 106, 111, 113). Οι περισσότερες από αυτές είναι γνωστικού χαρακτήρα, συσχετίζονται δηλαδή με τη διαπραγμάτευση των θεμάτων που προκύπτουν. Κάποιες από αυτές όμως φανερώνουν την έντονη διάθεση της Αποστολίας να διατηρήσει επαφή με την Αμαλία και να εξασφαλίσει την ταυτόχρονη και σύμφωνη άφιξη και των δυο τους στο σωστό αποτέλεσμα (στ. 14, 49, 55, 84, 100, 123). Για παράδειγμα στ. 100: «*Θες κάτι ακόμα;*», στ. 123: «*Εδώ… Προσπάθησε*». Ταυτόχρονα η Αποστολία ανταποκρίνεται σε κάθε ενεργητική δήλωση της Αμαλίας. Οι αντενεργές της δηλώσεις είναι λιγότερες (στ. 11, 43, 66, 86, 88, 123), αλλά αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ούτως ή άλλως η Αμαλία κάνει ελάχιστες ενεργητικές δηλώσεις. Γενικότερα, κάθε φορά που εξηγεί κάτι το κάνει ταυτόχρονα με την Αμαλία εξασφαλίζοντας την προσωπική της σιγουριά δια μέσου της συμφωνίας της τελευταίας. Διατηρεί μαζί της οπτική επαφή και της παραχωρεί το δικαίωμα εκτέλεσης των δικών της προτάσεων. Για παράδειγμα στο στ. 86, όπου η Αποστολία έχει προτείνει για την τιμή του α τους αριθμούς 2 και $\frac{1}{2}$, παροτρύνει την Αμαλία να κάνει εκείνη την αντικατάσταση ενός σημείου ώστε να διερευνήσουν την εικασία της: «*Να δοκιμάσουμε με κάποιο από αυτά… Δοκίμασε*»

Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου η Αποστολία εργάζεται ατομικά. Όταν φτάνουν στο πρώτο αποτέλεσμα για την τιμή του β η Αποστολία ξεκινάει μία επαλήθευση σε συνεργασία με την Αμαλία, αλλά την επαναλαμβάνει μόνη της (αμέσως μετά το στ. 50). Αργότερα, στο στ. 65 η Αμαλία της προτείνει έναν αλγεβρικό τρόπο εύρεσης του α, αλλά η Αποστολία δε δείχνει να τον δέχεται. Ενώ της απαντάει ότι δεν σκέφτεται κάτι άλλο, δε δείχνει πρόθυμη να ενεργήσει σύμφωνα με τη σκέψη της Αμαλίας. Αντίθετα, μετά από ένα περίπου λεπτό αναφέρει τη δική της εικασία για

την τιμή του α. Παρακάτω, όταν η Αμαλία έχει εκτελέσει κάποιες πράξεις που απορρίπτουν την υπόθεση α $=\frac{1}{2}$ (μετά το στ.91), η Αποστολία επαναλαμβάνει αυτές τις πράξεις μόνη της. Χρειάζεται να ολοκληρώσει μόνη της τη διαδικασία ώστε να εξασφαλίσει τη βεβαιότητά της. Παρ' όλα αυτά, δεν απορρίπτει την προσέγγιση της Αμαλίας λεκτικά, ούτε και την απομονώνει από τις ενέργειες που αναλαμβάνει. Για παράδειγμα, όταν στο 7^{ο} επεισόδιο η Αποστολία διερευνάει το α ως λόγο $\frac{y}{x}$, εργάζεται μόνη της, όμως αργότερα μοιράζεται τα αποτελέσματά της με την Αμαλία: «*Βλέπεις; Κάθε φορά είναι διαφορετικός… Αλλά παίζει και το β εδώ…*» (στ. 111).

Από την άλλη πλευρά η Αμαλία δείχνει μικρότερη πρωτοβουλία. Κάνει πολύ λίγες ενεργητικές δηλώσεις (στ. 42, 65, 85, 87, 122) οι οποίες είναι γνωστικού χαρακτήρα. Οι δηλώσεις της αυτές έχουν ως στόχο την ορθότητα των πράξεών της και η συμφωνία της Αποστολίας. Για παράδειγμα στο στ. 42, έχουν ήδη αποφασίσει ότι η συνάρτηση είναι της μορφής $y = ax + \beta$ και πρόκειται να κάνουν την αντικατάσταση του σημείου (0, -4). Η Αμαλία ρωτάει την Αποστολία «$a \cdot x$;» μόλις ξεκινήσει να γράφει τη συνάρτηση, για να είναι σίγουρη ότι πρέπει να γράψει την γενική της μορφή. Στον στ. 87 ρωτάει «*το α το ξέρουμε;*» για να επιβεβαιώσει ότι εκείνη τη στιγμή κάνουν την υπόθεση ότι α = 2 και πρέπει αυτήν την τιμή να την αντικαταστήσει στον γενικό τύπο. Όσον αφορά στις αντενεργές της δηλώσεις, αυτές είναι σαφώς περισσότερες, (στ. 8, 10, 12, 15, 17, 21, 24, 50, 56, 63, 79, 85, 95, 97, 101, 105, 107), αλλά συμφωνούν με τις αντίστοιχες ενεργητικές της Αποστολίας. Αυτό σημαίνει ότι, όπως η Αποστολία, έτσι και η Αμαλία ανταποκρίνεται σχεδόν σε κάθε έκφραση της συμμαθήτριάς της. Γενικότερα βέβαια η Αμαλία δείχνει να βρίσκεται πάντα ένα βήμα πίσω από την Αποστολία. Ωστόσο, λόγω των επαρκών μαθηματικών της γνώσεων, και λόγω του κοινού τους ενδιαφέροντος να συνεργαστούν, πάντα καταφέρνει να την προσεγγίζει και να φτάνουν τελικά μαζί στη λύση. Οι δύο μαθήτριες φαίνεται να έχουν αναπτύξει μία καλή επικοινωνία, καθώς η καθεμιά τους καταφέρνει να κάνει την άλλη να λειτουργήσει σύμφωνα με τις δικές της προθέσεις. Υπάρχει αμοιβαία κατανόηση των ενεργειών και των στόχων της μίας από την άλλη παρότι όπως είδαμε η καθεμιά τους προτιμάει διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των ζητημάτων.

Η κοινή πορεία των μαθητριών φαίνεται ακόμα πιο έντονα σε σημεία όπου παρουσιάζουν τις σκέψεις τους αλληλοσυμπληρώνοντας τα λόγια η μία της άλλης. Για

παράδειγμα στην αρχή της συνέντευξης, όπου δικαιολογούν η μία στην άλλη την τιμή x = 8 (στ. 9 – 12):

Απ.: «*Πιστεύω πως είναι το 8*»

Αμ.: «*Ναι γιατί βγαίνει..*»

Απ.: «*Γιατί μας βγήκε με ανά ένα*»

Αμ.: «*Ανά ένα*».

Η Αμαλία όπως προαναφέραμε, δείχνει να ακολουθεί απλά τα λόγια της συμμαθήτριάς της. Ωστόσο δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτό γίνεται μηχανικά, ή ότι απλά επαναλαμβάνει αυτά που η Αποστολία λέει, καθώς και η ίδια μόνη της στην αρχή του επεισοδίου εκτέλεσε την ίδια διαδικασία μέτρησης με τα δάχτυλα, ανεξάρτητα από την Αποστολία. Ταυτόχρονα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι ενώ συμφωνούν στο αποτέλεσμα, οπότε δε χρειάζεται στην ουσία να εξηγήσει κάτι η μία στην άλλη, εξακολουθούν να αναλύουν τον τρόπο σκέψης τους. Όπως θα δούμε και στο ροοδιάγραμμα σ' αυτό το σημείο οι μαθήτριες δείχνουν να αναφέρονται εν μέρει και στους εαυτούς τους. Είναι σαν να εξωτερικεύουν τη σκέψη τους, ούτως ώστε αφενός να συνειδητοποιήσουν τους λόγους που οδηγήθηκαν το αποτέλεσμα, αφετέρου να επιβεβαιώσει η καθεμία την ορθότητα της σκέψης της δια μέσου της συμφωνίας της άλλης. Ακόμη και σε σημεία όπου πρέπει να εκτελέσουν πολύ απλές διαδικασίες επιζητούν τη συνεργασία. Καθώς σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση, μοιράζονται τις επιμέρους εργασίες, όπως ο σχεδιασμός των αξόνων και των σημείων, και προφέρουν λέξης συναίνεσης και επιδοκιμασίας: «*Ναι*», «*Σωστό*» (μετά το στ. 29).

Μέσα στη σχολική αίθουσα είχε παρατηρηθεί ένα παρόμοιο επικοινωνιακό κλίμα, όπου το σύνολο των μαθητών φαινόταν να είναι ενεργητικό κατά τη διάρκεια επεξεργασίας των θεμάτων. Οι μαθητές δεν εργάστηκαν ποτέ ομαδικά, παρά μόνο στο μάθημα που έλαβε χώρο στο εργαστήρι ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου τα παιδιά δούλευαν ανά δύο ή τρεις, λόγω του μικρού αριθμού υπολογιστών. Ωστόσο κατά τη διάρκεια του μαθήματος ο καθηγητής ενέπλεκε όλους τους μαθητές στην εργασία. Έκανε πληθώρα ερωτήσεων οι οποίες διατυπώνονταν με διαφορετικές μορφές. Όπως προαναφέραμε στην περιγραφή των μαθημάτων, επαναλάμβανε τις ερωτήσεις ή τις απόψεις των μαθητών στην τάξη, σωστές ή λάθος, αναφέροντας πάντα το όνομα του μαθητή που έκανε την αντίστοιχη δήλωση, πριν ζητήσει τη συμμετοχή του επόμενου μαθητή στο διάλογο. Έδειχνε σεβασμό στις απόψεις των μαθητών, δε διατηρούσε θέση αυθεντίας και σχεδόν ποτέ δεν αποδοκίμασε τις λάθος τους απαντήσεις στα

ερωτήματα. Έτσι οι μαθητές είχαν πάντα το δικαίωμα να εκφράσουν την άποψή τους, και έτσι με διαδοχικά βήματα έφταναν μόνοι τους στην κατανόηση των εννοιών.

Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι ο καθηγητής ασχολούνταν με τις απορίες των μαθητών του εκτενώς μέχρι να γίνει πλήρης διασαφήνιση των προβληματικών σημείων, ακόμα και όταν αυτές οι απορίες τους σχετίζονταν με παλαιότερα θέματα. Η επιθυμία του να κατανοήσουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες ήταν έκδηλη, καθώς επέμεινε στα ασαφή σημεία και ήλεγχε την πορεία τους με αλλεπάλληλες ερωτήσεις. Συσχετίζοντας τη συμπεριφορά του αυτή με το διάλογο των μαθητριών κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ίσως να δικαιολογείται το γεγονός ότι και οι δύο ενδιαφέρονται να διατηρήσουν μία κοινή πορεία προς τη λύση και έναν ουσιαστικό διάλογο. Ενδεχομένως ο τύπος της συνομιλίας του καθηγητή με τους μαθητές να αποτελεί μοντέλο για το διάλογο των δύο μαθητριών. Όπως είδαμε για παράδειγμα, η Αποστολία ακόμη και σε στιγμές όπου εργάζεται μόνη της, εξηγεί τις σκέψεις της στην Αμαλία (στ. 111), ώστε να πετύχει την κατανόηση της συμμαθήτριάς της επί των δικών της πράξεων.

Η θέση της ερευνήτριας στο διάλογο των μαθητριών θα λέγαμε ότι είναι απλά βοηθητική ως προς το γνωστικό μέρος της εργασίας τους. Σε κανένα σημείο της συνέντευξης δε χρειάστηκε η διαμεσολάβηση της ερευνήτριας για την επικοινωνία τους. Οι περισσότερες δηλώσεις της έγιναν με στόχο την λεκτική περιγραφή των ενεργειών τους για την καλύτερη καταγραφή των σκέψεών τους στην μαγνητοφώνηση. Οι μαθήτριες επιζητούν την επιβεβαίωση της ερευνήτριας σπάνια, και μάλιστα μόνο αφού έχουν συμφωνήσει μεταξύ τους. Για παράδειγμα στο πρώτο επεισόδιο όπου προσδιορίζουν το ζητούμενο x , συμφωνούν στην τιμή 8 και έπειτα στρέφονται προς την ερευνήτρια (στ. 9 – 13). Η μόνη φορά που η Αποστολία δείχνει να επηρεάζεται από τα λόγια της ερευνήτριας και να τα παρερμηνεύει είναι όταν στον στ. 99 η ερευνήτρια τους ρωτάει εάν θέλουν να κάνουν κάποιου είδους επαλήθευση του αλγεβρικού τύπου που βρήκαν. Στο σημείο εκείνο στόχος της ερευνήτριας ήταν απλά να κάνουν οι μαθήτριες μία δήλωση λήξης της εργασίας και να καταγράψουν τον αλγεβρικό τύπο. Αυτή της η επιμονή δημιουργεί αμφιβολίες στην Αποστολία κι έτσι αρχίζει να συλλογίζεται επάνω στις διαφορετικές προσεγγίσεις του α όπως είχαν διδαχθεί στην τάξη.

Γενικότερα όμως οι μαθήτριες δε δείχνουν άμεση εξάρτηση από τα λόγια της ερευνήτριας. Χαρακτηριστική ένδειξη αυτού του φαινομένου είναι το σημείο όπου οι

μαθήτριες προσπαθούν να δικαιολογήσουν την εικασία που έκαναν για τις πιθανές τιμές του α, 2 και $\frac{1}{2}$ (στ. 74 – 79):

Αμ. – Απ. (ταυτόχρονα): «*Είναι συνάρτηση ανάλογων ποσών!*»

Ε.: «*Ανάλογων ποσών;*»

Πρέπει να αναφερθεί ότι η ερευνήτρια στο σημείο αυτό επαναλαμβάνει τα λόγια των μαθητριών χωρίς αποδοκιμαστικό τόνο, αλλά με θετική προδιάθεση, θέλοντας να τους αφήσει περιθώριο ώστε να προχωρήσουν ή να το απορρίψουν μόνες τους. Οι μαθήτριες αμέσως ακυρώνουν αυτή την εικασία:

Απ.: «Όχι, όχι, αν είναι ανάλογων ποσών όμως θα πέρναγε στο…»

Εννοώντας ότι στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση θα διερχόταν από το(0, 0).

Ε.: «*Αφού είπατε ότι είναι η* $ax + \beta$»

Η ερευνήτρια πλέον παρεμβαίνει υπενθυμίζοντάς τους ότι ήδη έχουν καταλήξει σ' αυτή τη γενική μορφή.

Απ.: «*Δεν μεγαλώνει όμως τόσο.. γιατί εδώ μεγαλώνει 1… εδώ μεγαλώνει 2…*»

Αμ.: «*Μμ*» (Ναι)

Αν και η ερευνήτρια έχει ήδη αναφέρει την $y = ax + \beta$, οι μαθήτριες φαίνεται να την αγνοούν, θέλοντας να μη διακόψουν τον ειρμό της σκέψης τους και συνεχίζουν την αιτιολόγηση η μία στην άλλη. Ομοίως λίγο πριν το τέλος (στ. 114 – 118) η Αποστολία προσπαθεί να συνδέσει το συντελεστή διεύθυνσης με την παραλληλία των ευθειών $y = ax + \beta$ και $y = ax$. Όμως δε δείχνει διάθεση να απαντήσει στις ερωτήσεις της ερευνήτριας, παρά συνεχίζει την ομιλία της, σα να κάνει εκείνη τη στιγμή έναν προσωπικό διάλογο, μέχρι να φτάσει μόνη της σε ένα σημείο απ' όπου δεν μπορεί να προχωρήσει.

Μελετώντας όλο τον διάλογο των μαθητριών, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι διατηρούν καθ' όλη τη διάρκειά του μία αποτελεσματική επικοινωνία. Όπως είδαμε, υπάρχουν στιγμές όπου η μία από αυτές, η Αποστολία, εργάζεται ατομικά (μετά το στ. 50, μετά το στ. 91 στ. 108 – 111), ή δείχνει απρόθυμη να εργαστεί σύμφωνα με την πρόταση της συμμαθήτριάς της, αν και είναι σωστή (στ. 65 – 66). Ωστόσο παρατηρείται έντονη η επιθυμία και των δυο τους να διατηρήσουν επαφή και να συμβαδίσουν σύμφωνες στα βήματα της επίλυσης, δείχνοντας σεβασμό η μία στην άλλη.

5. Συμπεράσματα

Στηριζόμενοι στα ευρήματα της μελέτης, μπορούμε πλέον να επιχειρήσουμε τη σύνδεση των διδακτικών πρακτικών των δύο καθηγητών με τη συμπεριφορά που παρουσίασαν οι μαθητές τους, καθώς συνεργάζονταν για τη λύση του προβλήματος. Πράγματι, εμφανίστηκαν ενδείξεις αρκετά ισχυρές για να υποστηρίξουμε τις διαφορετικές επιπτώσεις που φάνηκε να έχει η κάθε μέθοδος διδασκαλίας στην εργασία των μαθητών. Μάλιστα, οι μαθητές, όχι μόνο ακολούθησαν το πρότυπο των καθηγητών τους στον τρόπο χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων, αλλά και στον τύπο επικοινωνίας που διατήρησαν μεταξύ τους. Ας δούμε αναλυτικά λοιπόν για κάθε διάσταση της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, μαθηματική και επικοινωνιακή, πως αντικατοπτρίζονται οι ενέργειες του κάθε καθηγητή στις ενέργειες των μαθητών του.

Ας ρίξουμε πρώτα μια ματιά στον τρόπο που επέδρασαν οι πρακτικές του πρώτου καθηγητή στους μαθητές του. Είχαμε αναφέρει ότι για να προαχθεί η μαθηματική σκέψη των μαθητών είναι απαραίτητο να κάνουν τις κατάλληλες διασυνδέσεις μεταξύ εννοιών αλλά και μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της κάθε έννοιας. Για τη συνάρτηση, ο αλγεβρικός τύπος, ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση πρέπει να θεωρούνται ως διαφορετικές αλλά ισοδύναμες αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου, και να υπάρχει η δυνατότητα πολλαπλών μεταβάσεων από τη μία μορφή στην άλλη. Ωστόσο, οι πρώτοι μαθητές δεν παρουσιάζεται στο λόγο τους αυτό το γνώρισμα της ολοκληρωμένης μαθηματικής κατανόησης, δηλαδή όπως αναφέραμε, δεν εμφανίζουν αντικειμενικοποιημένο λόγο.

Ο καθηγητής αυτών των μαθητών είχε προτιμήσει να παρουσιάσει τη μελέτη της συνάρτησης ως την εκτέλεση των διαδοχικών βημάτων: ξεκινώντας από έναν αλγεβρικό τύπο, που στην καλύτερη περίπτωση έπρεπε να διατυπωθεί από ένα λεκτικό πρόβλημα, κατασκευάζονταν ένας πίνακα τιμών και τέλος σχεδιαζόταν η γραφική παράσταση. Όπως είχε δηλώσει ο ίδιος στη συνέντευξή του, αυτός ήταν και ο στόχος του στα μαθήματα αυτά, να μπορούν οι μαθητές σε σύντομο χρονικό διάστημα να κατασκευάζουν μία γραφική παράσταση. Η πορεία αυτή ακολουθήθηκε πιστά σε όλα τα μαθήματα σχετικά με την $y = \alpha x + \beta$. Οι εργασίες που αναλάμβαναν οι μαθητές δεν περιελάμβαναν τη μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη προς όλες τις κατευθύνσεις, κι έτσι φαίνεται ότι δεν έγιναν τελικά οι απαραίτητες διασυνδέσεις. Οι μαθητές δείχνουν αδυναμία στο να «διαβάσουν» τον πίνακα τιμών και προτού κάνουν

οτιδήποτε, χρειάζεται να βρουν έναν αλγεβρικό τύπο, αν και για την απάντηση του πρώτου ερωτήματος αυτό δεν είναι απαραίτητο. Δείχνουν λοιπόν να ψάχνουν να βρουν την «αρχική» μορφή της συνάρτησης, ώστε μετά να μπορέσουν να ακολουθήσουν τη γνωστή διαδικασία του μαθήματος. Εκτός από το γεγονός ότι δεν αναγνώρισαν τον πίνακα τιμών ως μορφή της συνάρτησης, άργησαν ακόμη και να σκεφτούν να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση, που λογικά θα ήταν το αμέσως επόμενο βήμα της διαδικασίας μελέτης όπως την έμαθαν στο σχολείο. Αντίθετα επέμειναν για πολύ ώρα στην εύρεση του αλγεβρικού τύπου, πράγμα που ίσως να φανερώνει το πόσο τυπική και μηχανική ήταν η διαδικασία αυτή γι' αυτούς. Ακόμη και όταν ξεκίνησαν το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, αυτή θεωρήθηκε σαν ένα νέος τρόπος για την εύρεση της μορφής της συνάρτησης (βλέπε σελ. 36).

Όπως περιγράψαμε νωρίτερα, ο τύπος του μαθήματος δεν προήγαγε την εννοιολογική κατανόηση του εκάστοτε μαθηματικού αντικειμένου. Ο καθηγητής δεν προσέφερε στην τάξη τις κατάλληλες ευκαιρίες ώστε να γίνουν οι απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μορφών της συνάρτησης. Δεδομένης της σειράς που χρησιμοποιούσε τις αναπαραστάσεις, σαν να επρόκειτο για τα βήματα μίας διαδικασίας, τα παιδιά φάνηκε ότι δεν μπόρεσαν να κατανοήσουν τη σημασία των μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα οι μαθητές θα έπρεπε εξ αρχής να απορρίψουν την περίπτωση της $y = ax$ και της $y = ax + \beta$, από τις δεδομένες τιμές του πίνακα. Αν και ο ένας από αυτούς φάνηκε να πλησιάζει σ' αυτό, χρειάστηκε να περάσει πολύ ώρα μέχρι τελικά να χρησιμοποιήσουν σωστά τις τιμές. Αργότερα, είναι χαρακτηριστικός ο τρόπος που επέμειναν να χρησιμοποιούν τη διαδικασία «χιαστί», ενώ τα ποσά δεν ήταν ανάλογα, ίσως μόνο λόγω της μορφής του πίνακα που παρέπεμπε σε κλάσματα και σε εξισώσεις της μορφής $\frac{a}{\beta} = \frac{x}{\gamma}$. Άρα το «χιαστί» αποτελεί γι' αυτούς μία ακόμη τυπική διαδικασία που μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις. Άλλωστε θυμίζουμε ότι τα ανάλογα ποσά δεν είχαν διδαχθεί ακόμη στην τάξη αυτή, καθώς ο καθηγητής είχε αλλάξει τη σειρά των μαθημάτων από την προτεινόμενη του σχολικού βιβλίου.

Τελευταίο και ίσως σημαντικότερο παράδειγμα που αποδεικνύει ότι οι μαθητές δεν είχαν κάνει τελικά τις απαραίτητες διασυνδέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων, είναι η αδυναμία τους να βρουν το β. Η συνήθης τακτική στο μάθημα ήταν η χρήση του ορισμού της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$. Ο καθηγητής δεν επέμεινε σε τρόπους εύρεσης του β αλγεβρικά σε συνδυασμό με τη

χρήση της γραφικής παράστασης. Αντίθετα ζητούσε από τους μαθητές του να χρησιμοποιούν απ' ευθείας τον ορισμό της γραφικής παράστασης της $y = \alpha x + \beta$, τον οποίο θα έπρεπε να απομνημονεύσουν. Είδαμε ότι μόνο μία φορά, κατόπιν ερώτησης ενός μαθητή, εξήγησε το τι σημαίνει αυτός ο ορισμός, ωστόσο επέμεινε στην απομνημόνευσή του. Στη συνέντευξη αυτό αντικατοπτρίζεται σε όλο το τελευταίο επεισόδιο όπου τα παιδιά ασχολούνται με την εύρεση του β. Όχι μόνο παρουσιάζουν αδυναμία αναπαραγωγής του ορισμού, αλλά δεν κάνουν οποιαδήποτε προσπάθεια να θυμηθούν ή να ανακαλύψουν επί τόπου ένα νέο τρόπο αντιμετώπισης της κατάστασης, όπως για παράδειγμα η εύρεση του σημείου τομής αλγεβρικά, με χρήση των δεδομένων από τον πίνακα τιμών. Η απομνημόνευση λοιπόν που τους είχε ζητήσει ο καθηγητής τους, αποδείχθηκε εντελώς άσκοπη, εφόσον οι μαθητές δεν είχαν κατανοήσει εις βάθος τη σημασία του ορισμού.

Ακόμη πιο καθοριστικό ρόλο όμως στον τρόπο που αντιμετώπισαν οι μαθητές το νέο πρόβλημα, φαίνεται να έπαιξε ο τρόπος επικοινωνίας του καθηγητή με τους μαθητές του, οι τύποι αλληλεπίδρασης μεταξύ των συμμετεχόντων στην τάξη και γενικότερα το κλίμα της τάξης, όπως είχε εγκαθιδρυθεί με κύριο αρμοστή τον καθηγητή. Ο τελευταίος έδειχνε να αντιμετωπίζει τη διδασκαλία ως λεκτική μεταφορά της σημασίας των εννοιών και των διαδικασιών, αποτρέποντας συχνά τους μαθητές του να αναλάβουν πρωτοβουλία, να διερευνήσουν τις εικασίες τους και να φτάσουν μόνοι τους στα αποτελέσματα. Ταυτόχρονα απαιτούσε από τους μαθητές του την ακριβή αναπαραγωγή του δικού του τρόπου αντιμετώπισης των θεμάτων, αποδοκιμάζοντας μερικές φορές τις δικές τους εκδοχές, και απορρίπτοντας την πιθανή ορθότητά τους. Οι μαθητές κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, είδαμε ότι στερούνται αυτοπεποίθησης και πρωτοβουλίας καθώς κάθε τους εικασία χρειάζεται να επιβεβαιωθεί από την ερευνήτρια προτού κάνουν οτιδήποτε άλλο. Γενικότερα, ο καθένας από τους μαθητές διατηρούσε μία στάση σεβασμού προς τον καλύτερο γνώστη του αντικειμένου. Ο Γιώργος παρέμενε περισσότερο παθητικός στις ενέργειες του Κωνσταντίνου, και ο Κωνσταντίνος με τη σειρά του αποζητούσε την επιβεβαίωση της ερευνήτριας. Αυτή η συμπεριφορά παραπέμπει στον τρόπο που είχε καθιερωθεί η «ιεραρχία» μέσα στην τάξη. Ο καθηγητής ήταν ο γνώστης και οι μαθητές, υποκινούμενοι από κίνητρα που σχετίζονταν με την καλή διαγωγή τους, παρέμεναν υπάκουοι σ' αυτό που αυτός έλεγε, αναγνωρίζοντάς του τη μαθηματική ανωτερότητα. Γενικότερα κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, είναι τόση η εξάρτηση των μαθητών από τη στάση της ερευνήτριας, που συχνά αλλάζουν άποψη ανάλογα με τα λόγια,

ακόμη και με τον τόνο της φωνής της ερευνήτριας (βλέπε σελ. 47 – 48). Οι μαθητές λοιπόν δείχνουν συμπεριφορά παρόμοια με αυτή του μαθήματος, θέλοντας να επιβεβαιώσουν τις προσδοκίες τις ερευνήτριας, όπως αυτοί τις κρίνουν, προσδοκώντας την καθοδήγησή της στο «σωστό» τρόπο επίλυσης του προβλήματος.

Σχετικά με την επικοινωνία των μαθητών μεταξύ τους κατά τη συνεργασία τους, παρατηρήσαμε νωρίτερα ότι αυτή ήταν σχεδόν ανύπαρκτη. Οι δύο μαθητές δείχνουν να μην μπορούν να συντονιστούν ώστε να προχωρήσουν μαζί στη λύση, αλλά να χρησιμοποιούν την ερευνήτρια ως μέσο επικοινωνίας μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, ο ένας μαθητής, ο Κωνσταντίνος, έχοντας τον πιο ενεργητικό ρόλο στην όλη διαδικασία, κρατάει κλειστά τα κανάλια επικοινωνίας με το Γιώργο, προσπαθώντας να εργαστεί μόνος, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν καλύτερα τις προτάσεις της ερευνήτριας. Συχνά αρνείται να συμπεριλάβει τον Γιώργο στις ενέργειές του, είτε ρητά, είτε απαντώντας του τυπικά «Ναι», χωρίς όμως να φαίνεται να ενδιαφέρεται για τις προτάσεις του τελευταίου, ή έστω την κατανόησή του. Το ίδιο φαίνεται να κάνει μερικές φορές και με την ίδια την ερευνήτρια, όπου ενώ της απαντάει «Ναι» ή «Μμ», στην ουσία δεν ακούει αυτά που του λέει. Από την άλλη πλευρά ο Γιώργος, παραμένει παθητικός. Αν και κάνει κάποιες εικασίες, και προσπάθειες συμμετοχής, εισπράττει την απόρριψη του Κωνσταντίνου, που τον αποθαρρύνουν όλο και περισσότερο να συμμετέχει. Μέσα στη σχολική αίθουσα οι διάλογοι λάβαιναν χώρα αποκλειστικά μεταξύ καθηγητή και καθένα από τους μαθητές. Οι μαθητές δεν έχουν ξαναζήσει μία εμπειρία ομαδικής εργασίας, καθώς αυτό απαγορευόταν ρητά από τον καθηγητή. Το γεγονός αυτό δείχνει να τους απέτρεψε από το να αναπτύξουν επικοινωνιακές στρατηγικές που θα τους βοηθούσαν στην κατανόηση και την καλύτερη αντιμετώπιση των μαθηματικών θεμάτων. Παρά το γεγονός λοιπόν ότι αυτοί οι δύο συμμαθητές καθόντουσαν στο ίδιο θρανίο μέσα στην τάξη, που σημαίνει ότι είχαν μία καλή σχέση μεταξύ τους, και παρά την έκκληση της ερευνήτριας για ομαδική εργασία, οι μαθητές διατηρούν τη συμπεριφορά που τους ζητούνταν και στο μάθημα από τον καθηγητή τους.

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, ο τύπος του μαθήματος του δεύτερου καθηγητή δεν φαίνεται να διαφέρει σημαντικά από αυτό του πρώτου, όσον αφορά στην εισαγωγή των εννοιών μέσα από τη λύση προβλήματος και την ομαδική εργασία. Ωστόσο ακολουθήθηκε μία προσέγγιση που θα λέγαμε ότι προάγει τη μάθηση με κατανόηση. Κατ' αρχάς στο μαθηματικό επίπεδο περιελάμβανε την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις που απαιτούσαν τον χειρισμό διαφορετικών

αναπαραστάσεων της συνάρτησης, καθώς και πολλαπλές μεταβάσεις από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Κάθε αναπαράσταση χρησιμοποιήθηκε ως ισοδύναμη με τις άλλες, και έτσι ίσως απετράπη η προσκόλληση των μαθητών στον αλγεβρικό τύπο. Οι μεταβάσεις που έγιναν βοήθησαν στην εις βάθος κατανόηση της σημασίας των αναπαραστάσεων των εννοιών, και αυτό φαίνεται στον τρόπο που οι μαθήτριες χειρίστηκαν τα δεδομένα του προβλήματος.

Γνωρίζοντας μερικά ζεύγη τιμών της συνάρτησης οι μαθήτριες παρουσίασαν ικανότητες αναγνώρισης βασικών ιδιοτήτων της, όπως η γραμμικότητα, ή η γενική αλγεβρική της μορφή. Είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουμε, ότι οι δύο μαθήτριες εξ αρχής φαίνεται να κατανοούν τον τρόπο που τα μεγέθη x και y συμμεταβάλλονται. Έτσι καταφέρνουν να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα χωρίς καμία προσπάθεια εύρεσης του αλγεβρικού τύπου. Ταυτόχρονα φαίνεται να αντιλαμβάνονται ως ένα βαθμό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της συνάρτησης συσχετίζεται με τον ρυθμό αύξησης της τιμής του y. Είναι αξιόλογο το πώς, αν και το α κατά τη διάρκεια του μαθήματος είχε οριστεί ως λόγος $\frac{y}{x}$, ως εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον άξονα xx΄, και αλγεβρικά ως συντελεστής του x στον τύπο, οι δύο μαθήτριες έχουν αποκτήσει συναίσθηση της σημασίας του, ως «βήμα» της $y = ax + \beta$.

Οι δύο μαθήτριες καθ' όλη τη διάρκεια της συνέντευξης δείχνουν να συμβαδίζουν στην πορεία της επίλυσης, έχοντας σε κάθε βήμα της λύσης τους ίδιους στόχους. Αυτό που διαφέρει είναι ο τρόπος που φαίνεται να προτιμάει η κάθε μαθήτρια για την αντιμετώπιση των ζητημάτων. Όπως είδαμε, οι μαθήτριες προσηλώνονται με διαφορετικό τρόπο στα αντικείμενα εστίασής τους, η Αμαλία αλγεβρικά και η Αποστολία πιο εννοιολογικά (βλέπε π.χ. σελ. 64 – 66, επεισόδιο 6^{ο}). Ωστόσο αυτό δεν αποτελεί εμπόδιο στην επικοινωνία τους, καθώς η καθεμία τους αποδέχεται και κατανοεί τη σύλληψη της άλλης. Στην τάξη είχε δοθεί εξ ίσου έμφαση τόσο στην σωστή εκμάθηση και εκτέλεση των διαδικασιών, όσο και στην εννοιολογική κατανόηση της σημασίας τους. Έτσι, καθώς φαίνεται, ο κάθε μαθητής επέλεξε ο ίδιος τον καλύτερο τρόπο να χειρίζεται καταστάσεις όπως αυτή του προβλήματος. Γενικά κατά την εξέλιξη του μαθήματος, σε κάθε εργασία γινόταν η μελέτη των συναρτήσεων από διάφορες προσεγγίσεις. Οι εργασίες δεν είχαν όλες τον ίδιο στόχο, π.χ. την κατασκευή της γραφικής παράστασης, αλλά διαπραγματεύονταν όλες τις μορφές της έννοιας με έμφαση στο «τι σημαίνει» η κάθε μία. Συνεπώς, όπως φαίνεται στην εργασία των δύο μαθητριών, αν και διαχειρίζονται τα θέματα

διαφορετικά, έχουν το ίδιο εννοιολογικό υπόβαθρο, γι' αυτό και η συνεργασία τους είναι αποτελεσματική. Ταυτόχρονα κατάφεραν να αναπτύξουν εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισης των άγνωστων καταστάσεων. Για παράδειγμα, όταν η Αποστολία κάνει προσπάθειες να βρει το α του αλγεβρικού τύπου χρησιμοποιώντας τον ορισμό της τάξης, δηλαδή ως λόγος των y προς x, και δεν τα καταφέρνει, αναγνωρίζει το σφάλμα της και απορρίπτει τελικά αυτή τη θεώρηση του α (βλέπε σελ. 67).

Παρά την αρκετά προχωρημένη μαθηματική σκέψη όμως των μαθητριών, είναι πιο αξιόλογος ο τρόπος που επικοινωνούν και που ενδιαφέρονται για την ομαδική τους εργασία. Όπως είδαμε, χαρακτηριστικό της εργασίας τους είναι το γεγονός ότι ενδιαφέρονται από κοινού στο να αποκαταστήσουν μία αποτελεσματική επικοινωνία μεταξύ τους και να προχωρήσουν μαζί. Ακόμη και αν συχνά δεν το καταφέρνουν, συνεχίζουν την προσπάθεια συνεργασίας καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας τους. Οι δύο μαθήτριες δείχνουν να αναλαμβάνουν την ευθύνη της επίλυσης και να μην εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την παρουσία της ερευνήτριας. Και πάλι όπως και στην περίπτωση των πρώτων δύο μαθητών, η μία μαθήτρια, η Αποστολία, δείχνει πιο ενεργητική σε σχέση με την άλλη, την Αμαλία. Η Αποστολία παίρνει πιο συχνά την πρωτοβουλία να μιλήσει, είτε με τη συμμαθήτριά της, είτε με την ερευνήτρια. Ωστόσο σ' αυτήν την περίπτωση δεν διακρίνεται κάποια «ιεραρχία» με βάση τις μαθηματικές ικανότητες του κάθε συμμετέχοντα στην εργασία. Η Αποστολία από μόνη της ενδιαφέρεται για τη συμφωνία της Αμαλίας, και την ωθεί να συμμετέχει ζητώντας της μερικές φορές να δοκιμάσει τις δικές της προτάσεις (βλέπε σελ. 74).

Οι μαθήτριες δείχνουν να αλληλεπιδρούν με βάση το πρότυπο που είχε διαμορφώσει ο καθηγητής κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Μέσα στη σχολική αίθουσα το σύνολο των μαθητών φαινόταν να είναι ενεργητικό κατά τη διάρκεια επεξεργασίας των θεμάτων. Βέβαια δεν υπήρχε τυπικά αυτό που καλούμε ομαδική εργασία, ή συνεργατική μάθηση. Ο καθηγητής ποτέ δεν είχε ζητήσει από τους μαθητές του να εργαστούν κατά ζεύγη. Αντίθετα το μάθημα θα λέγαμε ότι γινόταν με ερωταποκρίσεις μεταξύ καθηγητή και κάθε μαθητή ξεχωριστά. Ακόμα κι έτσι όμως, η τάξη έδειχνε να εργάζεται ταυτόχρονα, με μία συνεργασία της οποίας συντονιστής ήταν ο καθηγητής. Ο τελευταίος, με τις ερωτήσεις που απηύθυνε στους μαθητές, τους ενέπλεκε όλους στην εργασία. Έκανε πληθώρα ερωτήσεων οι οποίες διατυπώνονταν με διαφορετικές μορφές, επαναλάμβανε τις ερωτήσεις ή τις απόψεις των μαθητών στην τάξη, σωστές ή λάθος, αναφέροντας πάντα το όνομα του μαθητή που έκανε την αντίστοιχη δήλωση, πριν ζητήσει τη συμμετοχή του επόμενου μαθητή στο διάλογο. Μ'

αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αποκτούσαν την αίσθηση της ομαδικής εργασίας, ένα πρότυπο εργασίας που δείχνουν να ακολουθούν και οι δύο μαθήτριες.

Πιο συγκεκριμένα, ο καθηγητής ασχολούνταν με τις απορίες και τις απόψεις των παιδιών, χωρίς να τις αποδοκιμάζει, σεβόμενος τις εκδοχές και τον τρόπο σκέψης τους. Επιπλέον προσπαθούσε να διασαφηνίσει όλα τα θολά σημεία και έτσι απέδειξε το ενδιαφέρον του για την βαθιά κατανόηση εκ μέρους όλων των μαθητών του. Το ίδιο φαίνεται να κάνουν και οι μαθήτριες, ένδειξη του πόσο καθοριστικά για την εργασία μίας ομάδας στη λύση προβλήματος είναι τα πρότυπα που ορίζει η σχολική εργασία. Ακόμα και σε σημεία που οι μαθήτριες έχουν την ίδια άποψη, εξηγούν η μία στην άλλη τη σκέψη της επιδεικνύοντας το ενδιαφέρον τους για την κοινή πορεία. . Όπως είδαμε για παράδειγμα, η Αποστολία ακόμη και σε στιγμές όπου εργάζεται μόνη της, εξηγεί τις σκέψεις της στην Αμαλία (στ. 111), ώστε να πετύχει την κατανόηση της συμμαθήτριάς της επί των δικών της πράξεων.

6. Επίλογος

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, στόχος μας δεν είναι να υπαγορεύσουμε το «σωστό» και το «λάθος» στη διδακτική διαδικασία. Δεν υπάρχουν συγκεκριμένες συνταγές που θα κάνουν έναν «κακό» δάσκαλο «καλό», όπως ακριβώς δεν γεννιούνται «κακοί» και «καλοί» μαθητές. Ωστόσο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχουν κάποιες διδακτικές μέθοδοι που είναι καλύτερες από άλλες, καθώς δείχνουν να έχουν καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά στον χειρισμό των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Τα τελευταία χρόνια φαίνεται πως όλο και περισσότεροι καθηγητές εμπλουτίζουν τη διδασκαλία τους με καινούριες διδακτικές επιλογές, όπως π.χ. η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, ώστε να πετύχουν τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Είναι λοιπόν πλέον απαραίτητο να διασαφηνιστούν εκείνα τα βασικά στοιχεία της κάθε διδακτικής στρατηγικής που δείχνουν να επηρεάζουν θετικά ή αρνητικά την μαθησιακή πορεία των μαθητών. Όπως προαναφέρθηκε, η έρευνα στη Διδακτική έχει ήδη υποδείξει κάποια από αυτά, όπως για παράδειγμα η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, ή η δημιουργία ενός καλού επικοινωνιακού κλίματος μέσα στην τάξη. Είναι δυνατόν τα στοιχεία αυτά όμως να εξετάζονται διαχωριζόμενα σε γνωσιακά και επικοινωνιακά; Πόσα μπορούμε να καταλάβουμε για τη μάθηση των μαθητών μελετώντας μόνο τους μαθηματικούς τους συλλογισμούς και τις ενέργειες,

και πόσα μελετώντας μόνο τον τύπο των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους; Η απάντηση στα ερωτήματα αυτά πηγάζει από την ίδια τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η διδασκαλία των Μαθηματικών προϋποθέτει την ανάπτυξη του γνωστικού αντικειμένου, ταυτόχρονα με την ανάλυση των στρατηγικών, τη χρήση των τεχνικών μέσων, τους τρόπους επικοινωνίας που θα βοηθήσουν στην επίτευξη των στόχων. Για παράδειγμα οι δύο πρώτοι μαθητές αυτής της έρευνας είχαν διδαχθεί όλες τις μορφές αναπαράστασης της συνάρτησης, και είχαν λύσει ασκήσεις χρησιμοποιώντας τις μορφές αυτές. Ωστόσο δεν είχαν καταφέρει να συνδέσουν τις αναπαραστάσεις, δηλαδή στην ουσία να τις εσωτερικεύσουν, να κατανοήσουν τις δυνατότητες που αυτές προσφέρουν. Κοιτώντας πίσω στο μάθημα, διαπιστώνουμε ότι ο καθηγητής δεν είχε επιδιώξει να γίνει αυτή η σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων, πράγμα που εν αγνοία του εμπόδισε τους μαθητές στην κατανόηση της σημασίας τους. Ταυτόχρονα δεν τους είχε προσφέρει τις κατάλληλες ευκαιρίες για την ανάπτυξη των στρατηγικών αντιμετώπισης των προβλημάτων, ούτε τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Ο ρόλος λοιπόν του καθηγητή στη διαμόρφωση των δεξιοτήτων των μαθητών του είναι πολυδιάστατος και καίριος, και αυτό αντικατοπτρίζεται στις πράξεις των μαθητών του, όταν αυτοί ενεργούν μόνοι τους.

Στην περίπτωση του πρώτου ζεύγους μαθητών αναφέραμε ότι κύριο χαρακτηριστικό του μαθήματος σε μαθηματικό επίπεδο ήταν η έλλειψη μεταβάσεων από μία αναπαράσταση της συνάρτησης στην άλλη. Οι μόνες μεταβάσεις που έγιναν ήταν από τον αλγεβρικό τύπο στον πίνακα τιμών, και στη συνέχεια στη γραφική παράσταση, χωρίς όμως να ακολουθηθεί ποτέ η αντίστροφη ή κάποια άλλη πορεία Οι εργασίες είχαν πάντα τους ίδιους στόχους, πράγμα που μετέτρεψε, κατά πάσα πιθανότητα, τη μαθησιακή διαδικασία σε μια απλή εκτέλεση των προτεινόμενων διαδοχικών βημάτων. Έτσι οι μαθητές δείχνουν έλλειψη βαθύτερης κατανόησης των εννοιών, και αδυναμία χειρισμού μιας νέας, άγνωστης κατάστασης. Δεδομένου ότι ο καθηγητής στην ουσία τους ζητούσε να αναπαράγουν το δικό του τρόπο σκέψης, δεν μπόρεσαν να αναπτύξουν δικές τους στρατηγικές ώστε να προχωρήσουν στη λύση ανακαλύπτοντας έστω και επί τόπου τη σημασία των επιμέρους στοιχείων της συνάρτησης, όπως για παράδειγμα το β του αλγεβρικού τύπου. Ταυτόχρονα, δεν κατάφεραν να αποκαταστήσουν μία ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ τους, καθώς ποτέ δεν είχαν υπάρξει συμμέτοχοι σε μία τέτοιου είδους αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη. Αντίθετα οι δύο μαθήτριες της δεύτερης περίπτωσης δείχνουν μεγαλύτερη κατανόηση των εννοιών αλλά και αυξημένες ικανότητες χειρισμού των μαθηματικών

αντικειμένων που είχαν διδαχθεί. Στην τάξη τα μαθήματα περιελάμβαναν πολλαπλές μεταβάσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων με έμφαση στο εννοιολογικό υπόβαθρο των διαδικασιών. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι είχε γίνει χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή για την εισαγωγή της συνάρτησης $y = ax + \beta$, που προσέφερε μία επιπλέον μη στατική μορφή της έννοιας. Οι μαθήτριες έδειξαν να έχουν κατανοήσει εις βάθος το αντικείμενο, ακόμη και αν προτίμησαν διαφορετικό τρόπο προσέγγισής του. Ταυτόχρονα, ενήργησαν σε συμφωνία με το πρότυπο ομαδικής εργασίας που είχε καθιερωθεί στην τάξη. Παρά τις διαφορετικές τους προσεγγίσεις, ανέπτυξαν μία αποτελεσματική επικοινωνία μεταξύ τους και μπόρεσαν να λύσουν το πρόβλημα, έχοντας κατανοήσει και οι δύο την όλη πορεία της λύσης. Γενικότερα έδειξαν μία σαφώς μεγαλύτερη ελευθερία, σε σχέση με τους πρώτους δύο μαθητές, στο να αναλαμβάνουν τη διερεύνηση των μαθηματικών θεμάτων και να χρησιμοποιούν εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισης των θεμάτων, ακόμη και όταν έφταναν σε αδιέξοδο.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι τα συγκεκριμένα δύο παραδείγματα λύσης προβλήματος από ζεύγη μαθητών, μας πρόσφεραν αρκετές ενδείξεις του τρόπου που διαμορφώνονται τα μοντέλα εργασίας των μαθητών με βάση τη συμπεριφορά του καθηγητή τους στη σχολική αίθουσα. Υπάρχουν βέβαια αρκετά νέα ερωτήματα που μπορεί να προταθούν σχετικά με την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων αυτών. Για παράδειγμα δε μπορούμε να αγνοήσουμε τα ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά του κάθε συμμετέχοντα στην έρευνα και το κατά πόσο αυτά επέδρασαν στις ενέργειες του καθενός. Οι προσωπικότητες των παιδιών ενδέχεται να τα ώθησαν ή να τα απέτρεψαν από το να διατηρήσουν μία καλή επικοινωνία κατά τη διάρκεια της εργασίας τους. Για να αποφευχθεί κάποια τέτοια κατάσταση, οι μαθητές επιλέχτηκαν έτσι ώστε να έχουν ήδη μία καλή σχέση και έξω από την τάξη. Άλλωστε τους είχε ζητηθεί ρητά το να συνομιλούν και να προσπαθήσουν να λύσουν το πρόβλημα μαζί. Οι μαθητές γνώριζαν προτού αρχίσουν τις διαδικασίες επίλυσης ότι στόχος των ερευνητών ήταν η παρακολούθηση του τρόπου σκέψης, και ότι η εργασία τους δε θα βαθμολογηθεί. Έτσι μειώθηκε η πιθανότητα «φόβου» για τις επιπτώσεις των πιθανών σφαλμάτων τους.

Θα μπορούσαμε επίσης να αναρωτηθούμε εάν τα συμπεράσματα της έρευνας που στηρίχθηκε στην παρακολούθηση και καταγραφή μόνο τεσσάρων μαθημάτων από κάθε τμήμα, μπορεί να γενικευθούν στη διδασκαλία όλων των μαθηματικών γνωστικών αντικειμένων και για όλη τη μαθητική πορεία. Δεδομένου ότι η ανάλυση που ακολούθησε ήταν ποιοτική, και το εγχείρημα δεν αποτελεί στατιστική

μελέτη, τα αποτελέσματα είναι αρκετά ισχυρά ώστε να δικαιολογούνται οι ισχυρισμοί μας. Δε γνωρίζουμε αν οι δύο καθηγητές διατηρούν αυτές τις διδακτικές πρακτικές καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς κατά τη διδασκαλία και των υπόλοιπων αντικειμένων. Ωστόσο, όσον αφορά το συγκεκριμένο αντικείμενο, τη συνάρτηση $y = ax + \beta$, οι ενδείξεις που είχαμε για την επιρροή της συμπεριφοράς του καθηγητή στις ενέργειες των μαθητών του δείχνουν αρκετά ισχυρές ώστε να υποστηρίζουν τον καθοριστικό ρόλο που έχει ο καθηγητής στη μαθησιακή διαδικασία. Οι διδακτικές στρατηγικές και οι επικοινωνιακές επιλογές των καθηγητών, δείχνουν τελικά να καθορίζουν σε μέγιστο βαθμό την αντίστοιχη γνωσιακή ή επικοινωνιακή συμπεριφορά των μαθητών του κατά τη λύση προβλήματος.

Βιβλιογραφία

Artzt A. F.& Armour – Thomas E., 1998, "Mathematics teaching as problem solving: A framework for studying teacher metacognition underlying instructional practice in mathematics", *Instructional Science* 26, p: 5-25

Artzt A. F.& Armour – Thomas E., 1999, "A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: A guide for facilitating teacher reflection", *Educational Studies in Mathematics* 40, p: 211-235

Cobo P. & Fortuny J. M., 2000, "Social interactions and cognitive effects in contexts of area – comparison problem solving", *Educational Studies in Mathematics* 42, p: 115-140

Even R. & Schwarz B. B., 2003, "Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education", *Educational Studies in Mathematics* 54, p: 283-313

Forman E. & McPail J., 1993 "Vygotskian Perspective on Children's Collaborative Problem – Solving Activities", in Forman E. A., Minick N. & Stone C. A. (Eds) *Contexts for Learning: Sociocultural Dynamics in Children's Development*, New York: Oxford Academic Press, p: 213-229

Κλαουδάτος Ν., 1996, Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών»

Leont' ev, 1981, "The problem of activity in psychology", in Wersch J. V. (Ed. & Trans.) *The concept of activity in Soviet Psychology*, Sharpe, Armonk, NY, p: 37-71

Lerman S., 2001, "Accounting for Accounts of Learning Mathematics: Reading the ZPD in Videos and Transcripts", in Clarke D. (Ed) *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p: 53-74

Sfard A., 2001, "There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning", *Educational Studies in Mathematics* 46, p: 13-57

Sierpinska A., 1998, "Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, Sociocultural approaches, Interactionism", in Steinbring H., Bartolini-Bussi, M., Sierpinska A., *Language and Communication in the mathematics classroom*, NCTM:Reston, Virginia, p:30-62.

Tudge J., 1990, "Vygotsky, the Zone of Proximal Development, and Peer Collaboration: Iplications for Classroom Practice", in Moll L. (Ed) *Vygotsky and Education*, Cambridge: Cambridge University Press, p: 155-172

Von Glasersfeld E., 1988, "The reluctance to change a way of thinking", *Irish Journal of Psychology* 9, p: 83-90

Von Glasersfeld E., 1989, "Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching", *Synthese* 80, p: 121-140

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....1

2. Το Θεωρητικό Πλαίσιο.....3

3. Μεθοδολογία της Έρευνας 8

3.1 Πρακτικές και αντιλήψεις του 1ου καθηγητή.....9

3.2 Πρακτικές και αντιλήψεις του 2ου καθηγητή.....14

4. Συνεντεύξεις μαθητών και Ανάλυση.....19

4.1 Συνέντευξη 1.....19

4.1.1 Εστιακή Ανάλυση..... 27

4.1.2 Ανάλυση Μεταδιαλογικών Κανόνων.....40

4.2 Συνέντευξη 2.....51

4.2.1 Εστιακή Ανάλυση.....58

4.2.2 Ανάλυση Μεταδιαλογικών Κανόνων.....69

5. Συμπεράσματα.....78

6. Επίλογος.....84

Βιβλιογραφία.....88