ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ PATTERNS ΣΤΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού

Κυλάφης Παναγιώτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Σπύρου Παναγιώτης

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό- Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Σπύρου Παναγιώτης (επιβλέπων)	Επίκ. Καθηγητής	……..
Πόταρη Δέσποινα	Αναπλ. Καθηγήτρια	……
Βαμβακούση Ξένια	Δρ	……

Στο Γιώργο

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις πέρα για πέρα ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου, κ. Σπύρου Παναγιώτη, η προθυμία και ευρυμάθεια του οποίου έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην εύρεση και διατύπωση του θέματος της παρούσης εργασίας, στην καθηγήτριά μου, κα Πόταρη Δέσποινα, για την καθοριστική συμβολή της στον προσανατολισμό του θέματος, και τέλος, στην καθηγήτριά μου, κα Βαμβακούση Ξένια, για τη συστηματική παρακολούθηση της πορείας συγγραφής της εργασίας αυτής, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές και επισημάνσεις της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή…….7

Κεφάλαιο 1: Πρώιμη άλγεβρα

1.1 Πρώιμη άλγεβρα……..12

1.2 Η άλγεβρα στην εκπαίδευση κατά το παρελθόν

1.2.1 Η πορεία της έρευνας στην εκπαίδευση της άλγεβρας μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ΄90……..15

1.2.2 Σύνοψη και… κάποιες σκέψεις……...21

1.3 Η έρευνα μετά το 1990……22

1.4 Από την κατάργηση της διαχωριστικής γραμμής μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας στην πρώιμη άλγεβρα ……..26

1.5 Προσεγγίσεις στη σχολική άλγεβρα…… .. 33

1.6 Μελλοντικές απαιτήσεις στην πρώιμη άλγεβρα…… 36

1.7 Σημασία της πρώιμης άλγεβρας στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου..... 38

1.8 Ανακεφαλαίωση……..39

1.9 Παραπομπές……42

Κεφάλαιο 2: Patterns

2.1 Σε αναζήτηση ορισμού για τα patterns……45

2.2 Επαναλαμβανόμενα patterns……47

2.2.1 Γενική θεώρηση του ρόλου των επαναλαμβανόμενων patterns στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών ……....49

2.3 Αναπτυσσόμενα patterns……..56

2.3.1 Γενική θεώρηση του ρόλου των αναπτυσσόμενων patterns στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών ……...58

2.4 Άλλα αριθμητικά patterns……65

2.5 Ζητήματα αξιολόγησης των ικανοτήτων των μαθητών σχετικά με τα patterns...68

2.6 Ανακεφαλαίωση και κάποιες σκέψεις……..73

2.7 Παραπομπές……..75

Κεφάλαιο 3: Patterns και πρώιμη άλγεβρα

3.1 Εισαγωγή…….....76

3.2 Η γενίκευση και η διδασκαλία της……76

3.3 Από τα patterns στις συναρτήσεις. Η ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης μέσω της γενίκευσης των patterns…….……79

3.4 Από την εννοιολογική κατανόηση της μονάδας επανάληψης των επαναλαμβανόμενων patterns στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων…….….83

3.4.1 Ζητήματα επάρκειας των διδασκόντων …….……...84

3.4.2 Συστηματικές διδακτικές παρεμβάσεις. Αποδοτικές ενέργειες των Διδασκόντων…….……87

3.5 Αναπτυσσόμενα patterns, συναρτησιακή σκέψη και γενίκευση

3.5.1 Στρατηγικές γενίκευσης των παιδιών και παράγοντες που επηρεάζουν τη γενίκευση…….……99

3.5.2 Παράγοντες που επηρεάζουν την υιοθέτηση στρατηγικών……...109

3.6 Περισσότερο ελπιδοφόρα μηνύματα

3.6.1 Καταρτισμένοι εκπαιδευτικοί……....112

3.6.2 Προσπάθειες γενίκευσης στα πλαίσια της σημειωτικής θεωρίας…….115

3.6.3 Η γενίκευση στα πλαίσια της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης..125

3.7 Ανακεφαλαίωση-Συζήτηση……132

3.8 Παραπομπές…….. 137

Παράρτημα…….……138

Αναφορές…….……146

Εισαγωγή

Η καθηλωμένη για πολλά χρόνια στα αναπτυξιακά στάδια του Piaget ερευνητική προσέγγιση των σχολικών μαθηματικών, αποδεχόμενη την ύπαρξη αναπτυξιακών περιορισμών και επομένως σταθερά προσανατολισμένη στην αναπαραγωγή των σταδίων γνωστικής ανάπτυξης, επέβαλε στη σχολική πρακτική μια γραμμική διδασκαλία της αριθμητικής και άλγεβρας, με την αριθμητική να προηγείται και την άλγεβρα να έπεται, ως να πρόκειται, όπως θα έλεγε η Van Amerom, για δύο διαφορετικούς κόσμους. Το πέρασμα από τον ένα «κόσμο» στον άλλο τις περισσότερες φορές συμπιεζόταν χρονικά σε μια σειρά μαθημάτων με τον τίτλο «προ-άλγεβρα», που είχαν το χαρακτήρα «γενικευμένης αριθμητικής», γύρω στην ηλικία των 13 χρόνων, για να αρχίσει στη συνέχεια η «επίθεση» της τυπικής άλγεβρας.

Μέσα σε αυτή την συμπιεσμένη χρονικά περίοδο πραγματοποιούνταν η γενίκευση των αριθμητικών ιδιοτήτων και σχέσεων με τρόπους που προσιδιάζουν στη μέθοδο διδασκαλίας της γενίκευσης που ο Mitchelmore (2002) αποκαλεί μέθοδο ABC (Abstract Before Concrete), δηλαδή, «ως αφηρημένες σχέσεις που πρέπει να μαθευτούν πριν από κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή». Η συμμετοχή των μαθητών σ' αυτή τη θεμελιώδους σημασίας λειτουργία της γενίκευσης, εξαντλούνταν στην αναπαραγωγή έτοιμων κανόνων και τύπων, που πρώτα θα έπρεπε να μαθευτούν και έπειτα να εφαρμοστούν χωρίς καμιά συμβολή των μαθητών στην κατασκευή τους. Οι συνέπειες αυτής της κατάστασης για τους μαθητές, αποτυπώνονταν και αποτυπώνονται τόσο στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα όσο και σε διεθνείς διαγωνισμούς, και είναι απογοητευτικές.

Πρόκειται ουσιαστικά για μια περίοδο που η εστίαση τελικά των ερευνών είναι στο «τι οι μαθητές κάνουν» μέσα στα παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια. Μέσα στα πλαίσια αυτής της περιόδου καταγράφονται οι δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στα μαθηματικά. Απ' την άλλη η συνδρομή της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείο ερμηνείας αυτών των δυσκολιών, αλλά και η επιστημολογική θεώρηση αυτών πέραν της αναπτυξιακής ψυχολογίας, διευρύνουν τα όρια της έρευνας αυτής της περιόδου. Παρόλο αυτά, η έρευνα παραμένει δέσμια των αναπτυξιακών σταδίων.

Κοντά στα 1990 ο προσανατολισμός της έρευνας αλλάζει, δίδεται έμφαση στο «τι οι μαθητές μπορούν να κάνουν». Η έρευνα φωτίζει την «άτυπη-διαισθητική

γνώση» των μαθητών και καινοτόμες διδακτικές παρεμβάσεις, υπό το πρίσμα σύγχρονων θεωριών μάθησης σε αναπαραστασιακά πλούσια διδακτικά περιβάλλοντα, αποκαλύπτουν τις δυνατότητες τους. Γίνεται λόγος για «χαμένες ευκαιρίες», ευκαιρίες που αν αξιοποιηθούν από κατάλληλα εκπαιδευμένους δασκάλους, μπορούν να μεταβάλλουν το τοπίο της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών. Οι μαθητές μπορούν με την κατάλληλη στήριξη να κάνουν περισσότερα και πολύ νωρίτερα απ' ότι μέχρι τώρα πιστευόταν. Πρόκειται για μια μεταβατική περίοδο που κυοφορεί «το καινούργιο».

Ως αποτέλεσμα αυτής της κυοφορίας, η αντίληψη ότι η άλγεβρα πρέπει να ακολουθεί την αριθμητική στα προγράμματα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αμφισβητείται. Η παράλληλη ανάπτυξη των δύο περιοχών αποτελεί τώρα την εστίαση των περισσοτέρων ερευνών που διεξάγονται. Υποστηρίζεται ότι ο αλγεβρικός συλλογισμός και η γενίκευση έχουν θέση στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Πρόκειται για την βασική, κεντρική θέση, ενός διαμορφούμενου ρεύματος, του ρεύματος της «πρώιμης άλγεβρας», που στοχεύει στην ανάδειξη του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής και ενοποιεί τους δύο χώρους.

Η πρώιμη άλγεβρα εκφράζει μια ενοποιητική αντίληψη, που καταργεί τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας, εγκαθιστώντας τον αλγεβρικό συλλογισμό και τη γενίκευση στα μαθηματικά της στοιχειώδους εκπαίδευσης.

Κατά τους εκφραστές της πρώιμης άλγεβρας, οι πρώιμες αλγεβρικές εμπειρίες παρέχουν τα εχέγγυα για μια κατοπινή εύκολη πορεία των μαθητών τόσο στα πιο σύνθετα μαθηματικά που θα συναντήσουν στην μαθητική τους ζωή, όσο και γενικότερα στη ζωή τους. Μέσα σ' αυτά τα πλαίσια η άλγεβρα αφορά όλους τους μαθητές, λένε οι υποστηρικτές της πρώιμης άλγεβρας, δηλαδή, μια τέτοια θεώρηση των σχολικών μαθηματικών τείνει προς έναν εκδημοκρατισμό της εκπαίδευσης, δίνοντας «χώρο να αναπνεύσουν» και οι περιθωριοποιημένοι μέσα στα ασφυκτικά παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια μαθητές. Όλα αυτά σηματοδοτούν μια περίοδο ανοιχτή ακόμη, καθώς αρκετά έγιναν, αλλά πολλά ακόμη πρέπει να γίνουν. Να πούμε στο σημείο αυτό, ότι οι όποιες πολιτικές προεκτάσεις που μπορεί να υποβόσκουν ή όχι πίσω από τις αρχές της πρώιμης άλγεβρας ξεπερνούν τα πλαίσια αυτής της εργασίας, που εξαντλείται στη μαθηματική διάσταση των αρχών της και των στόχων της.

Τα παραπάνω, που εξετάζονται στο κεφάλαιο 1, αποτελούν το πρώτο μέρος αυτής της εργασίας. Στο δεύτερο μέρος, και στα κεφάλαια 2 και 3, εξετάζουμε, μέσα από την επισκόπηση των ερευνών, το δυνατό αυτής της ενοποιητικής πρότασης της πρώιμης άλγεβρας, έτσι όπως επίσημα αυτή διατυπώθηκε στο 12° ICMI, στη Μελβούρνη της Αυστραλίας το 2001 από τους Kaput και Lins, αλλά και πιο πρόσφατα μόλις το 2007, από τους Blanton, Schifter, Inge, Lofgren, Willis, Davis & Confrey. Πιο συγκεκριμένα η εστίασή μας, είναι στο εφικτό, στα πλαίσια της στοιχειώδους εκπαίδευσης, της μορφής εκείνης του αλγεβρικού συλλογισμού που σύμφωνα με τον Kaput, πρωτεργάτη της ιδέας της πρώιμης άλγεβρας, έχει να κάνει με «τη γενίκευση αριθμητικών ή γεωμετρικών patterns (αναπτυσσόμενων patterns) για περιγραφή συναρτησιακών σχέσεων», μια περιοχή που σύμφωνα με τους Blanton et al. (2007), η πρώιμη άλγεβρα έχει συχνά εστιάσει, αλλά και η οποία εξακολουθεί να είναι υπό διερεύνηση. Σημειώνουμε ότι μια δεύτερη περιοχή που η έρευνα στην πρώιμη άλγεβρα έχει επικεντρώσει, αυτή της γενικευμένης αριθμητικής, αν και έχει σχέση με τα patterns, δεν εξετάζεται στην παρούσα εργασία. Πιο συγκεκριμένα:

- στο δεύτερο κεφάλαιο συζητάμε ζητήματα ορισμού των patterns, μας απασχολούν τα είδη των patterns, και κάνουμε μια γενική αναφορά στο ρόλο τους στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

- στο τρίτο κεφάλαιο μας απασχολεί η τεκμηρίωση, μέσα από την επισκόπηση της έρευνας, της δυνατότητας των μικρών μαθητών στη γενίκευση. Παρατίθενται οι ακολουθούμενες στρατηγικές γενίκευσης των μαθητών, λανθασμένες ή μη, έτσι όπως καταγράφονται σε διάφορες έρευνες με αναπτυσσόμενα patterns - αριθμητικά και γεωμετρικά. Επίσης παρατίθενται πολύ πρόσφατες έρευνες και απόψεις, οι οποίες θα μπορούσαμε να πούμε ότι ως ένα βαθμό ξεπερνούν το πεδίο εστίασης της πρώιμης άλγεβρας, έτσι όπως αυτό διαμορφώνεται πριν την επίσημη διατύπωση στη Μελβούρνη των στόχων της. Πρόκειται για έρευνες που εξετάζουν τις δυνατότητες των μαθητών στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων στην προσπάθεια γενίκευσης και επαναλαμβανόμενων patterns πέραν των αναπτυσσόμενων. Προαπαιτούμενο για το τελευταίο είναι η δυνατότητα των μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση της μονάδας επανάληψης που χαρακτηρίζει ένα επαναλαμβανόμενο pattern, και την οποία δυνατότητα εξετάζουμε πρωτίστως μέσα από την παράθεση διαφόρων ερευνών. Η διεύρυνση του πεδίου εστίασης της πρώιμης άλγεβρας και στα επαναλαμβανόμενα patterns, ωστόσο, ήταν αναμενόμενη, καθώς πρόκειται για ένα

ανοιχτό ερευνητικό πεδίο, για μια αναδυόμενη ερευνητική βάση που προσπαθεί να συνεισφέρει στη θεμελίωση των ούτως ή άλλως μεγαλόπνοων στόχων της. Όλα αυτά μέσα σε διδακτικά πλαίσια παραδοσιακού χαρακτήρα, αλλά και μέσα από καινοτόμες διδακτικές παρεμβάσεις, για να απαντήσουμε τελικά, στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό, στο εφικτό των στόχων της πρώιμης άλγεβρας.

Στο τέλος της παρούσης εργασίας, στο παράρτημα, παρατίθενται τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε κάποιες από τις έρευνες που αναφέρονται στο τρίτο κεφάλαιο.

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφάλαιο 1: Πρώιμη άλγεβρα

1.1 Πρώιμη άλγεβρα

Ιστορικά, τα σχολικά μαθηματικά έχουν εστιάσει στην αριθμητική και στην υπολογιστική άνεση στις ηλικίες του δημοτικού σχολείου και, κατά ένα μεγάλο μέρος, στην διαδικαστική προσέγγιση στην άλγεβρα από τις πρώτες τάξεις του γυμνασίου και μετά. Η προσέγγιση αυτή, ανεπιτυχής από την άποψη των επιδόσεων των μαθητών, έχει εκθέσει διεθνώς την ανταγωνιστική ικανότητα των αμερικανικών σχολείων στα μαθηματικά (Blanton, Schifter, Inge, Lofgren, Willis, Davis, Confrey, 2007).[1] Βέβαια, είναι γνωστό ότι η έλλειψη ανταγωνιστικής ικανότητας χαρακτηρίζει όχι μόνο τους μαθητές των αμερικανικών σχολείων, αλλά και τους μαθητές ενός μεγάλου αριθμού κρατών μηδέ της Ελλάδας εξαιρουμένης. Γενικά, η κατάταξη μιας χώρας με βάση κυρίως τις επιδόσεις των μαθητών της στα μαθηματικά, στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό να αποτυπωθεί σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό διεθνούς επιπέδου, και σε σχέση πάντα με το περιεχόμενο αυτού του διαγωνισμού, αντανακλά ως ένα σημείο την πλευρά του εννοιολογικού διπόλου «εννοιολογική ή διαδικαστική προσέγγιση των μαθηματικών» το οποίο η εκπαιδευτική κοινότητα κάθε χώρας υιοθετεί. Δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι η συνήθης διδακτική πρακτική, ακόμα και σήμερα, χαρακτηρίζεται από την διαδικαστική προσέγγιση στα μαθηματικά, κατά «παράβαση» τις περισσότερες φορές των επίσημων προτάσεων των αναλυτικών προγραμμάτων και με το «πρόσχημα» της προσαρμογής της ύλης στις δυνατότητες της τάξης αφενός και του ανελέητου πραγματικού χρόνου αφετέρου, και η οποία πρακτική, απ' τη στιγμή που υιοθετηθεί διατρέχει όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

«Όμως τώρα πια είναι ευρέως γνωστό ότι η προετοιμασία των μαθητών της στοιχειώδους εκπαίδευσης στα όλο και περισσότερο σύνθετα μαθηματικά αυτού του αιώνα απαιτεί μια διαφορετική προσέγγιση, συγκεκριμένα, μια που να καλλιεργεί συνήθειες του μυαλού που να ανταποκρίνονται στις βαθύτερες δομές των μαθηματικών» (Kaput, 1999; Romberg & Kaput, 1999 στο Blanton et al. 2007) και *«ενσωματώνει αυτόν τον τρόπο σκέψης στη σχολική εμπειρία των μαθητών, αρχίζοντας από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση»* (NCTM 1989, 2000, στο Blanton et al. 2007)[2].

Μια τέτοια εννοιολογική προσέγγιση των μαθηματικών στη στοιχειώδη εκπαίδευση είναι σήμερα γνωστή με το όνομα «πρώιμη άλγεβρα». Σ' αυτό το σημείο είναι απαραίτητη μια σημαντική διευκρίνιση σχετικά με τον όρο πρώιμη άλγεβρα.

Σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004), δύο εντελώς διαφορετικές αντιλήψεις σχετικά με τη σημασία του όρου «πρώιμη άλγεβρα» φαίνεται να υπάρχουν. Η πρώτη αφορά στην πρώτη φορά που οι μαθητές συναντούν την άλγεβρα στο σχολείο, γύρω στην ηλικία των 13 χρόνων, και η οποία είναι *«ένας συνδυασμός παράδοσης και κυρίαρχων θεωρητικών θέσεων που ενεργούν ως περιορισμοί και παρωπίδες»*. Η δεύτερη και πιο πρόσφατη αντίληψη, θέλει την πρώιμη άλγεβρα να αναφέρεται στην εισαγωγή των μαθητών στην αλγεβρική σκέψη από πολύ νωρίς, ακόμα και στα χρόνια του νηπιαγωγείου. Η αυξανόμενη αποδοχή της δεύτερης αντίληψης, για τους Lins & Kaput, συσχετίζεται με το γεγονός, ότι «μόνο πρόσφατα η κοινότητα εκπαίδευσης των μαθηματικών άρχισε να αντιλαμβάνεται σοβαρά ότι τα πιο μικρά παιδιά θα μπορούσαν να κάνουν πολύ περισσότερα από ότι προηγουμένως υποθέταμε»[3]. Κάνουμε σαφές ότι η χρήση του όρου πρώιμη άλγεβρα στην παρούσα εργασία μέχρι τώρα, αλλά και από δω και στο εξής, αφορά τη δεύτερη αντίληψη.

Η πρώιμη άλγεβρα σύμφωνα με τους Lins & Kaput, (2004), Kaput (2007), περιλαμβάνει δύο κεντρικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

(1) « τη γενίκευση, ή την αναγνώριση, έκφραση και δικαιολόγηση μαθηματικών δομών, ιδιοτήτων και σχέσεων» και *(2) «συλλογισμούς και ενέργειες με βάση τα είδη των γενικεύσεων»* (στο Blanton et al., 2007).

Για τους Blanton et al. (2007), λοιπόν, ενώ τα παραπάνω χαρακτηριστικά γνωρίσματα αφορούν όλους τους τομείς των μαθηματικών στις πρωτοβάθμιες ηλικίες - αριθμητική, γεωμετρία, στατιστική, και ούτω καθ'εξής - στην πράξη, η έρευνα στην πρώιμη άλγεβρα έχει εστιάσει συχνά:

(1) στη χρήση της αριθμητικής ως περιοχής για την έκφραση και την τυποποίηση των γενικεύσεων (γενικευμένη αριθμητική) και (2) στη γενίκευση αριθμητικών ή γεωμετρικών patterns για περιγραφή συναρτησιακών σχέσεων (συναρτησιακή σκέψη).

Αποκαλύπτονται έτσι, ξεκάθαρα, το πεδίο δράσης και η στόχευση της πρώιμης άλγεβρας, αλλά και εν μέρει τα εργαλεία που μπορούμε να επιλέξουμε για την επίτευξη αυτών των στόχων**.** Αυτός ο εναγκαλισμός άλγεβρας και αριθμητικής νοηματοδοτεί τον όρο πρώιμη άλγεβρα. Ωστόσο, η καλύτερη κατανόηση της πρώιμης άλγεβρας απαιτεί κατανόηση του τι δεν είναι. Συγκεκριμένα, δεν πρόκειται για επιπλέον ύλη στο υπάρχον πρόγραμμα σπουδών ούτε για υποβιβασμό της άλγεβρας

που διδάσκεται στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου στο δημοτικό σχολείο. Δεν πρόκειται, επίσης, για δραστηριότητες τις οποίες οι δάσκαλοι διδάσκουν μετά την κατάκτηση από τους μαθητές αριθμητικών δεξιοτήτων και διαδικασιών. Αντίθετα, η πρώιμη άλγεβρα είναι ένας τρόπος σκέψης που μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο του μαθηματικού περιεχομένου που διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο. Ο στόχος είναι *«τα παιδιά να μάθουν να σκέφτονται αλγεβρικά και να αρχίσουν να αποκτούν την συμβολική αλγεβρική γλώσσα, για να εκφράζουν και να δικαιολογούν τις ιδέες τους»* (Blanton, et al., 2007). Απαιτείται για αυτό κατάλληλη τροποποίηση του υπάρχοντος περιεχομένου, αλλά και προσθήκες, προκειμένου να αναδειχτεί ο αλγεβρικός χαρακτήρας του. Ως ένα ορισμένο βαθμό, αυτός ο μετασχηματισμός απαιτεί τον αλγεβρικό συμβολισμό. Ακόμη και στις μικρές τάξεις, ο αλγεβρικός συμβολισμός μπορεί να διαδραματίσει έναν υποστηρικτικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών (Van Amerom, 2003).

Η προσέγγιση των ερευνητών στην πρώιμη άλγεβρα έχει καθοδηγηθεί από τις απόψεις ότι η γενίκευση αποτελεί τον πυρήνα του αλγεβρικού συλλογισμού. Προσπαθούν να στηρίξουν την αντίληψη ότι είναι δυνατή μια θεώρηση των βασικών πράξεων της αριθμητικής ως συναρτήσεις. Βλέπουν την εισαγωγή της άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο ως μετατόπιση από τους συγκεκριμένους αριθμούς και τα μέτρα μεγεθών προς τις σχέσεις μεταξύ συνόλων αριθμών και μέτρων μεγεθών, και ειδικά τις συναρτησιακές σχέσεις. Τα σύμβολα, οι αριθμογραμμές, οι πίνακες συναρτήσεων και οι γραφικές παραστάσεις είναι ισχυρά εργαλεία για τα παιδιά, για να καταλάβουν και να εκφράσουν τις συναρτησιακές σχέσεις μέσα σε μια ευρεία ποικιλία πλαισίων προβλήματος (Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2005).

Προκειμένου όμως να κατανοήσουμε τη δυνατότητα, δηλαδή το εφικτό αυτής της ενοποιητικής πρότασης της πρώιμης άλγεβρας που στοχεύει στην ανάδειξη του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής, είναι απαραίτητο να διατρέξουμε το πλαίσιο της εκπαιδευτικής έρευνας της άλγεβρας, έτσι όπως αυτό διαμορφώνεται τα τελευταία χρόνια, και να κατανοήσουμε έτσι πώς φτάσαμε ως εδώ. Είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις εξελίξεις που προηγήθηκαν και οι οποίες σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004) χωρίζονται σε τρεις περιόδους χωρίς τα όρια μεταξύ τους να είναι απόλυτα με την έννοια ότι οι ακολουθούμενες πρακτικές της κάθε περιόδου μπορεί να εμφανίζονται και στην άλλη περίοδο. Η κατηγοριοποίηση αυτή δηλαδή, αφορά τα χαρακτηριστικά της πλειοψηφίας των ερευνών που διεξάγονται σε κάθε περίοδο και τα οποία έχουν να κάνουν με τις επικρατούσες αντιλήψεις σχετικά με το τι οι μαθητές

κάνουν, τι μπορούν να κάνουν, τη σχέση αριθμητικής και άλγεβρας, την άλγεβρα ως αντικείμενο διδασκαλίας, την επιστημολογική θεώρηση της κ.ά. «*Κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου, η παράδοση κυβερνούσε ανεξέλεγκτη, για το λόγο ότι ήταν παράδοση, και χωρίς υποστήριξη από την εμπειρία. Στη δεύτερη περίοδο η έρευνα αρχίζει να αναζητά τις διαδικασίες που κρύβονται κάτω από τις προσεγγίσεις που υιοθετούνται από τις παραδόσεις της πρώτης περιόδου. Στη διάρκεια της τρίτης περιόδου, η άποψη ότι η αριθμητική πρέπει να προηγείται της άλγεβρας, άρχισε να εξετάζεται»* (Lins & Kaput, 2004).

1.2 Η άλγεβρα στην εκπαίδευση κατά το παρελθόν

1.2.1 Η πορεία της έρευνας στην εκπαίδευση της άλγεβρας μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ΄90

«*Η παραδοσιακή σχέση μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας αποδίδεται στην έκφραση «άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική» και αντανακλά την ιστορική εξέλιξη, ότι δηλαδή, ιστορικά η άλγεβρα προέκυψε από την αριθμητική. Πρόκειται για μια αντίληψη που ενισχύθηκε με την επικράτηση του πιαζετικού κονστρουκτιβισμού. Με το σκεπτικό ότι η σχολική άλγεβρα είναι περισσότερο αφηρημένη και απαιτεί την τυπική σκέψη ενώ η αριθμητική όχι, και δεδομένου ότι η τυπική σκέψη αντιστοιχεί σε ένα μεταγενέστερο αναπτυξιακό στάδιο, υποστηριζόταν ότι η άλγεβρα πρέπει να έρθει αργότερα από την αριθμητική. Η τάση αυτή επικρατούσε για πολλά χρόνια […], και ο λόγος για αυτό ήταν η ισχυρή κυριαρχία του πιαζετικού κονστρουκτιβισμού»* (Lins & Kaput, 2004).

Στην περίοδο αυτή η έρευνα καθοδηγείται από την ύπαρξη αναπτυξιακών περιορισμών και επομένως συμβάλλει στην αντίληψη ότι η άλγεβρα πρέπει να αφεθεί για αργότερα.

Σύμφωνα με τους Carraher et al. (2006) «*οι αναπτυξιακοί περιορισμοί είναι εμπόδια στην εκμάθηση, υποθετικά δεμένα με ανεπαρκώς αναπτυγμένες γνωστικές δομές, σχήματα, και γενικά μηχανισμούς επεξεργασίας πληροφοριών. Καλούνται "αναπτυξιακοί" για να υπονοήσουν ότι είναι στενά συνδεδεμένοι με τις σταδιακά αναδυόμενες-εμφανιζόμενες δομές που εξυπηρετούν μια ευρεία ποικιλία από λειτουργίες της νόησης*». Δηλαδή, έως ότου φθάσουν οι μαθητές σε ένα ορισμένο

αναπτυξιακό επίπεδο πιθανώς δεν μπορούν να καταλάβουν ορισμένα πράγματα ούτε θα είναι σε θέση να το κάνουν στο εγγύς μέλλον. Μέσα στα χρονικά πλαίσια που αναφερόμαστε η άλγεβρα χαρακτηρίζεται ως «αναπτυξιακά ακατάλληλη» για τους νέους μαθητές, δηλαδή αρκετά πέρα από τις τρέχουσες ικανότητές τους.

Μερικές χαρακτηριστικές ερευνητικές προσπάθειες αυτής της περιόδου, οι οποίες σκοπεύουν να προσδιορίσουν τα συστήματα των σταδίων τα σχετικά με την εκμάθηση της άλγεβρας, αναφέρονται στη συνέχεια.

Ο Collis (1975) σε μια έρευνα για την ανάπτυξη του τυπικού συλλογισμού, ερεύνησε το πρόβλημα του πώς γίνονται αντιληπτά από τον αρχάριο μαθητή τα γράμματα που αντιπροσωπεύουν τον άγνωστο στο πλαίσιο των αλγεβρικών εκφράσεων. Κάλεσε αυτά τα γράμματα pronumerals δεδομένου ότι αντιπροσωπεύουν κάποιον αριθμό ή ένα σύνολο αριθμών και περιέγραψε τρία ευδιάκριτα επίπεδα κατανόησης:

Χαμηλότερο επίπεδο (10-11 χρόνων): καθορισμός του αγνώστου (pronumeral) από έναν συγκεκριμένο αριθμό που φαίνεται κατάλληλος κάθε φορά. Εάν μια δοκιμή δεν δίνει ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα, το παιδί σταματά σε εκείνο το στοιχείο.

Μέσο επίπεδο (12-13 χρόνων): εδώ εντάσσονται εκείνοι οι οποίοι είναι πρόθυμοι και ικανοί να προσδιορίσουν μια ομάδα αριθμών (έναν συγκεκριμένο σε κάθε περίπτωση) με χρήση της τεχνικής «μαντεύω και δοκιμάζω».

Υψηλό επίπεδο (14-15 χρόνων): εδώ φαίνεται να έχει εξαχθεί η έννοια του γενικευμένου αριθμού, δηλαδή ένα σύμβολο "β" θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια οντότητα με τα δικά της χαρακτηριστικά, αλλά που έχει τις ίδιες ιδιότητες με οποιοδήποτε αριθμό με τον οποίο είχαν προηγούμενη εμπειρία. (στο Herscovics και Linchevski, 1994).

Οι Herscovics και Linchevski (1994), παρά το γεγονός ότι θεωρούν ότι οι ιδέες που παρουσιάζονται από τον Collis είναι πολύ ενδιαφέρουσες, είναι επιφυλακτικοί ως προς τις ηλικίες που αντιστοιχούν σε κάθε επίπεδο. Επισημαίνουν ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις που χρησιμοποίησε στις εκτιμήσεις του ήταν τυπικές και κατά κάποιο τρόπο τεχνητές. Εντούτοις, η ιδέα της εξέλιξης του γράμματος σε έναν γενικευμένο αριθμό είναι αρκετά διαφωτιστική και σε αντιστοιχία με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget.

Ο Küchemann (1984) προσπάθησε να συνδέσει τις διαφορετικές χρήσεις των γραμμάτων στη γενικευμένη αριθμητική με τα στάδια ανάπτυξης του Piaget. Ερμήνευσε τα ερευνητικά αποτελέσματά του μέσα στο πλαίσιο της γνωστικής

ανάπτυξης, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι, αν και οι μαθητές σημείωσαν σταθερή πρόοδο στην ηλικία των 15 χρόνων, ποσοστό λιγότερο από 40% των μαθητών είχε φθάσει στο γνωστικό επίπεδο όπου μπορούσαν να χειριστούν τα αλγεβρικά γράμματα ως άγνωστους αριθμούς ή μεταβλητές. Οι Garcia και Piaget (1984) υποστήριξαν ότι οι μηχανισμοί της μετάβασης μεταξύ των ιστορικών περιόδων είναι ανάλογες με εκείνους που βρίσκονται στη μετάβαση μεταξύ ψυχογενετικών σταδίων (στο Lins & Kaput, 2004).

Μια δεύτερη ευρεία ομάδα ερευνητικών εργασιών αυτής της περιόδου, σύμφωνα με τους Lins & Kaput, *«στρέφεται στην καταγραφή των δυσκολιών των μαθητών με την άλγεβρα και των πηγών αυτών των δυσκολιών, που είναι η ασυμβατότητα του σταδίου ανάπτυξης και του τρόπου διδασκαλίας, ο συμβολισμός και η περιορισμένη κατανόηση της αριθμητικής» (σελ.52)*. Παρατηρούν δε ότι η προσπάθεια προσδιορισμού των σταδίων, οδήγησαν, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, σε ένα ενδιαφέρον για τους μεγαλύτερους μαθητές (12 ετών και άνω). Ένα τρίτο σύνολο μελετών εξέτασε τα λάθη των μαθητών στο συντακτικό χειρισμό των συμβόλων σε εργασίες μαθητών. Συγκεκριμένα αναφέρουν: *«Αυτές οι εργασίες, καθώς επίσης και η εργασία για την ερμηνεία των μεταβλητών και την ανάγνωση των αλγεβρικών εκφράσεων, ανέδειξαν το εύθραυστο και την επιφανειακή φύση της ικανότητας των μαθητών σε διαδικασίες με τα αλγεβρικά σύμβολα και την ερμηνεία τους και γενικότερα τις τυπικές δυσκολίες πάσης φύσης, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα» (σελ.52)* .

Καταδεικνύονται έτσι προβλήματα σχετικά με την ερμηνεία των γραμμάτων, τις εκφράσεις, τα σύμβολα και την έννοια της ισότητας, τα οποία προβλήματα σκιαγραφούμε στη συνέχεια.

Αρκετοί ερευνητές την περίοδο αυτή, λοιπόν, μελετούν τα προβλήματα που αφορούν την αναγνώριση των μαθηματικών δομών σε αλγεβρικές εκφράσεις. Η Kieran (1981) μιλά για δύο αντιλήψεις των μαθηματικών εκφράσεων: διαδικαστική (ως λειτουργίες με αριθμούς, για την εύρεση ενός αποτελέσματος) και δομική (κατασκευαστική, ως λειτουργίες σε μαθηματικά αντικείμενα), όπου κάθε μια από αυτές τις αντιλήψεις χαρακτηρίζει αντίστοιχα τον αριθμητικό και αλγεβρικό τρόπο σκέψης, περιγράφοντας ουσιαστικά δυσκολίες οντολογικής φύσης της άλγεβρας. Η εισαγωγή στην άλγεβρα συνήθως εμπεριέχει τη μελέτη αλγεβρικών εκφράσεων, εξισώσεων, επίλυση εξισώσεων, μεταβλητές και τύπους. Σύμφωνα, λοιπόν, με την

Kieran (1981), οι δυσκολίες μάθησης των μαθητών επικεντρώνονται στη νοηματοδότηση των γραμμάτων, στην αλλαγή από τις αριθμητικές στις αλγεβρικές συμβάσεις και στην αναγνώριση και χρήση των δομών. Κάποια από αυτά τα προβλήματα προέρχονται από τη διδακτική προσέγγιση, η οποία δίνει μεγάλη έμφαση στο δομικό χαρακτήρα της σχολικής άλγεβρας, ενώ διαδικαστικές προσεγγίσεις και ερμηνείες θα ήταν περισσότερο κατανοητές στα παιδιά. Προσδιορίζει, δηλαδή, μια ασυνέχεια στη διδασκαλία αριθμητικής και άλγεβρας.

Αναφερόμενη δε η Kieran στην έρευνα των Matz και Davis (1970) για την ερμηνεία που δίνουν οι μαθητές στην έκφραση x + 3, λέει, ότι οι μαθητές την βλέπουν περισσότερο ως διαδικασία (προσθέτουμε 3 στο χ) παρά ως ένα τελικό αποτέλεσμα. Στην άλγεβρα, η έκφραση χ+3 εκφράζει αφενός τη διαδικασία «πρόσθεσε 3 στο χ» και αφετέρου το αντικείμενο χ+3. Δηλαδή στην άλγεβρα η διάκριση μεταξύ διαδικασίας και αντικειμένου δεν είναι καθαρή. Έδωσαν δε σ' αυτή τη δυσκολία το όνομα «process-product dilemma».

Επίσης, σύμφωνα με τη Sfard (1991), υπάρχουν δύο θεμελιακά διαφορετικοί τρόποι να αντιληφθούμε τις μαθηματικές έννοιες: λειτουργικά (ως διαδικασίες) και δομικά (ως αντικείμενα). Οι μαθητές αγωνίζονται να κατανοήσουν τη δομική αντίληψη της άλγεβρας η οποία είναι θεμελιακά διαφορετική από την αριθμητική προσέγγιση. Για να διευκρινήσουν τη λειτουργική αντίληψη, οι Sfard και Linchevski (1994), εξηγούν ότι, μια έκφραση όπως η 3(χ+5)+1 μπορεί να ειδωθεί ως μια περιγραφή υπολογιστικών διαδικασιών, δηλαδή, μια σειρά οδηγιών: πρόσθεσε 5 σ' ένα ορισμένο δοσμένο αριθμό, πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα με το 3 και έπειτα πρόσθεσε το 1. Από μια άλλη προσέγγιση η έκφραση μπορεί να ειδωθεί ως το παραγόμενο αποτέλεσμα ενός υπολογισμού, που αναπαριστά ένα ορισμένο αριθμό, ο οποίος αυτή τη φορά δεν μπορεί να καθοριστεί. Ακόμα, μέσα σ' ένα άλλο πλαίσιο μπορεί να ειδωθεί ως συνάρτηση, αντί να παριστάνει ένα καθορισμένο αριθμό, παριστάνει μια μεταβολή. Επίσης σ' ένα απλό, επιφανειακό επίπεδο, θα μπορούσε κάποιος να δει την παραπάνω έκφραση ως μια συμπλοκή συμβόλων που στερείται νοήματος. Ως ένα αλγεβρικό αντικείμενο μπορεί να συνδυαστεί με άλλες συμβολικές εκφράσεις. Οι τελευταίες τρεις ερμηνείες, προϊόν υπολογισμού, συνάρτηση, συμπλοκή συμβόλων, αντανακλούν τη δομική κατανόηση της άλγεβρας. Στην πραγματικότητα οι Sfard και Linchevski επιχειρηματολογούν ότι αυτές οι τέσσερις διαφορετικές ερμηνείες των αλγεβρικών εκφράσεων παριστάνουν διαφορετικές φάσεις της μάθησης της άλγεβρας βασισμένης σε **λογικές, ιστορικές και**

οντολογικές αναλύσεις. Επιπροσθέτως, αργότερα, η Sfard (1995) συγκρίνει τις ασυνέχειες στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την άλγεβρα με την ιστορική ανάπτυξη αυτής. Γράφει ότι το συγκοπτόμενο στάδιο της άλγεβρας (όπου οι άγνωστες ποσότητες παρίστανται από συντομογραφίες ή γράμματα) συνδέεται με μια λειτουργική αντίληψη της άλγεβρας, ενώ το συμβολικό στάδιο της άλγεβρας (όπου τα γράμματα παριστάνουν δοσμένες αλλά και άγνωστες ποσότητες) αντιστοιχεί στη δομική αντίληψη της άλγεβρας[4].

Οι Filloy και Rojano (1989) υποστήριξαν ότι η αριθμητική σκέψη εξελίσσεται πολύ αργά από συγκεκριμένες διαδικασίες σε περισσότερη αφηρημένη, αλγεβρική σκέψη και παρέχοντας **ιστορικά στοιχεία** μίλησαν για την ύπαρξη ενός cut-point που χωρίζει ένα είδος σκέψης από άλλο. Αναφέρονται σε αυτό το cut-point ως "τομή στην ανάπτυξη των λειτουργιών στον άγνωστο" και υποστήριξαν ότι κάτι ανάλογο με αυτό εμφανίζεται στην παρούσα εκπαίδευση μαθηματικών στο επίπεδο της ατομικής σκέψης. Ουσιαστικά πρότειναν ότι κάποιος μπορεί να βρεί ένα διαχωρισμό μεταξύ της αριθμητικής και άλγεβρας, μια *"διδακτική τομή",* όταν ο άγνωστος εμφανίζεται και στις δύο πλευρές μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο όπως *στην* $\alpha\chi + \beta = \gamma\chi + \delta$. Οι μαθητές που ερωτήθηκαν στην έρευνά τους είχαν εκτεθεί σε συγκεκριμένη διδασκαλία σχετικά με τη λύση των εξισώσεων που περιλαμβάνουν έναν άγνωστο: είχαν διδαχθεί να χρησιμοποιούν τις αντίστροφες πράξεις. Κατόπιν, προκειμένου να λυσουν εξισώσεις με τον άγνωστο σε κάθε πλευρά του συμβόλου της ισότητας, εισήχθησαν στο κλασσικό πρότυπο της ζυγαριάς.

Στο ίδιο μήκος κύματος και οι Gray & Tall (1992) οι οποίοι αναφέρουν, ότι η ανάλυση της αριθμητικής σκέψης δείχνει ένα φάσμα ερμηνειών των αριθμητικών συμβόλων, εισάγοντας έτσι την έννοια του procept. Ένα σύμβολο όπως το 3+2 μπορεί να αναπαριστά δύο πράγματα: μια διαδικασία, «πρόσθεσε το 2 στο 3» και επίσης την παραγόμενη από αυτή τη διαδικασία έννοια, «το άθροισμα του 3 και 2». Ο τρόπος με τον οποίο ο συμβολισμός λειτουργεί δυαδικά, ως διαδικασία και έννοια, οδηγεί στον σχηματισμό της έννοιας του procept που αναφέρεται ακριβώς στη διφορούμενη χρήση του συμβόλου, ως διαδικασία ή ως αντικείμενο παραγόμενο από αυτή τη διαδικασία. Η εκμετάλλευση της διφορούμενης φύσης αυτού του συμβολισμού είναι αυτό που καθιστά έναν μαθητή αποτελεσματικό. Διδασκαλίες και γενικά διδακτικές πρακτικές που αναδεικνύουν την πολλαπλή φύση των συμβόλων είναι για τους Gray και Tall το ζητούμενο. Αξίξει να επισημάνουμε ωστόσο, ότι οι Gray και Tall υποστηρίζουν πως, το διφορούμενο των συμβόλων δεν αποτρέπει όλους

τους μαθητές της στοιχειώδους εκπαίδευσης από την πλήρη νοηματοδότησή τους κι ότι είναι θέμα διδακτικής προσέγγισης η εξοικείωση μεγαλύτερου αριθμού μαθητών με το πολλαπλό νόημα των συμβόλων.

Οι Herscovics και Linchevski (1994) μίλησαν για την ύπαρξη ενός γνωστικού χάσματος μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας, που χαρακτηρίζεται ως "ανικανότητα των μαθητών να λειτουργήσουν αυθόρμητα με τον άγνωστο ή επί του αγνώστου". Αν και αναγνώρισαν ότι τα μικρά παιδιά λύνουν μηχανικά συνήθως τα προβλήματα που περιέχουν αγνώστους (π.χ., "5+;=8"), υποστήριξαν ότι οι μαθητές λύνουν τέτοια προβλήματα χωρίς να πρέπει να αναπαραστήσουν και να λειτουργήσουν με αγνώστους, αντ' αυτού, χρησιμοποιούν απλά διαδικασίες μέτρησης ή την αντίστροφη πράξη για να παράγουν ένα αποτέλεσμα. Να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι μερικοί (π.χ., Sfard & Linchevski, 1994) θεωρούν τη χρήση της αντίστροφης πράξης ως στοιχείο της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης ενώ άλλοι θεωρούν αυτήν την διαδικασία μόνο ως προαλγεβρική (e.g., Boulton-Lewis et. al. 1997, στο Carraher, et al., 2006).

Αναφορικά, τώρα, με το σύμβολο της ισότητας οι Herscovics και Kieran (1980) ζήτησαν από τους μαθητές να κατασκευάσουν αριθμητικές εκφράσεις με περισσότερες της μιας πράξης σε κάθε πλευρά του συμβόλου της ισότητας σε μια προσπάθεια να διευρύνουν την κατανόηση τους για το σύμβολο της ισότητας. Ενώ οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι η έννοια της ισότητας υποδηλώνει ότι οι αριθμητικές εκφράσεις σε κάθε πλευρά έχουν την ίδια αριθμητική αξία, οι εκφράσεις που κατασκεύασαν δεν ήταν συχνά ισοδύναμες και ήταν σε αντίθεση με τη σειρά των διαδικασιών. Επίσης φάνηκε ότι το σύμβολο της ισότητας θεωρείται από τους μαθητές ως συντακτικός δείκτης (δηλ., ένα σύμβολο που δείχνει πού πρέπει να γραφτεί η απάντηση) ή ως ένα operator sign (δηλ., ένα ερέθισμα για δράση ή "για να κάνει κάτι"), και τέτοιες ανεπαρκείς αντιλήψεις εντοπίζονται ακόμα και στη δευτεροβάθμια και ανώτατη εκπαίδευση (Kieran 1981).

Σε θεωρητικό επίπεδο, επίσης, την περίοδο που εξετάζουμε, ο Usiskin (1988) κατηγοριοποίησε τις αντιλήψεις για την άλγεβρα: ως γενικευμένη αριθμητική, ως μελέτη των διαδικασιών για επίλυση προβλήματος, ως μελέτη των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων (συμπεριλαμβανομένων της μοντελοποίησης και των συναρτήσεων) και ως μελέτη των δομών. Σε κάθε μια από αυτές τις προσεγγίσεις στην άλγεβρα ο Usiskin προσδιορίζει τους διαφορετικούς ρόλους των γραμμάτων-συμβόλων: pattern generalizer, άγνωστος, όρισμα ή παράμετρος, ή αυθαίρετο αντικείμενο αντίστοιχα.

Κάποιος μπορεί να υποστηρίξει ότι αυτός ο κατάλογος δεν είναι πλήρης καθώς κι άλλες σημασίες του γράμματος που αναφέρονται τακτικά είναι: placeholder (ένα σύμβολο σε μια αριθμητική ανοικτή πρόταση όπως 3 + • = 5), γράμμα που δεν αξιολογείται (όπως π και *e*) και ετικέτα-συντομογραφία (γράμμα για τη σύντμηση ενός αντικείμενου ή μιας μονάδας μέτρησης). Μια μεταβλητή, που ποικίλλει (ως όρισμα ή παράμετρος) θεωρείται ότι είναι ενός πιο υψηλού επιπέδου τυπικότητας – αφαίρεσης - από τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό ή άγνωστο, ο οποίος είναι πάλι πιο τυπικός από ένα placeholder. Τέλος στην κορυφή βρίσκουμε το αυθαίρετο σύμβολο. Αυτή η λεπτή παραλλαγή των σημασιών των γραμμάτων προσδιορίζεται ως ένα από τα σημαντικότερα εμπόδια στην εκμάθηση της άλγεβρας.

Αν και τα πράγματα προς το τέλος της δεκαετίας του 80 και στις αρχές της δεκαετίας του 90, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, δείχνουν να αλλάζουν, και αλλάζουν, καθώς οι ερμηνείες των λαθών των παιδιών υπόκεινται σε επιστημολογικές και ιστορικές αναλύσεις (Filloy και Rojano, 1989, Sfard και Linchevski, 1994, Sfard , 1995), εντούτοις σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004) *«αυτές οι αλλαγές αν και δηλώνουν μια ανησυχία και σηματοδοτούν μια στροφή, δεν παύουν να επικεντρώνονται στο τι δεν μπορούν να κάνουν τα παιδιά».*

1.2.2 Σύνοψη και… κάποιες σκέψεις

Όλα τα προηγούμενα, λοιπόν, λαμβάνουν χώρα μέσα στα πλαίσια της περιόδου αυτής, που όσον αφορά την έρευνα επικεντρώνεται στις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα και οι οποίες σταθερά ερμηνεύονται μέσα στα πλαίσια των αναπτυξιακών σταδίων. Έτσι οι αναπτυξιακοί περιορισμοί από τη μια και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της άλγεβρας και που ερμηνεύονται με βάση τα στάδια γνωστικής ανάπτυξης, επιβάλλουν στην διδακτική πρακτική μια διαχωριστική γραμμή, εις τρόπον, ώστε να προηγείται η διδασκαλία της αριθμητικής και να έπεται η διδασκαλία της άλγεβρας, ως να πρόκειται για δύο διαφορετικούς κόσμους (Van Amerom, 2003), μια κατάσταση που στις περισσότερες χώρες διαιωνίζεται. Όσον αφορά τη διδασκαλία της άλγεβρας, που κυριαρχεί την περίοδο αυτή και που δυστυχώς σε μεγάλο βαθμό κυριαρχεί ακόμα και σήμερα, οι διδακτικές πρακτικές προσεγγίζουν τις αλγεβρικές εκφράσεις, όπως εξισώσεις, ταυτοτήτες, τύπους μηχανιστικά και παρουσιάζονται στους μαθητές ως έτοιμα εργαλεία. Το νόημα των γραμμάτων και γενικότερα των συμβόλων ορίζεται σ΄ένα

άκαμπτο πλαίσιο συμβάσεων αγνοώντας τι ξέρει και τι μπορεί να κάνει ο μαθητής. Πρόκειται ουσιαστικά για τη διδασκαλία της γενίκευσης με τη μέθοδο ABC (Abstract Before Concrete), δηλαδή «ως αφηρημένες σχέσεις που πρέπει να μαθευτούν πριν από κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή», όπως θα έλεγε και ο Mitchelmore (2002).

Συμπερασματικά, ενώ μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ’90 η έρευνα εστίασε στο τι τα παιδιά δεν μπορούν να κάνουν, δηλαδή εστίασε στην καταγραφή και ως ένα βαθμό στην ερμηνεία «ιστοριών αποτυχίας» (sad stories), σταδιακά αυτό άρχισε να αλλάζει και να καταγράφονται «χαρούμενες ιστορίες» (happy stories) καθώς η έρευνα στράφηκε στο τι τα παιδιά θα μπορούσαν να κάνουν. Οι χαρούμενες ιστορίες έχουν να κάνουν με έρευνες από τις οποίες προκύπτει ότι τα παιδιά μορούν να κάνουν περισσότερα με την έκθεσή τους σε κατάλληλες εμπειρίες και διδασκαλία, με έρευνες που προσεγγίζουν διαφορετικά την άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη, και επίσης με έρευνες που εστιάζουν στη χρήση των νέων τεχνολογιών (Lins & Kaput ,2004).

1.3 Η έρευνα μετά το 1990

Η στροφή ενός μέρους της έρευνας προς την άτυπη, διαισθητική γνώση μαθηματικών εννοιών που οι μαθητές φέρουν με τον ερχομό τους στο σχολείο, σηματοδοτεί μια περίοδο όπου σταδιακά τα αναπτυξιακά στάδια αμφισβητούνται. Η έρευνα αρχίζει να προσανατολίζεται προς το τι οι μαθητές μπορούν να κάνουν. Αρχίζει να διαμορφώνεται η άποψη, ότι οι όποιες αδυναμίες των μαθητών στην άλγεβρα οφείλονται στην έλλειψη κατάλληλων πρώιμων εμπειριών, αλλά και στη μη αξιοποίηση εκείνης της μαθηματικής γνώσης που οι μαθητές χρησιμοποιούν στη καθημερινή τους ζωή, έξω από το σχολείο. Η αποτυχία στα τυπικά μαθηματικά του σχολείου κάποιων μαθητών, σε αντιδιαστολή με την επιτυχή ανταπόκρισή τους σε μαθηματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής, εγείρουν ζητήματα όπως «τι μαθηματικά διδάσκουμε και πώς». Αρχίζουν να γίνονται δειλά ερευνητικά βήματα προς την κατεύθυνση αμφισβήτησης του μοντέλου διδασκαλίας σύμφωνα με το οποίο η άλγεβρα οφείλει να ακολουθεί την αριθμητική στη διδακτική πρακτική. Σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004), πολλές έρευνες αυτής της ούτως ή άλλως συμβατικής περιόδου, αν και διευρύνουν τη συζήτηση σχετικά με την εκπαίδευση της άλγεβρας, ωστόσο γίνονται μέσα στα πλαίσια της προηγούμενης περιόδου, δηλαδή δεν υπήρξε αυτόματη απομάκρυνση απ’ τα κυρίαρχα θεωρητικά πλαίσια της προηγούμενης περιόδου. Στη διεύρυνση της συζήτησης, όπως προείπαμε, έπαιξε σημαντικό ρόλο η

θεώρηση της εκπαίδευσης της άλγεβρας και από ιστορική και επιστημολογική πλευρά πέραν της αναπτυξιακής ψυχολογίας, η οποία δειλά-δειλά ξεκίνησε από την προηγούμενη περίοδο. Πρόκειται, σαφώς για μια μεταβατική περίοδο.

Η Urbanska (1993) ερεύνησε την αριθμητική ικανότητα παιδιών στην ηλικία των έξι ετών και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι έχουν "έναν αξιοσημείωτο βαθμό αριθμητικής ικανότητας", αλλά οι δάσκαλοι στη μελέτη της δεν επέσυραν την προσοχή τους στην διαισθητική γνώση των παιδιών. Πιο αναλυτικά, ο γενικός σκοπός της έρευνας που πραγματοποίησε ήταν να εξετάσει πώς η αυθόρμητη αριθμητική γνώση μαθητών του νηπιαγωγείου λειτουργεί στη διδασκαλία των μαθηματικών. Όσον αφορά τη χρήση από τα παιδιά της αυθόρμητης γνώσης τους κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους στο σχολείο, η έρευνά της έδειξε ότι η πλειοψηφία των παιδιών πρόθυμα εκμεταλλεύθηκαν την αριθμητική τους ικανότητα. Πιο συγκεκριμένα αναφέρει, ότι οι ακόλουθες καταστάσεις θα μπορούσαν να παρατηρηθούν:

- Τα παιδιά εφάρμοσαν τις δεξιότητές τους άμεσα έτσι όπως τις έμαθαν (π.χ. μετρούσαν τα νομίσματα χρησιμοποιώντας "τους αριθμούς": ....πέντε, έξι, εφτά….).

- Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη γνώση τους ακόμα και όταν ήταν εν μέρει ασυμβίβαστη με τη "σχολική" γνώση (π.χ. μέτρησαν τα αντικείμενα αγγίζοντάς τα με τα δάχτυλά τους και παράστησαν τα αποτελέσματα).

- Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη γνώση τους με έναν εύκαμπτο τρόπο, τροποποιώντας την σύμφωνα με το προς επίλυση πρόβλημα (Urbanska, 1993, σελ. 274) .

Σε σχέση με τη στάση του δασκάλου απέναντι στην αυθόρμητη αριθμητική γνώση των παιδιών, όπως αναφέρει, παρατηρήθηκαν τα ακόλουθα:

- *«Ο δάσκαλος εμπόδιζε τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών (π.χ. ένας δάσκαλος απαγόρευσε ή γελοιοποίησε το γεγονός ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν τα δάχτυλά τους κατά τη διάρκεια του υπολογισμού)».*

- *«Ο δάσκαλος/α επέβαλε τον τρόπο του/της, δεν άκουγε τα παιδιά, μιλούσε σ' αυτούς όλη την ώρα.»*

- *«Ο δάσκαλος/α αγνοούσε τις απαντήσεις των μαθητών που δεν ταιρίαζαν στον τρόπο σκέψης το δικό του/της.»*

- «Ο δάσκαλος αναφέρθηκε στη γνώση των παιδιών, αλλά δεν ήταν πάντα ικανός να την εκτιμήσει και να την εκμεταλλευθεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος» (Urbanska, 1993, σελ. 274).

Στα πλαίσια των ανωτέρω η Urbanska θέτει την ακόλουθη ερώτηση: *«Γιατί οι δάσκαλοι δεν αναφέρονται στην αυθόρμητη μαθηματική γνώση ενός μαθητή;»* Η

απάντηση που δίνει η ίδια είναι ότι οι δάσκαλοι κατά πρώτον δεν γνωρίζουν την αυθόρμητη γνώση ενός μαθητή και κατά δεύτερον δεν ξέρουν τα μαθηματικά λεπτομερώς. Στις μικρές τάξεις, συνεχίζει, επικρατεί ακόμα μια παραδοσιακή σχέση μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή. Ο δάσκαλος εξακολουθεί να είναι ο επιστάτης και η αρχή για έναν μαθητή, αυτός που βάζει τους κανόνες, κι όσον αφορά τους τρόπους διδασκαλίας, δύο θα μπορούσαν να παρατηρηθούν: *«ένας παιδαριώδης, κι ένας ψευδο-επιστημονικός»*. Θεωρεί αναγκαίο να βρεθεί ένας τρόπος να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική ικανότητα των παιδιών μέσα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο. Θα ήταν επίσης σημαντικό να ελεγχθεί αυτός ο τρόπος στην πράξη, στο σχολείο, και να γίνουν μακράς διαρκείας παρατηρήσεις των συμπεριφορών των παιδιών κατά τη διάρκεια μιας τέτοιας διδασκαλίας.

Οι Carpenter, Fennema, Franke (1996) περιγράφουν ένα βασισμένο σε έρευνα μοντέλο του τρόπου που σκέφτονται τα παιδιά και που οι δάσκαλοι μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να ερμηνεύσουν, να μετασχηματίσουν, και αναπλαισιώσουν την άτυπη ή αυθόρμητη γνώση των μαθητών. Η βασική τους θέση είναι ότι τα παιδιά μπαίνουν στο σχολείο με πολλή άτυπη ή διαισθητική γνώση των μαθηματικών που μπορεί να χρησιμεύσει ως βάση για τη διδασκαλία ενός μεγάλου μέρους των επίσημων μαθηματικών του προγράμματος σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι Mulligan και Mitchelmore (1997) υποστηρίζουν ότι οι παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις κατά πρώτον δεν αξιοποιούν την άτυπη, διαισθητική γνώση που πολλά παιδιά έχουν αναπτύξει πριν από την τρίτη τάξη του δημοτικού σχολείου, σχετικά με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και κατά δεύτερον η διαίρεση εισάγεται μετά από τον πολλαπλασιασμό και ξέχωρα από αυτόν, ενώ οι μαθητές αυθόρμητα συσχετίζουν τις δύο πράξεις και δεν βρίσκουν απαραίτητα τη διαίρεση πιο δύσκολη. Τα παιδιά θα ωφελούνταν σίγουρα εάν οι δάσκαλοι παρείχαν σε αυτά τις ευκαιρίες να λύσουν λεκτικά προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών από την πρώτη τάξη και εάν συνέδεαν πιο στενά τις δύο πράξεις. Θεωρούν επίσης, ότι έργο του δασκάλου είναι να βοηθήσει τους μαθητές να διευρύνουν το ρεπερτόριό τους σε στρατηγικές υπολογισμού. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί σε τρία επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο, οι μαθητές μπορεί να χρειαστούν βοήθεια για να διαμορφώσουν κάποιες σημασιολογικές/εννοιολογικές δομές, έτσι, ώστε να μπορούν να εφαρμόσουν επιτυχώς τον άμεσο υπολογισμό αυτών. Στο επόμενο επίπεδο, οι μαθητές που μπορούν να λύσουν ποικίλα πολλαπλασιαστικά προβλήματα με τον άμεσο υπολογισμό, μπορούν να ενθαρρυνθούν να αναπτύξουν αποδοτικότερες

στρατηγικές συμπεριλαμβανομένης της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Οι δάσκαλοι μπορούν, επίσης, να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις δυνατότητές τους στην πρόσθεση και την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση συγχρόνως. Στο τρίτο επίπεδο, όταν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μέσα μια ευρεία ποικιλία σημασιολογικών δομών, μπορεί να ενθαρρυνθεί η ιδέα της πολλαπλασιαστικής πράξης. Τα παιδιά μπορούν περαιτέρω να ενισχυθούν, για να βελτιώσουν την αποδοτικότητα υπολογισμού τους μέσω δραστηριοτήτων που ως σκοπό θα έχουν να αναπτύξουν την πολλαπλασιαστική αίσθηση του αριθμού (συμπεριλαμβανομένης της αποστήθισης γινομένων), και επίσης προτείνουν ότι δυσκολότερες εννοιολογικές δομές, όπως το καρτεσιανό γινόμενο, μπορούν να ερευνηθούν.

Παράλληλα με την έρευνα σε σχέση με την άτυπη γνώση μαθηματικών εννοιών που φέρουν οι μαθητές με τον ερχομό τους στο σχολείο, αλλά και την αμφισβήτηση του παραδοσιακού διδακτικού μοντέλου, αρχίζουν να διατυπώνονται θεωρητικές απόψεις που αμφισβητούν τις κυρίαρχες θεωρητικές θέσεις σύμφωνα με τις οποίες η διαφορετική φύση των δύο περιοχών, αριθμητικής και άλγεβρας, επιβάλλει το διαχωρισμό τους στη διδακτική πρακτική. Η καθοριστική αυτή στροφή αποτυπώνεται με καθαρότητα στην άποψη του Mason (1991) ότι, οι μαθητές έρχονται στο σχολείο με τις φυσικές δυνάμεις της γενίκευσης και με ικανότητες να εκφράσουν τη γενικότητα κι έτσι η ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού είναι κατά μεγάλο μέρος ζήτημα αξιοποίησης αυτών των φυσικών ικανοτήτων για διδακτικούς σκοπούς. Πρόκειται για μια άποψη που κυριολεκτικά προσβάλλει τις κυρίαρχες μέχρι τώρα θεωρητικές θέσεις (στο Carraher et al., 2006).

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις παραπάνω απόψεις είναι και η άποψη του NCTM. Συγκεκριμένα, ενώ στις καθηλωμένες στα αναπτυξιακά στάδια ερευνητικές προσεγγίσεις και στην καταγραφή των αδυναμιών των μαθητών που χαρακτηρίζουν τη δεκαετία του ΄80, το πότε πρέπει να αρχίζει η διδασκαλία της άλγεβρας είναι θα έλεγε κανείς ξεκαθαρισμένο, το 1990, κι ένα χρόνο μετά το καθοριστικό 1989 όπου δημοσιεύονται από το NCTM τα «Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics», το NCTM δημοσίευσε την άλγεβρα για όλους (Edwards, 1990) και όπως ο τίτλος υπονοεί, όλοι οι μαθητές οφείλουν να εισαχθούν σε αυτό το θέμα. Αρχίζουν να εγείρονται ζητήματα, όπως η έλλειψη συνειδητοποίησης από τη μεριά των διδασκόντων των εμποδίων που πρέπει να υπερνικηθούν στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Η αποτυχία στην άλγεβρα, τελικά, μπορεί να μην

απεικονίζει τη δυνατότητα εκμάθησης των μαθητών, αλλά μπορεί απλά να προκαλείται από έναν ορισμένο τύπο διδασκαλίας.

Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, επίσης, οι Herscovics και Linchevski (1994), προσδιορίζουν ότι οι πιθανές εξηγήσεις για τις δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν με την άλγεβρα έχουν να κάνουν αφενός με το ρυθμό με τον οποίο καλύπτεται η ύλη και αφετέρου με την τυπική προσέγγιση που συχνά χρησιμοποιείται στην παρουσίασή της. Το πιο σημαντικό, φαίνεται ότι πολλοί δάσκαλοι και συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων δεν έχουν γνώση των σοβαρών γνωστικών δυσκολιών στην εκμάθηση της άλγεβρας, δηλαδή των γνωστικών εμποδίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Κατά συνέπεια, πολλοί μαθητές δεν έχουν το χρόνο να κατασκευάσουν μια καλή διαισθητική βάση για τις ιδέες της άλγεβρας ή να συνδέσουν αυτές με τις προ-αλγεβρικές ιδέες που έχουν αναπτυχθεί στο δημοτικό σχολείο, έτσι αποτυγχάνουν να κατασκευάσουν νόημα για το νέο συμβολισμό. Ζητήματα διδακτικής πρακτικής, βέβαια, σχετικά με τα προβλήματα των μαθητών στην άλγεβρα έχουν διατυπωθεί μέσα στα πλαίσια της προηγούμενης περιόδου από την Kieran (1981), όπου όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θεωρεί ότι η κατάλληλη διδασκαλία θα μπορούσε να εξαλείψει πολλά προβλήματα.

Έτσι, αν και η περίοδος αυτή χρήζει περαιτέρω διερεύνησης, σύμφωνα με τους Lins & Kaput (2004), συνιστά μια περίοδο αποκαλυπτική ως προς τις δυνατότητες των μικρών παιδιών και ταυτόχρονα μια μεταβατική περίοδο. Ουσιαστικά πρόκειται για μια περίοδο, που σε συνδυασμό με άλλες έρευνες, που γίνονται με τη χρήση των νέων τεχνολογιών ανοίγουν το δρόμο, όπως θα έλεγε ο kaput, στην τρίτη περίοδο, την περίοδο όπου η άποψη ότι η αριθμητική πρέπει να προηγείται της άλγεβρας αμφισβητείται ανοιχτά και η έκφραση «μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα» σταδιακά χάνει το νόημά της.

1.4 Από την κατάργηση της διαχωριστικής γραμμής μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας στην πρώιμη άλγεβρα

Σταδιακά, λοιπόν, το ερώτημα σχετικά με την ύπαρξη ή όχι διαχωριστικής γραμμής μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας βρίσκεται στο επίκεντρο ενός πιο ουσιαστικού ερευνητικού ενδιαφέροντος. Εγείρονται ερωτήματα σχετικά με το αν αυτή η διαχωριστική γραμμή είναι τελικά αποτέλεσμα της παραδοσιακής πρακτικής, της δεσμευμένης από τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης. Η απάντηση στο ερώτημα,

ακόμα και σήμερα, εξακολουθεί να αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα. Η «γλωσσολογική» διάσταση της δυσκολίας οριοθέτησης των δύο περιοχών επισημαίνεται με ένα καταπληκτικό τρόπο από τον Usiskin (1997), ο οποίος αναφέρει χαρακτηριστικά ότι:

*« Όταν όμως ζητάμε από τους μαθητές να υπολογίσουνε το η, όταν 5*7=η, δεν είναι ξεκάθαρο αν κάνουμε άλγεβρα. Αν ο δάσκαλος ρωτήσει: «Ποιος αριθμός πρέπει να αντικαταστήσει το η για να είναι η δήλωση αληθινή;», τότε ο δάσκαλος μεταχειρίζεται τη δήλωση ως άλγεβρική. Αν όμως ο δάσκαλος ρωτήσει: «Ποια είναι η απάντηση;» τότε μεταχειρίζεται την ερώτηση ως αριθμητική. Δηλαδή στον τρόπο διατύπωσης της ερώτησης αντιστοιχεί μεγάλο μέρος της διαφοράς μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας.»*

Στη μεταβατική περίοδο που περιγράψαμε λίγο πριν, άλλοι αρχίζουν να βλέπουν την άλγεβρα παντού και να υποστηρίζουν ότι τα παιδιά που λύνουν ένα πρόβλημα στο οποίο απουσιάζει ο ένας προσθετέος, όπως 4 + [] = 9 κάνουν άλγεβρα, δεδομένου ότι «η κενή θέση» μπορεί να θεωρηθεί ως άγνωστος. Φυσικά, αυτή η άποψη προσκρούει στο γεγονός ότι ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας καθαρά αριθμητικά μέσα όπως διαδικασίες υπολογισμού ή με τις αντίστροφες πράξεις. Άλλοι, στο άλλο άκρο, υποστηρίζουν ότι η άλγεβρα δεν μπορεί να εισαχθεί αν δεν προηγηθεί η διδασκαλία των ακέραιων αριθμών. Η άποψη αυτή προσκρούει στο γεγονός ότι ο Αλ- Χουαρίσμι, που θεωρείται ο πατέρας της άλγεβρας, την εισήγαγε στο μεσογειακό κόσμο γύρω στον ένατο αιώνα σε μία εποχή που ακόμα δεν υπήρχαν οι αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Γίνεται έτσι σαφής η δυσκολία του εγχειρήματος οριοθέτησης των δύο περιοχών.

Ωστόσο, οι Carraher et al. (2006), αναφερόμενοι στον ισχυρισμό ότι η άλγεβρα πρέπει να ακολουθεί την αριθμητική σε συμφωνία με την ιστορική εξέλιξη των δύο περιοχών, μιλούν για ακαμψία που υπάρχει σ' αυτή την προσέγγιση κι η οποία έχει ως συνέπεια για πολλούς μαθητές να μην κατορθώνουν αυτή την πολυσυζητημένη μετάβαση. Ταυτόχρονα μιλούν για παρανοήσεις, αλλά και για χαμένες ευκαιρίες προερχόμενες από την αναβολή της μαθηματικής γενίκευσης, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τα κατοπινά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές. Λένε χαρακτηριστικά:

«Υποθέστε προς το παρόν ότι η αριθμητική και η άλγεβρα είναι ευδιάκριτα θέματα. Παραδείγματος χάριν, υποθέστε ότι η αριθμητική εξετάζει τις πράξεις με συγκεκριμένους αριθμούς ενώ η άλγεβρα εξετάζει τους γενικευμένους αριθμούς, τις

μεταβλητές, και τις συναρτήσεις. Μια τέτοια διάκριση επιτρέπει μια καθαρή διάταξη των θεμάτων στο πρόγραμμα σπουδών. Έτσι, στο δημοτικό σχολείο, οι δάσκαλοι μπορούν να στραφούν προς την υπολογιστική άνεση και τα λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένους αριθμούς. Μόνο αργότερα χρησιμοποιούνται γράμματα, για να αντιπροσωπεύσουν έναν οποιοδήποτε αριθμό ή σύνολα αριθμών. Όπως είναι αναμενόμενο, μια τέτοια αυστηρή οριοθεσία οδηγεί σε ιδιαίτερη ένταση κατά μήκος των συνόρων της αριθμητικής και της άλγεβρας. Είναι ακριβώς για αυτόν τον λόγο ότι πολλοί εκπαιδευτικοί μαθηματικών (π.χ., Filloy & Rojano, 1989 Herscovics & Kieran, 1980 ; Kieran 1985; Rojano, 1996;) έχουν επιστήσει τόσο πολλή προσοχή στην ***υποτιθέμενη μετάβαση*** *μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας —μια μετάβαση που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου στην οποία η αριθμητική «τελειώνει» και η άλγεβρα «αρχίζει». Μεταβατικές ή προ-άλγεβρικές προσεγγίσεις προσπαθούν να βελτιώσουν τις πιέσεις που επιβάλλονται από έναν άκαμπτο χωρισμό της αριθμητικής από την άλγεβρα. Εντούτοις, το γεφύρωμα ή οι μεταβατικές προτάσεις υποστηρίζονται από μια αποδυναμωμένη θέση των στοιχειωδών μαθηματικών —δηλαδή στην αναβολή της μαθηματικής γενίκευσής τους μέχρι να αρχίσει η διδασκαλία της άλγεβρας. Έτσι οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της άλγεβρας από τα πρώτα κιόλας μαθήματα. Αλλά υπάρχει λόγος να πιστεύουμε ότι οι δυσκολίες τους έχουν τις ρίζες τους στις* ***χαμένες ευκαιρίες*** *και σε αντιλήψεις που δημιουργήθηκαν στην πρώιμη διδασκαλία των μαθηματικών τους»* (Carraher et al., 2006, σελ. 5).

Όσον αφορά τις χαμένες ευκαιρίες θεωρούν παραδείγματος χάριν, τη διδασκαλία της πρόσθεσης ευκαιρία για εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης. Γι' αυτούς η έκφραση " + 3" μπορεί να αναπαριστά όχι μόνο μια λειτουργία επενέργειας σε έναν συγκεκριμένο αριθμό αλλά και μια σχέση μεταξύ ενός *συνόλου* τιμών εισαγωγής και ενός *συνόλου* τιμών παραγωγής. Η πράξη της πρόσθεσης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της τυπικής σημειολογίας της συνάρτησης, όπως *το* φ (χ) = *χ=3*, ή *το* χ →χ + 3. Η πρόσθεση τριών είναι έτσι ισοδύναμη προς το χ + 3, μια συνάρτηση *του Χ*. Ανάλογα, τα αντικείμενα της αριθμητικής μπορούν έπειτα να θεωρηθούν και τα δύο, δηλαδή συγκεκριμένα (εάν *ν* = 5 έπειτα *ν* + 3=5+ 3= 8) και γενικά (*το ν*+ 3 αντιπροσωπεύει έναν οποιοδήποτε ακέραιο). Εάν τονίζεται η γενική φύση τους, τα λεκτικά προβλήματα δεν χρειάζονται να είναι μόνο για την εργασία με συγκεκριμένες ποσότητες, αλλά και με σύνολα δυνατών-πιθανών τιμών και ως εκ τούτου για την μεταβολή και τη συμμεταβολή. Η αριθμητική, δηλαδή, περιλαμβάνει

αριθμητικά δεδομένα, αλλά και τις γενικές εκφράσεις των οποίων τα αριθμητικά δεδομένα είναι περιπτώσεις.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι αυτό που προτείνεται, ουσιαστικά αυτό που αναδεικνύεται από αυτή την προσέγγιση, είναι ότι η αριθμητική έχει έναν εγγενή αλγεβρικό χαρακτήρα. Από αυτή την άποψη, οι αλγεβρικές έννοιες και η σημειολογία πρέπει να θεωρηθούν ως αναπόσπαστες στα στοιχειώδη μαθηματικά, γεγονός που οδηγεί στην από τις μικρές ηλικίες εισαγωγή στον αλγεβρικό συλλογισμό. Δηλαδή προτείνεται μια παράλληλη πορεία άλγεβρας και αριθμητικής κι ότι ο αυστηρός διαχωρισμός άλγεβρας και αριθμητικής, ο οποίος αντανακλάται στα προγράμματα σπουδών, λειτουργεί σε βάρος της εκμάθησης της άλγεβρας με ότι αυτό έχει ως επακόλουθο.

Απόψεις σύμφωνες με την προηγούμενη φανερώνουν τον προσανατολισμό των ερευνών που διεξάγονται την τρίτη περίοδο, την περίοδο όπου η άποψη ότι η αριθμητική πρέπει να προηγείται της άλγεβρας αμφισβητείται ανοιχτά, δηλαδή την περίοδο της πρώιμης άλγεβρας, μιας περιόδου όπου εξετάζεται η δυνατότητα των μικρών μαθητών στον αλγεβρικό συλλογισμό και μηνύματα αισιόδοξα έρχονται από παντού.

«*Αντιμέτωπος με την ιστορική ανάλυση και τα εμπειρικά στοιχεία κυρίως των ερευνών της πρώτης περιόδου, θα ήταν εύκολο κάποιος να συναγάγει το συμπέρασμα ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα μακρύ, δύσκολο ταξίδι στην άλγεβρα, όπου τα επιστημολογικά εμπόδια στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας επανεμφανίζονται ως γνωστικά εμπόδια σε επίπεδο διδασκαλίας της. Μπορεί, πράγματι, πολλά από τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές να είναι παρόμοια με εκείνα που αντιμετώπισαν οι πρώτοι μαθηματικοί. Οι αρνητικοί αριθμοί αποτέλεσαν το αντικείμενο θερμής συζήτησης μεταξύ των επαγγελματιών μαθηματικών και εξακολουθούν να βασανίζουν τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εντούτοις, η ιστορία μπορεί να είναι παραπλανητική, καθώς, όταν η νέα μαθηματική και επιστημονική γνώση συστηματοποιείται και εντάσσεται στο σώμα της υπάρχουσας γνώσης γίνεται εκπληκτικά προσιτή*» (Carraher et al., 2006, σελ. 9)**.** Οι ιστορικές εξελίξεις στα μαθηματικά είναι σημαντικές για την κατανόηση των διλημμάτων και δυσκολιών που μπορούν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές ,όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με παρόμοιες έννοιες. Αλλά η απόφαση εάν ορισμένες ιδέες και μέθοδοι από την άλγεβρα είναι μέσα στις δυνατότητες των νέων μαθητών απαιτεί εμπειρικές μελέτες

με τους νέους μαθητές που είχαν πρόσβαση σε δραστηριότητες και προκλήσεις που περιλαμβάνουν τον αλγεβρικό συλλογισμό και τον αλγεβρικό συμβολισμό.

Έτσι οι Carpenter & Levi (2000) και οι Carpenter and Franke (2001) έδειξαν ότι τα αρκετά μικρά παιδιά που συμμετείχαν στις δραστηριότητες τάξεων που ερευνούσαν τις μαθηματικές σχέσεις μπορούσαν να καταλάβουν, παραδείγματος χάριν, ότι "α+β-β = α" για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β.

Σε συνέχεια των ερευνών τους οι Carpenter, Levi, Franke, Zeringue (2005), παρουσιάζουν δύο συνεντεύξεις με μαθητές τρίτης δημοτικού από τάξεις που προωθούν τη χρήση σχεσιακής σκέψης[5]. Και στις δύο περιπτώσεις εστιάζουν στην επιμεριστική ιδιότητα. Στον ένα μαθητή δίνονται προτάσεις όπως: «Με ποιο αριθμό θα μπορούσε να είναι ίσος ο m έτσι ώστε η πρόταση $52\times 11=(52\times 10)+m$ να είναι αληθινή;» Ο μαθητής φανερά ήταν ικανός να χρησιμοποιήσει σχεσιακή σκέψη βασισμένη στην επιμεριστική ιδιότητα, όταν καταπιάστηκε με τις μαθηματικές προτάσεις. Επιπλέον ο μαθητής έδειξε ότι είχε ήδη αρχίσει να σκέφτεται γύρω από την επιμεριστική ιδιότητα με γενικούς όρους. Ικανοποιητικά αποτελέσματα υπήρξαν και για την δεύτερη μαθήτρια, που κι εκείνη χρησιμοποίησε σχεσιακή σκέψη και αντιμετώπισε μεταξύ των άλλων προτάσεις μαθηματικές, κάνοντας χρήση προτάσεων που ήδη είχε λύσει. Κατά τους συγγραφείς η επιλογή κατάλληλης σειράς προβλημάτων, το scaffolding, και η σχεσιακή σκέψη προάγουν τη μάθηση με κατανόηση.

Ένα άλλο σύνολο μελετών εξέτασε τις γενικεύσεις των μικρών παιδιών και την κατανόηση των μεταβλητών και συναρτήσεων. Σε διάφορες μελέτες παρέμβασης στην τάξη οι Brizuela, Carraher & Schliemann (2000) διαπίστωσαν ότι, παρέχοντας τις κατάλληλες προκλήσεις, οι μαθητές της τρίτης τάξης του δημοτικού μπορούν να συμμετέχουν στον αλγεβρικό συλλογισμό και την εργασία με τους πίνακες τιμών των συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τη αλγεβρική σημειολογία για να αναπαραστήσουν συναρτησιακές σχέσεις. Επίσης οι Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006) (σε μια μελέτη χρονικής διάρκειας 30 μηνών με παιδιά μεταξύ 8 και 10 ετών) ανάπτυξαν και εξέτασαν τα αποτελέσματα μιας σειράς δραστηριοτήτων που στόχευαν να αναδείξουν τον αλγεβρικό χαρακτήρα της πρόσθεσης και αφαίρεσης και να εξηγήσουν πώς τα μικρά παιδιά, καθώς μαθαίνουν την πρόσθεση και την αφαίρεση, μπορούν να ενθαρρυνθούν, για να ενσωματώσουν τις αλγεβρικές έννοιες και αναπαραστάσεις στη σκέψη τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι καθώς τα παιδιά εργάζονται με την αριθμογραμμή και με μια μεταβλητή γραμμή αριθμού, μπορούν να

οδηγηθούν αποτελεσματικά στις μεταβλητές και τη συμμεταβολή, για να προσεγγίσουν προβλήματα που περιλαμβάνουν προσθετικές σχέσεις. Στα μαθήματα που έκαναν, εισήγαγαν τα παιδιά στην τυποποιημένη αριθμογραμμή και σε μια μεταβλητή γραμμή αριθμού —αποκαλούμενη Ν-αριθμογραμμή[6], μια παραλλαγή της τυποποιημένης αριθμογραμμής στην οποία η αρχή τοποθετείται στο Ν. Αυτό επέτρεψε στους μαθητές να εκφράσουν τις πράξεις πρόσθεσης χωρίς απαίτηση το Ν να έχει μια καθορισμένη τιμή.

Η Warren (2004) σε μια μελέτη της με μαθητές 8,5 χρόνων, παρακάμπτει τον παραδοσιακό τρόπο προσέγγισης της άλγεβρας ως επέκτασης της αριθμητικής και αναγνωρίζοντας ότι οι δυσκολίες της άλγεβρας πηγάζουν από έλλειψη κατάλληλων θεμελίων στην αριθμητική, υιοθετεί την άποψη ότι ο αριθμός είναι μια αφηρημένη έννοια που αναπαριστά μια ποσότητα που μπορεί να είναι ή να μην είναι προφανής. Γι' αυτό χρησιμοποιεί μοντέλα μέτρησης συνεχών μεγεθών από κοινού με αριθμητικά patterns, για να βοηθήσει τους μαθητές να μετακινηθούν από τους αριθμούς σε διαδικασίες και σχέσεις, παρακάμπτοντας, όπως προαναφέρθηκε, την κλασσική μέθοδο εισαγωγής στους αριθμούς με την απαρίθμηση διακριτών αντικειμένων. Για να γεφυρώσει αυτό το κενό ακολουθεί το μοντέλο του Davydov (1971), ο οποίος μελέτησε την ύπαρξη βασικών αλγεβρικών εννοιών στη σκέψη μικρής ηλικίας μαθητών μέσω συνεχών ποσοτήτων αγνώστων μέτρων πριν την εξερεύνηση των αριθμών. Η Warren χρησιμοποίησε το μοντέλο του μήκους για την αναπαράσταση αυτών των ιδεών.

Ενδεικτικά, στη συνέχεια, παραθέτουμε μια τέτοια δραστηριότητα. Πρώτα οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν, για να εφεύρουν ονόματα για τις τρεις λωρίδες χαρτιού και να εκφράσουν τη σχέση μεταξύ των τριών λωρίδων, π.χ. κόκκινο + πράσινο = κίτρινο.

<table>
<tr><td>κόκκινο</td><td>πράσινο</td></tr>
<tr><td colspan="2">κίτρινο</td></tr>
</table>

Κατόπιν ένα κομμάτι κόπηκε από την κόκκινη λωρίδα και οι μαθητές ρωτήθηκαν:

«Τι πρέπει να κάνω στην πράσινη λουρίδα έτσι ώστε το μήκος της πράσινης λουρίδας συν το μήκος της κόκκινης λουρίδας να είναι ακόμα το ίδιο με την κίτρινη λουρίδα ; Πόσο πρέπει να προσθέσω στην πράσινη λουρίδα;»

Έτσι, η Warren ερεύνησε πώς τέτοιες εξερευνήσεις από κοινού με τις παραδοσιακές εμπειρίες μπορούν να επαυξήσουν την κατανόηση της αριθμητικής

από τους νεαρούς μαθητές. Οι συγκεκριμένοι στόχοι της έρευνας ήταν: α) να εξετάσει μοντέλα και διδασκαλίες που βοηθούν τους νεαρούς μαθητές να γενικεύσουν και τυποποιήσουν τη μαθηματική τους σκέψη και β) να προσδιορίσει τη σκέψη που υποστηρίζει την ανάπτυξη της κατανόησης της άλγεβρας. Στόχος αυτής της έρευνας ήταν να τεκμηριώσει και εξηγήσει τις γενικεύσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα της μελέτες επιβεβαίωσαν την υπόθεσή της, ότι οι μαθητές έχουν λιγότερες δυσκολίες αντιμετωπίζοντας patterns χωρίς αριθμούς από εκείνα με αριθμούς. Το μοντέλο του μήκους φαίνεται να επιτρέπει στους νεαρούς μαθητές να εστιάζουν πιο αποτελεσματικά στη βαθύτερη έννοια της αριθμητικής αναπλήρωσης, σε ενίσχυση του ισχυρισμού του Davydov. Στα αποτελέσματα των ερευνών της καταγράφεται επίσης, ότι οι αναπαραστάσεις φαίνεται να επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών για γενίκευση κι ότι για κάποιους μαθητές, οι δραστηριότητες αυτού του είδους, τους είχαν απλά οδηγήσει πέρα από το χρησιμοποιούμενο σε τέτοιες δραστηριότητες μοντέλο των δακτύλων.

Άλλες πιο πρόσφατες μελέτες (Brizuela & Schliemann, 2004) έδειξαν ότι μαθητές της τέταρτης τάξης (εννέα έως δέκα έτών), που συμμετείχαν σε δραστηριότητες πρώιμης άλγεβρας, μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την αλγεβρική σημειολογία για να λύσουν προβλήματα αλγεβρικής φύσης.

Η πορεία των ερευνών των δύο τελευταίων περιόδων που στηρίζουν τον πρώιμο αλγεβρικό συλλογισμό οδηγεί το NCTM, μέσω της ομάδας εργασίας άλγεβρας (NCTM, 1997) και των νέων προτύπων NCTM (2000), να προτείνει ότι οι δραστηριότητες που θα παγιοποιήσουν ενδεχομένως τον αλγεβρικό συλλογισμό των παιδιών πρέπει να αρχίσουν τα πρώτα -πρώτα έτη εκπαίδευσης.

Ολοκληρώνοντας, να πούμε ότι σε όσα προηγήθηκαν προσπαθήσαμε να περιγράψουμε ή καλύτερα να καταγράψουμε την εξέλιξη της σχέσης αριθμητικής και άλγεβρας, έτσι όπως αυτή διαμορφώθηκε και εξελίχτηκε στις διάφορες περιόδους, για να καταλάβουμε πώς δημιουργήθηκε το «ρεύμα» της πρώιμης άλγεβρας. Να υπενθυμίσουμε σ' αυτό το σημείο ότι τα μέλη της ομάδας της πρώιμης άλγεβρας άτυπα συναντώνται από το 1998- δηλαδή μεσούσης της έρευνας στον πρώιμο αλγεβρικό συλλογισμό-, ενώ η πρώτη επίσημη παρέμβασή τους γίνεται το 2001 με τη συγκρότηση της ομάδας εργασίας της πρώιμης άλγεβρας στο 12^{ο} ICMI στη Μελβούρνη της Αυστραλίας. Πρόκειται για ένα καθοριστικό συνέδριο το θέμα του οποίου ήταν «Το μέλλον της διδασκαλίας και μάθησης της άλγεβρας». Εκεί μεταξύ των άλλων συζητήθηκε το ζήτημα των προσεγγίσεων της σχολικής άλγεβρας. Θα το

δούμε πιο αναλυτικά καθώς συνδέεται άμεσα με το δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας.

1.5 Προσεγγίσεις στη σχολική άλγεβρα

Πέραν κάποιων βασικών, κεντρικών θα λέγαμε χαρακτηριστικών του αλγεβρικού συλλογισμού και της αλγεβρικής γλώσσας όπως η γενίκευση, η τυποποίηση, ο συμβολισμός, τα οποία είναι γενικά αποδεκτά, υπάρχει διάσταση απόψεων σχετικά με το τι είναι ή τι θα έπρεπε να είναι η σχολική άλγεβρα και κάθε προσπάθεια ορισμού έχει τα δυνατά και αδύνατα σημεία της. Είναι επομένως προτιμότερο κάποιος να δει την άλγεβρα με όρους που ανταποκρίνονται στους ρόλους της στα διαφορετικά πεδία εφαρμογής της. Μια τέτοια θεώρηση, ακόμα κι αν είναι ελλιπής, παρέχει ένα πλαίσιο για μια ουσιαστική συζήτηση γύρω από βασικά ζητήματα στην εκπαίδευση της άλγεβρας.

Ο Usiskin (1988) κατηγοριοποιεί τις αντιλήψεις για την άλγεβρα: ως γενικευμένη αριθμητική, ως μελέτη των διαδικασιών για επίλυση προβλήματος, ως μελέτη των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, συμπεριλαμβανομένων της μοντελοποίησης και των συναρτήσεων, και ως μελέτη των δομών. Ο ίδιος, το 1997, δίνει μια απάντηση στο ερώτημα «Τι είναι σχολική άλγεβρα;». Είναι μια γλώσσα, αναφέρει, που έχει πέντε σημαντικές πλευρές: (1) αγνώστους, (2) τύπους, (3) γενικευμένα patterns, (4) placeholders, και (5) σχέσεις. Σε κάθε μια από αυτές τις προσεγγίσεις τα γράμματα, για παράδειγμα, έχουν μια συγκεκριμένη έννοια και ρόλο (άγνωστος, παράμετρος, αυθαίρετο αντικείμενο). Και σχολιάζει: «Οποτεδήποτε συζητείται οποιαδήποτε από αυτές τις ιδέες, από το νηπιαγωγείο και πρός τα πάνω, υπάρχει ευκαιρία να εισαχθεί η γλώσσα της άλγεβρας.»

Την ίδια χρονιά το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) αναγνωρίζει τέσσερα θέματα για την σχολική άλγεβρα: συναρτήσεις και σχέσεις, μοντελοποίηση, δομές, γλώσσα και αναπαράσταση.

Η Van Amerom (2003), σχολιάζει ότι δεν υπάρχει μια γενικά αποδεκτή άποψη σχετικά με το τι είναι η άλγεβρα ή πώς πρέπει να μαθευτεί, επειδή έχει τόσες πολλές εφαρμογές. Αλλά για χάρη της πρακτικότητας, τονίζει, ότι είναι χρήσιμο να διακρίνουμε τέσσερις βασικές προσεγγίσεις της άλγεβρας:

(1) άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική,

(2) άλγεβρα ως εργαλείο επίλυσης προβλήματος,

(3) άλγεβρα ως μελέτη των σχέσεων, και

(4) άλγεβρα ως μελέτη των δομών.

Οι Blanton & kaput (2005) υιοθετούν την άποψη ότι η θεώρηση της άλγεβρας κυρίως ως μιας γλώσσας που αφορά στο συντακτικό χειρισμό συμβόλων, περιορίζει τις πολλαπλές πλευρές της και επηρεάζει αρνητικά τη διδασκαλία και τη μάθησή της. *«Απαιτείται μια ευρύτερη και βαθύτερη θεώρηση αυτής που θα εξασφαλίσει στα σχολικά μαθηματικά το βάθος και τη δύναμη που οι πολλές πλευρές της άλγεβρας στην ιστορική εξέλιξή της έχουν εφοδιάσει τα μαθηματικά και θα μπορεί να υποστηρίξει τον αλγεβρικό συλλογισμό σε όλα τα θέματα και τις ηλικίες».* Η προσέγγιση αυτή, αν και έχει πολλά κοινά στοιχεία με τις προηγούμενες, αφενός διευρύνει τα πεδία εφαρμογής της άλγεβρας, αφετέρου εισάγει τον αλγεβρικό συλλογισμό στο δημοτικό σχολείο από πολύ νωρίς.

Για τον Kaput (1998 στο Blanton & Kaput 2005), λοιπόν, η προσέγγιση στην σχολική άλγεβρα, είναι ένα σύνθετο θέμα που οργανώνεται γύρω από τις ακόλουθες πέντε αλληλοσυσχετιζόμενες μορφές που χαρακτηρίζουν τον ώριμο αλγεβρικό συλλογισμό:

α) *Άλγεβρα ως γενίκευση και τυποποίηση patterns, κυρίως, αλλά και άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική και ποσοτικό συλλογισμό*. Αυτή η μορφή περιλαμβάνει τη χρήση της αριθμητικής ως περιοχή για παραγωγή, έκφραση και υποστήριξη γενικεύσεων. Αυτές του είδους οι δραστηριότητες, κατά τον Kaput, φαίνεται να διαιρούνται σε δύο στενά συνδεόμενες κατηγορίες. α) Γενίκευση αριθμητικών πράξεων, των ιδιοτήτων τους και σε μερικές περιπτώσεις συλλογισμό γύρω από γενικότερες σχέσεις (π.χ. ιδιότητες του μηδενός, αντιμεταθετικότητα, αντίστροφες σχέσεις κ.λ.π.). Αυτό είναι άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική. β) Οικοδόμηση γενικεύσεων γύρω από συγκεκριμένους αριθμούς και σχέσεις (π.χ. το άθροισμα περιττών αριθμών είναι άρτιος, η εύρεση κανονικοτήτων στον πίνακα του 100, η εύρεση του τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάζουμε με τις δυνάμεις του 10). Αυτό είναι ανάπτυξη αλγεβρικών τρόπων για προσδιορισμό γενικεύσεων συγκεκριμένων ιδιοτήτων των αριθμών. Αυτό είναι διαφορετικό από το α) όπου η εστίαση είναι στις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, αντιμετωπίζοντας την άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική.

β) *Άλγεβρα ως συντακτικά-καθοδηγούμενος χειρισμός φορμαλισμών*. (Algebra as Syntactically-Guided Manipulation of Formalisms)

γ) *Άλγεβρα ως μελέτη των δομών και αφηρημένων συστημάτων που συμπεριλαμβάνουν υπολογισμούς και σχέσεις*. Αυτό περιλαμβάνει σκέψη πάνω σε περισσότερο αφηρημένα αντικείμενα και συστήματα και γενίκευση αυτών, αλλά και σκέψη πάνω στις σχέσεις αυτών των αφηρημένων αντικειμένων και συστημάτων.

δ) *Άλγεβρα ως μελέτη των συναρτήσεων, σχέσεις και συμμεταβολή*. Η πλευρά αυτή που αφορά τη γενίκευση αριθμητικών patterns (παραγόμενων πολλές φορές γεωμετρικά), εξηγεί ο Kaput, τυπικά εξασφαλίζει την περιγραφή συναρτησιακών σχέσεων (π.χ. η εργασία με τους τρίγωνους ή τετράγωνους αριθμούς, patterns με μορφές, και γενικά δραστηριότητες patterning). Οι περιγραφές μπορεί να περιλαμβάνουν επαναληπτικές (αναδρομικές) προσεγγίσεις: «Πώς η επόμενη μορφή ή αριθμός μπορεί να περιγραφεί σε σχέση με την τρέχουσα μορφή ή αριθμό;» Εδώ, εξηγεί ο Kaput, *«ο χώρος στον οποίο κατασκευάζονται ισχυρισμοί είναι πρωταρχικά-βασικά μαθηματικός»* και συνεχίζει «*όλα τα είδη περιγραφών είναι σημαντικά για το χτίσιμο της έννοιας της συνάρτησης που αποτελεί βασικό συστατικό της σχολικής αλγεβρικής σκέψης*».

ε) *Άλγεβρα ως μια γλώσσα μοντελοποίησης*. Η μοντελοποίηση παρέχει τη δυνατότητα για την κατασκευή, έκφραση και δικαιολόγηση γενικεύσεων και υλοποιείται από αυτή. Πρόκειται για τη μαθηματικοποίηση καταστάσεων ή φαινομένων που πραγματοείται από τη γενίκευση κανονικοτήτων και patterns με τα τελευταία να παίζουν έναν εξόχως υποστηρικτικό ρόλο.

Η τοποθέτηση των εχόντων σχέση με την εκπαιδευτική- μαθηματική πραγματικότητα στο ερώτημα «τι είναι η σχολική άλγεβρα» ή ακριβέστερα «τι πρέπει να περιλαμβάνει η σχολική άλγεβρα;», αντανακλά ίσως την προσωπική τους εμπειρία, την γνωστική ή όχι επάρκεια του αντικειμένου, τη γενικότερη θεώρησή τους για τα μαθηματικά, που υπαγορεύεται από τις επιστημολογικές τους πεποιθήσεις, την ερευνητικά τεκμηριωμένη άποψή τους σχετικά με τις πλευρές εκείνες της άλγεβρας που πρέπει να προτάξουμε στις σχολικές αίθουσες, κι ακόμα την γενικότερη αντίληψή τους για την άλγεβρα ως ένα εργαλείο ερμηνείας μιας όλο και πιο σύνθετης πραγματικότητας, όπου η γνώση της άλγεβρας εξασφαλίζει το διαβατήριο μια εύκολης διαδρομής στη ζωή, και τέλος να αντανακλά την πεποίθησή τους σχετικά με τις αναπτυξιακές δυνατότητες των υποκειμένων να ανταποκριθούν και σε ποιο βαθμό. Όλες οι παραπάνω προσεγγίσεις της σχολικής άλγεβρας είναι φανερό ότι παρουσιάζουν πολλά κοινά σημεία. Από την άλλη οι όποιες διαφορές που οι παραπάνω ερευνητές εκφράζουν, μπορούν να συσχετισθούν με τους ποικίλους τρόπους με τους οποίους οι ίδιοι αντιλαμβάνονται την άλγεβρα, και ποια

χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης πιστεύουν ότι πρέπει να αναπτύξουν προκειμένου να νοηματοδοτήσουν αυτό που αποκαλούμε άλγεβρα. Πιστεύουμε ότι η άλγεβρα στη σχολική πραγματικότητα αφορά τη γενικευμένη αριθμητική, την εύρεση κανονικοτήτων και patterns, την αναζήτηση και μελέτη σχέσεων, την έκφραση συναρτησιακών σχέσεων, τις δομές, την επίλυση προβλήματος, την γενίκευση, τον συμβολισμό, και πολύ περισσότερο πιστεύουμε ότι πολλές φορές τα περισσότερα από αυτά τα στοιχεία συνυπάρχουν οποτεδήποτε αντιμετωπίζουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Στα πλαίσια, όμως της παρούσης εργασίας, μας απασχολούν κυρίως εκείνες οι πτυχές του αλγεβρικού συλλογισμού, που σύμφωνα με τον Kaput, αφορούν στην άλγεβρα ως μελέτη των συναρτήσεων, των σχέσεων και της συμμεταβολής ποσοτήτων κι όλα αυτά στην προσπάθεια γενίκευσης αριθμητικών και γεωμετρικών patterns, σε επίπεδο δημοτικού σχολείου [μορφές α) και δ)]. Πιο συγκεκριμένα εστιάζουμε στη μορφή εκείνη του αλγεβρικού συλλογισμού που περιλαμβάνει το χτίσιμο της έννοιας της συνάρτησης που αποτελεί βασικό συστατικό της σχολικής αλγεβρικής σκέψης (Blanton & Kaput 2005, NCTM 1997, 2000), στην οποία η έρευνα στην πρώιμη άλγεβρα συχνά έχει εστιάσει (Blanton et al., 2007). Το εφικτό μιας τέτοιας προσέγγισης σε επίπεδο δημοτικού σχολείου, που αποτελεί και τον κύριο σκοπό αυτής της εργασίας, διαπραγματευόμαστε στο τρίτο κεφάλαιο.

1.6 Μελλοντικές απαιτήσεις στην πρώιμη άλγεβρα

Αν και οι προαναφερθείσες έρευνες τεκμηριώνουν ως ένα βαθμό τη δυνατότητα αλγεβρικού συλλογισμού σε επίπεδο δημοτικού σχολείου και φωτίζουν πολλά από τα μέσα με τα οποία αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί, υπάρχουν ακόμα πολλά να γίνουν. Πρέπει, για παράδειγμα, να έχουμε μια καλύτερη κατανόηση για το πώς οι συναρτήσεις μπορούν να εισαχθούν σε αριθμητικά πλαίσια (Carraher, et al., 2000).

Οι Carraher et al. (2000) υποστηρίζουν ότι παρά την αποδοχή ενός αυξανόμενου αριθμού ατόμων και φορέων χάραξης της εκπαιδευτικής μαθηματικής πολιτικής της εισαγωγής της άλγεβρας στη στοιχειώδη εκπαίδευση, αλλά και της ενθουσιώδους αποδοχής αυτού του εγχειρήματος από το NCTM (2000), πολλά πρέπει να γίνουν ακόμα. Δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην ανάγκη μιας στέρεης ερευνητικής

βάσης για την καθοδήγηση της κοινότητας των μαθηματικών στη διάρκεια αυτής της νέας επιχείρησης.

Οι Blanton et al. (2007) προσδιορίζουν τρεις κρίσιμους τομείς για τη μελλοντική έρευνα στην πρώιμη άλγεβρα και την ανάπτυξή της:

(1) Συστηματική αλλαγή της κατάστασης μέσω της ανάπτυξης των "πρώτων σχολείων άλγεβρας".

Αναφέρουν ότι, απαιτείται διεύρυνση της ερευνητικής βάσης, της περιορισμένης ηλικιακά σε μεγαλύτερες ηλικίες, σχετικά με το βιώσιμο της πρώιμης άλγεβρας σε όλες τις ηλικίες της στοιχειώδους εκπαίδευσης, αλλά και του αντίκτυπου από μια συνεπή εκπαίδευση στην πρώιμη άλγεβρα. Κάτι τέτοιο απαιτεί με τη σειρά του συστηματικές επενδύσεις που οδηγούν στην ανάπτυξη των «πρώτων σχολείων άλγεβρας». Δηλαδή σχολείων στα οποία οι μαθητές θα έχουν πλούσια εμπειρία στην πρώιμη άλγεβρα και με δασκάλους επαγγελματικά καταρτισμένους για την εφαρμογή της, τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά, κι οι οποίοι δάσκαλοι θα εγγυηθούν το βιώσιμο μιας τέτοιας αλλαγής. Στην προσπάθεια αυτή, η μετέπειτα αξιοποίηση του πλούσιου σε εμπειρίες πρώιμης άλγεβρας μαθητικού υλικού, προϋποθέτει την εκπαίδευση των καθηγητών που θα το παραλάβουν, αλλά και μια γενικότερη εμπλοκή όλων των αρμόδιων φορέων (υπαλλήλων της εκπαίδευσης, γονέων,…), όπως επίσης και των αντίστοιχων παιδαγωγικών τμηματων.

Για τους Blanton et al. (2007) υπάρχουν δύο θεμελιώδεις λόγοι που θεωρούν αυτό ως επείγουσα ανάγκη. Κατά πρώτον η ανάγκη δημιουργίας μιας βάσης στοιχείων προερχόμενων από έρευνες πέραν των βασισμένων σε περιορισμένα περιβάλλοντα (π.χ. συγκεκριμένες ηλικίες) ερευνών, που θα απεικονίζουν τη δυνατότητα του συνόλου των μαθητών της στοιχειώδους εκπαίδευσης να ανταποκριθούν στην πρώιμη άλγεβρα. Τα σχολεία αυτά, αφενός θα παίξουν ένα σημαντικό ρόλο ως κρίσιμες ερευνητικές περιοχές για την οικοδόμηση αυτής της βάσης στοιχείων, αφετέρου θα εγγυηθούν τη βιωσιμότητα στη μάθηση των παιδιών καθώς θα παρέχουν μια συστηματική και όχι αποσπασματική εκπαίδευση.

(2) *Προσδιορισμό του πυρήνα των ιδεών της άλγεβρας και εύρεση του τρόπου σύνδεσης αυτών με το πρόγραμμα σπουδών στη διάρκεια της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.*

Όσον αφορά την ανάπτυξη ενός συνεπούς, συνδεδεμένου περιεχομένου πρώιμης άλγεβρας, οι Blanton et al. (2007), διευκρινίζουν ότι πρέπει να καταλάβουμε πώς να επεκτείνουμε την αριθμητική, αρχίζοντας από το νηπιαγωγείο,

έτσι, ώστε τα παιδιά να μαθαίνουν να γενικεύουν τις αριθμητικές έννοιες και να αποκτούν τη συμβολική γλώσσα ανεξαρτήτου τάξης, για να εκφράζουν τη σκέψη τους. Απαιτείται, επίσης, σοβαρή εργασία για τη σύνδεση της πρώιμης άλγεβρας με τα μαθηματικά που μαθαίνουν τα παιδιά στο γυμνάσιο και το λύκειο για ανάπτυξη κοινών ιδεών, σκοπών, και στόχων μέσω της συνεργασίας των ερευνητών που εργάζονται σε αυτές τις διαφορετικές περιοχές.

(3) Κατανόηση της φύσης της αλγεβρικής σκέψης των παιδιών.

Επισημαίνεται ότι, ενώ η έρευνα έχει παράσχει αποδείξεις της ύπαρξης αλγεβρικής σκέψης στους μικρούς μαθητές, απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση για την κατανόηση του πόσο «διεισδυτική-κυρίαρχη» αυτή η γνώση μπορεί να γίνει. Δηλαδή μέχρι ποιο σημείο αντιπροσωπεύει ένα κανόνα όσον αφορά τις δυνατότητες των παιδιών. *«Όπως με οποιαδήποτε μάθηση, η γνώση που τα παιδιά σταχυολογούν από μια συγκεκριμένη "αλγεβρική συνομιλία" σε μια στιγμή της διδασκαλίας θα ποικίλει. Κατανοώντας τα είδη γνώσης που τα παιδιά παίρνουν από αυτές τις συνομιλίες, τις τροχιές αυτής της γνώσης, και τις κρίσιμες συμβολές σε αυτές τις τροχιές είναι σημαντικά βήματα στον προσδιορισμό της διεισδυτικής–κυρίαρχης φύσης της αλγεβρικής γνώσης.»*

1.7 Σημασία της πρώιμης άλγεβρας στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου

Σύμφωνα με τους Blanton et al. (2007) όταν η πρώιμη άλγεβρα αντιμετωπίζεται ως αρχή οργάνωσης των μαθηματικών της στοιχειώδους εκπαίδευσης, οι ενδεχόμενες αποζημιώσεις είναι τεράστιες:

(1) *Καταπιάνεται με τις πέντε ικανότητες που απαιτούνται για τη μαθηματική επίδοση των παιδιών (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001):* ***εννοιολογική κατανόηση****,* ***διαδικαστική άνεση, στρατηγική ικανότητα, προσαρμοστικός συλλογισμός και παραγωγική διάθεση****. (2) Εισάγει τα παιδιά στα πιο προηγμένα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. (3) Εκδημοκρατίζει την πρόσβαση στις μαθηματικές ιδέες, δίνοντας τη δυνατότητα σε περισσότερους μαθητές να καταλαβαίνουν περισσότερα μαθηματικά, παρέχοντάς τους έτσι περισσότερες ευκαιρίες για ισόβια επιτυχία* (Blanton et al., 2007).

Πιο αναλυτικά, **εννοιολογική κατανόηση** σημαίνει σε βάθος κατανόηση των διδικασιών και σχέσεων. Μέσω της γενικευμένης αριθμητικής, η πρώιμη άλγεβρα δίνει τη δυνατότητα γενίκευσης των μαθηματικών ιδιοτήτων στους μαθητές, για

παράδειγμα της αντιμεταθετικής ιδιότητας, τους βοηθάει να κατανοήσουν πώς οι διαδικασίες επηρεάζουν τους αριθμούς και επίσης να αναπτύξουν μια σχεσιακή άποψη της ισότητας. Μέσα στα πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας η εύρεση συναρτησιακών σχέσεων, που περνάει μέσα από τη **διαδικαστική ευχέρεια**, τους επιτρέπει να προβούν σε γενικεύσεις και σταδιακά να τις εκφράζουν σε όλο και πιο επίσημη αλγεβρική γλώσσα. Επειδή η πρώιμη άλγεβρα βασίζεται στο πρόβλημα, αναπτύσσει τη **στρατηγική ικανότητα** των παιδιών και την ικανότητα για **προσαρμοστικό συλλογισμό** (adaptive reasoning). Δηλαδή ο σκοπός της πρώιμης άλγεβρας δεν είναι να αναπτύξει απομονωμένες δεξιότητες ή διαδικασίες (είτε αριθμητικές είτε αλγεβρικές), αλλά να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν ενεργητικό συλλογισμό, επιχειρήματα οικοδόμησης και δικαιολόγησης και να μάθουν να εξηγούν ιδέες. Έτσι καθώς τα παιδιά συλλογίζονται αλγεβρικά, αναπτύσσουν σημαντικές συνήθειες της σκέψης και γνώση για μαθηματική επιτυχία σε μεγαλύτερες ηλικίες. Αποκτούν την πρώιμη γλώσσα της απόδειξης, συμπεριλαμβανομένων των μορφών επαγωγικού και **παραγωγικού συλλογισμού** και αντιλαμβάνονται τους περιορισμούς των εμπειρικών επιχειρημάτων. Μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αναπαραστασιακά εργαλεία, όπως πίνακες και γραφικές παραστάσεις, και μαθαίνουν να παράγουν και να οργανώνουν δεδομένα.

Τέλος, μέσα στα πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας η οικοδόμηση της μαθηματικής κατανόησης έναντι της παπαγαλίστικης απόκτησης δεξιοτήτων και διαδικασιών, επιτρέπει τον εκδημοκρατισμό των μαθηματικών ιδεών, έτσι ώστε περισσότεροι μαθητές να καταλαβαίνουν περισσότερα μαθηματικά. Αυτό, γιατί οι έρευνες έχουν διαπιστώσει ότι, παιδιά περιθωριοποιημένα στις παραδοσιακές τάξεις συχνά πρόθυμα καταπιάνονται με την πρώιμη άλγεβρα, επειδή αναπτύσσει τη μαθηματική κατανόηση στα πλαίσια σημαντικών κι εχόντων νόημα γι' αυτά δραστηριοτήτων. Παρέχει, λοιπόν, η πρώιμη άλγεβρα αυξημένες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές για ισόβια επιτυχία.

1.8 Ανακεφαλαίωση

Είναι ευρέως γνωστό ότι σε διεθνές επίπεδο οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εκμάθηση της άλγεβρας. Η έρευνα για τον αλγεβρικό συλλογισμό τονίζει ανεπάρκειες των μαθητών που έχουν να κάνουν, όπως είδαμε, κυρίως με:

(1) περιορισμένες ερμηνείες των μαθητών όσον αφορά το σύμβολο της ισότητας (2) εσφαλμένες αντιλήψεις για την έννοια των γραμμάτων που αντιπροσωπεύουν τις μεταβλητές (3) άρνηση να γίνει αποδεκτή μια έκφραση όπως "α + 2" ως απάντηση σε ένα πρόβλημα και (4) δυσκολία στην επίλυση των εξισώσεων με τις μεταβλητές και στις δύο πλευρές του συμβόλου της ισότητας κ.α..

Πολλοί ερευνητές απέδωσαν αρχικά τέτοιους συμπεράσματα στους αναπτυξιακούς περιορισμούς και την έμφυτη αφαιρετικότητα της άλγεβρας. Στη διάρκεια του χρόνου, τα στοιχεία από τις καινοτόμες δραστηριότητες τάξεων άρχισαν να υποστηρίζουν μια νέα άποψη. Οι επιτυχείς εργασίες στη Σοβιετική Ένωση της ομάδας Davydov, με μικρά παιδιά, τράβηξαν την προσοχή των ερευνητών κι ίσως αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για τη διαμόρφωση του ρεύματος της πρώιμης άλγεβρας. Οι ερευνητές των μαθηματικών των μαθηματικών άρχισαν να βρίσκουν κοινό έδαφος μεταξύ της αριθμητικής και άλγεβρας. Εισάγοντας την άλγεβρα στις πρώτες τάξεις της στοιχειώδους εκπαίδευσης με διαφορετικές προσεγγίσεις, επικαλυπτόμενες περιστασιακά (γενικευμένη αριθμητική, που κινείται από συγκεκριμένους σε γενικευμένους αριθμούς, εστίαση στις κοινές μαθηματικές δομές, εισαγωγή μεταβλητών και συμμεταβολής σε λεκτικά προβλήματα, εστίαση στην έννοια της συνάρτησης, ενοποίηση απομονωμένων μαθηματικά θεμάτων, κ.λπ.), προσδιόρισαν τις προηγουμένως χαμένες ευκαιρίες για εξερεύνηση του αλγεβρικού χαρακτήρα των στοιχειωδών μαθηματικών. Αυτές οι μελέτες δείχνουν ότι οι αδύναμες, ελλιπείς και περιορισμένες διδασκαλίες μπορεί να είχαν έναν αποφασιστικό ρόλο στα θλιβερά αποτελέσματα των ερευνών του αλγεβρικού συλλογισμού μεταξύ των εφήβων, κι ίσως είναι αυτή η εμμονή στην αριθμητική στο δημοτικό σχολείο υπεύθυνη των εμποδίων που συναντούν οι μαθητές αργότερα στην άλγεβρα.

Ενώ, λοιπόν, μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του '90 υπήρξαν κυρίως ιστορίες αποτυχίας, έκτοτε τα πράγματα άρχισαν σιγά-σιγά να αλλάζουν. Υπάρχουν πια αισιόδοξα μηνύματα στην έρευνα της εκπαίδευσης της άλγεβρας σε σχέση με τι τα παιδιά θα μπορούσαν να κάνουν. Τα μικρά παιδιά θα μπορούσαν να κάνουν περισσότερα στα μαθηματικά από ότι προηγουμένως νομίζαμε, ιδιαίτερα όταν τους παρέχεται η κατάλληλη εμπειρία και διδασκαλία συμπεριλαμβανομένων των διδακτικών περιβαλλόντων με χρήση των νέων τεχνολογιών. Προτείνονται, επιπλέον αλλαγές στις προσεγγίσεις στην εκπαίδευση της άλγεβρας και στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Η άποψη ότι η εννοιολογική προσέγγιση στην άλγεβρα, μια προσέγγιση που κατευθύνει την σκέψη των μαθητών στις βαθύτερες δομές των μαθηματικών, πρέπει να γίνει μέρος του προγράμματος σπουδών της στοιχειώδους εκπαίδευσης υιοθετείται από όλο και περισσότερους ερευνητές. Μια τέτοια προσέγγιση των μαθηματικών υλοποιείται σ' εκείνο το χώρο που τα τελευταία χρόνια ακούει στο όνομα «πρώιμη άλγεβρα» και που όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου περιλαμβάνει δύο κεντρικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα: α) (1) γενίκευση, ή προσδιορισμός, έκφραση και δικαιολόγηση των μαθηματικών δομών, ιδιότητες και σχέσεις και (2) συλλογισμούς και ενέργειες βασισμένες στους τύπους των γενικεύσεων. Το πεδίο δράσης της έχει εστιάσει αφενός στη χρήση της αριθμητικής ως περιοχής για την έκφραση και τυποποίηση γενικεύσεων, αφετέρου στη γενίκευση αριθμητικών και γεωμετρικών patterns για περιγραφή συναρτησιακών σχέσεων.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι η έκφραση «μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα», ως αποτέλεσμα αντιμετώπισης της αριθμητικής και άλγεβρας ως δύο ξεχωριστών κόσμων με πολλούς μαθητές να μην εισέρχονται ποτέ στο χώρο της άλγεβρας, μέσα στην νέα αντίληψη της πρώιμης άλγεβρας φαίνεται να χάνει το νόημά της, όπως επίσης φαίνεται να χάνουν το νόημά τους και οι διαχωριστικές γραμμές.

Από τα προηγούμενα κρατάμε την εστίαση της πρώιμης άλγεβρας στην ανάπτυξη συναρτησιακών σχέσεων στην πορεία προς τη γενίκευση, στις δομές, στις ιδιότητες και σχέσεις, στους συλλογισμούς πάνω στους τύπους των γενικεύσεων με χρήση αριθμητικών και γεωμετρικών patterns. Από τις πέντε αλληλοσυσχετιζόμενες μορφές αλγεβρικού συλλογισμού που αναφέρει ο Kaput, κυρίως απομονώνουμε εκείνες που αφορούν στην «*άλγεβρα ως μελέτη των συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολών*» και στην «*άλγεβρα ως γενίκευση και τυποποίηση patterns, κυρίως, αλλά και άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική και ποσοτικό συλλογισμό*. Η δυνατότητα των μαθητών να ανταποκριθούν σ' αυτές τις μορφές αλγεβρικού συλλογισμού είναι το αντικείμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε στο υπόλοιπο μέρος αυτής της εργασίας. Θα προσπαθήσουμε να δούμε αν η στόχευση της πρώιμης άλγεβρας σε αυτού του είδους τον αλγεβρικό συλλογισμό, σε επίπεδο δημοτικού σχολείου, τεκμηριώνεται και κατά πόσο ερευνητικά. Το τελευταίο θα μας απασχολήσει στο τρίτο κεφάλαιο, αφού πρώτα, στο δεύτερο κεφάλαιο, γνωρίσουμε τα patterns.

1.9 Παραπομπές

[1] Τα Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics [NCTM, 1989] και οι Principles and Standards for School Mathematics [NCTM, 2000], συγκρότησαν συγκεκριμένους στόχους για τη μαθηματική κατανόηση στους βαθμούς K–12, ενώ πιο πρόσφατα, στα Focal Points (NCTM), προσδιορίζονται τα συγκεκριμένα θέματα στα οποία πρέπει να δοθεί έμφαση σε κάθε επίπεδο Pre K-8. Τέλος, το πρόσφατα δημιουργημένο National Mathematics Advisory Panel (NMAP, 2006) προσπαθεί να οργανώσει και ερμηνεύσει τα αποτελέσματα των ερευνητικών μελετών κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών για να καθοριστούν τα σημαντικά μαθηματικά που οδηγούν στην επιτυχία στην άλγεβρα, αυτά που είναι γνωστά για την εκμάθηση, τη διδασκαλία, και την αξιολόγηση, και τι οι δάσκαλοι πρέπει να ξέρουν και να είναι σε θέση να κάνουν. Στη μέση όλης αυτής της δραστηριότητας, η Μαθηματική Εταιρεία της Αμερικής, με χρηματοδότηση από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών, συγκάλεσε τους αντιπροσώπους των μαθηματικών και τις κοινότητες της εκπαίδευσης μαθηματικών όλου του φάσματος της εκπαίδευσης, για να χαρτογραφήσουν και να αξιολογήσουν τα συμπεράσματα των ερευνών για τη διδασκαλία της άλγεβρας, να προσδιορίσουν τις κοινές αρχές που μπορούν να χρησιμεύσουν ως τα πρότυπα για τη βελτίωση, και για να συστήσουν τις κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα. Αυτή η διάσκεψη έγινε το Νοέμβριο 2006. Περίπου 50 προσκεκλημένοι συμμετέχοντες χωρίστηκαν σε πέντε ομάδες εργασίας που αντιστοιχούν σε πέντε διαφορετικά επίπεδα διδασκαλίας της άλγεβρας: (1) πρώιμη άλγεβρα, (2) εισαγωγική άλγεβρα, (3) ενδιάμεση άλγεβρα, (4) άλγεβρα για μελλοντικούς δασκάλους, και (5) άλγεβρα κολλεγίου. Κάθε ομάδα επισκόπησε την έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία της άλγεβρας σε κάθε επίπεδο και έκανε προτάσεις για τις μελλοντικές κατευθύνσεις που θα μπορούσαν να βελτιώσουν αφενός τη βάση γνώσεων και αφετέρου την πραγματική, αληθινή διδασκαλία και εκμάθηση της άλγεβρας. Οι Blanton M., Schifter D., Inge V., Lofgren P., Willis C., Davis F., Confrey J. συγκρότησαν την ομάδα εργασίας της πρώιμης άλγεβρας. [In Katz J.V. (Eds.). Algebra Gateway to a Technological Future. pp. vii-viii].

[2] Στις Ηνωμένες Πολιτείες η ευθύνη για την εκπαίδευση είχε παραδοσιακά τοπικό χαρακτήρα, όπου τα προγράμματα σπουδών και οι στόχοι της εκπαίδευσης διαφοροποιούνταν από πολιτεία σε πολιτεία και από περιοχή σε περιοχή. Οι αποτυχίες όμως στα μαθηματικά των μαθητών των ΗΠΑ υποχρεώνουν τους φορείς να διαμορφώσουν ένα εθνικό όραμα του τύπου και του επιπέδου των μαθηματικών (και της επιστήμης γενικότερα) που πρέπει να προσφέρονται στους μαθητές τους. Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών (NCTM) προώθησε αυτή την προσπάθεια όταν το 1989 δημοσίευσε τα Εθνικά Στάνταρς της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (National Standards for Mathematics Education). Η δεύτερη έκδοση αυτών των Standards, αποκαλούμενη Principles και Standards για τα σχολικά μαθηματικά έγινε το 2000.

[3] Η Ιστορία της ομάδας πρώιμης άλγεβρας τυπικά ξεκινάει από το 1998. Τα μέλη της ομάδας της πρώιμης άλγεβρας (Early Algebra Group, EARG) συναντιούνται από το 1998. Πιο πρόσφατα, σε απάντηση πρόσκλησης από το International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), συγκρότησαν την ομάδα εργασίας της πρώιμης άλγεβρας (Early Algebra Working Group, EAWG), μια από τις οκτώ ομάδες στο 12ºICMI, το θέμα του οποίου ήταν «Το μέλλον της διδασκαλίας και μάθησης της άλγεβρας» και το οποίο διοργανώθηκε στη Μελβούρνη της Αυστραλίας το Δεκέμβριο του 2001. Στο τέλος της διάσκεψης δόθηκε μια έκθεση που συνόψισε τα αποτελέσματα των συζητήσεών τους και υπογράμμισε τα ακόλουθα σημεία:

1. Τι η πρώιμη άλγεβρα δεν είναι (δεν είναι η πρόωρη εισαγωγή στην τυποποιημένη άλγεβρα).
2. Ιστορική επισκόπηση (η διαφορετική προέλευση της αριθμητικής και της άλγεβρας).
3. Επισκόπηση της έρευνας στην πρώιμη άλγεβρα (από τη δεκαετία του '70 μέχρι σήμερα με παρουσιάσεις βιντεοσκοπημένων στιγμιότυπων από διάφορα ερευνητικά προγράμματα).

4. Επιπτώσεις αυτής της έρευνας για την άλγεβρα στα grades 6-14.
5. Έργο που πρέπει να γίνει: Ζητήματα έρευνας και τακτικής που χρειάζονται προσοχή.

[4] Η ιστορική ανάλυση δείχνει ότι για πολλούς αιώνες η άλγεβρα έμεινε πίσω μέσα σύγκριση με τη γεωμετρία και ότι η κατασκευή της συμβολικής γλώσσας ήταν πολύ αργή και δύσκολη. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η ιστορία του συμβολισμού στην άλγεβρα η οποία ακολούθησε σύμφωνα με τον Nesselman τρεις ευδιάκριτες περιόδους:
1 - **RHETORICAL PHASE**: μέχρι τον Διόφαντο στην Αλεξάνδρεια (250 μ.χ), στην οποία η φυσική γλώσσα χρησιμοποιείται αποκλειστικά, χωρίς προσφυγή σε οποιοδήποτε σημάδι.
2 - **SYNCOPATED PHASE**: από τον Διόφαντο μέχρι το τέλος του 16^{ου} αιώνα, στην οποία εισάγονται μερικές συντμήσεις για τον άγνωστο και τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται, αλλά οι υπολογισμοί εκτελούνται στη φυσική γλώσσα.
3 - **SYMBOLIC PHASE**: εισάγεται από τον Viète (1540-1603), στην οποία τα γράμματα χρησιμοποιούνται για όλες τις ποσότητες και τα σημάδια για να αναπαραστήσουν τις διαδικασίες, η συμβολική γλώσσα χρησιμοποιείται όχι μόνο για την επίλυση εξισώσεων αλλά και για την έκφραση γενικών κανόνων (Van Amerom, 2003).

[5] Χαρακτηρίζουν δε ως σχεσιακή τη σκέψη εκείνη που εξετάζει μαθηματικές εκφράσεις και εξισώσεις στην ολότητά τους κι όχι ως διαδικασίες που πρέπει να εκτελεστούν βήμα- βήμα. Η σχεσιακή σκέψη περιλαμβάνει τη χρηση θεμελιωδών ιδιοτήτων του αριθμού και των πράξεων για το μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων κι όχι απλά τον υπολογισμό τους.

[6] Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι ερευνητές του ίδρύματος Freudenthal (Gravemeijer, 1993; Klein, Beishuizen & Treffers, 1998) έχουν δείξει ότι η αποσιώπηση-απόκρυψη ενός μέτρου (χρησιμοποιώντας μια κενή γραμμή αριθμού) βοηθά τους μαθητές στη λήψη ενός πιο ενεργού ρόλου στην αναπαράσταση προβλημάτων. Η κενή γραμμή αριθμού μπορεί να «φιλοξενήσει» αριθμούς (1 , 3, 2.4), μέτρα ποσότήτων (4 ft , 3 ft), και ποσότητες χωρίς μέτρα (A, B) σε διάφορους συνδυασμούς. Υπό αυτήν τη μορφή, η μεταβλητή γραμμή αριθμού μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο για την εισαγωγή των αλγεβρικών εννοιών καθώς τα παιδιά ασχολούνται, συγχρόνως, με τις αριθμητικές διαδικασίες. Είναι ιδιαίτερα κατάλληλο στις προσθετικές συναρτήσεις.(στο Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D., 2006)

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφάλαιο 2: Patterns

2.1 Σε αναζήτηση ορισμού για τα patterns

Τα patterns παίζουν κύριο ρόλο στην επίλυση προβλημάτων σε όλους τους τομείς της ζωής. Οι ψυχολόγοι αναλύουν patterns της ανθρώπινης συμπεριφοράς, οι μετεωρολόγοι μελετούν patterns στον καιρό, οι αστρονόμοι αναζητούν patterns στις κινήσεις των αστεριών και των γαλαξιών κ.ο.κ. Η εύρεση patterns είναι τόσο χρήσιμη στρατηγική στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά, που κάποιοι τα έχουν αποκαλέσει «η τέχνη των μαθηματικών». Η εύρεση ενός pattern απαιτεί σύγκριση και αντιπαραβολή. Σύγκριση για τον εντοπισμό σταθερών χαρακτηριστικών και αντιπαραβολή για τον εντοπισμό εκείνων που μεταβάλλονται (Bennet & Nelson, 2001). Πολλοί υποστηρίζουν ότι τα patterns είναι ο θεμέλιος λίθος των μαθηματικών και κατ' άλλους τα μαθηματικά είναι «η επιστήμη των patterns». Η Τσικοπούλου (2007) αναφέρει: «*Αποκαλύπτοντας κρυμμένα patterns τα μαθηματικά μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα τον φορτωμένο με πληροφορία κόσμο στον οποίο ζούμε*».

Η απόδοση του όρου pattern στην ελληνική γλώσσα δεν είναι εύκολη καθώς αν ανατρέξουμε σε οποιοδήποτε λεξικό υπάρχει μια πλειάδα ερμηνειών, πράγμα που περιπλέκει τα πράγματα. Αν και στην ελληνική πραγματικότητα έχει υιοθετηθεί ο επίσης ξενικός όρος μοτίβο, η λέξη pattern μπορεί να ερμηνευθεί και ως πρότυπο, υπόδειγμα, τύπος, σχέδιο, ίχνος, πατρόν, ψηφιδωτό, παράσταση, μοντέλο, δομή, διάταξη κ.λ.π. Η απάντηση, λοιπόν στο ερώτημα «Τι είναι ένα pattern;» δεν είναι τόσο απλή. Ωστόσο, ένας ορισμός του pattern θα ήταν χρήσιμος καθώς θα διευκόλυνε τη διαδικασία της διάκρισης, δηλαδή, θα μας βοηθούσε να διακρίνουμε τα patterns από μη - patterns και να σχηματίσουμε έτσι τη βάση ενός μοντέλου ταξινόμησης. «*Ο ορισμός μπορεί έτσι να ειδωθεί ως ένας τρόπος να προσδώσουμε ακρίβεια στα όρια μιας έννοιας και να δηλώσει ρητά τη σχέση της με άλλες έννοιες*» (Skemp στο Liljedahl, 2004). Ο ορισμός των άρτιων αριθμών, για παράδειγμα, είναι ότι μας βοηθά να τους διακρίνουμε από τους περιττούς.

Ο Skemp (1971, στο Liljedahl, 2004) διακρίνοντας τις έννοιες σε πρωτεύουσες (primary) και δευτερεύουσες (secondary) αναφέρει ότι μια πρωτεύουσα έννοια - όπως το κόκκινο χρώμα - μπορεί να αναδυθεί μέσα από ένα σύνολο κατάλληλων παραδειγμάτων, όπου «*η μεταβλητότητα των παραδειγμάτων και η*

σταθερότητα της έννοιας μέσα στα παραδείγματα θα αναγκάσουν την αμετάβλητη ιδιότητα να προκύψει και να συνδεθεί με την έννοια. Έτσι, για το παράδειγμα της έννοιας του κόκκινου, ένα σύνολο αντικειμένων που είναι κόκκινα θα συγκεντρώνονταν μαζί ως υποδείγματα του χρώματος». Οι δευτερεύουσα έννοιες, όμως, εναλλακτικά, είναι κάποιες που μπορούν να εξηγηθούν μόνο με λέξεις ή σύμβολα, δηλαδή ορισμοί. Η έννοια του πρώτου αριθμού είναι μια τέτοια δευτερεύουσα έννοια. Ο Skemp αναγνωρίζει, εντούτοις, ότι «*στον ορισμό και την ονομασία των εννοιών το εύρος του νοήματός τους μπορεί να περιοριστεί*». Για παράδειγμα, ο ορισμός μιας καρέκλας ως ένα κάθισμα με τέσσερα πόδια κι ένα οπίσθιο στήριγμα, αποκλείει πράγματα που σαφώς είναι καρέκλες (π. χ. μια κουνιστή καρέκλα). Το ίδιο πράγμα, κατά τον Skemp, ισχύει για την έννοια του pattern. Ένας ορισμός του pattern μπορεί να λειτουργήσει περιοριστικά και να αποκλείσει πράγματα που διαφορετικά θα συμπεριλαμβάναμε στο σύνολο των patterns. Κάθε λέξη που θα χρησιμοποιούνταν για την απόδοση ενός τέτοιου ορισμού, π.χ. ακόλουθος (sequenced), τακτικός, διαταγμένος, προβλέψιμος, κανονικός κ.λπ.,. είτε περιορίζει το εύρος των πραγμάτων που είναι patterns ή δεν παρέχει τίποτα περισσότερο ικανό να συλλάβει την ουσία του pattern απ' ότι η λέξη pattern είναι» (Skemp, 1971, στο Liljedahl, 2004).

Με βάση την παραπάνω συζήτηση, τα patterns εμφανίζονται ως να είναι μια αρχική έννοια και έτσι περιγράψιμα (όχι οριζόμενα) από το σύνολο που ανήκουν. Εντούτοις, υπάρχουν σύνολα patterns που ενεργούν ως δευτερεύουσες έννοιες δεδομένου ότι είναι ορισμένα με σαφήνεια. Οι κλίμακες, παραδείγματος χάριν, είναι μια ορισμένη με σαφήνεια μορφή ακουστικού pattern και τα ψηφιδωτά είναι μια ορισμένη με σαφήνεια μορφή δισδιάστατων patterns. (Liljedahl, 2004).

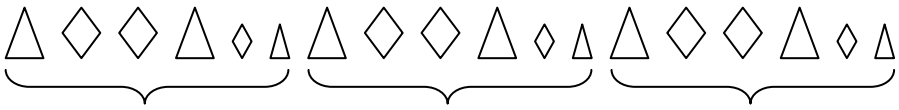
Την δυσκολία ορισμού των patterns ακόμα και στα μαθηματικά επισημαίνει κι ο Orton (1999) στον πρόλογο του βιβλίου: «Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics». Αναφέρει ότι η μια από τις δυσκολίες ορισμού έχει να κάνει με το γεγονός ότι η λέξη αυτή έχει μια ποικιλία από διαφορετικά νοήματα. Χαρακτηριστικά λέει ότι: *«Από τη μια μεριά τα patterns μπορούν απλά να χρησιμοποιηθούν σε σχέση με μια συγκεκριμένη διάταξη ή διευθέτηση μορφών, χρωμάτων ή ήχων με όχι προφανή κανονικότητα. Πράγματι, μερικές φορές η διευθέτηση μπορεί να σχηματίσει μια αναγνωρίσιμη αναπαράσταση ή εικόνα. Απ' την άλλη μεριά, μπορεί να απαιτηθεί η διευθέτηση να έχει κάποιο είδος προφανούς κανονικότητας ίσως μέσω συμμετρίας ή επανάληψης» (σελ. vii)*

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής η δυσκολία ορισμού του pattern. Ωστόσο ένας ικανοποιητικός «ορισμός» αναφέρεται από τις Τζεκάκη & Κούλελη (2007): *«Στο χώρο των Μαθηματικών, πρότυπο αποτελεί ένα σύνολο από μορφικά, γεωμετρικά ή μετρικά χαρακτηριστικά που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων»* (σελ.269).

Ενώ η ευρύτητα του όρου δυσκολεύει την απόδοση ενός γενικού ορισμού, ωστόσο στην εκπαιδευτική διαδικασία τα πράγματα ως ένα βαθμό απλουστεύονται, και αρκετά διασαφηνιστικές και ευρείας κάλυψης προσεγγίσεις του ορισμού των διαφόρων ειδών patterns που συναντώνται στις αίθουσες διδασκαλίας, αλλά και στις ερευνητικές μελέτες, όπως για παράδειγμα τα επαναλαμβανόμενα patterns, είναι εν μέρει δυνατοί. Τα είδη των patterns θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

2.2 Επαναλαμβανόμενα patterns

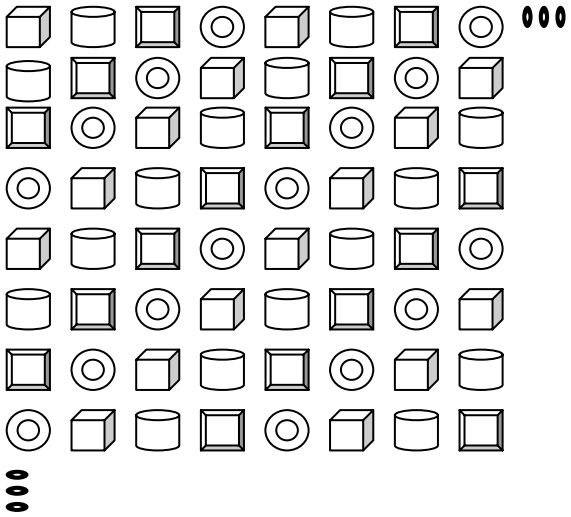
Η επόμενη λεκτική απόδοση, με αρκετή σαφήνεια, αποδίδει το «τι είναι ένα επαναλαμβανόμενο pattern» και ως εκ τούτου μπορεί να λειτουργήσει ως ορισμός. Τα επαναλαμβανόμενα patterns είναι patterns με ένα αναγνωρίσιμο, επαναλαμβανόμενο κύκλο στοιχείων αναφερόμενο ως «μονάδα επανάληψης». Για παράδειγμα το ΑΒΓΑΒΓΑΒΓ…μπορεί να ειδωθεί ως ένα επαναλαμβανόμενο γραμμικό pattern με τρία στοιχεία και ένα κύκλο μήκους 3, ενώ το ΑΒΓαβ ΑΒΓαβ ΑΒΓαβ… μπορεί να ειδωθεί ως ένα περισσότερο σύνθετο γραμμικά επαναλαμβανόμενο pattern με 3 στοιχεία και ένα κύκλο μήκους 5 στο οποίο όχι μόνο τα γράμματα, αλλά επίσης και το μέγεθός τους ποικίλει. Διαφοροποιώντας μερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των στοιχείων όπως μέγεθος, χρώμα, προσανατολισμό κλπ, ενώ κρατάμε σταθερά κάποια άλλα γνωρίσματα προσθέτουμε συνθετότητα σε ένα γραμμικά επαναλαμβανόμενο pattern (Threlfall, 1999). Για παράδειγμα, στο ακόλουθο γραμμικά επαναλαμβανόμενο pattern μ' ένα κύκλο μήκους 6, υπάρχουν δύο διαφορετικά σχήματα διαφορετικών διαστάσεων, γεγονός που αυξάνει την συνθετότητα του.



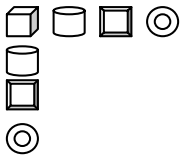
Ένα επαναλαμβανόμενο pattern έχει μια κυκλική δομή που μπορεί να παραχθεί από την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή ενός μικρότερου τμήματος του

pattern, της μονάδας επανάληψης, η οποία με άλλα λόγια μπορεί να καθοριστεί σαν το μικρότερο υποσύνολο των στοιχείων που μπορεί να παραγάγει το pattern μέσω της διαδοχικής εφαρμογής του. Η υποβόσκουσα αρχή των επαναλαμβανόμενων patterns είναι η κυκλική φύση τους, καθώς, δοθέντος ενός επαναλαμβανόμενου pattern με μια μονάδα επανάληψης μήκους ν, υπάρχει ταύτιση μεταξύ κάθε στοιχείου στο pattern και ενός από τα πρώτα ν στοιχεία, αλλά και ταύτιση ανάμεσα σε κάθε στοιχείο του pattern και του στοιχείου που βρίσκεται ν θέσεις πριν από αυτό.

Τα επαναλαμβανόμενα patterns θεωρούνται κατάλληλα για μαθητές του νηπιαγωγείου και των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου, διότι η κυκλική φύση τους προσιδιάζει στις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών. Για παράδειγμα η χρήση χειρονομιών που επαναλαμβάνονται διαδοχικά σε θεατρικά παιχνίδια στα οποία συμμετέχουν από πολύ νωρίς, η απαγγελία των ημερών της εβδομάδας ή των μηνών του έτους είναι οικείες καταστάσεις σε όλα σχεδόν τα παιδιά και ως εκ τούτου τα επαναλαμβανόμενα patterns συνάδουν με την εμπειρία τους.



Αποτελείται από ένα κύκλο 4 στοιχείων σε δύο διαστάσεις:



Σχ.1

Πέραν όμως των γραμμικών επαναλαμβανόμενων patterns, υπάρχουν και δύο διαστάσεων επαναλαμβανόμενα patterns με τα ίδια δομικά χαρακτηριστικά, όπως αυτά των γραμμικών, δηλαδή διδιάστατα patterns συγκροτούμενα από την διαδοχική εφαρμογή μιας μονάδας επανάληψης (σχ 1).

Σε ότι ακολουθεί θα αναφερόμαστε, χωρίς να το αναφέρουμε, σε γραμμικά επαναλαμβανόμενα patterns.

2.2.1 Γενική θεώρηση του ρόλου των επαναλαμβανόμενων patterns στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Οι απόψεις για τη χρησιμότητα των επαναλαμβανόμενων patterns ποικίλουν. Κάποιες σχετικά συγκρατημένες απόψεις τα βλέπουν ως εργαλεία ανάπτυξης της κανονικότητας και διαδοχής. Άλλοι συγγραφείς έχουν πιο φιλόδοξες και πιο σαφείς απόψεις για την αξία της εργασίας με επαναλαμβανόμενα patterns σε δύο ξεχωριστούς δρόμους: πρώτον προτείνοντας πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδασκαλία και δεύτερον επισημαίνοντας τη σημασία που έχει η μάθησή τους στις μελλοντικές εργασίες τους στα μαθηματικά (Threlfall, 1999). Ο Threlfall αναφέρει ότι κάποιοι συγγραφείς τα θεωρούν ως μια χρήσιμη βάση στη διδασκαλία άλλων θεμάτων και στη νοηματοδότηση καινούργιων ιδεών, ανασύροντας μέσω αυτών χρήσιμες πλευρές της εμπειρίας. Κατ' άλλους (Liebeck,1984, στο Threlfall, 1999) η αναζήτηση σ' ένα επαναλαμβανόμενο pattern του «τι ακολουθεί μετά», δηλαδή ποιο στοιχείο ακολουθεί, αποτελεί ένα προπομπό στη χρήση της σύγκρισης. Επίσης, η ενασχόληση με τα επαναλαμβανόμενα patterns δεν αναπτύσσει τις ιδέες της τάξης, αλλά η τάξη μπορεί να ανασυρθεί μέσα από τις εμπειρίες. Άλλοι συγγραφείς θεωρούν την εργασία με τα patterns πολύτιμη, διότι αναπτύσσουν ένα τρόπο σκέψης που οδηγεί σε ανώτερες ιδέες των μαθηματικών και από αυτή την άποψη επιβάλλεται η συστηματική κι όχι αποσπασματική ενασχόληση των μαθητών μ' αυτά. Μέσα σ' αυτά τα πλαίσια κινείται και η άποψη των Zazkis & Liljedahl (2002) οι οποίοι αναφερόμενοι στο ακόλουθο πρόβλημα,

> «Φαντάσου ένα ξύλινο τρένο του οποίου το πρώτο βαγόνι είναι κόκκινο, το δεύτερο μπλε, το τρίτο κίτρινο, το τέταρτο είναι κόκκινο, το πέμπτο είναι μπλε, το έκτο είναι κίτρινο και το ίδιο pattern συνεχίζεται για όλα τα βαγόνια. Ποιο είναι το χρώμα του εκατοστού βαγονιού; Αν το τρένο έχει 200 βαγόνια, ποιος είναι ο αριθμός του τελευταίου κίτρινου βαγονιού;»

σχολιάζουν:

«Ακόμα και πολύ μικροί μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε αυτή τη δραστηριότητα συνέχισης αυτού του pattern. Μπορούν να φτιάξουν ένα τρένο και να χρωματίσουν τα βαγόνια του. Στις μικρές ηλικίες η συνέχιση του pattern μπορεί να βασιστεί στην παρατήρηση της επανάληψης, δηλαδή στην ικανότητα συσχέτισης στοιχείων με γειτονικά στοιχεία (όπως το μπλε μετά το κόκκινο, το κόκκινο μετά το

κίτρινο κ.ο.κ.) καθώς επίσης και με μια ρυθμική προσέγγιση απομνημονεύοντας τη μονάδα επανάληψης.

Η εργασία με τα pattern βοηθάει στην ανάπτυξη της ικανότητας για μαθηματικό συλλογισμό που είναι σπουδαίος για τη μάθηση-ως πλαίσιο για γενίκευση, ως ένα εννοιολογικό σταθερό βήμα στην άλγεβρα, ως πλαίσιο για αναγνώριση, εικασίες και αναζήτηση κανόνων (Threlfall, 1999). Οπωσδήποτε, για τα παραπάνω απαιτείται να αναπτυχθεί η αντίληψη της μονάδας επανάληψης σ' ένα επαναλαμβανόμενο pattern. Μόνο τότε μπορεί κάποιος να ασχοληθεί με το ερώτημα: «Ποιο είναι το χρώμα του εκατοστού βαγονιού;». Εμείς περαιτέρω προτείνουμε ότι τα επαναλαμβανόμενα patterns παρέχουν ένα όχημα για κατεύθυνση της προσοχής των παιδιών στην πολλαπλασιαστική δομή των φυσικών αριθμών, εξασφαλίζοντας έτσι μια πύλη για την εισαγωγή στις έννοιες της Θεωρίας Αριθμών.

Το ερώτημα: 'Ποιο είναι το χρώμα του εκατοστού αυτοκινήτου;', δεν φαίνεται να είναι απλό για μικρά παιδιά. Ας σκεφτούμε, όμως, όπως μας έμαθε ο Polya, ένα όμοιο αλλά απλούστερο πρόβλημα: 'Ποιο είναι το χρώμα του 15^{ου} βαγονιού;'. Ενώ οι μικροί μαθητές θα παίζουν με την ακολουθία, οι μεγαλύτεροι μπορεί να αντιληφθούν τη μονάδα επανάληψης. Ένας άλλος τρόπος για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε ένα τρένο με μόνο δύο χρώματα. Αυτός είναι μια ωραία ευκαιρία, και για μερικούς μαθητές η πρώτη, ***να παρουσιάσουμε τους άρτιους και περιττούς αριθμούς. Η επέκταση της μονάδας επανάληψης, δηλαδή του αριθμού των χρωμάτων του επαναλαμβανόμενου pattern, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή ή την καλλιέργεια της έννοιας των πολλαπλασίων ενός αριθμού στο δημοτικό σχολείο.***

Τώρα ας φανταστούμε το επαναλαμβανόμενο pattern που δημιουργείται από ένα τρένο με 1000 βαγόνια 7 διαφορετικών χρωμάτων (κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, μπλε, καφέ, άσπρο), κι ας θεωρήσουμε το χρώμα του 800^{ου} βαγονιού. ***Στρατηγικές αντιμετώπισης τέτοιων αριθμητικών patterns που αναπαριστούν γραμμικά επαναλαμβανόμενα patterns, βασίζονται σε εισαγωγικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών, όπως παράγοντες, πολλαπλάσια και διαιρετότητα.»*** (Zazkis & Liljedahl, 2002, σελ. 213).

Σύμφωνα με τον Owen (στο Threlfall, 1999), τα επαναλαμβανόμενα patterns αποτελούν ένα εργαλείο για την ερμηνεία των συμβόλων κι ότι η μεγάλη οικειότητα των παιδιών με κυκλικές δομές σε πραγματικά γεγονότα τους δίνει το πλεονέκτημα της κατανόησης των επαναλαμβανόμενων patterns και μέσω αυτών

προσφέρεται στους μαθητές πρόσβαση σε στοιχεία της μαθηματικής σκέψης που δεν είναι διαθέσιμα μέσω άλλων μέσων στα μαθηματικά. Πηγαίνοντας ακόμα παραπέρα στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της Αγγλίας προτείνεται ότι: «*Η ενασχόληση με επαναλαμβανόμενα patterns βοηθάει στην ανάπτυξη εκτίμησης-αναγνώρισης-αξιολόγησης της δύναμης της γενίκευσης*» (στο Threlfall, 1999) .

Ο Threlfall (1999), αναφερόμενος στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της Αγγλίας όπου επισημαίνεται ότι: «η επινόηση ενός επαναλαμβανόμενου pattern απαιτεί τη δημιουργία ενός κανόνα και της συνεπούς εφαρμογής του», λέει ότι τα παιδιά μπορεί να προτείνουν διαφορετικές ιστορίες όσον αφορά τη δημιουργία ενός επαναλαμβανόμενου pattern. Για παράδειγμα, λέει ότι «*όταν τα παιδιά κατασκευάζουν patterns, μπορεί να δεις να τοποθετούν σε μια γραμμή πασσάλους από δύο ή περισσότερα κουτιά, καθένα από τα οποία περιέχει πασσάλους διαφορετικού χρώματος, παίρνοντας ένα πάσσαλο πρώτα από το ένα κουτί κι έπειτα από το άλλο, σ' ένα κύκλο ο οποίος παράγει ένα επαναλαμβανόμενο pattern με ένα αυθόρμητο-ασυναίσθητο τρόπο, όπου δεν αποδεικνύεται η δημιουργία και χρήση κάποιου κανόνα*» (σελ. 21).

Οι Greeno & Simon (1974 στο Threlfall, 1999) έχουν μια διαφορετική εκδοχή σχετικά με την παραγωγή επαναλαμβανόμενων patterns. Κατά τη διαδικασία, λένε, πρέπει να συγκρατούνται πληροφορίες από προηγούμενες εισαγωγές-δεδομένα ενώ εμπλέκεται και ένας μηχανισμός κράτησης θέσης στοιχείων για διαδοχικά στοιχεία. Αυτό το στοιχείο είναι κοινό σε ακολουθίες επαναλαμβανόμενων στοιχείων και αριθμητικών ακολουθιών. Επίσης αναφέρουν διαφορετικές προτάσεις παραγωγής αριθμητικών ακολουθιών, οι οποίες είναι τα ισοδύναμα των ακόλουθων τριών τρόπων παραγωγής μιας επαναλαμβανόμενης ακολουθίας:

1. Μια διαδικασία κατά την οποία κάθε στοιχείο συσχετίζεται με το διαδοχικό του μέσω απομνημόνευσης όλων των σχέσεων, και στη συνέχεια κατασκευάζεται η ακολουθία, με την κατασκευή «ζευγών μοτίβων δράσης». Για παράδειγμα για το pattern ACABACABA … λέει: Αν αυτό είναι A και το προηγούμενο ήταν C, τώρα πρέπει να είναι B κ.ο.κ. **2**. Απομνημόνευση της μονάδας επανάληψης, για το παράδειγμά μας ACAB, η οποία επαναλαμβάνεται κάθε φορά. **3.** Ρυθμική προσέγγιση ή ένα σύστημα μέτρησης π.χ. απαγγελία με έμφαση, μέσω της οποίας το άτομο γνωρίζει τη θέση που έχει φτάσει στην ακολουθία απ' την «αξία» που έχει. Έτσι, για το παράδειγμά μας, κάποιος μπορεί να υιοθετήσει ένα ρυθμό κινούμενος

από τα αριστερά προς τα δεξιά, με C απ' τα αριστερά, B από τα δεξιά και A «όταν κινείται».

Από τους παραπάνω τρόπους, αναφέρουν ότι, μόνο ο 2 μπορεί ίσως να θεωρηθεί ως διαδικασία για την παραγωγή και εφαρμογή ενός κανόνα. Ο πρώτος έχει ένα σύνολο από όρους που μπορεί να θεωρηθούν κανόνες, αλλά όχι μόνο ένα κανόνα να εφαρμοστεί και η τρίτη ρυθμική προσέγγιση δεν εξαρτάται καθόλου από κανόνες.

Επίσης οι Greeno & Simon προτείνουν ότι η δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns από τα παιδιά, μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της συμπλήρωσης κάποιες φορές. Μια ακολουθία από χρωματιστά σχέδια στον πίνακα μπορεί να γίνει όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

Πρώτα	R	R	R	R
Έπειτα	RB	RB	RB	RB
Έπειτα	RBG	RBG	RBG	RBG
Έπειτα	RBGG	RBGG	RBGG	RBGG
Τελικά	**RBGGR**	**RBGGR**	**RBGGR**	**RBGGR**

Δηλαδή, με άλλα λόγια, η δημιουργία ενός κανόνα και η συνεπής εφαρμογή του μπορεί να είναι το επιθυμητό, αλλά δεν είναι το παν που μπορεί να συμβεί και η ύπαρξη ενός επαναλαμβανόμενου pattern ως προϊόν εργασίας των παιδιών δεν αποτελεί απαραίτητα απόδειξη ότι έχει δημιουργηθεί και εφαρμοστεί ένας κανόνας.

Σύμφωνα με τον Threlfall δύο παράγοντες εμπλέκονται στην ένασχόληση των παιδιών με τα επαναλαμβανόμενα patterns, ο βαθμός συνθετότητας και το είδος της κατανόησής τους από τα παιδιά. Οι δύο αυτοί παράγοντες φαίνεται να είναι σχετικά ανεξάρτητοι. Δηλαδή, υπάρχουν παιδιά που ακολουθούν μια ρυθμική προσέγγιση και στα πιο σύνθετα patterns και άλλα που ακόμα και στα πιο απλά βλέπουν τη μονάδα που επαναλαμβάνεται. Το παιδαγωγικό ερώτημα που προκύπτει είναι επομένως ποιος από τους δύο παράγοντες έχει μεγαλύτερη βαρύτητα. Δηλαδή, στο σχολείο πρέπει να δίνεται βαρύτητα στην αυξανόμενη συνθετότητα των patterns ανεξαρτήτως του τρόπου που τα παιδιά τα επιλύουν ή πρέπει να δίνεται βαρύτητα στη

προσπάθεια να δουν τα παιδιά τη μονάδα που επαναλαμβάνεται χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη συνθετότητα των patterns;

Στη προσπαθειά του να απαντήσει, ο Threlfall, υιοθετεί την άποψη ότι η ενασχόληση με τα επαναλαμβανόμενα patterns συνιστά ένα πλαίσιο για την εισαγωγή στη γενίκευση. Επομένως η σπουδαιότητα του να αντιληφθεί κάποιος στα επαναλαμβανόμενα patterns την μονάδα επανάληψης έχει να κάνει με το γεγονός ότι μπορεί να είναι ένα πρώτο βήμα για την εισαγωγή στη γενίκευση. Στα πλαίσια των επαναλαμβανόμενων patterns, το να δει κάποιος τη μονάδα επανάληψης κάνει το pattern να αλλάξει εύκολα και με ένα ελεγχόμενο τρόπο, δηλαδή επιδέξια χειριζόμενο. Επίσης, βλέποντας ο Threlfall το pattern ως «εννοιοδιαδικασία»[procept] (Gray και Tall, 1994), χαρακτηρίζει τη ρυθμική προσέγγιση των ανεξαρτήτων πολυπλοκότητας επαναλαμβανομένων patterns, όπως και κάθε άλλη προσέγγιση πέραν της εννοιο-διαδικαστικής, που την ταυτίζει με την ικανότητα αντίληψης της επαναλαμβανόμενης μονάδας, ως φτωχές διαδικαστικές προσεγγίσεις χωρίς κάποια ιδιαίτερη προσφορά. Δηλαδή, τελικά αξία έχει το να αντιληφθεί κάποιος το pattern ως εννοιοδιαδικασία όπου αναδεικνύονται οι έννοιες της ακολουθίας ή κανονικότητας και η αναγνώριση ενός γενικού κανόνα για αριθμούς ή μορφές. Με αυτό τον τρόπο αναφέρει ο Threlfall ότι *«η δημιουργία ενός κανόνα και η συνεπής εφαρμογή του που προωθεί το NCC (National Curriculum Council) δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την επινόηση ενός pattern, ωστόσο αποτελεί τον πιο ωφέλιμο τρόπο».*

Προς αυτή την κατεύθυνση μπορούν να συμβάλλουν δραστηριότητες όπως η ακόλουθη. Με ένα επαναλαμβανόμενο pattern σαν αυτό του παρακάτω σχήματος πρέπει να γίνουν ερωτήσεις του τύπου: «Τι χρώμα θα είναι το 25^{ο} τετράγωνο; Ποια θα είναι η θέση του 13^{ου} κόκκινου τετραγώνου; Αν το pattern έχει 32 τετράγωνα πόσα τετράγωνα από κάθε χρώμα υπάρχουν;»

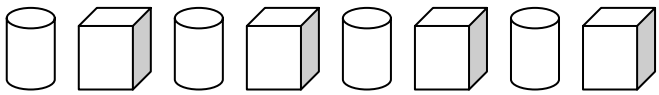
Από τέτοιου είδους δραστηριότητες, όπου απαιτείται ο μαθητής να αντιληφθεί την αποτελούμενη από 5 στοιχεία μονάδα επανάληψης, αποκλείονται μαθητές με διαφορετικές προσεγγίσεις (π.χ. ρυθμική) των patterns. Τέτοιες δραστηριότητες μπορούν να ειδωθούν ως πρώιμα παραδείγματα διαδικασιών απ' τις οποίες η άλγεβρα μπορεί να προκύψει ως αφαίρεση από περισσότερο συγκεκριμένες

καταστάσεις, όπως σχέσεις και patterns με αριθμούς (Orton, 1992 στο Threlfall, 1999).

Συμπερασματικά η ενασχόληση των μαθητών με τα επαναλαμβανόμενα patterns πρέπει να εξελιχθεί από μια διαδικαστική προσέγγιση, που έχει να κάνει με την αναγνώριση και δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns, σε μια εννοιοδιαδικαστική προσέγγιση που θα στοχεύει στο να δει ο μαθητής τη μονάδα που επαναλαμβάνεται και την οποία μπορεί να επεξεργαστεί και σαν μέρος του pattern αλλά και σαν σύνθεση μερών (Threlfall, 1999).

Η εργασία με απλά επαναλαμβανόμενα patterns είναι ένα χρήσιμος και πρακτικός τρόπος για εργασία σε άλλες περιοχές των μαθηματικών. Όπως προαναφέραμε κάποιοι συγγραφείς τα θεωρούν ως μια χρήσιμη βάση στη διδασκαλία άλλων θεμάτων και στη νοηματοδότηση καινούργιων ιδεών, ανασύροντας μέσα από αυτά χρήσιμες πλευρές της εμπειρίας. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά αυτών των απόψεων.

Ταιριάζοντας τα σχήματα ή τα αντικείμενα σε ένα γραμμικό επαναλαμβανόμενο pattern με αριθμούς που προσδιορίζουν τη θέση τους, μας βοηθάει να εξερευνήσουμε μερικές από τις ιδιότητες του pattern. Οι αριθμοί θέσης στο απλούστερο pattern, με έναν κύκλο μήκους 2, μας δίνει τους άρτιους και περιττούς αριθμούς. Όλοι οι αριθμοί θέσης των κυλίνδρων είναι περιττοί ενώ για τους κύβους είναι άρτιοι.



1 2 3 4 5 6 7 8 ….

Υπάρχει επίσης μια σαφής σχέση μεταξύ του μήκους του κύκλου (μονάδα επανάληψης) ενός επαναλαμβανόμενου pattern και του πίνακα της προπαίδειας. Παραδείγματος χάριν, το ακόλουθο pattern έχει έναν κύκλο μήκους 4:

1 2 3 4 5 6 7 8 ....

Αν δούμε τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα τρίγωνα ο αριθμός θέσης του πρώτου είναι 4, του δεύτερου 8, του τρίτου 12 κ.ο.κ. Αυτό δίνει ένα χρήσιμο οπτικό πλαίσιο για τους μαθητές να σκεφτούν την προπαίδεια του 4. «Ποιος θα είναι ο αριθμός θέσης του 15^{ου} τριγώνου; Ή του εκατοστού ή χιλιοστού τρίγωνου;» Σε

αυτό το pattern το τρίγωνο, για παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος αλγεβρικής μεταβλητής, η οποία έχει πάντα τιμή που μπορεί να εκφραστεί ως 4n. Το 4 είναι το μήκος του κύκλου, της μονάδας επανάληψης - κύκλος, τετράγωνο, εξάγωνο, τρίγωνο. Το η είναι ο αριθμός των κύκλων-επαναλήψεων. Επίσης το εξάγωνο είναι κάποια μεταβλητή που η τιμή της μπορεί να εκφραστεί ως 4n – 1, το τετράγωνο είναι μια διαφορετική μεταβλητή της οποίας η τιμή είναι 4n - 2 και τα λοιπά. Ανεξάρτητα του αν χρησιμοποιούν ή όχι τον τυπικό συμβολισμό για να γράψουν τις εκφράσεις, οι μαθητές όταν εργάζονται με προβλήματα σαν κι αυτά σκέφτονται αλγεβρικά.

Επίσης τα προβλήματα που βασίζονται στα ημερολόγια μπορούν να προκαλέσουν παρόμοια ερωτήματα. Οι ημέρες της εβδομάδας αποτελούν ένα επαναλαμβανόμενο pattern με έναν κύκλο μήκους 7, που όλοι χρησιμοποιούμε. Ένα άλλο θέμα που μπορεί να διερευνηθεί μέσω των επαναλαμβανόμενων patterns είναι οι λόγοι. Η βασική έννοια της αναλογίας μπορεί να εισαχθεί μέσα από τη μελέτη επαναλαμβανόμενων patterns. Παραδείγματος χάριν, το ακόλουθο pattern έχει έναν κύκλο (μονάδα επανάληψης) μήκους 5:

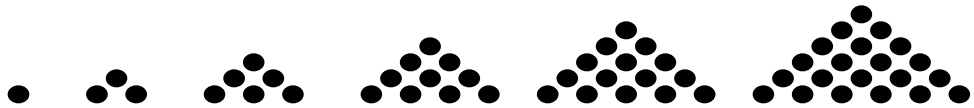
Τρία από τα πρώτα 5 σχήματα είναι κύκλοι, 6 από τα πρώτα 10 σχήματα είναι κύκλοι, 9 από τα πρώτα 15 σχήματα είναι κύκλοι κ.ο.κ. Ανεξάρτητα από το πόσες φορές επαναλαμβάνεται ο κύκλος (μονάδα επανάληψης), ο λόγος των κύκλων προς όλα τα σχήματα θα είναι ο ίδιος. Δηλαδή οι λόγοι 3/5, 6/10, 9/15 είναι ίσοι.

Μαθητές που τους χαρακτηρίζει η οπτική σκέψη, δηλαδή μαθητές που σκέφτονται περισσότερο εύκολα με μοντέλα και εικόνες απ' ό,τι με λέξεις και σύμβολα, χρειάζονται μια νοητική εικόνα στην οποία να μπορούν να αντιστοιχίσουν τη σκέψη τους για αριθμούς. Βρίσκοντας τρόπους να συνδεθούν τα επαναλαμβανόμενα patterns με αριθμητικές και αλγεβρικές έννοιες μπορεί να τους βοηθήσουμε να αναπτύξουν την κατανόηση και των δύο. Τα επαναλαμβανόμενα patterns αποτελούν μια πλούσια πηγή δεδομένων απ’ την οποία οι μαθητές μπορούν να αντλήσουν στοιχεία με τη βοήθεια των δασκάλων τους και να βασιστούν για την κατανόηση μιας σειράς εννοιών.

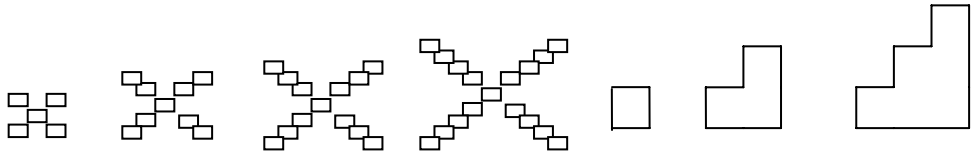
2.3 Αναπτυσσόμενα patterns

Όπως οι Orton , Orton & Roper (1999) αναφέρουν:

«Υπάρχουν πολλοί τρόποι να θέσεις ερωτήματα σχετικά με τα patterns μέσα σε πλαίσια που μπορούν να περιγραφούν ως εικονιστικά ή πρακτικά. Τέτοια πλαίσια περιλαμβάνουν patterns με τελείες (dot patterns), με μάρκες (tiling patterns) και patterns με σπιρτόξυλα (matchstick patterns) (Σχ.1)…» (σελ. 121).



Dot patterns



Tiling patterns *Matchstick patterns*

Σχ.1

Σύμφωνα με τον Van de Wall (2005) patterns αυτής της μορφής, «τυπικά αποκαλούνται ακολουθίες», τόσο αυτός όμως, όσο και άλλοι ερευνητές υιοθετούν τον όρο αναπτυσσόμενα patterns ή άλλοι, όπως π.χ. η Warren, τον όρο αυξανόμενα patterns.

Ωστόσο τα αναπτυσσόμενα patterns μπορεί να είναι και αριθμητικά. Τέτοια patterns αναφέρονται συνήθως με τον όρο αριθμητικά patterns. Πρόκειται για patterns που σχηματίζονται από αριθμούς, τα οποία μπορεί να είναι απλά patterns της μορφής 2,3,2,3,3,2,3,3,3,… ή της μορφής 1,2,3,2,1,1,2,3,2,1,….Εδώ εντάσσονται και οι γνωστές από τα σχολικά μας χρόνια ακολουθίες, όπως οι αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι, αλλά και ακολουθίες όπως οι παρακάτω:

-ακολουθία άρτιων αριθμών, 2,4,6,8,…..
-ακολουθία περιττών αριθμών, 1,3,5,7,….
-ακολουθία Fibonacci, 1,1,2,3,5,8…
-ακολουθία τετραγώνων φυσικών αριθμών, 1,4,9,16,25,….
κ.ο.κ

Από δω και στο εξής σε κάθε στοιχείο ενός αναπτυσσόμενου pattern θα αναφερόμαστε με τις λέξεις «όρος» ή «μορφή». Με τη λέξη δε «θέση» θα αναφερόμαστε στον αριθμό κατά σειρά του όρου ή της μορφής. Επίσης θα αναφερόμαστε στα αναπτυσσόμενα patterns κατά περίπτωση είτε με τον όρο αναπτυσσόμενα εικονιστικά patterns είτε με τον όρο αναπτυσσόμενα αριθμητικά patterns. Άλλες φορές η αναφορά μας σ' αυτά θα αποδίδεται πιο απλά με τους όρους αναπτυσσόμενα patterns για ακολουθίες μορφών και αριθμητικά patterns για αριθμητικές ακολουθίες. Τις περισσότερες φορές μπορεί να έχουμε το ίδιο αναπτυσσόμενο pattern και στις δύο προαναφερθείσες εκφράσεις. Μιλάμε τότε για διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας ακολουθίας. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια κάτι τέτοιο επιβάλλεται να γίνεται στη σχολική πραγματικότητα, καθώς μπορεί οι διαφορετικές αναπαραστάσεις να ευνοούν διαφορετικούς τρόπους σκέψης.

Πριν εγκαταλείψουμε την συζήτηση για την ορολογία να αναφέρουμε ότι ενδιαφέρον έχει η μελέτη αναπτυσσόμενων patterns στα αποκαλούμενα προβλήματα γενίκευσης, όπως το ακόλουθο:

Η κυρία Anderson αποφάσισε να κάνει ένα διαγωνισμό για τους πιο μελετηρούς μαθητές του δημοτικού σχολείου το οποίο διευθύνει. Ο μαθητής που θα διαβάζει τα περισσότερα βιβλία κάθε μέρα θα παίρνει δώρο ένα γλειφιτζούρι. Για το σκοπό αυτό αγόρασε ένα κουτί με 700 γλειφιτζούρια. Κάθε μέρα 4 γλειφιτζούρια δίνονται στους 4 πιο μελετηρούς μαθητές. Μετά από 25 μέρες η κυρία Anderson αλλάζει τη γνώμη της και αποφασίζει να δίνει 9 γλειφιτζούρια κάθε μέρα.

1. Πόσα γλειφιτζούρια θα υπάρχουν στο κουτί μετά από 10 μέρες; Πόσα μετά από 33 μέρες;

2. Γράψτε ένα κανόνα που θα δίνει τον αριθμό των γλειφιτζουριών που υπάρχουν στο κουτί μετά από κάθε αριθμό ημερών.

Σχ.2. Lollipop Problem

Πηγή: Lannin, Barker, & Townsend (2004)

Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφει μια μειούμενη γραμμικά κατάσταση και διευκρινίζει τη χρήση του προαναφερόμενου όρου, αυξανόμενα patterns που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία. Ωστόσο patterns αυτής της μορφής, δηλαδή μειούμενα patterns, απουσιάζουν από τις ερευνητικές μελέτες, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων.

Σε κάθε περίπτωση, και πέρα από την ορολογία, τα αναπτυσσόμενα patterns είναι οι «γνωστές μας ακολουθίες, οι οποίες είτε προέρχονται από εικονιστικά ή πρακτικά πλαίσια είτε όχι, παρέχουν ευκαιρίες για αναγνώριση, περιγραφή, επέκταση και δημιουργία patterns και αποτελούν τους προπομπούς για την εισαγωγή στην τυπική άλγεβρα (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, Shorrocks-Taylor, 1999).

Από τα παραπάνω φαίνεται το εύρος των αποκαλούμενων αναπτυσσόμενων patterns και δικαιολογείται ως ένα βαθμό η δυσκολία διατύπωσης ενός ορισμού. Όμως προσπαθώντας να κάνουμε τα πράγματα λίγο πιο ξεκάθαρα μπορούμε να δεχτούμε έναν ορισμό που προσιδιάζει στον τυπικό ορισμό της ακολουθίας αριθμών, ανεξάρτητα από το πλαίσιο στο οποίο αυτή μας παρουσιάζεται, έτσι όπως αυτή μας είναι γνωστή από τα λυκειακά μας χρόνια και σε συμφωνία με την προαναφερθείσα άποψη των Hargreaves et al.

2.3.1 Γενική θεώρηση του ρόλου των αναπτυσσόμενων patterns στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Συνήθως τα αναλυτικά προγράμματα των χωρών, στα προγράμματα σπουδών των οποίων υπάρχουν τα αναπτυσσόμενα patterns ως αντικείμενο διδασκαλίας, απαιτούν οι μαθητές να είναι σε θέση να:

- αναζητήσουν patterns σε μια ακολουθία αριθμών
- κατασκευάσουν ακολουθίες
- αναγνωρίσουν την ύπαρξη ενός pattern εντός μιας ακολουθίας
- περιγράψουν ακολουθίες προφορικά και γραπτά
- συνεχίσουν μια ακολουθία
- συμπληρώσουν μια ακολουθία
- προβλέψουν όρους μιας ακολουθίας
- διατυπώσουν ένα κανόνα για την ακολουθία
- ελέγξουν τον κανόνα
- γενικεύσουν τον κανόνα με λόγια και/ή αλγεβρικά σύμβολα.»

Πιο συγκεκριμένα οι Hargreaves et al., αναφερόμενοι στα σχολικά εγχειρίδια της Αγγλίας, διαπιστώνουν ότι «*οι δραστηριότητες που συνήθως απαντώνται αφορούν την επέκταση και συμπλήρωση αριθμητικών patterns, δραστηριότητες που απαιτούν την εύρεση μιας σχέσης μεταξύ των όρων ενός pattern, αφού ο κανόνας δεν δίνεται, και να*

χρησιμοποιήσουν την σχέση αυτή για να επεκτείνουν ή να συμπληρώσουν το pattern (Σχ. 1), ενώ σπάνια δραστηριότητες με patterns που αφορούν παιδιά ηλικίας 7 έως 11 χρονών απαιτούν εξήγηση, περιγραφή ή απόδοση του κανόνα». (σελ. 68).

Επέκταση pattern	58	68	78	□	□	
Συμπλήρωση pattern	20	40	60	□	□	120

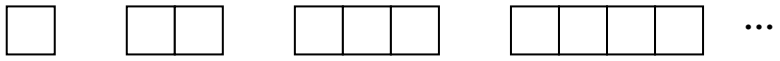
Σχ.1

Διαπιστώνουν δε, παρά τις συγκεκριμένες οδηγίες που υπάρχουν στα αναλυτικά προγράμματα, δύο ακραίες τάσεις στη διδασκαλία τους. Από τη μια είναι εκείνοι που τα αντιμετωπίζουν ως ένα απομονωμένο θέμα, που οι μαθητές πρέπει να μάθουν, και από την άλλη εκείνοι που σε κάθε ευκαιρία επιχειρούν την αναζήτηση pattern. Επίσης, ότι πολύ λίγα εγχειρίδια δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές για εξερεύνηση αριθμητικών patterns μέσα σε εικονιστικά και ρεαλιστικά πλαίσια από τα οποία απορρέουν.

Τα αναπτυσσόμενα patterns, μέσα σε εικονιστικά πλαίσια ή σε προβλήματα γενίκευσης, δίνουν τη δυνατότητα μιας εναλλακτικής παρουσίασης μιας ακολουθίας αριθμών για εκείνους τους μαθητές που η σκέψη τους υποστηρίζεται από τέτοιες γεωμετρικές ή πλαισιακές προσεγγίσεις (Orton et al., 1999). Σύμφωνα με τους τελευταίους, τα αναπτυσσόμενα patterns σε πλαίσια εικονιστικά ή πρακτικά είναι περισσότερο στοιχειώδη από τα καθαρά συμβολικά, για παράδειγμα τα αριθμητικά patterns, καθώς η δυνατότητα κατασκευής των πρώτων όρων τους με διάφορα υλικά (π.χ. μάρκες, κυβάκια, σπιρτόξυλα), η σχεδιαστική στο χαρτί αναπαράστασή τους, και τελικά η έκφρασή τους με μια αριθμητική ακολουθία είναι σε συμφωνία με τα προτεινόμενα από τον Bruner στάδια εισαγωγής σε μια καινούργια έννοια που κατά σειρά είναι: το πραξιακό, το εικονικό και το συμβολικό. Οι ίδιοι, ωστόσο, αναφέρονται και στην αντίθετη άποψη, ότι δηλαδή, η εισαγωγή patterns μέσα σε τέτοια πλαίσια αντί να απλουστεύει τα πράγματα είναι πιθανόν να προσθέτει πολυπλοκότητα, ειδικά σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που ήδη έχουν αποκτήσει ευχέρεια στον κόσμο των αριθμών. Μια τέτοια άποψη όμως είναι αδύναμη καθώς οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των αναπτυσσόμενων patterns, αλλά και κάθε μαθηματικής έννοιας γενικότερα, επιβάλλεται, καθώς οι διάφορες σύγχρονες θεωρίες αναπαραστάσεων θεωρούν επιβεβλημένη τη δυνατότητα να διαχειρίζεται

ένας μαθητής μια έννοια στις διάφορες μορφές αναπαράστασής της προκειμένου να μιλήσουμε για κατανόηση της έννοιας. Η παρουσίαση αναπτυσσόμενων patterns μέσα σε πρακτικά και εικονιστικά πλαίσια τους προσδίδει μια πιο ρεαλιστική όσο και παιγνιώδη διάσταση, κι υπό αυτή την έννοια θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει ότι είναι περισσότερο εφικτή η διαχείρισή τους (κατασκευή, επέκταση αλλά και αναγνώριση του κανόνα) από μαθητές του δημοτικού σχολείου, προτάσσοντας τις χειρωτικές και σχεδιαστικές αναπαραστάσεις και σε ένα επόμενο στάδιο αναδεικνύοντας την αριθμητική τους διάσταση. Αυτό που απαιτεί προσοχή είναι το είδος των αναπτυσσόμενων patterns σε εικονιστικά και πρακτικά πλαίσια, που ένας δάσκαλος θα χρησιμοποιήσει στην τάξη, και το πόσο γρήγορα θα εγκαταλείψει τα πλαίσια αυτά για να περάσει στις ισοδύναμες αναπαραστασιακά αριθμητικές ακολουθίες και τους κινδύνους που αυτό ενέχει, όπως θα δούμε λίγο πιο κάτω.

Κάθε αναπτυσσόμενο pattern αποτελείται από αριθμούς ή από μορφές, πιο γενικά από όρους, όπου ο κανόνας που περιγράφει τον τρόπο εξέλιξής τους είναι κάθε φορά το ζητούμενο. Η επίλυση ενός αναπτυσσόμενου pattern απαιτεί την εύρεση του κανόνα με βάση τον οποίο αυτό αναπτύσσεται. Στο σχ. 2 έχουμε ένα αναπτυσσόμενο pattern από σπιρτόξυλα:



Όροι: $1^{ος}$ $2^{ος}$ $3^{ος}$ $4^{ος}$

Σχ. 2

Η εύρεση του κανόνα, όπως αναφέρουν οι Orton et al. (1999), μπορεί να βασιστεί είτε στην εξέταση των μορφών είτε στην μετατροπή του pattern στην ισοδύναμη αριθμητική ακολουθία - που προκύπτει, όσον αφορά το προηγούμενο pattern με τα σπιρτόξυλα -με απαρίθμηση του αριθμού των σπιρτόξυλων που κάθε μορφή αποτελείται ή με συνδυασμό των δύο παραπάνω τρόπων. Όσο δε αφορά τη μετατροπή του αναπτυσσόμενου pattern σε μια αριθμητική ακολουθία δίνουν έμφαση στο γεγονός ότι ο δάσκαλος πρέπει να είναι ενήμερος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί διαφορετικοί μαθητές να το κατορθώσουν, που είναι οι ακόλουθοι:

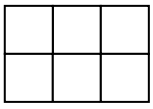
«Μια μέθοδος είναι να μετρήσουν τον αριθμό των σπιρτόξυλων που αποτελείται κάθε μορφή, μετατρέποντας έτσι άμεσα το pattern σε μια αριθμητική ακολουθία. Μια δεύτερη μέθοδος είναι να δουν πόσα περισσότερα σπιρτόξυλα κάθε μορφή απαιτεί, θεωρώντας σ' αυτή την περίπτωση κάθε καινούργια μορφή ως τον προηγούμενη με μια επιπλέον «υπό-μορφή» από σπιρτόξυλα [ ], και έπειτα χρησιμοποιώντας τον

αριθμό των σπιρτόξυλων στην επιπλέον υπό-μορφή, προσδιορίζουν τις «διαφορές» στην ακολουθία. Έπειτα οι επόμενοι όροι της ακολουθίας λαμβάνονται διαδοχικά προσθέτοντας σε κάθε προηγούμενο όρο τη διαφορά. Μια τρίτη μέθοδος βασίζεται στην εξέταση των μορφών, και ίσως με επέκταση των μορφών της ακολουθίας είτε νοερά είτε σχεδιαστικά πριν τη μετατρέψουν σε αριθμητική ακολουθία, η οποία μπορεί να είναι αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού ή κάποιας άλλης αριθμητικής πράξης.» (σελ. 122.)

Είναι προφανές ότι η τελευταία μέθοδος προσκρούει σε κατασκευαστικές ή σχεδιαστικές αδυναμίες κάποιων patterns, καθώς η εξέλιξη τους πέρα από κάποιους αρχικούς όρους απαιτεί μεγάλο αριθμό αντικειμένων ή χώρου υπαγορεύοντας από τη μια μεριά στο δάσκαλο την χρησιμοποίηση κατάλληλων-«εύκολων»-αναπτυσσόμενων patterns σε αρχικό στάδιο και από την άλλη την σταδιακή καθοδήγηση για την αναζήτηση σχέσεων και κανόνων που θα επιτρέψουν τον προσδιορισμό των μεγάλων όρων του αναπτυσσόμενου pattern και τελικά του ν-οστού όρου, οπότε η γενίκευση στη συμβολική της μορφή έχει συντελεστεί και το pattern έχει επιλυθεί.

Έχουμε ήδη αναφερθεί στους «κινδύνους» που ενέχει η σπουδή για το πέρασμα από τα εικονιστικά και ρεαλιστικά πλαίσια στις ισοδύναμες αριθμητικές ακολουθίες. Πράγματι, η τάση για βιαστική μετάβαση από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο- που χαρακτηρίζει τόσο τους δασκάλους όσο και τα αναλυτικά προγράμματα, όπου η εξέταση των μορφών, δηλαδή ο οπτικός συλλογισμός αποκτά ένα δευτερεύοντα, βοηθητικό ρόλο (Presmeg, 1986 στο Orton et al., 1999) - μπορεί να στερήσει από εντυπωσιακές προσεγγίσεις που μπορούν να δώσουν μαθητές με ικανότητα στην οπτική σκέψη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί τα όσα αναφέρουν οι Mason et al. (1985b, στο Orton et al., 1999. Στο έργο του σχήματος 3,

Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο 2 τετράγωνα πλατύ και 3 τετράγωνα μακρύ .Θέλουμε να τοποθετήσουμε περιμετρικά ένα πλαίσιο από ίδια τετράγωνα. Πόσα τετράγωνα θα χρειαστούνε; Εξετάστε πόσα τετράγωνα θα χρειαστούν για άλλα ορθογώνια..



Σχ.3

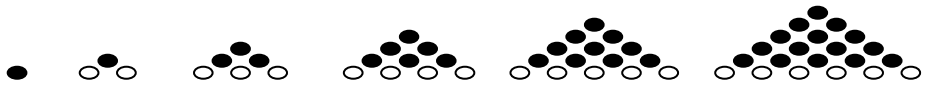
οι μαθητές σταδιακά παρήγαγαν τρεις διαφορετικούς τρόπους: α)L+B+L+B+4 (οι 4 γωνίες) β) 2(L+2)+2(B+2)-4 (αφαιρούν 4 διότι οι γωνίες μετρήθηκαν δύο φορές) γ)

(L+2).(B+2)-LB (βασίζεται στην αφαίρεση ενός ορθογωνίου που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου), όπου L ο αριθμός των κατά μήκος απαιτούμενων τετραγώνων και B ο αριθμός των κατά πλάτος απαιτούμενων τετραγώνων. Οι μαθητές αυτοί έφτασαν στη λύση χωρίς καταχώρηση των δεδομένων σε πίνακα, αλλά εργάστηκαν για την εύρεση της σχέσης μέσα στο πλαίσιο κι όχι ανεξάρτητα από αυτό. Γίνεται φανερό ότι από ένα σημείο και μετά, όλες οι προηγούμενες μέθοδοι με τις οποίες οι μαθητές, κι όχι μόνο, αντιμετωπίζουν τα αναπτυσσόμενα patterns, οδηγούν στην μετατροπή τους σε ισοδύναμες αριθμητικές ακολουθίες και η αναζήτηση σχέσεων και κανόνων γίνεται μέσα σε αριθμητικά πλαίσια. Πράγματι: *«Τα αναπτυσσόμενα patterns έχουν επιπλέον ένα αριθμητικό συστατικό, τον αριθμό των αντικειμένων σε κάθε μορφή (πλαίσιο)» [Van de Wall, 2005]. Αν και η αναζήτηση* σχέσεων είναι εξίσου γοητευτική και στις δύο αναπαραστασιακές εκφράσεις, όπως προαναφέραμε η βιαστική απομάκρυνση από το πλαίσιο πρέπει να αποφεύγεται.

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο αναπτυσσόμενο pattern (Σχ.4):

Σχ.4

Η σχέση που μπορεί κάποιος να δει είναι ότι: «ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο συν μια καινούργια σειρά» (Σχ.5).



Σχ.5

Ή στην αριθμητική εκδοχή του αναπτυσσόμενου pattern, η σχέση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

1 3 6 10 15 21 …

→ → → → →

+2 +3 +4 +5 +6

τον άλλο αναφέρεται από τον *Van de Wall* ως «***αναδρομική σχέση***» κι είναι όπως αναφέρει το πρώτο το οποίο παρατηρούν τα παιδιά. Ωστόσο για τον προσδιορισμό του 20ού, για παράδειγμα όρου, είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός όλων των προηγούμενων ενδιάμεσων όρων. Απαιτείται, έτσι, η εύρεση ενός κανόνα που επιτρέπει τον

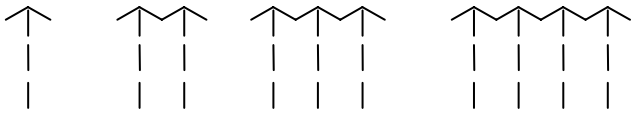
προσδιορισμό των στοιχείων ενός όρου από τη θέση του όρου αυτού, δηλαδή μιας ***«συναρτησιακής σχέσης»***. Τα προηγούμενα αποτελούν μια πρώτη γενική προσέγγιση των εννοιών της «αναδρομική σχέσης» και της «συναρτησιακής σχέσης». Για τις έννοιες αυτές, την εύρεσή τους, τους περιορισμούς και τα πλεονεκτήματά τους, θα μιλήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο.

Ωστόσο, η τοποθέτηση ενός pattern σε ένα πλαίσιο ή η άντληση ενός pattern από ένα πλαίσιο δεν σημαίνει αυτόματα ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην επέκταση, γενίκευση και τελικά την επίλυση του. Η συνθετότητα του πλαισίου, η πολυπλοκότητα των σχέσεων και οι προηγούμενες εμπειρίες των παιδιών είναι καθοριστικοί παράγοντες στον χειρισμό τους (Orton et al., 1999). Γι' αυτό, προτείνουν, απαιτείται η βαθμιαία εισαγωγή των μαθητών σε αυτά. Σ' ένα αρχικό στάδιο, patterns της μορφής του ακόλουθου σχήματος, είναι κατάλληλα για νέους και αδύνατους στη γενίκευση μαθητές καθώς η αναγνώριση του pattern βασίζεται μόνο σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις (γραμμικά patterns της μορφής an^1) και με κατάλληλη υποστήριξη οι μαθητές μπορούν να συσχετίσουν τον αριθμό των σπιρτόξυλων με τη θέση του όρου.

Σκηνές

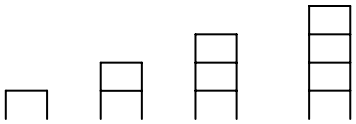
Μανιτάρια

Ψηλά δέντρα



Σ' ένα επόμενο στάδιο μπορεί να εισαχθούν patterns που δεν βασίζονται μόνο στον πολλαπλασιασμό, όπως αυτά του ακόλουθου σχήματος (γραμμικά patterns της μορφής an+b), και αργότερα δευτεροβάθμια patterns:

Επίπεδα



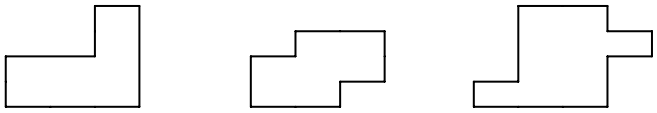
Δέντρα

Κλείνοντας την αναφορά μας στα αναπτυσσόμενα patterns, αξίζει να αναφέρουμε μερικά ακόμη, που ο Gibbs (1999) προτείνει ως κατάλληλα για διδασκαλία στην τάξη διαβαθμίζοντάς τα ανάλογα με την συνθετότητά τους. Θα περιοριστούμε αναφέροντας μόνο τα διαβαθμισμένης δυσκολίας παραδείγματα γραμμικών patterns:

Στάδιο 1: Γραμμικές σχέσεις του τύπου $n \pm c$

Παράδειγμα : Ορθές γωνίες

«Σχεδιάστε οποιαδήποτε κλειστή γραμμή σε τετραγωνισμένο χαρτί ακολουθώντας τις γραμμές του. Σημειώστε τις ορθές γωνίες εξωτερικά και εσωτερικά της γραμμής. Στη συνέχεια ερευνήστε άλλες γραμμές και αναζητήστε τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των ορθών γωνιών εξωτερικά και στον αριθμό των γωνιών εσωτερικά.»

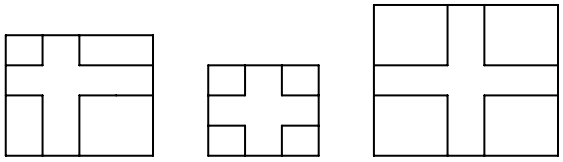


Ορθές γωνίες εσωτερικά	5	6	7	…	n
Ορθές γωνίες εξωτερικά	1	2	3	…	n-4

Στάδιο 2: Γραμμικές σχέσεις του τύπου an

Παράδειγμα: Σταυροί σε τετράγωνα

«Σχεδιάστε τετράγωνα οποιουδήποτε μεγέθους σε τετραγωνισμένο χαρτί και εσωτερικά σχεδιάστε σταυρούς. Βρέστε την περίμετρο του σταυρού και ερευνήστε αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στο μήκος της πλευράς του τετραγώνου και την περίμετρο του σταυρού.»

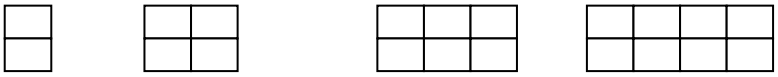


Πλευρά τετραγώνου	3	4	5	…	n
Περίμετρος σταυρού	12	16	20	…	4n

Στάδιο 3: Γραμμικές σχέσεις του τύπου $an \pm b$

Παράδειγμα: Πόσα τετράγωνα;

«Εξετάστε τον αριθμό των τετραγώνων σε κάθε ορθογώνιο, συμπεριλαμβανομένων των κρυμμένων, και βρείτε αν υπάρχει σχέση μεταξύ του μήκους του ορθογωνίου και του συνολικού αριθμού των τετραγώνων.»



Μήκος ορθογωνίου	1	2	3	4	…	n
Αριθμός τετραγώνων	2	5	8	11	..	3n-1

2.4 Άλλα αριθμητικά patterns

Όπως έχουμε τονίσει και παραπάνω, τα patterns βρίσκονται στον πυρήνα των μαθηματικών. Σε οποιαδήποτε δραστηριότητα μπορούν να αναδειχθούν, αναδεικνύοντας με τη σειρά τους τη δομή των μαθηματικών. Οι Frobisher και Threlfall (1999) αναφέρονται σε μερικά είδη δραστηριοτήτων με αριθμούς που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια, μια επιφανειακή προσέγγιση των οποίων αποκρύπτει τον πλούτο των patterns που βρίσκονται πίσω από αυτά. Μερικά από αυτά είναι:

Patterns στον πίνακα των αριθμών από το 1 έως το 100

Ο πίνακας αυτός (σχ.1) που υπάρχει στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια αποτελεί μια πλούσια πηγή για παρατήρηση και εξερεύνηση αριθμητικών patterns. Το απλούστερο pattern είναι οι αριθμοί κατά μήκος μιας γραμμής, που αυξάνονται από αριστερά προς τα δεξιά κατά 1 και ελαττώνονται από τα δεξιά προς τα αριστερά κατά 1. Επίσης, οι αριθμοί σε κάθε στήλη έχουν το ίδιο ψηφίο μονάδων ενώ τα ψηφία των δεκάδων αυξάνονται κατά 1, δηλαδή οι αριθμοί αυξάνονται κατά 10, από την κορυφή προς το κάτω μέρος κάθε στήλης. Τα παραπάνω περιγράφουν patterns που είναι αποτέλεσμα αφενός της δομής του αριθμητικού συστήματος με βάση το 10 και αφετέρου ότι ακριβώς υπάρχουν 10 αριθμοί σε κάθε γραμμή.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Σχ. 1

Επίσης ενδιαφέροντα «οπτικά» patterns προκύπτουν από χρωματισμένα τετράγωνα του πίνακα και είναι ενδιαφέρον για τους μαθητές να εξετάσουν τη δομή που τα δημιουργεί (σχ. 2). Η τελευταία στήλη αφορά το πλήθος των πολλαπλασίων του 6 σε κάθε γραμμή, τα οποία παράγουν την ακολουθία 1,2,2,1,2,2,1,2,2,1. Η εξέλιξη της ακολουθίας αυτής κατά τον ίδιο τρόπο ή όχι, όταν διευρυνθεί ο πίνακας (π.χ. μέχρι το 200), αποτελεί ένα ενδιαφέρον ερώτημα για τα παιδιά.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*1*
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*2*
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	*2*
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	*1*
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	*2*
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	*2*
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	*1*
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	*2*
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	*2*
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	*1*

Σχ.2. Πίνακας με χρωματισμένα τα πολλαπλάσια του 6

Patterns στους πίνακες του πολλαπλασιασμού

Οι πίνακες του πολλαπλασιασμού είναι γεμάτοι από patterns. Όπως, για παράδειγμα, το pattern που σχηματίζουν τα ψηφία των μονάδων στα πολλαπλάσια

του 3 (σχ.3). Όπως οι Frobisher et al. αναφέρουν, τα περισσότερα εγχειρίδια δεν ζητούν από τους μαθητές να εξερευνήσουν τις δομές που δημιουργούν αυτά τα patterns και επαφίεται στη διάθεση του δασκάλου να προκαλέσει ή όχι τους μαθητές με κατάλληλες ερωτήσεις.

Πολ/σια του 3:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
Ψηφίο μονάδων:	*3*	*6*	*9*	*2*	*5*	*8*	*1*	*4*	*7*	*0*	3	6

Σχ. 3

Patterns με περισσότερες από μία πράξεις

Όπως τα ακόλουθα: 1X9=10-1 1X8=10-2

2X9=20-2 2X8=20-4

3X9=30-3 3X8=30-6

4X9=40-4 4X8=40-8

Και τα δύο μπορούν να εξηγηθούν σε σχέση με τη δεκάδα και χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Για παράδειγμα: 2X9=2X(10-1)=(2X10)-(2X1)=20-2

Patterns ανάμεσα στους πίνακες του πολλαπλασιασμού

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Σχ.4: Με μπλε χρώμα τα πολ/σια του 2, με κίτρινη σκίαση τα πολ/σια του 5, με μπλε χρώμα και κίτρινη σκίαση τα κοινά πολ/σια

Σχ.4

Στον πίνακα του σχ. 4 είναι χρωματισμένα τα πολλαπλάσια του 2 και του 5, όπου φαίνεται ότι έχουν τα πολλαπλάσια του 10 κοινά. Έννοιες όπως πολλαπλάσια και διαιρέτες μπορούν να αναδειχθούν μέσα από την εξερεύνησή του.

Η πιο πάνω παράθεση αριθμητικών patterns είναι απολύτως ενδεικτική και αδικεί τον πλούτο των patterns που διατρέχουν τα μαθηματικά. Τα ψηφιδωτά και τα οπτικά patterns είναι κάποια ακόμα είδη που μπορούν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών ειδικότερα στις μικρότερες τάξεις. Σε οποιαδήποτε περιοχή των σχολικών μαθηματικών και δραστηριοτήτων ελλοχεύουν δομές και κανονικότητες που πρέπει να αναδεικνύονται προκειμένου να ξεφύγουμε από τις παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές «αριθμητικού χαρακτήρα» προς μια κατεύθυνση ανάδειξης του αλγεβρικού χαρακτήρα των στοιχειωδών μαθηματικών. Σε προηγούμενες αναφορές μας περιγράψαμε σε ένα μικρό βαθμό patterns κατάλληλα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Όπως είδαμε η συνθετότητα του πλαισίου, η πολυπλοκότητα των σχέσεων και οι προηγούμενες εμπειρίες των παιδιών είναι καθοριστικοί παράγοντες στον χειρισμό τους. Γι' αυτό, οι et al. (1999) προτείνουν τη βαθμιαία εισαγωγή των μαθητών σε αυτά. Ωστόσο, οι Frobisher, et al. (1999), αναφερόμενοι πια στην αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών σχετικά με τα patterns προσεγγίζουν το θέμα πιο βαθιά εγείροντας ζητήματα όπως, τι θεωρείται σωστή απάντηση, ζητήματα σχετικά με το επίπεδο δυσκολίας των και ζητήματα υπο-εκτίμησης ή υπερ-εκτίμησης των δυνατοτήτων των μαθητών, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

2.5 Ζητήματα αξιολόγησης των ικανοτήτων των παιδιών σχετικά με τα patterns

Όπως είπαμε στην αρχή της προηγούμενης ενότητας από τους μαθητές ζητείται μεταξύ των άλλων η περιγραφή του pattern, η συμπλήρωσή του, η συνέχισή του, η εύρεση της θέσης που κατέχει δοσμένος όρος στο pattern κ.ο.κ. Η εκτίμηση των παραπάνω ικανοτήτων των μαθητών, απαιτεί συχνά δραστηριότητες κατά πολύ διαφορετικές από αυτές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξή τους. Η αξιολόγηση απαιτεί τα παιδιά να έρθουν αντιμέτωπα με συγκεκριμένα έργα που απαιτούν μία ή περισσότερες από τις παραπάνω ικανότητες, έτσι ώστε να μπορούν να διαμορφωθούν κάποια ασφαλή, ως ένα βαθμό, κριτήρια, περί των ικανοτήτων τους. Η αξιολόγηση γίνεται με βάση τις απαντήσεις των παιδιών και βγάζοντας συμπεράσματα για τις ικανότητές τους. Τα κριτήρια αξιολόγησης βασίζονται στην εξιχνιάσιμη σύνδεση της επίδοσης σε μια δραστηριότητα και της απαιτούμενης ικανότητας, κι ως εκ τούτου υπάρχει κίνδυνος να εξαχθούν λανθασμένα

συμπεράσματα, δηλαδή υπερεκτίμησης ή υποεκτίμησης των ικανοτήτων των μαθητών (Frobisher et al., 1999). Η σπουδαιότητα της ακριβούς αξιολόγησης στον κύκλο της διδασκαλίας και μάθησης και στην εκπαιδευτική διαδικασία γενικά, δεν αμφισβητείται, αλλά είναι ουσιαστικό να είναι ξεκάθαρες οι δυσκολίες που υπάρχουν. Για την κατανόηση αυτών των δυσκολιών οι Frobisher et al.(1999) εξετάζουν την αξιολόγηση κάποιων από τις προαναφερθείσες ικανότητες, σημειώνοντας κάποια ζητήματα που ανακύπτουν.

Σε πρώτη φάση, και αναφορικά με τις δυσκολίες εκτίμησης-αξιολόγησης των ικανοτήτων των μαθητών να περιγράψουν ένα pattern, ισχυρίζονται ότι η αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να περιγράψουν ένα pattern δεν είναι ζήτημα του «*εάν ένα παιδί μπορεί να περιγράψει ένα pattern, αλλά πόσο καλά μπορεί να το κάνει*». Αλλά το τελευταίο δεν είναι εύκολο να χαρακτηριστεί. Οι απαντήσεις για παράδειγμα που δόθηκαν από μαθητές στο έργο του σχήματος 1, ήταν:

«Κάθε φορά προσθέτουμε 1 στο πρώτο και δεύτερο.»

«Όταν πολλαπλασιάζεις το 11 με έναν αριθμό, παίρνεις δύο ψηφία που είναι ίδια.»

«Απλά πήγα 11Χ9=99»

«Πρόσθεσα τον ίδιο αριθμό στον πρώτο αριθμό, δηλαδή 9=99 ή 6=66.»

«Η προπαίδεια του 11.»

Αριθμός μήλων	Κόστος
1	11p
2	22p
3	33p
4	44p
Ψάξτε για pattern στους αριθμούς. Χρησιμοποιήστε το pattern για να βρείτε το κόστος των 9 μήλων. Ποιο είναι το pattern που χρησιμοποιήσατε;	

Σχ.1

Τίθεται το ερώτημα εάν η τρίτη απάντηση, για παράδειγμα, είναι καλύτερη από την τελευταία. Κάποιος θα μπορούσε να πει ότι η τρίτη απάντηση είναι πιο σαφής και ξεκάθαρη, ενώ κάποιος άλλος ότι πρόκειται για μια αριθμητική πράξη παρά για περιγραφή ενός pattern. Επιπλέον προβλήματα προκύπτουν από την ασυμβατότητα πολλές φορές μεταξύ της κατανόησης του pattern και της γλωσσικής περιγραφής του. Δηλαδή οι φτωχές περιγραφές μπορεί να είναι τόσο αποτέλεσμα μη κατανόησης ενός pattern όσο και της περιορισμένης ικανότητας περιγραφής. Να

παρατηρήσουμε ότι ο ρόλος της γλωσσικής παραμέτρου, που αφορά τόσο τη φυσική γλώσσα όσο και την μαθηματική γλώσσα-ορολογία, επισημαίνεται και από άλλους ερευνητές, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, η πραγματική ικανότητα απαιτεί και αντίληψη του pattern και ικανότητα περιγραφής του.

Όσον αφορά την ικανότητα συμπλήρωσης αναφέρουν ότι μπορεί ένα παιδί να είναι σε θέση να περιγράψει ένα pattern, ωστόσο αυτό δεν μεταφράζεται αυτόματα σε ικανότητά του να μπορεί να εργαστεί πάνω σε αυτό. Το ακόλουθο, για παράδειγμα, pattern

1 + 5 = 6

2 + 4 = 6

3 + 3 = 6

…+…= 6

…+…= 6

μπορεί να συμπληρωθεί χωρίς απαραίτητα κατανόηση του από τη μεριά του μαθητή με όρους, θα λέγαμε, δομής. Επισημαίνεται δηλαδή η συμπλήρωση του pattern σ' ένα μηχανιστικό επίπεδο χωρίς κατανόηση ότι η «*αύξηση κατά μια μονάδα του ενός προσθετέου με ταυτόχρονη μείωση κατά μια μονάδα του δεύτερου προσθετέου δεν μεταβάλλει το άθροισμα*». Είναι αδύνατο να απαντήσουμε, εκτός, αν ρωτήσουμε το μαθητή να μας περιγράψει το pattern που χρησιμοποίησε.

Επίσης η ικανότητα συνέχισης, δηλαδή εύρεσης του επόμενου ή ενός κοντινού όρου, βάζει το θέμα του «Τι θεωρείται σωστή απάντηση;». Πιθανώς η εύρεση από μέρους των μαθητών της λύσης που ο δάσκαλος έχει στο μυαλό του να είναι προσδιοριστική της ικανότητας των μαθητών. Αυτή πρέπει βέβαια να υπολογίζεται ως σωστή απάντηση, ωστόσο μπορεί να μην είναι η μόνη. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το ακόλουθο pattern: 5, 7, 11, 17, … Οι αναμενόμενες απαντήσεις μπορεί να είναι, όσον αφορά τους επόμενους δύο όρους 25, 35, με χρήση της σταθερής διαφοράς μεταξύ της ακολουθίας των πρώτων διαφορών: 2, 4, 6,…

5 7 11 17 25 35…

2 4 6 8 10 [ακολουθία των πρώτων διαφορών]

2 2 2 2

Ωστόσο, καθώς οι διαφορές είναι 2, 4, 6 και 2+4=6 θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η επόμενη διαφορά θα μπορούσε να είναι 10 καθώς 4+6=10, και η επόμενη διαφορά θα είναι 16, καθώς 6+10=16, παίρνοντας έτσι ως επόμενους όρους της ακολουθίας τους 27, 43 (σχ.1)

5 7 11 17 27 43 …

2 4 6 10 16

Σχ.1

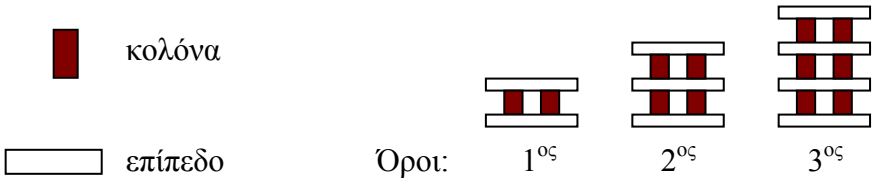
Οι Frobisher et al. υποστηρίζουν, δηλαδή ότι όσες περισσότερες απαντήσεις επιτρέπονται ως σωστές, τόση μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ότι μερικές απαντήσεις δίνονται ως αποτέλεσμα ενεργειών που δεν αντιπροσωπεύουν την ικανότητα που αξιολογείται. Βέβαια αυτό δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο καθώς αν αξιολογείται η ικανότητα συμπλήρωσης ενός δευτεροβάθμιου pattern, σε κάθε περίπτωση η απάντηση είναι σωστή. Ενώ αν αξιολογείται η ικανότητα χρήσης μιας συγκεκριμένης μεθόδου, για παράδειγμα της «μεθόδου των διαφορών», η γνώση περισσότερων πρώτων όρων θα έλυνε το πρόβλημα. Πέρα από όλα αυτά όμως δεν βλέπουμε το λόγο γιατί η εύρεση περισσότερων patterns, οποιαδήποτε ικανότητα κι αν αξιολογείται, αποτελεί «πρόβλημα». Απεναντίας, θεωρούμε ότι η με όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους συμπλήρωση ενός pattern είναι δηλωτική της ευχέρειας των μαθητών στην αντιμετώπιση των patterns, που αποτελεί και το ζητούμενο.

«*Τέλος, η ικανότητα να υπολογιστεί η αξία μιας συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η πρώτη και απλούστερη απαιτούμενη ικανότητα. Οι άλλες, όπως η ικανότητα εύρεσης μιας έκφρασης ή ενός κανόνα για το γενικό όρο, υπερβαίνει τις δυνατότητες των πολλών και χαρακτηρίζει μόνο τους μαθητές με υψηλό επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών. Εντούτοις, το ίδιο το γεγονός ότι αυτό είναι μια νέα και δύσκολη περιοχή φέρνει καινούργια ζητήματα, δεδομένου ότι υπάρχει μια τάση για "ήπιες" αξιολογήσεις. Συγκεκριμένα οι αξιολογήσεις πολλές φορές ζητούν την εύρεση των συγκεκριμένων όρων σε στάδια, δηλαδή εύρεση του 10^{ου} όρου, μετά του 20ού, του 50ού και ίσως του νιοστού όρου, ουσιαστικά επαναλαμβάνοντας μια κοινή προσέγγιση της διδασκαλίας. Ωστόσο ότι είναι καλό για τη διδασκαλία δεν είναι πάντα καλό για την αξιολόγηση και η καθοδηγούμενη, σταδιακή, βήμα προς βήμα υπολογιστική προσέγγιση, που πάει πέρα από τον 5^{ο} , τον 6^{ο} και από τον 6^{ο} και 7^{ο} στον 10^{ο} και ίσως στο 20^{ο}, σταματά στον 50^{ο} όρο. Δηλαδή, οι μαθητές συμπληρώνουν τα patterns*

κάνοντας χρήση αναδρομικών σχέσεων, πράγμα που σημαίνει ότι δεν αξιολογείται η ικανότητα συμπλήρωσης ενός συγκεκριμένου όρου. Οπότε θα πρέπει η πρώτη ερώτηση να αφορά την εύρεση ενός απομακρυσμένου όρου, π.χ. του 100ού, έτσι ώστε η ικανότητα, αν υπάρχει, να αναδειχτεί.» (Frobisher et al., 1999) (σελ. 100)

Θεωρούν, δηλαδή, ότι η ικανότητα συπλήρωσης ενός συγκεκριμένου όρου συνιστά ικανότητα όταν υπερβαίνει την αναδρομική προσέγγιση- δηλαδή μια προσέγγιση όπου για τον υπολογισμό ενός όρου προηγείται η εύρεση όλων των προηγούμενων- και βασίζεται στην εύρεση μιας συναρτησιακής σχέσης. Αυτό κατά τους Frobisher et al., αφενός ξεπερνά τις δυνατότητες της πλειοψηφίας των μαθητών, αφετέρου σχετίζεται με το επίπεδο δυσκολίας του pattern, για παράδειγμα εάν το pattern είναι γραμμικό ή δευτεροβάθμιο. Χρήζει, δηλαδή ιδιαίτερης προσοχής το επίπεδο δυσκολίας του pattern, προκειμένου να εκτιμήσουμε αυτή την ικανότητα των παιδιών. Κι αυτό διότι όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν «*ο υπολογισμός της αξίας ενός συγκεκριμένου όρου βασίζεται στη διαισθητική κατανόηση της σχέσης μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής (θέση του όρου στην ακολουθία) και της εξαρτημένης μεταβλητής, και το οποίο για μερικούς μαθητές είναι πιο δύσκολο απ' ότι για κάποιους άλλους*».

Για παράδειγμα, λένε, το ακόλουθο pattern, είναι γραμμικό, και πολλοί μαθητές είναι ικανοί να υπολογίσουν τον 100ό όρο συλλογιζόμενοι ότι ο αριθμός των κολόνων είναι διπλάσιος από τον αριθμό του δείχνει τη θέση του όρου (200 κολόνες για τον 100ό) και τα επίπεδα είναι ένα παραπάνω από τον αριθμό θέσης (101 επίπεδα για τον 100ό), δίνοντας συνολικό άθροισμα 301.



Ωστόσο τα δευτεροβάθμια patterns είναι πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστούν με παρόμοιο τρόπο, όπως για παράδειγμα η ακολουθία των τριγωνικών αριθμών.

Από όλα τα παραπάνω είναι φανερή, σύμφωνα με τους Frobisher et al. η δυσκολία εκτίμησης των ικανοτήτων ενός μαθητή αναφορικά με τα patterns. Η προσέγγιση της αξιολόγησης των patterns στα χρόνια του δημοτικού σχολείου χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Χρειάζεται προσοχή στις απαιτήσεις του κάθε έργου

αξιολόγησης έτσι, ώστε τα ερωτήματα να αξιολογούν ακριβώς την υπό διερεύνηση ικανότητα. Επίσης προσοχή χρειάζεται στη γλωσσική διατύπωση των ερωτημάτων, οι απαιτήσεις του έργου να είναι κατανοητές και μέσα στις δυνατότητες των παιδιών, και τα πλαίσια παρουσίασης οικεία, έτσι, ώστε να μην αποκλείουν μαθητές που έχουν δυνατότητες να ανταποκριθούν, από το γεγονός και μόνο γλωσσικών παρανοήσεων ή ανοίκειων πλαισίων.

2.6 Ανακεφαλαίωση και κάποιες σκέψεις

Το εύρος χρήσης του όρου pattern, ακόμα και σε περιοχές πέραν των μαθηματικών, είδαμε ότι καθιστά δύσκολο έναν καθολικό ορισμό του. Αντί ενός γενικού ορισμού που θα έκανε τα πράγματα πιο ξεκάθαρα, αρκεστήκαμε σε κατά περίπτωση ορισμούς και υιοθετήσαμε ερμηνείες του όρου, όπως σχέση, κανόνας, δομή, κανονικότητα, που ως ένα βαθμό μας διαφωτίζουν ακόμα περισσότερο αναφορικά με το «τι είναι» ένα pattern.

Σε μια σύντομη επισκόπηση των απόψεων σχετικά με το ρόλο τους στην εκπαιδευτική πραγματικότητα, είδαμε ότι τα κατάλληλα patterns μπορούν να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην εισαγωγή και κατανόηση κάποιων θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών. Είδαμε ότι η εννοιοδιαδικαστική προσέγγιση των επαναλαμβανόμενων patterns μπορεί να τα καταστήσει ισχυρά εργαλεία για την εισαγωγή και ανάπτυξη άλλων εννοιών και περιοχών των μαθηματικών. Επίσης είδαμε ότι η εννοιοδιαδικαστική προσέγγιση των επαναλαμβανόμενων patterns, ως μια δομή που κυκλικά επανέρχεται, αποτελεί το ζητούμενο για την ανάπτυξη της έννοιας της κανονικότητας. Είναι, τέλος, σύμφωνα με τον Threlfall η εννοιοδιαδικαστική προσέγγιση των επαναλαμβανόμενων patterns, που επιτρέπει την αξιοποίησή τους ως εργαλεία για μια πρώιμη εισαγωγή στη γενίκευση, προφανώς μέσα από την ανάπτυξη, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, συναρτησιακών σχέσεων. Δηλαδή, για την εισαγωγή σε μια περιοχή στην οποία, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, η πρώιμη άλγεβρα κατά το παρελόν έχει εστιάσει με εργαλεία τα αναπτυσσόμενα patterns (αριθμητικά και γεωμετρικά) παραμελώντας τα επαναλαμβανόμενα patterns. Πράγματι, τα αναπτυσσόμενα patterns είτε εμφανίζονται σε πλαίσια είτε έχουν καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα προσφέρουν ένα πλαίσιο για ανακάλυψη σχέσεων, κανόνων, δομών, και ένα πρόσφορο μέσο για την εισαγωγή στη γενίκευση, μιας έννοιας που βρίσκεται στον πυρήνα των μαθηματικών.

Όμως και τα επαναλαμβανόμενα patterns μπορούν να συμβάλλουν προς αυτή την κατεύθυνση.

Ωστόσο, τα παραπάνω που σε θεωρητικό επίπεδο και σε γενικές γραμμές περιγράψαμε σ' αυτό το κεφάλαιο, αν και ακούγονται εξαιρετικά ενδιαφέροντα, χρήζουν ερευνητικής τεκμηρίωσης. Επίσης, το δυνατό ή όχι της γενίκευσης των επαναλαμβανόμενων ή αναπτυσσόμενων patterns, σε επίπεδο δημοτικού σχολείου, η οποία περνάει μέσα από την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης, δηλαδή της σταδιακής έκφρασης όλο και πιο τυπικών συναρτησιακών σχέσεων - που αποτελεί όπως έχουμε ξαναπεί μια από τις πέντε αλληλοσυσχετιζόμενες μορφές αλγεβρικού συλλογισμού, σύμφωνα με τον Kaput, και ένα από τα σημεία στα οποία η έρευνα στην πρώιμη άλγεβρα έχει εστιάσει, αλλά και στοχεύει - διαπραγματευόμαστε στο επόμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, λοιπόν, η πρόσφατα διατυπωμένη άποψη των Frobisher et al. (1999) ότι «*η ικανότητα εύρεσης μιας έκφρασης ή ενός κανόνα για το γενικό όρο ενός pattern, υπερβαίνει τις δυνατότητες των πολλών και χαρακτηρίζει μόνο τους μαθητές με υψηλό επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών»,* όπου εμμέσως θέτει ζητήματα αναπτυξιακών περιορισμών και η οποία έρχεται σε αντίθεση με τις διατυπώσεις και τους στόχους της πρώιμης άλγεβρας, μπαίνει στο ερευνητικό στόχαστρο της πρώιμης άλγεβρας. Είναι πράγματι έτσι ή μήπως πρόκειται για μια «συντηρητική άποψη» που υποβαθμίζει τις δυνατότητες των μικρών μαθητών παραγνωρίζοντας ένα σωρό παράγοντες; Αφορά το «υψηλό επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών» όλους τους μαθητές, όπως πρεσβεύει η πρώιμη άλγεβρα ή όχι; Είναι η απαραίτητη για την πρώιμη εισαγωγή στη γενίκευση «εννοιοδιαδικαστική» αντίληψη των επαναλαμβανόμενων patterns στις δυνατότητες των μικρών μαθητών; Είναι δυνατή η γενίκευση αναπτυσσόμενων patterns στα πλαίσια της στοιχειώδους εκπαίδευσης; Θα δούμε.

2.7 Παραπομπές

[1]Η πλειοφηφία των ακολουθιών που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια όλων των χωρών είναι γραμμικές, όπου το pattern αυξάνεται ή ελαττώνεται κατά το ίδιο πάντα ποσό, και επομένως, η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερή. Ονομάζονται γραμμικές γιατί ο γενικός όρος τους μπορεί να εκφρασθεί ως $\mathbf{A_{\eta}=\alpha\eta+b}$**,** όπου ο αριθμός **n** εκφράζει τη θέση του όρου στην ακολουθία. Ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις όπου ζητείται από τους μαθητές να ασχοληθούν με τετραγωνικές ακολουθίες, όπου τώρα η σταθερή διαφορά βρίσκεται μεταξύ των όρων της ακολουθίας των πρώτων διαφορών. Ονομάζονται δευτεροβάθμιες διότι ο γενικός τους όρος μπορεί να εκφρασθεί ως $\mathbf{A_{\eta}=\alpha\eta^2+bn+c}$**.** Επίσης αν η σταθερή διαφορά προκύπτει μεταξύ των όρων της ακολουθίας των δεύτερων διαφορών τότε ο κανόνας είναι κυβικός με τύπο $\mathbf{A_{\eta}=\alpha\eta^3+bn^2+cn+d}$**.**

Κεφάλαιο 3: Patterns και Πρώιμη Άλγεβρα

3.1 Εισαγωγή

Μετά τα όσα είπαμε σχετικά με τα είδη των patterns και τη σε θεωρητικό επίπεδο σκιαγράφηση του ρόλου που μπορούν να παίξουν στη διδασκαλία των μαθηματικών γενικά, είτε ως αυτόνομα εργαλεία μέσα από τα οποία οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τη διερεύνηση δομών, ιδιοτήτων, σχέσεων και κανόνων σε αριθμητικά ή άλλα πλαίσια είτε ως αναπαραστασιακά εργαλεία για την εισαγωγή σε άλλες έννοιες και περιοχές των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα των λόγων, της μεταβλητής και σε βασικές έννοιες της θεωρίας των αριθμών, μένει να δούμε αν και πώς τα παραπάνω τεκμηριώνονται ερευνητικά στο χώρο της στοιχειώδους εκπαίδευσης. Δηλαδή, αν και σε ποιο βαθμό τα patterns μπορούν να παίξουν το ρόλο που τους αποδίδεται μέσα στα πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας, δηλαδή το ρόλο των κατεξοχήν εργαλείων στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων στην πορεία προς τη γενίκευσή τους. Η ερευνητική τεκμηρίωση αφορά κυρίως στην αναπτυξιακή ετοιμότητα των μικρών μαθητών να λειτουργήσουν μέσα σε αυτά τα καινούργια πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας και η οποία αναπτυξιακή ετοιμότητα θα επιτρέψει στην γενίκευση μια θέση στον πρώιμο αλγεβρικό συλλογισμό. Πρώτα, εν συντομία, θα προσπαθήσουμε να δούμε πως ορίζεται η γενίκευση στη διεθνή βιβλιογραφία.

3.2 Η γενίκευση και η διδασκαλία της

Ο ρόλος της γενίκευσης στο μαθηματικά επιτεύγματα και στη μάθηση των μαθηματικών είναι καθοριστικός. Σύμφωνα με τον Mason (1996), η «έκφραση της γενικότητας» βρίσκεται στις ρίζες της άλγεβρας αλλά και χαρακτηρίζει όλη τη διαδρομή της. Το NCTM (2000) απαιτεί τη γενίκευση ως έναν από τους κύριους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αλλά και ο Polya (1944), πολύ πιο πριν, αποδίδει πολλές επιστημονικές ανακαλύψεις και μαθηματικά αποτελέσματα σε αυτό που αποκαλεί «ευνοϊκή γενίκευση» (lucky generalization), κι η οποία οδηγεί από μια παρατήρηση σ' ένα αξιοσημείωτο γενικό νόμο. Την ορίζει δε «*ως μετάβαση από την παρατήρηση ενός αντικειμένου στην παρατήρηση ενός συνόλου που περιέχει αυτό το αντικείμενο ή ως μετάβαση από την παρατήρηση ενός περιορισμένου συνόλου στην*

παρατήρηση ενός περισσότερου περιεκτικού συνόλου, το οποίο περιέχει το περιορισμένο σύνολο» (Polya, 1944, μτφ. Σιαδήμας, σελ. 89).

Λόγω της κεντρικής θέσης της στην μαθηματική εκπαίδευση πολλοί ερευνητές και θεωρητικοί ορίζουν τη γενίκευση με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα:

Οι Harel and Tall (1991) χρησιμοποιούν τον όρο γενίκευση με την έννοια της "εφαρμογής ενός δεδομένου επιχειρήματος σε ένα ευρύτερο πλαίσιο". Διακρίνουν μεταξύ 3 διαφορετικών ειδών γενίκευσης: (1) *επεκτατική*, όπου το πεδίο εφαρμοσιμότητας ενός υπάρχοντος σχήματος επεκτείνεται, χωρίς ανακατασκευή του σχήματος (2) *ανακατασκευαστική*, όπου το υπάρχον σχήμα ανακατασκευάζεται προκειμένου να διευρυνθεί το πεδίο εφαρμογής και (3) *διαχωριστική* όπου ένα νέο σχήμα κατασκευάζεται όταν μετακινείται σ' ένα νέο πλαίσιο. Υπογραμμίζεται ότι αν και μια διαχωριστική γενίκευση μπορεί να εμφανιστεί ως επιτυχής γενίκευση για έναν παρατηρητή, αποτυγχάνει να είναι μια γνωστική γενίκευση δεδομένου ότι δεν θεωρεί τα προηγούμενα παραδείγματα ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής διαδικασίας. Στην πραγματικότητα, η διαχωριστική γενίκευση μπορεί να είναι ένα βάρος για έναν πιο αδύνατο σπουδαστή, που κατασκευάζει χωριστές διαδικασίες για ποικίλες περιπτώσεις, αντί της δημιουργίας μιας γενικής περίπτωσης. Επιπλέον, η επεκτατική γενίκευση είναι γνωστικά ευκολότερη από την ανακατασκευαστική, αλλά μπορεί να είναι ανεπαρκής μακροπρόθεσμα. Ο Dorfler (1991, στο Dorfler 2008) ορίζει δύο τύπους γενικεύσεων: εμπειρική γενίκευση, η οποία αναφέρεται στην αναγνώριση κοινών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων ή ποιοτήτων σε αντικείμενα και θεωρητική γενίκευση, η οποία έχει να κάνει με ένα «σύστημα δράσης» στο οποίο σταθερές αναγνωρίζονται, αφαιρούνται και υποκαθιστούν τα πρωτότυπα, συμπεριλαμβάνοντας σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.

Ο Mitchelmore (2002) εισάγει δύο όρους σχετικούς με τη διαδικασία της γενίκευσης: αφαίρεση επιμέρους (abstract apart) και αφαίρεση γενική (abstract general). Ο πρώτος αναφέρεται στην εύρεση ομοιοτήτων σε συγκεκριμένες δεδομένες περιπτώσεις από τις οποίες αναπτύσσεται εργαλειακή κατανόηση (instrumental understanding is exhibited). Ο δεύτερος αναφέρεται στην επέκταση ενός μεγάλου αριθμού περιπτώσεων, αρκετά πέρα από τη δεδομένη, από την οποία αναπτύσσεται σχεσιακή κατανόηση.

Ο κατάλογος των σημασιών της γενίκευσης είναι μακρύς. Ωστόσο, μια πλήρη εικόνα αυτών δίδει η επιχειρούμενη από τους Mitchelmore και White (στο

Mitchelmore 2002) οργάνωση των ορισμών αυτών σε τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία, όπου «**η γενίκευση χρησιμοποιείται με μια έννοια-σημασία συνώνυμη της αφαίρεσης»,** εντάσσονται οι: Davidov(1972/1990)[εύρεση και απόσπαση ιδιοτήτων από μια κλάση παρόμοιων αντικειμένων], Dreyfus(1991)[το πρώτο στάδιο της αφαίρεσης], Mitchelmore και White [παρόμοια θεωρούν την abstract general ως το πρώτο στάδιο της αφαίρεσης]**.** Στην δεύτερη κατηγορία εντάσσουν τις αποδόσεις εκείνες που βλέπουν τη γενίκευση ως «**επέκταση μιας υπάρχουσας έννοιας»,** κάτω από τρεις διαφορετικές οπτικές. Δηλαδή, εδώ εντάσσουν α) την εμπειρική επέκταση [πρωτόγονη γενίκευση (Dienes, 1963), επεκτατική γενίκευση (Harel and Tall, 1991)], δηλαδή εφαρμογή μιας έννοιας σε καινούργια πλαίσια β) την μαθηματική επέκταση [μαθηματική γενίκευση (Dienes, 1963), ανακατασκευαστική γενίκευση Harel and Tall ,1991)], δηλαδή εμφύτευση μιας τάξης αντικειμένων σε μια μεγαλύτερη τάξη γ) την μαθηματική εφεύρεση [καρτεσιανή αφαίρεση (Damerow, 1996), δημιουργική γενίκευση (Fischbein, 1996)], δηλαδή όταν ένας μαθηματικός σκόπιμα αλλάζει ή παραλείπει μια ή περισσότερες ορισμένες ιδιότητες μιας οικείας έννοιας, για να σχηματίσει μια περισσότερο γενική έννοια, όπως για παράδειγμα η τροποποίηση του αξιώματος παραλληλίας οδήγησε από την Ευκλείδεια στη μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στην τρίτη κατηγορία εντάσσονται οι αποδόσεις που βλέπουν την γενίκευση ως **«ένα θεώρημα που συσχετίζει υπάρχουσες έννοιες»,** που αναφέρεται σε μια σχέση που υπάρχει μεταξύ όλων των μελών ενός συνόλου αντικειμένων, με την εμπειρική και θεωρητική γενίκευση του Davidov να εντάσσονται εδώ.

Ιδιαίτερο και πρακτικό ενδιαφέρον έχει όμως η διδασκαλία της γενίκευσης στα σχολικά μαθηματικά, ο τρόπος δηλαδή που διδάσκονται οι γενικεύσεις της δεύτερης και τρίτης κατηγορίας στα σχολικά μαθηματικά.

Οι γενικεύσεις της δεύτερης κατηγορίας, δηλαδή γενίκευση με την έννοια της επέκτασης μιας υπάρχουσας έννοιας, απαντούν στα ρεαλιστικά μαθηματικά προγράμματα σπουδών της Ολλανδίας, που σύμφωνα με τον Mitchelmore (2002) *«είναι το μοναδικά κονστρουκτιβιστικά προγράμματα μαθηματικών με έμφαση όχι μόνο στην οριζόντια μαθηματικοποίηση [ανάπτυξη κανόνων σε αρκετά οικεία καθημερινά πλαίσια], αλλά και στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση [εύρεση της κοινής δομής σε διαφορετικά πλαίσια, τυποποίηση και συμβολισμό της» (σελ. 162).*

Όσον αφορά τις γενικεύσεις της τρίτης κατηγορίας που υπάρχουν στα σχολικά μαθηματικά, αναφέρουν στη συνέχεια, διδάσκονται μέσα από τρεις διαφορετικούς τρόπους: α) με τη μέθοδο ABC (Abstract Before Concrete) «*ως*

αφηρημένες σχέσεις που πρέπει να μαθευτούν πριν από κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή». Η μέθοδος αυτή αντανακλά τα παραδοσιακά μοντέλα διδασκαλίας, όπου σχέσεις, κανόνες και τύποι δίνονται έτοιμοι στους μαθητές, οι οποίοι καλούνται απλά να τους εφαρμόσουν χωρίς καμιά συμμετοχή στη διαδικασία κατασκευή τους. Πρόκειται για στείρα γνώση, χωρίς κατανόηση. β) με εξερευνητικές μεθόδους που προχωρούν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, π.χ. η $\chi+2\chi=3\chi$, οποιοσδήποτε αριθμός κι αν είναι το χ, βρίσκοντας πρώτα ότι $1+2.1=3.1$, $2+2.2=3.2,\ldots$ αποτελεί παράδειγμα εμπειρικής γενίκευσης, με τα «προβλήματα», κατά τους αρθρογράφους, της αδυναμίας των επαγωγικών ισχυρισμών γ) μέσω της επίλυσης προβλήματος. Την τρίτη χαρακτηρίζουν ως τη μέθοδο που οδηγεί σε βαθιά κατανόηση, και «*αν και αποτελεί θεωρητική γενίκευση, ένα μεγάλο μέρος εμπειρικής γενίκευσης χρησιμοποιείται για την παραγωγή συμπερασμάτων, ακόμα και αξιωμάτων*» (Mitchelmore 2002, σελ. 161).

Θεωρούμε τις δύο τελευταίες μεθόδους αποδεκτές και κατάληλες για τη διδασκαλία της γενίκευσης, που σε αντίθεση με τον πρώτο τρόπο διδασκαλίας που αντανακλά την αντίληψη της αξιωματικής φύσης των μαθηματικών και άρα τον γραμμικό και παραγωγικό τρόπο παρουσίασής τους υπό μορφή αξιωμάτων και θεωρημάτων, δίνουν την εντύπωση στους μαθητές ότι δεν είναι η αυστηρότητα και η ακαμψία που βρίσκονται στον πυρήνα των μαθηματικών κάνοντάς τα πιο προσιτά. Η διδασκαλία της γενίκευσης με τις δύο αυτές μεθόδους περνάει μέσα από τον επαγωγικό συλλογισμό, την εύρεση patterns και τη διατύπωση εικασιών, περιγράφει δηλαδή τον τρόπο δημιουργίας των μαθηματικών εννοιών σε αρχικά στάδια, όπως θα έλεγε και ο Polya. Τα αποδιωγμένα, από τον σύγχρονο τρόπο δόμησης των μαθηματικών patterns, λόγω της «επαγωγική τους φύσης», αποτελούν το πλέον, κατά την άποψή μας, κατάλληλο όχημα για την επίτευξη της γενίκευσης από το επίπεδο του δημοτικού σχολείου, κι αυτό θα επιχειρήσουμε να στηρίξουμε στη συνέχεια της εργασίας μας.

3.3 Από τα patterns στις συναρτήσεις. Η ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης μέσω της γενίκευσης των patterns.

Τα patterns, οι μαθηματικές δομές, τα μοντέλα ποσοτικών σχέσεων και οι αλλαγές-μεταβολές, αποτελούν τις θεμελιώδεις ιδέες που προωθεί το NCTM (2000) για τους μικρούς μαθητές. Όπως επίσης, προωθεί την κατανόηση των patterns, των

σχέσεων και συναρτήσεων σε όλα τα επίπεδα ηλικιών. Πρόκειται για έννοιες που βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση του περιβάλλοντα φυσικού και κοινωνικού κόσμου και ως εκ τούτου απαιτείται η πρώιμη εισαγωγή των μαθητών σε αυτές.

Τα patterns, στη διαδρομή προς τη γενίκευση, ήταν το δημοφιλέστερο μέσο κατά τη διάρκεια της προηγούμενης δεκαετίας στα προγράμματα σπουδών των σχολικών μαθηματικών της Αγγλίας (Orton &, 1999) σε αντίθεση με τη συνήθη πρακτική της χρήσης των μεταβλητών σε εξισώσεις ως βασικών εργαλείων για την έκφραση γενικεύσεων (English και Warren, 1998). Οι English και Warren προτείνουν ότι σε αντίθεση με αυτή την παραδοσιακή τακτική, η εξερεύνηση αναπτυσσόμενων patterns παρέχει μια εναλλακτική προσέγγιση στην έννοια της μεταβλητής και ένα πιο πρόσφορο μέσο για την επίτευξη των αλγεβρικών ιδεών που επιθυμούμε να διδάξουμε στους μαθητές μας, και κυρίως μια σταδιακή έκφραση της γενικότητας από προφορικές στην αρχή περιγραφές σε όλο πιο τυπικούς τρόπους έκφρασής της. Υποστηρίζουν ότι είναι η ενασχόληση με δραστηριότητες σχετικές με τα patterns που φέρνουν την άλγεβρα μέσα στον πραγματικό κόσμο και οι οποίες παρέχουν στους μαθητές εμπειρίες έρευνας, ανακάλυψης, αλλά και βιωματικής προσέγγισης της κατασκευής της άλγεβρας.

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο *«η έρευνα τεκμηριώνει όλο και περισσότερο την ικανότητα των μαθητών του δημοτικού σχολείου, από τα διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά και εκπαιδευτικά υπόβαθρα, να ασχοληθούν με τον αλγεβρικό συλλογισμό με τρόπους που διαλύουν τους αναπτυξιακούς περιορισμούς που προηγουμένως επιβλήθηκαν πάνω τους. Μια από τις μορφές αλγεβρικού συλλογισμού περιλαμβάνει τη συναρτησιακή σκέψη, δηλαδή τη σκέψη που εστιάζει στη σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβαλλόμενων ποσοτήτων και για την οποία οι συναρτήσεις αποτελούν τα αναπαραστασιακά συστήματα που εφευρίσκονται ή που ιδιοποιούνται από τα παιδιά, για να αναπαραστήσουν τη γενίκευση της σχέσης»* (Blanton, Kaput, 2004, σελ. 135).

Για τους προαναφερόμενους ερευνητές η αξιοποίηση των αλγεβρικών ιδεών των παιδιών οδηγεί στο σχεδιασμό έργων όπου ο αλγεβρικός συλλογισμός συντελείται και αναπτύσσεται μέσω της γενίκευσης αναπτυσσόμενων (αριθμητικών και γεωμετρικών) patterns για την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης, που βαθμιαία εξελίσσεται με την απόδοση ολοένα και πιο σύνθετων συναρτησιακών σχέσεων.

Τα συστατικά στοιχεία της συναρτησιακής σκέψης περιγράφονται από την Sierpinska (1992) ως κόσμοι ή καλύτερα θα λέγαμε ότι η ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης περιλαμβάνει την σταδιακή κατάκτηση τριών κόσμων. Πρόκειται για τον κόσμο των αλλαγών ή μεταβαλλόμενων αντικειμένων, τον κόσμο των σχέσεων ή κόσμο των διαδικασιών και τέλος τον κόσμο των κανόνων, patterns και νόμων. Είναι η σταδιακή οικειοποίηση των παραπάνω κόσμων που εξασφαλίζει την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. Αρχικά είναι η αναγνώριση του τι αλλάζει-μεταβάλλεται και πώς αλλάζει. Η μεταβολή μπορεί να αφορά είτε ποιοτικά είτε ποσοτικά χαρακτηριστικά των μεταβαλλόμενων αντικειμένων αρχικά εντός ενός συνόλου και αργότερα ανάμεσα σε δύο σύνολα Τόσο οι ποιοτικές όσο και οι ποσοτικές αλλαγές είναι μέσα στην καθημερινή ζωή των παιδιών.

Ακολουθεί η σύνδεση-συσχέτιση αυτών των μεταβαλλόμενων αντικειμένων και η αναζήτηση σχέσεων για απόδοση αυτής της σύνδεσης. Η αναζήτηση αυτή χαρακτηρίζει την μετακύλιση στον κόσμο των σχέσεων ή διαδικασιών. Αλλά τι είναι σχέση; Οποιαδήποτε δήλωση, σύμφωνα με τους Mason, Graham & Johnston- Wilder (2005), που περιγράφει τον τρόπο σύνδεσης ή συσχέτισης δύο ή περισσότερων αντικειμένων που μπορεί να αποδίδεται με λεκτικές δηλώσεις, με πίνακες, λίστες, σχηματικά ή συμβολικά. Ωστόσο μια σχέση μπορεί να περιγράφει τη μεταβολή εντός ενός συνόλου, αποκαλούμενη τότε αναδρομική ή επαναληπτική (iterative) σχέση. Ενώ οι συναρτησιακές σχέσεις είναι σχέσεις εξάρτησης και ορίζουν τη συσχέτιση ή συμμεταβολή μεταξύ δύο συνόλων. Οι τελευταίες χαρακτηρίζονται είτε ως σχέσεις συμμεταβολής (πώς η μεταβολή εντός ενός συνόλου μεταβάλλει τα στοιχεία του άλλου συνόλου) είτε ως σχέσεις αντιστοίχισης (καθορισμός του τρόπου που σε κάθε τιμή του ενός συνόλου αποδίδεται μια μοναδική τιμή του άλλου συνόλου). Η απόδοση τόσο των αναδρομικών σχέσεων όσο και των συναρτησικών σχέσεων (σχέσεων συμμεταβολής και σχέσεων αντιστοίχισης) με πιο σαφή-τυπικό τρόπο γίνεται με τους κανόνες. Οι κανόνες, δηλαδή, είναι καλά ορισμένες σχέσεις (Sierpinska, 1992).

Η σταδιακή κατάκτηση των πιο πάνω κόσμων μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα από την ενασχόληση με τα διάφορα είδη επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων patterns. Τα τελευταία, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι οι γνωστές μας ακολουθίες, δηλαδή συναρτήσεις που ορίζονται στο σύνολο των

φυσικών αριθμών. Δηλαδή τα patterns αποτελούν ένα πρόσφορο μέσο, ένα εργαλείο που μπορεί να αποτελέσει το σημείο εισόδου στον κόσμο των συναρτήσεων.

Οι παραπάνω κόσμοι, έτσι όπως περιγράφηκαν, προσδιορίζουν την πορεία ανάπτυξης της συναρτησιακής σκέψης από παρατηρούμενες αρχικά μεταβολές σε έκφραση αυτών μέσω αναδρομικών σχέσεων και στην συνέχεια απόδοση των παρατηρούμενων συμμεταβολών με πιο σαφή τρόπο μέσω των κανόνων ή patterns. Ας πάρουμε για παράδειγμα το pattern 3, 5, 7, 9, …Εκφράσεις όπως :«η ακολουθία διαφορών μεταξύ διαδοχικών όρων είναι 2, 2, 2, 2,….» ή ότι «ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας 2» περιγράφουν αναδρομικές διαδικασίες. Οι αναδρομικές προσεγγίσεις, δηλαδή οι από όρο σε όρο προσεγγίσεις, έχουν το «μειονέκτημα» ότι η εύρεση ενός όρου απαιτεί τον προσδιορισμό όλων των προηγούμενων όρων με τη διαδικασία να γίνεται όλο και λιγότερο αποδοτική όσο πιο απομακρυσμένος είναι ο προς αναζήτηση όρος. Εκφράσεις που περιγράφουν το πώς η μετακίνηση από μια θέση στην αμέσως επόμενη επηρεάζει τους αντίστοιχους όρους της ακολουθίας, περιγράφουν συναρτησιακές σχέσεις συμμεταβολής. Παράδειγμα μιας τέτοιας σχέσης είναι: «καθώς μετακινούμαστε από μια θέση στην επόμενη οι όροι της ακολουθίας αυξάνονται κατά 2». Η έκφραση μιας τέτοιας σχέσης περιλαμβάνει την παράλληλη θεώρηση δύο συνόλων, του συνόλου των θέσεων των όρων και του συνόλου των όρων της ακολουθίας. Τέλος, η απόδοση του κανόνα $\alpha_{v=}2.v+1$ με προσδιορισμό της σαφούς σχέσης μεταξύ της θέσης ν-οστού όρου της ακολουθίας και της τιμής αυτού του όρου, είναι έκφραση συναρτησιακής σχέσης αντιστοίχισης. Είναι σαφές από τα παραπάνω, ότι η αναζήτηση συναρτησιακών σχέσεων έναντι αναδρομικών ή επαναληπτικών σχέσεων είναι το κομβικό σημείο αντιμετώπισης των patterns ως συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, είναι η θέαση των όρων ενός pattern σε σχέση με τη θέση τους στην ακολουθία που φανερώνει μια πιο ουσιαστική αντιμετώπιση τους, ως συναρτήσεων πια.

Με τα όσα προηγούμενα περιγράψαμε, ουσιαστικά προσδιορίσαμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα κινηθούμε στη συνέχεια. Δηλαδή διερεύνηση της δυνατότητας στη συναρτησιακή σκέψη των παιδιών μέσα από τη γενίκευση patterns. Η προηγούμενη δόμηση των σχέσεων από αναδρομικές σε συναρτησιακές συμμεταβολής και αντιστοίχισης αποτελεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα παρακολουθήσουμε, κατά τον ίδιο δομημένο τρόπο, τη δυνατότητα των μαθητών σε όλο και πιο τυπικούς τρόπους γενίκευσης κι απόδοσής της με όλο και πιο σύνθετες συναρτησιακές σχέσεις. Χαρακτηρίζει και περιγράφει, δηλαδή, ένα μέρος των εξελισσόμενων στρατηγικών

γενίκευσης που ακολουθούν τα παιδιά καθώς εργάζονται σε έργα με αναπτυσσόμενα και επαναλαμβανόμενα patterns. Παράλληλα θα δούμε κι άλλα παράπλευρα ζητήματα που ανακύπτουν μέσα από τις εργασίες με τέτοια έργα πιο εμπεριστατωμένα, όπως για παράδειγμα το ρόλο που μπορεί να παίξουν τα patterns σε άλλες εννοιολογικές περιοχές των μαθηματικών. Ακολουθούν, λοιπόν, έρευνες που αναζητούν τα είδη των γενικεύσεων που μπορούν να κάνουν μαθητές της στοιχειώδους εκπαίδευσης, τους παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητά τους, αλλά και τα προβλήματα που συναντούν στη διαδρομή προς τη γενίκευση. Όλα αυτά, για να απαντήσουμε τελικά στο εφικτό των στόχων της πρώιμης άλγεβρας από την οπτική των patterns.

3.4 Από την εννοιολογική κατανόηση της μονάδας επανάληψης των επαναλαμβανόμενων patterns στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων

Η κυκλική φύση πολλών φυσικών φαινομένων, όπως για παράδειγμα η εναλλαγή της ημέρας με τη νύχτα και η εναλλαγή των εποχών, αλλά και φαινομένων της καθημερινής ζωής - και ως εκ τούτου απόλυτα ενσωματωμένων στις πρώιμες εμπειρίες των παιδιών- όπως η εναλλαγή των χρωμάτων στα φανάρια που ρυθμίζουν την κίνηση των αυτοκινήτων στους δρόμους, η περιοδικότητα των ημερών της εβδομάδας κ. ά., καθιστούν τα επαναλαμβανόμενα patterns προσιτά στα παιδιά ακόμα και της προσχολικής ηλικίας. Όπως όμως σε τελείως θεωρητικό επίπεδο είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση πέραν αυτής που έχει να κάνει με την αντίληψη της μονάδας επανάληψης είναι στείρα προσέγγιση και αποστερεί από το εργαλειακό οπλοστάσιο των μαθηματικών ένα σημαντικό μέσο για την προσέγγιση άλλων μαθηματικών περιοχών, όπως για παράδειγμα του κλασματικού λογισμού και της στοιχειώδους θεωρίας των αριθμών. Η αντίληψη δηλαδή της μονάδας επανάληψης είναι δηλωτική της κατανόησης των επαναλαμβανόμενων patterns αυτών καθ' αυτών από τη μια, αλλά και από την άλλη αποτελεί την αναγκαία προϋπόθεση για έναν εννοιολογικό επαναπροσδιορισμό των, και μέσω αυτού στην εισαγωγή σε άλλα μαθηματικά πεδία και έννοιες που κατά πολύ αποκλίνουν, με την έννοια της υπέρβασης, ακόμα και από τους στόχους της πρώιμης άλγεβρας, έτσι όπως τέθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Με αυτό, αναφερόμαστε στο

γεγονός ότι μέσα στα πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας προτάσσονται τα αριθμητικά και γεωμετρικά patterns σε βάρος των επαναλαμβανόμενων στην πορεία προς τη γενίκευση, και την έκφραση, στη προσπάθεια επίτευξής της, ολοένα και πιο σύνθετων και επίσημων συναρτησιακών σχέσεων. Τα παραπάνω, δηλαδή τη δυνατότητα αντίληψης των επαναλαμβανόμενων patterns από τους μαθητές με όρους «μονάδας επανάληψης», αλλά και τα επαναλαμβανόμενα patterns ως πλαίσιο για την επίτευξη της γενίκευσης, στα πλαίσια πάντα της στοιχειώδους εκπαίδευσης, θα προσπαθήσουμε να τεκμηριώσουμε ερευνητικά στη συνέχεια, επισημαίνοντας ταυτόχρονα τους εμπλεκόμενους παράγοντες.

3.4.1 Ζητήματα επάρκειας των διδασκόντων

Ο Threlfall (1999) σε μια σειρά μελετών με μαθητές 3 έως 10 ετών όπου ζητείται από τους μαθητές η δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns εντοπίζει αδυναμίες στην παραγωγή σύνθετων patterns, την οποία αποδίδει στην αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν τη μονάδα επανάληψης σε ένα επαναλαμβανόμενο pattern, ειδικά όταν σ' αυτή συνδυάζονται στοιχεία όπως το μέγεθος, το χρώμα και ο προσανατολισμός. Από τις έρευνές του προκύπτει επίσης ότι ούτε η εργασία με πιο σύνθετα έργα εξασφαλίζει μια λιγότερο ρυθμική και περισσότερο εννοιολογική κατανόηση της μονάδας επανάληψης. Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι: «*δραστηριότητες οποιουδήποτε είδους σχετικά με τα επαναλαμβανόμενα patterns, οι οποίες γίνονται χωρίς υποστήριξη από το δάσκαλο, μπορούν να ειδωθούν ως ένας τρόπος εκτίμησης της ικανότητας να δουν την μονάδα επανάληψης σε ένα επαναλαμβανόμενο pattern*» (Threlfall, 1999, σελ. 29) και τίποτε περισσότερο. Για τον Threlfall: *«η αντίληψη του επαναλαμβανόμενου pattern με όρους μονάδας επανάληψης είναι απίθανο να συμβαίνει ως αποτέλεσμα μιας φυσικής διαδικασίας επιβολής τάξης και ως εκ τούτου για τους περισσότερους μαθητές πρέπει να διδαχθεί»*.
(Threlfall, 1999, σελ. 28)

Ενώ είναι σαφείς οι ευθύνες των δασκάλων και των διδακτικών πρακτικών τους, κατά τον Threlfall, και αποδίδονται, το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει, είναι στα πλαίσια μιας έρευνας που ούτως ή άλλως δεν κάνει τίποτα περισσότερο από το να καταγράψει τι κάνουν οι μαθητές μέσα στα παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια. Αποτελεί ένα αξιολογικό στοιχείο όχι των δυνατοτήτων των μαθητών, αλλά «των δυνατοτήτων και της συνεισφοράς των διδασκόντων» μέσα σε ένα εκπαιδευτικό

σύστημα του οποίου και οι ίδιοι είναι προϊόντα και του οποίου «ανέλαβαν τη διαιώνιση». Σαφέστατα, η αντίληψη των επαναλαμβανόμενων patterns με όρους επανάληψης δεν μπορεί να συμβαίνει ως αποτέλεσμα μιας *φυσικής διαδικασίας επιβολής τάξης* και απαιτεί διδασκαλία, διδασκαλία που θα στοχεύει στην ανάσυρση της τάξης και της κανονικότητας μέσα από την άτυπη γνώση σχετικά με κυκλικές δομές που φέρουν οι μαθητές από τη νηπιακή τους ηλικία αφενός, και αφετέρου, στη συνέχεια, περαιτέρω καλλιέργεια των ικανοτήτων αναγνώρισης της κανονικότητας και της τάξης, αλλά και της επιβολής των σε διαφορετικά πλαίσια. Προέχει δηλαδή η εξοικείωσή τους με την αναγνώριση της τάξης και της κανονικότητας μέσα από βιωματικές καταστάσεις, για να μπορέσουν να τακτοποιήσουν και να αποδώσουν στη συνέχεια κανονικότητα σε μια αδιευθέτητη συλλογή αντικειμένων. Η ανταποδοτική αυτή σχέση υλοποιείται από τον διδάσκοντα και τον καταλυτικό ρόλο που καλείται να παίξει. Όμως, κατά πόσο εμείς οι διδάσκοντες είμαστε σε θέση να ανταπεξέλθουμε; Ας το δούμε.

Η Waters (2004,) σε πρόσφατη παρατηρητική μελέτη διαπίστωσε ότι παιδιά της προσχολικής ηλικίας άρχισαν και περιέγραφαν τα δικά τους patterns, που κυμαίνονταν από απλά επαναλαμβανόμενα patterns έως πιο σύνθετα patterns με ψηφιδωτά**.** Τα patterns με ψηφιδωτά, σύμφωνα με τη Waters «*ακολουθούν τις αρχές της μορφής και της θέσης και ενσωματώνουν τη χρήση διερεύνησης, συζήτησης και στοχασμού [...]προϋποθέτουν δε εμπειρία με patterns και γωνίες».* Ωστόσο η κατάχρηση από μέρος των δασκάλων του όρου pattern σε παραδείγματα με σχέδια που περιλάμβαναν μορφές, χρώματα, γραμμές κ.α. σε τυχαία διευθέτηση και επομένως δεν υπήρχε οποιαδήποτε μορφή κανονικότητας, έδειξε ότι αγνοούν πως η επαναλαμβανόμενη φύση του pattern είναι αυτή που το διακρίνει από την τυχαία διευθέτηση ή από ένα οποιοδήποτε τυχαίο σχέδιο. Η απουσία συνεπών παραδειγμάτων και η μη επικέντρωση στα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των επαναλαμβανόμενων patterns οδήγησε τους μαθητές σε πολλαπλές ερμηνείες του όρου pattern. Ενώ τα επεισόδια που σχεδιάστηκαν από τους ίδιους τους δασκάλους παρείχαν σημαντικές ευκαιρίες για μάθηση, και όπως είπαμε οι μαθητές άρχισαν να περιγράφουν τα πρώτα δικά τους patterns, η έλλειψη γνώσης των δασκάλων και η φύση των δραστηριοτήτων λειτούργησαν αποπροσανατολιστικά και δεν μπόρεσαν να υποστηρίξουν τις προσπάθειες των μαθητών. Συστάσεις, για παράδειγμα, από μέρους των δασκάλων του τύπου «να το κάνετε να αυξηθεί από όλες τις πλευρές» δεν αποδίδουν πλήρως την έννοια των ψηφιδωτών. Όσον αφορά έργα με

επαναλαμβανόμενα patterns, λέει χαρακτηριστικά η Waters, *«η χρήση ορολογίας patterns από μόνη της δεν αποφέρει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα αν δεν προηγηθεί συζήτηση που θα φέρνει στην επιφάνεια τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού patterning*». Η προώθηση του μαθηματικού patterning στο νηπιαγωγείο στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη δυνατότητα του δασκάλου να προσδιορίσει έννοιες και να εισάγει σ' αυτές τους μαθητές. *«Οι δάσκαλοι πρέπει να γίνουν πιο ενήμεροι για τους τύπους, το επίπεδο και την πολυπλοκότητα των patterns*», αναφέρεται χαρακτηριστικά. Είναι σαφές ότι οι δάσκαλοι όχι μόνο δεν μπορούν να παράσχουν το απαραίτητο «scafolding», αλλά οι όποιες προσπάθειες των μαθητών καταπνίγονται στην γνωστική ανεπάρκεια και το γνωστικό έλλειμμα των διδασκόντων. Η γνωστική ανεπάρκεια και οι παρερμηνείες των δασκάλων σχετικά με μαθηματικές έννοιες επισημαίνεται από την έρευνα (Nardi, 1994, στο Κολέζα 2006), όπως επίσης επισημαίνεται ότι, η «παιδαγωγική γνώση των μαθηματικών», δηλαδή η γνώση του πώς θα διδαχθεί μια μαθηματική έννοια προκειμένου να γίνει κατανοητή από τους μαθητές είναι σε απαραίτητη συνάφεια ή καλύτερα προϋποθέτει την καλή γνώση του αντικειμένου αυτού καθ' εαυτού (Κολέζα, 2006). Θελουμε, δηλαδή να πούμε, πως οι όποιες φιλότιμες προσπάθειες από μεριάς των εκπαιδευτικών καταπνίγονται στην έλλειψη γνώσης- από μέρους τους- του αντικειμένου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι και οι αποκλειστικοί υπεύθυνοι για αυτό. Σ' αυτό συμβάλλουν ένα σωρό παράγοντες που ξεπερνούν τα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Το κύριο, λοιπόν, είναι ο δάσκαλος να είναι γνώστης του αντικειμένου. Περαιτέρω, όμως απαιτείται συστηματική διδακτική παρέμβαση (Τζεκάκη και Κούλελη, 2007). Οι Τζεκάκη και Κούλελη (2007) σε έρευνά τους με παιδιά προσχολικής ηλικίας επιβεβαιώνουν την αυθόρμητη τάση τους στο χειρισμό, δηλαδή στον εντοπισμό, επανάληψη και συνέχιση ενός απλού επαναλαμβανόμενου pattern πριν από κάθε συστηματική διδακτική παρέμβαση. Ωστόσο, αναφέρουν ότι η εξέλιξη αυτής της άτυπης προσέγγισης σε ουσιαστική κατανόηση της ιδέας της κανονικότητας χρειάζεται συστηματική διδακτική παρέμβαση από τις μικρές ηλικίες, περιορίζοντας έτσι κατοπινά προβλήματα με πιο σύνθετες δομές και κανονικότητες. Ουσιαστικά επισημαίνεται για μια ακόμη φορά η ανάγκη κατανόησης ενός pattern πέραν της ρυθμικής ή μιμητικής προσέγγισης αλλά και ο καθοριστικός ρόλος του δασκάλου.

Διαφαίνεται από τα παραπάνω ότι η αξιοποίηση των δυνατοτήτων των μαθητών προϋποθέτει αφενός ένα δάσκαλο γνώστη του αντικειμένου και αφετέρου

ένα δάσκαλο του οποίου η «παιδαγωγική γνώση του αντικειμένου», με μια ευρύτερη θεώρηση, φτάνει μέχρι την υιοθέτηση των πιο σύγχρονων και καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων.

3.4.2 Συστηματικές διδακτικές παρεμβάσεις. Αποδοτικές ενέργειες των διδασκόντων

Στις τελευταίες δύο μελέτες των Waters και Τζεκάκη & Κουλέλη αρχίζει να διαφαίνεται μια στοιχειώδη αντιμετώπιση των επαναλαμβανόμενων patterns από μαθητές της προσχολικής ηλικίας, ενώ και από τις τρεις παραπάνω έρευνες επισημαίνεται ότι η έλλειψη γνώσης των δασκάλων και οι διδακτικές πρακτικές είναι αυτές που εμποδίζουν την ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών στο patterning. Όταν οι διδακτικές παρεμβάσεις γίνονται πιο συστηματικές τα αποτελέσματα είναι πολύ ενθαρρυντικά, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Σε μια μελέτη περίπτωσης οι Papic & Mulligan (2005) παρακολούθησαν την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων αναφορικά με τα patterns σε 53 μαθητές δύο νηπιαγωγείων, παρόμοιων από την άποψη ικανοτήτων των μαθητών αλλά και της κοινωνικο-πολιτιστικής προέλευσής των, ένα από τα οποία εφάρμοσε ένα έξι μηνών πρόγραμμα παρέμβασης για την προαγωγή εννοιών σχετικά με τα patterns. Τριάντα πέντε μαθητές από το αρχικό δείγμα επαναξιολογήθηκαν με την ολοκλήρωση του προσχολικού έτους και 32 με την ολοκλήρωση του πρώτου έτους της σχολικής εκπαίδευσης. Η παρέμβαση ακολούθησε μια μικτή προσέγγιση ενσωματώνοντας σύγχρονες πλευρές ενός σχεδίου μελέτης σε ένα κατά τα άλλα παραδοσιακά κονστρουκτιβιστικό πείραμα διδασκαλίας, όπου παρείχε σαφείς ευκαιρίες στους μαθητές να ερευνήσουν και να αναπτύξουν δεξιότητες αναφορικά με τα patterns μέσω έργων βασισμένων στο πρόβλημα. Τα παιδιά που δέχτηκαν παρέμβαση ξεπέρασαν κατά πολύ σε επιδόσεις τα παιδιά που δεν δέχτηκαν παρέμβαση σε μια σειρά έργων και αυτή η τάση διατηρήθηκε 12 μήνες μετά.

Αναλυτικότερα σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα patterns τα παιδιά της παρέμβασης ανέπτυξαν μια βαθιά κατανόηση αυτών. Μπορούσαν επιτυχώς να προσδιορίσουν, να κατασκευάσουν, να αφαιρέσουν τη μονάδα της επανάληψης και να υπολογίσουν τον αριθμό επαναλήψεων. Πολλά παιδιά της παρέμβασης ήταν σε θέση να ανασύρουν σύνθετες επαναλήψεις από τη μνήμη, να προσδιορίσουν τη

μονάδα του pattern και τον αριθμό επαναλήψεων, όπως εξηγείται στο ακόλουθο απόσπασμα που αφορά την αντιγραφή ενός pattern:

Ερευνητής: Πώς ξέρεις ότι έχεις τελειώσει τον πύργο σου; Γιατί δεν προσθέτεις μερικούς ακόμα κύβους;
Παιδί Ι 19: Θυμήθηκα κόκκινο, μπλε, μπλε, μαύρο, τρεις φορές.

Αντίθετα τα παιδιά που δεν δέχτηκαν παρέμβαση στηρίχθηκαν σε μια στρατηγική εναλλαγής των χρωμάτων για να ολοκληρώσουν τα έργα με τα επαναλαμβανόμενα patterns. Παραδείγματος χάριν, "κόκκινο, μπλε, κόκκινο, μπλε, κόκκινο, μπλε" παρά το στοιχείο "κόκκινο, μπλε" και τον αριθμό επαναλήψεων. Στο παράδειγμα αυτό γίνεται σαφές αυτό που τόσες φορές αναφέραμε, η ρυθμική προσέγγιση των επαναλαμβανόμενων patterns από τη μια, και από την άλλη η αντίληψή τους με όρους μονάδας επανάληψης.

Μεγάλο δε ποσοστό των παιδιών (63%) κατασκεύασαν τα δικά τους επαναλαμβανόμενα patterns, και τα περισσότερα από αυτά ενσωμάτωσαν και δεύτερη μεταβλητή, το χρώμα.(σχ.1)

Σχ.1

Σε έργο όπου τα παιδιά κλήθηκαν να βρουν τον αριθμό πράσινων καρτών που έλλειπαν σε ένα επαναλαμβανόμενο pattern της μορφής ABC, φάνηκε ότι τα παιδιά είχαν μια βαθειά κατανόηση της δομής του pattern, καθώς γνώριζαν ότι η μονάδα επανάληψης περιείχε τρία χρώματα, και κατά συνέπεια έπρεπε μόνο να μετρήσουν κάθε τρίτη κάρτα. Μια τέτοια στρατηγική σύμφωνα με τους ερευνητές απεικονίζει την «*πρώιμη πολλαπλασιαστική σκέψη*». Επίσης, επειδή πολλά από τα παιδιά προσδιόρισαν αμέσως κάθε τρίτη θέση με την τοποθέτηση των δαχτύλων τους στο τετράγωνο, όπου η ελλείπουσα πράσινη κάρτα έπρεπε να τοποθετηθεί, κατά τους Papic & Mulligan φάνηκε ότι *«αυτά τα παιδιά οπτικοποίησαν το στοιχείο του pattern με ακρίβεια, ενώ κάποια, χωρίς να μετρήσουν κάθε τρίτη θέση στο pattern, μετέφρασαν την επανάληψη των χρωμάτων σε ένα αριθμητικό pattern των πολλαπλασίων»*(σελ. 598).

Τέλος, σε σχέση με τα αυξανόμενα patterns, ένας αριθμός παιδιών αν και δεν εκτέθηκαν σε έργα με αυξανόμενα patterns στη διάρκεια της παρέμβασης ή στο πρώτο έτος εκπαίδευσης, ήταν σε θέση να επεκτείνουν ένα αυξανόμενο τριγωνικό αριθμητικό pattern και ένα αυξανόμενο αριθμητικό τετραγωνικό pattern. (σχ.2). Όσα δε έκαναν λάθη, κατά τους ερευνητές, αποδόθηκαν στην ολιστική θεώρηση του αυξανομένου μεγέθους των τριγώνων ή τετραγώνων και προσπάθησαν να κάνουν το pattern μεγαλύτερο.

Σχ.2

Αντίθετα, οι μαθητές που απάντησαν σωστά περιέγραψαν τους όρους του pattern, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα, ως επεκτάσεις των προηγούμενων όρων με εξέταση της αλλαγής στη δομή του pattern, κάτι που κατά τους ερευνητές αποτελεί πρώιμο σημάδι συναρτησιακής σκέψης (*συναρτησιακή σκέψη συμμεταβολής*) και αναδεικνύει ταυτόχρονα τη σημασία των ποσοτικών σχέσεων στην ανάπτυξη αυτής της μορφής αλγεβρικής σκέψης.

Ερευνητής: Μπορείτε να μου πείτε τι συμβαίνει κάθε φορά που κάνουμε το τρίγωνο μεγαλύτερο.

Παιδί Ι 18: Γίνεται μεγαλύτερο.

Ερευνητής: Μπορείτε να μου πείτε πώς γίνεται μεγαλύτερο;

Παιδί Ι 18: Πηγαίνει ένα, δύο, τρία, τέσσερα.

Ερευνητής: Ποιο πηγαίνει ένα, δύο, τρία, τέσσερα;

Παιδί Ι 18: Δείτε το κατώτατο σημείο του τριγώνου, εδώ είναι ένα, κατόπιν εδώ είναι δύο, κατόπιν τρία, εδώ αυτό είναι τέσσερα (υπογραμμίζοντας κάθε διαδοχικό τρίγωνο κατά την εξήγηση του).

Τα περισσότερα από τα παιδιά που επιτυχώς επέκτειναν τα αυξανόμενα patterns ήταν κιόλας σε θέση να δώσουν εξηγήσεις. Το ακόλουθο απόσπασμα δείχνει τη δικαιολόγηση ενός παιδιού του τετραγωνικού pattern ως αυξανόμενου συστηματικά σε δύο διαστάσεις.

Ερευνητής: Μπορείτε να μου πείτε τι συμβαίνει κάθε φορά που κάνουμε το τετράγωνο μεγαλύτερο.

Παιδί Ι 4: Ναι, εδώ αυτό έχει ένα, κατόπιν έχει 2 και 2 γραμμές και είναι μεγαλύτερο. Κατόπιν αυτό έχει τρία και τρεις γραμμές και έπειτα τέσσερα και τέσσερις γραμμές.

Ερευνητής: Τι εννοείς τέσσερα και τέσσερις γραμμές;
Παιδί Ι4: Κοίτα, υπάρχουν τέσσερα σε κάθε γραμμή.
Ερευνητής: Έτσι πώς θα ήταν ο επόμενος όρος στο pattern μου;
Παιδί Ι 4: Χμ!... πέντε και πέντε γραμμές.

Μια βασική συνεισφορά αυτής της έρευνας είναι ότι απαντά σε ένα βασικό προβληματισμό πολλών, εχόντων σχέση με την εκπαιδευτική πραγματικότητα με τον ένα ή άλλο τρόπο, σχετικά με την αδυναμία των μαθητών στο χειρισμό των αναπτυσσόμενων patterns. Αρχίζει να διαφαίνεται, δηλαδή, ότι είναι η ανεπαρκής ενασχόληση με τα επαναλαμβανόμενα patterns που καθιστά την ενασχόληση με τα αναπτυσσόμενα προβληματική κι όχι ότι τα αναπτυσσόμενα είναι γνωστικά δυσκολότερα, μια άποψη που όπως θα δούμε παρακάτω υποστηρίζεται και από άλλους. Οι δυσκολίες των μεγαλύτερων μαθητών μπορούν να μην είναι αποτέλεσμα αναπτυξιακών περιορισμών τελικά, αλλά μάλλον, αποτέλεσμα των περιορισμένων ευκαιριών ή περιορισμένων και ανακριβών προσεγγίσεων των patterns στα πρώτα έτη της εκπαίδευσης, προσεγγίσεων που έχουν να κάνουν με την έλλειψη συνειδητοποίησης της μονάδας επανάληψης και της ανεπαρκούς προσοχής στη δομή. Δηλαδή, όπως και παραπάνω είπαμε, η έλλειψη γνώσης των δασκάλων και οι διδακτικές πρακτικές είναι αυτές που εμποδίζουν την ανάπτυξη των παιδιών στο patterning. Τίθεται, λοιπόν, ερωτήματα σχετικά με το ποιες διδακτικές πρακτικές αλλά και ενέργειες των διδασκόντων, πιο συγκεκριμένα, είναι αυτές που μπορούν να οδηγήσουν σε μια βαθιά κατανόηση των επαναλαμβανόμενων patterns αυτών καθεαυτών, αλλά και της λειτουργίας τους ως πλαίσια για την προσέγγιση άλλων εννοιών, με σημαντικότερο το ρόλο τους στη γενίκευση και στην ανάπτυξη στην πορεία προς την επίτευξή της της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών της στοιχειώδους εκπαίδευσης. Στα βασικά αυτά ερωτήματα έρχονται να απαντήσουν οι δύο μελέτες που ακολουθούν.

Η πρώτη (Warren & Cooper, 2007) αναφέρεται σε ένα πειραματικό σχέδιο διδασκαλίας που πραγματοποιήθηκε για κάτι παραπάνω από τέσσερα μαθήματα σε δύο τάξεις με 51 μαθητές μέσης ηλικίας 9 έτη και 6 μήνες, στην Αυστραλία, όπου τα επαναλαμβανόμενα patterns εξερευνούνται ως πρώιμες εισαγωγικές δραστηριότητες στα μαθηματικά και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με αυτά. Παρά την εξοικείωση των μαθητών με αυτά ερευνήθηκαν εκ νέου, προκειμένου, όπως χαρακτηριστικά

αναφέρεται, *«να αναδειχθεί η μαθηματική τους δομή και στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε αυτή η δομή για την εισαγωγή στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας»*. Τα θεωρητικά πλαίσια που υποστήριξαν τις αλληλεπιδράσεις στην τάξη και τη μάθηση ήταν η θεωρία του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, λόγος βασισμένος στη διερεύνηση και ταυτόχρονα χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων για το χτίσιμο της νέας γνώσης. Τα έργα τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν ήταν προς την κατεύθυνση ενός εννοιολογικού επαναπροσδιορισμού των επαναλαμβανόμενων patterns, ως αναπαραστάσεων λόγων και αναλογιών. Τα συγκεκριμένα ερευνητικά ερωτήματα ήταν:

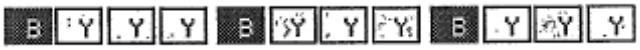
1. Πώς τα επαναλαμβανόμενα patterns μπορούν να ενεργήσουν ως γέφυρα στην έννοια του λόγου; 2. Ποιες ενέργειες δασκάλων βοηθούν στην παραγωγή αυτών των συνδέσεων; 3. Τι ρόλο παίζουν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ως υποστηρικτικά εργαλεία στην έννοια του λόγου;

Καθένα από τα τέσσερα και πλέον μαθήματα εστίασε κυρίως σε μια από τις ακόλουθες διαστάσεις: « *(1) εισαγωγή γλώσσας και συμβολισμού που περιγράφουν τα επαναλαμβανόμενα patterns, (2) χωρισμό των επαναλαμβανόμενων patterns στις επαναλαμβανόμενες μονάδες τους και συζήτηση για τον αριθμό των διαφορετικών χρωματιστών μαγνητικών καρτών (tiles) στους διαφορετικούς κάθε φορά αριθμούς των επαναλαμβανόμενων μονάδων, (3) καταγραφή αυτών των πληροφοριών σε πίνακες τιμών και από τους πίνακες των τιμών γενίκευση των σχέσεων για τα επαναλαμβανόμενα patterns, (4) εισαγωγή λόγου για σύγκριση των στοιχείων των επαναλαμβανόμενων patterns και (5) δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns για διαφορετικούς κάθε φορά λόγους και συζήτηση της έννοιας της αναλογίας».*

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης είναι αποκαλυπτικά ως προς τη δυνατότητα χειρισμού των επαναλαμβανόμενων patterns από τα μικρά παιδιά, αλλά επιπλέον αποκαλύπτουν το «γεφυροποιό» ρόλο που μπορούν να παίξουν μέσα από ένα εννοιολογικό επαναπροσδιορισμό τους, ως αναπαραστασιακά εργαλεία για την εισαγωγή στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας στους μικρούς μαθητές, οι οποίοι βρίσκουν ευκολότερη τη συζήτηση με τους λόγους από ότι με την έννοια του κλάσματος. Το γεγονός αυτό, κατά τους ερευνητές, οφείλεται στο ότι ο λόγος περιλαμβάνει σύγκριση μεταξύ των μερών ενώ τα κλάσματα περιλαμβάνουν σύγκριση μεταξύ των μερών και του όλου, μια σύγκριση που πολλοί μαθητές βρίσκουν δυσκολότερη αφενός, και αφετέρου στο ότι η η γλώσσα που χρησιμοποιείται για να περιγράψει το λόγο είναι πιο κοντά στη γλώσσα που

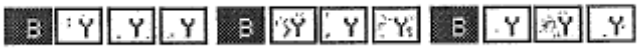
χρησιμοποιείται για τους αριθμούς και άρα πιο οικεία». Πράγματι, στην εργασία με κλάσματα η χρήση των τακτικών αριθμητικών π.χ. «πέντε τριακοστά» είναι πιο ανοίκεια από ότι τα απόλυτα αριθμητικά που χρησιμοποιούνται στην γλώσσα των λόγων π.χ. «ένα προς δύο». Τα παραπάνω που φαίνονται αντιφατικά σε σχέση με τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές με τους λόγους αναγκάζουν τους ερευνητές να αναρρωτηθούν: «*Μήπως αυτό συμβαίνει επειδή η εισαγωγή τους εμφανίζεται μετά από την εισαγωγή των κλασμάτων; Μήπως η συνθετότητα της έννοιας του κλάσματος και οι ενσωματωμένες σ' αυτή δυσκολίες έχουν αντίκτυπο στις κατοπινές εμπειρίες τους με τους λόγους;*»

Όσον αφορά τις ιδιαίτερες ενέργειες των δασκάλων, επισημαίνεται η έμφαση του δασκάλου στην αποδόμηση των patterns, δηλαδή το σπάσιμο των patterns στα μέρη τους, που επέτρεψε στους μαθητές να προσδιορίσουν τις επαναλήψεις, η ανάπτυξη κοινής γλωσσικής ορολογίας (π.χ., "επαναλαμβανόμενο μέρος") με την οποία περιέγραφαν αυτό που συνέβαινε και η εισαγωγή δεικτικών σημείων, δηλαδή η εισαγωγή των καρτών για να τοποθετηθούν κάτω από το διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, που επέτρεψε στους μαθητές να δούν με σαφήνεια τον αριθμό επαναλήψεων και τον αριθμό των διαφορετικών στοιχείων σε αυτές τις επαναλήψεις. Επίσης, καθοριστικό ρόλο έπαιξε και η εισαγωγή του πίνακα των τιμών που βοήθησε τους μαθητές να συνοψίσουν τα στοιχεία τους για τους διαφορετικούς αριθμούς επαναλήψεων. Ο πίνακας των τιμών βοήθησε πολλούς μαθητές στην έρευνα για γενικεύσεις μεταξύ των στοιχείων των συνόλων. Αρχικά, οι μαθητές εμφανίστηκαν να ψάχνουν για κανόνες σ' ένα μόνο στοιχείο των επαναλήψεων, π.χ. εύρεση γενικεύσεων σε μια από τις στήλες, αναφερόμενοι ως «προς τα κάτω κανόνες». Πρόκειται για την αναζήτηση **αναδρομικών σχέσεων,** που εστιάζουν σε ένα μόνο σύνολο στοιχείων. Παραδείγματα τέτοιων σχέσεων που δόθηκαν από τους μαθητές ήταν: «*ο αριθμός επαναλήψεων ανεβαίνει ανά 1, ο αριθμός των κίτρινων ανεβαίνει ανά 3, ο συνολικός αριθμός αυξάνει κατά* 4».



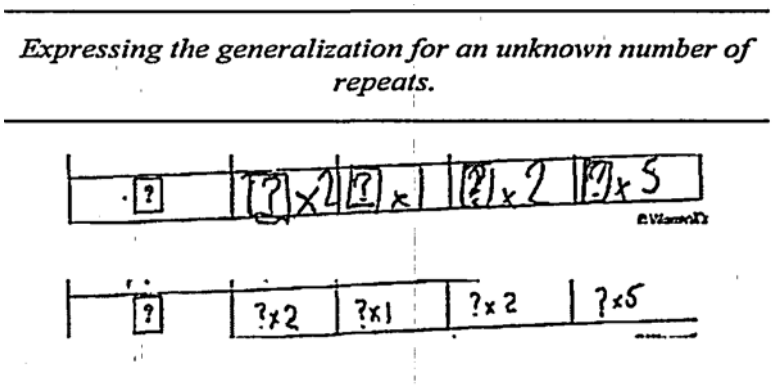
Στη συνέχεια συγκεκριμένες στρατηγικές βοήθησαν στην έρευνα για γενικεύσεις με τη σύνδεση δύο συνόλων στοιχείων, αναφερόμενες ως «κατά μήκος κανόνες», βοηθώντας κατά συνέπεια τους μαθητές να αλλάξουν τη σκέψη τους από σκέψη για απλή μεταβολή σε σκέψη συμμεταβολής. Παραδείγματα «κατά μήκος» κανόνων, δηλαδή κανόνων που εστιάζουν στην εξέταση δύο συνόλων στοιχείων και

εύρεση της σχέσης μεταξύ των δύο συνόλων, δηλαδή **συναρτησιακών σχέσεων συμμεταβολής** ήταν: «*υπάρχουν 3 φορές πιο πολλές κίτρινες κάρτες από μπλε*».



Είναι η εισαγωγή σημειωτικών δραστηριοτήτων - για τις οποίες θα μιλήσουμε πιο αναλυτικά στην ενότητα 3.6.1 - και του πίνακα τιμών το κομβικό σημείο, όπου από την εξερεύνηση των επαναλαμβανόμενων patterns και την έκφραση αναδρομικών σχέσεων περνάμε στον κόσμο των συναρτήσεων, γίνεται δηλαδή φανερός ο ρόλος των επαναλαμβανόμενων patterns στην πορεία προς την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης, αλλά και ο τρόπος που μπορεί αυτό να επιτευχθεί. Στις στρατηγικές που οδήγησαν στη μεταστροφή της σκέψης συγκαταλέγονται αφενός η εισαγωγή των όρων "προς τα κάτω κανόνες " και "κατά μήκος κανόνες" (π.χ., "αυτό είναι ένα προς τα κάτω pattern") και ακολούθως η σταδιακή εισαγωγή μεγάλου αριθμού επαναλήψεων που απέτρεψε την αναζήτηση «προς τα κάτω» pattern στον πίνακα τιμών και οδήγησε τους μαθητές στην αναζήτηση «κατά μήκος» pattern και τελικά τους οδήγησε να φτάνουν σε λεκτικές περιγραφές γενικεύσεων αλλά και σε συμβολικές γενικεύσεις.

Με την ολοκλήρωση του δεύτερου μαθήματος τα τρία τέταρτα των μαθητών μπορούσαν να δημιουργήσουν τη γενίκευση για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Δεκατέσσερις από αυτούς τους μαθητές μπορούσαν επίσης να γράψουν τη σχέση μεταξύ των στηλών ως σειρά από αφηρημένες εκφράσεις αναπαριστώντας τον άγνωστο ως $\boxed{?}$ (σχ.1).



Σχ.1

Τέλος, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως η χρήση μαγνητικών καρτών και πίνακα τιμών, έπαιξαν διαφορετικούς ρόλους στην βοήθεια των μαθητών να φτάσουν

σε μια κατανόηση της έννοιας του λόγου. Η σύνοψη των στοιχείων στους πίνακες τιμών βοήθησε τους μαθητές στην αναγνώριση των σχέσεων ανάμεσα στα διάφορα σύνολα στοιχείων (αριθμός επαναλήψεων και αριθμός καρτών σε κάθε επανάληψη), ενώ η επανατακτοποίηση φυσικών υλικών (καρτών) για την αναπαράσταση συσχετιζόμενων λόγων (π.χ., 2:4, και 6:12) βοήθησε τους μαθητές στην αναγνώριση ότι αυτοί οι λόγοι ήταν ισοδύναμοι. Ακόμα και το γεγονός ότι οι κάρτες ήταν μαγνητικές και εύκαμπτες βοήθησε στη μάθηση των μαθητών (π.χ., η επίδειξη από την Emily της ισοδυναμίας βοηθήθηκε επειδή οι κάρτες μπόρεσαν μερικώς να τοποθετηθούν στην κορυφή άλλων καρτών (σχ.2).

Emily's explanation of equivalent ratio.

Σχ.2

Επίσης η μετάφραση από τη μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη έπαιξε καθοριστικό ρόλο στις διάφορες φάσεις της μελέτης. Η εισαγωγή του πίνακα οδήγησε στη μετάφραση οπτικών αναπαραστάσεων σε αναπαραστάσεις με αριθμούς και ως εκ τούτου οι μαθητές άρχισαν να λειτουργούν στον κόσμο των αριθμών. Αυτό βεβαίως τους βοήθησε στην έρευνα για αριθμητικά patterns και στην παραγωγή μιας ποικιλίας από λόγους για διαφορετικούς αριθμούς επαναλήψεων, ενώ όταν η συζήτηση ήρθε στη σχέση που υπήρχε μεταξύ των λόγων στον πίνακα των τιμών, ήταν η επιστροφή στις οπτικές αναπαραστάσεις των λόγων που βοήθησαν τις συζητήσεις των μαθητών για την ισοδυναμία.

Σχολιάζοντας την εισαγωγή των σημείων οι ερευνητές αναφέρουν:

«Η ερμηνεία των μαθηματικών συμβόλων είναι μια προσωπική διαδικασία. Σε μερικά παραδείγματα φαίνεται ότι οι μαθητές ήταν ανίκανοι να πάνε πέρα από το γραπτό σύμβολο, την κυριολεκτική ερμηνεία. Η έμφυτη τριαδική φύση στις σχέσεις συμβόλων -αντικείμενο, αναπαραστάσεις και ερμηνεία- εκτέθηκε σε αυτήν την έρευνα. Τα έργα που παρουσιάζονται σε αυτήν την έρευνα προκαλούν μια αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των τριών διαστάσεων και δείχνουν επίσης πώς η αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφορετικών συμβόλων και των ερμηνειών τους φέρνει τη βαθύτερη κατανόηση για το ίδιο το αντικείμενο. Ο ρόλος μας ως δάσκαλοι είναι να απαντήσουμε σε αυτές τις αλληλεπιδράσεις, εξασφαλίζοντας ότι και τα δύο, η συζήτηση στην τάξη και τα

μαθηματικά πλαίσια είναι πλούσια και αναπαραστασιακά του πλήρους φάσματος των κατανοήσεων, έτσι ώστε οι αρχικές σχεδιαζόμενες έννοιες να επιτυγχάνονται από τους μαθητές που συμμετέχουν στο διάλογο.»

Οι ενέργειες των δασκάλων, συμπεριλαμβανομένων της χρήσης συγκεκριμένων υλικών, καταγραφής των στοιχείων, και κατάλληλων ερωτήσεων οι οποίες βοηθούν τα μικρά παιδιά να δουν τα επαναλαμβανόμενα patterns ως συναρτησιακές σχέσεις και να χρησιμοποιούν αυτήν την κατανόηση για να προβλέπουν αυτές τις σχέσεις για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, η έκφραση αυτών των σχέσεων σε πολύ αφηρημένη μορφή, και επίσης χρήση των επαναλαμβανόμενων patterns για την εισαγωγή στην αναλογική σκέψη, απασχολούν την Warren (2005) σε ένα πείραμα διδασκαλίας που εφαρμόστηκε σε 45 παιδιά δύο τάξεων διαφορετικών δυνατοτήτων μέσης ηλικίας 9 έτη και 6 μήνες. Το πείραμα ολοκληρώθηκε μόλις σε δύο ωριαία μαθήματα που έγιναν σε δύο διαδοχικές μέρες. Τα μαθήματα άρχιζαν με τους μαθητές μέσων δυνατοτήτων και συνεχίζονταν αναθεωρημένα με τους μαθητές υψηλών δυνατοτήτων.

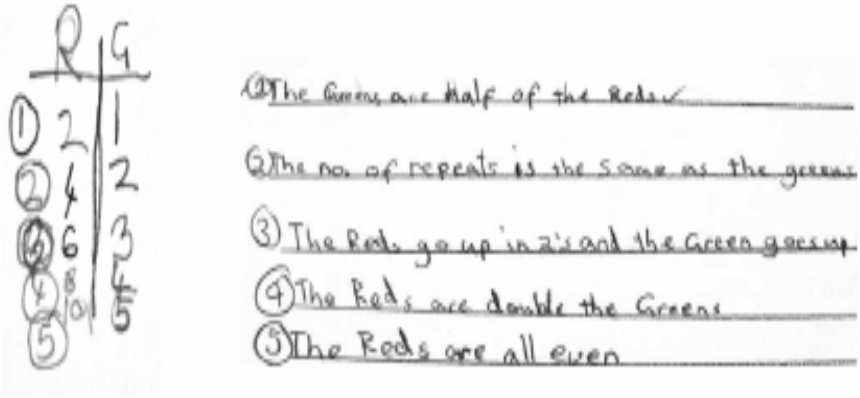
Το πρώτο μάθημα αποτελούνταν από τέσσερις φάσεις: α)αντιγραφή και συνέχιση ένα απλού pattern ABBABBABBABB (με κόκκινες και πράσινες κάρτες) β) αποκάλυψη προοδευτικά των επαναλήψεων, υπολογισμός του αριθμού των Α και των Β σε αυτές, και καταγραφή των στοιχείων σε έναν πίνακα γ) αναγνώριση σχέσεων μέσα στον πίνακα δ) χρησιμοποίηση αυτής της σχέσης για να προβλέψουν τον αριθμό των Α, Β και των συνολικών καρτών σε έναν μη μετρήσιμο αριθμό επαναλήψεων. Το δεύτερο μάθημα εστίασε: α) στην επέκταση αυτών των κατανοήσεων σε πιο σύνθετα επαναλαμβανόμενα patterns και β)στην έκφραση σχέσεων συμμεταβολής με γενικούς όρους και ως λόγους.

Σε σχέση με την επέκταση του πίνακα, την αναγνώριση σχέσεων μέσα στον πίνακα και την χρησιμοποίησή τους για εύρεση του αριθμού των πράσινων και κόκκινων καρτών για μη μετρήσιμο αριθμό αποκαλύψεων, οι μαθητές μέσων δυνατοτήτων, επέκτειναν τον πίνακα με να συμπληρώσουν προς τα κάτω τον πίνακα, πρώτα τη μία στήλη και μετά την δεύτερη, αντί κατά μήκος. Φάνηκε ότι η εστίαση της σκέψης της ήταν στην πρόσθεση 2 στα πράσινα παρά τη σχέση μεταξύ του αριθμού των κόκκινων καρτών και του αριθμού των πράσινων καρτών. Σε σχέση με το επαναλαμβανόμενο pattern

το ακόλουθο σχήμα,επιβεβαιώνει αυτή την τάση:

red	green
1	2
2	4
3	6
4	8
	10
	12
	14
	16

Ως αποτέλεσμα των δυσκολιών που αυτά τα παιδιά συνάντησαν με την επίτευξη των γενικεύσεων, συγκεκριμένες ενέργειες των δασκάλων βοήθησαν αποτελεσματικά τους μαθητές υψηλών δυνατοτήτων - στους οποίους έγινε αναθεωρημένο πια μάθημα - στην μετακίνηση από την αναζήτηση αναδρομικών σχέσεων στην αναζήτηση συναρτησιακών σχέσεων. Συγκεκριμένα, η συμπερίληψη στον πίνακα του αριθμού των επαναλήψεων, και η προτροπή από τον δάσκαλο να γράψουν τις λέξεις «κατά μήκος» και «προς τα κάτω» στα χαρτιά τους και να βρούν δύο για κάθε περίπτωση, βοήθησε τους μαθητές υψηλών δυνατοτήτων να εστιάσουν σε μια ευρύτερη ποικιλία patterns. Για παράδειγμα τα παιδιά κλήθηκαν να αποκαλύψουν επόμενες επαναλήψεις για το επαναλαμβανόμενο pattern GGRGGR, (π.χ., GGR GGRGGR GGRGGRGGR κ.λπ.), να υπολογίσουν τον αριθμό των πράσινων και των κόκκινων καρτών κάθε φορά, αλλά αυτή τη φορά όχι μόνο να καταγράψουν τον αριθμό των πρασίνων και κόκκινων καρτών σε έναν πίνακα, αλλά και τον αριθμό των αποκαλυπτόμενων επαναλήψεων. Το επόμενο σχήμα αποτυπώνει μια χαρακτηριστική απάντηση για το πώς τα παιδιά υψηλών δυνατοτήτων κατέγραψαν τα στοιχεία και περιέγραψαν το patern στον πίνακα.



	R	G
1	2	1
2	4	2
3	6	3
4	8	4
5	10	5

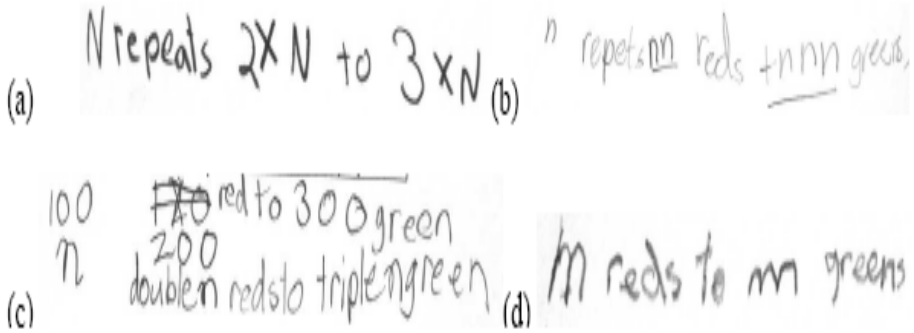
(2) The Greens are half of the Reds ✓
(2) The no. of repeats is the same as the greens
(3) The Reds go up in 2's and the Green goes up
(4) The Reds are double the Greens
(5) The Reds are all even

Figure 3. An example of a response given for the GGRGGRGGR pattern.

Τέλος, η εισαγωγή μεγάλων αριθμών επαναλήψεων, που καθιστά ανεπαρκείς τις αναδρομικές προσεγγίσεις, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην αναζήτηση patterns μεταξύ του αριθμού των επαναλήψεων και των στοιχείων των δύο συνόλων.

Οι ενέργειες αυτές απέδωσαν εξίσου καλά μεταφερόμενες στην τάξη των 24 μαθητών μέσων δυνατοτήτων. Έτσι σε σχέση με το pattern RRRGRRRGRRRGRRRG η εισαγωγή ξεχωριστής στήλης για την καταγραφή του αριθμού επαναλήψεων και η προτροπή να ψάχνουν για κατά μήκος και προς τα κάτω patterns, αλλά και η εισαγωγή μεγάλου αριθμού επαναλήψεων φάνηκαν να βοηθούν αυτά τα παιδιά στην περιγραφή των σχέσεων και στη χρησιμοποίηση αυτών των σχέσεων στην επίτευξη σωστών λύσεων για μη μετρήσιμα βήματα.

Όταν η διδασκαλία στην τάξη με τους πιο ικανούς μαθητές ξέφυγε από την μελέτη των επαναλαμβανόμενων patterns αυτών καθ' αυτών και επεκτάθηκε στους λόγους, δοθέντος του ακόλουθου pattern RRGGGRRGGGRRGGGRRGG, αυτοί κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως: *«Υποθέστε ότι είχα ν επαναλήψεις, ποιος είναι ο λόγος των κόκκινων προς τα πράσινα; Πόσα είναι τα κόκκινα; Πόσα είναι τα πράσινα;»*. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται μερικές από τις γραπτές απαντήσεις των 21 παιδιών.



Απαντήσεις των παιδιών στο ερώτημα:
Αν είχαμε η επαναλήψεις ποιος θα ήταν ο λόγος «κόκκινα προς πράσινα»;

Όταν κλήθηκαν να εξηγήσουν την απάντησή τους (d), η Annabelle είπε: «Προσθέτεις *άλλο ένα πόδι στο η (στον αριθμό επαναλήψεων) για τα κόκκινα και έπειτα άλλο ένα πόδι για τα πράσινα»*.

Δεκατρία παιδιά έγραψαν απαντήσεις παρόμοιες με εκείνες που φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα, τέσσερα έγραψαν απαντήσεις με όρους μεγάλων αριθμών (π.χ. 2000 κόκκινα προς 3000 πράσινα), και τέσσερα δεν επιχείρησαν να γράψουν μια γενίκευση.

Είναι φανερό από το παραπάνω σχήμα ότι η γενίκευσή τους φάνηκε να διαιρείται σε 4 κύριες κατηγορίες:

(α) χρησιμοποίηση μεγάλων αριθμών για να εκφράσουν τη γενίκευση,

(β) απλά επαναλαμβάνοντας τον αριθμό των ν για να διαμορφώσουν ένα ν, δύο ν ενωμένα μαζί και τελικά τρία ν ενωμένα μαζί,

(γ) προφορική –λεκτική έκφραση γενικεύσεων, όπως, διπλασιάζω το ν και τριπλασιάζω το ν ή δύο φορές το ν και τρεις φορές το ν, και

(δ) τυπικός συμβολισμός, όπως, 2xn ή 3xn.

Είναι φανερό ότι **τα μικρά παιδιά μπορούν να εκφράσουν γενικεύσεις με περισσότερο αφηρημένα συστήματα συμβόλων μπορούν, αντίθετα από ότι πιστεύεται.**

Έχει μεγάλη σημασία να αναφέρουμε κλείνοντας ότι, σύμφωνα με την ερευνήτρια, στην προσπάθεια των μικρών μαθητών να γενικεύσουν και να τυποποιήσουν τη μαθηματική σκέψη τους *«πολλές από τις δυσκολίες που αυτά τα παιδιά συνάντησαν είναι ίδιες με τις δυσκολίες που βρέθηκαν σε προηγούμενη έρευνα με νέους εφήβους. Αυτό δείχνει ότι ίσως αυτές οι δυσκολίες δεν είναι τόσο πολύ αναπτυξιακές αλλά εμπειρικές. Από αυτήν την έρευνα αρχίζοντας φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να αρχίσουν να εκφράζουν τη δομή των patterns με γενικούς όρους.»*

Από την προηγούμενη έρευνα[1] προκύπτει πως η μεγαλύτερη άνεση των μαθητών με τα επαναλαμβανόμενα patterns σε σχέση με τα αναπτυσσόμενα, έχει να κάνει όχι με το γεγονός ότι τα δεύτερα είναι γνωστικά δυσκολότερα, αλλά με το ότι οι μαθητές είχαν περισσότερες εμπειρίες με τα επαναλαμβανόμενα. Πρόκειται για το ίδιο συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν οι Papic & Mulligan αλλά και οι Τζεκάκη & Κούλελη. Αυτό προκαλεί σύμφωνα με την Warren ανησυχία, «*δεδομένου ότι είναι τα αυξανόμενα patterns που χρησιμοποιούνται παραδοσιακά για να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ της αριθμητικής και άλγεβρας στις πρώιμες εφηβικές τάξεις*». Ως εκ τούτου, συμπεραίνεται ότι, *«πολλά παιδιά μπορεί να βρουν δυσκολίες με αυτήν την μετάβαση λόγω της έλλειψης προγενέστερης γνώσης και εμπειρίας με αυξανόμενα patterns καθώς επίσης και δυσκολίες με την συναρτησιακή σκέψη»*. Έχει ενδιαφέρον να δούμε, λοιπόν, το κατά πόσο οι μικροί μαθητές ανταποκρίνονται σε έργα με αναπτυσσόμενα patterns.

3.5 Αναπτυσσόμενα patterns, συναρτησιακή σκέψη και γενίκευση

3.5.1 Στρατηγικές γενίκευσης των παιδιών και παράγοντες που επηρεάζουν τη γενίκευση

Η σύνδεση μεταξύ της άλγεβρας, των patterns και της γενίκευσης έχει σημειωθεί από πολυάριθμους ερευνητές. Η εύρεση και η χρησιμοποίηση των patterns είναι μια σημαντική στρατηγική για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Stacey, 1989). Επίσης το ζήτημα των ακολουθούμενων από τους μαθητές μεθόδων σε σχέση με την επίλυση αριθμητικών patterns είναι πολύ σημαντικό, αφού χωρίς την υιοθέτηση κατάλληλης μεθόδου η ακριβής και με κάποιο αποδεκτό αλγεβρικό τύπο γενίκευση, είναι αδύνατη (Orton & Orton, 1999). Οι Stacey (1989), J. (1997) ερευνούν τις στρατηγικές γενίκευσης μαθητών ηλικίας 9 έως 13 ετών σε γραμμικά προβλήματα γενίκευσης[2]-δηλαδή γραμμικά αναπτυσσόμενα patterns σε εικονιστικά πλαίσια και ένα έργο συμπλήρωσης αναπτυσσόμενου pattern σε καθαρά αριθμητικά πλαίσια). Οι Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall (1998) μελετούν τις ανά ηλικιακό επίπεδο στρατηγικές γενίκευσης παιδιών ηλικίας 7-11 ετών, κατά την εργασία τους με αναπτυσσόμενα γραμμικά και δευτεροβάθμια patterns αλλά και 3 ακολουθίες Fibonacci [Τα χρησιμοποιούμενα έργα των παραπάνω ερευνών παρατίθενται στο παράρτημα].

Αναζητούν τι γενικεύσεις κάνουν οι μαθητές και πώς αυτές ποικίλλουν αυξανόμένης της εκπαίδευσης αλλά και της ηλικίας, πώς οι μαθητές εξηγούν τα patterns που βρίσκουν και τις γενικεύσεις που χρησιμοποιούν, πόσο συνεπείς είναι οι μαθητές στην επιλογή του κανόνα γενίκευσης και πόσο οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν κάποια εμπειρία σε ερωτήματα γενίκευσης διαφέρουν από τους άπειρους μαθητές.

Η έννοια της γενίκευσης, για την οποία όπως είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου τόσοι ορισμοί έχουν δοθεί, εδώ αποκτά πιο συγκεκριμένο και πρακτικό χαρακτήρα. Η Stacey αναφέρεται σ' αυτή με τους όρους «κοντινή γενίκευση» και «μακρινή γενίκευση». Σε αυτό το πλαίσιο ο όρος "**κοντινή γενίκευση**" χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί με το βήμα προς βήμα σχεδιασμό ή τον υπολογισμό και η "**μακρινή γενίκευση**" να δηλώσει μια ερώτηση που υπερβαίνει τα λογικά πρακτικά όρια μιας τέτοιας βήμα προς βήμα προσέγγισης. Για παράδειγμα, η εύρεση του όγδοου ή δεκάτου πέμπτου όρου, αποτελούν παραδείγματα κοντινής

γενίκευσης, ενώ για παράδειγμα ο υπολογισμός του πεντηκοστού ή εκατοστού όρου, αποτελούν παραδείγματα μακρινής γενίκευσης. Είναι σαφές ότι για την κοντινή γενίκευση είναι αρκετή η εύρεση αναδρομικών σχέσεων ενώ η μακρινή γενίκευση προϋποθέτει την εύρεση συναρτησιακών σχέσεων συμμεταβολής ή αντιστοίχισης.

Επίσης την ανάγκη για αποσαφήνιση του όρου της γενίκευσης αισθάνονται και οι Hargreaves et al. (1998). Γι' αυτούς, η γενίκευση ταυτίζεται με την παραγωγή μιας δήλωσης για τις κανονικότητες ή σχέσεις. Αναφέρουν χαρακτηριστικά:

«Δοθέντος ενός pattern, τα παιδιά πρέπει να είναι σε θέση να πάνε πέρα από αυτό που τους δίνεται προκειμένου να κατανοήσουν το pattern και να αρχίσουν να εργάζονται με αυτό. Για παράδειγμα, για να εργαστεί με το pattern 1 3 5 7 9…, ένα παιδί θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι οι αριθμοί είναι όλοι περιττοί και / ή ότι αυξάνονται ανά 2. Η αναφορά σε κάτι πέρα από αυτό που δίνεται ρητά, χαρακτηρίζεται συχνά ως "γενίκευση". Υπάρχουν διαφορετικά είδη γενίκευσης, που υπερβαίνουν αυτά που δίνονται με διαφορετικούς τρόπους και σε διαφορετικές εκτάσεις. Η γενίκευση σε αυτήν την μελέτη χρησιμοποιείται για να αναφερθεί σε μια δήλωση που έγινε για τις κανονικότητες ή τις ιδιότητες του pattern, ή για να είναι ακριβέστερο για τις κανονικότητες ή ιδιότητες των σχέσεων μέσα στο pattern. Παραδείγματος χάριν, προσδιορίζοντας τις μεμονωμένες σχέσεις μέσα στο ανωτέρω pattern ως 2, 2, 2, και 2 (ακολουθία διαφορών των όρων) δεν θεωρείται γενίκευση, όμως η παραγωγή μιας δήλωσης για τις κανονικότητες ή τις ιδιότητες αυτών των σχέσεων, όπως : 'προσθέτει 2 κάθε φορά', θεωρείται γενίκευση» (Hargreaves et al.,1998, σελ. 319).

Στα αποτελέσματα των προαναφερόμενων ερευνών καταγράφηκαν οι ακόλουθες στρατηγικές γενίκευσης των μαθητών σε γραμμικά έργα γενίκευσης, τα πιο πολλά σε εικονιστικά πλαίσια, κυρίως με σπιρτόξυλα:

Μέθοδος υπολογισμού: Σχεδιάστηκαν οι μορφές και απαριθμήθηκαν τα σπιρτόξυλα, με συχνά παραγωγή «κοντινών λανθασμένων» απαντήσεων, όπως π.χ. 61 ή 63 αντί του σωστού 62.

Αναζήτηση πινάκων πολλαπλασιασμού: Για παράδειγμα, για το έργο με τα σκαλοπάτια (Orton J., 1997), κάποιοι είπαν ότι «είναι ο πίνακας πολλαπλασιασμού του 4».

Έργο: Σκαλοπάτια. Πηγή:(1997)

Εξέταση της φύσης των αριθμών*:* Μερικά από τα παιδιά εξέτασαν τη φύση ή τις ιδιοτήτες των όρων του pattern, συχνά αναζητώντας άρτιους ή περιττούς αριθμούς, όπως π.χ., η Rebecca που φαίνεται να παρατηρεί ότι οι περιττοί και άρτιοι αριθμοί εμφανίζονται ως εναλλασσόμενο pattern, κάνοντας έτσι μια γενίκευση για την τακτικότητα με την οποία οι περιττοί και άρτιοι αριθμοί εμφανίζονται.

3 8 13 18 23

«Μιλήστε μας για αυτό το pattern.»

«Το pattern είναι ένας περιττός αριθμός, έπειτα ένας άρτιος, έπειτα ένας περιττός αριθμός.»

«Ποιος είναι ο κανόνας για αυτό;»

«Ο κανόνας γι' αυτό το pattern είναι ότι πηγαίνει περιττός, έπειτα άρτιος.»

«Πές μου τι σκέφτηκες να κάνεις με τους αριθμούς για να βρείς τον κανόνα;»

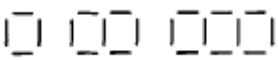
«3 8 13 18 23… περιττός, άρτιος, περιττός, άρτιος, περιττός».

Πηγή: Hargreaves et al. (1998)

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες στρατηγικές οι μαθητές χρησιμοποίησαν και γενικεύσιμες μεθόδους, όπως οι ακόλουθες:

Μέθοδος διαφοράς: Εύρεση της σταθερής διαφοράς των διαδοχικών όρων π.χ. 3 και πολλαπλασιάζοντας τον με τον αριθμό της μορφής, δηλαδή υιοθέτηση ενός μοντέλου της μορφής Μ (ν) = 3 Χ ν, όπου ν ο αριθμός της μορφής και Μ(ν) ο απαιτούμενος για τη νιοστή μορφή αριθμός, για παράδειγμα σπιρτόξυλων. Ενδεικτικά από το έργο «κλουβιά»,

M(20)=3x20 και M(lOO)=3x 100.



Πηγή: (1997)

Σύμφωνα με τους *Hargreaves et al. (1998,)* για σταθερής διαφοράς patterns, δηλαδή γραμμικά, η πιο κατάλληλη και ενδεχομένως χρήσιμη στρατηγική είναι "η αναζήτηση διαφορών", δεδομένου ότι αυτή δίνει μια σχέση που τα παιδιά μπορούν ενδεχομένως να χρησιμοποιήσουν ως βάση για μια γενίκευση.

Για παράδειγμα:

Σταθερής διαφοράς pattern 2 5 8 11 14

Διαφορά **3 3 3 3**

Γενίκευση «προσθέτουμε 3 κάθε φορά»

Μέθοδος ολόκληρου-αντικειμένου (Whole-object Method): Παίρνοντας ένα πολλαπλάσιο του αριθμού σπιρτόξυλων που απαιτούνται για μια προηγούμενη μορφή, σιωπηρά υποθέτουν ότι M(mn)=m X M (n). Περιλαμβάνει εργασίες με σχέσεις όπως:

M(20)=4 X M (5) και M(1000)=50 X M (20)

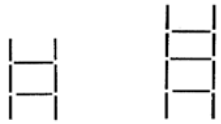
Πηγή: Stacey (1989)

Γραμμική μέθοδος: Χρησιμοποιήθηκε ένα pattern που περιλαμβάνει και τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση, δηλαδή χρησιμοποιήθηκε σιωπηρά ένα γραμμικό μοντέλο *M (n) =an + b* με το $b \neq 0$.

Μερικοί μαθητές χρησιμοποίησαν μια δεύτερη έκδοση της γραμμικής μεθόδου που εργάστηκαν σιωπηρά με τη σχέση M (n) = M (m) + 3• (n -m).

Για παράδειγμα,

«για να κάνουμε μια σκάλα με 20 σκαλοπάτια παίρνουμε μια σκάλα με 10 σκαλοπάτια και προσθέτουμε τρία περισσότερα σπιρτόξυλα για κάθε επιπλέον σκαλοπάτι.»



Πηγή: Stacey (1989)

Όσον αφορά τα δευτεροβάθμια patterns οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις ακόλουθες μεθόδους:

Εξέταση της φύσης των διαφορών: Για μερικά παιδιά η χρησιμοποίηση της στρατηγικής των διαφορών ήταν το πρώτο βήμα. Όταν παρατήρησαν ότι οι διαφορές δεν ήταν ίσες αναγκάστηκαν να ερευνήσουν ένα pattern στις διαφορές. Για παράδειγμα:

2 5 10 17 26 …

Ακολουθία διαφορών: ***3 5 7 9***

«Πες μου γι' αυτό το pattern.»

«Ανεβαίνουν ανά 3,5, 7,και 9. Όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι περιττοί.»

«Ποιος είναι ο κανόνας;»

«Αυτοί ανεβαίνουν σε περιττούς αριθμούς.»

Πηγή: Hargreaves et al. (1998)

Αναζήτηση διαφορών μεταξύ των διαφορών: Άλλα παιδιά που υπολόγισαν τις διαφορές μεταξύ των όρων, επέκτειναν αυτή τη στρατηγική «ψάχνοντας για διαφορές μεταξύ των διαφορών, όπως έκανε ο Matthew κατωτέρω:

2 4 7 11 16

Ακολουθία διαφορών: **2 3 4 5**

«Μιλήστε μας για το pattern.»

«Αυτό το αριθμητικό pattern δεν είναι ένας πίνακας (πολλαπλασιασμού). Βρήκα ότι προσθέτεις 1 στον αριθμό στο κενό κάθε φορά.»

Ποιος είναι ο κανόνας;

«Ο κανόνας αυτού του pattern είναι ότι προσθέτεις ένα κάθε φορά στον αριθμό που βρίσκεται στο κενό.»

Τι σκέφτηκες να κάνεις με τους αριθμούς για να βρεις τον κανόνα;

«Στην κορυφή της σελίδας ήξερα ότι το 2 ήταν στο πρώτο κενό και χρησιμοποίησα τα δάχτυλά μου στα υπόλοιπα.»

Πηγή: Hargreaves et al. (1998)

Αφού ο Matthew αναγνώρισε ότι η ακολουθία «δεν ήταν ένας πίνακας», ένδειξη ότι ανέμεινε κάτι τέτοιο, υπολόγισε τις διαφορές και έπειτα φάνηκε να αναζητά να βρεί τη διαφορά μεταξύ των άλλων όρων, όπως υποδεικνύεται από την απάντηση: «*χρησιμοποίησα τα δάχτυλά μου*». Συνέχισε για να κάνει μια γενίκευση για τη σχέση μεταξύ των διαφορών, δηλ. «*προσθέτουμε 1 στους αριθμούς στο κενό κάθε φορά*».

Οι δύο τελευταίες στρατηγικές για δευτεροβάθμια patterns, είναι οι περισσότερο κατάλληλες και ενδεχομένως χρήσιμες στρατηγικές, σύμφωνα με τους Hargreaves et al., και η "αναζήτηση διαφορών μεταξύ των διαφορών", είναι η πιο χρησιμοποιούμενη από τους μαθητές. Αυτές οι στρατηγικές είναι συχνά μια επέκταση της αναζήτησης διαφορών μεταξύ των όρων του pattern. Παραδείγματος χάριν:

Δευτέρου βαθμού pattern	2 4 7 11 16
Διαφορές	1 2 3 4
Διαφορά μεταξύ των διαφορών	1 1 1
Γενίκευση	«στη διαφορά προσθέτεις 1 κάθε φορά»

Ή εναλλακτικά

Δευτέρου βαθμού pattern	2 4 7 11 16
Διαφορές	1 2 3 4
Γενίκευση	«οι διαφορές είναι διαδοχικοί αριθμοί»

Συνδυασμός όρων για να κάνουν άλλους όρους: Κάποιοι μαθητές πρόσθεσαν κάποιους όρους, για να κάνουν άλλους όρους. Παραδείγματος χάριν, ένα παιδί αναφορικά με την ακολουθία 3 5 8 13 21…, απάντησε ως εξής:

«Ποιος είναι ο κανόνας γι' αυτό το pattern;»
«Αν προσθέσεις τους δύο πρώτους αριθμούς, το άθροισμά τους είναι ο τρίτος αριθμός. Ο δεύτερος και ο τρίτος μαζί είναι ο τέταρτος κ.ο.κ.»
«Πες μου τι σκέφτηκες να κάνεις με τους αριθμούς για να βρεις τον κανόνα;»

3 + 5 =*8 13 21*
*3 5+**8**= 13 21*
3 5 8+13= 21 *Πηγή: Hargreaves et al. (1998)*

Επίσης οι μαθητές ανάμιξαν συχνά τις μεθόδους ή μεταπήδησαν στην πορεία από μια μέθοδο σε άλλη (Stacey, 1989, 1997, Hargreaves et al.,1998). Πολλοί μαθητές χρησιμοποίησαν δύο μεθόδους, όπως για παράδειγμα τη μέθοδο του ολόκληρου-αντικειμένου, αμέσως μετά από τη σωστή χρήση της υπολογιστικής ή της γραμμικής μεθόδου. Σχεδιάζοντας μια σκάλα με 10 σκαλοπάτια και μετρώντας σωστά, ή ακόμα και σωστά *υπολογίζοντας το M(IO0),* ακολουθήθηκε συχνά η μέθοδος του ολόκληρου-αντικειμένου για να δώσει λανθασμένες απαντήσεις. Δύο τέτοιες απαντήσεις είναι:

«M(20) = 2 X M (10) = 2 X 32 = 64.»
όπου το M (10) βρέθηκε αρχικά με σχεδιασμό και
«M(1000) = 10 X M (100) = 10 • (3 X 100+2) = 3020.»

Πηγή: Stacey (1989)

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η χρήση μιας γενικεύσιμης μεθόδου (ολόκληρου-αντικείμενου, διαφοράς ή γραμμική) για την κοντινή γενίκευση, γενικά ακολουθήθηκε και για μακρινή γενίκευση. Οι Hargreaves et al. σχολιάζοντας τις προηγούμενες στρατηγικές αναφέρουν ότι χρησιμοποιήθηκαν από μερικά παιδιά από όλες τις ομάδες ηλικιών, με διαφορές μεταξύ των ηλικιακών ομάδων στη συχνότητα με την οποία οι στρατηγικές υιοθετήθηκαν, για τους διαφορετικούς τύπους patterns. Η στρατηγική «αναζήτηση διαφορών μεταξύ των διαφορών» εμφανίζεται να χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο αυξανομένης της ηλικίας για τα δευτεροβάθμια patterns και η ίδια τάση στα αποτελέσματα μπορεί επίσης να φανεί για τα patterns Fibonacci. Η στρατηγική "της αναζήτησης της φύσης των διαφορών" χρησιμοποιείται πιο πολύ συχνά από τα μικρότερα παιδιά (Year 4) και για δευτεροβάθμια και για Fibonacci pattern. «*Είναι ασαφές γιατί αυτό συμβαίνει, αλλά μπορεί να αναπαριστά ένα σημαντικό μέρος της ανάπτυξης*», αναφέρουν χαρακτηριστικά. Η χρήση της στρατηγικής " συνδυάζοντας όρους για να κάνουν άλλους όρους" ήταν πολύ σπάνια από τα Year 3 παιδιά , ακόμη και για τα Fibonacci patterns όπου αυτό θα ήταν κατάλληλο, τα οποία επιμένουν σε στρατηγικές που περιλαμβάνουν "την εξέταση τη φύσης των αριθμών" και επίσης "την αναζήτηση πινάκων πολλαπλασιασμού", αφού αυτές οι στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν συχνά και με τα τρία είδη pattern.

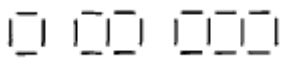
Σύμφωνα με την Stacey «*οι μαθητές των σχολείων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν ήταν απρόθυμοι να γενικεύσουν, αλλά κατασκεύασαν τη γενίκευση πάρα πολύ εύκολα στοχεύοντας στην απλότητα και στην ταχύτητα μάλλον παρά στην ακρίβεια, με*

την τάση να χρησιμοποιούν κατά κόρον την μέθοδο της ευθείας αναλογίας σε έργα που δεν περιείχαν ευθείες αναλογίες. Επίσης η ποιοτική ομοιότητα στις απαντήσεις των μαθητών του δημοτικού και του γυμνασίου δείχνει ότι πολύ πριν από την τυπική μελέτη των σχετικών θεμάτων (λόγος, γραμμικές συναρτήσεις και επιμεριστική ιδιότητα), οι μαθητές έχουν δημιουργήσει μια κατανόηση αναφορικά με τις σχέσεις που ισχύουν στην ευθεία αναλογία, και τις μεταφέρουν στις γραμμικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, υπεργενικεύουν αυτές τις ιδιότητες και τις χρησιμοποιούν ακατάλληλα. Όταν μια τέτοια ιδέα βρίσκεται, οι μαθητές μπορούν να είναι απρόθυμοι να την εξετάσουν, αφενός λόγω της αποτελεσματικότητάς της στην παροχή απαντήσεων, έστω και λανθασμένων, και αφετέρου λόγω της απλότητάς της. Η αλλαγή από τις γραμμικές μεθόδους για τις κοντινές γενικεύσεις στις μεθόδους ολόκληρου-αντικειμένου για μακρινές γενικεύσεις μπορούν να είναι μια περαιτέρω περίπτωση αυτού».

Ο Orton επισημαίνει τη γρήγορη εγκατάλειψη του πραγματικού χειρισμού των σπιρτόξυλων, αμέσως μόλις οι αριθμοί έγιναν συγκεκριμένοι, ίσως λόγω κατασκευαστικών αδυναμιών μορφών για απομακρυσμένες θέσεις. Επίσης, αναφέρει ότι δεν αναμενόταν πως οι νεότεροι μαθητές θα ήταν ικανοί να χρησιμοποιήσουν το γράμμα ν, αλλά ένας μαθητής 10 ετών, για το έργο «κιβώτια» κατάφερε την εξήγηση:

«Παίρνουμε τον αριθμό [αριθμός μορφής για τα «κιβώτια»] επί 2 και προσθέτουμε 1».

Ένας μεγαλύτερος μαθητής ήταν επίσης ικανός να εκφράσει με λόγια μια γενίκευση αν και δεν μπόρεσε να την εκφράσει τυπικά αλγεβρικά: «Είναι ένα λιγότερο ο αριθμός... επί 3 και προσθέτουμε 4» (για το έργο «κλουβιά»).



Το 20% των μαθητών χρησιμοποίησαν επιτυχώς το ν (όπου ν4 για τα «σκαλοπάτια» και νx3+l για τα κλουβιά, καθώς επίσης και 2ν+1 για τα κιβώτια). Το πόσο αυτό είναι ένα ευκαταφρόνητο ποσοστό, λαμβανομένου υπόψη του γεγονότος ότι η έρευνα αυτή απλά καταγράφει τι οι μαθητές κάνουν μέσα στα παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια, σηκώνει αντιρρήσεις.

Παρόλα αυτά, σύμφωνα με τον Orton αποκαλύπτονται κάποιοι παράγοντες που εμποδίζουν την γενίκευση και οι οποίοι είναι:

1. Η αριθμητική ανικανότητα. 2. Η σύγχυση μεταξύ του αριθμού μορφής και αριθμού σπιρτόξυλων. 3. Το γεγονός ότι οι μεγάλοι αριθμοί, καθώς φαίνεται, προτρέπουν σε σύντομες μεθόδους. 4. Ανικανότητα να αξιολογηθεί ότι η 20ή ή 100ή μορφή πρέπει να ακολουθήσουν τους ίδιους κανόνες με τις πρώτες λίγες μορφές. Αυτό φαίνεται, σύμφωνα με τον Orton να είναι ένα αναπτυξιακό εμπόδιο που δεν είναι πιθανό να αρθεί αμέσως! 5. Καθήλωση στις διαφορές ή τη σχέση επανάληψης, δηλαδή σε αναδρομικές στρατηγικές π.χ. προσθέτουμε 2, για τα «κιβώτια». Αυτό φαίνεται να εμποδίζει την πρόοδο για το γενικό κανόνα (π.χ. πολλαπλασιάστε με 2 και προσθέστε 1). 6. Έλλειψη συνειδητοποίησης του τι απαιτείται. Παρά τις συχνές προσπάθειες του ερευνητή να συνδέσει τον αριθμό μορφής με τον αριθμό σπιρτόξυλων, προς έκπληξη του, μερικοί μαθητές φάνηκαν εντελώς απληροφόρητοι για την ανάγκη να βρεθεί μια σχέση μεταξύ του r και του M(r). 7. Ανικανότητα να λειτουργήσουν στον άγνωστο. Σε επίπεδο γενίκευσης από τις μορφές των σπιρτόξυλων, φαίνεται να υπάρχει ένα χάσμα μεταξύ των μαθητών που μπορούν να λειτουργήσουν στον άγνωστο εκφράζοντας με λόγια τον κανόνα (για παράδειγμα, «πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με το 2 και προσθέτουμε 1» για το έργο «κιβώτια»), και εκείνων, που βρισκόμενοι σε ένα προ-αλγεβρικό στάδιο απαντούν «αυτό εξαρτάται από τον αριθμό», ή « πες μου τον αριθμό και θα σου δώσω την απάντηση».

«Παρά τα εμπόδια που δίνονται ανωτέρω φαίνεται ότι η γενίκευση μπορεί να πραγματοποιηθεί αλλά σε περισσότερα του ενός επίπεδα», αποφαίνεται ο Orton. Η πλειοψηφία των μαθητών μπορούσαν να επισημάνουν τον κοινή διαφορά μεταξύ των δοσμένων όρων και σωστά να συμπεράνουν την αξία του επόμενου όρου. Όσον αφορά στη σχέση μεταξύ του r και του M (r), μερικοί μαθητές είχαν επιτύχει ένα επίπεδο γενίκευσης που τους επέτρεψε να δώσουν μόνο αριθμητικές απαντήσεις, άλλοι ήταν σε θέση να συνοψίσουν τη σχέση χρησιμοποιώντας λέξεις, και μόνο μερικοί ήταν σε θέση να μετατρέψουν αυτό σε αναγνωρίσιμη αλγεβρική μορφή. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται στο άρθρο *«η διαδρομή στη γενίκευση δεν φαίνεται να είναι ούτε αυτόματη ούτε σύντομη».*

Αλλά και οι Hargreaves et al. επισημαίνουν ότι, «ακόμα κι αν το εύρος στρατηγικών τους εμφανίζεται συχνά περιορισμένο, η πλειοψηφία των παιδιών μεταξύ των ηλικιών 7 και 11 ετών εμφανίζονται να είναι σε θέση να κάνουν μερικές ακριβείς γενικεύσεις για τα σταθερής διαφοράς patterns. Μερικά παιδιά μπορούν

ακόμη και κάνουν γενικεύσεις περίπου, ή αρχίζουν να περιγράφουν δευτεροβάθμια patterns. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει δυνατότητα για ανάπτυξη.»

Γι αυτό απαιτείται, σύμφωνα με τους προαναφερόμενους ερευνητές, η επαφή των παιδιών με έργα ποικίλης δομής, η οποία μπορεί να ενθαρρύνει τα παιδιά να επαναπαύονται λιγότερο σε στρατηγικές που περιλαμβάνουν αναζήτηση διαφορών μεταξύ των όρων, να χρησιμοποιούν περισσότερες από μια στρατηγικές και να επιλέγουν πληροφορίες από την πιο κατάλληλη για να κάνουν μια γενίκευση και να είναι περισσότερο επίμονοι στην αναζήτηση pattern ανάμεσα στα δεδομένα. Η κυριαρχία «της αναζήτησης διαφορών», δείχνει ότι πολλά παιδιά δεν γνωρίζουν άλλους τύπους αριθμητικών ακολουθιών, όπου η στρατηγική μπορεί να είναι ακατάλληλη. Επίσης απαιτείται ενασχόληση με τα patterns αυτά καθ' αυτά, παρά σε έργα σχεδιασμένα ως μια γρήγορη και εύκολη ενίσχυση άλλων τομέων του προγράμματος σπουδών μαθηματικών. Χρειάζεται ενθάρρυνση των παιδιών να κάνουν περισσότερες από μία γενικεύσεις, π. χ. χρησιμοποιώντας έργα που παρέχουν μόνο τους πρώτους τρεις όρους μιας ακολουθίας, όπως, 1, 2, 4 και ζητώντας από τα παιδιά να συνεχίσουν αυτό με όσο το δυνατόν περισσότερους διαφορετικούς τρόπους δικαιολογώντας καθεμιά επέκταση.

Οι δάσκαλοι φέρουν την ευθύνη της οργάνωσης δραστηριοτήτων κλιμακούμενης δυσκολίας όπου σταδιακά οι μαθητές θα αντιμετωπίζουν όλο και πιο σύνθετες δομές. Επίσης η συγκριτική παρουσίαση patterns, όπου οι όροι τους βρίσκονται σε σχέση ευθείας αναλογίας, και γραμμικών patterns της μορφής an+b, $b \neq 0$, θα βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν ότι δεν βασίζονται όλα τα patterns στον απλό πολλαπλασιασμό. Οι πιο ικανοί μαθητές θα μπορούσαν να προκληθούν για να κατασκευάσουν ένα pattern δοθέντος του κανόνα. Εμπειρίες με διάφορα patterns μπορούν να παρέχουν ευκαιρίες για χρησιμοποίηση κοινών στρατηγικών και ανακάλυψης γενικών μεθόδων. Ο ρόλος της διδασκαλίας γίνεται εμφανής από την έρευνα της Stacey, όπου οι παρέκκλιση από το παραδοσιακό πρόγραμμα σπουδών και η ειδική διδασκαλία μαθητών στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων είχε σαφώς πολύ καλύτερα αποτελέσματα με τους μαθητές να δείχνουν συνέπεια στην επιλογή γενικεύσιμης μεθόδου και για κοντινές και για μακρινές γενικεύσεις. Οι εξηγήσεις τους συσχέτιζαν συχνότερα τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των patterns. Φάνηκαν να καταλαβαίνουν τη σχέση μεταξύ των στοιχείων και του κανόνα γενίκευσης πιο καλά. Φάνηκε ότι *«οι στρατηγικές διδασκαλίας για την επίλυση προβλήματος είναι χρήσιμες στο να δώσουν κατεύθυνση και δομή σε μια κατά τα άλλα*

ασυσχέτιση συλλογή μαθηματικής εμπειρίας και να παρέχουν ένα λεξιλόγιο για τη συζήτηση της μαθηματικής διαδικασίας στην τάξη».

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα των παραπάνω μελετών είναι ότι οι ικανότεροι μαθητές προσπαθούν να ψάξουν για μια συναρτησιακή σχέση, ενώ οι λιγότερο ικανοί γυρίζουν στην αναδρομική προσέγγιση ή σε ανακριβείς αναλογικούς συλλογισμούς. Οι τελευταίες μέθοδοι μπορούν να αποτρέψουν τους μαθητές από τον προσδιορισμό της γενικής δομής του pattern (Orton & Orton 1999).

3.5.2 Παράγοντες που επηρεάζουν την υιοθέτηση κάποιας στρατηγικής

Ωστόσο, για τους Lannin, Barker & Townsend (2004) μελέτες όπως οι προηγούμενες «*παρέχουν μόνο ένα στιγμιότυπο των στρατηγικών γενίκευσης που οι μαθητές παράγουν, κυρίως εστιάζοντας στις στρατηγικές των μαθητών μέσω μιας απλής συνέντευξης ή ενός οργάνου χωρίς ωστόσο να δικαιολογούν τους λόγους υιοθέτησης κάποιας στρατηγικής έναντι κάποιας άλλης και χωρίς να δίνουν εξηγήσεις σχετικά με τους παράγοντες που συνδέονται με τις αλλαγές στη χρήση στρατηγικών*».

Από ένα πολύμηνο πείραμα διδασκαλίας των προαναφερόμενων ερευνητών, στο οποίο ένα ζευγάρι των μαθητών αλληλεπιδρά με έναν δάσκαλο (ερευνητή) και έναν μάρτυρα (ερευνητή) σε έργα που έχουν ως σκοπό να «κινητοποιήσουν» τη σκέψη τους, πέντε παράγοντες προέκυψαν που συνδέθηκαν με αλλαγές στις στρατηγικές των μαθητών κι οι οποίοι έχουν να κάνουν με:

(α) τη μαθηματική δομή του στόχου. Έτσι, με την επιλογή έργων ποικίλης μαθηματικής δομής, είμαστε σε θέση να επηρεάσουμε τις στρατηγικές που οι μαθητές επιλέγουν. Για παράδειγμα η εναλλαγή στη χρήση αυξανόμενων και μειούμενων γραμμικών καταστάσεων εμφανίστηκε να πηγαίνει τους μαθητές μακριά από την «εικασία και τον έλεγχο» και τις ανακριβείς στρατηγικές «ολόκληρου-αντικειμένου».

(β) τους δοθέντες πρώτους όρους. Οι ερευνητές προτείνουν την εξονυχιστική μελέτη των δοσμένων πρώτων όρων ή μορφών πριν την προσπάθεια επίτευξης γενίκευσης και την ενθάρρυνση των μαθητών στην εύρεση τουλάχιστον δύο διαφορετικών τρόπων προσδιορισμού των τιμών παραγωγής. Αυτό μπορεί να ενθαρρύνει περισσότερο στοχασμό στην αποτελεσματικότητα των στρατηγικών όπως για παράδειγμα της μεθόδου «ολόκληρου-αντικειμένου».

(γ) την επιρροή των ερωτήσεων που τίθενται από το δάσκαλο ή άλλους μαθητές. Η επιρροή του δασκάλου με την εμμονή στο πλαίσιο του προβλήματος και

της επιβολής κανόνων αιτιολόγησης είναι από τους πιο καθοριστικούς παράγοντες για επιτυχείς στρατηγικές γενίκευσης.

(δ) την οπτική εικόνα (visual image) που το παιδί εμφανίζεται να κατασκευάζει σε σχέση με το έργο. Η ανάπτυξη μιας οπτικής σύνδεσης μεταξύ της γενίκευσης και της κατάστασης του προβλήματος επιδρά στην επιτυχία των μαθητών. Η εμμονή στο πλαίσιο, με τη φυσική δομή της κατάστασης στο μυαλό, αυξάνει την πιθανότητα ανάπτυξης επιτυχών γενικεύσεων. Η εγκατάλειψη του πλαισίου και η στροφή στις αριθμητικές τιμές που παράγουν, και μέσω αυτών η εύρεση του κανόνα, λίγα προσφέρει. Τα πλαίσια παρέχουν άριστες αρχικά ευκαιρίες να συνδεθεί η έννοια των μαθηματικών διαδικασιών με τη γεωμετρική τους ερμηνεία. Ως εκ τούτου πρέπει να αποθαρρύνουμε τη χρήση καταστάσεων σαν την ακόλουθη:

Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα

2	11
4	21
7	36
8	?
?	66

Ένα αποπλαισιωμένο έργο

(ε) την προγενέστερη γνώση ή προγενέστερη χρησιμοποιούμενη στρατηγική του μαθητή. Συνίσταται γι' αυτό η χρήση πολλαπλών στρατηγικών από τους μαθητές καθώς αυτοί κινούνται από τις συγκεκριμένες τιμές προς μια γενίκευση. Οι πολλαπλές στρατηγικές αναδεικνύουν τη μη αποτελεσματικότητα των στρατηγικών «μαντεύω και ελέγχω» ή «ολόκληρου αντικειμένου».

Οι παράγοντες α) και β) έχουν να κάνουν με τα έργα αυτά καθαυτά, ο παράγοντας γ) συσχετίζεται με την κοινωνική επιρροή του δασκάλου ή άλλων μαθητών, και οι παράγοντες δ) και ε) με εσωτερικούς γνωστικούς παράγοντες των μαθητών που επηρεάζουν την επιλογή στρατηγικής.

Οι προαναφερθείσες έρευνες είναι σημαντικές, καθώς είναι διαφωτιστικές των τρόπων προσεγγίσεων των patterns από τους μαθητές. Ουσιαστικά, όμως, δείχνουν τι κάνουν οι μαθητές μέσα στα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών και στις παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές, παρά στο τι μπορούν να κάνουν. Αν και αποκαλυπτικές των χρησιμοποιούμενων από τους μαθητές, ορθών, λανθασμένων ή

μη αποδοτικών στρατηγικών δεν αντανακλούν τις δυνατότητες των καθηλωμένων μέσα στα παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια μαθητών. Αυτό αποτυπώνεται με σαφήνεια στα συμπεράσματα των παραπάνω ερευνών. Η μη έκθεση των μαθητών σε διαφορετικά περιβάλλοντα διερεύνησης, οι αδυναμίες των εκπαιδευτικών να αναδείξουν μέσα από έργα ποικίλης δομής την μη αποτελεσματικότητα κάποιων στρατηγικών και η άγνοιά τους σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν την υιοθέτηση καθεμιάς στρατηγικής ούτως ώστε να επέμβουν με αποτελεσματικό τρόπο, δεν βοηθούν τους μαθητές να εκφράσουν τις δυνατότητές τους. Άξιο, επίσης, προσοχής είναι επίσης τα όσα ο Orton J. αναφέρει, σε σχέση με τις διδακτικές πρακτικές των δασκάλων: *«Μπορεί να είναι πειρασμός για τους δασκάλους η συντόμευση των διαδικασιών μάθησης με το να δώσουν τους κανόνες για την εύρεση του ν-οστού όρου, π.χ. «εάν ανεβαίνουν ανά 5 πρέπει να είναι 5ν συν ή μείον κάτι», αλλά αυτό μπορεί να στερήσει από μερικούς μαθητές τη δυνατότητα για ανακάλυψη και είναι απίθανο να βοηθήσει τους μαθητές των οποίων η δυνατότητα γενίκευσης είναι αδύνατη» (Orton J., 1999).* Είναι φανερός, δηλαδή, ο τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων έργων από τους δασκάλους που, αντί να βοηθήσουν τους μαθητές να ανακαλύψουν τις κρυμμένες σχέσεις, τους δίνουν έτοιμες συνταγές. Αυτό, βέβαια, ίσως δηλώνει κάτι παραπάνω από λανθασμένες διδακτικές συμπεριφορές, πιθανότατα να δηλώνει τον τρόπο που βλέπουν το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, δηλαδή ως κάτι που υπερβαίνει τις δυνατότητες των μικρών μαθητών και επομένως η εμμονή σ' αυτό είναι χάσιμο χρόνου, υιοθετώντας την εύκολη λύση που ακούει στο όνομα «διδασκαλία της γενίκευσης με τη μέθοδο ABC».

Από τις προηγούμενες έρευνες κρατάμε και τα ελπιδοφόρα μηνύματα, που υπάρχουν, κι είναι ότι, η γενίκευση μπορεί να συντελεστεί σε περισσότερα του ενός επίπεδα, η πλειοψηφία των παιδιών μεταξύ των ηλικιών 7 και 11 ετών εμφανίζονται να είναι σε θέση να κάνουν μερικές ακριβείς γενικεύσεις για τα σταθερής διαφοράς patterns, αλλά και μερικά παιδιά μπορούν να περιγράψουν και μερικώς να επιχειρήσουν τη γενίκευση δευτεροβάθμιων patterns. Οι μελέτες παρέμβασης που ακολουθούν έχουν να κάνουν ακριβώς με την ανάδειξη των ικανοτήτων γενίκευσης των μαθητών, τις οποίες ικανότητες «φωτίζουν» αλληλεπιδραστικά διδακτικά περιβάλλοντα υπό το πρίσμα καινοτόμων θεωριών μάθησης. Πιο ενθαρρυντικά και ελπιδοφόρα μηνύματα, λοιπόν, στη συνέχεια.

3.6 Περισσότερο ελπιδοφόρα μηνύματα

3.6.1 Καταρτισμένοι εκπαιδευτικοί

Ερευνώντας τις «διαμήκεις τάσεις» στη συναρτησιακή σκέψη των μαθητών, δηλαδή την εξέλιξη της συναρτησιακής σκέψης σε σχέση με την ηλικία των παιδιών, οι Blanton και Kaput (2004), σε έρευνά τους επιλέγουν ένα κατάλληλο για αυτό το σκοπό έργο, το "Μάτια και Ουρές" , δηλαδή ένα έργο προσιτό σε μαθητές όλων των ηλικιών, από τα προνήπια μέχρι την πέμπτη τάξη του δημοτικού σχολείου, το οποίο περιλαμβάνει την ανάπτυξη μιας συναρτησιακής σχέσης μεταξύ ενός αυθαίρετου αριθμού σκυλιών και του αντίστοιχου συνολικού αριθμού ματιών ή του συνολικού αριθμού ματιών και ουρών. Για τους προαναφερόμενους ερευνητές η εκμετάλλευση των αλγεβρικών ιδεών των παιδιών οδηγεί στο σχεδιασμό έργων όπου ο αλγεβρικός συλλογισμός συντελείται μέσω της γενίκευσης αριθμητικών και γεωμετρικών patterns για την ανάπτυξη συναρτησιακών σχέσεων. Τα στοιχεία για αυτήν την μελέτη λήφθηκαν από το GEAAR, ένα εξαετές πρόγραμμα κατάρτισης επαγγελματιών δασκάλων σε μια αστική σχολική περιοχή, σχεδιασμένο να βοηθήσει τους δασκάλους να αλλάξουν ριζικά τις διδακτικές πρακτικές και να στηρίξουν ευκαιρίες στις τάξεις για αλγεβρικό συλλογισμό.

Μάτια και ουρές

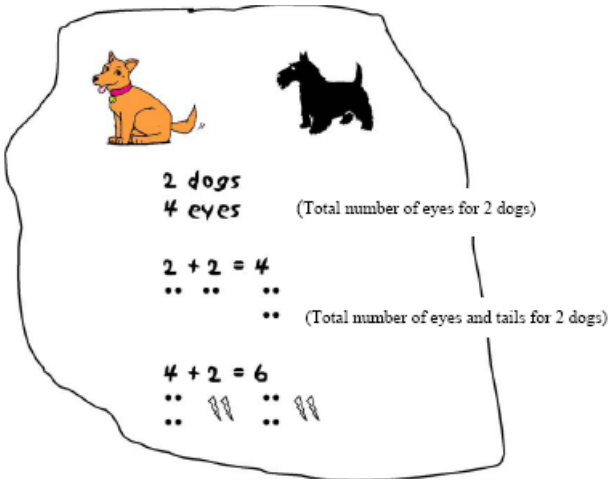
Υποθέστε ότι ήσασταν σε ένα καταφύγιο σκυλιών και θέλατε να μετρήσετε όλα τα μάτια των σκυλιών που είδατε. Εάν ήταν ένα σκυλί, πόσα μάτια θα υπήρχαν; Εάν ήταν δύο σκυλιά; Τρία σκυλιά; 100 σκυλιά; Βλέπετε μια σχέση μεταξύ του αριθμού σκυλιών και του συνολικού αριθμού ματιών; Πώς θα περιγράφατε αυτήν την σχέση; Εξηγήστε. Υποθέστε ότι θέλατε να βρείτε πόσα μάτια και ουρές είχαν όλα μαζί. Πόσα μάτια και ουρές έχουν ένα σκυλί; Δύο σκυλιά; Τρία σκυλιά; 100 σκυλιά; Πώς θα περιγράφατε τη σχέση μεταξύ του αριθμού σκυλιών και του συνολικού αριθμού ματιών και ουρών; Εξηγήστε.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι πολύ νέοι μαθητές είναι ικανοί για συναρτησιακή σκέψη και δείχνουν πώς εκείνη η σκέψη μπορεί να εξελιχθεί σταδιακά στις παραπάνω ηλικίες. Συγκεκριμένα, βαθμιαίες αλλαγές εμφανίστηκαν στην ικανότητα των μαθητών: (1) στη χρήση μορφών αναπαράστασης, όπως πίνακες τιμών συνάρτησης, (2) να διατυπώνουν και συμβολίζουν patterns, από περιγραφές στη φυσική γλώσσα προσθετικών σχέσεων στις συμβολικές αναπαραστάσεις των

πολλαπλασιαστικών σχέσεων, και (3) στην εξήγηση για συμμεταβαλλόμενες ποσότητες. Πιο αναλυτικά:

Σε όλες τις τάξεις, οι μαθητές χρησιμοποίησαν πίνακες, γραφήματα, εικόνες, λέξεις και σύμβολα για να κατανοήσουν το έργο και για να εκφράσουν μαθηματικές σχέσεις, με τους δασκάλους στις πιο μικρές τάξεις να είναι τα όργανα καταγραφής για τους πίνακες τιμών, αν και από την πρώτη τάξη οι μαθητές άρχισαν να αναλαμβάνουν την ευθύνη για αυτό. Από τη 2η και 3η τάξη, οι μαθητές φάνηκαν να χρησιμοποιούν αυτό το αναπαραστασιακό εργαλείο με άνεση.

Μέχρι και την πρώτη τάξη, οι μαθητές στηρίχθηκαν στην μέτρηση των ορατών αντικειμένων, παρακολουθώντας τους υπολογισμούς τους με διάφορους τρόπους, μέσω των πινάκων τιμών ή γράφοντας τελείες και μακρόσυρτα σημάδια για τα μάτια και τις ουρές αντίστοιχα (σχ.1).



Σχ.1

Παρατηρήθηκε ότι, από την τρίτη τάξη, οι μαθητές ήταν σε θέση να συμβολίσουν τις μεταβλητές ποσότητες με γράμματα, και φάνηκαν να έχουν μια αναδυόμενη κατανόηση αυτού που αυτά τα σύμβολα αντιπροσώπευαν. Επιπλέον, οι μαθητές της τρίτης τάξης μπορούσαν να εκφράσουν τις σχέσεις με συμβολική μορφή (π.χ., "ο αριθμός ματιών είναι *2n"*) , αν και δεν συμβόλισαν πλήρως τη σχέση σε μια μορφή όπως "*f(n)=2n* ". Στην 4η τάξη, μερικοί μαθητές έγραψαν " $\square$ χ 3 = η " μετά από την κατασκευή ενός πίνακα τιμών.

Επίσης, αναφέρουν οι ερευνητές, για τους τίτλους των πινάκων τιμών χρησιμοποιήθηκε όλο και πιο εκλεπτυσμένη γλώσσα. Ενώ στην 1η τάξη περιγράφηκαν με τις λέξεις σκυλιά και μάτια, στην 2η τάξη περιγράφηκαν με τις λέξεις"αριθμός σκυλιών" και "αριθμός ματιών", ενώ από την 3η τάξη και πάνω

χρησιμοποιήθηκαν σύμβολα όπως "D" και "E" για τον αριθμό σκυλιών και ματιών. Όλα αυτά δείχνουν ότι οι δάσκαλοι ήταν σε θέση να υποστηρίξουν τη σκέψη των μαθητών, έτσι ώστε διαφορετικά αναπαραστασιακά και γλωσσικά εργαλεία να αυξήσουν το ρεπερτόριο των μαθητών.

Όσον αφορά τις εξηγήσεις των μαθητών για τις μεταβαλλόμενες ποσότητες, υπήρξαν περιπτώσεις όπου και μαθητές του νηπιαγωγείου βρήκαν ένα pattern «άρτιων» αριθμών στα στοιχεία τους, ερωτηθέντες για τον αριθμό ματιών 5 σκυλιών, αφού προηγούμενα είχαν καταγραφεί στον πίνακα τιμών από το δάσκαλο, οι αριθμοί ματιών ενός, δύο, τριών και τεσσάρων σκυλιών:

Δάσκαλος: Εάν έχουμε 5 σκυλιά; Άρτιος ή περιττός;

Μαθητής: Άρτιος.

Δάσκαλος: Γιατί;

Μαθητής: Παραλείπουμε όλους τους περιττούς αριθμούς.

Μαθητές της 1^{ης} τάξης παρατήρησαν τα patterns σχετικά με το πώς ο αριθμός ματιών μεταβαλλόταν, και τα περιέγραψαν στην καθημερινή γλώσσα χρησιμοποιώντας και προσθετικές σχέσεις ("μετράμε ανά 3) και πολλαπλασιαστικές σχέσεις ("διπλάσιο "και "τριπλάσιο"), με τις πρώτες να είναι πιο κοινές. Από την 2^{η} τάξη, οι μαθητές ήταν σε θέση να διατυπώσουν μια πολλαπλασιαστική σχέση χρησιμοποιώντας την καθημερινή γλώσσα ("Εσύ πρέπει να διπλασιάσεις τον αριθμό σκυλιών για να πάρεις τον αριθμό ματιών") και να χρησιμοποιήσουν αυτό για να προβλέψουν τον αριθμό ματιών για 100 σκυλιά χωρίς μέτρηση. Η παρατήρηση ότι το pattern "διπλασιάζει" ή "τριπλασιάζει" , διαπιστώνουν οι Blanton και Kaput, δείχνει ότι οι μαθητές πρόσεχαν το πώς οι ποσότητες συμμεταβάλλονταν, αναζητούσαν, δηλαδή, όχι αναδρομικές σχέσεις αλλά σχέσεις συμμεταβολής. Στις πιο μεγάλες τάξεις, οι μαθητές χρειάστηκαν όλο και περισσότερο λιγότερες τιμές στοιχείων για να καθορίσουν μια συναρτησιακή σχέση και να κάνουν προβλέψεις. Από τον 3^{η} τάξη και πέρα, οι μαθητές φάνηκαν πιο εκλεπτυσμένοι στις δυνατότητές τους να δουν το πώς οι δύο ποσότητες άλλαζαν ταυτόχρονα και να συμβολιστεί αυτή η σχέση ως συναρτησιακή αντιστοιχία (π.χ., " αριθμός ματιών = 2 ν ").

Σύμφωνα με τους Blanton και Kaput, ενώ οι μαθητές από το νηπιαγωγείο ακόμα είναι ικανοί στη συναρτησιακή σκέψη, η έμφαση στην απλή μεταβολή, δηλαδή στη μεταβολή εντός ενός μόνο συνόλου (αναζήτηση αναδρομικών σχέσεων), μπορεί να εμποδίσει μια έμφαση στη συναρτησιακή σκέψη σε μεγαλύτερες τάξεις του

δημοτικού και αργότερα. Προσδιορίζεται δε ως κατάλοιπο των υπαρχόντων προγραμμάτων σπουδών, και κατά τους ερευνητές, απαιτεί λιγότερες ικανότητες και είναι λιγότερη ισχυρή από μαθηματική άποψη από τη συναρτησιακή σκέψη. Το ξεπέρασμα αυτής της εμμονής, καταλήγουν οι Blanton και Kaput, προϋποθέτει πρωτίστως *«μια θεμελιώδη εννοιολογική μετατόπιση που πρέπει να συμβεί στη σκέψη των δασκάλων προκειμένου να κινηθεί από τις αναδρομικές προσεγγίσεις προς εκείνες που ασχολούνται με δύο ή περισσότερες ποσότητες ταυτόχρονα.»*

3.6.2 Προσπάθειες γενίκευσης στα πλαίσια της σημειωτικής θεωρίας

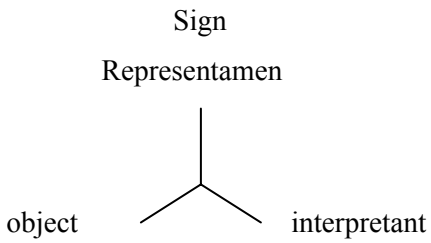
Ο όρος σημειωτική σημαίνει «θεωρία των σημείων», αλλά το πρόβλημα είναι ότι υπάρχουν πολλές θεωρήσεις της σημειωτικής που προέρχονται από διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, όπως της επιστημολογίας, της ψυχολογίας, της γλωσσολογίας, κ.ο.κ. Τα τελευταία χρόνια η σημειωτική έχει γίνει ένα καινοτόμο θεωρητικό πλαίσιο και για τη μαθηματική εκπαίδευση, όπου η συνήθης υιοθετούμενη σημειωτική προσέγγιση είναι αυτή του Peirce. Στη μάθηση των μαθηματικών η σημειωτική του Peirce πλεονεκτεί έναντι άλλων σημειωτικών προσεγγίσεων καθώς βασίζεται σε μια επιστημολογική θεώρηση του ρόλου των σημείων ως διαμεσολαβητών ανάμεσα στα αντικείμενα της γνώσης από τη μια και του νοήματος (meaning) αυτών των αντικειμένων από την άλλη (Bakker & Hoffmann, 2005).

Η μάθηση των μαθηματικών συνεπάγεται αφενός την ερμηνεία των μαθηματικών σημείων, αφετέρου δε την κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων μέσω της επικοινωνίας με τους άλλους. Πρόκειται για μια συνεχή διαδικασία που απαιτεί χρόνο, αλλά και την έκθεση σε μια ποικιλία εμπειριών στενά συνδεδεμένων μέσα σε διαφορετικά μαθηματικά, κοινωνικά και φυσικά πλαίσια. Σε αυτές τις εμπειρίες, πολλαπλά σημειωτικά συστήματα συνδυάζονται (π.χ. γλώσσα, μαθηματικά σημεία, χειρονομίες) για τη θεμελίωση μιας συνεχούς και εξελισσόμενης ερμηνείας των μαθηματικών νοημάτων (meanings). Η σπουδαιότητα της επικοινωνίας στην τάξη είναι τα τελευταία χρόνια αναγνωρισμένη από πολλούς ερευνητές. Μιας επικοινωνίας που ξεπερνά την ερμηνεία των γλωσσικών σημείων και αφορά την ερμηνεία και κατασκευή μη γλωσσικών σημείων. Η μαθηματική επικοινωνία στην τάξη εμπλέκει μεταξύ άλλων σημειωτικών συστημάτων το μαθηματικό συμβολισμό, τις χειρονομίες, τη γλώσσα του σώματος, τα οποία επηρεάζουν τον τρόπο που

ενεργούν και αντιδρούν οι συμμετέχοντες στην διαδικασία της μάθησης (Saenz-Ludlow A., 2006)

Περισσότερο αποσαφηνιστικά είναι τα όσα στο Cooper & Warren (2008) αναφέρονται: *«Μια σημειωτική προσέγγιση της μαθηματικής δραστηριότητας παρέχει έναν εναλλασσόμενο φακό μέσω του οποίου μπορεί να δει κάποιος τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Οδηγείται από μια αρχική εστίαση στα σημεία και στην κατασκευή τους (Ernest 2002). Ασχολείται με την παραγωγή των σημείων και τη χρήση τους με ιδιαίτερη εστίαση στην οικειοποίηση της έννοιας που ενσωματώνεται μεταξύ των σημείων. Σε αντίθεση με τις γνωστικές και κατασκευαστικές προσεγγίσεις στην ανάπτυξη των σχημάτων ή των γνωστικών δομών των μαθητών, μια σημειωτική προσέγγιση προσφέρει μια εστίαση στην κοινωνικά επιδειχθείσα σημειωτική δραστηριότητα. Σε αυτήν την προοπτική η ανάγνωση των κειμένων, η νοηματοδότηση των στόχων, οι υπολογισμοί, η γλώσσα, οι χειρονομίες, η μίμηση και οι νοητικές εικόνες-σχήματα, όλα έχουν σημειωτικές λειτουργίες. Η ελλοχεύουσα πεποίθηση είναι ότι, όταν οι άνθρωποι επικοινωνούν διαμέσου όλων των ειδών των σημείων (και ιδιοσυγκρασιακά και συμβατικά) αναδύεται γνώση, με την συνεχή ατομική ερμηνεία και επανερμηνεία αυτών των σημείων»* (Peirce 1960, στο Cooper & Warren, 2008, σελ. 173).

Όπως προαναφέρθηκε η σημειωτική του Peirce είναι η συνήθως υϊοθετούμενη από τους ερευνητές σημειωτική προσέγγιση της μαθηματικής κατάστασης. Το σημείο (sign) είναι ένα από τα τρία στοιχεία μιας σχέσης της οποίας τα άλλα δύο στοιχεία είναι το αντικείμενο (object) και ο ερμηνευτής (interpretant) (Saenz-Ludlow A., 2006). Να πούμε στο σημείο αυτό ότι, η Κολέζα (2000) μεταφράζει τον όρο interpretant ως ερνηνεία ενώ η Presmeg (2002) αναφέρει ότι ό όρος sign στην παραπάνω τριαδική σχέση αναφέρεται από τον Peirce σε κάποια γραπτά του ως representamen. Στην περίπτωση αυτή, λέει χαρακτηριστικά ότι ο όρος sign αφορά (αναφέρεται) ολόκληρη την τριάδα. Το παρακάτω σχήμα εκφράζει αυτή την τριαδική σχέση:



Οι Warren & Cooper (2007), σχετικά με την παραπάνω τριαδική σχέση, ερμηνεύουν τον όρο sign – representamen ως representation, δηλαδή αναπαράσταση. Το αιτιολογικό είναι ότι, «*τα σημεία είναι συγκεκριμένα πράγματα, δείκτες ή σημάδια που από μόνα τους δεν έχουν σημασία. Η έννοια υπάρχει στην ερμηνεία τους. Με αυτό τον ορισμό σημεία και αναπαραστάσεις είναι συνώνυμα.*». Επίσης υιοθετούν τον όρο interpreter (ερμηνευτής), μάλλον, γιατί ίσως γίνεται πιο σαφής ο ρόλος του υποκειμένου σ' αυτή την τριαδική σχέση, δηλαδή της υποκειμενικής ερμηνείας του σημείου.

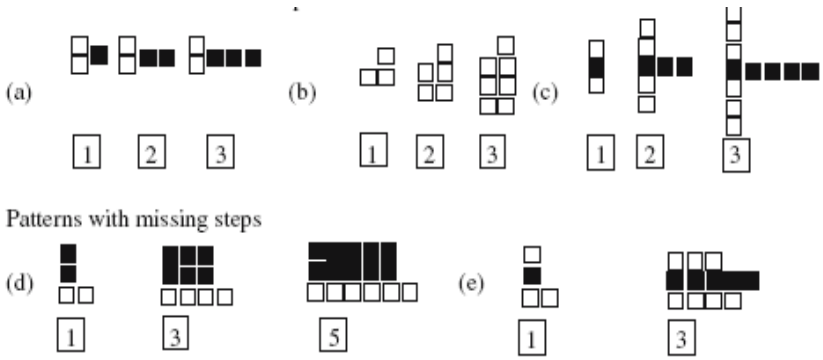
Τα σημεία (signs ή representamens) στην παραπάνω τριαδική σχέση μπορεί να είναι εικόνες (ή ομοιώματα κατά την Κολέζα), δείκτες και σύμβολα. (Warren & Cooper, 2007, Κολέζα, 2000). «*Οι εικόνες ή ομοιώματα έχουν την πιο στενή φυσική ομοιότητα με το αντικείμενο, μια ομοιότητα προς το αντικείμενο ή μια αναλογία του αντικειμένου. Οι δείκτες συνδέονται με ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά δεν έχουν απαραιτήτως τα χαρακτηριστικά του ή δεν παρέχουν μια αναλογία του αντικειμένου. Οι δείκτες μπορούν να υπάρξουν χωρίς το αντικείμενο, αλλά είναι η σχέση τους με το αντικείμενο που τους δίνει νόημα. Τα σύμβολα είναι αναπαραστάσεις που εκπληρώνουν τη λειτουργία τους ανεξάρτητα από οποιαδήποτε ομοιότητα ή αναλογία με το αντικείμενό τους και εξίσου ανεξάρτητα από οποιαδήποτε πραγματική σύνδεση, αλλά αποκλειστικά και μόνο επειδή θα ερμηνευθούν για να αναπαραστήσουν το αντικείμενο. Είναι η προσωπική ματιά και η ερμηνεία του ερμηνευτή αυτή που κάνει κάτι να λειτουργεί ως δείκτης ή εικόνα.*» (Warren & Cooper, 2007, σελ. 173). Τα σημεία, λοιπόν, έχουν την επιστημολογική λειτουργία αφενός της αναπαράστασης των αντικειμένων, αφετέρου δε της διαμεσολάβησης μεταξύ του αντικειμένου και του ερμηνευτή, εις τρόπον, ώστε το υποκείμενο να αποκτήσει πρόσβαση στα αναπαριστώμενα αντικείμενα (Saenz-Ludlow A., 2006). Η γνώση προκύπτει ως κοινωνικό προϊόν όταν οι μαθητές επικοινωνούν για ένα αντικείμενο μέσω όλων των ειδών των σημείων και την συνεχή ερμηνεία τους και επανερμηνεία τους σε μια διαρκή διαδικασία σημειοποίησης, όπου η παραπάνω τριάδα αποτελεί κάθε φορά ένα νέο αντικείμενο εμπλεκόμενο σε μια νέα τριαδική σχέση απ' την οποία ένα καινούργιο αντικείμενο θα προκύψει κ.ο.κ. Δηλαδή, το νόημα των μαθηματικών αντικειμένων προκύπτει καθώς τα σημεία μεταφράζονται σε καινούργια σημεία στην παραπάνω συνεχή διαδικασία.

Μέσα στα πλαίσια της σημειωτικής του Peirce, οι Cooper & Warren (2007), επανέρχονται στα patterns σε έρευνά τους με 45 μαθητές ηλικίας κατά μέσο όρο 8

ετών και 6 μηνών, μελετώντας το είδος διδασκαλίας που βοηθάει τους νέους μαθητές να δουν και να περιγράψουν αναπτυσσόμενα patterns σε εικονιστικά πλαίσια από την άποψη των «θεσιακών σχέσεών τους», δηλαδή την ικανότητά τους στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων. Σε σχέση με την παραπάνω τριαδική σχέση οι συναρτησιακές σχέσεις που αναπαρίστανται από τα αυξανόμενα patterns σε εικονιστικά πλαίσια ήταν τα αντικείμενα των σημείων. Τα σημεία ήταν οι αναπαραστάσεις που παρήχθησαν για να βοηθήσουν στην ερμηνεία των αντικειμένων (π.χ., οι εξωτερικές αναπαραστάσεις συμπεριλαμβανομένων διαγραμμάτων, σχεδίων και χρήση συγκεκριμένων υλικών, και η προφορική επιχειρηματολογία για τις αναπαραστάσεις και τις μαθηματικές ιδέες), και αποτέλεσαν τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για να επηρεάσουν τη συμπεριφορά του μαθητή, ενώ οι ερμηνευτές ήταν οι ίδιοι οι μαθητές και οι ερευνητές.

Οι ερευνητές προσπάθησαν αφενός να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της μάθησης - υιοθετώντας την άποψη ότι οι όποιες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές οφείλονται στην έλλειψη πρώιμων εμπειριών - των μαθητών και αφετέρου να ερευνήσουν τις διαδικασίες και ενέργειες που βοηθούν αυτήν την μάθηση. Στη διάρκεια 2 σαρανταπεντάλεπτων μαθημάτων που πραγματοποιήθηκαν από έναν από τους ερευνητές (δάσκαλος/ερευνητής), οι μαθητές κλήθηκαν να αντιγράψουν και να συνεχίσουν αναπτυσσόμενα patterns, να περιγράψουν τους όρους τους από την άποψη της «θεσιακής γλώσσας», να προβλέψουν και να δημιουργήσουν επόμενους όρους και στο δεύτερο μάθημα να περιγράψουν και να προβλέψουν όρους για οποιαδήποτε θέση καθώς και να αντιστρέφουν τη σκέψη τους, δηλαδή δοθέντος του όρου να προσδιορίζουν τη θέση του (βλ. παράρτημα). Δόθηκε προτεραιότητα στην περιγραφή των patterns στην καθημερινή γλώσσα και αποφεύχθηκε η καταγραφή των στοιχείων σε πίνακα τιμών που και ενθαρρύνει την απλή μεταβαλλόμενη σκέψη έναντι της σκέψης συμμεταβολής, αλλά και αυξάνει το φορτίο επεξεργασίας καθιστώντας το έργο δυσκολότερο. Οι μετά-εξετάσεις δόθηκαν με καθυστέρηση για να εξακριβωθεί η διατήρηση της μάθησης. Οι προ και μετά-εξετάσεις βασίστηκαν σε τρεις ερωτήσεις (βλ. παράρτημα). Εν πρώτοις, τα αποτελέσματα της προ και μετά-εξέτασης έδειξαν ότι υπήρξε αύξηση της κατανόησης των μαθητών στα αναπτυσσόμενα patterns και της δυνατότητά τους να περιγράψουν με γενικούς όρους τη σχέση μεταξύ του πλήθους των στοιχείων των όρων και της θέσης τους, δηλαδή παρατηρήθηκε αύξηση της δυνατότητάς τους στην έκφραση συναρτησιακών σχέσεων.

Στις ενέργειες που βοήθησαν στην αύξηση της κατανόησης σημαντικό ρόλο έπαιξε εν πρώτοις ***η χρήση συγκεκριμένων υλικών, δηλαδή*** κύβοι ως εικονικά σημεία (iconic signs), για τα αναπτυσσόμενα patterns, και μικρές κάρτες με τους αριθμούς θέσης ως δεικτικά σημεία (indexical signs), όπου για κάθε όρο του pattern τοποθετήθηκαν μέσα στην ακολουθία του pattern (βλ. σχ. 1, patterns a-c) και βοήθησαν τους μαθητές να συμπληρώσουν τους ελλείποντες όρους, εστιάζοντας στις δύο διαφορετικά πτυχές του pattern (τους όρους του pattern και τις θέσεις τους στο pattern) και αρχίζοντας φυσικά να συνδέουν τα δύο σημεία που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν αυτά τα στοιχεία.



Σχ. 1. Τυπικά patterns που χρησιμοποιήθηκαν στα δύο μαθήματα

Κατά δεύτερον η εργασία με patterns, όπου ***η σχέση μεταξύ του pattern και της θέσης ήταν σαφής***, π.χ. «είναι δύο φορές ο αριθμός βημάτων» ή «είναι ένα περισσότερο από τον αριθμό βημάτων» φάνηκε να βοηθά τους μαθητές να περιγράψουν προφορικά τη σχέση μεταξύ του pattern και της θέσης. Αυτές οι συζητήσεις, αναφέρουν οι Cooper & Warren, αποτελούνταν από τέσσερα ευδιάκριτα στάδια, που *«κάθε ένα βοήθησε τα παιδιά να αποσαφηνίσουν την περιγραφή της σχέσης μεταξύ των δύο συστημάτων σημείων (το pattern με τους κύβους και τις θεσιακές κάρτες), ώστε να εξασφαλιστεί ότι η ερμηνεία της περιγραφής τους στη φυσική γλώσσα (συμβολικό σημείο) αναπαριστά το αντικείμενο (τη συναρτησιακή σχέση που αναπαρίσταται από τον αναπτυσσόμενο pattern)».*

Στο πρώτο στάδιο οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να δώσουν σαφείς περιγραφές του pattern από μόνοι τους. Χαρακτηριστικό του είδους των συζητήσεων προς αυτή την κατεύθυνση είναι το ακόλουθο απόσπασμα για το αναπτυσσόμενο pattern b(σχ.1), όπου είναι σαφής η λεκτική περιγραφή αναδρομικών σχέσεων, *καθώς «οι*

μαθητές επικεντρώνονται στο εικονικό σημείο και αγνοούν το ενδεικτικό σημείο», που δείχνει τη θέση του στοιχείου μέσα στο ίδιο το pattern:

Kyla : Απλά γίνεται πιο ψηλό κάθε φορά .
T/R: Το έκανες πιο ψηλό κάθε φορά. Και πόσο πιο ψηλό;
Kyla: 1 σειρά
T/R:Κατά 1 σειρά. Τι άλλο ξέρεις για τη μια σειρά;
Kyla: Γίνεται μεγαλύτερη.
T/R: Γίνεται μεγαλύτερη πόσο;
Kyla: 2.
T/R: Κατά 2. Μπράβο. Γίνεται πιο ψηλό κάθε φορά κατά μια σειρά και γίνεται μεγαλύτερο κάθε φορά κατά δύο.

Στο δεύτερο στάδιο ήταν οι ***σαφείς ερωτήσεις για τη σύνδεση της θέσης της μορφής με το pattern***, λένε οι Cooper & Warren, που «*βοήθησε τους μαθητές να αρχίσουν να συσχετίζουν τα δύο σημεία, τα εικονικά και τα ενδεικτικά*». Για παράδειγμα, για το pattern b (σχ.1), αυτές οι ερωτήσεις ήταν της μορφής: «Με τι μοιάζει το pattern;», «Πόσες στήλες είναι;», «Πόσοι κύβοι είναι σε κάθε στήλη;», «Για το 3ο βήμα, πόσοι είναι στα αριστερά, πόσοι στα δεξιά;» Οι ερωτήσεις αφορούσαν ρητά τη θέση των στοιχείων στο pattern και οι οποίες, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα, «*βοήθησαν στην αποδόμηση του εικονικού σημείου στα μέρη του και στη συσχέτιση των μερών με το ενδεικτικό σημείο που δείχνει τη θέση του στο pattern*», βοηθώντας π.χ. τον John να αναπτύξει μια πιο στενή σχέση με το αντικείμενο, δηλαδή την συναρτησιακή σχέση:

T/R.: Τι λέτε για τον 4^{ο} όρο;
John: Έχει 9.
T/R: Μπορείτε να μου πείτε με τι μοιάζουν οι 9 κύβοι;
C: Χμ!
T/R: Μπορείτε να περιγράψετε με τι μοιάζουν οι 9 κύβοι. Πώς είναι;
John: 5 σε μια πλευρά και 4 σε άλλη.
T/R: Πώς αυτό συνδέεται με τον αριθμό θέσης;
John: Αυτός είναι ίδιος ο 4ος (δείχνοντας στα αριστερά), και αυτό είναι ένα περισσότερο (δείχνοντας στα δεξιά).

Τέλος, σύμφωνα με τους ερευνητές, *«ο John εξέθεσε τα αρχικά στάδια της σημειωτικής δραστηριότητας με την έκφραση της δικής του ερμηνείας για τη σχέση μεταξύ του εικονικού σημείου και του ενδεικτικού σημείου στην καθημερινή γλώσσα, η αρχή της εμφάνισης ενός σημείου ως σύμβολο.»*

Στο τρίτο στάδιο ακολούθησε σταδιακά η ***γενίκευση του pattern από τους μικρούς αριθμούς θέσης, στους μεγάλους αριθμούς θέσης.*** Είναι σαφής στο ακόλουθο απόσπασμα η σύνδεση των δύο σημείων του εικονικού και του δεικτικού:

Brian: Χμ! Το πρώτο είχε 2 απ' τη μια πλευρά και έπειτα 3 στην άλλη.
T/R: Σε αυτό 2 και 3 (δείχνοντας τη δεύτερη μορφή);
Brian: Ναι, και έτσι σκεφτήκαμε ότι ο 20ός θα είχε 20 σε μια πλευρά και 21 στην άλλη.
T/R: 20 στην μία πλευρά και 21 στην άλλη. Ποιος είδε εκείνο το pattern; Εντάξει, πώς θα μοιάζει ο 10ος;
Evan: Θα έχει 10 σε μια πλευρά και 11 στην άλλη.
T/R: 10 σε μια πλευρά και 11 σε άλλη. Τώρα πρόκειται να ρωτήσω μια πραγματικά δύσκολη ερώτηση, «Τι νομίζετε για τον 50ό; Πώς θα έμοιαζε;»
Helen: 50 σε μια πλευρά και 51 σε άλλη.
T/R: Πολύ καλά, ο 100ός;
Elise: 100 σε μια πλευρά και 101 σε άλλη.
T/R: Πολύ καλά! Ο 1.000ός;
Adam: 1.000 σε μια πλευρά και 1.001 στην άλλη.

Στο τέταρτο στάδιο εισήχθη μια κάρτα με τον αριθμό ν πάνω της επεκτείνοντας τις παραπάνω σκέψεις στη γλώσσα της γενικότητας:
T/R: Τι λέτε για τον ν-οστό;
Ben: 1 ν-οστός σε μια πλευρά και ένας ν-οστός στην άλλη.
Ben: Όχι, ν-οστός και ένας! Και οι δύο έχουν τον ν-οστό αλλά αυτό έχει ένα περισσότερο.
T/R: Πόσοι θα υπήρχαν όλοι μαζί στο 100ό βήμα εν τούτοις;
Karen: 201.
T/R: Πώς το ξέρετε;
Karen: Εύκολο, αφού υπάρχουν 100 και 100 σε κάθε πλευρά είναι 200 συν 1, είναι 201.

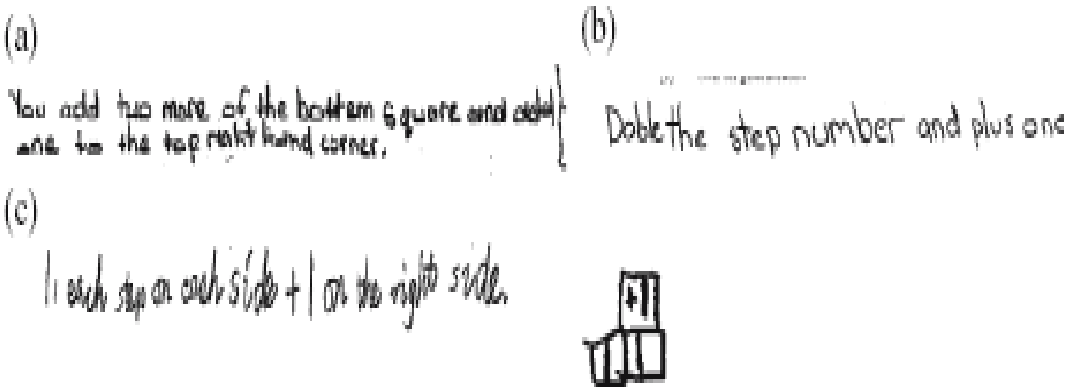
T/R: Πολύ καλά. Ναι αυτός είναι ένας άλλος τρόπος για να το σκεφτούμε. Υπάρχει άλλη σκέψη γι' αυτό σαν αυτή;

T/R: Άλλος τρόπος.

John: Κάθε βήμα σε κάθε πλευρά συν ένα περισσότερο στην εξωτερική πλευρά.

Παρατηρήθηκαν προβλήματα σύγχυσης μεταξύ της τακτικών και απόλυτων αριθμητικών κατά τον περιγραφή του pattern για την ν-οστή θέση. Στην προφορική απόδοση των γενικεύσεων αποφεύχθηκε η χρήση του ν συνολικά. Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις για το προηγούμενο pattern παρουσιάζονται στο σχ.3.

Η απάντηση (c) περιλαμβάνει τη γραπτή περιγραφή του μαθητή μαζί με τη συνοδεία ενός εικονικού σημείου για να αναπαραστήσει τη γενίκευση.



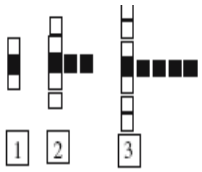
Σχ.3. Απαντήσεις στο ερώτημα: Γράψτε το κανόνα για το pattern c.

Τέλος η ***χρησιμοποίηση του χρώματος για αναπαράσταση διαφορετικών στοιχείων ενός pattern***, η χρήση δύο διαφορετικών χρωματισμένων κύβων, βοήθησε τους μαθητές στην «συνεξέταση» των δύο αυξανόμενων χρωματιστών στοιχείων του pattern και στη συσχέτισή τους με τον αριθμό θέσης, οδηγώντας στη γενίκευση του pattern, (βλ. το σχήμα 1, patterns c –e), όπως φαίνεται ακολούθως:

Alex: Λοιπόν, οι δύο πλευρές (δείχνοντας κάθε ένα από τους άσπρους κύβους που διαμόρφωσαν τους δύο βραχίονες της μορφής t), εάν προσθέσετε και τις δύο πλευρές μαζί και αφαιρέστε 1 αυτό είναι το ποσό στη μέση (δείχνοντας τους μαύρους κύβους που διαμόρφωσαν τον κεντρικό βραχίονα της μορφής t).

Alex: Κάθε πλευρά είναι ίση με όπου είναι.

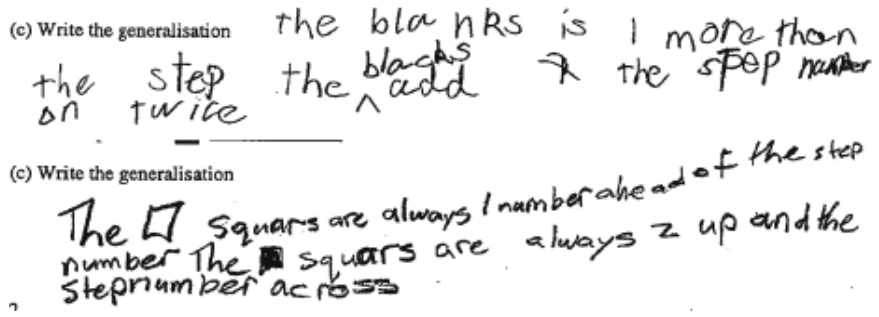
T/R: Το 40ό βήμα.



Alex: Η μία πλευρά θα ήταν 40 και η άλλη πλευρά θα ήταν 40, έτσι προσθέτοντας μαζί (δείχνοντας τους δύο βραχίονες του t που γίνονται από τους άσπρους κύβους) και αφαιρώντας ένα θα ήταν 79, δηλαδή η μέση (δείχνοντας στον κεντρικό βραχίονα του t, που γίνεται από τους μαύρους κύβους).

Το χρώμα βοήθησε τον Alex στην αποδόμηση των χρωματικών στοιχείων του εικονικού σημείου, γεγονός που βοήθησε στην λεκτική περιγραφή-αναπαράσταση (ένα συμβολικό σημάδι) του αντικείμενου. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι *«η περιγραφή του, η οποία συμπεριλάμβανε χειρονομίες, ενσωμάτωσε μια εικονική, μια ενδεικτική και μια συμβολική διάσταση. Ήταν σε αυτήν την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των διαστάσεων ότι η γενίκευση όχι μόνο άρχισε να γίνεται ένα αντικείμενο αυθύπαρκτο, αλλά και επέτρεψε στους άλλους μαθητές να αποκτήσουν την επίγνωση πώς αυτός αντικειμενοποίησε το pattern».*

Μερικά άλλα παραδείγματα όπου το χρώμα εμφανίστηκε να βοηθά τους μαθητές να προσδιορίσουν τη γενίκευση παρουσιάζονται στο σχήμα 4.



Σχ.4

Να αναφέρουμε, επίσης, ***ότι τα οπτικά pattern που έλειπαν κάποιοι όροι,*** έστρεψαν τη προσοχή των μαθητών συγκεκριμένα στην ερμηνεία και σχέση μεταξύ των δύο σημείων για τα στοιχεία του pattern (τους κύβους ως εικονικό σημείο και τον αριθμό θέσης ως ενδεικτικό σημείο).

Συμπερασματικά, πέραν των δυσκολιών που παρεμπόδισαν τις διαδικασίες όπως η δυσκολία στην ακριβή περιγραφή ενός οπτικού pattern, η γλωσσική σύγχυση των τακτικών και απόλυτων αριθμητικών, η δυσκολία στην αντιστροφή της σκέψης κ.ο.κ., το πιο θετικό είναι ότι υπήρξαν τουλάχιστον πέντε μαθητές σε κάθε τάξη (από τους συνολικά 45 μαθητές των δύο τάξεων) που θα μπορούσαν όχι μόνο να περιγράψουν τις γενικεύσεις στη σωστή μαθηματική γλώσσα, αλλά και να γράφουν αυτές τις γενικεύσεις χρησιμοποιώντας αφηρημένα συμβολικά συστήματα (π.χ., για

το ν-οστό βήμα υπάρχουν ν μπλε κύβοι και ν+1 κίτρινοι). Επίσης, πολλοί μαθητές έδειξαν μια ικανότητα να εκφράσουν τις γενικεύσεις προφορικά, αλλά πολλές από αυτές τις προφορικές περιγραφές στερούνταν ακρίβειας, γεγονός που αποδόθηκε στο περιορισμένο μαθηματικό λεξιλόγιο. Λέξεις όπως "σειρά" και "στήλη" και περιγραφή ενός πίνακα με «2 σειρές και 4 στήλες» έλειπαν από το λεξιλόγιό τους. Η όποια δυνατότητα κάποιων μαθητών στην προφορική περιγραφή συναρτησιακών σχέσεων, στην έστω και ανακριβή γλώσσα «στολισμένη» με χειρονομίες, εντούτοις, υποβαθμίστηκε όταν οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν τις γενικεύσεις τους σε γραπτή μορφή φανερώνοντας, όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι: «*Όσον αφορά την αλληλεπίδραση μεταξύ της προφορικής περιγραφής των patterns και της απόδοσης αυτής της περιγραφής σε γραπτή μορφή, ενώ και οι δύο αντιμετωπίζονται ως σύμβολα από τη σημειωτική προοπτική, εμφανίζεται ότι μερικά συστήματα συμβόλων είναι ευκολότερα για τους νέους μαθητές να καταπιαστούν σε σχέση με κάποια άλλα.*»

Παρόλο αυτά οι ερευνητές επισημαίνουν ότι: *«Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υπόθεση Blanton και Kaput (2004) ότι οι νέοι μαθητές είναι ικανοί να σκέφτονται συναρτησιακά*» και μάλιστα να αποδώσουν τη σχέση μεταξύ δύο συνόλων σε μια πολύ αφηρημένη μορφή. Προς αυτή την κατεύθυνση η σημειωτική δραστηριότητα μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο. Τα αποτελέσματα, αναφέρουν οι Cooper & Warren, δείχνουν επίσης «*τη δύναμη της σημειωτικής δραστηριότητας στην αύξηση όχι μόνο της συνειδητοποίησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των εικόνων και των δεικτών αλλά και στην κατεύθυνση των ερμηνειών των σημείων, για να βοηθήσουν στη διατύπωση των επεξηγηματικών υποθέσεων για το ίδιο το αντικείμενο».* Η θεώρηση των κύβων ως εικόνες και των σημείων θέσης ως δείκτες ήταν ουσιαστική στην εισαγωγή της έννοιας της συναρτησιακής σκέψης στη μαθηματική συζήτηση. Τέλος, λένε, η «*σύγχυση μεταξύ των τακτικών και απόλυτων αριθμητικών κατά την προσπάθεια προφορικής εμπλοκής της χρήση του ν στις περιγραφές τους για το pattern, μπορεί να οφείλεται στην ερμηνεία του σημείου θέσης στην εικονική μορφή του παρά στην ενδεικτική».*.

Ως τελικό συμπέρασμα οι Cooper & Warren, σε συμφωνία με τους Blanton και Kaput (2004), διαπιστώνουν ότι, ενώ οι νέοι μαθητές είναι ικανοί στη συναρτησιακή σκέψη, «*η απλή μεταβαλλόμενη σκέψη είναι ίσως γνωστικά ευκολότερη ή τόσο περιχαρακωμένη μέσα στις πρώτες εμπειρίες που μια τάση προς την επιστροφή σε αυτήν την σκέψη είναι κατανοητή*». Η προσδωκόμενη από την μη χρήση πίνακα τιμών στροφή στην αναζήτηση συναρτησιακών σχέσεων συμμεταβολής δεν απέδωσε,

καθώς αντί του πίνακα οι μαθητές αναζητούσαν αναδρομικές σχέσεις patterns στην ακολουθία των κύβων, δηλαδή, αντί να πουν «*προσθέτουμε δύο στην ακολουθία των αριθμών του πίνακα*», είπαν ότι «*προσθέτουμε δύο κύβους καθώς προχωράμε κατά μήκος των όρων*».

Επισημαίνεται για μια ακόμη φορά, τέλος, ότι οι ίδιες δυσκολίες που συναντούν οι μικροί μαθητές επανεμφανιζόμενες σε έρευνες με εφήβους αποδυναμώνουν τα επιχειρήματα περί αναπτυξιακών περιορισμών. Οι κατοπινές δυσκολίες οφείλονται στην έλλειψη πρώιμων εμπειριών οι οποίες μπορεί να παίξουν καθοριστικό ρόλο.

3.6.3 Η γενίκευση στα πλαίσια της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Τα «Μαθηματικά σε Πλαίσια» (Mathematics in Context, MiC) έλκουν την καταγωγή τους από τη «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» (Realistic Mathematics Education, RME) θεμελιακή συνιστώσα της οποίας είναι η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal κι η οποία βρίσκεται στο ένα άκρο του διπόλου με την στρουκτουραλιστική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση, ως αντίποδας της οποίας αναπτύχθηκε, να βρίσκεται στο άλλο άκρο του διπόλου. Αυτή η αντιδιαμετρική τοποθέτηση των δύο προσεγγίσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης, στη διδακτική πρακτική υπαγορεύει δύο εξ ολοκλήρου αντίθετες πορείες. Η στρουκτουραλιστική προσέγγιση από τη μια προτάσσει τις έννοιες και στη συνέχεια αναζητεί καταστάσεις όπου αυτή η έννοια συγκεκριμενοποιείται, και η ρεαλιστική προσέγγιση σε μια αντίστροφη πορεία αναζητεί τα φαινόμενα μέσα από τα οποία η μαθηματική έννοια λαμβάνει υπόσταση, ακριβώς ως εργαλείο και μέσο οργάνωσης αυτών των φαινομένων. Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση εστιάζει στην σταδιακή εξέλιξη των άτυπων μαθηματικών διαδικασιών των μαθητών σε πιο επίσημες διαδικασίες. Δηλαδή, η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στην προοδευτική μαθηματικοποίηση μέσα σε αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα των αρχικά διαισθητικών προσεγγίσεων των μαθηματικών εννοιών σε προβλήματα και πραγματικές καταστάσεις. Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας, η γενική μαθηματική γνώση εξελίσσεται από μια σειρά οριζόντιων και κάθετων δραστηριοτήτων μαθηματικοποίησης, και η αφετηρία της μαθηματικής δραστηριότητας βρίσκεται συνήθως στις ενδιαφέρουσες πραγματικές καταστάσεις ζωής ή τα μαθηματικά προβλήματα που συνάδουν με την εμπειρία των μαθητών. Στην οριζόντια

μαθηματικοποίηση ανιχνεύονται οι διάχυτες σε ποικίλες καταστάσεις μαθηματικές έννοιες και δομές που, όντας διασκορπισμένες, ζητούν οργάνωση. Η διαδικασία αυτή περνάει μέσα από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των προβλημάτων, την αναζήτηση κανονικοτήτων σε διαφορετικές φαινομενικά καταστάσεις, την εύρεση σχέσεων και patterns, και την μετάφραση τελικά του πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα. Ακολουθεί η φάση της κατακόρυφης μαθηματικοποίησης όπου γίνεται η επεξεργασία του μαθηματικού πλέον προβλήματος με μαθηματικά εργαλεία. Η διατύπωση με πιο τυπικούς τρόπους των σχέσεων, οι αποδείξεις των σχέσεων αλλά και η γενίκευση των σχέσεων λαμβάνουν χώρα σε αυτή τη φάση. Σε αυτή την προοδευτική μαθηματικοποίηση, δηλαδή στο πέρασμα από τη μια φάση στην άλλη είναι καθοριστικός ο ρόλος του υπό συνεχή αλληλεπίδραση με τους μαθητές δασκάλου, όπως επίσης και των μαθητών μεταξύ τους, αλλά και των χρησιμοποιούμενων εργαλείων, δηλαδή σχημάτων, διαγραμμάτων, συμβόλων.

Η γενίκευση, που λαμβάνει χώρα στην φάση της κάθετης μαθηματικοποίησης, και για τους Becker και Rivera (2006), βρίσκεται στον πυρήνα του αλγεβρικού συλλογισμού. Τη βλέπουν με όρους εννοιοδιαδικαστικούς και ως ένα απαραίτητο εργαλείο στην αναπαράσταση ποσοτικών σχέσεων συμβολικά. Μέσα στα πλαίσια της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης ερευνούν τις ικανότητες 29 παιδιών, μέσης ηλικίας 11 ετών, σχετικά με το πώς και σε ποιο βαθμό είναι ικανοί να επεκτείνουν ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο δείγμα αντικειμένων σε ένα μεγαλύτερο και γενικό πλαίσιο βρίσκοντας νόμους, προσδιορίζοντας κοινά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, και επεκτείνοντας τις περιοχές ισχύος σε μεγάλες κατηγορίες περιπτώσεων.. Ενδιαφέρονται επίσης για το πώς δικαιολογούν τις γενικεύσεις τους, αλλά και την ικανότητά τους στις διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου pattern, συμπεριλαμβανομένων των τρόπων να αξιολογούν αυτές ως ισοδύναμες. Επίσης ερευνούν τις μεθόδους που υιοθετούν στις καταστάσεις που περιλαμβάνουν τις αντίστροφες διαδικασίες.

Υιοθετούν την άποψη, που προκύπτει από διαφορετικές, προηγούμενες, δικές τους έρευνες ότι οι μαθητές τείνουν να εργάζονται με δύο διαφορετικούς τρόπους για τη γενικότητα, δηλαδή αριθμητικά και σχεδιαστικά. Ουσιαστικά, αναφέρονται στα προτιμώμενα είδη αναπαράστασης από τους μαθητές όταν εργάζονται με patterns, και θεωρούν ότι η αντιμετώπιση τους σε ένα αριθμητικό επίπεδο, δηλαδή με χρήση πίνακα τιμών, τους οδηγεί σε στρατηγικές αντιμετώπισης τους που δεν υποδηλώνουν επίγνωση των ενεργειών τους, αλλά εκτελούνται σε ένα μηχανικό επίπεδο.

Προτάσσουν, δηλαδή, αμέσως, τις σχηματικές αναπαραστάσεις, δηλαδή τα έργα σε εικονιστικά πλαίσια, αυτά είναι που οδηγούν σε μια στροφή προς τη συναρτησιακή σκέψη. Γράφουν συγκεκριμένα:

«*Εκείνοι οι μαθητές που εργάζονται αριθμητικά συνήθως χρησιμοποιούν τη μέθοδο δοκιμή-και-λάθος και τη μέθοδο των διαφορών ως στρατηγικές για την εύρεση κοντινών μορφών ή μερικώς σωστών σχέσεων επανάληψης χωρίς οποιαδήποτε αίσθηση αυτού που ο συντελεστής και η σταθερά στο γραμμικό pattern αντιπροσωπεύουν. Βλέπουν τις μεταβλητές μόνο ως placeholders και ως γεννήτριες για τις γραμμικές ακολουθίες αριθμών. Εκείνοι που εργάζονται σχεδιαστικά χρησιμοποιούν τις οπτικές στρατηγικές στις οποίες η εστίαση είναι στον προσδιορισμό σταθερών σχέσεων ανάμεσα στις δοσμένες μορφές. Για αυτούς, οι μεταβλητές κινούνται πέρα από τη λειτουργία τους ως placeholders καθώς ερμηνεύονται μέσα στο πλαίσιο μιας συναρτησιακής σχέσης*» (Becker & Rivera, 2006, σελ. 466).

Το παρακάτω απόσπασμα είναι δηλωτικό αυτής της μηχανιστικής προσέγγισης, όπου χρησιμοποιούνται μη αλγεβρικές στρατηγικές, του τύπου «δοκιμή και λάθος»:

«*Η Tabitha έφτιαξε αρχικά έναν κάθετο πίνακα των τιμών για το έργο στο σχ.2 χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές n και C. Έπειτα παρατήρησε ότι υπήρχε κοινή διαφορά 2, και τελικά έγραψε την εξίσωση C = nx2-1. Ήξερε ότι ο συντελεστής 2 αναφέρεται στην κοινή διαφορά και ότι η σταθερά -1 ήταν μια αξία που έπρεπε να προσθέσει, ώστε οι παραγόμενες τιμές να ταιριάξουν με τις καταχωρήσεις κάτω από τη στήλη C*».

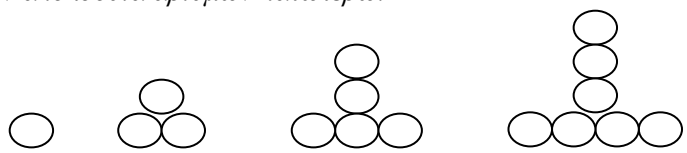
Θίγουν, δηλαδή οι Becker & Rivera, ζητήματα σχέσης έργου και μορφής αναπαράστασης. Σ' αυτά βέβαια θα μπορούσε κανείς να αντιτάξει τα επιχειρήματα της Warren, η οποία, όπως έχει δείξει σε προαναφερθείσα έρευνά της, η αποφυγή του πίνακα τιμών, που ενισχύει αναδρομικές στρατηγικές και στρατηγικές του τύπου «δοκιμή και λάθος», δεν φαίνεται να οδηγεί κατ' ανάγκη στην αναζήτηση συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ των μορφών, καθώς οι μαθητές μεταφέρουν αυτές τις στρατηγικές και στις σχηματικές αναπαραστάσεις.

Ξαναγυρίζουμε στην έρευνα αναφέροντας ότι, οι συμμετέχοντες, όπως προείπαμε, ήταν 29 μαθητές διαφόρων εθνικοτήτων μέσης ηλικίας 11 ετών, σ' ένα αστικό σχολείο στη Βόρεια Καλιφόρνια. Στην αρχή του εξαμήνου του 2005 και οι 29 μαθητές πέρασαν από προ-συνέντευξη σε πέντε έργα άλγεβρας που περιλάμβαναν patterns (βλ. σχ. 1 στο παράρτημα Β). Προσδιορίστηκαν έπειτα 12 μαθητές με

διαφορετικά επίπεδα δυνατότητας στη γενίκευση των οποίων η εργασία ερευνήθηκε με κάποιες λεπτομέρειες.

Εφαρμόστηκαν διαδοχικές ακολουθίες πειραμάτων διδασκαλίας τάξεων κατά τη διάρκεια του φθινοπώρου 2005, όπου κάθε ακολουθία διήρκεσε περίπου έξι εβδομάδες. Οι συναντήσεις ήταν καθημερινές και κάθε σύνοδος διαρκούσε 55 λεπτά. Με το κλείσιμο του φθινοπωρινού εξαμήνου του 2005, 11 από τους 12 μαθητές έχουν επιλεγεί σε μια μετά-συνέντευξη πέντε έργων άλγεβρας ανάλογων με αυτούς που δίνονται στην προ-συνέντευξη (σχ. 2). Σημειωτέον ότι τα έργα στις προ και μετά-συνεντεύξεις δόθηκαν σε αποπλαισιοποιημένη μορφή, δηλαδή διαφορετικά από τα προβλήματα έως τα οποία οι μαθητές είχαν εκτεθεί στα μαθήματα, διότι πρωτίστως ενδιέφερε η τεκμηρίωση της δυνατότητας των μαθητών να εκτελέσουν τη γενίκευση στο επίπεδο της κάθετης μαθηματικοποίησης.

Εξετάστε την ακολουθία αριθμών κατωτέρω.



Μορφή 1 Μορφή 2 Μορφή3 Μορφή 4

α. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 10ή μορφή; Εξήγησε.

β. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 100ή μορφή; Εξήγησε.

γ. Βρες ένα τύπο για τον αριθμό των κύκλων της μορφής με αριθμό «n». Εξήγησε πώς βρήκες την απάντησή σου. Αν βρήκες τη λύση αριθμητικά, απάντησε στην ακόλουθη ερώτηση: Υπάρχει τρόπος να εξηγήσεις τον τύπο από τις μορφές;

δ. Μπορείς να σκεφτείς έναν άλλο τρόπο να βρεις έναν τύπο;

ε. Ο τύπο του Jack είναι: C = n + (n - 1), όπου n είναι ο αριθμός της μορφής και C ο συνολικός αριθμός των κύκλων. Είναι αυτός ο τύπος σωστός; Γιατί ή γιατί όχι;

Ποιανού ο τύπος είναι σωστός: Ο του Jack ή ο τύπος που βρήκες παραπάνω; Εξήγησε.

φ. Η Elizabeth έχει 29 κύκλους που πρόκειται να χρησιμοποιήσει για την κατασκευή κάποιας μορφής. Ποια μορφή πρόκειται να κατασκευάσει; Εξήγησε.

Σχήμα 2. Πρόβλημα κύκλων

Στο σημείο είναι σαφής η αντιστοίχιση των φάσεων της οριζόντιας και κάθετης μαθηματικοποίησης με τις φάσεις της «πλαισιοποίησης» και «αποπλαισιοποίησης» της γνώσης. Σε σχέση με την παρούσα έρευνα, στη μετά-

εξέταση ελέγχθηκε ακριβώς η δυνατότητα των μαθητών να δώσουν τα όσα στη φάση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης αποκόμισαν σε μια πιο οργανωμένη και γενική μορφή στη φάση της κάθετης μαθηματικοποίησης, ερευνήθηκε δηλαδή η δυνατότητά τους στην αποπλαισιοποίηση της γνώσης και η δυνατοτητά τους να δώσουν σ' αυτή μια καθολική και επικοινωνίσιμη μορφή (Brousseau, 1997, στο Streefland L., 1991, μτφ Κολέζα, 2000) .

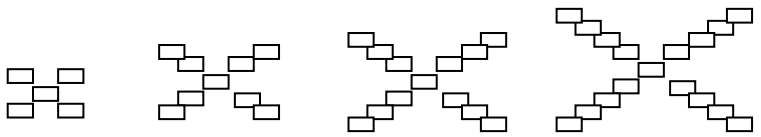
Ας δούμε αναλυτικά τα αποτελέσματα. Οι μαθητές υιοθέτησαν είτε αριθμητικές στρατηγικές, δηλαδή καταγραφή αρκετών εξαρτώμενων τιμών ή/και την κατασκευή ενός πίνακα, κατόπιν έλεγχο για ύπαρξη κοινής διαφοράς και τελικά ανάπτυξη ενός τύπου, είτε σχεδιαστικές στρατηγικές στην εύρεση των γενικεύσεων.

Σύμφωνα με τους ερευνητές, στις προ-συνεντεύξεις, τουλάχιστον έξι μαθητές λειτούργησαν σχεδιαστικά και παρήγαγαν περισσότερο factual generalizations παρά contextual generalizations[3]. Κανένας από τους 12 δεν λειτούργησε στο συμβολικό επίπεδο (symbolic generalizations). Στις μετά-συνεντεύξεις, 10 από τους 11 μαθητές λειτούργησαν αριθμητικά, και όλοι από αυτούς τους 11 παρήγαγαν σωστές συμβολικές γενικεύσεις. Φαίνεται δηλαδή, ότι οι αριθμητικές στρατηγικές εμφανίζονται να είναι πολύ βολικές και συστηματικές. Οι μαθητές που εργάστηκαν είτε σχεδιαστικά στις προ-συνεντεύξεις και στις μετά-συνεντεύξεις είτε σχεδιαστικά στις προ-συνεντεύξεις και αριθμητικά μετά δικαιολόγησαν τις συμβολικές γενικεύσεις τους στη μετά-συνέντευξη σχηματικά. Για παράδειγμα για τον James, ο τύπος F = nx2-1 για το έργο του σχ. 2 σημαίνει "διπλασιάζουμε μια σειρά και αφαιρούμε ένα κύκλο». Μαθητές που εργάστηκαν αριθμητικά στις προ και μετα-συνεντεύξεις δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν τις συμβολικές γενικεύσεις τους πέρα από την αντικατάσταση και τον έλεγχο. Είναι αξιόλογο το εύρημα αυτό, δηλαδή, πως ενώ η γενίκευση πραγματοποιήθηκε σε αριθμητικά πλαίσια, η δικαιολόγηση των γενικεύσεων υποβοηθήθηκε από τις σχηματικές αναπαραστάσεις. Θα μπορούσε, ίσως, να ισχυριστεί κάποιος πως αυτό είναι δηλωτικό ενός μηχανιστικού χειρισμού των έργων σε αριθμητικό επίπεδο.

Οι μισοί μαθητές προτίμησαν να βρουν έναν γενικό τύπο για ένα έργο πριν εξετάσουν τις κοντινές και μακρινές περιπτώσεις γενίκευσης. Αυτοί οι μαθητές, όπως αναφέρεται, είπαν ότι «είναι ευκολότερο έτσι». Επιβεβαιώνεται, δηλαδή, αν και δεν γνωρίζουμε κατά πόσο στη φάση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης συνέβη αυτό αναφορικά με την παρούσα έρευνα, η αναφερόμενη σ' αυτό το κεφάλαιο άποψη των Lannin, Barker και Townsend (2004) σχετικά με την αποτελεσματικότητα της

παρατεταμένης προσήλωσης στους πρώτους δοθέντες όρους του pattern, δηλαδή, ότι πρέπει να παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξετάζουν εξονυχιστικά τις συγκεκριμένες περιπτώσεις (πρώτες αριθμητικές τιμές) μιας ακολουθίας, πριν από την προσπάθεια να κατασκευαστεί μια γενίκευση.

Και οι 11 μαθητές στις μετά-συνεντεύξεις πέτυχαν στην έκφραση των τύπων τους χρησιμοποιώντας δύο μεταβλητές. Ενώ και οι 11 μαθητές επέτυχαν στην αξιολόγηση της ισοδυναμίας δύο ή περισσότερων γενικεύσεων για το ίδιο pattern, δεν ήταν επιτυχείς στην παραγωγή δικών τους ισοδύναμων γενικεύσεων. Η επιτυχής δικαιολόγηση ισοδύναμων συμβολικών γενικεύσεων για τον ίδιο τύπο κατά τους ερευνητές, εξαρτάται από το εάν μια γενίκευση είναι constructive ή deconstructive. Πιο συγκεκριμένα ο τύπος του Jack (βλ. ε στο σχ. 2) είναι ένα παράδειγμα μιας constructive γενικότητας «*που περιλαμβάνει τη θεώρηση των όρων σε έναν αλγεβρικό τύπο ως αναπαράσταση των μη-επικαλυπτόμενων μερών μια μορφής*». Ένας τύπος που περιλαμβάνει την deconstructive γενικότητα «*αποτελείται από όρους που αναφέρονται στα επικαλυπτόμενα μέρη μιας μορφής*». Για παράδειγμα, για το ακόλουθο pattern (σχ.3), ο τύπος T = (nx2) + 1 + (nx2) + 1 - 1, όπου το T αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό αριθμού τετραγώνων και το n τη θέση του όρου, περιλαμβάνει τη θεώρηση δύο περιττού πλήθους στοιχείων διαγωνίων που μοιράζονται ένα κεντρικό τετράγωνο.



Μορφή 1 Μορφή 2 Μορφή 3 Μορφή 4

Σχήμα 3. Pattern με τετράγωνα (Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999)

Οι δέκα από τους 11 μαθητές στις μετά-συνεντεύξεις μπορούσαν να δικαιολογήσουν τις ισοδύναμες constructive γενικότητες, εντούτοις, κανένας από αυτούς δεν μπόρεσε να εξηγήσει τις ισοδύναμες deconstructive γενικότητες.

Τέλος όσον αφορά την *εξέταση των καταστάσεων που περιλαμβάνουν τις αντίστροφες διαδικασίες (π.χ.* το ερώτημα φ στο σχήμα 2 ζητούσε από τους μαθητές να καθορίσουν μια τιμή εισαγωγής από μια τιμή παραγωγής), τουλάχιστον τρεις μαθητές επέκτειναν τον πίνακα και σταμάτησαν μόλις έφτασαν την τιμή παραγωγής. Σαν πρόσθετο βήμα, αυτοί οι μαθητές χρησιμοποίησαν έπειτα τον αντίστοιχο τύπο

για να ελέγξουν την ακρίβεια της απάντησής τους. Η Tabitha, υιοθέτησε μια στρατηγική «εικασίας και ελέγχου»: Καταρχάς, διαίρεσε το 29 με το 2 και έλαβε πηλίκο14 με ένα υπόλοιπο 1. Κατόπιν χρησιμοποίησε τον τύπο του Jack για να εξετάσει δύο περιπτώσεις του ν (14 και 15) και συμπέρανε ότι η απάντηση πρέπει να είναι η μορφή 15. Η στρατηγική του Mario περιείχε εκτίμηση: «Πώς μπορώ να πάρω κάτι όταν πολλαπλασιαζόμενο με 2 είναι κοντά σε 29; Ξέρω ότι 15 + 15 κάνει 30. Έτσι 15 φορές το 2 μείον 1 είναι ίσο με 29». Μια τέταρτη στρατηγική περιλάμβανε μια αντίστροφη στρατηγική. Ο Dung είπε: «Υπάρχει μια διαφορά 1 στο τέλος. Έτσι 29 + 1 = 30. Τότε 30 διαιρούμενο με 2 κάνει 15».

Η μελέτη αυτή, έχει να προσφέρει πολλά στην προσπάθεια ενίσχυσης του επιχειρήματός μας σχετικά με την δυνατότητα γενίκευσης έργων patterns μαθητών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Μιας ικανότητας στη γενίκευση που ξεπερνάει τα προσδοκόμενα όρια, αρκεί να δοθεί χώρος στους μαθητές «να αναπνεύσουν». Προς την κατεύθυνση αυτή, μια προσανατολισμένη προς τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση διδακτική πρακτική έχει πολλά να προσφέρει.

Φτάνοντας στο τέλος αυτού του κεφαλαίου να πούμε ότι ενθαρρυντικά μηνύματα έρχονται και από άλλες έρευνες και άλλους ερευνητές.

Οι Blanton & Kaput (2000) περαιτέρω παρουσίασαν μαθητές τρίτης τάξης που κάνουν πολύ καλές γενικεύσεις καθώς συζητούν τις πράξεις με άρτιους και περιττούς αριθμούς και τους θεωρούν ως placeholders ή ως μεταβλητές. Να σημειώσουμε ότι τα patterns με άρτιους και περιττούς αριθμούς είναι από τα πρώτα που χρησιμοποιούνται στις σχολικές τάξεις όπου τα patterns αποτελούν μέρος των σχολικών προγραμμάτων. Η ανάλυση έδειξε ότι αυτοί οι μαθητές είχαν μια ικανότητα για την παραγωγή καλών γενικεύσεων με σταδιακά πιο τυπικούς τρόπους και διαισθητικά υποστηρικτικά επιχειρήματα. Βρήκαν ότι στις δραστηριότητες γενίκευσης οι μαθητές: α) χρησιμοποίησαν πολλαπλές μορφές συλλογισμού, συμπεριλαμβανομένου του αναπαραστασιακού συλλογισμού (π.χ., χρησιμοποίησαν γραφικά ή σχεδιαστικά αντικείμενα για μοντελοποίηση των άρτιων και περιττών αριθμών), του αριθμητικού συλλογισμού (σπάσιμο των αριθμών για να προσδιορίσουν χώρια τις ιδιότητές τους), και του βασισμένου σε patterns συλλογισμό (το μηδέν είναι άρτιος επειδή είναι στο pattern 2,4,6,8…). β) Χρησιμοποίησαν τους όρους άρτιος και περιττός αλγεβρικά, δηλαδή ως αγνώστους ή μεταβλητές. γ) Ήταν ικανοί να συλλογιστούν με γενικευμένους όρους, π.χ. περιττός, για να παράγουν μια

γενίκευση. δ) Ήταν σε θέση να επεκτείνουν τις γενικεύσεις τους για τους άρτιους και περιττούς αριθμούς σε μαθηματικές διαδικασίες με έναν αυθόρμητο τρόπο και κατά τη διάρκεια μιας συνεχούς χρονικής περιόδου. ε) Ήταν σε θέση να επιχειρηματολογήσουν για τις γενικεύσεις τους και να δικαιολογήσουν τις υποθέσεις τους.

Σύμφωνα με τους Blanton & Kaput, αν και οι μαθητές δεν ήταν προφανώς σ' ένα συμβολικό επίπεδο φορμαλισμού στις γενικεύσεις τους, υπήρξαν στοιχεία ότι μερικοί μαθητές είδαν τους άρτιους αριθμούς ως πολλαπλάσια του 2 (ένας πρόδρομος στο φορμαλισμό 2ν, όπου το ν είναι ένας ακέραιος αριθμός) και το πιο σημαντικό, μπορούσαν να κατασκευάσουν επιχειρήματα βασισμένα σε αυτήν την ιδέα.

Τέλος οι Kyriakides και Gagatsis (2003) έδωσαν ένα μοντέλο κατάταξης των μαθητών του δημοτικού σχολείου σε έργα με patterns, τριών επιπέδων: στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν ένα pattern, στο δεύτερο μπορούν να προβλέψουν μελλοντικές θέσεις και σε ένα τρίτο επίπεδο μπορούν να γενικεύσουν αποδίδοντας λεκτικά ή συμβολικά τον κανόνα του pattern.

3.7 Ανακεφαλαίωση-Συζήτηση

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό δύο βασικά ερωτήματα, που στη διάρκεια της εργασίας τέθηκαν σχετικά με το ρόλο των patterns ως εργαλείων γενίκευσης και ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης και συγκεκριμένα, για να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση του Kaput, εκείνης της μορφής αλγεβρικής σκέψης που περιλαμβάνει την συναρτησιακή σκέψη, ζητούν απάντηση. Συγκεκριμένα: «Είναι ο αλγεβρικός συλλογισμός μέσα στα αναπτυξιακά πλαίσια των μαθητών της στοιχειώδους εκπαίδευσης;», «Αποτελούν τα patterns πρόσφορο εργαλείο για την επίτευξη της πολυπόθητης γενίκευσης και της ανάπτυξης μέσω αυτής της συναρτησιακής σκέψης;». Πριν δώσουμε μια απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, νομίζουμε ότι υπάρχει ένα άλλο ζήτημα που πρέπει να συζητήσουμε και το οποίο αφορά την παρουσία και μορφή της αλγεβρικής σκέψης, όπως εκδηλώνεται στις προαναφερθείσες έρευνες, και το κατά πόσο αυτή είναι αποδεκτή. «Πότε στις παραπάνω έρευνες η αλγεβρική σκέψη ανακύπτει και τι δηλώνει την παρουσία της;» ή διαφορετικά διατυπωμένο: «Πού είναι η άλγεβρα σε όλα τα παραπάνω; Πού πρέπει

να αναζητήσουμε τον αλγεβρικό συλλογισμό». Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση πρώτα σ' αυτά τα ερωτήματα.

Οι Zazkis & Liljedahl (2002) αναφερόμενοι στον όρο «άλγεβρα» επισημαίνουν τις δύο ευδιάκριτες έννοιες που περικλείει, δηλαδή την αλγεβρική σκέψη και τον αλγεβρικό συμβολισμό, επισημαίνοντας τη διάσταση στις απόψεις των ερευνητών σχετικά με τη σχέση αυτών των δύο. Λένε ότι, κάποιοι θεωρούν τα σύμβολα απαραίτητο συστατικό της αλγεβρικής σκέψης, δηλαδή δηλωτικά της ύπαρξής της, ενώ κάποιοι άλλοι τα θεωρούν ως έκβαση – κατάληξη ή ως εργαλείο επικοινωνίας. Πέραν των δύο αυτών βασικών και «χρόνιων» τάσεων, οι Zazkis και Liljedahl, στέκονται στην πιο πρόσφατη ερευνητική τάση την οποία χαρακτηρίζει ο διαχωρισμός της αλγεβρικής σκέψης από το συμβολισμό, μια τάση που αναπτύχθηκε αφενός από τον επιβεβαιωμένα από τη μεριά των μαθητών απρόσεκτο χειρισμό των συμβόλων, και αφετέρου από την μετακίνηση προς τον πρώιμο αλγεβρικό συλλογισμό, δηλαδή την έμφαση από νωρίς στη δομές της αριθμητικής παρά στη χρήση της ως υπολογιστικό εργαλείο. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια χαρακτηριστικά αναφέρουν ότι: «*ούτε η παρουσία αλγεβρικού συμβολισμού δεν πρέπει να ληφθεί ως δηλωτική της αλγεβρικής σκέψης, ούτε η έλλειψη αλγεβρικού συμβολισμού πρέπει να κριθεί ως ανικανότητα να σκεφτεί κανείς αλγεβρικά*» (σελ. 400). Προς ενίσχυση αυτής της θέσης παραθέτουν απόψεις διακεκριμένων ερευνητών:

«Ο Mason (1996) αναφέρεται στην αλγεβρική σκέψη ως δραστηριότητα. Βλέπει τις ρίζες της αλγεβρικής σκέψης στην ανίχνευση της ομοιότητας και της διαφοράς, στην παραγωγή των διακρίσεων, στην ταξινόμηση και το μαρκάρισμα, ή απλά in 'algorithm seeking'[στην αναζήτηση του αλγόριθμου]. Ο ίδιος ο σχηματισμός αυτού του αλγορίθμου στο μυαλό του σπουδαστή, σε οποιαδήποτε μορφή συλλαμβάνεται, είναι αλγεβρική σκέψη. Ο αλγεβρικός συμβολισμός, σύμφωνα με τον Mason, είναι η γλώσσα που δίνει τη φωνή σε αυτήν την σκέψη, η γλώσσα που εκφράζει τη γενικότητα. Ο Dörfler (1991) προτείνει ότι η θεωρητική γενίκευση χρειάζεται μια ορισμένη συμβολική περιγραφή. Εντούτοις, θεωρεί ότι η συμβολική περιγραφή δεν συνεπάγεται απαραιτήτως τη χρήση των γραμμάτων. Σύμφωνα με τον Dörfler αυτά τα σύμβολα μπορούν να είναι λεκτικά, εικονικά, γεωμετρικά ή αλγεβρικής φύσης. Αυτό είναι σε συμφωνία με τη Sfard (1995), που χρησιμοποιεί τον όρο άλγεβρα "σε σχέση με οποιοδήποτε είδος μαθηματικής προσπάθειας ασχολουμένης με γενικευμένες υπολογιστικές διαδικασίες, ανεξάρτητα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να αποδώσουν αυτήν την γενικότητα» (στο Zazkis & Liljedahl, 2002, σελ. 399)) .

Όσα παραπάνω αναφέρονται απαντούν στο ερώτημα που θέσαμε. Στην ενασχόληση με τα patterns η άλγεβρα ενυπάρχει στην αναζήτηση των ομοιοτήτων και διαφορών, ανάμεσα στους όρους τους σε οποιαδήποτε μορφή κι αν δίδονται, αριθμητική ή γεωμετρική, στην αναζήτηση του τι μένει σταθερό και τι μεταβάλλεται, στην εύρεση αριθμητικών σχέσεων μεταξύ των όρων τους αναδρομικών ή λιγότερο σύνθετων συναρτησιακών σχέσεων, στην εξοικείωση τους με τα διάφορα αναπαραστασιακά συστήματα, στις λεκτικές περιγραφές, στους πίνακες, στα διαγράμματα, τα οποία συστήματα, όλα, αποτελούν αποδεκτούς τρόπους για να εκφραστούν σχέσεις. Η άλγεβρα υπάρχει σε κάθε ευκαιρία που παρέχεται από το δάσκαλο στους μαθητές για αναπαράσταση μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών και αναδύεται ως τρόπος αναπαράστασης και γενίκευσης αυτών των ιδεών. Επίσης η άλγεβρα υπάρχει στην επιχειρηματολογία και τη δικαιολόγηση. Υπάρχει στη διατύπωση εικασιών, στην όλο και πιο τυπική απόδοσή τους, στην αποδοχή τους ή στην κατάρρευσή τους και στον επαγωγικό συλλογισμό. Τέλος, υπάρχει στην αναζήτηση κανονικοτήτων και ελλοχευουσών δομών και σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα patterns στην ικανότητα αντίληψης της μονάδας που επαναλαμβάνεται. Σε όλα αυτά οι μικροί μαθητές μπορούν να ανταποκριθούν, όπως είδαμε, σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό. Το ζήτημα δεν είναι αν μπορούν αναπτυξιακά να ανταπεξέλθουν οι μαθητές της στοιχειώδους εκπαίδευσης. Το ζητούμενο είναι το διδακτικό περιβάλλον, οι διδακτικές πρακτικές, και οι δάσκαλοι που θα αξιοποιήσουν την αναπτυξιακή ετοιμότητα των μαθητών. Οι όποιες αδυναμίες, όπως είδαμε στις μελέτες παρέμβασης, έχουν να κάνουν με παράγοντες έξω από τους μαθητές. Προσδιορίζονται στην έλλειψη πρώιμων εμπειριών, στην ανεπάρκεια των δασκάλων ακόμα και στην αλγεβρική ποιότητα των έργων στα οποία εκτίθενται οι μαθητές. Οι όποιοι ισχυρισμοί περί αναπτυξιακών περιορισμών συνθλίβονται στις διαπιστώσεις της Warren, ότι οι όποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές εμφανίζονται και αργότερα στις έρευνες με εφήβους, αλλά και της Zazkis που εντοπίζει αδυναμίες συμβολικής γενίκευσης ακόμα και σε προϋπηρεσιακούς δασκάλους, δηλαδή φοιτητές τμημάτων αντίστοιχων με τα δικά μας παιδαγωγικά τμήματα. Οι στόχοι της πρώιμης άλγεβρας με κεντρικότερο την εστίαση στη γενίκευση των patterns, κι όχι μόνο, στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου είναι εφικτοί. Πρέπει απλά να γίνει κατανοητό ότι η αλγεβρική σκέψη προϋπάρχει της συμβολικής απόδοσής της, και προφανώς η γενίκευση συντελείται πριν την συμβολική έκφρασή της διατηρώντας στο ακέραιο τον αλγεβρικό της χαρακτήρα είτε πρόκειται για factual γενίκευση, δηλαδή γενίκευση

αριθμητικών ενεργειών είτε για contextual γενίκευση, δηλαδή γενίκευση των αντικειμένων αυτών των ενεργειών, για να χρησιμοποιήσουμε τους όρους του Randford.

Η αλγεβρική γενίκευση, λοιπόν, προϋπάρχει της συμβολικής απόδοσής της. *«Το χάσμα που υπάρχει μεταξύ της δυνατότητας των μαθητών να εκφράσουν τη γενικότητα προφορικά και της δυνατότητάς τους να υιοθετήσουν τον αλγεβρικό συμβολισμό άνετα, αφήνει στους μαθητές ένα συναίσθημα ανεπάρκειας όσον αφορά την επίτευξη των προσδοκιών τους [...]. Αυτό το χάσμα πρέπει να γίνει αποδεκτό και να χρησιμοποιηθεί ως τόπος συναντήσεως με τους μαθητές, για να ασκήσει την αλγεβρική σκέψη τους, παρά να επιμένουμε σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη συμβολική σημειογραφία. Πρέπει να έχουν την ευκαιρία να συμμετέχουν στις καταστάσεις που προάγουν τέτοια σκέψη χωρίς τους περιορισμούς του επίσημου συμβολισμού. Τα προβλήματα που είναι πλούσια σε patterns […] προσφέρουν στους μαθητές τέτοιες ευκαιρίες[…], τα προβλήματα αυτά χρησιμεύουν όχι μόνο ως πλούσια μαθηματική δραστηριότητα, αλλά και για να εκτιμήσουν τους διαφορετικούς τρόπους έκφρασης της γενικότητας»* (Zazkis και Liljedahl, 2002, σελ. 400) .

Μετά από αυτά και φέρνοντας στο νου μας τις προσπάθειες των μαθητών στις προαναφερθείσες έρευνες, η απάντηση στα αρχικά διατυπωμένα ερωτήματα είναι σαφώς καταφατική. Είναι φανερός ο καταλυτικός ρόλος που μπορεί να παίξουν τα patterns στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού, στην ολοένα και πιο τυπική έκφραση συναρτησιακών σχέσεων στην προσπάθεια γενίκευσης τους. Ένας ρόλος που ενισχύεται από διδασκαλίες που υποστηρίζονται, όπως είδαμε, από καινοτόμες θεωρίες διδασκαλίας και μάθησης. Διδακτικές παρεμβάσεις που απομακρύνονται από τα παραδοσιακά διδακτικά πλαίσια κάτω από το πρίσμα εναλλακτικών θεωριών που εστιάζουν στη σημειωτική προσέγγιση στη διδασκαλία, στην αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με το δάσκαλο και στα μαθηματικά σε πλαίσια, μπορούν να ανασύρουν την τελματωμένη στον υπολογιστικό χαρακτήρα των στοιχειωδών μαθηματικών αλγεβρική σκέψη των μαθητών, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα patterns. Κυρίαρχος δε είναι ο ρόλος του ενημερωμένου δασκάλου. Οι παραπάνω παράγοντες είναι αυτοί, που πιθανότατα δεν αξιολογούν αρκούντως οι Frobisher et al. (1999) αλλά και οι Orton & Orton 1999, όταν διατυπώνουν την άποψη ότι «*η ικανότητα εύρεσης μιας έκφρασης ή ενός κανόνα για το γενικό όρο ενός*

pattern, υπερβαίνει τις δυνατότητες των πολλών και χαρακτηρίζει μόνο τους μαθητές με υψηλό επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών».

Ωστόσο, χρειάζονται πολλά ακόμα να γίνουν στα πλαίσια της πρώιμης άλγεβρας και στα οποία αναφερθήκαμε στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου. Αυτό δικαιολογεί εξάλλου και τον όρο «αναδυόμενη ερευνητική βάση» που χρησιμοποιήσαμε στη διάρκεια αυτής της εργασίας. Οι Becker και Rivera (2006) επισημαίνουν την έλλειψη ερευνητικών δεδομένων για μικρούς μαθητές . Επίσης, σε σχέση πάντα με τα patterns, αυτά που κυρίως πρέπει να γίνουν αποδίδονται χαρακτηριστικά, μεταξύ άλλων, από τη Watters (2004), η οποία επισημαίνει ότι : «*Απαιτείται περισσότερη έρευνα για να υποστηρίξει το συνυπολογισμό των patterns στα πρώιμα προγράμματα και για να αναπτύξει μια συνεπέστερη κατανόηση για το πώς οι πρώιμες δεξιότητες σχετικά με αυτά αναπτύσσονται» (σελ.571),* αναφερόμενη δε στους δασκάλους, επισημαίνει ότι: *«Οι δάσκαλοι πρέπει να γίνουν περισσότερο ενήμεροι για τους τύπους, το επίπεδο και την πολυπλοκότητα των patterns*». Η μεταφορά των «ευτυχών ιστοριών» από την έρευνα στην τάξη, δηλαδή η μετάφραση των «ευτυχών ιστοριών» σε «ευτυχείς ιστορίες για όλους» είναι το ζητούμενο στο μέλλον, αλλά πρόκειται για μεγάλο εγχείρημα (Stacey & Chick, 2001).

3.8 Παραπομπές

[1] Στη διαθεσή μας έχουμε, δυστυχώς, μόνο τα συμπεράσματα τα προερχόμενα από τα επαναλαμβανόμενα patterns.

[2] Τα γραμμικά προβλήματα γενίκευσης είναι ερωτήματα που απαιτούν από τους μαθητές να παρατηρήσουν και χρησιμοποιήσουν ένα γραμμικό pattern του τύπου f $(n) = an + b$ με $b \neq 0$ (Stacey, 1989).

[3] Οι όροι είναι του Radford. Ο Radford (2003) διέκρινε μεταξύ factual, contextual, και symbolic generalization. Η factual generalization γενικεύει την αριθμητική ενέργεια, ενώ η contextual generalization γενικεύει τα αντικείμενα αυτών των ενεργειών. Η symbolic generalization περιλαμβάνει την κατανόηση και χρησιμοποίηση της αλγεβρικής γλώσσας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

[Α]. Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Warren & Cooper (2007): «*Repeating Patterns and Multiplicative Thinking: Analysis of Classroom Interactions with 9 -Year-Old Students that Support the Transition from the Known to the Novel*»

Μερικές τυπικές δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στη φάση της διδασκαλίας αναφέρονται στα σχήματα 1 και 2. Οι δραστηριότητες μέσα στο μάθημα ακολούθησαν τη σειρά από τις δραστηριότητες τύπου (α) στις δραστηριότητες τύπου(δ) (Σχ. 1).

Δραστηριότητες που μετασχηματίζουν τα επαναλαμβανόμενα patterns σε λόγους.

α) Χρησιμοποιήστε κάρτες για τη δημιουργία του ακόλουθου επαναλαμβανόμενου pattern.

β) Διαχωρίστε το pattern στα μέρη του (επαναλήψεις):

γ) Συγκρίνετε διαφορετικούς αριθμούς επαναλήψεων:

1 επανάληψη

2 επαναλήψεις

3 επαναλήψεις

δ) Καταγράψτε τα δεδομένα σας σε ένα πίνακα τιμών

Αριθμός επαναλήψεων	Αριθμός □	Αριθμός ■	Συνολικός αριθμός	Λόγος των □ προς τα ■

Σχ.1

Το δεύτερο σύνολο δραστηριοτήτων θεωρήθηκαν υψηλότερου επιπέδου, δηλαδή γενίκευση των patterns στους πίνακες τιμών, δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns, όταν δίνονται ο λόγος των στοιχείων του, και εξερεύνηση της έννοιας των ίσων λόγων. Οι δραστηριοτήτες προχώρησαν από τις δραστηριότητες τύπου (α) στις δραστηριότητες τύπου (γ) (Σχ. 2).

Δραστηριότητες υψηλότερου επιπέδου συλλογισμού

α) Γενικεύοντας patterns στον πίνακα:

Αριθμός επαναλήψεων	Αριθμός □	Αριθμός ■	Συνολικός αριθμός	Λόγος των □ προς τα ■
				23 προς 36
			240	
?				

β) Δημιουργία επαναλαμβανόμενων patterns από λόγους:

Χρησιμοποιώντας τις κάρτες ■, □ και ▩, δημιουργήστε επαναλαμβανόμενα patterns έτσι ώστε:
ο λόγος των □ προς τα ■ να είναι 2 προς 3 και ο λόγος των ▩ προς τα ■ να είναι 2 προς 2.

γ) Ισοδύναμοι λόγοι

Υποθέστε ότι είχαμε τους λόγους των κίτρινων προς μπλε καρτών 2 προς 4 και 4 προς 8. Είναι οι ίδιοι λόγοι ή διαφορετικοί; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Κ	Κ	Μ	Μ	Μ	Μ

Κ	Κ	Μ	Μ	Μ	Μ	Κ	Κ	Μ	Μ	Μ	Μ

Σχ. 2

[Β.] Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα της Warren (2005): «*Patterns Supporting the Development of Early Algebraic Thinking»*

Ερωτήσεις που τέθηκαν στην προεξέταση:

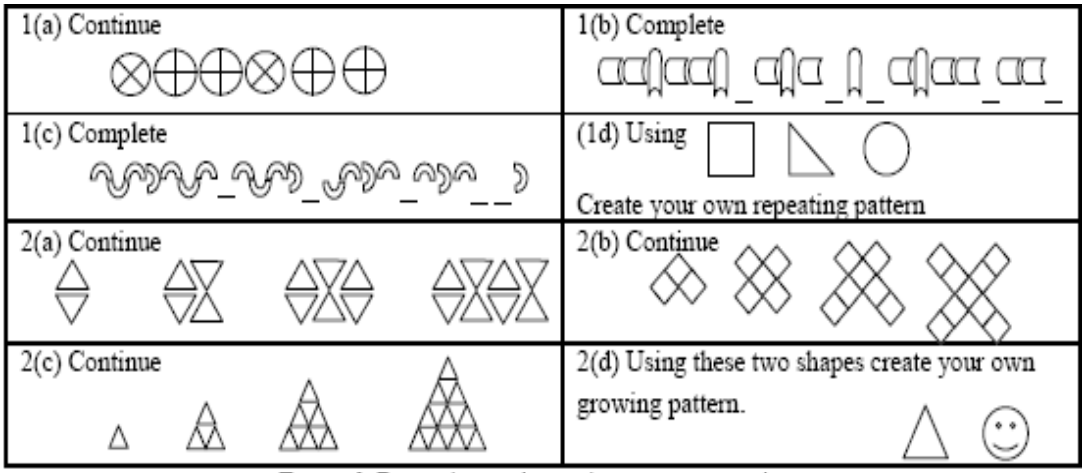


Figure 1. Repeating and growing pattern questions.

[Γ.] Προβλήματα γενίκευσης που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα της Stacey (1989) : *«Finding and using patterns in linear generalizing problems».*

Τα γραμμικά προβλήματα γενίκευσης που χρησιμοποιήθηκαν στην μελέτη της Stacey (1989) είναι τα ακόλουθα: «Κινητές σκάλες», «Χριστουγεννιάτικα δέντρα», και «Συμπλήρωση των κενών», δηλαδή δύο έργα σε εικονιστικά και το ένα σε αυστηρά αριθμητικά πλαίσια.. Στο τελευταίο έργο ζητήθηκε μόνο ο εκατοστός όρος της ακολουθίας 4,10,16,22, __, __, __. Ο αριθμός των σπιρτόξυλων που απαιτούνται για μια σκάλα με r σκαλοπάτια είναι 3r + 2, και συμβολίσθηκε με M*(r)*. Ο αριθμός των φώτων σε ένα χριστουγεννιάτικο δέντρο μεγέθους m, είναι 4m-1 και συμβολίσθηκε με X(m). Ο η-οστός όρος της ακολουθίας 4, 10, 16, 22,… είναι 6n-1 και συμβολίσθηκε με S(n).

Έργο 1: *Κινητές σκάλες*

Με 8 σπιρτόξυλα, μπορώ
να κάνω μια σκάλα με 2 σκαλοπάτια
όπως η διπλανή:

Με 11 σπιρτόξυλα, μπορώ
να κάνω μια σκάλα με 3 σκαλοπάτια
όπως η διπλανή:

Πόσα σπιρτόξυλα απαιτούνται για να κάνουμε μια ίδια σκάλα με 4 σκαλοπάτια;
Πόσα σπιρτόξυλα απαιτούνται για να κάνουμε μια σκάλα με 5 σκαλοπάτια;
Ξέρουμε ότι χρειάζονται 335 σπιρτόξυλα για να κάνουμε μια σκάλα με 111 σκαλοπάτια.
Πόσα σπιρτόξυλα θα χρειαζόσαστε για να κάνετε μια σκάλα με 112 σκαλοπάτια;
Πόσα σπιρτόξυλα θα χρειαζόσαστε για να κάνετε μια σκάλα με 20 σκαλοπάτια;
Πόσα σπιρτόξυλα απαιτούνται για μια σκάλα με 1000 σκαλοπάτια;

Έργο 2: *Χριστουγεννιάτικα δέντρα*

Ζωγραφίζουμε δέντρα σε διαφορετικά μεγέθη, αλλά είναι πάντα το ίδιο σχέδιο. Εδώ είναι τρία παραδείγματα. Τα τρίγωνα στις γωνίες είναι φωτάκια..

Μέγεθος 1	*Μέγεθος 2*	*Μέγεθος 3*
3 φωτάκια	*7 φωτάκια*	*11 φωτάκια*

Πόσα φώτα υπάρχουν σε ένα δέντρο μέγεθους 20; Εξηγήστε πώς βρήκατε την απάντησή σας. Πόσα φώτα υπάρχουν σε ένα δέντρο μεγέθους 100; Εξηγήστε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

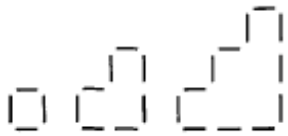
Έργο 3

Στο τελευταίο έργο ζητήθηκε μόνο ο εκατοστός όρος της ακολουθίας 4,10,16,22, __, __, __.

[Δ.] Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα του Orton (1997): «*Matchsticks, pattern and generalisation*»

Ο Orton σε μελέτη του με ατομικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν σε 30 μαθητές διαφορετικών δυνατοτήτων ηλικίας 9 έως 13 ετών σε έργα γενίκευσης patterns με σπιρτόξυλα έδωσε τα ακόλουθα έργα.

Έργο 1: Σκαλοπάτια



Έργο 2: Κλουβιά

Έργο 3: Κιβώτια

Οι μαθητές κλήθηκαν να πουν πόσα σπίρτα είχαν χρησιμοποιήσει για να χτίσουν την τέταρτη μορφή από κάθε έργο και αυτοί οι αριθμοί καταγράφηκαν μέσα στη μορφή. Η θέση ($1^η$, $2^η$, $3^η$, $4^η$) κάθε μορφής γράφτηκε επίσης κάτω από κάθε μορφή. Οι μαθητές κλήθηκαν έπειτα να προβλέψουν, χωρίς καθοδήγηση ή υπαινιγμούς από τον ερευνητή, τον αριθμό των σπιρτόξυλων που απαιτούνται για να κατασκευάσουν τις μορφές με αριθμούς 5, 20, 100 και τη ν-οστή μορφή και να εξηγήσουν πώς έφτασαν στις απαντήσεις τους.

[Ε.] Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη των Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall (1998): «*Children's Strategies with Number Patterns*».

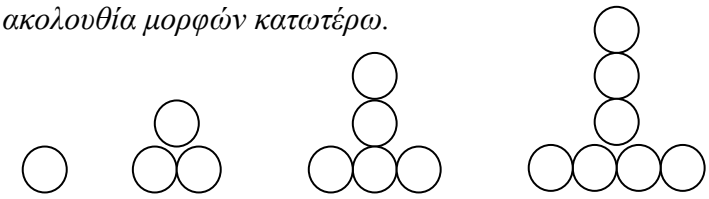
Στην έρευνα αυτή κάθε παιδί εργάστηκε με:

- τρία σταθερής διαφοράς patterns (γραμμικά patterns), όπως 2 5 8 11 14…
- τρία δευτέρου βαθμού patterns, π.χ. 2 4 7 11 16… και
- με τρεις ακολουθίες Fibonacci, π.χ. 2 3 5 8 13…

[ΣΤ.] Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Becker και Rivera (2006): *«Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level.*

Ένα δείγμα των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στην προ-συνέντευξη είναι το ακόλουθο.

Εξετάστε την ακολουθία μορφών κατωτέρω.



Μορφή 1 Μορφή 2 μορφή 3 Μορφή 4

α. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 10ή μορφή; Εξήγησε.

β. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 100ή μορφή; Εξήγησε.

γ. Τώρα γράψε ένα μήνυμα σ' ένα φανταστικό φίλο της δική σου ηλικίας εξηγώντας του τι αυτός ή αυτή πρέπει να κάνει, για να βρει πόσοι κύκλοι υπάρχουν σε κάθε δοσμένη μορφή της ακολουθίας.

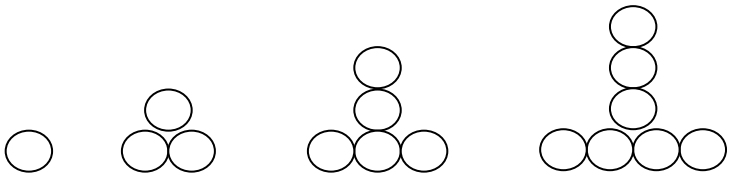
Μήνυμα:…

δ. Βρες ένα τύπο για να υπολογίσεις τον αριθμό των κύκλων της n-οστής μορφής.

Σχήμα 1. Το πρόβλημα των κύκλων (Radford, 2003)

Δείγματα από τα έργα που δόθηκαν στη μετά-συνέντευξη είναι τα ακόλουθα:

***Α**. Εξετάστε την ακολουθία αριθμών κατωτέρω.*



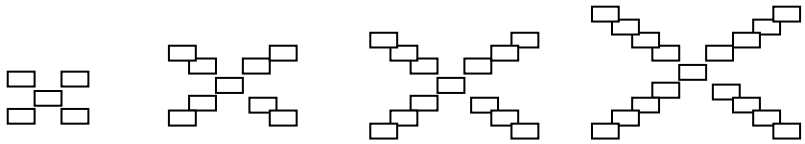
Μορφή 1 Μορφή 2 Μορφή3 Μορφή 4

Σχήμα 2. Πρόβλημα κύκλων

α. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 10ή μορφή; Εξήγησε. β. Πόσους κύκλους έχει συνολικά η 100ή μορφή; Εξήγησε. γ. Βρες ένα τύπο για τον αριθμό των κύκλων της μορφής με αριθμό «n». Εξήγησε πώς βρήκες την απάντησή σου. Αν βρήκες τη λύση

αριθμητικά, απάντησε στην ακόλουθη ερώτηση: Υπάρχει τρόπος να εξηγήσεις τον τύπο από τις μορφές; δ. Μπορείς να σκεφτείς έναν άλλο τρόπο να βρεις έναν τύπο;
ε. Ο τύπο του Jack είναι: C = n + (n - 1), όπου n είναι ο αριθμός της μορφής και C ο συνολικός αριθμός των κύκλων. Είναι αυτός ο τύπος σωστός; Ναι ή όχι, και γιατί; Ποιανού ο τύπος είναι σωστός: Ο τύπος του Jack ή ο τύπος που βρήκες παραπάνω; Εξήγησε φ. Η Elizabeth έχει 29 κύκλους που πρόκειται να χρησιμοποιήσει για την κατασκευή κάποιας μορφής. Ποια μορφή πρόκειται να κατασκευάσει; Εξήγησε.

Β.



Μορφή 1 Μορφή 2 Μορφή 3 Μορφή 4

Σχήμα 3. Pattern με τετράγωνα (Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999)

[Ζ.] Έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα των Cooper & Warren (2007): «*Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking*»**.**

Τα έργα που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη διάρκεια των δύο μαθημάτων ήταν τα ακόλουθα:

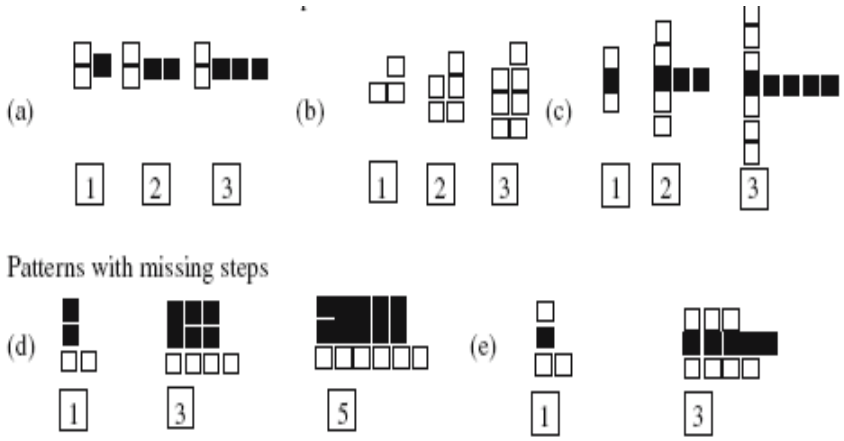


Fig. 1 Typical patterns presented in the two lessons

Οι προ και μετά-εξετάσεις βασίστηκαν σε τρεις ερωτήσεις:

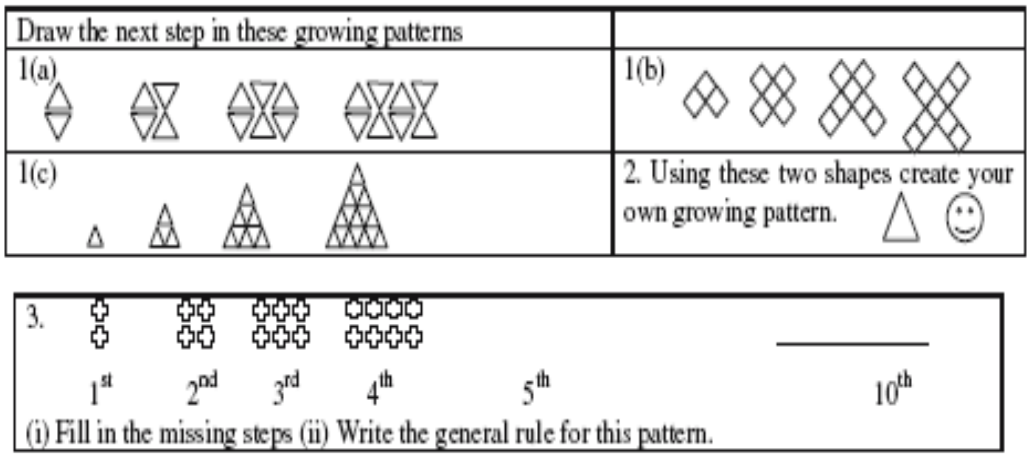


Fig. 2 Growing pattern questions on the pre and post test

Αναφορές

Bakker A. &. Hoffmann M. (2005), Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 333–358

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In Novotná J., Moraová H., Magdalena K. (Eds.). *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague, Czech Republic

Bennet, A. & Nelson, Jr. (2001). *Mathematics for Elementary Teachers: A Conceptual Approach*. New York: McGraw-Hill.

Blanton, M., & Kaput, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In M. Fernández (Ed.), *Proceedings of the Twenty-second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 115–119). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse.

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen, M.J. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.135-142). Bergen, Norway: PME.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Algebraifying the elementary mathematics experience in a teacher-centred, systemic way. In T. Romberg, T. Carpenter, & F. Dremock (Eds.). *Understanding Mathematics and Science Matters* (pp. 99–125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V, Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., Confrey, J. (2007). Early Algebra. In Katz J.V. (Eds.). *Algebra, Gateway to a Technological Future.* (pp. 7-14). University of Columbia.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 33–40.

Carpenter, T. P. Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: a knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, *97*, 3–20.

Carpenter, T.P. & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. (Res. Rep. 00-2). Madison, WI: *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.

Carpenter, T.P. & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In Chick, H., Stacey K., Vincent J., & Vincent J. (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of*

the ICMI Study Conference, pp. 155-162. Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Carpenter, T.P, Levi, L., Franke, M., Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *ZDM Mathematics Education* Vol. 37 (1).

Carraher, D., Schliemann, A.D., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. *XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Tucson, AZ, October, 2000.

Carraher, W. D., Schliemann D., A., Brizuela, M. B. & Earnest D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), p.p. 87 –115.

Chick, H. & Stacey, K. (2001). Solving the Problem with Algebra. In Stacey, K., hick, H., Kendal, M., (Eds.) *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of teaching and learning of algebra* (p.p.1-20). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Cooper, T. & Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67,*171-185.

Dorfler W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education,* 40,143–160

English, L. D. & Warren, E. A.: 1998. Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher 91*(2), 166–170.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics 9* (2), 19-25.

Gibbs W. (1999). Patterns in the Classroom. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-220). London: Cassell.

Gray, E., & Tall, D. (1992). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6–10.

Harel G. & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Patterns. *Educational Studies in Mathematics 24*, (3), 315-331.

Heargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London: Cassell.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). 'The cognitive gap between arithmetic and algebra'. *Educational Studies in Mathematics 27* (1), 59-78.

Kieran, C., (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics 12*, 317-326.

Kieran, C. (1981). Pre-algebraic notions among 12-and 13-year-olds. In Equipe de Recherche Pedagogique Laboratoire (Eds.). *Proceedings of the annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 158-164). Grenoble, France: Program Committee

Kyriakides, L. & Gagatsis, A. (2003). Assessing Student Problem-Solving Skills. Structural Equation Modeling: *A Multidisciplinary Journal, 10* (4), 609-621.

Lannin J., Barker, D., & Townsend, B. (2004, April). Deepening our understanding of algebraic generalization: Examining changes in student strategies. *Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting*, San Diego, CA.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

Lins, R., Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

Mason, J.: 1996, 'Expressing Generality and Roots of Algebra', in N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 65–111.

Mason, J., Graham, A. & Johnston- Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Paul Chapman Publishing.

Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, A. & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, 161-168). Prague: PME.

Mitcelmore, M., (2002). The Role of Abstraction and Generalization in the Development of Mathematical knowledge. *Proceedings of the 2nd East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME),* 2002, Vol. 1, p.p. 157-167.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 309-330.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1997). Algebraic thinking. *Special issue of Teaching Children Mathematics*, *3*(6).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Orton, J. (1997). Matchsticks, Pattern and Generalization. *Education 3-13*, 25:1, 61-65.

Orton, A. (1999). Preface. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics.* London (pp. vii-viii): Cassell.

Orton, J., Orton, A. & Roper, T. (1999). Pictorial and practical Contexts and the Perception of Pattern. In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the teaching and Learning of Mathematics* (p.p.21-136). London: Cassell.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the teaching and Learning of Mathematics* (p.p.104-120). London: Cassell.

Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Research, theory and practice. *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*. Melbourne, pp. 609-616. Sydney: MERGA.

Polya, G. (1944). *Πώς να το λύσω.* Αθήνα: εκδόσεις Σπηλιώτη. Μετάφραση Σιαδήμας Λάμπης.

Presmeg, N. C. (2002). A triadic nested lens for viewing teachers' representations of semiotic chaining. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematical visualization*. Mexico City: Cinvestav University, 263-276.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sa´iz, & A. Me´ndez (Eds.). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 2–21). Me´rida, Me´xico: Universidad Pedago´gica Nacional.

Saenz-Ludlow, A., (2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics* 61, 183-218

Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification - The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 15-39.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of fuction. In Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy. West LaFayette*. In mathematical Association of America. (p.p.25-58)

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Threlfall, J. & Frobisher, L. (1999). Patterns in processing and learning addition facts. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 49-66). London: Cassell.

Urbanska, A. (1993). On the numerical competence of six-year-old children. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 265-275.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: A.F. Coxford (Eds.). *The ideas of algebra, K-12*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, pp. 8–19.

Usiskin, Z., (1997). Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching Children Mathematics* v3 p 346-56 F '97

Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to Early Algebra**.** *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75.

Van de Walle J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία*, επ. επιμέλεια Τρ. Τριανταφυλλίδης. Αθήνα: εκδόσεις τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

Warren, E. (2004). Generalising Arithmetic: Supporting the Process in the Early Years. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp 417–424.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Research, theory and practice. *Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Melbourne, pp. 759-766. Sydney: MERGA.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds*.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4. p.305-312). Melbourne: PME.

Warren, E., & Cooper, T. (2007). Repeating Patterns and Multiplicative Thinking: Analysis of Classroom Interactions with 9 -Year-Old Students that Support the Transition from the Known to the Novel. *Journal of Classroom Interaction*. Vol. 41.2, Vol. 42.1, p.p. 7-17.

Waters (Fox), J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt, R. Faragher, & M. Mclean (Eds.), Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville*, Vol. 2, pp. 565-572. Sydney: MERGA

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379–402.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Repeating patterns as a gateway. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 212-216). Norwich, UK: PME.

Κολέζα Ε. (2000), *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: εκδόσεις Leader Books.

Κολέζα Ε. (2006), *Μαθηματικά και σχολικά Μαθηματικά*. Αθήνα: εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Σπύρου Π. (2006). *Επιστημολογίες για την Διδακτική των Μαθηματικών*. Σημειώσεις μαθήματος. Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Τζεκάκη Μ. & Κούλελη Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών,* 268-278. Αλεξανδρούπολη. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης.

Τσικοπούλου Στάμη (2007). Ο ρόλος των προτύπων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 24ου Παννελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 386-401*. Κοζάνη. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.