ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρήματα Σταθερού Σημείου και Διδακτικές Εφαρμογές

Γεώργιος Κυριακόπουλος

Επιβλέπων: Διονύσιος Λάππας,
Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ

Αθήνα
Μάιος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Διονύσιος Λάππας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	.....
2) Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αν. Καθηγητής	.....
3) Παναγιώτης Σπύρου	Επ. Καθηγητής	.....

Ωστόσο, δεν είχα μπροστά μου μια παρέκκλιση από το Νόμο, διότι, συν τοις άλλοις, ο Νόμος την προέβλεπε, δεν ήταν παραβίαση ενός χρυσού μέτρου ώστε το θαύμα να γίνει λιγότερο θαυμαστό. Ήξερα ότι η γη περιστρέφεται, κι εγώ μαζί της, ... και περιστρεφόμαστε όλοι μαζί κάτω από το Εκκρεμές που στην πραγματικότητα δεν άλλαζε ποτέ τη διεύθυνση του επιπέδου του, διότι εκεί ψηλά, από το σημείο εξάρτησής του και πέρα, στην ιδεατή προέκταση του νήματος προς το άπειρο, ψηλά προς τους πιο απόμακρους γαλαξίες, βρισκόταν, αιώνια ακίνητο, το Σταθερό Σημείο.

Η γη περιστρεφόταν, μα ο χώρος όπου ήταν στερεωμένο το νήμα ήταν το μοναδικό αμετάβλητο σημείο του σύμπαντος.

Ουμπέρτο Έκο, *Το Εκκρεμές του Φουκώ*.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Μάιος 2007

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, Σχολή Θετικών Επιστημών
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(σελ. 120)

Τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου διατυπώνουν τις συνθήκες, οι οποίες πρέπει να πληρούνται, ώστε μια απεικόνιση από ένα σύνολο στον εαυτό του να διατηρεί κάποια σημεία του συνόλου αμετάβλητα. Τα θεωρήματα αυτά βρίσκουν πλήθος εφαρμογών σε όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών και σε μία ευρεία κλίμακα, από τη σχολική ύλη έως και το ανώτατο επίπεδο. Είναι, επομένως, αρκετά ενδιαφέρον να μελετηθεί το είδος των βαθύτερων μαθηματικών πεδίων που υποκρύπτονται πίσω από συνήθεις μαθηματικές έννοιες, τις οποίες, πολλές φορές χρησιμοποιούν οι ενασχολούμενοι με τα μαθηματικά και έχουν τις ρίζες τους στα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό να μελετήσει, όσο το δυνατόν πληρέστερα, τρία από τα πιο φημισμένα θεωρήματα για τα σταθερά σημεία μιας απεικόνισης από ένα σύνολο στον εαυτό του και να αναφερθεί σε ένα ευρύ πεδίο μαθηματικών συμπερασμάτων, τα οποία προκύπτουν ως άμεσες εφαρμογές των θεωρημάτων αυτών. Δευτερευόντως, η εργασία αυτή στοχεύει στην παρουσίαση των ποικίλων μεθόδων που εφαρμόζονται για την απόδειξη των κυριότερων μορφών αυτών των θεωρημάτων και οι οποίες επιλέγονται ανάλογα με τα εκάστοτε μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται. Οι ίδιες τεχνικές, σε πολλές περιπτώσεις, εφαρμόζονται για την απόδειξη των συμπερασμάτων που προκύπτουν ως εφαρμογές, ώστε αυτές να μπορούν να αποτελέσουν αυτόνομες διδακτικές ενότητες.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Γεώργιος Κυριακόπουλος

Υποβλήθηκε στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα, Ελλάδα
Μάιος, 2007

© Γεώργιος Κυριακόπουλος, 2007

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των πιο γνωστών Θεωρημάτων Σταθερού Σημείου και η εκτενής αναφορά σε ένα πλήθος διδακτικών εφαρμογών των θεωρημάτων αυτών από διάφορους τομείς της μαθηματικής επιστήμης. Επίσης, σε σχέση με τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται κάθε φορά, η μελέτη επεκτείνεται στη διερεύνηση των τεχνικών που μπορούν να εφαρμοσθούν για την απόδειξη των διάφορων μορφών αυτών των συμπερασμάτων.

Η εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται ο απαραίτητος ορισμός του σταθερού σημείου και αναλύεται η πολύ σημαντική τοπολογική ιδιότητα αυτού, η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα στα επόμενα. Για λόγους πληρότητας κρίθηκε αναγκαίο, στο κεφάλαιο αυτό, να συμπεριληφθεί μια ευρεία ενότητα με όλες εκείνες τις μαθηματικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την αυτόνομη κατάνόηση του κειμένου που ακολουθεί. Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach και, εκτός αυτού, περιλαμβάνει εκτενείς αναφορές σε εφαρμογές από τη Γραμμική Άλγεβρα με την εύρεση λύσεων σε γραμμικά συστήματα, την Ανάλυση στην επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων και τη Γεωμετρία με ένα κριτήριο που διαφοροποιεί την ομοιότητα από την ισότητα. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, το οποίο μελετάται σε όλες του τις μορφές, στο κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών, στο επίπεδο, αλλά και γενικά σε κάθε συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου. Πολλές από τις εφαρμογές που παρουσιάζονται εδώ, όπως το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, ή το Θεώρημα Bolzano, είναι γνωστά μαθηματικά συμπεράσματα, προκύπτουν όμως, ως συνέπειες του Θεωρήματος του Brouwer, ενώ γίνεται αναφορά σε ένα πλήθος άλλων εφαρμογών. Στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνονται, επίσης, τα λεγόμενα Συνδυαστικά Θεωρήματα, τα οποία χρησιμοποιούνται ως εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος του Brouwer στο επίπεδο και το περίφημο θεώρημα μη ύπαρξης διαφορίσιμης συρρίκνωσης που βοηθά στην απόδειξη του Θεωρήματος του Brouwer στη γενική περίπτωση. Η γενίκευση του Θεωρήματος του Brouwer σε απειροδιάστατους χώρους είναι το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder, το οποίο, εκτός των άλλων, αποτελεί το αντικείμενο του τέταρτου κεφαλαίου. Η εργασία ολοκληρώνεται με αναφορές σε άλλα, ειδικότερης μορφής, θεωρήματα σταθερού σημείου, όπως αυτά που αναφέρονται στην ύπαρξη

κοινών σταθερών σημείων για οικογένειες απεικονίσεων, ή σε σταθερά σημεία για πλειότιμες απεικονίσεις. Τα θεωρήματα αυτά δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής, αλλά θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να τύχουν μιας εκτενούς ενασχόλησης και μελέτης στο μέλλον.

Η παρούσα εργασία είναι αποτέλεσμα εκτενούς αναζήτησης και προβληματισμών, σε κάθε στάδιο των οποίων, πολύτιμος αρωγός υπήρξε ο Καθηγητής μου κ. Διονύσιος Λάππας. Σημαντικές ήταν, επίσης, οι παρατηρήσεις του εκλεκτού συναδέλφου Σπύρου Γλένη, ενώ σε κάθε βήμα αυτής της προσπάθειας πολύτιμος συμπαραστάτης μου στάθηκε η Βίκη. Τους ευχαριστώ.

Γεώργιος Κυριακόπουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ v
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ vii
1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ 1
1.1. Εισαγωγικά 1
1.2. Έννοιες και ορισμοί 2
1.3. Η Τοπολογική Ιδιότητα του Σταθερού Σημείου 23
2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BANACH 27
2.1. Η Αρχή των Απεικονίσεων Συστολής 27
2.2. Συναρτήσεις Συστολής Ορισμένες σε Κλειστό Διάστημα 32
2.3. Απεικονίσεις Συστολής και Γραμμικά Συστήματα 35
2.4. Διαφορικές και Ολοκληρωτικές Εξισώσεις 38
2.5. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης 49
2.6. Ισομετρίες και Ομοιότητες 53
3 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BROUWER 61
3.1. Εισαγωγικά 61
3.2. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα 62
3.3. Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ως εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer 69
3.4. Εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής 74
3.5. Τα Συνδυαστικά Θεωρήματα 79
3.6. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο 88
3.7. Η έννοια της Συρρίκνωσης (Retraction) 95
3.8. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer στη γενική περίπτωση 103
4 ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΑΠΕΙΡΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ 107
4.1. Εισαγωγικά 107
4.2. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder 108
4.3. Η Κυρτότητα του Συνόλου των Σταθερών Σημείων 113
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ 117
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 119

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 – Η επαναληπτική μέθοδος για την προσέγγιση του σταθερού σημείου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\rightarrow[\alpha,\beta]$ με $0<f'(x)<1$ και $-1<f'(x)<0$ αντίστοιχα 32
Εικόνα 2 – Η περιοχή $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-k\delta,y_0+k\delta]$ στην οποία το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.4.1) έχει μοναδική λύση 39
Εικόνα 3 – Μία διαισθητικά προφανής «απόδειξη» του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα 63
Εικόνα 4 – Η χρήση της υπόθεσης της συνέχειας στην απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα 65
Εικόνα 5 – Το Θεώρημα Bolzano ως συνέπεια του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer 71
Εικόνα 6 – Το Θεώρημα Borsuk – Ulam για τον κύκλο 74
Εικόνα 7 – Το Πρώτο Θεώρημα της Τηγανίτας 76
Εικόνα 8 – Το Δεύτερο Θεώρημα της Τηγανίτας 78
Εικόνα 9 – Το Λήμμα Sperner για κλειστό διάστημα 80
Εικόνα 10 – Μια τυπική απόδειξη του Λήμματος Sperner για κλειστό διάστημα 81
Εικόνα 11 – Περίπατοι στα Δωμάτια ενός Σπιτιού 82
Εικόνα 12 – Παράδειγμα τριγωνισμού (α) και μη τριγωνισμού (β) 84
Εικόνα 13 – Μια παραστατική απεικόνιση του Λήμματος Sperner για ένα τρίγωνο . 85
Εικόνα 14 – Μια παραστατική απεικόνιση του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος . 87
Εικόνα 15 – Διαδικασία Περιπάτου στις έδρες ενός τριγωνισμένου τετραγώνου 87
Εικόνα 16 – Μια διαισθητικά σαφής «απόδειξη» του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο 89
Εικόνα 17 – Ο κανόνας που καθορίζει το σύστημα συμβολισμού των κορυφών μιας υποδιαίρεσης ενός τετραγώνου 91
Εικόνα 18 – Η χρήση της υπόθεσης της συνέχειας στην απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο 94
Εικόνα 19 – Το ευθύγραμμο τμήμα ως συρρίκνωμα ενός τετραγώνου 96
Εικόνα 20 – Ο δίσκος ως συρρίκνωμα ενός τετραγώνου 98

Εικόνα 21 – Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για την κλειστή μοναδιαία σφαίρα ως συνέπεια του Θεωρήματος μη ύπαρξης διαφορίσιμης συρρίκνωσης της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας στο σύνορό της 104

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1. Εισαγωγικά

Θεωρώντας ένα σύνολο X και μια απεικόνιση f από το X στον εαυτό του, πολλές φορές καλούμαστε να απαντήσουμε στο ερώτημα ποιες συνθήκες πρέπει να πληροί αφενός το σύνολο X και αφετέρου η απεικόνιση f, ώστε ένα σημείο του συνόλου X να απεικονίζεται, μέσω της f, στον εαυτό του ή, με άλλα λόγια, η εξίσωση

$$f(x)=x \tag{1.1.1}$$

να έχει λύση στο X.

Η εξίσωση (1.1.1) παραπάνω, αναφορικά με τα στοιχεία του συνόλου X που την ικανοποιούν, υπαγορεύει τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.1

Έστω X ένα σύνολο και f μια απεικόνιση από το X στον εαυτό του. Ένα στοιχείο $x \in X$ καλείται *σταθερό σημείο της* f αν

$$f(x)=x,$$

δηλαδή, αν το x είναι λύση της συναρτησιακής εξίσωσης (1.1.1) στο X.

Τα τετριμμένα παραδείγματα που ακολουθούν υποδεικνύουν ότι υπάρχουν απεικονίσεις σε διάφορα σύνολα που δεν έχουν κανένα σταθερό σημείο, ενώ άλλες απει-

κονίσεις μπορεί να έχουν ένα ή περισσότερα, ακόμα και άπειρα στο πλήθος σταθερά σημεία.

Παραδείγματα

1. Μια μεταφορά, π.χ. η συνάρτηση $f:IR\to IR$, με $f(x)=x+\alpha$, όπου $\alpha\neq 0$, δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

2. Μία στροφή ενός επιπέδου έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.

3. Η συνάρτηση $f:IR\to IR$, με $f(x)=x^2$ έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα $x_1=0$ και $x_2=1$.

4. Η ορθή προβολή του ευκλειδείου επιπέδου IR^2 στον x-άξονα, δηλαδή η απεικόνιση $f:IR^2\to IR\times\{0\}\subset IR^2$ με $f(x,y)=(x,0)$, για κάθε $(x,y)\in IR^2$, έχει άπειρα το πλήθος σταθερά σημεία, τα σημεία του x-άξονα.

Οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή μη σταθερών σημείων για μια απεικόνιση αναφέρονται στο είδος αυτής, αλλά κυρίως στις ιδιότητες των συνόλων από τα οποία προέρχονται. Συνήθως η συνθήκη της συνέχειας είναι αναγκαία για την απεικόνιση f, ενώ το σύνολο X είναι ένας μη κενός τοπολογικός (ή μετρικός) χώρος με επιπλέον ιδιότητες αυτές της συμπάγειας (ή τουλάχιστον της πληρότητας) ή της κυρτότητας.

Στα επόμενα κεφάλαια θα διαπραγματευθούμε κάποια από τα γνωστότερα θεωρήματα που αφορούν στην ύπαρξη σταθερών σημείων για διάφορους τύπους απεικονίσεων, και θα αναφερθούμε σε αρκετές εφαρμογές αυτών των θεωρημάτων τόσο από την ανάλυση, όσο και από τη γραμμική άλγεβρα και τη γεωμετρία.

Προηγουμένως, όμως, θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούμε στις σημαντικές εκείνες έννοιες από το χώρο της ανάλυσης που απαιτούνται, ώστε η διαπραγμάτευση των θεμάτων που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια να είναι οπωσδήποτε όσο το δυνατόν πληρέστερη και αυτοτελής.

1.2. Έννοιες και ορισμοί

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις κατά την διαπραγμάτευση διάφορων θεμάτων από τον Απειροστικό Λογισμό, όπως της έννοιας της σύγκλισης ή της συνέχειας, καταδεικνύεται η μεγάλη χρησιμότητα της έννοιας της απόστασης δύο πραγματικών αριθμών x και y, η οποία τυποποιείται με τη χρήση της γνωστής έννοιας της απόλυτης τιμής

$|x-y|$. Αντίστοιχες ιδιότητες με αυτές της απόλυτης τιμής παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στο χώρο της ανάλυσης, όπου η δομή των συνόλων τα οποία μελετούνται δεν είναι τόσο απλή όσο αυτή των πραγματικών αριθμών. Είναι, λοιπόν, φυσιολογική η επέκταση της έννοιας της «απόστασης» μεταξύ δύο στοιχείων ενός τυχαίου συνόλου, με τέτοιο τρόπο, ώστε το σύνολο των πραγματικών αριθμών και η απόλυτη τιμή να αποτελούν ειδική περίπτωση μιας ευρύτερης «οικογένειας» χώρων, την έννοια της οποίας καθορίζει ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 1.2.1 (Μετρικός Χώρος)

Έστω X ένα τυχαίο μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση

$$\rho: X\times X\to \mathbb{R},$$

η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

α) $\rho(x,y)\geq 0$, για κάθε $x, y\in X$,

β) $\rho(x,y)=0$ αν και μόνον αν $x=y$, για κάθε $x, y\in X$,

γ) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, για κάθε $x, y\in X$ (συμμετρική ιδιότητα) και

δ) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$, για κάθε $x, y, z\in X$ (τριγωνική ιδιότητα),

ονομάζεται *μετρική* στο X, και το ζεύγος (X,ρ) ονομάζεται *μετρικός χώρος*. Για δύο τυχαία στοιχεία x και y του X, ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\rho(x,y)$ ονομάζεται *απόσταση* των x και y.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν καθορίζουν κάποιους από τους σημαντικότερους μετρικούς χώρους, στους οποίους γίνεται εκτενής αναφορά στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Παραδείγματα

1. Η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$$\rho(x,y)=|x-y|,$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

2. Μετρικές στον $\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, ...$

Για κάθε πραγματικό αριθμό $p\geq 1$, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\rho_p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ και τη συνάρτηση $\rho_\infty:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με

$$\rho_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i|,\ i=1,2,...,n\},$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in IR^n$.

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι καθένας από τους χώρους (IR^n,ρ_p), $1\le p<+\infty$ και (IR^n,ρ_∞) είναι πράγματι μετρικοί χώροι.

Ειδικότερα, για p=2, ο μετρικός χώρος (IR^n,ρ_2), όπου, φυσικά ,

$$\rho_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in IR^n$, ονομάζεται n-*διάστατος Ευκλείδειος Χώρος* και η ρ_2 ονομάζεται *Συνήθης Ευκλείδεια Μετρική*. Πολλές φορές, αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, η *Ευκλείδεια Απόσταση* $\rho_2(x,y)$ δύο σημείων $x, y\in IR^n$, συμβολίζεται με $\|x-y\|$.

3. Αν με C(X) συμβολίσουμε το σύνολο των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων $f:X\to IR$, τότε η συνάρτηση $\rho_\infty:C(X)\times C(X)\to IR$, ώστε

$$\rho_\infty(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|,\ x\in X\},$$

για κάθε $f, g\in C(X)$, είναι πράγματι μια μετρική στο C(X).

4. Ένας πολύ ενδιαφέρον χώρος είναι το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p$, για $p\ge1$, συγκλίνει και ο οποίος, συνήθως, συμβολίζεται με ℓ^p. Στο χώρο $\ell^p=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:\ \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty\}$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε δύο ακολουθίες $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του ℓ^p, με την οποία διαπιστώνεται ότι ο (ℓ^p,ρ_p) είναι πράγματι μετρικός χώρος.

Ορισμός 1.2.2

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. *Ανοικτή σφαίρα κέντρου* $x\in X$ *και ακτίνας* $r>0$ ονομάζεται το σύνολο $B(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<r\}$. Κατ' επέκτασιν, *κλειστή σφαίρα κέντρου* $x\in X$ *και ακτίνας* $r\ge0$ ονομάζεται το σύνολο $B[x,r]=\{y\in X:\ \rho(x,y)\le r\}$. Τέλος, *σφαίρα* (ή ακριβέστερα *επιφάνεια σφαίρας*) *κέντρου* $x\in X$ *και ακτίνας* $r\ge0$ ονομάζεται το σύνολο $S(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)=r\}$.

Στην ειδική περίπτωση του n-διάστατου Ευκλειδείου Χώρου $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$ συμβολίζουμε με

α) $B^n(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n: \|x-y\|<r\}$ την ανοικτή σφαίρα κέντρου $x\in\mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r>0$,

β) $B^n[x,r]=\{y\in\mathbb{R}^n: \|x-y\|\le r\}$ την κλειστή σφαίρα κέντρου $x\in\mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r\ge 0$ και

γ) $S^{n-1}(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n: \|x-y\|=r\}$ τη σφαίρα κέντρου $x\in\mathbb{R}^n$ και ακτίνας $r\ge 0$.

Με βάση την έννοια της ανοικτής σφαίρας, ορίζεται το ανοικτό σύνολο σε έναν μετρικό χώρο. Συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.3

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται *ανοικτό* αν για κάθε $x\in A$, υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\subseteq A$.

Από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου είναι άμεσο το συμπέρασμα της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.2.1

Κάθε ανοικτή σφαίρα σε έναν μετρικό χώρο είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω $B(x_0,r_0)$ μια ανοικτή σφαίρα σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ) και $x\in B(x_0,r_0)$. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\subseteq B(x_0,r_0)$. Αν επιλέξουμε $0<r\le r_0-\rho(x_0,x)$, τότε για κάθε $y\in B(x,r)$ έπεται ότι $\rho(x,y)<r\le r_0-\rho(x_0,x)$, ή

$$\rho(x_0,x)+\rho(x,y)<r_0,$$

οπότε και από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής ρ έχουμε

$$\rho(x_0,y)\le\rho(x_0,x)+\rho(x,y)<r_0,$$

δηλαδή $y\in B(x_0,r_0)$, επομένως $B(x,r)\subseteq B(x_0,r_0)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η έννοια των ανοικτών συνόλων σε έναν μετρικό χώρο, όπως αυτή ορίσθηκε προηγουμένως, αποτελεί την ειδική περίπτωση της οικογένειας των ανοικτών συνόλων που χαρακτηρίζουν ένα τυχαίο σύνολο ως τοπολογικό χώρο. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.4 (Τοπολογικός Χώρος)

Έστω X ένα τυχαίο σύνολο. Μια οικογένεια $\mathscr{T}$ υποσυνόλων του X, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

α) $\varnothing, X\in\mathscr{T}$,

β) αν I ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $A_i \in \mathscr{T}$, για κάθε $i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$

και

γ) αν $A_i \in \mathscr{T}$, i=1, 2, ..., n, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{T}$,

ονομάζεται *τοπολογία* του X και το ζεύγος $(X, \mathscr{T})$ ονομάζεται *τοπολογικός χώρος*, ενώ τα στοιχεία της οικογένειας $\mathscr{T}$ ονομάζονται *ανοικτά σύνολα* του τοπολογικού χώρου $(X,\mathscr{T})$.

Το επόμενο πολύ βασικό θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη, μας παρέχει τις βασικές τοπολογικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και ουσιαστικά δικαιολογεί το χαρακτηρισμό τους ως τέτοια.

Θεώρημα 1.2.2

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε

α) Τα σύνολα $\varnothing$ και X είναι ανοικτά.

β) Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών υποσυνόλων του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

γ) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Επομένως, με βάση τον Ορισμό 1.2.4, η οικογένεια $\mathscr{T}$ των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) αποτελεί μια τοπολογία του X και έτσι ο $(X,\mathscr{T})$ καθίσταται τοπολογικός χώρος.

Από την ιδιότητα (β) του προηγούμενου θεωρήματος και την πρόταση 1.2.1 προκύπτει άμεσα ότι η ένωση ανοικτών σφαιρών είναι ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Αλλά και αντιστρόφως, αν A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, τότε εξ ορισμού για κάθε $x \in A$, υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r_x) \subseteq A$ και επομένως $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι

Πόρισμα 1.2.3

Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι ανοικτό αν και μόνο αν γράφεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών.

Το Θεώρημα 1.2.2, επίσης, μας δίνει τη δυνατότητα να αναφερόμαστε στο ευρύτερο δυνατό ανοικτό σύνολο που περιέχεται σε ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώ-

ρου. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.5

Έστω A ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X. Ορίζουμε ως *εσωτερικό* του συνόλου A, το σύνολο

$$A^\circ=\cup\{G\subseteq X\text{: } G \text{ ανοικτό και } G\subseteq A\}.$$

Επομένως το εσωτερικό A° ενός υποσυνόλου A του X είναι το μεγαλύτερο δυνατό ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A.

Επίσης, από το Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει άμεσα ότι το εσωτερικό A° ενός συνόλου A είναι ανοικτό σύνολο, ενώ προφανώς $A^\circ\subseteq A$. Ως εκ τούτου το επόμενο πόρισμα είναι άμεσο.

Πόρισμα 1.2.4

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι ανοικτό αν και μόνον αν $A=A^\circ$.

Ο χαρακτηρισμός των στοιχείων που αποτελούν το εσωτερικό ενός συνόλου δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.5

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Τότε

$$A^\circ=\{x\in A\text{: υπάρχει } r>0 \text{ τέτοιο, ώστε } B(x,r)\subseteq A\}.$$

Απόδειξη

Έστω $x\in A$ για το οποίο υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\subseteq A$. Τότε εφόσον η ανοικτή σφαίρα $B(x,r)$ είναι ανοικτό σύνολο, από τον ορισμό του A°, έπεται ότι $B(x,r)\subseteq A^\circ$.

Αντιστρόφως, έστω $x\in A^\circ=\cup\{G\subseteq X\text{: } G \text{ ανοικτό και } G\subseteq A\}$. Τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G του X ώστε $x\in G\subseteq A$, οπότε, από τον Ορισμό 1.2.3 του ανοικτού συνόλου, υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\subseteq G\subseteq A$.

Επομένως, πράγματι, $A^\circ=\{x\in A\text{: υπάρχει } r>0 \text{ τέτοιο, ώστε } B(x,r)\subseteq A\}$.

Αντίστοιχα προς την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, ορίζουμε την έννοια των κλειστών συνόλων, αυτών που τα συμπληρωματικά τους είναι ανοικτά. Συγκεκριμένα η έννοια του κλειστού συνόλου καθορίζεται από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.2.6

Ένα υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται *κλειστό* αν το σύνολο $X-K$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Ένα τετριμμένο παράδειγμα κλειστού συνόλου σε ένα μετρικό χώρο αποτελεί η κλειστή σφαίρα. Έχουμε, λοιπόν, την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.2.6

Κάθε κλειστή σφαίρα σε έναν μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω $B[x_0,r_0]$ μια κλειστή σφαίρα σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $X-B[x_0,r_0]=\{x\in X: \rho(x_0,x)>r_0\}$ είναι ανοικτό, ή, με βάση τον Ορισμό 1.2.3 του ανοικτού συνόλου, ότι για κάθε $x\in X$ με $\rho(x_0,x)>r_0$, υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε $B(x,r)\subseteq X-B[x_0,r_0]$. Έστω $r=\rho(x_0,x)-r_0>0$, τότε για κάθε $y\in B(x,r)$ και με βάση την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής ρ, έπεται ότι

$$r+r_0=\rho(x_0,x)\leq\rho(x_0,y)+\rho(x,y)<\rho(x_0,y)+r,$$

οπότε

$$\rho(x_0,y)>r_0,$$

δηλαδή $y\in X-B[x_0,r_0]$, επομένως $B(x,r)\subseteq X-B[x_0,r_0]$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πόρισμα 1.2.7

Κάθε σφαίρα σε έναν μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

Το συμπλήρωμα μιας σφαίρας $S(x_0,r_0)=\{x\in X: \rho(x_0,x)=r_0\}$ σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ) είναι το σύνολο

$$X-S(x_0,r_0)=\{x\in X: \rho(x_0,x)<r_0\}\cup\{x\in X: \rho(x_0,x)>r_0\}=B(x_0,r_0)\cup(X-B[x_0,r_0]),$$

το οποίο, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.2 είναι ανοικτό ως ένωση της ανοικτής σφαίρας $B(x_0,r_0)$ (Πρόταση 1.2.1) και του ανοικτού συνόλου $X-B[x_0,r_0]$ (πρόταση 1.2.6).

Οι βασικές τοπολογικές ιδιότητες της οικογένειας των κλειστών συνόλων σε έναν μετρικό χώρο περιγράφονται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο αποτελεί το δυϊκό του Θεωρήματος 1.2.2, με την έννοια ότι η απόδειξή του προκύπτει άμεσα από αυτό χρησιμοποιώντας τους κανόνες de Morgan.

Θεώρημα 1.2.8

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε

α) Τα σύνολα $\varnothing$ και X είναι κλειστά.

β) Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X.

γ) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Αντίστοιχα προς την έννοια του εσωτερικού A° ενός υποσυνόλου A ενός μετρικού χώρου X, που ορίζεται ως το ευρύτερο δυνατό ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A, το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε το μικρότερο δυνατό κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το σύνολο A. Υπό την έννοια αυτή, ο επόμενος ορισμός είναι εύλογος.

Ορισμός 1.2.7

Έστω K ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X. Ορίζουμε ως *κλειστότητα* του συνόλου K, το σύνολο

$$\overline{K} = \cap\{F \subseteq X\text{: } F \text{ κλειστό και } K \subseteq F\}.$$

Επομένως η κλειστότητα $\overline{K}$ ενός υποσυνόλου K του X είναι το μικρότερο δυνατό υποσύνολο του X που περιέχει το K.

Επίσης, από το Θεώρημα 1.2.8 προκύπτει άμεσα ότι η κλειστότητα $\overline{K}$ ενός συνόλου K είναι κλειστό σύνολο, ενώ προφανώς $K \subseteq \overline{K}$. Ως εκ τούτου, το επόμενο πόρισμα είναι άμεσο.

Πόρισμα 1.2.9

Ένα υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστό αν και μόνον αν $K = \overline{K}$.

Ο χαρακτηρισμός των στοιχείων που αποτελούν την κλειστότητα ενός συνόλου δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.10

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τότε

$$\overline{K} = \{x \in X\text{: } B(x,r) \cap K \neq \varnothing, \text{ για κάθε } r>0\}.$$

Απόδειξη

Έστω $x \in X$ τέτοιο, ώστε $B(x,r) \cap K \neq \varnothing$, για κάθε $r>0$. Αν υποθέσουμε ότι $x \notin \overline{K}$, θα υπάρχει κλειστό $F \subseteq X$ τέτοιο, ώστε $K \subseteq F$ και $x \notin F$, οπότε $x \in X - F$, το οποίο είναι

ανοικτό υποσύνολο του X. Άρα υπάρχει $r>0$, ώστε $B(x,r)\subseteq X-F\subseteq X-K$, από το οποίο έπεται ότι $B(x,r)\cap K=\varnothing$, άτοπο. Επομένως $x\in\overline{K}$.

Αντιστρόφως, έστω $x\in\overline{K}=\cap\{F\subseteq X$: F κλειστό και $K\subseteq F\}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\cap K=\varnothing$, τότε $K\subseteq F$, όπου $F=X-B(x,r)$ κλειστό και επομένως $x\in F$, εφόσον $x\in\overline{K}=\cap\{F\subseteq X$: F κλειστό και $K\subseteq F\}$. Αυτό, όμως είναι άτοπο, διότι αφού $x\in B(x,r)$, τότε $x\notin X-B(x,r)=F$. Ως εκ τούτου $B(x,r)\cap K\neq\varnothing$, για κάθε $r>0$.

Επομένως, πράγματι, $\overline{K}=\{x\in X$: $B(x,r)\cap K\neq\varnothing$, για κάθε $r>0\}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Εκτός από τον ορισμό και τις ιδιότητές της, η κλειστότητα ενός συνόλου σε έναν μετρικό χώρο μπορεί να περιγραφεί μέσω της έννοιας του σημείου συσσώρευσης. Για την έννοια αυτή έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.8

Έστω ένας μετρικός χώρος (X,ρ) και $K\subseteq X$. Τότε

α) Ένα στοιχείο $x\in X$ ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του K αν κάθε ανοικτή σφαίρα κέντρου x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του K διαφορετικό από το x, δηλαδή, αν για κάθε $r>0$, ισχύει $(B(x,r)-\{x\})\cap K\neq\varnothing$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του K συμβολίζεται με K'.

β) Ένα στοιχείο $x\in X$ ονομάζεται *μεμονωμένο σημείο* του K αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του K, δηλαδή αν υπάρχει $r>0$ τέτοιο, ώστε $B(x,r)\cap K=\{x\}$.

Με βάση την Πρόταση 1.2.10 και τον προηγούμενο ορισμό, αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 1.2.11

Αν (X,ρ) μετρικός χώρος και $K\subseteq X$, τότε $\overline{K}=K'\cup K$.

Ακολούθως διαπραγματευόμαστε μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης, αυτήν της σύγκλισης ακολουθιών. Η έννοια αυτή, εκτός των άλλων, αποτελεί και ένα πολύ εύχρηστο μέσο περιγραφής των κυριότερων τοπολογικών εννοιών στους μετρικούς χώρους. Έχουμε, λοιπόν, τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.9

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία ενός μετρικού χώρου (X,ρ), θα λέμε ότι *συγκλίνει στο* $x\in X$, ή ότι *το* x *είναι το όριό της*, καθώς το n τείνει στο $+\infty$, αν για κάθε

$\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε $\rho(x_n,x)<\varepsilon$, για κάθε $n\geq n_0$.

Σ' αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, ή $x_n\to x$, καθώς $n\to+\infty$.

Από τον προηγούμενο ορισμό, είναι προφανές ότι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \rho(x_n, x) = 0 .$$

Όσον αφορά στη μοναδικότητα του ορίου μιας συγκλίνουσας ακολουθίας σε έναν μετρικό χώρο, ισχύει η επόμενη πρόταση, την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.2.12 (Μοναδικότητα του ορίου)

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ). Τότε το όριό της είναι μοναδικά καθορισμένο, δηλαδή, αν $x_n\to x$ και $x_n\to y$, καθώς $n\to+\infty$, τότε $x=y$.

Η έννοια της σύγκλισης ακολουθιών σε έναν μετρικό χώρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα για την περιγραφή κάποιων από των βασικότερων τοπολογικών ιδιοτήτων. Για παράδειγμα, με τη βοήθεια της Πρότασης 1.2.10 μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η κλειστότητα ενός υποσυνόλου K ενός μετρικού χώρου X είναι ακριβώς τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών στο K, δηλαδή

$$\overline{K} = \{x\in X\text{: υπάρχει ακολουθία } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ στο } K\text{, ώστε } \lim_{n\to+\infty} x_n = x\}.$$

Επομένως, και με βάση το Πόρισμα 1.2.9, είναι προφανής η ισχύς της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.2.13

Ένα υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι κλειστό αν και μόνον αν το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας του K είναι στοιχείο του K.

Στη συνέχεια αναφερόμαστε στην ιδιαιτέρως σημαντική έννοια της συνέχειας ξεκινώντας από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.10

Έστω (X,ρ), (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι και $x_0\in X$. Μια απεικόνιση $f:X\to Y$ ονομάζεται *συνεχής στο* x_0, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in X$, με $\rho(x_0,x)<\delta$, έπεται ότι $\sigma(f(x_0),f(x))<\varepsilon$, ή, ισοδύναμα, $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$.

Η f ονομάζεται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.

Ορισμός 1.2.11

Μια απεικόνιση $f:X\to Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X,ρ) και (Y,σ) ονομάζεται *ομοιόμορφα συνεχής*, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x_1, x_2\in X$, με $\rho(x_1,x_2)<\delta$, έπεται ότι $\sigma(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

Από τους ορισμούς της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας είναι φανερό ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής απεικόνιση είναι συνεχής, ενώ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

Με το θεώρημα που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι η συνέχεια μιας απεικόνισης μεταξύ μετρικών χώρων είναι μια αμιγώς τοπολογική έννοια, καθώς οι συνεχείς απεικονίσεις μπορούν να χαρακτηρισθούν μέσω των εννοιών των ανοικτών συνόλων, των κλειστών συνόλων και της κλειστότητας.

Θεώρημα 1.2.14

Έστω $f:X\to Y$ μια απεικόνιση μεταξύ των μετρικών χώρων (X,ρ) και (Y,σ). Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η f είναι συνεχής.

β) Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(G)$ κάθε ανοικτού υποσυνόλου G του Y είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

γ) Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(F)$ κάθε κλειστού υποσυνόλου F του Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.

δ) Για κάθε υποσύνολο A του X ισχύει $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$.

Απόδειξη

(α) $\Rightarrow$ (β). Έστω ότι η f είναι συνεχής και $G\subseteq Y$ ανοικτό. Τότε, για κάθε $x\in f^{-1}(G)$ (δηλαδή $f(x)\in G$), υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο, ώστε $B(f(x),\varepsilon)\subseteq G$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $f(B(x,\delta))\subseteq G$, δηλαδή $B(x,\delta)\subseteq f^{-1}(G)$. Επομένως η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(G)$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(G)$ κάθε ανοικτού υποσυνόλου G του Y είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F\subseteq Y$ κλειστό. Τότε το $Y-F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και άρα το $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επομένως το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(γ) $\Rightarrow$ (δ). Έστω ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(F)$ κάθε κλειστού υποσυνόλου F του

Y είναι κλειστό υποσύνολο του X και $A\subseteq X$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε ότι

$$f(x)\in f(A)\subseteq \overline{f(A)}$$

και επομένως το A είναι υποσύνολο του $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, το οποίο, από την υπόθεση, είναι κλειστό υποσύνολο του X, εφόσον το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Επειδή, όμως, το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, έπεται ότι $\overline{A}\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, δηλαδή $f\left(\overline{A}\right)\subseteq \overline{f(A)}$.

(δ) $\Rightarrow$ (α). Έστω ότι $f\left(\overline{A}\right)\subseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A\subseteq X$ και $x_0\in X$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Θεωρούμε ένα $\varepsilon>0$, οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$. Θέτουμε

$$A=f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))=\{x\in X:\ \sigma(f(x_0),f(x))<\varepsilon\}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $B(x_0,\delta)\cap(X-A)\neq\varnothing$, για κάθε $\delta>0$, τότε, από την Πρόταση 1.2.10, έπεται ότι $x_0\in\overline{X-A}$, οπότε $f(x_0)\in f\left(\overline{X-A}\right)\subseteq \overline{f(X-A)}$, λόγω της υπόθεσης. Άρα, από την Πρόταση 1.2.10, έπεται ότι $B(f(x_0),\varepsilon)\cap f(X-A)\neq\varnothing$, επομένως υπάρχει $x\in X-A$ τέτοιο, ώστε $\sigma(f(x_0),f(x))<\varepsilon$, άτοπο. Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0.

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη, είναι πάρα πολύ σημαντικό, διότι παρέχει έναν χαρακτηρισμό των συνεχών απεικονίσεων μεταξύ μετρικών χώρων μέσω της έννοιας της σύγκλισης ακολουθιών.

Θεώρημα 1.2.15 (Αρχή της μεταφοράς)

Έστω $f:X\to Y$ μια απεικόνιση μεταξύ των μετρικών χώρων (X,ρ) και (Y,σ) και $x\in X$. Τότε η f είναι συνεχής στο x αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Η σύγκλιση μιας ακολουθίας σε έναν μετρικό χώρο μας παρέχει τη δυνατότητα να συμπεράνουμε ότι οι όροι της έχουν τελικά «μικρή» απόσταση μεταξύ τους, ή, με άλλα λόγια, ότι μπορούμε να βρούμε άπειρους όρους της ακολουθίας που να βρίσκονται οσοδήποτε κοντά ο ένας στον άλλον. Απ' την άλλη πλευρά, η ιδιότητα αυτή των όρων μιας ακολουθίας σε έναν μετρικό χώρο μπορεί να ισχύει, χωρίς η ακολουθία να είναι συγκλίνουσα. Έτσι, εκτός από τις συγκλίνουσες ακολουθίες σε έναν μετρικό χώρο, ορίζεται μια ευρύτερη κλάση ακολουθιών, μέσω του επόμενου ορισμού.

Ορισμός 1.2.12

Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ) ονομάζεται *βασική ακολουθία*, ή *ακολουθία Cauchy*, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$, για κάθε $m, n\geq n_0$.

Από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας είναι προφανές ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο είναι βασική, ενώ στοιχειώδη παραδείγματα μας αποδεικνύουν ότι το αντίστροφο δεν ισχύει για έναν τυχαίο μετρικό χώρο. Οι μετρικοί χώροι στους οποίους οι έννοιες της βασικής και της συγκλίνουσας ακολουθίας ταυτίζονται ονομάζονται πλήρεις μετρικοί χώροι. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.13 (Πλήρης Μετρικός Χώρος)

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) ονομάζεται *πλήρης* αν κάθε βασική ακολουθία του είναι συγκλίνουσα (σε στοιχείο του X).

Αποδεικνύεται ότι

α) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική που ορίζεται από την απόλυτη τιμή είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

β) Ο Ευκλείδειος Χώρος $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδεια μετρική ρ_2, αλλά και γενικότερα καθένας από τους χώρους $(\mathbb{R}^n,\rho_p)$, $1\leq p<+\infty$ και $(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$, για κάθε $n=1, 2, \ldots$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.

γ) Ο μετρικός χώρος $(C[\alpha,\beta],\rho_\infty)$ των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι πλήρης.

δ) Ο μετρικός χώρος ℓ^p, $1\leq p<+\infty$, είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Η επόμενη πρόταση χρησιμοποιείται για να διαπιστώσουμε αν ένα υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πρόταση 1.2.16

Ένα υποσύνολο K ενός πλήρους μετρικού χώρου (X,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος αν και μόνον αν το K είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη

Έστω ότι ο (K,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι το K είναι κλειστό υποσύνολο του X. Ως προς αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι $K = \overline{K}$.

Έστω, λοιπόν, $x \in \overline{K}$, τότε υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K με $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική εφόσον είναι συγκλίνουσα και επομένως, αφού ο K είναι πλήρης, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει σε στοιχείο του K. Επειδή το όριο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μοναδικό, έπεται ότι $x\in K$. Επομένως $\overline{K} = K$.

Αντιστρόφως, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο K. Προφανώς η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία και στον πλήρη μετρικό χώρο (X,ρ), επομένως θα είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή υπάρχει $x\in X$ τέτοιο, ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Επειδή το K είναι κλειστό υποσύνολο του X και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο K, από την Πρόταση 1.2.13 προκύπτει ότι $x\in K$. Επομένως ο (K,ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Η έννοια της απόλυτης τιμής ως συνάρτησης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών γενικεύεται τώρα σε έναν οποιοδήποτε γραμμικό χώρο, μέσω του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 1.2.14 (Χώρος με Νόρμα)

Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του IR. Μια συνάρτηση

$$\|\ \|:X\to\mathbb{R},$$

η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

α) $\|x\|\geq 0$, για κάθε $x\in X$,

β) $\|x\|=0$ αν και μόνον αν $x=0$, για κάθε $x\in X$,

γ) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$, για κάθε $x\in X$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και

δ) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, για κάθε $x, y\in X$ (τριγωνική ιδιότητα),

ονομάζεται *νόρμα* στον X, και το ζεύγος $(X,\|\ \|)$ ονομάζεται *χώρος με νόρμα*.

Από τον ορισμό, μπορούμε να επαληθεύσουμε άμεσα ότι αν ο $(X,\|\ \|)$ είναι χώρος με νόρμα, τότε η συνάρτηση $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$, με $\rho(x,y)=\|x-y\|$, για κάθε $x, y\in X$ αποτελεί μια μετρική στο X, γι' αυτό λέμε ότι η ρ είναι η μετρική που *καθορίζεται* από τη νόρμα $\|\ \|$ στον X.

Επομένως, όλες οι έννοιες που ορίσθηκαν και ισχύουν στους μετρικούς χώρους, ισχύουν αντίστοιχα και στους χώρους με νόρμα. Ειδικότερα, όσον αφορά στην έννοια της πληρότητας, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.15

Ένας χώρος με νόρμα ονομάζεται *χώρος Banach* αν ο μετρικός χώρος που καθορίζεται από τη νόρμα είναι πλήρης.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αφορούν στους πιο γνωστούς χώρους με νόρμα, στους οποίους αναφερθήκαμε και προηγουμένως ως μετρικούς χώρους.

Παραδείγματα

1. Ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^n$, n=1, 2, ...

Για κάθε πραγματικό αριθμό $p\geq 1$, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\|\ \|_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ και τη συνάρτηση $\|\ \|_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_i|,\ i=1,2,...,n\},$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Καθένας από τους χώρους $(\mathbb{R}^n,\|\ \|_p)$, $1\leq p<+\infty$ και $(\mathbb{R}^n,\|\ \|_\infty)$ είναι χώροι Banach, εφόσον οι μετρικές που καθορίζονται από τις νόρμες $\|\ \|_p$, $1\leq p<+\infty$ και $\|\ \|_\infty$ είναι ακριβώς οι μετρικές ρ_p, $1\leq p<+\infty$ και ρ_∞ του παραδείγματος 2 της σελίδας 3, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ειδικότερα, για p=2, η νόρμα $\|x\|_2$ ενός στοιχείου x του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται απλώς με $\|x\|$ και η τιμή της ταυτίζεται με τη γνωστή έννοια του ευκλείδειου μέτρου του διανύσματος x.

3. Στο χώρο C(X) των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων $f:X\to\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\|\ \|_\infty:C(X)\to\mathbb{R}$, ώστε

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|,\ x\in X\},$$

για κάθε $f\in C(X)$, είναι πράγματι μια νόρμα και ο χώρος $(C(X),\|\ \|_\infty)$ είναι χώρος Banach, εφόσον η μετρική που καθορίζεται από τη νόρμα $\|\ \|_\infty$ είναι ακριβώς η μετρική ρ_∞ του παραδείγματος 3 της σελίδας 4, με την οποία ο $(C(X),\rho_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

4. Στο σύνολο $\ell^p=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:\ \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty\}$, $1<p<+\infty$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$\|\ \|_p:\ell^p\to\mathbb{R}$, με

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

για κάθε ακολουθία $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του ℓ^p. Το σύνολο ℓ^p με τις κατά όρο πράξεις είναι

γραμμικός χώρος και ο $(\ell^p,\| \|_p)$ είναι πράγματι χώρος Banach, εφόσον η μετρική που καθορίζεται από τη νόρμα $\| \|_p$ είναι ακριβώς η μετρική ρ_p του παραδείγματος 4 της σελίδας 4, με την οποία ο (ℓ^p,ρ_p) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Μια ενδιαφέρουσα κλάση χώρων Banach είναι αυτή των χώρων που η νόρμα τους καθορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο. Υπενθυμίζουμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.16

Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του IR. Μια συνάρτηση

$$<,>:X\times X\rightarrow IR,$$

η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

α) $<x,x>\geq 0$, για κάθε $x\in X$,

β) αν $<x,x>=0$ τότε $x=0$, για κάθε $x\in X$,

γ) $<x,y>=<y,x>$, για κάθε $x, y\in X$ και

δ) $<\lambda x+\mu y,z>=\lambda<x,z>+\mu<y,z>$, για κάθε $x, y, z\in X$ και $\lambda, \mu\in IR$

ονομάζεται *εσωτερικό γινόμενο* στον X.

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων του ορισμού του εσωτερικού γινομένου σε έναν χώρο X, μπορούμε, επιπλέον, να διαπιστώσουμε ότι

ε) $<x,\lambda y+\mu z>=\lambda<x,y>+\mu<x,z>$, για κάθε $x, y, z\in X$ και $\lambda, \mu\in IR$ και

στ) $<x,x>=0$ αν και μόνον αν $x=0$, για κάθε $x\in X$.

Επίσης είναι άμεση η ισχύς της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.2.17

Έστω X ένας γραμμικός χώρος και <,> ένα εσωτερικό γινόμενο σ' αυτόν. Τότε η συνάρτηση $\| \|:X\rightarrow IR$, με

$$\|x\|=<x,x>^{1/2},$$

για κάθε $x\in X$, είναι μια νόρμα στον X.

Τότε λέμε ότι η νόρμα αυτή καθορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο <,>.

Ειδικά, όσον αφορά στους χώρους Banach, των οποίων η νόρμα καθορίζεται από εσωτερικό γινόμενο, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.17

Ένας χώρος Banach $(X,\| \|)$, του οποίου η νόρμα $\| \|$ καθορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο <,> στον X, ονομάζεται *χώρος Hilbert*.

Έστω, τώρα, $(X,\|\ \|)$ ένας χώρος Hilbert και $<,>$ το εσωτερικό γινόμενο στον X που καθορίζει τη νόρμα $\|\ \|$. Τότε, για κάθε $x, y\in X$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=<x+y,x+y>+<x-y,x-y>\\&=<x,x>+2<x,y>+<y,y>+<x,x>-2<x,y>+<y,y>\\&=2<x,x>+2<y,y>\\&=2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.18 (Κανόνας του παραλληλογράμμου)

Σε κάθε χώρο Hilbert X ισχύει ότι

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,$$

για κάθε $x, y\in X$.

Μια ειδική κατηγορία υποσυνόλων ενός χώρου με νόρμα είναι τα κυρτά σύνολα. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.18

Ένα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα ονομάζεται *κυρτό* αν για κάθε $x, y\in A$ και $0\le\lambda\le1$, το $\lambda x+(1-\lambda)y$ είναι στοιχείο του A.

Το σύνολο

$$\mathrm{conv}(A)=\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n:\ n\in\mathbb{N},\ x_i\in A,\ \lambda_i\ge0,\ i=1, 2, ..., n \text{ και } \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1\}$$

ονομάζεται *κυρτή θήκη* του A.

Αποδεικνύεται ότι η κυρτή θήκη ενός υποσυνόλου A ενός χώρου με νόρμα X είναι $\mathrm{conv}(A)=\cap\{K\subseteq X:\ K \text{ κυρτό και } A\subseteq K\}$, δηλαδή το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A. Προφανώς το A είναι κυρτό αν και μόνον αν $A=\mathrm{conv}(A)$.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα κυρτού υποσυνόλου ενός χώρου με νόρμα αποτελεί η κλειστή σφαίρα σ' αυτόν. Πράγματι· έστω ένας χώρος με νόρμα $(X,\|\ \|)$ και η κλειστή σφαίρα $B[x_0,r]=\{x\in X:\ \|x-x_0\|\le r\}$, όπου $x_0\in X$ και $r>0$. Τότε, αν $x, y\in B[x_0,r]$ και $0\le\lambda\le1$, θέτουμε $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, οπότε

$$\begin{aligned}\|x_0-z\|&=\|\lambda x_0+(1-\lambda)x_0-\lambda x-(1-\lambda)y\|\\&=\|\lambda(x-x_0)+(1-\lambda)(x_0-y)\|\\&\le\lambda\|x-x_0\|+(1-\lambda)\|x_0-y\|\\&\le\lambda r+(1-\lambda)r=r,\end{aligned}$$

επομένως $z \in B[x_0,r]$.

Η τελευταία έννοια στην οποία αναφερόμαστε είναι αυτή της συμπάγειας. Διατυπώνουμε το σχετικό ορισμό και ακολούθως τις βασικότερες ιδιότητες των συμπαγών συνόλων, οι οποίες συναντώνται κατά τη μελέτη των θεωρημάτων σταθερού σημείου στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 1.2.19 (Συμπαγής Μετρικός Χώρος)

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) ονομάζεται *συμπαγής* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Αυτό σημαίνει ότι ο X είναι συμπαγής αν για κάθε οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $X = \bigcup_{i\in I} G_i$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_i, i_2, ..., i_n \in I$ τέτοια, ώστε

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} .$$

Ένα υποσύνολο A του X ονομάζεται *συμπαγές* αν ο μετρικός χώρος (A,ρ) είναι συμπαγής.

Ειδικότερα, για τα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.19

Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω K ένα κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X και $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τέτοια, ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Εφόσον το K είναι κλειστό υποσύνολο του X, το $X-K$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και επομένως τα $(X-K)\cup G_i$, $i\in I$, αποτελούν ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Επομένως, εφόσον ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, από τον Ορισμό 1.2.19, υπάρχουν $n\in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε $X = (X-K) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} \right)$, οπότε $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$, δηλαδή το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Για την επόμενη πρόταση είναι απαραίτητος ο ορισμός της έννοιας του φραγμένου συνόλου.

Ορισμός 1.2.20

Ένα υποσύνολο Α ενός μετρικού χώρου (Χ,ρ) ονομάζεται *φραγμένο* αν το Α περιέχεται σε μια ανοικτή σφαίρα του Χ, δηλαδή αν υπάρχουν $x \in X$ και $\delta > 0$ τέτοια, ώστε $A \subseteq B(x,\delta)$.

Πρόταση 1.2.20

Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη

Έστω Κ ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (Χ,ρ).

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι το Κ είναι κλειστό υποσύνολο του Χ.

Έστω $x \in X - K$ και για κάθε $y \in K$ θέτουμε $\varepsilon_y = \frac{\rho(x,y)}{2}$. Τότε $B(x,\varepsilon_y) \cap B(y,\varepsilon_y) = \varnothing$.

Από τον Ορισμό 1.2.19, εφόσον το Κ είναι συμπαγές και $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B(y,\varepsilon_y)$, έπεται ότι υπάρχουν $y_1, y_2, ..., y_n \in K$ τέτοια, ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\varepsilon_{y_i})$.

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_i}, 1 \le i \le n\}$, οπότε $B(x,\varepsilon) \cap K = \varnothing$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X - K$, επομένως το $X - K$ είναι ανοικτό, οπότε το Κ είναι κλειστό υποσύνολο του Χ.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι το Κ είναι φραγμένο υποσύνολο του Χ.

Αν $K = \varnothing$, τότε, προφανώς, το Κ είναι φραγμένο υποσύνολο του Χ.

Έστω, τώρα, ένα σταθερό $x \in K$. Τότε η οικογένεια $\{B(x,k), k=1, 2, ...\}$ αποτελεί ένα κάλυμμα του Κ, οπότε, εφόσον το Κ είναι συμπαγές υποσύνολο του Χ, από τον Ορισμό 1.2.19, έπεται ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x,k_i).$$

Έστω $M = \max\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, τότε $K \subseteq B(x,M)$, επομένως το Κ είναι φραγμένο υποσύνολο του Χ.

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των συνεχών απεικονίσεων από έναν συμπαγή μετρικό χώρο.

Θεώρημα 1.2.21

Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και Y ένας μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνεχής απεικόνιση $f:X\to Y$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Η εικόνα f(X) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

β) Αν f(X)=Y (δηλαδή η f είναι απεικόνιση «επί»), τότε ο Y είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

γ) Η f είναι *κλειστή* απεικόνιση, δηλαδή αν το K είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το f(K) είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

δ) Αν η f είναι απεικόνιση «1−1» και «επί», τότε η f^{-1} είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη

α) Έστω $(G_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του f(X), όπου $G_i\subseteq Y$, $i\in I$. Τότε $X=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$, δηλαδή τα $f^{-1}(G_i)$, $i\in I$, αποτελούν ένα ανοικτό κάλυμμα του X, εφόσον είναι οι αντίστροφες εικόνες μέσω της f των ανοικτών υποσυνόλων G_i του Y, $i\in I$, και η f είναι συνεχής απεικόνιση (Θεώρημα 1.2.14). Επειδή ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, από τον Ορισμό 1.2.19, έπεται ότι υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $i_1, i_2, ..., i_n\in\mathbb{N}$ τέτοια, ώστε $X=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{i_k})$, οπότε $f(X)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Επομένως το f(X) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

β) Προκύπτει άμεσα ως πόρισμα του (α).

γ) Εφόσον το K είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου X, από την Πρόταση 1.2.19, έπεται ότι το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Επομένως, από το ήδη αποδειχθέν (α), το f(K) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y και έτσι, από την Πρόταση 1.2.20, έπεται ότι το f(K) είναι κλειστό (και μάλιστα φραγμένο) υποσύνολο του Y.

δ) Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.14, αρκεί να αποδείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα $(f^{-1})^{-1}(K)=f(K)$ ενός κλειστού υποσυνόλου K του X είναι κλειστό υποσύνολο του Y, το οποίο όμως είναι ακριβώς το ήδη αποδειχθέν (γ).

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Από το (γ) της προηγούμενης πρότασης προκύπτει άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1.2.22

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:X\to IR$, όπου X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, είναι φραγμένη και μάλιστα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Ο έννοια της συμπάγειας, όπως αυτή δόθηκε μέσω του Ορισμού 1.2.19, βασίζεται στην τοπολογική έννοια του ανοικτού συνόλου και γενικεύεται ακριβώς με τον ίδιο ορισμό σε τοπολογικούς χώρους των οποίων τα ανοικτά σύνολα δεν ορίζονται απαραίτητα μέσω κάποιας μετρικής. Για τις ανάγκες, όμως της διαπραγμάτευσης των εννοιών που συναντώνται στους μετρικούς χώρους ή σε χώρους με νόρμα, στους οποίους η έννοια της σύγκλισης ακολουθιών είναι δεδομένη, θα ήταν απαραίτητος ένας πιο εύχρηστος ορισμός της έννοιας της συμπάγειας. Το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε, χαρακτηρίζει τους συμπαγείς μετρικούς χώρους και χρησιμοποιείται ευρύτατα δίκην ορισμού.

Θεώρημα 1.2.23

Ένας μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι *ακολουθιακά συμπαγής*, δηλαδή αν κάθε ακολουθία του έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Με βάση το Θεώρημα 1.2.23, αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 1.2.24

Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Αναφορικά, τώρα, στους χώρους με νόρμα, η έννοια της συμπάγειας χρησιμοποιείται, μέσω του επόμενου θεμελιώδους θεωρήματος, για να χαρακτηρίσει το χώρο ως προς την αλγεβρική του διάσταση. Τονίζουμε ότι ως *διάσταση* ενός χώρου με νόρμα ορίζεται προφανώς η αλγεβρική του διάσταση ως γραμμικού χώρου. Αποδεικνύεται ότι κάθε χώρος με νόρμα με (πεπερασμένη) διάσταση $n\in IN$ είναι γραμμικά ισόμορφος με τον Ευκλείδειο Χώρο IR^n και επομένως είναι χώρος Banach.

Θεώρημα 1.2.25 (Θεώρημα Riesz)

Ένας χώρος με νόρμα X είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνον αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

Η απόδειξη παραλείπεται.

Από το προηγούμενο Θεώρημα του Riesz και την Πρόταση 1.2.20 είναι προφανές ότι τα συμπαγή υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα σύνολα.

1.3. Η Τοπολογική Ιδιότητα του Σταθερού Σημείου

Στην παρούσα ενότητα, η οποία ολοκληρώνει αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, κεντρική θέση καταλαμβάνει ο ισχυρισμός ότι η ύπαρξη σταθερού σημείου μιας απεικόνισης σε ένα σύνολο είναι μια ιδιότητα του ίδιου του συνόλου. Η ιδέα αυτή ξεκαθαρίζεται με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.3.1

Ένα σύνολο X λέμε ότι έχει την *ιδιότητα του σταθερού σημείου* αν κάθε συνεχής απεικόνιση από το X στον εαυτό του έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Συχνά είναι ευκολότερο να διαπιστώσουμε ότι ένα σύνολο δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, απλά θεωρώντας μια συνεχή απεικόνιση αυτού του συνόλου χωρίς σταθερά σημεία.

Αν θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε πράγματι μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αυτό δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, καθώς για την απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x+\alpha$, όπου $\alpha\neq 0$, δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x)=x$.

Επίσης, παρόμοια, διαπιστώνουμε ότι ένας κύκλος δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, αφού μια στροφή κατά μια γωνία ίση, ας πούμε, κατά $\frac{\pi}{2}$ μεταθέτει κάθε σημείο του κύκλου.

Η έννοια του ομομορφισμού, την οποία ορίζουμε ευθύς, αποτελεί το βασικό εργαλείο, με το οποίο, ιδιότητες, όπως αυτή του σταθερού σημείου, μεταφέρονται από ένα σύνολο σε ένα άλλο χωρίς να χάνουν την ισχύ τους.

Ορισμός 1.3.2

Μία συνεχής ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $f:X\to Y$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y, της οποίας η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1}:Y\to X$ είναι επίσης συνεχής, ονομάζεται *ομομορφισμός*. Τότε οι χώροι X και Y ονομάζονται *ομομορφικοί*.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η έννοια της συνέχειας για απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων καθορίζεται μέσω των ανοικτών συνόλων που ορίζουν τις τοπολογίες των χώρων και μπορεί να περιγραφεί με ένα θεώρημα ακριβώς αντίστοιχο με το Θεώρημα 1.2.14.

Παραδείγματα

1. Το ανοικτό διάστημα $(-1,1)$ είναι ομομορφικό προς το σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, καθώς η απεικόνιση $f:\mathrm{IR}\to(-1,1)$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ είναι ένας ομομορφισμός.

2. Αντίστοιχα, στη γενική περίπτωση, ο Ευκλείδειος Χώρος IR^n είναι ομομορφικός προς την ανοικτή μοναδιαία σφαίρα $B^n(0,1)=\{x\in\mathrm{IR}^n: \|x\|<1\}$, εφόσον η απεικόνιση $f:\mathrm{IR}^n\to B^n(0,1)$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+\|x\|}$ είναι ένας ομομορφισμός.

Η σπουδαιότητα της έννοιας του ομομορφισμού προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε ιδιότητα που ισχύει για ένα σύνολο X, θα ισχύει και για κάθε άλλο σύνολο ομομορφικό προς το X. Τέτοιες ιδιότητες ονομάζονται *τοπολογικά αναλλοίωτες*, ή, απλά, *τοπολογικές ιδιότητες*.

Με το θεώρημα που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι η ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι πράγματι μια τοπολογική ιδιότητα.

Θεώρημα 1.3.1 (Η τοπολογική ιδιότητα του σταθερού σημείου)

Αν το σύνολο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου και το σύνολο Y είναι ομομορφικό προς το X, τότε το σύνολο Y έχει επίσης την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση από το σύνολο Y στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο. Έστω, λοιπόν, $f:Y\to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Εφόσον τα X και Y είναι ομομορφικά, θα υπάρχει ένας ομομορφισμός $g:X\to Y$, οπότε ορίζεται η σύνθεση $g^{-1}\circ f\circ g$, η οποία απεικονίζει το σύνολο X στον εαυτό του και μάλιστα είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. Εφόσον το σύνολο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, θα υπάρχει $x\in X$ τέτοιο, ώστε

$$(g^{-1}\circ f\circ g)(x)=x$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(g(x))=g(x). \tag{1.3.1}$$

Αν $y\in Y$ η εικόνα του x μέσω του ομομορφισμού g, δηλαδή $g(x)=y$, η σχέση (1.3.1) συνεπάγεται ότι

$$f(y)=y,$$

δηλαδή το $y \in Y$ είναι ένα σταθερό σημείο για την απεικόνιση f, οπότε το θεώρημα αποδείχθηκε.

2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BANACH

2.1. Η Αρχή των Απεικονίσεων Συστολής

Μια από τις πλέον βασικές εφαρμογές της έννοιας της πληρότητας ενός μετρικού χώρου θεωρείται η λεγόμενη *Αρχή των Απεικονίσεων Συστολής* που διατυπώνεται μέσω του αντίστοιχου θεωρήματος σταθερού σημείου, το οποίο ετέθη και αποδείχθηκε πρώτα από το Banach το 1922 ως μέρος της διδακτορικής διατριβής του. Το θεώρημα αυτό, όπως θα δούμε και στα επόμενα, βρίσκει πολλές εφαρμογές σε περιπτώσεις ύπαρξης και μοναδικότητας, για παράδειγμα, λύσεων διαφορικών ή ολοκληρωτικών εξισώσεων, αλλά και αλλού.

Διατυπώνουμε πρώτα την έννοια της απεικόνισης συστολής, μέσω του επόμενου ορισμού:

Ορισμός 2.1.1

Μια απεικόνιση f από έναν μετρικό χώρο (X,ρ) στον εαυτό του ονομάζεται *απεικόνιση συστολής* αν υπάρχει σταθερά $0\leq\alpha<1$ τέτοια, ώστε

$$\rho(f(x),f(y))\leq\alpha\rho(x,y)$$

για κάθε $x, y\in X$. Η σταθερά α ονομάζεται *συντελεστής συστολής*.

Ήδη από τον ορισμό της απεικόνισης συστολής γίνεται φανερό ότι αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής, όπως εξασφαλίζει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1

Κάθε απεικόνιση συστολής είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $f:X\to X$ μια απεικόνιση συστολής. Τότε, εξ ορισμού, υπάρχει ο συντελεστής συστολής $0\le\alpha<1$, ώστε $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y)$, για κάθε $x, y\in X$.

Αν $\alpha=0$, τότε προφανώς $\rho(f(x),f(y))=0$, για κάθε $x, y\in X$, δηλαδή η f είναι σταθερή και επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\alpha>0$ και έστω $\varepsilon>0$. Αν θέσουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha}>0$, τότε για κάθε $x, y\in X$ με $\rho(x,y)<\delta$, έπεται ότι $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y)<\alpha\frac{\varepsilon}{\alpha}=\varepsilon$. Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Με βάση τα προηγούμενα συμπεράσματα είμαστε σε θέση, τώρα, να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας σταθερού σημείου μιας απεικόνισης συστολής σε έναν πλήρη μετρικό χώρο.

Θεώρημα 2.1.2 (Σταθερού Σημείου του Banach)

Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f:X\to X$ μια απεικόνιση συστολής. Τότε η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο (δηλ. υπάρχει μοναδικό $x\in X$ τέτοιο, ώστε $f(x)=x$).

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα τυχαίο $x_0\in X$ και ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με

$$x_n=f(x_{n-1}),$$

για κάθε $n=1, 2, \ldots$

Εφόσον η f είναι απεικόνιση συστολής, υπάρχει $0\le\alpha<1$ τέτοιος, ώστε $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y)$, για κάθε $x,y\in X$. Με επαγωγή, αποδεικνύουμε αρχικά ότι

$$\rho(x_{n+1},x_n)\le\alpha^n\rho(x_1,x_0), \tag{2.1.1}$$

για κάθε $n=1, 2, \ldots$

Πράγματι·

Για n=1, η σχέση (2.1.1) γίνεται $\rho(x_2,x_1)\le\alpha\rho(x_1,x_0)$, ή, αφού $x_n=f(x_{n-1})$, n=1, 2, …, ισοδύναμα $\rho(f(x_1),f(x_0))\le\alpha\rho(x_1,x_0)$, που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η σχέση (2.1.1) ισχύει για το n και

Αποδεικνύουμε ότι η σχέση (2.1.1) ισχύει για το n+1, δηλαδή

$$\rho(x_{n+2},x_{n+1})\le\alpha^{n+1}\rho(x_1,x_0).$$

Έχουμε $\rho(x_{n+2},x_{n+1})=\rho(f(x_{n+1}),f(x_n))\le\alpha\rho(x_{n+1},x_n)\le\alpha\cdot\alpha^n\rho(x_1,x_0)=\alpha^{n+1}\rho(x_1,x_0)$.

Επομένως $\rho(x_{n+1},x_n)\le\alpha^n\rho(x_1,x_0)$, για κάθε n=1, 2, …

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Πράγματι· για κάθε m, $n\in\mathbb{N}$ με m>n, από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής ρ, έπεται ότι

$$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_m,x_{m-1})+\rho(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots+\rho(x_{n+1},x_n),$$

ή ισοδύναμα, με βάση τη σχέση (2.1.1),

$$\begin{aligned}\rho(x_m,x_n)&\le\alpha^{m-1}\rho(x_1,x_0)+\alpha^{m-2}\rho(x_1,x_0)+\ldots+\alpha^n\rho(x_1,x_0)\\&=\alpha^n(\alpha^{m-n-1}+\alpha^{m-n-2}+\ldots+1)\rho(x_1,x_0)\\&=\frac{\alpha^n(1-\alpha^{m-n})}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\\&<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).\end{aligned}$$

Επειδή $0\le\alpha<1$, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=0$ και συνεπώς, από την παραπάνω, προκύπτει ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, άρα, εφόσον ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος, υπάρχει $x\in X$ τέτοιο, ώστε $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Τότε το x είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο της f. Πράγματι· επειδή η f είναι συνεχής απεικόνιση και $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, λόγω της μοναδικότητας του ορίου, έπεται ότι

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=x.$$

Για να δείξουμε ότι το x είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της απεικόνισης f, αρκεί να θεωρήσουμε $y\in X$ τέτοιο, ώστε f(y)=y. Τότε

$$\rho(x,y)=\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y).$$

Αν υποθέσουμε ότι $y\ne x$, τότε $\rho(x,y)>0$ και επομένως, από την προηγούμενη, $\alpha\ge1$, άτοπο, εφόσον $0\le\alpha<1$. Επομένως y=x και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Από την προηγούμενη απόδειξη του Θεωρήματος του Banach, είναι σαφές ότι η εύρεση του σταθερού σημείου μιας απεικόνισης συστολής f εξασφαλίζεται μέσω μιας διαδικασίας διαδοχικών προσεγγίσεων ως εξής: Εκκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο x_0 του μετρικού χώρου X, λαμβάνουμε το επόμενο σημείο $x_1=f(x_0)$, απ' αυτό το επόμενο $x_2=f(x_1)$ κ.ο.κ. Σε κάθε βήμα αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας επιτυγχάνεται καλλίτερη προσέγγιση του σταθερού σημείου της απεικόνισης f, με την έννοια ότι η κάθε προσέγγιση βρίσκεται πιο «κοντά» (ως προς τη μετρική ρ) στο σταθερό σημείο της απεικόνισης από ότι η προηγούμενη. Το πρώτο συμπέρασμα του πορίσματος που ακολουθεί επιβεβαιώνει αυτόν ακριβώς τον ισχυρισμό.

Πόρισμα 2.1.3

Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Banach, αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_0\in X$ τυχαίο και $x_n=f(x_{n-1})$, για κάθε n=1, 2, …, έπεται ότι

α) $\rho(x_n,x)\le\alpha\rho(x_{n-1},x)$,

β) $\rho(x_n,x)\le\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)$ («a priori εκτίμηση σφάλματος»)

γ) $\rho(x_n,x)\le\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1},x_n)$ («a posteriori εκτίμηση σφάλματος»)

για κάθε n=1, 2, …, όπου $x\in X$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f και α ο συντελεστής συστολής.

Απόδειξη

α) Επειδή $x_n=f(x_{n-1})$, για κάθε n=1, 2, … και x=f(x), προφανώς

$$\rho(x_n,x)=\rho(f(x_{n-1}),f(x))\le\alpha\rho(x_{n-1},x).$$

β) Στην απόδειξη του Θεωρήματος του Banach δείξαμε ότι για κάθε m, $n\in\mathbb{N}$ με m>n, ισχύει $\rho(x_n,x_m)\le\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)$. Για n σταθερό και $m\to+\infty$, λόγω της συνέχειας της μετρικής ρ, έχουμε

$$\rho(x_n,x)=\lim_{m\to+\infty}\rho(x_n,x_m)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).$$

γ) Για κάθε n=1, 2, … έχουμε

$$\begin{aligned}0\le(1-\alpha)\rho(x_n,x)&=\rho(x_n,x)-\alpha\rho(x_n,x)\\&\le\rho(x_n,x)-\rho(f(x_n),f(x))\end{aligned}$$

$$\leq \rho(x_n,f(x_n))+\rho(f(x_n),x)-\rho(f(x_n),f(x))$$
$$=\rho(f(x_{n-1}),f(x_n))$$
$$\leq \alpha\rho(x_{n-1},x_n).$$

Επομένως $\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1}, x_n)$.

Τα δύο τελευταία συμπεράσματα του προηγούμενου πορίσματος παρέχουν κριτήρια διακοπής αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας, αναφορικά με το σφάλμα της προσέγγισης. Ειδικότερα μέσω της «a priori εκτίμησης σφάλματος» (συμπέρασμα β), εφόσον καθορισθεί εξ αρχής ένα σφάλμα $\varepsilon>0$ της προσέγγισης του σταθερού σημείου x της απεικόνισης f, είναι δυνατόν να εκτιμηθεί το πλήθος n των βημάτων που απαιτούνται στην επαναληπτική διαδικασία, ώστε να επιτευχθεί η συνθήκη $\rho(x_n,x)<\varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach, αναφέρεται στην αξιοσημείωτη περίπτωση ύπαρξης σταθερού σημείου για απεικονίσεις στις οποίες δεν είναι απαραίτητο να υποτεθεί η συνθήκη της συνέχειας.

Θεώρημα 2.1.4

Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f:X\to X$ μια απεικόνιση τέτοια, ώστε η $f^k:X\to X$ για κάποιον θετικό ακέραιο k είναι απεικόνιση συστολής. Τότε η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.

Ο συμβολισμός f^n δηλώνει τη σύνθεση της απεικόνισης f με τον εαυτό της n φορές. Συγκεκριμένα $f^1\equiv f$ και γενικά $f^{n+1}\equiv f\circ f^n$, n=1, 2, …

Απόδειξη

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, εφόσον η f^k είναι απεικόνιση συστολής, θα έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, έστω $x\in X$, δηλαδή $f^k(x)=x$. Τότε

$$f^k(f(x))=f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(x)$$

που σημαίνει ότι το f(x) είναι επίσης ένα σταθερό σημείο για την f^k. Λόγω της μοναδικότητας του x, ως σταθερού σημείου της απεικόνισης συστολής f^k, έπεται ότι f(x)=x, δηλαδή το x είναι ένα σταθερό σημείο της f.

Για τη μοναδικότητά του, αν υποθέσουμε ότι επίσης f(y)=y για κάποιο $y\in X$, τότε, εφαρμόζοντας k−1 φορές την απεικόνιση f, λαμβάνουμε προφανώς ότι $f^k(y)=y$, δηλαδή το y είναι σταθερό σημείο και της f^k, οπότε, λόγω της μοναδικότητας αυτού, έπεται ότι y=x.

2.2. Συναρτήσεις Συστολής Ορισμένες σε Κλειστό Διάστημα

Το πλέον τετριμμένο παράδειγμα εφαρμογής της Αρχής των Απεικονίσεων Συστολής αναφέρεται σε πραγματικές συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ που πληρούν μια συνθήκη Lipschitz

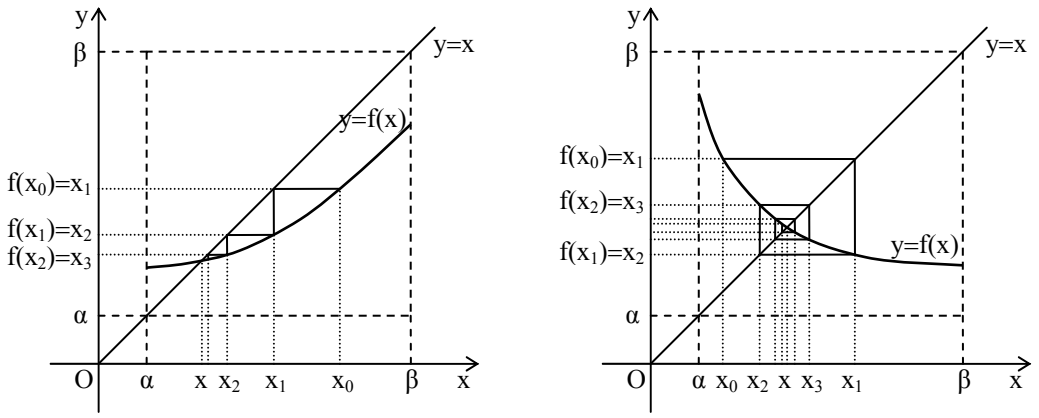
$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$$

για κάθε $x, y\in[\alpha,\beta]$, με $0\le k<1$.

Προφανώς κάθε συνάρτηση f αυτής της μορφής είναι συστολή που απεικονίζει το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ στον εαυτό του και επομένως, εφόσον το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ (άρα και το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$) με τη συνήθη ευκλείδεια μετρική που ορίζεται από την απόλυτη τιμή είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, η εξίσωση

$$f(x)=x,$$

θα έχει μοναδική λύση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία βρίσκεται ως όριο της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για αυθαίρετο $x_0\in[\alpha,\beta]$ και $x_n=f(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$



Εικόνα 1 – Η επαναληπτική μέθοδος για την προσέγγιση του σταθερού σημείου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με $0<f'(x)<1$ και $-1<f'(x)<0$ αντίστοιχα

Στην ειδική περίπτωση, στην οποία η συνάρτηση f υποτεθεί παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, μια ικανή συνθήκη για να πληρείται η συνθήκη συστολής είναι να υπάρχει κάποιος $0\le k<1$ τέτοιος, ώστε $|f'(x)|\le k<1$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Πράγματι· από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, για κάθε $x, y\in[\alpha,\beta]$, υπάρχει κάποιο $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$, ή $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|\le k|x-y|$. Η Εικόνα 1 παραπάνω περιγράφει την πορεία των διαδοχικών προσεγγίσεων του σταθερού σημείου της συνάρτησης f στις περιπτώσεις $0<f'(x)<1$ και $-1<f'(x)<0$.

Ας δούμε, τώρα, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής του προηγούμενου συμπεράσματος στον υπολογισμό του ορίου της πολύ ενδιαφέρουσας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_1=1$ και $x_{n+1}=\dfrac{2+x_n}{1+x_n}$, n=1, 2, ...

Εφαρμόζοντας βασικά θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού μπορούμε, σχετικά εύκολα, να αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα και το όριό της είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2=2$, δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\sqrt{2}\,.$$

Απ' την άλλη πλευρά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπως αυτή ορίσθηκε παραπάνω, αποτελούν τις διαδοχικές προσεγγίσεις του σταθερού σημείου της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{2+x}{1+x},$$

ας πούμε στο διάστημα [1,2]. Πράγματι· η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο [1,2] με

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

για κάθε $1\le x\le 2$ και μάλιστα

$$|f'(x)|=\frac{1}{(1+x)^2}\le\frac{1}{4},$$

για κάθε $1\le x\le 2$.

Άρα, η f είναι μια συνάρτηση συστολής του διαστήματος [1,2] στον εαυτό του και ως εκ τούτου, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των διαδοχικών προσεγγίσεων θα συγκλίνει στο σταθερό σημείο

$$x=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{2+x}{1+x}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

της f, εφόσον $x\in[1,2]$.

Ανεξάρτητα, όμως, από την εφαρμογή του συμπεράσματος του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Banach, οι ίδιες τεχνικές που εφαρμόζονται στην απόδειξή του μπορούν να χρησιμοποιηθούν σχεδόν αυτούσιες, ώστε να αποδείξουμε ότι η ακο-

λουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_1=1$ και $x_{n+1}=\dfrac{2+x_n}{1+x_n}$, n=1, 2, ... είναι βασική και επομένως συγκλίνουσα στο IR.

Ο συντελεστής συστολής $k=\dfrac{1}{4}$, που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε αρχικά ότι $|x_{n+1}-x_n|\le\dfrac{1}{4^{n-1}}|x_2-x_1|$, δηλαδή

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}},\ n=1,2,\ldots \tag{2.2.1}$$

Πράγματι·

Για n=1, η σχέση 2.2.1 ισχύει προφανώς.

Υποθέτουμε ότι η σχέση 2.2.1 ισχύει για το n και

Αποδεικνύουμε ότι η σχέση 2.2.1 ισχύει για το n+1, δηλαδή

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}|x_{n+2}-x_{n+1}|&=\left|1+\frac{1}{1+x_{n+1}}-1-\frac{1}{1+x_n}\right|\\&=\frac{|x_{n+1}-x_n|}{(1+x_{n+1})(1+x_n)}\\&\le\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n}\end{aligned}$$

εφόσον $x_{n+1}=\dfrac{2+x_n}{1+x_n}=1+\dfrac{1}{1+x_n}>1$, για κάθε n=1, 2, ...

Έστω, τώρα, m, n∈IN με m>n, τότε

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n|\\&\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{m-2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{m-3}}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{m-n-1}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^{m-n}}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4^{n}} \left(1 - \frac{1}{4^{m-n}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4^{n}}.$$

Εφόσον, όμως, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, αν θεωρήσουμε ε>0, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε $\frac{1}{4^n} < 6\varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως, από την τελευταία, προκύπτει ότι

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

για κάθε $m > n \geq n_0$, δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική και επομένως συγκλίνουσα.

2.3. Απεικονίσεις Συστολής και Γραμμικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται ώστε να είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου του Banach στις περιπτώσεις επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος της μορφής

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}. \tag{2.3.1}$$

Αν θέσουμε $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ και $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, το σύστημα (2.3.1) παίρνει τη μορφή της εξίσωσης

$$Ax = \beta, \tag{2.3.2}$$

ή ισοδύναμα

$$(I_n - A)x + \beta = x, \tag{2.3.3}$$

όπου I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$.

Είναι προφανές ότι η εξίσωση (2.3.2) είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα εύρεσης σταθερού σημείου για την απεικόνιση $F:IR^n \to IR^n$ με $F(x)=(I_n-A)x+\beta$.

Το ερώτημα που τίθεται εδώ είναι να βρούμε τις συνθήκες εκείνες που πρέπει να πληροί ο πίνακας A, ώστε η απεικόνιση F να είναι μια απεικόνιση συστολής. Είναι επομένως φανερό ότι, αν θεωρήσουμε το μετρικό χώρο (IR^n,ρ), η ύπαρξη μιας σταθεράς συστολής $0\le\alpha<1$ τέτοιας, ώστε $\rho(F(x),F(y))\le\alpha\rho(x,y)$, θα εξαρτάται από την επιλογή της μετρικής ρ. Για το σκοπό αυτό, εξετάζουμε τρεις από τις γνωστές μετρικές στο χώρο IR^n, στις οποίες αναφερθήκαμε στο Κεφάλαιο 1.

α) $$\rho_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i|,\ 1\le i\le n\}.$$

Τότε

$$\rho_\infty(F(x),F(y))=\rho_\infty((I_n-A)x+\beta,(I_n-A)y+\beta)=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})(x_j-y_j)\right|$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\left|x_j-y_j\right|\le\max_{1\le i\le n}\left\{\underbrace{\max_{1\le j\le n}\left|x_j-y_j\right|}_{\rho_\infty(x,y)}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\right\}$$

$$=\rho_\infty(x,y)\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|,$$

όπου $\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{αν } i=j\\ 0, \text{αν } i\ne j\end{cases}$ το δέλτα του Kronecker.

Από την προηγούμενη, λοιπόν, συνεπάγεται ότι, με τη συγκεκριμένη μετρική, για να έχει το σύστημα (2.3.1) μοναδική λύση, αρκεί ο πίνακας A να είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\le\alpha<1,\ i=1,2,\dots,n. \tag{2.3.4}$$

β) $$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|.$$

Τότε

$$\rho_1(x,y)=\rho_1((I_n-A)x+\beta,(I_n-A)y+\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})(x_j-y_j)\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\left|x_j-y_j\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{1\le j\le n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j-y_j\right|}_{\rho_1(x,y)}\right)$$

$$\le\rho_1(x,y)\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|.$$

Επομένως, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, για να έχει το σύστημα (2.3.1) μοναδική λύση, όταν θεωρηθεί η απεικόνιση F στο συγκεκριμένο μετρικό χώρο, αρκεί ο πίνακας A να είναι τέτοιος, ώστε

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\delta_{ij}-\alpha_{ij}\right|\le\alpha<1\,,\ j=1,2,\ldots,n. \tag{2.3.5}$$

γ) $$\rho_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τότε

$$\rho_2^2(F(x),F(y))=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})(x_j-y_j)\right\}^2\le\rho_2^2(x,y)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})^2$$

όπως προκύπτει από την ανισότητα Cauchy–Schwartz.

Επομένως, μια ικανή συνθήκη, ώστε η F να είναι απεικόνιση συστολής στο συγκεκριμένο μετρικό χώρο, είναι η

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})^2\le\alpha<1\,. \tag{2.3.6}$$

Αν συνοψίσουμε, λοιπόν, όλα τα προηγούμενα μπορούμε να εξαγάγουμε το συμπέρασμα ότι κάθε μια από τις συνθήκες (2.3.4), (2.3.5) και (2.3.6) είναι ικανή ώστε, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, να εξασφαλίσει την ύπαρξη ενός μοναδικού σημείου $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ για το οποίο $F(x)=x$, ή, όπως είδαμε, $Ax=\beta$.

Σε αυτήν την περίπτωση, η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων για την επιθυμητή λύση θα έχει τη μορφή

$$x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$
$$x^{(1)} = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{(k)} = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

όπου το $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ είναι τυχαίο στοιχείο του IR^n και

$$x^{(k)}=F(x^{(k-1)})=(I_n-A)x^{(k-1)}+\beta,\ k=1, 2, \ldots$$

δηλαδή

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha_{ij}) x_j^{k-1} + \beta_i,\ i=1, 2, \ldots, n,\ k=1, 2, \ldots$$

2.4. Διαφορικές και Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Στις προηγούμενες ενότητες παραθέσαμε δύο από τα απλούστερα παραδείγματα εφαρμογής της αρχής των απεικονίσεων συστολής σε μονοδιάστατους χώρους και χώρους n διαστάσεων. Όμως, οι πιο ουσιαστικές εφαρμογές της αρχής των απεικονίσεων συστολής στην ανάλυση απαντώνται στους απειροδιάστατους χώρους των συναρτήσεων. Στα επόμενα θα δείξουμε πώς με τη βοήθεια αυτής της αρχής μπορούμε να λάβουμε θεωρήματα που αφορούν στην ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων για μερικούς τύπους διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Θεώρημα 2.4.1 (Picard)

Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο G του 2-διάστατου Ευκλείδειου χώρου IR^2 και μια συνεχή συνάρτηση $f:G\to IR$, η οποία ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz αναφορικά με τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $M>0$ τέτοια, ώστε

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le M|y_1-y_2| \text{ για κάθε } (x,y_1), (x,y_2)\in G$$

Τότε, για κάθε $(x_0,y_0)\in G$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε στο κλειστό διάστημα $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

έχει μοναδική λύση

Απόδειξη

Έστω $(x_0,y_0)\in G$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε η ολοκληρωτική εξίσωση

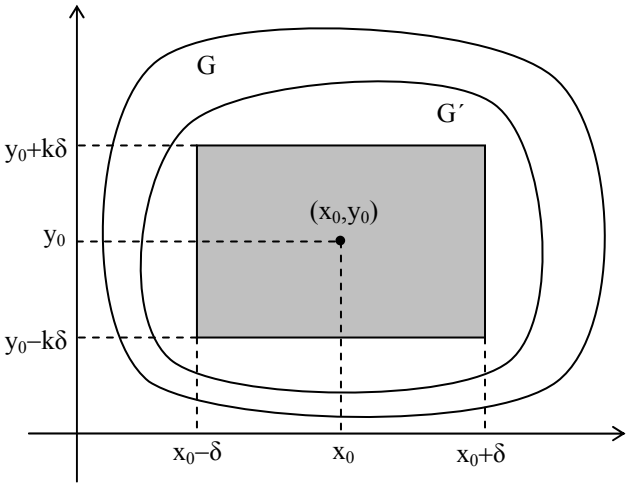
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

που είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα (2.4.1) έχει μοναδική λύση στο κλειστό διάστημα $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (x_0,y_0), υπάρχει μια περιοχή $G'\subseteq G$ που περιέχει το σημείο (x_0,y_0) στην οποία η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $k>0$ τέτοιος, ώστε $|f(x,y)|\le k$, για κάθε $(x,y)\in G'$. Μπορούμε, τώρα να επιλέξουμε ένα $\delta>0$ κατάλληλα μικρό, ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθοι περιορισμοί:

1) $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-k\delta,y_0+k\delta]\subseteq G'$ και

2) $M\delta<1$.



Εικόνα 2 – Η περιοχή $[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-k\delta,y_0+k\delta]$ στην οποία το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.4.1) έχει μοναδική λύση

Ακολούθως συμβολίζουμε με A το χώρο των συνεχών συναρτήσεων g που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$ και είναι τέτοιες, ώστε $|g(x)-y_0|\le k\delta$, δηλαδή

$$A=\{g\in C(I):|g(x)-y_0|\le k\delta, \text{ για κάθε } x\in I\}$$

και τη γνωστή μετρική

$$\rho_\infty(g_1,g_2)=\sup\{|g_1(x)-g_2(x)|, x\in I\}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο (A,ρ_∞) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Ως

προς αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.16, αρκεί να αποδείξουμε ότι το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $(C(I),\rho_\infty)$. Πράγματι· έστω (g_n) μια ακολουθία στο A και $g\in C(I)$ έτσι, ώστε $g_n \xrightarrow{\rho_\infty} g$, καθώς $n\to+\infty$. Άρα, για κάθε $x\in I$ έπεται $g_n(x)\to g(x)$, καθώς $n\to+\infty$, οπότε (αφαιρώντας το y_0) λαμβάνουμε $|g_n(x)-y_0|\to|g(x)-y_0|$, καθώς $n\to+\infty$. Εφόσον $|g_n(x)-y_0|\le k\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in I$, τότε $|g(x)-y_0|\le k\delta$ για κάθε $x\in I$, δηλαδή $g\in A$, άρα το A είναι κλειστό.

Για κάθε $g\in A$ θεωρούμε την απεικόνιση που ορίζεται από τον τύπο

$$\big(T(g)\big)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,g(t))dt,$$

για κάθε $x\in I$.

Παρατηρούμε ότι η T είναι συνεχής (στην πραγματικότητα, διαφορίσιμη) και μάλιστα $T(g)\in A$ δηλαδή $T:A\to A$, εφόσον, για κάθε $x\in I$ ισχύει

$$\left|T(g)(x)-y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t,g(t)\big)dt\right| \le k\left|x-x_0\right| \le k\delta .$$

Τέλος, αν g_1 και $g_2\in A$, τότε

$$\begin{aligned}
\rho_\infty\big(T(g_1)-T(g_2)\big) &= \sup\left\{\left|T(g_1)-T(g_2)\right| : x\in I\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\int_{x_0}^{x} f\big(t,g_1(t)\big)dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t,g_2(t)\big)dt\right| : x\in I\right\}\\
&\le \sup\left\{\left|\int_{x_0}^{x} \left|f\big(t,g_1(t)\big)-f\big(t,g_2(t)\big)\right|dt\right| : x\in I\right\}\\
&\le \sup\left\{\left|\int_{x_0}^{x} M\left|g_1(t)-g_2(t)\right|dt\right| : x\in I\right\}\\
&\le \sup\left\{\left|\int_{x_0}^{x} M\rho_\infty(g_1,g_2)dt\right| : x\in I\right\}\\
&= \sup\left\{M\rho_\infty(g_1,g_2)\left|x-x_0\right| : x\in I\right\}\\
&= M\delta\rho_\infty(g_1,g_2)
\end{aligned}$$

και επειδή $M\delta<1$, η απεικόνιση T είναι συστολή, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach θα έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g\in A$ τέτοια, ώστε $g=T(g)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$ ως λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t,y(t)\big)dt$, ή ισοδύναμα, του προβλήματος αρχικής τιμής (2.4.1).

Παρατηρήσεις

1. Όπως είδαμε στη διατύπωση αλλά και στην απόδειξη του Θεωρήματος του Picard καθοριστικής σημασίας ρόλο παίζει η συνθήκη Lipschitz για τη συνάρτηση f(x,y) που αφορά στη δεύτερη μεταβλητή y. Αυτό μπορεί να φαίνεται κάπως δυσνόητο, αλλά για τους σκοπούς μας, είναι αρκετό να παρατηρήσουμε ότι μια ικανή συνθήκη για να ισχύει αυτή είναι να υπάρχει η μερική παράγωγος f_y της f ως προς y και να είναι συνεχής στο σύνολο G΄. Έτσι, αν σταθεροποιήσουμε τη μεταβλητή x, μπορούμε να φανταστούμε τη συνάρτηση f(x,y) ως μια συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής, της y και να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Πράγματι· σ' αυτήν την περίπτωση, για κάθε δύο διαφορετικές τιμές y_1 και y_2 της μεταβλητής y, υπάρχει κάποιο z μεταξύ y_1 και y_2 τέτοιο, ώστε

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|f_y(x,z)|\cdot|y_1-y_2|\le M|y_1-y_2|.$$

2. Από τη χρήση του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach στην απόδειξη του Θεωρήματος Picard, γίνεται φανερό ότι η επιθυμητή λύση g του προβλήματος αρχικής τιμής (2.4.1) βρίσκεται ως όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με g_0 αυθαίρετη συνάρτηση και

$$g_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, g_{n-1}(t)\big)dt \text{ , } n=1, 2, \ldots$$

ώστε, βέβαια, $|g_n(x)-y_0|\le k\delta$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in I$.

Τα προηγούμενα μπορούν να αποσαφηνιστούν καλλίτερα με τη βοήθεια του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = y - x$ με αρχική συνθήκη y(0)=0. Σκοπός μας είναι, χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την απόδειξη του Θεωρήματος Picard, να βρούμε μια λύση για το προηγούμενο πρόβλημα αρχικής τιμής που να εφαρμόζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το 0.

Μπορούμε, κατ' αρχάς, να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

της οποίας η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

Εδώ, έχουμε P(x)=–1 και Q(x)=–x, άρα

$$\int P(x)dx = -\int dx = -x$$

και

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -xe^{-x}dx = \int x(e^{-x})'dx = xe^{-x} - \int e^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x}.$$

Έτσι η γενική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y=e^{x}(c+xe^{-x}+e^{-x})=ce^{x}+x+1.$$

Η λύση αυτή, για να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη y(0)=0, πρέπει να είναι τέτοια, ώστε $ce^{0}+0+1=0$, δηλαδή c=–1. Επομένως η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικής τιμής είναι η συνάρτηση $y=1+x-e^{x}$.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας τη διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων που περιγράψαμε στην παρατήρηση 2.

Επιλέγουμε μια περιοχή G΄ που περιέχει το σημείο (0,0) στο εσωτερικό της και έστω ότι G΄=[–1,1]×[–1,1]. Επειδή |f(x,y)|=|y–x|≤|x|+|y|≤2, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι k=2. Επίσης, εφόσον $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|y_1-y_2|$ στο G΄, η συνθήκη Lipschitz θα ικανοποιείται για M=1. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε (χρησιμοποιώντας την παρατήρηση 1) διαπιστώνοντας ότι $|f_y(x,y)|=1$ στο G΄.

Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος Picard, επιλέγουμε ένα δ>0 τέτοιο, ώστε

α) Mδ<1 και

β) [–δ,δ]×[–kδ,kδ]⊆G΄

Μπορούμε αυθαίρετα, να επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{2}$, οπότε με δεδομένο ότι M=1 και k=2, οι προηγούμενες συνθήκες πράγματι ικανοποιούνται, εφόσον

α) $M\delta = \frac{1}{2} < 1$ και

β) $[-\delta,\delta]\times[-k\delta,k\delta] = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times[-1,1] \subseteq [-1,1]\times[-1,1] = G'$.

Επομένως, κατ' αντιστοιχία με την απόδειξη του Θεωρήματος Picard, έχουμε

$I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ και $A=\{g\in C(I):|g(x)-0|\le k\delta\}=\{g\in C(I):|g(x)|\le 1$ για κάθε $x\in I\}$.

Μένει τώρα να επιλέξουμε κάποια συνάρτηση $g_0\in A$ ως αρχική προσέγγιση της επιθυμητής λύσης. Για απλότητα επιλέγουμε τη g_0 ως τη σταθερή συνάρτηση 0 στο I, δηλαδή $g_0(x)=0$, για κάθε $x\in I$.

Ερχόμαστε, τώρα, στον υπολογισμό των διαδοχικών προσεγγίσεων της επιθυμητής λύσης μέσω των τύπων

$$g_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(t,g_{n-1}(t)\big)dt\ ,\ n=1,2,\ldots$$

Έχουμε

$$g_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\big(t,g_0(t)\big)dt=0+\int_0^x f(t,0)dt=\int_0^x(-t)dt=-\frac{x^2}{2}$$

$$g_2(x)=0+\int_0^x f\left(t,-\frac{t^2}{2}\right)dt=\int_0^x\left(-\frac{t^2}{2}-t\right)dt=-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}$$

$$g_3(x)=\int_0^x f\left(t,-\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}\right)dt=\int_0^x\left(-\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}-t\right)dt=-\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}$$

οπότε γενικά,

$$g_n(x)=-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\ n=1,2,\ldots$$

και οι συναρτήσεις $g_n(x)$ συγκλίνουν (ομοιόμορφα) στη λύση που αναζητούμε.

Μπορούμε εύκολα, τώρα, να αναγνωρίσουμε ότι οι συναρτήσεις $g_n(x)$ είναι ακριβώς τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{x^n}{n!}\right)=1+x-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x-e^x$,

επομένως η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y-x\\ y(0)=0\end{cases}$$

είναι η συνάρτηση

$$g(x)=1+x-e^x$$

στο διάστημα $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Βέβαια, είτε με άμεση αντικατάσταση, είτε από τη γενική λύση που βρήκαμε εφαρμόζοντας τον τύπο επίλυσης της γραμμικής διαφορικής εξί-

σωσης πρώτης τάξης, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η λύση αυτή είναι έγκυρη σε ολόκληρο το IR.

Ακόμα, όμως και στην περίπτωση που δεν είναι εφικτό να βρούμε έναν απλό τύπο για να εκφράσουμε το όριο των $g_n(x)$, μπορούμε να κάνουμε κάποιες συγκεκριμένες προσεγγίσεις. Από τον τύπο που μας δίνει την «a priori εκτίμηση σφάλματος» (Πόρισμα 2.1.3) έχουμε ότι $\rho_\infty(g_n, g) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho_\infty(g_0, g_1)$. Εδώ έχουμε ότι $\alpha = M\delta = \frac{1}{2}$, επομένως

$$\rho_\infty(g_n, g) \le \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\rho_\infty(g_0, g_1) = \frac{1}{2^{n-1}}\sup\left\{\left|0-\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right| : x \in I\right\} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε $g_n(x)$ απέχει από τη $g(x)=1+x-e^x$ στο διάστημα $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ απόσταση $\frac{1}{2^{n+2}}$.

Ας τονίσουμε, ως τελική παρατήρηση, ότι η επιθυμητή λύση g προσεγγίζεται μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας που περιγράψαμε παραπάνω ανεξάρτητα από την αρχική επιλογή της συνάρτησης g_0. Η μόνη προϋπόθεση είναι $g_0 \in A$, δηλαδή, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, $|g_0(x)| \le 1$, για κάθε $x \in I$. Επομένως, εφόσον $|\sin x| \le 1$, θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε επιλέξει ως $g_0(x)=\sin x$, και αφού το σταθερό σημείο της συνάρτησης T είναι μοναδικό, η διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων θα έπρεπε να οδηγήσει στην ίδια λύση g. Ενδεχομένως, η μορφή των ενδιάμεσων προσεγγίσεων g_n, να είναι διαφορετική απ' ό,τι προηγουμένως, αλλά το σημαντικό εδώ είναι ότι, ούτως ή άλλως, η ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση g.

Η Αρχή των Απεικονίσεων συστολής μπορεί να εφαρμοσθεί για να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης της ακόλουθης ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$f(x) = \lambda\int_\alpha^\beta F(x,y)f(y)dy + \varphi(x), \qquad (2.4.2)$$

στην οποία η φ και ο πυρήνας F είναι δοθείσες πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στα $[\alpha,\beta]$ και $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$ αντίστοιχα, f είναι η ζητούμενη συνάρτηση και λ είναι μια αυθαίρετη πραγματική παράμετρος.

Η παραπάνω εξίσωση (2.4.2) ονομάζεται *μη ομογενής γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση του Fredholm* και όπως θα δούμε, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, μέσω του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Banach, μόνο στην περίπτωση που η παράμετρος λ επιλεγεί έτσι, ώστε να παίρνει κατάλληλα μικρές τιμές.

Εφόσον η συνάρτηση F είναι συνεχής στο συμπαγές $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$, από το Πόρισμα 1.2.22, έπεται ότι θα είναι φραγμένη σ' αυτό, δηλαδή θα υπάρχει σταθερά $k>0$ τέτοια, ώστε $|F(x,y)|\leq k$, για κάθε $x, y\in[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε, τώρα, το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C([\alpha,\beta])$ με τη μετρική ρ_∞, η οποία, για κάθε $f_1, f_2\in C([\alpha,\beta])$, ορίζεται ως

$$\rho_\infty(f_1,f_2)=\sup\{|f_1(x)-f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\}.$$

Γνωρίζουμε ότι ο χώρος $(C([\alpha,\beta]),\rho_\infty)$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος, οπότε ορίζουμε την απεικόνιση $T:C([\alpha,\beta])\to C([\alpha,\beta])$, που, για κάθε $f\in C([\alpha,\beta])$, ορίζεται ως

$$\big(T(f)\big)(x)=\lambda\int_\alpha^\beta F(x,y)f(y)dy+\varphi(x)$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Τότε, για κάθε $f_1, f_2\in C([\alpha,\beta])$, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho_\infty\big(T(f_1),T(f_2)\big)&=\sup\Big\{\big|\big(T(f_1)\big)(x)-\big(T(f_2)\big)(x)\big|:x\in[\alpha,\beta]\Big\}\\&=\sup\Big\{|\lambda|\cdot\Big|\int_\alpha^\beta F(x,y)\big[f_1(y)-f_2(y)\big]dy\Big|:x\in[\alpha,\beta]\Big\}\\&\leq|\lambda|\sup\Big\{\int_\alpha^\beta|F(x,y)|\cdot|f_1(y)-f_2(y)|dy:x\in[\alpha,\beta]\Big\}\\&\leq|\lambda|k(\beta-\alpha)\sup\Big\{|f_1(y)-f_2(y)|:y\in[\alpha,\beta]\Big\}\\&=|\lambda|k(\beta-\alpha)\rho_\infty(f_1,f_2).\end{aligned}$$

Έτσι, όπως προκύπτει από την προηγούμενη, αν $|\lambda|<\dfrac{1}{k(\beta-\alpha)}$, η T είναι πράγματι απεικόνιση συστολής, οπότε με βάση το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f\in C([\alpha,\beta])$ τέτοια, ώστε $f=T(f)$, δηλαδή για κάθε $|\lambda|<\dfrac{1}{k(\beta-\alpha)}$ η ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.2) του Fredholm έχει μια μοναδική συνεχή λύση.

Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C([\alpha,\beta])$ της οποίας το όριο (ως προς τη μετρική ρ_∞) είναι η αυτή η λύση, ορίζεται για $f_0\in C([\alpha,\beta])$ αυθαίρετη συνάρτηση και

$$f_n(x) = \lambda\int_\alpha^\beta F(x,y)f_{n-1}(y)dy + \varphi(x),$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, n=1, 2, ...

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την περίπτωση της μη γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης της μορφής

$$f(x) = \lambda\int_\alpha^\beta F(x,y,f(y))dy + \varphi(x),$$

στην οποία οι δοθείσες συναρτήσεις $\varphi(x)$ και $F(x,y,z)$ είναι ορισμένες και συνεχείς για x, y και $z\in[\alpha,\beta]$ και επιπλέον η F ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz ως προς την τρίτη μεταβλητή z, δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά k>0 τέτοια, ώστε

$$|F(x,y,z_1)-F(x,y,z_2)\le k|z_1-z_2|, \text{ για κάθε } x,\ y,\ z_1 \text{ και } z_2\in[\alpha,\beta].$$

Όπως προηγουμένως, θα δούμε ότι, για κατάλληλες τιμές της αυθαίρετης παραμέτρου λ, η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Πράγματι· στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων με την μετρική της προηγούμενης περίπτωσης, για κάθε $f\in C([\alpha,\beta])$, ορίζουμε την απεικόνιση $T:C([\alpha,\beta])\to C([\alpha,\beta])$, μέσω της

$$\big(T(f)\big)(x) = \lambda\int_\alpha^\beta F\big((x,y,f(y)\big)dy + \varphi(x),$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, και παρατηρούμε ότι, για κάθε f_1, $f_2\in C([\alpha,\beta])$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\rho_\infty\big(T(f_1),T(f_2)\big) &= \sup\left\{\left|\big(T(f_1)\big)(x)-\big(T(f_2)\big)(x)\right| : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\lambda\right|\left|\int_\alpha^\beta\big[F\big(x,y,f_1(y)\big)-F\big(x,y,f_2(y)\big)\big]dy\right| : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&\le |\lambda|\sup\left\{\int_\alpha^\beta\left|F\big(x,y,f_1(y)\big)-F\big(x,y,f_2(y)\big)\right|dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&\le |\lambda|\sup\left\{\int_\alpha^\beta k\left|f_1(y)-f_2(y)\right|dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&\le |\lambda|k(\beta-\alpha)\sup\left\{\left|f_1(y)-f_2(y)\right| : y\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&= |\lambda|k(\beta-\alpha)\rho_\infty(f_1,f_2),
\end{aligned}$$

οπότε, για $|\lambda|<\dfrac{1}{k(\beta-\alpha)}$ η T είναι απεικόνιση συστολής, οπότε θα έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f\in C([\alpha,\beta])$ τέτοια, ώστε f=T(f). Επομένως, για κάθε $|\lambda|<\dfrac{1}{k(\beta-\alpha)}$ η δοθείσα ολοκληρωτική έχει μια μοναδική

συνεχή λύση στο [α,β].

Ως τελευταία εφαρμογή της Αρχής των Απεικονίσεων Συστολής στις ολοκληρωτικές εξισώσεις θα θεωρήσουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$f(x) = \lambda\int_{\alpha}^{x} F(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

που είναι γνωστή ως *μη ομογενής γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση του Volterra*.

Όπως και στην ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, οι συναρτήσεις φ και F ορίζονται για x, y∈[α,β] και είναι συνεχείς, f είναι η ζητούμενη συνάρτηση και λ μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Σε αντίθεση με την ολοκληρωτική εξίσωση του Fredholm, η εξίσωση Voltrerra έχει στο άνω άκρο ολοκλήρωσης τη μεταβλητή x και μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Fredholm, με την προϋπόθεση ότι F(x,y)=0 για y>x. Θα διαπιστώσουμε ότι η λύση της εξίσωσης του Volterra βρίσκεται πάντα και είναι μοναδική συνεχής συνάρτηση στο [α,β] ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου λ.

Πράγματι· εφόσον η συνάρτηση F είναι συνεχής στο [α,β]×[α,β], θα είναι φραγμένη σ' αυτό, δηλαδή θα υπάρχει σταθερά k>0 τέτοια, ώστε |F(x,y)|≤k, για κάθε x, y∈[α,β]. Επιπλέον στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων C([α,β]) με τη μετρική ρ_∞ που, ως γνωστόν, ορίζεται ως

$$\rho_\infty(f_1,f_2)=\sup\{|f_1(x)-f_2(x)|,\ x\in[\alpha,\beta]\},$$

για κάθε f_1, f_2∈C([α,β]), ορίζουμε την απεικόνιση T:C([α,β])→C([α,β]), μέσω της

$$\big(T(f)\big)(x) = \lambda\int_{\alpha}^{x} F(x,y)f(y)dy + \varphi(x),$$

για κάθε f∈C([α,β]) και για κάθε x∈[α,β] και παρατηρούμε ότι αν f_1 και f_2 είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο κλειστό διάστημα [α,β], τότε

$$\begin{aligned}
\rho_\infty\big(T(f_1),T(f_2)\big) &= \sup\Big\{\big|\big(T(f_1)(x)-T(f_1)(x)\big)\big| : x\in[\alpha,\beta]\Big\}\\
&= \sup\left\{|\lambda|\left|\int_{\alpha}^{x} F(x,y)\big[f_1(y)-f_2(y)\big]dy\right| : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&= |\lambda|\sup\left\{\int_{\alpha}^{x}|F(x,y)||f_1(y)-f_2(y)|dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&\le |\lambda|\sup\left\{\int_{\alpha}^{x} k\sup\big\{|f_1(y)-f_2(y)| : y\in[\alpha,\beta]\big\}dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\
&= |\lambda|\sup\big\{k(x-\alpha)\rho_\infty(f_1,f_2) : x\in[\alpha,\beta]\big\}\\
&= |\lambda|k(\beta-\alpha)\rho_\infty(f_1,f_2).
\end{aligned}$$

Κατ' αντιστοιχία, λοιπόν με την ολοκληρωτική εξίσωση του Fredholm, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η απεικόνιση T είναι συστολή για $|\lambda| < \frac{1}{k(\beta-\alpha)}$, επομένως, με αυτήν την προϋπόθεση η ολοκληρωτική εξίσωση του Volterra έχει μοναδική λύση. Το γεγονός, όμως, ότι το άνω άκρο στο ολοκλήρωμα στην εξίσωση του Volterra δεν είναι σταθερά, αλλά η μεταβλητή x μας δίνει το πλεονέκτημα να διαπιστώσουμε ότι αυτή έχει τελικά μία μοναδική λύση ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου λ. Ως προς αυτό παρατηρούμε ότι για τη σύνθεση $T^2=T\circ T$ των απεικονίσεων T, που ορίζεται μέσω της

$$\begin{aligned}\left(T^2(f)\right)(x) &= \left(T(T(f))\right)(x) = \lambda\int_\alpha^x F(x,y)\left(\lambda\int_\alpha^y F(y,z)f(z)dz + \varphi(y)\right)dy + \varphi(x)\\ &= \lambda^2\int_\alpha^x F(x,y)\int_\alpha^y F(y,z)f(z)dzdy + \lambda\int_\alpha^x F(x,y)\varphi(y)dy + \varphi(x)\\ &= \lambda^2\int_\alpha^x F(x,y)\int_\alpha^y F(y,z)f(z)dzdy + \left(T(\varphi)\right)(x),\end{aligned}$$

για κάθε $f\in C([\alpha,\beta])$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, αν $f_1, f_2\in C([\alpha,\beta])$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\rho_\infty\left(T^2(f_1),T^2(f_2)\right) &= \sup\left\{\lambda^2\left|\int_\alpha^x F(x,y)\int_\alpha^y F(y,z)[f_1(z)-f_2(z)]dzdy\right| : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &\le \lambda^2\sup\left\{\int_\alpha^x |F(x,y)|\left|\int_\alpha^y F(y,z)[f_1(z)-f_2(z)]dz\right|dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &\le \lambda^2\sup\left\{\int_\alpha^x k\int_\alpha^y |F(y,z)||f_1(z)-f_2(z)|dzdy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &\le \lambda^2\sup\left\{\int_\alpha^x k\int_\alpha^y k\sup\{|f_1(z)-f_2(z)| : z\in[\alpha,\beta]\}dzdy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &= \lambda^2k^2\rho_\infty(f_1,f_2)\sup\left\{\int_\alpha^x (y-\alpha)dy : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &= \lambda^2k^2\rho_\infty(f_1,f_2)\sup\left\{\frac{(x-\alpha)^2}{2} : x\in[\alpha,\beta]\right\}\\ &= \frac{\lambda^2k^2(\beta-\alpha)^2}{2}\rho_\infty(f_1,f_2),\end{aligned}$$

και γενικά, για τη σύνθεση $T^n=T\circ T^{n-1}$, n=2, 3, ..., ομοίως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\rho_\infty\left(T^n(f_1),T^n(f_2)\right) \le \frac{|\lambda|^n k^n(\beta-\alpha)^n}{n!}\rho_\infty(f_1,f_2),$$

για κάθε $f_1, f_2\in C([\alpha,\beta])$ και n=2, 3, …

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|\lambda|^n k^n(\beta-\alpha)^n}{n!}=0$, υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε $\frac{|\lambda|^N k^N(\beta-\alpha)^N}{N!}<1$ και επομένως η απεικόνιση T^N είναι συστολή. Αυτό, όμως, με βάση το Θεώρημα 2.1.4, συνεπάγεται ότι η απεικόνιση T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f\in C([\alpha,\beta])$ τέτοια, ώστε $f=T(f)$, άρα η ολοκληρωτική εξίσωση του Volterra έχει μοναδική λύση στο $[\alpha,\beta]$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

2.5. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε μια ενδιαφέρουσα όσο και σημαντική εφαρμογή της Αρχής των Απεικονίσεων Συστολής που απαντά στο ερώτημα αν και υπό ποιες προϋποθέσεις μια εξίσωση της μορφής $F(x,y)=0$ μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα ως προς τη μία μεταβλητή θεωρούμενη ως συνάρτηση της άλλης. Το ερώτημα αυτό καλύπτεται εν μέρει από το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, του οποίου η απόδειξη, όπως αναφέρθηκε ήδη, μπορεί να αποτελέσει μια άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Banach.

Πριν παραθέσουμε το σχετικό θεώρημα κρίνεται απαραίτητο να αναφερθούμε σε ένα στοιχειώδες λήμμα, του οποίου η χρήση είναι σημαντική στην ολοκλήρωση της απόδειξης του εν λόγω θεωρήματος, όπως θα φανεί και από τα επόμενα.

Λήμμα 2.5.1

Έστω G ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $F:G\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $\frac{\partial F}{\partial y}$ στο G. Αν υπάρχει $k>0$ τέτοιος, ώστε $\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|\le k$, για κάθε $(x,y)\in G$, τότε $|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\le k|y_1-y_2|$ για κάθε $(x,y_1), (x,y_2)\in G$.

Απόδειξη

Εφόσον η $\frac{\partial F}{\partial y}$ υπάρχει στο G, από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, για κάθε $(x,y_1), (x,y_2)\in G$ με $y_1\neq y_2$, υπάρχει z μεταξύ των y_1 και y_2 τέτοιο, ώστε $(x,z)\in G$ και

$$\frac{\partial F(x,z)}{\partial y} = \frac{F(x,y_1) - F(x,y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Επομένως

$$\left|F(x,y_1) - F(x,y_2)\right| = \left|\frac{\partial F(x,z)}{\partial y}\right| \left|y_1 - y_2\right| \le k\left|y_1 - y_2\right|.$$

Θεώρημα 2.5.2 (Πεπλεγμένης Συνάρτησης)

Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του IR^2 και $F:G \to IR$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει η $\frac{\partial F}{\partial y}$ στο G. Τότε για κάθε $(x_0,y_0) \in G$ τέτοιο, ώστε

(α) $F(x_0,y_0)=0$ και

(β) η $\frac{\partial F}{\partial y}$ είναι συνεχής στο (x_0,y_0) και $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$,

υπάρχει $\delta>0$ ώστε η εξίσωση $F(x,f(x))=0$ έχει μοναδική λύση μια συνεχή συνάρτηση στο $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ με $f(x_0)=y_0$.

Απόδειξη

Έστω $(x_0,y_0) \in G$. Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$ και F είναι συνεχείς στο (x_0,y_0) υπάρχουν δ, $h>0$ τέτοιοι, ώστε για κάθε $x \in I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$ και $y \in J=[y_0-h,y_0+h]$ να ισχύει

$$\left|F_y(x,y) - F_y(x_0,y_0)\right| < \frac{1}{2}\left|F_y(x_0,y_0)\right|$$

ή, επειδή $F_y(x_0,y_0) \neq 0$,

$$\left|\frac{F_y(x,y)}{F_y(x_0,y_0)} - 1\right| < \frac{1}{2}$$

και

$$\left|F(x,y_0) - F(x_0,y_0)\right| < \frac{1}{2}h\left|F_y(x_0,y_0)\right|$$

ή, επειδή $F(x_0,y_0)=0$ και $F_y(x_0,y_0) \neq 0$

$$\left|\frac{F(x,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\right| < \frac{1}{2}h.$$

Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο

$$A=\{f\in C(I):\ f(x_0)=y_0 \text{ και } |f(x)-y_0|\le h, \text{ για κάθε } x\in I\}$$

και τη μετρική που ορίζεται μέσω της

$$\rho_\infty(f_1,f_2)=\sup\{|f_1(x)-f_2(x)|:x\in I\},$$

για κάθε f_1, $f_2\in A$.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $(C(I),\rho_\infty)$ και επομένως ο (A,ρ_∞) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Πράγματι· έστω (f_n) μια ακολουθία στο A και $f\in C(I)$ έτσι, ώστε

$$f_n \xrightarrow{\rho_\infty} f \text{ , καθώς } n\to+\infty.$$

Άρα, για κάθε $x\in I$ έπεται

$$f_n(x)\to f(x), \text{ καθώς } n\to+\infty,$$

οπότε (αφαιρώντας το y_0) λαμβάνουμε ότι

$$|f_n(x)-y_0|\to|f(x)-y_0|, \text{ καθώς } n\to+\infty.$$

Εφόσον

$$|f_n(x)-y_0|\le h,$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in I$, τότε

$$|f(x)-y_0|\le h \text{ για κάθε } x\in I.$$

Επίσης

$$f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)=\lim_{n\to+\infty} y_0=y_0,$$

επομένως $f\in A$, άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του C(I).

Για κάθε $f\in A$ θεωρούμε την απεικόνιση που ορίζεται μέσω της

$$\big(T(f)\big)(x)=f(x)-\frac{F\big(x,f(x)\big)}{F_y(x_0,y_0)},$$

για κάθε $x\in I$. Θα αποδείξουμε ότι η T, όπως ορίσθηκε παραπάνω, είναι μια απεικόνιση συστολής από το σύνολο A στον εαυτό του.

Είναι προφανές, ότι η T απεικονίζει το σύνολο A στο C(I), διότι για κάθε $f\in C(I)$, η συνάρτηση T(f) είναι συνεχής στο I, εφόσον οι συναρτήσεις f και F είναι συνεχείς στο I.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y)\in I\times J$ ισχύει

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(y-\frac{F(x,y)}{F_y(x_0,y_0)}\right)\right|=\left|1-\frac{F_y(x,y)}{F_y(x_0,y_0)}\right|<\frac{1}{2},$$

άρα, με χρήση του προηγουμένου λήμματος (Λήμμα 2.5.1), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $f_1, f_2 \in A$

$$\begin{aligned}\rho_\infty\big(T(f_1),T(f_2)\big)&=\sup\left\{\left|\big(T(f_1)\big)(x)-\big(T(f_2)\big)(x)\right|: x\in I\right\}\\&\le \sup\left\{\frac{1}{2}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|: x\in I\right\}\\&=\frac{1}{2}\rho_\infty(f_1,f_2),\end{aligned}$$

δηλαδή η T είναι μια απεικόνιση συστολής.

Επίσης για κάθε $f\in A$

$$\big(T(f)\big)(x_0)=f(x_0)-\frac{F\big(x_0,f(x_0)\big)}{F_y(x_0,y_0)}=y_0-\frac{F(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}=y_0,$$

εφόσον $F(x_0,y_0)=0$, και αν $g(x)=y_0$, για κάθε $x\in I$, σταθερή συνάρτηση στο A, τότε, πάλι με χρήση του προηγούμενου λήμματος, για κάθε $x\in I$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\big(T(f)\big)(x)-y_0\right|&=\left|\big(T(f)\big)(x)-g(x)\right|\\&\le\left|\big(T(f)\big)(x)-\big(T(g)\big)(x)\right|+\left|\big(T(g)\big)(x)-g(x)\right|\\&\le\frac{1}{2}\left|f(x)-g(x)\right|+\left|\frac{F\big((x,g(x)\big)}{F_y(x_0,y_0)}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|f(x)-y_0\right|+\left|\frac{F(x,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\right|\\&\le\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h=h,\end{aligned}$$

επομένως $T(f)\in A$, δηλαδή η T είναι μια απεικόνιση από το A στον εαυτό του.

Έτσι, λοιπόν, η T είναι μια απεικόνιση συστολής από τον πλήρη μετρικό χώρο (A,ρ_∞) στον εαυτό του, επομένως, από το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου του Banach, θα έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f\in A$ τέτοια, ώστε $f=T(f)$, ή, ισοδύναμα,

$$f(x)\in[y_0-h,y_0+h],\ f(x_0)=y_0 \text{ και } F(x,f(x))=0,$$

για κάθε $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

2.6. Ισομετρίες και Ομοιότητες

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια χαρακτηριστική αναφορά του στη Γεωμετρία του Ευκλειδείου Χώρου, η έννοια του οποίου είναι πλήρως καθορισμένη από τις διάφορες ιδιότητες που έχει η συνήθης έννοια της απόστασης μεταξύ δύο σημείων. Σημαντικό ρόλο στη μελέτη αυτών των ιδιοτήτων παίζουν δύο είδη απεικονίσεων του Ευκλειδείου Χώρου· εκείνες οι απεικονίσεις που διατηρούν την ισότητα των αποστάσεων, και εκείνες που διατηρούν τις αποστάσεις. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες αυτών των απεικονίσεων και θα δείξουμε ότι μια απεικόνιση του Ευκλειδείου Χώρου διατηρεί την ισότητα των αποστάσεων, αν και μόνο αν, διαστέλλει (ή συστέλλει) όλες τις αποστάσεις κατά έναν σταθερό συντελεστή, αντιστοιχεί, δηλαδή, στη διαισθητική έννοια που έχουμε για την ομοιότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε, επίσης, το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου του Banach για να διατυπώσουμε το κριτήριο εκείνο που διαφοροποιεί την ομοιότητα από την ισότητα.

Κατ' αρχάς, παραθέτουμε τους ορισμούς της ομοιότητας και της ισομετρίας στον Ευκλείδειο Χώρο $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$, όπου, ως γνωστόν η «συνήθης» απόσταση $\rho_2(x,y)$ μεταξύ δύο σημείων $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ του $\mathbb{R}^n$, δίνεται ως

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

και την τιμή της οποίας, για λόγους συντομίας και συμβατότητας, συμβολίζουμε με $||x-y||$.

Ορισμός 2.6.1

Μια απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ονομάζεται *ομοιότητα* όταν είναι απεικόνιση «επί» και

$$||w-x||=||y-z|| \text{ αν και μόνον αν } ||f(w)-f(x)||=||f(y)-f(z)||,$$

για κάθε $w, x, y, z\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή, όταν η f διατηρεί την ισότητα των αποστάσεων.

Η f ονομάζεται *ισομετρία* όταν

$$||f(x)-f(y)||=||x-y||,$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή, όταν η f διατηρεί την απόσταση.

Παρατήρηση

Από τον προηγούμενο ορισμό είναι προφανές ότι κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ είναι και ομοιότητα.

Πόρισμα 2.6.1

Μια ομοιότητα $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι απεικόνιση 1-1.

Απόδειξη

Έστω $x, y\in\mathbb{R}^n$ με $f(x)=f(y)$. Τότε

$$\|f(x)-f(y)\|=0=\|f(x)-f(x)\|,$$

άρα, λόγω του ορισμού της f ως ομοιότητας

$$\|x-y\|=\|x-x\|=0,$$

επομένως $x=y$.

Παρατήρηση

Από το προηγούμενο πόρισμα γίνεται σαφές ότι κάθε ομοιότητα $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ αντιστρέφεται στον $\mathbb{R}^n$, οπότε, λόγω του Ορισμού 2.6.1, η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι επίσης ομοιότητα.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στις βασικές ιδιότητες που πληροί μια ομοιότητα.

Θεώρημα 2.6.2

Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ μια ομοιότητα. Τότε

(α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, $f(S^{n-1}(x,r))=S^{n-1}(f(x),R)$, όπου το $S^{n-1}(x,r)=\{z\in\mathbb{R}^n:\|x-z\|=r\}$ συμβολίζει τη σφαίρα κέντρου x και ακτίνας $r>0$. Δηλαδή η ομοιότητα απεικονίζει τις σφαίρες κέντρου x σε σφαίρες κέντρου f(x) και αντιστρόφως.

(β) Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}^n$, με $x\neq y$, η ομοιότητα απεικονίζει την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία x και y στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία f(x) και f(y) και αντιστρόφως.

(γ) Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}^n$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Δηλαδή η ομοιότητα απεικονίζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία f(x) και f(y).

(δ) $\|x-y\|<\|w-z\|$ αν και μόνον αν $\|f(x)-f(y)\|<\|f(w)-f(z)\|$,για κάθε $x, y, w, z\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή η ομοιότητα διατηρεί τη διάταξη (όσον αφορά στην ανισότητα) των αποστάσεων.

(ε) Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}^n$, με $x\neq y$, η f απεικονίζει κάθε εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y σε εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου

τμήματος με άκρα τα σημεία f(x) και f(y) και αντιστρόφως.

Απόδειξη

(α) Έστω $x\in\mathbb{R}^n$ και y ένα σταθερό σημείο της σφαίρας $S^{n-1}(x,r)$. Τότε $r=\|x-y\|$. Θέτουμε $R=\|f(x)-f(y)\|$, οπότε επειδή η f είναι απεικόνιση 1–1, έχουμε

$$z\in S^{n-1}(x,r) \Leftrightarrow \|x-z\|=r=\|x-y\| \Leftrightarrow \|f(x)-f(z)\|=\|f(x)-f(y)\|=R \Leftrightarrow f(z)\in S^{n-1}(f(x),R)$$

Επομένως

$$f(S^{n-1}(x,r))=S^{n-1}(f(x),R).$$

(β) Έστω $x, y\in\mathbb{R}^n$ με $x\neq y$ και $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $\|x-y\|=r>0$. Τότε

$$\|x-z\|=\|(1-\lambda)x-(1-\lambda)y\|=|1-\lambda|\cdot\|x-y\|=|1-\lambda|r$$

$$\|y-z\|=\|\lambda x-\lambda y\|=|\lambda|\cdot\|x-y\|=|\lambda|r$$

δηλαδή το z είναι το (μοναδικό) σημείο επαφής των σφαιρών $S^{n-1}(x,|1-\lambda|r)$ και $S^{n-1}(y,|\lambda|r)$. Τότε, εφόσον

$$\|x-z\|=\|(1-\lambda)x-(1-\lambda)y\|$$

και η f είναι ομοιότητα, θα έπεται ότι

$$\|f(x)-f(z)\|=\|f((1-\lambda)x)-f((1-\lambda)y)\|=\mu'\|f(x)-f(y)\|$$

και ομοίως

$$\|f(y)-f(z)\|=\|f(\lambda x)-f(\lambda y)\|=\mu\|f(x)-f(y)\|$$

για κάποια μ, μ΄>0. Από αυτό, αφού η f είναι απεικόνιση 1-1, προκύπτει ότι το f(z) θα είναι το μοναδικό σημείο τομής των σφαιρών $S^{n-1}(f(y),\mu R)$ και $S^{n-1}(f(x),\mu' R)$, όπου $R=\|f(x)-f(y)\|$. Επομένως το f(z) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα f(x) και f(y). Για το αντίστροφο χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα για την f^{-1}.

(γ) Έστω $x, y\in\mathbb{R}^n$ και $z=\dfrac{x+y}{2}$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y. Τότε

$$\|x-z\|=\|y-z\|=\left\|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\|=\frac{1}{2}\|x-y\|,$$

δηλαδή το z είναι το σημείο επαφής των σφαιρών $S^{n-1}\left(x,\dfrac{r}{2}\right)$ και $S^{n-1}\left(y,\dfrac{r}{2}\right)$, όπου $r=\|x-y\|$. Άρα, με βάση το (α) και εφόσον η απεικόνιση f είναι 1-1, το f(z) θα είναι το μοναδικό σημείο επαφής των σφαιρών $S^{n-1}(f(x),R)$ και $S^{n-1}(f(y),R)$, όπου

$R = \left\| f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{y}{2}\right) \right\|$, και μάλιστα, εφόσον το $z = \frac{x+y}{2}$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία x και y, το f(z) θα είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα f(x) και f(y). Επομένως το f(z) θα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα f(x) και f(y), δηλαδή $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

(δ) Έστω x, y, w, $z \in \mathbb{R}^n$, με $\|x-y\|<\|w-z\|$. Αν θέσουμε $r=\|w-z\|$, εφόσον $\|x-y\|<r$, υπάρχουν a, $b \in S^{n-1}(x,r)$ τέτοια, ώστε $y = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή το y είναι το μέσο μιας «χορδής» της σφαίρας $S^{n-1}(x,r)$. Τότε, από το (γ) έπεται ότι $f(y) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Όμως, εφόσον a, $b \in S^{n-1}(x,r)$, από το (α) προκύπτει ότι f(a), $f(b) \in S^{n-1}(f(x),R)$, όπου $R=\|f(x)-f(a)\|$, επομένως το f(y) θα είναι το μέσο μιας «χορδής» της σφαίρας $S^{n-1}(f(x),R)$. Αυτό σημαίνει ότι $\|f(x)-f(y)\|<\|f(x)-f(a)\|=\|f(w)-f(z)\|$, αφού $\|x-a\|=r=\|w-z\|$ και η f είναι ομοιότητα.

Για το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε τα ίδια επιχειρήματα για την f^{-1}.

(ε) Έστω x, $y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$ και $z = \frac{x+y}{2}$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y. Τότε το $f(z) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία f(x) και f(y).

Ένα σημείο $w \in \mathbb{R}^n$ είναι εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y, αν και μόνον αν το w είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία x και y και $\|z-w\|<\|z-x\|$. Από το (β) και το (δ), όμως, αυτό συμβαίνει, αν και μόνον αν το f(w) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία f(x) και f(y) και $\|f(z)-f(w)\|<\|f(z)-f(x)\|$, δηλαδή αν και μόνον αν το f(w) είναι εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία f(x) και f(y).

Θα επανέλθουμε, τώρα, στην πρώτη βασική επιδίωξη της ενότητας αυτής, η οποία, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, είναι να ταυτίσουμε την έννοια της ομοιότητας, όπως αυτή δόθηκε στον Ορισμό 2.6.1, με τη διαισθητική έννοια που έχουμε για αυτήν, ως την απεικόνιση εκείνη που διαστέλλει ή συστέλλει την απόσταση δύο σημείων του Ευκλειδείου Χώρου κατά μία μη μηδενική σταθερά και επομέ-

νως ο λόγος της απόστασης των εικόνων δύο σημείων προς την απόστασή τους είναι σταθερός.

Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμπέρασμα του επόμενου λήμματος που αφορά στην ιδιότητα της «ομοιογένειας» μιας ομοιότητας, δηλαδή ότι αυτή διατηρεί το λόγο των αποστάσεων.

Λήμμα 2.6.3 (Ιδιότητα της Ομοιογένειας)

Θεωρούμε μια ομοιότητα $f:IR^n \to IR^n$ και $x_0, y_0 \in IR^n$. Αν για κάθε $x, y \in IR^n$ υπάρχει $\lambda \geq 0$ τέτοιος, ώστε $||x-y||=\lambda||x_0-y_0||$, τότε $||f(x)-f(y)||=\lambda||f(x_0)-f(y_0)||$.

Απόδειξη

Έστω $x, y \in IR^n$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \geq 0$ τέτοιος, ώστε

$$||x-y||=\lambda||x_0-y_0||.$$

Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις για τις οποίες ο λ είναι θετικός ακέραιος, ρητός ή πραγματικός αντίστοιχα.

<u>1η περίπτωση:</u> Ο λ είναι θετικός ακέραιος. Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα επαγωγικά.

Αν $\lambda=0$, τότε $||x-y||=0$, επομένως $x=y \Rightarrow f(x)=f(y)$ ή $||f(x)-f(y)||=0$.

Αν $\lambda=1$, τότε η $||x-y||=||x_0-y_0||$, από τον ορισμό της f ως ομοιότητας, συνεπάγεται ότι

$$||f(x)-f(y)||=||f(x_0)-f(y_0)||.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα ζεύγη των σημείων του IR^n για τα οποία $\lambda=k$ και έστω $x, y \in IR^n$, ώστε

$$||x-y||=(k+1)||x_0-y_0||.$$

Τότε, θέτουμε $y_1 = \dfrac{x+ky}{k+1}$ και παρατηρούμε ότι

$$\|x-y_1\| = \left\|x - \frac{x+ky}{k+1}\right\| = \frac{k}{k+1}\|x-y\| = k\|x_0-y_0\|,$$

οπότε με βάση την υπόθεση της επαγωγής, έπεται ότι

$$||f(x)-f(y_1)||=k||f(x_0)-f(y_0)||$$

και

$$\|y-y_1\| = \left\|y - \frac{x+ky}{k+1}\right\| = \frac{1}{k+1}\|x-y\| = \|x_0-y_0\|,$$

οπότε από τον ορισμό της f ως ομοιότητας

$$\|f(y)-f(y_1)\|=\|f(x_0)-f(y_0)\|.$$

Επειδή, τώρα, το $y_1 = \dfrac{x+ky}{k+1}$ είναι στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία x και y από το Θεώρημα 2.6.2(ε) παραπάνω, έπεται ότι το $f(y_1)$ είναι στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία f(x) και f(y), επομένως $\|f(x)-f(y)\|=\|f(x)-f(y_1)\|+\|f(y)-f(y_1)\|=k\|f(x_0)-f(y_0)\|+\|f(x_0)-f(y_0)\|=(k+1)\|f(x_0)-f(y_0)\|$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι αν για κάθε $x, y\in IR^n$ υπάρχει θετικός ακέραιος λ τέτοιος, ώστε αν $\|x-y\|=\lambda\|x_0-y_0\|$, τότε $\|f(x)-f(y)\|=\lambda\|f(x_0)-f(y_0)\|$.

<u>*2η περίπτωση:*</u> Ο λ είναι θετικός ρητός.

Έστω $x, y\in IR^n$, ώστε

$$\|x-y\| = \frac{m}{n}\|x_0 - y_0\|,$$

όπου m, n θετικοί ακέραιοι με $n\neq 0$. Τότε

$$n\|x-y\|=m\|x_0-y_0\|.$$

Θέτουμε $y_1=(1-n)x+ny$, οπότε

$$\|x-y_1\|=n\|x-y\|=m\|x_0-y_0\|,$$

άρα, εφόσον οι n και m είναι θετικοί ακέραιοι, με βάση την 1η περίπτωση, έπεται ότι

$$\|f(x)-f(y_1)\|=n\|f(x)-f(y)\|=m\|f(x_0)-f(y_0)\|,$$

επομένως

$$\|f(x)-f(y)\| = \frac{m}{n}\|f(x_0)-f(y_0)\|.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι αν για κάθε $x, y\in IR^n$ υπάρχει θετικός ρητός λ τέτοιος, ώστε αν $\|x-y\|=\lambda\|x_0-y_0\|$, τότε $\|f(x)-f(y)\|=\lambda\|f(x_0)-f(y_0)\|$.

<u>*3η περίπτωση:*</u> Ο λ είναι ένας θετικός πραγματικός.

Έστω $x, y\in IR^n$, ώστε

$$\|x-y\|=\lambda\|x_0-y_0\|,$$

ενώ

$$\|f(x)-f(y)\|=\mu\|f(x_0)-f(y_0)\|$$

με $\mu\neq\lambda$. Επειδή οι ρητοί είναι πυκνό σύνολο στους πραγματικούς, υπάρχει ένας ρητός ρ μεταξύ των λ και μ. Γι' αυτόν τον ρ, επιλέγουμε ένα σημείο $y_1\in IR^n$ τέτοιο, ώστε

$$||x-y_1||=\rho||x_0-y_0||$$

και επομένως, εφόσον ο ρ είναι θετικός ρητός, από τη 2η περίπτωση, έπεται ότι

$$||f(x)-f(y_1)||=\rho||f(x_0)-f(y_0)||.$$

Αφού $\mu\neq\lambda$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda<\rho<\mu$, οπότε

$$||x-y_1||=\rho||x_0-y_0||>\lambda||x_0-y_0||=||x-y||,$$

άρα, από το μέρος (δ) του Θεωρήματος 2.6.2, έπεται ότι

$$||f(x)-f(y_1)||>||f(x)-f(y)||.$$

Όμως

$$||f(x)-f(y_1)||=\rho||f(x_0)-f(y_0)||<\mu||f(x_0)-f(y_0)||=||f(x)-f(y)||,$$

το οποίο είναι άτοπο αναφορικά με την προηγούμενη σχέση. Άρα $\mu=\lambda$ και επομένως

$$\text{αν } ||x-y||=\lambda||x_0-y_0||, \text{ τότε } ||f(x)-f(y)|=\mu||f(x_0)-f(y_0)||.$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι η ιδιότητα της ομογένειας για κάθε απεικόνιση ομοιότητας ισχύει για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό.

Θεώρημα 2.6.4

Μια «επί» απεικόνιση $f:IR^n\to IR^n$ είναι ομοιότητα αν και μόνον αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός α τέτοιος, ώστε $||f(x)-f(y)||=\alpha||x-y||$, για κάθε $x, y\in IR^n$.

Απόδειξη

Έστω ότι η $f:IR^n\to IR^n$ είναι απεικόνιση «επί» και υπάρχει ένας θετικός αριθμός α τέτοιος, ώστε $||f(x)-f(y)||=\alpha||x-y||$, για κάθε $x, y\in IR^n$. Τότε, εφόσον $\alpha>0$, για κάθε $w, x, y, z\in IR^n$, έχουμε

$$||w-x||=||y-z|| \Leftrightarrow \alpha||w-x||=\alpha||y-z|| \Leftrightarrow ||f(w)-f(x)||=||f(y)-f(z)||$$

επομένως, η απεικόνιση f είναι ομοιότητα.

Αντιστρόφως, έστω ότι η απεικόνιση $f:IR^n\to IR^n$ είναι ομοιότητα και $x_0, y_0\in IR^n$, με $x_0\neq y_0$. Θέτουμε

$$\alpha=\frac{\|f(x_0)-f(y_0)\|}{\|x_0-y_0\|}.$$

Θα δείξουμε ότι γι' αυτό το α, ισχύει ότι $||f(x)-f(y)||=\alpha||x-y||$, για κάθε $x, y\in IR^n$.

Πράγματι· για κάθε $x, y\in IR^n$, θέτουμε $\lambda=\dfrac{\|x-y\|}{\|x_0-y_0\|}$, δηλαδή $||x-y||=\lambda||x_0-y_0||$, οπότε,

εφόσον η f έχει την ιδιότητα της ομοιογένειας, όπως δείξαμε στο προηγούμενο Λήμμα 2.6.3, έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \lambda\|f(x_0)-f(y_0)\| \\ &= \frac{\|x-y\|}{\|x_0-y_0\|}\|f(x_0)-f(y_0)\| \\ &= \left(\frac{\|f(x_0)-f(y_0)\|}{\|x_0-y_0\|}\right)\|x-y\| \\ &= \alpha\|x-y\|.\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.6.5

Κάθε ομοιότητα $f:IR^n \to IR^n$ που δεν είναι ισομετρία έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω μια ομοιότητα $f:IR^n \to IR^n$, η οποία δεν είναι ισομετρία. Από το θεώρημα 2.6.4 υπάρχει θετικός πραγματικός α τέτοιος, ώστε $\|f(x)-f(y)\|=\alpha\|x-y\|$, για κάθε $x, y \in IR^n$ και μάλιστα, εφόσον η f δεν είναι ισομετρία, έπεται ότι $\alpha \neq 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το α:

1η περίπτωση: $0<\alpha<1$, τότε η f είναι μια απεικόνιση συστολής του πλήρους μετρικού χώρου IR^n στον εαυτό του, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.

2η περίπτωση: $\alpha>1$. Σ' αυτήν την περίπτωση, εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} είναι ομοιότητα, για την οποία, εφόσον

$$\|f(x)-f(y)\|=\alpha\|x-y\|, \text{ για κάθε } x, y \in IR^n,$$

ισχύει ότι

$$\|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\| = \frac{1}{\alpha}\|x-y\|, \text{ για κάθε } x, y \in IR^n$$

και αφού $0<\frac{1}{\alpha}<1$, η f^{-1} είναι απεικόνιση συστολής του πλήρους μετρικού χώρου IR^n στον εαυτό του, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, η f^{-1} έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x \in IR^n$ τέτοιο, ώστε $x=f^{-1}(x)$, ή ισοδύναμα υπάρχει μοναδικό $x \in IR^n$ τέτοιο, ώστε $x=f(x)$, δηλαδή η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

3 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BROUWER

3.1. Εισαγωγικά

Είναι σύνηθες, κατά την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, σε πολλές περιπτώσεις, να αναγόμαστε στην επίλυση εξισώσεων, οι οποίες, σε μια γενική μορφή, μπορούν να γραφούν ως

$$f(x)=0. \tag{3.1.1}$$

Αντιμετωπίζοντας, λοιπόν, τέτοιες περιπτώσεις, πολλές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε αν μια συγκεκριμένη εξίσωση έχει λύση ή όχι. Είναι γνωστό, για παράδειγμα, το φερόμενο ως Θεώρημα Bolzano που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων για εξισώσεις όπως η (3.1.1) σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] των πραγματικών αριθμών, αρκεί η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο [α,β] και να έχει ετερόσημες τιμές στα άκρα του.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, το Θεώρημα Bolzano, αποτελεί μια ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος που αφορά στην ύπαρξη σταθερών σημείων μιας συνάρτησης F, δηλαδή σημείων που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$F(x)=x, \tag{3.1.2}$$

αρκεί η συνάρτηση F να ορίζεται στο διάστημα [α,β], να παίρνει τιμές σ' αυτό και οπωσδήποτε να είναι συνεχής.

Πράγματι, εύκολα μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (3.1.1) στη μορφή

$$\lambda f(x)+x=x,$$

όπου το λ είναι μια πραγματική παράμετρος, οπότε, θέτοντας ως

$$\lambda f(x)+x=F(x),$$

αναγόμαστε στη γενική περίπτωση της εξίσωσης (3.1.2). Η μόνη απαίτηση που πρέπει εδώ να ικανοποιείται είναι η συνάρτηση F να παίρνει τιμές στο διάστημα [α,β], αλλά θα διαπιστώσουμε ότι η συνέχεια της f είναι αρκετή για να μας εξασφαλίσει κατάλληλη τιμή στο λ, ώστε να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη.

Το συμπέρασμα που αναφέρεται εδώ και εκφράζεται μέσω της εξίσωσης (3.1.2) είναι η απλούστερη μορφή ενός πολύ γενικότερου συμπεράσματος, το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer.

3.2. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα

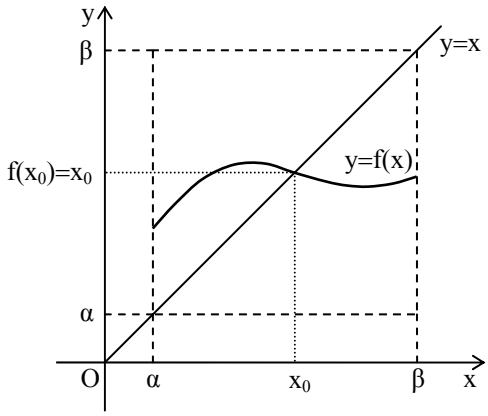
Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για την περίπτωση των κλειστών διαστημάτων των πραγματικών αριθμών και, αφού αρχικά συμπεράνουμε την ισχύ του μέσω της εποπτείας και της γεωμετρικής του αναπαράστασης, θα περιγράψουμε τα βήματα που απαιτούνται για μια αυστηρά τυπική απόδειξή του, ώστε να αναδειχθεί η σημασία των συνθηκών και των προϋποθέσεων που θέτει το ίδιο το θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1 (Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα)

Κάθε συνεχής συνάρτηση από ένα κλειστό διάστημα στον εαυτό του έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Στην Εικόνα 3 δίνεται μία διαισθητικά προφανής «απόδειξη» του θεωρήματος για ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Μια συνεχής συνάρτηση f:[α,β]→[α,β], λόγω του ορισμού της, πρέπει να έχει ως γράφημα μια συνεχόμενη καμπύλη που βρίσκεται ολόκληρη εντός του τετραγώνου που ορίζεται από τα σημεία (α,α), (β,α), (β,β), (α,β) και

συνδέει ένα σημείο στην αριστερή πλευρά αυτού του τετραγώνου με ένα σημείο στη δεξιά πλευρά του. Αναγκαστικά, λοιπόν, αυτή η καμπύλη, πρέπει να τέμνει τη διαγώνιο y=x του τετραγώνου. Αυτό το κοινό σημείο του γραφήματος της f με τη διαγώνιο θα έχει συντεταγμένες $(x_0,f(x_0))$, επομένως, γι' αυτό το σημείο θα ικανοποιείται η συνθήκη $f(x_0)=x_0$.



Εικόνα 3 – Μία διαισθητικά προφανής «απόδειξη» του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα

Η προηγούμενη γραφική αναπαράσταση του Θεωρήματος του Brouwer για το κλειστό διάστημα [α,β] μας δίνει μια ικανοποιητική εικόνα για την ισχύ του, αλλά σε καμία περίπτωση δε μπορεί να αποτελέσει μια αυστηρή απόδειξη. Για μία πράγματι αυστηρή απόδειξη θα πρέπει να επικαλεστούμε τις προϋποθέσεις που θέτει το ίδιο το θεώρημα, δηλαδή τη συνέχεια της συνάρτησης f και το γεγονός ότι αυτή απεικονίζει το κλειστό διάστημα [α,β] στον εαυτό του.

Η κύρια ιδέα της απόδειξης χρησιμοποιεί καταλυτικά την Αρχή του Κιβωτισμού, βασική συνέπεια του Αξιώματος της Πληρότητας των Πραγματικών Αριθμών, και έγκειται στο γεγονός ότι, εφόσον η συνάρτηση f «μετακινεί» τα άκρα του διαστήματος [α,β] (αλλιώς τουλάχιστον ένα απ' αυτά θα ήταν το ζητούμενο σταθερό σημείο), μπορούμε να υποδιαιρέσουμε το [α,β] σε υποδιαστήματα και να επιλέξουμε εκείνα των οποίων τα άκρα «μετακινούνται» μέσω της f σε αντίθετες κατευθύνσεις. Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε το μέσο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του διαστήματος [α,β], στη γενικότερη περίπτωση που $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \neq \frac{\alpha+\beta}{2}$, μας ενδιαφέρει ποια απ' τις δύο ανισότητες

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ και } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ισχύει. Τότε επιλέγουμε το ένα από τα δύο μισά υποδιαστήματα $[\alpha_1,\beta_1]$, όπου

$$\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ και } \beta_1=\beta$$

στην πρώτη περίπτωση, ή

$$\alpha_1=\alpha \text{ και } \beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

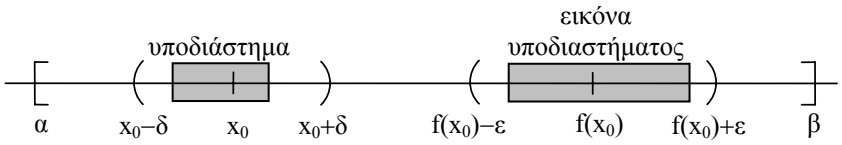
στη δεύτερη. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, η συνάρτηση f «μετακινεί» το αριστερό άκρο α_1 του διαστήματος $[\alpha_1,\beta_1]$ προς τα δεξιά και το δεξιό άκρο β_1 προς τα αριστερά, δηλαδή $f(\alpha_1)>\alpha_1$ και $f(\beta_1)<\beta_1$.

Αυτή η ιδέα εφαρμόζεται ομοίως για το υποδιάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$, και ούτω καθεξής, για όλα τα υποδιαστήματα που παράγονται με αυτόν τον τρόπο, έτσι, ώστε η συνάρτηση f να «μετακινεί» τα άκρα των υποδιαστημάτων σε αντίθετες κατευθύνσεις. Μ' αυτόν τον τρόπο, κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κατά προσέγγιση σταθερό «σημείο» για τη συνάρτηση f. Τα υποδιαστήματα αυτά είναι κιβωτισμένα, εφόσον καθένα περιέχεται στο προηγούμενό του και το πλάτος τους τείνει στο μηδέν. Στην πραγματικότητα το σταθερό σημείο της συνάρτησης f είναι η τομή όλων αυτών των κιβωτισμένων υποδιαστημάτων.

Για να αποδείξουμε ότι πράγματι το ζητούμενο σταθερό σημείο x_0 είναι το κοινό σημείο των κιβωτισμένων διαστημάτων πρέπει απαραίτητα να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της συνέχειας. Είτε άμεσα, μέσω του γνωστού ε-δ ορισμού, είτε έμμεσα, μέσω βασικών συνεπειών της συνέχειας, όπως για παράδειγμα την Αρχή της Μεταφοράς.

Στην πρώτη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι τα σημεία x_0 και $f(x_0)$ δε συμπίπτουν, εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, μπορούμε να επιλέξουμε μια ε-περιοχή του σημείου $f(x_0)$ για την οποία θα υπάρχει κατάλληλη δ-περιοχή του x_0 που θα απεικονίζεται μέσω της f στην ε-περιοχή του σημείου $f(x_0)$ και επιπλέον οι δύο περιοχές να είναι ξένες μεταξύ τους. Επειδή, τώρα, το πλάτος των υποδιαστημάτων που κατάσκευάσαμε με την προηγούμενη διαδικασία τείνει στο μηδέν, μετά από κατάλληλο πλήθος βημάτων, μπορούμε να βρούμε ένα τέτοιο υποδιάστημα, το οποίο θα περιέχεται ολόκληρο εντός της δ-περιοχής του σημείου x_0 και επομένως, μέσω της συνάρτη-

σης f, θα έχει «μετακινηθεί» εντός της ε-περιοχής του σημείου $f(x_0)$. Αυτό, όμως, μας οδηγεί σε αντίφαση, διότι αν υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f(x_0)>x_0$, τότε ολόκληρο το υποδιάστημα θα έχει «μετακινηθεί» προς τα δεξιά, σε αντίθεση με το γεγονός ότι το δεξιό άκρο του, λόγω του ορισμού του υποδιαστήματος, «μετακινείται» προς τα αριστερά (βλέπε Εικόνα 4).



Εικόνα 4 – Η χρήση της υπόθεσης της συνέχειας στην απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα

Η προηγούμενη ανάλυση θα μας βοηθήσει, τώρα, να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα χρησιμοποιώντας την Αρχή του Κιβωτισμού και την έννοια της συνέχειας.

Απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ μια συνεχής συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=x_0.$$

Επειδή $\alpha\le f(x)\le\beta$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, έπεται ότι $f(\alpha)\ge\alpha$ και $f(\beta)\le\beta$. Στην τετριμμένη περίπτωση κατά την οποία $f(\alpha)=\alpha$, ή $f(\beta)=\beta$ τότε, προφανώς $x_0=\alpha$, ή $x_0=\beta$ αντίστοιχα και το συμπέρασμα ισχύει.

Θεωρούμε, λοιπόν, τη γενικότερη περίπτωση κατά την οποία $f(\alpha)>\alpha$ και $f(\beta)<\beta$, και το μέσο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε

$$x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

και το συμπέρασμα ισχύει. Διαφορετικά, αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε θέτουμε

$$\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} > \alpha \text{ και } \beta_1=\beta,$$

ενώ αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε θέτουμε

$$\alpha_1=\alpha \text{ και } \beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta.$$

Σε κάθε περίπτωση $\alpha\le\alpha_1<\beta_1\le\beta$, οπότε ορίζεται το διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$ με $f(\alpha_1)>\alpha_1$ και $f(\beta_1)<\beta_1$, ενώ προφανώς $[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο, υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα

$$\alpha=\alpha_0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\le\alpha_n<\beta_n\le\ldots\le\beta_2\le\beta_1\le\beta_0=\beta$$

τέτοια, ώστε $f(\alpha_n)>\alpha_n$ και $f(\beta_n)<\beta_n$, n=0, 1, 2, ... και επομένως τα διαστήματα $[\alpha_n,\beta_n]$, n=0, 1, 2, ... με $f(\alpha_n)>\alpha_n$ και $f(\beta_n)<\beta_n$, ενώ προφανώς

$$[\alpha_n,\beta_n]\subset[\alpha_{n-1},\beta_{n-1}]\subset\ldots\subset[\alpha_2,\beta_2]\subset[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha_0,\beta_0].$$

Θεωρούμε, τώρα, το μέσο $\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$ του διαστήματος $[\alpha_n,\beta_n]$.

Αν $f\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, τότε

$$x_0 = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$$

και το συμπέρασμα ισχύει, αλλιώς, αν $f\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) > \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, τότε θέτουμε

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2} > \alpha_n \text{ και } \beta_{n+1}=\beta_n,$$

ενώ αν $f\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) < \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, τότε θέτουμε

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n \text{ και } \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2} < \beta_n.$$

Σε κάθε περίπτωση $\alpha_{n+1}<\beta_{n+1}$, οπότε ορίζεται το διάστημα $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]$ με $f(\alpha_{n+1})>\alpha_{n+1}$ και $f(\beta_{n+1})<\beta_{n+1}$, ενώ προφανώς $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\beta_n]$.

Αν υπάρχει $k\ge1$ τέτοιος, ώστε $f\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right) = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$, τότε

$$x_0 = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2},$$

αλλιώς η διαδικασία συνεχίζεται απεριόριστα, οπότε ορίζεται μια ακολουθία διαστημάτων $[\alpha_n,\beta_n]$, n=1, 2, ..., τα οποία είναι κιβωτισμένα διότι, εφόσον

$$\beta_n - \alpha_n = \begin{cases} \beta_{n-1} - \dfrac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \\ \dfrac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} - \alpha_{n-1} \end{cases} = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2},$$

επαγωγικά προκύπτει ότι $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{\beta - \alpha}{2^n}$, n=0, 1, 2, ... και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{2^n} = 0.$$

Επομένως, από την Αρχή του Κιβωτισμού, υπάρχει μοναδικό σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$x_0 = \bigcap_{n=0}^{+\infty}[\alpha_n,\beta_n].$$

Μένει, τώρα, να αποδείξουμε ότι αυτό το x_0 είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο της συνάρτησης f, δηλαδή $f(x_0)=x_0$. Ως προς αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο μεθόδους. Στην πρώτη εφαρμόζουμε την κατ' ορισμό συνθήκη της συνέχειας της συνάρτησης f, όπως ακριβώς περιγράφηκε παραπάνω, ενώ στη δεύτερη μέθοδο χρησιμοποιούμε την Αρχή της Μεταφοράς.

1ος τρόπος

Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε είτε $f(x_0)>x_0$, είτε $f(x_0)<x_0$.

Αν $f(x_0)>x_0$, θέτουμε $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)-x_0}{2} > 0$, οπότε επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, έπεται ότι $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. Θέτουμε $\delta_1=\min\{\delta,\varepsilon\}>0$, οπότε υπάρχει κάποιος $n_0\geq1$ τέτοιος, ώστε

$$[\alpha_{n_0},\beta_{n_0}] \subset (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \tag{3.2.1}$$

επομένως, λόγω της συνέχειας της f στο x_0, για $x = \beta_{n_0}$, έπεται ότι

$f(x_0) - \varepsilon < f(\beta_{n_0}) < f(x_0) + \varepsilon$ απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{f(x_0)+x_0}{2} < f(\beta_{n_0}). \tag{3.2.2}$$

Όμως, επειδή $\delta_1=\min\{\delta,\varepsilon\}$, η σχέση (3.2.1) συνεπάγεται ότι

$x_0-\varepsilon \le x_0-\delta_1 < \alpha_{n_0} < \beta_{n_0} < x_0+\delta_1 \le x_0+\varepsilon$, απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{f(x_0)+x_0}{2} > \beta_{n_0} \tag{3.2.3}$$

Από τις σχέσεις (3.2.2) και (3.2.3) προκύπτει ότι $\beta_{n_0} < \frac{f(x_0)+x_0}{2} < f(\beta_{n_0})$ το οποίο είναι άτοπο καθόσον, από τον τρόπο ορισμού του διαστήματος $[\alpha_{n_0},\beta_{n_0}]$, έχουμε ότι $f(\beta_{n_0}) < \beta_{n_0}$.

Με τον ίδιο τρόπο, αν $f(x_0)<x_0$, καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως $f(x_0)=x_0$.

2ος τρόπος

Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το x_0 επομένως είναι συγκλίνουσα με όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \ell_1 \le x_0.$$

Ομοίως η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το x_0 επομένως είναι συγκλίνουσα με όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n = \ell_2 \ge x_0.$$

Τότε έχουμε

$$\ell_2-\ell_1 = \lim_{n\to+\infty}\beta_n - \lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \lim_{n\to+\infty}(\beta_n-\alpha_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{2^n} = 0$$

και άρα

$$\ell_1=\ell_2=x_0.$$

Εξάλλου, επειδή η f είναι συνεχής, από την Αρχή της Μεταφοράς (πρβ. Θεώρημα 1.2.15) έπεται ότι

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(\beta_n) \le x_0 \le \lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = f(x_0),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$f(x_0)=x_0.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

3.3. Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ως εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer

Μια από τις πολλές εφαρμογές του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα είναι η εξασφάλιση λύσεων σε εξισώσεις της μορφής

$$f(x)=\gamma, \tag{3.3.1}$$

όπου η f είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση από ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και γ ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

Αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστό ως Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής διότι υποδηλώνει ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$ και κάθε πραγματικό αριθμό γ μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\gamma$, δηλαδή, ότι η συνάρτηση f λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τιμές.

Μια πιο ειδική περίπτωση του θεωρήματος αυτού, είναι η εξασφάλιση λύσεων σε εξισώσεις της μορφής

$$f(x)=0, \tag{3.3.2}$$

δηλαδή στην περίπτωση όπου $\gamma=0$ και οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι εκατέρωθεν του 0, δηλαδή ετερόσημες. Το συμπέρασμα αυτό, γνωστό ως Θεώρημα Bolzano, προκύπτει ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer. Πράγματι, η εξίσωση της μορφής (3.3.2) μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή

$$f(x)+x=x, \tag{3.3.3}$$

οπότε η αναζήτηση λύσεων της εξίσωσης (3.3.2) ανάγεται στην αναζήτηση σταθερών σημείων για τη συνάρτηση $f(x)+x$. Η μόνη συνθήκη που απαιτείται για την f, για να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Brouwer, εκτός από τη συνέχεια, είναι η συνάρτηση f να απεικονίζει το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ στον εαυτό του.

Αυτό, στη γενική περίπτωση, επιτυγχάνεται θεωρώντας, αντί της συνάρτησης $f(x)+x$, τη συνάρτηση $F(x)=\lambda f(x)+x$, όπου ο πραγματικός αριθμός λ επιλέγεται κατάλληλα, ώστε $F(x)=\lambda f(x)+x\in[\alpha,\beta]$ για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$ και η ύπαρξή του, εφόσον το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο των πραγματικών αριθμών,

εξασφαλίζεται από το Πόρισμα 1.2.22, το οποίο στην περίπτωσή μας παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.3.1

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη, τότε για κάθε n=1, 2, ... υπάρχει $x_n\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $|f(x_n)|>n$. Επειδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstass έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}), επομένως υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος, ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0$.

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με $|x-x_0|<\delta$ έπεται ότι $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Για το δ αυτό, εφόσον $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_0$, υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 τέτοιος, ώστε $\left|x_{k_n} - x_0\right| < \delta$ για όλα τα $n\geq n_0$, επομένως, λόγω της συνέχειας της f, έπεται ότι $\left|f(x_{k_n}) - f(x_0)\right| < \varepsilon$, ή ισοδύναμα, $f(x_0) - \varepsilon < f(x_{k_n}) < f(x_0) + \varepsilon$, για όλα τα $n\geq n_0$.

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\left(f(x_{k_n})\right)$ είναι φραγμένη, γεγονός που είναι άτοπο, εφόσον $\left|f(x_{k_n})\right| > k_n$.

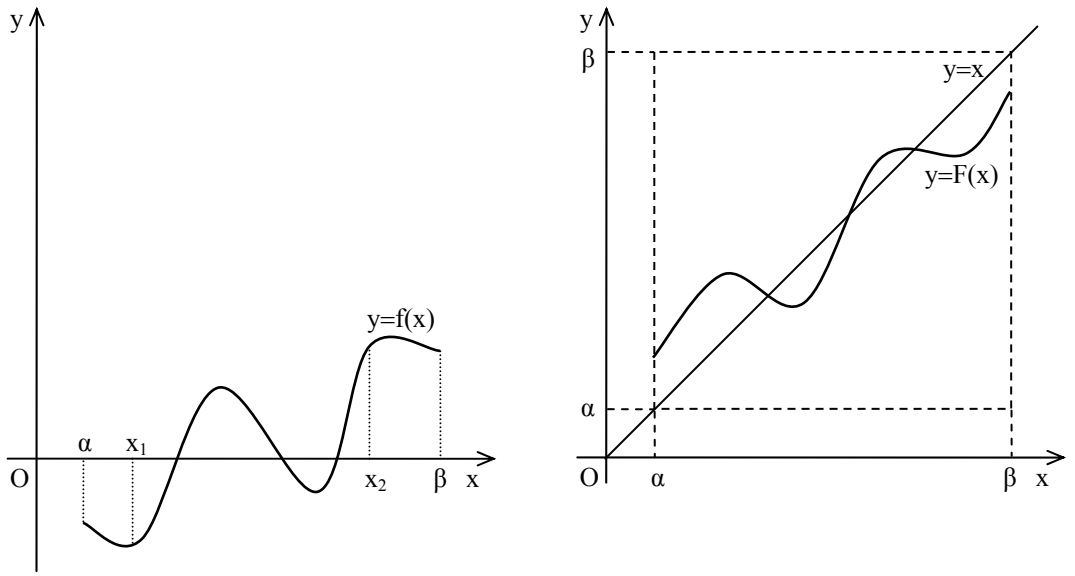
Θεώρημα 3.3.2 (Bolzano)

Έστω f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση του κλειστού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ με ετερόσημες τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ στα άκρα του. Τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε $f(\alpha)<0<f(\beta)$. Όμοια αντιμετωπίζεται και η περίπτωση $f(\beta)<0<f(\alpha)$.

Λόγω της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$, επειδή $f(\alpha)<0<f(\beta)$, υπάρχουν x_1, $x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f(x)<0$, για όλα τα $\alpha\leq x\leq x_1$ και $f(x)>0$ για όλα τα $x_2\leq x\leq\beta$ (βλέπε Εικόνα 5). Επίσης, από το προηγούμενο Θεώρημα 3.3.1, έπεται ότι η f είναι φραγμένη σ' αυτό, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι, ώστε $m\leq f(x)\leq M$ για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$ και μάλιστα, επειδή $f(\alpha)<0<f(\beta)$, είναι προφανές ότι $m<0<M$.



Εικόνα 5 – Το Θεώρημα Bolzano ως συνέπεια του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer

Θέτουμε

$$\lambda = \max\left\{\frac{\alpha - x_1}{M}, \frac{\beta - x_2}{m}\right\} < 0$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to IR$ με

$$F(x)=\lambda f(x)+x,$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, η οποία προφανώς είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θα αποδείξουμε ότι

$$\alpha\le F(x)\le\beta,$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Θεωρούμε αρχικά όλα $x\in[\alpha,\beta]$ για τα οποία $f(x)\ge 0$. Τότε $x>x_1$ (διότι, αν $\alpha\le x\le x_1$ θα ήταν $f(x)<0$) και επειδή $\lambda \ge \frac{\alpha - x_1}{M}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $-f(x)\ge -M$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda f(x) + x \ge \frac{\alpha - x_1}{M} f(x) + x \\ &= \frac{\alpha - x_1}{-M}(-f(x)) + x \\ &\ge \frac{\alpha - x_1}{-M}(-M) + x = \alpha - x_1 + x > \alpha, \end{aligned}$$

εφόσον $x>x_1$. Επίσης $\lambda f(x)\le 0$, οπότε

$$F(x)=\lambda f(x)+x<x\leq\beta$$

Επομένως

$$\alpha<F(x)\leq\beta \tag{3.3.4}$$

για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$ για τα οποία $f(x)\geq 0$.

Έστω, τώρα, τα $x\in[\alpha,\beta]$ για τα οποία $f(x)<0$. Τότε $\lambda f(x)>0$ και επομένως

$$F(x)=\lambda f(x)+x>x\geq\alpha.$$

Επίσης $x<x_2$ (διότι, αν $x_2\leq x\leq\beta$ θα ήταν $f(x)>0$) και επειδή $\lambda\geq\frac{\beta-x_2}{m}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $-f(x)\leq -m$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} F(x)=\lambda f(x)+x &\leq \frac{\beta-x_2}{m}f(x)+x \\ &= \frac{\beta-x_2}{-m}(-f(x))+x \\ &\leq \frac{\beta-x_2}{-m}(-m)+x=\beta-x_2+x<\beta, \end{aligned}$$

εφόσον $x<x_2$.

Επομένως

$$\alpha\leq F(x)<\beta \tag{3.3.5}$$

για όλα τα $x\in[\alpha,\beta]$ για τα οποία $f(x)<0$.

Τελικά, από τις σχέσεις (3.3.4) και (3.3.5), προκύπτει ότι

$$\alpha\leq F(x)\leq\beta$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Επομένως η συνάρτηση $F(x)$ είναι συνεχής και απεικονίζει το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ στον εαυτό του, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για κλειστό διάστημα, έχει ένα σταθερό σημείο x_0, δηλαδή υπάρχει ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F(x_0)=x_0$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(x_0)=0,$$

οπότε το Θεώρημα αποδείχθηκε.

Θεώρημα 3.3.3 (Ενδιάμεσης Τιμής)

Έστω f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση του κλειστού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ με διαφορετικές τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ στα άκρα του. Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό γ μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\gamma$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=f(x)-\gamma$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε
αν $f(\alpha)<\gamma<f(\beta)$, είναι $F(\alpha)=f(\alpha)-\gamma<0$ και $F(\beta)=f(\beta)-\gamma>0$, ενώ
αν $f(\beta)<\gamma<f(\alpha)$, είναι $F(\alpha)=f(\alpha)-\gamma>0$ και $F(\beta)=f(\beta)-\gamma<0$, δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, οι τιμές $F(\alpha)$ και $F(\beta)$ της F στα άκρα του κλειστού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ είναι ετερόσημες.

Επιπλέον, η συνάρτηση F είναι προφανώς συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_0)=0$ ή, ισοδύναμα,

$$f(x_0)=\gamma,$$

γεγονός που αποδεικνύει το Θεώρημα.

Είναι προφανές ότι το Θεώρημα Bolzano, αποτελεί μια ειδική περίπτωση (όπου $\gamma=0$) του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Μπορούμε, όμως, εύκολα να συμπεράνουμε και την ισχύ του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer από το Θεώρημα Bolzano. Πράγματι, δεδομένης μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$, αν υποθέσουμε ότι $\alpha<f(\alpha)$ και $f(\beta)<\beta$ (σε αντίθετη περίπτωση η f έχει σταθερό σημείο το α ή το β), θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=f(x)-x,$$

για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, η οποία είναι προφανώς συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοια, ώστε

$$F(\alpha)=f(\alpha)-\alpha>0 \text{ και } F(\beta)=f(\beta)-\beta<0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F(x_0)=0$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(x_0)=x_0.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=x_0$.

3.4. Εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής

Είναι, ήδη, γνωστές οι πολλές εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής στον Απειροστικό Λογισμό, ακόμα και στα πλαίσια του περιεχομένου που διδάσκεται στο Λύκειο. Στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε σε ένα όχι και τόσο γνωστό, αλλά εξαιρετικά σημαντικό πόρισμα του εν λόγω θεωρήματος και θα το χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή άλλων συμπερασμάτων με πολύ ενδιαφέρον.

Θεώρημα 3.4.1 (Θεώρημα Borsuk-Ulam, για τον κύκλο)

Θεωρούμε το μοναδιαίο κύκλο $S^1(0,1)=\{(x,y)\in IR^2: x^2+y^2=1\}$ και μια συνεχή συνάρτηση $f:S^1(0,1)\to IR$. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων p και –p στο μοναδιαίο κύκλο $S^1(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(p)=f(-p)$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[-1,1]\to IR$, με

$$g(x) = f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) - f\left(-x, -\sqrt{1-x^2}\right), \tag{3.4.1}$$

για κάθε $x\in[-1,1]$, η οποία είναι προφανώς συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$. Οι τιμές της συνάρτησης g στα άκρα του διαστήματος $[-1,1]$ είναι

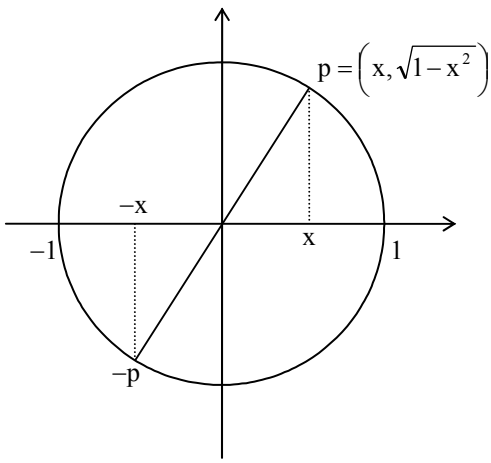
$$g(1)=f(1,0)-f(-1,0)$$

και

$$g(-1)=f(-1,0)-f(1,0),$$

δηλαδή

$$g(1)=-g(-1).$$



Εικόνα 6 – Το Θεώρημα Borsuk-Ulam για τον κύκλο

Αν υποθέσουμε ότι $g(1)=g(-1)=0$, τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει για $p=(1,0)$. Στην αντίθετη περίπτωση, οι τιμές $g(1)$ και $g(-1)$ είναι ετερόσημες, οπότε από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει κάποιο $x_0 \in [-1,1]$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0,$$

ή, ισοδύναμα λόγω της (3.4.1),

$$f(p)=f(-p),$$

όπου $p = \left(x_0, \sqrt{1-x_0^{\,2}} \right) \in S^1(0,1)$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων p και –p στο μοναδιαίο κύκλο $S^1(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(p)=f(-p)$ και έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε.

Το Θεώρημα Borsuk-Ulam, που αποδείξαμε παραπάνω, ισχύει στη γενική περίπτωση της μοναδιαίας σφαίρας $S^n(0,1)$ και αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμο με την γενική μορφή του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer, την οποία θα διατυπώσουμε στην ενότητα 3.8. Στην παρούσα μορφή του, το Θεώρημα Borsuk-Ulam βρίσκει ενδιαφέρουσες εφαρμογές, η αμεσότερη των οποίων διατυπώνεται με το πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 3.4.2

Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή και για κάθε μέγιστο κύκλο της Γης, υπάρχει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων, στα οποία η τιμή της θερμοκρασίας (ή η πίεσης) του αέρα, θεωρούμενης ως συνεχούς συνάρτησης, είναι η ίδια.

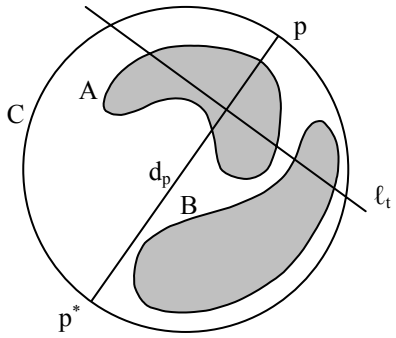
Ας δούμε, τώρα, ένα καθαρά πρακτικό, όσο και ενδιαφέρον πρόβλημα, στο οποίο, το Θεώρημα 3.4.1 μπορεί να μας προσφέρει μια ουσιαστική απάντηση. Ας φανταστούμε δύο τηγανίτες ακανόνιστου σχήματος και διαφορετικού μεγέθους σερβιρισμένες στο ίδιο πιάτο που πρέπει να μοιραστούν σε δύο συνδαιτυμόνες. Θα ήταν άδικο καθένας από αυτούς να πάρει από μία τηγανίτα, διότι έτσι κάποιος απ' τους δύο θα έτρωγε λιγότερη ποσότητα. Το δίκαιο θα ήταν να κόψουμε με δύο ευθείες μαχαιριές κάθε μία τηγανίτα σε δύο ίσα κομμάτια, ώστε κάθε ένας να πάρει από δύο μισά, ένα από κάθε τηγανίτα. Το θεώρημα που ακολουθεί και είναι μια συνέπεια του Θεωρήματος Borsuk-Ulam, μας εξασφαλίζει ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί επίσης απλώς με μία και μόνο ευθεία μαχαιριά.

Θεώρημα 3.4.3 (Πρώτο Θεώρημα της Τηγανίτας)

Αν Α και Β είναι δύο φραγμένα επίπεδα σχήματα, υπάρχει μια ευθεία που διαιρεί καθένα από αυτά σε δύο κομμάτια ίσου εμβαδού.

Απόδειξη

Εφόσον τα δύο σχήματα Α και Β είναι φραγμένα, υπάρχει ένας κύκλος C που τα περιέχει, όπως στην Εικόνα 7.



Εικόνα 7 – Το Πρώτο Θεώρημα της Τηγανίτας

Για κάθε σημείο p του κύκλου C σημειώνουμε με d_p τη διάμετρο του C που διέρχεται από το p. Έστω ℓ_t η κάθετη της d_p, η οποία διέρχεται από το σημείο της d_p που βρίσκεται σε απόσταση t από το p ($0 \le t \le d$, όπου d το μήκος της διαμέτρου του κύκλου). Έστω $f_1(t)$ το εμβαδόν του κομματιού του σχήματος Α που βρίσκεται προς το ίδιο μέρος της ℓ_t με το p, και έστω $f_2(t)$ το εμβαδόν του άλλου κομματιού. Οι συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα [0,d] και είναι συνεχείς σ' αυτό. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f:[0,d]\to\mathbb{R}$, με

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t). \tag{3.4.2}$$

Προφανώς, η συνάρτηση είναι συνεχής στο [0,d], ενώ $f(0)=-f(d)$ και επομένως, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα σημείο t στο κλειστό διάστημα [0,d] τέτοιο ώστε

$$f(t)=0,$$

ή, λόγω της (3.4.2)

$$f_1(t)=f_2(t).$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία ℓ_t που διέρχεται από αυτό το σημείο κόβει το σχήμα Α σε δύο κομμάτια ίσου εμβαδού.

Αυτή η ευθεία επίσης κόβει το Β σε δύο κομμάτια. Συμβολίζουμε με $g_1(p)$ το εμβαδόν εκείνου του κομματιού που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο p και με $g_2(p)$ το

εμβαδόν του άλλου κομματιού και θεωρούμε τη συνάρτηση $g:C\to\mathbb{R}$, με

$$g(p)=g_1(p)-g_2(p), \tag{3.4.3}$$

η οποία είναι, προφανώς, συνεχής στον κύκλο C. Καθώς το σημείο p, κινούμενο συνεχώς κατά μήκος του C, φτάνει στο αντιποδικό του σημείο p^*, τα δύο κομμάτια του σχήματος B αλλάζουν θέσεις. Επομένως

$$g(p)=-g(p^*) \tag{3.4.4}$$

για όλα τα σημεία p του κύκλου C. Από το Θεώρημα Borsuk-Ulam, όμως, υπάρχει ένα σημείο p στον κύκλο C, για το οποίο

$$g(p)=g(p^*). \tag{3.4.5}$$

Από τις ισότητες (3.4.4) και (3.4.5) συνεπάγεται ότι

$$g(p)=0,$$

ή, λόγω της (3.4.3)

$$g_1(p)=g_2(p).$$

Επομένως υπάρχει ένα σημείο p στον κύκλο για το οποίο η ευθεία ℓ_t κόβει και τα δύο σχήματα σε κομμάτια ίσου εμβαδού και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι το Θεώρημα 3.4.3 απαντά καταφατικά στο ερώτημα αν μπορούμε να μοιράσουμε δίκαια δύο διαφορετικές τηγανίτες σε δύο άτομα, κόβοντας τις τηγανίτες με μια απλή ευθεία μαχαιριά, όμως δε μας λέει πού πρέπει να κόψουμε. Αυτό είναι ένα τελείως διαφορετικό ερώτημα, η αντιμετώπιση του οποίου ξεφεύγει από τα ενδιαφέροντα αυτής της εργασίας.

Κινούμενοι στην ίδια κατεύθυνση, μπορούμε να διατυπώσουμε, τώρα, ένα άλλο ερώτημα: Είναι δυνατόν να μοιράσουμε δίκαια μια τηγανίτα σε τέσσερα άτομα εφαρμόζοντας μόνο δύο απλές ευθείες μαχαιριές; Το επόμενο θεώρημα, συνέπεια κι αυτό του Θεωρήματος Borsuk-Ulam για τον κύκλο, μας δίνει πάλι καταφατική απάντηση.

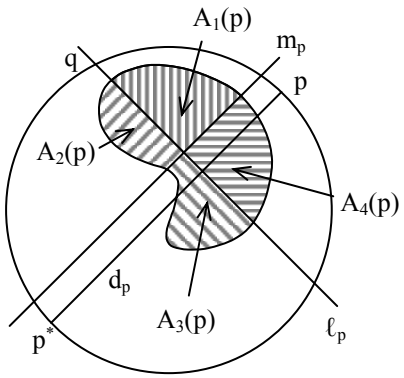
Θεώρημα 3.4.4 (Δεύτερο Θεώρημα της Τηγανίτας)

Αν A είναι ένα φραγμένο επίπεδο σχήμα τότε υπάρχουν δύο κάθετες ευθείες που κόβουν το A σε τέσσερα κομμάτια με ίσο εμβαδόν.

Απόδειξη

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, επειδή το σχήμα A είναι φραγμένο, υπάρχει ένας κύκλος C που το περιέχει. Αν, για κάθε σημείο p στον κύκλο C με d_p συμβολίζουμε τη διάμετρο που διέρχεται από τα αντιποδικά σημεία p και p^*, τότε, όπως δεί-

ξαμε προηγουμένως, υπάρχει μια ευθεία ℓ_p, κάθετη στην d_p, που διαιρεί το σχήμα Α σε δύο κομμάτια ίσου εμβαδού. Επίσης, αν θεωρήσουμε μια διάμετρο του κύκλου C κάθετη στη d_p, ομοίως, υπάρχει μια ευθεία m_p, κάθετη σ' αυτήν, άρα παράλληλη στη d_p, η οποία, επίσης, διαιρεί το σχήμα Α σε δύο κομμάτια ίσου εμβαδού. Οι ευθείες ℓ_p και m_p είναι, λοιπόν, κάθετες μεταξύ τους και διαιρούν το σχήμα Α σε τέσσερα κομμάτια, τα οποία ας συμβολίσουμε, χρησιμοποιώντας φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, με $A_1(p)$, $A_2(p)$, $A_3(p)$ και $A_4(p)$, όπως στην Εικόνα 8.



Εικόνα 8 – Το Δεύτερο Θεώρημα της Τηγανίτας

Αν $S_1(p)$, $S_2(p)$, $S_3(p)$ και $S_4(p)$ τα εμβαδά αυτών των τεσσάρων κομματιών αντίστοιχα, τότε

$$S_1(p)+S_2(p)=S_3(p)+S_4(p)$$

και

$$S_4(p)+S_1(p)=S_2(p)+S_3(p),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$S_1(p)=S_3(p) \text{ και } S_2(p)=S_4(p) \qquad (3.4.6)$$

Αυτές οι ισότητες ισχύουν για μια τυχαία αλλά σταθεροποιημένη θέση του σημείου p. Τώρα υποθέτουμε ότι αυτό το σημείο κινείται συνεχώς κατά μήκος του κύκλου C κατά φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού και καλύπτει κυκλικό τόξο ίσο προς ένα τεταρτοκύκλιο και ας συμβολίσουμε αυτή τη νέα θέση του με q. Τότε το κομμάτι $A_1(p)$ του σχήματος Α μετασχηματίζεται με συνεχή τρόπο στο $A_2(p)$, το $A_2(p)$ στο $A_3(p)$, το $A_3(p)$ στο $A_4(p)$ και το κομμάτι $A_4(p)$ μετασχηματίζεται στο $A_1(p)$. Επομένως

$$S_1(q)=S_2(p) \text{ και } S_2(q)=S_3(p).$$

Θεωρούμε, τώρα, τη συνάρτηση

$$f(p)=S_1(p)-S_2(p). \tag{3.4.7}$$

Τότε

$$f(q)=S_1(q)-S_2(q)=S_2(p)-S_3(p)=S_2(p)-S_1(p)=-f(p)$$

και άρα οι τιμές της συνεχούς συνάρτησης f στα άκρα του τεταρτοκυκλίου είναι ετερόσημες. Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano, έπεται ότι

$$f(p)=0$$

για κάποιο σημείο p του τόξου, ή λόγω της (3.4.7),

$$S_1(p)=S_2(p).$$

Έτσι, οι σχέσεις (3.4.6) γίνονται

$$S_1(p)=S_2(p)=S_3(p)=S_4(p)$$

και αυτό το σημείο δίνει την επιθυμητή διαίρεση του σχήματος A, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης.

3.5. Τα Συνδυαστικά Θεωρήματα

Στην ενότητα αυτή κάνουμε μια ειδική αναφορά στα εργαλεία εκείνα που είναι απαραίτητα για την απόδειξη του Θεωρήματος του Brouwer στο επίπεδο, το οποίο ακολουθεί στην επόμενη παράγραφο. Κρίθηκε αναγκαίο, τα θεωρήματα που ακολουθούν να συμπεριληφθούν σε μια ξεχωριστή ενότητα, αφενός διότι αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον και σημαντικό μέρος της λεγόμενης *Συνδυαστικής Τοπολογίας*, και αφετέρου διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτόνομα για την εξαγωγή πλήθους άλλων συμπερασμάτων που δε σχετίζονται απαραίτητα με την παρούσα εργασία.

Ειδικότερα, το Λήμμα Sperner που είναι και το βασικό συμπέρασμα αυτής της ενότητας, βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, όπως τη Θεωρία Γραφημάτων, την Κυρτή Ανάλυση κλπ.

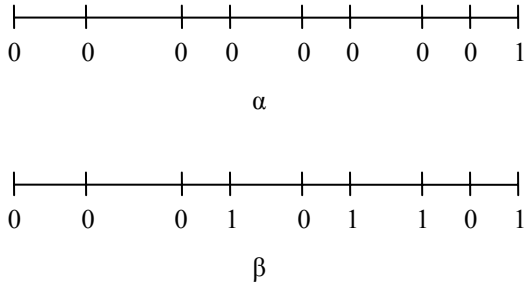
Θεώρημα 3.5.1 (Πρώτο Συνδυαστικό Λήμμα, ή Λήμμα Sperner για κλειστό διάστημα)

Έστω ότι ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων υποδιαιρεί ένα κλειστό διάστημα σε υποδιαστήματα. Σημειώνουμε τα άκρα του αρχικού διαστήματος με διαφορετικά σύμβολα, π.χ. το αριστερό άκρο με 0, το δεξιό με 1 και κάθε ένα από τα εσωτερικά σημεία επίσης με 0 ή 1. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον υποδιάστημα του οποίου τα άκρα είναι σημειωμένα με διαφορετικά σύμβολα. Επιπλέον το πλήθος αυτού του εί-

δους των υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός.

Απόδειξη

Ας ονομάσουμε «αποδεκτό» κάθε υποδιάστημα του οποίου τα άκρα σημειώνονται με διαφορετικά σύμβολα. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε όλα τα εσωτερικά σημεία σημειώνονται με 0, είτε υπάρχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο που σημειώνεται με 1. Στην πρώτη περίπτωση (βλέπε Εικόνα 9α) υπάρχει ακριβώς ένα αποδεκτό υποδιάστημα, αυτό το ακραίο δεξιά. Στη δεύτερη περίπτωση (βλέπε Εικόνα 9β) το πρώτο από αριστερά σημείο που σημειώνεται με 1 ορίζει ένα υποδιάστημα του οποίου τα άκρα σημειώνονται με διαφορετικά σύμβολα.



Εικόνα 9 – Το Λήμμα Sperner για κλειστό διάστημα

Εύκολα, τώρα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, απαριθμίζοντας τα αποδεκτά υποδιαστήματα ξεκινώντας από αριστερά, τα περιττής τάξης είναι της μορφής (0,1) ενώ τα άρτιας τάξης είναι της μορφής (1,0). Επειδή το τελευταίο αποδεκτό υποδιάστημα είναι της μορφής (0,1), έπεται ότι αυτό θα είναι περιττής τάξης, επομένως το πλήθος των αποδεκτών υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός.

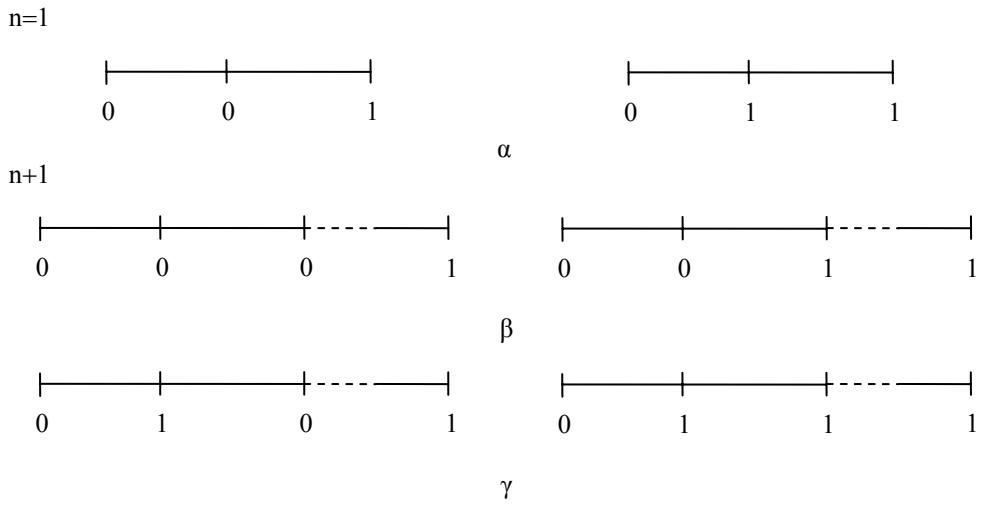
Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε πιο άμεσα να καταλήξουμε παρατηρώντας ότι τα αποδεκτά υποδιαστήματα της μορφής (0,1) είναι πάντα κατά ένα περισσότερα από τα αποδεκτά υποδιαστήματα της μορφής (1,0), επομένως το πλήθος των αποδεκτών υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Μια περισσότερο τυπική απόδειξη του Λήμματος Sperner για κλειστό διάστημα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας επαγωγή επί του πλήθους n των εσωτερικών σημείων του αρχικού διαστήματος με n=1, 2, ... Και εδώ καλούμε «αποδεκτό» κάθε υποδιάστημα του οποίου τα άκρα σημειώνονται με διαφορετικά σύμβολα.

Για n=1, το εσωτερικό σημείο σημειώνεται είτε με το σύμβολο 0 είτε με το σύμβολο 1, οπότε, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ακριβώς ένα αποδεκτό υποδιάστημα (βλέπε Εικόνα 10α).

Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα του Λήμματος Sperner για κλειστό διάστημα ισχύει για n το πλήθος εσωτερικά σημεία και θα δείξουμε ότι ισχύει για n+1 εσωτερικά σημεία.

Πράγματι· έστω ότι n+1 εσωτερικά σημεία διαιρούν το αρχικό διάστημα σε n+2 υποδιαστήματα. Εξαιρούμε το πρώτο από αριστερά εσωτερικό σημείο, οπότε απομένουν n εσωτερικά σημεία, για τα οποία, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει τουλάχιστον ένα αποδεκτό υποδιάστημα και το πλήθος αυτών των υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός. Τώρα, προσαρτούμε εκ νέου το εσωτερικό σημείο που εξαιρέσαμε, οπότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: είτε το σημείο αυτό σημειώνεται με το σύμβολο 0 είτε με το σύμβολο 1.



Εικόνα 10 – Μια τυπική απόδειξη του Λήμματος Sperner για κλειστό διάστημα

Από την υπόθεση της επαγωγής, τα n εσωτερικά σημεία ορίζουν τουλάχιστον ένα αποδεκτό υποδιάστημα και το πλήθος των αποδεκτών υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός, ο οποίος διατηρείται και μετά την προσάρτηση του (n+1)-στού σημείου που εξαιρέθηκε, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία το σημείο που προσαρτούμε σημειώνεται με το σύμβολο 1 και το αμέσως επόμενο προς τα δεξιά σημείο σημειώνεται με το σύμβολο 0, οπότε το πλήθος των αποδεκτών διαστημάτων αυξάνεται κατά 2 (βλέπε Εικόνα 10β και γ). Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει τουλάχιστον ένα αποδεκτό υποδιάστημα και το πλήθος αυτών των υποδιαστημάτων είναι περιττός αριθμός. Το θεώρημα αποδείχθηκε.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται ως Δεύτερο Συνδυαστικό Λήμμα και για να το αποδείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε έναν ισχυρισμό για τα δωμάτια και τις θύρες σε ένα σπίτι (βλέπε Εικόνα 11). Υποθέτουμε ότι κάθε δωμάτιο ενός σπιτιού έχει 0, 1 ή 2 θύρες. Θα καλούμε *αδιέξοδο* κάθε δωμάτιο που έχει μόνο μία θύρα, ενώ *επικοινωνούν δωμάτιο* θα καλούμε αυτό που έχει δύο θύρες. Απ' την άλλη, μία θύρα θα καλείται *εξωτερική*, αν οδηγεί έξω από το σπίτι, ή *εσωτερική*, αν συνδέει δύο γειτονικά δωμάτια. Είναι, επίσης, απολύτως φυσικό να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει δωμάτιο που να έχει περισσότερες από μία εξωτερικές θύρες, και δεν υπάρχουν δύο γειτονικά δωμάτια που να έχουν περισσότερες από μία κοινές θύρες. Με αυτούς τους ορισμούς και προϋποθέσεις, διατυπώνουμε το Δεύτερο Συνδυαστικό Λήμμα.

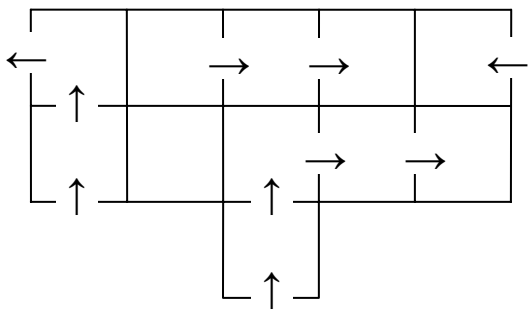
Θεώρημα 3.5.2 (Δεύτερο Συνδυαστικό Λήμμα, ή Περίπατοι στα Δωμάτια ενός Σπιτιού)

Έστω ότι κάθε δωμάτιο ενός σπιτιού έχει 0, 1, ή 2 θύρες. Τότε το πλήθος των αδιεξόδων και το πλήθος των εξωτερικών θυρών είναι αριθμοί του ιδίου τύπου, δηλαδή ταυτόχρονα και οι δύο είτε άρτιοι είτε περιττοί.

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα περιγράψουμε τους περιπάτους στα δωμάτια ενός σπιτιού. Κάθε περίπατος μπορεί να γίνει σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες: (α) μπορούμε να περάσουμε από κάθε θύρα μόνο μία φορά, (β) κάθε περίπατος ξεκινά είτε εισερχόμενοι στο σπίτι από το δρόμο μέσω μιας εξωτερικής θύρας είτε από ένα αδιέξοδο.

Συνεχίζουμε τον περίπατο περνώντας από τα επικοινωνούντα δωμάτια και σταματάμε σε μία από τις δύο περιπτώσεις: είτε (α) βρισκόμαστε έξω από το σπίτι περνώντας από μία εξωτερική θύρα, είτε (β) βρισκόμαστε σε ένα αδιέξοδο (βλέπε Εικόνα 11).



Εικόνα 11 – Περίπατοι στα Δωμάτια ενός Σπιτιού

Οι προϋποθέσεις για τον αριθμό των θυρών σε κάθε δωμάτιο καθορίζουν κάθε περίπατο μοναδικά. Αφού εισέλθουμε σε ένα δωμάτιο με δύο θύρες, μπορούμε να βγούμε ακολουθώντας μόνο μία διαδρομή. Όταν ο περίπατος τελειώσει, αρχίζουμε έναν άλλο, και συνεχίζουμε έως ότου δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές θύρες ή αδιέξοδα από όπου να ξεκινήσουμε.

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι για τις διαδρομές που μπορούμε να ακολουθήσουμε:

(α) εισερχόμενοι από μια εξωτερική θύρα καταλήγουμε σε ένα αδιέξοδο (ή αντιστρόφως, που για τους σκοπούς μας δεν έχει διαφορά στο είδος της διαδρομής),

(β) εισερχόμενοι από μια εξωτερική θύρα καταλήγουμε σε μία άλλη εξωτερική θύρα,

(γ) εισερχόμενοι από ένα αδιέξοδο καταλήγουμε σε ένα άλλο αδιέξοδο.

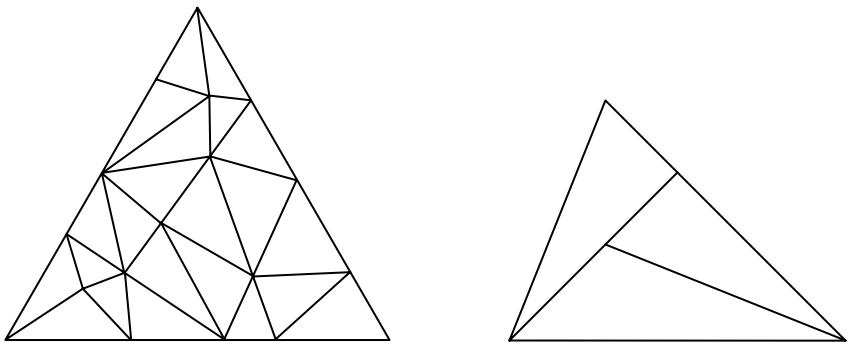
Έστω, τώρα k, m και n το πλήθος των διαδρομών για τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο τύπο, αντίστοιχα. Τότε, επειδή κάθε διαδρομή τύπου (α) αντιστοιχεί σε μία εξωτερική θύρα, και κάθε διαδρομή τύπου (β) αντιστοιχεί σε δύο εξωτερικές θύρες, το συνολικό πλήθος των εξωτερικών θυρών είναι k+2m. Ομοίως, το πλήθος των αδιεξόδων είναι k+2n. Οι αριθμοί k+2m και k+2n είναι του ίδιου τύπου, γεγονός που αποδεικνύει το θεώρημα.

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι αυτό που καθορίζεται ρητά στη διατύπωση του θεωρήματος και απαιτείται για την απόδειξή του είναι το πλήθος και το είδος των θυρών κάθε δωματίου του σπιτιού, ενώ το σχήμα των δωματίων δεν παίζει κανέναν ρόλο. Έτσι, στα επόμενα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δωμάτια έχουν οποιοδήποτε σχήμα, ειδικότερα τριγωνικό.

Το Δεύτερο Συνδυαστικό Λήμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος, το οποίο είναι γνωστό ως Λήμμα Sperner για ένα τρίγωνο. Το τρίγωνο αυτό μπορούμε, τώρα, να το θεωρήσουμε ως ένα σπίτι, του οποίου τα δωμάτια είναι άλλα μικρότερα τρίγωνα στο εσωτερικό του αρχικού.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα τυχαίο τρίγωνο και ας το υποδιαιρέσουμε σε μικρότερα τρίγωνα ακολουθώντας πιστά την ακόλουθη συνθήκη: κάθε ζεύγος από μικρότερα τρίγωνα είναι τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα είτε δεν έχουν κοινά σημεία, είτε έχουν μια κοινή κορυφή, είτε έχουν μια κοινή πλευρά. Μια τέτοια υποδιαίρεση καλείται

τριγωνισμός. Τα μικρότερα τρίγωνα της υποδιαίρεσης καλούνται *έδρες* (*faces*) του τριγωνισμού, οι πλευρές των μικρότερων τριγώνων καλούνται *ακμές* του τριγωνισμού, και οι κορυφές των μικρότερων τριγώνων καλούνται *κορυφές* του τριγωνισμού. Για παράδειγμα, η υποδιαίρεση που φαίνεται στην Εικόνα 12α είναι ένας τριγωνισμός, ενώ αυτή στην Εικόνα 12β δεν είναι.



α β

Εικόνα 12 – Παράδειγμα τριγωνισμού (α) και μη τριγωνισμού (β)

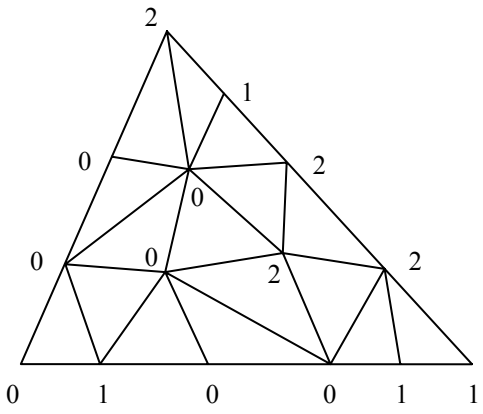
Θεώρημα 3.5.3 (Τρίτο Συνδυαστικό Λήμμα, ή Λήμμα Sperner για τρίγωνο).

Θεωρούμε ένα τρίγωνο Τ και έναν τριγωνισμό αυτού, όπως ορίσθηκε στα προηγούμενα. Χρησιμοποιούμε τρία διαφορετικά σύμβολα για να σημειώσουμε τις κορυφές του τριγώνου Τ, π.χ. τα 0, 1, και 2, και ακριβώς τα ίδια σύμβολα για να σημειώσουμε τις κορυφές του τριγωνισμού με την προϋπόθεση, όμως ότι ικανοποιείται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη: αν μια κορυφή του τριγωνισμού βρίσκεται σε μια πλευρά του τριγώνου Τ, σημειώνεται με ένα από τα δύο σύμβολα με τα οποία σημειώνονται τα άκρα αυτής της πλευράς. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία έδρα στον τριγωνισμό με κορυφές που σημειώνονται με διαφορετικά σύμβολα, δηλ. 0, 1, και 2. Επιπλέον, το πλήθος αυτών των εδρών είναι περιττός αριθμός.

Απόδειξη

Μια παραστατική απεικόνιση του Λήμματος Sperner για ένα τρίγωνο φαίνεται στην Εικόνα 13. Στόχος μας είναι να αναγάγουμε το εν λόγω θεώρημα στο Δεύτερο Συνδυαστικό Λήμμα, γι' αυτό θεωρούμε ότι το αρχικό τρίγωνο Τ είναι ένα σπίτι και κάθε έδρα του τριγωνισμού είναι ένα δωμάτιο του σπιτιού. Έτσι, κάθε ακμή του τριγωνισμού θα αποτελεί τους «τοίχους» των δωματίων, οπότε είναι απολύτως φυσικό να θεωρήσουμε ότι κάποιοι από αυτούς τους τοίχους διαθέτουν θύρες ενώ κάποιοι άλλοι όχι και μάλιστα οι θύρες θα πρέπει να είναι οι ακμές εκείνες που είναι του ίδιου

τύπου. Επειδή, οι υποθέσεις του Δεύτερου Συνδυαστικού Λήμματος απαιτούν να μην υπάρχουν δωμάτια με περισσότερες από δύο θύρες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι θύρες είναι εκείνες οι ακμές του τριγωνισμού που τα άκρα τους σημειώνονται με διαφορετικά σύμβολα, π.χ. με 0 και 1, είναι δηλαδή ακμές τύπου (0,1) (ή (1,0), εφόσον, σε αντίθεση με το Πρώτο Συνδυαστικό Λήμμα, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ ακμών τύπου (0,1) και (1,0)). Ειδικότερα, εξωτερικές θύρες είναι εκείνες οι ακμές του τριγωνισμού που βρίσκονται πάνω στην πλευρά του αρχικού τριγώνου T με άκρα τα σημεία που σημειώνονται με 0 και 1 και δεν υπάρχουν τέτοιες στις άλλες πλευρές του αρχικού τριγώνου T. Ως αδιέξοδα ορίζονται τα δωμάτια εκείνα που διαθέτουν μόνο μία θύρα, επομένως, με βάση τον προηγούμενο ορισμό, αδιέξοδα θα είναι οι έδρες τύπου (0,1,2), εφόσον διαθέτουν ακριβώς μία ακμή του τύπου (0,1) (μία θύρα). Εντελώς ανάλογα, ως επικοινωνούντα δωμάτια θα ορίζονται οι έδρες τύπου (0,0,1) ή (0,1,1), διότι περιέχουν ακριβώς δύο ακμές τύπου (0,1) (δύο θύρες).



Εικόνα 13 – Μια παραστατική απεικόνιση του Λήμματος Sperner για ένα τρίγωνο

Είναι, λοιπόν, εντελώς προφανές ότι, με βάση την ανάλυση που έγινε παραπάνω, οι συνθήκες του Δεύτερου Συνδυαστικού Λήμματος ικανοποιούνται. Επομένως, το πλήθος των αδιεξόδων και το πλήθος των εξωτερικών θυρών είναι αριθμοί του ίδιου τύπου, ή με άλλα λόγια το πλήθος των εδρών τύπου (0,1,2) και το πλήθος των ακραίων ακμών τύπου (0,1) είναι αριθμοί είτε και οι δύο άρτιοι, είτε και οι δύο περιττοί. Από το Πρώτο Συνδυαστικό Λήμμα (Θεώρημα 3.5.1), όμως, υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή τύπου (0,1) (στην πλευρά του αρχικού τριγώνου T με άκρα που σημειώνονται με 0 και 1) και μάλιστα το πλήθος αυτών των ακμών (δηλαδή των εξωτερικών θυρών) είναι περιττός αριθμός, επομένως υπάρχει τουλάχιστον μία έδρα τύπου

(0,1,2) και μάλιστα το πλήθος αυτών των εδρών είναι περιττός αριθμός. Το Θεώρημα αποδείχθηκε.

Όπως είδαμε για την απόδειξη των δύο θεωρημάτων παραπάνω χρησιμοποιήσαμε μια μέθοδο «περιπλάνησης στα δωμάτια ενός σπιτιού» την οποία θα καλούμε *διαδικασία περιπάτου*. Θα τη χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω «περπατώντας» στις έδρες ενός τριγωνισμού, χωρίς απαραίτητα να καλούμε αυτές τις έδρες δωμάτια. Το κρίσιμο σημείο θα είναι πάντα αυτό που εννοείται με τον όρο «θύρα» ακμή, και με τον όρο «αδιέξοδο» έδρα.

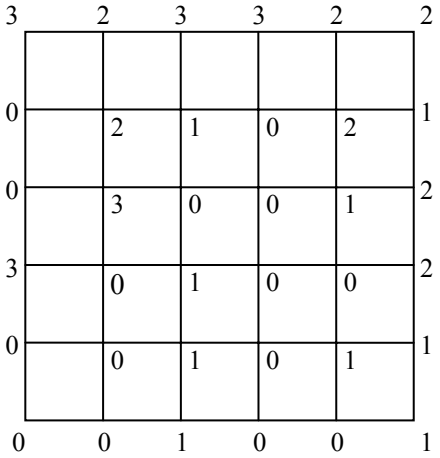
Θα χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν, αυτήν την προσέγγιση για να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, στο οποίο διατυπώνεται ο ίδιος ισχυρισμός με το Τρίτο Συνδυαστικό Λήμμα, όχι όμως για ένα τρίγωνο, αλλά για ένα τετράγωνο. Υποδιαιρούμε ένα αρχικό τετράγωνο Q σε μικρότερα τετράγωνα με γραμμές παράλληλες προς τις πλευρές του και χρησιμοποιούμε τις ίδιες ονομασίες όπως προηγουμένως, δηλ. έδρες μιας υποδιαίρεσης είναι τα μικρότερα τετράγωνα αυτής, ακμές της υποδιαίρεσης είναι οι πλευρές των μικρότερων τετραγώνων, και κορυφές μιας υποδιαίρεσης είναι οι κορυφές των μικρότερων τετραγώνων της υποδιαίρεσης.

Θεώρημα 3.5.4 (Τέταρτο Συνδυαστικό Λήμμα).

Θεωρούμε ένα τετράγωνο Q και μια υποδιαίρεση αυτού σε μικρότερα τετράγωνα με γραμμές παράλληλες προς τις πλευρές του. Χρησιμοποιούμε τέσσερα διαφορετικά σύμβολα, π.χ. τους αριθμούς 0, 1, 2 και 3 για να σημειώσουμε τις κορυφές του τετραγώνου και ακριβώς τα ίδια σύμβολα για να σημειώσουμε τις κορυφές της υποδιαίρεσης με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη: αν μια κορυφή της υποδιαίρεσης βρίσκεται στην πλευρά του τετραγώνου Q, τότε σημειώνεται με ένα από τα δύο σύμβολα με τα οποία σημειώνονται τα άκρα αυτής της πλευράς (βλέπε Εικόνα 14). Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία έδρα που σημειώνεται με τουλάχιστον τρία διαφορετικά σύμβολα.

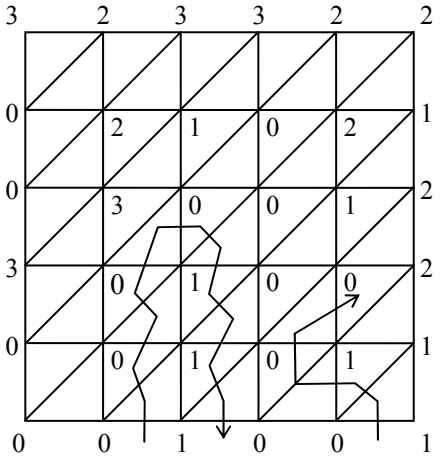
Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα υποδιαιρέσουμε κάθε τετραγωνική έδρα σε δύο τριγωνικές έδρες, όπως στην Εικόνα 15. Με αυτόν τον τρόπο θα προκύψει ένας τριγωνισμός του αρχικού τετραγώνου Q, του οποίου όλες οι κορυφές είναι σημειωμένες.



Εικόνα 14 – Μια παραστατική απεικόνιση του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος

Όπως προηγουμένως, καλούμε θύρα κάθε ακμή του τριγωνισμού της οποίας τα άκρα είναι σημειωμένα με διαφορετικά σύμβολα, π.χ. με 0 και 1. Έτσι, αδιέξοδο θα είναι κάθε μια από τις έδρες του τριγωνισμού, της οποίας οι κορυφές σημειώνονται με τρία διαφορετικά σύμβολα τέτοια, ώστε τουλάχιστον δύο από αυτά είναι 0 και 1 (εφόσον κάθε αδιέξοδο πρέπει να διαθέτει μόνο μία θύρα). Επομένως, αδιέξοδα είναι τριγωνικές έδρες τύπου (0,1,2) ή (0,1,3).



Εικόνα 15 – Διαδικασία Περιπάτου στις έδρες ενός τριγωνισμένου τετραγώνου

Από την υπόθεση του Θεωρήματος, όλες οι εξωτερικές θύρες θα βρίσκονται στην πλευρά του αρχικού τετραγώνου Q, της οποία τα άκρα είναι σημειωμένα με 0 και 1, ενώ, σύμφωνα με το Πρώτο Συνδυαστικό Λήμμα (Θεώρημα 3.5.1), το πλήθος των εξωτερικών θυρών είναι περιττός αριθμός.

Εφαρμόζουμε τη Διαδικασία Περιπάτου στις έδρες του τριγωνισμού έτσι, ώστε κάθε περίπατος να ξεκινά από μια εξωτερική θύρα και περατώνεται είτε εγκαταλείποντας το τετράγωνο Q από μια άλλη εξωτερική θύρα (ή αντιστρόφως, που είναι ακριβώς η ίδια διαδρομή) ή εισερχόμενοι σε ένα αδιέξοδο. Η Εικόνα 15 υποδεικνύει τη Διαδικασία Περιπάτου στο συγκεκριμένο τετράγωνο. Εφόσον, τώρα, το πλήθος όλων των εξωτερικών θυρών είναι περιττός αριθμός, τουλάχιστον ένας από τους περιπάτους πρέπει να περατώνεται σε ένα αδιέξοδο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια τριγωνική έδρα, οι κορυφές της οποίας σημειώνονται είτε με 0, 1 και 2 είτε με 0, 1 και 3, και, συνεπώς, υπάρχει μία τετράγωνη έδρα που σημειώνεται με τουλάχιστον τρία διαφορετικά σύμβολα.

3.6. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας θα χρησιμοποιηθούν εδώ, για να αποδείξουμε το Θεώρημα του Brouwer για ένα τετράγωνο στο επίπεδο. Αρχικά, κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση του κλειστού διαστήματος, περιγράφουμε με εποπτικό τρόπο την ισχύ του Θεωρήματος και εν συνεχεία ακολουθώντας μεθόδους ανάλογες αυτές των Συνδυαστικών Θεωρημάτων δίνουμε μια τυπική απόδειξη.

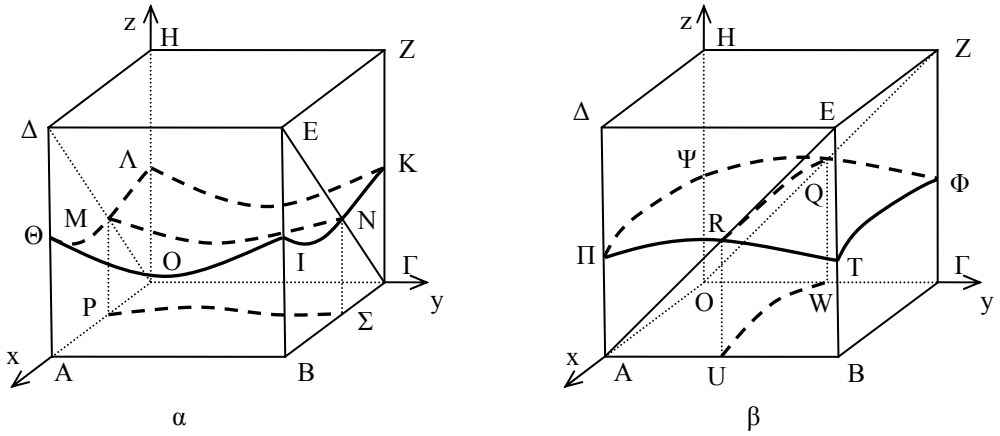
Θεώρημα 3.6.1 (Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο)

Κάθε συνεχής απεικόνιση από ένα τετράγωνο στον εαυτό του έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Αντίθετα με την περίπτωση του κλειστού διαστήματος, στην περίπτωση ενός τετραγώνου, μια σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος δεν είναι τόσο άμεση. Μια απεικόνιση f από ένα τετράγωνο, π.χ. το $[0,1]\times[0,1]$, στον εαυτό του απεικονίζει μονοσήμαντα κάθε σημείο του τετραγώνου που περιγράφεται από δύο συντεταγμένες σε κάποιο σημείο του ίδιου τετραγώνου, επομένως το ζεύγος ενός σημείου του τετραγώνου και της αντίστοιχης εικόνας του μέσω της f περιγράφεται από τέσσερις συντεταγμένες. Με άλλα λόγια, το γράφημα της απεικόνισης f είναι μια επιφάνεια σε έναν 4-διάστατο χώρο.

Η Εικόνα 16 παρακάτω παρακάμπτει την αδυναμία μας να φανταστούμε μια τέτοια επιφάνεια και μας δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη προσέγ-

γιση για να περιγράψουμε την ισχύ του Θεωρήματος στην περίπτωση ενός τετραγώνου.



Εικόνα 16 – Μια διαισθητικά σαφής «απόδειξη» του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο

Για να ορίσουμε την απεικόνιση f μπορούμε να καθορίσουμε δύο πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις g και h ορισμένες στο τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$ ώστε να ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$0\le g(x,y)\le 1 \text{ και } 0\le h(x,y)\le 1. \qquad (3.6.1)$$

Αν (x_0,y_0) είναι ένα σημείο του τετραγώνου, τότε η εικόνα του μέσω της απεικόνισης f είναι το σημείο $(g(x_0,y_0),h(x_0,y_0))$, το οποίο, σύμφωνα με τις ανισότητες (3.6.1), βρίσκεται εντός του τετραγώνου.

Το ορθογώνιο ΟΓΕΔ στην Εικόνα 16α ορίζει μια περιοχή του επιπέδου z=x και η συνεχής επιφάνεια ΘΙΚΛ είναι το γράφημα της συνάρτησης z=g(x,y). Η τομή του επιπέδου z=x με την επιφάνεια z=g(x,y) είναι η καμπύλη MN, της οποίας η προβολή στο επίπεδο z=0 είναι η καμπύλη ΡΣ. Η καμπύλη ΡΣ συνδέει τις απέναντι πλευρές ΟΑ και ΒΓ του τετραγώνου, και οι συντεταγμένες κάθε σημείου της ικανοποιούν την εξίσωση g(x,y)=x.

Ομοίως, στην Εικόνα 16β το ορθογώνιο ΟΑΕΖ είναι το γράφημα της συνάρτησης z=y, η επιφάνεια ΠΤΦΨ είναι το γράφημα της συνάρτησης z=h(x,y), RQ είναι η καμπύλη που προκύπτει ως τομή των δύο επιφανειών, και UW είναι η προβολή αυτής της καμπύλης στο επίπεδο z=0. Η συνεχής καμπύλη UW συνδέει τις απέναντι πλευρές ΑΒ και ΟΓ του τετραγώνου, και οι συντεταγμένες καθενός από τα σημεία της

ικανοποιούν την εξίσωση h(x,y)=y. Είναι ξεκάθαρο, τώρα, ότι οι καμπύλες ΡΣ και UW πρέπει να τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο (x_0,y_0), επομένως αυτό είναι ένα σταθερό σημείο για τη συνάρτηση f, εφόσον ικανοποιεί τις εξισώσεις $g(x_0,y_0)=x_0$ και $h(x_0,y_0)=y_0$.

Η διαισθητική περιγραφή που παρουσιάσαμε, φυσικά δεν αποτελεί αυστηρή απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο. Όπως και στη γενική περίπτωση, έτσι και στην περίπτωση του τετραγώνου, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την απόδειξη του Θεωρήματος. Στα επόμενα, θα παρουσιάσουμε μια τυπική απόδειξη του Θεωρήματος, κάνοντας χρήση των συμπερασμάτων που προκύπτουν από τα Συνδυαστικά Θεωρήματα της προηγούμενης ενότητας, της υπόθεσης της συνέχειας, όπως επίσης και του γεγονότος ότι το τετράγωνο, ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του IR^2 είναι συμπαγές.

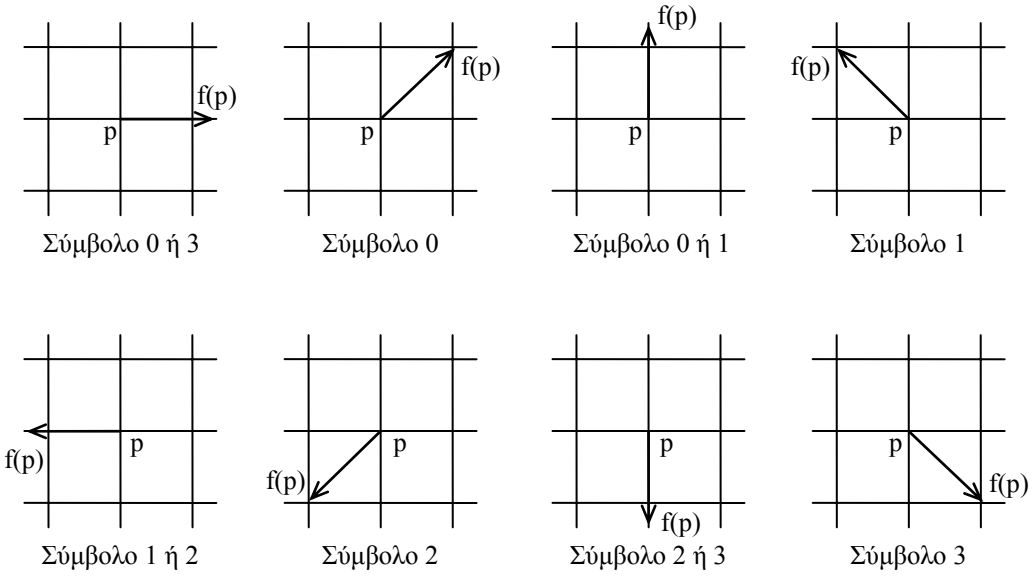
Απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο

Θεωρούμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και θα αποδείξουμε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση f αυτού του τετραγώνου στον εαυτό του έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα γίνει με άμεση εφαρμογή του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος (Θεώρημα 3.5.4) της προηγούμενης ενότητας.

Έτσι, υποδιαιρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε μικρότερα τετράγωνα («έδρες») με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν κάποια κορυφή της υποδιαίρεσης παραμένει αμετακίνητη μέσω της απεικόνισης f, τότε θεώρημα αποδείχθηκε. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την περίπτωση κατά την οποία η απεικόνιση f μετατοπίζει και τις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Χρησιμοποιούμε, τώρα, τέσσερα διαφορετικά σύμβολα, π.χ. τους αριθμούς 0, 1, 2 και 3 για να συμβολίσουμε κάθε κορυφή της υποδιαίρεσης, με τέτοιον τρόπο, όμως, ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος (Θεώρημα 3.5.4), ακολουθώντας έναν κανόνα που καθορίζεται σύμφωνα με την κατεύθυνση της μετατόπισης κάθε κορυφής μέσω της απεικόνισης f. Πιο συγκεκριμένα, αν p είναι μια τυχαία κορυφή της υποδιαίρεσης του τετραγώνου ΑΒΓΔ και q=f(p) η εικόνα της μέσω της απεικόνισης f, θεωρούμε το διάνυσμα μετατόπισης $\overrightarrow{pq}$ και φ(p) την προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει αυτό με τον οριζόντιο άξονα. Τότε ο κανόνας που αποδίδει στην κορυφή p της υποδιαίρε-

σης του τετραγώνου ΑΒΓΔ ένα από τα σύμβολα 0, 1, 2 και 3, καθορίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα (βλέπε επίσης την Εικόνα 17):

Γωνία	Σύμβολο
$\varphi(p)=0$	0 ή 3
$0 < \varphi(p) < \frac{\pi}{2}$	0
$\varphi(p) = \frac{\pi}{2}$	0 ή 1
$\frac{\pi}{2} < \varphi(p) < \pi$	1
$\varphi(p)=\pi$	1 ή 2
$\pi < \varphi(p) < \frac{3\pi}{2}$	2
$\varphi(p) = \frac{3\pi}{2}$	2 ή 3
$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$	3



Εικόνα 17 – Ο κανόνας που καθορίζει το σύστημα συμβολισμού των κορυφών μιας υποδιαίρεσης ενός τετραγώνου

Ειδικότερα, αν το σημείο p ταυτίζεται με την κορυφή Α του τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε για τη γωνία φ(p) θα πρέπει να ισχύει $0 \le \varphi(p) \le \frac{\pi}{2}$. Όταν ισχύουν οι γνήσιες

ανισότητες $0 < \varphi(p) < \frac{\pi}{2}$, η κορυφή Α, σύμφωνα με τον προηγούμενο πίνακα συμβολίζεται με το 0. Επιπλέον, αν φ(p)=0 ή $\varphi(p) = \frac{\pi}{2}$, τότε, όπως υποδεικνύουν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα, μπορούμε να συμβολίσουμε αυτήν την κορυφή με το 0, το 1 ή το 3. Είναι, επομένως, αναμενόμενο ότι το σύμβολο της κορυφής Α θα είναι το 0. Με τον ίδιο τρόπο επιλέγουμε ως σύμβολο το 1 για την κορυφή Β, το 2 για την κορυφή Γ και το 3 για την κορυφή Δ.

Αν το σημείο p ανήκει στην πλευρά ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ και δεν ταυτίζεται με τα άκρα της, τότε $0 \le \varphi(p) \le \pi$. Από τις πρώτες πέντε γραμμές του πίνακα προκύπτει ότι για το σημείο αυτό μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε από τα τέσσερα σύμβολα που διαθέτουμε. Όμως, από τις απαιτήσεις του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος, μπορούμε να επιλέξουμε μόνο κάποιο από τα σύμβολα 0 ή 1. Επομένως,

α) αν φ(p)=0, τότε η κορυφή p συμβολίζεται με 0,

β) αν $0 < \varphi(p) < \frac{\pi}{2}$, τότε η κορυφή p συμβολίζεται με 0,

γ) αν $\varphi(p) = \frac{\pi}{2}$, τότε η κορυφή p συμβολίζεται με 0, ή 1,

δ) αν $\frac{\pi}{2} < \varphi(p) < \pi$, τότε η κορυφή p συμβολίζεται με 1 και τέλος

ε) αν φ(p)=π, τότε η κορυφή p συμβολίζεται με 1.

Παρόμοια επιχειρήματα εφαρμόζονται για τις κορυφές της υποδιαίρεσης στις υπόλοιπες τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Τέλος, οι κορυφές της υποδιαίρεσης στο εσωτερικό του τετραγώνου ΑΒΓΔ συμβολίζονται ακολουθώντας αυστηρά τον προηγούμενο πίνακα, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά στο Τέταρτο Συνδυαστικό Λήμμα.

Το σύστημα των συμβόλων που λαμβάνεται μ' αυτόν τον τρόπο ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Τέταρτου Συνδυαστικού Λήμματος (Θεώρημα 3.5.4). Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η υποδιαίρεσή μας έχει μία έδρα που περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σύμβολα.

Θεωρούμε τώρα μια ακολουθία $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots\}$ υποδιαιρέσεων του τετραγώνου ΑΒΓΔ, ώστε κάθε υποδιαίρεση τ_n, n=1, 2, ... να κατασκευάζεται ως ακολούθως:

διαιρούμε κάθε πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ σε 2^n μέρη με 2^n-1 σημεία και από τα σημεία αυτά φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Προφανώς, το πλάτος όλων των ακμών κάθε υποδιαίρεσης τ_n είναι $\frac{\alpha}{2^n}$, n=1, 2, ... όπου α=ΑΒ το μήκος της πλευράς του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, ενώ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{2^n}=0$.

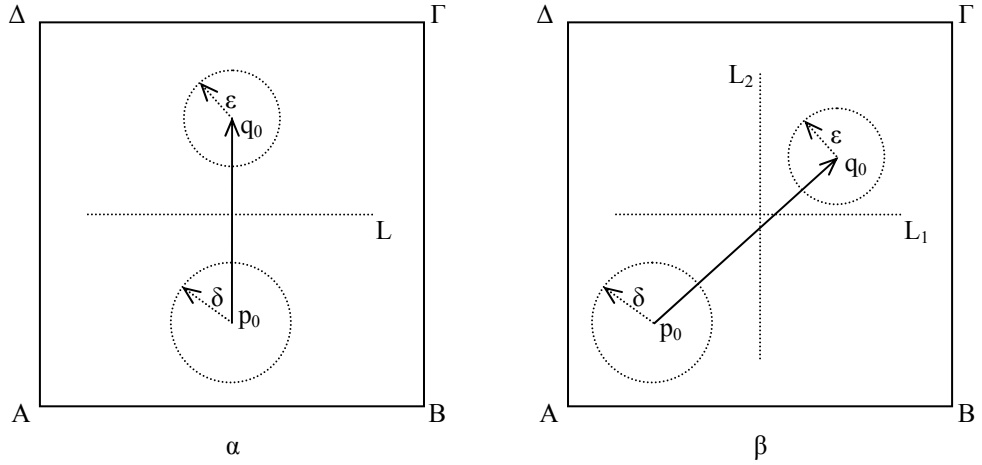
Αν υπάρχει κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ για το οποίο η υποδιαίρεση τ_{n_0} του τετραγώνου ΑΒΓΔ διαθέτει κάποια κορυφή p_0 τέτοια, ώστε $f(p_0)=p_0$, τότε το Θεώρημα αποδείχθηκε. Γι' αυτό, ας υποθέσουμε ότι όλες οι κορυφές κάθε υποδιαίρεσης τ_n, n=1, 2, ... μετατοπίζονται μέσω της απεικόνισης f. Για κάθε τέτοια υποδιαίρεση χρησιμοποιούμε το σύστημα συμβολισμού που αναλύσαμε παραπάνω, οπότε, σύμφωνα με το Τέταρτο Συνδυαστικό Λήμμα, υπάρχει μία (τετράγωνη) έδρα σε κάθε υποδιαίρεση που σημειώνεται με τουλάχιστον τρία διαφορετικά σύμβολα. Για κάθε n=1, 2, …, στην υποδιαίρεση τ_n, επιλέγουμε μια τέτοια έδρα και τη συμβολίζουμε με Q_n και έστω x_n, y_n, z_n, u_n οι κορυφές της. Επειδή το τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, υπάρχει μια υπακολουθία της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που συγκλίνει σε ένα σημείο p_0 του ΑΒΓΔ. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να δεχθούμε ότι αυτή είναι η ίδια η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε, επειδή το πλάτος της πλευράς του τετραγώνου Q_n τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο, υπάρχουν άλλες τρεις ακολουθίες που συγκλίνουν στο ίδιο σημείο, δηλαδή οι $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Μένει να αποδείξουμε, τώρα, ότι το p_0 είναι ένα σταθερό σημείο για την απεικόνιση f. Υποθέτουμε ότι τα σημεία p_0 και $q_0=f(p_0)$ είναι διακεκριμένα, οπότε ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{p_0q_0}$ και έστω $\varphi(p_0)$ η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με τον οριζόντιο άξονα. Για τη γωνία αυτή θα πρέπει να θεωρήσουμε τις επτά περιπτώσεις που καλύπτει ο αντίστοιχος πίνακας της σελ 91.

Θα εξετάσουμε μόνο δύο από τις περιπτώσεις αυτές, καθώς οι υπόλοιπες αντιμετωπίζονται ανάλογα.

α) Έστω ότι $\varphi(p_0)=\frac{\pi}{2}$ (βλέπε Εικόνα 18α). Σχεδιάζουμε μια οριζόντια ευθεία L που διαχωρίζει τα σημεία p_0 και q_0 και θεωρούμε μια ε-περιοχή του σημείου q_0 τέτοια, ώστε να μην έχει κοινά σημεία με την L. Εφόσον η απεικόνιση f είναι συνεχής

στο σημείο p_0, θα υπάρχει μια δ-περιοχή του σημείου p_0 τέτοια, ώστε οι εικόνες μέσω της απεικόνισης f όλων των σημείων από αυτή τη περιοχή βρίσκονται στην ε-περιοχή του q_0. Μπορούμε να επιλέξουμε αυτή τη δ-περιοχή να είναι αρκετά μικρή, ώστε να μην έχει κοινά σημεία με την ευθεία L.



Εικόνα 18 – Η χρήση της υπόθεσης της συνέχειας στην απόδειξη του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο

Τότε η δ-περιοχή και η ε-περιοχή όχι μόνο δεν έχουν κοινά σημεία, αλλά για κάθε σημείο p της δ-περιοχής του σημείου p_0, με εικόνα μέσω της f το σημείο q=f(p), ισχύει $0<\varphi(p)<\pi$, όπου φ(p) είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{pq}$ με τον οριζόντιο άξονα. Επομένως, σύμφωνα με το σύστημα συμβόλων που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, κάθε τέτοιο σημείο θα πρέπει να συμβολισθεί με το 0 ή το 1.

Απ' την άλλη πλευρά, επειδή το πλάτος της πλευράς του τετραγώνου Q_n τείνει στο 0, καθώς το n τείνει στο άπειρο, υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε οι κορυφές x_{n_0}, y_{n_0}, z_{n_0} και u_{n_0} του τετραγώνου Q_{n_0} να βρίσκονται εντός της επιλεγμένης δ-περιοχής του σημείου p_0, άρα καμία απ' αυτές δε μπορεί να σημειωθεί με άλλο σύμβολο εκτός από 0 ή 1. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το δεδομένο ότι οι κορυφές του τετραγώνου Q_{n_0} σημειώνονται με τρία τουλάχιστον διαφορετικά σύμβολα.

β) Έστω ότι $0<\varphi(p_0)<\frac{\pi}{2}$ (βλέπε Εικόνα 18β). Σχεδιάζουμε μία οριζόντια ευθεία L_1 και μία κατακόρυφη L_2 με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μία απ' αυτές διαχωρίζει τα σημεία p_0 και q_0. Επιλέγουμε μια ε-περιοχή του σημείου q_0, ώστε να μην έχει κοι-

νά σημεία με καμία από τις ευθείες L_1 και L_2, οπότε, λόγω της συνέχειας της απεικόνισης f στο σημείο p_0, θα υπάρχει μία δ-περιοχή του σημείου p_0, χωρίς κοινά σημεία με καμία από τις ευθείες L_1 και L_2 και την ε-περιοχή του σημείου q_0 τέτοια, ώστε η εικόνα q=f(p) κάθε σημείου p της δ-περιοχής του σημείου p_0 θα είναι σημείο της ε-περιοχής του σημείου q_0 και θα ισχύει $0 < \varphi(p) < \frac{\pi}{2}$, όπου φ(p) είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{pq}$ με τον οριζόντιο άξονα και άρα κάθε τέτοιο σημείο συμβολίζεται μόνο με το 0.

Αυτό σημαίνει ότι, για κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$, οι κορυφές του τετραγώνου Q_{n_0} που βρίσκεται ολόκληρο εντός της επιλεγμένης δ-περιοχής του σημείου p_0 θα σημειώνονται μόνο με ένα σύμβολο, το 0, γεγονός που, όπως είδαμε, είναι άτοπο.

Αντιμετωπίζοντας τις υπόλοιπες έξι περιπτώσεις του πίνακα της σελίδας 91 με ανάλογα επιχειρήματα, εκκινώντας από την υπόθεση ότι $f(p_0) \neq p_0$, καταλήγουμε σε άτοπο. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για ένα τετράγωνο αποδείχθηκε.

3.7. Η έννοια της Συρρίκνωσης (Retraction)

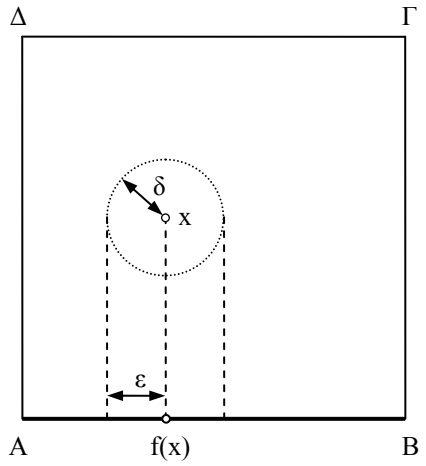
Η ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της συρρίκνωσης (retraction), εφόσον, όπως θα δούμε, μέσω της έννοιας αυτής, μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα την ιδιότητα του σταθερού σημείου για έναν κλειστό δίσκο στο επίπεδο, ως συνέπεια του Θεωρήματος του Brouwer για ένα τετράγωνο, αλλά και για οποιοδήποτε άλλο κυρτό και φραγμένο επίπεδο σχήμα.

Ορισμός 3.7.1

Έστω X ένα σύνολο και Y υποσύνολό του. Το υποσύνολο Y καλείται *συρρίκνωμα* (*retract*) του συνόλου X αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f:X \to Y$ που διατηρεί κάθε σημείο του συνόλου Y ($f(x)=x$, για κάθε $x \in Y$), δηλ. είναι ταυτοτική στο Y. Η απεικόνιση f καλείται *συρρίκνωση* (*retraction*) του συνόλου X επί του Y.

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα συρρίκνωμα ενός τετραγώνου· πράγματι για ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ (βλέπε Εικόνα 19) και θεωρούμε την απεικόνιση προβολής f από το ΑΒΓΔ στην πλευρά ΑΒ. Συγκεκριμένα για κάθε σημείο x του τετραγώνου ως f(x) ορίζουμε το ίχνος της καθέτου που φέρεται

από το x στην AB. Είναι προφανές ότι κάθε σημείο του AB ταυτίζεται με την εικόνα του μέσω αυτής της προβολής. Επίσης για μια οποιαδήποτε περιοχή του σημείου f(x) στην AB ακτίνας ε>0, υπάρχει η αντίστοιχη περιοχή του σημείου x ακτίνας δ=ε έτσι, ώστε κάθε σημείο του τετραγώνου εντός της δ-περιοχής του σημείου x να προβάλλεται στην ε-περιοχή του σημείου f(x). Επομένως η απεικόνιση προβολής είναι συνεχής σε κάθε σημείο του τετραγώνου.



Εικόνα 19 – Το ευθύγραμμο τμήμα ως συρρίκνωμα ενός τετραγώνου

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι επίσης ένα συρρίκνωμα ενός τριγώνου ή γενικά ενός κυρτού πολυγώνου.

Στο Κεφάλαιο 1, είδαμε ότι η ιδιότητα του σταθερού σημείου είναι μια τοπολογική ιδιότητα, διατηρείται, δηλαδή, μέσω ενός ομομορφισμού δύο συνόλων. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση μιας συρρίκνωσης. Συγκεκριμένα το επόμενο θεώρημα πιστοποιεί την ισχύ αυτού του συμπεράσματος και εξηγεί τη σπουδαιότητα της έννοιας της συρρίκνωσης.

Θεώρημα 3.7.1

Αν ένα σύνολο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, και Y είναι ένα συρρίκνωμα του X, τότε το Y έχει επίσης την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση από το σύνολο Y στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο. Θεωρούμε, λοιπόν, μια τυχαία συνεχή απεικόνιση $f:Y\to Y$. Εφόσον το Y είναι ένα συρρίκνωμα του X, θα υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $g:X\to Y$ τέτοια, ώστε $g(x)=x$, για κάθε $x\in Y$, οπότε η σύνθεση $h=f\circ g$ αυτών των απει-

κονίσεων θα είναι μια συνεχής απεικόνιση από το X στο Y, ή επειδή $Y \subset X$, η απεικόνιση h μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής απεικόνιση από το X στον εαυτό του. Εφόσον το σύνολο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, για τη συνεχή απεικόνιση h, θα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο, ώστε $h(x)=x$, ή, ισοδύναμα,

$$f(g(x))=x. \tag{3.7.1}$$

Προφανώς, $x \in Y$ (εφόσον $f \circ g: X \to Y$), οπότε

$$g(x)=x. \tag{3.7.2}$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.7.1) και (3.7.2) μας δίνει

$$f(x)=x,$$

δηλαδή το x είναι ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης f, γεγονός που αποδεικνύει το θεώρημα.

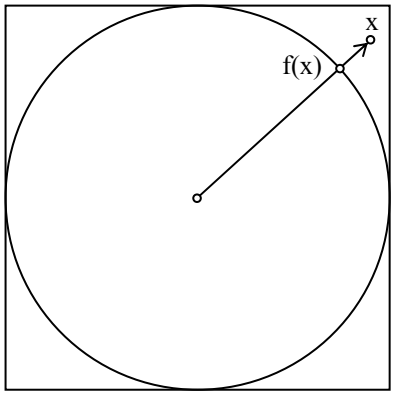
Επειδή, όπως αποδείξαμε στην ενότητα 3.6, ένα τετράγωνο έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου και ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα συρρίκνωμα ενός τετραγώνου, το Θεώρημα 3.7.1 μας δίνει μια νέα απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου για ένα κλειστό διάστημα. Το ίδιο επιχείρημα υποδεικνύει ότι όλα τα άλλα συρρικνώματα ενός τετραγώνου (δίσκος, τρίγωνο, κλπ.) έχουν επίσης την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Ειδικότερα, για να διαπιστώσουμε ότι ένας κλειστός δίσκος, π.χ. ο $B^2[0,1]=\{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \le 1\}$ είναι ένα συρρίκνωμα ενός τετραγώνου, αρκεί να θεωρήσουμε το τετράγωνο $T=[-1,1]\times[-1,1]$ και την απεικόνιση $f: T \to B^2[0,1]$, με

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|}, & \|x\|>1 \\ x, & \|x\| \le 1 \end{cases}$$

, για κάθε $x \in T$, η οποία, προφανώς είναι μια συρρίκνωση του T στο $B^2[0,1]$, εφόσον είναι συνεχής και $f(x)=x$, για κάθε $x \in B^2[0,1]$ (η ίδια απεικόνιση ορίζει το μοναδιαίο κλειστό δίσκο ως συρρίκνωμα ολόκληρου του επιπέδου).

Έτσι, λοιπόν, ένας δίσκος στο επίπεδο, ως συρρίκνωμα ενός τετραγώνου, θα έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Θα γενικεύσουμε το συμπέρασμα αυτό στην επόμενη ενότητα, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την έννοια της συρρίκνωσης, από μια άλλη, όμως, σκοπιά.



Εικόνα 20 – Ο δίσκος ως συρρίκνωμα ενός τετραγώνου

Απ' την άλλη πλευρά, το γεγονός ότι ένας κύκλος δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου μας προσφέρει το συμπέρασμα ότι ένας δίσκος στο επίπεδο δε μπορεί να συρρικνωθεί (με την έννοια του ορισμού της συρρίκνωσης που δώσαμε παραπάνω) στον κύκλο στο σύνορό του. Και αυτό είναι μια συνέπεια του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer στο επίπεδο.

Η κατά μία έννοια γενίκευση του προηγούμενου συμπεράσματος αποτελεί το θεώρημα που ολοκληρώνει την παρούσα ενότητα και αναφέρεται ως Θεώρημα μη Διαφορίσιμης Συρρίκνωσης. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το Θεώρημα για να δώσουμε μία από τις πολλές αποδείξεις του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer στη γενική περίπτωση, το οποίο αποτελεί και τον άμεσο στόχο του τρέχοντος κεφαλαίου.

Προηγουμένως, όμως, είναι αναγκαίο να αναφερθούμε στο πολύ σημαντικό λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 3.7.2

Έστω $B^n[0,1]=\{x\in IR^n: \|x\|\leq 1\}$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα στον Ευκλείδειο Χώρο IR^n και $f:B^n[0,1]\rightarrow IR^n$, όπου $f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$, μία δύο φορές διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in B^n[0,1]$ με $E_i(x)$ συμβολίσουμε την ορίζουσα που προκύπτει από τον $n\times(n-1)$ πίνακα

$$M(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

με παράλειψη της i-στής γραμμής (i=1, 2, ...,n), τότε

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}=0,$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$.

Απόδειξη

Έστω $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε για κάθε j=1, 2, ..., n με $j\neq i$, συμβολίζουμε με $C_{ij}(x)$ την ορίζουσα που προκύπτει από τον πίνακα M(x) με απαλοιφή της i-στής γραμμής και αντικατάσταση της γραμμής

$$\left(\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_j},\ldots,\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j}\right)$$

με τη γραμμή

$$\left(\frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_i\partial x_j},\ldots,\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right).$$

Τότε, με εφαρμογή του κανόνα διαφόρισης οριζουσών προκύπτει ότι

$$\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} C_{ij}\,.$$

Εξάλλου, λόγω της συνέχειας της f, έπεται ότι $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j\partial x_i}$, επομένως

$$C_{ji}=(-1)^{j-i-1}C_{ij},$$

καθώς για τον υπολογισμό της C_{ji}, η γραμμή των παραγώγων δεύτερης τάξης μετατοπίζεται κατά $j-i-1$ γραμμές σε σχέση με τη C_{ij} αν $i<j$ και κατά $i-j-1$ γραμμές σε άλλη περίπτωση. Άρα

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left[\sum_{j=1}^{i-1}C_{ij}+\sum_{j=i+1}^{n}C_{ij}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^iC_{ij}+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^iC_{ij}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^iC_{ij}+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^i(-1)^{j-i-1}C_{ji}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

οπότε το λήμμα αποδείχθηκε.

Θεώρημα 3.7.3 (Μη Διαφορίσιμη Συρρίκνωση)

Δεν υπάρχει δύο φορές διαφορίσιμη απεικόνιση από την κλειστή μοναδιαία σφαίρα $B^n[0,1]=\{x\in IR^n: \|x\|\le 1\}$ του Ευκλείδειου Χώρου IR^n στο σύνορό της $S^{n-1}(0,1)=\{x\in IR^n: \|x\|=1\}$, τέτοια, ώστε $f(x)=x$, για κάθε $x\in S^{n-1}(0,1)$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια δύο φορές διαφορίσιμη απεικόνιση $f:B^n[0,1]\to S^{n-1}(0,1)$, όπου $f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$ τέτοια, ώστε $f(x)=x$, για κάθε $x\in S^{n-1}(0,1)$. Επειδή, $f(x)\in S^{n-1}(0,1)$, έπεται ότι

$$f_1^2(x)+ f_2^2(x)+...+ f_n^2(x)=\|f(x)\|^2=1,$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in B^n[0,1]$. Από την προηγούμενη σχέση, παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς x_1, x_2, ..., x_n, λαμβάνουμε

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}f_1(x)+\dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}f_2(x)+\ldots+\dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}f_n(x)=0\\ \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}f_1(x)+\dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}f_2(x)+\ldots+\dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}f_n(x)=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}f_1(x)+\dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}f_2(x)+\ldots+\dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}f_n(x)=0\end{cases}\qquad(3.7.3)$$

Το ομογενές σύστημα (3.7.3) με αγνώστους τα $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ έχει και μη μηδενικές λύσεις (εφόσον $f(x)=x$, για κάθε $x\in S^{n-1}(0,1)$), επομένως για την Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J(x)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

που αποτελεί την ορίζουσα του συστήματος (3.7.3), θα ισχύει

$$J(x)=0 \tag{3.7.4}$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$. Αναπτύσσοντας την J(x) κατά την πρώτη στήλη, έχουμε

$$J(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}E_i(x), \tag{3.7.5}$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$, όπου $E_i(x)$, i=1, 2, ..., n, είναι η ορίζουσα όπως στο προηγούμενο λήμμα. Ολοκληρώνουμε την J(x) πάνω στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα $B^n[0,1]$, οπότε, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.7.4) και (3.7.5), λαμβάνουμε

$$0=\iint_{B^n}\cdots\int J(x)dx_1dx_2\ldots dx_n=\iint_{B^n}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}E_i(x)dx_1dx_2\ldots dx_n \tag{3.7.6}$$

Εξάλλου, από τον τύπο παραγώγισης του γινομένου έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_1(x)E_i(x)\right)=\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}E_i(x)+f_1(x)\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i},$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$, i=1, 2, ..., n, οπότε

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i}E_i(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_1(x)E_i(x)\right)-f_1(x)\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i},$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$, i=1, 2, ..., n. Επομένως, η σχέση (3.7.6) γίνεται

$$\iint_{B^n}\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_1(x)E_i(x)\right)+f_1(x)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}\right]dx_1dx_2\ldots dx_n=0 \tag{3.7.7}$$

Από το προηγούμενο λήμμα, όμως, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\frac{\partial E_i(x)}{\partial x_i}=0,$$

για κάθε $x\in B^n[0,1]$, επομένως η σχέση (3.7.7) γίνεται

$$\iint_{B^n}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_1(x)E_i(x)\right)dx_1dx_2\ldots dx_n=0,$$

ή, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green

$$\int_{S^{n-1}(0,1)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i ds = 0, \tag{3.7.8}$$

όπου ds η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω στη μοναδιαία σφαίρα $S^{n-1}(0,1)$.

Από την άλλη πλευρά, επειδή $f_i(x)=x_i$, για κάθε $x \in S^{n-1}(0,1)$, το διάνυσμα $\nabla(f_i(x)-x_i)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $S^{n-1}(0,1)$ στο σημείο x, ενώ το ίδιο το x είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Επομένως, για κάθε $x \in S^{n-1}(0,1)$ και για κάθε i=1, 2, ...n, υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (που εξαρτώνται από το x) τέτοια, ώστε

$$\nabla(f_i(x)-x_i)=\lambda_i x,$$

ή, ισοδύναμα

$$\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} - 1, \ldots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right) = (\lambda_i x_1, \lambda_i x_2, \ldots, \lambda_i x_i \ldots \lambda_i x_n)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \lambda_i x_j, \text{ για } j \neq i \text{ και } \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = 1 + \lambda_i x_i .$$

Επομένως, ο πίνακας M(x) του προηγούμενο λήμματος γράφεται

$$M(x) = \begin{bmatrix} \lambda_2 x_1 & \lambda_3 x_1 & \ldots & \lambda_n x_1 \\ 1+\lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_2 & \ldots & \lambda_n x_2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_2 x_n & \lambda_3 x_n & \ldots & 1+\lambda_n x_n \end{bmatrix},$$

για κάθε $x \in S^{n-1}(0,1)$, οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} E_i(x) x_i = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_2 x_1 & \ldots & \lambda_n x_1 \\ x_2 & 1+\lambda_2 x_2 & & \lambda_n x_2 \\ \vdots & & & \\ x_n & \lambda_2 x_n & & 1+\lambda_n x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ x_n & 0 & & 1 \end{vmatrix} = x_1 .$$

Εξάλλου, $f_1(x)=x_1$, για κάθε $x \in S^{n-1}(0,1)$, επομένως, με βάση την προηγούμενη

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i = x_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} E_i(x) x_i = x_1^{\,2},$$

ή, ολοκληρώνοντας πάνω στην επιφάνεια $S^{n-1}(0,1)$, έχουμε

$$\int_{S^{n-1}(0,1)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_1(x) E_i(x) x_i ds = \int_{S^{n-1}(0,1)} x_1^{\,2} ds > 0 .$$

Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (3.7.8) παραπάνω, γεγονός που αποδεικνύει το θεώρημα.

3.8. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer στη γενική περίπτωση

Θα χρησιμοποιήσουμε, τώρα, τα τελευταία συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας, για να αποδείξουμε, εδώ, τη γενική μορφή του Θεωρήματος του Brouwer. Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε το θεώρημα για την περίπτωση της κλειστής σφαίρας στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.8.1 (Σταθερού Σημείου του Brouwer για την κλειστή σφαίρα)

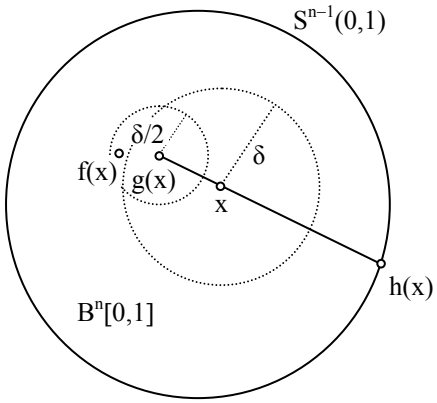
Κάθε συνεχής απεικόνιση από την κλειστή σφαίρα $B^n[0,R]=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\le R\}$ του Ευκλείδειου Χώρου $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της, όπου $R>0$, έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Θεωρούμε, πρώτα, την ειδική περίπτωση της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας $B^n[0,1]=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\le 1\}$ του Ευκλείδειου Χώρου $\mathbb{R}^n$ (δηλ. $R=1$), και έστω $f:B^n[0,1]\to B^n[0,1]$ μια συνεχής απεικόνιση. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x\in B^n[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x)=x$. Ως προς αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή.

Έστω, λοιπόν, ότι η f δεν έχει σταθερά σημεία, οπότε $f(x)-x\neq 0$, για κάθε $x\in B^n[0,1]$. Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $B^n[0,1]$, ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, είναι συμπαγής, οπότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $\|f(x)-x\|\ge\delta>0$ για κάθε $x\in B^n[0,1]$ και μια απεικόνιση $g:B^n[0,1]\to B^n[0,1]$ δύο φορές διαφορίσιμη και τέτοια, ώστε $\|g(x)-f(x)\|<\frac{\delta}{2}$, για κάθε $x\in B^n[0,1]$. Τότε $\|g(x)-x\|\ge\frac{\delta}{2}$, για κάθε $x\in B^n[0,1]$.

Ορίζουμε, τώρα, την απεικόνιση $h:B^n[0,1]\to S^{n-1}(0,1)$, όπου $S^{n-1}(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|=1\}$ η μοναδιαία σφαίρα, ως εξής: Για κάθε σημείο $x\in B^n[0,1]$ με $x\notin S^{n-1}(0,1)$, το $h(x)$ είναι το μοναδικό σημείο τομής της σφαίρας $S^{n-1}(0,1)$ με την ευθεία που ορίζεται από το x και το $g(x)$, ώστε το x να είναι μεταξύ των $g(x)$ και $h(x)$ (βλ. Εικόνα 19), ενώ $h(x)=x$ αν $x\in S^{n-1}(0,1)$. Εφόσον $g(x)\neq x$, η προηγούμενη ευθεία, και επομένως και η συνάρτηση $h(x)$ είναι καλώς ορισμένη και μάλιστα δύο φορές διαφορίσιμη.



Εικόνα 21 – Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer για την κλειστή μοναδιαία σφαίρα ως συνέπεια του Θεωρήματος μη ύπαρξης διαφορίσιμης συρρίκνωσης της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας στο σύνορό της

Πράγματι, από τον τρόπο που ορίσθηκε η απεικόνιση h, για κάθε $x\in B^n[0,1]$, θα υπάρχει μοναδικό $\lambda(x)\equiv\lambda\geq 1$ τέτοιο, ώστε

$$h(x)=\lambda x+(1-\lambda)g(x).$$

Οπότε επειδή

$$||h(x)||=1,$$

θα έχουμε

$$1=||h(x)||^2=\lambda^2||x||^2+(1-\lambda)^2||g(x)||^2+2\lambda(1-\lambda)<x,g(x)>,$$

όπου το σύμβολο <,> δηλώνει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, οπότε ισοδύναμα

$$\lambda^2||x-g(x)||^2+2\lambda<x-g(x),g(x)>+||g(x)||^2-1=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $\lambda\geq 1$, και καθώς $x-g(x)\neq 0$, έπεται ότι η συνάρτηση $\lambda(x)$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη, άρα και η απεικόνιση h.

Προφανώς η απεικόνιση $h:B^n[0,1]\rightarrow S^{n-1}(0,1)$ είναι μια συρρίκνωση εφόσον $h(x)=x$, για κάθε $x\in S^{n-1}(0,1)$, και μάλιστα δύο φορές διαφορίσιμη. Αυτό, όμως, έρχεται σε αντίθεση με το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.7.3 της μη διαφορίσιμης συρρίκνωσης. Επομένως η f έχει ένα σταθερό σημείο.

Στην γενικότερη περίπτωση, τώρα, όπου R>0 τυχαίο, θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi:B^n[0,1]\rightarrow B^n[0,R]$ με $\varphi(x)=R||x||$, για κάθε $x\in B^n[0,1]$. Η απεικόνιση φ είναι, προφανώς, ένας ομομορφισμός, οπότε, εφόσον το σύνολο $B^n[0,1]$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, βάσει του Θεωρήματος 1.3.1, το ίδιο θα ισχύει και για το σύνολο $B^n[0,R]$, γεγονός που αποδεικνύει το θεώρημα.

Ως πόρισμα του προηγούμενου Θεωρήματος 3.8.1, λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα, το οποίο επεκτείνει τα προηγούμενα αποτελέσματα στην περίπτωση των συμπαγών και κυρτών υποσυνόλων του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.8.2 (Σταθερού Σημείου του Brouwer)

Κάθε συνεχής απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του Ευκλειδείου Χώρου $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του έχει ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω $K\subset\mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο και $f:K\to K$ μια συνεχής απεικόνιση. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x\in K$ τέτοιο, ώστε $f(x)=x$.

Θεωρούμε την απεικόνιση προβολής $p_K:\mathbb{R}^n\to K$. Εφόσον το σύνολο K είναι συμπαγές, θα υπάρχει κλειστή σφαίρα $B^n[0,R]=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\le R\}$, $R>0$ τέτοια, ώστε $K\subset B^n[0,R]$. Ορίζουμε, τώρα, την απεικόνιση $g:B^n[0,R]\to B^n[0,R]$ με

$$g(x)=f(p_K(x)), \tag{3.8.1}$$

για κάθε $x\in B^n[0,R]$, η οποία είναι συνεχής απεικόνιση ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων. Από το Θεώρημα 3.8.1, όμως, η κλειστή σφαίρα $B^n[0,R]$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, επομένως θα υπάρχει $x\in B^n[0,R]$ τέτοιο ώστε

$$g(x)=x. \tag{3.8.2}$$

Μάλιστα, με τον τρόπο με τον οποίον ορίσθηκε η g, απεικονίζει την κλειστή σφαίρα $B^n[0,R]$ στο υποσύνολό της K, οπότε $x=g(x)\in K$, και άρα

$$p_K(x)=x. \tag{3.8.3}$$

Είναι προφανές ότι η σχέση (3.8.1) με χρήση των (3.8.2) και (3.8.3) δηλώνει ότι υπάρχει $x\in K$ τέτοιο ώστε $f(x)=x$, δηλαδή η απεικόνιση f έχει ένα σταθερό σημείο. Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε.

4 ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΑΠΕΙΡΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

4.1. Εισαγωγικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διαπραγματευθήκαμε το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου του Brouwer και διαπιστώσαμε την ισχύ του για κάθε κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Σαφώς το πεπερασμένο της διάστασης του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι μία αυστηρή συνθήκη μεταξύ των υποθέσεων του θεωρήματος, η οποία δε μπορεί να αγνοηθεί, καθώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Riesz, η κλειστή μοναδιαία σφαίρα σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι συμπαγές σύνολο.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι δε μπορεί να ισχύει γενικά ένα συμπέρασμα αντίστοιχο αυτού του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer για την κλειστή σφαίρα όταν χώρος $\mathbb{R}^n$ αντικατασταθεί από έναν απειροδιάστατο χώρο.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το χώρο ℓ^2 των πραγματικών ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των οποίων η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2$ συγκλίνει και για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\ell^2$ ορίζουμε $\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2}$. Έστω $B=\{x\in\ell^2: \|x\|\leq 1\}$ η κλειστή μοναδιαία σφαίρα και το σύνορό της $S=\{x\in\ell^2: \|x\|=1\}$ η μοναδιαία σφαίρα στον ℓ^2 και ορίζουμε την απεικόνιση $f:B\to S\subset B$, με

$$f(x)=\left(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, ..., x_n, ...\right),$$

για κάθε $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in \ell^2$, η οποία είναι, προφανώς, συνεχής.

Αν υποθέσουμε ότι η απεικόνιση f έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει κάποιο $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in B$ τέτοιο, ώστε

$$f(x)=x,$$

τότε, αφενός

$$||x||=||f(x)||=1,$$

οπότε $f(x)=(0,x_1,x_2,...,x_n,...)$, και αφετέρου

$$(0,x_1,x_2,...,x_n,...)=(x_1,x_2,...,x_n,...).$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $x_1=x_2=...=x_n=...=0$, επομένως $x=0$, γεγονός που είναι άτοπο, εφόσον, όπως είδαμε $||x||=1$.

Στην ενότητα που ακολουθεί θα αναφερθούμε στις συνθήκες εκείνες που πρέπει να πληρούνται, ώστε ένας τυχαίος χώρος Banach να έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, διατυπώνοντας το Θεώρημα του Schauder, το οποίο αποτελεί την επέκταση του Θεωρήματος του Σταθερού Σημείου του Brouwer και σε χώρους άπειρης διάστασης.

4.2. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder

Το παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας δείχνει πως η κλειστή μοναδιαία σφαίρα B στον ℓ^2 δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το B δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ℓ^2. Επομένως μια ενδεχόμενη επέκταση του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brouwer και σε χώρους άπειρης διάστασης θα πρέπει να παρακάμπτει την ιδιότητα του σταθερού σημείου της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας (πρβ. το Θεώρημα 3.8.1). Πράγματι, μια ορθή γενίκευση στη μορφή του Θεωρήματος 3.8.2 αποτελεί το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου του Schauder, σύμφωνα με το οποίο, κάθε συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Για την απόδειξη αυτού του συμπεράσματος εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Brouwer σε μια ακολουθία συνεχών απεικονίσεων από κατάλληλους συμπαγείς και κυρτούς υποχώρους πεπερασμένης διάστασης, στον εαυτό τους. Η ύπαρξη αυτών των πεπερασμένης διά-

στασης υποχώρων και των αντίστοιχων απεικονίσεων εξασφαλίζεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.1

Έστω X ένας χώρος Banach και K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολό του. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένας υπόχωρος $K_\varepsilon\subset K$ πεπερασμένης διάστασης και μια συνεχής απεικόνιση $f_\varepsilon:K\to K_\varepsilon$, τέτοια ώστε $\|f_\varepsilon(x)-x\|<\varepsilon$, για κάθε $x\in K$.

Απόδειξη

Εφόσον το σύνολο K είναι συμπαγές, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ (που εξαρτάται από το ε), θα υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n\in K$ τέτοια, ώστε

$$\min_{1\le i\le n}\|x-x_i\|<\varepsilon .$$

Θεωρούμε, τώρα, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική συνεχή συνάρτηση, με την ιδιότητα $g(t)=0$ αν και μόνο αν $t\ge 1$, και για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $h_i:K\to\mathbb{R}$, με

$$h_i(x)=\frac{g\left(\frac{\|x-x_i\|}{\varepsilon}\right)}{\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{\|x-x_i\|}{\varepsilon}\right)},$$

για κάθε $x\in K$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο K και μη αρνητικές, ενώ προφανώς, $\sum_{i=1}^{n} h_i(x)=1$, για κάθε $x\in K$ και $h_i(x)=0$, αν $\|x-x_i\|\ge\varepsilon$, $i=1, 2, \ldots$

Θέτουμε ως K_ε την κυρτή θήκη των $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, οπότε $\dim K_\varepsilon\le n<+\infty$ και $K_\varepsilon\subset K$, εφόσον το K είναι κυρτό και ορίζουμε την απεικόνιση $f_\varepsilon:K\to K_\varepsilon$, με

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{n} h_i(x)x_i ,$$

για κάθε $x\in K$.

Εφόσον $\sum_{i=1}^{n} h_i(x)=1$, για κάθε $x\in K$, το $f_\varepsilon(x)$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, οπότε πράγματι $f_\varepsilon(x)\in K_\varepsilon$. Επίσης,

$$\|f_\varepsilon(x)-x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} h_i(x)x_i - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)x\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} h_i(x)(x_i - x)\right\|$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\|x_i - x\| < \sum_{\substack{i=1 \\ \|x-x_i\|<\varepsilon}}^{n} h_i(x)\varepsilon = \varepsilon,$$

για κάθε $x\in K$, οπότε το συμπέρασμα αποδείχθηκε.

Με βάση το λήμμα που μόλις αποδείξαμε, είμαστε, τώρα, σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό συμπέρασμα του κεφαλαίου αυτού.

Θεώρημα 4.2.2 (Σταθερού Σημείου του Schauder)

Κάθε συνεχής απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach στον εαυτό του έχει ένα (τουλάχιστον) σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $f:K\to K$ μια συνεχής απεικόνιση. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x\in K$ τέτοιο, ώστε $f(x)=x$.

Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι, για κάθε k=1, 2, ..., υπάρχει συμπαγές και κυρτό σύνολο $K_k\subset K$ πεπερασμένης διάστασης και μια συνεχής απεικόνιση $f_k:K\to K_k$ τέτοια, ώστε

$$\|f_k(x)-x\| < \frac{1}{k}, \tag{4.2.1}$$

για κάθε $x\in K$.

Θεωρούμε, τώρα, τη σύνθεση της απεικόνισης f με την απεικόνιση f_k, δηλαδή την $f_k\circ f:K\to K_k$ και μάλιστα τον περιορισμό αυτής στο $K_k\subset K$, έστω $\varphi_k:K_k\to K_k$, με

$$\varphi_k(x)=f_k(f(x)), \tag{4.2.2}$$

για κάθε $x\in K_k$. Η απεικόνιση φ_k είναι συνεχής και απεικονίζει το πεπερασμένης διάστασης συμπαγές και κυρτό σύνολο K_k στον εαυτό του, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer θα έχει ένα σταθερό σημείο $x_k\in K_k\subset K$ τέτοιο, ώστε $\varphi_k(x_k)=x_k$.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.2.1) για το $f(x)\in K$, και λόγω της (4.2.2), έχουμε

$$\|\varphi_k(x)-f(x)\| = \|f_k(f(x))-f(x)\| < \frac{1}{k},$$

για κάθε $x\in K_k$, επομένως

$$\|\varphi_k(x)-f(x)\|\to 0, \tag{4.2.3}$$

καθώς $k\to+\infty$, για κάθε $x\in K_k$, άρα και για το σταθερό σημείο $x_k\in K_k$ της φ_k, θα ισχύει

$$\|x_k-f(x_k)\|=\|\varphi_k(x_k)-f(x_k)\|\to 0, \tag{4.2.4}$$

καθώς $k\to+\infty$.

Εφόσον το σύνολο K είναι συμπαγές, η ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset K$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\left(x_{m_k}\right)_{k=1,2,\ldots}$ και έστω $x=\lim\limits_{k\to+\infty} x_{m_k}$ το όριό της, δηλαδή

$$\left\|x_{m_k}-x\right\|\to 0, \tag{4.2.5}$$

καθώς $k\to+\infty$. Τότε, αφού η απεικόνιση f είναι συνεχής, το f(x) είναι το όριο της $\left(f\left(x_{m_k}\right)\right)_{k=1,2,\ldots}$, δηλαδή

$$\left\|f\left(x_{m_k}\right)-f(x)\right\|\to 0, \tag{4.2.6}$$

καθώς $k\to+\infty$. Έτσι, από την τριγωνική ανισότητα της νόρμας και τις σχέσεις (4.2.4), (4.2.5) και (4.2.6), έπεται ότι

$$\|f(x)-x\|\le\left\|f(x)-f\left(x_{m_k}\right)\right\|+\left\|f\left(x_{m_k}\right)-x_{m_k}\right\|+\left\|x_{m_k}-x\right\|\to 0,$$

καθώς $k\to+\infty$, απ' όπου προκύπτει ότι $\|f(x)-x\|=0$, δηλαδή

$$f(x)=x,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Υπάρχουν διάφορες εφαρμογές του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder. Εδώ, θα περιορισθούμε σε εκείνες που αφορούν μια ενδιαφέρουσα κατηγορία απεικονίσεων, την έννοια των οποίων ορίζουμε ευθύς.

Ορισμός 4.2.1

Μια απεικόνιση f από έναν μετρικό χώρο (X,ρ) στον εαυτό του ονομάζεται *αδιάσταλτη (non-expansive)* αν

$$\rho(f(x),f(y))\le\rho(x,y),$$

για κάθε $x, y\in X$.

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε η απεικόνιση $f:X\to X$ είναι αδιάσταλτη αν

$$\|f(x)-f(y)\|\le\|x-y\|,$$

για κάθε $x, y\in X$.

Ήδη, από τον προηγούμενο ορισμό, προκύπτει ότι κάθε αδιάσταλτη απεικόνιση είναι συνεχής και επομένως, ως πόρισμα, του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του

Schauder, λαμβάνουμε ότι κάθε αδιάσταλτη απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach στον εαυτό του έχει σταθερό σημείο.

Φυσικά, δεν είναι όλες οι αδιάσταλτες απεικονίσεις τέτοιες, ώστε να έχουν σταθερά σημεία. Για παράδειγμα η απεικόνιση μεταφοράς $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x+\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\neq 0$, δεν έχει κανένα σταθερό σημείο. Εδώ δε μπορεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 4.2.2, καθώς το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει μια ειδική περίπτωση αδιάσταλτων απεικονίσεων, των οποίων το σταθερό σημείο, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.2

Μια απεικόνιση f από έναν μετρικό χώρο (X,ρ) στον εαυτό του ονομάζεται *αυστηρά αδιάσταλτη (strictly non-expansive)* αν

$$\rho(f(x),f(y))<\rho(x,y)$$

για κάθε $x, y\in X$, με $x\neq y$.

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε η απεικόνιση $f:X\to X$ είναι αυστηρά αδιάσταλτη αν

$$\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|,$$

για κάθε $x, y\in X$, με $x\neq y$.

Είναι προφανές ότι μια αυστηρά αδιάσταλτη απεικόνιση είναι αδιάσταλτη και επομένως ικανοποιεί το Θεώρημα του Schauder. Ειδικότερα, όμως, το σταθερό σημείο της είναι μοναδικό. Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.3

Κάθε αυστηρά αδιάσταλτη απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach στον εαυτό του έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Έστω K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach και $f:K\to K$ μια αυστηρά αδιάσταλτη απεικόνιση. Η προηγούμενη παρατήρηση εξασφαλίζει ότι η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο. Αν υποθέσουμε ότι x και $y\in K$ είναι δύο διακεκριμένα σταθερά σημεία της f, τότε

$$f(x)=x \text{ και } f(y)=y,$$

ενώ, από τον ορισμό της f ως αυστηρά αδιάσταλτη απεικόνιση, προκύπτει ότι

$$||x-y||=||f(x)-f(y)||<||x-y||.$$

άτοπο. Επομένως x=y.

4.3. Η Κυρτότητα του Συνόλου των Σταθερών Σημείων

Στην ενότητα αυτή τα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως χρησιμοποιούνται με τέτοιο τρόπο, ώστε να χαρακτηρισθεί πλήρως το σύνολο των σταθερών σημείων μιας αδιάσταλτης απεικόνισης. Το γεγονός ότι μια απεικόνιση μεταφοράς δεν έχει σταθερά σημεία, ή κάθε αυστηρά αδιάσταλτη απεικόνιση έχει μοναδικό σταθερό σημείο, ή ακόμα ότι η ταυτοτική απεικόνιση έχει άπειρα στο πλήθος σταθερά σημεία, δείχνει ότι το σύνολο των σταθερών σημείων μιας αδιάσταλτης απεικόνισης δεν μπορεί να περιγραφεί μόνο από το πλήθος των στοιχείων του. Σε αντίθεση με αυτό, το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι το σύνολο των σταθερών σημείων πληροί μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα.

Θεώρημα 4.3.1

Έστω X ένας χώρος Hilbert και $f:X\to X$ μια αδιάσταλτη απεικόνιση. Τότε το σύνολο των σταθερών σημείων της f είναι είτε κενό, είτε κλειστό και κυρτό.

Απόδειξη

Το παράδειγμα της απεικόνισης μεταφοράς, στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως, δείχνει ότι το σύνολο των σταθερών σημείων μπορεί να είναι κενό.

Αν η απεικόνιση f έχει μοναδικό σταθερό σημείο, το συμπέρασμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η f έχει δύο σταθερά σημεία x και $y\in X$ και θέτουμε

$$z=\alpha x+(1-\alpha)y,\ 0\le\alpha\le 1.$$

Τότε, εφόσον η f είναι αδιάσταλτη απεικόνιση και x=f(x), y=f(y), έχουμε

$$||f(z)-x||=||f(z)-f(x)||\le||z-x||=(1-\alpha)||x-y|| \tag{4.3.1}$$

και

$$||f(z)-y||=||f(z)-f(y)||\le||z-y||=\alpha||x-y||, \tag{4.3.2}$$

οπότε, με πρόσθεση των παραπάνω κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$||f(z)-x||+||f(z)-y||\le||x-y||.$$

Από την τριγωνική ανισότητα της νόρμας, όμως, έχουμε

$$||x-y||\le||f(z)-x||+||f(z)-y||,$$

επομένως

$$\|f(z)-x\|+\|f(z)-y\|=\|x-y\|. \tag{4.3.3}$$

Αν υποθέσουμε ότι $\|f(z)-x\|<(1-\alpha)\|x-y\|$, τότε, από τη σχέση (4.3.3) λαμβάνουμε ότι

$$\|f(z)-y\|=\|x-y\|-\|f(z)-x\|>\|x-y\|-(1-\alpha)\|x-y\|=\alpha\|x-y\|,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (4.3.2), επομένως η (4.3.1) συνεπάγεται ότι

$$\|f(z)-x\|=\|z-x\|=(1-\alpha)\|x-y\| \tag{4.3.4}$$

και ομοίως

$$\|f(z)-y\|=\|z-y\|=\alpha\|x-y\|. \tag{4.3.5}$$

Η σχέση (4.3.4) παραπάνω, δηλώνει ότι τα z και f(z) βρίσκονται στην κλειστή σφαίρα κέντρου x και ακτίνας $(1-\alpha)\|x-y\|$ και επειδή αυτή είναι κυρτό υποσύνολο του χώρου X θα περιέχει και το $w=\dfrac{z+f(z)}{2}$, οπότε

$$\|w-x\|\le(1-\alpha)\|x-y\|. \tag{4.3.6}$$

Από τη σχέση (4.3.5), με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι το w βρίσκεται στην κλειστή σφαίρα κέντρου y και ακτίνας $\alpha\|x-y\|$, οπότε

$$\|w-y\|\le\alpha\|x-y\|. \tag{4.3.7}$$

Οι σχέσεις (4.3.6) και (4.3.7) είναι αντίστοιχες των (4.3.1) και (4.3.2), οπότε με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι

$$\|w-x\|+\|w-y\|=\|x-y\|$$

και

$$\|w-x\|=(1-\alpha)\|x-y\|=\|f(z)-x\|=\|z-x\|,\ \|w-y\|=\alpha\|x-y\|=\|f(z)-y\|=\|z-y\|. \tag{4.3.8}$$

Επειδή ο X είναι χώρος Hilbert ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου (Πρόταση 1.2.18), δηλαδή

$$\|a-b\|^2+\|a+b\|^2=2\|a\|^2+2\|b\|^2,$$

για κάθε $a, b\in X$, οπότε για $a=f(z)-x$ και $b=z-x$, έχουμε

$$\|f(z)-z\|^2+\|f(z)-x+z-x\|^2=2\|f(z)-x\|^2+2\|z-x\|^2 \tag{4.3.9}$$

ενώ,

$$\|f(z)-x+z-x\|^2=\|f(z)+z-2x\|^2=\|2w-2x\|^2=4\|w-x\|^2,$$

άρα, χρησιμοποιώντας και την πρώτη από τις (4.3.8), η σχέση (4.3.9) δίνει τελικά

$$\|f(z)-z\|=0,$$

επομένως

$$z=f(z),$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της f είναι κυρτό.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της f είναι κλειστό. Ως προς αυτό, θεωρούμε μια συγκλίνουσα ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σταθερών σημείων της f με όριο το $z\in X$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.13, αρκεί να δείξουμε ότι το z είναι επίσης σταθερό σημείο της f, δηλαδή, ότι $f(z)=z$.

Επειδή $f(z_n)=z_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και η f είναι μια αδιάσταλτη απεικόνιση, θα έχουμε

$$\|z_n-f(z)\|=\|f(z_n)-f(z)\|\leq\|z_n-z\|,$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εφόσον, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|z_n-z\|=0$, η προηγούμενη συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\|z_n-f(z)\|=0$$

και συνεπώς το f(z) είναι επίσης το όριο της ακολουθίας $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $f(z)=z$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε στα πιο σημαντικά θεωρήματα για τα σταθερά σημεία μιας απεικόνισης από έναν χώρο στον εαυτό του, όπως το Θεώρημα του Banach και το Θεώρημα του Brouwer και είδαμε πώς τα θεωρήματα αυτά χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή πολλών χρήσιμων μαθηματικών συμπερασμάτων. Επιπλέον παρουσιάσαμε διάφορες τεχνικές απόδειξης αυτών των αποτελεσμάτων, ανάλογα με το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε κατά περίπτωση, χρησιμοποιώντας μεθόδους τόσο από το πεδίο της κλασικής Συναρτησιακής Ανάλυσης, όσο και από αυτό της λεγόμενης Συνδυαστικής Τοπολογίας ή μεθόδους οικείες στη Θεωρία Γραφημάτων. Στα πλαίσια αυτής της αναζήτησης, θα ήταν ενδιαφέρουσα μια περαιτέρω μελέτη, η οποία θα εξετάζει άλλες μεθόδους, με βάση διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ώστε να λάβουμε τα ίδια ή παρόμοια συμπεράσματα κάτω, όμως, από ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο. Είναι γνωστές, για παράδειγμα, οι αποδείξεις που δίνονται για το Θεώρημα του Brouwer στη γενική περίπτωση μέσω της Θεωρίας Ομολογίας, ή μέσω της έννοιας του *Βαθμού μιας Απεικόνισης* (έννοιας που θέσπισε ο ίδιος ο Brouwer για να αποδείξει το ομώνυμο θεώρημά του).

Επίσης, παρά τη μεγάλη σπουδαιότητα των θεωρημάτων που διαπραγματευθήκαμε εδώ, είναι σαφές ότι η μελέτη των σταθερών σημείων δεν μπορεί να περιορισθεί μόνο στα θέματα που καλύπτει η παρούσα εργασία. Ήδη από πολύ νωρίς τον προηγούμενο αιώνα, μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας, με εφαλτήριο τα θεωρήματα αυτά, έστρεψε το ενδιαφέρον της στη μελέτη των σταθερών σημείων και έτσι προέκυψαν πολλά σημαντικά αποτελέσματα με εφαρμογές σε όλους σχεδόν τους τομείς των μαθηματικών, από τα λεγόμενα «καθαρά» μαθηματικά έως τις Οικονομικές Θεωρίες και τη Θεωρία Παιγνίων.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συμπερασμάτων αυτού του είδους είναι το περιώνυμο Θεώρημα Markov-Kakutani, το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη κοινών σταθερών σημείων μιας οικογένειας *συσχετισμένων* (*affine*) συνεχών απεικονίσεων από ένα συμπαγές κυρτό μη κενό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου, οι οποίες έχουν την ιδιότητα να αντιμετατίθενται ως προς τη σύνθεσή τους. Ο Markov απέδειξε το εν λό-

γω θεώρημα το 1936 χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Brouwer, ενώ μια άμεση απόδειξή του δόθηκε από τον Kakutani το 1938.

Σε παρόμοια πλαίσια κινείται το Θεώρημα DeMarr, σύμφωνα με το οποίο, μια οικογένεια αδιάσταλτων απεικονίσεων από ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου που αντιμετατίθενται ως προς τη σύνθεσή τους, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σταθερό σημείο.

Εξαιρετικό ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζει η μελέτη των θεωρημάτων σταθερών σημείων για πλειότιμες απεικονίσεις, με σημαντικότερο εκπρόσωπο το περίφημο Θεώρημα Kakutani. Ο Kakutani, περί το 1941, όρισε την έννοια της *K-απεικόνισης*, δηλαδή μιας πλειότιμης σχέσης $F:A\rightarrow B$, όπου A και B είναι δύο υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα, που ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

α) για κάθε $x\in A$ το $F(x)$ είναι συμπαγές και κυρτό μη κενό υποσύνολο του B και

β) το γράφημα της F, $G(F)=\{(x,y),\ y\in F(x)\}$ είναι κλειστό στο $A\times B$

και απέδειξε το ομώνυμο θεώρημα, δηλαδή ότι κάθε K-απεικόνιση από ένα συμπαγές και κυρτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο, ενώ το θεώρημα επεκτείνεται αντίστοιχα και σε χώρους άπειρης διάστασης.

Επειδή κάθε συνεχής απεικόνιση είναι K-απεικόνιση, τα προηγούμενα συμπεράσματα γενικεύουν το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, αλλά και την επέκτασή του, το Θεώρημα Shauder.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Dunford, N. and Schwar**tz**, J.T. *Linear Operators Part I: General Theory, vol. 1*. John Wiley & Sons, New York, 1957. Reprinted: John Wiley & Sons, Wiley Classics Library Edition, 1988.
2. Dugundji, James. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
3. Edwards, R.E. *Functional Analysis, Theory and Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
4. Ferreira, Paulo J.S.G. Fixed point problems – an introduction. *Revista Do Detua*, vol.1, No 6 (1996), pp. 505–513.
5. Jost, Jürgen. *Postmodern Analysis*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
6. Kannai Yakar. An Elementary Proof of the No–Retraction Theorem. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 4. (Apr., 1981), pp. 264–268.
7. Καραμπατζός, Γ.Ι. *Αριθμητικές Μέθοδοι*. NUM, Αθήνα, 1987.
8. Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. Wiley–Eastern Ltd., New Delhi, 1989.
9. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1999.
10. Lebedev. L.P., Vorovich, I.I. and Cladwell, G.M.L., *Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003
11. Νεγρεπόντης, Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν. και Φαρμάκη Β. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1997.
12. Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας Ε., *Απειροστικός Λογισμός Ι*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1987.
13. Rudin, Walter, *Functional Analysis*. McGraw–Hill, Inc., New York, 1973.
14. Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*. 3d Ed. McGraw–Hill, Inc., New York, 1976.
15. Shashkin, Yu.A. *Fixed Points*. American Mathematical Society, 1991.
16. Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L., *Metric Spaces*. Springer–Verlang, London, 2006.
17. Smart, D.R. *Fixed point theorems*. Cambridge University Press, London, 1974.

18. Σταθακόπουλος, Κ.Α. *Πραγματική Ανάλυση*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, 1989.
19. Su, F.E. Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division. *The American Mathematical Monthly*, vol. 106 (1999), pp. 930–942.
20. Χατζηνικολάου, Κ.Θ. *Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1989.
21. Yale, Paul B. *Geometry and Symmetry*. Dover Publications, Inc., New York, 1988.