ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ-ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό- Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΗ ΤΟΥ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΣΜΟΥ: ΜΙΑ ΟΝΤΟΛΟΓΙΚΗ-ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

Διπλωματική Εργασία για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Λ ΙΟΣΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Αθήνα 2005-2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Ή ΓΙΑ ΠΟΙΟ ΛΟΓΟ ΕΠΙΛΕΞΑΜΕ ΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΘΕΜΑ……..…5

ΕΙΣΑΓΩΓΗ Ή ΜΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ……7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α
ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ, ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΝΤΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΣΜΟΥ-ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗΣ……8

Α1: Βασικοί ορισμοί……8
Α2: Κατηγορίες και νόμοι της υλιστικής διαλεκτικής……12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β
ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ……..15

Β1: Εννοιολογικές αποσαφηνίσεις: Η άποψη του Διαλεκτικού Υλισμού για τη φύση και τον ορισμό των Μαθηματικών ή θέτοντας το εννοιολογικό πλαίσιο…….. 15
Β1.1: Για τη νομιμοποίηση του ορισμού…… 15
Β1.2: Παράθεση ορισμών από εκπροσώπους του ΔΥ και σχολιασμός τους. ……16

Β2: Ορισμένοι άλλοι ορισμοί των μαθηματικών και κριτική τους με τα εργαλεία του ΔΥ…….. 20
Β2.1: Η πυθαγόρεια άποψη…… 20
Β2.2: Η πλατωνική άποψη…… 21
Β2.3: Η αριστοτελική άποψη…… 24
Β2.4: Ύστερες της αρχαιότητας απόψεις σχετικά με το τι είναι μαθηματικά και τη χρηστική τους αξία……...26
Β2.5: Ορισμένες σύγχρονες απόπειρες απόδοσης του ορισμού των μαθηματικών……..38

Β3: Τα μαθηματικά και το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας ή θέτοντας το φιλοσοφικό πλαίσιο…… 44
Β3.1: Μαθηματικά και αφαίρεση…… 46
Β3.2: Η έννοια της απριορικότητας των μαθηματικών: στον αντίποδα του ΔΥ. …….. .49
Β3.2.1: Ο διαχωρισμός του Λάιμπνιτς…….. 49
Β3.2.2: Ο καντιανός διαχωρισμός……50
Β3.2.3: Η κατά Καντ ένταξη των μαθηματικών προτάσεων…….. 51
Β3.2.4: Μια πρόταση του ΔΥ…… 51
Β3.2.5: Μια κριτική από την πλευρά του ΔΥ……...53
Β3.2.6: Ειδικά για τις μαθηματικές προτάσεις……57
Β3.2.7: Τελική κρίση……...59
Β3.2.8: Και άλλες «απριορικότητες»……..61
Β3.3: Τα μαθηματικά και το «σώζειν τα φαινόμενα»……64

Παρέκβαση 1η: Το άπειρο, το πεπερασμένο, το απειροστό , ο ΔΥ και τα Μαθηματικά…….. 67

Παρέκβαση 2η: Μαθηματικά και ιδεολογία……74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ
ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Η ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΟ ΖΗΤΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ…….. 78

Γ1: Για τον ορισμό της Λογικής…….78
Γ2: Για τη διαφορά τυπικής-διαλεκτικής λογικής……79
Γ3: Οι νέες λογικές και οι εξελίξεις στην τεχνολογία: το «τέλος» της τυπικής λογικής και η νίκη της διαλεκτικής λογικής…… 82
Γ4: Μαθηματικά και Λογική……89
Γ4.1: Η σημασία των φορμαλισμών……..90
Γ4.2: Ο Θετικισμός και τα Μαθηματικά…… 91
Γ4.3: Το Θεώρημα Goedel……98
Γ5: Λογική, Μαθηματικά και Αλήθεια: η περίπτωση της ευκλείδειας και των μη ευκλείδειων γεωμετρικών…….. 101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ
ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Ο ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΜΟΣ, ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΕΨΗ……108

Δ1: Σύντομη ιστορική αναδρομή στο ζήτημα της αιτιοκρατίας…… 108
Δ2: Τα μαθηματικά προβλέπουν: Πιθανότητες και Στατιστική……111
Δ3: Χάος: Το εννοιολογικό πλαίσιο……112
Δ4: Η γένεση της επιστήμης των χαοτικών δυναμικών συστημάτων……113
Δ5: Διαλεκτικός Υλισμός και Χάος……..118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε
Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ……124

Ε1: Η θεώρηση του Ίλιεφ……124
Ε2: Ο Jacques Hadamard για τη μαθηματική ανακάλυψη……125
Ε2.1: Για τη μαθηματική ευφυΐα…… 126
Ε2.2: Το «μαθηματικό όνειρο» και η αιφνίδια λύση……128
Ε2.3: Τα τρία στάδια μαθηματικής σκέψης σύμφωνα με τον Poincare……..128
Ε2.4: Το τέταρτο στάδιο……132
Ε3: Σύγχρονες θεωρήσεις σχετικά με τα στάδια σκέψης και την ανακάλυψη…….132
Ε4: Η σκέψη και οι σχέση της με τις αναπαραστάσεις……..133
Ε5: Τα διαφορετικά είδη μαθηματικού πνεύματος……..136
Ε6: Τα δυο είδη επινόησης……137
Ε7. Τα ενσώματα μαθηματικά……..140
Ε7.1 Σύντομη παρουσίαση της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών……..140
Ε7.2: Κριτική αποτίμηση της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών με την οπτική του ΔΥ……141
Ε8 : Μερικοί προβληματισμοί και κάποια συμπέρασμα……145

Παρέκβαση: Μαθηματικά και μια προσέγγιση ψυχιατρικής υφής……145

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ
Η ΠΕΡΙΟΔΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΥΛΙΣΤΙΚΟΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥΣ……147

ΣΤ1: Η ιστορία των μαθηματικών κατά Kolmogoroff……147
ΣΤ2: Η άποψη του Στρούικ……150
ΣΤ3: Η άποψη του Ίλιεφ……154
ΣΤ4: Παραδείγματα ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών σύμφωνα με την υλιστικοδιαλεκτική θεώρηση: η περίπτωση της αρχαίας Ελλάδας……157
ΣΤ4.1: Η ανάλυση της 1ης θέσης……158
ΣΤ4.2: Η ανάλυση της 2ης θέσης……159
ΣΤ4.3: Η ανάλυση της 3ης θέσης……160
ΣΤ5: Ερμηνεία του φαινομένου της σχετικής αυτονόμησης των Μαθηματικών…160
ΣΤ5.1: Ένα παράδειγμα από τον Αρχιμήδη……161
ΣΤ5.2: Η άποψη του Vernant ή πώς κοινωνική εξέλιξη και επιστήμη εμπλέκονται……162
ΣΤ5.3: Η θεολογία ως παράγοντας αυτονόμησης……165
ΣΤ5.4: Η αυτονόμηση των Μαθηματικών και η σχολή της Ελέας……167
ΣΤ5.5: Η συνεισφορά των Σοφιστών στη σχετική αυτονόμηση των Μαθηματικών……168
ΣΤ5.6: Η αριστοτέλεια λογική και το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη……169

Παρέκβαση: Ο κύκλος και η φιλοσοφία των Αρχαίων Ελλήνων……174

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΔΥ ΚΑΙ ΚΟΝΣΤΡΟΥΚΤΙΒΙΣΜΟΣ…… 179

Π1: Βασικές φιλοσοφικές αναφορές και βάσεις του Κονστρουκτιβισμού…… 179
Π2: Κονστρουκτιβισμός και μαθηματικά. Μια υλιστικοδιαλεκτική κριτική…… 183
Π3: «Αποδείξεις και Ανασκευές» ή ο Lakatos ως κονστρουκτιβιστής…… 186
Π3.1: Φιλοσοφικές σταθερές του Lakatos…… 186
Π3.2: Οι «Αποδείξεις και Ανασκευές»……187
Π4: Η υλιστικοδιαλεκτική πρόταση……191
Π4.1: Βασικές παιδαγωγικές αρχές του υλιστικοδιαλεκτικού μοντέλου……192
Π4.2: Μια υλιστικοδιαλεκτική πρόταση για τη διδακτική των Μαθηματικών……194

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ……199

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ……208

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Ή ΓΙΑ ΠΟΙΟ ΛΟΓΟ ΕΠΙΛΕΞΑΜΕ ΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΘΕΜΑ

Πού θα μου χρησιμεύσουν όλα αυτά που μαθαίνω; Στο super market θα ψωνίζω με ολοκληρώματα; Αυτά είναι δυο τετριμμένα ερωτήματα που συναντάνε οι μαθηματικοί στη δευτεροβάθμια, κυρίως, εκπαίδευση. Εκφράζουν την απέχθεια της πλειονότητας των μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών, μιας απέχθειας που είναι προϊόν της δυσκολίας κατανόησης του εν λόγω μαθήματος. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους για τους οποίους επιλέξαμε το συγκεκριμένο θέμα. Ας γίνουμε περισσότερο σαφείς: θεωρούμε ότι τα μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, πρέπει να συνδέονται με συγκεκριμένα παιδαγωγικά μοντέλα, με την ψυχολογία, με την ιστορία τους, με τη λογική, με τις άλλες επιστήμες **και με τη φιλοσοφία**. Κάτι τέτοιο δε γίνεται σχεδόν πουθενά και δεν έχει γίνει σχεδόν ποτέ. Αυτός είναι και **ένας** από τους βασικούς λόγους για τους οποίους υπάρχει η περίφημη μαθηματικοφοβία. Ένα φαινόμενο που όσες προσπάθειες κι αν έχουν γίνει, όχι μόνο δεν έχει εξαλειφθεί, αλλά φαίνεται πως είτε παραμένει στάσιμο είτε και διογκώνεται. Οι μεταρρυθμίσεις έρχονται η μια μετά την άλλη, το πρόβλημα, όμως, παραμένει και είναι οξύτατο. **Υποστηρίζουμε, λοιπόν, πως κάτι θα άλλαζε αν η σχέση των μαθηματικών με άλλους γνωστικούς τομείς όπως αυτούς που περιγράψαμε, την αποκαθιστούσαν με κάποιο τρόπο, αυτές οι περίφημες μεταρρυθμίσεις.** Έτσι, αν υποθέσουμε ότι θα πραγματοποιούνταν μια τέτοια αποκατάσταση ασφαλώς και θα έπρεπε να δούμε ποια η σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας. Με ένα τρόπο απαντάμε στην εργασία μας σε αυτό το ερώτημα. Θα πρέπει, βεβαίως, να διευκρινίσουμε ότι αυτό δε θα έλυνε ολοκληρωτικά το πρόβλημα της αντιπάθειας των παιδιών απέναντι στα μαθηματικά ή το πρόβλημα της αναποτελεσματικής διδασκαλίας. Η «ολοκληρωτική» επίλυση του προβλήματος απαιτεί άλλου είδους συζήτηση που φεύγει από τα πλαίσια της εργασίας μας και προϋποθέτει μια εφ' όλης της ύλης συζήτηση για την παιδεία.

Ένας δεύτερος λόγος για τον οποίο επιλέξαμε το θέμα μας, καθόλου άσχετος με τον προηγούμενο, είναι η άποψη που συναντάμε στην πλειονότητα των μαθηματικών – εκπαιδευτικών, σχετικά με τη σχέση μαθηματικών-φιλοσοφίας. Το πρόβλημα δεν εντοπίζεται μόνο σε μια αρνητική στάση των εκπαιδευτικών σε αυτή τη σχέση. **Μεγαλύτερο, ίσως, πρόβλημα είναι ότι υπάρχει μερίδα των εκπαιδευτικών που δεν το απασχολεί καθόλου ένα τέτοιο ερώτημα**. **Η νοοτροπία της ασκησιομανίας, της εύρεσης της πιο απίθανης άσκησης, μια νοοτροπίας ενταγμένης στο γενικότερο πνεύμα που επικρατεί και που έχει μετατρέψει το σχολείο και ειδικότερα το λύκειο σε εξεταστικό κέντρο και σε προθάλαμο εισαγωγής στα ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα, έχει «εξαφανίσει» κάθε πνεύμα φιλοσοφίας στην περιοχή των μαθηματικών**. Ο εκπαιδευτικός αν θέλει να μετατρέψει το διδασκόμενο αντικείμενό του από ένα δύσμορφο τέρας σε πηγή γνώσης που θα ασκεί γοητεία, ανάμεσα στα άλλα, **θα πρέπει να απαντήσει ή να προκαλέσει ερωτήματα όπως τι είναι μαθηματικά, πού αυτά υπάρχουν, τι σχέση έχουν με την πραγματικότητα που μας περιβάλλει, γιατί βρίσκουν εφαρμογή σε μια σειρά τομείς, τι είναι η αλήθεια και πώς σχετίζονται τα μαθηματικά με αυτήν κ.λπ.**

Οι παραπάνω δυο λόγοι που αναφέραμε μπορεί να απαντάνε στο γιατί τα μαθηματικά πρέπει να συμβαδίζουν με τη φιλοσοφία ή για να είμαστε πιο ακριβείς να απαντάνε στο γιατί πρέπει να συνυπάρχουν στην εκπαίδευση. Δεν απαντάνε, όμως, στο γιατί μαθηματικά και διαλεκτικός υλισμός κι όχι μαθηματικά και ένα άλλο φιλοσοφικό ρεύμα. Με αφορμή αυτό το ερώτημα φτάνουμε και στον τρίτο λόγο. Το ρεύμα του διαλεκτικού υλισμού, ένα φιλοσοφικό ρεύμα, γέννημα του 19ου αιώνα και του οποίου η επιρροή γιγαντώθηκε τον 20ο αιώνα, αλλά η ακτινοβολία του περιορίσθηκε δραματικά προς το τέλος του περασμένου αιώνα (το γιατί έγινε αυτό είναι μια άλλη πολύ μεγάλη συζήτηση), είχε καθοριστική συμβολή στη σκέψη της ανθρωπότητας σε φιλοσοφικό αλλά και σε ιδεολογικό επίπεδο. Αποτέλεσε μια παράμετρο σημαντικών αλλαγών που έλαβαν χώρα σε μεγάλα τμήματα του παγκόσμιου στερεώματος. Έτσι, σαν ένα τέτοιο ρεύμα, που έπαιξε το ρόλο του σε φιλοσοφικές, ιδεολογικές και πολιτικές αναζητήσεις και διαμάχες,

μας προσφέρει μια ευκαιρία να δούμε από κοντά και την άποψή του για ένα επιστημονικό τομέα όπως τα μαθηματικά.

Επιπλέον, ένας τέταρτος λόγος είναι ότι στην ελληνική βιβλιογραφία οι μελέτες που καταπιάνονται με την άποψη του διαλεκτικού υλισμού για τα μαθηματικά και ειδικότερα με την γνώμη του στις τελευταίες συζητήσεις που διεξάγονται εντός της μαθηματικής κοινότητας (βλέπε κονστρουκτιβισμός, ενσώματα μαθηματικά) είναι πολύ περιορισμένες ή και ανύπαρκτες και από αυτή την άποψη ένα τέτοιο θέμα αποτελεί μια πρόκληση (άλλωστε η γενική βιβλιογραφία με αναφορές στη σχέση μαθηματικών-φιλοσοφίας είναι έτσι κι αλλιώς περιορισμένη). Τόσο τα συγγράμματα όσο και η αρθρογραφία δεν υπερβαίνουν «μονοψήφια νούμερα», αναδεικνύοντας ένα μεγάλο βιβλιογραφικό κενό και συνήθως πρόκειται για σπαράγματα κι όχι απόπειρες μιας ολοκληρωμένης θεώρησης. Αυτό δε σημαίνει πως έχουμε την αξίωση να καλύψουμε αυτό το κενό, απλώς έχουμε την πρόθεση να συνεισφέρουμε σε ένα προβληματισμό. Αν αυτό το καταφέρουμε, τότε νομίζουμε ότι κάτι θα έχουμε πετύχει.

* * * *

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Σπύρου Παναγιώτη, επίκουρο καθηγητή που μέσα από τις φιλοσοφικές διαφορές μας, μου υπέδειξε νέους δρόμους αναζήτησης της επιστημονικής αλήθειας. Ακόμα, για τη συμμετοχή τους ή/και τις παρατηρήσεις τους, τους υπόλοιπους διδάσκοντες της τριμελούς επιτροπής, τον επίκουρο καθηγητή Χριστιανίδη Γιάννη και τον αναπληρωτή καθηγητή Ζαχαριάδη Θεοδόση. Κι ακόμα, το φίλο και συνάδελφο Κώστα Χριστιανίδη για την πολύτιμη βοήθειά του, ειδικά στη σχεδίαση του εξώφυλλου, τον καθηγητή του πανεπιστημίου της Πάτρας Ευτύχη Παπαδοπετράκη για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του, τον καθηγητή Ευτύχη Μπιτσάκη για τη βιβλιογραφία που μου συνέστισε, το συνάδελφο Κώστα Φιλιππίδη για τις χρήσιμες υποδείξεις του, τους φίλους Χαρίση Απόστολο και Χονδροκούκη Μιχάλη για τις συζητήσεις που κάναμε και τη σύζυγό μου Έφη Ρογκάκου για την ιώβεια υπομονή της. Χωρίς τους παραπάνω η εργασία θα ήταν σίγουρα φτωχότερη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ Ή ΜΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

Το κείμενο που ακολουθεί αποτελείται από έξι κεφάλαια και ένα παράρτημα. Το πρώτο κεφάλαιο δεν έχει άμεση σχέση με το αντικείμενο της μελέτης μας, αλλά θεωρούμε πως είναι απαραίτητο προκειμένου να τεθούν οι φιλοσοφικές σταθερές εντός των οποίων θα κινηθεί η προβληματική μας.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι κατά κάποιο τρόπο και η καρδιά του κειμένου αφού στην πραγματικότητα πραγματεύεται το ζήτημα των μαθηματικών υπό το πρίσμα του βασικού προβλήματος της φιλοσοφία, δηλαδή του προβλήματος για τη σχέση νόησης-Είναι.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο ζήτημα της αξιωματικής θεμελίωσης και της τυπικής και διαλεκτικής λογικής. Θα μπορούσε και αυτό να θεωρηθεί ως μια ειδική έκφραση του βασικού προβλήματος της φιλοσοφίας (και είναι τέτοιο), ωστόσο λόγω της ειδικής του βαρύτητας επιλέξαμε να το δούμε ξεχωριστά.

Το τέταρτο κεφάλαιο έχει να κάνει με τις θεωρητικές επιπτώσεις που απορρέουν από την ερμηνεία των μαθηματικών σε σχέση με το ζήτημα τη αιτιοκρατίας. Έτσι, εμπλέκονται αναγκαστικά θεμελιώδη φιλοσοφικά προβλήμτα.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στο ζήτημα της μαθηματικής ανακάλυψης. Πρόκειται για ένα θέμα στο οποίο υπεισέρχονται διάφοροι γνωστικοί τομείς, όπως η βιολογία και η ψυχολογία. Οι προβληματισμοί από ένα τέτοιο ζήτημα ανοίγουν και τη συζήτηση τόσο για την εξέλιξη των μαθηματικών, όσο και για τη διδακτική τους. Μαζί με αυτό το κεφάλαιο υπάρχει και μια παρέκβαση που αναφέρεται στα «ενσώματα μαθηματικά» και αποτελεί, αν και παρέκβαση, οργανικό κομμάτι του κεφαλαίου.

Το έκτο κεφάλαιο παίρνει τη σκυτάλη από το πέμπτο κι επιχειρεί μια περιοδολόγηση της ιστορίας των μαθηματικών. Σκοπός μας είναι, η περιοδολόγηση να μη γίνει με τυπικό τρόπο και ως μια απλή καταγραφή, δηλαδή, καταγραφή «στεγνών» ιστορικών γεγονότων, αλλά να φωτίσει εκείνες τις αιτίες που ευθύνονται για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Επιχειρούμε, τελικά, να δούμε τους προωθητικούς παράγοντες ανάπτυξης των Μαθηματικών.

Το παράρτημα, έχει σαφείς αναφορές στη διδακτική των μαθηματικών. Κάνει μια κριτική ανάλυση του κονστρουκτιβιστικού ρεύματος και σκιαγραφεί την άποψη μιας υλιστικής θεώρησης για τη διδακτική των μαθηματικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α: ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ, ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΟΝΤΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΣΜΟΥ-ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗΣ

Α1: Βασικοί ορισμοί

Εφόσον σκοπός του κειμένου είναι η θεώρηση μιας επιστήμης (των Μαθηματικών) υπό το πρίσμα ενός φιλοσοφικού ρεύματος (του Διαλεκτικού Υλισμού) θα πρέπει να δούμε εν τάχει τον τρόπο που το συγκεκριμένο φιλοσοφικό ρεύμα τοποθετείται απέναντι στις έννοιες της επιστήμης, της φιλοσοφίας, της γνωσιοθεωρίας και της μεταξύ τους σχέσης. Για αυτό το λόγο θα θέσουμε ορισμένα προς απάντηση ερωτήματα. Το πρώτο αφορά στο τι είναι επιστήμη εν γένει, το δεύτερο με ποιο τρόπο αυτονομείται η μια (επιστήμη) από την άλλη, το τρίτο πώς ορίζεται η φιλοσοφία και η γνωσιοθεωρία, το τέταρτο πώς η φιλοσοφία συνδέεται με τις επιστήμες (πάντα στο φιλοσοφικό πλαίσιο του Διαλεκτικού Υλισμού) και το πέμπτο πώς το ίδιο το φιλοσοφικό ρεύμα του Διαλεκτικού Υλισμού, αυτοπροσδιορίζεται. [1]Ασφαλώς, σκοπός μας δεν είναι η εκτενής διαπραγμάτευση των εννοιών και των σχέσεων που μόλις αναφέραμε, αλλά μια πρώτη-συμπυκνωμένη προσέγγιση όλων αυτών, προκειμένου να σκιαγραφηθεί και το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα κινηθεί η ανάλυσή μας.

Ξεκινώντας από το πρώτο και δεύτερο ερώτημα σημειώνουμε ότι η επιστήμη ορίζεται ως «σφαίρα της ανθρώπινης δραστηριότητας, που έργο της είναι η επεξεργασία και η θεωρητική συστηματοποίηση των γνώσεων για την αντικειμενική πραγματικότητα. Στην πορεία της εξέλιξης της κοινωνίας, η επιστήμη μετατρέπεται σε παραγωγική δύναμη και σε σπουδαιότατο κοινωνικό θεσμό. Η έννοια «επιστήμη» περιλαμβάνει τόσο τη δραστηριότητα για την απόκτηση νέων γνώσεων όσο και τα αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας, το σύνολο, δηλαδή, των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί ως τη δοσμένη στιγμή και που συγκροτούν τη γενική επιστημονική εικόνα του κόσμου. Ο όρος «επιστήμη» χρησιμοποιείται επίσης για την επισήμανση των επιμέρους κλάδων της επιστημονικής γνώσης. Άμεσος σκοπός της επιστήμης είναι η περιγραφή, η ερμηνεία και η πρόγνωση των διαδικασιών και των φαινομένων της πραγματικότητας, τα οποία μελετά με βάση τους νόμους που ανακαλύπτει, είναι δηλαδή, με την ευρύτερη έννοια, η θεωρητική αντανάκλαση της πραγματικότητας».[2]

Όταν δε, αναφερόμαστε στην επιστήμη όχι ως γενική κατηγορία αλλά ως ειδική γνώση σε μια περιοχή της πραγματικότητας τότε «…σημαίνει αναζήτηση και γνώση των αιτιών ενός φαινομένου και των νόμων που διέπουν μια κατηγορία φαινομένων ή μια περιοχή της πραγματικότητας. Αλλά οι κατηγορίες της αιτίας και του νόμου είναι κατηγορίες ιστορικές. Αυτό που σήμερα είναι αιτιακή περιγραφή, αύριο παρουσιάζεται ως επιφαινόμενο μιας βαθύτερης νομοτέλειας. Η επιστημονική εξήγηση μπορεί να κατανοηθεί μόνο ως διαδικασία. Ωστόσο στην ιστορική αυτή διαδικασία μπορούμε να διακρίνουμε μια αποφασιστική στιγμή: τη στιγμή διαμόρφωση μιας επιστήμης».[3]

Επομένως οι επιστήμες αυτονομούνται η μια σε σχέση με την άλλη γιατί αντικειμενικά αφορούν σε διαφορετικές περιοχές της πραγματικότητας, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η αυτονομία τους υφίσταται με ένα απόλυτο τρόπο γιατί κάτι τέτοιο θα σήμαινε και απόλυτη αυτοτέλεια των πτυχών της αντικειμενικής πραγματικότητας. Τα μαθηματικά, λοιπόν, είναι μια επιστήμη η οποία αναφέρεται σε ένα ειδικό πεδίο της πραγματικότητας άρα και της ανθρώπινης γνώσης. Το ποιο είναι αυτό το ειδικό πεδίο θα το δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Η φιλοσοφία από την άλλη είναι «μορφή κοινωνικής συνείδησης, διδασκαλία για τις γενικές αρχές του Είναι και της διδασκαλίας της γνώσης, για τη σχέση του ανθρώπου με τον κόσμο, επιστήμη των γενικών νόμων της ανάπτυξης της φύσης, της κοινωνίας και της

---

[1] . Δες στα σχεδιαγράμματα, το σχεδιάγραμμα 1, για μια κατηγοριοποίηση των φιλοσοφικών ρευμάτων σύμφωνα με το ΔΥ.

[2] . Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, τ.2, εκδ. Καπόπουλος

[3] . Ε. Μπιτσάκης, Θεωρία και πράξη, σελ.123, εκδ. Gutenberg

νόησης. Η φιλοσοφία επεξεργάζεται ένα γενικευμένο σύστημα αντιλήψεων για τον κόσμο και τη θέση του ανθρώπου σε αυτόν. Μελετά τη γνωστική, αξιακή, κοινωνικοπολιτική, ηθική και αισθητική σχέση του ανθρώπου με τον κόσμο» [4] και «μεγάλο βασικό ζήτημα κάθε φιλοσοφίας, ιδιαίτερα της νεότερης φιλοσοφίας, είναι το ζήτημα της σχέσης της νόησης με το Είναι».[5] Από τον προηγούμενο ορισμό και τη διαπίστωση που παραθέσαμε προκύπτουν κάποια ερωτήματα: «Το ζήτημα, όμως, της σχέσης νόησης με το Είναι έχει ακόμα και μιαν άλλη πλευρά: ποια είναι η σχέση των σκέψεών μας για τον κόσμο που μας περιβάλλει με τον ίδιο αυτό τον κόσμο να συνθέσουμε ένα σωστό αντικαθρέφτισμα της πραγματικότητας; Στη φιλοσοφική γλώσσα το ζήτημα αυτό ονομάζεται ζήτημα της ταυτότητας της νόησης και του Είναι και η μεγάλη πλειοψηφία των φιλοσόφων απαντά καταφατικά σε αυτό».[6] Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, μοιραία τίθεται και το ερώτημα της σχέσης επιστήμης-φιλοσοφίας. Με ποιο τρόπο ο Διαλεκτικός Υλισμός βλέπει αυτή τη σχέση;

«Η ιστορική πείρα δείχνει ότι η φιλοσοφία πρέπει να στηρίζεται απαραίτητα στο σύνολο των ανθρώπινων γνώσεων [...] Πολλές θεμελιακές θέσεις της σύγχρονης επιστήμης είχαν διατυπωθεί από τη φιλοσοφία: η ατομική θεωρία, η ιδέα της αντανάκλασης, η θέση για τη διατήρηση της ποσότητας της κίνησης, η αρχή της αιτιοκρατίας, η ιδέα της ανάπτυξης κ.λπ. [...] Σε στενή σύνδεση με τη φιλοσοφία πραγματοποιείται η επεξεργασία των σύγχρονων θεωριών του χώρου και του χρόνου, των αρχών της διατήρησης κ.α. Με τη σειρά της, η πρόοδος της επιστήμης πλούτιζε και πλουτίζει τη φιλοσοφία. Όλες οι μεγάλες επιστημονικές ανακαλύψεις συνέβαλαν στην ανάπτυξη της φιλοσοφικής κοσμοθεωρίας, σήμαιναν την πρόοδο στον τομέα των μεθόδων σκέψης. [...] Η γνήσια επιστημονική φιλοσοφία δεν υποκαθιστά τις επιμέρους επιστήμες, αλλά μόνο τις εξοπλίζει με την κοσμοθεωρία, με τη γενική μέθοδο γνώσης και με τη θεωρία της νόησης, χάρη στις οποίες κατέχει νευραλγική θέση στο σύστημα των επιστημών. Η περιοχή όπου εφαρμόζονται οι μέθοδοι των επιμέρους επιστημών περιορίζεται στα πλαίσια του αντικειμένου της δεδομένης επιστήμης. Αντίθετα, οι μέθοδοι της φιλοσοφίας έχουν καθολικό χαρακτήρα».[7]

Βάση της παραπάνω θεώρησης μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα: **η επιστήμη και η φιλοσοφία βρίσκονται σε μια οργανική ενότητα κάτι που σημαίνει ότι αλληλοδιαπλέκονται, ότι βρίσκονται σε ένα συνεχές παιχνίδι αλληλοκαθορισμού**. Καθώς ο ένας γνωστικός τομέας εξελίσσεται, συγχρόνως, άμεσα ή έμμεσα, μακροπρόθεσμα, μεσοπρόθεσμα ή βραχυπρόθεσμα εξελίσσει και τον άλλο τομέα. Το ποιος τομέας είναι αυτός που προηγείται χρονικά στην «αυτοεξέλιξή του» έναντι του άλλου, όχι μόνο είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί αλλά, ίσως, είναι και ένα ερώτημα που στερείται νοήματος από ένα σημείο κι έπειτα, αν και όταν θέλουμε να εντοπίσουμε την «έσχατη αρχή», τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η φιλοσοφία προηγήθηκε των επιστημών. Η αντικειμενική σύνδεση φιλοσοφίας-επιστημών είναι και ο μόνος τρόπος ώστε να γίνει εφικτή η τιθάσευση του τεράστιου όγκου πληροφοριών που πλέον υπάρχει. Αλλά το ζήτημα δεν είναι μόνο ή κυρίως μεθοδολογικό. Είναι εκείνος ο δρόμος (η σύνδεση) που μπορεί να αποκαταστήσει μια πραγματική σχέση ανάμεσα στις κατηγορίες της πληροφορίας και της γνώσης. Ωστόσο, «είναι αδύνατο να κατανοηθεί σωστά η προέλευση και η λειτουργία των επιστημονικών θεωριών χωρίς να ληφθεί υπ' όψη το πολιτιστικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο εμφανίζεται και στη συνέχεια λειτουργεί κάθε θετική επιστημονική γνώση. Η φιλοσοφία είναι εδώ το πρωταρχικό στοιχείο. Σε αυτήν οφείλεται η πληρότητα του πολιτιστικού υποβάθρου, τελικού και θεμελιακού αιτίου των επιστημονικών γενικεύσεων, με τις οποίες σχηματίζει ένα ενιαίο σύνολο. Η δραστηριότητα του ερευνητή, είναι δυνατή και έξω από αυτό το θεμελιακό στοχασμό που πραγματοποιείται μέσα στη

---

[4] . Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμα φιλοσοφία τ.2, εκδ. Καπόπουλος

[5] . Φ. Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το τέλος της κλασικής γερμανικής φιλοσοφίας, σελ. 22, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[6] . Φ. Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το τέλος της κλασικής γερμανικής φιλοσοφίας, σελ. 24, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[7] . Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμα φιλοσοφία τ.2, εκδ. Καπόπουλος

φιλοσοφία, στις αρχές, τους νόμους και τις κατηγορίες της. Ωστόσο, η επιστήμη στο σύνολό της, σαν εξειδικευμένος κοινωνικός θεσμός και ειδική μορφή της δραστηριότητας του ανθρώπου για τη γνώση του αντικειμενικού κόσμου, δεν μπορεί ούτε να πραγματοποιηθεί ούτε να υπάρξει χωρίς αυτήν τη διαδικασία της σκέψης που ιστορικά πήρε τη μορφή των φιλοσοφικών συλλογισμών και συστημάτων. Αυτή η οργανική ενότητα φιλοσοφίας και θετικής επιστημονικής γνώσης καθορίζει τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του φιλοσοφικού προβλήματος των θετικών επιστημών».[8]

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται και μια επιπλέον διευκρίνιση. Υπάρχει άραγε ιδιαίτερη φιλοσοφία για την κάθε επιστήμη; Νομιμοποιούμαστε να μιλάμε για φιλοσοφία των μαθηματικών; **Ιδιαίτερη φιλοσοφία των μαθηματικών με την έννοια της πλήρους αυτονόμησης δεν υπάρχει και δεν μπορεί να υπάρξει. Φιλοσοφία των μαθηματικών υπάρχει μόνο με την εξής έννοια: της έκφρασης του βασικού προβλήματος της φιλοσοφίας και όλων των άλλων ζητημάτων με τα οποία καταπιάνεται η φιλοσοφία με ένα ιδιαίτερο τρόπο εντός των μαθηματικών.** Ο ιδιαίτερος αυτός τρόπος συνίσταται στο ίδιο το ιδιαίτερο αντικείμενο της μαθηματικής επιστήμης. Επομένως, όταν μιλάμε για φιλοσοφία των μαθηματικών, κατά το Διαλεκτικό Υλισμό, θα εξετάσουμε μερικά κλασικά προβλήματα: τη σχέση είναι και συνείδησης, τη σχέση άπειρου, απειροστού και πεπερασμένου, την αξιοπιστία της γνώσης, την αυθυπαρξία της ύλης και την υλικότητα του κόσμου κ.λπ.

Ακόμα, η βεβαιότητα που απορρέει από τα μαθηματικά είναι φαινομενική και αν ναι ή όχι, γιατί; Ποια η αξία των αξιωματικών συστημάτων και της τυπικής λογικής; Απέναντι σε αυτά τα ερωτήματα είθισται να καταγράφονται δυο κύριες σχολές, δυο τάσεις στη φιλοσοφία των μαθηματικών[9]: από τη μια υπάρχει η σχολή των απόλυτων φιλοσοφιών (Λογικισμός, Φορμαλισμός, Ιντουϊσιονισμός, Πλατωνισμός). Πρόκειται για εκείνη τη σχολή που υποστηρίζει την απόλυτη βεβαιότητα της μαθηματικής γνώσης, η κάθε μία έκφανση αυτής της τάσης με το δικό της τρόπο και το δικό της σκεπτικό. Από την άλλη, υπάρχει η σχολή της εννοιολογικής αλλαγής στης οποίας το επίκεντρο βρίσκεται η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι διαψεύσιμα και ανασκευάσιμα (Λάκατος, Κίτσερ, Βίτγκενστάιν, Πούτναμ, Κουάιν, Ντέιβις-Χερς κ.λπ). Είναι φανερή η διάσταση ανάμεσα στις δυο θεωρήσεις. **Ωστόσο, είναι σημαντικό να διευκρινίσουμε ότι ο Διαλεκτικός Υλισμός δεν εντάσσεται σε κανένα από τα δυο στρατόπεδα. Θεωρεί ότι καθένα από αυτά προσεγγίζει πλευρές της πραγματικότητας αλλά είτε με την εμμονή στη βεβαιότητα είτε με το σχετικισμό, αδυνατεί τελικά να αντικρίσει την πραγματικότητα σφαιρικά. Αυτή τη σφαιρικότητα επιχειρεί να την αναδείξει ο Διαλεκτικός Υλισμός που θεωρεί ότι η βεβαιότητα που μας παρέχουν τα μαθηματικά είναι βεβαιότητα αληθινή που αντιστοιχεί στον υπαρκτό υλικό κόσμο, ενώ συγχρόνως διέπεται από ιστορικότητα κάτι που οφείλεται στο ατέρμονο της ανθρώπινης γνώσης που όμως επιτυγχάνει κάθε φορά μέσα από μια ελικοειδή πορεία όλο και επιτυχέστερες προσεγγίσεις της πραγματικότητας. Ο Διαλεκτικός Υλισμός δε στέκεται στη μέση για να πετύχει μια δήθεν αντικειμενικότητα, μια χρυσή τομή, αλλά συνθέτει διαλεκτικά, επιβάλλοντας το δικό του φιλοσοφικό πλαίσιο.**

Αφού, κάναμε την απαραίτητη αυτή διευκρίνιση ας περάσουμε στο ζήτημα της γνωσιοθεωρίας. Η γνωσιοθεωρία ή αλλιώς θεωρία της γνώσης, πάντα αναφερόμενοι στο Διαλεκτικό Υλισμό, εκκινεί από τη θεμελιώδη θέση της ανεξαρτησίας της αντικειμενικής πραγματικότητας από τη συνείδηση. Έτσι, συναντιέται με την καντιανή θέση για το «πράγμα καθ' εαυτό». Εκεί, όμως, που χωρίζουν οι δρόμοι καντιανής θεώρησης και υλιστικοδιαλεκτικής γνωσιοθεωρίας είναι στη δυνατότητα γνωσιμότητας του «πράγματος καθ' ευτό». Η μεν καντιανή θεώρηση αποκλείει τη δυνατότητα γνωσιμότητας σε αντίθεση με την υλιστικοδιαλεκτική γνωσιοθεωρία. Από αυτές τις δυο θέσεις (ανεξαρτησία από τη συνείδηση, της πραγματικότητας, αλλά και του γνώσιμου χαρακτήρα της τελευταίας) προκύπτει ότι για το Διαλεκτικό Υλισμό δεν υφίσταται θέμα για την ύπαρξη «καθαρής οντολογίας» και «καθαρής γνωσιολογίας». Σε κάθε πρόβλημα, φιλοσοφικό ή επιστημονικό απαιτείται η εξέταση και των δυο πλευρών, και της οντολογικής και της γνωσιολογικής,

---

[8] . Φιλοσοφία και Επιστήμη, Συλλογικό, σελ.171, εκδ. Gutenberg

[9] . Δες χαρακτηριστικά τη θεώρηση του Confrey, Conceptual change analysis Implications for mathematics and curriculum, σελ. 243-257, 1981

στην ενότητά τους. Όλα τα παραπάνω, ωστόσο, δεν είναι επαρκή για έναν προσδιορισμό της γνωσιοθεωρίας. Σύμφωνα με ένα πολύ συμπυκνωμένο ορισμό «η διαλεκτική **είναι** ακριβώς η γνωσιοθεωρία (του Χέγκελ και) του Μαρξισμού...», (η υπογράμμιση του συγραφέα).[10]

Πρώτη πηγή της γνώσης είναι η αισθητηριακή πρόσληψη, αλλά δεν είναι η μοναδική, από ένα σημείο κι έπειτα ούτε και η κύρια. Η αισθητηριακή πρόσληψη οδηγεί αντικειμενικά σε θεωρητικοποιήσεις που με τη σειρά τους αλλάζουν και τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αισθητηριακή πρόσληψη. Αισθητηριακή πρόσληψη και θεωρητικοποίηση βρίσκονται σε μια συνεχή επικοινωνία μέσω της οποίας μπορεί να διαπιστωθεί η σχέση αντικειμενικού-υποκειμενικού, σχετικής και απόλυτης αλήθειας. Η υλιστικοδιαλεκτική γνωσιοθεωρία γίνεται περισσότερο κατανοητή αν αντιληφθούμε ότι «ακρογωνιαίος λίθος της υλιστικής θεωρίας της γνώσης είναι η αρχή της αντανάκλασης».[11] Σε αυτό το σημείο, όμως, είναι απολύτως απαραίτητο να ανοίξουμε μια παρένθεση και να δούμε τι ακριβώς σημαίνει «αρχή της αντανάκλασης». Η αντανάκλαση είναι μια καθολική ιδιότητα της ύλης. Πρόκειται για τη δυνατότητα και την πραγματικότητα που έχει η ύλη να αναπαράγει τα γνωρίσματα, τις ιδιότητες και τις σχέσεις του αντανακλώμενου αντικειμένου. Σύμφωνα με μια θεώρηση « ο ιδεαλισμός, φυσικά, του Πλάτωνα και οι ταλαντεύσεις του Αριστοτέλη ανάμεσα στον ιδεαλισμό και στον υλισμό, καθώς και ανάμεσα στη διαλεκτική και στην τυπική λογική δεν μπορούν να αποτελέσουν βάσιμο λόγο να μη δούμε το μεγάλο γεγονός, πως λόγου χάρη η διδασκαλία του Πλάτωνα για τις ιδέες ήταν στην ουσία διδασκαλία της αντανάκλασης, αλλά με το κεφάλι προς τα κάτω, δηλαδή στημένη πάνω σε ιδεαλιστική βάση. Κατά τον Πλάτωνα δεν είναι τα πράγματα που αντανακλώνται στις ιδέες, αλλά οι ιδέες αντανακλώνται στα πράγματα. Κατά τον Αριστοτέλη πάλι δεν είναι η ύλη εκείνο που καθορίζει τη μορφή, αλλά η μορφή καθορίζει την ύλη, δηλαδή και σε αυτόν το στοιχείο της αντανάκλασης δεν είναι τοποθετημένο πάνω σε καθαρή και συνεπή υλιστική και διαλεκτική βάση. Όσον αφορά το Δημόκριτο τα «μικρά είδωλά του», που ο ίδιος τα ονομάζει «ιδέες» και που «εκπέμπονται» από τα πράγματα, για να μπουν διαμέσου των ανθρώπινων αισθητήριων οργάνων στο σκεφτόμενο και αισθανόμενο άνθρωπο, αποτελούν την πρώτη ξάστερη, έστω και απλοϊκά διατυπωμένη και επιχειρηματολογημένη, θεωρία της αντανάκλασης στην ιστορία της φιλοσοφικής σκέψης».[12] Εν ολίγοις, η αρχή της αντανάκλασης, υποστηρίζει ότι το πρωταρχικό είναι ο εξωτερικός κόσμος ο οποίος και αντανακλάται στην ανθρώπινη συνείδηση.

Επιπλέον, ο Διαλεκτικός Υλισμός απαντώντας στο ερώτημα «ποιο είναι το αντικείμενό του» απαντά πως η φιλοσοφία πρέπει να είναι (και είναι από τη δική του πλευρά) η επιστήμη για το όλο. Ενός όλου που δεν υπάρχει από μόνο του αλλά σε διαλεκτική συνάφεια με τα μέρη του. Τούτη η διαπίστωση θα δημιουργούσε πιθανώς ένα επιπρόσθετο ερώτημα, όπως συνήθως γίνεται: «η επιστημονική φιλοσοφία μελετά τα πάντα;». Η απάντηση σε μια τέτοια ερώτηση δεν είναι καταφατική: «πιο σωστό είναι να πούμε ότι μελετά εκείνο που είναι σύμφυτο σε όλα. Όμως το γενικό, το καθολικό βρίσκεται σε ενότητα με το ιδιαίτερο και το ενικό. Το γενικό σα συγκεκριμένο στη θεωρητική γνώση αποτελεί ενότητα διαφόρων ορισμών. Η επιστημονική φιλοσοφία, συνεπώς, μελετά τη σύνδεση, την ενότητα των μορφών του γενικού».[13]

Στο πλαίσιο όλων αυτών των θεωρήσεων όταν τίθεται το ερώτημα «τι είναι η Οντολογία των Μαθηματικών» υπονοούνται τα ερωτήματα «τι είναι τα μαθηματικά και πώς θεωρούμε τη φύση τους»[14] που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια. Ως εκ τούτου δεν αποδεχόμαστε την ανεξαρτησία της επιστήμης από τη φιλοσοφία. Η άποψη των Μπουρμπακί σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικοί που έχουν στοιχειώδη φιλοσοφική κατάρτιση είναι τόσο λίγοι, όσο λίγοι είναι και οι φιλόσοφοι που έχουν μαθηματική κατάρτιση, σίγουρα έχει μια δόση αλήθειας, αλλά αυτό δε σημαίνει ότι είναι και μια κατάσταση που πρέπει να γίνει αποδεκτή. Από την άλλη αν τραβήξουμε στα άκρα την

---

[10] . Β. Ι. Λένιν, Άπαντα, τ.29, σελ. 321

[11] . Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμμα «θεωρία της γνώσης», τ.2, εκδ. Καπόπουλος

[12] . Τ. Παβλόφ, Θεωρία της αντανάκλασης, εκδ. Δωδώνη, σελ.11-12

[13] . Ότζερμαν, Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης, σελ. 284, εκδ. Gutenberg

[14] . Π. Σπύρου, Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων, Αθήνα 2005

άποψη για τη σύνδεση μαθηματικών-φιλοσοφίας, τότε τα αποτελέσματα μπορεί να είναι ολέθρια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό της σοβιετικής επιστήμης που **σε κάποιες φάσεις της, έργα ξένων επιστημόνων απορρίφθηκαν αφού δε «συνέπλεαν» με το Διαλεκτικό Υλισμό.[15] Για κάθε περίπτωση ένας συνεπής Διαλεκτικός Υλισμός κόντρα στις μηχανιστικές του εκφάνσεις ούτε απορρίπτει τη σχέση φιλοσοφίας-μαθηματικών, αλλά ούτε και την αποδέχεται για να την απορρίψει στη συνέχεια με έναν ιδιόμορφο τρόπο.**

Α2: <u>Κατηγορίες και νόμοι της υλιστικής διαλεκτικής</u>

Στην παράθεση των παραπάνω βασικών ορισμών, επιχειρήσαμε μια κωδικοποίηση κι όχι μια ενδελεχή πραγμάτευση. Στο ζήτημα των κατηγοριών και νόμων της υλιστικής διαλεκτικής θα παραθέσουμε επίσης συμπυκνώματα εννοιών, κατηγοριών, αρχών και νόμων προσπαθώντας παράλληλα να τα εντάξουμε οργανικά στο υπόλοιπο σώμα του κειμένου. [16]

Ξεκινώντας από τις κατηγορίες θα μπορούσαμε να πούμε ότι «εκφράζουν τις πιο γενικές μορφές της πραγματικότητας και τις πιο γενικές σχέσεις οι οποίες λειτουργούν στο εσωτερικό αυτής της πραγματικότητας. Θα μπορούσαν συνεπώς να θεωρηθούν **καθολικές έννοιες**», (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[17] Για την υλιστική διαλεκτική οι κατηγορίες είναι οι παρακάτω: το μοναδικό, μερικό και γενικό, η αιτία και το αποτέλεσμα, το περιεχόμενο και η μορφή, η αναγκαιότητα και το τυχαίο, η ουσία και το φαινόμενο, η δυνατότητα και η πραγματικότητα.

Το μοναδικό είναι το σύνολο όλων εκείνων των χαρακτηριστικών που ανήκουν σε ένα ξεχωριστό πράγμα. Όταν έχουμε μια σειρά πραγμάτων που διέπονται από επαναλαμβανόμενα χαρακτηριστικά, τότε αυτά τα όμοια γνωρίσματα εκδηλώνονται ως το γενικό. Όταν δε, υπάρχουν γνωρίσματα λιγότερο γενικά από τα γενικότερα τότε αναφερόμαστε στο μερικό. Ποια η σχέση όλων αυτών; Μια σύντομη απάντηση αντιμετωπίζει τη σχέση τους ως εξής: «…οι αντιθέσεις (το ξεχωριστό είναι αντίθετο στο γενικό) είναι ταυτόσημες: το ξεχωριστό δεν υπάρχει διαφορετικά παρά στη σύνδεση που οδηγεί στο γενικό. Το γενικό υπάρχει μόνο στο ξεχωριστό, διαμέσου του ξεχωριστού. Κάθε ξεχωριστό είναι (έτσι κι αλλιώς) γενικό. Κάθε γενικό είναι (ένα μόριο ή μια πλευρά ή η ουσία) του ξεχωριστού. Κάθε γενικό αγκαλιάζει μόνο κατά προσέγγιση όλα τα ξεχωριστά αντικείμενα. Κάθε ξεχωριστό μπαίνει όχι ολόκληρο στο γενικό κ.τλ., κ.τλ.»[18]

Στις κατηγορίες της αιτίας και του αποτελέσματος υπογραμμίζουμε πρώτα το γεγονός ότι στη σύνδεσή τους αποτελούν την αιτιότητα. Κατά την εξέλιξη ενός φαινομένου εκείνος ο παράγοντας που το προκαλεί, ονομάζεται αιτία, ενώ εκείνο που προκύπτει από την επενέργεια της αιτίας ονομάζεται αποτέλεσμα. Ασφαλώς σε μια συνεχή (αλλά και ασυνεχή) αλληλουχία γεγονότων και φαινομένων η αιτία μετατρέπεται σε αποτέλεσμα και το αποτέλεσμα σε αιτία, καθιστώντας δύσκολη τη διάκριση της κύριας αιτίας που ωστόσο υπάρχει αλλά όχι απομονωμένη. Στη σύνδεση αιτίας-αποτελέσματος ο Διαλεκτικός Υλισμός βλέπει την αιτιώδη εξάρτηση των φαινομένων να έχει καθολικό χαρακτήρα. Διακρίνει την αιτιοκρατία των φαινομένων και αρνείται τις ιντετερμινιστικές θεωρήσεις.

Περιεχόμενο δεν είναι ένα απλό άθροισμα στοιχείων και διαδικασιών ενός αντικειμένου, άποψη που υποστηρίχθηκε στο παρελθόν από κάποιους εκπροσώπους του Διαλεκτικού Υλισμού. Πρόκειται για μιαν άποψη, κατά άλλους εκπροσώπους του Διαλεκτικού Υλισμού που βλέπει την κατηγορία του περιεχομένου στατικά και όχι στη δυναμική της.[19] Έτσι, το περιεχόμενο «είναι προτσές που σε αυτό όλα τα στοιχεία, οι όψεις βρίσκονται σε σταθερή αλληλεπίδραση, σε κίνηση, περνάει το ένα στο άλλο, από μια κατάσταση στην άλλη και εκδηλώνουν πότε τη μια και πότε την άλλη από τις ιδιότητές

---

[15] . Σχόλιο για αυτές τις απορρίψεις υπάρχει στο βιβλίο του Κ.Α.Ρύμπνικοφ, Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, σελ.35, Θεσσαλονίκη, 1986

[16] . Δες στα σχεδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 2.

[17] . Ε. Μπιτσάκης, Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, σελ. 57, εκδ. Στάχυ

[18] . Β. Ι. Λένιν, Άπαντα, τ. 29 (Φιλοσοφικά Τετράδια), σελ. 318

[19] . Δες χαρακτηριστικά Α. Σεπτούλιν, Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, σελ. 319, εκδ. Αναγνωστίδη

τους».[20] Από την άλλη η μορφή ορίζεται ως η εσωτερική και εξωτερική συγκρότηση , ο τρόπος ύπαρξης του περιεχομένου. Μορφή χωρίς περιεχόμενο δεν μπορεί να υπάρξει ούτε και το αντίστροφο, ωστόσο στη διαλεκτική τους σύνδεση αυτό που έχει τον πρώτο λόγο είναι το περιεχόμενο.

Τα ερωτήματα γύρω από τις κατηγορίες της αναγκαιότητας και του τυχαίου είναι, κατά τη γνώμη μας από τα δυσκολότερα αλλά και από τα πιο ενδιαφέροντα, για να μην πούμε τα πιο ενδιαφέροντα. Η αναγκαιότητα είναι ο τρόπος μετασχηματισμού της δυνατότητας σε πραγματικότητα. Προκαλείται (η αναγκαιότητα) από τις βασικές και κύριες αιτίες του υπό εξέλιξη φαινομένου. Είναι αυτό που συμβαίνει αναγκαστικά, ανεξάρτητα δηλαδή από τη θέλησή μας. Αυτό, όμως, που τελικά γίνεται δεν μπορεί πάντα να καθοριστεί χρονικά το πότε θα γίνει, ούτε να προβλεφθεί πάντα η ακριβής μορφή της εκδήλωσής του. Επιπλέον, οι νομοτέλειες στη φύση και στην κοινωνία δε λειτουργούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Κάθε μια έχει τους δικούς της κανόνες, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δε διέπονται από κοινούς κανόνες. Το τυχαίο με τη σειρά του είναι μια μορφή εκδήλωσης του αναγκαίου και συμπλήρωμά του. Είναι αντικειμενικό φαινόμενο και η εκδήλωσή του οφείλεται σε εξωτερικές συνδέσεις ή επουσιώδεις πλευρές του φαινομένου και όχι από τις εσωτερικές αλληλουχίες. Μεταξύ αναγκαίου και τυχαίου υπάρχει συνάφεια μέσα στην οποία το θεμελιώδη ρόλο παίζει το αναγκαίο.

Κατά την παρατήρηση της φύσης αρχικά και της κοινωνίας και ανθρώπινης νόησης μετέπειτα, ο άνθρωπος παρατηρεί αυτό που του είναι περισσότερο προσιτό στην αισθητηριακή του πρόσληψη. Βλέπει αρχικά την εξωτερική πλευρά των πραγμάτων κι αυτή ακριβώς η πλευρά αποτελεί το φαινόμενο. Το φαίνεσθαι όμως δεν αποκαλύπτει τους λόγους εξέλιξής του πράγματος. Η ουσία είναι αυτή που θα μας δώσει παραπέρα απαντήσεις αφού είναι ένα από τα καθολικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της ύλης ως ενεργού αιτίας των αλλαγών της, μορφή της αιτιατής ερμηνείας του αντικειμενικού κόσμου. Το φαινόμενο είναι μορφή έκφρασης της ουσίας και στη συνάφεια που τα χαρακτηρίζει η ουσία είναι η βασική. Όπως και στα προηγούμενα δίπολα που περιγράψαμε το ένα δεν έχει κανένα νόημα χωρίς το άλλο.

Η πραγματικότητα είναι αυτό που υπάρχει πραγματικά, αυτό που βιώνουμε αλλά που συγχρόνως υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς. Η δυνατότητα είναι εκείνο που πρόκειται να συμβεί κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Αυτό, όμως, σημαίνει πως και η δυνατότητα είναι μια εν δυνάμει πραγματικότητα και από αυτή την άποψη δεν είναι διαχωρισμένες με απόλυτη ευκρίνεια. η δυνατότητα αποτελεί το διαλεκτικό αντίθετο της πραγματικότητας κι έτσι η δεύτερη προβάλλει ως πραγματοποιημένη δυνατότητα.

Περνώντας στο ζήτημα των νόμων σε μια γενική θεώρηση θα λέγαμε ότι παριστάνουν έναν αναγκαίο δεσμό, παρά το γεγονός ότι όλοι οι αναγκαίοι δεσμοί δεν αποτελούν νόμους. Έτσι, «ο νόμος όντας ένας γενικός και επαναληπτικής δεσμός, αποτελεί ταυτόχρονα ένα σταθερό δεσμό. Υπάρχει σε ολόκληρη τη διάρκεια της αντίστοιχης μορφής της κίνησης της ύλης (ή σε ένα δοσμένο στάδιο της ανάπτυξής της) ή της σκέψης και υπάρχει τόσο όσο υπάρχουν τα φαινόμενα που παριστάνουν αυτή τη μορφή κίνησης».[21] Οι νόμοι της υλιστικής διαλεκτικής είναι : η εξέλιξη και η καθολική σύνδεση των φαινομένων, η ενότητα και πάλη των αντιθέτων, το πέρασμα των ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές και η άρνηση της άρνησης.

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο, αυτόν της εξέλιξης και καθολικής σύνδεσης των φαινομένων, η εξέλιξη είναι διαδικασία ανεπίστροφης (με την έννοια ότι κάτι δεν επαναλαμβάνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο) αλλαγής που συντελείται σε κοινωνία, φύση και νόηση. Με μια στενότερη έννοια η εξέλιξη συμπεριλαμβάνει τις ποιοτικές μεταμορφώσεις, τις ουσιώδεις μετατροπές των αντικειμένων και των φαινομένων, την αντικατάσταση παλαιών καταστάσεων από νέες. Τα αντικείμενα και τα φαινόμενα που εξελίσσονται δεν εξελίσσονται χωρίς σύνδεση με τα γύρω τους φαινόμενα και αντικείμενα. Αυτή ακριβώς η αλληλοσύνδεση πραγμάτων και φαινομένων έχει αντικειμενικό και καθολικό χαρακτήρα.

---

[20] . Α. Σεπτούλιν, Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, σελ. 319, εκδ. Αναγνωστίδη

[21] . Α. Σεπτούλιν, Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, σελ. 308, εκδ. Αναγνωστίδη

Ο νόμος της ενότητας και πάλης των αντιθέτων αποτελεί και τον πυρήνα της Υλιστικής Διαλεκτικής. Ο νόμος αυτός μας φανερώνει την πηγή της κινητικής δύναμης χάρη στην οποία ένα στάδιο ανάπτυξης αντικαθίσταται από ένα άλλο. Τα αντίθετα είναι οι αντιτιθέμενες η μια στην άλλη πλευρές, δυνάμεις, τάσεις των φαινομένων. Τα αντίθετα ως τέτοια βρίσκονται σε μια συνεχή διαπάλη μεταξύ τους, αποκλείονται αμοιβαία ενώ ταυτόχρονα συνυπάρχουν και το ένα προϋποθέτει το άλλο. Ήδη για τη συνύπαρξή τους έχουμε κάνει λόγο: το φαινόμενο δεν υπάρχει χωρίς την ουσία, η μορφή χωρίς το περιεχόμενο κ.λπ. Η πάλη των αντιθέτων δεν είναι μια πάλη που διεξάγεται γενικά και χωρίς επιπτώσεις. Πρόκειται για μια πάλη που αναγκαστικά σε μια δεδομένη στιγμή θα οδηγήσει σε μια νέα ποιοτική κατάσταση στην οποία η πάλη θα ξαναρχίσει, πιθανώς με μια νέα μορφή και ένα νέο περιεχόμενο. Η ενότητα και η πάλη των αντιθέτων που αποκλείονται αμοιβαία και ταυτόχρονα το ένα προϋποθέτει το άλλο αποτελούν την αντίφαση. Διευκρινίζουμε, όμως, ότι η ενότητα των αντιθέτων είναι πάντα σχετική ενώ η πάλη απόλυτη, κάτι που υπογραμμίζει και τη σχετική αυτοτέλεια των αντιθέτων.

Η σκιαγράφηση του νόμου του περάσματος των ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές απαιτεί πρώτα από όλα τον καθορισμό των εννοιών ποσότητα και ποιότητα. Η ποιότητα είναι το σύνολο των ιδιοτήτων που αναδεικνύουν αυτό που το πράγμα είναι και με αυτό τον τρόπο διαφοροποιείται από τα υπόλοιπα πράγματα. Η ποσότητα είναι ο ίδιος ο προσδιορισμός της ποιότητας που χαρακτηρίζει το μέγεθος, το βαθμό και το ρυθμό ανάπτυξης κι έχουμε τη δυνατότητα να την εκφράζουμε συνήθως αριθμητικά. Ένα φαινόμενο καθώς εξελίσσεται υφίσταται ποσοτικές αλλαγές που ταυτόχρονα μπορούν να χαρακτηρισθούν ως μικρές ποιοτικές αλλαγές που δεν είναι, ωστόσο, ικανές να οδηγήσουν σε μια νέα ποιότητα διαφορετική από την υπάρχουσα. Η συνεχής, όμως, συσσώρευση των ποσοτικών αλλαγών φθάνει σε μια στιγμή που μεταβάλλει την παλιά ποιότητα και οδηγεί σε μια νέα. Όταν η ποιοτική αλλαγή πραγματοποιηθεί τότε η διαδικασία ξεκινάει με τη συσσώρευση νέων ποσοτήτων που σε κάποια στιγμή πάλι θα οδηγήσουνε μια νέα ποιότητα. Η στιγμή που η παλιά ποιότητα «ξεψυχάει» και δίνει τη θέση της στη νέα είναι η στιγμή που πραγματοποιείται το (ποιοτικό) άλμα.

Ο νόμος της άρνησης της άρνησης γίνεται πληρέστερα κατανοητός αν έχουμε στο μυαλό μα τον προηγούμενο νόμο, της μετατροπής των ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές. Το γεγονός ότι η λέξη «άρνηση» υπάρχει δυο φορές εξηγείται από τη διαπίστωση ότι ο νόμος αυτός περιγράφει την αντικατάσταση του παλιού από το νέο, μια αντικατάσταση που είναι ατέρμονη και κάθε φορά έχουμε μια νέα άρνηση που αρνείται την παλιά άρνηση. Ο νόμος αυτός δεν περιγράφει την απλή επανάληψη ενός φαινομένου αλλά την άρνηση κάθε φορά σε μια νέα βαθμίδα περισσότερο υψηλή. Παράλληλα, αυτή η εξέλιξη δε νοείται ως ευθύγραμμη αλλά ως ελικοειδής. Τέλος, είναι εξαιρετικά σημαντικό να διευκρινίσουμε ότι το νέο αν και άρνηση του παλιού δεν εξαλείφει εντελώς το παλιό. Κρατάει στοιχεία του, και τα αφομοιώνει και τα υπερβαίνει δημιουργικά, μέσα πάλι από τη διαλεκτική άρνησή τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β: ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

Β1: Εννοιολογικές αποσαφηνίσεις: Η άποψη του Διαλεκτικού Υλισμού για τη φύση και τον ορισμό των Μαθηματικών ή θέτοντας το εννοιολογικό πλαίσιο

Ξεκινάμε την προβληματική μας στη σχέση μαθηματικών-Διαλεκτικού υλισμού (εφεξής ΔΥ) με την προβληματική για τη νομιμοποίηση του ορισμού των μαθηματικών και συνεχίζουμε με την παράθεση του ορισμού των μαθηματικών από την πλευρά εκπροσώπων του ΔΥ, προκειμένου να θέσουμε ένα βασικό θεωρητικό πλαίσιο, απολύτως απαραίτητο για τη συνέχεια του κειμένου. Ταυτόχρονα παίρνουμε υπόψη μας το γεγονός ότι αφ' ενός οι ορισμοί εν γένει είναι εξαιρετικά χρήσιμοι γιατί αποτελούν συμπυκνώσεις εννοιών και κατηγοριών, αφαιρέσεις υψηλού επιπέδου, κάτι που είναι θεμελιώδες για την ανθρώπινη νόηση, αφ' ετέρου περικλείει και κινδύνους που απορρέουν από την ίδια τη φύση της αφαίρεσης. Αυτό σημαίνει ότι ο ορισμός και η προβληματική που τον συνοδεύει δεν μπορεί να δώσει την άποψη του ΔΥ για τα μαθηματικά σε όλες τις πλευρές του κι εκφάνσεις. Ένα μέρος της γενικότερης προβληματικής θα επιχειρηθεί να καλυφθεί από τα υπόλοιπα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν.

Β1.1: Για τη σημασία του ορισμού

Οι εννοιολογικές αποσαφήσεις είναι πάντα απαραίτητες για τη μελέτη οποιουδήποτε αντικειμένου, είτε αυτό είναι τοποθετημένο στη σφαίρα της νόησης, είτε στη σφαίρα της κοινωνίας, είτε στη σφαίρα της φύσης. Είτε πρόκειται για επιστημονική, είτε για φιλοσοφική έννοια ή κατηγορία. Και κάθε φορά είμαστε υποχρεωμένοι να διαλευκάνουμε έννοιες και κατηγορίες, θέτοντας με αυτό τον τρόπο τις σταθερές μέσα στις οποίες θα κινηθούμε. Ειδικότερα για τις επιστήμες οι οποίες ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια αλληλοδιεισδύουν πιο έντονα η μια μέσα στην άλλη- και από αυτή την άποψη έχει ένα ορισμένο νόημα η έκκληση για διεπιστημονικές προσεγγίσεις-χρειάζεται να σκιαγραφούμε τα όριά τους και να έχουμε άποψη για τη (σχετική) αυτοτέλεια τους.

Ο αυτοπεριορισμός των επιστημών είναι μια απαραίτητη γνωστική διαδικασία, όχι μόνο για μεθοδολογικούς λόγους: «Αν, λόγου χάρη, οι μαθηματικές, φυσικές και χημικές μέθοδοι έρευνας βρίσκουν ολοένα και ευρύτερη εφαρμογή πέρα από τα όρια των μαθηματικών, της φυσικής, της χημείας, αυτό όχι μόνο μιλάει για τη σημασία των μεθόδων αυτών σχετικά με τις άλλες επιστήμες, αλλά ως ένα βαθμό χαρακτηρίζει και το αντικείμενο των μαθηματικών, το αντικείμενο της φυσικής κ.λπ.».[22] Παράλληλα, τα ερωτήματα όπως τι είναι μαθηματικά, τι είναι φυσική κ.λπ. πρέπει με επιμονή να τίθενται, αφού συχνά δεν απασχολούν τα υποκείμενα τα οποία είναι εκπρόσωποι αυτής ή της άλλης επιστήμης. Είναι, όμως, ήσσονος σημασίας η διαπίστωση για την ιστορικότητα της αντίληψής μας σχετικά με το τι είναι μαθηματικά. Όπως αναφέρει ο Μπέρναντ Ράσελ «...μια από τις βασικές νίκες των νεότερων μαθηματικών συνίσταται στην ανακάλυψη του τι είναι πράγματι μαθηματικά».[23] Με αφορμή αυτή τη διαπίστωση του Ράσελ, ο Όιζερμαν αναρωτιέται: «Αυτό φαίνεται παράδοξο: βγαίνει απ' αυτό ότι οι μαθηματικοί σχετικά πρόσφατα ακόμα δεν ήξεραν τι είναι μαθηματικά. Και αυτό δεν τους εμπόδιζε να κάνουν μεγάλες ανακαλύψεις; Είμαστε βέβαιοι, ότι στα ερωτήματα αυτά δεν μπορεί να δοθεί ταυτόσημη, ανεπιφύλακτη απάντηση. Βέβαια, ήξεραν τι είναι μαθηματικά, αλλά μέσα στα όρια που διευρύνθηκαν τεράστια από τις νεότερες ανακαλύψεις. Έτσι, οι προηγούμενες

[22] . Τ. Όιζερμαν, Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης, σελ. 82, εκδ. Gutenberg
[23] . Αναφέρεται στο «Τ. Όιζερμαν, Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης, σελ. 83, εκδ. Gutenberg»

αντιλήψεις για το αντικείμενο της επιστήμης αυτής έπαψαν να ικανοποιούν, άρχισαν να εμποδίζουν τις παραπέρα προοπτικές της ανάπτυξής της».[24]

Καταληκτικά, ο εννοιολογικός προσδιορισμός δεν αποτελεί για το ΔΥ ζήτημα ακαδημαϊσμού και ομφαλοσκοπήσεων. Πολύ περισσότερο δε συγγενεύει με την άποψη του λογικού θετικισμού και του Κάρναπ σύμφωνα με την οποία η φιλοσοφία πρέπει να παραχωρήσει τη θέση της στη λογική της επιστήμης. Και όταν ο Κάρναπ αναφερόταν στη λογική της επιστήμης εννοούσε τη λογική σύνταξη της γλώσσας της επιστήμης και τον προσδιορισμό της βασικής έννοιας της επιστήμης με τη βοήθεια του μηχανισμού της μαθηματικής λογικής. Με άλλα λόγια το πρωταρχικό είναι, πάντα κατά τον Κάρναπ, η ανάλυση της γλώσσας της επιστήμης. Αντίθετα ο εννοιολογικός προσδιορισμός πρέπει να είναι μια θεωρητική απόπειρα γενίκευσης και αφαίρεσης προκειμένου να δούμε με ποιο τρόπο η γνωστική διαδικασία, μέσω της θεωρίας της αντανάκλασης, εμπερικλείει όψεις της αντικειμενικής πραγματικότητας. Οι ορισμοί έχουν στοιχεία λογικής, αλλά όχι απαραίτητα τυπικής ή μαθηματικής λογικής. Είναι πρώτα από όλα φιλοσοφικές απόπειρες.

Β1.2: <u>Παράθεση ορισμών από εκπροσώπους του ΔΥ και σχολιασμός τους</u>

Αφού, κάναμε την απαραίτητη αυτή διευκρίνιση ας περάσουμε στο ζήτημα της γνωσιοθεωρίας. Η γνωσιοθεωρία ή αλλιώς θεωρία της γνώσης, πάντα αναφερόμενοι στο Διαλεκτικό Υλισμό, εκκινεί από τη θεμελιώδη θέση της ανεξαρτησίας της αντικειμενικής πραγματικότητας από τη συνείδηση. Έτσι, συναντιέται με την καντιανή θέση για το «πράγμα καθ' εαυτό». Εκεί, όμως, που χωρίζουν οι δρόμοι καντιανής θεώρησης και υλιστικοδιαλεκτικής γνωσιοθεωρίας είναι στη δυνατότητα γνωσιμότητας του «πράγματος καθ' ευτό». Η μεν καντιανή θεώρηση αποκλείει τη δυνατότητα γνωσιμότητας σε αντίθεση με την υλιστικοδιαλεκτική γνωσιοθεωρία. Από αυτές τις δυο θέσεις (ανεξαρτησία από τη συνείδηση, της πραγματικότητας, αλλά και του γνώσιμου χαρακτήρα της τελευταίας) προκύπτει ότι για το Διαλεκτικό Υλισμό δεν υφίσταται θέμα για την ύπαρξη «καθαρής οντολογίας» και «καθαρής γνωσιολογίας». Σε κάθε πρόβλημα, φιλοσοφικό ή επιστημονικό απαιτείται η εξέταση και των δυο πλευρών, και της οντολογικής και της γνωσιολογικής, στην ενότητά τους. Όλα τα παραπάνω, ωστόσο, δεν είναι επαρκή για έναν προσδιορισμό της γνωσιοθεωρίας. Σύμφωνα με ένα πολύ συμπυκνωμένο ορισμό «η διαλεκτική **είναι** ακριβώς η γνωσιοθεωρία (του Χέγκελ και) του Μαρξισμού...», (η υπογράμμιση του συγραφέα).[25]

Στον εκτεταμένο ορισμό του Ένγκελς που παραθέσαμε λίγο παραπάνω βλέπουμε μια κωδικοποίηση βασικών θέσεων:

[1] Το αντικείμενο των μαθηματικών είναι οι μορφές του χώρου και οι ποσοτικές σχέσεις των αντικειμένων του πραγματικού κόσμου.

[2] Ο αφηρημένος χαρακτήρας των μαθηματικών δεν μπορεί να σκεπάζει την καταγωγή τους. Οι αφαιρέσεις που χρησιμοποιούμε είναι αναγκαστικές λειτουργίες της ανθρώπινης νόησης (όχι, όμως, με την έννοια της σύμβασης του Πουανκαρέ).

[3] Ως εκ τούτου δεν υιοθετείται μιαν άποψη που να υποστηρίζει την απριορικότητα των μαθηματικών, τουλάχιστον με την έννοια του Ντύρινγκ και του Καντ.

Ανεξάρτητα από το βαθμό συμφωνίας με την τοποθέτηση του Ένγκελς είναι σίγουρο πως οι απόψεις του μπορούν να εγείρουν πολλές συζητήσεις, ενστάσεις και παρατηρήσεις. Θα παραθέσουμε, λοιπόν, ευθύς παρακάτω κάποιες παρατηρήσεις και προβληματισμούς μας.

Παρατήρηση πρώτη: Ο ορισμός του Ένγκελς δόθηκε σε μια εποχή κατά την οποία αναπτύσσονταν τα κλασικά μαθηματικά του 19ου αιώνα. Επομένως, το ερώτημα το οποίο που τίθεται είναι, εφόσον δέχεται κάποιος την ορθότητά του ορισμού για τα δεδομένα της εποχής του, σε τι βαθμό αυτός ο ορισμός διατηρεί την επικαιρότητά του στις σημερινές συνθήκες και αν μπορεί να επεκταθεί ανταποκρινόμενος στην εξέλιξη των μαθηματικών. Έτσι, σύμφωνα με μιαν άποψη που αποδέχεται το ορθό του ορισμού μπορούμε να πούμε ότι «τα σύγχρονα μαθηματικά έχουν για αντικείμενό τους **όλες τις μορφές και σχέσεις του**

[24] . Τ. Ότζερμαν, Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης, σελ. 83, εκδ. Gutenberg

[25] . Β. Ι. Λένιν, Άπαντα, τ.29, σελ. 321

πραγματικού κόσμου: της φύσης και της κοινωνίας και της νόησης, από τη σκοπιά της ισομορφίας τους με τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις»[26], (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα). Η προσθήκη σε αυτό το απόσπασμα σε σχέση με το αντίστοιχο του Ένγκελς βρίσκεται ουσιαστικά στις λέξεις κοινωνία και νόηση. Πρόκειται για μια αναγκαία, κατά τη γνώμη μας συμπλήρωση αφού η μελέτη των μαθηματικών δεν περιορίζεται αποκλειστικά στο χώρο, αλλά πλέον και στις κατηγορίες της κοινωνίας και της νόησης. Εκεί, όμως, που θα σημειώναμε ένα προβληματισμό, είναι στην αναφορά για τη νόηση. Η νόηση έχει τη δική της δυναμική και κατά την άποψή μας δε μαθηματικοποιείται, ή τουλάχιστο δεν μπορεί να μαθηματικοποιηθεί όπως τα φυσικά φαινόμενα. Αλλά αυτό είναι ένα ζήτημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε άλλο σημείο της εργασίας. Αν βέβαια, εννοούμε την τεχνητή νοημοσύνη και την υποστήριξή της από τα μαθηματικά και αλγοριθμικές διαδικασίες που προσεγγίζουν την ανθρώπινη νόηση, τότε δεν έχουμε αντίρρηση. Επιπλέον, ο ορισμός αυτός θεωρούμενος ως βάση μπορεί να διευρυνθεί αφού «…ο αφηρημένος χαρακτήρας των μαθηματικών , δε συνεπάγεται το διαχωρισμό των μαθηματικών από την υλική πραγματικότητα. Το πλήθος των ποσοτικών σχέσεων και των μορφών του χώρου, που μελετώνται από τα μαθηματικά, είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τις απαιτήσεις της τεχνολογίας και των φυσικών επιστημών και αυξάνεται συνεχώς. Κατά συνέπεια, ο ορισμός των μαθηματικών, που δόθηκε πιο πάνω (σ.σ. από τον Ένγκελς), εμπλουτίζεται με ακόμα αφθονότερο περιεχόμενο».[27]

Μια δεύτερη παρατήρηση σχετίζεται με την αναφορά περί ισομορφίας: «Η περιγραφή αντικειμένων και φαινομένων με μαθηματικά μέσα ονομάζεται μαθηματικό μοντέλο. Το αντικείμενο και τα φαινόμενα που περιγράφονται σ' ένα μαθηματικό μοντέλο μπορούν να προέρχονται τόσο άμεσα από τις έννοιες των σύγχρονων Μαθηματικών, όσο και να αποτελούν μαθηματικές εικόνες των αντικειμένων και φαινομένων άλλων περιοχών της αντικειμενικής πραγματικότητας. Στην τελευταία περίπτωση λέμε, ότι το μαθηματικό μοντέλο και το τμήμα της αντικειμενικής πραγματικότητας που περιγράφεται είναι ισόμορφα μοντέλα. Ισόμορφα μοντέλα λαμβάνονται και όταν τμήματα μιας μαθηματικής δομής έχουν περιγραφεί με μέσα άλλης μαθηματικής δομής».[28] Πρόκειται για μια έννοια-αυτή της ισομορφίας[29]-που δεν περιέχεται στον ορισμό του Ένγκελς, ωστόσο υπονοείται, όταν τα μαθηματικά θεωρούνται ως μια αφαίρεση της πραγματικότητας. Με άλλα λόγια, υπονοείται ένας ισομορφισμός ανάμεσα στα μαθηματικά αντικείμενα και στην ίδια την πραγματικότητα από την οποία απορρέουν.

Η τρίτη παρατήρηση σχετίζεται με ένα εξαιρετικό αλλά και δύσκολο στη διαπραγμάτευσή του θέμα, αυτή του a priori χαρακτήρα των μαθηματικών. Λόγω, όμως, της ιδιαίτερης βαρύτητας αυτού του θέματος θα το εξετάσουμε λίγο παρακάτω στο κεφάλαιο για το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας και τα μαθηματικά.

Μια τέταρτη παρατήρηση –προβληματισμός έχει αναφορά στο ερώτημα «τελικά με βάση τον ορισμό του Ένγκελς τα μαθηματικά μπορούν να ενταχθούν στην εμπειρική γνώση;». **Η απάντηση από έναν εκπρόσωπο του ΔΥ είναι κατηγορηματική[30]: «Τα μαθηματικά με**

---

[26] . Κ. Φιλιππίδης, Ο μαθηματικός παιδαγωγός για το ενιαίο δωδεκάχρονο βασικό σχολείο γενικής-πολυτεχνικής εκπαίδευσης, περιοδικό Θέματα Παιδείας, τ.12

[27] . Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, λήμμα *Μαθηματικά*

[28] . Λ. Ίλιεφ, Μαθηματικά και ανάπτυξη, σελ.104, Θεσσαλονίκη

[29]. Ισομορφισμός και ομομορφισμός: Έννοια της μαθηματικής λογικής η οποία εκφράζει την πανομοιοτυπία …Τα συστήματα Α και Α΄ ονομάζονται ισόμορφα …αν μεταξύ των στοιχείων τους, καθώς και μεταξύ των συναρτήσεων…των ιδιοτήτων και των σχέσεων τους οι οποίες ορίζονται για τα συστήματα αυτά, υπάρχει ή μπορεί να καθοριστεί αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία…Κατά τη μελέτη κατάλληλων αφαιρέσεων και ιδεατοποιήσεων, οι έννοιες του ισομορφισμού…μπορούν να αποδοθούν σε ευρείες κλάσεις σχέσεων, οι οποίες υπάρχουν μεταξύ συστημάτων ποικίλης φύσης (π.χ. οι σχέσεις μεταξύ φωτογραφίας και πρωτοτύπου…γεωγραφικού χάρτη και της αντίστοιχης τοποθεσίας…κινήσεων ουράνιων σωμάτων και συστήματος διαφορικών εξισώσεων το οποίο τις περιγράφει κ.α. (Λ. Ηλιτσεφ-Π. Φεντοσέγιεφ, Φιλοσοφικό-Εγκυκλοπαιδικό λεξικό, τ.2, εκδ. Καπόπουλος)

[30] . Κατά τον Όιζερμαν στα *Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης*, σελ.114, εκδ. Gutenberg «Η θεωρία της γνώσης του διαλεκτικού υλισμού, που πρέπει να ξεχωρίζουμε από την ψυχολογία της γνώσης, η οποία έχει να κάνει με μεμονωμένα άτομα, κάνει ποιοτική διάκριση ανάμεσα στον

κανένα τρόπο δεν μπορούν να ενταχθούν στην εμπειρική γνώση. Απ' αυτό βέβαια, δε βγαίνει ότι τα μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τον αισθησιακό μας κόσμο. Η αστρονομία είναι σε σημαντικό βαθμό μαθηματικός κλάδος, όμως σε αυτό τον κλάδο πρωταρχική θέση κατέχει η παρατήρηση που γίνεται με τη βοήθεια οργάνων, παρατήρηση μπορούμε να πούμε, επιστημονικοερευνητικής πράξης. Η θεωρητική φυσική αποτελεί ενότητα θεωρητικής (σε σημαντικό βαθμό μαθηματικής) και εμπειρικής γνώσης. Η ιστορία ως επιστήμη διαφέρει ποιοτικά από την πολιτική οικονομία, τουλάχιστο γιατί ερευνά εκείνο που δεν υπάρχει πια. Έτσι, η θεμελιακή γνωσιολογική ενότητα της επιστημονικής γνώσης δεν αποκλείει καθόλου την ποιοτική διαφορά ανάμεσα στις επιστήμες. Υπάρχει, φυσικά, ποιοτική διαφορά επίσης ανάμεσα στην επιστημονική και στη μη επιστημονική γνώση, η οποία δεν μπορεί βασικά να αναχθεί σε πλάνες».[31]

Παράλληλα, η οντολογική δικαίωση των μαθηματικών μπορεί να στηριχθεί στην έννοια της αφαίρεσης αφού σε άλλο σημείο ο Ένγκελς πραγματευόμενος την έννοια της αφαίρεσης όπως αυτή λειτουργεί εντός του σώματος των Μαθηματικών γράφει: «Εφ' όσον τα μαθηματικά καταπιάνονται, με τέτοια πραγματικά, συγκεκριμένα μεγέθη (σ.σ. εννοεί τα αστρονομικά μεγέθη) δεν κάνουν τίποτα άλλο παρά να εφαρμόζουν τις απόψεις και αντιλήψεις που εκθέσαμε πιο πάνω. Από τη στιγμή, όμως, που οι μαθηματικοί κλειστούν στο φρούριο της αφαίρεσης, μόλις δηλαδή καταπιαστούν με αυτό που λέμε καθαρά μαθηματικά, τότε όλες αυτές οι αναλογίες, ανάμεσα στη μαθηματική επιστήμη και στη φύση, ξεχνιούνται, παραμερίζονται, το άπειρο περιβάλλεται από απόλυτο μυστήριο και η μέθοδος με την οποία το μελετούν φαίνεται σαν κάτι χωρίς κανένα νόημα και μάλιστα σαν κάτι που είναι αντίθετο σε κάθε λογική και σε κάθε εμπειρία. Οι ασυναρτησίες και οι παραλογισμοί με τις οποίες δικαιολογούν μάλλον παρά ερμηνεύουν οι μαθηματικοί τη μέθοδο τους αυτή, που περιέργως οδηγεί πάντοτε στα σωστά συμπεράσματα, ξεπερνάνε και τις μεγαλύτερες ακόμα φαινομενικές και πραγματικές φαντασιώσεις της χεγκελιανής φιλοσοφίας της φύσης, για την οποία οι μαθηματικοί και σοφοί μιλάνε με φρίκη. Κατηγορούν όλοι τους το Χέγκελ ότι φτάνει τις αφαιρέσεις στα απώτατα όρια τους και όμως το ίδιο πράγμα και σε μεγαλύτερη κλίμακα μάλιστα, κάνουν κι εκείνοι. Οι μαθηματικοί, λοιπόν, ξεχνάνε ότι, αυτό που ονομάζουνε καθαρά μαθηματικά, είναι η επιστήμη που δουλεύει μόνο με αφαιρέσεις, ότι όλα τα μεγέθη τους, με την πιο αυστηρή έννοια του όρου, είναι μεγέθη εικονικά και ακόμα ότι κάθε αφαίρεση φτασμένη στα άκρα φαίνεται σαν παραλογισμός ή σαν κάτι που είναι ακριβώς το αντίθετό της (αφαίρεσης)».[32]

Επομένως, βάση του προηγούμενου αποσπάσματος ο Ένγκελς υποστηρίζει ότι α) ο αφαιρετικός χαρακτήρας των μαθηματικών σε καμία περίπτωση δε σημαίνει τη de facto απόσπαση των μαθηματικών από την υλική πραγματικότητα, β) η (μαθηματική) αφαίρεση δεν μπορεί να είναι μια αφαίρεση ως το «ακρότατο σημείο» και αυτό γιατί μπορεί να είναι θεωρητικό προϊόν, ωστόσο είναι προϊόν ταυτόχρονα και της πράξης, γ) η αφαίρεση στα μαθηματικά είναι συστατικό στοιχείο τους και αυτό είναι ένας παράγοντας-θα συμπληρώναμε εμείς-που δίνει τροφή σε ιδεαλιστικές θωρήσεις.

Στο ίδιο μήκος κύματος βρίσκεται και η άποψη των επιγόνων του ΔΥ: «Το αντικείμενο των μαθηματικών, είναι οι μορφές εκείνες και οι σχέσεις της πραγματικότητας, που αντικειμενικά κατέχουν τέτοιο βαθμό αδιαφορίας απέναντι στο περιεχόμενο, ώστε μπορούν ολοκληρωτικά να αποσπαστούν από αυτό και να προσδιοριστούν γενικά, με τέτοια σαφήνεια και ακρίβεια, με τη διατήρηση τέτοιου πλούτου συνδέσεων, με σκοπό να αποτελέσουν τη βάση για καθαρά λογική ανάπτυξη της θεωρίας».[33]

Κάπως διαφοροποιημένους μορφολογικά αλλά κατ' ουσίαν παρόμοιους ορισμούς συναντάμε ακόμα και από σύγχρονους εκπροσώπους του ΔΥ: «Τα μαθηματικά είναι όχι

εμπειρισμό και στη θεωρητική γνώση. Η διαφορά αυτή θεμελιακά δεν μπορεί να αναχθεί στο διαχωρισμό ανάμεσα στην αισθησιακή πρόσληψη και στη νόηση: τα εμπειρικά γεγονότα καθορίζονται και θεωρητικά. Πολύ σωστά υπογραμμίζει ο Β. Α. Λεκτόρσκι: "Τόσο η εμπειρική, όσο και η θεωρητική γνώση προϋποθέτουν λογική, ορθολογιστική θεμελίωση και, αναντίρρητα, ανήκουν στην ορθολογική βαθμίδα γνώσης"».

[31] . Τ.Ι.ΌιζερμαΝ, Προβλήματα φιλοσοφίας και επιστήμης, σελ.115, εκδ. Gutenberg

[32] . Φ. Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, σελ. 490, εκδ. Αναγνωστίδη

[33] . Α.Δ. Αλεξαντρόφ, Τα μαθηματικά , το περιεχόμενό τους, οι μέθοδοι και η σημασία τους, τ.1, σελ. 68, Μόσχα, 1956

απλώς το όργανο της θεωρητικής φυσικής, αλλά η μορφή με την οποία εκφράζονται οι φυσικοί νόμοι».[34]

Ασφαλώς, οι πούροι πολέμιοι του ΔΥ δεν μπορούν να συμφωνήσουν με αυτούς τους ορισμούς των μαθηματικών που παραθέσαμε. Ένας εξ' αυτών, γνωστός για την οξεία πολεμική που έχει ασκήσει στο ΔΥ, ο Καρλ Πόπερ, διαφωνεί καθέτως με την άποψη ότι μαθηματικά και πραγματικός κόσμος συνδέονται με ομφάλιο λώρο. Γράφει χαρακτηριστικά ότι «τα καθαρά μαθηματικά και η λογική, που επιδέχονται αποδείξεις, **δε μας δίνουν καμία πληροφορία για τον κόσμο, παρά μόνο επεξεργάζονται τα μέσα για την περιγραφή του**», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[35] Ο Πόπερ στην προσπάθειά του να απαντήσει στην υλιστικοδιαλεκτική άποψη περί μαθηματικών πέφτει σε λογικές αντιφάσεις. Από τη μια αρνείται τη σύνδεση μαθηματικών και κόσμου, αφού «δε μας δίνουν καμία πληροφορία για αυτήν». Από την άλλη, όμως, αποδέχεται ότι μας προσφέρουν τα μέσα για την περιγραφή του. Το πρώτο ερώτημα που προκύπτει είναι πώς τα μαθηματικά έχουν αυτή τη δυνατότητα σύμφωνα με την οποία μπορούμε να περιγράψομε τον κόσμο. Το δεύτερο ερώτημα είναι πώς είναι δυνατό να περιγράφει κάποιος τον κόσμο κι αυτή η πράξη να μη θεωρείται παροχή πληροφορίας για το περιγραφόμενο αντικείμενο; Μια παρόμοια αντίληψη συναντάμε και στον Α.Β. Σκοροχόντ που αν και Σοβιετικός είναι της άποψης πως «τα μαθηματικά […] δεν μπορούν να έχουν δικό τους ξεχωριστό αντικείμενο μελέτης. Επομένως, είναι αδύνατο να χαρακτηρισθούν τα μαθηματικά βάση κάποιου αντικειμένου. Και γι' αυτό βγαίνει μόνο του το συμπέρασμα: για τα μαθηματικά έχει σημασία όχι τι μελετάνε, αλλά πώς το μελετάνε». [36] Χαρακτηριστική άποψη που βρίσκεται στο ίδιο μήκος κύματος με τις προαναφερόμενες είναι και η παρακάτω: «τα μαθηματικά ανέκυψαν ως αυθαίρετη δημιουργία του ανθρώπινου νου και όχι ως κάτι που ουσιαστικά μας το υπαγόρευσε κάποια αναγκαιότητα του κόσμου που ζούμε».[37]

Οι ορισμοί που έχουν δοθεί κατά καιρούς από εκπροσώπους του ΔΥ για τα μαθηματικά και το αντικείμενο μελέτης τους διαπνέονται από την πεποίθηση **για το πρότερο της ύλης έναντι της νόησης. Από αυτό απορρέει και η πίστη ότι τα μαθηματικά δεν είναι προϊόν κάποιας καθαρής λογικής και κάποιας καθαρής νόησης. Είναι απότοκος της ανθρώπινης δραστηριότητας, μιας δραστηριότητας εμπλαισιωμένης μέσα σε κοινωνικές αναγκαιότητες. Δεν είναι, ακόμα, τόσο απόρροια μεμονωμένων ενεργειών και εκλάμψεων. Η ανάπτυξή τους (των μαθηματικών) εξαρτάται από την ανάπτυξη των παραγωγικών δυνάμεων, είναι και τα ίδια παραγωγική δύναμη ως επιστήμη. Παίζουν ρόλο στην κοινωνική ανάπτυξη, ενυπάρχουν μέσα στη φύση και στην κοινωνία όχι με μια πλατωνική έννοια αλλά ως αντικειμενικές σχέσεις πραγμάτων, αντικειμενικών σχέσεων που εκφράζονται μέσω της ιδιαίτερης επιστήμης των μαθηματικών με έναν ιδιότυπο τρόπο.**

Β2: <u>Ορισμένοι άλλοι ορισμοί των μαθηματικών και κριτική τους με τα εργαλεία του ΔΥ</u>

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό το σκεπτικό του ΔΥ σχετικά με τον τρόπο που απαντά στο ερώτημα «τι είναι μαθηματικά» νομίζουμε ότι είναι χρήσιμο να δούμε και ορισμένους ορισμούς δοσμένους από άλλα φιλοσοφικά ρεύματα και τον τρόπο που θα μπορούσαν να κριθούν με γνώμονα τα εργαλεία του ΔΥ.

Για αυτό το λόγο θα κάνουμε μια επιλογή τέτοιων ορισμών, σημαντικών κατά τη γνώμη μας, χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει απαραίτητα ότι πρόκειται για τους μόνους με τους οποίους μπορεί κάποιος να ασχοληθεί στην περιοχή της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Θα ξεκινήσουμε με ορισμένους κλασικούς ορισμούς αλλά και με απόψεις για το τι είναι μαθηματικά που μπορεί να μη δίνουν άμεσα ορισμό των μαθηματικών ,όμως, τον υπονοούν. Τους ορισμούς αυτούς τους χαρακτηρίζουμε ως τέτοιους

---

[34] . Ε. Μπιτσάκης, Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, σελ 164, εκδ. Στάχυ

[35] . Καρλ Πόπερ, Η ανοικτή κοινωνία και οι εχθροί της, τ.2, σελ,29, εκδ. Δωδώνη

[36] . Α.Β. Σκοροχόντ, Μαθηματικοποίηση της γνώσης και επιστημονικοτεχνική πρόοδος, Κίεβο: Ναούκοβα Ντούμκα, 1975

[37] . Eves Howard, Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών, τ., σελ.112, εκδ. Τροχαλία

(κλασικούς) με την έννοια ότι έχουν διατυπωθεί σε περασμένους αιώνες και συγχρόνως διεκδικούν τα πρωτεία των βασικών προβληματισμών που περιστρέφονται γύρω από τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Β2.1: <u>Η πυθαγόρεια άποψη</u>

Εκκινούμε με την άποψη των Πυθαγορείων. Είναι γνωστό πως γραπτά κείμενα από τους Πυθαγόρειους δεν υπάρχουν, ωστόσο υπάρχουν κάποιες αναφορές για αυτούς οι οποίες κυρίως προέρχονται από τον Αριστοτέλη. Μπορεί να μη διατυπώνεται με ρητό τρόπο κάποιος ορισμός των Μαθηματικών, ωστόσο η άποψή τους για την έννοια του αριθμού δηλώνει με ένα υπόρρητο τρόπο και την αντίληψή τους για το τι είναι μαθηματικά και πού αυτά υπάρχουν. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη : «...οι λεγόμενοι Πυθαγόρειοι καταπιάστηκαν πρώτοι με τα μαθηματικά και όχι μόνο τα ανέπτυξαν αλλά καθώς αυτά τους έγιναν δεύτερη φύση, **θεώρησαν ότι οι αρχές τους είναι αρχές των όντων**. Επειδή λοιπόν στα μαθηματικά οι αριθμοί έρχονται από τη φύση τους πρώτοι και επειδή θεωρούσαν ότι στους αριθμούς βλέπουν πολλές ομοιότητες με τα όντα και τα γεγονότα, περισσότερες από ότι στη φωτιά, στη γη και στο νερό, ότι ο τάδε αριθμός με τις συγκεκριμένες ιδιότητες είναι η δικαιοσύνη, ο τάδε η ψυχή και ο νους, ο άλλος ο καιρός και ούτω καθ' εξής. Στους αριθμούς ακόμα έβλεπαν τις ιδιότητες και τις σχέσεις των μουσικών αρμονιών. Αφού, λοιπόν, όλα τα άλλα όντα φαίνονταν να είναι τέλεια απεικόνιση των αριθμών και αφού οι αριθμοί είναι πρωταρχικοί σε ολόκληρη τη φύση, θεώρησαν ότι τα στοιχεία όλων των όντων και ότι ολόκληρος ο ουρανός δεν είναι παρά αρμονία και αριθμός όσες, λοιπόν, αναλογίες μπορούσαν να δείξουν ανάμεσα στους αριθμούς και στις αρμονίες αφενός και στις μεταβολές, τα μέρη του ουρανού και τη γενική διάταξη του κόσμου αφετέρου, τις συγκέντρωναν και τις ενσωμάτωναν στο σύστημά τους».[38] Σε άλλα, πάλι, αποσπάσματα του Αριστοτέλη συναντάμε περιγραφές για τους Πυθαγόρειους, υποστηρικτικές της παραπάνω εκτίμησης που παραθέσαμε: «Πρόσθεσαν (σ.σ. οι Πυθαγόρειοι) όμως και ένα νέο στοιχείο, που είναι καθαρά δικό τους: Το περατό, το άπειρο και το Ένα δεν τα θεώρησαν ότι απλά ανήκουν σε διαφορετικές φύσεις, όπως η φωτιά, η γη ή κάτι παρόμοιο, αλλά το ίδιο το άπειρο και το ίδιο το ένα είναι η ουσία των πραγμάτων στα οποία αποδίδονται. **Γι' αυτό και θεώρησαν τον αριθμό ως ουσία όλων των πραγμάτων**»[39], επίσης «και οι Πυθαγόρειοι, εξ' άλλου, είναι της γνώμης ότι υπάρχει ένα μοναδικό είδος αριθμού, ο μαθηματικός, μόνο που δεν είναι χωρισμένος, **αλλά από αυτόν λένε, συνιστώνται οι αισθητές ουσίες, διότι αυτοί κατασκευάζουν ολόκληρο το σύμπαν από αριθμούς**...».[40] Ακόμα, «Οι Πυθαγόρειοι πάλι, επειδή έβλεπαν ότι πολλά χαρακτηριστικά των αριθμών ανήκουν στα αισθητά σώματα, **θεώρησαν ότι τα όντα είναι αριθμοί, όχι όμως χωριστοί, αλλά ότι από αυτούς αποτελούνται τα όντα.** Γιατί όμως; Επειδή τα χαρακτηριστικά των αριθμών ανευρίσκονται στην αρμονία και στον ουρανό και σε πολλά άλλα πράγματα [...] Οι Πυθαγόρειοι, λοιπόν, δεν μπορούν να κατηγορηθούν ως προς αυτό το σημείο (σ.σ. εννοεί την αντίληψη για τη σύμφυση αντικειμένου-αριθμού) ως προς το ότι, όμως, παράγον τα φυσικά σώματα από αριθμούς, από πράγματα δηλαδή που δεν έχουν βάρος ή ελαφρότητα [παράγουν] πράγματα που έχουν ελαφρότητα και βάρος, δίνουν την εντύπωση τι μιλούν για άλλο ουρανό και άλλα σώματα και όχι για τα αισθητά»[41], (όλες οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Από τα παραπάνω αποσπάσματα γίνεται φανερό ότι η άποψη των πυθαγορείων βρίσκεται μακριά από μια υλιστική-διαλεκτική θεώρηση των μαθηματικών. Η οντολογική τοποθέτηση των πυθαγορείων είναι ιδεαλιστική με αριθμολογικά χαρακτηριστικά. Η εμμονή τους στην αξία του αριθμού έχει ένα διπλό αντιφατικό χαρακτήρα: **μας προσφέρει ένα ερμηνευτικό-ορθολογικό μοντέλο που έχει την απαίτηση να είναι συνεπές, το οποίο, ωστόσο, περιστρεφόμενο γύρω από την έννοια του αριθμού καταντάει ανορθολογικό.** Η προσπάθεια να ενταχθούν οντολογικές αλλά και ηθικές κατηγορίες στην αριθμητική

[38] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 985b, 24-986a,5
[39] . Αριστοτέλης, Μετά τα φυσικά, A 987a, 14
[40] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, M 1080b, 15
[41] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, N1090a, 22

ερμηνευτική χρησιμοποιεί έναν ισομορφισμό, **«αντίστροφο» από αυτόν που χρησιμοποιεί ο ΔΥ**. Ο ΔΥ θεωρεί ότι πραγματικές σχέσεις ενσαρκώνονται στην ιδιαίτερη επιστήμη των μαθηματικών και με τη σειρά τους επηρεάζουν την αντίληψή μας για την υλική και κοινωνική πραγματικότητα. Στους πυθαγόρειους ακολουθείται μια διαφορετική πορεία. **Οι αριθμοί είναι πρότεροι της πραγματικότητας και άρα οφείλουμε να προσαρμόσουμε την πραγματικότητα στους αριθμούς**.[42] Τελικά, τα μαθηματικά είναι υπερβατικά κι ενδεδυμένα με ένα μυστικισμό, είναι ένας μετακώδικας, υπάρχουν έξω από εμάς και άρα **δεν αποτελούν προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας.**

Β2.2: <u>Η πλατωνική άποψη</u>

Ασφαλώς μετά τους Πυθαγόρειους δε θα μπορούσε παρά να ακολουθήσει η πλατωνική οπτική. Ο Πλάτωνας έθεσε σπουδαία ζητήματα για τη φύση των μαθηματικών και συχνά κατατάσσεται από τους σύγχρονους μελετητές στο ρεαλιστικό στρατόπεδο. Ένα στρατόπεδο που σε ορισμένες περιπτώσεις γειτνιάζει με το ΔΥ, χωρίς να ταυτίζεται. Διαφορετικά: ο ΔΥ εμπεριέχει κατά κάποιο τρόπο το ρεαλισμό, είναι συστατικό του στοιχείο, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα.[43] Ο Πλάτωνας, ωστόσο, υπήρξε μια χαρακτηριστική περίπτωση αυτού που ο ΔΥ ονομάζει εκπρόσωπος του **αντικειμενικού ιδεαλισμού** και μάλιστα θεωρείται και ως ο εισηγητής του εν λόγω φιλοσοφικού ρεύματος.[44]

Για να καταλάβουμε, όμως, τον τρόπο με τον οποίο ο Πλάτωνας τοποθετήθηκε πάνω στη φύση των μαθηματικών θα πρέπει να παρακολουθήσουμε, έστω περιληπτικά και κωδικοποιημένα, μερικά από τα βασικά του δόγματα. Κατά τον Πλάτωνα το σύμπαν χωρίζεται σε δυο κόσμους. Ο ένας είναι ο αισθητός (αντιστοιχίζεται στην ύλη) και ο άλλος ο υπεραισθητός (αντιστοιχίζεται στο πνεύμα). Το Είναι βρίσκεται έξω από εμάς, δεν είναι ορατό όπως η πραγματικότητα που μας περιβάλλει, είναι άχρονο, άυλο, ασώματο, αόρατο και αιώνιο. Οι ιδέες που υπάρχουν στον υπεραισθητό κόσμο είναι το αρχέτυπο της ουσίας των όντων. Με άλλα λόγια οι ιδέες δεν είναι υποκειμενικά δημιουργήματα, προϊόν της νόησης του υποκειμένου. Το υποκείμενο κατέχει τις ιδέες του με διάμεσο την ψυχή. Η διαδικασία που φέρνει στην επιφάνεια τις ιδέες είναι η ανάμνηση. Ο αισθητός κόσμος από την άλλη δεν είναι παρά ένα αντίγραφο, ένα έκτυπο του πραγματικού Είναι. Τα υλικά πράγματα ως αντίγραφα, δεν μπορούν να είναι τέλεια. Κάθε πράγμα που χαρακτηρίζεται από τη γέννηση, την εξέλιξη και τη φθορά δεν μπορεί να γίνει αντικείμενο πραγματικής γνώσης. Αυτά τα οποία μπορούν να μας προσφέρουν γνώση και να γίνουν αντικείμενο επιστημονικής έρευνας είναι όσα είναι σταθερά και αμετάβλητα. Έτσι, ο Πλάτωνας διαχωρίζει την επιστήμη (γνώση) από τη δόξα (γνώμη). Η πρώτη είναι αυτή που καταπιάνεται με την έρευνα του Είναι. Σε αυτό το νοητό κόσμο ξεχωρίζει η σφαίρα «της χωρίς προϋποθέσεις αρχής του παντός», μιας αρχής προσιτής μόνο μέσω της νόησης. Στην κορυφή της ιεραρχίας των επιστημών βρίσκονται τα μαθηματικά και η διαλεκτική, επιστήμες που δίνουν τη δυνατότητα να μελετηθεί η πρώτη αρχή. **Αντικείμενο των μαθηματικών είναι η διερεύνηση των ιδεών μέσα στις οποίες περιέχονται οι αριθμητικές και γεωμετρικές ιδέες.** Οι παραστάσεις που περιλαμβάνουν όλα εκείνα που είναι ορατά οφείλουν να μετατραπούν σε γνώσεις. Για την ανάγκη μιας τέτοιας διαδικασίας είναι

---

[42] . Σύμφωνα με μια παρατήρηση «Ένα συνηθισμένο σφάλμα των θεωρητικών είναι ότι επιδιώκουν να προσαρμόσουν την πραγματικότητα σε μαθηματικά σχήματα τα οποία δε συμφωνούν κατ' ανάγκη με την πραγματικότητα. Η «κακή συνήθεια» άρχισε από τους Πυθαγόρειους και συνεχίζεται από μια μερίδα θεωρητικών φυσικών» (Ε. Μπιτσάκης, ο.π., σελ. 164)

[43] . Όπως γράφει ο Ε. Μπιτσάκης «ο ρεαλιστής δέχεται την ύπαρξη της αντικειμενικής πραγματικότητας, χωρίς να θέτει το ερώτημα για την προέλευση και τη φύση της. Ο υλιστής, εκτός από την αντικειμενικότητα, δέχεται και την αυθυπαρξία της φύσης.. ο Γαλιλαίος, ο Νεύτωνας ή ο Κέπλερ, π.χ., δεν ήταν υλιστές. Ήταν πιστοί και πίστευαν ότι ερευνώντας τη φύση, αποκάλυπταν τη βούληση του Θεού πραγματωμένη στον κόσμο», (Θεωρία και Πράξη, σελ. 141, εκδ. Gutenberg)

[44] . Βλέπε χαρακτηριστικά, Κορδάτου Γ., Ιστορία της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας, σελ.285

χαρακτηριστική η αλληγορία της σπηλιάς που αναφέρεται στην Πολιτεία.[45] Μέσα, λοιπόν, σε αυτό το πλαίσιο πρέπει να δούμε και την άποψή του για τα μαθηματικά.

Ας δούμε, κατ' αρχάς, με ποια έννοια ήταν ο Πλάτωνας ρεαλιστής όσον αφορά στη θεώρησή του στα Μαθηματικά. Ο Πλάτωνας θεωρούσε **α) την ύπαρξη των αντικειμένων γνώσης ανεξάρτητα από το υποκείμενο-γνώστη καθώς και ανεξάρτητα από τον τρόπο γνώσης τους, β) ότι αυτά τα αντικείμενα γνώσης ήταν αντίγραφα των ιδεατών οντοτήτων, δηλαδή των ιδεών και γ) ότι οι μαθηματικές οντότητες ήταν ένα υποσύνολο των ιδεών**. Αυτή, λοιπόν, είναι η ρεαλιστικότητα του Πλάτωνα: οι μαθηματικές οντότητες είναι ανεξάρτητες από εμάς. Αυτή η πρώτη διαπίστωση, μέχρις ενός βαθμού, δε θα έβρισκε αντίθετο έναν οπαδό του ΔΥ, γιατί σύμφωνα με αυτόν, η πραγματικότητα υπάρχει ανεξάρτητα από το υποκείμενο. **Ωστόσο, υπάρχουν δυο ενστάσεις: η μαθηματική γνώση δε διακρίνεται από ιστορικότητα, κατά τον Πλάτωνα, αφού πρόκειται για αιώνιες, αναλλοίωτες και άχρονες αλήθειες. Επιπλέον, οι μαθηματικές ιδέες δεν μπορεί να είναι απλά ιδέες για το ΔΥ. Είναι προϊόντα κατ' αρχάς εμπειρίας που αναπτύσσονται διαρκώς και ποικιλόμορφα και δεν εμφανίσθηκαν με ένα μεταφυσικό τρόπο. Ακόμα και οι μαθηματικές προτάσεις που χαρακτηρίζονται από μια σταθερότητα στο χρόνο και κανείς δεν υποθέτει ότι κάποτε θα μεταβληθούν όπως το περίφημο καντιανό παράδειγμα με το 7+5=12, δεν προϋπάρχει**, (αλλά γι' αυτό θα αναφερθούμε λίγο παρακάτω).

Για τον Πλάτωνα η πρακτική αξία των μαθηματικών είναι δευτερεύουσας σημασίας. Αυτό που προέχει είναι η κατάκτηση της ιδέας που βρίσκεται έξω και πέρα από εμάς. Έτσι, εφαρμοσμένα και θεωρητικά μαθηματικά αποτελούν δυο γνωστικές ενότητες που διακρίνονται από ασυμμετρία μεταξύ τους. Και βέβαια αυτή η ασυμμετρία «δουλεύει» υπέρ των δεύτερων. Ας δούμε με ποιο τρόπο ο ίδιος ο Πλάτωνας το υπογραμμίζει:

«-Ωστόσο ολόκληρη η επιστήμη των αριθμών και η τέχνη του υπολογισμού ασχολείται με τον αριθμό.

-Ασφαλώς.

-**Κι αυτά είναι φανερό οδηγούν στην αλήθεια.**

-Σε αφάνταστα υψηλό βαθμό!

-Άρα, καθώς φαίνεται, θα συγκαταλέγονται στις μαθήσεις που αναζητούμε· ένας πολεμιστής είναι απαραίτητο να τα μάθει αυτά, για να ξέρει πώς να παρατάσσει πώς να παρατάσσει το στράτευμα, ένας φιλόσοφος πάλι, επειδή **πρέπει να αναδυθεί πρώτα από το βυθό του γίγνεσθαι και να αγγίξει έπειτα την αληθινή ουσία, διαφορετικά δεν πρόκειται ποτέ να γνωρίσει στ' αλήθεια την επιστήμη των αριθμών.**

-Έτσι είναι, είπε.

-Κι ο δικός μας φύλακας συμβαίνει να είναι και πολεμιστής και φιλόσοφος.

-Ασφαλώς.

-Έτσι, η σπουδή αυτή θα είναι κατάλληλη, Γλαύκων, να την καθιερώσουμε με νόμο και να πείθουμε όσους μέλλει να αναλάβουν τα αξιώματα στην πόλη να στραφούν στη μελέτη των αριθμών και να καταπιαστούν με αυτήν όχι ερασιτεχνικά αλλά ίσαμ' εκεί που θα φτάσουν-αποκλειστικά διαμέσου της νόησης-στη θέαση της φύσης των αριθμών, **μελετώντας την όχι για να την χρησιμοποιήσουν σαν έμποροι και γυρολόγοι σε αγοροπωλησίες αλλά στον πόλεμο και ,επίσης, προς διευκόλυνση της ίδιας της ψυχής να μεταστραφεί από το γίγνεσθαι στην αλήθεια και την ουσία.**

-Έξοχα το λες, είπε.

-Συλλογίζομαι μάλιστα τώρα, είπα εγώ, ύστερα από την αναφορά που έγινε στη σπουδή της αριθμητικής, πόσο κομψή είναι αυτή η γνώση και πόσο πολλαπλά χρήσιμη σ' εμάς σχετικά με αυτό που θέλουμε, **αν καταπιάνεται κανείς με αυτήν όχι για εμπορικούς λόγους αλλά με σκοπό αποκλειστικά τη γνώση**», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[46]

Παρόμοια είναι η αντίληψη του Πλάτωνα και για τη γεωμετρία. Μάλιστα αναπτύσσοντας αυτή του την άποψη γίνεται φανερό και αυτό το οποίο αναφέραμε λίγο παραπάνω για τη σχέση γνώσης και αμετάβλητων αληθειών. Γράφει χαρακτηριστικά:

---

[45] . Δες αναλυτικότερα α) Γ. Κορδάτου, Ιστορία της αρχαίας ελληνική φιλοσοφίας, σελ.285-333, εκδ. Μπουκουμάνη, β)Χ. Θεοδωρίδης, Εισαγωγή στη φιλοσοφία, σελ.33-37, εκδ. Εστία, γ) Λ.Φ.Ίλιτσεφ, φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμμα Πλάτωνας, εκδ. Καπόπουλος.

[46] . Πλάτωνας, Πολιτεία, 525a-d, εκδ. Πόλις

«Το κομμάτι της γεωμετρίας, είπε, που έχει εφαρμογή στα πράγματα του πολέμου προφανώς είναι κατάλληλο· γιατί σε ό,τι σχετίζεται με την εγκατάσταση στρατοπέδων, με την κατάληψη περιοχών, τη σύμπτυξη και την ανάπτυξη στρατευμάτων και οποιονδήποτε βάλλον στρατιωτικό σχηματισμό επάνω στη μάχη ή στην πορεία, ένας και ο αυτός άνθρωπος θα διέφερε από τον ίδιο τον εαυτό του ανάλογα με το αν κάτεχε ή όχι τη γεωμετρία […]

Επομένως η γεωμετρία, αν αναγκάζει την ψυχή να θεαστεί γνήσια με αυθεντική πραγματικότητα, είναι κατάλληλη, αν πάλι την αναγκάζει να θεαστεί τον κόσμο του γίγνεσθαι, τότε δεν είναι κατάλληλη […]

Να, εκφράζονται με τρόπο πολύ αστείο και λειψό (σ.σ. όσοι έχουν περιορισμένη γνώση της γεωμετρίας). Μιλούν για τετραγωνισμό, για κατασκευές, για προσθέσεις μεγεθών **σα να ασχολούνται με κάτι πρακτικό και όλες οι αποδείξεις τους να αναφέρονταν στην πράξη· τέτοιες είναι οι διατυπώσεις τους όλες, ενώ στην πραγματικότητα η σπουδή αυτή στο σύνολό της έχει αποκλειστικό αντικείμενό της τη γνώση** […]

Εύκολα θα συμφωνήσουμε σ' αυτό, είπε· πραγματικά, **η γεωμετρική γνώση αφορά το παντοτινά υπαρκτό**», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[47]

Εν τέλει, ο Πλάτωνας δεν απορρίπτει την πρακτική πλευρά των μαθηματικών και αυτό φαίνεται ιδιαίτερα από τη χρηστική τους αξία στον πόλεμο. Όμως, σίγουρα δεν είναι αυτή η κύρια πλευρά. Συνεπής με το δυϊσμό ύλης-πνεύματος , με το δόγμα ότι η ουσία των φαινομένων, το Είναι βρίσκεται στον υπεραισθητό κόσμο, συνεπής με τον ακραίο ιδεαλισμό του εν γένει, τα μαθηματικά φανερώνουν την πραγματική τους αξία στο βαθμό που μέσω αυτών προσεγγίζουμε τις αιώνιες και άχρονες αλήθειες. Οι ίδιες οι μαθηματικές ιδέες είναι μέρος του κόσμου των ιδεών και πρώτα και κύρια πρέπει να τα βλέπουμε υπό αυτό το πρίσμα. Η σύγκρουση του Πλάτωνα με τον Αριστοτέλη θα είναι σφοδρή αλλά κι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα αλλά πριν να πάμε στον Αριστοτέλη αξίζει να ανοίξουμε μια παρένθεση ορμώμενοι από ένα ερώτημα που τίθεται σχετικά με τη γοητεία του πλατωνισμού που ασκείται στους μαθηματικούς.[48] Μια πιθανή απάντηση που προτείνεται είναι ψυχολογικής υφής.[49] Σύμφωνα με αυτήν το αντικείμενο της ενασχόλησης των μαθηματικών δεν έχει τον υλικό χαρακτήρα που συναντάμε στις φυσικές επιστήμες. Η αισθητηριακή αντίληψη δεν παίζει τον κυρίαρχο ρόλο. Η ανακάλυψη νέων σχέσεων, θεωρημάτων κ.λπ. που αναπτύσσεται μέσω εποπτείας δίνουν την εντύπωση ότι η εξέλιξη των μαθηματικών είναι μια εντελώς νοητική διαδικασία αποκομμένη από την εμπειρία και τις αισθητηριακές προσλήψεις. Θέλουμε να σημειώσουμε τα εξής σχετικά με αυτή την τοποθέτηση: α) ασφαλώς και δεν αποκλείουμε την ψυχολογική πτυχή που υπάρχει στην υιοθέτηση της πλατωνικής οπτικής από μεγάλη μερίδα της μαθηματικής κοινότητας. Ωστόσο, δε νομίζουμε ότι το ψυχολογικό στοιχείο είναι και το κυρίαρχο. Αυτό που επικουρεί την κυριαρχία της πλατωνικής θεώρησης είναι το γενικότερο ιδεολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο «πλέει» η κοινωνία και σίγουρα δεν είναι αυτό του ΔΥ, β) η διαπίστωση ότι «το αντικείμενο των μαθηματικών δεν έχει τον υλικό χαρακτήρα της αντίστοιχης ενασχόλησης που έχουν οι φυσικές επιστήμες», νομίζουμε ότι θα ήταν ορθή αν μετατρεπόταν στη διαπίστωση ότι «το αντικείμενο των μαθηματικών **δε φαίνεται** να έχει τον υλικό χαρακτήρα της αντίστοιχης ενασχόλησης που έχουν οι φυσικές επιστήμες». Τώρα, σχετικά με το αν οι νέες ανακαλύψεις έχουν αντιστοίχιση με την αντικειμενική πραγματικότητα είναι ένα ζήτημα που θα το δούμε αναλυτικότερα σε άλλα σημεία του κειμένου.

Β2.3: <u>Η αριστοτελική άποψη</u>

Ο Σταγειρίτης φιλόσοφος έχει μια διαφορετική προβληματική από αυτή του Πλάτωνα. Απορρίπτει τη διάκριση του κόσμου σε αισθητό-ορατό και σε αόρατο-νοητό, την πλατωνική ιδεοκρατία και υποστηρίζει πως ο αισθητός κόσμος πρέπει να αποτελεί το καθαυτό αντικείμενο της επιστημονικής γνώσης. Η οντολογία του διαφοροποιείται από

---

[47] . Πλάτωνας, Πολιτεία, 52526d-527b, εκδ. Πόλις

[48] .Δες αναλυτικότερα Δ. Αναπολιτάνου, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ.41-45, εκδ. Νεφέλη

[49] . Ο.π., σελ. 41

αυτή του Πλάτωνα ριζικά, όταν αναζητά την αιτία που προκαλεί την κίνηση και μεταβολή των όντων κι εν γένει τις πρώτες αρχές και τα πρώτα αίτια. Για τον Αριστοτέλη πρέπει να αποκαλυφθεί η ουσία των όντων και να ερμηνευθεί η σχέση των όντων προς τις ιδέες. Αναζητά αποδείξεις και σε αυτή την κατεύθυνση λειτουργεί η λογική του. Με βάση το παραπάνω πλαίσιο διαθέτει και μια διαφοροποιημένη θεώρηση των μαθηματικών σε σχέση με αυτήν του Πλάτωνα. Η διαφοροποίηση του Αριστοτέλη σε σχέση με την πλατωνική θεώρηση γίνεται αντιληπτή με δυο τρόπους: είτε μέσα από την κριτική που ασκεί ενάντια στις πλατωνικές ιδέες για τα μαθηματική, είτε μέσα από την αυτοτελή, τρόπον τινά, δική του θεώρηση. Κυρίως από το δεύτερο τρόπο γίνεται αντιληπτή και η άποψή του για το τι είναι μαθηματικά. Ας δούμε κατ' αρχάς μια κατηγοριοποίηση που κάνει ο Αριστοτέλης και που αφορά στις απόψεις που υπήρχαν για τη σχέση μεταξύ των ειδών[50], του αισθητού και του μαθηματικού αντικειμένου: « Η ουσία θεωρείται ότι ανήκει καταφανέστατα στα σώματα (γι' αυτό και τα ζώα και τα φυτά και τα μέρη τους λέμε ότι είναι ουσίες, αλλά και τα φυσικά σώματα, όπως φωτιά, νερό, γη και καθένα από τα παρόμοια, καθώς και όσα είναι μέρη τους ή αποτελούνται από αυτά, είτε από μέρη, είτα από ολότητες, όπως ο ουρανός και τα μέρη του, τα άστρα, η σελήνη και ο ήλιος). Το κατά πόσον, τώρα, αυτές είναι μόνο ουσίες ή υπάρχουν κι άλλες, ή μερικές μόνο από αυτές, αλλά κάποιες άλλες, είναι κάτι που πρέπει να εξετασθεί. **Μερικοί, ωστόσο, θεωρούν ότι τα άκρα του σώματος, όπως επιφάνεια, γραμμή, σημείο και μονάδα, είναι ουσίες και μάλιστα περισσότερο από ότι το σώμα και το στερεό**. Ακόμα, ορισμένοι δεν πιστεύουν ότι υπάρχει κάτι τέτοιο πέρα από τα αισθητά, ενώ άλλοι ότι υπάρχουν αιώνιες ουσίες περισσότερες το πλήθος και περισσότερο πραγματικές, όπως ο Πλάτων [θεωρεί] τα είδη και τα μαθηματικά αντικείμενα δυο ουσίες και τρίτη την ουσία των αισθητών σωμάτων, ο Σεύσιπος πάλι, ξεκινώντας από το ένα, [θεωρεί ότι υπάρχουν] περισσότερες ουσίες και αρχές κάθε ουσίας, άλλη για τους αριθμούς, άλλη για τα μεγέθη και στη συνέχεια για την ψυχή και με αυτόν τον τρόπο επαυξάνει τις ουσίες. Μερικοί [πιθανώς να εννοεί τη σχολή του Ξενοκράτη], ωστόσο, λένε ότι τα μεν είδη και οι αριθμοί έχουν την ίδια φύση και ότι τα άλλα τα πράγματα τους ακολουθούν-γραμμές και επίπεδα-μέχρι την ουσία του ουρανού και τα αισθητά»[51] ,(η υπογράμμιση δική μας).

Η κριτική που ασκεί σε άλλα σημεία του έργου του στις απόψεις του Πλάτωνα είναι οξεία, σχεδόν ειρωνική.: «…[οι υπέρμαχοι των ειδών] τοποθετούν τα μαθηματικά αντικείμενα ανάμεσα στα είδη και τα αισθητά πράγματα ως μια τρίτη κατηγορία πραγμάτων πέρα από τα είδη και τα πράγματα του κόσμου τούτου, **πλην όμως δεν υπάρχει τρίτος άνθρωπος και τρίτος ίππος παράλληλα με τον καθ' αυτό και τους εξατομικευμένους ανθρώπους και ίππους**»[52] και σε άλλο σημείο απαντώντας και πάλι για τα ενδιάμεσα αντικείμενα: « συνεπώς, αφού η αστρονομία είναι μια από αυτές τις μαθηματικές επιστήμες, θα υπάρχει και άλλος ουρανός, εκτός από τον αισθητό ουρανό και άλλος ήλιος και άλλη σελήνη και άλλα ουράνια σώματα εκτός από τα αισθητά. Πώς μπορεί, όμως, κανείς να πιστέψει τέτοια πράγματα; […] αν η μόνη διαφορά γεωδαισίας και γεωμετρίας είναι ότι πρώτη αφορά πράγματα που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις και η δεύτερη αφορά μη αισθητά πράγματα, τότε είναι προφανές ότι, εκτός από την ιατρική, θα πρέπει να υπάρχει κάποια άλλη που να βρίσκεται ανάμεσα στην ίδια την ιατρική και αυτήν εδώ την άλλη, και το ίδιο θα συνέβαινε και σε κάθε μια από τις άλλες επιστήμες. Πώς, όμως, αυτό θα ήταν δυνατό;»[53], (η υπογράμμιση δική μας).

Από τα παραπάνω αποσπάσματα, ίσως, μπορεί κάποιος να υποπτευθεί την άποψη του Αριστοτέλη για το τι είναι μαθηματικά. Υπάρχουν, ωστόσο, άλλα αποσπάσματα από το έργο του που καθιστούν περισσότερο σαφή την άποψή του σχετικά με αυτό το ερώτημα. Για τον Αριστοτέλη σε τελική ανάλυση για να απαντήσουμε τι είναι μαθηματικά θα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας δυο βασικές προκείμενες. Η μια ήδη έχει περιγραφεί. **Η μορφή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως κάτι αξεχώριστο από την ίδια την ουσία του**

[50] . «…Η πολεμική του Αριστοτέλη κατά του αποχωρισμού των ειδών-ιδεών από τα πράγματα οδηγεί σε μια νέα σημασία του είδους, στην «εγγενή μορφή», η οποία είναι αξεχώριστη από το υλικό υποκείμενο…», [Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, ο.π., τ.2, λήμμα είδος]

[51] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1028b, 8

[52] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1059b, 5

[53] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 997b, 15

αντικειμένου. Όταν μιλάμε για μορφή αναφερόμαστε σε μια εγγενή μορφή του αντικειμένου. Η δεύτερη προκείμενη σχετίζεται με την έννοια της αφαίρεσης η οποία συνυπάρχει με την ίδια τη μαθηματική επιστήμη και είναι συστατικό της στοιχείο: «όπως, λοιπόν, ο μαθηματικός εξετάζει τα αντικείμενα που προέρχονται από αφαίρεση (**διότι τα μελετά, αφού πρώτα αφαιρέσει κάθε αισθητή ιδιότητα, όπως βάρος και ελαφρότητα, σκληρότητα και το αντίθετό της κι ακόμα τη θερμότητα, την ψυχρότητα και τις λοιπές αισθητές εναντιώσεις και αφήνει μόνο το ποσό και το συνεχές, άλλοτε σε μια, άλλοτε σε δυο, άλλοτε σε τρεις διαστάσεις, και τα παθήματα αυτών ενόσω είναι ποσά και συνεχή και δεν τα μελετά από κάποια άλλη σκοπιά, σε μερικά εξετάζει τη θέση του ενός σε σχέση με το άλλο και τις ιδιότητες τους, σε άλλα τις συμμετρίες και τις ασυμμετρίες τους, σε άλλα τον [αριθμητικό] λόγο του ενός προς το άλλο, ωστόσο εμείς δεχόμαστε πως υπάρχει μια και μόνο επιστήμη όλως αυτών-η γεωμετρία**), το ίδιο συμβαίνει και με το ον»[54], (η υπογράμμιση δική μας). Η αντίληψη του Αριστοτέλη δε διαφοροποιείται όταν αναφέρεται στους αριθμούς και ταυτίζεται με την αντίληψή του για τη γεωμετρία: «οι πρώτοι, όμως, που έθεσαν δυο είδη αριθμών, τον ιδεατό και το μαθηματικό, ούτε είπαν ούτε έχουν κάτι να πουν σχετικά με το πώς και από τι θα παράγεται ο μαθηματικός αριθμός. Διότι τον τοποθετούν μεταξύ του ιδεατού και του αισθητού [αριθμού]. Αν παράγεται λοιπόν από το μεγάλο και το μικρό τότε θα είναι ταυτόσημος με τον άλλο, τον ιδεατό αριθμό…και αν αναφέρει κάποιο άλλο στοιχείο, τότε θα κάνει τα στοιχεία του περισσότερα. Επίσης, αν κάποιο ένα είναι η αρχή του καθενός από τα δυο είδη αριθμών, τότε το ένα θα είναι κάποιο κοινό στοιχείο μεταξύ τους και θα πρέπει να ερευνήσουμε με ποιον τρόπο το ένα είναι τα πολλά αυτά πράγματα, ενώ ταυτόχρονα κατ' αυτόν ο αριθμός δεν μπορεί να γεννάται αλλιώς παρά μόνο από κάποιο ένα και κάποια αόριστη δυάδα».[55]

Σε άλλο σημείο πάλι επιχειρεί (ο Αριστοτέλης) έναν ακόμα πιο ακριβή ορισμό των μαθηματικών: « Η φυσική, λοιπόν, έχει να κάνει με τα πράγματα που έχουν μέσα τους την αρχή της κίνησης, ενώ η μαθηματική είναι μια επιστήμη θεωρητική που έχει να κάνει με πράγματα που μένουν ακίνητα, χωρίς, όμως, να είναι χωριστά»[56]. (Βέβαια θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε άλλο σημείο των γραπτών του ο Αριστοτέλης δε διατυπώνει την παραπάνω άποψη με απόλυτη σιγουριά αφού «…τα μαθηματικά είναι θεωρητικά, κατά πόσον όμως, έχουν να κάνουν με ακίνητα και χωριστά πράγματα, είναι άγνωστο προς το παρόν».[57] Ωστόσο σε γενικές γραμμές η απάντησή του σε αυτό το ερώτημα, αν δηλαδή τα μαθηματικά ασχολούνται με χωριστά αντικείμενα με την έννοια ότι ασχολούνται με αμετάβλητες οντότητες με ξεχωριστή ύπαρξη, είναι αρνητική).

Εν τέλει, η άποψη του Αριστοτέλη για το τι είναι μαθηματικά προσεγγίζει σε σημαντικό βαθμό τον ορισμό του Ένγκελς (ή και αντίστροφα ο ορισμός του Ένγκελς-γιατί όχι- προσεγγίζει αυτόν του Αριστοτέλη). Τα μαθηματικά προκύπτουν από την παρατήρηση των αντικειμένων και των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ τους και μάλιστα μέσα από την αφαιρετική διαδικασία. Οι ομοιότητες είναι προφανείς κατά τη γνώμη μας. Ο ρεαλισμός του Αριστοτέλη σε αυτό το σημείο είναι διαφορετικός από του Πλάτωνα. Είναι ρεαλισμός υλιστικής φύσης και όχι ιδεαλιστικής και μεταφυσικού προσανατολισμού. Την αφαίρεση την βλέπει ως μια νοητική διαδικασία μέσω της οποίας σχηματίζονται οι μαθηματικές ιδέες κι έτσι αποκαθαίρει τη μαθηματική επιστήμη από τις πλατωνικές ιδέες. Η μονάδα, για παράδειγμα, δεν υπάρχει «κάπου» κι ανεξάρτητα από τα υποκείμενα, δεν έχει οντολογικό στάτους από μόνη της. Ακόμα, ο Αριστοτέλης «πλησιάζει περισσότερο από ότι η πλατωνική προς μια σύγχρονη συνολοθεωρητική αντίληψη, σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να ορισθούν ως κλάσεις ισοδυναμίας άλλων αντικειμένων»[58] και «…τα γεωμετρικά αντικείμενα μοιάζουν με τις μορφές. Κατά μια έννοια, τα γεωμετρικά αντικείμενα *είναι* οι μορφές των φυσικών αντικειμένων. Βέβαια είναι Αριστοτελικές και όχι Πλατωνικές Μορφές. Τα μαθηματικά αντικείμενα που παράγονται

---

[54] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1061a, 29
[55] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1090b, 32
[56] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1063a, 31
[57] . Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, 1026a, 7
[58] . Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 55-56, εκδ. Νεφέλη

μέσω αφαίρεσης δεν υπάρχουν πριν από ή ανεξάρτητα από τα φυσικά αντικείμενα από τα οποία έχουν αφαιρεθεί».[59]

Θα μπορούσε κάποιος να παραθέσει κι άλλες απόπειρες απάντησης στα ερωτήματα «τι είναι μαθηματικά» και «ποιο το αντικείμενο τους», απόπειρες προερχόμενες από την αρχαιότητα. Θα περιοριστούμε, όμως, στις τρεις περιπτώσεις τις οποίες παραθέσαμε γιατί θεωρούμε ότι καλύπτουν σε σημαντικό βαθμό τους προβληματισμούς τους οποίους διατυπώθηκαν στην αρχαία Ελλάδα. Κατά μια έννοια τα ερωτήματα τα οποία διατυπώθηκαν μετά τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη ήταν σε μεγάλο βαθμό αναδιατυπώσεις των ερωτημάτων των δυο μεγάλων φιλοσόφων.

Β2.4: <u>Ύστερες της αρχαιότητας απόψεις σχετικά με το τι είναι μαθηματικά και τη χρηστική τους αξία</u>

Πριν την οποιαδήποτε παράθεση των διαφόρων απόψεων που κατά καιρούς έχουν διατυπωθεί σχετικά με το τι είναι μαθηματικά καθώς και τη χρηστική τους αξία θεωρούμε απαραίτητο να κάνουμε τις εξής διευκρινίσεις:
[α] Θα επιχειρήσουμε οι όποιες προσεγγίσεις να γίνουν με τη χρήση των εργαλείων του ΔΥ,
[β] οι απόψεις των περισσότερων, για να μην πούμε όλων αυτών των φιλοσόφων, δεν αποτελούν μια ολοκληρωμένη φιλοσοφική κι επιστημολογική προσέγγιση των μαθηματικών, αλλά σημαντικά σπαράγματα, σε πολλές περιπτώσεις, μιας τέτοιας προσπάθειας,
[γ] θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον να ερμηνεύαμε εκείνη ή ετούτη την άποψη κάτω από το πρίσμα των συγκεκριμένων κοινωνικών, οικονομικών, πολιτικών, ιδεολογικών και πολιτισμικών συνθηκών στις οποίες διατυπώθηκαν. Κάτι τέτοιο, όμως, ξεφεύγει από τις επιδιώξεις του κειμένου.

Πρώτος σταθμός μας στην εξέταση ύστερων απόψεων της αρχαιότητας για τη φύση των μαθηματικών και για το τι είναι μαθηματικά, θα είναι ο Γαλιλαίος και αυτό γιατί από όσους θα αναφέρουμε- των οποίων οι απόψεις μάς ενδιαφέρουν- είναι ο προγενέστερος χρονικά. Κατά το Στ. Ντρέικ «το Γαλιλαίο δεν τον ενδιέφερε το περιεχόμενο των μαθηματικών ή το περιεχόμενο της φυσικής, αλλά η σχέση μεταξύ των δυο».[60] Παρά, όμως, αυτή τη διαπίστωση μπορεί κανείς να βρει αναφορές που σχετίζονται έστω κι έμμεσα στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Στο έργο Il Saggiatore που εκδόθηκε το 1623 περιγράφεται η αντίληψη του Γαλιλαίου για τη σχέση φιλοσοφίας-μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτή την άποψη «η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του σύμπαντος, το οποίο είναι ανοικτό μπροστά στο βλέμμα μας. Όμως, το βιβλίο δεν μπορεί να γίνει κατανοητό, εκτός αν μάθουμε πρώτα να κατανοούμε τη γλώσσα και να διαβάζουμε το αλφάβητο στο οποίο έχει γραφτεί. **Είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών και οι γλωσσικοί χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά κανείς περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο**»[61] ,(η υπογράμμιση δική μας). Μάλλον, πρόκειται για μια ακραία άποψη αφού η φιλοσοφία ταυτίζεται με τη φιλοσοφία της φύσης και η γλώσσα της είναι τα μαθηματικά. Επομένως, η ενασχόληση με αυτή (τη φιλοσοφία) έχει αξία μόνο αν κατέχουμε τον τρόπο να την διαβάζουμε δηλαδή μόνον αν ξέρουμε μαθηματικά. Μόνον έτσι μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι «διαβάζουμε» σωστά το «ανοικτό βιβλίο». Ο Γαλιλαίος βλέπει, λοιπόν, στα μαθηματικά τη βεβαιότητα της γνώσης και όπως ο ίδιος γράφει: «Διατείνομαι ότι ο ανθρώπινος νους όντως κατανοεί ορισμένες προτάσεις τέλεια και συνεπώς έχει για αυτές την ίδια απόλυτη βεβαιότητα που διαθέτει και η ίδια η Φύση. Πρόκειται για προτάσεις των μαθηματικών επιστημών και μόνο, δηλαδή της γεωμετρίας και της αριθμητικής, για τις οποίες δυο επιστήμες η Θεία διάνοια πράγματι γνωρίζει απείρως περισσότερες προτάσεις από εμάς, εφόσον τις γνωρίζει όλες. Όμως, αναφορικά με αυτές τις λίγες που γνωρίζει ο ανθρώπινος νους, πιστεύω ότι η γνώση του

[59] . Σ. Σαπίρο, Σκέψεις για τα μαθηματικά: Η φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ, 74, εκδ. παν/μιου Πατρών
[60] . Στ. Ντρέικ, Γαλιλαίος, σελ.52, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
[61] . Αναφέρεται στο *Γαλιλαίος*, Στ. Ντρέικ, σελ.103, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

ισούται, ως προς την αντικειμενική βεβαιότητα με εκείνη του Θείου-διότι εδώ κατορθώνει να κατανοήσει την αναγκαιότητα και σίγουρα δεν μπορεί να υπάρξει μεγαλύτερη βεβαιότητα από αυτήν».[62] Επομένως, κατά το Γαλιλαίο τα μαθηματικά είναι τα μόνα που μπορούν να μας προσφέρουν σιγουριά και μάλιστα η σιγουριά αυτή είναι αντίστοιχη της βεβαιότητας της γνώσης που εκπορεύεται από τον ίδιο το Θεό. Ο Γαλιλαίος σε άλλο σημείο της προβληματικής του για τα μαθηματικά φροντίζει να γίνει περισσότερο συγκεκριμένος. Αξίζει να παραθέσουμε άλλο ένα κείμενό του αρκετά, κατά τη γνώμη μας σημαντικό: «Όταν τοποθετεί κανείς συγκεκριμένα μια υλική σφαίρα που δεν είναι τέλεια σε ένα επίπεδο που δεν είναι τέλειο και τότε λέμε ότι αυτά τα δυο δεν εφάπτονται μόνο σε ένα σημείο. Σας λέω, όμως, ότι ακόμα και στην αφηρημένη περίπτωση, μια άυλη σφαίρα που δεν είναι τέλεια δεν εφάπτεται σε ένα άυλο επίπεδο που δεν είναι τέλειο σε ένα μόνο σημείο, αλλά σε ένα τμήμα της επιφάνειας του. Άρα, ό,τι συμβαίνει εδώ στο συγκεκριμένο συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο και στο αφηρημένο. **Θα μου ήταν πράγματι πρωτόγνωρο, αν η λογιστική με αφηρημένους αριθμούς δεν αντιστοιχούσε σε συγκεκριμένα χρυσά ή αργυρά νομίσματα ή σε εμπορεύματα**. Όπως ακριβώς ένας λογιστής, που επιθυμεί οι υπολογισμοί του να αναφέρονται σε ζάχαρη, μετάξι και μαλλί, οφείλει να αφαιρεί τα κουτιά, τις μπάλες και τα πακέτα, έτσι και φιλόσοφος-γεωμέτρης, όποτε θέλει να αναγνωρίσει στο συγκεκριμένο τα φαινόμενα που έχει αποδείξει στο αφηρημένο επίπεδο, πρέπει να αφαιρέσει τα υλικά εμπόδια. Και αν είναι σε θέση να κάνει κάτι τέτοιο, τότε σας βεβαιώ ότι τα υλικά αντικείμενα δε βρίσκονται σε μικρότερη συμφωνία μεταξύ τους, απ' ότι οι αριθμητικοί υπολογισμοί. **Τότε τα λάθη δε βρίσκονται στο αφηρημένο ή το συγκεκριμένο, αλλά στο λογιστή που δε γνωρίζει πώς να ισοσκελίσει τα βιβλία του**»[63], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Θεωρούμε ότι το παραπάνω απόσπασμα μας δίνει μια εξαιρετική συμπύκνωση των ιδεών του Γαλιλαίου για τη φύση των μαθηματικών. Τέσσερα, κατά τη γνώμη μας, συμπεράσματα προκύπτουν: α) Ο Γαλιλαίος αντιλαμβάνεται ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και οι έννοιες που χρησιμοποιούμε είναι εξιδανικεύσεις της πραγματικότητας. Ωστόσο, αυτό δε μας εμποδίζει να συμπεράνουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με ακρίβεια και υπάρχει μια αντιστοίχιση πραγματικότητας-μαθηματικών που είναι, τρόπον τινά, «1-1». Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι ούτε στην πραγματικότητα αλλά ούτε και στα ίδια τα Μαθηματικά (στην αφαιρετική διαδικασία), έχουμε για παράδειγμα ένα μόνο σημείο επαφής σφαίρας-επιπέδου, β) βλέπει τα μαθηματικά μέσα από μια ρεαλιστική σκοπιά. Οι μαθηματικές οντότητες αντιστοιχίζονται σε καθημερινά πράγματα. Αυτό προκύπτει μέσα από το παράδειγμα με τη λογιστική και την αντιστοίχιση των αριθμών σε νομίσματα κ.λπ., γ) για να λειτουργήσουν τα μαθηματικά θα πρέπει να κάνουμε τις αναγκαίες αφαιρέσεις και δ)τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από την τελειότητά τους και γι' αυτό το λόγο τα όποια λάθη δεν οφείλονται σε αυτά τα ίδια αλλά στα λάθη του υποκειμένου το οποίο τα χειρίζεται.

Κατά τον Α. Κοϋρέ το Γαλιλαίο πρέπει να τον εντάξουμε στην πλατωνική παράδοση. Δεν ξέρουμε αν αυτό ευσταθεί. Ασφαλώς ο Γαλιλαίος ήταν αντιαριστοτελικός. Η φυσική του Αριστοτέλη, σύμφωνα με τον Κοϋρέ, είναι θεμελιωμένη στην αισθητηριακή αντίληψη και γι' αυτό το λόγο είναι αποφασιστικά αντιμαθηματική. Αρνείται να αντικαταστήσει με γεωμετρικές αφαιρέσεις τα ποιοτικά καθορισμένα δεδομένα της εμπειρίας και του κοινού νου και αντικρούει ακόμα και την πιθανότητα μιας μαθηματικής φυσικής.[64] Ωστόσο, ναι μεν ο Γαλιλαίος αποδίδει στα μαθηματικά ένα ρόλο πρωτεύοντα στην ερμηνεία των φυσικών πραγμάτων, οπότε μπορεί να χαρακτηρισθεί ως πλατωνιστής, αλλά από την άλλη δεν υποτιμά καθόλου την πρακτική τους αξία, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την πλατωνική θεώρηση.

Μετά το Γαλιλαίο θα σταθούμε επιγραμματικά στην άποψη του Κέπλερ και του Κοπέρνικου που έδιναν μιαν ακραία θεολογική ερμηνεία στην ύπαρξη των μαθηματικών. Αναζήτησαν με επιμονή την κρυμμένη αρμονία της φύσης την οποία προσπάθησαν να την εκφράσουν μέσω των μαθηματικών. Τούτο το επιδίωκαν γιατί πίστευαν ότι το σύμπαν

---

[62] . Αναφέρεται στο *Γαλιλαίος*, Στ. Ντρέικ, σελ.19, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
[63] . Αναφέρεται στο *Γαλιλαίος*, Στ. Ντρέικ, σελ.75-76, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
[64] . Δες χαρακτηριστικά Α. Κοϋρέ, Δυτικός πολιτισμός, σελ.20, εκδ.Ύψιλον

είναι δημιουργημένο από το Θεό με βάση τις αρχές της γεωμετρίας.[65] Σημειώνουμε, επίσης, ότι ο Κέπλερ επέκτεινε την άποψη για τη δύναμη των κύκλων στην ουράνια κίνηση- άποψη πλατωνικής προέλευσης- με την εμμονή του να ανακαλύπτει μαθηματικές αναλογίες στον ουρανό. Κατά τον Κοϋρέ κατά την εποχή του Κοπέρνικου και του Κέπλερ πραγματοποιείται μια επιστημονική επανάσταση της οποίας ένα χαρακτηριστικό είναι «η γεωμετρικοποίηση του χώρου, δηλαδή η υιοθέτηση του ομοιογενούς και αφηρημένου χώρου-διαστάσεων της ευκλείδειας γεωμετρίας (θεωρούμενου ωστόσο τότε ως πραγματικού χώρου) στη θέση του συνεχούς, συγκεκριμένου και ιεραρχημένου συνόλου των «θέσεων» της προ-γαλιλαϊκής φυσικής και αστρονομίας».[66] Έτσι, τα μαθηματικά μπορεί να χρησιμοποιούνται για να ερμηνεύουν, ωστόσο η βάση πάνω στην οποία εδράζονται είναι θεολογική. Είναι τα εργαλεία της θείας δημιουργίας και διαπνέονται με αυτό τον τρόπο από ένα ρεαλιστικό ιδεαλισμό με τις ρίζες του να βρίσκονται στον Πλάτωνα.

Όσον αφορά στο Νεύτωνα, τον επιφανέστερο εκπρόσωπο του μηχανιστικού υλισμού, τα μαθηματικά συνδέονται με την εμπειρία. Αυτό σημαίνει ότι τα παρατηρησιακά δεδομένα μαθηματικοποιούνται, είτε αυτά προέρχονται από την άμεση παρατήρηση της φύσης είτε από πειράματα. Η νευτώνεια επιστήμη είναι μια μαθηματική φιλοσοφία της φύσης που στη θέση των ποιοτήτων και των αισθητηριακών προσλήψεων τοποθετεί τον κόσμο της ποσότητας και της πραγματοποιημένης γεωμετρίας, κόσμο μέσα στον οποίο υπάρχει θέση για οτιδήποτε εκτός από τον άνθρωπο, σύμφωνα με την τοποθέτηση του Κοϋρέ.[67] Ο Νεύτωνας δεν αποποιείται το Θεό. Πιστεύει ότι η επιστήμη ανακαλύπτει τους νόμους που έχουν επινοηθεί από το Θεό, όταν αυτός δημιούργησε τον κόσμο. Ο ιδεαλισμός, όμως, είναι διαφορετικός από αυτόν που εκδηλώνεται σε κάποιες περιπτώσεις στην αρχαιότητα. Δε διστάζει να καταρρίψει την άποψη για την κυκλική κίνηση των ουράνιων σωμάτων που έχει διατηρηθεί για αιώνες και σχετίζεται με την ιερότητα, τρόπον τινά, του γεωμετρικού σχήματος που λέγεται κύκλος, όπως θα δούμε σε άλλο σημείο του κειμένου. Χωρίς να είναι ρητά διατυπωμένο από την πλευρά του Νεύτωνα, μάλλον, προκύπτει αβίαστα από τη γενικότερη άποψή του ότι τα μαθηματικά μπορούν να περιγράφουν τα πάντα στη φύση και μάλιστα φαίνεται ότι τα μαθηματικά εκείνης της εποχής θεωρούνται επαρκή. Η διαπίστωση ότι τα φαινόμενα στη φύση δεν είναι γραμμικά διαψεύδουν τη δεύτερη διαπίστωση του Νεύτωνα και αποδεικνύουν το μηχανιστικό της σκέψης του. Με άλλα λόγια τα μαθηματικά αποτελούν πολύ καλές περιγραφές των φυσικών φαινομένων, αλλά αποτελούν προσεγγίσεις τους που έχουμε τη δυνατότητα να τις βελτιώνουμε συνεχώς. Βέβαια «τόσο ο Νεύτωνας όσο και ο Descartes υπήρξαν έξοχοι γεωμέτρες αλλά η επικράτηση του Νεύτωνα έχει για μας ιδιαίτερη σημασία, επειδή δικαίωσε τη συμμαχία της γεωμετρίας με την πειραματική μέθοδο εναντίον του περίτεχνου παραγωγικού συστήματος του Descartes».[68]

Ο Καρτέσιος όπως είναι γνωστό έχει πολιτογραφηθεί ως ένας εκ των επιφανέστερων ορθολογιστών φιλοσόφων. Στρέφεται στον ανθρώπινο λόγο, τη νόηση και την αυτοσυνείδηση. Εισήγαγε την καθολική αμφιβολία. Ταυτόχρονα η οντολογία του είναι θεοκεντρική. Ο θεοκεντρισμός του, ωστόσο, δεν τον εμποδίζει να μιλήσει για την ανάγκη μιας επιστημονικής γνώσης που θα πρέπει να την βλέπουμε ως ένα ενιαίο σύστημα και όχι ως ένα άθροισμα τυχαίων αληθειών. Προϋπόθεση της κατασκευής ενός επιστημονικού σώματος που θα είναι ενιαίο και δε θα αποτελείται από ψήγματα αλήθειας, είναι η ενάργεια, το πρόδηλο και η αξιοπιστία της κρίσης. Οι εναργείς, όμως, ιδέες έχουν την πηγή τους στην υπέρτατη οντότητα. Άμεσα συνδεδεμένη με τα παραπάνω είναι και η πασίγνωστη θέση του "cogito ergo sum". Μέσω αυτής της θέσης προβάλει η υπεροχή του νοούμενου έναντι του αισθητού. Το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας λύνεται υπέρ της νόησης και μάλιστα με την υιοθέτηση του (ασύμμετρου) δυϊσμού ψυχής-σώματος. Έτσι, κινούμενος μέσα σε αυτά τα δόγματα συμπεραίνει ότι το θεμέλιο της μεθόδου του

---

[65] . Δες χαρακτηριστικά μια τέτοια εκτίμηση α) στο σύγγραμμα του Α. Κοϋρέ, *Δυτικός πολιτισμός*, σελ. 42 ,β) στο *Η καταγωγή της σύγχρονης επιστήμης (1300-1800)*, Χ. Μπάτερφάιλντ, Μορφωτικό ίδρυμα εθνικής τραπέζης

[66] . Α. Κοϋρέ, Ο δυτικός πολιτισμός, σελ. 50, εκδ. Ύψιλον

[67] . Ο.π., σελ. 65

[68] . Χ. Μπατρεφάιλντ, *Η καταγωγή της σύγχρονης επιστήμης (1300-1800)*, σελ. 156

είναι τα μαθηματικά γιατί είναι η μόνη επιστήμη που χαρακτηρίζεται από βεβαιότητα και την ενάργεια των αποδείξεών τους. Θα μπορούσαμε, μάλιστα, να πούμε ότι προάγγελος αυτής του της άποψης αποτέλεσε η άποψη του Γαλιλαίου την οποία ήδη αναφέραμε παραπάνω: «Και παίρνοντας υπόψη πως, από όλους που αναζήτησαν στα περασμένα την αλήθεια μέσα στις επιστήμες, μόνο οι μαθηματικοί μπόρεσαν να βρουν μερικές αποδείξεις, δηλαδή μερικούς λόγους σίγουρους και προφανείς, δεν είχα καμία αμφιβολία πως έπρεπε [κι εγώ να αρχίσω] από τα ίδια που εξέτασαν κι αυτοί, μολονότι δεν έλπιζα καμία άλλη χρησιμότητα εκτός που θα συνήθιζαν το πνεύμα μου να τρέφεται με αλήθειες και να μην ικανοποιείται διόλου με λόγους ψεύτικους».[69] Τα μαθηματικά είναι έμφυτες ιδέες. Είναι προεμπειρικά, αλλά όχι με την καντιανή έννοια. Τώρα, στην περίπτωση του Καρτέσιου δεν απαιτείται η παρεμβολή της αισθητηριακής αντίληψης. Αυτές οι έμφυτες ιδέες αναπαριστάνουν αιώνιες και αμετάβλητες ουσίες. Αυτές οι αιώνιες και αμετάβλητες ουσίες μπορούν να αναπαριστάνονται μόνο στο επίπεδο της αντικειμενικής πραγματικότητας, παίρνοντας, όμως υπόψη την παρατήρηση ότι λέγοντας ο Καρτέσιος αντικειμενική πραγματικότητα εννοεί την πραγματικότητα των εικόνων μας.[70] Οι ιδέες αυτές εκπορεύονται από το Θεό: «…όταν θεωρώ τη φύση του τριγώνου, μου φανερώνεται μεν εναργέστατα, έχοντας εντρυφήσει στις αρχές της Γεωμετρίας, ότι οι τρεις γωνίες του ισούνται με δυο ορθές και, όσο προσέχω την απόδειξη του θεωρήματος τούτου, δεν μπορώ να πιστέψω ότι δεν αληθεύει, αλλά μόλις αποστρέψω τον οφθαλμό του πνεύματός μου από αυτήν, όσο κι αν θυμάμαι ακόμα ότι το είχα καταλάβει σαφέστατα, μπορώ εύκολα να αμφιβάλλω για την αλήθεια του, **αν αγνοώ το Θεό**»[71] ,(η υπογράμμιση δική μας). Τα μαθηματικά στη συνέχεια αποκτούν μιαν υπόσταση ρεαλισμού. Τα υλικά πράγματα μπορεί να υπάρχουν αφού τα θεωρούμε ως αντικείμενο των αποδείξεων της Γεωμετρίας, δεδομένου ότι τα συλλαμβάνουμε με πολύ σαφή και διακριτό τρόπο: «Μου φαίνεται σαφέστατο ότι η δυνατή ύπαρξη περιέχεται σε καθετί το οποίο κατανοούμε σαφώς, επειδή το ίδιο το γεγονός ότι το κατανοούμε σαφώς συνεπάγεται ότι μπορεί να δημιουργηθεί από το Θεό».[72] Τα μαθηματικά είναι ένα είδος καθολικής μάθησης και γνώσης, μια γενική επιστήμη, κάτι σαν τη βασίλισσα των επιστημών που ακούγεται ενίοτε και σήμερα. Μπορούν να αποτελέσουν το κλειδί αποκωδικοποίησης για μια σειρά άλλων τομέων γνώσης και δραστηριοτήτων. Είναι, άλλωστε, χαρακτηριστικό ότι ο Καρτέσιος εξέδωσε τρεις υποδειγματικές μελέτες για τη νέα του μέθοδο. Η μια ήταν η *Γεωμετρία* , οι άλλες δυο ήταν η *Οπτική* και η *Μετεωρολογία*. Στις δυο τελευταίες εφαρμόζονται τεχνικές από τη Γεωμετρία προκειμένου να επιλυθούν **προβλήματα του πραγματικού κόσμου.** Επομένως, υπάρχει μια ρεαλιστική θεώρηση των μαθηματικών που είναι, μάλιστα, πολύ προσεκτικά διατυπωμένη. Σύμφωνα με το σχόλιο των E.S.Haldane-G.R.Ross «είναι βέβαιο πως συμφωνούν (σ.σ. τα μαθηματικά και ιδιαίτερα τα γεωμετρικά αντικείμενα) με την πραγματική φύση των αντικειμένων όπως έχει καθοριστεί από τον αληθινό Θεό. Αυτό, όμως, δε σημαίνει πως υπάρχουν αντικείμενα στη φύση που διαθέτουν μήκος κι όχι πλάτος, ή πλάτος κι όχι βάθος αλά πως απλώς αυτά τα γεωμετρικά σχήματα δε θεωρούνται υλικά αντικείμενα. Θεωρούνται τουναντίον σαν τα όρια μέσα στα οποία περιέχεται η ύλη».[73] Ο Καρτέσιος, λοιπόν, υιοθετεί μια ρεαλιστική άποψη για την ύπαρξη των μαθηματικών- βλέποντας ότι εφαρμοσμένα και θεωρητικά μαθηματικά επικοινωνούν μέσω συγκοινωνούντων δοχείων- αλλά δεν την φτάνει μέχρι τέλους. Το ένα δοχείο είναι ο νους μέσα στον οποίο ανασύρονται οι έμφυτες ιδέες των θεωρητικών μαθηματικών, το άλλο δοχείο είναι η πραγματικότητα όπου τα θεωρητικά μαθηματικά μεταφράζουν αυτή την πραγματικότητα και μετατρέπονται σε εφαρμοσμένα. **Παρά τη ρεαλιστική του οπτική ο Καρτέσιος αποδεικνύεται ακραιφνής ιδεαλιστής όταν χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως έμφυτες ιδέες προσιδιάζοντας επί της ουσίας στην πλατωνική θεώρηση. Αδυνατεί να δει την πραγματική διαλεκτική σχέση εφαρμοσμένων-θεωρητικών κι έτσι ο ρεαλισμός του**

---

[69] . Καρτέσιος, Λόγος περί μεθόδου, σελ.20, εκδ. Παπαζήση

[70] . Δες χαρακτηριστικά παρατήρηση Δ. Αναπολιτάνου στο *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, σελ.79

[71] . Ρενέ Ντεκάρτ, Στοχασμοί περί της πρώτης φιλοσοφίας, σελ.154-155, εκδ. Εκκρεμές

[72] . Ο.π., σελ. 159

[73] . Αναφέρεται στο Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, Δ. Αναπολιτάνος, σελ. 80, εκδ. Νεφέλη

είναι ένας «κουτσός» ρεαλισμός αφού χρησιμοποιείται μέσα σε ένα πλαίσιο με έντονο ιδεαλιστικό φορτίο.

Από όλες τις περιπτώσεις των φιλοσόφων που εξετάζουμε σε αυτό το τμήμα της εργασίας αυτός που προσέγγισε περισσότερο από όλους τους θεμελιωτές του Διαλεκτικού Υλισμού ήταν ο Σπινόζα. Επειδή στην εποχή του έδρασε ως ένας εκ των ριζοσπαστικότερων εκπροσώπων της αιτιοκρατίας και αρνητών της τελεολογίας, επισημάνθηκε ο θετικός του ρόλος από τον Ένγκελς.[74] Η μαθηματική μέθοδος, κατά το Σπινόζα, είναι η πλέον κατάλληλη μέθοδος ή μάλλον η αναγκαία μέθοδος προκειμένου να αποκωδικοποιήσουμε τον κόσμο. Είναι χαρακτηριστικό ότι στην Ηθική του χρησιμοποιεί ένα ευκλείδειο σχήμα προκειμένου να παραθέσει τις φιλοσοφικές του ιδέες. Έτσι κάθε τμήμα της πραγματείας του έχει την εξής δομή: πρώτα παρατίθεται μια σειρά ορισμών, ακολουθεί η παράθεση αξιωμάτων, συνεχίζει με την καταγραφή προτάσεων και κλείνει με αποδείξεις των προτάσεων. Η ομοιότητα με την ευκλείδεια λογική είναι προφανής. Σε τελική ανάλυση εξυπηρετεί δυο στόχους: α) αυτό που βλέπουμε δεν πρέπει να αμφισβητείται (αλλιώς το αυταπόδεικτο των αρχών), β) το ευκλείδειο σχήμα θέλει να αναδείξει τις αιτιοκρατικές σχέσεις που υπάρχουν στα υπό διαπραγμάτευση θέματα. Ωστόσο, με αυτό τον τρόπο ο κόσμος ως ένα μαθηματικό σύστημα χάνει τη δυναμική του και ο υλισμός του Σπινόζα γίνεται ένας μηχανιστικός υλισμός. Παρά το υλιστικομηχανιστικό του εγχείρημα, σε άλλες περιπτώσεις είναι πιο ιδεαλιστικός. Φαίνεται να προσπαθεί να θεμελιώσει μια σωστή σχέση του συγκεκριμένου και του αφηρημένου με μαθηματικά παραδείγματα: «Μια αληθής ιδέα (διότι έχουμε μια αληθή ιδέα) είναι κάτι διαφορετικό από το αντικείμενό της: πράγματι, άλλο είναι ο κύκλος κι άλλο η ιδέα του κύκλου. Διότι η ιδέα του κύκλου δεν είναι κάτι που έχει περιφέρεια και κέντρο, όπως έχει ο κύκλος, ούτε η ιδέα του σώματος είναι αυτό τούτο το σώμα. Καθώς δε η ιδέα είναι κάτι διαφορετικό από το αντικείμενό της, θα είναι καθεαυτή και κάτι κατανοητό, δηλαδή η ιδέα, ως προς τη μορφική της ουσία και με τη σειρά της, αυτή η άλλη αντικειμενική ουσία θα είναι και αυτή αν θεωρηθεί καθεαυτή, κάτι πραγματικό και κατανοητό και ούτω καθεξής επ' άπειρον».[75] Ο Σπινόζα αναφέρεται στην αυτονόμηση της ιδέας τριγώνου (αφηρημένο που ωστόσο είναι αληθινό και που έχει αντιστοιχία στο τρίγωνο αντικείμενο) και στον τρόπο που στη συνέχεια με την αυτονομημένη ιδέα μπαίνουμε σε μια παραγωγική διαδικασία. Έτσι, με το μαθηματικό του παράδειγμα προσπαθεί να υιοθετήσει ένα καθολικό ερμηνευτικό μοντέλο της ανθρώπινης νόησης, όπως σε άλλο σημείο του κειμένου του φαίνεται.[76]

Επόμενος σταθμός μας θα είναι ο Λοκ. Οι κύριες συνιστώσες της φιλοσοφίας του Λοκ έχουν ως εξής: κόντρα στην καρτεσιανή παράδοση οι έμφυτες ιδέες δεν υπάρχουν. Οι ανθρώπινες γνώσεις έχουν ως αφετηρία τους την εμπειρία. Η εμπειρία αυτή κατηγοριοποιείται σε εσωτερική[77] και εξωτερική (τα αισθήματα). Η γνώση εδράζεται πάνω στις απλές ιδέες. Απλές ιδέες είναι αυτές που προκαλούνται στο μυαλό από τις διάφορες ιδιότητες των σωμάτων. Το λογικό του ανθρώπου είναι αυτό που στη συνέχεια με διαδικασίες αφαίρεσης και σύγκρισης καθώς και με συνδυασμούς συγκροτεί από τις απλές ιδέες τις περισσότερο σύνθετες. Ωστόσο, η αληθινή ουσία των πραγμάτων δε μας φανερώνεται και αυτό το οποίο γνωρίζει το υποκείμενο σχετίζεται με ονομαστικές ουσίες. Πώς, λοιπόν, βλέπει μέσα σε αυτό το πλαίσιο τα μαθηματικά? Όταν αντιλαμβανόμαστε μιαν απλή ιδέα, τότε –κατά το Λοκ- η ονομαστική ουσία αντιστοιχεί στην πραγματική ουσία. Όπως ο ίδιος γράφει: « έτσι, ένα σχήμα που περιλαμβάνει ένα χώρο εγκλειόμενο ανάμεσα σε τρεις ευθείες, είναι η πραγματική όσο και η ονομαστική ουσία ενός τριγώνου, γιατί το γενικό όνομα δε συνδέεται μόνο με την αφηρημένη ιδέα, αλλά με την ίδια την essentia ή το είναι του ίδιου του πράγματος».[78] Η ταύτιση πραγματικής και ονομαστικής ουσίας καθίσταται δυνατή αφού από τη φύση του ένα τέτοιο αντικείμενο όπως το τρίγωνο στερείται πολλών χαρακτηριστικών που μπορεί να έχει ένα υλικό αντικείμενο π.χ. χρώμα,

---

[74] . Δες χαρακτηριστικά, Ένγκελς, Η διαλεκτική της φύσης, σελ.8, εκδόσεις Σύγχρονη Εποχή

[75] . Σπινόζα, Πραγματεία για τη διόρθωση του νου, σελ.38, εκδ. Πόλις

[76] . Σπινόζα, Πραγματεία για τη διόρθωση του νου, σελ.37, εκδ. Πόλις

[77] .Για την εσωτερική εμπειρία χρησιμοποιείται και η έννοια της αυτοπαρατηρησίας (Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ.88, εκδ. Νεφέλη) και η έννοια του διαστοχασμού (Λ.Φ.Ίλιτσεφ-Π.Ι.Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό-εγκυκλπαιδικό λεξικό, λήμμα Λοκ)

[78] . Αναφέρεται στο *Η Φιλοσοφία*, τόμος Β΄, σελ.219, του F. Duchesneau, εκδ. Γνώση

βάρος, πυκνότητα, χημική σύσταση κ.α. ακόμα, το ότι δεχόμαστε αισθητές εντυπώσεις από τον πραγματικό κόσμο δεν μπορεί να μας οδηγήσει σε μια καθολική αμφιβολία. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι η αυτοαποκαλούμενη a priori ορθολογικότητα των αφηρημένων γνώσεων μαθηματικού τύπου, απορρέει από την ιδιάζουσα ορθολογικότητα της αισθητής εμπειρίας.[79] Κριτήριο βεβαιότητας της μαθηματικής γνώσης δεν αποτελεί η πειραματική τους επαλήθευση. Εγγυητής της βεβαιότητάς τους είναι ο ανθρώπινος νους ο οποίος καθώς μπαίνει στη διαδικασία κατασκευής των μαθηματικών δρα έλλογα. Έτσι, η πλατωνική θεώρηση σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά είναι αξιόπιστα γιατί ανήκουν σε ένα σύμπαν ιδεών έξω από εμάς καθώς και η καρτεσιανή άποψη του έμφυτου, όπως ήδη έχουμε αναφέρει βρίσκονται στην «αντίπερα όχθη». Τελικά, όμως, ο εμπειρισμός του Λοκ δεν απαντάει ή τουλάχιστον δεν απαντάει πειστικά σε ορισμένα ερωτήματα, όπως: γιατί ένα ερώτημα του τύπου «υπάρχουν οντότητες ή σχέσεις στην πραγματικότητα με τις οποίες τα μαθηματικά αντικείμενα βρίσκονται σε αντιστοιχία» στερείται νοήματος? Επιπλέον, τι σημαίνει ότι εγγυητής για τη βεβαιότητα της μαθηματικής γνώσης αποτελεί το έλλογο του υποκειμένου που τα κατασκευάζει? Πώς ορίζεται αυτό το έλλογο, ποια η προέλευσή του? Έτσι, παρά το γεγονός ότι ο Λοκ παίρνει αποστάσεις από τον ιδεαλισμό του Πλάτωνα και του Καρτέσιου αφήνει κάποια κενά ικανά να τον οδηγήσουν σε ένα άλλο είδος ιδεαλισμού.

Ο Λάιμπνιτς θεωρείται- και δικαιολογημένα- ως μια ιδιάζουσα περίπτωση φιλοσόφου.[80] Στο φιλοσοφικό του οικοδόμημα μπορεί κανείς να διακρίνει επιρροές από τον Πλάτωνα, από τον Αριστοτέλη, τον Αυγουστίνο, τον Ντεκάρτ, το Σπινόζα, το Λοκ κ.α.[81] Κατά το Λάιμπνιτς δεν απορρίπτεται καμία φιλοσοφική διδασκαλία αφού όλες εκφράζουν το ίδιο πράγμα από διαφορετικές οπτικές. Έτσι, βλέπει να υπάρχει αξία και στη φιλοσοφία των Ανατολικών και στων Ελλήνων και στων πατέρων της εκκλησίας και στων Σχολαστικών και στη φιλοσοφία του Μεσαίωνα και σε αυτή του Καρτέσιου.

Ίσως, το πιο γνωστό φιλοσοφικό δόγμα του Λάιμπνιτς είναι η θεωρία του για τη μονάδα. Χωρίς να επεκταθούμε η μονάδα είναι το πρωταρχικό στοιχείο του Είναι. Ο πραγματικός κόσμος αποτελείται από τις μονάδες που είναι αναρίθμητες και αδιαίρετες. Οι μονάδες δε βρίσκονται σε αλληλεξάρτηση αλλά κάθε μια από αυτές αντανακλά όλες τις άλλες. Οι μονάδες είναι αιώνιες και στην πραγματικότητα δε φθείρονται. Αυτό που ονομάζουμε θάνατο σχετίζεται με τους σχηματισμούς των μονάδων, σχηματισμοί που υπόκεινται σε αλλαγές. Κατά το Λάιμπνιτς ο νους έχει την έμφυτη ικανότητα να γνωρίζει ιδέες και αλήθειες. Στις αλήθειες συμπεριλαμβάνονται αυτές της λογικής και των μαθηματικών. Μάλιστα, αξίζει να αναφέρουμε ότι στη *Μεταφυσική Πραγματεία* ο Λάιμπνιτς μνημονεύει το διάλογο του Πλάτωνα *Μένωνα* γράφοντας τα εξής: «Και δε θα μπορούσαμε να μάθουμε τίποτα του οποίου δεν έχουμε ήδη την ιδέα στο πνεύμα μας που είναι σαν την ύλη από την οποία διαμορφώνεται αυτή η σκέψη. Πράγμα που είδε εξαιρετικά καλά ο Πλάτων, όταν παρουσίασε τη θεωρία της *ανάμνησής* του που είναι καλά θεμελιωμένη, αρκεί να την εννοήσουμε σωστά, να την καθαρίσουμε από την πλάνη της προϋπαρξης και να μη φανταζόμαστε ότι η ψυχή πρέπει να έχει ήδη γνωρίσει και να έχει σκεφτεί με ευκρίνεια άλλες φορές αυτό που μαθαίνει και σκέφτεται τώρα. Βεβαίωσε επίσης την άποψή του με ένα ωραίο πείραμα όπου παρουσιάζει ένα μικρό αγόρι, που το οδηγεί, χωρίς αυτό να καταλαβαίνει, σε πολύ δύσκολες αλήθειες της γεωμετρίας. Σχετικές με τα ασύμμετρα μεγέθη, χωρίς να του μάθει τίποτα απευθύνοντάς του μόνο ερωτήσεις κατάλληλες και με τάξη. Πράγμα που δείχνει ότι η ψυχή μας τα ξέρει όλα αυτά δυνάμει και

---

[79] . Δες γι' αυτή την παρατήρηση του F. Duchesneau, *Η Φιλοσοφία*, τόμος Β΄, σελ.219, εκδ. Γνώση

[80] . Είναι γνωστό ότι ο Λάιμπνιτς εκτός από σπουδαίος φιλόσοφος ήταν και σπουδαίος μαθηματικός. Σημαντικότερη μαθηματική επινόηση από την πλευρά του θεωρείται αναμφισβήτητα ο Απειροστικός Λογισμός. Ως το 1676 είχε φτάσει στα ίδια αποτελέσματα με το Νεύτωνα. Ασφαλώς, μπορεί να χαρακτηρισθεί ως μεγάλος μαθηματικός εξαιτίας του γεγονότος ότι δεν έλυσε ένα επιμέρους μαθηματικό πρόβλημα αλλά επειδή κατόρθωσε να συγκροτήσει μαθηματικές μεθόδους κι εργαλεία που αφορούσαν γενικά προβλήματα.

[81] . Για τις επιρροές του Λάιμπνιτς δες αναλυτικότερα α) Λ.Φ.Ίλιτσεφ-Π.Ι.Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό-εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμμα Λάιμπνιτς, β) F. Duchesneau, *Η Φιλοσοφία*, τόμος Β΄, σελ.175-199, εκδ. Γνώση, γ) Δ. Αναπολιτάνος ,Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 95-111, εκδ. Νεφέλη

δεν έχει ανάγκη παρά μόνο από την *προσοχή* για να γνωρίσει τις αλήθειες και επομένως κατέχει τουλάχιστον τις ιδέες από τις οποίες εξαρτώνται οι αλήθειες αυτές. Μπορούμε ακόμα να πούμε ότι κατέχει ήδη αυτές τις αλήθειες, όταν τις εννοούμε ως τις σχέσεις των ιδεών μεταξύ τους» (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[82] Επομένως οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι έμφυτες όπως υποστηρίζει ο Πλάτωνας. Ωστόσο, διαθέτουμε την ικανότητα να τις ανακαλύπτουμε. Ακόμα, διαχωρίζει τις αληθείς προτάσεις σε δυο κατηγορίες μη συνορεύουσες: α) τις αναλυτικές οι οποίες στηρίζονται στην αρχή της αντίφασης και β) στις ενδεχομενικές για τις οποίες οι αρνήσεις τους δεν είναι αντιφατικές προτάσεις. Οι μαθηματικές αλήθειες εντάσσονται στις αναλυτικές προτάσεις. Σήμερα, αυτή η διαπίστωση δεν ευσταθεί.[83]

Ο Λάιμπνιτς «μέσα στην παρατήρηση των ίδιων των πραγμάτων, ζητάει αρχές για να διακρίνει την αλήθεια από το ψέμα μέσα στις θεωρίες των προηγούμενών του, για να επιτελέσει ανάμεσα σε αυτές τις θεωρίες μια σωστή συμφιλίωση. Η μέθοδός του, από αυτή την άποψη, είναι με τη σειρά, εμπειρική, μαθηματική και μεταφυσική».[84] Η εμπειρία όμως είναι μια μέθοδος με προσωρινό χαρακτήρα. Υπερβαίνεται με τη λογική και τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά θεωρήθηκαν από το Λάιμπνιτς ως το τέλειο παράδειγμα της λογικής απόδειξης. Σε όλα τα πράγματα οφείλουμε να εφαρμόσουμε τη μαθηματική μορφή. Ακόμα και εντός των μεταφυσικών και ηθικών θεμάτων. Αυτό θα λέγαμε με σημερινή γλώσσα ότι αποτέλεσε μια προσπάθεια για τη συγκρότηση των μεταμαθηματικών. Έτσι κατά το Λάιμπνιτς «το ζήτημα […] δεν είναι να χωρίσουμε τα μαθηματικά από τη φιλοσοφία, ούτε να τα συναιρέσουμε, αλλά να δούμε σε αυτά ένα είδος υποσυνόλου της φιλοσοφίας».[85] Το μεγαλύτερο, ίσως, φιλοσοφικό ατόπημα του Λάιμπνιτς ιδωμένο κάτω από την οπτική του ΔΥ είναι η πίστη του ότι μπορεί όλη η ανθρώπινη σκέψη να τυποποιηθεί. Αδυνατεί να δει τα όρια της τυπικής λογικής και να διαπιστώσει ότι σε επίπεδο φιλοσοφίας απαιτείται ένα άλλο είδος λογικής το οποίο δεν μπορεί να τυποποιηθεί πλήρως αλλά διαθέτει μια δυναμική διαφορετικής υφής από αυτή της τυπικής.

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις φιλοσόφων με ιδιάζουσες απόψεις και γύρω από τη φιλοσοφία των μαθηματικών, είναι κατά τη γνώμη μας, ο Μπέρκλεϊ. Ο εν λόγω φιλόσοφος θεωρείται από το ΔΥ ως ένας κλασικός εκπρόσωπος του υποκειμενικού ιδεαλισμού. Είναι ακραίος αντιυλιστής και απολογητής της θρησκείας. Στόχος του, λοιπόν, είναι να αποδείξει την ανυπαρξία της ύλης και με αυτό τον τρόπο να αποδείξει με ισχυρό τρόπο την ύπαρξη του Θεού και της ψυχής. Ο Μπέρκλεϊ παίρνει αποστάσεις από την καρτεσιανή παράδοση. Βλέπει τα αντικείμενα ως συμπλέγματα αισθητηριακών δεδομένων. Ωστόσο, αναγνωρίζει ότι αυτά τα αντικείμενα μπορούν να υπάρχουν ακόμα κι αν εξαφανίζονταν όλα τα υποκείμενα που έχουν αντίληψη των αντικειμένων. Βέβαια, μπορούν να υπάρχουν με την έννοια ότι αποτελούν ένα σύνολο ιδεών εντός του θεϊκού νου. Από αυτή την άποψη, σε αυτό το σημείο κάνει μια στροφή από τον υποκειμενικό στον αντικειμενικό ιδεαλισμό.[86] Βασικότατη συνιστώσα της φιλοσοφίας του Μπέρκλεϊ αποτελεί το δόγμα του για την ανυπαρξία των αφηρημένων ιδεών. Οι ιδέες δεν υπάρχουν ως αντίγραφα ή απεικονίσεις των πραγμάτων που βρίσκονται έξω από το νου. Η ιδέα μοιάζει μόνο με την ιδέα. Αυτή η τοποθέτηση εδράζεται στη θεμελιώδη άποψή του ότι η ύλη είναι μηδέν αφού ότι αντιλαμβανόμαστε υπάρχει μόνο σε σχέση με την αισθητηριακή μας πρόσληψη. Ιδέες και πράγματα είναι ταυτόσημα, η σχέση τους δεν προϋποθέτει σχέσεις αίτιου και αιτιατού αλλά σχέσεις ανάμεσα σε ένα σύμβολο και σε ένα πράγμα που σημειώνεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Οι ιδέες υπάρχουν μέσω της επενέργειας του υπέρτατου όντος. Μέσα σε αυτό το φιλοσοφικό πλαίσιο γίνεται απόλυτα κατανοητή και η οπτική του γύρω από τα μαθηματικά. Για να θεμελιώσει, μάλιστα, τη θέση του για το άτοπο των αφηρημένων ιδεών χρησιμοποιεί ως παράδειγμα το τρίγωνο. Όταν, λοιπόν, σκεφτόμαστε ένα τρίγωνο δεν κάνουμε τίποτα άλλο από το να σκεφτόμαστε ένα

---

[82] . Λάιμπνιτς, Μεταφυσική Πραγματεία, σελ.105-107, εκδ. Βάνιας

[83] . Σχετικά με το άτοπο αυτή της διαπίστωσης δες Δ. Αναπολιτάνου, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 101-111, εκδ. Νεφέλη

[84] . Emile Boutroux στο Λάιμπνιτς, Μοναδολογία, σελ.38, εκδ. Αναγνωστίδη

[85] . F. Duchesneau, *Η Φιλοσοφία*, τόμος Β΄, σελ.195, εκδ. Γνώση

[86] . Τη διαπίστωση αυτή την κάνει ο Λένιν στο έργο του *Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός*, Άπαντα, σελ. 24, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

συγκεκριμένο τρίγωνο, ένα συγκεκριμένο νοητό αντικείμενο. Για τον Μπέρκλεϊ δεν υπάρχει γενική ιδέα του τριγώνου. Απόδειξη είναι ότι όταν αναφερόμαστε σε τρίγωνο έχουμε στο μυαλό μας ένα ισόπλευρο ή ισοσκελές ή σκαληνό τρίγωνο, δηλαδή ένα τρίγωνο με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αυτή η άποψη του Μπέρκλεϊ εμπεριέχει σοβαρές συγχύσεις και είναι εσφαλμένη για τους εξής λόγους: α) αδυνατεί να δει τη διαλεκτική σχέση συγκεκριμένου αφηρημένου και το ρόλο της στη διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης. Συγκεκριμένα: η πολύπλευρη γνώση του αντικειμένου είναι μια γνώση που είναι συγκεκριμένη, ενώ η γνώση μιας οποιασδήποτε πλευράς είναι αφηρημένη. Αυτό που αποτελεί τη βάση της συγκεκριμένης γνώσης για το αντικείμενο είναι η ζωντανή αισθητηριακή ενατένιση, αφού αυτή η ενατένιση μας προσφέρει το αντικείμενο μέσα στην πολυμορφία των ιδιοτήτων του. Όμως, δεν είναι αρκετή για να μας αποκαλύψει από μόνη της (η ενατένιση) να ξεχωρίσουμε μια ιδιότητα και να προβούμε σε αφαίρεση. Η ανάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο είναι μια γνωστική διαδικασία που αποτελεί, όμως, αντανάκλαση της πραγματικότητας. Δεν πρόκειται για μια αυθαίρετη θεωρητική κατασκευή: «Ο Χέγκελ είχε απόλυτα δίκιο **ουσιαστικά** απέναντι στον Καντ. Η σκέψη, όταν υψώνεται από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, δεν απομακρύνεται-αν είναι **ορθή** (και ο Καντ, όπως και όλοι οι φιλόσοφοι, μιλούν για ορθή σκέψη)-**από** την αλήθεια, αλλά την πλησιάζει. Η αφηρημένη έννοια της **ύλης**, του **νόμου** της φύσης, η αφηρημένη έννοια της **αξίας** κ.τλ. , μ' ένα λόγο όλες οι επιστημονικές (ορθές, σοβαρές κι όχι παράλογες) αφαιρέσεις αντανακλούν τη φύση βαθύτερα, πιστότερα και **πληρέστερα**. Από τη ζωντανή παρατήρηση προς την αφηρημένη σκέψη και **από αυτή στην πράξη**-αυτή είναι η διαλεκτική πορεία γνώσης της **αλήθειας**, η πορεία γνώσης της αντικειμενικής πραγματικότητας. Ο Καντ υποβιβάζει τη γνώση για να δώσει θέση στην πίστη: ο Χέγκελ υψώνει τη γνώση της ύλης, της φύσης, εξαποστέλλοντας το Θεό και το φιλοσοφικό συρφετό που τον υπερασπίζει στο λάκκο των σκουπιδιών»[87],(οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα). Αυτό, όμως, είναι ένα πρώτο επίπεδο στη διαδικασία της ανθρώπινης γνώσης. Η ανέλιξη από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο στη συνέχεια, αποτελεί μέθοδο επιστημονικής έρευνας.[88] Τώρα, όσον αφορά στο παράδειγμα του Μπέρκλεϊ με το τρίγωνο θα πρέπει να αναδιφήσουμε στη δύσκολη διαδικασία της κατασκευής των γεωμετρικών εννοιών ανατρέχοντας στην ίδια την ιστορία των μαθηματικών. Μια απάντηση πρέπει να αναζητηθεί στη σύλληψη της έννοιας του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου και πώς αυτές προέκυψαν σε συνάρτηση με την παρατήρηση, στη σχετική θέση μιας ευθείας ως προς μια άλλη κ.λπ. ,β) ένα ακόμα κενό που υπάρχει στο δόγμα του Μπέρκλεϊ είναι η αντίληψή του ότι η σύλληψη μιας ιδέας πρέπει αναγκαστικά να αναπαρίσταται με κάποιον τρόπο. Όμως, ακόμα και στην περίπτωση που μιλάμε για μιαν ιδέα που έχει τη δυνατότητα αναπαράστασης όπως τα γεωμετρικά σχήματα, δεν είναι απαραίτητο στην εκφορά της λέξης τρίγωνο να σκεφτόμαστε κι ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, γ) στην ίδια τη σύλληψη του Μπέρκλεϊ ενυπάρχει μια σοβαρή λογική αντίφαση. Αν, όπως λέει, η γενική ιδέα του τριγώνου είναι αδύνατη, τότε τι νόημα έχει να μιλάμε και για συγκεκριμένο τρίγωνο? Δεν υπάρχει άραγε γενικός ορισμός τριγώνου κι αν αυτός υπάρχει στερείται νοήματος? Αν πάλι στερείται νοήματος τότε τι ακριβώς είναι το συγκεκριμένο τρίγωνο?, δ) αν όλα τα παραπάνω δεν απαντούν στην αδυναμία μας να παραστήσουμε τη γενική ιδέα του τριγώνου τότε έχουμε να προσθέσουμε μιαν ακόμα απάντηση στη διατύπωση της οποίας θα μας βοηθήσει η δυναμική γεωμετρία. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι κατασκευάζουμε μέσω ενός προγράμματος δυναμικής γεωμετρίας ένα τρίγωνο το οποίο το μετασχηματίζουμε κατά το δοκούν κι ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι κατασκευάζουμε κατ' αρχάς ένα ισόπλευρο το οποίο το μετασχηματίζουμε σε ισοσκελές και τέλος σε σκαληνό. Την ώρα ακριβώς της μεταμόρφωσής του, εκείνη την οριακή στιγμή που από ισόπλευρο γίνεται ισοσκελές και από ισοσκελές σκαληνό, το τρίγωνο είναι και δεν είναι, συγχρόνως. Έτσι, ακόμα και αναπαραστασιακά μπορούμε με ένα τρόπο να συλλάβουμε μια γενική ιδέα τριγώνου, ε) τέλος η αφηρημένη ιδέα ως ιδέα που εκδηλώνει τις μιας οποιασδήποτε πλευράς του

---

[87] . Β.Ι.Λένιν, Άπαντα, τ.29, σελ.152-153, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[88] . Για τη σχέση αφηρημένου-συγκεκριμένου δες επίσης, Μαρξ-Ένγκελς, Η Αγία Οικογένεια,, σελ.70,75, εκδ. Αναγνωστίδης

αντικειμένου δεν μπορεί να έχει μια αντιστοιχία του τύπου «1-1» με την αναπαράστασή του, το σημαίνον και το σημαινόμενο δεν μπορούν να ταυτιστούν.

Ο Μπέρκλεϊ είναι συνεπής με το φιλοσοφικό του πλαίσιο. Επιδιώκει να δείξει ότι τα μαθηματικά αναφέρονται σε ανύπαρκτα αντικείμενα, κάτι που είναι λογικό αφού ύλη δεν υπάρχει, άρα πώς θα μπορούσαν τα μαθηματικά να έχουν μια οντολογική δικαίωση? Τα μαθηματικά είναι μια νοητική κατασκευή και οι όποιες συγχύσεις οφείλονται στις αυταπάτες που δημιουργεί η γλώσσα, αυταπάτες που δημιουργούνται από το γεγονός ότι οι λέξεις θέλουμε να σημαίνουν συγκεκριμένες νοητές οντότητες οι οποίες δε διαθέτουν το εμπειρικό τους αντίστοιχο. Ο ακραίος του εμπειρισμός καταλήγει όπως ήδη έχουμε επισημάνει στον υποκειμενικό ιδεαλισμό κι έτσι αδυνατεί να δει τα μαθηματικά ως αφαιρέσεις που εκφράζουν αντικειμενικές σχέσεις στη φύση και στην κοινωνία. Άλλωστε, ο χώρος κατά τον Μπέρκλεϊ- του οποίου η μελέτη είναι αντικείμενο των μαθηματικών κατά το ΔΥ και όχι μόνο κατ' αυτόν-δεν μπορεί να υπάρξει αφού είναι μια έννοια αφηρημένη. Αν όμως είναι έτσι τα πράγματα τότε τι ακριβώς είναι τα μαθηματικά για τον Μπέρκλεϊ? Οι μαθηματικές προτάσεις αποκτούν νόημα μόνο στην περίπτωση που αναφέρονται σε κάτι συγκεκριμένο. Έτσι το 1+1=2, έχει μια υπόσταση όταν αναφέρεται στην αρίθμηση συγκεκριμένων αντικειμένων π.χ. σε δυο μήλα.[89] Ακόμα, το σημείο δεν μπορεί να εκληφθεί ως μηδενικός χώρος αλλά ως το ελαχιστότατο αισθητό.[90]

Συνεχιστής του Μπέρκλεϊ μπορεί να θεωρηθεί ο Χιουμ. Ο Χιουμ θεωρείται ως εκείνος που διατύπωσε τις βασικές αρχές του ευρωπαϊκού αγνωστικισμού και ως πρόδρομος ή εν πάση περιπτώσει ένας εκ των προδρόμων του θετικισμού. Ο φαινομεναλισμός του Μπέρκλεϊ συνεχίζεται με το να αφήνεται ανοικτό θεωρητικά το ερώτημα περί της ύπαρξης των αντικειμένων που ευθύνονται για την πρόκληση των εντυπώσεων στο υποκείμενο. Η λύση που έδωσε ο Χιουμ στο πρόβλημα της αιτιότητας είναι ίσως εκείνη η στιγμή της φιλοσοφικής του στιγμής για την οποία έμεινε στην ιστορία. Για το Χιουμ η μοναδική πηγή την οποία μπορούμε να εμπιστευθούμε για τη βεβαιότητα στο επίπεδο της εμπειρικής γνώσης είναι η παρατήρηση που λαμβάνει χώρα μέσω των αισθήσεων. Αιτιότητα στη φύση δεν υπάρχει, αντίθετα μπορούμε να την εντοπίσουμε στα ψυχικά φαινόμενα και αυτό στηρίζεται στο γεγονός ότι δημιουργούνται «ιδέες» με τη βοήθεια των εντυπώσεων και του μηχανισμού του συνειρμού. Αυτά τα γεγονότα που μας δίνουν την εντύπωση ότι διέπονται από νομοτέλειες δεν μπορούν να αποδειχθούν ως τέτοια, δηλαδή νομοτελειακά. Αυτό που βλέπουμε ως σχέση αιτίας-αποτελέσματος είναι νοητικό παράγωγο, δεν υπάρχει τίποτα που να μας βεβαιώνει για την εσαεί ισχύ αυτού που ονομάζουμε νομοτέλεια. Ο (πρώιμος) χιουμιστικός θετικισμός έγκειται στον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η επαλήθευση αληθειών ενδεχομενικού τύπου και αυτή γίνεται μέσω της επαλήθευσης της εμπειρικής παρατήρησης. Οι προτάσεις που και ορίζουν καθολικές αλήθειες είναι απορριπτέες ή διαφορετικά είναι αποδεκτές όσο επιβεβαιώνονται από την εμπειρική επαλήθευση. Οι μαθηματικές, όμως, προτάσεις παρουσιάζουν μια ιδιαιτερότητα βάση της οποίας αποποιούνται (ως ένα βαθμό) το χαρακτήρα του ενδεχομενικού. Μπορούν να στηριχθούν σε αποδείξεις και «οι αποδείξεις δεν είναι σαν τις πιθανότητες, όπου μπορούν να ανακύψουν δυσκολίες και το ένα επιχείρημα να αντικρούει το άλλο και να μειώσει την ισχύ του. Μια απόδειξη αν είναι ορθή, δεν επιδέχεται καμία αμφισβήτηση. Εάν, πάλι, η απόδειξη δεν είναι ορθή, τότε αποτελεί καθαρή σοφιστεία, συνεπώς δεν μπορεί να γίνεται λόγος για δυσκολία απάντησης σε αυτήν. Είναι είτε ακαταμάχητη είτε τελείως ανίσχυρη […] Οι αποδείξεις μπορεί να είναι δύσκολο να κατανοηθούν, εξαιτίας της αφηρημένης φύσης του θέματος, αλλά από τη στιγμή που θα γίνουν κατανοητές δε συναντούν δυσκολίες τέτοιες που να μπορούν να αποδυναμώσουν την ισχύ τους».[91] Επομένως, νομιμοποιοιητική οδός για τα μαθηματικά είναι η απόδειξη δηλαδή μια λογική διαδικασία. Ο Χιουμ πάρα ταύτα δεν αντιλαμβάνεται ότι και η λογική διαδικασία είναι μια διαδικασία γενίκευσης που υπόκειται στον αδυσώπητο νόμο της ιστορικότητας. Ή εν πάση περιπτώσει το αντιλαμβάνεται ως ένα βαθμό όταν αρχίζει να διαπραγματεύεται την έννοια του χώρου, του χρόνου, της απειρίας, της διαιρετότητας και του γεωμετρικού σημείου. Κατά κάποιο τρόπο ο Χιουμ

---

[89] . Δες αναλυτικότερα, Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ.131-132, εκδ. Νεφέλη

[90] . Δες αναλυτικότερα, Ferdinand Alquie, η Φιλοσοφία, τόμος Β΄, σελ.236, εκδ.Γνώση

[91] . Ντ. Χιουμ, Πραγματεία για την ανθρώπινη φύση, σελ. 128-129, εκδ. Πατάκη

αυτοαναιρείται και δίνει ενδεχομενικό χαρακτήρα και στις μαθηματικές προτάσεις όταν λέει ότι «κανένας αλγεβριστής ή μαθηματικός, όσο καλός και αν είναι στην επιστήμη του, **δεν εμπιστεύεται απόλυτα μιαν αλήθεια αμέσως μόλις την ανακαλύψει, αλλά την θεωρεί απλώς μια πιθανότητα**. Η εμπιστοσύνη του αυξάνεται κάθε φορά που ελέγχει τις αποδείξεις του δια τεκμηρίων, ακόμα περισσότερο δε όταν ακούει τα επιδοκιμαστικά σχόλια των φίλων του, για να φτάσει στον ανώτατο βαθμό όταν πια έχει πια αποσπάσει την καθολική συναίνεση και τις επευφημίες του πεπαιδευμένου κόσμου. Είναι, λοιπόν, προφανές ότι αυτή βαθμιαία αύξηση της βεβαιότητας δεν είναι τίποτα άλλο **από την προσθήκη περισσότερων πιθανοτήτων** και ότι προέρχεται από τη σταθερή σύνδεση αιτίων και αποτελεσμάτων, σύμφωνα με την παρελθούσα εμπειρία και την παρατήρηση»[92] ,(οι υπογραμμίσεις δικές μας). Αυτή του η αμφισβήτηση για τη στερεότητα της μαθηματικής γνώσης γίνεται εντονότερη όταν αναφέρεται στη γεωμετρία και ειδικά στην έννοια του σημείου και το κριτήριο που χρησιμοποιείται για την ισότητα των γεωμετρικών σχημάτων. Το θεωρητικό σχήμα το οποίο προτείνει είναι το εξής: α) η σύλληψη με σαφήνεια μιας ιδέας συνεπάγεται και την ύπαρξη του νοούμενου, β) η θέση αυτή σημαίνει ότι όταν συλλαμβάνουμε το σημείο σημαίνει ότι και υπάρχει, γ) η ικανότητα του νου δεν είναι άπειρη αλλά αποτελείται από αδιαίρετα μέρη, δ) έτσι συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι διαιρέσιμα επ' άπειρον, ε) το σημείο, λοιπόν, που έχει το αντίστοιχό του στο χώρο δε διαιρείται απείρως. Αυτό, όμως, το σκεπτικό μας οδηγεί τελικά σε ένα σκεπτικισμό που έχει να κάνει με τη διαδικασία της απόδειξης στη γεωμετρία: «Εάν κρίνουν (σ.σ. οι μαθηματικοί) την ισότητα ή κάποιαν άλλη αναλογία με βάση το ακριβές και αυστηρό κριτήριο της καταμέτρησης των μικροσκοπικών αδιαίρετων μερών, τότε χρησιμοποιούν ένα κριτήριο που είναι πρακτικά άχρηστο και στην πραγματικότητα αποδέχονται το αδιαίρετο της έκτασης, το οποίο επιδιώκουν να καταρρίψουν. Εάν, πάλι, χρησιμοποιούν, όπως γίνεται συνήθως, το ανακριβές κριτήριο που προέρχεται από τη σύγκριση των ιδεών με βάση τη γενική εμφάνισή τους, διορθωμένο μέσω της καταμέτρησης και της αντιπαράθεσης, οι πρώτες αρχές τους, μολονότι βέβαιες και αλάνθαστες, είναι υπερβολικά γενικές για να οδηγήσουν σε τόσο λεπτές συναγωγές σο αυτές που συνήθως παράγονται από αυτές. Οι πρώτες αρχές θεμελιώνονται στη φαντασία και στις αισθήσεις, άρα το συμπέρασμα δεν είναι ποτέ δυνατό να τις υπερβαίνει, πόσο μάλλον να έρχεται σε σύγκρουση με αυτές τις ικανότητες».[93]

Τελικά η αντικατάσταση της αιτιοκρατίας από την πιθανοκρατία και ο αγνωστικισμός στην αποδεικτική διαδικασία βάζουν φραγμό στο Χιουμ να δει τη διαλεκτική σχέση απόλυτης και σχετικής αλήθειας που υπάρχει στη διαδικασία εξέλιξης των μαθηματικών κι έτσι μένει εγκλωβισμένος στον αγνωστικισμό του αντιλαμβανόμενος, ίσως και ο ίδιος, τις εγγενείς αντιφάσεις του.

Ασφαλώς, ενασχόληση με τη φιλοσοφία εν γένει και με τη φιλοσοφία των μαθηματικών ειδικότερα χωρίς αναφορά στον Καντ δύσκολα μπορεί να νοηθεί. Ωστόσο, δε θα σταθούμε εκτενώς, σε αυτό το σημείο, γιατί θα υπάρξει ένα ιδιαίτερο κομμάτι για την έννοια της απριορικότητας. Θα κάνουμε απλώς μια αναφορά και μια πρόχειρη παρατήρηση σχετικά με τον ορισμό που ο Καντ έδινε για τη Μαθηματική επιστήμη. Έγραφε, λοιπόν: «Ο χώρος και ο χρόνος είναι εκείνες οι εποπτείες, τις οποίες τα καθαρά μαθηματικά θέτουν ως βάση όλων των γνώσεων και κρίσεων τους, οι οποίες θεωρούνται ως αποδεικτικές και συνάμα αναγκαίες· γιατί τα μαθηματικά οφείλουν να παρουσιάζουν, δηλαδή να κατασκευάζουν, όλες τις έννοιές τους πρώτα μέσα στην εποπτεία, και τα καθαρά μαθηματικά μέσα στην καθαρή εποπτεία[...] **Η γεωμετρία θέτει ως υπόβαθρο την καθαρή εποπτεία του χώρου. Η αριθμητική σχηματίζει τους αριθμούς της με διαδοχική προσθήκη των μονάδων μέσα στο χρόνο** κυρίως όμως η καθαρή μηχανική μπορεί να σχηματίζει τι έννοιες κίνησης μόνο μέσω της παράστασης του χρόνου» (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[94]

---

[92] . Ντ. Χιουμ, Πραγματεία για την ανθρώπινη φύση, σελ. 341-342, εκδ. Πατάκη
[93] . Ντ. Χιουμ, Πραγματεία για την ανθρώπινη φύση, σελ. 490-491, εκδ. Πατάκη
[94] . Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 61, εκδ. Δωδώνη

Μια βιαστική ματιά στον παραπάνω ορισμό, ίσως, μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι ο ορισμός αυτός δεν έχει ιδιαίτερες διαφορές από αυτόν του Ένγκελς. Τόσο ο ένας όσο και ο άλλος ορισμός αναφέρονται στο χώρο σε σχέση με τα μαθηματικά. Όμως, μια προσεκτικότερη ματιά και η κατάκτηση των λεπτών και συγχρόνως δύστροπων εννοιών που χρησιμοποιεί ο Καντ, όπως εποπτεία (καθαρή και εμπειρική), αισθητικότητα, υπερβατική αισθητική και υπερβατική λογική θα μας οδηγούσε σε ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Αρκετές πλευρές αυτού του ζητήματος θα δούμε λίγο παρακάτω.[95]
Αντίθετα με τη καντιανή άποψη της απριορικότητας η μιλιανή άποψη ενστερνίζεται την αποστεριορικότητα. Συνεπής με τις αρχές του (τη στήριξη του στο θετικισμό του Κοντ, το φιλοσοφικό του εμπειρισμό και ειδικότερα το φαινομεναλιστικό θετικισμό του) αντιπαρατίθεται στους Άγγλους «απριοριστές» και υποστηρίζει ότι όλη η γνώση προέρχεται από την εμπειρία και πως αντικείμενό της είναι οι αισθήσεις μας. Ύλη είναι μόνο η συνεχής δυνατότητα των αισθήσεων, ενώ συνείδηση είναι η δυνατότητα βίωσής τους.[96] Εντός αυτού του ακραίου και σκληροπυρηνικού θετικιστικού πλαισίου ο Μιλ θεωρεί ότι τα μαθηματικά –συγκεκριμένα η Αριθμητική και η Γεωμετρία- είναι προϊόντα της εμπειρίας και αφορούν σε πραγματικά γεγονότα. Οι τυπικές μαθηματικές προτάσεις είναι γενικεύσεις κι έτσι οι προτάσεις αυτές καταγράφουν και συνοψίζουν την εμπειρία.[97] Συγκεκριμένα: α) όσον αφορά στη Γεωμετρία τα αφηρημένα αντικείμενα δε γίνονται αποδεκτά κι επιχειρείται η θεμελίωσή της (της Γεωμετρίας) στην παρατήρηση. Τα γεωμετρικά αντικείμενα, πάντα κατά το Μιλ, αποτελούν προσεγγίσεις αληθών σχεδιασμένων σχημάτων. Μέσω της Γεωμετρίας αναδεικνύεται η εξιδανίκευση των δυνατοτήτων κατασκευής. Με άλλα λόγια καθώς σχεδιάζουμε μια γραμμή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή η γραμμή αποτελεί το όριο της γραμμής ως δυνατότητα όσο εμείς σχεδιάζουμε όλο και λεπτότερες γραμμές. Ένα παράδειγμα θα φώτιζε, ίσως, περισσότερο τη μιλιανή άποψη: όταν σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο και μετρήσουμε το άθροισμα του μέτρου των γωνιών του θα διαπιστώσουμε ότι αυτό είναι περίπου ίσο με 180 μοίρες. Αν επιχειρήσουμε να σχεδιάσουμε το τρίγωνο με πιο λεπτές γραμμές τότε θα δούμε ότι το άθροισμα θα πλησιάσει περισσότερο τις 180 μοίρες. Αυτή τη διαδικασία μπορούμε μνα την συνεχίσουμε σχεδιάζοντας κάθε φορά όλο και λεπτότερες γραμμές και διαπιστώνοντας αντίστοιχα την όλο και καλύτερη προσέγγιση στις 180 μοίρες. Έτσι, οι προτάσεις της γεωμετρίας αποτελούν επαγωγικές γενικεύσεις των δυνατών σχημάτων στο φυσικό χώρο, β) όσον αφορά στην Αριθμητική, γράφει ο ίδιος χαρακτηριστικά: «Όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι οι αριθμοί ενός πράγματος: δεν υπάρχουν τέτοια πράγματα όπως αφηρημένοι αριθμοί. Το δέκα πρέπει να σημαίνει δέκα σώματα, ή δέκα ήχοι ή δέκα καρδιακοί σφυγμοί. Αλλά αν και οι αριθμοί πρέπει να είναι αριθμοί ενός πράγματος, μπορεί να είναι αριθμοί οποιουδήποτε πράγματος. Οι προτάσεις, κατά συνέπεια, που αφορούν στους αριθμούς, έχουν την αξιοσημείωτη ιδιομορφία ότι είναι προτάσεις που αφορούν όλα τα πράγματα, όλα τα αντικείμενα, όλες τις υπάρξεις κάθε είδους που μας είναι γνωστές μέσω εμπειρίας».[98] Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι για το Μιλ ο αριθμός έχει οπωσδήποτε μιαν αντιστοιχία με ένα φυσικό αντικείμενο και από αυτή την άποψη θα χαρακτηρίζαμε τη θέση του ως ρεαλιστική. Ο ακραιφνής, όμως, εμπειρισμός του μετατρέπει αυτό το πρωτόλειο ρεαλισμού σε αντιδιαλεκτικό δόγμα. Η φαινομενικά υλιστική του οντολογία μετατρέπεται σε μεταφυσική

---

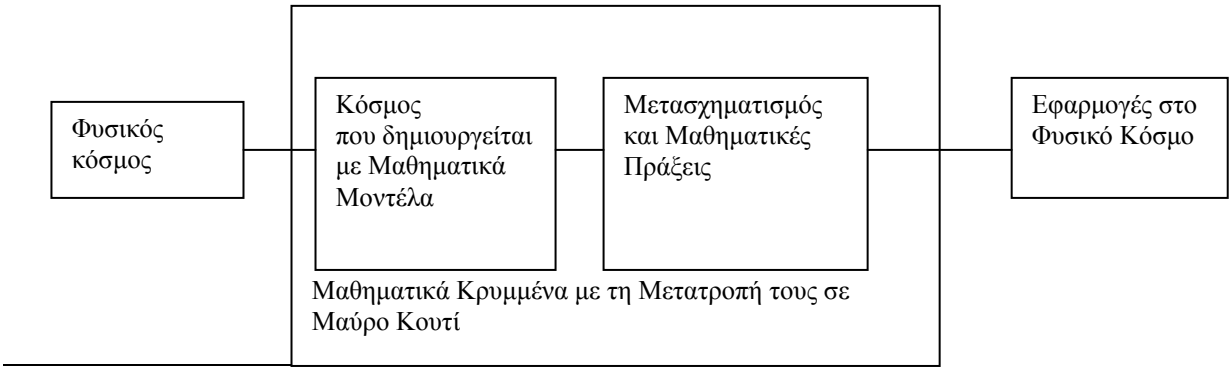
[95] . Για ένα κλασικό εκπρόσωπο του ΔΥ «Το κύριο γνώρισμα της φιλοσοφίας του Καντ είναι η συνδιαλλαγή του υλισμού και του ιδεαλισμού, ο συμβιβασμός ανάμεσά τους, η συνένωση σ' ένα σύστημα ετερογενών, αντίθετων φιλοσοφικών κατευθύνσεων. Όταν ο Καντ δέχεται ότι στις παραστάσεις μας αντιστοιχεί κάτι που βρίσκεται έξω από εμάς, κάποιο πράγμα καθεαυτό, είναι υλιστής. Όταν αυτό το πράγμα καθεαυτό το χαρακτηρίζει αγνώσιμο, υπερβατικό, κάτι που ανήκει στο επέκεινα, ενεργεί ως ιδεαλιστής. Παραδεχόμενος ο Καντ ως μοναδική πηγή των γνώσεων μας την εμπειρία, τα αισθήματα κατευθύνει τη φιλοσοφία του προς την αισθησιαρχία και μέσω της αισθησιαρχίας, κάτω από ορισμένους όρους, προς τον υλισμό. Παραδεχόμενος την απριορικότητα του χώρου, του χρόνου, της αιτιότητας κ.λπ. κατευθύνει τη φιλοσοφία του προς τον ιδεαλισμό (Β.Ι.Λένιν, Άπαντα τ. 18,σελ.209, εκδ. Συγχρονη Εποχή)

[96] . Ίλιτσεφ-Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμμα, Μιλ, τ.3

[97] . Δες αναλυτικότερα, Σαπίρο, Σκέψεις για τα μαθηματικά: Η φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ.102 Εκδ. παν/μιου Πάτρας.

[98] . Mill, A system of Logic, p.234-235 , Toronto, University of Toronto press

αφού η έσχατη πηγή βεβαιότητας στα αριθμητικά και γεωμετρικά αξιώματα βρίσκεται στο όριο αυτού που μπορούμε να αντιληφθούμε.[99] Ο σκληρός εμπειρισμός που μοιάζει ως ένα αδιαμφισβήτητο κριτήριο βεβαιότητας της γνώσης εξελίσσεται σε αγνωστικισμό και αυτό γιατί η αντιληπτική μας διαίσθηση αποκτά αξιοπιστία μέσω της εμπειρίας η οποία μας δίνει μια συγκεκριμένη όψη του κόσμου. Πού, κατά τη γνώμη μας βρίσκεται το λάθος του Μιλ? Ο Μιλ δεν μπορεί να δει τη σωστή σχέση αφηρημένου-συγκεκριμένου και για αυτό με ένα δογματικό τρόπο βλέπει τα μαθηματικά. Ενώ (σωστά) τα συνδέει με την εμπειρία δεν κατανοεί τη δυνατότητα θεωρητικοποίησης της εμπειρίας και τον τρόπο που η μελέτη του συγκεκριμένου οδηγεί στο αφηρημένο. Από αυτή την άποψη πλησιάζει ή και ταυτίζεται με την οπτική του Μπέρκλεϊ. Πραγματικότητα, εμπειρία, μαθηματικά και θεωρία βρίσκονται σε ένα συνεχές «παιχνίδι» αλληλοτροφοδότησης, αλληλοεπηρεασμού και αλληλοκαθορισμού. Το σχήμα του Μιλ είναι: εμπειρία-επεξεργασία εμπειρίας-Μαθηματικά, ενώ στην πραγματικότητα θα έπρεπε να είναι: εμπειρία-επεξεργασία εμπειρίας-γενίκευση και αφαίρεση – μαθηματικά - ανατροφοδότηση μαθηματικών κι εμπειρίας (με σχετική αυτοτέλεια των μαθηματικών)[100],(βλέπε στα σχεδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 3). Ένα παρόμοιο σχεδιάγραμμα προτείνουν οι Davis-Hersh στη *Μαθηματική Εμπειρία*:[101]



[99] . Δες αναλυτικότερα, Σαπίρο, Σκέψεις για τα μαθηματικά: Η φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ.109 Εκδ. παν/μιου Πάτρας.

[100] . Το παραπάνω σχήμα δεν είναι ένα σχήμα που αφορά αποκλειστικά στα Μαθηματικά. Θα θέλαμε να σταθούμε στη λέξη *ανατροφοδότηση* και να εκθέσουμε τους άκρως ενδιαφέροντες και διαφωτιστικούς προβληματισμούς, σχετικά με την ανατροφοδότηση του A. F. Chalmers, στο βιβλίο του «Τι είναι αυτό που το λέμε επιστήμη?», σελ.39-40, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης:
«…αυτό που βλέπουν οι παρατηρητές, οι υποκειμενικές εμπειρίες που προσλαμβάνουν όταν κοιτούν ένα αντικείμενο ή μια κατάσταση πραγμάτων, δεν καθορίζεται αποκλειστικά από τα είδωλα που σχηματίζονται στους αμφιβληστροειδείς χιτώνες τους αλλά εξαρτάται επίσης από την εμπειρία, τις γνώσεις, τις προσδοκίες και γενικά από την εσωτερική τους κατάσταση. Πρέπει να μάθει κανείς να βλέπει σωστά μέσα από ένα τηλεσκόπιο· ο όμορφος σωρός φωτεινών και σκοτεινών κηλίδων που παρατηρεί ένας αρχάριος μέσα από αυτά τα όργανα διαφέρει πολύ από τα δείγματα ή τις εικόνες που ένας πεπειραμένος παρατηρητής μπορεί να διακρίνει». Ο Chalmers μετά από τις διαπιστώσεις του παραθέτει και ο ίδιος ένα απόσπασμα του Polanyi από το βιβλίο του Personal Knowledge, σελ.101, σύμφωνα με το οποίο : « Σκεφθείτε ένα φοιτητή της ιατρικής που παρακολουθεί ένα μάθημα σχετικό με τη διάγνωση πνευμονικών νοσημάτων με ακτίνες Χ. μέσα σε ένα σκοτεινό δωμάτιο, βλέπει ίχνη σα σκιές πάνω σε μια φωσφορίζουσα οθόνη, τοποθετημένη μπροστά στο στήθος ενός ασθενούς και ακούει τον ακτινολόγο να συζητά σε μια ειδική γλώσσα με τους βοηθούς του τα σημαίνοντα χαρακτηριστικά αυτών των σκιών. Στην αρχή, ο φοιτητής είναι εντελώς μπερδεμένος. Το μόνο που μπορεί να διακρίνει σε μια ακτινογραφία στήθους είναι οι σκιές της καρδιάς και των πλευρών καθώς και κάτι αραχνοειδείς κηλίδες ανάμεσά τους. Οι ειδικοί μοιάζουν να πλέκουν ολόκληρες ιστορίες για πλάσματα της φαντασίας τους· ο ίδιος δεν μπορεί να δει τίποτα από όσα λέγονται. Παρακολουθώντας, όμως, για μερικές εβδομάδες το μάθημα και κοιτώντας προσεκτικά ολοένα και καινούριες εικόνες διαφορετικών περιπτώσεων, θα αρχίσει να αποκτά μια διστακτική κατανόηση. Σε λίγο θα μπορεί να παραβλέπει τα πλευρά και σιγά-σιγά θα αρχίσει να διακρίνει τους πνεύμονες. Και αν τελικά επιμείνει σε αυτήν την προσπάθεια κατανόησης, θα του αποκαλυφθεί ένα πλούσιο πανόραμα σημαινουσών λεπτομερειών: φυσιολογικές παραλλαγές και παθολογικές αλλοιώσεις, ουλές, χρόνιες μολύνσεις και σημάδια σοβαρών ασθενειών. Έχει περάσει πλέον σε ένα άλλο κόσμο. Δε βλέπει ακόμα παρά μονάχα ένα μέρος από όσα μπορεί να δει ένας ειδικός, αλλά τόσο οι εικόνες που βλέπει όσο και τα περισσότερα από τα σχόλια που ακούει αρχίζουν να αποκτούν ένα σαφές νόημα».

[101] . Davis-Hersh, Η Μαθηματική Εμπειρία, σελ. 299, εκδ. Τροχαλία

Β2.5: <u>Ορισμένες σύγχρονες απόπειρες απόδοσης του ορισμού των μαθηματικών</u>

Η περιπέτεια αναζήτησης της φύσης των μαθηματικών και του ορισμού τους ασφαλώς συνεχίζεται και στις ημέρες μας. Θα παραθέσουμε ορισμένες τέτοιες απόπειρες και θα επιχειρήσουμε το σχολιασμό τους πάτα χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του ΔΥ.

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση συναντάμε από τον Τιουτ (W. Tutte).[102] Παρά τις αξιοπρόσεκτες πλευρές που θέτει στο άρθρο του δεν καταφέρνει να απαντήσει με ένα «θετικό» τρόπο στο αρχικό και βασικό του ερώτημα *τι είναι τα μαθηματικά;* Αναρωτιέται αν μπορεί κανείς να τα εντάξει στις κοινωνικές επιστήμες. Στη συνέχεια αν είναι φυσική επιστήμη ή αν υμνούν την αιώνια λογική. Ακόμα θέτει το ερώτημα αν ανήκουν στις καλές τέχνες. Μπροστά σε αυτά τα ερωτήματα καταθέτει τις απόψεις του σύμφωνα με τις οποίες α) τα μαθηματικά χαρακτηρίσθηκαν ως ανθρωπιστική επιστήμη και μάλιστα με την έννοια την πλατωνική δηλαδή με τον ισχυρισμό ότι τα μαθηματικά ασχολούνται με αιώνιες αλήθειες που ισχύουν σε κάθε δυνατό κόσμο και άρα συνδέοντα με το αγαθό. Η άποψη αυτή βλήθηκε κατά καιρούς με διάφορα επιχειρήματα. Ένα εξ' αυτών έθετε το ζήτημα της κατασκευής τους από τον άνθρωπο, ότι δηλαδή αποτελούν μια υποκειμενική διαδικασία και ότι ήταν ουσιαστικά μια ταυτολογία ή ένας τρόπος για να πει κάποιος ότι «τα γουρούνια είναι γουρούνια», β) τα μαθηματικά είναι και δεν είναι φυσική επιστήμη, πάντα κατά τον Τιουτ. Από τη μια τα μαθηματικά παρατηρούν όπως και οι φυσικές επιστήμες από την άλλη οι φυσικοί επιστήμονες έχουν να κάνουν με μια συνεχή ροή νέων πληροφοριών αλλά οι μαθηματικοί αρχίζουν με μια σταθερή και πεπερασμένη ποσότητα πληροφοριών. Ακόμα, στους μαθηματικούς αρέσει να είναι αφηρημένοι. Για παράδειγμα, χειρίζονται αντικείμενα όπως τα σημεία και οι ευθείες αλλά αρνούνται να πουν περί τίνος ακριβώς πρόκειται. Ο μαθηματικός στο ερώτημα για την αλήθεια μιας πρότασης θα μας κοιτάξει απορημένος. Κατά κάποιο τρόπο αυτό που τον ενδιαφέρει είναι η κατασκευή αποδείξεων από τα αξιώματα με τους κανόνες της λογικής και η κομψότητα του οικοδομήματός του, γ) τέλος στα ερώτημα για το αν τα μαθηματικά ανήκουν στις καλές τέχνες απλώς επισημαίνει μια διαφορά. Στις τέχνες για να κρίνουμε ένα έργο πρέπει να γνωρίζουμε το δημιουργό του. Στα μαθηματικά αυτό που έχει τη πρωταρχική σημασία είναι το ίδιο το δημιούργημα ανεξάρτητα από το δημιουργό του.

Τελικά ο Τιουτ απαντά στο ότι τα μαθηματικά είναι και ανθρωπιστική επιστήμη και φυσική επιστήμη και τέχνη αλλά και άλλα πράγματα. Πάνω από όλα, όμως, είναι ευχαρίστηση. Ασφαλώς μια τέτοια απάντηση δεν μπορεί να μας ικανοποιήσει. Το ότι είναι λίγο απ' όλα και ότι κυρίως αναφέρονται στην ικανοποίηση των συναισθημάτων μας είναι μια ασαφής προσέγγιση που δεν ξέρουμε αν προσθέτει κάτι ουσιαστικό στη συζήτηση για το τι είναι μαθηματικά. Όμως, η προσέγγιση του Τιουτ γίνεται ενδιαφέρουσα όταν μέσα από ένα μικρό φανταστικό διάλογο ενός μαθηματικού κι ενός φυσικού εισάγει κατά τη γνώμη μας τον αγνωστικισμό. Γράφει χαρακτηριστικά: «Κάποια μέρα, μπορεί να έρθει κάποιος φυσικός και να πει: " Ξέρεις, αν μου επιτρέψεις να ταυτίσω τα σημεία σου με ό,τι ονομάζω γεγονότα, τις γραμμές σου με τις τροχιές του φωτός και το χώρο με το χωρόχρονο, μπορώ να φτιάξω ένα θαυμάσιο μοντέλο για το φυσικό κόσμο". Ο μαθηματικός μπορεί να απαντήσει: "Συγχαρητήρια, αλλά μη με καθιστάς υπεύθυνο για τις ταυτίσεις σου" ». Ο Τιουτ, όπως ο ίδιος δηλώνει, αδυνατεί να δώσει μια στερεή απάντηση, ωστόσο η απάντησή του έχει στοιχεία ιδεαλισμού ακόμα κι αν δεν υιοθετεί την άποψη του μαθηματικού στο φανταστικό διάλογο. Έτσι α) θεωρεί ότι οι εξηγήσεις του δεν είναι και τόσο πειστικές, β) θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι η τέχνη που πλάθει δομές αιθέριες ομορφιάς από την πρώτη ύλη που ονομάζεται λογική και γ) θεωρεί πιθανή και όχι βέβαιη τη σύνδεση των μαθηματικών με το φυσικό κόσμο.

Τα ερωτήματα που προκύπτουν από μια τέτοια τοποθέτηση είναι πολύ περισσότερα από τα ερωτήματα που τέθηκαν αρχικά. Γιατί, αλήθεια τι σημαίνει δομές, τι σημαίνει ότι

---

[102] . Δες χαρακτηριστικά κείμενό του με τίτλο *Τι είναι τα μαθηματικά?* α) στο σύγγραμμα του Π. Σπύρου, Θεωρία Γραφημάτων, Αθήνα 2004 και β) στο περιοδικό Quantum, Μάρτιος-Απρίλιος, 1996.

αυτές είναι αιθέριας ομορφιάς, τι σημαίνει λογική και γιατί θεωρείται ως πρώτη ύλη, ποιου πράγματος είναι η πρώτη ύλη, γιατί η σύνδεση μαθηματικών-φυσικού κόσμου θεωρείται πιθανή;

Η άποψη του Τιουτ αναπαράγεται με ένα πιο σκληροπυρηνικό τρόπο από το Χάρντι. Τα καθαρά και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά διαχωρίζονται με ένα σινικό τείχος, παραπέμποντας κατά ένα τρόπο στην πλατωνική θεώρηση των θεωρητικών κι εφαρμοσμένων μαθηματικών. Κατά το Χάρντι: «**ποτέ μου δεν έκανα κάτι "χρήσιμο"**. Καμία ανακάλυψή μου **δεν είχε, ούτε φαίνεται ότι θα επιφέρει άμεσα ή έμμεσα, για καλό ή κακό, την παραμικρή διαφορά στη βελτίωση του κόσμου**. Βοήθησα στην εκπαίδευση άλλων μαθηματικών, αλλά μαθηματικών του ίδιου είδους με εμένα και η εργασία τους, τουλάχιστον όσον αφορά στη βοήθειά μου προς αυτούς, **ήταν τόσο άχρηστη όσο και η δική μου**. Κρινόμενος με πρακτικά κριτήρια, **η αξία της μαθηματικής μου ζωής ήταν μηδέν** και έξω από τα μαθηματικά ήταν, όπως και να έχει το πράγμα, τετριμμένη. Έχω μόνο μια ευκαιρία να ξεφύγω από την καταδικαστική απόφαση της πλήρως τετριμμένης ζωής, να κριθώ σαν κάποιος που δημιούργησε κάτι που άξιζε. Και το ότι δημιούργησα κάτι, είναι αδιαμφισβήτητο: **το ερώτημα αφορά στην αξία του**. Η περίπτωση της ζωής μου, επομένως, ή καθ' όμοιο τρόπο, οποιουδήποτε άλλου υπήρξε μαθηματικός με την ίδια έννοια που υπήρξα εγώ, είναι η εξής: πρόσθεσα κάτι στη γνώση και βοήθησα άλλους να προσθέσουν περισσότερα. Και αυτά που προσθέσαμε έχουν μια αξία που διαφέρει ως προς το βαθμό μόνο, αλλά όχι ως προς το είδος, από εκείνη της δημιουργίας των μεγάλων μαθηματικών ή οποιωνδήποτε άλλων καλλιτεχνών, μεγάλων ή μικρών, που άφησαν κάποιο είδος μνημείου πίσω τους»[103], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Στον αντίποδα αυτής της άποψης συναντάμε μια άποψη που εκφράσθηκε από μια διαστρέβλωση του ΔΥ. Αναφερόμαστε στην άποψη που αναπτύχθηκε στην Κίνα του Μάο της οποίας μια ιδέα παίρνουμε από την αναφορά που γίνεται στο γνωστό βιβλίο των Ντέιβις-Χερς σχετικά με αυτό το ζήτημα.[104] Συγκεκριμένα κατά την επίσκεψη που πραγματοποιήθηκε στην Κίνα από μαθηματικούς των ΗΠΑ η άποψη που εκφράστηκε από τους Κινέζους μαθηματικούς ήταν σε γενικές γραμμές η εξής: α) τα μαθηματικά ιστορικά αναπτύχθηκαν για την ικανοποίηση ανθρώπινων αναγκών, β) δεν μπορούμε στα μαθηματικά να προτάσσουμε το ζήτημα της ομορφιάς αφού δεν υπάρχει κοινή παραδοχή για το τι είναι ομορφιά, γ) η ομορφιά για την κινέζικη κοινωνία (σ.σ. εκείνη την περίοδο) ταυτιζόταν με την ανάπτυξη της παραγωγής και την ικανοποίηση του κοινωνικού συνόλου μέσα σε δοσμένες κοινωνικοοικονομικές δομές. Σε αυτό το σημείο έχουμε να σημειώσουμε τα εξής: ενώ η επιχειρηματολογία των Κινέζων είναι σε σωστή βάση ξεχνάνε κάτι πολύ βασικό που τελικά δε δικαιώνει την άποψή τους. **Από τη μια παραβλέπουν τη σύνδεση των μαθηματικών με τη φιλοσοφία και τη θεωρία της γνώσης κι έτσι μετατρέπουν τα μαθηματικά σε μια τεχνική επιστήμη που χρησιμεύει αποκλειστικά στην ανάπτυξη της παραγωγής. Αυτή είναι μια άποψη που κατά τη γνώμη μας μπορεί να έχει ολέθριες επιπτώσεις και στον τομέα της διδασκαλίας. Πρόκειται, ακόμα, για μια άποψη που βάζει φραγμό στην έρευνα που δεν αποσκοπεί σε άμεσες εφαρμογές. Επικράτηση μιας τέτοιας λογικής στο παρελθόν θα σήμαινε ότι ποτέ δε θα είχαν επινοηθεί οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες ή οι μιγαδικοί αριθμοί.**

Περισσότερο ξεκάθαρη μοιάζει να είναι η άποψη των Ντέιβις-Χερς (σε σχέση με αυτή του Τιουτ που παραθέσαμε παραπάνω), τουλάχιστον όπως την διατυπώνουν αρχικά. Μια πρώτη απόπειρα από τους προαναφερθέντες μελετητές ισχυρίζεται ότι «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της ποσότητας και του χώρου. Επεκτείνοντας λιγάκι αυτό τον ορισμό, θα μπορούσε να προστεθεί ότι τα μαθηματικά ασχολούνται επίσης με το συμβολισμό που σχετίζεται με την ποσότητα και το χώρο […] Οι επιστήμες της ποσότητας και του χώρου στην πιο απλή μορφή τους είναι γνωστές ως αριθμητική και γεωμετρία».[105] Οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι αυτός είναι ένας ορισμός που έχει μια ιστορική βάση και χρησιμεύει ως ξεκίνημα αλλά χρειάζεται επέκταση και τροποποίηση. Παράλληλα δεν αποδέχονται την άποψη του Πιρς ο οποίος ανακοίνωσε στα μέσα του 19ου αιώνα ότι «τα μαθηματικά είναι η

[103] .Τζ. Χάρντι, Η απολογία ενός μαθηματικού, σελ.100-101, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
[104] . Ντέιβις-Χερς, Η μαθηματική εμπειρεία, σελ.102-103, εκδ. Τροχαλία
[105] .Ο.π., σελ.29

επιστήμη της δημιουργίας αναγκαίων συμπερασμάτων». Τα μαθηματικά, κατά τους Ντέιβις-Χερς δεν ορίζονται με αυτό τον τρόπο και αναρωτιόνται σε τι ακριβώς αφορούν τα αναγκαία συμπεράσματα. Την ποσότητα, το χώρο; Με αυτό τον ορισμό τα μαθηματικά θα μπορούσαν να αφορούν οτιδήποτε, αρκεί να ικανοποιούσαν το σχήμα: υπόθεση-απόδειξη-συμπέρασμα.[106]

Νομίζουμε ότι ένας εκπρόσωπος του ΔΥ δε θα είχε καμία αντίρρηση στον ορισμό που δόθηκε παραπάνω αλλά και στην απάντηση που διατυπώθηκε ενάντια στις αιτιάσεις του Πιρς. Αντίθετα θα είχε μάλλον πολλές παρατηρήσεις στην περίπτωση που έβλεπε την επέκταση του ορισμού όπως αυτή διατυπώνεται από τους συγγραφείς. Κατ' αρχάς θα υπήρχε μια αντίρρηση στη χρήση της ορολογίας που ωστόσο δε θα ήταν η ουσιαστικότερη (αντίρρηση) και κατά δεύτερο θα υπήρχαν ενστάσεις με αυτή καθ' εαυτή τη φιλοσοφική θεώρηση. Κατά τους συγγραφείς «**Τα μαθηματικά είναι δημιούργημά μας. Αφορούν ιδέες που έχουμε στο νου μας**» και ακόμα « τα μαθηματικά είναι μια αντικειμενική πραγματικότητα, με την έννοια ότι τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, τις οποίες μπορούμε ή δεν μπορούμε να ανακαλύψουμε». Επιπλέον «τα μαθηματικά είναι μια αντικειμενική πραγματικότητα που δεν είναι ούτε υποκειμενική ούτε φυσική. Είναι μια **ιδεατή (δηλ. μη φυσική)** πραγματικότητα που είναι αντικειμενική (πέρα από τη συνείδηση οποιουδήποτε ατόμου). Πράγματι, το παράδειγμα των μαθηματικών είναι η πιο ισχυρή, η πιο πειστική απόδειξη για την ύπαρξη μιας τέτοιας ιδεατής πραγματικότητας […] **Τα μαθηματικά δεν είναι η μελέτη μιας ιδεατής προϋπάρχουσας πραγματικότητας. Ούτε μοιάζει με μια παρτίδα σκάκι με προκατασκευασμένα σύμβολα και τύπους. Είναι μάλλον ένα τμήμα των ανθρώπινων μελετών που μπορεί να επιτύχει μια επιστημονικοφανή συναίνεση, ικανή να εδραιώσει αναπαραγώγιμα αποτελέσματα** […] Ασχολούνται με τις ανθρώπινες έννοιες και είναι κατανοητά μόνο μέσα στο γενικό πλαίσιο της κουλτούρας. Με άλλα λόγια τα μαθηματικά είναι μια ανθρωπιστική σπουδή, μια από τις ανθρωπιστικές σπουδές. […] Ως μαθηματικοί ξέρουμε ότι επινοούμε ιδεατά αντικείμενα και μετά προσπαθούμε να ανακαλύψουμε τα γεγονότα σχετικά με αυτά»[107], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Κατά τη γνώμη μας ο τελευταίος ορισμός των μαθηματικών των Ντέιβις-Χερς δεν πληροί τη δηλωμένη, από τους ίδιους, πρόθεση επέκτασης του αρχικού ορισμού, σίγουρα, όμως, ικανοποιεί την άλλη πρόθεσή τους. Αυτή της τροποποίησης. Εξηγούμαστε: ο τελικός ορισμός τους σκοινοβατεί ανάμεσα σε μια υλιστική και σε μια ιδεαλιστική άποψη. Ανάμεσα στη διαλεκτική και στη μεταφυσική. Ανάμεσα στο ρεαλισμό και στο αντίθετό του. Τα μαθηματικά είναι πράγματι πέρα από την ατομική συνείδηση με την έννοια, όμως, που έχουμε ήδη αναφέρει. Με την έννοια ότι εκφράζουν πραγματικές σχέσεις της αντικειμενικής πραγματικότητας που σχετίζονται με το χώρο, το χρόνο και τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Αυτό είναι ένα σημείο που από τον ορισμό που παραθέσαμε λίγο παραπάνω μένει σκοτεινό. Οι συγχύσεις δημιουργούνται ιδιαίτερα όταν οι συγγραφείς μιλάνε για ιδεατή πραγματικότητα. Τι ακριβώς σημαίνει αυτό; Πώς κατανοείται ο όρος ιδεατή; Πρόκειται δηλαδή για μια πραγματικότητα η οποία υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς αλλά εμείς δεν την συλλαμβάνουμε όπως πραγματικά αυτή είναι; Απλά έχουμε μια παράστασή της χωρίς να αντιλαμβανόμαστε την ουσία της; Ο τρόπος που την κατανοούμε χαρακτηρίζεται από υποκειμενισμό και μόνο υποκειμενισμό; Δεν υπάρχουν στοιχεία προσέγγισης του πράγματος καθ' εαυτό από την ανθρώπινη νόηση; Τελικά η πραγματικότητα είναι μη γνώσιμη; Ακόμα, κι εδώ είναι η εντονότερη ένστασή μας, ο μαθηματικός πρώτα επινοεί κι έπειτα προσπαθεί να προσαρμόσει τις επινοήσεις του στη πραγματικότητα; Αν τα πράγματα είναι (μόνο) έτσι οι συγγραφείς δε μας εξηγούν πώς αυτό είναι δυνατό. Μέσω ποιας διαδικασίας άραγε ο μαθηματικός επινοεί πραγματικές σχέσεις σε μαθηματική μορφή κι έπειτα βρίσκει το φυσικό τους ανάλογο; Δεν αρνούμαστε ότι κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί. Ωστόσο, μια τέτοια άποψη παραβλέπει την ιστορική διαδικασία κατασκευής των μαθηματικών εννοιών. Δε βλέπει τον τρόπο εκκίνησης των μαθηματικών. Το γιατί συμβαίνει και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή κατασκευή έννοιας-

[106] .Ο.π., σελ. 30
[107] .Ο.π., σελ. 385-386

προσαρμογή στην πραγματικότητα είναι ένα γεγονός αναμφισβήτητο για το οποίο θα πάρουμε θέση σε άλλο σημείο του κειμένου μας.

Συχνά μια άλλη προσέγγιση που γίνεται για τη φύση και τον ορισμό των μαθηματικών είναι αυτή που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως γλώσσα. Ας δούμε μια τέτοια άποψη: «Τα μαθηματικά έχουν το διπλό χαρακτήρα να είναι μαζί και γλώσσα (ένα συμβολικό σύστημα) και ένα υποστηρικτικό πρότυπο σχέσεων ανάμεσα σε δράσεις με αντικείμενα».[108] Αφήνουμε στην άκρη τη δεύτερη κρίση περί υποστηρικτικού προτύπου και στεκόμαστε στην πρώτη περί γλώσσας. Αν, όμως, θέλουμε να κρίνουμε αυτή τη διαπίστωση που αποτελεί ένα είδος ορισμού των μαθηματικών πρέπει πρώτα από όλα να ξέρουμε με ποιο τρόπο αντιμετωπίζει ο ΔΥ την έννοια της γλώσσας: «Η ανθρώπινη γλώσσα είναι ένα σύστημα υλικών μέσων: ήχων, λέξεων, διευθετήσεων λέξεων με ορισμένους κανόνες για το σχηματισμό προτάσεων, κοινωνικό φαινόμενο, η γλώσσα γεννήθηκε από την ανάγκη των ανθρώπων να μεταβιβάζουν τις ιδέες τους στο διάστημα της εργασίας. Χωρίς τη γλώσσα, η κοινωνική παραγωγή, η ίδια η κοινωνία θα ήταν αδύνατο να υπάρξουν»[109] και «η γλώσσα είναι όρος και μαζί προϊόν της ανθρώπινης συνθήκης, όρος συμμετοχής στην αποθησαυρισμένη γνώση και στη δραστηριότητα του κοινωνικού γίγνεσθαι. Συνιστά την επικοινωνιακή διαδικασία αντενέργειας ανάμεσα στο habitus (=βαθιά δομή), τους όρους αποδοχής (=γραμματική), τις κοινωνικές δομές και τάξεις (θεσμοί, ιδεολογία), η οποία μέσα από τον προσανατολισμό της χρήσης στο μέλλον αντιπαραθέτει το συμβολικό επίπεδο (σημειωτική) στο άρρητο (σωματοποίηση). Ως μέσο οργάνωσης της σκέψης και της πράξης ταυτόχρονα, εκφέρει τον κοινωνικό ορθολογισμό, άρα και την ιστορία των σχέσεων δύναμης».[110] Ακόμα, η γλώσσα δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο του εποικοδομήματος, αποτελεί ένα μόρφωμα που δεν ξεπηδά από εκείνη ή την άλλη βάση, αλλά δημιουργείται από την ίδια την ιστορική πορεία και την πορεία των βάσεων στο πέρασμα των αιώνων.[111] Όλες οι παραπάνω θεωρήσεις, πιστεύουμε ότι αντικρούουν την άποψη που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως γλώσσα. Θα πούμε το γιατί: το γεγονός ότι τα μαθηματικά εκφράζονται μέσω ενός συμβολικού συστήματος δε σημαίνει ότι μετατρέπονται σε γλώσσα. **Τα μαθηματικά είναι επιστήμη μέσα στην οποία αντανακλώνται πραγματικές-υπαρκτές σχέσεις. Τα μαθηματικά δεν είναι σύστημα υλικών μέσων αλλά εκφράζονται μέσω τέτοιων, εκφράζονται τελικά μέσω της γλώσσας και γι' αυτό δεν μπορεί να χαρακτηρισθούν ως γλώσσα παρά το γεγονός ότι και αυτά όπως και η γλώσσα είναι μέσα επικοινωνίας.** Οι εκπρόσωποι του ΔΥ υιοθετούν μιαν άλλη άποψη που αν την δούμε βιαστικά πιθανότατα να εξάγουμε και το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ της δικής τους θεώρησης και της θεώρησης που θέσαμε παραπάνω: «Το σύστημα των μαθηματικών συμβόλων είναι ασφαλώς ιδιάζουσα γλώσσα, που γεννήθηκε από μια λεκτική γλώσσα και είναι τελικά μεταφράσιμη σε αυτήν».[112] Η διαφορά, μάλλον, είναι εμφανής. **Ο Σαφ δε χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως γλώσσα αλλά το συμβολικό τους σύστημα το οποίο, μάλιστα, όπως διευκρινίζεται δεν είναι αυτονομημένο από τη λεκτική γλώσσα.** Ίσα-ίσα η λεκτική γλώσσα είναι η βάση γέννησης της *ιδιάζουσας* γλώσσας και ερμηνεύεται μέσα σε αυτήν. Σε άλλο μήκος κύματος, με την προαναφερθείσα άποψη, κινείται και η παρακάτω: « Εν τέλει, ο ίδιος ο χωρόχρονος διαθέτει αυτεπίγνωση. Μια μορφή που παίρνει αυτή η αυτοσυνείδηση είναι η ικανότητα των εγκεφάλων να δημιουργούν μαθηματικά, τα οποία χρησιμοποιούμε ως γλώσσα για να ανακαλύπτουμε και να περιγράφουμε οτιδήποτε νέο. Το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι η βαθύτερη γλώσσα της φύσης, η αποθέωση της αφαίρεσης και το πρωταρχικό στήριγμα του εφαρμοσμένου μάς παρακινεί να αναρωτηθούμε αν έγκειται σε αυτό η σαφέστερη υπόδειξη για ό,τι έχει σχέση με την προέλευσή μας και την καταγωγή του σύμπαντος».[113] Οι διαθέσεις του συγγραφέα

---

[108] . Τζ. Κόνφρεϊ, Πόσο συμβατοί είναι ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός, οι κοινωνικοπολιτικές προσεγγίσεις και ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός, http://hyperion.math.upatras.gr/courses/sts

[109] . Μ. Ρόζενταλ-Π. Γιούντιν, Μικρό φιλοσοφικό λεξικό, λήμμα *Γλώσσα,* εκδ.Αναγνωστίδη

[110] . Σ. Δημητρίου, Η εξέλιξη του ανθρώπου, τ.V, σελ.166, εκδ. Καστανιώτη

[111] . Δες αναλυτικότερα Ι. Β. Στάλιν, Σχετικά με το Μαρξισμό στη γλωσσολογία, ένθετο εφημερίδας Ριζοσπάστη, 9/12/2001

[112] . Α. Σαφ, Γλώσσα και γνώση, σελ.175, εκδ. Ζαχαρόπυλος

[113] . Π. Άτκινς, Η Δημιουργία, σελ.125, εκδ. Κάτοπτρο

μάλλον είναι θεολογικής προέλευσης. **Με την αυτεπίγνωση του χωροχρόνου εισάγει το σκοπό στη φυσική εξέλιξη κι έτσι τα μαθηματικά παρουσιάζονται ως η αποκωδικοποιημένη γλώσσα αυτού του σκοπού.** Η αποκωδικοποίηση μας θέτει γενικότερα ερωτήματα για την προέλευση της ύπαρξης. Αλλά το σύμπαν κατά το ΔΥ δεν έχει κάποια προέλευση αφού υπάρχει αιώνια. Δεν τίθεται ζήτημα δημιουργίας του και χρονικής του εκκίνησης σε κάποια χρονική στιγμή που επέλεξε η υπέρτατη διάνοια. Έτσι, με ένα τρόπο τα μαθηματικά καταλήγουν να είναι γλώσσα εξωκοσμικής προέλευσης. Για το χαρακτηρισμό τους ως γλώσσα, ήδη, έχουμε πάρει θέση. Κατά μια άλλη εκδοχή τα μαθηματικά παρουσιάζονται ως μια γλώσσα των πάντων, ως μια γλώσσα μέσω της οποίας μπορούν ή θα μπορούν να εκφραστούν όλες οι υπόλοιπες επιστήμες.[114] Παρά το γεγονός της μη αποδοχής της άποψης για μια βασίλισσα των επιστημών εξαιτίας του αδύνατου της ιεράρχησης των επιστημών που γίνεται αδύνατη από την ιστορικότητα που διέπει τις επιστήμες, κάτι που μας βρίσκει σύμφωνους, τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται ως μια χαρισματική γλώσσα, από τη στιγμή που η δυνατότητα μαθηματικοποίησης των επιστημών είναι υπαρκτή.[115] Η τελευταία διαπίστωση είναι ορθή, ωστόσο η γενικότερη διαπίστωση είναι, μάλλον, προβληματική. Μπορεί σήμερα να έχουμε τα εφόδια για τη μοντελοποίηση των επιστημών-όπως υποστηρίζουν κάποιοι ακόμα και αυτών των κοινωνικών επιστημών- αυτό, όμως, δε δικαιώνει την άποψη σχετικά με το ότι τα μαθηματικά είναι γλώσσα. Με αυτό τον τρόπο χάνεται η βαθύτερη ουσία τους και επιπλέον γίνεται δυσδιάκριτη η σχέση τους με τις άλλες επιστήμες, μια σχέση που χαρακτηρίζεται από τη διαλεκτική σύνδεση των φαινομένων και των ουσιών που υπάρχουν, γιατί το επαναλαμβάνουμε: **τα μαθηματικά δεν είναι απλά ένα επιστημονικό εργαλείο, χωρίς να σημαίνει ότι δεν είναι και τέτοιο.**

Μια άλλη άποψη που συναντάμε είναι αυτή που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά ως μια τεχνική: «Τα μαθηματικά είναι ένα εργαλείο που επιτρέπει, με ιδανικό τρόπο, σε μέτρια μυαλά να λύνουν γρήγορα πολύπλοκα προβλήματα».[116] Παρόμοια άποψη αν και όχι με τον ίδιο τρόπο διατυπωμένη συναντάμε και σε άλλες περιπτώσεις. Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται ως η επιστήμη που ασχολείται με τους αριθμούς, τα μεγέθη, τους τύπους και τις μεταξύ τους σχέσεις. Η άλγεβρα ως ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με το χειρισμό των παραστάσεων οι οποίες περιέχουν άγνωστους και η γεωμετρία αποτελεί την έρευνα των σχέσεων που διέπουν το μήκος, τις γωνίες, τις επιφάνειες και τον όγκο καθώς και το συσχετισμό τους με τα σχήματα.[117] Αυτοί οι ορισμοί ενώ μοιάζουν να προσεγγίζουν τους αντίστοιχους των εκπροσώπων του ΔΥ, στην πραγματικότητα μόνο μοιάζουν. Πρόκειται για ορισμούς που είναι κατά κάποιο τρόπο ταυτολογικοί και αναφέρονται στην τεχνική πλευρά του ζητήματος. Τα μαθηματικά ασχολούνται με τους αριθμούς, τα μεγέθη και τους τύπους αλλά δε διευκρινίζεται τι ακριβώς αυτά εκφράζουν. Οι αριθμοί και οι τύποι είναι αυταξίες αποκομμένες από την πραγματικότητα; Οι επιφάνειες και οι όγκοι προϋπάρχουν στην ανθρώπινη νόηση και άρα πάμε σε μεταφυσικές – ιδεαλιστικές θεωρήσεις των μαθηματικών ή είναι ιστορικά διαμορφωμένες «οντότητες» από την ανθρώπινη νόηση που βρίσκεται σε διαλεκτική αλληλεπίδραση με την πραγματικότητα? Τέτοιου είδους ορισμοί διέπονται από ασάφεια και για αυτό το λόγο μπορούν να ερμηνευτούν ποικιλοτρόπως. Έτσι, η επιστημονική τους αξία δεν είναι ιδιαίτερα υψηλή και περισσότερο μπορούν να προκαλέσουν συγχύσεις παρά να αποσαφηνίσουν το προς εξέταση ερώτημα.[118]

---

[114] . Δες χαρακτηριστικά, Νίκος Ταμπάκης, Αναπαραστάσεις του κόσμου, Πραγματικότητα και σύγχρονη φυσική, σελ. 38-41, εκδ. Γκοβόστη

[115] . Κατά το R. Thom με τη βοήθεια της Θεωρίας των Καταστροφών, τα Μαθηματικά υπεισέρχονται σε κλάδους όπως η Βιολογία και οι Επιστήμες του Ανθρώπου (R. Thom, Μαθηματικά πρότυπα της μορφογένεσης, σελ.142, εκδ. Πνευματικού)

[116] . Αναφέρεται στο Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, Ρ. Γουίλντερ, σελ.23, εκδ. Π. Κουτσουμπός

[117] . Δες χαρακτηριστικά εγκυκλοπαίδεια Grand Larousse,σελ.18, τ.7

[118] .Τελειώνοντας με την παράθεση των διαφόρων ορισμών των μαθηματικών και το σχολιασμό τους θα κάνουμε και μια αναφορά ειδικά στους ορισμούς για τη γεωμετρία αν και έχουμε, ήδη, κάνει νύξεις για αυτό το ζήτημα σε διάφορα σημεία του κειμένου που προηγήθηκε. Ασφαλώς ένας ορισμός από μόνος του και στη Γεωμετρία όπως εν γένει και στα μαθηματικά, όπως έχουμε επισημάνει, είναι συχνά

επικίνδυνος. Το να μείνεις σε ένα ορισμό παραβλέποντας το γεγονός ότι αποτελεί μια συμπύκνωση, ένα υψηλό επίπεδο αφαίρεσης, ότι υπάρχει σύνδεση του οριζόμενου αντικειμένου με πολλές άλλες πλευρές που δεν περιέχονται στον ορισμό, μπορεί να σε οδηγήσει σε σοβαρές παρανοήσεις. Πάντα, έχοντας υπόψη μας αυτή την παρατήρηση κάνουμε μια παράθεση κάποιων ορισμών:
«Με την έννοια «Γεωμετρική αφαίρεση» θα εννοούμε το είδος της μαθηματικής αφαίρεσης, το οποίο κατά τη δημιουργία και ανάπτυξη ενός γεωμετρικού κλάδου έχει να κάνει με «σχήματα», με αφηρημένα δηλαδή αντικείμενα, που μπορούν να αντιστοιχηθούν έστω προσεγγιστικά, σε αισθητές εικόνες […] Ο Γεωμετρικός λοιπόν κόσμος είναι θα λέγαμε, μέσω της αφαίρεσης ένας «μετατοπισμένος» φυσικός κόσμος «ομογενής» με τη Νόηση «προσαρμοσμένος» στην κυριαρχία της και επιδεκτικός για την εύρεση πλήθους αληθειών, που εκφράζουν ιδιότητες και μετρικές σχέσεις των αντικειμένων του», (Πράσινος Γ., Τα μαθηματικά και η νόηση, σελ. 23, εκδ. Κορφή)
Ο ίδιος συγγραφέας γίνεται πιο «αυστηρός» στον ορισμό του σε ένα άλλο σημείο του συγγράμματός του:
«Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία που κατάγεται περισσότερο από την εμπειρία και αληθεύει μέσα σε αυτήν εκ πρώτης όψεως, έπειτα από πειραματισμούς μικρής κλίμακας φαινομένων μέσα στο φυσικό χώρο. Οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι οι υπόλοιπες Γεωμετρίες που πραγματοποιεί η ιδιοκατασκευή της Νόησης. Και με αυτό θα εννοούμε πως αφού η παραδοχή μη ευκλείδειων αξιωμάτων , δεν οδηγεί σε λογικές αντιφάσεις, αυτό σημαίνει πως το γεωμετρικό επιστητό, που μπορεί να αντιληφθεί η Νόηση, είναι ευρύτερο από εκείνο που υπαγορεύει η ευκλείδεια Γεωμετρία. Η Τοπολογία είναι η Γεωμετρία, η οποία ασχολείται με τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις τοπολογικές δηλαδή αμφισυνεχείς απεικονίσεις. Η Παραστατική Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία που μελετά τα χωρικά σχήματα όταν απεικονίζονται στο επίπεδο. Η Προβολική Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία που σπουδάζει τις ιδιότητες των σχημάτων, οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή» (ο.π., σελ. 71)
Ας δούμε έναν ακόμα ορισμό:
«Σήμερον η Γεωμετρία ορίζεται ως «η επιστήμη η έχουσα ως αντικείμενον την μελέτην του χώρου υπό τα τρεις επόψεις του, της γραμμής, της επιφανείας, του όγκου». Με άλλας λέξεις, η Γεωμετρία ασχολείται με το σχήμα των φυσικών πραγμάτων και με τα στοιχεία, τα οποία συναπαρτίζουν το σχήμα αυτών δηλαδή τα σημεία, τας γραμμάς, τας επιφανείας και τας γωνίας, καθώς και με τας μεταξύ των στοιχείων αυτών σχέσεις. Επίσης δε ασχολείται η Γεωμετρία με τας μεθόδους δια την μέτρησιν των επιφανειών των σχημάτων , του όγκου των στερεών και την μέτρησιν των προαναφερθέντων στοιχείων αυτών», (Δημαράς Δ., Φιλοσοφία της μαθηματικής, σελ.87-88, εκδ. Δωδώνη)
Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση συναντάμε στη «Μαθηματική Εμπειρία»:
« Η γεωμετρία διδάσκεται στις μεγαλύτερες τάξεις. Κατά ένα τμήμα σχετίζεται με ερωτήματα μέτρησης του χώρου. Αν σχεδιάσω μια γραμμή και μια άλλη μια γραμμή, πόσο θα απέχουν τα άκρα μεταξύ τους? Πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι ένα παραλληλόγραμμο που έχει μήκος τέσσερα εκατοστά και πλάτος οκτώ εκατοστά? Η γεωμετρία σχετίζεται επίσης με τις όψεις του χώρου που έχουν μια ισχυρή αισθητική έλξη ή ένα απρόσμενο στοιχείο. Μας λέει για παράδειγμα, ότι οι διαγώνιοι σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο διχοτομούν η μια την άλλη. Σε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο οι διάμεσοι διασταυρώνονται σε ένα κοινό σημείο. Μας λέει ότι ένα πάτωμα μπορεί να καλυφθεί με ισόπλευρα τρίγωνα ή εξάγωνα αλλά όχι με κανονικά πεντάγωνα.

Αλλά η γεωμετρία αν διδαχτεί σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν από τον Ευκλείδη το 300π.Χ., έχει και μια άλλη ουσιαστική όψη. Είναι η παρουσίαση της ως μιας παραγωγικής επιστήμης. Ξεκινώντας με έναν αριθμό στοιχειώδεις ιδέες ου θεωρούνται αυταπόδεικτες και χρησιμοποιώντας κάποιους καθορισμένους μαθηματικούς κανόνες και λογικούς χειρισμούς, η ευκλείδεια γεωμετρία οικοδομεί μια κατασκευή από συμπεράσματα που η πολυπλοκότητά τους όλο και αυξάνεται.

Αυτό που τονίζεται στη διδασκαλία της στοιχειώδους γεωμετρίας δεν είναι μόνο η χωρική ή οπτική πλευρά του αντικειμένου, αλλά η μεθοδολογία με την οποία μια υπόθεση καταλήγει σε ένα συμπέρασμα. Αυτή η μέθοδος εξακρίβωσης είναι γνωστή ως απόδειξη. Η ευκλείδεια γεωμετρία είναι το πρώτο παράδειγμα από ένα τυποποιημένο σύστημα εξακρίβωσης και έχει γίνει το μοντέλο για τέτοιου είδους συστήματα. Η γεωμετρία υπήρξε ο μεγάλος τομέας εξάσκησης για τη λογική σκέψη και (σωστά ή εσφαλμένα) θεωρήθηκε ότι προσφέρει στο σπουδαστή μια βασική εκπαίδευση σε μια τέτοιου είδους σκέψη», (Davis-Hirsh, Η μαθηματική εμπειρία, σελ. 29-30, εκδ. Τροχαλία).

Β3: <u>Τα μαθηματικά και το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας ή θέτοντας το φιλοσοφικό πλαίσιο</u>

Πριν να διατυπώσουμε τις όποιες σκέψεις μας σε τούτο το σημείο θα κάνουμε μια υπενθύμιση σχετικά με το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας: «το μεγάλο βασικό ζήτημα κάθε φιλοσοφίας, ιδιαίτερα της νεότερης φιλοσοφίας, είναι το ζήτημα της σχέσης της νόησης με το Είναι. Από τους παλιούς καιρούς, όταν οι άνθρωποι αγνοώντας ολότελα ακόμα και την κατασκευή του ίδιου του σώματός τους και παρακινούμενοι από τα όνειρα φτάσανε να φαντάζονται ότι η σκέψη τους κι η αίσθησή τους, δεν είναι δράση του σώματός τους, μα δράση μιας ξεχωριστής ψυχής που κατοικεί μέσα σε αυτό το σώμα και που το εγκαταλείπει με το θάνατο-από τότε κιόλας οι άνθρωποι υποχρεώθηκαν να στοχάζονται για τη σχέση αυτής της ψυχής με τον εξωτερικό κόσμο [...] Το ζήτημα της σχέσης τη νόησης με το είναι, του πνεύματος με τη φύση, το ύψιστο ζήτημα όλης της φιλοσοφίας, έχει λοιπόν κι αυτό, όχι λιγότερο από κάθε θρησκεία, τη ρίζα του στις περιορισμένες παραστάσεις που οφείλονται στην αμάθεια των ανθρώπων της άγριας κατάστασης [...] Οι φιλόσοφοι χωρίστηκαν σε δυο μεγάλα στρατόπεδα, ανάλογα με τον τρόπο που απαντούσαν σε αυτό το ζήτημα. Εκείνοι που βεβαίωναν ότι το πνεύμα υπήρχε πριν από τη φύση, που παραδέχονταν έτσι σε τελευταία ανάλυση τη δημιουργία του κόσμου με μιαν οποιαδήποτε μορφή-και αυτή η δημιουργία του κόσμου είναι ακόμα πιο στρυφνή και πιο απίθανη στους φιλόσοφους, λ.χ. στο Χέγκελ, παρά στο χριστιανισμό-αποτέλεσαν το στρατόπεδο του ιδεαλισμού. Οι άλλοι, που θεωρούσαν τη φύση ως πρωταρχικό, ανήκουν στις διάφορες σχολές του υλισμού».[119]

Ο ορισμός των μαθηματικών ή διαφορετικά η απάντηση στο ερώτημα «τι είναι μαθηματικά» και «ποιο είναι το αντικείμενό τους», δεν μπορεί παρά να συνοδευτεί από επεξηγήσεις και παράθεση απόψεων που να αφορούν στο βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας, δηλαδή, από τον προβληματισμό για την προτεραιότητα εκείνης ή της άλλης κατηγορίας στο δίπολο νόησης-είναι. **Η ενασχόληση με το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας σχετικά πάντα με τον ορισμό των μαθηματικών, δεν είναι μια απλή συνέπεια του ορισμού, ένα παρελκόμενο δευτερεύουσας σημασίας. Αποτελεί οργανικό του κομμάτι χωρίς το οποίο δε θα είχε καμία αξία (ο ορισμός).** Ήδη με διάφορους τρόπους αυτό, πιστεύουμε ότι έχει γίνει κατανοητό κι έχει αναδειχθεί από τους «άμεσους» ή «έμμεσους» ορισμούς που παραθέσαμε παραπάνω. Για τους εκπροσώπους της υλιστικής σχολής δε θα μπορούσε να γίνει διαφορετικά. Αν κάποιος θέλει να μιλήσει για τα μαθηματικά, η ενασχόληση με τη φιλοσοφία (άρα και με το βασικό της πρόβλημα) είναι αναπόφευκτη: «θέλω κατ' αρχάς να επισημάνω ότι αποτελεί ένα πρόβλημα που άπτεται της φιλοσοφίας (σ.σ. εννοεί η φύση των μαθηματικών εννοιών). **Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να βρει τη λύση του παρά μόνο στο πλαίσιο ενός φιλοσοφικού συστήματος. Αυτή είναι τουλάχιστον η πεποίθησή μου. Βέβαια πολλές φορές προσπάθησαν να ιδρύσουν τα μαθηματικά «εκ των έσω». Ορισμένες από αυτές τις προσπάθειες έχουν γίνει με τον πιο δυνατό συνεπή τρόπο. Δεν παραμένουν λιγότερο ύποπτες γιατί, όποιες κι αν είναι οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν, πάντα καταλήγουν σε μια βαθιά αλλαγή της ίδιας της σημασίας των μαθηματικών**. Επιπλέον, έχουν κοινό μεταξύ τους μια ίδια αφετηριακή θέση που είναι ακραιφνώς ιδεαλιστική: αποδεχόμαστε από την αρχή ότι είναι δυνατό να μεταχειριζόμαστε τα μαθηματικά ανεξάρτητα από τις άλλες επιστήμες, ξεχνάμε ότι ξεκίνησαν από τις επιστήμες της φύσης, αφήνουν στην άκρη τις πολλαπλές εφαρμογές τους, δεν παίρνουμε υπόψη την ιστορική τους εξέλιξη. Είναι αυτονόητο ότι αντιλήψεις τέτοιας φύσης απαγορεύουν την εφαρμογή στα μαθηματικά της έννοια της «αλήθειας» στην αριστοτελική εκδοχή της λέξης (συμφωνία με την πραγματικότητα), εκδοχή που επιβάλλεται όταν αφορά τις επιστήμες της φύσης, όποιες κι αν είναι. Στη θέση της βλέπουμε να εμφανίζονται έννοιες που προέρχονται από το φορμαλισμό (μη αντιφατικός στη μορφή του), από τον ιντουσιονισμό («πραγματοποιήσιμο»), κονστρουκτιβισμό. Και

[119] . Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το τέλος της γερμανικής κλασικής φιλοσοφίας, σελ. 23-24, εκδ, Σύγχρονη εποχή.

τέτοιες έννοιες υποτίθεται αντικαθιστούν με τον πιο έγκυρο τρόπο αυτό της αλήθειας»[120], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας μεταφέρεται στα μαθηματικά με μια ιδιαίτερη μορφή. **Τα μαθηματικά από πού εκκίνησαν; Ήταν δημιουργήματα του ανθρώπινου νου χωρίς να αντανακλαστεί σε αυτόν η πραγματικότητα, μεταφέρονται στην ανθρώπινη νόηση μέσω ενός κόσμου ιδεών, η ανάλυσή τους έγκειται στην ανάλυση των εννοιών τους και μάλιστα αυτές οι έννοιες χαρακτηρίζονται από υποκειμενικότητα και μόνο τέτοια, είναι έμφυτες ιδέες, προϋπάρχουν ή είναι αντανάκλαση της αντικειμενικής πραγματικότητας στον ανθρώπινο εγκέφαλο με έναν ιδιαίτερο τρόπο και ως μια συνεχής προσέγγιση της (της πραγματικότητας);**

Ο ΔΥ απαντά θετικά στο τελευταίο ερώτημα και θεωρεί παράλληλα ότι «όλα τα υπόλοιπα προς συζήτηση προβλήματα μεθοδολογικού χαρακτήρα (της αλήθειας των μαθηματικών γνώσεων και των ξεχωριστών θεωριών, των νομοτελειών της εξέλιξης των μαθηματικών κ.α.) είναι στην ουσία παράγωγα αυτού του ζητήματος. Η κοσμοαντίληψη του μαθηματικού, σε συνάρτηση με τον τρόπο που λύνει το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας, **μπορεί να είναι είτε υλιστική είτε ιδεαλιστική**»[121], (η υπογράμμιση δική μας). Ακόμα, «η βασική αντίθεση στην ουσία των μαθηματικών συνίσταται στο γεγονός, ότι οι ποσοτικές σχέσεις και μορφές του χώρου, τις οποίες στα μαθηματικά επιχειρούν να αποσπάσουν από το περιεχόμενο, δεν μπορούν να είναι αδιάφορες ως προς το περιεχόμενο αυτό».[122]

Το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας μέσα στο σώμα των μαθηματικών εκφράζεται, κατά τη γνώμη μας, με ορισμένους ιδιαίτερους τρόπους. Για παράδειγμα, μέσα από την έννοια της αφαίρεσης, μέσα από την έννοια της απριορικότητας των μαθηματικών και μέσα από την έννοια του «σώζειν τα φαινόμενα». Αλλά πριν να εξετάσουμε αυτές τις τρεις περιπτώσεις θα ήταν χρήσιμο να παραθέσουμε ορισμένα αποσπάσματα από το φανταστικό (κι εκπληκτικό, συνάμα) διάλογο Σωκράτη-Ιπποκράτη από το «Διάλογοι για τα Μαθηματικά» του Άλφρεντ Ρενί, που συμπυκνώνει με εξαιρετικό τρόπο τα ερωτήματα για τη σύνδεση των μαθηματικών με το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας (στο παρακάτω απόσπασμα όπου Σ, Σωκράτης και όπου Ι, Ιπποκράτης):

Σ: Τώρα πες μου, νεαρέ μου φίλε, ποιο είναι το αντικείμενο των μαθηματικών? Τι πράγματα μελετά ο μαθηματικός;

Ι: Έκανα στο Θεαίτητο την ίδια ερώτηση. Μου απάντησε ότι ο Μαθηματικός μελετά τους αριθμούς και τα γεωμετρικά συστήματα.

Σ; Η απάντηση είναι σωστή, αλλά τι λες, αυτά τα πράγματα υπάρχουν;

Ι: Βέβαια. Πώς θα μπορούσαμε να μιλάμε για αυτά, αν δεν υπήρχαν;

Σ: Πες μου, τώρα, αν δεν υπήρχαν μαθηματικοί, θα υπήρχαν οι πρώτοι αριθμοί; Κι αν είναι έτσι, πού θα υπήρχαν αυτοί;

Ι: Πραγματικά, δεν ξέρω τι να σου απαντήσω. Προφανώς αν οι μαθηματικοί στοχάζονται τους πρώτους αριθμούς, τότε αυτοί υπάρχουν στη συνείδησή τους. Αλλά αν δεν υπήρχαν μαθηματικοί, οι πρώτοι αριθμοί δε θα υπήρχαν πουθενά.

Σ: Εννοείς ότι πρέπει να πούμε, πως οι μαθηματικοί μελετούν πράγματα που δεν υπάρχουν;

Ι: Ναι, νομίζω ότι πρέπει να το παραδεχθούμε […]

Σ: Εννοείς ότι εκείνο που μελετούν οι μαθηματικοί δεν είναι ο αριθμός των προβάτων ή πλοίων ή άλλων πραγμάτων που υπάρχουν, αλλά ο αριθμός καθ΄αυτός; Και έτσι ενδιαφέρονται για κάτι που υπάρχει μόνο στα μυαλά τους;

Ι: Ναι, αυτό εννοώ […]

Σ: Αλλά για πες μου, για τ' όνομα του Δία, αγαπητέ Ιπποκράτη, δεν είναι μυστήριο κάποιος, να μπορεί να ξέρει περισσότερα για πράγματα που δεν υπάρχουν απ' ότι για πράγματα που υπάρχουν; […] Έχουμε καταλήξει στο ότι οι ιδέες των μαθηματικών δημιουργούνται από τον ίδιο το μαθηματικό. Πες μου, σημαίνει αυτό ότι ο μαθηματικός εκλέγει τις έννοιες του αυθαίρετα, όπως του αρέσει;

---

[120] . Gunter Aser, Mathematiques et realite objective, Sciences et materialisme dialectique, No 54, 1966

[121] . Κ.Α.Ρίμπνικοφ, Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, σελ.26, Θεσσαλονίκη, 1986

[122] . Κ.Α.Ρίμπνικοφ, Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, σελ.23, Θεσσαλονίκη, 1986

Ι: Όπως σου είπα, δεν ξέρω ακόμα πολλά πράγματα για τα μαθηματικά. Αλλά μου φαίνεται ότι ο μαθηματικός είναι τόσο ελεύθερος να εκλέξει τα αντικείμενα της μελέτης του όσο είναι κι ο ποιητής, να εκλέξει τα πρόσωπα των έργων του […]
Σ: Αν τα πράγματα ήταν έτσι, θα υπήρχαν τόσες μαθηματικές αλήθειες όσοι κι οι μαθηματικοί. Πώς εξηγείς λοιπόν, το γεγονός ότι όλοι οι μαθηματικοί μελετούν τις ίδιες ιδέες και τα ίδια προβλήματα; Πώς εξηγείς αυτό που συμβαίνει συχνά: Μαθηματικοί που ζουν μακριά ο ένας από τον άλλο και δεν έχουν καμία επαφή, να ανακαλύπτουν ανεξάρτητα τις αλήθειες; Ποτέ δεν άκουσα ότι δυο ποιητές έγραψαν το ίδιο ποίημα […] Θέλεις να πεις ότι οι μαθηματικοί προσπαθούν να βρουν μιαν αλήθεια, που είναι ανεξάρτητη από το άτομό τους;
Ι: Ναι, αυτό θέλω να πω.
Σ: Αλλά τότε είχαμε κάνει λάθος, όταν συμπεραίναμε πως οι μαθηματικοί εκλέγουν τα αντικείμενα της μελέτης τους με οδηγό μονάχα τη βούλησή τους. Φαίνεται πως το αντικείμενο της μελέτης τους έχει κάποιο είδος ύπαρξης, που είναι ανεξάρτητη από το άτομό τους. Πρέπει να το λύσουμε αυτό το νέο αίνιγμα […] Αλλά, για πες μου, ο μαθηματικός που βρίσκει μια νέα αλήθεια, την ανακαλύπτει ή την εφευρίσκει; Είναι δηλαδή εξερευνητής, όπως ο ναυτικός, ή εφευρέτης, όπως ο ζωγράφος;[123]

Β3.1: <u>Μαθηματικά και αφαίρεση</u>

Όταν επιθυμούμε να δούμε τη σχέση αφαίρεσης και μαθηματικών θα πρέπει να δούμε πρώτα από όλα με ποιο τρόπο εννοεί ο ΔΥ τη φιλοσοφική κατηγορία της αφαίρεσης. Ήδη, έχουμε κάνει κάποιες αναφορές στο ζήτημα της αφαίρεσης με αφορμή τις απόψεις του Πλάτωνα, του Μπέρκλεϊ και του Μιλ αλλά και τις αναφορές του Ένγκελς. Χρειάζεται, όμως, να δούμε πιο συγκεκριμένα τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται η έννοια από το ΔΥ και στη συνέχεια πώς αυτή συνδέεται με τα Μαθηματικά κι αυτό θα επιχειρήσουμε να κάνουμε.

Κατά τη διαδικασία της αφαίρεσης δεν παίρνουμε υπόψη μας όλα τα χαρακτηριστικά, όλες τις σχέσεις κι όλες τις συνδέσεις ενός αντικειμένου ή ενός φαινομένου. Το πλήθος του συνόλου των δεδομένων και των πληροφοριών δεν υπάρχει στα ενεργήματα της αφαίρεσης δηλαδή τις αφαιρέσεις. Η διαδικασία της αφαίρεσης μπορεί σε μια πρώτη φάση της ανθρώπινης νόησης να γίνεται αυθόρμητα, ωστόσο υπάρχει και η επιστημονική αφαίρεση. Το κύριο πρόβλημα μιας τέτοιας αφαίρεσης είναι η διαμόρφωση κριτηρίων μέσω των οποίων θα πραγματοποιείται η επιλογή των κύριων χαρακτηριστικών του υπό εξέταση αντικειμένου ή φαινομένου και η απόρριψη των επουσιωδών πλευρών ώστε να συγκροτηθεί η αφαίρεση σε ένα πρώτο επίπεδο. Στη συνέχεια πρέπει να λυθεί το πρόβλημα της εξαγωγής της αφαίρεσης από την αφαίρεση, με άλλα λόγια να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο θα ανερχόμαστε σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης. Ακόμα, αφού η αφαίρεση έχει καταστεί ένα θεωρητικό κατασκεύασμα να δούμε πώς συνδέεται με τις πηγές της και πώς επιδρά σε αυτές, δηλαδή πώς αλληλοεπηρεάζεται με την πράξη. Η αφαίρεση είναι πηγή γνώσης, δεν είναι ένα αυθαίρετο θεωρητικό κατασκεύασμα: «οι κατηγορίες της νόησης δεν είναι βοήθημα του ανθρώπου, αλλά έκφραση της νομοτέλειας και της φύσης και του ανθρώπου […] της «υποκειμενικής νόησης» και της «αντικειμενικής έννοιας των ίδιων των πραγμάτων».[124]

Πώς εμπλέκονται τα μαθηματικά με την έννοια της αφαίρεσης; Ας δούμε μιαν άποψη: «… οι πρώτες εμπειρικές έννοιες για το σχήμα των σωμάτων που παρατηρούνται στον κόσμο σχηματίζονται επαγωγικά, με την αφαίρεση από τα σώματα αυτά όλων των ατομικών ιδιοτήτων τους εκτός από τη μορφή και τις διαστάσεις τους. Προσδίδεται γεωμετρικό νόημα σε αυτές τις έννοιες με τη λογική τους ανασυγκρότησης, αναπληρώνοντας τις εμπειρικές ιδιότητες που αφαιρέθηκαν με τις θεωρητικές ιδιότητες της συνέχειας, της απεριόριστης έκτασης, της παραλληλίας κ.λπ., δηλαδή με όλες τις ιδιότητες που είναι αναγκαίες για να διατυπωθούν καθαρά γεωμετρικές αλήθειες (θεωρήματα)» και « τα μαθηματικά έχουν το υψηλότερα αναπτυγμένο σύστημα αφαιρέσεων και αυτά καθαυτά αποτελούν ουσιαστικά επιστήμη των αφαιρέσεων: συνιστούν την προϋπόθεση,

[123] . Άλφερντ Ρενί, Διάλογοι για τα Μαθηματικά, σελ. 19-30
[124] . Β.Ι.Λένιν, Άπαντα., τ.29 (Φιλοσοφικά Τετράδια), σελ. 83

τη μέθοδο και το αντικείμενο μελέτης της αφαίρεσης. Όλες οι άλλες επιστήμες (στο βαθμό που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά) δανείζονται τις αφαιρέσεις των μαθηματικών για τις δικές τους μεθόδους έρευνας, περιγραφής κι εξήγησης, αλλά κάθε επιστήμη προσθέτει στην αφαίρεση που δανείστηκε τη δική της, τη χαρακτηριστική της αφαίρεση».[125]

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό τα μαθηματικά φαίνεται να παίζουν ένα θεμελιώδη ρόλο στο ζήτημα της αφαίρεσης, αφού οι επιπτώσεις δεν είναι καθαρά εσωμαθηματικές. Αυτό, όμως, σημαίνει πέρα από τη διαπίστωση για το γενικότερο ρόλο που παίζουν στην εξέλιξη και των άλλων επιστημών αλλά και στη σκέψη εν γένει, ότι θα πρέπει η σύνδεση αυτή να σημαίνει και την ύπαρξη ενός ομφάλιου λώρου μαθηματικών και πραγματικότητας. Η αφαίρεση, είναι αλήθεια, ότι δε διευκολύνει τη θέαση μιας τέτοιας οργανικής σύνδεσης, αυτό, όμως, δε συνεπάγεται και την ανυπαρξία της. Πρόκειται για το λάθος που έκανε ο Μπουρμπακί, ο οποίος, μάλλον με αμηχανία έγραφε: «Το ότι υπάρχει μια εσωτερική σύνδεση των πειραματικών φαινομένων και των μαθηματικών δομών, φαίνεται να επιβεβαιώνεται, κατά απροσδόκητο τρόπο, από τις τελευταίες ανακαλύψεις της σύγχρονης φυσικής. **Αλλά δεν ξέρουμε τίποτα για τους λόγους αυτού του γεγονότος** (υπό την προϋπόθεση ότι έχουν κάποια έννοια τέτοιες εκφράσεις). Και ίσως ποτέ δε θα μάθουμε τίποτα για αυτό [...] από την αξιωματική σκοπιά φαίνονται τα μαθηματικά σαν ένα θησαυροφυλάκιο αφηρημένων μορφών, μαθηματικών δομών **και τυχαίνει χωρίς να ξέρουμε γιατί, ορισμένες απόψεις της εμπειρικής πραγματικότητας να ταιριάζουν σε αυτές τις δομές**. Φυσικά δεν μπορεί να διαψευσθεί το γεγονός ότι οι περισσότερες από αυτές τις μορφές είχαν αρχικά ένα εποπτικά προσδιορισμένο περιεχόμενο, όμως ακριβώς με τη σκόπιμη αποδέσμευση των μαθηματικών αυτών μορφών από το περιεχόμενο που τους έγινε δυνατό να απελευθερωθεί η δυναμικότητα που είχαν μέσα τους, να εξελιχθούν και να αποκτήσουν νέες σημασίες»[126], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Η αλήθεια είναι ότι ο Μπουρμπακί παλινδρομεί. Από τη μια αναγνωρίζει τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα σε μια πρώτη φάση, από την άλλη η μαθηματική αφαίρεση αυτονομείται με ένα απόλυτο τρόπο και ο ίδιος υπονοεί μιαν αδυναμία να ερμηνεύσει αυτό το φαινόμενο.

Σε αυτό το σημείο εγείρεται και το άκρως ενδιαφέρον και σημαντικό πρόβλημα και ερώτημα: είναι νόμιμος ο διαχωρισμός θεωρητικών κι εφαρμοσμένων μαθηματικών κι αν ναι ή όχι γιατί;[127] Ο διαχωρισμός αυτός, είναι κατά τη γνώμη μας προβληματικός και αυτό

---

[125] . Ίλιτσεφ-Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμμα «αφαίρεση», τ.1

[126] . Το απόσπασμα αυτό αναφέρεται στο άρθρο του Egbert Brieskorn, στο άρθρο «Η διαλεκτική στα μαθηματικά», Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.12, σελ.3, 1986

[127] . Το ζήτημα του δυϊσμού των μαθηματικών δεν είναι σύγχρονο, αντιθέτως είναι χιλιάδων ετών. Εκφράστηκε με πολλούς τρόπους και ήδη έχουμε αναφέρει την προβληματική Πλάτωνα. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος στο *Φίληβο*, ανάμεσα στο Σωκράτη και στον Πρώταρχο. Τον παραθέτουμε παρακάτω:

Σωκράτης (εφεξής Σ): Ας εξετάσουμε εκείνες τις τέχνες, τις οποίες τώρα μόλις αναφέραμε ως πρωταρχικές και που είναι ακριβέστερες όλων.

Πρώταρχος (εφεξής Π): Εκλαμβάνω ότι εννοείς την τέχνη της αριθμήσεως καθώς και τις άλλες (τέχνες), τις οποίες μόλις τώρα ανέφερες ως σχετικές με αυτή.

Σ: Βεβαιότατα. Αλλά, Πρώταρχε, δε θα έπρεπε να αναγνωρίσουμε ότι αυτές οι ίδιες οι τέχνες είναι δυο ειδών? Τι νομίζεις?

Π: Ποιων δυο ειδών εννοείς?

Σ: Για να πάρουμε πρώτη την αρίθμηση ή την Αριθμητική, δε θα έπρεπε να κάνουμε διάκριση ανάμεσα σε εκείνην (την «Αριθμητική»), όπως την αντιλαμβάνεται ο απλός άνθρωπος και εκείνη την Αριθμητική των φιλοσόφων?

Π: Πάνω σε ποια αρχή, αν μου επιτρέπεις, πρόκειται αυτή η διάκριση για τα δυο είδη Αριθμητικής να βασισθεί?

Σ: Υπάρχει μια σημαντική εμφανής ειδοποιός διαφορά, Πρώταρχε. Αυτός, που ασχολείται με την «Αριθμητική» υπό τη συνήθη (απλοϊκή) έννοια κάνει υπολογισμούς με ανόμοιες μονάδες (αριθμούς). Γι΄αυτόν, το «δυο» μπορεί να σημαίνει δυο στρατεύματα ή δυο αγελάδες ή δυο οποιαδήποτε πράγματα, από το πιο μικρό στον κόσμο ως το πιο μεγάλο. Αντίθετα, ο φιλόσοφος δεν πρόκειται να ασχοληθεί μαζί του καθόλου, παρά μόνο όταν εκείνος (ο απλός άνθρωπος) συγκατατεθεί, ώστε να θεωρήσει την κάθε ξεχωριστή «μονάδα» του ακριβώς ίση (ισοδύναμη) με κάθε άλλη από το άπειρο πλήθος των (ειδικών) περιπτώσεων της.

για τους εξής λόγους: α) υπονοεί δυο διαφορετικά είδη μαθηματικών με το ένα είδος να βρίσκει εφαρμογή στα παρατηρούμενα φαινόμενα, ενώ το άλλο ούτε λίγο ούτε πολύ παρουσιάζεται σα να είναι ένα λογικό παιχνίδι αποσπασμένο από τη πραγματικότητα, β) δεν παίρνει υπόψη το γεγονός ότι τα λεγόμενα εφαρμοσμένα είναι ταυτόχρονα και θεωρητικά, αφού λειτουργούν με αφαιρέσεις χωρίς τις οποίες θα ήταν αδύνατη κι αυτή η ίδια η ύπαρξη και ανάπτυξή τους. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη στοιχειώδη αριθμητική, τον απειροστικό λογισμό και την ευκλείδεια γεωμετρία. Για την πρώτη περίπτωση η έννοια του αριθμού, μια πρωταρχική έννοια με τη βοήθεια της οποίας και τον ορισμό των πράξεων λύνουμε πρακτικά προβλήματα της καθημερινότητας, δεν είναι άραγε μια αφηρημένη έννοια; Για τον απειροστικό λογισμό οι έννοιες του απειροστού ή του ορίου δεν είναι αφηρημένες έννοιες και μάλιστα σε υψηλό επίπεδο αφαίρεσης κι ωστόσο ο απειροστικός λογισμός δεν είναι από τις κατ' εξοχήν περιοχές της μαθηματικής επιστήμης που βρίσκει πλήθος εφαρμογών; Για την ευκλείδεια γεωμετρία οι έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου ασφαλώς και είναι αφηρημένες έννοιες. Κι όμως η ευκλείδεια γεωμετρία δε λειτουργεί πολύ ικανοποιητικά μέσα σε συγκεκριμένα πλαίσια και δε θεωρείται μια ικανοποιητική προσέγγιση της πραγματικότητας; γ) παραβλέπει το γεγονός ότι και τα «θεωρητικά» δεν είναι κενές αφαιρέσεις, αφού κι αυτά βρίσκουν άμεσα ή έμμεσα, μακροπρόθεσμα ή βραχυπρόθεσμα κάποια εφαρμογή. Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα: [1] οι φανταστικοί εισήχθησαν στα μαθηματικά προκειμένου να επιλυθούν εξισώσεις οι οποίες δεν είχαν λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Κατ' αρχάς θα μπορούσε κάποιος να ισχυρισθεί ότι και αυτό το πρόβλημα (της επίλυσης των εξισώσεων) είναι κι αυτό ένα πρακτικό πρόβλημα παρά το γεγονός ότι οι φανταστικοί μοιάζουν να είναι μια καθαρά θεωρητική κατασκευή αποκομμένη από οποιαδήποτε πρακτική εφαρμογή.[128] Ωστόσο, η εφαρμογή των μιγαδικών αριθμών έγινε περισσότερο συγκεκριμένη όταν αργότερα βρήκαν εφαρμογή στον ηλεκτρισμό και στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στη μελέτη των τροχιών των πλανητών κ.λπ.[129], [2] οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες ούτε κι αυτές ήταν μια εγκεφαλική κατασκευή: «ο καθορισμός της σφαίρας εφαρμογής και της σύνδεσής τους με την πρακτική επιτεύχθηκε μετά την ανεύρεση των ερμηνειών τους. Οι πολυδιάστατοι χώροι του Ρήμαν δημιουργήθηκαν κάτω από την άμεση πίεση των προβλημάτων της μηχανικής και της φυσικής, πράγμα που είχε συνειδητοποιήσει και ο ίδιος ο Ρήμαν»[130], [3] η τοπολογία, πάλι, μπορεί να μοιάζει ένα εξωτικό κατασκεύασμα, ωστόσο, μας προσφέρει απαντήσεις σχετικά με την απειρότητα ή το πεπερασμένο του σύμπαντος, δηλαδή σχετικά με τη μορφή του σύμπαντος.

Σχετικά με το διαχωρισμό που προαναφέραμε ο Τόντορ Παβλόφ αναφέρει: «Και ακριβώς αυτό είναι που κάνει τις μαθηματικές έννοιες συγκεκριμένες (σ.σ. το κριτήριο της πράξης). Όμως αυτό, από την άλλη μεριά, θα πει πως τα μαθηματικά είναι συγκεκριμένα ακριβώς όταν και στο βαθμό που δεν είναι «καθαρά» μαθηματικά, αλλά είναι μαθηματικά των ρεαλιστικών σχέσεων, των ρεαλιστικών πραγμάτων. Άμα μετατραπούν σε «καθαρά» μαθηματικά διατηρούν μόνο την εσωτερική τους λογική αναγκαιότητα, ενώ όλες οι μαθηματικές έννοιες, (σημεία, γραμμές κ.λπ.) μετατρέπονται σε καθαρές μαθηματικές

Π: Η άποψή σου είναι, σίγουρα, ορθή, όταν μιλάς για τη σημαντική διάκριση (διαφορά) ανάμεσα στις δυο κατηγορίες εκείνων, που ασχολούνται με τους αριθμούς, πράγμα που δικαιολογεί τν πεποίθηση για την ύπαρξη δυο ειδών αριθμητικής

[…]

Σ: Μήπως, λοιπόν, για τους υπολογισμούς (λογαριασμούς) και τις μετρήσεις, που χρησιμοποιούνται για τις οικοδομές ή το εμπόριο, σε αντιπαραβολή με τη γεωμετρία και τους υπολογισμούς που μετέρχεται η φιλοσοφία-δε θα λέγαμε ότι υπάρχει ένα μόνο είδος από την κάθεμια τέχνη (την Αριθμητική και τη Γεωμετρία), ή μήπως θα έπρεπε να διακρίνουμε δυο είδη?

Π: Αφού ισχύουν οι (προφορικοί) συλλογισμοί μας, θα πρέπει να ταχθώ (ψηφίσω) με την άποψη ότι υπάρχουν δυο είδη (αναφέρεται στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, στο λήμμα Λογισμός Διαφορικός και Λογισμός Ολοκληρωτικός).

[128] . Αυτή η άποψη διατυπώνεται από το Κ.Α.Ρίμπνικοφ στο «Εισαγωγή στη μεθοδολογία των Μαθηματικών», σελ.28, Θεσσαλονίκη, 1986

[129] . Αρκετά παραδείγματα από την εφαρμογή των μιγαδικών, υπάρχουν στο «Φανταστικές ιστορίες» του P. Nahin, εκδ. Κάτοπτρο

[130] . Κ.Α.Ρίμπνικοφ στο «Εισαγωγή στη μεθοδολογία των Μαθηματικών», σελ.28, Θεσσαλονίκη, 1986

αφαιρέσεις. Τα «καθαρά» μαθηματικά ως τέτοια αποκτούν ορισμένη ελευθερία κατασκευής κάθε λογής υποθέσεων και συνεπώς έχουν και ορισμένη ευριστική σημασία. Ταυτόχρονα, όμως, πολλές από τούτες τις υποθέσεις παραμένουν μόνο υποθέσεις και μόνον όσες από ανάμεσά τους επικυρωθούν από την πείρα, από την πράξη, γίνονται αντικειμενικές επιστημονικές θεωρίες. Αυτό πάλι θα πει πως τα «καθαρά» μαθηματικά επιστρέψανε ξανά στο ρεαλιστικό έδαφος της συγκεκριμένης πρακτικής πείρας και συνεπώς οι καθαρές μαθηματικές αφαιρέσεις γέμισαν ξανά με συγκεκριμένο αντικειμενικό περιεχόμενο».[131]

Η αντιστοίχιση μιας μαθηματικής οντότητας σε μια φυσική, κοινωνική ή νοητική πραγματικότητα δεν είναι μιαν αντιστοίχιση που συμβαίνει άπαξ με την ανακάλυψη μιας νέας μαθηματικής δομής. Η αντιστοίχιση μπορεί να συμβεί έπειτα από πολλά και μακροχρόνια κοιλοπονήματα της επιστήμης και της φιλοσοφίας. Το πώς όμως είναι δυνατό να προέχει η θεωρητική σύλληψη της αντιστοίχισης με τη πραγματικότητα είναι ένα θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε άλλο σημείο του κειμένου.

Για κατακλείδα θα παραθέσουμε μια διαπίστωση του Αμπέλ Ρέι (θετικιστή και αυθόρμητου ασυνεπή υλιστή) εν είδει ρητορικού ερωτήματος που θα μπορούσε να διατυπωθεί και από ένα συνεπή υλιστή : «Αλλά η διακοπή κάθε εμπειρικού στοιχείου μήπως δεν είναι επίσης ένα απρόσιτο ακραίο περιστατικό; Ο μαθηματικός, παρατηρούν οι ορθολογιστές, θα μπορούσε όπως και παλιότερα να πολλαπλασιάζει τον πλούτο της επιστήμης του, ακόμα και αν ο υλικός κόσμος εξαφανιζόταν τώρα. **Αλλά θα μπορούσε άραγε αυτός να δημιουργήσει τα μαθηματικά, αν δεν υπήρχε ποτέ ο υλικός κόσμος;**...»[132], (η υπογράμμιση δική μας).

Β3.2: <u>Η έννοια της απριορικότητας των μαθηματικών: στον αντίποδα του ΔΥ</u>

Τα ερωτήματα που ανακύπτουν και περιμένουν απάντηση σχετικά με την έννοια της απριορικότητας είναι δυο: α) τι σημαίνει ότι τα μαθηματικά είναι a priori και β) ποια η επιχειρηματολογία του ΔΥ απέναντι στην απριορικότητα των Μαθηματικών. Ασφαλώς μπροστά σε τέτοια ερωτήματα όπως τα προηγούμενα, δεν μπορεί κανείς να παραβλέψει την καντιανή προβληματική ξεκινώντας, ίσως, από τα κριτήρια τα οποία έθεσε για το διαχωρισμό των (αληθών) φιλοσοφικών προτάσεων. Πριν, όμως, την καντιανή οπτική αξίζει να κάνουμε μιαν υπόμνηση στο διαχωρισμό τον οποίο χρησιμοποίησε ο Λάιμπνιτς και ο οποίος αποτέλεσε τον προάγγελο του καντιανού διαχωρισμού (βλέπε για μια κατηγοριοποίηση των προτάσεων στα σχεδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 3).

Β3.2.1: <u>Ο διαχωρισμός του Λάιμπνιτς</u>

Ο Λάιμπνιτς χώρισε τις αληθείς προτάσεις σε δυο ξένες μεταξύ τους κλάσεις. Πρόκειται για τις αναλυτικές και ενδεχομενικές αλήθειες, οι οποίες εδράζονται από τις αντίστοιχες αλήθειες τους. Οι μεν πρώτες στηρίζονται στην αρχή της αντίφασης, πράγμα που σημαίνει ότι οι αρνήσεις τους είναι προτάσεις αντιφατικές. Η αλήθεια αυτών των προτάσεων ισχύει σε κάθε «δυνατό κόσμο» και οι αρνήσεις τους αντίστοιχα δεν είναι αληθείς σε κανένα «δυνατό κόσμο». Οι μεν δεύτερες είναι προτάσεις των οποίων οι αρνήσεις δεν είναι αντιφατικές προτάσεις. Με άλλα λόγια η άρνηση τέτοιων προτάσεων μπορεί να μην είναι αληθής όχι ως αποτέλεσμα της αντιφατικότητάς τους αλλά ως απότοκος της μη συμφωνίας τους με μια συγκεκριμένη κατάσταση πραγμάτων. Υπάρχει, όμως, και ένας δεύτερος τρόπος ορισμού αυτών των δυο ειδών προτάσεων. Το κριτήριο αυτή τη φορά είναι η διαδικασία και το αποτέλεσμα αναλυσιμότητάς τους. Οι αναλυτικές προτάσεις χαρακτηρίζονται από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων κατά τη διαδικασία πλήρους ανάλυσής τους. στη διαδικασία της ανάλυσής τους καταλήγουμε σε ταυτοτικές στοιχειώδεις προτάσεις. Αντίθετα οι ενδεχομενικές αλήθειες και προτάσεις δεν είναι

---

[131] . Τ.Παβλόφ, Θεωρία της αντανάκλασης, σελ.180-181, εκδ. Δωδώνη

[132] . Το απόσπασμα αναφέρεται στο Β.Ι.Λένιν, Άπαντα, τ.29 (φιλοσοφικά τετράδια, σελ. 478, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

πεπερασμένα αναλύσιμες. Για το Λάιμπνιτς όλες οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι αναλυτικές κι επομένως είναι προτάσεις πεπερασμένα αναλύσιμες. [133]

Β3.2.2: <u>Ο καντιανός διαχωρισμός</u>

Τα κριτήρια κατάταξης τα οποία χρησιμοποίησε ο Καντ περισσότερο περίπλοκα από αυτά του Λάιμπνιτς, ήταν δυο ειδών: η συνθετικότητα (μη αναλυτικότητα) και η αναλυτικότητα από τη μια μεριά και ο a priori και a posteriori χαρακτήρας τους από την άλλη. Όσον αφορά στο πρώτο κριτήριο διαχωρισμού, κατά τον Καντ οι αναλυτικές κρίσεις παρουσιάζονται όταν η σύνδεση του κατηγορούμενο με το υποκείμενο νοείται με τη λογική αρχή της ταυτότητας. Δε μας μαθαίνουν ιδιαιτέρως τίποτα περισσότερο πάνω στο αντικείμενο από αυτό που ήδη περιέχει η έννοια, που έχουμε για αυτό, γιατί δεν εκτείνουν τη γνώση πέρα από την έννοια του υποκειμένου και δεν κάνουν παρά να διασαφηνίζουν την έννοια. Σε αυτές τις προτάσεις το κατηγόρημά τους εμπεριέχεται με λανθάνοντα τρόπο ήδη εντός του υποκειμένου. Από την άλλη στις συνθετικές κρίσεις οφείλουμε να έχουμε έξω από την έννοια του υποκειμένου κάποιο πράγμα (Χ) που σε αυτό η νόηση στηρίζεται, για να αναγνωρίσει ότι ένα κατηγορούμενο που δεν περιέχεται σε αυτή την έννοια, της ανήκει ωστόσο. Το δεύτερο κριτήριο είναι αυτό που κάνει τον καντιανό διαχωρισμό περισσότερο λεπτό από αυτό του Λάιμπνιτς.[134] Οι δυο έννοιες, a priori και a posteriori, είναι αντιθετικές. Οι a priori προτάσεις δεν έχουν εμπειρικό χαρακτήρα και είναι άχρονα αληθείς, σε αντίθεση με τις a posteriori που έχουν εμπειρικό χαρακτήρα. Ειδικά για τις a priori προτάσεις ο Καντ υποστηρίζει ότι «…από τώρα και στο εξής λέγοντας γνώσεις a priori θα εννοούμε όχι εκείνες που απαντούν ανεξάρτητα από αυτήν ή εκείνη την εμπειρία, **αλλά απόλυτα ανεξάρτητα από κάθε είδους εμπειρία**», (η υπογράμμιση δική μας).[135] Έτσι, με βάση αυτά τα δυο βασικά κριτήρια κατάταξης των προτάσεων μπορεί κανείς να σχηματίσει τέσσερις κατηγορίες. Στις συνθετικές a priori, μάλιστα, υπάρχουν δυο υποκλάσεις: η πρώτη περιέχει τις προτάσεις «που σχετίζονται με τις γενικές έννοιες και αναφέρονται σε λειτουργικά χαρακτηριστικά τους τα οποία εμφανίζονται ως επαγωγικές γενικεύσεις, χωρίς να είναι πραγματικά τέτοιες. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει για παράδειγμα η αρχή της αιτιότητας».[136] Στη άλλη υποκλάση «ανήκουν εκείνες που σχετίζονται με τα βασικά δομικά χαρακτηριστικά της αισθητηριακής αντίληψης. Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι ο χώρος και ο χρόνος».[137]

Θεωρητικά, λοιπόν, σχηματίζονται τέσσερις κατηγορίες προτάσεων. Ωστόσο, η μια εκ των τεσσάρων δεν έχει νόημα ύπαρξης και αναφερόμαστε στην κατηγορία των a posteriori αναλυτικών. Η ύπαρξη μιας τέτοιας κατηγορίας είναι αδύνατη γιατί ο a posteriori χαρακτήρας τους θα σήμαινε την εξάρτησή τους από τα εμπειρικά δεδομένα και συγχρόνως ο αναλυτικός τους χαρακτήρας θα σήμαινε την αντιφατικότητα της άρνησής τους.[138] Έτσι, τελικά αναφερόμαστε σε τρεις κατηγορίες: τις αναλυτικές a priori, τις συνθετικές a priori και τις συνθετικές a posteriori. [139]

---

[133] . Δες αναλυτικότερα, Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 101-111

[134] . Δες αναλυτικότερα, Καντ, Κριτική του Καθαρού Λόγου, σε διάφορα σημεία

[135] . Καντ, Κριτική του καθαρού λόγου, Β3, εκδ. Παπαζήση

[136] . Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 152

[137] . Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ.152

[138] . Δες αναλυτικότερα, Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 151-152

[139] . Ο διαχωρισμός του Καντ σε αυτά τα είδη των προτάσεων έχει κατά καιρούς υποστεί κριτική. Σύμφωνα, για παράδειγμα, με το Γ. Τζαβάρα, μεταφραστή και σχολιαστή των *Προλεγομένων* «οι συνηθέστερες μομφές, που επιρρίπτονται στην καντιανή διάκριση ανάμεσα στις συνθετικές και στις ανλυτικές κρίσεις, είναι α) ότι ο Καντ λαβαίνει υπόψη του μόνο όσες κρίσεις αποτελούνται από υποκείμενο και κατηγορούμενο, β) ότι ο καντιανός καθορισμός των αναλυτικών κρίσεων ως εκείνων των οποίων το υποκείμενοπεριέχει το κατηγορούμενό του είναι εικαστικός και γι' αυτό ανακριβής (Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική φυσική, σελ.36, εκδ.Δωδώνη).

Β3.2.3: <u>Μια πρόταση κατηγοριοποίησης των (φιλοσοφικών) προτάσεων από το ΔΥ</u>

Ένας τέτοιος διαχωρισμός τον οποίο επιχείρησε ο Καντ δε θα μπορούσε να βρει σύμφωνο το ρεύμα του ΔΥ για διάφορους λόγους. Ένας, κατά τη γνώμη μας λόγος είναι ότι ο διαχωρισμός του Καντ γίνεται με τυπικά κριτήρια (είναι ή δεν είναι), βάσει δηλαδή μιας μορφής τυπικής λογικής. Ο ΔΥ δεν αρνείται την τυπική λογική, δεν την δέχεται, όμως, ως εργαλείο φιλοσοφικής θεώρησης. Έτσι, σε ένα διαχωρισμό που επιχειρείται με βάση το ΔΥ βλέπουμε μια διαφορετική οπτική. Ο διαχωρισμός αυτού του είδους συμπεριλαμβάνει τρεις κατηγορίες προτάσεων, αφού πρώτα από όλα ξεκαθαρίσει ότι δεν υφίσταται η έννοια της απριορικότητας: « οι κατηγορίες διαμορφώνονται μέσα από τη γενίκευση της κοινωνικής πρακτικής, άρα είναι a posteriori και ο αριθμός τους δεν είναι σταθερός […] Η γενεαλογία των κατηγοριών συνηγορεί υπέρ του ιστορικού και όχι του προεμπειρικού χαρακτήρα τους. Επίσης δεν υπάρχουν συνθετικές a priori προτάσεις, που υποτίθεται ότι είναι προτάσεις των θεωρητικών επιστημών. Οι επιστημονικές προτάσεις προκύπτουν από τη θεωρητικοποίηση (και υπέρβαση) της επιστημονικής πρακτικής. Δεν υπάρχουν, τέλος, a priori προτάσεις, οι οποίες, κατά την καντιανή άποψη, θα ήταν οι προτάσεις της μεταφυσικής. Οι φιλοσοφικές, άρα «μεταφυσικές» προτάσεις, είναι και αυτές, a posteriori: διαμορφώνονται με τη θεωρητικοποίηση της κοινωνικής πρακτικής, ενώ ταυτόχρονα υπερβαίνουν το πεδίο της εμπειρίας, ως η ορθολογική ή μυστικοποιημένη αναπαράσταση της πραγματικότητας. Τα αιτήματα (postulats), οι αρχές (principes) κ.λπ., είναι εκ των υστέρων (a posteriori) έστω κι αν τίθενται αξιωματικά». [140] Έτσι, οι (φιλοσοφικές) προτάσεις κατηγοριοποιούνται ως εξής: α) υπάρχει μια κατηγορία που συμπεριλαμβάνει εκείνες τις προτάσεις που αναδύονται μέσα από την εμπειρία-και ειδικά από την επιστημονική πρακτική-ως η γενίκευση και η θεωρητική υπέρβαση των ειδικών μορφών με τις οποίες πραγματοποιούνται οι φυσικές σχέσεις. Ο έλεγχος αυτών των προτάσεων δεν υπόκειται στα κριτήρια της τυπικής λογικής. Η αληθοτιμή τους δεν μπορεί να είναι 0 ή 1. Άρα δεν είναι αληθείς ή ψευδείς, πάντα με τα τυπικά κριτήρια, είναι όμως ορθές ή μη ορθές. Είναι προτάσεις καθολικές που υπερβαίνουν το ειδικό και το ατομικό. Τέτοιες είναι για παράδειγμα η αρχή της αιτιότητας στη φύση, η κίνηση είναι τρόπος ύπαρξης της ύλης κ.λπ. β) η δεύτερη κατηγορία συμπεριλαμβάνει εκείνες τις προτάσεις που προϋποθέτουν έναν εξαιρετικά υψηλό βαθμό αφαίρεσης και γενίκευσης. Η σχέση τους με την εμπειρία είναι περισσότερο διαμεσολαβημένες και απόμακρες. Παραδείγματα τέτοιων προτάσεων είναι η θέση για την απειρότητα του χωροχρόνου, ότι η φύση συνιστά μια πραγματικότητα ανεξάρτητη από το υποκείμενο κ.λπ. Οι προτάσεις αυτές αποτελούν αρχές κι όχι νόμους, γ) η τρίτη και τελευταία κατηγορία είναι εκείνες οι προτάσεις που παρά το γεγονός ότι σχετίζονται με πραγματικότητες του φυσικού και κοινωνικού κόσμου είναι απογυμνωμένες από επιστημονικά και ορθολογικά θεμέλια. Πρόκειται για στρεβλές αντανακλάσεις της πραγματικότητας στην ανθρώπινη νόηση. Τέτοιες θέσεις αποτελούν τα δόγματα περί αθανασίας της ψυχής, δημιουργίας του σύμπαντος κ.λπ.[141] Είναι φανερό ότι η παραπάνω κατηγοριοποίηση απέχει πολύ από μια θετικιστική θεώρηση: η αλήθεια δεν ταυτίζεται με την επιστημονική αλήθεια και ειδικά με την επιστημονική αλήθεια των φυσικών επιστημών.

Β3.2.4: <u>Η κατά Καντ ένταξη των μαθηματικών προτάσεων</u>

Ας περάσουμε τώρα στις μαθηματικές προτάσεις. Οι μαθηματικές προτάσεις κατά τον Καντ ήταν a priori συνθετικές και μάλιστα περιέχονται στη δεύτερη υποκλάση. Αυτό σημαίνει τα εξής: α) πρόκειται για προτάσεις που επεκτείνουν τη γνώση γιατί προσθέτουν κάτι νέο στην έννοια την οποία πραγματεύομαι (συνθετικότητα/κοίτα Προλεγόμενα) και β) πηγάζουν από τον καθαρό νου και την καθαρή λογική (απριορικότητα) με άλλα λόγια δεν έχουμε εμπλοκή της εμπειρίας. Όπως, χαρακτηριστικά, έγραφε ο ίδιος ο Καντ «όλες οι μαθηματικές κρίσεις είναι συνθετικές» και αφού εξηγεί το λάθος των μαθηματικών να προσπαθήσουν να γνωρίσουν ακόμα και τα αξιώματα με βάση την αρχή της αντίφασης καταλήγει στο ότι «οι κυρίως μαθηματικές προτάσεις είναι πάντα κρίσεις a priori και όχι

[140] . Ε. Μπιτσάκης, Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, σελ. 48-49
[141]. Ε. Μπιτσάκης, Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, σελ. 49-52

εμπειρικές, γιατί περιέχουν αναγκαιότητα, την οποία δεν μπορεί να παράσχει η εμπειρία». Και συνεχίζει: «Αν, όμως, κάποιος δε θελήσει να συμφωνήσει σε αυτό, πολύ καλά: περιορίζω την πρότασή μου στα καθαρά μαθηματικά, όπου ήδη στην έννοια τους συμπεριλαμβάνεται ότι δεν περιέχεται γνώση εμπειρική, παρά μόνο καθαρή γνώση a priori».[142] Κι ακόμα μας εξηγεί ότι «τα καθαρά μαθηματικά και ιδίως η καθαρή γεωμετρία μπορούν να έχουν αντικειμενική πραγματικότητα, μόνο υπό τον όρο ότι αναφέρονται σε αντικείμενα των αισθήσεων, αναφορικά προς τα οποία όμως ισχύει το αξίωμα ότι η κατ' αίσθηση παράστασή μας δεν είναι κατά κανένα τρόπο παράσταση των πραγμάτων **ειδωμένων καθ΄εαυτά**, **παρά μόνο του τρόπου κατά τον οποίο αυτά μας φαίνονται**»[143] ,(η υπογράμμιση δική μας).

Με φόντο αυτές τις διαπιστώσεις παρατίθεται το γνωστό παράδειγμα του Καντ με το άθροισμα 7+5=12. Εδώ τα πράγματα αρχίζουν, μάλλον, να γίνονται περίπλοκα και η σκέψη του Καντ λεπτή και βαθιά. Για να στηρίξει το σκεπτικό του για τη συνθετικότητα αυτής της πρότασης ακολουθεί τα εξής βήματα: α) υποστηρίζει ότι η πρόταση 7+5=12 δεν περιέχει τίποτα περισσότερο από τη συνένωση δυο αριθμών σε ένα, χωρίς να νοείται ποιος είναι αυτός ο αριθμός, που συμπεριλαμβάνει και τους δυο, β) για να βιώσω την έννοια του 12 θα πρέπει να βοηθηθώ από την εποπτεία, γ) αφού με τη βοήθεια της εποπτείας, χρησιμοποιώντας π.χ τα πέντε μου δάκτυλα βρω το 12 τότε έχω διευρύνει τις παλιές μου έννοιες και βρίσκω μια νέα. Επομένως, οι μαθηματικές προτάσεις είναι πάντα συνθετικές. Ο Καντ δε διαφοροποιείται στο σκεπτικό του όταν αναφέρεται και στη γεωμετρία.[144] Στη συνέχεια αντιλαμβανόμενος το ερώτημα που προκύπτει αναγκαστικά από τη σύνθεση συνθετικότητας και απριορικότητας θέτει και ο ίδιος τον προβληματισμό: «πώς είναι δυνατό να εποπτεύουμε κάτι a priori;» και «πώς μπορεί η εποπτεία του αντικειμένου να προηγείται του ίδιου του αντικειμένου;»[145]. Η απάντησή του σχετίζεται με τις έννοιες του χώρου και του χρόνου: «Ο χώρος και ο χρόνος είναι εκείνες οι εποπτείες, τις οποίες τα καθαρά μαθηματικά θέτουν ως βάση όλως των γνώσεων και κρίσεών τους, οι οποίες θεωρούνται ως αποδεικτικές και συνάμα αναγκαίες, γιατί τα μαθηματικά οφείλουν να παρουσιάζουν, δηλαδή να κατασκευάζουν, όλες τις έννοιες τους πρώτα μέσα στην εποπτεία και τα καθαρά μαθηματικά μέσα στην καθαρή εποπτεία. Τα μαθηματικά […] είναι αδύνατο να προχωρήσουν έστω κι ένα βήμα όσο τους λείπει η καθαρή εποπτεία, γιατί μόνο αυτή τους δίνει το υλικό για συνθετικές κρίσεις a priori».[146]

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να κάνουμε μια γενικότερη παρατήρηση για τον καντιανό διαχωρισμό. Ο Καντ όταν θέτει τα κριτήρια διαχωρισμού αναφέρεται γενικά σε κρίσεις, αναμειγνύοντας με αυτό τον τρόπο τις μεταφυσικές[147] με τις επιστημονικές. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι «η μεταφυσική είναι γνώση a priori, γνώση που πηγάζει από τον καθαρό νου και την καθαρή λογική»[148] και ότι «…ως προς αυτό η Μεταφυσική δε θα είχε καμία διαφορά από τα καθαρά Μαθηματικά· γι' αυτό θα πρέπει να ονομάζεται καθαρή

---

[142] .Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 38-39, εκδ. Δωδώνη

[143] .Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 66-67, εκδ. Δωδώνη

[144] .Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 39, εκδ. Δωδώνη

[145]. Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 58-59, εκδ. Δωδώνη

[146] . Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 61, εκδ. Δωδώνη

[147] . Ο Καντ χρησιμοποιεί τον όρο μεταφυσική με δυο έννοιες. Και οι δυο έννοιες έχουν να κάνουν με τη λεγόμενη κοπερνίκεια στροφή της καντιανής φιλοσοφίας. Κατά τη μια οπτική η μεταφυσική υποχρέωση της μεταφυσικής είναι να στραφεί προς αυτό τούτο το γνωστικό υποκείμενο προκειμένου να αποκαλυφθούν οι a priori υποκείμενες δομές της γνώσης. Επομένως αντικείμενο της μεταφυσικής δεν είναι πλέον οι αρχές του Είναι αλλά ο αναφερόμενος και σχετιζόμενος προς αυτό το Είναι λόγος. Με άλλα λόγια μιλάμε πλέον για μια μεταφυσική της γνώσης και του γνωστικού υποκειμένου. Υπό τη δεύτερη οπτική η μεταφυσική περιλαμβάνει και αντικείμενα πέρα και πάνω από την εμπειρία. Δηλαδή περιλαμβάνει υπερεμπειρικά, υπερβατικά ή κυριολεκτικά μεταφυσικά αντικείμενα (Θεός, κόσμος ως ολότητα και ψυχή ως μεταφυσική ουσία). Αυτές οι δυο οπτικές είναι που οδηγούν στη διαφορά υπερβατικής και υπερβατολογικής γνώσης. Υπερβατολογική είναι η γνώση η οποία ασχολείται με το δικό μας μόνο τρόπο γνώσης κι έτσι η υπερβατολογική φιλοσοφία αποτελεί και απάρνηση της μεταφυσικής ως υπεβατικής (μετεμπειρικής) φιλοσοφίας, αφού αυτή η δεύτερη εκδοχή δε δύναται να υπάρξει (δες αναλυτικότερα Δημητρακόπουλο Μ., Στοιχείωση Ευρωπαϊκής Φιλοσοφίας, σελ. 344-349, Αθήνα, 2003).

[148] . Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 34, εκδ. Δωδώνη

φιλοσοφική γνώση»[149] και ακόμα ότι «η φιλοσοφική γνώση είναι λογική γνώση βάσει εννοιών, η μαθηματική γνώση είναι λογική γνώση βάσει κατασκευής εννοιών».[150] Όμως, τι σημαίνει αυτή η σύμπηξη επιστημονικών και φιλοσοφικών κρίσεων σε ένα αξιολογικό πλαίσιο με κοινά κριτήρια; Σημαίνει ότι ανοίγει το δρόμο σε μια θετικιστική σκέψη όπου σε μια πρώτη φάση επιστήμη και φιλοσοφία (έστω κι έτσι όπως την εννοεί ο Καντ) αρχίζουν να συναντιόνται όχι με ένα διαλεκτικό τρόπο αλλά μέσω τυπικής λογικής (έλλειψη αντίφασης, ορθότητα μαθηματικού φορμαλισμού) κι έτσι κάνοντας τα μεταξύ τους όρια δυσδιάκριτα, δίνει την ευκαιρία να τεθεί η βάση για την αμφισβήτηση της αξίας της φιλοσοφίας (βασικά ως γνωσιολογία).

Β3.2.5: <u>Μια κριτική από την πλευρά του ΔΥ</u>

Σε σχέση με τη θεώρηση του ΔΥ για την ένταξη των μαθηματικών προτάσεων έχουμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση: οι μαθηματικές προτάσεις με βάση την παραπάνω κατηγοριοποίηση δεν μπορούν να καταταχθούν σε καμία από τις τρεις κατηγορίες. Δεν πρόκειται, όμως, για ένα φιλοσοφικό έλλειμμα, για τον απλούστατο λόγο ότι η κατηγοριοποίηση που παρουσιάσαμε αφορά σε φιλοσοφικές προτάσεις κι επομένως οι μαθηματικές προτάσεις ως προτάσεις επιστημονικές κι όχι φιλοσοφικές δε χωράνε στα παραπάνω σχήματα.

Κάνοντας μια πρόχειρη σκέψη θα λέγαμε ότι πριν από την οποιαδήποτε κατάταξη των προτάσεων χρειάζεται να γίνει μια κατηγοριοποίηση των επιστημών.[151] Σύμφωνα με τον Κομκόφ[152] άξονας της ιστορίας της ταξινόμησης των επιστημών είναι το ζήτημα των σχέσεων επιστήμης-φιλοσοφίας. Η ιστορία αυτή χωρίζεται σε τρεις περιόδους: α) στο πρώτο στάδιο, κατά την αρχαιότητα και ως ένα βαθμό στο Μεσαίωνα, διακρίνουμε το αδιαίρετο φιλοσοφίας-επιστήμης. Βέβαια στους αρχαίους στοχαστές και κυρίως στον Αριστοτέλη υπάρχουν σε εμβρυώδη κατάσταση οι αρχές που αργότερα χρησιμοποιήθηκαν για την ταξινόμηση των επιστημών συμπεριλαμβανομένης της αρχής διαίρεσης του συνόλου των γνώσεων, σύμφωνα με το αντικείμενό της σε τρεις κύριους τομείς: τη φύση (φυσική), την κοινωνία (ηθική) και τη νόηση (λογική), β) στο δεύτερον στάδιο η φιλοσοφία αρχίζει να διασπάται σε σειρά χωριστών επιστημών, όπως για παράδειγμα τα μαθηματικά, η μηχανική κ.λπ. ο γενικός χαρακτήρας ταξινόμησης των επιστημών καθορίζεται από την κυρίαρχη αναλυτική μέθοδο. Ταξινομητικές προτάσεις διατυπώθηκαν από τους Ουάρτε, Μπαίηκον, Χομπς, Ντεκάρτ, Γκασαντί, Λοκ, Λομονόσοφ, Ντινερό, Ντ΄Αλαμπέρ, γ) στο τρίτο στάδιο το οποίο ξεκινά κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα περιλαμβάνει δυο διαφορετικές τάσεις. Η πρώτη τάση είναι η τυπική η οποία βασίζεται στην αρχή του συντονισμού από το γενικό στο μερικό. Για παράδειγμα ο Σαιν Σιμόν πρότεινε την αντικειμενική αρχή ταξινόμησης των επιστημών σύμφωνα με το

---

[149]. Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 35, εκδ. Δωδώνη

[150] . Καντ, Κριτική της Καθαρής Λογικής, Α 713-714/Β741-742

[151] . Απόπειρες κατάταξης των επιστημών έγιναν από την εποχή, ήδη, της αρχαίας Ελλάδας. Σύμφωνα με την πυθαγόρεια αντίληψη που καταγράφεται στο 7ο βιβλίο της *Πολιτείας*, διακρίνονται τέσσερις μαθηματικές επιστήμες: η αριθμητική, η γεωμετρία, η αστρονομία και η αρμονική. Οι μαθηματικές αυτές επιστήμες λειτουργούν με το ρόλο προπαίδευσης για την επιστήμη του όντος, τη διαλεκτική. Τα μαθηματικά και η διαλεκτική, ωστόσο, βρίσκονται στην κορυφή της πυραμιδικής ιεράρχησης των επιστημών γιατί δίνουν τη δυνατότητα να μελετηθεί η πρώτη αρχή. Ο Αριστοτέλης διαιρεί τη φιλοσοφία σε θεωρητική της οποίας σκοπός είναι η γνώση για τη γνώση, σε πρακτική της οποίας σκοπός είναι η γνώση για τη δράση και σε ποιητική της οποίας σκοπός είναι η γνώση για τη δημιουργία. Η θεωρητική φιλοσοφία με τη σειρά της υποδιαιρείται σε φυσική και την πρώτη φιλοσοφία που στο *Μετά τα Φυσικά* ονομάζεται θεολογία. Η φυσική φιλοσοφία έχει ως αντικείμενό της όλα όσα υπάρχουν ξεχωριστά και όσα κινούνται. Η μαθηματική φιλοσοφία έχει ως αντικείμενό της αυτό που δεν υπάρχει «καθ΄ έκαστον» και δεν κινείται. Η πρακτική φιλοσοφία περιέχει την ηθική και την πολιτική, ενώ στην ποιητική περιέχονται η ρητορική και η ποίηση. Η λογική δε θεωρείται αυτοτελής επιστήμη αλλά παίζει το ρόλο προπαιδευτή για το σύνολο τω επιστημών. Οι θεωρητικές επιστήμες θεωρούνται ανώτερες από τις πρακτικές και ποιητικές, ενώ η «πρώτη φιλοσοφία» είναι ανώτερη από τις υπόλοιπες θεωρητικές επιστήμες.

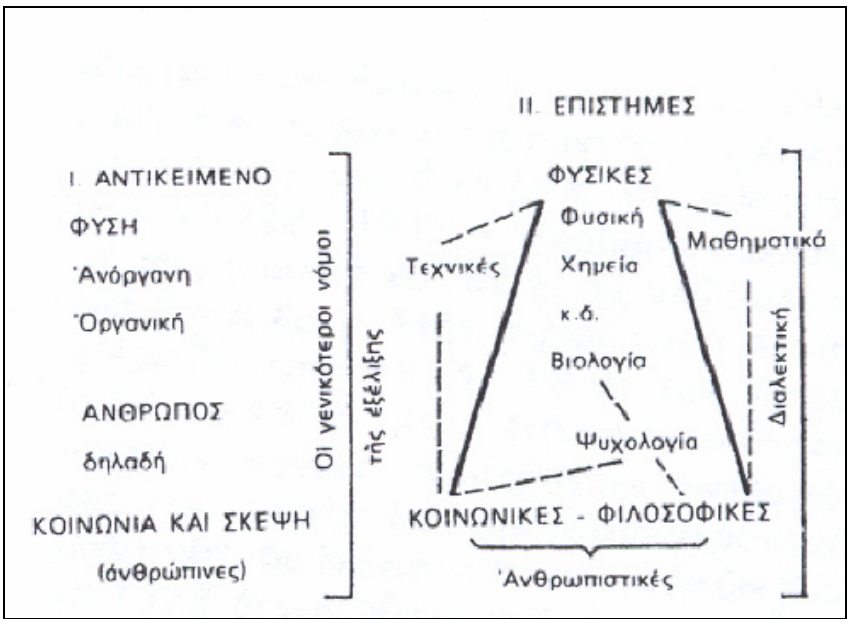
[152] . Κομκόφ Γ., λήμμα *Επιστήμη*, Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια

πέρασμα από τα απλούστερα και γενικότερα φαινόμενα στα πιο σύνθετα και μερικά. Ο Κοντ βασιζόμενος στον παραπάνω διαχωρισμό πρότεινε την εξής ιεραρχία: μαθηματικά, αστρονομία, φυσική, χημεία, φυσιολογία, κοινωνιολογία. Η τάση αυτή δεν παρουσιάσθηκε ως μια μονομπλόκ άποψη. Για παράδειγμα ενώ ο Σπένσερ αποδέχεται την αρχή του συντονισμού από το γενικό στο μερικό(σε τάξη μειούμενης αφαίρεσης) κριτικάρει τον Κοντ και υποστηρίζει την άποψη ότι όλες οι επιστήμες διαιρούνται σε αφηρημένες όπως η λογική και τα μαθηματικά, σε συγκεκριμένες, όπως η αστρονομία, η βιολογία, η ψυχολογία και η κοινωνιολογία και οι ενδιάμεσες, όπως η μηχανική, η φυσική και η χημεία. Ανάμεσα σε αυτές τις ομάδες υπάρχουν σαφή όρια διαχωρισμού, ενώ στο εσωτερικό τους υπάρχει βαθμιαίο πέρασμα. Η δεύτερη τάση σε αυτό το τρίτο στάδιο βασίστηκε στην αρχή της υπαγωγής, σύμφωνα με την ιδέα της ανάπτυξης και της γενικής σχέσης των φυσικών φαινομένων. Σε αυτή την τάση όπως και στην πρώτη διακρίνονται δυο υποτάσεις. Στην πρώτη (Καντ, Σέλλινγκ, Χέγκελ) έχουμε την αρχή της υπαγωγής σε ιδεαλιστική βάση. Για παράδειγμα ο Χέγκελ υποστηρίζει την τριαδική διαίρεση που βρισκόταν σε αντιστοιχία με το γενικότερο φιλοσοφικό του σύστημα το οποίο χωριζόταν σε λογική, φιλοσοφία της φύσης και φιλοσοφία του πνεύματος. Η φιλοσοφία της φύσης με τη σειρά της χωρίζεται σε μηχανισμό-μηχανική, αστρονομία, φυσική χημεία, οργανισμό-βιολογία. Σύμφωνα με τον Κόμκοφ πρόκειται για ένα διαχωρισμό που παρά τον τεχνητό του χαρακτήρα αντανακλά, αν και σε στρεβλωμένη μορφή, την ιδέα της εξέλιξης της φύσης από τα κατώτερα στάδια στα ανώτερα, ως και την εμφάνιση του σκεπτόμενου πνεύματος. **Στη δεύτερη υποτάση έχουμε την ανάπτυξη της αρχής της υπαγωγής και τον τρόπο της θεωρητικής σύνθεσης των γνώσεων σε υλιστική βάση**. Για να επιτευχθεί η σύνθεση των επιστημών στα μέσα του 19ου αιώνα ήταν απαραίτητο να αντιμετωπισθεί επιτυχώς η θετικιστική διαίρεση που διαχώριζε τις θετικές επιστήμες από τη φιλοσοφία, αλλά και ανάμεσα στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες. Το ρήγμα που επέφερε η νεοκαντιανή θεώρηση ανάμεσα στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες οριοθετούνταν από την άποψη ότι στις μεν πρώτες τα φαινόμενα είναι νομοτελειακά στις μεν δεύτερες αποτελούν μια συνάθροιση τυχαίων-χαοτικών γεγονότων. Ο Κοέν κι εν μέρει ο Κάσιρερ και Νάτορπ θεωρούσαν ότι πρέπει να επιτευχθεί μια ενότητα στην πολυμορφία, με τη βοήθεια μαθηματικών διαμορφωμένων εννοιών. Με αυτό το σκεπτικό τα μαθηματικά μετατρέπονται σε κύρια επιστήμη. Στους κλασικούς, όμως, του Μαρξισμού έχουμε μια υπέρβαση όλων των προηγούμενων θεωρήσεων. Διατυπώνονται νέες αρχές που συνδυάζουν δυο κύριες στιγμές: τον αντικειμενικό τρόπο και την αρχή της υπαγωγής (ή την αρχή της ανάπτυξης). Αποφασιστικό ρόλο στην ταξινόμηση αποτελεί η ανακάλυψη των κυριότερων νόμων της υλιστικής διαλεκτικής. Με την ανακάλυψή τους δημιουργείται η βάση για τη γενική θεωρητική σύνθεση των επιστημών που περιλαμβάνει πρώτα από όλα τους τρεις κυριότερους τομείς της γνώσης: γνώση για τη φύση, την κοινωνία και τη νόηση. Η σύνθεση αυτή προϋποθέτει τη λύση δυο προβλημάτων που αφορούν στην αμοιβαία σχέση της φιλοσοφίας και της φυσιογνωσίας και των φυσικών και κοινωνικών επιστημών. Έτσι, καθορίζεται και η θέση των τεχνικών επιστημών στο γενικό σύστημα γνώσης: βρίσκονται (οι τεχνικές επιστήμες) στο σημείο επαφής φυσικών και κοινωνικών επιστημών. Για τον Ένγκελς προηγείται η διαδοχικότητα των μορφών κίνησης προκειμένου να καταλήξουμε σε μια (πρώτη) κατάταξη. Έτσι, η σειρά κατάταξης είναι μηχανική…, φυσική…, χημεία…, βιολογία.[153] Μια μεταγενέστερη ταξινόμηση από την πλευρά του ΔΥ προτείνεται στον πίνακα 1. Στον πίνακα αυτό δίνονται εποπτικά οι σχέσεις μεταξύ των τριών κυριότερων επιστημονικών τομέων.[154]

---

[153] . Με βάση την εξέλιξη της επιστήμης και συγκεκριμένα την εμφάνιση της πυρηνικής και κβαντικής φυσικής η κατάταξη που προτάθηκε από τον Ένγκελς διαφοροποιήθηκε. Σύμφωνα με αυτή τη διαφοροποίηση μόνο η μοριακή φυσική προηγείται της χημείας στη γενική σειρά των επιστημών, ενώ η φυσική του «αιθέρα» ακολουθεί μετά από τη χημεία. Παρά τις νέες επιστημονικές εξελίξεις το σχήμα του Ένγκελς διατηρήθηκε πολλές φορές με δογματικό τρόπο (δες αναλυτικότερα το λήμμα Επιστήμη στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια του Γ. Ντ. Κομκόφ).

[154] . Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι η γνήσια επιστημονική φιλοσοφία δεν αντικαθιστά τις ιδιαίτερες επιστήμες , αλλά μόνο τις εξοπλίζει με τη γενική μέθοδο γνώσης και με τη θεωρία της νόησης, χάρη στις οποίες κατέχει νευραλγική θέση στο σύστημα των επιστημών. Με άλλα λόγια: οι μέθοδοι των ιδιαίτερων επιστημών περιορίζεται συνήθως στο πλαίσιο του αντικειμένου της



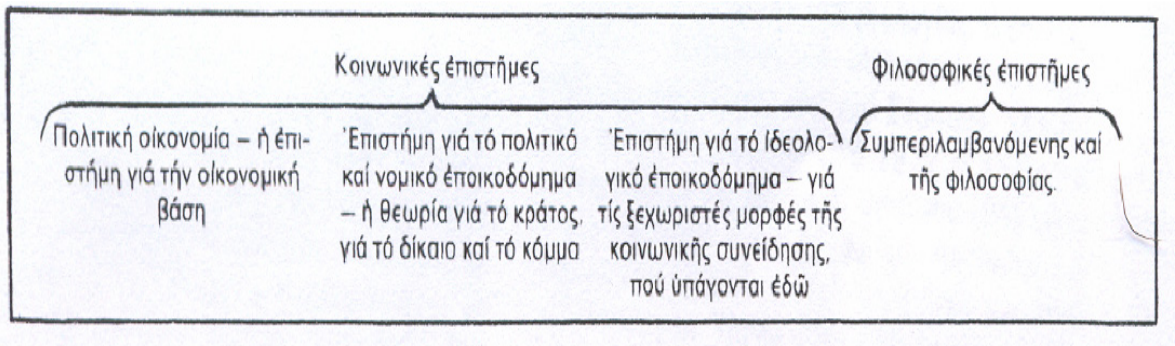
Πίνακας1

Ορισμένες παρατηρήσεις:
[1] Οι «τονισμένες» γραμμές υποδηλώνουν τη σχέση πρώτης τάξης που υπάρχει ανάμεσα στους τρεις αυτούς κυριότερους επιστημονικούς τομείς.
[2] Ο πίνακας είναι χωρισμένος σε ένα αριστερό και σε ένα δεξιό μέρος η σύγκριση των οποίων επεξηγεί την ουσία των αρχών της αντικειμενικότητας και της εξέλιξης σχετικά με την ταξινόμηση. Η ιστορική διαδοχή όσον αφορά στη εμφάνιση και στην αμοιβαία σχέση των βαθμίδων εξέλιξης του κόσμου όπως και στην αμοιβαία σχέση των γενικών (διαλεκτική) και μερικών (υπόλοιπες επιστήμες) νόμων που τον διέπουν εκφράζεται στο σχεδιάγραμμα από τη σειρά διάταξης των επιστημών.
[3] Εκτός των τριών κύριων τομέων της επιστημονικής γνώσης υπάρχουν στον πίνακα μεγάλοι κλάδοι που βρίσκονται στα σημεία επαφής τους. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν μπορούν να ανήκουν ολοκληρωτικά σε κανένα από τους τρεις αυτούς τομείς. Οι σχέσεις ανάμεσα στους τρεις κύριους τομείς και σε στους εφαπτόμενους κλάδους απεικονίζονται με τις στικτές γραμμές κι εκφράζουν μια σχέση δεύτερης τάξης. Στα σημεία επαφής βρίσκονται οι τεχνικές επιστήμες με την ευρεία έννοια στις οποίες περιλαμβάνονται οι γεωργικές και ιατρικές επιστήμες που ορίζονται από τη συνάντηση φυσικών και κοινωνικών επιστημών **και τα μαθηματικά που βρίσκονται στο σημείο συνάντησης φυσιογνωσίας (κυρίως της φυσικής) και φιλοσοφίας (κυρίως της λογικής).**
[4] Ανάμεσα στους τρεις κυριότερους τομείς βρίσκεται ως αυτοτελής επιστήμη η ψυχολογία. Η αυτοτέλειά της έγκειται στο ότι βρίσκεται στην πραγματικότητα εκεί που συναντιόνται οι δρόμοι της έρευνας για την ψυχική δραστηριότητα του ανθρώπου τόσο από φυσικοιστορική όσο και από κοινωνική άποψη. Η σχέση της, όμως, δεν τελειώνει εδώ: συνδέεται ακόμα στενότερα με την επιστήμη της νόησης, δηλαδή με τη λογική και άρα με τη φιλοσοφία.

συγκεκριμένης επιστήμης. Αντίθετα οι μέθοδοι της φιλοσοφίας έχουν γενικό χαρακτήρα. Επομένως, υπάρχει η φιλοσοφία πρέπει να συμπεριλαμβάνεται σε μια κατάταξη επιστημών, ταυτόχρονα, όμως, πρέπει να συνειδητοποιούμε και την ιδιαιτερότητά της που έγκειται στο ότι συμπυκνώνει του ςπιο γενικούς νόμους της φύσης, της κοινωνίας και της νόησης.

[5] Στον πίνακα αυτό δεν απεικονίζονται οι σχέσεις τρίτης τάξης. Για παράδειγμα ανάμεσα στη λογική (ως μέρους της φιλοσοφίας) και στα μαθηματικά υπάρχει η μαθηματική λογική.

Λίγο παραπάνω είδαμε την ταξινόμηση του των επιστημών κατά Ένγκελς που όμως δεν περιείχε τις κοινωνικές επιστήμες. Θα πρέπει, λοιπόν, να σημειώσουμε ότι τις κοινωνικές επιστήμες ο Ένγκελς τις έβλεπε ως ανθρώπινη ιστορία (κι έτσι τις αποκαλούσε) επειδή κάθε μια από αυτές πρώτα από όλα είναι ιστορία της επιστήμης. Στον πίνακα 2 βλέπουμε ένα τρόπο κατάταξής τους.[155]

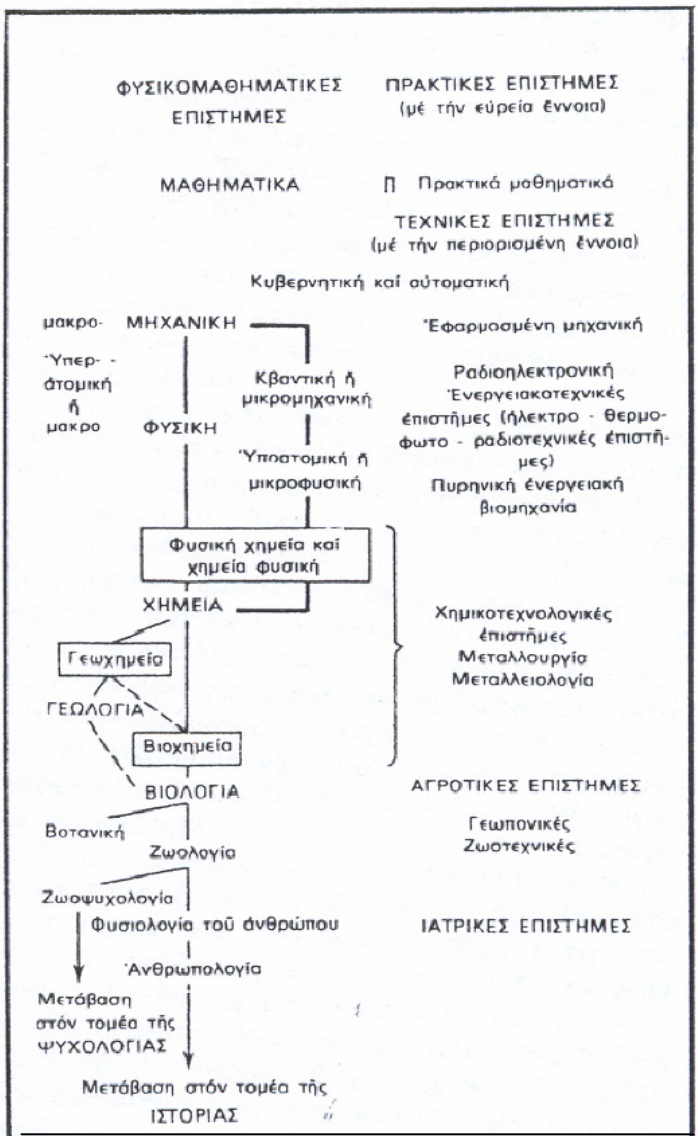


Πίνακας 2

Όσον αφορά στην κατάταξη των φυσικών και τεχνικών επιστημών έχουν συντελεστεί ριζικές αλλαγές σε σχέση με το 19ο αιώνα.[156] Στον πίνακα 3 δίνεται μια άποψη για αυτή την κατάταξη.

[155] . Σύμφωνα με τον Κομκόφ την ιστορία της ανθρωπότητας μπορούμε να την θεωρήσουμε από δυο απόψεις: ως εξέλιξη ολόκληρης της κοινωνίας, στην αμοιβαία εξάρτηση όλων της των πλευρών και των στοιχείων, και ως εξέλιξη ορισμένων δομικών όψεων της, ξεχωρίζουν από τη γενική τους αλληλοσύνδεση. Στην πρώτη περίπτωση διαμορφώνεται η κυρίως ιστορική επιστήμη με τη στενή έννοια της λέξης, που είναι η ιστορία των χωριστών βαθμίδων εξέλιξης της κοινωνίας (από την πρωτόγονη ως τη σημερινή). Εδώ υπάγονται επίσης η αρχαιολογία και η εθνολογία. Στη δεύτερη περίπτωση διαμορφώνεται η ομάδα των κοινωνικών επιστημών, οι οποίες αντανακλούν την αμοιβαία σχέση ιδιαίτερων πλευρών ή στοιχείων της εσωτερικής δομής της κοινωνίας, της οικονομικής βάσης και του εποικοδομήματος της-πολιτικού και ιδεολογικού. Η αντικειμενική διαδοχή της μετάβασης από τη βάση σε όλο και πιο υψηλές περιοχές του εποικοδομήματος , καθορίζει τη σειρά διάταξης των επιστημών αυτής της ομάδας. Το πέρασμα προς τη φιλοσοφία κατά την πορεία της νοερής κίνησης από τη βάση στο εποικοδόμημα και από το πολιτικό στο ιδεολογικό εποικοδόμημα, αποτελεί ταυτόχρονα έξοδο από τα πλαίσια των κοινωνικών επιστημών αυτών καθαυτών στην περιοχή των γενικών κοσμοθεωρητικών προβλημάτων που συνδέονται με την επιστήμη των γενικότερων νόμων της εξέλιξης και με την επιστήμη της νόησης.

[156] . Ο Κομκόφ θεωρεί ότι η εξέλιξη της φύσης μπορούμε να την αναλύσουμε όχι μόνον από τη άποψη των ιδιαίτερων μορφών της κίνησης και ειδών της ύλης, αλλά και από την άποψη της φύσης ως σύνολο, δηλαδή της αλληλεπίδρασης όλων των μορφών κίνησης και ειδών της ύλης που συνυπάρχουν στο δοσμένο στάδιο εξέλιξης.



Πίνακας 3

Με βάση τους παραπάνω διαχωρισμούς βλέπουμε ότι δεν ισχύουν πάντα κάποια τυπικά κριτήρια. Υπάρχουν για παράδειγμα επιστήμες που δεν είναι καθαρά φυσικές ή καθαρά κοινωνικές κ.λπ. Επομένως, υπάρχουν και προτάσεις φιλοσοφικές ή/και επιστημονικές που δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν έτσι ή αλλιώς με βάση κάποια τυπικολογικά κριτήρια. Τα μαθηματικά ήδη είδαμε ότι βρίσκονται στα σύνορα των φυσικών επιστημών και της φιλοσοφίας. Όμως, θα συμπληρώναμε ότι στο βαθμό που μελετάνε και κοινωνικά φαινόμενα έχουν και χροιά κοινωνικής επιστήμης (π.χ. στο βαθμό που μελετάνε μέσω μοντέλων κοινωνικές συμπεριφορές). Ο καντιανός διαχωρισμός σε προτάσεις a priori και a posteriori, σε αναλυτικές και συνθετικές δεν παίρνει υπόψη του τη συνθετότητα των φαινομένων, τις διαλεκτικές τους σχέσεις, τις αλληλοδιεισδύσεις και τους αλληλοκαθορισμούς. Υπάρχουν, λοιπόν, προτάσεις που η αλήθεια τους εξαρτάται από τυπικά κριτήρια και άλλες όχι. Οι δεύτερες επαληθεύονται διαλεκτικά κι όχι τυπικά.

Β3.2.6: <u>Ειδικά για τις μαθηματικές προτάσεις</u>

Άλλωστε δε θα πρέπει να μας διαφεύγει ότι όσον αφορά στις μαθηματικές προτάσεις, είναι προτάσεις που μπορούν να διαψευστούν/ επαληθευτούν ή να αποδειχθούν με

διάφορους τρόπους: μέσω «πειραματικού» ελέγχου, μέσω της τυπικής λογικής, είτε αποκτώντας μια νέα άποψη για τις έννοιες επαλήθευσης-απόδειξης. Η τελευταία δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι είναι αποτέλεσμα εμπειρίας και θεωρητικής γενίκευσης. Κι όταν λέμε ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι επιστημονικές προτάσεις δηλώνουμε υπόρρητα τη συμφωνία τους με την αντικειμενική πραγματικότητα. (Επομένως, ένα είδος ποπεριανής διαψευσιμότητας δε θα χωρούσε σε αυτή την περίπτωση, προκειμένου να νομιμοποιήσουμε την επιβίωση του μαθηματικού οικοδομήματος ή κάποιων μερών του[157]). Η διάψευση, μπορεί να γίνει είτε ως στρεβλή αντανάκλαση της πραγματικότητας στη νόηση, είτε ως διαλεκτική υπέρβαση του παλιού από το νέο. Η ποικιλομορφία των μαθηματικών προτάσεων είναι εμφανής. Για παράδειγμα μερικές από τις κατηγοριοποιήσεις (όχι οι μοναδικές) που θα μπορούσε κανείς να κάνει είναι οι εξής: [α] προτάσεις αξιωματικού χαρακτήρα. Πρόκειται για προτάσεις που δεν υπόκεινται σε διαδικασίες τυπικής απόδειξης, αλλά είναι αποτέλεσμα εμπειρικής παρατήρησης και γενίκευσης. Η αλήθεια τους εδράζεται στη συμφωνία τους με τα εμπειρικά δεδομένα. Τέτοιες προτάσεις είναι για παράδειγμα τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Τώρα, αν μιλάμε για τα αξιώματα των μη ευκλείδειων γεωμετριών, όπως θα εξηγήσουμε σε άλλο σημείο, δεν είναι αυθαίρετες νοητικές κατασκευές απόρροια κάποιας επιφοίτησης αλλά θεωρητική-διαλεκτική υπέρβαση της εμπειρίας με την οποία (εμπειρία) όπως και να έχει, διατηρεί τον ομφάλιο λώρο της, [β] προτάσεις οι οποίες αποδεικνύονται μέσω καθορισμένων αλγοριθμικών διαδικασιών, [γ] προτάσεις των οποίων η αλήθεια στηρίζεται στο θεώρημα πληρότητας του Goedel. Σύμφωνα με αυτό «μια πρωτοβάθμια θεωρία Τ είναι συνεπής, αν και μόνο αν η θεωρία Τ έχει ένα μοντέλο Α». Ποιες οι επιπτώσεις του εν λόγω θεωρήματος; Βλέποντάς τις θα δούμε και την ουσία αυτής της κατηγορίας προτάσεων που περιγράφουμε: «Κωδικοποιεί (σ.σ. το θεώρημα της πληρότητας) ουσιαστικά κάτι που ενώ ήταν ήδη κατοχυρωμένο στο πλαίσια της υπάρχουσας μαθηματικής πρακτικής, δεν έχει γίνει απόλυτα αντιληπτό από τη μαθηματική κοινότητα. Πιο συγκεκριμένα το θεώρημα πληρότητας μας βεβαιώνει, πως στα πλαίσια μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας οι διαδικασίες *επαληθευσιμότητας* και *αποδειξιμότητας* είναι ισοδύναμες. Μια πρόταση φ είναι *αποδείξιμη* στα πλαίσια μιας πρωτοβάθμιας μαθηματικής θεωρίας Τ αν και μόνο αν η φ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα της Τα […] Αν δείξεις πως μια απόδειξη υπάρχει, έχεις πετύχει. Η πρόταση είναι ένα θεώρημα της αντίστοιχης θεωρίας. Ο τρόπος που κάνει μαθηματικά (σ.σ. κάποιος που είναι εξοικειωμένος με τη μαθηματική πρακτική) είναι κατά βάση εικονοπλαστκός κι όχι μηχανικά αλγοριθμικός. Η εικονοπλασία αυτή έχει μοντελοθεωρητικό χαρακτήρα και χαρακτηρίζεται από αυστηρές διαδικασίες επαληθευσιμότητας, συνδυασμένες βέβαια και με διαδικασίες καθαρά συμπερασματικές. Το θεώρημα πληρότητας, λοιπόν, νομιμοποίησε τη θεμελιώδη εικονοπλαστική μαθηματική δραστηριότητα, βεβαιώνοντας πως, αντί να αποδείξουμε μηχανικά μια μαθηματική πρόταση, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια απόδειξή της, μέσω μιας κατάλληλης διαδικασίας επαληθευσιμότητας. Αυτή η διαδικασία θα πρέπει απαραίτητα να μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η πρόταση είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα της αντίστοιχης θεωρίας, στα πλαίσια της οποίας μπορούμε να ισχυριστούμε μετά πως υπάρχει μια απόδειξη της πρότασης», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα)[158]. (Τι σημαίνει η παραπάνω παρατήρηση; Ότι το θεώρημα πληρότητας επιβεβαιώνει με έναν ιδιαίτερο τρόπο τη σύνδεση μαθηματικών-εμπειρίας. Ξεκινάνε από αυτή (τα μαθηματικά), θεωρητικοποιούνται και σχετικά αυτονομούνται αλλά επιστρέφουν σε αυτή, ολοκληρώνοντας ένα κύκλο, ο οποίος έτσι κι αλλιώς επαναλαμβάνεται αέναα. Η επαλήθευση εν προκειμένω, μέσω ενός μοντέλου, που έχει την ισχύ απόδειξης, είναι μια διαδικασία που διαπιστώνει κάποια εικασία και αυτό γίνεται σε άμεση σύνδεση με την εμπειρία (π.χ. είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα που αναφέρεται για τη υποστήριξη της παραπάνω θέσης σχετικά με το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου)).[159], [δ] προτάσεις

---

[157] . Για μια υλιστικοδιαλεκτική κριτική του Πόπερ κοίτα αναλυτικότερα: α) Γκέντε Α., Η Φιλοσοφία της Κρίσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή, β) Συλλογικό έργο νέων φιλοσόφων του πανεπιστημίου Λομονόσοφ της Μόσχας, εκδ. Gutenberg, γ) Μπιτσάκης Ε., Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, εκδ. Στάχυ

[158] . Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 180-181, εκδ. Νεφέλη

[159] . Ο. π., σελ. 180-181

που δεν μπορούν να αποδειχτούν ούτε με αλγοριθμικές διαδικασίες, ούτε μέσα σε ένα πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιούμε το θεώρημα πληρότητας. Το πιο κλασικό παράδειγμα αποτελεί η εικασία Goldbach. Είναι γνωστό ότι αυτή εικασία ισχυρίζεται ότι κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Για τέτοιες εικασίες το κλειδί, ίσως, είναι η έκφραση του Lakatos: «οιονεί εμπειρικός». Αυτό σημαίνει ότι στα μαθηματικά ενώ δεν μπορούν να διεξαχθούν πραγματικά πειράματα (με την έννοια που διεξάγονται στη φυσική), εντούτοις συμβαίνει κάτι παρόμοιο. Ας πούμε στην εικασία του Goldbach ακολουθήθηκε ο εξής δρόμος: μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή η εικασία επαληθεύθηκε μέχρι τον αριθμό 10^{14}. Εδώ, λοιπόν, ίσως έχουμε να κάνουμε με ένα νέο παράδειγμα, για να χρησιμοποιήσουμε την κουνιανή ορολογία- χωρίς, ωστόσο, να αποδεχόμαστε το γενικότερο σκεπτικό του Kuhn- που έχει να κάνει με τη σύζευξη μαθηματικών και υπολογιστή και που πιθανώς να αλλάζει τα ήθη της μαθηματικής απόδειξης. Το (ελλιπές) αυτό παράδειγμα κατηγοριοποίησης το εκθέσαμε για να υπογραμμίσουμε τον προβληματικό ορισμό του Kant. Αν υπάρχει αυτός ο πλούτος μαθηματικών προτάσεων, θα μπορούσαμε άραγε όλες αυτές να τις εντάξουμε σε μια ενιαία φιλοσοφική κατηγορία, όπως αυτή των a priori συνθετικών προτάσεων, χρησιμοποιώντας τυπικολογικά κριτήρια; Νομίζουμε, πως όχι και παρά το γεγονός ότι πρόκειται για ένα εσωτερικό διαχωρισμό μαθηματικών προτάσεων, δείχνουμε την ανεπάρκεια του καντιανού διαχωρισμού. Οι μαθηματικές προτάσεις θα λέγαμε καταληκτικά ότι είναι προτάσεις επιστημονικές, δηλαδή εκφράζουν πλευρές της αντικειμενικής πραγματικότητας. Επεκτείνουν την ανθρώπινη γνώση και χαρακτηρίζονται από ιστορικότητα. Ιστορικότητα που έχει να κάνει είτε με την προσέγγιση της πραγματικότητας είτε με τον τρόπο με τον οποίο εμείς τις ερμηνεύουμε γνωσιολογικά.

Β3.2.7: <u>Τελική κρίση</u>

Επιπλέον, η εύλογη απορία που ίσως ανακύψει είναι αν μεταξύ της καντιανής απριορικότητας και της «απριορικότητας» του Ένγκελς, υπάρχει σύμπτωση. Η απάντηση δεν είναι καταφατική. Χωρίς να διατυπώνεται με σαφήνεια από τον Ένγκελς ή τον Καντ, πιστεύουμε ότι η διαφορά είναι διακριτή. Τα μαθηματικά είναι a priori σύμφωνα με το ΔΥ αλλά με μια διαφορετική έννοια από την καντιανή οπτική. **Είναι a priori με την έννοια ότι εκφράζουν πραγματικές σχέσεις στη φύση και στην κοινωνία ή για να είμαστε περισσότερο ακριβείς εκφράζουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις τους, τόσο ικανοποιητικές που να μπορούν να βρίσκουν εφαρμογή, κάτι που σημαίνει ότι με τη χρήση τους έχουμε τη δυνατότητα ερμηνείας και πρόβλεψης (εδώ υπεισέρχεται η σχέση σχετικής και απόλυτης αλήθειας, υποκειμενικής και αντικειμενικής αλήθειας). Οι μαθηματικές σχέσεις ισχύουν αντικειμενικά, ως σχέσεις στη φύση, στην κοινωνία ή και στη νόηση ανεξάρτητα από εμάς, αλλά δεν μπορούν να γνωσθούν παρά μέσω ημών, μέσω της εμπειρίας, μέσα από την πρακτική δραστηριότητα. Αλλά και μέσα από τη θεωρητική γενίκευση που είναι η υπέρβαση της εμπειρίας που ωστόσο συνδέεται με ομφάλιο λώρο με αυτήν.**

Ακόμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ως πραγματικό γεγονός την ύπαρξη «a priori» αληθειών, ανάμεσά τους και μαθηματικών αλλά όχι ως ανεξάρτητων από την εμπειρία και με μια άλλην έννοια. Πώς μπορεί να γίνει αυτό; Να μια άποψη που υποστηρίζει κάτι τέτοιο και κατά τη γνώμη μας είναι βάσιμη: «Ας σκεφθούμε ότι οι αρχές της λογικής και γλώσσας είναι αναγκαστικά κωδικοποιημένες στο είδος των κυκλωμάτων που απαρτίζουν τον εγκέφαλο. Και ας παρατηρήσουμε ότι οι περισσότερες συνδέσεις του κεντρικού νευρικού δικτυώματος έχουν συμπληρωθεί στο έμβρυο, πολύ πριν οι εξωτερικοί ερεθισμοί κι εμπειρίες επιδράσουν. Έτσι, φαίνεται σίγουρο ότι οι βασικοί τρόποι της σκέψης μας είναι περασμένοι στο γενετικό μας κώδικα, ασφαλώς όμως, όχι όλοι».[160] Μάλιστα, διαπιστώσεις όπως οι παραπάνω επαληθεύονται ή τείνουν να επαληθευτούν από θεωρίες που έχουν συγκροτηθεί ειδικά για τη μαθηματική σκέψη. Αναφερόμαστε στη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών που θα δούμε στο Ε΄ κεφάλαιο. Είναι, όμως, φανερό ότι και σε αυτή την περίπτωση που ο άνθρωπος έχει μια νοητική «προίκα», υπάρχει σχέση με την εμπειρία έστω κι έμμεση, αφού η εγγραφή των δεδομένων στο «σκληρό δίσκο» του ανθρώπινου

[160] . Ταμπάκης Ν., Από τη Φυσική στη Μεταφυσική, σελ.124, εκδ. Δαίδαλος

εγκέφαλου έγινε μέσα από μια αλληλεπιδραστική σχέση με τη φύση, ενώ δε θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι όποιες δυνατότητες για να εκφραστούν προϋποθέτουν και το κατάλληλο περιβάλλον, διαφορετικά χάνονται ή εκδηλώνονται σε μικρό βαθμό.

Ωστόσο, ως παράγωγο (τα μαθηματικά) της νόησης και ως αντανάκλαση της πραγματικότητας στον ανθρώπινο εγκέφαλο (που λαμβάνει χώρα όχι με έναν απόλυτο τρόπο) χαρακτηρίζονται από μια ιστορικότητα, σε ένα μεγάλο μέρος τους: «Εξαιρετικά σύνθετες ως τώρα έρευνες της ανόργανης φύσης δεν έχουν οδηγήσει σε νέες ιδιότητες της, οι οποίες να σχηματίζουν νέα βασικά μαθηματικά μέσα. Η περιγραφή των μηχανισμών και των αυτόματων της οργανικής φύσης επίσης αγκαλιάστηκαν από τα μέχρι σήμερα μαθηματικά. Θα μπορούσαμε, όμως, να σκεφτούμε, ότι τα φαινόμενα που κατακτήθηκαν στις δυο πρώτες εποχές είναι τα μοναδικά, στα οποία μπορούμε να φτάσουμε με τη μαθηματική τυποποίηση της γνώσης; Είναι απολύτως πιθανό να περιμένουμε να βρεθούν παρόμοια φαινόμενα στην οργανική φύση και στις κοινωνικές σχέσεις, ώστε να αρχίσει νέα μαθηματική εποχή ως συνέπεια του νέου αντικειμένου της αντικειμενικής πραγματικότητας και όχι από τη διεύρυνση της μαθηματικής γνώσης που κατακτήθηκε».[161]

Οι ενστάσεις από την πλευρά του ΔΥ στα παραπάνω αποσπάσματα του Καντ εντοπίζεται στην έννοια της ιστορικότητας της γνώσης, αλλά και στη θεώρηση του χώρου και του χρόνου. Η απριορικότητα του χώρου και του χρόνου οδηγεί στον ιδεαλισμό: «παραδεχόμενος (σ.σ. εννοεί τον Καντ) την απριορικότητα του χώρου, του χρόνου, της αιτιότητας κ.τλ. κατευθύνει τη φιλοσοφία του προς τον ιδεαλισμό».[162] Ένα θεμελιώδες λάθος του Καντ ήταν η ακλόνητη πίστη του για το αναλλοίωτο του χώρου με την ευκλείδεια μορφή του. Σε αυτό, όμως, το σημείο έχει πέσει κατά τη γνώμη μας σε μια αντίφαση. Ενώ ο χώρος είναι προϊόν της καθαρής εποπτείας που συνδέεται με τη συγκεκριμένη ικανότητα του ανθρώπου να τον αντιλαμβάνεται όπως τον αντιλαμβάνεται από την άλλη θεωρείται ως αναλλοίωτος. Με άλλα λόγια πώς είναι δυνατό να αντιμετωπίζεται ο χώρος με έναν αγνωστικισμό που εδράζεται στις δυνατότητες της ανθρώπινης γνώσης και από την άλλη να θεωρείται ως ευκλείδειος και μόνο τέτοιος. Ασφαλώς, γνωρίζουμε ότι η άποψη περί ευκλείδειου χώρου κι εν γένει η άποψη του Καντ για το χώρο και το χρόνο δέχθηκε το τελειωτικό πλήγμα με τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες και τη γενική θεωρία της σχετικότητας[163]: «Αν, όμως, ο χώρος και ο χρόνος ήταν προεμπειρικοί τύποι της αίσθησης, τότε το ανθρώπινο πνεύμα δε θα μπορούσε να ανακαλύψει άλλη γεωμετρία από την ευκλείδεια».[164]

Επιπλέον, θα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος το χωροχρόνο μεταλλάσσεται και μάλιστα με δυο έννοιες: α) εξελίσσεται καθώς αυτός (ο άνθρωπος) αναπτύσσεται από τη στιγμή της γέννησής του ως τη στιγμή που έχει αντίληψη παρόμοια με αυτή του ενήλικου. Είναι γνωστό ότι τα νεογέννητα μωρά δεν έχουν αντίληψη του χώρου όπως αυτή που έχουμε από ένα ηλικιακό σημείο κι έπειτα. Ακόμα, η αντίληψη του χώρου διαφέρει και σε άτομα που εκ γενετής ήταν τυφλά και βρίσκουν κάποια στιγμή την όρασή τους. Το μάτι, κατά το Μαρξ, έγινε ανθρώπινο μάτι με το τον ίδιο ακριβώς τρόπο που το αντικείμενό του έγινε κοινωνικό, ανθρώπινο αντικείμενο, δημιουργημένο από τον άνθρωπο για τον άνθρωπο. Το ανθρώπινο μάτι αντιλαμβάνεται και απολαμβάνει διαφορετικά από το άξεστο μη ανθρώπινο μάτι, το ανθρώπινο αυτί διαφορετικά από το άξεστο μη ανεπτυγμένο αυτί

---

[161] . Λ. Ίλιεφ, ο.π., σελ.94-95

[162] . Β. Ι. Λένιν, Άπαντα, τ.18 (Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός), σελ. 209, εκδ. Σύγχρονη εποχή

[163] . Θα δώσουμε ένα μικρό παράδειγμα. Ο Καντ μπορούσε να φανταστεί την ύπαρξη του χώρου χωρίς ύλη. Έγραφε χαρακτηριστικά: «Ο χώρος είναι μια αναγκαία εκ των προτέρων παράσταση που χρησιμεύει για θεμέλιο για όλες τις εξωτερικές εποπτείες. Δεν μπορούμε ποτέ να φαντασθούμε, ότι δεν υπάρχει σ' αυτές χώρος, αν και μπορούμε να φαντασθούμε, ότι δεν υπάρχουν αντικείμενα μέσα στο χώρο. Αυτός θεωρείται ως όρος της δυνατότητας των φαινομένων και όχι ως μια μορφή που εξαρτάται από αυτά και είναι μια παράσταση εκ των προτέρων, που χρησιμεύει για θεμέλιο, ένας αναγκαίος τρόπος για τα εξωτερικό φαινόμενα» (Καντ, Κριτική του καθαρού λόγου, σελ.35, εκδ. Αναγνωστίδη). Η γενική θεωρία της σχετικότητας ανέδειξε την οργανική ενότητα ύλης-χώρου-χρόνου υπογραμμίζοντας την εξάρτηση της χωροχρονικής δομής από την κατανομή της ύλης.

[164] .Ε. Μπιτσάκης, Το είναι και το γίγνεσθαι, σελ. 278, Εκδ. Ζαχαρόπουλος

κ.λπ.[165]. Ωστόσο, όπως συμπληρώνει ο Μποσένκο «το τέλειο από βιολογικής άποψης, δεκάδες φορές πιο ευαίσθητο από το ανθρώπινο αυτί σκύλου, δεν ακούει τη συμφωνία του Μπετόβεν μα μονάχα ένα ανειλημμένο σύνολο ηχητικών ταλαντώσεων». Από την άλλη, όμως, «όλοι οι Βιετναμέζοι έχουν μουσικό αυτί όχι εξαιτίας της ειδικής κατασκευής των αυτιών τους, αλλά επειδή η βιετναμέζικη γλώσσα ως μέσο επικοινωνίας στις πρακτικές κοινωνικές σχέσεις (τις οποίες το παιδί δεν μπορεί με κανένα τρόπο να αποφύγει) αναγκαστικά τους ωθεί, ώστε από την παιδική ηλικία να έχουν να κάνουν με την επεξεργασία ποικιλίας αποχρώσεων των ηχητικών τόνων. Εάν μεγαλώσετε ένα βιετναμέζικο παιδί σε ετερόγλωσσες κοινωνικές συνθήκες όλα θα είναι διαφορετικά. Κι αντίστροφα, οποιοδήποτε άλλο παιδί σε εκείνες τις συνθήκες θα αποκτήσει μουσικό αυτί».[166] β) εξελίσσεται, όμως, και με μια άλλη έννοια σε επίπεδο μακρόκοσμου. Αν στην αρχή για παράδειγμα πίστευαν στο «επίπεδο» της γης η άποψη αυτή μεταβλήθηκε μέσα από τις επιστημονικές ανακαλύψεις. Οι μη ευκλείδειες ακόμα γεωμετρίες με τις παράλληλες επιτεύξεις στο χώρο της φυσικής (θεωρία σχετικότητας) άλλαξαν και την άποψη του ανθρώπου για τη γεωμετρία του σύμπαντος. Αντίστοιχες μεταβολές ή διαφοροποιήσεις μπορούμε να συναντήσουμε και στην έννοια του χρόνου. **Τελικά, τα μαθηματικά τα οποία εκφράζουν σχέσεις για το χώρο και το χρόνο είναι όλο και καλύτερες προσεγγίσεις της αντικειμενικής πραγματικότητας αφού δεν είναι προεμπειρικοί τύποι της αίσθησης αλλά το αντίθετο: είναι a posteriori δημιουργήματα της ανθρώπινης νόησης που βασίζονται σε πραγματικές σχέσεις. Από τη στιγμή που λειτουργούν επιτυχώς, ερμηνεύουν και προβλέπουν, υποστηρίζεται η παραπάνω θέση. Το 7+5=12 είναι μια νοητική αφαίρεση, δηλαδή ένα ανθρώπινο δημιούργημα που κατασκευάσθηκε μέσα από μια κοινωνική πρακτική. Επομένως, η ισχύ του μπορεί να είναι αιώνια, δε θα πρέπει , όμως, να μας διαφεύγει ότι είναι προϊόν της ανθρώπινης πράξης που δεν μπορεί να συνδέεται παρά με την εμπειρία.**

Β3.2.8: <u>Και άλλες «απριορικότητες»</u>

Η απριορικότητα των μαθηματικών δεν εκπορεύτηκε μόνο από τον Καντ αλλά και από άλλους φιλόσοφους. Η άποψή τους δεν έμεινε αναπάντητη από το ΔΥ. Δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις αποτελούν ο Ντύρινγκ και ο Πουανκαρέ. Στο μεν πρώτο ασκείται κριτική από τον Ένγκελς: «ο κ. Ντύρινγκ είναι της γνώμης πως μπορεί να κατασκευάσει a priori και τα καθαρά μαθηματικά βγάζοντάς τα από το κεφάλι του, χωρίς δηλαδή να χρησιμοποιήσει την εμπειρία που μας προσφέρει ο έξω κόσμος, όπως έκανε με τις βασικές μορφές του είναι. Στα καθαρά μαθηματικά, λέει, ο νους οφείλει να δρα « με τα δικά του ελεύθερα δημιουργήματα και φαντασίες». Έτσι, τα μαθηματικά αποκτούν «μια ισχύ ανεξάρτητη από την ειδική εμπειρία και από το πραγματικό περιεχόμενο του κόσμου». Το ότι τα καθαρά μαθηματικά ισχύουν ανεξάρτητα από την ειδική εμπειρία του κάθε ατόμου είναι βέβαια σωστό και αυτό ισχύει για όλα τα διαπιστωμένα γεγονότα κάθε επιστήμης κι ακόμα για κάθε γεγονός εν γένει […] Στα καθαρά μαθηματικά, όμως, ο νους δεν ασχολείται μόνο με τα ίδια του τα δημιουργήματα και τις ίδιες του τις φανταστικές παραστάσεις. Οι έννοιες του αριθμού και του σχήματος δεν πάρθηκαν από πουθενά αλλού παρά μόνο από τον πραγματικό κόσμο. Τα δέκα δάκτυλα με τα οποία ο άνθρωπος έμαθε να μετράει, δηλαδή να εκτελεί την πρώτη μαθηματική πράξη, είναι οτιδήποτε άλλο έξω από ένα ελεύθερο κατασκεύασμα του νου. Για να μπορεί να μετράει ο άνθρωπος, δεν αρκεί μόνο να υπάρχουν τα μετρήσιμα αντικείμενα, αλλά είναι απαραίτητη και η ύπαρξη της ικανότητάς του, παραβλέπει κατά τη στιγμή της θεώρησης αυτών των αντικειμένων όλες τις άλλες ιδιότητες εκτός του αριθμού των, αυτή, όμως, η ικανότητα είναι αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης ιστορικής εξέλιξης, που βασίζεται αποκλειστικά στην εμπειρία».[167]

---

[165] . Δες αναλυτικότερα σε διάφορα σημεία, Μαρξ Κ., Οικονομικά και Φιλοσοφικά Χειρόγραφα, εκδ. Γλάρος

[166] . Μποσένκο Β., Το μόνο δίδαγμα που βγάζουμε είναι ότι δε βγάζουμε κανένα δίδαγμα, Περιοδικό Θέματα Παιδείας, τ.17-18, 2004

[167] . Ένγκελς, Αντι Ντύρινγκ, σελ.68, εκδ. Αναγνωστίδη

Ο Ένγκελς στο παραπάνω απόσπασμα κάνει μια συμπύκνωση των θέσεων του για τα μαθηματικά και ουσιαστικά προετοιμάζει το έδαφος για να παρουσιάσει τον ορισμό του τον οποίο και παραθέσαμε ήδη σε άλλο σημείο του κειμένου.

Όσον αφορά στον Πουανκαρέ οι απόψεις του είναι καντιανής προέλευσης αλλά με κάποιες διαφοροποιήσεις. Ο Πουανκαρέ πρέπει να πούμε κατ΄ αρχάς ότι είναι ο θεμελιωτής του κοβενσιοναλισμού, εκείνης δηλαδή της θεωρίας που θεωρεί ότι στη βάση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών βρίσκονται αυθαίρετες συμβάσεις, δηλαδή συμβατικότητες η επιλογή των οποίων γίνεται με κριτήριο την ευχρηστία τους, την «οικονομία της νόησης» κ.λπ. Ο Πουανκαρέ, όσον αφορά στις αρχές και στους νόμους των επιστημονικών θεωριών δε δέχεται ούτε την καντιανή θεώρηση για τον a priori και συνθετικό τους χαρακτήρα, ούτε, όμως, και τον a posteriori χαρακτήρα τους με την έννοια που προσέδιδε ο υλισμός του 18ου αιώνα, με εξαίρεση την αριθμητική. Για τον Πουανκαρέ οι αρχές και οι νόμοι είναι συμφωνίες με μοναδικό καθολικό αίτημα τη μη αντιφατικότητα. Ειδικότερα για τα μαθηματικά ο Πουανκαρέ υποστηρίζει ότι «οι μαθηματικές αλήθειες προκύπτουν από μικρό αριθμό προφανών προτάσεων μέσω μιας αλυσίδας ανεπίληπτων συλλογισμών που επιβάλλονται όχι μόνο σε εμάς αλλά και στην ίδια τη φύση. Δεσμεύουν, σα να λέμε, το δημιουργό κι επιτρέπουν σε αυτόν να εκλέξει μόνο μεταξύ κάποιων λύσεων σχετικώς ευαρίθμων» και «οι συμφωνίες αυτές (σ.σ. οι ορισμοί) είναι έργο της ελεύθερης δράσης του πνεύματος μας, το οποίο εδώ δεν αναγνωρίζει πρόσκομμα [...] Αλλά να εξηγούμαστε: αυτά τα διατάγματα επιβάλλονται στην επιστήμη μας, δεν επιβάλλονται στη φύση. Ώστε είναι αυθαίρετα; Όχι, γιατί διαφορετικά θα ήταν στείρα».[168] Από τα παραπάνω αποσπάσματα του Πουανκαρέ διαφαίνεται ο κίνδυνος του υποκειμενισμού: τι σημαίνει ότι τα μαθηματικά (οι αρχές τους) είναι συμφωνίες (συμβάσεις); Ο Πουανκαρέ «πατάει σε δυο βάρκες». Ενώ συνολικά βασικό εργαλείο της ανάλυσής του είναι η βολικότητα, νιώθοντας, ίσως, και ο ίδιος τα αδιέξοδα που προκύπτουν από τη χρήση μιας τέτοιας έννοιας στην επιστήμη αναρωτιέται αν αυτές οι συμφωνίες είναι αυθαίρετες και απαντά αρνητικά. Ωστόσο, πέφτει σε αντιφάσεις αφού από τη μια οι μαθηματικές αλήθειες επιβάλλονται σε εμάς (η καντιανή άποψη) αλλά και στην ίδια τη φύση, και παράλληλα «η επιστήμη δεν είναι στερημένη παραγωγικότητας αφού αν συνέβαινε αυτό, θα ήταν ανίσχυρη. Αλλά καθημερινά την βλέπουμε να δρα μπροστά στα μάτια μας»[169], ενώ λίγο αργότερα αναιρεί την τελευταία του άποψη υποστηρίζοντας ότι «αυτά τα διατάγματα επιβάλλονται στην επιστήμη μας, επιβάλλονται στη φύση».

Ο Πουανκαρέ στη συνέχεια υποστηρίζει μια διάκριση μεταξύ δυο διαφορετικών ειδών του μαθηματικού συλλογισμού. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η οποία δεν είναι αποδείξιμη διαμέσου αναλυτικών αναφορών, είναι μια γενικευμένη συνθετική a priori πρόταση. Η αριθμητική δεν μπορεί να υποβιβαστεί σε λογική, αφού η τελευταία είναι αναλυτική ενώ η αριθμητική είναι συνθετική. Βέβαια υπάρχει μια διαφοροποίηση μεταξύ της μαθηματικής επαγωγής και της επαγωγής που εφαρμόζεται στις φυσικές επιστήμες: « η επαγωγή εφαρμοζόμενη στις φυσικές επιστήμες είναι πάντα αβέβαιη, επειδή στηρίζεται στην πεποίθηση κάποιας γενικής τάξης στο σύμπαν, τάξης που βρίσκεται έξω από εμάς. Απεναντίας η μαθηματική επαγωγή επιβάλλεται κατ΄ ανάγκη, δηλαδή η αναδρομική απόδειξη, επειδή δεν είναι παρά επιβεβαίωση αυτού του ίδιου του πνεύματος».[170] Επιπλέον, μπορούμε να χωρίσουμε τις μαθηματικές προτάσεις σε δυο είδη: α) στις προτάσεις του τύπου 2+2=4, οι οποίες μπορούν να επαληθευτούν με τη βοήθεια λογικών κανόνων και ορισμών (ορισμός του αθροίσματος στη συγκεκριμένη περίπτωση), και είναι αναλυτικές προτάσεις και άρα δεν έχουν να προσθέσουν κάτι στην ήδη υπάρχουσα γνώση και β) στις προτάσεις του τύπου χ+ψ=ψ+χ (αντιμεταθετική ιδιότητα) οι οποίες δεν είναι ευθέως επαληθεύσιμες όπως οι προηγούμενες, αφού κάθε φορά η επαλήθευσή τους μπορεί να γίνεται από ένα μόνο πεπερασμένο ζεύγος αριθμών. Η απόδειξη μιας τέτοιας ιδιότητας είναι συνθετικός συλλογισμός και για αυτό γόνιμος, δηλαδή επεκτείνει τη γνώση μας. Οι θεωρήσεις του Πουανκαρέ είναι ημιτελείς: δε γίνεται κατανοητό για ποιο λόγο μια αριθμητική πρόταση που επαληθεύεται από τυπικούς κανόνες για ποιο λόγο δεν

---

[168] . Πουανκαρέ, Επιστήμη και υπόθεσις, σελ. γ΄, δ΄, χρονολογία έκδοσης άγνωστη, απόδοση στη νεοελληνική του συντάκτη

[169] . Ο.π., σελ.δ΄

[170] . Ο.π., σελ.18

προσθέτει κάτι νέο στη γνώση μας (για παράδειγμα όταν επαληθεύουμε την πρόταση 2+2=4, μας παρέχει μια νέα γνώση με την έννοια ότι έχουμε από πριν ορίσει τους αριθμούς 2 και 4), ενώ δε μας βρίσκει αντίθετους η άποψη ότι αυτό που αποδεικνύεται συνθετικά προσθέτει κάτι νέο στη γνώση μας. Εν πάση περιπτώσει, ο Πουανκαρέ μοιάζει να είναι εγκλωβισμένος σε μια λογική που τον ωθεί σε συμπεράσματα αντιδιαλεκτικά.[171]

Τέλος, θεωρούμε πως η άποψη που διατυπώνεται από το Χ. Θεοδωρίδη (Χ.Θ.) για το ζήτημα της απριορικότητας των μαθηματικών είναι εσφαλμένη[172] και αυτό για τους παρακάτω λόγους: α) ο Χ.Θ. ξεκινάει με τη διαπίστωση μιας κοινής μεθόδου ανάμεσα στον σπιριτουαλισμό και στον υλισμό. Τόσο ο ένας όσο και ο άλλος έχουν μια κοινή επιδίωξη: να βρουν μια κοινή αρχή που τίθεται με έναν a priori τρόπο. Ο πρώτος θέτει ως αρχή το Θεό, ενώ ο δεύτερος την ύλη. Έτσι, ο Χ.Θ. εξαιτίας αυτής της απριορικότητας θεωρεί διάτρητες και τις δυο φιλοσοφικές θεωρήσεις, β) η υιοθέτηση της απριορικότητας, πάντα κατά το Χ.Θ., δεν μπορεί να ερμηνεύσει την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων ή καλύτερα είναι πρακτικά αδιέξοδη: «οι μαθηματικές κατασκευές είναι πλάσματα νοητικά, ιδεατά. Δε φανερώνουν σχέσεις ανάμεσα στα πράγματα παρά ανάμεσα σε παραστάσεις. Για αυτό παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες.

1) Κάθε πλάσμα μαθηματικό βρίσκεται στη διάνοιά μου μόνο κι οι ιδιότητες που ανακαλύπτω ξεκινώντας από τα ουσιαστικά του γνωρίσματα, από τον ορισμό του δηλαδή, βρίσκονται σαν προϋπόθεση κρυμμένη να πούμε στον ορισμό αυτό. Ο ορισμός του τριγώνου λ.χ. προϋποθέτει πως οι τρεις γωνίες του θα είναι ίσες με δυο ορθές. Στα

---

[171] . Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απόψεις του Αμπέλ Ρέι, γάλλου φιλόσοφου θετικιστή, στα ζητήματα της φυσιογνωσίας και ασυνεπή αυθόρμητου υλιστή, όπως παρουσιάζονται στα Φιλοσοφικά Τετράδια (τ.29) του Β. Ι. Λένιν. Γράφει χαρακτηριστικά: «Ο μεγάλος μαθηματικός Πουανκαρέ επιμένει ιδιαίτερα σε αυτό τον αυθαίρετο χαρακτήρα των μαθηματικών. Φυσικά τα μαθηματικά μας αντιστοιχούν πλήρως στη πραγματικότητα, με την έννοια ότι είναι προσαρμοσμένα στη συμβολική έκφραση των γνωστών σχέσεων μέσα στο πραγματικό. Τα μαθηματικά, για την ακρίβεια, δε μας έχουν υποβληθεί από την εμπειρία, η εμπειρία αποτέλεσε μόνο την αφορμή στο μυαλό για τη δημιουργία τους. Αλλά τα μαθηματικά μας στη μορφή που διαμορφώνονται βαθμιαία για τη βολική έκφραση αυτού που θέλαμε να εκφράσουμε, είναι μόνο μια από τις άπειρα πολλές πιθανές μαθηματικές επιστήμες, ή, σωστότερα είναι μια μερική περίπτωση μιας κατά πολύ γενικότερης μαθηματικής επιστήμης, ως την οποία προσπαθούσαν να ανυψωθούν οι επιστήμονες του 19ου αιώνα. Συναισθανόμενοι αυτό το ζήτημα καθαρά, εμείς την ίδια στιγμή ξεκαθαρίσαμε ότι τα μαθηματικά, ως προς την ουσία και τη φύση τους, είναι απολύτως ανεξάρτητα από τη χρήση που παίρνουν στην εμπειρία και επομένως, είναι απολύτως ανεξάρτητα από την εμπειρία. Τα μαθηματικά είναι μια ελεύθερη δημιουργία του μυαλού, η πιο λαμπρή εκδήλωση της προσωπικής δημιουργικής τους δύναμης. Τα αξιώματα, τα αιτήματα, οι ορισμοί, οι συμφωνίες-όλα αυτά είναι στην ουσία συνώνυμα. Για αυτό οποιοδήποτε από τα ενδεχόμενα μαθηματικά μπορούν να μας φέρουν σε συμπεράσματα που, όντας εκφρασμένα με τον κατάλληλο τρόπο και με τη βοήθεια ενός κατάλληλου συστήματος συμφωνιών, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν κατά τον ίδιο εντελώς τρόπο και στο πραγματικό…Αυτή η θεωρία κάνει σωστά κριτική και στον απόλυτο ορθολογισμό και μάλιστα στο μετριοπαθή ορθολογισμό του Καντ. Η θεωρία αυτή μας δείχνει ότι το μυαλό δε θα έπρεπε καθόλου κάτω από μια αναπότρεπτη αναγκαιότητα να επεξεργαστεί ακριβώς αυτά τα μαθηματικά, τα οποία είναι τόσο καλά προσαρμοσμένα για τη μετάδοση της δικής μας εμπειρίας.. με άλλα λόγια δεν είναι έκφραση κάποιου καθολικού νόμου της πραγματικότητας, όπως κι αν καταλαβαίνουμε αυτή την πραγματικότητα (υπονοείται αυτή που μας είναι δοσμένη) , με τον τρόπο που την εννοούσε ο Ντεκάρτ, με τον καντιανικό τρόπο, ακόμα και με οποιοδήποτε άλλο τρόπο. Αλλά στον Πουανκαρέ αυτό το συμπέρασμα έχει ένα εντελώς άλλο νόημα απ' ότι στον πραγματισμό […] Την άποψη του Καντ υιοθετεί και ο Πουανκαρέ και αυτό το αναφέρουμε γιατί υπάρχει μια ενδιαφέρουσα συγκριτική παρατήρηση ανάμεσα στην άποψη του Καντ και του Πουανκαρέ από έναν επιφανή εκπρόσωπο του ΔΥ: «Μπορεί κανείς να μην παραδέχεται απόλυτα τη θεωρία του Πουανκαρέ, αλλά δεν πρέπει να την διαστρεβλώνει, γα να αναφέρεται μετά στο κύρος του. Δεν έδωσαν την απαιτούμενη προσοχή στη σχέση της με τον καντιανισμό, από τον οποίο αυτή η θεωρία αντιγράφει πλήρως τη θεωρία των συνθετικών κρίσεων a priori, με μόνη την επιφύλαξη ωστόσο (εδώ ο καντιανικός ορθολογισμός φαίνεται στον Πουανκαρέ πολύ απολιθωμένος), ότι αυτές οι συνθετικές κρίσεις a priori, πάνω στις οποίες στηρίζεται όλη μαθηματική μας επιστήμη (του Ευκλείδη), δεν πρέπει να θεωρούνται τα μοναδικά πιθανά και απαραίτητα αξιώματα των ορθολογικών μαθηματικών…».

[172] . Χ. Θεοδωρίδης, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία, σελ.233-236

μαθηματικά δηλαδή βρίσκουμε ότι βάλαμε οι ίδιοι από την αρχή. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν για τα ιδεατά τρίγωνα, για αυτά που σχηματίζουμε με τη διάνοια.

2) Τα γνωρίσματα μιας μαθηματικής έννοιας, ο ορισμός δηλαδή που της δίνουμε, είναι πάντα σωστός ή για να πούμε καλύτερα, στους μαθηματικούς ορισμούς δεν μπορεί να γίνει λόγος για σωστό ή όχι, αφού τους ορισμούς τους βάζουμε οι ίδιοι από πριν κι όπως θέλουμε.

3) Οι μαθηματικές κρίσεις φανερώνουν ισότητα κι όχι ταυτότητα. Όταν λέγω 3+3+5=16-5 δε σημαίνει πως η παράσταση 3+3+5 είναι ίδια με την παράσταση 16-5 παρά πως οι δυο παραστάσεις ισοδυναμούν με 11. Η ιδιότητα αυτή ευκολύνει πολύ την εργασία στα μαθηματικά, γιατί μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα από το μερικό στο γενικό. Από το γνώρισμα λ.χ. του ορθογωνίου, πως η επιφάνειά του βρίσκεται άμα πολλαπλασιάσουμε τη βάση με το ύψος, φτάνουμε στο συμπέρασμα πως το ίδιο ισχύει για όλα τα παραλληλόγραμμα.

Αντίθετα η μεταφυσική έχει να κάνει με πραγματικότητες κι οι συνθήκες που κανονίζουν αυτές είναι διαφορετικές […] ο μαθηματικός συλλογισμός χρεοκοπεί, όταν έχουμε να κάνουμε με πράγματα και μπορεί να μας οδηγήσει στις πιο περίεργες παραδοξότητες. Ολόκληρη η πλατωνική ιδεολογία είναι μια απλοϊκή παρεξήγηση της τυπικής λογικής. Ό,τι σήμερα λέμε ουσιαστικό γνώρισμα ο Πλάτων το πήρε για ουσία, για οντότητα και πάνω σε αυτή έφτιαξε το φανταστικό του κόσμο, που μας ξαφνιάζει σήμερα και μας φαίνεται ακατανόητος σαν υπόσταση όχι βέβαια σαν πρόθεση».[173]

Έχουμε, ήδη, πάρει θέση για τη διαφορετικότητα της καντιανής απριορικότητας και μιας άλλης απριορικότητας υπό το πρίσμα του ΔΥ. Επομένως, μια πρώτη γενική παρατήρηση είναι πως δεν μπορούμε να θεωρούμε τις διάφορες θεωρήσεις περί απριορικότητας ως μια μονομπλόκ άποψη. Δεύτερο, δε μας βρίσκει σύμφωνους η τοποθέτηση σπιριτουαλισμού και υλισμού κάτω από τη ίδια σκέπη με την ταμπέλα της μεταφυσικής. Ο ΔΥ μάχεται ενάντια στη μεταφυσική την οποία άλλωστε δεν την βλέπει στεγνά μόνο ως μέθοδο αλλά οργανικά συνδεδεμένη με τις οντολογικές αρχές τις οποίες χρησιμοποιεί. Είναι φανερό ότι ο Χ.Θ. είναι επηρεασμένος από τη θετικιστική παράδοση σε αυτό το σημείο. Τελικά, λοιπόν, ενώ προσπαθεί να αποκαθαίρει τα μαθηματικά από μεταφυσικές προσμίξεις κάνει ακριβώς αυτό το οποίο μέμφεται. Τα μαθηματικά καταντούν περίεργα πλάσματα της νόησης, ιδεατές και μόνο τέτοιες κατασκευές ανεξάρτητες από την εμπειρία, λογικά παιχνίδια του νου. Εδώ και το σφάλμα: χωρίς να δηλώνεται, οι αρχές των μαθηματικών γίνονται απριορικές και για αυτό μεταφυσικές. Τους ορισμούς, για παράδειγμα, *τους θέτουμε από πριν κι όπως θέλουμε*. Όταν η μεταφυσική πλευρίζει τα μαθηματικά, κατά το Χ.Θ. έχουμε παραδοξότητες όπως αυτές που παρουσιάσθηκαν στη πλατωνική θεώρηση. Βέβαια, ο συγγραφέας δε συμπληρώνει ως όφειλε σε τι είδους παραδοξότητες οδηγεί η «υλιστική μεταφυσική».

Β3.3: <u>Τα μαθηματικά και το «σώζειν τα φαινόμενα»</u>

Το περίφημο «σώζειν τα φαινόμενα» αποτελεί μια αφορμή συζήτησης για τη φύση των μαθηματικών, για το τι είναι, για το αν προηγούνται της νόησης, για το αν είναι προϊόν εμπειρικής παρατήρησης και μεθοδικής συστηματοποίησης, τελικά για το πώς απαντιέται το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας. Βέβαια, θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι από διάφορους μελετητές εκφράζονται προβληματισμοί για το εννοιολογικό περιεχόμενο του όρου. Για παράδειγμα μια προσέγγιση που γίνεται από τον Ε. Γκραντ υποστηρίζει ότι με τον όρο αυτόν εννοούσαν ότι «διαφορετικές υποθέσεις ή εξηγήσεις μπορούν εξίσου καλά να διασώσουν ένα ιδιαίτερο φυσικό φαινόμενο, είτε ότι μια εξήγηση μπορεί να μοιάζει πιο αληθοφανής από άλλες εναλλακτικές λύσεις. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ισχυρίζονταν ότι οι μηχανισμοί της εξήγησης αποδίδουν τη φυσική πραγματικότητα».[174] Αν ερμηνεύουμε σωστά τις σκέψεις αυτές και με δεδομένο ότι ο συγγραφέας επισημαίνει επιπλέον ότι ο νομιναλισμός του 14ου αιώνα ενίσχυσε το δόγμα του «σώζειν τα φαινόμενα»

---

[173] .ο.π.

[174] . Ε. Γκραντ, Οι φυσικές επιστήμες το Μεσαίωνα, σελ. 52, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης

ενθαρρύνοντας πιθανές και αληθοφανείς ερμηνείες των φυσικών φαινομένων,[175] οδηγούμαστε σε μια άποψη για τη λειτουργία των (μαθηματικών) μοντέλων ως συμβάσεις εμπλαισιωμένων σε ένα αγνωστικιστικό πνεύμα.

Το «σώζειν τα φαινόμενα», αλλάζει, όμως, χαρακτήρα από τη στιγμή που εμφανίζεται ο Κοπέρνικος. Το «σώζειν τα φαινόμενα» χάνει το χαρακτήρα του ως σύμβαση και μετατρέπεται σε αλήθεια. Δεν μπορεί, κατά τον Κοπέρνικο δυο διαφορετικές υποθέσεις να αποτελούν εξίσου καλά ερμηνευτικά εργαλεία των φυσικών φαινομένων. Αυτό που προέχει είναι η αναζήτηση εκείνων των κριτηρίων ώστε να διατυπωθούν αληθείς επιστημονικές υποθέσεις.[176]

Αξίζει, όμως, να δούμε την πηγή του προβλήματος που βρίσκεται στην αρχαία Ελλάδα. Ο «αριστοτελικός φυσικός» επιβάλλει στο μαθηματικό ένα σύνολο αξιωμάτων που δεν επιδέχεται αμφισβήτησης: α) η Γη είναι σφαιρική, ακίνητη και βρίσκεται στο κέντρο του σύμπαντος, β) το σύμπαν είναι κλειστό, σφαιρικό και ομαλώς περιστρεφόμενο, γ) η μόνη επιτρεπτή κίνηση στον ουρανό είναι η κυκλική ομοιόμορφη κίνηση, δ) φυσική κίνηση είναι μόνο η κίνηση προς τη γη, από τη γη και γύρω από αυτή.[177] Η κυκλική κίνηση στο ουράνιο στερέωμα είναι η μόνη επιτρεπτή αφού τα ουράνια σώματα είναι κινούμενες θεότητες. Ο κύκλος χαρακτηρίζεται από μεταφυσικά χαρακτηριστικά (κοίτα αναλυτικότερα το παρέκβαση στο κεφάλαιο ΣΤ΄) κι έτσι το όλο ερμηνευτικό σχήμα «δένει».

Τα αξιώματα αυτά σχετίζονταν ή πιο σωστά απέρρεαν από τη μαθηματική θεωρία των ομόκεντρων σφαιρών μιας θεωρίας που ήταν η βάση της αποδεκτής αστρονομίας του 4ου αι. π.Χ. όμως, τα αξιώματα αυτά αργά ή γρήγορα θα έρχονταν σε σύγκρουση με τις μαθηματικές θεωρίες των αστρονόμων: «θα έπρεπε επομένως ή να τροποποιηθούν τα αξιώματα, πράγμα που δεν ήταν πρόθυμοι να αποδεχτούν οι φιλόσοφοι, ή να απορριφθούν κάποιες αστρονομικές υποθέσεις έστω και αν οδηγούσαν σε ικανοποιητικά εμπειρικά αποτελέσματα».[178] Στους έλληνες το «σώζειν τα φαινόμενα» δε έχει την έννοια της ερμηνείας, ούτε της περιγραφής των φαινομένων αλλά την έννοια της διάσωσής τους, επειδή υπάρχει κάτι που δεν πάει καλά σε σχέση με αυτά. Αυτό που δεν πάει καλά είναι το προϊόν της αντίφασης της φαινόμενης αταξίας και της προσδοκώμενης τάξης. Επομένως «σώζω τα φαινόμενα» σημαίνει ότι επιβάλλω την τάξη στη φαινόμενη αταξία των ουράνιων κινήσεων. Ο σκοπός του αστρονόμου ήταν να σώσει τα φαινόμενα και αυτό σήμαινε την αναζήτηση κατάλληλων κυκλικών κινήσεων.

Για το Β. Κάλφα υπάρχει τελικά μια πολυσημία του όρου. Στον Πτολεμαίο για παράδειγμα, σκοπός του μαθηματικού αστρονόμου είναι να δείξει ότι όλα τα φαινόμενα στον ουρανό παράγονται από ομαλές και κυκλικές κινήσεις. Επιδιώκει να βρει εκείνα τα μαθηματικά μοντέλα που θα «σώσουν τα φαινόμενα». Με άλλα λόγια προτείνει ένα μαθηματικό μοντέλο και σκοπεύει με την παρατήρηση να το δικαιώσει. Αντίθετα, ο Ποσειδώνιος παρακάμπτει ή θεωρεί δεδομένα τα μαθηματικά μοντέλα. Στην πρώτη περίπτωση το φιλοσοφικό πλαίσιο ή είναι ανύπαρκτο ή άδηλο. Στη δεύτερη περίπτωση δηλώνεται μια φιλοσοφική ένταξη. Εν τέλει, ο σχολιαστής καταλήγει ότι κακώς οι διατυπώσεις του «σώζειν τα φαινόμενα» έχουν χαρακτηρισθεί ως θετικιστικές απόπειρες σε κάθε περίπτωση (με την έννοια της αποδέσμευσης των αστρονόμων από τη φιλοσοφία και για το λόγο ότι για ένα θετικιστή η μαθηματική περιγραφή δεν προηγείται της εμπειρίας, αλλά αποτελεί απλή συστηματοποίηση των εμπειρικών δεδομένων).[179] Η τελευταία αυτή παρατήρηση μας βρίσκει, μάλλον, σύμφωνους. Το «σώζειν τα φαινόμενα» είναι κατά κάποιο τρόπο ένα «σώζειν τη θεωρία» ή «σώζειν τη φιλοσοφία», στη συγκεκριμένη περίπτωση, την ιδεαλιστική (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι θετικισμός και ιδεαλισμός είναι εντελώς διαφορετικές φιλοσοφικές θεωρήσεις. Άλλωστε κατά το ΔΥ ο πρώτος είναι γνήσιο τέκνο του δεύτερου) . Ας σταθούμε σε ορισμένα παραδείγματα στα οποία εμπλέκονται τα μαθηματικά και μαθηματικές έννοιες.

Οι πυθαγόρειοι είναι γνωστό ότι στους αριθμούς αντιστοιχούσαν ηθικές, φυσικές και οντολογικές κατηγορίες. Αν πάλι δεν τους προέκυπτε κάποια αντιστοιχία,

---

[175] . Ο.π., σελ.52-53
[176] . Ο.π., σελ. 133-136
[177] . Κάλφας Β., Φιλοσοφία και Επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα, σελ. 196, εκδ. Πόλις
[178] . Ο.π., σελ. 197
[179] . Β. Κάλφας, Φιλοσοφία και επιστήμες στην αρχαία Ελλάδα, σελ.187-226

προσπαθούσαν με κάθε τρόπο να την συμπληρώσουν, ώστε ολόκληρη η θεωρία τους να έχει συνοχή. Αναφέρω για παράδειγμα, από το έργο του Αριστοτέλη, το εξής: «Επειδή η δεκάδα ήταν για αυτούς ο τέλειος αριθμός και περιέκλειε ολόκληρη τη φύση των αριθμών, έλεγαν ότι δέκα είναι και τα ουράνια σώματα που κινούνται. Στην πραγματικότητα, όμως, βλέπουμε εννιά, για αυτό και επινόησαν ένα δέκατο σώμα, την αντιχθόνα, δηλαδή την αντιγή [...] **Απ' ότι φαίνεται, οι Πυθαγόρειοι θεωρούν ότι ο αριθμός είναι αρχή για τα όντα όχι μόνο ως ύλη, αλλά και με την έννοια ότι καθορίζει τις μόνιμες ή παροδικές ιδιότητες και καταστάσεις τους**»[180] (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Το απόσπασμα του Αριστοτέλη αναδείχνει το αδιέξοδο των πυθαγόρειων τέτοιο που τους ανάγκασε να δημιουργήσουν το δικό τους ιδιότυπο «σώζειν τα φαινόμενα» ή όπως είπαμε παραπάνω, να δημιουργήσουν το «σώζειν τη θεωρία». Ο αριθμός, λοιπόν, έχει εξωκοσμική προέλευση. Δεν είναι απότοκος της ανθρώπινης δραστηριότητας είτε αυτή έχει τη μορφή θεωρητικής αναζήτησης είτε τη μορφή ικανοποίησης πρακτικών αναγκών. Τα φαινόμενα πρέπει να τα προσαρμόσουμε στην οντολογία των αριθμών κι έτσι να τα σώσουμε, σώζοντας στην πραγματικότητα με αυτό τον τρόπο το θεωρητικό μας ιδεαλιστικό-μεταφυσικό σχήμα...

Άλλη χαρακτηριστική περίπτωση του «σώζειν τα φαινόμενα» στην οποία εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες κι εξυπηρετείται το φιλοσοφικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτουργεί ο ερευνητής, είναι αυτή της τροχιάς των ουράνιων σωμάτων και της αξίας του κύκλου για του αρχαίους Έλληνες. Είναι γνωστό πως για τους αρχαίους Έλληνες η μόνη επιτρεπτή κίνηση στον ουρανό ήταν η ομαλή κυκλική κίνηση. Αξίζει, μάλιστα, να αναφερθεί ότι αυτό το βασικό αξίωμα της ελληνικής αστρονομίας δεν αμφισβητήθηκε παρά μόνο αιώνες αργότερα από τον Κέπλερ. Σε αυτό το σημείο συναντάμε μια μίξη μεταφυσικών δοξασιών, οι οποίες για να αποκτήσουν στερεότητα κι ερμηνευτική δύναμη, ένα γεωμετρικό σχήμα, ο κύκλος, ενδύεται τον ιδεαλιστικό μανδύα. Ας τα πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Η έννοια της κυκλικότητας φαίνεται να έχει βαρύνουσα αξία στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα: «...Υπάρχει όχι μόνο για τα φυτά που γεννιούνται στους κόλπους της γης, αλλά ακόμα και για τα ζώα που ζουν στην επιφάνειά της , περίοδος ευφορίας και αφορίας ψυχής και σωμάτων. Και τούτο συμβαίνει όταν κάθε είδος τελειώνει και ξαναρχίζει τον κύκλο της εξέλιξής του, που άλλοτε είναι βραχύτερος και άλλοτε μικρότερος, ανάλογα με τη διάρκεια ζωής του κάθε είδους...και για μεν τα θεία γένη η περίοδος αυτή περιλαμβάνεται μέσα σε αριθμό τέλειο, για το ανθρώπινο γένος, όμως, υπάρχει ένας αριθμός...ολόκληρος αυτός ο γεωμετρικός αριθμός κανονίζει την περίοδο των χειρότερων και των καλύτερων γεννήσεων...».[181] Αρκετές αναφορές από τον Πλάτωνα για τη σημασία του κύκλου βρίσκουμε και στον *Τίμαιο*. Στο εν λόγω πλατωνικό έργο επιχειρείται μέσω περίπλοκων διαδικασιών που στηρίζονται σε αριθμητικές αναλογίες να ερμηνευτεί ο τρόπος με τον οποίο συνενώθηκε το ανθρώπινο σώμα, η θεϊκή θέληση και η ψυχή ώστε να δημιουργηθεί ο άνθρωπος όπως τον γνωρίζουμε. Μέσα σε αυτή τη σύνθεση αποφασιστικό ρόλο παίζει η κίνηση με τους κύκλους. Γράφει χαρακτηριστικά: «Όταν ολοκληρώθηκε η σύνθεση της ψυχής με τη θέληση του δημιουργού, τότε εκείνος δημιούργησε και το σώμα. Έπειτα τα συνέδεσε και τα εναρμόνισε κέντρο με κέντρο. Η ψυχή, ξεκινώντας από το μέσο, απλώθηκε μέχρι τα τελευταία άκρα του ουρανού, τον κάλυψε κυκλικά από έξω κι άρχισε να γυρίζει γύρω από τον εαυτό της, σε μια αιώνια και σώφρονα ζωή».[182] Ο ρόλος των κύκλων δεν περιορίζεται στη εκ Θεού δημιουργία του ανθρώπου. Ο Πλάτωνας τον βλέπει (τον κύκλο) να έχει δεσπόζουσα θέση και στην κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Θα μπορούσε να υποστηρίξει κάποιος ότι αυτό ήταν μια φυσική συνέπεια από τη στιγμή που ο κύκλος χρησιμοποιήθηκε μέσω της θεϊκής έμπνευσης για να συγκροτηθεί η ανθρώπινη οντότητα. Έτσι, όπως και στην περίπτωση των πυθαγορείων προσαρμόζουμε τα παρατηρούμενα φυσικά φαινόμενα στο μαθηματικό μας πρότυπο. Το μαθηματικό πρότυπο δεν είναι τόσο απόρροια της παρατήρησης των εμπειρικών δεδομένων. Μάλλον, ακολουθείται μια αντίστροφη πορεία. Ο κύκλος έχει μια μεταφυσική αξία, οπότε για να ικανοποιήσουμε τις φιλοσοφικές μας προκείμενες εντάσσουμε τα ουράνια φαινόμενα σε ένα μαθηματικό μοντέλο.

---

[180] . Αριστοτέλης, Μετά τα φυσικά, A 985b, 24
[181] . Πλάτωνας, Πολιτεία, H 546b
[182] .Πλάτωνας, Τίμαιος, 36e

Τελικά, το «σώζειν τα φαινόμενα» προκαλεί τις σοβαρές ενστάσεις του ΔΥ. Συναντάμε κι εδώ ένα είδος απριορικότητας των μαθηματικών κάτω από μια άλλη οπτική από αυτή του Καντ. Η ουσία είναι ότι οι μαθηματικές έννοιες δεν εδράζονται και δεν παράγονται από τις αναγκαιότητες της ανθρώπινης κοινωνίας. Προϋπάρχουν με ένα μυστηριώδη τρόπο κι έρχονται να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα αφού αποτέλεσαν εργαλειακά μέσα της *έξωθεν δημιουργίας*.

Παρέκβαση 1η: Το άπειρο, το πεπερασμένο, το απειροστό , ο ΔΥ και τα Μαθηματικά

Το άπειρο, το πεπερασμένο και το απειροστό είναι κατηγορίες από τις πλέον δύσκολες στη πραγμάτευσή τους και από αυτές που ταλάνισαν την ανθρώπινη σκέψη από τις απαρχές της φιλοσοφίας αλλά και συγχρόνως από τις πιο βασικές (είναι γνωστά τα παράδοξα του Ζήνωνα που ακόμα και σήμερα εγείρουν πλήθος συζητήσεων σχετικά με το άπειρο και το απειροστό, τη συνέχεια και την ασυνέχεια). Το άπειρο, ειδικά, έχει παρουσιαστεί κάτω από διάφορους χαρακτηρισμούς: δυνάμει και ενεργεία, ενεστωτικό και στατικό, κακό και αληθινό (ποιοτικό) άπειρο. Κορυφαίοι φιλόσοφοι, όπως ο Αναξίμανδρος, ο Ηράκλειτος, ο Αναξαγόρας, ο Παρμενίδης, ο Δημόκριτος, ο Επίκουρος, ο Αριστοτέλης, ο Σπινόζα, ο Χέγκελ, ο Ένγκελς καταπιάστηκαν με το πρόβλημα του απείρου. Το φιλοσοφικό πρόβλημα του απείρου, του πεπερασμένου και του απειροστού μεταφέρθηκε από τη φιλοσοφία σε μια άλλη γνωστική περιοχή: τα Μαθηματικά. Κάνοντας αυτή τη διαπίστωση διατυπώνουμε ταυτόχρονα και μια θέση: το πρόβλημα αυτών των κατηγοριών και της μεταξύ τους σχέσης δεν είναι κατά βάση μαθηματικό πρόβλημα, αλλά κυρίως φιλοσοφικό. Αυτό σημαίνει ότι δεν αντιμετωπίζεται μόνο ή κυρίως με τυπικολογικά μέσα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτά αποκλείονται, το αντίθετο μπορεί να αποβούν εξαιρετικά χρήσιμα. Από μόνα τους, όμως, δεν είναι ικανά να μας παρέχουν ικανοποιητικές απαντήσεις για το άπειρο, άφ' ης στιγμής μιλάμε για φιλοσοφική κατηγορία. Στους προβληματισμούς που θα διατυπώσουμε, ασφαλώς και δεν είναι σκοπός μας η ενδελεχής διαπραγμάτευση του απείρου, του πεπερασμένου και απειροστού, φιλοσοφικά και μαθηματικά. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε μιαν ολόκληρη διατριβή ή και πολύ περισσότερες από μια. Αυτό που θα επιδιώξουμε είναι η σκιαγράφηση του τρόπου με τον οποίο ο ΔΥ είδε τη διείσδυση του φιλοσοφικού απείρου στα μαθηματικά και τη μετατροπή του σε μαθηματικό άπειρο. Για αυτό το λόγο χρειάζεται οπωσδήποτε μια καταγραφή της εξέλιξης της έννοιας του απείρου από το Χέγκελ στον Ένγκελς.

Παρέκβαση 1.1

Ο Χέγκελ αποκαθιστά τη διαλεκτική σχέση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου. Διακρίνει το άπειρο σε ψεύτικο (αρνητικό) και πραγματικό. Γράφει χαρακτηριστικά: «Το κάτι γίνεται άλλο, αλλά και το άλλο είναι και αυτό κάτι και κατά συνέπεια γίνεται επίσης άλλο κι έτσι επ' άπειρον. Η απειρία αυτή είναι η ψεύτικη, ή αρνητική γιατί κανένα άλλο δεν είναι παρά η άρνηση του πεπερασμένου, που όμως εξίσου πάλιν αναγεννιέται κι έτσι δεν αναιρείται καθόλου – ή διαφορετικά, η απειρία αυτή εκφράζει μόνον ότι το πεπερασμένο οφείλει να αναιρεθεί (αλλά δεν αναιρεί αυτό). Η επ' άπειρον πρόοδος περιορίζεται μόνον να επαναλαμβάνει την αντίφαση, που περιέχει το πεπερασμένο, ότι δηλαδή τούτο είναι τόσον Κάτι όσο και άλλο, και είναι η άπαυστη εξακολούθηση της εναλλαγής των δυο τούτων διορισμών»[183] και ακόμα «το πεπερασμένο και το άπειρο είναι ένα μόνο, το αληθινό, ή αληθινή απειρία είναι η ενότητα του πεπερασμένου και του απείρου».[184] Νομίζουμε ότι αυτή προσέγγιση του Χέγκελ προσομοιάζει την αριστοτελική θεώρηση του δυνάμει απείρου[185],

[183] . Χέγκελ, Η επιστήμη της λογικής, παράγραφος 93, 94, εκδ. Αναγνωστίδη
[184] . Ο.π., παράγραφος 95
[185] . Ο Αριστοτέλης δεν πιστεύει στο ενεργεία αλλά στο δυνάμει άπειρο. Υποστήριζε το πεπερασμένο του χώρου (πίστευε σε ένα κλειστό και με όρια σύμπαν), το άπειρο του χώρου που αφειλόταν στην αιωνιότητα της κίνησης και στην άπειρη διαιρεσιμότητα της ύλης. Όλα αυτά μαζί με την αδυναμία περάτωσης μιας αρίθμησης τον οδήγησαν στην υιοθέτηση του δυνάμει άπειρου. Γι τις απόψεις του

όμως, ο Χέγκελ κάνει ένα βήμα παραπέρα: τις δυο κατηγορίες του άπειρου και του πεπερασμένου τις βλέπει διαλεκτικά αν και ενταγμένες στο ιδεαλιστικό του πλαίσιο. Κάνοντας κριτική σε όσους βλέπουνε ένα δυϊσμό ανάμεσα στο άπειρο και στο πεπερασμένο γράφει: «Ο δυϊσμός που θεωρεί ανυπέρβλητη την αντίθεση του πεπερασμένου και του άπειρου, δεν κάνει αυτή την απλή παρατήρηση, ότι με αυτό τον τρόπο το άπειρο δεν είναι παρά ένα από τα δυο, ότι έτσι γίνεται κάτι μερικό και ότι το πεπερασμένο είναι το άλλο μερικό. […] Σε τέτοια σχέση, στην οποία μπαίνουν το μεν πεπερασμένο από εδώ, το δε άπειρο από εκεί, δίδεται στο πεπερασμένο τόση αξία αυθυπόστασης και ανεξαρτησίας όση και στο άπειρο, το πεπερασμένο καθίσταται απόλυτο ον, το οποίο είναι καθαυτό αύταρκες σε τούτο το δυϊσμό. Αν το άπειρο εφαπτότανε σα να πούμε στο πεπερασμένο, φοβούνταν πως θα το μηδένιζε και για τούτο τα θεωρούν σα χωρισμένα με άβυσσο. Συμβαίνει, όμως, εδώ ότι συμβαίνει και στην άπειρη πρόοδο: ομολογούν ότι το πεπερασμένο δεν κατέχει ανεξάρτητη πραγματικότητα, πως δεν είναι το απόλυτο, αλλά ότι είναι ον φθειρόμενο, αλλά λησμονούν όλο τούτο και βάζουν το πεπερασμένο απέναντι στο άπειρο, χωρίζοντας αυτό απόλυτα από τούτο και παρασταίνοντας αυτό ως αυθυφιστάμενο και απαλλαγμένο από κάθε περιορισμό».[186] Ήδη από την κριτική του Χέγκελ απέναντι στους δυϊστές του δίπολου άπειρο-πεπερασμένο υποδηλώνεται και η δική του άποψη. Για το Χέγκελ δεν μπορεί να υπάρξει ο ένας πόλος δίχως τον άλλο, δεν έχει νόημα να μιλάμε για αυθύπαρκτο πεπερασμένο ή αυθύπαρκτο άπειρο, αφού το ένα προσδιορίζει το άλλο και προσδιορίζεται από αυτό: «Η αλήθεια όμως αυτών (σ.σ. του άπειρου και του πεπερασμένου) είναι η ενότητά τους. Γιατί το μεν άπειρο είναι η άρνηση του πεπερασμένου, τούτο δεν είναι η άρνηση εαυτού εν εαυτώ, η οποία είναι απειρία […] Η αληθινή ενότητα είναι άλλη, ο καθένας από τους δυο όρους είναι η ενότητα αυτή, αλλά μόνο σαν άρνηση εαυτού: ουδέτερος έχει το προνόμιο του Καθ᾽ εαυτό του καταφατικού όντος, αλλά ο καθένας περιέχει εν εαυτώ τον έτερον. Το πεπερασμένο είναι το μη ον, το αρνητικόν, που αναιρεί εαυτό μέσα στην άρνησή του, στο άπειρο. Το δε άπειρον είναι το αρνητικό του πεπερασμένου, του διορισμού εν γένει […]».[187]

Παρέκβαση 1.2

Βλέποντας κανείς τα κείμενα του Ένγκελς για το άπειρο κατανοεί το βαθύ του επηρεασμό από το Χέγκελ. Είναι, όμως, γνωστό ότι κατατέθοντας τη δική του φιλοσοφική πρόταση (μαζί με το Μαρξ) υιοθέτησε εν μέρει τις φιλοσοφικές απόψεις του Χέγκελ, αφού όπως συνηθίζεται να λέγεται και να γράφεται αντέστρεψε(αν) τη χεγκελιανή διαλεκτική και την τοποθέτησαν με το κεφάλι προς τα πάνω και τα πόδια προς τα κάτω και την μετέτρεψαν σε υλιστική διαλεκτική. Έτσι, για μεθοδολογικούς λόγους διακρίνουμε στον Ένγκελς δυο φάσεις στη σκέψη του που αφορούν στο άπειρο: στην πρώτη φάση υιοθετεί κατά βάση τις σκέψεις του Χέγκελ τις οποίες, ωστόσο, τις θέτει σε υλιστικό πλαίσιο, ενώ σε μια δεύτερη φάση διατυπώνει τις σκέψεις του για το μαθηματικό άπειρο επιχειρώντας με αυτό τον τρόπο την οντολογική δικαίωσή του (του άπειρου). Ας παρακολουθήσουμε τη σκέψη του:

Α) «Το άπειρο είναι μια αντίφαση, είναι γεμάτο από αντιφάσεις. Ένα άπειρο που συνίσταται όλο από πεπερασμένες υποστάσεις, είναι ήδη μια αντίφαση κι ωστόσο έτσι είναι. Αλλά και το περιορισμένο του υλικού κόσμου δεν οδηγεί σε λιγότερες αντιφάσεις από ότι το απεριόριστο του, κάθε δε προσπάθεια να παραμεριστούν αυτές οι αντιφάσεις οδηγεί, όπως είδαμε, σε νέες και βαθύτερες αντιφάσεις. Ακριβώς γιατί το άπειρο είναι μια αντίφαση, γιατί είναι η άπειρη πορεία, που εκτυλίσσεται, χωρίς τέλος, μέσα στο χώρο. Η άρση της αντίφασης θα ήταν το τέλος του κόσμου».[188] Σε αυτό το απόσπασμα γίνεται, νομίζουμε, φανερή η κοινότητα των απόψεων Χέγκελ-Ένγκελς, κοινότητα απόψεων που έχουν να κάνουν με την αποδοχή του δίπολου πεπερασμένου-άπειρου ως διαλεκτικού δίπολου, που ως τέτοιου διέπεται από διαλεκτικές αντιφάσεις (όχι λογικές). Το άπειρο

Αριστοτέλη δες χαρακτηριστικά α) Ε. Μπιτσάκης, Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, σελ.213-215, εκδ. Στάχυ, , β) Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 59-75, εκδ. Νεφέλη

[186] . Ο.π., παράγραφος 95

[187] . Ο.π., παράγραφος 95

[188] . Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, σελ. 86, εκδ. Αναγνωστίδη

αποτελείται από πεπερασμένα αλλά όχι ως ένα απλό άθροισμα στατικών πραγμάτων. Η άρση των αντιφάσεων θα σήμαινε και κατάρρευση του δίπολου και το τέλος της ύπαρξης.

Β) Ο Ένγκελς στη συνέχεια πάει παραπέρα τη χεγκελιανή σκέψη, όταν τη διαλεκτική άπειρου-πεπερασμένου την εμπλαισιώνει σε υλιστικά όρια. Θέτει ένα σοβαρότατο γνωσιολογικό πρόβλημα: δικαιούμαστε άραγε να συμπεραίνουμε για το «αθέατο» όταν η θέασή μας έχει «όρια»? Ο Ένγκελς απαντά καταφατικά. Η υιοθέτηση της θέσης για την πραγματικότητα της απειρίας, δεν μπορεί να επαληθευτεί με εμπειρικό τρόπο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να διαπιστώσουμε την απειρία του χώρου. Ήδη, από το άκουσμα των λέξεων «απειρία του σύμπαντος» γίνεται φανερό το αδύνατο του εγχειρήματος. Πρόκειται για ένα ζήτημα φιλοσοφικό που δεν μπορεί να αποδειχτεί με τυπικά και λογικά μέσα. Για ένα θετικιστή, πιθανώς να χαρακτηριζόταν ως ψευδοπρόβλημα. Για το ΔΥ , όμως, το ερώτημα είναι νόμιμο. Είναι ένα υπαρκτό πρόβλημα που δεν απαντιέται με όρους πειραματικής επαλήθευσης. Η υιοθέτηση της απειρότητας μπορεί να γίνει με τη στήριξη των επιστημών και της φιλοσοφική σκέψης και για αυτό το λόγο δε θα ήταν σωστό να την χαρακτηρίσουμε ως ένα αυθαίρετο αξίωμα. Πιστεύουμε ότι αυτές τις σκέψεις είχε ο Ένγκελς όταν σχολίαζε τη θέση του Χέγκελ για το κακό άπειρο: « **Το κακό άπειρο**. Ο Χέγκελ τοποθετούσε ήδη σωστά το αληθινό άπειρο στον **πληρωμένο** χρόνο και χώρο, μέσα στην εξελικτική πορεία της φύσης και της ιστορίας. Τώρα, ολόκληρη η φύση συγχωνεύεται και στην ιστορία και η ιστορία δε διαφοροποιείται από την ιστορία της φύσης, παρά σαν εξελεκτική πορεία ανάπτυξης **συνειδητών** οργανισμών. Η άπειρη αυτή πολλαπλότητα της φύσης και της ιστορίας περιλαμβάνει το άπειρο του χώρου και του χρόνου-το κακό άπειρο- μόνο σαν ξεπερασμένη στιγμή, ουσιαστική βέβαια αλλά όχι κυριαρχική. Το ακραίο όριο των φυσικών επιστημών ήτα μέχρι τώρα το σύμπαν **μας** και για να γνωρίσουμε τη φύση δε χρειαζόμαστε τα απείρως πολυάριθμα σύμπαντα έξω από τα σύνορα του δικού μας. Πράγματι, ανάμεσα στα εκατομμύρια ήλιους, ένας μονάχα και το σύστημα του αποτελούν την ουσιαστική βάση των αστρονομικών μας ερευνών. Για τη γήινη μηχανική, τη φυσική και τη χημεία, είμαστε λίγο-πολύ περιορισμένοι στη μικρή μας Γη και απόλυτα για την επιστήμη των ενόργανων όντων. Και αυτό, όμως, δε δημιουργεί καμία ουσιαστική ζημιά στην πρακτική άπειρη πολλαπλότητα των φαινομένων και στη γνώση της φύσης, όπως δε βλάπτει στη ιστορία ο παρόμοιος κι ακόμα μεγαλύτερος περιορισμός σε ένα σχετικά σύντομο χρόνο και σε ένα σχετικά μικρό τμήμα της γης», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[189] Ο Ένγκελς και σε άλλο σημείο είναι κατηγορηματικός σχετικά με τη δυνατότητά μας να γνωρίσουμε το άπειρο. Απαντώντας στο γερμανό βοτανολόγο Νέγκελι, σχετικά με τον ισχυρισμό του ότι μπορούμε να γνωρίσουμε μόνο το πεπερασμένο, έγραφε: «Αυτό είναι εντελώς σωστό, στο βαθμό που στην περιοχή της γνώσης μας υποπίπτουν μόνο πεπερασμένα αντικείμενα. Ωστόσο αυτή η πρόταση έχει ανάγκη από συμπλήρωση: "Κατά βάθος δεν μπορούμε παρά να γνωρίσουμε μόνο το άπειρο". Πραγματικά, κάθε αληθινή, εξαντλητική γνώση, συνίσταται μόνο σε τούτο εδώ: **υψώνουμε νοητικά το ατομικό από την ατομικότητα στην ειδικότητα και από εκεί στην καθολικότητα, αναζητούμε και διαπιστώνουμε το άπειρο μέσα στο πεπερασμένο, το αιώνιο μέσα στο μεταβατικό. Αλά ο τύπος της καθολικότητας είναι ο τύπος της αυτοπλήρωσης, άρα του άπειρου, είναι η σύνθεση των πολυάριθμων πεπερασμένων μέσα στο άπειρο** [...] Κάθε αληθινή γνώση της φύσης είναι γνώση του αιώνιου, του άπειρου και συνεπώς ουσιαστικά απόλυτη. Αλλά αυτή η απόλυτη γνώση έχει ένα σπουδαίο μειονέκτημα. Ακριβώς όπως η απειρία της γνώσιμης ύλης αποτελείται από καθαρά πεπερασμένα στοιχεία, έτσι κι η απειρία της σκέψης που γνωρίζει το απόλυτο, αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό πεπερασμένων ανθρώπινων εγκεφάλων που δουλεύουν οι μεν δίπλα στους δε και διαδοχικά σε αυτή την άπειρη γνώση, κάνουν πρακτικά και θεωρητικά σφάλματα, ξεκινούν από λαθεμένες και μονόπλευρες αφετηρίες, ακολουθούν λανθασμένους, βασανιστικούς και αβέβαιους δρόμους και συχνά δε βρίσκουν το σωστό, ακόμα κι όταν σκοντάφτουν πάνω του. **Η γνώση του απείρου περιβάλλεται λοιπόν από διπλά εμπόδια και από τη φύση της δεν μπορεί να αποκτηθεί παρά με μια άπειρη ασυμπτωτική πρόοδο. Κι αυτό μας αρκεί εντελώς για να μπορούμε να πούμε: το άπειρο είναι τόσο γνώσιμο όσο και**

[189] . Ένγκελς, Διαλεκτική της φύσης, σελ. 215, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

ακατανόητο και αυτό είναι όλο κι όλο που μας χρειάζεται»[190], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Γ) Για τον Ένγκελς τα στοιχειώδη μαθηματικά, τα μαθηματικά δηλαδή των σταθερών μεγεθών, όπως ο ίδιος λέει, κινούνται μέσα στα όρια της τυπικής λογικής. Η τυπική λογική, όμως, υπερσκελίζεται όταν μιλάμε για Απειροστικό Λογισμό. Στον Απειροστικό Λογισμό εισάγεται πλέον η διαλεκτική: «Ο διαφορικός λογισμός επιτρέπει για πρώτη φορά στις φυσικές επιστήμες να απεικονίζουν μαθηματικά, **διαδικασίες** και όχι μόνο **καταστάσεις**: κίνηση», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[191] Ο Ένγκελς εκφράζει το θαυμασμό του για το επιστημονικό επίτευγμα του Απειροστικού Λογισμού, αλλά δεν τον θαυμάζει απλώς ως ένα καταπληκτικό νοητικό κατασκεύασμα. Τον εξυμνεί ως προϊόν μέσα στο οποίο ενσταλάζονται πραγματικές σχέσεις που συνδέουν το άπειρο με το απειροστό και μάλιστα με τρόπο διαλεκτικό: «Σήμερα δε θεωρούμε κανένα άλλο μεγαλύτερο επίτευγμα, στον τομέα όλων των θεωρητικών επιστημών, από την ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού, που πραγματοποιήθηκε στο δεύτερο ήμισυ του 17ου αιώνα. Στον τομέα αυτόν, περισσότερο από κάθε άλλον μάλιστα, έχουμε ένα γνήσιο κατόρθωμα του ανθρώπινου αποκλειστικά πνεύματος. Το γεγονός και μόνο ότι, ακόμα και στις μέρες μας, εξακολουθεί να περιβάλει πέπλο μυστηρίου τα μεγέθη που παίρνουν μέρος στον απειροστικό λογισμό, δηλαδή τα απειροστά και διαφορετικά μεγέθη όλων των βαθμών, αποτελεί την καλύτερη απόδειξη της διατήρησης των ψευδαισθήσεων, ότι στον τομέα αυτόν έχουμε να κάνουμε με «καθαρές δημιουργίες κι ελεύθερες φαντασιώσεις» της ανθρώπινης σκέψης, δημιουργίες δηλαδή που δεν έχουν καμία σχέση με την αντικειμενική πραγματικότητα. Αντίθετα, για όλες αυτές τις φαντασιώσεις, για όλα αυτά τα δήθεν φανταστικά μεγέθη, **η φύση μάς προσφέρει αντίστοιχα πρότυπα**. Όπως είναι γνωστό, η γεωμετρία αναφέρεται σε σχέσεις χώρου, ενώ η αριθμητική και η άλγεβρα αναφέρονται σε ποσοτικά, αριθμητικά μεγέθη, που ανταποκρίνονται στις γήινες συνθήκες μας, που αντιστοιχούν δηλαδή στα υλικά εκείνα μεγέθη, που η μηχανική τα λέει μάζες...», (η υπογράμμιση δική μας),.[192]

«Η φύση μάς προσφέρει αντίστοιχα πρότυπα» υποστηρίζει ο Ένγκελς. Για να υποστηρίξει αυτή του τη θέση χρησιμοποιεί ένα πείραμα εν είδει παραδείγματος: «Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι εκείνο που στο διαφορικό λογισμό μας παρουσιάζεται σαν κάτι μυστηριώδες, σα μια καθαρή λογική αφαίρεση της μαθηματικής επιστήμης, εδώ γίνεται τόσο λογικό τόσο οφθαλμοφανές. Η φύση, λοιπόν, εργάζεται **με τα μόρια-τα διαφορικά της**- όπως ακριβώς και η μαθηματική επιστήμη με τα δικά της, τα αφηρημένα διαφορικά. Σύμφωνα με τα μαθηματικά, το διαφορικό του $χ^3$ ισούται με $3χ^2δχ$ (οι παραστάσεις δε λαμβάνονται υπ' όψη.) Η γεωμετρική κατασκευή αυτής της σχέσης σημαίνει ότι η πλευρά χ του κύβου πρέπει να αυξηθεί κατά το απειροελάχιστο μέγεθος, το διαφορικό δηλαδή του χ το δχ. Ας μεταφερθούμε τώρα στη φύση και ας υποθέσουμε ότι αυτός ο κύβος αποτελείται από θειάφι, δηλαδή ένα σώμα που εξαχνίζεται εύκολα· ας υποθέσουμε επίσης ότι καλύπτουμε τις τρεις από τις έξι έδρες αυτού του κύβου και συγκεκριμένα , τρεις έδρες που εφάπτονται σε μια από τις κορυφές του, ενώ τις άλλες τρεις τις αφήνουμε ελεύθερες, δηλαδή ακάλυπτες. Αν τώρα αυτόν τον κύβο θειαφιού τον εκθέσουμε σε μια ατμόσφαιρα κορεσμένη από άχνη θειαφιού και μειώσουμε ταυτόχρονα τη θερμοκρασία της ατμόσφαιρας, τότε θα παρατηρήσουμε ότι πάνω στις τρεις ακάλυπτες έδρες εναποτίθεται σιγά-σιγά άχνη του θειαφιού της ατμόσφαιρας. Και τώρα, για να παραστήσουμε αυτό το φαινόμενο πιο καθαρά, ας παραδεχτούμε ότι στις τρεις αυτές έδρες επικάθισε ένα στρώμα θειαφιού πάχους ενός μόνο μορίου, όπως άλλωστε συμβαίνει στην πραγματικότητα στη φυσική και στη Χημεία. Έτσι, λοιπόν, θα έχουμε τη πλευρά χ του κύβου, αυξημένη κατά τη διάμετρο ενός μορίου, δηλαδή κατά δχ. Έχουμε συνεπώς μια αύξηση του όγκου του κύβου που συνίσταται στη διαφορά του αρχικού κύβου (Χ κύβος) από τον κύβο που προέκυψε ύστερα από την αύξηση της πλευράς χ κατά δχ, δηλαδή από τον $(χ+δχ)^3$. Η σχέση αυτή εκφράζεται με τον τύπο $(χ^3 + 3χ^2δχ+3χδχ^2+δχ^3) - χ^3$.

---

[190]. Ένγκελς, Διαλεκτική της φύσης, σελ. 212-213, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
[191] . Ένγκελς, Διαλεκτική της φύσης, σελ. 249, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
[192] . Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, σελ. 485, εκδ. Αναγνωστίδη

Στον τύπο αυτό έχουμε το δικαίωμα – όπως κάνουν και τα μαθηματικά – να μην υπολογίσουμε το $δχ^3$, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα μόριο, ούτε και το 3χδχ2 που αντιπροσωπεύει τρεις σειρές μορίων η μια σειρά πάνω στην άλλη πάνω στην ευθεία χΧδχ, αλλά το αποτέλεσμα θα παραμείνει το ίδιο, δηλαδή η αύξηση του όγκου του κύβου μας είναι $3χ^2δχ$. Και πραγματικά, αν κοιτάξουμε το φαινόμενο από κοντά, δεν θα δούμε πουθενά πάνω στον κύβο ούτε το μόριο (το $δχ^3$) ούτε τρεις απανωτές σειρές μορίων ($3χδχ^2$) για τον απλούστατο λόγο ότι δεν μπορούν να καταλαμβάνουν το χώρο ενός μορίου, να υπάρχουν στον ίδιο δηλαδή χώρο, δύο ή τρία μόρια. Έτσι, η αύξηση του όγκου του κύβου μας είναι ακριβώς $3χ^2δχ$.

Αλλά και με την εξάτμιση συμβαίνει το ίδιο. Αν δηλαδή από ένα ποτήρι νερό εξατμιστεί το από πάνω στρώμα, πάχους ενός μορίου, το ύψος του νερού χ μικραίνει κατά δχ. Έτσι, η συνεχής εξάτμιση του ενός στρώματος μορίων, ύστερα από το άλλο δεν είναι στην πραγματικότητα τίποτα άλλο παρά ένα **συνεχιζόμενος διαφορισμός**. Και αν τώρα συμβεί το αντίστροφο, αν δηλαδή οι υδρατμοί συμπυκνωθούν σε νερό-με ανάλογη πίεση και ψύξη- και το νερό αυτό επικαθίσει σε αλλεπάλληλα στρώματα κατά μόρια, πάνω στην επιφάνεια του νερού (**εδώ παραβλέπονται μερικές δυσχέρειες ή περιστατικά που είναι δυνατόν να θολώσουν την καθαρότητα του φαινομένου**), στην περίπτωση αυτή βρισκόμαστε μπροστά σε ένα πραγματικό *ολοκλήρωμα*, που διαφέρει από το μαθηματικό όμοιό του κατά το ότι : **το ένα, το μαθηματικό γίνεται συνειδητά από τον άνθρωπο, ενώ το άλλο γίνεται από τη φύση. Άλλωστε καταστάσεις, όπως οι προηγούμενες, που να παρουσιάζουν τέλειες αναλογίες με τον απειροστικό λογισμό δεν είναι οι μόνες που συναντάμε στη φύση**», (οι υπογραμμίσεις με τα τονισμένα γράμματα είναι δικές μας, οι υπογραμμίσεις με τα πλάγια γράμματα είναι του Ένγκελς).[193]

Όσον αφορά αυτή την προσπάθεια του Ένγκελς να βρει αναλογίες ανάμεσα στον Απειροστικό Λογισμό και στη φύση έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής: α) **η προσπάθειά του περιέχει μιαν υπερβολή που πηγάζει από την «αγωνία» του να δικαιώσει τη ρεαλιστικότητα των μαθηματικών. Το διαφορικό αποτελεί μια μαθηματική αλλά και φιλοσοφική αφαίρεση, είναι ένα μέγεθος οσοδήποτε μικρό που μπορεί να έχει αναλογίες όχι μόνο με μια υλική υπόσταση αλλά και με τις μορφές ύπαρξής της, δηλαδή το χώρο και το χρόνο. Το μόριο, όμως, δεν είναι οσοδήποτε μικρό, είναι ασφαλώς πολύ μικρό σε σχέση με τα αντικείμενα που μας περιβάλλουν, ωστόσο έχει καθορισμένη μάζα. Επομένως, είναι κάπως άστοχη η αναλογία που επιχειρεί ο Ένγκελς**, β) η παραπάνω αστοχία του δεν αδυνατίζει το βασικό του επιχείρημα για την οντολογική δικαίωση των «καθαρών» μαθηματικών, αφού το διαφορικό αναφέρεται σε κάτι υπαρκτό ή πιο σωστά προέρχεται από κάτι τέτοιο. Ο απειροστικός λογισμός εφαρμόζεται και λειτουργεί, λύνει πρακτικές ανάγκες, ανατροφοδοτείται από την πραγματικότητα, εμπλουτίζεται και γίνεται πιο αποτελεσματικός, γ) ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο απειροστικός λογισμός δικαιώνει και τη χεγκελιανή και την εγκελιανή φιλοσοφική άποψη περί άπειρου, πεπερασμένου και απειροστού. Καθώς ολοκληρώνουμε, το απειροστό (το dχ), αυτοαναιρείται σε μια άπειρη ολοκλήρωση και με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται το πεπερασμένο, που εμπεριέχει το απειροστό το οποίο είναι και δεν είναι εντός του πεπερασμένου. Έτσι, σε μια ενιαία διαδικασία ενυπάρχουν και οι τρεις έννοιες: το απειροστό, το άπειρο και το πεπερασμένο που βρίσκονται σε μια σχέση σύνδεσης και αμοιβαίας αναίρεσης. Η διαλεκτική τους αντίφαση αίρεται μέσα από τη διαδικασία της ολοκλήρωσης, αλλά η άρση αυτή είναι σχετική κι όχι απόλυτη. Κάτι αντίστοιχο μπορούμε να διακρίνουμε και σε άλλες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα (πεπερασμένη ποσότητα) συγκροτείται από τα απείρως επαναλαμβανόμενα απειροστά, τα σημεία.

Παρέκβαση 1.3

Ο Ένγκελς, ωστόσο δεν ήταν ο μόνος εκπρόσωπος από τους θεμελιωτές του ΔΥ που εξέφρασε άποψη για το Διαφορικό Λογισμό. Ο Μαρξ ήταν εκείνος που πού περισσότερο ασχολήθηκε με τη μαθηματική πλευρά του ζητήματος. Η πηγή για τους δικούς του

[193] . Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, σελ. 486-488, εκδ. Αναγνωστίδη

προβληματισμούς είναι τα *Μαθηματικά Χειρόγραφά* του.[194] Αυτό που σημειώνουν όλοι οι μελετητές των *Μαθηματικών Χειρογράφων* είναι πως αυτά δε χαρακτηρίζονται από κάποια ιδιαίτερη μαθηματική αξία, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν έχουν να μας «δώσουν» κάποια πράγματα (άλλωστε πρέπει να τα δούμε ενταγμένα στο μαθηματικό πλαίσιο της εποχής του Μαρξ και παίρνοντας υπόψη ότι ο Μαρξ ασφαλώς και δεν ήταν μαθηματικός αλλά και ότι δεν είχε υπόψη του όλα τα μαθηματικά επιτεύγματα της εποχής του), αλλά χαρακτηρίζονται από διαλεκτικό τρόπο σκέψης.[195] Ας δούμε τι ακριβώς σημαίνει αυτό:
1) Ο Μαρξ ενδιαφέρεται για μια αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού. Για αυτό το λόγο κάνει μια περιοδολόγηση της ιστορικής του εξέλιξης. Σύμφωνα με αυτή διακρίνει τρία στάδια εξέλιξης του Διαφορικού Λογισμού: α) στο πρώτο στάδιο διακρίνει το «μυστικιστικό διαφορικό λογισμό» του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς, β) στο δεύτερο στάδιο διακρίνει τον «ορθολογικό διαφορικό λογισμό» του Όυλερ και του Ντ΄Αλαμπέρ και γ) στο τρίτο στάδιο διακρίνει τον «καθαρά αλγεβρικό λογισμό» του Λαγκράνζ. Τι περιεχόμενο δίνει στην κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες;

Στο πρώτο στάδιο, αυτό των Νιούτον και Λάιμπνιτς, ο Μαρξ υποστηρίζει ότι οι δημιουργοί του Διαφορικού Λογισμού δεν έβλεπαν τον «αλγεβρικό» πυρήνα του διαφορικού λογισμού. Η παρατήρηση αυτή του Μαρξ πιστεύουμε ότι έχει να κάνει με τη γενικότερη υλιστικοδιαλεκτική αντίληψή του, γιατί κατά τη γνώμη του όντας ο Διαφορικός Λογισμός αποκομμένος από τον «αλγεβρικό» πυρήνα αναδύεται ως ένα εντελώς αυτόνομο πεδίο μαθηματικής σκέψης. Ασφαλώς, κάτι τέτοιο ήταν ανεπίτρεπτο για το Μαρξ. Η αποκατάσταση της σχέσης του Διαφορικού Λογισμού και του «αλγεβρικού» πυρήνα θα σήμαινε και αποκατάσταση της σχέσης του νέου κλάδου των μαθηματικών με την ίδια την πραγματικότητα, αφού ¨οι μαθηματικοί πραγματικά πίστευαν στο μυστηριώδη χαρακτήρα του πρόσφατα ανακαλυμμένου μέσου υπολογισμού, που οδηγούσε στα σωστά (και ειδικά στις γεωμετρικές εφαρμογές, εκπληκτικά) αποτελέσματα χρησιμοποιώντας μια απολύτως λαθεμένη διαδικασία. Με αυτό τον τρόπο έγιναν και οι ίδιοι μυστηριώδεις, εκτιμούσα όλο και περισσότερο τη νέα ανακάλυψη, εξόργιζαν όλο και περισσότερο τον κόσμο των παλιών ορθόδοξων μαθηματικών και προκαλούσαν ακόμα και στον κόσμο των μη ειδικών την έχθρα που ήταν απαραίτητη για το άνοιγμα αυτού του νέου δρόμου».[196] Επιπλέον τον απασχολεί ο τρόπος με τον οποία τα διαφορικά σύμβολα έγιναν τελεστικοί τύποι και σχολιάζει: « είτε μέσα από **συγκαλυμμένες** είτε μέσα από **φανερές μεταφυσικές υποθέσεις**, οι οποίες από μόνες τους οδηγούν ακόμα περισσότερο **σε μεταφυσικά, μη μαθηματικά συμπεράσματα**· κι ακριβώς σε αυτό το σημείο διαπιστώνεται ένας **έντονος μυστικισμός, η δημιουργία ξεκινάει το δρόμο της και οι ποσότητες αρχίζουν πράγματι να προχωρούν από μόνες τους**»[197], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Έτσι, η αυτονομία του Διαφορικού Λογισμού είναι μόνο φαινομενική και στο βαθμό που την κάνουμε απόλυτη μετατρέπουμε την ερμηνεία του Διαφορικού Λογισμού σε μεταφυσική.

Στο δεύτερο στάδιο, του Ντ΄Αλαμπέρ και του Όυλερ που χαρακτηρίσθηκε ως στάδιο του «ορθολογικού διαφορικού λογισμού», «οι μαθηματικά λαθεμένες μέθοδοι του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς διορθώνονται, αλλά το σημείο αναφοράς παραμένει το ίδιο»[198], (για τα «τεχνικά» ζητήματα των διορθώσεων του Ντ΄Αλαμπέρ σε σχέση με το Διαφορικό Λογισμό των Νιούτον-Λάιμπνιτς, δες πηγές της υποσημείωσης 181). Να σημειώσουμε μόνο ένα σχόλιο σύμφωνα με το οποίο «η εκτίμηση του Μαρξ για την εργασία του Ντ' Αλαμπέρ σαν

---

[194] . Τα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, εκδ. Γλάρος

[195] . Για αυτές τις διαπιστώσεις δες στο «Τα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, εκδ. Γλάρος», α) την εισαγωγή από τους μεταφραστές, β) τον πρόλογο στη ρώσικη έκδοση της Γιανόφσκαγια, γ) το άρθρο του Ε. Κόλμαν, «Για τα "μαθηματικά χειρόγραφα" του Μαρξ», δ) το άρθρο του Σ. Σμιθ, «Ο Χέγκελ, ο Μαρξ και ο Διαφορικός Λογισμός». Επίσης την μπροσούρα των D. Struik-H. Kennedy, «Ο Μαρξ και τα Μαθηματικά», Θεσσαλονίκη, 1987

[196] . Μαρξ, Τα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, σελ. 151-152, εκδ. Γλάρος

[197] . Μαρξ, Τα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, σελ. 118, εκδ. Γλάρος

[198] . Πρόλογος στη ρώσικη έκδοση των «Μαθηματικών Χειρόγραφων» του Καρλ Μαρξ, εκδ. Γλάρος, της Γιανόφσκαγια, σελ. 33

ένα τεράστιο βήμα μπροστά στέκει ακόμα. Αυτό είναι και το πιο αξιοσημείωτο, αφού ακόμα και οι σύγχρονοι ιστορικοί των μαθηματικών το δικαιολογούν».[199]

Στο τρίτο στάδιο, του Λαγκράνζ, αυτού που πήρε το όνομα του «καθαρά αλγεβρικού λογισμού», ένα στάδιο που κατά το Μαρξ αποτέλεσε «μια θεωρία της παράγωγης συνάρτησης που προσέφερε μια νέα θεμελίωση στο διαφορικό λογισμό». Πρόκειται για εκείνο το στάδιο για το οποίο ο Μαρξ εκφράζει τη μεγαλύτερη εκτίμηση. Το γιατί θα γίνει φανερό από τις παρακάτω διαπιστώσεις του: «η πραγματική και επομένως πιο απλή σχέση του νέου με το παλιό αποκαλύπτεται μόλις το νέο αποκτήσει την τελική μορφή του και μπορούμε να πούμε πως ο διαφορικός λογισμός απέκτησε αυτή τη σχέση μέσα από τα θεωρήματα του Ταϊηλορ και του Μακ-Λώριν. Έτσι ο Λαγκράνζ ήταν ο πρώτος που σκέφθηκε να επαναφέρει το διαφορικό λογισμό σε μια στέρεη αλγεβρική θεμελίωση»[200]. Σε άλλο σημείο εξαίροντας την προσφορά του Λαγκράνζ, ο Μαρξ έγραφε: « 1) Η μεγάλη υπηρεσία που πρόσφερε ο Λαγκράνζ δε είναι μόνο ότι θεμελίωσε το θεώρημα του Ταϊηλορ και το διαφορικό λογισμό γενικά σε καθαρή αλγεβρική ανάλυση, αλλά επίσης ότι εισήγαγε την έννοια της παράγωγης συνάρτησης, την οποία όλοι οι διάδοχοί του χρησιμοποίησαν, λιγότερο ή περισσότερο, αν και χωρίς να το αναφέρουν. Ο ίδιος όμως δεν ήταν ικανοποιημένος με αυτό. Αφού πρώτα αναπτύσσει με αλγεβρικό τρόπο όλες τις δυνατές συναρτήσεις του (χ+h) σε αυξανόμενες ακέραιες θετικές δυνάμεις του h, στη συνέχεια αποδίδει σε αυτή [την ανάπτυξη] το δεδομένο όνομα (Taufname) του διαφορικού λογισμού. Όλες οι ευκολίες και οι συμπυκνώσεις (θεώρημα του Ταϊηλορ κ.λπ.) που ο ίδιος ο διαφορικός λογισμός προσφέρει χάνονται με αυτό τον τρόπο και πολύ συχνά αντικαθίστανται από αλγεβρικές πράξεις με πολύ πιο σημαντική και πολύπλοκη φύση, 2) Όσον αφορά την καθαρή ανάλυση, ο Λαγκράνζ αποδεσμεύεται πραγματικά από καθετί που του φαίνεται μεταφυσική υπέρβαση στις ροές του Νεύτωνα, στα απειροστά διαφορετικής τάξης του Λάιμπνιτς, στο θεώρημα της οριακής τιμής των μηδενιζόμενων ποσοτήτων, στην αντικατάσταση του 0/0 (=dx/dψ) ως συμβόλου για το διαφορικό συντελεστή κ.τλ. Ακόμα αυτό δεν τον εμποδίζει να θεωρεί αναγκαία τη μια ή την άλλη από αυτές τις «μεταφυσικές» παραστάσεις στην εφαρμογή των θεωριών του, των καμπυλών του κ.λπ.». [201]

Ο Μαρξ, σύμφωνα με την παραπάνω σταδιοποίηση μετατρέπεται, τρόπον τινά, σε ένα ιστορικό των μαθηματικών. Τα τρία στάδια δεν τα βλέπει ως αυτόνομες χρονικές νησίδες. Κάνοντας μάλιστα ένα παραλληλισμό της εξέλιξης της σκέψης στο διαφορικό λογισμό με την εξέλιξη της φιλοσοφικής σκέψης γράφει ότι «με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ο Φίχτε ακολούθησε τον Καντ, ο Σέλλιγκ το Φίχτε, ο Χέγκελ το Σέλλιγκ, αλλά ούτε ο Φίχτε, ούτε ο Σέλλιγκ, ούτε ο Χέγκελ διερεύνησαν τη γενική θεμελίωση του Καντ και του ιδεαλισμού γενικότερα, γιατί αλλιώς δε θα ήταν σε θέση να τα αναπτύξουν παραπέρα».[202]

2) Ο Μαρξ μελετούσε την εξέλιξη του διαφορικού λογισμού και τον τρόπο που αυτός θα είχε μια στέρεη θεμελίωση παράλληλα με την επιδίωξή του να χρησιμοποιήσει το διαφορικό λογισμό και στις κοινωνικές επιστήμες και στην πολιτική οικονομία. Είναι χαρακτηριστικό το απόσπασμα ενός γράμματος που έστειλε στον Ένγκελς, στο οποίο γράφει: «Μόλις έστειλα στο Μουρ μια ιστορία, η οποία prinatim [μάλιστα] έπρεπε να εισαχθεί λαθραία. Αυτός, όμως, νομίζει ότι το πρόβλημα δε μπορεί να λυθεί ή τουλάχιστον δεν μπορεί να λυθεί pro tempore [προς το παρόν], από την άποψη ότι πολλά σημεία που σχετίζονται με το θέμα δεν έχουν διερευνηθεί ακόμα. Το πρόβλημα έχει ως εξής: ξέρεις κάτι πίνακες στους οποίους οι τιμές, υπολογισμένες σε ποσοστά στα εκατό κ.τ.λ. κ.τ.λ., παρουσιάζονται στην αύξησή τους, στην πορεία ενός χρόνου κ.τ.λ. και δείχνουν τις αυξήσεις και τις μειώσεις με τεθλασμένες γραμμές. Έχω προσπαθήσει επανειλημμένα, στην ανάλυση των κρίσεων, να υπολογίσω αυτές τις αυξομειώσεις θεωρώντας τες φανταστικές καμπύλες και σκέφτηκα (και ακόμα και τώρα το θεωρώ δυνατό, αν υπάρχει αρκετό εμπειρικό υλικό) να βγάλω από αυτά με μαθηματικό τρόπο ένα σπουδαίο νόμο για τις κρίσεις. Ο Μουρ (Samuel Moor),

---

[199] . D. Struik-H. Kennedy, «Ο Μαρξ και τα Μαθηματικά», σελ. 31, Θεσσαλονίκη, 1987
[200] . Μαρξ, Τα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, σελ. 172, εκδ. Γλάρος
[201]. Ο.π., σελ. 174
[202]. Ο.π., σελ. 178

όπως σου είπα, θεωρεί πως το πρόβλημα μάλλον δεν έχει πρακτική αξία, κι έτσι, προς το παρόν, αποφάσισα να το παρατήσω».[203]

Με βάση αυτό το κείμενο του Μαρξ θα αποτολμήσουμε μιαν υπόθεση. Ο Μαρξ στο Κεφάλαιο χρησιμοποίησε στοιχειώδη μαθηματικά. Ένα από τα πιο σπουδαία ζητήματα της μαρξιστικής θεωρίας είναι ο νόμος για την πτωτική τάση του μέσου ποσοστού κέρδους. Ο Μαρξ όριζε ως μέσο ποσοστό κέρδους το κλάσμα υ/μ+σ, όπου υ η παραγόμενη υπεραξία, μ το μεταβλητό κεφάλαιο και σ το σταθερό κεφάλαιο. Αν σε αυτό το κλάσμα διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το μ, τότε προκύπτει το κλάσμα (υ/μ) /1+(σ/μ). Η διαίρεση αυτή έγινε γιατί με αυτό τον τρόπο στον ίδιο τύπο συνυπάρχουν τρία μεγέθη: το ίδιο το ποσοστό κέρδους που είναι ολόκληρο το κλάσμα, το ποσοστό της υπεραξίας που είναι το υ/μ και η οργανική σύνθεση του κεφαλαίου που είναι το σ/μ. Ο Μαρξ υποστήριζε ότι καθώς η μάζα του σταθερού κεφαλαίου αυξάνεται, έχουμε ως αποτέλεσμα την αύξηση της οργανικής σύνθεσης του κεφαλαίου. Καθώς, όμως, επιτυγχάνεται αύξηση της μάζας του σταθερού κεφαλαίου αυτό συνεπάγεται είτε τη μείωση του μεταβλητού κεφαλαίου (οπότε σε αυτό το σημείο επηρεάζεται και η μάζα της παραγόμενης υπεραξίας), είτε την αύξηση της μάζας του μεταβλητού κεφαλαίου αλλά με λιγότερο έντονους ρυθμούς από την αύξηση της μάζας του σταθερού κεφαλαίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο παρονομαστής του κλάσματος ή να μεγαλώνει πιο γρήγορα από τον αριθμητή, καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται ή ο παρονομαστής να μεγαλώνει και ο αριθμητής να μικραίνει. Έτσι, ερμηνεύεται και η τάση για πτώση του μέσου ποσοστού κέρδους. Είναι προφανές ότι από τη στιγμή που αναφερόμαστε για ρυθμούς μεταβολής, ο διαφορικός λογισμός μπορεί να υπεισέλθει και να δώσει ακόμα πιο στέρεα επιστημονικά συμπεράσματα. ο Μαρξ, εικάζουμε ότι κάτι τέτοιο είχε στο μυαλό του, αλλά δεν μπόρεσε να το ολοκληρώσει. Στήριξε το συμπέρασμά του σε μια αφαιρετική λογική που ωστόσο επαληθεύτηκε αργότερα από πολλούς οικονομολόγους. Μάλιστα, κατά κάποιους μαρξιστές οικονομολόγους ο νόμος της πτωτικής τάσης του μέσου ποσοστού κέρδους βλήθηκε και μάλιστα με τη χρήση της άλγεβρας : «όμως, αυτό που χρειαζόταν για μια βαθιά δυναμική ανάλυση του ζητήματος θα ήταν το μαθηματικό εργαλείο των εξισώσεων της διαφοράς ή των διαφορικών εξισώσεων».[204]

Παρέκβαση 2η: <u>Μαθηματικά και ιδεολογία</u>

Συχνά, οι έννοιες της φιλοσοφίας, της κοσμοθεωρίας και της ιδεολογίας συγχέονται. Στο συγκεκριμένο σημείο μας ενδιαφέρει η έννοια της ιδεολογίας, και η ειδική της σχέση με τα μαθηματικά, αν αυτή υπάρχει, αφού στην έννοια της φιλοσοφίας έχουμε ήδη αναφερθεί.

Οι θεμελιωτές του ΔΥ χρησιμοποίησαν την έννοια της ιδεολογίας με μια διττή σημασία. Ή για να είμαστε περισσότερο ακριβείς το εννοιολογικό της περιεχόμενο γνώρισε δυο φάσεις. Συγκεκριμένα, στην πρώτη φάση η έννοια της ιδεολογίας χρησιμοποιήθηκε ως ψευδής συνείδηση. Ψευδής συνείδηση, το λέει άλλωστε κι η λέξη είναι μια φενακισμένη συνείδηση, μια στρεβλή σε σχέση με την πραγματικότητα, συνείδηση. Ωστόσο, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η αναφορά για την παραμορφωμένη συνείδηση δεν είναι για τη συνείδηση εν γένει αλλά για την κυρίαρχη ιδεολογία. Ας δούμε τον τρόπο που έθεταν το θέμα: « οι ιδέες της κυρίαρχης τάξης είναι σε κάθε εποχή οι κυρίαρχες ιδέες. Με άλλα λόγια, η τάξη που είναι κυρίαρχη υλική δύναμη της κοινωνίας, είναι ταυτόχρονα η κυρίαρχη υλική δύναμη της κοινωνίας, είναι ταυτόχρονα η κυρίαρχη πνευματική της δύναμη»[205] ενώ σε άλλο σημείο «αν σε κάθε ιδεολογία οι άνθρωποι και οι περιστάσεις τους παρουσιάζονται το πάνω κάτω, όπως σε ένα σκοτεινό θάλαμο, το φαινόμενο αυτό πηγάζει από την ιστορική διαδικασία της ζωής τους, όπως ακριβώς η αντιστροφή των αντικειμένων πάνω στον αμφιβληστροειδή πηγάζει από την άμεσα φυσική διαδικασία της ζωής τους».[206] Σε μια δεύτερη φάση η έννοια της ιδεολογίας διευρύνεται και δε συμπεριλαμβάνει μόνο τους

---

[203] . Μαρξ-Ένγκελς, Έργα, τόμος 33, σελ.82, Βερολίνο 1966

[204] . Κ. Θέκεδαθ, Η διεθνοποίηση του χρηματιστικού κεφαλαίου και ο νόμος της τάσης πτώσης του ποσοστού κέρδους, ΚΟΜΕΠ, τ.1, 2005

[205] . Μαρξ-Ένγκελς, Η γερμανική ιδεολογία, τ.1, σελ.94, εκδόσεις Gutenberg

[206] . Μαρξ-Ένγκελς, Η γερμανική ιδεολογία, τ.1, σελ.67, εκδόσεις Gutenberg

εκπροσώπους των κυρίαρχων κοινωνικών δομών, αλλά πλέον έχει μια πολυμορφία με αναφορές σε διαφορετικά ταξικά συμφέροντα. Έτσι γίνεται διάκριση της ιδεολογίας ως ψευδούς συνείδησης και της επιστημονικής ιδεολογίας. [207] Στην πορεία η έννοια της ιδεολογίας συγκεκριμενοποιήθηκε περισσότερο και καταγράφεται ως ένα σύστημα απόψεων και ιδεών μέσω των οποίων συνειδητοποιούνται α) οι σχέσεις μεταξύ των ανθρώπων, β) οι σχέσεις των ανθρώπων προς την πραγματικότητα. Το σύστημα αυτών των ιδεών συγκροτούν κι εμπεριέχουν και καταστατικές θέσεις είτε για τον κοινωνικό μετασχηματισμό είτε για τη συντήρησή του.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι όταν μιλάμε για τις επιστήμες και άρα και για τα μαθηματικά , δεν μπορούμε να τις εντάξουμε (τα εντάξουμε) μέσα σε ιδεολογικά πλαίσια με την εξής έννοια: δεν υπάρχουν «ταξικά» μαθηματικά. Επί παραδείγματι τι νόημα θα είχε να μιλήσουμε για την ταξικότητα της πρόσθεσης, των πιθανοτήτων ή της ολοκλήρωσης; Ωστόσο, δεν πρόκειται για δυο κατηγορίες (επιστήμη και ιδεολογία) με απόλυτη αυτονομία μεταξύ τους. Και αυτό για δυο λόγους: έχει σημασία α) πώς χειρίζεται κανείς τα θεμέλια των μαθηματικών, αν δηλαδή τα βλέπει ως διαφορετικές ή/και καλύτερες, κάθε φορά, προσεγγίσεις της πραγματικότητας ή ως απόλυτες και απαράβατες οντολογικές αρχές που δεν επιδέχονται καμίας αμφισβήτησης και β) πώς χρησιμοποιείται η επιστήμη των μαθηματικών σε ατομικό ή/και σε συλλογικό επίπεδο, για ποιους λόγους, δηλαδή. Για το πρώτο ζήτημα αν και θα δοθεί η ευκαιρία στο κεφάλαιο Γ΄ να αναπτύξουμε κάποιες απόψεις, θα κάνουμε μια αναφορά που είναι αρκετά χρήσιμη για το θέμα μας. Ο Κουρτ Γκέντελ ιδεολογικοποιώντας την επιστήμη θεώρησε ότι ο θετικισμός μαζί με το σκεπτικισμό και τον υλισμό αποτέλεσαν την κυρίαρχη «αριστερή» κοσμοθεωρία. Από τη άλλη η «δεξιά» κοσμοθεωρία» χαρακτηρίσθηκε από την ενασχόλησή της ,με τον πνευματισμό, τη θεολογία και τον ιδεαλισμό. Συνέχιζε δε τη θεώρησή του λέγοντας ότι τα μαθηματικά που είναι από τη φύση τους μια a priori επιστήμη έχουν μια εγγενή ροπή προς τα δεξιά.[208] Πέρα από το ζήτημα του επιστημονικού περιεχομένου των όρων αριστερά και δεξιά, ο Γκέντελ με μια τέτοια του διαπίστωση όπως η παραπάνω νομίζουμε ότι έχει εν μέρει δίκιο. Από τη μια μεριά πράγματι η γενικότερη ιδεολογική τοποθέτηση κάποιου ατόμου μπορεί να επηρεάσει την επιλογή της επιστημονικής μεθόδου την οποία αποφασίζει να χρησιμοποιήσει. Άρα έχει ένα ορισμένο νόημα η διαίρεση των φιλοσοφικών και γνωσιολογικών στρατοπέδων στην επιστήμη. Αλλά όπως είπαμε ένα ορισμένο νόημα. Από την άλλη η επιστήμη όπως ήδη έχουμε πει δεν μπορεί να είναι ταξική παρά μόνο η χρήση της. Επομένως τα «δεξιά» μαθηματικά στερούνται νοήματος, αφού σε φιλοσοφικό επίπεδο γίνεται μια σύγχυση ή για την ακρίβεια ταύτιση της επιστήμης και της φιλοσοφίας με την ίδια τους την ερμηνεία και τις ιδεολογικές της προεκτάσεις.

Για το δεύτερο θέμα που θέσαμε, μπορούμε να δούμε σε αυτό το σημείο κάποιους προβληματισμούς, αφού πρώτα ανοίξουμε μια παρένθεση. Η παρένθεση αυτή έχει να κάνει με στρεβλώσεις του ΔΥ (και όχι μόνο αυτού) στη σχέση επιστήμης (μαθηματικών)-ιδεολογίας. Σύμφωνα με το Ρίμπνικοφ υπάρχουν δυο πλατιά διαδεδομένα λάθη: «**Κατ΄ αρχήν, ο λόγος γίνεται για την απαίτηση να μην αντικαθίστανται οι μεθοδολογικές μελέτες των πραγματικών διαδικασιών ανάπτυξης των μαθηματικών με την επιλογή γεγονότων της ιστορίας των μαθηματικών με σκοπό την επιβεβαίωση ενός εκ των προτέρων καθορισμένου σχήματος. Για την ανάπτυξη της μεθοδολογίας της επιστήμης ένας τέτοιος τρόπος συμπεριφοράς μόνο επιβλαβής μπορεί να είναι.**

Η ζωή από καιρό έδειξε, ότι παρόμοια επιλογή ιστορικών –επιστημονικών περιπτώσεων και καταστάσεων και η «προσαρμογή» τους στις ήδη γνωστές φιλοσοφικές αρχές και γενικές διατυπώσεις συνεπάγονται τον κίνδυνο της απώλειας του πραγματικού σκοπού της επιστημονικής έρευνας και την αναγωγή του σε άκαρπη επίδειξη της δήθεν εξυπνάδα [...]

Ο δεύτερος τύπος λαθών (σ.σ. έχουμε αναφερθεί λίγο παραπάνω σε αυτόν τον τύπο) συνίσταται στις προσπάθειες φιλοσοφικο-πολιτικής ερμηνείας σε όλα τα στοιχεία

---

[207] . Δες αναλυτικότερα α) Μαρξ-Ένγκελς, Η γερμανική ιδεολογία, τ.1 και τ.2, εκδόσεις Gutenberg και β) Φ. Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το τέλος της γερμανικής κλασικής φιλοσοφίας, εκδόσεις Σύγχρονη Εποχή

[208] . Δες αναλυτικότερα Kurt Godel, The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy, 1961

των μαθηματικών: στα θεωρήματα, στις θεωρίες , στις τυπικές-λογικές κατασκευές. Ιδιαίτερα καθαρά παρόμοιες πλάνες εκφράζονται στις θεωρίες κοινωνικοποίησης ή ακόμα και «προλεταριοποίησης» των θετικών επιστημών και των μαθηματικών».[209] Η μη συνειδητοποίηση της ύπαρξης τέτοιων λαθών μπορεί να έχει δυσάρεστα ή και ολέθρια αποτελέσματα. Για παράδειγμα, πάλι ο Ρίμπνικοφ, αναφέρει ως τέτοια τις «απορρίψεις» και «αναιρέσεις» έργων ξένων επιστημόνων στη σοβιετική επιστήμη στον τομέα της κυβερνητικής, της θεωρίας της σχετικότητας, της μαθηματικής λογικής κ.λπ.[210]

Κλείνοντας αυτή την (αναγκαία) παρένθεση ας δούμε τώρα πώς οι δρόμοι μαθηματικών και ιδεολογίας μπορεί να συναντιούνται. Συναντιούνται, λοιπόν, στο βαθμό που το υποκείμενο τα χρησιμοποιεί για την αποκάλυψη της αλήθειας ή τη απόκρυψή της, για κοινωνικούς λόγους ή αντικοινωνικούς, συνειδητά ή ασύνειδα.

Τα μαθηματικά, ως ένας επιστημονικός τομέας, αποτελούν μια παραγωγική δύναμη. Όμως, οι παραγωγικές δυνάμεις έχουν μια διττή σημασία στο συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτουργούν: έχουν μια προοδευτική πλευρά στο βαθμό που παρέχουν δυνατότητες αυξημένης παραγωγικότητας και απαλλαγής του ανθρώπου από λειτουργίες που τις αναλαμβάνουν οι άλλες παραγωγικές δυνάμεις πλην ανθρώπου και έχουν και μια αντιδραστική πλευρά στο βαθμό που μετατρέπονται σε «δυνάστες» του ανθρώπου. Σε κάθε περίπτωση οι παραγωγικές δυνάμεις άρα και η επιστήμη εν γένει και τα μαθηματικά ειδικότερα δεν είναι από μόνα τους καλά ή κακά, δεν έχουν κάποιο ηθικό επίχρισμα. Αν, λοιπόν, τα μαθηματικά συνδέονται με τον πόλεμο και την εξέλιξη όπλων ή δημιουργία νέων (όπλων) ασφαλώς και δε φταίνε τα μαθηματικά. Αν τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία καλπονοθευτικών συστημάτων και πάλι δε φταίνε.[211] Σε αυτό το σημείο υπάρχει ένα ερώτημα: είναι δυνατό σκοποί, όπως αυτοί που προαναφέραμε να αναπτύσσουν τα μαθηματικά; Η απάντηση δεν είναι μονοσήμαντη. Η πρόοδος των μαθηματικών μπορεί να είναι μονομερής αλλά το γενικό σώμα τους δε ωφελείται:

«1) Ακόμα και οι στρατιωτικές ανάγκες στο 2ο παγκόσμιο πόλεμο προώθησαν βασικές έρευνες, επρόκειτο πάντα για «κατευθυνόμενη» βασική έρευνα, που δεν επέφερε θεμελιακές διασπάσεις. Έτσι, δεν ικανοποιήθηκαν οι μακροπρόθεσμες αναπτυξιακές απαιτήσεις της επιστήμης. 2) Η στρατιωτική τεχνολογική ανάπτυξη διαρκεί περισσότερο από την αστικά προωθούμενη τεχνολογική κι επιστημονική ανάπτυξη, παρά αντίστροφα [...][212] και τελικά, η φαινόμενη πρόοδος είναι και φρενάρισμα των μαθηματικών εντός συγκεκριμένου πλαισίου: «Πρώτον, η στρατιωτική έρευνα είναι συνδεδεμένη με τη μυστικότητα. Έτσι, εμποδίζεται η «φυσική» αναπτυξιακή διαδικασία της επιστήμης, όπου κάθε ανοικτό ζήτημα και κάθε σημαντικό αποτέλεσμα προσφέρεται κατ' αρχήν στην παγκόσμια κοινότητα των ειδικών συναδέλφων σα βάση κριτικής και παραπέρα επεξεργασίας. Επιστημονικές πληροφορίες κάνουν κύκλους σε στενά καθορισμένα όρια από ένα στρατιωτικό ερευνητικό κέντρο σε άλλο [...] Δεύτερον, τα τυποποιημένα επιστημονικά ζητήματα του στρατού είναι περισσότερο σημειακού χαρακτήρα κι απαιτούν σύντομο χρόνο απάντησης: «καλύτερα μια χρήσιμη απάντηση τώρα, παρά μια θεωρητικά επεξεργασμένη σε δυο χρόνια».[213]

Έτσι, η συνάντηση μαθηματικών-ιδεολογίας γίνεται με τέτοια μορφή, αφήνοντας ωστόσο τα μαθηματικά αποϊδεολογικοποιημένα. Αυτό που ορίζει το σημείο συνάντησής τους είναι ο συγκεκριμένος τρόπος χρήσης των ίδιων των μαθηματικών.[214]

---

[209] . Κ.Α.Ρίμπνικοφ, Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, σελ.123-124, Θεσσαλονίκη, 1986

[210] . Ο.π., σελ. 35

[211] . Μια ιδέα για το πώς τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να φτιαχτούν «περίεργα» εκλογικά συστήματα, μας δίνει το άρθρο «Δημοκρατία και μαθηματικά» του Valery Pakhomov στο περιοδικό Quantum, τ.1, 1998.

[212] . Jens Hoyrup, Μαθηματικά στον πόλεμο και στην ειρήνη, σελ. 12 Δημοκρατική Πανεπιστημονική Κίνηση, 1984

[213] . Jens Hoyrup, Μαθηματικά στον πόλεμο και στην ειρήνη, σελ. 16 Δημοκρατική Πανεπιστημονική Κίνηση, 1984

[214] . Ενώ συμφωνούμε με την άποψη ότι τα μαθηματικά δεν είναι σωστό να ιδεολογικοποιούνται, δε θα συμφωνήσουμε καθόλου με την άποψη ότι μπορούν να διδαχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτραπεί η σύνδεσή τους με αντικοινωνικούς σκοπούς π.χ. μιλιταριστικούς. Ο Jens Hoyrup στο «Μαθηματικά

Η παραπάνω άποψη δεν υπονοεί μια συμφωνία με την αλτουσεριανή άποψη σύμφωνα με την οποία η ιδεολογία είναι μια κίβδηλη συνείδηση και με αυτό τον τρόπο επιστήμη και ιδεολογία κάθε μία έχει το δικό της απόλυτα αυτονομημένο πεδίο που δεν επικοινωνεί με το άλλο. Δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι η παραγωγή γνώσης είναι δυνατή μόνο σε θεωρητικό επίπεδο αφού την αποκαθάρουμε από τις ιδεολογικές έννοιες. Ανακεφαλαιώνοντας, θα λέγαμε ότι η άποψη του Αλτουσέρ δεν παραλληλίζεται με αυτή του ΔΥ για τους εξής λόγους: επιστήμη, ιδεολογία και φιλοσοφία διέπονται από επιστημονικότητα. Ακόμα, η ιδεολογία στις αταξικές δομές που είχαν προβλέψει οι κλασικοί του Μαρξισμού θα λάβει τέλος αλλά μέχρι τότε επηρεάζει ποικιλοτρόπως τόσο την επιστήμη όσο και την ιδεολογία. Τέλος, όσο υπάρχει ιδεολογία αυτή δεν φανερώνεται ως φενακισμένη αντίληψη για τον κόσμο αλλά είτε υπάρχει ως τέτοια είτε ως επιστημονική ιδεολογία και από αυτή την άποψη δεν είναι κίβδηλη. [215]

στον πόλεμο και στην ειρήνη», σελ. 20-24, ισχυρίζεται ότι υπάρχει η δυνατότητα να προφυλαχθεί η ειρήνη αν τα μαθηματικά διδαχθούν επιστημονικά και αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσα από ένα πακέτο προτάσεων, όπως το να αποφεύγει ο μαθηματικός να παρουσιάζει τα μαθηματικά απαραίτητα συνδεδεμένα με τους εξοπλισμούς, να μην οδηγεί τους φοιτητές του-μέσω των εργασιών τους- να γίνονται ιμπρεσάριοι των βιομηχανιών εξοπλισμού κ.λπ. Αυτό το σκεπτικό «σηκώνει πολύ συζήτηση». Ασφαλώς και δεν πρέπει ένας διδάσκοντας να συμμετέχει ο ίδιος ή να προτρέπει φοιτητές του να θέτουν την επιστήμη τους στην υπηρεσία μιλιταριστικών σχεδίων. Ωστόσο, όχι μόνο δεν πρέπει να αποφεύγει να παρουσιάζει τη σχέση μαθηματικών και μιλιταριστικών σχεδίων-σύμφωνα με την πρώτη πρόταση- αλλά αντίθετα είναι υποχρεωμένος να τα αποκαλύπτει και να τα καταγγέλλει. Επιπλέον, πρόκειται για επιζήμια ουτοπία, αν κάποιος πιστεύει ότι η ειρήνη μπορεί να προφυλαχθεί αν διδάσκουμε τα μαθηματικά ουμανιστικά. Αυτό άλλωστε το έχει αποδείξει η πράξη.

[215] . Για μια μαρξιστική κριτική του Αλτουσέρ δες αναλυτικότερα α) Γρηγορόπουλου Δ., Ο στρουκτουραλισμός του Αλτουσέρ ή η νεκρανάσταση της μεταφυσικής, Επιστημονική Σκέψη, τ.5, 1985, β) Μπιτσάκης Ε., Το αειθαλές δέντρο της γνώσης, σελ. 109-115, εκδ.Στάχυ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Η ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΟ ΖΗΤΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Τα μαθηματικά όχι απλώς είναι στενά συνδεδεμένα με τη λογική, αλλά δεν μπορούν να υπάρξουν χωρίς αυτήν. Οι θεωρητικοί προβληματισμοί γύρω από τη σύνδεσή τους που έχουν καταγραφεί κατά καιρούς είναι άκρως ενδιαφέροντες και καθόλου ανεξάρτητοι από τις φιλοσοφικές διαθέσεις του καθενός. Τα ερωτήματα γύρω από το τι είναι λογική, πώς αυτή συνδέθηκε με τα μαθηματικά, πώς η φιλοσοφία υπεισέρχεται στη μεταξύ τους σχέση είναι κρίσιμα κι εξίσου κρίσιμες είναι και οι απαντήσεις που δίνονται σε αυτά. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε ορισμένες πλευρές αυτών των ερωτημάτων και πώς ο ΔΥ τις αντιμετωπίζει.

Γ1: Για τον ορισμό της Λογικής

Στον ορισμό της Λογικής δε συναντάμε μια ενιαία άποψη και ήδη από τις ποικίλες παραθέσεις του, αχνοφαίνονται ή και φαίνονται με ευδιάκριτο τρόπο οι διαφορετικές φιλοσοφικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα: «..λογική ονομάζεται η επιστημονική μελέτη ενός ορισμένου τύπου εννοιών, κυρίως της *λογικής ακολουθίας* και της *λογικής αλήθειας*, όπως εμφανίζονται και λειτουργούν σε διάφορα σημασιολογικά περιβάλλοντα, σε μια φυσική γλώσσα και στις χρήσεις της (πληροφόρηση, επικοινωνία, ρητορική κ.α.), σε μια μαθηματική ή άλλη τυπική γλώσσα (π.χ. σε ένα κωδικό επικοινωνίας) και ακόμα σε διαρθρωμένα συστήματα της φυσικής, του δικαίου, της κοινωνιολογίας κ.λπ. […] Η λογική μπορεί συνεπώς να χαρακτηριστεί ως η σπουδή της αλήθειας επιχειρημάτων (αποφάνσεων, προτάσεων) που βασίζεται απολύτως στις σημασίες εκείνων των φράσεων οι οποίες λαμβάνονται ως όροι στα επιχειρήματα αυτά», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[216] Ο παραπάνω ορισμός τονίζει το ρόλο της λογικής ως μιας ιδιαίτερης τεχνικής, ενός ξεχωριστού εργαλείου που μπορεί να λειτουργήσει σε ένα πλήθος γνωστικών τομέων. Χωρίς να θεωρηθεί λανθασμένος (ο ορισμός) μπορεί να θεωρηθεί μονομερής και για αυτό ελλιπής. Με πολύ πιο λιτό τρόπο μπορεί να δοθεί ένας περισσότερο ολοκληρωμένος και πιο επιστημονικός ορισμός: «τη λογική από παλιά την καθόρισαν ως επιστήμη που εξετάζει τις μορφές και τους νόμους της νόησης»[217] ή ακόμα σε λιγότερο συμπυκνωμένη μορφή «η λογική είναι η διδασκαλία όχι για τις εξωτερικές μορφές της νόησης, αλλά για τους νόμους εξέλιξης, «όλων των φυσικών και πνευματικών πραγμάτων», δηλαδή της εξέλιξης όλου του συγκεκριμένου περιεχομένου του κόσμου, δηλ. το αποτέλεσμα, το άθροισμα, το συμπέρασμα της *ιστορίας* της γνώσης του κόσμου», (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[218]

Βέβαια για να είμαστε δίκαιοι πρέπει εξ' αρχής να κάνουμε την εξής διευκρίνιση: η λογική δεν είναι μία. Ο πρώτος ορισμός που παραθέσαμε έχει υπόψη του την τυπική λογική ενώ ο δεύτερος και ο τρίτος τη διαλεκτική. Ωστόσο, θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως για ορισμένους εκπροσώπους της επιστημονικής κοινότητας η τυπική λογική είναι αυτή που έχει τον πρώτο λόγο και μάλλον η διαλεκτική είναι ανάξια λόγου.[219] Για το ΔΥ η

---

[216] . Εγκυκλοπαίδεια, Πάπυρος-Λαρούς-Μπριτάνικα, λήμμα Λογική, τ. 39

[217] . Μ.Μ. Ρόζενταλ, Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, σελ. 29, εκδ. Γνώσεις

[218] . Β.Ι.Λένιν, άπαντα, τ.29, σελ.84, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[219] . Ίσως η χαρακτηριστικότερη περίπτωση αποτελεί ο Πόπερ ο οποίος ισχυρίζεται ότι «ο ίδιος ο επιστημονικός λογισμός δε βασίζεται στη διαλεκτική. Μόνο η ιστορία και η εξέλιξη των επιστημονικών θεωρικών μπορούν με κάποια επιτυχία να περιγραφούν με τη διαλεκτική μέθοδο….αυτό το γεγονός δεν μπορεί να είναι λόγος για να αποδειχτούμε τη διαλεκτική ως κάτι θεμελιώδες, γιατί η ιστορία και η εξέλιξη των επιστημονικών θεωριών μπορούν να εξηγηθούν χωρίς να αφήσουν την περιοχή της κοινής λογικής, αν θυμηθούμε την εφαρμογή της μεθόδου της δοκιμής και του σφάλματος. Ο μεγάλος κίνδυνος από μια τέτοια σύγχυση διαλεκτικής και λογικής είναι…ότι κάνει τους ανθρώπους να επιχειρηματολογούν δογματικά. Γιατί πολύ συχνά βλέπουμε πως οι διαλεκτικοί, όταν συναντούν δυσκολίες στη λογική υποστήριξη των επιχειρημάτων τους, καταφεύγουν στο έσχατο επιχείρημα, να λένε δηλαδή στους αντιπάλους τους ότι η κριτική τους είναι εσφαλμένη γιατί βασίζεται στη συνηθισμένη λογική και όχι στη διαλεκτική και ότι μόνο αν οι αντίπαλοί τους χρησιμοποιούσαν τη διαλεκτική, θα έβλεπαν ότι οι αντιφάσεις που βρήκαν σε μερικά επιχειρήματα των διαλεκτικών είναι

τυπική λογική όπως θα δούμε και παρακάτω όχι μόνο δεν είναι άχρηστη αλλά απολύτως απαραίτητη. Αυτή, όμως, η λογική που μπορεί να ανοίξει τον ορίζοντα της ανθρώπινης σκέψης και να αποτελέσει το μέσο για τη βαθύτερη και πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση της αλήθειας είναι η διαλεκτική.

Γ2. Για τη διαφορά τυπικής-διαλεκτικής λογικής

Πριν να δούμε τις βασικές διαφορές μεταξύ της τυπικής και της διαλεκτικής λογικής είναι απαραίτητο να κάνουμε ορισμένες διευκρινίσεις για τις απόψεις του ΔΥ σχετικά με τη λογική:

[1] Η λογική δεν υπάρχει από τότε που καταγράφηκε ως επιστήμη. Πολύ πριν από τη καταγραφή της ο ανθρώπινος τρόπος σκέψης διεπόταν από λογική. Μπορεί οι κανόνες της λογικής να μη χρησιμοποιούνταν πάντα συνειδητά, άλλωστε αυτό εξακολουθεί να συμβαίνει και σήμερα, όμως υπήρχαν αναγκαστικά και μάλιστα οι απαρχές της διακρίνονται στην ίδια τη φύση που αποτελεί το πρώτο «εγχειρίδιο λογικής». Όπως χαρακτηριστικά γράφει ο Ένγκελς «στους Έλληνες ήταν αυτονόητο πως η φύση δε θα μπορούσε να 'ναι παράλογη: αλλά ακόμα και σήμερα, οι πιο ανόητοι εμπειριστές αποδεικνύουν με τους συλλογισμούς τους (όσο λαθεμένοι κι αν είναι) πως έχουν πεισθεί από τα πριν ότι η φύση δεν μπορεί να 'ναι παράλογη και πως η λογική δεν μπορεί να είναι αντίθετη με τη φύση».[220]

[2] Η εμφάνιση της λογικής ως επιστήμης προϋποθέτει μιαν ορισμένη βαθμίδα εξέλιξης της ανθρώπινης νόησης και κοινωνίας. Απαιτούσε τη συσσώρευση και συστηματοποίηση κάποιων γνώσεων και νόμων που διακρίνονταν στη φύση, στην κοινωνία και στη νόηση. Επομένως, από αυτή την άποψη η λογική είναι το αποτέλεσμα και η γενίκευση της ανάπτυξης της γνώσης.

[3] Οι νόμοι της λογικής δεν μπορούν να θεωρηθούν ως a priori νόμοι ή έμφυτοι στον ανθρώπινο νου ή συμβάσεις που αποφάσισαν οι άνθρωποι να χρησιμοποιούν κατόπιν μιας κοινής τους συμφωνίας. Η καθολικότητά τους ερμηνεύεται από το γεγονός ότι αποτελούν εκφράσεις δεσμών, σχέσεων και αναγκαιοτήτων που αντανακλούνται στην ανθρώπινη νόηση. Όπως χαρακτηριστικά έγραφε στα φιλοσοφικά του τετράδια ο Λένιν σχολιάζοντας τις απόψεις του Χέγκελ «…για το Χέγκελ η *επενέργεια*, η πράξη είναι *λογικό «συμπέρασμα»*, λογικό σχήμα. Και αυτό είναι αλήθεια! Φυσικά, όχι με τη έννοια ότι το λογικό σχήμα έχει σαν έτερο Είναι του την πράξη του ανθρώπου (=απόλυτος ιδεαλισμός), αλλά vice versa: η πράξη του ανθρώπου, επαναλαμβανόμενη δισεκατομμύρια φορές, εδραιώνεται στη συνείδηση του ανθρώπου με τα λογικά σχήματα. Αυτά τα σχήματα έχουν μια σταθερότητα προκατάληψης και χαρακτήρα αξιωμάτων ακριβώς (και μόνο) χάρη σε αυτή τη δισεκατομμυριοστή επανάληψη», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[221]

[4] Η λογική δεν αποτελεί κατά το ΔΥ κάποια αιώνια και αμετάβλητη αλήθεια. Διέπεται όπως εν γένει η επιστήμη από ιστορικότητα. Άλλωστε, αυτό το συμπέρασμα ενισχύεται από τη ίδια της την εξέλιξη, την ίδια της την ιστορική διαδρομή. Σε αυτή της την πορεία έχει γνωρίσει διάφορες μεταλλάξεις και σε κάθε επόμενο της βήμα έχει να παρουσιάσει νέα επιτεύγματα.

Ήδη οι παραπάνω παρατηρήσεις προδιαγράφουν ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο αναδύονται οι διαφορές μεταξύ της τυπικής και της διαλεκτικής λογικής. Με δεδομένο ότι «διαλεκτική λογική είναι η εφαρμογή της διαλεκτικής μεθόδου στη νόηση και στη γνώση, η συγκεκριμενοποίηση των γενικών αρχών αυτής της μεθόδου, στον τομέα των νόμων και των μορφών της νόησης», βλέπουμε να υπάρχει και να καταγράφεται μια κρίσιμη διαφορά μεταξύ των δυο λογικών. Πρώτα απ' όλα να διευκρινίσουμε ξανά ότι ο ΔΥ δεν απορρίπτει την τυπική λογική (και πώς θα μπορούσε άλλωστε;). Ο ΔΥ αναγνωρίζει ένα είδος πρώιμης λογικής που υπάρχει τόσο στους ανθρώπους όσο και στα ζώα. Ο διαλεκτικός Χέγκελ έκανε μια διάκριση ανάμεσα στη νόηση και στη λογική. Σχολιάζοντας αυτή τη διάκριση ο Ένγκελς γράφει: «Αυτή η εγελιανή διάκριση, σύμφωνα με την οποία

απόλυτα νόμιμες (δηλαδή από διαλεκτική άποψη)», Πόπερ Κ., Τι Είναι η Διαλεκτική; Γνωσιοθεωρία χωρίς γνωστικό υποκείμενο, σε. 62-63, εκδ. Βάνιας

[220] Ένγκελς, Διαλεκτική της Φύσης, σελ. 200, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[221] . Β.Ι.Λένιν, άπαντα, τ.29, σελ.198, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

μόνο η διαλεκτική σκέψη είναι λογική, έχει ένα ορισμένο νόημα. Έχουμε από κοινού με τα ζώα, όλους τους τρόπους της νοητικής δραστηριότητας: την *επαγωγή*, την *απαγωγή* και συνεπώς την *αφαίρεση*, [...], την ανάλυση άγνωστων αντικειμένων (ακόμα και το σπάσιμο ενός καρυδιού, είναι μια αρχή της ανάλυσης), τη *σύνθεση* (στις πονηριές των ζώων σαν ενότητα των δυο, με την άλλη, το *πείραμα* (στην περίπτωση νέων εμποδίων και δύσκολων καταστάσεων). Από τη φύση τους, όλοι αυτοί οι τρόποι ενέργειας-κατά συνέπεια όλα τα μέσα της επιστημονικής έρευνας που αναγνωρίζει η συνηθισμένη λογική-είναι απολύτως όμοια στον άνθρωπο και στα ανώτερα ζώα. Διαφέρουν μόνο κατά το βαθμό (στο βαθμό ανάπτυξης της μεθόδου σε κάθε περίπτωση). Τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι παρόμοια και οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα στον άνθρωπο και στο ζώο, εφόσον και οι δυο ενεργούν ή βολεύονται αποκλειστικά μ' αυτές τις στοιχειώδεις μεθόδους», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[222] Επομένως, κατά τον Ένγκελς η τυπική λογική είναι αναγκαία όχι μόνο από τη χρηστική της πλευρά αλλά είναι αναγκαία ως χαρακτηριστικό της ίδιας της πράξης. Ο ίδιος ο συγγραφέας υποστηρίζει σε άλλο του έργο ότι η τυπική λογική είναι μια μέθοδος για το πέρασμα από το γνωστό στο άγνωστο, ταυτόχρονα όμως διαπιστώνει και τα όρια της.[223] Με την ανάδειξη αυτών των ορίων και με την κριτική απέναντί της διαγράφονται και οι διαφορές τυπικής-διαλεκτικής λογικής.

Πατέρας της τυπικής λογικής θεωρείται και είναι ο Αριστοτέλης. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουν όλοι οι μελετητές ανεξάρτητα από τη φιλοσοφική τους ένταξη και αυτό γιατί ο Αριστοτέλης: α) ήταν ο πρώτος ο οποίος μελέτησε με συστηματικό τρόπο το μηχανισμό λειτουργίας της νόησης, β) ήταν ο πρώτος που διατύπωσε αρχές και νόμους σε σχέση με αυτό το μηχανισμό και γ) διατύπωσε τις σκέψεις του χρησιμοποιώντας λογική μέθοδο δηλαδή χρησιμοποιώντας έννοιες, συλλογισμούς κ.λπ. Με άλλα λόγια ο Αριστοτέλης ήταν αυτός που έκανε τη λογική επιστήμη. Η τυπική λογική, όμως, αποτελεί τον καρπό των πρώτων σταδίων της διανοητικής πορείας των ανθρώπων και με δεδομένο ότι ο διαλεκτικός τρόπος σκέψης μπορεί να υπήρχε αλλά δεν ήταν ολοκληρωμένος η τυπική λογική εγκλωβίστηκε σε ένα μηχανιστικό τρόπο σκέψης που επηρέασε στη συνέχεια τη σκέψη γενικότερα. Η τυπική λογική αντίκριζε και εξακολουθεί να αντικρίζει τα πράγματα ως ακίνητες οντότητες, δίχως σχέσεις μεταξύ τους, αλληλεξαρτήσεις και ανάπτυξη. Αυτή είναι μια διαδικασία απαραίτητη. Είναι μια διαδικασία αφαιρετική. Αλλά όσο προσκολλούμαστε μόνο σε αυτή, τότε αδυνατούμε να υπερβούμε ένα τρόπο σκέψης που βλέπει στατικά τα πράγματα και δεν μπορεί να δει τον κόσμο ως Ενότητα, ως Όλο. Επομένως, ο νόμος της ταυτότητας, ο νόμος της αντίφασης και ο νόμος του αποκλειόμενου τρίτου έχουν περιορισμένη αξία. Ας δούμε για παράδειγμα το νόμο της ταυτότητας σύμφωνα με τον οποίο «ένα πράγμα είναι αυτό το ίδιο» ή «Α=Α» ή κατά την αριστοτέλεια διατύπωση «κάθε τι το αληθές θα πρέπει πάντοτε να συμφωνεί απολύτως με τον εαυτό του».[224] Μια τέτοια αρχή μοιάζει αδιαμφισβήτητη. Κι όμως μόνο τέτοια δεν είναι. Ο Χέγκελ στην *Επιστήμη της Λογικής* υπέβαλλε αυτή την αρχή σε αυστηρή κριτική δείχνοντας την περιορισμένη ισχύ της. Πράγματι, το Α δεν είναι πάντα ίσο με το Α και αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσουμε κατά πόσο ισχύει όταν για παράδειγμα αναφερόμαστε σε ένα ζωντανό οργανισμό που ασφαλώς ως τέτοιος αναπτύσσεται. Την κάθε στιγμή λαμβάνουν χώρα διάφορες διαδικασίες χημικές, βιολογικές, συνειδησιακές (αν μιλάμε για τον άνθρωπο) κ.α. προκαλώντας διαφοροποιήσεις στον οργανισμό έτσι που να μην μπορούμε να ισχυριστούμε με απόλυτη βεβαιότητα ότι ο οργανισμός μένει αμετάβλητος. Το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε και για πράγματα που δεν είναι ζωντανοί οργανισμοί. Αν, όμως, έχει μια έστω μερική δύναμη ο νόμος της ταυτότητας, αυτό οφείλεται στο ότι μπορούμε να ισχυριστούμε αφαιρετικά ότι ο οργανισμός για μικρά χρονικά διαστήματα μένει αμετάβλητος. Να πώς διατυπώνει ο Ένγκελς την κριτική του στην ακαμψία της τυπικής λογικής ακολουθώντας τη σκέψη του Χέγκελ: « Εφ' όσον αντιμετωπίζουμε τα πράγματα σα σε ηρεμία και χωρίς ζωή, το καθένα ξεχωριστά, ή το ένα πλάι στο άλλο και το ένα ύστερα από το άλλο, δε σκοντάφτουμε φυσικά σε καμία αντίφασή τους. Α**νακαλύπτουμε σε αυτά,**

[222] . Ένγκελς, Διαλεκτική της Φύσης, σελ. 201, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
[223] . Δες αναλυτικότερα Αντι-Ντύρινγκ
[224] . Αριστοτέλης, Αναλυτικά Πρότερα Α,Β, 47 α, 9-10

ορισμένες ιδιότητες που, ως ένα σημείο είναι κοινές, καμιά φορές διαφορετικές και πολλές φορές αντιφατικές μεταξύ τους, εν πάση όμως περιπτώσει οι ιδιότητες αυτές είναι μοιρασμένες ανάμεσα στα διαφορετικά πράγματα και συνεπώς δεν περικλείνουν μέσα τους καμία αντίφαση. Στα πλαίσια αυτού του τομέα παρατήρησης μας είναι αρκετός ο συνηθισμένος τρόπος σκέψης, η τυπική δηλαδή λογική. Αλλά τα πράγματα αλλάζουν τελείως, μόλις τα μελετήσουμε στην κίνησή τους, στην αλλαγή τους, στη ζωή τους, στην αμοιβαία τους αλληλεπίδραση. Τότε πέφτουμε αμέσως πάνω σε αντιφάσεις. Η ίδια άλλωστε η κίνηση, αποτελεί μιαν αντίφαση· ακόμα κι η απλή μηχανικά μετατόπιση πραγματοποιείται μόνο και μόνο γιατί, σε μια μόνη και την ίδια στιγμή, ένα σώμα βρίσκεται σε μια θέση και ταυτόχρονα σε κάποια άλλη θέση, δηλαδή βρίσκεται, αλλά και δε βρίσκεται στην ίδια θέση. Και στην αδιάκοπη θέση και λύση αυτής της αντίφασης συνίσταται ακριβώς η κίνηση», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[225]

Με άλλα λόγια ενώ στην τυπική λογική οι κατηγορίες είναι ακίνητες τώρα, στη διαλεκτική λογική, γίνονται ρέουσες. Η τυπική λογική, λοιπόν, είναι απαραίτητη στη σκέψη του ανθρώπου. Εξίσου, όμως, απαραίτητο είναι και το πέρασμα στη διαλεκτική λογική. Ένα τέτοιο πέρασμα επιβάλλεται αναγκαστικά γιατί είτε μιλάμε για την επιστήμη, είτε για τη φύση, είτε για την κοινωνία τα πάντα βρίσκονται σε μια διαρκή εξέλιξη επαληθεύοντας πανηγυρικά την ρήση του Ηράκλειτου. Επομένως, από τα πράγματα επιβάλλεται και η απόρριψη της νοητικής ακαμψίας, εφόσον βέβαια κάποιος αποδέχεται και τη θεωρία της αντανάκλασης, η οποία για το ΔΥ αποτελεί ουσιαστικό συστατικό.

Μια παρανόηση που μπορεί να εμφανιστεί είναι ότι μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο λογικών είναι ότι η μεν τυπική λογική είναι λογική χωρίς περιεχόμενο ενώ η διαλεκτική δε στερείται περιεχομένου. Η παρανόηση αυτή μπορεί να υπάρξει είτε ως απόρροια μιας στρεβλής εφαρμογής του διαλεκτικού τρόπου σκέψης, είτε ως αποτέλεσμα των χαρακτηρισμών που δίνονται στην ίδια την τυπική λογική.[226] Όμως, η διαφορά τους δεν έγκειται στην έλλειψη ή στην ύπαρξη περιεχομένου αλλά στο βαθμό της αφαιρετικής απόσπασης. Η τυπική λογική μπορεί η ίδια να υποστηρίζει ότι αδιαφορεί για το περιεχόμενο αλλά κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό: « από τη θέση ότι η διαλεκτική λογική είναι λογική με περιεχόμενο, δε βγαίνει το συμπέρασμα ότι η τυπική λογική είναι λογική χωρίς περιεχόμενο. Μόνο οι ιδεαλιστές σαν τον Καντ ή οι σύγχρονοι λογικοί ποζιτιβιστές, μπορεί να πιστεύουν, ότι οι λογικές μορφές της νόησης προέρχονται από το λόγο και δεν είναι μορφές του αντικειμενικού περιεχομένου, των αντικειμενικών δεσμών και σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα πράγματα. Η λογική αντλεί τις μορφές της, από την πρακτική αντανάκλαση στη νόηση της υλικής πραγματικότητας, που την γενικεύει με σκοπό τη γνώση της. Η λειτουργία της «μετατροπής» του υλικού σε ιδεατό περικλείει την επεξεργασία των λογικών μορφών της νόησης, που είναι σε τελευταία ανάλυση μήτρα (έκτυπο) των υλικών δεσμών και σχέσεων των πραγμάτων. Φυσικά καμία μορφή της νόησης, που ερευνάει η τυπική λογική, ούτε την έννοια, ούτε την κρίση, ούτε το συλλογισμό, δεν πρέπει να την εξετάζουμε σαν «καθαρή» μορφή που στερείται αντικειμενικού περιεχομένου, που δεν εκφράζει αντικειμενικό περιεχόμενο. Γι' αυτό η θέση ότι η τυπική λογική είναι χωρίς περιεχόμενο θα ήταν προδοσία της υλιστικής θεωρίας της γνώσης» και «ενώ η τυπική λογική προσανατολίζεται στην έρευνα των τρόπων των κανόνων της σωστής σύνδεσης των εννοιών και κρίσεων και τη συνεπή εξαγωγή ορισμένων κρίσεων από άλλες, η διαλεκτική λογική τείνει στην πιο πλήρη έκφραση, με τις έννοιες και τις άλλες μορφές της νόησης του *περιεχομένου* των υλικών πραγμάτων και λειτουργιών που μεταβάλλονται», (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[227] Η τυπική λογική «δουλεύει» με μεγαλύτερο βαθμό απόσπασης από την πραγματικότητα. Οι αφαιρέσεις της είναι «περισσότερο αφαιρέσεις» από αυτές της διαλεκτικής. Αυτό, όμως, είναι η δύναμή της και η αδυναμία της

---

[225] . Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, σελ. 180, εκδ. Αναγνωστίδη

[226] . «…ο λογικός ερευνά τα επιχειρήματα αφαιρώντας από το περιεχόμενό τους τις δομές ή τα λογικά σχήματα που είναι ενσωματωμένα σε αυτά· ενδιαφέρεται δηλαδή για τη μορφή και όχι για το περιεχόμενο…», Πάπυρος-Λαρούς-Μπριτάνικα, λήμμα Λογική, τ.39

[227] . Μ.Μ. Ρόζενταλ, Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, σελ. 72-73, εκδ. Γνώσεις

ταυτόχρονα. Η αφαιρετική της δύναμη την κάνει λειτουργική και αποτελεσματική και συγχρόνως την κάνει να μοιάζει αποσπασμένη από την πράξη.[228]

Γ3. Οι νέες λογικές και οι εξελίξεις στην τεχνολογία: το «τέλος» της τυπικής λογικής και η νίκη της διαλεκτικής λογικής

Το ερώτημα που ανακύπτει μετά από τη σύγκριση της τυπικής και της διαλεκτικής λογικής είναι αν η δεύτερη έχει ή μπορεί να έχει και πρακτικές εφαρμογές ή απλά η διαφοροποίηση είναι αποκλειστικά θεωρητικού χαρακτήρα και προσφέρεται μόνο για φιλοσοφικές συζητήσεις ακαδημαϊκού χαρακτήρα. Την απάντηση μπορούμε να την έχουμε μέσα από τις σύγχρονες τεχνολογικές κι επιστημονικές εξελίξεις και τις νέου τύπου λογικές που καταργούν την αριστοτέλεια κυριαρχία του άσπρου-μαύρου και που συνηγορούν στη άποψη σύμφωνα με την οποία η διαλεκτική λογική είναι ανώτερου τύπου λογική σε σχέση με την τυπική.

Ξεκινάμε κάνοντας μιαν αναφορά στους κβαντικούς υπολογιστές. Οι κβαντικοί υπολογιστές είναι γνωστό ότι αξιοποιούν τις «παράξενες» ιδιότητες της κβαντικής φυσικής: το γεγονός, δηλαδή, ότι ένα στοιχειώδες σωματίδιο μπορεί να βρεθεί σε δυο καταστάσεις ταυτόχρονα, να βρεθεί σε μια σύμφωνη υπέρθεση δυο καταστάσεων. Ενώ στους κλασικούς υπολογιστές η αριστοτέλεια αρχή του ναι ή όχι, του ψευδούς ή αληθούς, του 0 ή του 1 λειτουργεί και λειτουργεί με επιτυχία, στο μέλλον θα υπάρξουν προβλήματα. Οι ανάγκες για όλο και μεγαλύτερες μνήμες, για όλο και μεγαλύτερες ταχύτητες και πολυπλοκότερους υπολογισμούς, θέτουν κατασκευαστικά όρια. Τα τσιπ πυριτίου δεν μπορούν να μικραίνουν επ' άπειρο, τουλάχιστο με βάση τις σημερινές γνώσεις. Η κβαντική φυσική έρχεται να απαντήσει σε αυτό το άλυτο πρόβλημα, αφού η δυνατότητα να βρίσκονται τα θεμελιώδη στοιχεία της πληροφορίας σε μια ταυτόχρονη κατάσταση του 0 και του 1, ανοίγει το δρόμο ώστε τα προβλήματα της χωρητικότητας, της ταχύτητας και της πολυπλοκότητας να επιλυθούν στο άμεσο μέλλον. Έτσι, περνάμε από τα bits στα qubits (quantum bits). Στα qubits η κατάσταση του 0 και του 1 συνυπάρχουν την ίδια στιγμή και μόνον όταν κάποιος προσπαθήσει να διακρίνει την κατάσταση ενός qubit αυτό καταλήγει σε μια από τις δυο τιμές. Η επίπτωση αυτής της δυνατότητας είναι ότι πλέον μπορούμε να έχουμε δυο υπολογισμούς στην «τιμή» του ενός. Υπάρχει, όμως, και μια δεύτερη επίπτωση: όταν τα qubits τα συσχετίσουμε τότε μπορούν να ελεγχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε όταν το ένα μετρηθεί κι έχει την τιμή 0 το άλλο πρέπει να έχει την τιμή 1. Ή ακόμα μπορούν να αναγκασθούν να έχουν την ίδια τιμή. Έτσι με τη χρήση της επαλληλίας και του συσχετισμού ο υπολογιστής θα μπορεί πλέον να εκτελέσει ταυτόχρονα πολλούς υπολογισμούς, πολλούς περισσότερους από αυτούς που μπορούσε ο κλασικός υπολογιστής. Για παράδειγμα: με το συσχετισμό μερικών εκατοντάδων qubits θα μπορούν να εκφραστούν ταυτόχρονα περισσότεροι αριθμοί από τον αριθμό των ατόμων του γνωστού σύμπαντος. Οι πρώτοι κβαντικοί υπολογιστές μπορούν να κάνουν μέχρι στιγμής απλά πράγματα: ο πρώτος υπολογισμός που έγινε, ανέλυσε το 15 σε γινόμενο δυο πρώτων αριθμών δηλαδή σε γινόμενο του 3 και του 5. Αυτός ο στοιχειώδης υπολογισμός «είναι όμως ένα μεγάλο βήμα προς τα εμπρός, είπε ο Nabil Amer, ο οποίος διαχειρίζεται την έρευνα στον κβαντικό υπολογισμό, στο ερευνητικό κέντρο Almaden της IBM στο San Jose της Καλιφόρνιας. "Αυτό μοιάζει ακριβώς με την πρώτη πτήση των αδελφών Wright" είπε ο Amer. "Δεν πήγε πάρα πολύ μακριά, δεν πήγε πάρα πολύ ψηλά, αλλά εν τούτοις απέδειξε ότι μπορούσε να πετάξει"».[229] Οι επιστήμονες είναι βέβαιοι ότι εντός ολίγων ετών οι κλασικοί υπολογιστές θα μπούνε στο μουσείο και τη θέση τους θα έχουν πάρει οι κβαντικοί. Όπως και να έχει το θέμα είναι ότι μπορεί να μη μιλάμε για την πλήρη κατάργηση της αριστοτέλειας λογικής αλλά το γεγονός ότι οι δυο καταστάσεις του 0 και του1 θα συνυπάρχουν και στη συνέχεια θα αίρεται η ασάφεια αυτής της συγχρονίας, δείχνει μια σύνδεση της διαλεκτικής λογικής (ένα πράγμα είναι και δεν είναι ταυτόχρονα) με την τυπική (το πράγμα είναι ή δεν είναι). Θα

[228] . Για μια απόπειρα κατηγοριοποίησης των «λογικών» κοίτα στα σχεδιαγράμματα, το σχεδιάγραμμα 5

[229] .www.physics4u.gr, Πρώτη εφαρμογή σε ένα κβαντικό υπολογιστή της IBM

μπορούσαμε να πούμε ότι οι κβαντικοί υπολογιστές είναι οι πρώτες μηχανές που λειτουργούν κατά κάποιο τρόπο με διαλεκτική λογική.[230]

Όμως, η διαλεκτική λογική δείχνει να κερδίζει έδαφος τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά και με την ασαφή λογική.[231] Η ανάπτυξη της ασαφούς λογικής προήλθε από ερωτήματα του τύπου: πότε ένας άνθρωπος θεωρείται ψηλός, αν ένα μήλο το δαγκώνουμε συνεχώς πότε παύει να είναι μήλο[232], το μισογεμάτο ποτήρι μήπως είναι μισοάδειο κ.α. Ερωτήματα τέτοιας φύσης οδήγησαν αρκετούς να σκεφθούν ότι ο Βούδας με το *Α και όχι Α* (αρχή της διαλεκτικής λογικής)προτείνει καλύτερο ερμηνευτικό μοντέλο από το *Α ή όχι Α* του Αριστοτέλη, δηλαδή την αρχή του αποκλειόμενου τρίτου. Με βάση αυτή τη διαπίστωση συγκροτήθηκε μια νέα λογική, η ασαφής λογική που όχι μόνο ξεκινούσε από διαφορετική φιλοσοφική βάση αλλά «δουλεύει» πλέον και σε πρακτικό επίπεδο με τις λεγόμενες fuzzy συσκευές. Η τυπική λογική δίνει τη θέση της στην ασαφή λογική που στην πραγματικότητα είναι διαλεκτική λογική, άσχετα αν δεν ονομάζεται έτσι. Στην πραγματικότητα η λεγόμενη ασαφής λογική μιμείται τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης όταν επεξεργαζόμενη ασαφή δεδομένα μπορεί να εξάγει ακριβή συμπεράσματα. Ας δούμε γιατί αυτή η ασαφής λογική είναι κατά τη γνώμη μας διαλεκτική καταγράφοντας τις βασικές αρχές της:

[1] Η διτιμία του 0 και του 1, αυτός ο θρίαμβος του άσπρου-μαύρου στην επιστημονική σκέψη για χιλιάδες χρόνια, αδυνατεί να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως αυτά που τέθηκαν λίγο παραπάνω. Παρά την επικράτησή της πάντα υπήρξε αμφισβήτηση απέναντί της. Για παράδειγμα όταν ο Πλάτωνας όρισε στην Ακαδημία του, τον άνθρωπο ως άπτερο δίποδο ον, την επόμενη ένας σοφιστής μαθητής του μάδησε μια κότα και του την πήγε με προφανή σκοπό να δείξει το άτοπο του ορισμού και την αδυναμία μιας τυπικής σκέψης.

[2] Ο λογικός θετικισμός και τα μαθηματικά δεν μπορούν να περιγράψουν τις αποχρώσεις που υπάρχουν μεταξύ του λευκού και του μαύρου, δηλαδή τις διάφορες διαβαθμίσεις του γκρίζου, διαβαθμίσεις που αυτές είναι που υπάρχουν στην πραγματικότητα στον κόσμο: «ο κόσμος είναι γκρίζος αλλά η επιστήμη μαύρο και άσπρο. Μιλούμε για μηδενικά και

---

[230] . Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε κάποιος να αντιτείνει το γεγονός ότι η κβαντομηχανική δε λειτουργεί αιτιοκρατικά κι επομένως ο διαλεκτικός υλισμός βάλλεται, αφού μια από τις βασικές του αρχές είναι η αιτιοκρατία. Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να σημειώσουμε το εξής: υπάρχουν ήδη απόψεις που ερμηνεύουν τη συμπεριφορά στο μικρόκοσμο μα βάση ρεαλιστικά-υλιστικά πρότυπα. Μια τέτοια απόπειρα υπάρχει σε αρκετά συγγράμματα του Ε. Μπιτσάκη. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά το βιβλίο *Ο Νέος Επιστημονικός Ρεαλισμός*, εκδ. Gutenberg. Θα θέλαμε επιπλέον να αναφέρουμε μια νέα θεωρία που βρίσκεται στα σπάργανα και η οποία διατυπώθηκε από τον Γκέραρντ τ' Χόοφτ του πανεπιστημίου της Ουτρέχτης της Ολλανδίας. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία εξετάζεται η ιδέα της ύπαρξης μιας κρυφής στιβάδας σε κλίμακες μικρότερες από το λεγόμενο μήκος Πλανκ, δηλαδή τα 10^{-35} μέτρα. Αναπτύσσοντας ένα μαθηματικό μοντέλο υποστηρίζει ότι σε αυτό το επίπεδο δεν μπορούμε να περιγράψουμε την πραγματικότητα με σωματίδια ή κύματα, αλλά με ενεργειακές οντότητες που τις ονομάζει «καταστάσεις». Στο μοντέλο αυτό οι καταστάσεις συμπεριφέρονται προβλέψιμα, σύμφωνα με ντετερμινιστικούς νόμους κι έτσι θεωρητικά μπορεί κάποιος να τις παρακολουθήσει. Βέβαια, δε θα συμφωνήσουμε καθόλου με τους προβληματισμούς που διατυπώθηκαν από τους μαθηματικούς Τζον Κόνγουει και Σάμον Κόχεν και σύμφωνα με τους οποίους αν η παραπάνω θεωρία δικαιωθεί, τότε καταργείται και η ανθρώπινη ελεύθερη βούληση. Η απάντηση είναι πως δεν μπορούμε να ταυτίζουμε τη φύση και την κοινωνία. Το βασικό σημείο διαφοροποίησης είναι η ανθρώπινη συνείδηση, η αυτοσυνειδησία, το κίνητρο των ανθρώπινων πράξεων που διαφοροποιούν ουσιαστικά τη φύση από την κοινωνία, (Δες αναλυτικότερα, Merali Zeeya, *Τα Κβάντα σκοτώνουν την Ελεύθερη Βούληση;*, Βήμα, 7/5/2006).

[231] .Το 1965 ένας Ιρανός επιστήμονας ονόματι Lofti Zadeh του πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας πρότεινε ένα μαθηματικό τρόπο αναπαράστασης εννοιών που δεν είναι σαφείς. Αυτός ο τρόπος μπορούσε να γίνει κατανοητός από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ο εν λόγω επιστήμονας ονόμασε την προσέγγισή του αυτή Fuzzy Logic (Δες αναλυτικότερα Αμπαζής Ν., Ασαφή Λογική, περιοδικό Περισκόπιο, τ.168, 1993).

[232] . Αυτό είναι ένα ερώτημα αντίστοιχο με αυτό που είχε θέσει ο Russel: αφαιρούμε από το κεφάλι ενός ανθρώπου μια τρίχα. Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε ότι αυτός είναι φαλακρός; -Όχι. Βγάζουμε μια δεύτερη τρίχα κι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Πότε θα είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι θα είναι φαλακρός;

μονάδες, ενώ η αλήθεια βρίσκεται κάπου ανάμεσα. Ασαφής κόσμος, μη σαφής περιγραφή. Οι προτάσεις της τυπικής λογικής και του προγραμματισμού των υπολογιστών είναι όλες αληθείς ή ψευδείς, 1 ή 0. Οι δηλώσεις όμως για τον κόσμο διαφέρουν».
[3] Οι αποχρώσεις του γκρίζου και η αρχή *Α και μη Α*, δηλαδή η ασαφής λογική χρησιμοποιεί ασαφή σύνολα.
[4] Η αρχή της ασάφειας δηλώνει ότι τα πάντα είναι ζήτημα βαθμού.
[5] Τα bits αντικαθίστανται από τα fits (φιτς). Ένα φιτ είναι ένας βαθμός ή αριθμός ανάμεσα στο 0 και στο 1, π.χ. μια φιτ τιμή 70% σημαίνει ναι 70% και όχι ναι ή όχι 30%.
[6] Υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη διτιμία και στην πλειοτιμία: η πρώτη βρίσκεται στα άκρα της δεύτερης, είναι τρόπον τινά το όριό της.
[7] Η ασαφής λογική αλλάζει την αντίληψή μας για τη σχέση του όλου και του μέρους: το όλο στο μερικό είναι πιθανότητα, είναι η πιθανότητα του μέρους.
[8] Οι περιγραφές χωρίζονται σε δυο ομάδες, τις λογικές και τις εμπειρικές, η τις μαθηματικές και τις επιστημονικές, ή της συνοχής και της αντιστοιχίας. Ο διαχωρισμός εξαρτάται από την ακρίβεια. Οι λογικές προτάσεις είναι πλήρως ακριβείς ή πλήρως ανακριβείς. Είναι όλα ή τίποτα. Οι εμπειρικές προτάσεις είναι εν μέρει ακριβείς ή εν μέρει ανακριβείς. Το λογικό και το εμπειρικό δε συναντώνται.
[9] Οι επιστήμονες μιλούν με ακρίβεια, την αναζητούν και την επιβραβεύουν. Αλλά επιτυγχάνουν μόνο ανακρίβεια. Οι επιστήμονες προσπαθούν να βρουν τα μαθηματικά που ταιριάζουν καλύτερα στον κόσμο ή τον κόσμο που ταιριάζει καλύτερα σε αυτά. Δουλεύουν με τα μαθηματικά, εμπιστεύονται τα μαθηματικά και αγωνίζονται για αυτά, αλλά δεν μπορούν ποτέ να επιτύχουν τη λογική τους βεβαιότητα. Κάπου στη διαδικασία να βλέπουν όπως θέλουν τα πράγματα, οι επιστήμονες φαίνεται πως απογειώθηκαν. Άρχισαν να πιστεύουν πως όταν κάνουν επιστήμη, κάνουν μαθηματικά.
[10] Τα μαθηματικά, όπως τα ξέρουμε, δεν είναι τίποτα άλλο από μια ειδική περίπτωση των μαθηματικών της ασάφειας, μια ειδική περίπτωση-η εκφυλισμένη ακραία περίπτωση από μαύρο-άσπρο σε ένα μαθηματικό κόσμο από γκρίζο.
[11] Η ασάφεια είναι μια σχέση ανάμεσα στο βουδιστικό Α και όχι Α και το αριστοτελικό Α ή όχι Α.
[12] Η φάζι εντροπία μετρά το βαθμό ασάφειας ενός ασαφούς συνόλου. Απαντά στο ερώτημα πόσο ασαφές είναι ένα ασαφές σύνολο. Η φάζι εντροπία μας λέει πόσο ο Βούδας περιέχει τον Αριστοτέλη. Πρόκειται για μια σχέση υποσυνόλου. [233]

Η ασαφής λογική βρίσκει εφαρμογή βάση της FAT (Fyzzy Approximation Theorem). FAT σημαίνει θεώρημα φάζι προσέγγισης και μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά με τον εξής απλό τρόπο: καλύπτει μια καμπύλη με μπαλώματα (patches). Η καμπύλη μπορεί να είναι η εξέλιξη ενός φαινομένου και τα μπαλώματα προκύπτουν από τη σύζευξη δεδομένων που μεταβάλλονται και που διαφοροποιούν τα μπαλώματα και έτσι «καλύπτουν» την εξέλιξη του φαινομένου.

Το φάζι σύστημα κατασκευάζεται σε τρία στάδια: στο πρώτο επιλέγονται οι μεταβλητές π.χ. η μεταβλητή Χ (είσοδος) μπορεί να είναι η θερμοκρασία ενός δωματίου και Ψ (έξοδος) η μεταβολή της ταχύτητας του κλιματιστικού. Στο δεύτερο στάδιο επιλέγουμε τα ασαφή σύνολα. Ορίζουμε τα υποσύνολα Χ και Ψ. Παράδειγμα: για το Χ ορίζουμε πέντε ασαφή υποσύνολα: πού χαμηλή, χαμηλή, κανονική, υψηλή, πολύ υψηλή. Αντίστοιχα για το Ψ: παύση, μικρή, μέτρια, μεγάλη, πολύ μεγάλη. Στο τρίτο στάδιο επιλέγουμε τους κανόνες π.χ. ένας κανόνας θα μπορούσε να είναι : αν Χ πολύ χαμηλή, τότε Ψ παύση. Έτσι, θα μπορούσαμε να έχουμε πέντε κανόνες:
1ος κανόνας: Αν Χ πολύ χαμηλή, τότε Ψ παύση.
2ος κανόνας: Αν Χ χαμηλή, τότε Ψ μειώνεται.
3ος κανόνας: Αν Χ κανονική, τότε Ψ μέτρια.
4ος κανόνας: Αν Χ υψηλή, τότε Ψ μεγάλη.
5ος κανόνας: Αν Χ πολύ υψηλή, τότε Ψ πολύ μεγάλη.

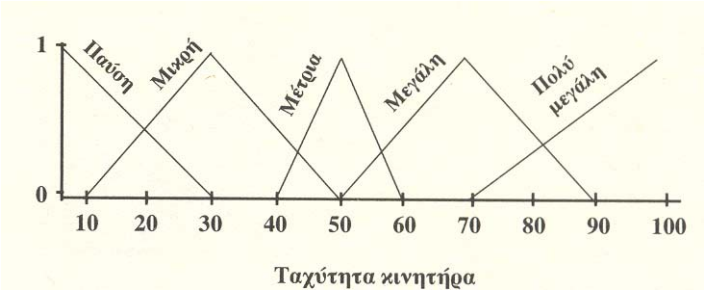
Αυτοί οι κανόνες δεν είναι τίποτα άλλο από κοινή λογική. Είναι φάζι λογικοί κανόνες γιατί οι λέξεις πολύ χαμηλή, μεγάλη κ.α. είναι ζήτημα βαθμού και παριστάνουν ασαφή

[233] . Δες αναλυτικότερα Kosko B., Fuzzy Logic, Η Νέα Επιστήμη, σελ. 25

σύνολα. Συνδέονται με τα ασαφή σύνολα που ορίζονται με αριθμούς. Έτσι οι λέξεις συνδέονται με μαθηματικά. Κι όπου υπάρχουν μαθηματικά υπάρχει γεωμετρία. Ας δούμε στη συγκεκριμένη περίπτωση πώς το φαινόμενο καλύπτεται από μπαλώματα.
Εικόνα 1η : με βάση αυτό τα σχεδιάγραμμα κατανοούμε τι ακριβώς σημαίνει ότι μια κατάσταση είναι ως ένα βαθμό χαρακτηρισμένη με ένα συγκεκριμένο τρόπο κι ως ένα βαθμό χαρακτηρισμένη με άλλο τρόπο. Για παράδειγμα στους 17 βαθμούς Κελσίου λέμε ότι αυτή η είσοδος ανήκει κατά 80% στο σύνολο *κανονική*, κατά 15% στο *χαμηλή* και 0% στα υπόλοιπα σύνολα.

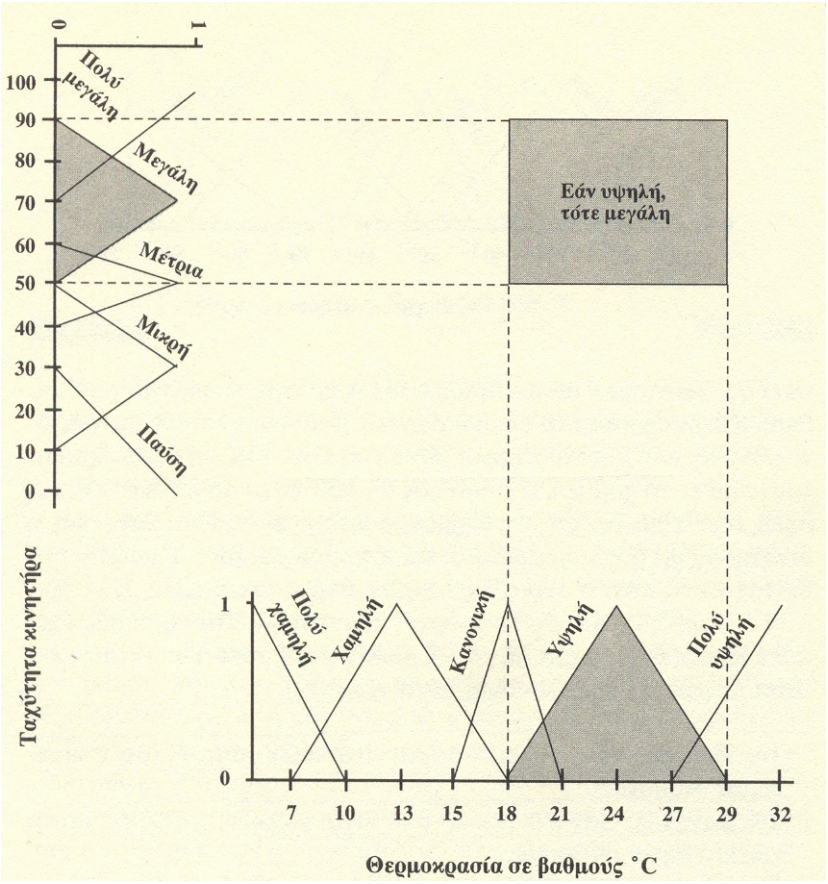
Εικόνα 1η

Η 2η εικόνα είναι αντίστοιχα για την έξοδο.



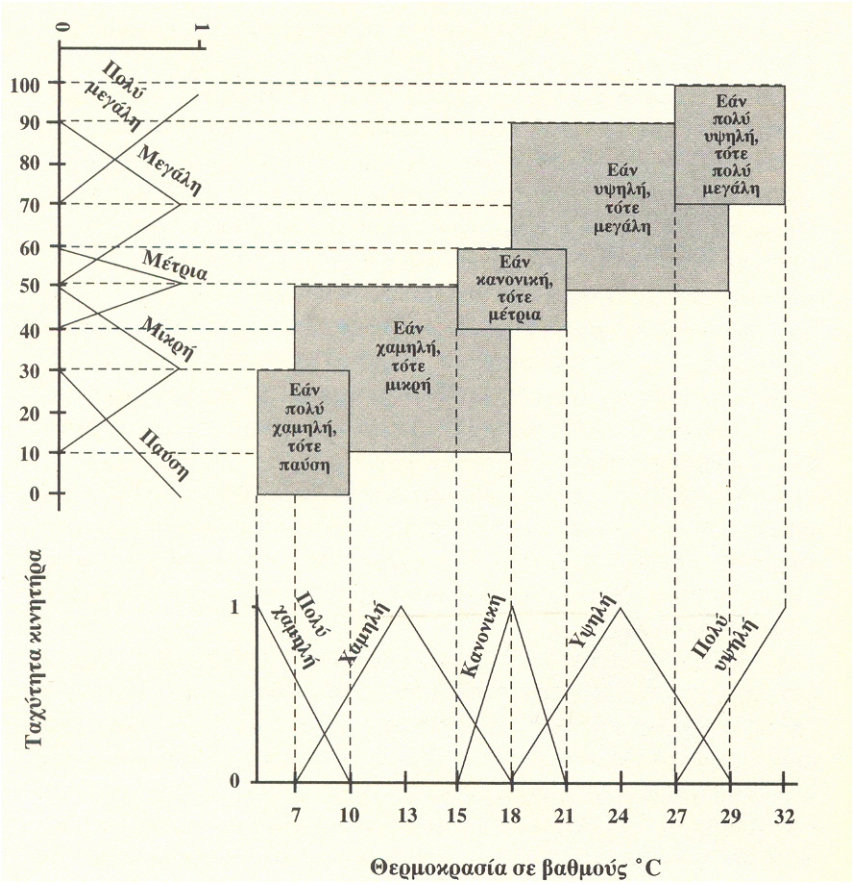
Εικόνα 2η

Εικόνα 3η : Σε αυτό το σχεδιάγραμμα αρχίζουμε να κατανοούμε την έννοια του μπαλώματος και πώς αυτό δημιουργείται. Η δημιουργία ενός μπαλώματος προκύπτει από τη σύζευξη της εισόδου με την έξοδο. Στα μαθηματικά αυτό το μπάλωμα ονομάζεται διανυσματικό γινόμενο δυο τριγώνων.



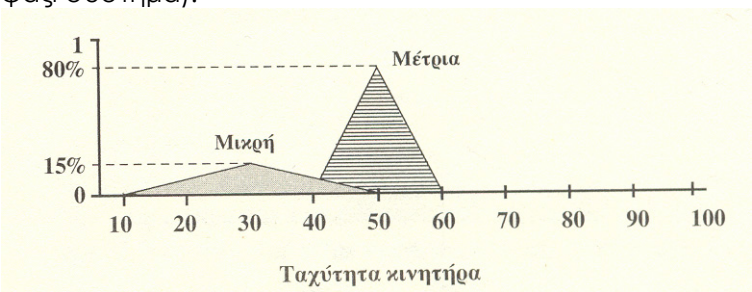
Εικόνα 3η

Εικόνα 4η : Σε αυτό το σχεδιάγραμμα έχουμε σχεδιάσει όλα τα δυνατά μπαλώματα.
Το θεώρημα FAT λέει ότι ένα φάζι σύστημα μπορεί να προσεγγίσει όσο θέλουμε ένα συνεχές σύστημα (σε ένα «συμπαγές» ή κλειστό και φραγμένο σύνολο).



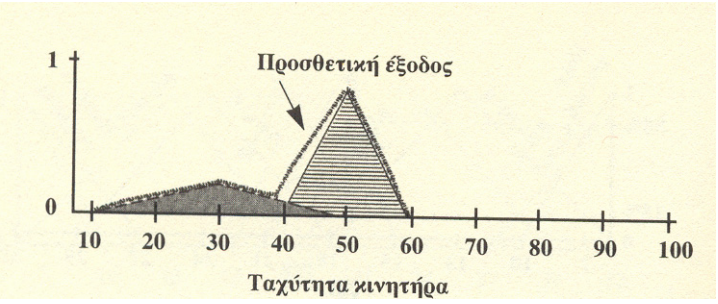
Εικόνα 4η

Ας δούμε τώρα με ποιο τρόπο λειτουργεί ένα τέτοιο σύστημα:
Εικόνα 5η : Με δεδομένο το παράδειγμα που αναφέραμε στην 1η εικόνα ενεργοποιούνται δυο κανόνες αλλά ο καθένας ως ένα βαθμό. Ο κανόνας 3 ενεργοποιείται μόνο στο 80% και ο κανόνας 2 ενεργοποιείται 15%. Αυτό δίνει δυο σύνολα εξόδου. Έτσι το σύνολο *μέτρια* συρρικνώνεται στο 80% του ύψους του και το σύνολο μικρή στο 15% του ύψους του. Στην περίπτωση που τα δυο τρίγωνα επικαλύπτονται προσθέτουμε τα δυο τρίγωνα (προσθετικό φάζι σύστημα).



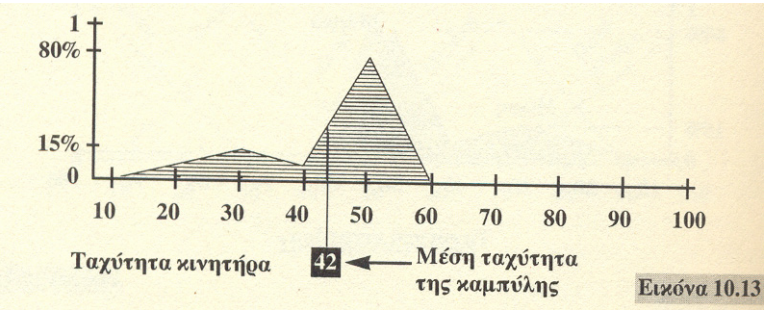
Εικόνα 5η

Προσθέτοντας τους «αμμόλοφους» παίρνουμε μια οδοντωτή κορυφή (εικόνα 6η).



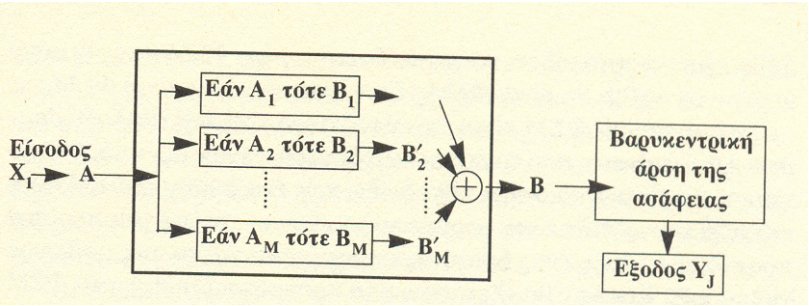
Εικόνα 6η

Τώρα η ασάφεια του συνόλου αίρεται με τον υπολογισμό της μέσης τιμής του κι έτσι βρίσκουμε ότι η ταχύτητα του κινητήρα είναι ίση περίπου με 42 (εικόνα 7η).



Εικόνα 7η

Στην επόμενη εικόνα φαίνεται ο τρόπος που ένα φάζι σύστημα μετατρέπει τις εισόδους σε εξόδους. Κάθε κανόνας έχει τη μορφή *αν Α, τότε Β*. Αυτό είναι σύντμηση του *αν Χ είναι Α, τότε Ψ είναι Β*. Τα δεδομένα εισόδου χ ενεργοποιούν το μέρος Α σε κάποιο βαθμό. Αυτό δίνει Β΄ ή το μέρος του κανόνα του Β σε κάποιο βαθμό. Το σύστημα προσθέτει τα σύνολα Β΄ δίνοντας ένα τελικό σύνολο εξόδου Β και ακολούθως παίρνει το μέσο όρο του Β και δίνει τον αριθμό εξόδου ψ. Η έξοδος ψ είναι ένας φαζικός σταθμικός μέσος.



Εικόνα 8η

Τα φάζι συστήματα μπορούν να γίνουν φάζι προσαρμοστικά συστήματα. Με άλλα λόγια μπορούν να μαθαίνουν κι έτσι η μηχανές να γίνονται έξυπνες και να προσομοιάζουν στην ανθρώπινη σκέψη και τελικά να την ξεπερνάνε με μια έννοια.

Μπορεί να μη συμφωνήσουμε με το σύνολο των φιλοσοφικών αποφθεγμάτων του Kosko. Για παράδειγμα η διαπίστωση ότι το λογικό και το εμπειρικό δε συναντώνται είναι κατά τη γνώμη μας λάθος κι έχουμε εξηγήσει σε άλλα σημεία για ποιο λόγο. Ωστόσο, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι ο Kosko κι εν γένει η επιστημονική κοινότητα είναι συχνά αναγκασμένη να σκέφτεται διαλεκτικά ή/και υλιστικοδιαλεκτικά. Το αν το κάνει συνειδητά ή όχι δεν είναι το ζήτημα που τουλάχιστο σε αυτό το σημείο μας ενδιαφέρει. Ο Kosko για

παράδειγμα δεν κάνει αναφορά στο Χέγκελ ή στο Μαρξ και τον Ένγκελς, αλλά στο Βούδα προκειμένου να αναδείξει την περιορισμένη ισχύ της τυπικής λογικής και αυτής του Αριστοτέλη. Οι ίδιες οι ανάγκες, οι απαιτήσεις της ζωής τον τροφοδοτούν με στοιχεία ώστε να αναστοχαστεί σε καίρια φιλοσοφικά ερωτήματα. Κι αυτό είναι μια διαδικασία αναγκαστική που γίνεται ανεξάρτητα αν ο ίδιος ο Kosko οι εμείς το επιθυμούμε. Η αναγκαστική αυτή διαδικασία οδηγεί στη συνειδητοποίηση των ορίων της τυπικής λογικής. Πιθανώς να δείχνουν πια και το κλείσιμο του ιστορικού της κύκλου και την πλέρια αντικατάστασή της από τη διαλεκτική. Πιθανώς και όχι αφού η τυπική λογική μπορεί να μείνει ως ένα πρώτο βήμα μιας διδακτικής πρότασης που θα σχετίζεται με τα μαθηματικά και την ίδια τη λογική.

Γ4. <u>Μαθηματικά και Λογική</u>

Η μαθηματική λογική δεν είναι ασφαλώς εντελώς αυτονομημένη από την τυπική λογική. Είναι μορφή τυπικής λογικής που εμφανίσθηκε σε ένα στάδιο ανάπτυξης των ίδιων των μαθηματικών που απαιτούσαν εναγωνίως απαντήσεις. Το πρώτο μεγάλο βήμα μπορούμε να το διακρίνουμε στην ευκλείδεια γεωμετρία που καταγράφει με συγκροτημένο τρόπο ένα αξιωματικό σύστημα και μια συγκροτημένη παραγωγική μέθοδο που έμελλε να καθορίσει για πολλούς αιώνες την πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος, στη συνέχεια, άνοιξε κατά κάποιο τρόπο τους ασκούς του Αιόλου. Οι άνεμοι που απελευθερώθηκαν κατέγραψαν εντυπωσιακά αποτελέσματα ειδικότερα στα νεότερα μαθηματικά.

Σε αυτά τα νεότερα μαθηματικά, σύμφωνα με μιαν άποψη, διακρίνονται τρεις περίοδοι που δεν οριοθετούνται με αμετάθετα σύνορα αλλά εισχωρούν η μια μέσα στην άλλη (κάτι που ισχύει κατά τη γνώμη μας για όλες τις περιοδολογήσεις με οποιοδήποτε κριτήριο κι αν γίνονται αυτές και για οποιοδήποτε γνωστικό τομέα στον οποίο αναφέρονται). Η πρώτη, λοιπόν, περίοδος εκτείνεται από τα μέσα ως τα τέλη του 19ου αιώνα και τερματίζει με την εμφάνιση των παραδόξων. Η περίοδος αυτή σηματοδοτείται από την προσπάθεια θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών (Dedekind), από τις εργασίες του Cantor για τη συνολοθεωρία και τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, από τις μελέτες του Frege για την αριθμητική κ.α. Η δεύτερη περίοδος ξεκινώντας από εκεί που τελειώνει η πρώτη εκτείνεται μέχρι και το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο περίπου. Σε αυτή την περίοδο έχει δημιουργηθεί η εντύπωση ότι τα παράδοξα που γέννησε η πρώτη περίοδος καταπολεμούνται πλέον με επιτυχία και το πρόγραμμα του Hilbert βρίσκεται σε πλήρη άνθηση. Η τρίτη περίοδος ξεκινά με τον Goedel το 1931 ο οποίος δημοσιεύει τα περίφημα θεωρήματα μη πληρότητας της αριθμητικής και περιλαμβάνει και το 1963 οπότε ο Cohen ανακοινώνει τα πορίσματα σχετικά με την ανεξαρτησία της Υπόθεσης του Συνεχούς και του αξιώματος της επιλογής στο αξιωματικό σύστημα Zermelo-Fraenkel.[234]

Μέσα σε αυτές τις περιόδους της εξέλιξης των νεότερων μαθηματικών που σχετίζονται με το νομιμοποιητικό αίτημα, η μαθηματική λογική γνωρίζει ήττες και νίκες μέσα από τις οποίες αναδεικνύεται η ιστορικότητά της αλλά και μέσα από τις οποίες προωθείται εν γένει η εξέλιξη της τυπικής λογικής. Σχεδόν η τυπική λογική έχει πλέον ταυτιστεί με τη μαθηματική λογική: «η σύγχρονη λογική εξελίχθηκε σε Θετική Επιστήμη, που χρησιμοποιεί μαθηματικές μεθόδους. Διαμορφώθηκε κατά την έκφραση του Πορέτσκι, σε Μαθηματική Λογική που πραγματεύεται το θέμα της λογικής με χρήση μαθηματικών μεθόδων. Έτσι, η λογική έγινε κατάλληλη για την ορθή διατύπωση και λύση λογικών προβλημάτων, που εγείρονται στα μαθηματικά, ιδιαίτερα εκείνων που σχετίζονται με το αποδείξιμον και το μη - αποδείξιμον συγκεκριμένων προτάσεων σε μαθηματικές θεωρίες. Μια ακριβής διατύπωση των προβλημάτων αυτών απαιτεί, πρώτα από όλα και υπεράνω όλων, μια «εκλέπτυνση» της έννοιας της απόδειξης. Κάθε μαθηματική απόδειξη συνίσταται στη συνεπή εφαρμογή συγκεκριμένων λογικών μεθόδων επί των αρχικών προτάσεων. **Αλλά, οι λογικές μέθοδοι δεν είναι κάτι το απόλυτο, κάτι το θεμελιωμένο μια για πάντα. Οι μέθοδοι αυτές αναπτύχθηκαν κατά τη διαδρομή πολλών αιώνων ανθρώπινης πρακτικής δραστηριότητας [...] Όμως, η ανθρώπινη πρακτική εμπειρία είναι σε κάθε ιστορικό**

[234] . Δες αναλυτικότερα Γ. Ρουσόπουλος, Επιστημολογία των Μαθηματικών, εκδ. Gutenberg

στάδιο, περιορισμένη, μολονότι ο συνολικός όγκος της διαρκώς αυξάνεται. Οι λογικές μέθοδοι, που αντανακλούν ικανοποιητικά τη διεργασία της ανθρώπινης σκέψης σε ένα δεδομένο στάδιο της ιστορικής ανάπτυξης ή σε μια δεδομένη σφαίρα δραστηριότητας, μπορεί να αποδειχτούν ακατάλληλες για το επόμενο στάδιο ή σε μια άλλη σφαίρα, επομένως, καθώς μεταβάλλεται το περιεχόμενο του εξεταζόμενου αντικειμένου, μεταβάλλεται και ο τρόπος εξέτασής του· αλλάζουν δηλαδή, οι λογικές μέθοδοι. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στην περίπτωση των μαθηματικών με τις επανειλημμένες αφαιρέσεις τους, που οδηγούν πολύ μακριά. Εδώ, θα ήταν τελείως παράλογο να θεωρεί κανείς τις λογικές μεθόδους ως ολοκληρωμένο σύνολο ή ως κάτι το απόλυτο. Εξάλλου, εύλογο είναι να εξετάζονται οι λογικές μέθοδοι οι χρησιμοποιούμενες σε συγκεκριμένες καταστάσεις, οι οποίες συναντώνται στα Μαθηματικά. Η καθιέρωση λογικών μεθόδων για μια δεδομένη μαθηματική θεωρία είναι ακριβώς αυτό που συνιστά την επιθυμητή «εκλέπτυνση» της έννοιας της απόδειξης, όπως εφαρμόζεται σε αυτή τη θεωρία. Η σημασία αυτής της εκλέπτυνσης των Μαθηματικών έγινε ιδιαίτερα φανερή στα προβλήματα που αναφέρονται στη θεμελίωση των Μαθηματικών […] Έγινε, επομένως, φανερό ότι η λύση των προβλημάτων αυτών (σ.σ. το πρόβλημα της ισχύος του συνεχούς, προβλήματα που υπήρχαν στην Περιγραφική Θεωρία των Συνόλων κ.α.) απαιτούσε μια νέα μαθηματική Επιστήμη-τη Μαθηματική λογική. Η εφαρμογή της Μαθηματικής λογικής σε προβλήματα των Μαθηματικών απεδείχθη επιτυχής», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[235]

Γ4.1: <u>Η σημασία των φορμαλισμών</u>

Ασφαλώς η μαθηματική λογική δεν μπορεί να λειτουργήσει χωρίς φορμαλισμούς και σύμβολα. Οι φορμαλισμοί και τα σύμβολα είναι οργανικό στοιχείο των τυπικών λογικών. Χωρίς αυτά η τυπική λογική απλώς δεν μπορεί υπάρξει ως επιστήμη. Η εισαγωγή τους βοηθά στη εξαφάνιση των ασαφειών και των διφορούμενων σημασιών της γλώσσας. Αυτό από μόνο του σημαίνει ότι η τυπική λογική δεν είναι ένας νεκρός φορμαλισμός, ένα παιχνίδι του νου που καμία σχέση δεν έχει με την πραγματικότητα. Αφού μέσω του φορμαλισμού και των συμβολισμών περιορίζονται οι ανακρίβειες που έχουν να κάνουν με τη γλώσσα σημαίνει ότι η πραγματικότητα, οι σχέσεις που διακρίνονται σε αυτήν, εκφράζονται τώρα επιτυχέστερα.

Σε αυτό το σημείο, όμως, αξίζει να ανοίξουμε μια παρένθεση που σχετίζεται ακριβώς με αυτή την εισαγωγή των φορμαλισμών και του συμβολισμού και τον καθοριστικό ρόλο που έπαιξε το τηλεσκόπιο του Γαλιλαίου. Θα αναφερθούμε σε μια διαλεκτική κατά τη γνώμη μας παρατήρηση[236] η οποία αναλύει τον τρόπο με τον οποίο το τηλεσκόπιο του Γαλιλαίου έφερε νέα ήθη στην επιστημονική κοινότητα βοηθώντας αποφασιστικά στη σχετική αυτονόμηση των συμβολισμών. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτή την παρατήρηση: «η επιστημονική πρακτική, με τη βοήθεια του τηλεσκοπίου ως παραδειγματικού εργαλείου του υπό διαμόρφωση επιστημονικού τρόπου σκέψης, αποκτά το μέσο εκείνο που, παρεμβαλλόμενο ανάμεσα στο αντικείμενο και το υποκείμενο, διαμεσολαβεί και γεφυρώνει τη μεταξύ τους απόσταση. Κόσμος, άστρα, αντικείμενο παρατήρησης από τη μια και γυμνός οφθαλμός, υποκείμενο, νόηση από την άλλη, πλησιάζουν το ένα κοντά στο άλλο μέσω των δυνατοτήτων που προσφέρει το τηλεσκόπιο […] Συγκροτείται έτσι ένας επιστημονικός λόγος (discourse) ο οποίος βασίζεται στα είδωλα, τις παραστάσεις και τις εικόνες των αντικειμένων. Το υπό διαμόρφωση πρότυπο της επιστήμης διατυπώνει ένα λόγο για την απόσταση, ένα λόγο που εκμηδενίζει την απόσταση. Αντικείμενα που δε θα μπορούσαμε αλλιώς να τα πιάσουμε με τα χέρια ή να τα «πιάσουμε» δια γυμνού οφθαλμού ή με το μάτι του νου, τα προσλαμβάνουμε τώρα με το τηλεσκόπιο κι έτσι τα συλλαμβάνουμε με το νου […] Το τηλεσκόπιο προκύπτει έτσι ως μείζων **μεταφορά** της μετα-αναγεννησιακής πρακτικής στην επιστήμη σηματοδοτώντας την αφετηρία της νεότερης γνωσιολογίας/επιστημολογίας: μια επιστημολογία που στηρίζεται στις παραστάσεις-σχηματισμός, μετασχηματισμός και χρήση παραστάσεων. Μπορούμε να

[235] . Α.Α. Μαρκόφ, λήμμα Αντικείμενο και μέθοδος της σύγχρονης λογικής στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια

[236] . Δες ααναλυτικά Ρουσόπουλος Γ. , Επιστημολογία των Μαθηματικών, σελ. 27-34, εκδ. Gutenberg

μιλήσουμε για τη διαμόρφωση κατά τη μετα-αναγεννησιακή περίοδο, ενός επιστημονικού προτύπου που θα ονομάζουμε **αναλυτικό-αναφορικό πρότυπο**», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[237]

Τι εννοεί, όμως, ο συγγραφέας με το αναλυτικό-αναφορικό πρότυπο; Η μεν πρώτη παράμετρος, η αναφορικότητα, σημαίνει ότι κάποιο διάμεσο, το τηλεσκόπιο στη συγκεκριμένη περίπτωση, δημιουργεί οντότητες που μπορούν να εκληφθούν ως αντιπρόσωποι των αρχέτυπων αντικειμένων. **Επομένως, δουλεύουμε πλέον με παραστάσεις που είναι αντίγραφα υπαρκτών οντοτήτων. Έχουμε, πλέον, τη δυνατότητα τα αντικείμενα να τα συμβολοποιήσουμε και να τα μελετήσουμε στο χαρτί**. Η δε δεύτερη παράμετρος, η αναλυτικότητα είναι αυτή η παράμετρος που στη συνέχεια «κυριαρχεί και αναδεικνύεται ως κεντρικό χαρακτηριστικό του επιστημονικού ιδεώδους». Παρά το γεγονός ότι ο επιστημονικός λόγος προϋποθέτει τη σύνδεση των παραστάσεων με τα αντικείμενα-αρχέτυπα, **τώρα δεν έχουμε λόγο για τα εξωτερικά αντικείμενα, αλλά γίνεται λόγος ανάλυσης-σύνθεσης των παραστάσεων των αντικειμένων: «λόγος διαχείρισης των σημείων». Θα προσθέταμε ότι αυτός ο λόγος φαίνεται στην πραγματικότητα να απολυτοποιεί αυτό το παιχνίδι φορμαλισμού. Συντελεί στη σχετική αυτονόμηση του επιστημονικού λόγου από την πραγματικότητα, αλλά σε κάθε περίπτωση μιλάμε για σχετική κι όχι απόλυτη αυτονόμηση**. Μάλιστα, να διευκρινίσουμε ότι ακόμα και ο Hilbert που έχει καταγραφεί ως ένας ακραίος φορμαλιστής, τόσο από αναφορές που έκανε ο ίδιος, όσο και διάφοροι σχολιαστές του (Hintikka) καθιστούν τον τέτοιο χαρακτηρισμό, αμφισβητούμενο ως και απορριπτέο. Νομίζουμε, ότι ο οποιοσδήποτε φορμαλισμός δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ένα ανεξάρτητο νοητικό παιχνίδι και αυτό πρώτα από όλα αποδεικνύεται από την ιστορική εξέλιξη του φορμαλισμού και τις απαρχές του. Έτσι, μας βρίσκει σύμφωνους η παρατήρηση σύμφωνα με την οποία «το αναλυτικό-αναφορικό πρότυπο μάς επιτρέπει να τα πραγματευόμαστε **σαν** αυτόνομες οντότητες, **σαν** οντότητες που συγκροτούν έναν αυθύπαρκτο κόσμο. Μπορούμε τότε, ξεχνώντας προσωρινά τη σύνδεσή τους με τον αντικειμενικό κόσμο, να αναλύσουμε τις μεταξύ πους σχέσεις, να τα ταξινομήσουμε, να τα συνθέσουμε και να τα ανασυνθέσουμε σε νέες ολότητες. Διαμορφώνουμε έτσι γενικά ένα θεωρητικό λόγο περί των σημείων και των παραστάσεων: διαχειριζόμενοι σημεία, μετασχηματίζοντας παραστάσεις, παράγουμε γνώση», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[238] Δυο παρατηρήσεις πάνω στο προηγούμενο απόσπασμα: α) η λέξη κλειδί είναι το «σαν» το οποίο αν μετατραπεί σε «ως», τότε η ρεαλιστική θεώρηση των συμβολισμών γίνεται άκρατος φορμαλισμός με τον κίνδυνο να μετατραπεί σε υποκειμενικό ιδεαλισμό και β) η γνώση που παράγεται δεν είναι γνώση για τη γνώση, αλλά είναι γνώση ειδικά (ή μπορεί να γίνει τέτοια).

Επομένως, η (μαθηματική) λογική με τη χρήση των συμβόλων και των φορμαλισμών δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας αφαιρετικός κι επιτυχής τρόπος να χειριστούμε την αλήθεια (ή για την ακρίβεια πλευρές της) σε έναν ιδιαίτερο γνωστικό τομέα, τα μαθηματικά. Όσο κι αν αποτελεί προϋπόθεση για τη μελέτη της (της μαθηματικής λογικής κι εν γένει της τυπικής λογικής) η απόσπαση από το περιεχόμενο και η απαίτηση για μη αντιφατικότητα κ.λπ. κι όσο κι αν αυτή η απόσπαση της λογικής βοήθησε και βοηθά στην ανάπτυξή της, τόσο θα πρέπει να γίνεται κατανοητό ότι η μαθηματική λογική δεν μπορεί να είναι μια καθολική λογική που θα μας λύσει όλα τα προβλήματα σε όλα τα επίπεδα και ότι τελικά έχει ένα περιορισμένο ρόλο.

Γ4.2: <u>Ο Θετικισμός και τα Μαθηματικά</u>

Ο θετικισμός αν και απαιτεί να εμφανιστεί ως αποκομμένος από τον ιδεαλισμό, αναπαράγει, με ιδιαίτερο τρόπο είναι η αλήθεια, βασικές αρχές του υποκειμενικού ιδεαλισμού. Δεν έχουμε, βεβαίως πρόθεση να αποδείξουμε σε αυτό το κείμενο αυτό τον ισχυρισμό ή να κάνουμε μια ενδελεχή ανάλυση της ιστορικής του διαδρομής και των βασικών του θέσεων. Θα σταθούμε επιγραμματικά σε μια παρουσίαση και κριτική των

[237] . Ο.π., σελ. 27-28
[238] . Ο.π., σελ.30

νεοθετικιστικών του εκφράσεων, του οποίου μια σειρά εκπρόσωποι ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τη μαθηματική λογική.

Θα ξεκινήσουμε με μια αναφορά στο Russel του θεμελιωτή της θεωρίας του λογικού ατομισμού και της φιλοσοφίας της λογικής ανάλυσης. Κατά το Russel η θετική γνώση πρέπει να αποκτιέται εμπειρικά και το καθήκον της φιλοσοφίας είναι να υποβάλλει τις προτάσεις τις θεμελιωμένες από τη συνηθισμένη αντίληψη και από την επιστήμη σε λογική ανάλυση. Αυτή ακριβώς η λογική ανάλυση προσδίδει στη γνώση σαφήνεια και εξουδετερώνει τη διανοητική σύγχυση. Αυτή η ιδέα της λογικής ανάλυσης ανάγεται σε έννοιες που προέρχονται από τα καθαρά μαθηματικά και τη μαθηματική λογική. Η ανάπτυξη των μαθηματικών και η ανάγκη για την αποτελεσματική τους εφαρμογή δημιούργησε την ανάγκη να διατυπώνονται με ακρίβεια και να εκλείπουν οι όποιες ασάφειες. Η απαίτηση για απόλυτη ακρίβεια στα μαθηματικά γενικεύθηκε από το Russel ο οποίος αξίωσε μια γενικευμένη μέθοδο για τη φιλοσοφία. Ο Russel προσεγγίζει το νεοθετικισμό τη δεκαετία του '20 και του '30 πιστεύοντας ότι φέρνει κάτι καινοφανές στη φιλοσοφική σκέψη. Όμως, αυτό που κατάφερε ήταν να επαναλάβει φιλοσοφικούς στοχασμούς παλαιότερων φιλοσόφων: τα «σκληρά δεδομένα» του Russel βρίσκονταν σε αντιστοιχία με τη μέθοδο της αμφιβολίας του Ντεκάρτ, η πραγματικότητα ως σύμπλεγμα αισθημάτων του Mach ήταν σε εναρμόνιση με την άποψη του Russel που καλούσε σε εμπιστοσύνη μόνον στα αισθητηριακά δεδομένα και στη λογική ανάλυση των γεγονότων που έχει τις πηγές της στα «σκληρά δεδομένα» τα οποία στηρίζονται στις αισθήσεις, ενώ ακόμα μπορεί να βρει ακόμα αναλογίες ανάμεσα στα πιστεύω του Russel καθώς και αυτά των Mill, Berkeley και Hume.[239]

Η όποια κριτική που θα ασκήσουμε στη σκέψη του Russel, ή το αδιέξοδο της όλης του προσπάθειας δε σημαίνει και συνολική απόρριψη του μαθηματικολογικού του έργου. Η απαίτηση του Berkeley νωρίτερα, για καθαρότητα των προκείμενων με αφορμή την ασάφεια στην έννοια του απειροστού, η όλη προσπάθεια της μαθηματικής κοινότητας για τη θεμελίωση των αριθμών με αναγωγή στους φυσικούς οι οποίοι θεωρήθηκαν θεμέλιοι λίθοι, η ίδια η προσπάθεια του Russel για τη θεμελίωση ενός προγράμματος που θα έδινε την «τελική απάντηση», η σκέψη του Frege για την απομάκρυνση των ψυχολογικών καταλοίπων στη θεμελίωση της αριθμητικής, ήταν προσπάθειες που έδωσαν ώθηση στην επιστήμη των μαθηματικών και της λογικής τόσο μέσα από τις επιτυχίες τους όσο και από τις αποτυχίες τους. Δημιούργησαν παράλληλα προβλήματα στη φιλοσοφία και κατ' επέκταση στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Ας επισκοπήσουμε μερικά από αυτά που σχετίζονται με το Russel και το έργο του *Principia Mathematica* (το οποίο συνέγραψε από κοινού με το Whitehead).

Η απαίτηση του Russel για «σκληρά δεδομένα» δηλαδή για προκείμενες - δεδομένα που δεν επιδέχονται αμφισβήτησης και στηρίζονται στην αισθητηριακή πρόσληψη τον οδήγησε στο *Principia Mathematica* να διατυπώσει τη γνώμη ότι η βασική έννοια που πρέπει να παίρνεται ως πρωταρχική είναι αυτή της «στοιχειώδους» πρότασης ή «ατομικής» πρότασης. Πρόκειται για εκείνες τις προτάσεις που δεν επιδέχονται παραπέρα ανάλυση σε απλούστερες ενώ ταυτόχρονα στηριζόμενοι σε αυτές έχουμε τη δυνατότητα να παράγουμε άλλες συνθετότερες. Επιπλέον, «το πιο σημαντικό λογικό τέχνασμα των *Principia Mathematica* ήταν αυτό που χρησιμοποιήθηκε για τη συγκρότηση *γενικών* προτάσεων, δηλαδή προτάσεων που αναφέρονται, όχι σε καθορισμένα άτομα, αλλά σε όλα ή σε μερικά προσδιορισμένα άτομα που κατέχουν κάποια κοινή ιδιότητα ή βρίσκονται σε κάποια σχέση. Αυτό συνεπαγόταν την εισαγωγή αυτού που αποκαλείτο «προτασιακές συναρτήσεις» και των τελεστικών συμβόλων που αποκαλούνταν «ποσοδείκτες» (quantifiers), που χρησιμοποιούνταν στις προτασιακές συναρτήσεις. Οι προτασιακές συναρτήσεις και οι ποσοδείκτες οφείλονταν στο Frege και αντιπροσώπευαν την πιο σημαντική του συμβολή στην τυπική λογική θεωρία [...] Μολονότι σε πρώτη αντιμετώπιση φαίνεται δύσκολη, η τεχνική αυτή πέτυχε μια εκπληκτική απλοποίηση της παραδοσιακής λογικής θεωρίας. Καθιστά δυνατό όλες οι αρχές της λογικής, με τις οποίες μια πρόταση

[239] . Δες αναλυτικά σε διάφορα σημεία α) M. Cornforth, Μαρξισμός και γλωσσική φιλοσοφία, εκδ. Ζαχαρόπουλος, β) M. Cornforth, Επιστήμη και Ιδεαλισμός, εκδ. Αναγνωστίδη, γ) Μ.Μ. Ρόζενταλ, Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, εκδ. Γνώσεις

συμπεραίνεται με εγκυρότητα από μιαν άλλη, να διατυπωθούν με ακρίβεια και να αποδειχθούν με αυστηρότητα. Η τυπική λογική έγινε ένας ακριβής λογισμός». [240] Ως εδώ όλα καλά. Μετά το έργο *Principia Mathematica* υπήρχε η πεποίθηση ότι η παραγωγή των μαθηματικών από τη λογική μπορεί να είναι επιτυχής. Τα προβλήματα ξεκίνησαν αφ' ης στιγμής εισήχθη το «Αξίωμα του Απείρου». Συγκεκριμένα, ένας αριθμός ν θεωρήθηκε ως η κλάση όλων των κλάσεων με ν μέλη και θεωρήθηκε ότι υπάρχουν τόσοι ορισμοί όσοι και τα ν άτομα. Στην αντίθετη περίπτωση δε θα υπήρχαν οποιεσδήποτε κλάσεις με ν μέλη. Έτσι, για να ορισθεί μια άπειρη σειρά απόλυτων αριθμών έκανε την εμφάνισή του το προαναφερθέν αξίωμα σύμφωνα με το οποίον για κάθε αριθμό οσοδήποτε μεγάλο υπάρχει τουλάχιστον αυτός ο αριθμός ατόμων. Όμως «το αξίωμα αυτό έκανε το όλο σύστημα των μαθηματικών αληθειών, υποθετικά ανεξάρτητο από οποιοδήποτε γεγονός, να εξαρτάται από ένα υποτιθέμενο γεγονός, δηλαδή, ότι ο αριθμός των ατόμων που υπάρχουν είναι άπειρος».[241] Σε αυτό το σημείο εγείρονται δυο πολύ σοβαρές αντιρρήσεις:

[α] Η αποδοχή της ύπαρξης ενός άπειρου αριθμού ατόμων συνεπάγεται η ύπαρξη μιας άπειρης σειράς απόλυτων αριθμών. Στη συνέχεια εξαγόταν ένας ακόμα μεγαλύτερος αριθμός πραγματικών και μιγαδικών αριθμών. Το πρόβλημα έγκειται στην προφάνεια του άπειρου αριθμού ατόμων. Η αποδοχή της απειρότητας των ατόμων σημαίνει ότι για κάθε απόλυτο αριθμό υπάρχει ένας κανόνας για τη συγκρότηση ενός αριθμού κατά μια μονάδα μεγαλύτερου. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένας απόλυτος μέγιστος αριθμός. Η κατασκευή ενός όλο και μεγαλύτερου απόλυτου αριθμού είναι μια αναγκαία αλήθεια. Η αναγκαία αυτή αλήθεια, σύμφωνα με το Russel στο *Principia Mathematica* προβάλλεται ως εμπειρικό γεγονός. Γεγονός που δεν μπορεί να επαληθευτεί εμπειρικά και δεν μπορεί να εξαχθεί από καθαρά λογικές θεωρήσεις. Έτσι από τη μια έχουμε ένα σκληρό δεδομένο που για να είναι συνεπές με τις αρχές του Russel θα έπρεπε να θεμελιώνεται στην εμπειρία κάτι που δε συμβαίνει, από την άλλη το πρόγραμμα δεν μπορεί να δουλέψει χωρίς αυτό. Έτσι, «με τα μαθηματικά εισάγεται ο ορισμός και η παραγωγή των ιδιοτήτων των απείρων συνόλων και των απείρων σειρών, που δεν μπορούν να εξαχθούν από τη στοιχειώδη λογική των προτάσεων και των κλάσεων».[242]

[β] Η επόμενη ένσταση σχετίζεται με τα λεγόμενα μη αποδείξιμα θεωρήματα στα μαθηματικά: υπάρχει μια άπειρη σειρά αριθμών και δεν υπάρχει ένα όριο στα θεωρήματα που θεωρητικά μπορούν ή δεν μπορούν να είναι αληθινά για αυτούς. Επομένως εγείρεται το ερώτημα: «Είναι, λοιπόν, δυνατό να θεμελιώσουμε ένα σύνολο αξιωμάτων τέτοιο που να μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλα τα αληθινά θεωρήματα που αφορούν αριθμούς προκύπτουν από αυτούς, δηλαδή ότι μας δίνουν τη δυνατότητα να αποφασίσουμε αν ένα οποιοδήποτε προτεινόμενο θεώρημα είναι ή όχι αληθινό;».[243] Αυτό το ερώτημα συνδέεται ασφαλώς με το θεώρημα Goedel στο οποίο θα αναφερθούμε λίγο παρακάτω.

Το πρόβλημα στις απόψεις του Russel δε βρίσκεται μόνο στην εισαγωγή του αξιώματος της απειρίας αλλά και σε αυτό που ονομάσθηκε Λογικός Ατομισμός. Βασική αρχή του Λογικού Ατομισμού αποτέλεσε το δόγμα περί στοιχειωδών-ατομικών προτάσεων που οδήγησε το Russel να πιστέψει πως ανακάλυψε την έσχατη δομή της πραγματικότητας, ενώ ο πραγματικός κόσμος παρουσιάσθηκε ως ένα άθροισμα των επιμέρους στοιχειωδών γεγονότων. Μια τέτοια θεώρηση, όμως, δεν παίρνει υπόψη τις δυναμικές σχέσεις των πραγμάτων, την έννοια της εξέλιξης και των αντιθέσεων που είναι κινητήριοι μοχλοί της, την ιστορικότητα της γνώσης. Εισάγει μια εξωιστορική άποψη για τα πράγματα και τις μεταξύ τους σχέσεις, τα βλέπει στατικά. Η διαλεκτική δεν έχει θέση σε μια τέτοια τοποθέτηση. Σύμφωνα με μια κριτική του ΔΥ δεν επιδέχεται αμφισβήτηση η διαπίστωση των *Principia Mathematica* βάση της οποίας οι πιο σύνθετες μορφές προτάσεων συγκροτούνται από απλούστερες στοιχειώδεις προτάσεις. Όμως «από αυτό δε συνάγεται ότι ο κόσμος συνίσταται από ατομικά γεγονότα. Ότι μια τέτοια απόφανση, όπως «Αυτό είναι κόκκινο», είναι το πιο απλό είδος απόφανσης, δε συνεπάγεται ότι τέτοιες απλές αποφάνσεις πρέπει να αναφέρονται σε μη επιδεχόμενα ανάλυση άτομα με τις μη

[240] . M. Cornforth, Μαρξισμός και γλωσσική φιλοσοφία, σελ.94-5 εκδ. Ζαχαρόπουλος
[241] . Ο.π., σελ.98
[242] . Ο.π., σελ.100
[243] . Ο.π., σελ.99

επιδεχόμενες ανάλυση ιδιότητες και σχέσεις τους. Γιατί το γεγονός είναι πως τέτοιες αποφάνσεις σαν αυτές, μολονότι τυπικά απλές, είναι ταυτόχρονα εξαιρετικά αφηρημένες. Αν, λοιπόν, θελήσουμε να πούμε πιο συγκεκριμένα πώς έχει το πράγμα, θα πρέπει πάντοτε να διατυπώνουμε πιο σύνθετες και γενικευμένες αποφάνσεις. Γιατί τα ατομικά γεγονότα, για τα οποία διατυπώνουμε αποφάνσεις, δεν είναι ποτέ απλά, έσχατα ή μη επιδεχόμενα ανάλυση. Αν δείξω κάτι και πω «Αυτό είναι κόκκινο», που λογικά είναι η πιο απλή μορφή απόφανσης που μπορώ να διατυπώσω, με αυτό δε φτάνω ως το μεταφυσικό θεμέλιο και ούτε διατυπώνω ένα απλό και μη αναγώγιμο ατομικό γεγονός. Αντίθετα, η πρότασή μου είναι πολύ αφηρημένη. Και όσο πιο πολύ προσπαθώ να πω τι είναι αυτό που καθιστά την πρότασή μου αληθινή, τόσο πιο περίπλοκες στη λογική τους μορφή θα γίνουν οι αποφάνσεις μου».[244] Πράγματι, αν πάρουμε την πρόταση «Αυτό είναι κόκκινο» που υποτίθεται πως είναι στοιχειώδης αμέσως ανακύπτουν μια σειρά ερωτήματα: πώς ορίζεται το κόκκινο, πώς ορίζεται το χρώμα, τι είδους κόκκινο είναι, όλα τα όντα το βλέπουν κόκκινο κ.α. Όμοια ερωτήματα αναφύονται και για μαθηματικές προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν ως στοιχειώδεις, επιβεβαιωμένες από την εμπειρία όπως 1+1=2. Αυτομάτως, όμως, μπαίνουμε σε ένα κυκεώνα ερωτημάτων όπως πώς ορίζεται η μονάδα, η πρόσθεση, η ισότητα, ο αριθμός κ.λπ. Με αυτή την έννοια έλεγε ο Ένγκελς ότι «Τα λεγόμενα μαθηματικά αξιώματα είναι οι λίγοι προσδιορισμοί της σκέψης που χρειάζονται τα μαθηματικά ως αφετηριακά σημεία. Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των μεγεθών: Αφετηριακό σημείο τους είναι η έννοια του μεγέθους. Δίνουν στο μέγεθος έναν ελλιπή ορισμό κι ύστερα προσθέτουν απ' έξω τους άλλους στοιχειώδεις προσδιορισμούς του μεγέθους που δεν περιέχονται στον ορισμό με μορφή αξιωμάτων. Έτσι, τα αξιώματα φαίνονται ως αναπόδεικτα και φυσικά ως μη αποδείξιμα στα *μαθηματικά*. Η ανάλυση του μεγέθους θα εμφάνιζε όλους αυτούς τους αξιωματικούς προσδιορισμούς ως αναγκαίους προσδιορισμούς του μεγέθους. Ο Σπένσερ έχει δίκιο, με την έννοια πως το αυτονόητο αυτών των αξιωμάτων, που για μας είναι προφανές, *αποκτήθηκε κληρονομικά*. **Τα αξιώματα μπορούν να αποδειχτούν διαλεκτικά**, στο βαθμό που δεν είναι καθαρές ταυτολογίες», (οι υπογραμμίσεις με πλάγια γράμματα του συγγραφέα και με τα τονισμένα δικές μας).[245]

Ανακεφαλαιώνοντας, θα λέγαμε ότι κατά το Russel η λογική και τα μαθηματικά αποτελούνται από «ολότελα γενικές» αλήθειες που είναι αναγκαστικά αληθείς, ανεξάρτητες από τις επιμέρους εμπειρίες. Αυτές είναι αληθινές δυνάμει της μορφής τους και η αλήθεια τους βγαίνει στην επιφάνεια με την τυπική ανάλυση με την προϋπόθεση ότι ξεκινάμε από της ψηφίδες που είναι οι προφανείς αλήθειες. Έτσι, με αφετηρία τη στοιχειώδη λογική μπορούμε να οικοδομήσουμε το σύνολο των μαθηματικών και συγχρόνως να το αποδείξουμε. Η λογική και τα μαθηματικά, όμως, δεν αποδεικνύουν «ολότελα γενικές» προτάσεις που δηλώνουν την αμετάβλητη ουσία των πραγματικών και δυνατών πραγμάτων. Πολύ περισσότερο οι μέθοδοι που εφαρμόζονται στα μαθηματικά και στη λογική δεν μπορούν να εφαρμοστούν και στη φιλοσοφία ή διαφορετικά η φιλοσοφία δεν μπορεί να ταυτιστεί με ένα σώμα που θα λειτουργεί ως ένα τυπικό σύστημα. Οι επιτυχίες της λογικής και των μαθηματικών δε συνηγορούν σε καμία περίπτωση στη «μαθηματικοποίηση» και τη «λογικοποίηση» της φιλοσοφίας.

Ο Wittgenstein είναι η επόμενη περίπτωση που θα μας απασχολήσει όχι μόνο για το λόγο ότι ήταν μαθητής του Russel αλλά κυρίως για τις συζητήσεις που προκάλεσε γύρω από τις απόψεις του στη φιλοσοφία των μαθηματικών και τις διαφοροποιήσεις που είχε σε σχέση με το δάσκαλό του. Δεν πρόκειται να αναλωθούμε σε μια εφ' όλης της ύλης κριτική του έργου του Wittgenstein για δυο λόγους: από τη μια, όπως είναι γνωστό το έργο του χωρίζεται σε δυο περιόδους, όπου η πρώτη περίοδος αναιρείται στη δεύτερη και από την άλλη το έργο του συχνά «δύστροπο» επιδέχεται πολλών αναγνώσεων. Έτσι, θα σταθούμε μόνο στην πρώτη περίοδο και στο περίφημο έργο του Tractatus Logico Philosophicus (εφεξής Tractatus). Ας δούμε μερικές από τις βασικές φιλοσοφικές αρχές και θεωρίες του Tractatus:

---

[244] . Ο.π., σελ. 103

[245] . Ένγκελς, Διαλεκτική της Φύσης, σελ.235, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

[α] μια από τις αρχές είναι η αρχή της επαλήθευσης. Πρόκειται για μια αρχή η πατρότητα της οποίας ανήκει στο Moritz Schlick. Σύμφωνα με αυτή την αρχή η επαλήθευση πραγματοποιείται με τη χρήση των αισθήσεων. Αυτό που επαληθεύει μια πρόταση, το νόημά της, είναι τα αισθητηριακά δεδομένα που προκύπτουν από αυτήν. Η επαλήθευση γίνεται από την εμπειρία μου. Η βασική αντίρρηση σε αυτή τη θέση από την πλευρά του ΔΥ είναι πως η εμπειρική επαλήθευση είναι διαφορετική από την τυπική επιβεβαίωση και πως η επαλήθευση των προτάσεων είναι μια ανθρώπινη κοινωνική διαδικασία[246],
[β] στη βάση της προηγούμενης αρχής διατυπώθηκε η θεωρία που ονομάστηκε *απεικονιστική*. Η δομή της εν λόγω θεωρίας ήταν περίπου η εξής: οι πιο απλές αποφάνσεις («ατομικές προτάσεις») είναι εικόνες των αντίστοιχων γεγονότων. Η δομή των εικόνων αντικατοπτρίζει τη δομή των γεγονότων. Η αλήθεια τους κρίνεται από το αν τα στοιχεία των γεγονότων είναι ταξινομημένα όπως στην εικόνα. Δηλαδή η αλήθεια τους κρίνεται από τη σύγκριση των εικόνων με τα γεγονότα. Μετά τις ατομικές προτάσεις ακολουθούν οι πιο σύνθετες αποφάνσεις, οι μοριακές προτάσεις, η αλήθεια των οποίων κρίνεται από την αλήθεια των μερών από τις οποίες έχουν συντεθεί, δηλαδή τις ατομικές προτάσεις. Όμοια οι γενικεύσεις επαληθεύονται με την επαλήθευση των προτάσεων από τις οποίες αποτελούνται. Μέσω της απεικονιστικής θεωρίας ο Wittgenstein έδωσε μιαν εξήγηση για τη διάκριση της αλήθειας σε εμπειρική και αναγκαία. Για τις πρώτες η αλήθεια τους ή το ψεύδος τους θεμελιώνεται με την εμπειρία, ενώ οι δεύτερες είναι αναγκαία αληθείς, ανεξάρτητα από την εμπειρία. Με τη διάκριση αυτή «μπόρεσε να δείξει ότι οι κανόνες της σύνταξης επιτρέπουν τη σύνταξη σύνθετων αποφάνσεων τέτοιων που, οποιοδήποτε κι αν είναι δυνατό να είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης με την εμπειρία, είναι πάντοτε αληθινές. Αυτές τις αποκαλούμε "ταυτολογίες" »[247],
[γ] σε ότι μπορεί να ειπωθεί μπαίνει κατά το Wittgenstein, ένα όριο. Υπάρχει μια διάκριση ανάμεσα στο λέγειν και στο δεικνύειν. Τι είναι αυτό που μπορεί να δειχτεί; Είναι μόνο αποφάνσεις γεγονότων, επιστημονικές αποφάνσεις. Υπάρχουν, όμως, πράγματα τα οποία είναι ανέκφραστα, είναι αυτά που δείχνονται και αυτό που δείχνεται είναι το «μυστικό στοιχείο»,
[δ] το ερώτημα, τελικά που τίθεται από το Wittgenstein είναι το πώς η πραγματικότητα απεικονίζεται στη γλώσσα ερώτημα που σχετίζεται με τη μορφή της αναπαράστασης. Έτσι, τα γνήσια φιλοσοφικά ερωτήματα αφορούν πλέον στη γλώσσα της οποίας η μη τήρηση οδηγεί σε α-νοησία.

Οι θέσεις του Wittgenstein τον οδήγησαν τελικά στο σολιψισμό ανεξάρτητα από το αν τον αρνιόταν. Άλλωστε η ευθυγράμμισή του με αυτόν τον οδήγησε και στο αδιέξοδο που τον ανάγκασε να κάνει τη στροφή που πραγματοποιήθηκε στη δεύτερη περίοδό του. Η σολιψιστική του θέση συμπυκνώθηκε στο Tractatus στη θέση 5.62, σύμφωνα με την οποία «αυτό …που ο *solipsismus εννοεί* είναι ολότελα σωστό, μόνο που δε *λέγεται*, αλλά φανερώνεται. Πως ο κόσμος είναι ο κόσμος *μου*, αυτό φανερώνεται πως τα όρια της γλώσσας (της γλώσσας που μόνος εγώ καταλαβαίνω) σημαίνουν τα όρια του κόσμου *μου*», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).[248]

Αυτό που μας ενδιαφέρει, όμως, είναι να δούμε με ποιο τρόπο χειρίστηκε τις έννοιες των μαθηματικών αλλά και αυτά τα ίδια τα μαθηματικά μέσα στο φιλοσοφικό πλαίσιο που οικοδόμησε. Ο Wittgenstein ορίζει τους αριθμούς ως εξής: «ο αριθμός είναι ο εκθέτης μιας πράξης. Η έννοια του αριθμού δεν είναι τίποτα άλλο από αυτό που είναι κοινό σε όλους τους αριθμούς, η γενική μορφή του αριθμού. Η έννοια του αριθμού είναι ο μεταβλητός αριθμός».[249] Επομένως, ο Wittgenstein αντιτίθεται στο λογικό ορισμό του Russell αφού διευκρινίζει ότι «η θεωρία των κλάσεων είναι ολότελα περιττή στα μαθηματικά».[250] Έτσι, χαράζεται μια διακριτή γραμμή ανάμεσα στην τυπική λογική και στα μαθηματικά, τουλάχιστον έτσι όπως χρησιμοποιήθηκε από τους Russell και Frege. Η λογική για το Wittgenstein αποτελείται από ταυτολογίες σε αντίθεση με τα μαθηματικά που

---

[246] . Δες αναλυτικότερα M. Cornforth, Μαρξισμός και γλωσσική φιλοσοφία, σελ. 135-139, εκδ. Ζαχαρόπουλος
[247] . M. Cornforth, Μαρξισμός και γλωσσική φιλοσοφία, σελ. 141, εκδ. Ζαχαρόπουλος
[248] . L. Wittgenstein, Tractatus Logico Philosophicus, εκδ. Παπαζήση
[249] . L. Wittgenstein, Tractatus Logico Philosophicus, 6.021, 6.022, εκδ. Παπαζήση
[250] . Ο.π., 6.031

αποτελούνται από εξισώσεις: «οι προτάσεις των μαθηματικών είναι εξισώσεις, δηλαδή ψευτοπροτάσεις».[251] Πώς στέκεται ο ΔΥ απέναντι σε αυτές τις τοποθετήσεις του Wittgenstein; Να μια χαρακτηριστική γνώμη: « Ζητούσε (σ.σ. ο Wittgenstein) να εξηγήσει τα μαθηματικά διαπραγματεύοντάς τα σα να αφορούσαν ουσιαστικά ορισμένα είδη πράξεων (που περιλαμβάνονται στις τεχνικές της αρίθμησης και της μέτρησης κ.τ.λ.) και με την απόδειξη της ισότητας και της ανισότητας των αποτελεσμάτων τέτοιων πράξεων. Για παράδειγμα, υπολογίζοντας δυο σύνολα επί δυο, φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα όπως όταν υπολογίζουμε ένα σύνολο επί τέσσερα. Αυτό ήταν μια καρποφόρα προσέγγιση στα προβλήματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Ο Wittgenstein συνέχισε να εργάζεται πάνω σε αυτά ως το τέλος της ζωής του· και το έργο του *Παρατηρήσεις πάνω στις Βάσεις των Μαθηματικών* (1956) περιέχει, ίσως, τις πιο θετικές και δημιουργικές συμβολές του στην επιστημονική φιλοσοφία. Ωστόσο, σε πείσμα της αλόγιστης αξίωσης ότι στο *Tractatus* τα προβλήματα είχαν «οριστικά λυθεί», ο Wittgenstein δεν μπορούσε να έχει την αξίωση ότι είχε οριστικά λύσει τα προβλήματα της φύσης των μαθηματικών και της μαθηματικής αναγκαιότητας (ούτε μπορούσε οποιοσδήποτε άλλος βεβαίως). Και με το δεδομένο αυτό, είναι φανερό ότι η θεωρία της ταυτολογίας δεν αρκεί για να ορίσουμε τη διάκριση ανάμεσα στα γεγονότα και την αναγκαιότητα [...] Αυτό που ο Schlick ονόμαζε «κατανόηση της φύσης της ίδιας της λογικής», που έδωσε στο *Tractatus* του Wittgenstein, διαχώρισε έντονα τη λογική από τα μαθηματικά. Ωστόσο, παρόλο που το σύνολο των μαθηματικών δε συνάγεται από τα αξιώματα της τυπικής λογικής, ισχύει ακόμα ότι η λογική και τα μαθηματικά σχετίζονται στενά, σαν επιστήμες που ανακαλύπτουν τις τυπικές αναγκαιότητες που είναι διαφορετικές από τα γεγονότα. Ο Wittgenstein όρισε την αναγκαιότητα των τύπων της λογικής ως ταυτολογία, αλλά δεν μπόρεσε να ορίσει την αναγκαιότητα των μαθηματικών. Πιο πέρα φαίνεται πως, ακόμα και στην τυπική λογική η αναγκαιότητα δεν μπορεί να αναχθεί στην ταυτολογία. Για το λόγο αυτό βρισκόμαστε ακόμα μακριά από του να έχουμε «κατανοήσει τη φύση της λογικής», πολύ περισσότερο τη σύνδεση της λογικής και των μαθηματικών και τη φύση της τυπικής αναγκαιότητας γενικά».[252]

Ο Carnap, βασικός εκπρόσωπος του Λογικού Θετικισμού, σε συμφωνία με το Wittgenstein αποφάνθηκε ότι τα φιλοσοφικά προβλήματα προκύπτουν από την παρανόηση της γλώσσας. Έτσι, το καθήκον η φιλοσοφία «δεν μπορεί να ασχολείται με τα μεταφυσικά προβλήματα αλλά με τη λογική της γλώσσας». Αυτό για να επιτευχθεί με επιτυχία θα έπρεπε από τη φιλοσοφία να αποκλειστούν οι αναφορές σε νοήματα και στις σχέσεις των σκέψεων με τα πράγματα, σε αντίθεση με το Wittgenstein που ενεπλάκη σε μια σειρά προβληματισμών σχετικά με το νόημα των προτάσεων. Αυτή του η προσπάθεια τον οδήγησε και αυτόν στο σολιψισμό, επομένως ο ιδεαλισμός έκανε την παρουσία του. Ο Carnap αντιλαμβανόμενος αυτή την παγίδα επιχείρησε να απεμπλακεί από το συγκεκριμένο κίνδυνο με το να περιορίσει τη φιλοσοφία όχι στη μελέτη του νοήματος μα της σύνταξης: η λογική της επιστήμης είναι η λογική σύνταξη της γλώσσας της επιστήμης. Ο Carnap υποστήριζε ότι η επιστήμη ασχολείται με αντικείμενα, η φιλοσοφία, όμως, ασχολείται με «όρους, προτάσεις, θεωρίες» και παραπέρα με τη γλώσσα. Η μέθοδος του Carnap διεκδικεί μια καθολικότητα που περνά, μάλιστα, μέσα από τα μαθηματικά και τη λογική. Το κέντρο της έλξης βρίσκεται στη μαθηματική λογική η οποία μας επιτρέπει να σώσουμε τη φιλοσοφία. Από τη μαθηματική λογική πρέπει να βγάλουμε τη νέα θεωρία περί λογικής, γιατί αυτή σύμφωνα με τα λόγια του έχει γενική σημασία.

Θα τελειώσουμε με την παράθεση της άποψης του Victor Kraft για τη σχέση λογικής-μαθηματικών. Ο Victor Kraft επισημαίνει την ειδοποιό διαφορά του παλιού εμπειρισμού σε σχέση με τον κύκλο της Βιέννης και τη μετάλλαξη που επήλθε στην άποψη περί λογικής και μαθηματικών. Η τομή συγκεκριμένα δημιουργήθηκε όταν οι Mill και Spencer πίστευαν ότι λογική και μαθηματικά έπρεπε να στηριχθούν στην εμπειρία. Ότι μαθηματικά και λογική είναι οι ανώτατες γενικεύσεις της εμπειρίας, οι ύψιστοι νόμοι του είναι και της σκέψης, εντελώς αφηρημένοι και τυποποιημένοι. Ως τέτοιοι περιέχουν φυσικούς νόμους κι επομένως είναι και τα δυο επαγωγικά. Όμως ως επαγωγικά μπορούν να αναθεωρηθούν

[251] . Ο.π., 6.2
[252] . Ο.π., σελ.151-153

από την εμπειρία. Εδώ έρχεται η διαφωνία του κύκλου: «Εάν τυχόν μαθηματικές προτάσεις δε συμφωνούν με εμπειρίες, κανείς δε βάζει με το νου του να θεωρήσει ανασκευασμένες τις μαθηματικές προτάσεις και να τις διορθώσει σύμφωνα με την εμπειρία. Τουναντίον θεωρούμε τα θεωρήματα ασφαλέστερα από τις αριθμήσεις και τις μετρήσεις μας. Γιατί όταν αυτά λένε άλλα πράγματα, τότε θεωρούμε τις μετρήσεις όχι αρκετά ακριβείς και τις αριθμήσεις λάθος. **Αυτό αποδεικνύει ότι τα μαθηματικά δε βασίζονται στην εμπειρία αλλά ισχύουν εντελώς ανεξάρτητα. Το ίδιο και η λογική δεν μπορεί να εξαχθεί από την εμπειρία. Ασφαλώς η λογική δε θα μπορούσε ποτέ να αλλάξει μέσω νέων εμπειριών! Η λογική και τα μαθηματικά μπορούν να αναχθούν γενετικά σε εμπειρίες, δηλ. σε βιωματικά σύνολα, που προφανώς έχουν δώσει την παρακίνηση για το σχηματισμό τους· αλλά με αυτό τον τρόπο δημιουργήθηκαν τελείως ανεξάρτητα συστήματα, που όσον αφορά την ισχύ τους είναι εντελώς ανεξάρτητα από την εμπειρία· ισχύουν «a priori»**, αν μ' αυτό δεν εννοούμε παρά μόνο "ανεξάρτητα από την εμπειρία"», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[253]

Ο Victor Kraft μπροστά στο δίλημμα που προκύπτει από την παραπάνω διαπίστωση, δηλαδή αν θα πρέπει να απορριφθεί ο εμπειρισμός ή αν θα πρέπει να ερμηνευτούν με διαφορετικό τρόπο τα μαθηματικά και η λογική απαντά πως το δίλημμα λύνεται με την παρέμβαση του κύκλου της Βιέννης. Η απάντηση δίνεται υπέρ της δεύτερης εκδοχής: «η λογική και τα μαθηματικά δε λένε τίποτα για την εμπειρική πραγματικότητα. Η λογική δεν περιέχει γνώσεις, δε δίνει τους βασικούς νόμους του είναι, αλλά τις βάσεις της διάταξης των σκέψεων …] Επειδή τα μαθηματικά μπορούν να συναχθούν από τη λογική, συμμερίζονται τα χαρακτήρα της. Οι αριθμοί από καθαρά μαθηματική άποψη, έξω από την εφαρμογή τους, δε σημαίνουν αντικείμενα του εμπειρικού κόσμου και η γεωμετρία δεν περιγράφει τον πραγματικό χώρο […] Αν εννοηθούν έτσι, η λογική και τα μαθηματικά δε δημιουργούν πια δυσκολίες με την ισχύ τους a priori. Μια τέτοια ισχύς μπορεί χωρίς άλλο να αναγνωρισθεί, γιατί δεν αφορά την εμπειρία, αλλά τη συμβολική παράσταση […] Οι αναλυτικές σχέσεις είναι σχέσεις λογικές, όχι εμπειρικές και λογικές σχέσεις είναι μόνο σχέσεις στο πλαίσιο ενός συστήματος παράστασης. Η ανεξάρτητη ισχύς της λογικής εξηγείται από το ότι η λογική δεν περιέχει τους βασικούς νόμους του κόσμου, παρά της σκέψης πάνω στον κόσμο. Έτσι, δικαιώνεται χωρίς δυσκολία η ανεξαρτησία της λογικής και των μαθηματικών απέναντι στην εμπειρία».[254]

Οι απόψεις του Kraft είναι άκρως διαφωτιστικές. Η λογική δε δίνει τους βασικούς νόμους του Είναι. Αυτή είναι μια σωστή διαπίστωση, αλλά αυτή που δεν είναι σωστή είναι πως η λογική δεν εκφράζει τίποτα για το Είναι. Η λογική και τα μαθηματικά δε λένε τίποτα για την εμπειρική πραγματικότητα. Εδώ έχουμε μιαν αντιστροφή των θέσεων του παλιού εμπειρισμού και σε κάθε περίπτωση μια δογματική άποψη. Ο Kraft αυτό που δε βλέπει είναι πως τόσο τα μαθηματικά όσο και η λογική αποκτούν σχετική αυτοτέλεια. Η θέση, όμως, για σχετική αυτοτέλεια απέχει πολύ από τη θέση που υποστηρίζει την έλλειψη οποιασδήποτε σχέσης αν και για να είμαστε δίκαιοι αναφέρεται από τον Kraft πως οι πηγές τους είναι στην εμπειρία. Ωστόσο δεν είναι αυτή η θέση η οποία κυριαρχεί (για το ζήτημα της σχετικής αυτονόμησης των μαθηματικών θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο ΣΤ). Ακόμα, τι σημαίνει ότι η λογική και τα μαθηματικά δικαιώνουν την (απόλυτη) ανεξαρτησία τους επειδή εκφράζουν τους νόμους της σκέψης πάνω στον κόσμο κι όχι τους βασικούς νόμους του κόσμου; Η διαπίστωση αυτή όπως είναι διατυπωμένη σημαίνει και την απόλυτη ανεξαρτησία των νόμων του κόσμου από τους νόμους της σκέψης και άρα οδηγούμαστε μοιραία στον υποκειμενικό ιδεαλισμό ή στην καλύτερη περίπτωση σε μια συμβασιοκρατία.

Τελικά, θα λέγαμε ότι ενώ σε επίπεδο τεχνικό ο κύκλος της Βιέννης είχε μια αξιόλογη προσφορά, σε φιλοσοφικό επίπεδο συνέχισε την ιδεαλιστική παράδοση του μαχισμού, μπορεί με μια διαφορετική μορφή και με επιμέρους διαφοροποιήσεις, αλλά επί της ουσίας με την ίδια φιλοσοφική ένταξη. Από αυτή την άποψη η διάφορες φιλοσοφικές εκφάνσεις και στη φιλοσοφία των μαθηματικών μπορεί να δημιούργησαν ερωτήματα αλλά εξέφραζαν τα γενικότερα αδιέξοδα αυτού του φιλοσοφικού ρεύματος.

---

[253] . Viktor Kraft, Ο Κύκλος της Βιέννης, σελ.30, εκδ. Γνώση
[254] . Ο.π., σελ. 30-33

Γ4.3: <u>Το θεώρημα Goedel</u>

Σκοπός μας δεν είναι να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο Goedel έφτασε στα περίφημα συμπεράσματά του, αλλά να δούμε τις επιπτώσεις τους στα μαθηματικά, τη λογική και τη φιλοσοφία. Ας θυμηθούμε, όμως, με τη μορφή επισκόπησης τα όσα προηγήθηκαν από τα θεωρήματα του Goedel καθώς και αυτά τα ίδια. Όπως είδαμε πρόθεση των μαθηματικών ήταν να συγκροτήσουνε ένα σώμα που είτε μέσω των συνόλων, είτε μέσω άλλων φορμαλισμών θα προσδίδανε στα μαθηματικά την ισχύ μιας απόλυτης αλήθειας, μιας αλήθειας μη επιδεχόμενης καμίας αμφισβήτησης. Προς στιγμή δημιουργήθηκε η αυταπάτη πως κάτι τέτοιο είναι δυνατό. Υπήρχαν, ωστόσο διάφορα ιστορικά σημάδια που αφήνανε ανοικτό το ζήτημα:
[α] το πρώτο σημάδι θα μπορούσαμε να πούμε ότι προέρχεται μέσα από τα βάθη των αιώνων της ιστορίας των μαθηματικών και ασφαλώς αναφερόμαστε στις εναγώνιες προσπάθειες των μαθηματικών να αποδειχτεί το 5ο αίτημα.
[β] Σε συνάρτηση με το παραπάνω σταθμό αποτέλεσαν οι δουλειές των Gauss, Bolyai, Riemann και Lobachevsky οι οποίοι απέδειξαν ότι δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί το 5ο αίτημα του Ευκλείδειο από τα υπόλοιπα ευκλείδεια αξιώματα. Επομένως, έχουμε μια απόδειξη για το αδύνατο μιας απόδειξης, κάτι εξαιρετικά σημαντικό για την προετοιμασία του θεωρήματος Goedel.
[γ] Η ίδια η επινόηση των μη ευκλείδειων γεωμετριών ήταν ένα ακόμα χτύπημα στην αιώνια βεβαιότητα που σχετιζόταν με το ακλόνητο οικοδόμημα των μαθηματικών.
[δ] Ο Hilbert ήταν αυτός που ανέλαβε να αποκαταστήσει τη χαμένη τιμή της βεβαιότητας με το πρόγραμμά του. Βασικό στοιχείο της φιλοσοφίας του ήταν η απαλλαγή των όρων από το οποιοδήποτε περιεχόμενο και αυτός είναι ο λόγος που θεωρείται ο κλασικότερος εκπρόσωπος του φορμαλισμού αν και υπάρχουν ισχυρές αντιρρήσεις για αυτό.[255] Ο

[255] . Ο Φινλανδός λογικολόγος Jakko Hintikka σε άρθρο του με τίτλο «Ο Hilbert δικαιώνεται;» και το οποίο έχει δημοσιευτεί στο περιοδικό Synthese το 1997 κι έχει μεταφραστεί από τον καθηγητή Μ. Μυτιληναίο αναπληρωτή καθηγητή στο τμήμα Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, υποστηρίζει ότι κακώς ο Hilbert έχει χαρακτηρισθεί ως φορμαλιστής. Από την εκτενή του επιχειρηματολογία, που κατά τη γνώμη μας έχει βάση θα αναφέρουμε ορισμένα από τα επιχειρήματα που δημιουργούν ρωγμές στην άποψη για το φορμαλισμό του Hilbert.

Το πιο σημαντικό «αντιφορμαλιστικής» φύσης επιχείρημα είναι, ίσως, η ίδια η τοποθέτηση του Hilbert. Σύμφωνα με αυτήν : « …τα αντικείμενα της θεωρίας αριθμών είναι-σε ακριβή αντίθεση με τους Frege και Dedekind- [αριθμο]σύμβολα καθ'εαυτά. Η μορφή τους μπορεί να αναγνωρισθεί παντού και με βεβαιότητα ανεξάρτητα από την τοποθεσία και το χρόνο, ανεξάρτητα από το πώς τα σύμβολα παράγονται και ανεξάρτητα από μικρές παραλλαγές στην εκτέλεση αυτής της παραγωγής. Αυτή είναι η φιλοσοφική στάση που θεωρώ απαραίτητη για τα θεμέλια των καθαρών μαθηματικών –καθώς επίσης για όλη την επιστημονική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία: εν αρχή-*τρόπος του λέγειν*- ήν το σύμβολο» (το απόσπασμα υπάρχει μέσα στο κείμενο του Hintikka). Το απόσπασμα αυτό πρέπει να διαβαστεί με προσοχή σε μια δεύτερη ή και τρίτη ανάγνωση, αφού οι ισορροπίες είναι λεπτές και άρα οι παρανοήσεις εύκολες. Ο Hilbert μοιάζει να κάνει μια καθαρά φορμαλιστική θεώρηση. Αλλά μόνο μοιάζει, ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι έτσι. Τα «σύμβολα καθ' εαυτά» και η αναγνώριση τους ανεξάρτητα από το χωρόχρονο υποδηλώνουν μια ρεαλιστική οπτική για τα μαθηματικά και υπό μια έννοια την υιοθέτηση συμβάσεων για την αντιμετώπιση της πραγματικότητας που βιώνουμε μέσω των μαθηματικών. Ο Hilbert είναι ιδιαίτερα προσεκτικός, αφού προς αποφυγή παρεξηγήσεων σπεύδει να δηλώσει ότι το «εν αρχή ην το σύμβολο» αποτελεί μια διαπίστωση που διατυπώνεται με ένα μεταφορικό τρόπο περισσότερο παρά με έναν κυριολεκτικό. Τελικά ο Hilbert ήταν με ένα ξεκάθαρο τρόπο ρεαλιστής. Θεωρούσε αυτονόητη την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων. Επομένως, το ζητούμενο ήταν η αμεσότητα και εποπτικότητα που έπρεπε να χαρακτηρίζει τις μαθηματικές οντότητες, ώστε η πρόσβαση σε αυτές να είναι άμεση και απροβλημάτιστη. Από αυτή και μόνο την άποψη το σύστημα του Hilbert δεν είναι σωστό να θεωρηθεί σαν ένα παιχνίδι αυτονομημένο με ένα απόλυτο τρόπο από την ίδια την πραγματικότητα. Η απόσπαση είναι φαινομενική και σχετική και μοιάζει να είναι απόλυτη λόγω του υψηλού επιπέδου αφαίρεσης και της δυσκολίας μας να διακρίνουμε τη σχέση σημαίνοντος και σημαινόμενου. Αλλά η οποιαδήποτε δυσκολία και η οποιαδήποτε δυσδιάκριτη σχέση δεν είναι σωστό να μας οδηγεί σε αυθαίρετες ερμηνείες.

φορμαλισμός των μαθηματικών είχε δυο πλευρές: από τη μια ενίσχυσε την αφαιρετική τους δύναμη και από την άλλη τα προσδιόριζε ως ένα λογικό παιχνίδι και μόνο τέτοιο: καθαρά μαθηματικά είναι εκείνο το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο δεν ξέρουμε για τι πράγμα μιλάνε ούτε αν αυτό που λέμε είναι αληθές, υποστήριζε ο Russel. Αυτή η πιο έντονη αυτονόμησή τους από την πράξη και η έντονη διείσδυση της λογικής οδήγησε σε ένα σημαντικότατο ερώτημα περί εσωτερικής συνέπειας ενός αξιωματικού συστήματος. Δηλαδή στο ερώτημα αν με βάση το σύνολο των αξιωμάτων ενός συστήματος αποκλείεται να προκύπτουν θεωρήματα που συγχρόνως να είναι αληθή και ψευδή. Ο Hilbert μπορεί να είχε προσφέρει σημαντική υπηρεσία στα μαθηματικά με το πρόγραμμά του, ωστόσο δεν κατάφερε να απαντήσει στο ζήτημα της συνέπειας.

[ε] Το επόμενο βήμα με το οποίο ανοίχθηκε ακόμα περισσότερο ο δρόμος για τον Goedel, ήταν το παράδοξο του Russel. Ο Russel κατασκεύασε μιαν αντίφαση μέσα στο πλαίσιο της ίδιας της στοιχειώδους λογικής. Αναφερόμαστε στην αντινομία περί κανονικών και μη κανονικών κλάσεων.[256] Πρόδρομος της αντινομίας του Russel μπορεί να θεωρηθεί το γνωστό παράδοξο του ψεύτη και το παράδοξο του Cantor. Μάλιστα το δεύτερο είναι εντελώς ανάλογο με αυτό του Russel.[257] Έτσι, από μια άποψη το κλίμα για το θεώρημα

Ο Hintikka κάνει σε αυτό το σημείο μια σημαντικότατη παρατήρηση που παράλληλα αποτελεί και την ένστασή του απέναντι στην επιχειρηματολογία που συνηγορεί υπέρ του φορμαλισμού του Hilbert. Ο Hilbert δεν επεδίωκε την πληρότητα (πλήρης τυποποίηση) των μαθηματικών αλλά της λογικής. Αυτό σημαίνει ότι κατά κάποιο τρόπο μπορούμε να αποδώσουμε το χαρακτηρισμό του φορμαλιστή στη λογική αλλά όχι στα μαθηματικά. Με αυτήν την έννοια θα μπορούσαμε κατά τη γνώμη μας να διακρίνουμε στοιχεία λογικισμού στην αντίληψη του Hilbert, χωρίς ωστόσο να ισχυρισθούμε ότι είναι λογικιστής. Και αυτό γιατί εφόσον ο Λογικισμός θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι κλάδος της λογικής, ότι η λογική είναι πρόγονος των μαθηματικών, ότι όλες οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να διατυπωθούν με τη βοήθεια λογικών εννοιών, ότι όλα τα μαθηματικά θεωρήματα πρέπει να διατυπωθούν ως θεωρήματα της λογικής, δηλαδή εν ολίγοις η λογική καθίσταται πρότερη των μαθηματικών με έναν οντολογικό τρόπο, το γεγονός ότι ο Hilbert προσπάθησε να τυποποιήσει πλήρως τη λογική για να νομιμοποιήσει τα μαθηματικά, νομίζουμε ότι του δίνει μια απόχρωση λογικιστή και έτσι κατά κάποιο έμμεσο τρόπο καταρρίπτεται το συγκεκριμένο επιχείρημα περί φορμαλισμού και δικαιώνεται η θέση του Hintikka. Να διευκρινίσουμε βέβαια ότι ο Hintikka δεν κάνει καμία αναφορά για λογικισμό του Hilbert. Πρόκειται για μια δική μας παρατήρηση που μιλάει για μια απόχρωση, και μόνο τέτοια, λογικισμού. Και μιλάμε για απόχρωση, εξαιτίας του ότι ο Hilbert δε χρησιμοποιεί τη λογική ως εκείνη τη βάση πάνω στην οποία στηρίζει όλο το «σύμπαν» του, αλλά μόνο ως ένα εργαλείο προκειμένου να οικοδομήσει τη θεμελίωσή του.

Όπως, μάλιστα, ο ίδιος ο Hilbert υποστήριζε με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο, που υπογραμμίζει έντονα τη συγκεκριμένη επιχειρηματολογία του Hintikka «η βασική ξεκαθαρισμένη μορφή μαθηματικής θεωρητικής σύλληψης είναι το καθαρά λογικό αξιωματικό σύστημα. Όλη η λογική συλλογιστική μπορεί να εκτελεστεί καθαρά τυπικά. Επομένως, σε μια ξεκαθαρισμένη μαθηματική θεωρία όλη η συλλογιστική μπορεί να εκτελεστεί καθαρά τυπικά, σα να περιελάμβανε απλά χειρισμό κάποιων συμβόλων». Νομίζουμε, λοιπόν, ότι από αυτό το απόσπασμα γίνεται φανερή η διάθεση του Hilbert. Κάθε λογικός συμπερασμός μπορεί να εκτελεστεί καθαρά τυπικά κι έτσι από το γεγονός αυτό η «κατηγορία» περί φορμαλισμού στα μαθηματικά δέχεται ένα ισχυρό πλήγμα.

[256] . Το παράδοξο του Russel διατυπώνεται ως εξής: 1) Μια κλάση ονομάζεται κανονική αν και μόνο αν δεν περιέχει τον εαυτό της ως μέλος. 2) Αν περιέχει τον εαυτό της (η κλάση) ονομάζεται μη κανονική. 3) Παράδειγμα κανονικής κλάσης είναι η κλάση όλων των μαθηματικών αφού η ίδια η κλάση δεν είναι μαθηματικός κι επομένως δεν περιέχεται στον εαυτό της. Παράδειγμα μη κανονικής κλάσης είναι η κλάση όλων των νοητών πραγμάτων που και η ίδια είναι νοητό πράγμα, επομένως περιέχεται στον εαυτό της. 4) θεωρούμε, τώρα, ως «Ν» την κλάση όλων των κανονικών κλάσεων. Τίθεται, λοιπόν, το ερώτημα: Η κλάση «Ν» είναι κανονική κλάση; 5) Ας δούμε τις απαντήσεις: αν θεωρήσουμε ότι αυτή η κλάση είναι κανονική, αυτό σημαίνει ότι δεν περιέχει τον εαυτό της. Πώς, όμως, αυτό είναι δυνατό αφού περιέχει εξ' ορισμού όλες τις κανονικές κλάσεις; Αν θεωρήσουμε από την άλλη, ότι δεν είναι κανονική κλάση αυτό σημαίνει ότι περιέχει τον εαυτό της, δηλαδή περιέχει μια μη κανονική κλάση. Όμως η Ν περιέχει μόνο τις κανονικές κλάσεις εξ' ορισμού και καταλήγουμε πάλι σε αντίφαση.6)Τελικά, η Ν είναι κανονική αν και μόνο αν είναι μη κανονική.

[257] . Το παράδοξο του Cantor αναφέρεται στην πληθικότητα του συνόλου όλων των συνόλων και διατυπώνεται ως εξής: 1) Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνόλων με Α. 2) Η πληθικότητα του συνόλου όλων των υποσυνόλων του Α, δηλαδή το δυναμοσύνολο Ρ(Α) έχει μεγαλύτερη πληθικότητα

Goedel τον άνοιξαν και τα παλιότερα παράδοξα, αφού παλιότερα και νεότερα υποδήλωναν ή δήλωναν κι ευθέως μια αδυναμία λειτουργίας της τυπικής απόδειξης σε κάποιες περιπτώσεις που είχαν εντοπιστεί.

Ας θυμηθούμε σε αυτό το σημείο τη διατύπωση των δυο θεωρημάτων του Goedel που έμελλε να θέσουν «νέα» πλαίσια σκέψης:

Πρώτο θεώρημα: *Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, υπάρχουν στο Φ μη αποδείξιμες προτάσεις. Δηλαδή, στο Φ υπάρχουν προτάσεις Π τέτοιες ώστε, ούτε η Π ούτε η άρνησή της να μπορούν να αποδειχτούν μέσα στο Φ.*

Δεύτερο θεώρημα: *Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, η συνέπεια του Φ δεν μπορεί να αποδειχτεί μέσα στο Φ.*

Ποιες οι επιπτώσεις αυτών των δυο θεωρημάτων; Σταχυολογούμε ορισμένες προσθέτοντας ορισμένα σχόλια για το πώς τις αντιμετωπίζει ο ΔΥ:

Το πρώτο θεώρημα μάς λέει ότι αν το σύστημα των φυσικών αριθμών είναι συνεπές (δηλαδή δεν προκύπτουν από αυτές αντιφατικές προτάσεις), τότε δεν είναι πλήρες.[258] Επομένως, εντός του συστήματος των φυσικών αριθμών θα υπάρχουν προτάσεις που δε θα είμαστε σε θέση να τα αποδείξουμε ή να τα απορρίψουμε (υπάρχουν τέτοιες προτάσεις όπως η γνωστή εικασία Goldbach ή το θεώρημα Fermat). Εν μέρει το πρόβλημα που θέτει το πρώτο θεώρημα Goedel θα λυνόταν αν μπορούσαμε να επινοήσουμε μια διαδικασία με την οποία θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε αν μια συγκεκριμένη πρόταση που αφορά στους φυσικούς αριθμούς μπορεί να αποδειχθεί ή όχι. Την προοπτική αυτή την διέλυσε, αυτή τη φορά ένας άλλος λογικολόγος, ο Church του οποίου το θεώρημα έλεγε:

Θεώρημα Church: *Για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών δεν υπάρχει αποτελεσματική μέθοδος που να αποφασίζει ποιες προτάσεις του Φ μπορούν να αποδειχτούν στο Φ.*

Το δεύτερο θεώρημα μας λέει ότι εκτός της αδυναμίας αποδείξεων κάποιων προτάσεων εντός του συστήματος των φυσικών, έχουμε αδυναμία να αποδείξουμε και την ίδια του συνέπειά του. Αυτό ήταν και το τελειωτικό χτύπημα στο πρόγραμμα του Hilbert.

Επομένως, τα δυο θεωρήματα του Goedel μας οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

[α] Η πλήρης αξιωματική θεμελίωση ορισμένων σημαντικών κλάδων των μαθηματικών δεν είναι δυνατή.

[β] Δεν υπάρχει καμία εγγύηση πώς σε αυτούς τους κλάδους των μαθηματικών δεν υπάρχουν εσωτερικές αντιφάσεις.

[γ] Οι αποδεικτικές διαδικασίες που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά διέπονται από ιστορικότητα, όπως άλλωστε και τα ίδια τα μαθηματικά. Οι αποδεικτικές διαδικασίες τροποποιούνται και η ίδια η έννοια της απόδειξης διευρύνεται.

[δ] Η τυπική λογική και όπως αυτή εκφράζεται εντός του σώματος των μαθηματικών έχει κάθε φορά όρια. Αυτό, όμως, δε σημαίνει τη σχετικοποίηση της γνώσης ή δεν επαναφέρει από την πίσω πόρτα την καντιανή άποψη περί μη γνωσιμότητας του πράγματος καθ' αυτού. Αναφερόμαστε στη τυπική λογική που εκφράζει νόμους για την ανθρώπινη γνώση με ένα περιορισμένο τρόπο. Τα όρια της τυπικής λογικής διαγράφονται και η υπέρβασή τους μπορεί να γίνει είτε με την επέκταση κάθε φορά του πεδίου αναφοράς μας είτε τελικά με τη διαλεκτική λογική. Είναι, λοιπόν ατελέσφερο να γενικεύουμε το θεώρημα Godel πιστεύοντας ότι έχει προεκτάσεις και πέραν των μαθηματικών με φιλοσοφικές προεκτάσεις. Θα συμφωνήσουμε πλήρως με τη διαπίστωση σύμφωνα με την οποία «η απόδειξη Goedel δε θα 'πρεπε να ερμηνευτεί σαν πρόσκληση στη απελπισία ούτε σα δικαιολογία για μυστικού τύπου συναλλαγές. Η ανακάλυψη ότι υπάρχουν μαθηματικές αλήθειες που δεν μπορούν να αποδειχτούν τυπικά δε σημαίνει ότι υπάρχουν αλήθειες που δεν μπορούν να γίνουν γνωστές ή ότι μια «μυστική» ενόραση (ριζικά διαφορετικού είδους και δικαιοδοσίας από αυτή που ισχύει γενικά στις διανοητικές προόδους) πρέπει να

από αυτή του Α. 3) όμως το Α ως σύνολο όλων των συνόλων πρέπει να έχει τη μέγιστη πληθικότητα. Άρα το Α έχει και δεν έχει ταυτόχρονα τη μέγιστη δυνατή πληθικότητα.

[258] . Ένα συνεπές σύνολο αξιωμάτων λέγεται πλήρες, αν είναι αδύνατο να προσθέσουμε στο σύνολο αυτό, χωρίς να αυξήσουμε το σύνολο των αρχικών όρων, άλλο ένα αξίωμα που να είναι και ανεξάρτητο και συνεπές με τα αξιώματα που ήδη υπάρχουν.

αντικαταστήσει την πειστική, ακαταμάχητη απόδειξη».[259] Θα προσθέταμε ακόμα ότι είναι τουλάχιστον αυθαίρετο να γενικεύει κανείς συμπεράσματα από την περιοχή των μαθηματικών και της λογικής σε όλο το σώμα της φιλοσοφίας. Βεβαίως για ένα νεοθετικιστή που κατανοεί διαφορετικά την έννοια της φιλοσοφίας σε σχέση με κάποιον που σκέφτεται υλιστικοδιαλεκτικά, αυτή η γενίκευση μπορεί να είναι νόμιμη. Υπάρχουν, όμως, κατηγορίες και συμπεράσματα που δεν μπορούμε να τα διαχειριστούμε τυπικολογικά, αλλά διαλεκτικά.

[ε] Τα παραπάνω, όμως, έχουν και μιαν ακόμα επίπτωση: η ανθρώπινη γνώση δεν μπορεί να μαθηματικοποιηθεί πλήρως. Η ανθρώπινη νόηση προσεγγίζεται από τυπικές μαθηματικές διαδικασίες αλλά δεν περιγράφεται πλήρως από αυτές. Έχει τη δική της δυναμική, τη δική της δομή πέρα από τυπικές διαδικασίες. Διέπεται από νόμους αλλά ταυτόχρονα είναι και απρόβλεπτη τόσο η ατομική όσο και η συλλογική συνείδηση. Σε συνέχεια της προηγούμενης παραπομπής παραθέτουμε το επόμενο απόσπασμα το οποίο επίσης μας βρίσκει σύμφωνους: «Δε σημαίνει, όπως ισχυρίσθηκε πρόσφατα ένας συγγραφέας (σ.σ. αναφερόμενος στο θεώρημα Goedel), ότι υπάρχουν «αξεπέραστα όρια στο ανθρώπινο λογικό». Σημαίνει όμως ότι οι πηγές του ανθρώπινου νου δεν έχουν τυποποιηθεί πλήρως και δεν μπορούν να τυποποιηθούν και ότι νέες αποδεικτικές αρχές μένουν πάντα να ανακαλυφθούν και να επινοηθούν».[260]

[στ] Στην πορεία διαμόρφωσης των θεωρημάτων Goedel μπορεί να εξαχθεί και μια γνωσιολογική παρατήρηση: τα θεωρήματα αυτά δεν ήταν κεραυνός εν αιθρία. Ήταν η ιστορική συνέχεια κοιλοπονημάτων –τα οποία περιγράψαμε σύντομα λίγο παραπάνω- και που αποτέλεσαν τα προεόρτια της γέννησής τους. Επομένως, αναδεικνύεται και μέσω αυτών των θεωρημάτων η ιστορικότητα της γνώσης τόσο της μαθηματικής όσο και της γνώσης γενικά. Σε μια συνεχή πορεία, παρατηρείται μια φάση ασυνέχειας. Στη φάση αυτή αρνούμαστε διαλεκτικά την πρότερη γνωσιακή κατάσταση και η νέα εμπεριέχει την παλιά (άρνηση της άρνησης). Ακόμα ποσοτικές συσσωρεύσεις οδηγούν σε ένα άλμα, δηλαδή μια νέα ποιοτική κατάσταση. Μια τέτοια προσέγγιση δε συμφωνεί με την κουνιανή άποψη σύμφωνα με την οποία «ένα παράδειγμα δεν είναι πιο αληθινό από ένα άλλο που το διαδέχεται». Το αντίθετο θα λέγαμε: κάθε νέο επιστημονικό επίτευγμα προσεγγίζει πληρέστερα την αλήθεια.

Γ.5: <u>Λογική, μαθηματικά και αλήθεια: η περίπτωση της ευκλείδειας και των μη ευκλείδειων γεωμετριών</u>

Η σχέση αλήθειας, λογικής και μαθηματικών διαφαίνεται με τον καλύτερο τρόπο, ίσως, μέσα από την εξέλιξη της γεωμετρίας. Άλλωστε να μην ξεχνάμε ότι η γεωμετρία ήταν ο κλάδος των μαθηματικών που πρώτος αξιωματικοποιήθηκε, αφού είναι γνωστό ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν αξιωματικοποιήσει την αριθμητική (η αριθμοθεωρία του Ευκλείδη δεν έχει αξιώματα). Από τη άλλη αναφύονται σοβαρά γνωσιολογικά και οντολογικά ερωτήματα από τη στιγμή που υπάρχουν διαφόρων ειδών γεωμετρίες με αντιφατικά μεταξύ τους αξιώματα κι όμως «λειτουργούν» και οι «μεν» και οι «δε».

Το 5ο αίτημα του Ευκλείδη ήταν εκείνο το αίτημα που αποτέλεσε την πέτρα του σκανδάλου για δυο χιλιάδες περίπου χρόνια, παρά το γεγονός ότι το ευκλείδειο οικοδόμημα αποτελούσε σταθερό σημείο αναφοράς μαθηματικής κι εν γένει γνωσιακής βεβαιότητας. Τι ήταν, όμως, αυτό που έκανε ξεχωριστό αυτό το αίτημα; Ο λόγος ήταν η διείσδυση του μεγάλου φιλοσοφικού προβλήματος της απειρίας. Η ισχύς του 5ου αιτήματος προϋπέθετε την ύπαρξη ενός κόσμου ο οποίος δεν είναι πεπερασμένος κι επομένως την άπειρη προέκταση δυο ευθειών που ποτέ δε θα τμηθούν. Αν, όμως, προϋπέθετε όλα τα παραπάνω με ποιο τρόπο θα μπορούσε να γίνει μια εμπειρική επιβεβαίωση αυτής της διακρίβωσης; Προφανώς γίνεται αντιληπτό ότι εμπειρικά δεν μπορεί να επαληθευτεί κάτι τέτοιο. Βεβαίως το ζήτημα της απειρίας υπεισέρχεται και στο 2ο αίτημα σύμφωνα με το οποίο το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς κι ευθυγράμμως. Ωστόσο, εδώ έχουμε να διαπιστώσουμε κάτι διαφορετικό: αν πράγματι

[259] .E. Nagel-J.R. Newman, Το θεώρημα του Godel, σελ. 95, εκδ. Τροχαλία
[260] . Ο.π., σελ.96

υπάρχει χώρος άπειρος, δηλαδή το ίδιο το ζήτημα της απειρίας, ενώ το 5ο αίτημα θέτει ένα διπλό και πιο δύσκολο πρόβλημα: και το ζήτημα της απειρίας και το ζήτημα μιας συγκεκριμένης ιδιότητας αυτού του χώρου δηλαδή της ύπαρξης δυο ευθειών που ποτέ δε θα συναντηθούν ή αλλιώς δυο ευθειών που θα τμηθούν εφόσον το άθροισμα των εντός κι επί τα αυτά γωνιών έχουν άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές. Ενδεικτικό του προβληματισμού που είχε ο ίδιος ο Ευκλείδης για αυτό το αίτημα είναι πως η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται στα Στοιχεία είναι μόλις στην 29η πρόταση. Η ιδιαιτερότητα του 5ου αιτήματος ήταν αυτή, λοιπόν, που ταλαιπώρησε για δυο χιλιάδες και πλέον χρόνια τη μαθηματική κοινότητα. Η διαδρομή μέσα από την οποία φτάσαμε στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι συναρπαστική και μας προσφέρει άφθονο υλικό για πλήθος συμπερασμάτων. Ο Πρόκλος, ο Πέρσης Nasir ed Din et Tusi, ο Άγγλος Wallis, ο Ιταλός Saccheri, ο Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός Lampert, ο Γάλλος Legendre κ.α. προσπάθησαν να αποδείξουν ότι το 5ο αίτημα προκύπτει από τα τέσσερα προηγούμενα. Οι προσπάθειες ήταν μάταιες, αφού όταν νόμιζαν ότι αποδείκνυαν το 5ο αίτημα από τα υπόλοιπα, στην απόδειξη χρησιμοποιούσαν ισοδύναμες εκφράσεις του 5ου χωρίς να το συνειδητοποιούν. Οι προσπάθειες κατέληγαν, λοιπόν, σε αδιέξοδο. Αυτοί που μπόρεσαν να διεισδύσουν βαθύτερα στο πρόβλημα και να ανοίξουν περισσότερο την πόρτα της εισόδου στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες ήταν οι Saccheri και ο Lambert. Ο πρώτος, για παράδειγμα, είχε μια καλή έμπνευση: επιχείρησε να αποδείξει το 5ο αίτημα χρησιμοποιώντας την εις άτοπο απαγωγή. Υπέθεσε ότι από σημείο εκτός ευθείας είτε (α) υπάρχει ακριβώς μια παράλληλη προς τη δοσμένη ευθεία, είτε (β) δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς τη δοσμένη ευθεία, είτε (γ) υπάρχουν τουλάχιστο δυο παράλληλες προς τη δοσμένη ευθεία. Η πρώτη περίπτωση είναι ασφαλώς η ευκλείδεια εκδοχή. Αντικαθιστώντας ο Saccheri την ευκλείδεια εκδοχή με τη δεύτερη μπορεί να έφτασε σε θεωρήματα αντιφατικά μεταξύ τους, ωστόσο, δεν μπόρεσε να βρει αντίφαση μεταξύ του εναλλακτικού του αξιώματος και των εννέα αξιωμάτων του Ευκλείδη. Τα συμπεράσματά του δεν ήταν έτοιμος να τα δεχτεί. Δεν μπορούσε να καταλάβει πώς είναι δυνατό μια αντίφαση σε διαισθητικές ιδέες να μη δηλώνει λογική αντίφαση. Δεν κατανοούσε ότι μπορούσε να λειτουργήσει κι άλλη γεωμετρία εκτός της ευκλείδειας. Αυτός που άνοιξε με ένα ουσιαστικό τρόπο το δρόμο για τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες ήταν ο μεγαλοφυής Gauss. Ο Gauss χρησιμοποιώντας την τρίτη εκδοχή του Saccheri κατέληξε κι αυτός με τη σειρά του σε «παράξενα» συμπεράσματα, όμως έκανε το αποφασιστικό βήμα που ο Ιταλός δεν είχε κάνει: συμπέρανε πως μπορούν να υπάρξουν κι άλλες έγκυρες γεωμετρίες εκτός από αυτή του Ευκλείδη, παρά το γεγονός ότι απέκρυψε τα συμπεράσματά του. Είναι, μάλιστα, χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον οποίο αντιμετώπισε τις απόψεις του Kant που αποτελούσαν ένα φιλοσοφικό φραγμό για τη δημιουργία μη ευκλείδειων γεωμετρικών: «Βλέπετε το ίδιο πράγμα [μαθηματική ανικανότητα] στους σύγχρονους φιλοσόφους Schelling, Hegel, Nees von Essenbeck και στους οπαδούς τους· δεν κάνουν τις τρίχες σας να σηκώνονται όρθιες με τους ορισμούς τους; Διαβάστε στην ιστορία της αρχαίας φιλοσοφίας τι είδους εξηγήσεις έδωσαν οι μεγάλοι άνδρες εκείνης της εποχής-ο Πλάτωνας και άλλοι (εξαιρώ τον Αριστοτέλη). Όμως, ακόμα και με τον Kant τον ίδιο, συχνά τα πράγματα δεν είναι πολύ καλύτερα. Κατά την άποψή μου, η διάκριση που κάνει ανάμεσα σε αναλυτικές και συνθετικές προτάσεις είναι από εκείνα τα πράγματα που είτε καταντούν τετριμμένα είτε είναι λάθος».[261]

Αυτός που άνοιξε με τον πιο αποφασιστικό τρόπο το δρόμο για τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες ήταν αναμφίβολα ο Lobacevskii. Στο έργο του «Νέα Στοιχεία Γεωμετρίας» (1835) έκανε την εξής καταπληκτική διαπίστωση: «Είναι καλά γνωστό ότι στη γεωμετρία η θεωρία των παραλλήλων έχει μείνει ως τώρα ατελής. Οι μάταιες προσπάθειες από την εποχή του Ευκλείδη με ανάγκασαν να υποπτευθώ ότι αυτές οι ίδιες οι έννοιες δεν περιέχουν την αλήθεια που θέλουμε να αποδείξουμε, αλλά ότι αυτή μπορεί να επαληθευτεί όπως άλλοι φυσικοί νόμοι με πειράματα, όπως π.χ. αστρονομικές παρατηρήσεις. Αφού πείστηκα

[261] . Αναφέρεται στο E.T.Bell, Οι μαθηματικοί, σελ.386, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

τελικά για την αλήθεια της υπόθεσής μου και θεωρώντας αυτό το δύσκολο πρόβλημα τελειωτικά λυμένο παρουσίασα τα επιχειρήματά μου στα 1826».[262]

Χαρακτηρίσαμε τη δήλωση του Lobacevskii ως καταπληκτική για τους εξής λόγους: α) δεν απορρίπτει την αλήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας αφού όπως γράφει ο ίδιος **οι έννοιες δεν περιέχουν την αλήθεια που θέλουμε να αποδείξουμε** κάτι που σημαίνει θα συμπληρώναμε εμείς, δε σημαίνει ότι δεν περιέχουν καμία αλήθεια, β) τελικό κριτήριο της αλήθειας είναι η πράξη και μάλιστα στη συγκεκριμένη περίπτωση η πειραματική επαλήθευση θα έπρεπε να γίνει σε επίπεδο μεγάκοσμου (επομένως ο Lobacevskii αναζητά την αντιστοιχία αφηρημένων αληθειών με την αντικειμενική πραγματικότητα). Μετά από αυτή τη διαπίστωσή του κατέληξε σε ακόμα δυο μεγάλης σπουδαιότητας: α) το πέμπτο αίτημα δεν είναι αποδείξιμο και β) είναι δυνατό να αναπτύξουμε στη βάση ενός αντίθετου αξιώματος από το 5ο (δηλαδή από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε τουλάχιστο δυο παράλληλες ευθείες προς τη δοσμένη ευθεία) μια άλλη γεωμετρία που παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματά της είναι σε ασυμφωνία με τη διαισθητική εικόνα που έχουμε για το χώρο είναι «λογικά στηριγμένη». Έτσι, το επόμενο συμπέρασμα προέκυπτε σχεδόν αβίαστα: « Περισσότερες από μια γεωμετρία είναι λογικά δυνατές».

Η ανακάλυψη ότι μπορεί να υπάρξει και άλλη γεωμετρία εκτός από αυτήν της ευκλείδειας, στηριγμένη σε ένα αίτημα που κάνει μιαν υπόθεση αντίθετη από την υπόθεση του 5ου ευκλείδειου, τι επιπτώσεις μπορεί να έχει; Ας δούμε ένα παράδειγμα: στη γεωμετρία του Lobacevskii το μήκος ενός κύκλου l, δίνεται από τον τύπο $l=\pi\cdot\kappa\cdot(e^{r/k}- e^{-r/k})$,όπου κ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη μονάδα μήκους. Επειδή, όμως, $e^{r/k} =1+r/k+1/2 (r/k)^{1/2}+\ldots$, και $e^{-r/k} =1-r/k+1/2 (r/k)^{1/2}-\ldots$, προκύπτει ότι $l=2\pi r(1+1/6\cdot r^2/k^2+\ldots)$. Αν οι λόγοι r/k είναι πολύ μικροί, τότε το μήκος l προσεγγίζει με αρκετή ακρίβεια τον τύπο $l=2\pi r$. Με βάση αυτό το παράδειγμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ευκλείδεια γεωμετρία με τη γεωμετρία του Lobacevskii συνδέονται μεταξύ τους και με μια πιο μαθηματική έκφραση **η πρώτη αποτελεί οριακή περίπτωση της δεύτερης**. Στην πράξη αυτό μεταφράζεται ότι η ευκλείδεια περιγράφει με ικανοποιητικό τρόπο τις μικρές περιοχές ενώ για τη μελέτη του μεγάκοσμου αναλαμβάνει η γεωμετρία του Lobacevskii. Επομένως «εάν προσθέσουμε στη γεωμετρία του Lobacevskii αυτή την οριακή περίπτωση, τότε περιέχει και τη γεωμετρία του Ευκλείδη και κατά αυτή την έννοια αποτελεί μια γενικότερη θεωρία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν του αυτή την κατάσταση ο Lobacevskii ονόμασε τη θεωρία του «πανγεωμετρία». Μια τέτοια σχέση μεταξύ θεωρικών διαρκώς εμφανίζεται κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών: Μια νέα θεωρία περιέχει την παλιά σαν οριακή περίπτωση, σε συμφωνία με την πρόοδο της γνώσης μας από πιο ειδικά σε πιο γενικά συμπεράσματα».[263]

Ωστόσο, θα μπορούσε κάποιος να αντιτείνει πως το γεγονός ότι η ευκλείδεια γεωμετρία αποτελεί την οριακή περίπτωση της λομπατσέφσκειας δε σημαίνει και μια οντολογική δικαίωση της δεύτερης. Δε σημαίνει με άλλα λόγια την αντιστοιχία της αφηρημένης ιδέας με την αντικειμενική πραγματικότητα. Ο ίδιος ο Lobacevskii δε σκιαγράφησε αυτή την αντιστοιχία με ακρίβεια. Τη σκυτάλη ανέλαβε ο Beltrami το 1868 που διαπίστωσε ότι η συμφυής γεωμετρία (δηλαδή η συλλογή των ιδιοτήτων των σχημάτων πάνω στην επιφάνεια που μπορούν να προσδιοριστούν με τη μέτρηση μηκών μόνο πάνω στην επιφάνεια) της ψευδόσφαιρας συνέπιπτε με τη γεωμετρία σε ένα τμήμα του επιπέδου του Lobacevskii. Η νέα γεωμετρία, λοιπόν, είχε μια πραγματική ερμηνεία: αποτελούσε (κι αποτελεί) μια αφηρημένη θεώρηση της γεωμετρίας πάνω στην ψευδόσφαιρα. Η ανακάλυψη του Beltrami ήταν κρίσιμη: η προηγουμένως «φαντασιακή» γεωμετρία, χαρακτηρισμό που είχε χρησιμοποιήσει ο Lobacevskii μην μπορώντας να βρει μια πραγματική ερμηνεία, έγινε πλέον «πραγματική». Το πρόβλημα, όμως, δεν είχε λυθεί ολοκληρωτικά αφού η ερμηνεία του Beltrami ήταν περιορισμένης έκτασης. Αφορούσε μόνο ένα ιδιαίτερο σχήμα, αυτό της ψευδόσφαιρας. Μπορούσε, λοιπόν, η λομπατσέφσκεια γεωμετρία να βρει μιαν ερμηνεία που αφορούσε ευρύτερους χώρους; Αυτός που έμελλε τώρα να πάρει τη σκυτάλη ήταν ο Klein. Την ευρύτερη ερμηνεία την

---

[262]. Αναφέρεται σε άρθρο του A. D. Alexandrov με τίτλο «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», που δημοσιεύθηκε στη «Μαθηματική Επιθεώρηση», σελ.8, τ. 3.

[263]. A.D.Alexandrov, «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ. 28-29, τ.3

πέτυχε με το γνωστό του μοντέλο στο οποίο θεωρούμε ένα κύκλο του οποίου το εσωτερικό ονομάζουμε επίπεδο, τις χορδές του τις καλούμε ευθείες αφού αγνοήσουμε τα άκρα τους και θεωρούμε ότι μια κίνηση είναι ένας μετασχηματισμός του κύκλου που τον μετασχηματίζει στον εαυτό του και μετασχηματίζει τις γραμμές σε γραμμές δηλαδή δεν παραμορφώνει τις χορδές. Με αυτό το μοντέλο τα αποτελέσματα της ευκλείδειας μέσα στον κύκλο μετατρέπονται σε θεωρήματα της λομπατσέφσκειας. Και αντίστροφα: κάθε θεώρημα της λομπατσέφσκειας μεταφέρεται σε ένα συμπέρασμα της ευκλείδειας μέσα στον κύκλο. Έτσι «όταν δόθηκε αυτό το μοντέλο της γεωμετρίας Lobacevskii, απεδείχθη παρεμπιπτόντως ότι η γεωμετρία του είχε μια απλή πραγματική έννοια. Η γεωμετρία του Lobacevskii είναι έγκυρη μια και μπορεί να γίνει κατανοητή ακόμα και σαν ειδική ερμηνεία της γεωμετρίας μέσα στον κύκλο και τη σφαίρα. Συγχρόνως αποδείχτηκε και ο όχι αντιφατικός της χαρακτήρας. Τα αποτελέσματά της δεν μπορεί να οδηγήσουν σε αντίφαση μια και το καθένα από αυτά μπορεί να μεταφραστεί στη γλώσσα της συνήθους ευκλείδειας γεωμετρίας μέσα στον κύκλο (ή τη σφαίρα αν θεωρήσουμε τη γεωμετρία του Lobacevskii στο χώρο)».[264]

Η οντολογική δικαίωση της λομπατσέφσκειας είχε μιαν ακόμα εντυπωσιακότερη συνέχεια: χρησιμοποιήθηκε για να στηρίξει τη θεωρία της σχετικότητας, θεωρία που δεν αποτελεί ένα ελεύθερο παιχνίδισμα του νου. Η λομπατσέφσκεια γεωμετρία δεν ήταν όπως η ζωή έδειξε η τελική γεωμετρία, αφού ο Riemann μας έδωσε μια καινούρια: η ιδέα που πρωτοδιατυπώθηκε από το Lobacevskii και σύμφωνα με την οποία σε μεγάλες κλίμακες η ευκλείδεια δίνει τη θέση της σε άλλη γεωμετρία, τώρα γενικεύεται από το Riemann. Η ιδέα του Lobacevskii μπορεί να εφαρμόζεται σε μια τυχαία γεωμετρία. Έτσι η λομπατσέφσκεια γίνεται μια περίπτωση της ρειμάνιας γεωμετρίας. Τρεις ήταν οι ιδέες που οδήγησαν στη νέα αυτή θεώρηση: α) η πίστη στην ιδέα για την ύπαρξη μιας δυνατής γεωμετρίας διαφορετικής από την ευκλείδεια, β) η έννοια της εσωτερικής γεωμετρίας μιας καμπύλης και γ) η έννοια του χώρου με τυχαίο αριθμό διαστάσεων. Η καμπυλότητα ενός ρειμάνειου χώρου αποτελεί το μέτρο της μη- Ευκλειδιότητάς του και ορίζεται εσωτερικά όπως το μέτρο της απόκλισης της μετρικής του από τη μετρική του ευκλείδειου χώρου. Ο ευκλείδειος χώρος αποδεικνύεται ότι είναι ομογενής χωρίς καμπυλότητα δηλαδή ένας χώρος μηδενικής καμπυλότητας. Ομογενής είναι και ο λομπατσέφσειος χώρος. Έτσι και οι δυο γεωμετρίες γίνονται ειδικές περιπτώσεις της νέας ρειμάνειας γεωμετρίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η νέα γεωμετρία ούτε κι αυτή έμεινε στα χαρτιά ως ένα κομψό κι εντυπωσιακό παιχνίδι της λογικής. Ο ίδιος ο Riemann την εφάρμοσε στη λύση ενός προβλήματος θερμικής αγωγιμότητας. Ακόμα, εφαρμόσθηκε στο χώρο των χρωματισμών, στον οποίο η απόσταση ανάμεσα στους γειτονικούς χρωματισμούς μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ρειμάνειας μετρικής, ενώ εφαρμογή βρήκε (η ρειμάνεια γεωμετρία) και στη μηχανική και ασφαλώς στη θεωρία της σχετικότητας. Θα πρέπει βέβαια να αναφέρουμε ότι στη συνέχεια αναπτύχθηκε κι άλλη γεωμετρία (γεωμετρία του Finsler) η οποία περιλαμβάνει τη ρειμάνεια ως ειδική περίπτωση δείχνοντας το ατέρμονο της ανθρώπινης γνώσης και τη σχέση απόλυτης και σχετικής αλήθειας. Το κρίσιμο ερώτημα, λοιπόν, είναι τούτο: ποια η σχέση αφηρημένης γεωμετρίας με τον πραγματικό χώρο; Κατά το Σοβιετικό Alexandrov υπάρχει κατ' αρχάς η δυσκολία της ενόρασης του πραγματικού μας χώρου ως μη Ευκλείδειου. (Αυτό εξηγεί κατά τη γνώμη μας και το λόγο για τον οποίο η ευκλείδεια γεωμετρία ήταν η πρώτη που εμφανίσθηκε. Δε θα μπορούσε να ήταν κάποια άλλη γεωμετρία αφού στον προσιτό μας χώρο η ευκλείδεια γεωμετρία είναι η πιο κατάλληλη να τον περιγράψει και είναι η πιο κατάλληλη να τον περιγράψει αφού αυτός ο προσιτός χώρος προσομοιάζει στο θεωρητικό μοντέλο της ευκλείδειας το οποίο χρησιμοποιούμε. Το μοντέλο πηγάζει από αυτό τον προσιτό μας χώρο). Σε αυτή τη δυσκολία έπαιξε σημαντικό ρόλο η έννοια του πειράματος: « Ξέρουμε ότι η γεωμετρία έχει αναπτυχθεί από το πείραμα από την πειραματική έρευνα των μορφών του χώρου και των σχέσεων των σωμάτων: από τη μέτρηση εκτάσεων γης, όγκων δοχείων κ.λπ. Έτσι, στη γέννησή της είναι μια φυσική θεωρία, μπορούμε να πούμε, μηχανική. Τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας ήταν συμπεράσματα τα οποία βασίστηκαν για τη διατύπωσή τους σε σειρά πειραμάτων· εκφράζουν νόμους της φύσης και μπορεί να ονομαστούν νόμοι της γεωμετρίας, όπως

[264] . A.D.Alexandrov, «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ.41, τ.3

ακριβώς οι βασικοί νόμοι της μηχανικής καλούνται συχνά αξιώματα της μηχανικής. Αλλά είναι λάθος να συμπεράνουμε ότι αυτοί οι νόμοι είναι απόλυτα ακριβείς και ότι δεν απαιτούν τροποποιήσεις ή γενικεύσεις σε σχέση με τα νέα πειραματικά δεδομένα· οι πραγματικές ιδιότητες του χώρου μπορεί να διαφέρουν λιγότερο ή περισσότερο από αυτά που δηλώνει η Ευκλείδεια γεωμετρία [...] πριν από το Lobacevskii και τον Gauss δεν είχε περάσει από κανενός τον μυαλό ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία μπορούσε να αποδειχτεί όχι τελείως ακριβής και ότι οι πραγματικές ιδιότητες του χώρου θα ήταν κάπως διαφορετικές. Ο Lobacevskii ανέπτυξε τη γεωμετρία του σα μια θεωρία πιθανών ιδιοτήτων του πραγματικού χώρου. Κατόπιν ο Riemann και μερικοί άλλοι επιστήμονες ασχολήθηκαν επίσης με το πρόβλημα των πιθανών ιδιοτήτων του χώρου, πιθανών νόμων μέτρησης των μηκών, που θα μπορούσαν να ανακαλυφθούν με ακριβέστερες μετρήσεις. Τελείως γενικά ακόμα και η αφηρημένη γεωμετρία σε μερικά τμήματά της μπορεί να ειδωθεί σα μια θεωρία των δυνατών ιδιοτήτων του χώρου. Όλα αυτά, όμως, έμειναν στο χώρο των υποθέσεων μέχρις στα 1915 οπότε ο Einstein στη γενική του θεωρία της σχετικότητας ενίσχυσε τις ιδέες του Lobacevskii και του Riemann. Αυτή η θεωρία ισχυρίζεται ότι η γεωμετρία του πραγματικού χώρου διαφέρει κάπως από την Ευκλείδεια γεωμετρία και αυτό ανακαλύφθηκε σε αστρονομική κλίμακα, όπως είχε προβλέψει ο Lobacevskii».[265]

Κατά τον Alexandrov οι δυσκολίες που προκύπτουν από τη σχέση των αφηρημένων γεωμετριών και της πραγματικότητας είναι τρεις: α) η πρώτη έγκειται στο να δούμε με ποιο τρόπο και με ποια έννοια διαφέρουν οι ιδιότητες του πραγματικού χώρου από τις θέσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας, β) η δεύτερη σχετίζεται στην ίδια τη διατύπωση «ιδιότητες του πραγματικού χώρου». Όταν αναφερόμαστε στο χώρο έχουμε στο μυαλό μας ένα χώρο κενό και ομογενή. Αν, όμως, ο χώρος που φανταζόμαστε είναι κενός τότε πώς μπορεί να έχει ιδιότητες;, γ) η τρίτη και τελευταία δυσκολία έχει να κάνει με την αλήθεια εκείνης ή τη άλλης γεωμετρίας. Ποια γεωμετρία αντιστοιχεί στην αλήθεια; Αυτή που είναι αληθινή, είναι η αυτονόητη απάντηση. Όμως, τα ίδια τα γεωμετρικά γεγονότα μπορούν να παρασταθούν ως θεωρήματα δυο γεωμετριών π.χ. της ευκλείδειας και της λομπατσέφσκειας. Εδώ και το ερώτημα: γιατί υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι στην πραγματικότητα η Ευκλείδεια ισχύει στον κύκλο και ότι η λομπατσέφσκεια μέσα στον κύκλο μόνο απεικονίζεται ή ερμηνεύεται; Ο Alexandrov επιχειρεί να απαντήσει στα τρία αυτά ερωτήματα ξεκινώντας από το δεύτερο. Ας δούμε με ποιο τρόπο διατυπώνει την άποψή του.

Στο δεύτερο ερώτημα (ξεκινάει με αυτό γιατί η απάντησή του προετοιμάζει την απάντηση και των δυο άλλων ερωτημάτων) είναι κατηγορηματικός: δεν μπορούμε να μιλάμε για κενό χώρο για τον απλό λόγο ότι δεν υπάρχει τέτοιος. Το πρόβλημα είναι πια φιλοσοφικό και ο Alexandrov επικαλείται την κλασική θέση του ΔΥ: ο χώρος είναι μορφή ύπαρξης της ύλης (όπως και ο χρόνος).[266] Όπως διδάσκει ο Engels στο Αντί-Ντύρινγκ

---

[265] . A.D.Alexandrov, «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ.138-139, τ.3

[266] . Ο Λένιν άσκησε δριμεία κριτική στις απόψεις των εμπειριοκριτικιστών για το χώρο και το χρόνο στο γνωστό του έργο «Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός». Αναφερόμενος στις απόψεις του Μαχ περί χώρου και χρόνου απορρίπτει την άποψή του ότι αυτά τα δυο είναι καλοδιατεταγμένα συστήματα σειρών αισθημάτων. Χαρακτηρίζει μια τέτοια άποψη ως φανερό ιδεαλιστικό παραλογισμό που απορρέει αναπόφευκτα από τη άποψη ότι τα σώματα είναι συμπλέγματα αισθημάτων. Ακόμα γράφει: «Στη «Μηχανική» του ο Μαχ υπερασπίζεται τους Μαθηματικούς που ερευνούν το πρόβλημα των νοητών χώρων με n διαστάσεις, τους υπερασπίζεται από την κατηγορία ότι είναι τάχα υπαίτιοι για τα «τερατώδη» συμπεράσματα που συνάγονται από τις έρευνές τους. υπεράσπιση αναμφισβήτητα πολύ δίκαιη, προσέξτε όμως, τι γνωσιολογική θέση παίρνει ο Μαχ σε αυτή την υπεράσπισή τους. τα νεότερα μαθηματικά, -λέει ενός χώρου με n διαστάσεις σα νοητού χώρου· ωστόσο«πραγματική περίπτωση» παραμένει μόνον ο τρισδιάστατος χώρος. Για αυτό «πολλοί θεολόγοι που βρίσκονται σε αμηχανία πού να τοποθετήσουν την κόλαση», καθώς και οι πνευματιστές, μάταια επιχείρησαν να επωφεληθούν από την τέταρτη διάσταση.

Πολύ καλά. Ο Μαχ δε θέλει να κάμνει παρέα με τους θεολόγους και τους πνευματιστές, με ποιον τρόπο, όμως, διαχωρίζει τη θέση του από αυτούς στη γνωσιοθεωρία του; Με το να διαπιστώνει ότι μόνο ο τρισδιάστατος χώρος είναι ο πραγματικός! Τι είδους άμυνα είναι όμως αυτή από τους θεολόγους και Σία, όταν δεν παραδέχεστε ότι ο χώρος και ο χρόνος αποτελούν αντικειμενική πραγματικότητα; Με άλλα λόγια, όταν έχετε ανάγκη να προφυλαχθείτε από τους πνευματιστές, χρησιμοποιείται τη μέθοδο του σιωπηλού δανεισμού από τους υλιστές. Γιατί οι υλιστές,

χώρος και χρόνος είναι οι βασικές μορφές του Είναι, το οποίο έξω από το χώρο και το χρόνο είναι μεγάλος παραλογισμός. Επιπλέον: «η ιδέα του χώρου "μόνου του" ενός χώρου χωρίς ύλη, είναι μια αφαίρεση που δεν πρέπει να κακομεταχειριζόμαστε».[267] Επομένως, ο Alexandrov δεν απορρίπτει την αφαίρεση ενός κενού χώρου για τις μαθηματικές ανάγκες αλλά εφιστά την προσοχή μας στον τρόπο που χειριζόμαστε αυτή την αφαίρεση. Και παρακάτω: «οι πραγματικές χωρικές σχέσεις και τύποι: "εδώ", "μεταξύ", "μέσα", "ευθεία", "σφαίρα", κ.λπ είναι πάντοτε σχέσεις και μορφές υλικών σωμάτων […] Σε ένα απόλυτα άδειο χώρο, κενό από κάθε ίχνος ύλης, τίποτα δε θα διέκρινε σε ένα μέρος μια κατεύθυνση και συνεπώς δεν υπάρχουν μέρη, κατευθύνσεις κι έτσι ένας απόλυτα κενός χώρος καταλήγει να μην είναι τίποτα. Ακόμα και στην αφηρημένη έννοια ενός κενού χώρου υπονοούμε σιωπηρά, ότι τα διάφορα μέρη, κατευθύνσεις είναι διακεκριμένα μέσα στο χώρο. Με άλλα λόγια στην αφηρημένη ιδέα του χώρου διατηρούμε την ιδιότητα της διακρισιμότητας των μερών, κατευθύνσεων, αποστάσεων που υπάρχουν στον πραγματικό χώρο, ακριβώς γιατί αυτός ο χώρος είναι αξεχώριστα δεμένος με υλικά σώματα».[268] Επομένως, αφού ο χώρος είναι μορφή ύπαρξης της ύλης οι ιδιότητες του χώρου είναι και ιδιότητες της ύλης. Κατά δεύτερο, αν τα θεωρήματα της γεωμετρίας πρόκειται να έχουν ένα φυσικό νόημα, είναι κρίσιμης σημασίας ο τρόπος με τον οποίο ορίζουμε τις έννοιες που μεταχειριζόμαστε: τι ακριβώς σημαίνει ευθεία γραμμή, απόσταση κ.λπ. Εφόσον η αφηρημένη γεωμετρία εκφράζει πραγματικές σχέσεις του χώρου θα πρέπει οι οριζόμενες έννοιες να εκφράζουν αυτές τις ιδιότητες με ακρίβεια: «εδώ βρίσκεται η λύση στη δεύτερη δυσκολία που αναφέραμε προηγουμένως. Αυτή η δυσκολία συμβαίνει γιατί αντί του πραγματικού χώρου, ο οποίος είναι αξεχώριστα δεμένος με την ύλη, μερικού θέλουν να συλλογίζονται πάνω σε ένα "καθαρό" χώρο, που όμως δεν είναι τίποτα άλλο από μια αφαίρεση».[269]

Στο πρώτο ερώτημα που θέτει ο Alexandrov χρησιμοποιεί κάποια παραδείγματα προκειμένου να δώσει μιαν απάντηση. Το πρώτο παράδειγμα είναι σχετικό με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου κι ένα δεύτερο είναι σχετικό με το μήκος της περιφέρειας του

αναγνωρίζοντας ότι ο πραγματικός κόσμος, η ύλη που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις είναι αντικειμενική πραγματικότητα, έχουν το δικαίωμα να συμπεράνουν από αυτό ότι καμία ανθρώπινη επινόηση, που βγαίνει έξω από τα όρια του χρόνου και του χώρου, δεν είναι πραγματική, όποιος κι αν είναι ο σκοπός της […]

Άλλο πράγμα είναι το πώς, με τα διάφορα αισθητήρια όργανα, αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος το χώρο και πώς με μια μακρόχρονη ιστορική εξέλιξη, σχηματίζονται από αυτές τις αντιλήψεις οι αφηρημένες έννοιες του χώρου κι εντελώς άλλο πράγμα είναι το αν αντιστοιχεί σε αυτές τις αντιλήψεις και σε αυτές τις έννοιες της ανθρωπότητας μια αντικειμενική πραγματικότητα, ανεξάρτητη από την ανθρωπότητα […]

Κατά τον Μπογκντάνοφ, οι διάφορες μορφές του χώρου και του χρόνου προσαρμόζονται στην εμπειρία των ανθρώπων και στη γνωστική τους ικανότητα. Στην πραγματικότητα, συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο: η «εμπειρία» μας και η γνώση μας προσαρμόζονται όλο και περισσότερο στον αντικειμενικό χώρο και χρόνο, αντανακλώντας τους όλο και πιο σωστά και πιο βαθιά», (Λένιν, Άπαντα, τ. 18, σελ.184-199).

Η άποψη αυτή του Λένιν επαναλαμβάνεται και από ένα σύγχρονο εκπρόσωπο του ΔΥ: «Σχετικά με τις φυσικές θεωρίες ενός τετραδιάστατου ή πενταδιάστατου ή με άπειρες διαστάσεις χώρου […] αντανακλούν μερικούς νόμους του αντικειμενικού κόσμου, δίχως ωστόσο να αναιρούν τη θέση του τρισδιάστατου χώρου. Όταν οι φυσικοί μιλούν για τέσσερις διευθύνσεις, έχουν υπόψη τους τέσσερις συντεταγμένες που οι τρεις αναφέρονται στο χώρο και στις διαστάσεις του και η τέταρτη είναι ο χρόνος. Γίνεται το ίδιο και για τον πολυδιάστατο χώρο. Όταν οι φυσικού και οι μαθηματικοί μιλάνε για διαστάσεις, έχουν συνήθως υπόψη τους όχι μονάχα τις διαστάσεις του χώρου αλλά εξίσου και τις άλλες πλευρές και ιδιότητες των πραγμάτων που υπάρχουν σε άπειρο αριθμό. Όλα αυτά δεν αναιρούν διόλου τη θεωρία του τρισδιάστατου χώρου, αλλά δείχνουν απλά πως οι όροι «τετρασδιάστατος χώρος», «πολυδιάστατος χώρος» ή «η-διάστατος χώρος» δε χρησιμοποιούν στο περιεχόμενό τους και χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τις χαρακτηριστικές που ξεπερνούν αρκετά το πλαίσιο των χωρικών διαστάσεων», (Α. Σεπτούλιν, Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, σελ. 227-228, εκδ. Αναγνωστίδη)

[267] . A.D.Alexandrov, «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ.142, τ.3

[268] . Ο.π., σελ. 142-143

[269] . Ο.π., σελ. 143

μήκους ενός κύκλου. Στη μεν πρώτη περίπτωση ο συγγραφέας μας καλεί να φανταστούμε ότι οι πλευρές του τριγώνου αποτελούνται από ακτίνες φωτός. Αν δημιουργήσουμε ένα τέτοιο τρίγωνο τότε με τις κατάλληλες μετρήσεις θα διαπιστώσουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του διαφέρει από τις 180 μοίρες. Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνεται ότι το μήκος της περιφέρειας του μήκους δεν ικανοποιείται από τη σχέση l=2πρ. Αντίστοιχα, αν μιλήσουμε για μεγάλα σώματα όπως η γη διαπιστώνουμε ότι το μήκος της περιφέρειας προς την ακτίνα είναι ίσο με $2\pi(1-KM/3Rc^2)$, όπου M είναι η μάζα του σώματος σε τόνους, R η ακτίνα του σώματος σε χιλιόμετρα, c= 300.00km/sec η ταχύτητα του φωτός και K η σταθερά της βαρύτητας. Επομένως ο λόγος για τον οποίο μιλήσαμε λίγο παραπάνω, ενώ στην ευκλείδεια γεωμετρία βγαίνει ίσος με 2π, στην περίπτωση της γης βγαίνει μικρότερος από 2π. Και πώς όλα αυτά συνδέουν τη φαντασία και τη διαίσθησή μας με την πραγματικότητα; Να πώς απαντάει ο Alexandrov: «Πάντως μπορεί να παρατηρηθεί βέβαια, ότι όλα αυτά είναι αδύνατο να τα φανταστεί κανείς και ότι σε μια διαισθητική εικόνα ο χώρος είναι πάντα ευκλείδειος. Αυτή η παρατήρηση δεν πρέπει να μας ενοχλεί, πρώτα από όλα γιατί το καθήκον της επιστήμης δεν είναι να δίνει διαισθητικές εικόνες των φαινομένων, αλλά να τα κατανοεί. Μια διαισθητική εικόνα είναι περιορισμένη και ρυθμισμένη από τους συνηθισμένους τρόπους μεταβίβασής της από τα αισθητήριά μας όργανα. Έτσι, δεν είμαστε σε θέση να έχουμε μια διαισθητική εικόνα των υπεριωδών ακτινών της διάδοσης των ραδιοκυμάτων, της κίνησης του ηλεκτρονίου στο άτομο, ή των πολλών άλλων φαινομένων, εκτός από το να καταφεύγουμε στην αντικατάστασή τους από ανάλογα μοντέλα. Αλλά αυτό δε σημαίνει ότι όλα αυτά τα φαινόμενα είναι ακατανόητα για εμάς. Το αντίθετο ακριβώς, η επιτυχία της ραδιοτεχνολογίας για παράδειγμα, αποδεικνύει καθαρά ότι έχουμε κατανοήσει τελείως τα σχετικά με τα ραδιοκύματα. Δεύτερο, η λύση του προβλήματος, του τι μπορούμε και τι δεν μπορούμε να φανταστούμε, εξαρτάται από τις συνήθειες και την άσκηση της φαντασίας. Μπορούμε να φανταστούμε τους αντίποδες, όπου κατά την αντίληψή μας οι άνθρωποι θα περπατούν με το κεφάλι κάτω; Τώρα είμαστε σε θέση να τους φανταστούμε· αλλά, ήταν μια εποχή όπου η «μη δυνατότητα φαντασίας» των αντίποδων, χρησιμοποιήθηκε σαν επιχείρημα, ενάντια του σφαιρικού σχήματος της γης».[270]

Τέλος, για το τρίτο και τελευταίο ερώτημα, δηλαδή τη σχέση γεωμετρίας και αλήθειας η θέση του Alexandrov είναι ότι **και οι δυο γεωμετρίες και η ευκλείδεια και η λομπατσέφσκεια είναι και οι δυο αληθινές.** Η πρώτη είναι συνδεδεμένη με την κίνηση του σώματος, δηλαδή με τη μηχανική (π.χ. σχήματα που είναι ίσα με την έννοια της ευκλείδειας, είναι από την ίδια την προέλευση της γεωμετρίας αυτής σχήματα που είναι δυνατό να τοποθετηθεί το ένα πάνω στο άλλο με μια μηχανική κίνηση). Αυτός είναι ακριβώς και ο λόγος, κατά τον Alexandrof, για τον οποίο η ευκλείδεια ανακαλύφθηκε πρώτη κι όχι κάποια άλλη γεωμετρία. Η ίδια, όμως η εξέλιξη της επιστήμης κι εν προκειμένω της φυσικής και των μαθηματικών έδειξαν ότι η Ευκλείδεια αποτελεί μια (καλή) προσέγγιση στη μέτρηση του χώρου. Σε αυτό το σημείο ο Alexandrov κάνει μια παρατήρηση σχετικά με τις διαφορετικές θεωρήσεις που είχε ο Lobacevskii και ο Poincare. Κατά το συγγραφέα ο πρώτος είχε μια υλιστική άποψη για την εξάρτηση των ιδιοτήτων του χώρου και των ιδιοτήτων της ύλης. Η «υλιστικότητα» αυτή έγκειται ακριβώς στο ότι υπάρχει εξάρτηση. Αντίθετα για τον δεύτερο η επιλογή εκείνης ή της άλλης γεωμετρίας απέρρεε μόνον από λόγους απλότητας ή «οικονομία σκέψης». Όμως, απαντάει ο συγγραφέας ότι η ευκλείδεια γεωμετρία δεν εμφανίσθηκε πρώτη επειδή ήταν η πιο απλή αλλά γιατί αντιστοιχούσε στη μηχανική. Η πολυπλοκότερη φυσική που προέκυψε (θεωρία της σχετικότητας) οδήγησε στην ανάπτυξη και της ρειμάνειας γεωμετρίας.

[270] . Ο.π., σελ.145-146

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Ο ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΜΟΣ, ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Οι έννοιες του χάους και της τάξης απασχόλησαν την ανθρώπινη σκέψη με διάφορους τρόπους και σε διάφορες στιγμές της. Η πρώτη μορφή με την οποία συναντάμε την εν λόγω έννοια, είναι η μυθολογική και η ηθική: Μπορεί κανείς να την διακρίνει στους Αιγυπτίους, στους Βαβυλώνιους, στους Πέρσες, στους Εβραίους, στους Κινέζους, στους Ινδούς και στους αρχαίους Έλληνες. Όσον αφορά στους τελευταίους, η πιο χαρακτηριστική περίπτωση είναι ίσως αυτή του Ησίοδου με τη «Θεογονία» του. [271]

Σήμερα, η έννοια του χάους έχει, πλέον, και μια επιστημονική υπόσταση. Συγκεκριμένα, διατυπώνεται συχνά από θεωρητικούς της ιστορίας της επιστήμης ή επιστήμονες των θετικών επιστημών ότι στον περασμένο αιώνα έλαβαν χώρα τρεις μεγάλες επιστημονικές επαναστάσεις:

* Η πρώτη είναι η ειδική και γενική θεωρία της σχετικότητας.
* Η δεύτερη είναι η κβαντική μηχανική.
* Η τρίτη είναι η επιστήμη του Χάους (εφεξής ΕτΧ) ή επιστήμη της πολυπλοκότητας ή θεωρία του Χάους.

Η ΕτΧ θα μας απασχολήσει από τρεις οπτικές γωνίες:

[i] **Από την οπτική γωνία της σύνδεσής της ιδιαίτερα με τις έννοιες του ντετερμινισμού, της τυχαιότητας και της πρόβλεψης.**

[ii] Η επόμενη οπτική γωνία σχετίζεται με κάποιες επιπτώσεις που έχει η εξέταση των θεμάτων τα οποία βλέπουμε από την πρώτη οπτική γωνία. Οι παραπάνω έννοιες (ντετερμινισμός, τυχαιότητα, πρόβλεψη) συνεπάγονται ένα πλήθος παλαιών ή νέων εννοιών και φιλοσοφικών κατηγοριών που συνδέονται άμεσα ή έμμεσα με την ΕτΧ. Η ΕτΧ είτε εισήγαγε είτε επανεξέτασε κάποιες από αυτές, μερικές από τις οποίες φέρουν εντυπωσιακά και εξωτικά ονόματα. Αναφερόμαστε στα μορφοκλασματικά, στους παράξενους ελκυστές, στο «θόρυβο», στις δομές έκλυσης, στα δυναμικά χαοτικά συστήματα, στο βέλος του χρόνου. Αναφερόμαστε, ακόμα, και σε ένα πλήθος **φιλοσοφικών διπόλων όπως τάξη-χάος, απλότητα-πολυπλοκότητα, πρόβλεψη-αβεβαιότητα, ποσότητα-ποιότητα, αιτία-αποτέλεσμα, πιθανοκρατία-αιτιοκρατία, συνέχεια-ασυνέχεια κ.λπ.**

[iii] Η τρίτη οπτική γωνία-αλλά όχι τελευταία αξιολογικά- κάτω από την οποία θα εξετάσουμε την ΕτΧ, είναι αυτή των «καθαρών» μαθηματικών. Θα κάνουμε μια απόπειρα να σκιαγραφήσουμε **τον τρόπο με τον οποίο τα Μαθηματικά επηρεάζουν το γνωσιολογικό status της εν λόγω επιστήμης.**

Πριν την εξέταση των παραπάνω παραμέτρων, είναι πιστεύουμε απαραίτητο να προβούμε σε μια αναγκαία αλλά σύντομη ιστορική αναδρομή της ανθρώπινης σκέψης στην οποία συναντούμε σπέρματα της ΕτΧ ή εν πάση περιπτώσει έννοιες, κατηγορίες, φιλοσοφικά αποφθέγματα και προβληματισμούς που σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με αυτήν. Πρόκειται, κατά τη γνώμη μας, για σταθμούς της πνευματικής αναζήτησης που έχουν μιαν ειδική βαρύτητα.

Δ1: <u>Σύντομη ιστορική αναδρομή, σχετικά με τις έννοιες του ντετερμινισμού, της τυχαιότητας και της πρόβλεψης</u>

---

[271] . Αρκετά στοιχεία σχετικά με τη μυθολογική και ηθική διάσταση του χάους υπάρχουν στο βιβλίο του Β. Γκέκα «Κοσμική τάξη και χάος».

Ξεκινάμε από την αρχαιοελληνική σκέψη και στεκόμαστε στον Πλάτωνα. Ο Πλάτωνας καταθέτοντας το κοσμολογικό του πρότυπο, μας δίνει μια ιδέα, έστω και με έμμεσο τρόπο, για το πώς αντιλαμβανόταν τη σύνδεση τάξης και χάους. Στην αρχή, κατά τον Πλάτωνα, υπάρχει το «παράδειγμα» δηλαδή ένα πρότυπο, ένα αιώνιο και ακαθόριστο «κάτι». Αυτό ακριβώς το ακαθόριστο «κάτι» μπαίνει σε τάξη και ρυθμό από το Θεό, κάτι που σημαίνει πως βρισκόταν σε αταξία και σε χαοτική κατάσταση.[272]

Ο Αριστοτέλης έχει μια διαφορετική αντίληψη για τα πράγματα. Στην πλατωνική οντολογία απουσιάζει ή εν πάση περιπτώσει υποβαθμίζεται η έννοια της αιτίας. Στην αριστοτελική όμως οντολογία δείχνει να έχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Κατά τον Αριστοτέλη οφείλουμε να εξηγήσουμε την ύπαρξη του αισθητού κόσμου και την αρχή της κίνησης. Ο κόσμος των ιδεών, κατά τον Αριστοτέλη, δεν αποδεικνύει την αιτία γένεσης του είναι. Ο Αριστοτέλης προσπαθεί να δώσει το δικό του πρότυπο μέσα από την έννοια της ενδελέχειας δηλαδή δίνει μια ερμηνεία του κόσμου τελολογική. [273]

Ο επόμενος σταθμός μας είναι ο Δημόκριτος. Ο Δημόκριτος δεχόταν ότι η κίνηση των ατόμων είναι προδιαγεγραμμένη και ότι δεν παρεκκλίνει από την ευθεία. Αυτή η αντίληψη οδηγούσε σε μια «αυστηρή» αιτιοκρατία. Όπως διδάσκουν οι ατομικοί (το απόφθεγμα συνήθως αποδίδεται στο Λεύκιππο), τίποτα δε γίνεται τυχαία, αλλά από κάποια αιτία και υπό την πίεση κάποιας ανάγκης[274].

Ο Επίκουρος αντιλαμβανόμενος τους κινδύνους από την «αυστηρή» αιτιοκρατία του Δημόκριτου πρότεινε ένα διαφορετικό μοντέλο. Γράφει χαρακτηριστικά: «Τη δε ειμαρμένη που προτείνουν μερικοί ως κυρίαρχο των πάντων, πόσο αυτός κοροϊδεύει βεβαιώνοντας ότι μερικά κατ' ανάγκη συμβαίνουν, άλλα κατά τύχη κι άλλα από εμάς, επειδή βλέπει ότι η μεν ανάγκη είναι ανεύθυνη η δε τύχη άστατη, η δική μας όμως δραστηριότητα είναι ελεύθερη, γι' αυτό από τη φύση του είναι να υπόκειται σε μομφή ή να επαινείται, γιατί είναι προτιμότερο να ακολουθούμε το μύθο για τους θεούς παρά να υποτασσόμαστε στην ειμαρμένη των φυσικών φιλοσόφων. Γιατί ο μύθος για τους θεούς αφήνει να διαφαίνεται κάποια ελπίδα εξιλέωσης με τη μεσολάβηση της τιμής προς τους θεούς. Η ειμαρμένη εμφανίζει την ανάγκη να μη γνωρίσει εξιλέωση»[275].

Ο Επίκουρος μέσα από αυτό το απόσπασμα, επιχειρεί να δώσει τη θέση του σχετικά με την ελευθερία της βούλησης του ανθρώπου μέσα στον ντετερμινιστικό κόσμο των ατόμων. Μάλιστα, σχετικά με την κίνηση των ατόμων διαφοροποιείται από τη θεωρία του Δημόκριτου και προτείνει την «κίνησιν κατά παρέγκλισιν». Η άποψη αυτή παρατίθεται από το Λουκρήτιο ως εξής: «Παρότι τα σώματα διαγράφουν ευθείες τροχιές όταν πέφτουν στο κενό λόγω του βάρους τους, σε απρόβλεπτο τόπο και χρόνο παρεγκλίνουν λίγο από την πορεία τους, ώστε να αλλάζει η κίνησή τους. Διότι, αν δεν παρέκκλιναν, τότε όλα θα έπεφταν προς τα κάτω σαν τις στάλες της βροχής στο κενό, καμία κρούση δε θα λάμβανε χώρα […] Έτσι, η φύση ποτέ δε θα είχε δημιουργήσει τίποτα»[276]. Η «λοξότητα» που επινόησε ο Επίκουρος, είναι μια εσωτερική ιδιότητα των ατόμων και αποτελεί την πιθανή αιτία των μεταξύ τους συγκρούσεων. Οι συγκρούσεις αυτές δεν προβλέπονταν από το δημοκρίτειο μοντέλο. Τώρα, πλέον, αφήνεται περιθώριο για να αναδυθεί το τυχαίο και συμπτωματικό.

Φεύγοντας από την αρχαιοελληνική σκέψη και κάνοντας ένα χρονικό άλμα, συναντάμε τον Καρτέσιο. Ο Καρτέσιος ήταν αυτός που άνοιξε το δρόμο για την αναγωγική αντίληψη των πραγμάτων. Όταν λέμε αναγωγική αντίληψη εννοούμε εκείνη τη μεθοδολογική αρχή η οποία θεωρεί εφικτή και αναγκαία την πλήρη αναγωγή ανώτερων φαινομένων σε κατώτερα[277]. Σύμφωνα με τον Καρτέσιο προϋπόθεση γνώσης του κόσμου είναι η γνώση πρώτα απ' όλα των επιμέρους τμημάτων του. Όταν το μέρος γίνεται γνωστό τότε με μια διαδικασία ολοκλήρωσης γίνεται γνωστό και το όλο. Αυτή του η άποψη διατυπώνεται στο δεύτερο κανόνα της Μεθόδου, σύμφωνα με τον οποίο πρέπει «…να διαιρώ την καθεμιά από

---

[272] . Πλάτωνας, Τίμαιος

[273] . Δες για όλα αυτά τα ζητήματα το έργο του Μετά τα Φυσικά.

[274] .Για τις απόψεις του Δημόκριτου δες αναλυτικότερα α) Αριστοτέλης, περί γενέσεως και φθοράς, Α, 315d, 7 β) Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, I, IV, 985b, 5-10

[275] . Επίκουρος, προς Μενοικέα, 133-135

[276] .Titus Lucretius Carus, De Natura Rerum, II, 216-224

[277] . Δες , Φιλοσοφικό- Κοινωνιολογικό λεξικό, εκδόσεις Καπόπουλος, λήμμα αναγωγισμός

τις δυσκολίες που θα εξετάζω σε όσα τεμάχια είναι δυνατόν και χρειάζεται για να τη λύσω καλύτερα»[278].

Ο Λάιμπνιτς στη συνέχεια διατύπωσε τις ενστάσεις του σχετικά με την προηγούμενη άποψη του Καρτέσιου. Ο Λάιμπνιτς υποστήριξε πως διαιρώντας συνεχώς την ύλη θα φτάσουμε σε ένα σημείο στο οποίο η ύλη παύει να είναι ύλη και μετατρέπεται πλέον σε ένα σύνολο μονάδων, παραπέμποντας με αυτόν τον τρόπο σε μια πυθαγόρεια άποψη. Οι μονάδες αυτές έχουν αντίληψη και κατά κάποιο τρόπο συνείδηση. Ο κόσμος λοιπόν αποτελείται από στοιχειώδεις μονάδες οι οποίες γνωρίζουν την ύπαρξη των γειτονικών τους μονάδων, ωστόσο δεν τις επηρεάζει. Με άλλα λόγια η αλληλεπίδραση αποκλείεται[279].

Ο Νεύτωνας μπορεί να μη διατύπωσε τις απόψεις του με το συστηματικό τρόπο που το έκαναν ο Καρτέσιος ή ο Λάιμπνιτς, όμως το επιστημονικό του έργο επηρέασε βαθιά τις φιλοσοφικές απόψεις. Διατυπώνοντας το νόμο μέσω του οποίου εκφράζεται η έλξη που ασκείται μεταξύ δυο σωμάτων με το γνωστό τύπο $F=Km_1m_2/r^2$, ενίσχυσε την αντίληψη τόσο της αιτιοκρατίας όσο και του αναγωγισμού. Είναι χαρακτηριστικό πως το νευτώνειο πρότυπο επεκτάθηκε και σε άλλες δυνάμεις εκτός από τις βαρυτικές. Κατ' αρχάς πρέπει να πούμε πως η εφαρμογή του νευτώνειου προτύπου οδήγησε στην πρόβλεψη της ύπαρξης του πλανήτη Ποσειδώνα καθώς και την ανακάλυψη του σημείου που έπρεπε να βρίσκεται.

Παρόμοια επίσης εξίσωση με αυτήν που εξέφραζε την έλξη μεταξύ δυο σωμάτων διατυπώθηκε και στα ηλεκτρικά φορτία. Πρόκειται για το γνωστό νόμο Coulomb. Ακόμα, μια εφαρμογή του νόμου της παγκόσμιας έλξης επιχειρήθηκε και στο μικρόκοσμο. Ήταν αρκετοί αυτοί που φαντάστηκαν το άτομο να λειτουργεί όπως και το ηλιακό σύστημα, με τον πυρήνα να παίζει το ρόλο του ήλιου και τα ηλεκτρόνια να συμπεριφέρονται όπως και οι πλανήτες. Το συμπέρασμα που απέρρεε απ' όλα αυτά ήταν ξεκάθαρο: **στην περίπτωση που έχουμε τις ορθές μαθηματικές εξισώσεις και τις ακριβείς αρχικές συνθήκες, τότε μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση ενός συστήματος μαζών (και όχι μόνο) υπολογίζοντας το μέλλον και το παρελθόν του για όσο χρονικό διάστημα θελήσουμε.** Πρόκειται για ένα συμπέρασμα που έδωσε το έναυσμα για σημαντικά επιστημονικά επιτεύγματα: ένα πλήθος προβλημάτων της Μηχανικής και της Υδροδυναμικής λύθηκαν με την εφαρμογή του Απειροστικού Λογισμού από τον Όιλερ. Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής λύθηκε μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων από τον Ντ' Αλαμπέρ. Η μουσική και οι ήχοι αναλύθηκαν ως υπερθέσεις ημιτονοειδών ταλαντώσεων από τον Μπερνούλι. Στην Ακουστική σημειώθηκε μεγάλη πρόοδος από το Λαγκράνζ. Το πρόβλημα της ροής θερμότητας περιγράφηκε από το Φουριέ. Η ελαστικότητα μελετάται αποτελεσματικά από το Λαπλάς και τον Πουασόν. Η υδροδυναμική και η ηλεκτροστατική ενοποιήθηκαν από τη μαθηματική θεωρία των πεδίων δυναμικού. Ο ηλεκτρομαγνητισμός παρουσιάζεται υπό το ενιαίο πλαίσιο των εξισώσεων του Μάξουελ.

Ο Λαπλάς στη συνέχεια ήταν εκείνος που με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο διατύπωσε ένα συλλογισμό από τον οποίο αναδύεται ένας μηχανιστικός ντετερμινισμός. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη: **«Την τωρινή κατάσταση του σύμπαντος πρέπει να τη θεωρούμε αποτέλεσμα της προηγούμενης και αιτία της κατάστασης που θα ακολουθήσει. Μια διάνοια που σε ορισμένη στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που εμψυχώνουν τη φύση και τη θέση των όντων που την αποτελούν και αρκετά πλατιά για να υποβάλλει αυτά τα δεδομένα στη μαθηματική ανάλυση, θ' αγκάλιαζε μέσα στον ίδιο τύπο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος και τις κινήσεις του ελαφρότερου ατόμου. Τίποτα δε θα ήταν αβέβαιο γι' αυτήν, και το μέλλον, όπως και το παρελθόν, θα ήταν παρόν μπροστά στα μάτια της»[280].**

Τα πρώτα ρήγματα απέναντι σε αυτό τον απόλυτο ντετερμινισμό προήλθε από την προσπάθεια του Μπόλτζμαν να ερμηνεύσει τον τρόπο με τον οποίο ένα αέριο φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας- όπου τα μόρια θα καταλαμβάνουν ομοιογενώς όλο το διαθέσιμο χώρο, σε μια κατανομή πλήρους αταξίας και «μοριακού χάους»- με βάση τους νόμους της κλασικής μηχανικής. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, θα σταθούμε σε κάποια συμπεράσματα που προέκυψαν από τις μελέτες του Μπόλτζμαν. Η αρχή της τάξης του

---

[278] .Καρτέσιος, Λόγος περί μεθόδου, σελ.19, εκδόσεις Παπαζήση
[279] . Λάιμπνιτς, Μοναδολογία, παράγραφος 18
[280] . Laplace, Essai pfilosophique sur les probapilites, σελ.155

Μπόλτζμαν προσφέρει τη δυνατότητα πρόβλεψης ενός σχηματισμού μιας δομής τάξης κατά την ισορροπία. Ορισμένες τυχαίες μεταβολές καταλήγουν σε μια κατάσταση ισορροπίας αναντίστρεπτη. Αυτό όμως σημαίνει την παραγραφή των αρχικών δομών. Να το πούμε διαφορετικά: ο Μπόλτζμαν δεν αρνιόταν την κίνηση των μερών του «παγκόσμιου ρολογιού» κάτω από τους νευτώνειους νόμους. Υποστήριζε όμως πως σε ένα περίπλοκο σύστημα που αποτελείται από τρισεκατομμύρια άτομα και μόρια τα οποία κινούμενα συγκρούονται, η πιθανότητα αυτά να διατηρήσουν μια σχέση μεταξύ τους καθίσταται ολοένα και μικρότερη. Ο Μπόλτζμαν προχωρώντας παραπέρα το συμπέρασμά του κατέληξε στη διαπίστωση πως ακόμα και η ατομική δομή του ηλιακού συστήματος θα εκπέσει σε ένα χαώδες σύμφηρμα.

Εντελώς διαφορετική αντιμετώπιση είχε ο Χιουμ. Θα λέγαμε πως είναι ο απόλυτος εκπρόσωπος του ιντετερμινισμού. Δε δεχόταν ότι οι γενικεύσεις που προκύπτουν με ένα επαγωγικό τρόπο, αποκαλύπτουν και φυσικές νομοτέλειες ανεξάρτητες από τον παρατηρητή. Στην καταγραφή των όποιων νομοτελειών απαντούσε δίνοντας μια ψυχολογική χροιά. Αυτή η καταγραφή ερμηνευόταν από μια συνήθεια του ανθρώπου, με το δεδομένο ότι παρατηρούσε κάποιες συζεύξεις γεγονότων που πραγματοποιούντα είτε συγχρόνως είτε σε επαλληλία. Ως εκ τούτου η αποδοχή της όποιας νομοτέλειας είναι αβάσιμη.

Θα τελειώσουμε αυτή τη μικρή ιστορική αναδρομή αναφερόμενοι στο μεγάλο Πουανκαρέ. Νομίζουμε πως πρόκειται για εκείνο τον επιστήμονα που άνοιξε με τον πιο αποφασιστικό τρόπο το δρόμο στην ΕτΧ. Οι μελέτες του Μπόλτζμαν οδήγησαν στο εξής ερώτημα: πώς είναι δυνατό να συμβιβαστούν οι νόμοι της θερμοδυναμικής με τους νόμους της κλασικής μηχανικής? Σε αυτό το ερώτημα είναι που παρεμβαίνει ο Πουανκαρέ και δίνει τη δική του απάντηση. Το 1887 προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα των τριών σωμάτων ανακάλυψε πως οι εξισώσεις της κλασικής μηχανικής ήταν αδύνατο να λυθούν με τις μέχρι τότε γνωστές μαθηματικές μεθόδους. Με άλλα λόγια απέδειξε ότι και στα απλούστερα των προβλημάτων της Μηχανικής και της Αστρονομίας, υπάρχουν στο χώρο φάσεων τους- δηλαδή στο χώρο όλων των δυνατών θέσεων και ταχυτήτων του συστήματος της κλασικής μηχανικής- περιοχές όπου οι λύσεις εξαρτώνται και μάλιστα με τρόπο αποφασιστικό από τις αρχικές συνθήκες. Η συμπεριφορά δηλαδή ενός συστήματος αργά ή γρήγορα θα μεταβληθεί όταν μεταβληθούν και οι αρχικές συνθήκες. Το συμπυκνωμένο συμπέρασμα του Πουανκαρέ έχει ως εξής: **«Αν μπορούσαμε να ξέρουμε επακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σύμπαντος στην αρχική του στιγμή, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε επακριβώς την κατάσταση αυτού του ίδιου σύμπαντος σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή. Αλλά ακόμα κι αν οι φυσικοί νόμοι δεν είχαν άλλα μυστικά από εμάς, θα μπορούσαμε να ξέρουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Αν αυτό μας επέτρεπε να προβλέψουμε τη μεταγενέστερη κατάσταση με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης θα μπορούσαμε να πούμε ότι το φαινόμενο υπόκειται σε νόμους. Όμως το ζήτημα δεν είναι πάντα έτσι: υπάρχει περίπτωση οι πολύ λεπτές διαφορές στις αρχικές συνθήκες, να παράγουν πολύ μεγάλες διαφορές στα τελικά φαινόμενα. Η πρόβλεψη τότε γίνεται αδύνατη και θα έχουμε το φαινόμενο της τύχης»**[281] .

Δ2: Χάος: το εννοιολογικό πλαίσιο

Ασφαλώς, οποιοδήποτε άρθρο, μελέτη, σύγγραμμα ή επιστήμη δεν μπορεί να λειτουργήσει χωρίς ένα ορισμένο εννοιολογικό πλαίσιο. Οποιαδήποτε ασάφεια ή ελαστικότητα στους ορισμούς και στις έννοιες μπορεί να δημιουργήσει σοβαρό πρόβλημα και πλήθος παρανοήσεων. Ακριβώς για αυτό το λόγο αφού είδαμε την «ιστορική προετοιμασία» της ΕτΧ και πριν να δούμε τα όσα έχουμε βάλει ως στόχο εισαγωγικά, θα επιχειρήσουμε να συλλέξουμε κάποιους ορισμούς που έχουν δοθεί κατά καιρούς και που αφορούν στο Χάος και στην επιστήμη του. Άλλωστε πρέπει να διευκρινίσουμε πως η έννοια του Χάους απασχόλησε τόσο μαθηματικούς και φυσικούς όσο επιστημολόγους και φιλόσοφους. Ας δούμε λοιπόν μερικούς από αυτούς τους ορισμούς:

* «Θεωρία (σ.σ. του Χάους) της οποίας η ανάπτυξη και η διαμόρφωση άρχισε κατά τη δεκαετία του 1950 και της οποίας ο επιστημονικός χαρακτηρισμός μπορεί να προσδιορισθεί

[281] .Πουανκαρέ, Επιστήμη και Μέθοδος

ως η εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Τούτο, αναλυτικότερα , μπορεί να επεξηγηθεί ως η χαοτική κατάσταση που προκύπτει όταν μεταβληθούν κατά τι ή στο σύνολό τους τα αρχικά δεδομένα ενός δυναμικού συστήματος. Στην περίπτωση αυτή η χαοτική κατάσταση θα οδηγηθεί σε μια νέα θέση προκαλούμενη από έναν «ελκυστή». Αφού «κατακαθίσει» εκεί, θα παγιωθεί σε μια νέα τάξη της οποίας και πάλι η προβλεψιμότητα όπως και της παλιάς τάξης, είναι αδύνατο να εκφραστεί με νόμους «αιώνιους» ή έστω να προσδιοριστεί ντετερμινιστικά ή στα πλαίσια μιας ολισμικής μεθοδολογίας».[282]

* «Δηλώνει (σ.σ. το αιτιοκρατικό χάος) την ακανόνιστη ή χαοτική κίνηση που γεννιέται από μη γραμμικά συστήματα, οι δυναμικοί νόμοι των οποίων καθορίζουν μονοσήμαντα την κατάσταση του συστήματος, από τη γνώση της προηγούμενης ιστορίας του. Και η χαοτική συμπεριφορά δεν οφείλεται ούτε σε εξωτερικές πηγές θορύβου ούτε σε κάποιον άπειρο βαθμό ελευθερίας. Το ακανόνιστο αποτελεί ιδιότητα των μη γραμμικών συστημάτων, των οποίων οι κοντινές τροχιές απομακρύνονται εκθετικά στον περιβάλλοντα χώρο». [283]

* «Το Χάος χαρακτηρίζεται λιγότερο από την απουσία επικαθορισμών παρά από την άπειρη ταχύτητα με την οποία αυτοί παίρνουν μορφή κι εξαφανίζονται. Δεν είναι μια κίνηση από τον ένα επικαθορισμό στον άλλο αλλά, τουναντίον, η μη δυνατότητα σύνδεσης μεταξύ τους, αφού ο ένας δεν εμφανίζεται ως εξαφάνιση όταν ο άλλος εξαφανίζεται ως περίγραμμα. Το Χάος δεν είναι μια αδρανής ή στατική κατάσταση αλλά μια μίξη τυχαιοτήτων. Το Χάος φτιάχνει το χαοτικό και στέλνει κάθε συνέπεια στο άπειρο».[284]

* «Χάος είναι η στοχαστική συμπεριφορά **που εκδηλώνεται στα πλαίσια ενός ντετερμινιστικού συστήματος**», (η υπογράμμιση δική μας).[285]

* «Το Χάος είναι ένας ολότελα καινούριος κόσμος, ένα νέο είδος μαθηματικών, μια θεμελιώδης καινοτομία στην κατανόηση της αταξίας της φύσης».[286]

Οι παρατηρήσεις που έχουμε να κάνουμε σε σχέση με αυτούς τους ορισμούς είναι οι εξής:

[α] Κάποιοι ορισμοί ρίχνουν το βάρος τους στη φιλοσοφική διάσταση του ζητήματος, κάποιοι άλλοι στη «θετική».

[β] Σε ορισμένους γίνεται προσπάθεια μιας ακριβούς διατύπωσης του ορισμού, σε άλλους υπάρχει μια αοριστολογία.

[γ] Το πιο ενδιαφέρον, ωστόσο, είναι πως κάποιοι μιλάνε για ντετερμινιστικό Χάος, ενώ κάποιοι άλλοι όχι. Αυτή η τελευταία διαφοροποίηση δίνει κατά τη γνώμη μας και τη σπουδαιότερη αφορμή για συζητήσεις και αντιπαραθέσεις.

Δ3: Η γένεση του Χάους

Όπως ήδη έχουμε περιγράψει το σπέρμα της ΕτΧ είχε εμφυτευτεί στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα από τον Πουανκαρέ. Απέμενε το να βρεθεί ένας συνεχιστής (ή συνεχιστές) των προβληματισμών του και συμπερασμάτων του, κάτι που πραγματοποιήθηκε. Ξεχωρίζουμε στην πορεία εξέλιξης της ΕτΧ τον Αμερικανό μαθηματικό Μπίρκοφ ο οποίος επέκτεινε τα αποτελέσματα του Πουανκαρέ σε δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονταν από αλγεβρικές μη γραμμικές απεικονίσεις, τον Αμερικανό τοπολόγο Σμέιλ που χρησιμοποίησε απλά γεωμετρικά παραδείγματα για να δείξει ότι ένα μεγάλο πλήθος διδιάστατων αιτιοκρατικών απεικονίσεων εμπεριέχουν λύσεις με ιδιότητες τόσο τυχαίες όσο και η ρίψη ενός νομίσματος, τον Αμερικανό Ε. Λόρεντς που δημοσίευσε μια εργασία στην οποία περιγραφόταν η διαπίστωση ότι οι λύσεις ενός απλού ντετερμινιστικού μοντέλου τριών διαφορικών εξισώσεων συγκεντρώνονται σε ένα πολύπλοκο σύνολο στο χώρο των φάσεων και που πήρε το όνομα παράξενος ελκυστής και τον επίσης Αμερικανό Μαθηματικοφυσικό Φέγκενμπάουμ που έδειξε με τη βοήθεια απλών μη γραμμικών απεικονίσεων τη δυνατότητα μετάβασης στο Χάος μέσω μιας ακολουθίας διακλαδώσεων με «παγκόσμια» χαρακτηριστικά. Ας σταθούμε όμως στους δυο τελευταίους που συγκεντρώνουν, μάλλον, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

---

[282] .Πάπυρος-Λαρούς-Μπριτάνικα, λήμμα: Χάους, θεωρία
[283] . H. G. Schuster, Deterministic Chaos, VHC, 1989, passim
[284] . G. Deleuze and F. Guattari, What is philosophy?
[285] . Από συνέδριο που διοργάνωσε η Royal Society το 1986
[286] . Ίαν Στιούαρτ, Παίζει ο Θεός ζάρια?, σελ. 15

Ο Λόρεντς έχοντας ως κύριο αντικείμενο μελέτης την πρόβλεψη του καιρού είχε κατασκευάσει ένα μοντέλο ακριβώς για αυτή τη δουλειά. Πίστευε σε ένα σύμπαν που δούλευε όπως και ο μηχανισμός ενός ωρολογιακού μηχανισμού. Αυτό που κλόνισε το δόγμα του ήταν ένα τυχαίο γεγονός. Έδωσε στον υπολογιστή του δυο φορές τα δεδομένα του με μια ελάχιστη διαφοροποίηση στους αριθμούς, τέτοια που κανένας μέχρι τότε δε θα μπορούσε να υποθέσει ότι θα ήταν δυνατό να οδηγήσουν σε μια διαφορετική εκτίμηση. Το αποτέλεσμα ήταν κάτι παραπάνω από εντυπωσιακό. Ελάχιστη διαφοροποίηση στα δεδομένα, άλλαζε δραματικά τη συμπεριφορά του μοντέλου. Στην αρχική φάση εξέλιξης η συμπεριφορά ήταν σχεδόν πανομοιότυπη. Από ένα όμως σημείο κι έπειτα η εξέλιξη των δυο μοντέλων απέκλινε κατά τρόπο εντυπωσιακό. Έτσι το πρώτο συμπέρασμα που φαινόταν να προκύπτει αβίαστα ήταν πως η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη του καιρού είναι αδύνατη. Ο Λόρεντς δεν αρκέστηκε σε αυτό το εντυπωσιακό συμπέρασμα. Επιθυμούσε να δώσει στα συμπεράσματα του και μαθηματική στήριξη. Για να περιγράψει την πολυπλοκότητα που είχε ανακαλύψει, κατασκεύασε ένα σύστημα με μόλις τρεις εξισώσεις οι οποίες ήταν μη γραμμικές. Με τις τρεις αυτές εξισώσεις περιέγραφε το εξής μηχανικό μοντέλο: ένα ορισμένο είδος υδατοτροχών που αποτελούσαν το μηχανικό ανάλογο του περιστρεφόμενου κύκλου της μεταφοράς θερμότητας. Στην κορυφή, στάζει νερό σε δοχεία που κρέμονται από το πλαίσιο ενός τροχού. Καθένα από τα δοχεία έχει σταθερή διαρροή από μια μικρή οπή. Έτσι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα: σε περίπτωση που η ροή του νερού είναι μικρή, τα πάνω δοχεία δεν γεμίζουν ποτέ τόσο γρήγορα ώστε να υπερνικηθεί η τριβή. Το άλλο ενδεχόμενο είναι η ροή να είναι πιο γρήγορη οπότε το βάρος αρχίζει να στρέφει τον τροχό. Η περιστροφή μπορεί να γίνει συνεχής. Αλλιώς, αν η ροή είναι τόσο γρήγορη ώστε τα βαριά δοχεία να περάσουν από το κάτω μέρος και ν' αρχίσουν να ανεβαίνουν από την άλλη πλευρά, τότε ο τροχός μπορεί να επιβραθυνθεί, να σταματήσει και να αντιστρέψει την περιστροφή του, γυρνώντας πρώτα απ' τη μια και μετά απ' την άλλη πλευρά. Οι τρεις εξισώσεις με τις τρεις μεταβλητές που περιέγραφαν πλήρως την κίνηση αυτού του συστήματος έδωσαν μέσω του υπολογιστή τις μεταβαλλόμενες τιμές της τριάδας των μεταβλητών, που αναπαριστώμενες από τον Λόρεντς με τέτοιο τρόπο όπως τις συντεταγμένες που ορίζουν ένα σημείο στο τρισδιάστατο χώρο, δημιούργησαν μια περίεργη μορφή, ένα είδος διπλής έλικας σε τρεις διαστάσεις. Οι βάσεις για αυτό που σήμερα ονομάζουμε παράξενο ελκυστή είχαν τεθεί. **Το πιο ενδιαφέρον όμως απ' όλα ήταν πως από τη μια παρατηρούσαμε μια καθαρή αταξία αφού κανένα σημείο ή ομάδα σημείων δεν επαναλαμβανόταν και από την άλλη παρατηρούσαμε μια τάξη νέου είδους αφού το σχήμα χαρακτηριζόταν από μια αρμονία.**

Ο Φέγκενμπαουμ από την πλευρά του έλεγξε μια ολόκληρη κατηγορία εξισώσεων και βρήκε μια **κλίμακα καθολικής ισχύος** στους μετασχηματισμούς διπλασιασμού περιόδου που παρουσιάζονταν. Οι εξισώσεις που μελέτησε εφαρμόζονται σε ποικίλα φαινόμενα όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα οπτικά συστήματα, τις συσκευές στερεάς κατάστασης, τους επιχειρησιακούς κύκλους, τους πληθυσμούς και τη μάθηση. Ο Φέγκενμπάουμ έδειξε ότι οι λεπτομέρειες των διαφορετικών συστημάτων δεν ενδιαφέρουν και ότι ο διπλασιασμός περιόδου αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο η τάξη διαλύεται σε χάος. Υπολόγισε μερικούς παγκόσμιους αριθμούς που αναπαριστούσαν λόγους στην κλίμακα των σημείων μετάβασης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας διπλασιασμού. Ανακάλυψε πως όταν ένα σύστημα δρα επαναληπτικά επάνω στον εαυτό του, τότε θα παρουσιάσει μεταβολή σε αυτά τα παγκόσμια σημεία κατά μήκος της κλίμακας.

Κλείνοντας αυτή τη γενική περιγραφή, κατά την οποία σκιαγραφήσαμε τη γένεση της ΕτΧ, ας δούμε τέλος τι παραπάνω πρόσθεσε (η ΕτΧ) στα δυναμικά μοντέλα της επιστήμης: μέχρι πριν από τριάντα χρόνια περίπου οι επιστήμονες χειρίζονταν δυο είδη δυναμικών συστημάτων. Το ένα είδος αφορούσε συστήματα ντετερμινιστικά , μικρού αριθμού αλληλεπιδράσεων-συνιστωσών (βαθμών ελευθερίας). Η εξέλιξη αυτών των συστημάτων εθεωρείτο απόλυτα προβλέψιμη. Το άλλο είδος ήταν συστήματα στοχαστικά μεγάλου ή άπειρου αριθμού βαθμών ελευθερίας. Για τη μελέτη τους απαιτούνταν η χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Η δε εξέλιξή τους εθεωρείτο τυχαία και απρόβλεπτη. Η ΕτΧ όμως πρόσθεσε κι ένα τρίτο μοντέλο**. Τα χαρακτηριστικά αυτού του νέου μοντέλου είχαν ως εξής: α) αφορούσε αποκλειστικά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα β) ήταν εν γένει ολιγοδιάστατο γ) ήταν ντετερμινιστικό δ) είχε μη προβλέψιμη συμπεριφορά και ε) η συμπεριφορά του επηρεαζόταν αποφασιστικά από τις αρχικές συνθήκες.**

Δ4: Φιλοσοφικές αναζητήσεις στην περιοχή του Χάους

Ασφαλώς η ΕτΧ προκάλεσε ένα πλήθος φιλοσοφικών συζητήσεων. **Πιστεύουμε πως κάποιες φορές οι συζητήσεις αυτές παρουσιάζονται περίπου σαν κάτι νέο. Δε θα συμφωνήσουμε με μια τέτοια άποψη. Με αφορμή την ΕτΧ υπήρξαν αναστοχασμοί σε κλασικά φιλοσοφικά προβλήματα, που τελικά καταλήγουν στο θεμελιώδες ζήτημα της σχέσης του είναι με το γίγνεσθαι και ό,τι αυτό συνεπάγεται.** Γιατί πρόκειται για αναστοχασμούς; Μια «διαγώνια» ματιά στην ιστορία της φιλοσοφίας νομίζουμε ότι μπορεί να πείσει προς αυτή την κατεύθυνση.

Ο Χέγκελ, για παράδειγμα, ασχολήθηκε με τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος θίγοντας αρκετά προβλήματα σχετιζόμενα με αυτό το δίπολο. Στην «Επιστήμη της Λογικής» πραγματεύθηκε τη σχέση δυνατότητας-πραγματικότητας, την έννοια του ενδεχομένου, του όρου (προϋπόθεση) και της αιτιότητας. Έγραφε χαρακτηριστικά: «Ως προς το περιεχόμενο, η ταυτότητα αιτίου και αποτελέσματος απαντάται και σ' αυτά τα πεπερασμένα αίτια και στην παράσταση αυτών. Η βροχή (αιτία) και η υγρασία (αποτέλεσμα) είναι ένα και το αυτό, δηλαδή το νερό. Ως προς τη μορφή, η αιτία (βροχή) δεν ανευρίσκεται πια στο αποτέλεσμα αυτής (στην υγρασία). Αλλά έτσι χάνεται και ο διορισμός του αποτελέσματος, το οποίον είναι ουδέν χωρίς το αίτιο και δε μένει παρά η αδιάφορη υγρασία».[287]

Το ρεύμα του ΔΥ ασχολήθηκε κι αυτό από την πλευρά του με τέτοιου είδους προβληματισμούς. Δεν αποδέχεται το φαταλισμό του Λαπλάς αλλά δεν απορρίπτει τον ντετερμινισμό. Ο Ένγκελς, διατυπώνοντας τις αντιρρήσεις του σχετικά με το γαλλικό υλισμό, έγραφε χαρακτηριστικά: «Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη (σ.σ. του γαλλικού υλισμού) , στη φύση επικρατεί μόνο η απλή, άμεση αναγκαιότητα. Το ότι τούτο το συγκεκριμένο λουβί του μπιζελιού έχει 5 μπιζέλια κι όχι 4 ή 6, το ότι η ουρά ενός σκύλου είναι 5 ίντσες κι ούτε μια γραμμή λιγότερο ή περισσότερο, το ότι τούτο το άνθος τούτου του τριφυλλιού και όχι εκείνο, γονιμοποιήθηκε από τούτη την ορισμένη μέλισσα σε τούτη την ορισμένη εποχή, το ότι φύτρωσε τούτος ο σπόρος κιχώριου που τον μετέφερε ο άνεμος και όχι κάποιος άλλος, το ότι με τσίμπησε ένας ψύλλος χτες το βράδυ στις 4 το πρωί και όχι στις 3 ή στις 5 και μάλιστα στο δεξιό ώμο και όχι στη δεξιά γάμπα : όλα αυτά τα γεγονότα είναι προϊόν μιας αμετάκλητης αλληλουχίας από αίτια και αποτελέσματα, μιας ατράνταχτης αναγκαιότητας που η φύση της είναι τέτοια, ώστε η αεριώδης σφαίρα απ' όπου προήλθε το ηλιακό σύστημα είχε τέτοια σύσταση ώστε τα γεγονότα έπρεπε να συμβούν έτσι κι όχι αλλιώς. Μ' αυτού του είδους την αναγκαιότητα, δεν ξεφεύγουμε πάντα από τη θεολογική αντίληψη της φύσης. Λίγο ενδιαφέρει την επιστήμη, αν αυτό θα το ονομάσουμε αιώνιο δόγμα του θεού με τον Άγιο Αυγουστίνο ή τον Καλβίνο, ή κισμέτ με τους Τούρκους, ή ακόμα αναγκαιότητα. Σε καμία από αυτές τις περιπτώσεις δεν τίθεται θέμα να ακολουθήσουμε ως το τέρμα της την αλυσίδα των αιτιών. Μείναμε το ίδιο σοφοί και στη μια και στην άλλη περίπτωση και η δήθεν αναγκαιότητα μένει κενή φράση και μαζί της και το τυχαίο μένει αυτό που ήταν. Όσο δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε από τι εξαρτάται ο αριθμός των μπιζελιών στο λουβί, ο αριθμός αυτός παραμένει ζήτημα τύχης και με το να ισχυριζόμαστε πως η περίπτωση προβλεπόταν ήδη από την αρχική σύσταση του ηλιακού συστήματος, δεν προχωρήσαμε ούτε ένα βήμα. Ακόμα περισσότερο. Μια επιστήμη που θα επιχειρούσε να μελετήσει την περίπτωση αυτή του ατομικού λοβού του μπιζελιού, ανατρέχοντας όλη την αλυσίδα των αιτιών, δε θα ήταν πια επιστήμη. Παρά καθαρό παιδιάρισμα, γιατί αυτό το ίδιο το λουβί του μπιζελιού έχει ακόμα άπειρο αριθμό από άλλες ατομικές ιδιότητες, τυχαίες από πρώτη ματιά, όπως η απόχρωσή του, το πάχος και η σκληρότητα του φλουδιού του, το μέγεθος των μπιζελιών του, για να μην αναφέρουμε τις ατομικές ιδιομορφίες που θα ανακάλυπτε κανείς με το μικροσκόπιο. Αυτό λοιπόν και μόνο το λουβί του μπιζελιού, θα έδινε για μελέτη περισσότερες αλυσίδες αιτιών, απ' ότι θα μπορούσαν να μελετήσουν όλοι οι βοτανολόγοι του κόσμου. Εδώ λοιπόν το τυχαίο δεν εξηγείται από την αναγκαιότητα, αλλά μάλλον η αναγκαιότητα υποβιβάζεται στην παραγωγή του καθαρά τυχαίου».[288]

---

[287] . Χέγκελ, Η Επιστήμη της Λογικής, σελ.183

[288] .Φ. Ένγκελς, Διαλεκτική της φύσης, σελ.197-198

Το τυχαίο, παράλληλα, δεν έχει αυθυπαρξία: «υπόκειται σε αιτιακούς καθορισμούς κι εκδηλώνεται νομοτελειακά (νόμοι του τυχαίου). Αντίστοιχα η αντίθεση αναγκαίου και τυχαίου δεν είναι τυπική: αυτό που θεωρείται αναγκαίο συντίθεται, κατά τον Ένγκελς, από καθαρά τυχαία, και το δήθεν τυχαίο είναι η μορφή κάτω από την οποία λειτουργεί η αναγκαιότητα. Αν δεχτούμε ότι τα πάντα γίνονται από κάποιο λόγο και από ανάγκη (Δημόκριτος), τότε στην κοινωνία το αναγκαίο πραγματώνεται συνήθως μέσα από το τυχαίο και το συμπτωματικό».[289]

Ο Πόπερ με τη σειρά του γράφει: «όπως ακριβώς και ένας επιστήμονας, ο δαίμονας(σ.σ. εννοεί το δαίμονα του Λαπλάς), δεν πρέπει να θεωρείται ότι έχει τη δυνατότητα εξακρίβωσης των αρχικών συνθηκών με απόλυτη μαθηματική ακρίβεια, όπως ακριβώς κι ο επιστήμονας, πρέπει να ικανοποιείται με ένα πεπερασμένο βαθμό ακρίβειας».[290] Μάλιστα, αξίζει να σημειώσουμε πως ο Πόπερ αντιτάχθηκε στον ντετερμινισμό του διαλεκτικού υλισμού και τον ταύτισε με το λαπλασιανό: «Οι «άτεγκτοι νόμοι» του Μαρξ για τη φύση και την ιστορική ανάπτυξη δείχνουν καθαρά την επίδραση της λαπλασιανής ατμόσφαιρας όσο και αυτή των γάλλων υλιστών. Η πεποίθηση, όμως, ότι οι όροι «επιστημονικός» και «ντετερμινιστικός» είναι, αν όχι συνώνυμοι, τουλάχιστον αξεχώριστα συνυφασμένοι, μπορεί σήμερα να ειπωθεί πως αποτελεί μια από τις προκαταλήψεις μιας εποχής που δεν έχει ακόμα παρέλθει εντελώς».[291] Αυτή η τελευταία παρατήρηση του Πόπερ, μπορεί να σημαίνει είτε ότι ο Πόπερ δεν είχε κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο έβλεπαν το θέμα οι εκπρόσωποι του διαλεκτικού υλισμού (αφού ο Ένγκελς απέρριπτε το γαλλικό υλιστικό υλισμό), είτε θεωρούσε πως οι φραστικές διαφοροποιήσεις δεν άλλαζαν επί της ουσίας τους «δυο» ντετερμινισμούς ή ακόμα – ακόμα διαπράττει μια συνειδητή λαθροχειρία. Αλλά, αυτό είναι ένα ζήτημα που ξεφεύγει από τους σκοπούς του άρθρου μας.

Η «μεταμοντέρνα» εκδοχή των πραγμάτων έχει εκθέσει κι αυτή τις απόψεις της για τα συγκεκριμένα ζητήματα: η τάση για καθολικεύσεις είναι εξοβελιστέα. Από κάποιους μελετητές αυτή η άποψη (των μεταμοντέρνων) στηλιτεύεται, όπως για παράδειγμα από τον Αλέξανδρο Αργυρό ο οποίος σχολιάζοντας τους προβληματισμούς του Λυοτάρ θεωρεί υπερβολικό (από την πλευρά του Λυοτάρ) το γεγονός πως η τάση για καθολικεύσεις χαρακτηρίζεται ως τρομοκρατία[292].

Παρακολουθώντας τους σύγχρονους προβληματισμούς γύρω από την ΕτΧ είναι δύσκολο να κάνεις μια ομαδοποίηση των απόψεων. Μπορεί κάποιος όμως να διακρίνει αποχρώσεις, αλλά μόνο τέτοιες. Υπάρχει, ωστόσο, κατά τη γνώμη μας, ένας κοινός παρανομαστής. Πρόκειται για την αποδοχή τελικά του ντετερμινισμού 9τουλάχιστο στην πλειονότητα των περιπτώσεων) αλλά με μια κεφαλαιώδη διαφοροποίηση από το λαπλασιανό δαίμονα. Η αιτιοκρατία πλέον παίρνει τις αποστάσεις της από την πρόβλεψη. Στους διάφορους προβληματισμούς οι όποιες διαφοροποιήσεις εντοπίζονται στο ότι σε ορισμένες περιπτώσεις το βάρος πέφτει στο ότι ο ντετερμινισμός δε θίγεται και κρατάει την ισχύ του και τη φρεσκάδα του, σε άλλες πάλι το βάρος πέφτει στην αδυναμία πρόβλεψης. Ή ακόμα σε κάποιες εκτιμήσεις υπερτονίζεται η έννοια του χάους, σε άλλες πάλι επιχειρείται μια ισορροπία μεταξύ τάξης και χάους. Με αυτόν τον τρόπο ίσως διαφαίνονται κάποιες ροπές προς φιλοσοφικά/επιστημονικά στρατόπεδα: σε ένα ρεαλιστικό στρατόπεδο και σε ένα με οσμή αγνωστικισμού. Αυτός ο διαχωρισμός είναι σχετικός. Μπορεί κανείς να διακρίνει στον ίδιο προβληματισμό ένα πλέγμα υλιστικών, ιδεαλιστικών και θετικιστικών απόψεων. Ασφαλώς το πρόβλημα δεν είναι απλό. Συγκεντρώνει πλήθος φιλοσοφικών προβλημάτων, είναι πολυπαραμετρικό και δε χωράει απλουστεύσεις. Ας δούμε ένα πρακτικό πρόβλημα, ανοίγοντας μια παρένθεση, που περιπλέκει τα πράγματα και πολλαπλασιάζει ίσως τις αντιφάσεις:

Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα την τεχνική πρόβλεψης διαφόρων φυσικών φαινομένων π.χ. καιρός, σεισμοί κ. α. για να δούμε πως αυτή γίνεται (η πρόβλεψη) τόσο με την κλασική στατιστική όσο και με την χαοτική δυναμική.

Στην κλασική στατιστική αρχικά συλλέγεται ένας μεγάλος αριθμός στοιχείων από μετρήσεις πολλών μεταβλητών οι οποίες συνδέονται με το συγκεκριμένο φαινόμενο που

---

[289] . Ευτύχης Μπιτσάκης, Θεωρία και Πράξη, σελ. 172-173
[290] . Πόπερ, Η Ανοικτή Κοινωνία
[291] . Πόπερ, Η Ανοιχτή Κοινωνία, τ.2, σελ. 129-130
[292] . Αναφέρεται στο περιοδικό Νεύσις, τ.5, σελ.118

μελετάμε. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μέσοι όροι αυτών των τιμών, οι τυπικές αποκλίσεις από το μέσο όρο κ.λπ. Κατόπιν εξετάζεται ο συσχετισμός τους και καταγράφονται τα αποτελέσματα που δίνει ο συσχετισμός αυτός. Τέλος, έχοντας όλα τα στοιχεία και τα συμπεράσματα, επιχειρείται μια βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης του φαινομένου βάσει μετρήσεων που προέκυψαν από παρόμοιες συνθήκες στο παρελθόν.

Στην χαοτική δυναμική προτείνεται ένας νέος τρόπος θεώρησης και ανάλυσης χρονοσειρών φυσικών φαινομένων. Η βασική αρχή είναι πως το φαινόμενο που εξετάζουμε διέπεται από έναν μικρό αριθμό συζευγμένων μεταβλητών οι οποίες παίζουν το κυρίαρχο ρόλο στον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του φαινομένου. Αν αυτό ισχύει, τότε λέμε ότι η διαστατικότητα του συστήματος είναι χαμηλή και οι μέθοδοι της χαοτικής δυναμικής μπορούν να εφαρμοστούν. Στην αντίθετη περίπτωση καταφεύγουμε πάλι στις κλασικές στατιστικές μεθόδους.

Το ενδιαφέρον που προκύπτει από την εφαρμογή των δύο μεθόδων είναι πως η δεύτερη μέθοδος έχει αποδειχθεί στην πράξη περισσότερο αξιόπιστη.[293]

Κλείνοντας αυτή την παρένθεση εξηγούμεθα γιατί είπαμε παραπάνω πως το συγκεκριμένο παράδειγμα αναδεικνύει και υπογραμμίζει τις αντιφάσεις που προκύπτουν κατά τη μελέτη της χαοτικής δυναμικής. Ενώ η ΕτΧ αποσυνδέει σε κάποιες περιπτώσεις την αιτιοκρατία από την πρόβλεψη και από όλες τις πλευρές υπογραμμίζεται η αδυναμία πρόβλεψης της εξέλιξης του μέλλοντος εν γένει, στην πράξη βλέπουμε πως η πρόβλεψη μέσω των μεθόδων της είναι ακριβέστερη! Θα πρέπει λοιπόν να μας απασχολήσει και το γεγονός αν αυτές (οι αντιφάσεις) είναι φαινομενικές ή εγγενή και ουσιαστικά στοιχεία της ίδιας της πραγματικότητας.

Ας δούμε, λοιπόν, πώς αντιμετωπίζονται αυτές οι αντιφάσεις κι εν γένει οι προβληματισμοί που έχουμε παραθέσει από μια σειρά επιστημόνων:

[α] Ο Τ. Μπούντης δεν απορρίπτει την αιτιοκρατία ωστόσο δεν πιστεύει στην άποψη μιας απόλυτης γνώσης. Η γνωσιμότητα είναι σχετική: «Φαίνεται ότι ο κόσμος είναι κατά κύριο λόγος αιτιοκρατικός και περιγράφεται από ντετερμινιστικά συστήματα εξισώσεων, η ομορφιά του όμως και τα απρόοπτα και γοητευτικά μυστικά του δε θα λείψουν ποτέ αφού θα είναι **πάντοτε κρυμμένα** μέσα στις χαοτικές περιοχές της μη γραμμικής μαθηματικής περιγραφής του»[294] (η υπογράμμιση δική μας).

[β] Ο Θ. Χρηστίδης διαχωρίζει το αίτιο από το αποτέλεσμα, προσδίδοντας κατά κάποιο τρόπο μια οντολογική αυθυπαρξία στο τυχαίο: «Οι νόμοι που ορίζουν την κίνηση του συστήματος είναι ασφαλώς αιτιοκρατικοί, αλλά η εξέλιξη του συστήματος δεν καθορίζεται μόνον από την αναγκαιότητα πλέον, αλλά, καθώς, είπαμε, στα σημεία διακλάδωσης οι τυχαίες διακυμάνσεις καθορίζουν την επιλογή ανάμεσα σε περισσότερες δυνατές καταστάσεις, στην εξέλιξη του συστήματος φαίνεται να εμπλέκεται και ο παράγοντας τύχη»[295].

[γ] Ο Ίαν Στιούαρτ δείχνει να «κλείνει» προς έναν αγνωστικισμό παρά το γεγονός ότι ο ορισμός του περί χάους αναφέρεται σε ντετερμινιστικά συστήματα: «Η λαμπρότατη φωτεινή ακτίνα την οποία εκπέμπει το χάος, εστιάζεται πάνω στη φύση της πολυπλοκότητας. Ξέρουμε τώρα ότι οι απλές εξισώσεις μπορεί να έχουν απλές ή πολύπλοκες λύσεις. Οι πολύπλοκες εξισώσεις μπορεί να έχουν απλές ή πολύπλοκες λύσεις. Εκείνο που ελέγχει τη σχέση ανάμεσα στην εξίσωση και στη λύση, ανάμεσα στο μοντέλο και στη συμπεριφορά του, δεν είναι η μορφή, αλλά η σημασία της εξίσωσης. **Πού μας οδηγεί άραγε ο φανός του χάους; Δεν ξέρουμε. Ποιο είναι το μέλλον του χάους; Χάνεται μέσα στο σκοτάδι»**, (η υπογράμμιση δική μας).[296]

[δ] Μια κάπως διαφορετική αντιμετώπιση συναντούμε στον Ντέιβιντ Ρουλ: «Μολονότι ένα σύστημα μπορεί να παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, αυτό δε σημαίνει ότι τα πάντα στο σύστημα είναι απρόβλεπτα. Πράγματι, το να βρούμε τι είναι απρόβλεπτο στο χάος είναι ένα βαθύ και σπουδαίο πρόβλημα (αυτό δυστυχώς σημαίνει ότι

---

[293] .Α. Μπούντης, Μπορεί η χαοτική δυναμική να προβλέπει, περιοδικό CHAOS , τ. 3

[294] .Α. Μπούντης, Τύχη ή βεβαιότητα? Η διαλεκτική θεωρία του χάους, περιοδικό Ουτοπία, τ.33

[295] . Θ. Χρηστίδης, Χάος και πιθανολογική αιτιότητα:μεταξύ προκαθορισμού και τύχης, σελ.312

[296] .Ιαν Στιούαρτ, Παίζει ο Θεός ζάρια?, σελ. 346

είναι ένα άλυτο πρόβλημα)»[297]. Ο Ρουλ δεν αποκλείει τη γνωσιμότητα και την πρόβλεψη, το κάνει όμως με τέτοιο τρόπο ώστε να αφήσει μια χαραμάδα αγνωστικισμού.
[ε] Ο Σπύρος Ευαγγέλου, απαντά στο εξής ερώτημα: η αδυναμία πρόβλεψης είναι, άραγε, ιστορικού χαρακτήρα; Δηλαδή οφείλεται στην τωρινή αδυναμία μας, κάτι που στο μέλλον θα ξεπεραστεί με την ανάπτυξη υπερυπολογιστών, νέων μαθηματικών και φυσικών θεωριών ; Η απάντηση είναι αρνητική. Η αδυναμία μας είναι εγγενής κι άρα αξεπέραστη : «Θα μπορούσε κανείς να αποδώσει τη μη προβλεψιμότητα στην πολυπλοκότητα του προβλήματος, λόγω του μεγάλου αριθμού των παραμέτρων που πρέπει να καθοριστούν και να υπολογιστούν σε κάθε χρονική στιγμή. Π.χ. στο πρόβλημα της πρόγνωσης του καιρού χρειάζεται ένας φανταστικά μεγάλος αριθμός από εξισώσεις για να περιγράψουμε όλα τα μόρια του αέρα, πράγμα που αποτελεί το γνωστό μοριακό ή στατιστικό χάος. Όμως ένα πλήρως ορισμένο (αιτιοκρατικό) σύστημα είναι δυνατό να οδηγηθεί σε μη προβλέψιμη συμπεριφορά ακόμα κι όταν περιγράφει ένα μόνο μόριο με μια μόνο εξίσωση! Αυτό συμβαίνει όταν οι κλασικές εξισώσεις είναι μη γραμμικές, δηλαδή δε διασπώνται στα επιμέρους στοιχεία τους ή το άθροισμα δυο επιμέρους λύσεων, δεν αποτελεί πάλι λύση. Επειδή η συντριπτική πλειοψηφία των φαινομένων σχετίζεται με τέτοιες εξισώσεις (έστω κι αν πολύ συχνά περιοριζόμαστε σε γραμμικές προσεγγίσεις, που φυσικά δίνουν χάος), το χάος είναι αναπόφευκτο στη φύση, όπως και η ταυτόχρονη αδυναμία μας να προβλέψουμε το μέλλον»[298].
[στ] Αφήσαμε για το τέλος τον Πριγκοζίν. Το σημαντικότερο ίσως ειδικό της ΕτΧ. Η σπουδαιότητά του έγκειται τόσο στο μαθηματικό πεδίο όσο και στο φιλοσοφικό. Τον Πριγκοζίν τον απασχόλησε εντονότατα η έννοια του **χρόνου** και της **αντιστρεψιμότητας.** Θεώρησε πως η μελέτη του οποιουδήποτε συστήματος δεν μπορεί να γίνει με την αγνόηση του χρόνου: «Καμία διατύπωση των νόμων της φυσικής δε θα κατορθώσει ποτέ να ικανοποιήσει την ανάγκη μας να κατανοήσουμε τη φύση, αν δε λαμβάνει υπόψη μας τον εποικοδομητικό ρόλο του χρόνου»[299]. Δε νομίζουμε πως σε αυτή τη γενική διαπίστωση ο Πριγκοζίν πρωτοτύπησε. Ο Αϊνστάιν ήταν αυτός που είδε με αποφασιστικό τρόπο το ρόλο του χρόνου στη φυσική. Ο Πριγκοζίν **πρωτοτύπησε στον τρόπο με τον οποίο είδε το θέμα.** Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι: Όταν διατυπώθηκε από τον Κλαούζιους ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής εισήγαγε το χρόνο και την ιστορία μέσα σε ένα σύμπαν που ο Νεύτωνας και οι κλασικοί φυσικοί το είχαν απεικονίσει ως αιώνιο. Οι εξισώσεις της νευτώνειας μηχανικής είναι αντιστρεπτές στο χρόνο κι έτσι οι φυσικοί είχαν σχηματίσει την αντίληψη της απουσίας κατεύθυνσης του χρόνου στο βασικό επίπεδο της ύλης. Η αντιστρεπτότητα του χρόνου εξακολούθησε να ισχύει ως αντίληψη και στις εξισώσεις της κβαντομηχανικής, τουλάχιστο με τη συμβατική ερμηνεία. Όμως η θερμοδυναμική κατάφερε ένα πλήγμα στις προηγούμενες αντιλήψεις. Ο χρόνος πλέον έχει μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Ο κόσμος και η εξέλιξη είναι κατά κάποιο τρόπο υποταγμένα στο χρόνο. Ο Πριγκοζίν δείχνει να επηρεάζεται βαθιά από αυτή την αντίληψη. **Ωστόσο δεν έπεσε σε μια φαταλιστική θεώρηση του σύμπαντος υιοθετώντας την άποψη του θερμικού θανάτου. Αντίθετα, προσπάθησε να «συμμαχήσει» με το χρόνο και να δει σε αυτόν τη δημιουργική δύναμη της φύσης. Η μη αντιστρεπτότητα κατά τον Πριγκοζίν παίζει εποικοδομητικό ρόλο κι όχι καταστρεπτικό. Το χάος είναι δημιουργικό, εμφανίζοντας νέες δομές και μορφές. Καταστρέφει για να «κατασκευάσει» στη συνέχεια, σε μια ατέρμονη διαδικασία.** Μέσα όμως σε αυτή τη διαδικασία το μέλλον δεν είναι δεδομένο: «…οι μη αναστρέψιμες διαδικασίες περιγράφουν θεμελιώδεις ιδιότητες της φύσης. Μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε το σχηματισμό δομών έκκλησης μακράν της ισορροπίας. Οι εν λόγω διαδικασίες δε θα ήταν δυνατές σε ένα κόσμο που θα ρυθμιζόταν από τους αναστρέψιμους νόμους της κλασικής ή της κβαντικής μηχανικής. Οι δομές έκλυσης προϋποθέτουν το βέλος του χρόνου. Επιπλέον, δε θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε την εμφάνισή τους με προσεγγίσεις τις οποίες θα εισήγαμε εμείς στους νόμους που είναι αναστρέψιμοι ως προς το χρόνο. […] **Όταν μελετούμε ασταθή συστήματα, οφείλουμε να διατυπώνουμε τους νόμους της δυναμικής σε στατιστικό επίπεδο. Αυτό βέβαια μεταβάλλει ριζικά την περιγραφή μας για τη φύση, αφού**

---

[297]. Ν. Ρουλ, Το χάος στα οικονομικά και στην ιστορία, περιοδικό CHAOS, τ.3, σελ.10
[298] .Σ. Ευαγγέλου, Χάος και μορφοκλασματικά στην κβαντική φυσική, περιοδικό Ουτοπία, τ.33, σελ. 39
[299] . Προγκοζίν, Το τέλος της βεβαιότητας, σελ.69

τα θεμελιώδη αντικείμενα της φυσικής δεν είναι πλέον τροχιές ή κυματοσυναρτήσεις αλλά πιθανότητες» (η υπογράμμιση δική μας)[300].

Παρά το γεγονός ότι αυτή η τελευταία έκφραση του Πριγκοζίν περί πιθανοτήτων παραπέμπει σε έναν αγνωστικισμό, η πρόθεση που απορρέει από το γενικότερο έργο του εν λόγω επιστήμονα δε φαίνεται να είναι αυτή. Αντίθετα, ο Πριγκοζίν μιλάει για **νόμους** του χάους, προσπαθεί επίμονα να το ερμηνεύσει και να επινοήσει μια συνθετική θεωρία που να αντιστοιχεί στο μέγιστο δυνατό βαθμό στην περιβάλλουσα πραγματικότητα.

Δ5: Μαθηματικά και ΕτΧ: μια οργανική σύζευξη

Ίσως η εξωτικότερη ονομασία που συναντούμε στην ΕτΧ είναι αυτή του φράκταλ και της φράκταλ γεωμετρίας. Το πρόβλημα ξεκίνησε από την παραγωγισιμότητα των καμπυλών. Οι μαθηματικοί γνώριζαν με ποιο τρόπο μπορούσαν να παραγωγίζουν τις καμπύλες, με την προϋπόθεση της συνέχειας. Όταν όμως ο Ντεμπουά Ρεϊμόν στα τέλη του 19ου αιώνα, παρουσίασε την εξίσωση του Βάιερστρας για μια καμπύλη που ήταν συνεχής αλλά τόσο περίπλοκη που δεν μπορούσε να παραγωγιστεί, οι πρώτες ανησυχίες εμφανίσθηκαν από την πλευρά των Μαθηματικών. Μετά από περίπου μισό αιώνα οι μαθηματικοί αναγκάσθηκαν να παραδεχθούν πως είναι δυνατό να υπάρξουν τέτοια μαθηματικά αντικείμενα, αλλά παρηγορούνταν από το γεγονός ότι δεν είναι δυνατό να απαντηθούν στον πραγματικό κόσμο. Ο δεύτερος τριγμός ήλθε λίγο αργότερα γύρω στο 1890 από τον Πεανό. Ο Πεανό ανακάλυψε μια καμπύλη που είχε την εξής εκπληκτική ιδιότητα: γέμιζε το επίπεδο. Πώς ήταν άραγε δυνατό ένα μαθηματικό αντικείμενο να είναι ταυτόχρονα μονοδιάστατο και διδιάστατο? Μετά από εβδομήντα περίπου χρόνια ανέλαβε να λύσει το πρόβλημα ο Μάντελμπρο. Είναι γνωστή η ιστορία με τη νιφάδα του Κοχ. Με γεννήτορα ένα ισόπλευρο τρίγωνο, την ιδιότητα της αυτοομοιότητας και ένα συγκεκριμένο κανόνα αναπαραγωγής, καταλήγουμε σε μια νέα αντίληψη. Τα αντικείμενα, πλέον, μπορεί να έχουν και κλασματικές διαστάσεις. Τα φράκταλ είναι γνωστό πως περιγράφουν αντικείμενα που η ευκλείδεια γεωμετρία αδυνατούσε. Αυτό, πολύ απλά μας λέει ότι η φράκταλ γεωμετρία αναπαριστά το φυσικό κόσμο με μεγαλύτερη πιστότητα. Ωστόσο έχουμε τις εξής παρατηρήσεις:

[α] Στην ευκλείδεια έχουμε σοβαρά φιλοσοφικά προβλήματα να απαντήσουμε: το σημείο δεν έχει διαστάσεις, η ευθεία είναι μονοδιάστατη, πώς λοιπόν είναι δυνατό ένα αντικείμενο με διάσταση να αποτελείται από οντότητες χωρίς διάσταση; Και σε τελική ανάλυση τι σημαίνει ότι ένα αντικείμενο έχει μια διάσταση ή δε διαθέτει καμία; Τα ερωτήματα αυτά ασφαλώς είναι νόμιμα, όμως δεν μπορούμε να τα προσπεράσουμε στη φράκταλ γεωμετρία. **Η φράκταλ γεωμετρία χρησιμοποιεί τις «συμβάσεις» της ευκλείδειας οπότε και τα ερωτήματα παραμένουν και περιμένουν την απάντησή τους.**

Ας επιχειρήσουμε τώρα μια πρόχειρη προσέγγιση σχετικά με τη διαφοροποίηση της φράκταλ γεωμετρίας με την ευκλείδεια. Η ευκλείδεια γεωμετρία εκφράζει ποσοτικές σχέσεις στη φύση με επιτυχία (βέβαια είναι γνωστό ότι στο επίπεδο του μεγάκοσμου δε «λειτουργεί» αλλά εκεί δίνουν τη λύση οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες). Αποτελεί θα λέγαμε μιαν ικανοποιητική προσέγγιση αυτών των ποσοτικών σχέσεων. Αδυνατεί όμως να περιγράψει την πολυπλοκότητα και τη δυναμική εξέλιξη ενός συστήματος. Σε αυτό το σημείο αναλαμβάνει η φράκταλ γεωμετρία, που αναδεικνύει τις αδυναμίες της ευκλείδειας, αλλά και ταυτόχρονα την συμπληρώνει κατά κάποιο τρόπο. **Πρόκειται για ένα πέρασμα από τα ποσοτικά στα ποιοτικά μαθηματικά. Η στιγμή κατά την οποία η συσσώρευση ποσοτήτων οδηγεί σε μια νέα ποιότητα και το σύστημα ωθείται σε ένα άλμα όπου διακρίνονται σε μια σύμπλεξη η συνέχεια και η ασυνέχεια, βρίσκει τώρα τη μαθηματική της έκφραση.**

[β] Η δεύτερη παρατήρησή μας έχει να κάνει με την ίδια τη φύση των μαθηματικών. Το πολύ παλιό αλλά πάντα επίκαιρο ερώτημα επανέρχεται. Τι ακριβώς είναι τα μαθηματικά; Πρόκειται για συμβάσεις, είναι αναπαραστάσεις του φυσικού κόσμου που προσεγγίζουν όλο και πιο πιστά την περιβάλλουσα πραγματικότητα? Είναι παιχνιδίσματα του νου, προϋπάρχουν της ανθρώπινης νόησης και βρίσκονται σε ένα πλατωνικό κόσμο ιδεών όπου μας περιμένουν να τα ανακαλύψουμε? **Το γεγονός πως οι μαθηματικοί με έναν εντελώς θεωρητικό τρόπο**

[300] . Πριγκοζίν, Το τέλος της βεβαιότητας, σελ. 89

ανακάλυψαν τις φράκταλ μορφές φαίνεται να ενισχύει μια άποψη πλατωνικής απόχρωσης. Από την άλλη το γεγονός πως η ΕτΧ προέκυψε μέσα από την ανάγκη επίλυσης πρακτικών προβλημάτων (π.χ. πρόβλεψη καιρού), δείχνει να ενισχύει μια πιο ρεαλιστική τοποθέτηση.

Αξίζει, όμως, σε αυτό το σημείο, να παραθέσουμε ένα διάλογο που διεξάγεται μεταξύ δυο φανταστικών προσώπων και συμπυκνώνει με γλαφυρό τρόπο τους προβληματισμούς που παραθέσαμε λίγο παραπάνω:

ΣΚΕΠΤΙΚΙΣΤΗΣ: Κοίταξε, οι διαφορικές εξισώσεις αυτού του σχεδιαστή του Σμέιλ, καλές είναι, αλλά στον πραγματικό κόσμο δεν υπάρχει τέτοια συμπεριφορά.

ΧΑΟΣΟΦΟΣ: Αν μπορεί και συμβαίνει με δομική ευστάθεια στα μαθηματικά, τότε μπορεί να συμβαίνει και να παρατηρηθεί και στη φύση.

ΣΚΕΠΤΙΚΙΣΤΗΣ: Τότε, γιατί εγώ δεν έχω δει τέτοιες εξισώσεις;

ΧΑΟΣΟΦΟΣ: Γιατί έψαχνες για ομαλή συμπεριφορά. Κανένας φυσικός που θα συναντούσε τέτοιες εξισώσεις δε θα τολμούσε να τις δημοσιεύσει.

ΣΚΕΠΤΙΚΙΣΤΗΣ: Και με τα πειράματα τι θα κάνετε; Είσαστε υποχρεωμένοι να παρατηρήσετε τέτοιου είδους συμπεριφορά σε πειράματα!

ΧΑΟΣΟΦΟΣ: Μα, την παρατηρείς σε κάθε στιγμή. Δυστυχώς, όμως, υπάρχει κάποια δυσκολία. Ξέρεις κανένα πειραματιστή που θα δημοσίευε ποτέ μια εργασία που να λέει «πήρα εντελώς τυχαία αποτελέσματα;»

ΣΚΕΠΤΙΚΙΣΤΗΣ: Μμμ, εδώ έχεις κάποιο δίκιο. Το γεγονός, όμως, παραμένει. Ποτέ δε θα πείσετε ενεργούς επιστήμονες σχετικά με αυτό το χάος, αν δεν τους δείξετε τι συμβαίνει στη φύση.

ΧΑΟΣΟΦΟΣ: Συμφωνώ. Το προσπαθούμε, αλλά δεν είναι εύκολο. Πρέπει να αναπτύξουμε έναν ολοκληρωτικά καινούριο τρόπο σκέψης πάνω στη δυναμική. Είναι πολύ δύσκολό. Όμως, κάτι που εμφανίζεται τόσο φυσικά στα μαθηματικά όσο αυτό, θα πρέπει να βρίσκεται παντού. Αν δεν το βρούμε, θα εκπλαγώ.

ΣΚΕΠΤΙΚΙΣΤΗΣ: Εγώ θα εκπλαγώ πολύ περισσότερο αν πράγματι το βρείτε![301]

[γ] Ασφαλώς, δεν είναι στόχος μας να (ξανα)απαντήσουμε στα ερωτήματα που θέσαμε για τη φύση των μαθηματικών. Μπορούμε, όμως, να υπογραμμίσουμε κάποια συμπεράσματά μας σχετικά με τη σύνδεση των μαθηματικών, της φιλοσοφίας και πώς αυτή πραγματώνεται μέσω της ΕτΧ. Για να χρησιμοποιήσουμε κι ένα χαοτικό όρο θα λέγαμε ότι μεταξύ φιλοσοφίας και μαθηματικών υπάρχει μια ανάδραση. Στην αρχή, δεδομένης της αναγωγικής αντίληψης, δεν ήταν δυνατό να εξηγηθεί πώς οι μικρές αλλαγές μπορούν να τροποποιούν τη συμπεριφορά του μοντέλου. Αφού αποδείχθηκε ότι αυτό είναι εφικτό (και αποδείχθηκε με την αποφασιστική συμβολή των μαθηματικών), στη συνέχεια το αναγωγικό μοντέλο κατέρρευσε. Καταρρέοντας, όμως, έφερε και νέα «ήθη» στα ίδια τα μαθηματικά. Δημιούργησε νέες έννοιες, νέες αντιλήψεις που κι αυτά με τη σειρά τους ενίσχυσαν περαιτέρω τη νέα «αντιαναγωγική» αντίληψη. Φιλοσοφία και μαθηματικά βρίσκονται σε μια ισχυρή **διαλεκτική** αλληλεπίδραση, την ισχυρότερη ίσως από κάθε άλλη φορά.

[δ] Η τέταρτη και τελευταία παρατήρηση, γίνεται με αφορμή τη διαπίστωση ότι η Χαοτική Δυναμική μπορεί να βρει εφαρμογή παντού. Το «παντού» σημαίνει ότι εκτός φυσικών, βιολογικών και χημικών φαινομένων συμπεριλαμβάνονται και τα κοινωνικά φαινόμενα. Είναι αλήθεια πως οι δεσμοί των μαθηματικών και άλλων επιστημών ισχυροποιήθηκαν με τρόπο εντυπωσιακό. **Ωστόσο, είναι ορθό να υποστηρίξουμε ότι δύναται να μαθηματικοποιηθεί και το κοινωνικό γίγνεσθαι?** Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα απαιτεί, εκτός των άλλων, πολύ καλή γνώση των κοινωνιολογικών ρευμάτων σκέψης. Σε γενικές γραμμές μπορούμε να διακρίνουμε δυο τάσεις. Η μια βλέπει μια τυχαιότητα στην εξέλιξη της κοινωνίας, στην πιο ακραία έκφραση βλέπει την κοινωνική εξέλιξη ως άθροισμα τυχαίων κι ανεξάρτητων γεγονότων. Η άλλη, αυτή του Ιστορικού Υλισμού, θεωρεί πως η κοινωνική εξέλιξη διέπεται από νομοτέλειες. Όποια εκδοχή κι αν επιλέξει κανείς, πιστεύουμε πως η απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε παραπάνω δεν μπορεί παρά να είναι αρνητική. Ας δούμε μια τέτοια απόπειρα μοντελοποίησης της κοινωνικής συμπεριφοράς κι ας εξηγήσουμε στη συνέχεια γιατί είναι καταδικασμένη σε αποτυχία. Στη δεκαετία που πέρασε, κατόπιν εντολής της αμερικανικής κυβέρνησης, ομάδα επιστημόνων, πολιτικών, πανεπιστημιακών στρατιωτικών αναλυτών κι επαγγελματιών κατασκόπων δούλεψαν συστηματικά-με τη χρήση

[301] . Ίαν Στιούαρτ, Παίζει ο Θεός ζάρια ?

υπερυπολογιστών-με σκοπό την πρόβλεψη συγκρούσεων, πολέμων, εξεγέρσεων, πραξικοπημάτων κ.α.[302]

Τα δεδομένα που αναλύθηκαν, προέρχονταν από όλες τις χώρες με πληθυσμό άνω του μισού εκατομμυρίου κι αφορούσαν στο διάστημα 1955-1994. οι ερευνητές τροφοδοτούσαν τους υπολογιστές με πλήθος στοιχείων για την κάθε χώρα. Ο όγκος των στοιχείων ήταν τόσο μεγάλος που χωρίς τη βοήθεια υπολογιστικών μηχανημάτων, υπολογίσθηκε ότι δουλειά ενός έτους θα χρειαζόταν δέκα χρόνια.

Η μελέτη κατέληξε σε ένα βασικό συμπέρασμα. Οι χώρες χωρίζονταν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το βαθμό επικινδυνότητας για το ξέσπασμα κρίσης: Σε χώρες περιορισμένου, μέσου και υψηλού κινδύνου. Στις πρώτες εξισώσεις που δημιουργήθηκαν προσθέτονταν όλο και νέες παράμετροι. Για παράδειγμα από το 1991 κι έπειτα μπήκαν οι εξής κανόνες:

- Ο φίλος του φίλου μου είναι φίλος
- Ο εχθρός του εχθρού μου είναι φίλος
- Ο εχθρός του φίλου μου είναι εχθρός

Όλες αυτές οι σχέσεις δοκιμάστηκαν με σκοπό να δούνε αν η συμπεριφορά των κρατών είναι χαοτική. Έτσι προέκυπταν διάφορα σενάρια συμπεριφοράς, πάντα με τη βοήθεια των υπολογιστών και των μαθηματικών. Μετά από εκατό περίπου επαναλήψεις, άλλαζαν ελάχιστα οι αρχικές τιμές στην επανάληψη των βημάτων. Ο δαίμονας του χάους, που είχε εκδιώξει πλέον το λαπλασιανό δαίμονα, επενέβη και πάλι. Τα τελικά αποτελέσματα, παρά τις μικρές τροποποιήσεις, δημιουργούσαν δραματικές αλλαγές.

Οι ειδικοί του προγράμματος υποστήριζαν πως οι πιθανότητες επιτυχίας στις προβλέψεις ανερχόταν στο ποσοστό της τάξης του 70%. Υπήρξαν, όμως, σε αυτό το εγχείρημα κι αντίθετες φωνές. Ο Πίτερ Ντέιλ Σκοτ, πρώην διπλωμάτης και συγγραφέας του βιβλίου «Συνωμοσία πολέμου», θεωρεί πως η πρόβλεψη και τα μαθηματικά δε χωρούν στην πολιτική, τουλάχιστο έτσι όπως την χειρίζονταν αυτές οι ομάδες έρευνας, αλλά αυτό που προέχει είναι η ιστορία και η κουλτούρα των λαών (όσον αφορά στην πρόβλεψη). Θα συμφωνήσουμε, σε μεγάλο βαθμό, με τον προαναφερθέντα. **Η κοινωνική εξέλιξη δεν μπορεί να μαθηματικοποιηθεί, τουλάχιστον τώρα. Και δεν μπορεί γιατί υπάρχει ένας αστάθμητος παράγοντας, ο πιο απρόβλεπτος από όλους: η ανθρώπινη συνείδηση. Νομίζουμε πως ανεξάρτητα από το ιδεολογικό φορτίο που φέρει ο καθένας μας, αυτό είναι ένα αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα (εξαιρουμένων ίσως όσων έχουν μια μηχανιστική αντίληψη για το γίγνεσθαι εξομοιώνοντας το φυσικό με το κοινωνικό).**

Επιπλέον, τα μαθηματικά μοντέλα που θα μπορούσαν να προβλέψουν την κοινωνική συμπεριφορά θα έπρεπε να τροφοδοτούνται με ένα απίστευτα μεγάλο πλήθος δεδομένων που για πρακτικούς λόγους δε θα ήταν δυνατό να συλλεχθούν. Ίσως, μελλοντικά να υπάρξει η δυνατότητα να υπάρχει ένα μοντέλο που να κάνει μακροπροβλέψεις, δηλαδή προβλέψεις σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα. Σε αυτή την κατεύθυνση μπορεί να βοηθήσει η μελέτη της ανθρώπινης ιστορίας και η μοντελοποίησή της. Φαίνεται να υπάρχουν τέτοιες δυνατότητες από το φιλόδοξο σχέδιο που έχει εκπονήσει ο Πίτερ Τάρκιν. Επιστρατεύοντας εργαλεία από τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και από τη στατιστική μελετάει δυναμικά φαινόμενα από τη βιολογία και την κοινωνία. Φιλοδοξία του εν λόγω μελετητή είναι η κατανόηση της δημιουργίας, της εξέλιξης και της πτώσης παρελθόντων κοινωνιών. Στο σύγγραμμά του Historical Dynamics: Why states Rise and Fall, περιγράφει τη μέθοδο μελέτης του, χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα και μαθηματικά μοντέλα: «ο Τάρκιν ξεδιπλώνει τη δουλειά του στο προαναφερθέν τεχνικό βιβλίο. Ισχυρίζεται-και σε ένα ικανοποιητικό βαθμό αποδεικνύει-ότι η μέθοδος που εφαρμόζει αποδίδει καρπούς: η ιστορία είναι δυνατό να μπει σε μαθηματικά «καλούπια» και τα μοντέλα που προκύπτουν έχουν αρκετή εκφραστική δύναμη, ώστε οι κοινωνικές τροχιές που προδιαγράφουν να συμπίπτουν σε ικανοποιητικό βαθμό με τις πραγματικές».[303] Τέτοιου είδους προβλέψεις αν υπάρξουν στο εγγύς μέλλον α) δεν μπορεί να είναι εξαιρετικά ακριβείς χρονικά και β) δεν μπορούν να υποκαταστήσουν τις κοινωνικές επιστήμες, αλλά να ενισχύσουν κάποια από τα συμπεράσματά τους. άλλωστε, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι και αυτές οι κοινωνικές επιστήμες χωρίς ουσιαστικά τη βοήθεια των

---

[302] . Η CIA προβλέπει τους πολέμους του έτους 2000, Καθημερινή, 5/5/96

[303] .Βαρελάς Χρήστος, Είναι η ιστορία προβλέψιμη?, περιοδικό Discovery & Science, τ.9, 2006

μαθηματικών έχουν προβλέψει κατά καιρούς κοινωνικές ανακατατάξεις: η ίδια η πείρα μας διδάσκει ότι υπάρχουν κοινωνικά φαινόμενα καταλύτες για την κοινωνική συμπεριφορά: πόλεμοι, οικονομικές κρίσεις, διεθνείς εξελίξεις όσον αφορά την εξέλιξη ενός συγκεκριμένου κράτους (π.χ. το φαινόμενο ντόμινο), αλλαγή οικονομικής πολιτικής, δικτατορίες κ.α. είναι μερικοί από τους παράγοντες-καταλύτες που μπορούν να ερμηνεύσουν μια κοινωνική έκρηξη, κοινωνικές επαναστάσεις, απεργίες ή και γένεση πολιτικών φαινομένων όπως ο φασισμός. Νομίζουμε ότι σε τέτοιου είδους κοινωνικές μελέτες τα μαθηματικά έρχονται να παίξουν ένα δευτερεύοντα ρόλο.

* * * *

Μετά από την παράθεση των σκέψεών μας σχετικά με την ΕτΧ έχουμε να σημειώσουμε ορισμένα συμπεράσματα αλλά και ερωτήματα:

[α] Η παλιά αντίληψη για τον αναγωγισμό έχει πλέον πάψει να ισχύει. Αυτό, όμως, δε σημαίνει πως απορρίφθηκε ο ντετερμινισμός. Απλώς μετατράπηκε σε ένα «σκεπτικιστικό» ντετερμινισμό. Αλλά κι αυτός ο ίδιος ο αναγωγισμός έχει αφήσει τα ίχνη του **και θα μπορούσε να πει κάποιος πως στη θέση του έχει υψωθεί μια νέα μορφή αναγωγισμού. Κάτι τέτοιο μας λέει ο εμπνευστής του φράκταλ, ο Μάλντεμπρο: «Φράκταλ σχήματα μεγάλης πολυπλοκότητας μπορεί να ληφθούν με επανάληψη ενός απλού γεωμετρικού σχηματισμού, ενώ μικρές αλλαγές στις παραμέτρους του μετασχηματισμού προκαλούν συνολικές αλλαγές. Αυτό σημαίνει ότι μικρή ποσότητα γενετικής πληροφορίας μπορεί να δημιουργήσει σύνθετες μορφές και ότι μικρές γενετικές μεταβολές μπορεί να οδηγήσουν σε ουσιαστική αλλαγή μορφής […] Σκοπός της επιστήμης ήταν πάντα να επιτύχει την αναγωγή της πολυπλοκότητας του κόσμου σε απλούς κανόνες»[304]. Ο νέος, όμως, αναγωγισμός, αν είναι σωστό να δώσουμε αυτή την ονομασία, διαφέρει από τον παλιό στο ότι δε φωτογραφίζει το φαινόμενο αλλά το κινηματογραφεί. Βλέπει την ανάπτυξη, τη δυναμική του φαινομένου. Τα κινηματογραφικά εργαλεία του είναι η έννοια της αυτοομοιότητας, της επανάληψης και της μορφοκλασματικής διάστασης.**

Ο ΔΥ με την εξέλιξη της ΕτΧ ενισχύεται παραπέρα. Ο αναγωγισμός πλέον «πνέει τα λοίσθια». Η ΕτΧ επιχειρεί να εξετάσει τα φαινόμενα στην εξέλιξή τους και στην αλληλοδιαπλοκή τους. Αλλά ακριβώς αυτό μας διδάσκει και ο ΔΥ. Δεν αρκεί να εξετάζουμε μόνο το μέρος. Χρειάζεται να το εξετάσουμε σε σχέση με το όλο, μόνο έτσι θα δούμε ολόπλευρα το φαινόμενο γιατί είναι στη φύση του η σύνδεση του μέρους με το όλο.

[β] Η αιτιοκρατία δεν καταργείται, αλλά καθίσταται αδύνατη η πρόβλεψη, λένε συχνά οι χαοτικοί. Αυτό που έχει πλέον νόημα είναι η πιθανοκρατική θεώρηση των πραγμάτων. Αυτό όμως το συμπέρασμα έχει κατά τη γνώμη μας σχετική ισχύ. Πρώτα απ' όλα πρέπει να διευκρινισθεί πως η αδυναμία πρόβλεψης είναι εξαρτημένη ως ένα βαθμό από το χρόνο. Για παράδειγμα, τον καιρό δεν μπορούμε να τον προβλέπουμε ικανοποιητικά για μεγάλο χρονικό εύρος, μπορούμε όμως με επιτυχία για μικρό χρονικό ορίζοντα. Παράλληλα, θα μπορούσε κάποιος να ισχυρισθεί πως και ο συγκεκριμένος προσδιορισμός των πιθανοτήτων είναι κι αυτό ένα είδος πρόβλεψης. Εξάλλου, οι δυνατότητες, που καταλαμβάνουν τη θέση των βεβαιοτήτων, δεν αναιρούν την εξηγητική δύναμη των φυσικών νόμων. **Νομίζουμε όμως το πιο σημαντικό ερώτημα είναι σχετικό με τη γνωσιμότητα του κόσμου: η σχετική ή απόλυτη αδυναμία πρόβλεψης είναι μια απόδειξη της μη δυνατότητας γνώσης του κόσμου; Μήπως πάλι αυτή η αδυναμία έχει ιστορικό χαρακτήρα και θα ξεπερασθεί σε κάποια φάση της ιστορίας της ανθρώπινης σκέψης; Μήπως την τελική λύση θα την δώσει η τεχνολογική εξέλιξη;[305]**

---

[304] . Αναφέρεται από τους Τζον Μπριγκς και Φ. Πιτ, Ο ταραγμένος καθρέφτης, σελ. 107-108

[305] . «Στην ιστορικότητα των νόμων στηρίζεται η ιστορικότητα της αλήθειας: η δυναμική, ιστορική σχέση, ανάμεσα στη σχετική και στην απόλυτη αλήθεια. Οι φυσικού νόμοι έχουν συνήθως μαθηματική μορφή κι επιτρέπουν τη πρόβλεψη με βεβαιότητα (δυναμικοί νόμοι) ή με καθορισμένη πιθανότητα (στατιστικοί νόμοι). Όσο ανεβαίνουμε στην κλίμακα των επιπέδων οργάνωσης της ύλης, τόσο οι νόμοι που δεσπόζουν, εξαιτίας της περιπλοκότητας και του πλήθους των αιτιών που συνεισφέρουν, είναι νόμοι στατιστικοί. Στα κοινωνικά φαινόμενα η αναγκαιότητα πραγματώνεται συνήθως με τη μορφή **δεσπόζουσας τάσης**, η οποία επιβάλλεται μετά από ένα αναρίθμητο πλήθος τυχαίων και συμπτωματικών γεγονότων. Η αντίληψη που αναπτύσσουμε θεμελιώνεται στην **αντικειμενικότητα** των νόμων. Η έννοια αυτή έχει… διπλή σημασία: οντολογική, που σημαίνει ότι οι νόμοι εκφράζουν

Όμως κι εδώ υπάρχουν σοβαροί περιορισμοί: «...ένας νέος επιστημονικός κλάδος, αυτός της «υπολογιστικής πολυπλοκότητας», έχει εντοπίσει αλγοριθμικές διαδικασίες όπου τα βήματα του υπολογισμού αυξάνονται εκθετικά ως προς το πλήθος των εισαγόμενων του υπολογισμού. Έτσι, ουσιαστικά, γίνεται αδύνατη μια κατηγορία υπολογισμών. Αλλά και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μας οδεύουν προς το μέγιστο της απόδοσής τους, εξαιτίας διαφόρων φυσικών περιορισμών: π.χ., όριο σμίκρυνσης των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων λόγω εμφάνισης κβαντικών φαινομένων, μέγιστη ταχύτητα μετάδοσης σημάτων κ.λπ., αναφέρομαι σε δεσμεύσεις εξαιτίας φυσικών περιορισμών κι όχι σε τεχνολογικές δυσκολίες που η εφευρετικότητά μας μπορεί να ξεπεράσει»[306]. Σε αυτές τις ενστάσεις, όμως, έχουμε αρκετές αντιρρήσεις: η πορεία του ανθρώπου δείχνει ότι τεχνολογικά υπάρχει μια πρόοδος που είναι ατελεύτητη. Αυτό που φαντάζει σήμερα αδύνατο αύριο υλοποιείται. Ποιος θα μπορούσε άλλωστε να ισχυριστεί μετά βεβαιότητας τον καιρό του Ιούλιου Βερν ότι οι περισσότερες από τις εικασίες του θα γίνουν πραγματικότητα; Κατά δεύτερο, την απάντηση στο ζήτημα της προβλεψιμότητας δεν μπορούν να την δώσουν από μόνοι τους οι υπολογιστές ή από μόνα τους τα μαθηματικά. Είναι απαραίτητο μαζί με αυτά να υπάρχει και το κατάλληλο φιλοσοφικό πλαίσιο που κατά τη γνώμη μας σήμερα δεν υπάρχει στην επιστημονική κοινότητα.

[γ] Τα μαθηματικά μέχρι πριν από λίγα χρόνια εξυπηρετούσαν την περιγραφή γραμμικών φαινομένων. Αυτός ο δρόμος δεν ήταν άγονος. Είχε χρήσιμα και εντυπωσιακά αποτελέσματα. Ωστόσο, η ίδια η πραγματικότητα φανέρωνε τη μη γραμμικότητα των φαινομένων. Η προσέγγιση μέσω «γραμμικών περιγραφών» ήταν αποτελεσματική αλλά μέχρι ενός βαθμού. Όταν οι απαιτήσεις της ζωής έθεσαν πολυπλοκότερα προβλήματα η γραμμικότητα αδυνατούσε να δώσει απαντήσεις. Ήταν πια μια «άχρηστη» αφαίρεση. Τώρα, διαπιστωμένης της μη γραμμικότητας η μαθηματική κοινότητα έθετε νέα δυσκολότερα καθήκοντα. Ο ίδιος ο χαρακτήρας των μαθηματικών έπρεπε να υποστεί δραματικές τροποποιήσεις. Ενώ μέχρι κάποιο σημείο τα μαθηματικά περιέγραφαν τις ποσοτικές μεταβολές τώρα ήταν υποχρεωμένα να περιγράψει και τις ποιοτικές. Ή πιο σωστά έπρεπε να δουν με ποιο τρόπο ποσοτικές και ποιοτικές μεταβολές συνδέονται. Αυτό, όμως, συνειδητά ή ασύνειδα μπορεί να οδηγήσει στη διατύπωση ενός βασικού νόμου της Διαλεκτικής: της συσσώρευσης ποσοτικών αλλαγών που οδηγεί κάποια στιγμή σε μια νέα ποιότητα. Να λοιπόν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που μας δείχνει πώς από τη μελέτη φυσικών και όχι μόνο φαινομένων επιδρούμε στα μαθηματικά και πώς οι νέες αλλαγές σε αυτά οδηγούν στην επιβεβαίωση ή όχι εκείνης ή της άλλης φιλοσοφικής θεώρησης. Έτσι, η σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών δείχνει με ένα τρόπο να γίνεται περισσότερο σχετική από ότι ήταν. Τα μαθηματικά , τα μη γραμμικά μαθηματικά, συνδέονται ακόμα πιο στενά με την πράξη. Την περιγράφουν πιο πιστά, την ερμηνεύουν ακόμα καλύτερα, την προβλέπουν επιτυχέστερα και κάτι τέτοιο δεν μπορεί παρά να έχει άμεσο αντίκτυπο στη ζωή των ανθρώπων. Από αυτή την άποψη η έννοια του χάους στη μελέτη των πολύπλοκων και μη γραμμικών συστημάτων δεν ξέρουμε αν είναι η καταλληλότερη: «τα χαοτικά φαινόμενα δε σηματοδοτούν την κατάρρευση του ντετερμινισμού: **αναδεικνύουν τα όρια της κλασικής, γραμμικής αιτιοκρατίας**», (η υπογράμμιση δική μας).[307] Το χάος δε συνεπάγεται σε καμία περίπτωση επικράτηση της τυχαιότητας ή απουσία αιτιοκρατίας. Με τα μη γραμμικά μαθηματικά αποδεικνύεται το ακριβώς αντίθετο: πίσω από τις «καταστροφές», τα άλματα, τις

εσωτερικώς σχέσεις των φαινομένων, και ταυτόχρονα και γνωσιολογική, που σημαίνει ότι οι νόμοι εκφράζουν όψεις ή βαθμούς της αντικειμενικής αλήθειας. Φυσικά η αντίληψη αυτή δεν είναι αποδεκτή από όλες τις επιστημολογικές σχολές: οι θετικιστές θεωρούν τους νόμους σύμβαση, βολική συνθήκη, τυπική σχέση ανάμεσα στα φαινόμενα. Αυτό ισχύει ακόμα περισσότερο για τους κοινωνικούς νόμους: στην περιοχή των κοινωνικών επιστημών κυριαρχεί η θετικιστική κοινωνιολογία και η «χυδαία» (όπως θα έλεγε ο Μαρξ) πολιτική οικονομία. Γενικά οι αστικές κοινωνικές επιστήμες δε δέχονται την έννοια του νόμου και της κοινωνικής νομοτέλειας», (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα), Μπιτσάκης Ε, Θεωρία και Πράξη, σε. 140-141, εκδ. Gutenberg.

[306] . Ταμπάκης, Επιστημονικές θεωρίες του παντός: μια σύγχρονη ύβρις?, περιοδικό Ουτοπία, τ.33 σελ. 49

[307] . Μπιτσάκης Ε., Χάος, καταστροφές και fractals: προς μια διερεύνηση της αιτιοκρατικής σχέσης», περιοδικό Ουτοπία, τ.33, 1999

ασυνέχειες, κρύβονται συγκεκριμένα αίτια και νόμοι. Τα μη γραμμικά μαθηματικά βγάζουν στην επιφάνεια όψεις της πραγματικότητας που μέχρι χθες ήταν άγνωστες.

Μήπως πάλι χρειάζεται να δούμε το πρόβλημα από μια θετικιστική οπτική γωνία και να υιοθετήσουμε την άποψη του Καρνάπ, σύμφωνα με την οποία παραδέχομαι τον κόσμο των πραγμάτων σημαίνει ότι παραδέχομαι ορισμένη μορφή γλώσσας;

Πιθανότατα η αδυναμία απάντησης κάποιων στο ερώτημα περί γνωσιμότητας να εντοπίζεται στην αδυναμία τους να κατανοήσουν τι είναι γνωσιμότητα κι έτσι υπό κάποια έννοια να δικαιώνεται, γι' αυτούς, ο «κύκλος της Βιέννης». Αν, όμως, δεχτούμε ότι η γνωσιμότητα είναι μια αδιάκοπη πορεία προς την όλο και βαθύτερη κατανόηση του «πράγματος καθ' εαυτό», τότε νομίζουμε ότι μπορούμε να είμαστε αισιόδοξοι. Κάθε φορά θα πλησιάζουμε οριακά προς το ζητούμενο, θα επιτυγχάνουμε πιο ικανοποιητικές προσεγγίσεις, θα συμμετέχουμε πιο ενεργά στην οικοδόμηση του μέλλοντος και τα μαθηματικά θα παίζουν το δικό τους σπουδαίο ρόλο σε αυτή τη διαδικασία. Αυτό μας διδάσκει άλλωστε η ίδια η ιστορία της ανθρωπότητας…

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ

Το ζήτημα του τρόπου με τον οποίο γίνεται η μαθηματική ανακάλυψη είναι από τα πλέον ενδιαφέρονται και αυτό γιατί η ενασχόλησή μαζί του απαιτεί τη συνάντηση πολλών και διαφορετικών γνωστικών τομέων: της ψυχολογίας, της ψυχιατρικής, της ιστορίας των μαθηματικών, της φιλοσοφίας των μαθηματικών, της λογικής κ.α. Θα ξεκινήσουμε την εξέταση του εν λόγω θέματος με τη θεώρηση του Ίλιεφ και αυτό γιατί πρόκειται για ένα κλασικό εκπρόσωπο του ΔΥ.

Ε1: Η θεώρηση του Ίλιεφ

Θα παραθέσουμε κωδικοποιημένα τις βασικές θέσεις του Ίλιεφ, χωρίς κάποιο σχολιασμό, κυρίως για να γίνει κατανοητός ο τρόπος κριτικής μας, όπου αυτή είναι απαραίτητη, στις απόψεις του Jacques Hadamard, τις οποίες και θεωρούμε ιδιαίτερα σημαντικές και χρήσιμες για το ζήτημα της μαθηματικής ανακάλυψης. Κατά τον Ίλιεφ[308]:

1) Στη φύση υπάρχει αρμονία.
2) Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να «διαβάζει» αυτή την αρμονία και να την αναπαράγει.
3) Κατά την ανάγνωση της αρμονίας ο άνθρωπος μπορεί να κάνει αφαιρέσεις κι έτσι με αυτό τον τρόπο κάνει μια ανακάλυψη.
4) Η ανακάλυψη αυτή προκαλεί στο υποκείμενο θετικές συγκινήσεις.
5) Στη συνέχεια το φυσικό φαινόμενο δημιουργεί μια εικόνα, μια αρμονία, δηλαδή ομορφιά. Στην περίπτωση αυτή γίνεται συνήθως λόγος για δημιουργική εργασία και το έργο της.
6) Ο σχηματισμός της εικόνας της αρμονίας γίνεται χάρη στο διαχωρισμό της, την αφαίρεση της από τις άλλες ιδιότητες του περιβάλλοντος στο οποίο υπάρχει.
7) Η ικανότητα διάκρισης της αρμονίας σημαίνει ικανότητα ανάγνωσης μιας νομοτέλειας. Η αρμονία αποτελεί εικόνα ουσιαστικών συνδεδεμένων μεταξύ τους ιδιοτήτων του αντικειμένου.
8) Μετά από τις παραπάνω διαδικασίες το υποκείμενο αποκτά τη δυνατότητα σχηματισμού νέων ιδεών και σύνθεσης νέων ιδεών.
9) Σε αυτό το σημείο προβάλλει η σημασία της κουλτούρας του ατόμου, δηλαδή της φόρτισής του με εικόνες που θέλει να δημιουργήσει μαζί με τις δυνατότητές του να ανακαλύπτει αρμονίες.
10) Η αντανάκλαση της αρμονίας γίνεται πρώτα εντός του αντικειμένου κι έπειτα περιγράφεται λεκτικά.
11) Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εντοπιστεί σε διαφορετικά φαινόμενα όπως η παρακολούθηση των ήχων σε ένα δάσος ή η ανακάλυψη των κωνικών τομών.
12) Η δημιουργική διαδικασία προϋποθέτει τα φαινόμενα: αντικείμενο, χάρισμα, έργο (ανακάλυψη), αφαίρεση, ενόραση, κουλτούρα.
13) Σε μια συνεχή πορεία του περιγραφόμενου φαινομένου μπορούμε να έχουμε αφαίρεση από την αφαίρεση, διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης.
14) Η δημιουργική εργασία είναι πάντα ρεαλιστική αφού οι τύποι και το περιεχόμενό της καθορίζονται από τα αντικείμενά της.
15) Η αφαίρεση αποτελεί διαδικασία μετάβασης από το αντικείμενο στην εικόνα.

---

[308] . Δες αναλυτικότερα Ljubomir Iliev, Μαθηματικά και ανάπτυξη, σελ.135-180

16) Η δημιουργία αρχίζει εκεί όπου αρχίζει η γενίκευση, η αφαίρεση, η δημιουργία της εικόνας.
17) Οι εικόνες που σχηματίζονται στην περιοχή των επιστημών ονομάζονται έννοιες (για αντικείμενα και συσχετίσεις). Με τη βοήθεια των εννοιών σχηματίζονται οι επιστημονικές θεωρίες.
18) Όλα τα επίπεδα των ανθρώπινων επιτευγμάτων έχουν προέλθει από την αμοιβαία επίδραση του υποκειμένου με την αντικειμενική πραγματικότητα. Κάθε νέο επίπεδο αναζήτησης αποτελεί γνώση από τη γνώση.
19) Το ότι πολλά υποκείμενα δέχονται και συντονίζονται πάνω στο ίδιο γεγονός και μάλιστα με ανάλογο τρόπο, με την αρμονία που έχουν βρει, αποδεικνύει τη βιολογική τους ετοιμότητα για συντονισμό με αυτό το φαινόμενο.
20) Η ανάπτυξη ενός δημιουργικού τομέα ως κλειστού συστήματος, δηλαδή η εσωτερική του ανάπτυξη, σημαίνει κατασκευή νέων δημιουργημάτων από το περιεχόμενο που περικλείεται στις εικόνες, οι οποίες δημιουργήθηκαν από τα αντικείμενά του.
21) Ο δημιουργός-συνθέτης μιας κατεύθυνσης δημιουργεί όλο και περισσότερες εικόνες καινούριες εικόνες. Μερικές από αυτές τις παίρνει από άλλους δημιουργούς. Όλες αποτελούν τη δική του κουλτούρα στη κατεύθυνση της δημιουργίας του. Αυτές οι εικόνες, αυτή η κουλτούρα γίνονται ο εσωτερικός του πλούτος, η πνευματικότητά του και μαζί με ολόκληρη τη βιολογική και πνευματική του υπόσταση του δίνουν τη δυνατότητα για δημιουργία νέων παραστάσεων.
22) Ο δημιουργικός εμπλουτισμός μιας σύνθεσης με τα μέσα του τομέα μπορεί να οδηγήσει σε νέου είδους μαζικά προϊόντα, που να είναι εξαιρετικά σύνθετα ως προς τη δομή τους και ως προς τα μέσα που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία τους.
23) Πάνω σε γνωστές αρχές –νομοτέλειες, μπορούν στη συνέχεια να προσδιοριστούν υποτομείς ενός δημιουργικού τομέα. Τέτοιες είναι π.χ. η θεωρία του Αϊνστάιν στη φυσική, οι με ευκλείδειες γεωμετρίες, τα είδη της λογοτεχνίας.
24) Η ανακάλυψη γενικών φαινομένων για έναν ολόκληρο συγκεκριμένο δημιουργικό τομέα δημιουργεί νέους τομείς υψηλότερου επιπέδου αφαίρεσης. Πρόκειται για ανακαλύψεις της εποχής κατά την εξωτερική ανάπτυξη του τομέα. Αυτές τον διευρύνουν στο σύνολό του.
25) Η ανάπτυξη ενός τομέα ως ανοικτού συστήματος αποτελεί δημιουργία με τα ίδια του τα μέσα, που εφαρμόζονται πάνω σε δικά του και εκτός αυτού αντικείμενα.
26) Ο άνθρωπος κατέχει εκείνο που έχει από τη γέννησή του κι εκείνο που έχουν αποκτήσει από την επαφή του με την πραγματικότητα.
27) Όταν ο άνθρωπος είναι δημιουργός, δηλαδή κατέχει τη δυνατότητα να δημιουργεί εικόνες και συνθέσεις, τότε με τη βοήθεια της κουλτούρας που έχει, μπορεί να βρεθεί σε ετοιμότητα να εκδηλώσει αυτή του τη δυνατότητα.
28) Ακριβώς αυτή η ετοιμότητά του αποτελεί την ενόραση
29) Ο αληθινός δημιουργός ζει με τις εικόνες του, τις ιδέες, τις παραστάσεις. Αφού έχει προηγηθεί κοπιαστική και μεγάλη χρονικά προσπάθεια, τότε παρουσιάζεται η ανακάλυψη.
30) Η ικανότητα για δημιουργία οικοδομείται πάνω στην κουλτούρα της εποχής.
31) Κατευθύνσεις ολόκληρες και στην επιστήμη και στην τέχνη μπορούν να εξαντληθούν τόσο ως αντικείμενα, όσο και ως μέθοδοι.

Τελειώνοντας αυτή τη απαρίθμηση των θέσεων του Ίλιεφ, έχουμε να παρατηρήσουμε το εξής: το μοντέλο που μας δίνει ο Ίλιεφ είναι ένα μοντέλο με διπλή χρηστική αξία. Από τη μια φιλοδοξεί να ερμηνεύσει τη μαθηματική ανακάλυψη σαν τέτοια. Από την άλλη η φιλοδοξία του μεγαλώνει αφού μπορεί να λειτουργήσει και ως ερμηνευτικό εργαλείο για την ίδια την ανάπτυξη της επιστήμης εν συνόλω. Ευθύς παρακάτω θα κάνουμε χρήση του μοντέλου αυτού προκειμένου να σταθούμε κριτικά στις απόψεις του Jacques Hadamard.

E2: <u>Ο Jacques Hadamard για τη μαθηματική ανακάλυψη</u>

Ο Jacques Hadamard (εφεξής JH) στο βιβλίο του «Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά» πραγματεύεται ενδιαφέροντα ζητήματα που αφορούν στη μαθηματική σκέψη (και όχι μόνο) κι έχουν εγείρει πλήθος συζητήσεων αλλά και αντιπαραθέσεων.

Κωδικοποιώντας τα κύρια αντικείμενα του προβληματισμού του, διακρίνουμε ως προεξέχοντα ζητήματα-ερωτήματα τα εξής:

1) Η μαθηματική ευφυΐα είναι άραγε ένα ιδιαίτερο είδος ευφυΐας ή εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο μιας διανοητικής ικανότητας του ανθρώπου;
2) Το μαθηματικό πνεύμα εκφράζεται με έναν ενιαίο τρόπο ή υπάρχουν διαφορετικά είδη και ποια είναι αυτά και σε τι διαφοροποιούνται;
3) Τι είναι και πώς λειτουργεί το μαθηματικό όνειρο; (το όνειρο με την κυριολεκτική σημασία της λέξης).
4) Ποια ακριβώς είναι τα στάδια της μαθηματικής σκέψης; Ο Poincaré (εφεξής Ρ) είχε δίκιο έτσι όπως τα περιέγραψε;
5) Σε όλα αυτά ποιος είναι ο ρόλος του ασυνείδητου και ποια η σχέση του με το συνειδητό;
6) Μετά τα τρία στάδια σκέψης που περιγράφονται από τον Ρ τι ακολουθεί;
7) Ποια είδη επινόησης υπάρχουν και πώς αυτά εκφράζονται στη μαθηματική σκέψη;
8) Μήπως τελικά πρέπει να ξεφύγουμε από τα στενά όρια των μαθηματικών για να βρούμε απαντήσεις; Μήπως, δηλαδή, χρειάζεται κι ένας προβληματισμός γύρω από έννοιες όπως λέξη, γλώσσα, πραγματικότητα και αφαίρεση; Και αφού δούμε τις αλληλοσυνδέσεις τους (αν υπάρχουν τέτοιες), στη συνέχεια να προσεγγίσουμε τον τρόπο σκέψης των μαθηματικών ;

Στο κείμενο που ακολουθεί θα επιχειρήσουμε α) να δούμε πώς ο JH αντιμετωπίζει τα παραπάνω ερωτήματα ενώ συγχρόνως θα παρεμβάλλουμε τις δικές μας κριτικές παρατηρήσεις και β) να παραθέσουμε απόψεις άλλων μελετητών σχετικά με το υπό διαπραγμάτευση θέμα καθώς και παρατηρήσεις προερχόμενες από την πλευρά του ΔΥ.

Ε2.1: <u>Για τη μαθηματική ευφυΐα</u>

Στο πολύ σημαντικό ερώτημα «είναι η μαθηματική ικανότητα μια καθορισμένη ικανότητα;» ο JH απαντά πως «η μαθηματική δημιουργία και η μαθηματική ευφυΐα δεν είναι ασύνδετες με τη δημιουργία εν γένει και με τη συνήθη ευφυΐα».[309] Για να στηρίξει αυτό το συμπέρασμά του, αναφέρει το γεγονός πως **«πολύ σπάνια συμβαίνει ένας μαθητής λυκείου να είναι πρώτος στα μαθηματικά και τελευταίος στα άλλα μαθήματα».**[310] Σε αυτό το σημείο θέλουμε να εκφράσουμε, όχι ακριβώς μια διαφωνία αλλά μια επιφύλαξη: μπορεί, πράγματι, αυτό το γεγονός που αναφέρει ως επιχείρημα ο JH να μη συναντιέται συχνά, ωστόσο, δε λείπουν τα φαινόμενα, όχι τόσο σπάνια, όπου μαθητές με καλές επιδόσεις στα μαθηματικά-χωρίς να είναι τελευταίοι όπως αναφέρεται από τον JH- να έχουν αναντίστοιχη επίδοση σε μαθήματα του «λόγου». **Αυτό, ασφαλώς, δε σημαίνει κατάρριψη του επιχειρήματος του JH, αλλά την ανάγκη για ενδελεχέστερη εξέταση του θέματος.** Εξάλλου, συμβαίνει να υπάρχουν και μαθητές με εξαιρετικές επιδόσεις στα μαθήματα «λόγου» αλλά να μη συμβαίνει το ίδιο και στα μαθηματικά. Τέτοια φαινόμενα μπορεί να σημαίνουν ότι η απόδοση και τα ιδιαίτερα χαρίσματα σε κάποιους ειδικούς τομείς της ανθρώπινης νόησης να είναι προϊόν γενετικού καθορισμού, μπορεί, όμως, να είναι και προϊόν διαμόρφωσης της νοητικής ικανότητας μέσα σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον (οικογενειακό, σχολικό, κοινωνικό, ιστορικό κ.λπ.). **Ο προβληματισμός αυτός δεν τίθεται με έναν απόλυτο διχοτομικό τρόπο, αφού μπορεί να υπάρχει ένας συνδυασμός αυτών των δυο παραμέτρων που αναφέραμε.**

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά τον Howard Gardner υπάρχουν οκτώ είδη ευφυΐας, κάτι που δείχνει την πολυπλοκότητα του ζητήματος: η λεκτική-γλωσσική, η λογικο-μαθηματική, η μουσική, εκείνη της αντίληψης του χώρου, η σωματική-κιναισθητική, εκείνη της αντιλήψεως και κατανόησης των ψυχικών καταστάσεων του εαυτού μας και των άλλων, η φυσιοδιφική (της αναγνώρισης και ταξινόμησης φυσικών αντικειμένων) και η υπαρξιακή.[311]

---

[309] . JH, Η ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά, σελ.20
[310] . Ο.π., σελ.20
[311] . Αναφέρονται στο «Γνωσιακή επιστήμη, η νέα επιστήμη του νου», επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, σελ.233

Πρόκειται, επιπλέον, για ένα σημείο στο οποίο ο προβληματισμός θα μπορούσε να διευρυνθεί εντυπωσιακά. **Κατά τη γνώμη μας κυρίαρχο, αν και φαινομενικά μη σχετιζόμενο ερώτημα, είναι το ερώτημα που ήδη έχουμε θέσει στο κεφάλαιο Β΄ «τι είναι τα μαθηματικά?»**. Αν «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της ποσότητας και του χώρου»[312] και αν «τα μαθηματικά ασχολούνται επίσης με το συμβολισμό που σχετίζεται με την ποσότητα και το χώρο»[313], τότε πρέπει να αναρωτηθούμε **για ποιο λόγο υπάρχουν ανθρώπινοι εγκέφαλοι που μπορούν επιτυχέστερα να αποδώσουν τις σχέσεις των ποσοτήτων και του χώρου, να «διαβάζουν» αυτές τις σχέσεις και μάλιστα τα όσα ανακαλύπτουν να «λειτουργούν» στην πράξη. Αν η ικανότητα αυτή ερμηνεύεται με το γεγονός πως υπάρχουν ιδιαιτερότητες στην εγκεφαλική διεργασία, τότε οφείλουμε να δώσουμε απαντήσεις σχετικά με το πώς διαμορφώθηκε βιολογικά αυτή η ικανότητα.** Ακόμα, αν η κατηγοριοποίηση των ειδών ευφυΐας ευσταθεί, όπως την παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε δυο είδη ευφυΐας (της λογικο-μαθηματικής και της αντίληψης του χώρου) δείχνουν να συγγενεύουν, ίσως και να ταυτίζονται.

Συνεχίζουμε σχετικά με τον ορισμό των μαθηματικών: τα ερωτήματα όχι απλά παραμένουν αλλά και πολλαπλασιάζονται αν υιοθετήσουμε τον ορισμό σύμφωνα με τον οποίο «τα μαθηματικά είναι η μελέτη σταθερών και αναλλοίωτων νοητών αντικειμένων».[314] Ούτε, πάλι, θα παίρναμε απαντήσεις αν δεχόμασταν τον ορισμό του C. S. Peirce που στα μέσα του 19ου αιώνα ανακοίνωνε ότι «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της δημιουργίας αναγκαίων συμπερασμάτων»[315].

Επιπλέον, για να υπογραμμίσουμε το «πολύπλοκο» του θέματος καταγράφουμε μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε το 1966 από το Liam Hudson (LH). Σε αυτή την έρευνα ο LH μελέτησε τους μαθητές ανάλογα με το αν είχαν επιλέξει μαθήματα θεωρητικών ή θετικών σπουδών. Ανακάλυψε, λοιπόν, ότι υπήρχαν δυο διαφορετικοί τύποι γνωστικού ύφους (διακριτά πρότυπα του γιγνώσκειν, τα οποία χαρακτηρίζουν ένα άτομο-για παράδειγμα, η συγκλίνουσα σκέψη). Ο μελετητής διαχώρισε τη σκέψη των μαθητών σε συγκλίνουσα[316] και αποκλίνουσα[317]. Αυτοί που σκέφτονταν με συγκλίνοντα τρόπο έτειναν να είναι πάρα πολύ λογικοί, να προτιμούν τις φυσικές επιστήμες ή τα μαθηματικά θέματα και να υιοθετούν ένα γραμμικό, επικεντρωτικό ύφος διαλογισμού, αν τους ζητείτο να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτοί που σκέφτονταν με αποκλίνοντα τρόπο ήταν συχνά πιο διαισθητικοί και παρορμητικοί ως προς τον τρόπο σκέψης τους, έτειναν να προτιμούν τα θεωρητικά μαθήματα στο σχολείο, και θα απλώνονταν ευρύτερα σε διάφορες δυνατές εκδοχές, κατά τη λύση ενός προβλήματος. Εντούτοις, δε στάθηκε πάντα δυνατό να επαναλαμβάνονται αυτά τα αποτελέσματα, κάτι που δείχνει ότι η διαδικασία είναι πιο περίπλοκη απ' αυτή που προτάθηκε από τον ερευνητή.

Ένα από τα τεστ που χρησιμοποίησε ο Hudson, για να κάνει διάκριση ανάμεσα στα δυο γνωστικά στυλ, ήταν να ζητάει από τους μαθητές να σκεφτούν ασυνήθιστες χρήσεις καθημερινών αντικειμένων. Για παράδειγμα, τους ρωτούσε «πόσες χρήσεις μπορούν να σκεφτούν για ένα τούβλο» και αυτοί μέσα σε καθορισμένο χρονικό διάστημα έπρεπε να δώσουν όσες περισσότερες χρήσεις ήταν δυνατό να σκεφθούν. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως όσοι διέθεταν τον αποκλίνοντα τρόπο σκέψης μπορούσαν να συναριθμήσουν πολύ περισσότερες χρήσεις από αυτούς που διέθεταν το συγκλίνοντα τρόπο σκέψης, επινοώντας συχνά ιδέες τις οποίες η πρώτη κατηγορία τις θεωρούσε περίεργες.[318]

Τέλος, να αναφέρουμε τις ανακαλύψεις του Roger Sperry, που νομίζουμε ότι θέτουν τις βάσεις για κάποιες πρώτες ικανοποιητικές απαντήσεις στα ερωτήματα που θέσαμε. Η

---

[312]. P.DAVIS-R.HERSH, Η μαθηματική εμπειρία, σελ. 29
[313] . Ο.π., σελ. 29
[314] . Δες αναλυτικότερα το παραπάνω βιβλίο
[315] . Ο.π., σελ. 30
[316] . Συγκλίνουσα σκέψη (convergent thinking): η λύση προβλημάτων η οποία ασχολείται με συνέπεια προς μια καθορισμένη λύση. Ένας τρόπος σκέψης που υποθέτει ότι υπάρχει μια και μοναδική απάντηση και ο καλύτερος τρόπος για να την πετύχει είναι να προσανατολιστεί κατευθείαν προς αυτό.
[317] . Αποκλίνουσα σκέψη (divergent thinking): η σκέψη η οποία περιστρέφεται γύρω από ένα πρόβλημα και ψάχνει για λύσεις.
[318] . Τα στοιχεία γι' αυτή τη μελέτη είναι από το περιοδικό «Ψυχολογία», τ.6 (Phillip Banyard-Nicky Hayes)

εξειδίκευση των ημισφαιρίων του εγκεφάλου (το αριστερό για τις γλωσσικές λειτουργίες και κυρίως για αυτές που έχουν σχέση με την κατανόηση και παραγωγή του γραπτού λόγου και το δεξιό για λειτουργίες που αφορούν στη δομή του χώρου και στη διάκριση σχημάτων), φαίνεται να παρέχει ένα ικανοποιητικό ερμηνευτικό πλαίσιο για τις ιδιαιτερότητες της νοητικής ικανότητας.[319]

Ε2.2: <u>Το «μαθηματικό όνειρο» και η αιφνίδια λύση</u>

Αφού ο JH θέσει τα ερωτήματα περί μαθηματικής ικανότητας αρχίζει να εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο εκδηλώνονται διάφορες νοητικές ιδιομορφίες που αφορούν στη μαθηματική σκέψη. Μια από αυτές είναι το «μαθηματικό όνειρο». Πρόκειται για εκείνες τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ενώ εκδηλώνεται αδυναμία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος στη διάρκεια επίμονων προσπαθειών, η λύση εμφανίζεται στην εξέλιξη ενός ονείρου. Φαίνεται, όμως, ότι ο συγγραφέας δε δίνει μεγάλη βάση στο «μαθηματικό όνειρο», αφού όπως μας λέει είναι ελάχιστες οι αναφορές από διάφορους μελετητές για το συγκεκριμένο φαινόμενο.[320]

Μπορεί ο JH να μη δίνει ιδιαίτερη βάση στο μαθηματικό όνειρο, όμως, δείχνει ενδιαφέρον για την αιφνίδια λύση. Ως αιφνίδια λύση ορίζεται εκείνη η διαδικασία στην οποία εμφανίζεται η λύση ενός προβλήματος κατά τη αφύπνιση ενός μαθηματικού.[321]

Ε2.3: <u>Τα τρία στάδια μαθηματικής σκέψης σύμφωνα με τον Poincare</u>

Σημαντικό μέρος του βιβλίου και των προβληματισμών του JH καταλαμβάνει η θεώρηση του P σχετικά με τα στάδια που ακολουθεί η μαθηματική σκέψη. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση διακρίνουμε:

[α] **Το προπαρασκευαστικό στάδιο**. Σε αυτό πραγματοποιείται ένας συνδυασμός ιδεών και η συνειδητή νόηση συλλαμβάνει μόνο εκείνους τους συνδυασμούς που είναι γόνιμοι.

[β] **Το στάδιο της επινόησης ή της επώασης**. Εδώ αρχίζει η επιλογή κι εδώ συνίσταται η ιδιοφυΐα, αφού «αυτό που ονομάζουμε ιδιοφυΐα δεν είναι τόσο το έργο του πρώτου (σ.σ. εκείνου που κατασκευάζει συνδυασμούς), όσο η ετοιμότητα του δεύτερου (σ.σ. εκείνου που επιλέγει) να κατανοεί την αξία όσων του παρουσιάζονται και να τα επιλέγει».[322]

[γ] **Το τρίτο και ίσως το πιο ενδιαφέρον από τα στάδια, είναι αυτό της φώτισης.** Πρόκειται για τη στιγμή που ενώ έχει προηγηθεί κοπιαστική δουλειά προκειμένου να φθάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, στην «τελική λύση», αλλά αυτό δεν έχει καταστεί δυνατό, σε ανύποπτη στιγμή η λύση εμφανίζεται αιφνίδια.

Πώς αντιμετωπίζει, λοιπόν, ο JH αυτή την περιγραφή του P; Κατ' αρχήν την αποδέχεται. Αξίζει, όμως, να δούμε και με ποιον τρόπο την αναλύει.

Στο πρώτο στάδιο, το προπαρασκευαστικό, συντελείται ένα μεγάλο πλήθος συνδυασμού ιδεών, η πλειονότητα των οποίων δεν έχει ενδιαφέρον κι ελάχιστοι από αυτούς έχουν χρηστική αξία. Η συνειδητή μας νόηση συλλαμβάνει μόνο τους γόνιμους. Για να βρεθούν αυτοί οι γόνιμοι πρέπει να κατασκευαστούν όλοι οι πολυάριθμοι δυνατοί συνδυασμοί. Αυτή η λειτουργία κατασκευής των πολυάριθμων συνδυασμών, γίνεται ως ένα βαθμό τυχαία και λαμβάνει χώρα στο ασυνείδητο.[323] Πώς, όμως, γνωρίζουμε τη δημιουργία πολυάριθμων συνδυασμών και μάλιστα στο ασυνείδητο; Με ποιο τρόπο ο εγκέφαλος απορρίπτει τους μη γόνιμους συνδυασμούς και κρατάει τους γόνιμους; Από τη στιγμή που κάποιος κάνει εικασίες όπως αυτές του JH, οφείλει έστω να ψηλαφίσει τέτοια ερωτήματα. Επιπλέον, ποιοι θεωρούνται γόνιμοι συνδυασμοί και γιατί υποστηρίζει ο συγγραφέας ότι η συνείδηση συλλαμβάνει αναγκαστικά μόνο αυτούς; Άλλωστε, φροντίζει

---

[319] . Δες αναλυτικότερα Βοσνιάδου Σ., Εισαγωγή στην Ψυχολογία, τ.1, σελ. 66
[320] . JH, ο.π., σελ. 21-22
[321] . Ο.π., σελ.22
[322] . Ο.π., σελ.42
[323] . Δες αναλυτικότερα, J. Hadamard, ο.π., σελ. 41-42

να αυτοαναιρεθεί σε άλλο σημείο του βιβλίου αφού αποδέχεται-και πώς θα μπορούσε να κάνει αλλιώς- ότι δεν είναι σπάνιο ακόμα και οι καλοί μαθηματικοί να κάνουν λάθη.[324]

Κάποιες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα δίνονται κατά την περιγραφή του δεύτερου σταδίου (επινόησης ή επώασης): Η επινόηση κατά τον JH είναι επιλογή. **Ο συγγραφέας παραδέχεται ότι οι κανόνες κάτω από τους οποίους γίνεται αυτή η επιλογή είναι σχεδόν αδύνατο να διατυπωθούν με ακρίβεια, ενώ είναι ευκολότερο να τους αισθανθούμε**. Ο μηχανισμός επιλογής μοιάζει με ένα κόσκινο μέσα στο οποίο βρίσκονται οι ιδέες, αλλά τελικά εξέρχονται μόνο οι γόνιμες (πρόκειται για τις απόψεις του P τις οποίες αποδέχεται και ο συγγραφέας). Βασικό στοιχείο σε αυτή τη διαδικασία της επιλογής παίζει η αισθητική. Η αίσθηση της ομορφιάς παρεμβαίνει παίζοντας το ρόλο ενός απαραίτητου μέσου ανακάλυψης. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου επώασης καμία εργασία δεν είναι συνειδητά αντιληπτή. Από αυτές τις περιγραφές του JH, τελικά τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι μάλλον περισσότερα από τις απαντήσεις που δίνονται. Συγκεκριμένα:

1) Ποια ακριβώς είναι η διαδικασία μέσω της οποίας συντελείται το «κοσκίνισμα» και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε να επιλέγονται οι γόνιμες ιδέες;
2) Η θεωρία για την ύπαρξη του «κόσκινου» δε μοιάζει κάπως μηχανιστική;
3) Τι σημαίνει ότι η επιστημονική ομορφιά παίζει ρόλο στην επιλογή και πώς αυτή ορίζεται;

Είναι σαφές ότι στο στάδιο αυτό υπάρχουν αρκετές εικασίες και αυτές οφείλονται κατά βάση στην ελλιπή ακόμα γνώση μας γύρω από τις λειτουργίες του εγκεφάλου, κάτι που παραδέχονται και πολύ πιο πρόσφατα βιβλία απ' αυτό του JH: «Μπορούμε να εικάσουμε ότι κατά την περίοδο της «επώασης», ποικίλες αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων διαδέχονται η μια την άλλη με τρόπο εφήμερο και κάποια στιγμή, κάπως τυχαία, συνδέονται μεταξύ τους. Στη συνέχεια, με κριτήριο το συντονισμό, επέρχεται ένα είδος εσωτερικής επιλογής ανάμεσα σε αναπαραστάσεις ή και σε προαναπαραστάσεις, η οποία καταλήγει σε ένα «αντικείμενο-αποτέλεσμα» που συμφωνεί με το τεθέν πρόβλημα, με την «πρόθεση» την οποία πρέπει να ικανοποιεί η απάντηση. **Στο στάδιο που βρίσκονται οι έρευνες σήμερα, δε νομίζω ότι αυτές οι πολύ σχηματικές ιδέες θα μπορούσαν να παρουσιαστούν με πιο συγκεκριμένη μορφή»**[325], (η υπογράμμιση δική μας). Παρ' όλα αυτά ενδιαφέρουσες ιδέες μπορούμε να συναντήσουμε στο βιβλίο του G. Edelman «Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά», στο οποίο προτείνονται διάφορα μοντέλα που είναι ικανά ως ένα βαθμό να μας δώσουν απαντήσεις. Κάποιες από τις ιδέες αυτές θα παρουσιάσουμε και σε άλλα σημεία του άρθρου. Ωστόσο, σε αυτό το σημείο θα σημειώσουμε την παρόμοια αντιμετώπιση του Edelman που αφορά στη λειτουργία του εγκεφάλου και μας θυμίζει έντονα τη θεωρία του «κόσκινου». Ο Edelman υποστηρίζει ότι ο εγκέφαλος είναι ένα σύστημα επιλεκτικής αναγνώρισης και απορρίπτει τη θεωρία του «ανθρωπάριου» (αυτή η θεωρία προϋποθέτει την ύπαρξη μιας άπειρης διαδοχής εγκιβωτισμένων ανθρωπάριων εντός του εγκεφάλου. Η ιδέα της οδηγίας ή της επεξεργασίας απαιτεί να υπάρχει κάποιος ή κάτι ώστε να διαβάσει την οδηγία ή την πληροφορία).[326] Η αναγνώριση είναι ένα είδος προσαρμοστικού ταιριάσματος και οι νοητικές διεργασίες μπορούν να ερμηνευθούν με βάση ένα νευρωνικό δαρβινισμό.

Το τρίτο στάδιο, όπως ήδη έχουμε πει, είναι αυτό της φώτισης. Είναι το στάδιο στο οποίο ο συγγραφέας στέκεται περισσότερο από όλα, όχι αδικαιολόγητα γιατί είναι το περισσότερο εντυπωσιακό. Μια σημαντική διευκρίνιση του JH διαχωρίζει τη φώτιση από την ανακάλυψη. **Η ειδοποιός διαφορά τους είναι ο αιφνίδιος χαρακτήρας της πρώτης, πράγμα που σημαίνει πως κάθε ανακάλυψη δεν έχει ως προαπαιτούμενο τη φώτιση.**
Δε γνωρίζουμε αν η λέξη φώτιση είναι η καταλληλότερη για να αποδώσει τη διαδικασία που συντελείται στο τρίτο στάδιο. Κατά τη γνώμη μας παραπέμπει σε ιδεαλιστικές και μεταφυσικές ερμηνείες, που μας βγάζουν εκτός επιστημονικού πλαισίου. Μια τέτοια ερμηνεία, πολύ χαρακτηριστική μάλιστα, δόθηκε από τον Gauss, ο οποίος περιέγραφε μια εμπειρία του ως εξής: «Τελικά, πριν από δυο μέρες, τα κατάφερα, όχι χάρη στις επίμονες προσπάθειές μου, **αλλά με τη χάρη του Θεού** (αναφέρεται σε ένα θεώρημα της

---

[324] . JH, ο.π., σελ.58
[325] . J.-P. Changeux- Al. Connes, «Τα μαθηματικά και ο εγκέφαλος», σελ. 150
[326] . G. Edelman, Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά, σελ.136-137

αριθμοθεωρίας που προσπαθούσε ανεπιτυχώς για χρόνια να αποδείξει). Ξαφνικά, όπως η αιφνίδια λάμψη μιας αστραπής, ο γρίφος λύθηκε. Ούτε εγώ ο ίδιος δεν μπορώ να πω ποιο είναι το νήμα που συνέδεσε ό,τι γνώριζα πρωτύτερα με ό,τι κατέστη δυνατή την επιτυχία μου»[327], (η υπογράμμιση δική μας). Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο, πως ο JH, δεν παίρνει θέση σχετικά με μια τέτοια θεώρηση, πιθανότατα γιατί την θεωρεί ανάξια σχολιασμού, για να μην τον αδικούμε. Αντίθετα, υποβάλλει σε κριτική τη θεωρία της τύχης που διατυπώθηκε από το βιολόγο Nicolle. **Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία η στιγμή της φώτισης δεν είναι παρά προϊόν της τύχης.** Πιστεύουμε πως η κριτική την οποία ασκεί ο JH είναι σωστή. Γράφει εύστοχα ότι «ανεξάρτητα από το σεβασμό μας για τη μεγαλειώδη προσωπικότητα του Charles Nicolle, **πρέπει να πούμε ότι η εξήγηση με βάση την καθαρή τύχη δεν είναι καθόλου εξήγηση και ισοδυναμεί με το να βεβαιώνουμε ότι υπάρχουν αιτιατά χωρίς αίτια** […] Η τύχη δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί ήταν ο Nicolle (δηλαδή, ένας άνθρωπος που μελετούσε για χρόνια επιστημονικά θέματα και τις συνθήκες των πειραμάτων και είχε αποδείξει τη θαυμαστή ικανότητά του) αυτός που ανακάλυψε την αιτία του τύφου και όχι κάποια από τις νοσοκόμες του»[328], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Εδώ, ο JH υιοθετεί καθαρά μια ρεαλιστική άποψη για την επιστήμη και την ανάπτυξή της, μια σχεδόν υλιστική άποψη (λέμε «σχεδόν» γιατί δεν πρόκειται για μια τέτοια ολοκληρωμένη άποψη).

Ωστόσο, φαίνεται πως η τύχη δεν είναι «άμοιρη ευθυνών» στη διαδικασία της ανακάλυψης και ιδιαίτερα των καινοτόμων προβλημάτων. Αυτό υποστηρίζει το μοντέλο Κλοντάικ, ένα μοντέλο ερμηνείας για τα ποιοτικά άλματα της σκέψης. **Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο κάθε διαδικασία λύσης ενός προβλήματος μπορεί να αναλυθεί σα μια έρευνα μέσα σε ένα χώρο πιθανών προσεγγίσεων και μερικών λύσεων.** Πρόκειται για ένα χώρο πιθανότητας για το πρόβλημα: «Οι χώροι πιθανοτήτων σε διαφορετικά είδη προβλημάτων έχουν διαφορετικές δομές. Ειδικότερα, τα καινοτομικά προβλήματα τείνουν να έχουν εξειδικευμένα δομικά χαρακτηριστικά τα οποία παρεμποδίζουν τη γραμμική αιτιολόγηση- μια τεράστια έρημο πιθανοτήτων, υψίπεδα χωρίς ίχνη, στενά φαράγγια εξερεύνησης και οάσεις ψεύτικων υποσχέσεων […] Τα τέσσερα χαρακτηριστικά του Κλοντάικ[329] αποκαλύπτουν γιατί το να είναι κανείς τυχερός παίζει σπουδαίο ρόλο στις καινοτομίες. Αυτά υποδεικνύουν επίσης κατευθύνσεις να σκέφτεται κανείς με τρόπο ώστε να αυξάνεται η τύχη, βελτιώνοντας τις πιθανότητες. Ενώ τα μη λογικά προβλήματα δεν υποκύπτουν σε γραμμική αιτιολόγησης, ενδεχομένως να λυθούν όταν ο λύτης του προβλήματος αποδεχθεί τον κλονταϊκό χαρακτήρα της κατάστασης και την προσεγγίζει με κάποιου είδους λογική Κλοντάικ. Η γνήσια καινοτομική σκέψη συστηματικά υπερπηδά τα εμπόδια της γραμμικής αιτιολόγησης ».[330]

Η περιγραφή αυτή του Perkins μπορεί να έχει ενδιαφέρον, ωστόσο **αφήνει να φανεί ο ρόλος της τύχης ως καθοριστικός**. Πιστεύουμε ότι η αντιμετώπιση του JH στις διάφορες

---

[327] . Αναφέρεται στο «Ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά», σελ.28

[328] . JH, ο.π., σελ.32

[329] . D. Perkins, Το φαινόμενο «Εύρηκα»: Ο D. Perkins περιγράφει αυτά τα τέσσερα χαρακτηριστικά με βάση ένα ιστορικό γεγονός που έλαβε χώρα στην Αμερική στην περιοχή του Κλοντάικ όπου εντοπίσθηκε χρυσός. Το κυνήγι του χρυσού είναι προκλητικό με τέσσερις τρόπους και αυτοί οι τρόποι εντοπίζονται στην καινοτομική σκέψη, γράφει ο Perkins. Και συνεχίζει με την περιγραφή αυτών των τεσσάρων τρόπων, ώστε να κάνει πιο απτό το ερμηνευτικό του μοντέλο. Έτσι, διακρίνει την *έρημο των πιθανοτήτων*: υπάρχει λίγος χρυσός σε ένα τεράστιο χώρο με αποτέλεσμα λίγων χρυσοθήρων να επιβραβευθεί η προσπάθεια (κατά αναλογία στην επίλυση των προβλημάτων υπάρχουν πολλές προκλητικές κατευθύνσεις, αλλά λίγες πραγματικές λύσεις). Στη συνέχεια περιγράφει το *υψίπεδο χωρίς ίχνη*: αυτό σημαίνει την έλλειψη σημαδιών που να οδηγούν στο χρυσό (στη λύση των καινοτομικών προβλημάτων δεν υπάρχουν φανερά ίχνη που να δείχνουν την κατεύθυνση μιας λύσης). Το *στενό φαράγγι της εξερεύνησης* είναι αυτό που ακολουθεί:ο χρυσός μπορεί να βρίσκεται κάπου αλλού όλος μαζί-πέρα από αυτή την οροσειρά, στην επόμενη κοιλάδα (ο λύτης ψάχνει εντατικά για μια λύση, αλλά μέσα σε όρια που δεν περιέχουν τη λύση). Τέλος, συναντάμε την *όαση ψευδούς υπόσχεσης*:ο χρυσοθήρας βρίσκει το τωρινό σκηνικό πολύ δελεαστικό, ώστε να μπει στον κόπο να ψάξει κάπου άλλού (τα καινοτομικά προβλήματα δελεάζουν το λύτη με απαντήσεις αρκετά καλές αλλά όχι πλήρεις), σελ.70-72

[330] . D. Perkins, ο.π., σελ. 73-76

αιτιάσεις του Nicolle, όπως την παραθέσαμε παραπάνω, είναι σαφής: η τύχη μπορεί να υποβοηθήσει τη λύση ενός καινοτομικού ή μη προβλήματος υπό μια προϋπόθεση. Τα πνευματικά εφόδια του ίδιου του υποκειμένου (το παράδειγμα του γιατρού και των νοσοκόμων είναι χαρακτηριστικό). Διαφορετικά ο παράγοντας τύχη παύει να υπάρχει. Παίζουμε σε ένα δειγματικό χώρο με πιθανότητα μηδέν. **Αν δεν πάρουμε υπόψη μας αυτή την παράμετρο τότε κινδυνεύουμε να θεωρήσουμε την ανθρώπινη νόηση ως μια μηχανή, χωρίς καμία δυναμική και αλληλεπίδραση με τις κοινωνικές προκείμενες**.

Ας επανέλθουμε, όμως στον JH. Ο JH ενστερνίζεται την περιγραφή του P σύμφωνα με την οποία η φώτιση ακολουθεί ένα είδος νόμου, μια διακριτή διαδικασία. **Συγκεκριμένα, η φώτιση έρχεται αφού έχει προηγηθεί κοπιαστική και πολυήμερη εργασία που έχει εκούσιο χαρακτήρα.** Πρόκειται για προσπάθειες που αποβαίνουν άκαρπες. Τι ρόλο, όμως, παίζει σε αυτή τη διαδικασία το συνειδητό και το ασυνείδητο; Πώς επιτελείται η λειτουργία του εγκεφάλου που οδηγεί στην εμφάνιση της φώτισης; Αυτά τα ερωτήματα μοιάζουν (και είναι) σημαντικά και ο JH επιχειρεί να τα πραγματευθεί. Κατ' αρχήν ο JH ξεκαθαρίζει πως δεν μπορεί να αποδεχθεί την όποια μεταφυσική ερμηνεία γύρω από το ασυνείδητο. **Δεν αποδέχεται την άποψη του P βάση της οποίας «το εγώ που βρίσκεται κάτω από το κατώφλι της συνείδησης είναι ανώτερο από το συνειδητό».**[331] Ανοίγοντας εδώ μια παρένθεση, να πούμε πως σε άλλο σημείο, ο JH **φαίνεται** να εκφράζει μια εντελώς αντίθετη άποψη. Γράφει χαρακτηριστικά: «Ας ξεκινήσουμε από την αρχή, δηλαδή από την περίπτωση όπου οι άνθρωποι απλά συλλογίζονται με τον κοινό νου. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι τα περισσότερα τα προσφέρει το ασυνείδητο και είναι λίγες οι απαιτήσεις της περαιτέρω συνειδητής επεξεργασίας».[332] Μια προσεκτική ανάγνωση αυτού του αποσπάσματος, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει αντίφαση ανάμεσα στις δυο διαπιστώσεις του JH. Αυτό, γιατί διευκρινίζει ότι το ασυνείδητο υπερτερεί του συνειδητού στις περιπτώσεις συλλογισμού με τον κοινό νου, χωρίς να εμπλέκεται η μαθηματική σκέψη. Δεν ξέρουμε αν το δεύτερο συμπέρασμα ευσταθεί (για την υπεροχή του ασυνείδητου), πρόκειται όμως για κάτι διαφορετικό από την καθ' αυτό μαθηματική σκέψη.

Στη συνέχεια απορρίπτει με ξεκάθαρο τρόπο τις απόψεις του Αριστοτέλη, του Leibniz, του Schelling, του Fichte, του Myers και του James. Πρόκειται για απόψεις που δίνουν ένα ιδεαλιστικό περιεχόμενο στο ασυνείδητο με παραδοξότητες του τύπου «το ασυνείδητο μάς συνδέει με όλο το σύμπαν». Ταυτόχρονα, υπογραμμίζει πως δεν έχει κανένα νόημα να προβούμε σε δηλώσεις όπως «το ασυνείδητο υπερτερεί του συνειδητού ή αντίστροφα» γιατί τέτοιες αποφάνσεις στερούνται επιστημονικής στήριξης. Πρέπει, βέβαια, να πούμε ότι αυτή η διαπίστωση του JH μοιάζει να αναιρείται από τον ίδιο, αφού σε άλλο σημείο γράφει: «…δεν μπορούμε πλέον να θεωρούμε ότι το συνειδητό είναι υποδεέστερο του ασυνείδητου. Αντίθετα, το συνειδητό είναι εκείνο που δραστηριοποιείται και ορίζει, σε μεγάλο ή μικρό βαθμό, τη γενική κατεύθυνση προς την οποία το ασυνείδητο οφείλει να λειτουργήσει».[333] **Η διαπίστωση αυτή δίνει μια προτεραιότητα στη συνειδητή εργασία του μαθηματικού-και όχι μόνο αυτού-χωρίς ασφαλώς να αποκλείει την αλληλεπίδραση μεταξύ συνειδητού και ασυνείδητου.** Για να ερμηνεύσει τον τρόπο με τον οποίο αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οι δυο περιοχές, του συνειδητού και του ασυνείδητου, χρησιμοποιεί ένα παράδειγμα και πάλι από τον P. Ο P φανταζόταν τις ιδέες κάτι σαν καθηλωμένα άτομα του Επίκουρου. Η μελέτη ενός ζητήματος είναι αυτή που κινητοποιεί τα προηγουμένως ακίνητα άτομα και ορίζει τις μεταξύ τους συγκρούσεις. Έτσι, δεν επιστρέφουν στις αρχικές τους θέσεις και στην ηρεμία τους και συνεχίζουν ελεύθερα το χορό τους. Και αφού οι συγκρούσεις των ατόμων συνεχίζονται (βλέπε πολυπληθείς συνδυασμοί ιδεών) τότε «σ' αυτούς τους νέους συνδυασμούς, σ' αυτά τα έμμεσα αποτελέσματα της αρχικής συνειδητής εργασίας, στηρίζεται η δυνατότητα να πραγματοποιηθεί η φαινομενικά αυθόρμητη έμπνευση».[334]

Μια πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση σχετικά με το στάδιο της φώτισης συναντήσαμε στο βιβλίο «Τα μαθηματικά και ο εγκέφαλος» των J.-P. Changeux & Al.

---

[331] . JH, ο.π., σελ.50
[332] . JH, ο.π., σελ.103
[333] . JH, ο.π., σελ. 56
[334] . Δες JH, ο.π., σελ. 57

Connes. Σύμφωνα με τον πρώτο συγγραφέα, στην εμφάνιση της φώτισης φαίνεται να παίζουν σημαντικό ρόλο- εκτός από τη λογική επεξεργασία και ένα μηχανισμό δαρβινικής συνδυαστικής- και **κάποιες συγκινησιακές στρατηγικές**: « Πώς όμως πραγματοποιείται η επιλογή των διάφορων μαθηματικών αντικειμένων; Όταν μιλούσες για τα στάδια της εργασίας του μαθηματικού, ανέφερες και τη φώτιση που εμφανίζεται έπειτα από μια φάση επώασης κατά τη διάρκεια της οποίας φαίνεται πως συντελείται μια δαρβινική συνδυαστική. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι η φώτιση συμπίπτει με την έλευση συντονισμού μεταξύ νοητικών παραστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι ο μετωπιαίος φλοιός, όπου πιθανότατα συντελείται αυτός ο συντονισμός, συνδέεται απ' ευθείας με το μεταιχμιακό σύστημα που εμπλέκεται στις συγκινησιακές καταστάσεις. Ο μετωπιαίος φλοιός του εγκεφάλου μας όχι μόνο επεξεργάζεται στρατηγικές γνωστικού τύπου, αλλά είναι επίσης σε θέση-χάρη στις πολύ πλούσιες συνδέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε αυτόν και στο μεταιχμιακό σύστημα- να αναπτύσσει συγκινησιακές στρατηγικές. Πιστεύω ότι και ο μαθηματικός, παράλληλα με τις ορθολογικές στρατηγικές, πρέπει να αναπτύσσει και κάποιες συγκινησιακές στρατηγικές οι οποίες τον κάνουν να ελπίζει πώς θα φτάσει στο αποτέλεσμα. Κατά το στάδιο της φώτισης, οι συντονισμοί εξαπλώνονται στο μετωπιαίο φλοιό φθάνουν ως το μεταιχμιακό σύστημα έτσι ώστε θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι συγκινησιακή κατάσταση συμβάλλει στην αξιολόγηση…».[335] Τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν, πάντως, ότι η διαπίστωση πως το συναίσθημα παίζει σημαντικό ρόλο στις αποφάσεις έχει βάση. Έντονες συναισθηματικές καταστάσεις ή στρεσογόνες συνθήκες είναι δυνατό να αλλάξουν τον τρόπο λειτουργίας του εγκεφάλου και μάλιστα με θεαματικό τρόπο, κάποιες φορές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτέλεσαν[336] οι βετεράνοι του Βιετνάμ, οι οποίοι υπέφεραν από μετατραυματική διαταραχή άγχους.

Εν κατακλείδι, το ζήτημα της φώτισης είναι ένα προς εξέταση ζήτημα που πρέπει να το δούμε υπό την οπτική της λειτουργίας του εγκεφάλου, αλλά και των συνθηκών μέσα στις οποίες λειτουργεί ο επιστήμονας. **Η επιστημονική πρόοδος σε αυτή την κατεύθυνση, πιστεύουμε πως θα διαλύσει οποιοδήποτε ίχνος μυστικισμού και διαπιστώσεις του τύπου «τα ασυνείδητα στοιχεία της σκέψης δεν έχουν την αρχή τους μέσα μας και μας συνιστούν μετόχους του θείου» (Αριστοτέλης), ή «μας συνδέουν με τον κόσμο των πνευμάτων» (Φίχτε, Σέλιγκ), ή ακόμα και «των διαβόλων» (φον Χάρτμαν), θα έχουν δεχτεί άλλο ένα ισχυρό πλήγμα.** Άλλωστε δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι **«στα μαθηματικά, το καλύτερο μέρος της έμπνευσης προέρχεται από την εμπειρία και …είναι σχεδόν αδύνατο να πιστέψουμε στην απόλυτη ιδέα μιας αμετάβλητης μαθηματικής ακαμψίας, ασύνδετης με κάθε ανθρώπινη εμπειρία».[337]**

Ε2.4: <u>Το τέταρτο στάδιο</u>

Αφού ο μαθηματικός διαβεί τα τρία στάδια (προπαρασκευή, επώαση, φώτιση) τα οποία περιγράφηκαν από τον Ρ και τα οποία αποδέχεται ο συγγραφέας, τότε συναντάει και ένα τέταρτο (τελικό) στάδιο μπροστά του. Πρόκειται για μια νοητική διεργασία που πραγματοποιείται στο επίπεδο του συνειδητού. Αυτή η νέα παρέμβαση της συνείδησης είναι αναγκαία για τους εξής λόγους: α) για τον προφανή σκοπό της προφορικής ή γραπτής έκφρασης των αποτελεσμάτων, β) για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων, γ) για το τελείωμα των αποτελεσμάτων, δηλαδή την ακριβή διατύπωσή τους και δ) για τη συνέχιση της εργασίας με τη χρήση των αποτελεσμάτων-κόμβων.[338]

Το τέταρτο στάδιο, δε δείχνει τίποτα άλλο παρά την αέναη διαδικασία της μαθηματικής σκέψης και της επιστημονικής σκέψης εν γένει. Κάθε φορά η ολοκλήρωση της διαδικασίας των τριών αρχικών σταδίων είναι μια σχετική ολοκλήρωση, αφού τίθενται οι βάσεις για μια επανεκκίνηση της νόησης. Στο τέταρτο στάδιο έχουμε κατακτήσει ένα συγκεκριμένο επίπεδο σκέψης και είμαστε πλέον έτοιμοι να ανέβουμε σε ένα νέο.

---

[335] . Ο.π., σελ.155
[336] .Εύα Γαλανάκη, Συνειδητότητα: ένα ανεξιχνίαστο μυστήριο, περιοδικό «Περισκόπιο», τ.190
[337] . John von Neumann, Εγκυκλοπαίδεια Life, τόμος Μαθηματικά, σελ.175
[338] . JH, ο.π., σελ. 65-71

Ε3: Σύγχρονες θεωρήσεις σχετικά με τα στάδια σκέψης και την ανακάλυψη

Παρόμοιες θεωρήσεις με αυτές του Ρ και του JH συναντάμε και σήμερα. Ο D. Perkins προτείνει ένα σκαρίφημα που διακρίνεται από μια πενταπλή δομή. Ας το δούμε:

1. **Μακροχρόνια έρευνα.** Η καινοτομική σκέψη απαιτεί μακρά έρευνα. Ο Αρχιμήδης πάλεψε με το πρόβλημα του Ιέρωνα. Ο Λεονέρντο ντα Βίντσι ασχολήθηκε ατελείωτα με την πτήση και οι αδελφοί Ράιτ αφιερώθηκαν για χρόνια στην αναζήτησή τους.
2. **Φαινομενικά μικρή πρόοδος.** Μια τυπική καινοτομία προκύπτει μετά από μικρή ή καθόλου πρόοδο […].
3. **Αιφνίδιο γεγονός.** Μια τυπική καινοτομία ξεκινάει με ένα αιφνίδιο γεγονός. Μερικές φορές εξωτερικές περιστάσεις σηματοδοτούν αυτή τη στιγμή: Το νερό ξεχειλίζει στο λουτρό του Αρχιμήδη […].
4. **Αναλαμπή γνώσης.** Η καινοτομία έρχεται ταχύτατα, ένα είδος φώτισης, μια αναλαμπή γνώσης. Λίγος χρόνος χωρίζει το αιφνίδιο γεγονός από τη λύση, ακόμα και αν οι λεπτομέρειες απομένουν για να ελεγχθούν. Αυτό είναι το κλασικό «Εύρηκα» του Αρχιμήδη[…].
5. **Μετασχηματισμός.** Η καινοτομία μετασχηματίζει το διανοητικό ή φυσικό μας κόσμο με παραγωγικό τρόπο. Ο Αρχιμήδης βεβαίως δεν είχε τίποτα σαν την αρχή της άνωσης του ύδατος στο μυαλό του, πριν από το λουτρό του […].[339]

Το παραπάνω μοντέλο απέχει πολύ από το να αποτελεί μια ολοκληρωμένη θεωρία της καινοτόμας σκέψης. Ωστόσο, το αναφέραμε για να δείξουμε την πολύ δυνατή σκέψη τόσο του Ρ όσο και του JH, αφού μισό αιώνα και πλέον πίσω επινόησαν ένα μοντέλο της μαθηματική σκέψης που δεν έχει ουσιαστικές διαφορές από σύγχρονα.

Ε4: Η σκέψη και οι σχέση της με τις αναπαραστάσεις

Ο προβληματισμός που θέλει να αναδείξει τη σχέση η οποία υπάρχει ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη και στη γλώσσα, τις λέξεις και τις εικόνες, κατέχει μια ιδιαίτερη θέση κι έκταση στο σύγγραμμα του JH. Επιχειρώντας μια κωδικοποίηση των ιδεών του συγγραφέα για το εν λόγω ζήτημα, διακρίνουμε:

1) Τη δυνατότητα της ανθρώπινης σκέψης να συλλαμβάνει ιδέες χωρίς ουσιαστικά να παρεμβαίνουν οι λέξεις.[340]

2) Την περιγραφή της σχέσης πλήρους και περιφερικής συνείδησης (υποσυνείδητο, δηλαδή, ένα είδος προθαλάμου του συνειδητού). Κατά τον JH η λογική διαδικασία δε λαμβάνει χώρα στην περιοχή της συνείδησης, ούτε οι αντίστοιχες εικόνες υπάρχουν στο υποσυνείδητο, αλλά συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο.[341]

3) Την αντικατάσταση των μαθηματικών συμβόλων όταν πραγματευόμαστε ένα μαθηματικό πρόβλημα με ασαφείς εικόνες.[342] Μάλιστα, πρόκειται για ένα κυρίαρχο τρόπο σκέψης που υπάρχει ανάμεσα στους μαθηματικούς, ενώ σπανίζουν οι περιπτώσεις στις οποίες γίνεται εκτενής χρήση των μαθηματικών συμβόλων, πάντα κατά το συγγραφέα.[343]

4) Το φαινόμενο κατά το οποίο στο άκουσμα μιας λέξης δε μας εντυπώνεται στο νου κάποια συγκεκριμένη εικόνα, αλλά μας παρουσιάζεται τυπωμένη η ίδια η λέξη. Μάλιστα για να φαντασθούμε την ίδια τη εικόνα απαιτείται επίπονη προσπάθεια.[344]

Με αφορμή αυτήν την καταγραφή, ο JH διαπιστώνει-και νομίζουμε σωστά- ότι τελικά δεν υπάρχει ενιαίος τρόπος σκέψης. Κι επειδή ακριβώς υπάρχει αυτή η διαφορά, οι άνθρωποι δυσκολεύονται να κατανοήσουν πώς είναι δυνατόν κάποιος άλλος να σκέφτεται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που οι ίδιοι διαθέτουν.

5) Την υιοθέτηση της άποψης ότι η γλώσσα είναι ένα σύστημα σημείων. Αυτά τα σημεία ή σύμβολα διακρίνονται σε συμβατικά σημεία που είναι δανεισμένα από την κοινωνική

---

[339] . D. Perkins, Το φαινόμενο «Εύρηκα», σελ.23-24
[340] . JH, ο.π., σελ. 75-76
[341] . JH, ο.π., σελ. 86-87
[342] . JH, ο.π., σελ. 83-84,88
[343] . JH, ο.π., σελ. 89-90
[344] . JH, ο.π., σελ. 95

σύμβαση και σε προσωπικά σημεία που με τη σειρά τους υποδιαιρούνται σε σταθερά που ανήκουν σε γενικές συνήθειες, στον ιδιαίτερο τύπο ενός ανθρώπου, και σε επεισοδιακά, το οποία δημιουργούνται επί τούτω και συμμετέχουν σε μια και μόνο δημιουργική πράξη.[345]

Στο «πυκνό», από νοήματα, κείμενο του JH μπορεί κανείς να εντοπίσει σημεία συμφωνίας αλλά και αντίθεσης. Σε αυτά τα δεύτερα θέλουμε να σταθούμε.

Κατά τη γνώμη μας ο συλλογισμός που λέει ότι έχουμε τη δυνατότητα να σκεφτόμαστε συνειδητά χωρίς να χρησιμοποιούμε τις λέξεις δε νομίζουμε ότι ευσταθεί. **Πρώτον, γιατί μπορεί να έχουμε την εντύπωση ότι δε χρησιμοποιούμε λέξεις ενώ με ένα ασυνείδητο τρόπο να το κάνουμε. Δεύτερο, γιατί έτσι κι αλλιώς οι εικόνες που χρησιμοποιούμε για να σκεφθούμε δεν είναι ανεξάρτητες από την πραγματικότητα που βιώνουμε και άρα από την ίδια τη γλώσσα που είναι προϊόν της (της πραγματικότητας).**

Η άποψη που τοποθετεί τη λειτουργία της λογικής στο υποσυνείδητο, πάλι μας φαίνεται πως δεν ευσταθεί. Μοιάζει να είναι μια μηχανιστική θεώρηση, αφού είναι σα να έχουμε στη φαρέτρα του υποσυνείδητου τα βέλη της λογικής τα οποία εκτοξεύονται ανεξάρτητα αν εμείς το επιζητούμε ή όχι. Τις λογικές διαδικασίες, τις οποίες, έχει η ανθρώπινη σκέψη κατακτήσει στο πέρασμα των αιώνων, υπάρχουν περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε με έναν «αυθόρμητο» τρόπο, αλλά δε συμβαίνει πάντα έτσι. Συχνά, με πολύ συνειδητό τρόπο, γίνεται χρήση τους για να καταλήξουμε σε αυτό ή το άλλο συμπέρασμα.

Οι ασαφείς εικόνες που χρησιμοποιούμε για να καταλήξουμε σε ένα συλλογισμό, δεν είναι τίποτα άλλο παρά νοητικές αφαιρέσεις, ώστε σε μια πρώτη φάση της σκέψης μας να διακρίνουμε το κύριο, απορρίπτοντας προσωρινά όλα εκείνα τα στοιχεία που είναι δευτερεύοντα και αποτελούν σε μια αρχική ανάγνωση λεπτομέρειες. Αυτό το επισημαίνουμε, όχι γιατί ο συγγραφέας λέει κάτι διαφορετικό, αλλά γιατί έτσι όπως παρουσιάζει εκείνο τον τρόπο σκέψης που συντελείται μέσω ασαφών εικόνων, αυτές μοιάζουν (οι εικόνες) ως να είναι αυθύπαρκτες οντότητες που με ένα ανεξήγητο τρόπο κάνουν την εμφάνισή τους.

Το συμπέρασμα για την ύπαρξη σκέψης χωρίς γλώσσα, δεν είναι ασφαλώς θεωρητική καινοτομία του JH. Πρόκειται για μια καρτεσιανή αντιμετώπιση του ζητήματος που παρόμοιά της μπορούμε να βρούμε σε διάφορους διανοητές και που παραπέμπει άλλοτε άμεσα κι άλλοτε έμμεσα σε ένα δυϊσμό. Τη χαρακτηριστικότερη περίπτωση αυτής της σχολής σκέψης την αποτελεί ο Piaget. Αναφέρουμε, ακόμα τον B. L. Van der Waerden, σύμφωνα με τον οποίο απόδειξη της απόλυτης αυτοτέλειας της σκέψης είναι πως στη γεωμετρική σκέψη η γλώσσα παρεμβαίνει μόνο εκ των υστέρων, όταν δίνουμε ένα όνομα σε κάποια γεωμετρική ενότητα.[346] Νομίζουμε ότι πρόκειται για μια άποψη εντονότατα επηρεασμένη από τον Καντ, που εξέφραζε την άποψη ότι «η γεωμετρία θέτει ως υπόβαθρο την καθαρή εποπτεία του χώρου» και «τα καθαρά μαθηματικά (σ.σ. κατασκευάζουν τις έννοιες τους) μέσα στην καθαρή εποπτεία».[347]

Θα λέγαμε, καταληκτικά, πως όλες αυτές οι θεωρήσεις του συγγραφέα έρχονται σε αντίθεση με μια βιγκοτσκική αντίληψη με την οποία εμείς συμφωνούμε: « Σκέψη και γλώσσα δε συνδέονται λοιπόν μεταξύ τους με δεσμά που υπάρχουν εξ' αρχής. Αυτή η σύνδεση δημιουργείται, μεταβάλλεται και εξαπλώνεται γοργά προς όλες τις πλευρές στην πορεία της εξέλιξης. **Θα ήταν όμως λαθεμένο να φαντασθούμε τη νόηση και τη γλώσσα ως δυο ανεξάρτητες μεταξύ τους δυνάμεις που πορεύονται παράλληλα ή τέμνονται σε συγκεκριμένα σημεία του δρόμου τους κι έτσι αλληλοεπηρεάζονται μηχανικά. Η απουσία μιας πρωτογενούς συνάφειας ανάμεσα στη σκέψη και στη λέξη δε σημαίνει καθόλου ότι μπορεί αυτές μπορούν να παραχθούν μόνο μέσω μιας εξωτερικής σύνδεσης, ως δυο ουσιαστικά ετερογενείς δραστηριότητες της συνείδησης**[...] Γενίκευση και λεκτική σημασία είναι συνώνυμα. Κάθε γενίκευση, όμως, κάθε μετασχηματισμός έννοιας είναι μια ειδική και αδιαμφισβήτητη νοητική πράξη. Κατά συνέπεια έχουμε το δικαίωμα να θεωρούμε τη λεκτική σημασία ως φαινόμενο της σκέψης. Επομένως η σημασία της λέξης είναι ταυτόχρονα ένα

---

[345] . JH, ο.π., σελ. 99-100

[346] . Αναφέρεται στο «Γλώσσα και Γνώση», Adam Schaff, σελ.168

[347] . Καντ, προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, σελ. 61

γλωσσικό και ένα νοητικό φαινόμενο. Η σημασία της λέξης είναι φαινόμενο της σκέψης μόνο στο βαθμό που η σκέψη είναι συνδεδεμένη και ενσαρκωμένη στη λέξη-και το αντίθετο: είναι ένα φαινόμενο της γλώσσας μόνο στο βαθμό που η γλώσσα συνδέεται με τη σκέψη και φωτίζεται από αυτήν. **Είναι ένα φαινόμενο της γλωσσικά αρθρωμένης σκέψης ή της εννοηματωμένης γλώσσας, είναι η ενότητα λέξης και σκέψης»**[348], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Παρόμοιες αντιλήψεις με αυτές του Βιγκότσκι, εξέφρασε και ο van Hiele: «χωρίς τη γλώσσα η σκέψη δεν είναι δυνατή, χωρίς τη γλώσσα δεν υπάρχει εξέλιξη των επιστημών».[349] Προς ενίσχυση αυτών των απόψεων θα θέσουμε ορισμένα ερωτήματα: Μπορούμε να φανταστούμε, άραγε, έναν κωφάλαλο να σκέφτεται όπως οι υπόλοιποι, αν τον απομονώσουμε από την ώρα που θα γεννηθεί, χωρίς να έχει τη δυνατότητα επικοινωνίας; Μπορούμε, ακόμα, να φανταστούμε έναν άνθρωπο ο οποίος γεννήθηκε κωφάλαλος και τυφλός κι ενώ ζει ανάμεσά μας να σκέφτεται όπως κι εμείς? Μάλλον δύσκολα μπορεί κάποιος να δώσει καταφατική απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα.

Ακόμα, κι αν δεχθούμε την άποψη του Τσόμσκι για ένα μηχανισμό απόκτησης της γλώσσας έμφυτο στους ανθρώπους[350] θα πρέπει να πάρουμε τις αποστάσεις μας από την όποια ιδεαλιστική ερμηνεία. Αν υπάρχει, λοιπόν, ένας τέτοιος μηχανισμός οφείλουμε να εξηγήσουμε με ποιο τρόπο αποκτήθηκε, σε ποιο στάδιο της εξέλιξης του ανθρώπου, τι ρόλο έπαιξαν ίσως κάποιοι τυχαίοι παράγοντες κ.α. Θα πρέπει ακόμα να αποφύγουμε μηχανιστικές θεωρήσεις: «Στην προσέγγισή του (σ.σ. του Τσόμσκι), που βασίζεται στα τυπικά συστήματα, η κύρια υπόθεση είναι ότι οι κανόνες είναι ανεξάρτητοι από τη σημασιολογία. Η γλώσσα, από αυτήν τη άποψη, είναι ανεξάρτητη από τη υπόλοιπη γνωστική λειτουργία. Πρέπει να διαφωνήσω με αυτήν την ιδέα. Το σύνολο των κανόνων που διαμορφώθηκαν με βάση την ιδέα ότι η γραμματική είναι ένα τυπικό σύστημα είναι ουσιαστικά αλγοριθμικό. Σ' ένα τέτοιο σύστημα, δε γίνεται καμία χρήση της σημασίας. Η λεγόμενη γενετική γραμματική του Τσόμσκι δέχεται ότι η σύνταξη είναι ανεξάρτητη από τη σημασιολογία και ότι η γλωσσική ικανότητα είναι ανεξάρτητη από εξωτερικές γνωστικές ικανότητες. Αυτός ο ορισμός της γραμματικής είναι απρόσβλητος σε κάθε προσπάθεια κατάρριψής του με αναφορά στα δεδομένα που υπάρχουν για τη γνωστική λειτουργία εν γένει. Μια γλώσσα που ορίζεται ως σύνολο αλληλουχιών ανερμήνευτων συμβόλων που δημιουργούνται από κανόνες παραγωγής, μοιάζει με μια γλώσσα υπολογιστή. Για να αποδοθεί στα σύμβολα σημασιολογική σημασία, πρέπει να αντιστοιχιστούν με τον πραγματικό κόσμο ή με μια γλώσσα της σκέψης, τα νοησιακά».[351]

Τελικά, ο προβληματισμός γύρω από τη σχέση σκέψης-γλώσσας καταλήγει σε ένα καίριο πρόβλημα: Από ποιους παράγοντες επηρεάζεται η σκέψη; Ο Edelman απαντάει ως εξής: «Οι Searle, Lakoff, Johnson και άλλοι (ανάμεσά τους κι εγώ), επισήμαναν ότι η σκέψη δεν είναι υπερβατική αλλά εξαρτάται αυστηρά από το σώμα και τον εγκέφαλο. Αυτή η θέση είναι διαμετρικά αντίθετη από εκείνη του λειτουργισμού, που δέχεται ότι η πραγμάτωση του λογικισμού είναι ανεξάρτητη από το υλικό υπόστρωμα. Σύμφωνα με αυτούς που απορρίπτουν το λειτουργισμό η νόηση είναι ενσαρκωμένη. Η νόηση ακολουθεί αναγκαστικά ορισμένα προστάγματα του σώματος».[352] Η παραπάνω άποψη δε μας βρίσκει σύμφωνους, ή για να είμαστε ακριβείς μας βρίσκει εν μέρει σύμφωνους. Δεν τοποθετούμαστε από μια οπτική υπεράσπισης του λειτουργισμού, αλλά νιώθουμε ότι η άποψη του Edelman μοιάζει ελλιπής και χρήζει παραπέρα επεξεργασίας και συμπλήρωσης. Η σκέψη δεν είναι δυνατό να ειδωθεί μέσα από ένα πρίσμα που δε θα συμπεριλαμβάνει τον παράγοντα κοινωνία κι αυτός είναι ένας παράγοντας που έχει τη σχετική του αυτοτέλεια και ασφαλώς δεν ταυτίζεται με το βιολογικό παράγοντα.

«Κλείνοντας» αυτή την ενότητα προβληματισμών θα κάνουμε μια αναφορά στον κυρίαρχο τρόπο σκέψης των μαθηματικών: το συλλογισμό με τη χρήση εικόνων ή την αντικατάσταση των μαθηματικών συμβόλων με ασαφείς εικόνες, όπως λέει ο JH. Αναφερόμενος στον τρόπο με τον οποίο σκεφτόταν ο Euler γράφει: «Αναπαριστά γενικές ιδέες με κύκλους. Αν σκεφτούμε δυο κατηγορίες αντικειμένων , A και B, τέτοιες ώστε κάθε A

---

[348] . Λεβ Βιγκότσκι, Σκέψη και Γλώσσα, σελ.355-358
[349] . Van Hiele, Structure and Insight
[350] . Δες χαρακτηριστικά, Ν. Τσόμσκι, «Η αρχιτεκτονική της γλώσσας» και «Συντακτικές δομές»
[351] . G. Edelman, Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά, σελ. 371
[352] . G. Edelman, Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά, σελ. 365

να είναι Β, θα φανταστούμε ένα κύκλο Α να βρίσκεται μέσα σε ένα κύκλο Β. Αν, αντίθετα μας πουν ότι κανένα Α δεν είναι Β, θα φανταστούμε τον κύκλο Α τελείως έξω από τον κύκλο Β, ενώ αν μερικά Α είναι Β και μερικά όχι, οι δυο κύκλοι πρέπει να τέμνονται».[353]

Η κυρίαρχη τάση για χρησιμοποίηση αναπαραστάσεων για τη λύση και κατανόηση μαθηματικών προβλημάτων δείχνουν μια τάση της νόησης προς υιοθέτηση αφαιρετικών εργαλείων που διευκολύνει στην κατάκτηση του αντικειμένου από το υποκείμενο. Πρόκειται για ένα φαινόμενο που μάλλον δεν έχει να κάνει με τη στάθμη ευφυΐας του υποκειμένου, αφού η χρήση των αναπαραστάσεων γίνεται τόσο από μεγαλοφυΐες- όπως ο Euler - όσο και από ανθρώπους με μέσο επίπεδο ευφυΐας. Πιθανότατα, η χρήση ή η απουσία των αναπαραστάσεων καθώς και το είδος τους, να εξαρτάται και από το γενικότερο πολιτισμικό περιβάλλον μέσα στο οποίο ζει και λειτουργεί το υποκείμενο. Τούτο έγινε ιδιαίτερα διακριτό από τις έρευνες του Λούρια. Ο Λούρια χρησιμοποίησε ως ομάδα μελέτης αναλφάβητους χωρικούς και ως ομάδα σύγκρισης νέους που είχαν παρακολουθήσει βραχείας διάρκειας μαθήματα. Τα προβλήματα που τέθηκαν ήταν του τύπου: «Το Α απέχει από το Β πέντε χιλιόμετρα, το Β από το Γ απέχει τρία χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το Α από το Γ?». Τα προβλήματα συνοδεύονταν από αναπαραστάσεις δυο ειδών: το ένα είδος αναπαριστούσε τις πραγματικές αποστάσεις των χωριών με αναλογικό τρόπο, ενώ στο άλλο είδος η αναπαράσταση δεν ανταποκρινόταν στις πραγματικές αποστάσεις. Επομένως η επίλυση του προβλήματος στη δεύτερη περίπτωση απαιτούσε μια περισσότερο αφαιρετική σκέψη και η αποκόλληση από τις αναπαραστάσεις. Οι αναλφάβητοι χωρικοί έδειξαν μεγάλη αδυναμία στην επίλυση του προβλήματος σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση σε αντίθεση με την ομάδα των εκπαιδευμένων νέων.[354]

Ε5: <u>Τα διαφορετικά είδη μαθηματικού πνεύματος</u>

Απαντώντας στο ερώτημα αν όλοι οι μαθηματικοί σκέφτονται με τον ίδιο τρόπο, ο JH χρησιμοποιεί τη γνωστή διάκριση σε ενορατιστές και λογικιστές. Επικρίνει εκείνες τις θεωρήσεις σύμφωνα με τις οποίες η διάκριση αυτή παίρνει ένα κοινωνικοπολιτικό χαρακτήρα. Συγκεκριμένα ασκεί κριτική στον Klein ο οποίος ισχυριζόταν ότι μια ισχυρή ενόραση του χώρου χαρακτηρίζει την τευτονική φυλή, ενώ η κριτική, καθαρά λογική αίσθηση είναι περισσότερο αναπτυγμένη στη λατινική κι εβραϊκή φυλή.[355]

Στη σχέση, ωστόσο, λογικής-ενόρασης διαβλέπει μια υπεροχή κατά κάποιο τρόπο της ενόρασης, με την έννοια ότι η λογική ακολουθεί μιαν αρχική ενόραση.[356] Συγχρόνως, γράφει: «…αν θέλουμε να ακριβολογήσουμε, δεν υπάρχει καμία ανακάλυψη προερχόμενη καθαρά από τη λογική και μόνο. Η παρέμβαση της ενόρασης, που πηγάζει από το ασυνείδητο, είναι αναγκαία τουλάχιστον για την έναρξη της λογικής εργασίας».[357]

Σε σχέση με τα παραπάνω, δεν είναι τόσο ότι έχουμε κάποια αντίρρηση με τα αποφθέγματα του συγγραφέα αλλά ούτε και συμφωνία. Το λέμε αυτό υπό το πρίσμα ότι ο JH παρουσιάζει σαφώς ένα εννοιολογικό κενό. Τι ακριβώς σημαίνει λογική και τι ενόραση; Πώς συνδέονται, αν συνδέονται, μεταξύ τους; Ποιοι φιλοσοφικοί διαξιφισμοί έχουν καταγραφεί γύρω από αυτές τις έννοιες; Αν, λοιπόν, κάποιος θέλει να πάρει θέση σχετικά με τους «ενορατιστές» και «λογικιστές», οφείλει να δώσει απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, κάτι που ο συγγραφέας δεν επιχειρεί.

Ας καταγράψουμε ένα πρώτο προβληματισμό, σχετικά με την έννοια της ενόρασης, με σκοπό να δείξουμε το κενό της ανάλυσης του JH. Ας δούμε τον τρόπο που ο ΔΥ ορίζει την ενόραση:

« Υπάρχουν **αντικείμενα** με τα οποία οι άνθρωποι βρίσκονται, σε αλληλεπίδραση. Το υποκείμενο έχει **δυνατότητες** να αλληλεπιδρά με τα αντικείμενα, να τα αποδέχεται, δηλαδή να τα **αντανακλά.** Με αυτές τις δυνατότητές του δημιουργεί **εικόνες** για τα **αντικείμενα.** Μ' αυτές μπορεί να **ανακαλύψει** στα αντικείμενα φαινόμενα, που να έχουν **αρμονία** και να

[353] . JH, ο.π., σελ. 83
[354] . Α. Λούρια, Γνωστική ανάπτυξη, σελ. 131-148
[355] . Δες JH, ο.π., σελ. 109
[356] . JH, ο.π., σελ. 113
[357] . JH, ο.π., σελ. 113-114

δημιουργήσει την εικόνα, δηλ. το **έργο** γι' αυτά τα φαινόμενα. Τότε λέμε ότι έχει **ικανότητα , ταλέντο** δημιουργίας. Κατά τη διάρκεια της δημιουργίας του έργου, της εικόνας, ξεχωρίζει, **αφαιρεί** την αρμονία που υπάρχει στο αντικείμενο. Η ανακάλυψη και επινόηση της αρμονίας γίνονται με ανάλογη προδιάθεση, με προετοιμασία του υποκειμένου να εκδηλώσει τα προσόντα του προς την αρμονία του αντικειμένου. Η δυνατότητα δημιουργία της κατάστασης, κατά την οποία γίνεται αισθητή η ανακάλυψη, δηλ. η ύπαρξη της αρμονίας, αποτελεί την **ενόραση**»[358], (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα). Η ενόραση, λοιπόν, σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση απογυμνώνεται από ένα τυχόν μυστικιστικό χαρακτήρα και βρίσκει μιαν επιστημονική ερμηνεία.

Αντίστοιχους προβληματισμούς μπορούμε να θέσουμε σε σχέση και με τη σχολή των «λογικιστών», εκτιμάμε, όμως, ότι στο ζήτημα έχουμε ήδη αναφερθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο για την έννοια της λογικής. **Τελικά, αυτός ο διαφορετικός τρόπος αντιμετώπισης των μαθηματικών, η ύπαρξη διαφορετικών φιλοσοφικών σχολών, οι διαφοροποιήσεις εντός αυτών, σημαίνουν επηρεασμό από φιλοσοφικές προκείμενες, επηρεασμό από ένα γενικότερο ιστορικό πλαίσιο, διαφορετικές λειτουργίας του εγκεφάλου ή γιατί όχι, ένα συνδυασμό όλων αυτών των παραμέτρων (ή εν πάση περιπτώσει συνδυασμό ενός μέρους τους);** Ο JH δεν απαντά σε τέτοια ερωτήματα, αλλά, πρέπει να πούμε ότι, τουλάχιστον, τα προκαλεί.

Ε6: <u>Τα δυο είδη επινόησης</u>

Ο JH διαπιστώνει δυο είδη επινοήσεων στη μαθηματική δραστηριότητα. Πρόκειται για ένα διαχωρισμό που είχε προτείνει ο Claparede και που ο συγγραφέας υιοθετεί: α) το πρώτο είδος επινόησης συνίσταται στην ανεύρεση των μέσων με τα οποία θα φτάσουμε σε ένα δεδομένο στόχο και β) το δεύτερο συνίσταται στην ανακάλυψη ενός γεγονότος και στην προσπάθεια να φανταστούμε τη χρησιμότητά του (ως χαρακτηριστικό παράδειγμα, αναφέρεται η ενασχόληση των αρχαίων Ελλήνων με τις κωνικές τομές που βρήκαν εφαρμογή δυο χιλιάδες χρόνια αργότερα από τον Kepler).

Ένα στοιχείο που διακρίνεται συχνά στο δεύτερο είδος επινόησης είναι ότι « οι πρακτικές εφαρμογές των καθαρά επιστημονικά ανακαλύψεων, όσο σημαντικές κι αν είναι, συνήθως έρχονται έπειτα από μακρό χρονικό διάστημα (αν και τα τελευταία χρόνια αυτή η καθυστέρηση έχει μειωθεί σημαντικά…). Σπάνια αναλαμβάνονται **άμεσα** σημαντικές μαθηματικές έρευνες εν όψει μιας δεδομένης πρακτικής χρησιμότητας» (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[359] Σε αυτό το είδος επινόησης τα πράγματα γίνονται κάπως περίπλοκα. Πώς είναι δυνατό ενώ δε διακρίνουμε κάποιες σχέσεις γύρω μας, αυτές να τις εκφράζουμε μέσω των μαθηματικών και μάλιστα να αναδύεται η αντιστοιχία τους με την πραγματικότητα, πολλές φορές ακόμα και χιλιάδες χρόνια αργότερα; Οι ισορροπίες σε αυτό το σημείο είναι λεπτές. Μπροστά μας βρίσκεται ένας πλατωνικός ρεαλισμός: οι μαθηματικές ιδέες ενταγμένες στον ευρύτερο κόσμο των ιδεών περιμένουν το μαθηματικό να τις ανακαλύψει. Η αλήθεια τους, ωστόσο, δεν εξαρτάται από τη δυνατότητα του μαθηματικού να τις ανακαλύψει. Ο μαθηματικός δεν εφευρίσκει μαθηματικές ιδέες, ακριβώς γιατί αυτές είναι αχρονικές οντότητες και ανεξάρτητες από τον οποιοδήποτε φορμαλισμό. Οι μαθηματικές ιδέες είναι οντολογικά πρότερες των εμπειρικών εφαρμογών. Αυτό μας δείχνει, θα μπορούσε κάποιος να υποστηρίξει, η ιστορία των κωνικών τομών, των φανταστικών αριθμών, των μη ευκλείδειων γεωμετριών κ.λπ. Ο πλατωνικός ρεαλισμός μοιάζει ακλόνητος έχοντας μια τέτοια επιχειρηματολογία. Η ουσία, όμως, δεν είναι αν μοιάζει, αλλά, αν είναι. Και σε αυτό το σημείο επανέρχεται με ένα πεισματικό τρόπο το ερώτημα «τι είναι τα μαθηματικά;». Ανοίγοντας μια παρένθεση θα κάνουμε μια ακόμα υπόμνηση της άποψης του Engels σχετικά με τα μαθηματικά: « Όπως την έννοια του αριθμού , έτσι και την έννοια του σχήματος την έχουμε πάρει αποκλειστικά από τον εξωτερικό κόσμο, και δεν ξεπήδησε καθόλου από το κεφάλι μας σαν προϊόν δήθεν της καθαρής σκέψης. Έπρεπε πρώτα να υπάρξουν πράγματα που να έχουν κάποια μορφή και να γίνει η σύγκριση των μορφών τους από τον άνθρωπο, για να μπορέσουμε να

[358] . Ljubomir Iliev, Μαθηματικά και ανάπτυξη, σελ.140-141
[359] . JH, ο.π., σελ. 125-126

φτάσουμε στην έννοια του σχήματός τους. Τα καθαρά μαθηματικά λοιπόν έχουν σαν αντικείμενο τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις των αντικειμένων του πραγματικού κόσμου, δηλαδή ένα υλικό πάρα πολύ πραγματικό. Το γεγονός όμως ότι αυτό το πραγματικό υλικό εμφανίζεται με μορφή εξαιρετικά αφηρημένη, σκεπάζει μόνο επιφανειακά την καταγωγή του από τον εξωτερικό κόσμο. Για να μπορέσουμε όμως να μελετήσουμε αυτές τις μορφές και τις σχέσεις στην καθαρότητά τους, πρέπει να τις αποσπάσουμε εντελώς από το αντικειμενικό τους περιεχόμενο, να παραμερίσουμε σαν κάτι αδιάφορο αυτό το περιεχόμενο».[360]

Ο ορισμός απαντά, θα μπορούσε να αντιτείνει κάποιος, στο τι είναι εφαρμοσμένα μαθηματικά. Δεν είναι όμως πειστικός για το τι είναι θεωρητικά μαθηματικά και τι ακριβώς είναι εκείνα τα μαθηματικά που τα επινοούμε, χωρίς να έχουν άμεση εφαρμογή. **Πώς ο νους τα συλλαμβάνει; Πού αντιστοιχούνε; Αν κάποτε βρούνε εφαρμογή με ποιο τρόπο επινοήθηκαν, χωρίς κανένας να γνωρίζει ότι θα έβρισκαν αυτή την εφαρμογή; Αν πάλι δε βρίσκουν καμία εφαρμογή, πώς θα γνωρίζουμε αν αυτό θα συμβαίνει εσαεί; Μήπως πάλι κάτω από ένα πλατωνικό πρίσμα η ύπαρξη των εφαρμοσμένων να δικαιώνεται από την ύπαρξη των καθαρών;** Αν θέλουμε σε τέτοια ερωτήματα να λάβουμε στοιχειωδώς πειστικές απαντήσεις πρέπει να εξετάσουμε, στο μέτρο του δυνατού, το ζήτημα της φαντασίας. Αξίζει σε αυτό το σημείο να δούμε κάποιες απόψεις περί του ζητήματος.

Ασφαλώς, το ζήτημα της φαντασίας δεν αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο από όλα τα φιλοσοφικά ρεύματα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα[361]: α) στη φαινομενολογία του Χούσσερλ η γνώση είναι διαισθητική διαδικασία αυτού, που ήδη υπάρχει στη συνείδηση. Το αντανακλώμενο αντικείμενο αντικαθίσταται από το αναγνωρισμένο, β) κατά τον Μπερξόν πίστευε πως η μοναδική δυνατή διαίσθηση είναι μια υπερπνευματική διαίσθηση, γ) ο Κρότσε με τη σειρά του βασίζει τη διαισθησιαρχία του όχι μόνο στη συγκεκριμένη ερμηνεία του προτσές της γνώσης, αλλά και στην υποκειμενική εξάλειψη ανάμεσα στη γνώση και στο αντικείμενό της, δ) ο Καντ από την άλλη θεωρούσε τη φαντασία βασικό στοιχείο της εξελικτικής διαδικασίας της γνώσης, συνδέοντάς το με τις a priori εποπτείες.[362]

---

[360] .Ένγκελς, Αντί-Ντύρινγκ, σελ.68-69

[361] .Δες αναλυτικότερα, Τ.Ι. Ότζερμαν, Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, σε. 128-137, εκδ. Gutenberg

[362] . Ο Καντ έγραφε χαρακτηριστικά: «Υπάρχει βέβαια ένας απλός εμπειρικός νόμος, που σύμφωνα με αυτόν παραστάσεις, οι οποίες ακολουθούν ή συνοδεύουν συχνά η μια την άλλη, σμίγουν τελικά μεταξύ τους και με αυτό τον τρόπο αποκτούν ένα σύνδεσμο, σύμφωνα προς τον οποίο μια από αυτές τις παραστάσεις και ακόμα χωρίς την παρουσία του αντικειμένου, προκαλεί μετάβαση του πνεύματος σε μια άλλη [παράσταση] σύμφωνα προς ένα σταθερό κανόνα. Αλλά ο νόμος αυτός της αναπλάσεως προϋποθέτει: ότι τα φαινόμενα τα ίδια υπόκεινται πραγματικά σε ένα τέτοιο κανόνα και ότι μέσα στο πολλαπλό των παραστάσεων τους [των φαινομένων] γίνεται μια συνοδεία ή ακολουθία σύμφωνα προς κάποιους κανόνες· Γιατί χωρίς αυτό η εμπειρική μας φαντασία δε θα ’βρισκε να κάμει ποτέ τίποτα το σύμφωνο προς τη δύναμή της, άρα θα έμενε κρυμμένη στα μύχια του πνεύματος σα μια νεκρή και άγνωστη σε εμάς δύναμη. Αν το κιννάβαρι γινόταν τη μια φορά κόκκινο, την άλλη μαύρο, πότε ελαφρύ, πότε βαρύ, αν ένας άνθρωπος άλλαζε και έπαιρνε πότε αυτή και πότε εκείνη τη μορφή ζώου, αν στη μακρότερη μέρα η γη σκεπαζόταν πότε με καρπούς, πότε με πάγο και χιόνι, τότε η εμπειρική μου φαντασία δε θα έβρισκε καν ευκαιρία έχοντας την παράσταση του κόκκινου χρώματος να σκεφθεί το βαρύ κιννάβαρι· Ή αν μια ορισμένη λέξη αποδίδονταν πότε σε τούτο πότε σε εκείνο το πράγμα ή αν ακόμα και το ίδιο το πράγμα ονομαζόταν πότε έτσι πότε αλλιώς, χωρίς εδώ μέσα να ισχύει ένας κανόνας, στον οποίο υπόκεινται ήδη τα φαινόμενα από μόνα τους, τότε δε θα μπορούσε να γίνει καμία εμπειρική σύνθεση της αναπλάσεως. Πρέπει, λοιπόν, να υπάρχει αναγκαία κάτι, το οποίο να καθιστά δυνατή ακόμα και αυτή την ανάπλαση των φαινομένων από το γεγονός ότι αποτελεί αυτό τη βασική a priori αρχή μιας αναγκαίας συνθετικής ενότητάς τους [των φαινομένων].αλλά αυτό το βρίσκει κανένας αμέσως αν συλλογιστεί ότι φαινόμενα δεν είναι πράγματα καθ’ εαυτά αλλά ψιλό παιχνίδι των παραστάσεων μας, οι οποίες καταλήγουν στο τέλος σε προσδιορισμούς της εσωτερικής αισθήσεως. Αν, λοιπόν, μπορούμε να εκθέσουμε ότι ακόμα και οι πιο καθαρές a priori εποπτείες μας δεν πορίζουν καμία γνώση παρά μόνον εφόσον περιέχουν μια τέτοια σύνδεση του πολλαπλού, η οποία καθιστά δυνατή μια ολοσχερή σύνδεση της αναπαραγωγής, τότε η σύνθεση αυτή της φαντασίας στηρίζεται ακόμα και πριν από κάθε εμπειρία σε αρχές a priori και πρέπει να δεχτούμε υποχρεωτικά μια καθαρή υπερβατική σύνθεση της ίδιας [της φαντασίας], η οποία να υπό-κειται ως βάση στη δυνατότητα κάθε

Από αυτή την πρόχειρη και πολύ σύντομη ανασκόπηση, βλέπουμε ότι το ζήτημα της φαντασίας γίνεται αποδεκτό από φιλόσοφους διαφορετικής προέλευσης, ωστόσο υπάρχει διαφορά στον τρόπο με τον οποίο αυτοί χειρίζονται το συγκεκριμένο θέμα: «Το πρόβλημα, συνεπώς, συνίσταται όχι στην αναγνώριση ή στην άρνηση της διαίσθησης, αλλά στη διασάφηση του πώς είναι δυνατή τέτοιου είδους αντανάκλαση της πραγματικότητας, πώς η αντανάκλαση αυτή βλέπει την εμπειρία, τις γνώσεις που υπάρχουν στη διάθεση του δοσμένου ατόμου».[363] Ο ΔΥ θεωρεί τη φαντασία ως μια ψυχική δραστηριότητα, όχι, όμως, υπερπνευματική αλλά και ούτε συνδεδεμένη με a priori εποπτείες. Η δραστηριότητα αυτή συνίσταται στην δυνατότητα δημιουργίας παραστάσεων και νοητικών καταστάσεων που ποτέ δε βιώθηκαν. Η φαντασία, αν και μοιάζει να κουβαλάει ένα μεταφυσικό φορτίο, είναι μια νοητική διεργασία. **Είναι εκείνη η ικανότητα του ανθρώπου να παράγει νέες σκέψεις με τη βοήθεια εικόνων, παραστάσεων αλλά και πρότερων ιδεών, ενσταλαγμένων στη ανθρώπινη νόηση. Η φαντασία, κατά τη γνώμη μας, συνδέεται με την ικανότητα παραγωγής λογικών συνειρμών , νομοτελειών και αιτιακών συνδέσεων.** Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι γίνεται με ένα συνεπές τρόπο, δηλαδή δεν αντιλαμβανόμαστε πάντα μια λογική σύνδεση όπως αυτή είναι και σε όλες τις εκφάνσεις της. Η στρεβλή λήψη, από το δέκτη, μιας πραγματικότητας, είναι αυτή που μπορεί να παράγει νέες ιδέες, που, όμως, δεν έχουν αντιστοιχία με αυτήν την πραγματικότητα (ακριβώς γιατί η λήψη είναι στρεβλή). Από την άλλη, το γεγονός ότι η νόηση έχει συλλάβει κάποιες φυσικές και κοινωνικές νομοτέλειες είναι και αυτό που εξηγεί, ως ένα βαθμό, την ικανότητά της να παράγει νέες. **Η φαντασία κατά μια έννοια είναι η δυνατότητα πρόβλεψης που αποκτούμε μέσα από την πείρα μας. Στα μαθηματικά, λόγω της υψηλής αφαίρεσης και της έκφρασης των σχέσεων μέσω μιας συμβολοποίησης, οι νέες ιδέες μοιάζουν μυστηριακές και αποσπασμένες από το γενικότερο γίγνεσθαι και τις υπαρκτές σχέσεις. Η φαντασία τόσο στα μαθηματικά όσο και στις άλλες επιστήμες αλλά και στις τέχνες αποτελεί ένα σημείο ασυνέχειας στη νοητική διαδικασία, αποτελεί ένα άλμα στη προηγούμενη «ομαλή» διαδικασία. Πρόκειται, δηλαδή, για μια ποιοτική αλλαγή μικρότερης ή μεγαλύτερης σημασίας που οφείλεται στις μικρές και αλλεπάλληλες «ποσοτικές συσσωρεύσεις». Το ποιοτικό αυτό άλμα για να πραγματοποιηθεί προϋποθέτει από τα πριν εμπειρίες, συσσώρευση πληροφοριών, κατοχή γνώσης, ερευνητική αναζήτηση και κάποια θεωρητικά εφόδια.**

Επιπλέον, η φαντασία του υποκειμένου έχει ισχυρή εξάρτηση από το (κοινωνικό) περιβάλλον μέσα στο οποίο υπάρχει (το υποκείμενο). Αυτό έδειξαν οι έρευνες του Λούρια κατά τις οποίες τέθηκαν ερωτήματα κυρίως σε αναλφάβητους χωρικούς και που στόχο είχαν να ελέγξουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η φαντασία αυτών των ανθρώπων. Χαρακτηριστικά: ερωτώμενοι οι χωρικοί τι θα θέλανε να μάθουν για άλλες πόλεις ή χώρες που δεν έχουν πάει αδυνατούσανε να σκεφτούνε τι θα μπορούσανε να ρωτήσουν.[364]

Πάνω στη φαντασία εδράζεται και η ενόραση (διαίσθηση): «Η ερμηνεία της διαίσθησης σαν άμεση εξέταση της αλήθειας, που υποστηρίζουν και οι ρασιοναλιστές του 17ου αιώνα και οι ιρρασιοναλιστές-οπαδοί της διαισθησιοκρατίας, είναι εντελώς ασύστατη, γιατί η ιστορία των φυσικών επιστημών και της φιλοσοφίας παρέχουν μεγάλο αριθμό από παραδείγματα που δείχνουν τις λαθεμένες διαισθήσεις. «Η ελπίδα στη λεγόμενη διαίσθηση πολύ συχνά οδηγούσε σε πλάνη», παρατηρεί σωστά ο Γ. Ράιχενμπαχ».[365] Αυτή η τελευταία παρατήρηση μπορεί να καταστεί ως ερμηνευτικό εργαλείο σε διάφορες περιπτώσεις της μαθηματικής ανακάλυψης, όταν το μαθηματικό αντικείμενο δεν μπορεί να βρει την αντιστοίχισή του με κάποια περιοχή της πραγματικότητας και δεν μπορεί γιατί υπάρχει υψηλός βαθμός αφαίρεσης. Αν πάλι υπάρχει περίπτωση μια περιοχή των μαθηματικών να εκφράζει πραγματικές σχέσεις με στρεβλό τρόπο είναι κάτι που, ίσως, κάνει ακόμα πιο δυσδιάκριτα τα πράγματα. Για να μην είμαστε, όμως, απόλυτοι σε αυτό το ζήτημα θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι «η επιστημονική δραστηριότητα στον τομέα των μαθηματικών βρίσκει την έκφραση και ως ένα βαθμό, την έκβασή της σε εργασίες (βιβλία,

---

εμπειρίας (όπως το προϋποθέτει αναγκαία η αναπαραγωγιμόηττα των φαινομένων)», Καντ Ι., Κριτική του Καθαρού Λόγου, Α2, σε. 87-89, εκδ. Παπαζήση

[363] . Τ.Ι. Όϊζερμαν, Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, σε. 134, εκδ. Gutenberg

[364] .Α. Λούρια, Γνωστική ανάπτυξη, σελ. 149-157

[365] . Τ.Ι. Όϊζερμαν, Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, σε. 135, εκδ. Gutenberg

άρθρα), βασικό περιεχόμενο των οποίων είναι οι αποδείξεις θεωρημάτων και η έκθεση των μεθόδων για τη λύση των προβλημάτων. Μέσα από αυτά τα έργα **είναι δύσκολο, ή ακόμα και αδύνατο**, να διακριθεί και να καθοριστεί άμεσα η φιλοσοφική θέση, ο τρόπος σκέψης των συγγραφέων τους, **ο τρόπος που λύνουν το βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας όσον αφορά στα μαθηματικά**»[366], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Επανερχόμενος στη διάκριση της επινόησης σε δυο είδη, ο συγγραφέας αναρωτιέται: ποιο είναι εκείνο το κριτήριο που θα αποτελέσει τον οδηγό μου στην αναζήτηση αυτού του αντικειμένου που θα ερευνήσω? Ο JH δίνει μια απάντηση κάπως «σκοτεινή». Ο οδηγός που πρέπει να εμπιστευθούμε είναι η αίσθηση της επιστημονικής ομορφιάς. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε σε μια τέτοια άποψη είναι πολλών ειδών:
[α] Τι ακριβώς είναι αυτή η επιστημονική ομορφιά?
[β] Γιατί να είναι αυτή που θα αποτελέσει τον οδηγό μας στη μαθηματική έρευνα?
[γ] Δε μοιάζει μεταφυσικό (για να μην πούμε ότι είναι) να λέμε ότι « χωρίς να γνωρίζουμε τίποτα άλλο, **αισθανόμαστε** ότι αξίζει να ακολουθήσουμε μια κατεύθυνση έρευνας, **αισθανόμαστε** ότι το πρόβλημα **καθ' αυτό** αξίζει το ενδιαφέρον μας, ότι η λύση του θα έχει κάποια αξία για την επιστήμη, ανεξάρτητα από το αν θα επιτρέψει περαιτέρω εφαρμογές;»[367], (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).

Τέλος, ο JH αναρωτιέται ποιο μπορεί να είναι το κίνητρο ενός μαθηματικού που μελετάει και επινοεί. Μπορεί άραγε να είναι μια διάθεση αυτοπροβολής, μια διάθεση να μας πείσει ότι αυτός είναι που επινοεί κάτι πρωτότυπο; Αυτό μπορεί να συμβαίνει στους καλλιτέχνες, όχι όμως και στους επιστήμονες, κατά το συγγραφέα. Αν ο επιστήμονας, γράφει ο JH, επιθυμεί τη δημόσια προβολή τότε δε θα μπορέσει να παράγει σημαντικό έργο (χωρίς να εξηγεί το γιατί). Επιπλέον, κάθε αποτέλεσμα, η λύση οποιουδήποτε προβλήματος δημιουργεί νέα ερωτήματα, ανοίγει νέους δρόμους και αυτό από μόνο του αποτελεί πρόκληση για τον επιστήμονα, χωρίς αυτός να σκέφτεται την κοινωνική καταξίωση παρεκτός το πρόβλημα και τη λύση του.

Ε7. <u>Τα ενσώματα μαθηματικά</u>

Η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών είναι μια θεωρία που επινοήθηκε και αναπτύχθηκε τα τελευταία χρόνια. Οι φιλοδοξίες αυτής της θεωρίας είναι μεγάλες: επιδιώκει να ερμηνεύσει την προέλευση των μαθηματικών, τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι τα κατανοούν, τη βιολογική υποδομή του ανθρώπου και πώς αυτή επηρεάζει την αντίληψη για τα μαθηματικά, αλλά και να δώσουν μια διδακτική πρόταση για τα μαθηματικά. Με αυτό το τελευταίο θα ασχοληθούμε στο παράρτημα του κειμένου το οποίο αναφέρεται στον κονστρουκτιβισμό. Επιλέξαμε, όμως, το ζήτημα των ενσώματων μαθηματικών να το εξετάσουμε στο παρόν κεφάλαιο αφού μπορεί να μας δώσει απαντήσεις εμβαπτισμένες στο πλαίσιο του ρεαλισμού. Απαντήσεις που σχετίζονται με τη μαθηματική ανακάλυψη. Όπως πάντα θα επιχειρήσουμε να κρίνουμε τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών με οδηγό την υλιστικοδιαλεκτική οπτική.

Ε7.1 <u>Σύντομη παρουσίαση της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών</u>

Κατά τους κύριους εκπρόσωπους της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών «τα ανθρώπινα μαθηματικά δεν είναι η εικόνα κάποιων μαθηματικών που υπάρχουν έξω από τους ανθρώπους. **Δεν είναι ούτε υπερβατικά, ούτε τμήμα του φυσικού σύμπαντος**. Όμως, **υπάρχουν σημαντικοί λόγοι** για τους οποίους τόσοι άνθρωποι, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών που είναι επαγγελματίες, **να θεωρούν ότι τα μαθηματικά δεν έχουν ανεξάρτητη, αντικειμενική, εξωτερική ύπαρξη**. Οι ιδιότητες των μαθηματικών είναι, με πολλούς τρόπους ιδιότητες που κάποιος θα περίμενε από τις λαϊκές θεωρίες που αφορούν στα εξωτερικά αντικείμενα. Ο λόγος είναι ότι εδράζονται μεταφορικά στην εμπειρία που έχουμε από τα εξωτερικά αντικείμενα και στις εμπειρίες: δοχείων, συνεχών

[366] . Ρίμπνικοφ Κ., Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, σελ.35, Θεσσαλονίκη
[367] . JH, ο.π., σελ. 128

τροχιών κίνησης, διακριτών αντικειμένων κ.λπ.»[368]. Σε άλλο σημείο επισημαίνουν ότι «τα μαθηματικά του ανθρώπου είναι ενσώματα, βασίζονται στην ανθρώπινη πείρα δεν είναι εντελώς υποκειμενικά […] δεν είναι θέμα απλών κοινωνικών συμβάσεων […] οι άνθρωποι κατανοούν τις αφηρημένες έννοιες με συγκεκριμένο τρόπο, χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους σκέψης που είναι θεμελιωμένοι στο αισθησιο-κινητικό σύστημα **αλλά όχι μόνο σε αυτό** […] Τα μαθηματικά βασίζονται σε δομές του εννοιολογικού συστήματος του ανθρώπου τις οποίες χρησιμοποιεί προκειμένου να του γίνει αντιληπτή και για να κατανοήσει την πρωτογενή εμπειρία. Χρησιμοποιούν (σ.σ. οι άνθρωποι) άκρως οριοθετημένες και περιορισμένες πηγές της βιολογίας του ανθρώπου και **μορφοποιούνται από τη φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων και αφορούν στην ανθρώπινη κοινωνία και στον πολιτισμό**»[369], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Επιχειρώντας να κωδικοποιήσουμε τις βασικές θέσεις των υποστηρικτών των ενσώματων μαθηματικών καταγράφουμε τις παρακάτω αρχές[370]:

1) Τα μαθηματικά είναι προϊόν του ανθρώπου. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν τα πολύ περιορισμένα μέσα της βιολογίας τους.[371]
2) Τα μαθηματικά (ακόμα και τα ανώτερα) παράγονται από τμήματα της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας των ενηλίκων και πρόκειται για φυσιολογικές γνωστικές ικανότητες.
3) Βασική έννοια η οποία χρησιμοποιείται από τη θεωρία των ενσώματων μαθηματικών είναι αυτή της **εννοιολογικής μεταφοράς (conceptual metaphor)**. Πρόκειται για ένα μηχανισμό βάση του οποίου κατανοείται το αφηρημένο μέσω του απτού. Μέσω της εννοιολογικής μεταφοράς που είναι ένας νευρικά ενσώματος θεμελιώδης μηχανισμός, ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να χρησιμοποιεί τη συμπερασματολογική δομή μιας περιοχής σε μια άλλη.
4) Η απλή αρίθμηση είναι έμφυτη στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Πρόκειται για μια ικανότητα που σαφώς μπορεί να χαρακτηρισθεί και είναι ενσώματη.
5) Οι θεματικές περιοχές των μαθηματικών προκύπτουν από ανθρώπινα ενδιαφέροντα.
6) Αυτά τα ενδιαφέροντα έχουν μια μαθηματική πτυχή η οποία χαρακτηρίζεται από ακρίβεια.
7) Η ικανότητα και χρήση του συμβολισμού υποστηρίζει αυτή την ακρίβεια.
8) Τα μαθηματικά συμπεράσματα που έχουν προκύψει εντός μιας μαθηματικής κοινότητας τείνουν να παραμείνουν σταθερά, κάτι που είναι απόρροια της σχεδόν κοινής εγκεφαλικής και σωματικής δομής που διαθέτουν οι άνθρωποι.
9) Τα μαθηματικά δεν είναι μονολιθικά στη γενική θεματική περιοχή τους. Υπάρχουν αμοιβαία ασυνεπείς εκδοχές τους.
10) Τα μαθηματικά είναι αποτελεσματικά στο χαρακτηρισμό και στην πραγματοποίηση προβλέψεων για ορισμένες πτυχές του κόσμου όπως αυτόν τον ζούμε.
11) Τα μαθηματικά είναι μια συστηματική επέκταση των μηχανισμών της καθημερινής γνωστικής λειτουργίας.
12) Η όποια εναρμόνιση των μαθηματικών με τον κόσμο διαμεσολαβείτε και καθίσταται εφικτή από τις ανθρώπινες γνωστικές ικανότητες.

Πού, άραγε, συμφωνεί και πού διαφωνεί ο ΔΥ με αυτές τις αρχές; Με αυτό ακριβώς το ζήτημα θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Ε7.2: <u>Κριτική αποτίμηση της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών με την οπτική του ΔΥ</u>

---

[368] . Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York, σελ. 349

[369] . Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York, σελ. 351-365

[370] . Δες αναλυτικά α) Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York, β) R. Nunez,L. Edwards, J. F. Matos, Embodied Cognition as Groudingg for Situatedness and Context in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics 39Q 45-65, 1999, Kluwer Academic Publishers, γ) Π. Σπύρου, Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις παραδόσεων, Αθήνα 2005

[371] . Οι προβληματισμοί σχετικά με τη βιολογική δυνατότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου να «παράγει μαθηματικά», διευρύνονται και διατυπώνονται και αντίστοιχοι προβληματισμοί για τα ζώα. Μέχρι στιγμής δεν υπάρχει μια τελική απάντηση. Δες χαρακτηριστικά C. Clawson, Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών, σελ. 63-79, εκδ. Κέδρος.

Η συνεισφορά της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικά έχει στοιχεία που είναι τόσο υλιστικά όσο και διαλεκτικά. Ωστόσο, τα στοιχεία αυτά, νομίζουμε ότι δεν είναι πάντα συνεπή μέχρι τέλους. Ας δούμε συγκεκριμένα και τις δυο όψεις της εν λόγω θεωρίας.

Η θεωρία απομυθοποιεί τη ζήτημα της μαθηματικής διαίσθησης, αφού η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών υποστηρίζεται από τα πρόσφατα ευρήματα που δείχνουν ότι η μαθηματική διαίσθηση προέρχεται από διακεκριμένα νευρικά συστήματα. Συστήματα που αποτελούν τη βάση της ακριβούς και της προσεγγιστικής αριθμητικής.[372] Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι η πρώτη ικανότητα, αυτή της ακριβούς αρίθμησης αποκτάται από σε μια μορφή που μοιάζει με της γλώσσας και χρησιμοποιεί νευρικά δίκτυα τα οποία παίρνουν μέρος και στο σχηματισμό των λέξεων. Στη δεύτερη περίπτωση, αυτή της προσεγγιστικής αριθμητικής χρησιμοποιούνται αμφίπλευρες περιοχές στη γειτονία των ενδοβρεγματικών αυλάκων και είναι ανεξάρτητη από τη γλώσσα. **Αυτό τελικά σημαίνει ότι η μαθηματική διαίσθηση αποκτά ένα υλικό υπόστρωμα**. Θα πρέπει βέβαια να δώσουμε κάποιες απαραίτητες διευκρινίσεις. Η εκδήλωση αυτής της έμφυτης μαθηματικής ικανότητας του ανθρώπου που περιγράφουν τα ενσώματα μαθηματικά εξαρτάται από την ηλικία του ατόμου. Για παράδειγμα, η χρυσή τομή είναι ένα «μαθηματικό εύρημα» που υπάγεται στα ενσώματα μαθηματικά. Σύμφωνα με ένα πείραμα που διεξήχθη[373] στο οποίο δίνονταν προς επιλογή διάφορα ορθογώνια με μεγάλη πλειοψηφία (35%) επελέχθη το ορθογώνιο του οποίου τα μήκη των πλευρών ακολουθούσαν τη χρυσή αναλογία. Δηλαδή επιλέθηκαν εκείνα τα σχήματα που πληρούσαν μια σχέση που παρατηρείται συχνά στη φύση. Όμως, το πείραμα όταν επαναλήφθηκε σε παιδιά τα αποτελέσματα δεν ήταν τα ίδια. Επομένως, η εκδήλωση, θα μπορούσε κάποιος να συμπεράνει, της μαθηματικής ικανότητας απαιτεί και μια εξοικείωση με το περιβάλλον ή μια ωρίμαση του εγκεφάλου ή και ένα συνδυασμό των δυο προηγουμένων παραμέτρων. Κάτι τέτοιο δεν έρχεται σε αντίθεση με τη διαπίστωση που πλέον επικρατεί και σύμφωνα με την οποία η διαμάχη μεταξύ κληρονομικής διάνοιας κι επίκτητης μάθησης ανήκει στο παρελθόν.[374]

Τα ενσώματα μαθηματικά απαντάνε στην πλατωνική άποψη, αλλά κατά τη γνώμη μας σε αυτό το σημείο υπάρχει μια λεπτή και ίσως σημαντική διαφοροποίηση από τη θεώρηση του ΔΥ. Οι Lakoff & Nunez **δεν πιστεύουν σε μαθηματικά που είναι εξωτερικά ως προς τους ανθρώπους. Δεν πιστεύουν σε μαθηματικά που είναι υπερβατικά αλλά ούτε και μέρος του φυσικού σύμπαντος**. Ισχυρίζονται, ακόμα, ότι η ισχύς των μαθηματικών που γίνεται καθολικά δεκτή είναι απόρροια του γεγονότος ότι αυτά βασίζονται μεταφορικά στην εμπειρία που έχουμε από τα εξωτερικά αντικείμενα. **Αν οι εισηγητές των ενσώματων μαθηματικών εννοούν με αυτή τους διαπίστωση ότι τα μαθηματικά δεν υπάρχουν ως οντότητες σε κάποιο πλατωνικό σύμπαν τότε δεν υπάρχει αντίρρηση**. Ωστόσο, όπως έχουμε τονίσει κατ' επανάληψη, τα μαθηματικά ως έκφραση νομοτελειών και σχέσεων στη φύση, στη νόηση και στην κοινωνία, είναι σαφές ότι υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη νόηση. Το πώς εκφράζονται και πώς εξελίσσονται, η ιστορικότητά τους δηλαδή, είναι ένα άλλο ζήτημα. Δηλαδή έχει να κάνει με την ιστορικότητα του τρόπου με το οποίο ο ανθρώπινος νους αντιλαμβάνεται τη μορφή έκφρασης των σχέσεων και νομοτελειών που τον περιβάλλουν. Όταν διαπιστώνεται ότι τα μαθηματικά όπως τα γνωρίζουμε ή έχουμε τη δυνατότητα να τα γνωρίσουμε υπάρχουν δυνάμει του ενσώματου νου μας, παραπεμπόμαστε στην καντιανή θεώρηση στην οποία έχουμε ασκήσει κριτική στο κεφάλαιο Β΄. Επίσης, «τα μαθηματικά υποστηρίζουν την εμπειρία μας», ισχυρίζονται οι Lakoff & Nunez. Όμως, πρόκειται για μια μονομερή διαπίστωση που στη συνέχεια «διορθώνεται» όταν υποστηρίζεται ότι «τα μαθηματικά είναι ένα νοητικό δημιούργημα που αναπτύχθηκε για τη μελέτη των αντικειμένων του κόσμου. **Με δεδομένο ότι τα αντικείμενα του κόσμου έχουν αυτές τις ιδιότητες, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι οι μαθηματικές οντότητες θα πρέπει να τις κληρονομήσουν. Οπότε εκεί τα μαθηματικά είναι καθολικά, ακριβή, συνεπή μέσα σε κάθε θέα, σταθερά χρονικά, γενικεύσιμα και ανακαλύψιμα. Η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι προϊόν της ενσαρκωμένης γνωστικής**

---

[372] .Δες αναλυτικότερα Dehaene S., F. Chochon, L. Cohen, PF van de Mortele, Diffential Contributions of the left and right inferior parietal lobubes to number processing, Journal Cognitive Meuroscience, 11:617—630, 1999

[373] . Έρευνα των Witman, Lalo & Thorndike

[374] . Δες αναλυτικότερα Σ. Δημητρίου, Η εξέλιξη του ανθρώπου, τ. V, σελ.230-233, εκδ. Καστανιώτη

λειτουργίας-του νου όπως εμφανίζεται μέσω της αλληλεπίδρασης με τον κόσμο-εξηγεί το γιατί τα μαθηματικά έχουν αυτές τις ιδιότητες»[375], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Σε αυτό το σημείο θέλουμε να τονίσουμε μια περίπου κοινή διαπίστωση των Lakoff & Nunez με το ΔΥ: «ο ανθρώπινος εγκέφαλος παρόλο ότι σαν κατασκευή είναι προϊόν της μακροχρόνιας εξέλιξης του νευρικού συστήματος-ή ίσως ακριβώς εξαιτίας αυτής, γιατί του έδωσε την ιδιότητα να είναι κατασκευασμένος από ένα θαυμάσιο υλικό,- κατέχει κάτι που λειτουργεί σα μια πηγή νέων απόψεων της πραγματικότητας. Κάτι που μας αποκαλύπτει κρυφές όψεις της φύσης, η ανακάλυψη των οποίων από τον άνθρωπο είναι σε συμφωνία με τη λογική της φύσης. Η προσωπική μας άποψη πάνω στο θέμα [...] βασίζεται στη θεωρία των συστημάτων [...] και στην ολογραφική θεωρία του Pribram [...] άσχετα αν τελικά δεν παραδεχόμαστε όλες τις απόψεις του και τις μυστικιστικές προεκτάσεις τους. Σύμφωνα με τον Pribram υπάρχουν **εντυπωμένες, πιθανό πάνω στη μεμβράνη των νευρικών κυττάρων του εγκεφάλου, όλες οι πραγματικότητες του εξωτερικού κόσμου με τις οποίες ο εγκέφαλος ήρθε σε επαφή**. Ο εγκέφαλος, δηλαδή, σε ένα στάδιο επεξεργασίας της πληροφορίας πραγματοποιεί τις αναλύσεις του στον τομέα της συχνότητας. Αυτό πραγματοποιείται στις διασυνδέσεις μεταξύ των νευρώνων. Αυτή η διασπαρμένη πληροφορία θα πρέπει, με κάποια μορφή-ίσως σαν αλλαγές στη διαμόρφωση των πρωτεϊνών που βρίσκονται στην επιφάνεια της μεμβράνης των νευρώνων-να *αποκρυπτογραφείται σε διεσπαρμένα* ίχνη μνήμης. Τα μόρια της πρωτεΐνης θα εξυπηρετούσαν σε αυτή την περίπτωση το *νευρολογικό ολόγραμμα* κατά τον ίδιο τρόπο που ο οξειδωμένος άργυρος εξυπηρετεί το στερεοσκοπικό ολόγραμμα [...] Η υπόθεση του Pribram είναι συναρπαστική και βασίζεται σε πειραματικές ενδείξεις. Συσχετίζουμε την ολογραφική μνήμη του ανθρώπινου μυαλού με τα χαρακτηριστικά του φωτός. Το φως αποτελείται από πολλά μήκη κύματος. Ο εγκέφαλός μας μέσω των αισθητηρίων (και εξαιτίας της φύσης αυτών των αισθητηρίων) μπορεί να αντιληφθεί μόνον έναν περιορισμένο αριθμό αυτών των μηκών του κύματος. **Μάθαμε, ωστόσο, μέσω της ακτίνας λέιζερ, ότι καθένα από αυτά τα κύματα κουβαλά μέσα του την εικόνα του κάθε πράγματος, μες από την οποία πέρασε, στην ολότητά της. Αυτό αποδείχτηκε διότι είμαστε σήμερα σε θέση τα αντικείμενα που φωτογραφήθηκαν στερεοσκοπικά τα αναπαράγουμε στις τρεις διαστάσεις τους περνώντας μιαν ακτίνα λέιζερ ακόμα και μέσα από ένα μικρό τμήμα της στερεοσκοπικής αποτύπωσης**. Πιστεύουμε λοιπόν μαζί με τον Pribram ότι **ο εγκέφαλος δέχεται και επεξεργάζεται κάθε είδους πληροφορία σαν ολόγραμμα και ταυτόχρονα την αναλύει στα επιμέρους στοιχεία της καταγράφοντάς την και κατ' αυτό τον τρόπο. Τα ολογράμματα του εγκεφάλου εμπεριέχουν οτιδήποτε έχουμε δει, το σύνολο του κόσμου που γνωρίσαμε. Κατέχοντας, λοιπόν, τόσες όψεις της πραγματικότητας ο εγκέφαλος είναι η πηγή της δημιουργικότητας. Είναι σε θέση να δει νέες όψεις της πραγματικότητας μέσω νέων συσχετισμών κατά τη διάρκεια της ανασύνθεσης πληροφοριών που επεξεργάζεται ή έχει ήδη επεξεργαστεί. Αυτό είναι πάντα δυνατό για τον εγκέφαλο όταν δουλεύει ανεμπόδιστα**. Ωστόσο για να καταστεί δυνατό ο εγκέφαλος να πραγματοποιήσει νέες ή ελεύθερες συσχετίσεις πρέπει να ελευθερωθεί από προηγούμενες περιοριστικές συγκινησιακές-γνωσιολογικές εμπειρίες»[376], (οι υπογραμμίσεις με πλάγια γράμματα της συγγραφέως, οι υπογραμμίσεις με τονισμένα γράμματα δικές μας). Η παραπάνω εικασία που δεν είναι «καθαρή» εικασία κατά τη γνώμη μας, αλληλοσυμπληρώνεται με τις απόψεις των Lakoff & Nunez και κάνει ακόμα πιο στέρεο το υλικό υπόβαθρο της μαθηματικής νόησης, απογυμνώνοντας το από οποιαδήποτε ιδεαλιστική και μεταφυσική χροιά.

Ένα σημείο το οποίο, μάλλον, είναι προβληματικό στους Lakoff & Nunez είναι το σημείο στο οποίο διαπιστώνουν ότι κανείς δεν παρατηρεί τους νόμους του σύμπαντος ως τέτοιους, αλλά εκείνο που παρατηρεί είναι οι κανονικότητες του σύμπαντος οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς. Τι σημαίνει ότι οι νόμοι είναι μαθηματικές προτάσεις κατασκευασμένες από ανθρώπους στην προσπάθεια χαρακτηρισμού των κανονικοτήτων που βιώνονται στο φυσικό σύμπαν;[377] Δεν κατανοούμε για ποιο λόγο νόμος και

---

[375] . Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York, σελ. 350

[376] . Κάτσιου Μ.-Ζαφρανά, Ανθρώπινος Εγκέφαλος και Δημιουργικότητα, περιοδικό *Επιστημονική Σκέψη*, τ.7, 1982

[377] . Δες αναλυτικότερα, Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York, σελ. 344

κανονικότητα είναι κάτι διαφορετικό. Κανονικότητα δε σημαίνει ότι υπάρχουν κανόνες, συνέπεια, εμφάνιση σταθερά επαναλαμβανόμενων στοιχείων; Όταν, λοιπόν, έχουμε επανάληψη ενός φαινομένου αυτό δε σημαίνει ότι υπάρχει ένας νόμος, μια αναγκαιότητα; Ας το πούμε και λίγο διαφορετικά: η ύπαρξη μιας κανονικότητας προϋποθέτει μια νομοτέλεια. Είναι αδύνατο να σκεφθούμε μια κανονικότητα που δεν την διέπουν νόμοι. Είναι στη φύση της η ύπαρξη συνδέσεων αίτιου και αιτιατού. Βεβαίως, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή, η νομοτέλεια δε συνεπάγεται απαραίτητα κανονικότητα, παρά μόνο αν την δούμε σε ένα βάθος χρόνου. Ή ακόμα: αν θεωρήσουμε πως αφήνουμε ένα αντικείμενο να πέσει, δηλαδή να ακολουθήσει το νόμο της βαρύτητας, τότε αυτό το φαινόμενο το διέπει μια κανονικότητα με την έννοια ότι όσες φορές κι αν επαναλάβουμε το πείραμα αυτό θα επαληθευτεί. Ξέρουμε ότι σε αυτό το σημείο ο Χιουμ θα είχε σοβαρές αντιρρήσεις αλλά αυτή είναι και η διαφοροποίηση με το ΔΥ. Οι μαθηματικές προτάσεις ασφαλώς και είναι κατασκευασμένες από τους ανθρώπους, αυτό δε σημαίνει, όμως ότι πρόκειται για μια σύμβαση με την έννοια της αυθαίρετης κατασκευής. Αν τα μαθηματικά έχουν μια καθολική αποδοχή είναι γιατί έχουν εφαρμογή στην πραγματικότητα (που διέπεται από ντετερμινισμό), την περιγράφουν, την ερμηνεύουν, μπορούν και προβλέπουν και πηγάζουν από αυτήν.

Άλλο σημείο της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών στο οποίο ένας εκπρόσωπος του ΔΥ θα είχε αντίρρηση είναι η χρήση λέξεων που υπονοούν το πεπερασμένο της ανθρώπινης νόησης. Νομίζουμε ότι υποβόσκει μια τέτοια άποψη όταν αναφέρονται στα «πολύ περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας» ή όταν διατυπώνεται η άποψη ότι «τα μόνα μαθηματικά που μπορούμε να γνωρίσουμε είναι τα μαθηματικά που το σώμα μας και ο εγκέφαλός μας, μάς επιτρέπουν να γνωρίσουμε». Πιστεύουμε ότι σε αυτό το σημείο ξανασυναντούμε τον Καντ: τίθεται το ζήτημα της αδυναμίας γνωσιμότητας του καθ' εαυτού αντικειμένου. Αυτή η διαπίστωση είναι λανθασμένη με την εξής έννοια: είναι σωστό ότι το μεμονωμένο άτομο δεν μπορεί ούτε να αναμετρηθεί με όλα τα ζητήματα που θέτει προς επίλυση η ανθρωπότητα, ούτε να αποκτήσει κάποια απόλυτη και τελειωμένη αλήθεια σε κάποιο ιδιαίτερο τομέα της γνώσης. Όμως, οι κατακτήσεις της ανθρώπινης σκέψης κληρονομούνται από γενιά σε γενιά και αυτή είναι μια πορεία που την χαρακτηρίζει η συνέχεια αλλά και η ασυνέχεια (με την έννοια του άλματος) και που δε θα γνωρίσει κάποιο τέρμα. Αν τα πράγματα δεν είναι έτσι, τότε θα πρέπει να αποδεχτούμε μια μελλοντική εικόνα όπου η κίνηση της ανθρώπινης νόησης θα λάβει ένα τέλος (δες υποσημείωση 177). Ακόμα, δεν μπορούμε με ένα απόλυτο τρόπο να ισχυριστούμε ότι η γνώση εξαρτάται στα πολύ περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας. Πρώτα από όλα νομίζουμε ότι δεν έχει και πολύ νόημα ο χαρακτηρισμός «περιορισμένα» και αυτό γιατί αν δούμε τις δυνατότητες των βιολογικών μέσων του ανθρώπου σε σχέση με αυτές ενός πρωτόζωου ή ακόμα και πολύ πιο εξελιγμένων οργανισμών όπως ο χιμπατζής, τα μέσα του ανθρώπου μόνο περιορισμένα δεν είναι. Η τέτοια διαπίστωση δεν παραπέμπει σε ιδεαλιστικές θεωρήσεις, αφού ο ανθρώπινος εγκέφαλος κατά το ΔΥ είναι ανώτερη μορφή οργάνωσης της ύλης. Ακόμα, οι δυνατότητες του ανθρώπου γνωρίζουν νέα ποιοτικά στάδια όταν έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει (και κατασκευάζει) όργανα που αν και συνδέονται με τις βιολογικές του δυνατότητες, τελικά τις υπερβαίνουν. Επιπλέον, η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών νομίζουμε ότι δεν μπορεί να εξηγήσει το γιατί ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να ανακαλύπτει και να κατανοεί μαθηματικά που δεν προέρχονται από την άμεση εμπειρία του. Το παράδειγμα των μη ευκλείδειων γεωμετριών είναι ενδεικτικό.

Τέλος, παρά τη ροπή των Lakoff & Nunez να ερμηνεύσουν υλιστικοδιαλεκτικά τη φύση των μαθηματικών, συνεχίζουν την παράδοση του αναγωγισμού, μια παράδοση που είχε κι έχει ένα διττό ρόλο στην εξέλιξη της επιστήμης: «Αυτή καθαυτή η αναγωγή του σύνθετου στο απλούστερο αποδείχτηκε , σε μια σειρά από περιπτώσεις, γόνιμη […] Ωστόσο, ο συνεπής αναγωγισμός, ο οποίος απολυτοποιεί την αρχή της αναγωγής και αγνοεί την ιδιοτυπία του επιπέδου (δηλαδή εκείνα τα χαρακτηριστικά που επιφέρουν τη μετάβαση σε υψηλότερο επίπεδο οργάνωσης), δεν μπορεί να γίνει δεκτός ως μέρος της

γενικής μεθοδολογίας της επιστημονικής γνώσης».[378] Από αυτή την άποψη η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών μπορεί να παίξει (και παίζει πιστεύουμε) ένα θετικό ρόλο στα ερωτήματα της φύσης των μαθηματικών και του τρόπου με τον οποίο πραγματοποιείται η μαθηματική ανακάλυψη. Υπάρχει, όμως, ο κίνδυνος η σκιαγράφηση της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης να εγκλωβιστεί μέσα σε «βιολογικά πλαίσια» παραβλέποντας πολύ σημαντικές παραμέτρους όπως το πολιτισμικό πλαίσιο εντός του οποίου υπάρχουν και αναπτύσσονται. Και δεν εννοούμε μόνο τη σημασία των γλωσσικών μεταφορών που οι εισηγητές της θεωρίας των ενσώματων τις παίρνουν σοβαρά υπόψη τους. Αναφερόμαστε στο πλαίσιο των κοινωνικών δομών που για το ΔΥ είναι καθοριστική παράμετρος. Δε θα πρέπει να ξεχνάμε πως «ό,τι υπάρχει στον κόσμο διακρίνεται όχι μόνο από την ενότητα , αλλά και από την πολυμορφία του. Αλλά η ενότητα και η πολυμορφία της πραγματικότητας δεν μπορούν να εννοηθούν ξεκομμένες μεταξύ τους. ο αναγωγισμός δίνει απλουστευμένη αντίληψη για το συσχετισμό τους. δεν αντανακλά κατάλληλα την ιδιαιτερότητα των φαινομένων τόσο στη γέννησή τους, όσο και στη λειτουργία τους. Διαστρεβλώνεται έτσι και η αντίληψη για την πολυμορφία των μορφών ενότητας διαφόρων φαινομένων στον αντικειμενικό και υποκειμενικό κόσμο».[379]

Ε8 : <u>Μερικοί προβληματισμοί και κάποια συμπέρασμα</u>

Οι προβληματισμοί του JH και των Lakoff & Nunez, αλλά και διάφορων σύγχρονων ερευνητών ανοίγουν ένα τεράστιο πεδίο αναζήτησης και μελέτης. Πώς σκέφτεται άραγε ο μαθηματικός; Διαθέτει ένα ιδιαίτερο είδος ευφυΐας; Αν ναι, τότε αυτό είναι κληρονομικό ή επίκτητο; Τα μαθηματικά είναι εγγεγραμμένα στον ανθρώπινο εγκέφαλο καταρρίπτοντας μια και καλή τις θεωρίες του tabula rasa; Με ποιο τρόπο η νόηση του μαθηματικού αλλά και του κάθε επιστήμονα μπορεί να κάνει ποιοτικά άλματα που τον οδηγούν σε τομές της επιστημονικής σκέψης; Είχε δίκιο ο Τόμας Έντισον που αποκάλεσε την εφεύρεση 1% έμπνευση και 99% σκληρή δουλειά και ο Νεύτωνας που όταν ρωτήθηκε με ποιο τρόπο έκανε τις μεγάλες ανακαλύψεις του απάντησε «με το να σκέφτομαι όλη μου τη ζωή αυτά τα φαινόμενα»;

Τα ερωτήματα αυτά δεν έχουν απλώς μιαν ακαδημαϊκή αξία. Έχουν και πρακτικές πλευρές. Οι «ολοκληρωμένες» απαντήσεις σε ερωτήματα όπως τα παραπάνω μπορούν να βοηθήσουν και τους εκπαιδευτικούς σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, να αναστοχαστούν και να αναπροσαρμόσουν τη διδασκαλία τους τόσο στον ψυχολογικό τομέα όσο και στον «καθαρά» διδακτικό, κάτι που θα δούμε στο παράρτημα του κειμένου. Μπορούν να δώσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για τη φύση των μαθηματικών, παίζοντας ένα καθοριστικό ρόλο στη σύνδεση της φιλοσοφίας, της λογικής, της ιστορίας των μαθηματικών, της παιδαγωγικής, της βιολογίας, της ψυχολογίας και των άλλων επιστημών.

Παρέκβαση: <u>Μαθηματικά και μια προσέγγιση ψυχιατρικής υφής</u>

Στο τέλος του βιβλίου του JH παρατίθεται ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε σε μαθηματικούς προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα που θα αφορούσαν στις μεθόδους εργασίας των μαθηματικών και ότι αυτό συνεπάγεται. Για παράδειγμα μερικά από τα ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

1. Ποια εποχή, με όση ακρίβεια μπορείτε να θυμηθείτε, και κάτω από ποιες περιστάσεις αρχίσατε να ενδιαφέρεστε για τις μαθηματικές επιστήμες;
2. Έχετε κληρονομήσει την προτίμησή σας για τις μαθηματικές επιστήμες;
3. Ποιοι κλάδοι της μαθηματικής επιστήμης σας ελκύουν ιδιαίτερα;
4. Σας ενδιαφέρει περισσότερο η μαθηματική επιστήμη καθ' εαυτή ή οι εφαρμογές της στα φυσικά φαινόμενα;

---

[378] . Ίλιτσεφ Λ.-Φεντοσέγεφ Π., Φιλοσοφικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό, λήμμα Αναγωγισμός, εκδ. Καπόπουλος

[379] . Κούπτσοφ Β., Αναγωγισμός και σύγχρονη επιστήμη, Περιοδικό Κοινωνικές Επιστήμες, Ακαδημία Επιστημών ΕΣΣΔ, τ.2, 1987

5. Σύμφωνα με τη δική σας εκτίμηση, ποιος είναι ο ρόλος της τύχης και της έμπνευσης στις μαθηματικές ανακαλύψεις;

Μια παρόμοια- σχετικά σύγχρονη- έρευνα (1988) πραγματοποιήθηκε και πάλι στη Γαλλία σε ένα δείγμα 908 μαθηματικών από το Nimier. Η έρευνα αυτή «μεταφέρθηκε» και στα ελληνικά δεδομένα με στόχο την επαλήθευση των διαπιστώσεων που έγιναν στη Γαλλία και για την Ελλάδα (στην Ελλάδα η έρευνα διεξήχθη σε δείγμα 372 ατόμων και πραγματοποιήθηκε το 1997).[380] Πρόκειται για μια έρευνα ψυχαναλυτικής προσέγγισης με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Τα θέματα που κυρίως τέθηκαν ήταν τα εξής:

- Οι λόγοι που ο ερωτηθείς επέλεξε να σπουδάσει μαθηματικά.
- Οι λόγοι που ο ερωτηθείς επέλεξε το επάγγελμα του καθηγητή των μαθηματικών.
- Η σχέση του ερωτηθέντα με τα μαθηματικά όταν ήταν μαθητής.
- Η άποψη του ερωτηθέντα για τα μαθηματικά κ.λπ.

Ο στόχος των συνεντεύξεων ήταν κυρίως η ανάδειξη των φαντασιώσεων και των συναισθημάτων που συνδέονται με τα προς συζήτηση θέματα. Θα σταθούμε σε μερικά από τα αποτελέσματα της έρευνας που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με την εργασία του JH: Σύμφωνα με τον υπεύθυνο της εν Ελλάδι έρευνας οι τρόποι λειτουργίας των μαθηματικών εντός της ψυχικής δομής της προσωπικότητας των μαθηματικών είναι οι ακόλουθοι: τα μαθηματικά στην υπηρεσία του Υπερεγώ, τα μαθηματικά στην υπηρεσία του ιδεώδους Εγώ, τα μαθηματικά στην υπηρεσία του Εγώ και, τέλος, τα μαθηματικά στην υπηρεσία του ιδεώδους του Εγώ. Τρεις είναι οι συνιστώσες που διακρίνει ο ερευνητής στη σχέση των καθηγητών με τα μαθηματικά:

1) τη φαντασιακή συνιστώσα
2) τη συναισθηματική συνιστώσα
3) την ενόρμηση.

Μέσα από ένα πλήθος συμπερασμάτων θα σταθούμε σε ένα που κατά τη γνώμη μας έχει μια αξία για μια πλευρά που θίξαμε σε αυτή την εργασία: Υπάρχει μια ομάδα ατόμων τόσο στην έρευνα της Γαλλίας όσο και της Ελλάδας, η οποία κινείται εντός του πεδίου των μαθηματικών επειδή τα μαθηματικά εκπροσωπούν γι' αυτήν (την ομάδα) το ιδεώδες Εγώ.[381] Σε αυτό το σημείο διακρίνουμε μια «χαραμάδα» που μπορεί να μας δώσει μια ερμηνεία για κάποιες περιπτώσεις κατά τις οποίες παρατηρούμε μαθηματικούς να βρουν λύσεις και απαντήσεις με μια εμμονή. Ανεξάρτητα από το αν το καταφέρνουν ή όχι, έχουμε ένα μοντέλο ψυχολογικής ερμηνείας γι' αυτό που ήδη αναφέραμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου περί συγκινησιακής συνιστώσας που αποτελεί ένα παράγοντα στη διαδικασία της φώτισης αν και θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό το συμπέρασμα μάλλον δε συμφωνεί με ένα συμπέρασμα του JH που παραθέσαμε, σύμφωνα με το οποίο η δημιουργία του μαθηματικού δεν μπορεί να ερμηνευτεί μέσα από μια διάθεση αυτοπροβολής του.

---

[380] . Δες αναλυτικά, Σπύρος Φερεντίνος, Μαθηματικά και δομή της προσωπικότητας των καθηγητών μαθηματικών: μια ψυχαναλυτική προσέγγιση, περιοδικό Ψυχολογία, τόμος 9, τ.3

[381] . Σύμφωνα με τους Laplanche και Pontalis το ιδεώδες Εγώ είναι «ενδοψυχικός σχηματισμός, τον οποίο ορισμένοι συγγραφείς διαφοροποιούν από το ιδεώδες του Εγώ και ορίζουν ως ένα ιδεώδες ναρκισσιστικής παντοδυναμίας, που συγκροτείται με πρότυπο τον παιδικό ναρκισσισμό…»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ: Η ΠΕΡΙΟΔΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΥΛΙΣΤΙΚΟΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥΣ

Η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών από το ΔΥ δε θα μπορούσε παρά να είναι εναρμονισμένη με τις φιλοσοφικές του προκείμενες. Με δεδομένο ότι στο δίπολο Είναι-νόησης τον τελικό λόγο τον έχει το Είναι, η εξέλιξη των μαθηματικών ερμηνεύεται, **κατά κύριο λόγο**, ως απότοκος πρακτικών αναγκών που έθετε προς λύση η ανθρωπότητα. Παρακάτω, θα παρουσιάσουμε και θα εξετάσουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις μαρξιστών μαθηματικών που σκιαγραφούν την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, επιχειρώντας να ξεφύγουν από μια στεγνή απαρίθμηση ιστορικών εξελίξεων που υποτίθεται ότι συμβαίνουν περίπου με ένα τρόπο τυχαίο. Παράλληλα, οι συγκεκριμένοι μελετητές δε θεωρούν πως οι πρακτικές ανάγκες ήταν ο μοναδικός παράγοντας εξέλιξης των Μαθηματικών. **Επιχειρούν να δουν αυτή την εξέλιξη διαλεκτικά δηλαδή σε συνάρτηση και με άλλους κοινωνικούς παράγοντες που σχετίζονται με τη γενικότερη κοινωνική εξέλιξη, τη φιλοσοφία, τις θρησκευτικές πεποιθήσεις κ.λπ.**

ΣΤ1. <u>Η ιστορία των μαθηματικών κατά Kolmogoroff</u>

Ο Kolmogoroff αναφερόμενος στην ιστορία των μαθηματικών και κάνοντας μια περιοδολόγησή της, καταλήγει σε τέσσερις περιόδους: στην πρώτη έχουμε τη **γένεση των μαθηματικών**. Οι απαρχές αυτής της περιόδου χάνονται στα βάθη της ιστορίας της πρωτόγονης ανθρωπότητας, ενώ τερματίζει περίπου κατά τον 6ο και 5ο αιώνα π.Χ. , όταν ακόμα τα μαθηματικά δεν έχουν ξεχωρίσει με ένα ξεκάθαρο τρόπο ως ανεξάρτητη επιστήμη. Ο Kolmogoroff θεωρεί ότι η προέλευση, οι απαρχές δηλαδή, των μαθηματικών, σημειώνεται όταν παρουσιάζεται και η ανάγκη της απαρίθμησης των αντικειμένων στα πρώτα στάδια της πολιτιστικής ανάπτυξης. Οι ανάγκες μέτρησης όπως για παράδειγμα ποσοτήτων σιτηρών και του μήκους ενός δρόμου οδήγησαν στην εμφάνιση των ονομάτων και των συμβόλων και στην ανάπτυξη μεθόδων εκτέλεσης πράξεων για τα κλάσματα. Έτσι, συσσωρεύτηκε υλικό που βαθμιαία εξελίχθηκε στην αρχαιότερη μαθηματική επιστήμη-την αριθμητική. Αυτό που αποτέλεσε παράγοντα ανάπτυξης της γεωμετρίας ήταν η μέτρηση εμβαδών και όγκων, οι απαιτήσεις των κατασκευών και αργότερα η αστρονομία. Όπως και να 'χει, σε αυτό το στάδιο το απόθεμα των βασικών εννοιών είναι ακόμα περιορισμένο.

Τα μαθηματικά εμφανίζονται ως ανεξάρτητη επιστήμη (υποστηρίζει ο Kolmogoroff) με σαφή αντίληψη για το ιδιότυπο της μεθόδου της και της ανάγκης συστηματικής ανάπτυξης των θεμελιωδών τους εννοιών και υποθέσεων υπό επαρκώς γενική μορφή-**μόνο μετά τη συσσώρευση μεγάλου ποσού εξειδικευμένου υλικού με τη μορφή ξεχωριστών μεθόδων αριθμητικών υπολογισμών, μεθόδων προσδιορισμού εμβαδών και όγκων καθώς και άλλων διαδικασιών**. Στη γλώσσα του ΔΥ θα λέγαμε πώς απαραίτητη προϋπόθεση για την εμφάνιση των μαθηματικών ως επιστήμης, είναι η συσσώρευση αναγκαίου όγκου ποσοτήτων προκειμένου να περάσουμε σε μια νέα ποιότητα. Ποιο είναι το χαρακτηριστικό αυτής της περιόδου; Πρόκειται για μια περίοδο που εκτείνεται χρονολογικά από τον 6ο-5ο αιώνα π.Χ. και φτάνει μέχρι το 16ο αιώνα συμπεριλαμβανομένου αυτού του τελευταίου. Είναι η περίοδος των **στοιχειωδών μαθηματικών.** Ονομάζεται με αυτό τον τρόπο γιατί σημειώνονται επιτεύγματα σχετιζόμενα με τα σταθερά μεγέθη. Μια εικόνα για αυτά τα μαθηματικά μπορούμε να πάρουμε ως ένα

βαθμό από τα μαθηματικά που διδάσκονται σήμερα μέχρι και την Α΄Λυκείου. Η περίοδος αυτή θα λήξει όταν κύριο αντικείμενο στα προβλήματα των μαθηματικών γίνονται οι διαδικασίες και οι κινήσεις κι όταν αρχίζει να αναπτύσσεται η Αναλυτική Γεωμετρία και η ανάλυση των απείρως ελαχίστων. Βέβαια η έννοια «στοιχειώδη Μαθηματικά» είναι υπό συζήτηση και στις μέρες μας δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός. Ωστόσο, παρά τις όποιες ενστάσεις η διάκριση μιας τέτοιας περιόδου φαίνεται να είναι βάσιμη.

Όσον αφορά στην αριθμητική και στην άλγεβρα, η διαδικασία αυτή ενδέχεται να ξεκίνησε στη Βαβυλωνία, όμως, η ύστερη τάση που συνίστατο στη συστηματική και λογικά συνεπή κατασκευή της θεμελίωσης της μαθηματικής επιστήμης , καθορίστηκε πλήρως στην αρχαία Ελλάδα. Οι Βαβυλώνιοι, κατά την άποψη του Kolmogoroff, δεν ξεπεράσθηκαν από τους Έλληνες, όσον αφορά στους κανόνες υπολογισμών, στη μέθοδο λύσης των αλγεβρικών προβλημάτων και στην ανάπτυξη των μαθηματικών μέσων της αστρονομίας, παρά μόνο στην Ελληνιστική εποχή. Όμως, πολύ νωρίτερα είχαν εισέλθει εξολοκλήρου σε ένα νέο στάδιο λογικής ανάπτυξης το οποίο στάδιο σήμανε και την εμφάνιση μαθηματικών γνωστών στην αρχαία Ελλάδα κάτι που αποτέλεσε σημείο διαφοροποίησης σε σχέση με τα μαθηματικά της ανατολής που ήταν απρόσωπα. Ο Kolmogoroff κάνει μια παρατήρηση που αναδεικνύει τη σχέση μαθηματικών-φιλοσοφίας. Συγκεκριμένα παρατηρεί ότι κατά τον 4ο αιώνα π.Χ. άρχισε μια εποχή κάποιας υπαγωγής των μαθηματικών σε περιορισμούς που επέβαλλε η ιδεαλιστική φιλοσοφία, σε μια ατμόσφαιρα πολιτικής αντίδρασης και παρακμής της δύναμης των Αθηνών. Η υπαγωγή αυτή εντοπίζεται στο ότι η επιστήμη των αριθμών είναι αυστηρά διαχωρισμένη από την «επιστήμη του υπολογισμού» και η γεωμετρία από τη «επιστήμη της μέτρησης». Προς επίρρωση αυτού του ισχυρισμού γράφει χαρακτηριστικά: «Υποθέτοντας την ύπαρξη ασύμμετρων (ευθύγραμμων) τμημάτων, εμβαδών και όγκων, ο Αριστοτέλης επέβαλε μια γενική «απεμπόληση» των εφαρμογών της αριθμητικής στη γεωμετρία. Οι γεωμετρικές κατασκευές περιορίζονταν σε εκείνες που μπορούσαν να διεξαχθούν με κανόνα και διαβήτη».

Στην ελληνιστική περίοδο τα ελληνικά μαθηματικά φτάνουν στην κορύφωσή τους. **Οι κοινωνικοί παράγοντες μέσα στους οποίους περιβάλλονταν η ανάπτυξη των μαθηματικών ήταν η ατμόσφαιρα συγκερασμού διαφόρων πολιτισμών, μεγάλων κρατικών απαιτήσεων, οικοδομικού οργασμού και κρατικής προστασίας της επιστήμης.** Κορυφαίες στιγμές αυτής της περιόδου αποτέλεσαν η συγγραφή των Στοιχείων από τον Ευκλείδη και η συμβολή του Αρχιμήδη στη γεωμετρία η οποία έγκειτο στον προσδιορισμό διαφόρων εμβαδών, όγκων και κέντρων βάρους καθώς και τα στοιχεία απειροστικής ανάλυσης που αυτός εισήγαγε. Ο Kolmogoroff κάνει μια επισήμανση αρκετά ενδιαφέρουσα σε σχέση με τη μαθηματική αυστηρότητα αυτής της περιόδου. Συγκεκριμένα αναφέρει πως «η έλλειψη μιας τελειωτικά διατυπωμένης έννοιας του άρρητου αριθμού ήταν μια σημαντική ατέλεια όλων των μαθηματικών στην αρχαιότητα […] αυτό το γεγονός οδήγησε τη φιλοσοφία τον 4ο αιώνα π.Χ. να απορρίψει πλήρως τη «νομιμότητα» της εφαρμογής της αριθμητικής στη μελέτη γεωμετρικών μεγεθών. Ως γεγονός, στη θεωρία των αναλογικών και στη λεγόμενη μέθοδο της εξάντλησης, οι μαθηματικοί του 4ου και 3ου αιώνα π.Χ., πράγματι πέτυχαν να εφαρμόσουν έμμεσα την αριθμητική στη γεωμετρία. Οι επακόλουθοι αιώνες δεν έφεραν οριστική λύση του προβλήματος με τη δημιουργία μιας νέας βασικής έννοιας (άρρητος αριθμός), αλλά μάλλον βαθμιαία λήθη, η οποία επήλθε με τη βαθμιαία απώλεια της έννοιας της μαθηματικής αυστηρότητας. Στο στάδιο αυτό, όμως, στην ιστορία των μαθηματικών, η προσωρινή απόρριψη της μαθηματικής αυστηρότητας αποδείχτηκε χρήσιμη με τη δημιουργία δυνατότητας για την ανεμπόδιστη ανάπτυξη της άλγεβρας, της οποίας η χρήση μέσα στα αυστηρά πλαίσια των αυστηρών εννοιών των Στοιχείων του Ευκλείδη, περιοριζόταν στην εξαιρετικά περιορισμένη «γεωμετρική άλγεβρα» τμημάτων, εμβαδών και όγκων».[382]

Από τον 12ο ως τον 15ο αιώνα, για τα δυτικοευρωπαϊκά μαθηματικά, ήταν μια περίοδος κατά την οποία ουσιαστικά κατακτιόταν η κληρονομιά του αρχαίου κόσμου και

[382] . Το απόσπασμα αυτό είναι από το λήμμα «Μαθηματικά» της Μεγάλης Σοβιετικής Εγκυκλοπαίδειας που έχει βασιστεί στο άρθρο του Kolmogoroff στη 2η έκδοση της ομώνυμης εγκυκλοπαίδειας

της Ανατολής. **Ως σημαντικός παράγοντας ανάπτυξης των μαθηματικών επισημαίνονται οι εκλεπτυσμένες απαιτήσεις των πολιτικά ανεξάρτητων μελών της ιταλικής μεσαίας τάξης που πλούτιζαν γρήγορα κι έτσι οδήγησαν στη δημιουργία και στην εκτενή διάδοση μαθηματικών έργων, τα οποία συνδύαζαν ένα πρακτικό γενικό προσανατολισμό, με εξαιρετική λεπτομέρεια και επιστημονική κατεύθυνση**.

Με το 17ο αιώνα αρχίζει μια ουσιαστικά νέα περίοδος για τα μαθηματικά. Πρόκειται για εκείνη την περίοδο που φέρει τον τίτλο **«Μαθηματικά των μεταβλητών μεγεθών»** της οποίας η λήξη τοποθετείται στα μέσα του 19ου αιώνα. Το καρτεσιανό μεταβλητό μέγεθος καθώς και ο ολοκληρωτικός και διαφορικός λογισμός στα έργα του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς, αποτέλεσαν σημείο στροφής για την επιστήμη των μαθηματικών. Όταν πια στα μέσα του 19ου αιώνα δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για το πέρασμα σε μια νέα περίοδο όπου η συζήτηση γύρω από τα μαθηματικά και τη θεμελίωσή τους έχει «ανοίξει» με εντυπωσιακό τρόπο, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι τα κλασικά μαθηματικά των οποίων οι βάσεις βρίσκονται στον αρχαιοελληνικό πολιτισμό έχουν κάνει πλέον τον κύκλο τους. Ο Kolmogoroff υιοθετεί τις παρατηρήσεις του Engels όταν παρατηρεί ότι η κίνηση και άρα η διαλεκτική εισέρχονται πλέον στα μαθηματικά και για αυτό το λόγο ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός έγιναν άμεσα απαραίτητοι. Το πνεύμα που χαρακτηρίζει τους εν γένει οπαδούς του ΔΥ, χαρακτηρίζει και τον Kolmogoroff: Το νέο αυτό στάδιο της μαθηματικής ανάπτυξης, συνδεόταν στενά με τη δημιουργία των μαθηματικών φυσικών επιστημών. Στόχος τους ήταν η αποσαφήνιση της πορείας των φυσικών φαινομένων μέσω γενικών, μαθηματικά διατυπωμένων, φυσικών νόμων. Έτσι, από τη μια πραγματικά εμβριθείς και εκτεταμένες μαθηματικές έρευνες διεξήχθησαν μόνο σε δυο περιοχές των φυσικών επιστημών, συγκεκριμένα στην οπτική και στη μηχανική: «Στη μηχανική ο Γαλιλαίος ανακάλυψε τους νόμους της πτώσης των σωμάτων (1632-38), ο J. Kepler τους νόμους της κίνησης των πλανητών (1609-19) και ο Newton το νόμο της παγκόσμιας έλξης (1687). Στη οπτική ο Γαλιλαίος (1609) και ο Kepler (1611) κατασκεύασαν τηλεσκόπια».[383] Από την άλλη, «σοβαρά νέα μαθηματικά προβλήματα τέθηκαν από τη ναυσιπλοΐα (αναγκαιότητα βελτίωσης της ωρολογοποιίας και του σχεδιασμού χρονομέτρων ακριβείας) καθώς και από τη χαρτογραφία, τη βλητική και την υδραυλική. Οι συγγραφείς του 17ου αιώνα εξετίμησαν και επέμεναν στην έμφαση της μεγάλης πρακτικής σημασίας των μαθηματικών. Βασιζόμενα στη στενή τους σχέση με τις φυσικές επιστήμες, τα μαθηματικά του 17ου αιώνα ήταν σε θέση να ανυψωθούν σε ένα νέο στάδιο ανάπτυξης. **Οι νέες έννοιες, οι οποίες δεν ταίριαζαν στις παλιές τυπικές-λογικές κατηγορίες των μαθηματικών, «δικαιώθηκαν» επειδή αντιστοιχούσαν στις σχέσεις του πραγματικού κόσμου. Για παράδειγμα «η πραγματικότητα» της έννοιας της παραγώγου προερχόταν από την πραγματικότητα της έννοιας της ταχύτητας στη μηχανική**. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα δεν ήταν κατά πόσο η έννοια αυτή μπορούσε να αιτιολογηθεί λογικά, αλλά μόνο πώς μπορούσε να γίνει αυτά», (η υπογράμμιση δική μας).[384]

Στις αρχές του 18ου αιώνα ο γενικός τρόπος της μαθηματικής έρευνας μεταβλήθηκε βαθμιαία, όπως σημειώνει ο Kolmogoroff. Σε αυτή την περίοδο η φιλοσοφία πλησιάζει περισσότερο τα μαθηματικά ως απόρροια των επιτυχιών του προηγούμενου αιώνα λόγω των μεθοδολογικών καινοτομιών. Μια χαρακτηριστική περίπτωση στην οποία γίνεται εμφανές ότι η φιλοσοφία αρχίζει να (ξανα)παίζει ένα σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά είναι ο τρόπος με τον οποίο στάθηκαν δυο μαθηματικοί απέναντι στους μιγαδικούς: ο Leibnitz βλέπει στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων με ανάπτυξη τους σε μιγαδικές εκφράσεις τη «θαυμάσια μεσολάβηση του ιδεώδους κόσμου», ενώ ο Euler πιο ρεαλιστικής νοοτροπίας, δε μίλησε για θαύματα, αλλά διερμήνευσε τη «νομιμότητα» των πράξεων , που αναφέρονται σε μιγαδικούς αριθμούς και αποκλίνουσες σειρές ως εμπειρικό γεγονός, το οποίο επιβεβαιώθηκε από την ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από παρόμοιους σχηματισμούς. Οι μαθηματικοί αυτής της εποχής πολλοί και σπουδαίοι: Euler, Lagrange, D' Alambert, De Moivre, Bernoulli κ.α. Όπως και στις προηγούμενες ιστορικές περιόδους η σχέση μαθηματικών και φυσικής είναι στενή και σε τελική σχέση καθοριστική: «οι μαθηματικές φυσικές επιστήμες (μηχανική, μαθηματική φυσική) και οι τεχνολογικές

[383] . Ο.π.
[384] . Ο.π.

εφαρμογές των μαθηματικών, παρέμειναν στη σφαίρα δραστηριότητας των μαθηματικών. Για παράδειγμα, ο Euler εργάζεται σε προβλήματα ναυπηγικής και οπτικής, ο Lagrange δημιούργησε τις βάσεις της αναλυτικής μηχανικής και ο Laplace, ο οποίος θεωρούσε τον εαυτό του κυρίως μαθηματικό, ήταν επίσης διακεκριμένος αστρονόμος και φυσικός».[385]

Περνώντας στο 19ο αιώνα η στενή σχέση μαθηματικών-φυσικής αποκτά πολυπλοκότερες μορφές. Πρόκειται για την περίοδο των **σύγχρονων μαθηματικών.** Οι νέες θεωρίες που εμφανίζονται στα μαθηματικά «έρχονται» ως απόρροια δυο παραμέτρων: α) των άμεσων απαιτήσεων των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας και β) των εσωτερικών απαιτήσεων των μαθηματικών. Ένα παράδειγμα για την πρώτη περίπτωση: η ανάπτυξη του διανυσματικού λογισμού και του τανυστικού λογισμού σχετιζόταν με τις απαιτήσεις της μηχανικής και της φυσικής. Όσον αφορά στη δεύτερη παράμετρο ένα παράδειγμα αποτελεί η ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής η οποία κατείχε την κεντρική θέση σε ολόκληρη τη μαθηματική ανάλυση κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα κι ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η «φανταστική γεωμετρία» του Lobachevskii.

Η ασυνήθιστη ανάπτυξη του αντικειμένου των μαθηματικών κατά αυτή την περίοδο έχει μια σημαντική επίπτωση: επιβάλλεται πλέον μεγαλύτερο ενδιαφέρον στα προβλήματα «διακρίβωσης» των μαθηματικών, δηλαδή, οδηγούμαστε σε μια κριτική επανεκτίμηση των αρχικών υποθέσεων (αξιωμάτων), στην κατασκευή ενός αυστηρού συστήματος ορισμών και αποδείξεων και σε μια κριτική εξέταση των λογικών μέσων που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις αυτές.

Κατά τα τέλη του 19ο αιώνα και τις αρχές του 20ου αιώνα οι λόγοι ανάπτυξης των μαθηματικών δεν αλλάζουν. Στη φυσική και κυρίως στη μηχανική και στην οπτική δημιουργούνται απαιτήσεις δημιουργίας ενός αξιόπιστου και προηγμένου μαθηματικού μηχανισμού. Ενός μηχανισμού που γίνεται πλέον απαραίτητος και στην ηλεκτροδυναμική, τη θεωρία του μαγνητισμού και τη θερμοδυναμική. Οι μαθηματικές απαιτήσεις της τεχνολογίας αναπτύχθηκαν επίσης ταχέως. Στις αρχές του 19ου αιώνα οι απαιτήσεις αυτές συμπεριλάμβαναν προβλήματα της θερμοδυναμικής των ατμομηχανών, της τεχνικής μηχανικής και της βλητικής. Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και ιδιαίτερα η θεωρία του δυναμικού αναπτύχθηκαν πιο εντατικά ως ο θεμελιώδης μηχανισμός για τους νέους κλάδους της μηχανικής και της μαθηματικής φυσικής. Ορισμένα παραδείγματα: οι περισσότεροι από τους πρωτοπόρους ειδικούς στην ανάλυση του πρώτου μισού του 19ου αιώνα (Gauss, Fourier, Poisson, Cauchy, Dirichlet, Green, Ostrogdraskii) εργάστηκαν σε αυτή την κατεύθυνση. Ο τελευταίος έθεσε τις βάσεις του λογισμού των μεταβολών για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και η διανυσματική ανάλυση εμφανίστηκε ως αποτέλεσμα ερευνών επί των εξισώσεων της μαθηματικής φυσικής από τον G. Stokes και άλλους Βρετανούς μαθηματικούς. Τα περισσότερα από τα μαθηματικά προβλήματα στις αρχές του 20ου αιώνα, τα οποία τέθηκαν από τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία ανάγονταν στη λύση διαφορικών εξισώσεων τόσο συνήθων όσο και με μερικές παραγώγους. Οι μέθοδοι της πιθανοθεωρίας συμπληρώνουν σημαντικά τις μεθόδους των διαφορικών εξισώσεων στη μελέτη, επίσης, της φύσης και στη λύση των τεχνολογικών προβλημάτων. Δυο παρατηρήσεις συμπληρωματικές για αυτή την περίοδο: α) η μαθηματική ανάλυση συνέχιζε να αναπτύσσεται όχι μόνο ως απαίτηση άλλων επιστημών αλλά σε ανταπόκριση με τις εσωτερικές της ανάγκες, κάτι που ήδη έχει επισημανθεί για την περίοδο του 19ου αιώνα και β) όπως και πάλι για το 19ο αιώνα, έτσι και για τα τέλη του και για τις αρχές του 20ου αιώνα συνεχίζεται η ανάπτυξη της θεμελίωσης της μαθηματικής ανάλυσης στην οποία συμβάλλουν αποφασιστικά οι Boole, Poretskii, Schroder, Frege και Peano.[386]

ΣΤ2. <u>Ο Struik και η ιστορία των μαθηματικών</u>

[385] . Ο.π.

[386] . Για την περιοδολόγηση του Kolmogoroff κοίτα στα σχδιαγράμματα, το σχεδιάγραμμα 6.

Στην εισαγωγή κιόλας του κλασικού του συγγράμματος «Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών» , ο Struik ξεκαθαρίζει ότι «τα μαθηματικά έχουν επηρεαστεί από τη γεωργία, το εμπόριο και τη βιοτεχνία, από την πολεμική τέχνη, τη μηχανική και τη φιλοσοφία, από τη φυσική και την αστρονομία [...] Το ίδιο έγινε και σχετικά με την επίδραση της υδροδυναμικής στη θεωρία των συναρτήσεων, του καντιανισμού και των χωρομετρήσεων στη γεωμετρία, του ηλεκτρομαγνητισμού στις διαφορικές εξισώσεις, του καρτεσιανισμού στη μηχανική και του σχολαστικισμού στον απειροστικό λογισμό».[387]

Ο Struik αποφασίζει να γίνει πιο συγκεκριμένος στη συνέχεια. Υποστηρίζει ότι η αρχική χρήση των αριθμών είχε περισσότερο ποιοτικό και όχι ποσοτικό χαρακτήρα. Με άλλα λόγια η χρήση γινόταν προκειμένου να γίνει διάκριση ανάμεσα στο ένα , στο δύο και στο πλήθος. Το ένα νοούνταν περισσότερο με την έννοια του «κάποιου» παρά με την έννοια του «ένας συγκεκριμένος». **Αυτό, όμως, που αποκρυστάλλωσε την έννοια του αριθμού ήταν η ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου**. Ο Struik συνεχίζει λέγοντας πως οι αριθμοί ταξινομούνταν και συσσωματώνονταν σε ενότητες και πως ακριβώς αυτές οι διαδικασίες οδήγησαν στην αρίθμηση με βάση πρώτα το πέντε και έπειτα το δέκα. Ακόμα υπάρχουν περιπτώσεις όπου για βάση χρησιμοποιήθηκε το είκοσι, το οποίο προκύπτει από το άθροισμα των δακτύλων χεριών και ποδιών. Σε αυτό το σημείο θέλουμε να σημειώσουμε το εξής: ενώ ο Struik χρησιμοποιεί μια υλιστική ανάλυση που έγκειται στην επινόηση του αριθμού ως απόρροια πρακτικών αναγκών και την εξέλιξη διαλεκτικά συνδεδεμένη με κοινωνικούς παράγοντες, εν τούτοις παρουσιάζεται ένα κενό στην ανάλυσή του που έχει να κάνει με την ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο ο άνθρωπος μπόρεσε να κάνει μια αντιστοιχία ανάμεσα στα αντικείμενα που τον ενδιέφεραν και στα δάκτυλά του. Δηλαδή να κάνει μια ερμηνεία για το πώς στην πραγματικότητα ο άνθρωπος μπόρεσε να δημιουργήσει την πιο πρώιμη, ίσως, μορφή συνάρτησης. Βέβαια, με την ευκαιρία πρέπει να σημειώσουμε ότι αντικρούει τους ισχυρισμούς ότι η αρίθμηση άρχισε με τα δάκτυλα, υποστηρίζοντας ότι για να συμβεί κάτι τέτοιο, απαιτείται ένα ορισμένο στάδιο κοινωνικής ανάπτυξης. Ωστόσο, αυτή η παρατήρηση δεν απαντά και στο ερώτημα το οποίο θέσαμε.[388]

Όμως, ο Struik δε μένει σε μια μονοσήμαντη ερμηνεία της κατασκευής του αριθμού. Δε θεωρεί ότι τα ερεθίσματα ήταν μόνο η ικανοποίηση των πρακτικών αναγκών και ότι τα δάνεια ήταν από τη φύση. **Δάνεια για την εξέλιξη πήρε ο άνθρωπος και από τα ίδια του τα δημιουργήματα. Για παράδειγμα «η λέξη «γραμμή», στα λατινικά «linea», σχετίζεται με το λινάρι και τα παράγωγά του, φανερώνοντας τη σχέση μεταξύ της υφαντουργικής και των απαρχών της γεωμετρίας» και συνεχίζει «ο νεολιθικός άνθρωπος ανάπτυξε επίσης ένα οξύ αίσθημα για γεωμετρικά διακοσμητικά σχήματα. Πολλά ήταν τα ερεθίσματα από τα οποία οδηγήθηκε στο να εμπλουτίσει τις αντιλήψεις του για τα σχήματα και τις μεταξύ τους σχέσεις, τόσο στο επίπεδο όσο και στο χώρο: το ψήσιμο και το χρωμάτισμα των αγγείων, το πλέξιμο των βούρλων, η καλαθοπλεκτική, η υφαντουργία και αργότερα, η κατεργασία των μετάλλων. Κάποιο ρόλο πρέπει να έχουν παίξει και οι χορευτικές φιγούρες. Από τα έργα της νεολιθικής διακοσμητικής αναδείχνεται μια καλαισθησία που εκφράζεται με ισότητες, συμμετρίες και ομοιότητες. Σε μερικά από αυτά έχουν υπεισέλθει και κάποιες αριθμητικές σχέσεις, ορισμένα προϊστορικά σχεδιάσματα παριστάνουν τρίγωνους αριθμούς και άλλα υποδηλώνουν «ιερούς» αριθμούς».[389] Κατά το Struik οι γνώσεις για τις ιδιότητες της σφαίρας, τις γωνίες κατευθύνσεων και τον κύκλο προέκυψαν από την αστρονομία που με τη σειρά της ήταν αποτέλεσμα της ανάγκης προσανατολισμού.[390]**

Όταν πια ο Struik πάει να εξετάσει την ανάπτυξη των μαθηματικών σε καθένα από τους αρχαίους πολιτισμούς έχουν ενδιαφέρον οι παρατηρήσεις που κάνει για τα ανατολικά μαθηματικά τα οποία τα χαρακτηρίζει και ως μια πρακτική επιστήμη στις απαρχές τους που, όμως, στη συνέχεια απέκτησε τη σχετική της αυτοτέλεια από την πρακτική: «τα ανατολικά μαθηματικά ήταν στο ξεκίνημά τους μια επιστήμη πρακτική. Απέβλεπε στο να καταστήσει ευχερέστερους τους υπολογισμούς του ημερολογίου και να

---

[387] . D. Struik, «Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών», σελ. 19, εκδ. Ζαχαρόπουλος
[388] . Ο.π., σελ. 29-31
[389] . Ο.π., σελ. 33
[390] . Ο.π., σελ. 37

διευκολύνει τη διαχείριση της σοδειάς, την οργάνωση των δημόσιων έργων και τη συλλογή των φόρων. Όπως είναι φυσικό, δόθηκε αρχικά έμφαση στην πρακτική αριθμητική και στις καταμετρήσεις. Ωστόσο, μια επιστήμη που καλλιεργείται για αιώνες από ομάδες ειδικών, επιφορτισμένων όχι μόνο να την εφαρμόζουν, αλλά και να διδάσκουν τα μυστικά της, **αναπτύσσει τάσεις προς την αφαίρεση. Μετατρέπεται βαθμιαία σε αυταξία και δημιουργούνται για τη σπουδή της κίνητρα ενδογενή. Η αριθμητική εξελίχθηκε σε άλγεβρα. Αυτό δεν έγινε απλά και μόνο για να βελτιωθούν οι υπολογισμοί. Επρόκειτο επίσης για το φυσιολογικό επακόλουθο της καλλιέργειας και ανάπτυξης μιας επιστήμης σε σχολές γραμματέων**. Για παρόμοιους λόγους, οι καταμετρήσεις εξελίχθηκαν στις απαρχές-αλλά τίποτα περισσότερο-μιας θεωρητικής γεωμετρίας»[391], (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Αυτή η παρατήρησή του Struik είναι αρκετά σημαντική αφού επιχειρεί να δώσει μια ερμηνεία για τη σχετική αυτοτέλεια της επιστήμης των μαθηματικών. Η ερμηνεία του αυτή δεν κινείται σε μεταφυσικά πλαίσια, αφού υποστηρίζει ότι τελικά και η σχετική αυτονόμησή τους από τις πρακτικές ανάγκες δεν απογαλακτίζονταν σε τελική ανάλυση από αυτές. Η θεωρητικοποίηση μπορεί να μην εξυπηρετούσε τη βελτίωση των υπολογισμών απλά και μόνο (άρα έγιναν και για αυτό το λόγο) αλλά εξυπηρετούσαν τη λειτουργία της σχολής των γραμματέων. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι αυτή η θεωρητικοποίηση εξυπηρετούσε την παραγωγή περισσότερο ικανών ανθρώπων στη χρήση των μαθηματικών που με τη σειρά τους θα επέλυαν όλο και δυσκολότερα προβλήματα που η ανθρωπότητα έθετε προς λύση.

Σε σχέση με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά ο Struik προσπαθεί να εξηγήσει για ποιο λόγο ήταν αυτά που έκαναν το αποφασιστικό άλμα θέτοντας επί τάπητος το ζήτημα της απόδειξης, κάτι που δεν έκαναν οι προηγούμενοι πολιτισμοί. Ασφαλώς, δε στέκεται σε βιολογικές εξηγήσεις που κινούνται στην εύκολη και αντιεπιστημονική λογική γονιδιακών ερμηνειών, αλλά εξηγεί αυτό το φαινόμενο με βάση τις νέες κοινωνικές εξελίξεις που παρατηρήθηκαν στον αρχαιοελληνικό χώρο. Ανάμεσα σε αυτές ξεχωρίζει τα εξής: α) την αντικατάσταση του χαλκού από το σίδηρο, β) την πτώση του κόστους των εργαλείων παραγωγής λόγω της προηγούμενης εξέλιξης κι έτσι την αύξηση του κοινωνικού πλεονάσματος και την τόνωση του εμπορίου κάτι που έδωσε τη δυνατότητα σε ευρύτερες μάζες πιο ενεργής συμμετοχής στο δημόσιο βίο, γ) τη δημιουργία της ελληνικής *Πόλεως* , της αυτοδιοικούμενης πόλης-κράτους, με πρώτες τις πόλεις που δημιουργήθηκαν στα μικρασιατικά παράλια, δ) την κατοχή των δούλων που είχαν δυο αποτελέσματα, την παραγωγή κοινωνικού υπερπροϊόνος και τη δημιουργία ελεύθερου χρόνου στο δουλοκτήτη που του έδινε τη δυνατότητα να φιλοσοφεί γύρω από το δικό του κόσμο. Τέλος, όλες αυτές οι εξελίξεις οδήγησαν στο άλμα που παρατηρήθηκε στη φιλοσοφική σκέψη των αρχαίων Ελλήνων που από το *πώς* της Ανατολής πέρασαν στο *γιατί* , δημιουργώντας αυτό που ονομάζουμε σήμερα ιωνικό ορθολογισμό. Πώς αυτό αντανακλάστηκε στα μαθηματικά; Ο Struik γράφει χαρακτηριστικά: «οι πρώιμες ελληνικές μαθηματικές ενασχολήσεις είχαν για κύριο στόχο την ερμηνεία, σύμφωνα με ένα ορθολογικό σχήμα, της θέσης του ανθρώπου στον κόσμο. έπρεπε να βρεθεί μια τάξη μέσα στο χάος. Να τακτοποιηθούν οι ιδέες σε λογικές διαδοχές. Να αναγνωρισθούν θεμελιακές αρχές. Τα μαθηματικά, η ορθολογικότερη από όλες τις επιστήμες, προσφέρονταν στη ευόδωση αυτής της προσπάθειας. Οι έλληνες έμποροι με τα ταξίδια τους και τις συναλλαγές είχαν, αναμφίβολα, γνωρίσει τα ελληνικά μαθηματικά. Δεν άργησαν να καταλάβουν ότι οι ανατολικοί λαοί είχαν αφήσει απραγματοποίητοι το πιο μεγάλο βήμα προς τον ορθολογισμό. Γιατί το ισοσκελές τρίγωνο έχει δυο γωνίες ίσες;Γιατί ένα τρίγωνο που έχει ίδια βάση και ίδιο ύψος με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου; Τα ερωτήματα αυτά αναφύονταν φυσιολογικά για τους ανθρώπους που αντιμετώπιζαν ανάλογα την κοσμολογία, τη βιολογία και τη φυσική».[392]

Ο Struik προσπαθεί σε διάφορα σημεία της ανάλυσής του να δείξει τον τρόπο που η ελληνική φιλοσοφία επηρέαζε την εξέλιξη των ίδιων των μαθηματικών. Μια χαρακτηριστική

---

[391] . Ο.π., σελ. 44-45
[392] . Ο.π., σελ. 67-71

περίπτωση είναι τα στοιχεία του Ευκλείδη. Στα Στοιχεία ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει αναγκαστικά μιαν αριθμητική τιμή.[393] Αυτό, κατά τη γνώμη του Struik δεν μπορεί παρά να είναι εσκεμμένο αφού αντανακλούσε την υπερίσχυση του πλατωνικού ιδεαλισμού σε εκείνα τα τμήματα της ελληνική άρχουσας τάξης που ασχολούνταν με τα μαθηματικά. Μάλιστα, όπως ο ίδιος γράφει «στις ανατολικές αντιλήψεις της ίδιας εποχής, δεν εμφανίζεται κανένας περιορισμός της έννοιας του αριθμού κατά το συσχετισμό της άλγεβρας με τη γεωμετρία».[394]

Ο Struik περιγράφει και ερμηνεύει τη εξέλιξη των μαθηματικών μέχρι και το Hilbert. Το πνεύμα που διαπνέει όλη του την ανάλυση είναι αυτό που ήδη περιγράψαμε και που χρησιμοποίησε στην ανάπτυξη των αρχαίων μαθηματικών. Εντελώς συμπυκνωμένα θα λέγαμε ότι χαρακτηρίζεται από δυο παραμέτρους: τα μαθηματικά εξελίσσονται βάση πρακτικών αναγκών και επηρεάζονται από φιλοσοφικές επιρροές. Επομένως, ο Struik βλέπει μια διαλεκτική αλληλεπίδραση επιστήμης-φιλοσοφίας-πράξης και όχι μια μονοσήμαντη και αντιδιαλεκτική ανάπτυξη των μαθηματικών με βάση αποκλειστικά τις πρακτικές ανάγκες του ανθρώπου, χωρίς αυτές να χάνουν την πρωτοκαθεδρία στη μεταξύ τους σχέση. Καταγράφουμε μερικές τέτοιες απόψεις του: α) στη διάρκεια των πρώτων αιώνων της δυτικής φεουδαρχίας παρά το γεγονός ότι ελάχιστη εκτίμηση τρέφεται στα μαθηματικά, τα μοναστηριακά μαθηματικά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του πασχαλίου[395], β) οι σχολαστικοί φιλόσοφοι για να στεριώσουν τις φιλοσοφικές-θρησκευτικές τους πεποιθήσεις, μελετώντας τα έργα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και αναζητώντας τη φύση της θεότητας, οδηγήθηκαν σε λεπτές εικασίες για τη φύση της κίνησης, για το συνεχές και το άπειρο[396], γ) κατά την Αναγέννηση παρατηρείται ταχεία ανάπτυξη των μαθηματικών που οφείλεται στην υπολογιστικότητα των εμπορικών τάξεων και στην παραγωγική χρησιμοποίηση των μηχανών και στη σημαντική τους βελτίωση[397], δ) μια περίπτωση όπου τα μαθηματικά επηρεάζονται από τις φιλοσοφικές προκείμενες και προδιαθέσεις του υποκειμένου είναι η περίπτωση του Καρτέσιου, ο οποίος αναζητούσε μια γενική συλλογιστική μέθοδο που θα ήταν κατάλληλη για εφευρέσεις αλλά θα συνέβαλλε στην ανεύρεση της αλήθειας στις επιστήμες[398], ε) η Γαλλική επανάσταση και η ναπολεόντεια περίοδος δημιούργησαν ένα ευνοϊκό κλίμα για την παραπέρα ανάπτυξη των μαθηματικών. Η βιομηχανική επανάσταση παρακίνησε στην καλλιέργεια των φυσικών

---

[393] . Οι Έλληνες έκαναν ως γνωστό τη διάκριση ανάμεσα στα «αριθμητικά» και στη «λογιστική». Η έννοια του αριθμού ταυτιζόταν με το φυσικό αριθμό και η σημερινή έννοια του πραγματικού αριθμού ήταν ανύπαρκτη. Έτσι, το ευθύγραμμο τμήμα δεν είχε πάντα μήκος. Το αντίστοιχο της δικής μας εργασίας με πραγματικούς αριθμούς γινόταν με γεωμετρικούς συλλογισμούς. Στα Στοιχεία υπάρχει επίσης και μια θεωρία δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Διατυπώνεται όμως με ορολογία αναφερόμενη σε αυτό που λέμε επίθεση σχημάτων. Οι ρίζες των εξισώσεων ήταν ευθύγραμμα τμήματα τα οποία προέκυπταν από την εκτέλεση κατασκευών που υποδείχνονταν. Για αυτό το λόγο οι μόνες αποδεκτές λύσεις ήταν οι θετικές.

[394] . Ο.π., σελ. 107

[395] . Ο.π., σελ. 135

[396] . Ο.π., σελ. 141

[397] . Ο.π., σελ. 157

[398]. Ο Struik γράφει χαρακτηριστικά (σελ.164-165): «κατά τις εκτιμήσεις του (σ.σ. του Καρτέσιου) το πιο σπουδαίο μέσο για την κατανόηση του σύμπαντος ήταν τα μαθηματικά, γιατί τα μαθηματικά αποτελούσαν το κλειδί για την κατανόηση της μηχανικής-μοναδικής γνωστής τότε φυσικής επιστήμης-η οποία παρουσίαζε συστηματική, ως ένα βαθμό, συνοχή. Επιπλέον, τα μαθηματικά με τις πειστικές τους αποφάνσεις πρόσφεραν, αυτά τα ίδια, λαμπερό παράδειγμα για το ότι στην επιστήμη μπορούσε να βρεθεί η αλήθεια. Έτσι, η μηχανιστική φιλοσοφία εκείνης της περιόδου συναντήθηκε με την πλατωνική σε ένα κοινό συμπέρασμα που προέκυπτε από διαφορετικές θεωρήσεις. Οι πλατωνικοί με την πίστη τους στην αρμονία του σύμπαντος και οι καρτεσιανοί με την πίστη τους σε μια γενική μέθοδο βασισμένη στον ορθό λόγο, αναγόρευαν τα μαθηματικά βασίλισσα των επιστημών». Σε άλλο σημείο (σελ. 171), συνεχίζοντας στο ίδιο σκεπτικό γράφει: «πολλοί μεγάλοι στοχαστές αναζητούσαν το περισσότερο: μια «γενική μέθοδο», που άλλοτε την αντιλαμβάνονταν με περιορισμένο περιεχόμενο, σα μια μέθοδο των μαθηματικών και άλλοτε κατά πιο γενικό τρόπο, σα μέθοδο για την κατανόηση της φύσης και για τη δημιουργία νέων επινοήσεων. Αυτή είναι η αιτία που εκείνη την περίοδο, όλοι οι σπουδαίοι μαθηματικοί ήταν φιλόσοφοι. Η αναζήτηση νέων επινοήσεων οδήγησε μερικές φορές κατευθείαν σε μαθηματικές ανακαλύψεις».

επιστημών δημιουργώντας νέο ενδιαφέρον για την επιστήμη και την τεχνική[399] ενώ παράλληλα οι απαρχές της νέας περιόδου των γαλλικών μαθηματικών τοποθετείται χρονικά στην εποχή της ίδρυσης στρατιωτικών σχολών και ακαδημιών στα τέλη του 18ου αιώνα.[400]

ΣΤ3: <u>Η άποψη του Iliev</u>

Ο Iliev διαφοροποιείται ως προς την περιοδολόγηση της ιστορίας των μαθηματικών που έκανε ο Kolmogoroff και προτείνει τρεις περιόδους αντί των τεσσάρων που προτείνει ο δεύτερος. [401]Οι τρεις αυτές εποχές ταξινομούνται ως εξής: α) η πρώτη εποχή περιλαμβάνει τις απαρχές της μαθηματικής γνώσης και τερματίζει με την ανακάλυψη του διαφορικού λογισμού, β) η δεύτερη εποχή σημειώνεται η ανάπτυξη της ανάλυσης μαζί με τις θεωρίες της γεωμετρίας. Μαζί με τις έννοιες του αριθμού και του γεωμετρικού χώρου δημιουργείται και η έννοια της συνάρτησης. Αυτή η εποχή συνεχίστηκε μέχρι τη δεύτερη δεκαετία του 20ου αιώνα και γ) η τρίτη εποχή που είναι και η σύγχρονη εποχή των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής, των αλγεβρικών και των τοπολογικών δομών.[402] Ορισμένες παρατηρήσεις για τις τρεις εποχές, σύμφωνα πάντα με τον ίδιο τον Iliev:

[1] Στην πρώτη εποχή καθολικό αντικείμενο της αποτελεί η ιδιότητα του χωρόχρονου να είναι μετρήσιμος. Έτσι, έχουμε τη δημιουργία της έννοιας του αριθμού και του γεωμετρικού χώρου. Η ευκλείδεια γεωμετρία κυριαρχεί μαζί με την αξιωματική της συγκρότηση. Ο Iliev παραμένει στο ίδιο σκεπτικό που παρέθεσε και ο Struik. Δηλαδή, τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν κατά βάση από πρακτικές ανθρώπινες ανάγκες. Στην πρώτη αυτή περίοδο αντικείμενο των μαθηματικών αποτέλεσαν η γεωδαισία και η αστρονομία. Μένοντας πιστός στη διαλεκτική εξέταση της ανάπτυξης μιας επιστήμης διαπιστώνει στη συνέχεια ότι η ανακάλυψη των βασικών μέσων της αριθμητικής και της γεωμετρίας διαμορφώνουν τρεις επιστήμες: τα μαθηματικά και τα τμήματά τους, τη γεωδαισία και την αστρονομία. Μάλιστα επισημαίνεται ότι η γεωδαισία και η αστρονομία είναι οι μοναδικές επιστήμες που έχουν δημιουργηθεί πρωταρχικά ως τμήματα των μαθηματικών, η ανάπτυξη των οποίων αρχίζει από το στάδιο της μαθηματικής γεωδαισίας και της μαθηματικής αστρονομίας. Η βασική κατάκτηση των μαθηματικών σε αυτή την πρώτη εποχή έγκειται στη δημιουργία της καθολικής μαθηματικής δομής της ευκλείδειας γεωμετρίας και των καθολικών εργαλείων της αριθμητικής. Ως δομή νοείται εκείνη η μαθηματική επιστήμη που συγκροτείται από ένα μαθηματικό σύστημα αξιωμάτων. Ως καθολική νοείται εκείνη η δομή που απεικονίζει καθολικές ιδιότητες της αντικειμενικής πραγματικότητας με άλλα λόγια έχει ισομορφισμούς σε διάφορους τομείς των επιστημών. Όμως, η αξιοποίηση των καθολικών προσανατολισμένων επιστημών με καθορισμένα και προσανατολισμένα μέσα είχε σαφώς κοινωνικό καθορισμό. Στην εποχή της φεουδαρχίας και ειδικά στην περίοδο που έχει καταγραφεί ως μεσαίωνας δεν κατέστη δυνατή η αξιοποίηση των δυνατοτήτων που παρείχαν οι επιστήμες και τα μαθηματικά. Στην εποχή, όμως, της Αναγέννησης όπως αυτή είναι γνωστή, όταν δηλαδή κάνουν την εμφάνισή τους οι καπιταλιστικές σχέσεις παραγωγής, όταν η ανάπτυξη της ναυσιπλοΐας, του εμπορίου και της παραγωγής απαιτούν την ανάπτυξη των φυσικών και κοινωνικών επιστημών, τα μαθηματικά γνωρίζουν ή ετοιμάζονται για την ακρίβεια να γνωρίσουν μια νέα φάση της ανάπτυξής τους. Βασικές αιτίες της προετοιμασίας αυτής της νέας φάσης ήταν οι παρακάτω: «Η κοινωνική πρακτική κατεύθυνε το ισχυρό εργαλείο των μαθηματικών προς την ερμηνεία των καθοριζουσών ιδιοτήτων του φαινομένου της κίνησης. Η αφηρημένη μαθηματική σκέψη αναζητούσε επίμονα την απάντηση στο αίνιγμα του πέμπτου αιτήματος του

[399] .Ο.π., σελ. 227
[400]. Ο.π., σελ. 237
[401] . Κοίτα στα σχεδιαγράμματα το σχδιάγραμμα 7
[402] . Δες χαρακτηριστικά Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, σελ.79-81, Θεσσαλονίκη

Ευκλείδη. Αναζητήσεις αιώνων δεν κατόρθωσαν να οδηγήσουν σε επαναστατική ανακάλυψη. Η επιστήμη και η πρακτική βρίσκονταν σε ετοιμότητα να δεχτούν τα αποτελέσματα. Πλησίαζε η αρχή της δεύτερης μαθηματικής εποχής με τα αποτελέσματά της για τις επιστήμες και την πρακτική».[403] Ως προάγγελος της νέας αυτής εποχής των μαθηματικών, κατά τον Iliev, χαρακτηρίζονται οι νόμοι του Kepler για την κίνηση των πλανητών.

[2] Στη δεύτερη εποχή καθολικό αντικείμενο αποτελούν οι ιδιότητες του φαινομένου της μηχανικής κίνησης. Αυτή η δεύτερη εποχή είναι αρκετά πλούσια σε γεγονότα. Αναφέρουμε ορισμένα: α) ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα αποτελεί μια καθολική περιγραφή κάθε μηχανικής κίνησης με τα μέσα των αριθμητικών πράξεων, δηλαδή πρόκειται για μαθηματικό μοντέλο, στο οποίο περιλαμβάνεται εξαιρετικά ουσιώδης, αλλά πολύ γενική πληροφορία για συγκεκριμένη επεξεργασία της. Ο Νεύτωνας στη συνέχεια δημιούργησε τη μαθηματική ανάλυση προκειμένου να μελετήσει πληρέστερα τις μηχανικές κινήσεις, δηλαδή δημιούργησε μια δομή που αντανακλά τις ιδιότητες ενός νέου καθολικού αντικειμένου, β) η ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης και ειδικά των διαφορικών εξισώσεων δημιουργεί τη δυνατότητα της περιγραφής φαινομένων αλλά και τη δυνατότητα πρόβλεψης. Όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Iliev «είχε λυθεί το πρόβλημα των διαπλανητικών πτήσεων πολύ πριν την πραγματοποίησή τους που έπρεπε να περιμένει τα απαραίτητα καύσιμα, δηλαδή τις ανακαλύψεις των άλλων επιστημών»[404], γ) μαζί με τη μαθηματικοποίηση των φυσικών φαινομένων που συνοδεύτηκε από τη δημιουργία της μαθηματικής ανάλυσης, το δεύτερο εσωτερικό επαναστατικό φαινόμενο ήταν η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών, δ) έχουμε τη δημιουργία των βάσεων των προσανατολισμένων δομών, δηλαδή της θεωρίας των πιθανοτήτων και της μαθηματικής στατιστικής, βάσεις που τίθενται στην αρχή με τις μετρήσεις που είναι προσανατολισμένες στα φαινόμενα καθαυτά και στη συνέχεια στα πειράματα με στοχαστικά φαινόμενα σε άλλους τομείς, ε) όλες οι παραπάνω εξελίξεις είχαν την αντανάκλασή τους πρώτα από όλα στη φυσική: «μέσω της μηχανικής τα μαθηματικά είχαν ήδη διεισδύσει βαθιά στη φυσική. Οι έρευνες των διαδικασιών, όπως η θερμική αγωγιμότητα, οδήγησαν στη διεύρυνση της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων με τις διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων της φυσικής και τη δημιουργία των βάσεων της κλασικής μαθηματικής φυσικής. Άρχισε η παραδοσιακή σύνδεση μεταξύ της φυσικής και των μαθηματικών . Το γεγονός αυτό τις εμπλούτιζε και τις διεύρυνε αμοιβαία».[405] Η επίδραση των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες δεν αφορά μόνο στη φυσική, αφού στην εποχή του Gauss σημειώνεται η ανάπτυξη της μαθηματικής μοντελογράφησης σε μια σειρά επιστημών. Φαίνεται, όμως, ότι η πιο δυνατή σύνδεση είναι αυτή ανάμεσα στα μαθηματικά και στη φυσική. Δεν πρόκειται, ωστόσο, για μια σχέση όπου οι δυο πόλοι επηρεάζει ο ένας τον άλλο ισότιμα. Κατά τον Iliev οι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα σε αυτή την περίοδο αποτελούν επίδραση των μαθηματικών ιδεών στη φυσική και όχι το αντίστροφο π.χ. οι μαθηματικές ιδέες και δυνατότητες μέτρησης του χρόνου , του χώρου και της ταχύτητας ήταν αυτές που δημιούργησαν τις ιδέες των Maxwell, Lorenz και Einstein.

[3] Στην τρίτη και τελευταία εποχή εξασφαλίζεται η δημιουργία των σύγχρονων υπολογιστικών αυτομάτων. Ποιο, όμως, ήταν το έδαφος πάνω στο οποίο δημιουργήθηκε η τρίτη περίοδος των μαθηματικών; Σύμφωνα με τον Iliev «ο σχηματισμός των βασικών καθολικών δομών ως ανεξάρτητων είχε ακολουθηθεί άμεσα από την ανακάλυψη ισομορφισμών μεταξύ λογικών, αριθμητικών και ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Η τεχνική υλοποίηση των αλγορίθμων αυτών οδήγησε στη δημιουργία της υπολογιστικής τεχνικής. Άρχισε η επιστημονικοτεχνική επανάσταση της σύγχρονης εποχής. Η δημιουργία και χρησιμοποίηση της υπολογιστικής τεχνικής σε σύντομο χρονικό διάστημα εξασφάλισαν την εμφάνιση και την ανάπτυξη νέων μαθηματικών δομών: το μαθηματικό εφοδιασμό των υπολογιστικών μηχανών και συστημάτων, τη μαθηματική κυβερνητική».[406] Η αξία της τρίτης εποχής έγκειται στις μεγάλες δυνατότητες της μοντελοποίησης των διαδικασιών που

[403] . Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, σελ.84, Θεσσαλονίκη
[404] . Ο.π., σελ.86
[405] . Ο.π., σελ.87
[406] . Ο.π., σελ.89

μελετώνται από τα μαθηματικά. Η σχέση μοντελοποίησης- πληροφορίας- μαθηματικών- πληροφορικών συστημάτων περιγράφεται από δυο αρχές:
Αρχή Α. Τα μαθηματικά , η επιστήμη των Η.Υ., οι άλλες επιστήμες και η πρακτική συνδέονται συνθετικά κατά τη μαθηματική μοντελογράφηση των προβλημάτων τους με Η.Υ.
Αρχή Β. Η μαθηματική επεξεργασία της πληροφορίας σε όλους τους κρίκους της επιτελείται σε συστήματα (και δίκτυα) για εργασία σε κατανεμημένο χρόνο με τερματικά.

Καταληκτικά, ο Iliev υποστηρίζει ότι: οι έννοιες «αριθμός» και «γεωμετρικός χώρος» ως μορφές της ιδιότητας του «μετρήσιμου» και του αντικειμένου «χώρος», ανεξάρτητα από το βαθμό τελειότητας του ορισμού τους, εκφράζουν την αρχή της πρώτης εποχής στα μαθηματικά και σχηματίζουν τις γεωμετρικές θεωρίες ή την επιστήμη της γεωμετρίας που αναπτύσσονται μέχρι σήμερα. Οι θεωρίες της ανάλυσης δημιουργούνται από τις έννοιες «αριθμός» και «συνάρτηση», με τις οποίες μπορούν να περιγραφούν εικόνες του φαινομένου «μηχανική κίνηση». Με τη συγκρότηση τους αρχίζει η δεύτερη εποχή των μαθηματικών. Οι διάφορες πλευρές αυτών των τριών εννοιών δημιουργούν τα είδη των γεωμετριών και τα είδη της ανάλυσης, δηλαδή τα τμήματα της γεωμετρίας και της ανάλυσης και τα κοινά τους τμήματα. Η εξέταση της γεωμετρίας και της ανάλυσης ως αντικειμένων οδηγεί σε γενικεύσεις, στην αξιωματικοποίηση νέων «επεκταμένων» δομών, όπου η γεωμετρία και η ανάλυση αποτελούν τμήματά τους. Η γενίκευση αυτή αποτελεί την αρχή μιας νέας μαθηματικής εποχής. Η πρώτη «επεκταμένη» δομή είναι η συναρτησιακή ανάλυση. Η γενίκευση, η «επέκταση» της γεωμετρίας, της ανάλυσης και της συναρτησιακής ανάλυσης οδηγούν στις βασικές καθολικές δομές, γεγονός με το οποίο επικράτησε η τρίτη μαθηματική εποχή. **Το βασικό συμπέρασμα είναι, ότι ολόκληρη η μαθηματική γνώση ως τώρα, όλα τα «μαθηματικά νησιά» στον «ωκεανό» της δομής της τυπικής λογικής προέρχονται από την απεικόνιση του περιεχομένου των εννοιών «γεωμετρικός χώρος», «αριθμός» και «συνάρτηση». Αυτές είναι εικόνες των φαινομένων του χώρου, του μέτρου, της κίνησης και πάνω από όλα του φαινομένου της τυπικής λογικής. Αυτά είναι όλα όσα απεικονίζονται στα μαθηματικά. Βλέπουμε ότι μέσα από τη περιοδολόγηση που επιχειρεί ο Iliev, εντάσσει με οργανικό τρόπο και τον ορισμό του Ένγκελς για τα μαθηματικά θέτοντας επί τάπητος το ζήτημα της διαλεκτικής σύνδεσης ιστορίας των μαθηματικών και φιλοσοφίας τους.**

Ο Iliev πέρα από την περιοδολόγηση που κάνει- και στην οποία από ότι φαίνεται το κυρίαρχο κριτήριο είναι η δυνατότητα της περιγραφής των υπό μελέτη διαδικασιών που σε καθένα από τα τρία στάδια , αποκτά νέες ποιοτικές δυνατότητες- προτείνει και δυο μοντέλα ανάπτυξης των σύγχρονων μαθηματικών. Πριν την παράθεση αυτών των μοντέλων είναι απαραίτητες ορισμένες εννοιολογικές αποσαφηνίσεις:
[α] μια μαθηματική θεωρία ονομάζεται δομή, αν έχει συγκροτηθεί αξιωματικά. Ακριβέστερα, το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων δηλαδή νέων εννοιών, ορισμών και αληθών προτάσεων, που προκύπτουν από τα αξιώματα ενός μαθηματικού συστήματος (μη αντιφατικού, ελάχιστου και κλειστού), το ονομάζουμε μαθηματική δομή, δηλαδή αξιωματικά συγκροτημένη μαθηματική θεωρία[407],
[β] τη μαθηματική λογική, τις αλγεβρικές δομές και τις τοπολογικές δομές τις ονομάζουμε βασικές καθολικές δομές,
[γ] τη μαθηματική ανάλυση, τη συναρτησιακή ανάλυση, τις διαφορικές εξισώσεις και τη γεωμετρία τις ονομάζουμε ειδικές καθολικές δομές,
[δ] τη μαθηματική θεμελίωση των υπολογιστικών μηχανών και συστημάτων τους και τη μαθηματική κυβερνητική τις ονομάζουμε βασικές προσανατολισμένες δομές,
[ε] τις αναλυτικές (προσεγγιστικές) μεθόδους, τη θεωρία πιθανοτήτων, τη μαθηματική στατιστική και τη θεωρία βέλτιστου τις ονομάζουμε ειδικές προσανατολισμένες δομές,
[σ] όταν λέμε ότι εξετάζουμε τα σύγχρονα μαθηματικά ως κλειστό σύστημα (εσωτερική ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών) σημαίνει ότι εξετάζουμε την εξαγωγή νέων ιδιοτήτων, γενικεύσεων και δημιουργικών συνδυασμών τους από το υπάρχον περιεχόμενο του αντικειμένου των δομών (βασικών και ειδικών τόσο καθολικών όσο και

[407] . Ο.π., σελ.98

προσανατολισμένων). Η ανάπτυξη των μαθηματικών ως κλειστό σύστημα πραγματοποιείται με τη συγκρότηση δομών κλειστών αξιωματικών συστημάτων,
[ζ] όταν λέμε ότι εξετάζουμε τα μαθηματικά ως ανοικτό σύστημα, αυτό σημαίνει ότι στο περιεχόμενό τους μπορεί να προστεθεί κι ένα νέο περιεχόμενο (εικόνα της αντικειμενικής πραγματικότητας) είτε ως συμπλήρωμα στις ιδιότητες των ως τώρα αντικειμένων τους, είτε ως εικόνες νέων αντικειμένων. Η ανάπτυξη των μαθηματικών ως ανοικτό σύστημα αρχίζει από τη εφαρμογή τους.

Τα διαγράμματα 8 και 9 (κοίτα σχεδιαγράμματα στο τέλος του κειμένου) δείχνουν την ανάπτυξή τους ως ανοικτού και ως κλειστού συστήματος, αντίστοιχα. Τα συνεχή βέλη δείχνουν την προέλευση της δομής και τα διακοπτόμενα τις αντίθετες σχέσεις. Τα διπλά διακοπτόμενα βέλη δείχνουν αμοιβαία επίδραση.

Ο Iliev αφού περιγράφει τις τρεις περιόδους από τις οποίες πέρασαν τα μαθηματικά, αναρωτιέται αν θα υπάρξει μια νέα , επόμενη εποχή των μαθηματικών. Το ερώτημα, συγκεκριμένα, το θέτει ως εξής: θα φτάσουμε σε ένα νέο καθολικό φαινόμενο, από το οποίο να διαμορφωθεί νέα έννοια-βάση καθολικών δομών με ισομορφισμούς σε πολλές επιστήμες; Και απαντά ο ίδιος ότι «η καθολικότητα τέτοιων νομοτελειών θα καθορίσει την προσέγγισή τους στα μαθηματικά και την εμφάνιση νέας εποχής σε αυτά».[408] Το κλειδί του περάσματος σε μια νέα εποχή των μαθηματικών, κατά το συγγραφέα αποτελεί η δυνατότητα που προσφέρει η μοντελογράφηση και διευκρινίζει ότι δύσκολα μπορούμε να υποθέσουμε ότι γι να περάσουμε στη νέα εποχή δεν μπορεί να επιτευχθεί (είναι δύσκολο για την ακρίβεια να επιτευχθεί) πριν από το στάδιο της μοντελογράφησης στις αντίστοιχες επιστήμες. **Η νέα αυτή μοντελογράφηση συνδέεται με την ανακάλυψη νέων αντικειμένων στην αντικειμενική πραγματικότητα και όχι από τη διεύρυνση της μαθηματικής γνώσης που κατακτήθηκε. Σε αυτό το σημείο, ίσως, ο Iliev είναι κάπως απόλυτος με την έννοια ότι η διεύρυνση της μαθηματικής γνώσης αυτής καθ' αυτής έχει αποδειχτεί στο παρελθόν γόνιμη κι έχει βοηθήσει στην εκ των υστέρων σύνδεσή της με την αντικειμενική πραγματικότητα και το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτέλεσαν μάλλον οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες**. Σε κάθε περίπτωση, όμως, η τελική διαπίστωση του Iliev δε μας βρίσκει αντίθετους σύμφωνα με την οποία «είναι μικρή η πιθανότητα να έχει εξαντλήσει η ανθρώπινη γνώση τα φαινόμενα με σύνθετες καθολικές νομοτέλειες. Είναι πιθανότερο να μην έχει προσεγγίσει τη δυνατότητα να «συλλάβει» αυτά τα «βαθιά» κρυμμένα χαρακτηριστικά των φαινομένων. Για όλους αυτούς τους λόγους δεν είναι προφητεία το να προβλέπει και να περιμένει κανείς την εμφάνιση νέας μαθηματικής εποχής με την είσοδο στα μαθηματικά νέου για αυτά αντικειμένου».[409]

Με αφορμή τις διαφορετικές περιοδολογήσεις των Kolmogoroff και του Iliev θα θέλαμε να παραθέσουμε ορισμένες σκέψεις: η περιοδολόγηση δεν έχει χαρακτηριστικά βυζαντινολογίας, αφού μέσα από αυτή μπορεί να γίνουν διακριτές εκείνες οι εσωτερικές ή εξωτερικές προωθητικές δυνάμεις για την ανάπτυξη της επιστήμης. Μπορούν να γίνουν διακριτές οι περίοδοι που χαρακτηρίζονται από ένα διαφορετικό πλούτο των δεδομένων των επιστημονικών δεδομένων και να ερμηνεύεται η ασυνέχεια, δηλαδή τα άλματα στην ανάπτυξή της επιστήμης. Άρα έχει επιστημονική αξία. Εντούτοις, η όποια περιοδολόγηση διέπεται από ιστορικότητα και μπορεί να αναθεωρείται στο βαθμό που έρχονται στο φως νέα στοιχεία που πιθανότατα ήταν άγνωστα μέχρι τη στιγμή που αυτή είχε γίνει (η περιοδολόγηση) και στο βαθμό που διαφοροποιούνται ή μετασχηματίζονται οι επικρατούσες απόψεις γύρω από γνωσιολογικά ή οντολογικά ζητήματα. Η διαφορά περιοδολόγησης των δυο μελετητών δεν έρχεται απαραίτητα η μια σε αντίθεση με την άλλη γιατί η διαφοροποίησή τους έγκειται στο ότι θέτουν διαφορετικά κριτήρια ή με άλλα λόγια η διαφορά τους είναι μεθοδολογικής φύσης. Από τη μια ο Kolmogoroff κάνει τη διάκριση των ιστορικών περιόδων με βάση την εσωτερική ανάπτυξη των μαθηματικών και από αυτή την άποψη προσεγγίζει περισσότερο τη μεθοδολογία που ακολουθεί ο Μαρξ στα *Μαθηματικά Χειρόγραφα*. Από την άλλη ο Iliev κάνει το διαχωρισμό με βάση εξωτερικούς παράγοντες που υπέβαλλαν αυτό το διαχωρισμό. Από αυτή την άποψη ακολουθεί τη μεθοδολογία του Ένγκελς η οποία καταγράφηκε στη *Διαλεκτική της Φύσης* και αφορούσε

[408] . Ο.π., σελ.118
[409] . Ο.π., σελ.118

στην ανάπτυξη συνολικά της επιστήμης. Επομένως, η κάθε περιοδολόγηση έχει την αξία της και η μια δρα συμπληρωματικά στην άλλη.

ΣΤ4. Παραδείγματα ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών σύμφωνα με την υλιστικοδιαλεκτική θεώρηση: η περίπτωση της αρχαίας Ελλάδας

Ήδη έχουμε κάνει κάποιες αμυδρές αναφορές στα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στην αρχαία Ελλάδα. Θα επιχειρήσουμε σε αυτό το σημείο να τα εξετάσουμε κάπως πιο συγκεκριμένα με σκοπό να δούμε την υλιστικοδιαλεκτική άποψη για την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης σε αυτή τη συγκεκριμένη ιστορική περίοδο και στο συγκεκριμένο ιστορικό χώρο. Κατ' αρχάς να κάνουμε μια απαραίτητη διευκρίνιση: όταν οι εκπρόσωποι του ΔΥ μιλάνε για τη γένεση μιας επιστήμης, αυτής των μαθηματικών, στον ελληνικό χώρο της αρχαιότητας, σε αντιπαράθεση με τους πολιτισμούς της ανατολής οι οποίοι επίσης χρησιμοποιούσαν μαθηματικά και μάλιστα με επιτυχία αλλά όχι ως επιστήμη, δεν κάνουν κάποια πρωτότυπη επισήμανση αφού αυτή η διαπίστωση είναι κοινά αποδεκτή. Αυτό, όμως, που έχει μια αξία είναι ο τρόπος με τον οποίο βλέπει την εξέλιξη της επιστήμης ένας εκπρόσωπος του ΔΥ. Στην ιστορία, λοιπόν, της επιστήμης διακρίνονται τρία στάδια:
Α) Ένα προεπιστημονικό εμπειρικό, κατά το οποίο πραγματοποιείται η συσσώρευση ενός πλήθους εμπειρικών γνώσεων και πρακτικών αντιμετώπισης προβλημάτων.
Β) Το στάδιο του ραγδαίου ποιοτικού μετασχηματισμού του συνόλου των γνώσεων αυτών και της συγκρότησης τους σε λογικά διαρθρωμένο σύνολο γνώσεων. Σημαντικότατο στοιχείο της φάσης αυτής αποτελεί η εμφάνιση του επιστημονικού λόγου και η αποσαφήνιση των κανόνων του παιχνιδιού, η σταδιακή κατάκτηση δηλαδή συστηματικών κανόνων συμπερασμού.
Γ) Το στάδιο της σχετικά αυτοτελούς ανάπτυξης της επιστήμης, η οποία δε στηρίζεται πλέον τόσο άμεσα στην εμπειρία αλλά και σε συστηματικούς κανόνες συμπερασμού που σε μεγάλο βαθμό έχουν κατακτηθεί στο προηγούμενο στάδιο.[410]

Ταυτόχρονα με αυτές τις επισημάνσεις διατυπώνονται ειδικότερα για τα μαθηματικά τρεις θέσεις οι οποίες έχουν ως εξής:
1η θέση: Τα μαθηματικά είναι ιστορικά το πρώτο παράδειγμα επιστήμης που διαθέτουμε.
2η θέση: Στην ιστορία των μαθηματικών μπορούμε να διακρίνουμε τα τρία στάδια που προαναφέρθηκαν.
3η θέση: Ο μαθηματικός λόγος είτε αποτέλεσε το πλαίσιο είτε το πρότυπο για την ανάπτυξη άλλων επιστημονικών γνώσεων, άλλων επιστημονικών περιοχών. Με άλλα λόγια, η Φυσική (Οπτική, Μηχανική, Υδροστατική, Κινηματική), η Αστρονομία, η Μουσική και η Λογική, γεννήθηκαν είτε μέσα στα πλαίσια των μαθηματικών της εποχής είτε σε στενή αλληλεπίδραση μ' αυτά, (κοίτα στα σχεδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 10).[411]

ΣΤ4.1: Η ανάλυση της πρώτης θέσης

Η πρώτη θέση θέτει αβίαστα το ζήτημα του ορισμού της επιστήμης. Την έννοια της επιστήμης την «αγγίξαμε» στο κεφάλαιο Α. Υπενθυμίζουμε πολύ συμπυκνωμένα τις βασικές θέσεις: η επιστήμη επεξεργάζεται και θεωρητικοποιεί συστηματικά τις γνώσεις για την αντικειμενική πραγματικότητα. Η επιστήμη περιγράφει, ερμηνεύει και προβαίνει σε πρόγνωση των διαδικασιών και των φαινομένων της πραγματικότητας. Τελικά η επιστήμη είναι η θεωρητική αντανάκλαση της πραγματικότητας. Όταν αναφερόμαστε στην επιστήμη όχι ως γενική κατηγορία αλλά ως ειδική γνώση σε μια περιοχή της πραγματικότητας τότε σημαίνει αναζήτηση και γνώση των αιτιών ενός φαινομένου και των νόμων που διέπουν μια κατηγορία φαινομένων ή μια περιοχή της πραγματικότητας. Αλλά οι κατηγορίες της αιτίας και του νόμου είναι κατηγορίες ιστορικές. Αυτό που σήμερα είναι αιτιακή περιγραφή, αύριο παρουσιάζεται ως επιφαινόμενο μιας βαθύτερης νομοτέλειας. Η επιστημονική εξήγηση μπορεί να κατανοηθεί μόνο ως διαδικασία. Ωστόσο στην ιστορική

---

[410] . Παπαδοπετράκης Ευτύχης, Η γένεση μιας επιστήμης: Τα ελληνικά μαθηματικά, περιοδικό Ουτοπία, τ. 24, 1997
[411] . Ο.π.

αυτή διαδικασία μπορούμε να διακρίνουμε μια αποφασιστική στιγμή: τη στιγμή διαμόρφωση μιας επιστήμης. Αυτός ο προσδιορισμός της επιστήμης μπορεί να γίνει πληρέστερος αν συνοδευτεί και από τους αριστοτέλειους περιορισμούς σύμφωνα με τους οποίους: α) τα αντικείμενα της επιστήμης έχουν εξασφαλισμένη ύπαρξη. Η ύπαρξη αυτή διασφαλίζεται μέσω αξιωμάτων ή/και αποδείξεων, β) υπάρχουν αποφάνσεις που γίνονται αποδεκτές χωρίς απόδειξη (η αποδοχή των όποιων τέτοιων γεγονότων γίνεται γιατί απλώς αυτά υπάρχουν, σύμφωνα με το ΔΥ), γ) όλες οι άλλες αποφάνσεις μπορούν να γίνουν αποδεκτές μέσα στο πλαίσιο της επιστήμης αν είναι αποτέλεσμα (λογική συνέπεια) των αποφάνσεων που έχουν γίνει, από πριν, αποδεκτές χωρίς απόδειξη.

Παίρνοντας, λοιπόν υπόψη αυτούς τους προσδιορισμούς και τους περιορισμούς για την επιστήμη διατυπώνεται η άποψη[412] ότι το πρώτο παράδειγμα ολοκληρωμένου επιστημονικού (μαθηματικού) λόγου είναι κατάτι αρχαιότερο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Πρόκειται για τα έργα του Αυτόλυκου *Περί κινούμενης σφαίρας* και *Περί επιτολών και δύσεων Α΄ και Β΄*. Το μεν πρώτο αναφέρεται στη γεωμετρία της κινούμενης σφαίρας, το δε δεύτερο σε θέματα σφαιρικής αστρονομίας. Στα έργα αυτά ο επιστημονικός λόγος διαθέτει την ίδια δομή με τα *Στοιχεία* και τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη. Η επισήμανση αυτή δε γίνεται μόνο για λόγους ιστορικής ακρίβειας αλλά για να επισημανθεί μια ιστορική συνέχεια που διαγράφεται πριν από το τεράστιο επίτευγμα του Ευκλείδη: «Δεν υπερβάλλουμε καθόλου αν ισχυριστούμε ότι ο μαθηματικός λόγος στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη έχει την αρτιότητα των γεωμετρικών κατασκευών που περιγράφει. **Όμως ο λόγος αυτός δεν εμφανίστηκε με μια πάνοπλος, όπως η Αθηνά μέσα από το κεφάλι του Δία. Έχει μια ιστορία τριών αιώνων πίσω του**»[413], (η υπογράμμιση δική μας).

ΣΤ4.2: <u>Η ανάλυση της δεύτερης θέσης</u>

Κατά την εξέλιξη της επιστήμης ήδη έχουμε πει πως το πρώτο στάδιο είναι αυτό που χαρακτηρίζεται ως προεπιστημονικό. Για τα μαθηματικά αυτό το στάδιο εντοπίζεται στην εποχή του σιδήρου, πριν από την οποία η γνώση με την πράξη δεν είναι διαχωρισμένα αλλά βαδίζουν μαζί. Η ενιαία αυτή διαδικασία γνωστοποιείται από γενιά σε γενιά με τον προφορικό λόγο και το παράδειγμα. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της προεπιστημονικής φάσης; Υπάρχει μεγάλη συσσώρευση γνώσεων σχετικά με τους αριθμούς, εξ' ου δυνατότητα μέτρησης επιφανειών και όγκων που δηλώνεται από την κατασκευή μεγάλων έργων στους πολιτισμούς της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Τα μαθηματικά επιτεύγματα, της Αιγύπτου για παράδειγμα, είναι σημαντικά: ύπαρξη ενός εύχρηστου δεκαδικού αθροιστικού αριθμητικού συστήματος για την αναπαράσταση μέχρι και μεγάλων αριθμών στην Αίγυπτο, πρακτικές και χρήσιμες γνώσεις σχετικά με τη γη όπως ευθειοποίηση, προσανατολισμός από τα σημεία του ορίζοντα, άρρητες συνταγές για τον υπολογισμό όγκων και επιφανειών, καλή προσέγγιση για το π κ.λπ. Όμως, είτε αναφερόμαστε στα μαθηματικά επιτεύγματα των Αιγυπτίων, είτε των Σουμερίων και των Βαβυλωνίων, οι όποιες μαθηματικές γνώσεις μένουν σε εμπειρικό επίπεδο: καμία από τις έννοιες που χαρακτηρίζουν τις επιστήμες (ορισμός, αξίωμα, θεώρημα, απόδειξη) δεν έχει εντοπιστεί στις ιστορικές πηγές. Η ερμηνεία που δίνεται για το ότι δεν πραγματοποιήθηκε το άλμα σε αυτούς τους πολιτισμούς βρίσκει και πάλι την εξήγησή του στις ιδιαίτερες κοινωνικές συνθήκες αυτών των πολιτισμών. Δε θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι κοινωνίες αυτές που χαρακτηρίστηκαν από το Μαρξ ως ασιατικός τρόπος παραγωγής δεν ταυτίζονταν με τα δουλοκτητικά συστήματα στη δομή τους. Εδώ έχουμε να κάνουμε με ένα ιερατείο που κρατά κλειστή τη γνώση για λογαριασμό του. Πρόκειται για μια πολύ ισχυρή συνθήκη που από ότι φαίνεται ήταν και ο καθοριστικός παράγοντας που εμπόδισε την εμφάνιση ενός σημείου ασυνέχειας στην εξέλιξη των μαθηματικών.

Στον αρχαιοελληνικό χώρο και συγκεκριμένα από το Θαλή (624-548 π.Χ.) που ως γνωστό διατύπωσε τα πρώτα θεωρήματα μέχρι και τον Ευκλείδη (300π.Χ.) σημειώνονται τρεις μεγάλες πολιτισμικές κατακτήσεις: α) η κληρονομική μεταβίβαση της εξουσίας που υπήρχε στις ασιατικές κοινωνίες δεν υφίσταται πλέον κι έχουμε την οργάνωση ενός

[412] . Ο.π., σελ.38
[413] . Ο. π., σελ.39

δημοκρατικού πολιτεύματος στο πλαίσιο του κράτους-πόλης, β) το θέατρο που στη συνέχεια αγκάλιασε σχεδόν όλους τους πολιτισμούς και φτάνει μέχρι και τις ημέρες μας και γ) την εμφάνιση της πρώτης επιστήμης και των πρώτων προβληματισμών σχετικά με την οργάνωσή της (λογική). Οι κατακτήσεις αυτές λαμβάνουν χώρα παράλληλα με τις αλλαγές που πραγματοποιούνται στην κοινωνική δομή (και βασίζονται σε αυτή). Η κυριαρχία της παλιάς αριστοκρατίας των γαιοκτημόνων εξασθενεί και στο ιστορικό προσκήνιο εμφανίζεται ως η νέα κυρίαρχη δύναμη οι έμποροι και οι τεχνίτες που είχαν στην κατοχή πους μικρά εργαστήρια. Η αναφορά αυτών των ιστορικών στοιχείων έχει μεγάλη σημασία για να απεγκλωβίζεται η σκέψη μας από μια αρχαιοπληξία που φαίνεται τον τελευταίο καιρό να κερδίζει έδαφος είτε μέσα από αναλύσεις γραφικού τύπου είτε από επιστημονικοφανείς προσεγγίσεις. Όπως και να έχει, είναι πλέον γεγονός ότι το προεπιστημονικό στάδιο αποτελεί ιστορία και στο προσκήνιο έχει εμφανιστεί η πρώτη επιστήμη. Δεν υπάρχει μόνο συσσώρευση πολλών γνώσεων, αλλά συστηματοποίηση της γνώσης, ορισμοί, αξιώματα, τρόποι απόδειξης, θεωρήματα. Όσον αφορά στην τρίτη φάση εξέλιξης, αυτό της σχετικής αυτονόμησης της μαθηματικής επιστήμης, λόγω της σπουδαιότητάς του θα το εξετάσουμε ξεχωριστά, λίγο παρακάτω.

ΣΤ4.3: <u>Η ανάλυση της τρίτης θέσης</u>

Η τρίτη θέση φαίνεται να δικαιώνεται από ένα πλήθος γεγονότων. Το έργο του Αυτόλυκου (προηγήθηκε των *Στοιχείων*) είναι μια από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις: στα τρία του βιβλία *Περί κινούμενης σφαίρας, Περί επιτολών και δύσεων α΄και β΄* , διακρίνεται μια δομή ίδια με αυτή των *Στοιχείων*. Προτάσσονται ορισμοί και ακολουθούν οι προτάσεις με τις αποδείξεις τους. Ακόμα στις αποδείξεις υπάρχουν τα ίδια μέρη όπως και στα *Στοιχεία*: πρόταση – έκθεση – διορισμός – κατασκευή – απόδειξη - συμπέρασμα. Άλλο παράδειγμα αποτελεί η *Μηχανική* (Στατική και Υδροστατική) του Αρχιμήδη. Σε αυτό το έργο η Μηχανική συγκροτείται κατά τα πρότυπα των μαθηματικών ή με άλλα λόγια έχουμε μια αξιωματικοποιημένη φυσική. Ένα ακόμα παράδειγμα προέρχεται από τον ίδιο τον Ευκλείδη και το έργο του *Οπτικά*. Πρόκειται για ένα έργο γεωμετρικής οπτικής το οποίο είναι γραμμένο κατά τα πρότυπα των Στοιχείων: υπάρχουν έξι αιτήματα και στη συνέχεια ακολουθούν 58 προτάσεις με τις αποδείξεις τους. Αυτός ο αλληλεπηρεασμός διαφορετικών επιστημονικών περιοχών δείχνει και την αντίληψη των αρχαίων Ελλήνων σχετικά με το ότι ο κόσμος αποτελεί μιαν ενότητα. Άποψη που βρίσκει σύμφωνο και το ΔΥ.

ΣΤ5: <u>Ερμηνεία του φαινομένου της σχετικής αυτονόμησης των μαθηματικών</u>

Το ζήτημα της σχετικής αυτονόμησης των μαθηματικών έχει θιχτεί σε ορισμένα σημεία του κειμένου μας, αλλά δεν έχει δοθεί μια ικανοποιητική εξήγηση για ποιο λόγο αυτονομούνται και πότε οριοθετείται αυτή η σχετική αυτονόμηση. Θα θέσουμε το πρόβλημα υπό τη μορφή του παρακάτω ερωτήματος: τα μαθηματικά γεννιόνται και αναπτύσσονται αποκλειστικά στη βάση ικανοποίησης υλικών αναγκών και μόνο; Αν είναι έτσι, τότε πώς ερμηνεύεται το φαινόμενο της σχετικής αυτονόμησης και σε τελική ανάλυση τι σημαίνει σχετική αυτονόμηση;

Το να ισχυριστεί κάποιος ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται αποκλειστικά και μόνο στη βάση της ικανοποίησης υλικών αναγκών θα ήταν μια κακή υπηρεσία στο ΔΥ. Δε θα αποτελούσε μια θεώρηση της εξέλιξης των μαθηματικών υπό το πρίσμα του ΔΥ, αλλά ένα κακέκτυπο υλιστικοδιαλεκτικής θεώρησης. Δε θα έπαιρνε υπόψη τη συνθετότητα της κοινωνικής εξέλιξης, τη συνθετότητα της επιστημονικής εξέλιξης, θα ήταν αντίθετο και με την αρχαιοελληνική άποψη που έβλεπε τον κόσμο ως μιαν ολότητα. Επομένως, δε θα ήταν μια διαλεκτική θεώρηση. Ωστόσο, δε θα έπρεπε να ξεχνάμε ότι μια συνεπή υλιστικοδιαλεκτική ματιά θα πρόσθετε τη φράση «σε τελική ανάλυση». Που σημαίνει ότι μπορεί τα μαθηματικά να μην εξελίσσονται πάντα και με ένα απόλυτο τρόπο στη βάση ικανοποίησης υλικών αναγκών, σε τελική ανάλυση, όμως, καθορίζονται από αυτή την αναγκαιότητα.

Ας ξεκινήσουμε με το ερώτημα τι σημαίνει η σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών. Σημαίνει πως τα μαθηματικά δε χρησιμοποιούνται απλά και μόνο να μας επιλύσουν

προβλήματα προς καλυτέρευση των υλικών συνθηκών της ζωής των ανθρώπων. Ασφαλώς αυτό συνέβαινε, συμβαίνει και θα συμβαίνει πάντα. Τα παραδείγματα είναι «ατελείωτα» και ήδη έχουμε αναφέρει αρκετά. Παράλληλα, όμως, με αυτή τη διαδικασία λαμβάνει χώρα και μια άλλη. Τα μαθηματικά αναπτύσσονται με την ερευνητική δουλειά των μαθηματικών (μαθηματικών ως φυσικά πρόσωπα). Αξιωματικοποιούνται, προκύπτουν θεωρήματα, εφευρίσκονται αποδεικτικές διαδικασίες, προκύπτουν νέοι κλάδοι. Αυτές είναι ορισμένες διαδικασίες που σκιαγραφούν αυτή τη σχετική αυτονόμηση.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις απαντάμε έμμεσα και σε ένα δεύτερο ερώτημα: πότε εντοπίζεται χρονολογικά αυτή η σχετική αυτονόμηση; Η απάντηση δεν μπορεί να είναι του τύπου «η σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών παρουσιάστηκε την 17η Μαΐου του 453 π.Χ.». Μια τέτοια απάντηση δε θα ήταν μόνο αστεία αλλά αντιδιαλεκτική και άρα αντιεπιστημονική. Θα μπορούσαμε, όμως, να σταθούμε σε ορισμένους ιστορικούς σταθμούς που αποτέλεσαν αποφασιστικά βήματα της σχετικής αυτονόμηση. Κατά κάποιο τρόπο θα μπορούσε να πει κάποιος ότι η σχετική αυτονόμηση ξεκινάει με τη χρήση των αριθμών και την αποτύπωσή τους σε παπύρους ή ακόμα-ακόμα με τη χρήση των εγκοπών που είναι χαραγμένες ανά πεντάδες στο γνωστό προϊστορικό κόκαλο του λύκου στο οποίο φανερώνεται μια πρώιμη άποψη αντιστοιχίας ή για να είμαστε πιο ακριβείς θα λέγαμε ότι τίθενται αυτομάτως οι βάσεις και οι προϋποθέσεις για τη σχετική τους αυτονόμηση. Δεύτερος σταθμός είναι η αποδεικτική διαδικασία. Το γεγονός δηλαδή ότι τα όσα διατυπώνονται στα μαθηματικά επιχειρείται να αποδειχτούν. Και το τρίτο στάδιο είναι η αξιωματικοποίηση των μαθηματικών. Ίσως, το αποφασιστικότερο βήμα για τη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών.

ΣΤ 5.1: <u>Ένα παράδειγμα από τον Αρχιμήδη</u>

Απαντώντας στα δυο πρώτα ερωτήματα που θέσαμε, δηλαδή τι σημαίνει σχετική αυτονόμηση και πότε αυτή παρουσιάζεται, ακόμα δεν έχουμε αγγίξει τον πυρήνα που προβλήματος που αποτελούν τα ερωτήματα: γιατί και με ποιο τρόπο πραγματοποιήθηκε αυτή η σχετική αυτονόμηση; Η απάντηση σε αυτά τα δυο νέα ερωτήματα δεν είναι απλή και το βασικότερο δεν μπορεί να αναζητηθεί στενά εντός των μαθηματικών. Πρέπει κανείς να δει τη διαμόρφωση των φιλοσοφικών ρευμάτων και των κοινωνικών εξελίξεων που σημειώνονται στην αρχαία Ελλάδα. Ασφαλώς, αναφερόμαστε στην αρχαία Ελλάδα για το γνωστό λόγο: ότι σε αυτό τον ιστορικό χώρο δεν έχουμε μια εξέλιξη των μαθηματικών όπως αυτή παρατηρήθηκε στην Ανατολή: δηλαδή σημαντικά μαθηματικά επιτεύγματα μέσω υπολογιστικών διαδικασιών. Στην αρχαία Ελλάδα όπως, ήδη, έχουμε αναφέρει και όπως είναι γνωστό η σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών συντελείται με αποφασιστικό τρόπο όταν πια τα μαθηματικά αξιωματικοποιούνται, στοιχείο που είχε σοβαρότατα επακόλουθα για την ανάπτυξή τους. Πριν να παραθέσουμε και να σχολιάσουμε ορισμένες απόψεις που επιχειρούν να δώσουν ερμηνεία στο ζήτημα της σχετικής αυτονόμησης των μαθηματικών θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν συνειδητοποιήσει πλήρως την αξία αυτής της σχετικής αυτονόμησης. Με άλλα λόγια και σε σημερινή γλώσσα, είχαν συνειδητοποιήσει τη διαφορά εφαρμοσμένων και θεωρητικών μαθηματικών. Υπενθυμίζουμε τις αναφορές του Πλάτωνα για τη γεωμετρία και τη χρησιμότητά της στον πόλεμο κ.λπ. Ακόμα, αναφέρουμε ένα πολύ ενδεικτικό παράδειγμα που σχετίζεται με το μεγάλο Αρχιμήδη. Στο έργο του *Κύκλου μέτρησις* παραθέτει τρία θεωρήματα. Στο δεύτερο θεώρημα γράφει: «Ο κύκλος έχει προς το τετράγωνο της διαμέτρου του λόγο ίσο με το λόγο του 11 προς 14». Προφανώς με αυτό το θεώρημά του υπολογίζεται το π, αφού $E_K/Δ^2=11/14$ ή $πρ^2/4ρ^2=11/14$ ή $π/4=11/14$. Στο τρίτο θεώρημα γράφει: « Η περίμετρος κάθε κύκλου ισούται με το τριπλάσιο της διαμέτρου του συν ένα τμήμα μικρότερο από το ένα έβδομο της και μεγαλύτερο από τα δέκα εβδημοκοστά πρώτα της». Σε σημερινή γραφή αυτό θα το γράφαμε ως εξής: $3^{10}/71d<2πρ<3^1/7d$, όπου d η διάμετρος του κύκλου. Μετά τη διατύπωση αυτού του τρίτου θεωρήματος εύλογα γεννιέται το ερώτημα: για ποιο λόγο ο Αρχιμήδης αφού έχει ήδη προσεγγιστικά υπολογίσει το π, στη συνέχεια το φράσσει; Αυτό δεν αποτελεί μια αντίφαση; Η απάντηση είναι όχι και αυτό γιατί ο Αρχιμήδης με το δεύτερο θεώρημα έχει στο μυαλό του την επίλυση πρακτικών προβλημάτων και δικαιούμαστε να το πούμε αυτό αφού είναι ένας από τους πιο

χαρακτηριστικούς εκπροσώπους εκείνων των επιστημόνων που μελετούσαν τα μαθηματικά για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων, παρά το γεγονός ότι οι ιστορικές μαρτυρίες συνηγορούν στο ότι υποτιμούσε τις μηχανικές του κατασκευές. Συγχρόνως, μέσω του τρίτου θεωρήματος έχει κατανοήσει την αξία της σχετικής αυτονόμησης τους, αφού αυτή (η σχετική αυτονόμηση) μπορεί να οδηγήσει σε νέους άγνωστους μέχρι τώρα δρόμους για νέες μαθηματικές ανακαλύψεις.[414]

ΣΤ 5.2: <u>Η άποψη του Vernant ή πώς κοινωνική εξέλιξη και η επιστήμη εμπλέκονται</u>

Ας επανέλθουμε, όμως, στα ερωτήματά μας: γιατί και πώς πραγματοποιήθηκε η σχετική αυτονόμηση; Πριν να δώσουμε κάποιες απόψεις να διευκρινίσουμε ότι το πώς και το γιατί δε θα τα διαχωρίσουμε με ένα τεχνητό τρόπο αφού κατά την γνώμη μας απαντώντας στο ένα απαντάς ουσιαστικά και στο άλλο.

Το πέρασμα από το μύθο στην ορθολογική σκέψη[415] που σημειώνεται από την ιωνική σχολή μπορεί να μας προσφέρει κάποιες πρώτες απαντήσεις στα ερωτήματά μας.

---

[414] . Σε αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε μια διευκρίνιση προκειμένου να αποφύγουμε κάποιες παρανοήσεις. Συχνά υποστηρίζεται ότι ο Αρχιμήδης έδειχνε μια υποτίμηση για τις μηχανικές του κατασκευές και ότι εντασσόταν σε εκείνον το φιλοσοφικό στρατόπεδο για το οποίο η ορθή σκέψη είναι αυτή που έχει αξία και όχι η πρακτική εφαρμογή της επιστήμης. Νομίζουμε, ότι πρόκειται για ένα κάπως βιαστικό συμπέρασμα. Το απόσπασμα του Πλούταρχου σχετικά με τον Αρχιμήδη, ίσως, ξεκαθαρίζει την κατάσταση. Σε αυτό υποστηρίζεται ότι ο Αρχιμήδης «παρότι από αυτές τις εφευρέσεις είχε αποκτήσει φήμη και δόξα, πάνω από ανθρώπινες, δε θέλησε να αφήσει σύγγραμμα, στο οποίο να πραγματεύεται τέτοιου είδους θέματα. Την ενασχόληση με έργα μηχανικά και τεχνικά την θεωρούσε αγενή και βάρβαρη, γιατί την προκαλούσε η ανάγκη και το κέρδος. Όλη του η φιλοδοξία στρεφόταν στο να αποδώσει εκεί όπου το ωραίο, καθώς και το πνευματικό βάθος, δεν αναμιγνύονται με τις ανάγκες της καθημερινής ζωής», (Μάρκελλος XVII, 4). Με βάση αυτό το απόσπασμα, φαίνεται ότι ο Αρχιμήδης έχει συνειδητοποιήσει πλήρως τη χρηστικότητα τα μαθηματικών και της επιστήμης. Η ένστασή του είναι ηθικής φύσης κι έχει να κάνει με τα κίνητρα χρήσης της επιστημονικής γνώσης. Πρόκειται για ενστάσεις ή προβληματισμούς που αναπαράχθηκαν και από το Λεονάρντο Ντα Βίντσι, αλλά και πολύ αργότερα από τον Αϊνστάιν και τον Οπενχάιμερ. Το γεγονός ότι συνδέει τις επιστημονικές εξελίξεις βάση των αναγκών και του κέρδους, δείχνει την πεποίθησή του ότι η επιστημονική μελέτη, εκκινεί από πρακτικές ανάγκες, ακόμα κι αν δε συνειδητοποιεί άμεσα ότι αυτό είναι πεποίθησή του, ακόμα κι αν είναι επηρεασμένος από την πλατωνική θεώρηση των μαθηματικών. Πώς να πιστέψουμε ότι έκανε μαθηματικά για τα μαθηματικά όταν για παράδειγμα κατασκεύασε ένα εξάγωνο κάτοπτρο, προκειμένου να αξιοποιήσει την ηλιακή ενέργεια; Ή όταν κατασκεύαζε την υδραντλία με συγκεκριμένα τεχνικά χαρακτηριστικά; Σύμφωνα με το Βιτρούβιο «ο κοχλίας είναι μια μηχανή που μπορεί να αντλήσει μεγάλη ποσότητα νερού. Η κατασκευή της έχει ως εξής: παίρνουν μια δοκό. Εάν το μήκος της είναι 5 μέτρα το πάχος της είναι 0,33 μέτρα. Η δοκός αποστρογγυλούται και γίνεται κύλινδρος. Οι δυο περιφέρειες των βάσεων τη κυλινδρικής δοκού υποδιαιρούνται σε τέσσερα ή οκτώ ίσα μέρη, τα οποία συνδέουν κατόπιν μεταξύ τους με ευθείες γραμμές (χορδές)…», Βιτρούβιος, Περί Αρχιτεκτονικής, X,6,258.

[415] . Το τι σημαίνει ορθολογισμός και ορθολογική σκέψη είναι ένα θέμα προς συζήτηση. Ο ορθολογισμός δεν ταυτίζεται απαραίτητα με μια επιστημονική προσέγγιση των πραγμάτων. Για παράδειγμα υπάρχει ο Ορθός Λόγος του Καρτέσιου μέσω του οποίου «αποδεικνύεται» η ύπαρξη του Θεού και το πνεύμα παίρνει την πρωτοκαθεδρία από την ύλη με το περίφημο cogito ergo sum. Ή ακόμα η απόδειξη της ύπαρξης του Θεού από τον Μπέρκλευ με «λογικά» επιχειρήματα. Από αυτή την άποψη μπορούμε να μιλήσουμε για υλιστικό και για ιδεαλιστικό ορθολογισμό. Είναι χαρακτηριστικό ότι τις αρχές του ορθολογισμού τις συμμερίζονταν και οι υλιστές όπως ο Σπινόζα αλλά και οι ιδεαλιστές όπως ο Λάιμπνιτς. Ο ορθολογισμός αποκτούσε διαφορετικό χαρακτήρα ανάλογα με το πώς λυνόταν το κλασικό πρόβλημα της σχέσης Είναι – νόησης. Ποιος είναι όμως ο κοινός παράγοντας των ορθολογισμών, γιατί αφού μιλάμε και για ιδεαλιστικό και για υλιστικό ορθολογισμό, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ορισμένα κοινά σημεία, τουλάχιστο στο επίπεδο της μεθοδολογίας. Νομίζουμε, ότι ως κοινό σημείο είναι η απαίτηση να βρεθεί ένας τρόπος ερμηνείας των φαινομένων με τη χρήση μιας συγκεκριμένης μεθόδου που θα θέτει τα συμπεράσματα σε μια στερεή βάση τέτοια που θα τα καθιστά αδιαμφισβήτητα. Όμως και η μέθοδος δεν μπορεί να είναι «αθώα», αφού έχει σημασία το ποιες προκείμενες επιλέγουμε σε αυτή τη μέθοδο ή ακόμα παίζει ρόλο η διαλεκτική ή η τυπική ερμηνεία που θα δώσουμε στα συμπεράσματα της μεθόδου μας. Ο ορθολογισμός δεν παίρνει πάντα αποστάσεις από το μύθο, τη θρησκεία, την «υπεροχή» της ιδέας έναντι της υλικής υπόστασης της ζωής. Επομένως, η

Σύμφωνα με τον Vernant «τον 6ο αιώνα π.Χ., στις ελληνικές πόλεις της Μικράς Ασίας, ξεπροβάλλει ένας νέος τρόπος σκέψης σχετικά με τη φύση, ένας τρόπος **εντελώς θετικός**», (η υπογράμμιση δική μας). [416] Σε τι συνίσταται, όμως, αυτός ο θετικός τρόπος σκέψης; Κατά τον Cornford «στη φιλοσοφία ο μύθος είναι 'ορθολογισμένος'».[417] Ο Vernant δίνοντας ερμηνεία αυτού του χαρακτηρισμού ('ορθολογισμένος' μύθος) γράφει ότι η αναζήτηση του ανθρώπου «πήρε τη μορφή ενός ξεκάθαρα διατυπωμένου προβλήματος. Ο μύθος είναι μια διήγηση και όχι η λύση ενός προβλήματος. Διηγιόταν τη σειρά ταξιθετικών πράξεων του βασιλιά ή του Θεού, όπως τις παρίστανε μιμητικά η ιερουργία. Το πρόβλημα λυνόταν χωρίς να έχει τεθεί. Στην Ελλάδα, όμως, όπου θριαμβεύουν νέες πολιτικές μορφές με την ανάπτυξη της Πόλης, η παλαιά βασιλική τελετουργία επιζεί μονάχα σε μερικά ίχνη, που το νόημά τους έχει πια χαθεί».[418] Ο Vernanat συνεχίζοντας το σκεπτικό του γράφει σε άλλο σημείο: «Για το φιλόσοφο πάντως, αυτό που υποτιμά τη «φύση» και την κατεβάζει στο επίπεδο του απλού φαινομένου είναι το γεγονός, ότι το γίγνεσθαι της *φύσεως* δεν είναι πιο κατανοητό από τη γέννηση του μύθου. Το αυθεντικό λοιπόν Είναι, που η φιλοσοφία θέτει να φτάσει και ν' αποκαλύψει, πέρα από τη φύση, δεν είναι το μυθικό «υπερφυσικό», αλλά μια εντελώς διαφορετική πραγματικότητα: δηλαδή, η καθαρή αφαίρεση, η ταυτότητα, η ίδια η αρχή της ορθολογικής σκέψης, αντικειμενοποιημένη με τη μορφή του *λόγου*. Στους Ίωνες, η νέα απαίτηση για θετικότητα έφτασε αμέσως στο απόλυτο με την έννοια της *φύσεως* […] Η γέννηση της φιλοσοφίας παρουσιάζεται λοιπόν στενά δεμένη με δυο μεγάλες νοητικές μεταβολές: με μια θετική σκέψη, που αποκλείει κάθε μορφή υπερφυσικού και απορρίπτει την έμμεση εξομοίωση, που κάνει ο μύθος, ανάμεσα σε φυσικά φαινόμενα και σε θεϊκούς παράγοντες· και με μιαν αφηρημένη σκέψη, που απογυμνώνει την πραγματικότητα από εκείνη τη δύναμη αλλαγής που της έδινε ο μύθος και απορρίπτει την παλαιά εικόνα της ένωσης των αντιθέτων, προς όφελος μιας κατηγορικής διατύπωσης της αρχής της ταυτότητας».[419]

Ποιοι είναι, όμως, οι λόγοι που ο μύθος δίνει πλέον στη θέση του στην ορθολογισμένη σκέψη; Η απάντηση δεν μπορεί παρά να αναζητηθεί στις (σημαντικές) αλλαγές των κοινωνικών παραμέτρων. Στην περιοχή της Ιωνίας σημειώνονται σημαντικοί κοινωνικοί αγώνες που κινούνται από διαφοροποιημένα ταξικά συμφέροντα. Κατόπιν της αποσύνθεσης της ιστορικής κατηγορίας του γένους την εξουσία στα χέρια τους την έχουν οι ευγενείς (αριστοκράτες). Οι ευγενείς είναι γαιοκτήμονες (γεωμόροι) που καθορίζουν τις υπάρχουσες παραγωγικές σχέσεις εκείνης της κοινωνίας. Ταυτόχρονα, όμως, υπάρχουν ανερχόμενες κοινωνικές δυνάμεις που φανερώνονται και δυναμώνουν μέσα από την ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυτιλίας. Οι ανερχόμενες παραγωγικές δυνάμεις ασφυκτιούν μέσα στις παλιές παραγωγικές σχέσεις. Σημειώνονται σκληροί ταξικοί αγώνες που δεν εξαφανίζουν ή παραμερίζουν από την εξουσία τους ευγενείς, αλλά περιορίζουν την εξουσία τους. Σε αυτό το σημείο δίνεται μια εξήγηση και για την ανάπτυξη και της φιλοσοφίας και των θετικών επιστημών: « Μια, όμως, που η νέα τάξη στήριζε τη δύναμή της στο εμπόριο, τη χειροτεχνία και τη ναυτιλία, **ήταν επόμενο να ευνοήσει και υποστηρίξει την ανάπτυξη ορισμένων επιστημών (γεωγραφίας, αριθμητικής, αστρολογίας, μηχανικής).** Από τη μια μεριά έπρεπε η παραγωγή όλο και να μεγαλώνει, για να μπορεί το ανταλλαχτικό και διαμετακομιστικό εμπόριο που γινόταν από τη στεριά και από τη θάλασσα (νησιά του Αιγαίου, Αίγυπτο κ.λπ.) να πάρει μεγαλύτερη έκταση κι από την άλλη

αναφορά στον ορθολογισμό πρέπει να συνοδεύεται και από εξηγήσεις για το είδος του. Εμείς, στο κείμενο μας θα τον χρησιμοποιήσουμε ως τέτοιο: ως μια απόπειρα απόστασης από το μύθο, το μυστικισμό, τη θρησκεία. Αναφερόμαστε, όμως, σε απόπειρες κάτι που σημαίνει ότι ο ορθολογισμός δεν μπορεί παντού και πάντα να ταυτίζεται με ένα καθαρά υλιστικό ορθολογισμό, αλλά μπορεί να ξεκινάει να αποκτάει τέτοια χαρακτηριστικά. Επιπλέον, ένας υλιστικός ορθολογισμός δεν μπορεί να δεχτεί μια άπειρη αλυσίδα αίτιου-αιτιατού με την έννοια ότι υπάρχουν «πράγματα» χωρίς αίτιο. Για παράδειγμα η απειρότητα του σύμπαντος ή η αυθυπαρξία της ύλης είναι χωρίς αίτιο. Απλώς είναι έτσι…

[416] . Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.2, σελ. 155, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος

[417] . F. M. Cornford, Principium sapientiae, σελ.187-188

[418] . Ο.π., σελ.162

[419] . Ο.π., σελ.168-169

χρειάζονταν λογιστικές πράξεις, όπως θα λέγαμε σήμερα, κι ακόμα γεωγραφικές-ιστορικές γνώσεις, τεχνικά έργα (λιμενικές εγκαταστάσεις, αποθήκες κ.λπ.), καθώς και αρδευτικά, αποξηραντικά και αντιπλημμυρικά έργα απ' έξω από τις πόλεις για να προστατεύονται, όχι μονάχα η γεωργική παραγωγή, μα και οι στεριανοί δρόμοι, που ένωναν τις πόλεις αυτές με το εσωτερικό, από τις νεροποντές, τα ξεχειλίσματα και τη λασπουριά των μεγάλων ποταμών. **Από όλες τούτες τις ανάγκες, ευνοήθηκε και προωθήθηκε των μαθηματικών η σπουδή, παράλληλα προς την ανάπτυξη σε ορισμένο βαθμό της τεχνικής, καθώς και η σπουδή της αστρολογίας**. **Μα κοντά στην επιστημονική αυτή επίδοση, πήρε πρωταρχική θέση το πρόβλημα: τι είναι ο κόσμος και ποια η πρώτη του ουσία του**», οι υπογραμμίσεις δικές μας.[420] Σε αυτό το απόσπασμα ερμηνεύεται η ανάπτυξη των μαθηματικών, χωρίς να εξηγείται η σχετική τους αυτονόμηση, ωστόσο υπάρχει μια σημαντική, κατά τη γνώμη μας παρατήρηση, σύμφωνα με την οποία οι θετικές επιστήμες ανάμεσά τους και τα μαθηματικά αναπτύσσονται, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται και η φιλοσοφία και μάλιστα θα υπενθυμίζαμε ότι αυτό σημαίνει, σύμφωνα με τον Vernant, την υποχώρηση του μύθου και τη διαμόρφωση μιας σκέψης που διέπεται από «θετικότητα».

Η ανάλυση του Vernant, όμως, έχει την αξίωση να δει τα πράγματα σε ακόμα μεγαλύτερο βάθος και νομίζουμε ότι το πετυχαίνει. Δίνει μεγάλο βάρος στον τρόπο με τον οποίο είδε ο Αναξίμανδρος το σύμπαν. Είναι γνωστό ότι ο Αναξίμανδρος είχε την άποψη ότι το σύμπαν χαρακτηρίζεται από σφαιρικότητα. Αυτό σημαίνει ότι ο Αναξίμανδρος έχει κάνει ένα βήμα στο να αφήσει πίσω του τις μυθολογικές ερμηνείες και ένα βήμα μπροστά στο να υιοθετήσει μια γεωμετρική άποψη για το σύμπαν. Πώς, όμως, έφτασε σε αυτή την αντίληψη για το σύμπαν; Ο Vernant πιστεύει ότι επέδρασαν με καθοριστικό τρόπο ορισμένες κοινωνικές εξελίξεις και υπογραμμίζει το ρόλο που έπαιξε η δημιουργία της *Πόλης*. Η *Πόλη* έχει δυο καλοξεχωρισμένα επίπεδα στη ζωή που εξελίσσεται εντός της: έναν ιδιωτικό βίο και ένα δημόσιο βίο. Στον ιδιωτικό βίο και συγκεκριμένα μέσα στις οικίες πού σημαντικό ρόλο παίζει η εστία η οποία μάλιστα βρίσκεται στο κέντρο της. Αντίστοιχα στο δημόσιο βίο, ένα βίο που δε ρυθμίζεται μόνο από ένα άτομο έχουμε τη δημιουργία της αγοράς που κι αυτή με τη σειρά της είναι το κέντρο της Πόλης. Είναι ο χώρος που πραγματοποιούνται οι συζητήσεις όπου προεξέχοντα ρόλο παίζει η επιχειρηματολογία. Επομένως το κέντρο ως σημείο αναφοράς στο χώρο αποκτά ένα προνομιακό χαρακτήρα ή αντίθετα διαμορφώνεται (αυθόρμητα ίσως) ένα προνομιακό σημείο στο χώρο που είναι το κέντρο. Με άλλα λόγια ο βίος, δημόσιος ή ιδιωτικός αποκτά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Δεν είναι, όμως, η μόνη εξέλιξη που σκιαγραφεί ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο διαμορφώνονται κι επηρεάζονται τα μαθηματικά. Παράλληλα με το λόγο, την εκλογίκευση και τα επιχειρήματα, έχουμε την εμφάνιση και διάδοση της γραφής. Η γραφή δεν είναι το προνόμιο πλέον μιας κάστας. Γίνεται «δημόσιο αγαθό». Οι νόμοι αποκτάνε γραπτή μορφή και αυτό συμβάλλει στην αλλαγή των κανόνων του πολιτικού παιχνιδιού αλλά και του διανοητικού. Ένα πολύ διαφωτιστικό παράδειγμα που μας παραθέτει ο Vernant για να γίνει περισσότερο κατανοητή η σχέση ανάμεσα στους πολιτικούς θεσμούς της πόλης, το νέο πλαίσιο του άστεως και στη γέννηση μιας νέας εικόνας του κόσμου, σχετίζεται με τη δραστηριότητα του Ιππόδαμου του Μιλήσιου στον οποίο είχε ανατεθεί η επανοικοδόμηση της Μιλήτου μετά την καταστροφή της: «Αντί για μια πόλη αρχαϊκού τύπου […] **ο Ιππόδαμος διαλέγει έναν ανοικτό χώρο, χαράζει ίσους δρόμους που τέμνονται σε ορθές γωνίες, δημιουργεί μια νταμωτή, με κανονικά τετράγωνα, πόλη με κέντρο την αγορά**. Λέμε συνήθως πως ο Ιππόδαμος είναι ένας αρχιτέκτονας, ο πρώτος μεγάλος πολεοδόμος του ελληνικού κόσμου. Αλλά ο Ιππόδαμος είναι πρώτα απ' όλα ένας θεωρητικός της πολιτικής, που αντιλαμβάνεται την οργάνωση του χώρου του *άστεως* ως ένα στοιχείο, ανάμεσα στ' άλλα, της εκλογίκευσης των πολιτικών σχέσεων. Είναι επίσης ένας αστρονόμος που ασχολείται με τη «μετεωρολογία». Αντιλαμβάνεται κανείς, με καίριο τρόπο, πώς συνυπάρχουν στον ίδιο άνθρωπο οι αστρονομικές ενασχολήσεις, που αφορούν την ουράνια σφαίρα, η αναζήτηση καλύτερων πολιτικών θεσμών και η προσπάθεια για να οικοδομηθεί μια πόλη σύμφωνα μ' ένα ορθολογικό,

[420] . Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας, σελ. 59, εκδ. Μπουκουμάνης

γεωμετρικό πρότυπο», (η υπογράμμιση δική μας).[421] Επομένως, αυτό που εμάς μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι παρατηρείται **μια ώσμωση της γεωμετρίας με ορισμένες κοινωνικές αντιλήψεις που οδηγεί κατά κάποιο τρόπο στη «γεωμετρικοποίηση» αυτών των κοινωνικών αντιλήψεων και δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο δυο συγκοινωνούντα δοχεία που αποτελούν και το υπόβαθρο της σχετικής αυτονόμησης των μαθηματικών.**

ΣΤ 5.3: <u>Η Θεολογία ως παράγοντας αυτονόμησης</u>

Ασφαλώς, αυτού του είδους η ώσμωση και η επικοινωνία μαθηματικών και κοινωνικής εξέλιξης δε σταματά στην κοινωνίας της Ιωνίας και στην προσφορά των Ιώνων φιλοσόφων. Οι Πυθαγόρειοι στη συνέχεια, έχουν τη δική τους σημαντική συνεισφορά σε αυτό το φαινόμενο. Να μερικά γεγονότα που δείχνουν αυτή τη συνεισφορά:
[α] Είναι γνωστή η ιστορία με τον Πυθαγόρα ο οποίος περνούσε έξω από ένα εργαστήρι ενός σιδερά, ιστορία τη οποία διηγείται ο Ρωμαίος Βοήθιος. Η διαπίστωση της σχέσης ανάμεσα στη μουσική αρμονία που παραγόταν από το χτύπο των σφυριών και τα ανάλογα βάρη τους μπορεί να εξηγήσει ως ένα βαθμό και το ενδιαφέρον των Πυθαγορείων για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους (στο βαθμό που η ιστορία είναι αληθινή). Αν, λοιπόν, κάτι τέτοιο αληθεύει ταυτόχρονα σηματοδοτείται και μια μερική αυτονόμηση των μαθηματικών, αφού ο αριθμός γίνεται μια αφηρημένη οντότητα με την οποία μελετώνται μουσικά αποτελέσματα.
[β] Η συνεισφορά, όμως, των Πυθαγορείων στη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών δε σταματά εδώ. Η αριθμολογία τους έχει οντολογική διάσταση. Η προσωκρατική παράδοση όπου αναζητείται μια αρχή των πάντων και στην ιωνική σχολή έχει μια υλική διάσταση, εδώ αποκτά μιαν άλλη διάσταση. Μια διάσταση που κινείται σαφώς στα πλαίσια μιας θεολογικής ερμηνείας. Σε αυτό το σημείο, όμως, παρουσιάζεται μια αμφισημία αφού ο μυστικισμός συνυπάρχει με μια διάθεση ορθολογισμού.[422] Όπως και να έχει η προσπάθεια των Πυθαγορείων να ερμηνεύσουν τον κόσμο με τους αριθμούς σημαίνει ακόμα ένα σταθμό αυτονόμησης των μαθηματικών. Τα μαθηματικά δεν προορίζονται πλέον να επιλύουν στενά κάποια πρακτικά προβλήματα αλλά ικανοποιούν φιλοσοφικές ανησυχίες. Αυτές ακριβώς οι φιλοσοφικές ανησυχίες ήταν κατά κάποιο τρόπο και η αιτία που οδήγησε στην κρίση της πυθαγόρειας σχολής, με την ανακάλυψη του γεγονότος ότι η διάμετρος του τετραγώνου ήταν ασύμμετρη ως προς την πλευρά του. Αυτό γιατί η πίστη ότι τα πάντα είναι αριθμός κλονίζεται από τη διαπίστωση ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν έχουν ρητό λόγο. Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι οι φιλοσοφικές αναζητήσεις είχαν αποτελέσματα άμεσα ή έμμεσα στην ανάπτυξη των μαθηματικών, παρατηρήθηκε και μια αντίστροφη πορεία: ένα (άλυτο) πρόβλημα στα μαθηματικά επέφερε μια φιλοσοφική κρίση.

Πρέπει, όμως, να (ξανα)διευκρινίσουμε κάτι, κατά τη γνώμη μας, σημαντικό: μπορεί σε περιπτώσεις όπως αυτή που περιγράφουμε, τα μαθηματικά να μην μπαίνουν στη υπηρεσία της επίλυσης πρακτικών προβλημάτων αλλά σε τελική ανάλυση προς τα 'κει βαδίζουν. Κι αυτό το λέμε με δυο έννοιες. Πρώτο, με την έννοια ότι η πραγμάτευση

---

[421] . Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.1, σελ. 267-268, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος

[422] . Σύμφωνα με τον Jean-Francoise Mattei «…στον Πυθαγόρα οφείλουμε τον ίδιο όρο «φιλόσοφος» για το χαρακτηρισμό του ανθρώπου ο οποίος, χωρίς να συμμερίζεται τη σοφία των θεών ή να θέλει να τους αψηφήσει, επιδίδεται στην αναζήτηση μιας καθαρά ανθρώπινης σοφίας. Σε αυτόν επίσης, ή στον πυθαγορισμό, οφείλουμε το ιδεώδες της αποδεικτικής εκείνης, και απαλλαγμένης από κάθε θρησκευτική, μυστικιστική ή ιδεολογική δοξασία, γνώσης την οποία η Δύση αποκαλεί «επιστήμη» και από την οποία έλκει τη νομιμότητα της θεωρητικής ηθικής της, καθώς και της πρακτικής ηθικής της. Έτσι, ο πυθαγορισμός βρίσκεται στο σταυροδρόμι αυτών των συνόλων αντιθέσεων που θα ονομασθούν αργότερα «εσωτερισμός» και «εξωτερισμός»…», Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι, σελ. 32, εκδ. Καρδαμίτσα

μαθηματικών εννοιών με τον ένα ή άλλο τρόπο φέρνει στην επιφάνεια νέες σχέσεις, νέα θεωρήματα, νέους κλάδους που κάποια στιγμή βρίσκουν εφαρμογές για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων που τη στιγμή της έρευνας δεν έχουν τεθεί ως τέτοια. Δεύτερο, με την έννοια ότι δεν πρέπει για την έννοια του πρακτικού προβλήματος να έχουμε μια εκχυδαϊσμένη άποψη. Πρακτικό πρόβλημα δεν είναι στενά η εύρεση του τρόπου κατασκευής ενός χρηστικού αντικειμένου, αλλά με μια ευρεία έννοια και η απάντηση σε θεωρητικά ζητήματα. Κάτι τέτοιο μαρτυρά εν μέρει και ένα σχετικό απόσπασμα του Φιλολάου: «σκεφθείτε, τη χρησιμότητα και την ουσία των αριθμών παίρνοντας υπόψη τη δύναμη που κρύβει μέσα του το ένα δέκατο. Είναι μεγάλη, είναι παντοδύναμη, ικανοποιεί τα πάντα. Είναι το πρωταρχικό αίτιο και ο οδηγός της ζωής των Θεών, των ουρανών και της ανθρωπότητας. Δίχως αυτή τη δύναμη, τα πάντα μένουνε χωρίς όρια, σκοτεινά, ακατανόητα. Στην ουσία οι αριθμοί υπάρχουνε για να στραφούμε προς αυτούς. Οι αριθμοί υπάρχουνε για να μας καθοδηγούνε και να μας φωτίζουνε σε κάθε αμφιβολία μας και σε κάθε δυσκολία μας. Αν δεν υπήρχε ο αριθμός και η ουσία του, τίποτα από όσα υπάρχουνε δε θα ήταν κατανοητά σε κανένα, ούτε αυτά καθαυτά ούτε και στις σχέσεις ανάμεσά τους…Παρατηρούμε με ποιο τρόπο η δύναμη του αριθμού εκδηλώνεται, όχι μονάχα σε ότι αφορά στους δαίμονες και τους Θεούς, μα και σε κάθε ενέργεια και σκέψη ανθρώπινη, σε κάθε επάγγελμα και στη μουσική. Η αρμονία και η ουσία των αριθμών δεν επιτρέπουνε κανένα λάθος. Το λάθος δεν έχει καμία απολύτως σχέση με τον αριθμό. Το λάθος και το μίσος ανήκουνε μονάχα σ ό,τι δεν έχει όρια, στο ακατανόητο, στο μη ορθολογιστικό».[423] Από αυτά το απόσπασμα, βλέπουμε ότι δε δίνεται μόνο στον αριθμό μια οντολογική αξία, αλλά αναγνωρίζεται και η πρακτική τους δύναμη. Αυτή ακριβώς η δύναμη πιθανότατα αποτέλεσε και τον αποφασιστικό παράγοντα, ώστε ο αριθμός να περιβληθεί με μια θεολογική άχλη. Έτσι, «η εκστατική θεώρηση τω γεωμετρικών σχημάτων και των μαθηματικών νόμων είναι το αποτελεσματικότερο μέσο κάθαρσης της ψυχής από το γήινο πάθος και ο κυριότερος δεσμός του ανθρώπου με το θείο»[424], χωρίς, ωστόσο, να ξεχνάμε ότι παρά τη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών και τη μετατροπή τους σε μια ιδιότυπη θρησκεία, η σύνδεση μαθηματικών-θεολογίας εκκίνησε από την ίδια την αποτελεσματικότητα των μαθηματικών. Δηλαδή, οι Πυθαγόρειοι φτάσανε σε ένα μίγμα ορθολογισμού και ανορθολογισμού βασιζόμενοι σε μια πραγματικότητα.

[γ] Ένας ακόμα παράγοντας που συντέλεσε στη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών ήταν ο τρόπος με τον οποίο οι Πυθαγόρειοι πραγματεύονταν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών και τις ιδιότητές τους. Αναφερόμαστε στη χρήση των ψηφίδων. Ενώ οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν τη σφήνα για να παραστήσουν τους αριθμούς και όταν πρόκειται για μεγάλους αριθμούς απλώς η σφήνα επαναλαμβάνεται, τώρα οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούν την ψηφίδα αλλά για κάθε αριθμό δεν έχουμε την απλή επανάληψή της. μα ένα συγκεκριμένο σχήμα: π.χ. ο αριθμός τρία αναπαρίσταται με ένα νοητό τρίγωνο στις κορυφές του οποίου υπάρχουν οι ψηφίδες, ο αριθμός τέσσερα με ένα νοητό τετράγωνο στις κορυφές του οποίου βρίσκονται οι ψηφίδες κ.λπ. Έτσι «με τη μέθοδο αυτή δινόταν πρωταρχική σημασία στη λειτουργία της όρασης, γιατί τα σήματα ήταν τα πιο κατάλληλα για να δείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στους αριθμούς και η μόνη αίσθηση που μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε ένα σχήμα ή ένα τύπο από ένα οποιοδήποτε αντικείμενο, ένα τύπο μάλιστα που είναι δυνατό να χρησιμοποιείται επανειλημμένα, είναι η όραση. **Έτσι ο οπτικός τύπος οδηγεί στην αφαίρεση κι εξυπηρετεί την ανάπτυξη των μαθηματικών σαν επιστήμη. Η πορεία μάλιστα της αφαίρεσης μπορεί να βαίνει συνεχώς προχωρητικά, πράγμα που είναι φανερό αν σκεφθούμε πώς εξελίχθηκε ο αριθμός από το σύμβολο, που χρησιμοποιούνταν για τη μέτρηση, ως τον ασύμμετρο, το φανταστικό άπειρο αριθμό**», (η υπογράμμιση δική μας).[425]

[δ] Τέλος, μια παράμετρος με περισσότερο κοινωνική διάσταση είναι αυτή που ανακαλύπτει κανείς προσπαθώντας να δώσει μιαν εξήγηση στον κλειστό χαρακτήρα της πυθαγόρειας οργάνωσης. Όπως και στη Μικρά Ασία, έτσι και στην κάτω Ιταλία πραγματοποιήθηκαν ταξικοί αγώνες που εξέφραζαν τη διάθεση της απερχόμενης

---

[423] . Αναφέρεται στο Η Επιστήμη στην Αρχαία Ελλάδα του Benjamin Farrington, σελ. 51-52, εκδ. Κάλβος

[424] . Koestler A., Οι υπνοβάτες, σελ.22, εκδ. Χατζηνικολή

[425] . Βέϊκος Θ., Οι Προσωκρατικοί, σελ. 146, εκδ. Ελληνικά Γράμματα

άρχουσας τάξης των γεωμόρων να παραμείνει στην εξουσία και τη θέληση των ανερχόμενων κοινωνικών ομάδων (ναυτικοί και έμποροι) να πάρουν τα ηνία στα χέρια τους. Στην κάτω Ιταλία αυτή η διαδικασία είχε πιο αργούς ρυθμούς σε σχέση με τη μικρή Ασία. Ιδεολογικός εκπρόσωπος των παλιών δυνάμεων στην κάτω Ιταλία υπήρξε ο πυθαγορισμός. Πώς, όμως, μπορεί να ευνοήθηκε η σχετική αυτοτέλεια των μαθηματικών μέσω αυτής της εκπροσώπησης της απερχόμενης άρχουσας τάξης της κάτω Ιταλίας από τον πυθαγορισμό; Ας δούμε μιαν άποψη: «…με το να διδάσκει ο Πυθαγόρας ανώτερα μαθηματικά, ήταν υποχρεωμένος να μιλά όλο για αριθμούς και γραμμές, με τρόπο αφαιρετικό, γιατί δίδασκε τα θεωρητικά μαθηματικά και όχι πρακτική αριθμητική και γεωμετρία. Και μια που ήταν σπουδαίος μαθηματικός, χρησιμοποιούσε και τη μαθηματική ορολογία και στη άλλη ηθικοπλαστική διδασκαλία του. Έπρεπε εξάλλου η διδασκαλία του πάνω στα κοινωνικοθρησκευτικά ζητήματα να μη είναι απόλυτα ξεκαθαρισμένη. Έπρεπε να είναι απόκρυφη, αυτό τον δίδαξαν οι ιερείς της Αιγύπτου. Γιατί αυτό ήταν το μυστικό της υπεροχής τους. Κρατούσαν πάντα τις γνώσεις για τον εαυτό τους και τις μάθαιναν μόνο στους απόγονους τους. Μα για να μην μπορούν σε καμία περίπτωση οι άνθρωποι του λαού, έστω κι έμμεσα να μάθουν τα όσα ήξεραν αυτοί, έπρεπε οι γνώσεις τους να μπερδεύονται με θρησκευτικούς θρύλους και με μαθηματικούς τύπους και γεωμετρικά σχήματα. Αυτό έκανε και ο Πυθαγόρας. Κι ακόμα, για τους πρακτικούς σκοπούς της οργάνωσής του, επειδή οι σκοποί της έπρεπε να μείνουν πάντα μυστικού και η διδασκαλία του απόρρητη, οι αριθμοί του χρησίμευαν σαν **κρυπτογραφήματα**», (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[426]

ΣΤ 5.4: <u>Η αυτονόμηση των μαθηματικών και η σχολή της Ελέας</u>

Χρονολογικά, μετά τους Ίωνες φιλόσοφους και τους Πυθαγόρειους έπεται η σχολή της Ελέας. Για το Szabo η ελεατική σχολή αποτελεί το κλειδί μέσω του οποίου θα βρούμε ή μπορούμε να βρούμε την ερμηνεία (ή εν πάση περιπτώσει μιαν ερμηνεία) για το πώς οι έλληνες μαθηματικοί έφτασαν στην ιδέα ότι οι αριθμοί και τα γεωμετρικά σχήματα θα έπρεπε να εξετάζονται κατά εντελώς αφηρημένο τρόπο, ως διανοητικά μόνο στοιχεία. Ο Szabo αναρωτιέται με ποιο τρόπο υιοθετείται ένα αντιεμπειρικό σκεπτικό από την ώρα που η μαθηματική γνώση οικοδομήθηκε εξυπηρετώντας καθαρά πρακτικές ανάγκες. Και παρατηρεί ακόμα πως η εμφάνιση της έμμεσης αποδεικτικής διαδικασίας (εις άτοπο απαγωγή) φαίνεται να είναι ένα απροσδόκητο γεγονός, σημειώνοντας ότι η χρήση της στα *Στοιχεία* αποτελεί την κατεξοχήν αποδεικτική μέθοδο. Θέτει, λοιπόν, το ερώτημα αν είναι δυνατό τόσο η αντιεμπειρική μέθοδος με την αποστροφή προς για το απλώς παραστατικό όσο και η προτίμηση στον έμμεσο συμπερασματικό τρόπο να εμφανίσθηκαν αυθόρμητα και χωρίς κάποια εξωτερική επίδραση. Η απάντησή του είναι πως η ρίζα της εξήγησης βρίσκεται στη φιλοσοφία των Ελεατών.[427] **Κάτι τέτοιο το στηρίζει γιατί βλέπει πως εντός της ελεατικής φιλοσοφίας ενυπάρχουν και η αποστροφή στον εμπειρισμό και η έμμεση αποδεικτική μέθοδος**. Για παράδειγμα ο Παρμενίδης υποστήριζε ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να συλλάβει την αλήθεια με τις απατηλές κατ΄ αίσθηση αντιλήψεις αλλά μόνο με τη διάνοια. Ακόμα, σχετικά με την αντίληψή του για το ον και το μη ον, χρησιμοποιεί την έμμεση αποδεικτική μέθοδο. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι το ον είναι αγέννητο (άρα αμφισβητεί το γίγνεσθαι του όντος). Για να αποδείξει τον ισχυρισμό του υποθέτει ότι το ον μπορεί να γεννηθεί είτε από ένα ον είτε από ένα μη ον και τρίτη πιθανότητα δεν υπάρχει. Στην πρώτη περίπτωση που το ον θα γεννηθεί από το μη ον τότε δεν έχουμε γίγνεσθαι, ενώ στη δεύτερη περίπτωση που το ον γεννιέται από ένα μη ον τότε καταλήγουμε σε μιαν αντίφαση. Επομένως με αυτό τον έμμεσο τρόπο αποδείχθηκε το αγέννητο του όντος. Το διδακτικό ποίημα του Παρμενίδη μέσω του οποίου μας φανερώνεται και η φιλοσοφία του μας δίνει μια εξήγηση για την εμφάνιση νέων ποιοτήτων εντός του σώματος των μαθηματικών απομακρύνοντάς μα συνάμα από επικίνδυνες (αντιεπιστημονικές) εξηγήσεις που θα ενίσχυαν εκτός των άλλων και προγονολατρικές

---

[426] . Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας, σελ. 104-105, εκδ. Μπουκουμάνης.

[427] . Δες αναλυτικότερα Szabo A., Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών, σελ. 296-302, Εκδόσεις του Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδας, 1973.

τάσεις. Ή αν δεν οδηγεί σε τέτοιες θεωρήσεις των πραγμάτων (περί υπεροχής εκείνης ή της άλλης φυλής) καταλήγει σε ταυτολογίες όπως αυτές που κατακρίνει ο Vernanat αναφερόμενος στον Burnet.[428] Δεν ξέρουμε αν η εικασία του Szabo «πατάει καλά στα πόδια της». Όπως και να 'χει, δικαιώνεται τουλάχιστο μ' έναν έμμεσο τρόπο· από το γεγονός, δηλαδή, ότι ο Παρμενίδης προηγείται χρονολογικά του Ευκλείδη αλλά και από τον Πλάτωνα, στην εποχή του οποίου χρησιμοποιείτο η έμμεση αποδεικτική διαδικασία όπως φανερώνει και ο διάλογος *Θεαίτητος*. Για να στηρίξει, μάλιστα, την υπόθεσή του αναφέρεται στο κομμάτι στο οποίο ο Σωκράτης τονίζει ότι και στην καθημερινή μας ζωή δεν πρέπει να αρκούμαστε στην πιθανή σκέψη αλλά να επιδιώκουμε την αυστηρότητα της μαθηματικής σκέψης, ενώ στη συνέχεια ακολουθεί μια αυστηρή αποδεικτική διαδικασία με έμμεσο τρόπο συναγωγής συμπεράσματος.

ΣΤ 5.5: <u>Η συνεισφορά των Σοφιστών στη σχετική αυτονόμηση των Μαθηματικών</u>

Θα συνεχίσουμε την παράθεση αυτών των παραγόντων που συνέβαλλαν, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο στη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών, με μιαν αναφορά στους Σοφιστές. Οι φιλοσοφικές προκείμενες των Σοφιστών όπως θα δούμε ενίσχυαν τη μαθηματική αυτονόμηση με έναν αντιφατικό τρόπο. Ο ένας πόλος της αντίφασης σχετίζεται με τον υποκειμενισμό των Σοφιστών. Η γνωσιολογική αρχή των Σοφιστών διαπνεόταν από ένα σκεπτικισμό για τη δυνατότητα απόκτησης βέβαιης γνώσης. Η τέτοια τους άποψη βασιζόταν α) στην ανεπάρκεια και σφαλερότητα των ανθρώπινων αισθητήριων οργάνων τα οποία υπόκεινται σε πλάνη και β) στην απουσία μιας σταθερής πραγματικότητας που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο γνώσης. Ίσως, η πιο συμπυκνωμένη έκφραση αυτής της γνωσιολογικής αρχής γίνεται κατανοητή από το Γοργία και το έργο του «Περί του μη όντος ή περί φύσεως», όπου υπάρχουν τρεις βασικές απόψεις: α) τίποτα δεν υπάρχει, β) αν υπάρχει δεν μπορεί να μας γίνει γνωστό και γ) ακόμα κι είναι γίνει γνωστό δεν μπορεί να ανακοινωθεί (διδαχτεί) στους άλλους. Βλέπουμε, βέβαια, μέσα από αυτά τα συμπεράσματα του Γοργία ότι ο υποκειμενισμός των Σοφιστών δεν είναι, ας μας επιτραπεί η έκφραση, σκληροπυρηνικός. Αφήνει περιθώρια για τη γνωσιμότητα του κόσμου και αυτό, ίσως, έχει σημασία για το θέμα μας, αφού πιθανότατα η άποψη των Σοφιστών ότι για κάθε πράγμα υπάρχουν δυο αντίθετες απόψεις, εξυπηρετούσε κατά βάση την ανάγκη ειδίκευσης στη ρητορική κι όχι τόσο μια γνωσιολογική αρχή.[429] **Όπως και να 'χει, αυτή η αντίληψη και πρακτική δημιουργούσε ένα πλαίσιο για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και στερέωσης των όποιων**

---

[428] . Συγκεκριμένα τον κατηγορεί για την ερμηνεία που δίνει (ή που δε δίνει) σχετικά με την εξέλιξη της ιωνικής σκέψης. Η σκέψη του Burnet μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αληθινή σκέψη θα καταγόταν από αυτή την ίδια. Θα βρισκόταν έξω από την ιστορία και η ιστορία μπορεί μόνο να εξηγήσει τα διαδοχικά εμπόδια , λάθη κι αυταπάτες μέσα στην εξέλιξη του πνεύματος. Έτσι, όμως, θα έχουμε εισάγει μια ριζική ασυνέχεια. Η φιλοσοφία, ως ταξιδιώτης χωρίς αποσκευές, θα έχει έρθει στον κόσμο χωρίς παρελθόν, χωρίς γονείς, χωρίς οικογένεια· θα ήταν ένα απόλυτο αρχίνισμα (δες αναλυτικότερα Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.2, σελ. 155-156, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος). Αυτή, όμως, είναι και μια πολύ καλή παρατήρηση για την ίδια την ανάπτυξη των μαθηματικών: τα μαθηματικά δεν αυτοαναπτύσσονται γενικώς. Υπάρχει μια συνέχεια στην ανάπτυξή τους, συνέχεια που δεν έχει να κάνει μόνο με τα ίδια τα μαθηματικά αλλά με πολλούς εξωμαθηματικούς παράγοντες, χωρίς τους οποίος όχι απλώς θα ήταν διαφορετικά αλλά ούτε καν θα υπήρχαν. Οι όποιες ασυνέχειες παρουσιάζονται δηλαδή στιγμές που έχουμε νέα ποιοτικά χαρακτηριστικά στα μαθηματικά θα πρέπει να τις δούμε σε συνάρτηση με τη συνεχή τους ανάπτυξη ή αλλιώς ασυνέχεια δεν μπορεί να υπάρξει χωρίς συνέχεια. Ως στιγμή ασυνέχειας μπορεί κατά τη γνώμη μας να νοηθεί η σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών που πραγματοποιείται μέσα από το χειρισμό του αριθμού ως αφαίρεση, την αποδεικτική διαδικασία και την αξιωματικοποίηση τους.

[429] . Επιπλέον, υπάρχουν μελετητές που υποστηρίζουν ότι δεν τίθεται ζήτημα υποκειμενισμού από τους Σοφιστές αφού αυτό που δίδασκαν ο Πρωταγόρας και οι υπόλοιποι Σοφιστές ήταν ότι οι αισθήσεις μας δε μας δίνουν την απόλυτη αλήθεια για την αντικειμενική πραγματικότητα κι ακόμα πως μόνο από τις παραστάσεις που έχει ο άνθρωπος από τον εξωτερικό κόσμο μπορούμε να γνωρίσουμε τι υπάρχει και τι δεν υπάρχει (άποψη δικαιολογημένη ελλείψει απουσίας οργάνων και πειραματικών διαδικασιών). Δες χαρακτηριστικά Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας., σελ. 200, εκδ. Μπουκουμάνη.

συμπερασμάτων. Έτσι, όπως κι σε άλλες περιπτώσεις που είδαμε πιθανότατα να πραγματοποιήθηκε μια ώσμωση μαθηματικών και κοινωνικών αντιλήψεων αφού έτσι κι αλλιώς «η διδασκαλία των Σοφιστών ανταποκρινόταν στις άμεσες πνευματικές ανάγκες της Αθηναϊκής Δημοκρατίας. Γι' αυτό μαζί με την «πολιτειολογία» και την «κοινωνιολογία», διδάσκανε και αριθμητική, αστρονομία, γεωμετρία και μουσική, όπως μας πληροφορεί ο Πλάτων».[430] Κι εδώ ακριβώς βρίσκεται ο δεύτερος πόλος της αντίφασης. Δηλαδή, ενώ από τη μια υπάρχει μια άλλοτε μετριοπαθής κι άλλοτε μια πιο συνεπής αμφισβήτηση της αντικειμενικής πραγματικότητας και της γνωσιμότητας του κόσμου οδηγώντας ακόμα και σε επιθέσεις ενάντια στα μαθηματικά, **από την άλλη η ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας που πρέπει να πείθει ευνοεί την ανάπτυξη των μαθηματικών**.

Δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της αντίφασης αποτελούν δυο Σοφιστές: στη μια πλευρά βρίσκουμε τον Πρωταγόρα. Σύμφωνα με τον Guthrie « η νομιμότητα του να παίρνει κανείς τη μια ή την άλλη πλευρά ενός θέματος ανάλογα με τις περιστάσεις θεμελιώθηκε σε θεωρίες της γνώσης και του όντος, που αποτελούσαν ακραία αντίδραση στην ελεατική αντίθεση γνώσης και γνώμης, από τις οποίες η μια είναι αληθής ενώ η άλλη ψευδής, ψεύδος δεν υπήρχε, ούτε μπορούσε κανείς να διαψεύσει έναν άλλο ή να πει ότι κάνει λάθος, γιατί ο άνθρωπος ήταν ο μόνο κριτής των αισθημάτων και των δοξασιών του, που ήταν αληθινά γι' αυτόν όσο καιρό του φαίνονταν τέτοια. Μια και δεν υπήρχε απόλυτη ή καθολική αλήθεια, κανείς δε χρειαζόταν να εξετάσει, πριν επιχειρήσει να κάνει ένα άτομο, ένα δικαστήριο ή μια πολιτεία να αλλάξει γνώμη, αν θα τους έπειθε ή όχι για κάτι πιο σωστό. Η προσωπική φύση των εντυπώσεών μας δε σήμαινε ότι όλες οι αισθητές ιδιότητες συνυπάρχουν σε ένα εξωτερικό αντικείμενο, αλλά εγώ αισθάνομαι μερικές κι εσύ άλλες. Σήμαινε, μάλλον, ότι δεν έχουν αντικειμενική ύπαρξη, αλλά αποκτούν ύπαρξη καθώς τις αντιλαμβανόμαστε και γι' αυτόν που τις αντιλαμβάνεται. **Συνεπής με αυτή την αντίληψη ήταν η επίθεσή του εναντίον των μαθηματικών, επειδή ασχολούνται με αφηρημένες έννοιες, περιγράφουν ευθείες γραμμές, κύκλους κ.ο.κ., που δεν τα αντιλαμβάνεται και, κατά συνέπεια, δεν υπάρχουν**», (η υπογράμμιση δική μας).[431] Στην άλλη πλευρά βρίσκουμε τον Ιππία ο οποίος διαφοροποιείται από τους άλλους Σοφιστές και μπορεί κανείς να τον εντάξει στις τάξεις των εφευρετών και στον τομέα της επιστήμης. Αυτή του η διαφοροποίηση οφείλεται στη μαθηματική του ανακάλυψη σχετικά με μια καμπύλη γνωστή ως τετραγωνίζουσα η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον τετραγωνισμό του κύκλου, την τριχοτόμηση της γωνίας ή τη διαίρεσή της σύμφωνα με οποιαδήποτε αναλογία.[432] Τελικά, η άποψη ότι μπορεί να βρεθεί μια επιχειρηματολογία για να υποστηρίξει εξίσου επιτυχημένα και το α και το μη α, έχει ένα διττό ρόλο. Θέτει γνωσιολογικά ερωτήματα για την αξία των μαθηματικών και ταυτόχρονα διαμορφώνει ένα κατάλληλο και γόνιμο πλαίσιο για την ανάπτυξή τους και τη σχετική τους αυτονόμηση.

ΣΤ 5.6: <u>Η αριστοτέλεια λογική και το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη</u>

Ένα χαρακτηριστικό, ακόμα, παράδειγμα που υπογραμμίζει τους προσδιορισμούς διαφορετικών γνωστικών τομέων από κάποιους άλλους, αποτελεί η περίπτωση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και της φιλοσοφίας και γνωσιολογίας του Αριστοτέλη: οι απόπειρες που έγιναν κατά καιρούς να αξιωματικοποιηθεί η γεωμετρία δεν έμειναν ανεπηρέαστες από την περιρρέουσα φιλοσοφική και γενικότερα κοινωνική ατμόσφαιρα. Δε θα μπορούσε να γίνει κι αλλιώς, αφού ο μαθηματικός δε ζει σε γυάλα και επηρεάζεται συνειδητά ή ασύνειδα από φιλοσοφικά ρεύματα και κοινωνικές κινήσεις.

Προκειμένου, λοιπόν, να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των «Αποδεικτικών Επιστημών» του Αριστοτέλη και του αξιωματικού συστήματος του Ευκλείδη, είναι απαραίτητο να κωδικοποιήσουμε τις βασικές αρχές της αριστοτέλειας λογικής, όπως ο ίδιος ο Αριστοτέλης τις ανέπτυξε, σε διάφορα έργα του και ειδικότερα κυρίως στο έργο του «Αναλυτικά Ύστερα». Κατά τον Αριστοτέλη, κάθε επιστήμη αποτελείται από τρία «δομικά»

---

[430] . Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας., σελ. 198, εκδ. Μπουκουμάνη
[431] . W. K. C. Guthrie, Οι Σοφιστές, σελ. 325-326, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης
[432] . Δες αναλυτικά, W. K. C. Guthrie, Οι Σοφιστές, σελ. 344, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης

στοιχεία. Πρόκειται για τις έννοιες, τις σχέσεις και τις αποφάνσεις. Ας δούμε πώς αυτά λειτουργούν ως ένα σύνολο:
[α] Η απόφανση αποτελεί ένα επιστημονικό συμπέρασμα. Για παράδειγμα στο πεδίο των Μαθηματικών (όπου η απόφανση λέγεται θεώρημα), μια απόφανση είναι πως «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι όσο με το άθροισμα δύο ορθών γωνιών». Παρατηρούμε όμως, πως κατά τη διατύπωση αυτής της απόφανσης εμφανίζεται και μια σχέση, χωρίς την οποία δε θα ήταν δυνατή αυτή ακριβώς η διατύπωση. Αναφερόμαστε ασφαλώς στην έκφραση «είναι ίσο με» που συνδέει τις έννοιες που παρουσιάζονται μέσα στην απόφανση (αποφάνσεις και σχέσεις βεβαίως εμφανίζονται όχι μόνο στο πεδίο των Μαθηματικών αλλά σε κάθε επιστημονικό πεδίο).
[β] Για να δεχτούμε όμως την αλήθεια μιας απόφανσης, θα πρέπει μέσα από αποδεικτική διαδικασία να επικυρώσουμε την ορθότητά της. Για να αποδείξουμε στη συνέχεια την ορθότητά της, θα πρέπει να στηριχθούμε σε άλλες αποφάνσεις των οποίων την ορθότητα έχουμε ομοίως από πριν αποδείξει. Έτσι αρχίζει ένα ατέρμονο ταξίδι προς τα «πίσω». Επομένως, προκύπτει το ερώτημα: Θα τελειώσει και πότε αυτή η «αντίστροφη» διαδικασία? Σε αυτό το σημείο έχουμε δύο επιλογές: Ή θα καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα που θα λέει πως η πορεία είναι ατελεύτητη ή θα πρέπει να δεχτούμε πως υπάρχει μια αφετηρία. Ο Αριστοτέλης έκανε τη δεύτερη επιλογή. Έκανε τη δεύτερη επιλογή γιατί πίστευε πως υπάρχουν αρχές ανεξάρτητα από εμάς. Είναι μια πραγματικότητα (οι αρχές) και ως τέτοια δεν μπορεί να αμφισβητηθεί, επομένως πρέπει να είναι και η αφετηρία μας. Το ατέρμονο ταξίδι προς τα πίσω ως εκ τούτου μοιάζει να μην έχει νόημα.
[γ] Έτσι λοιπόν ο Αριστοτέλης αποδέχτηκε κάποιες αποφάνσεις ως αληθινές, χωρίς ωστόσο να αποδεικνύει την αλήθεια τους. Αυτά τα αφετηριακά σημεία ονομάσθηκαν έννοιες. Οι έννοιες στη συνέχεια χωρίσθηκαν σε δύο κατηγορίες: Τις κοινές και τις ειδικές έννοιες. Οι πρώτες (αξιώματα), αφορούν σε βασικές αλήθειες για όλες τις παραγωγικές επιστήμες (πρόκειται για τις επιστήμες που οικοδομούνται μέσω της σύστασή τους από ένα σύστημα θεωρημάτων, τα οποία αποδεικνύονται με τη συμβολή των αξιωμάτων). Ας δούμε ένα παράδειγμα που ο ίδιος ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε: Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα τότε τα υπόλοιπα είναι ίσα. Προφανώς αυτή η απόφανση δεν αφορά μόνο στα Μαθηματικά αλλά βρίσκει εφαρμογή σε ένα πλήθος τομέων. Οι δεύτερες (αιτήματα), αφορούν σε συγκεκριμένες επιστήμες και δε βρίσκουν εφαρμογή οπουδήποτε θελήσουμε.

Ο τρόπος με τον οποίο ο Αριστοτέλης παρουσίασε αυτό του το σκεπτικό έχει ως εξής: « Από τις αρχές, τώρα, των οποίων γίνεται χρήση στις αποδεικτικές επιστήμες, άλλες ανήκουν αποκλειστικά σε κάθε επιστήμη και άλλες από κοινού, πλην από κοινού κατ' αναλογία, επειδή χρησιμοποιούνται στο μέτρο μόνο που εμπίπτουν στο γένος το οποίο υπάγεται στην εν λόγω επιστήμη. Παράδειγμα αποκλειστικής αρχής είναι το ότι η «γραμμή» και το «ευθύ» είναι το τάδε συγκεκριμένο πράγμα και κοινής αρχής το ότι «αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπολειπόμενα είναι ίσα»[433].
[δ] Παράλληλα κάθε έννοια που διεισδύει σε μια παραγωγική επιστήμη, πρέπει να ορίζεται (εξαίρεση αποτελεί μένα μικρό πλήθος εννοιών). Κάθε έννοια ορίζεται ως μια υποκατηγορία μιας έννοιας γενικότερης. Αυτή η γενικότερη (γενική) έννοια, ονομάσθηκε από τον Αριστοτέλη «προσεχές γένος», ενώ κάθε υποκατηγορία της εκαλείτο «ειδοποιός διαφορά». Κατά τον Αριστοτέλη, όμως, για να ορισθεί μια υποκατηγορία, δηλαδή η ειδοποιός διαφορά, δεν πρέπει αυτή να είναι κενή. Με άλλα λόγια απαιτούσε την απόδειξη της ύπαρξης του οριζόμενου αντικειμένου. Υπάρχουν όμως και κάποιες θεμελιώδεις έννοιες οι οποίες δε δύνανται να αποδειχτούν. Αυτές αποτελούν την αφετηρία της αφετηρίας, πίσω από αυτές δεν μπορούμε να κάνουμε άλλο βήμα. Είναι η βάση της παραγωγικής επιστήμης.

Αυτό ήταν σε γενικές γραμμές το μεθοδολογικό σύστημα του Αριστοτέλη μέσω του οποίου έπρεπε κάποιος να κινηθεί ώστε να οικοδομήσει μιαν επιστήμη. Όταν πάμε να κάνουμε μια σύγκριση με το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη, τα πράγματα δεν είναι πάντα ξεκάθαρα. Μάλιστα είναι χαρακτηριστικό πως συναντάμε αντιφατικά

[433] . Αναλυτικά Ύστερα 76 α36, 76 α42

συμπεράσματα διαφόρων μελετητών και σχολιαστών των Στοιχείων. Αξίζει, κατά τη γνώμη μας, να αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

- «Η κωδικοποίηση των κανόνων της επαγωγικής λογικής από τον Αριστοτέλη και οι απόψεις του γύρω από την επιστημονική σκέψη προπαρασκεύασαν το έδαφος για τα Στοιχεία του Ευκλείδη, που με τη σειρά τους κατέστησαν το υπόδειγμα για τις επόμενες εξελίξεις όχι μόνο στην περιοχή των μαθηματικών, αλλά και σε πολλές περιοχές των φυσικών επιστημών»[434].
- «Ο Ευκλείδης δεν είχε κατά νου το λογικό σύστημα του Αριστοτέλη…»[435].
- « Ο Πρόκλος στο σχόλιό του επί του βιβλίου Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη και ειδικώς στο 2ο μέρος του προλόγου του σχολίου διακρίνει τις βασικές αρχές, που είναι οι ορισμοί, τα αιτήματα και τα αξιώματα (κοινές έννοιες) και που δεν είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα του Αριστοτέλη»[436].
- « Ο Ευκλείδης επί εκατοντάδες γενεών εθεωρείτο καθηγητής της Γεωμετρίας παρά της λογικής. Η επαγωγική φύση των Στοιχείων αντανακλά τη λογική του Αριστοτέλη»[437].
- «Ο Ευκλείδης χρησιμοποίησε τη λογική την αναπτυχθείσα από τους Μαθηματικούς, ενώ είναι πολύ πιθανό ότι ο Ευκλείδης δεν μελέτησε τον Αριστοτέλη»[438].
- «Η ευκλείδειος Γεωμετρία είναι το παλαιότερο επαγωγικό σύστημα. Η μέθοδος του Ευκλείδη κατέστη η βάση της νεότερης αξιωματικής επιστήμης»[439].
- « ο ορισμός του σημείου από τον Ευκλείδη ως μη έχοντος μέρη απαιτεί τον ορισμό του όρου «μέρος». Αυτό είναι ένα ελάττωμα. Εν τούτοις, η σπουδαιότης έγκειται στο να τεθούν οι βάσεις, δηλαδή τα αιτήματα, από τα οποία προκύπτουν τα θεωρήματα. Ο Αριστοτέλης είχε καθορίσει τις αρχές της απαγωγής. Στην επιλογή των αιτημάτων ο Ευκλείδης επέδειξε μεγάλη διορατικότητα»[440].
- «Αμφότερα, τα Στοιχεία του Ευκλείδη και το «Όργανον» του Αριστοτέλη, εγράφησαν περίπου τον ίδιο χρόνο και στο τέλος και τα δύο γενικεύθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξην των νεότερων μαθηματικών»[441].
- « Ο Ευκλείδης δεν είναι απαραίτητα αριστοτελικός επειδή χρησιμοποίησε το «Όργανον» του Αριστοτέλη. Ο Ευκλείδης επέφερε πιο προχωρημένες βελτιώσεις στη συλλογιστική πρακτική και ισχυροποίησε τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής απαγωγής»[442] .
- « Και οι δυο, ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης, δεν ενδιαφέροντο για την κατάταξη και βελτίωση των αποδείξεων των θεωρημάτων των Μαθηματικών. Ο Πλάτων εξέθεσε τη διαλεκτική του μέθοδο και χρησιμοποίησε τα μαθηματικά για την ανάπτυξη της θεωρίας των ιδεών. Ο Αριστοτέλης από το άλλο μέρος έδωσε μαθηματικά παραδείγματα για την εξήγηση της δομής, των αρχών και των μεθόδων της λογικής απαγωγής. Αυτοί οι δύο φιλόσοφοι έδωσαν στον Ευκλείδη τα μέσα της συστηματοποίησης και οργανώσεως της Γεωμετρίας.»[443].
- « Ο Ευκλείδης ως μαθηματικός εφήρμοσε τη δική του λογική στις αποδείξεις των προτάσεων μέσα στο πλαίσιο της αξιωματικής δομής των Στοιχείων και αυτό δεν έχει να κάνει τίποτα με το «Όργανον» του Αριστοτέλη το οποίο πιθανώς δεν ήταν γνωστό στον Ευκλείδη»[444].

---

[434] . Baum, Robert J. Philosophy and Mathematics, σελ. 39
[435] . Γκλαβάς Χρήστος. Η θέση του Ευκλείδη στα αρχαία και νεότερα Μαθηματικά, σελ.82
[436] . Becker Oscar, Grudlagen der Mathematik, σελ.98
[437] . Brunschwicg L., Les Etapew de la Philosophie Mathematique, σελ. 84
[438] . Γκλάβας Χρήστος, ο.π., σελ. 88
[439] . Γκλαβάς Χρήστος, Θεμελιώδεις Έννοιαι της Μαθηματικής, σελ. 118
[440] . Kline Morris, Mathematics in Western Culture, σελ. 12
[441] . Kneebone,G.T., Mathemetical Logic and the Foundation of Mathematics, σελ. 7
[442] . Maziarz Edward A. and Thomas Greenwood, Greek Mathematical Philosophy, σελ. 248
[443] . ο.π., σελ. 252
[444] . Γκλάβας Χρήστος, Η θέση…, ο.π., σελ. 101

- « Ο Πλάτων με τον κόσμο των ιδεών του υπέδειξε η γεωμετρία να μην ασχολείται με σχήματα, αλλά με τις ιδέες πίσω από αυτά. Στη θεμελίωση της γεωμετρίας του και τις μεθόδους αποδείξεως ο Ευκλείδης δεν εξαρτάται από τον Πλάτωνα. Ο ευκλείδης μάλλον συμμερίζεται τις απόψεις του Αριστοτέλη»[445].
- «Η εργασία του Αριστοτέλη γύρω από τη θεμελίωση μιας επαγωγικής επιστήμης βρήκε την εφαρμογή της στα Στοιχεία του Ευκλείδη, που αποτελούν την πρώτη περίπτωση αναπτύξεως γεωμετρίας κατά αξιωματικό τρόπο»[446].

Οι γνώμες που παραθέσαμε λίγο παραπάνω φανερώνουν μια διχογνωμία των διαφόρων μελετητών των Στοιχείων. Μια «ομάδα» δηλώνει πως ο Ευκλείδης επηρεάστηκε από το αριστοτέλειο σύστημα και μια άλλη πως αυτό δε συνέβη. Η εκτίμηση γύρω από αυτό το ζήτημα γίνεται ακόμα δυσκολότερη, από τη στιγμή που οι δύο άνδρες έζησαν περίπου την ίδια εποχή. Ο Αριστοτέλης γεννήθηκε το 384πχ και πέθανε το 322πχ, ενώ ο Ευκλείδης σύμφωνα με τις πληροφορίες που μας παρέχει ο Πρόκλος εκτιμάται ότι πρέπει να άκμασε γύρω στο 300πχ. Έτσι, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε με απόλυτη βεβαιότητα για το ποιος επηρέασε ποιον, κάτι που μάλλον θα ήταν εύκολο αν ο ένας ήταν προγενέστερος του άλλου. Ίσως, αυτός που δέχτηκε την αποφασιστική επιρροή ήταν ο Ευκλείδης. Όχι, όμως, με ένα απόλυτο τρόπο. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε από το σκεπτικό που χρησιμοποιείται σε διάφορες αποδείξεις τις οποίες κάνει και γενικότερα από τον τρόπο με τον οποίο θεμελιώνει το αξιωματικό του σύστημα. Ας δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα:

[α] ο Ευκλείδης στο πρώτο του βιβλίο ξεκινάει με 23 ορισμούς (σημείο, γραμμή, πέρατα γραμμής, ευθεία, επιφάνεια, πέρατα επιφάνειας, επίπεδη γωνία, ευθύγραμμη γωνία, ορθή γωνία, οξεία γωνία, αμβλεία γωνία, σχήμα, κύκλος, κέντρο κύκλου, διάμετρος, ημικύκλιο, πολύπλευρα, ισόπλευρο και ισοσκελές τρίγωνο, ορθογώνιο τρίγωνο, τετράγωνο κ.α., παράλληλες ευθείες). Σε αυτούς τους ορισμούς υπάρχει μια διαφοροποίηση. Συγκεκριμένα, αν δει κανείς τους τρεις πρώτους, τότε συμπεραίνει πως δεν πρόκειται ακριβώς για ορισμούς, αλλά για ειδικές έννοιες. Αυτές οι ειδικές έννοιες έχουν ως σκοπό την έκφραση του νοήματος των θεμελιωδών εννοιών. Αναφερόμαστε στις θεμελιώδεις έννοιες που εμφανίζονται μέσα σε αυτές τις ειδικές έννοιες. Ας δούμε τον πρώτο ορισμό: «Σημείο είναι ό,τι δεν έχει μέρος». Το σημείο εδώ φαίνεται να είναι η ειδική έννοια μέσω της οποίας γίνεται προσπάθεια να εκφραστεί η θεμελιώδης έννοια της διάστασης ή ακόμα και της ίδιας της ύλης. Αυτό γιατί σύμφωνα με αυτό τον ορισμό το σημείο είναι κάτι άυλο.

Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε και για τους δύο επόμενους ορισμούς. Έτσι λοιπόν, κατανοούμε πως ο Ευκλείδης ξεκινάει να κατασκευάζει το οικοδόμημά του με τη χρήση ειδικών εννοιών, κάτι που όπως είδαμε ήταν μέσα στη λογική του Αριστοτέλη.

[β] Στη συνέχεια οι ορισμοί 4,5,6 και 7 είναι κάπως «σκοτεινοί». Δεν είναι εύκολο να κατανοήσουμε πλήρως το πώς έβλεπε ο Ευκλείδης τις έννοιες της ευθείας, της επίπεδης επιφάνειας καθώς και των περάτων τους.

[γ] Οι ορισμοί που ακολουθούν (8,9 και 10) έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το ζήτημα που μας απασχολεί. Ο Ευκλείδης ορίζει την έννοια της γωνίας των δυο γραμμών (ορισμός 8). Αυτός όμως ο ορισμός δεν παραλληλίζεται με τη λογική του Αριστοτέλη. Αν είχε αυτό συμβεί θα έπρεπε «η κλίση μιας γραμμής προς την άλλη» να αποτελούσε προσεχές γένος, που να είχε από πριν οριστεί, κάτι που όμως δε συμβαίνει.

[δ] Ο ορισμός 9 μας οδηγεί σε αντίθετο συμπέρασμα απ' αυτό που διατυπώσαμε λίγο πριν. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό «ευθύγραμμη γωνία είναι η γωνία που σχηματίζεται από δυο ευθείες γραμμές». Βλέπουμε λοιπόν πως η «γωνία» είναι αυτή που αποτελεί το προσεχές γένος και η ιδιότητα «οι δυο γραμμές που σχηματίζουν τη γωνία είναι ευθείες γραμμές» είναι η ειδοποιός διαφορά, αυτό δηλαδή το στοιχείο που καθορίζει την ειδική περίπτωση των ευθύγραμμων γωνιών. Επομένως ο Ευκλείδης σε αυτό το σημείο εναρμονίζεται με τις «επιταγές» του Αριστοτέλη.

[ε] Αντίστοιχα, παρατηρούμε εναρμόνιση και στον αμέσως επόμενο ορισμό, το 10. Σύμφωνα με αυτόν «όταν μια ευθεία που στέκεται πάνω σε ευθεία σχηματίζει τις εφεξής γωνίες ίσες, καθεμιά από τις ίσε γωνίες είναι ορθή και η ευθεία γραμμή που στέκεται πάνω

[445] .Meschkowski H., Richtigkeit und Warheit in der Mathematik, σελ. 259
[446] . Russell B., The Principles of Mathematics, σελ. 56

στην άλλη ονομάζεται κάθετη σε αυτή την οποία στήθηκε». Βλέπουμε λοιπόν πως η ορθή γωνία ορίζεται ως ένα ειδικό είδος ευθύγραμμων γωνιών (προσεχές γένος). Συγχρόνως έχει και μια ιδιαίτερη ιδιότητα, δηλαδή μέσω της επέκτασης της μιας από τις δυο γραμμές σχηματίζονται δυο γωνίες ίσες. Αυτή ακριβώς είναι και η ειδοποιός διαφορά.
[στ] Μέχρι στιγμής είδαμε ορισμένα παραδείγματα για το πώς επηρεάσθηκε ή δεν επηρεάσθηκε ο Ευκλείδης από τον Αριστοτέλη στην κατασκευή των ορισμών. Ας δούμε όμως τι αντίστοιχα συνέβη και στα αιτήματα. Τα αιτήματα 1 ως 3 σύμφωνα με τα οποία «ζητείται να γίνει παραδεκτό πως από οποιοδήποτε σημείο στο οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή», « και πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται σε ευθεία κατά τρόπο συνεχή» και « και με οποιοδήποτε κέντρο και διάστημα γράφεται κύκλος», φαίνεται να εναρμονίζονται με τις ειδικές έννοιες του Αριστοτέλη. Αυτό το λέμε με την έννοια ότι αυτά τα αιτήματα είναι αιτήματα ύπαρξης. Πρόκειται για αιτήματα που παίρνουν ως δεδομένη την ύπαρξη θεμελιωδών εννοιών με τη βοήθεια ειδικών εννοιών. Η θεμελιώδης έννοια εδώ είναι το ευθύγραμμο τμήμα, η ευθεία και ο κύκλος.
[ζ] Τα πράγματα όμως διαφοροποιούνται στα επόμενα δυο αιτήματα, το 4ο και το 5ο . Το ένα αφορά στη διαπίστωση ότι όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες και το άλλο στη διαπίστωση ότι δυο ευθείες που σχηματίζουν άθροισμα γωνιών μικρότερο των δύο ορθών, από μια τρίτη που τις τέμνει, τότε αυτές τέμνονται προς τη μεριά όπου βρίσκονται αυτές οι γωνίες. Επομένως, εδώ δεν έχουμε αίτημα ύπαρξης. Δεν πρόκειται για κοινές έννοιες, γιατί έχουμε αιτήματα που αναφέρονται αποκλειστικά στη γεωμετρία άρα δεν είναι κοινές έννοιες. Από την άλλη ούτε ειδικές έννοιες μπορούν να χαρακτηρισθούν αφού δεν αποσκοπούν στο να βεβαιώσουν στην ύπαρξη θεμελιωδών εννοιών της γεωμετρίας. Σε αυτό λοιπόν το σημείο διακρίνουμε ένα κενό σε σχέση με το αριστοτέλειο οικοδόμημα.
[η] Τέλος, πρέπει να πούμε πως ως γενική φιλοσοφία, πέρα από τις επιμέρους διαφοροποιήσεις που αναφέραμε, φαίνεται πως ο Ευκλείδης προσπαθεί να ακολουθήσει τους κανόνες του Αριστοτέλη. Αυτό το ισχυριζόμαστε γιατί: α) ο Ευκλείδης αποδεικνύει κάθε νέα απόφανση β) ορίζει κάθε νέα έννοια και γ) πρέπει να αποδεικνύει την ύπαρξη κάθε νέας έννοιας.[447]

* * * *

Σήμερα, έχοντας συνειδητοποιήσει πια η επιστημονική κοινότητα ότι η σχετική αυτοτέλεια έχει αποφέρει σημαντικά αποτελέσματα όχι μόνο στην αυτοανάπτυξη των μαθηματικών αλλά και στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων με την ευρεία έννοια (μη ευκλείδειες γεωμετρίες, μιγαδικοί αριθμοί, άλγεβρα Boole, τοπολογία κ.λπ.), τα μαθηματικά πλέον «δουλεύονται» και με αυτό το σκοπό: δηλαδή τα μελλοντικά αποτελέσματα που μπορούν να φέρουν στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων που μπορούν να ξεκινούν από την εξυπηρέτηση καθημερινών αναγκών του ανθρώπου μέχρι και τη διαμόρφωση κοσμολογικών μοντέλων. **Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά κάποιο τρόπο στα μαθηματικά έχει επεισέλθει η έννοια του πειράματος. Οι μαθηματικοί πειραματίζονται με νέες έννοιες, κλάδους, αξιώματα χωρίς να έχουν απαραίτητα ένα συγκεκριμένο πρακτικό στόχο με τη στενή έννοια, αλλά γνωρίζοντας ότι αυτό το πειραματικό παιχνίδι μπορεί μακροπρόθεσμα να τους ανοίξει νέους δρόμους για επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Η νομιμοποίηση αυτής της σκέψης γίνεται μέσω της πρακτικής εφαρμογής μιας σειράς μαθηματικών επιτευγμάτων που έλαβαν χώρα στο παρελθόν. Αυτή, λοιπόν, είναι άλλη μια πλευρά αυτού που ονομάσαμε σχετική αυτονομία των μαθηματικών. Βεβαίως, δεν πρέπει να αποκλείουμε και την περίπτωση ότι αυτά (τα μαθηματικά) χρησιμοποιούνται και ως πνευματική ικανοποίηση. Κάτι τέτοιο μπορεί κανείς να το ισχυριστεί και για την άρχουσα τάξη των αρχαίων Ελλήνων που έχοντας εξασφαλίσει τους υλικούς όρους διαβίωσής της, ασχολείται με τα μαθηματικά για την πνευματική της ικανοποίηση, ίσως, ακόμα -ακόμα και για τη δημιουργία ενός κοινωνικού status. Ένα τέτοιο κίνητρο μπορεί να εξηγηθεί από τη βασική διαφοροποίηση των ανθρώπινων όντων από το υπόλοιπο ζωικό βασίλειο: την ύπαρξη συνείδησης. Ωστόσο, δε θα ήταν σωστό να υποστηρίξουμε ότι το κίνητρο του «παιχνιδιού» είναι το κυρίαρχο στην ανάπτυξη των μαθηματικών και τη σχετική τους αυτονόμηση από τον αρχικό τους ρόλο: την ικανοποίηση υλικών αναγκών.**

[447] . Για τον επηρεασμό και την ανάπτυξη των μαθηματικών από εξωμαθηματικούς παράγοντες δες στα σχεδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 11.

Δε θα πρέπει σε καμία περίπτωση να ξεχνάμε ότι «γενικά τα μαθηματικά, ακόμα και τα πιο αφηρημένα, γεννιούνται πάντα από τη πραγματικότητα, της οποίας αντανακλούν τις ιδιότητες. Ο αριθμός, πρώτη μαθηματική αφαίρεση, είναι ριζωμένος στην πραγματικότητα. Η συνάρτηση εκφράζει γενικά πραγματικές σχέσεις (φυσικές, χημικές κ.λπ.). Οι μαθηματικοί χώροι (ευκλείδειος, του Μινκόφσκι, του Ρήμαν) είναι γενικεύσεις που έχουν σαν αφετηρία τη στοιχειώδη γεωμετρία, η οποία είναι άμεση αφαίρεση του φυσικού χώρου. Οι διανυσματικοί (και συναρτησιακοί) χώροι, οποιωνδήποτε διαστάσεων, συνδέονται με το συγκεκριμένο της φυσικής. Το γεγονός ότι τα μαθηματικά μπορούν να οικοδομήσουν με αφετηρία μερικές αρχές ή αξιώματα, ανεξάρτητα από κάθε αντιστοιχία με την υλική πραγματικότητα, δεν αποδεικνύει ότι οι μαθηματικές αφαιρέσεις είναι γενικά αφαιρέσεις χωρίς σχέση με το συγκεκριμένο. Η ιστορία των μαθηματικών αποτελεί μια σχετική απόδειξη. Η μαθηματική αλήθεια μπορεί να είναι τυπική (έλλειψη λογικής αντίφασης). Αλλά η τυπική αυτή αλήθεια είναι μια από τις πλευρές της μαθηματικής αλήθειας γενικά, η οποία δεν μπορεί να κριθεί ανεξάρτητα από τη μαθηματική πρακτική στην περιοχή του πραγματικού.

Η εμπειρική σκέψη έχει την τάση να ταυτίζει το οικείο με το αληθινό. Η άποψη του διαλεκτικού υλισμού είναι διαφορετική. Το οικείο, το άμεσα δεδομένο, αυτό που αντιστοιχεί άμεσα στις παραστάσεις των αισθητηρίων μας, δεν είναι πάντοτε το αληθινό. Ένα αφηρημένο ον, μακριά από την αισθητηριακή μας εμπειρία, μπορεί να είναι πολύ πιο αληθινό από το άμεσα δεδομένο, το οποίο μπορεί να είναι απατηλό. Ο μαρξισμός ξεκινά από την εμπειρία, αλλά δεν είναι εμπειρισμός. Περιλαμβάνει τον εμπειρισμό, ενώ ταυτόχρονα τον ξεπερνά», (η υπογράμμιση δική μας).[448]

Παρέκβαση : <u>Ο κύκλος και η φιλοσοφία των αρχαίων Ελλήνων</u>

Είδαμε παραπάνω ότι η συμβολή της φιλοσοφίας στη σχετική αυτονόμηση των μαθηματικών ήταν καθοριστική και επετεύχθη πολύμορφα. Θα πρέπει, όμως, να διευκρινίσουμε ότι ο αλληλοεπηρεασμός διάφορων γνωστικών τομέων κι εμπειριών είναι κάποιες φορές αρκετά σύνθετη διαδικασία ώστε να μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι καταγράφεται ιστορικά μια αυστηρή χρονολογική σειρά, βάση της οποίας εκείνος ή ο άλλος παράγοντας προηγήθηκε σε σχέση με κάποιον άλλο. Μια τέτοια χαρακτηριστική περίπτωση είναι η σύμπλεξη φυσικής παρατήρησης, φιλοσοφικών δογμάτων και της επικρατούσας στην αρχαιότητα άποψης περί κύκλου. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν υιοθετήσει μια άποψη κυκλικότητας για την εξέλιξη και τη ροή του χρόνου στη φύση και στην κοινωνία. Επρόκειτο για μια διαφοροποιημένη άποψη σε σχέση με αυτή άλλων λαών, όπως αυτή των Εβραίων ή των Βαβυλωνίων που είχαν την άποψη της ευθύγραμμης εξέλιξης. Την άποψη αυτής της κυκλικότητας του χρόνου την συναντούμε τόσο στη *Θεογονία* του Ησίοδου όσο και σε πολλά έργα του Πλάτωνα ή ακόμα και στον Όμηρο: «οι εποχές διαδέχονται η μια την άλλη για να σχηματίσουν ένα πλήρη κύκλο που, όταν συμπληρωθεί, ξαναρχίζει είτε κατά την ίδια τάξη, είτε μάλλον-όπως στον πλατωνικό μύθο του *Πολιτικού*-κατ' αντίστροφη τάξη, μια και ο κοσμικός χρόνος κυλά εναλλακτικά προς τη μια κατεύθυνση και κατόπιν προς την αντίθετή της. Ο Ησίοδος παραπονιέται πως ο ίδιος ανήκει στο πέμπτο και τελευταίο γένος, δηλαδή στο σιδηρό. Με αυτή την αφορμή, εκφράζει τη λύπη του που δεν πέθανε νωρίτερα ή που δε *γεννήθηκε αργότερα*: λόγια κατανοητά αν τα δει κανείς μέσα στην προοπτική ενός ανθρώπινου χρόνου που πάει όλο προς το χειρότερο, λόγια όμως που μπορούν να ερμηνευτούν αν δεχτούμε πως η διαδοχή των ησιοδικών εποχών, όπως και η διαδοχή των εποχών του έτους, συνθέτει ένα κύκλο που μπορεί ν' ανανεώνεται»[449] κι ακόμα «την κυριαρχική επίδραση αυτής της κυκλικής εικόνας του χρόνου την βρίσκουμε επίσης στον Όμηρο: όταν ανακαλεί τη μοίρα των «θνητών» ανθρώπων δεν είναι, όπως θα κάνουν οι λυρικοί, για να εκφράσει τη νοσταλγία του ατόμου μπροστά στην αμείλικτη

[448] . Μπιτσάκης Ε., Διαλεκτική και νεότερη φυσική, σελ. 273, 1974, εκδ. Ηριδανός

[449] . Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.1, σελ. 28, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος

φυγή του χρόνου, αλλά για να συγκρίνει τη διαδοχή των ανθρώπινων γενιών με την περιοδική επιστροφή των εποχών: "Καθώς των φύλλων, απαράλλαχτη κι η φύτρα των ανθρώπων/άλλα απ' τα φύλλα ρίχνουν οι άνεμοι στο χώμα, κι άλλα πάλε/το δάσος ξεπετά το ολόχλωρο την άνοιξη· παρόμοια/ και των θνητών η μια ξεπέταξε κι η άλλη γενιά πεθαίνει"».[450]

Πού μας οδηγούν αυτά τα παραδείγματα; Πρόκειται για μια αντίληψη περί χρόνου κι εξέλιξης η οποία υποστηρίζεται από ένα γεωμετρικό σχήμα, τον κύκλο. Κατά κάποιο τρόπο η σχετική αυτονόμηση εδώ επιβεβαιώνεται με έναν αντίστροφο τρόπο. Τα μαθηματικά είναι τώρα που επηρεάζουν, αν όχι καθορίζουν, τη μορφή και το περιεχόμενο μιας φιλοσοφικής άποψης.[451] Ο χρόνος θεοποιείται μέσα στην ησιοδική Θεογονία και μάλιστα αποκτά την όψη ενός φιδιού του οποίου το σώμα σχηματίζει ένα κύκλο. Η παραπάνω διαπίστωση δεν απαντά βέβαια σε ένα κρίσιμο ερώτημα που πιθανώς να προκύψει: για ποιο λόγο η επαναληψιμότητα που παρατηρήθηκε στη φύση με τη γέννηση, την ανάπτυξη, τη φθορά και το θάνατο ή μέσω της εναλλαγής ημέρας-νύχτας ή των εποχών συνδέθηκε με την έννοια της κυκλικότητας; Ας δούμε μιαν ερμηνεία, αρκετά πειστική νομίζουμε: « η ιδέα της κυκλικής κίνησης του χρόνου γεννήθηκε από τους αέναους κύκλους του ήλιου και της σελήνης, ενσωματώθηκε στα ηλιακά ρολόγια (γνώμονες) και απ' αυτά πέρασε στα μηχανικά (οι δείκτες αντιστοιχούν στις σκιές του γνώμονα. Με τη σειρά τους συντέλεσαν στην εδραίωση της παράστασης του κυκλικού χρόνου».[452] Η κυκλική κίνηση, λοιπόν, των άστρων που επαναλαμβάνεται αέναα συνδυάζει αυτήν ακριβώς την κυκλικότητα με την επανάληψη. Έτσι, η απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε, δηλαδή γιατί η επανάληψη συνδέθηκε με την έννοια της κυκλικότητας μας οδηγεί σε ένα νέο συμπέρασμα: ενώ αρχικά διακρίναμε επηρεασμό της φιλοσοφίας από τα μαθηματικά, τώρα βλέπουμε μια παράλληλη συγχώνευση φυσικής παρατήρησης, μαθηματικών και φιλοσοφίας.

Τέτοιες συνθέσεις σχετικά με τον κύκλο βρίσκουμε και στον Αριστοτέλη: «Τα Μηχανικά, που αποδίδονται στον Αριστοτέλη, θέλουν να εξηγήσουν ορθολογικά τ' αποτελέσματα των «απλών μηχανών», που αποτελούν τη βάση όλων των μηχανικών συνδυασμών και που οι ιδιότητές τους πηγάζουν, κατά το συγγραφέα, από τον κύκλο, την κοινή τους αρχή»[453] και « σύμφωνα με τη θεωρία των πέντε απλών μηχανών, η *αρχή* όλων των λειτουργιών τους βρίσκεται στις ιδιότητες του κύκλου. Η εκπληκτική αντιστροφή δυνάμεων, που δημιουργείται με τις απλές μηχανές, έτσι όπως περιγράφεται από τον Αριστοτέλη, θυμίζει την καθοριστική μέθοδο της σοφιστικής:

---

[450] . Ο.π., σελ.97

[451] . Αυτή η αντίστροφη επίδραση, ας την ονομάσουμε συμβατικά μαθηματικοποίηση της φιλοσοφίας, παρατηρείται και στη αντίληψη του Αριστοτέλη για το χρόνο. Όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Marcelo Boeri (Τρεις φιλοσοφικές απόψεις για το χρόνο, περιοδικό *Αρχαιολογία*, τ.77, 2000) : «…η πορεία για τον ορισμό του χρόνου γίνεται σαφής: ο χρόνος είναι «ένας αριθμός κινήσεων σε αναφορά με το πριν και το μετά» (219b), (σ.σ. η αναφορά γίνεται για τα *Φυσικά*). Για να έχουμε χρόνο δεν αρκεί να οροθετήσουμε ένα τμήμα κίνησης· Η ψυχή πρέπει να διακρίνει δυο (ή περισσότερα), *τώρα* και να τα αριθμήσει. Η διάκριση δυο τουλάχιστον *τώρα* είναι, στην πραγματικότητα, αναγκαία προϋπόθεση για κάθε παράσταση χρόνου και χρονικής διαδοχής (219a30 κ.ε.). Ο χρόνος, επομένως, είναι αριθμός αυτού που αριθμείται (στην κίνηση της μεταβολής) και όχι αυτού με το οποίο αριθμείται (219b6). Διακρίνουμε το «περισσότερο» και το «λιγότερο» με βάση τον αριθμό και διακρίνουμε την περισσότερη ή λιγότερη μεταβολή με βάση το χρόνο. Επομένως, *ο χρόνος είναι ένα είδος αριθμού*. Όμως η λέξη «αριθμός» είναι αμφίσημη, γιατί μπορεί να αποδοθεί τόσο σ' αυτό που αριθμείται (το αριθμούμενον) όσο και σε αυτό που είναι αριθμήσιμο (αριθμητόν), καθώς και σε αυτό με το οποίο αριθμούμε (219b3-7).αυτό συμβαίνει γιατί, όταν προσδιορίζουμε τη μεταβολή σύμφωνα με το πριν και το μετά, διακρίνουμε τις φάσεις του μέσω δυο ή περισσότερων *τώρα*. Επομένως, μετρούμε τα διαδοχικά *τώρα*, αλλά αυτό που ακριβώς μετρούμε είναι τα χρονικά διαστήματα που περιλαμβάνονται ανάμεσα σ' αυτά. Με άλλα λόγια, αυτό που μετράται κατά την αρίθμηση αυτή δεν είναι τα ίδια τα *τώρα*, αλλά τα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα τα μόνα πραγματικά συστατικά του χρόνου».

[452] .Πανταζής Βαγγέλης, Η κατεύθυνση του χρόνου στην αρχαιότητα και στους νέους χρόνους», περιοδικό Αρχαιολογία, τ. 77, 2000

[453] . Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.2, σελ. 66, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος

πώς δηλαδή αντιστρέφει κανείς το επιχείρημα του αντιπάλου και το μεταχειρίζεται εναντίον του· και όσο ισχυρότερο είναι το επιχείρημά του, τόσο λιγότερο τον ευνοεί όταν χρησιμοποιείται εναντίον του. Η κίνηση τώρα του κύκλου έχει, κατά τον Αριστοτέλη, ένα διφορούμενο χαρακτήρα που επιτρέπει μιαν ανάλογη αντιστροφή: τα σημεία που βρίσκονται στα δυο άκρα της διαμέτρου του κύκλου κινούνται με την ίδια κίνηση προς αντίθετες κατευθύνσεις, έτσι που αν ένας κύκλος μεταδίδει τη περιστροφή του σ' ένα δεύτερο κύκλο που αγγίζει τον πρώτο σ' ένα σημείο, αυτός ο δεύτερος κύκλος θα κινηθεί επίσης, αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση· και όσο ταχύτερη θα είναι η κίνηση του πρώτου, τόσο γρηγορότερα θα σπρώχνεται και θα γυρίζει ο δεύτερος προς την αντίθετη κατεύθυνση [...] Κατά τον Αριστοτέλη, ο ίδιος ο κύκλος είναι κάτι το αντιφατικό, είναι το πιο εκπληκτικό πράγμα στον κόσμο, ο συνδυασμός πολλών αντιθέτων μέσα στη ίδια φύση: κινείται και προς τη μια και προς την άλλη κατεύθυνση, είναι ταυτόχρονα κοίλος και κυρτός, κινητός και ακίνητος. Ο Αριστοτέλης βρίσκει λοιπόν φυσικό και λογικό ότι ο κύκλος είναι η αρχή της αντιστροφής της δύναμης: δε είναι παράδοξο ότι το θαυμαστό προέρχεται από αυτό που είναι ακόμα πιο θαυμαστό».[454] Σε αυτό το σχόλιο του Vernant βλέπουμε: α) τη σύνδεση της διαλεκτικής σκέψης με τον κύκλο κατά τον Αριστοτέλη ή με άλλα λόγια την ύπαρξη αντιφάσεων και αντιφατικών διαδικασιών στην οντότητα του κύκλου, β) και πάλι τον τρόπο που η σοφιστική επηρέασε τη μαθηματική σκέψη και ειδικότερα στο αντικείμενο κύκλος.

Ο Πρόκλος με τη σειρά του «κουβαλάει» σε μεγάλο βαθμό τις σκέψεις της αρχαιοελληνικής φιλοσοφίας σχετικά με τον κύκλο: τον θεωρεί ως το τελειότερο σχήμα, χαρακτηρίζει την ύπαρξή του ως την απλούστερη και αυτό για τους παρακάτω λόγους:

[α] ξεπερνά άλλα επίπεδα σχήματα λόγω της ομοιογένειάς του και της αυτοταυτοποίησής του

[β] ανταποκρίνεται στο πέρας

[γ] ανταποκρίνεται στον αριθμό ένα

[δ] ανταποκρίνεται στη στήλη του καλύτερου (πρόκειται για το δόγμα της συστοιχίας που χρησιμοποιούσαν οι Πυθαγόρειοι και που παρουσίασε ο Αριστοτέλης στο έργο του «Μετά τα Φυσικά»).[455]

Ο Πρόκλος ως νεοπλατωνικός δεν μπορεί παρά τις κύριες επιρροές να τις δέχεται από την πλατωνική φιλοσοφία. Όπως έχουμε επισημάνει, για τον Πλάτωνα τα μαθηματικά είχαν δύο διαστάσεις. Κατά τη μία ανήκουν στον κόσμο του αισθητού. Αφορούν στη γύρω μας πραγματικότητα. Σε τελευταία ανάλυση περιγράφουν ιδιότητες της ύλης. Κατά την άλλη διάσταση, κατοικούν στον κόσμο των ιδεών. Είναι τα ίδια ιδέες, αντικείμενα του πνεύματος και διακρίνονται από τα φυσικά αντικείμενα τα οποία περιγράφουν. Η γνώση των μαθηματικών είναι και το μονοπάτι μέσω του οποίου πορευόμαστε στο Θείο Πνεύμα. Αυτό αιτιολογείται κατά κάποιο τρόπο από το γεγονός ότι η γεωμετρία ασχολείται και με οντότητες μη υπαρκτές στη φύση αλλά που αποτελούν προϊόντα της καθαρής σκέψης. Η Αριθμητική, πάντα κατά τον Πλάτωνα, πρέπει να μελετάται προς εξυπηρέτηση της ίδιας της γνώσης και όχι για κάποιο πρακτικό σκοπό (χωρίς ωστόσο αυτή της τη χρησιμότητα να την απορρίπτει εντελώς).[456]

Αυτό ήταν και το φιλοσοφικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτούργησε και παρήγαγε τη σκέψη του και ο Πρόκλος. Κατά συνέπεια:

1) Αποδίδει την κυκλική μορφή στα ουράνια και την ευθεία γραμμή στον κόσμο της γενέσεως. Αυτό το αιτιολογεί λέγοντας πως η κυκλική μορφή βρίσκεται στις αλλαγές και τα σχήματα του κόσμου της γενέσεως, προκύπτει άνωθεν από την ουράνια τάξη. Δηλαδή το θεϊκό σχέδιο είναι αυτό που καθορίζει και τη δημιουργία και την εξέλιξη.

---

[454] . Ο.π., σελ. 73-74

[455] . Δες Morrow: Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Princeton University Press, 1970

[456] . Βλέπε χαρακτηριστικά: 1) Πολιτεία vii, 525 c,d
2) Πολιτικός, 258 d
3) Πολιτεία 526 d,e

2) Διακρίνει τα ασώματα πράγματα σε ψυχή και νου. Βάσει αυτής της διάκρισης αντιστοιχεί τον κύκλο στο χαρακτήρα του νοερού και την ευθεία στην ψυχή. Αυτό το αιτιολογεί λέγοντας πως η ψυχή επιστρέφει στο νου κινούμενη σε κύκλο. Για να κάνει περισσότερο κατανοητή αυτή τη διάκριση λέει πως η σχέση ψυχής και νου είναι όπως η σχέση παραγωγής και ουρανίων.
3) Από τα παραπάνω δόγματα του, ο Πρόκλος συμπεραίνει και την υπεροχή του κύκλου έναντι όλων των άλλων σχημάτων. Φαίνεται σε αυτό το σημείο να είναι αρκετά επηρεασμένος από την άποψη του Πλάτωνα για τον τρόπο δημιουργίας της ψυχής και του σώματος από το Θεό. Ο Πλάτωνας περιγράφοντας αυτή τη διαδικασία μέσα από το έργο του «Τίμαιος», αφού υποστηρίζει τη χρήση αναλογιών από το Θεό κατά την ανάμιξη ψυχής και σώματος, καταλήγει μέσα από μια πολύπλοκη περιγραφή και στην καθοριστική χρήση των κύκλων.[457]
4) Σχεδόν η θεϊκή φύση ταυτίζεται με τον κύκλο. Είναι μια εσωτερική της ιδιότητα αφού «Στους Θεούς παρουσιάζει τη δύναμη να ξαναγυρίζουν και να είναι ενωμένοι με τις αρχές τους, και να παραμένουν στους εαυτούς τους χωρίς να μετακινούνται από την δική τους μακαριότητα»[458].
5) Και στα νοητά όντα όμως υπάρχει η «προίκα» του κύκλου. Οι ψυχές περιστρέφονται γύρω από το νου. Σε αυτό το σημείο, ο Πρόκλος μάλλον αντιφάσκει, αφού πριν έχει αντιστοιχίσει στην ψυχή την ευθεία.
6) Όσον αφορά στα ουράνια σώματα ο κύκλος είναι αυτός που βοηθά το νου να τα διακρίνει ως μια ιδιαίτερη κατηγορία οντοτήτων. Μάλιστα σε αυτό το σημείο ο Πρόκλος κάνει δύο σημαντικές κοσμολογικές παρατηρήσεις. Σύμφωνα με τη μία το σύμπαν οριοθετείται από τα ουράνια σώματα, άρα το θεωρεί πεπερασμένο, ενώ σύμφωνα με την άλλη τα ουράνια σώματα είναι αιώνια στην ύπαρξή τους. Με άλλα λόγια αποδέχεται την απειρότητα του χρόνου όχι όμως και του χώρου, «πέφτοντας» με αυτό τον τρόπο σε μια φιλοσοφική αντίφαση. Στον κύκλο αποδίδει την αιωνιότητα των ουράνιων σωμάτων αφού ελλείψει αυτού, ο διάκοσμος θα είχε διαλυθεί. Έτσι ο Πρόκλος κατανοεί πως αυτό που κρατάει σε μια συνοχή το σύμπαν, αυτό που τα θέτει τα πράγματα σε μια τάξη, είναι η περιοδικότητα των φαινομένων, που περιγράφει την επιστροφή των φαινομένων στους εαυτό τους, άρα παραπέμπει στον κύκλο.
7) Τον παραπάνω προβληματισμό τον μεταφέρει και στον πιο προσιτό μας κόσμο, τα ζώα και τα φυτά. Όπως γράφει χαρακτηριστικά : «…ο κύκλος ρυθμίζει όλα τα πράγματα για εμάς τους ταπεινότερους δικαιούχους του και δεν έχει αφήσει τίποτα χωρίς μερίδιο με τη γενναιοδωρία του, αφού μοιράζει ομορφιά, ομοιογένεια, διαμόρφωση και τελειότητα»[459].
8) Ακόμα επιχειρεί να συνδέσει την Αριθμητική και τη Γεωμετρία, αφού βρίσκει μια συσχέτιση του κύκλου με τα μεσαία κέντρα της σειράς από τη μονάδα ως το δέκα.

---

[457] . Ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο*, 34c-37c, περιγράφοντας την κατασκευή της ψυχής από το Θεό μιλάει για αναλογίες υλικών αναφερόμενος σε συγκεκριμένες αριθμητικές αναλογίες, ενώ παράλληλα περιγράφει το Θεό να ενώνει αυτά τα υλικά δίνοντάς στους κυκλικό σχήμα και στη συνέχεια να αποτελούν ένα πολύπλοκο σχηματισμό που θυμίζει λειτουργία ρολογιού: «Αφού έβαλε το ένα μισό πάνω στο άλλο, όπως το σχήμα Χ, τα λύγισε κυκλικά ενώνοντας πρώτα τα άκρα τους και στη συνέχεια τα σημεία αυτά μεταξύ τους, σχηματίζοντας έτσι δυο κάθετους κύκλους, σε αυτούς τους δυο κύκλους, τον ένα μέσα τον άλλο, έδωσε κίνηση που γίνεται πάντα με τον ίδιο τρόπο και στον ίδιο τόπο. Ύστερα έδωσε στο αμετάβλητο τη εξωτερική κίνηση, ενώ την εσωτερική στο μεταβλητό και κανόνισε ώστε κίνηση του αμετάβλητου να γίνεται πλευρικά προς τα δεξιά, ενώ η κίνηση του αμετάβλητου διαγώνια προς τα αριστερά. Την υπεροχή την έδωσε στην περιστροφή του αμετάβλητου, την οποία άφησε άσχιστη. Αντίθετα, έσχισε έξι φορές την εσωτερική περιστροφή δημιουργώντας εφτά άνισους κύκλους με τα διπλά και τριπλά διαστήματα, τρία από κάθε είδος. Ύστερα όρισε ότι αυτοί οι δυο κύκλοι θα κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση. από τους εφτά εσωτερικούς κύκλους κανόνισε ώστε οι τρεις να περιστρέφονται με την ίδια ταχύτητα, ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις με ταχύτητες διαφορετικές τόσο μεταξύ τους όσο και σχετικά με τους πρώτους τρεις, όμως σταθερά και με κανονικότητα».
[458] . Morrow: Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Princeton University Press, 1970, σελ. 118
[459] . Ο.π., σελ. 119

Έτσι μας λέει πως οι δυνάμεις του 5 και του 6 μας δίνουν αριθμούς των οποίων τα τελευταία ψηφία είναι πάντα το 5 και το 6 αντίστοιχα. Το 5 και το 6 είναι κάτι σαν το κέντρο του κύκλου αφού είναι τα μεσαία κέντρα της δεκάδας και μέσω του πολλαπλασιασμού φανερώνεται μια κυκλική ιδιότητα αυτών των «κέντρων». Ομολογούμε πως η σύλληψη του Πρόκλου είναι εντυπωσιακή παρόλα αυτά κάπως απλοϊκή στη φιλοσοφική συσχέτιση που επιχειρεί.

Ο κύκλος τελικά αποκτάει μια θεολογική και μεταφυσική διάσταση. Ο ίδιος ο Πρόκλος δείχνει τον επηρεασμό του από τους Ορφικούς. Το κέντρο κατά τον Πρόκλο μοιάζει με την αιτία του πέρατος. Ο τριαδικός Θεός περικλείει στον εαυτό του την πρωταρχική αιτία των ευθύγραμμων σχημάτων. Αυτός λοιπόν ο τριαδικός Θεός, όντας το κέντρο, δημιουργεί, είναι ο γεννήτορας των πάντων[460].

[460] . Ο.π., σελ. 123

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΚΟΝΣΤΡΟΥΚΤΙΒΙΣΜΟΣ ΚΑΙ Ο ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΟΣ ΥΛΙΣΜΟΣ

Τα τελευταία χρόνια έχει κάνει την εμφάνισή του στον κύκλο των μαθηματικών ο όρος κονστρουκτιβισμός. Πρόκειται για έναν όρο που συζητιέται στην Ελλάδα, κυρίως σε φορείς όπως το παιδαγωγικό ινστιτούτο ή στην πανεπιστημιακή κοινότητα και κατά συνέπεια σε μια σειρά άρθρων και μελετών. Ο κονστρουκτιβισμός δεν είναι, όμως, μια φιλοσοφική θεώρηση που αφορά αποκλειστικά στα μαθηματικά. Αναζητώντας τις ρίζες του μπορεί κανείς να τις διακρίνει σε μια απόπειρα δημιουργίας μιας θεωρίας της μάθησης. Σήμερα, όμως, αξιώνει μια ολοκληρωμένη θεωρία της γνώσης. Όπως ένας εκπρόσωπος του υποστηρίζει «…η άποψη των κονστρουκτιβιστών καθιστά πιθανή την ανάπτυξη ενός οράματος για όλα τα εκπαιδευτικά φαινόμενα το οποίο όραμα έχει **καθολικό χαρακτήρα** και είναι οξυδερκές»[461], (η υπογράμμιση δική μας). Από αυτή την άποψη η κριτική μας δεν μπορεί να περιοριστεί στο «στενό» ορίζοντα των μαθηματικών αλλά σε ένα εφ' όλης της ύλης «κοίταγμα» τέτοιο που να είναι ικανό να μας παρέχει και τα κατάλληλα εφόδια για μια όσο το δυνατό πιο τεκμηριωμένη κριτική και στην πρόταση που έχει ο κονστρουκτιβισμός για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Π1: <u>Βασικές φιλοσοφικές αναφορές και βάσεις του Κονστρουκτιβισμού</u>

Σύμφωνα, λοιπόν, με μια άποψη οι καταβολές του κονστρουκτιβισμού βρίσκονται α) στην περιοχή του ψυχολογικού κονστρουκτιβισμού στην οποία συναντάμε τον Piaget και την οπτική του για τη μάθηση των παιδιών, την οποία θεωρεί ως προσωπική και β) στην περιοχή του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού στην οποία συναντάμε τον Durkheim και τη θεωρία της πολιτισμικής ανάπτυξης η οποία δίνει βάρος στο ρόλο που παίζει ο κοινωνικός παράγοντας στη διαμόρφωση των ιδεών του υποκειμένου.[462] Μελετητές όπως ο Varene υποστηρίζουν ότι οι απαρχές του κονστρουκτιβισμού βρίσκονται στο έργο του Giambattista Vico με τίτλο *Η καινούρια Επιστήμη*.[463] Επίσης, ο Popper, κατά την άποψη της Solomon, στηριζόμενος στο Lakatos και στον Brower πρότεινε τον κονστρουκτιβισμό στα μαθηματικά προς χάριν της αντιπαράθεσης του με τον αντικειμενισμό.

Μελετώντας κανείς τις διακλαδώσεις που περιγράφονται κατά την εξέλιξη του κονστρουκτιβισμού μπορεί να διακρίνει διάφορες παραλλαγές του: διαλεκτικός κονστρουκτιβισμός, εμπειρικός κονστρουκτιβισμός, μεθοδολογικός κονστρουκτιβισμός, πιαζετιανός κονστρουκτιβισμός, μεταεπιστημολογικός κονστρουκτιβισμός, πραγματιστικός κονστρουκτιβισμός, ρεαλιστικός κονστρουκτιβισμός, κοινωνικός κονστρουκτιβισμός, ατομικός κονστρουκτιβισμός, κοινωνικοϊστορικός κονστρουκτιβισμός. Σκοπός μας δεν είναι να εξετάσουμε όλες αυτές τις παραλλαγές αλλά να εντοπίσουμε τους κοινούς παρονομαστές ή εν πάση περιπτώσει τα κύρια σημεία της εν

---

[461] . Pepin Y., Practical Knowledge and School Knowledge: A Constructiviste Representation of Education. Στο: M. Larochele. N. Bednarz &J. Garrison (Eds.), Constructiviste & Education, Cambridge University Press, σελ. 173-192

[462]. Δες αναλυτικότερα την άποψη του Matthews, R., Constructivisme in Science and Mathematics Education, στο D.C. Phillips (ed.), National Society for the Stdy of Education, 99th Yearbook, Ghicago, Uiversity of Chicago Press, σελ.162

[463] . Κουλαϊδης Β., Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου, σελ.66, εκδ. Gutenberg

λόγω θεωρίας. Ας δούμε, λοιπόν, τις κύριες αναφορές του, διευκρινίζοντας ότι θα μας απασχολήσει κυρίως το ρεύμα του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού:

Σύμφωνα με την τοποθέτηση του Tobin « ο κονστρουκτιβισμός είναι ένα σύνολο πίστεων περί τη γνώση η οποία αρχίζει με την αποδοχή της θέσης **ότι η πραγματικότητα υπάρχει αλλά δεν μπορεί να γνωσθεί ως ένα σύνολο από αλήθειες**»[464], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Η καντιανή επιρροή σε αυτό το μικρό κείμενο είναι φανερή, αφού στην ανάγνωση της παραπάνω πρότασης μας έρχεται στο μυαλό το καντιανό δόγμα για το πράγμα καθαυτό και η αδυναμία γνωσιμότητάς του. Εδώ πρόκειται για μια άποψη που δεν ξέρουμε αν διατρέχει όλες του τις παραλλαγές του κονστρουκτιβισμού, πρόκειται, όμως, για άποψη που χαρακτηρίζει αρκετές τάσεις του. Την αναφέρουμε δε, για να στηρίξουμε την πεποίθησή μας σύμφωνα με την οποία ο κονστρουκτιβισμός αποτελεί τη συνέχεια αναπαλαιωμένων φιλοσοφικών θεωρήσεων. Κατά τους Cuba and Lincoln η οντολογία του κονστρουκτιβισμού είναι μια «**σχετικιστική** οντολογία η οποία υποστηρίζει ότι υπάρχουν **πολλαπλές, κοινωνικά κατασκευάσιμες πραγματικότητες** οι οποίες **δεν κυβερνώνται από κάποιους φυσικούς νόμους**. Ως αλήθεια ορίζεται η καλύτερα ενημερωμένη (σε ποσότητα και ποιότητα πληροφοριών) και πιο επιτηδευμένη (ισχύς με την οποία χρησιμοποιούνται οι πληροφορίες) κατασκευή **για την οποία υπάρχει συμφωνία** (αν και μπορεί να υπάρχουν αρκετές υφιστάμενες κατασκευές που ταυτόχρονα πληρούν ένα συγκεκριμένο κριτήριο)»[465], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Οπωσδήποτε σε διαπιστώσεις όπως οι παραπάνω αναφύεται ένα εύλογο ερώτημα: αν ο κάθε άνθρωπος συγκροτεί με το δικό του προσωπικό τρόπο τη γνώση του πώς είναι δυνατό τα υποκείμενα να συνεννοούνται μεταξύ τους; Ο κονστρουκτιβισμός σε αυτό το ερώτημα απαντά ως εξής: «εάν δυο άνθρωποι ή ακόμα και ολόκληρη η κοινωνία των ανθρώπων βλέπουν μέσα από παραμορφωτικούς φακούς, αυτό δε συνεπάγεται ότι το παρατηρούμενο είναι και αληθινό. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι στη βάση τούτης της συμφωνίας μπορούν να συναινέσουν ως προς κάποιες περιοχές των υποκειμενικών τους κόσμων […] Αυτές οι περιοχές της σχετικής συμφωνίας ονομάζονται συναινετικές περιοχές».[466] Η κριτική του ΔΥ σε μια τέτοια θεώρηση α) έχει να κάνει με την αδυναμία διάκρισης της σχετικής και απόλυτης αλήθειας και της μεταξύ τους (διαλεκτικής) σχέσης, β) υπονοείται η απόλυτη ασυμμετρία ανάμεσα στα μαθηματικά και στην πραγματικότητα αφού «οι πραγματικότητες δεν κυβερνώνται από φυσικούς νόμους» (τότε αλήθεια τι είναι οι πραγματικότητες; Μόνο κοινωνικές κατασκευές και τι σημαίνει αυτό ή εν πάση περιπτώσει γιατί αυτές γίνονται και πού βρίσκονται οι ρίζες τους;), γ) στην αδυναμία απάντησης στο γιατί υπάρχει συμφωνία ανάμεσα στους ανθρώπους και γιατί αυτή μπορεί και λειτουργεί σε πρακτικό επίπεδο.

Επεκτείνοντας αυτή την άποψη του κονστρουκτιβισμού θα τον δούμε να συγκλίνει με τον εμπειρισμό αφού σύμφωνα με τον τελευταίο η ουσία της επιστήμης δεν είναι οι θεωρίες αλλά η μέθοδος την οποία χρησιμοποιούμε για την αλλαγή του πλαισίου που κάθε φορά χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του φυσικού κόσμου. Αυτό οδηγεί στο εξής συμπέρασμα. Οι φυσικές επιστήμες παύουν να έχουν την ισχύ που απορρέει από την αποτελεσματικότητά τους. Υπόκεινται σε έναν άκρατο σχετικισμό κι εξαρτώνται πλήρως από το υποκείμενο. Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα για τα μαθηματικά πλέον, να υπαχθούν (πλήρως) στις κοινωνικές επιστήμες. Αν, λοιπόν, δεν μπορούμε να γνωρίσουμε το αντικείμενο, τότε όλα καταντούν μια σύμβαση και μάλλον σε αυτό το σημείο βρίσκουμε μπροστά μας τον Πουανκαρέ. Αδυναμία γνωσιμότητας σημαίνει ότι όλα καθορίζονται από το υποκείμενο και τα μαθηματικά μετατρέπονται σε κάτι που σε τελική ανάλυση μικρή σχέση έχει με την πραγματικότητα για να μην πούμε καμία. Σε αυτά τα ζητήματα ιδιαίτερα αποκαλυπτικός είναι ένας κλασικός εκπρόσωπος του (ριζοσπαστικού) κονστρουκτιβισμού και ασφαλώς αναφερόμαστε στο Von Glasersfeld, ο οποίος περιγράφοντας τη διαφορά του ρεαλιστή από τον κονστρουκτιβιστή, αυτή έγκειται, κατά τη γνώμη του, **στο ότι ο**

---

[464]. Δες αναλυτικότερα Tobin K., Constructiviste Representation on Research in Science Education, paper presented at the annyal metting of the National Association for Research in Science Teaching, Lake Geneva, Wisconsin

[465] . Cyba and Lincoln, Fourth Generation Evualation, σελ.84 1989, California: SAGE Publication Inc

[466] . Von Glasersfeld E., Instruction, In Radical Constructivisme in Mathematics education, σελ. 15-16, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht

ρεαλιστής πιστεύει πως οι θεωρίες του είναι ένα αντίγραφο ή μια αντανάκλαση των ανεξάρτητων δομών που ήδη υπάρχουν (ας θυμηθούμε σε αυτό το σημείο τη θεωρία της αντανάκλασης όπως αυτή διατυπώθηκε από του εκπρόσωπους του ΔΥ), **ενώ ο κονστρουκτιβιστής διατηρεί επιφυλάξεις για το ρόλο του πειραματιστή ως δημιουργού όλων των κατασκευών**. Ο Von Glasersfeld υποστηρίζει, ακόμα, ότι **για τον κονστρουκτιβιστή δεν υπάρχουν άλλες κατασκευές εκτός από εκείνες τις οποίες εγκαθιδρύει αυτός που γνωρίζει με την αποκλειστικά δική του δραστηριότητα της συνάρθρωσης των εμπειρικών στοιχείων**.[467] Η Confrey στη συνέχεια δε μας αφήνει καμία αμφιβολία για τις προθέσεις του κονστρουκτιβισμού: «με απλούς όρους ο κονστρουκτιβισμός δύναται να περιγραφεί ως [...] μια θεωρία σχετικά με τα όρια της ανθρώπινης γνώσης, μια πίστη ότι ολόκληρη η γνώση είναι απαραίτητα απότοκος των γνωστικών μας πράξεων. **Δεν μπορούμε να έχουμε άμεση ή αδιαμεσολάβητη γνώση καμίας εξωτερικής ή αντικειμενικής πραγματικότητας**. Εμείς είμαστε αυτοί που οικοδομούμε την κατανόησή μας διαμέσου των εμπειριών μας και ο χαρακτήρας των εμπειριών μας επηρεάζεται βαθιά από τους γνωστικούς μας φακούς»[468], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Ακόμα, μερικές απόψεις κινούμενες στο ίδιο μήκος κύματος μας πληροφορούν ότι «η επιστήμη είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα και ό,τι αναφέρεται ως νόμοι της φύσης, είναι μόνο το αποτέλεσμα αυτής της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η φύση υπό αυτή τη μορφή δεν έχει τέτοιους νόμους»[469]. Έτσι, για να είμαστε περισσότερο ακριβείς θα λέγαμε ότι ο ΔΥ θα ενέτασσε την εκδοχή του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού σε αυτό που ονομάζει υποκειμενικό ιδεαλισμό. Ή για να είμαστε πιο δίκαιοι θα μπορούσε ένας κονστρουκτιβιστής να καταλήξει σε μια πούρα θέση υποκειμενικού ιδεαλισμού, συνδυάζοντας το σκεπτικισμό του για το αν υπάρχει αντικειμενική πραγματικότητα και τη θεωρία της κατασκευής της γνώσης που μας βοηθά να συγκροτήσουμε η εμπειρία μας, (η οποία γνώση δεν αποτελεί αντίγραφο της πραγματικότητας). Το πρόβλημα, δηλαδή του κονστρουκτιβισμού δεν είναι μόνο ή κυρίως επιστημολογικό.[470] Είναι οντολογικό, αφού δεν μπορεί να αποφανθεί για μια πραγματικότητα έξω από εμάς. Έτσι, βλέπουμε άλλη μια φιλοσοφική συνάντηση: ο κονστρουκτιβισμός διασταυρώνεται με το θετικισμό, έστω και αν κάτι τέτοιο δε διατυπώνεται ρητά από τον πρώτο και μεταμφιέζεται σε ένα ντροπαλό υποκειμενικό ιδεαλισμό.[471]

Μια άλλη φιλοσοφική παράμετρος του κονστρουκτιβισμού έχει να κάνει με τον τρόπο με τον οποίο δομεί το υποκείμενο τη γνώση. Ο Wheatley αναφέρει χαρακτηριστικά: «η θεωρία του κονστρουκτιβισμού στηρίζεται σε δυο αρχές. Η πρώτη δηλώνει ότι η γνώση **δε λαμβάνεται παθητικά αλλά οικοδομείται ενεργητικά από το γιγνώσκον υποκείμενο**. Η δεύτερη αρχή δηλώνει ότι η γνωστική λειτουργία είναι προσαρμοστική **και υπηρετεί την οργάνωση του κόσμου των εμπειριών και όχι την ανακάλυψη της οντολογικής πραγματικότητας** [...] Συνεπώς **δε βρίσκουμε την αλήθεια** αλλά οικοδομούμε βιώσιμες

---

[467] . Δες αναλυτικότερα α)Von Glasersfeld, Cognition, Construction and Knowledge, 1987, Intersystem Publication, Salinas CA, β) Von Glasersfeld, Construction of Knowledge, 1989, Synthese, 80 (1), 121-140

[468] . Confrey J., What Constuctivism Implies for Teaching, στο Davis R., Maher C., Noddings N. (επ), Constructivisme Views on the Teaching and Learning of Mathematics, σελ. 108, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics

[469] . Nadeau R, and Destautels J., Epistimologie and the teaching of Science, σελ. 135, Ottawa, Science council of Canada, 1984

[470] . Δες τέτοια διαπίστωση στο: Κολέζα Ε., Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, σελ. 85, εκδ. Leader Books

[471] . Πιστεύουμε ότι η διαπίστωση ότι κονστρουκτιβισμός και θετικισμός είναι αντιτιθέμενα φιλοσοφικά ρεύματα (Σχίζας Δ., WWW. electridea.gr) είναι κάπως πρόχειρη και βιαστική. Η πρώτη μας ένσταση βρίσκεται στο ότι τα δυο αυτά ρεύματα δεν είναι αυτόνομα φιλοσοφικά ρεύματα αλλά παρακλάδια του ιδεαλιστικού ρεύματος. Από αυτή την άποψη χαρακτηρίζονται από ένα κοινό παρονομαστή. Η δεύτερη ένστασή μας έγκειται στο ότι όταν μιλάμε για θετικισμό και για κονστρουκτιβισμό τόσο ο ένας όσο και ο άλλος διακρίνονται από ένα πλήθος παρακλαδιών που μεταξύ τους έχουν αξιοσημείωτες διαφορές. Επομένως αναφύεται το ερώτημα ποιο ή ποια παρακλάδια είναι αυτά που είναι αντιτιθέμενα;

εξηγήσεις των εμπειριών μας»[472], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Στην πρώτη διαπίστωση δεν έχουμε καμία αντίρρηση. Το υποκείμενο δε διαθέτει έναν εγκέφαλο-δοχείο στο οποίο απλά συσσωρεύονται πληροφορίες και το πολύ-πολύ ταξινομούνται. Πρόκειται για μια δυναμική διαδικασία που από ότι φαίνεται ο κονστρουκτιβισμός την αποδέχεται σαν τέτοια. Οι επεξηγήσεις που ακολουθούν, ωστόσο, μας επαναφέρουν στην τάξη. Η πρώτη διαπίστωση για ενεργητική συμμετοχή του υποκειμένου έχει ως σκοπό να υπηρετήσει τη θεμελιώδη θέση της αγνωσιμότητας όπως διευκρινίζεται και στο παραπάνω απόσπασμα. Η θεωρία κατασκευής της γνώσης από το υποκείμενο φαίνεται να μοιάζει με τις απόψεις του Vygotsky. Όμως, μόνο μοιάζει και αυτό γιατί ο Vygotsky ναι μεν υποστήριζε ότι η γνώση είναι κοινωνικό προϊόν και ότι οικοδομείται κοινωνικά, παράλληλα δε, τόνιζε ότι **η γνώση αποκτάται μέσα στην κοινωνική δραστηριότητα του ανθρώπου και στην ανταλλαγή πείρας και ιδεών**. Υποστήριζε ακόμα, ότι **η αντίληψη ενός διαλεκτικού άλματος από την αίσθηση στη σκέψη αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα κατά ποιοτικά διαφορετικό τρόπο απ΄ ότι η άμεση αίσθηση**. Ίσως είναι εντελώς δικαιολογημένο να ισχυριστεί κανείς, υποστήριζε ο ίδιος, ότι αυτός είναι ο ποιοτικός διαχωρισμός της επιμέρους ενότητας. Κατά το Vygotsky, **είναι στην ουσία ο γενικευμένος αντικατοπτρισμός της πραγματικότητας**. Αυτό είναι κάτι εντελώς διαφορετικό από αυτό που υποστηρίζει ο κονστρουκτιβισμός, αφού στο «παιχνίδι» μπαίνει η κοινωνική δραστηριότητα και η πείρα **δηλαδή η πράξη αποκαθιστώντας με αυτό τον τρόπο μια διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο ατομικό και συλλογικό, στη θεωρία και στην πράξη, ενώ ταυτόχρονα ο Vygotsky αποδέχεται την ύπαρξη και τη δυνατότητα γνωσιμότητας της αντικειμενικής πραγματικότητας**.[473] Σε αυτό το σημείο, όμως, αξίζει μια ακόμα διευκρίνιση. Αν ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός «προσεγγίζει το Συμβατισμό δεχόμενος ότι η ανθρώπινη γλώσσα, οι κανόνες και οι παραδοχές παίζουν βασικό ρόλο και στην αποδοχή και αιτιολόγηση της μαθηματικής αλήθειας» και αν «δανείζεται από τον Ημι-Εμπειρισμό την αρχή της διαψευσιμότητας, αποδεχόμενος την άποψη ότι η μαθηματική γνώση και οι έννοιες εξελίσσονται και αλλάζουν» και αν «υιοθετεί επίσης τη φιλοσοφική θέση του Lakatos ότι η μαθηματική γνώση εξελίσσεται μέσω αμφισβητήσεων και ανασκευών»[474], τότε δεν μπορούμε να δεχτούμε την απόπειρα συμφιλίωσης που γίνεται ανάμεσα στον κονστρουκτιβισμό και το Vygotsky. Από όσο έχουμε υπόψη μας, πουθενά δεν αναφέρεται στο έργο του μια διαπίστωση όπως η παραπάνω. Το αντίθετο· από το γενικότερο φιλοσοφικό πλαίσιο που θέτει δε νομίζουμε ότι υπάρχουν υποψίες για υιοθέτηση μιας ποπεριανής θεώρησης της επιστήμης. Το ζήτημα της ιστορικότητας που τίθεται από την πλευρά του ΔΥ δεν παραλληλίζεται, ούτε εφάπτεται, ούτε βεβαίως και ταυτίζεται με τις ποπεριανές διαψευσιμότητες. Άρα, λοιπόν, ο Vygotsky δεν μπορεί να συμφιλιωθεί με τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, πολύ περισσότερο δεν συγχρωτίζεται με την πιο σκληροπυρηνική εκδοχή του κονστρουκτιβισμού, αυτή του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού.

Έχοντας σκιαγραφήσει κάποιες από τις βασικές θέσεις του κονστρουκτιβισμού θα λέγαμε καταληκτικά ότι δεν πρόκειται για ένα νέο φιλοσοφικό ρεύμα αλλά αποτελεί μια σύμπηξη παλιών φιλοσοφικών ρευμάτων και θέσεων. Συγκεκριμένα:

[α] η αδυναμία γνωσιμότητας της αντικειμενικής πραγματικότητας μας οδηγεί κατ΄ ευθείαν στον Καντ,

[β] η αντιρεαλιστική θέση σύμφωνα με την οποία η γνώση κατασκευάζεται από το υποκείμενο και δεν εκφράζει την αντικειμενική πραγματικότητα, δεν είναι τίποτα άλλο από την κοπερνίκεια στροφή και πάλι του Καντ,

[δ] σε ορισμένες εκδοχές του ο κονστρουκτιβισμός ταυτίζεται με τον υποκειμενικό ιδεαλισμό αφού «δεν υπάρχει "δεν υπάρχει κανένα μεγάλο βιβλίο της φύσης" που μπορεί να ερωτηθεί προκειμένου να ελέγξει αν τα μοντέλα ή οι θεωρίες αντιστοιχούν σε μια

---

[472] . Δες αναλυτικότερα Wheatley H., Constructivist Perspectivist on Science, and Mathematics Learning, Science Education, 75, σελ.9-21

[473] . Δες αναλυτικότερα α) Λ. Βιγκότσκι, Σκέψη και Γλώσσα, εκδ. Γνώση, β) Λ. Βιγκότσκι, Νους στην κοινωνία, εκδ. Gutenberg, γ) Βαγενάς Ε., Επίκαιρες Παιδαγωγικές αντιλήψεις του σοβιετικού παιδαγωγικού συστήματος, ΚΟΜΕΠ, τ.2, 2004

[474] . Ernest P., The philosophy of Mathematics Education, σελ. 42, 1991, The Farmer Press, London

οντολογική πραγματικότητα».[475] Αυτή η θέση δε σημαίνει απλώς την αδυναμία γνωσιμότητας, αφού αυτό που αμφισβητείται ανοικτά είναι η ίδια η ανεξάρτητη από εμάς αντικειμενική πραγματικότητα. Η «έλλειψη ενός οποιουδήποτε φυσικού βιβλίου», νομίζουμε ότι υπογραμμίζει αυτή τη διαπίστωσή μας,
[δ] τέλος, αφού αυτό που παίζει ρόλο δεν είναι η θεωρία αλλά η μέθοδος και η αλλαγή της, έχουμε σαφείς αναφορές στο Feyerabend, τουλάχιστον στην περίπτωση του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού. Αν η κατασκευή της γνώσης είναι ατομική υπόθεση, θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι σε τελική ανάλυση οι επιστημονικές θεωρίες στερούνται νοήματος. Επομένως, νόμοι, κανόνες, αρχές καταργούνται και οδηγούμαστε σε μια επιστημονική αναρχία. Η νέα μέθοδος που υιοθετούμε είναι η έλλειψη μεθόδου: «ο αναρχισμός, ενώ ίσως δεν είναι η πιο ελκυστική πολιτική φιλοσοφία, είναι σίγουρα ένα εξαιρετικό φάρμακο για την επιστημολογία και τη φιλοσοφία της επιστήμης».[476] Αλλά για αυτό το ζήτημα, της έλλειψης μεθόδου, θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην περίπτωση του Lakatos, στη συνέχεια του κειμένου.

Π2: <u>Κονστρουκτιβισμός και μαθηματικά. Μια υλιστικοδιαλεκτική κριτική</u>

Ήδη τα όσα αναφέραμε μας προϊδεάζουν για το πώς ο κονστρουκτιβισμός αντιμετωπίζει τα μαθηματικά. Ας δούμε μερικές βασικές θέσεις του που έχουν να κάνουν με τα μαθηματικά αλλά και τη διδασκαλία τους:
[1] Η μαθηματική γνώση αποτελεί επινόηση του ανθρώπινου νου.[477]
[2] Η μαθηματική γνώση δεν είναι (ή δεν είναι μόνο) θέμα αντίληψης, διαίσθησης ή ευφυΐας αλλά κατασκευάζεται με αναστοχαστική αφαίρεση και με αναδιοργάνωση αισθητικοκινητικής και εννοιολογικής δραστηριότητας.[478]
[3] Ένας θεμελιώδης στόχος της διδακτικής των μαθηματικών είναι (ή θα πρέπει να είναι) να υποβοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάζουν μαθηματικές δομές που να είναι πολυπλοκότερες, ισχυρότερες/δραστικότερες και πιο αφηρημένες-γενικευμένες από αυτές που ήδη κατέχουν όταν αρχίζει η διδασκαλία.[479]
[4] Ο ρόλος του/της εκπαιδευτικού δεν είναι και δεν μπορεί να περιορίζεται , σε μια απλή μεταφορά/μετάδοση μαθηματικού πληροφοριακού υλικού. Η πρωταρχική του/της υπευθυνότητα είναι η διευκόλυνση μιας γνωσιακής αναδόμησης, αναδιοργάνωσης και αλλαγής.[480]
[5] Οι Driver and Oldham προτείνουν ένα διδακτικό κονστρουκτιβιστικό μοντέλο που αποτελείται από πέντε φάσεις: α) τη φάση του προσανατολισμού που αποσκοπεί στο να δώσει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν μια συναίσθηση σκοπού και κίνητρα για να εμπλακούν στη διαδικασία εκμάθησης ενός θέματος ή αντικειμένου, β) τη φάση της εκμαίευσης κατά την οποία οι μαθητές εξωτερικεύουν τις ιδέες τους, καθιστώντας τους με αυτό τον τρόπο συνειδητά γνώστες της όλης διαδικασίας, γ) τη φάση της αναδόμησης κατά την οποία ανταλλαγή απόψεων και διευκρινίσεις νοημάτων λαμβάνουν χώρα διαλεκτικά. Από το σημείο αυτό οι μαθητές μεταπηδούν στην αξιολόγηση εναλλακτικών ιδεών, δ) η επόμενη φάση είναι αυτή της εφαρμογής κατά την οποία οι μαθητές θέτουν σε εφαρμογή τις ιδέες τους σε οικείες και άγνωστες περιπτώσεις και καταστάσεις (επίλυση κλειστών και ανοικτών μαθηματικών και πραγματικών προβλημάτων-σχηματισμός και διατύπωση προβλημάτων, μοντελοποίηση, μικρού μήκους και εκτεταμένες ερευνητικές και συνθετικές εργασίες, προβλήματα Φέρμι, κ.ο. Οι διαδικασίες και οι δράσεις αυτές υποβοηθούν τις νέο ενοιολογικοποιημένες ιδέες να ενισχυθούν και να παγιωθούν και ε)

---

[475] . Desautels J. And Larochelle M., A Constructivist Pedagogical Strategy: The Epistimological Disturbance, (Experiment and Preliminary Results) in More History and Philosophy of Science in Science Teaching,, σελ. 236, ed. D.E. Herget (Tallahassee, Florida: Florida State University, 1990
[476] . Fegerabent P., Ενάντια στη μέθοδο, σελ. 47, Εκδ. Σύγχρονα Θέματα
[477] . Μπαρκάτσας Α., Η θεωρία κατασκευής της γνώσης και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των μαθηματικών (άρθρο), σελ. 9, Απρίλης 1998
[478]. Μπαρκάτσας Α., Η θεωρία κατασκευής της γνώσης και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των μαθηματικών (άρθρο), σελ. 9, Απρίλης 1998
[479] . Ο.π., σελ. 10
[480] . Ο.π., σελ. 10

κατά την τελευταία φάση της αναθεώρησης οι μαθητές θα αναστοχαστούν και θα προσπαθήσουν να συνειδητοποιήσουν μα βάση μια μεταγνωστική και συναισθηματική ενεργοποίηση με ποιο τρόπο άλλαξαν οι αντιλήψεις τους, ενθαρρυνόμενοι ταυτόχρονα (από τον εκπαιδευτικό) να αναπτύξουν τις μεταγνωστικές τους στρατηγικές.[481]

Καταληκτικά, αν θέλαμε να περικλείσουμε σε ένα τίτλο την άποψη του Κονστρουκτιβισμού για τα μαθηματικά και τη διδακτική τους θα λέγαμε ότι «η έννοια της κατανόησης μιας μαθηματικής ιδέας χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα της και αποκτά μια εξατομικευμένη μορφή, η οποία πρέπει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη».[482] Σε όσα, όμως, περιγράψαμε υπάρχουν από την πλευρά του ΔΥ πολλές ενστάσεις, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και κάποιες συμφωνίες. Πιστεύουμε, όμως, πως από μια διδακτική πρόταση του ΔΥ απορρέει κατά βάση η απόρριψη του κονστρουκτιβιστικού παιδαγωγικού μοντέλου. Δεν έχουμε υπόψη μας μια συγκροτημένη κριτική του κονστρουκτιβισμού από την πλευρά του ΔΥ αλλά καταλήγουμε σε ένα τέτοιο συμπέρασμα από τις γενικές παιδαγωγικές αρχές του ΔΥ και τον ειδικό τρόπο με τον οποίο βλέπει τα μαθηματικά. Τις αρχές αυτές θα τις παραθέσουμε στο κεφάλαιο Π4. Εδώ θα αρκεστούμε σε μια σύντομη κριτική του κονστρουκτιβισμού και τον τρόπο που αυτός βλέπει τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Τα μαθηματικά υπόκεινται σε μια ατέρμονη αναθεώρηση. Γιατί όχι, θα αναρωτηθεί, ίσως, κάποιος. Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνει η ίδια τους η εξελικτική πορεία, η ίδια η καταγεγραμμένη ιστορία τους. Και ναι και όχι, είναι η απάντηση. Για ποιο λόγο δίνουμε μια τέτοιαν απάντηση; Η κάθε φορά υπάρχουσα γνώση των μαθηματικών δεν είναι ένα στεγνό και αυθαίρετο θεωρητικό κατασκεύασμα που στηρίζεται σε κάποια μεταφυσική λογική. Στο κάθε στάδιο εξέλιξής τους εκφράζουν μιαν ορισμένη προσέγγιση της πραγματικότητας, των σχέσεων που επικρατούν στη φύση, στην κοινωνία και στη νόηση. Η υπέρβαση της μαθηματικής γνώσης σε μια δεδομένη ιστορική στιγμή και η αντικατάστασή της από μια νέα δε σημαίνει την ολοκληρωτική απόρριψη της προηγούμενης γνώσης αλλά την διαλεκτική της υπέρβαση, εκτός κι αν αυτή η προηγούμενη γνώση εκφράζει σχέσεις της πραγματικότητας με ένα εντελώς στρεβλό τρόπο. Με άλλα λόγια έχουμε κάθε φορά μια «ενδυνάμωση» της σχετικής αλήθειας και μια ακόμα καλύτερη προσέγγισή της προς την απόλυτη. Επομένως, δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε έναν άκρατο υποκειμενισμό που οδηγεί με τη σειρά του σε ένα φιλοσοφικό αδιέξοδο και πιθανότατα και σε ένα επιστημονικό αδιέξοδο. Το παράδειγμα της εφαρμογής του κονστρουκτιβιστικού μοντέλου στις ΗΠΑ, όσον αφορά στα μαθηματικά, μπορεί πιθανώς να μας δώσει διαφωτιστικές απαντήσεις σε σχέση με αυτό το συμπέρασμά μας.[483] Η συνεχής αναθεώρηση, η έλλειψη σταθερών αναφορών μπορεί να δημιουργήσει

---

[481] . Ο.π., σελ. 11-12

[482] . Σπύρου Π., Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις παραδόσεων, σελ. 209, Αθήνα 2005

[483] . Πριν από χρόνια εφαρμόσθηκε στις ΗΠΑ ένα νέο (κονστρουκτιβιστικό) πρόγραμμα σε χιλιάδες μαθηματικά του δημοτικού. Το πρόγραμμα δεν περιελάμβανε ούτε σχολικά βιβλία, ούτε γραπτές ασκήσεις. Καταγράφουμε ορισμένα συμπεράσματα από σχετικό άρθρο: «Αγανακτισμένοι γονείς έχουν συγκροτήσει σε πανεθνική κλίμακα, ομάδες μέσω e- mail και σηκώνουν παντιέρα διαμαρτυρίας στις σχολικές συνελεύσεις, υποστηρίζοντας ότι τα παιδιά τους όχι μόνο δε μαθαίνουν μαθηματικά, αλλά κινδυνεύουν να ξεχάσουν και αυτά που ήξεραν. Ταυτόχρονα πολλοί μαθητές καταφεύγουν στον αθάνατο θεσμό των φροντιστηρίων, ώστε να προετοιμαστούν για τα πολύ πιο δύσκολα μαθηματικά που τους περιμένουν στις μεγαλύτερες τάξεις. […] Τη θέση των βιβλίων καταλαμβάνουν πλαστικοί κύβοι, φασόλια και άλλα υλικά. Για παράδειγμα, όπως προτείνει ένα αρκετά διαδεδομένο πρόγραμμα, το Mathland, οι μαθητές στην τάξη χωρίζονται σε ομάδες και μετρούν ένα εκατομμύριο σπόρους πουλιών για να συλλάβουν αυτό το αριθμητικό μέγεθος […] Προτού περάσει ένας μήνας, περίπου 200 πανεπιστημιακοί έστειλαν ανοικτή επιστολή στον υπουργό παιδείας, Ρίτσαρντ Ρ. Ρίλεϊ, επισημαίνοντας ότι και τα 10 προγράμματα είχαν «σοβαρές μαθηματικές αδυναμίες». Π.χ., ο Τζέιμς Μίλγκραμ, καθηγητής των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο Στάνφορντ, ανέλυε τρία προγράμματα και διαπίστωσε ότι δεν περιελάμβαναν τη διδασκαλία των βασικών κανόνων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης […] Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η «αίθουσα συζητήσεων» των ανησυχούντων γονέων. Μια μητέρα διαμαρτύρεται επειδή ο γιος της, μαθητής της δευτέρας δημοτικού, επί πολλούς μήνες δεν έκανε τίποτα άλλον πέρα από το να μετρά νομίσματα και να κάνει προσθέσεις κι αφαιρέσεις, χρησιμοποιώντας «φιλικούς αριθμούς» π.χ., μετατρέποντας το άθροισμα 71+19 στο ευκολότερο 70+20. δυστυχώς η μέθοδος αυτή δεν εξυπηρετεί όταν έχουμε να

μια απίστευτη γνωσιολογική σύγχυση στους μαθητές αλλά και στους εκπαιδευτικούς. Θα καταλογίσουμε στα θετικά του κονστρουκτιβισμού την επιδίωξη ανάπτυξης αντιδογματικής (βλέπε διαλεκτικής) σκέψης. Την πρόκληση συνεχών ερωτημάτων. Την εξέταση ενός προβλήματος από πολλές πλευρές. Την έναρξη πραγμάτευσης μιας θεωρητικής έννοιας με ένα πρόβλημα. Τη διαπίστωση και τη θέση ότι δεν πρέπει ο εκπαιδευτικός να βλέπει το μαθητή ως ένα άδειο δοχείο το οποίο καλείται να γεμίσει και μάλιστα με ένα παθητικό μοντέλο διδασκαλίας όπου ο εκπαιδευτικός θα ενεργεί ως πομπός που θα στέλνει στο δέκτη που με τη σειρά του απλώς θα αποθηκεύει. Ωστόσο, η κριτική σκέψη πρέπει να έχει ένα στόχο. Κάπου πρέπει να οδηγεί. «**Κριτική σκέψη» για την «κριτική σκέψη» δε νομίζουμε ότι έχει κάποιο νόημα κι ούτε μπορεί να οδηγήσει από μόνη της σε μια γενική αναδιοργάνωση της μαθηματικής παιδείας**. **Με άλλα λόγια πρέπει να υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος στόχος, ένα σχέδιο που κάπου αποβλέπει.** Ακόμα, θέλουμε να επισημάνουμε μιαν αντίφαση του κονστρουκτιβιστικού μοντέλου στα μαθηματικά. Από τη μια, δεν αποδέχεται τα μαθηματικά ως μιαν αντανάκλαση της πραγματικότητας (ή πλευρών της) στην ανθρώπινη νόηση, αλλά γενικώς τα χαρακτηρίζει ως κοινωνικά δημιουργήματα. Ήδη έχουμε αναφερθεί σε αυτή τη θέση. Παράλληλα, απότοκος μιας τέτοιας θεώρησης είναι η αξίωση στη μη αποδοχή κάποιας απόλυτης αλήθειας. Από την άλλη, όμως, ο κονστρουκτιβισμός απαιτεί το μοντέλο του να αποτελέσει το φάρμακο δια πάσα νόσο στη μαθηματική εκπαίδευση. Εδώ ακριβώς και η αντίφαση που εμφανίζεται. Πώς, αλήθεια είναι δυνατό να αντιμετωπίζεται ένας γνωστικός τομέας σχεδόν ως αποκομμένος από την αλήθεια, αλλά να διεκδικείς μια μέθοδο αληθινή για τη διδασκαλία του; Ακόμα περισσότερο «το παράδοξο […] του κονστρουκτιβισμού είναι ότι, εξαντλώντας την έννοια του πραγματικού στην κατασκευή, το ίδιο το κονστρουκτιβιστικό επιχείρημα καθιστά αδύνατη κάθε μη- ουσιοκρατική θεμελίωση του κονστρουκτιβισμού. **Και αυτό, επειδή μετατρέπει το επιχείρημα της κατασκευής σε μια ακόμα μορφή ουσιακρατικού λόγου, ανάγοντας την κατασκευή σε αποκλειστική ουσία του κόσμου και μάλιστα, μια ουσία που την γνωρίζουμε στην ολότητά της, αφού καμία εξωτερικότητα ως προς αυτήν δε μας διαφεύγει**»[484], (η υπογράμμιση δική μας). Δίπλα σε αυτή την αντίθεση βρίσκουμε άλλη μια συνδεδεμένη με την πρώτη, σε διδακτικό επίπεδο. Η άρνηση του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού μιας οντολογικής πραγματικότητας ανεξάρτητης από εμάς, θέση που μεταφέρεται και στη θεώρηση των μαθηματικών δε δικαιολογεί την πρόταση του κονστρουκτιβισμού να εκκινεί ο μαθηματικός την πραγμάτευση ενός μαθηματικού θέματος μέσω ενός προβλήματος δηλαδή μιας ανθρώπινης δραστηριότητας που απορρέει από την ανάγκη επίλυσης πρακτικών προβλημάτων που του θέτει η κοινωνία ή η φύση.

Με βάση όλα τα παραπάνω οι διαπιστώσεις ότι «στο χώρο της εκπαίδευσης, η αντιπαράθεση μεταξύ των ρεαλιστών και αντιρεαλιστών παίρνει τη μορφή μιας αντιπαράθεσης ανάμεσα στο μοντέλο μετάδοσης της γνώσης και στην κατασκευαστική διδασκαλία και μάθηση» και ότι « σύμφωνα με τους κονστρουκτιβιστές , ο αντικειμενισμός, βρίσκεται στη βάση του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας» και ακόμα ότι «με αυτό το μοντέλο παραδέχεται ότι υπάρχει ένα ήδη διαμορφωμένο σώμα γνώσης, αποδεδειγμένο και αποδεκτό από την κοινωνία, που εύκολα μπορεί να μεταδοθεί στους μαθητές μέσω γενικευμένων παθητικών διδακτικών μεθόδων» και ακόμα- ακόμα ότι «βασικό επιχείρημα των κονστρουκτιβιστών είναι ότι ο ρεαλισμός συνδέεται με την άκριτη μετάδοση της γνώσης από το δάσκαλο στο μαθητή, ενώ ο κονστρουκτιβισμός με την κατασκευή της γνώσης από τον ίδιο το μαθητή»[485], είναι κατά τη γνώμη μας εσφαλμένες. Αποτελούν ψευτοδιλήμματα. Και αυτό γιατί δεν κατανοούμε για ποιο λόγο είναι αναγκαίο μια τέτοια θεώρηση να εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δυο πολύ ασαφή στρατόπεδα που φέρουν το όνομα του ρεαλισμού και του κονστρουκτιβισμού και γιατί ο «αντικειμενισμός» πρέπει

προσθέσουμε μεγάλους αριθμούς. Ένας μαθηματικός καθηγητής στο Χάρβαρντ διαμαρτύρεται επειδή η κόρη του, μαθήτρια της δευτέρας δημοτικού, ενώ πέρσι ήξερε να προσθέτει διψήφιους αριθμούς, φέτος είναι υποχρεωμένη να ζωγραφίσει 39 ανθρωπάκια για να λύσει απλές εξισώσεις, όπως 39-14», (Τζιαντζή Μ., ΗΠΑ: η γενιά των «μαθηματικά αναλφάβητων», Καθημερινή,)

[484] . Χοβαρδάς Τ., www.electridea.gr

[485] . Κολέζα Ε., Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, σελ. 79, εκδ. Leader Books

οπωσδήποτε να υιοθετεί το παραδοσιακό και αποτυχημένο μοντέλο. Αλλά για αυτό θα αναπτύξουμε την άποψή μας εκτενέστερα στο Π4. Αυτό που θα θέλαμε προς το παρόν να σημειώσουμε απέναντι στο σχετικισμό του κονστρουκτιβισμού είναι η θέση του Μαρξ που είχε διατυπώσει για το Λουδοβίκο Φόυερμπαχ, σύμφωνα με την οποία «ο άνθρωπος πρέπει πρακτικά να αποδείξει την ορθότητα της νόησής του, να αποδείξει δηλαδή, ότι η νόηση έχει πραγματική δύναμη και ότι δε μένει έξω από τα φαινόμενα. Ο καυγάς για την πραγματικότητα ή τη μη πραγματικότητα της νόησης, όταν αποξενώνεται από την πρακτική, καταντάει καθαρά σχολαστικό ζήτημα».[486]

Π3: «Αποδείξεις και Ανασκευές» ή ο Λάκατος ως κονστρουκτιβιστής

Πιστεύουμε ότι ο Lakatos αξίζει να εξεταστεί ως μια ειδική περίπτωση για πολλούς λόγους: α) μπορεί να θεωρηθεί ως ένας προάγγελος του κονστρουκτιβισμού, β) μέσω των «αποδείξεων και ανασκευών», ανάμεσα στα άλλα, προτείνει έστω και με έμμεσο τρόπο ένα διδακτικό μοντέλο, γ) σε ένα κομμάτι της ζωής του υπήρξε υποστηρικτής του ΔΥ. Θα ξεκινήσουμε την κριτική του προσέγγιση με μια σύντομη περιγραφή των φιλοσοφικών του πιστεύω.

Π3.1: Φιλοσοφικές σταθερές του Lakatos

Ο Lakatos είναι εκπρόσωπος της μεθοδολογικής διαψευσιμότητας, νεοθετικιστής και με επιδράσεις από τον Popper (και τον Polya). Στόχος των μελετών του ήταν η λογική-κανονιστική ανασυγκρότηση των διαδικασιών αλλαγής της γνώσης και η οικοδόμηση της λογικής της ανάπτυξης των επιστημονικών θεωριών με βάση την επισταμένη μελέτη της πραγματικής εμπειρικής ιστορίας της επιστήμης. Σε μια πρώτη φάση αυτό που πρότεινε ήταν μια δική του εκδοχή λογικής του παραγωγικού νοητικού πειράματος. Αυτή την εκδοχή την χρησιμοποίησε ως ορθολογική ανασυγκρότηση της ανάπτυξης ων περατοκρατικών μαθηματικών του 17ου-19ου αιώνα. Σε μια μεταγενέστερη φάση, διαμόρφωσε μια καθολική λογική και κανονιστική ανασυγκρότηση της ανάπτυξης της επιστήμης: τη μεθοδολογία των επιστημονικών προγραμμάτων. Ας δούμε τα βασικά στοιχεία της μεθοδολογίας του Lakatos:
[1] Η μεθοδολογία του εξετάζει την πρόοδο της «ώριμης» (αναπτυγμένης) επιστήμης ως αλλαγή μιας σειράς θεωριών, η σύνδεση των οποίων εμφανίζεται ως συνεχής.
[2] Η συνέχεια που αναφέραμε καθορίζεται: α) από τους κανονιστικούς κανόνες των ερευνητικών προγραμμάτων που ορίζουν ποιοι τρόποι έχουν τις καλύτερες προοπτικές για την παραπέρα έρευνα · πρόκειται για την ευρετική που ονομάζεται «θετική ευρετική» και β) από τους ποιους τρόπους πρέπει να αποφευχθούν (πρόκειται για την «αρνητική ευρετική»)
[3] Άλλα δομικά στοιχεία των ερευνητικών προγραμμάτων είναι α) ο «σκληρός πυρήνας» που συμπεριλαμβάνει τις συμβατικά μη διαψεύσιμες θεμελιώδεις παραδοχές του προγράμματος. Ο «σκληρός πυρήνας» αποτελείται από ένα μικρό αριθμό νόμων και θεωριών και μένει αναλλοίωτος κατά τη διάρκεια της ζωής του προγράμματος, β) η «προστατευτική ζώνη» που αποτελείται από βοηθητικές προτάσεις και εξασφαλίζει τη διατηρησιμότητα του «σκληρού πυρήνα» από τυχόν αναιρέσεις και μπορεί να αντικατασταθεί και να τροποποιηθεί είτε εν μέρει είτε ολοκληρωτικά κατά τη σύγκρουση με τα αντιπαραδείγματα. Η «προστατευτική ζώνη» σε αντίθεση με το «σκληρό πυρήνα» περιέχει αναθεωρήσιμες προτάσεις. Η καθιέρωση ενός «ερευνητικού προγράμματος» οφείλεται στην απόφαση των επιστημόνων να υιοθετήσουν το «σκληρό πυρήνα» του. Πρόκειται για μια απόφαση που έχει συμβατικό χαρακτήρα. Ο ίδιος ο Lakatos χαρακτηρίζει τη μεθοδολογία του ως μορφή «ριζικού συμβατισμού».
[4] Η ανάπτυξη του ερευνητικού προγράμματος διακρίνεται από το Lakatos σε δυο στάδια: α) το προοδευτικό. Σε αυτό η «θετική ευρετική» ωθεί την προβολή υποθέσεων που διευρύνουν το εμπειρικό και θεωρητικό περιεχόμενο. Πρόοδος υπάρχει εκεί που υπάρχει πολλαπλότητα και ανταγωνισμός μεταξύ των επιστημονικών προγραμμάτων. Η ορθολογική θεώρηση των επιστημονικών θεωριών ταυτίζεται με τον προσδιορισμό των

[486] . Μαρξ Κ, στο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ του Φ. Ένγκελς, σελ. 148, εκδ. Προσκήνιο

κριτηρίων της προόδου. Ως επιστημονική πρόοδο εννοεί την αύξηση του εμπειρικού περιεχομένου των θεωριών. Το εμπειρικό περιεχόμενο μιας θεωρίας είναι με τη σειρά του το σύνολο των γεγονότων που αυτή εξηγεί, β) το παρακμασμένο στο οποίο η ανάπτυξη του ερευνητικού προγράμματος επιβραδύνεται απότομα, η «θετική ευρετική» χάνει την ισχύ της, με αποτέλεσμα να αυξάνει το πλήθος των ad hoc υποθέσεων δηλαδή αυτών που συνδέονται με τη συγκεκριμένη περίπτωση.
Στις βασικές του αυτές θέσεις ο Lakatos δέχτηκε διάφορες παρατηρήσεις και επικρίσεις. Εμείς θα σταθούμε σε εκείνες τις κριτικές που προέρχονται από το ΔΥ:
[5] Ο Lakatos δεν μπόρεσε να εναρμονίσει το λογικό-κανονιστικό χαρακτήρα της θεωρίας του με τις πραγματικά σύνθετες και ποικιλόμορφες διαδικασίες αλλαγής και ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης.[487]
[6] Η μεθοδολογία του δεν μπορεί να αξιώσει καθολικότητα: ως αποδοτικό μέσο έρευνας της ιστορίας της επιστήμης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο ως αυστηρά καθορισμένες περιόδους ανάπτυξης της επιστήμης.[488]
[7] «Μερικές αποφάνσεις του (σ.σ. του Lakatos) δε φαίνονται να αφήνουν αμφιβολίες, γιατί υπογραμμίζουν ρητά τη σαφή διαφορά που βλέπει ανάμεσα στην ιστορία, ως πραγματική διαδικασία και την ορθολογική ανασυγκρότησή της, που επιχειρούμε να πραγματοποιήσουμε. Αρκούν δυο παραθέματα: « Η ιστορία της επιστήμης είναι πάντα πλουσιότερη από την ορθολογική ανασυγκρότησή της» και « καμία ορθολογική ανασυγκρότηση δεν μπορεί να συμπέσει ποτέ με την πραγματική ιστορία». Από αυτές προκύπτει ότι σύμφωνα με το Lakatos, η ιστορία της επιστήμης ως πραγματική διαδικασία, δεν είναι «εντελώς ορθολογική», όπως άλλωστε και «κανένα σύνολο από ανθρώπινες κρίσεις». Με αυτή την κατάσταση πραγμάτων, το έργο μας δεν μπορεί να είναι η εξαγωγή, από την πραγματική πορεία της επιστήμης, μιας λογικότητας που είναι αντικειμενικά εγγενής σε αυτήν, αφού δεν υπάρχει αυτή η αντικειμενική λογικότητα· αντίθετα με περισσότερη μετριοφροσύνη, το έργο μας θα ήταν να επινοήσουμε βαθμιαία «την καλύτερη ορθολογική ανασυγκρότηση της επιστήμης». Συμπερασματικά, η λογικότητα για την οποία μιλάμε εδώ, φαίνεται να είναι, από τη σκοπιά του Lakatos, κάτι το αποκλειστικά υποκειμενικό, δηλαδή χαρακτηριστικό του μελετητή ο οποίος προσπαθεί να καταλάβει πώς εξελίχθηκαν οι επιστημονικές θεωρίες, όχι κάτι το εγγενές στην ιστορική εξέλιξη αυτών των θεωριών. Με άλλα λόγια, όταν ο μελετητής της ιστορίας της επιστήμης ενσωματώνει στο σχέδιο εργασίας του την ορθολογική ανασυγκρότηση μιας ορισμένης περιόδου αυτής της ιστορίας, ισχυρίζεται μόνο ένα πράγμα: ότι δε θέλει να περιοριστεί στην κοινότοπη έκθεση της διαδοχής των βημάτων ποτ έκανε η επιστήμη σε αυτή την περίοδο, αλλά ότι θέλει να τα εντάξει σε ένα ορισμένο μοντέλο ανάπτυξης. Είναι ένας ισχυρισμός που δεσμεύει τον τρόπο με τον οποίο κάνει την έρευνά του, αλλά δεν αφορά την πραγματική ιστορία».[489]
[8] Ένα ακόμα σημείο κριτικής αποτελεί η έννοια της επιστημονικής επανάστασης όπως αυτήν την είδε ο Lakatos: «Ξέρουμε ότι, σύμφωνα με το Lakatos, δεν μπορούμε ένα μιλάμε για επιστημονική επανάσταση, αν δεν έχει αλλάξει ο «πυρήνας» του ερευνητικού προγράμματος. Αλλά η διαλεκτική μέθοδος μας κάνει να δούμε ότι, σε κάμποσες περιπτώσεις, η εμβάθυνση έχει επαναστατικό χαρακτήρα, ακόμα κι αν δεν μπορούμε να μιλήσουμε για τέτοια αλλαγή· λόγου χάρη είναι δύσκολο να αρνηθούμε τον επαναστατικό χαρακτήρα στην ένταξη (για την οποία μιλήσαμε πολλές φορές) των μετρικών γεωμετριών στο γενικότατο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας, μολονότι δεν είναι εύκολο να βρούμε σε αυτή τη διαδικασία την εγκατάλειψη ενός παλιού ερευνητικού προγράμματος (βασισμένου σε ένα «πυρήνα» που, δυνάμει μιας μεθοδολογικής απόφασης, θεωρείται μη-ανασκευάσιμος) προς όφελος ενός άλλου ερευνητικού προγράμματος (βασισμένου σε ένα εντελώς διαφορετικό «πυρήνα»). Με δυο λόγια το μοντέλο του Lakatos φαίνεται, όταν το εξετάσουμε από τη σκοπιά της διαλεκτικής μεθόδου, πολύ άκαμπτο και σχηματικό, ώστε να μπορεί να προσαρμοσθεί στην πλουσιότερη γκάμα των εμβαθύνσεων που πάνε

---

487 . Λ. Ίλιτσεφ-Π. Φεντοσέγεφ, Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμα Λάκατος, τ.2, εκδ. Καπόπουλος
488 . Ο.π.
489 . Geymonat L., Επιστήμη και Ρεαλισμός, σελ.105-106, εκδ. Ζαχαρόπουλος

από την «απλή ρητή» διατύπωση μιας υπόθεσης που εξυπακούεται (ή ανάλογες πράξεις) στην επαναστατική εμβάθυνση».[490]

Π.3.2: <u>Οι «Αποδείξεις και Ανασκευές»</u>

Ο Lakatos με το μνημειώδες έργο του «Αποδείξεις και Ανασκευές» έδρασε σε πολλά επίπεδα: α) επιχείρησε να μας δώσει μια λογική της μαθηματικής ανακάλυψης, β) μπόλιασε την οπτική του για τα μαθηματικά με την ποπεριανή λογική για την επιστήμη και την ανάπτυξή της, γ) έβαλε κατευθείαν εναντίον των δογματικών φιλοσοφιών (και στη φορμαλιστική και στη λογικιστική εκδοχή) των μαθηματικών και της επαγωγικής μεθόδου, δ) πρότεινε, έστω κι έμμεσα ένα διδακτικό μοντέλο ή για να είμαστε πιο ακριβείς το σκιαγράφησε και μάλιστα επρόκειτο για διδακτικό μοντέλο κονστρουκτιβιστικής προδιάθεσης, ε) εφάρμοσε την ευρετική του μέθοδο που αφορά σε όλο το σώμα της επιστήμης, μέσω ενός μαθηματικού προβλήματος.

Ας πάρουμε, όμως, τα πράγματα από την αρχή. Ο Lakatos ξεκινάει να διαπραγματεύεται τον τύπο του Euler που όπως είναι γνωστό συνδέει σε ένα μαθηματικό τύπο, το πλήθος των κορυφών, των εδρών και των ακμών, των κανονικών πολυέδρων. Η διαπραγμάτευση γίνεται μέσα σε μια φανταστική σχολική τάξη ανάμεσα στο δάσκαλο και στους μαθητές. Το σημείο εκκίνησης είναι η παρατήρηση που γίνεται «πάνω» σε κανονικά πολύεδρα και η εικασία πως ισχύει K+E-A=2. Το θέμα που τίθεται είναι πώς θα φτάσουμε στην απόδειξη της εικασίας. Επινοούνται διάφορες αποδείξεις αλλά σε κάθε μια από αυτές υπάρχουν αντιπαραδείγματα που θέτουν εν αμφιβόλω την ισχύ της απόδειξης. Τα αντιπαραδείγματα που διατυπώνονται και αποτελούν τους σπόρους της αμφισβήτησης είναι δυο ειδών: τοπικά και καθολικά. Τα πρώτα είναι αυτά που ανασκευάζουν ένα λήμμα (χωρίς κατ΄ ανάγκη να ανασκευάζουν και την κύρια εικασία), ενώ τα δεύτερα είναι εκείνα τα παραδείγματα που ανασκευάζουν την ίδια την κύρια εικασία.[491] Καθώς, λοιπόν, τίθενται τα αντιπαραδείγματα εκείνης ή της άλλης φύσης προκύπτουν μέσα από τους διάλογους καθηγητή-μαθητή πολλά γνωσιολογικά προβλήματα: είναι δυνατό καθώς διακρίνουμε τι διάφορες εξαιρέσεις ότι έχουμε συμπεριλάβει όλες τις εξαιρέσεις; [492] Όταν καταλήγουμε σε κάποιο συμπέρασμα τότε αυτό είναι μαντεία ή ενόραση;[493] Ποια είναι η διαλεκτική ενότητα αποδείξεων και ανασκευών;[494] Οι αποδείξεις ως μια ατέρμονη διαδικασία παλινδρόμησης είναι απόδειξη ή απλώς ένα παιχνίδι;[495] Τα θεωρήματα προηγούνται των αποδείξεων;[496] Μήπως η δυσκολία εξεύρεσης μιας στέρεης απόδειξης οφείλεται σε γλωσσικής φύσης προβλήματα;[497] Η αλήθεια σε μια απόδειξη είναι μια ανέφικτη έννοια και ανήκει αποκλειστικά στη δικαιοδοσία του Θεού;[498] Σε τι διαφέρει η απόδειξη από την επαλήθευση;[499] Η παραγωγική διαδικασία στα μαθηματικά είναι στείρα ή έχει να μας προσφέρει κάτι;[500] Είναι δυνατοί οι σαφείς ορισμοί και αν όχι γίνεσαι δέσμιος του ψεύδους; Ακόμα, υπάρχει δυνατότητα απαλλαγής από τις ασάφειες;[501]

Μέσα, λοιπόν, από αυτή τη διαδικασία παραδειγμάτων, αντιπαραδειγμάτων, ενστάσεων, προβληματισμών, έντονων αντιπαραθέσεων ο Lakatos καταλήγει να διατυπώσει «ένα σχήμα μαθηματικής ανακάλυψης ή σχήμα ανάπτυξης των άτυπων μαθηματικών θεωριών» το οποίο αποτελείται από τα εξής στάδια:
« (1) *Διατυπώνεται κάποια αρχική διαδικασία.*

---

[490] . Ο.π., σελ.113
[491] . Δες αναλυτικότερα, Lakatos, Αποδείξεις και Ανασκευές, σελ. 32, εκδ. Τροχαλία
[492] . Ο.π., σελ. 53
[493] . Ο.π., σελ. 57
[494] . Ο.π., σελ. 66-67
[495] . Ο.π., σελ. 71
[496] . Ο.π., σελ. 73
[497] . Ο.π., σελ. 86-87, 140-144
[498] . Ο.π., σελ. 90
[499] . Ο.π., σελ. 126
[500] . Αυτού του είδους το ερώτημα τίθεται πολλάκις και πολύμορφα σε πολλά σημεία του παραπάνω έργου
[501] . Ο.π., σελ. 152-153

(2) *Παρουσιάζεται μια απόδειξη: ένα σχηματικό νοητικό πείραμα ή επιχείρημα που αποσυνθέτει την αρχική εικασία σε ένα σύνολο υποεικασιών ή λημμάτων.*

(3) *Αναδύονται «καθολικά» αντιπαραδείγματα (αντιπαραδείγματα της όλης αρχικής διαδικασίας).*

(4) *Επανεξετάζεται η απόδειξη: εντοπίζονται τα «ένοχα λήμματα» για τα οποία το καθολικό αντιπαράδειγμα είναι και «τοπικό». Το ένοχο λήμμα ίσως ήταν «κρυμμένο λήμμα» ή είχε προσδιοριστεί κακώς. Τώρα γίνεται σαφές και ενσωματώνεται στην αρχική εικασία ως προϋπόθεση. Το θεώρημα- η νέα βελτιωμένη εικασία- υπερέχει της αρχικής εικασίας με κύριο νέο χαρακτηριστικό την αποδεικτικής καταγωγής νέα έννοια.*

Τα παραπάνω τέσσερα στάδια αποτελούν τον ουσιώδη πυρήνα της αποδεικτικής ανάλυσης. Συχνά, όμως, εμφανίζονται μερικά ακόμα τυπικά στάδια:

(5) *Επανεξετάζονται οι αποδείξεις άλλων θεωρημάτων για να διαπιστωθεί αν απαντάται σε αυτές το νεότευκτο λήμμα ή η καινοφανής αποδεικτικής καταγωγής έννοια. Τα νέα στοιχεία ίσως βρεθούν στη διασταύρωση πολλών αποδείξεων αποκτώντας έτσι ιδιαίτερο βάρος.*

(6) *Ελέγχονται οι αποδεκτές συνέπειες της αρχικής και τώρα πλέον ανασκευασμένης εικασίας.*

(7) *Αντιπαραδείγματα μεταστρέφονται σε νέα αντιπαραδείγματα-νέες περιοχές μελέτης ανοίγονται».*[502]

Μέσα από όλο το έργο του Lakatos και από το παραπάνω ευρετικό του σχήμα, αναδεικνύεται ως ένας φανατικός πολέμιος της παραγωγικής μεθόδου. Ο κύριος λόγος, κατά τη γνώμη του, που εξηγεί για ποιο λόγο δεν μπόρεσαν μεγάλοι μαθηματικοί να βρουν λάθη σε διάφορες μαθηματικές ανακαλύψεις, αποτέλεσε η κυριαρχία της ευκλείδειας μεθοδολογίας.[503] Απαντώντας ο ίδιος στο τι θα σήμαινε «μια προσπάθεια αναθεώρησης όλης της φιλοσοφίας των μαθηματικών περί του αλάθητου της ευκλείδειας μεθοδολογίας», γράφει: «**Θα έπρεπε να εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι όλα τα μαθηματικά μπορεί να αναχθούν σε αδιαμφισβήτητες αληθείς κοινοτοπίες**, ότι δηλαδή υπάρχουν δηλωτικές προτάσεις για τις οποίες η διαίσθησή μας για το αληθές δεν είναι δυνατό να σφάλλει. Έπρεπε, επίσης, να εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι η παραγωγική συμπερασματική μας διαίσθηση είναι αλάνθαστη. **Μόνο με αυτές τις δυο παραδοχές θα απελευθερωνόταν ο δρόμος προς την ελεύθερη ανάπτυξη της μεθόδου των αποδείξεων και των ανασκευών και την εφαρμογή της στον κριτικό έπαινο της παραγωγικής συλλογιστικής και στο πρόβλημα της αντιμετώπισης των αντιπαραδειγμάτων** […] Το αλάνθαστο φιλοσοφικό υπόβαθρο της ευκλείδειας μεθόδου **έθρεψε τα παραδοσιακά αυταρχικά σχήματα στην επιστήμη των μαθηματικών, εμπόδισε τη δημοσίευση και το σχολιασμό εικασιών και κατέστησε ανέφικτη την ανάπτυξη της μαθηματικής κριτικής**. Η φιλολογική κριτική υπάρχει επειδή μπορεί να μας αρέσει ένα ποίημα χωρίς να το θεωρούμε κατ' ανάγκη τέλειο. Η επιστημονική ή μαθηματική κριτική δεν μπορεί να υπάρχει όταν σε ένα μαθηματικό ή επιστημονικό αποτέλεσμα το μόνο που εκτιμάμε είναι αν οδηγεί στην τέλεια αλήθεια. Μια απόδειξη είναι απόδειξη μόνο όταν αποδεικνύει. Και είτε αποδεικνύει είτε όχι, τίποτα άλλο»[504], (οι υπογραμμίσεις δικές μας). Και σε άλλο σημείο συνεχίζει: «η ευκλείδεια μεθοδολογία έχει επιβάλλει ένα συγκεκριμένο ύφος παρουσίασης. Θα αναφέρομαι σε αυτό με τον όρο «παραγωγικό ύφος». Το παραγωγικό ύφος αρχίζει με την εξαντλητική παρουσίαση ενός καταλόγου *αξιωμάτων, λημμάτων* ή και *ορισμών*. **Πολύ συχνά τα αξιώματα και οι ορισμοί είναι τεχνητοί και μυστικοπαθώς περίπλοκοι. Κανένας δεν εξηγεί την προέλευση των περιπλοκών**. Ο κατάλογος ακολουθείται από προσεκτικά διατυπωμένα *θεωρήματα* τα οποία φέρουν επαχθείς συνθήκες και φαίνεται αδύνατο να τις μαντέψει κανείς. Κάθε θεώρημα ακολουθείται από την απόδειξή του.

Ο σπουδαστής των μαθηματικών υποχρεούται σύμφωνα με αυτό το ευκλείδειο τελετουργικό, να παρακολουθεί αυτή τη μαγική διαδικασία χωρίς να θέτει ερωτήματα για ο γνωστικό υπέδαφος των παρουσιαζομένων ούτε και για το πώς εκτελείται η όλη ταχυδακτυλουργία. Αν ο σπουδαστής ανακαλύψει τυχαία ότι κάποιοι ουρανοκατέβατοι

---

[502] . Ο.π., σελ. 189-190

[503] . Ο.π., σελ. 202, αλλά και σε πολλά άλλα σημεία

[504] . Ο.π., σελ. 294-295

ορισμοί είναι έννοιες που γεννήθηκαν από την απόδειξη, αν απορήσει γιατί αυτοί οι ορισμοί, τα λήμματα και το θεώρημα προηγούνται αντί να προκύπτουν από τη σχετική απόδειξη, ο ευκλείδειος μάγος θα τον εξοστρακίσει ως μαθηματικά ανώριμο. Στο παραγωγικό ύφος όλες οι προτάσεις είναι αληθείς και όλες οι συνεπαγωγές είναι έγκυρες. Τα μαθηματικά παρουσιάζονται σαν ένα αιωνίως αυξανόμενο σύνολο από αμετάβλητες αλήθειες. Δεν υπάρχει χώρος για αντιπαραδείγματα, ανασκευές ή κριτικές. **Μια ατμόσφαιρα αυθεντίας εξασφαλίζεται για το σχετικό αντικείμενο με μεταμφιεσμένους ορισμούς που προήλθαν από αποδείξεις και αποκλείουν τις εξαιρέσεις, και με ένα πλήρως ανεπτυγμένο θεώρημα που αποκρύπτει την αρχική εικασία, τις ανασκευές και την κριτική της απόδειξης. Αυτό το παραγωγικό ύφος αποκρύπτει την ερευνητική πάλη, αποκρύπτει την εξερευνητική περιπέτεια. Η όλη διαδικασία των διαδοχικών δοκιμαστικών αναδιατυπώσεων του θεωρήματος κατά την εξέλιξη της αποδεικτικής διαδικασίας καταδικάζεται σε λήθη, ενώ το τελικό εξαγόμενο καθαγιάζεται και εξαίρεται το αλάθητό του.**

Μερικοί μελετητές που υπερασπίζονται το παραγωγικό ύφος θεωρούν ότι η παραγωγή είναι το ευρετικό σχήμα των μαθηματικών, ότι είναι η λογική της ανακάλυψης. Άλλοι συνειδητοποιούν ότι δεν έχουν έτσι τα πράγματα, και συμπεραίνουν ότι η μαθηματική ανακάλυψη είναι εντελώς ανορθολογική. Ισχυρίζονται ότι, αν και η μαθηματική ανακάλυψη δεν προχωρεί παραγωγικά, για να παρουσιάσουμε ορθολογικά τις μαθηματικές ανακαλύψεις πρέπει να προχωρήσουμε με παραγωγικό ύφος»[505], (οι υπογραμμίσεις με πλάγια γράμματα του συγγραφέα, οι υπογραμμίσεις με τονισμένα γράμματα δικές μας).

Πιστεύουμε ότι τα παραπάνω αποσπάσματα είναι άκρως διαφωτιστικά για την «κονστρουκτιβιστική λογική» του Lakatos. Μια λογική που έχει διττό στόχο: δίνει μια πρόταση για το μαθηματικό-ερευνητή αλλά και μια πρόταση για το μαθηματικό-εκπαιδευτικό. Για το Lakatos η ευκλείδεια λογική είναι νεκρό γράμμα και αποτελεί ένα ανασταλτικό παράγοντα για νέες πρωτοπόρες και πρωτότυπες μαθηματικές ανακαλύψεις αλλά και για την κατανόηση του τρόπου που δημιουργούνται οι έννοιες. Θέτει νοητικές και νοηματικές δεσμεύσεις τέτοιες που εγκλωβίζουν τα θεωρητικά επιτεύγματα. Προσπαθεί και είναι σε μεγάλο βαθμό διαλεκτικός αφού η πρότασή του οδηγεί σε μια σύμπλεξη των μαθηματικών και της ίδιας τους της ιστορίας με σκοπό να κάνει και το αντικείμενο πιο ελκυστικό και άρα πιο αποτελεσματικό αλλά και για να αποκατασταθεί μια ξεχασμένη σχέση, γιατί ουσιαστικά το επιτάσσει η ίδια η επιστήμη. Ωστόσο, η διαλεκτική του προσέγγιση δε φτάνει μέχρι τέλους. Και αυτό για δυο λόγους: α) η σύμπλεξη μαθηματικών-ιστορίας μαθηματικών όσο κι αν είναι απαραίτητη δεν είναι αρκετή. Οι «εμπλεκόμενες οντότητες» πρέπει να αυξηθούν γιατί κάτι τέτοιο είναι αντικειμενικό. Τα μαθηματικά πρέπει να αποκαταστήσουν τη σχέση τους και με τη λογική και με τις άλλες επιστήμες και με τη γλώσσα και με την ψυχολογία και με την παιδαγωγική και εν τέλει με την ίδια τη φιλοσοφία. Η σύνδεσή τους με την ιστορία τους είναι ικανή να μας οδηγήσει σε ερωτήματα όπως τι είναι μαθηματικά, δεν είναι, όμως, ικανή να μας δώσει και «συνολικές» απαντήσεις, β) η απόρριψη της παραγωγικής μεθόδου γίνεται με τρόπο υπερβολικό και ακραίο. Η παραγωγική λογική μπορεί να μας οδηγήσει σε ανακαλύψεις και μας έχει οδηγήσει. Όσο κι αν ο Lakatos μετά μανίας απορρίπτει την ευκλείδεια μεθοδολογία δεν μπορούμε να παραβλέψουμε ότι μας οδήγησε σε ένα λαμπρό δημιούργημα του ανθρώπινου πνεύματος. Θέλουμε να πούμε ότι ο κονστρουκτιβισμός ως διδακτική πρόταση πρέπει και κάπου να καταλήγει. Το ξανατονίζουμε: δεν υπάρχει γενικά κριτική σκέψη. Αυτή πρέπει να καταλήγει και σε μια μέθοδο με βάση την οποία σε δεδομένη στιγμή θα μπορούμε να παράγουμε. Ασφαλώς και χρειαζόμαστε αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα και λήμματα, χωρίς να αποκλείουμε και το μοντέλο αναζήτησης που προτείνει ο Lakatos. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διακρίνουμε και μια ακόμα πιο σοβαρή ένσταση απέναντι στο Lakatos: τα αξιώματα και οι ορισμοί εκφράζουν αλήθειες που όπως κατ' επανάληψη έχουμε τονίσει πρόκειται για σχετικές αλήθειες, δηλαδή για προσεγγίσεις της πραγματικότητας κι όχι για αυθαίρετες θεωρητικές κατασκευές. Επομένως, η υιοθέτηση μιας κριτικής μεθόδου έρευνας όπως αυτή που μας προτείνει ο Lakatos εμπερικλείει

[505] . Ο.π., σελ. 211-213

κινδύνους στο βαθμό που αφήνουμε να εννοηθεί ότι αξιώματα, ορισμοί κ.λπ. δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν «αδιαμφισβήτητες» αλήθειες. Πράγματι θα ήταν λάθος αν τις χαρακτηρίζαμε ως τέτοιες, αλλά εξίσου λάθος αν λέγαμε ότι δεν έχουν καμία σχέση με την αλήθεια. Η απόρριψη από την πλευρά του Lakatos της συγκεκριμένης μεθοδολογίας δεν κρύβει, πιθανώς, την αντιπάθειά του απλά και μόνο για μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Ίσως φανερώνει και τις επιρροές που δέχτηκε από τον Popper. Η αλήθεια και η επιβεβαίωση διαφέρουν, κατά την ποπεριανή άποψη και ως κριτήριο αποδοχής δεχόμαστε τη διαψευσιμότητα. Ότι δεν μπορεί να διαψευστεί μπαίνει στη σφαίρα της μεταφυσικής και απορρίπτεται ως μη επιστημονικό. Οι προτάσεις που ανήκουν στον κόσμο της μεταφυσικής, πάντα κατά τον Popper, δεν έχουν θεωρητικό νόημα αφού δεν είναι ούτε αληθείς, ούτε ψευδείς. Με αυτή την έννοια η αστρολογία και ο μαρξισμός μπαίνουν κάτω από την κοινή σκέπη της μεταφυσικής. Πρόκειται για δυο ψευδοεπιστήμες. Αντίστοιχα στο Lakatos τα μαθηματικά πρέπει να τα χειριστούμε ως μια συνεχώς διαψευδόμενη γνωστική περιοχή για να σταθούν ως επιστήμη. Αλλά κάτι τέτοιο οδηγεί, κατά τη γνώμη μας σε ένα τεράστιο παραλογισμό και σε μια απολύτως εσφαλμένη θεώρηση της διαλεκτικής σχέσης απόλυτης και σχετικής αλήθειας, αφού με αυτό τον τρόπο προτάσσονται τυπικά κριτήρια για την κρίση μιας επιστήμης, αγνοώντας τελικά την ιστορικότητα της, αν και για να είμαστε ακριβείς ο Lakatos αγωνιά για να μην την παραβλέψει (την ιστορικότητα).

Π4: <u>Η υλιστικοδιαλεκτική πρόταση</u>

Σε μια πρώτη κατηγοριοποίηση που επιχείρησε η J. Confrey[506] και που αφορούσε στους διδακτικούς τύπους των μαθηματικών, διέκρινε τα εξής πρότυπα θεώρησης της επιστημονικής γνώσης: α) της απολυτοκρατίας, β) της προοδευτικής απολυτοκρατίας και γ) της εννοιολογικής αλλαγής. Στην πρώτη περίπτωση περιγράφει εκείνο το πρότυπο στο οποίο η γνώση είναι συσσωρευτική, που βλέπει δηλαδή τη γνώση ως ένα άθροισμα γνώσεων που κάθε φορά έρχονται να προστεθούν στο ήδη υπάρχον σώμα της. Οι ρίζες αυτού του προτύπου βρίσκονται στον εμπειρισμό και στο θετικισμό. Στη δεύτερη κατηγορία συναντάμε την ποπεριανή άποψη, όπου η κάθε νέα θεωρία έρχεται να διορθώσει την παλιά θεωρία και όπου η αλήθεια αποτελεί μια υποκειμενική έννοια. Στο τρίτο πρότυπο επισημαίνεται ότι η ανάπτυξη της θεωρίας εξαρτάται από τις αξίες και η γνώση αναπτύσσεται ριζοσπαστικά μεταμορφώνοντας τις εννοιολογικές της δομές. Εδώ συναντάμε τις απόψεις των Lakatos, Kuhn και Toulmin. Στη συνέχεια, με βάση αυτά τα πρότυπα επιχείρησε να κάνει την ανάλογη «μεταφορά» στην περιοχή των μαθηματικών. Έτσι, στο μοντέλο της απολυτοκρατίας οι μαθηματικές έννοιες δε φανερώνουν τη δυναμική τους, την εξελικτική τους πορεία, αλλά εμφανίζονται ως ευρήματα με αμετάβλητη δομή. Στο δεύτερο μοντέλο οι μαθηματικές αλήθειες αντικαθίστανται από νέες που θεωρούνται «ισχυρότερες». Ωστόσο, εξακολουθούν και θεωρούνται ως αυτόνομες από το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο τις περιέχει. Στο τρίτο μοντέλο έχουμε μια διαφοροποίηση αφού οι μαθηματικές αλήθειες δε θεωρούνται ως ανεξάρτητες από τον ερευνητή αλλά είναι απόρροια του συναγωνισμού ανάμεσα σε θεωρίες, προσδοκίες και προηγούμενων γνωστικών πλαισίων. Μια παρόμοια κατηγοριοποίηση έκανε και ο Ernest, ο οποίος προτείνει ένα διπολικό σχήμα[507]: στην πρώτη ζώνη διακρίνουμε την απολυτοκρατία, δηλαδή εκείνη τη θεώρηση σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές αλήθειες θεωρούνται ως βέβαιες και αμετάβλητες και στη δεύτερη ζώνη που την ονομάζει φυσιοκρατική συμπεριλαμβάνονται εκείνες οι αντιλήψεις που απορρίπτουν την άποψη της απολυτοκρατίας και θεωρούν τα μαθηματικά εξαρτημένα από πολιτιστικές παραμέτρους. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο μπορεί να ενταχθεί και ο κονστρουκτιβισμός.

Τις παραπάνω αναφορές τις κάναμε για να δούμε με ποιο τρόπο θα μπορούσε μια πρόταση εκ μέρους του ΔΥ να ενταχθεί σε εκείνο ή στο άλλο σχήμα. Η απάντησή μας είναι εξ' αρχής αρνητική. Ούτε στο τριπολικό, ούτε στο διπολικό χωράει και αυτό για τους εξής

---

[506]. Confrey J., Conceptual Change Analysis: Implications for Mathemetics and Curriculum Inquire, A paper presented at the American Educational Research Association National Meeting, Boston February, 1980

[507] . Δες αναλυτικότερα Ernest P., The Philosophie of Mathematics Education, The Falmer Press, 1991

λόγους: α) ο ΔΥ θεωρεί ότι υπάρχουν αντικειμενικές σχέσεις που εκφράζονται μέσω των μαθηματικών και είναι ανεξάρτητες από την ανθρώπινη συνείδηση. Άρα υπάρχουν αλήθειες οι οποίες ως τέτοιες δεν μπορούν παρά να εκφράζουν την αντικειμενική πραγματικότητα. Αυτού του είδους η θεώρηση δεν υπάρχει σε κανένα από τα προαναφερθέντα ρεύματα, β) οι μαθηματικές αλήθειες ασφαλώς και υπόκεινται σε αλλαγές όπως προτείνει ο τρίτος πόλος του τριπολικού και ο δεύτερος του διπολικού σχήματος, αλλά αυτό δε σημαίνει πως οι προηγούμενες αλήθειες δεν ήταν προσεγγίσεις της πραγματικότητας και ότι οι νέες ανακαλύψεις δεν εμπεριέχουν τις παλιές είτε ως συμπλήρωμα είτε ως διαλεκτική τους άρνηση. Με άλλα λόγια το παλιό και το νέο εκφράζει, όπως κατ' επανάληψη έχουμε επισημάνει, τη διαλεκτική σχέση σχετικής και απόλυτης αλήθειας. Ούτε και αυτή την άποψη την συναντάμε διατυπωμένη με αυτόν τον τρόπο, γ) οι μαθηματικές αλήθειες εξαρτώνται και από τις προσδοκίες και από τις ιδέες και από το προηγούμενο γνωστικό πλαίσιο και από πολιτισμικές παραμέτρους. Όμως, κατά το ΔΥ όλα αυτά είναι αντανάκλαση του κοινωνικού Είναι στο εποικοδόμημα, η βάση τους δηλαδή είναι υλική και άρα αντικειμενική. Επομένως, η εξάρτηση των μαθηματικών από τέτοιες παραμέτρους δεν αναιρεί τον αντικειμενικό τους χαρακτήρα, χωρίς να αποκλείει τις ιδιαίτερες πτυχές που μπορεί να προσδώσει το υποκείμενο-ερευνητής. Εν ολίγοις ένα διδακτικό μοντέλο των μαθηματικών δε χωράει σε κανένα από τα προαναφερθέντα σχήματα. Συγχρόνως, θα πρέπει να δούμε με ποιο τρόπο ο ίδιος ο ΔΥ επιχειρεί μια κατηγοριοποίηση: «Η φιλοσοφία ως κοσμοθεωρητική γνώση διαμορφώνει το συγκεκριμένο περιεχόμενο των τριών όρων του αντικειμένου και τον προσανατολισμό τους μέσα στο ιστορικό γίγνεσθαι. Δηλαδή, σε τελική ανάλυση, καθορίζει τη θέση και το ρόλο που αποδίδεται στην Παιδαγωγική των Μαθηματικών στο σύνολο της εκπαιδευτικής γνώσης και πρακτικής. Από εδώ γίνεται κατανοητό γιατί υπάρχουν «πολλές» Παιδαγωγικές των Μαθηματικών. Εκείνο που μένει «απαρατήρητο» είναι ότι όλες αυτές χωρίζονται σε δυο κατευθύνσεις. Η μια είναι αυτή που διαμορφώθηκε μέσα στην αστική κοινωνία και εξακολουθεί να την υπηρετεί. Στη βάση της έχει τις διάφορες ιδεαλιστικές και μεταφυσικές «φιλοσοφίες», που δε θίγουν την ταξική και μεταφυσική φύση της μαθηματικής παιδείας σε κάθε εκσυγχρονιστική έκδοσή της. Αυτή την κατεύθυνση μπορούμε να την ονομάσουμε **παραδοσιακή**. Η άλλη η κατεύθυνση, η δεύτερη, έχει αντίθετα στη βάση της τον **ιστορικό-διαλεκτικό υλισμό** ή αλλιώς, για να μιλήσουμε στη γλώσσα της κοινωνιολογίας, την κοσμοθεωρία του επιστημονικού Κομμουνισμού. Η ιστορική πείρα πέρα από την εφαρμογή της, μας επιτρέπει να ονομάσουμε αυτή την κατεύθυνση της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών **λαϊκή**»[508], (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).

Ποιες είναι, όμως, οι γενικές παιδαγωγικές αρχές που θέτει ένα υλιστικοδιαλεκτικό μοντέλο και πώς αυτές εκφράζονται σε μια διδακτική των μαθηματικών; Ας ξεκινήσουμε από το πρώτο ερώτημα, (δες και στα σχεδδιαγράμματα το σχεδιάγραμμα 12).[509]

---

[508] . Φιλιππίδης Κ., ο Μαθηματικός Παιδαγωγός για το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό σχολείο γενικής-πολυτεχνικής εκπαίδευσης, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 12, σελ. 46, 2003

[509] . Είναι, βέβαια, απαραίτητο σε αυτό το σημείο να διευκρινίσουμε ότι μια ανάλογη συζήτηση και αντίστοιχοι προβληματισμοί υπήρχαν και στη Σοβιετική ένωση. Ένα απόσπασμα από ένα άρθρο του Σοβιετικού μαθηματικού B. Gnedenko είναι διαφωτιστικό για αυτή τη συζήτηση: «Σε εμάς, στη Σοβιετική Ένωση, υπάρχουν για την ώρα δυο απόψεις που αναπτύσσονται. Η μια θεωρεί, ότι ο δάσκαλος πρέπει πρώτα να είναι εξοπλισμένος με γνώσεις γενικής παιδαγωγικής, με τις αρχές της διδακτικής και ειδικής μεθοδολογίας. Είναι αναμφίβολο, ότι το πλήθος των παιδαγωγικών μαθημάτων που βρίσκονται στις φυσικομαθηματικές σχολές των Πανεπιστημίων και των Παιδαγωγικών Ιδρυμάτων είναι αποτέλεσμα της «νίκης» της άποψης αυτής. Οι οπαδοί της άλλης άποψης βλέπουν τη βασική προετοιμασία του δασκάλου στην καλή ατομική εξάσκηση και κατάρτιση στα μαθηματικά. Οι μηχανο-μαθηματικές και φυσικο-μαθηματικές σχολές των Πανεπιστημίων, που δίνουν ακόμα ένα ορισμένο μέρος των αποφοίτων τους στη μέση εκπαίδευση, πραγματοποιούν ακριβώς την άποψη αυτή. Άκουσα πολλές φορές από εκπαιδευτικούς ότι στα πρώτα ένα-δυο χρόνια, οι απόφοιτοι των πανεπιστημίων δεν τα καταφέρνουν καλά με τη δουλειά τους-σε σχέση με εκείνους που βγαίνουν από τα Παιδαγωγικά Ιδρύματα, όμως, αργότερα έχουν καλύτερα αποτελέσματα. Η παρατήρηση αυτή είναι τόσο ουσιαστική, που θα έπρεπε να υποβληθεί σε συστηματική εξέταση και στη βάση αυτή να βγουν τα απαραίτητα συμπεράσματα», (Το άρθρο είχε τον τίτλο «Συμβολή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών» και δημοσιεύτηκε στη Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.5)

Π4.1: Βασικές παιδαγωγικές αρχές του υλιστικοδιαλεκτικού μοντέλου

Θα διατυπώσουμε μερικές βασικές αρχές της υλιστικοδιαλεκτικής παιδαγωγικής με τη μορφή θέσεων:
[1] Ο άνθρωπος κατά τη διαδικασία της μάθησης και καθώς αναπτύσσεται δεν ακολουθεί μια διαδικασία προσαρμογής προς το περιβάλλον, όπως υποστήριξε ο Piaget δίνοντας βάρος στις βιολογικές παραμέτρους. Σε αυτό το κομβικό σημείο ο Vigotski διαφοροποιείται σε σχέση με τον Piaget: ξεχωρίζει δυο γραμμές ανάπτυξης του παιδιού. Στην πρώτη διακρίνει κανείς τη σταδιακή ωρίμαση του παιδικού οργανισμού και στη δεύτερη τη διαμόρφωση ψυχολογικών λειτουργιών. Εδώ, μάλιστα υπογράμμισε ότι στον άνθρωπο έχουμε την εμφάνιση ανώτερων ψυχολογικών λειτουργιών που τους ξεχωρίζουν από τα ζώα: στον άνθρωπο και στο ζώο έχουμε το πρώτο σύστημα σήμανσης, δηλαδή την απόκτηση σημασίας σημάτων για τις αισθήσεις που προέρχονται από τις ποιότητες των αντικειμένων (οσμή, σχήμα, χρώμα). Στον άνθρωπο, όμως, έχουμε επιπλέον και το δεύτερο σύστημα σήμανσης, την ομιλία, που οριοθετεί τον άνθρωπο από τα ζώα. Ο άνθρωπος αλλάζει τον ψυχισμό του χρησιμοποιώντας τεχνητά ερεθίσματα (λέξεις). Επομένως, η φύση των ανθρώπων δεν έχει μόνο ή κυρίως μια βιολογική πλευρά αλλά και μια κοινωνική. Ας δούμε πώς εξέφραζε αυτή την άποψη ο κορυφαίος Σοβιετικός ψυχολόγος Λεοντίεφ: «η αντίθετη ψυχολογική άποψη (σ.σ. εννοεί αντίθετη από αυτή του Μαρξισμού) για τη φύση της προσωπικότητας αγνοεί κάθε προσπάθεια εξήγησης της προσωπικότητας στη βάση σωματικών ιδιοτήτων-γενετική, κληρονομικότητα και ιδιοσυγκρασία-για να προσδιορίσει τους ψυχολογικούς τύπους καθώς και άλλα παρόμοια «σωματικά» ή «βιολογικά» χαρακτηριστικά. Αν κανείς σκεφθεί την πολύ γνωστή μαρξιστική θέση ότι η προσωπικότητα είναι μια *ειδική* ιδιότητα την οποία ένα φυσικό άτομο, δηλαδή ένας απλός άνθρωπος στη φύση, αποκτά μέσα στο σύστημα κοινωνικών σχέσεων, τότε, όπως και στην περίπτωση των αναγκών και της δραστηριότητας, το πρόβλημα αντιστρέφεται. **Με λίγα λόγια, οι γενετικές και σωματικές ανθρωπολογικές ιδιότητες του ανθρώπου δε γίνονται ούτε οι προσδιοριστές της προσωπικότητάς του ούτε τα συστατικά στοιχεία της δομής της αλλά απλώς συνθήκες κάτω από τις οποίες πλάθεται η προσωπικότητα. Οπότε, δεν προσδιορίζουν τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά του ατόμου αλλά τις μορφές και τους τρόπους εκδήλωσής τους**. Συνεπώς, δε γεννιέται κανείς με προσωπικότητα, διαμορφώνει προσωπικότητα με την κοινωνικοποίηση και τον εκπολιτισμό, αποκτώντας συνήθειες, επιδεξιότητες και μεθόδους χρησιμοποίησης εργαλείων. **Η προσωπικότητα είναι προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας και μόνο υπ' αυτούς τους όρους μπορούν να εξηγηθούν τα χαρακτηριστικά της**»[510], (οι υπογραμμίσεις με τα πλάγια γράμματα του συγγραφέα, με τα τονισμένα δικές μας) .

Συμπερασματικά, η μαρξιστική Ψυχολογία κατανοεί τη σκέψη στην ενότητα υλικού-πνευματικού και είναι αντίθετος στον αναγωγισμό, ο οποίος, μάλιστα στην αμερικανική του εκδοχή ερμηνεύει τις πάσης φύσεως κοινωνικές συμπεριφορές με βάση τα γονίδια. Για τη μαρξιστική ψυχολογία, στόχο αποτελεί η μελέτη των αντικειμένων της γνώσης και της δράσης, αντικείμενα με τα οποία ο άνθρωπος αλληλεπιδρά ως υποκείμενο.
[2] Η παραπάνω θέση δε σημαίνει σε καμία περίπτωση την υποτίμηση του βιολογικού παράγοντα. Ο ΔΥ μπορεί να υποστηρίζει ότι ο άνθρωπος δε γεννιέται αλλά γίνεται, ωστόσο υποστηρίζει ότι μπορεί να μαθαίνει γιατί υπάρχει το κατάλληλο βιολογικό υπόβαθρο. Οι βιολογικοί παράγοντες επιδρούν και στην ατομικότητα και στην ψυχολογική δομή της προσωπικότητας. Οι όποιες δυνατότητες υπάρχουν εκδηλώνονται κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες.
[3] Καθώς, όμως, ο άνθρωπος αναπτύσσεται η διαφοροποίησή του με τα ζώα δεν εντοπίζεται μόνο στο ότι έχει ανώτερες ψυχολογικές λειτουργίες αλλά και στη σχέση του με το περιβάλλον. Ο άνθρωπος μετασχηματίζει το περιβάλλον και μάλιστα με συνειδητό τρόπο, επενεργεί αποφασιστικά πάνω σε αυτό, βρίσκεται σε μια συνεχή πάλη για την καθυπόταξη των φυσικών δυνάμεων, κάτι που τον οδηγεί στην αυτοοργάνωση. Στη σχέση

[510] . Λεβίτιν κ., Η διαμόρφωση της προσωπικότητας, σελ.123, εκδ. Σύγχρονη Εποχή

του αυτή με το περιβάλλον χρησιμοποιεί έννοιες, σχέσεις, κατηγορίες, νοητικές λειτουργίες, πρακτικές που το παιδί, καθώς αναπτύσσεται, καλείται να «εσωτερικεύσει»[511].
[4] Με βάση αυτές τις βασικές παιδαγωγικές αρχές αλλά και παίρνοντας υπόψη τις γενικότερες φιλοσοφικές αρχές του ΔΥ, η διδακτική δεν μπορεί να είναι μια απαρίθμηση στεγνών συνταγών που θα έχει ως σκοπό τη διόρθωση κάποιων «κακώς κειμένων». Θα πρέπει να διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρει υπόψη της τις δυναμικές διαδικασίες που επενεργούν στη διαμόρφωση της ανθρώπινης προσωπικότητας, μιας διαμόρφωσης που δεν μπορεί να είναι ατομική υπόθεση, αφ' ης στιγμής το άτομο προσδιορίζεται και αναπτύσσεται μόνο σε σχέση με την κοινωνία.[512]

Π4.2: <u>Μια υλιστικοδιαλεκτική πρόταση για τη Διδακτική των Μαθηματικών</u>

Είναι, πλέον, φανερό ότι από όσα έχουμε υποστηρίξει, μια υλιστικοδιαλεκτική πρόταση για τη διδακτική των μαθηματικών μπορεί ως ένα βαθμό να μοιάζει με κάποιες πλευρές των διατυπωμένων διδακτικών προτάσεων, επί της ουσίας, όμως, δε συγγενεύει με καμία από αυτές και αυτό γιατί δεν υπάρχει κοινή φιλοσοφική βάση. Άλλωστε, δεν πρέπει να ξεχνάμε πως «είναι γνωστό ότι η Παιδαγωγική των Μαθηματικών έχει για αντικείμενό της **τη μαθηματική δραστηριότητα ως διανοητικό και πολιτιστικό στοιχείο της προσωπικότητας** κάθε ηλικίας, κάθε τομέα κοινωνικής δραστηριότητας (εργασίας) και επιπέδου σπουδών της. Παρατηρούμε ότι εδώ η ΠΜ ορίζεται από τρεις όρους: τον προσδιορισμό *«μαθηματικό»,* το αντικείμενο *«δραστηριότητα»* και το υποκείμενο *«προσωπικότητα»*. Ο κάθε όρος αντιπροσωπεύεται αντίστοιχα από τις επιστήμες: τα **Μαθηματικά**, την **Ψυχολογία** και την **Παιδαγωγική**. Ενωτικό θεμέλιο όλων αυτών αποτελεί η **Φιλοσοφία»**[513], (όλες οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα). Αυτή η διαπίστωση μάς οδηγεί, μάλλον, αβίαστα στη διατύπωση μιας βασικής αρχής σχετικά με τη Διδακτική των μαθηματικών. **Τα μαθηματικά δεν μπορούν να διδάσκονται χωρίς να συνδέονται με τη γνωσιοθεωρία και με τη φιλοσοφία, αφού κάτι τέτοιο το επιβάλει ο ίδιος ο ορισμός των μαθηματικών που δόθηκε από την υλιστικοδιαλεκτική σκοπιά και η ίδια η φιλοσοφική βάση της διδακτικής**. Τι σημαίνει αυτό πρακτικά; Σημαίνει ότι πρέπει να ξεκαθαρίζεται το «τι είναι μαθηματικά» σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Αυτό, ασφαλώς, είναι κάτι που δεν μπορεί να γίνεται με τον ίδιο τρόπο στο δημοτικό, στο γυμνάσιο, στο λύκειο και στο πανεπιστήμιο. Για παράδειγμα, στην πρώτη βαθμίδα δεν έχει κανένα νόημα η διατύπωση ορισμών, χωρίς αυτό να σημαίνει την ανυπαρξία δυνατότητας να γίνει κατανοητό σε μια πρώτη πρώιμη φάση του τι πραγματεύονται τα μαθηματικά. Σημαίνει, ακόμα, τη διασάφηση του γεγονότος ότι έννοιες που χειριζόμαστε στα μαθηματικά όπως άπειρο, πεπερασμένο, απειροστό, συνέχεια, ασυνέχεια, όριο κ.λπ. **είναι έννοιες που τα μαθηματικά δανείζονται από τη φιλοσοφία και τις αντιμετωπίζουν με τον ιδιαίτερο επιστημονικό τρόπο που τα διακρίνει**. Δεν ισχυριζόμαστε ότι στην επίλυση του κάθε προβλήματος ή την παρουσίαση του κάθε θεωρήματος είναι δυνατό και απαραίτητο να γίνεται μια (βεβιασμένη) σύνδεση μαθηματικών-φιλοσοφίας. Μιλάμε για την ανάγκη αποκατάστασης της μεταξύ τους σχέσης που είναι σχεδόν ανύπαρκτη στις σημερινές σχολικές, κυρίως, συνθήκες.

---

[511] . Δες αναλυτικότερα, Vygotski, «Το πρόβλημα της πολιτιστικής ανάπτυξης του παιδιού», Άπαντα, τ.3, σελ. 302, στα ρώσικα

[512] . Για μια αναλυτικότερη παράθεση των παραπάνω θέσεων: α) Λεβίτιν κ., Η διαμόρφωση της προσωπικότητας, εκδ. Σύγχρονη Εποχή, β) Βιγκότσκι Λ., Σκέψη και Γλώσσα, εκδ. Γνώση, γ) Βιγκότσκι Λ., Νους στην Κοινωνία, εκδ. Gutenberg, δ) Λούρια Α., Γνωστική Ανάπτυξη, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, ε) Λεοντίεφ Α., Αρχές της ψυχικής ανάπτυξης και το πρόβλημα της διανοητικής ανεπάρκειας, περιοδικό Θέματα Παιδείας (ΘΠ), τ. 3, 2000, ε) Μούχινα Β., Τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά της βρεφικής, της πρώτης παιδικής και της προσχολικής ηλικίας, ΘΠ, τ.14, 2003,στ) Νταβίντοφ Β., Η ψυχολογική ανάπτυξη κατά την πρώτη σχολική ηλικία, ΘΠ, τ.15-16, 2003-2004, ζ) Ντραγκούνοβα Τ., Οι ψυχολογικές ιδιότητες των εφήβων, ΘΠ, τ.17-18, 2004, η) Μιχαήλ Μ., Τι σημαίνει διαλεκτική-υλιστική ψυχολογία, ΘΠ, τ.19-20, 2004-2005, θ) Μιχαήλ Μ., Τα στάδια ανάπτυξης της προσωπικότητας του παιδιού, ΘΠ, τ. 21-22, 2005, ι) Κον Ι., Η ψυχολογία της πρώτης νεότητας, ΘΠ, τ. 21-22, 2005

[513] . Φιλιππίδης Κ., ο Μαθηματικός Παιδαγωγός για το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό σχολείο γενικής-πολυτεχνικής εκπαίδευσης, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 12, σελ. 45, 2003

Η παράθεση αιώνιων μαθηματικών αληθειών που στέκουν στον «ακίνητο θόλο της γνώσης», ασφαλώς και είναι μια ξεπερασμένη πρακτική, αντιπαιδαγωγική και συνάμα αντιεπιστημονική μέθοδος. Επομένως, οι σχολές της απολυτοκρατίας δεν είναι συμβατές με το ΔΥ σε οποιαδήποτε παραλλαγή τους. Ποια είναι η απάντηση στην απολυτοκρατικού «χρώματος» διδακτική; Η απάντηση δίνεται με δυο τρόπους: α) το παιδί πρέπει να μπαίνει σε λογική ανακάλυψης μιας νέας μαθηματικής έννοιας που υπάρχει αναγκαιότητα να εισαχθεί. Από αυτή την άποψη δεν είμαστε αντίθετοι στο να ξεκινάει η διδασκαλία με η διατύπωση ενός προβλήματος που έχει εύστοχα επιλεγεί και που σκοπός του είναι να οδηγήσει τον ίδιο το μαθητή να διατυπώσει από μόνος του μια νέα έννοια ή ένα νέο θεώρημα και β) με την παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός θεωρήματος ή κι ενός ολόκληρου μαθηματικού κλάδου. Το γεγονός ότι σε κάποια από τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών υπάρχουν ορισμένα ιστορικά σημειώματα στο τέλος του κεφαλαίου δεν μπορούμε να το σημειώσουμε ως θετικό, αφού και φτωχά είναι αυτά τα σημειώματα και δεν υπάρχει προσανατολισμός να διδαχτούν και δε διδάσκονται και εκτός ύλης είναι. Επομένως, όπως και η φιλοσοφία έτσι και η ιστορία των μαθηματικών πρέπει να γίνει οργανικό κομμάτι της διδασκαλίας τους. Κάτι τέτοιο δεν ανταποκρίνεται μόνο σε μια αντικειμενική επιστημονική ανάγκη αλλά καθιστά και πιο ελκυστικό το μάθημα. Ως τελικό συμπέρασμα προκύπτει ότι μέσα από την απομυθοποίηση των αιώνιων μαθηματικών αληθειών, δεν πρέπει να οδηγείται ο εκπαιδευόμενος, ούτε και ο εκπαιδευτικός σε έναν υποκειμενισμό που τελικά αναιρεί την ίδια την επιστήμη, τη φύση και την αξία της. Πρέπει να τονίζεται η ιστορικότητα εκείνης ή την άλλης μαθηματικής αλήθειας που σε κάθε φάση της ιστορικής της διαδρομής είχε αντιστοιχία με την πραγματικότητα, η οποία αντιστοιχία σε κάθε επόμενο εξελικτικό στάδιο, είτε αυτό χαρακτηρίζεται από συνέχεια είτε από ασυνέχεια, γινόταν ισχυρότερη. Η ιστορία των μαθηματικών είναι μια ικανή συνθήκη για την απομυθοποίηση των μαθηματικών και τον περιορισμό της μαθηματικοφοβίας: «…το μάθημα της ιστορίας των μαθηματικών πρέπει να διδάσκεται μεθοδικά και να ανασύρει την αυλαία που κρύβει από τους απληροφόρητους ακροατές την ουσία και τη δημιουργική πορεία των μαθηματικών ανακαλύψεων».[514]

Η σύνδεση μαθηματικών –πραγματικότητας επιτυγχάνεται στο βαθμό που παρουσιάζεται η σύνδεση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα δεν μπορεί η σχέση φυσικής-μαθηματικών να περιορίζεται στη χρήση μαθηματικών τύπων στη φυσική. Είναι αντιεπιστημονικό και αντιδιαλεκτικό. Η σχέση για παράδειγμα των μη ευκλείδειων γεωμετριών με τη φυσική είναι ένα μόνο λαμπρό παράδειγμα που δείχνει αυτή την αντικειμενική σύνδεση. Ας δούμε με ποιον τρόπο κωδικοποιείται η σχέση μαθηματικών και των άλλων επιστημών, θεωρώντας ότι αυτή η σύνδεση θα πρέπει να διαπερνά τη διαδικασία της μάθησης η οποία απαιτεί να αντανακλά τα σύγχρονα χαρακτηριστικά της επιστήμης:

«Στην εποχή μας ολόκληρη η μαθηματική επιστήμη, όλοι οι τομείς της ενώνονται βαθμιαία με την τεχνολογία των υπολογιστικών μηχανών, με την επιστήμη των Η.Υ. Εμφανίζεται η δυνατότητα για μαθηματική μοντελογράφηση με Η.Υ. και στις άλλες επιστήμες και στην πρακτική. Οι τάσεις αυτές αντιστοιχούν στο πιο σύγχρονο επίπεδο της Επιστήμης.

Ακριβώς στη σύγχρονη εποχή εμφανίζεται στην επιστήμη ως κυρίαρχη η ακόλουθη

Αρχή Α. *Τα Μαθηματικά, η επιστήμη των Η.Υ., οι άλλες επιστήμες και η πρακτική είναι συνδεδεμένα σε ένα ενιαίο σύνολο μέσω της μαθηματικής μοντελογράφησης με Η.Υ. των προβλημάτων τους*.

Η ίδια Αρχή καθορίζει στην εποχή μας την αποτελεσματικότητα της Επιστήμης κι της πρακτικής. Η υλοποίηση της Αρχής Α αποτελεί πρόβλημα για ολόκληρη τη σύγχρονη επιστήμη. Οι δυνατότητές της οδηγούν στην επόμενη

Αρχή Β. *Η μαθηματική επεξεργασία της πληροφορίας σε κάθε στάδιο επιτελείται σε συστήματα (και δίκτυα) που λειτουργούν με κανονισμό κατανεμημένου χρόνου με τερματικά*.

---

[514] . Gnedenko B., Συμβολή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.5

Από πρώτη άποψη με τη θέση αυτή φαίνεται να έχουν αγνοηθεί οι θεμελιώδεις έρευνες. Στην πραγματικότητα, όμως, βρίσκονται σε πρώτο πλάνο, γιατί ό,τι έχουμε αναφέρει είναι επακόλουθο της επόμενης

Βασικής Αρχής. *Το μέλλον των μαθηματικών βρίσκεται στις σχέσεις τους με τις άλλες επιστήμες και το μέλλον των άλλων επιστημών βρίσκεται στη μαθηματική μοντελογράφηση των διαδικασιών που μελετάνε*.

Οι Αρχές που αναφέραμε εκφράζουν ένα βασικό χαρακτηριστικό της σύγχρονης επιστήμης. Αυτές καθορίζουν τα προβλήματα της μαθηματικής μοντελογράφησης και αυτοματοποίησης στο πεδίο της επιστήμης. Καθορίζουν ταυτόχρονα τα προβλήματα εκμάθησης των μαθηματικών».[515]

Αυτό το τελευταίο μας υποδεικνύει και μια διδακτική πρόταση που αφορά ίσως το γυμνάσιο και σίγουρα το λύκειο και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, (όχι πάντως το δημοτικό). Ανακύπτει, όμως, ένα ερώτημα: μήπως μέσω της μοντελοποίησης αναιρείται η διαλεκτική λογική και εισάγεται ως μοναδικό εργαλείο η τυπική λογική; Η απάντηση είναι αρνητική, αφού μέσω της μοντελοποίησης γίνεται ακριβώς το αντίθετο: αποκαθίσταται σε σημαντικό βαθμό η διαλεκτική σχέση των επιστημών.

Η μοντελοποίηση, όμως, δεν μπορεί να γίνει επιτυχώς αν δε χρησιμοποιηθούν οι νέες τεχνολογίες. Η χρήση των νέων τεχνολογιών πρέπει κι αυτή με τη σειρά της να εισαχθεί στη διδασκαλία. Χρειάζεται, βέβαια, μια πολύ μεγάλη συζήτηση για το πότε θα γίνει αυτή η εισαγωγή, για το πώς θα γίνει η χρήση των νέων τεχνολογιών και σε τι βαθμό σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Αλλά αυτό είναι προφανώς ένα θέμα στο οποίο για να διατυπωθούν στέρεες απόψεις απαιτείται μεγάλη συζήτηση και «πείραμα». Θα πρέπει να σημειώσουμε πως δεν είμαστε σύμφωνοι με τη θεοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη διδασκαλία των μαθηματικών αφού «όπως πολύ εύστοχα παρατήρησε ο Vygotsky, το παιδί δεν μπορεί να κατανοηθεί ως μικρογραφία του ενήλικου ούτε η διάνοιά του αποτελεί σμίκρυνση της διάνοιας του ενήλικου. Το δρόμο της εξέλιξής του μπορούμε να τον κατανοήσουμε μόνο αν τον σκεφτούμε στους κοινωνικούς του όρους. Και ο δρόμος της εξέλιξης αυτής δεν είναι αυτός της σταδιακής κοινωνικοποίησης που μεταβιβάζεται στο παιδί απ΄ έξω , αλλά η σταδιακή εξατομίκευση, που γεννιέται στη βάση της κοινωνικής του υπόστασης. Το παιδί θα πάρει, θα οικειοποιηθεί, από το σύνολο της διανοητικής κουλτούρας της κοινωνία των μεγάλων, ό,τι εξατομικεύσει ως οργανικό μεν μέλος της, αλλά διατηρώντας ακέραια όλα τα στοιχεία της αυτοτέλειας του. Η εξατομίκευση δε αυτή πραγματοποιείται μέσα στα πλαίσια της ζωντανής βιωματικής αλληλεπίδρασης του παιδιού με το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον στην ολότητά τους. στο πλαίσιο της σχολικής πραγματικότητας δεσπόζουσα είναι η αλληλεπίδραση δασκάλου-μαθητή, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν άλλες. Και ο δάσκαλος σε αυτό το δίπολο δεν αντικαθίσταται. **Η αλληλεπίδραση μηχανής-μαθητή, που πολλοί ισχυρίζονται ότι με κατάλληλα δομημένα προγράμματα επιτυγχάνουν είναι ένα άλλος μύθος.: ο μαθητής δεν αλληλεπιδρά φυσικά με τη μηχανή αλά μέσω της μηχανής με τη σκέψη του προγραμματιστή, σκέψη όμως αποστεωμένη και κλεισμένη σε κουτάκια, όσες εναλλακτικές δυνατότητες κι αν έχει προβλέψει. Αλήθεια, αν το παιδί έχει φάει στυφά δαμάσκηνα, είναι άκεφο και συμπεριφέρεται αλλόκοτα, πώς θα το «καταλάβει» ο υπολογιστής για να αναπροσαρμόσει τη «συμπεριφορά» του;**»[516] , (οι υπογραμμίσεις δικές μας).

Όλες αυτές οι παράμετροι που αναφέραμε παραπάνω και που πρέπει να αποτελέσουν συστατικό στοιχείο στη διδασκαλία των μαθηματικών περιγράφονται από τον Gnedenko με τον εξής τρόπο: «Κατά τη γνώμη μου, όταν η παράδοση των άλλων μαθημάτων συνδέεται με τα μαθηματικά τα αποτελέσματα θα είναι καλύτερα. Πόσο αραιά ο βιολόγος, ο χημικός ακόμα και ο φυσικός καταφεύγουν στη χρησιμοποίηση μαθηματικών γνώσεων! Και πόσο σοβαρό είναι, ο φυσικός ή ο βιολόγος να μεταχειρίζονται τις μαθηματικές γνώσεις και να στηρίζονται σε αυτές κατά τη διδασκαλία τους […] Το σχολείο μένει πίσω από τη γρήγορη εξέλιξη της εποχής μας, ως προς την

---

[515] . Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, σελ. 122-123, Ακαδημία Επιστημών της Βουλγαρίας, Θεσσαλονίκη, 1988

[516] . Παπαδοπετράκης Ε., Οι Υπολογιστές στην εκπαίδευση: μύθοι και πραγματικότητες, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 6, 2001

αποκατάσταση των πιο στενών σχέσεων μεταξύ των διαφόρων επιστημών κι αυτό προκαλεί σοβαρές ζημιές στην επιστημονική κατάρτιση και διαπαιδαγώγηση των μαθητών [...] Πρώτα από όλα πρέπει να έχει αντίληψη (σ.σ. η καθηγητής) για την ψυχολογική πλευρά των μαθηματικών ανακαλύψεων, για την ενιαία συγκρότηση των μαθηματικών. Κατόπιν πρέπει να ξέρει καλά τη σύνδεσή τους με τις άλλες επιστήμες και τις πρακτικές τους εφαρμογές. Πρέπει να είναι καλά εξοικειωμένος με την ιστορία των μαθηματικών και την ιστορία των μαθηματικών ανακαλύψεων, για τη διαδικασία που οδηγεί στις ανακαλύψεις αυτές».[517]

Οι όποιες διδακτικές «συνταγές», όμως, που μπορούν να επιδράσουν αποφασιστικά στη διδασκαλία των μαθηματικών, πιθανώς, για να μην πούμε σίγουρα, θα μείνουν κενό γράμμα αν δε συνδυαστούν και με μια άλλη παράμετρο: την ψυχολογική. Ο μαθητής δεν μπορεί να νοείται ως ένας γνωστικός δέκτης τον οποίο καλούμαστε να γεμίσουμε και είναι άδειος από συναισθήματα: «...ο δάσκαλος των μαθηματικών μπορεί να εμφυσήσει στους μαθητές **την πίστη στις ατομικές**, να τους καλλιεργήσει την τάση για την αναζήτηση του αγνώστου, να δείξει τη σοβαρότητα και το πλήθος των προβλημάτων που περιμένουν για τη λύση τους. η γνώση **πρέπει να γίνει γιορτή και όχι τιμωρία, να μην ασκεί πίεση, αλλά να προκαλεί αγαλλίαση στην ψυχή**. Στο δύσκολο μα τιμημένο έργο της διαπαιδαγώγησης της νέας γενιάς-προετοιμασίας ενθουσιωδών και δημιουργικών νέων, θαρραλέων στην αντιμετώπιση των προβλημάτων και αποφασιστικών για τη λύση τους, εξαιρετικά μεγάλος είναι ο ρόλος του σχολείου και του δασκάλου [...] **Ο δάσκαλος πρέπει να είναι ικανός, να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών του προς τα μαθηματικά**, έστω και με αυτή την περιορισμένη ύλη, που πρέπει να αφομοιώσουν. Όμως, για να το κάνει αυτό, πρέπει να δει ο ίδιος καθαρά, ότι τα μαθηματικά δεν είναι κάτι απολιθωμένο, διαμορφωμένο από την εποχή του Ευκλείδη κι στην καλύτερη περίπτωση-του Νιούτον και του Λάιμπνιτς, αλλά επιστήμη που ανανεώνεται συνεχώς, με πλήθος άλυτων προβλημάτων και με τεράστιες δυνατότητες ανάπτυξης [...] Εγώ νομίζω ότι ο ιδεώδης δάσκαλος των μαθηματικών θα είναι εκείνος που **κατορθώνει να εμφυσήσει στους μαθητές του την αγάπη προς το μάθημά του, τους διαπαιδαγωγεί στην αυτενέργεια τους αναπτύσσει την πρωτοβουλία, τους εμπνέει την πεποίθηση στις δυνάμεις τους, τους καλλιεργεί την αγάπη προς τη γνώση και την ικανότητα για λογική σκέψη**», (οι υπογραμμίσεις δικές μας).[518] Να σημειώσουμε, ακόμα, πως το ζήτημα του συναισθηματικού κινήτρου το έχουμε αναφέρει και στο κεφάλαιο για τη μαθηματική ανακάλυψη, κυρίως από την πλευρά του μαθηματικού-ερευνητή, αλλά θα μπορούσαμε και μέσα από αυτό το δρόμο να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Σε αυτό το σημείο αξίζει να ανοίξουμε μια παρένθεση που σχετίζεται με την ιδιαίτερη ψυχολογία των εφήβων: «**η περιέργεια και η επιθυμία για γνώση είναι χαρακτηριστικά της εφηβείας**. Ο έφηβος είναι ανοικτός στο νέο, το ενδιαφέρον και το σημαντικό, απορροφά τις πληροφορίες σα σφουγγάρι...», (η υπογράμμιση του συγγραφέα).[519] Το θέμα, όμως, δεν είναι μόνο ότι ο νέος απορροφά πληροφορίες. Η διαδικασία είναι κάτι παραπάνω από μια συλλογή πληροφορικών. Ο έφηβος διαμορφώνει κοσμοθεωρία.[520] Μπορεί να είναι συχνά απλοϊκή ή αντιεπιστημονική. Από το γεγονός, όμως, ότι διαμορφώνει μια κοσμοαντίληψη προκύπτει και η ανάγκη οργάνωσης της γνώσης τους σε ένα σύστημα που να ανταποκρίνεται στην αλήθεια. Εδώ, λοιπόν, βρίσκεται η μεγάλη ευκαιρία να οργανωθεί το εκπαιδευτικό σύστημα ώστε να ανταποκρίνεται στις αναζητήσεις των εφήβων αλλά και στην πραγματικότητα. Η αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας μπορεί να κάνει την εκπαίδευση περισσότερο ελκτική και αποτελεσματική. Και αποτελεσματική και ελκτική μπορεί να γίνει με την αποκατάσταση της σχέσης μαθηματικών- παιδαγωγικής- φιλοσοφίας- ιστορίας των μαθηματικών- σύνδεσης μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες, όπως ήδη έχουμε αναφέρει.

Ένα ζήτημα το οποίο έχει παραμεληθεί αλλά είναι ουσιαστικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η σχέση τους με τη γλώσσα. Έχουμε, ήδη, κάνει κάποιες αναφορές για

---

[517] .Gnedenko B., Συμβολή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ. 122-127 τ.5

[518] . Gnedenko B., Συμβολή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώρηση, σελ. 124-136, τ.5

[519] . Ντραγκούνοβα Τ., Οι ψυχολογικές ιδιότητες των εφήβων, Θέματα Παιδείας, τ.17-18, 2004

[520] . Κον Ι., Η ψυχολογία της πρώτης νεότητας, ΘΠ, τ. 21-22, 2005

την έννοια της φυσικής γλώσσας και για το αν είναι τα ίδια τα μαθηματικά γλώσσα και πώς εκφράζονται μέσω μιας τεχνητής γλώσσας. Εφόσον η θεώρηση του Vygotski είχε ως κέντρο αναφοράς τα πολιτισμικά στοιχεία, δε θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τη φυσική γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται σε όλες τις επιστήμες και πάνω στην οποία συγκροτούνται και οι τεχνητές γλώσσες της επιστήμης.[521] Η ακριβής περιγραφή της σχέσης σημαίνοντος-σημαινόμενου έχει μεγάλη σημασία, ειδικά για τις μικρές ηλικίες: «πολλοί ερευνητές έχουν συμφωνήσει ότι το παιδί κάνει τη μεγαλύτερη ανακάλυψη της ζωής του όταν διαπιστώσει, όταν συνειδητοποιήσει, ότι «τα πράγματα έχουν ονόματα» ή πως η κοινότητα των μεγάλων, μέσα στην οποία μεγαλώνει, ονομάζει τα πράγματα. Όμως, είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή, εξίσου σημαντική για τη διανοητική του ανάπτυξη, θα συνειδητοποιήσει όχι μόνο ότι «τα πράγματα έχουν ονόματα» αλλά και ότι υπάρχουν ονόματα που δεν αντιστοιχούν σε πράγματα. Αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά, σε ιδιότητες σε μορφές ύπαρξης, σε μορφές κινητικής κατάστασης κ.τλ. των πραγμάτων. Τέτοιο όνομα είναι και η λέξη που δηλώνει την πληθικότητα μιας συλλογής πραγμάτων. Όμως, αυτό δεν κατακτιέται αυτόματα. Στην αρχή η λέξη θα συνοδεύεται από το όνομα του πράγματος που αποτελεί και το εμπράγματο σημαινόμενο (συγκεκριμένος αριθμός) το οποίο θα είναι και το υλικό της υπόβαθρο, όχι επειδή έτσι έγινε κατά τη φυλογένηση αλλά επειδή η φύση του γλωσσικού σημείου όπως έλεγε δείξει ο Vygotski, το απαιτεί. «για το παιδί, γράφει, η λέξη είναι ένα τμήμα του αντικειμένου, μια από τις ιδιότητές του, είναι ασύγκριτα στενότερα συνδεδεμένη με το αντικείμενο από ότι η λέξη του ενήλικου». Τέτοιας φύσης θα είναι το γλωσσικό σημείο μέχρι που να φτάσει, μέσα από τη χρήση και την εξοικείωση, σε μια γενίκευση τέτοια που ο συγκεκριμένος αριθμός ως το υλικό υπόβαθρο να είναι βάρος όπως το επανωφόρι την άνοιξη. Πρόκειται πολύ περισσότερο για πνευματική παρά για βιολογική ωρίμαση, πρόκειται για ένα άλμα το οποίο, όμως, καθόλου δε σημαίνει ότι κατέκτησε την αφηρημένη ιδέα του αριθμού, απλώς πραγματοποίησε μια γενίκευση: **το εμπράγματο σημαινόμενο αντικαθίσταται από ένα άλλο επίσης εμπράγματο αλλά ασύγκριτα πιο γενικό, που δεν είναι άλλο από το γράφημα του συμβόλου του αριθμού**. Τα ονόματα (φωνήματα) των αριθμών αποδεσμεύονται από τα πράγματα, τις πεταλουδίτσες και τα λουλουδάκια και δένουν με ο γράφημα του συμβόλου το οποίο ταιριάζει σε όλες τις περιπτώσεις. Έτσι, τα σημαίνοντα σε αναμονή απόκτησαν τα σημαινόμενά τους που δεν είναι άλλα από τα σύμβολα του δεκαδικού συστήματος. Αυτό πραγματοποιείται στην πρώτη δημοτικού. Έτσι, αρχίζει η ζωή της γλώσσα των συμβόλων. Ο δεσμός που αποκαθίσταται μεταξύ φωνήματος και συμβόλου […] πρέπει να είναι εξίσου ισχυρός με τα γλωσσικά σημεία της φυσικής γλώσσας. Όσο η κατάκτηση, μέσα από τη γενίκευση, της αφηρημένης έννοιας του αριθμού ουσιαστικοποιείται τόσο αδυνατίζει η εμπράγματη υπόσταση του σημαινόμενου υπέρ της αφηρημένης, τόσο το σημαινόμενο γίνεται «καυτά φαντασίαν λογικήν υφιστάμενο», όπως το ήθελαν και οι Στωικοί»[522], (οι υπογραμμίσεις του συγγραφέα).

Όλα τα παραπάνω ασφαλώς δε διεκδικούν τον τίτλο μιας ολοκληρωμένης διδακτικής πρότασης. Αυτό που επιχειρήσαμε είναι η σκιαγράφηση κάποιων αξόνων που δείχνουν και μια διαφορετική αντιμετώπιση από την πλευρά της υλιστικοδιαλεκτικής μεθόδου ως διδακτική των μαθηματικών, σε σχέση με τις άλλες (επικρατούσες) διδακτικές προτάσεις.

---

[521] .Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μαθηματική εκπαίδευση (κι εν γένει η εκπαίδευση) των τσιγγανόπαιδων. Λόγω της νομαδικής ζωής, της έλλειψης σπιτιού, των συχνών μετακινήσεων, ο προσδιορισμός ενός συγκεκριμένου χώρου βάση των δεσμεύσεων που υπάρχουν στους άλλους μαθητές δεν είναι δυνατός. Δηλαδή, δε χρησιμοποιούνται οι οδοί και οι αριθμοί, αλλά χαρακτηριστικά σημεία. Επιπλέον, να αναφέρουμε μια λεπτομέρεια πολύ καθοριστική: οι τσιγγάνοι έχουν την ίδια λέξη για την έννοια του κάθετου και του κατακόρυφου. Είναι κατανοητό πως κάτι τέτοιο μπορεί να δημιουργήσει επιπλέον δυσκολίες στη διδασκαλία της γεωμετρίας (Δες αναλυτικά, Σταθοπούλου Χ., Τσιγγάνοι μαθητές και χώρος: Ο προσδιορισμός στο χώρο ως μια πολιτισμική πρακτική, ομιλία στο 20^{ο} συνέδριο της ΕΜΕ).

[522] .Παπαδοπετράκης Ε., Οι Γλώσσες των Φυσικών Αριθμών, Γλωσσολογικά, Γνωσιολογικά και Παιδαγωγικά προβλήματα, αδημοσίευτο άρθρο

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Α'

Confrey G., Conceptual change analysis Implications for mathematics and curriculum
Rybnikov K., Εισαγωγή στη Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη 1986
Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το Τέλος της Γερμανικής Φιλοσοφίας, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Ίλιτσεφ-Φεντοσέγεφ (επιμέλεια), Φιλοσοφικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό, 5 τόμοι, εκδ. Καπόπουλος
Λένιν, Φιλοσοφικά Τετράδια, Άπαντα, τ.29, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Μπιτσάκης Ε., Θεωρία και Πράξη, εκδ. Gutenberg
Μπιτσάκης Ε., Τι είναι φιλοσοφία, εκδ. Σύγχρονη Εποχή, 1986
Μπιτσάκης Ε., Το Αειθαλές Δέντρο της Γνώσεως, εκδ. Στάχυ
Ώϊζερμαν Τ., Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, εκδ. Gutenberg
Παβλόφ Τ., Θεωρία της Αντανάκλασης, εκδ. Δωδώνη
Σεπτούλιν Α., Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, εκδ. Αναγνωστίδη
Σπύρου Π., Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων στην Επιστημολογία των Μαθηματικών
Συλλογικό έργο νέων φιλοσόφων του πανεπιστημίου Λομονόσοφ της Μόσχας, εκδ. Gutenberg

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Β'

Α) ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΝΩΣΙΟΘΕΩΡΙΑΣ

Α1) Ατομικά

Atkins P., Η Δημιουργία
Chalmers A., Τι είναι αυτό που το λέμε επιστήμη;, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Cornforth M., Γνωσιολογία, Θεωρία της Γνώσης, εκδ. Πέλλα
Cornforth M., Επιστήμη και Ιδεαλισμός, εκδ. Αναγνωστίδη
Cornforth M., Μαρξισμός και Γλωσσική Φιλοσοφία, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Descartes R., Λόγος περί Μεθόδου, ε.κδ. Παπαζήση
Descartes R., Στοχασμοί περί της Πρώτης Φιλοσοφίας, εκδ. Εκκρεμές
Geymonat L., Επιστήμη και ρεαλισμός, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Hacking I., Αναπαριστώντας, παρεμβαίνοντας, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π.
Leibnitz, Μοναδολογία, εκδ. Αναγνωστίδη
Leibnitz, Μεταφυσική Πραγματεία, εκδ. Βάνιας
Medawar P., Τα Όρια της Επιστήμης, εκδ. Τροχαλία
Mill, A system of Logic, Toronto, University of Toronto press
Poincare H., Επιστήμη και Υπόθεσις, εκδοτικός οίκος και χρονολογία έκδοσης άγνωστα
Poincare H., Η αξία της Επιστήμης, εκδ. Κάτοπτρο
Scaff A., Γλώσσα και Γνώση, εκδ. Ζαχαρόπουλος

Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, εκδ. Κάκτος
Αυγέλης Ν., Φιλοσοφία της Επιστήμης, εκδ. Κώδικας
Γ. Κορδάτου, Ιστορία της αρχαίας ελληνική φιλοσοφίας, εκδ. Μπουκουμάνη,
Γκέντε Α., Η Φιλοσοφία της Κρίσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Γκίβαλος Μ., Επιστήμη, γνώση και μέθοδος, εκδ. Νήσος
Δημητρακόπουλος Μ., Στοιχείωση Ευρωπαϊκής φιλοσοφίας, Αθήνα, 2003
Ένγκελς, Αντι-Ντύρινγκ, εκδ. Αναγνωστίδη
Ένγκελς, Διαλεκτική της φύσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Ένγκελς, Ο Λουδοβίκος Φόυερμπαχ και το Τέλος της Γερμανικής Φιλοσοφίας, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Θεοδωρίδης Χ., Εισαγωγή στη Φιλοσοφία, εκδ. Εστία
Καντ, Κριτική του Καθαρού Λόγου, εκδ. Παπαζήση
Καντ, Κριτική του Καθαρού Λόγου, Υπερβατική Διαλεκτική και Υπερβατική Μεθοδολογία, Αθήνα 1999
Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική Μεταφυσική, εκδ. Δωδώνη
Λένιν, Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός, Άπαντα, τ.18, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Λένιν, Φιλοσοφικά Τετράδια, Άπαντα, τ.29, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Μαρξ Κ., Οικονομικά και Φιλοσοφικά Χειρόγραφα, εκδ. Γλάρος
Μαρξ-Ένγκελς, Η Αγία Οικογένεια (Η κριτική της κριτικής), εκδ. Αναγνωστίδη
Μαρξ-Ένγκελς, Η Γερμανική Ιδεολογία, εκδ. Gutenberg
Μπιτσάκης Ε., Δρόμοι της Διαλεκτικής, εκδ. Άγρα
Μπιτσάκης Ε., Θεωρία και Πράξη, εκδ. Gutenberg
Μπιτσάκης Ε., Τι είναι φιλοσοφία, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Μπιτσάκης Ε., Το Αειθαλές Δέντρο της Γνώσεως, εκδ. Στάχυ
Μπιτσάκης Ε., Το Είναι και το Γίγνεσθαι, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Μπιτσάκης Ε., Τι είναι φιλοσοφία, εκδ. Σύγχρονη Εποχή, 1986
Μποσένκο Β., Το μόνο δίδαγμα που βγάζουμε είναι ότι δε βγάζουμε κανένα δίδαγμα, Περιοδικό Θέματα Παιδείας, τ.17-18, 2004
Ώϊζερμαν Τ., Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, εκδ. Gutenberg
Παβλόφ Τ., Θεωρία της Αντανάκλασης, εκδ. Δωδώνη
Πλάτωνας, Πολιτεία, εκδ. Πόλις
Πλάτωνας, Τίμαιος, εκδ. Κάκτος
Πόπερ Κ., Η Ανοικτή Κοινωνία και οι εχθροί της, εκδ. Δωδώνη
Πράσινος Γ., Τα Μαθηματικά και η Νόηση, εκδ. Κορφή
Σεπτούλιν Α., Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, εκδ. Αναγνωστίδη
Σπινόζα, Πραγματεία για τη διόρθωση του νου, εκδ. Πόλις
Στάλιν, Σχετικά με το Μαρξισμό στη Γλωσσολογία, ένθετο εφημερίδας Ριζοσπάστη, 9/12/2001
Ταμπάκης Ν., Αναπαραστάσεις του Κόσμου, εκδ. Γκοβόστη
Ταμπάκης Ν., Από τη Φυσική στη Μεταφυσική, εκδ. Δαίδαλος
Φρομ Ε., Επιστημονικότητα και Κομματικότητα, εκδ. Οδηγητής
Χέγκελ, Η Επιστήμη της Λογικής, εκδ. Αναγνωστίδη
Χιουμ Ντ., Πραγματεία για την Ανθρώπινη Φύση, εκδ. Πατάκη

Α2) Συλλογικά

Ίλιτσεφ-Φεντοσέγεφ (επιμέλεια), Φιλοσοφικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό, 5 τόμοι, εκδ. Καπόπουλος
Ρόζενταλ-Γιούντιν, Μικρό Φιλοσοφικό λεξικό, εκδ. Αναγνωστίδη
Σατελέ Φ. (επιμέλεια), Η Φιλοσοφία, τόμος Β΄, Εκδ. Γνώση
Συλλογικό έργο νέων φιλοσόφων του πανεπιστημίου Λομονόσοφ της Μόσχας, εκδ. Gutenberg

Β) ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Butterfield H., Η Καταγωγή της Σύγχρονης Επιστήμης (1300-1800), Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης
Cottingam J., Φιλοσοφία της Επιστήμης, Α΄: Οι Ορθολογιστές, εκδ. Στάχυ
Crombie A., Από τον Αυγουστίνο στο Γαλιλαίο, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης
Drake S., Γαλιλαίος, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Grant E., Οι Φυσικές Επιστήμες το Μεσαίωνα, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Hankins T., Επιστήμη και Διαφωτισμός, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Mattei Jean Francoise, Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι, εκδ. Καρδαμίτσα
Vilenkin N., Αναζητώντας το Άπειρο, εκδ. Κάτοπτρο
Wilder R., Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, εκδ. Κουτσουμπός
Woolhouse R., Φιλοσοφία της Επιστήμης, Β΄: Οι Εμπειριστές, εκδ. Στάχυ
Κάλφας Β., Φιλοσοφία και Επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα, εκδ. Πόλις
Κοϋρέ Α., Δυτικός Πολιτισμός, Η άνθιση της επιστήμης και της τεχνικής, εκδ. Ύψιλον
Παττακός Σ., Η Μυστική Διδασκαλία του Πλάτωνα, εκδ. Νέα Ακρόπολη
Τέιλορ Τ., Η Θεωρητική Αριθμητική και Αριθμοσοφία των Πυθαγορείων, εκδ. Πύρινος Κόσμος

Γ) ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ1) Βιβλία

Confrey G., Conceptual change analysis Implications for mathematics and curriculum
Davis-Hersh, Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδ. Τροχαλία
Hardy G., Η απολογία ενός μαθηματικού, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Heitsch W., Mathematik und Weltanshauung, Academie-Verlag, Berlin
Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, Θεσσαλονίκη 1988
Renyi A., Διάλογοι για τα Μαθηματικά, εκδ. Διογένης
Rybnikov K., Εισαγωγή στη Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη 1986
Sapiro S., Σκέψεις για τα Μαθηματικά: Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, εκδ. Πανεπιστημίου Πατρών
Α.Β. Σκοροχόντ, Μαθηματικοποίηση της γνώσης και επιστημονικοτεχνική πρόοδος, Κίεβο: Ναούκοβα Ντούμκα, 1975
Α.Δ. Αλεξαντρόφ, Τα μαθηματικά , το περιεχόμενό τους, οι μέθοδοι και η σημασία τους, τ.1, Μόσχα, 1956
Αναπολιτάνος Δ., Εισαγωγή στη Φιλοσοφία τω Μαθηματικών, εκδ. Νεφέλη
Πράσινος Γ., Το Άπειρο, εκδ. Κώδικας
Σπύρου Π., Επιστημολογία των Μαθηματικών
Thom R., Μαθηματικά Πρότυπα της Μορφογένεσης, εκδ. Πνευματικού

Γ2) Άρθρα

Brieskorn E., Η Διαλεκτική στα Μαθηματικά, Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.12, 1986
Tutte W., Τι είναι τα Μαθηματικά?, Ανθρωπιστική επιστήμη, φυσική επιστήμη ή τέχνη?, Quantum, τ.2, 1996
Asser G., Mathematiques et Realite Objective, Sciences et Materialisme Dialectique, No 54, 1966
Θεοφίλου Α., Αφηρημένα Μαθηματικά και Σύγχρονη Επιστήμη, Ουτοπία, τ.24, 1997
Φιλιππίδης Κ., Ο μαθηματικός παιδαγγός για το ενιαίο δωδεκάχρονο βασικό σχολείο, Θέματα Παιδείας, τ.12, 2003

Δ) ΔΙΑΦΟΡΑ

Grand Larousse, λήμμα Μαθηματικά

Hoyrup J., Μαθηματικά στον Πόλεμο και στην Ειρήνη, Δημοκρατική Πανεπιστημονική Κίνηση
Pakhomov V., Δημοκρατία και Μαθηματικά, περιοδικό Quantum, τ.1, 1998
Struik-Kennedy, Ο Μαρξ και τα μαθηματικά, Θεσσαλονίκη, 1987
Κ. Θέκεδαθ, Η διεθνοποίηση του χρηματιστικού κεφαλαίου και ο νόμος της τάσης πτώσης του ποσοστού κέρδους, ΚΟΜΕΠ, τ.1, 2005
Μαρξ, Τα μαθηματικά χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ, εκδ. Γλάρος
Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, λήμμα Μαθηματικά, Διαφορικός Λογισμός
Σ. Δημητρίου, Η εξέλιξη του ανθρώπου, τ.V, εκδ. Καστανιώτη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Γ'

Alexandrov A.D., «Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες», Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.3
Bell E.T., Οι μαθηματικοί, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
Carnap R., Quine W., Ρουσόπουλος Γ., Μελέτες για τον Εμπειρισμό, εκδ. Καρδαμίτσα
Cornforth M., Επιστήμη και Ιδεαλισμός, εκδ. Αναγνωστίδη
Cornforth M., Μαρξισμός και γλωσσική φιλοσοφία, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Dan Chao, Στην αυγή της κβαντικής πληροφορικής, Βήμα, 2/4/2006
Eves Howard, Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, εκδ. Τροχαλία
Goedel, Για το θεώρημα μη-πληρότητας, εκδ. Τροχαλία
Hilbert, Θεμέλια της Γεωμετρίας, εκδ. Τροχαλία
Hintikka Jakko, άρθρο με τίτλο «Ο Hilbert δικαιώνεται;» το οποίο έχει δημοσιευτεί στο περιοδικό Synthese το 1997
Kline Morris,Τα μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό, εκδ. Κώδικας
Kosko B., Fuzzy Logic, Η Νέα Επιστήμη, εκδ. Σύναλμα
Kraft Viktor, Ο Κύκλος της Βιέννης, εκδ. Γνώση
Merali Zeeya, *Τα Κβάντα σκοτώνουν την Ελεύθερη Βούληση;*, Βήμα, 7/5/2006
Nagel E.- Newman J.R., Το θεώρημα του Godel, εκδ. Τροχαλία
Russel B., Η θεωρία των τύπων, εκδ. Στάχυ
Wittgenstein L., Tractatus Logico Philosophicus, εκδ. Παπαζήση
www.physics4u.gr, Οι κβαντικοί υπολογιστές χρησιμοποιούν τον κβαντικό συσχετισμό
Αλεξαντρόφ Α., λήμμα Γεωμετρία στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια
Αμπαζής Ν., Ασαφή Λογική, περιοδικό Περισκόπιο, τ.168, 1993
Αναπολιτάνος Δ., Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, εκδ. Νεφέλη
Αριστοτέλης, Αναλυτικά Πρότερα
Γρηγορόπουλου Δ., Ο στρουκτουραλισμός του Αλτουσέρ ή η νεκρανάσταση της μεταφυσικής, Επιστημονική Σκέψη, τ.5, 1985
Δημητρακόπουλος Κ., Σημειώσεις στην Ιστορία της Λογικής, 1998
Εγκυκλοπαίδεια, Πάπυρος-Λαρούς-Μπριτάνικα
Ένγκελς, Αντί-Ντύρινγκ, εκδ. Αναγνωστίδη
Ένγκελς, Διαλεκτική της Φύσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Ένγκελς, Διαλεκτική της Φύσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Ευκλείδης, Στοιχεία, μετάφραση Σταμάτη Ε.. ΟΕΔΒ, 1975
Ιλιένκοφ Ε., Η Διαλεκτική του Λένιν και η Μεταφυσική του Θετικισμού, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Λένιν Β.Ι., «Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός», Άπαντα τ. 18
Λένιν Β.Ι., άπαντα, τ.29, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Μαρκόφ Α.Α., λήμμα Αντικείμενο και μέθοδος της σύγχρονης λογικής στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια
Μητακίδης Γ., Μαθηματική Λογική, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1988
Μπιτσάκης Ε., Το αειθαλές δέντρο της γνώσης, εκδ.Στάχυ
Μυτιληναίος Μ., Λογική, εκδ. Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, 2003-2004
Πάπυρος-Λαρούς-Μπριτάνικα, λήμμα Λογική
Πόπερ Κ., Τι Είναι η Διαλεκτική; Γνωσιοθεωρία χωρίς γνωστικό υποκείμενο, εκδ. Βάνιας
Ρόζενταλ Μ.Μ., Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, εκδ. Γνώσεις
Ρόζενταλ Μ.Μ., Αρχές Διαλεκτικής Λογικής, εκδ. Γνώσεις

Ρουσόπουλος Γ. , Επιστημολογία των Μαθηματικών, εκδ. Gutenberg
Ρουσόπουλος Γ., Αναλυτική της Παράστασης, εκδ. Gutenberg
Σεπτούλιν Α., Κατηγορίες και Νόμοι της Διαλεκτικής, εκδ. Αναγνωστίδη
Χέγκελ, Η Επιστήμη της Λογικής, εκδ. Αναγνωστίδη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Δ'

Α) ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΓΙΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑΣ

Αναπολιτάνος Δ. Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, εκδ. Νεφέλη
Αριστοτέλης, Μετά τα φυσικά, εκδ. Κάκτος
Αυγέλης Ν., Φιλοσοφία της επιστήμης, εκδ. Κώδικας
Γουλχάουζ Ρ., Οι εμπειριστές, εκδ. Στάχυ
Γουντς Α.- Γκραντ Τ., Η διαλεκτική σε αντεπίθεση, εκδ. Καμπύλη
Εισαγωγή στη φιλοσοφία της επιστήμης, συλλογικό,
Ένγκελς Φ., Διαλεκτική της φύσης, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Επίκουρος, Άπαντα, εκδ. Κάκτος
Καρτέσιος, Λόγος περί της μεθόδου, εκδ. Παπαζήση
Καρτέσιος, Στοχασμοί περί της πρώτης φιλοσοφίας, εκδ. Εκκρεμές
Κόντιγκαμ Τ., Οι ορθολογιστές, εκδ. Στάχυ
Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας ελληνική φιλοσοφίας, εκδ. Μπουκουμάνης
Λυοτάρ Ζ., Η μεταμοντέρνα κατάσταση, εκδ. Γνώση
Μπιτσάκης Ε., Διαλεκτική και νεώτερη φυσική, εκδ. Ηριδανός
Μπιτσάκης Ε., Θεωρία και πράξη, εκδ. Gutenberg
Μπιτσάκης Ε., Το είναι και το γίγνεσθαι, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Πόππερ Κ., Η ανοιχτή κοινωνία και οι εχθροί της, εκδ. Δωδώνη
Πουανκαρέ, Η αξία της επιστήμης, εκδ. Κάτοπτρο
Χέγκελ, Η επιστήμη της λογικής, εκδ. Αναγνωστίδης

Β) ΓΙΑ ΤΗΝ ΕτΧ

Άρνολντ Β., Θεωρία καταστροφών, εκδ. Gutenberg
Γκέκας Β., Κοσμική τάξη και χάος, εκδ. Στάχυ
Γκλέικ Τζ., Χάος, μια νέα επιστήμη, εκδ. Κάτοπτρο
Μόδης Θ., Προβλέψεις, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
Μπάσιος Β.- Αδαμόπουλος Ι., Γνωριμία με τον κόσμο των FRACTALS, εκδ. Anubis
Μπέλτραμι Ε., Η φύση του τυχαίου, εκδ. Κάτοπτρο
Μπριγκς Τζ.- Πιτ Φ., Μια αιρετική άποψη για το χάος, εκδ. Τραυλός
Μπριγκς Τζ.- Πιτ Φ., Ο ταραγμένος καθρέφτης, εκδ. Κάτοπτρο
Ντέιβις Μ.- Γούνκοκ Α., Θεωρία των καταστροφών, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Πριγκοζίν Ι., Οι νόμοι του χάους, εκδ. Τραυλός
Πριγκοζίν Ι., Το τέλος της βεβαιότητας, εκδ. Κάτοπτρο
Στιούαρτ Ι., Παίζει ο Θεός ζάρια?, εκδ. Τραυλός
Χρηστίδης Θ., Χάος και πιθανολογική αιτιότητα: μεταξύ προκαθορισμού και τύχης, εκδ. Βάνιας

Γ) ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

CHAOS, τεύχη 1-5
Discovery & Science, τ.9, 2006
Νεύσις, τ.5
Ουτοπία, τ.33
Περισκόπιο, τ.104, 182, 198,210,220

Δ) ΆΡΘΡΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ΑΠΟ ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ

Η φυσική: οι αρχές της, οι κορυφαίοι εκπρόσωποί της, το χάος, οι εφαρμογές, Βήμα, 21/1/01
Το χάος; Ας το αξιοποιήσουμε, Βήμα, 31/4/96
Μια εξίσωση βλέπει το μέλλον, Ελευθεροτυπία, 22/4/95
Το μεγάλο χάος, Βήμα, 1/2/96
Το χάος και ο Ιλία Πριγκοζίν, Καθημερινή, 8/2/96
Μια τάξη μέσα από το χάος, Βήμα, 8/2/96
Ο Ιλία Πριγκοζίν και το χάος, Βήμα, 8/2/96
Εξισώσεις πολέμου, Βήμα, 11/2/96
Η CIA προβλέπει του πολέμους του 2000, Καθημερινή, 5/5/96
Ο χρόνος και νόμοι του σύμπαντος, Βήμα, 8/2/98

Ε) ΔΙΑΦΟΡΑ

Φιλοσοφικό κοινωνιολογικό λεξικό, εκδόσεις Καππόπουλος
Εγκυκλοπαίδεια Πάπυρος-Larousse-Μπριτάνικα
Σημειώσεις Α. Μπούντη με τίτλο «Πολυπλοκότητα και μη γραμμικότητα στη φύση»

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Ε'

Α) ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Churchland Paul, Η μηχανή της λογικής και η θέση της ψυχής, εκδ. Γκοβόστη
C. Clawson, Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών, εκδ. Κέδρος
Descartes, Λόγος περί μεθόδου, εκδ. Παπαζήση
Edelman G., Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά
Lakkoff G. and Nunez R., Where Mathematics Comes From?, New York
Lazorthes Guy, Εγκέφαλος και πνεύμα, εκδ. Γκοβόστη
Minsky Marvin, Η κοινωνία της νόησης, εκδ. Κάτοπτρο
Penrose Roger, Σκιές του νου, εκδ. Γκοβόστη
Perkins David, Το φαινόμενο «Εύρηκα», εκδ. Λιβάνη
Plotkin Henry, Η φύση της γνώσης, εκδ. Κάτοπτρο
Searle John, Ανακαλύπτοντας ξανά το νου, εκδ. Γκοβόστη
Wittgenstein L., Tractatus Logico Philosophicus, εκδ. Παπαζήση
Βιγκότσκι Λεβ, Σκέψη και γλώσσα, εκδ. Γνώση
Έκο Ουμπέρτο, Θεωρία σημειωτικής, εκδ. Γνώση
Ένγκελς Φ., Αντι-Ντύρινγκ, εκδ. Αναγνωστίδη
Καντ Ι., Κριτική του Καθαρού Λόγου, Α2, εκδ. Παπαζήση
Καντ, Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, εκδ. Δωδώνη
Λιούνγκμαν Καρλ, Ο μύθος της ευφυΐας, εκδ. Αίολος
Μπιτσάκης Ε., Το αειθαλές δέντρο της γνώσεως, εκδ. Στάχυ
Ώϊζερμαν Τ., Προβλήματα Φιλοσοφίας και Επιστήμης, εκδ. Gutenberg
Παβλόφ Τοντόρ, Θεωρία της αντανάκλασης, εκδ. Δωδώνη
Σ. Δημητρίου, Η εξέλιξη του ανθρώπου, τ. V, εκδ. Καστανιώτη
Σαφ Άνταμ, Γλώσσα και γνώση, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Σεπτούλιν Α., Κατηγορίες και νόμοι της διαλεκτικής, εκδ. Αναγνωστίδη
Τσόμσκι Νόαμ, Η αρχιτεκτονική της γλώσσας, εκδ. Καστανιώτη
Τσόμσκι Νόαμ, Συντακτικές δομές, εκδ. Νεφέλη

Β) ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ/ΓΝΩΣΙΑΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Β1) Ατομικά

Βοσνιάδου Στέλλα, Εισαγωγή στην Ψυχολογία, εκδ. Gutenberg
Δημητρίου Ανδρέας, Γνωστική ανάπτυξη, εκδ. Art of Text
Λούρια Λ., Γνωστική ανάπτυξη, εκδ. Ελληνικά Γράμματα
Dehaene S., F. Chochon, L. Cohen, PF van de Mortele, Diffential Contributions of the left and right inferior parietal lobubes to number processing, Journal Cognitive Meuroscience, 1999

B2) Συλλογικά

Γνωσιακή επιστήμη, Η νέα επιστήμη του νου, επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, εκδ. Gutenberg
Η ψυχολογία των μαθηματικών, επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, εκδ. Gutenberg

Γ) ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Changeux J.-P. & Connes Al., Τα μαθηματικά και ο εγκέφαλος, εκδ. Κάτοπτρο
Davis P.- Hersh R., Η μαθηματική εμπειρία, εκδ. Τροχαλία
Hadamard Jacques, Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά, εκδ. Κάτοπτρο
Iliev Ljubomir, Μαθηματικά και ανάπτυξη, Θεσσαλονίκη
Lakatos Imre, Απόδειξη και ανασκευές, εκδ. Τροχαλία
Lakoff & Nunez, Where Mathematics comes from, New York
Rybnikov K., Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη
Αναπολιτάνος Δ., Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, εκδ. Νεφέλη
Ρουσόπουλος Γιώργος, Επιστημολογία των Μαθηματικών, εκδ. Gutenberg
Ρουσόπουλος Γιώργος, Μαθηματικός ρεαλισμός, εκδ. Ελληνικά Γράμματα
Σπύρου Π., Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων στην Επιστημολογία των Μαθηματικών

Δ) ΑΡΘΡΑ- ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ-ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΕΣ

R. Nunez, L. Edwards, J. F. Matos, Embodied Cognition as Groudingg for Situatedness and Context in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics 39, 1999, Kluwer Academic Publishers
Δεληκανλής Π., «Τα ενσωματωμένα μαθηματικά στη διαδρομή της μάθησης και ο ρόλος της εγκεφαλικής ασυμμετρίας και των ημισφαιρίων στη γνώση» (άρθρο, 20ο συνέδριο ΕΜΕ)
Εγκυκλοπαίδεια «Πάπυρος- Λαρούς- Μπριτάνικα», λήμμα «συνείδηση»
Ενσώματη Αριθμητική: Οι απόψεις των G. Lakoff-R. Nunez για την αριθμητική και τη θεμελίωση των αριθμών
Ίλιτσεφ Λ.-Φεντοσέγεφ Π., Φιλοσοφικό Εγκυκλοπαιδικό Λεξικό, εκδ. Καπόπουλος
Καρακώστα Α., «Η λογική της γλώσσας (πώς η γλώσσα επηρεάζει τα μαθηματικά) και η γλώσσα της λογικής (πώς τα μαθηματικά επηρεάζουν τη γλώσσα)» (άρθρο, 20ο συνέδριο ΕΜΕ)
Κάτσιου Μ.-Ζαφρανά, Ανθρώπινος Εγκέφαλος και Δημιουργικότητα, περιοδικό *Επιστημονική Σκέψη*, τ.7, 1982
Κούπτσοφ Β., Αναγωγισμός και σύγχρονη επιστήμη, Περιοδικό Κοινωνικές Επιστήμες, Ακαδημία Επιστημών ΕΣΣΔ, τ.2, 1987
Περιοδικό «Focus», τ.50
Περιοδικό «Περισκόπιο», τ.190
Περιοδικό «Ψυχολογία», αφιέρωμα «Γλώσσα και σκέψη», τ.5
Περιοδικό «Ψυχολογία», αφιέρωμα «Σκέψη και λύση προβλημάτων», τ.6
Περιοδικό «Ψυχολογία», τόμος 9, τεύχος 3

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΣΤ'

Benjamin Farrington,Η Επιστήμη στην Αρχαία Ελλάδα, εκδ. Κάλβος

Boeri Marcelo (Τρεις φιλοσοφικές απόψεις για το χρόνο, περιοδικό *Αρχαιολογία*, τ.77, 2000)
Cornford F. M., Principium sapientiae
Guthrie W. K. C., Οι Σοφιστές, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης
Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, Θεσσαλονίκη
Koestler A., Οι υπνοβάτες, εκδ. Χατζηνικολή
Mattei Jean-Francoise, Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι, εκδ. Καρδαμίτσα
Morrow: Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Princeton University Press, 1970, σελ. 118
Struik D., «Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών», εκδ. Ζαχαρόπουλος
Szabo A., Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών , Εκδόσεις του Τεχνικού
Vernant Jean –Pierre, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα, τ.2, εκδ. Δαίδαλος-Ζαχαρόπουλος
Βέϊκος Θ., Οι Προσωκρατικοί, εκδ. Ελληνικά Γράμματα
Επιμελητηρίου της Ελλάδας, 1973.
Ησίοδος, Θεογονία, εκδ. Κάκτος
Κορδάτος Γ., Ιστορία της αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας, εκδ. Μπουκουμάνης
Μεγάλης Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, λήμμα «Μαθηματικά», (βασισμένο σε άρθρο του Kolmogoroff στη 2η έκδοση της ομώνυμης εγκυκλοπαίδειας).
Μπιτσάκης Ε., Διαλεκτική και νεότερη φυσική, εκδ. Ηριδανός
Πανταζής Βαγγέλης, Η κατεύθυνση του χρόνου στην αρχαιότητα και στους νέους χρόνους», περιοδικό Αρχαιολογία, τ. 77, 2000
Παπαδοπετράκης Ευτύχης, Η γένεση μιας επιστήμης: Τα ελληνικά μαθηματικά, περιοδικό Ουτοπία, τ. 24, 1997
Πλάτωνας, Τίμαιος, εκδ. Κάκτος

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

Confrey J., Conceptual Change Analysis: Implications for Mathemetics and Curriculum Inquire, A paper presented at the American Educational Research Association National Meeting, Boston February, 1980
Confrey J., What Constuctivism Implies for Teaching, στο Davis R., Maher C., Noddings N. (επ), Constructivisme Views on the Teaching and Learning of Mathematics, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics
Cyba and Lincoln, Fourth Generation Evualation, 1989, California: SAGE Publication Inc
Ernest P., The Philosophie of Mathematics Education, The Falmer Press, 1991
Desautels J. And Larochelle M., A Constructivist Pedagogical Strategy: The Epistimological Disturbance, (Experiment and Preliminary Results) in More History and Philosophy of Science in Science Teaching, ed. D.E. Herget (Tallahassee, Florida: Florida State University, 1990
Fegerabent P., Ενάντια στη μέθοδο, Εκδ. Σύγχρονα Θέματα
Geymonat L., Επιστήμη και Ρεαλισμός, εκδ. Ζαχαρόπουλος
Gnedenko B., Συμβολή στην προετοιμασία του δασκάλου των μαθηματικών, Μαθηματική Επιθεώρηση, τ.5
Iliev L., Μαθηματικά και Ανάπτυξη, σελ. 122-123, Ακαδημία Επιστημών της Βουλγαρίας, Θεσσαλονίκη, 1988
Lakatos, Αποδείξεις και Ανασκευές, εκδ. Τροχαλία
Matthews, R., Constructivisme in Science and Mathematics Education, στο D.C. Phillips (ed.), National Society for the Stdy of Education, 99th Yearbook, Ghicago, Uiversity of Chicago Press
Pepin Y., Practical Knowledge and School Knowledge: A Constructiviste Representation of Education. Στο: M. Larochele. N. Bednarz &J. Garrison (Eds.), Constructiviste & Education, Cambridge University Press
Von Glasersfeld E., Instruction, In Radical Constructivisme in Mathematics education, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht

Nadeau R, and Destautels J., Epistimologie and the teaching of Science, Ottawa: Science council of Canada, 1984
Von Glasersfeld, Construction of Knowledge, 1989, Synthese, 80 (1)
Von Glasersfeld, Cognition, Construction and Knowledge, 1987, Intersystem Publication, Salinas CA
Wheatley H., Constructivist Perspectivist on Science, and Mathematics Learning, Science Education, 75
Βαγενάς Ε., Επίκαιρες Παιδαγωγικές αντιλήψεις του σοβιετικού παιδαγωγικού συστήματος, ΚΟΜΕΠ, τ.2, 2004
Ernest P., The philosophy of Mathematics Education, 1991, The Farmer Press, London
Κολέζα Ε., Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, εκδ. Leader Books
Κολέζα Ε., Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, εκδ. Leader Books
Λούρια Α., Γνωστική Ανάπτυξη, εκδ. Ελληνικά Γράμματα,
Κουλαϊδης Β., Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου, εκδ. Gutenberg
Βιγκότσκι Λ., Νους στην κοινωνία, εκδ. Gutenberg
Βιγκότσκι Λ., Σκέψη και Γλώσσα, εκδ. Γνώση
Ίλιτσεφ Λ.- Φεντοσέγεφ Π., Φιλοσοφικό εγκυκλοπαιδικό λεξικό, λήμα Λάκατος, τ.2, εκδ. Καπόπουλος
Λεβίτιν κ., Η διαμόρφωση της προσωπικότητας, σελ.123, εκδ. Σύγχρονη Εποχή
Vygotski, «Το πρόβλημα της πολιτιστικής ανάπτυξης του παιδιού», Άπαντα, τ.3, σελ. 302, στα ρώσικα
Μπαρκάτσας Α., Η θεωρία κατασκευής της γνώσης και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των μαθηματικών (άρθρο), Απρίλης 1998
Παπαδοπετράκης Ε., Οι Γλώσσες των Φυσικών Αριθμών, Γλωσσολογικά, Γνωσιολογικά και Παιδαγωγικά προβλήματα, αδημοσίευτο άρθρο
Παπαδοπετράκης Ε., Οι Υπολογιστές στην εκπαίδευση: μύθοι και πραγματικότητες, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 6, 2001
Σπύρου Π., Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις παραδόσεων, Αθήνα 2005
Σχίζας Δ., WWW. electridea.gr
Tobin K., Constructiviste Representation on Research in Science Education, paper presented at the annyal metting of the National Association for Research in Science Teaching, Lake Geneva, Wisconsin
Σταθοπούλου Χ., Τσιγγάνοι μαθητές και χώρος: Ο προσδιορισμός στο χώρο ως μια πολιτισμική πρακτική, ομιλία στο 20ο συνέδριο της ΕΜΕ
Τζιαντζή Μ., ΗΠΑ: η γενιά των «μαθηματικά αναλφάβητων», Καθημερινή
Φιλιππίδης Κ., ο Μαθηματικός Παιδαγωγός για το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό σχολείο γενικής-πολυτεχνικής εκπαίδευσης, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 12, σελ. 46, 2003
Φιλιππίδης Κ., ο Μαθηματικός Παιδαγωγός για το Ενιαίο Δωδεκάχρονο Βασικό σχολείο γενικής-πολυτεχνικής εκπαίδευσης, περιοδικό: Θέματα Παιδείας, τ. 12, σελ. 45, 2003
Χοβαρδάς Τ., www.electridea.gr

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

Κον Ι., Η ψυχολογία της πρώτης νεότητας, ΘΠ, τ. 21-22, 2005
Λεοντίεφ Α., Αρχές της ψυχικής ανάπτυξης και το πρόβλημα της διανοητικής ανεπάρκειας, περιοδικό Θέματα Παιδείας (ΘΠ), τ. 3, 2000
Μιχαήλ Μ., Τι σημαίνει διαλεκτική-υλιστική ψυχολογία, ΘΠ, τ.19-20, 2004-2005
Μιχαήλ Μ., Τα στάδια ανάπτυξης της προσωπικότητας του παιδιού, ΘΠ, τ. 21-22, 05
Μούχινα Β., Τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά της βρεφικής, της πρώτης παιδικής και της προσχολικής ηλικίας, ΘΠ, τ.14, 2003
Νταβίντοφ Β., Η ψυχολογική ανάπτυξη κατά την πρώτη σχολική ηλικία, ΘΠ, τ.15-16, 2003-2004
Ντραγκούνοβα Τ., Οι ψυχολογικές ιδιότητες των εφήβων, ΘΠ, τ.17-18, 2004

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ