ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΟΙ ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΚΑΠΟΙΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Αριστείδης Τ. Λυμπίκης

ΕΡΓΑΣΙΑ
Που υποβλήθηκε στο τμήμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην διδακτική των Μαθηματικών

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ

Αθήνα,
Οκτώβριος του 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) *Λάππας Διονύσιος* (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	
2) *Ευάγγελος Ράπτης*	Αναπλ. Καθηγητής	
3) *Παναγιώτης Σπύρου*	Επικ. Καθηγητής	

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον καθηγητή μου Λάππα Διονύσιο που είχε την επίβλεψη της παρούσας, τόσο για την συνεργασία όσο και για την συμπαράσταση του την περίοδο των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές Ράπτη Ευάγγελο και Σπύρου Παναγιώτη που συμμετείχαν στην εκπόνηση της διπλωματικής μου.

Ακόμα θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους διδάσκοντες που είχα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου για την άρτια επιστημονική και παιδαγωγική κατάρτιση που μου παρείχαν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η διπλωματική είναι μια προσπάθεια προσέγγισης των μετασχηματισμών του ουδέτερου επιπέδου και κατάδειξης των διαφορών αυτών των μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια και Υπερβολική γεωμετρία.

Η εργασία αναπτύσσεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο που είναι ίσως εισαγωγικό δίνονται οι απαραίτητες έννοιες ουδέτερης και υπερβολικής Γεωμετρίας. Παρόλο τον εισαγωγικό του χαρακτήρα αποδεικνύεται το κεντρικό θεώρημα ύπαρξης μέτρου τμημάτων και γωνιών στην ουδέτερη γεωμετρία, θεώρημα που ανοίγει το δρόμο να μελετηθούν οι αυτομορφισμοί του επιπέδου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται οι μετασχηματισμοί και γίνεται πλήρης κατάταξή τους. Περαιτέρω αναδεικνύονται οι διαφορές των ανάμεσα στην Ευκλείδεια και Υπερβολική Γεωμετρία. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί το κύριο μέρος της εργασίας.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές ενδιαφέρουσες εφαρμογές των μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Ακόμη γίνεται μια αναφορά στην συμμετρία και παρουσιάζεται το θεώρημα του Leonardo Da Vinci.

ABSTRACT

This Master thesis is an approach to transformations of neutral plane and an attempt to show the differences of these transformations between Euclidian and Hyperbolic Geometry.

This paper includes three chapters. All the necessary conceptions of neutral and hyperbolic geometry are given at the first chapter. Despite the introductory nature of this chapter, the central theorem of the existence measurement of segments and angles in the neutral geometry is fully proved.

At the second chapter the transformations are studied and their classification is taken place. Furthermore, their differences in Euclidian and Hyperbolic geometry are presented. This chapter is the main part of the whole dissertation.

At the last chapter some interesting applications of transformations in the Euclidian case are presented. It also includes a discussion on symmetry and Leonardo´s Da Vinci theorem.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ I
ΠΕΡΙΛΗΨΗ III
ABSTRACT III
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ IV

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ 1
1.1..1 Εισαγωγή 1

1.2 ΟΥΔΕΤΕΡΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 1
1.2..1 Μέτρο τμημάτων 4
1.2..2 Μέτρο γωνιών 8
1.2..3 Μέτρηση μηκών και γωνιών 11

1.3 Το υπερβολικό επίπεδο. 12

1.4 Μοντέλα στο υπερβολικό επίπεδο – αντιστροφή 15
1.4..1 Το μοντέλο των Beltrami-Kein 16
1.4..2 Το μοντέλο του δίσκου του Poincare 17
1.4..3 Αντιστροφή σε κύκλους 18
1.4..4 Ο τύπος της γωνίας παραλληλίας στο Poincare δίσκο 24
1.4..5 Η προβολική φύση του μοντέλου των Beltrami- Klein 25

2 ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 28

2.1 Οι Σημειακοί μετασχηματισμοί στην ουδέτερη Γεωμετρία. 28

2.2 Α. Ισομετρίες και αυτομορφισμοί, η συνθετική προσέγγιση 31

2.3 Ανακλάσεις Ισομετρίες και αυτομορφισμοί 33
2.3..1 Στροφές 38
2.3..2 Μετατοπίσεις 40
2.3..3 Ημιστροφές 43
2.3..4 Κατεκδοχήν σημεία στο Υπερβολικό επίπεδο 44
2.3..5 Παράλληλες μεταφορές 46
2.3..6 Ολισθήσεις 48

2.4 Ταξινόμηση των ισομετριών 50
2.4..1 Άρτιες – περιττές ισομετρίες 51

2.5 Β Αυτομορφισμοί του Καρτεσιανού Μοντέλου - αναλυτική προσσέγγιση. 55
2.5..1 Σημειακοί μετασχηματισμοί του Καρτεσιανού μοντέλου 57

2.6 Ισομετρίες στο Poincare μοντέλο - αναλυτική προσσέγγιση 59
2.6..1 Τελική ταξινόμηση των άρτιων ισομετριών 66
2.6..2 Θεμελιώδης διαφορά στην ομάδα των άρτιων ισομετριών Ευκλειδείου και Υπερβολικού επιπέδου 66

3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ 69

3.1 Εφαρμογές των σημειακών μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια γεωμετρία 69
3.1..1 Προβλήματα αντιστροφών 73
3.1..2 Συμμετρία 75
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 80

1 Στοιχεία επίπεδης Γεωμετρίας

1.1..1 Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική είναι μια προσπάθεια προσέγγισης της ουδέτερης γεωμετρίας, μέσω των σημειακών της μετασχηματισμών. Η προσπάθεια αυτή γίνεται στο μεγαλύτερο μέρος με τη συνθετική μέθοδο και χωρίς να χρησιμοποιηθεί συνέχεια. Παρόλο αυτά όμως, τόσο για να επιδειχθούν πλήρως οι διαφορές μεταξύ ευκλείδειων και υπερβολικών ισομετριών όσο και για να αποφευχθεί η παραδοχή ύπαρξης μέτρου αξιωματικά, περνάμε μέσα από τη συνέχεια και την πληρότητα των πραγματικών αριθμών. Θεωρήσαμε σκόπιμο να υπάρχει μια περιγραφή και όχι πλήρης απόδειξη των προτάσεων της ουδέτερης γεωμετρίας που είναι απαραίτητες για τον κύριο σκοπό μας καθώς και μια περιγραφή των προτάσεων και μοντέλων της υπερβολικής γεωμετρίας. Αυτά περιγράφονται στο παρόν κεφάλαιο που είναι έτσι κατά κάποιο τρόπο εισαγωγικό. Το κύριο μέρος των σημειακών μετασχηματισμών του επιπέδου αναπτύσσεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Τέλος στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές των μετασχηματισμών.

1.2 ΟΥΔΕΤΕΡΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η ουδέτερη γεωμετρία είναι η γεωμετρία του επιπέδου που προκύπτει αν κάνουμε τη θεμελίωση μας με όλα τα αξιώματα που αναφέρονται παρακάτω εκτός από τα αξιώματα παραλληλίας που διακρίνουν τις δύο περιπτώσεις της ουδέτερης γεωμετρίας , την ευκλείδεια και την υπερβολική. Τα αξιώματα λοιπόν είναι:

Αξιώματα του ανήκειν

Ι-1 Για κάθε σημείο P και για κάθε σημείο Q διαφορετικό του P υπάρχει μια ακριβώς ευθεία l που διέρχεται από τα δύο σημεία

Ι-2 Για κάθε ευθεία l υπάρχουν δύο τουλάχιστον διακεκριμένα σημεία που περιέχονται σε αυτή.

Ι-3 Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία με την ιδιότητα να μην ανήκουν και τα τρία σε μία ευθεία.

Αξιώματα του μεταξύ

Β-1 Αν Α*Β*Γ, τότε τα Α, Β, Γ είναι τρία διακεκριμένα σημεία στην ίδια ευθεία και Γ*Β*Α.

Β-2 Για δεδομένα Β, Δ υπάρχουν Α,Γ, Ε ώστε Α*Β*Δ , Β*Γ* Δ και Β*Δ*Ε.

Β-3 Για τρία διακεκριμένα συνευθειακά σημεία το ένα και μόνο βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

Ορισμός: Αν Α,Β είναι σημεία ώστε τα Α,Β να μην ανήκουν σε ευθεία l θα λέμε ότι τα Α, Β είναι στο ίδιο μέρος της l, αν Α= Β ή το ΑΒ δεν έχει κοινά σημεία με την l. Τα Α, Β θα λέμε ότι βρίσκονται σε αντίθετα μέρη αν το ΑΒ έχει κοινά σημεία με την l.

Β-4 Για κάθε ευθεία l και σημεία Α, Β, Γ που δεν ανήκουν σε αυτή:

I. Αν τα Α,Β βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l ενώ τα Β, Γ σε αντίθετα τα Α, Γ βρίσκονται σε αντίθετα.
II. Αν τα Α, Β βρίσκονται εκατέρωθεν της l και τα Β, Γ επίσης τότε τα Α, Γ βρίσκονται στο ίδιο μέρος της l.

Αξιώματα σύμπτωσης.

C-1 Αν Α, Β είναι διακεκριμένα σημεία και Α΄ οποιοδήποτε σημείο τότε για κάθε ημιευθεία r με αρχή το Α΄ υπάρχει μοναδικό σημείο Β΄ στην rτέτοιο ώστε Β΄ $\neq$ Α΄ και ΑΒ $\cong$ Α΄Β΄

C-2 Αν ΑΒ $\cong$ ΓΔ και ΑΒ $\cong$ ΕΖ, τότε και ΓΔ $\cong$ ΕΖ. Ακόμη κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι συμπτώσιμο με τον εαυτό του.

C-3 Αν Α*Β*Γ , Α΄*Β΄*Γ΄, ΑΒ $\cong$ Α΄Β΄ και ΒΓ $\cong$ Β΄Γ΄ , τότε ΑΓ $\cong$ Α΄Γ΄.

C-4 Δοθείσης γωνίας $\measuredangle BA\Gamma$ και οποιοδήποτε ημιευθεία $\overrightarrow{A'B'}$,με αρχή το Α΄, υπάρχει μοναδική ημιευθεία $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ σε δοθείσα πλευρά της ευθείας $\overleftrightarrow{AB}$ ώστε $\measuredangle BA\Gamma \cong \measuredangle B'A'\Gamma'$.

C-5 Αν $\measuredangle$Α $\cong$ $\measuredangle$Β και $\measuredangle$Β $\cong$ $\measuredangle$Γ τότε και $\measuredangle$Α $\cong$ $\measuredangle$Γ. Ακόμα κάθε γωνία είναι συμπτώσιμη με τον εαυτό της.

C-6 Αν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ενός τριγώνου είναι αντιστοίχως ίσες με δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία από ένα άλλο τρίγωνο τα δύο τρίγωνα είναι συμπτώσιμα.

Αξιώματα συνέχειας.

Το αξίωμα του Αρχιμήδη. Αν ΑΒ και ΓΔ τυχαία ευθύγραμμα τμήματα τότε υπάρχει ένας φυσικός ν τέτοιος ώστε αν το ΓΔ επαναληφθεί ν φορές στην ημιευθεία $\overrightarrow{AB}$ αρχίζοντας από το Α τότε υπάρχει σημείο Ε ώστε ΓΔ $\cong$ ΑΕ και Α*Β*Ε.

Το αξίωμα των τομών του Dedekind. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των σημείων μιας ευθείας l μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο μη κενών συνόλων Α, Β που έχουν τις ιδιότητες : κανένα σημείο του ενός συνόλου δεν βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου συνόλου. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο Ο που βρίσκεται στην l με Ε*Ο*Ζ για κάθε Ε στο Α και Ζ στο Β.

Στα παραπάνω αξιώματα της ουδέτερης γεωμετρίας προστίθεται ένα ακόμη αξίωμα παραλληλίας που χαρακτηρίζει την γεωμετρία Ευκλείδεια ή υπερβολική.

Το Ευκλείδειο αξίωμα είναι: Από σημείο Α εκτός ευθείας l διέρχεται το πολύ μια παράλληλος m προς την l.

Το Υπερβολικό αξίωμα παραλλήλων είναι: Υπάρχει ευθεία l και σημείο Ρ εκτός αυτής τέτοιο ώστε τουλάχιστον δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες της l να διέρχονται από αυτό.

Με βάση αυτά τα αξιώματα μπορεί να αναπτυχθεί και αποδειχθεί πλήρως τόσο οι προτάσεις της ουδέτερης γεωμετρίας όσο και οι προτάσεις της Ευκλείδειας ή Υπερβολικής.

Παρακάτω αναφέρουμε αναπόδεικτες τις προτάσεις που μας χρειάστηκαν στην ανάπτυξη του κυρίου μέρους της διπλωματικής[1].

1) Το αξίωμα του Pasch: Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η ευθεία l τέμνει το ΑΒ τότε τέμνει ή το ΒΓ ή το ΑΓ και αν δεν διέρχεται από το Γ τέμνει ακριβώς ένα από τα δύο. Αν και ονομάζεται αξίωμα στα πλαίσια της κατά Hilbert θεμελίωσης είναι πρόταση και συνεπώς αποδεικνύεται.
2) Το ισοδύναμο του παραπάνω θεώρημα Cross-Bar: Αν η ΑΔ είναι εσωτερική στην γωνία $\measuredangle BA\Gamma$ τότε η ΑΔ τέμνει κάθε τμήμα με άκρα στις πλευρές της γωνίας.
3) Ύπαρξη κάθετης: Για κάθε ευθεία l και σημείο Ρ υπάρχει ευθεία m κάθετη στην l από το Ρ.
4) Το Θεώρημα των εντός εναλλάξ γωνιών: Αν οι l, l΄ τεμνόμενες από τρίτη ευθεία έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε δεν έχουν κοινό σημείο (είναι παράλληλες).
5) Ύπαρξη παράλληλης (Συνηθισμένη παράλληλη): Για κάθε ευθεία l και σημείο Ρ εκτός αυτής υπάρχει παράλληλη l΄ της l από το Ρ. Οι l, l΄ δέχονται από κατασκευής κοινή κάθετο ΡΡ΄. Η κατασκευασμένη έτσι παράλληλη θα λέγεται η συνηθισμένη παράλληλη.
6) Θεώρημα εξωτερικής γωνίας: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι εσωτερική γωνία του τριγώνου.

Στο σημείο αυτό χρειάζεται για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας η ύπαρξη μέτρου τμημάτων και γωνιών. Αυτό είναι κάτι, που αρκετές φορές, το δέχονται οι συγγραφείς αξιωματικά. Στην πραγματικότητα όμως είναι ένα θεώρημα της ουδέτερης γεωμετρίας. Στην απόδειξη που ακολουθεί γίνεται για πρώτη φορά στην ουδέτερη Γεωμετρία χρήση των αξιωμάτων συνέχειας άρα είναι με χρήση συνέχειας. Χωρίς την ύπαρξη του θεωρήματος αυτού θα ήταν αδύνατο για παράδειγμα να εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες στο Ευκλείδειο επίπεδο άρα να αποδειχθεί η κατηγορηματικότητα όλων των μοντέλων του Ευκλειδείου επιπέδου. (Το ίδιο συμβαίνει και στο υπερβολικό επίπεδο)

[1] Περισσότερα, βλέπε, M Greenberg.,Euclidean and Non- Eucidean geometries, κεφ. 3-5 και Δ. Λάππας., Εισαγωγή στην επίπεδη Γεωμετρία,.

Η σχέση ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων είναι αυτοπαθής συμμετρική και μεταβατική, άρα σχέση ισοδυναμίας. Μπορούμε λοιπόν να ονομάσουμε τις κλάσεις που ορίζει αυτή η σχέση ελεύθερο τμήμα και θα το συμβολίζουμε στο εξής με **a, b, ….** Όμοια η σχέση ισότητας γωνιών είναι σχέση ισοδυναμίας τις κλάσεις της οποίας ονομάζουμε ελεύθερη γωνία και θα τις συμβολίζουμε με $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Επιπλέον δυαδικός αριθμός λέγεται κάθε αριθμός της μορφής $\frac{n}{2^k}$ με n, k φυσικούς. Είναι φανερό ότι κάθε δυαδικός αριθμός είναι ρητός οπότε οι πράξεις του με τμήματα ή γωνίες συνήθη ή ελεύθερα ορίζεται καλά.

1.2..1 Μέτρο τμημάτων

Λέγοντας *μέτρο τμημάτων* εννοούμε οποιαδήποτε συνάρτηση ϕ που αντιστοιχίζει σε κάθε τμήμα AB έναν πραγματικό αριθμό $\phi(AB) > 0$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:
εάν $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, τότε $\phi(A_1B_1) = \phi(A_2B_2)$.

(2) εάν **A*B*Γ** τότε $\phi(A\Gamma) = \phi(\mathrm{AB}) + \phi(\mathrm{B}\Gamma)$.

Λέγοντας *μέτρο ελεύθερων τμημάτων* εννοούμε οποιαδήποτε συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε ελεύθερο τμήμα **a** ένα πραγματικό αριθμό $\psi(\mathbf{a})$ και η οποία είναι προσθετική, δηλ. ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:
$\psi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{b})$
για κάθε δύο ελεύθερα τμήματα **a** και **b**.

Η σχέση μεταξύ του μέτρου των φραγμένων τμημάτων και του μέτρου των ελεύθερων τμημάτων προκύπτει αμέσως από τον παραπάνω ορισμό.

Βήμα 1. Αν ϕ είναι ένα μέτρο φραγμένων τμημάτων, τότε η συνάρτηση ψ που ορίζεται για τα ελεύθερα τμήματα υπό της συνθήκης: εάν $\mathbf{a} = [\mathrm{AB}]$, τότε $\psi(\mathbf{a}) = \phi(\mathrm{AB})$, είναι ένα μέτρο ελευθέρων τμημάτων.

Αν ψ είναι ένα μέτρο ελευθέρων τμημάτων, τότε η συνάρτηση ϕ ορίζεται για τα φραγμένα τμήματα από την συνθήκη: εάν $[\mathrm{AB}] = \mathbf{a}$, τότε $\phi(\mathrm{AB}) = \psi(\mathbf{a})$, είναι ένα μέτρο φραγμένων τμημάτων.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του μέτρου για το μέτρο των ελεύθερων τμημάτων, και έπειτα θα τις εφαρμόσουμε στο μέτρο των φραγμένων τμημάτων.

Βήμα 2. Εάν ψ είναι ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων, τότε για οποιαδήποτε ελεύθερα τμήματα **a** και **b** και για οποιοδήποτε δυαδικό αριθμό w,

(I) $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *εάν και μόνο εάν* $\psi(\mathbf{a}) < \psi(\mathbf{b})$.

(II) $\psi(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) - \psi(\mathbf{b})$ *για* $\mathbf{a} > \mathbf{b}$.

(III) $\psi(w \cdot \mathbf{a}) = w \cdot \psi(\mathbf{a})$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι προφανής.

Από τον ορισμό του μέτρου έχουμε αμέσως

Βήμα 3. Εάν η συνάρτηση ψ είναι ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $\lambda \cdot \psi$, όπου λ είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, είναι επίσης ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο θεώρημα.

Βήμα 4. Εάν ψ_0 είναι οποιοδήποτε μέτρο ελεύθερων τμημάτων, τότε για κάθε μέτρο ψ ελεύθερων τμημάτων υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 0$ έτσι ώστε $\psi = \lambda \cdot \psi_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε οποιοδήποτε ελεύθερο τμήμα $\mathbf{a}_0$. Έστω

$$\psi_0(\mathbf{a}_0) = x_0, \ \ \psi(\mathbf{a}_0) = x, \ \ \lambda = x/x_0.$$

Θέτουμε $\psi = \lambda \cdot \psi_0$, δηλαδή, για κάθε ελεύθερο τμήμα $\mathbf{a}$ έχουμε $\psi(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$. Για την απόδειξη αυτού, υποθέτουμε ότι για κάποιο ελεύθερο τμήμα $\mathbf{a}$ έχουμε $\psi(\mathbf{a}) < \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$. Ως εκ τούτου υπάρχει ένας φυσικός αριθμός k έτσι ώστε

$$\psi(\mathbf{a}) + \frac{x}{2^k} < \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a}).$$

Έστω

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \frac{1}{2^k} \cdot \mathbf{a}_0 > \mathbf{a}.$$

Από το Αξίωμα Αρχιμήδους – Ευδόξου, υπάρχει ένας δυαδικός αριθμός w έτσι ώστε να ισχύει

(6) $$\mathbf{a} < w \cdot \mathbf{a}_0 < \mathbf{b}$$

Από τους τύπους (3) ως (6), από τον ορισμό του μέτρου, και από Βήμα 2 προκύπτει ότι

(7) $$w \cdot x = \psi(w \cdot \mathbf{a}_0) < \psi(\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) + \frac{x}{2^k} < \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$$

και $w \cdot x_0 = \psi_0(w \cdot \mathbf{a}_0) > \psi_0(\mathbf{a})$, από το οποίο έπεται, από την (3), ότι

(8) $$w \cdot x > \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a}).$$

Αλλά ο τύπος (8) έρχεται σε αντίθεση με τον τύπο (7), και επομένως η ανισότητα $\psi(\mathbf{a}) < \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$ δεν μπορεί να ισχύει.

Κατά τρόπο παρόμοιο, αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα $\psi(\mathbf{a}) > \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$ δεν μπορεί να ισχύει. Κατά συνέπεια $\psi(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \psi_0(\mathbf{a})$ για κάθε ελεύθερο τμήμα $\mathbf{a}$, δηλαδή $\psi = \lambda \cdot \psi_0$, το οποίο και ζητούσαμε.

Βήμα 5. Έστω $\mathbf{a}_0$ είναι οποιοδήποτε ελεύθερο τμήμα, και έστω x_0 είναι οποιοσδήποτε πραγματικός θετικός αριθμός. Υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο ψ των ελεύθερων τμημάτων έτσι ώστε $\psi(\mathbf{a}_0) = x_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Βήμα 4 έπεται αμέσως ότι υπάρχει το πολύ ένα μέτρο ψ που αντιστοιχίζει τον αριθμό x_0 με το τμήμα $\mathbf{a}_0$. Επομένως απομένει να κατασκευαστεί ένα τέτοιο μέτρο ψ.

Θα κατασκευάσουμε αρχικά το μέτρο ψ που αντιστοιχίζει το 1 με το τμήμα $\mathbf{a}_0$. Έστω ότι δείχνουμε με Θ το σύνολο των θετικών δυαδικών αριθμών. Έστω $\mathbf{a}$ είναι οποιοδήποτε ελεύθερο τμήμα. Θεωρούμε τη διαίρεση του συνόλου Θ σε δύο σύνολα,

(9) $$\Theta = \Theta_1^{(a)} \cup \Theta_2^{(a)},$$

που ορίζονται από τις συνθήκες

$w \in \Theta_1^{(a)}$ αν $w \cdot \mathbf{a}_0 < \mathbf{a}$, $w \in \Theta_2^{(a)}$ αν $w \cdot \mathbf{a}_0 \geq \mathbf{a}$,

Προφανώς, τα σύνολα $\Theta_1^{(a)}$ και $\Theta_2^{(a)}$ είναι ξένα, κάθε ένα από αυτά είναι μη-κενό και κάθε αριθμός του συνόλου $\Theta_1^{(a)}$ είναι μικρότερος από κάθε αριθμό συνόλου $\Theta_2^{(a)}$. Κατά συνέπεια η διαίρεση (9) είναι μια τομή Dedekind του συνόλου Θ και επομένως, όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των πραγματικών αριθμών, υπάρχει ένας ακριβώς θετικός αριθμός x_a έτσι ώστε $w_1 < x_a < w_2$ με την προϋπόθεση ότι $w_1 \in \Theta_1^{(a)}$ και $w_2 \in \Theta_2^{(a)}$, για οποιουσδήποτε δυαδικούς αριθμούς w_1 και w_2.

Τώρα θα δείξουμε ότι η συνάρτηση ψ που ορίζεται από τον τύπο $\psi(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{a}}$ είναι ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων, και ότι αντιστοιχίζει το 1 με το τμήμα $\mathbf{a}_0$.

Κατ΄ αρχάς, δείχνουμε ότι η συνάρτηση ψ είναι προσθετική. Θεωρούμε οποιαδήποτε δύο ελεύθερα τμήματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Έχουμε $\psi(\mathbf{a}) = x_{\mathbf{a}}$ και $\psi(\mathbf{b}) = x_{\mathbf{b}}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\psi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{b}}$, δηλαδή, ότι για οποιουσδήποτε θετικούς δυαδικούς αριθμούς w_1 και w_2 η ανισότητα $w_1 < x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{b}} < w_2$ συνεπάγεται ότι

$w_1 \in \Theta_1^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}$ και $w_2 \in \Theta_2^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}$.

Έστω $w_1 < x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{b}}$. Από την αριθμητική των πραγματικών αριθμών είναι γνωστό ότι ο αριθμός w_1 μπορεί να αντιπροσωπευθεί ως το άθροισμα δύο θετικών δυαδικών αριθμών, $w_1 = w_1' + w_1''$, έτσι ώστε $w_1' < x_{\mathbf{a}}$ και $w_1'' < x_{\mathbf{b}}$. Από τον ορισμό των αριθμών $x_{\mathbf{a}}$ και $x_{\mathbf{b}}$ έπεται ότι $w_1' \in \Theta_1^{(\mathbf{a})}$ και $w_1'' \in \Theta_1^{(\mathbf{b})}$, δηλαδή

$w_1' \cdot \mathbf{a}_0 < \mathbf{a}$ και $w_1'' \cdot \mathbf{a}_0 < \mathbf{b}$,

από τις οποίες λαμβάνουμε ότι $w_1 \cdot \mathbf{a}_0 < \mathbf{a} + \mathbf{b}$, δηλαδή $w_1 \in \Theta_1^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}$.

ϕ_0 Κατά τρόπο παρόμοιο προκύπτει από $w_2 > x_{\mathbf{a}} + x_{\mathbf{b}}$ ότι $w_2 \in \Theta_2^{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}$. Επομένως η συνάρτηση ψ είναι ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων. Από τον ορισμό της συνάρτησης ψ προκύπτει ότι $\psi(\mathbf{a}_0) = 1$. Επομένως (δείτε το Βήμα 3) η συνάρτηση $\psi' = x_0 \cdot \psi$ είναι επίσης ένα μέτρο ελεύθερων τμημάτων και $\psi(\mathbf{a}_0) = x_0 \cdot 1 = x_0$. Άρα ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Από τα Βήματα 4 και 5 συμπεραίνουμε, με τη βοήθεια του Βήματος 1, τα ανάλογα Βήματα για το μέτρο των τμημάτων. Άρα:

Βήμα 6. Εάν ϕ_0 είναι τυχαίο μέτρο τμημάτων, τότε για κάθε μέτρο ϕ τμημάτων υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ έτσι ώστε $\phi = \lambda \cdot \phi_0$.

Βήμα 7. Έστω $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ είναι τυχαίο τμήμα και x_0 οποιοσδήποτε πραγματικός θετικός αριθμός. Υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο τμημάτων έτσι ώστε $\phi(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0) = x_0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε μέτρο διατρέχει όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι

Βήμα 8. Έστω ϕ είναι ένα μέτρο τμημάτων, και έστω Σ είναι μια ημι-ευθεία με αρχή A. Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $x > 0$ υπάρχει ένα σημείο $\mathrm{B} \in \Sigma$ για το οποίο $\phi(\mathrm{AB}) = x$ (και, στην πραγματικότητα, υπάρχει ακριβώς ένα τέτοιο σημείο).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο $\mathrm{B} \in \Sigma$ Έστω $\phi(\mathrm{AB}_0) = x_0$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι

(10) για οποιονδήποτε δυαδικό αριθμό w υπάρχει ένα σημείο $\mathrm{P} \in \Sigma$ έτσι ώστε $\phi(\mathrm{AP}) = w \cdot x_0$.

Περαιτέρω, από το Βήμα 2(I) συνάγεται ότι

(11) $\phi(\mathrm{AP}_1) < \phi(\mathrm{AP}_2)$ εάν και μόνο εάν $\mathrm{A} * \mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$, για οποιαδήποτε σημεία $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \Sigma$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό x. Εμείς διαιρούμε την ημι-ευθεία Σ σε δύο σύνολα X_1 και X_2 έτσι ώστε στο σύνολο X_1 να συμπεριλαμβάνονται εκείνα τα σημεία $\mathrm{P} \in \Sigma$ για τα οποία $\phi(\mathrm{AP}) < x$ και στο σύνολο X_2 εκείνα τα σημεία $\mathrm{P} \in \Sigma$ για τα οποία $\phi(\mathrm{AP}) \geq x$. Θα δείξουμε ότι το ζευγάρι των συνόλων (X_1, X_2) είναι μια τομή Dedekind της ημι-ευθείας A. Έστω οι φυσικοί αριθμοί k και n έτσι ώστε

(12) $$\frac{1}{2^k} < \frac{x}{x_0} \le n.$$

Από την (10), υπάρχουν επί της ημι-ευθείας Σ σημεία Δ_1 και Δ_2 έτσι ώστε

$\phi(\mathrm{A}\Delta_1) = \frac{1}{2^k} \cdot x_0$ και $\phi(\mathrm{A}\Delta_2) = n \cdot x_0$.

Προφανώς, $\Delta_1 \in X_1$ και $\Delta_2 \in X_2$. Έτσι, τα σύνολα X_1 και X_2 είναι μη-κενά. Περαιτέρω, για οποιαδήποτε σημεία $\mathrm{P}_1 \in X_1$ και $\mathrm{P}_2 \in X_2$ έχουμε ότι $\phi(\mathrm{AP}_1) < x \le \phi(\mathrm{AP}_2)$, από το οποίο συνάγεται, από την (11), ότι $\mathrm{A}*\mathrm{P}_1*\mathrm{P}_2$.

Έστω ότι B είναι το σημείο που ορίστηκε στην ημι-ευθεία Σ από την τομή (X_1, X_2). Θα δείξουμε ότι $\phi(\mathrm{AB}) = x$. Εάν $\phi(\mathrm{AB})$ επρόκειτο να είναι μικρότερο από το x, τότε με τη λήψη ενός δυαδικού αριθμού w τέτοιου ώστε $\phi(\mathrm{AB}) < w \cdot x_0 < x$, και από την επιλογή στην ημι-ευθεία Σ ενός σημείου Δ τέτοιου ώστε $\phi(\mathrm{A}\Delta) = w \cdot x_0$, θα είχαμε $\phi(\mathrm{A}\Delta) < x$ και $\mathrm{A}*\mathrm{B}*\Delta$ από τα οποία θα προέκυπτε ότι $\Delta \in X_1$ και, ταυτοχρόνως, $\Delta \in X_2$. Αυτό θα ήταν σε αντίφαση με το γεγονός ότι τα X_1 και X_2 είναι ξένα. Επομένως ο $\phi(\mathrm{AB})$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον x. Κατά τρόπο παρόμοιο, εμείς μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $\phi(\mathrm{AB})$ δεν μπορεί να είναι μικρότερος από τον x. Ως εκ τούτου $\phi(\mathrm{AB}) = x$. □

Θα καλούμε την τιμή $\phi(\mathrm{AB})$ ενός μέτρου ϕ ενός τμήματος AB το μήκος του τμήματος AB σε σχέση με το μέτρο ϕ και θα το συμβολίζουμε με $\overline{AB}$. Το τμήμα $[\mathrm{AB}]$ που ορίζεται από την συνθήκη

$\overline{AB} = 1$

καλείται η μονάδα μήκους του μέτρου ϕ.

1.2..2 Μέτρο γωνιών

Λέγοντας μέτρο γωνιών εννοούμε οποιαδήποτε συνάρτηση ϕ που αντιστοιχίζει σε κάθε γωνία $\angle\mathrm{AB}\Gamma$ έναν πραγματικό αριθμό $\phi(\angle A\mathrm{B}\Gamma) > 0$ και ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

εάν $\measuredangle A_1\mathrm{B}_1\Gamma_1 \equiv \measuredangle A_2\mathrm{B}_2\Gamma_2$, τότε $\phi(\measuredangle A_1\mathrm{B}_1\Gamma_1) = \phi(\measuredangle A_1\mathrm{B}_1\Gamma_1)$;

εάν AB στο εσωτερικό της $\measuredangle\Gamma\mathrm{A}\Delta$ τότε $\phi(\measuredangle\Gamma A\Delta) = \phi(\measuredangle\Gamma AB) + \phi(\measuredangle B\mathrm{A}\Delta)$.

Λέγοντας μέτρο ελεύθερων γωνιών εννοούμε οποιαδήποτε συνάρτηση ψ που αντιστοιχίζει σε κάθε ελεύθερη γωνία $\mathfrak{A}$ έναν πραγματικό αριθμό $\psi(\mathfrak{A})$ και η οποία είναι προσθετική, δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη

$\psi(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \psi(\mathfrak{A}) + \psi(\mathfrak{B})$

για κάθε ζεύγος ελεύθερων γωνιών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ για τις οποίες υπάρχει το άθροισμα $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$.

Η σχέση μεταξύ του μέτρου των φραγμένων γωνιών και του μέτρου των ελεύθερων γωνιών καθιερώνεται από το ακόλουθο προφανές θεώρημα:

Βήμα 9. Εάν ϕ είναι ένα μέτρο γωνιών, τότε η συνάρτηση ψ που ορίζεται για τις ελεύθερες γωνίες από την συνθήκη: εάν $\mathfrak{A}=[\measuredangle AB\Gamma]$, τότε $\psi(\mathfrak{A})=\phi(\measuredangle AB\Gamma)$, είναι ένα μέτρο ελεύθερων γωνιών.

Εάν ψ είναι ένα μέτρο ελεύθερων γωνιών, τότε η συνάρτηση ϕ που ορίζεται για τις γωνίες από την συνθήκη: εάν $[\measuredangle AB\Gamma]=\mathfrak{A}$, τότε $\phi(\measuredangle AB\Gamma)=\psi(\mathfrak{A})$, είναι ένα μέτρο φραγμένων γωνιών.

Θα αναπτύξουμε τη θεωρία μέτρου για τις γωνίες με έναν τρόπο παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιείται στη θεωρία μέτρου για τα τμήματα. Θα υπάρξει, εντούτοις, κάποια ουσιαστική διαφορά.

Βήμα 10. Έστω ψ είναι ένα μέτρο των ελεύθερων γωνιών. Για οποιεσδήποτε ελεύθερες γωνίες $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ εμείς έχουμε:
$\mathfrak{A}<\mathfrak{B}$ εάν και μόνο εάν $\psi(\mathfrak{A})<\psi(\mathfrak{B})$;
$\psi(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})=\psi(\mathfrak{A})-\psi(\mathfrak{B})$ για $\mathfrak{A}>\mathfrak{B}$.
Για οποιαδήποτε ελεύθερη γωνία $\mathfrak{A}$ και για οποιονδήποτε δυαδικό αριθμό w, για τον οποίο υπάρχει το γινόμενο $w\cdot\mathfrak{A}$, έχουμε
(III) $\psi(w\cdot\mathfrak{A})=w\cdot\psi(\mathfrak{A})$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη του Βήματος 2.
Το μέτρο των τμημάτων διατρέχει όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, αλλά το μέτρο των γωνιών είναι άνω φραγμένο. Στην πραγματικότητα, από το γεγονός ότι κάθε ελεύθερη αμβλεία γωνία $\mathfrak{A}$ είναι το άθροισμα μιας ορθής γωνίας $\mathfrak{R}$ και κάποιας οξείας γωνίας $\mathfrak{X}$ και το Βήμα 10(I) συνάγεται το

Βήμα 11. Αν ένα μέτρο ψ λαμβάνει την τιμή x_0 για την ελεύθερη ορθή γωνία, τότε για οποιαδήποτε ελεύθερη γωνία $\mathfrak{A}$ έχουμε ότι $\psi(\mathfrak{A})<2x_0$.

Από τον ορισμό του μέτρου έχουμε αμέσως

Βήμα 12. Αν η συνάρτηση ψ είναι ένα μέτρο ελεύθερων γωνιών, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $\lambda \cdot \psi$, όπου λ είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, είναι επίσης ένα μέτρο ελευθέρων γωνιών.

Αντιστρόφως

Βήμα 13. Εάν ψ_0 είναι οποιοδήποτε μέτρο ελεύθερων γωνιών, τότε για κάθε μέτρο ψ ελευθέρων γωνιών υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 0$ έτσι ώστε $\psi = \lambda \cdot \psi_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι παρόμοια με την απόδειξη του Βήματος 4. Διαφέρει μόνο στο ότι ο φυσικός αριθμός k πρέπει τώρα να ικανοποιήσει, εκτός από την συνθήκη $\psi(\mathfrak{A}) + x/2^k < \lambda \cdot \psi_0(\mathfrak{A})$, μια επιπλέον συνθήκη, δηλαδή, ότι το άθροισμα $\mathfrak{A} + 1/2^k \cdot \mathfrak{A}_0$ υπάρχει.
Από το Βήμα που αναφέρει ότι το άθροισμα των ελεύθερων γωνιών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ υπάρχει αν και μόνον αν η ελεύθερη γωνία $\mathfrak{B}$ είναι μικρότερη από την ελεύθερη γωνία που είναι παραπληρωματική της $\mathfrak{A}$ και το Θεώρημα Αρχιμήδους-Ευδόξου για τις γωνίες, ένας τέτοιος αριθμός k υπάρχει.
Το Βήμα 5, επίσης, μπορεί να επεκταθεί στο μέτρο των ελεύθερων γωνιών με μιας απόδειξη ανάλογη με την απόδειξη του Βήματος 5. Περνώντας στο μέτρο των γωνιών λαμβάνουμε, με τη βοήθεια του Βήματος 9, το

Βήμα 14. Έστω $\measuredangle A_0 B_0 \Gamma_0$ είναι οποιαδήποτε γωνία και x_0 οποιοσδήποτε πραγματικός θετικός αριθμός. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο ϕ γωνιών έτσι ώστε $\phi(\measuredangle A_0 B_0 \Gamma_0) = x_0$.

Θα δείξουμε ότι εάν ένα μέτρο ϕ ορίζει τον αριθμό x_0 σε μια ορθή γωνία, τότε το πεδίο τιμών της ϕ συμπίπτει με το διάστημα $(0, 2x_0)$.

Βήμα 15. Έστω ϕ είναι ένα μέτρο γωνιών που αντιστοιχίζει τον αριθμό x_0 σε μια ορθή γωνία $x_0 A y_0$, και έστω $\mathfrak{H}$ είναι μια δέσμη ημιευθειών με αρχή το Α που διατάσσεται από το τέλος της ημι-ευθείας $x_0 A$ προς το τέλος της αντικείμενης ημι-ευθείας Ax'. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, για οποιοδήποτε πραγματικό θετικό αριθμό $x < 2x_0$ υπάρχει μια ημι-ευθεία $\overrightarrow{AB} \in \mathfrak{H}$ για την οποία $\phi(x_0 AB) = x$ (και, στην πραγματικότητα, υπάρχει ακριβώς μία τέτοια ημι-ευθεία).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι παρόμοια με την απόδειξη του Βήματος 8. Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι η συνθήκη (10) ικανοποιείται τώρα μόνο για τους δυαδικούς αριθμούς $w < 2$ (δείτε το Βήμα12), και επομένως αντί ενός φυσικού αριθμού $n \geq x/x_0$, είναι αναγκαίο να πάρουμε έναν δυαδικό αριθμό w έτσι ώστε $2 > w \geq x/x_0$.

Από το Βήμα 15 έπεται, ειδικότερα, ότι υπάρχει μόνο ένα μέτρο ϕ_0 που αντιστοιχεί τον αριθμό 90 στις ορθές γωνίες. Θα καλέσουμε αυτό το μέτρο το φυσικό μέτρο των γωνιών, και εφεξής θα χρησιμοποιήσουμε μόνο αυτό το μέτρο. Αντί του $\phi_0(\measuredangle AB\Gamma)$ θα γράψουμε $(\measuredangle A\text{ΒΓ})^0$ και θα αναφέρουμε τον πραγματικό αριθμό $(\measuredangle A\text{ΒΓ})^0$ ως το μέτρο της γωνίας $\measuredangle AB\Gamma$.

Από το Βήμα 12 έπεται αμέσως ότι για οποιαδήποτε γωνία AB ισχύει $0 < (\measuredangle A\text{ΒΓ})^0 < 180$. Επειδή οι γωνίες $\measuredangle xAB$ και $\measuredangle BAx'$ είναι παραπληρωματικές, ισχύει το

Βήμα 17. Για οποιαδήποτε γωνία $\measuredangle xAB$,

$(\measuredangle xAB)^0 + (\measuredangle BAx')^0 = 180.$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η επιλογή του αριθμού 90 ως μέτρο των ορθών γωνιών είναι δευτερεύουσα· οποιοσδήποτε άλλος θετικός πραγματικός αριθμός θα μπορούσε επίσης να έχει ληφθεί για το μέτρο των ορθών γωνιών.

Συνοψίζοντας έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

1.2..3 Μέτρηση μηκών και γωνιών

Α. Υπάρχει μοναδικός τρόπος να αντιστοιχίσουμε μια μέτρηση μοιρών σε κάθε γωνία τέτοιος ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

0. $(\measuredangle A)^0$ είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $0 < (\measuredangle A)^0 < 180$
1. $(\measuredangle A)^0 = 90^0$ αν και μόνον αν η γωνία Α είναι ορθή.
2. $(\measuredangle A)^0 = (\measuredangle B)^0$ αν και μόνον αν $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.
3. Αν $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο εσωτερικό της $\measuredangle \Delta\text{ΑΒ}$, τότε $(\measuredangle \Delta\text{ΑΒ})^0 = (\measuredangle \Delta\text{ΑΓ})^0 + (\measuredangle \Gamma\text{ΑΒ})^0$.
4. Για κάθε πραγματικό x μεταξύ του 0 και του 180 υπάρχει μια γωνία $\measuredangle$Α τέτοια ώστε $(\measuredangle \text{Α})^0 = x^0$
5. Αν $\measuredangle B$ παραπληρωματική της $\measuredangle$Α τότε $(\measuredangle A)^0 + (\measuredangle B)^0 = 180^0$.
6. $(\measuredangle A)^0 > (\measuredangle B)^0$ αν και μόνον αν $\measuredangle \text{Α} > \measuredangle B$.

Β. Αν δοθεί τμήμα ΟΙ που θα καλείται μοναδιαίο, υπάρχει μοναδικός τρόπος να αντιστοιχίσουμε ένα μήκος $\overline{AB}$ σε κάθε τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε οι ακόλουθες ιδιότητες να ισχύουν:

7. $\overline{AB}$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός και $\overline{OI} = 1$.
8. $\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$ αν και μόνον αν $AB \cong \Gamma\Delta$.
9. A*B*Γ αν και μόνο αν $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$.
10. $\overline{AB} < \overline{\Gamma\Delta}$ αν και μόνον αν $AB < \Gamma\Delta$.
11. Για κάθε πραγματικό θετικό αριθμό x υπάρχει ένα τμήμα AB τέτοιο ώστε $\overline{AB} = x$.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι μπορούμε στο ουδέτερο επίπεδο να εισάγουμε πολικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα έστω σημείο Z και ευθεία l που διέρχεται από το Z και ημιευθεία $\vec{\kappa}$ με αρχή το Z. Τότε σε κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχούμε δύο αριθμούς r, θ όπου r = $(\overline{ZP})$ και θ το $(\measuredangle \kappa ZP)$ σε ακτίνια με το πρόσημο συν αν το P είναι στο ένα ημιεπίπεδο που ορίζει η l και πλην αν είναι στο αντίθετο. Το θ είναι 0 επί της $\vec{\kappa}$ και π στην αντίθετη ημιευθεία. Τέλος το r είναι 0 και το θ αόριστο για το Z. Έτσι ισχύει $-\pi < \theta \leq \pi$ $0 \leq r < \infty$ και η αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των ζευγών (r, θ) είναι φανερά ένα προς ένα επί λόγω του προηγούμενου θεωρήματος. Επίσης είναι δυνατόν να αποδειχθεί το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα:

7) Το θεώρημα των Saccheri- Legendre (θεμελιώδες θεώρημα της ουδέτερης γεωμετρίας): Το άθροισμα των γωνιών τυχαίου τριγώνου δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δύο ορθές.

Θεωρώντας ότι οι στοιχειώδεις προτάσεις του Ευκλειδείου επιπέδου είναι γνωστές δίνουμε μια λίστα των προτάσεων του υπερβολικού επιπέδου. Για πλήρεις αποδείξεις με την συνθετική μέθοδο ας κοιτάξει κανείς Non- Eyclidean Geometry, Harod E. Wolfe.

1.3 Το υπερβολικό επίπεδο.

Πρόταση 1.3.1 Στην υπερβολική γεωμετρία υπάρχει ένα τουλάχιστον τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μικρότερο των δύο ορθών.

Με βάση την πρόταση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι στην υπερβολική γεωμετρία κάθε τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο των δύο ορθών. Η απόδειξη γίνεται με μια σειρά από λήμματα και χρειάζεται την έννοια του *ελλείμματος* δηλαδή τη διαφορά του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου από τις δύο ορθές. (Από το βασικό θεώρημα της ουδέτερης γεωμετρίας η διαφορά αυτή είναι σίγουρα μη αρνητική.)

Λήμμα 1.3.1 Αν υπάρχει τρίγωνο με έλλειμμα 0 τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο τετράπλευρο.

Λήμμα 1.3.2 Αν υπάρχει ένα ορθογώνιο τετράπλευρο κάθε τρίγωνο έχει έλλειμμα 0.

Πόρισμα. Στην υπερβολική γεωμετρία δεν υπάρχουν ορθογώνια τετράπλευρα.

Πόρισμα. Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε τετράπλευρο έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο από 4 ορθές.

Θεώρημα 1.3.1 Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες συμπτώσιμες μία προς μια είναι συμπτώσιμα δηλαδή έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές συμπτώσιμες.

Περιγράφουμε παρακάτω μια σπουδαία έννοια της υπερβολικής γεωμετρίας τα τετράπλευρα Saccheri. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις ΒΓ και ΑΔ κάθετες στην βάση ΑΒ και ΒΓ $\cong$ ΑΔ θα λέγεται τετράπλευρο Saccheri. Με απλή σύγκριση τριγώνων αποδεικνύεται ότι σε ένα τέτοιο τετράπλευρο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

a) Η ΓΔ είναι μεγαλύτερη από τη βάση ΑΒ.
b) Η γωνίες που πρόσκεινται στη ΓΔ είναι ίσες.
c) Η κάθετος από το μέσο Μ της ΑΒ στην ΑΒ είναι επίσης κάθετος στο μέσο Ν στην ΓΔ.

Με εφαρμογή των παραπάνω τετραπλεύρων αποδεικνύεται η:

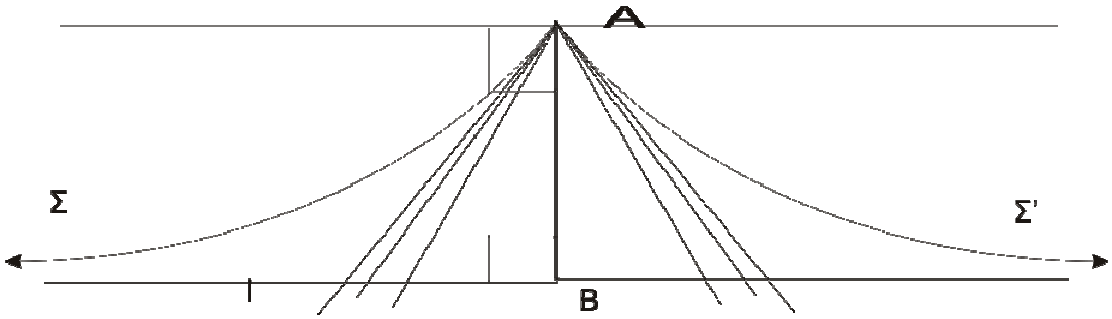
Πρόταση 1.3.2 Αν οι ευθείες l και l΄ δεν τέμνονται τότε το πολύ δύο σημεία της l΄ ισαπέχουν από την l.

Στη συνέχεια μπορούμε να κάνουμε την ταξινόμηση των παραλλήλων της υπερβολικής γεωμετρίας με τις προτάσεις

Πρόταση 1.3.3 Έστω ότι οι ευθείες l και l΄ δεν τέμνονται και έστω ακόμα ότι στην l υπάρχουν σημεία Α,Β που ισαπέχουν από την l΄ . Τότε οι δύο ευθείες δέχονται κοινό κάθετο τμήμα που το μήκος του είναι ελάχιστο.

Πρόταση 1.3.4 Αν δύο ευθείες δέχονται κοινό ευθύγραμμο κάθετο ευθύγραμμο τμήμα τότε αυτές δεν τέμνονται και το τμήμα είναι μοναδικό. Επιπλέον σημεία της μίας συμμετρικά ως προς τον πόδα της καθέτου ισαπέχουν από την άλλη

Πρόταση 1.3.5 Έστω ότι σημείο Α δεν ανήκει σε ευθεία l. Έστω ΑΒ η κάθετη από το Α στην l. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικές ημιευθείες ΑΣ και ΑΣ΄ εκατέρωθεν της ΑΒ και σε ίσες γωνίες με αυτή τέτοιες ώστε μια ημιευθεία από το Α συναντά την l αν και μόνον αν είναι στο εσωτερικό της γωνίας $\measuredangle ΣΑΣ'$.Οι ευθείες ΑΣ και ΑΣ΄ δεν έχουν κοινά σημεία με την l.



Παρατήρηση : Οι ημιευθείες ΑΣ και ΑΣ΄ ονομάζονται οριακά παράλληλες Η γωνία ΣΑΒ είναι οξεία και συμβολίζεται με Π(ΑΒ) δηλώνοντας ότι εξαρτάται μόνο από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Πρόταση 1.3.6 Αν τα Α, l και ΑΣ είναι όπως στην 3.5 και Α*Ρ*Σ τότε η ΡΣ είναι οριακά παράλληλη ημιευθεία προς την l.

Πρόταση 1.3.7 Αν η ευθεία l περιέχει μια ημιευθεία ΑΛ οριακά παράλληλη προς την m και η m περιέχει μια ημιευθεία οριακά παράλληλη προς την l.

Η πρόταση αυτή δηλώνει ότι η σχέση οριακής παραλληλίας είναι σχέση συμμετρική.

Ορισμός : Δύο οριακά παράλληλες ΑΩ και ΒΩ και ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του Α,Β στις οριακά παράλληλες ορίζουν ένα απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο.

Αποδεικνύεται ότι για τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα ισχύει το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας και το παρακάτω κριτήριο ισότητας.

Πρόταση 1.3.8 Έστω ότι τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα ΑΒΩ και Α΄Β΄Ω΄ έχουν $\measuredangle BA\Omega \cong \measuredangle B'A'\Omega'$ τότε θα είναι $AB \cong A'B'$ αν και μόνον αν $\measuredangle AB\Omega \cong \measuredangle A'B'\Omega'$.

Πρόταση 1.3.9 Η σχέση της οριακής παραλληλίας είναι σχέση μεταβατική.

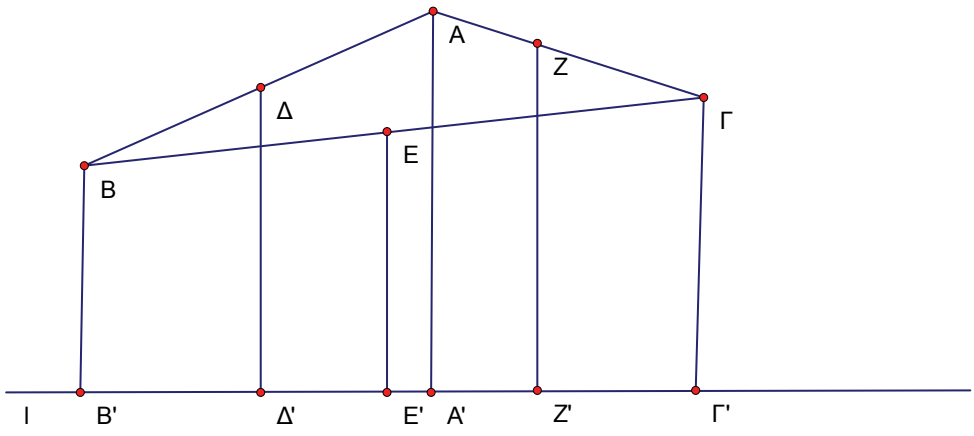
Θεώρημα 1.3.2 Αν δύο μη τεμνόμενες ευθείες δεν περιέχουν κανένα ζεύγος οριακά παραλλήλων τότε δέχονται κοινή κάθετο.

Με βάση τα παραπάνω αποδεικνύεται κατασκευαστικά ότι αν έχουμε δύο τεμνόμενες ευθείες τότε υπάρχει (κατασκευάζεται) κοινή οριακά παράλληλος στις δύο ευθείες. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι αν δοθεί οξεία γωνία υπάρχει στο εσωτερικό της ευθεία που δεν τέμνει τις πλευρές της γωνίας. Η ευθεία αυτή ονομάζεται ευθεία εγκλεισμού της γωνίας.

Εφαρμογή. Στην υπερβολική γεωμετρία οι τρείς μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου ή διέρχονται από το ίδιο σημείο ή δέχονται κοινή κάθετο ή είναι ασυμπτωτικά παράλληλες στην ίδια διεύθυνση.

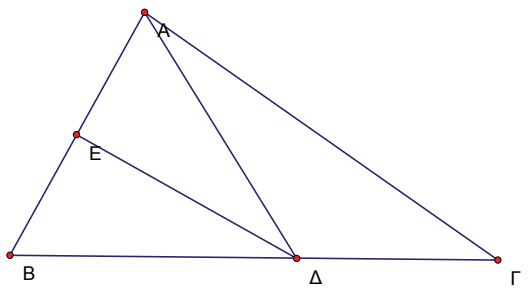
Απόδειξη. Αν οι δύο τέμνονται τότε και η τρίτη διέρχεται από το ίδιο σημείο και η απόδειξη είναι ίδια με την Ευκλείδεια περίπτωση.

Αν οι μεσοκάθετες των ΑΒ και ΑΓ δέχονται κοινή κάθετο l, τότε αν Δ, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ και Δ΄ και Ε΄ οι προβολές τους στην l, είναι $BB' \cong AA' \cong \Gamma\Gamma'$. Τότε όμως το Β΄Γ΄ΓΒ είναι τετράπλευρο Saccheri με το Ε μέσο της ΒΓ και την ΕΕ΄ κάθετη στη ΒΓ άρα και κάθετη στην l.



Άρα αν οι δύο μεσοκάθετες δέχονται κοινή κάθετο τότε αυτή είναι και κάθετος στην τρίτη μεσοκάθετο.

Με εφαρμογή των δύο παραπάνω βλέπουμε ότι αν οι δύο μεσοκάθετοι είναι ασυμπτωτικά παράλληλες τότε και η τρίτη είναι ασυμπτωτικά παράλληλη προς αυτές. Επιπλέον θα αποδείξουμε ότι και οι τρείς είναι ασυμπτωτικά παράλληλες στην διεύθυνση Ω. Αυτό θα γίνει στα δύο παρακάτω βήματα:



Βήμα 1. Οι τρείς μεσοκάθετοι τέμνουν την μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου (η ισότητα στις πλευρές επιτρέπεται). Πράγματι αν ΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά τότε $\measuredangle A \geq \measuredangle B$, $\measuredangle A \geq \measuredangle \Gamma$.

Έτσι υπάρχει σημείο Δ στη ΒΓ ώστε $\measuredangle B = \measuredangle BA\Delta$. Τότε η κάθετος ΔΕ στην ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΑΒΓ . Όμοια και για τη μεσοκάθετο στην ΑΓ.

Βήμα 2. Σε ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο καμιά ευθεία δεν τέμνει και τις τρείς πλευρές. Αν υποθέσουμε ότι μια ευθεία t τέμνει τις δύο πλευρές l,m στα Γ, Δ η ημιευθεία ΔΓ κείται μεταξύ των ασυμπτωτικά παραλλήλων στην l, $\Delta\Omega_1$ και $\Delta\Omega_2$ Το $\Delta\Omega_3$ είναι μια άλλη ημιευθεία που είναι οριακά παράλληλη στην n και αντίθετο στην $\Delta\Omega_2$. Έτσι η $\Delta\Omega_1$ βρίσκεται μεταξύ των ΔΓ και $\Delta\Omega_3$. Έτσι η ημιευθεία $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ δεν τέμνει την n.

Όμοια και η $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δεν τέμνει την n.

1.4 Μοντέλα στο υπερβολικό επίπεδο – αντιστροφή

Στο προηγούμενο εισάγουμε την υπερβολική γεωμετρία και αναφέρουμε μερικά συμπεράσματα αυτής, που φαίνονται πολύ παράξενα σε κάποιον που έχει συνηθίσει στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Ακόμα και αν υποθέσει κάποιος ότι όλα αυτά αποδεικνύονται μαθηματικά σωστά, υπάρχει η αίσθηση ότι η βασική παραδοχή, δηλαδή το υπερβολικό αξίωμα, είναι λάθος. Αν αυτό ήταν κάποιο φυσικό φαινόμενο θα μπορούσαμε να κάνουμε μια σειρά παρατηρήσεις ή πειράματα που να αποδεικνύουν ή απορρίπτουν την ισχύ του. Όμως στα μαθηματικά θα μπορούσαμε άραγε να φέρουμε άπειρα επεκτάσιμες ευθείες και να παρατηρήσουμε αν αυτές είναι παράλληλες ή όχι; Και αν ακόμα υποτεθεί ότι αυτό μπορεί να γίνει, το βασικό μας ερώτημα παραμένει, γιατί δεν γνωρίζουμε και δεν έχει σημασία στα μαθηματικά η φύση της ευθείας ή του οποιοδήποτε αντικειμένου. Αυτό που έχει μαθηματική αξία είναι οι σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων. Άρα μπορούμε να προσπεράσουμε την άποψη του Kant και να *επινοήσουμε* ένα δημιούργημα όπου το υπερβολικό αξίωμα ισχύει. Μιλώντας πιο τεχνικά το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει ένα μοντέλο που να ισχύει το υπερβολικό αξίωμα. Η απάντηση σε αυτό είναι ναι και υπάρχουν

περισσότερα από ένα. Η αξία του μοντέλου, του οποιοδήποτε μοντέλου στη γεωμετρία είναι για να διαπιστωθεί η συνέπεια της θεωρίας μας. Με άλλα λόγια το μη αντιφατικό των προτάσεων που μπορούν να διατυπωθούν με βάση τα αξιώματά μας. Άρα ένα άλλο ερώτημα είναι αν η υπερβολική γεωμετρία είναι συνεπής. Η απάντηση σε αυτό είναι το μεταμαθηματικό θεώρημα που ακολουθεί.

Μεταμαθηματικό Θεώρημα 1. Αν η ευκλείδεια γεωμετρία είναι συνεπής, τότε το ίδιο κάνει και η υπερβολική γεωμετρία.

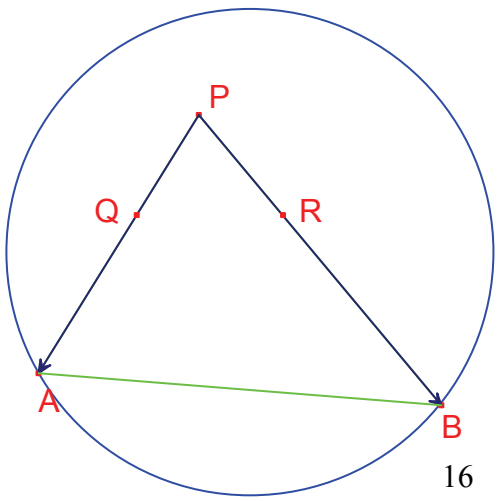
Αν δεχθούμε προς στιγμή το θεώρημα αυτό τότε είναι φανερό ότι ισχύει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα. Αν η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι συνεπής, τότε καμιά απόδειξη ή απόρριψη του Ευκλειδείου αιτήματος, δεν μπορεί να υπάρξει από τα υπόλοιπα αξιώματα του Hilbert. Ισοδύναμα το αξίωμα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα.

Η επιστημονική κοινότητα κατέβαλλε προσπάθειες που διήρκησαν 2000 χρόνια για την απόδειξη του παραπάνω. Θα ήταν πολύ μακρύς και κοινότυπος ο κατάλογος αυτών που ασχολήθηκαν με την απόδειξη του Ευκλειδείου αιτήματος. Να σημειώσουμε μόνο ότι στη μορφή που δόθηκε το θεώρημα αποδείχθηκε από τον Eugenio Beltrami (1835-1990) και μια διαφορετική απόδειξη δόθηκε αργότερα από τον Felix Klein (1849-1925)

1.4..1 Το μοντέλο των Beltrami-Kein

Θα αναφερόμαστε στο πρώτο μοντέλο που παρουσιάζουμε σαν το μοντέλο του Klein. Το όλο μας επίπεδο είναι ένας ανοικτός δίσκος του Ευκλειδείου επιπέδου με ακτίνα ευκλείδεια ίση με τη μονάδα. Τα σημεία είναι τα σημεία του δίσκου και οι ευθείες μας είναι οι χορδές του κύκλου χωρίς τα άκρα τους. Τα σημεία του κύκλου μας (που δεν ανήκουν στο υπερβολικό επίπεδο) θα καλούνται κατεκδοχήν σημεία. Το ανήκει είναι το γνωστό ανήκει και η παραλληλία υπάρχει όταν οι χορδές δεν τέμνονται. Το μεταξύ επίσης είναι το γνωστό Ευκλείδειο μεταξύ. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ισχύουν τα αξιώματα του ανήκει και του μεταξύ καθώς και το αξίωμα του Dedekind, αρκεί να τα μεταφράσει κανείς σε όρους Ευκλείδειας γεωμετρίας. Εκείνο που είναι πιο δύσκολο είναι να διαπιστώσει κανείς ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα σύμπτωσης. Αυτό γιατί αν διατηρήσουμε τα μήκη Ευκλείδεια, τότε μια «ευθεία» του μοντέλου θα ήταν πεπερασμένου μήκους. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα υπόλοιπα αξιώματα της ουδέτερης Γεωμετρίας. Οι γωνίες επίσης δεν μετρώνται όπως οι Ευκλείδειες σε αυτό το μοντέλο. Για το

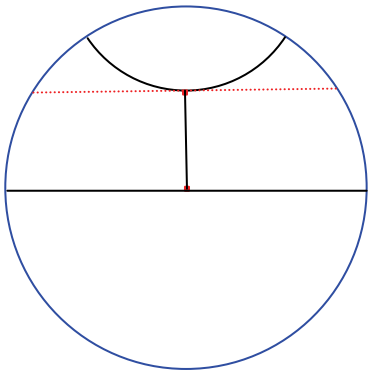


λόγο αυτό δεν θα εξετάσουμε τα αξιώματα σύμπτωσης, αλλά θα παρουσιάσουμε το δεύτερο μοντέλο, το μοντέλο του δίσκου του Poincare

Στο μοντέλο του Klein έχει μια πολύ ωραία αναπαράσταση η ευθεία εγκλεισμού μιας γωνίας (κοίτα παράρτημα) δηλαδή η ευθεία που είναι ασυμπτωτικά παράλληλη και στις δύο πλευρές μιας γωνίας. Στο παραπάνω σχήμα η χορδή AB παριστά την ευθεία εγκλεισμού της γωνίας $\measuredangle QPR$

1.4..2 Το μοντέλο του δίσκου του Poincare

Και σε αυτό το μοντέλο τα σημεία του επιπέδου μας είναι τα σημεία ενός ανοικτού δίσκου. Οι ευθείες όμως παρίστανται διαφορετικά. Είναι ή οι διάμετροι χωρίς τα άκρα του δίσκου ή ανοικτά τόξα κύκλων ορθογώνιων (ισοδύναμα οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία είναι κάθετες) στον αρχικό κύκλο που βρίσκονται στο εσωτερικό του. Το ανήκει και το μεταξύ έχουν τη συνήθη Ευκλείδεια σημασία. Η αναπαράσταση της σύμπτωσης τμημάτων έχει πιο πολύπλοκη μορφή γιατί βασίζεται σε διαφορετικό τρόπο μέτρησης των μηκών από ότι στην Ευκλείδεια περίπτωση. Παρόλα αυτά όμως οι γωνίες μετρούνται σαν Ευκλείδειες γωνίες μόνο που στην περίπτωση που έχουμε τόξα ή τόξο και διάμετρο μετράμε την γωνία των (ή της) εφαπτόμενων στα (ή στο) τόξα στο σημείο τομής. Το διπλανό σχήμα δείχνει δύο παράλληλες με κοινή κάθετο . Είναι εμφανές ότι αυτές αποκλίνουν.



Μπορεί να φαίνεται παράξενο που υπάρχουν δύο διαφορετικά μοντέλα του υπερβολικού επιπέδου. Στην πραγματικότητα τα δύο μοντέλα είναι *ισομορφικά*. Υπάρχει δηλαδή μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των δύο μοντέλων που μεταφέρει σημεία και ευθείες του ενός σε σημεία και ευθείες του άλλου διατηρώντας το ανήκει το μεταξύ και την σύμπτωση. Υπάρχει ένα ακόμη μοντέλο που οφείλεται στον Poincare, το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου. Τα σημεία του είναι τα σημεία ενός ημιεπιπέδου που ορίζεται στο Ευκλείδειο επίπεδο από μια ευθεία. Αν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι τα σημεία (x,y) με y>0. Οι ευθείες του είναι α) ημικύκλια με το κέντρο στον άξονα x΄x β)κατακόρυφες ημιευθείες που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο. Το ανήκει και το μεταξύ έχει τη συνήθη Ευκλείδεια έννοια. Οι γωνίες μετρώνται ευκλείδειες. Ο τρόπος μέτρησης του μήκους θα συζητηθεί αργότερα. Είναι συνηθισμένο να προσαρτούμε ένα ακόμη κατεκδοχήν σημείο εκτός των σημείων του x΄x στο μοντέλο αυτό. Θα το συμβολίζουμε με ∞ και είναι το κοινό πέρας όλων των κατακόρυφων ημιευθειών.

1.4..3 Αντιστροφή σε κύκλους

Για να ορίσουμε σύμπτωση στα μοντέλα του Poincare και να διαπιστώσουμε την ισχύ των αξιωμάτων σύμπτωσης, πρέπει να μελετήσουμε την διαδικασία αντιστροφής σε έναν Ευκλείδειο κύκλο. Αυτή η διαδικασία θα αποδειχθεί ότι είναι η ανάκλαση κατά έναν άξονα στο υπερβολικό επίπεδο. Η θεωρία αντιστροφών είναι μέρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ορισμός. Ας είναι γ κύκλος ακτίνας r και κέντρου O. Για κάθε σημείο P διαφορετικό του O το αντίστροφο του P, P΄ είναι το μοναδικό σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{OP}$ που είναι τέτοιο ώστε $(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$. (όπου το $\overline{OP}$ δηλώνει το μήκος του τμήματος OP με μια σταθερή μονάδα μέτρησης.)

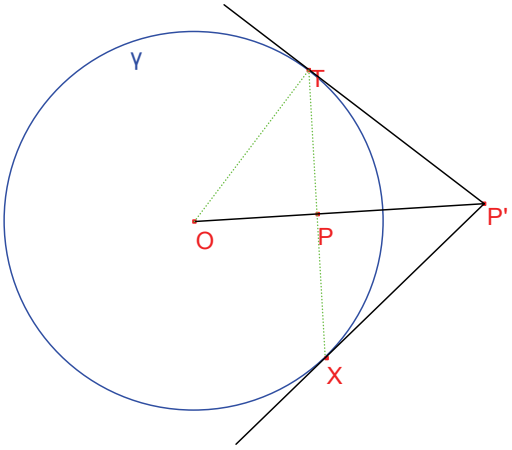
Οι ακόλουθες ιδιότητες της αντιστροφής είναι άμεσες από τον ορισμό.

Πρόταση 1.4.1. (α) P΄ = P αν και μόνον αν το P ανήκει στον κύκλο γ. (β) Αν το P είναι εσωτερικό του γ τότε το P΄ είναι εξωτερικό και αν το P είναι εξωτερικό το P΄ είναι εσωτερικό. (γ) Ισχύει (P΄)΄ =P.

Παρακάτω δίνεται η κατασκευή του αντιστρόφου σημείου με κανόνα και διαβήτη.

Πρόταση 1.4.2. Ας υποθέσουμε ότι το P είναι εσωτερικό κύκλου γ. Ας είναι TX η χορδή από το P κάθετη στην $\overleftrightarrow{OP}$. Τότε το αντίστροφο P΄ του P είναι ο πόλος της χορδής TX, ισοδύναμα το σημείο τομής των εφαπτόμενων του κύκλου στα σημεία Τα και X.

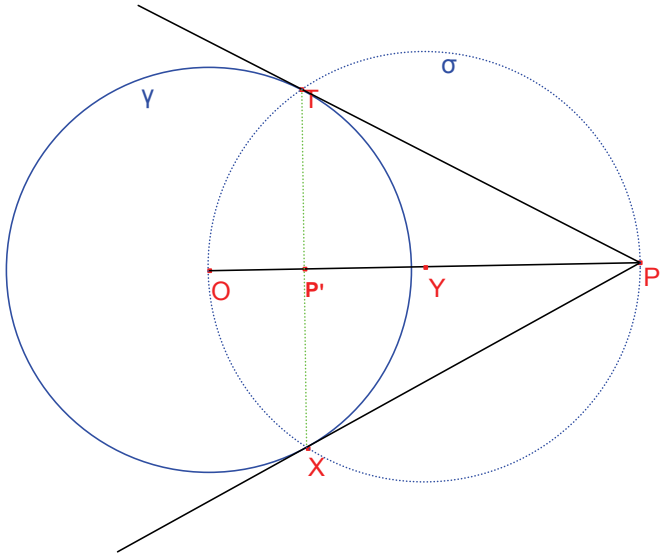
Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η εφαπτομένη στον γ στο T τέμνει την $\overleftrightarrow{OP}$ στο P΄. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle OTP$ και $\triangle OTP'$ είναι όμοια γιατί έχουν μια οξεία γωνία κοινή. Έτσι οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες. Αφού $\overline{OT} = r$ έχουμε $\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP'}}$ από όπου φαίνεται ότι το P΄ είναι το αντίστροφο του P. Τα ίδια ισχύουν και για την εφαπτομένη στο X.



Πρόταση 1.4.3. Αν το P είναι εκτός του γ και Y το μέσο του OP, ας είναι σ ο κύκλος κέντρου Y και ακτίνας $\overline{YP}$. Τότε ο σ τέμνει τον γ σε δύο σημεία X, T και οι $\overleftrightarrow{PX}, \overleftrightarrow{PT}$ είναι εφαπτόμενες στον κύκλο και το αντίστροφο P΄ του P είναι το σημείο τομής των TX και OP.

Απόδειξη. Οι σ, γ τέμνονται σε δύο σημεία T, X αφού η διάκεντρος είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτινών. Οι γωνίες $\measuredangle OTP, \measuredangle OXP$ είναι ορθές αφού είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλια. Άρα οι PX, PT είναι εφαπτόμενες του γ. Αν η TX

τέμνει την OP στο P΄ το P είναι αντίστροφο του P από την προηγούμενη πρόταση. Έτσι και το P΄ είναι αντίστροφο του P.



Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν τρόπο κατασκευής μιας υπερβολικής ευθείας στο δίσκο του Poincare αν δίνονται τα δύο κατεκδοχήν σημεία της, την ευθεία εγκλεισμού.

Πρόταση 1.4.4. Αν T και X σημεία στο γ που δεν είναι αντιδιαμετρικά και P ο πόλος της TX, τότε ο κύκλος δ με κέντρο P και ακτίνα PT=PX τέμνει τον γ ορθογώνια στα T, X.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι πολύ απλή.

Πρόταση 1.4.5. Ας είναι P ένα σημείο που δεν ανήκει σε κύκλο γ και δεν συμπίπτει με το κέντρο O του γ. Αν δ ένας κύκλος που διέρχεται από το P, ο δ τέμνει τον γ ορθογώνια αν και μόνον αν διέρχεται επίσης από το αντίστροφο P΄ του P ως προς τον γ.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο δ περνά από το P΄. Τότε το κέντρο K του δ ανήκει στη μεσοκάθετο του PP΄ έτσι $\overline{KO} > \overline{KP}$ και το O κείται εκτός του δ. Τότε όμως υπάρχει σημείο T στον δ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στον δ στο T να περνά από το O. Για αυτό το σημείο έχουμε από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο $(\overline{OT})^2 = (\overline{OP})(\overline{OP'})$=$r^2$ έτσι το T ανήκει επίσης στον γ. Τότε όμως οι δ, γ τέμνονται ορθογώνια αφού OT εφαπτομένη του δ.

Αντίστροφα αν οι δ, γ τέμνονται ορθογώνια στα T, X τότε οι εφαπτόμενες στον δ στα T, X διέρχονται από το O άρα το O είναι εκτός του δ. Τότε όμως η ημιευθεία $\overrightarrow{OP}$ τέμνει τον δ σε δεύτερο σημείο P΄. Από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο θα ισχύει : $r^2 = (\overline{OT})^2 = (\overline{OP})(\overline{OP'})$. Έτσι το P΄ είναι αντίστροφο του P ως προς τον γ.

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από δύο σημεία. Συγκεκριμένα αν Α, Β τα σημεία τότε το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα Α, Β διέρχεται από το αντίστροφο του Α, Α΄ στην αναπαράσταση στο Poincare δίσκο. Αρκεί λοιπόν να κατασκευάσω το αντίστροφο Α΄ και να φέρω κύκλο διερχόμενο από τα σημεία Α. Α΄,Β που είναι μια στοιχειώδης κατασκευή.

Για την πιστοποίηση των αξιωμάτων σύμπτωσης για τα ευθύγραμμα τμήματα στο μοντέλο μας εισάγουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός. Ας είναι Α, Β σημεία μέσα στον μοναδιαίο κύκλο γ και Ρ, Q τα άκρα της Ρ-ευθείας που ενώνει τα Α,Β. Ορίζουμε τον διπλό λόγο (ΑΒ, PQ) ως: $(AB,RQ)=\frac{(\overline{AP})(\overline{BQ})}{(\overline{BP})(\overline{AQ})}$ και ορίζουμε την Poincare απόσταση των Α,Β ως $d(AB)=|\log(AB,PQ)|$. Μία άλλη έκφραση του διπλού λόγου με χρήση μιγαδικών συντεταγμένων για τα σημεία είναι $\left|\frac{z_1-p}{z_1-q}\frac{z_2-q}{z_2-p}\right|$ και η απόδειξη είναι φανερή. Είναι εύκολο επίσης να αποδειχθεί ότι σε αυτή τη μορφή χωρίς το μέτρο ο διπλός λόγος είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνον αν τα σημεία είναι συνευθειακά ή ανήκουν σε κύκλο[2].

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι το η απόσταση αυτή δεν εξαρτάται από τη σειρά των Α,Β και επίσης από τη σειρά των Ρ, Q. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η τιμές της απόστασης είναι μεταξύ 0 και ∞ για σταθερά Ρ, Q. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την ισότητα δύο Poincare τμημάτων σαν ισότητα των αποστάσεων των σημείων που τα ορίζουν. Άμεση συνέπεια είναι ότι το αξίωμα C-2 ικανοποιείται. Επίσης είναι άμεση συνέπεια ότι για σταθερή poincare ημιευθεία $\overrightarrow{CD}$ υπάρχει μοναδικό σημείο της Ε ώστε d(CE)=d(AB) , όπου τα Α, Β έχουν δοθεί εκ των προτέρων και αυτό πιστοποιεί το αξίωμα C-1. Επίσης η πιστοποίηση του αξιώματος C-3 (πρόσθεση τμημάτων) είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων. Για την πιστοποίηση του αξιώματος C-6 (Π-Γ-Π για τρίγωνα) πρέπει να προσθέσουμε κάποιες ιδιότητες των αντιστροφών.

Ορισμός. Ας είναι Ο σημείο και κ θετικός αριθμός. Η ομοιοθεσία κέντρου Ο και λόγου κ ορίζεται να είναι η απεικόνιση του Ευκλειδείου επιπέδου που απεικονίζει τυχών σημείο Ρ στο μοναδικό σημείο της ημιευθείας $\overrightarrow{OP}$, Ρ΄ που είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $\overline{OP'}=k\overline{OP}$.

Λήμμα 1.4.2. Αν δ κύκλος κέντρου Κ διαφορετικού του Ο και ακτίνας σ, τότε υπό την ομοιοθεσία κέντρου Ο και ακτίνας κ ο δ απεικονίζεται σε κύκλο δ΄ με κέντρο Κ΄ και

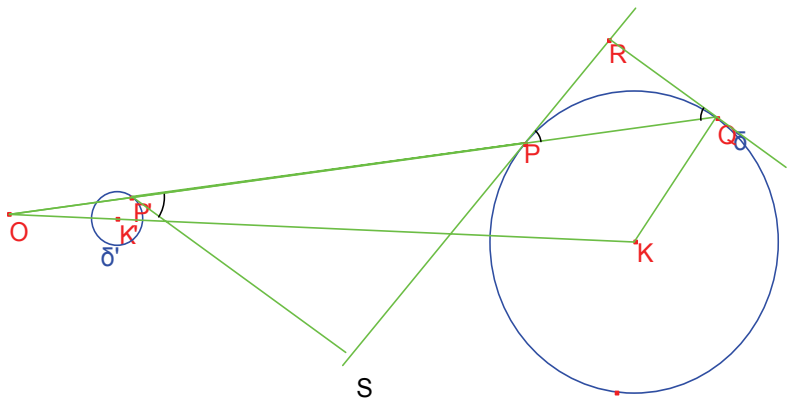
[2] Βλέπε, Modern Geometries, M Henle (σελ 57).

ακτίνα κς. Αν P σημείο στον δ η εφαπτομένη στον δ΄ στο P΄ είναι παράλληλη με την εφαπτομένη στον δ στο P.

Απόδειξη: Αν μεταφράσουμε τα παραπάνω σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο O η απόδειξη είναι πολύ απλή.

Πρόταση 1.4.6. Ας είναι γ κύκλος ακτίνας r και κέντρου O, και δ κύκλος ακτίνας σ και κέντρου K. Υποθέτουμε ότι το O δεν ανήκει στο δ και ας είναι p η δύναμή του ως προς τον δ. Αν $\kappa=r^2/p$ τότε η εικόνα δ΄ του δ με αντιστροφή στον γ είναι κύκλος ακτίνας κ σ του οποίου το κέντρο K΄ είναι η εικόνα του K κάτω από ομοιοθεσία κέντρου O και λόγου κ. Αν P σημείο στον δ και P΄ η εικόνα του με αντιστροφή στον γ, τότε η εφαπτομένη τ΄ του δ΄ στο P΄ είναι η ανάκλαση με άξονα την μεσοκάθετο του PP΄ της εφαπτομένης στον δ στο P.

Απόδειξη.



Αφού το O κείται έξω από τον δ η OP είτε τέμνει τον δ σε ένα άλλο σημείο Q είτε είναι εφαπτόμενη σε αυτόν. Τότε $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}}=\frac{r^2}{p}$ που δείχνει ότι το P΄ είναι η εικόνα του Q κάτω από ομοιοθεσία κέντρου O και λόγου κ. Έτσι ο δ΄ είναι η εικόνα του δ κάτω από την ίδια ομοιοθεσία. Από το λήμμα 1.3.2 η εφαπτομένη τ΄ στο δ΄ στο P΄ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη ε στο Q στον δ. Αν τ η εφαπτομένη στον δ στο P και R το σημείο τομής των τ, ε το QRP είναι ισοσκελές άρα οι παρά τη βάση γωνίες του είναι ίσες άρα και η γωνία των τ, PP΄ είναι ίση με τη γωνία των τ΄ , PP΄ και αυτό αποδεικνύει ότι η τ΄ είναι η ανάκλαση της τ κατά τη μεσοκάθετο του PP΄.

Πόρισμα. Ο κύκλος δ είναι ορθογώνιος στον γ αν και μόνον αν ο δ απεικονίζεται στον εαυτό του με αντιστροφή στον γ.

Απόδειξη. Αν ο δ είναι ορθογώνιος στον γ και το P είναι στον δ τότε $p=(\overline{OP})(\overline{OP'})=r^2$, έτσι κ=1 και δ΄=δ. Αντίστροφα αν δ=δ΄ τότε $p=r^2$ και ο δ περνά από το αντίστροφο P΄ του P στον γ έτσι είναι ορθογώνιος στον γ.

Λήμμα 1.4.3 Αν Ο το κέντρο κύκλου γ και Ρ ,Q δύο σημεία που δεν είναι συνευθειακά με το Ο και Ρ΄ και Q΄ οι εικόνες τους με αντιστροφή στον γ τότε το τρίγωνο PQO είναι όμοιο με το Q΄R΄O.

Απόδειξη: Εφαρμογή κριτηρίου ομοιότητας.

Πρόταση 1.4.7. Αν l ευθεία που δεν διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου γ τότε η εικόνα της l με αντιστροφή στο γ είναι κύκλος εκτός του σημείου Ο. Η διάμετρος από το Ο του κύκλου εικόνα είναι κάθετη στην l.

Απόδειξη: Αν Α το ίχνος της καθέτου από το Ο στην l και Ρ σημείο της l και Α΄ , Ρ΄ τα αντιστροφά τους από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΑΡ και ΟΡ΄Α΄ έχουμε ότι το Ρ΄ βλέπει υπό ορθή γωνία το σταθερό τμήμα ΟΑ΄ άρα ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΟΑ΄. Αντιστρέφοντας το παραπάνω επιχείρημα κάθε σημείο του κύκλου εκτός του Ο έχει αντίστροφο ως προς τον γ στην l.

Πρόταση 1.4.8. Αν δ κύκλος που διέρχεται από το κέντρο Ο κύκλου γ τότε η εικόνα του δ κάτω από αντιστροφή στον γ είναι ευθεία l που δεν διέρχεται από το Ο. Η l είναι παράλληλη στην εφαπτομένη στο δ στο Ο.

Απόδειξη: Είναι η αντίστροφή της προηγούμενης πρότασης.

Εφαρμογή. Να κατασκευαστεί κύκλος γ κέντρου Ο που να απεικονίζει δοσμένο κύκλο δ κέντρου κ σε δοσμένη ευθεία l.

Απόδειξη. Αν ο δ και η l έχουν δύο κοινά σημεία Α, Β αυτά είναι αναλλοίωτα άρα ο γ διέρχεται από αυτά. Επιπλέον το Ο ανήκει στο δ και στην κάθετο από το Κ στην l. Άρα είναι το μέσο του τόξου ΑΒ με τη μία φορά ή την άλλη. Συνεπώς τότε το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Αν ο δ και η l δεν έχουν κοινά σημεία το πρόβλημα έχει μια λύση τον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο τομής Ο της καθέτου ΚΔ στην l και του κύκλου δ που είναι τέτοιο ώστε Ο*Κ*Δ και ακτίνα r με r^2= (ΟΚ)(ΟΔ). Αν η l εφάπτεται στον δ στο Δ η λύση είναι ο κύκλος κέντρου Ο το αντιδιαμετρικό του Δ και ακτίνας ΟΔ.

Πρόταση 1.4.9 Μια γωνία δύο κύκλων διατηρείται κατά μέτρο υπό αντιστροφή αλλά αντιστρέφεται κατά προσανατολισμό. Τα ίδια ισχύουν και για γωνίες κύκλων και ευθειών και για γωνίες ευθειών.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι κύκλοι δ και σ τέμνονται σε σημείο Ρ και οι εφαπτόμενές τους είναι l,m εκεί. Αν Ρ΄ το αντίστροφο του Ρ και l΄, m΄ οι εφαπτόμενες των δ΄ , σ΄ στο Ρ΄ τότε οι l΄ , m΄ είναι οι ανακλάσεις των l, m ως προς τη μεσοκάθετο του ΡΡ΄. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται εύκολα από τις προτάσεις 1.47 και 1.4.8.

Παρατήρηση: Έχουμε τι είναι η απεικόνιση κύκλου ή ευθείας μέσω αντιστροφής. Συγκεκριμένα :

a) Κύκλος που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής απεικονίζεται σε ευθεία.
b) Κύκλος που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής απεικονίζεται σε παρόμοιο κύκλο.

c) Ευθεία που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής απεικονίζεται σε κύκλο που διέρχεται από το κέντρο.
d) Τέλος ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της αντιστροφής είναι φανερό από τον ορισμό ότι απεικονίζεται στον εαυτό της χωρίς να μένει σημειακά αναλλοίωτη.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η αντιστροφή διατηρεί τον διπλό λόγο και χρησιμεύει στον ορισμό του Poincare μήκους.

Πρόταση 1.4.10. Αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα διακεκριμένα σημεία διαφορετικά από το κέντρο Ο κύκλου γ, τότε (ΑΒ, ΓΔ) =(Α΄Β΄, Γ΄Δ΄).

Απόδειξη: Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΓ΄Α΄ είναι όμοια άρα: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{A'\Gamma'}}{\overline{O\Gamma'}}\\[2ex]\dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{O\mathrm{A}}}=\dfrac{\overline{A'\Delta'}}{\overline{O\Delta'}}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{A\Delta}}=\dfrac{\overline{A'\Gamma'}}{\overline{A'\Delta'}}\dfrac{\overline{O\Delta'}}{\overline{O\Gamma'}}$ και όμοια $\dfrac{\overline{\mathrm{B}\Delta}}{\overline{\mathrm{B}\Gamma}}=\dfrac{\overline{\mathrm{B}'\Delta'}}{\overline{\mathrm{B}'\Gamma'}}\dfrac{\overline{O\Gamma'}}{\overline{O\Delta'}}$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 1.4.11. Αν δ κύκλος ορθογώνιος στον γ τότε η αντιστροφή στον δ απεικονίζει το εσωτερικό του γ επί του εαυτού του. Η αντιστροφή αυτή διατηρεί το ανήκει, το μεταξύ και την σύμπτωση με το νόημα που έχουν στο μοντέλο του Poincare του δίσκου.

Απόδειξη:

Το πόρισμα στην πρόταση 1.4.6 μας πληροφορεί ότι ο γ απεικονίζεται επί του εαυτού του. Αν τώρα το Ρ είναι εντός του γ και Ρ΄ το αντίστροφό του ως προς τον δ που ας έχει κέντρο Κ και ακτίνα σ έχουμε ότι η ΚΡ τέμνει τον γ στα Δ και Δ΄. Αφού το Ρ είναι μεταξύ των Δ και Δ΄ ισχύει ΚΔ<ΚΡ<ΚΔ΄ από όπου $\dfrac{\sigma^2}{\overline{\mathrm{K}\Delta}}>\dfrac{\sigma^2}{\overline{\mathrm{KP}}}>\dfrac{\sigma^2}{\overline{\mathrm{K}\Delta'}}\Rightarrow\overline{\mathrm{K}\Delta'}>\overline{\mathrm{KP}'}>\overline{\mathrm{K}\Delta}$ άρα το Ρ΄ είναι εντός του γ. Από τις προτάσεις 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8 η αντιστροφή στον δ απεικονίζει κάθε κύκλο σ ορθογώνιο στο γ σε κύκλο σ΄ ορθογώνιο στο γ ή σε ευθεία σ΄ ορθογώνια στο γ. Προφανώς κάθε διάμετρος του γ απεικονίζεται σε κύκλο σ΄ που είναι ορθογώνιος στον γ μέσω της αντιστροφής στον σ. Άρα Ρ-ευθείες απεικονίζονται σε Ρ-ευθείες. Η σύμπτωση τμημάτων διατηρείται αφού διατηρείται ο διπλός λόγος. Επίσης η σύμπτωση γωνιών διατηρείται λόγω της πρότασης 1.4.9. Επίσης το μεταξύ διατηρείται αφού διατηρείται η Ρ- απόσταση.

Αυτό που είναι δυσκολότερο στην απόδειξή του είναι η πιστοποίηση του αξιώματος Π-Γ-Π για τρίγωνα. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε τρίγωνο ΑΒΓ είναι συμπτώσιμο με ένα τρίγωνο που έχει κορυφή το κέντρο Ο του γ. Πράγματι αν δ ο ορθογώνιος κύκλος μεταξύ από τα Α,Β στον γ και σ ο από τα Α, Γ ο δ τέμνει στον σ και σε ένα άλλο σημείο Α΄ που είναι το αντίστροφο του Α στον γ. Ας είναι ε ο κύκλος κέντρου

Α΄ και ακτίνας ρ με $\rho^2 = (\overline{AA'})(\overline{A'O}) = (\overline{A'O})^2 - r^2$. Η δεύτερη σχέση δείχνει ότι ο ε είναι ορθογώνιος στον γ. Από τον ορισμό του ε το Ο είναι το αντίστροφο του Α στον ε και από την πρόταση 1.4.11 η αντιστροφή στον ε απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρίγωνο ΟΧΥ που έχει όλα τα στοιχεία Ρ-ίσα με το ΑΒΓ.

Έτσι για την πιστοποίηση του Π-Γ-Π δεν έχουμε παρά να συγκρίνουμε δύο τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ που έχουν ΟΑ=ΟΑ΄ ΟΒ=ΟΒ΄ και τις γωνίες $\measuredangle AOB, \measuredangle A'OB'$ ίσες. Αλλά δύο τέτοια τρίγωνα είναι συμπτώσιμα με μια ευκλείδεια στροφή η ανάκλαση γύρω από το Ο. Οι ευκλείδειες στροφές περί του Ο είναι γινόμενα δύο ανακλάσεων με άξονες που τέμνονται στο Ο και οι ανακλάσεις με άξονα που διέρχεται από το Ο είναι ειδική περίπτωση αντιστροφών σε ευθείες ορθογώνιες στον γ. Άρα το θεώρημα έχει πλήρως αποδειχθεί.

1.4..4 Ο τύπος της γωνίας παραλληλίας στο Poincare δίσκο

Λήμμα 1.4.4 Αν d(OB)=d, τότε $\overline{OB} = r\dfrac{e^d - 1}{e^d + 1}$ όπου r η ακτίνα του δίσκου μας.

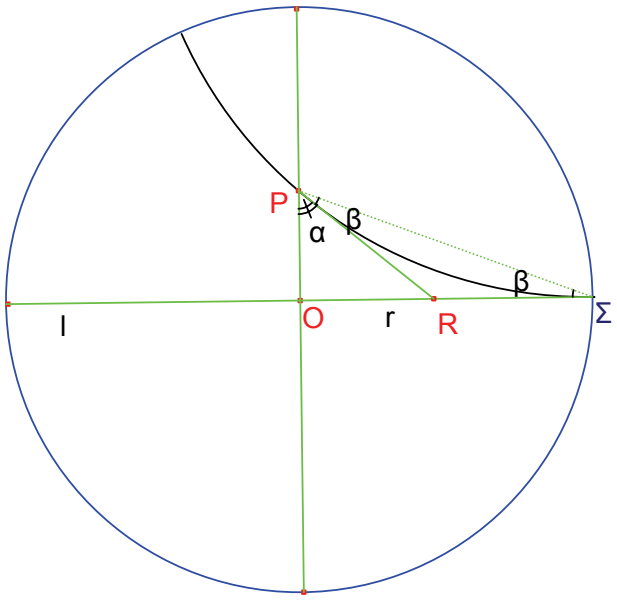
Απόδειξη. Αν Γ, Δ τα άκρα της διαμέτρου ΟΒ με Γ*Ο*Β*, τότε d= log(ΟΒ,ΓΔ) άρα :

$e^d = (OB, \Gamma\Delta) = \dfrac{\overline{O\Gamma}}{\overline{O\Delta}}\dfrac{\overline{B\Delta}}{\overline{B\Gamma}} = \dfrac{\overline{B\Delta}}{\overline{B\Gamma}} = \dfrac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}}$ και λύνοντας την εξίσωση αυτή για $\overline{OB}$ προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.4.1. Στον δίσκο του Poincare ο τύπος για τη γωνία παραλληλίας είναι :

$e^{-d} = \varepsilon\phi(\dfrac{\Pi(d)}{2})$

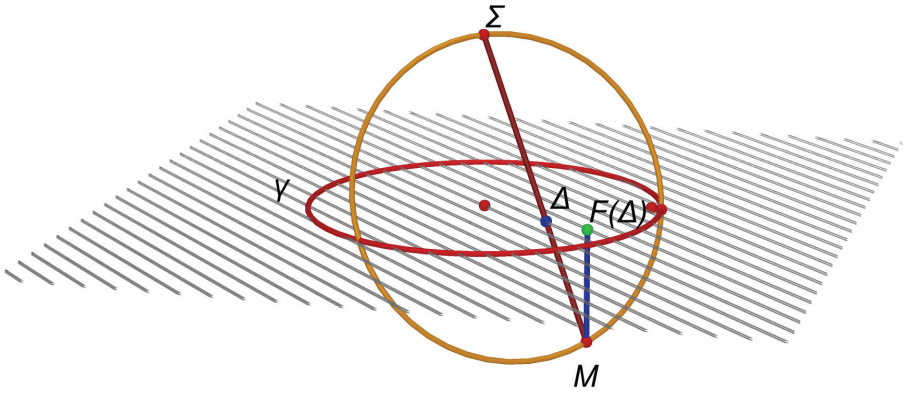
Απόδειξη.



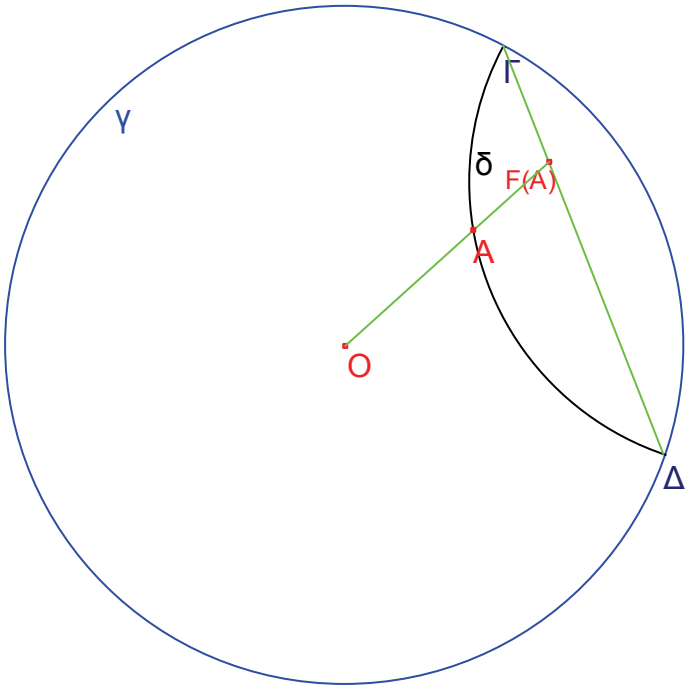
Από τον ορισμό της η γωνία παραλληλίας είναι ο αριθμός των ακτινίων της γωνία που μια οριακά παράλληλη ημιευθεία σχηματίζει με μια ευθεία l. Μπορούμε όπως είδαμε να υποθέσουμε ότι η l είναι διάμετρος στο Poincare μοντέλο οπότε η οριακά παράλληλος είναι τόξο κύκλου ορθογώνιου στον μοναδιαίο. Αν PO η κάθετη στην l στο O η εφαπτομένη στο τόξο στο σημείο P τέμνει την OΣ σε κάποιο σημείο R και είναι $\measuredangle R\Sigma \mathrm{P} = \measuredangle \Sigma \mathrm{P} R = \measuredangle \beta$. Αν α η γωνία παραλληλίας ισχύει β=π/4-α/2. Επίσης $\overline{\mathrm{PO}} = r\varepsilon\phi\beta$ έτσι έχουμε:: $e^d = \dfrac{1+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\beta}$. Χρησιμοποιώντας και την τριγωνομετρική ταυτότητα $\varepsilon\phi(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}) = \dfrac{1-\varepsilon\phi(\alpha/2)}{1+\varepsilon\phi(\alpha/2)}$, φθάνουμε στο ζητούμενο τύπο όπου βέβαια α = Π(d).

1.4..5 Η προβολική φύση του μοντέλου των Beltrami- Klein.

Έχοντας στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξει ότι η αναπαράσταση στο Poincare μοντέλο του δίσκου είναι πράγματι ένα μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας είναι εύκολο να δούμε ότι και το μοντέλο του Klein είναι το ίδιο. Θα χρησιμοποιήσουμε για αυτό τον ισομορφισμό των δύο μοντέλων που σημειώσαμε νωρίτερα. Συγκεκριμένα θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα Σ στο καρτεσιανό μοντέλο που έχει εξίσωση : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Ας είναι γ ο μοναδιαίος κύκλος που προσδιορίζεται από την τομή της σφαίρας με το επίπεδο x_3=0. Θα αναπαριστούμε και τον Poincare δίσκο και το μοντέλο του Klein με τα εσωτερικά σημεία του γ. Ο ισομορφισμός μας F θα είναι η σύνθεση δύο απεικονίσεων. Για την πρώτη, αν N ο βόρειος πόλος της σφαίρας (το σημείο (0,0,1)) απεικονίζουμε κάθε σημείο Δ του Poinacare δίσκου στη στερεογραφική του προβολή M στο νότιο ημισφαίριο (ισοδύναμα το M είναι η δεύτερη τομή της ευθείας NΔ με την σφαίρα μας). Η δεύτερη θα είναι η κατακόρυφη προβολή του M στο οριζόντιο επίπεδο δηλαδή σε σημείο εσωτερικό του γ. Η F είναι η σύνθεση αυτών των δύο.



Από εφαρμογή ομοίων τριγώνων μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ο ισομορφισμός F δίνεται από τον τύπο : $F(x_1,x_2)=(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2})$. Εύκολα επίσης καταλαβαίνουμε ότι η F είναι 1-1 επί του δίσκου που ορίζεται από τον γ. Είναι επίσης φανερό ότι μια διάμετρος ΓΔ του γ απεικονίζεται στον εαυτό της. Αν λοιπόν θεωρήσουμε κύκλο δ ορθογώνιο στο γ με κοινά τους σημεία Γ, Δ θα αποδείξουμε ότι το τόξο ΓΔ απεικονίζεται μέσω της F στη χορδή ΓΔ. Συγκεκριμένα αν Α σημείο του τόξου τότε το F(A) θα είναι η τομή της χορδής ΓΔ με την ευθεία ΟΑ.



Έστω Κ (α, β) το κέντρο του δ τότε αφού ο δ είναι ορθογώνιος στον γ θα είναι $\alpha^2+\beta^2=1+\rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του δ. Η εξίσωση του δ θα είναι $(x_1-a)^2+(x_2-\beta)^2=\rho^2$ που οδηγεί στην $x_1^2+x_2^2-2ax_1-2\beta x_2+1=0$. Τα σημεία Γ, Δ επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση καθώς και την $x_1^2+x_2^2=1$ από όπου συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της χορδής ΓΔ είναι $ax_1+\beta x_2=1$. Αν Α(x, y) τότε $x^2+y^2-2ax-2\beta y+1=0 \Leftrightarrow a\frac{2x}{x^2+y^2+1}+\beta\frac{2y}{x^2+y^2+1}=1$ δηλαδή το Α ανήκει στο τόξο ΓΔ αν και μόνον αν το F(A) ανήκει στη χορδή ΓΔ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε σύμπτωση στο μοντέλο του Klein μέσω του ισομορφισμού F. Συγκεκριμένα δύο τμήματα ή γωνίες θα είναι ίσα αν και μόνον αν οι αντίστροφες εικόνες τους μέσω του ισομορφισμού F στο μοντέλο του δίσκου του Poincare είναι ίσες. Η πιστοποίηση των αξιωμάτων σύμπτωσης είναι τότε άμεση.

Θέλοντας ακόμα να ορίσουμε την απόσταση στο μοντέλο του Klein ώστε η απόσταση δύο σημείων του να είναι ίση με την απόσταση των αντίστροφων εικόνων τους στον Poincare δίσκο μπορούμε να οδηγηθούμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.4 Αν Α, Β δύο διακεκριμένα σημεία εντός του γ και Γ, Δ τα άκρα της χορδής ΑΒ τότε το Klein μήκος του τμήματος ΑΒ δίνεται από τον τύπο: $d(AB)= ½|\log(AB,ΓΔ)|$ (log νεπέριος λογάριθμος).

Την ισομορφία των δύο μοντέλων του Poincare θα την αποδείξουμε πλήρως στο επόμενο κεφάλαιο.

2 Σημειακοί μετασχηματισμοί

2.1 Οι Σημειακοί μετασχηματισμοί στην ουδέτερη Γεωμετρία.

Το 1872 ένα χρόνο μετά την δημοσίευση των προβολικών μοντέλων για τις μη ευκλείδειες Γεωμετρίες ο Felix Klein εξελέγχει στην έδρα του Πανεπιστημίου του Erlangen (στην ηλικία των 23). Πρότεινε μια νέα ενοποιητική αρχή για την ταξινόμηση των διαφόρων γεωμετριών που αναπτύσσονταν ραγδαία και για την ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ των. Αυτό το πρόγραμμα (Erlanger Programme) είχε μια τεράστια απήχηση σε όλο το φάσμα των μαθηματικών μέχρι σήμερα.

Η έννοια κλειδί σύμφωνα με τον Klein, είναι η ομάδα των αυτομορφισμών μιας μαθηματικής δομής. Ένας ισομορφισμός που απεικονίζει ένα μοντέλο επί του εαυτού του καλείται αυτομορφισμός του μοντέλου, έτσι ένας αυτομορφισμός είναι μια ένα προς ένα επί απεικόνιση κάθε θεμελιώδους συνόλου στοιχείων του μοντέλου στον εαυτό του που διατηρεί τις βασικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του.

Η σπουδαιότητα της ομάδας αυτομορφισμών πρωτοαναγνωρίστηκε στο πρόβλημα επίλυσης εξισώσεων με ριζικά. Ο Evariste Galois (1811-1832) έδειξε ότι μια λύση με ριζικά ήταν δυνατή αν και μόνον αν η ομάδα αυτομορφισμών του σώματος επέκτασης ήταν επιλύσιμη ομάδα. Αυτό οδήγησε στην ανακάλυψη από τον Abel ότι η γενική εξίσωση $5^{ου}$ βαθμού δεν είναι επιλύσιμη με ριζικά. Ο Klein αργότερα ανακάλυψε μια σχέση μεταξύ των στροφών ενός δωδεκαέδρου και των ριζών της εξίσωσης πέμπτου βαθμού που εξηγούσε γιατί η τελευταία δεν μπορούσε να λυθεί με ελλειπτικές συναρτήσεις.

Παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα αυτομορφισμού.

Στην συσχετισμένη Γεωμετρία τα βασικά μας σύνολα είναι το σύνολο σημείων και το σύνολο ευθειών. Η μοναδική βασική σχέση είναι αυτή του ανήκει. Έτσι ένας αυτομορφισμός T θα απεικονίζει ένα σημείο A και μια ευθεία l σε ένα σημείο A΄ και μια ευθεία l΄ έτσι ώστε αν το σημείο A ανήκει στην l το ίδιο να συμβαίνει και με τις εικόνες A΄ και l΄. Από αξίωμα όμως μια ευθεία καθορίζεται μοναδικά από δύο σημεία της. Έτσι

T(PQ) = P΄ Q΄

Αφού ο τυχών αυτομορφισμός διατηρεί την σχέση του ανήκει μεταξύ σημείων και ευθειών θα έχει την ιδιότητα τρία σημεία να είναι συνευθειακά αν και μόνο αν οι εικόνες τους κάνουν το ίδιο. Έτσι ένας αυτομορφισμός της συσχετισμένης Γεωμετρίας θα λέγεται συγγραμμικότητα.

Για παράδειγμα στο επίπεδο των τριών σημείων κάθε μετάθεση των τριών μη συγγραμμικών σημείων είναι συγγραμμικότητα. Παρόλα αυτά όμως στο επίπεδο των

7 σημείων από τις 7! =5040 μεταθέσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι μόνο 168 είναι συγγραμμικότητες.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ένας αυτομορφισμός δεν διατηρεί μόνο τις βασικές σχέσεις αλλά και όσες παράγονται από αυτές. Παράδειγμα οι συγγραμμικότητες του συσχετισμένου επιπέδου διατηρούν την παραλληλία.

Ομάδες

Μετασχηματισμοί από ένα σύνολο επί του εαυτού του μπορούν να συντεθούν εφαρμόζοντας πρώτα τον πρώτο μετασχηματισμό T και κατόπιν έναν δεύτερο S. Ορίζεται έτσι ένας μετασχηματισμός γινόμενο ST για το οποίο ST(x)= S(T(x)).

Με το γινόμενο αυτό το σύνολο $\wp$ των αυτομορφισμών αποκτά δομή ομάδας, δηλαδή ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

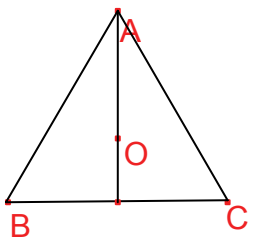
$S,T \in \wp \Rightarrow ST \in \wp$.

$I \in \wp$ (όπου I είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός)

$T \in \wp \Rightarrow T^{-1} \in \wp$ (όπου T^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση)

S(TU) = (ST)U για κάθε S, T, U $\in \wp$

Για παράδειγμα θεωρούμε τις στροφές γύρω από ένα σημείο O. Αν T είναι μια στροφή κατά t^0 και S μια άλλη κατά s^0 τότε ο ST είναι μια στροφή κατά $(t+s)^0$ ο T^{-1} είναι στροφή κατά t^0 κατά την αντίστροφή φορά και η ταυτοτική απεικόνιση μπορεί να θεωρηθεί στροφή κατά 0^0 .



Εδώ να δοθεί προσοχή ότι το γινόμενο ST δεν είναι πάντα ίσο με το γινόμενο TS. Για παράδειγμα αν A,B,C ισόπλευρο τρίγωνο κέντρου O και S η στροφή κατά το O κατά 120^0 (με τη φορά του ρολογιού) ενώ T η ανάκλαση κατά την AO η ST αφήνει το B αναλλοίωτο και αλλάζει αμοιβαία τη θέση των A, C, ενώ η TS αφήνει αναλλοίωτο το C και αντιμεταθέτει τα A, B.

Αν, παρόλα αυτά συμβαίνει ST=TS θα λέμε ότι οι δύο μετασχηματισμοί αντιμετατίθενται και μια συλλογή από μετασχηματισμούς που κάθε ζεύγος τους αντιμετατίθεται θα λέγεται αβελιανή προς τιμήν του Νορβηγού μαθηματικού N. H. Abel.) Για παράδειγμα δύο οποιεσδήποτε στροφές γύρω από σημείο O αντιμετατίθενται.

Όση περισσότερη δομή έχει μια γεωμετρία, τόσο μικρότερη είναι η ομάδα των αυτομορφισμών της, έτσι η ομάδα αυτομορφισμών της ουδέτερης γεωμετρίας είναι η υποομάδα από τις συγγραμμικότητες T για τις οποίες το μεταξύ και η ισότητα είναι αναλλοίωτες, δηλαδή για τις οποίες

$A*B*C \Rightarrow A' * B' * C'$

$AB \cong CD \Rightarrow A'B' \cong C'D'$

(συστηματικά θα χρησιμοποιούμε Χ΄ για να δηλώσουμε την εικόνα οποιαδήποτε αντικειμένου Χ κάτω από έναν μετασχηματισμό Τ)

Δεν υποθέσαμε ότι η Τ διατηρεί τις γωνίες γιατί αυτό μπορεί να αποδειχθεί.

Αν $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$ μπορούμε από το αξίωμα C-1 να υποθέσουμε ότι $AB \cong DE$ και $BC \cong EF$, άρα και $AC \cong DF$ (Π-Γ-Π) και αφού ο Τ διατηρεί τα μήκη θα είναι $\triangle A'B'C' = \triangle D'E'F'$ (Π-Π-Π) έτσι $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle D'E'F'$. Επίσης είναι γεγονός από τα αξιώματα Β-1 και Β-3 ότι αν ένας μετασχηματισμός διατηρεί το μεταξύ πρέπει να είναι συγγραμμικότητα.

Ο κυρίως σκοπός των παρακάτω θα είναι αναλυτικά να προσδιορίσουμε όλους τους αυτομορφισμούς του Ευκλειδείου και Υπερβολικού επιπέδου και να τους ταξινομήσουμε σύμφωνα με τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, ιδιαιτέρως σύμφωνα με τις αναλλοίωτές τους.

«Αναλλοίωτες» και «ομάδα» είναι οι καθολικές έννοιες στο πρόγραμμα Erlanger. Οι ομάδες μετασχηματισμών είχαν χρησιμοποιηθεί στη γεωμετρία για πολλά χρόνια αλλά ο Klein πρώτος σκέφθηκε να αντιστρέψει τους ρόλους και να κάνει τη δομή ομάδας το πρωτεύων αντικείμενο και να το αφήσει να δράσει σε διάφορες γεωμετρίες αναζητώντας αναλλοίωτες. Για παράδειγμα η ομάδα PSL(2,R) των 2 επι 2 προβολικών μετασχηματισμών με πραγματικούς συντελεστές δρα τόσο στο υπερβολικό επίπεδο όσο και στην πραγματική προβολική ευθεία, για την δεύτερη δράση ο διπλός λόγος 4 σημείων είναι η θεμελιώδης αναλλοίωτη ενώ για την πρώτη δράση το μήκος τμήματος (που υπολογίζεται από το διπλό λόγο στα μοντέλα του Klein και του Poincare) είναι η θεμελιώδης αναλλοίωτη.

Πιστοί στις οδηγίες του Klein ο Cayley και ο Sylvester ανέπτυξαν μια γενική θεωρία αλγεβρικών αναλλοίωτων μαζί μια συστηματική διαδικασία προσδιορισμού γεννητόρων και σχέσεων για αυτές[3]. Ο ίδιος ο Klein πρότεινε τη μετάφραση των γεωμετρικών προβλημάτων στην προβολική γεωμετρία σε αλγεβρικά προβλήματα στη θεωρία αναλλοίωτων, όπου τέτοια προβλήματα μπορούσαν να λυθούν με γνωστές αλγεβρικές μεθόδους.

Η ιδέα του Klein για αναζήτηση διαφόρων δράσεων ή αναπαραστάσεων μιας ομάδας και των αναλλοίωτων της αποδείχθηκε πολύ παραγωγική για πολλούς κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής και όχι μόνο της γεωμετρίας.

Στη φυσική, για παράδειγμα, το αναλλοίωτο των εξισώσεων του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorenz υπέδειξαν στον Minkowski μια νέα γεωμετρία χώρου-χρόνου στην οποία η ομάδα αυτομορφισμών είναι η ομάδα Lorenz. Αυτό ήταν η αρχή της θεωρίας σχετικότητας για την οποία ο Einstien σε κάποιο σημείο σκέφθηκε το όνομα "Invariantentheorie". Στην ατομική θεωρία οι κανονικότητες που πηγάζουν από τον περιοδικό πίνακα είναι αποτέλεσμα

[3] Dieudonne and J. Carrell, *Invariant Theory, Old and new*, Academic Press, 1971.

του αναλλοίωτου κάτω από τις στροφές. Στην στοιχειώδη πρακτική φυσική θεωρήσεις αναλλοίωτων και συμμετρίας έχουν οδηγήσει σε διάφορες μη τετριμμένες προβλέψεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε τη θεώρηση που δίνει η άποψη του Klein στην επίπεδη Ευκλείδεια και Υπερβολική Γεωμετρία. Από τα αξιώματά μας θα εξάγουμε μια περιγραφή όλων των δυνατών μετατοπίσεων δείχνοντας ότι μπορούν να δομηθούν από ανακλάσεις. Έπειτα θα δείξουμε πως μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς στα μοντέλα χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς με συντεταγμένες στα μοντέλα μας.

2.2 Α. Ισομετρίες και αυτομορφισμοί, η συνθετική προσέγγιση

Ορισμός. Ένας μετασχηματισμός Τ του επιπέδου επί του εαυτού του θα λέγεται ισομετρία αν το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση του Τ , ισοδύναμα, αν για κάθε τμήμα ΑΒ, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$.

Πρόταση 2.2.1. (α) Κάθε ισομετρία είναι αυτομορφισμός. (β) Οι ισομετρίες συγκροτούν μια υποομάδα της ομάδας των αυτομορφισμών.

Απόδειξη: (α) Αν Τ μια ισομετρία και $\mathrm{AB} \cong$ ΓΕ τότε $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\Gamma'\Delta'}$ άρα και $\mathrm{A'B'} \cong \Gamma'\Delta'$. Το ότι η Τ διατηρεί το μεταξύ έπεται από το θεώρημα 4.3(9) που λέει ότι Α*Β*Γ αν και μόνον αν $\overline{\mathrm{A\Gamma}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{B\Gamma}}$.

(β) Είναι μια απλή επαλήθευση των ιδιοτήτων του ορισμού της ομάδας.

Πρόταση 2.2.2 Οι αυτομορφισμοί διατηρούν τα μέτρα γωνιών

Απόδειξη: Έστω ότι η $\measuredangle\mathrm{A}$ έχει μέτρο $(\measuredangle A)^0$ και η εικόνα της ένα διαφορετικό πιθανόν μέτρο $(\measuredangle A')^0$. Τότε θα δείξουμε ότι το $(\measuredangle A')^0$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του μέτρου γωνιών **για τη γωνία** $\measuredangle\mathrm{A}$. Πράγματι:

(0) Ο $(\measuredangle A')^0$ είναι αριθμός μεταξύ του 0 και του 180.

(1) Αν $(\measuredangle A')^0$=90 τότε η $\measuredangle A'$ είναι ορθή. Αλλά οι αυτομορφισμοί διατηρούν τις γωνίες άρα και η γωνία $\measuredangle\mathrm{A}$ είναι ορθή

(2) $(\measuredangle A')^0 = (\measuredangle B')^0$ αν και μόνον αν $\measuredangle A' = \measuredangle B'$ άρα και $\measuredangle\mathrm{A} = \measuredangle B$.

(3) Αν $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο εσωτερικό της $\measuredangle\Delta\mathrm{AB}$, τότε
$$\measuredangle\Delta\mathrm{AB} = \measuredangle\Delta\mathrm{A}\Gamma + \measuredangle\Gamma\mathrm{AB} \Rightarrow \measuredangle\Delta'\mathrm{A'B'} = \measuredangle\Delta'\mathrm{A'}\Gamma' + \measuredangle\Gamma'\mathrm{A'B'}$$
$$\Rightarrow (\measuredangle\Delta'\mathrm{A'B'})^0 + (\measuredangle\Delta'\mathrm{A'}\Gamma')^0 + (\measuredangle\Gamma'\mathrm{A'B'})^0$$

(4) Για κάθε πραγματικό x μεταξύ του 0 και του 180 υπάρχει μια γωνία $\measuredangle\mathrm{A'}$ τέτοια ώστε $(\measuredangle\mathrm{A'})^0 = x^0$.

(5) Αν $\measuredangle B$ παραπληρωματική της $\measuredangle\mathrm{A}$ τότε και $\measuredangle B'$ παραπληρωματική της $\measuredangle\mathrm{A'}$ αφού ο αυτομορφισμός είναι συγγραμμικότητα άρα και $(\measuredangle A)^0 + (\measuredangle B)^0 = 180^0$.

$$(6)\quad \begin{array}{l}(\measuredangle A')^0 > (\measuredangle B')^0 \Leftrightarrow \measuredangle A' > \measuredangle B' \Leftrightarrow \measuredangle A' = \measuredangle B' + \measuredangle \phi' \\ \Leftrightarrow \measuredangle A = \measuredangle B + \measuredangle \phi \Leftrightarrow \measuredangle A > \measuredangle B\end{array}$$

Το μέτρο γωνίας όμως είναι μοναδικό άρα $(\measuredangle A)^0 = (\measuredangle A')^0$.

Πόρισμα 1. Αν $\triangle$ Α΄ Β΄ Γ΄ η εικόνα του $\triangle$ ΑΒΓ μέσω ενός αυτομορφισμού τότε $\triangle$ Α΄Β΄ Γ΄ όμοιο με το $\triangle$ ΑΒΓ.

Απόδειξη : Οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.

Πόρισμα 2. Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε αυτομορφισμός είναι ισομετρία.

Απόδειξη: Αν ΑΒ τμήμα και Γ σημείο εκτός αυτού τότε $\triangle$ ΑΒΓ όμοιο με το $\triangle$ Α΄Β΄Γ΄, άρα στην υπερβολική γεωμετρία και ίσα. Επομένως $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

Πόρισμα 3. Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε ισομετρία απεικονίζει ασυμπτωτικά παράλληλες ευθείες σε ασυμπτωτικά παράλληλες και παράλληλες με κοινή κάθετο σε παράλληλες με κοινή κάθετο.

Απόδειξη: Αν οι l, m έχουν κοινή κάθετο s, οι l΄, m΄ έχουν κοινή κάθετο την s΄. Αν οι l, m είναι ασυμπτωτικά παράλληλες οι l΄ , m΄ είναι παράλληλες αφού η Τ είναι συγραμμικότητα και αν είχαν κοινή κάθετο s΄ η s θα ήταν κοινή κάθετος των l,m.

Θα δώσουμε έναν ορισμό για την ομοιότητα στην Ευκλείδεια γεωμετρία και θα δούμε ότι οι έννοιες του αυτομορφισμού (επομένως και της ισομετρίας) και της ομοιότητας στην περίπτωση της υπερβολικής γεωμετρίας ταυτίζονται.

Ορισμός : Ομοιότητα είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μεταξύ και τα μέτρα των γωνιών.

Παράδειγμα ομοιότητας στο Ευκλείδειο επίπεδο είναι η ομοιοθεσία κέντρου Ο και λόγου $\kappa \neq 0$: Αν κ θετικό (ή κ αρνητικό) η ομοιοθεσία κέντρου Ο απεικονίζει κάθε σημείο Α στο μοναδικό σημείο Α΄ της $\overrightarrow{OA}$ (ή στην αντίθετη της $\overrightarrow{OA}$) έτσι ώστε $\overline{OA'} = |\kappa|\,\overline{OA}$. Αν εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες με αρχή το Ο, ο μετασχηματισμός απεικονίζει το (x,y) στο (kx, ky). Έτσι μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $\overline{A'B'} = |\kappa|\,\overline{AB}$. Από αυτή τη σχέση μπορούμε να δείξουμε ότι ο Τ διατηρεί το μεταξύ και την ισότητα μέτρου γωνιών, που είναι το αντίστροφο στην ακόλουθη γενικότερη πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. Ένας μετασχηματισμός Τ του Ευκλειδείου επιπέδου είναι ομοιότητα αν και μόνον αν υπάρχει θετική σταθερά κ τέτοια ώστε $\overline{A'B'} = \kappa\overline{AB}$ για κάθε τμήμα ΑΒ.

Απόδειξη Έστω ότι ο μετασχηματισμός Τ είναι ομοιότητα. Για το τυχόν τμήμα ΑΒ επιλέγουμε σημείο Γ εκτός της ΑΒ. Τότε $\triangle$Α΄Β΄ Γ΄ όμοιο με το $\triangle$ΑΒΓ αφού ο Τ διατηρεί την ισότητα μέτρου γωνιών άρα και την ισότητα γωνιών. Από το βασικό θεώρημα στα όμοια τρίγωνα, υπάρχει θετική σταθερά κ ώστε οι λόγοι των ομολόγων πλευρών να είναι κ. Αν Δ τυχόν άλλο σημείο, το ίδιο επιχείρημα στο $\triangle$ΑΓΔ δίνει ότι

$\overline{\Gamma'\Delta'} = \kappa\overline{\Gamma\Delta}$. Αν έχουμε σημεία Δ,Ε επί της ΑΒ, εφαρμόζουμε το επιχείρημα στο $\Delta\Gamma\Delta E$ και έτσι πάλι $\overline{\Delta'E'} = \kappa\overline{\Delta E}$.

Αντίστροφα έστω ότι υπάρχει θετικός κ ώστε $\overline{A'B'} = \kappa\overline{AB}$ για κάθε ΑΒ. Τότε αν Α*Β*Γ τότε $A\Gamma > AB$ άρα από την 10 του θεωρήματος για το μέτρο τμημάτων $\overline{AB} < \overline{A\Gamma}$ συνεπώς $\overline{A'B'} < \overline{A'\Gamma'}$ και έτσι $A'\Gamma' > A'B'$ και αφού τα Α΄ Β΄ Γ΄ συνευθειακά θα είναι Α΄*Β΄*Γ΄. Επιπλέον αν θεωρήσουμε γωνία $\measuredangle AB\Gamma$ είναι $\Delta A'B'\Gamma'$ όμοιο με το $\Delta AB\Gamma$ γιατί έχουν τις πλευρές ανάλογες άρα $\measuredangle AB\Gamma = \measuredangle A'B'\Gamma' \Leftrightarrow (\measuredangle A'B'\Gamma')^0 = (\measuredangle AB\Gamma)^0$.

Πόρισμα. Ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός του Ευκλειδείου επιπέδου επί του εαυτού του είναι αυτομορφισμός (ισοδύναμα ομοιότητα) εάν και μόνον εάν για κάθε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ έχουμε $\Delta AB\Gamma \sim \Delta A'B'\Gamma$

Μπορούμε να συμπεράνουμε από αυτά τα πορίσματα ότι τα υπερβολικά επίπεδα έχουν αναλλοίωτες συναρτήσεις απόστασης, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο στα Ευκλείδεια. Σύμφωνα με την άποψη του Klein, κάθε συνάρτηση ή σχέση που δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από την ομάδα των αυτομορφισμών μιας δομής δεν είναι ένα ενδιαφέρον κομμάτι της θεωρίας αυτής της δομής αλλά είναι μέρος της νέας δομής που περιγράφεται από τους μετασχηματισμούς που αφήνουν τη σχέση αναλλοίωτη. Έτσι αν θέλουμε η απόσταση να είναι κομμάτι της Ευκλείδειας γεωμετρίας πρέπει να ξαναορίσουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία σαν την μελέτη των αναλλοίωτων της ομάδας των Ευκλειδείων ισομετριών μόνο. Ο Klein πρότεινε το όνομα παραβολική Γεωμετρία για τη μελέτη των αναλλοίωτων ολόκληρης της ομάδας των ομοιοτήτων. Εμείς δεν υιοθετούμε εδώ αυτή την ορολογία.

2.3 Ανακλάσεις Ισομετρίες και αυτομορφισμοί

Ορισμός. Ένας μετασχηματισμός Τ του επιπέδου επί του εαυτού του θα λέγεται ισομετρία αν το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση του Τ , ισοδύναμα, αν για κάθε τμήμα ΑΒ, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Πρόταση 2.3.1. (α) Κάθε ισομετρία είναι αυτομορφισμός. (β) Οι ισομετρίες συγκροτούν μια υποομάδα της ομάδας των αυτομορφισμών.

Απόδειξη: (α) Αν Τ μια ισομετρία και $AB \cong \Gamma E$ τότε $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\Gamma'\Delta'}$ άρα και $A'B' \cong \Gamma'\Delta'$. Το ότι η Τ διατηρεί το μεταξύ έπεται από το θεώρημα ύπαρξης μέτρου που λέει ότι Α*Β*Γ αν και μόνον αν $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$.

(β) Είναι μια απλή επαλήθευση των ιδιοτήτων του ορισμού της ομάδας.

Πρόταση 2.3.2 Οι αυτομορφισμοί διατηρούν τα μέτρα γωνιών

Απόδειξη: Έστω ότι η $\measuredangle$Α έχει μέτρο $(\measuredangle A)^0$ και η εικόνα της ένα διαφορετικό πιθανόν μέτρο $(\measuredangle A')^0$. Τότε θα δείξουμε ότι το $(\measuredangle A')^0$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του μέτρου γωνιών **για τη γωνία** $\measuredangle$Α. Πράγματι:

(0) Ο $(\measuredangle A')^0$ είναι αριθμός μεταξύ του 0 και του 180.

(7) Αν $(\measuredangle A')^0$=90 τότε η $\measuredangle A'$ είναι ορθή. Αλλά οι αυτομορφισμοί διατηρούν τις γωνίες άρα και η γωνία $\measuredangle$Α είναι ορθή

(8) $(\measuredangle A')^0 = (\measuredangle B')^0$ αν και μόνον αν $\measuredangle A' = \measuredangle B'$ άρα και $\measuredangle \mathrm{A} = \measuredangle B$.

(9) Αν $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο εσωτερικό της $\measuredangle\Delta\mathrm{AB}$, τότε
$$\measuredangle\Delta\mathrm{AB} = \measuredangle\Delta\mathrm{A}\Gamma + \measuredangle\Gamma\mathrm{AB} \Rightarrow \measuredangle\Delta'\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \measuredangle\Delta'\mathrm{A}'\Gamma' + \measuredangle\Gamma'\mathrm{A}'\mathrm{B}'$$
$$\Rightarrow (\measuredangle\Delta'\mathrm{A}'\mathrm{B}')^0 + (\measuredangle\Delta'\mathrm{A}'\Gamma')^0 + (\measuredangle\Gamma'\mathrm{A}'\mathrm{B}')^0 .$$

(10) Για κάθε πραγματικό x μεταξύ του 0 και του 180 υπάρχει μια γωνία $\measuredangle$Α' τέτοια ώστε $(\measuredangle \mathrm{A}')^0 = x^0$.

(11) Αν $\measuredangle B$ παραπληρωματική της $\measuredangle$Α τότε και $\measuredangle B'$ παραπληρωματική της $\measuredangle$Α' αφού ο αυτομορφισμός είναι συγγραμμικότητα άρα και $(\measuredangle A)^0 + (\measuredangle B)^0 = 180^0$.

(12)
$$(\measuredangle A')^0 > (\measuredangle B')^0 \Leftrightarrow \measuredangle A' > \measuredangle B' \Leftrightarrow \measuredangle A' = \measuredangle B' + \measuredangle \phi'$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle A = \measuredangle B + \measuredangle \phi \Leftrightarrow \measuredangle A > \measuredangle B$$

Το μέτρο γωνίας όμως είναι μοναδικό άρα $(\measuredangle A)^0 = (\measuredangle A')^0$.

Πόρισμα 1. Αν $\triangle$Α΄Β΄Γ΄ η εικόνα του $\triangle$ΑΒΓ μέσω ενός αυτομορφισμού τότε $\triangle$Α΄Β΄Γ΄ όμοιο με το $\triangle$ΑΒΓ.

Απόδειξη : Οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.

Πόρισμα 2. Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε αυτομορφισμός είναι ισομετρία.

Απόδειξη: Αν ΑΒ τμήμα και Γ σημείο εκτός αυτού τότε $\triangle$ΑΒΓ όμοιο με το $\triangle$Α΄Β΄Γ΄, άρα στην υπερβολική γεωμετρία και ίσα. Επομένως $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \overline{\mathrm{AB}}$.

Πόρισμα 3. Στην υπερβολική γεωμετρία κάθε ισομετρία απεικονίζει ασυμπτωτικά παράλληλες ευθείες σε ασυμπτωτικά παράλληλες και παράλληλες με κοινή κάθετο σε παράλληλες με κοινή κάθετο.

Απόδειξη: Αν οι l, m έχουν κοινή κάθετο s, οι l΄, m΄ έχουν κοινή κάθετο την s΄. Αν οι l, m είναι ασυμπτωτικά παράλληλες οι l΄ , m΄ είναι παράλληλες αφού η Τ είναι συγραμμικότητα και αν είχαν κοινή κάθετο s΄ η s θα ήταν κοινή κάθετος των l,m.

Θα δώσουμε έναν ορισμό για την ομοιότητα στην Ευκλείδεια γεωμετρία και θα δούμε ότι οι έννοιες του αυτομορφισμού (επομένως και της ισομετρίας) και της ομοιότητας στην περίπτωση της υπερβολικής γεωμετρίας ταυτίζονται.

Ορισμός : Ομοιότητα είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μεταξύ και τα μέτρα των γωνιών.

Παράδειγμα ομοιότητας στο Ευκλείδειο επίπεδο είναι η ομοιοθεσία κέντρου Ο και λόγου $\kappa \neq 0$: Αν κ θετικό (ή κ αρνητικό) η ομοιοθεσία κέντρου Ο απεικονίζει κάθε σημείο Α στο μοναδικό σημείο Α΄ της $\overrightarrow{OA}$ (ή στην αντίθετη της $\overrightarrow{OA}$) έτσι ώστε $\overline{OA'} = |\kappa| \overline{OA}$. Αν εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες με αρχή το Ο, ο μετασχηματισμός απεικονίζει το (x,y) στο (kx, ky). Έτσι μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $\overline{A'B'} = |\kappa| \overline{AB}$. Από αυτή τη σχέση μπορούμε να δείξουμε ότι ο Τ διατηρεί το μεταξύ και την ισότητα μέτρου γωνιών, που είναι το αντίστροφο στην ακόλουθη γενικότερη πρόταση.

Πρόταση 2.3.3. Ένας μετασχηματισμός Τ του Ευκλειδείου επιπέδου είναι ομοιότητα αν και μόνον αν υπάρχει θετική σταθερά κ τέτοια ώστε $\overline{A'B'} = \kappa \overline{AB}$ για κάθε τμήμα ΑΒ.

Απόδειξη Έστω ότι ο μετασχηματισμός Τ είναι ομοιότητα. Για το τυχόν τμήμα ΑΒ επιλέγουμε σημείο Γ εκτός της ΑΒ. Τότε $\triangle$Α΄Β΄Γ΄ όμοιο με το $\triangle$ΑΒΓ αφού ο Τ διατηρεί την ισότητα μέτρου γωνιών άρα και την ισότητα γωνιών. Από το βασικό θεώρημα στα όμοια τρίγωνα, υπάρχει θετική σταθερά κ ώστε οι λόγοι των ομολόγων πλευρών να είναι κ. Αν Δ τυχόν άλλο σημείο, το ίδιο επιχείρημα στο $\triangle$ΑΓΔ δίνει ότι $\overline{\Gamma'\Delta'} = \kappa \overline{\Gamma\Delta}$. Αν έχουμε σημεία Δ,Ε επί της ΑΒ, εφαρμόζουμε το επιχείρημα στο $\triangle$ΓΔΕ και έτσι πάλι $\overline{\Delta'E'} = \kappa \overline{\Delta E}$.

Αντίστροφα έστω ότι υπάρχει θετικός κ ώστε $\overline{A'B'} = \kappa \overline{AB}$ για κάθε ΑΒ. Τότε αν Α*Β*Γ τότε ΑΓ > ΑΒ άρα από την 10 του θεωρήματος για το μέτρο τμημάτων $\overline{AB} < \overline{A\Gamma}$ συνεπώς $\overline{A'B'} < \overline{A'\Gamma'}$ και έτσι Α΄Γ΄ > Α΄Β΄ και αφού τα Α΄, Β΄, Γ΄ συνευθειακά θα είναι Α΄*Β΄*Γ΄. Επιπλέον αν θεωρήσουμε γωνία $\measuredangle$ΑΒΓ είναι $\triangle$Α΄Β΄Γ΄ όμοιο με το $\triangle$ΑΒΓ γιατί έχουν τις πλευρές ανάλογες άρα $\measuredangle ABΓ = \measuredangle A'B'\Gamma' \Leftrightarrow (\measuredangle A'B'\Gamma')^0 = (\measuredangle ABΓ)^0$.

Πόρισμα. Ένας ένα προς ένα μετασχηματισμός του Ευκλειδείου επιπέδου επί του εαυτού του είναι αυτομορφισμός (ισοδύναμα ομοιότητα) εάν και μόνον εάν για κάθε τρίγωνο $\triangle$ΑΒΓ έχουμε $\triangle ABΓ \sim \triangle A'B'\Gamma$

Ο πιο βασικός τύπος ισομετρίας από τον οποίο θα δημιουργήσουμε όλους τους άλλους είναι η ανάκλαση R_m κατά μια ευθεία m, τον άξονά της. Θα συμβολίζουμε την εικόνα σημείου Α κάτω από την R_m με A^m. Αν ανακλάσουμε ένα σημείο κατά έναν άξονα δύο φορές, έρχεται στην αρχική του θέση, έτσι $R_m R_m = I$ ή $R_m = (R_m)^{-1}$. Ένας μετασχηματισμός που είναι ίσος με τον αντιστροφό του θα λέγεται αυτοαντίστροφος (involution). Η ημιστροφή είναι ένα άλλο παράδειγμα αυτοαντίστροφου μετασχηματισμού.

Σταθερό σημείο Α ενός μετασχηματισμού Τ είναι ένα σημείο Α τέτοιο ώστε Α΄ = Α. Τα σταθερά σημεία μιας ανάκλασης είναι τα σημεία του άξονά της. Θα χρησιμοποιήσουμε τα σταθερά σημεία για να κατατάξουμε τις ισομετρίες.

Λήμμα 2.3.1. Αν ένας μετασχηματισμός Τ αφήνει αναλλοίωτα δύο σημεία Α, Β, είναι ισομετρία και αφήνει σταθερό κάθε σημείο στην ευθεία ΑΒ.

Απόδειξη : Αφού ΑΒ= Α΄Β΄ η σταθερά κ στο συμπέρασμα της 2.3.2 είναι 1. Συνεπώς έχουμε ισομετρία. Αν Γ σημείο με Α*Β*Γ τότε Α΄*Β΄*Γ΄ ή Α*Β*Γ΄ και $\overline{\text{ΑΓ}} = \overline{\text{ΑΓ}'}$, συνεπώς Γ= Γ΄.

Λήμμα 2.3.2. Αν ένας μετασχηματισμός Τ αφήνει αναλλοίωτα τρία μη συνευθειακά σημεία είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Απόδειξη: Αν αφήνει αναλλοίωτα τα Α,Β, Γ αφήνει αναλλοίωτο κάθε σημείο των ευθειών που ορίζουν αυτά τα σημεία. Αν Δ σημείο που δεν ανήκει σε αυτές τις ευθείες Θεωρούμε Ε μεταξύ των Α,Β. Η ΔΕ από το θεώρημα Pasch τέμνει και άλλη πλευρά του ΔΑΒΓ σε σημείο Ζ. Τότε όμως τα Ζ, Ε είναι αναλλοίωτα άρα από το προηγούμενο λήμμα και το Δ.

Πρόταση 2.3.4. Αν ένας αυτομορφισμός αφήνει αναλλοίωτα 2 σημεία Α, Β και δεν είναι ο ταυτοτικός είναι η ανάκλαση με άξονα $\overleftrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

Απόδειξη: Το Λήμμα 2.3.1 εξασφαλίζει ότι κάθε σημείο της $\overleftrightarrow{\text{ΑΒ}}$ είναι αναλλοίωτο. Ας είναι Γ εκτός της $\overleftrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και Δ η προβολή του επί της $\overleftrightarrow{\text{ΑΒ}}$. Τότε αφού οι αυτομορφισμοί διατηρούν την καθετότητα το Γ΄ πρέπει να βρίσκεται επί της ΓΔ. Ακόμα $\overline{\text{ΓΔ}} = \overline{\text{Γ}'\text{Δ}}$ και αφού Γ΄ διαφορετικό του Γ (αλλιώς θα είχαμε την ταυτοτική ισομετρία) το Γ΄ είναι η ανάκλαση του Γ με άξονα την $\overleftrightarrow{\text{ΑΒ}}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι μια ισομετρία είναι η ακριβής έννοια που προσδιορίζει η ιδέα του Ευκλείδη να τοποθετούμε ένα τρίγωνο επάνω σε ένα άλλο.

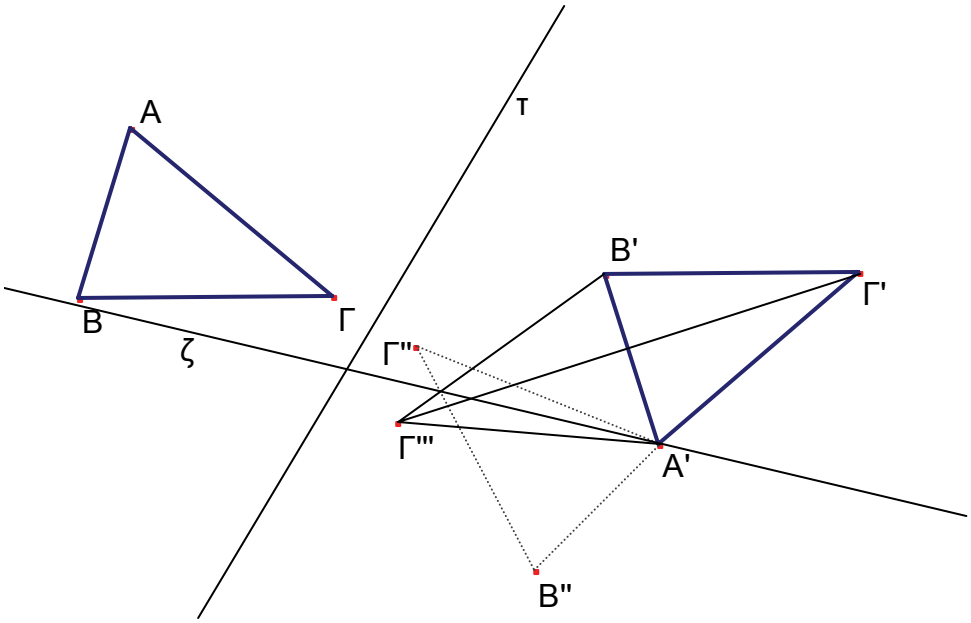
Πρόταση 2.3.5. Είναι $\triangle\text{ΑΒΓ} \cong \triangle\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$ αν και μόνον αν υπάρχει μια ισομετρία που απεικονίζει τα Α, Β, Γ στα Α΄ , Β΄ , Γ΄ αντίστοιχα, και αυτή η ισομετρία είναι μοναδική.

Απόδειξη:

Η μοναδικότητα είναι ένα εύκολο πόρισμα από την 2.3.2 γιατί αν η Τ και η Τ΄ είχαν το ίδιο αποτέλεσμα στα Α,Β, Γ τότε η $T^{-1}T'$ θα άφηνε τα Α, Β, Γ σταθερά άρα θα ήταν η ταυτοτική, επομένως Τ = Τ΄. Είναι επίσης φανερό ότι μια ισομετρία απεικονίζει τρίγωνο σε ίσο τρίγωνο. Ας υποθέσουμε αντίστροφα ότι $\triangle\text{ΑΒΓ} \cong \triangle\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$ και θα κατασκευάσουμε την ισομετρία. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\text{Α} \neq \text{Α}'$ και ας είναι τ η μεσοκάθετος των Α, Α΄. Η ανάκλαση με άξονα τ στέλνει το Α στο Α΄ και τα Β, Γ στα Β΄΄ και Γ΄΄. Αν τα τελευταία είναι τα Β΄, Γ΄ έχουμε τελειώσει, άρα ας υποθέσουμε ότι $\text{Β}' \neq \text{Β}$. Τότε έχουμε $\text{Α}'\text{Β}' \cong \text{ΑΒ} \cong \text{Α}'\text{Β}''$. Αν ζ η μεσοκάθετος των Β΄Β΄΄ η ανάκλαση R_ζ στέλνει το Β΄΄ στο Β΄. Ακόμα αφήνει αναλλοίωτο το Α΄ αφού $\text{Α}'\text{Β}' \cong \text{Α}'\text{Β}''$ άρα το Α΄ ανήκει στη μεσοκάθετο ζ δηλαδή στο άξονα της ανάκλασης.

Έτσι η σύνθεση $R_\zeta R_\tau$ απεικονίζει τα Α, Β στα Α΄, Β΄. Αν απεικονίζει και το Γ στο Γ΄ έχουμε τελειώσει γιαυτό ας υποθέσουμε ότι το απεικονίζει σε ένα σημείο Γ΄΄΄. Θα

δείξουμε ότι η Α΄Β΄ είναι μεσοκάθετος του Γ΄΄΄Γ΄. Πράγματι είναι $\overline{A'\Gamma'} = \overline{A\Gamma} = \overline{A'\Gamma''} = \overline{A'\Gamma'''}$ άρα το Α΄ ανήκει στη μεσοκάθετο του Γ΄΄΄Γ΄ . Όμοια και το Β΄ άρα $\overleftrightarrow{A'B'}$ είναι η μεσοκάθετος του Γ΄΄΄Γ΄. Τότε όμως η ισομετρία $R_{\overline{A'B'}} R_{\zeta} R_{\tau}$ απεικονίζει τα Α, Β, Γ στα Α΄, Β΄, Γ΄.



Επιπλέον δείξαμε ότι κάθε ισομετρία είναι γινόμενο το πολύ τριών ανακλάσεων, αφού αυτή προσδιορίζεται μοναδικά από τις εικόνες τριών σημείων της.

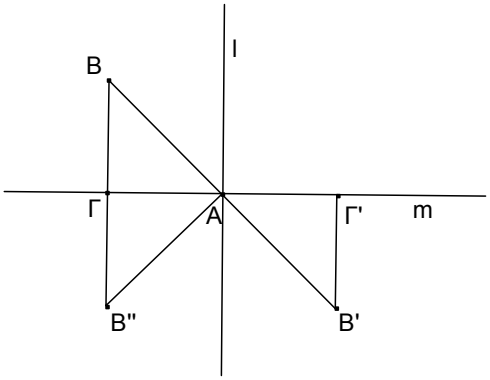
Θα εξετάσουμε γινόμενα δύο ανακλάσεων $T = R_l R_m$. Αν η l τέμνει την m σε ένα σημείο Α, η Τ καλείται στροφή κέντρου Α. Αν οι l και m έχουν κοινή κάθετη t, η Τ καλείται μετατόπιση κατά μήκος της t. Τέλος στο υπερβολικό επίπεδο μόνο, αν οι l και m είναι ασυμπτωτικά παράλληλες στην διεύθυνση ενός κατεκδοχήν σημείου Ω, η Τ καλείται παράλληλη μεταφορά κατά το Ω. Αυτές οι περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, αλλά σε αντίθεση η ταυτοτική ισομετρία θα θεωρείται στροφή, μετατόπιση και παράλληλη μεταφορά.

Η πρόταση 2.3.4 έδειξε τη σπουδαιότητα των σταθερών σημείων στην περιγραφή των ισομετριών. Ένα άλλο σημαντικό εργαλείο είναι οι αναλλοίωτες ευθείες. Θα λέμε ότι μια ευθεία l είναι αναλλοίωτη κάτω από την Τ αν l΄ = l. Αυτό δεν σημαίνει πάντα ότι όλα τα σημεία της l είναι σταθερά, σημαίνει μόνο ότι ένα σημείο της l απεικονίζεται μέσω της Τ σε άλλο σημείο της l. Για παράδειγμα, οι μόνες αναλλοίωτες ευθείες εκτός από την m κάτω από την ανάκλαση R_m είναι οι κάθετες στην m. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής: Αν l κάθετη στην m και Α σημείο επί αυτής η ΑΑ΄ είναι κάθετη στην m και διέρχεται από το Α άρα συμπίπτει με την l. Αντίστροφα αν l αναλλοίωτη ευθεία διάφορη της m, έχει σημείο Α που δεν ανήκει στην m. Η ΑΑ΄ ταυτίζεται με την l και είναι κάθετη στην m αφού Α΄ διαφορετικό του Α.

2.3..1 Στροφές

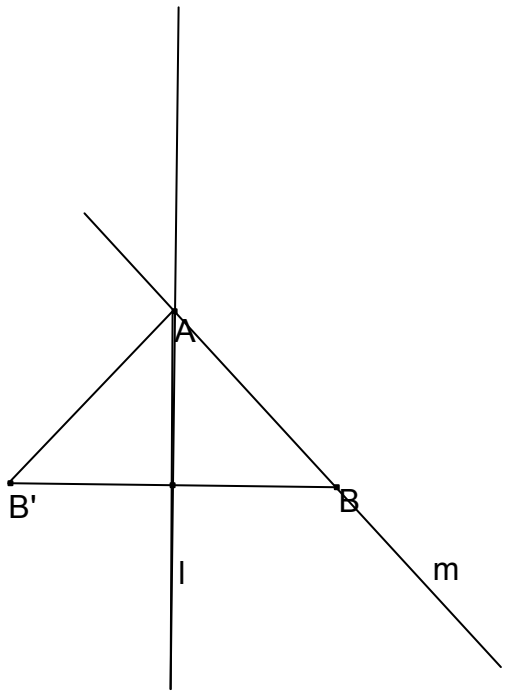
Πρόταση 2.3.6. Ας είναι $l \perp m$, και Α το σημείο τομής τους και Τ = $R_l R_m$. Τότε για κάθε σημείο Β$\neq$ Α το Α είναι το μέσο του ΒΒ΄.

Απόδειξη: Το πόρισμα είναι φανερό αν το Β ανήκει στην l ή m, έτσι ας υποθέσουμε ότι δεν ανήκει. Ας είναι Γ το ίχνος της καθέτου από το Β στην m. Τότε το Β΄ είναι στο άλλο ημιεπίπεδο των l και m από το Β και το Γ΄ είναι στο άλλο ημιεπίπεδο της l από το Γ. Επίσης το Α είναι σταθερό. Άρα $\measuredangle BA\Gamma = \measuredangle B'A\Gamma'$ έτσι αυτές πρέπει να είναι κατακορυφήν άρα τα Β, Α, Β΄ συνευθειακά. Επίσης ΑΒ $\cong$ ΑΒ΄ άρα το Α μέσο του ΒΒ΄.



Η ισομετρία στην προηγούμενη πρόταση μπορεί να περιγραφεί σαν η στροφή κατά 180^0 γύρω από το Α και θα συμβολίζεται με H_A, ενώ θα καλείται ημιστροφή γύρω από το Α. Η εικόνα ενός σημείου Ρ κάτω από την H_A θα συμβολίζεται με P^A.

Πόρισμα : Η H_A είναι αυτοαντίστροφη και οι αναλλοίωτές της ευθείες είναι οι ευθείες που διέρχονται από το Α.



Πρόταση 2.3.7. Μια ισομετρία Τ $\neq$ Ι είναι στροφή αν και μόνον αν έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η Τ έχει μοναδικό σταθερό σημείο Α και επιλέγουμε Β διαφορετικό από το Α. Ας

είναι l η μεσοκάθετος του BB΄ τότε αφού AB $\cong$ AB΄ το A ανήκει στην l. Άρα η R_lT έχει σταθερά τα A, B, επομένως και κάθε σημείο της AB. Αν R_lT =I τότε T =R_l αντίφαση γιατί το A είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T. Επομένως από το 2.3.4 είναι $R_lT = R_m$ όπου $m \cong \overleftrightarrow{AB}$. Άρα T = R_l R_m και έτσι η T είναι στροφή περί το A.

Αντίστροφα αν T = R_l R_m στροφή περί του A και B$\neq$A σταθερό τότε $B^l = B^m$ και αν φέρουμε την B B^l θα είναι κάθετος και στην l και στην m, άτοπο.

Αν επαναλάβουμε το πρώτο μέρος της παραπάνω απόδειξης και αναφερθούμε στο σχήμα θα διαπιστώσουμε ότι αποδείξαμε ταυτόχρονα την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.8. Αν T είναι μια στροφή γύρω από το A και m ευθεία που διέρχεται από το A, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία l που διέρχεται από το A, με T = R_lR_m. Αν η l δεν είναι κάθετη στην m και d^0 ο αριθμός των μοιρών στην οξεία γωνία μεταξύ m και l τότε για κάθε σημείο B$\neq$A, είναι $(\measuredangle BAB')^0$ =$2d^0$.

(Έτσι για να εκφράσει κανείς μια στροφή 90^0 γύρω από το A σαν γινόμενο ανακλάσεων πρέπει να επιλέξει ευθείες που διέρχονται από το A και σχηματίζουν γωνία 45^0).

Προσοχή, η στροφή R_lR_m δεν είναι ίδια με την R_mR_l εκτός αν $l \perp m$. Μόνο η μία είναι η «δεξιόστροφη στροφή» κατά $2d^0$ ενώ η άλλη είναι η «αριστερόστροφη». Για ένα περισσότερο τυπικό επιχείρημα παρατηρήστε ότι $(R_lR_m)(R_mR_l)$= I που σημαίνει ότι η μία είναι αντίστροφη της άλλης.

Πρόταση 2.3.9. Αν A σημείο, το σύνολο των στροφών γύρω από το A είναι αντιμεταθετική ομάδα.

Απόδειξη: Από ορισμό η ταυτοτική απεικόνιση είναι στροφή γύρω από το A. Η παραπάνω πρόταση δείχνει την ύπαρξη αντιστρόφου. Αν T = R_lR_m τότε οποιαδήποτε άλλη στροφή T΄ γύρω από το A η T'^{-1} γράφεται R_nR_m οπότε T΄ =R_mR_n, συνεπώς TT΄= $(R_lR_m)(R_mR_n)$= R_lR_n που είναι στροφή. Για την αντιμεταθετικότητα θεωρούμε ευθεία s ώστε T=R_n R_s ή T^{-1} = R_s R_n. Τότε R_m(T΄T) R_s= R_m R_mR_n R_n R_s R_s= I, άρα T΄T = R_m R_s.

Ακόμα R_m(TT΄) R_s= R_m R_lR_m R_mR_n R_s= (R_m R_l)(R_n R_s) = T^{-1} T = I, άρα TT΄ = R_m R_s.

Επομένως T΄T = TT΄.

Προσοχή : Στροφές γύρω από διαφορετικά σημεία ποτέ δεν αντιμετατίθενται. Γιατί αν T στροφή γύρω από το A και T΄ στροφή γύρω από το B η T΄T απεικονίζει το A στο A΄΄ ενώ η TT΄ το απεικονίζει στο (A΄΄)΄.

Πόρισμα: Αν δύο στροφές T, T΄ γύρω από σημείο O έχουν κοινή εικόνα P΄ για σημείο P διαφορετικό του O, τότε είναι ίσες

Απόδειξη: Η T^{-1} T΄είναι στροφή γύρω από το O και η έχει το P αναλλοίωτο. Συνεπώς είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Εφαρμογή: Αν P σημείο του επιπέδου και X μια ομάδα μετασχηματισμών του επιπέδου τροχιά X(P) του P ονομάζουμε το σύνολο των εικόνων του P μέσω των μετασχηματισμών της X. Αν λοιπόν P σημείο και X η ομάδα των στροφών γύρο από σημείο O η τροχιά του P είναι κύκλος κέντρου O.

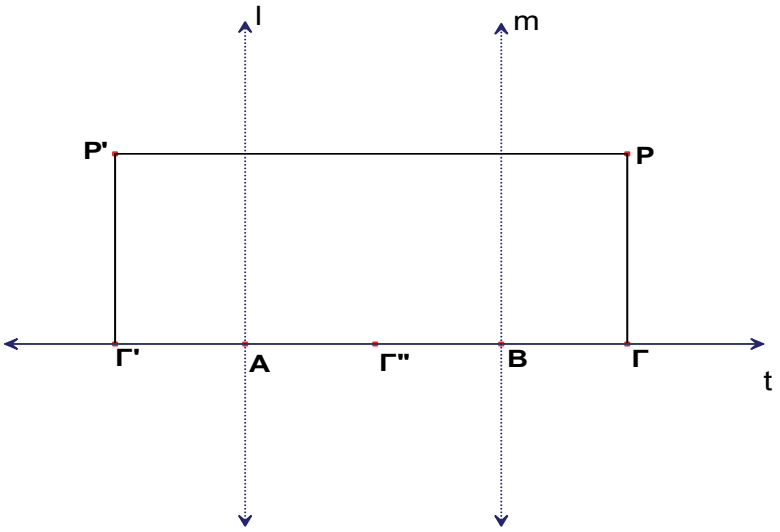
Απόδειξη: Αν A σημείο της τροχιάς τότε $\overline{OA} = \overline{OP}$. Αντίστροφα αν A΄ σημείο του κύκλου κέντρου O και ακτίνας $\overline{OP}$ τότε αν θεωρήσουμε τη μεσοκάθετο l του AP η οποία διέρχεται από το O($\overline{OA} = \overline{OP}$) και m την OP, παρατηρούμε ότι η στροφή γύρω από το O R= $R_l R_m$ απεικονίζει το P στο A.

2.3..2 Μετατοπίσεις

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια μετατοπίσεις T = $R_l R_m$, όπου οι m και l έχουν κοινή κάθετο t. Οι γεωμετρικές ιδιότητες των μετατοπίσεων είναι διαφορετικές στα υπερβολικά επίπεδα από αυτές των Ευκλειδείων (ανόμοια προς τις στροφές που συμπεριφέρονται το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις)

Πρόταση 2.3.10. Ας είναι $l \perp t$ στο A και $m \perp t$ στο B και T = $R_l R_m$. Αν το Γ κείται στην t τότε $\overline{\Gamma\Gamma'} = 2(\overline{AB})$. Αν το P δεν κείται επί της t, τότε το P΄ κείται στο ίδιο ημιεπίπεδο της t με το P και $\overline{PP'} = 2(\overline{AB})$ αν το επίπεδο είναι Ευκλείδειο, ή $\overline{PP'} > 2(\overline{AB})$ αν το επίπεδο είναι υπερβολικό.

Απόδειξη.



Θα αποδείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που A*B*Γ, οι άλλες περιπτώσεις είναι το ίδιο. Αν $\overline{B\Gamma} < \overline{AB}$ τότε $A*\Gamma^m*B$ και $\overline{\Gamma\Gamma'} = \overline{\Gamma' A} + \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{\Gamma^m A} + \overline{AB} + \overline{B\Gamma^m} = 2\overline{AB}$

Αν $\overline{B\Gamma} = \overline{AB}$ τότε Γ^m =A και $\overline{\Gamma\Gamma'} = 2(\overline{AB})$

Αν $\overline{B\Gamma} > \overline{AB}$, τότε Γ^m*A*B και $\overline{\Gamma^m A} = \overline{\Gamma^m B} - \overline{AB} = \overline{\Gamma B} - \overline{AB}$. Έτσι, $\Gamma^m*A*\Gamma'*\Gamma$ και έχουμε : $2\overline{B\Gamma} = \overline{\Gamma\Gamma^m} = \overline{\Gamma'\Gamma} + 2\overline{\Gamma' A} = \overline{\Gamma'\Gamma} + 2(\overline{B\Gamma} - \overline{AB}) \Rightarrow \overline{\Gamma\Gamma'} = 2\overline{AB}$

Αν το Ρ δεν κείται επί της t, τότε Ρ και P^m κείνται σε ευθεία κάθετη στην m άρα παράλληλη στην t, συνεπώς είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο της t, όμοια και τα P^m και Ρ΄ είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο της t. ΄Αρα από το αξίωμα Β-4, τα Ρ και Ρ΄ βρίσκονται στην ήδια μεριά της t. Αν Γ είναι το ίχνος της καθέτου από το Ρ στην t. Αφού η Τ διατηρεί την καθετότητα το Γ΄ είναι το ίχνος της καθέτου από το Ρ΄ στην t και αφού η Τ είναι ισομετρία είναι Ρ΄Γ΄ $\cong$ ΡΓ άρα το τετράπλευρο ΡΓΓ΄Ρ΄ είναι τετράπλευρο Saccheri. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία είναι ορθογώνιο, έτσι $\overline{PP'} = \overline{\Gamma\Gamma'} = 2(\overline{AB})$. Στην υπερβολική γεωμετρία η ακμή είναι μεγαλύτερη της βάσης, επομένως $\overline{PP'} > \overline{\Gamma\Gamma'} = 2(\overline{AB})$.

Συμπέρασμα : Αν μια μετατόπιση έχει σταθερό σημείο τότε είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Πρόταση 2.3.11. Αν Τ είναι μια μετατόπιση κατά μήκος της t και m κάθετος στην t, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία l κάθετος στην t ώστε $T = R_l R_m$.

Απόδειξη : Αν η m τέμνει την t στο Γ ας είναι l η μεσοκάθετος του ΓΓ΄. Τότε η $R_l T$ αφήνει αναλλοίωτο το Γ. Ας είναι Ρ ένα άλλο σημείο στην m, τότε όμοια όπως πριν, το τετράπλευρο ΡΓΓ΄Ρ΄ είναι τετράπλευρο Saccheri. Αφού η l είναι κάθετος στη βάση ΓΓ΄ στο μέσο της, πρέπει να είναι και κάθετος στην ΡΡ΄ στο μέσο της, άρα το Ρ είναι η ανάκλαση του Ρ΄ με άξονα την l. Τότε η $R_l T$ αφήνει αναλλοίωτα τα Γ και Ρ άρα είναι η ανάκλαση R_m, δηλαδή $R_l T = R_m$ από όπου $T = R_l R_m$.

Για τη μοναδικότητα της l, αν $T = R_k R_m = R_l R_m$ τότε $R_l = R_k$ άρα $l = k$.

Πρόταση 2.3.12. Δοθέντος ευθείας t, το σύνολο των μετατοπίσεων κατά μήκος της t είναι αντιμεταθετική ομάδα.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την περίπτωση των στροφών γύρω από σημείο.

Πρόταση 2.3.13. Ας είναι $T \neq I$ μια μετατόπιση κατά μήκος της t. Αν το επίπεδο είναι Ευκλείδειο, οι αναλλοίωτες ευθείες της Τ είναι η t και όλες οι παράλληλές της. Αν το επίπεδο είναι υπερβολικό, η t είναι η μόνη αναλλοίωτη.

Απόδειξη.

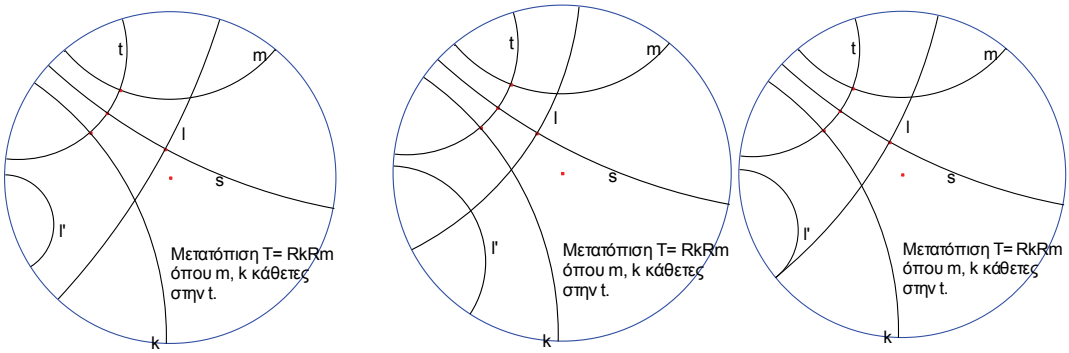
Είναι φανερό ότι η t είναι αναλλοίωτη. Στην Ευκλείδεια περίπτωση αν $u \parallel t$, τότε η Τ είναι μετατόπιση και κατά μήκος της u, αφού η u είναι κάθετη στους άξονες των ανακλάσεων που συνθέτουν την Τ, συνεπώς η u είναι αναλλοίωτη. Και στις δύο περιπτώσεις αν η u τέμνει την t στο Α τότε το Α΄ κείται στην t και είναι διαφορετικό του Α άρα η u δεν είναι αναλλοίωτη. Ας υποθέσουμε στο υπερβολικό επίπεδο ότι η u είναι αναλλοίωτη και παράλληλη στην t. Επιλέγουμε σημείο Ρ στην u. Τότε $u = \overleftrightarrow{PP'}$. Αλλά έχουμε δει ότι τα Ρ και Ρ΄ ισαπέχουν από την t, άρα η t και u έχουν κοινή κάθετο m. Έχουμε δει ότι η m δεν είναι αναλλοίωτη και αφού η καθετότητα διατηρείται η m΄ θα πρέπει να είναι και αυτή κοινή κάθετος των u,t, άτοπο αφού η κοινή κάθετος είναι μοναδική.

Πρόταση 2.3.14. Δοθέντος ισομετρίας T, ευθείας t και σημείου B στην t, η T είναι μετατόπιση κατά μήκος της t αν και μόνον υπάρχει ένα μοναδικό σημείο A στην t ώστε $T = H_A H_B$.

Απόδειξη: Ας είναι m η κάθετος στην t στο B. Αν η T είναι μετατόπιση υπάρχει μοναδική ευθεία $l \perp t$ τέτοια ώστε $T = R_l R_m$. Αν η l τέμνει την t στο A, τότε $H_A H_B = (R_l R_t)(R_t R_m) = R_l R_m = T$. Αντιστρέφοντας την ισότητα παίρνουμε το αντίστροφο.

Πόρισμα : Αν T μετατόπιση κατά μήκος της t και l τέμνουσα της t. Αν l΄ είναι η εικόνα της l και το επίπεδο Ευκλείδειο τότε l΄ παράλληλη της l. Ειδικά για το υπερβολικό επίπεδο αν η l είναι ασυμπτωτικά παράλληλη της t τότε είναι και η l΄ .

Απόδειξη: Αν είμαστε στο Ευκλείδειο επίπεδο και Γ το σημείο τομής των t και l το ΓΓ΄ κείται επί της t, αφού t αναλλοίωτη. Αν A διαφορετικό του Γ σημείο της l τότε η $\overleftrightarrow{\Gamma\Gamma'}$ είναι παράλληλη της t (αφού τα Γ , Γ΄ ισαπέχουν από την t) και είναι $\overline{\Gamma\Gamma'} = \overline{AA'}$, άρα το AA΄Γ΄Γ είναι παραλληλόγραμμο άρα l΄ παράλληλη της l. Αν είμαστε στο υπερβολικό επίπεδο και η l ασυμπτωτικά παράλληλη της t, η l΄ είναι παράλληλη της t αφού αν την έτεμνε σε σημείο A΄ το ίδιο θα έκανε και η l στο σημείο A. Αν η l΄ είχε κοινή κάθετο με την t το ίδιο θα είχαν και η t, l (μέσω της T^{-1}). Επομένως η l΄ είναι ασυμπτωτικά παράλληλη της t άρα και της l και μάλιστα στην διεύθυνση των l, t. Να σημειώσουμε ότι αν οι l, t δέχονται κοινή κάθετο στο υπερβολικό επίπεδο η θέση των l και l΄ μπορεί να είναι οποιαδήποτε όπως επιδεικνύουν τα παρακάτω σχήματα στο μοντέλο του δίσκου.



Εφαρμογή : Έστω ευθεία t και A σημείο σε αυτή. Τότε η τροχιά του A υπό την ομάδα των μετατοπίσεων κατά μήκος της t είναι η t. Αν το A δεν ανήκει στην t τότε στην περίπτωση του Ευκλειδείου επιπέδου είναι μια παράλληλη στην t ευθεία ενώ στην περίπτωση του υπερβολικού είναι μια καμπύλη που κάθε σημείο της ισαπέχει[4] από την t.

Απόδειξη: Αν A σημείο της t και A΄ η εικόνα του μέσω μετατόπισης κατά μήκος της t τότε έχουμε δει ότι το A΄ ανήκει επίσης στην t. Αντίστροφα αν A΄ σημείο της t και B το μέσο του AA΄ και m,l οι κάθετες στην t στα B, A , τότε η εικόνα του A μέσω της

[4] Η καμπύλη αυτή θα λέγεται «ισαπέχουσα» ή υπέρκυκλος.

μετατόπισης R_mR_l (που είναι κατά μήκος της t), είναι το Α΄. Αν το Α δεν ανήκει στην t τότε τα Α και Α΄ ισαπέχουν από την t άρα στην ευκλείδεια περίπτωση το Α΄ βρίσκεται στην παράλληλο l της t, από το Α. Αντίστροφα στην ίδια περίπτωση αν ένα σημείο Α΄ ανήκει στην l και θεωρήσω την μεσοκάθετο m του ΑΑ΄ και την κάθετο s από το Α στην t είναι φανερό ότι η RmRs είναι μετατόπιση κατά μήκος της t και απεικονίζει το Α στο Α΄. Στην υπερβολική περίπτωση το Α και η εικόνα του Α΄ ισαπέχουν πάλι από την t άρα ανήκουν στην ισαπέχουσα καμπύλη. Αν τώρα Β η προβολή του Α στην t και Γ η προβολή του Α΄ και είναι $\overline{AB} = \overline{A'\Gamma}$, θεωρούμε το μέσο Δ των ΒΓ και τις καθέτους m, s στα Δ,Β. Το ΒΑΑ΄Γ είναι τετράπλευρο Saccheri και η m μεσοκάθετος της βάσης ΒΓ άρα είναι και μεσοκάθετος της ΑΑ΄. Τότε όμως η μετατόπιση κατά την t, R_mR_s απεικονίζει το Α στο Α΄.

2.3..3 Ημιστροφές

Έχοντας δείξει ότι το γινόμενο δύο ημιστροφών είναι μετατόπιση γεννιέται το ερώτημα τι είναι το γινόμενο τριών ημιστροφών. Η απάντηση εξαρτάται από το αν το επίπεδό μας είναι Ευκλείδειο ή υπερβολικό.

Πρόταση 2.3.15. Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο, το γινόμενο $H_AH_BH_\Gamma$, τριών ημιστροφών είναι ημιστροφή. Στο υπερβολικό επίπεδο, το γινόμενο είναι ημιστροφή αν και μόνο αν τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, και αν δεν είναι, το γινόμενο μπορεί να είναι στροφή, μετατόπιση ή παράλληλη μεταφορά.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά επί της t και ας είναι l, m,n οι κάθετες αντίστοιχα στην t στα σημεία αυτά. Τότε $H_AH_BH_\Gamma = (R_lR_t)(R_tR_m)(R_nR_t) = (R_lR_mR_n)\,R_t = R_k\,R_t$, όπου η ευθεία k είναι κάθετη στην t τέτοια ώστε $R_kR_n = R_lR_m$ και η ύπαρξή της εξασφαλίζεται από την πρόταση 2.3.11. Αν η k τέμνει την t στο Δ τότε έχουμε δείξει ότι $H_AH_BH_\Gamma = H_\Delta$.

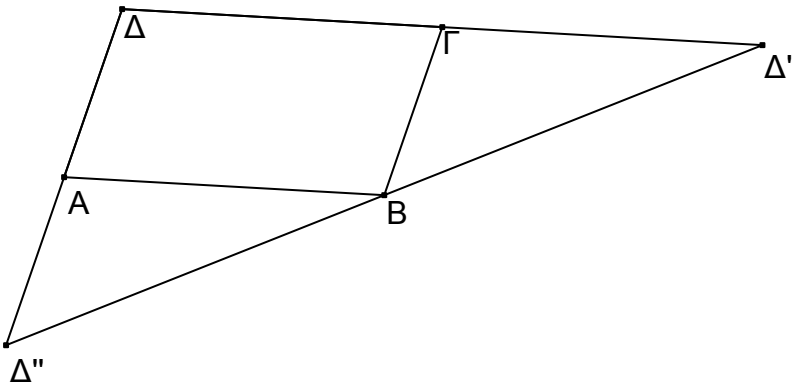
Υποθέτουμε ότι τα Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά και ότι t = $\overleftrightarrow{AB}$, ότι $l \perp t$ στο Α, και $m \perp t$ στο Β. Μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι το Γ κείται στην m (αλλιώς ας είναι Β το ίχνος της καθέτου από το Γ στην t και Α το σημείο που μας εφοδιάζει η πρόταση 2.3.14). Ας είναι u η κάθετος στο m στο Γ. Τότε $H_AH_BH_\Gamma = (R_lR_t)(R_tR_m)(R_mR_u) = R_lR_u$. Στο Ευκλείδειο επίπεδο η l τέμνει την u σε σημείο Δ σχηματίζοντας ορθή γωνία, οπότε $H_AH_BH_\Gamma = H_\Delta$.

Στο υπερβολικό όμως, ακόμα και αν οι l, u τέμνονται η γωνία είναι οξεία άρα έχουμε στροφή γύρω από το Δ. Αν οι l, u δέχονται κοινή κάθετο έχουμε μετατόπιση και αν είναι ασυμπτωτικά παράλληλες έχουμε παράλληλη μεταφορά.

Συμπέρασμα: Στο Ευκλείδειο επίπεδο το γινόμενο δύο μετατοπίσεων είναι μετατόπιση και το σύνολο των μετατοπίσεων αποτελεί αντιμεταθετική ομάδα.

Απόδειξη $T = H_AH_B$ και $T' = H_\Gamma.H_\Delta$ τότε $TT' = (H_AH_B\,H_\Gamma).H_\Delta = H_EH_\Delta$ για κάποιο Ε λόγω της πρότασης 2.3.15. Άρα το γινόμενο δύο μετατοπίσεων είναι μετατόπιση.

Η ταυτοτική απεικόνιση εξ ορισμού είναι μετατόπιση και η αντίστροφη της $H_A H_B$ είναι η $H_B H_A$. Για την αντιμεταθετικότητα θα αποδείξουμε ότι $H_A H_B H_\Gamma = H_\Delta$ όπου Δ η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Πράγματι επειδή γνωρίζουμε ότι η $H_A H_B H_\Gamma$ είναι στροφή αρκεί να αποδείξω ότι το Δ είναι το μοναδικό της αναλλοίωτο σημείο.



Πράγματι αν $\Delta' = H_\Gamma(\Delta)$ το Γ είναι μέσο του ΔΔ΄ και αν $\Delta'' = H_B(\Delta')$ το Β μέσο του Δ΄΄Δ΄. Τότε όμως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το Α είναι επίσης μέσο του Δ΄΄Δ. Άρα $H_A H_B H_\Gamma = H_\Delta$ ή $H_A H_B = H_\Gamma H_\Delta$.

Τώρα για την αντιμεταθετικότητα την έχουμε αποδείξει στην περίπτωση που η Τ και η Τ΄ είναι μετατοπίσεις κατά την ίδια ή παράλληλες ευθείες. Έστω λοιπόν ότι η Τ και Τ΄ είναι μετατοπίσεις κατά δύο τεμνόμενες ευθείες στο σημείο Β. Τότε υπάρχουν σημεία Α, Γ στους άξονές τους ώστε $T = H_A H_B$ και $T' = H_B H_\Gamma$. Τότε $TT' = H_A H_\Gamma$ και $T'T = H_B H_\Gamma H_A H_B = H_\Delta H_B$ όπου Δ η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΒΓΑΔ. Αφού όμως το ΒΓΔΑ είναι παραλληλόγραμμο θα ισχύει $H_A H_\Gamma = H_\Delta H_B$. Άρα ΤΤ΄= Τ΄Τ.

2.3..4 Κατεκδοχήν σημεία στο Υπερβολικό επίπεδο

Θα μελετήσουμε την επίδραση των ισομετριών στο υπερβολικό επίπεδο στα κατεκδοχήν σημεία. Ένα κατεκδοχήν σημείο είναι εξ ορισμού μια κλάση ισοδυναμίας ημιευθειών που βρίσκονται στην ίδια κλάση αν η μία περιέχει την άλλη ή είναι ασυμπτωτικά παράλληλες μεταξύ τους.

Η ασυμπτωτική παραλληλία έχει οριστεί να διατηρεί την ισότητα και το μεταξύ, έτσι οι ισομετρίες διατηρούν τη σχέση ασυμπτωτικής παραλληλίας. Έτσι, έχει νόημα να επιλέξει κανείς μια ημιευθεία r από την κλάση Ω, να θεωρήσει την εικόνα της r΄ κάτω από την ισομετρία Τ, και να ορίσει την εικόνα Ω΄ να είναι η κλάση του r΄. Αν Ω=Ω΄ (που σημαίνει ότι το r είναι παράλληλο στο r΄ ή το ένα περιέχεται στο άλλο), θα λέμε ότι το Ω είναι ένα κατεκδοχήν αναλλοίωτο (σταθερό) σημείο της Τ.

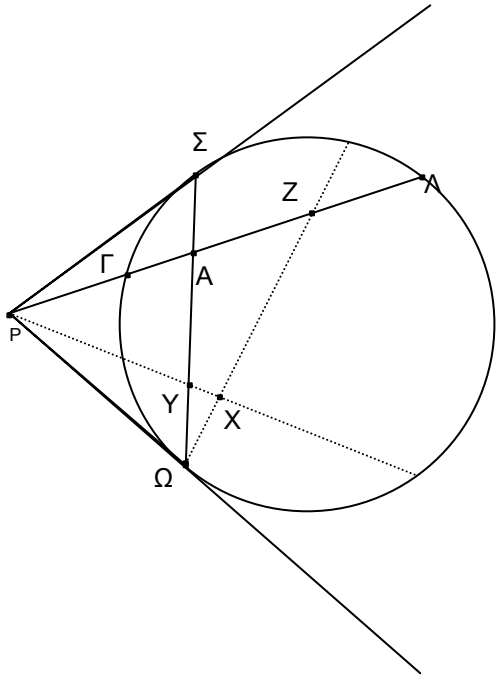
Δοθέντος ευθείας t που περιέχει ημιευθεία r, η κλάση της r και η κλάση της αντικείμενης ημιευθείας θα λέγονται τα δύο άκρα της t και θα χρησιμοποιούμε την έκφραση κείνται επί της t. Δύο κατεκδοχήν σημεία Ω ,Σ ορίζουν μοναδική ευθεία Ω, Σ (συγκεκριμένα, αν οι ημιευθείες r του Ω και s του Σ διέρχονται από το ίδιο σημείο και δεν είναι αντικείμενες, η ΩΣ είναι η ευθεία που περικλείει την γωνία που ορίζουν οι r, s). Θα λέμε ότι τα Ω και Σ είναι στο ίδιο μέρος (ημιεπίπεδο) της t αν κανένα τους δεν είναι πέρας της t και η ευθεία ΩΣ είναι παράλληλη στην t. Αυτό ορίζει μια μεταβατική σχέση στο σύνολο των κατεκδοχήν σημείων της t.

Πρόταση 2.3.16.

a) Τα πέρατα της m είναι τα μόνα σταθερά κατεκδοχήν σημεία της ανάκλασης R_m και οποιαδήποτε μη ταυτοτικής μετατόπισης κατά μήκος της m.
b) Αν μια στροφή έχει ένα σταθερό κατεκδοχήν σημείο είναι η ταυτοτική
c) Αν (Ω,Σ,Λ) και (Ω΄, Σ΄, Λ΄) είναι οποιαδήποτε τριάδες κατεκδοχήν σημείων υπάρχει μοναδική ισομετρία που απεικονίζει την μία τριάδα στην άλλη.

Απόδειξη:

a) Είναι φανερό ότι η R_m και οποιαδήποτε μη τετριμμένη μεταφορά Τ κατά μήκος της m αφήνουν σταθερά τα άκρα της m. Αν κάποιο άλλο κατακδοχήν σημείο Λ ήταν σταθερό, τότε και η ευθεία ΣΛ θα ήταν αναλλοίωτη, αλλά η Τ δεν έχει άλλες σταθερές ευθείες εκτός της m. Για την R_m οι αναλλοίωτες ευθείες εκτός της m είναι οι κάθετες σε αυτή άλλα σε αυτές τα άκρα τους αλλάζουν ημιεπίπεδο σε σχέση με την m.
b) Αν μια στροφή γύρω από το Α σταθεροποιεί το Ω η ημιευθεία ΑΩ θα ήταν αναλλοίωτη. Αλλά μόνο η ταυτοτική στροφή αφήνει αναλλοίωτες ημιευθείες.
c) Υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Β στη ΣΩ τέτοιο ώστε η ∡ΛΒΩ να είναι ορθή γωνία. Ας είναι Β΄ το σημείο της Σ΄Ω΄ ώστε η ∡Λ'Β'Ω' να είναι ορθή γωνία. Ας είναι Α ένα σημείο της ΒΛ διαφορετικό του Β και Γ ένα σημείο διαφορετικό του Β στη ΒΩ. Από το αξίωμα C-1, υπάρχουν μοναδικά σημεία Α΄ στη Β΄Λ΄ και Γ΄ στη Β΄Ω΄ τέτοια ώστε $AB \cong A'B'$ $\Gamma B \cong \Gamma'B'$. Τότε $\triangle AB\Gamma \cong \triangle A'B'\Gamma'$ έτσι από την πρόταση 2.3.5 υπάρχει μοναδική ισομετρία Τ που



πραγματοποιεί την σύμπτωση των δύο τριγώνων. Φανερά η Τ απεικονίζει την (Ω, Σ, Λ) στην (Ω΄, Σ΄ Λ΄). Αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι μια άλλη ισομετρία κάνει το ίδιο θα απεικόνιζε τα Α, Β, Γ στα Α΄, Β΄, Γ΄ άρα από την πρόταση 2.3.5 είναι μοναδική.

Το μέρος (c) της πρότασης μπορεί να εποπτικοποιηθεί πολύ καλά στο μοντέλο του Klein. Τα κατεκδοχήν σημεία είναι τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου. Υπάρχει μια μοναδική ισομετρία που απεικονίζει μια τριάδα τέτοιων σημείων σε μία άλλη.

Αν Ρ ο πόλος της χορδής ΩΣ, τότε η ΡΛ είναι η Klein κάθετη στην ΣΩ σε κάποιο σημείο Α. Τότε η εικόνα του Α, Α΄ πρέπει να είναι η τομή του Ω΄Σ΄ με το Λ΄Ρ΄ όπου Ρ΄ είναι η ο πόλος του Ω΄Σ΄ . Αν θεωρήσουμε ένα άλλο σημείο Β στην ΩΣ έστω Ω*Β*Α τότε η εικόνα του Β, Β΄ είναι το μοναδικό σημείο μεταξύ των Ω΄, Α΄ ώστε ο διπλός λόγος (ΑΒ, ΩΣ) =(Α΄Β΄, Ω΄Σ΄). Αν Γ η τομή της ΡΛ με τον κύκλο η εικόνα του Γ΄ είναι η άλλη τομή του ΡΛ με τον κύκλο. Όπως πριν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διπλό λόγο για να προσδιορίσουμε τη θέση της εικόνας κάθε σημείου της ΓΛ. Τελικά, αν Χ ένα άλλο σημείο που είναι τομή δύο ευθειών, μία η ΧΡ που τέμνει την ΩΣ στο Υ, και η άλλη η ΧΩ που τέμνει την ΓΛ στο Ζ. Τότε η Χ΄ είναι η τομή των Ρ΄Υ΄ και Ζ΄Ω΄. Αυτή η κατασκευή περιγράφει την ισομετρία Τ μόνο με όρους σύμπτωσης. Υποκρύπτει την πρόταση ότι κάθε συγγραμμικότητα του υπερβολικού επιπέδου είναι ισομετρία. Στο ευκλείδειο επίπεδο υπάρχουν πολλές συγραμμικότητες που δεν είναι ομοιότητες.

2.3..5 Παράλληλες μεταφορές

Στα επόμενα μελετούμε τις παράλληλες μεταφορές κατά ένα κατεκδοχήν σημείο Ω.

Πρόταση 2.3.17. Αν $T = R_l R_m$ μια παράλληλη μεταφορά κατά κατεκδοχήν σημείο Σ. Τότε:

a) Η Τ δεν έχει συνήθη σταθερά σημεία.
b) Αν k είναι μια ευθεία που έχει άκρο το Σ και Α σημείο επί αυτής τότε το Σ βρίσκεται στην μεσοκάθετο h της ΑΑ΄ και $T= R_h R_k$.
c) Η Τ δεν έχει αναλλοίωτες ευθείες.
d) Το μόνο σταθερό κατεκδοχήν σημείο υπό την Τ είναι το Σ.
e) Το σύνολο των παράλληλων μεταφορών κατά Σ είναι αντιμεταθετική ομάδα.
f) Μια ισομετρία με ακριβώς ένα κατεκδοχήν σημείο σταθερό είναι παράλληλη μεταφορά.

Απόδειξη:

a) Υποθέτουμε ότι ένα σημείο Α είναι σταθερό. Τότε η ευθεία που ενώνει το Α με το A^m είναι κάθετη στην m και στην l. Αντίφαση στην υπόθεση ότι l,m ασυμπτωτικά παράλληλες.

b) Αν το Σ κείται σε δύο μεσοκαθέτους l,m του $\triangle AA^{m}A'$, κείται και σε τρίτη μεσοκάθετο h. Τότε η R_hT σταθεροποιεί τα σημεία Α και Σ. Η R_hT έχει σταθερό κατεκδοχήν σημείο άρα δεν μπορεί να είναι στροφή γύρω από το Α. Αφού αφήνει σταθερό το Α πρέπει να είναι η ανάκλαση με άξονα την k που ενώνει το Σ και Α. Άρα $R_hT=R_k$ ή $T= R_hR_k$.

c) Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία k ήταν αναλλοίωτη κάτω από την Τ. Επιλέγουμε ένα σημείο Α στην t και ας είναι οι h, k όπως πρίν. Τότε $h \perp t = \overleftrightarrow{AA'}$, έτσι η t είναι αναλλοίωτη κάτω από την $R_hT=R_k$. Αυτό όμως σημαίνει ή, ότι η t είναι κάθετη και στην k, άτοπο αφού h, k ασυμπτωτικά παράλληλες, ή ότι η h ταυτίζεται με την k, άτοπο επίσης αφού k, h δεν μπορεί να είναι κάθετες.

d) Αν η Τ έχει ένα ακόμα κατεκδοχήν σημείο Ω σταθερό η ευθεία ΣΩ έπρεπε να είναι αναλλοίωτη που έρχεται σε αντίφαση με το (c).

e) Η ταυτοτική απεικόνιση είναι εξ ορισμού παράλληλη μεταφορά και η αντίστροφη της $T = R_lR_m$ είναι η R_mR_l που είναι πάλι παράλληλη μεταφορά κατά Σ. Αν Τ΄ είναι μια παράλληλη μεταφορά κατά Σ τότε η Τ΄ γράφεται από το (b) σαν $T' = R_kR_l$ όπου k η μεσοκάθετος του ΑΑ΄ με Α σημείο της l και Α΄ η εικόνα του Α μέσω της Τ΄. Άρα $T'T = R_kR_m$ που είναι παράλληλη μεταφορά κατά Σ. Αντιστρέφοντας το επιχείρημα για την Τ βλέπουμε $T = R_tR_l$ όπου t μεσοκάθετος της ΑΑ΄΄ με Α΄΄ εικόνα του Α μέσω της Τ. Αφού η t, κ είναι μεσοκάθετοι του ΑΑ΄Α΄΄ και διέρχονται από το Σ υπάρχει η μεσοκάθετος της Α΄Α΄΄ που διέρχεται από τα Α, Σ άρα είναι η l. Τότε όμως Τ΄ (Α΄) =Α΄΄. Η $(T'T)^{-1}(TT')$ είναι παράλληλη μεταφορά κατά Σ και ισχύει : $(T'T)^{-1}(TT')\,(A') = T^{-1}T'^{-1}(T(A)) = T^{-1}(T'^{-1}(A'') = T^{-1}(A) = A'$ δηλαδή η παράλληλη μεταφορά αυτή το σημείο Α΄ άρα είναι η ταυτοτική. Τότε όμως $T'T = TT'$.

f) Αυτό έπεται από την κατάταξη των ισομετριών.

Εφαρμογή : Αν Ω είναι κατεκδοχήν σημείο του υπερβολικού επιπέδου και Α σύνηθες σημείο ο ορόκυκλος (Ω,Α) ορίζεται να είναι το σύνολο των σημείων Α΄ που η μεσοκάθετος του ΑΑ΄ διέρχεται από το Ω. Θα δείξουμε ότι ο ορόκυκλος (Ω, Α) είναι η τροχιά του Α κάτω από τη δράση της ομάδας των παραλλήλων μεταφορών κατά Ω.

Απόδειξη: Έστω Α΄ ανήκει στην τροχιά του Α. Τότε από το παραπάνω θεώρημα η παράλληλη μεταφορά που απεικονίζει το Α στο Α΄ γράφεται R_hR_k με την h να είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄ και να διέρχεται από το Ω. Το αντίστροφο πάλι είναι φανερό αφού αν Α΄ σημείο του ορόκυκλου και h η μεσοκάθετος των ΑΑ΄ (που έχει άκρο το Ω) και k η ευθεία που ορίζεται από το Α στην διεύθυνση του Ω, τότε η R_hR_k απεικονίζει το Α στο Α΄ και είναι παράλληλη μεταφορά κατά Ω.

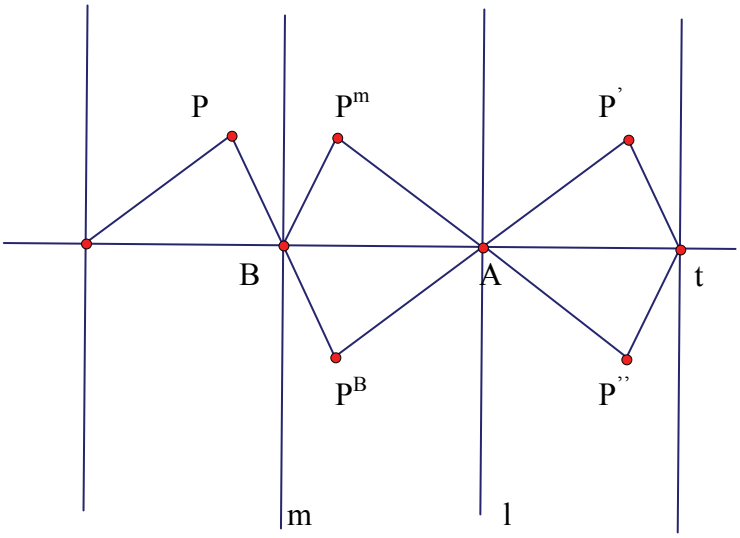
2.3..6 Ολισθήσεις

Θα ασχοληθούμε με τον τελευταίο τύπο ισομετρίας, την ολίσθηση κατά μήκος μιας ευθείας t, που ορίζεται σαν το γινόμενο $T' = R_tT$ από μια μη ταυτοτική μετατόπιση T κατά μήκος της T ακολουθητέα από ανάκλαση με άξονα την t. (Αν βαδίζετε σε ευθεία σε χιόνι, τα σημάδια των βημάτων σας συνδέονται με ολίσθηση.)

Πρόταση 2.3.18. Δοθέντος $l \perp t$ στο A, $m \perp t$ στο B, $T = R_lR_m$ και $T' = R_tT$, τότε

a) $TR_t = T'$
b) $H_AR_m = T' = R_lH_B$
c) Η T΄ απεικονίζει κάθε ημιεπίπεδο που ορίζει στο απέναντί του
d) Η T΄ δεν έχει αναλλοίωτα σημεία
e) Η μόνη αναλλοίωτη της T΄ είναι η t
f) Αντίστροφα, δοθέντος σημείου B και ευθείας l έστω ευθεία t κάθετη στην l στο B. Τότε η R_lH_B είναι μια ολίσθηση κατά άξονα t, αν το B δεν κείται επί της l, και είναι η Rt αν το B βρίσκεται στην l.

Απόδειξη:



a) Ισχύει $H_A = R_tR_l = R_lR_t$ και $H_B = R_tR_m = R_mR_t$. Συνεπώς:
$$T' = R_tT = (R_tR_l)R_m = (R_lR_t)R_m = R_l(R_tR_m) =$$
$$R_l(R_mR_t) = (R_lR_m)R_t = TR_t = T'$$
b) Το (b) είναι φανερό.
c) Η T αφήνει σημεία από το ένα ημιεπίπεδο της t στο ίδιο ημιεπίπεδο (είναι μετατόπιση κατά t) , ενώ η R_t τα ανταλλάσει, συνεπώς το ίδιο κάνει και η T΄.
d) Αν σημείο Γ εκτός της t τότε μέσω της t αλλάζει ημιεπίπεδο, άρα δεν είναι σταθερό αν Γ ανήκει στην t τότε $\Gamma' = T'(\Gamma) = TR_t(\Gamma) = T(\Gamma)$ άρα $\overline{\Gamma'\Gamma} = 2(\overline{AB})$ άρα πάλι δεν είναι σταθερό.
e) Το ότι η t είναι αναλλοίωτη είναι φανερό. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε αναλλοίωτη ευθεία n, διαφορετική της t. και θεωρήσουμε σε αυτή σημείο Γ

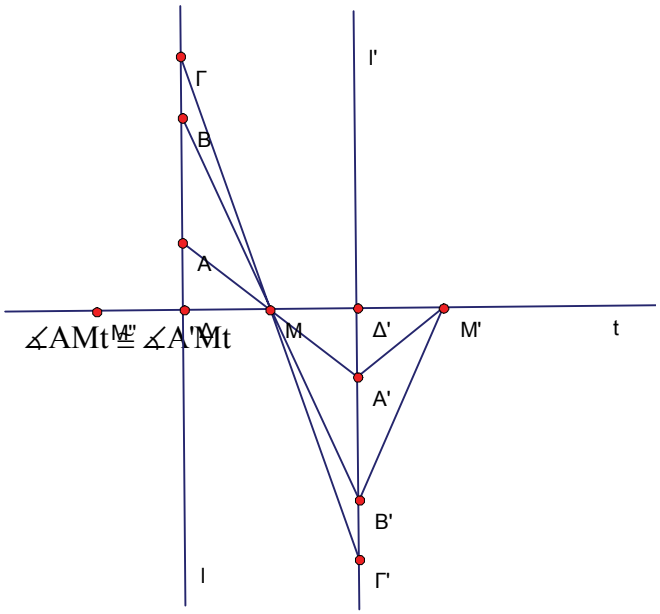
εκτός της t η εικόνα του Γ΄ βρίσκεται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο της t. Άρα η n τέμνει την t σε σημείο Δ. Το Δ πρέπει να είναι σταθερό αφού ανήκει σε δύο αναλλοίωτες ευθείες, άτοπο αφού η Τ΄ δεν έχει σταθερά σημεία.

f) Αν το Β ανήκει στην l τότε $H_B = R_l R_t$ άρα $R_l\ H_B = R_l\ R_l\ R_t = R_t$.Αν το Β δεν ανήκει στην l υπάρχει ευθεία k κάθετη στην t στο Β ώστε $H_B = R_k R_t$, αν η μεταφορά $T = R_l R_k$ τότε $R_l H_B = T\ R_t$ άρα ολίσθηση κατά άξονα t.

Οι ολισθήσεις χαρακτηρίζονται στην Ευκλείδεια γεωμετρία από το ότι έχουν μόνο μία αναλλοίωτη ευθεία. Αυτό το χαρακτηριστικό δεν τις διακρίνει στην υπερβολική γεωμετρία από τις μετατοπίσεις. Για το λόγο αυτό πρέπει να προσθέσουμε ακόμα μια συνθήκη. Το ότι τα δύο άκρα της αναλλοίωτης ευθείας εναλλάσσονται. Η αναλλοίωτη ευθεία λέγεται άξονας της ολίσθησης.

HJELMSLEV΄S Λήμμα: Ας είναι G μια ολίσθηση, l μια ευθεία μη αναλλοίωτη υπό την G, l΄ η εικόνα της l. Αν P σημείο της l και P΄ η εικόνα του τα μέσα των PP΄ βρίσκονται στον άξονα t της G. Ακόμα τα μέσα αυτά είναι διακεκριμένα εκτός αν και μόνον αν η l είναι κάθετη στην t, όποτε έχουμε ένα μέσο M και τότε μάλιστα $G = H_M R_l$.

Απόδειξη:



Έστω A σημείο της l, A΄ η εικόνα του στην l΄ . Τότε τα A, A΄ βρίσκονται σε διαφορετικά μέρη ως προς την t, άρα το AA΄ τέμνει την t σε σημείο M και ας είναι M΄ η εικόνα του M. Είναι $AM \cong A'M'$, $\measuredangle AMt \cong \measuredangle A'M't$, $\measuredangle AMt \cong \measuredangle A'Mt$ όπου η δύο πρώτες συμπτώσεις ισχύουν λόγω ισομετρίας και η τρίτη λόγω κατακορυφήν. Τότε όμως το $\triangle MA'M'$ είναι ισοσκελές με $A'M' \cong A'M$. Όποτε το M είναι μέσο του AA΄. Επιπλέον το A΄ ανήκει στη μεσοκάθετο του MM΄. Αν υποθέσω ότι το μέσο ενός άλλου τμήματος BB΄ είναι πάλι το M, το B΄ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του MM΄, άρα $\overleftrightarrow{A'B'} \cong l' \perp t$, οπότε και l κάθετη στην t αφού οι ισομετρίες διατηρούν την καθετότητα. Αντίστροφα αν l κάθετη στην t στο Δ και l΄ στο Δ΄ τότε για κάθε Γ στην l φέρουμε τα ΓM, ΓM΄ όπου M το μέσο του ΔΔ΄. Από την ισότητα των $\triangle$ΔMΓ, $\triangle$Δ'M'Γ' προκύπτει των ΓM, Γ΄M η ισότητα των γωνιών $\measuredangle$ΔMΓ, $\measuredangle$Δ'M'Γ' και αφού τα Γ και Γ΄ είναι σε διαφορετικά μέρη της ΔΔ΄ προκύπτει ότι η ημιευθεία MΓ είναι αντικείμενη της ΓM΄ άρα M μέσο του ΓΓ΄.

Στην περίπτωση αυτή, αν $M'' = M^l$ το M είναι μέσο του $M''M'$. τότε όμως $M' = G(M) = H_M(M'')=H_MR_l(M)$ και ακόμα για τα σημεία A, B είναι $A' = H_MR_l(A)$, $B' = H_MR_l(B)$. Άρα η G και η H_MR_l έχουν κοινές εικόνες σε τρία μη συνευθειακά σημεία, συνεπώς $G =H_MR_l$.

Το λήμμα αυτό μας εφοδιάζει με μια μέθοδο προσδιορισμού του άξονα μιας ολίσθησης. Συγκεκριμένα αρκεί να θεωρήσω δύο σημεία A, B και τις εικόνες τους A΄ , B΄. Αν τα μέσα των AA΄ και BB΄ είναι διαφορετικά άξονας είναι η ευθεία που ορίζεται από τα μέσα. Αν συμπίπτουν σε ένα σημείο M άξονας είναι η κάθετος από το M στην AB ή στην A΄B΄.

2.4 Ταξινόμηση των ισομετριών

Ο επόμενος μας στόχος είναι να δείξουμε ότι μια ισομετρία είναι ή μια ανάκλαση ή μια στροφή, ή μια μετατόπιση , ή μια παράλληλη μεταφορά ή μια ολίσθηση. Το πρώτο βήμα είναι να περιγράψουμε γινόμενα τριών ανακλάσεων. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε τρείς τύπους δεσμών ευθειών:

1) Την δέσμη των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο P.
2) Την δέσμη ευθειών καθέτων σε μια δοθείσα ευθεία t.
3) Την δέσμη όλων των ευθειών με άκρο κατεκδοχήν σημείο Σ (υπερβολικό επίπεδο μόνο).

Φανερά, δύο ευθείες l, m καθορίζουν μοναδικά μια δέσμη. Αν τέμνονται γιατί είμαστε στο 1), αν δέχονται κοινή κάθετο είμαστε στο 2) και αν είναι ασυμπτωτικά παράλληλες είμαστε στο 3). Ακόμα αν A ένα σημείο, υπάρχει μοναδική ευθεία n από αυτή τη δέσμη που διέρχεται από το A. Για τους τρείς τύπους η n είναι :

1) Η ευθεία $\overleftrightarrow{AP}$, $A \neq P$.
2) Η κάθετη στην t από το A.
3) Η ευθεία AΣ.

Πρόταση 2.4.1. Ας είναι $T= R_lR_mR_n$. (1) Αν οι l,m,n ανήκουν σε δέσμη η T είναι ανάκλαση σε κάποια ευθεία της δέσμης. (2) Αν οι l,m,n δεν ανήκουν σε μία δέσμη, η T είναι ολίσθηση.

Η πρόταση αυτή είναι υπέροχη γιατί οδηγεί σε πλήρη ταξινόμηση των ισομετριών.

Απόδειξη: Αν οι l, m, n ανήκουν σε δέσμη που διέρχεται από σημείο A η R_lR_m είναι στροφή γύρω από το A άρα γράφεται R_kR_n για κάποια ευθεία k. Τότε $T = R_k$.

Αν οι l, m, n δέχονται κοινή κάθετο t η R_lR_m είναι μετατόπιση κατά μήκος της t άρα γράφεται R_kR_n για κάποια ευθεία k. Τότε $T = R_k$.

Αν οι l, m,n είναι ασυμπτωτικά παράλληλες στο Σ, τότε η R_lR_m είναι παράλληλη μεταφορά κατά Σ άρα γράφεται R_kR_n για κάποια ευθεία k. Τότε $T = R_k$, και αυτό τελειώνει το πρώτο σκέλος της απόδειξης.

Ας υποθέσουμε ότι οι l, m, n δεν ανήκουν σε δέσμη. Θεωρούμε σημείο A στην l και ας είναι m΄ η ευθεία που ορίζεται από το A στη δέσμη των m, n. Τότε από τα

παραπάνω υπάρχει ευθεία k ώστε $R_{m'}R_mR_n = R_k$. Ας είναι B το ίχνος της καθέτου s από το A στην k. Αφού οι l, m΄, s διέρχονται από το A, υπάρχει ευθεία h ώστε $R_lR_{m'}R_s = R_h$. Τότε αφού το B δεν ανήκει στην h (από την υπόθεση ότι οι l, m, n δεν αποτελούν δέσμη) από την πρόταση 2.3.18 (b) η R_hH_B είναι ολίσθηση κατά μήκος της κάθετης στην h από το B. Αλλά $R_hH_B = R_h(R_sR_k) = R_lR_{m'}R_sR_sR_{m'}R_mR_n = R_lR_mR_n = T$.

Πόρισμα: Κάθε γινόμενο $R_lR_mH_A$ ισούται με R_hR_k.

Απόδειξη: Ας είναι n η ευθεία της δέσμης των l, m που ορίζεται από το A και κ η κάθετος σε αυτή στο A. Τότε $R_lR_mH_A=R_lR_m\ R_nR_k= (R_lR_m\ R_n)R_k= R_hR_k$.

2.4..1 Άρτιες – περιττές ισομετρίες

Ορισμός. Μια ισομετρία λέγεται άρτια αν είναι γινόμενο δύο ανακλάσεων ή η ταυτοτική. Θα λέγεται περιττή αν είναι ανάκλαση ή ολίσθηση.

Θεώρημα 2.1 Μια ισομετρία είναι ή μόνο άρτια ή μόνο περιττή. Το σύνολο των άρτιων ισομετριών αποτελεί ομάδα. Το γινόμενο δύο περιττών ισομετριών είναι άρτια, ενώ το γινόμενο άρτιας και περιττής είναι περιττή ισομετρία.

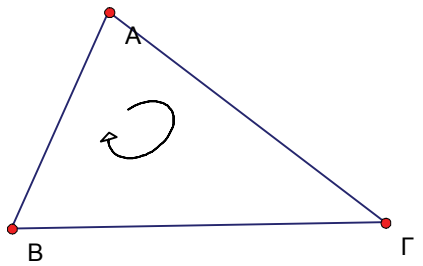
Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι κάθε ισομετρία είναι γινόμενο το πολύ τριών ανακλάσεων έτσι από την πρόταση 2..4.1, κάθε ισομετρία είναι ή άρτια ή περιττή. Οι περιττές ισομετρίες χαρακτηρίζονται από το ότι έχουν μια αναλλοίωτη ευθεία που τα ημιεπίπεδα που ορίζει εναλλάσσονται.

Έστω γινόμενο $(R_kR_l)(R_mR_n)$ από άρτιες ισομετρίες. Αν οι l, m, n ανήκουν σε δέσμη το γινόμενο γράφεται R_kR_h που είναι άρτια ισομετρία. Διαφορετικά $R_lR_mR_n = R_hH_B$ και το τελευταίο πόρισμα μας λέει ότι $R_kR_hH_B$ είναι άρτια. Το συμπέρασμα είναι ότι οι άρτιες ισομετρίες αποτελούν ομάδα.

Το γινόμενο από ανάκλαση και άρτια ισομετρία είναι περιττή από την πρόταση 2.4.1. Το γινόμενο μιας ολίσθησης και άρτιας ισομετρίας είναι γινόμενο πέντε ανακλάσεων που μειώνεται σε γινόμενο τριών από το πόρισμα άρα είναι ή ανάκλαση ή ολίσθηση, συνεπώς περιττή ισομετρία. Όμοια ένα γινόμενο από τέσσερις ή έξι ανακλάσεις μειώνεται σε γινόμενο δύο ανακλάσεων, άρα γινόμενο περιττών ισομετριών είναι σε κάθε περίπτωση άρτια ισομετρία.

Η κεντρική ιδέα πίσω από την κατάταξη των ισομετριών αυτή είναι ότι στο επίπεδο μπορούν να δοθούν δύο διακεκριμένοι προσανατολισμοί, έτσι ώστε, για παράδειγμα, οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ να μπορούν να διαταχθούν κατά μια αρνητική φορά.

Όταν ένα τρίγωνο μετακινείται με στροφή, μετατόπιση ή παράλληλη μεταφορά ο προσανατολισμός της εικόνας του Α΄ Β΄ Γ΄ θα παραμείνει θετικός, ενώ αν έχουμε ανάκλαση ή περιστροφή ο προσανατολισμός γίνεται θετικός.



Παρακάτω δίνουμε έναν πίνακα με την ταξινόμηση των ισομετριών.

Πίνακας 1: Ταξινόμηση ισομετριών

	Προσανατολισμός	**Σταθερά σημεία**	**Αναλλοίωτες ευθείες**	**Σταθερά κατεκδοχήν σημεία (υπερβολικό επίπεδο)**
Ταυτότητα	άρτια	όλα	όλες	όλα
Ανάκλαση R_l	περιττή	σημεία στην l	l και κάθε $m \perp l$	τα δύο άκρα της l
Ημιστροφή H_A	άρτια	A	κάθε ευθεία από το A	κανένα
Στροφή μη αυτοαντίστροφη	άρτια	ένα	καμία	κανένα
Ευκλείδεια μετατόπιση κατά μήκος της t	άρτια	κανένα	η t και κάθε $l \parallel t$	
Υπερβολική μετατόπιση κατά μήκος της t	άρτια	κανένα	μόνο η t	τα δύο άκρα της t
Παράλληλη μεταφορά (υπερβολικό επίπεδο μόνο)	άρτια	κανένα	καμία	ένα
Ολίσθηση με άξονα t	περιττή	κανένα	μόνο η t	τα δύο άκρα της t

Πόρισμα: Αν μια μη ταυτοτική ισομετρία είναι αυτοαντίστροφη είναι ανάκλαση η ημιστροφή.

Απόδειξη: Έστω T μια μη ταυτοτική ισομετρία που είναι αυτοαντίστροφη. Τότε υπάρχει σημείο A με A΄ ≠ A. Είναι όμως T(A΄)=TT(A)=A. Άρα η ευθεία $\overleftrightarrow{AA'}$ είναι αναλλοίωτη μέσω της T. Επιπλέον αν B το μέσο του AA΄ και B΄ η εικόνα του ισχύει A΄B΄ ≅ AB και AB΄ ≅ A΄ B και αφού το B΄ ανήκει στην $\overleftrightarrow{AA'}$ θα είναι μέσο του AA΄ άρα θα είναι το B. Δηλαδή η T έχει μια τουλάχιστον αναλλοίωτη ευθεία και ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο. Από τον πίνακα 1 όμως μόνο οι ανακλάσεις και οι ημιστροφές έχουν αυτές τις ιδιότητες. Επιπλέον έχουμε δει ότι ανακλάσεις και ημιστροφές είναι αυτοαντίστροφες, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Εφαρμογή: Αν δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και T_1 η μεταφορά κατά μήκος της $\overleftrightarrow{AB}$ που απεικονίζει το Α στο Β, T_2 η μεταφορά κατά μήκος της $\overleftrightarrow{B\Gamma}$ που απεικονίζει το Β στο Γ και T_3 η μεταφορά κατά μήκος της $\overleftrightarrow{A\Gamma}$ που απεικονίζει το Γ στο Α. Θα αποδείξουμε ότι η T_3 T_2 T_1 είναι στροφή κατά φ^0 όπου φ^0 είναι το έλλειμμα του $\triangle AB\Gamma$. (Στην ευκλείδεια περίπτωση είναι η ταυτοτική).

Απόδειξη: Η T_3T_2 T_1 είναι άρτια και έχει το Α σταθερό. Άρα ή είναι γνήσια στροφή ή είναι η ταυτοτική. Αρκεί να βρω την εικόνα Μ΄΄΄ του μέσου Μ μέσω της T_3T_2 T_1 και ας είναι T_1(Μ) = Μ΄, T_1(Μ΄) = Μ΄΄. Τότε αφού η T_1 απεικονίζει το Α στο Β η $(\measuredangle \mathrm{M'B\Gamma})^0 = 180^0 - (\measuredangle \mathrm{B})^0$. Η T_2 απεικονίζει το Β στο Γ άρα θα είναι $(\measuredangle \mathrm{M''\Gamma\Gamma'})^0 = 180^0 - (\measuredangle \mathrm{B})^0$ και Β*Γ*Γ΄. Αν επιλέξω το μοναδικό σημείο Δ ώστε Α*Γ*Δ και $\overline{\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A\Gamma}}$ θα είναι $\measuredangle \Delta\Gamma\Gamma' \cong \measuredangle \Gamma < \measuredangle \mathrm{B}_{\varepsilon\xi} = \angle \mathrm{M''\Gamma\Gamma'}$ (θεώρημα εξωτερικής γωνίας). Άρα $(\angle \mathrm{M''\Gamma\Delta})^0 = (\measuredangle \mathrm{B}_{\varepsilon\xi})^0 - (\measuredangle \Gamma)^0 = 180^0 - (\measuredangle \mathrm{B})^0 - (\measuredangle \Gamma)^0$. Επιπλέον τα Μ΄΄ Μ΄ είναι στην ίδια πλευρά της ΒΓ ενώ Α*Β*Μ΄. Άρα τα Β, Μ΄΄ είναι στην πλευρά της ΑΓ και συνεπώς και τα Μ,Μ΄΄. Κάνοντας την ίδια διαδικασία με την T_3 και τα σημεία Μ΄΄ , Γ, Δ έχουμε $(\angle \mathrm{M'''A\Gamma})^0 = (\measuredangle \mathrm{B}_{\varepsilon\xi})^0 - (\measuredangle \Gamma)^0 = 180^0 - (\measuredangle \mathrm{B})^0 - (\measuredangle \Gamma)^0 \geq (\measuredangle A)^0$ και τα Μ΄΄΄, Μ΄΄ να είναι στο ίδιο μέρος της ΑΓ, άρα και τα Μ΄΄Μ. Τότε όμως $(\angle \mathrm{M'''AM})^0 = 180^0 - (\measuredangle A)^0 - (\measuredangle \mathrm{B})^0 - (\measuredangle \Gamma)^0 = \phi^0$ (όπου φ τα έλλειμμα). Έτσι αν το επίπεδο είναι υπερβολικό έχουμε γνήσια στροφή γύρω από το Α κατά το έλλειμμα ενώ στο Ευκλείδειο επίπεδο έχουμε την ταυτοτική απεικόνιση.

Πολικές συντεταγμένες και ισομετρίες

Ας θεωρήσουμε δύο ανεξάρτητα σετ πολικών συντεταγμένων με αρχές τα Ζ, Ζ΄ και ευθείες l,l΄ και ημιευθείες $\overrightarrow{k},\overrightarrow{k'}$. Εισάγουμε μια απεικόνιση Τ απεικονίζοντας το σημείο Ρ(r, θ) στο Ρ΄(r΄, θ΄) με r=r΄ και θ=θ΄ . Η Τ είναι προφανώς 1-1 επί και θα δείξουμε ότι είναι ισομετρία. Πράγματι αν Α, Β δύο σημεία και Α΄, Β΄ οι εικόνες τους είναι $(\overline{AZ}) = (\overline{A'Z'})$ $(\overline{BZ}) = (\overline{B'Z'})$ $(\measuredangle AZB)^0 = (\measuredangle A'Z'B')^0$ άρα από το Π-Γ-Π έχουμε $(\overline{AB}) = (\overline{A'B'})$. Αντιστρόφως κάθε ισομετρία του επιπέδου μπορεί να οριστεί έτσι. Αρκεί να δείξουμε Ζ, l΄ και $\vec{k}$ και ημιεπίπεδο Η της l και να ορίσουμε Ζ΄ την εικόνα του Ζ και όμοια και τα υπόλοιπα.

Αν τώρα έχουμε μια ισομετρία Τ που τη θεωρούμε σαν απεικόνιση του (r,θ) συστήματος στο (r΄,θ΄) μπορούμε να σχηματίσουμε την αντίστροφη με α) μια στροφή γύρω από το Ζ ώστε το Ζ΄ να συμπέσει στην ευθεία l, β) μια παράλληλη μεταφορά στην l ώστε τα Ζ, Ζ΄ να συμπέσουν, γ) μια νέα στροφή γύρω από το Ζ ώστε να

συμπέσουν τα $\overrightarrow{k},\overrightarrow{k'}$ και δ) μια ανάκλαση κατά την l (αν χρειάζεται) ώστε τα δύο αρχικά ημιεπίπεδα να συμπέσουν.

Άρα αποδείξαμε το επόμενο λήμμα (πηγαίνοντας αντίστροφα).

Λήμμα. Αν l τυχαία ευθεία και Z σημείο σε αυτή τότε κάθε ισομετρία S γράφεται σαν A) $S = R_1 T R_2$ (αν S άρτια) όπου R_1, R_2 στροφές κέντρου Z και T μετατόπιση κατά την l ή B) $S = M R_1 T R_2$ όπου M ανάκλαση με άξονα την l, αν η S είναι περιττή.

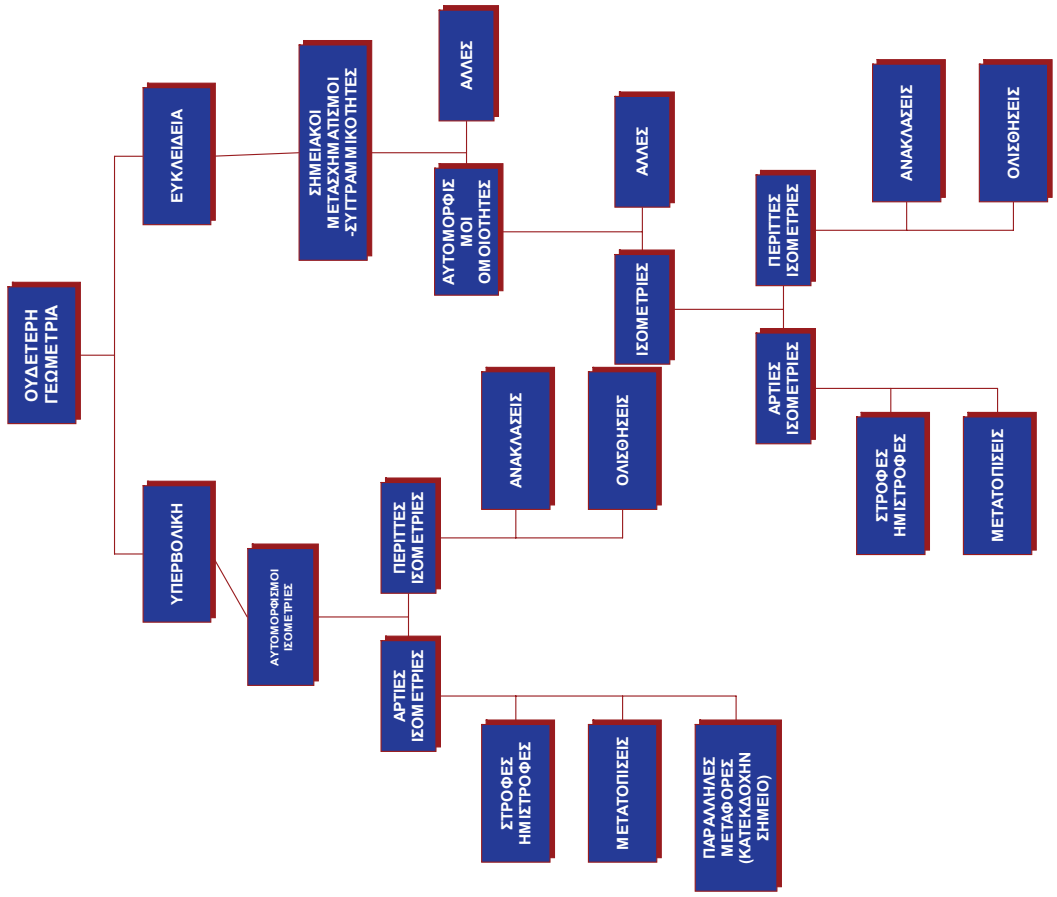
Το ευκλείδειο και υπερβολικό επίπεδο έχουν εντελώς διαφορετικές ομάδες ισομετριών, γιατί οι ισομετρίες τους συντίθενται κατά διαφορετικό τρόπο. Τα ακόλουθα είναι μερικές διαφορές.

Στο ευκλείδειο επίπεδο η μετατόπιση κατά καθορισμένο μήκος κατά μήκος μιας ευθείας είναι ακριβώς η ίδια απεικόνιση με την μετατόπιση κατά το ίδιο μήκος σε κάθε άλλη παράλληλη της αρχικής ευθείας. Δεν συμβαίνει το ίδιο στην υπερβολική περίπτωση, έτσι θα περιμένουμε να υπάρχουν περισσότερες μετατοπίσεις στην υπερβολική γεωμετρία, πράγμα που θα αποδειχθεί στη συνέχεια.

Στην ευκλείδεια γεωμετρία οι μετατοπίσεις του επιπέδου συγκροτούν ομάδα. Δεν συμβαίνει το ίδιο στην υπερβολική περίπτωση.

Στην ευκλείδεια γεωμετρία μια άρτια ισομετρία έχει σταθερό σημείο ή αναλλοίωτη ευθεία. Στην υπερβολική γεωμετρία όμως μπορεί να έχει μόνο ένα ιδεώδες σημείο αναλλοίωτο.

Διάγραμμα 1: Η ταξινόμηση των σημειακών μετασχηματισμών



2.5 Β Αυτομορφισμοί του Καρτεσιανού Μοντέλου - αναλυτική προσσέγγιση.

Ο επόμενός μας στόχος είναι μια γρήγορη περιγραφή των ομάδων ισομετριών μόνο χρησιμοποιώντας συντεταγμένες στα μοντέλα των γεωμετριών μας. Ξεκινάμε με το μοντέλο του Καρτεσιανού επιπέδου.

Η πιο απλή περίπτωση περιγραφής ισομετρίας είναι αυτή της μετατόπισης. Όπως δείξαμε στην πρόταση 2.3.10, μια μετατόπιση μετακινεί ένα σημείο κατά σταθερή απόσταση (Ευκλείδειο επίπεδο) και σταθερή κατεύθυνση. Αυτό μπορεί να παρασταθεί με ένα διάνυσμα με αρχή το O(0,0), με μέτρο τη σταθερή απόσταση και στη δοθείσα κατεύθυνση. Αν το πέρας του διανύσματος είναι το σημείο με συντεταγμένες (e, f), τότε η μετατόπιση από τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων δίνεται από τον τύπο: T(x,y)=(x,y)+(e,f)=(x+e,y+f) ή

$$x' = x+e$$
$$y' = y+f$$

Αν εφαρμόσουμε και δεύτερη μετατόπιση T΄ κατά διάνυσμα (e΄ , f΄) τότε η εικόνα (x΄΄, y΄΄) του (x,y) κάτω από την T΄T δίνεται από τον τύπο : (x΄΄, y΄΄) =(x΄,y΄)+(e΄,f΄)=(x+e+e΄, y+f+f΄). Έτσι η T΄T είναι μετατόπιση κατά το άθροισμα των διανυσμάτων που προσδιορίζουν τις T και T΄. Αυτό αποδεικνύει την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.5.1. Στο καρτεσιανό μοντέλο του Ευκλειδείου επιπέδου, οι μετατοπίσεις συγκροτούν ομάδα ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των διανυσμάτων.

(Ισόμορφες θεωρούνται δύο ομάδες όταν υπάρχει μεταξύ των στοιχείων τους μια ένα προς ένα επί απεικόνιση που διατηρεί την πράξη της ομάδας.)

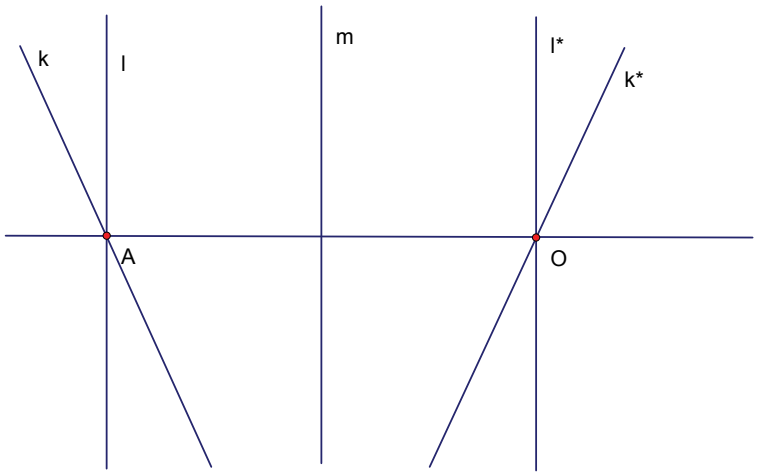
Λέμε επίσης ότι οι μετατοπίσεις συγκροτούν μια διπαραμετρική ομάδα αφού προσδιορίζονται από δύο πραγματικές μεταβλητές (e,f) [5].

Πρόταση 2.5.2 Στο καρτεσιανό μοντέλο του Ευκλειδείου επιπέδου, οι μετατοπίσεις κατά μήκος σταθερής ευθείας συγκροτούν μια μονοπαραμετρική ομάδα ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των μεταφορών.

Απόδειξη: Ας είναι (e_0, f_0) ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στην σταθερή ευθεία l. Τότε ένα διάνυσμα αντίστοιχο μετατόπισης T κατά την ευθεία l, είναι της μορφής $t(e_0, f_0)$, όπου |t| είναι η απόσταση μετατόπισης και το t είναι θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το αν η κατεύθυνση μετατόπισης είναι η κατεύθυνση του (e_0, f_0) ή η αντίθετη. Αν ο T΄ έχει αντίστοιχο διάνυσμα $t'(e_0, f_0)$ τότε ο T΄T έχει αντίστοιχο διάνυσμα $(t+t')(e_0, f_0)$. Έτσι αντιστοιχίζοντας την παράμετρο t στην ισομετρία T έχουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό.

[5] Η θεωρία ομάδων μετασχηματισμών που εξαρτώνται με συνεχή τρόπο από πραγματικές παραμέτρους αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τον Νορβηγό μαθηματικό Sophus Lie στα τέλη του 19ου αιώνα, και έγινε μια από τις πιο παραγωγικές ιδέες των μαθηματικών και της φυσικής του 20ου αιώνα.

Στη συνέχεια συζητάμε τις στροφές γύρω από δοσμένο σημείο Α. Πρώτο μας βήμα είναι να αναχθούμε στην περίπτωση όπου το Α είναι η αρχή Ο. Αν όχι, έστω Τ η μετατόπιση κατά μήκος της $\overleftrightarrow{AO}$ που πηγαίνει το Α στο Ο. Τότε (πρόταση 2.3.11) $T=R_mR_l = R_{l*}R_m$, όπου m η μεσοκάθετος του ΑΟ και l ,l* οι κάθετες στο ΑΟ στα Α,Ο. Η δοθείσα στροφή περί το Α μπορεί να γραφεί (πρόταση 2.3.8) σαν $R = R_lR_k$, όπου η k διέρχεται από το Α. Ας είναι k* η εικόνα της k μέσω της R_m.



Τότε η $R^*= R_{k*}R_{l*}$ είναι στροφή γύρω από το Ο και ισχύει :

$T^{-1} R^*T = R_lR_m R_{k*}R_{l*} R_{l*}R_m = R_l(R_m R_{k*}R_m)= R_lR_k =R$.

Αυτό δείχνει ότι η στροφή R γύρω από το Α ορίζεται μονοσήμαντα από την στροφή R* γύρω από το Ο. Ακόμα η απεικόνιση $R^* \rightarrow T^{-1} R^*T$ είναι ισομορφισμός της ομάδας των στροφών γύρω από το Ο με την ομάδα των στροφών γύρω από το Α, όπως εύκολα επαληθεύεται. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι Α = Ο.

Από την πρόταση 2.3.8 δοθείσα στροφή γύρω από το Ο μπορεί να γραφεί σαν $R= R_lR_m$, όπου m είναι ο x΄x. Αν $l \perp m$, τότε η R αναπαρίσταται με τη βοήθεια μιγαδικών σαν:

$z \rightarrow -z$.

Διαφορετικά, αν η οξεία γωνία των m , l έχει μέτρο θ/2 σε ακτίνια, με $0< \theta/2<\pi/2$, η R αναπαρίσταται σαν:

$z \rightarrow e^{i\theta}z$ (αν η l έχει θετική κλίση) ή $z \rightarrow e^{-i\theta}z$ (αν η l έχει αρνητική κλίση). Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις βλέπουμε ότι οι στροφές γύρω από το Ο παρίστανται με μοναδικό τρόπο από τους μετασχηματισμούς:

$$z \rightarrow e^{i\theta}z \quad (-\pi<\theta \leq \pi)$$

Και αφού $e^{i\phi}(e^{i\theta}z) = (e^{i\phi}e^{i\theta})z$, το γινόμενο δύο στροφών γύρω από το Ο αντιστοιχεί σε γινόμενο δύο μιγαδικών μέτρου 1. Αυτό αποδεικνύει την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.5.3 Στο Καρτεσιανό μοντέλο του Ευκλειδείου επιπέδου, η ομάδα των στροφών γύρω από σταθερό σημείο είναι ισομορφική στο μονοπαραμετρική πολλαπλασιαστική ομάδα S^1 των μιγαδικών $e^{i\theta}$ μέτρου 1 (θ είναι πραγματική παράμετρος).

Ας συνδυάσουμε τα αποτελέσματα μας χρησιμοποιώντας μιγαδικούς. Αν ένα σημείο είναι η εικόνα του μιγαδικού z, τότε η μετατόπισή του κατά διάνυσμα (e_0, f_0) έχει εικόνα τον μιγαδικό $z+z_0$, με $z_0= e_0+if_0$. Αν T λοιπόν μια άρτια ισομετρία που απεικονίζει το κέντρο O στην εικόνα του z_0, O΄ μπορούμε να τη συνθέσουμε με μια μετατόπιση κατά - z_0 και έτσι έχουμε μια άρτια ισομετρία που έχει σταθερό το O. Από τον πίνακα 1 όμως μια τέτοια ισομετρία είναι στροφή γύρω από το O, άρα αναπαρίσταται από την απεικόνιση $z \to e^{i\theta} z$. Συνεπώς η αρχική ισομετρία T είναι στροφή ακολουθούμενη από μετατόπιση κατά z_0. Άρα μόλις αποδείξαμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.5.4. Η ομάδα των άρτιων ισομετριών του Καρτεσιανού μοντέλου του Ευκλειδείου επιπέδου είναι ισόμορφη με την τριπαραμετρική ομάδα που περιγράφεται με μιγαδικούς σαν $z \to e^{i\theta} z + z_0$.

Πόρισμα: Περιττές ισομετρίες στο Καρτεσιανό επίπεδο έχουν μοναδική παράσταση της μορφής : $z \to e^{i\theta} \overline{z} + z_0$

Απόδειξη: Από το θεώρημα 2.1.1 όλες οι περιττές ισομετρίες μπορούν να παραχθούν από τις άρτιες με τη σύνθεση τους με μια περιττή που μπορεί να επιλεγεί η ανάκλαση στον άξονα x΄x $z \to \overline{z}$. Ακόμα, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ έτσι ο μιγαδικός συζυγής του $e^{i\theta} z + z_0$ είναι ο $e^{-i\theta} \overline{z} + \overline{z_0}$, και θέτοντας όπου θ την –θ παίρνουμε το ζητούμενο.

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε μια πρόταση που θα μας χρησιμεύσει να δείξουμε τις βαθιές διαφορές στις ομάδες ισομετριών του ευκλείδειου και υπερβολικού επιπέδου.

Πόρισμα: Η ομάδα των άρτιων ισομετριών του καρτεσιανού επιπέδου δεν είναι απλή. Συγκεκριμένα η ομάδα των μετατοπίσεων είναι κανονική υποομάδα των άρτιων ισομετριών.

Απόδειξη : Έστω μετατόπιση T: $z \to z + z_0$ και άρτια μετατόπιση R: $z \to e^{i\theta} z + z_1$. Τότε R^{-1}: $z \to e^{-i\theta} z - e^{-i\theta} z_1$. Επομένως RTR^{-1}: $z \to z + z_2$,που είναι πάλι μετατόπιση. Άρα η ομάδα των μετατοπίσεων είναι κανονική υποομάδα των άρτιων μετατοπίσεων του Ευκλείδειου επιπέδου.

2.5..1 Σημειακοί μετασχηματισμοί του Καρτεσιανού μοντέλου

Πρόταση 2.6.5. Στο καρτεσιανό μοντέλο του Ευκλειδείου επιπέδου μια ομοιότητα παρίσταται με μιγαδικούς στη μορφή : $z \to w_0 z + z_0$ ή στη μορφή $z \to w_0 \overline{z} + z_0$, όπου $w_0 \neq 0$. Στην πρώτη περίπτωση θα λέγεται άρτια και στη δεύτερη περιττή. Οι άρτιες ομοιότητες συγκροτούν μια τετραπαραμετρική ομάδα.

Απόδειξη: Οι ομοιοθεσίες κέντρου O είναι φανερό ότι συγκροτούν μια μονοπαραμετρική ομάδα αφού δίνονται από τον τύπο $z \to \lambda z \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ομοιότητα Τ που απεικονίζει το 0 στον w_1 και το 1 στο w_2. Αν συνθέσουμε την μετατόπιση από το w_1 στο 0 με την Τ το 0 μένει αναλλοίωτο και το 1 απεικονίζεται σε μιγαδικό w_3. Αν συνθέσουμε (αν χρειάζεται) τις δύο προηγούμενες με στροφή γύρω από το 0 μπορούμε να απεικονίσουμε το w_3 σε πραγματικό κ. Αν τέλος κάνουμε μια ομοιοθεσία ακόμη με κέντρο 0 και λόγο 1/κ ο κ απεικονίζεται στο 1. Άρα η σύνθεση των τεσσάρων μετασχηματισμών αφήνει σταθερά τα 0, 1. Είναι όμως αυτομορφισμός άρα ή θα είναι η ταυτοτική ή θα είναι ανάκλαση κατά τον άξονα x΄x. Αν είναι η ταυτοτική απεικόνιση η ομοιότητα Τ είναι ίση με τη σύνθεση μιας ομοιοθεσίας μιας στροφής και μιας μετατόπισης άρα έχει τη μορφή : $z \to w_0 z + z_0$, όπου $|w_0|$ είναι ο λόγος ομοιοθεσίας και $\frac{w_0}{|w_0|}$ ο μιγαδικός μέτρου ένα που προσδιορίζει τη στροφή. Αν είναι η δεύτερη περίπτωση τότε η Τ έχει τη μορφή $z \to w_0 \bar{z} + z_0$, αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση έχουμε τέσσερις πραγματικές παραμέτρους, μία για την ομοιοθεσία, μία για τη στροφή και δύο για τη μετατόπιση.

Πόρισμα. Οι ομοιοθεσίες με οποιοδήποτε κέντρο δίνονται από τον τύπο : $z \to \lambda z + w$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. Η σύνθεση δύο ομοιοθεσιών λόγου λ,κ είναι ομοιοθεσία λόγου λ.κ με το κέντρο της στην ευθεία των κέντρων των δύο αρχικών ομοιοθεσιών και ειδικά η σύνθεση ομοιοθεσία λόγου λ και κέντρου w_1 με ομοιοθεσία λόγου 1/λ και κέντρου w_2 είναι μετατόπιση κατά διάνυσμα w_2- w_1, τέλος η σύνθεση ομοιοθεσιών γύρω από το ίδιο κέντρο αποτελεί αντιμεταθετική μονοπαραμετρική ομάδα ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των πραγματικών.

Απόδειξη: Έστω ομοιοθεσία κέντρου w. Με αλλαγή του συστήματος συντεταμένων $z' \to z - w$ το w γίνεται η αρχή. Συνεπώς μια ομοιοθεσία θα έχει τύπο της μορφής: $z' \to \lambda z' \Leftrightarrow z - w \to \lambda(z-w) \Leftrightarrow z \to \lambda(z-w) + w = \lambda z + (1-\lambda)w = \lambda z + w'$, και το κέντρο της θα είναι ο $\frac{w'}{1-\lambda}$. Οι άλλοι ισχυρισμοί προκύπτουν εύκολα από τον προηγούμενο.

Είδαμε ότι μια συγγραμμικότητα είναι ένας μετασχηματισμός ένα προς ένα, επί που διατηρεί τα αξιώματα του ανήκει. Σημειακό μετασχηματισμό στο καρτεσιανό μοντέλο θα ονομάζουμε ένα μετασχηματισμό ένα μετασχηματισμό ένα προς ένα, επί που διατηρεί το ανήκει και την παραλληλία ευθειών. Όμως μια συγγραμμικότητα διατηρεί επίσης την παραλληλία. Άρα αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται. Περαιτέρω μπορεί να αποδειχθεί ότι στο καρτεσιανό μοντέλο ένας σημειακός μετασχηματισμός διατηρεί το μεταξύ[6]. Ακόμα αν (Α, Β, Γ) και (Α΄,Β΄ , Γ΄) δύο γνήσιες τριάδες σημείων του καρτεσιανού μοντέλου υπάρχει μοναδικός σημειακός μετασχηματισμός Τ που απεικονίζει την πρώτη τριάδα στη δεύτερη.

[6] Martin G. Transformation Geometry σελ 167-174.

Γραμμική απεικόνιση Τ στο καρτεσιανό μοντέλο ονομάζουμε μια απεικόνιση που ο τύπος της με συντεταγμένες είναι : $\begin{array}{l} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k, \quad ad - bc \neq 0. \end{array}$. Με αυτές τις συνθήκες είναι φανερό ότι μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1 επί απεικόνιση.

Αν τώρα $pX + qY + r = 0$ η εξίσωση μιας ευθείας l είναι p,q όχι ταυτόχρονα 0. Τότε και η $(ap + cq)X + (bp + dq)Y + (r + hp + kq) = 0$ είναι εξίσωση ευθείας m αφού ένα τουλάχιστον από τα ap+cq , br+dq είναι διάφορο του 0.

Τότε με απλή αντικατάσταση διαπιστώνουμε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$(x', y') \in l \Leftrightarrow px' + qy' + r = 0 \Leftrightarrow p(ax + by + h) + q(cx + dy + k) + r = 0 \Leftrightarrow$

$(ap + cq)x + (bp + dq)y + (r + hp + kq) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in m$

Έτσι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός με ορίζουσα διάφορη του 0 είναι συγγραμμικότητα άρα σημειακός μετασχηματισμός.

Αντίστροφα τώρα αν Τ σημειακός μετασχηματισμός με Τ να απεικονίζει τα (0,0), (1,0), (0,1) στα (p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2), μπορούμε να θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση Τ΄ : $\begin{array}{l} x' = (q_1 - p_1)x + (r_1 - p_1)y + p_1 \\ y' = (q_2 - p_2)x + (r_2 - p_2)y + p_2, D \neq 0. \end{array}$ Η οποία απεικονίζει την ίδια τριάδα σημείων στην ίδια εικόνα. Η Τ΄ ξέρουμε ότι είναι σημειακός μετασχηματισμός άρα Τ =Τ΄. Αυτό αποδεικνύει ότι και κάθε σημειακός μετασχηματισμός είναι γραμμική απεικόνιση στο καρτεσιανό μοντέλο.

Άρα η ομάδα των σημειακών μετασχηματισμών ταυτίζεται με την ομάδα των γραμμικών απεικονίσεων. Ακόμα από τον τύπο των γραμμικών απεικονίσεων μπορούμε εύκολα να δούμε ότι μια ομοιότητα (αυτομορφισμός) του μοντέλου είναι γραμμική απεικόνιση. Το αντίστροφο δεν ισχύει γιατί αν θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση Τ με $\begin{array}{l} x' = x \\ y' = 2y \end{array}$ απεικονίζει τα Ο(0,0), Α(1,0), Β(0,1) στα Ο, Α(1,0), Β΄(0,2) και προφανώς το $\triangle OAB$ δεν είναι όμοιο με το $\triangle OAB'$.

2.6 Ισομετρίες στο Poincare μοντέλο - αναλυτική προσσέγγιση

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε με μιγαδικές συντεταγμένες τις υπερβολικές ισομετρίες και για το σκοπό αυτό το πιο βολικό μοντέλο είναι το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου. Θυμίζουμε ότι οι ευθείες στο μοντέλο αυτό είναι ή κάθετες ημιευθείες στον άξονα x΄x ή ημικύκλια με κέντρο στον x΄x. Τα κατεκδοχήν σημεία αναπαρίστανται με τα σημεία του x΄x και με ένα σημείο στο άπειρο ∞ που θεωρείται το άλλο πέρας κάθε κατακόρυφης ημιευθείας.

Έχουμε δει ότι οι υπερβολικές ανακλάσεις στο μοντέλο του δίσκου παρίστανται είτε σαν Ευκλείδειες ανακλάσεις σε διαμέτρους του μοναδιαίου δίσκου είτε σαν αντιστροφές σε κύκλους ορθογώνιους στον μοναδιαίο κύκλο. Θα προσπαθήσουμε να

δείξουμε ότι στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου, οι υπερβολικές ανακλάσεις αναπαρίστανται είτε σαν Ευκλείδειες ανακλάσεις σε κατακόρυφες ευθείες είτε σαν αντιστροφές σε κύκλους με κέντρο στον x΄x.

Θεωρώντας την απεικόνιση E: $z = x + yi \to i\frac{i+z}{i-z} = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}i$

μπορούμε εύκολα να δούμε ότι :

a) Η E απεικονίζει τα εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου δίσκου ($x^2 + y^2 < 1$)στο άνω ημιεπίπεδο (y>0).
b) Η E απεικονίζει τον μοναδιαίο κύκλο στον άξονα x΄x.
c) Η E απεικονίζει το i στο ∞
d) Η E είναι 1-1 και επί από τον μοναδιαίο δίσκο στο άνω ημιεπίπεδο

Αυτό μας δίνει την ιδέα ότι η E μπορεί να λειτουργήσει σαν ισομορφισμός μεταξύ των δύο μοντέλων. Θα δείξουμε ακόμα ότι η E απεικονίζει ευθείες του δίσκου σε ευθείες του άνω ημιεπιπέδου. Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε την απεικόνιση $z \to \frac{1}{z}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η εξίσωση $|w_1||z-z_1| = |w_2||z-z_2|$(με μεταβλητή το z) παριστά στο καρτεσιανό μοντέλο κύκλο (απολλώνιος κύκλος) στην περίπτωση που $|w_1| \neq |w_2|$ και τη μεσοκάθετο των z_1, z_2 όταν $|w_1| = |w_2|$. (Αποδεικνύεται εύκολα).

a) Έστω λοιπόν ότι το z κινείται σε κύκλο. Τότε η εξίσωση του είναι της μορφής: $|z - z_1| = r$. Αν $z' = \frac{1}{z}$ έχουμε: $|z - z_1| = r \Leftrightarrow |\frac{1}{z'} - z_1| = r \Leftrightarrow |z' - \frac{1}{z_1}| = \frac{r}{|z_1|}|z'|$ άρα η εικόνα του z είναι σε κύκλο, περίπτωση που ισχύει ακόμα και αν z_1=0, εκτός αν $|z_1|$=r οπότε η εικόνα του z, z΄ κινείται σε ευθεία και το z σε κύκλο κέντρου O.
b) Αν το z κινείται σε ευθεία τότε θα έχει μια εξίσωση της μορφής : $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |\frac{1}{z'} - z_1| = |\frac{1}{z'} - z_2| \Leftrightarrow |z_1||z - \frac{1}{z_1}| = |z_2||z - \frac{1}{z_2}|$ που είναι εξίσωση κύκλου εκτός από την περίπτωση $|z_1| = |z_2|$, τότε το z βρίσκεται σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή O και η εικόνες του είναι ευθείες επίσης διερχόμενες από το O.
c) Επιπλέον θα δείξουμε ότι η 1/z διατηρεί στο καρτεσιανό μοντέλο τις γωνίες μεταξύ καμπύλων (γωνία δύο καμπύλων θεωρούμε τη γωνία των εφαπτόμενων τους στο σημείο τομής των). Πράγματι αν A, B, Γ τρία σημεία που απεικονίζονται στους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, μπορώ χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσω ότι τα z_1, z_3, βρίσκονται σε ευθεία με το O. Τότε για γωνίες καρτεσιανού μοντέλου ισχύει

$$(\measuredangle A'B'\Gamma')^0 = Arg(\frac{z'_2 - z'_1}{z'_2 - z'_3}) = Arg(\frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}}) = Arg[\frac{z_3}{z_1}(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3})] =$$

: .Αν

$$Arg\frac{z_3}{z_1} + Arg(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}) = Arg(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}) = (\measuredangle AB\Gamma)^0$$

αφήσουμε τα z_1, z_3 να πλησιάσουν το z_2 θα έχουμε ότι η γωνία των εφαπτόμενων διατηρείται.

Ερχόμαστε τώρα στην απεικόνιση Ε: $z \to i\frac{i+z}{i-z} = -i + 2\frac{1}{z-i}$. Από την τελευταία γραφή η Ε είναι σύνθεση, μετατόπισης κατά –i,της 1/z ομοιοθεσίας κέντρου Ο και λόγου 2 και μετατόπισης κατά –i. Άρα η Ε απεικονίζει κύκλους σε κύκλους ή ευθείες (αφού έτσι κάνουν οι 4 συναρτήσεις που τη συνθέτουν) και ευθείες σε κύκλους ή ευθείες. Ακόμα για τον παραπάνω λόγο διατηρεί τις Ευκλείδειες γωνίες και φυσικά την καθετότητα.

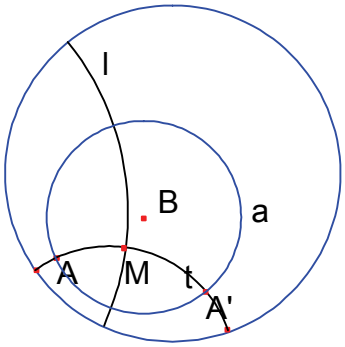
Άρα οι ορθογώνιοι στο μοναδιαίο κύκλο απεικονίζονται σε ορθογώνιους κύκλους στην εικόνα του μοναδιαίο, δηλαδή στον x΄x, ή διαφορετικά οι κύκλοι οι διερχόμενοι από το i μετασχηματίζονται σε ευθείες κάθετες στο x΄x δηλαδή σε ευθείες του μοντέλου του ημιεπιπέδου. Οι διάμετροι του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζονται αρχικά σε ευθείες που διέρχονται από το i και στη συνέχεια σε κύκλους κάθετους στον x΄x. Άρα η εικόνα ευθειών του μοντέλου του δίσκου είναι ευθείες του μοντέλου του ημιεπιπέδου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απεικόνιση που δίνει την ισομορφία των δύο μοντέλων είναι μετασχηματισμός Mobius και οι μετασχηματισμοί αυτοί διατηρούν τον διπλό λόγο[7] η απόσταση δύο σημείων Α,Β στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου θα δίνεται από τον ίδιο τύπο με την απόσταση στο μοντέλο του δίσκου, δηλαδή d(AB)= |ln(AB,PQ)|,όπου P,Q τα άκρα της υπερβολικής ευθείας AB.

Για λόγους απλότητας ας καλούμε την Ευκλείδεια ανάκλαση με άξονα μια Ευκλείδεια ευθεία αντιστροφή, αυτό θα μας διευκολύνει στο να μην μελετούμε χωριστά την περίπτωση αυτή.

Το επόμενο σχήμα μας δείχνει μια υπερβολική ανάκλαση R_l στο μοντέλο του δίσκου που παρίσταται με αντιστροφή. Για κάθε σημείο Α, φέρουμε την υπερβολική κάθετο t στην l, και ας είναι M το ίχνος της t στην l. Ας είναι a ο υπερβολικός κύκλος κέντρου M που διέρχεται από το A. Έχουμε δει ότι ο a είναι ένας ευκλείδειος κύκλος διαφορετικού όμως κέντρου, έστω B. Η ανάκλαση A΄ του A είναι το άλλο σημείο τομής της t με τον a. Ο a είναι κάθετος στην l και t αφού αυτές είναι διάμετροί του. Έτσι ο a απεικονίζεται στον εαυτό του με αντιστροφή στην l και το ίδιο κάνει και η t. Έτσι το A΄ πρέπει να είναι το αντίστροφο του A ως προς την l. Αν εφαρμόσουμε την

[7] M. Helne, Modern Geometries (σελ 57)

Ε ολόκληρο το σχήμα μετασχηματίζεται σε ισόμορφο σχήμα στο μοντέλο του ημιεπιπέδου. Έτσι το επιχείρημα που μόλις δώσαμε δείχνει ότι οι ανακλάσεις στο ημιεπίπεδο είναι αντιστροφές.



Στα επόμενα υπολογίζουμε τους τύπους για τις αναστροφές αυτές. Για μια κατακόρυφη ευθεία x=k η αναστροφή (ανάκλαση) δίνεται από την: $(x, y) \to (2k - x, y)$ η αν θεωρήσουμε μιγαδικούς $z = x + yi$, τότε $z \to 2k - \bar{z}$ για συνεπή αναφορά στα επόμενα ο τύπος μπορεί να πάρει τη μορφή : $z \to -\bar{z} + b$.

Για κύκλο κέντρου (k, 0) και ακτίνας r, κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων θέτοντας $x' = x - k$ y'=y ,οπότε και έχουμε να υπολογίσουμε την αντιστροφή σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας r. Τότε η εικόνα w΄ του z΄ προσδιορίζεται από τον ορισμό της αντίστροφής από το σύστημα των εξισώσεων : $\begin{cases} |z'||w'| = r^2 \\ \dfrac{z'}{|z'|} = \dfrac{w}{|w'|} \end{cases}$ του οποίο η λύση είναι :

$w' = |w'|\dfrac{z'}{|z'|} = \dfrac{r^2}{|z'|}\dfrac{z'}{|z'|} = \dfrac{r^2}{z'}\dfrac{z'}{\bar{z'}} = \dfrac{r^2}{\bar{z'}}$. Έτσι αν επιστρέψουμε στο αρχικό μας σύστημα συντεταγμένων: $w = \dfrac{r^2}{\bar{z} - k} + k = \dfrac{k\bar{z} + r^2 - k^2}{\bar{z} - k}$. Για συντομία θέτουμε: $c = \dfrac{1}{r}$, a=kc, b=r(1-a^2). Τότε η αντιστροφή παίρνει τη μορφή $z \to \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a}$ $a^2 + bc = 1$ που περιέχει την προηγούμενη γραφή για c=0, α=-1. Έτσι έχουμε αποδείξει την :

Πρόταση 2.6.1 Στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου του υπερβολικού επιπέδου οι ανακλάσεις παρίστανται με χρήση μιγαδικών από τις απεικονίσεις : $z \to \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - a}$ $a^2 + bc = 1$ (α,b,c είναι πραγματικοί αριθμοί.)

Στη συνέχεια μπορούμε να προσδιορίσουμε την αναπαράσταση όλων των άρτιων υπερβολικών ισομετριών, αφού είναι γινόμενο δύο ανακλάσεων. Ο υπολογισμός απλουστεύεται από τις ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις.

Για κάθε σώμα αριθμών K (σαν το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$) ορίζουμε την προβολική ευθεία P^1(K) πάνω από το K να είναι το $K \cup \infty$, όπου το ∞ απλά σημαίνει ένα ακόμη σημείο στο σώμα K. Σε κάθε σημείο αυτής της ευθείας προσαρτούμε προβολικές (ομογενείς) συντεταγμένες [x_1, x_2], όπου τα x_1, x_2 είναι στο K και όχι 0 και τα δύο. Αν δύο τέτοια ζεύγη είναι πολλαπλάσια κατά έναν αριθμό από το K θα προσδιορίζουν το

ίδιο σημείο. Έτσι τα ζεύγη [x_1, 1] και [λx_1, λ] προσδιορίζουν το ίδιο σημείο. Το ∞ προσδιορίζεται από ζεύγη της μορφής [x, 0] με x διαφορετικό του 0.

Θα δρούμε πάνω στα σημεία τις προβολικής ευθείας με αντιστρέψιμους 2χ2 πίνακες με συντελεστές από το K, κατά το συνήθη τρόπο που οι πίνακες δρούν στα διανύσματα : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$. Αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται προβολικοί μετασχηματισμοί και συγκροτούν ομάδα κάτω από το γινόμενο πινάκων την PLG(2,K). Ακόμα ένας μετασχηματισμός της μορφής: $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ στο K μπορεί να παραχθεί από την δράση στις ομογενείς συντεταγμένες [x,1] του x, του προβολικού μετασχηματισμού $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, μετασχηματίζοντας τις ομογενείς συντεταγμένες του αποτελέσματος για να πάρουμε το $\begin{bmatrix} \dfrac{ax+b}{cx+d} & 1 \end{bmatrix}$. Είναι φανερό ότι η σύνθεση δύο τέτοιων μετασχηματισμών μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας τους δύο πίνακες, έτσι η σύνθεση είναι πάλι τέτοιος μετασχηματισμός.

Γυρίζοντας στην αναπαράσταση των ανακλάσεών μας πρέπει να προσθέσουμε στους υπολογισμούς το ότι έχουμε το συζυγή ενός μιγαδικού. Αλλά ο συζυγής του συζυγούς είναι ο ίδιος ο μιγαδικός και οι συντελεστές δεν επηρεάζονται αφού είναι πραγματικοί. Ακόμα η συνθήκη $a^2 + bc = 1$ σημαίνει ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα -1. Άρα το γινόμενο δύο τέτοιων πινάκων έχει ορίζουσα +1. Πηγαίνοντας αντίστροφα συμπεραίνουμε ότι κάθε μετασχηματισμός με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα ένα είναι γινόμενο δύο υπερβολικών ανακλάσεων, ισοδύναμα ότι το σύστημα πινάκων $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ u & w \end{bmatrix}$ μπορεί να λυθεί για τους 6 αγνώστους στα αριστερά δίνοντας τους 4 γνωστούς δεξιά :

Περίπτωση 1 : $u \neq 0$ Τότε: c'=0, $a' = -1$, c=u, $a = -w$, $b' = \dfrac{x-w}{u}$, $b = wb' - y$

Περίπτωση 2 : $u = 0$ *και* y=0 Τότε: a'=0=a, c=$\sqrt{x} = b'$, c^{-1}=$b = b'$ με x>0.

Περίπτωση 3. $u = 0$ *και* x=w=1 Τότε: c'=0=c, a= $-1 = a'$, $b = -y$, $b' = 0$

Περίπτωση 4. $u = 0$. Αυτή υπολογίζεται από τις δύο προηγούμενες αφού :

$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{y}{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και γνωρίζουμε ότι το γινόμενο τεσσάρων ανακλάσεων ανάγεται σε γινόμενο δύο ανακλάσεων. Έτσι αποδείχθηκε η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.6.2. Στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου της υπερβολικής γεωμετρίας όλες οι άρτιες υπερβολικές ισομετρίες παρίστανται από ένα μετασχηματισμό της μορφής: $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc=1$ με τους συντελεστές πραγματικούς. Αυτή η ομάδα που συμβολίζεται με PSL(2, $\mathbb{R}$), ονομάζεται η ειδική προβολική γραμμική ομάδα επί των πραγματικών. Είναι μία τριπαραμετρική ομάδα γιατί μία από τις παραμέτρους εξαλείφεται από τη συνθήκη της ορίζουσας.

Μπορούμε στη συνέχεια να πάρουμε όλες τις περιττές ισομετρίες συνθέτοντας όλες τις άρτιες με μια συγκεκριμένη περιττή. Ας είναι αυτή η ανάκλαση κατά τον άξονα y΄y δηλαδή η : $z \to -\bar{z}$. Το αποτέλεσμα είναι $z \to \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$ που με κατάλληλη τροποποίηση οδηγεί στην ακόλουθη:

Πρόταση 2.6.3. Στο μοντέλο του άνω ημιεπέδου του υπερβολικού επιπέδου, οι περιττές υπερβολικές ισομετρίες παρίστανται από τις απεικονίσεις: $z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $ad-cd=1$ (α, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί)

Συνδυάζοντας όλες τις περιπτώσεις καταλήγουμε στο ότι όλες οι ισομετρίες του άνω ημιεπιπέδου παρίστανται από τους πραγματικούς προβολικούς μετασχηματισμούς με ορίζουσα 1 ή -1. Το αν είναι άρτιες ή περιττές ισομετρίες είναι αντίστοιχο με το με πρόσημο της ορίζουσας. Παρίστανται δηλαδή από πίνακες της μορφής

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{|D|}} & \frac{b}{\sqrt{|D|}} \\ \frac{c}{\sqrt{|D|}} & \frac{d}{\sqrt{|D|}} \end{bmatrix} \quad \text{D}=ad-bc$$

Πόρισμα : Η ομάδα των υπερβολικών ισομετριών είναι ισόμορφη με την PLG(2, $\mathbb{R}$). Αυτός ο ισομορφισμός υποδεικνύει αναλογίες ανάμεσα στη μονοδιάστατη προβολική ευθεία και το δισδιάστατο υπερβολικό επίπεδο[8]. Για παράδειγμα η πρόταση 2.3.16 (c) αντιστοιχεί στο θεώρημα της υπερβολικής γεωμετρίας ότι για κάθε 2 τριάδες σημείων στην προβολική ευθεία, υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την μία τριάδα στην άλλη. Επίσης και οι προβολικοί μετασχηματισμοί ταξινομούνται από τα σταθερά τους σημεία. Η εξίσωση για την εύρεση σταθερού σημείου είναι $x=\frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow cx^2+(d-a)x-b=0$ που δείχνει ότι τα σταθερά σημεία είναι 0,1,ή 2. Αφού ακόμα $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ το κατεκδοχήν σημείο είναι σταθερό αν c=0, οπότε η δευτεροβάθμια εξίσωση παραπάνω γίνεται πρώτου

[8] Το πρόγραμμα Erlnger σημείωσε πολλές άλλες αναλογίες μεταξύ γεωμετριών των οποίων οι ομάδες είναι ισόμορφες.

βαθμού και αν ο μετασχηματισμός δεν είναι ταυτοτικός, έχει σταθερό πεπερασμένο σημείο μόνο όταν $a \neq d$. Στην δική μας ταξινόμηση των υπερβολικών ισομετριών δείξαμε ότι τα σταθερά κατεκδοχήν σημεία είναι 0 για στροφές 1 για παράλληλες μεταφορές και 2 για ανακλάσεις, μετατοπίσεις και ολισθήσεις.

Παράδειγμα 3. Ας προσδιορίσουμε την ομάδα των παραλλήλων μεταφορών κατά το κατεκδοχήν σημείο ∞. Μόλις δείξαμε ότι αυτές παρίστανται από πίνακες με c=0 και α=d, δομώντας έτσι την ομάδα απεικονίσεων $z \to z + b$, που είναι ισόμορφη με την ομάδα των Ευκλειδείων μετατοπίσεων κατά μήκος του άξονα x΄x ή με την προσθετική ομάδα των πραγματικών.

Παράδειγμα 4. Ας θεωρήσουμε τα δύο κατεκδοχήν σημεία 0 και ∞ και την ομάδα των υπερβολικών μετατοπίσεων κατά μήκος της ευθείας που ορίζουν (το άνω μισό του y΄y). Αυτές παρίστανται από πίνακες με c=b=0 και αd=1, έτσι συγκροτούν την ομάδα απεικονίσεων $z \to a^2 z$ ή $z \to \kappa z, \quad \kappa > 0$. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι η ομάδα είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των πραγματικών, όπως στην περίπτωση Ευκλείδειας μετατόπισης κατά μήκος σταθερής ευθείας. (Στην πραγματικότητα οι απεικονίσεις είναι Ευκλείδειες ομοιοθεσίες κέντρου Ο.)

Παράδειγμα 5. Ας προσδιορίσουμε την ομάδα των υπερβολικών στροφών γύρω από το i στο άνω ημιεπίπεδο. Είναι άρτιες ισομετρίες που έχουν σταθερό το i, έτσι : $i = \dfrac{ai+b}{ci+d} \Leftrightarrow a = d, \quad d = -c$ και $1 = ad - bc = a^2 + b^2$. Οπότε θέτοντας $\begin{cases} a = \cos\theta/2 \\ b = -\sin\theta/2 \end{cases}$, οι στροφές γύρω από το i παρίστανται από τον πίνακα $\begin{bmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$, συνεπώς η ομάδα τους είναι ισόμορφη με την ομάδα των Ευκλειδείων στροφών γύρω από το 0 ή την πολλαπλασιαστική ομάδα των μιγαδικών μέτρου 1.

Παράδειγμα 6 Τώρα, θα προσδιορίσουμε την ομάδα των μετατοπίσεων με άξονα το μοναδιαίο ημικύκλιο και θα δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία στις παραμέτρους που εμφανίζονται.

Είναι άρτιες ισομετρίες που διατηρούν σταθερά τα κατ΄ εκδοχήν σημεία (-1,0) και (1,0). Έτσι έχουμε b=c και α=d και $1 = ad - bc = a^2 - c^2$ άρα μπορούμε να θέσουμε α=d=cosh(x/2) και b=c=sinh(x/2). Αν θέλουμε γεωμετρική ερμηνεία για το x παρατηρούμε ότι η εικόνα του i είναι το $\dfrac{\cosh(x/2)i + \sinh(x/2)}{\sinh(x/2)i + \cosh(x/2)}$ και ο διπλός λόγος των 2 αυτών σημείων με τα ιδεώδη (-1,0) και (1,0) είναι e^x. Άρα η υπερβολική απόσταση του i από την εικόνα του είναι x. Συνεπώς η παράμετρος x εκφράζει την υπερβολική απόσταση της μετατόπισης.

2.6..1 Τελική ταξινόμηση των άρτιων ισομετριών

Ένα σταθερό σημείο στο μοντέλο δεν είναι παρά λύση της εξίσωσης $z = \frac{az+b}{cz+d}$ ή ισοδύναμα της $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ με ad-cb=1. Διαιρούμε την διερεύνηση σε δύο μέρη την I c διαφορετικό από το 0 με υποπεριπτώσεις Ια, Ιβ ,Ιγ και την II c=0 με υποπεριπτώσεις IIα, IIβ, IIγ.

I. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $(\alpha+d)^2$-4.

Ια. Αν $(\alpha+d)^2$-4>0 η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άρα δύο ιδεώδη σημεία σταθερά άρα παριστά μετατόπιση.

Ιβ. Αν $(\alpha+d)^2$-4<0 η εξίσωση έχει μιγαδική λύση άρα παριστά στροφή.

Ιγ Αν $(\alpha+d)^2$=4 υπάρχει ένα ιδεώδες σημείο σταθερό και κανένα σύνηθες άρα παριστά παράλληλη μεταφορά.

II Αν c=0 η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια και αν $z \to \infty$ τότε και η εικόνα του z z΄ κάνει το ίδιο άρα το κατ εκδοχήν σημείο ∞ είναι σταθερό.

IIα αν d-α διαφορετικό του 0 η εξίσωση έχει ρίζα πραγματική άρα παριστά μετατόπιση. Στην περίπτωση αυτή ισχύει :

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + 4ad = (a-d)^2 + 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4 > 2$$

IIβ αν d-α=0 και b διαφορετικό του 0 δεν έχουμε πραγματική ρίζα άρα παριστά παράλληλη μεταφορά κατά το ∞. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $(\alpha+d)^2$=4

IIγ αν d-α=0 και b=0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Συνοψίζοντας και δίνοντας τον απαραίτητο φορμαλισμό, οι άρτιες ισομετρίες του μοντέλου του άνω ημιεπιπέδου είναι ισόμορφες με την ομάδα πινάκων $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $ad - bc = 1$.

Το σύνολο των στροφών αναπαρίσταται από τους παραπάνω πίνακες με $|trA| = |a+d| < 2$.

Το σύνολο των μετατοπίσεων με το σύνολο των πινάκων με $|trA| = |a+d| > 2$.

Το σύνολο των παραλλήλων μεταφορών από τους πίνακες με $|trA| = 2$.

2.6..2 Θεμελιώδης διαφορά στην ομάδα των άρτιων ισομετριών Ευκλειδείου και Υπερβολικού επιπέδου

Έχουμε δει ότι οι μετατοπίσεις αποτελούν κανονική υποομάδα των άρτιων ισομετριών στην Ευκλείδεια περίπτωση. Στην υπερβολική οι μετατοπίσεις δεν αποτελούν καν ομάδα αλλά πολύ περισσότερο οι άρτιες ισομετρίες δεν έχουν κανονική υποομάδα. Με άλλα λόγια οι άρτιες ισομετρίες του Υπερβολικού επιπέδου αποτελούν απλή ομάδα. Αυτό είναι μια θεμελιώδης διαφορά στις δύο γεωμετρίες.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου διατίθεται για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι αν έχουμε μια μη τετριμμένη κανονική υποομάδα Γ των άρτιων ισομετριών G τότε η Γ=G.

Επειδή η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια πινάκων θα χρειαστούμε δύο λήμματα γραμμικής άλγεβρας που τα αναφέρουμε αναπόδεικτα.

Λήμμα 1 Αν A, B δύο πραγματικοί πίνακες με ορίζουσα ένα και τις ίδιες διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές λ_1, λ_2 υπάρχει πραγματικός πίνακας P με ορίζουσα ένα ώστε $PAP^{-1}=B$.

Λήμμα 2 Αν A πραγματικός 2x2 πίνακας με ορίζουσα A=1 οι ιδιοτιμές του είναι $\frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2-4}}{2}$ (είναι φανερό ότι έχουμε 2 ίσες ιδιοτιμές με 1 αν και μόνον αν |trA|=2).

Θα αποδείξουμε ότι αν η Γ περιέχει μη τετριμμένο στοιχείο είναι ίση με την G.Θα το αποδείξουμε σε τρία μέρη.

Πρόταση 1 Αν η Γ περιέχει ένα στοιχείο A με $0 \leq trA<2$ (όμοια με $-2<trA\leq 0$) τότε περιέχει κάθε στοιχείο της G.

Πρόταση 2 Αν η Γ περιέχει ένα στοιχείο A με $2< trA$ (όμοια με $trA <-2$) τότε περιέχει κάθε στοιχείο της G.

Πρόταση 3 Αν η Γ περιέχει ένα στοιχείο A με trA=2 (όμοια με -2=trA) τότε περιέχει κάθε στοιχείο της G.

Απόδειξη της πρότασης 1:

Υποθέτουμε ότι η Γ περιέχει ένα στοιχείο A με trA<2. Τότε από το λήμμα 1 και 2 περιέχει (αφού είναι κανονική) όλα τα στοιχεία P με trP=trA. Ειδικώς περιέχει και τον πίνακα $B=\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ με cosα = ½ trA.

Τότε η Γ περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $Q^{-1}BQ$ και επιλέγοντας $Q=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ η Γ περιέχει κάθε στοιχείο της μορφής $C_1 = \begin{pmatrix} \cos a & b^{-2}\sin a \\ -b^2 \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ η Γ περιέχει ακόμα το στοιχείο που προκύπτει με αντικατάσταση του α με –α (αυτό είναι ισοδύναμο με αντικατάσταση του B με B^{-1}) και του b με 1/b. Καλούμε το αποτέλεσμα C_2 και τελικώς η Γ θα περιέχει κάθε στοιχείο της μορφής C_1 C_2 = $\begin{pmatrix} \cos^2 a + b^4 \sin^2 a & -\sin a \cos a(b^2-b^{-2}) \\ -\sin a \cos a(b^2-b^{-2}) & \cos^2 a + b^{-4}\sin^2 a \cos a \end{pmatrix}$. Το ίχνος αυτού του πίνακα είναι : $\cos^2 a + (b^4+b^{-4})\sin^2 a$ που μπορεί να γίνει ίσο με κάθε αριθμό μεγαλύτερο του 2 με κατάλληλη επιλογή του b. Συνεπώς η Γ περιέχει όλους τους πίνακες με ίχνος μεγαλύτερο του 2, ή ισοδύναμα όλες τις μετατοπίσεις.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε ότι περιέχει και όλους τους πίνακες με ίχνος στο διάστημα [0,2). Γνωρίζουμε ότι η σύνθεση τριών μετατοπίσεων κατά μήκος των πλευρών τριγώνου είναι στροφή κατά το έλλειμμα το τριγώνου. Αν επιλέξουμε το i

σαν αρχική κορυφή το αποτέλεσμα είναι μια στροφή περί το i που παρίσταται με έναν πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$ με α οποιαδήποτε γωνία μεταξύ 0 και π/2. Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας με ίχνος οποιοδήποτε αριθμό στο διάστημα (0,2). Για την περίπτωση του 0 θεωρούμε τετράπλευρο οπότε το α μεταβάλλεται στο (0,π).

Για να ολοκληρωθεί η πρόταση 1 μας χρειάζονται οι πίνακες με ίχνος 2.

Για αυτό παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας αριστερά έχει ίχνος 2 ενώ οι δύο δεξιά δεν έχουν. Άρα ο πίνακας αυτός είναι στην Γ. Όμως πίνακας με ορίζουσα 1 και ίχνος 2 έχει ιδιοτιμές υποχρεωτικά 1 και είναι συζυγής του μοναδιαίου ή του πίνακα που προαναφέραμε (πίνακας Jordan). Έτσι η Γ περιέχει και όλους τους πίνακες με ίχνος 2 και αυτό ολοκληρώνει την πρόταση 1.

Απόδειξη της πρότασης 2.

Αν η Γ περιέχει έναν πίνακα με ίχνος μεγαλύτερο του 2 περιέχει μια μετατόπιση κατά απόσταση x. Τότε περιέχει και όλες τις μετατοπίσεις κατά x γιατί όλες έχουν το ίδιο ίχνος (2cosh(x/2)) Θεωρώντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x και τις μετατοπίσεις στις πλευρές του η Γ περιέχει μια στροφή κατά γωνία α είτε έναν πίνακα με ίχνος μικρότερου του 2. Από εδώ επαναλαμβάνεται το προηγούμενο βήμα.

Απόδειξη της πρότασης 3.

Αν η Γ περιέχει ένα στοιχείο με ίχνος 2 περιέχει κάθε στοιχείο με ίχνος 2 (είναι όλα συζυγή με τον πίνακα Jordan ή ίσα με το μοναδιαίο). Άρα περιέχει και τους πίνακες A = $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Τότε όμως περιέχει και τον AB =$\begin{pmatrix} 1+k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ που έχει ίχνος μεγαλύτερο του 2. Από εδώ επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα.

Το θεώρημα έχει λοιπόν, αποδειχθεί στην περίπτωση του μοντέλου του άνω ημιεπιπέδου.

Υπάρχει όμως ένα κεντρικό θεώρημα στην υπερβολική γεωμετρία που λέει ότι τα μοντέλα του επιπέδου είναι κατηγορικά. Δηλαδή όποια πρόταση αποδειχθεί στο μοντέλο είναι πρόταση της γεωμετρίας. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού[9] υπερβαίνει τα πλαίσια της παρούσας. Η ύπαρξή του όμως υπέφωσκε και δικαιολογεί κατά κάποιο βαθμό το παιχνίδι που κάναμε μεταξύ των μοντέλων.

[9] Για απόδειξη βλέπε A. Ramsay, R. D. Richtmyer, Introduction to Hyperbolic Geometry σελ 207- 209

3 Γεωμετρία μετασχηματισμών

3.1 Εφαρμογές των σημειακών μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια γεωμετρία

Εδώ παρατίθενται μερικά παραδείγματα γεωμετρικών προβλημάτων που μπορούν εύκολα να λυθούν χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς. Οι λύσεις χρησιμοποιούν ιδιότητες στροφών, μεταφορών και ομοιοθεσίας. Ο σκοπός της παράθεσης αυτών των προβλημάτων είναι να επιδείξει την δύναμη των τεχνικών που χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς.

Πρόβλημα 1

Ένα σημείο Ο καλείται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος Φ αν για κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ με το Α στο Φ και μέσο του ΑΑ΄ το Ο το Α΄ ανήκει επίσης στο Φ. Αποδείξτε ότι ένα σχήμα έχει ή κανένα ή ένα ή άπειρα κέντα συμμετρίας.

Λύση

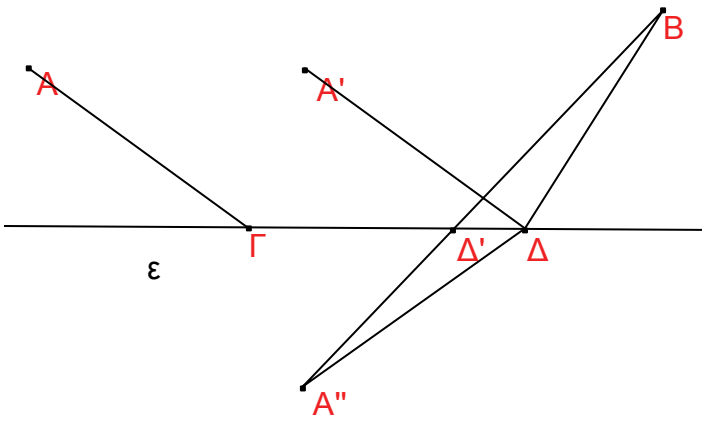
Το είναι Ο κέντρο συμμετρίας του Φ τότε και μόνον τότε αν το σχήμα είναι αναλλοίωτο κάτω από την ημιστροφή H_O (στροφή κατά 180^0) γύρω από το Ο. Το τρίγωνο εύκολα αποδεικνύεται ότι δεν έχει κέντρο συμμετρίας, ο κύκλος έχει το κέντρο του (ένα) και η ευθεία άπειρα. Αν ένα σχήμα είχε 2 κέντρα συμμετρίας το Ο και το Ο΄ τότε το Ο΄΄ = H_O(Ο΄) είναι ένα τρίτο διαφορετικό από τα δύο προηγούμενα γιατί αλλιώς τα Ο και Ο΄ θα συνέπιπταν. Επαγωγικά δημιουργούμε την ακολουθία το $O(\nu+1)=H_{O(\nu-1)}(O(\nu))$. Αν υποθέσουμε ότι τα ν πρώτα σημεία είναι διαφορετικά και το Ο(ν+1) συμπίπτει με κάποιο Ο(κ) με $\kappa \leq \nu-1$, τότε το Ο(κ) πρέπει να συμπίπτει με το Ο(ν) (οι στροφές διατηρούν αναλλοίωτο μόνο το κέντρο τους) άτοπο λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

Πρόβλημα 2

Αν δίνονται 2 σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος ευθείας ε και σταθερό μήκος λ να βρεθούν σημεία Γ, Δ επί της λ ώστε το μήκος ΓΔ να είναι λ και το άθροισμα ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ ελάχιστο.

Λύση

Μεταφέρουμε το Α κατά τη διεύθυνση της ε κατά μήκος λ στο Α΄ και στη συνέχεια το ανακλούμε ως προς την ε στο Α΄΄. Αν ΓΔ μια τυχούσα θέση το άθροισμα ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ είναι ίσο με το Α΄΄Δ+ΔΒ+ΓΔ. Άρα γίνεται ελάχιστο όταν το

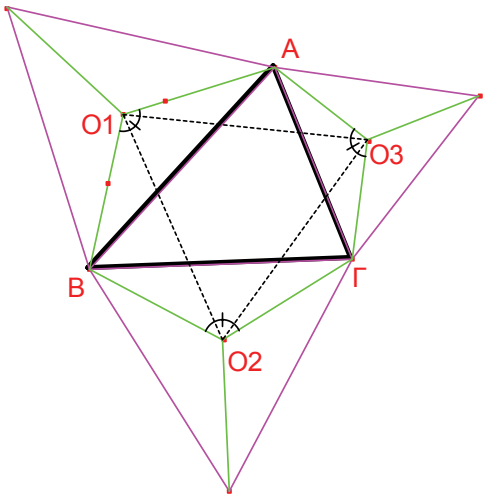


Α΄΄Δ+ΔΒ γίνει ελάχιστο δηλαδή όταν το Δ γίνει συνευθειακό με τα Α΄΄, Β (Δ΄). Τότε εύκολα εντοπίζεται η θέση του Γ.

Πρόβλημα 3

Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα εξωτερικά κάθε πλευράς του. Αποδείξτε ότι τα κέντρα βάρους των τριγώνων αυτών O_1, O_2, O_3 σχηματίζουν επίσης ισόπλευρο τρίγωνο.

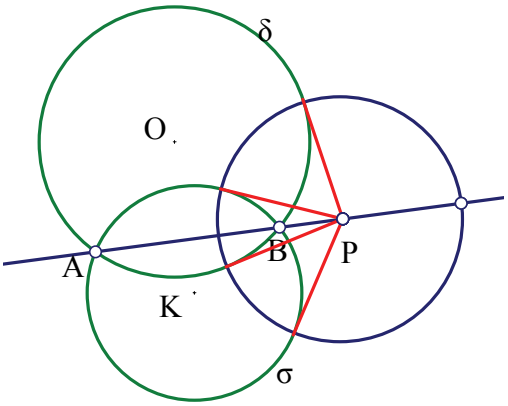
Λύση



Θεωρούμε τις στροφές T_1, T_2, T_3 κατά 120^0 αριστερόστροφα γύρω από τα τρία κέντρα, αντίστοιχα. Τότε $T_1(A)=B$, $T_2(B)=Γ$, $T_3(Γ)=A$. Η σύνθεση T_2 T_1 είναι στροφή 120^0 δεξιόστροφα γύρω από σημείο O'_3 που είναι σημείο τομής 2 ευθειών που η κάθε μια σχηματίζει γωνία 60^0 με την O_1O_2. Αυτό γιατί αν $O_1O_2=m$ τότε $T_1 = R_mR_l$ και $T_2 = R_nRm$ με τις γωνίες των l, m και m, n 60° αριστερόστροφα, άρα των l, m 120° αριστερόστροφα. Έτσι το $O_1O_2O'_3$ είναι ισόπλευρο. Επίσης η T_2 T_1 απεικονίζει το Α στο Γ. Όμως στροφή 120^0 δεξιόστροφα που απεικονίζει το Α στο Γ είναι μόνο η T_3^{-1}. Αυτό γιατί το κέντρο αυτής της ισομετρίας είναι το μοναδικό σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΑΓ και τόξου που βλέπει το ΑΓ υπό δεξιόστροφη γωνία 120°. Άρα το O'_3 ταυτίζεται με το O_3, συνεπώς το $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 4

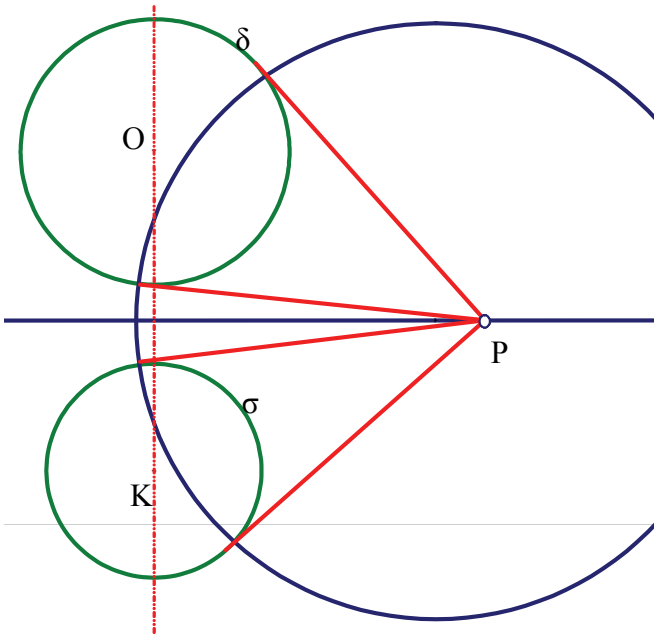
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων Ρ των κύκλων γ που είναι ορθογώνιοι σε δύο δοσμένους κύκλους, δ κέντρου Ο και σ κέντρου Κ.



Απόδειξη. Έστω ότι οι δ, σ τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση του τόπου των, σημείων Ρ που έχουν την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους ή διαφορετικά οι εφαπτόμενες από το Ρ στους δύο κύκλους είναι ίσες. Αν θεωρήσουμε την ΡΑ τότε αυτή πρέπει να διέρχεται και από το Β αφού το σημείο Ρ έχει την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους. Αντίστροφα κάθε

σημείο της ΑΒ έχει την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους. Άρα σε αυτή την περίπτωση ο τόπος του Ρ είναι η ευθεία ΑΒ που είναι κάθετη στην ΟΚ.

Για την περίπτωση που οι δύο κύκλοι δεν τέμνονται θα χρησιμοποιήσουμε ένα μικρό μέρος των θεμάτων που αναπτύσσονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα μετατοπίζουμε τον κύκλο σ στη διεύθυνση του ΟΚ μέχρι να τμήσει τον κύκλο δ. Τότε ο κοινά κάθετος κύκλος απεικονίζεται σε ένα καινούργιο κύκλο που είναι κάθετος στον γ και στην εικόνα του σ. Επομένως το κέντρο του Ρ΄ θα βρίσκεται σε ευθεία κάθετη στην ΟΚ. Μέσω της αντίστροφης μετατόπισης το Ρ θα βρίσκεται επίσης σε ευθεία κάθετη στην ΟΚ (ριζικός άξονας).



Πρόβλημα 5

Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, θεωρήστε το περίκεντρό του Ο, το κέντρο βάρους G και το ορθόκεντρο Η. Θεωρήστε γνωστό ότι το κέντρο βάρους υπάρχει και βρίσκεται στα 2/3 κάθε διαμέσου, έτσι η ομοιοθεσία Τ κέντρου G και λόγου – ½ απεικονίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στο τρίγωνο των μέσων των πλευρών Α΄Β΄Γ΄. Το πρόβλημα που θέτουμε είναι να δείξουμε την ύπαρξη του Η ότι τα Ο, G και Η είναι συνευθειακά και ότι το G κείται στα 2/3 της ΗΟ. (ευθεία του Euler)

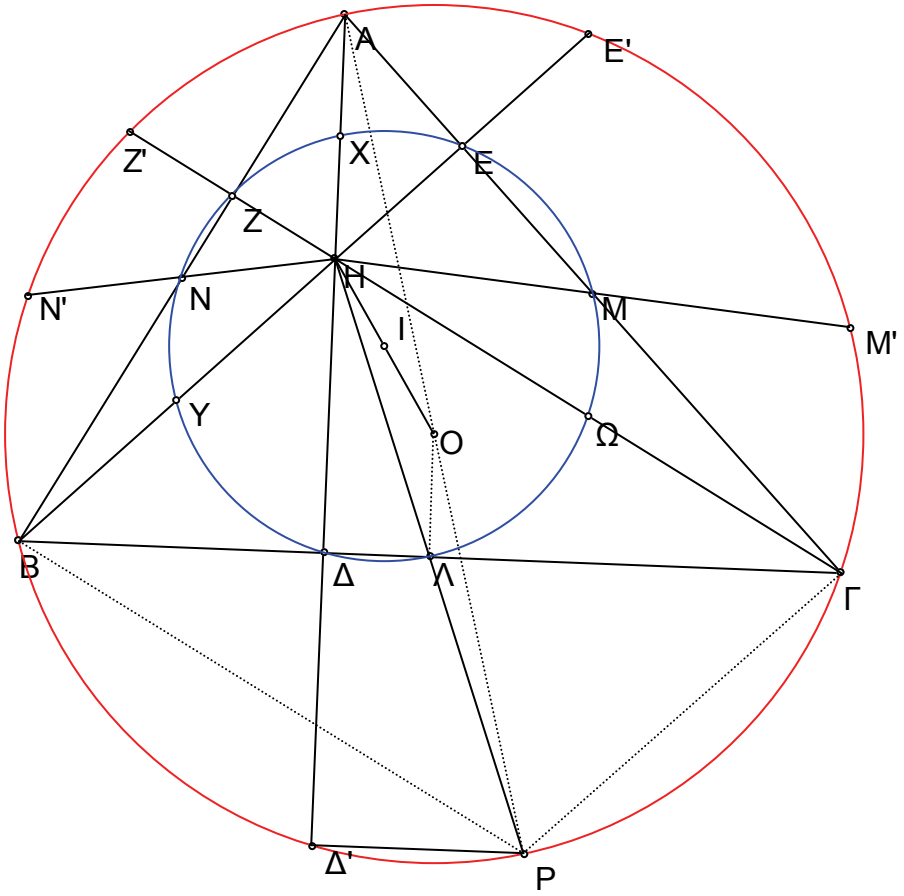
Λύση:

Η T^{-1} είναι ομοιοθεσία κέντρου G και λόγου -2. Άρα διατηρεί τις γωνίες, και τις ευθείες. Οι εικόνες των μεσοκαθέτων επομένως του ΑΒΓ είναι ευθείες κάθετες στις πλευρές του Α΄Β΄Γ΄ άρα και του ΑΒΓ που διέρχονται από τις εικόνες των Α΄, Β΄, Γ΄ δηλαδή από τα Α, Β, Γ. Συνεπώς είναι τα ύψη του τριγώνου. Αφού οι μεσοκάθετοι συντρέχουν στο Ο τα ύψη θα συντρέχουν στην $T^{-1}(O)=H$. Ακόμα αφού το κέντρο της T^{-1} είναι το G ta H,G,O θα είναι συνευθειακά με HG=2GO.

Πρόβλημα 6

Αν Η το ορθόκεντρο, Ο το βαρύκεντρο Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών και Δ, Ε, Ζ τα ίχνη των υψών τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι τα Λ, Μ, Ν, Δ, Ε, Ζ και τα μέσα των τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ βρίσκονται σε κύκλο που το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία του Euler και είναι το μέσο του ΗΟ.

Λύση:



Θεωρούμε την ομοιοθεσία Τ κέντρου Η και λόγου 2. Αν δείξουμε ότι η Τ απεικονίζει και τα 9 σημεία στον περιγεγραμμένο κύκλο κ του ΑΒΓ τότε η T^{-1} θα απεικονίζει τα πρότυπα σε κύκλο κέντρου το μέσο Ι του ΗΟ (αφού το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου) και ακτίνας το μισό. Φανερά η Τ απεικονίζει τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ στα Α, Β, Γ.

Αν Ρ το αντιδιαμετρικό του Α στον κ τότε ΓΡ $\perp$ ΑΓ άρα ΓΡ παράλληλη στο ύψος ΒΕ. Όμοια ΒΡ παράλληλη στο ΖΓ. Έτσι το ΒΡΓΗ είναι παραλληλόγραμμο και πρέπει οι διαγώνιες να διχοτομούνται άρα το μέσο Λ της ΒΓ είναι και μέσο της ΗΡ. Συνεπώς τα μέσα των πλευρών απεικονίζονται μέσω της Τ σε σημεία του κ.

Επίσης αφού ΑΡ διάμετρος ΑΔ΄ $\perp$ Δ΄Ρ.. Άρα Δ΄Ρ παράλληλη στην ΔΛ. Στο τρίγωνο ΗΔ΄Ρ όμως το Λ είναι μέσο της ΗΡ. Συνεπώς και το Δ μέσο της ΗΔ΄.

Άρα και τα ίχνη των υψών απεικονίζονται μέσω της Τ σε σημεία του κ.

Επομένως τα 9 σημεία βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ι όπου Ι το μέσο του ΗΟ[10]

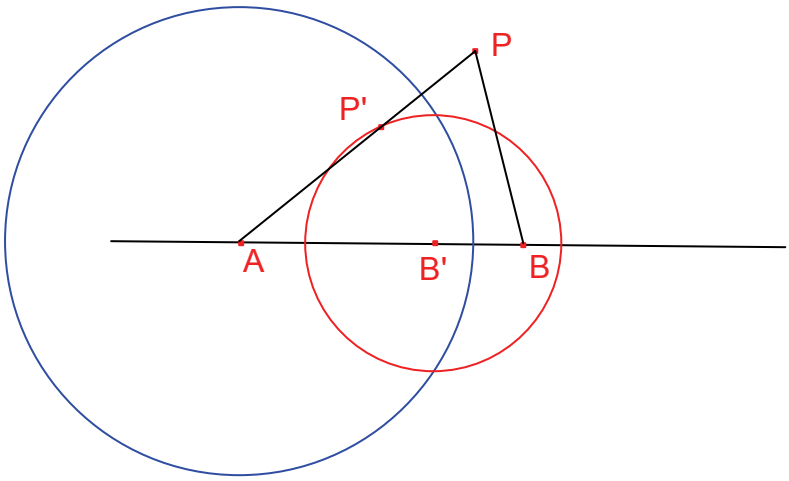
[10] Πολύ περισσότερα προβλήματα μπορεί να βρει κάποιος στο. Yagom I.M, GEOMETRIC TRANSFORMATIONS, Vol I,II,III.

3.1..1 Προβλήματα αντιστροφών

Πρόβλημα 1. Οι κύκλοι του Απολλώνιου

Έστω σημεία Α, Β. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ρ του επιπέδου για τα οποία $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r > 0$ όπου r σταθερός θετικός.

Λύση. Το πρόβλημα έχει μια κλασσική λύση με τα θεωρήματα διχοτόμων, αλλά εμείς για τις ανάγκες του παρόντος θα διαπραγματευτούμε μια λύση με αντιστροφή.



Θεωρούμε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 1. Έστω Τ η αντιστροφή κατά αυτόν τον κύκλο. Τότε η εικόνα του Β είναι ένα σημείο Β΄ της ΑΒ και η εικόνα του Ρ σημείο Ρ΄ της ΑΡ. Ισχύουν οι σχέσεις: $\overline{AB'} = \frac{1}{\overline{AB}}$, $\overline{AP'} = \frac{1}{\overline{AP}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΑΡ΄Β΄ είναι όμοια άρα : $\frac{\overline{B'P'}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{B'P'} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}\overline{AB'} = \frac{1}{r}\frac{1}{\overline{AB}}$, δηλαδή η απόσταση του Ρ΄ από το σταθερό Β΄ είναι σταθερή. Αυτό όμως σημαίνει ότι το Ρ΄ ανήκει σε κύκλο κέντρου Β΄. Τότε όμως θεωρώντας την T^{-1} το Ρ στη γενική περίπτωση ανήκει σε κύκλο που έχει κέντρο στην ευθεία ΑΒ ή σε ευθεία στην περίπτωση που ο κύκλος του Ρ΄ διέρχεται από το Α. Στην ειδική αυτή περίπτωση έχουμε $\overline{AB'} = \frac{1}{r}\overline{AB'} \Rightarrow r = 1$ που σημαίνει ότι το Ρ ισαπέχει από τα Α,Β άρα ο τόπος του είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Πρόβλημα 2. Ένα θεώρημα του Πτολεμαίου

Το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών και αντίστροφα.

Απόδειξη:

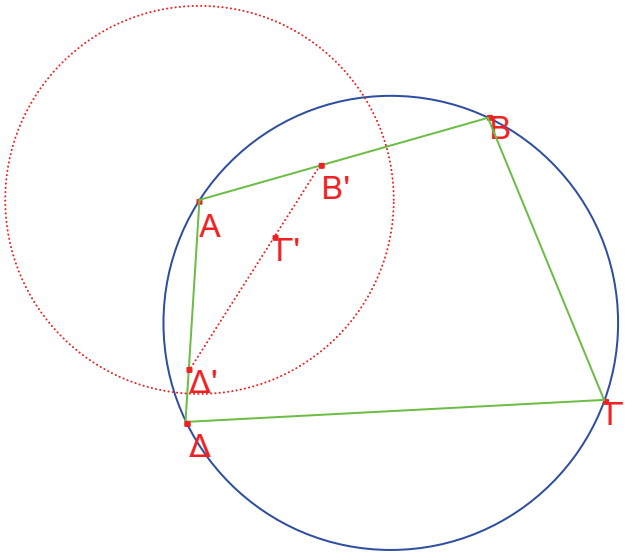
Έστω ΑΒΓΔ το τετράπλευρο και σ κύκλος κέντρου Α. Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον σ. Τότε τα σημεία Β, Γ, Δ απεικονίζονται σε σημεία Β΄ ,Γ΄, Δ΄ των ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Αφού η αντιστροφή γίνεται κατά κύκλο που έχει το κέντρο του στον εγγραμμένο

του ΑΒΓΔ τα Β΄, Γ΄, Δ΄ είναι συνευθειακά με το Γ΄ να βρίσκεται μεταξύ των Β΄ και Δ΄. Άρα ισχύει $\overline{B'\Delta'} = \overline{B'\Gamma'} + \overline{\Gamma'\Delta'}$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓ΄Β΄ έχουμε: $\frac{\overline{B'\Gamma'}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{A\Gamma}} \Rightarrow \overline{B'\Gamma'} = \overline{B\Gamma}\frac{\overline{AB'}}{\overline{A\Gamma}} = \overline{B\Gamma}\frac{r^2}{\overline{AB}\,\overline{A\Gamma}}$ όπου r η ακτίνα του κύκλου αντιστροφής. Όμοια : $\overline{B'\Delta'} = \overline{B\Delta}\frac{r^2}{\overline{AB}\,\overline{A\Delta}}$ και $\overline{\Gamma'\Delta'} = \overline{\Gamma\Delta}\frac{r^2}{\overline{A\Gamma}\,\overline{A\Delta}}$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε : $\overline{B\Delta}\frac{r^2}{\overline{AB}\,\overline{A\Delta}} = \overline{B\Gamma}\frac{r^2}{\overline{AB}\,\overline{A\Gamma}} + \overline{\Gamma\Delta}\frac{r^2}{\overline{A\Gamma}\,\overline{A\Delta}}$

$$\Leftrightarrow \overline{B\Delta}\,\overline{A\Gamma} = \overline{B\Gamma}\,\overline{A\Delta} + \overline{\Gamma\Delta}\,\overline{AB}$$

που είναι το ζητούμενο. Αν το ΑΒΓΔ δεν ήταν εγγράψιμο τα Δ΄ Γ΄ Β΄ δεν θα ήταν σε ευθεία άρα θα είχαμε $\overline{B'\Delta'} < \overline{B'\Gamma'} + \overline{\Gamma'\Delta'}$ που θα οδηγούσε στην $\overline{B\Delta}\,\overline{A\Gamma} < \overline{B\Gamma}\,\overline{A\Delta} + \overline{\Gamma\Delta}\,\overline{AB}$. Αυτό αποδεικνύει και το αντίστροφο.



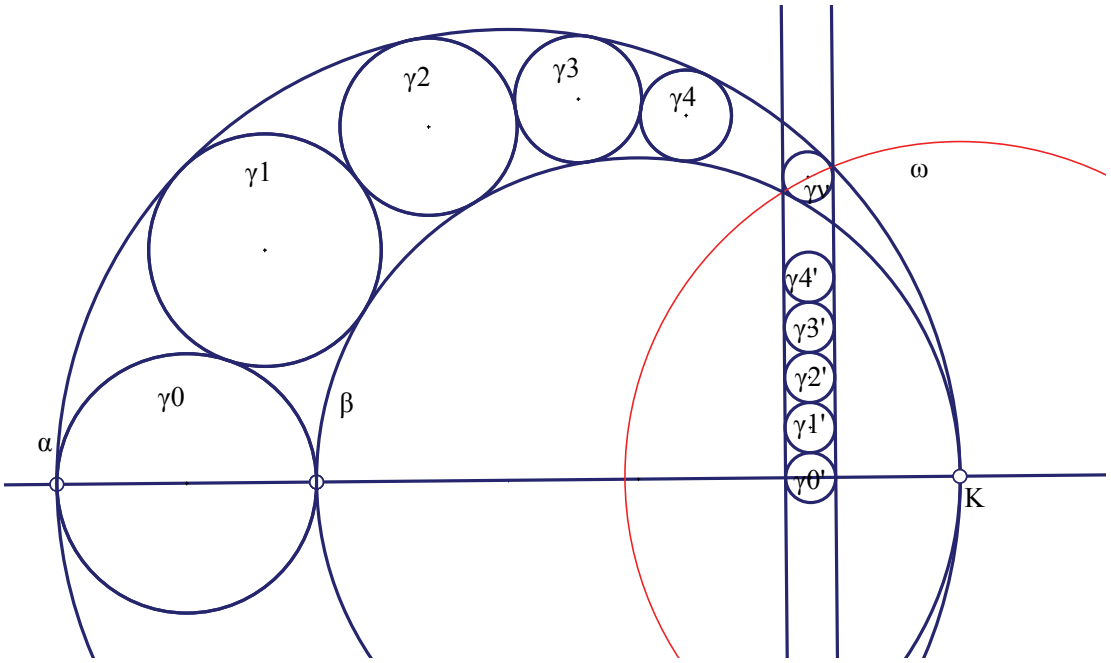
Σχολιάζοντας τα δύο προβλήματα βλέπουμε ότι ένα πρόβλημα που αρχικά φαντάζει δύσκολο μετατρέπεται σε ένα άλλο, μέσω της αντιστροφής, που είναι πολύ απλούστερο στη λύση του[11]. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων όπως θα δούμε στη συνέχεια. Βέβαια να τονίσουμε εδώ ότι δεν βρήκαμε κάποια μαγική μέθοδο που επιλύει γεωμετρικά προβλήματα γιατί απλά τέτοια μέθοδος, όπως είναι γνωστό από την εποχή του Ευκλείδη, δεν υπάρχει.

Πρόβλημα 3 Η άρβυλος του Πάππου. (Πάππος, Συναγωγή 4 208 9-21)

Έστω κύκλος α και διάμετρός του δ. Θεωρούμε δύο κύκλους β και γ_0 που εφάπτονται εσωτερικά του α και μεταξύ τους εξωτερικά. Έστω η ακολουθία των κύκλων γ_0, γ_1, γ_2, …. γ_ν καθένας από τους οποίους εφάπτεται στον προηγούμενο και

[11] Για περισσότερα προβλήματα αντιστροφής και όχι μόνο http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/

στο β εξωτερικά και στον α εσωτερικά. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν ρ_ν η ακτίνα του γ_ν και δ_ν η απόσταση του κέντρου του από τη δ τότε $\delta_\nu = 2\nu\rho_\nu$. Απόδειξη



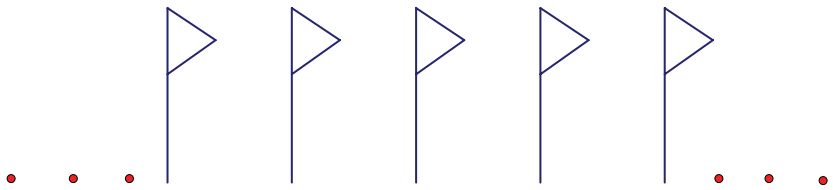
Αντιστρέφουμε το όλο σχήμα σε κύκλο ω κάθετο στον γ_ν με κέντρο το σημείο Κ που εφάπτονται οι α, β. Τότε η διάμετρος δ μένει αναλλοίωτη και οι α,β μετασχηματίζονται σε ευθείες κάθετες στη δ άρα σε ζώνη παραλλήλων. Οι κύκλοι γ_ι μετασχηματίζονται σε ίσους κύκλους εφαπτόμενους στις δύο παράλληλες ενώ ο γ_ν μένει αναλλοίωτος. Τότε η ζητούμενη σχέση είναι προφανής.

3.1..2 Συμμετρία

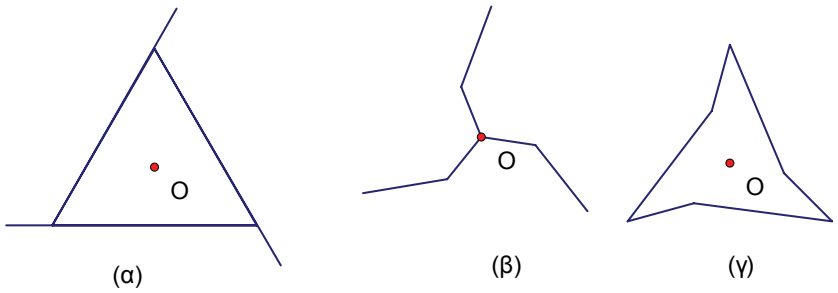
Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό με μια συζήτηση για τη συμμετρία που είναι από τις κύριες εφαρμογές της προσέγγισης της Γεωμετρίας μέσω μετασχηματισμών.

Δοθέντος σχήματος S, οι ισομετρίες που αφήνουν το S αναλλοίωτο καλούνται συμμετρίες του S. Φανερά οι συμμετρίες ενός σχήματος αποτελούν ομάδα. Σκεφτόμαστε ότι όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η ομάδα, τόσο πιο συμμετρικό είναι το σχήμα. Για παράδειγμα ένας κύκλος γ είναι «πολύ» συμμετρικός. Η ομάδα συμμετρίας του αποτελείται από όλες τις στροφές γύρω από το κέντρο του Ο και τις ανακλάσεις με άξονα μια διάμετρό του. Αυτή η ομάδα έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.

Ένα τετράγωνο μοιάζει να είναι αρκετά συμμετρικό, αλλά θα δείξουμε ότι έχει μόνο οκτώ συμμετρίες. Το σχέδιο διαζώματος που βλέπουμε στην παρακάτω εικόνα έχει άπειρη ομάδα συμμετριών. Αποτελείται από τις ακέραιες δυνάμεις T^ν μιας συγκεκριμένης μετατόπισης που μετακινεί το διάζωμα μία μονάδα δεξιά.



Το πρώτο πρόβλημα είναι να βρούμε ένα ελάχιστο σύνολο γεννητόρων της ομάδας συμμετριών. Αυτό σημαίνει να βρούμε το μικρότερο δυνατό σύνολο συμμετριών με την ιδιότητα να παράγουν όλες τις άλλες συμμετρίες με γινόμενα τους και με γινόμενα που περιέχουν αντιστροφές τους. Για παράδειγμα στο επάνω σχήμα υπάρχει μόνο ένας γεννήτορας η T (ή η T^{-1}). Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι να περιγράψουμε τις βασικές σχέσεις ανάμεσα στους γεννήτορες. Για τον παραπάνω γεννήτορα T δεν υπάρχει καμία σχέση γιατί όλες οι δυνάμεις του είναι διακεκριμένες. Ας θεωρήσουμε όμως το παρακάτω σχήμα:



Οι μόνες συμμετρίες των σχημάτων είναι η ταυτοτική και οι στροφές γύρω από το O κάτα 120 και 240 μοίρες. Η στροφή R κατά 120 μοίρες είναι ο γεννήτορας αυτής της ομάδας και ικανοποιεί τη σχέση $R^3=I$. Λέμε ότι η ομάδα είναι κυκλική τάξης 3. Πιο γενικά μια ομάδα θα καλείται κυκλική τάξης n αν έχει έναν γεννήτορα και n στοιχεία. Θα καλείται άπειρη κυκλική αν έχει έναν γεννήτορα και άπειρα στοιχεία. (Η ομάδα στο σχέδιο διαζώματος είναι άπειρη κυκλική). Ας συμβολίσουμε με C_n κάθε κυκλική ομάδα τάξης n που παράγεται από στροφή κατά $360^0/n$ γύρω από κάποιο σημείο. Οι κατασκευές στο προηγούμενο σχήμα μπορούν να γενικευτούν από 3 σε n ώστε να πάρουμε ένα σχήμα με τη C_n ως ομάδα συμμετρίας. Το σχήμα (β) είναι ένα triquetrum η γενίκευσή του για n=4 είναι μια σβάστικα. Το κυρτά πολύγωνα 2n πλευρών που έχουμε από τη γενίκευση της (γ) περίπτωσης καλούνται οδοντωτά (ratchet) πολύγωνα.

Ένα τρίτο πρόβλημα είναι να περιγράψουμε την δομή της ομάδας συμμετριών, δείχνοντας αν είναι δυνατόν ότι είναι ισόμορφη με κάποια γνωστή ομάδα.

Θα προσπαθήσουμε παρακάτω να περιγράψουμε την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου. Κάθε συμμετρία πρέπει να αφήνει το κέντρο O σταθερό (αφού το O είναι η τομή των διαγωνίων και κάθε διαγώνιος πρέπει να απεικονίζεται στον εαυτό της ή σε άλλη διαγώνιο). Έτσι οι συμμετρίες πρέπει να είναι η στροφές γύρω από το O ή ανακλάσεις με άξονα διερχόμενο από το O. Οι μόνες στροφές γύρω από το O που

είναι συμμετρίες είναι η I, R, R^2, R^3, όπου R μπορεί να είναι μια στροφή αριστερά κατά 90^0. Αυτές συγκροτούν μια κυκλική υποομάδα τάξης 4. Υπάρχουν ακόμα 4 ανακλάσεις που είναι συμμετρίες. Οι ανακλάσεις με άξονα τις δύο διαγώνιους και τις δύο μεσοκαθέτους των απέναντι πλευρών. Αν T μία από αυτές τις ανακλάσεις τότε το ελάχιστο σύνολο γεννητόρων της ομάδας συμμετριών του τετραγώνου είναι το {T, R}. Εύκολα επαληθεύεται ότι η ομάδα αυτή δεν είναι αντιμεταθετική. Συμβολίζεται με D_4, και καλείται η διεδρική ομάδα τάξης 8. Πιο γενικά αν n φυσικός μεγαλύτερος ή ίσος του 3, D_n θα συμβολίζουμε την ομάδα συμμετριών ενός κανονικού πολυγώνου. Έχει 2n στοιχεία (συμμετρίες) και γεννήτορες δύο στοιχεία {T, R} όπου R μια στροφή γύρω από το κέντρο O κατά $360^0/n$ και η T είναι ανάκλαση με άξονα μια ευθεία που ορίζεται από κορυφή και το κέντρο. Για n=2, D_2 συμβολίζει την ομάδα που προκύπτει από την ημιστροφή H_P και την ανάκλαση με άξονα μια ευθεία που διέρχεται από το P, ενώ για n=1, η D_1 συμβολίζει μια κυκλική ομάδα τάξης δύο παραγόμενη από μια ανάκλαση. Τα ακόλουθο αξιόλογο θεώρημα οφείλεται στον Leonardo da Vinci.

Θεώρημα 3.1. Στο Ευκλείδειο και υπερβολικό επίπεδο οι μόνες πεπερασμένες ομάδες συμμετρίας είναι οι C_n και D_n.

Η απόδειξη βασίζεται στα λήμματα 3.1 μέχρι 3.6.

Λήμμα 3.1. Μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών δεν μπορεί να περιέχει μη ταυτοτικές μετατοπίσεις, παράλληλες μεταφορές ή ολισθήσεις.

Απόδειξη: Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι αν T μια ισομετρία τύπου ενός από τους παραπάνω τότε καμιά δύναμη της μορφής T^n δεν μπορεί να είναι η ταυτοτική.

Αν η T είναι μετατόπιση η παράλληλη μεταφορά τότε μπορεί να γραφεί σαν $T = R_lR_m$ με $m \parallel l$. Μπορεί επίσης να γραφεί $T = R_kR_l$ όπου k η ανάκλαση της m με άξονα l. (Η άρτια ισομετρία R_mR_l σταθερά τα σημεία της k άρα είναι η ταυτοτική, επομένως $R_lR_m = R_kR_l$). Τότε όμως $T^2 = R_kR_l\ R_lR_m=R_kR_m$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό n, $T^n = R_hR_m$ όπου η h βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της m που περιέχει την l και μάλιστα $m \parallel h$, έτσι T^n μη ταυτοτική. Εφαρμόζοντας το τελευταίο στην T^{-1} έχουμε ότι T^n διάφορη της ταυτοτικής για κάθε ακέραιο n.

Στην περίπτωση που έχουμε T ολίσθηση αν είχαμε $T^n = I$ θα ήταν και $(T^2)^n =I$. Η T^2 είναι όμως μετατόπιση ($T = R_tR_lR_m =R_lR_mR_t$, με $m,l \perp t$,επομένως $T^2 =(R_lR_m)^2$ με m,l να δέχονται κοινή κάθετο, άρα σύνθεση μετατοπίσεων κατά την ευθεία t, άρα μετατόπιση κατά μήκος της t). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο.

Αν λοιπόν η T ανήκει σε πεπερασμένη ομάδα θα ήταν για διαφορετικούς ακέραιους εκθέτες $T^\mu = T^\nu$ ή $T^{\mu-\nu} = I$ άτοπο.

Λήμμα 3.2. Αν μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών περιέχει στροφές όλες οι στροφές έχουν το ίδιο κέντρο.

Απόδειξη: Ας είναι T μια στροφή γύρω από το A και U μια στροφή γύρω από το $B \neq A$. Και ας είναι $l=\overleftrightarrow{AB}$. Τότε η T γράφεται $T = R_l R_m$ (αντίστοιχα $U = R_l R_n$) με m να διέρχεται από το A (n από το B). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι l,m,n δεν αποτελούν δέσμη (κανενός από τους τρείς τύπους). Επίσης η $U^{-1}T^{-1}UT = (R_n R_l R_m)^2$ είναι μεταφορά (τετράγωνο ολίσθησης) άρα δεν μπορεί να ανήκει στην ομάδα ή είναι η ταυτοτική οπότε TU=UT, που συμβαίνει μόνο όταν μια από τις στροφές U, T είναι η ταυτοτική.

Λήμμα 3.3 Αν μια πεπερασμένη ομάδα περιέχει ανακλάσεις οι άξονές των ανακλάσεων αυτών διέρχονται από κοινό σημείο.

Απόδειξη: Αν δεν ήταν έτσι θα είχαμε άτοπο από τα προηγούμενα αφού η ομάδα περιέχει τα γινόμενα $R_l R_m$.

Λήμμα 3.4. Αν μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών περιέχει μια στροφή και μια ανάκλαση τότε το κέντρο της στροφής ανήκει στον άξονα της ανάκλασης.

Απόδειξη : Διαφορετικά το γινόμενο της στροφής και της ανάκλασης θα ήταν ολίσθηση.

Πόρισμα: Μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών με τάξη μεγαλύτερη του 2 μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Αφού η τάξη είναι μεγαλύτερη του 2 η ομάδα περιέχει στροφές. Το κέντρο αυτών των στροφών είναι μοναδικό και σταθερό (Λήμμα 3.1, 3.3 και 3.4).

Λήμμα 3.5. Αν μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών τάξης n περιέχει μόνο στροφές είναι κυκλική τάξης n.

Απόδειξη: Η περίπτωση n=1 ή 2 είναι τετριμμένη έτσι υποθέτουμε ότι n>2. Αν O το κέντρο όλων των στροφών διαλέγουμε σημείο P_1 διαφορετικό του O. Οι εικόνες του P_1 $P_1, P_2, \ldots P_n$ κάτω από τις στροφές τις ομάδας μας είναι διακεκριμένες αφού αν οι n στροφές της ομάδας μας είναι διαφορετικές. Αριθμούμε τα παραπάνω στοιχεία ώστε $(\measuredangle P_1OP_2)^0$ να είναι το ελάχιστο από τα $(\measuredangle P_iOP_j)^0 \quad i \neq j$. Ας είναι R η στροφή που απεικονίζει το P_1 στο P_2. Θα δείξουμε ότι η R είναι ο γεννήτορας της ομάδας. Πράγματι αν Q_i είναι η εικόνα του P_1, κάτω από την R^{i-1} (έτσι $Q_1=P_1$, $Q_2=P_2$). Τότε $(\measuredangle Q_iOQ_{i+1})^0 = (\measuredangle P_1OP_2)^0$. Αν κάποιο από τα P_j δεν ήταν μεταξύ των Q_i,η ημιευθεία OP_j θα ήταν μεταξύ κάποιων ημιευθειών OQ_i και OQ_{i+1} και έτσι θα είχαμε : $(\measuredangle P_jOQ_i)^0 < (\measuredangle P_1OP_2)^0$ που αντιφάσκει στην επιλογή του P_2. Έτσι όλες οι στροφές της ομάδας έχουν κοινή εικόνα με κάποια δύναμη της R, άρα ταυτίζονται με δυνάμεις της R. Αυτό δείχνει ότι η ομάδα είναι κυκλική.

Λήμμα 3.6 Αν μια πεπερασμένη ομάδα συμμετριών περιέχει ανάκλαση είναι η διεδρική ομάδα D_n.

Απόδειξη: Θεωρούμε την υποομάδα των άρτιων συμμετριών της ομάδας μας. Από το προηγούμενο λήμμα αυτή είναι κυκλική παραγόμενη από στροφή R. Αν T μια

ανάκλαση τότε οι περιττές συμμετρίες παράγονται από γινόμενα της T με μία άρτια. Έτσι η ομάδα έχει γεννήτορες τις {T, R}. Αυτή όμως είναι η διεδρική ομάδα.
Έτσι το θεώρημα 3.1 αποδείχθηκε πλήρως.
Πολλά είναι γνωστά για διαφόρους τύπους άπειρων ομάδων ισομετριών. Για παράδειγμα μια ομάδα διαζώματος είναι μια ομάδα ισομετριών που έχει μια αναλλοίωτη ευθεία t και οι μετατοπίσεις κατά μήκος της συγκροτούν μια άπειρη κυκλική ομάδα <T> με γεννήτορα μια μετατόπιση T κατά μήκος της t. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχουν ακριβώς 7 ομάδες διαζώματος στο Ευκλείδειο ή υπερβολικό επίπεδο:

1) Η <T>
2) Η ομάδα $<T, R_t>$ που έχει γεννήτορες την T και την ανάκλαση με άξονα t.
3) Η ομάδα $<T, R_u>$ που έχει γεννήτορες την T και μια ανάκλαση με άξονα u κάθετο στην t.
4) Η άπειρη κυκλική ομάδα <G> , όπου G μια ολίσθηση που το τετράγωνό της ισούται με την T.
5) Η ομάδα $<H_A , T>$, με γεννήτορες την T και μια ημιστροφή με κέντρο σημείο A της t.
6) Η ομάδα $<T, H_{A,} R_t>$
7) Η ομάδα $< G, H_A>$.[12]

Ένας άλλος τύπος άπειρης ομάδας είναι οι ομάδες καλύψεων που η υποομάδα τους μετατοπίσεων γεννάται από δύο μετατοπίσεις κατά μήκος διαφορετικών τεμνομένων γραμμών. Στο ευκλείδειο επίπεδο υπάρχουν δεκαεπτά ακριβώς καλύψεις.

[12] Για απόδειξη βλέπε Martin G., Transformation Geometry.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bonola, R..(1955). Non- Eucidean Geometry. New York: Dover Puplications, Inc.

[2] Borsuk, K. and W. Szmielew.(1960). Foundations of Geometry. Amsterdam:North Hollad.

[3] Coxeter, H. and S. L. Greitzer. (1977). Geometry Revisited, Washington: The Mathematical Association of America.

[4] Dodge, W. C..(2004). Euclidean Geometry and Transformations. New York: Dover Puplications, Inc.

[5] Fraeigh, B. J..(1999). Εισαγωγή στην Άλγεβρα. (μετ. Α. Γιαννόπουλος). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[6] Greenberg, M..(1973). Euclidean and Non-Euclidean Geometries. San Francisko: W. H. Freeman and Company.

[7] Henle, M..(1996). Modern Geometries, The analytic Approach. New Jersey: Prentice Hall.

[8] Martin, G. .(1982). Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry. New York: Springer.

[9] Ogilvy, C. S..(1990). Excursions in Geometry. New York: Dover Puplications, Inc.

[10] Pedoe, D.(1988). Geometry, A comprehensive Course. New York: Dover Puplications, Inc.

[11] Ramsay, A.and R. D. Richtmyer. (1994). Introduction to Hyperbolic Geometry. New York: Springer

[12] Sommerville, D. M. Y..(2005). The elements of non- Euclidean Geometry. New York: Dover Puplications, Inc.

[13] Wolfe, H. E..(1935). Non-Eyclidean Geometry. New York: The Dryden Press.

[14] Yagom, I. M.. (1968). Geometric Transformations (Vol I, II, III). New York: Random House Inc.

[15] Καίσαρης, Στυλιανός. (2002) Μια πρόταση εισαγωγής στη θεωρία των ομάδων ισομετριών της Ευκλείδειας και Υπερβολικής Γεωμετρίας στα πλαίσια της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών (διπλωματική εργασία).

[16] Λάππας, Διονύσιος. (2005). Εισαγωγή στην επίπεδη Γεωμετρία (σημειώσεις μαθήματος)

[17] Στράνταλος, Χρόνης. (1987). Η εξέλιξη των Ευκλειδείων και των μη Ευκλειδείων Γεωμετριών. Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

[18] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/

[19] http://scholar.google.com/