ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΜΑΝΑΡΙΔΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Η ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΔΙΛΗΜΜΑΤΑ

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Σακονίδης Χαράλαμπος

ΑΘΗΝΑ 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών

Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 12η Οκτωβρίου 2005, από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Σακονίδης Χαράλαμπος(επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής	…….
2) Πόταρη Δέσποινα	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	……
3) Ζαχαριάδης Θεοδόσης	Αναπληρωτής Καθηγητής	……

Στη γυναίκα μου, Μαρία
Και στα παιδιά μου,
Βενιαμίν, Κωνσταντίνο και Κατερίνα
Για να μετριάσω λίγο τις ατελείωτες ώρες που τους στερήθηκα

Κι αυτό ακόμα το σκαλί το πρώτο
Πολύ από τον κοινό τον κόσμο απέχει.
Εις το σκαλί για να πατήσεις τούτο
Πρέπει με το δικαίωμά σου νάσαι
Πολίτης εις των ιδεών την πόλι.

Το πρώτο σκαλί
Κ.Π. Καβάφης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη…….σελ. 6

Εισαγωγή……..σελ. 7

Κεφάλαιο 1ο
Βιβλιογραφικό Πλαίσιο
1.1. Εισαγωγή……...σελ. 11
1.2. Διδακτικές πρακτικές……σελ. 13
1.3. Μαθηματικά και μάθηση……...σελ. 14
1.4. Μαθησιακά περιβάλλοντα……σελ. 16
1.5. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού……...σελ. 19
1.6. Οι επεμβάσεις του εκπαιδευτικού……σελ. 25
1.7. Αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών……...σελ. 28
1.8. Επικοινωνία-Διάλογος στην τάξη των μαθηματικών……σελ. 24

Κεφάλαιο 2ο
Η έρευνα
2.1. Εισαγωγή……σελ. 34
2.2. Γιατί έρευνα δράση: βασικά χαρακτηριστικά……..……σελ. 35
2.3. Μεθοδολογία της παρούσας μελέτης……σελ. 38

Κεφάλαιο 3ο
Ανάλυση και παρουσίαση των δεδομένων
3.1. Εισαγωγή……σελ. 42
3.2. Διλήμματα επιστημολογικού περιεχομένου……...σελ. 43
3.3. Επικοινωνιακά διλήμματα……..σελ. 58
3.4. Συνεργασία εκπαιδευτικού – ερευνητών ……...σελ. 74
Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας……..σελ. 75
Εστίαση στην επικοινωνία……σελ. 79

Κεφάλαιο 4ο
Συζήτηση……...σελ.82
Διλήμματα στην τάξη των Μαθηματικών Επιστημολογικά & Επικοινωνιακά σελ. 83
Συνεργασία εκπαιδευτικού και ερευνητών περιεχόμενο και χαρακτηριστικά σελ. 90

Κεφάλαιο 5ο
Συμπεράσματα……..…σελ. 94

Βιβλιογραφικές αναφορές……..…σελ. 98

Παράρτημα
Φύλλο εργασίας για την Ευκλείδεια Διαίρεση στην Α΄ Γυμνασίου

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική αφορά στα διδακτικά διλήμματα με τα οποία έρχεται αντιμέτωπος ο εκπαιδευτικός και στις στιγμιαίες αποφάσεις που παίρνει προκειμένου να τα αντιμετωπίσει. Η μέχρι τώρα έρευνα, δυστυχώς, δεν παρέχει επαρκείς πληροφορίες απευθείας αλλά αγγίζει το θέμα περιφερειακά, καθώς αναφέρει καταστάσεις και συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματώνονται τα διλήμματα. Διλήμματα ξεκινούν πριν τη διδασκαλία, καθώς ο εκπαιδευτικός προβληματίζεται για το πως θα παρουσιάσει μια μαθηματική ιδέα στην τάξη του, προκειμένου να γίνει κατανοητή και διαθέσιμη. Όμως στην πραγματικότητα της τάξης διλήμματα πηγάζουν από τις απαντήσεις και παρεμβάσεις των μαθητών, την πραγμάτωση των διδακτικών στόχων και, αναπόφευκτα , το βασανιστικό δίλημμα του χρόνου.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας αναπτύχθηκε μια συνεργασία μεταξύ εμού και των υπεύθυνων καθηγητών μου, η οποία θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι έφερε τα χαρακτηριστικά μιας 'κοινότητας διδακτικής πρακτικής' των μαθηματικών. Στο πλαίσιο αυτής της κοινότητας αναδείχτηκαν οι επιπτώσεις αυτής της συνεργασίας στη μετατόπιση της διδακτικής προσέγγισης προς εναλλακτικές πρακτικές, οι οποίες ενθαρρύνουν την ενεργό κατασκευή του μαθηματικού νοήματος από το μαθητή.

Προκειμένου να απαντηθεί το ερευνητικό πρόβλημα που τέθηκε, καταγράφηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν έξι μαθήματα, τρία σε τμήμα της Α΄ γυμνασίου και τρία σε τμήμα της Β΄ γυμνασίου, στα οποία δίδασκα. Κάθε διδασκαλίας προηγούνταν συνεργασία μου με τους υπεύθυνους καθηγητές μου σχετικά με το μαθηματικό της περιεχόμενο και τη διαχείρισή του στην τάξη και με ιδιαίτερη έμφαση στα διλήμματα που ήταν πιθανό να προκύψουν ή είχαν προκύψει από προηγούμενες διδασκαλίες. Η ανάλυση τόσο των απομαγνηφωνημένων μαθημάτων όσο και της επικοινωνίας μεταξύ εμού και των υπευθύνων καθηγητών, οι οποίοι δρούσαν ως ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών επικεντρώθηκε στον εντοπισμό, την κατηγοριοποίηση και την συζήτηση – ερμηνεία αυτών των διλημμάτων. Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης έδειξαν ότι σε ότι αφορά την προέλευση είναι κυρίως επιστημολογικού και επικοινωνιακού χαρακτήρα και συνδέονται άμεσα με τη διαχείριση του διδακτικού χρόνου και τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος. Η συνεργασία εκπαιδευτικού και ερευνητών, παρά την πολυπλοκότητά της φάνηκε να δρα θετικά στην εναλλακτική ανάγνωση των διδακτικών πρακτικών και πιθανά στην τροποποίησή τους.

Εισαγωγή

Διδάσκω 17 χρόνια μαθηματικά, τα οποία ανέκαθεν μου άρεσαν. Έτσι, θεώρησα ως φυσικό επακόλουθο της μαθητικής μου πορείας την εισαγωγή μου σε ένα τριτοβάθμιο Τμήμα Μαθηματικών. Ως μαθητής δε θυμάμαι να αντιμετώπισα ποτέ κάποιο πρόβλημα κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, αν και διδάχθηκα το συγκεκριμένο μάθημα – όπως συνηθιζόταν τότε – με μια τελείως φορμαλιστική διδασκαλία, τόσο στα μαθητικά χρόνια του γυμνασίου όσο και του λυκείου. Ο συμπεριφορισμός στην ακμή του και χιλιάδες μαθητές να προσπαθούν να εναρμονιστούν με τις απαιτήσεις των σχολικών μαθηματικών. Ο μοναδικός ρόλος που παραχωρούνταν στους μαθητές κατά τη διδασκαλία ήταν η αντιγραφή ασκήσεων και αποδείξεων από τον πίνακα και η απάντηση σε μερικές ερωτήσεις, κατεξοχήν ανάκλησης από τη μνήμη, που απευθύνονταν στην τάξη. Σε καμία φάση της διδασκαλίας δεν υπήρχε μαθηματική πρόκληση και η παρουσία του δασκάλου ήταν κυρίαρχη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Με 'συγκινούσε' πάντα η επίλυση ασκήσεων, όπου το ασαφές και αόριστο στο ξεκίνημα καταλήγει να γίνεται συγκεκριμένο και οδηγεί στην απόδειξη-λύση.

Ξεκίνησα τη διδασκαλική μου πορεία από το φροντιστηριακό χώρο, όπου δίδασκα σε μαθητές μεγάλων τάξεων του λυκείου, τους οποίους και προετοίμαζα για την εισαγωγή τους στο Πανεπιστήμιο. Τα τελευταία τρία χρόνια διδάσκω στο γυμνάσιο ενός από τα μεγαλύτερα ιδιωτικά σχολεία της χώρας. Το σχολείο μου προσφέρει κάθε δυνατότητα και μέσο προκειμένου να το χρησιμοποιήσω στη διδασκαλία μου, όπως εποπτικό υλικό, αίθουσα με ηλεκτρονικούς υπολογιστές και αρχείο με κατάλληλες δραστηριότητες. Είναι δε ανοικτό σε ο,τιδήποτε νέο και πρωτοποριακό προκειμένου για μια επιτυχή διδασκαλία. Τα μαθηματικά είναι ένα μάθημα, στο οποίο παραδοσιακά δίνεται μεγάλη βαρύτητα. Υπάρχει, μάλιστα, η δυνατότητα, προκειμένου για μαθητές με ιδιαίτερη έφεση και ικανότητα στη μαθηματική σκέψη, να γίνονται κάποια μαθήματα εκτός αναλυτικού προγράμματος, για την προετοιμασία τους σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Όλα αυτά τα χρόνια προσπαθώ να φέρω τα παιδιά πιο κοντά στα μαθηματικά, δίνοντας έμφαση κατά τη διδασκαλία μου στην κατανόηση του περιεχομένου και όχι μόνο στη χρήση των εννοιών. Μεταξύ άλλων στις διδακτικές μου προτεραιότητες είναι ο περιορισμός της μαθηματικοφοβίας που χαρακτηρίζει

μία μεγάλη μερίδα των μαθητών, με απώτερο στόχο τα μαθηματικά να γίνουν προσιτά και διαθέσιμα χωρίς όμως να χάσουν την αυστηρότητα που πρέπει να τα διακρίνει. Έτσι, προσπαθώ να αφουγκράζομαι τις ανάγκες των μαθητών, γνωστικές και συναισθηματικές, έτσι όπως αυτές διατυπώνονται μέσα στην τάξη και να τους βοηθήσω να ξεπεράσουν τα εμπόδια που δημιουργούνται στην κατάκτηση μιας μαθηματικής έννοιας. Σκοπός μου είναι μέσα από τη διδασκαλία μου να ενισχύσω την αυτοεκτίμησή τους και να τους κάνω να αισθανθούν σίγουροι για τις γνώσεις που αποκτούν, ελαχιστοποιώντας έτσι το 'άγχος των μαθηματικών'(Βοσνιάδου,1995 σελ.143), την ιδιαίτερη δηλαδή έλλειψη αυτοπεποίθησης στην ικανότητα κάποιου να τα καταφέρει στα μαθηματικά. Προς αυτήν την κατεύθυνση επιχειρώ να εντάξω τις απόψεις τους στη διδασκαλία μου, να δημιουργώ ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο να ευνοεί την ανάπτυξη του διαλόγου και της μαθηματικής σκέψης και προβληματισμού με το να μη επικρίνω ή αποδοκιμάζω τις σκέψεις τους. Προσπαθώ να τους βοηθήσω να ξεπεράσουν τυχόν εμπόδια που εμφανίζονται με το να επιλύω και να αναλύω τους προβληματισμούς τους, ώστε να αποσαφηνίζονται οι έννοιες και, στη συνέχεια, να αναδεικνύεται η χρηστικότητά τους. Μέσω των διδακτικών μου προσεγγίσεων οι καινούργιες έννοιες και συμβολισμοί να εισάγονται ως μία ανθρώπινη αναγκαιότητα, ώστε να ξεδιπλώνονται ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι ως κάτι που επιβάλλεται άνωθεν. Με αυτόν τον τρόπο, αναγνωρίζω τη συμβολή των μαθητών μου ,συζητώντας και αναλύοντας τις προτάσεις τους, χωρίς να τις απορρίπτω αβασάνιστα.

Θεωρώ ότι, προκειμένου για μία αποτελεσματική διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός πρέπει να βρίσκεται σε μια διαρκή αναζήτηση, ώστε να εξελίσσει τις διδακτικές του πρακτικές. Η αναζήτηση αυτή είναι σημαντικό να έχει εφαλτήριο τον προβληματισμό του ίδιου σε θέματα που διαδραματίζονται στην τάξη του (τρόπος πρόσληψης και επεξεργασίας των εννοιών από τους μαθητές, ποσοτική μελέτη των αποτελεσμάτων μιας διδασκαλίας μέσα από τα αποτελέσματα κάποιων γραπτών δοκιμασιών των μαθητών) σε συνδυασμό με τα σχετικά ευρήματα και τις επισημάνσεις της αντίστοιχης θεωρητικής και ερευνητικής βιβλιογραφίας . Ένας ακόμη παράγοντας, που επιβάλλεται να προβληματίζει τους εκπαιδευτικούς, αφορά στις αλλαγές που επιφέρει η επικοινωνία και η εύρεση πληροφοριών που μπορούν να επηρεάσουν άμεσα τις συνθήκες στην εκπαίδευση. Ο δάσκαλος δεν είναι η μόνη πηγή πληροφοριών. Σημαντικό ρόλο σ΄ αυτή την πληροφόρηση αρχίζει τα τελευταία χρόνια να αναλαμβάνει και η οικογένεια, αλλά και το ευρύτερο κοινωνικό και

πολιτισμικό περιβάλλον των μαθητών, καθώς το ενδιαφέρον για το πώς και τι μαθαίνουν οι μαθητές αυξάνεται συνεχώς.. Συχνά δε αυτή η πληροφόρηση δρα ανασταλτικά στο εκπαιδευτικό έργο που επιτελείται στο σχολείο. Για παράδειγμα, παρατηρείται τα τελευταία χρόνια η τάση ο,τιδήποτε ζορίζει τους μαθητές να εξαιρείται του αναλυτικού προγράμματος, μετά από 'πιέσεις' του ευρύτερου κοινωνικού περίγυρου, χρησιμοποιώντας ως επιχείρημα την αποτυχία των μαθητών στις εξετάσεις.

Σημαντική συμβολή στη προσέγγισή μου είχε το μεταπτυχιακό πρόγραμμα της διδακτικής των μαθηματικών. Μέσα από τον κύκλο των μαθημάτων του είχα την ευκαιρία να μελετήσω την επίδραση στη μάθηση των νέων τεχνολογιών, τις τελευταίες εξελίξεις στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ειδικότερα τα πρόσφατα σχετικά συμπεράσματα της γνωστικής ψυχολογίας. Σημαντικό ρόλο στη μελέτη, αλλαγή και επαναπροσδιορισμό των διδακτικών μου προσεγγίσεων έπαιξε η επαφή μου με τον χώρο της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα των ερευνών συχνά μου προσέφεραν απαντήσεις σε συμπεριφορές των μαθητών μου, τις οποίες που μέχρι εκείνη τη στιγμή μετέφραζα ως άγνοια, ή επιπολαιότητα και έλλειψη ενδιαφέροντος, χωρίς να αναστοχάζομαι επί των δικών μου ενεργειών. Οι συζητήσεις που λάμβαναν χώρα στο πλαίσιο των διαφόρων μαθημάτων άνοιγαν καινούργιες προοπτικές, προκειμένου να εξελίξω τις διδακτικές μου πρακτικές και, ταυτόχρονα, να συνειδητοποιήσω την αναποτελεσματικότητα κάποιων άλλων.

Θέλοντας να μη μείνω απλά θεατής και γνώστης των εξελίξεων, αλλά να συμμετάσχω ενεργά σε μία ερευνητική διαδικασία , με τη συμβολή και βοήθεια των καθηγητών μου, αποφάσισα να ασχοληθώ στη μεταπτυχιακή μου εργασία με ένα ερευνητικό θέμα . Μέσα από αυτήν ήθελα να επιδιώξω να κατανοήσω καλύτερα τις δικές μου διδακτικές πρακτικές και, πιο συγκεκριμένα, να εντοπίσω στοιχεία που τις διέπουν και, στη συνέχεια, να επιχειρήσω να τις επαναπροσδιορίσω, με βάση ένα επιστημονικά συγκροτημένο πλαίσιο αναφοράς, με απώτερο στόχο την εξέλιξή τους.

Η εργασία περιλαμβάνει πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται στοιχεία από τη σχετική βιβλιογραφία τα οποία οριοθετούν το πλαίσιο και της συνθήκες κάτω από τις οποίες δημιουργούνται διδακτικά διλήμματα. Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται η μεθοδολογία της έρευνας δράσης που υιοθετήθηκε για τους σκοπούς της μελέτης και η ανάλυση των δεδομένων αντίστοιχα, η οποία στηρίχτηκε σε έξι απομαγνητοφωνημένες διδασκαλίες μου σε τμήματα της Α

και Β γυμνασίου στα οποία δίδασκα. Το τέταρτο και πέμπτο περιλαμβάνουν τη συζήτηση και τα συμπεράσματα της έρευνας, όπως αυτά προκύπτουν με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση και την ανάλυση των δεδομένων.

Κεφάλαιο 1ο

Βιβλιογραφικό Πλαίσιο

1.1. Εισαγωγή

Συχνά η διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη θεωρείται ως μία μεθοδική και κατευθυνόμενη από τους εκπαιδευτικούς δραστηριότητα, με σκοπό να εισάγει και να προωθήσει στους μαθητές τη μαθηματική γνώση. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η εισαγωγή αυτή εξαρτάται πρωτίστως από τον δάσκαλο, ο οποίος αναδεικνύεται μέσα από τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθεί. Ο Ernest(1991), θεωρώντας την προσωπική φιλοσοφία του εκπαιδευτικού για τη μαθηματική επιστήμη ως τη βάση επάνω στην οποία οικοδομείται η οπτική που διαμορφώνει για τα σχολικά μαθηματικά, υποστήριξε ότι αυτή η φιλοσοφία επηρεάζει τις πεποιθήσεις του για τη διδασκαλία και τη μάθησή τους, αλλά και τις σχετικές πρακτικές του. Ο Schoenfeld (1992) προχώρησε ένα βήμα παραπάνω, ισχυριζόμενος ότι οι πεποιθήσεις αυτές όχι μόνο επηρεάζουν τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, αλλά ότι υπάρχει μία σχέση άμεσης αιτιότητας μεταξύ των δύο. Συγκεκριμένα, σημειώνει: «Η αίσθηση του δασκάλου για τη μαθηματική προσέγγιση καθορίζει τη φύση του περιβάλλοντος της τάξης που ο δάσκαλος δημιουργεί. Το περιβάλλον αυτό διαμορφώνει, στη συνέχεια, τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών». Σήμερα, η έρευνα έχει πλέον τεκμηριώσει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό το γεγονός ότι οι πεποιθήσεις, οι αντιλήψεις και οι στάσεις του εκπαιδευτικού έναντι των μαθηματικών διαμορφώνουν και τη διδακτική του συμπεριφορά (για παράδειγμα, Brown & Borko 1992, Brown, Cooney & Jones 1990).

Υπάρχει κοινή αποδοχή τόσο των ερευνητών όσο και των εκπαιδευτικών, παρά τις ενδεχόμενες διαφορές που διατυπώνονται, ότι η σχολική τάξη πρέπει να είναι ο χώρος, στον οποίο η γνώση δημιουργείται και δεν 'ανακοινώνεται'. Ο παραπάνω ισχυρισμός υποστηρίζεται από τον Piaget, όταν διατυπώνει την άποψη ότι (Γαγάτσης,1995): «… ο μαθητής μαθαίνει προσαρμοσμένος σε ένα περιβάλλον που είναι συντελεστής αντιφάσεων, δυσκολιών, ανατροπής, ισορροπιών, περίπου όπως στην ανθρώπινη κοινωνία.

Αυτή η γνώση, καρπός της προσαρμογής του μαθητή, εκδηλώνεται με καινούργιες απαντήσεις που είναι η απόδειξη της μάθησης.»

Οι διάφορες αλλαγές που λαμβάνουν χώρα στην πιο πάνω κατεύθυνση θέτουν καινούργιες απαιτήσεις από τον εκπαιδευτικό. Έτσι, είναι φανερό ότι η βελτίωση της διδασκαλίας θα πρέπει να βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών, ώστε να παρέχει τα εργαλεία μελέτης και ερμηνείας των παραγόντων, οι οποίοι έχουν ως στόχο τη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας προς όφελος της μάθησης των μαθητών. Καθόσον αναπάντητο παραμένει το ερώτημα των χαρακτηριστικών της αποτελεσματικής διδασκαλίας, σε απάντηση του οποίου η Thompson (1992) αναφέρει ότι «δεν υπάρχει καθολική συμφωνία γι΄ αυτό που αποτελεί καλή διδασκαλία». Οι Stigler & Hiebert (1999) επισημαίνουν ότι η διδασκαλία είναι μια πολιτισμική δραστηριότητα, που, κατά συνέπεια, εξελίσσεται με αργούς ρυθμούς και εμπεριέχει ως βασικό πυρήνα, στην περίπτωση των μαθηματικών, πεποιθήσεις για τη φύση τους, γνώσεις για το πώς μαθαίνουν οι μαθητές μαθηματικά και για το ρόλο που πρέπει να διαδραματίσει ένας εκπαιδευτικός στην τάξη.

Ο τρόπος με τον οποίο βιώνει ο εκπαιδευτικός τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στη σχολική τάξη διαμορφώνει καθοριστικά την αποτελεσματικότητά της. Είναι σημαντικό να νοιάζεται για τους μαθητές του, για τις μαθηματικές ιδέες που διαμορφώνονται, για το πώς οι μαθητές αντιμετωπίζουν και σκέφτονται τα μαθηματικά. Αυτή είναι η οπτική, μέσα στην οποία χρειάζεται να παίρνει αποφάσεις, μερικές φορές πολύ γρήγορα και, συχνά, χωρίς να το έχει a priori προβλέψει και να έχει αναπτύξει τρόπους αντιμετώπισης, ώστε να γνωρίζει μια πιθανή διέξοδο. Τις κρίσιμες αυτές αποφάσεις, που απαιτούνται κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας, τις λαμβάνει χρησιμοποιώντας (τις περισσότερες φορές) την εμπειρία του και τα δεδομένα του περιβάλλοντος της τάξης του. Βασικός, ωστόσο, αρωγός σε αυτό του το έργο μπορεί να είναι, επιπλέον, τα ερευνητικά δεδομένα του πεδίου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Έτσι, αλλαγές στη λήψη των αποφάσεών του μπορούν να προκύψουν με γνώμονα τα γεγονότα που εκτυλίσσονται στην τάξη και τον επιστημονικά συγκροτημένο σχετικό προβληματισμό του πάνω σε αυτά, με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας.

Το δίλημμα που αναφύεται από το γεγονός ότι η γνώση του εκπαιδευτικού, δηλαδή, του ειδικού σε κάποιο θέμα, συγκρούεται με την ακατέργαστη γνώση των μαθητών έχει καταγραφεί από τον Ackermann(1995). Οι Carter and Richards

(1991), σε σχετική τους έρευνα, αναφέρουν διλήμματα, τα οποία συνδέονται με αυτή τη στάση του εκπαιδευτικού, όπως για το αν θα γίνει αποδεκτή ή όχι μία απάντηση ενός μαθητή, για το αν ο εκπαιδευτικός θα απαντήσει τελικά σε μία ερώτηση και για το ποιος είναι ο κατάλληλος τρόπος προκειμένου να παρουσιαστεί μια μαθηματική ιδέα.

Με γνώμονα την οπτική που περιγράφηκε παραπάνω, προσπαθώ να εντοπίσω και να αναλύσω εκείνες τις συνθήκες που μπορούν να αποτελέσουν πηγές διλημμάτων, οι οποίες προϋποθέτουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στα δρώμενα της διδασκαλίας.

1.2. Διδακτικές πρακτικές

Πολλές έρευνες έχουν εστιάσει στον τρόπο που οι διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού επηρεάζουν τη μάθηση που επιτυγχάνει ο μαθητής στα μαθηματικά, σε μια προσπάθεια πληρέστερης κατανόησης αυτής της σχέσης και, κατά συνέπεια, προσφοράς στήριξης στους πρώτους σε ό,τι αφορά στην αποτελεσματική οργάνωση των διδακτικών τους προσεγγίσεων στην τάξη.

Η χρήση του όρου 'πρακτική' μπορεί να ερμηνευθεί ότι αναφέρεται στο σύνολο των ενεργειών του εκπαιδευτικού στην τάξη, συμπεριλαμβανομένου και του διδακτικού πλάνου, προκειμένου να προσεγγίσει μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία, ώστε να βοηθήσει τους μαθητές του στην προσέγγισή της.

Οι πρακτικές που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός δεν είναι επιθυμητό να είναι σταθερές σε όλη την διάρκεια τη διδακτικής περιόδου, καθώς, ακολουθώντας ένα στενά καθορισμένο διδακτικό πλάνο, οι μαθητές, συνήθως, δεν εμπλέκονται στη μαθησιακή διαδικασία και δεν δημιουργούνται διαύλοι επικοινωνίας μεταξύ εκπαιδευτικού και τάξης, τέτοιοι που να αξιοποιούνται αποτελεσματικά οι συλλογισμοί των μαθητών κατά τη διδασκαλία. Έτσι, ο εκπαιδευτικός γίνεται ο μοναδικός διαχειριστής της γνώσης και απλώς ενστερνίζεται κάποιες καινούργιες προσεγγίσεις, διασφαλίζοντας τη διατήρηση της απαρέγκλιτης πορείας του μαθήματος. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί που ακολουθούν αυτήν την προσέγγιση επιδιώκουν να αποφύγουν τις αντιστάσεις των μαθητών, όπως αυτές εκφράζονται κατά τη διάρκεια του μαθήματος (Shroyer, 1982), προσπαθούν να αποφύγουν τις προκλήσεις που θέτουν οι τελευταίοι, προκειμένου να ελαχιστοποιήσουν τυχόν κινδύνους (Marland, 1986) και να ρυθμίσουν τη διδασκαλία στο ύφος που αυτοί προτιμούν και με το οποίο αισθάνονται ασφαλείς (Larson, 1983).

Αντίθετα, πλήρης εμπλοκή των μαθητών σημαίνει ζωντανό ακροατήριο, με τον εκπαιδευτικό να παροτρύνει τους μαθητές στη διατύπωση ερωτήσεων. Οι τοποθετήσεις και οι απόψεις των μαθητών ενσωματώνονται στα μετέπειτα διδακτικά πλάνα, τα οποία περιέχουν δραστηριότητες κατάλληλα δομημένες, ώστε να είναι οικείες στους μαθητές και να ευνοούν το διάλογο και τη συζήτηση. Αξιοποιώντας τις απόψεις των μαθητών μπορούμε να γεφυρώσουμε τα χάσματα μεταξύ των σχεδιασμών και της προσπάθειας υλοποίησής τους στην τάξη. Έτσι, δημιουργείται ένα περιβάλλον τάξης, στο οποίο εκπαιδευτικός και μαθητές διαπραγματεύονται τις μαθηματικές ιδέες και νοήματα, οι διάφορες λύσεις γίνονται αποδεκτές μετά από διαπραγμάτευση. Είναι, δηλαδή, φανερό ότι οι δραστηριότητες από μόνες τους δεν μπορούν να οδηγήσουν σε μαθηματική γνώση, αλλά χρειάζεται ο παρεμβατικός ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος επαναπροσδιορίζει τις διδακτικές του προσεγγίσεις. Φυσικά, οι τροποποιήσεις και οι αλλαγές χρειάζονται εμπειρία τόσο στο χειρισμό στην οργάνωση της διδασκαλίας, όσο και στο χειρισμό των εννοιών.

Η διδασκαλία είναι μια διαρκής διαδικασία προσαρμογής και ανάπτυξης. Έτσι, ο εκπαιδευτικός, στόχος του οποίου είναι η κατασκευή νοήματος μέσα από μία διδασκαλία που αφουγκράζεται τους μαθητές, οργανώνει ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο θα μπορεί να τροποποιεί, βασιζόμενος στις ερμηνείες και απόψεις των μαθητών του και θα βοηθά τους μαθητές του να εξελίξουν τις αρχικές τους ιδέες και να διευρύνουν τη μαθηματική τους σκέψη. Γίνεται, δηλαδή, δάσκαλος ερευνητής (Cobb & Steffe, 1983, D' Ambrosio & Campos 1992), καθώς θα πρέπει να μπορεί να ερμηνεύει τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην τάξη του, να αναστοχάζεται τις ενέργειές του και τις επιπτώσεις που έχουν στη κατασκευή νοήματος από τους μαθητές του, έτσι ώστε να μπορεί να συνειδητοποιεί τις αλλαγές που πρέπει να κάνει. Αυτή η εναλλαγή των διαφορετικών τρόπων προσέγγισης και κωδικοποίησης των εννοιών από τον εκπαιδευτικό μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να αναπτύξει δικούς του τρόπους μάθησης, μέσα από τους οποίους να κατανοεί το νόημα των πληροφοριών που πραγματεύονται στην τάξη.

1.3. Μαθηματικά και μάθηση

Τα μαθηματικά υπάρχουν και καθορίζονται από τις ανθρώπινες δραστηριότητες, συνεπώς, είναι αντιληπτά από όλους. Η θέση αυτή έρχεται σε αντίθεση με τη πλατωνική θεώρηση, όπου τα μαθηματικά εκλαμβάνονται ως αιώνιες αλήθειες, έξω από την ανθρώπινη δραστηριότητα. Οι μαθηματικές έννοιες

υπάρχουν ως θεωρητικά μορφώματα στο νου των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, ο Vygotsky διέκρινε δύο τύπους εννοιών, τις αυθόρμητες ή καθημερινές και τις επιστημονικές. Οι πρώτες αναπτύσσονται με συστηματικό τρόπο διαμέσου της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον, ενώ οι δεύτερες εισάγονται κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης (Κλαουδάτος, 2003) . Αυτή η οπτική καθορίζει και το ρόλο του εκπαιδευτικού στην τάξη. Είναι αυτός που θα θέσει τέτοιους προβληματισμούς στους μαθητές του μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, ερωτήσεις, αντι-παραδείγματα και, γενικότερα, διδακτικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας περιπτώσεις από την καθημερινότητα, ώστε να επαληθευτεί ο παραπάνω ισχυρισμός. Έτσι, αυτό που μπορεί ο μαθητής να καταφέρει σήμερα με τη βοήθεια του δασκάλου στην τάξη, αργότερα θα μπορεί να το κάνει μόνος του, χωρίς να χρειάζεται κάποιες διδακτικές παρεμβάσεις. Η αποτυχία του μαθητή μπορεί να σημαίνει αδυναμία του να συσχετίσει το διδακτικό υλικό με τις δραστηριότητες της τάξης. Το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών (NCTM, 1991) των ΗΠΑ διατύπωσε την άποψη ότι «οι δάσκαλοι θα πρέπει να ενθαρρύνονται, για να μειώσουν το σύνολο της ώρας που μιλάνε και αντ΄ αυτού να θέτουν θέματα, ώστε να εμπλέξουν τους μαθητές σε διάλογο».

Τα μαθηματικά δεν είναι αυθαίρετα. Υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των εννοιών, οι αναπαραστάσεις τους δίνουν νόημα και οι αλγοριθμικές διαδικασίες τα κάνουν προσιτά. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν και αναγνωρίσουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά των μαθηματικών, προκειμένου να τα κατανοήσουν πέρα από την απομνημόνευση τύπων και κανόνων. Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι σημαντικό να χρησιμοποιεί το διάλογο, ώστε να δεσμεύσει τους μαθητές σε μια διαδικασία εξερεύνησης των μαθηματικών ιδεών και των μεταξύ τους σχέσεων. Με αυτόν τον τρόπο παραχωρεί στους μαθητές ένα πιο ενεργό ρόλο στη μάθησή τους και τους καθιστά συν-υπεύθυνους στην ανάπτυξή της. Οι λεπτομερείς εξηγήσεις δεν αφήνουν χώρο στη φαντασία να ενεργοποιηθεί. Ο Piaget(1963) συνήθιζε να λέει στους μαθητές του ότι «κάθε φορά που εξηγείτε κάτι σε ένα παιδί του στερείτε τη χαρά της ανακάλυψης». Η ανακάλυψη αυτή θα πρέπει να συνοδεύεται και από το όνομα του μαθητή που την εφεύρε. Έτσι, οριοθετείται ο ρόλος του μαθητή, με τρόπο που τονίζει την κριτική σκέψη και όχι την απομνημόνευση. Και το πιο βασικό είναι ότι τα μαθηματικά παρουσιάζονται ως μια συλλογή κανόνων και

διαδικασιών, που ανακαλύπτονται από τους ανθρώπους και όχι χωρίς νόημα διαδικασίες, που πρέπει να τις μιμηθούν ή να αποστηθίσουν.

Η μάθηση μέσω της διερεύνησης και της ανακάλυψης, αν θεωρηθεί ως βασική αρχή, υποστηρίζεται σχεδόν από όλους. Ο μαθητής είναι υπεύθυνος για τη μάθησή του, εφόσον μαθαίνει συμμετέχοντας σε όλα τα στάδια της διδασκαλίας. Το σημείο στο οποίο εγείρονται διαφωνίες είναι ο βαθμός καθοδήγησης της μάθησης από τον εκπαιδευτικό. Κατά πόσο, δηλαδή, επιτρέπει ο εκπαιδευτικός στο μαθητή να αναλάβει ο ίδιος την κατασκευή μαθηματικού νοήματος. Το σημείο αυτό είναι βασικό, γιατί το κατευθυνόμενο ύφος της διδασκαλίας είναι εύκολα παρεξηγήσιμο, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσωπείο για μια παραδοσιακή διδασκαλία. Να ενσωματωθούν, δηλαδή, κάποια στοιχεία νέων προσεγγίσεων, χωρίς να αλλάξει η γενική θεώρηση της διδασκαλίας. Ένας καλός εκπαιδευτικός είναι αυτός που επιτρέπει στους σπουδαστές να συνδιαλεχθούν, να αναρωτηθούν, να ερευνήσουν και, τελικά, να τοποθετηθούν με ποικίλους τρόπους. Είναι ο δημιουργός ενός μαθησιακού περιβάλλοντος, όπου κάθε συμμετέχοντας αποτελεί ένα πολύτιμο κομμάτι, προσέγγιση που καθιστά τη διδασκαλία μια αληθινή εμπειρία μάθησης.

1.4. Μαθησιακά περιβάλλοντα

Σε μία παραδοσιακή τάξη μαθηματικών είναι ο εκπαιδευτικός που δίνει όλες τις εξηγήσεις, ενώ η συζήτηση περιορίζεται στις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, που στοχεύουν στον έλεγχο του κατά πόσο οι μαθητές κατέχουν μία μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Στον αντίποδα αυτού του σχολικού περιβάλλοντος βρίσκονται οι τάξεις, όπου ο τρόπος που σκέφτονται οι μαθητές είναι σε προτεραιότητα. Οι μαθητές έχουν την ευθύνη να εξηγήσουν στους υπόλοιπους πώς κατέληξαν σε μια λύση, τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν ή ακόμα και τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν το πρόβλημα. Μία τέτοια τάξη είναι πλούσια σε διάλογο και διακρίνεται από μία συνεχή αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού με τους μαθητές, καθώς και των μαθητών μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση αυτή καθιστά δυνατή την ανταλλαγή μαθηματικών εμπειριών. Η μαθηματική γνώση, λοιπόν, δε παρέχεται αποκλειστικά από τον εκπαιδευτικό, αλλά στην κατασκευή του νοήματος σημαντικό ρόλο έχουν και οι μαθητές. Κατά τον Bauersfeld (1988), «όχι μόνο ο δάσκαλος αλλά και οι μαθητές

συμβάλλουν στα δρώμενα των τάξεων». Η διδασκαλία είναι μια από κοινού αναδυόμενη πραγματικότητα και ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές αποτελούν από κοινού την πραγματικότητα της τάξης. Οι εξηγήσεις των μαθητών προσφέρουν το έναυσμα για συζητήσεις γύρω από το κατά πόσο μια άποψη που διατυπώνεται είναι λογική. Οι μαθητές, μέσα από την ανάπτυξη των επιχειρημάτων τους, μαθαίνουν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των εννοιών και να ανακαλύπτουν τυχόν κενά ή λαθεμένες συνδέσεις και παρανοήσεις. Βασικός στόχος είναι η κατανόηση του τρόπου που οι μαθητές ερμηνεύουν τα μαθηματικά που διαπραγματεύονται στην τάξη και όχι η απλή αποτύπωση των μαθηματικών διαδικασιών που χρησιμοποιούν. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι θα πρέπει να αιτιολογούν, γιατί οι ιδέες ή οι διαδικασίες που προτείνουν είναι σωστές. Ταυτόχρονα, συνειδητοποιούν ότι είναι ικανοί να παράγουν καινούργια γνώση από αυτά που ήδη γνωρίζουν, αφού βλέπουν ότι οι ιδέες τους αποκτούν νόημα, είναι λογικές και εντάσσονται από τον εκπαιδευτικό στη μαθησιακή διαδικασία της τάξης.

Σε αυτό το πλαίσιο, το λάθος αποτελεί και αυτό ένα αξιοποιήσιμο στοιχείο. Αξίζει να του αφιερώσουμε κάποιο χρόνο προκειμένου να προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε την προέλευσή του και όχι να το καταστήσουμε αντικείμενο εμπαιγμού. Σωστή διαχείριση του λάθους σημαίνει ότι δεν αναφέρουμε που βρίσκεται, αλλά, μέσω του διαλόγου, περιμένουμε κάποιος μαθητής να το ανακαλύψει. Ίσως χρειαστεί να φέρουμε την τάξη σε γνωστική σύγκρουση. Δεν απορρίπτουμε θέσεις ή πρωτοβουλίες μαθητών, χωρίς προηγουμένως να προηγηθεί συζήτηση ή χρήση κάποιων αντι-παραδειγμάτων, έτσι ώστε ο μαθητής να διαπιστώσει ότι κάπου υπάρχει κάτι που δε συνάδει με τις προηγούμενες γνώσεις του. Σε μερικές, μάλιστα, περιπτώσεις είναι απαραίτητο να προκύπτουν λάθη, προκειμένου να επιτραπεί στους μαθητές να ξεπεράσουν λαθεμένες αντιλήψεις.

Οι Σακονίδης κ.ά. (2002) αναφέρουν ότι οι Belemain & Caponi σε σχετική έρευνα βρήκαν ότι οι μαθητές σπάνια δέχονται ένα μαθηματικό αποτέλεσμα χωρίς να το αξιολογήσουν, ειδικά όταν δεν είναι δικό τους ή όταν το αποτέλεσμα μοιάζει να είναι σωστό και κοντά στις δικές τους προσδοκίες. Μερικές φορές, παρερμηνεύουν κάποιες πληροφορίες και τις υιοθετούν στο υπάρχον γνωστικό τους σύστημα, καθώς αυτό απαιτεί μικρότερη προσπάθεια συγκριτικά με την προσπάθεια να δεχτούν μια καινούργια γνώση που τους

παρέχεται. Έτσι, η διαχείριση του λάθους είναι ζωτικής σημασίας για τη διαμόρφωση του διδακτικού κλίματος (teaching environment) στην τάξη. Τα λάθη των μαθητών πρέπει να εξετάζονται και όχι να κρίνονται ως προς την ακρίβειά τους. Όταν ο εκπαιδευτικός απορρίπτει μια λανθασμένη απάντηση, χωρίς να την εξετάσει, τότε «τορπιλίζεται» η κατασκευή νοήματος από τους μαθητές. Η σωστή διαχείριση του λάθους επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να ανακαλύψει την πηγή του και να προχωρήσει σε μία κατάλληλη παρέμβαση, έτσι ώστε αυτή να αναγνωριστεί και από τους μαθητές. Το λάθος θα πρέπει να λαμβάνει το χαρακτήρα προβληματισμού και να γίνεται εργαλείο ανακάλυψης των μαθησιακών δυσκολιών, ώστε να γίνεται προσπάθεια επίλυσής τους.

Οι ίδιοι, μάλιστα, ερευνητές, σε σχετική μελέτη τους αναφορικά με τον τρόπο αντιμετώπισης των λαθών των μαθητών στα μαθηματικά από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, προχωρούν σε μια ανάλυση δύο φάσεων αυτής της αντιμετώπισης, πριν και μετά το λάθος. Για κάθε μία περίπτωση προσδιορίστηκαν από τα δεδομένα τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες αντιμετώπισης του λάθους και συγκεκριμένα:

- Πριν γίνει το λάθος
  - Προειδοποίηση για την δυνατότητα να γίνει ένα λάθος
  - Επέμβαση που αφορά σε μορφολογικές ή διαδικαστικές παρατηρήσεις προκειμένου να αποφευχθεί ένα λάθος
  - Προσανατολισμός της προσοχής των μαθητών σε κάποιο λάθος μέσω ερωτήσεων
  - Υπαγόρευση της απάντησης ή της παροχής σαφούς οδηγίας προκειμένου να αποφευχθεί το λάθος
- Αφού πραγματοποιηθεί το λάθος
  - Απόρριψη μιας λανθασμένης απάντησης και διόρθωσή της από το δάσκαλο χωρίς εξήγηση
  - Διόρθωση με εξήγηση
  - Επισήμανση και διόρθωση του λάθους είτε από το δάσκαλο είτε από κάποιο μαθητή
  - Προβολή κριτηρίων και ερωτήσεων για το λάθος.

Η ίδια έρευνα έδειξε, όπως φάνηκε μέσα από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, ότι η επικρατούσα άποψη είναι πως τα λάθη θεωρούνται ως

ανωμαλίες στην κατανόηση των εννοιών, έλλειψη απαιτούμενων γνώσεων ή ανεπάρκεια στη μελέτη των μαθητών. Φαίνεται, λοιπόν, ότι το λάθος δεν αντιμετωπίζεται με τη δέουσα παιδαγωγική συμπεριφορά, ώστε να γίνει εφαλτήριο για την διεξαγωγή ενός γόνιμου διαλόγου στην τάξη, στόχος του οποίου θα είναι η εκατέρωθεν κατανόηση των αιτιών που το προκάλεσαν, όσο και η ΄τακτοποίηση' των κατάλληλων συνδέσεων, για την εκ βαθέων κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές.

Ένα επιπλέον στοιχείο που θα πρέπει να ληφθεί υπόψη προκύπτει από τα σημερινά δεδομένα και συμπεράσματα από τη γνωστική ψυχολογία. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι υποστηρίζουν ότι το μαθησιακό περιβάλλον πρέπει να είναι τέτοιο που να ευνοεί την εξερεύνηση και την ανταλλαγή των ιδεών, ώστε η μάθηση να οδηγεί στην κατανόηση του περιεχομένου , καθώς η τελευταία αποτελεί μια καθοριστική διαδικασία γνωστικών κατασκευών, η οποία στηρίζεται σε προϋπάρχουσες γνώσεις, που επεκτείνονται, προσαρμόζονται και τελικά αφομοιώνονται.

Συνοψίζοντας, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να προσπαθεί να πετύχει και να διατηρήσει περιβάλλοντα που υποστηρίζουν τη μάθηση και τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων. Κάτι τέτοιο, όμως, είναι αρκετά πολύπλοκο και σύνθετο. Αυτό συμβαίνει, γιατί από τη μια ενθαρρύνεται η συμμετοχή του μαθητή στην ανταλλαγή ιδεών και απόψεων, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ως βάση για το διάλογο και την ίδια στιγμή υπάρχει η αβεβαιότητα αν η συζήτηση που θα εξελιχθεί θα έχει τέτοιο χαρακτήρα, ώστε να παράγει εκείνες τις μαθηματικές ιδέες, στις οποίες στοχεύει η διδασκαλία. Συνεπώς, υπάρχει δυσκολία στον προσδιορισμό του σημείου ισορροπίας μεταξύ του ανοικτού στις ιδέες των μαθητών περιβάλλοντος της τάξης και του στόχου της οικοδόμησης μιας συγκεκριμένης μαθηματικής ιδέας ή διαδικασίας.

1.5. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Το πώς ο εκπαιδευτικός αρχίζει, διαχειρίζεται και τελικά ολοκληρώνει ένα μάθημα έχει σημαντική επίπτωση στη μάθηση. Ένας ιδεατός στόχος της διδασκαλίας θα ήταν να επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν συνδέσεις και

να κατασκευάσουν νέα νοήματα, ώστε να ενσωματώσουν τα νέα θέματα που διαπραγματεύονται.

Οι Artz & Thomas(1999), χρησιμοποιώντας τρεις φάσεις της διδασκαλίας (Εισαγωγή (*Initiation)* – Ανάπτυξη (*Development)* – Κλείσιμο (*Closure*)) και των γεγονότων που υφίστανται κατά τη διάρκεια ανάπτυξής τους αναφορικά με τα διαπραγματευόμενα θέματα, το μαθησιακό περιβάλλον και την επικοινωνία που αναπτύσσεται στην τάξη , χωρίζουν τους δασκάλους σε τρεις ομάδες: δύο διακριτές μεταξύ τους και μια τρίτη ενδιάμεση. Συγκεκριμένα, η κατηγοριοποίηση που προτείνεται είναι:

- Εκπαιδευτικοί, των οποίων η διάρθρωση του μαθήματος είναι τέτοια, ώστε στο επίκεντρο του μαθήματος βρίσκεται η μάθηση με κατανόηση του περιεχομένου. Προσπαθούν να επιτύχουν τόσο τη διαδικαστική, όσο και την εννοιολογική κατανόηση των θεμάτων.
- Εκπαιδευτικοί που ακολουθούν το μοντέλο μάθησης ως μεταφοράς γνώσης. Οι στόχοι της διδασκαλίας που θέτουν είναι μόνο διαδικαστικοί ,με μοναδικοί επιθυμία να καλύψουν το θέμα. Παρέχουν μόνο μία γενική και ασαφή γνώση και ενδιαφέρονται μόνο για την ανάπτυξη δεξιοτήτων.
- Μεικτή ομάδα εκπαιδευτικών, των οποίων οι ρόλοι στην τάξη είναι ασύμβατοι. Ενώ θέλουν να εξασφαλίσουν τόσο την εννοιολογική όσο και την διαδικαστική κατανόηση του περιεχομένου, επιθυμούν δασκαλοκεντρική παράδοση, προκειμένου να καλυφθεί η ύλη.

Φυσικά, εγείρονται κάποιες αμφισβητήσεις για την παραπάνω κατηγοριοποίηση, καθόσον η παρακολούθηση μικρών στο πλήθος μαθημάτων δεν επιτρέπει τον καθορισμό κριτηρίων τέτοιων, που θα εξασφαλίζεται η πλήρης στεγανοποίηση των κατηγοριών. Υπάρχουν παράγοντες όπως ο χρόνος, η αυστηρά καθορισμένη ύλη, οι πιέσεις του σχολείου, που μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά, αλλά έντονα μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Οι παράγοντες αυτοί μπορεί να επηρεάζουν αρνητικά το προφίλ της διδασκαλίας και να δημιουργούν λανθασμένη εικόνα του δασκάλου.

Οι Ball(1988), Lampert(1990) και Schoenfeld(1987) περιγράφουν έναν εκπαιδευτικό που ‘οπισθοχωρεί’ και επιτρέπει στους μαθητές του να δικαιολογήσουν και να αντικρούσουν ο ένας τη δουλειά του άλλου. Ο

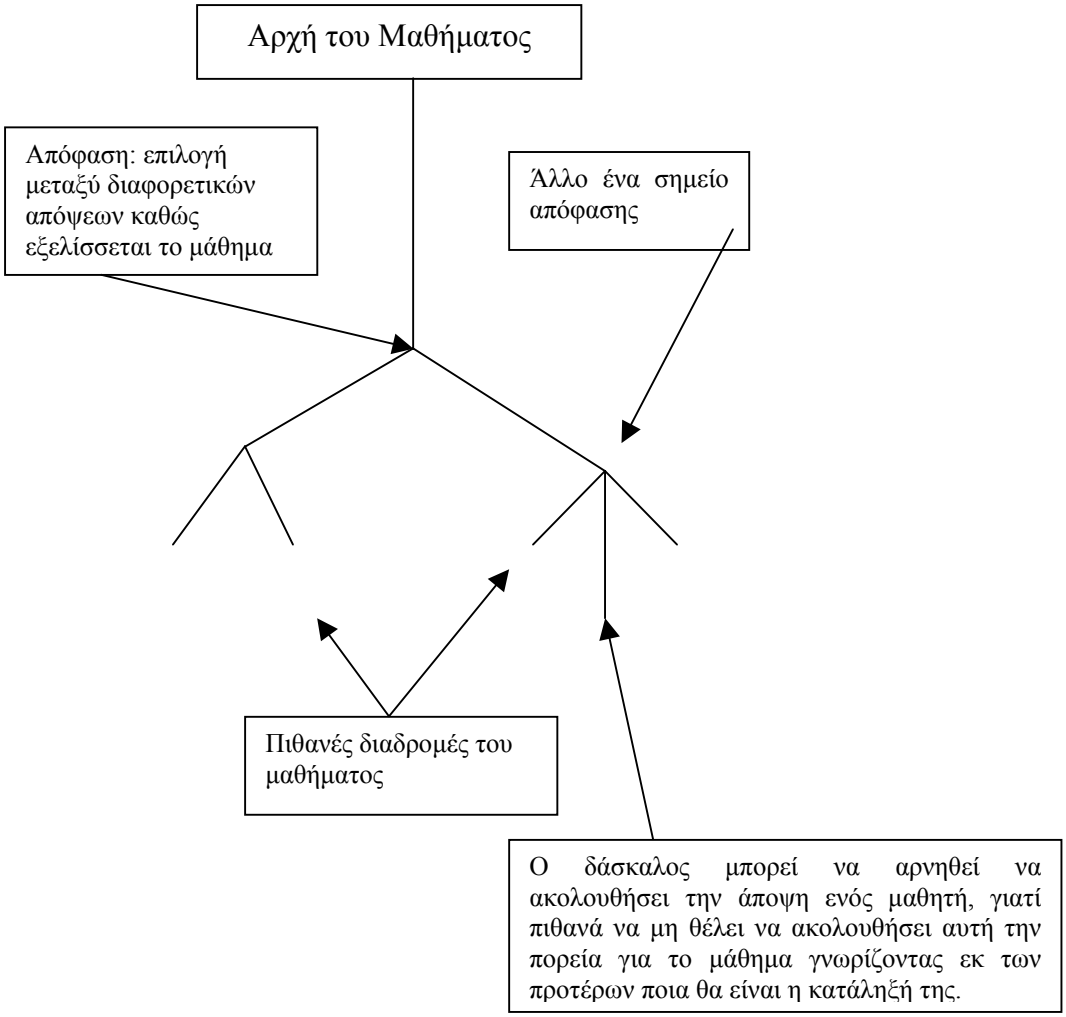
εκπαιδευτικός αρκείται στο να δημιουργήσει κατάλληλα ερεθίσματα, ώστε να προκαλέσει την ανταλλαγή απόψεων. Γίνεται καταλύτης στη *ζύμωση των ιδεών* (Chazan & Ball, 1999), η οποία εκδηλώνεται στον τρόπο που διαχειρίζεται τις διαφορετικές απόψεις που διατυπώνονται. Είναι αυτός που παρέχει το κίνητρο που ενεργοποιεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια για ανακάλυψη. Από εκεί και πέρα οι μαθητές αναμιγνύονται ενεργά με το περιεχόμενο ή με κάποια πτυχή του, επεκτείνοντας τη προϋπάρχουσα γνώση του.

Ο εκπαιδευτικός που σέβεται τις απόψεις των μαθητών του και τις ενσωματώνει στη διδασκαλία μπορεί να ακολουθεί σε διαφορετικές τάξεις, διαφορετικές κατευθύνσεις προσέγγισης της ίδιας έννοιας. Είναι οι τοποθετήσεις-απαντήσεις των μαθητών και οι αποφάσεις του εκπαιδευτικού που καθορίζουν την πορεία ενός τέτοιου μαθήματος. Αυτό οδηγεί μερικές φορές σε παρεκκλίσεις από το αρχικό σχέδιο και είναι η πείρα του εκπαιδευτικού που του επιτρέπει να διαχειρίζεται τέτοιες καταστάσεις.

Ένας σημαντικός ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να οδηγεί, πολλές φορές απροσδόκητα, τη συζήτηση σε εννοιολογική κατασκευή, όταν διατυπώνεται κάτι πρωτότυπο και δεν αναγνωρίζεται από τους μαθητές ως σημαντικό. Είναι αυτός που θα αποσαφηνίσει το τοπίο, όταν μία σκέψη που ακούγεται είναι ασαφής ή όταν ο μαθητής δε μπορεί να τη διατυπώσει με τρόπο κατανοητό για τους υπόλοιπους. Σε αυτή την περίπτωση ο εκπαιδευτικός δεν διακόπτει τον ειρμό του μαθητή, δεν τοποθετείται ή δεν εκφράζει τη δική του άποψη, έως ότου ο μαθητής διατυπώσει τη δική του ιδέα. Κάτι τέτοιο αναφέρεται από τη Jaworski(1998) ως χαρακτηριστικό ευαισθησίας προς τους μαθητές. Ο μαθητής ενθαρρύνεται να αναπτύξει το συλλογισμό του και να καταλήξει σε ένα – κατά τη γνώμη του – λογικό συμπέρασμα. Η ευαισθησία αφορά στο γεγονός ότι ο μαθητής αφήνεται στον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο συλλογίζεται και οδηγείται σε ένα συμπέρασμα και όχι στο πως ο εκπαιδευτικός κατευθύνει τη σκέψη του εκεί που αυτός θέλει.

Ο Davis (1992) προσπαθεί να απεικονίσει την πορεία ενός τέτοιου μαθήματος, όπου σε κάθε κόμβο ο εκπαιδευτικός, ως διαχειριστής των αποφάσεων , εξελίσσει το μάθημα, υποστηρίζοντας τις πρωτοβουλίες των μαθητών του και κάνοντας επιλογές μεταξύ των εναλλακτικών απαντήσεων. (Σχήμα 1.1)

Έτσι, οι στιγμές λήψης αποφάσεων από τον εκπαιδευτικό καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό και την πορεία του μαθήματος. Οι στιγμές αυτές, που έχουν ως αφετηρία τους μαθητές, είναι κατά κανόνα, αυθόρμητες, μοναδικές και πολλές φορές απρόσμενες. Εμφανίζονται διακόπτοντας την κανονική ροή του μαθήματος, ενώ πολλές φορές δεν επηρεάζουν όλους τους μαθητές ή δεν τους επηρεάζουν με τον ίδιο τρόπο. Μικρά και σύντομα επεισόδια που διαδραματίζονται δίνουν το στίγμα της διδασκαλίας. Αν ο εκπαιδευτικός χαθεί μέσα σ΄ αυτά, τότε πιθανόν να χαθούν και οι μαθητές του. Από την άλλη, ο ρόλος που διαδραματίζουν οι μαθητές σ΄αυτά καθορίζουν και τον τρόπο, με τον οποίο προσπαθούν να κατακτήσουν τη γνώση. Φαίνεται, λοιπόν, ότι η ευκαμψία και η ευελιξία του εκπαιδευτικού και η προσπάθεια για συνεχή προσαρμογή των διδακτικών ενεργειών στις ιδιαίτερες ανάγκες των μαθητών συντελούν σε μία αποτελεσματική διδασκαλία.



Σχήμα 1.1 : Πορεία μίας διδασκαλίας (Davis,1992)

Ο Cooney(1982) διατείνεται ότι η διδασκαλία είναι μία διαδικασία, στην οποία συνεχώς θα πρέπει να λαμβάνονται αποφάσεις. Οι αποφάσεις αυτές ξεκινούν πριν ο εκπαιδευτικός μπει στην τάξη και αφορούν στον τρόπο παρουσίασης της νέας γνώσης. Συνήθως συνδέονται με το τι θα πρέπει να τονιστεί και τι να παραληφθεί, ώστε να προσαρμοστεί η παρουσίαση του θέματος στις ανάγκες και στις απαιτήσεις της τάξης. Στη συνέχεια, τα δρώμενα που εκτυλίσσονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, καθώς και η αλληλεπίδραση με τους μαθητές, αναγκάζουν τον εκπαιδευτικό να επεξεργαστεί στιγμιαία ορισμένες πληροφορίες και να διαμορφώσει μια αντίδραση που οδηγεί στη λήψη μίας απόφασης. Η απόφαση αυτή θα πρέπει να οδηγεί στην αποσαφήνιση το περιεχομένου μιας έννοιας, στην αναδιατύπωση μιας ερώτησης, στην αποσαφήνιση των αυθόρμητων αντιλήψεων που δημιουργούνται. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να είναι σε θέση να τροποποιεί μια λανθασμένη κατάσταση που τείνει να δημιουργηθεί από τη διαπραγμάτευση μιας μαθηματικής ιδέας, ώστε αυτή να γίνει ευκολότερα πιο κατανοητή και διαθέσιμη, χωρίς, όμως, ταυτόχρονα, να διαστρεβλώνεται ή να χάνεται η ουσία της. Το γεγονός αυτό καθιστά τη διδασκαλία μια διαδικασία σύνθετη, που δε πρέπει να αντιμετωπίζεται με απλοϊκό τρόπο. Ο Cooney προσπαθεί να κατηγοριοποιήσει αυτές τις αποφάσεις ως συνδεόμενες:

- Με το περιεχόμενο - γνωστικές αποφάσεις (*cognitive*)
- Με το συναισθηματικό(*affective*) μέρος της διδασκαλίας
- Με την κατανομή του χρόνου και τον τρόπο διαχείρισής του στην τάξη - διαχειριστικές (*managerial*).

Φυσικά, δεν υπάρχουν στεγανά ανάμεσα στις κατηγορίες, καθώς κάποιες αποφάσεις μπορούν να αναφέρονται σε δύο κατηγορίες, όπως, για παράδειγμα, πόσο μπορεί ένας εκπαιδευτικός να περιμένει ένα μαθητή να απαντήσει, προτού περάσει την ερώτηση σε κάποιον άλλο ή να απαντήσει ο ίδιος, γιατί έχει υπερβεί τη χρονική κατανομή της δραστηριότητας. Τις περισσότερες φορές η λήψη μιας απόφασης είναι η συνιστώσα πολλών παραγόντων, πάντοτε, όμως, υπό το πρίσμα του τι είναι γνωστό για κάθε ένα μαθητή ξεχωριστά σε μία συγκεκριμένη κατάσταση.

Οι Potari & Jaworki(2002) αναφέρουν ότι υπάρχει ένα κενό μεταξύ των στόχων που θέτει ο εκπαιδευτικός και αυτού που πραγματικά συμβαίνει κατά τη

διδασκαλία. Περιγράφουν ένα πλαίσιο όπου ο εκπαιδευτικός ως διευκολυντής της γνώσης ωθεί και παροτρύνει τους μαθητές, έχοντας ως βάση θεωρίας και αξιολόγησης της διδασκαλίας τη διδακτική τριάδα (teaching triad), η οποία αναφέρεται σε τρία βασικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας: τη διαχείριση της μάθησης (management of learning), που αφορά στο ρόλο του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση του μαθησιακού περιβάλλοντος, τη μαθηματική πρόκληση (mathematical challenge), που περιγράφει τις προκλήσεις που προσφέρονται στους μαθητές, προκειμένου να προκληθεί μαθηματική σκέψη και δραστηριότητα και, τέλος, την ευαισθησία στους μαθητές (sensitivity to students) που συνδέεται με το βαθμό στον οποίο γνωρίζει ο εκπαιδευτικός τους μαθητές του και ενδιαφέρεται για τις ανάγκες τους. Όπως η ίδια η Jaworski(1998) αναφέρει «η διδακτική τριάδα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στο σχεδιασμό του μαθήματος και στην ενίσχυση του αναστοχασμού του». Στο πλαίσιο αυτό περιγράφεται και μία κατάσταση (harmony), όπου η ευαισθησία του εκπαιδευτικού και η μαθηματική πρόκληση εξισορροπούν και επιτρέπουν στους μαθητές να συμμετέχουν στην κατασκευή των μαθηματικών ιδεών και σταδιακά να αυξάνουν τη μαθηματική τους σκέψη.

Κρίσιμος για τη διαμόρφωση της μαθηματικής κουλτούρας στην τάξη είναι και ο τρόπος παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης. Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από ακρίβεια και σαφήνεια στο περιεχόμενό τους και από μια συγκεκριμένη διάρθρωση στη δομή τους. Τα χαρακτηριστικά που δίνουν στα μαθηματικά οντότητα είναι γνωστά ως επιστημολογικά. Ως τέτοια μπορούν να θεωρηθούν η φύση των μαθηματικών εννοιών, η αιτιολόγηση, η απόδειξη, ο ρόλος και η φύση των θεωρημάτων, καθώς και οι διαδικασίες εγκυρότητας και λειτουργικότητας των θεωρημάτων, ιδιοτήτων και διαδικασιών (Σακονίδης κ.ά., 2001). Όλα εκείνα, δηλαδή, τα δομικά συστατικά που χρειάζονται, προκειμένου να προσδιοριστεί μία μαθηματική έννοια ως μία ολότητα. Τα παραπάνω, μαζί με την υπόθεση ότι οι μαθητές μαθαίνουν το τι είναι σπουδαίο στα μαθηματικά, ανάλογα με την έμφαση που δίνει ο εκπαιδευτικός στην παράδοση του μαθήματος, στον τρόπο που αξιολογεί τις απαντήσεις των μαθητών μέσα στην τάξη και στη χρηστικότητα που αποδίδεται στην επίλυση ασκήσεων, συγκλίνουν στο γεγονός ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην οργάνωση και παρουσίαση της μαθηματικής γνώσης είναι αποφασιστικός. Σχετικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν από τους Σακονίδη κ.ά., (1999 και 2000) έδειξαν μια

ομογενοποίηση στον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών ιδεών. Όλα εμφανίζονται να είναι τα ίδια, τα μαθηματικά αντικείμενα και οι μεταξύ τους σχέσεις δεν διακρίνονται. Ορισμοί δίνονται μέσω διαδικασιών κατασκευής ή μέτρησης και συνδέονται άμεσα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο προέκυψαν. Για παράδειγμα, σε μια περίπτωση, προκειμένου για την περίμετρο ενός τριγώνου, μετά από σχετική μέτρηση και πρόσθεση των πλευρών του, η δασκάλα της τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου ζητάει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και ανακοινώνει «ονομάζουμε τα 11 αυτά εκατοστά περίμετρο του τριγώνου». Επιπλέον, οι ορισμοί και τα θεωρήματα συγχέονται συχνά με τις διαδικασίες. Η μαθηματική λειτουργία του ορισμού και ο προσδιοριστικός του ρόλος σπάνια επισημαίνεται στην τάξη. Αντί του καθορισμού των εννοιών, οι δάσκαλοι τείνουν να εξηγούν απλά στους μαθητές πώς να χειριστούν τα στοιχεία, στα οποία αναφέρονται οι ορισμοί. Τα θεωρήματα απομνημονεύονται ως κανόνες δράσης. Για παράδειγμα, σε μια άλλη περίπτωση, περιγράφεται ένα διδακτικό επεισόδιο παραγοντοποίησης, στο οποίο ο εκπαιδευτικός αναφέρει «… βγάζουμε το – κοινό παράγονται», χωρίς να κάνει καμία αναφορά στο –1 και στους αντίθετους αριθμούς. Οι πρακτικές αυτές δεν παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να κατανοήσουν τη σημασία και την αξία που αποδίδεται στους ορισμούς, καθώς και τη μετέπειτα σύνδεση των θεωρημάτων-ιδιοτήτων με αυτούς. Αλλοιώνεται, έτσι, η διαδικασία γνωστικής κατασκευής των μαθηματικών, που θα επέτρεπε στους μαθητές τη ορθή κατανόηση και παραπέρα χρήση των εννοιών.

1.6. Οι επεμβάσεις του εκπαιδευτικού

Κρίσιμο σημείο για την ποιότητα της διδασκαλίας είναι ο βαθμός εμπλοκής των μαθητών σε αυτήν. Η εμπλοκή αυτή μπορεί να αναδείξει γνωστικές δυσκολίες, που αφορούν στη μαθηματική έννοια που αντιμετωπίζεται. Η γνώση μιας τέτοιας δυσκολίας μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να σχεδιάσει παρεμβάσεις, οι οποίες θα στηρίζονται στις ανάγκες των μαθητών. Μέσω των παρεμβάσεων αυτών ο εκπαιδευτικός επιβάλλεται να στοχεύει στη διευκόλυνση της μάθησης των μαθηματικών. Στην κατεύθυνση αυτή εισάγει ποικίλα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα που μπορούν να παρέχουν ευκαιρίες ανάπτυξης του μαθηματικού λόγου, υποβάλει ερωτήσεις που ωθούν τους μαθητές να εξετάσουν και να διατυπώσουν τις ιδέες τους και προσπαθεί να τροποποιήσει

τις μαθηματικές ιδέες που διατυπώνονται, όταν αναγνωρίζει σε αυτές ασάφειες ή ατέλειες.

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση των παρεμβάσεων, καθώς αυτές που έχουν έντονο το χαρακτήρα της καθοδήγησης και των συγκεκριμένων οδηγιών ακυρώνουν τις πρωτοβουλίες των μαθητών και ουσιαστικά, αντί οι μαθητές να γενικεύουν τα συμπεράσματα, εξειδικεύουν τις γνώσεις τους. Κάτι τέτοιο χαρακτηρίζεται από τις Πόταρη και Jaworski(2002) ως διοχέτευση (funneling), σε αντίθεση με την εποικοδομητική παρέμβαση του εκπαιδευτικού, με την οποία επιτυγχάνεται η σταδιακή σύνδεση των βημάτων προσέγγισης με ένα ταυτόχρονο έλεγχο, προκειμένου να υπάρξει προώθηση στο επόμενο βήμα, που χαρακτηρίζεται και ως προσέγγιση ΄σκαλωσιάς' (scaffolding). Επιπλέον, παρεμβάσεις που χρησιμοποιούν ή στοχεύουν μόνο στους καλούς μαθητές, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ανάπτυξη του μαθήματος σύμφωνα με τον αρχικό προγραμματισμό, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το σύνολο της τάξης, ενδέχεται να δημιουργούν εμπόδια στην κατασκευή του νοήματος από τους μαθητές. Συνεπώς, το είδος των παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού κατά την εξέλιξη του μαθήματος καθορίζει και διαμορφώνει συνθήκες που μπορούν να βοηθήσουν στη βελτιστοποίηση της μάθησης.

Οι Σακονίδης κ.ά. (2003), ως αποτέλεσμα σχετικής έρευνας. επισημαίνουν τρεις διακριτές ομάδες επεμβάσεων

- Επαναδιατύπωση του προβλήματος
- Παροχή ενδείξεων και βοήθειας για τη λύση
- Επιβολή της λύσης

Σε κάθε μία από αυτές διακρίνουν υποομάδες, όπως

- Περιορισμός της γενικότητας, με παροχή συγκεκριμένων παραδειγμάτων
- Επισήμανση αλγοριθμικών διαδικασιών
- Απλούστευση του προβλήματος με διάσπασή του σε υπο-προβλήματα
- Συνεχής καθοδήγηση μέσω ερωτήσεων και οδηγιών
- Παρουσίασης της λύσης του προβλήματος

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας ανέδειξε μία πρακτική που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής. Οι εκπαιδευτικοί φάνηκε να παρεμβαίνουν ακόμη και στην υποψία ότι κάποιος μαθητής επρόκειτο να κάνει λάθος. Η άμεση διόρθωση ή η ρυθμιστική παρέμβαση, ακόμα και πριν από το λάθος (στην αναμονή του ακόμα) δείχνει να αποτελεί μια συνηθισμένη πρακτική στην τάξη των μαθηματικών. Στην προσπάθειά τους να εξασφαλίσουν μια διδακτική προσέγγιση χωρίς λάθη, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται ότι παρεμβαίνουν στη συλλογιστική των μαθητών, χωρίς να υπάρχει κάποιος ουσιαστικός λόγος. Επίσης, στην προσπάθεια να οδηγήσουν τη σκέψη των μαθητών εκεί όπου αυτοί θέλουν, αγνοούν ή θεωρούν λανθασμένες τις απαντήσεις των μαθητών, που δε συνάδουν με την δική τους οπτική. Έτσι, δημιουργείται η εντύπωση ότι οι τελευταίοι δε μπορούν μόνοι τους να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά, αλλά κάτι τέτοιο γίνεται είτε με την σωστή καθοδήγηση είτε αποκλειστικά με αλγοριθμικές διαδικασίες. Η γνώση των μαθηματικών είναι αποκλειστικό δικαίωμα του εκπαιδευτικού. Ακόμη, πιστεύουν ότι οι μαθητές αδυνατούν να ανακαλύψουν μόνοι τους μια μαθητική ιδέα, αλλά έχουν ανάγκη από κατευθυντήριες οδηγίες από τους ίδιους. Με βάση αυτήν την οπτική, υιοθετούν μια άκαμπτη στάση στη λειτουργία της τάξης.

Η Jaworski(1997) αναφέρει ότι παρατηρείται μία διάσταση στη διδασκαλία των μαθηματικών η οποία προέρχεται από την επιθυμία των μαθητών να ανακαλύψουν τα ιδιαίτερα μαθηματικά νοήματα και από απροθυμία των εκπαιδευτικών να βοηθήσουν, με αποτελεσματικές παρεμβατικές ενέργειες, στην ανακάλυψη αυτή. Η οπτική αυτή εξηγεί και το γιατί οι εκπαιδευτικοί τείνουν να επαναλαμβάνουν τις θέσεις-εξηγήσεις που διατυπώνουν οι μαθητές στην τάξη (revoice). Οι Lampert & Cobb(2003) οριοθετούν την επεμβατική αυτή πρακτική των δασκάλων ως την αναδιατύπωση των λεχθέντων των μαθητών στη διάρκεια του μαθήματος είτε γραπτά είτε προφορικά. Οι ίδιοι αναφέρουν τη σχετική έρευνα των O'Connor και Michaels (1993 και 1996), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι αυτό γίνεται προκειμένου:

- να διευκρινιστεί μια ιδέα που διατυπώθηκε και να οδηγηθούν οι μαθητές σε πιο παραγωγικά συμπεράσματα
- να χρησιμοποιηθεί η ιδέα ως μέσω εισαγωγής σε μια καινούργια έννοια

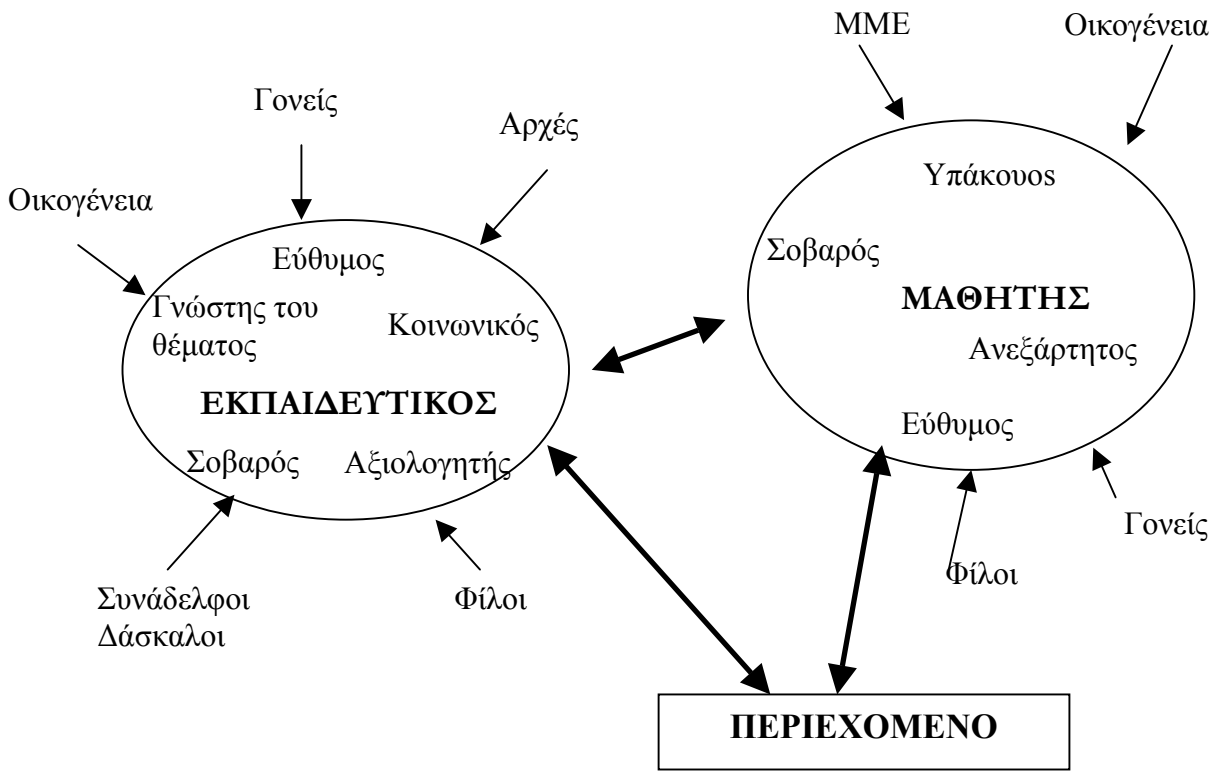
- να εξηγηθεί ο συλλογισμός κάποιου μαθητή, ώστε αυτός να γίνει σαφής και συνεπέστερος με τη μαθηματική γλώσσα.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να καταφεύγει σε αυτήν την πρακτική, προκειμένου να συνδέσει διάφορες απόψεις που διατυπώνονται σε ένα πιο συγκροτημένο συμπέρασμα, κύρια όταν οι μαθητές διατυπώνουν μια σωστή, αλλά όχι ολοκληρωμένη τοποθέτηση. Ή ακόμα, ο εκπαιδευτικός αναδιατυπώνει μια ακολουθία σωστών, αλλά διαφορετικών απαντήσεων, προκειμένου να ακουστούν οι εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης του ίδιου στόχου. Τέλος, είναι και ένας τρόπος διαχείρισης του λάθους, ώστε να αναγκάσει τους μαθητές σε αναστοχασμό και σε αναδιοργάνωση των σκέψεών τους.

1.7. Αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών

Στην σχολική τάξη αναδύονται σχέσεις μεταξύ του εκπαιδευτικού, των μαθητών και του περιεχομένου. Οι ενέργειες του εκπαιδευτικού συνδέουν, ταυτόχρονα τις τρεις αυτές οντότητες, οι οποίες δεν είναι σταθερές, αλλά αλλάζουν κατά τη διάρκεια του μαθήματος, οπότε αλλάζει και όλη η διδασκαλία, προκειμένου να γίνουν οι κατάλληλες συνδέσεις, οι οποίες θα οδηγήσουν σε εννοιολογική κατανόηση του θέματος που διαπραγματεύεται. Ως πρόσωπα που ενεργούν για να ολοκληρώσουν ο καθένας τους δικούς τους στόχους μέσα στην τάξη, εκπαιδευτικός και μαθητές δεν είναι στατικοί. Η αλληλεπίδραση δασκάλου - μαθητή γίνεται μέρος του περιεχομένου (Lampert, 2001), δεδομένου ότι οι μαθητές προσπαθούν να μάθουν αν και κάτω από ποιες συνθήκες είναι ασφαλές να μιλήσουν γι΄ αυτό που σκέφτονται. Εκπαιδευτικός και μαθητές επηρεάζονται σχεδόν από τους ίδιους εξωτερικούς παράγοντες. Ο δάσκαλος ενσωματώνει πολλά ‘εγώ’ στην επαγγελματική του ταυτότητα και χρησιμοποιεί διαφορετικές πτυχές του χαρακτήρα του, προκειμένου να επιλύσει τα πολλά και σύνθετα προβλήματα με τα οποία έρχεται αντιμέτωπος καθημερινά στην τάξη. Ως άτομο που ενεργεί, ο εκπαιδευτικός δεν είναι πάντα ο ίδιος και δεν αντιδρά πάντοτε με τον ίδιο τρόπο.

Η Lampert (2001) προτείνει το παρακάτω σχήμα, για να περιγράψει τα παραπάνω.



Σχήμα 1.2. Εκπαιδευτικός-Μαθητής-Περιεχόμενο: Εξωτερικές και εσωτερικές σχέσεις Lampert(2001)

Οι Artz & Armour-Thomas (1999) προσφέρουν μια πολύ ενδιαφέρουσα προσέγγιση του όρου αλληλεπίδραση στην περίπτωση εκπαιδευτικού – μαθητή. Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός επικοινωνεί με τους μαθητές του κατά τρόπο μη επικριτικό, ενθαρρύνοντας τη συμμετοχή κάθε μαθητή. Απαιτεί από τους μαθητές να δίνουν πλήρεις εξηγήσεις και αιτιολογήσεις προφορικά ή γραπτά. Ακούει προσεκτικά τις ιδέες των μαθητών και λαμβάνει τις σωστές αποφάσεις σχετικά με το πότε να προσφέρει πληροφορίες, πότε να παρέχει κατάλληλες διευκρινίσεις, πότε να διαμορφώσει το περιεχόμενο μίας απάντησης, πότε να καθοδηγήσει και πότε να αφήσει τους μαθητές να καταπιαστούν με πιο σύνθετα θέματα.

Προσθέτοντας κάποια στοιχεία στα πιο πάνω, προκειμένου να επεκτείνουμε τον ορισμό, ο εκπαιδευτικός παρέχει εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης, έτσι ώστε να κωδικοποιηθούν οι πληροφορίες από το σύνολο σχεδόν της τάξης. Έτσι, κάθε μαθητής τις συγκρατεί με το δικό του μοναδικό τρόπο και τις ανακαλεί κάθε φορά που αυτός κρίνει ότι μπορούν να εφαρμοστούν. Σημαντική, επίσης, από την πλευρά του εκπαιδευτικού είναι η κατασκευή κατάλληλων καταστάσεων, έτσι ώστε ο μαθητής να εφαρμόζει τη γνώση που απόκτησε.

Με αυτόν τον τρόπο, σε ένα τέτοιοιο πλαίσιο τάξης, η διδασκαλία γίνεται μια ενεργή διαδικασία, που περιλαμβάνει γνωστικές κατασκευές, ενθάρρυνση της μαθηματικής εξερεύνησης, ανακάλυψη και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και, ταυτόχρονα , ο μαθητής κοινωνικοποιείται, γεγονός που παίζει καθοριστικό ρόλο στη μάθησή του. Οι τελευταίοι μπορούν να κατασκευάσουν μαθηματική γνώση και ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που θα υποστηρίξει και θα προκαλέσει αυτή τη γνώση.

Οι Artigue(1996) και Sierpinska(1994) συμφωνούν ότι, για να μπορούν οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στην τάξη, θα πρέπει να τους δίνεται η ευκαιρία να ξεπερνούν τα επιστημολογικά εμπόδια. Ο Bauersfeld (1988) αναφέρει ότι εκπαιδευτικός και μαθητές από κοινού συμβάλλουν σε ό,τι διαδραματίζεται στην τάξη. Οι σχέσεις που αναπτύσσονται διαμορφώνουν μια από κοινού αναδυόμενη πραγματικότητα, καθώς «ο δάσκαλος και οι μαθητές αποτελούν από κοινού την πραγματικότητα της τάξης».

Η λεκτική αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται στην τάξη επηρεάζει τις γνωστικές κατασκευές των μαθητών. Επιτρέπει στον καθένα να συμμετέχει ενεργά, ακόμη και αν δεν έχει οικειοποιηθεί πλήρως μια έννοια. Εμπλέκεται όλη η τάξη στη διαδικασία του μαθήματος, γεγονός που εγγυάται τη διατήρηση της γνώσης που αποκτάται. Οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν πειστικά επιχειρήματα, συλλογίζονται περισσότερο και σε βάθος για τα τεκταινόμενα στην τάξη, προσπαθούν να κάνουν συνδέσεις, χρησιμοποιώντας τη μέχρι τότε εμπειρία τους, οπτικοποιούν τις ανακαλύψεις τους, προσπαθούν να βρουν κατάλληλα παραδείγματα, τους δίνεται η ευκαιρία να αναστοχαστούν τις ιδέες τους και τις ιδέες των συμμαθητών τους. Τα παραδείγματα είναι αυτά που κατασκευάζουν την εννοιολογική εικόνα (concept image), την εικόνα, δηλαδή, την οποία αναπαριστά η αφηρημένη έννοια που εξετάζεται, με τη βοήθεια της οποίας οι μαθητές μπορούν να χειριστούν την έννοια και να την συγκρατήσουν. Τελικά, τα παραδείγματα είναι αυτά που επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν τους τυπικούς ορισμούς, αν αναλογισθούμε και τη θέση του Freudenthal, ο οποίος περιγράφει ως παράδειγμα ο,τιδήποτε κρύβει τη γενική ιδέα της έννοιας.

1.8. Επικοινωνία-Διάλογος στην τάξη των μαθηματικών

Ένα από τα προβλήματα της διδασκαλίας αφορά στην απόφαση του τι θα πρέπει να παρουσιαστεί ως αποδεκτή ή συμβατική γνώση και τι να τεθεί για επαναπροσδιορισμό ή συζήτηση. Με δεδομένο το γεγονός ότι ο διάλογος προορίζεται στο να αυξήσει και να αποσαφηνίσει τη μαθηματική γνώση, αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει να αποφασίσει πότε θα ενσωματώσει τους κατασκευασμένους κανόνες της συγκεκριμένης κατάστασης, καθώς και τις έννοιες στο διάλογο και θα εξετάσει τις επιπτώσεις τους και πότε θα υπενθυμίσει απλώς στους μαθητές τους συμβατικούς κανόνες και τις ερμηνείες. Διάφορες προκλήσεις αναδύονται για τον δάσκαλο σε αυτήν την κατεύθυνση, γιατί η τάξη δεν είναι το μοναδικό μέρος όπου μία τέτοια διαπραγμάτευση λαμβάνει χώρα. Ως σώμα γνώσης τα μαθηματικά δε μένουν ακίνητα. Το τι είναι αποδεκτό εργαλείο, όρος, έννοια είναι μερικές φορές πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί. Μέσα και έξω από την τάξη τα μαθηματικά είναι μία δυναμική οντότητα. Καθώς αναπτύσσεται η θεωρία, λαμβάνουν χώρα νέες ανακαλύψεις και προκύπτουν νέοι κανόνες για το πώς θα καθορίσουμε ποια ιδέα θα γίνει αποδεκτή. Αυτός είναι και ένας λόγος για τον οποίο έμπειροι εκπαιδευτικοί προτιμούν να διδάσκουν μαθηματικά με την παραδοσιακή μορφή της αφήγησης, παρά μέσω ενός εξερευνητικού διαλόγου.

Ο Von Classersfeld (1984) διατύπωσε την άποψη(Jaworski, 1999) ότι:«Ο δάσκαλος πρέπει να συνειδητοποιήσει πως η γνώση δεν μεταφέρεται στους μαθητές με μια γλωσσική επικοινωνία, αλλά η γλώσσα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο στη διαδικασία καθοδήγησης της κατασκευής της από τους μαθητές»

Μια πιθανή ερμηνεία της παραπάνω τοποθέτησης μπορεί να αναζητηθεί στον τρόπο εισαγωγής μιας έννοιας, η οποία, όταν γίνεται με ερωτήσεις και όχι δηλώσεις, προκαλεί απαντήσεις των μαθητών, που δίνουν στον εκπαιδευτικό μια ιδέα για το πώς αυτοί την αντιλαμβάνονται ή τι είδους αυθόρμητες αντιλήψεις έχουν γι΄ αυτήν. Έτσι, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ανατρέξουν στις γνώσεις τους και, ταυτόχρονα, παρακινούνται σε νέα μάθηση. Μια μαθηματική πρόκληση προβάλει στον ορίζοντα της τάξης.

Επικοινωνία και διάλογος δε σημαίνουν συζήτηση και επανάληψη των στρατηγικών ξανά και ξανά, αλλά προσοχή στα ειρημένα των άλλων. Έτσι, γίνεται σαφές ότι διαφορετικές στρατηγικές μπορούν να οδηγήσουν στο ίδιο αποτέλεσμα,

συνεπώς όλοι μπορούν να παράγουν μαθηματικά, ακολουθώντας διαφορετικές προσεγγίσεις. Η έρευνα του Kuhn(1992) κατέστησε σαφές ότι η γνώση εμφανίζεται και εξελίσσεται, όταν οι μαθητές αναστοχάζονται πάνω στις αντιφάσεις των δικών τους συλλογισμών. Οι Kitchener and Brener (1990) έδειξαν ότι η προσωπική γνώση κατασκευάζεται, όταν οι μαθητές αξιολογούν τις σκέψεις των συμμαθητών τους και επανεξετάζουν τις δικές τους. Παρατήρηση – ερμηνεία – ενσωμάτωση μπορούν να είναι κάποια στάδια, μέσα από τα οποία μπορεί να πραγματωθεί μια αποτελεσματική διδασκαλία.

Ένας βασικός παράγοντας της διδασκαλίας, που πρέπει να ληφθεί υπόψη, είναι οι 'σιωπηροί' μαθητές. Οι Lampert & Cobb (2003) αναφέρουν την κατάσταση αυτή ως σιωπηρή παρουσία (silencing). Οι ιδέες αλλά και η ίδια η παρουσία κάποιων μαθητών συχνά περιθωριοποιούνται και υποτιμώνται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι θέσεις και οι απορίες τους να μην βγαίνουν στο προσκήνιο της διδασκαλίας και έτσι να διαμορφώνουν μια άσχημη εικόνα για τα μαθηματικά. Σε σχετική έρευνα η Fine (1987) εστίασε σε τέτοιου είδους καταστάσεις και αναφέρει ότι όχι μόνο μεμονωμένοι μαθητές, αλλά και ολόκληρες ομάδες δεν έχουν καμία φωνή μέσα στην τάξη, δεδομένου ότι οι απόψεις τους δεν ακούγονται και τα ζητήματα που μπορούν να εγείρουν δεν συζητιούνται. Στην προσπάθειά του, λοιπόν, ο εκπαιδευτικός να υποστηρίξει την όσο το δυνατό μεγαλύτερη κατανόηση των εννοιών, που πρόκειται να τεθούν σε διαπραγμάτευση, θα πρέπει να εμπλέκει στο διάλογο το σύνολο της τάξης και να λαμβάνει αποφάσεις που δε θα μεταδίδουν σιωπηρά το μήνυμα ότι οι απόψεις ορισμένων μαθητών εκτιμώνται ιδιαίτερα, ενώ κάποιων άλλων όχι.

Βασικό, λοιπόν, στοιχείο μάθησης των μαθηματικών εννοιών είναι η διαπραγμάτευσή τους στην τάξη, μέσω της οποίας ο εκπαιδευτικός εκχωρεί τη γνώση στους μαθητές του. Η Sfard (2001) ξεχωρίζει κάποιους παράγοντες που προσδίδουν επιδεξιότητα στο μαθηματικό διάλογο, όπως η κατανόηση των μαθηματικών συμβόλων και των αναπαραστάσεων, καθόσον είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τις έννοιες που αντιπροσωπεύουν, και εκείνοι οι κανόνες που τίθενται από τον εκπαιδευτικό και καθορίζουν τη θέση κάθε συνομιλητή στο διάλογο. Τα δύο αυτά συστατικά του διαλόγου, καθώς και η βέλτιστη χρήση τους διδάσκονται και μαθαίνονται στη σχολική τάξη, όπου πολλές φορές αυτό γίνεται ασυνείδητα από την πλευρά του εκπαιδευτικού, μέσω των διδακτικών πρακτικών που ακολουθεί και των αποφάσεων που λαμβάνει στην εξέλιξη του μαθήματος. Η Κυριακίδου(2004), με

βάση σχετική έρευνα, συμπεραίνει πως ο εκπαιδευτικός διαμορφώνει ένα πρότυπο αλληλεπίδρασης στην τάξη, το οποίο στη συνέχεια υιοθετείται από τους μαθητές, όταν αυτοί εργάζονται είτε μόνοι τους είτε με άλλους συμμαθητές τους.

Κεφάλαιο 2ο
Η έρευνα

2.1. Εισαγωγή

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η αναγνώριση και η διερεύνηση των διδακτικών διλημμάτων που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός κατά το σχεδιασμό, αλλά και την υλοποίηση της διδασκαλίας των μαθηματικών, καθώς και των τρόπων με τους οποίους επιχειρεί να τα επιλύσει μέσα από τη συνεργασία με ερευνητές του χώρου της Διδακτικής των Μαθηματικών. Τα διδακτικά αυτά διλήμματα αφορούν σε αποφάσεις και παρεμβάσεις που σχετίζονται τόσο με το μαθηματικό περιεχόμενο, όσο και με τους μαθησιακούς στόχους που τίθενται και τις διδακτικές ενέργειες οι οποίες υιοθετούνται στην τάξη. Αφορούν, δηλαδή, στο σύνολο των ενεργειών του εκπαιδευτικού που συνδέονται με θέματα μάθησης και διδασκαλίας κατά τη διάρκεια (και συχνά και κατά το σχεδιασμό) της ανάπτυξης της τελευταίας.

Η μεθοδολογική προσέγγιση που επιλέχθηκε για τους σκοπούς της έρευνας περιελάμβανε τον ακόλουθο βασικό κύκλο δράσης, σε κάθε επίπεδο του οποίου εμπλέκονταν, με ισότιμο τρόπο, τόσο ο εκπαιδευτικός που δίδασκε όσο και δύο ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, οι οποίοι δρούσαν περισσότερο ως ακροατές και συνομιλητές του πρώτου στο πλαίσιο μιας συνεργασίας με στόχο την από κοινού διερεύνηση και, κατά συνέπεια, μάθηση (βλέπε και ενότητα 2.2):

Επίπεδο σχεδιασμού: εντοπισμός των διλημμάτων – ανάλυση και μελέτη τους – λήψη σχετικών αποφάσεων – σχεδιασμός διδασκαλίας.

Επίπεδο διδασκαλίας: εντοπισμός συγκεκριμένων, κρίσιμων σημείων της διδασκαλίας, συνθήκες κάτω από τις οποίες προέκυψαν, διαφοροποιήσεις σε σχέση με το σχεδιασμό.

Μετα-διδακτικό επίπεδο: ανάλυση, επεξεργασία, ερμηνεία, αναστοχασμός και επανασχεδιασμός κρίσιμων σημείων της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό σε συνεργασία με τους ερευνητές

Σε καθένα από τα παραπάνω επίπεδα, τα συστατικά μέρη που αποτελούσαν αντικείμενο εστίασης ήταν:

- η μαθηματική γνώση (έμφαση στα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών που αξιοποιούνται)

- οι μαθησιακοί και διδακτικοί στόχοι (έμφαση στις προσεγγίσεις μάθησης που υιοθετούνται και στις πρακτικές που επιλέγονται για να τις εξυπηρετήσουν)
- οι διδακτικές ενέργειες (έμφαση στο διδακτικό πλαίσιο που υιοθετεί).

Η μελέτη των παραπάνω επιχειρήθηκε μέσα από τη διαχείριση στην τάξη:
-της εργασίας των μαθητών (εξατομικευμένη – ομαδική εργασία, είδος δραστηριοτήτων, ρόλος εκπαιδευτικού – παρεμβάσεις, ρόλος που δίνεται στο μαθητή),
- της αλληλεπίδρασης (ποιος απευθύνεται σε ποιον, πως, πότε) και
- της επικοινωνίας (ο λόγος που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση).

Υιοθετήθηκε, έτσι, ένας κύκλος ενεργειών της μορφής σχεδιασμός – μελέτη και αναστοχασμός – επανα-σχεδιασμός – υλοποίηση (ο οποίος περιγράφεται σχηματικά στο σχήμα2.1 σελ 30). Μακροπρόθεσμος στόχος αυτού του κύκλου ήταν η μελέτη της εξέλιξης των διδακτικών πρακτικών του εκπαιδευτικού, καθώς και ο έλεγχος της αποτελεσματικότητας εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων, με βασική επιδίωξη την όσο το δυνατό πληρέστερη κατασκευή του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές.

2.2. Γιατί έρευνα δράση: βασικά χαρακτηριστικά

Το Ερευνητικό Πρόβλημα, όπως περιγράφηκε παραπάνω, καθιστά φανερή την αναγκαιότητα υιοθέτησης της ερευνητικής προσέγγισης της έρευνας δράσης. Κατά τους Cohen και Manion (1994) :

> «Η έρευνα δράση ερμηνεύει την επιστημονική μέθοδο με ένα πολύ ελεύθερο τρόπο κυρίως επειδή εστιάζεται σε ένα ειδικό πρόβλημα, σε ένα ειδικό περιβάλλον. Δίνεται έμφαση στην ακριβή γνώση για μία συγκεκριμένη κατάσταση και για ένα συγκεκριμένο σκοπό.»

Από την άλλη ο Lerman (Γαγάτσης, 1995) ισχυρίζεται ότι:

> « Μία συνέπεια της ανάμιξης των δασκάλων σε έρευνες γύρω από τη διδασκαλία τους, είναι ότι γίνονται περισσότερο οικείοι με τις πηγές των ερευνητικών αποτελεσμάτων και αποκτούν επίγνωση της ενδεχόμενης αξίας της έρευνας για τη διδασκαλία τους» (Γαγάτσης.1995, σελ 265).

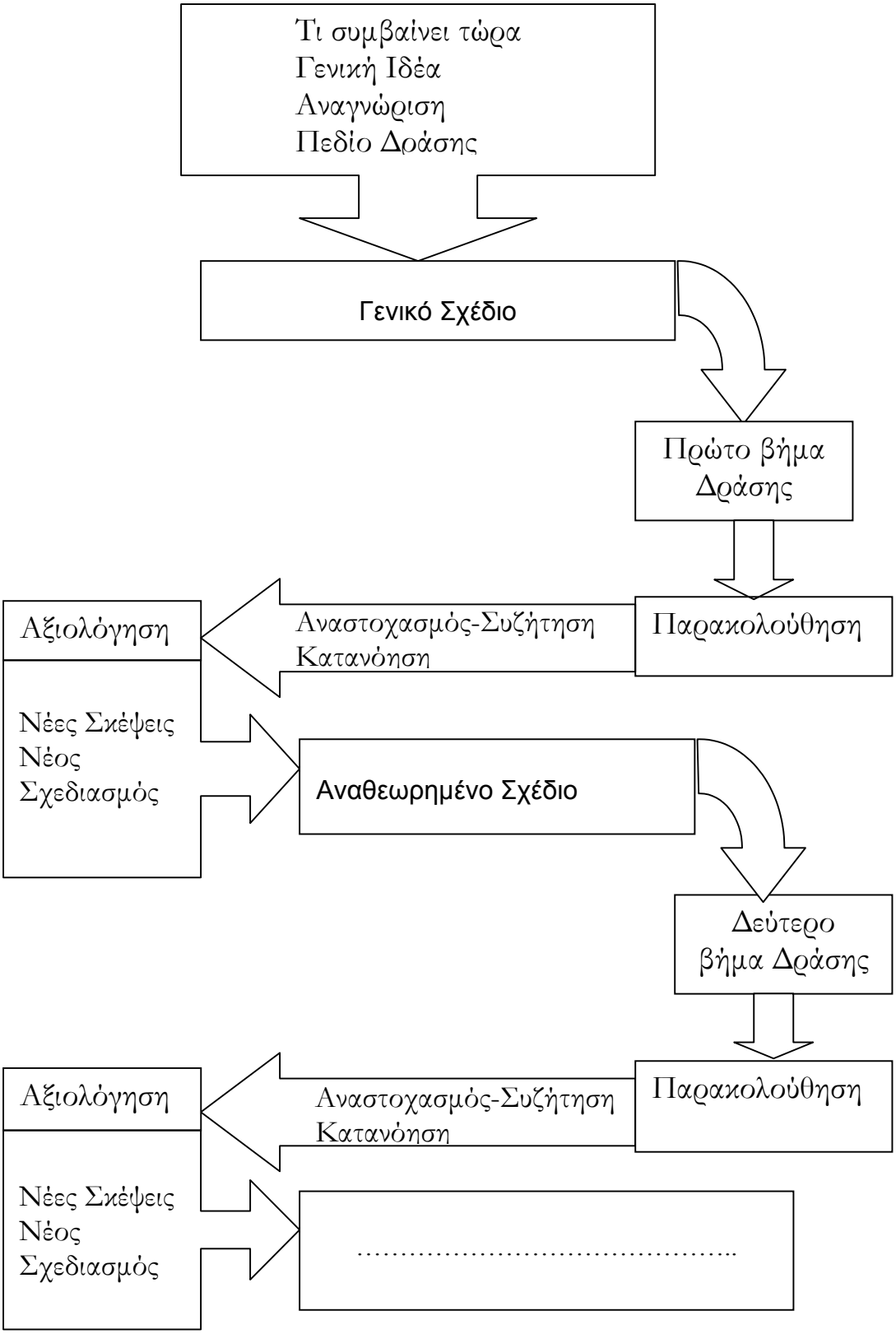
Σε ό,τι αφορά στην εμπλοκή του εκπαιδευτικού στην έρευνα δράση, οι Brown κ.ά. (1982) υποστηρίζουν ότι:

> « Η έρευνα δράση φθάνει στην ύψιστη αποτελεσματικότητά της, όταν ενισχύει τους δασκάλους να μετατρέπουν την πρακτική τους σε μία διαδικασία συνεχούς αυτοανανέωσης. …Οι συνδέσεις μεταξύ της γνώσης γύρω από τη μάθηση, της προσωπικής γνώσης και της υποχρέωσης για περαιτέρω στρατηγικές δράσης γίνονται πιο σταθερές»

Το σχεδιάγραμμα στην επόμενη σελίδα, περιγράφει πλήρως τον τρόπο σχεδιασμού και υλοποίησης της έρευνας δράση, όπως προτάθηκε από τον Lewin(1946).

Βασικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης ερευνητικής προσέγγισης αποτελεί η έννοια του αναστοχασμού. Συγκεκριμένα, στο πλαίσιό της αναμένεται από τον εκπαιδευτικό να σκέφτεται προσεκτικά τα επόμενα βήματα της εργασίας του σε συνεργασία με τον ερευνητή και με βάση τα δεδομένα τα οποία συνέλεξε από την τάξη του. Σε ό,τι αφορά στον ερευνητή, αυτός καλείται να αναδεικνύει κατά τη συνεργασία του με τον εκπαιδευτικό τα χαρακτηριστικά που θεωρεί σημαντικά και να παρεμβαίνει, όταν το κρίνει αναγκαία, καθορίζοντας ένα καινούργιο σχέδιο εργασίας.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι στην έρευνα δράση ο εκπαιδευτικός καλείται να αναλάβει ταυτόχρονα και το ρόλο του ερευνητή, γεγονός που καθορίζει τα ερωτήματα που επιλέγει να μελετήσει. Συγκεκριμένα, η οπτική που υιοθετεί ένας εκπαιδευτικός στη διδασκαλία των μαθηματικών διαφέρει από αυτήν ενός ερευνητή, ο οποίος δεν είναι εκπαιδευτικός, καθώς ο πρώτος βιώνει την καθημερινότητα της τάξης και μπορεί να αναγνωρίζει και να κατανοεί ποικίλα προβλήματα και προβληματικές που γεννιούνται (καθημερινά και απρόβλεπτα πολλές φορές) μέσα σε αυτήν. Έτσι, οι υποθέσεις που μπορεί να διατυπώσει είναι συχνά διαφορετικού χαρακτήρα από αυτές ενός παρατηρητή-ερευνητή. Είναι αυτός που γνωρίζει καλύτερα και μπορεί να αιτιολογήσει το γιατί κάποιων αποφάσεων που πήρε κατά τη διάρκεια εξέλιξης του μαθήματος.



Σχήμα 2.1. Κύκλος ενεργειών της έρευνας δράσης.

Τέτοιου είδους έρευνες, πέρα από το προσωπικό όφελος που μπορεί να έχουν για τον δάσκαλο-ερευνητή, είναι δυνατό να συνεισφέρουν στη «γνώση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας της εκπαιδευτικής κοινότητας των μαθηματικών»(Γαγάτσης, 1985). Φυσικά, κάτι τέτοιο δεν υποβαθμίζει ή θέτει στο περιθώριο τους άλλους ερευνητές και τα συμπεράσματα των ερευνών τους, αλλά αποτελεί μια προσπάθεια απάντησης σε συγκεκριμένα ερωτηματικά του εκπαιδευτικού. Μια ιδανική κατάσταση θα ήταν αυτή όπου εκπαιδευτικός και ερευνητής (ή ερευνητές) συνεργάζονται και ανταλλάσσουν σκέψεις και απόψεις, χρησιμοποιώντας ο καθένας τις γνώσεις και την εμπειρία του επί συγκεκριμένων θεμάτων, ξεκινώντας από το σχεδιασμό της έρευνας μέχρι την ολοκλήρωσή της, όπως συμβαίνει στην παρούσα εργασία. Η συνεργασία αυτή θεωρείται κρίσιμη, καθόσον πολλές φορές είναι δύσκολο για τον εκπαιδευτικό να εντοπίσει, να περιγράψει και να ερμηνεύσει ο ίδιος με πληρότητα τις διδακτικές του ενέργειες. Χρειάζεται λοιπόν ο ερευνητής να προκαλέσει, μέσα από κατάλληλες υποδείξεις, την εναλλακτική ανάγνωση των πρακτικών και αντιλήψεών του και κατ' επέκταση την αλλαγή τους. Είναι αυτός που αξιοποιώντας τις ειδικές του γνώσεις μπορεί να δρομολογήσει τρόπους επίλυσης ενός προβλήματος, αναγνωρίζοντας τους αιτιακούς παράγοντές του και προτείνοντας εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης. Είναι, λοιπόν, φανερό ότι το εύρος και οι δυνατότητες της μεθόδου της έρευνας δράσης την καθιστούν ιδιαίτερα ελκυστική για τη διερεύνηση εκπαιδευτικών θεμάτων, τα οποία σχετίζονται με την κατανόηση και την εξέλιξη της εκπαιδευτικής πράξης.

2.3 Μεθοδολογία της παρούσας μελέτης

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, το Ερευνητικό Πρόβλημα που απασχολεί την παρούσα έρευνα δράση εστιάζεται στις επιλογές και τα διλήμματα εκπαιδευτικής φύσης που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός τόσο κατά το σχεδιασμό, όσο και κατά την υλοποίηση των διδακτικών πρακτικών, καθώς και στους τρόπους με τους οποίους μπορεί η αντιμετώπισή τους να γίνει όσο το δυνατό πιο αποτελεσματική για τη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Συγκεκριμένα, τα Ερευνητικά Ερωτήματα τα οποία εξετάζονται έχουν ως εξής:

Με αναφορά στα διδακτικά διλήμματα:

- Ποιο είναι το περιεχόμενο των διλημμάτων που προκύπτουν κατά το σχεδιασμό και, κυρίως, κατά την υλοποίηση της διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών; Ειδικότερα, ποια είναι η σχέση τους με τη φύση, αλλά και τη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης στο πλαίσιο της διδασκαλίας;
- Πώς επηρεάζουν αυτά τα διλήμματα το διδακτικό έργο; Δηλαδή, πως επιδρούν στη μάθηση των μαθητών και στο είδος της μαθηματικής γνώσης που συγκροτείται από αυτούς ;

Με αναφορά στη συνεργασία του εκπαιδευτικού με τους ερευνητές:

- Ποια είναι το περιεχόμενο και η μορφή αυτής της συνεργασίας;
- Πως αυτή η συνεργασία επηρεάζει τον τρόπο ανάγνωσης των διδακτικών του πρακτικών από τον εκπαιδευτικό, αλλά και τη διαχείρισή τους στην τάξη;

Η έρευνα έγινε σε ένα τμήμα της Α΄ γυμνασίου και σε ένα τμήμα της Β΄ γυμνασίου κατά το σχολικό έτος 2004-2005. Σε κάθε τμήμα δίδασκα μαθηματικά από το Σεπτέμβριο (στο εξής, ο εκπαιδευτικός θα αναφέρεται στο πρώτο πρόσωπο). Έτσι, όταν ξεκίνησε η μαγνητοφώνηση των μαθημάτων υπήρχε η σχετική οικειότητα με τους μαθητές και, κατά συνέπεια, ήμουν σε θέση να τους εξηγήσω γιατί γίνεται αυτό σε ορισμένα από τα μαθήματά μας. Συγκεκριμένα, τους εξήγησα ότι πρόκειται για μια εργασία δική μου, χωρίς να δώσω ιδιαίτερες διευκρινίσεις, ώστε να μην υπάρξουν αλλαγές στη συμπεριφορά τους και τους τόνισα ότι δεν συνδέεται με κανέναν τρόπο με την αξιολόγησή τους. Προέτρεψα τους μαθητές μου να φέρονται φυσιολογικά κάθε φορά που κάποιο μάθημα ηχογραφούνταν. Σε κάποια μαθήματα χρησιμοποίησα φύλλα εργασίας, ενώ σε δύο μαθήματα η διδασκαλία έγινε στην αίθουσα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Geometer's Sketchpad. Η κατασκευή των φύλλων εργασίας, από την αρχική ιδέα μέχρι την τελική τους διαμόρφωση, ακολούθησε τη διαδικασία του κύκλου της έρευνας δράσης. Συγκεκριμένα, το πρωτόλειο υλικό συζητήθηκε με τους ερευνητές και, κατόπιν διαδοχικών τροποποιήσεων, πήρε την μορφή που το επεξεργάστηκα στην τάξη (βλέπε Παράρτημα , για ένα παράδειγμα).

Σε καθένα από τα τμήματα που συμμετείχαν στην έρευνα υπήρχαν 25 μαθητές διαφόρων δυνατοτήτων και ενδιαφερόντων. Περιγράφοντας, γενικά, τη στάση και την επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά στα δύο τμήματα, θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι είναι ένα μάθημα, στο οποίο οι μαθητές δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα, καθόσον θεωρούν ότι είναι ένα από τα πλέον βασικά τους. Έτσι, καταβάλλουν ιδιαίτερες προσπάθειες κατανόησής του, προκειμένου να μπορούν να είναι σε θέση να διαπραγματευθούν με επιτυχία τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες. Και τα δύο τμήματα φάνηκαν ιδιαίτερα πρόθυμα να συνεργαστούν και δεν επηρεάστηκαν καθόλου από το γεγονός ότι το μάθημα μαγνητοφωνούνταν.

Φρόντισα ώστε οι συγκεκριμένες διδασκαλίες να καλύψουν όλη τη διδακτική περίοδο των 40 ή 45 λεπτών, να μην διατεθεί, δηλαδή, καθόλου χρόνος για εξέταση. Οι μαθητές, φυσικά, δεν ενημερώνονταν εκ των προτέρων για το πότε θα ηχογραφούνταν το μάθημα και ούτε υπήρχε κάποια κανονικότητα στη σχετική διαδικασία. Οι διδακτικές ενότητες επιλέχθηκαν με βάση κάποιο χρονοδιάγραμμα και όχι λόγω περιεχομένου. Συνολικά, ηχογραφήθηκαν 6 μαθήματα, τρία σε κάθε τάξη σε μια χρονική περίοδο 4 μηνών (Οκτώβριος 2004 - Ιανουάριος 2005). Τα μαθήματα που ηχογραφήθηκαν, καθένα από τα οποία κάλυπτε μια διδακτική ενότητα του αναλυτικού προγράμματος είχαν ως εξής:

- Α΄ Γυμνασίου
  - Ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο των φυσικών
  - Η επιμεριστική ιδιότητα
  - Η ευκλείδεια διαίρεση

- Β΄ Γυμνασίου:
  - Δύναμη ρητού με εκθέτη ακέραιο
  - Ορισμός και ιδιότητες ημιτόνου και συνημιτόνου οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου (Δύο μαθήματα στην αίθουσα Η/Υ)

Ο σχολιασμός των μαθημάτων έγινε γραμμή-γραμμή αρχικά από εμένα και, στη συνέχεια, από τον κάθε ερευνητή ξεχωριστά. Αφού οι παρατηρήσεις και των τριών συγκεντρωνόταν σε ένα απομαγνητοφωνημένο κείμενο μαθήματος, απαντούσα στα σχόλια των ερευνητών. Ακολουθούσε αναστοχαστικός κύκλος ερωτήσεων και ο σχεδιασμός του επόμενου μαθήματος. Στο σημείο αυτό υπήρχε πάλι η παρέμβαση των ερευνητών, με τους οποίους αντάλλασσα και συζητούσα το αντίστοιχο φύλλο

ενός είδους ημερολογίου που διατηρούσα σε όλη τη διάρκεια της έρευνας, όπου καταγράφονταν οι σκέψεις μου πριν και μετά το μάθημα και συγκεκριμένα:

Πριν τη διδασκαλία:

- Οι μαθησιακοί στόχοι της ενότητας που επρόκειτο να διδαχθεί
- Οι παρεμβάσεις μου επί του σχολικού βιβλίου, καθώς και η επιλογή δραστηριοτήτων, που είχαν ως αφετηρία τη διδακτική μου εμπειρία, τη σχετική βιβλιογραφία και τις προσωπικές μου εκτιμήσεις για τους μαθητές του εκάστοτε τμήματος
- Ο τρόπος εμπλοκής των μαθητών

Μετά τη διδασκαλία:

- Οι αποκλίσεις από το αρχικό σχέδιο μαθήματος και οι λόγοι δημιουργίας τους
- Τα διλήμματα της διδακτικής πράξης και ο τρόπος αντιμετώπισής τους
- Οι λόγοι με βάση τους οποίους κρινόταν η αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας
- Τα ανοικτά ερωτήματα μάθησης και διδασκαλίας που αναδεικνύονταν και οι τρόποι αντιμετώπισής τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Ανάλυση και Παρουσίαση των δεδομένων

3.1. Εισαγωγή

Καθώς οι μαθητές εμπλέκονται στη διαδικασία του μαθήματος, ο εκπαιδευτικός έρχεται αντιμέτωπος με μια σειρά από διλήμματα, που άπτονται των αποφάσεων που λαμβάνει σχετικά με τη διδασκαλία και καθορίζουν την πορεία του μαθήματος, και κατά συνέπεια, τα μαθηματικά νοήματα που διαμορφώνει ο μαθητής. Πολλά από αυτά τα διλήμματα προκύπτουν, όταν ο δάσκαλος εντοπίζει διαφορές μεταξύ του σχεδιασμού του μαθήματος και της πραγματικότητας στην τάξη, ενώ άλλα αναδύονται μέσα από την αλληλεπίδραση που ενεργοποιείται κατά τη διάρκεια του μαθήματος, δηλαδή αφορούν σε ανάγκες τοπικού χαρακτήρα. Το είδος αυτών των διλημμάτων ποικίλλει. Μερικά από αυτά, όπως, για παράδειγμα, για το αν θα πρέπει να απαντηθεί από τον ίδιο μία ερώτηση που τέθηκε από κάποιο μαθητή ή όχι , πώς να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να εργαστούν αποτελεσματικά πάνω σε μια ερώτηση, ποιες είναι οι κατάλληλες ιδέες που θα παρουσιαστούν προκειμένου να κατανοηθεί μια μαθηματική έννοια ή διαδικασία και, φυσικά, το βασανιστικό δίλημμα του χρόνου, έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία (Carter and Richards 1991, Ackermann 1995). Βέβαια, στην πραγματικότητα της τάξης υφίστανται και κάποια άλλα, όπως για παράδειγμα το πώς ο δάσκαλος θα αποδεχθεί ή θα απορρίψει μία απάντηση, ποιον μαθητή θα επιλέξει να απαντήσει σε μία ερώτηση, πως θα πρέπει να αξιολογήσει τοποθετήσεις ή ερωτήσεις μαθητών που αφορούν σε προεκτάσεις της διδασκαλίας και του σχεδιασμού που έχει επιλέξει. Σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας υφίστανται διλήμματα, τα οποία συνδέονται με το φόβο μη επίτευξης των διδακτικών στόχων, τα οποία συχνά επιλύονται με στενή καθοδήγηση, επιλογή του καλού μαθητή και διατύπωση, τελικά, της απάντησης από το διδάσκοντα. Όλα τα παραπάνω συνθέτουν ένα πολύπλοκο διδακτικό περιβάλλον, πλευρές του οποίου επιχειρείται να περιγραφούν, μέσα από την ανάλυση των δεδομένων της συγκεκριμένης μελέτης.

Η ανάλυση των διλημμάτων αναπτύχθηκε σε τέσσερις κατευθύνσεις:

- Το περιεχόμενό τους (π.χ., επιστημολογικά, επικοινωνιακά)
- Τον τρόπο έκφρασής τους (π.χ., με ερώτηση, με απάντηση)
- Τις συνθήκες ανάδειξής τους (π.χ., στο πλαίσιο παρέμβασης μαθητή, μιας λανθασμένης ή ελλιπούς απάντησης, κτλ)

- Τον τρόπο, με τον οποίο έγινε η διαχείρισή τους από τον εκπαιδευτικό

Η ένταξη κάθε διδακτικού επεισοδίου σε κάποια συγκεκριμένη κατηγορία και, ειδικότερα, ο σχολιασμός του περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

- Σε ποια χρονική στιγμή της διδασκαλίας προέκυψε (εισαγωγή, εξέλιξη και επίλογο του μαθήματος)
- Το περιεχόμενο του κάθε μαθήματος και η αντίστοιχη τάξη
- Το δίλημμα σε σχέση με το περιεχόμενό του
- Το επεισόδιο που αναπτύχθηκε στην τάξη
- Η διαχείρισή του από τον διδάσκοντα
- Το αποτέλεσμα της διαχείρισης του διλήμματος από τον εκπαιδευτικό.

3.2. Διλήμματα επιστημολογικού περιεχομένου

Εντοπίζονται, συνήθως, όταν οι απαντήσεις είναι ασαφείς με αναφορά στη φύση της μαθηματικής γνώσης. Κάποια από τα θέματα αυτά είναι δυνατό να τεθούν και από τους μαθητές, μέσω κάποιων ερωτήσεων ή προβληματισμών που τους αναπτύσσονται κατά την εξέλιξη του μαθήματος. Μπορεί να είναι θέματα που αφορούν στη φιλοσοφία των μαθηματικών, στη φύση τους, στους ορισμούς, στην εγκυρότητα της μαθηματικής αλήθειας - γνώσης, όπως αυτό της μαθηματικής απόδειξης, στις έννοιες, στις ιδιότητες και στις σχέσεις τους με άλλες μαθηματικές οντότητες, κ.ά. Άπτονται, δηλαδή, στα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι ότι εμφανίζονται σε κάθε στιγμή της διδασκαλίας μπορούν, όμως, να αντιμετωπιστούν με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τη χρονική στιγμή της εμφάνισής τους και τη θέση που κατέχουν στην πορεία του μαθήματος. Για παράδειγμα, μπορεί να δεχθούμε ένα τμήμα του ορισμού που θα διατυπωθεί, προκειμένου να γίνει αφετηρία στο ξεκίνημα του μαθήματος, ενώ να απαιτήσουμε ακρίβεια στον ορισμό, όταν αυτός είναι προαπαιτούμενη έννοια ή αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους του μαθήματος.

Το απόσπασμα που ακολουθεί αφορά στην εισαγωγή του μαθήματος της επιμεριστικής ιδιότητας. Οι μαθητές, ξεκινώντας από την ετυμολογία της λέξης ‘επιμερίζω’, προσπαθούν να δώσουν την μαθηματική της ερμηνεία. Το δίλημμα που εμφανίζεται εδώ αφορά στη διάκριση μεταξύ ορισμού και ιδιότητας και,

συγκεκριμένα, αν θα πρέπει η διάκριση αυτή να διατυπωθεί τη δεδομένη χρονική στιγμή, κάτι το οποίο ξεφεύγει των διδακτικών στόχων της ενότητας

Ε: Επιμεριστική ιδιότητα τι είναι ; Ας ξεκινήσουμε από το τι σημαίνει επιμερίζω στη νοελληνική γλώσσα. Ναι;
Τάνια: Ότι μπορούμε να ξεχωρίσουμε κάποια .....
Την διακόπτω: Επιμερίζω δε σημαίνει ξεχωρίζω
Ακούγεται κάποιος μαθητής: Κάτι με τα μέρη.
Ε: Ναι, δηλαδή τι κάνει; Γιάννη;
Γιάννης: Πρέπει να δώσουμε πρώτα τον ορισμό της ιδιότητας
Ε: Είναι ιδιότητα αυτή… δεν έχει ορισμό. Θα τη δούμε ως ιδιότητα. Ματθαίε;
Ματθαίος: Μήπως σημαίνει ότι κάτι μοιράζω;

(Μάθημα 3ο, σελίδα 2)

Παρά τις συζητήσεις και αναφορές που έχουν γίνει σε προηγούμενα μαθήματα –σχεδόν από τις αρχές των μαθημάτων σε αυτή την τάξη -, προκειμένου να αποσαφηνιστούν οι έννοιες αυτές και ρόλος τους στα μαθηματικά, ο μαθητής με την παρέμβασή του καταδεικνύει το ακριβώς αντίθετο. Η αντιμετώπιση του διλήμματος γίνεται με έναν όχι και τόσο αποτελεσματικό τρόπο, καθώς η διαφορά δηλώνεται και δεν γίνεται αντικείμενο διαλόγου. Η απόφασή μου αυτή έχει ως αφετηρία τους στόχους του μαθήματος, καθώς οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την επιμεριστική μέσα στη συγκεκριμένη διδακτική περίοδο.

Το παρακάτω απόσπασμα είναι από την εισαγωγή ενός μαθήματος της Β΄ γυμνασίου, το οποίο έχει ως στόχο να συγκεντρώσει σε ένα ορισμό τη δύναμη με βάση ρητό και εκθέτη ακέραιο. Από το μαθητή ζητείται να διατυπώσει ό,τι γνωρίζει σχετικά. Το δίλημμα εντοπίζεται, όταν ο μαθητής, αντί του ορισμού, αναφέρεται στην χρηστικότητα της δύναμης, παρά τη σαφήνεια διατύπωσης της ερώτησης.

Ε: Θα ήθελα κάποιος από εσάς να μου δώσει συγκεντρωμένο τον ορισμό
Στέλιος: Α!! τον ορισμό; (Δείχνει έκπληκτος) Δύναμη.....
Ε: Προσέξτε!!! Δε θέλω το λεκτικό ορισμό, αλλά τον αλγεβρικό, δηλαδή τις σχέσεις. Δηλαδή…
Στέλιος: Τον χρησιμοποιούμε, για να μην έχουμε μεγάλους αριθμούς
Ε: Δε μιλήσαμε Στέλιο για τη χρηστικότητα . Δηλαδή, αν σε ρωτήσει κάποιος τι είναι δύναμη , δώσε τον ορισμό της δύναμης, τι θα του πεις εσύ; Τον χρησιμοποιούμε για να μην έχουμε πολύ μεγάλους αριθμούς. Μπορεί αυτό να είναι σωστό, αλλά δεν είναι ο ορισμός.
Στέλιος: Είναι ένας αριθμός…εεε…ποουυουυ….
Ε: Για να δω. (Απευθύνομαι στην τάξη) Θεοδώρα
Θεοδώρα:. Άλφα εις την ν ....

(Μάθημα 1ο, σελίδα 1)

Επανέρχομαι στο μαθητή, μετά από τις σχετικές διευκρινήσεις, που θεωρώ ότι πρέπει να είναι ακριβώς τόσες ώστε με την παρέμβασή μου να μην καθοδηγήσω την σκέψη του, αλλά αυτός αδυνατεί να απαντήσει. Το στοιχείο που αναδεικνύεται και εδώ είναι το θέμα του ορισμού και της θέσης που κατέχει στα μαθηματικά.

Στη συνέχεια του μαθήματος ακολουθεί η παρακάτω στιχομυθία. Το δίλημμα που εμφανίζεται εδώ αφορά στη διάκριση του ορισμού από τις ιδιότητες που έχει η εν λόγω μαθηματική έννοια.

Ε: Πως θα συνεχίσεις;;;
Ελένη: Δεν ξέρω
Πολλοί από την τάξη ακούγονται «Κύριε, κύριε»
Ε: Κων/νε
Μ: Ίσως ..θα γράψουμε τις ιδιότητες της δύναμης
Ε: Όχι Τι;;; Τι θα γράψεις;;;;
Ελένη: Τις ιδιότητες
Ε: Οι ιδιότητες είναι ορισμός Κων/νε;
Κων/νος: Όχι
Ε:. Άλλο ο ορισμός, άλλο οι ιδιότητες

(Μάθημα 1ο, σελίδα 2)

Ατυχής χειρισμός του διλήμματος, αφού, παρά τις δυσκολίες που εντοπίζω στην ορθή ερμηνεία του ορισμού, δεν εξηγώ τη διαφορά ορισμού και ιδιότητας, αλλά διατυπώνω μία θέση. Η ενέργειά μου αυτή απορρέει από το γεγονός ότι κάτι τέτοιο ξεφεύγει των διδακτικών στόχων του μαθήματος, όπως, επίσης, μπορεί να με αναγκάσει να δαπανήσω πολύτιμο διδακτικό χρόνο.

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στην εξέλιξη μαθήματος της επιμεριστικής ιδιότητας στην Α΄ γυμνασίου, η οποία παρουσιάζεται με τη βοήθεια της εύρεσης της περιμέτρου ενός ορθογωνίου. Στόχος της δραστηριότητας ήταν ο υπολογισμός της περιμέτρου με δύο τρόπους, μέσω των οποίων θα προκύψει η ισότητα που εκφράζει την επιμεριστική ιδιότητα. Από την μαθητή έχει ζητηθεί ο ορισμός της περιμέτρου ενός γεωμετρικού σχήματος, προκειμένου η τάξη να αρχίσει να εργάζεται. Κυρίαρχο ρόλο κατέχει η ακριβής διατύπωση του ορισμού της περιμέτρου ως αθροίσματος των μηκών των πλευρών ενός πολυγώνου, προκειμένου να συνδεθεί με το στόχο της δραστηριότητας. Το δίλημμα εμφανίζεται όταν, παρά την επιλογή ενός καλού μαθητή, η περίμετρος δεν δίνεται αυστηρά με μαθηματικό τρόπο, αλλά κάπως εκλαϊκευμένα.

Ε: 2 επί 3 είναι η περίμετρός του; Το εμβαδόν του είναι. Θυμάται κάποιος να μου πει τι είναι περίμετρος; Στέλιο
Στέλιος: Είναι το γύρω- γύρω.
Ε: Τι θα πει το 'γύρω- γύρω'; Ναι;
Γιάννης: Το μήκος και το πλάτος της επιφάνειάς του.
Πολλοί μαθητές: Όχι, όχι
Ε: Της επιφάνειας; Τα έχουμε λίγο μπερδεμένα στο μυαλό μας. Αφροδίτη;
Αφροδίτη: Το άθροισμα των πλευρών του.
Ε: Πολύ ωραία. Περίμετρος, λοιπόν, είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.

(Μάθημα 3ο, σελίδα 2)

Το δίλημμα επιλύθηκε με την επιλογή άλλου καλού μαθητή, αφού η έννοια της περιμέτρου ήταν προαπαιτούμενη και όχι μέσα στους βασικούς στόχους του μαθήματος. Ο ορθός ορισμός της περιμέτρου οδήγησε την τάξη στην εύρεση της επιμεριστικής ισότητας, όπως φαίνεται και από την εξέλιξη του μαθήματος.

Ε: Για να πάμε, λοιπόν, να δούμε κάτι. Πως θα πάμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των πλευρών του; Τι μπορούμε να πούμε; Ότι είναι 2+2+3+3. Ένας άλλος συμμαθητής της, ας πούμε η Αφροδίτη, έχει μία άλλη ιδέα. Αφροδίτη μπορείς να της πεις μία άλλη ιδέα;
Αφροδίτη: Αυτό μπορούμε να κάνουμε 2.2+2.3
Ε. Λοιπόν, μια άλλη ιδέα, την οποία έχουμε, λέει η Αφροδίτη, γιατί να προσθέσω το 2 δύο φορές. Έχω μία επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, άρα στην ουσία έχω τι; Έναν πολλαπλασιασμό. Ωραία. Οπότε το αποτέλεσμα είναι 6+4=10. Κάποια άλλη ιδέα Φίλιππε;
Φίλιππος:2 επί σε παρένθεση 2+3
Ε: Ακριβώς . Μία άλλη σκέψη, η οποία στηρίζεται πάλι εδώ (δείχνω το σχήμα), οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου τι είναι αναμεταξύ τους; Ίσες, να βρω πόσο κάνει το άθροισμα μόνο των δύο πλευρών και μετά αυτό τι να το κάνω ;
Κάποιοι μαθητές: Επί δύο
Ε: Άρα, λοιπόν, αυτό είναι σαν να πάρω να προσθέσω το 2 με το 3 και μετά αυτό τι να το κάνω; Να το διπλασιάσω. Όλα αυτά τα αποτελέσματα που έχουμε δει, δε δίνουν την περίμετρο του ίδιου ορθογωνίου;
Κάποιοι μαθητές : Ναι
Ε: Για να πάρουμε, λοιπόν, αυτές τις δύο παραστάσεις μόνες τους, τι έχουμε; Στο πρώτο μέλος έχουμε αυτό (2.3+2.2) και στο δεύτερο μέλος τι θα έχουμε; ……2(3+2).

(Μάθημα 3ο, σελίδα 3)

Ένα άλλο χαρακτηριστικό δίλημμα, που εντοπίζεται στο παραπάνω απόσπασμα, είναι αυτό της μη επίτευξης των διδακτικών στόχων του μαθήματος, το οποίο εκφράζεται με τη στενή καθοδήγηση των μαθητών, ώστε τελικά να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Το παρακάτω απόσπασμα είναι από την έναρξη του μαθήματος στην Ευκλείδεια διαίρεση στην Α΄ γυμνασίου, όπου επιχειρώ να συνδέσω τις έννοιες πολλαπλάσιο και τέλεια διαίρεση. Το δίλημμα που εμφανίζεται εδώ αφορά στην αποδοχή της απάντησης αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο αυτή διατυπώθηκε από το μαθητή. Άπτεται, δηλαδή, της ακρίβειας και σαφήνειας που θα πρέπει να χαρακτηρίζει μία ολοκληρωμένη απάντηση στα μαθηματικά, ειδικά όταν αυτή παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην εξέλιξη του μαθήματος.

Καλλίνα: Το 27 είναι πολλαπλάσιο του 3
Ε:. Πολύ ωραία, το 27 είναι πολλαπλάσιο του 3 . Γιατί;
Καλλίνα: Γιατί άμα το διαιρέσουμε με το 3 είναι τέλεια
Ε: Πάρα πολύ ωραία, γιατί η διαίρεση του 27:3 τι είναι;
Μαζί με κάποιους μαθητές; Τέλεια. Πάρα πολύ ωραία
(Μάθημα 4ο, σελίδα 1)

Θεωρώ ότι η απάντηση «…είναι τέλεια» δεν είναι σαφής χωρίς τη λέξη «διαίρεση» να προηγείται, ώστε να προκύψει «…η διαίρεση είναι τέλεια». Φυσικά, αναγνωρίζοντας την ορθότητα της απάντησης, απλώς παρεμβαίνω, συμπληρώνοντας τη λέξη που λείπει.

Το δίλημμα της αποδοχής του τρόπου, με τον οποίο διατυπώνεται μια μαθηματική απόδειξη από κάποιον μαθητή, είναι κυρίαρχο στη διδασκαλία, όπου οι μαθητές συμμετέχουν ενεργά, καθώς τους ζητείται να τοποθετηθούν στα δρώμενα της τάξης. Το παρακάτω απόσπασμα είναι από την εισαγωγή μαθήματος στην Ευκλείδεια διαίρεση σε τμήμα της Α΄ γυμνασίου. Από τους μαθητές, μετά τη συζήτηση για τα πολλαπλάσια και τους διαιρέτες, ζητείται να ερμηνεύσουν την έννοια της ατελούς διαίρεσης. Το δίλημμα εντοπίζεται με απαντήσεις των μαθητών και, συγκεκριμένα, στο «..περισσεύει» και το «…χωρίσουμε..», τα οποία παραπέμπουν άμεσα στη διαίρεση, χωρίς να συνδέονται με την έννοια 'πολλαπλάσιο', που είναι και ένας από τους βασικούς διδακτικούς στόχους του μαθήματος.

Τάνια:. Άμα τα διαιρέσουμε υπάρχει ένας αριθμός που περισσεύει.
Ε: Ωραία. Μα αυτό, αυτό είναι και το αντικείμενο της σημερινής μας συζήτησης, άρα δεν είναι η δικαιολογία αυτή. Γιάννη;
Γιάννης: Δεν μπορούμε να τον χωρίσουμε, ας πούμε, σε x ομάδες των 4 ακέραιων μονάδων.

Ε: Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός έτσι ώστε 4.χ να μας κάνει πόσο; 26 ή πολύ ωραία, ο Γιάννης τοποθετήθηκε και είπε δεν μπορώ να τον χωρίσω σε χ ομάδες των 4!
Γιάννης: Στο σύνολο των φυσικών
Ε: Πάντα μιλάμε για το σύνολο των φυσικών

(Μάθημα 4ο, σελίδα 5)

Η πρώτη απάντηση που διατυπώνει η μαθήτρια δεν γίνεται αποδεκτή, καθώς περιέχει έννοιες που ανήκουν στους άμεσους στόχους του μαθήματος, συνεπώς δεν έχουν νόημα μέχρι εκείνη τη στιγμή. Με την παρέμβασή μου συνδέω την απάντηση του δεύτερου μαθητή με τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος.

Η απόδειξη και ο σπουδαίος της ρόλος στα μαθηματικά φάνηκε να αποτελεί συχνά πηγή πολλών διλημμάτων. Συγκεκριμένα, αρκετοί μαθητές θεωρούν ότι η επαλήθευση, η επικύρωση μερικών περιπτώσεων μίας εικασίας με κάποιο λογισμικό είναι αποδείξεις, ενώ συχνό είναι το φαινόμενο της de facto αναγνώρισης και ερμηνείας προτάσεων.

Το παρακάτω επεισόδιο αφορά σε μάθημα τριγωνομετρίας στη Β΄ γυμνασίου. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, το δίλημμα της αποδοχής της απόδειξης λύνεται με την παρέμβαση ενός μαθητή. Συγκεκριμένα, μία μαθήτρια επιχειρεί να αιτιολογήσει γιατί το ημίτονο οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι μικρότερο του 1. Δίλημμα εντοπίζεται όταν η εξαιρετική απάντηση που δίνει δεν γίνεται αποδεκτή, καθόσον δεν συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ως λόγους των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να υποβαθμίζονται σε συγκεκριμένες και όχι αφηρημένες έννοιες, που αποτελεί και έναν από τους βασικούς στόχους του μαθήματος.

Ε: Ωραία, το βρήκαμε το ημίτονο, θέλουμε να είναι μικρότερο από το 1 πάντα, αλλά γιατί;
Ζωή: Η απέναντι κάθετη δε μπορεί να χωράει παραπάνω φορές από μία.
Ε: Καλό, πες τα, όμως, πιο γρήγορα.
Ζωή: Γιατί η απέναντι κάθετη είναι μικρότερη από την υποτείνουσα.
Ε: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο Γιάννη, το είχαμε δει στο Πυθαγόρειο πάλι στα πολυμέσα, ποια πλευρά είναι η μεγαλύτερη;
Γιάννης. Η υποτείνουσα
Ε: Άρα, τι λέει η Ζωή, Ζωή για επανάλαβε λίγο.
Ζωή: Δεν μπορεί να είναι πάντα μεγαλύτερο του 1, γιατί η απέναντι κάθετη δεν είναι μεγαλύτερη της υποτείνουσας.
Ε: Το καταγράφουμε αυτό.

(Μάθημα 6ο, σελίδα 5)

Το επεισόδιο κλείνει με την ίδια μαθήτρια να επαναδιατυπώνει την αιτιολόγησή της, μετά τη παρέμβαση του μαθητή, που σκοπό είχε, εκτός των προαναφερθέντων, να θυμίσει σε όλους τη σχέση μεταξύ των πλευρών σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Στην εξέλιξη του παραπάνω μαθήματος δύο μαθητές προσπαθούν να αιτιολογήσουν γιατί η εφαπτομένη μίας οξείας γωνίας σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1, σε αντίθεση με το ημίτονο και συνημίτονό της. Το μάθημα γίνεται στην αίθουσα πολυμέσων, όπου οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να παρακολουθήσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο, στο οποίο μεταβάλλονται τα μήκη των κάθετων πλευρών του. Το δίλημμα που εμφανίζεται αφορά στην απόδειξη με τη βοήθεια μόνο της αναπαράστασης.

> *Ε: Δηλαδή, είδαμε ότι το ημίτονο και το συνημίτονο δεν μπορούν να ξεπεράσουν το 1, η εφαπτομένη μπορεί να ξεπεράσει το 1;*
> *Ελένη: Ναι, μπορεί.*
> *Ε: Γιατί;*
> *Ελένη: Γιατί είναι από την άλλη μεριά του τριγώνου*
> *Ε: Δηλαδή;*
> *Ελένη: Είναι πιο μεγάλη.*
> *Ε: Δε μου λέει κάτι αυτό.*
> *Ελένη: Επειδή η εφαπτομένη είναι η υποτείνουσα και είναι πιο μεγάλη και η γωνία που σχηματίζει μπορεί να ξεπεράσει.*
>
> *(Μάθημα 6ο , σελίδα 6)*

Στο σημείο αυτό αναγνωρίζω ότι η μαθήτρια δεν μπορεί να αρθρώσει σωστό λόγο, προκειμένου να αιτιολογήσει, ενώ ξέρει περίπου ποια είναι η σωστή αιτιολόγηση. Προσπαθώ να τη βοηθήσω, κάνοντας κάποιες μετρήσεις που αφορούν στον ορισμό της εφαπτομένης.

> *Ε: Θέλετε να το δούμε και εδώ (εννοώ στον υπολογιστή). Για να το δούμε λιγάκι εδώ. Η εφαπτομένη πως ορίζεται Ελένη;*
> *Ελένη: Η εφαπτομένη είναι οι προσκείμενες στις κάθετες*
> *Ε : Οι προσκείμενες στις δύο κάθετες;*
> *Ελένη: Η απέναντι από τη γωνία*
> *Ε: Ναι, προς…*
> *Ελένη: Την άλλη κάθετη.*
> *Ε: Προς την προσκείμενη*
> *Κων/νος : Ο λόγος των δύο κάθετων.*
>
> *(Μάθημα 6ο , σελίδα 6)*

Αποδέχομαι ένα μέρος του ορισμού της εφαπτομένης, καθώς αυτός δεν έχει διατυπωθεί σωστά από τη μαθήτρια και, επιπλέον, έχουμε δαπανήσει πολύ χρόνο και η διδακτική περίοδος οδεύει στο τέλος της. Κάποιος μαθητής, όμως, με την

παρέμβασή του τακτοποιεί τον ορισμό. Εφόσον έχουμε το σωστό ορισμό της εφαπτομένης με του βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή, παίρνουμε κάποιες μετρήσεις.

Ε: Κοίταξε Ελένη, η πρώτη εφαπτομένη που πήραμε να μετρήσουμε κοιτάξτε παιδιά.
Ελένη: Είναι παραπάνω.
Ε: Η πρώτη εφαπτομένη της γωνίας ω που είναι η ΓΒ προς την ΑΒ μας βγήκε 1,3. Για να δούμε λοιπόν . Κοιτάξτε τώρα να δείτε τι γίνεται. 32,45 και, βέβαια, καθώς η γωνία μικραίνει παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη τι κάνει;
Κάποιοι μαθητές: Μικραίνει.
Ε: Ελένη όπως βλέπεις..

(Μάθημα 6ο , σελίδα 7)

Το παραπάνω απόσπασμα είναι κρίσιμο για την απόδειξη, καθώς δεν εμμένω μόνο στις μετρήσεις που φαίνονται στην οθόνη, αλλά αναφέρω και τον ορισμό της εφαπτομένης, ώστε να βοηθήσω τη μαθήτρια να κάνει τις κατάλληλες συνδέσεις. Όπως, όμως, φαίνεται από το παρακάτω απόσπασμα, η Ελένη είναι προσκολλημένη σε αυτό που βλέπει, οπότε στρέφομαι σε άλλο μαθητή.

Ελένη: Μπορεί να πάει στο άπειρο.
Ε: Γιατί όμως κορίτσι μου συμβαίνει αυτό;
Ελένη: Γιατί μπορεί να μεγαλώσει.
Ε: Τι να μεγαλώσει;
Ελένη: Καθώς κατεβαίνε, η γωνία μπορεί να μεγαλώσει.
Ε: Δε μου λέει κάτι βρε Ελένη αυτό. Σπύρο;

(Μάθημα 6ο , σελίδα 7)

Όπως η Ελένη, έτσι και ο Σπύρος αρχικά αιτιολογεί με βάση αυτό που βλέπει. Η παρέμβασή μου, όμως, που στοχεύει στο να τους αποσπάσει την προσοχή από την οθόνη, βοηθά το Σπύρο να προχωρήσει σε μια πιο θεωρητική απόδειξη.

Σπύρος: Επειδή σε κάποια φάση η μία κάθετη γίνεται σημείο
Ε: Καλά, εντάξει, μη το πας στο άπειρο, σας άρεσε το άπειρο αλλά γιατί η εφαπτομένη μπορεί να ξεπεράσει το 1, αυτός είναι ο προβληματισμός μας.
Σπύρος: Γιατί η μια κάθετη θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη
Ε: Υπάρχει περίπτωση, λοιπόν, η μια κάθετη να είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Δηλαδή, ενώ ξέρουμε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ότι η μεγαλύτερη πλευρά είναι η υποτείνουσα. Μπορούμε, λέει ο Σπύρος, να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο για τις κάθετες;
Κάποιοι μαθητές: Όχι

(Μάθημα 6ο , σελίδα 7)

Η συζήτηση περί της απόδειξης τελειώνει με την παρακάτω στιχομυθία:

Ε: Δεν μπορώ λοιπόν εγώ να ξέρω τι γίνεται λέει ο Σπύρος τι γίνεται με τις δύο κάθετες ποια είναι η μικρότερη και ποια είναι η μεγαλύτερη για αυτό και η εφαπτομένη μπορεί να ξεπεράσει το 1. Άρα λοιπόν συμπληρώνουμε μπορούμε να ισχυριστούμε κάτι ανάλογο και για τη εφαπτομένη.
Συμπληρώστε όχι και Σπύρο σε παρακαλώ πολύ τον ισχυρισμό σου , να τον ακούσουμε
Σπύρος: Λοιπόν, όχι διότι υπάρχει…. Πάντα μία από τις κάθετες θα είναι μεγαλύτερη από την άλλη
Ε: Ωραία
Κάποιοι μαθητές. Όχι πάντα, όχι πάντα. Αν είναι ίσες;
Ε: Καλά κοιτάξτε να δείτε αν είναι έτσι τότε πόσο θα είναι;
Κων/νος: Αλλά δε θα είναι πάντα μεγαλύτερη.

(Μάθημα 6ο, σελίδα 7)

Σε όλη σχεδόν τη συζήτηση που εκτυλίσσεται, οι μαθητές είναι προσκολλημένοι στην οθόνη του υπολογιστή και διατυπώνουν ορθές θέσεις, αλλά πλαισιωμένες από αυτό που βλέπουν. Αν και εγώ προσπαθώ να αποσπάσω την προσοχή τους στις μετρήσεις της οθόνης, αυτοί επιμένουν να παρατηρούν τις μεταβολές που υφίστανται οι πλευρές του τριγώνου. Λίγο πριν το τέλος του επεισοδίου, καθώς αναγνωρίζω ότι δεν θα επιτευχθεί ο στόχος της δραστηριότητας παραφράζω την τοποθέτηση του μαθητή, ώστε να έχουμε το ορθό συμπέρασμα. Στο κλείσιμο, όμως, του επεισοδίου μια παρέμβαση μαθητή αναδεικνύει το σπουδαίο ρόλο που παίζει στα μαθηματικά ο λογικός ποσοδείκτης «για κάθε».

Ένα δίλημμα, το οποίο συνδέεται με τις δραστηριότητες που αφορούν σε πραγματικές καταστάσεις είναι η διαχείριση της δυσκολίας μετάβασης από το φυσικό πλαίσιο της δραστηριότητας στο μαθηματικό, ώστε να αναδειχτεί η αντίστοιχη μαθηματική έννοια, όπως αυτή ορίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Το παρακάτω επεισόδιο αφορά στην ευκλείδεια διαίρεση σε τμήμα της Α΄ τάξης γυμνασίου. Στους μαθητές έχει δοθεί φύλλο εργασίας, όπου η διαίρεση περιγράφεται ως μία διαδικασία τοποθέτησης μελομακάρονων σε κουτιά. Στο επεισόδιο που ακολουθεί, στόχος ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η διαδικασία επαναλαμβάνεται, με βάση κάθε φορά το υπόλοιπο της διαίρεσης. Το δίλημμα εντοπίζεται, όταν η σύνδεση δεν γίνεται άμεσα, αλλά ύστερα από αλλαγή του πλαισίου της πραγματικής κατάστασης του προβλήματος (…στο τραπέζι), που υπήρξε αποτέλεσμα παρέμβασης ενός μαθητή.

Ε: 4 επί 4 συν 10. Να ρωτήσω κάτι εγώ την τάξη μου; Δηλαδή, τι κάνουμε κάθε φορά; Καλλίνα;
Καλλίνα: Προσθέτουμε και άλλο ένα κουτί.
Ε: Γιατί προσθέτουμε και άλλο ένα κουτί;
Καλλίνα. Εεεεε
Ε: Που τα βρίσκουμε τα μελομακάρονα και προσθέτουμε άλλο ένα κουτί;
Αλέξανδρος. Στο τραπέζι.
Ε: Που τα βρίσκουμε και γεμίζουμε; Παιδιά σας παρακαλώ…Λοιπόν, στο τραπέζι. Δηλαδή; Από πού τα παίρνουμε αυτά τα μελομακάρονα;
Ακούγονται διάφοροι μαθητές να φωνάζουν κύριε, κύριε
Καλλίνα: Από το 26
Ε: Από το 26 εγώ τα γεμίζω. Είχα 26 έτσι; Και γεμίζω, γεμίζω συνέχεια. Από πού βρίσκω και γεμίζω; Από πού βρίσκω Καλλίνα;
Καλλίνα: Από αυτά που περισσεύουν.

(Μάθημα 4ο, σελίδα 8)

Χρησιμοποίησα το πλαίσιο που έθεσε ο μαθητής μου και έθεσα στη μαθήτρια το ερώτημα της εύρεσης των μελομακάρονων στο τραπέζι. Η αντιμετώπιση του διλήμματος ήταν επιτυχής, όπως φαίνεται από τη συνέχεια του διαλόγου

Ε: Πολύ ωραία, από αυτά που περισσεύουν. Κάθε φορά, λοιπόν, βλέπω αυτά που περισσεύουν και λέω: γεμίζω άλλο ένα κουτί και προχωράω. Άρα, λοιπόν, προσέξτε τώρα , μέχρι τώρα το κάναμε 4 φορές. Τι παρατηρούμε σε κάθε προσπάθεια τοποθέτησης στα κουτιά; Καλλίνα;
Καλλίνα: Παρατηρούμε ότι κάνουμε άλλο ένα κουτί και παίρνουμε από αυτά που περισσεύουν.

(Μάθημα 4ο, σελίδα 8)

Στη συνέχεια του μαθήματος, χρησιμοποιώντας το πλαίσιο του προβλήματος προσπαθούμε να καταλήξουμε στο τι είναι αυτό που κάνει τη διαδικασία να σταματήσει. Στόχος, δηλαδή, του επεισοδίου είναι να κατανοήσουν τα παιδιά ότι η διαίρεση θα σταματήσει, όταν το υπόλοιπο είναι μικρότερο του διαιρέτη. Εντοπίζονται διλήμματα που αφορούν στις συνδέσεις των εννοιών, οι οποίες, όμως, επιλύονται με κατάλληλα δομημένες ερωτήσεις, ώστε οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ε: Παιδιά, παιδιά. Εγώ σε ρωτάω και νομίζω ότι η ερώτησή μου είναι σαφής. Πότε θα σταματούσαμε τη διαδικασία της τοποθέτησης;
Δανάη: Όταν θα τελειώσουμε τα μελομακάρονα
Ε: Θα τελειώσουν ποτέ τα μελομακάρονα; Ε;
Δανάη: ……
Ε: Δηλαδή, θα τα τοποθετήσουμε όλα στο κουτί;
Δανάη. Όχι θα περισσέψουν 2.

Ε: Δηλαδή, αυτό τι σημαίνει; Τότε θα πεις τι κάνω; Σταματάω. Γιατί θα σταματήσεις; Η Καλλίνα είπε συνεχίζω, ο Ματθαίος είπε συνεχίζω , η Τάνια είπε προ ολίγου συνεχίζω, εσύ γιατί θα σταματήσεις;
Δανάη: Γιατί δε θα μπορώ να τα χωρίσω σε άλλο κουτί;
Ε: Γιατί δε θα μπορώ να τα χωρίσω;
Δανάη: Γιατί μένει υπόλοιπο.
Ε: Τι θα πει μένει υπόλοιπο; Και προ ολίγου και στην Καλλίνα έμεινε, και στην Τάνια3 έμεινε και στον Ματθαίο έμεινε.
Δανάη: Ναι, αλλά τότε μπορούσαμε να προχωρήσουμε γιατί είχαμε περισσότερα.
Ε:Δηλαδή, τι θα πει είχαμε περισσότερα; Δεν το καταλαβαίνω αυτό, περισσότερα από τι; Η Καλλίνα από τον Ματθαίο και ο Ματθαίος από την Τάνια;
Δανάη: Κάποια πολλαπλάσια….
Ε: Κων/νε;
Κων/νος: Μένει ένα υπόλοιπο μελομακάρονων που δε μπορεί να διαιρεθεί περισσότερο.

(Μάθημα 4ο, σελίδα 8)

Επιμένω να απευθύνω ερωτήσεις στην τάξη μου προκειμένου στο κλείσιμο του διαλόγου να πάρω την απάντηση αναφορικά με το γιατί σταματά η διαίρεση. Το δίλημμα της αλλαγής του πλαισίου των ερωτήσεων είναι έντονο, ειδικά, όταν το αλλάζει η ίδια η μαθήτρια με το «..πολλαπλάσια». Ωστόσο, έχοντας κατά νου την προηγούμενη κατάσταση, επένδυσα στα λεχθέντα των μαθητών μου. Η αντιμετώπιση του διλήμματος με το συγκεκριμένο τρόπο έδειξε να είναι επιτυχής, όπως φαίνεται και από τη συνέχιση του διαλόγου με τους μαθητές. Κάποιοι μαθητές, μάλιστα, εμφανίστηκε να έχουν κατασκευάσει και την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, που ήταν και ο τρίτος διδακτικός στόχος του μαθήματος. Χαρακτηριστικά αποσπάσματα διαλόγων στην τάξη είναι τα παρακάτω

Αλέξανδρος: Δε θα μπορούν σε όλα τα κουτιά ισάξια, 4 στο κάθε ένα ακριβώς και δε θα χωράνε.
Ε: Δηλαδή; Γιάννη;
Γιάννης: Όταν ο αριθμός των μελομακάρονων που περισσεύει θα είναι κάτω από το 4.
Ε: Αυτό είναι, ρε παιδιά. Όταν θα περισσέψουν λιγότερα από 4 μελομακάρονα , οπότε θα μπορώ να κατασκευάσω καινούριο κουτί; . Ματθαίε, πόσα μελομακάρονα σου περισσέψανε εσένα;
Ματθαίος :. Εμένα, 10.
Ε: 10, άρα έρχεται η Καλλίνα και λέει: με αυτά τα 10 εγώ μπορώ να φτιάξω αλλά ... τέσσερα (μαζί με κάποιους μαθητές). Στην αρχή περίσσεψαν 18, οπότε λέει η Τάνια3, από τα 18 μπορώ να πάρω άλλα 4. Η Δανάη, όμως, γεμίζει, γεμίζει τα κουτιά. Κάποια στιγμή πάει να πάρει 4 και τι έχει να παρατηρήσει;
Κάποιοι μαθητές: Λιγότερα.

Ε: Δεν έχει δηλαδή 4, έχει λιγότερα , έτσι; Άρα, λοιπόν, πότε θα σταματούσε η διαδικασία της τοποθέτησης; Όταν τα μελομακάρονα που περισσεύουν, μας είπε ο Γιάννης, είναι λιγότερα από 4. Τώρα, προσέξτε, ποιο είναι το πλήθος των κουτιών που θα χρειαστούμε;

(Μάθημα 4ο, σελίδα 9)

Λίγο πιο κάτω

Ματθαίος: Μπορούμε να βάλουμε και σε άλλο ένα κουτάκι και άλλο.
Ε:. Πάρα πολύ ωραία.
Ματθαίος: Οπότε θα προσθέσουμε άλλο ένα κουτάκι και θα γίνουν 4 τα κουτάκια. Στο κάθε κουτάκι θα βάλουμε 4, οπότε θα μας μείνουν 10.
Αλέξανδρος: Κύριε, είναι σα να αναλύουμε τον αριθμό.

(Μάθημα 4ο, σελίδα 9)

Ή ακόμα

Ε: Με άλλο τρόπο τώρα. Από τη μία είχαμε τα κουτιά να τα χωρίσουμε, συγνώμη τα μελομακάρονα, να τα βάλουμε στα κουτιά, από την άλλη γράφαμε όμως και τι άλλο;
Τάνια:. Είχαμε μία ισότητα.
Ε: Ισότητα, πολύ ωραία η Τάνια. Από τη μία χωρίζαμε τον αριθμό σε ομάδες, αλλά κάθε φορά που τον χωρίζαμε σε ομάδες, ταυτοχρόνως, βρίσκαμε και μία ισότητα. Για να τη βρούμε αυτή την ισότητα.

(Μάθημα 4ο, σελίδα 12)

Ειδικά, στο τελευταίο επεισόδιο φαίνεται πόσο ισχυρό είναι το δίλημμα του χρόνου, ώστε αναγκάζομαι, τελικά, να δώσω το μαθηματικό πλαίσιο ο ίδιος, εφόσον έχουν επιτευχθεί όλοι οι διδακτικοί στόχο και πλησιάζουμε στο τέλος της διδακτικής περιόδου. Φαίνεται, δηλαδή, το δίλημμα αυτό να εμφανίζεται σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας και να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο θα αντιμετωπίσει ο διδάσκων τα άλλα διλήμματα, με τα οποία έρχεται αντιμέτωπος.

Η δημιουργία κλάσεων εννοιών (γενίκευση), ως χαρακτηριστικό γνώρισμα τη φύσης των μαθηματικών, μπορεί να αποτελέσει πηγή διλημμάτων, ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία που βασίζεται στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Τρόποι επίλυσης των διλημμάτων αυτών είναι συχνά η διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων, όπως ανάκλησης από τη μνήμη, επεξήγησης, διερεύνησης, κτλ.

Το παρακάτω απόσπασμα είναι από την εισαγωγή μαθήματος στην τριγωνομετρία της Β΄ γυμνασίου. Ο διάλογος αφορά σε κατάλληλη δραστηριότητα που στόχο έχει να αναδείξει την αναγκαιότητα ορισμού καινούργιων τριγωνομετρικών αριθμών, εκτός της εφαπτομένης. Δίλημμα εντοπίζεται, όταν η μαθήτρια αδυνατεί να παραλληλίσει τον τρόπο ορισμού της εφαπτομένης, αλλά και

να συνδέσει τις προηγούμενες γνώσεις της, ώστε να εντοπίσει την ζητούμενη αναγκαιότητα.

Ε: Ωραία, για να σε ρωτήσω, λοιπόν, η χρήση εφαπτομένης μπορεί να μας βοηθήσει;
Λυδία: Μπορεί.
Ε: Μπορεί. Πως μπορεί να μας βοηθήσει εδώ Νικόλα;
Νικόλας. Δε νομίζω ότι μπορεί να μας βοηθήσει
Ε: Γιατ,ί Νίκο δε μπορεί να μας βοηθήσει;
Νικόλας: Δε ξέρω τις κάθετες.
Ε: Ωραία, λέει ο Νίκος δε μπορεί να μας βοηθήσει η εφαπτομένη, γιατί δεν έχουμε τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών. Συμπληρώνουμε παρακάτω, απάντησε ο Νίκος και σε αυτό. Γιατί δεν έχουμε τα μήκη των δύο κάθετων πλευρών, συνεπώς; Ναταλία, τι πρέπει να κάνουμε;
Ναταλία: Να βρούμε τα μήκη των δύο κάθετων πλευρών.
Ε: Ωραία, να βρούμε τα μήκη των δύο κάθετων πλευρών. Θα μας βοηθήσουν τα μήκη των δύο κάθετων πλευρών βρε Ναταλία;
Ναταλία:…..
Ε: Από στο σχήμα που έχει δημιουργηθεί με το τρίγωνο , το δένδρο δηλαδή που έσπασε, εσύ την κάθετη πλευρά θέλεις να υπολογίσεις; Τι είναι το ΓΒ
Ναταλία: Υποτείνουσα
Ε:Η εφαπτομένη, όμως, είδαμε πιο πάνω, και μας είπε και ο Νίκος, με ποιες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ορίζεται;
Ναταλία: ΑΓ και ΑΒ

(Μάθημα 5ο, σελίδα 3)

Το δίλημμα αντιμετωπίζεται αφήνοντας τη σκέψη της να μας οδηγήσει κάπου, δε συμφωνώ ούτε διαφωνώ μαζί της και περιμένω από την ίδια να μας βγάλει από το αδιέξοδο που έχουμε εμπλακεί. Ταυτόχρονα, της κάνω και μια αναφορά στο σχήμα που υπάρχει στο φύλλο εργασίας, προκειμένου να εστιάσει στο ζητούμενο. Το επεισόδιο κλείνει με τη μαθήτρια να συνδέει, μετά από παρέμβασή μου, που τη φέρνει σε ένα καινούργιο αδιέξοδο, όλες τις προηγούμενες γνώσεις της, ώστε να διαφανούν τα στοιχεία που θα ορίσουν τους δύο καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Οι χρονικοί περιορισμοί, ωστόσο, με αναγκάζουν να αναδείξω ο ίδιος την αναγκαιότητα ορισμού νέων τριγωνομετρικών αριθμών.

Ε: Άρα, μας βοηθά η εφαπτομένη;
Ναταλία: Όχι
Ε: Γιατί δε μας βοηθά Ναταλία η εφαπτομένη;
Ναταλία. Γιατί δε ξέρουμε τις δύο κάθετες.
Ε: Ωραία!!!!! Άρα, λοιπόν, χρειάζεται να ορίσουμε καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Στην προσπάθειά μας αυτή τι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε;
Ναταλία: Τη γωνία
Ε: Τη γωνία και τι άλλο; Τη γωνία τη χρησιμοποιούμε και στην εφαπτομένη Ναταλία. Τι άλλο, λοιπόν, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε;

Ναταλία: Την υποτείνουσα
Ε: Την υποτείνουσα λοιπόν.

(Μάθημα 5ο, σελίδα 3)

Στη συνέχεια του μαθήματος, και με αφετηρία δραστηριότητα μέτρησης, οι μαθητές προσπαθούν να ανακαλύψουν τρόπους, προκειμένου να ορίσουμε κάποιους καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Το μάθημα λαμβάνει χώρα σε αίθουσα πολυμέσων και η δραστηριότητα αντιμετωπίζεται με λογισμικό. Στο παρακάτω απόσπασμα εμφανίζεται δίλημμα, το οποίο πηγάζει από το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο ορίσθηκε η εφαπτομένη – ως σταθερός λόγος πλευρών-, με αποτέλεσμα να αδυνατούν να γενικεύσουν τη διαδικασία και στον ορισμό του ημιτόνου και συνημιτόνου.

Ε:. Αν, λοιπόν, θα μπορούσαμε να ορίσουμε καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμού,ς ποια θα ήταν η προϋπόθεση;
Ζωή: Να ξέρουμε την απέναντι κάθετη και την προσκείμενη
Ε: Αυτό είναι για την εφαπτομένη
Ζωή: Εεεε
Ε: Να επαναλάβουμε πάλι τι πάμε να κάνουμε. Φαίνεται ότι κάτι έχετε πάθει σήμερα. Πρέπει μέσα στον τριγωνομετρικό αριθμό που θα ορίσουμε να χρησιμοποιήσουμε ποιόν;
Κάποιος μαθητής: Την υποτείνουσα
Ε. Ωραία. Υπάρχει κάποια προϋπόθεση, για να μπορέσουμε να ορίσουμε ένα καινούργιο τριγωνομετρικό αριθμό; Ε…υπάρχει; Χρήστο
Χρήστος: Όχι, αφού ξέρουμε..
Ε: Όχι, δηλαδή, μπορούμε να ορίσουμε όποιον τριγωνομετρικό αριθμό τάδε, ό,τι θέλουμε. Την εφαπτομένη, δηλαδή, την ορίσαμε με δικιά μας συλλογιστική, αυθαίρετα; Ή ανακαλύψαμε κάτι;
Χρήστος: Όχι, χρησιμοποιήσαμε το λόγο των κάθετων πλευρών
Ε: Ο οποίος, τι ήταν αυτός ο λόγος των δύο κάθετων πλευρών ;
Χρήστος: Ήταν η κλίση και ήταν σταθερός λόγος.
Ε: Τι ήταν;
Χρήστος: ΣΤΑΘΕΡΟΣ
Ε: Θυμάστε που φέρναμε τα ύψη στο βουνό και παίρναμε κάποιους λόγους, η Χριστιάννα τους υπολόγισε και αυτοί οι λόγοι σε κάθε περίπτωση τι ήταν; Σταθεροί. Άρα υπάρχουν προϋποθέσεις, για να κάνουμε κάτι τέτοιο. Τι θα απαντήσουμε; Ναι, αρκεί να ανακαλύψουμε τι πράγμα Χριστιάννα;

(Μάθημα 5ο, σελίδα 4)

Η αντιμετώπιση του διλήμματος γίνεται με συνεχείς υπενθυμίσεις προηγούμενων γνώσεων, αποφεύγοντας να δώσω ο ίδιος την απάντηση, προκειμένου οι μαθητές να αντιληφθούν που μας οδηγεί η κατασκευή των καινούργιων τριγωνομετρικών αριθμών. Στην περίπτωση, μάλιστα, που κάποιος μαθητής οδηγήθηκε στη σταθερότητα του λόγου, θεώρησα καλό να υπενθυμίσω στην τάξη

μου όλη τη δραστηριότητα, προκειμένου να αποσαφηνίσω πλήρως το πλαίσιο αναφοράς.

Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίστηκε το δίλημμα φαίνεται να είναι επιτυχής, καθώς στην εξέλιξη του μαθήματος, οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι, με βάση τη σταθερότητα των λόγων, μπορούν να προκύψουν δύο τριγωνομετρικοί αριθμοί. Ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα που εκτυλίσσεται στη συνέχεια του μαθήματος είναι το παρακάτω.

> *Ε: Λέει(το φύλλο εργασίας), πόσους διαφορετικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς θα μπορούσαμε να ορίσουμε τότε και γιατί; Αν, λοιπόν, ανακαλύψουμε πως υπάρχει σταθερός λόγος, πόσους τέτοιους τριγωνομετρικούς αριθμούς θα μπορούσαμε να ανακαλύψουμε, να κατασκευάσουμε.*
> *Χρήστος: Την υποτείνουσα*
> *Ε: Ο λόγος, δηλαδή, θα περιέχει μόνο την υποτείνουσα;*
> *Χρήστος: Θα περιέχει ....*
> *Ε: Και τι άλλο;*
> *Χρήστος: Για να είναι σταθερός;*
> *Ε: Ναι. Τι άλλο θα μπορούσε να περιέχει;*
> *Γιώργος: Την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά.*
> *Ε: Και μία από τις κάθετες.*
> *Γιώργος: Άρα δύο.*
> *Ε: Άρα, πόσους διαφορετικούς; Δύο; Γιατί δύο είπες Γιώργο;*
> *Γιώργος: Γιατί, στο λόγο θα είναι η υποτείνουσα και μία από τις δύο κάθετες.*
> *Ε: Δηλαδή, λέει ο Γιώργος , γιατί θα είναι η υποτείνουσα και μία από τις δύο κάθετες. Λοιπόν, τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τους υπολογιστές . Το κάθε ζευγάρι σε ένα υπολογιστή. Στόχος μας είναι να ορίσουμε καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς για τη γωνία ω.*
>
> *(Μάθημα 5ο, σελίδα 5)*

Ο μαθητής, μάλιστα, φαίνεται να έχει καταλάβει ότι έτσι μπορούμε να ορίσουμε δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τη μία κάθετη πλευρά με την υποτείνουσα. Τα παραπάνω, στη συνέχεια, τεκμηριώθηκαν, με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού.

3.3. Επικοινωνιακά διλήμματα

Διλήμματα, τα οποία σχετίζονται με τη διαχείριση των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, εντοπίζονται κάθε στιγμή της διδασκαλίας και σχετίζονται κυρίαρχα με την επικοινωνία και την αλληλεπίδραση που αναπτύσσονται στην τάξη. Μερικά από τα πιο συνηθισμένα αφορούν στο χειρισμό της απάντησης ενός μαθητή, στη διαχείριση των παρεμβάσεων των μαθητών, στη διαχείριση των απορριών και, τέλος, στη διαχείριση του τρόπου, με τον οποίο οι μαθητές έχουν προσεγγίσει ή πως προσεγγίζουν τη νέα γνώση, όπως αυτός εκφράζεται μέσα από τις περιγραφές τους. Συχνά επιλύονται με επαναδιατύπωση της ερώτησης, τη χρήση διάφορων αναπαραστάσεων και παραδειγμάτων, προκειμένου να γίνει κατανοητή μια αφηρημένη έννοια ή διαδικασία, την επιλογή ενός καλού μαθητή, που μπορεί να συμβάλλει στη διεκπεραίωση του διλήμματος, τη διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων, οι οποίες μπορούν να «ξεδιπλώσουν» τη σκέψη των μαθητών και να αναδείξουν τις δυσκολίες τους στην πρόσβαση μιας μαθηματικής ιδέας.

Τα συγκεκριμένα διλήμματα συνδέονται και αλληλεπιδρούν με ο,τιδήποτε σχετίζεται με την επίτευξη των διδακτικών στόχων του μαθήματος. Συχνά δε επιλύονται με τρόπους που δεν προάγουν τη μάθηση, δεν εξελίσσουν τη γνώση και δεν οδηγούν στη κατασκευή μαθηματικών νοημάτων, αλλά εξυπηρετούν απλώς την ανάγκη του διδάσκοντα να συνεχιστεί η πορεία του μαθήματος και να οδηγηθεί με ασφάλεια στην ολοκλήρωσή του. Τέτοιοι τρόποι αντιμετώπισης των διλημμάτων αυτών είναι:

- Μη αξιοποίηση της προσφοράς των μαθητών, αλλά μια συνεχής προσπάθεια αναζήτησης αυτών που θέλει να ‘ακούσει’ ο εκπαιδευτικός. Εγκαταλείπεται, έτσι, το σύνολο της τάξης που, ενδεχομένως, να έχει πρόβλημα, μόλις δοθεί η ορθή απάντηση. Ο δάσκαλος δεν επενδύει στα ειρημένα των μαθητών, αλλά στο αποτέλεσμα. Αν η σωστή απάντηση δεν έρθει, τότε επιστρέφει στην παλιά δοκιμασμένη συνταγή της δασκαλοκεντρικής μετάδοσης της γνώσης.
- Απλή συμπλήρωση κενών, ώστε να προκύψει μια πρόταση με το σωστό περιεχόμενο. Άλλος ένας τρόπος αντιμετώπισης των διλημμάτων αυτής της κατηγορίας, που δεν αφήνει τίποτα στο μαθητή, πέρα από την ικανοποίηση μιας ‘σωστής’ απάντησης στο διδάσκοντα.

- Κλειστού τύπου ερωτήσεις, που απαιτούν απλή ανάκληση από τη μνήμη, όπου δε δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να καταθέσουν τη σκέψη τους.
- Διατύπωση ερωτήσεων που δεν είναι προϊόν αναστοχασμού των λαθών που τυχόν πραγματοποίησαν οι μαθητές, αλλά μια επαναληπτική διαδικασία, προκειμένου να ακουστεί, βεβιασμένα, η σωστή απάντηση.

Πολλά διλήμματα του εκπαιδευτικού αφορούν στη διαχείριση της παροχής βοήθειας προς τους μαθητές, μέσα από τη διαχείριση της αλληλεπίδρασης και της επικοινωνίας που αναπτύσσονται στην τάξη και σχετίζονται με τη μάθηση των μαθητών. Οι πρακτικές που ενδείκνυνται να επιλέγονται προς αυτήν την κατεύθυνση είναι τέτοιες, ώστε να βοηθούν τους μαθητές να ανακαλέσουν ορισμούς, να αναγνωρίσουν το άστοχο των απαντήσεών τους, να προσανατολιστούν στο ζητούμενο, συνειδητοποιώντας τι είναι αυτό που λείπει και χρειάζεται. Σε αυτό το πλαίσιο είναι σημαντικό να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να συνδέσουν και να παραλληλίσουν ανάλογες περιπτώσεις. Εδώ, όμως, ελοχεύει ο κίνδυνος της στενής καθοδήγησης και του αυστηρά καθορισμένου προσανατολισμού, προσέγγιση που συχνά συνδέεται με τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος σε συνδυασμό με τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος και, φυσικά, το χρονικό πλαίσιο της διδακτικής περιόδου. Μια τέτοια προσέγγιση βρίσκεται σε αντίφαση με τη γενικά αποδεκτή σήμερα πρακτική, σύμφωνα με την οποία θα ήταν επιβεβλημένη η αξιοποίηση της συμβολής των μαθητών, ώστε η μάθηση να καθίσταται μια ενεργή κατασκευή του μαθηματικού νοήματος από κάθε μαθητή και να αναδεικνύεται η δημιουργία των μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα.

Ένας συνήθης τρόπος επίλυσης αυτών των διλημμάτων είναι η παράθεση μιας μικρής σύνοψης των ευρημάτων που έχουν προηγηθεί. Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση φυσικών αριθμών σε τμήμα της Α΄ τάξης γυμνασίου. Οι μαθητές έχουν υπολογίσει την περίμετρο ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διάφορους τρόπους, προκειμένου να καταλήξουν στην ισότητα που εκφράζει την επιμεριστική ιδιότητα. Δίλημμα εντοπίζεται όταν οι μαθητές αδυνατούν να εξισώσουν τις σχέσεις, εφόσον αυτές εκφράζουν την ίδια ποσότητα, δηλαδή την περίμετρο του ορθογωνίου.

Ε: Άρα, σε όλες αυτές τις παραστάσεις, τα πρώτα τους μέλη , τα αριστερά, τι είναι αναμεταξύ τους;
Ο εκπαιδευτικός μαζί με κάποιους μαθητές :Ίσα
Ε: Για να πάρουμε, λοιπό,ν αυτές τις δύο παραστάσεις μόνες τους, τι έχουμε Στο πρώτο μέλος έχουμε αυτό (2.3+2.2) και στο δεύτερο μέλος τι θα έχουμε;……2(3+2). Λοιπόν, ένας τρόπος, που πρότεινε η Αφροδίτη, είναι αυτός εδώ, ένας άλλος, που πρότεινε ο Φίλιππος, είναι αυτός εδώ. Προφανώς, εφόσον και τα δύο αποτελέσματα τι μας δίνουν ; Την περίμετρο του ίδιου ορθογωνίου, τι θα είναι αυτά τα δύο;
Εκπαιδευτικός μαζί με κάποιους μαθητές: Ίσα
Ε: Τι έχουμε, δηλαδή, τώρα να παρατηρήσουμε; Έ, Δανάη;
Δανάη: Μπορούμε να κάνουμε με βελάκι 2.3 και 2.2
(Μάθημα3ο , σελίδες 2,3)

Το δίλημμα επιλύεται υπενθυμίζοντας και συνοψίζοντας τις σχέσεις που είχαν προτείνει πριν λίγο δύο μαθητές. Χαρακτηριστικό του επεισοδίου είναι ότι επενδύω στη σκέψη των μαθητών μου, αλλά, ταυτόχρονα, συμπληρώνω και διορθώνω ό,τι έχει ειπωθεί, στοχεύοντας έτσι στην εξυπηρέτηση του στόχου του μαθήματος. Στο τέλος του επεισοδίου, μάλιστα, ο λόγος ξαναπερνάει σε κάποιον μαθητή μου (στη Δανάη), προκειμένου να διερευνήσω τον τρόπο με τον οποίο κατανοήθηκε η επιμεριστική ιδιότητα.

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά σε μάθημα στην Α΄ γυμνασίου και, συγκεκριμένα, στις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού. Αφού έχουμε συζητήσει την προσεταιριστική ιδιότητα με τη βοήθεια της αντιμεταθετικής ιδιότητας, προχωρούμε στην καταγραφή της σχέσης που περιγράφει αυτήν την ιδιότητα. Δίλημμα εντοπίζεται στον τρόπο παροχής βοήθειας στη μαθήτρια, η οποία έχει σηκωθεί στον πίνακα και αδυνατεί να συνδέσει και να συμβολίσει αυτά που έχουν συζητηθεί, με αποτέλεσμα να μη επιτυγχάνεται ο στόχος τους μαθήματος, που συνδέεται με το συμβολισμό.

Ε: Ναι, άλλο με την σειρά είπες και εγώ σε έκοψα εκεί…έτσι; Τι κάνουμε, δηλαδή; Δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία ……πολλαπλασιάζουμε. Λοιπόν, Τάνια έλα λίγο να καταγράψεις μόνη σου την ιδιότητα , μη τη γράψω εγώ. Δηλαδή έχω να πολλαπλασιάσω το α.β.γ. Σε ακούμε
Τάνια: Εεε!!! Ναι. αβ.γ=β.α.γ.
Ε: Τι κάνεις; Η αντιμεταθετική είναι πιο πάνω
Τάνια: Αα…Σωστά
Ε: Ποια ιδιότητα μας είπες προηγουμένως;
Τάνια. Την … Να βάλω;.
Ε: Να βάλεις τι;
Τάνια. Παρενθέσεις.
Ε: Έτσι.
Η μαθήτρια γράφει στον πίνακα.

Ε: Ωραία. Δηλαδή τώρα τι κάνεις. Πολλαπλασιάζεις τα δύο πρώτα και ότι βρεις με …
Ταυτόχρονα με τη μαθήτρια: το τρίτο
Ε:Αυτό είναι το ίδιο με το …
Τάνια:. Με το α.(β.γ)
Ε: Πάρα πολύ ωραία. Στο δεύτερο μέλος τι έκανες;
Τάνια: Άλλαξα θέση στη παρένθεση
Ε: Δηλαδή; Αντί να πολλαπλασιάσεις τα δύο πρώτα …
Τάνια: . Πολλαπλασίασα τα δύο δεύτερα και μετά με το τρίτο
(Μάθημα 2ο, σελίδα 7)

Σε όλη την πορεία της, η μαθήτρια καθοδηγείται στενά, προκειμένου να καταλήξει στο επιθυμητό συμπέρασμα, που είναι και ένας από τους στόχους του μαθήματος. Οι ερωτήσεις που της απευθύνω απεικονίζουν το δικό μου μονοπάτι προσέγγισης, ενώ δεν ακούγεται σχεδόν καθόλου ο τρόπος της δικής της σύλληψης της ιδιότητας και δεν εντοπίζονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει στην κατανόησή της. Ακόμα, παραβλέπεται και η δυσκολία της μαθήτριας, όταν δεν αναγνωρίζει την χρήση των παρενθέσεων, συνεπώς και τη σπουδαιότητά τους σε αυτή την ιδιότητα. Το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η καταγραφή/αποτύπωση της ιδιότητας από ένα μαθητή και όχι από εμένα.

Πολλά διλήμματα, που αφορούν σε παλαιότερες γνώσεις των μαθητών, επιλύονται με τη χρήση αναπαραστάσεων. Το παρακάτω απόσπασμα είναι μέρος ενός μαθήματος τριγωνομετρίας στη Β΄ γυμνασίου, όπου γίνεται προσπάθεια απόδειξης του τι συμβαίνει με το ημίτονο μιας γωνίας, καθώς αυτή αυξάνεται ή μειώνεται. Αν και οι μαθητές γνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ κλάσματος και λόγου, καταβάλλεται προσπάθεια προσέγγισης της απόδειξης με τη βοήθεια των κλασματικών αριθμών. Το δίλημμα εντοπίζεται, όταν ο μαθητής, αν και καλός, αδυνατεί να ανακαλέσει το πώς αυξομειώνεται ένας κλασματικός αριθμός. Θεωρώ ότι αυτό είναι και ένα κρίσιμο κομμάτι στη διδακτική διαδικασία. Έτσι, επιμένω και παρεμβαίνω, προκειμένου να έχουμε το επιθυμητό. Ο μαθητής δεν εγκαταλείπεται, αλλά του παρέχεται βοήθεια, για να ανακαλέσει από τη μνήμη του τις αυξομειώσεις των κλασμάτων.

Ε: Πάμε, λοιπόν, στη σελίδα 4 που λέει «Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας θα πρέπει να θυμηθούμε τον τρόπο που συγκρίνουμε κλασματικούς αριθμούς». Έτσι, λοιπόν, ένα κλάσμα μεγαλώνει όταν... Να σας ακούσω. Φάνης, τι ξέρεις από πέρυσι που ήσουν στην πρώτη γυμνασίου που κάναμε κλασματικούς αριθμούς. Πότε μπορεί να μεγαλώσει ένα κλάσμα;
Φάνης: Εεε
Ε: Όλες τις περιπτώσεις θέλω.

Φάνης: Κλάσμα μπορεί να μεγαλώσει…
Ε: Παρακαλώ (γίνεται φασαρία γιατί προφανώς πολλοί γνωρίζουν την απάντηση και ο Φάνης δυσκολεύεται). Λοιπόν, Φάνη λίγο δυνατά γιατί η αίθουσα είναι περίεργη.
Φάνης: Εεε…
Ε: Πότε μπορεί να μεγαλώσει το κλάσμα;
Φάνης: Μπορεί να μεγαλώσει όταν ….
Ε: Φαντάσου ένα κλάσμα και βρες ένα μεγαλύτερό το. Φάνης…
Ε: Φάνη δε θυμάσαι; Για να καταγράψουμε ένα κλάσμα.

(Μάθημα 6ο, σελίδα 9)

Η αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε φάνηκε να λειτούργησε, καθώς, σχεδόν αμέσως, ο μαθητής δίνει ένα μέρος της ορθής απάντησης, χωρίς να αναφέρει, ωστόσο, τι συμβαίνει με τον παρονομαστή και τον αριθμητή στις περιπτώσεις των κλασμάτων που χρησιμοποιεί. Το κενό στην αιτιολόγηση έρχεται να καλύψει η παρέμβασή μου.

Φάνης: Όταν μεγαλώνει ο αριθμητής ή μικραίνει ο παρονομαστής.
Ε: Ωραία!. Θα γράψουμε ένα κλάσμα μεγαλώνει, όταν μικραίνει ο παρονομαστής ή μεγαλώνει ο αριθμητής. Εννοείται ότι διατηρούμε τον αριθμητή ή τον παρονομαστή σταθερό.

(Μάθημα 6ο, σελίδα 9)

Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίστηκε το δίλημμα φάνηκε να είναι επιτυχής, καθώς στη συνέχεια του μαθήματος γίνεται η κατάλληλη σύνδεση του πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα συμπεράσματα στις αποδείξεις.

Ε: Ένα κλάσμα, λοιπόν, μικραίνει, όταν μεγαλώνει ο παρονομαστής του ή μικραίνει ο αριθμητής του. Λοιπόν, αυτό γιατί χρειάζεται Γιώργο να το έχουμε στο μυαλό μας ; Γιατί χρειάζεται να θυμηθούμε πότε ένα κλάσμα μεγαλώνει και πότε μικραίνει;
Γιώργος: Για να ξέρουμε πότε μεγαλώνει το ημίτονο και πότε το συνημίτονο
Ε: Και τι σχέση έχει το ημίτονο με τους κλασματικούς αριθμούς;
Γιώργος: Γιατί είναι ο λόγος της απέναντι κάθετης προς την υποτείνουσα.
Ε: Ωραιότατα, πάρα πολύ ωραία. Εντάξει, κάναμε τη σύνδεση τώρα στο μυαλό μας. Και προχωρούμε τώρα.

(Μάθημα 6ο, σελίδα 9)

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά σε μάθημα της Ευκλείδειας διαίρεσης στην πρώτη γυμνασίου. Το μάθημα ξεκίνησε με τις έννοιες «πολλαπλάσιο» και «διαιρέτης», ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να προσεγγίσουν με ευκολία την έννοια «ατελής διαίρεση» και να ερμηνεύσουν την έννοια του υπολοίπου. Όταν ο μαθητής αδυνατεί να αιτιολογήσει, ενώ γνωρίζει (με βάση τη μέχρι τότε πορεία του στο μάθημα) την ερμηνεία του πολλαπλάσιου ενός αριθμού, εντοπίζεται δίλημμα, το

οποίο αφορά στον τρόπο παροχής βοήθειας και στην έκτασή της, ώστε ο μαθητής να απαντήσει στην ερώτηση που του τέθηκε.

Ε: Γιατί λέει: μπορούμε να το υποστηρίξουμε; Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε; Από κάτω λέει, λοιπόν, αυτό συμβαίνει για όλα τα πολλαπλάσια ενός φυσικού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Συμβαίνει για όλα τα πολλαπλάσια; Αλέξανδρε;
Αλέξανδρος: Ναι, γιατί για να είναι πολλαπλάσιο σημαίνει ότι θα έχει και αυτό κάποια άλλα, οπότε θα ισχύει.
Ε: Δηλαδή, όταν λες θα έχει κάποια άλλα, τι εννοείς Αλέξανδρε.
Αλέξανδρος:……
Ε: Σίγουρα. Αλλά γιατί συμβαίνει αυτό; Λέει αυτό συμβαίνει …Είπαμε, αν έχουμε ένα πολλαπλάσιο .. Για να το δούμε λίγο, να ανοίξουμε μία παρένθεση στο μυαλό μας, να το δούμε λοιπόν. Ας πάρουμε το 12. Το 12 είναι πολλαπλάσιο τίνος Αλέξανδρε;
Αλέξανδρος: Του 3
Ε: Αυτό τι σημαίνει; Ότι υπάρχει είπαμε ένας φυσικός
Αλέξανδρος: Ότι και αυτός ο φυσικός αριθμός …
Ε: Τώρα το 12 έχει πόσες ακέραιες μονάδες;

Σχεδιάζω στον πίνακα I I I I I I I I I I I

Ε: Δώδεκα. Τι μπορώ να τις κάνω αυτές τις δώδεκα ακέραιες μονάδες; Να τις χωρίσω σε ομάδες των πόσων; Των 3, συγνώμη σε 3 ομάδες, κάθε μία να έχει 4 ακέραιες μονάδες, ωραία. Γιατί συμβαίνει αυτό; Αυτό θέλει να μας πει το ερώτημα, αφού αυτό το ερώτημα λέει «αυτό συμβαίνει για όλα τα πολλαπλάσια ενός φυσικού; Δικαιολόγησε την απάντησή σου». Συμβαίνει για όλα; Ε;;;;; Και η απάντηση είναι ναι ή όχι; Για να ξεκινήσουμε από εκεί. Συμβαίνει για όλα τα πολλαπλάσια; Διαμαντή;
(Μάθημα 4ο,σελίδα 3)

Αρχικά, το δίλημμα αντιμετωπίζεται με κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα. Πρακτική που δίνει την ευκαιρία και το χώρο να επεξεργαστώ τη σκέψη του μαθητή και να παρέμβω, αν χρειαστεί, σε ουσιαστικό σημείο της. Όταν και με το παράδειγμα ο μαθητής φαίνεται να αδυνατεί να απαντήσει, δεν εγκαταλείπεται, αλλά καταβάλλεται προσπάθεια απάντησης με τη βοήθεια κάποιας αναπαράστασης. Ως ύστατη προσπάθεια, αφού πρώτα γίνει σύνοψη των προηγούμενων τοποθετήσεων, ζητείται μονολεκτική απάντηση από το μαθητή, προκειμένου, στη συνέχεια, να του ζητηθεί να αιτιολογήσει. Στην εξέλιξη του μαθήματος κάποιος μαθητής δίνει και αιτιολογεί τη σωστή απάντηση.

Διαμαντής: Όχι
Στέλιος: Ισχύει σε όλα τα πολλαπλάσια
Ε: Ισχύει ρε παιδιά. Ισχύει, γιατί ισχύει Στέλιο;
Στέλιος: Γιατί, ο φυσικός αριθμός επί έναν άλλο φυσικό αριθμό, ο οποίος θα του κάνει το πολλαπλάσιο, είναι και οι δύο διαιρέτες

Ε: Αυτό είναι λόγω της διαιρετότητας. Λόγω της διαιρετότητας, δηλαδή, πάντοτε το πλήθος των ακεραίων μονάδων, χρησιμοποιώ μία έκφραση που λέτε εσείς , θα βγαίνει τι πράγμα,…ακριβώς. Έτσι δεν είναι;

(Μάθημα 4ο, σελίδα 4)

Σε πολλές περιπτώσεις η επίλυση των διλημμάτων που αφορούν στο τι γνωρίζουν οι μαθητές ή στο τι έχουν μάθει επιτυγχάνεται με την αξιοποίηση ενός αντι-παραδείγματος ή κατάλληλων ερωτήσεων, προκειμένου να προκύψει γνωστική σύγκρουση.

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά σε μάθημα σχετικό με τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών και τις ιδιότητές του σε τμήμα της Α΄ τάξης γυμνασίου. Ο πολλαπλασιασμός έχει ήδη ορισθεί ως μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, μέσω της οποίας επιχειρείται να αναγνωρισθεί ο ρόλος του μηδενός και της μονάδος σε αυτόν. Όταν οι μαθητές αδυνατούν να αναγνωρίσουν την εξαίρεση που θέτει ο ορισμός, παρά τη μετάθεση του προβλήματος στο γλωσσικό του μέρος, εντοπίζεται δίλημμα, το οποίο αφορά στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αναδειχθεί αυτή η εξαίρεση και, ταυτόχρονα, να εντοπίσουν οι μαθητές παρόμοιες καταστάσεις. Καταστάσεις, δηλαδή, όπου ο ορισμός δεν καλύπτει συγκεκριμένες περιπτώσεις, που πρέπει να μελετηθούν χωριστά. Θα έλεγε κανείς ότι εδώ διακρίνεται και ένα επιστημολογικό δίλημμα στο παρασκήνιο του επεισοδίου. Το δίλημμα επιλύεται με τη χρήση ενός γλωσσικού παραδείγματος.

Ε:. Εδώ, τώρα, όπως έχουμε γράψει τον ορισμό έχουμε ένα μικρό πρόβλημα στη λέξη τι…
Κάποιος μαθητής : Φορές
Ε:. Για να έχουμε φορές πόσα τουλάχιστον β πρέπει να έχω…
Κάποιοι μαθητές: Ένα.
Ε: Και θα έλεγα ένα φορές;
Κάποιοι μαθητές: Δύο
Ε: Από δύο και πάνω. Άρα πρέπει να δω …Κοιτάξτε να δείτε πως λογικά πηγαίνει το πράγμα από μόνο του κάπου. Δηλαδή, πηγαίνει πού; Στο μηδέν, γιατί δε μπορώ να πω μηδέν φορές και στο ένα που δε μπορώ να πω μία φορές. Άρα, λοιπόν ..Μαρίνα, τι γίνεται με το ένα;

(Μάθημα 2ο, σελίδα 8)

Στην εξέλιξη, όμως, του διαλόγου και υπό την πίεση του χρόνου και των διδακτικών στόχων δίνω εγώ την απάντηση, προκειμένου να κατευθύνω τη σκέψη των μαθητών στο ρόλο των δύο αυτών αριθμών. Παρά την όχι και τόσο αποτελεσματική επίλυση του διλήμματος, οι μαθητές φάνηκε να δραστηριοποιούνται στην κατεύθυνση αυτή, όπως φαίνεται από την εξέλιξη του επεισοδίου.

Μαρίνα: Αυτό είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού
Ε: Δηλαδή; (εγώ γράφω στον πίνακα α.1)
Μαρίνα: Ίσον α
Ε: Το ένα, λοιπόν, είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Ο ρόλος του μηδενός ποιος είναι; Ματθαίος;
Ματθαίος: Είναι απορροφητικό στοιχείο
Ε: Δηλαδή ;Ματθαίος α.0 πόσο θα μας κάνει;

(Μάθημα 2ο , σελίδα 8)

Παρακάτω έχουμε ένα απόσπασμα μαθήματος σε Β΄ τάξη του γυμνασίου, το οποίο αφορά στις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο και βάση ρητό αριθμό. Το μάθημα έχει ως στόχο να συγκεντρώσει σε έναν ορισμό όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Στην αρχή του επεισοδίου αναγνωρίζεται η εξαίρεση που δημιουργείται στον ορισμό για τους αρνητικούς και από τον μαθητή ζητείται η επέκτασή του. Από την απάντησή του ο μαθητής φαίνεται ότι έχει συνδέσει την έννοια του αντίστροφου μόνο με τους κλασματικούς αριθμούς, οπότε και εμφανίζεται δίλημμα, το οποίο αφορά στο πως ο μαθητής θα μπορέσει να γενικεύσει την έννοια αυτή.

Ε: Πολύ ωραία. Για να καλυφθούμε, λοιπόν, σε κάθε περίπτωση στο σύνολο των ακεραίων, όταν ο εκθέτης μας είναι ακέραιος αριθμός. Πρέπει να δούμε τι γίνεται με τους αρνητικούς. Στους αρνητικούς να φανταστούμε κολλάει το φορές;
Κάποιοι μαθητές : Όχι
Ε:. Άρα, κάτι πρέπει να γίνεται. Μάρκο σε ακούω.
Μάρκος: Εδώ πέρα το κλάσμα αντιστρέφεται.
Ε:. Όχι το κλάσμα, ποιο κλάσμα;
Μάρκος: Ο αριθμός.
Ε: Ποιος;
Μάρκος: Συγνώμη
Ε: Ποιος;
Μάρκος: Η βάση
Ε: Η βάση, πάρα πολύ ωραία. Εντάξει. Έχουμε πει, λοιπόν, ότι αυτό το μείον που υπάρχει στον εκθέτη τί επηρεάζει Μάρκο;
Μάρκος: Μόνο τη βάση.

(Μάθημα 1ο , σελίδα 3)

Οι ερωτήσεις, με κάποια δόση έκπληξης και απορίας, που ακολουθούν την τοποθέτηση του μαθητή, στόχο έχουν να του στρέψουν την προσοχή στην τυχαία ρητή βάση και όχι σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό και φαίνεται να το πετυχαίνουν, όπως δείχνει η κατάληξη της στιχομυθίας.

Το απόσπασμα που ακολουθεί αφορά στην επιμεριστική ιδιότητα στο σύνολο των φυσικών αριθμών, σε τμήμα της Α΄ τάξης γυμνασίου. Η συζήτηση στοχεύει στο

να συνοψίσει τόσο την ιδιότητα της επιμεριστικής, όσο και τη χρηστικότητά της. Ο διάλογος είναι γεμάτος διλήμματα, που αφορούν στον τρόπο διαχείρισης των ερωτήσεων, οι οποίες απευθύνονται στον μαθητή, καθώς γίνεται φανερό από την αρχή ότι αυτός δεν έχει κατανοήσει το τι είναι μεταβλητή -αν και έχει αφιερωθεί ολόκληρο μάθημα-, που αποτελεί και έναν από τους βασικούς στόχους του μαθήματος, ούτε και την απαλοιφή της παρένθεσης με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας. Στην αντιμετώπιση του διλήμματος επιστρατεύονται αντι-παραδείγματα.

Ε: Στέφανε, έχουμε μία παρένθεση που μέσα της έχει το β+γ , δηλαδή,μία πρόσθεση και τώρα από έξω έχουμε επί α.
Στέφανος:Θα κάνουμε πρώτα το β+γ
Ε: Μπορείς να το κάνεις το β+γ;
Στέφανος: Ναι!!!!
Ε: Πως; Για πες μου;
Στέφανος: Όχι.
Ε: Μπορείς να προσθέσεις το β με το γ; Όχι. Αν ήταν αριθμοί, πολύ ωραία, λέει ο Στέφανος, κοιτάξτε να δείτε, μας λέει ο Στέφανος, αν έχουμε μία παράσταση που περιέχει μόνο αριθμούς, θα κάνουμε την επιμεριστική; Όχι!!! Άρα για να έχει νόημα η επιμεριστική ιδιότητα θα πρέπει να έχω αριθμούς και τι άλλο;
Στέφανος: Και γράμματα
Ε: Πως τα λέμε τα γράμματα;
Στέφανος: Σύμβολα
Κάποιοι μαθητές : Μεταβλητές
Ε: Μεταβλητές. Άρα, τι θα κάνει η επιμεριστική, βρε Στέφανε, θα μοιράζει τον πολλαπλασιασμό. Που θα τον μοιράζει; Στην παρένθεση, δηλαδή, που;
Στέφανος: Στο β και στο γ
Ε: Άρα, τι θα έχεις. Μοίρασε τον πολλαπλασιασμό στο β και στο γ.
Στέφανος: α.β και β επι (τον διακόπτω)
Ε: Πολύ ωραία, και μετά α επί …
Στέφανος: α.γ
Ε: Και ανάμεσά τους τι θα βάλεις;
Στέφανος: συν
Ε: Εφόσον είχαμε πρόσθεση θα βάλουμε συν.

(Μάθημα 3ο , σελίδα 4)

Το δίλημμα φάνηκε να αντιμετωπίστηκε με επιτυχία, καθώς στην εξέλιξη του μαθήματος οι τοποθετήσεις κάποιων μαθητών ικανοποιούν τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος.

Ε: α.(β-γ)
Σωτήρης: Ίσον α.β-α.γ
Ε: Αυτή είναι η επιμεριστική με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Τι κάναμε, δηλαδή, μοιράσαμε τον πολλαπλασιασμό, αυτό που μας είπε η Δανάη, κάνουμε βελάκια, δηλαδ,ή το α μια φορά βελάκι με το β και μετά το α με το γ και ανάμεσά τους τι βάλαμε, την πράξη της παρένθεσης. Πολύ ωραία. Εντάξει. Έχουμε λοιπόν έναν πολλαπλασιασμό, τον οποίο τον μοιράζουμε

και ανάμεσά τους , ανάμεσα στους πολλαπλασιασμούς, τι βάζουμε; Την πράξη της…
Δανάη: Παρένθεσης.
Ε: Πάρα πολύ ωραία. Δηλαδή, θα ήθελα να έχουμε και τη φιλοσοφία της επιμεριστικής. Η επιμεριστική τι κάνει στην παρένθεση; Μαρίνα;
Μαρίνα: Τη διασπά σε δύο πράξεις
Ε: Δηλαδή; Υπάρχει παρένθεση;
Μαρίνα: Όχι
Ε: Τι την κάνει λοιπόν;
Μαρίνα: την απλοποιεί

(Μάθημα 3ο, σελίδες 4,5)

Η αλλαγή του πλαισίου μιας ερώτησης, που τίθεται σε κάποιον μαθητή αρκετές φορές, μπορεί να τον βοηθήσει να απαντήσει σωστά, ενώ, ταυτόχρονα, με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής δεν εγκαταλείπεται, αλλά συνεχίζει να λαμβάνει μέρος στα δρώμενα της τάξης. Το παρακάτω απόσπασμα αναφέρεται στην τριγωνομετρία της Β΄ τάξης του γυμνασίου, στην εισαγωγή του μαθήματος που αφορά στο ημίτονο και στο συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Στόχος της εισαγωγής του μαθήματος είναι να αναδειχθεί η αναγκαιότητα εύρεσης καινούργιων τριγωνομετρικών αριθμών. Από τους μαθητές έχει ζητηθεί να βρουν το ύψος ενός δένδρου που έχει σπάσει. Δίλημμα προκύπτει στο κατά πόσο πρέπει να αλλάξω το πλαίσιο των ερωτήσεων από την πραγματική κατάσταση στο μαθηματικό πλαίσιο, καθώς αναγνωρίζω ότι η μαθήτρια, αν και χρησιμοποιεί τον όρο 'πλευρά', δυσκολεύεται να αρθρώσει μαθηματικό λόγο. Μόνο στο τέλος, και προκειμένου να έχουμε τον ορισμού του ημιτόνου, μετακινούμαι στο μαθηματικό πλαίσιο, αναφέροντας την υποτείνουσα.

Ε:. Για να βρούμε το ύψος Λυδία, τι χρειάζεται να βρούμε;
Λυδία: Την εφαπτομένη
Ε: Την εφαπτομένη τι να την κάνεις;
Λυδία. Πρέπει να βρούμε την πλευρά ΑΒ
Ε. Την πλευρά ΑΒ για να βρεις το ύψος; Το ύψος του δένδρου ψάχνουμε. Το δένδρο έσπασε Λυδία.
Λυδία: Ναι.
Ε: Ένα μέρος του είναι ποιο;
Λυδία. Το ΑΓ
Ε: Ένα κομμάτι του, λοιπόν, είναι το ΑΓ, το άλλο ποιο είναι;
Λυδία: Το σπασμένο.
Ε:Το σπασμένο, ποιο δηλαδή;
Λυδία: Το ΒΓ.
Ε: Το ΒΓ. Άρα, χρειάζεται να υπολογίσεις τι;
Λυδία: …..
Ε: Τη ΒΓ.
Λυδία: Ναι.

Ε: Τι είναι η ΒΓ για το ορθογώνιο τρίγωνο;
Λυδία: Υποτείνουσα.

(Μάθημα 5ο , σελίδα 2)

Η επιλογή του καθημερινού πλαισίου φάνηκε να λειτουργεί θετικά, καθώς , όπως έδειξε η εξέλιξη του μαθήματος, οι μαθητές αναγνώρισαν την αναγκαιότητα ορισμού καινούργιων τριγωνομετρικών αριθμών.

Ε: Ωραία!!!!! Άρα, λοιπόν, χρειάζεται να ορίσουμε καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Στην προσπάθειά μας αυτή τι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε;
Ναταλία: Τη γωνία
Ε: Τη γωνία και τι άλλο; Τη γωνία τη χρησιμοποιούμε και στην εφαπτομένη Ναταλία. Τι άλλο θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε;
Ναταλία: Την υποτείνουσα.

(Μάθημα 5ο, σελίδα 3)

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στην εξέλιξη του μαθήματος στην Ευκλείδεια διαίρεση σε τάξη της Α΄ γυμνασίου. Στόχος της συζήτησης είναι να κατανοήσουν οι μαθητές πότε σταματάει η διαδικασία της διαίρεσης, χρησιμοποιώντας το μοίρασμα μελομακάρονων σε κουτιά. Το επεισόδιο είναι γεμάτο διλήμματα, καθώς οι μαθητές αδυνατούν να αιτιολογήσουν, παρά το γεγονός ότι οι ερωτήσεις είναι διατυπωμένες σε καθημερινό πλαίσιο. Το γεγονός αυτό με αναγκάζει να ενσωματώνω στις ερωτήσεις μου και τις απόψεις των μαθητών που απάντησαν λίγο πριν, χωρίς να προχωρώ στη διατύπωση συμπερασμάτων, χρησιμοποιώντας το μαθηματικό πλαίσιο. Χαρακτηριστικό ρόλο φάνηκε να διαδραματίζει η αναφορά στο γεγεονός ότι υπόλοιπο μελομακάρονων είχαν και άλλοι μαθητές, αλλά παρόλα αυτά η διαδικασία συνεχίστηκε. Στο τέλος του διαλόγου κάποιος μαθητής δίνει μία εξαιρετική απάντηση, που ερμηνεύει την έννοια του υπολοίπου εντός μαθηματικού πλαισίου.

Ε: Παιδιά, παιδιά. Εγώ σε ρωτάω και νομίζω ότι η ερώτησή μου είναι σαφής, πότε θα σταματούσαμε τη διαδικασία της τοποθέτησης;
Δανάη: Όταν θα τελειώσουμε τα μελομακάρονα
Ε: Θα τελειώσουν ποτέ τα μελομακάρονα; Ε;
Δανάη……
Ε. Δηλαδή θα τα τοποθετήσουμε όλα στο κουτί;
Δανάη: Όχι θα περισσέψουν 2.
Ε: Δηλαδή, αυτό τι σημαίνει; Τότε θα πεις τι κάνω; Σταματάω. Γιατί θα σταματήσεις; Η Καλλίνα είπε συνεχίζω, ο Ματθαίος είπε συνεχίζω , η Τάνια είπε προ-ολίγου συνεχίζω, εσύ γιατί θα σταματήσεις;
Δανάη: Γιατί δε θα μπορώ να τα χωρίσω σε άλλο κουτί;
Ε: Γιατί δε θα μπορώ να τα χωρίσω;

Δανάη: Γιατί μένει υπόλοιπο.
Ε: Τι θα πει μένει υπόλοιπο; Και προ ολίγου και στην Καλλίνα έμεινε, και στην Τάνια3 έμεινε και στον Ματθαίο έμεινε.
Δανάη. Ναι, αλλά τότε μπορούσαμε να προχωρήσουμε, γιατί είχαμε περισσότερα.
Ε: Δηλαδή, τι θα πει είχαμε περισσότερα; Δεν το καταλαβαίνω αυτό, περισσότερα από τι; Η Καλλίνα από τον Ματθαίο και ο Ματθαίος από την Τάνια;
Δανάη: Κάποια πολλαπλάσια….
Ε:Κων/νε;
Κων/νος: Μένει ένα υπόλοιπο μελομακάρονων, που δε μπορεί να διαιρεθεί περισσότερ.ο

(Μάθημα 4ο, σελίδα 8)

Η διαχείριση των παρεμβάσεων των μαθητών, που ξεφεύγουν των διδακτικών στόχων του μαθήματος, αποτελεί μια ακόμη πηγή διλημμάτων κατά τη διδασκαλία. Συχνά διλήμματα τέτοιας φύσης συνδέονται με τους περιορισμούς που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα, οι οποίοι συνάδουν, τις περισσότερες φορές, και με τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος. Στην συνέχεια του παραπάνω μαθήματος ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος, που είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση διλήμματος, όπου με την παρέμβαση ενός μαθητή, αναδεικνύεται ένα θέμα που δεν είναι μέρος των στόχων του μαθήματος. Συγκεκριμένα, μία μαθήτρια εγείρει το ρόλο του μηδενός στα πολλαπλάσια και κατ΄ επέκταση στη διαιρετότητα. Το δίλημμα που αντιμετωπίζω αναφέρεται τόσο στο αν θα πρέπει να ασχοληθώ με την παρατήρηση του μαθητή ή να κάνω μια απλή αναφορά και να προσπεράσω το ζήτημα που τέθηκε, όσο και στη διερεύνηση της συλλογιστικής της μαθήτριας, με αναφορά στη συνειδητοποίηση από μέρους της, της σπουδαιότητας της σκέψης της.

Ε: Αυτό είναι λόγω της διαιρετότητας. Λόγω της διαιρετότητας, δηλαδή, πάντοτε το πλήθος των ακεραίων μονάδων, χρησιμοποιώ μία έκφραση που λέτε εσείς , θα βγαίνει, τι πράγμα,…ακριβώς. Έτσι δεν είναι;
Τάνια: Όχι εκτός από το 0. Επειδή υπάρχει το 0.
Ε: Δηλαδή, όταν λες, υπάρχει το 0 τι εννοείς;
Τάνια. Το 0 είναι σαν εξαίρεση, είναι προβληματικός αριθμός έχουμε πει.
Ε: Το μηδέν είναι πολλαπλάσιο όλων.
Τάνια. Το 0.
Κάποιος μαθητής τη διακόπτει λέγοντας: *και το 1*
Ε: Θα μπορούσαμε να πούμε ότι χωρίζεται το 0 σε 0 ομάδες των 5 μονάδων η κάθε μία;
Τάνια: Ναι, και αυτό.
Ε: Έτσι δεν είναι; Δηλαδή, σε καμία ομάδα.
Στέλιος: Ή σε 5 ομάδες των 0 μονάδων

(Μάθημα 4ο, σελίδες 3,4)

Αναγνωρίζοντας τη σπουδαιότητα της παρέμβασης, δίνω τον λόγο στην μαθήτρια να αναπτύξει τον συλλογισμό της. Στη συζήτηση εμπλέκεται και ένας άλλος μαθητής, που ξεκαθαρίζει πλήρως το ρόλο του μηδενός .

Το παρακάτω επεισόδιο αφορά στην Ευκλείδεια διαίρεση της Α΄ τάξης του γυμνασίου. Η συζήτηση περιστρέφεται γύρω από τις έννοιες 'πολλαπλάσια' και 'διαιρέτες' και στον τρόπο που αυτές συνδέονται με τις έννοιες τέλεια και ατελής διαίρεση. Δίλημμα εντοπίζεται, όταν, αν και οι διδακτικοί στόχο του μαθήματος έχουν ικανοποιηθεί, κάποιος μαθητής ζητά να παρέμβει και αναφέρεται σε ένα ακόμα στοιχείο σύνδεσης: στην επίλυση εξίσωσης στο σύνολο των φυσικών.

> *Ε: Δεν υπάρχει, δηλαδή, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός έτσι ώστε 4.χ να μας κάνει πόσο; 26 ή … Πολύ ωραία ο Γιάννης τοποθετήθηκε και είπε δεν μπορώ να τον χωρίσω σε χ ομάδες των 4.*
> *Γιάννης: Στο σύνολο των φυσικών*
> *Ε: Άρα, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός χ, ώστε 4.χ να μας κάνει το 26. Οπότε αυτό σημαίνει ότι δε, Γιάννη συνέχισε ότι δεν…*
> *Γιάννης: Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να χωρίσουμε το 24*
> *Ε: Το 26*
> *Γιάννης. Σε χ ομάδες των 4.*
> *Ε. Δεν μπορώ να χωρίσω το 26 σε χ ομάδες.*
> *Γιάννης: Των 4 ακεραίων μονάδων η κάθε μία.*
> *Ε: Πολύ ωραία. Σε χ ομάδες των 4 ακεραίων μονάδων η κάθε μία . Και, βέβαια, επειδή ήδη ακούστηκε αυτό που θέλουμε και είναι ο στόχος μας.*
> *Ε: Σε χ ομάδες των 4 μονάδων η κάθε μία. Γιώργο τι θέλεις;*
> *Γιώργος . Μπορούμε να πούμε το 26:4=χ που αυτό δεν ισχύει.*
> *Ε: Δεν ισχύει;*
> *Γιώργος: Στο σύνολο των φυσικών.*
> *Ε: Πάρα πολύ ωραία. Πάλι, λεει τώρα, αντιστρέφει τη διαδικασία ο* Γιώργος *και* λέει *αυτό σημαίνει λοιπόν, κύριε, ότι το 26:4=χ , ο χ δεν είναι φυσικός. Και αυτό θα μπορούσε να είναι σωστό. Δηλαδή, όπως λέμε αυτή η διαίρεση τι είναι στο Ν;*
> *Γιώργος: Αδύνατη*
> *Ε: Αδύνατη. Ωραία.*
>
> *(Μάθημα 4ο, σελίδα 5)*

Η σύνδεση των εννοιών με πολλαπλές ερμηνείες βοηθά στην καλύτερη κατανόησή τους, ειδικά όταν αυτές αναφέρονται και συζητιούνται από τους μαθητές μέσα στην τάξη. Σε αυτό το σκεπτικό εδράζεται και ο τρόπος αντιμετώπισης της παρέμβασης του μαθητή, που θεωρήθηκε βασική. Οι συχνές αναφορές στο σύνολο των φυσικών, μάλιστα, ισχυροποιεί τους στόχους του μαθήματος.

Ο τρόπος αξιοποίησης και διαχείρισης της προσφοράς των μαθητών και η ανάδειξή τους ως ένα από τα μείζονα θέματα της διδασκαλίας είναι η αφετηρία δημιουργίας διλημμάτων. Ο διδάσκων πρέπει ταυτόχρονα να επενδύει, χωρίς να ακυρώνει την προσφορά αυτή, να συμπληρώνει τυχόν ατέλειες που εμφανίζει ο μαθηματικός λόγος των μαθητών, να ενθαρρύνει την συμμετοχή και όλα αυτά σε σχέση με τους περιορισμούς των διδακτικών στόχων και της διάρκειας της διδακτικής περιόδου.

Το απόσπασμα παρακάτω προέρχεται από την ολοκλήρωση ενός μαθήματος στην Τριγωνομετρία της Β΄ γυμνασίου, όπου καταβάλλεται προσπάθεια διατύπωσης του ορισμού των ημιτόνου και συνημιτόνου. Στο απόσπασμα αυτό έχουμε δίλημμα, το οποίο αφορά στον τρόπο διαχείρισης της καινούργιας γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές και στην ανάδειξη της κατασκευής των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας. Με κατάλληλες δομημένες δραστηριότητες, έχουμε καταλήξει στον ορισμό του συνημιτόνου οξείας γωνίας και από κάποιον μαθητή έχει ζητηθεί να τον διατυπώσει. Ο μαθητής ενθαρρύνεται στην όσο το δυνατό ορθότερη διατύπωση του ορισμού, καθώς επισημαίνεται ότι ό,τι διατυπώσει θα καταγραφεί από τους συμμαθητές του. Δίλημμα εντοπίζεται όταν κάποιος από την τάξη ζητά επαναδιατύπωση του ορισμού που δόθηκε πριν λίγο.

> *Ε: Αφήνουμε λίγο χώρο για να ξεχωρίσει, Παναγιώτης. Ο άλλος τριγωνομετρικός αριθμός ήταν το συνημίτονο, άρα, λοιπόν, διατύπωσε.*
> *Παναγιώτης: Συνημίτονο μίας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου*
> *Ε: Ακούτε και γράφετε τώρα έτσι;*
> *Παναγιώτης: Ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.*
> *Κάποιος μαθητής. Το ξαναλέτε λίγο;*
> *Ε: Όχι εγώ, ο Παναγιώτης θα το πει. Παναγιώτη επανάλαβε.*
> *(Μάθημα 5ο, σελίδα 6)*

Η επαναδιατύπωση από τον διδάσκοντα του ορισμού ενδεχομένως να σημαίνει και ακύρωση της προσφοράς και συμβολής του μαθητή στο μάθημα. Ο λόγος, λοιπόν, ξαναπερνά στον Παναγιώτη, ενώ ακολουθεί ο συμβολισμός, στον οποίο η συμβολή του μαθητή δρα καταλυτικά, προκειμένου να ολοκληρωθεί το μάθημα.

> *Παναγιώτης: Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου είναι ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.*
> *Ε: Ακολουθεί ποιος; Ο συμβολισμός. Συμβολίζουμε συνω, δηλαδή. Παναγιώτη το συνημίτονο της γωνίας ω είναι;*

Παναγιώτης: Είναι το ΑΒ προς ΑΓ.
Ε: Ωραιότατα. Πάρα πολύ ωραία.

(Μάθημα 5ο, σελίδα 6)

Η επιλογή του «καλού» μαθητή είναι μία πηγή επικοινωνιακών διλημμάτων. Μαθητές, οι οποίοι έχουν ξεχωρίσει είτε για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά είτε για τις γνώσεις τους, που μεταφράζονται σε συμμετοχή και δημιουργικότητα κατά το μάθημα, συχνά χρησιμοποιούνται προκειμένου να εξελίξουν μια διδασκαλία, η οποία φαίνεται να τελματώνει, ή να αναπτύξουν ένα συλλογισμό στην εισαγωγή της νέας γνώσης ή, ακόμη, να συνοψίσουν τα μέχρι μίας συγκεκριμένης στιγμής δρώμενα της τάξης. Διλήμματα που αναπτύσσονται εδώ επιλύονται είτε με στενή καθοδήγηση των μαθητών αυτών, ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό, είτε με την επιλογή άλλου καλού μαθητή.

Το παρακάτω μάθημα αφορά στην εισαγωγή του μαθήματος στης επιμεριστικής ιδιότητας των φυσικών αριθμών σε τμήμα της Α΄ γυμνασίου. Οι μαθητές, υπολογίζοντας την περίμετρο ενός ορθογωνίου με διάφορους τρόπους, οδηγούνται στην ισότητα που εκφράζει η επιμεριστική ιδιότητα. Δίλημμα εντοπίζεται όταν ο πολύ καλός μαθητής, ο Στέλιος, δεν διατυπώνει την προαπαιτούμενη έννοια της περιμέτρου με τέτοιο τρόπο – ως άθροισμα των μηκών των πλευρών του πολυγώνου-, ώστε να χρησιμοποιηθεί για τις ανάγκες του μαθήματος, αλλά δίνει μία πολύ γλαφυρή περιγραφή της. Στην προσπάθεια αναζήτησης μίας πιο αυστηρής διατύπωσης, η οποία να μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να γίνουν οι απαραίτητες διασυνδέσεις που να οδηγούν στο ζητούμενο, επιλέγεται άλλος καλός μαθητής.

Ε: 2 επί 3 είναι η περίμετρός του; Το εμβαδόν του είναι. Θυμάται κάποιος να μου πει τι είναι περίμετρος; Στέλιο.
Στέλιος: Είναι το γύρω- γύρω.
Ε: Τι θα πει το γύρω- γύρω. Ναι.
Γιάννης: Το μήκος και το πλάτος της επιφάνειάς του.
Πολλοί μαθητές: Όχι, όχι.
Ε:Της επιφάνειας; Τα έχουμε λίγο μπερδεμένα στο μυαλό μας. Αφροδίτη
Αφροδίτη: Το άθροισμα των πλευρών του.
Ε: Πολύ ωραία. Περίμετρος, λοιπόν, είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.

(Μάθημα 3ο, σελίδα 2)

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στην εξέλιξη του μαθήματος που αφορά στη δύναμη με βάση ρητό και εκθέτη ακέραιο σε τάξη της Β΄ γυμνασίου. Από τη

Μαργαρίτα, μία μαθήτρια που παρουσίασε εξαιρετική συνέπεια και σχολαστικότητα κατά τη διάρκεια των προηγούμενων μαθημάτων, έχει ζητηθεί να διατυπώσει την περίπτωση, όπου ο εκθέτης μίας δύναμης είναι αρνητικός. Δίλημμα εντοπίζεται όταν κάποιος μαθητής προσπαθεί να παρέμβει στα ειρημένα της μαθήτριας.

Ε: Μόνο τη βάση, πολύ ωραία. Πάρα πολύ ωραία. Θα σας πω με κάποια παραδείγματα. Άρα, τι λεει ο Μάρκος. Αντιστρέφω τη βάση, επομένως η βάση από α τι θα γίνει αγόρι μου;
Μάρκος: 1/α
Ε: 1/α και όλο εις τη ν. Δηλαδή, αντιστρέφω τη βάση και ο εκθέτης Μαργαρίτα από αρνητικός τι γίνεται;
Μ: Θετικός
Ε: Και αν θέλουμε, όχι Χρήστο η Μαργαρίτα θα το πει, αν θέλουμε τώρα Μαργαρίτα να το προχωρήσουμε ακόμα ένα βήμα, τι ξέρουμε πως υψώνουμε ένα κλάσμα σε έναν εκθέτη;
Μαργαρίτα : Το κάνουμε 1 εις τη ν
Ε. Που μας κάνει πόσο ;
Μαργαρίτα. 1
Ε.1 ωραία προς;
Μαργαρίτα: α εις τη ν

(Μάθημα 1ο, σελίδα 4)

Χαρακτηριστικό του παραπάνω επεισοδίου είναι η ασφυκτική σχεδόν καθοδήγηση της μαθήτριας, ώστε να καταλήξουμε στη σωστή σχέση του ορισμού.

3.4. Συνεργασία εκπαιδευτικού – ερευνητών

Η συνεργασία που αναπτύχθηκε μεταξύ εκπαιδευτικού (εμένα) και των δύο ερευνητών, οι οποίοι επόπτευαν αυτήν την εργασία (αναφέρονται στο εξής ως 'ερευνητές 1 και 2'), όπως έχει ήδη σημειωθεί, επιδιώχθηκε να έχει το χαρακτήρα μελέτης της εκπαιδευτικής πράξης του εκπαιδευτικού και από τους ερευνητές μαζί με τον εκπαιδευτικό. Με άλλα λόγια, οι ερευνητές προσπάθησαν να ακούν και να σκέφτονται με τον εκπαιδευτικό, αντί να του λένε τι να κάνει, με μακροπρόθεσμο στόχο την υποστήριξή του στην ανάπτυξη εναλλακτικών αναγνώσεων των διδακτικών του πρακτικών και λιγότερο στην αλλαγή τους. Το στίγμα μίας τέτοιας συνεργασίας περιγράφεται από τους Πόταρη κ.ά. (2005), όπου αναφέρεται ότι εφόσον «όλο και περισσότερο γίνεται αποδεκτό ότι η μάθηση αποτελεί μια διαδικασία συμμετοχής σε μια κοινότητα πρακτικής και ιδιαίτερα διαμόρφωσης 'ταυτότητας' μέσα από τη συμμετοχή σε αυτή την κοινότητα, η μάθηση στο πλαίσιο της ερευνητικής συνεργασίας μεταξύ εκπαιδευτικού και ερευνητή μπορεί να γίνει αντιληπτή ως διαδικασία συμμετοχής σε μία κοινότητα 'διερεύνησης'». Υπό το πρίσμα αυτής της συνεργασίας , βασικό γνώρισμα της οποίας είναι η ισότητα μεταξύ των μελών της σε ό,τι αφορά την αξία της συμβολής τους στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση των μαθημάτων, εκπονήθηκε σχέδιο εργασίας, το οποίο διαμόρφωνε ένα πλαίσιο λειτουργίας μιας τέτοιας κοινότητας διερεύνησης, με μέλη εμένα και δύο τους δύο ερευνητές (επόπτες της εργασίας). Σύμφωνα με αυτό, μετά τον αρχικό σχολιασμό των μαθημάτων από τον εκπαιδευτικό, καθένας από τους ερευνητές πρόσφερε τη δική του ανεξάρτητη ανάγνωση. Ακολουθούσε αναστοχασμός επί των τριών αναγνώσεων, γινόταν η σύνθεση αυτών των αναστοχασμών και, μετά από συζήτηση, αποφασιζόταν η κοινή ανάγνωση και ο σχεδιασμός του επόμενου μαθήματος. Δηλαδή, υιοθετήθηκε μια διαλογική σχέση μεταξύ των εταίρων της συνεργασίας (Sfard, 2005).

Για να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα, που αφορούσε, συνοπτικά, στα διδακτικά μου διλήμματα, στον τρόπο με τον οποίο οι αναγνώσεις τους από τους ερευνητές επιδρούσαν στις προσωπικές μου αναγνώσεις αυτών των διλημμάτων και, κατ΄ επέκταση στον τρόπο διαχείρισής τους στην τάξη, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε δύο επίπεδα. Το πρώτο αφορούσε στο τι παρατηρούσε και σχολίαζε ο κάθε συμμετέχων, με βάση το κείμενο της απομαγνητοφωνημένης διδασκαλίας, και το δεύτερο στη διαπραγμάτευση των μελών της ομάδας αναφορικά με τα σημεία που αναδείχθηκαν στο πρώτο επίπεδο. Ειδικότερα, στο δεύτερο επίπεδο

επιλέγονταν και αναλύονταν ιδιαίτερα τα σημεία διαφωνίας του εκπαιδευτικού με τους ερευνητές, σχετικά με το πως ερμήνευαν συγκεκριμένα σημεία της διδασκαλίας. Η ανάλυση αυτή ανέδειξε ορισμένα χαρακτηριστικά στοιχεία, τα οποία συνδέονται με επιστημολογικά και επικοινωνιακά ζητήματα των διδασκαλιών και συζητιούνται παρακάτω.

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας

Ο τρόπος χρήσης της γλώσσας αποτέλεσε σημείο αναφορά και για τους τρεις εταίρους της συνεργασίας, καθώς δίνω ιδιαίτερη σημασία σε αυτήν τη διάσταση στη διδασκαλία μου. Συγκεκριμένα, σχολιάστηκε η τάση να αναζητώ την ακρίβεια στη χρήση των όρων ή να αναλύω γλωσσικά ένα καινούριο όρο, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα, που αφορά στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού σε τάξη της Α΄ γυμνασίου.

Ε: Επιμεριστική ιδιότητα τι είναι ; Ας ξεκινήσουμε από το τι σημαίνει επιμερίζω στη νεοελληνική γλώσσα. Ναι

Τάνια: *Ότι μπορούμε να ξεχωρίσουμε κάποια .....*
Την διακόπτω: Επιμερίζω δε σημαίνει ξεχωρίζω
Ακούγεται κάποιος μαθητής: Κάτι με τα μέρη.
Ε: Ναι δηλαδή τι κάνει. Γιάννη
Γιάννης. Πρέπει να δώσουμε πρώτα τον ορισμό της ιδιότητας
Ε: *Είναι ιδιότητα αυτή… δεν έχει ορισμό. Θα τη δούμε ως ιδιότητα.*
Ματθαίε;
Ματθαίος: *Μήπως σημαίνει ότι κάτι μοιράζω;*

(Μάθημα 3ο, σελίδα 2)

Αιτιολογώντας αυτήν την πρακτική ως μια τάση μου να ενθαρρύνω τους μαθητές μου, αναφέρω στο σχετικό σχόλιο ότι «Απο-πλαισιώνω την ιδιότητα από τα μαθηματικά, το κάνω συχνά για να παρακινήσω και τους μαθητές που λένε 'είμαι καλός στη γλώσσα'». Σε αντίθεση, τα σχόλια των ερευνητών εστιάζονται περισσότερο στην επικοινωνιακή διάσταση της διδακτικής ενέργειας. Συγκεκριμένα, ο Ερευνητής 1 αναφέρει «Ενδιαφέρον: Διαχείριση επικοινωνίας- αξιοποιείς όλο το προηγούμενο σκηνικό αλλά, κυρίως, αποτρεπτικά – για να μην κάνουν το ίδιο λάθος (τη σύνδεση με τη διαίρεση) και γι' αυτό τα λες όλα εσύ», ενώ ο ερευνητής 2 «Υπερβολική έμφαση στην 'ακριβή' γλώσσα, με αποτέλεσμα να μην επιτρέπεται στο μαθητή να εκφραστεί». Με εφαλτήριο τα σχόλια των ερευνητών δρομολογείται και ο έντονος προβληματισμός μου επί των διδακτικών ενεργειών μου, αναφορικά με τον διαχωρισμό της ιδιότητας από τον ορισμό. Ο ερευνητής 1 μου ζητά να σκεφτώ αυτή

τη διδακτική μου ενέργεια, θέτοντάς μου το ερώτημα «γιατί δεν εξηγείς εδώ τη διαφορά;». Φυσικά, αναγνωρίζω ότι αυτή ήταν μία πολύ καλή στιγμή –διδακτικά –, να εξηγήσω τη διαφορά, κάτι το οποίο δε συνειδητοποίησα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, ίσως γιατί εστίαζα στο αποτέλεσμα και όχι στην πορεία προς αυτό στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Οι αρχικές αναλύσεις δρομολογούν τον αναστοχασμό επί των διδακτικών μου ενεργειών. Αρχίζω να προβληματίζομαι σε θέματα που μέχρι εκείνη τη στιγμή είτε δε με απασχολούσαν ιδιαίτερα, είτε τα θεωρούσα, ίσως, δεδομένα. Έχοντας μια σχετική διδακτική 'εμπειρία' διακατέχομαι από την πεποίθηση ότι όλα βαίνουν καλώς έτσι όπως τα σχεδιάζω και τα υλοποιώ στην τάξη μου, όμως οι ερευνητές μου θέτουν προβληματισμούς και επισημαίνουν σημεία καίρια για την κατασκευή του ορθού μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές.. Ο προβληματισμός μου και, ταυτόχρονα, η συμβολή των ερευνητών στον επαναπροσδιορισμό των διδακτικών μου ενεργειών φάνηκε στη συνέχεια των μαθημάτων. Παράλληλα, οι ερευνητές συνειδητοποιούν προοδευτικά ότι πολλές ενέργειές μου πηγάζουν από το γεγονός ότι κινούμαι στα στενά όρια της τάξης μου, έχω απέναντί μου τους μαθητές μου, μια ύλη που τρέχει και τα στενά χρονικά περιθώρια που μου παρέχει μια διδακτική περίοδος.

Στο παρακάτω απόσπασμα, που αφορά στην Ευκλείδεια διαίρεση σε τμήμα της Α΄ γυμνασίου, φαίνεται να διακρίνονται έντονα οι περιορισμοί που θέτουν το αναλυτικό και το ωρολόγιο πρόγραμμα, καθώς και η σύνθεση των μαθητών και οι όροι λειτουργίας της τάξης. Συγκεκριμένα, μετά από μια συζήτηση γύρω από τις έννοιες διαιρέτης, πηλίκο και υπόλοιπο, οι μαθητές έχουν καταλήξει στην ισότητα που περιγράφει την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης λίγο πριν το τέλος της διδακτικής περιόδου. Αναγνωρίζοντας το πολύ καίριο σημείο στο οποίο έχει φτάσει η διδασκαλία, δεν σταματώ, αλλά συνεχίζω το διάλογο με τους μαθητές, προκειμένου να καταλήξουμε σε συμπεράσματα.

> *Ε: Ισότητα, πολύ ωραία Τάνια. Από τη μία χωρίζαμε τον αριθμό σε ομάδες, αλλά κάθε φορά που τον χωρίζαμε σε ομάδες, ταυτοχρόνως, βρίσκαμε και μια ισότητα. Για να βρούμε αυτή την ισότητα, Τάνια και όλη η τάξη μαζί. Από τη μία χωρίζαμε σε ομάδες και από την άλλη, το τονίζω, γράφαμε και μια ισότητα. Τι θα του έλεγες του Σωτήρη που έλειπε, Τάνια, από το μάθημα*
> *Τάνια: Ότι κάθε αριθμός…..εεεεε*
> *Ε: Ότι κάθε αριθμός..*
> *Τάνια: Δεν καταλαβαίνω*
> *Ε: Εγώ επαναλαμβάνω ότι λες. Σε κάθε αριθμό…*

Τάνια: Σε κάθε αριθμό υπάρχουν δύο διαιρέτες, υπάρχει (***εδώ χτυπάει το κουδούνι)…***
Ε. Με άλλα λόγια, για να το συμπληρώσουμε , στο πρώτο μέρος ήταν αυτό που έκανε η Τάνια που χώρισε τον αριθμό σε ομάδες και έβλεπε ότι κάθε φορά περισσεύει κάτι. Με άλλα λόγια, μας είπε η Τάνια ότι, ταυτοχρόνως, προκύπτει και μια ισότητα. Δηλαδή, τι θα γράψουμε; Αν α>β, τότε ο α μπορεί να γραφεί πως;
Αλέξανρος: β.χ+ν
Ε: Αυτό που μας είπε η Μαρίνα το χωρίζουμε και το κάναμε μια σχέση ισότητας. Για μισό λεπτάκι, όμως, θα σταματήσουμε εδώ; Μήπως μπορώ να γεμίσω και άλλο κουτί;
Κάποιοι μαθητές: Όχι
Ε: Πως το ξέρω ότι δε γεμίζει; Γιατί; Αφροδίτη
Αφροδίτη: Το ν μικρότερο από το β
Ε: Με το ν να είναι μικρότερος από το β

(Μάθημα 5ο, σελίδα 12)

Το τέλος της διδακτικής περιόδου με αναγκάζει να καταφύγω σε λύσεις ανάγκης. Παρόλα αυτά, οι επιλογές μου στόχο έχουν τη ορθή κατασκευή της ταυτότητας της Ευκλείδειας διαίρεσης. Έτσι, παρά την ανησυχία που δημιουργήθηκε με το χτύπημα του κουδουνιού, οι μαθητές συνεχίζουν να συζητούν. Εντοπίζεται, φυσικά, και η έντονη ανησυχία μου να περατώσω τους διδακτικούς στόχους με το πέρας της διδακτικής περιόδου. Αυτό αναγνωρίζεται από τους ερευνητές, καθώς ο ερευνητής 2 σχολιάζει: «Οι μαθητές φαίνεται να λειτουργούν χαλαρά αλλά αποτελεσματικά», «Συνεχίσατε το μάθημα την επόμενη; Τι συνέβη; Μπόρεσαν τα παιδιά να καταλήξουν στην γενικευμένη ισότητα;». Οι ερευνητές δε σχολιάζουν την έντονη παρουσία μου στο επεισόδιο, όπως αυτή εκφράζεται με συγκεκριμένες ερωτήσεις, που προσπαθούν να συνδυάσουν το σενάριο της δραστηριότητας – η διαίρεση περιγράφεται ως μία διαδικασία τοποθέτησης μελομακάρονων σε κουτιά- με το φορμαλισμό της ισότητας, κάτι που γενικά μπερδεύει τους μαθητές. Ο ερευνητής 1 σχολιάζει: «Εδώ λοιπόν κλείνει η επεξεργασία της ιδέας. Ήρθε η ώρα του φορμαλισμού, της αναπαράστασης με γενικό τρόπο του παρατηρούμενου γεγονότος». Τα σχόλια των ερευνητών στρέφονται στο σύνολο του μαθήματος. Ο ερευνητής 1 «Συμφωνούμε ότι κύλησε καλά το επεισόδιο με τα μελομακάρονα από άποψη κατασκευής γνώσης από τους μαθητές, αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας στην τάξη». Ενώ ο ερευνητής 2 « Πιστεύω ότι υπήρχαν πολλά σημεία του μαθήματος, όπου υπήρχε αρμονία στόχων δικών σου και των μαθητών. Παρατήρησα ότι οι

μαθητές οικοδόμησαν το μαθηματικό νόημα. Η επικοινωνία ήταν διαφορετική ως αποτέλεσμα των διαφορετικών στρατηγικών σου».

Στο παρακάτω επεισόδιο, που αφορά στον ορισμό του ημιτόνου και συνημιτόνου οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο, και οι δύο ερευνητές εντοπίζουν το επιστημολογικό δίλημμα που αναφύεται κατά τον ανεξάρτητο σχολιασμό του μαθήματος. Ο ερευνητής 2 σχολιάζει: «Τα διλήμματα πηγάζουν κυρίως από το ότι οι μαθητές δεν κατανοούν. Είναι, όμως, και επιστημολογικά: ακρίβεια, φύση του λόγου.». Ενώ ο ερευνητής 1 αναφέρει ότι εντοπίζει «επιστημολογικού χαρακτήρα παρέμβαση»

Ε: Την υποτείνουσα. Ωραία. Υπάρχουν, λέει (το φύλλο εργασίας), κάποιες προϋποθέσεις για να κάνουμε κάτι τέτοιο; Εδώ, θα πρέπει να ανασύρουμε από το μυαλό μας τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η εφαπτομένη σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Υπάρχουν προϋποθέσεις; Ε, υπάρχουν;

Ζωή: Ναι

Ε: Ποιες;
Ζωή: Ότι η εφαπτομένη είναι… η εφαπτομένη κάθε γωνίας είναι η απέναντι κάθετος
Ε:. Ο σταθερός λόγος
Ζωή: Ναι, της απέναντι καθέτου με την προσκείμενη
Ε: Αν, λοιπόν, θα μπορούσαμε να ορίσουμε καινούργιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ποια θα ήταν η προϋπόθεση;
Ζωή: Να ξέρουμε την απέναντι κάθετη και την προσκείμενη
Ε: Αυτό είναι για την εφαπτομένη
Ζωή: Εεεε
Ε: Να επαναλάβουμε πάλι τι πάμε να κάνουμε. Φαίνεται ότι κάτι έχετε πάθει σήμερα, πρέπει στον τριγωνομετρικό αριθμό που θα ορίσουμε να χρησιμοποιήσουμε ποιόν;

(Μάθημα 5ο, σελίδα 4)

Τα σχόλια των ερευνητών, όμως, αναφέρονται και στον τρόπο αντιμετώπισης του διλήμματος, καθώς η συνεργασία μας έχει προοδευτικά περάσει σε άλλο επίπεδο, αρχίζει να γίνεται πιο εμβριθής και ουσιαστική. Οι στόχοι και των τριών γίνονται φανεροί και σχεδόν συγκλίνουν. Ο ερευνητής 1 σχολιάζει «Το πολεμάς περισσότερο χρόνο και καταφεύγεις σε λογικές υπενθυμίσεις προηγούμενων γνώσεων», «Δεν την αφήνεις να το εντοπίσει μόνη της, της το λες εσύ» και «Παρέχεις υποδείξεις, ζητάς υποθέσεις, αξιοποίηση διαδικασιών ελέγχου της γνώσης, περισσότερο από ό,τι σε άλλα μαθήματα.». Ο ερευνητής 2 «Επανάληψη , μάζεμα των προηγούμενων», «Προσπαθείς να συνδέσουν με τα προηγούμενα αλλά

και να ξεφύγουν από τα προηγούμενα» και «Δύσκολο να φανταστούν οι μαθητές τι θέλεις». Αναγνωρίζεται, όμως, το γεγονός ότι κινούμαι στο μικρόκοσμο της τάξης μου. Χαρακτηριστική είναι η ερώτηση του ερευνητή 2 «Μεγάλη σύγχυση. Πως αισθάνεσαι;»

Εστίαση στην επικοινωνία

Ο άξονας αυτός ανάλυσης επικεντρώνεται στο διάλογο, ο οποίος αναπτύχθηκε ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές και ανάμεσα στους ίδιους τους μαθητές. Αν και θέματα επικοινωνίας συζητήθηκαν και στον προηγούμενο άξονα, η εστίαση εδώ βρίσκεται στο ευρύτερο περιβάλλον, το οποίο εκφράζεται, κυρίως, μέσα από τις νόρμες επικοινωνίας, που οριοθετώ στην τάξη του. Τα αντίστοιχα σχόλια των ερευνητών στόχευαν και πάλι στη συνειδητοποίηση των ενεργειών μου και της αποτελεσματικότητάς τους: «Φαίνεται να μη δίνεις σημασία στο τι λένε, να δέχεσαι μόνο ό,τι ταιριάζει με αυτό που θέλεις», «Διατυπώνεις τη φράση που θέλεις, αφήνοντας μόνο ένα κενό για συμπλήρωση… Σαν να μην τους εμπιστεύεσαι», "γιατί άφησες μετέωρο τον Αντώνη;», «Η Αγγελική εγκαταλείπεται, πώς να αισθάνεται άραγε;»(ερευνητής 1), «Στο παρακάτω απόσπασμα ενός άρθρου αναφέρεται ότι, όταν οι μαθητές αυξάνουν τη συμμετοχή τους στη συζήτηση πάνω σε μαθηματικές ιδέες, αναμιγνύουν άτυπους ορισμούς με τυπικούς, προκαλώντας τις παραδοσιακές σημασίες των όρων. Αυτό αναφέρεται ως δίλημμα. Είναι για σένα;», «οδηγείς, όχι πολύ ασφυκτικά, υπενθυμίζεις, επανα-πλαισιώνεις» (ερευνητής 2). Αναγνωρίστηκε, όμως, και από τους τρεις εταίρους της συνεργασίας ότι τα επικοινωνιακά διλήμματα που δρουν περιοριστικά στη μάθηση συνδέονταν με το φόβο της μη επίτευξης των διδακτικών στόχων, την πίεση του χρόνου, καθώς και προηγούμενες συνήθειες των μαθητών εκ μέρους μου. Σ' αυτές τις περιστάσεις φάνηκε να τείνω να διατυπώνω κλειστές ερωτήσεις, ώστε να οδηγήσω τους μαθητές με ασφάλεια στο στόχο του μαθήματος, ακόμα και δίνοντας ο ίδιος την απάντηση.

Χαρακτηριστικά σχετικά σχόλια δικά μου είναι τα εξής :«Δεν μπορώ να περιμένω άλλο, ο χρόνος κυλά, καταφεύγω έτσι σε λύση ανάγκης» όπως επίσης «Οι ερευνητής 1 και ερευνητής 2 συμφωνούν ότι πολλές φορές καθοδηγώ τα παιδιά με ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού. Συμφωνώ. Η δική μου, όμως, οπτική διαφέρει. Δύο παράμετροι πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη: α) ο χρόνος που κυλά αμείλικτος ... Έχω μπροστά μου μια ύλη που πρέπει να διδαχτεί και τρέχω να προλάβω. β) Θέλω να εμπλέκονται σχεδόν όλοι οι μαθητές στη διαδικασία του μαθήματος. Νοιώθω

ικανοποιημένος βλέποντας αδύναμους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά. Χρησιμοποιώ, δηλαδή, τις ερωτήσεις… για να ενεργοποιήσω τους αδύναμους».

Εδώ, θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι διακρίνεται κάποια 'ένταση' ανάμεσα στους ερευνητές και σε μένα , λόγω των διαφορετικών τους στόχων, η οποία οδηγεί, ωστόσο, σε ένα βαθύτερο στοχασμό όλων των συμμετεχόντων. Αυτό φαίνεται από τα σχετικά σχόλιο των ερευνητών, όπως: «Αισθάνομαι ότι βιώνεις λίγο απόλυτα αυτά που λέμε. Μην αισθάνεσαι ότι σου ασκούμε κριτική …Ίσως να συζητάμε μόνο τα αρνητικά, γιατί έτσι εντοπίζονται και τα διλήμματα. Οι συγκρούσεις ... μας οδηγούν στην καινούρια γνώση. Σκέψου μόνο τις εναλλακτικές λύσεις. Κάποιες μπορεί να είναι εφικτές»(ερευνητής 2). Στο σημείο αυτό η αναστοχαστική διαδικασία δρα καταλυτικά. Μέσω αυτής εντοπίζονται σταδιακά οι αδυναμίες των διδακτικών μου πρακτικών, ενώ καινούργιες στρατηγικές που έρχονται στο προσκήνιο φαίνεται να προσφέρουν θετικά στη διδασκαλία. Έτσι, τα αποτελέσματα του αναστοχασμού μετατρέπονται σε πράξη και η νέα πράξη δίνει αφορμές για καινούργιο αναστοχασμό.

Το παρακάτω απόσπασμα αφορά στην Ευκλείδεια διαίρεση της Α΄ γυμνασίου. Η Τάνια είναι μία αδύναμη μαθήτρια, η οποία, όμως, προσπαθεί να ακολουθήσει την τάξη της. Προκειμένου να υποστηρίξω τη μαθήτρια τόσο γνωστικά όσο και συναισθηματικά, κρίνω σκόπιμο να την φέρω στο προσκήνιο της διδασκαλίας Το δίλημμα που αντιμετωπίζω αφορά στην ενθάρρυνση της μαθήτριας, χωρίς όμως τη δαπάνη ιδιαίτερου διδακτικού χρόνου, καθώς ό,τι ζητάω από αυτήν αφορούν στις εισαγωγικές έννοιες. Ο διάλογος που εκτυλίσσεται σχολιάστηκε και από τους δύο ερευνητές, χωρίς να λάβουν υπόψη τους περιορισμούς της τάξης, της ύλης και του χρόνου. Εντοπίστηκε μια διάσταση των απόψεων των ερευνητών, η οποία υπήρξε και εφαλτήριο για παραπέρα συζήτηση.

Ε: Τάνια. Κάποιος μαθητής υποστήριξε τα παρακάτω: αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χωρίσουμε μας ακέραιες μονάδες του 27 σε…ίσες…

> *Τάνια. …….*
> *Ε: Πρόσεξε να δεις τι γράψαμε πιο πάνω, γιατί κάναμε και λίγο συζήτηση και ίσως έχουμε χαθεί .Το 27, λοιπόν, γράψαμε, μας είπε η Καλλίνα, είναι πολλαπλάσιο του 3, γιατί η διαίρεση του 27 με το 3 τι είναι;*
> *Μαζί με την Τάνια: Τέλεια*
> *Ε: Τι υποστηρίζεις λοιπόν εσύ, ότι μπορούμε να χωρίσουμε μας ακέραιες μονάδες του 27 σε τι;*
> *Τάνια: Σε …*
> *Ε: Σε τι μπορούμε να χωρίσουμε μας ακέραιες μονάδες του 27. Το 27 έχει 27 ακέραιες μονάδες, έτσι Τάνια;*

Τάνια: Ναι
Ε: *΄Αρα, τι μπορούμε να κάνουμε εδώ;*
Ε: *Για πήγαινε επάνω στην αρχή. Πως ξεκινάει το φύλλο εργασίας μας, τι λέει;*
Τάνια: *Εδώ;*
Ε: *Ναι, στην αρχή*
Τάνια: *Ε…..*
Ε: *Τι λέει; Για το 27 τι λέει;*
Τάνια: *Είναι ίσο 3.9*

(Μάθημα 4ο, σελίδα)

Θεώρησα ότι αυτό που έπρεπε να κάνει είναι μία απλή διαίρεση, εφόσον έχει προηγηθεί συζήτηση για τα πολλαπλάσια. Προσπαθώ να οδηγήσω την μαθήτρια άμεσα προς τα εκεί, αυτή, όμως, φαίνεται ότι δεν έχει αποσαφηνίσει τις σχετικές έννοιες. Ο ερευνητής 1 σχολιάζει «Διαβάζεις εσύ τις οδηγίες, πόσο καλή πρακτική είναι αυτή; Δεν της εκχωρείς ούτε αυτή την ευθύνη», «Της ζητάς να κάνει μεγάλο άλμα, χωρίς να έχεις ιδέα για το σημείο μέχρι το οποίο παρακολουθεί τη συγκεκριμένη διαδικασία, καθώς δεν της έδωσες καθόλου χρόνο και χρόνο να το εκθέσει», «Φαίνεται να προσπαθείς να τη βάλεις στο παιχνίδι με βάση τη γνώμη που έχεις σχηματίσει γενικά γι΄ αυτήν». Ο ερευνητής 2 εμφανίζεται να βρίσκεται πιο κοντά στις σκέψεις μου, όταν σχολιάζει «Συνοψίζεις, για ποιο λόγο; Το έκανες και τις προηγούμενες φορές, αλλά εδώ μου φαίνεται απλώς ως επανάληψη, αλλά ίσως ως μια καλή στρατηγική, για να συμμετάσχουν και οι υπόλοιποι μαθητές και ίσως και η Τάνια να μπορέσει να καταλάβει το χωρισμό σε ακέραιες μονάδες», «Συγκρατείσαι, δε της λες το αποτέλεσμα, της λες να σκεφτεί ξανά το πρόβλημα με συγκεκριμένη αναφορά στο φύλλο εργασίας».

Κεφάλαιο 4ο
Συζήτηση

Η ανάλυση των μαθημάτων ανέδειξε τα διλήμματα του διδάσκοντα ως έναν ακόμη παράγοντα που αναφύεται κατά την εμπλοκή των μαθητών στη συζήτηση και διαπραγμάτευση των μαθηματικών νοημάτων που αναπτύσσονται στη διάρκεια της διδασκαλίας. Είναι, λοιπόν, αυτή η εμπλοκή των μαθητών στην κατασκευή του νοήματος, η οποία οδηγεί τους εκπαιδευτικούς σε μια πληθώρα από αποφάσεις και, πολλές φορές, αναπόφευκτα και στην τροποποίησή τους πριν, αλλά και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Ο εκπαιδευτικός, έχοντας ως γνώμονα τη μορφή και το περιεχόμενο της δραστηριοποίησης των μαθητών, μέσω των παρεμβάσεών του, αναγκάζεται πολλές φορές να αλλάξει όλο το διδακτικό πλάνο που κατέστρωσε πριν το μάθημα, όταν αναγνωρίζει ότι οι μαθητές δεν αξιοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις ή τις χρησιμοποιούν με αναποτελεσματικό τρόπο ή και λανθασμένα, με συνέπεια η διδασκαλία να τελματώνει ή να οδηγεί σε αδιέξοδο. Η αποτελεσματικότητα αυτών των αλλαγών εξαρτάται καθοριστικά από τον αναστοχασμό των ενεργειών του με βάση τα δεδομένα του επιστημονικού πεδίου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ένας από τους τρόπους πρόσβασης του εκπαιδευτικού σε αυτά τα δεδομένα αποτελεί η συνεργασία του με ερευνητές του πεδίου. Σε μια τέτοια συνεργασία επικεντρώθηκε και αυτή η εργασία.

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης που εκπονήθηκε κινούνται σε δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος αφορά στα επιστημολογικά και στα επικοινωνιακά και διλήμματα που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός (στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο συγγραφέας αυτής της εργασίας) στην τάξη των μαθηματικών και στον τρόπο διαχείρισή τους και ο δεύτερος άξονας στο περιεχόμενο και στη μορφή της συνεργασίας που αναπτύχθηκε μεταξύ του εκπαιδευτικού και των δύο ερευνητών, με στόχο τις εναλλακτικές αναγνώσεις αυτών των διλημμάτων και την (πιθανή) εξέλιξη των διδακτικών πρακτικών του εκπαιδευτικού. Οι επόμενες ενότητες επιχειρούν να παρουσιάσουν μια σύνθεση των βασικών σημείων που εντοπίστηκαν μέσα από τη ανάλυση των εμπειρικών δεδομένων, που αφορούσαν σε καθέναν από τους δύο άξονες και να τα συζητήσουν με αναφορά στα βιβλιογραφικά δεδομένα, που εκτέθηκαν στο κεφάλαιο ένα.

Διλήμματα στην τάξη των μαθηματικών: Επιστημολογικά και επικοινωνιακά

Η επεξεργασία-ανάλυση των μαθημάτων, αναφορικά με τα κυρίαρχα επιστημολογικά και επικοινωνιακά διλήμματα που αντιμετώπισα και κλήθηκα να διαχειριστώ κατά το σχεδιασμό και, στη συνέχεια, κατά την υλοποίηση της διδασκαλίας μου στην τάξη των μαθηματικών, ανέδειξε έναν αριθμό από χαρακτηριστικά σχετικά με τις δύο αυτές κατηγορίες διλημμάτων.

Συγκεκριμένα, τα βασικότερα διλήμματα που συνδέονταν με τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης αφορούσαν:

- Στον ορισμό, που εμφανίστηκε ως πηγή πολλών διλημμάτων, καθώς οι μαθητές δεν φάνηκε να έχουν σαφή άποψη τόσο για το τι σημαίνει 'ορίζω' μια μαθηματική έννοια, όσο και για το βασικό ρόλο που αυτός κατέχει στα μαθηματικά. Συχνά ο ορισμός συγχέεται με τις ιδιότητες της έννοιας και άλλες φορές πάλι με τη χρηστικότητά της στα μαθηματικά. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με όσα αναφέρουν οι Σακονίδης κ.ά. (2000), δηλαδή, ότι στις ελληνικές τάξεις των μαθηματικών τόσο του Δημοτικού όσο και του Γυμνασίου «*το μαθηματικό περιεχόμενο εμφανίζεται επιστημολογικά ομογενοποιημένο από όλους τους δασκάλους*». Στην ίδια έρευνα, μάλιστα, διαπιστώνεται ότι παρατηρείται «*συρρίκνωση εννοιών και ορισμών σε διαδικασίες χειρισμού, κατασκευής και αναγνώρισης μη διαφοροποίηση ιδιοτήτων από ορισμούς και διαδικασίες*».
- Στην απόδειξη, καθώς οι μαθητές δείχνουν να αρκούνται σε αριθμητική επαλήθευση των προτάσεων που διατυπώνονται, σε μετρήσεις και στα αποτελέσματα των ενεργειών τους σε συγκεκριμένες (αριθμητικές ή γεωμετρικές οντότητες), που μπορούν να έχουν με τη χρήση των εκπαιδευτικών λογισμικών. Δεν έχουν συνδέσει, δηλαδή, την απόδειξη με τη γενίκευση που θα πρέπει να χαρακτηρίζει τις μαθηματικές προτάσεις-θεωρήματα. Ακόμη, διλήμματα δημιουργούνται και από τον τρόπο, με τον οποίο οι μαθητές διατυπώνουν τις αποδείξεις, καθώς δε μπορούν να αρθρώσουν λόγο με συνοχή και ειρμό. Μια πιθανή ερμηνεία για αυτό θα μπορούσε να αναζητηθεί στον περιορισμένο ρόλο που καλούνται οι μαθητές, καθώς τα μαθηματικά σπάνια γίνονται πεδίο από κοινού διαπραγμάτευσης των μαθηματικών νοημάτων με τους εκπαιδευτικούς. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν και οι Σακονίδης κ.ά. (2000), ένα από

τα κύρια συμπεράσματα της έρευνάς τους, είναι γεγονός ότι «η εγκυροποίηση των διαδικασιών υπόκειται στην τελική παραδοχή του δασκάλου και οι μέθοδοί επίλυσης αποτελούν μια τυπική, μη διαπραγματεύσιμη διαδικασία».

- Στη γενίκευση μιας μαθηματικής ιδέας, στη μετάβαση, δηλαδή, από το ειδικό στο γενικό και στην κατασκευή καινούργιων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μέσα από μια ποικιλία από πραγματικές ή τεχνητές καταστάσεις, είναι μια ακόμα πηγή διλημμάτων για τον δάσκαλο των μαθηματικών, καθώς η γενίκευση αποτελεί βασικό επιστημολογικό γνώρισμα των αντίστοιχων ιδεών. Ο τρόπος που η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στην τάξη δρα περιοριστικά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης του μαθητή – βασικός στόχος του μαθήματος, όπως αυτός διατυπώνεται στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου- και δεν παρέχει ευκαιρίες για την ουσιαστική και σε βάθος κατανόηση των εννοιών που διαπραγματεύονται. Πιο συγκεκριμένα, δεν παρέχεται η ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν μια μαθηματική ιδέα από διαφορετικές οπτικές, να τη συσχετίσουν με άλλες μαθηματικές ιδέες και, τέλος, να καταβάλουν προσπάθεια να την ονοματίσουν, δηλαδή, να της προσδώσουν υπόσταση μέσω της γλωσσικής διάστασης της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Σχετικά με τα διλήμματα που συνδέονταν με επικοινωνιακά χαρακτηριστικά του μαθήματος των μαθηματικών, αυτά αφορούσαν κατεξοχήν:

- Στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διαχείριση των ερωτήσεων από και προς τους μαθητές. Ο τρόπος αυτός εμφανίστηκε να αποτελεί πηγή ικανού αριθμού διδακτικών διλημμάτων για τον εκπαιδευτικό. Χαρακτηριστικές ήταν εκείνες οι περιπτώσεις, όπου οι μαθητές αδυνατούσαν να αιτιολογήσουν, να ανακαλέσουν από τη μνήμη γνώσεις παλαιοτέρων τάξεων, ή δυσκολεύονταν στη διατύπωση της απάντησης –γλωσσική διάσταση-. Στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει αυτές τις περιπτώσεις, ο εκπαιδευτικός που θεωρεί ότι το νόημα των μαθηματικών επιβάλλεται να είναι διαπραγματεύσιμο στην τάξη, διαμορφώνει, δηλαδή, το μάθημά του με βάση την ενεργή συμμετοχή των μαθητών, επιχειρεί να επιλύσει τα σχετικά διλήμματα, αλλάζοντας το πλαίσιο της ερώτησης (επανα-πλαισίωση), χρησιμοποιώντας κατάλληλες και συχνά πολλαπλές αναπαραστάσεις, οδηγώντας τους μαθητές σε γνωστική

σύγκρουση, κ.ά.. Όπως πολύ χαρακτηριστικά αναφέρεται από το Σακονίδη (2003) "Με τη συγκεκριμένη οπτική, η τάξη των μαθηματικών αποκτά χαρακτήρα κοινότητας, στην οποία οι μαθητές εμπλέκονται σε συνεργατικές πρακτικές με τον εκπαιδευτικό και τους συμμαθητές τους, συζητούν, μοιράζονται και διαπραγματεύονται μαθηματικές ιδέες και νόρμες, συμβάσεις κλπ, νομιμοποιώντας τη μαθηματική γνώση και ασκούμενοι στη μαθηματική σκέψη και στο μαθηματικό συλλογισμό». Ταυτόχρονα, οι εκπαιδευτικοί «προσφέρουν στους μαθητές συνεχείς ευκαιρίες εμπλοκής στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος μέσα σε κοινότητες πρακτικής στην τάξη και … καλλιεργούν και…ενδυναμώνουν την ταυτότητα του μαθητή ως 'μαθητευόμενου' ».

- Στις παρεμβάσεις των μαθητών, όπως αυτές διατυπώνονται μέσω των ερωτήσεων ή των τοποθετήσεών τους. Τα διλήμματα αυτά συνδέονται άμεσα με τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος, καθώς η συζήτηση που συχνά ακολουθεί τέτοιες παρεμβάσεις ενδέχεται να οδηγηθεί και πέραν των συγκεκριμένων διδακτικών στόχων του μαθήματος. Στο σημείο αυτό η πείρα του εκπαιδευτικού παίζει πρωτεύοντα ρόλο, καθώς η άρνησή του να επεκταθεί ή η αυστηρή παραμονή του στα στενά διδακτικά όρια του εκάστοτε μαθήματος ακυρώνουν τις όποιες πρωτοβουλίες των μαθητών. Συνήθως, σε αυτές τις περιπτώσεις ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να ισορροπήσει μεταξύ των διδακτικών στόχων του μαθήματος και της ενεργούς συμμετοχής των μαθητών. Δηλαδή, ενεργεί με βάση την οπτική ότι μια μαθηματική ιδέα δεν προκύπτει από κάτι ξένο προς τους μαθητές ούτε ανακοινώνεται από το δάσκαλο στην τάξη, αλλά μπορεί να είναι το συμπέρασμα μιας συζήτησης, ή η κατάληξη μιας συλλογιστικής ενός μαθητή.
- Στον τρόπο που επιλέγει ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές του. Τα διλήμματα αυτά σχετίζονται τόσο με το διαρκές δίλημμα της μη επίτευξης των διδακτικών στόχων, όσο και με το βασανιστικό δίλημμα του διδακτικού χρόνου. Η στενή καθοδήγηση των μαθητών προκρίνεται συχνά, προκειμένου ο εκπαιδευτικός να επιλύσει με κάποιο τρόπο τα σχετικά διλήμματα. Έτσι, όμως, «επιχειρεί να τους κάνει να προσαρμοστούν στην επιστημονική πρόθεσή του, δηλαδή, δεν υπάρχει πρόθεση κατασκευής ή συν-κατασκευής της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές, αλλά απόδοσης εκ μέρους τους μιας μαθηματικής απάντησης, διατηρώντας ο ίδιος τον έλεγχο τόσο στη

γνώση όσο και στην οργάνωση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης.» (Σακονίδης κ.ά., 2000). Στην κατεύθυνση της ενεργής συμμετοχής των μαθητών επιλέγονται τρόποι αντιμετώπισης που τους δραστηριοποιούν και αφορούν, καταρχήν, σε απλά θέματα, προκειμένου να ενθαρρυνθούν. Όπως πολύ χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Cobb κ.ά. (1992), αναγνωρίζοντας τις γνωστικές δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σε μια μαθηματική έννοια, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να σχεδιάσουν κατάλληλες παρεμβάσεις βασισμένες στις απαντήσεις τους, ώστε να τους βοηθήσουν να τις ξεπεράσουν.

Μέσα από την ανάλυση των μαθημάτων αναφορικά με τις συνθήκες ανάδειξης, το περιεχόμενο, αλλά και την αντιμετώπιση των διλημμάτων φάνηκε ότι κυρίαρχο ρόλο σε αυτά διαδραματίζουν ο διδακτικός χρόνος και οι περιορισμοί που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα τόσο όσον αφορά στην κατανομή των διδακτικών ωρών ανά ενότητα που θα διδαχθεί, όσο και σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους της κάθε ενότητας. Σε πολλές περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί αναγκάζονται να παρεκκλίνουν των στόχων του μαθήματος, προκειμένου να ασχοληθούν με τις παρεμβάσεις των μαθητών, με αποτέλεσμα τη μη ολοκλήρωση της ενότητας μέσα στο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Οι δραστηριότητες που έχουν ως στόχο να καταστήσουν τα μαθηματικά διαθέσιμα και προσιτά σε όλους, αντλώντας θέματα από την καθημερινότητα, απαιτούν πολύ χρόνο για να υλοποιηθούν, με αποτέλεσμα να μη καλύπτεται πλήρως η διδασκόμενη έννοια ή διαδικασία στο συγκεκριμένο χρονικό πλαίσιο. Οι παραπάνω περιορισμοί επηρεάζουν, επίσης, και τις διδακτικές πρακτικές που έχει σχεδιαστεί να ακολουθηθούν. Σε πάρα πολλές περιπτώσεις η ενεργή συμμετοχή των μαθητών δεν συνάδει με τα παραπάνω, με αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να ακολουθούν την παλιά, δοκιμασμένη δασκαλοκεντρική διδασκαλία, προκειμένου να φανούν συνεπείς με την ολοκλήρωση της ύλης στον προκαθορισμένο χρόνο. Έχει, μάλιστα, διατυπωθεί η άποψη (Carter & Richards, 1999) ότι, καλύπτοντας λιγότερη ύλη, οι μαθητές μαθαίνουν περισσότερο, καθώς είναι σε θέση να κατασκευάσουν τη μαθηματική γνώση, ταιριάζοντάς την με τα δικά τους μοντέλα γνώσης, ώστε, τελικά, αυτή να αποκτήσει προσωπικό νόημα.

Ο τρόπος διαχείρισης των διλημμάτων είναι άμεσα συνδεδεμένος με τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού αναφορικά με τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους. Οι πεποιθήσεις αυτές καθορίζουν την αλληλεπίδραση και την επικοινωνία δασκάλου και μαθητών μέσα στην τάξη, καθόσον εκπαιδευτικοί και

μαθητές είναι αυτοί που καθορίζουν την πραγματικότητα της τάξης. Ο Schoenfeld(1992) υποστήριξε ότι όχι μόνο οι πεποιθήσεις επηρεάζουν τις πρακτικές, αλλά, επιπρόσθετα, υφίσταται μια σχέση «αίτιου – αιτιατού» μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι «*Η αίσθηση που έχει ο δάσκαλος για το μαθηματικό σύστημα, καθορίζει τη φύση του σχολικού περιβάλλοντος που δημιουργεί αυτός*». Αναγνωρίζεται, δηλαδή, ότι υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ του συστήματος των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και του τρόπου συμπεριφοράς του. Στο σημείο αυτό καταλυτικό ρόλο μπορεί να διαδραματίσει η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε θέματα διδακτικής του αντικειμένου που πραγματεύεται. Κρίνοντας από τη δική μου εμπειρία, εντρυφώντας σε τέτοιου είδους θέματα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ερμηνεύει με εναλλακτικούς τρόπους και, άρα, πιο αποτελεσματικά, συμπεριφορές μαθητών στην τάξη, να γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ του σχεδιαγράμματος του μαθήματος και της πραγματικότητας της τάξης, στηριζόμενος στις δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών και, τέλος, να τους ενθαρρύνει να συζητούν τις ιδέες τους, ώστε να μάθουν να αιτιολογούν και να υποστηρίζουν τις στρατηγικές τους, ανακαλύπτοντας έτσι κενά, παρανοήσεις και λαθεμένες συνδέσεις. Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να αναπτύξουν μια νέα αίσθηση του τι σημαίνει διδάσκω μαθηματικά και ποια είναι τα πιθανά συστατικά μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας. Προς αυτήν την κατεύθυνση, είναι αναγκαίο να τους δίνονται ευκαιρίες επαναπροσδιορισμού των πεποιθήσεών τους για τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους, ώστε να μεγιστοποιηθούν οι πιθανότητες να προκύψουν οι απαραίτητες αλλαγές στις τρέχουσες διδακτικές τους πρακτικές. Με αυτό τον τρόπο, οποιαδήποτε σχετική προσπάθεια καταβάλλεται από κάποιον εκπαιδευτικό να μη είναι κάτι το ευκαιριακό αλλά να είναι μία συνεχής διαδικασία που θα ακολουθεί τους μαθητές σε κάθε τάξη.

Η μετάβαση των μαθητών από το δημοτικό στο γυμνάσιο και ο εθισμός τους σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο εργασίας αποτελούν πηγή πολλαπλών διλημμάτων. Οι μαθητές έρχονται από το δημοτικό στο γυμνάσιο έχοντας μόνο την εμπειρία της χρήσης κανόνων της αριθμητικής, τους οποίους χρησιμοποιούν συχνά χωρίς να γνωρίζουν την προέλευσή τους. Ακόμη, η κατανόησή τους ορισμών και ιδιοτήτων εννοιών γίνεται (και διδάσκεται) εμπειρικά, μέσω παραδειγμάτων επί συγκεκριμένων αντικειμένων. Οι Καλδρυμίδου, Σακονίδης και Τζεκάκη (1999,2000,2001) αναφέρουν ότι συχνά ο χειρισμός ιδιοτήτων και θεωρημάτων από τον εκπαιδευτικό στην τάξη δεν τα διαφοροποιεί από τους ορισμούς, ούτε από τις διαδικασίες, ούτε

ακόμη και από τις τεχνικές επίλυσης. Έτσι, από τους ίδιους αυτούς μαθητές, όταν μεταβαίνουν στο γυμνάσιο, απαιτείται ξαφνικά να σκεφτούν πάνω στο ίδιο γνωστικό περιεχόμενο, τα μαθηματικά, αλλά μέσα σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο αναφοράς. Πρέπει να μάθουν να αιτιολογούν, να ξεχωρίζουν ορισμούς από ιδιότητες , να αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα του ορισμού στα μαθηματικά και, τέλος, να χρησιμοποιούν γράμματα στη θέση (γενικευμένων) αριθμών (μεταβλητές). Με βάση αυτήν την οπτική, διλήμματα δημιουργούνται για το πώς θα πρέπει να παρουσιαστεί και στη συνέχεια να γενικευτεί μια μαθηματική έννοια, πώς θα ενθαρρυνθούν οι μαθητές να εξηγούν τις ιδέες τους, πώς αποδεικνύονται οι μαθηματικές προτάσεις και ποια είναι η αξία της απόδειξης στα μαθηματικά.

ΟΙ πίνακες 4.1 και 4.2 συνοψίζουν τα ευρήματα της έρευνας αναφορικά με τα επιστημολογικά και επικοινωνιακά διλήμματα αντιστοίχως, με βάση το περιεχόμενό τους και τον τρόπο διαχείρισής τους από τον εκπαιδευτικό της συγκεκριμένης έρευνας.

Πίνακας 4.1. Κατηγοριοποίηση επιστημολογικών διλημμάτων, με βάση το περιεχόμενο και τη διαχείρισή τους.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΔΙΛΗΜΜΑΤΑ	
Είδος με βάση το περιεχόμενο	***Υποκατηγορίες με βάση τη διαχείριση του διλήμματος***
Ορισμός	• Ορισμός και ιδιότητες
	• Ορισμός και χρηστικότητα της έννοιας
	• Ιδιότητα και ορισμός της
	• Ακρίβεια και σαφήνεια σε επίπεδο λόγου
Απόδειξη	• Ως διαδικασία επαλήθευσης
	• Με τη βοήθεια αναπαράστασης
Φύση των μαθηματικών (γενικότερα)	• Διαδικασία γενίκευσης
	• Οργανωμένο σύνολο αλληλένδετων εννοιών

Πίνακας 4.2. Κατηγοριοποίηση επικοινωνιακών διλημμάτων, με βάση το περιεχόμενο και τη διαχείρισή τους.

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΔΙΛΗΜΜΑΤΑ	
Είδος με βάση το περιεχόμενο της επικοινωνίας	***Υποκατηγορίες με βάση τη διαχείριση του διλήμματος***
	• Ασφυκτική καθοδήγηση
Παροχή βοήθειας	• Σύνοψη συμπερασμάτων
	• Χρήση αντι-παραδείγματος
	• Χρήση αναπαράστασης
	• Αλλαγή πλαισίου (επανα-πλαισίωση)
Διατύπωση ερωτήσεων	• Αξιοποίηση γνωστικής σύγκρουσης
	• Χρήση αντι-παραδείγματος
	• Γλωσσική διαπραγμάτευση
Επιλογή λεκτικής παρέμβασης 'καλού' μαθητή	
	• Ενασχόληση διδάσκοντα και τάξης
Πραγματοποίηση άλλης παρέμβασης	• Τοποθέτηση από διδάσκοντα
	• Τοποθέτηση από μαθητή

Οι πίνακες 4.1 και 4.2 αποκαλύπτουν μια μεγάλη ποικιλία από επιστημολογικά και επικοινωνιακά διλήμματα και τρόπους διαχείρισής τους από τον εκπαιδευτικό. Σε ό,τι αφορά στα πρώτα, η πλειοψηφία τους εμφανίζεται να συνδέεται πρωτίστως με τη φύση, γενικά, της επιστήμης των μαθηματικών και, ειδικότερα, με τους ορισμούς και δευτερευόντως με το θέμα των αποδείξεων, ίσως γιατί το τελευταίο δεν κατέχει, ακόμη, κυρίαρχη θέση στα μαθηματικά του γυμνασίου. Επιπλέον, η διαχείριση των διλημμάτων αυτής της κατηγορίας φαίνεται

να εστιάζεται περισσότερο στην αποσαφήνιση του νοήματος καθενός από τα συγκεκριμένα επιστημολογικά χαρακτηριστικά και λιγότερο στην ανάδειξη του λειτουργικού τους ρόλου στη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης. Σε σχέση με τα επικοινωνιακά διλήμματα, στο σύνολό τους δείχνουν να συνδέονται με καταστάσεις, στις οποίες ο εκπαιδευτικός επιχειρεί να ενεργοποιήσει ή να υποστηρίξει τους μαθητές αξιοποιώντας κυρίαρχα το γλωσσικό μέσο. Τέλος, η διαχείρισή τους υποδεικνύει την εναγώνια προσπάθεια του εκπαιδευτικού να επικαλεστεί μια πληθώρα από συστήματα αναπαράστασης, όπως το συμβολικό σύστημα, το σύστημα γραφικών αναπαραστάσεων, τις γεωμετρικές κατασκευές, κ.ά., για να προσφέρει εναλλακτικές προσεγγίσεις στην μαθηματική γνώση-στόχο στους μαθητές.

Συνεργασία εκπαιδευτικού και ερευνητών: περιεχόμενο και χαρακτηριστικά

Καθώς οι μαθητές τοποθετούνται στο επίκεντρο της διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός καλείται να συνεργάζεται μαζί τους, προκειμένου να διαμορφώσει ένα μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο θα έχει θετικές συνέπειες σε ό,τι αφορά στη μάθηση του αντικειμένου που διδάσκει. Οι επιλογές του εκπαιδευτικού ως προς τη διαχείριση της διδασκαλίας, καθώς και ο τρόπος που αυτές εξωτερικεύονται διαμορφώνουν το διδακτικό τοπίο της τάξης. Ωστόσο, η ενεργή συμμετοχή των μαθητών απαιτεί πολλές φορές αλλαγή, ολική ή μερική, στο σχήμα και στη δομή του διδακτικού μοντέλου που χρησιμοποιείται. Η αλλαγή αυτή είναι κατεξοχήν προϊόν αναστοχασμού του εκπαιδευτικού επί των ενεργειών του. Τι μπορεί όμως να προκαλέσει αυτό τον αναστοχασμό; Από ποιους και με ποιο τρόπο μπορεί να βοηθηθεί ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να εξάγει ασφαλή συμπεράσματα με βάση αυτόν τον αναστοχασμό; Απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα μπορεί να δώσει η συνεργασία εκπαιδευτικού με ερευνητές από το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών, που ο Wagner(1997) αποκαλεί «συνεργατική συμφωνία μάθησης». Οι ερευνητές, μέσα από μια σειρά ερωτήσεων, θέτουν θέματα που αφορούν στη μάθηση, στις πεποιθήσεις και στις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, ώστε να προκαλέσουν τον αναστοχασμό και τη συνειδητοποίηση σκέψεων και ενεργειών του κατά τη διδασκαλία. Στις περισσότερες συνεργασίες αυτού του είδους, σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, αντικείμενο μελέτης είναι ο εκπαιδευτικός και οι ενέργειές του, ενώ αυτές (οι ενέργειες) του ερευνητή μελετώνται, κυρίως, ως προς το αποτέλεσμα που έχουν στην επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού. Πρόκειται,

δηλαδή, για ένα πλαίσιο συνεργασίας μεταξύ των δύο πλευρών, με βραχυπρόθεσμο στόχο την κριτική ανάλυση των διδακτικών πρακτικών του εκπαιδευτικού, με βάση τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα, και την αναπλαισίωσή τους και μακροπρόθεσμη επιδίωξη την εξέλιξή τους.

Η ανάλυση των δεδομένων, που αφορούσαν στη συνεργασία του εκπαιδευτικού με τους δύο ερευνητές στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, έδειξαν ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, αυτή επικεντρώθηκε στα επιστημολογικά και επικοινωνιακά στοιχεία της τάξης των μαθηματικών.

Ο πίνακας 4.3 παρακάτω παρουσιάζει το είδος των επιστημολογικών χαρακτηριστικών, στα οποία εστίασαν οι εταίροι της συνεργασίας.

Πίνακας 4.3 Κατηγοριοποίηση σχολιασμών των συμμετεχόντων ως προς τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας

	Εκπαιδευτικός	**Ερευνητής (Ε1)**	**Ερευνητής (Ε2)**
Επιστημο-λογικά χαρακτη-ριστικά	Γλωσσική διάσταση • ακρίβεια • ανάλυση	Γλωσσική διάσταση • ακρίβεια • ανάλυση	Γλωσσική διάσταση • ακρίβεια • ανάλυση
	Αντιλήψεις για τα μαθηματικά	Αντιλήψεις για τα μαθηματικά	Αντιλήψεις για τα μαθηματικά
	Χρηστικότητα		Χρηστικότητα
	Διάκριση μαθηματικών στοιχείων	Διάκριση μαθηματικών στοιχείων	
		Επεξεργασία επιστημολογικών στοιχείων	

Από τον πίνακα αυτόν γίνεται φανερό ότι τα επιστημολογικά στοιχεία, τα οποία σχολιάστηκαν από τους τρεις συμμετέχοντες στην έρευνα, δε διέφεραν ουσιαστικά, παρόλο που μια διαφορετική διάσταση εντοπίστηκε από τον ερευνητή 1, αυτή της επεξεργασίας τους, ο οποίος επισήμανε σχετικά ότι «δίνεται η εντύπωση πως τα επιστημολογικά στοιχεία απλώς δηλώνονται, δεν επεξεργάζονται».

Ο άξονας της επικοινωνίας εστίασε στο διάλογο, ο οποίος αναπτύχθηκε ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές και ανάμεσα στους ίδιους τους μαθητές. Σχολιάστηκαν τα επικοινωνιακά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας, τα οποία φάνηκε να δρουν περιοριστικά στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών όπως : η έλλειψη επικοινωνίας ανάμεσα στους μαθητές, οι άμεσες παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και η επιλογή του 'καλού μαθητή', για να δώσει μια απάντηση. Τα χαρακτηριστικά αυτά εντοπίστηκαν στις περιπτώσεις εκείνες, που ο εκπαιδευτικός φάνηκε να αντιμετωπίζει διλήμματα, τα οποία συνδέονταν με το φόβο μη επίτευξης των διδακτικών στόχων, την πίεση του χρόνου, συνήθειες των μαθητών του και κοινωνικές αξίες, τις οποίες ήθελε να προωθήσει στην τάξη του. Σ' αυτές τις περιστάσεις καθοδηγούσε στενά τους μαθητές του διατυπώνοντας πολλές φορές ερωτήσεις που παρείχαν όμως πολλά στοιχεία καθοδηγώντας τους έτσι στη σωστή απάντηση.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι η συμμετοχή του εκπαιδευτικού στη συστηματική ανάλυση των μαθημάτων του μπορεί να διαμορφώσει ένα διαφορετικό τοπίο συμπερασμάτων σε ό,τι αφορά τις διδακτικές του πρακτικές σε σχέση με αυτά στα οποία μπορεί να οδηγηθεί ένας ερευνητής, ο οποίος επισκέπτεται την τάξη του. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να απαντήσει άμεσα σε ερωτήματα του ερευνητή και να αιτιολογήσει τις διδακτικές του πρακτικές και ενέργειες, που εντοπίζονται στην διδασκαλία του, αναγνωρίζοντας και συνδέοντάς τες με τις συνέπειες που αυτές έχουν στη μάθηση των μαθητών. Ταυτόχρονα, μέσω του αναστοχασμού του, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με τους ερευνητές, μπορεί να οδηγηθεί σταδιακά στη συνειδητή και ουσιαστική αλλαγή τους. Τέλος, η ατομική ανάλυση της διδασκαλίας από καθέναν από τους συμμετέχοντες στη συνεργασία, η προσπάθεια αιτιολόγησης ή/και ερμηνείας ενεργειών ή/και θέσεων που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης, μέσα σε ένα περιβάλλον διαλόγου μεταξύ εταίρων με αναγνωρισμένες και διακριτές εξειδικεύσεις (ακαδημαϊκή versus εκπαιδευτικής πράξης) ίσης αξίας φάνηκε να διαμορφώνουν μια δυναμική πλατφόρμα λειτουργίας της κοινότητας, τόσο στο ατομικό όσο και στο συλλογικό επίπεδο. Καθοριστικό ρόλο προς αυτήν την κατεύθυνση εμφανίζεται να διαδραμάτισαν η εμπιστοσύνη που είχε οικοδομηθεί μεταξύ των συμμετεχόντων στην κοινότητα κοινής πρακτικής, η αναγνώριση από τον έναν της αξίας των άλλων στο πεδίο εργασίας τους, η προοδευτική σύγκλιση στον τρόπο κατανόησης τόσο της διδακτικής πράξης, όσο και

του τρόπου συστηματικής της διερεύνησης και, τέλος, η αποδοχή, η εξασφάλιση και ο αμοιβαίος σεβασμός ενός χώρου συνύπαρξης διαφορετικών ερμηνειών και εναλλακτικών προσεγγίσεων της εκπαιδευτικής πράξης στα μαθηματικά.

Κεφάλαιο 5ο
Συμπεράσματα

Βασική επιδίωξη κάθε εκπαιδευτικού είναι η εμπλοκή των μαθητών του σε αλληλεπίδραση και επικοινωνία στην τάξη και, μέσα από αυτές, στη διαπραγμάτευση των νοημάτων, στα οποία στοχεύει η διδασκαλία του. Στα μαθηματικά, αυτή ακριβώς η προσπάθεια εμπλοκής των μαθητών στην κατασκευή του μαθηματικού νοήματος επιβάλλει στον εκπαιδευτικό τη λήψη μιας πληθώρας αποφάσεων και, πολλές φορές, στην τροποποίησή τους πριν ή και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Έχοντας ως γνώμονα τη δραστηριοποίηση των μαθητών μέσα στο μαθησιακό περιβάλλον που διαμορφώνει, ο εκπαιδευτικός αναγκάζεται συχνά να αλλάξει όλο το διδακτικό πλάνο που κατέστρωσε πριν το μάθημα, όταν διαπιστώσει ότι οι μαθητές δεν αξιοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις ή τις χρησιμοποιούν ανεπιτυχώς, με αποτέλεσμα η διδασκαλία να τελματώνει ή να οδηγείται σε αδιέξοδο.

Τα αποτελέσματα της έρευνας, που αποτέλεσε αντικείμενο αυτής της εργασίας, φανερώνουν ότι η τάξη των μαθηματικών συνιστά ένα δυναμικό εκπαιδευτικό περιβάλλον, που διέπεται από μια συνεχή διαδικασία λήψης και ανατροπής πολύπλοκων αποφάσεων εκ μέρους του εκπαιδευτικού, η οποία απαιτεί τόσο τη συνεχή του εγρήγορση όσο και τη συγκρότηση μιας στέρεας επιστημονικής ταυτότητας. Είναι αυτονόητο ότι μια τέτοια πραγματικότητα οδηγεί αναπόφευκτα σε σημαντικά διδακτικά διλήμματα, που απαιτούν άμεση και αποτελεσματική αντιμετώπιση. Τα διλήμματα αυτά ποικίλλουν σε ό,τι αφορά το περιεχόμενο, την προέλευσή τους, τις συνθήκες ανάδειξής τους και τον τρόπο διαχείρισής τους, για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Καθοριστικό ρόλο στο τελευταίο εμφανίζεται να διαδραματίζει η εξασφάλιση της συνεργασίας του εκπαιδευτικού με άλλους εκπαιδευτικούς ή / και ερευνητές του πεδίου της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίοι, εργαζόμενοι μαζί του σε ένα περιβάλλον από κοινού μάθησης, του παρέχουν τη δυνατότητα εναλλακτικών αναγνώσεων των διδακτικών του πρακτικών, οι οποίες μπορούν να επηρεάσουν καθοριστικά τόσο το περιεχόμενο, όσο και τη διαχείριση των διδακτικών του προσεγγίσεων.

Η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας μελέτης αναφορικά με τα διδακτικά διλήμματα, τα οποία αναδεικνύονται στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών, έδειξε ότι, σε ό,τι αφορά στο περιεχόμενό τους, είναι κυρίαρχα επιστημολογικού και

επικοινωνιακού χαρακτήρα. Μάλιστα, τα πρώτα εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα από τα δεύτερα, υποδεικνύοντας την ιδιαιτερότητα της φύσης των μαθηματικών, καθώς είναι αυτά που συνδέονται άμεσα με βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης, όπως ορισμοί, αποδείξεις, γενικεύσεις, κτλ. Ταυτόχρονα, αυτή η συχνότητα των συγκεκριμένων διλημμάτων υπογραμμίζει τη δυσκολία διαχείρισής των επιστημολογικών χαρακτηριστικών του αντικειμένου τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από τους μαθητές. Σχετικά με τα επικοινωνιακά διλήμματα, τα οποία σηματοδοτούν, με τη σειρά τους, την ιδιαιτερότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, εφόσον σχετίζονται με την αλληλεπίδραση και την επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών, η επικράτηση των ερωτήσεων ως τρόπου επικοινωνίας φανερώνει ότι οι τελευταίες αποτελούν, ακόμη και σήμερα, το βασικό εργαλείο ενεργοποίησης των μαθητών στην ελληνική τάξη των μαθηματικών.

Η προσπάθεια αναζήτησης της προέλευσης των διδακτικών διλημμάτων του εκπαιδευτικού αποτελεί δύσκολο έργο, εξαιτίας της μεγάλης ποικιλίας των παραμέτρων που εμπλέκονται, αλλά και της πολυπλοκότητας καθεμιάς από αυτές, καθώς και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους, το οποίο χρήζει πολλών ερευνών. Ωστόσο, σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, πολλές από αυτές τις παραμέτρους συνδέονται με τον ίδιο τον εκπαιδευτικό (π.χ., οι πεποιθήσεις του για τα μαθηματικά και τη μάθηση και τη διδασκαλία του), ενώ άλλες με το εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διδασκαλία. Οι αναλύσεις των δεδομένων της έρευνας που περιγράφεται σε αυτήν την εργασία αναδεικνύουν με ιδιαίτερη έμφαση δύο από τις τελευταίες: το διδακτικό χρόνο και τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, ο διδακτικός χρόνος φάνηκε να επηρεάζει καθοριστικά τόσο την εμφάνιση των διλημμάτων, όσο και τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού στον τρόπο αντιμετώπισής τους. Σε πολλές στιγμές της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός έδειξε να επιχειρεί να ισορροπήσει μεταξύ του να αναλώσει επιπλέον χρόνο, προκειμένου να υποστηρίξει τις θέσεις των μαθητών του και του να κερδίσει χρόνο, στις περιπτώσεις που συνειδητοποιούσε ότι στο χρονικό διάστημα που υπολειπόταν δε θα ήταν δυνατό να καλύψει τους διδακτικούς στόχους του μαθήματος. Στις τελευταίες, έτεινε να καταφεύγει σε βεβιασμένες 'λύσεις ανάγκης', όπως το να επιλέξει έναν καλό μαθητή, για να ελέγχει ο ίδιος την εξέλιξη μιας επιχειρηματολογίας ή να δώσει ο ίδιος την απάντηση σε μία ερώτηση. Αναφορικά με τα διδακτικά διλήμματα που οφείλονταν στους περιορισμούς που θέτει το αναλυτικό πρόγραμμα (π.χ., ολοκλήρωση της προσέγγισης σημαντικών

μαθηματικών ιδεών σε λιγότερο από μια διδακτική ώρα) φάνηκε να οδηγούν συχνά τον εκπαιδευτικό στη όχι σπάνια συνειδητή αγνόηση ή ακύρωση σημαντικών παρεμβάσεων των μαθητών στη διαδικασία κατασκευής του μαθηματικού νοήματος.

Είναι φανερό ότι διδακτικά διλήμματα αναδεικνύονται ή είναι πιθανόν να προκύψουν σε όλη τη διάρκεια μιας διδασκαλίας. Ωστόσο, η ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων διδασκαλιών έδειξε ότι είναι περισσότερο αναμενόμενα σε στιγμές έντονης ή αδύναμης συμμετοχής των μαθητών στη διαπραγμάτευση της μαθηματικής γνώσης, με την προϋπόθεση ότι ο εκπαιδευτικός έχει υιοθετήσει διδακτικές πρακτικές, που τοποθετούν το μαθητή στο κέντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Ως συνέπεια, η αποτελεσματική διαχείριση των διλημμάτων από αυτόν εμφανίζεται να συνδέεται τόσο με τις προτεραιότητές του σχετικά με το τι είναι σημαντικό και τι όχι για τη μάθηση του μαθητή, με άλλα λόγια, με τις πεποιθήσεις του για τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία του, όσο και με την υποστήριξη που διαθέτει, για να αναγνώσει εναλλακτικά τις διδακτικές του πρακτικές και, ακόμη περισσότερο, να τις εξελίξει.

Στη συγκεκριμένη έρευνα, η παροχή αυτής της υποστήριξης επιχειρήθηκε στο πλαίσιο μιας συνεργασίας που αναπτύχθηκε μεταξύ του εκπαιδευτικού και των δύο ερευνητών, η οποία προοδευτικά προσέλαβε το χαρακτήρα ενός τύπου 'κοινότητας κοινής πρακτικής', στο πλαίσιο της οποίας οι συμμετέχοντες μετέφεραν διαφορετικές οπτικές και ενεπλάκησαν σε κοινές πρακτικές (Lave & Wenger, 1991). Συγκεκριμένα, εντόπισαν τα διάφορα χαρακτηριστικά, τα οποία συνθέτουν τη διδασκαλία που αναλύθηκε, προβληματίστηκαν για τη σύνδεση και τη διαφοροποίησή τους, εντόπισαν διδακτικά διλήμματα. Ο εκπαιδευτικός αναγνώρισε τον καταλυτικό ρόλο των ερευνητών στην αλλαγή των διδακτικών του πρακτικών. Οι ερευνητές συνειδητοποίησαν περισσότερο τους περιορισμούς, τους οποίους θέτει το ευρύτερο σχολικό και κοινωνικό πλαίσιο στα διλήμματα και στις αποφάσεις του εκπαιδευτικού, αναγνωρίζοντας την 'περιοριστική αυτονομία' (forced autonomy), που του επιβάλλεται (Scott, 2004). Επιπλέον, και οι τρεις εταίροι της συνεργασίας αναστοχάστηκαν τις ενέργειές τους. Ο εκπαιδευτικός, κυρίως σε σχέση με συγκεκριμένες διδακτικές στρατηγικές και αποφάσεις του, ενώ οι ερευνητές σε σχέση με την κρίση τους αναφορικά με τη διδασκαλία και την ανατροφοδότηση που παρείχαν στον εκπαιδευτικό.

Τέλος, η ανεξάρτητη ανάλυση των μαθημάτων από τον εκπαιδευτικό και τους δύο ερευνητές και, στη συνέχεια, ο αναστοχασμός επί των αναλύσεων φάνηκε

να δρουν θετικά στην αναζήτηση τρόπων βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών από τον πρώτο. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της συνεργασίας εκπαιδευτικού – ερευνητών, όπως προέκυψε από τις σχετικές αναλύσεις, ήταν η αποδοχή και ο αναστοχασμός των εναλλακτικών οπτικών, όπως εκφράστηκαν μέσα από τους διαφορετικούς τρόπους ανάγνωσης των μαθημάτων από τους εταίρους της συνεργασίας. Έτσι, εντοπίστηκαν βασικά γνωρίσματα που συνθέτουν την διδασκαλία του εκπαιδευτικού και εξετάστηκε η τυχόν διαφοροποίησή τους στην πορεία των μαθημάτων. Η προσπάθεια εντοπισμού και ερμηνείας των διδακτικών συμπεριφορών και, ιδιαίτερα, διλημμάτων ανέδειξε τους περιορισμούς «τους οποίους θέτει το ευρύτερο σχολικό και κοινωνικό πλαίσιο στα διλήμματα και στις αποφάσεις του εκπαιδευτικού, αναγνωρίζοντας την περιοριστική αυτονομία που του επιβάλλεται» (Πόταρη κ. ά., 2005).

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ackerman, E.(1995) Construction and transference of meaning through form. In L.P. Steffe, J. Gale(Eds), *Constructivism in education* . Hillsdale. NJ: Lawrence, Erlbann Associates

Ainley, M.(2001) Interest in learning and classroom interaction. In David Clarke, *Perspectives on Practice and meaning in mathematics and science classrooms*, Kluwer Academic Publishers

Altrichter,H.,Posch, P.,Somekh,B.(2001). Οι εκπαιδευτικοί ερευνούν το έργο τους: Μια εισαγωγή στις μεθόδους έρευνας δράσης. Αθήνα:Εκδόσεις Μεταίχμιο

Aritigue, M. (1996). The role of epistemology in the analysis of teaching learning relationships in mathematics education', in Y. Pothier (ed.) Proceedings of the Annual Conferences of the Canadian Mathematics Education Study Group, London, ON, May 1995

Arzt, A.,Armour-Thomas,E.(1999). A gognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: a guide for facilitdating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics* 40,211-235

Ball,D.(1993). With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of teaching elementary school Mathematics. *The Elementary School Journal* 93,373-397

Ball,D.(1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics* 8,40-48

Ball, D.(2001) Developing a mathematically proficient American Public:What are the problems, What do we know about them, and What would it take to solve them? Paper prepared for the Aspen Institute congressional conference on "Promoting Excellence in the New Economy: The challenges to National Policy", St. Petersburg, Florida

Bauersfeld H.(1988). Interaction, construction and knowledge:Alternative perspectives for mathematics education . In D.Grouws,T. Cooney & D.Jones(Eds), *Perspectives on research on mathematics education..* Reston,VA:National Council of teachers of Mathematics

Bills, L.(1996). The use of examples in the teaching and learning of mathematics. In proceedings of PME 1996

Britzman, D.(1986). Cultural myths in the making of a teacher: Biography and social structure in teacher education. In Harvard Educational Review, Vol 56, No 4,442-472

Brown, L.,Henry, C., McTaggarat, R.(1982). Action research:Notes on the National Seminar. In S.Kemmis , R.McTaggarat(Eds) *The action research Reader*. Deakin University.

Carter,R.,Richards,J(1999).Dilemmas of Constructivist Mathematics teaching:Instances from classroom practice. In B. Jaworski , T.Wood and S. Dawson, Mathematics Teacher Education

Chazan, D.,Ball, D.(1999). Beyond being told not to tell. *For the learning of Mathematics* 19,2-10

Cobb, R., Stefe,L.P.(1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. G.R.M.E.14,83-94

Cobb, R.,Yackel, E.,Wood,T.(1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics* 23,99-122

Cooney, T.(1982) Teachers' dicision making. In D.Pimm(Ed) *Mathematics, Teachers and Children*, Header and Stroughton, London

Cooney, T. (1999). Conceptualizing teacher's ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics* 38,163-187

Cohen,L.,Manion,L.(1994). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο

Davis, R.(1992). A theory of teaching Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* 11, 337-360

D' Ambrosio,B.J., Campos,T.M.M.(1992). Pre-service teachers' representations of childrens' understanding of Mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution. *Education Studies in Mathematics*, V.23,213-230.

Duckworth, E.(1986) Teaching as research. In Harvard Educational Review, Vol 56, No 4, 484-495

Ernest,P.(1991). The philosophy of mathematics education. London: The Falmer Press

Edwards, T., Hensien, S.(1999) Changing instructional practice through action research. *Journal of Mathematics Teacher Educational* 2,187-206

Fine,M(1987).Silencing in public schools. *Language Arts* 64(2),157-175

Forman, E., Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics* 46,115-142

Heinz, K., Kinzel, M., Simon, M., Tzur, R.(2000). Moving students through steps of mathematical knowing: An account of the practice of an elementary mathematics teacher in transition. *Journal of Mathematical Behavior* 19, 83-107

Holton, D., Thomas, G.(2001). Mathematical interaction and their influence on learning. In David Clarke, Perspectives on Practice and meaning in mathematics and science classrooms, Kluwer Academic Publishers

Jaworski, B.(1992) Mathematics teaching: What is it?. *For the Learning of Mathematics* 12,8-14

Jaworski, B.(1994). Investigating Mathematics Teaching. A constructivist enquiry.London,The Falmer Press

Jaworski, B.(1998). Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Maths Teacher Education* 1, 3-31.

Jaworski,B.(1998). Mathematics teaching development: the teacher as the centre of change. Στα πρακτικά του 15ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Jaworski, B.(1999). Mathematics teacher education, research and development: The involvement of teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2,117-119

Jaworski, B.(1999). Tension in teachers' conceptualizations of mathematics and of teaching. In Burton, *Learning Mathematics*,153-171

Jaworski, B.(2002). Sensitivity and challenge in university mathematics tutorial teaching. *Educational Studies in Mathematics* 51,71-94.

Jaworski,B(2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics* 54,249-282

Kawanaka, T., Stigler, J.(1999). Teachers' use of questions in eighth grade mathematics classroom in Germany, Japan and the United States. *Mathematical Thinking and Learning* 1(4),255-278

Kieran, C.(2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics* 46,

Kieren, T.,Pirie, S.,Calvert, L.(1999). Growing minds, Growing mathematical understanding: Mathematical understanding, Abstraction and Interaction. In L. Burton, *Learning Mathematics*, 209-229

Kitchener,A.,Brenner,H(1990).Wisdom and reflective judgment: Knowing in the face of uncertainty. In R.Sternberg(Ed),*Wisdom:Its nature,origins, and development*, Cambridge: Cambridge University Press.

Krainer, K.(2003). Editorial teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 93-105

Kuhn,D.(1992). Thinking as argument.Harward Educational Review 62,155-178

Lampert, M.(1985). How do teachers manage to teach? Perspectives on problem in practice. *Harvard Educational Review*, Vol 55, No 2, 178-194

Lampert,M.(1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Journal* 27,29-63

Lampert, M.(2001). An elaborated model of teaching practice. In M. Lampert, Teaching problems and the problems of teaching.US:Yale University Press

Lampert,M.,Cobb,P.(2003). Communication and Language. In .Kilpatyrick,W.G.Marting,D.Schifter(Eds),*A research campanion to principles and standards for school mathematics*, Reston,NCTM

Larson, S.(1983).Paradoxes in teaching. *Instructional Science*,12355-365

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lewin, K.(1946). Action research and minority problems. *Journal of social issues*, Vol 2, 4,34-46.

Marland, P.(1986).Models of teachers' interactive thinking. *Elementary School Journal*, 87(2),209-226

Meier, D.(1986). Learning in small moments. *Harvard Educational Review,* Vol 56, No 3, 298-300

Nicol,C.(1997). Learning to teach prospective teachers to teach mathematics: The struggles of a beginning teacher educator. In J. Longhram, Russel T.(eds) Teaching about teaching. Falmer Press

Oers, B.(2001) Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics* 46,59-85

Pehkonen,E.(1997). Meaning of beliefs research from the viewpoint of mathematics teaching. Στα Πρακτικά του πρώτου Μεσογειακού συνεδρίου Μαθηματικών 1997.

Philippou,G.,Christou,C.(2002) A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teachers. In G. Leder, E.Pehkonen, G.Toerner (eds) Beliefs: a hidden variable in mathematics education? Kluwer 2002

Pimm,D.(1987). Speaking Mathematically. Communication in mathematics classrooms. London,Routledge & Kegan Paul Ltd.

Paley, V.(1986). On listening to what the children say. *Harvard Educational Review*, Vol 56, No 2, 122-131

Potari, D., Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis. *Journal of Maths Teacher Education* 5, 351-380.

Putnam, R.,Borko, H.(2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?. *Educational Researcher* 29,4-15

Sakonidis, C.,Ikonomou, A.,Kaldrimidou, M.,Tzekaki, M.(1999). Interaction in the Mathematics Classroom: Some epistemological aspects. Scwank I.

Proceedings of the 1st Conf of the European society of research in ME, Vol 1, Osnabrueck

Sakonidis, C.,Kaldrmidou, M.,Tzekaki,M.(2000). Epistimological features in the mathematics classroom: Algebra and Geometry. In Proceedings of the 24th conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol 13, University of Hiroshima, Japan

Sakonidis, C.,Kaldrmidou, M.,Tzekaki,M.(2001).Mathematics Teaching practices in transition: Some meaning construction Issues. In PME25, Vol 4, Utrecht University, The Netherlands

Sakonidis, C.,Kaldrmidou, M.,Tzekaki,M.(2002). Reflections on teachers' practices in dealing with pupils' mathematical errors. In European Research in Mathematics Education II, Charles University, Czech Republic

Sakonidis, C.,Kaldrmidou, M.,Tzekaki,M.(2003). Teachers interventions in students Mathematical work: A classification. In Proceedings of the 3rd European Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy

Schoenfeld,A.H.(1992). Learning to think mathematically:Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.Grouws(Ed), Handbook of research on mathematics teaching and Learning, New York: Macmillan Publishing company.

Schoenfeld, A.H.(1987) What's all this fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld(Ed). Cognitive science and mathematics education (pp.189-215). Hillsdate,NJ:Erlbaum

Scott, J. (2004). The Forced Autonomy of Mathematics Teachers. *Educational Studies in Mathematics* 26, 227-257.

Schorr, R., Koellner-Clark, K.(2003) Using a modelling approach to analyze the ways in which teachers consider new ways to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning* 5, 191-210

Sfard,A.(2001). There is more to discourse than meets the ears:Looking and thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* 46,13-57.

Sfard, A. (2005) What would be more practical than good research?, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 58, 393 – 413.

Shroyer,J.C.(1982). Critical moments in the teaching of mathematics. What makes teaching difficult? *Dissertation Abstracts International*, 42A,3485.

Sierprinska, A. (1994). Understanding in Mathematics, London: Falmer Press

Skott, J.(2004). The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics* 55,227-257

Sherin, M,.(2002), A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom.*Journal of Mathematics Teacher Education* 5,205-233

Skemp,R.(1971). The psychology of learning mathematics. London: Pelican Books

Skott, J.(2001). The emerging practices of a novice teacher: the roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4, 3-28

Stigler,J.W.,Hiebert,J (1999). The teaching gap:Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.New York:The free press

Sullivan, P.,Mousley,J.(2001). Thinking teaching: seeing mathematics teachers as active decision makers. In F-L Lin & .J. Cooney (Eds) Making sense of Mathematics teachers Education ,Netherlands, Kluwer Publishers

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 1, 157-189

Thompson, A.G.(1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D.A. Grouws(Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan

Wagner,J(1997). The unavoidable intervention of Educational research: A framework for reconsidering research-practitioner cooperation. *Educational Researcher* 26,13-22

Wood, T., Berry, B.(2003) Editorial What does 'design research' offer mathematics teacher education?. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6,195-999

Wood, T., Turner-Vorbeck, T.(1999) Developing teaching of mathematics: Making connections in practice. In Burton, *Learning Mathematics*,173-231

Βοσνιάδου, Σ.(1995). Τι είναι η ψυχολογία των Μαθηματικών;. Στο Σ.Βοσνιάδου(Ed), Η ψυχολογία των Μαθηματικών, Αθήνα:Gutemberg

Γαγάτσης, Α.(1995). Διδακτική των Μαθηματικών. Θεωρία- Έρευνα. Θεσσαλονίκη:Εκδόσεις Γραφικές τέχνες ΑΕ

Κλαουδάτος,Ν.(2003) Διαλέξεις στο Μάθημα Διδακτική των Μαθηματικών στο Πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, ακαδημαϊκό έτος 2002-2003

Πόταρη,Δ.,Σακονίδης Χ.(2003) Διαλέξεις στο Μάθημα Ερευνητική Μεθοδολογία στη Διδακτική των Μαθηματικών, στο Πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, ακαδημαϊκό έτος 2002-2003

Πόταρη, Δ., Σακονίδης,Χ.,Μαναρίδης,Α.(2005). Η μελέτη της διδακτικής πρακτικής στην τάξη των μαθηματικών μέσα από τη συνεργασία εκπαιδευτικού-ερευνητή. Θα συμπεριληφθεί στα πρακτικά του 1ου Συνέδριου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, Αθήνα 2005

Σακονίδης, Χ.(2003).Μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών: από το μαθητή στις κοινότητες πρακτικής στην τάξη. Στο Α. Φραγκουδάκη και Δραγώνα Θ «Ομοιότητες και Διαφορές:αναζητώντας νέους δρόμους στην εκπαίδευση. Εκδόσεις ΥΠΕΠΘ-ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ

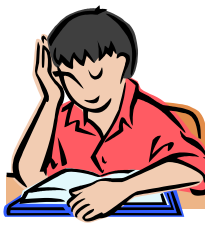
Σακονίδης, Χ. Καλδρυμίδου, Μ. Τζεκάκη, Μ. (2000). Επιστημολογικά και επικοινωνιακά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Στο Α. Γαγάτσης και Γ. Μακρίδης, Πρακτικά του Β Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Τόμος 1 Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Σακονίδης. Χ., Καλδρυμίδου, Μ., Τζεκάκη, Μ.(2001). Ο ρόλος του δασκάλου στη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης. Στο Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου «Σχολική γνώση και διδασκαλία στην πρωτοβάθμια Εκπαίδευση» Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.187-228

Σακονίδης, Χ.,Κλώθου,Α.(2001). Αντιλήψεις των δασκάλων για τα μαθηματικά και τη μάθησή τους και πρακτικές διδασκαλίας και αξιολόγησης:μία πρώτη ματιά. Στα Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου συνέδριου *Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορική στη Εκπαίδευση*, Θεσσαλονίκη

Φερεντίνος, Σ. (2002) Μαθηματικά και δομή της προσωπικότητας των καθηγητών μαθηματικών: Μια ψυχαναλυτική Προσέγγιση. *Ψυχολογία* 9,408-430

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



Φύλλο εργασίας στην Ευκλείδεια διαίρεση

Μελέτησε προσεκτικά τις παρακάτω ισότητες και στη συνέχεια προσπάθησε να απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν:

18 = 3.6

27= 3.9

Το 3 είναι _____ του 18 γιατί _____

_____.

Το 27 είναι _____ του 3 γιατί _____

_____

Κάποιος μαθητής υποστήριξε το παρακάτω:

«Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες του 27 σε _____ ομάδες των _____ ακέραιων μονάδων η κάθε ομάδα.»

Συμφωνείς ή διαφωνείς; Αιτιολόγησε την απάντησή σου: _____

_____

_____

Γενικά, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι:

«Όλα τα πολλαπλάσια του φυσικού αριθμού α είναι της μορφής_____ και μπορούν να χωριστούν σε _____ ομάδες των α _____;»

Αυτό συμβαίνει για όλα τα πολλαπλάσια ενός φυσικού; Δικαιολόγησε την απάντησή σου. _____

_____

_____

_____

Είναι το 26 πολλαπλάσιο του 4; Γιατί;_____

_____

_____

Αυτό σημαίνει ότι δεν_____

_____

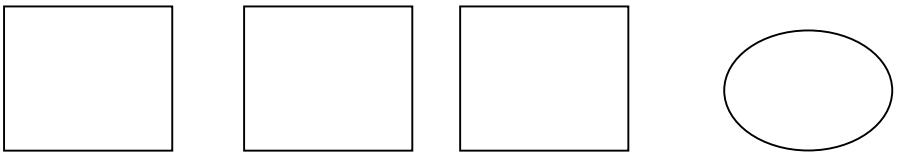
_____

_____

Ας προσπαθήσουμε να χωρίσουμε 26 μελομακάρονα σε κουτιά που χωράνε 4 μελομακάρονα το καθένα

___ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ 4 και _____ ακόμη _____ μελομακάρονα προκύπτει η **ισότητα** 26=_____

___ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ 4 και _____ ακόμη _____ μελομακάρονα δηλαδή προκύπτει η **ισότητα** 26=_____



___ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ 4 και _____ ακόμη _____ μελομακάρονα δηλαδή προκύπτει η **ισότητα** 26=_____

___ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ 4 και _____ ακόμη _____ μελομακάρονα δηλαδή προκύπτει η **ισότητα** 26=_____

Τι παρατηρούμε σε κάθε προσπάθεια τοποθέτησης στα κουτιά;_____

_____

Πότε θα σταματούσε η διαδικασία τοποθέτησης;_____

_____

_____

Ποιο είναι το πλήθος των κουτιών που θα χρειαστούμε;_____

Τότε θα είχαμε : 26=_____

Πότε θα σταματούσαμε την ομαδοποίηση όταν θέλουμε στα κουτιά να έχουμε

2 μελομακάρονα:_____

Τότε θα χρειαζόμασταν _____ κουτιά δηλαδή 26=_____

6 μελομακάρονα:_____

Τότε θα χρειαζόμασταν _____ κουτιά δηλαδή 26=_____

8 μελομακάρονα:_____

Τότε θα χρειαζόμασταν _____ κουτιά δηλαδή 26=_____

12 μελομακάρονα_____

Τότε θα χρειαζόμασταν _____ κουτιά δηλαδή 26=_____

Βρίσκοντας κάθε φορά το πλήθος των κουτιών που θα χρειαστούμε τοποθετείστε :

19 μελομακάρονα σε κουτιών των 5:_____

48 μελομακάρονα σε κουτιά των 7:_____

73 μελομακάρονα σε κουτιά των 3:_____

Τι βρίσκουμε σε κάθε περίπτωση και με τι τρόπο; _____

_____

_____

_____

_____

_____

Υποθέστε ότι κάποιος συμμαθητής σας έλειπε στο σημερινό μάθημα και θέλετε να του εξηγήσετε με σύντομο και σαφή τρόπο τι μάθατε στο σημερινό μάθημα. Πως θα το κάνατε αυτό;

Με λόγια_____

_____

_____

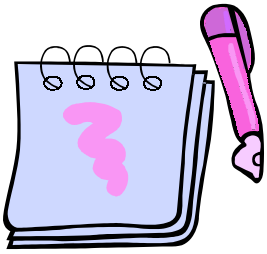
_____

_____

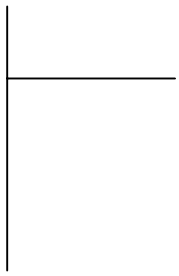
Με άλλο τρόπο:_____

_____

_____



Τελικά Συμπεράσματα

ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ:

ΜΕ ΜΙΑ ΓΝΩΣΤΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ