ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η υπερβολική Γεωμετρία μέσω της Γεωμετρίας Minkowski

-

Μια αναλυτική παρουσίαση».

ΜΑΝΙΤΑΡΟΥ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ

Δ 200404

Επιβλέποντες Καθηγητές

Διονύσιος Λάππας, Αναπλ. καθηγητή Τμ. Μαθηματικών ΕΠΑ
Ευστάθιος Γιαννακούλιας, Αναπλ. Καθηγητή Τμ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ
Παναγιώτης Σπύρου, Επίκ. Καθηγητή Τμ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπου-δών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……(επιβλέπων Καθηγητής)	……..	……..
2)……	……..	……
3)……	……..	……..

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Λάππα Διονύσιο που είχε την κύρια επίβλεψη της παρούσας Διπλωματικής τόσο για το ενδιαφέρον, τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε όσο και για την όλη υποστήριξη που με προσέφερε κατά την διάρκεια των προπτυχιακών αλλά και μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τους καθηγητές μου κ. Γιαννακούλια Ευστάθιο και κ. Σπύρου Παναγιώτη που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες και συμμετέχοντες στο ΠΜΣ για την προσφορά τους στην αρτιότερη επιστημονική και παιδαγωγική μου κατάρτιση κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, την αδερφή μου αλλά και την αρραβωνιαστικιά μου για την υπομονή και την υποστήριξη που μου έδειξαν κατά την διάρκεια της φοίτησής μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ....4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ....5

ΜΕΡΟΣ 1ο: 8

ΜΟΝΤΕΛΑ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ – ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ....8

1. Η ΨΕΥΔΟΣΦΑΙΡΑ ΤΟΥ BELTRAMI....8
2. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ KLEIN....12
3. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ POINCARE....15

ΜΕΡΟΣ 2ο: 20

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ....20

2.1 Ν-ΧΩΡΟΣ LORRENTZ....21
2.2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ....24
2.3 Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΧΡΟΝΟΕΙΔΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ....30
3. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΣ $n-$ ΧΩΡΟΣ....31
3.1 ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ LORENTZ....32
3.2 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΓΕΩΔΕΣΙΑΚΕΣ....37
3.3 ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΑ....41
3.4 Η ΧΩΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΧΩΡΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ....43
3.5 Η ΧΡΟΝΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΧΩΡΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ....46
3.6 Η ΓΩΝΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΧΩΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΕΙΔΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ....50
4. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ....52
4.1 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ....57
4.2 ΕΜΒΑΔΟΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ....62
4.3 ΎΠΑΡΞΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ....67

ΜΕΡΟΣ 3ο....74

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ M....77

1. ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ MINKOWSKI....82
2. Η ΟΜΑΔΑ LORENTZ....91
3. ΧΡΟΝΟΕΙΔΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ....101
4. ΧΩΡΟΕΙΔΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ....126
5. ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑΣ....129
6. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΡΟΦΗΣ ΚΑΙ ΟΜΑΔΑ LORENTZ....143

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ....161

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 5ο αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας - του οποίου την διατύπωση πολλοί την αποδίδουν στον Ευκλείδη- και η δυνατότητα απόδειξής του, απασχόλησε τους μαθηματικούς κοντά 2000 χρόνια. Το 5ο αίτημα χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην απόδειξη της 29ης πρότασης, αν και θα είχε βοηθήσει στην απόδειξη προηγούμενων προτάσεων, και με δεδομένο ότι η 29η πρόταση είναι ισοδύναμη με το 5ο αίτημα , δεν θα είναι «αυθαίρετο να διατυπώσουμε την εικασία ότι ο Ευκλείδης είχε διαισθανθεί την ιδιαιτερότητα του 5ου αιτήματος» και καθυστέρησε τη χρήση του όσο ήταν δυνατόν. Η κριτική που αναπτύχθηκε αποδείχθηκε εξαιρετικά δημιουργική, αφού συνέβαλλε στην ανακάλυψη των «Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών».

Ως κριτική πάνω στο 5ο αίτημα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν τα αποτελέσματα των προσπαθειών «να αποδειχθεί το 5ο αίτημα από τα υπόλοιπα αξιώματα και αιτήματα των Στοιχείων». Οι προσπάθειες των μαθηματικών απέτυχαν γιατί αυτό που στην ουσία έκαναν ήταν «να δίνουν 'αποδείξεις' χρησιμοποιώντας σιωπηρά ισχυρισμούς, οι οποίοι αποδεικνύονταν ' ισοδύναμοι' προς το 5ο αίτημα».Τέτοιους ισχυρισμούς είχαν διατυπώσει από πολύ παλιά οι: Κλαύδιος ο Πτολεμαίος (100-178 μ.Χ), ο Πρόκλος (410-485 ì. Χ), ο Πέρσης Nasireddin (1201-1274 μ.Χ) και άλλοι. Επίσης και οι Lambert (1728-1777), Gauss(1777-1855), Saccheri (1667-1733) και Legendre (1752-1833) ,οι οποίοι είχαν αντιληφθεί τη σχέση του 5ου αιτήματος με το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.

Ναι μεν οι διατυπούμενοι ισχυρισμοί δεν οδηγούσαν στην 'απόδειξη' του 5ου αιτήματος, αλλά οι αρνήσεις αρκετών από των ισχυρισμών αυτών ισχύουν σε ορισμένες από τις Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Μια από αυτές είναι και η Υπερβολική Γεωμετρία η οποία αποτελεί και βασικό θέμα της παρούσας μελέτης. Πρόκειται για τον τύπο γεωμετρίας στην οποία αληθεύουν τα τέσσερα πρώτα αιτήματα του Ευκλείδη, το πέμπτο όμως

αντικαθίσταται από την πρόταση «υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες διερχόμενες από σημείο και παράλληλες σε δοθείσα ευθεία».

Η επίσημη πρωτιά της ανακάλυψης της Υπερβολικής Γεωμετρίας ανήκει στους Janos Bolyai (1802-1860) και Nikolai Lobachevsky (1793-1856), έναν Ούγγρο και έναν Ρώσο, οι οποίοι δημοσίευσαν σε βιβλίο το 1832 και 1829, αντίστοιχα, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι αυτός ο τύπος γεωμετρίας αποτελεί συλλογή θεωρημάτων εξίσου συνεπούς με εκείνη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Και οι δύο συμμερίζονταν την άποψη ότι η Υπερβολική Γεωμετρία μπορούσε να περιγράψει τον φυσικό μας χώρο κατά τρόπο εξίσου επαρκή με εκείνον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η σπουδαιότητα αυτής της ανακάλυψης είναι ανυπολόγιστη. Για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια κυριαρχούσε η αίσθηση ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν απαραίτητα η γεωμετρία του χώρου. Τα Μαθηματικά και η Φυσική συνυφαίνονταν τόσους αιώνες με το νήμα αυτής της πίστης. Η Υπερβολική Γεωμετρία έδειξε ότι υπάρχουν και άλλες περιγραφές του χώρου προσιτές στην ανθρώπινη νόηση. Η μελέτη του φυσικού χώρου πέρασε στην επικράτεια της Φυσικής, ενώ τα Μαθηματικά απέκτησαν έναν πιο αφηρημένο χαρακτήρα. Κατέστη πλέον φανερό ότι μπορούσε κανείς να ξεκινήσει με ένα τυχαίο σύνολο αξιωμάτων και να μελετήσει τις αφηρημένες συνέπειες τους. Η σημασία αυτής της ανακάλυψης συγκρίνεται συχνά με τη θεωρία του Copernicus, σύμφωνα με την οποία η Γη δεν αποτελεί το κέντρο του σύμπαντος ή με εκείνη του Einstein που λέει πως ο χρόνος δεν είναι ίδιος για όλους τους παρατηρητές (κάτι που θα δούμε αργότερα). Η αναλογία, φυσικά, έγκειται στο ότι η κάθε θεωρία αποδέσμευσε τη σκέψη του ανθρώπου από πλαίσια παραδεκτά επί μακρόν.

Οι πρώτες ανακαλύψεις των Bolyai- Lobachevsky παρά το γεγονός ότι τα θεωρήματα της έμοιαζαν να εναντιώνονται στην αίσθηση που έχει κανείς για τον χώρο, δεν φαινόταν να παράγουν μαθηματικές αντιφάσεις. Όμως ούτε ο Bolyai ούτε ο Lobachevsky μπόρεσαν να αποδείξουν τη συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Αυτό που πίστευαν εκείνα τα χρόνια ήταν ότι μετά από αρκετά σκληρή δουλειά, θα οδηγείτο κάποιος σε μια αντίφαση, θα αποδει-

κνυόταν δηλαδή ότι κάτι ήταν ταυτοχρόνως αληθές και ψευδές. Για να δείξουμε τη συνέπεια των αξιωματικών συστημάτων προχωρούμε στην κατασκευή μοντέλων, δηλαδή σε μια ερμηνεία των απροσδιόριστων όρων τέτοια ώστε όλα τα αξιώματα να αληθεύουν στο πλαίσιο αυτής της ερμηνείας. Αυτό οδηγεί στη συνέπεια διότι, τότε, κάθε πρόταση που μπορεί να συναχθεί λογικά από τα αξιώματα θα αληθεύει υποχρεωτικά στο μοντέλο και μια πρόταση που αφορά το μοντέλο δεν μπορεί να είναι ταυτοχρόνως αληθής και ψευδής.
Μεσολάβησαν σαράντα τουλάχιστον χρόνια από την εργασία των Bolyai και Lobachevsky για να βρεθεί ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Η μακρά περίοδος αναμονής οφειλόταν κατά κύριο λόγο στην απροθυμία των περισσοτέρων μαθηματικών να ασχοληθούν με τέτοιες παράξενες ιδέες, όπως είναι η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.
Αμέσως μετά θα παρουσιάσουμε κάποια από τα μοντέλα της Γεωμετρίας που κατασκευάστηκαν μεταξύ του 1868 και του 1881 και τα οποία οδήγησαν στην νομιμοποίηση της. Ο ορισμός τους βασίζεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι επομένως αυτά συνεπή αν είναι και αυτή. Με χρήση πάγιων μεθόδων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αποδεικνύεται ότι τα αξιώματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας αληθεύουν στο μοντέλο. Αν επομένως η Υπερβολική Γεωμετρία οδηγεί σε αντίφαση, το ίδιο κάνει και η τρισδιάστατη Ευκλείδεια. Άλλωστε οι περισσότεροι μαθηματικοί θα έλεγαν ότι η συνέπεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν έχει αποδειχθεί, είναι όμως ευτυχείς με την πεποίθηση ότι αυτή είναι συνεπής. Την ίδια ευτυχία θα πρέπει να αισθάνονται λέγοντας ότι η Υπερβολική είναι επίσης συνεπής.

ΜΕΡΟΣ 1ο:

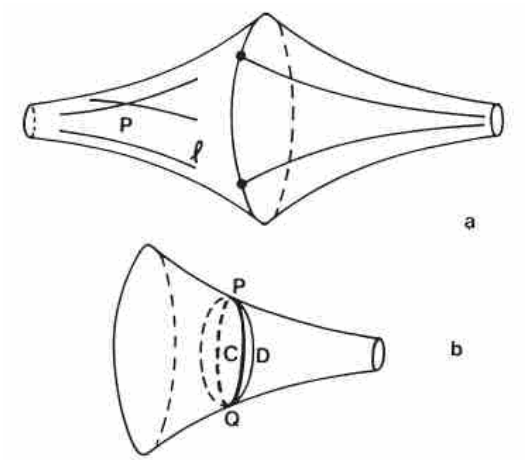
Μοντέλα Υπερβολικής Γεωμετρίας

–

Νομιμοποίηση Υπερβολικής Γεωμετρίας

1. Η Ψευδοσφαίρα του Beltrami

Το πρώτο μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας προτάθηκε από τον Ιταλό μαθηματικό Eugenio Beltrami (1835-1900) το 1868. Προκύπτει από την περιστροφή μιας συγκεκριμένης καμπύλης που ονομάζεται έλκουσα γύρω από τον άξονα της και το σχήμα της θυμίζει ατέρμονη χοάνη ή δυο ατέρμονες χοάνες που οι καμπάνες τους βρίσκονται σε επαφή σε όλο το μήκος των περιφερειών τους. Ονομάζεται ψευδοσφαίρα διότι ο ρόλος της στην Υπερβολική Γεωμετρία είναι ανάλογος με εκείνον της σφαίρας στην Σφαιρική Γεωμετρία.



Το σημείο στην Υπερβολική Γεωμετρία είναι σημείο στην ψευδοσφαίρα ενώ η ευθεία γραμμή είναι γεωδαισιακή.

Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί ορισμένες γεωδαισιακές με τρόπο που να δείχνει ότι το Υπερβολικό αίτημα πράγματι ισχύει και από το σημείο P διέρχονται πολλές ευθείες που δεν τέμνουν την *l*.

Ο Beltrami δεν επέλεξε την επιφάνεια αυτή γιατί μοιάζει με χοάνη. Ήταν ήδη γνωστό ότι η επιφάνεια αυτή που προκύπτει από την περιστροφή μιας έλκουσας είχε σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Η σφαίρα είναι επιφάνεια σταθερής θετικής καμπυλότητας και είχε επίσης αποδειχθεί από τον Minding ότι σε επιφάνεια σταθερής καμπυλότητας τα διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να αλλάζουν θέση, χωρίς αυτή η κίνηση να μεταβάλλει ορισμένα πράγματα, όπως λόγου χάρη τις γωνίες. Αυτή η δυνατότητα αποτελεί σπουδαίο στοιχείο της γεωμετρίας, όπως συμβαίνει με την Πρόταση Πλευράς-Γωνίας-Πλευράς. Ο Beltrami τόνισε ότι αυτή η ιδιότητα της σταθερής καμπυλότητας καθιστούσε την ψευδόσφαιρα κατάλληλο μοντέλο για την Υπερβολική Γεωμετρία, σημειώνοντας ότι το Υπερβολικό αίτημα ικανοποιείται σε αυτήν καθώς και ότι τα τρίγωνα στην επιφάνεια της έχουν άθροισμα γωνιών μικρότερο από 180°.

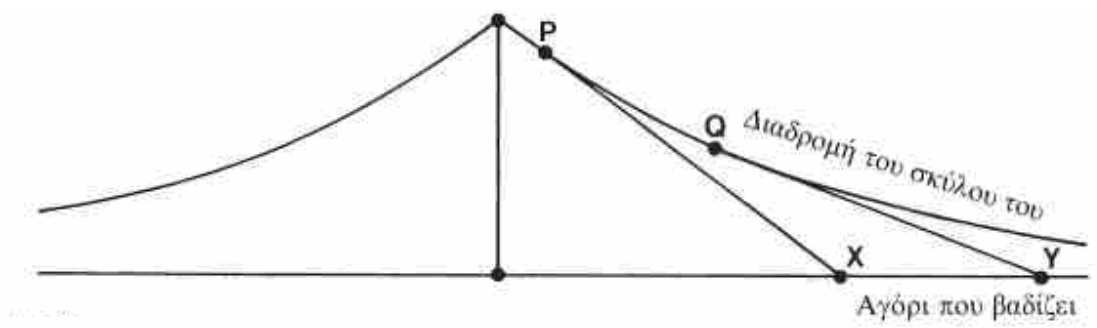
Η ψευδόσφαιρα δεν προσφέρεται για πλήρες μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Ένα από τα προβλήματα εντοπίζεται στο μέρος που βρίσκονται σε επαφή οι δύο χοάνες. Οι καμπύλες δεν μπορούν να συνεχιστούν με ομαλό τρόπο επάνω από αυτήν την κορυφογραμμή. Ένα άλλο οφείλεται στην κυκλική συμμετρία της ψευδόσφαιρας. Δίνεται η εντύπωση ότι η κλειστή καμπύλη C του παραπάνω Σχήματος, η οποία είναι η τομή της ψευδόσφαιρας με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα της, αποτελεί γεωδαισιακή που τέμνει τον εαυτό της, αφού μεσολαβήσει πεπερασμένου μήκους τμήμα της, κατ' αναλογίαν με τις γεωδαισιακές σε σφαίρα. Πάντως η εν λόγω καμπύλη δεν είναι γεωδαισιακή, ακριβώς όπως δεν είναι οι μη μέγιστοι κύκλοι στη σφαίρα. Στο ίδιο Σχήμα, φαίνεται πώς η καμπύλη D, η οποία στρέφεται ελαφρώς στο στενότερο μέρος της χοάνης, συνιστά συντομότερη διαδρομή μεταξύ του P και του Q από ότι η κλειστή καμπύλη C. Αυτό όμως αποτελεί επίσης πρόβλημα, μια και υπάρχει παρόμοια γεωδαισιακή στο πίσω μέρος της ψευδόσφαιρας,

άρα έχουμε δύο ευθείες διερχόμενες από τα σημεία P και Q. Για την υπερπήδηση αυτών των προβλημάτων μπορούμε να στηριχθούμε στη διαπίστωση ότι, αν κόψουμε την ψευδόσφαιρα κατά μήκος μιας από τις έλκουσες της, θα προκύψει ένα μοντέλο για το τμήμα του υπερβολικού επίπεδου) που ορίζεται από δύο παράλληλες ευθείες και είναι φραγμένο από μία πλευρά.

Τελικά, το 1901 ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός David Hilbert απέδειξε ότι δεν μπορεί μια επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο με σταθερή αρνητική καμπυλότητα να αποτελέσει πλήρες μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Συνεπώς, η ψευδόσφαιρα του Beltrami δεν απέδειξε ακριβώς τη συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας, άσκησε όμως μεγάλη επίδραση στο να γίνει αποδεκτή αυτή η Γεωμετρία και να κεντρίσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών.

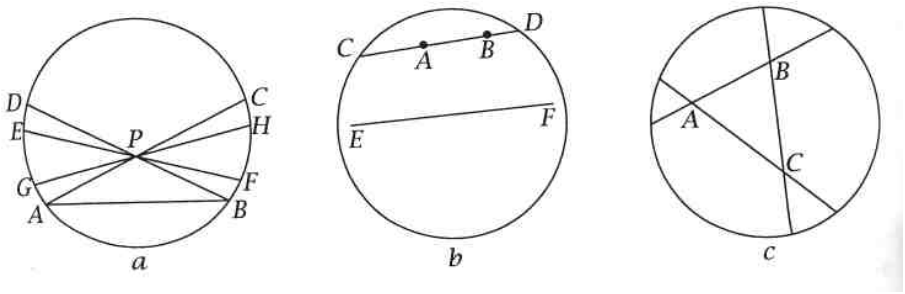
Η Έλκουσα

Η έλκουσα, η καμπύλη που περιστρεφόμενη μας δίνει την ψευδόσφαιρα, είναι άκρως ενδιαφέρουσα. Εικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα μαζί με τον άξονα περιστροφής της. Η εξίσωση της είναι πολύπλοκη, και θα αποφύγουμε να την παραθέσουμε, έχει όμως μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα, που αφορά τις εφαπτόμενες γραμμές της καμπύλης σε σημεία της. Πρόκειται για ευθείες με τον μέγιστο βαθμό επαφής με την καμπύλη. Οι εφαπτόμενες γραμμές στην έλκουσα στα σημεία P και Q δηλώνονται στο παρακάτω σχήμα. Η ιδιότητα της έλκουσας είναι ότι αυτές οι γραμμές PX και QY, και άλλες σαν αυτές, είναι ισομήκεις.



Η βασική γεωμετρική ιδιότητα της έλκουσας λέει ότι αν σε κάθε σημείο της καμπύλης πάρουμε το τμήμα της εφαπτόμενης γραì μής το οποίο συνδέει το σημείο στην καμπύλη με το σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη γραμμή τέμνει τον άξονα των χ, αυτά τα τμήματα θα έχουν όλα το ίδιο μήκος. Η καμπύλη αυτή αποκαλείται ορισμένες φορές «διαδρομή του πεισματάρη σκύλου», διότι είναι η καμπύλη που διαγράφει ένας σκύλος που το αφεντικό του βαδίζει κατά μήκος του άξονα των χ και τον τραβά απ' το λουρί. Ο σκύλος, που αντιδρά, υποχρεώνει το λουρί να είναι συνεχώς τεντωμένο, άρα να έχει συνεχώς το ίδιο μήκος. Καθώς όμως ο σκύλος σύρεται από το αφεντικό του, η κίνηση του θα έχει την εφαπτόμενη της γραμμή στην κατεύθυνση του λουριού.

2. Το μοντέλο του Klein



Έχουμε δει ότι η ψευδόσφαιρα του Beltrami δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας, αφού αποτελεί μοντέλο ενός μέρους μόνον του υπερβολικού επιπέδου. Για μερικά χρόνια, πάντως, επικρατούσε η άποψη ότι αυτό ήταν αρκετό, με αποτέλεσμα, το πρώτο πραγματικό μοντέλο στο οποίο κατέληξαν οι Klein και Beltrami το 1871, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, να μην τύχει της δέουσας προσοχής. Ο Klein πρώτος διέγνωσε ότι το μοντέλο αυτό θα έπρεπε να έχει προβολικό χαρακτήρα και κατά συνέπεια η μετρική του να εκφράζεται μέσω του διπλού λόγου τεσσάρων σημείων. Ας το δούμε όμως αναλυτικότερα.

Σχεδιάζουμε έναν δίσκο στο επίπεδο. Η λέξη «σημείο» θα δηλώνει σημείο στο εσωτερικό του δίσκου, στο οποίο εσωτερικό δεν περιλαμβάνεται η περιφέρεια του. Με τον όρο «ευθεία γραμμή» θα δηλώνεται μια ευθεία γραμμή στο εσωτερικό του δίσκου, χωρίς να περιλαμβάνονται και πάλι σημεία της ευθείας επάνω στην περιφέρεια. Το Υπερβολικό αίτημα ικανοποιείται σε αυτό το μοντέλο. Αυτό καταδεικνύεται στο Σχήμα (α) , στο οποίο έχουμε τέσσερις ευθείες διερχόμενες από το P και οι οποίες δεν τέμνουν την ευθεία AB. Υπενθυμίζουμε ότι σημεία στην περιφέρεια του δίσκου δεν αποτελούν μέρος του μοντέλου, συνεπώς, όταν γράφουμε AB, εννοούμε όλα τα σημεία της γραμμής μεταξύ του A και του B, χωρίς τη συμπερίληψη των A και B.

Οι πλησιέστερες γραμμές που δεν τέμνουν την AB είναι οι AC και BD και θα ονομάζονται οριακά παράλληλες.. Αυτές, φαινομενικά, τέμνουν την AB στο A και στο B, αντίστοιχα, αλλά τα A και B δεν ανήκουν στο μοντέλο. Έτσι οι AC και BD είναι οι παράλληλες στην AB που διέρχονται από το P με την αυ-

στηρή έννοια της Υπερβολικής Γεωμετρίας, ενώ οι EF και GH είναι αποκλίνουσες. Δεν τέμνουν την AB, δεν είναι όμως οι πλησιέστερες γραμμές με αυτό το χαρακτηριστικό.

Υπάρχουν, πάντως, πλευρές αυτού του μοντέλου που μας προβληματίζουν. Τι γίνεται, για παράδειγμα, με το Ευκλείδειο Αίτημα 2, σύμφωνα με το οποίο μια ευθεία εκτείνεται απεριόριστα; Φαίνεται να υπάρχει φράγμα στα μήκη των γραμμών, συγκεκριμένα αυτές δεν μπορούν να εκταθούν πέραν της περιφέρειας. Αυτό είναι σωστό βέβαια, αλλά το μήκος ορίζεται διαφορετικά σε αυτό το μοντέλο και όπως αναφέραμε πριν γίνεται με χρήση του διπλού λόγου τεσσάρων σημείων.

Ο διπλός λόγων τεσσάρων συνευθειακών σημείων Α, Β, Γ, Δ ισούται με $(AD, BC) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{CA}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}}$ όπου τα μήκη είναι Ευκλείδεια. Σύμφωνα με την γεωμετρική ερμηνεία του Klein η απόσταση $d(A, B)$ των σημείων Α και Β εκφράζεται ως εξής:

$d(A, B) = \lambda \cdot \ln(A, B, C, D) = \lambda \cdot \left| \ln \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \right|$ όπου λ το μήκος της ακτίνας του δίσκου.

Συνέπεια αυτού είναι ότι οι ευθείες μας είναι πλέον απέραντες, δηλαδή το μήκος τους είναι άπειρο. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι το μήκος κάθε χορδής όπως της CD (ως προς την συγκεκριμένη μετρική) είναι άπειρο. Για να το διαπιστώσουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι οι 'ημιευθείες' έχουν άπειρο μήκος δηλαδή ότι ισχύει:

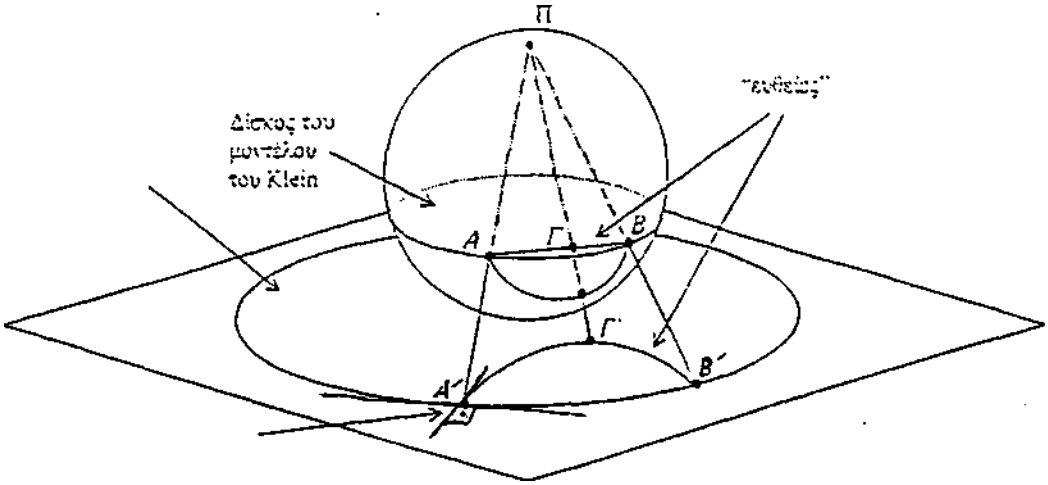
$$\lim_{B \to D} d(A, B) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{B \to D} \left| \ln \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \right| = +\infty$$

Που ισχύει εφόσον τα (Ευκλείδεια) μήκη AC, AD και BC παραμένουν θετικά και φραγμένα ενώ $\lim_{B \to D} d(B, D) = 0$. Για να τονίσουμε το γεωμετρικό ενδιαφέρον της διαπίστωσης αυτής σημειώνουμε ότι το γνωστό μας «Θεώρημα Εξωτερικής Γωνίας Τριγώνου» προϋποθέτει το απέραντο των ημιευθειών.

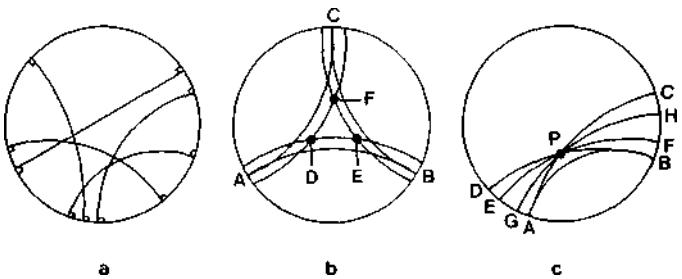
Ένα άλλο σημείο για διερεύνηση αφορά το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Φαίνεται, βέβαια, ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABC στο Σχήμα (c) είναι 180°. Η εξήγηση είναι παρόμοια με εκείνη που δόθηκε ανωτέρω. Οι γωνίες στο μοντέλο αυτό ορίζονται με έναν τρόπο που τις κάνει να διαφέρουν από την ευκλείδεια τιμή τους. Δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα ο ορισμός της γωνίας στο μοντέλο των Klein-Beltrami, διότι αυτή η δυσάρεστη πλευρά του μοντέλου αντιμετωπίστηκε επιτυχώς από τον Poincare.

3. Το μοντέλο του Poincare

Το 1881, ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός Henri Poincare τροποποίησε το μοντέλο του Klein έτσι ώστε οι γωνίες να μετρώνται κατά τον ευκλείδειο τρόπο. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι διαισθητικό — τα σχήματα σε αυτό το μοντέλο φαίνεται να αναπαριστούν πραγματικά την Υπερβολική Γεωμετρία. Στο μοντέλο του Poincare διατηρείται το χαρακτηριστικό ενός μη ευκλείδειου ορισμού της απόστασης (ή της ισότητας γραμμών), όμως ο εισηγητής του παρουσίασε κατά τέτοιον τρόπο ώστε αυτή η νέα έννοια απόστασης να φαίνεται αρκετά λογική.



Το νέο μοντέλο προκύπτει με στερεογραφική προβολή όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα. Επειδή η στερεογραφική προβολή διατηρεί τις γωνίες και το επίπεδο των Α, Β, Γ είναι κάθετο στο δίσκο του μοντέλου του Klein (το ημικύκλιο ΑΒΓ είναι τομή του επιπέδου αυτού με την σφαίρα), το τόξο κύκλου Α'Β'Γ' είναι κάθετο στην περιφέρεια του δίσκου του Poincare. Έτσι το μοντέλο του Poincare έχει ως επίπεδο έναν ανοικτό δίσκο τον οποίο θα υποθέσουμε μοναδιαίο και ως ευθείες τις προβολές των ευθειών του δίσκου του Klein οι οποίες θα είναι είτε τόξα κύκλων κάθετων στην περιφέρεια του δίσκου (όπως πριν) είτε διάμετροι του κύκλου αν η ευθεία ΑΒ του προηγούμενου σχήματος είναι διάμετρος του δίσκου του Klein. Και στο μοντέλο αυτό από ένα σημείο εκτός ευθείας περνάνε περισσότερες από μια παράλληλες της και υπάρχουν οριακές παράλληλοι.



Στο μοντέλο του Poincare, τα «σημεία» είναι και πάλι σημεία στο εσωτερικό (δεν περιλαμβάνεται η περιφέρεια) ενός δίσκου. Οι «ευθείες γραμμές» είναι τόξα κύκλων που τέμνουν την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες. Στο Σχήμα δηλώνονται πέντε τέτοιες ευθείες. Σημειώστε ότι μια ευκλείδεια ευθεία, διερχόμενη από το κέ-

ντρο του δίσκου τέμνει την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες, άρα αποτελεί «ευθεία» και στα πλαίσια του μοντέλου του Poincare. Μπορεί να θεωρηθεί είτε ως τόξο κύκλου απειρομεγέθους ακτίνας είτε ως το όριο των τόξων πραγματικών κύκλων που τέμνουν την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια ευκλείδεια ευθεία γραμμή η οποία δεν διέρχεται από το κέντρο του δίσκου δεν τέμνει την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες, άρα δεν είναι «ευθεία» στον δίσκο του Poincare.

Οι γωνίες ορίζονται σε αυτό το μοντέλο έτσι ώστε να διατηρούν τις ευκλείδειες τιμές τους. Φυσικά, όταν μιλούμε για την ευκλείδεια γωνία μεταξύ δύο καμπύλων, εννοούμε τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες τους. Στο Σχήμα είναι μάλλον προφανές ότι το τρίγωνο *DEF* έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο από 180°, ενώ το «τρίγωνο» *ABC* είναι το οριακό τρίγωνο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν και το μικρότερο δυνατό άθροισμα γωνιών, δηλαδή 0°. Αυτό δεν είναι κανονικό τρίγωνο, διότι τα σημεία *A, B, C* δεν είναι μέρος του μοντέλο», μπορεί όμως να προσεγγιστεί όσο περισσότερο επιθυμούμε από κανονικό τρίγωνο του μοντέλου με το άθροισμα των γωνιών του όσο κοντά θέλουμε στο 0° και με εἰβαδόν όσο κοντά θέλουμε στο εμβαδόν του *ABC.*

Το τι εννοούμε με τον όρο εμβαδόν εξαρτάται από το τι εννοούμε με τον όρο μήκος και αυτό δεν το έχουμε εξετάσει ακόμη.

Στο Σχήμα, έχει αποτυπωθεί η ισχύς του Υπερβολικού αιτήματος στο δίσκο του Poincare. Τα πράγματα εδώ είναι τελείως ανάλογα με το μοντέλο του Klein. Οι δύο παράλληλες προς την ευθεία *AB* είναι οι *AC* και *BD*, ενώ οι *EF* και *GH* είναι αποκλίνουσες αυτής, διέρχονται δηλαδή από το *P*, δεν τέμνουν την *AB*, δεν είναι όμως οι χαμηλότερες τέτοιες γραμμές. Θυμίζουμε ότι τα σημεία της περιφέρειας δεν ανήκουν στο μοντέλο, συνεπώς οι *AC* και *AB* δεν τέμνονται, αφού το *A* δεν ανήκει στο μοντέλο.

Για να αποτελεί ο δίσκος του Poincare μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας, θα πρέπει να επαληθεύσουμε επίσης την ισχύ των τεσσάρων πρώτων αιτημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προφανή είναι τα πράγματα για το Τέταρτο Αίτημα, αφού οι ορθές γωνίες εδώ είναι οι ίδιες με της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η επαλή-

θευση του Πρώτου Αιτήματος απαιτεί μια κατασκευή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία: δοθέντων δύο σημείων στο εσωτερικό ενός κύκλου, υπάρχει μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τα δύο σημεία και τέμνει τον δοθέντα κάθετα σε δύο σημεία. Πρόκειται για δύσκολη άσκηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μπορεί όμως να αποδειχθεί. Βεβαιωθείτε ότι σας είναι κατανοητό το γιατί η ανωτέρω κατασκευή συνιστά ερμηνεία του Πρώτου Αιτήματος του Ευκλείδη στον δίσκο του Poincare.

Το Δεύτερο Αίτημα δεν φαίνεται να ικανοποιείται σε πρώτη ματιά, αφού δίνεται η εντύπωση ότι οι ευθείες μπορούν να εκταθούν ως ένα ορισμένο σημείο αλλά και αυτό το εμπόδιο ξεπερνιέται από τον ορισμό της απόστασης. Η απόσταση ορίζεται ακριβώς όπως στο μοντέλο του Klein.

$$d\left(A,B\right)=\lambda\cdot\ln\left(A,B,C,D\right)=\lambda\cdot\left|\ln\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}\right|$$

Μας μένει ακόμη να ελέγξουμε την ισχύ του Τρίτου Αιτήματος, που αναφέρεται στην ύπαρξη κύκλων. Επιλέγουμε ένα σημείο για κέντρο και μια απόσταση για ακτίνα. Μπορούμε να κινηθούμε από το κέντρο κατά μήκος μιας «ευθείας γραμμής» προς κάθε κατεύθυνση, καλύπτοντας ακριβώς τη συγκεκριμένη «απόσταση». Παίρνοντας τα άκρα όλων αυτών των «ακτινών», θα έχουμε έναν κύκλο σε αυτήν τη γεωμετρία. Οι ακτίνες δεν θα φαίνονται ευθείες ή ίσες σε εμάς τους εξωτερικούς ευκλείδειους, το σχήμα όμως είναι ένας υπερβολικός κύκλος. Πάντως, όσο και αν εκπλήσσει το γεγονός, το σχήμα μας είναι πράγματι ευκλείδειος κύκλος. Το κέντρο του θα βρίσκεται εκτός του δίσκου μακρύτερα από το σημείο που θα περίμενε κανείς.

Συνεπώς, το μοντέλο του Poincare ικανοποιεί τα τέσσερα πρώτα αιτήματα του Ευκλείδη καθώς και το Υπερβολικό αίτημα. Δείχνει ότι η Υπερβολική Γεωμετρία είναι συνεπής στον βαθμό που είναι και η Ευκλείδεια. Αποδεικνύει επίσης ότι το Πέμπτο Αίτημα του Ευκλείδη είναι ανεξάρτητο από τα άλλα τέσσερα, διότι σε ένα μοντέλο των άλλων τεσσάρων (το ευκλείδειο επίπεδο) αληθεύει, ενώ σε ένα άλλο (τον δίσκο του Poincare) όχι.

Σε αυτά τα μοντέλα όμως βασικό ρόλο παίζει η μέτρηση η οποία είναι προβολικής υφής και ο χαρακτήρας της είναι καθαρά ευρετικός. Αυτό το γεγονός από μόνο του τα κάνει δύσκολα προσπελάσιμα εισάγοντας την ανάγκη για μια αναλυτική προσέγγιση. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας και της εισαγωγής ενός εσωτερικού γινομένου τύπου Minkowski ή Lorentz και θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα.

ΜΕΡΟΣ 2ο:

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια προσέγγιση της Υπερβολικής Γεωμετρίας χρησιμοποιώντας μεθόδους Αναλυτικής Γεωμετρίας. Θα ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο θα μας βοηθήσει στην εισαγωγή της έννοιας της μέτρησης και της υπερβολικής απόστασης. Θα μελετήσουμε το Υπερβολικό Μήκος Τόξου αλλά και την έννοια της γωνίας. Θα εισχωρήσουμε στην Υπερβολική Τριγωνομετρία και θα δούμε την διαφοροποίηση της από την Ευκλείδια όσον αφορά τον καθορισμό του τριγώνου αλλά και την θεμελίωση της ύπαρξής του. Θα αποδείξουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι 180 μοίρες και θα μελετήσουμε την διαμόρφωση των γνωστών μας νόμων ημιτόνων και συνημιτόνων αλλά και την συσχέτιση του εμβαδού ενός τριγώνου με τις γωνίες του.

Τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε με την μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας. Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε ένα νέο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο και θα καλέσουμε εσωτερικό γινόμενο Lorentz. Αυτό θα οδηγήσει και σε μια νέα έννοια του μήκους. Συγκεκριμένα μας δίνεται η δυνατότητα ύπαρξης μιγαδικών (φανταστικών) μηκών.

2.1 n-Χώρος Lorrentz

Έστω x, y διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ με n>1. Το εσωτερικό γινόμενο Lorentz των x και y ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός:

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \qquad (1.1)$$

Το εσωτερικό γινόμενο Lorentz είναι προφανώς εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο Lorentz θα καλείται n-χώρος Lorentz και θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Κάποιες φορές θα φανεί χρήσιμο να αντικαταστήσουμε το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο Lorentz με το ισοδύναμο

$$x \circ y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n \qquad (1.2)$$

Ο χώρος εσωτερικού γινομένου που αποτελείται από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ μαζί με το νέο εσωτερικό γινόμενο θα καλείται επίσης n-χώρος Lorentz και θα συμβολίζεται $\mathbb{R}^{n-1,1}$. Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ο $\mathbb{R}^{3,1}$ αποτελεί μοντέλο χωροχρόνου. Οι τρεις πρώτες συντεταγμένες ενός διανύσματος $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ θα είναι οι χωρικές συντεταγμένες και η τελευταία θα είναι η χρονική. Εμείς θα εργαστούμε στον χώρο $\mathbb{R}^{1,n-1}$ και για χάριν ευκολίας θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{R}^n$ αντί του $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Η νόρμα Lorentz ενός διανύσματος x στον $\mathbb{R}^n$ θα οριστεί να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\|x\| = (x \circ x)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.3)$$

Εδώ $\|x\|$ θα είναι είτε θετικός είτε αρνητικός είτε θετικός μιγαδικός.

Αν $\|x\|$ είναι θετικά μιγαδικός τότε θα συμβολίσουμε την απόλυτη τιμή του με $|\|x\||$.

Η απόσταση Lorentz μεταξύ των διανυσμάτων x και y στον $\mathbb{R}^n$ θα οριστεί να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$d_L(x,y) = \|x-y\|. \qquad (1.4)$$

Η απόσταση $d_L(x,y)$ είναι είτε θετική είτε μηδέν είτε θετικά μιγαδική. Το σύνολο όλων των x στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιων ώστε $\|x\| = 0$ αποτελούν τον υπερκώνο C^{n-1} που ορίζεται από την εξίσωση

$$x_1^{\,2} = x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}. \qquad (1.5)$$

Ο υπερκώνος C^{n-1} καλείται και κώνος φωτός στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $\|x\| = 0$ τότε καλείται φωτοειδές (light like). Ένα φωτοειδές διάνυσμα x καλείται θετικό (και αντίστοιχα αρνητικό) αν και μόνο αν $x_1 > 0$ (αντίστοιχα $x_1 < 0$).

Αν $\|x\| > 0$ τότε το διάνυσμα x καλείται χωροειδές. Ας σημειώσουμε ότι ένα διάνυσμα x θα είναι χωροειδές αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την ανισότητα:

$$x_1^{\,2} < x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}.$$

Το εξωτερικό του υπερκώνου C^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ είναι το ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από όλα τα χωρικά διανύσματα.

Αν $\|x\|$ είναι φανταστικός τότε το διάνυσμα x καλείται χρονοειδές. Ας σημειώσουμε ότι ένα διάνυσμα x θα είναι χρονοειδές αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την ανισότητα: $x_1^{\,2} > x_2^{\,2} + \cdots + x_n^{\,2}$.

Ένα χρονοειδές διάνυσμα x θα καλείται θετικό (αντίστοιχα αρνητικό) αν και μόνο αν $x_1 > 0$ (αντίστοιχα $x_1 < 0$). Το εσωτερικό του υπερκώνου C^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ είναι το ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από όλα τα χρονοειδή διανύσματα.

Θεώρημα 1.1: Αν x και y είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $t > 0$ τότε:

1. το διάνυσμα tx είναι θετικό (αντίστοιχα αρνητικό) χρονοειδές
2. Το διάνυσμα $x + y$ είναι θετικό (αντίστοιχα αρνητικό) χρονοειδές.

<u>Απόδειξη</u>

1. $\|tx\|^2 = t^2 \|x\|^2 < 0$
2. $(x_1 + y_1)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2$

$$> \left(x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) + 2\left(x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)$$

$$\geq \left(x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) + 2\left(x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\right) + \left(y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)$$
$$= \left(x_2 + y_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n + y_n\right)^2$$

Πόρισμα 1:

Το σύνολο όλων των θετικών (αντίστοιχα αρνητικών) χρονοειδών διανυσμάτων είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν x και y είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $0 < t < 1$ τότε $(1-t)x + ty$ είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα.

2.2 Μετασχηματισμοί Lorentz

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ θα καλείται μετασχηματισμός Lorentz αν και μόνο αν $\phi(x)\circ\phi(y)=x\circ y$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$

Μια βάση $\{u_1,\cdots,u_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ θα καλείται Lorentz ορθοκανονική αν και μόνο αν $u_1\circ u_1=-1$ και $u_i\circ u_j=\delta_{ij}$. Η συνήθης βάση $\{e_1,\cdots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι Lorentz ορθοκανονική.

Θεώρημα 1.2: Μια συνάρτηση $\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ θα είναι μετασχηματισμός Lorentz αν και μόνο αν η ϕ είναι γραμμική και $\{\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n)\}$ είναι Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Ευθύ:

Έστω ότι ϕ είναι μετασχηματισμός Lorentz στον $\mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\phi(e_1)\circ\phi(e_1)=e_1\circ e_1=-1$$

και

$$\phi(e_i)\circ\phi(e_j)=e_i\circ e_j=\delta_{ij}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Επομένως $\{\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n)\}$ είναι μια Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $x\in\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν συντελεστές $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\phi(e_i).$$

Καθώς $\{\phi(e_1),\cdots,\phi(e_n)\}$ είναι μια Lorentz ορθοκανονική βάση έχουμε

$$-c_1=\phi(x)\circ\phi(e_1)=x\circ e_1=-x_1$$

Και

$$c_j = \phi(x) \circ \phi(e_j) = x \circ e_j = x_j \text{ για } j > 1.$$

Τότε η ϕ είναι γραμμική εφόσον

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_i)$$
$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$$

Αντίστροφο:

Ας υποθέσουμε ότι η ϕ είναι γραμμική και $\{\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)\}$ είναι μια Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε η ϕ είναι μετασχηματισμός Lorentz εφόσον:

$$\phi(x) \circ \phi(y) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \circ \phi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \phi(e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i) \circ \phi(e_j) =$$
$$= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x \circ y$$

Ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας A θα καλείται πίνακας Lorentz αν και μόνο αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : A(x) = Ax$ είναι μετασχηματισμός Lorentz.

Το σύνολο όλων των πινάκων Lorentz εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό πινάκων αποτελεί ομάδα την οποία θα συμβολίσουμε με $O(1, n-1)$ θα καλείται ομάδα Lorentz των $n \times n$ πινάκων. Με βάση το Θεώρημα 2 η ομάδα $O(1, n-1)$ είναι φυσικός ισομορφισμός της ομάδας των μετασχηματισμών Lorentz του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.3: Έστω A πραγματικός $n \times n$ πίνακας. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. Ο πίνακας A είναι πίνακας Lorentz
2. Οι στήλες του A σχηματίζουν μια Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
3. Ο πίνακας A ικανοποιεί την εξίσωση $A^t JA = J$, όπου $J = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$
4. Ο πίνακας A ικανοποιεί την εξίσωση $AJA^t = J$
5. Οι γραμμές του A σχηματίζουν μια Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Έστω A πίνακας Lorentz. Καθώς $A^t JA = J$ έχουμε $\det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

Έστω $SO(1, n-1)$ η ομάδα όλων των πινάκων Lorentz με $\det(A) = 1$. Είναι προφανές ότι η $SO(1, n-1)$ αποτελεί υποομάδα της $O(1, n-1)$ και θα καλείται ειδική ομάδα Lorentz.

Με βάση το Πόρισμα 1 το σύνολο όλων των χρονοειδών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ έχει δυο συνιστώσες , το σύνολο των θετικών χρονοειδών διανυσμάτων και το σύνολο των αρνητικών χρονοειδών διανυσμάτων. Ένας πίνακας Lorentz A θα καλείται θετικός (και αντίστοιχα αρνητικός) αν και μόνο αν ο A μετασχηματίζει θετικά χρονοειδή διανύσματα σε θετικά (και αντίστοιχα αρνητικά). Για παράδειγμα ο πίνακας J είναι αρνητικός. Έτσι ένας πίνακας Lorentz θα είναι είτε θετικός είτε αρνητικός.

Θα συμβολίζουμε με $PO(1,n-1)$ το σύνολο όλων των θετικών πινάκων στην $O(1,n-1)$. Τότε $PO(1,n-1)$ είναι προφανώς υποομάδα της $O(1,n-1)$ δείκτη 2. Η ομάδα $PO(1,n-1)$ θα καλείται θετική ομάδα Lorentz. Ομοίως θα συμβολίζουμε με $PSO(1,n-1)$ το σύνολο όλων των θετικών πινάκων στην $SO(1,n-1)$. Τότε $PSO(1,n-1)$ είναι προφανώς υποομάδα της $SO(1,n-1)$ δείκτη 2. Η ομάδα $PSO(1,n-1)$ θα καλείται θετική ειδική ομάδα Lorentz.

Ορισμός: Δυο διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^n$ θα τα καλούμε Lorentz ορθογώνια αν και μόνο αν $x \circ y = 0$

Θεώρημα 1.4: Έστω x και y μη μηδενικά Lorentz ορθογώνια διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αν το x είναι χρονοειδές τότε το y είναι χωροειδές.

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον x είναι χρονοειδές ισχύει ότι: $x_1^2 > x_2^2 + \cdots + x_n^2$

Ακόμα έχουμε: $1 > \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \right) x_1^{-2}$

Εφόσον $x \circ y = 0$ έχουμε ότι: $x_1 y_1 = x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

Ακόμα: $y_1 = \left(\sum_{i=2}^{n} x_i y_i \right) x_1^{-1}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= -y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_n{}^2 = \\
&= -\left[\left(\sum_{i=2}^{n} x_i y_i\right) x_1^{-1}\right]^2 + \sum_{i=2}^{n} y_i{}^2 \geq \\
&\geq -\left(\sum_{i=2}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=2}^{n} y_i{}^2\right) x_1^{-2} + \sum_{i=2}^{n} y_i{}^2 = \\
&= \left(\sum_{i=2}^{n} y_i{}^2\right)\left[1 - \left(\sum_{i=2}^{n} x_i{}^2\right) x_1^{-2}\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Επίσης αν $\|y\|^2 = 0$ τότε $\left(\sum_{i=2}^{n} y_i{}^2\right) = 0$ άρα $y_i = 0$ για $i = 2, \cdots, n$

Καθώς $y_1 = \left(\sum_{i=2}^{n} x_i y_i\right) x_1^{-1} \Rightarrow y = 0$. Αλλά $y \neq 0$ και επομένως $\|y\| > 0$

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Ο V θα καλείται :

1. Χρονοειδής αν και μόνο αν ο V έχει ένα χρονοειδές διάνυσμα
2. Χωροειδής αν και μόνο αν κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι χωροειδές
3. Φωτοειδής διαφορετικά

Θεώρημα 1.5: Για κάθε διάσταση m η φυσική δράση της $PO(1, n-1)$ στο σύνολο των m διάστατων χρονοειδών διανυσματικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι ì εταβατική.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω V ένας m διάστατος χρονοειδές διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\mathbb{R}^m$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα διανύσματα $e_1, \cdots, e_m$. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει πίνακας $A \in PO(1, n-1)$ τέτοιος ώστε $A(\mathbb{R}^m) = V$. Επιλέγω μια βάση $\{u_1, \cdots, u_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το u_1 να είναι θετικό χρονοειδές διάνυσμα του V και $\{u_1, \cdots, u_m\}$ βάση του V. Έστω $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Τότε έχω ότι:

$w_1 \circ w_1 = -1$. Έπειτα έστω $v_2 = u_2 + (u_2 \circ w_1) w_1$. Τότε το v_2 είναι μη μηδενικό εφόσον u_2 και u_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επιπλέον: $w_1 \circ v_2 = w_1 \circ u_2 + (u_2 \circ w_1)(w_1 \circ w_1) = 0$. Επομένως και με βάση το Θεώρημα 4 το v_2 είναι χωροειδές.

Τώρα έστω:

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\
v_3 &= u_3 + (u_3 \circ w_1) w_1 - (u_3 \circ w_2) w_2 \\
w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} \\
&\vdots \\
v_n &= u_n + (u_n \circ w_1) w_1 - (u_n \circ w_2) w_2 - \cdots - (u_n \circ w_{n-1}) w_{n-1} \\
w_n &= \frac{v_n}{\|v_n\|}
\end{aligned}
$$

Τότε παίρνουμε την $\{w_1, \cdots, w_n\}$ που είναι μια Lorentz ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\{w_1, \cdots, w_m\}$ βάση του V .Έστω ο πίνακας A να είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα $w_1, \cdots, w_n$. Με βάση το Θεώρημα 3 ο πίνακας είναι Lorentz και $A(\mathbb{R}^m) = V$ και φυσικά ο A είναι θετικός εφόσον $A(e_1) = w_1$ είναι θετικό χρονοειδές.

Θεώρημα 1.6: Έστω x, y να είναι θετικά (αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Τότε $x \circ y \le \|x\| \|y\|$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Απόδειξη</u>

Βάσει του θεωρήματος 5 υπάρχει $A \in PO(1, n-1)$ τέτοιος ώστε $Ax = te_1$. Καθώς ο A διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα Lorentz μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα x και y με Ax και Ay. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = x_1 e_1$.

Τότε έχουμε:

$$\|x\|^2\|y\|^2 = -x_1^2\left(-y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) = x_1^2 y_1^2 - x_1^2\left(y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) \le x_1^2 y_1^2 = \left(x \circ y\right)^2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0$ δηλαδή $y = y_1 e_1$.

Τώρα εφόσον $x \circ y = -x_1 y_1 < 0$ έχουμε $x \circ y \le \|x\|\|y\|$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2.3 Η Χρονική Γωνία Μεταξύ Χρονοειδών Διανυσμάτων

Έστω x, y να είναι θετικά (αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 6 υπάρχει μοναδικός μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\eta\left(x, y\right)$ τέτοιος ώστε:

$$x \circ y = \|x\|\|y\|\cosh\eta\left(x, y\right). \qquad (1.6)$$

Ο πραγματικός αυτός αριθμός καλείται χρονική γωνία Lorentz και είναι 0 αν και μόνο αν τα x, y είναι θετικά βαθμωτά γινόμενα το ένα του άλλου.

3. Υπερβολικός $n-$χώρος.

Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη του υπερβολικού $n-$χώρου είναι η σφαίρα μοναδιαίας φανταστικής ακτίνας $F^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = -1 \right\}$. Το μόνο πρόβλημα που υπάρχει είναι ότι το F^n είναι μη συνεκτικό. Το σύνολο F^n είναι ένα δίχωνο υπερβολοειδές που ορίζεται από την εξίσωση: $x_1^2 - \left(x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \right) = 1$. Το υποσύνολο όλων των $x \in F^n$ τέτοιων ώστε $x_1 > 0$ (αντίστοιχα $x_1 < 0$) θετική χοάνη (αντίστοιχα αρνητική) του F^n. Θα ξεπεράσουμε το πρόβλημα των δυο χοανών παίρνοντας αντιποδικά διανύσματα ή ισοδύναμα εξαιρώντας την αρνητική χοάνη. Το υπερβολοειδές μοντέλο H^n του υπερβολικού $n-$χώρου ορίζεται να είναι η θετική χοάνη του F^n.

Έστω $x, y \in H^n$ και έστω $\eta(x, y)$ να είναι η Lorentz χρονική γωνία μεταξύ των x, y. Υπερβολική απόσταση μεταξύ των x και y ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$d_H(x, y) = \eta(x, y). \qquad (1.7)$$

Καθώς $x \circ y = \|x\|\|y\| \cosh \eta(x, y)$ έχουμε την εξίσωση:

$$\cosh d_H(x, y) = -x \circ y. \qquad (1.8)$$

Θα αποδείξουμε ότι η d_H είναι μετρική στον H^n αλλά για αυτό θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

3.1 Εξωτερικό Γινόμενο Lorentz

Έστω $x, y \in \mathbb{R}^3$ και έστω $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1.9)

Το εξωτερικό γινόμενο Lorentz των x και y ορίζεται να είναι:

$$x \otimes y = J(x \times y). \qquad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$x \circ (x \otimes y) = x \circ J(x \times y) = x(x \times y) = 0$$
$$y \circ (x \otimes y) = y \circ J(x \times y) = y(x \times y) = 0$$

Επομένως $x \otimes y$ είναι ορθογώνιο στα x και y.

Λήμμα1: Αν $x, y \in \mathbb{R}^3$ τότε $x \otimes y = J(y) \times J(x)$

Θεώρημα 2.1: Αν $w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$ τότε:

1. $x \otimes y = -y \otimes x$
2. $(x \otimes y) \circ z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$
3. $x \otimes (y \otimes z) = (x \circ y) z - (z \circ x) y$
4. $(x \otimes y) \circ (z \otimes w) = \begin{vmatrix} x \circ w & x \circ z \\ y \circ w & y \circ z \end{vmatrix}$

<u>Απόδειξη</u>

1. $x \otimes y = J(y) \times J(x) = -J(x) \times J(y) = -y \otimes x$
2. $(x \otimes y) \circ z = J(x \times y) J(z) = (x \times y) z$

3. $x\otimes(y\otimes z)=J(y\otimes z)\times J(x)=(y\times z)\times J(x)=$

$=(y\cdot J(x))z-(z\cdot J(x))y=(x\circ y)z-(z\circ x)y$

4. $(x\otimes y)\circ(z\otimes w)=J(x\times y)\circ J(z\times w)=$

$=(x\times y)\circ(z\times w)=(x\times y)\cdot J(z\times w)=$

$=(x\times y)\cdot(J(w)\times J(z))=$

$=\begin{vmatrix} x\cdot J(w) & x\cdot J(z) \\ y\cdot J(w) & y\cdot J(z) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x\circ w & x\circ z \\ y\circ w & y\circ z \end{vmatrix}$

Πόρισμα 1: Αν x και y είναι θετικά (αρνητικά) χρονοειδή διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ τότε $x\otimes y$ είναι χωροειδές και $\|x\otimes y\|=-\|x\|\|y\|\sinh\eta(x,y)$

<u>Απόδειξη</u>

Από το Θεώρημα 2.1 έχουμε

$\|x\otimes y\|^2=(x\circ y)^2-\|x\|^2\|y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2\cosh^2\eta(x,y)-\|x\|^2\|y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2\sinh\eta(x,y)$

Πόρισμα 2: Αν x και y είναι χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ τότε:

1. $|x\circ y|<\|x\|\cdot\|y\|$ αν και μόνο αν $x\otimes y$ είναι χρονοειδές
2. $|x\circ y|=\|x\|\cdot\|y\|$ αν και μόνο αν $x\otimes y$ είναι φωτοειδές
3. $|x\circ y|>\|x\|\cdot\|y\|$ αν και μόνο αν $x\otimes y$ είναι χωροειδές

<u>Απόδειξη</u>

Προφανής

Θεώρημα 2.2 : Η υπερβολική απόσταση συνάρτηση d_H είναι μετρική στον H^n.

<u>Απόδειξη</u>

Η συνάρτηση d_H είναι προφανώς μη αρνητική, και συμμετρική και μη εκφυλισμένη[1]. Αρκεί να δείξω την τριγωνική ανισότητα.

Οι θετικοί Lorentz μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^{n+1}$ δρα στην H^n και προφανώς διατηρεί τις υπερβολικές αποστάσεις. Έτσι είμαστε ελεύθεροι να μετασχηματίσουμε x, y, z μέσω ενός θετικού Lorentz μετασχηματισμού. Τα τρία διανύσματα x, y, z παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης τουλάχιστον 3. Βάση του θεωρήματος 1.5 μπορούμε να υποθέσουμε ότι x, y, z είναι στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από τα e_1, e_2, e_3. Μπορούμε να υποθέσουμε επομένως ότι $n = 2$. Με βάση το Πόρισμα 1 έχουμε: $\|x \otimes y\| = \sinh \eta(x, y)$ και $\|y \otimes z\| = \sinh \eta(y, z)$.

Καθώς y είναι Lorentz ορθογώνιο και στο $x \otimes y$ και στο $y \otimes z$ τα διανύσματα y και $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως το $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ είναι είτε μηδενικό είτε χρονοειδές. Από το Πόρισμα 2 έχουμε: $|(x \otimes y) \circ (y \otimes z)| \le \|x \otimes y\| \|y \otimes z\|$.

Άρα:

$$\begin{aligned}
&\cosh(\eta(x, y) + \eta(y, z)) = \cosh \eta(x, y) \cosh \eta(y, z) + \sinh \eta(x, y) \sinh \eta(y, z) = \\
&= (x \circ y)(y \circ z) + \|x \otimes y\| \|y \otimes z\| \ge (x \circ y)(y \circ z) + (x \otimes y) \circ (y \otimes z) = \\
&= (x \circ y)(y \circ z) + ((x \circ z)(y \circ z) - (x \circ y)(y \circ z)) = -x \circ z = \cosh \eta(x, z)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\eta(x, z) \le \eta(x, y) + \eta(y, z)$$

Η μετρική d_H στον H^n θα καλείται υπερβολική μετρική. Η τοπολογία του H^n που καθορίζεται από την d_H είναι ίδια με αυτήν που καθορίζεται από την Ευκλείδεια μετρική στον H^n και ορίζεται ως εξής:

[1] Από Θεώρημα 1.6

$$d_E(x,y)=|x-y| \qquad (1.11)$$

Ο μετρικός χώρος που αποτελείται από τον H^n εφοδιασμένο με την μετρική d_H θα καλείται υπερβολικός $n-$χώρος. Στο εξής όταν θα γράφουμε H^n θα εννοούμε τον υπερβολικό $n-$χώρο. Μια ισομετρία στον H^n θα καλείται υπερβολική ισομετρία.

Θεώρημα 2.3: Κάθε θετικός Lorentz μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^{n+1}$ περιορίζεται σε μια ισομετρία στον H^n και κάθε ισομετρία του H^n μπορεί να γενικευτεί σε έναν μοναδικό θετικό Lorentz μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Απόδειξη</u>

Προφανώς μια συνάρτηση $\phi: H^n \to H^n$ είναι μια ισομετρία αν και μόνο αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο Lorentz στον H^n. Έτσι ένας θετικός Lorentz μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^{n+1}$ περιορίζεται σε μια ισομετρία στον H^n.

Αντίστροφα ας υποθέσουμε ότι η $\phi: H^n \to H^n$ είναι μια ισομετρία. Υποθέτουμε ότι η ϕ κρατάει σταθερό το e_1. Έστω $\phi_1,\cdots,\phi_{n+1}$ οι συνιστώσες της ϕ. Τότε:

$\phi_1(x)=-\phi(x)\circ e_1=-\phi(x)\circ\phi(e_1)=-x\circ e_1=x_1$.

Έτσι $\phi(x)=\left(x_1,\phi_2(x),\cdots,\phi_{n+1}(x)\right)$.

Έστω: $p: H^n \to \mathbb{R}^n$ με $p(x)=\overline{x}$, όπου $\overline{x}=\left(x_2,\cdots,x_{n+1}\right)$. Τότε η p είναι αμφιμονοσήμαντη.

Ορίζουμε $\overline{\phi}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\overline{\phi}(u)=\left(\phi_2\left(p^{-1}(u)\right),\cdots,\phi_{n+1}\left(p^{-1}(u)\right)\right)$.

Τότε $\overline{\phi}\left(\overline{x}\right)=\overline{\phi(x)}$ για κάθε x στο H^n.

Καθώς $\phi(x)\circ\phi(y)=x\circ y$ έχουμε $-x_1y_1+\overline{\phi}\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\phi}\left(\overline{y}\right)=-x_1y_1+\overline{x}\cdot\overline{y}$.

Άρα: $\overline{\phi}\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\phi}\left(\overline{y}\right)=\overline{x}\cdot\overline{y}$

Η $\overline{\phi}$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Άρα υπάρχει $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας A τέτοιος ώστε $Au = \overline{\phi}(u)$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}^3$.

Έστω $\widehat{A}$ να είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Τότε ο $\widehat{A}$ είναι θετικός πίνακας Lorentz και $\widehat{A}x = \phi(x)$ για κάθε $x \in H^n$.

Ας υποθέσουμε ότι η ϕ είναι μια αυθαίρετη ισομετρία του H^n. Από το Θεώρημα 1.5 υπάρχει $B \in PO(1,n)$ τέτοιος ώστε $B\phi(e_1) = e_1$. Καθώς $B\phi$ επεκτείνεται σε έναν θετικό Lorentz μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^{n+1}$ το ίδιο κάνει και η ϕ. Ας υποθέσουμε ότι C και D ανήκουν στο $PO(1,n)$ και επεκτείνουν την ϕ. Τότε CD^{-1} σταθεροποιεί κάθε σημείο του H^n. Καθώς ο H^n δεν περιέχεται σε κανέναν γνήσιο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ έχουμε ότι CD^{-1} σταθεροποιεί και όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως $C = D$. Άρα η ϕ επεκτείνεται σε έναν μοναδικό θετικό Lorentz ì ετασχηματισμό του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Πόρισμα 3: Η ομάδα των υπερβολικών ισομετριών $I(H^n)$ είναι ισόμορφη με την θετική Lorentz ομάδα $PO(1,n)$

3.2 Υπερβολικές Γεωδεσιακές

Ορισμός: Μια υπερβολική γραμμή στον H^n είναι η τομή του H^n με έναν διδιάστατο χρονική υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Έστω x και y να είναι διακεκριμένα σημεία του H^n. Τότε τα x και y παράγουν έναν διδιάστατο χρονοειδές υπόχωρο $V(x,y)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ και έτσι: $L(x,y)=H^n \cap V(x,y)$ είναι η μοναδική υπερβολική γραμμή του H^n που περιέχει και το x και y. Σημειώνουμε ότι το $L(x,y)$ είναι ένας κλάδος μιας υπερβολής.

Ορισμός: Τρία σημεία $x,y,z \in H^n$ θα ονομάζονται υπερβολικά συγγραμμικά αν και μόνο αν υπάρχει μια υπερβολική γραμμή L του H^n η οποία να τα περιέχει.

Λήμμα 2: Αν $x,y,z \in H^n$ και $\eta(x,y)+\eta(y,z)=\eta(x,z)$ τότε τα x,y,z είναι υπερβολικά συγγραμμικά.

Απόδειξη

Τα x,y,z παράγουν έναν χρονοειδή διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάσταση το πολύ 3. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n=2$. Από την απόδειξη του θεωρήματος 2.2 έχουμε ότι

$$(x\otimes y)\circ(y\otimes z)=\|x\otimes y\|\|y\otimes z\|$$

Από το Πόρισμα 2 παίρνουμε ότι: $(x\otimes y)\circ(y\otimes z)$ είναι φωτοειδές.

Τώρα εφόσον $(x\otimes y)\circ(y\otimes z)=-((x\otimes y)\circ z)y$ και το y είναι χρονοειδές έχουμε: $(x\otimes y)\circ z=0$

Επομένως τα x, y, z είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα τα x, y, z βρίσκονται σε έναν διδιάστατο χρονοειδές διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ και επομένως είναι υπερβολικά συγγραμμικά.

Ορισμός: Δυο διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι Lorentz ορθοκανονικά αν και μόνο αν $\|x\|^2 = -1$ και $x \circ y = 0$ και $\|y\|^2 = 1$.

Θεώρημα 2.4: Έστω $\alpha : [a,b] \to H^n$ μια καμπύλη. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Η καμπύλη α είναι ένα γεωδεσιακό τόξο.
2. Υπάρχουν Lorentz ορθοκανονικά διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε: $\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$
3. Η καμπύλη α ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\alpha'' - \alpha = 0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω A ένας Lorentz μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε $(A\alpha)' = A\alpha'$. Επομένως α ικανοποιεί (3) αν και μόνο αν την ικανοποιεί το $A\alpha$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την α μέσω ενός μετασχηματισμού Lorentz. Ας υποθέσουμε ότι α είναι γεωδεσιακό τόξο. Έστω $t \in [a,b]$.

Τότε έχουμε:

$$\eta(\alpha(a), \alpha(b)) = b - a = (t-a) + (b-t) = \eta(\alpha(a), \alpha(t)) + \eta(\alpha(t), \alpha(b)).$$

Από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $\alpha(a), \alpha(t), \alpha(b)$ είναι υπερβολικά συγγραμμικά.

Επομένως η εικόνα του α περιέχεται σε μια υπερβολική γραμμή L του H^n. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n = 1$. Εφαρμόζοντας έναν Lorentz μετα-

σχηματισμό της μορφής $\begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$ μπορούμε να μετασχηματίσουμε το $\alpha(a)$ σε e_1.

Τότε: $e_1 \cdot \alpha(t) = -\alpha(a) \circ \alpha(t) = \cosh \eta(\alpha(a), \alpha(t)) = \cosh(t-a)$

Έτσι: $e_2 \cdot \alpha(t) = \pm \sinh(t-a)$. Καθώς α είναι συνεχής έχουμε ότι:

$e_2 \cdot \alpha(t) = \sinh(t-a)$ για όλα τα t

ή

$e_2 \cdot \alpha(t) = -\sinh(t-a)$ για όλα τα t

Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κατοπτρισμό $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha(t) = (\cosh(t-a))e_1 + (\sinh(t-a))e_2$

Άρα από το $(1) \Rightarrow (2)$

Έπειτα υποθέτουμε ότι υπάρχουν Lorentz ορθοκανονικά διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε: $\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$. Έστω s και t να είναι τέτοια ώστε: $a \le s \le t \le b$. Τότε έχουμε:

$$\cosh \eta(\alpha(s), \alpha(t)) = -\alpha(s) \circ \alpha(t) =$$
$$= \cosh(s-a)\cosh(t-a) - \sinh(s-a)\sinh(t-a) = \cosh(t-s)$$

Για αυτό: $\eta(\alpha(s), \alpha(t)) = t - s$. Άρα α είναι γεωδεσιακό τόξο.

Άρα $(2) \Rightarrow (1)$

Είναι προφανές ότι $(2) \Rightarrow (3)$

Έστω ότι ισχύει η (3). Τότε:

$\alpha(t) = \cosh(t-a)\alpha(a) + \sinh(t-a)\alpha'(a)$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση $\alpha(a)\circ\alpha'(a)=-1$ βλέπουμε ότι: $\alpha(t)\circ\alpha'(t)=0$. Πιο συγκεκριμένα $\alpha(a)\circ\alpha'(a)=0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\|\alpha(t)\|^2=-\cosh^2(t-a)+\sinh^2(t-a)\|\alpha'(a)\|^2$$

Εφόσον $\|\alpha(t)\|^2=-1\Rightarrow\|\alpha'(a)\|^2=1$.

Άρα $\alpha'(a),\alpha(a)$ είναι Lorentz ορθοκανονικά.

Άρα $(3)\Rightarrow(2)$

Θεώρημα 2.5: Μια συνάρτηση $\lambda:\mathbb{R}\to H^n$ είναι γεωδεσιακή γραμμή αν και μόνο αν υπάρχουν Lorentz ορθοκανονικά διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε: $\lambda(t)=(\cosh t)x+(\sinh t)y$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι υπάρχουν Lorentz ορθοκανονικά διανύσματα x και y στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε: $\lambda(t)=(\cosh t)x+(\sinh t)y$. Τότε η λ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\lambda''-\lambda=0$. Επομένως ο περιορισμός της λ σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,b]$ αποτελεί με βάση το Θεώρημα 2.4 ένα γεωδεσιακό τόξο.

Αντίστροφα ας υποθέσουμε ότι η λ είναι μια γεωδεσιακή γραμμή. Με βάση το Θεώρημα 2.4 η συνάρτηση λ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\lambda''-\lambda=0$. Επομένως $\lambda(t)=(\cosh t)\lambda(0)+(\sinh t)\lambda'(0)$. Άρα $\lambda(0),\lambda'(0)$ είναι Lorentz ορθοκανονικά.

Πόρισμα 4: Οι γεωδεσιακές στον H^n είναι οι υπερβολικές γραὶ μές του.

Απόδειξη

Με βάση το Θεώρημα 2.5 κάθε γεωδεσιακή στον H^n είναι μια υπερβολική γραμμή. Αντίστροφα έστω L μια υπερβολική γραμμή του H^n. Από το Θεώ-

ρημα 1.5 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n=1$. Τότε $L=H^1$. Ορίζουμε $\lambda:\mathbb{R}\to H^1$ με $\lambda(t)=(\cosh t)e_1+(\sinh t)e_2$. Επομένως η λ είναι μια απεικόνιση επί του H^1. Άρα η L είναι γεωδαισιακή.

3.3 Υπερεπίπεδα

Τώρα θα μελετήσουμε την γεωμετρία των υπερεπιπέδων του H^n.

Ορισμός: Ένα υπερβολικό $m-$επίπεδο του H^n είναι η τομή του H^n με έναν $(m+1)$ διάστασης χρονοειδές διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Σημειώνουμε ότι ένα υπερβολικό 1-επίπεδο του H^n είναι το ίδιο σαν μια υπερβολική γραμμή του H^n. Ένα υπερβολικό $(n-1)-$επίπεδο του H^n καλείται υπερεπίπεδο του H^n.

Έστω x να είναι χωροειδές διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε το συμπλήρωμα Lorentz του διανυσματικού υπόχωρου $\langle x\rangle$ που παράγεται από το x είναι ένας $n-$διάστατος χρονοειδές διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως $P=\langle x\rangle^L\cap H^n$. Το υπερεπίπεδο P καλείται υπερεπίπεδο του H^n Lorentz ορθογώνιο στο x.

Θεώρημα 2.6: Έστω x και y γραμμικώς ανεξάρτητα χωρικά διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Τα διανύσματα x και y ικανοποιούν την εξίσωση $|x\circ y|<\|x\|\|y\|$
2. Ο διανυσματικός υπόχωρος V που παράγεται από τα x και y είναι χωροειδές.

3. Τα υπερεπίπεδα P και Q του H^n είναι Lorentz ορθογώνια στα x και y αντίστοιχα τέμνονται.

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι το (1) ισχύει.

Τότε για μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς s και t τότε έχουμε ότι:

$$\|sx+ty\|^2 = \|sx\|^2 + 2st(x \circ y) + \|ty\|^2 >$$
$$> \|sx\|^2 + 2|st|\|x\|\|y\| + \|ty\|^2 =$$
$$= \left(\|sx\| + \|ty\|\right)^2 \geq 0$$

Άρα ο V είναι χωροειδές.

Αντίστροφα αν ισχύει η (2) τότε το εσωτερικό γινόμενο Lorentz στον V είναι θετικά ορισμένο. Άρα στον V ισχύει η ανισότητα Cauchy και επομένως ισχύει η (1).

Άρα $(1) \Leftrightarrow (2)$

Τέλος οι $(2) \Leftrightarrow (3)$ εφόσον $V^L = \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$

3.4 Η χωρική Γωνία ανάμεσα σε Χωρικά Διανύσματα

Έστω x και y χωρικά διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1}$ τα οποία παράγουν έναν χωροειδές διανυσματικό υπόχωρο. Τότε από το Θεώρημα 2.6 έχουμε ότι $|x \circ y| < \|x\|\|y\|$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Υπάρχει δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός $\eta(x, y) \in [0, \pi]$ τέτοιος ώστε:

$$x \circ y = \|x\|\|y\| \cos \eta(x, y). \qquad (1.12)$$

Η χωρική γωνία Lorentz μεταξύ των x και y ορίζεται να είναι ο $\eta(x, y)$. Σημειώνουμε ότι:

1. $\eta(x, y) = 0$ αν και μόνο αν τα x και y είναι θετικά βαθμωτά γινόμενα το ένα του άλλου
2. $\eta(x, y) = \frac{\pi}{2}$ αν και μόνο αν τα x και y είναι Lorentz ορθογώνια και
3. $\eta(x, y) = \pi$ αν και μόνο αν τα x και y είναι αρνητικά βαθμωτά γινόμενα το ένα του άλλου.

Έστω $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to H^n$ να είναι γεωδαισιακές γραμμές τέτοιες ώστε $\lambda(0) = \mu(0)$. Τότε τα $\lambda'(0)$ και $\mu'(0)$ παράγουν έναν χωροειδές διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Η υπερβολική γωνία μεταξύ των λ και μ ορίζεται να είναι η Lorentz χωρική γωνία μεταξύ των $\lambda'(0)$ και $\mu'(0)$.

Έστω P να είναι ένα υπερεπίπεδο του H^n και έστω $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ να είναι μια γεωδαισιακή γραμμή τέτοια ώστε $\lambda(0)$ να είναι στο P. Τότε η υπερβολική γραμμή $L = \lambda(\mathbb{R})$ θα λέγεται Lorentz ορθογώνια στο P αν και μόνο αν το P είναι υπερεπίπεδο του H^n Lorentz ορθογώνιο στο $\lambda'(0)$.

Θεώρημα 2.7: Έστω x και y γραμμικά ανεξάρτητα χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Τα διανύσματα x και y ικανοποιούν την ανισότητα $|x \circ y| > \|x\|\|y\|$
2. Ο διανυσματικός υπόχωρος V που παράγεται από τα x και y είναι χρονοειδές.
3. Τα υπερεπίπεδα P και Q του H^n που είναι Lorentz ορθογώνια στα x και y αντίστοιχα είναι ξένα και έχουν μια κοινή Lorentz ορθογώνια υπερβολική γραμμή.

<u>Απόδειξη</u>

Εκτός από τα βαθμωτά γινόμενα του x κάθε στοιχείο του V είναι ένα βαθμωτό γινόμενο ενός στοιχείου της μορφής $tx + y$ για κάποιον πραγματικό αριθμό t. Παρατηρούμε ότι η έκφραση $\|tx + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t(x \circ y) + \|y\|^2$ είναι ένα τετραγωνικό πολυώνυμο του t. Το πολυώνυμο παίρνει και αρνητικές τιμές αν και μόνο αν η διακρίνουσα του $4(x \circ y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ είναι θετική. Άρα $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Έστω ότι ο V είναι χρονοειδές. Τότε ο V^L είναι χωροειδές. Εφόσον $V^L = \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$ έχουμε ότι P και Q είναι ξένα. Παρατηρούμε ότι $N = V \cap H^n$ είναι μια υπερβολική γραμμή και $V^L \cap \langle x \rangle^L$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης 1.

Επιπλέον η εξίσωση: $(tx + y) \circ x = 0$ έχει την μοναδική λύση $t = -\dfrac{x \circ y}{\|x\|^2}$.

Ακόμα $\|tx + y\|^2 = -\dfrac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 < 0$

Άρα $V \cap \langle x \rangle^L$ είναι χρονική. Άρα $N \cap P$ είναι το μεμονωμένο σημείο:

$u = \dfrac{-(x \circ y)(x/\|x\|) + \|x\| y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$, όπου το θετικό ή το αρνητικό πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε το u να είναι θετικό χρονοειδές.

Ομοίως $N \cap Q$ είναι ένα μοναδικό σημείο υ. Έστω $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ να είναι μια γεωδεσιακή γραμμή τέτοια ώστε $\lambda(0) = u$ και $\lambda(\mathbb{R}) = N$. Επειδή τα $\lambda'(0)$ και x είναι Lorentz ορθογώνια στο $u \in V$ έχουμε ότι $\lambda'(0)$ είναι βαθμωτό γινόμενο του x. Άρα N είναι Lorentz ορθογώνια στο P. Ομοίως το N είναι ορθογώνια στο Q.

Αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι το (3) ισχύει τότε έστω ότι N να είναι η κοινή Lorentz ορθογώνια υπερβολική γραμμή των P και Q. Τότε υπάρχει ένας διδιάστατος χρονοειδής διανυσματικός υπόχωρος W του $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιος ώστε $N = W \cap H^n$. Εφόσον N είναι Lorentz ορθογώνιο στο P έχουμε ότι το $x \in W$. Άρα $V = W$ και άρα ο V είναι χρονοειδής.

Σημείωση: Η προηγούμενη απόδειξη μας έδειξε ότι αν P και Q είναι ξένα υπερεπίπεδα του H^n με έχουν μια κοινή Lorentz ορθογώνια υπερβολική γραμμή N τότε η N είναι μοναδική. Επιπλέον αν x και y είναι χωρικά διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1}$ Lorentz ορθογώνια στα P και Q αντίστοιχα τότε τα x και y είναι εφαπτόμενα διανύσματα του N.

3.5 Η Χρονική Γωνία ανάμεσα στα Χωρικά Διανύσματα

Έστω x και y χωρικά διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1}$ τα οποία παράγουν έναν χρονοειδές διανυσματικό υπόχωρο. Τότε από το Θεώρημα 2.7 έχουμε ότι $|x \circ y| > \|x\|\|y\|$. Υπάρχει δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός $\eta(x, y)$ τέτοιος ώστε:

$$x \circ y = \|x\|\|y\| \cos \eta(x, y). \qquad (1.13)$$

Η χρονική γωνία Lorentz μεταξύ των x και y ορίζεται να είναι ο $\eta(x, y)$.

Τώρα θα δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του $\eta(x, y)$.

Θεώρημα 2.8: Έστω x και y χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγουν έναν χρονοειδή διανυσματικό υπόχωρο και έστω τα υπερεπίπεδα P και Q του H^n που είναι Lorentz ορθογώνια στα x και y αντίστοιχα. Τότε $\eta(x, y)$ είναι η υπερβολική απόσταση από το P στο Q μετρημένη κατά μήκος της υπερβολικής γραμμής N που είναι Lorentz ορθογώνια στα P και Q. Επιπλέον $x \circ y < 0$ αν και μόνο αν τα x και y είναι αντίθετα προσανατολισμένα εφαπτόμενα διανύσματα του N.

Απόδειξη

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.7 έχουμε $P \cap N$ είναι το σημείο:

$$u = \frac{-(x \circ y)(x/\|x\|) + \|x\| y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$$

Και $Q \cap N$ είναι το σημείο:

$$\upsilon = \frac{\|y\| x - (x \circ y)(y/\|y\|)}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$$

Τώρα:

$$\cos d_H(u,\upsilon) = -u \circ \upsilon =$$

$$= \frac{-\left((x \circ y)^3 / \|x\|\|y\|\right) + (x \circ y)\|x\|\|y\|}{\pm\left((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{-\left((x \circ y)^3 + (x \circ y)\|x\|^2 \|y\|^2\right)}{\|x\|\|y\|}}{\pm\left((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2\right)} =$$

$$= \frac{-(x \circ y)}{\pm\|x\|\|y\|} = \frac{|x \circ y|}{\|x\|\|y\|} = \cosh \eta(x, y)$$

Επιπλέον ο υπολογισμός του $-u \circ \upsilon$ δείχνει ότι τα u και υ έχουν το ίδιο πρόσημο αν και μόνο αν $x \circ y < 0$. Παρατηρούμε ότι τα u και υ βρίσκονται στον διδιάστατο χρονοειδή υπόχωρο V που παράγεται από τα x και y. Επομένως τα x και y είναι αντίθετα προσανατολισμένα εφαπτόμενα διανύσματα του N αν και μόνο αν $x \circ y < 0$.

Έστω x και y χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και έστω τα υπερεπίπεδα P και Q του H^n που είναι Lorentz ορθογώνια στα x και y αντίστοιχα. Τότε τα P και Q θα λέμε ότι συναντώνται στο άπειρο αν και μόνο αν $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$ είναι φωτοειδής. Αν P και Q συναντώνται στο άπειρο τότε τα P και Q είναι ξένα αλλά αν τα δούμε από την αρχή μοιάζουν να συναντώνται στο ιδεατό θετικό τελευταίο σημείο του μονοδιάστατου φωτεινού υπόχωρου του $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$.

Θεώρημα 2.9: Έστω x και y γραμμικά ανεξάρτητα χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Τα διανύσματα x και y ικανοποιούν την εξίσωση $|x \circ y| = \|x\|\|y\|$
2. Ο διανυσματικός υπόχωρος V που παράγεται από τα x και y είναι φωτοειδής

3. Τα υπερεπίπεδα P και Q του H^n που είναι Lorentz ορθογώνια στα x και y αντίστοιχα συναντώνται στο άπειρο.

Απόδειξη

Προφανές από τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7

Θεώρημα 2.10: Έστω x και y γραμμικά ανεξάρτητα χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ τέτοια ώστε ο διανυσματικός υπόχωρος V που παράγεται από τα x και y είναι φωτοειδής. Τότε $x \circ y < 0$ αν και μόνο αν x και y βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του μονοδιάστατου φωτεινού υπόχωρου του V.

Απόδειξη

Η εξίσωση $\|tx+y\|^2 = 0$ είναι ισοδύναμη με την τετραγωνική εξίσωση $t^2\|x\|^2 + 2(x \circ y)t + \|y\|^2 = 0$ η οποία με βάση το Θεώρημα 2.10 έχει την μοναδική λύση $t = -\dfrac{(x \circ y)}{\|x\|^2}$.

Παρατηρούμε ότι το φωτοειδές διάνυσμα $-(x \circ y)\dfrac{x}{\|x\|^2} + y$ ανήκει στο τεταρτημόριο του V που βρίσκεται μεταξύ των x και y αν και μόνο αν $x \circ y < 0$. Άρα x και y βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του μονοδιάστατου φωτεινού υπόχωρου του V αν και μόνο αν $x \circ y < 0$.

Θεώρημα 2.11: Έστω y σημείο του H^n και P υπερεπίπεδο του H^n. Τότε υπάρχει μοναδική υπερβολική γραμμή N του H^n η οποία περνάει από το y και είναι Lorentz ορθογώνια στο P.

Απόδειξη

Έστω x να είναι ένα μοναδιαίο χωροειδές διάνυσμα Lorentz ορθογώνιο στο P και έστω V να είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα x και y. Τότε

$N = V \cap H^n$ είναι μια υπερβολική γραμμή που διέρχεται από το y. Τώρα η εξίσωση: $(tx+y)\circ x = 0$ έχει την λύση $t = -x\circ y$. Άρα $w = \dfrac{-(x\circ y)x+y}{\pm\sqrt{(x\circ y)^2+1}}$ είναι ένα σημείο του $P\cap N$. Έστω $\lambda:\mathbb{R}\to H^n$ να είναι μια γεωδεσιακή γραμμή τέτοια ώστε $\lambda(\mathbb{R}) = N$ και $\lambda(0) = w$. Εφόσον x, w είναι Lorentz ορθοκανονικά διανύσματα έχουμε: $\lambda(t) = (\cosh t)w + (\sinh t)x$. Άρα $\lambda'(0) = \pm x$. Άρα N είναι Lorentz ορθογώνιο στο P.

Ας υποθέσουμε ότι N είναι μια υπερβολική γραμμή που περνάει από το y και είναι Lorentz ορθογώνια στο P. Έστω $\lambda:\mathbb{R}\to H^n$ να είναι μια γεωδεσιακή γραμμή έτσι ώστε $\lambda(\mathbb{R}) = N$ και $\lambda(0)$ βρίσκεται στο P. Τότε $\lambda'(0)$ είναι Lorentz ορθογώνια στο P. Άρα $\lambda'(0) = \pm x$. Έστω W να είναι ένας διδιάστατος χρονοειδές υπόχωρος ώστε $N = W\cap H^n$. Καθώς x και y ανήκουν στο W έχουμε ότι $W = V$. Τότε το N είναι μοναδική.

3.6 Η Γωνία μεταξύ Χωρικών και Χρονοειδών διανυσμάτων.

Έστω x να είναι ένα μοναδιαίο χωροειδές διάνυσμα και y ένα θετικό χρονοειδές διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\eta(x,y)$ τέτοιος ώστε

$$|x \circ y| = \|x\|\|y\| \sinh \eta(x,y). \qquad (1.14)$$

Η χρονική Lorentz γωνία μεταξύ των x και y ορίζεται να είναι ο $\eta(x,y)$. Θα δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω.

Θεώρημα 2.12: Έστω x να είναι ένα μοναδιαίο χωροειδές διάνυσμα και y ένα θετικό χρονοειδές διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και έστω P να είναι το υπερεπίπεδο του H^n που είναι Lorentz ορθογώνιο στο x. Τότε $\eta(x,y)$ είναι η υπερβολική απόσταση από το $\frac{y}{\|y\|}$ στο P μετρημένη κατά μήκος της υπερβολικής γραμμής N που περνάει από το $\frac{y}{\|y\|}$ και είναι Lorentz ορθογώνια στο P. Επιπλέον $x \circ y < 0$ αν και μόνο αν x και y βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το P.

Απόδειξη

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.8 έχουμε ότι $P \cap N$ είναι το σημείο $u = \dfrac{-(x \circ y)(x/\|x\|) + \|x\| y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$.

Έστω $\upsilon = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε: $\cos d_H(u,\upsilon) = -u \circ \upsilon = \dfrac{\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}{\|x\|\|y\|} = \cosh \eta(x,y)$.

Επιπλέον ο υπολογισμός του $-u \circ \upsilon$ δείχνει ότι u έχει θετικό πρόσημο. Παρατηρούμε ότι u βρίσκεται στον διδιάστατο χρονοειδές υπόχωρο V που παρά-

γεται από x και y. Έτσι το u βρίσκεται στο τεταρτημόριο του V μεταξύ των x και y αν και μόνο αν ή συνιστώσα $-x \circ y$ του u είναι θετική. Άρα x και y βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του υπερεπιπέδου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το P αν και μόνο αν $x \circ y < 0$.

4. Υπερβολικό Μήκος Τόξου

Σε αυτό το κομμάτι θα συγκρίνουμε το υπερβολικό μήκος μιας καμπύλης γ στο H^n ì ε το μήκος Lorentz του στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και θα αποδείξουμε ότι είναι τα ίδια. Στην πορεία θα βρούμε το στοιχείο του υπερβολικού μήκους τόξου στον H^n.

Έστω x, y να είναι σημεία του H^n. Από το θεώρημα 1.6 έχουμε $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2x \circ y + \|y\|^2 \geq -2 - 2\|x\|\|y\| = 0$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = y$. Η συνάρτηση απόσταση Lorentz $d_L(x, y) = \|x-y\|$ ικανοποιεί τα πρώτα 3 αξιώματα μιας μετρικής στον H^n. Αλλά δυστυχώς δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Ωστόσο θα χρησιμοποιήσουμε την d_L για να ορίσουμε το μήκος μιας καμπύλης στον H^n.

Έστω $\gamma : [a,b] \to H^n$ να είναι μια καμπύλη και έστω $P = \{t_0, \cdots, t_m\}$ να είναι μια διαμέριση του $[a,b]$. Το Lorentz $P-$εγγεγραμμένο μήκος της γ ορίζεται να είναι:

$$\ell_L(\gamma, P) = \sum_{i-1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Η καμπύλη γ θα καλείται Lorentz υπολογίσιμη (rectifiable) αν και μόνο αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\ell(\gamma)$ τέτοιος ώστε $\forall \varepsilon > 0$ να υπάρχει μια διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε αν $Q \leq P$ τότε $|\ell(\gamma) - \ell_L(\gamma, Q)| < \varepsilon$.

Αν $\ell(\gamma)$ υπάρχει τότε είναι μοναδικός εφόσον αν P, Q διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε υπάρχει και διαμέριση R του $[a,b]$ τέτοια ώστε $R \leq P, Q$.

Το μήκος Lorentz $\|\gamma\|$ της γ ορίζεται να είναι το $\ell(\gamma)$ αν γ είναι Lorentz υπολογίσιμη καμπύλη και ∞ διαφορετικά.

Θεώρημα 3.1: Έστω $\gamma:[a,b]\to H^n$ να είναι μια καμπύλη. Τότε γ είναι υπολογίσιμη στο H^n αν και μόνο αν γ είναι Lorentz υπολογίσιμη. Επιπλέον το υπερβολικό μήκος της γ είναι το ίδιο με το μήκος Lorentz της.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω x, y να είναι σημεία του H^n. Τότε έχουμε:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2x\circ y + \|y\|^2 = 2\left(\cosh\eta(x,y)-1\right).$$

Τώρα εφόσον:

$$\cosh\eta \geq 1+\frac{\eta^2}{2}$$

Έχουμε ότι:

$$\|x-y\| \geq \eta(x,y)$$

Υποθέτουμε ότι γ είναι Lorentz υπολογίσιμη. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε αν $Q\leq P$ τότε $\left|\ell(\gamma)-\ell_L(\gamma,Q)\right|<1$.

Άρα για όλες τις $Q\leq P$ έχουμε:

$$\ell_H(\gamma,Q)\leq \ell_L(\gamma,Q)\leq \|\gamma\|+1$$

Άρα η γ είναι υπολογίσιμη.

Από το Θεώρημα του Taylor έχουμε:

$$\cosh\eta \leq 1+\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta^4}{24}\cosh\eta\,.$$

Επομένως αν $\cosh\eta(x,y)\leq 12$ έχουμε ότι: $\|x-y\|\leq \eta(x,y)\sqrt{1+\eta^2(x,y)}$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι γ είναι υπολογίσιμη και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $|\gamma|_H-\ell_H(\gamma,P)<\varepsilon$.

Έστω $\delta>0$ και θέτουμε: $\mu(\gamma,\delta)=\sup\left\{\eta\left(\gamma(s),\gamma(t)\right):|s-t|\leq\delta\right\}$.

Καθώς γ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\mu(\gamma,\delta)\to 0$ καθώς $\delta\to 0$. Άρα υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\cosh\mu(\gamma,\delta)\le 12$ και $|\gamma|_H\sqrt{1+\mu^2(\gamma,\delta)}<|\gamma|_H+\varepsilon$.

Τώρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|P|\le\delta$. Τότε για όλες $Q\le P$ έχουμε:

$$|\gamma|_H-\varepsilon<\ell_H(\gamma,Q)\le\ell_L(\gamma,Q)\le\ell_H(\gamma,Q)\sqrt{1+\mu^2(\gamma,\delta)}\le|\gamma|_H\sqrt{1+\mu^2}<|\gamma|_H+\varepsilon.$$

Επομένως έχουμε $\left||\gamma|_H-\ell_L(\gamma,Q)\right|<\varepsilon$ για όλες $Q\le P$.

Άρα γ είναι Lorentz υπολογίσιμη και $\|\gamma\|=|\gamma|_H$.

Έστω $\gamma:[a,b]\to H^n$ να είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη. Καθώς $\gamma(t)\circ\gamma(t)=-1$ έχουμε $\gamma(t)\circ\gamma'(t)=0$. Επομένως από το Θεώρημα 3,1,4 $\gamma'(t)$ είναι χωροειδές για όλα τα t.

Θεώρημα 3.2: Έστω $\gamma:[a,b]\to H^n$ να είναι μια C^1 καμπύλη. Τότε γ είναι υπολογίσιμη και το υπερβολικό μήκος της γ δίνεται από τον τύπο: $\|\gamma\|=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$.

<u>Απόδειξη</u>

Ορίζουμε $f:[a,b]^{n+1}\to\mathbb{R}$ ως εξής: $f(x)=\left|-\gamma_1'(x_1)^2+\gamma_2'(x_2)^2+\cdots+\gamma_{n+1}'(x_{n+1})^2\right|^{\frac{1}{2}}$.

Τότε η f είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\left\{|f(x)-f(y)|:x,y\in[a,b]^{n+1}\right\}$ φραγμένο εφόσον $[a,b]^{n+1}$ είναι συμπαγές. Έστω $\delta>0$ και θέτω:

$$\mu(f,\delta)=\sup\left\{|f(x)-f(y)|:|x_i-y_i|\le\delta\quad\forall i=1,\cdots,n+1\right\}$$

Έστω $P=\{t_0,\cdots,t_m\}$ να είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ τέτοια ώστε $|P|\le\delta$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός s_{ij} μεταξύ των t_{j-1} και t_j τέτοιος ώστε: $\gamma_i(t_j)-\gamma_i(t_{j-1})=\gamma_i'(s_{ij})(t_j-t_{j-1})$.

Τότε έχουμε:

$$\left|\gamma_i(t_j)-\gamma_i(t_{j-1})\right|=f(s_j)(t_j-t_{j-1})$$ όπου $s_j=(s_{1,j},\cdots,s_{n+1,j})$

Άρα:

$$\left|\left\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right\|-\left\|\gamma'(t_j)\right\|\right|(t_j-t_{j-1})=\left|f(s_j)-\left\|\gamma'(t_j)\right\|\right|(t_j-t_{j-1})\le\mu(f,\delta)(t_j-t_{j-1})$$

Θέτω:

$$S(\gamma,P)=\sum_{j=1}^{m}\left\|\gamma'(t_j)\right\|(t_j-t_{j-1})$$

Τότε έχω:

$$\left|\ell_L(\gamma,P)-S(\gamma,P)\right|\le\sum_{j=1}^{m}\left|\left\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right\|-\left\|\gamma'(t_j)\right\|(t_j-t_{j-1})\right|\le\sum_{j=1}^{m}\mu(f,\delta)(t_j-t_{j-1})=$$
$$=\mu(f,\delta)(b-a)$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι:

$$\left|\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt-S(\gamma,P)\right|=\left|\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\|\gamma'(t)\|-\left\|\gamma'(t_j)\right\|\right)dt\right|\le\sum_{j=1}^{m}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\|\gamma'(t)\|-\left\|\gamma'(t_j)\right\|\right)dt\right|\le$$
$$\le\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\|\gamma'(t)\|-\left\|\gamma'(t_j)\right\|\right|dt\le\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\mu(f,\delta)dt=\mu(f,\delta)(b-a)$$

Άρα

$$\left|\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt-\ell_L(\gamma,P)\right|\le\left|\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt-S(\gamma,P)\right|+\left|S(\gamma,P)-\ell_L(\gamma,P)\right|\le2\mu(f,\delta)(b-a)$$

Τώρα $f:[a,b]^{n+1}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής εφόσον $[a,b]^{n+1}$ είναι συμπαγές. Άρα $\mu(f,\delta)\to0$ καθώς $\delta\to0$.

Επομένως: $\lim_{|P|\to 0} \ell_L(\gamma, P) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Έστω $\gamma : [a,b] \to H^n$ να είναι μια καμπύλη.

Θέτω $dx = (dx_1, \cdots, dx_{n+1})$ και $\|dx\| = \left(-dx_1^{\ 2} + dx_2^{\ 2} + \cdots + dx^2_{\ n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

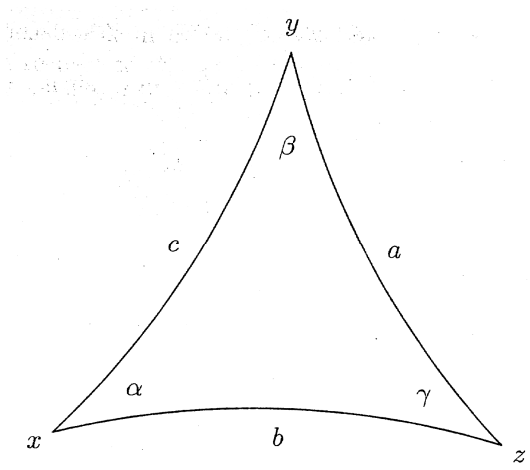
Τότε εξ ορισμού έχουμε: $\int_\gamma \|dx\| = \|\gamma\|$

Επιπλέον αν $\gamma : [a,b] \to H^n$ είναι μια C^1 καμπύλη τότε $\int_\gamma \|dx\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Το $\|dx\|$ καλείται στοιχείο υπερβολικού μήκους τόξου στον H^n .

4.1 Υπερβολική Τριγωνομετρία

Έστω x, y, z τρία υπερβολικά και μη συγγραμμικά σημεία του H^2. Έστω $L(x, y)$ να είναι η μοναδική υπερβολική γραμμή του H^2 η οποία περιέχει τα x και y και έστω $H(x, y, z)$ το κλειστό ημιεπίπεδο του H^2 που έχει σαν όριο την $L(x, y)$ και το z είναι εσωτερικό του σημείο. Το υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές τα x, y, z ορίζεται να είναι $T(x, y, z) = H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y)$.



Θα υποθέσουμε ότι οι κορυφές του είναι όπως στο σχήμα.

Έστω $[x, y]$ να είναι το ευθύγραμμο τμήμα της $L(x, y)$ που ενώνει τα x και y. Οι πλευρές του $T(x, y, z)$ ορίζονται να είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $[x, y], [x, z], [z, y]$. Έστω $a = \eta(y, z)$, $b = \eta(z, x)$ και $c = \eta(x, y)$. Τότε τα a, b, c είναι τα υπερβολικά μήκη των $[y, z], [z, x], [x, y]$ αντίστοιχα.

Έστω: $f : [0, a] \to H^2$, $g : [0, b] \to H^2$ και $h : [0, c] \to H^2$ να είναι τα γεωδεσιακά τόξα από τα y στο z, z στο x και x στο y αντίστοιχα.

Η γωνία α ανάμεσα στις πλευρές $[z, x]$ και $[x, y]$ του $T(x, y, z)$ ορίζεται να είναι η γωνία Lorentz ανάμεσα στα $g'(b)$ και $h'(0)$. Η γωνία β ανάμεσα στις πλευρές $[x, y]$ και $[y, z]$ του $T(x, y, z)$ ορίζεται να είναι η γωνία Lorentz ανά-

μεσα στα $h'(c)$ και $f'(0)$. Η γωνία γ ανάμεσα στις πλευρές $[y,z]$ και $[z,x]$ του $T(x,y,z)$ ορίζεται να είναι η γωνία Lorentz ανάμεσα στα $f'(a)$ και $g'(0)$. Οι πλευρές $[y,z]$, $[z,x]$ και $[x,y]$ λέμε ότι είναι απέναντι από τις γωνίες α, β και γ αντίστοιχα.

Λήμμα 1: Αν α, β και γ είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου $T(x,y,z)$ τότε:

1. $\eta(z\otimes x, x\otimes y)=\pi-\alpha$
2. $\eta(x\otimes y, y\otimes z)=\pi-\beta$
3. $\eta(y\otimes z, z\otimes x)=\pi-\gamma$

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x=e_1$. Η απόδειξη τότε είναι στοιχειώδης.

Λήμμα 2: Έστω x,y να είναι χωρικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Αν $x\otimes y$ είναι χρονοειδές τότε: $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|\sin\eta(x,y)$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον $x\otimes y$ είναι χρονοειδές τότε ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα x,y είναι χωροειδές.

Από το Θεώρημα 3,2,1 έχουμε:

$$\|x\otimes y\|^2=(x\circ y)^2-\|x\|^2\|y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\eta(x,y)-\|x\|^2\|y\|^2=-\|x\|^2\|y\|^2\sin^2\eta(x,y)$$

Θεώρημα 4.1: Αν α, β και γ είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου $T(x,y,z)$ τότε $\alpha+\beta+\gamma<\pi$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω α, β και γ να είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου $T(x,y,z)$.

Τα διανύσματα $x\otimes y, z\otimes y, z\otimes x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω:

$$u=\frac{x\otimes y}{\|x\otimes y\|}\ ,\ \upsilon=\frac{z\otimes y}{\|z\otimes y\|},\ w=\frac{z\otimes x}{\|z\otimes x\|}$$

Εφόσον:

$$(x\otimes y)\otimes(z\otimes y)=((x\otimes y)\circ z)y$$
$$(z\otimes y)\otimes(z\otimes x)=((x\otimes y)\circ z)z$$

Τότε $u\otimes\upsilon$ και $\upsilon\otimes w$ είναι αρνητικά χρονοειδή διανύσματα.

Έτσι με χρήση Λήμματος 2 και των Θεωρημάτων 1.6 και 2.1 έχουμε:

$$\cos(\eta(u,\upsilon)+\eta(\upsilon,w))=\cos\eta(u,\upsilon)\cos\eta(\upsilon,w)-\sin\eta(u,\upsilon)\sin\eta(\upsilon,w)=$$
$$=(u\circ\upsilon)(\upsilon\circ w)+\|u\otimes\upsilon\|\|\upsilon\otimes w\|>(u\circ\upsilon)(\upsilon\circ w)+((u\otimes\upsilon)\circ(\upsilon\otimes w))=$$
$$=(u\circ\upsilon)(\upsilon\circ w)+((u\circ w)(\upsilon\circ\upsilon)-(\upsilon\circ w)(u\circ\upsilon))=u\circ w=\cosh\eta(u,w)$$

Επομένως είτε: $\eta(u,w)>\eta(u,\upsilon)+\eta(\upsilon,w)$ είτε $2\pi-\eta(u,w)<\eta(u,\upsilon)+\eta(\upsilon,w)$

Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι: $\begin{array}{l}\eta(u,w)=\pi-\alpha\\ \eta(u,\upsilon)=\beta\\ \eta(\upsilon,w)=\gamma\end{array}$.

Άρα είτε $\pi>\alpha+\beta+\gamma$ ή $\pi+\alpha<\beta+\gamma$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η α είναι η μεγαλύτερη γωνία.

Αν $\pi+\alpha<\beta+\gamma$ έχουμε $\pi+\alpha<\beta+\gamma<\pi+\alpha$.

Άρα $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Θεώρημα 4.2 (Νόμος των Ημιτόνων)

Αν α, β και γ να είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου και τα a,b,c είναι τα υπερβολικά μήκη των απέναντι πλευρών τότε:

$$\frac{\sinh a}{\sin a}=\frac{\sinh b}{\sin b}=\frac{\sinh c}{\sin c}$$

<u>Απόδειξη</u>

Παίρνοντας νόρμες στις εξισώσεις:

$$(z\otimes x)\otimes(x\otimes y)=-\big((z\otimes x)\circ y\big)x$$
$$(x\otimes y)\otimes(y\otimes z)=-\big((x\otimes y)\circ z\big)y$$
$$(y\otimes z)\otimes(z\otimes x)=-\big((y\otimes z)\circ x\big)z$$

Έχουμε:

$$\sinh b\sinh c\sin\alpha=\left|(x\otimes y)\circ z\right|$$
$$\sinh c\sinh a\sin\beta=\left|(x\otimes y)\circ z\right|$$
$$\sinh a\sinh b\sin\gamma=\left|(x\otimes y)\circ z\right|$$

Θεώρημα 4.3: (1ος Νόμος Συνημιτόνων)

Αν α, β και γ να είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου και τα a,b,c είναι τα υπερβολικά μήκη των απέναντι πλευρών τότε:

$$\cos\gamma=\frac{\cosh a\cosh b-\cosh c}{\sinh a\sinh b}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει:

$$(y\otimes z)\circ(x\otimes z)=\begin{vmatrix} y\circ z & y\circ x \\ z\circ z & z\circ x \end{vmatrix}$$

και επομένως έχουμε:

$$\sinh a\sinh b\cos\gamma=\cosh a\cosh b-\cosh c\,.$$

Θεώρημα 4.4: (2ος Νόμος των Συνημιτόνων)

Αν α , β και γ είναι οι γωνίες ενός υπερβολικού τριγώνου και τα a,b,c είναι τα υπερβολικά μήκη των απέναντι πλευρών τότε:

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cosh\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω:

$$x' = \frac{y \otimes z}{\|y \otimes z\|},\ y' = \frac{z \otimes x}{\|z \otimes x\|},\ z' = \frac{x \otimes y}{\|x \otimes y\|}$$

Τότε:

$$x = \frac{y' \otimes z'}{\|y' \otimes z'\|} \text{ και } y = \frac{z' \otimes x'}{\|z' \otimes x'\|}$$

Τώρα εφόσον:

$$(y' \otimes z') \circ (z' \otimes x') = \begin{vmatrix} y' \circ x' & y' \circ z' \\ z' \circ x' & z' \circ z' \end{vmatrix}$$

Έχουμε:

$$-\sin(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta)\cosh c = -\cos(\pi - \gamma) - \cos(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta).$$

Άρα: $\cosh c = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \cosh\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$

4.2 Εμβαδόν Υπερβολικών Τριγώνων

Ένας τομέας στον H^2. Ορίζεται να είναι η τομή δυο διακεκριμένων ημιεπιπέδων του H^2. Κάθε τομέας του H^2 συμπίπτει με έναν τομέα $S(\alpha)$ υπερβολικών συντεταγμένων (η,θ) , $-\frac{\alpha}{2} \le \theta \le \frac{\alpha}{2}$.

Εδώ α είναι η γωνία που σχηματίζεται από τις δύο πλευρές του $S(\alpha)$ στην κορυφή του e_1.

Έστω $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Τότε οι γεωμετρικές ακτίνες (geometric rays) που σχηματίζουν τις πλευρές του $S(\alpha)$ αναπαρίστανται σε παραμετρική μορφή από τις:

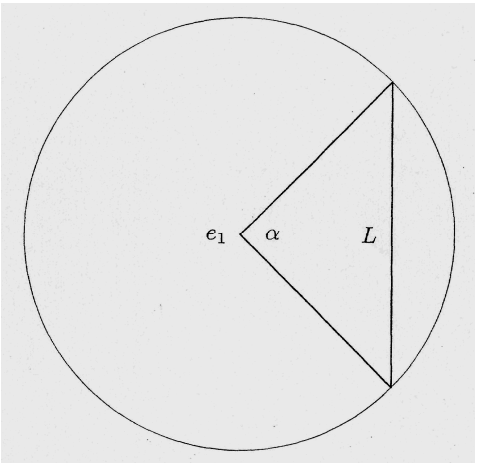
$(\cosh t)e_1 + (\sinh t)((\cos\beta)e_2 + (\sin\beta)e_3)$ για $t \ge 0$

$(\cosh t)e_1 + (\sinh t)((\cos\beta)e_2 - (\sin\beta)e_3)$ για $t \le 0$

Αυτές οι γεωμετρικές ακτίνες είναι ασύμπτωτες στους μονοδιάστατους φωτεινούς υπόχωρους που παράγονται από τα διανύσματα $(1,\cos\beta,\sin\beta)$ και $(1,\cos\beta,-\sin\beta)$ αντίστοιχα. Αυτά τα δυο φωτεινά διανύσματα παράγουν έναν διδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο V ο οποίος τέμνεται με το H^2 στην υπερβολική γραμμή L. Έστω $T(\alpha)$ να είναι η τομή των $S(\alpha)$ και του ημιεπιπέδου που ορίζεται από την L και το e_1. Είναι ενδιαφέρον ότι το H^2 αν το δούμε από την αρχή μοιάζει με το προβολικό κυκλικό μοντέλο με το e_1 στο κέντρο του. Παρατηρούμε ότι οι δυο πλευρές του τομέα $S(\alpha)$ συναντάνε την υπερβολική γραμμή L στο άπειρο. Υπό αυτήν την οπτική είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι $T(\alpha)$ είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο με δυο ιδεατές κορυφές στο άπειρο.

Ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο στο H^2 ορίζεται όπως και ένα υπερβολικό τρίγωνο στο H^2 με μόνη διαφορά ότι μπορεί δυο από τις κορυφές του να

είναι ιδεατές. Όταν το δούμε από την αρχή ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο στο H^2 μοιάζει σαν ένα Ευκλείδειο τρίγωνο στο προβολικό κυκλικό μοντέλο με τις δυο ιδεατές κορυφές του στην περιφέρεια του κύκλου. Η γωνία ενός γενικευμένου υπερβολικού τριγώνου σε μια ιδεατή κορυφή ορίζεται να είναι μηδέν.



Ένα άπειρο υπερβολικό τρίγωνο είναι ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο με τουλάχιστον μια ιδεατή κορυφή. Ένα άπειρο υπερβολικό τρίγωνο με τρεις ιδεατές κορυφές θα καλείται ιδεατό υπερβολικό τρίγωνο. Προφανώς κάθε άπειρο υπερβολικό τρίγωνο με ακριβώς δυο ιδεατές κορυφές θα συμπίπτει με το $T(\alpha)$ για κάποια γωνία α.

Θα βρούμε μια παραμετρική αναπαράσταση της πλευράς L του $T(\alpha)$ με χρήση υπερβολικών συντεταγμένων (η,θ). Το διάνυσμα:

$$(1,\cos\beta,\sin\beta)\times(1,\cos\beta,-\sin\beta)=(-2\cos\beta\sin\beta,2\sin\beta,0)$$

είναι κανονικό στον διδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο V του οποίου η τομή του με τον H^2 είναι η L.

Άρα τα διανύσματα στον V ικανοποιούν την εξίσωση: $(\cos\beta)x_1-x_2=0$

Τα σημεία του H^2 ικανοποιούν το σύστημα: $\begin{cases} x_1=\cosh\eta \\ x_2=\sinh\eta\cos\theta \\ x_3=\sinh\eta\sin\theta \end{cases}$

Ακόμα τα σημεία της L ικανοποιούν την εξίσωση: $x_1 = \sec\beta\cos\theta\sqrt{x_1^{\,2}-1}$.

Λύνοντας ως προς x_1 έχουμε:

$$x_1 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta}}$$

Έτσι:

$$x_2 = \frac{\cos\theta\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta}}$$

και

$$x_3 = \frac{\sin\theta\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta}}$$

Λήμμα 3: $E\left(T\left(\alpha\right)\right) = \pi - \alpha$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x(\theta) = \left(x_1(\theta), x_2(\theta), x_3(\theta)\right)$ να είναι η πολική γωνία της L.

Τότε:

$$E\left(T\left(\alpha\right)\right) = \int_{-\beta}^{\beta}\int_0^{\eta\left(e_1, x(\theta)\right)} \sinh\eta\, d\eta\, d\theta =$$

$$= \int_{-\beta}^{\beta} \cosh\eta\left(e_1, x(\theta) - 1\right) d\theta = \int_{-\beta}^{\beta} x_1(\theta)\, d\theta - \alpha$$

Και

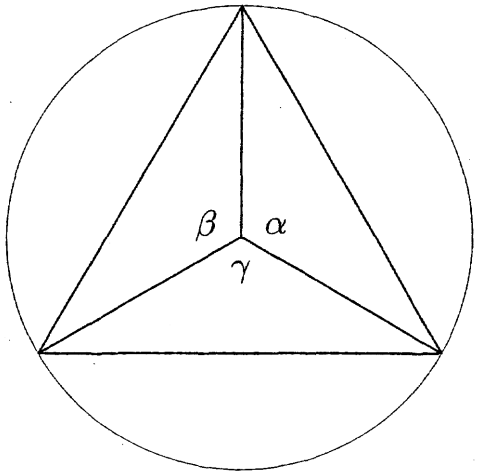
$$\int_{-\beta}^{\beta} x_1(\theta)\, d\theta = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta}}\, d\theta = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\theta}}\, d\theta = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = Arc\sin u\Big|_{-1}^{1} = \pi$$

όπου $u = \dfrac{\sin\theta}{\sin\beta}$.

Άρα έχουμε:

$$E\left(T\left(\alpha\right)\right) = \pi - \alpha$$

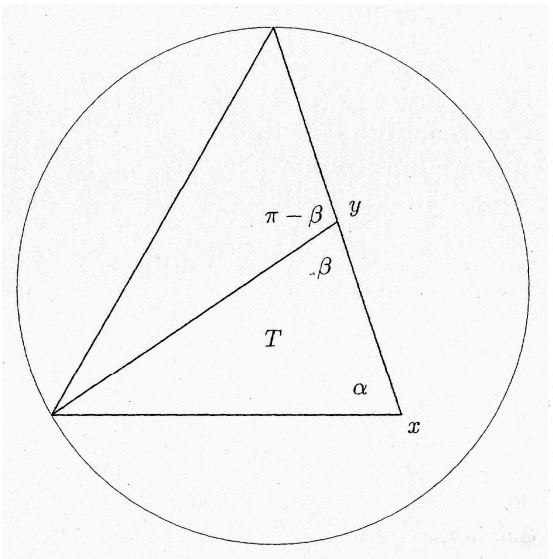
Λήμμα 4: Το εμβαδόν ενός ιδεατού υπερβολικού τριγώνου είναι π

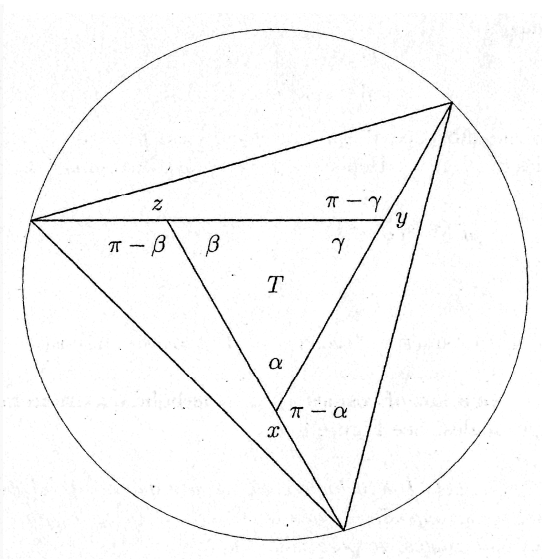


<u>Απόδειξη</u>

Έστω T ένα ιδεατό υπερβολικό τρίγωνο και x οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του. Τότε το T μπορεί να διασπαστεί σε τρία άπειρα υπερβολικά τρίγωνα κάθε ένα εκ των οποίων έχει την x σαν την μόνη πεπερασμένη κορυφή τους. Έστω α, β και γ να είναι οι γωνίες των τριγώνων στην κορυφή x. Τότε: $E(T)=(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)=\pi$

Θεώρημα 4.5: Αν α, β και γ είναι οι γωνίες του γενικευμένου υπερβολικού τριγώνου T τότε: $E(T)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$





Απόδειξη

Με χρήση των Λημμάτων 3 και 4 και θεωρώντας ότι T έχει μονό δυο πεπερασμένες κορυφές x και y με γωνίες α, β αντίστοιχα τότε προεκτείνοντας την πεπερασμένη πλευρά του T παρατηρούμε ότι το T είναι η διαφορά δυο άπειρων υπερβολικών τριγώνων T_x και T_y με μια μόνο πεπερασμένη κορυφή την x και y αντίστοιχα.

Επομένως $E(T) = E(T_x) - E(T_y) = (\pi - \alpha) - \beta$

Αν υποθέσουμε ότι το T έχει τρεις πεπερασμένες κορυφές x, y, z με αντίστοιχες γωνίες α, β, γ μπορούμε προεκτείνοντας το πλευρές του T να βρούμε ένα ιδεατό υπερβολικό τρίγωνο T' που μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερεις περιοχές από το οποίες η μια είναι το T και οι το είναι τα υπερβολικά τρίγωνα T_x, T_y και T_z με μια πεπερασμένη κορυφή x, y, z αντίστοιχα.

$$E(T') = E(T) + E(T_x) + E(T_y) + E(T_z) \Rightarrow$$
$$\pi = E(T) + \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow$$
$$E(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Πόρισμα 1:

Αν α, β και γ είναι οι γωνίες του γενικευμένου υπερβολικού τριγώνου τότε: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

4.3 Ύπαρξη Υπερβολικών Τριγώνων

Θεώρημα 4.6: Αν α, β, 0 είναι οι γωνίες γενικευμένου υπερβολικού τριγώνου με ακριβώς μια ιδεατή κορυφή και c είναι το μήκος της πεπερασμένης πλευράς τότε:

$$\cosh c = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Απόδειξη

Έστω $T(x,y,z)$ να είναι ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο με μια ιδεώδη κορυφή z. Αναπαριστούμε την z με ένα θετικό φωτοειδές διάνυσμα. Έστω:

$$x' = \frac{y\otimes z}{\|y\otimes z\|},\ y' = \frac{z\otimes x}{\|z\otimes x\|},\ z' = \frac{x\otimes y}{\|x\otimes y\|}$$

Τότε:

$$x = \frac{y'\otimes z'}{\|y'\otimes z'\|} \text{ και } y = \frac{z'\otimes x'}{\|z'\otimes x'\|}$$

Έστω u να είναι σημείο στο εσωτερικό της πλευράς $[x,z)$ και v να είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της πλευράς $[y,z)$.

Από το Λήμμα 1 έχουμε:

$$\eta(u\otimes x, x\otimes y) = \pi-\alpha$$
$$\eta(x\otimes y, y\otimes v) = \pi-\beta$$

Έτσι έχουμε:

$$\eta(z\otimes x, x\otimes y) = \pi-\alpha$$
$$\eta(x\otimes y, y\otimes z) = \pi-\beta$$

Τώρα το z βρίσκεται στον υπόχωρο V που παράγεται από τα x' και y' και x' και y' βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές του $\langle z\rangle$ στο V. Και επομένως $x'\circ y' = -1$.

Τώρα εφόσον:

$$\left(y' \otimes z'\right) \circ \left(z' \otimes x'\right) = \begin{vmatrix} y' \circ x' & y' \circ z' \\ z' \circ x' & z' \circ z' \end{vmatrix}$$

Έχουμε:

$$-\sin\left(\pi - \alpha\right)\sin\left(\pi - \beta\right)\cosh c = -1 - \cos\left(\pi - \alpha\right)\cos\left(\pi - \beta\right).$$

Τώρα θα αποδείξουμε τον νόμο των συνημιτόνων για ένα υπερβολικό τετράπλευρο με δυο διαδοχικές ορθές γωνίες.

Θεώρημα 4.7: Έστω Q να είναι ένα υπερβολικό κυρτό τετράπλευρο με δυο προσκείμενες (διαδοχικές) ορθές γωνίες, απέναντι γωνίες α, β και πλευρές με μήκη c, d μεταξύ των α, β και των ορθών γωνιών αντιστοίχως. Τότε:

$$\cosh c = \frac{\cosh d + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω x, y να είναι οι κορυφές του Q στα α, β και έστω z να είναι το μοναδιαίο χωροειδές διάνυσμα Lorentz ορθογώνιο και εξωτερικό στην πλευρά του Q μήκους d. Έστω:

$$x' = \frac{y \otimes z}{\|y \otimes z\|},\ y' = \frac{z \otimes x}{\|z \otimes x\|},\ z' = \frac{x \otimes y}{\|x \otimes y\|}$$

Τότε:

$$x = \frac{y' \otimes z'}{\|\|y' \otimes z'\|\|} \text{ και } y = \frac{z' \otimes x'}{\|\|z' \otimes x'\|\|}$$

Τώρα εφόσον:

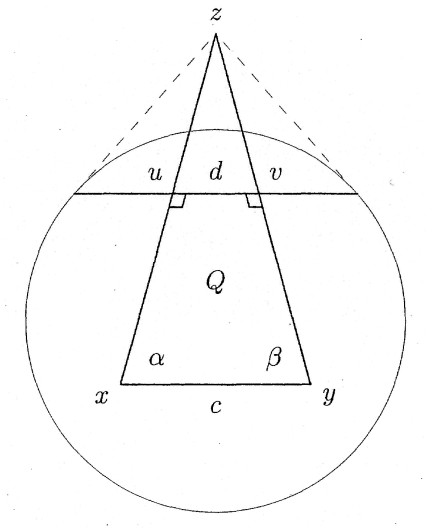
$$\left(y' \otimes z'\right) \circ \left(z' \otimes x'\right) = \begin{vmatrix} y' \circ x' & y' \circ z' \\ z' \circ x' & z' \circ z' \end{vmatrix}$$

Έχουμε:

$$-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)\cosh c = -\cosh d - \cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta).$$

Θεώρημα 4.8: Έστω Q να είναι ένα υπερβολικό κυρτό τετράπλευρο με δυο προσκείμενες (διαδοχικές) ορθές γωνίες και απέναντι γωνίες α, β. Τότε:

$\alpha + \beta < \pi$



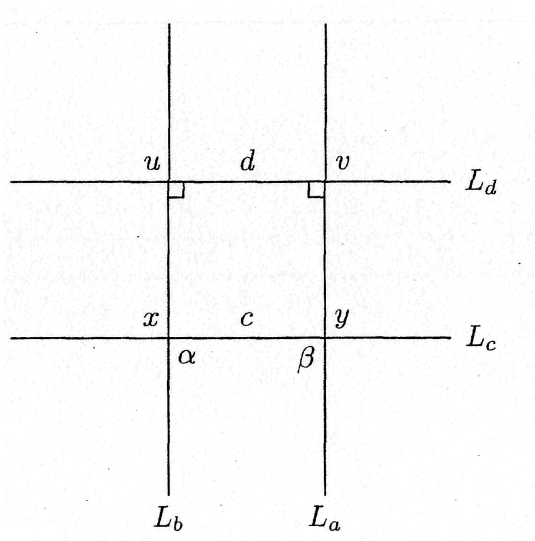
<u>Απόδειξη</u>

Διαιρούμε το Q σε δυο τρίγωνα με γωνίες α, β_1, γ_1 και β_2, γ_2, $\pi/2$ τέτοια ώστε: $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ και $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi/2$. Τότε:

$$\text{Εμβ}(Q) = \pi - \alpha - \beta_1 - \gamma_1 + \pi - \beta_2 - \gamma_2 - \pi/2 = \pi - \alpha - \beta$$

Θα κλείσουμε την παρουσίαση αυτή της υπερβολικής γεωμετρίας με την απόδειξη της ύπαρξης των υπερβολικών τριγώνων γεγονός που μας διασφαλίζει ότι όλα όσα κάναμε δεν είναι αίολα.

Θεώρημα 4.9: Έστω α, β, γ να είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. Τότε υπάρχει υπερβολικό τρίγωνο (μοναδικό) με γωνίες τις α, β, γ.



<u>Απόδειξη</u>

Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha,\beta<\pi/2$. Τώρα:

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi\Rightarrow$$
$$\alpha+\beta<\pi-\gamma\Rightarrow$$
$$\cos(\alpha+\beta)>\cos(\pi-\gamma)\Rightarrow$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta>-\cos\gamma\Rightarrow$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma>\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow$$
$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}>1$$

Άρα υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός c που να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\cosh c=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Έστω $[x,y]$ να είναι ένα γεωδαισιακό ευθύγραμμο τμήμα στο H^2 μήκους c που ενώνει ένα σημείο x και ένα σημείο y και έστω L_b, L_a να είναι οι υπερβολικές γραμμές που διέρχονται από τα σημεία x και y αντίστοιχα, δημι-

ουργώντας γωνίες α, β αντιστοίχως που βρίσκονται από την ίδια πλευρά του $[x, y]$.

<u>Ισχυριζόμαστε</u> ότι L_a και L_b συναντώνται από την ίδια πλευρά της υπερβολικής γραμμής L_c που περιέχει το $[x, y]$ και τις α, β.

<u>Απόδειξη Ισχυρισμού</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπον απαγωγή.

a) Έστω ότι οι L_a και L_b συναντώνται στο άπειρο στην αντίθετη πλευρά της L_c από αυτήν που βρίσκονται οι γωνίες α, β. Τότε οι γραμμές L_a, L_b, και L_c σχηματίζουν ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο του οποίου οι γωνίες είναι οι $\pi - \alpha$ και $\pi - \beta$ αλλά $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) > \pi$. Άτοπο.

b) Έστω ότι οι L_a και L_b δεν συναντώνται ούτε στο άπειρο, τότε θα έχουν μια κοινή κάθετη υπερβολική ευθεία L_d η οποία θα ενώνει ένα σημείο u της L_b με ένα σημείο v της L_a. Υποθέτοντας ότι $u \neq x$ και $v \neq y$ και ότι $[u, v]$ είναι στην αντίθετη πλευρά της L_c. Τότε u, v, x, y είναι οι κορυφές ενός υπερβολικού τετράπλευρου με δυο προσκείμενες ορθές γωνίες και απέναντι γωνίες τις $\pi - \alpha$ και $\pi - \beta$ αλλά $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) > \pi$. Άτοπο.

c) Έστω $u = x$ και $v \neq y$ και ότι v βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από την L_c. Τότε v, x, y είναι οι κορυφές ενός υπερβολικού τριγώνου με γωνίες $\pi/2 - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi/2$ αλλά $\left(\pi/2 - \alpha\right) + (\pi - \beta) + \pi/2 > \pi$. Άτοπο.

Ομοίως για $u \neq x$ και $v = y$ και ότι u βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από την L_c.

d) Έστω $u \neq x$ και u βρίσκεται από την ίδια πλευρά της L_c με την α και $v \neq y$ και v βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από την L_c. Τότε οι γραὶ-

μές L_a, L_b, L_c, L_d σχηματίζουν δυο υπερβολικά τρίγωνα δυο εκ των οποίων οι γωνίες είναι α, $\pi/2$ και $\pi-\beta$, $\pi/2$ αντιστοίχως.

Καθώς $\beta < \pi/2$ έχουμε $\pi-\beta+\pi/2 > \pi$. Άτοπο.

Ομοίως αν $v \neq y$ και v βρίσκεται από την ίδια πλευρά της L_c με την β και $u \neq x$ και u βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από την L_c πάλι οδηγούμαστε σε άτοπο.

e) Έστω $v = y$ και $u \neq x$ και u βρίσκεται από την ίδια πλευρά της L_c με την α. Τότε τα u, x, y είναι οι κορυφές ενός υπερβολικού τριγώνου με γωνίες $\pi/2$, $\beta-\pi/2$, α αλλά $\beta < \pi/2$. Άτοπο.

Ομοίως αν $u = x$ και $v \neq y$ και v βρίσκεται από την ίδια πλευρά της L_c με την β πάλι οδηγούμαστε σε άτοπο.

f) Τέλος έστω $u \neq x$ και $v \neq y$ και $[u,v]$ βρίσκεται από την ίδια πλευρά της L_c με τις α, β. Τότε τα u, v, x, y είναι οι κορυφές ενός υπερβολικού τετράπλευρου με δυο προσκείμενες ορθές γωνίες και απέναντι γωνίες τις α, β. Ισχύει ότι: $\cosh c = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \cosh d}{\sin\alpha\sin\beta}$ που είναι άτοπο εφόσον $\cosh d > \cos\gamma$.

Επομένως έπεται ότι οι L_a και L_b συναντώνται στο άπειρο από την ίδια πλευρά της υπερβολικής γραμμής L_c που περιέχει και τις α, β.
Άρα οι γραμμές L_a, L_b, και L_c σχηματίζουν ένα γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο T του οποίου οι γωνίες είναι οι α, β, δ.
Επομένως έχουμε: $\cosh c = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\delta}{\sin\alpha\sin\beta}$.
Και εφόσον $\cos\delta = \cos\gamma$ και επομένως $\delta = \gamma$.
Άρα το T είναι το επιθυμητό τρίγωνο.

Πλέον και έχοντας αποδείξει την ύπαρξη και διαφοροποίηση της Υπερβολικής Γεωμετρίας σε σχέση με την Ευκλείδια μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια υλοποίηση της προηγούμενης μελέτης μας σε ένα από τα πιο ενδιαφέροντα μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρία που είναι ο Χωροχρόνος Minkowski.

ΜΕΡΟΣ 3ο

Εδώ θα μελετήσουμε το χωροχρόνο Minkowski. Μια πολλαπλότητα διάστασης 4 της οποίας οι τρεις πρώτες συντεταγμένες παριστάνουν τον χώρο ενώ η τέταρτη τον χρόνο. Θα αποδείξουμε πολλές και πολύ ενδιαφέρουσες προτάσεις και θα τις συσχετίσουμε με τον φυσικό κόσμο δίνοντας της φυσική τους ερμηνεία αλλά και με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας που διατύπωσε ο Albert Einstein (1879-1955).

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ασχολείται με τις συνέπειες δύο αιτημάτων τα οποία προέταξε για να μπορέσει να εξηγήσει τα αποτελέσματα ορισμένων πειραμάτων, που είχαν διεξαχθεί από άλλους στη διάρκεια των είκοσι τεσσάρων χρόνων που προηγήθηκαν αυτά δεν συμφωνούσαν ακριβώς με τις κυρίαρχες ιδέες στη Φυσική, οι περισσότερες από τις οποίες οφείλονταν στον Newton και είχαν ηλικία μεγαλύτερη των δυόμιση αιώνων. Πρόκειται για τα εξής αιτήματα:

1. Όλοι οι νόμοι της φυσικής που ισχύουν σε ένα σύστημα αναφοράς ισχύουν εξίσου σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το πρώτο.
2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό παραμένει σταθερή ανεξαρτήτως της κίνησης της πηγής του.

Μια από τις εκπληκτικότερες συνέπειες των αιτημάτων του Einstein είναι ότι, για παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο, γεγονότα που κατά τον ένα παρατηρητή λαμβάνουν χώρα ταυτοχρόνως δεν είναι απαραιτήτως ταυτόχρονα για τον άλλο. Πρόκειται για τη σχετικότητα του χρόνου — ότι δηλαδή κάθε παρατηρητής θα πρέπει να θεωρείται εφοδιασμένος με προσωπικό ρολόι και οι συγκρίσεις με το ρολόι ενός άλλου παρατηρητή γίνονται, στην καλύτερη περίπτωση, υπό όρους. Υπάρχει επίσης μια σχετικότητα της απόστασης — συγκρίσεις απόστασης μπορούν να γίνουν σε σχέση με τον παρατηρητή μόνο. Αυτό είναι σωστό, αφού η μέτρηση της απόστασης μεταξύ

δύο σημείων πρέπει να πραγματοποιηθεί σε χρονικό διάστημα που το αντιλαὶ βανόμαστε κατά μοναδικό και ενιαίο τρόπο.

Μια άλλη ιδιομορφία του σχετικού χρόνου είναι ότι ένα ρολόι που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με κάποιον παρατηρητή μετρά τον χρόνο πιο αργά από το ρολόι του ακίνητου παρατηρητή

Τα ανθρώπινα ρολόγια (π.χ. οι χτύποι της καρδιάς) θα «χάνουν» σε ένα κινούμενο αντικείμενο, άρα κάποιος που επιβαίνει σε διαστημόπλοιο κινούμενο με ταχύτητα συγκρίσιμη με εκείνη του φωτός θα γερνά πιο αργά από κάποιον που παρέμεινε στο έδαφος.

Το σημείο που δημιουργεί τα περισσότερα προβλήματα, βάσει των ανωτέρω, εντοπίζεται στη δυνατότητα να θεωρήσει κανείς εναλλακτικά το διαστημόπλοιο σε ακινησία και τη Γη κινούμενη ως προς αυτό. Έτσι, σε κάποιον στο διαστημόπλοιο θα φαινόταν ότι τα ρολόγια στη Γη μένουν πίσω. Σύμφωνα, όμως, με την αρχική θεώρηση, ένας παρατηρητής στη Γη θα πίστευε κάτι τέτοιο για τα ρολόγια στο διαστημόπλοιο. Δεν αποτελούν αυτά μια παραδοξότητα;

Η εξήγηση που δίνεται είναι ότι δεν θα μπορούν να συγκρίνουν τα ρολόγια χωρίς να αρχίσει το διαστημόπλοιο να επιβραδύνει την κίνηση του για να αναστρέψει την πορεία του και να την επιβραδύνει και πάλι ώσπου να σταματήσει.

Το 1908, ο Hermann Minkowski (1864-1909), καθηγητής Μαθηματικών κάποτε του Einstein, έθεσε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας σε μαθηματικά πλαίσια που αποδείχθηκαν σημαντικά για τη μετέπειτα πορεία προς τη Γενική Θεωρία. Η ιδέα του Minkowski ήταν να θεωρηθεί ο χωρόχρονος ως τετραδιάστατος χώρος με συντεταγμένες χ, y, z και ct, με την απόσταση όμως (καλούμενη διάστημα) να δίνεται από την έκφραση

$$\sqrt{(\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

Εδώ το t πολλαπλασιάζεται επί c για να προκύψουν μονάδες απόστασης, ενώ το Δ μπροστά από τα γράμματα δηλώνει τη μεταβολή στην τιμή της κάθε μεταβλητής από σημείο σε σημείο του χωροχρόνου. Ο χώρος του Minkowski βρισκόταν στην κατεύθυνση των ιδεών του Riemann των οποίων η εξέλιξη

υπήρξε εντυπωσιακή στα πενήντα χρόνια που μεσολάβησαν. Ο Minkowski άρχισε τη διάλεξη του «Χώρος και Χρόνος» με την εξής περίφημη παράγραφο:

«Η άποψη για τον χώρο και τον χρόνο, την οποία επιθυμώ να θέσω υπ' όψιν σας, έχει ξεπηδήσει από το έδαφος της πειραματικής φυσικής και εκεί βρίσκεται η δύναμη της. Πρόκειται για κάτι ριζοσπαστικό. Από τώρα και στο εξής, ο χώρος και ο χρόνος ως αυτόνομες έννοιες είναι καταδικασμένες σε μια σκιώδη ύπαρξη, και μόνον κάποιο είδος ένωσης των δύο θα διατηρήσει μιαν ανεξάρτητη πραγματικότητα.»

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ Μ

Συμβολίζουμε με V έναν τυχαίο διανυσματικό χώρο διάστασης $n \geq 1$ πάνω στους πραγματικούς αριθμούς. Μια διγραμμική μορφή πάνω στο V είναι μια απεικόνιση $g : V \times V \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γραμμική για κάθε μεταβλητή, δηλαδή έτσι ώστε $g(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 g(v_1, w) + a_2 g(v_2, w)$ και $g(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 g(v, w_1) + a_2 g(v, w_2)$ όπου τα a είναι πραγματικοί αριθμοί και τα u και w είναι στοιχεία του V. Η g είναι συμμετρική αν $g(w, v) = g(v, w)$ για κάθε v και w και μη εκφυλισμένη αν η $g(v, w) = 0$ για κάθε w στο V συνεπάγεται ότι $v = 0$. Μια μη εκφυλισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή g γενικά καλείται ένα εσωτερικό γινόμενο και η εικόνα του (v, w) υπό την g συχνά γράφεται ως $v \cdot w$ παρά ως $g(u, w)$. Το σύνηθες παράδειγμα είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$: αν $v = (v^1, ..., v^n)$ και $w = (w^1, ..., w^n)$, τότε $g(v, w) = v \cdot w = v^1 w^1 + ... + v^n w^n$. Το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή έχει την ιδιότητα αν $v \neq 0$ τότε $g(v, v) > 0$. Ωστόσο, αυτήν την ιδιότητα δεν την έχουν όλα τα εσωτερικά γινόμενα.

Έστω η απεικόνιση $g_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g_1(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + ... + v^{n-1} w^{n-1} + v^n w^n$. Η g_1 είναι ένα εσωτερικό γινόμενο και υπάρχουν τα μη μηδενικά διανύσματα v και w έτσι ώστε $g_1(v, v) = 0$ και $g_1(w, w) < 0$.

Ένα εσωτερικό γινόμενο g για το οποίο $v \neq 0$ σημαίνει ότι $g(v, v) < 0$ καλείται αρνητικά ορισμένο, ενώ αν το g δεν είναι θετικά ορισμένο ούτε αρνητικά καλείται αόριστο.

Αν g είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του V, λέμε ότι δυο διανύσματα v και w για τα οποία ισχύει $g(v,w)=0$ ότι είναι g-ορθογώνια, ή απλά ορθογώνια αν δεν υπάρχει αμφιβολία για το ποιο εσωτερικό γινόμενο θέλαμε. Αν W είναι ένας υπόχωρος του V, τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^{\perp}$ του W στο V ορίζεται ως $W^{\perp}=\{v\in V : g(v,w)=0 \text{ για κάθε } w\in W\}$ και αποτελεί υπόχωρο του V.

Η τετραγωνική μορφή που σχετίζεται με το εσωτερικό γινόμενο g στο V είναι η απεικόνιση $Q:V\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως $Q(v)=g(v,v)=v\cdot v$ (συχνά συμβολίζεται v^2). Αυτή η απεικόνιση είναι μοναδική και δεν μπορεί να προκληθεί η ίδια τετραγωνική μορφή από διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα στο V.

Ένα διάνυσμα για το οποίο $Q(v)$ είναι είτε 1 είτε -1 καλείται μοναδιαίο διάνυσμα. Μια βάση $\{e_1,...,e_n\}$ του V η οποία αποτελείται από αντίστοιχα ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα καλείται μια ορθογώνια βάση του V και τώρα θα αποδείξουμε ότι τέτοιες βάσεις υπάρχουν πάντα.

Θεώρημα 1.1.1. Έστω V ένας n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος στον οποίο είναι ορισμένη μια μη εκφυλισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή $g:V\times V\to\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μια βάση $\{e_1,...,e_n\}$ του V ώστε $g(e_i,e_j)=0$ αν $i\neq j$ και $Q(e_i)=\pm 1$ για κάθε $i=1,...,n$. Επιπλέον, το πλήθος των διανυσμάτων βάσης e_i για τα οποία $Q(e_i)=-1$ είναι ίδιο για κάθε τέτοια βάση.

<u>Απόδειξη</u>

Ξεκινάμε με μια παρατήρηση. Εφόσον η g είναι μη εκφυλισμένη υπάρχει ένα ζεύγος διανυσμάτων (v,w) για το οποίο $g(v,w)\neq 0$. Υποστηρίζουμε ότι, στην πραγματικότητα, πρέπει να υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα u στο V με $Q(u)\neq 0$. Βέβαια. Αν κάποιο από τα $Q(v)$ ή $Q(w)$ είναι μη μηδενικό τελειώ-

σαμε. Από την άλλη πλευρά, αν $Q(v)=Q(w)=0$, τότε $Q(v+w)=Q(v)+2g(v,w)+Q(w)=2g(v,w)\neq 0$ έτσι μπορούμε να πάρουμε $u=v+w$.

Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με επαγωγή στο n.

Αν $n=1$ επιλέγουμε οποιοδήποτε u στο V με $Q(u)\neq 0$ και ορίζουμε $e_1=(|Q(u)|)^{-1/2}u$. Τότε $Q(e_1)=\pm 1$ έτσι $\{e_1\}$ είναι η ζητούμενη βάση.

Τώρα θεωρούμε ότι $n>1$ και ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο ενός διανυσματικού χώρου με διάσταση μικρότερη από n έχει μια βάση του ζητούμενου τύπου. Έστω ότι η διάσταση του V είναι n. Ξανά, ξεκινάμε επιλέγοντας ένα u στο V ώστε $Q(u)\neq 0$ και έστω $e_n=\left(|Q(u)|\right)^{-1/2}u$ έτσι ώστε $Q(e_n)=\pm 1$. Τώρα, έστω ότι W είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα στο V του υπόχωρου που παράγει το $\{e_n\}$. Ο W είναι ένας υπόχωρος του V και έτσι e_n δεν είναι στο W. $\dim W<n$. Ο περιορισμός του g στο $W\times W$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο W έτσι η επαγωγή υπόθεση μας επιβεβαιώνει για την ύπαρξη μιας βάσης $\{e_1,...,e_m\}$, $m=\dim W$, για το W ώστε $g(e_i,e_j)=0$ αν $i\neq j$ και $Q(e_i)=\pm 1$ για $i=1,...,m$. Θεωρούμε ότι $m=n-1$ και ότι η $\{e_1,...,e_m,e_n\}$ είναι μια βάση του V.

Είναι προφανές ότι τα διανύσματα $\{e_1,...,e_m,e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εφόσον το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{e_1,...,e_m,e_n\}$ είναι $m+1<n$, και οι δύο ισχυρισμοί μας προκύπτουν αν μπορούμε να δείξουμε ότι αυτό το σύνολο παράγει το V. Έτσι, έστω v ένα τυχαίο στοιχείο του V και θεωρούμε το διάνυσμα $w=v-\left(Q\left(e_n\right)g(v,e_n)\right)e_n$. Τότε w είναι στο W αφού $g(w,e_n)=g(v-(Q(e_n)g(v,e_n),e_n)=g(v,e_n)-(Q(e_n))^2g(v,e_n)=0$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι $v=w^1e_1+...+w^me_m+(Q(e_{n)}g(v,e_n))e_n$ και επομένως τα $\{e_1,...,e_m,e_n\}$ παράγει το V.

Για να δείξουμε ότι το πλήθος r των e_i για τα οποία $Q(e_i)=-1$ είναι το ίδιο για κάθε ορθογώνια βάση συνεχίζουμε ως εξής: Αν $r=0$ το αποτέλεσμα είναι

προφανές αφού $Q(v) \geq 0$ για κάθε v στο V, δηλαδή το g είναι θετικά ορισμένο. Αν $r > 0$, τότε ο V θα έχει υπόχωρους στους οποίους το g είναι αρνητικά ορισμένο και επομένως θα έχει υπόχωρους με μέγιστη διάσταση στους οποίους το g είναι αρνητικά ορισμένο. Θα δείξουμε ότι το r είναι η διάσταση οποιουδήποτε τέτοιου μέγιστου υπόχωρου W και για αυτό δίνει έναν αναλλοίωτο (ανεξάρτητο της βάσης) χαρακτηρισμό του r. Αριθμήστε τα στοιχεία της βάσης ώστε $\{e_1,...,e_r,e_{r+1},...,e_n\}$, όπου $Q(e_i)=1$ για $i=r+1,...,n$. Έστω $X = Span(e_1,...,e_r)$ να είναι ο υπόχωρος του V που παράγεται από το $\{e_1,...,e_r\}$. Τότε, εφόσον το g είναι αρνητικά ορισμένο στο X και $\dim X = r$, βρίσκουμε ότι $r \leq \dim W$. Για να δείξουμε ότι $r \geq \dim W$, ορίζουμε μια απεικόνιση $T: W \to X$ ως εξής: Αν το $w = \sum_{i=1}^{n} w^i e_i$ είναι μέσα στο W τότε $Tw = \sum_{i=1}^{r} w^i e_i$. Τότε η T είναι προφανώς γραμμική. Υποθέστε ότι το w είναι τέτοιο ώστε $Tw = 0$. Τότε για κάθε $i = 1,...,r$, $w^i = 0$.

Έτσι, $Q(w) = g(\sum_{i=r+1}^{n} w^i e_i, \sum_{j=r-1}^{n} w^j e_j) = \sum_{i,j=r+1}^{n} g(e_i,e_j) w^i w^j = \sum_{i=r+1}^{n} (w^i)^2$

Το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο με μηδέν. Αλλά το g είναι αρνητικά ορισμένο στο W και άρα πρέπει να έχουμε $w^i = 0$ για $i = r+1,...,n$, δηλαδή, $w = 0$. Έτσι το κενό σύνολο της T είναι $\{0\}$ και για αυτό η T είναι ένας ισομορφισμός του W σε έναν υπόχωρο του X. Συνεπώς, $\dim W \leq \dim X = r$.

Το πλήθος r των e_i σε κάθε ορθογώνια βάση για το g με $Q(e_i) = -1$ καλείται ο δείκτης του g. Στο εξής θα θεωρούμε ότι όλες οι ορθογώνιες βάσεις δηλώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε αυτά τα e_i να εμφανίζονται στο τέλος της λίστας και να αριθμούνται ως εξής:

$\{e\ , e_2,...,e_{n-r}, e_{n-r+1},...,e_n\}$

όπου $Q(e_i) = 0$ για $i = 1,2,...,n-r$ και $Q(e_i) = -1$ για $i = n-r+1,...,n$.

Ανάλογα προς μια τέτοια βάση αν $v = v^i e_i$ και $w = w^i e_i$, τότε έχουμε

$$g(v,w) = v^1 w^1 + \ldots + v^{n-r} w^{n-r} - v^{n-r+1} w^{n-r+1} - \ldots - v^n w^n .$$

1. Χωρόχρονος Minkowski

Ο χωρόχρονος Minkowski είναι ένας 4-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος M πάνω στον οποίο ορίζεται μια μη εκφυλισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή g με δείκτη 1.Τα στοιχεία του M θα καλούνται γεγονότα και η g θα καλείται εσωτερικό γινόμενο Lorentz στο M. Επομένως, υπάρχει μια βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του M με την ιδιότητα αν $v = v^a e_a$ και $w = w^a e_a$ τότε

$g(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4$.

Τα στοιχεία του M είναι γεγονότα και όπως προτείναμε στην εισαγωγή, θα τα σκεφτόμαστε διαισθητικά ως πραγματικά ή φυσικά πιθανά σημεία-γεγονότα. Μια ορθογώνια βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του M βάζει συντεταγμένες σε αυτόν τον κόσμο γεγονότων και θα αναγνωρίζεται από ένα «πλαίσιο αναφοράς». Έτσι, αν $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$, θεωρούμε τις συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3, x^4) του x σχετικά με το $\{e_a\}$ ως οι χωρικές (x^1, x^2, x^3) συντεταγμένες και η χρονική $\left(x^4\right)$ συντεταγμένη που συνθέτουν το γεγονός x σε σχέση με τον παρατηρητή ο οποίος προΐσταται σε αυτό το πλαίσιο αναφοράς. Καθώς εμβαθύνουμε στις έννοιες της μελέτης μας κατά καιρούς θα αναπτύσσουμε, βελτιώνουμε και θα προσθέτουμε νέα στοιχεία σε αυτή τη βασική φυσική αναπαράσταση, αλλά προς το παρόν, αυτό αρκεί.

Για οικονομία θα εισάγουμε έναν 4×4 πίνακα n που ορίζεται ως

$$n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Του οποίου τα στοιχεία θα συμβολίζονται είτε n^{ab} ή n_{ab}, η επιλογή για κάθε περίπτωση καθορίζεται από τις απαιτήσεις της συνθήκης άθροισης.

Έτσι, $n_{ab} = n^{ab} = 1$ αν $a = b = 1,2,3$, -1 αν $a = b = 4$ και 0 διαφορετικά. Σαν αποτέλεσμα, μπορούμε να γράψουμε $g\left(e_a, e_b\right) = n_{ab} = n^{ab}$ και, με τη συνθήκη αθροίσματος $g(v,w) = n_{ab} v^a w^b$.

Εφόσον το εσωτερικό μας γινόμενο Lorentz g στο M δεν είναι θετικά ορισμένο, υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα v στο M για τα οποία $g(v,v) = 0$, π.χ. $v = e_1 + e_4$ είναι ένα τέτοιο αφού $g(v,v) = Q(e_1) + 2g(e_1, e_4) + Q(e_4) = 1 + 0 - 1 = 0$. Τέτοια διανύσματα λέμε ότι είναι φωτοειδή (lightlike) και ο M έχει βάσεις που αποτελούνται αποκλειστικά από τέτοιου είδους διανύσματα.

Θεώρημα 1.2.1. Δύο μη μηδενικά φωτοειδή διανύσματα v και w στο M είναι ορθογώνια αν και μόνο αν είναι παράλληλα, δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει ένα t στο $\mathbb{R}$ ώστε $v = tw$.

Πράγματι: Η ανισότητα Schwartz για το $\mathbb{R}^3$ λέει ότι

αν $x = (x^1, x^2, x^3)$ και $y = (y^1, y^2, y^3)$ τότε

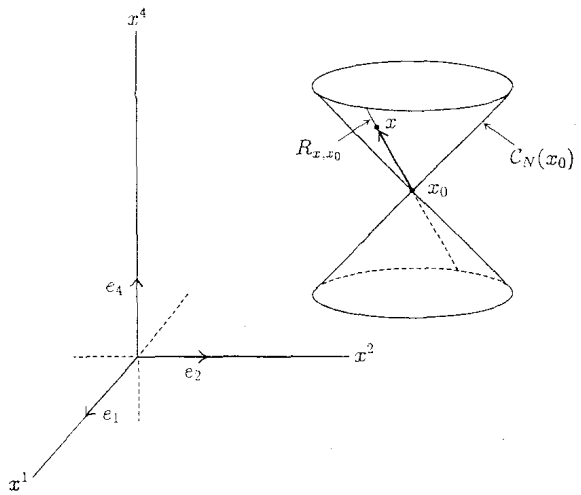
$$\left(x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3\right)^2 \le \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2\right)\left(\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + \left(y^3\right)^2\right)$$

Και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Στη συνέχεια θεωρούμε δυο διαφορετικά γεγονότα x_0 και x για τα οποία το διάνυσμα μετατόπισης $v = x - x_0$ από το x_0 στο x είναι φωτοειδή, δηλαδή $Q(v) = Q(x - x_0) = 0$. Σχετικά με κάθε ορθογώνια βάση $\{e_a\}$, αν $x = x^a e_a$ και $x_0 = x_0^a e_a$, τότε

$$(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 - (x^4 - x_0^4)^2 = 0. \quad (1.2.1.)$$

Αλλά αυτό το είδαμε και πριν. Είναι ακριβώς η συνθήκη που, στην εισαγωγή, αποφασίσαμε να περιγράφει τη σχέση μεταξύ δυο γεγονότων που βρίσκονται πάνω στην κοσμική γραμμή ενός φωτονίου. Για αυτόν τον λόγο, και εξαιτίας της τυπικής ομοιότητας μεταξύ της (1.2.1.) και της εξίσωσης του δεξιά κυκλικού κώνου στο $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε κώνο φωτός $C_N(x_0)$ στο x_0 του M ως $C_n(x_0)=\{x\in M : Q(x-x_0)=0\}$ και το απεικονίζουμε εξαφανίζοντας την τρίτη χωρική διάσταση x^3.



Ο $C_n(x_0)$, για αυτό αποτελείται από εκείνα τα γεγονότα του M που είναι «συνδέσιμα με το x_0 με μια ακτίνα φωτός». Για κάθε τέτοιο γεγονός x (εκτός από το ίδιο το x_0) ορίζουμε την φωτοειδή κοσμική γραμμή (φωτοειδές κοσμική γραμμή) (ή ακτίνα φωτός) R_{x,x_0} που περιέχει τα x και x_0 ως $R_{x,x_0}=\{x_0+t(x-x_0) : t\in\mathbb{R}\}$ και το σκεφτόμαστε ως την κοσμική γραμμή αυτού του συγκεκριμένου φωτονίου το οποίο περνάει και από το x και από το x_0.

Παρατήρηση:

Ισχύει ότι αν $Q(x-x_0)=0$, τότε $R_{x,x_0}=R_{x_0,x}$.

Ο $C_N(x_0)$ είναι απλά η ένωση όλων των ακτίνων φωτός που διέρχονται από το x_0. Πράγματι,

Θεώρημα 1.2.2. Έστω x_0 και x δυο διαφορετικά γεγονότα με $Q(x-x_0)=0$. Τότε

$R_{x_0,x} = C_N(x_0) \cap C_N(x)$ (1.2.2)

<u>Απόδειξη</u>

Πρώτα, έστω $z = x_0 + t(x-x_0)$ ένα στοιχείο του $R_{x_0,x}$. Τότε $z - x_0 = t(x-x_0)$ έτσι $Q(z-x_0) = t^2 Q(x-x_0) = 0$ και άρα το z είναι στο $C_N(x_0)$. Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει με τον ίδιο τρόπο ότι το z είναι στο $C_N(x)$ και άρα $R_{x_0,x} \subseteq C_N(x_0) \cap C_N(x)$. Για να αποδείξουμε το αντίστροφο θεωρούμε ότι το z είναι στο $C_N(x_0) \cap C_N(x)$. Τότε καθένα από τα διανύσματα $z-x$, $z-x_0$ και $x-x_0$ είναι φωτοειδές. Αλλά $z-x_0 = (z-x)-(x_0-x)$ έτσι $0 = Q(z-x_0) = Q(z-x) - 2g(z-x_0, x_0-x) + Q(x_0-x) = -2g(z-x, x_0-x)$. Έτσι, $g(z-x, x_0-x) = 0$. Αν $z = x$ τελειώσαμε. Αν $z \neq x$, τότε, εφόσον $x \neq x_0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.2.1. για τα ορθογώνια φωτοειδές διανύσματα $z-x$ και x_0-x για να πάρουμε ένα t στο $\mathbb{R}$ ώστε $z-x = t(x_0-x)$ και προκύπτει ότι το z είναι στο $R_{x_0,x}$.

Για λόγους οι οποίοι δεν μας απασχολούν τώρα, αλλά θα γίνουν σαφείς, ένα διάνυσμα v στο M λέμε ότι είναι χρονοειδές αν $Q(v) < 0$ και χωροειδές αν $Q(v) > 0$.

Αν v είναι το διάνυσμα μετατόπισης $x - x_0$ μεταξύ δύο γεγονότων, τότε , σχετικά με κάθε ορθογώνια βάση του M, το $Q(x-x_0) < 0$ γίνεται $(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 < (\Delta x^4)^2$. {Το $x - x_0$ είναι μέσα στο φωτοειδές κώνο στο

$x_0\}$. Έτσι, η (τετραγωνική) χωρική διαχώριση των δύο γεγονότων είναι μικρότερη από την (τετραγωνική) απόσταση που το φως θα ταξίδευε κατά τη διάρκεια της διαφοράς χρόνου μεταξύ των γεγονότων. (Θυμηθείτε ότι το x^4 ì ετριέται σε χρόνο ταξιδίου του φωτός). Αν το $x - x_0$ είναι χωροειδές η ανισότητα αντιστρέφεται. Απεικονίζουμε το $x - x_0$ εκτός του φωτοειδές κώνου στο x_0 και η χωρική διαχώριση στα x και x_0 είναι τόσο μεγάλη που ούτε ένα φωτόνιο δεν ταξιδεύει τόσο γρήγορα ώστε να προλάβει και τα δύο γεγονότα.

Αν $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ και είναι δυο ορθογώνιες βάσεις του M, τότε υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός μετασχηματισμός $L : M \to M$ ώστε $L(e_a) = \tilde{e}_a$ για κάθε $a = 1, 2, 3, 4$. Όπως θα δούμε, μια τέτοια απεικόνιση «διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο του M», δηλαδή είναι του ακόλουθου τύπου: Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $L : M \to M$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός του M αν $g(L_X, L_y) = g(x, y)$ για κάθε x και y στο M.

Παρατήρηση:

Αν το εσωτερικό γινόμενο στο M είναι μη εκφυλισμένο, ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι απαραίτητα ένα-προς-ένα και επομένως ένας ισομορφισμός.

Λήμμα 1.2.3. Έστω $L : M \to M$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

a) Ο L είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός.

b) Ο L διατηρεί την τετραγωνική μορφή του M, δηλαδή $Q(Lx) = Q(x)$ για όλα τα x στο M.

c) Ο L μεταφέρει κάθε ορθογώνια βάση του M σε οποιαδήποτε άλλη βάση του M.

Τώρα έστω $L: M \to M$ ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του M και $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια ορθογώνια βάση του M. Από το Λήμμα 1.2.3. τα $\tilde{e}_1 = L_{e_1}, \tilde{e}_2 = L_{e_2}, \tilde{e}_3 = L_{e_3}$ και $\tilde{e}_4 = L_{e_4}$ αποτελούν επίσης μια ορθογώνια βάση του M. Συγκεκριμένα, καθένα από τα e_u, $u = 1,2,3,4$ μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $\tilde{e}_a$:

$$e_u = \Lambda^1{}_u \tilde{e}_1 + \Lambda^2{}_u \tilde{e}_2 + \Lambda^3{}_u \tilde{e}_3 + \Lambda^4{}_u \tilde{e}_4 = \Lambda^a{}_u \tilde{e}_a, \ u = 1,2,3,4 \quad (1.2.3)$$

Όπου τα $\Lambda^a{}_u$ είναι σταθερές.

Τώρα οι συνθήκες ορθογωνιότητας $g(e_c, e_d) = n_{cd}, c, d = 1,2,3,4$ μπορούν να γραφούν

$$\Lambda^1{}_c \Lambda^1{}_d + \Lambda^2{}_c \Lambda^2{}_d + \Lambda^3{}_c \Lambda^3{}_d - \Lambda^4{}_c \Lambda^4{}_d = n_{cd} \quad (1.2.4)$$

Ή με τον συμβολισμό άθροισης:

$$\Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d n_{ab} = n_{cd}, \ c, d = 1,2,3,4. \quad (1.2.5)$$

Ορίζουμε τον πίνακα $\Lambda = \left[\Lambda^a{}_b\right]_{a,b=1,2,3,4}$ του ορθογώνιου μετασχηματισμού L και της ορθογώνιας βάσης $\{e_a\}$ ως

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 & \Lambda^1{}_4 \\ \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^2{}_4 \\ \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 & \Lambda^3{}_4 \\ \Lambda^4{}_1 & \Lambda^4{}_2 & \Lambda^4{}_3 & \Lambda^4{}_4 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι ο Λ είναι στην πραγματικότητα ο πίνακας L^{-1} της βάσης $\{\tilde{e}_a\}$.

Ευρετικά, οι συνθήκες (1.2.5.) υποστηρίζουν ότι «οι στήλες του Λ είναι αντίστοιχα ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα», ενώ η (1.2.6) υποστηρίζει το ίδιο για τις γραμμές.

Θεωρούμε τον πίνακα Λ του L και $\{e_a\}$, ως ένα πίνακα μετασχηματισμού συντεταγμένων με το συνήθη τρόπο. Ειδικότερα, αν το γεγονός x στο M έχει

συντεταγμένες $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^4 e_4$ ως προς $\{e_a\}$, τότε οι συντεταγμένες του ως προς $\{\tilde{e}_a\} = \{L_{e_a}\}$ είναι $x = \tilde{x}^1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}^2 \tilde{e}_2 + \tilde{x}^3 \tilde{e}_3 + \tilde{x}^4 \tilde{e}_4$, όπου

$$\tilde{x}^1 = \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3 + \Lambda^1{}_4 x^4$$

$$\tilde{x}^2 = \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3 + \Lambda^2{}_4 x^4$$

$$\tilde{x}^3 = \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3 + \Lambda^3{}_4 x^4$$

$$\tilde{x}^4 = \Lambda^4{}_1 x^1 + \Lambda^4{}_2 x^2 + \Lambda^4{}_3 x^3 + \Lambda^4{}_4 x^4$$

Το οποίο γράφουμε πιο περιεκτικά ως

$\tilde{x}^a = \Lambda^a{}_b x^b$, $a = 1, 2, 3, 4$. (1.2.7)

Εκτελώντας τους κατάλληλους πολλαπλασιασμούς πινάκων είναι φανερό ότι ο (1.2.5.) (και επομένως ο (1.2.6)) είναι ισοδύναμος με

$\Lambda^T n \Lambda = n$ (1.2.8)

Όπου T σημαίνει ο ανεστραμμένος.

Βασική Παρατήρηση 1.2.9:

Η σχέση (1.2.8) είναι η συνθήκη που ο Λ είναι ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού ο οποίος διατηρεί την τετραγωνική μορφή του M. Ειδικότερα, αν το $x - x_0$ είναι το διάνυσμα μετατόπισης μεταξύ δυο γεγονότων για τα οποία $Q(x - x_0) = 0$, τότε $(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (\Delta x^4)^2$ και $(\Delta \tilde{x}^1)^2 + (\Delta \tilde{x}^2)^2 + (\Delta \tilde{x}^3)^2 - (\Delta \tilde{x}^4)^2$, όπου τα $\Delta \tilde{x}^a$ είναι, από το (1.2.7), $\Delta \tilde{x}^a = \Lambda^a{}_b \Delta x^b$, είναι μηδέν. Εξηγώντας το φυσικά, οι δυο παρατηρητές που καθορίζουν τα πλαίσια αναφοράς συμφωνούν ότι τα x_0 και x συνδέονται με μια ακτίνα φωτός, δηλαδή, συμφωνούν για την ταχύτητα του φωτός.

Οποιοσδήποτε 4×4 πίνακας Λ που ικανοποιεί την (1.2.8) καλείται ένας γενικός (ομογενής) μετασχηματισμός Lorenz. Κάποιες φορές θα παραβιάζουμε την ορολογία και θα αναφερόμαστε στον μετασχηματισμό συντεταγμένων

(1.2.7) ως έναν μετασχηματισμό Lorentz. Εφόσον οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί του M είναι ισομορφισμοί και για αυτό αντιστρέψιμοι ο πίνακας Λ ενός τέτοιου ορθογώνιου μετασχηματισμού πρέπει να είναι επίσης αντιστρέψιμος[2]. Από το (1.2.8) βρίσκουμε ότι $\Lambda^T n \Lambda = n$ συνεπάγεται $\Lambda^T n = n\Lambda^{-1}$ έτσι ώστε $\Lambda^{-1} = n^{-1}\Lambda^T n$, ή εφόσον $n^{-1} = n$, $\Lambda^{-1} = n\Lambda^T n$. (1.2.9)

Το σύνολο όλων των γενικών (ομογενών) μετασχηματισμών Lorentz σχηματίζουν μια ομάδα υπό τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλαδή ότι είναι κλειστό υπό τον σχηματισμό γινομένων και αντιστρόφων. Αυτή η ομάδα καλείται η γενική (ομογενής) ομάδα Lorentz και θα τη συμβολίζουμε L_{GH}.

Θα συμβολίζουμε τα στοιχεία στον πίνακα Λ^{-1} με $\Lambda_a{}^b$ έτσι ώστε από την (1.2.9)

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1{}^1 & \Lambda_2{}^1 & \Lambda_3{}^1 & \Lambda_4{}^1 \\ \Lambda_1{}^2 & \Lambda_2{}^2 & \Lambda_3{}^2 & \Lambda_4{}^2 \\ \Lambda_1{}^3 & \Lambda_2{}^3 & \Lambda_3{}^3 & \Lambda_4{}^3 \\ \Lambda_1{}^4 & \Lambda_2{}^4 & \Lambda_3{}^4 & \Lambda_4{}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 & -\Lambda^4{}_1 \\ \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 & -\Lambda^4{}_2 \\ \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 & -\Lambda^4{}_3 \\ -\Lambda^1{}_4 & -\Lambda^2{}_4 & -\Lambda^3{}_4 & \Lambda^4{}_4 \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

Ισχύει ότι

$$\Lambda_a{}^b = n_{ac} n^{bd} \Lambda^c{}_d, \; a,b = 1,2,3,4, \quad (1.2.11)$$

Και όμοια

$$\Lambda^a{}_b = n^{ac} n_{bd} \Lambda_c{}^d, \; c,d = 1,2,3,4. \quad (1.2.12)$$

Εφόσον ο Λ^{-1} είναι στο L_{GH} όπου βρίσκεται το Λ θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιεί συνθήκες ανάλογες ως προς τις (1.2.5) και (1.2.6), συγκεκριμένα,

$$\Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d n^{cd} = n^{cd}, \; c,d = 1,2,3,4, \quad (1.2.13)$$

[2] δες επίσης το (1.2.6)

και

$$\Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d n_{cd} = n_{ab}\,,\ a,b = 1,2,3,4. \quad (1.2.14)$$

Οι ανάλογες σχέσεις των (1.2.3) και (1.2.7) είναι

$$\tilde{e}_u = \Lambda_u{}^a e_a\,,\ u = 1,2,3,4\,, \quad (1.2.15)$$

Και

$$x^b = \Lambda_a{}^b \tilde{x}^a\,, b = 1,2,3,4.$$

2. Η Ομάδα Lorentz

Ας παρατηρήσουμε ότι θέτοντας $c = d = 4$ στην 1.2.5. παίρνουμε ότι: $\left(\Lambda_4^4\right)^2 = 1 + \left(\Lambda_4^1\right)^2 + \left(\Lambda_4^2\right)^2 + \left(\Lambda_4^3\right)^2$ έτσι ώστε $\left(\Lambda_4^4\right)^2 \geq 1$. Συνεπώς $\Lambda_4^4 \geq 1$ ή $\Lambda_4^4 \leq -1$. Ένα στοιχείο Λ του L_{GH} θα είναι ορθοχρονοειδές (orthochronous) αν $\Lambda_4^4 \geq 1$ και μη ορθοχρονοειδές αν $\Lambda_4^4 \leq -1$. Οι μη ορθοχρονικοί Lorentz μετασχηματισμοί έχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία και θα παρουσιάσουμε.

Θεώρημα 1.3.1.: Έστω u χρονοειδές και w να είναι είτε χρονοειδές είτε φωτοειδές και μη μηδενικό. Έστω $\{e_a\}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση για τον M με $u = u^a e_a$ και $w = w^a e_a$. Τότε είτε:

(α) $u^4 w^4 > 0$ οπότε $g(u,w) < 0$ ή

(β) $u^4 w^4 < 0$ οπότε $g(u,w) > 0$

<u>Απόδειξη</u>

(α) Από υπόθεση έχουμε

$g(u,u) = \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2 - \left(u^4\right)^2 < 0$ και

$\left(w^1\right)^2 + \left(w^2\right)^2 + \left(w^3\right)^2 - \left(w^4\right)^2 \leq 0$.

Έτσι:

$$\left(u^4 w^4\right)^2 > \left(\left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2 + \left(u^3\right)^2\right)\left(\left(w^1\right)^2 + \left(w^2\right)^2 + \left(w^3\right)^2\right) \overset{A.S}{\geq} \left(u^1 w^1 + u^2 w^2 + u^3 w^3\right)^2$$

Άρα βρίσκουμε ότι:

$$\left|u^4 w^4\right| > \left|u^1 w^1 + u^2 w^2 + u^3 w^3\right| \geq u^1 w^1 + u^2 w^2 + u^3 w^3$$

Και έτσι:

$u^1w^1 + u^2w^2 + u^3w^3 - u^4w^4 < 0$ οπότε $g(u,w) < 0$.

(β) Αν πάλι $u^4w^4 < 0$ τότε $g(u,-w) < 0$ άρα $g(u,w) > 0$

Πόρισμα 1.3.2.:

Αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα του M είναι ορθογώνιο σε ένα χρονοειδές διάνυσμα τότε πρέπει να είναι χωροειδές.

Θα συμβολίζουμε με τ το σύνολο όλων των χρονοειδών διανυσμάτων στον M και ορίζουμε $\sim$ να είναι μια σχέση τέτοια ώστε: αν u και w είναι στο τ τότε $u \sim w \Leftrightarrow g(u,w) < 0$ (έτσι ώστε τα u^4 και w^4 να είναι ομόσημα για κάθε ορθοκανονική βάση).

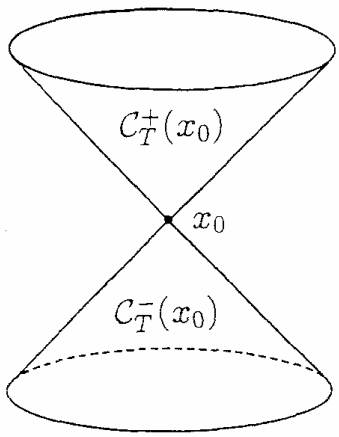
Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας εφόσον είναι:

- Αυτοπαθής $u \sim u$ $(g(u,u) < 0)$
- Συμμετρική $u \sim w \Rightarrow w \sim u$ $(g(u,w) < 0 \Rightarrow g(w,u) < 0)$
- Μεταβατική $u \sim w$ και $w \sim x$ $\Rightarrow$ $u \sim x$

Ακόμα τ είναι η ένωση των δυο ξένων υποσυνόλων τ^+ και τ^- με την ιδιότητα $u \sim w$ για όλα τα u και w στο τ^+, $u \sim w$ για όλα τα u και w στο τ^- και $u \not\sim w$ αν το ένα είναι στο τ^+ και το άλλο στο τ^-.

Θεωρούμε τα στοιχεία των τ^+ (και τ^-) να έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Πιο συγκεκριμένα επιλέγουμε αυθαίρετα το τ^+ και αναφερόμαστε στα

στοιχεία του σαν μελλοντοκατευθυνόμενα (future directed) χρονοειδή διανύσματα ενώ σε αυτά του τ^- παρελθοντοκατευθυνόμενα (past directed).



Για κάθε $x_0 \in M$ ορίζουμε τον χρονικό κώνο $C_T(x_0)$, τον μελλοντικό $C_T^+(x_0)$ και τον παρελθοντικό $C_T^-(x_0)$ στο x_0 ως εξής:

$$C_T(x_0) = \{x \in M : Q(x - x_0) < 0\}$$

$$C_T^+(x_0) = \{x \in M : x - x_0 \in \tau^+\} = C_T(x_0) \cap \tau^+ \text{ και}$$

$$C_T^-(x_0) = \{x \in M : x - x_0 \in \tau^-\} = C_T(x_0) \cap \tau^-$$

Μπορούμε να φανταστούμε το $C_T(x_0)$ σαν το εσωτερικό του φωτοειδή κώνου $C_N(x_0)$. Είναι η ξένη ένωση των $C_T^+(x_0)$ και $C_T^-(x_0)$ και θα υιοθετήσουμε την συνθήκη ότι οι εικόνες μας θα σχεδιάζονται πάντα με μελλοντοκατευθυνόμενα διανύσματα που θα δείχνουν προς τα πάνω.

Θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια των μελλοντικών και παρελθοντικών διανυσμάτων στα μη μηδενικά null διανύσματα επίσης. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν n είναι ένα μη μηδενικό null διάνυσμα τότε το $n \cdot u$ έχει το ίδιο πρόσημο για όλα τα u στο τ^+. Για να φανεί αυτό υποθέτουμε ότι υπάρχουν διανύσματα u_1 και u_2 στο τ^+ τέτοια ώστε $n \cdot u_1 < 0$ και $n \cdot u_2 > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $n \cdot u_1 = n \cdot u_2$ αφού και να μην ισχύει

μπορούμε να αντικαταστήσουμε το u_1 με το $\frac{n \cdot u_2}{|n \cdot u_1|} u_1$ που ανήκει στο τ^+ και ικανοποιεί την $g\left(n, \frac{n \cdot u_2}{|n \cdot u_1|} u_1\right) = \frac{n \cdot u_2}{|n \cdot u_1|} g(n, u_1) = -n \cdot u_2$. Άρα $n \cdot u_1 = -n \cdot u_2$ και επομένως $n \cdot u_1 + n \cdot u_2 = 0$. Δηλαδή: $n \cdot (u_1 + u_2) = 0$. Αλλά $u_1 + u_2$ είναι στο τ^+ και άρα είναι χρονικά. Αλλά n είναι μη μηδενικό και φωτοειδές. Άτοπο.

Επομένως ένα μη μηδενικό φωτοειδές διάνυσμα n είναι μελλοντοκατευθυνόμενο αν $n \cdot u < 0$ για όλα τα u στο τ^- και παρελθοντοκατευθυνόμενο αν $n \cdot u > 0$ για όλα τα u στο τ^+.

Για κάθε x_0 στο M ορίζουμε τον μελλοντικό φωτοειδή κώνο στο x_0 ως:

$C_N^+(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ είναι μελλοντοκατευθυνόμενο}\}$

Και τον παρελθοντικό φωτοειδή κώνο στο x_0 ως:

$C_N^-(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ είναι παρελθοντοκατευθυνόμενο}\}$

Θεώρημα 1.3.3: Έστω $\Lambda = \left[\Lambda^a{}_b\right]_{a,b=1,2,3,4}$ να είναι ένα στοιχείο της L_{GH} και $\{e_a\}_{a=1,2,3,4}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση του M. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. ο Λ είναι ορθοχρονικός
2. ο Λ διατηρεί τον χρονικό προσανατολισμό όλων των μη μηδενικών φωτοειδών διανυσμάτων
3. ο Λ διατηρεί τον χρονικό προσανατολισμό όλων των χρονικών διανυσμάτων

Ας παρατηρήσουμε ότι στην πραγματικότητα έχουμε ότι αν ο Λ είναι μη ορθοχρονικός τότε υποχρεωτικά αντιστρέφει τον χρονικό προσανατολισμό ό-

λων των χρονικών και μη μηδενικών φωτοειδών διανυσμάτων. Για αυτό τον λόγο επιλέγουμε να περιορίσουμε την προσοχή μας στα ορθοχρονικά στοιχεία του L_{GH}. Εφόσον ένας τέτοιος Lorentz μετασχηματισμός δεν αντιστρέφει ποτέ τον χρονικό προσανατολισμό ενός χρονικού διανύσματος, μπορούμε να περιοριστούμε ακόμα περισσότερο σε ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ με το e_4 να είναι μελλοντικά προσανατολισμένο.

Υπάρχει ακόμα ένας περιορισμός που θα θελήσουμε να επιβάλουμε στους Lorentz μετασχηματισμούς μας. Ας παρατηρήσουμε ότι όταν παίρνουμε ορίζουσες και στα δυο μέλη της (1.2.8) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\det\Lambda^T\right)\left(\det n\right)\left(\det\Lambda\right)=\det n\\ \det\Lambda^T=\det\Lambda\end{array}\right\}\Rightarrow \det\Lambda=\pm 1$$

Πλέον ένας Lorentz μετασχηματισμός θα καλείται γνήσιος (proper) αν $\det\Lambda=1$ και μη γνήσιος αν $\det\Lambda=-1$.

Παρατήρηση:

Ένας ορθοχρονοειδές Lorentz μετασχηματισμός θα είναι μη γνήσιος αν και ì όνο αν είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Lambda$$ όπου Λ ένας γνήσιος ορθοχρονοειδής μετασχηματισμός.

Πράγματι θα ισχύει εφόσον η ορίζουσα του θα είναι το γινόμενο των οριζουσών του πίνακα και του Λ όπου του πίνακα είναι -1 και του Λ είναι 1. Άρα θα είναι ίσο με -1.

Μπορούμε ακόμα να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας που βρίσκεται στα αριστερά του Λ είναι ένας ορθοχρονοειδές Lorentz μετασχηματισμός και σαν με-

τασχηματισμός συντεταγμένων έχει την ιδιότητα να αλλάζει το πρόσημο της πρώτης χωρικής συντεταγμένης αντιστρέφοντας τον χωροειδές προσανατολισμό. Εφόσον δεν υπάρχει κάποιος υποχρεωτικός λόγος για να κάνουμε μια τέτοια αλλαγή θα περιορίσουμε την προσοχή μας στο σύνολο L των γνησίων ορθοχρονοειδών Lorentz μετασχηματισμών. Κάνοντας το αυτό μπορούμε να περιορίσουμε παιρετέρω την ορθοκανονική μας βάση επιλέγοντας έναν προσανατολισμό για των χωρικό άξονα συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα θα ορίσουμε μια επιτρεπτή (admissible) βάση για τον M να είναι μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ με το e_4 να είναι χρονοειδές και μελλοντικά προσανατολισμένο και $\{e_1, e_2, e_3\}$ χωρική και δεξιόχειρη (right handed) ικανοποιώντας δηλαδή την $e_1 \times e_2 \cdot e_3 = 1$ (εφόσον ο περιορισμός του g στο γινόμενο των $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$ το εξωτερικό αλλά και το εσωτερικό γινόμενο εδώ είναι τα γνωστά από τον διανυσματικό λογισμό). Σε αυτό το σημείο θα ταυτίσουμε την επιτρεπτή μας βάση με το «επιτρεπτό πλαίσιο αναφοράς». Οποιεσδήποτε τέτοιες βάσεις (πλαίσια) σχετίζονται μέσω ενός γνήσιου ορθοχρονικού Lorentz μετασχηματισμού.

Παρατήρηση:

Το σύνολο L των γνησίων ορθοχρονοειδών Lorentz μετασχηματισμών είναι υποομάδα της L_{GH}.

Γενικότερα στο εξής θα αναφερόμαστε στο L σαν ομάδα Lorentz και τα στοιχεία του θα τα ονομάζουμε μετασχηματισμούς Lorentz με την έννοια ότι είναι όλα γνήσια και ορθοχρονοειδή. Περιστασιακά είναι εξαιρετικά βολικό να επεκτείνουμε την ομάδα των μετασχηματισμών συντεταγμένων ώστε να περιλαμβάνει και χωρικούς μετασχηματισμούς αποκτώντας έτσι την ανομοιογενή ομάδα Lorentz ή αλλιώς την ομάδα Poincare. Αυτό από άποψη φυσικής μας επιτρέπει «επιτρεπτους» παρατηρητές να χρησιμοποιούν διαφορετικές χωρικές αρχές (συντεταγμένων).

Η Ομάδα Lorentz L έχει μια σημαντική υποομάδα P η οποία αποτελείται από όλα τα $R=\left[R^{a}{}_{b}\right]$ της μορφής

$$R=\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \left[R^{i}{}_{j}\right] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπου $\left[R^{i}{}_{j}\right]$ με $i,j=1,2,3$ είναι ένας μονομετρικός ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή ικανοποιεί τις συνθήκες $\det\left[R^{i}{}_{j}\right]=1$ και $\left[R^{i}{}_{j}\right]^{T}=\left[R^{i}{}_{j}\right]^{-1}$. Εύκολα παρατηρούμε ότι οι συνθήκες ορθογωνιότητας ικανοποιούνται από έναν τέτοιο πίνακα R και επιπλέον $R^{4}{}_{4}=1$ και $R=\det\left[R^{i}{}_{j}\right]=1$ αποδεικνύοντας έτσι ότι ο R είναι πράγματι στο L. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων που σχετίζονται με το R ανταποκρίνονται φυσικά σε μια στροφή του χωρικού άξονα συντεταγμένων μέσα σε ένα δοσμένο πλαίσιο αναφοράς. Για αυτό και το R καλείται υποομάδα περιστροφής του L και τα στοιχεία της καλούνται στροφές στο L.

Λήμμα: Έστω $\Lambda=\left[\Lambda^{a}{}_{b}\right]_{a,b=1,2,3,4}$ να είναι ένας γνήσιος ορθοχρονοειδές μετασχηματισμός Lorentz. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Ο Λ είναι στροφή
2. $\Lambda^{1}{}_{4}=\Lambda^{2}{}_{4}=\Lambda^{3}{}_{4}=0$
3. $\Lambda^{4}{}_{1}=\Lambda^{4}{}_{2}=\Lambda^{4}{}_{3}=0$
4. $\Lambda^{4}{}_{4}=1$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω στην 1.2.5. $c=d=4$ και έχω

$$\left(\Lambda^{1}{}_{4}\right)^{2}+\left(\Lambda^{2}{}_{4}\right)^{2}+\left(\Lambda^{3}{}_{4}\right)^{2}-\left(\Lambda^{4}{}_{4}\right)^{2}=-1$$

Θέτω στην 1.2.6 $a = b = 4$ και έχω

$$\left(\Lambda^4{}_1\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_2\right)^2 + \left(\Lambda^4{}_3\right)^2 - \left(\Lambda^4{}_4\right)^2 = -1$$

Η ισοδυναμία φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις και το γεγονός ότι ο Λ θεωρείται ορθοχρονοειδές. Εφόσον μια στροφή στο L ικανοποιεί εξ' ορισμού τα 2, 3, 4, αρκεί να δείξω ότι αν ο Λ ικανοποιεί μια (και επομένως όλες) εκ των 2, 3, 4 τότε $\Lambda = \left[\Lambda^i{}_j\right]_{i,j=1,2,3}$ είναι ένας μονομετρικός ορθογώνιος πίνακας. Προφανές.

Παρατήρηση: R είναι υποομάδα του L

Υπάρχουν 16 παράμετροι σε κάθε μετασχηματισμό Lorentz παρά το γεγονός ότι δεν είναι όλοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Τώρα θα εξάγουμε κάποιες φυσικές ερμηνείες για αυτές τις παραμέτρους. Έτσι θεωρούμε δυο επιτρεπτές βάσεις $\{e_a\}$ και $\{\hat{e}_a\}$ και τα αντίστοιχα επιτρεπτά πλαίσια αναφοράς S και $\hat{S}$. Κάθε δυο γεγονότα στην κοσμική γραμμή ενός σημείου και τα οποία μπορούν να ερμηνευτούν φυσικά ως ότι βρίσκονται σε αδράνεια στο $\hat{S}$ έχουν συντεταγμένες στο $\hat{S}$ για τις οποίες $\Delta\hat{x}^1 = \Delta\hat{x}^2 = \Delta\hat{x}^3 = 0$ και $\Delta\hat{x}^4$ είναι η χρονική απόσταση των δυο γεγονότων όπως μετρήθηκαν στο $\hat{S}$. Έτσι από προηγούμενη σχέση (1.2.16) βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες διαφορές συντεταγμένων στο S είναι $\Delta\hat{x}^b = \Lambda_a{}^b \Delta\hat{x}^a = \Lambda_4{}^b \Delta\hat{x}^4$.

Από την 1.3.10 και το γεγονός ότι $\Lambda^4{}_4$ και $\Lambda_4{}^4$ είναι μη μηδενικά έπεται ότι οι λόγοι $\dfrac{\Delta\hat{x}^i}{\Delta\hat{x}^4} = \dfrac{\Lambda_4{}^i}{\Lambda_4{}^4} = \dfrac{\Lambda^4{}_i}{\Lambda^4{}_4}$ για $i = 1,2,3$ είναι σταθεροί και ανεξάρτητοι του συγκεκριμένου σημείου αδράνειας στο $\hat{S}$ που επιλέξαμε να τις εξετάσουμε. Φυσικά αυτοί οι λόγοι ερμηνεύονται ως οι συνιστώσες της συνήθους σχετικής 3 διανυσμα ταχύτητας του $\hat{S}$ σε σχέση με το S:

$\vec{u} = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3$ όπου $u^i = \frac{\Lambda_4{}^i}{\Lambda_4{}^4} = -\frac{\Lambda^4{}_i}{\Lambda^4{}_4}$ για $i = 1,2,3$

Αντίστοιχα το σχετικής 3 διανυσμα ταχύτητας του S σε σχέση με το $\hat{S}$ είναι

$\vec{\hat{u}} = \hat{u}^1 \hat{e}_1 + \hat{u}^2 \hat{e}_2 + \hat{u}^3 \hat{e}_3$ όπου $\hat{u}^i = \frac{\Lambda^i{}_4}{\Lambda^4{}_4} = -\frac{\Lambda_i{}^4}{\Lambda_4{}^4}$ για $i = 1,2,3$.

Έπειτα παρατηρούμε ότι $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\Delta x^i}{\Delta x^4} \right)^2 = \left(\Lambda^4{}_4 \right)^{-2} \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^4{}_i \right)^2 = \left(\Lambda^4{}_4 \right)^{-2} \left[\left(\Lambda^4{}_4 \right)^2 - 1 \right]$.

Ομοίως $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\Delta \hat{x}^i}{\Delta \hat{x}^4} \right)^2 = \left(\Lambda^4{}_4 \right)^{-2} \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda^4{}_i \right)^2 = \left(\Lambda^4{}_4 \right)^{-2} \left[\left(\Lambda^4{}_4 \right)^2 - 1 \right]$

Φυσικώς ερμηνεύουμε αυτές τις ισότητες ως επιβεβαίωση ότι η σχετική ταχύτητα του S σε σχέση με το $\hat{S}$ και του $\hat{S}$ σε σχέση με το S χαρακτηρίζονται από το ίδιο σταθερό μέγεθος που εμείς θα συμβολίσουμε με β. Έτσι $\beta^2 = 1 - \left(\Lambda^4{}_4 \right)^{-2}$ και επομένως $0 \le \beta^2 < 1$ όπου $\beta = 0$ αν και μόνο αν Λ είναι στροφή. Λύνοντας ως προς $\Lambda^4{}_4$ (και παίρνοντας την θετική ρίζα εφόσον υποθέσαμε ότι Λ είναι ορθοχρονοειδές) παίρνουμε ότι: $\Lambda^4{}_4 = \left(1 - \beta^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$

Η ποσότητα $\left(1 - \beta^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ θα εμφανίζεται συχνά και θα την συμβολίζουμε με γ.

Υποθέτοντας ότι ο Λ δεν είναι στροφή μπορούμε να γράψουμε ότι $\vec{u} = \beta \vec{d} = \beta \left(d^1 e_1 + d^2 e_2 + d^3 e_3 \right)$, $d^i = \frac{u^i}{\beta}$ όπου $\vec{d}$ είναι το κατευθυνόμενο 3διάστατο διάνυσμα του $\hat{S}$ σε σχέση με το S και d^i τα συνημίτονα που δηλώνουν την κατεύθυνση του προσανατολισμένου ευθυγράμμου τμήματος στο $\sum$ καθώς ο παρατηρητής στο S βλέπει να κινείται το $\widehat{\sum}$.

Ομοίως με πριν $\vec{\hat{u}} = \beta \vec{\hat{d}} = \beta \left(\hat{d}^1 \hat{e}_1 + \hat{d}^2 \hat{e}_2 + \hat{d}^3 \hat{e}_3 \right)$, $d^i = \dfrac{u^i}{\beta}$

Συγκρίνοντας τις 1.3.11 και 1.3.14 και με χρήση της 1.3.13 έχουμε ότι:

$\Lambda_4{}^i = -\Lambda_i{}^4 = \beta \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} d^i$ για $i = 1,2,3$ και παρομοίως

$\Lambda^i{}_4 = -\Lambda_i{}^4 = \beta \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{d}^i$ για $i = 1,2,3$.

Οι εξισώσεις 1.3.13 , 1.3.18 και 1.3.19 μας δίνουν την τελευταία γραμμή και στήλη του Λ. πράγματι από την 1.2.7 παίρνουμε ότι:

$\Delta \hat{x}^4 = \beta\gamma \left(d^1 \Delta x^1 + d^2 \Delta x^2 + d^3 \Delta x^3 \right) + \gamma \Delta x^4$ για οποιαδήποτε δυο γεγονότα. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση δυο γεγονότων στην κοσμική γραμμή σε ένα σημείο αδράνειας στο S. Τότε $\Delta x^1 = \Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$ και επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται $\Delta \hat{x}^4 = \gamma \Delta x^4 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta x^4$.

Πιο συγκεκριμένα $\Delta \hat{x}^4 = \Delta x^4$ αν και μόνο αν ο Λ είναι στροφή. Κάθε σχετική κίνηση των S και $\hat{S}$ προκαλεί μια διαστολή του χρόνου με βάση το οποίο $\Delta \hat{x}^4 > \Delta x^4$. Εφόσον τα δυο γεγονότα μας μπορούν να ερμηνευτούν σαν δυο αναγνώσεις σε ένα από τα ρολόγια που βρίσκονται σε αδράνεια στο S ένας παρατηρητής στο $\hat{S}$ θα συμπεραίνει ότι τα ρολόγια στο S θα πηγαίνουν πίσω (παρά το γεγονός ότι είναι από υπόθεση πανομοιότυπα).

3. Χρονοειδή Διανύσματα και Καμπύλες

Ας θεωρήσουμε τώρα με περισσότερες λεπτομέρειες 2 ενδεχόμενα x_0 και x για τα οποία το x_0-x είναι χρονοειδές, π.χ. $Q(x-x_0)< 0$. Σχετικά με οποιαδήποτε παραδεκτή βάση $\{e_a\}$ έχουμε $(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2<(\Delta x^4)^2$. Τότε, προφανώς, $\Delta x^4 \neq 0$ και μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\Delta x^4 > 0$., δηλαδή το x-x_0 είναι μελοντοκατευθυνόμενο. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{((\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x^4}<1$$

Από φυσικής απόψεως, είναι ξεκάθαρο ότι αν κάποιος κινούταν με ταχύτητα

$$\frac{((\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta x^4}$$

Σε σχέση με το πλαίσιο S που αντιστοιχεί στην $\{e_a\}$ κατά μήκος της γραμμής στο Σ από (x_0^1,x_0^2,x_0^3) έως (x^1,x^2,x^3) και αν κάποιος ήταν παρών στο x_0, τότε θα ήταν και στο x, δηλαδή ότι υπάρχει ένα παραδεκτό σύστημα αναφοράς $\hat{S}$ στο οποίο τα x_0 και x συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο, το ένα μετά το άλλο. Συγκεκριμένα, τώρα αποδεικνύουμε ότι αν κάποιος επιλέξει το $\beta=((\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2)^{\frac{1}{2}}/\Delta x^4$ και αφήσει τα d^1,d^2,και d^3 να είναι τα συνημίτονα διευθύνσεως στο Σ του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος από (x_0^1,x_0^2,x_0^3) έως (x^1,x^2,x^3), τότε η βάση $\{\hat{e}_a\}$ για το M που λαμβάνεται από την $\{e_a\}$ κάνοντας οποιοδήποτε μετασχηματισμό Lorentz του οποίου η τέταρτη σειρά είναι $\Lambda_i^4=-\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}d^i, i=1,2,3,$ και $\Lambda_4^4=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=\gamma$, έχει την ιδιότητα $\Delta\hat{x}^1=\Delta\hat{x}^2=\Delta\hat{x}^3=0.$

Για να το αποδείξουμε αυτό υπολογίζουμε $\Delta\hat{x}^4 = \Lambda^4_b \Delta\hat{x}^b$. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς παίρνουμε $\Delta\vec{x} = \left((\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Μπορούμε καθαρά να υποθέσουμε ότι $\Delta\vec{x} \neq 0$ γιατί διαφορετικά δεν υπάρχει τίποτα να αποδείξουμε.

Έτσι,

$$\beta^2 = \Delta\vec{x}^2 / (\Delta x^4)^2 , \gamma = \Delta x^4 / \sqrt{-Q(x-x_0)} , \beta\gamma = \Delta\vec{x} / \sqrt{-Q(x-x_0)}$$

και $d^i = \Delta x^i / \Delta\vec{x}$ για *i = 1,2,3*.

Από την (1.3.20) παίρνουμε

$$\Delta\hat{x}^4 = -\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{-Q(x-x_0)}}(\Delta\vec{x}) + \frac{(\Delta x^4)^2}{\sqrt{-Q(x-x_0)}} = \sqrt{-Q(x-x_0)}.$$

Συνεπώς, $Q(x-x_0) = -(\Delta\hat{x}^4)^2$.

Αλλά υπολογίζοντας το Q(x-x$_0$) σε σχέση με τη βάση $\{\hat{e}_a\}$, βρίσκουμε ότι $Q(x-x_0) = (\Delta\hat{x}^1)^2 + (\Delta\hat{x}^2)^2 + (\Delta\hat{x}^3)^2 - (\Delta\hat{x}^4)^2$ άρα πρέπει να έχουμε $(\Delta\hat{x}^1)^2 + (\Delta\hat{x}^2)^2 + (\Delta\hat{x}^3)^2 = 0$, δηλαδή $\Delta\hat{x}^1 = \Delta\hat{x}^2 = \Delta\hat{x}^3 = 0$ όπως ζητείται.

Για οποιοδήποτε χρονοειδές διάνυσμα u στο M ορίζουμε την διάρκεια r(u) του u ως εξής: $r(u) = \sqrt{-Q(u)}$. Αν το u είναι το διάνυσμα μετατόπισης $u = x - x_0$ μεταξύ δυο ενδεχομένων *x* και *x$_0$*, τότε, όπως μόλις δείξαμε, το $r(x-x_0)$ έχει φυσική ερμηνεία ως διαστολή χρόνου σε οποιοδήποτε παραδεκτό σύστημα αναφοράς στο οποίο και τα 2 ενδεχόμενα συμβαίνουν στο ίδιο πλαίσιο.

Ένα υποσύνολο του M της μορφής $\{x_0 + t(x - x_0) : t \in R\}$, όπου το x-$x_0$ είναι χρονοειδές , καλείται χρονοειδής ευθεία γραμμή στο M. Μια χρονοειδής ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων καλείται χρονικός άξονας. Δείχνουμε ότι το όνομα δικαιολογείται αποδεικνύοντας ότι αν T είναι χρονικός άξονας, τότε υπάρχει επιτρεπτή βάση $\{\hat{e}_a\}$ του M τέτοια ώστε το υποσύνολο του M επεκταμένο με την $\hat{e}^4$ να είναι το T. Για να το δούμε αυτό επιλέγουμε ένα ενδεχόμενο $\hat{e}^4$ στο T με $\hat{e}^4 \cdot \hat{e}^4 = -1$ και αφήνουμε την επέκταση $\{\hat{e}^4\}$ να είναι η γραμμική επέκταση του $\hat{e}^4$ στο M. . Ύστερα παίρνουμε την βάση $\{\bar{e}_4\}^\perp$ να είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα της βάσης $\{\hat{e}^4\}$ του M. Η $\{\bar{e}_4\}^\perp$ είναι επίσης υποσύνολο του M. Ισχυριζόμαστε ότι $M = Span\{\bar{e}_4\} \oplus Span\{\bar{e}_4\}^\perp$ (θυμηθείτε ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα 2 υπόχωρων W_1 και W_2 του V . Γράφουμε $V = W_1 \oplus W_2$, αν $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$ και αν κάθε διάνυσμα στο V μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός διανύσματος στο W_1 και ενός διανύσματος στο W_2). Αφού κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στο παράγωγο $\hat{e}^4$ είναι χρονοειδές, ενώ από το πόρισμα 1.3.2, κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στο παράγομενο $\{\bar{e}_4\}^\perp$ είναι χωροειδές, είναι ξεκάθαρο ότι αυτοί οι 2 υπόχωροι τέμνονται μόνο στο μηδενικό διάνυσμα. Μετά λέμε ότι το u ορίζει ένα αυθαίρετο διάνυσμα στο M και θεωρούμε το διάνυσμα $w = u + (u \cdot \bar{e}_4) \cdot \bar{e}_4$ στο M. Αφού $w \cdot \bar{e}_4 = u \cdot \bar{e}_4 + (u \cdot \bar{e}_4) \cdot (\bar{e}_4 \cdot \bar{e}_4) = o$ βρίσκουμε ότι το w ανήκει στο παράγωγο $\{\bar{e}_4\}^\perp$. Έτσι, η έκφραση $u = -(u \cdot \bar{e}_4) \cdot \bar{e}_4 + w$ ολοκληρώνει την απόδειξη ότι $M = Span\{\bar{e}_4\} \oplus Span\{\bar{e}_4\}^\perp$. Τώρα, ο περιορισμός του M-εσωτερικού γινομένου στο παράγωγο $\{\bar{e}_4\}^\perp$ είναι θετικά ορισμένο άρα, από το Θεώρημα 1.1.1, μπο-

ρούμε να πάρουμε 3 διανύσματα $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ στο παράγωγο $\{\bar{e}_4\}^{\perp}$ τέτοια ώστε $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$ για i,j=1,2,3. Έτσι, η $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για το *M*. Τώρα, ας καθορίσουμε μια παραδεκτή βάση $\{e_a\}$ του *M*. Υπάρχει μοναδικός ορθογώνιος μετασχηματισμός του *M* που απεικονίζει την e_a στην $\bar{e}_a$ για κάθε $a = 1,2,3,4.$ Αν ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz είναι είτε μη γνήσιος είτε μη ορθοχρονικός είτε και τα 2, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το $\bar{e}_1$ ή το $\bar{e}_4$ ή και τα 2 με -1 ώστε να αποκτήσουμε μια επιτρεπτή βάση $\{\bar{e}_a\}$ για το *M* με παράγωγο $\{\bar{e}_4\} = T$ και τότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Οποιοδήποτε χρονικός άξονας είναι γι' αυτό ο x^4-άξονας κάποιου επιτρεπτού παρατηρητή. Αφού οποιαδήποτε χρονοειδής ευθεία γραμμή είναι παράλληλη σε κάποιο χρονικό άξονα βλέπουμε μια τέτοια ευθεία γραμμή ως κοσμική γραμμή ενός σημείου αδράνειας στον αντίστοιχο επιτρεπτό πλαίσιο.

<u>Παρατήρηση:</u>

1. Αν *T* είναι χρονικός άξονας και x και x_0 είναι 2 ενδεχόμενα, τότε $x - x_0$ είναι ορθογώνιο στο *T* αν και μόνον αν x και x_0 είναι ταυτόχρονα σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς του οποίου ο x^4-άξονας είναι το *T*.

2. Αν $x - x_0$ είναι χρονοειδές και s είναι ένας αυθαίρετος μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα επιτρεπτό σύστημα αναφοράς στο οποίο η διαστολή του χώρου του *x* και του x_0 είναι s. Επίσης η διαστολή του χρόνου

του x και x_0 μπορεί να δεχτεί οποιαδήποτε πραγματική τιμή μεγαλύτερη ή ίση του $r(x-x_0)$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, το $r(x-x_0)$ είναι κατώτερο όριο για τον προσωρινό διαχωρισμό των x και x_0, και γι' αυτό, συχνά αποκαλείται γνήσιος διαχωρισμός χρόνου του x_0 και του x. Όταν δεν απαιτείται καμία αναφορά στα συγκεκριμένα ενδεχόμενα το $r(x-x_0)$ συμβολίζεται γενικά με Δr.

Οποιοδήποτε χρονοειδές διάνυσμα βρίσκεται κατά μήκος κάποιου χρονικού άξονα οπότε το $r(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ''χρονικό μήκος''(temporal length) του u (ο διαχωρισμός του χρόνου της ουράς και της κορυφής του όπως καταγράφεται από έναν παρατηρητή που παρακολουθεί και τα 2). Είναι μια σχετικά ασυνήθιστη έννοια του μήκους, μιας και τα ανάλογα των βασικών ανισώσεων που έχουν συνηθίσει να ασχολούνται με Ευκλείδεια μήκη είναι γενικά αντεστραμμένα.

<u>Θεώρημα 1.4.1</u> : (Αντίστροφη ανισότητα Schwartz) Αν v και w είναι χρονοειδή διανύσματα του M, τότε

$$(v \cdot w)^2 \geq v^2 \cdot w^2 \qquad (1.4.1)$$

και η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν τα u και w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

<u>Απόδειξη</u> **:** Θεωρούμε το διάνυσμα $u = a \cdot v - b \cdot w$, όπου $a = v \cdot w$ και $b = v \cdot v = v^2$. Παρατηρείστε ότι $u \cdot v = av^2 - b \cdot v \cdot w = v^2(v \cdot w) - v^2(v \cdot w) = 0$. Α-

φού το v είναι χρονοειδές, το πόρισμα 1.3.2 υπονοεί ότι το u είναι είτε 0 είτε χωροειδές. Έτσι, $0 \le u^2 = a^2 \cdot v^2 + b^2 \cdot w^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot v \cdot w$, με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν $u = 0$.

Συνεπώς, $2abv \cdot w \le a^2 v^2 + b^2 w^2$, δηλαδή

$$2v^2 (v \cdot w)^2 \le v^2 (v \cdot w)^2 + (v^2)^2 w^2,$$

$$2(v \cdot w)^2 \ge (v \cdot w)^2 + v^2 w^2 \qquad (\text{αφού } v^2 \prec 0)$$

$$(v \cdot w)^2 \ge v^2 w^2.$$

και η ισότητα ισχύει μόνον όταν $u = 0$. Αλλά $u = 0$ σημαίνει ότι $av - bw = 0$ που, αφού $a = v \cdot w \ne 0$ από Θεώρημα 1.3.1, συνεπάγεται ότι τα v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου και η ισότητα ισχύει καθαρά στην (1.4.1).

<u>Θεώρημα 1.4.2</u> : (Ανάστροφη Τριγωνική Ανισότητα) Έστω v και w να είναι τα χρονοειδή διανύσματα με τον ίδιο προσανατολισμό (δηλαδή $v \cdot w < 0$). Τότε

$$r(v + w) \ge r(v) + r(w)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα.

<u>Απόδειξη</u> : Από το Θεώρημα 1.4.1. $v \cdot w \ge v^2 w^2 = (-v^2)(-w^2)$ έτσι $|v \cdot w| \ge \sqrt{-v^2}\sqrt{-w^2}$. Αλλά $(v \cdot w) < 0$ οπότε πρέπει να έχουμε $v \cdot w \le -\sqrt{-v^2}\sqrt{-w^2}$ και γι' αυτό

$$-(v + w)^2 \ge (\sqrt{-v^2} + \sqrt{-w^2})^2,$$

$$\sqrt{-(v+w)^2} \geq \sqrt{-v^2} + \sqrt{-w^2} \ ,$$

$$\sqrt{-Q(v+w)} \geq \sqrt{-Q(v)} + \sqrt{-Q(w)} \ ,$$

$$r(v+w) \geq r(v) + r(w) \ ,$$

όπως ζητείται. Αν ισχύει η ισότητα στην (1.4.2), τότε, αντιστρέφοντας τα βήματα της απόδειξης, παίρνουμε

$$-2v \cdot w = 2\sqrt{-v^2}\sqrt{-w^2}$$

και γι' αυτό $(v \cdot w)^2 = v^2 \cdot w^2$, άρα, από Θεώρημα 1.4.1, τα v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για να επεκτείνουμε το Θεώρημα 1.4.2 σε αυθαίρετα πεπερασμένα αθροίσματα παρόμοιων προσανατολισμένων χρονοειδών διανυσμάτων (και για άλλους λόγους επίσης) χρειαζόμαστε :

<u>Λήμμα 1.4.3</u> : Το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού διανυσμάτων του M όπου όλα είναι χρονοειδή ή φωτοειδή και όλα είναι μελλοντοκατευθυνόμενα (αντίστοιχα παρελθοντοκατευθυνόμενα) ,είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο (αντίστοιχα παρελθοντοκατευθυνόμενο) εκτός από όταν όλα τα διανύσματα είναι μηδενικά και παράλληλα, όπου σ' αυτήν την περίπτωση το άθροισμα είναι φωτοειδή και μελλοντοκατευθυνόμενα (αντίστοιχα παρελθοντοκατευθυνόμενα).

<u>Απόδειξη</u> : Αρκεί να δείξουμε την απόδειξη για μελλοντοκατευθυνόμενα διανύσματα αφού το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τα παρελθοντοκατευθυνόμενα διανύσματα θα είναι το ίδιο με αλλαγή των συμβόλων. Επιπλέον, είναι ξεκά-

θαρο ότι οποιοδήποτε άθροισμα μελλοντοκατευθυνόμενων διανυσμάτων είναι, πράγματι, μελλοντοκατευθυνόμενο.

Πρώτα παρατηρούμε ότι αν v_1 και v_2 μελλοντοκατευθυνόμενα, τότε

$v_1 \cdot v_1 < 0, v_2 \cdot v_2 < 0$ και $v_1 \cdot v_2 < 0$

οπότε

$(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) = v_1 \cdot v_1 + 2v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_2 < 0$

και επομένως $v_1 + v_2$ είναι χρονοειδές.

Ύστερα ας υποθέσουμε ότι τα v_1 και v_2 είναι μηδενικά και μελλοντοκατευθυνόμενα. Δείχνουμε ότι το $v_1 + v_2$ είναι χρονοειδές εκτός κι αν τα v_1 και v_2 είναι παράλληλα (σ′ αυτήν την περίπτωση είναι προφανώς φωτοειδή). Εδώ παρατηρούμε ότι $(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) = 2v_1 \cdot v_2$. Από το Θεώρημα 1.2.1. $v_1 \cdot v_2 = 0$ εάν και ì όνον εάν v_1 και v_2 είναι παράλληλα. Ας υποθέσουμε ότι τα εάν v_1 και v_2 δεν είναι παράλληλα. Θέτουμε μια αποδεκτή βάση $\{e_a\}$ του M και θέτουμε $v_1 = v_1^a e_a$ και $v_2 = v_2^a e_a$. Για κάθε $n=1,2,3$, ορίζουμε το w_n στο M ως $w_n = v_1^1 e_1 + v_1^2 e_2 + v_1^3 e_3 + (v_1^4 + \frac{1}{n}) e_4$. Τότε κάθε w_n είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο. Από το Θεώρημα 1.3.1, $0 > w_n \cdot w_2 = v_1 \cdot v_2 - \frac{1}{n} v_2^4$, δηλαδή $v_1 \cdot v_2 < \frac{1}{n} v_2^4$ για κάθε n. Έτσι, $v_1 \cdot v_2 \le 0$. Αλλά $v_1 \cdot v_2 \ne 0$ από υπόθεση ,άρα $v_1 \cdot v_2 < 0$ και επομένως $(v_1 + v_2)(v_1 + v_2) < 0$.

.

<u>Πόρισμα 1.4.4</u> : Έστω v_1 και v_2 να είναι χρονοειδή διανύσματα, όλα με τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Τότε

$$r(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) \geq r(v_1) + r(v_2) + \ldots + r(v_n) \qquad (1.4.4)$$

και η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι όλα παράλληλα.

<u>Απόδειξη</u> : Η ανισότητα (1.4.4) είναι προφανής από το Θεώρημα 1.4.2 και το Λήμμα 1.4.3. Δείχνουμε, με επαγωγή στο n, ότι η ισότητα στην (1.4.4) υπονοεί ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι όλα παράλληλα. Για $n=2$ έχουμε το Θεώρημα 1.4.2. Έτσι, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για σύνολα n διανυσμάτων και θεωρούμε το σύνολο $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ από χρονοειδή διανύσματα τα οποία είναι, μελλοντοκατευθυνόμενα και για τα οποία ισχύει

$$r(v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1}) = r(v_1) + \ldots + r(v_n) + r(v_{n+1}).$$

Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι χρονοειδή και μελλοντοκατευθυνόμενα άρα, πάλι από Θεώρημα 1.4.2,

$$r(v_1 + \ldots + v_n) + r(v_{n+1}) \leq r(v_1) + \ldots + r(v_n) + r(v_{n+1}).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ισότητα πρέπει να ισχύει εδώ.

Πράγματι, διαφορετικά έχουμε $r(v_1 + \ldots + v_n) < r(v_1) + \ldots + r(v_n)$

και άρα (Θεώρημα 1.4.2 ξανά)

$r(v_1 + \ldots + v_{n-1}) < r(v_1) + \ldots + r(v_{n-1})$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι $r(v_1) < r(v_1)$ που είναι άτοπο. Έτσι,

$$r(v_1 + \ldots + v_n) = r(v_1) + \ldots + r(v_n)$$

και η υπόθεση της επαγωγής υπονοεί ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι παράλληλα. Έστω $v = v_1 + \ldots + v_n$. Τότε το v είναι χχρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο. Έτσι, $r(v + v_{n+1}) = r(v) + r(v_{n+1})$ και μια ακόμη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.4.2 συνεπάγεται ότι το v_{n+1} είναι παράλληλο στο v και επομένως σε όλα τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

<u>Πόρισμα 1.4.5</u> : Έστω v και w δυο μη παράλληλα φωτοειδή διανύσματα. Τότε τα v και w έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό εάν και μόνον εάν $v \cdot w < 0$.

<u>Απόδειξη</u> : Ας υποθέσουμε πρώτα ότι τα v και w έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό. Από το Λήμμα 1.4.3, το $v + w$ είναι χρονοειδές άρα $0 > (v + w)(v + w) = 2v \cdot w$ άρα $v \cdot w < 0$. Αντίστροφα, αν v και w έχουν αντίθετο χρονικό προσανατολισμό, τότε τα v και –w έχουν τον ίδιο χρονικό προσανατολισμό και άρα $v \cdot (-w) < 0$ και επομένως $v \cdot w > 0$.

Ο λόγος που η φορά της ανισότητας στο Θεώρημα 1.4.2 είναι ''αντεστραμμένη'' γίνεται απόλυτα προφανής επιλέγοντας ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$, $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$ και $v + w = (0,0,0, v^4 + w^4)$. Τότε, $r(v) = ((v^4)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2)^{\frac{1}{2}} < v^4$ και $r(w) < w^4$, αλλά $r(v + w) = v^4 + w^4$.

Μια χρονοειδής ευθεία γραμμή θεωρείται ότι είναι η κοσμική γραμμή ενός υλικού σωματιδίου το οποίο είναι ''ελεύθερο'' όσο αφορά την Νευτώνεια μη-

χανική και συνεπώς είναι σε ηρεμία σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Δεν έχουν όλα τα ενδιαφέροντα υλικά σωματίδια αυτήν την ιδιότητα. Για να τα διαμορφώσουμε αυτά στο M χρειαζόμαστε τα παρακάτω.

Έστω $I \subseteq R$ να είναι ένα ανοικτό διάστημα. Μια απεικόνιση $a : I \longrightarrow M$ είναι μια καμπύλη στο M. Σχετικά με οποιαδήποτε αποδεκτή βάση $\{e_a\}$ του M μπορούμε να γράψουμε $a(t) = x^a(t)e_a$ για κάθε t στο I. Θα υποθέσουμε ότι το a είναι *ομαλό,* δηλαδή ότι κάθε συνιστώσα $x^a(t)$ της συνάρτησης είναι άπειρα διαφορίσιμη και το διάνυσμα ταχύτητας του a

$$a'(t) = \frac{dx^a}{dt} e_a$$

είναι μη μηδενικό για κάθε t στο I.

<u>Παρατήρηση:</u>

Ο παραπάνω προσδιορισμός της ομαλότητας δεν εξαρτάται από την επιλογή αποδεκτής βάσης.

Πράγματι: Έστω $\{\hat{e}_a\}$ μια άλλη αποδεκτή βάση, L ο ορθογώνιος μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει το e_a στο $\hat{e}_a$ για a=1,2,3,4 και $[\Lambda^a_b]$ το αντίστοιχο στοιχείο του L. Αν $a(t) = \hat{x}^a(t)\hat{e}_a$, τότε $\hat{x}^a(t) = \Lambda^a_b x^b(t)$ και άρα $\frac{d\hat{x}^a}{dt} = \Lambda^a_b \frac{dx^b}{dt}$.

Ακόμα $[\Lambda^a_b]$ δεν είναι μοναδικό.

Μια καμπύλη $a : I \longrightarrow M$ λέγεται ότι είναι χωροειδής, χρονοειδής ή φωτοειδής, αν το διάνυσμα της ταχύτητάς της $a'(t)$ έχει αυτήν την συμπεριφορά για

κάθε t στο I, δηλαδή, αν $a'(t)\cdot a'(t)$ είναι >0, <0 ή =0 σχετικά με το κάθε t. Μια χρονοειδής ή φωτοειδής καμπύλη a είναι μελλοντοκατευθυνόμενη (αντ. παρελθοντοκατευθυνόμενη) αν $a'(t)$ είναι μελλοντοκατευθυνόμενη (αντ. παρελθοντοκατευθυνόμενη) για κάθε t. Μια μελλοντοκατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη καλείται χρονοειδής κοσμική γραμμή ή κοσμική γραμμή υλικού σωματιδίου. Επεκτείνουμε όλους αυτούς τους ορισμούς στην περίπτωση στην οποία το I περιέχει ένα ή και τα δυο τελικά σημεία της απαιτώντας η $a: I \longrightarrow M$ να είναι εκτατή σε ένα ανοικτό διάστημα που να περιέχει το I. Πιο συγκεκριμένα, αν το I είναι ένα (όχι απαραίτητα ανοικτό) διάστημα στο R, τότε η $a: I \longrightarrow M$ είναι ομαλή, χωροειδής…εάν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $\widehat{I}$ που να περιέχει το I και μια καμπύλη $\overline{a}: \widehat{I} \longrightarrow M$ η οποία είναι ομαλή, χωροειδής… και ικανοποιεί την $\overline{a}(t) = a(t)$ για κάθε t στο I. Γενικά, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το a και την επέκτασή του.

Αν $a: I \longrightarrow M$ είναι μια καμπύλη και το $J \subseteq R$ είναι ένα άλλο διάστημα και $h: J \longrightarrow I$, $t = h(s)$, είναι μια άπειρα διαφορίσιμη συνάρτηση με $h'(s) > 0$ για κάθε s στο J, τότε η καμπύλη $\beta = a \circ h: J \longrightarrow M$ καλείται αναπαραμέτρηση του a.

Φτάνουμε σε μια αρκετά βολική παραμετρικοποίηση μιας χρονοειδής κοσμικής γραμμής με τον παρακάτω τρόπο: Αν $a:[a,b] \longrightarrow M$ είναι μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο M ορίζουμε το γνήσιο χρονικό μήκος του a ως

$$L(a) = \int_a^b \left|a'(t)\cdot a'(t)\right|^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \sqrt{-n_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}}\,dt\,.$$

Ως την κατάλληλη φυσική ερμηνεία του $L(a)$ παίρνουμε

Η Υπόθεση του Ρολογιού: Αν $a:[a,b]\longrightarrow M$ είναι μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο M, τότε το $L(a)$ ερμηνεύεται ως η παρέλευση χρόνου μεταξύ $a(a)$ και $a(b)$ όπως μετράται από ένα ιδανικό δεδομένο ρολόι συνοδευόμενο από το σωματίδιο του οποίου η κοσμική γραμμή αντιπροσωπεύεται από a.

Το κίνητρο για την υπόθεση του Ρολογιού είναι αυτή τη στιγμή ''εμφανές'' και διακριτό. Γι' αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα που ισχυρίζεται ότι δυο ενδεχόμενα μπορούν να παρατηρηθούν από έναν αποδεκτό παρατηρητή εάν και μόνον εάν (όχι απαραίτητα ελεύθερα) το υλικό σωματίδιο έχει και τα 2 στην κοσμική γραμμή του.

<u>Θεώρημα 1.4.6</u> : Έστω p και q να είναι δυο σημεία του M. Τότε το p-q είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο εάν και μόνον εάν υπάρχει μια ομαλή, μελλοντοκατευθυνόμενη χρονοειδής καμπύλη $a:[a,b]\longrightarrow M$ τέτοια ώστε $a(a)=q$ και $a(b)=p$.

Αναβάλλουμε για λίγο την απόδειξη για να δείξουμε τη σχέση της με τ την υπόθεση του Ρολογιού. Διαμερίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε υποδιαστήματα με $a=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=b$. Τότε, από το Θεώρημα 1.4.6, καθένα από τα διανύσματα μετατόπισης $v_i=a(t_i)-a(t_{i-1})$ είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο. Το $r(v_i)$ τότε ερμηνεύεται ως η παρέλευση χρόνου μεταξύ $a(t_{i-1})$

και $a(t_i)$ όπως μετρώνται από έναν αποδεκτό παρατηρητή ο οποίος είναι παρών και τις 2 στιγμές. Αν το ''υλικό σωματίδιο'' του οποίου η κοσμική γραìμή αντιπροσωπεύεται από το a έχει σταθερή ταχύτητα κατά τη διάρκεια των $a(t_{i-1})$ και $a(t_i)$, τότε το $r(v_i)$ θα είναι η παρέλευση χρόνου μεταξύ αυτών των 2 ενδεχομένων όπως μετράται από ένα ρολόι συνοδευόμενο από το σωματίδιο. Σχετικά με οποιοδήποτε σύστημα,

$$r(v_i) = \sqrt{-n_{ab}\Delta x_i^a \Delta x_i^b} = \sqrt{-n_{ab}\frac{\Delta x_i^a}{\Delta t_i}\frac{\Delta x_i^b}{\Delta t_i}}\Delta t_i \,.$$

Επιλέγοντας το Δt_i να είναι οσοδήποτε μικρό, το Δx_i^4 μπορεί να γίνει μικρό (από τη συνέχεια του a) και, από τη στιγμή που η ταχύτητα του σωματιδίου που είναι σχετικό με το σύστημα αναφοράς μας είναι ''σχεδόν'' σταθερή στα ''μικρά'' x^4-time διαστήματα, το $r(v_i)$ πρέπει να είναι καλή προσέγγιση της παρέλευσης χρόνου μεταξύ $a(t_{i-1})$ και $a(t_i)$ που μετρώνται από το υλικό σωματίδιο. Συνεπώς, το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-n_{ab}\frac{\Delta x_i^a}{\Delta t_i}\frac{\Delta x_i^b}{\Delta t_i}}\Delta t_i \qquad (1.4.5)$$

προσεγγίζει την παρέλευση χρόνου μεταξύ $a(a)$ *και* $a(b)$ που μετρώνται από αυτό το σωματίδιο. Οι προσεγγίσεις γίνονται καλύτερες καθώς το Δt_i πλησιάζει το 0 και, οριακά, το άθροισμα (1.4.5) πλησιάζει τον ορισμό του $L(a)$.

Το επιχείρημα μοιάζει αρκετά πειστικό, αλλά βασίζεται ξεκάθαρα στην υπόθεση σχετικά με τη συμπεριφορά των ιδανικών ρολογιών που δεν κάναμε σαφή προηγουμένως, ότι η επιτάχυνση ως έχει δεν επηρεάζει το ρυθμό τους, δηλαδή, ότι ο ''στιγμιαίος ρυθμός'' ενός τέτοιου ρολογιού εξαρτάται μόνον από

τη στιγμιαία του ταχύτητα και όχι από το ρυθμό με τον οποίο αλλάζει αυτή η ταχύτητα. Το να δικαιολογήσουμε έναν τέτοιο ισχυρισμό μη τετριμμένης σημασίας. Πρέπει κάποιος να κάνει πειράματα με διαφόρων ειδών ρολόγια που να υπόκεινται σε πραγματικές επιταχύνσεις και , τελικά, θα ωθηθεί αναμφίβολα σε μια πιο ειλικρινής πρόταση (΄΄Η Υπόθεση του Ρολογιού ισχύει για διάφορα είδη ρολογιών και για μεγάλη πληθώρα επιταχύνσεων).

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.4.6 θα χρειαστούμε τα παρακάτω εισαγωγικά αποτελέσματα.

<u>Λήμμα 1.4.7</u> : Έστω $\alpha : (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{M}$ ομαλό, χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο και έστω ένα σταθεροποιημένο t_0 στο (A, B). Τότε υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε το $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ να περιέχεται στο (A, B), το $a(t)$ είναι στον παρελθοντικό κώνο στο $a(t_0)$ για κάθε t στο $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ και το $a(t)$ είναι στον μελλοντικό κώνο στο $a(t_0)$ για κάθε t στο $(t_0, t_0 + \varepsilon)$.

<u>Απόδειξη</u> : Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε το $a(t)$ είναι στο $C_T^+(\alpha(t_0))$ για κάθε t στο $(t_0, t_0 + \varepsilon_1)$. Το επιχείρημα για την παραγωγή ενός $\varepsilon_2 > 0$ με $a(t)$ στο $C_T^-(\alpha(t_0))$ για κάθε t στο $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ είναι παρόμοιο. Παίρνοντας το ε να είναι το μικρότερο από τα ε_1 και ε_2 αποδεικνύεται το λήμμα.

Σταθεροποιούμε μια αποδεκτή βάση $\{e_\alpha\}$ και γράφουμε $\alpha(t) = x^\alpha(t) e^\alpha$ για $A < t < B$. Τώρα υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο ε_1. Τότε κάποιος μπορεί

να δημιουργήσει μια ακολουθία $t_1 > t_2 > \ldots > t_0$ στο (t_0, B) τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ και έτσι ώστε κάποιο από τα επόμενα να ισχύει :

1. $Q(\alpha(t_n) - \alpha(t_0)) \geq 0$ για όλα τα n [δηλαδή το $\alpha(t_n) - \alpha(t_0)$ είναι χωροειδές ή φωτοειδές για κάθε n] , ή
2. $Q(\alpha(t_n) - \alpha(t_0)) < 0$, αλλά το $\alpha(t_n) - \alpha(t_0)$ είναι παρελθοντοκατευθυνόμενο για κάθε n [δηλαδή το $\alpha(t_n)$ είναι στο $C_T^-(\alpha(t_0))$ για κάθε n].

Δείχνουμε πρώτα ότι το (1) είναι πιθανό. Υποθέτουμε αντιθέτως ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία. Τότε :

$$Q(\frac{\alpha(t_n) - \alpha(t_0)}{t - t_0}) \geq 0$$

για κάθε n οπότε :

$$Q(\frac{x^1(t_n) - x^1(t_0)}{t_n - t_0}, \ldots, \frac{x^4(t_n) - x^4(t_0)}{t_n - t_0}) \geq 0 .$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} Q(\frac{x^1(t_n) - x^1(t_0)}{t_n - t_0}, \ldots, \frac{x^4(t_n) - x^4(t_0)}{t_n - t_0}) \geq 0$$

$$Q\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^1(t_n) - x^1(t_0)}{t_n - t_0}, \ldots, \lim_{n\to\infty} \frac{x^4(t_n) - x^4(t_0)}{t_n - t_0} \right) \geq 0$$

$$Q\left(\frac{dx^1}{dt}(t_0), \ldots, \frac{dx^4}{dt}(t_0) \right) \geq 0$$

$$Q(a'(t_0)) \geq 0$$

και αυτό αντικρούεται με το γεγονός ότι η $\alpha(t_n) - \alpha(t_0)$ είναι χρονοειδές.

Εφαρμόζοντας_ το ίδιο επιχείρημα $g(a(t_n)-a(t_0),a'(t_0))$ δείχνουμε και ότι το (2) είναι πιθανό.

Ωστόσο, εμείς αναφέρουμε την ύπαρξη του ε_1 όπως απαιτείται και η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη.

<u>Απόδειξη του θεωρήματος 1.4.6</u> : Η αναγκαιότητα είναι ξεκάθαρη. Για να αποδείξουμε την επάρκεια ορίζουμε με a μια ομαλή, μελλοντοκατευθυνόμενη επάκταση του a σε κάποιο διάστημα (A,B) που περιέχει το $[a,b]$. Από το λήìμα 1.4.7 υπάρχει ένα $\varepsilon_1>0$ με $(a,a+\varepsilon_1)\subseteq(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και τέτοιο ώστε το $a(t)$ να είναι στο $C_T^+(q)$ για κάθε t στο $(a,a+\varepsilon_1)$. Έστω t_0 το supremum των ε_1. Αφού $b<B$ θα είναι αρκετό να δείξουμε ότι $t_0=B$ και γι′ αυτό να υποθέσουμε σε αντίθεση ότι $A<t_0<B$.

Σύμφωνα με το λήμμα 1.4.7 υπάρχει ένα $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\subseteq(A,B), a(t)\in C_T^-(a(t_0))$, για t στο $(t_0-\varepsilon,t_0)$ και $a(t)\in C_T^+(a(t_0))$ για t στο $(t_0,t_0+\varepsilon)$. Παρατηρούμε ότι αν το $a(t_0)$ ήταν από μόνο του στο $C_T^+(q)$, τότε για οποιοδήποτε t στο $(t_0,t_0+\varepsilon)$ το $(a(t_0)-q)+(a(t)-a(t_0))=a(t)-q$ θα ήταν μελλοντοκατευθυνόμενο και χρονοειδές από το λήμμα 1.4.3 και αυτό αντικρούει τον ορισμό του t_0. Απ′ την άλλη πλευρά, αν το $a(t_0)$ ήταν έξω από το φωτοειδή κώνο στο q, τότε για κάποια t στο $(t_0-\varepsilon,t_0)$ το $a(t)$ θα ήταν έξω από το φωτοειδή κώνο στο q και αυτό είναι πιθανό αφού από τον ορισμό του t_0 οποιαδήποτε τέτοια $a(t)$ είναι στο $C_T^+(q)$.

Η μόνη πιθανότητα που απομένει είναι το $a(t_0)$ να είναι πάνω στο φωτοειδή κώνο στο q. Αλλά τότε παρελθοντικός κώνος στο $a(t_0)$ θα είναι ξένος με τον μελλοντικό κώνο στο q και οποιοδήποτε t θα έρχεται σε αντίθεση με αυτό. Συμπεραίνουμε ότι το t_0 πρέπει να είναι ίσο με το B και τότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Θα παρουσιάσουμε τώρα ποια είναι, η πιο χρήσιμη παραμετρικοποίηση μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής $a : I \to M$. Πρώτα ας μεταφράσουμε το πεδίο του a σε πραγματική ευθεία και αν είναι απαραίτητο μπορούμε να υποθέσουμε ότι περιέχει το 0. Ας ορίσουμε τη συνάρτηση διακεκριμένου χρόνου $\tau(t)$ στο I όπου

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t \left| a'(u) \cdot a'(u) \right|^{1/2} du .$$

Επομένως, το $\frac{d\tau}{dt} = \left| a'(t) \cdot a'(t) \right|^{1/2}$ είναι θετικό και απείρως διαφορίσιμο αφού το a είναι χρονοειδές. Η αντίστροφη $t = h(\tau)$ υπάρχει και $\frac{dh}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} > 0$ και έτσι καταλήγουμε ότι το τ είναι μια ορθή παράμετρος του α (φυσικά, απλά παραμετρικοποιούμε το α με χρονικά διαστήματα που πραγματικά καταγράφονται στο α). Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση με κάποιο τρόπο και να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο όνομα για το α και μια ισόβαθμη σχετική συνάρτηση με μια αποδεκτή βάση όπου παραμετρικοποιούνται από το τ και όχι από το t :

$$a(\tau) = x^a(\tau) \cdot e_a . \qquad (1.4.6)$$

Το διάνυσμα ταχύτητας $a'(\tau) = \frac{dx^a}{d\tau} e_a$ του α καλείται παγκόσμια ταχύτητα (ή 4- ταχύτητα) του α και δείχνει ότι $U = U^a e_a$. Όπως η παραμετρικοποίηση του γνωστού μήκους τόξου μιας καμπύλης στο IR^3 έχει μοναδιαία ταχύτητα, έτσι και η παγκόσμια ταχύτητα μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής έχει πάντα ένα μοναδιαίο χρονοειδές διάνυσμα.

Η δεύτερη παράγωγος διακεκριμένου χρόνου $a''(\tau) = \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} e_a$ του α καλείται παγκόσμια επιτάχυνση (ή 4- επιτάχυνση) του α και δείχνει ότι $A = A^a e_a$. Είναι πάντα ορθογώνια στο U και επομένως, συγκεκριμένα, πρέπει να είναι χωροειδής αν είναι μη μηδενική.

Η παγκόσμια ταχύτητα και επιτάχυνση μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής α είναι, όπως θα δούμε, κρίσιμες για την κατανόηση της δυναμικής των υλικών σημείων των οποίων η κοσμική γραμμή αντιπροσωπεύεται από το α. Ένας δεδομένος αποδεκτός παρατηρητής, όμως, είναι πιο πιθανό να παραμετρικοποιήσει τη κοσμική γραμμή ενός υλικού σημείου από το χρόνο του x^4 απ' ότι από το τ και επομένως θα απαιτεί διαδικασίες υπολογισμού του U και του A από την παραμετρικοποίηση. Πρώτα παρατηρούμε ότι αφού η $a(\tau) = (x^1(\tau), \ldots, x^4(\tau))$ είναι ομαλή, το x^4 είναι απείρως διαφορίσιμο. Αφού το α είναι μελλοντοκατευθυνόμενο, το $\frac{dx^4}{d\tau}$ είναι θετικό και επομένως η α-

ντίστροφη $\tau = h(x^4)$ υπάρχει και το $h'(x^4) = \left(\frac{dx^4}{d\tau}\right)^{-1}$ είναι θετικό. Επομένως, το

x^4 είναι μια ορθή παράμετρος του α. Επιπλέον,

$$\frac{d\tau}{dx^4} = \left|a'(x^4)\cdot a'(x^4)\right|^{1/2} = \sqrt{1-\left[\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2+\left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2+\left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2\right]} = \sqrt{1-\beta^2(x^4)}$$

όπου ορίζουμε με $\beta(x^4)$ τη συνηθισμένη στιγμιαία ταχύτητα ενός υλικού σημείου του οποίου η κοσμική γραμμή είναι α σχετική με το σύστημα $S(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Οπότε,

$$\frac{dx^4}{d\tau} = \left(1-\beta^2(x^4)\right)^{-1}$$

το οποίο δείχνουμε για $\gamma = \gamma(x^4)$. Τώρα υπολογίζουμε :

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^4}\cdot\frac{dx^4}{\tau} = \gamma\frac{dx^i}{dx^4} \text{ για } i = 1,2,3,$$

και

$$U^4 = \gamma,$$

επομένως

$$U = U^a e_a = \gamma\frac{dx^1}{dx^4}e_1 + \gamma\frac{dx^2}{dx^4}e_2 + \gamma\frac{dx^3}{dx^4}e_3 + \gamma e_4$$

το οποίο συχνά μας εξυπηρετεί να το γράφουμε ως εξής :

$$(U^1, U^2, U^3, U^4) = \gamma\left(\frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4}, \frac{dx^3}{dx^4}, 1\right) \qquad (1.4.9)$$

ή ακόμα πιο συνοπτικά

$$(U^1, U^2, U^3, U^4) = \gamma(\vec{u}, 1) \qquad (1.4.10)$$

όπου το $\vec{u}$ είναι η συνηθισμένη ταχύτητα με 3 διανύσματα του α στο S.

Ανάλογα, μπορεί να υπολογιστεί

$$A^i = \gamma \frac{d}{dx^4}\left(\gamma \frac{dx^i}{dx^4}\right) \text{ με } i = 1,2,3,$$

και

$$A^4 = \gamma \frac{d}{dx^4}(\gamma)$$

και επομένως

$$(\mathrm{A}^1, \mathrm{A}^2, \mathrm{A}^3, \mathrm{A}^4) = \gamma \frac{d}{dx^4}(\gamma\vec{u}, \gamma). \qquad (1.4.11)$$

Σε κάθε σταθεροποιημένο σημείο $a(\tau_0)$ κατά το μήκος μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής α, το $U(\tau_0)$ είναι ένα μελλοντοκατευθυνόμενο μοναδιαίο χρονοειδές διάνυσμα και επομένως πρέπει να θεωρείται ως ένα χρονοειδές διάνυσμα e_4 σε κάποιες αποδεκτές βάσεις του M. Σχετικό με μια τέτοια βάση, το $U(\tau_0) = (0,0,0,1)$. Έστω $x_0^4 = x^4(\tau_0)$ και τότε βρίσκουμε από τον τύπο (1.4.9) ότι

$$\left(\frac{dxi}{dx4}\right)_{x^4 = x_0^4} = 0 \quad \text{για } i = 1,2,3,$$

και τότε $\beta(x_0^4) = 0$ και $\gamma(x_0^4) = 1$. Το σύστημα αναφοράς που ανταποκρίνεται σε μια τέτοια βάση θεωρείται ότι είναι «στιγμιαία ($x^4 = x_0^4$) σε ηρεμία» σχετικά με το υλικό σώμα του οποίου η κοσμική γραμμή είναι α. Οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα αναφοράς καλείται στιγμιαίο πλαίσιο αδράνειας για το α στο $a(\tau_0)$. Παρατηρούμε ότι: $g(A,A) = |\vec{\alpha}|^2$ σε ένα στιγμιαίο πλαίσιο αδράνειας. Αφού το $g(A,A)$ είναι αναλλοίωτο κάτω από τους Lorentz μετασχηματισμούς

βρίσκουμε ότι όλοι οι αποδεκτοί παρατηρητές θα συμφωνήσουν, σε κάθε σημείο κατά μήκος του α, στο μέγεθος της 3- επιτάχυνσης του α σχετικά με το στιγμιαίο πλαίσιο αδράνειας του.

Ως μια υλοποίηση αυτών των ιδεών, θα εξετάσουμε λεπτομερώς την ακόλουθη κατάσταση. Ένας φουτουριστικός εξερευνητής σχεδιάζει ένα ταξίδι σε ένα μακρινό σημείο του σύμπαντος. Για την καλύτερη άνεσή του θα διατηρήσει μια σταθερή επιτάχυνση του 1g (το 1 είναι η «βαρύτητα της γης») σχετικά με τα στιγμιαία πλαίσιο αδράνειας του (υποθέτοντας ότι ούτε είναι σε δίαιτα ούτε θα τραφεί σε κάτι υπερβολικά, το «βάρος» του θα παραμείνει το ίδιο με αυτό στη γη κατά τη διάρκεια του ταξιδιού). Ξεκινάμε υπολογίζοντας τη κοσμική γραμμή του εξερευνητή $a(\tau)$. Ως συνήθως καθορίζουμε με $U(\tau)$ και $A(\tau)$ την παγκόσμια ταχύτητα και παγκόσμια επιτάχυνση του α, αντίστοιχα. Επομένως, οι (1.4.7), (1.4.8) και (1.4.12) δίνουν :

$U \cdot U = -1$ (1.4.13)

$U \cdot A = 0$ (1.4.14)

$A \cdot A = g^2$ (α σταθερό) (1.4.15)

Εξετάζουμε την κατάσταση από ένα αποδεκτό σύστημα αναφοράς στο οποίο η κίνηση του εξερευνητή είναι κατά μήκος του θετικού x^1- άξονα.

Επομένως, $U^2 = U^3 = A^2 = A^3 = 0$ και οι τύποι (1.4.13), (1.4.14) και (1.4.15) γίνονται :

$(U^1)^2 - (U^4)^2 = -1$ (1.4.16)

$U^1 A^1 - U^4 A^4 = 0$ (1.4.17)

$(A^1)^2 - (A^4)^2 = g^2$ (1.4.18)

Λύνοντας τις τελευταίες τρεις ισότητες για τα A^1, A^4 έχω:

$A^1 = gU^4$ και $A^4 = gU^1$.

Το αποτέλεσμα είναι ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τα U^1, U^4. Ειδικότερα, έχουμε :

$$\frac{dU^1}{d\tau} = gU^4 \qquad (1.4.19)$$

$$\frac{dU^4}{d\tau} = gU^1 \qquad (1.4.20)$$

Διαφορίζουμε την (1.4.19) ως προς το τ και την αντικαθιστούμε στην (1.4.20) ώστε να πάρουμε :

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} = g^2U^1 \qquad (1.4.21)$$

Η γενική λύση της (1.4.21) μπορεί να γραφεί :

$U^1 = U^1(\tau) = a \cdot \sin g\tau + b \cdot \cos g\tau$.

Υποθέτοντας ότι ο εξερευνητής επιταχύνει από την ηρεμία στο $\tau = 0$ ($U^1(0) = 0$ και $A^1(0) = g$) παίρνουμε :

$$U^1(\tau) = \sin g\tau \qquad (1.4.22)$$

Η ισότητα (1.4.19) τώρα δίνει :

$$U^4(\tau) = \cos g\tau \qquad (1.4.23)$$

Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (1.4.22), (1.4.23) και υποθέτοντας, για ευκολία, ότι $x^1(0) = 1/g$ και $x^4(0) = 0$, παίρνουμε :

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = \dfrac{1}{g}\cosh g\tau \\ x^4 = \dfrac{1}{g}\sinh g\tau \end{array}\right\} \qquad (1.4.24)$$

Παρατηρούμε ότι η (1.4.24) υποδηλώνει ότι $(x^1)^2 - (x^4)^2 = 1/g^2$ και έτσι η κοσμική γραμμή του εξερευνητή βρίσκεται πάνω σε μια υπερβολή σε μια 2-διάστατη αναπαράσταση του M (βλ. σχήμα 1.4.1).

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα με ένα θεώρημα το οποίο υποστηρίζει αρκετά γενικά ότι ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής όπως ο εξερευνητής της προηγούμενης συζήτησης της υπερβολικής κίνησης ή οι «δίδυμοι πύραυλοι» στο twin (δίδυμο) παράδοξο πρέπει να νιώσουν μια χρονική διαστολή που δεν την νιώθουμε εμείς που παραμένουμε σε ηρεμία σε ένα αποδεκτό σύστημα.

<u>Θεώρημα 1.4.8</u> : Έστω $a:[a,b] \to M$ να είναι μια χρονοειδής κοσμική γραμμή στο M από $a(a) = q$ και $a(b) = p$.

Τότε :

$$L(a) \le r(p-q) \qquad (1.4.25)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το α είναι μια παραμετρικοποίηση της χρονοειδούς ευθείας γραμμής που ενώνει τα q, p.

<u>Απόδειξη</u> : Από το θεώρημα 1.4.6, το $p-q$ είναι χρονοειδές και μελλοντοκατευθυνόμενο και επομένως μπορούμε να επιλέξουμε μια βάση $\{e_a\}$ με

$q = \mathrm{x}_0^1 e_1 + \mathrm{x}_0^2 e_2 + \mathrm{x}_0^3 e_3 + \mathrm{x}_\mathrm{q}^4 e_4$,

$p = \mathrm{x}_0^1 e_1 + \mathrm{x}_0^2 e_2 + \mathrm{x}_0^3 e_3 + \mathrm{x}_\mathrm{p}^4 e_4$, και

$r(p-q) = x_p^4 - x_q^4 = \Delta x^4$.

Τώρα παραμετρικοποιούμε το α από το x^4. Τότε :

$$L(a) = \int_{x_q^4}^{x_p^4} \sqrt{1 - \left[\left(\frac{dx^1}{dx^4} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4} \right)^2 \right]} dx^4$$

$$\leq \int_{x_q^4}^{x_p^4} dx^4 = \Delta x^4 = r(p-q)$$

Επιπλέον, η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\frac{dx^i}{dx^4} = 0$ για $i = 1,2,3,$ που ισχύει αν και μόνο αν το x^4 είναι σταθερό για $i = 1,2,3,$ και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν :

$a(x^4) = \mathrm{x}_0^1 e_1 + \mathrm{x}_0^2 e_2 + \mathrm{x}_0^3 e_3 + \mathrm{x}^4 e_4$,

για $x_q^4 \leq x^4 \leq x_p^4$ όπως ζητείται.

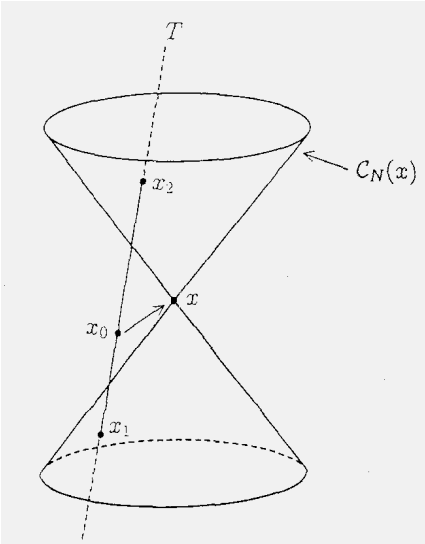
4. Χωροειδή Διανύσματα

Θεωρούμε δυο γεγονότα x και x_0 για τα οποία $Q(x-x_0)>0$. Σχετικά με κάθε επιτρεπτή βάση έχουμε $(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2>(\Delta x^4)^2$ έτσι ώστε το $x-x_0$ να κείται εκτός του φωτοειδές κώνου στο x_0 και δεν υπάρχει προφανώς καμία επιτρεπτή βάση για την οποία η χωρική διάκριση των δυο γεγονότων να είναι μηδέν. Δεν υπάρχει δηλαδή επιτρεπτός παρατηρητής που θα μπορούσε να βιώνει ταυτόχρονα και τα δυο γεγονότα γιατί για να γινόταν θα έπρεπε να ì πορεί να κινηθεί με την ταχύτητα του φωτός. Παρολ αυτά ένα ανάλογο επιχείρημα με αυτό που δώσαμε για τα χρονοειδή διανύσματα θα δείξει ότι υπάρχει ένα πλαίσιο στο οποίο τα x και x_0 είναι ταυτόχρονα.

Παίρνοντας μια αυθαίρετη βάση $\{e_a\}$ και για $\beta=\frac{\Delta x^4}{\Delta\vec{x}}$ και $d^i=\frac{\Delta x^i}{\Delta\vec{x}}$ και λειτουργώντας όπως και στις χρονικές συντεταγμένες παίρνουμε ότι αν $Q(x-x_0)>0$ τότε υπάρχει μια επιτρεπτή βάση $\{\hat{e}_a\}$ στον M σχετική για την οποία $\Delta\hat{x}^4=0$

Εφόσον $\sqrt{(\Delta x^1)^2+(\Delta x^2)^2+(\Delta x^3)^2}=\sqrt{(\Delta x^4)^2+Q(x-x_0)}$ σε κάθε επιτρεπτό πλαίσιο και εφόσον $(\Delta\hat{x}^4)^2$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός η χωρική διαστολή των x και x_0 δεν μπορεί να πάρει μεγαλύτερη τιμή από το $\sqrt{Q(x-x_0)}$. Δεν υπάρχει δηλαδή πλαίσιο στο οποίο η χωρική διαστολή να μπορεί να πάρει τιμή μικρότερης της προαναφερόμενης. Για κάθε δυο γεγονότα x και x_0 για τα οποία $Q(x-x_0)>0$ ορίζουμε την γνήσια χωρική διαστολή $S(x-x_0)$ των x και x_0 να είναι $S(x-x_0)=\sqrt{Q(x-x_0)}$ και θα την θεω-

ρούμε ως την χωρική διαστολή των x και x_0 σε κάθε πλαίσιο αναφοράς στο οποίο τα x και x_0 συμβαίνουν ταυτόχρονα.



Έστω T μια αυθαίρετη χρονική ευθεία γραμμή η οποία περιέχει το x_0. Είδαμε ότι το T μπορεί να ταυτιστεί με την κοσμική γραμμή ενός αδρανούς παρατηρητή σε ένα επιτρεπτό πλαίσιο αλλά όχι απαραιτήτως τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων του πλαισίου.

Έστω x στο M να είναι τέτοιο ώστε το $x-x_0$ να είναι χωροειδές και έστω x_1 και x_2 να είναι τα σημεία τομής του T με το $C_N(x)$ όπως στο σχήμα.

Ισχυριζόμαστε ότι: $S^2(x-x_0)=\tau(x_0-x_1)\tau(x_2-x_0)$

Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι εφόσον $x-x_1$ είναι φωτοειδές

$$0=Q(x-x_1)=Q((x_0-x_1)+(x-x_0))$$
$$0=-\tau^2(x_0-x_1)+2(x_0-x_1)(x-x_0)+S^2(x-x_0)$$

Ομοίως εφόσον x_2-x είναι φωτοειδές

$$0=-\tau^2(x_2-x_0)+2(x_2-x_0)(x-x_0)+S^2(x-x_0)$$

Υπάρχει μια σταθερά $k>0$ τέτοια ώστε $x_2-x_0=k(x_0-x_1)$ έτσι $\tau^2(x_2-x_0)=k^2\tau^2(x_0-x_1)$.

Πολλαπλασιάζοντας την 1.5.2. με το k και προσθέτοντας την στην 1.5.3 παίρνω:

$$-\left(k+k^2\right)\tau^2\left(x_0-x_1\right)+\left(k+1\right)S^2\left(x-x_0\right)=0$$

Εφόσον $k+1\neq 0$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}&S^2\left(x-x_0\right)=k\tau^2\left(x_0-x_1\right)\\&=\tau\left(x_0-x_1\right)\left(k\tau\left(x_0-x_1\right)\right)\\&=\tau\left(x_0-x_1\right)\tau\left(x_2-x_0\right)\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι το χωροειδές διάνυσμα μετατόπισης $x-x_0$ είναι ορθογώνιο στην χρονική ευθεία γραμμή T. Τότε:

$$S\left(x-x_0\right)=\frac{1}{2}\left(\tau\left(x_0-x_1\right)+\tau\left(x_2-x_0\right)\right)$$

Πιο συγκεκριμένα αυτό αληθεύει αν T είναι ο χρονοειδές άξονας. Είδαμε ότι το T μπορεί να ταυτιστεί με την κοσμική γραμμή ενός επιτρεπτού παρατηρητή O και τα γεγονότα x και x_0 πραγματοποιούνται ταυτόχρονα ως προς το πλαίσιο αναφοράς αυτού του παρατηρητή. Αλλά τότε $S\left(x-x_0\right)$ είναι η απόσταση στο πλαίσιο ανάμεσα στα x και x_0. Τέλος εφόσον x_0 βρίσκεται στο T εξάγουμε την φυσική ερμηνεία ότι:

Η O-απόσταση ενός γεγονότος x από έναν επιτρεπτό παρατηρητή O είναι ο μισός χρόνος που μετρήθηκε από τον O μεταξύ εκπομπής και υποδοχής φωτεινών σημάτων που συνδέουν τον O με το x.

5. Σχέσεις Αιτιατότητας

Ξεκινάμε ορίζοντας δύο σχέσεις διάταξης << και < πάνω στο M ως εξής :

Για x και y στο M λέμε ότι το x προηγείται χρονολογικά του y και γράφουμε $x << y$ αν $y - x$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά προσανατολισμένο, δηλαδή αν y είναι στο $C_T^*(x)$. Θα λέμε ότι το x τυχαία προηγείται του y και θα γράφουμε ότι $x < y$ αν $y - x$ είναι φωτοειδή και μελλοντικά προσανατολισμένο, δηλαδή αν το y είναι στο $C_N^*(x)$. Και οι δύο << και < καλούνται σχέσεις αιτιότητας διότι έχουν δημιουργήσει μια σύνδεση αιτίας ανάμεσα σε δύο γεγονότα με την έννοια ότι το γεγονός x μπορεί να επηρεάσει το γεγονός y είτε από τον τρόπο αναπαραγωγής μερικών υλικών φαινομένων αν $x << y$ ή κάποια ηλεκτρομαγνητικά αποτελέσματα αν $x < y$.

Παρατήρηση: Η << είναι μεταβατική, δηλαδή οι $x << y$ και $y << z$ συνεπάγονται ότι $x << z$ και η < δεν είναι μεταβατική.

Είναι ένα ενδιαφέρον και χρήσιμο γεγονός ότι κάθε μία σχέση από τις << και < μπορεί να οριστεί με βάση την άλλη.

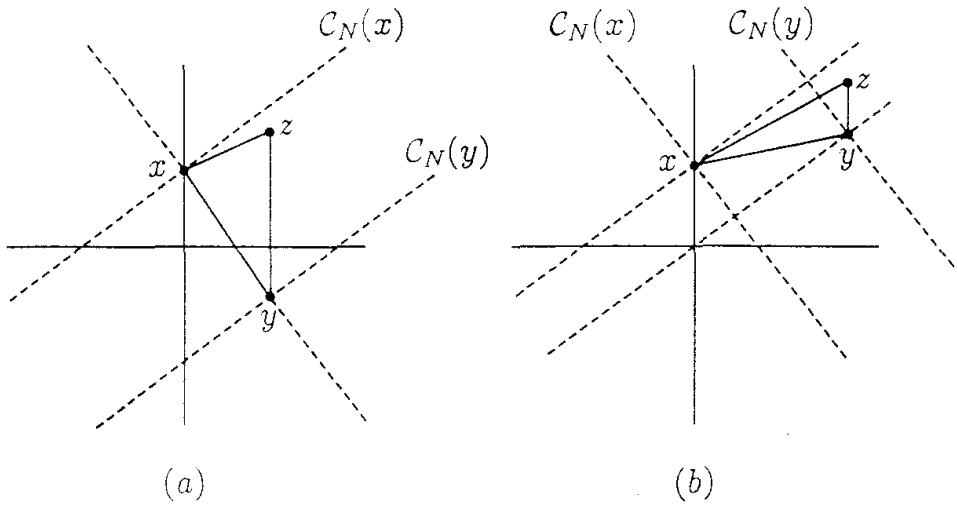
Λήμμα 1.6.1 : Για διακριτά σημεία x και y στο M ισχύει :

$x < y$ αν και μόνο αν : $x \not\ll y$ και $y << z$ σημαίνει ότι $y << z$.

Απόδειξη :

Αρχικά υποθέτουμε ότι $x < y$. Μετά υποθέτουμε ότι $Q(y - x) = 0$ και επομένως $x \not\ll y$. Επιπλέον, αν $y << z$, τότε $z - y$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά προσανατολισμένο. Αφού $y - x$ είναι φωτοειδή και μελλοντικά προσανατολισμένο, το λήμμα 1.4.3 υποδηλώνει ότι $z - x = (z - y) + (y - x)$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά προσανατολισμένο, δηλαδή $x << z$.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $x \not< y$ και δείχνουμε ότι είτε $x << y$ ή ότι υπάρχει ένα z στο M με $y << z$, αλλά $x \not\ll z$. Αν $x \not< y$ και $x \not\ll y$, τότε το $y - x$ είναι είτε χρονοειδές και παρελθοντοκατευθυνόμενο, φωτοειδή και παρελθοντοκατευθυνόμενο ή χωροειδές. Στην πρώτη περίπτωση κάθε z με $x < z$ έχει την ιδιότητα ότι $z - y = (z - x) + (x - y)$ είναι χρονοειδές και παρελθοντοκατευθυνόμενο (λήμμα 1.4.3) και επομένως $y << z$, αλλά $x \not\ll z$. Τέλος, υποθέτουμε ότι το $y - x$ είναι είτε φωτοειδή και παρελθοντοκατευθυνόμενο ή χωροειδές [σχήμα].



Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να παράγουμε ένα z στο M $y << z$, αλλά $x \not\ll z$ με τον ίδιο τρόπο. Σταθεροποιούμε μια επιτρεπτή βάση $\{e^a\}$ για το M με $x = x^a e^a$ και $y = y^a e^a$. Αν $y - x$ είναι φωτοειδή και παρελθοντοκατευθυνόμενο, τότε $x^4 - y^4 > 0$. Αν $y - x$ είναι χωροειδές, μπορούμε να επιλέξουμε $\{e^a\}$ έτσι ώστε $x^4 - y^4 > 0$. Τώρα, για κάθε $n = 1, 2, 3, \cdots$ ορίζουμε z_n στο M με $z_n = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 + \left(y^4 + \frac{1}{n} \right) e_4$. Τότε $z_n - y = \frac{1}{n} e_4$ είναι χρονοειδές και μελλοντικά προσανατολισμένο και έτσι $y << z_n$ για κάθε n.

Όμως :

$$
\begin{aligned}
Q(z_n - x) &= \left((z_n - x) + (y - x)\right)^2 \\
&= Q(z_n - y) + 2(z_n - y)(y - x) + Q(y - x) \\
&= -\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\left(x^4 - y^4\right) + Q(y - x) \\
&= Q(y - x) + \frac{1}{n}\left[2\left(x^4 - y^4\right) - \frac{1}{n}\right]
\end{aligned}
$$

Αφού $Q(y-x) \geq 0$ και $x^4 - y^4 > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε το n αρκετά μεγάλο ώστε $Q(z_n - x) > 0$. Για αυτό το *n*, $z = z_n$ ικανοποιεί τη $y << z$ αλλά $x \not\ll z$.

Μια απεικόνιση $F : M \to M$ λέγεται ότι είναι αυτομορφισμός αιτιότητας αν είναι 1-1, και οι F, F^{-1} διατηρούν τη <, δηλαδή αν και μόνο αν *F(x)<F(y)*. Σημειώνουμε ότι, στο συγκεκριμένο, η *F* δεν είναι απαραίτητα γραμμική (ή ακόμα και συνεχής). Θα αποδείξουμε όμως τελικά ότι αυτό είναι επακόλουθο του ορισμού.

<u>Παρατήρηση:</u>

Μια 1-1 απεικόνιση *F* του *M* πάνω στο *M* είναι ένας αυτομορφισμός αιτιότητας αν και μόνο αν και οι δύο *F*, F^{-1} διατηρούν τη <, δηλαδή *x<<y* αν και μόνο αν *F(x)<<F(y).*

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια απόδειξη του αξιοσημείωτου αποτελέσματος του Zeeman. Η απόδειξη όμως αυτή είναι αρκετά πιο δύσκολη από όλες τις προηγούμενες που επιχειρήσαμε. Ορίζουμε μια παράλληλη μετατόπιση (μεταφορά) του *M* να είναι μια απεικόνιση *T: M* $\to$ *M* της μορφής $T(u)=u+u_0$ για κάποιο σταθερό u_0 στο *M* και μια διαστολή να είναι μια απεικόνιση *K: M* $\to$ *M* τέτοια ώστε *K(u)=ku* για κάποιο θετικό πραγματικό αριθμό *k*. Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός *L: M* $\to$ *M* είναι ορθοχρονοειδές αν $x \cdot Lx < 0$ για όλα τα χρονοειδές ή φωτοειδή και μη μηδενικά *x*.

Παρατήρηση:

Οποιαδήποτε παράλληλη μετατόπιση, διαστολή, ορθοχρονοειδές ορθογώνιος μετασχηματισμός, ή οποιαδήποτε σύνθεση αυτών των απεικονίσεων είναι ένας αυτομορφισμός αιτιότητας.

Θεώρημα 1.6.2 : Έστω F: $M \to M$ ένας αυτομορφισμός αιτιότητας του M. Τότε υπάρχει ένας ορθοχρονοειδές ορθογώνιος μετασχηματισμός L: $M \to M$, μια παράλληλη μετατόπιση T και μια διαστολή K: $M \to M$ έτσι ώστε $F = T \circ K \circ L$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε μια σειρά από 5 λήμματα , από τα οποία το πρώτο τουλάχιστον είναι εύκολο.

Λήμμα 1.6.3 : Ένας αυτομορφισμός αιτιότητας $F: M \to M$ απεικονίζει ακτίνες φωτός σε ακτίνες φωτός. Πιο συγκεκριμένα, αν $x<y$ και $R_{x,y}$ είναι η φωτεινή ακτίνα διαμέσου των x, y τότε :

$F(R_{x,y})=R_{F(x),F(y)}$.

Απόδειξη :

Αφού και οι δύο F, F^{-1} διατηρούν τη $<$, η F απεικονίζει φωτοειδή κώνους σε κώνους φωτοειδή και επομένως ισχύουν $F(C_N(x))=C_N(F(x))$, $F(C_N(y))=C_N(F(y))$. Από το θεώρημα 1.2.2., $R_{x,y}=C_N(x) \cap C_N(y)$ και $R_{F(x),F(y)}=C_N(F(x)) \cap C_N(F(y))$. Ενώ,

$$\begin{aligned}
&F(R_{x,y}) = F(C_N(x) \cap C_N(y)) \\
&\Rightarrow F(R_{x,y}) = F(C_N(x)) \cap F(C_N(y)) \\
&\Rightarrow F(R_{x,y}) = C_N(F(x)) \cap C_N(F(y)) \\
&\Rightarrow F(R_{x,y}) = R_{F(x),F(y)}
\end{aligned}.$$

Λήμμα 1.6.4 : Ένας αυτομορφισμός αιτιότητας $F: M \to M$ απεικονίζει παράλληλες ακτίνες φωτός σε παράλληλες ακτίνες φωτός.

Απόδειξη :

Έστω R_1 και R_2 δύο διακεκριμένες παράλληλες ακτίνες φωτός στο M και P ένα (2-διάστατο) επίπεδο που τις περιέχει. Οποιοδήποτε επίπεδο στο M είναι μια παράλληλη μετατόπιση ενός επιπέδου διαμέσου της αρχής που περιέχει 0, 1 ή 2 ανεξάρτητα φωτοειδή διανύσματα (εξαρτώμενα από το αν το επίπεδο είναι έξω από το κώνο φωτοειδή σε κάθε σημείο του, εφαπτόμενο σε αυτούς τους φωτοειδή κώνους, ή τέμνεται με όλους τους χρονικούς κώνους). Όμως, μόνο οι δύο δεύτερες περιπτώσεις είναι σχετικές με το P.

Υποθέτουμε ότι το P περιέχει δύο ανεξάρτητες φωτοειδή κατευθύνσεις. Τότε, περιέχει δύο οικογένειες $\{R_a\}$και$\{S_b\}$ακτινών φωτός με όλα τα R_a παράλληλα στα R_1 και R_2 και όλα τα S_b παράλληλα σε κάποια ακτίνα φωτός η οποία τέμνει και τις δύο R_1 και R_2. Έτσι οι οικογένειες $\{F(R_a)\}$και$\{F(S_b)\}$είναι δύο οικογένειες ακτινών φωτός στο M με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Οι $\{F(R_a)\}$ δεν τέμνονται ανά ζεύγη.
2. Οι $\{F(S_b)\}$ δεν τέμνονται ανά ζεύγη.
3. Κάθε $\{F(R_a)\}$τέμνει κάθε $\{F(S_b)\}$.

Για να δείξουμε ότι τα $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλα, αρκεί (αφού δεν τέμνονται) να δείξουμε ότι είναι συνεπίπεδα. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Τότε οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ εκτείνονται σε κάποιον 3- διάστατο ομοπαράλληλο υπόχωρο R^3 του M. Αφού, κάθε $F(S_b)$ τέμνει και τις δύο $F(R_1)$ και $F(R_2)$, εκτείνεται στο R^3. Έτσι, από την παραπάνω ιδιότητα 3, όλες οι $F(R_a)$ περιέχονται στο R^3 . Ισχυριζόμαστε ότι, σαν αποτέλεσμα, καμία $F(R_a)$ δεν μπορεί να είναι συνεπίπεδη είτε με την $F(R_1)$ είτε με την $F(R_2)$ (εκτός εάν a=1 ή a=2). Για να υποθέσουμε το αντίθετο, κάποια $F(R_a)$ ήταν συνεπίπεδη, έστω η $F(R_1)$. Κάθε $F(S_b)$ τέμνει και τις δύο $F(R_a)$ και $F(R_1)$ έτσι ώστε να εκτείνεται σε αυτό το επίπεδο. Αφού η $F(R_2)$ δεν εκτείνεται (εξ' υποθέσεως) σε αυτό το επίπεδο, μπορεί να το τέμνει σε ένα το πολύ σημείο. Έτσι, η $F(R_2)$ τέμνει το πολύ μία από τις $F(S_b)$ και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω ιδιότητα 3. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε μια $F(R_3)$ έτσι ώστε δύο από τις $\{ F(R_1), F(R_2), F(R_3) \}$ να μην

είναι συνεπίπεδες. Αφού η $\{F(S_b)\}$ είναι η οικογένεια των ευθειών η οποία τέμνει όλες τις $\{ F(R_1), F(R_2), F(R_3) \}$, είναι η οικογένεια των γενετειρών για ένα υπερβολοειδές ενός κώνου στο R^3 . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $\{F(R_a)\}$ είναι μια άλλη οικογένεια γενετειρών αυτού του υπερβολοειδούς. Αλλά μετά κάθε $F(R_a)$ θα πρέπει να είναι παράλληλο με κάποιο $F(S_b)$ γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω ιδιότητα 3.

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση που το P περιέχει μόνο μία ανεξάρτητη κατεύθυνση (και επομένως είναι εφαπτόμενο σε κάθε έναν από τους μηδενικούς κώνους). Οποιοδήποτε σημείο στο M έχει μέσα του μια ακτίνα φωτός παράλληλη και στα δύο R_1 και R_2. Έτσι το παραπάνω επιχείρημα εφαρμόζεται στα R_1 και R_3 και ομοίως στα R_2 και R_3 . Συνεπώς, η $F(R_1)$ και η $F(R_2)$ είναι και οι δύο παράλληλες στην $F(R_3)$ και άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Έστω $R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in IR\}$ να είναι μια ακτίνα φωτός και $F(R_{x,y}) = \{F(x) + s(F(y) - F(x)) : s \in IR\}$ η εικόνα του κάτω από το F . θεωρούμε ότι το s είναι μια συνάρτηση του $r : s = f(r)$. Ο επόμενός μας σκοπός είναι να δείξουμε ότι η f είναι γραμμική, δηλαδή ότι $f(r + t) = f(r) + f(t)$ και για κάθε r και t στο IR. Πρώτα όμως, χρειαζόμαστε κάποια εισαγωγικά. Μια απεικόνιση $g : R_{x,y} \to R_{x,y}$ καλείται παράλληλη μετατόπιση της $R_{x,y}$ αν υπάρχει ένα σταθεροποιημένο t έτσι ώστε :

$$g(x + r(y - x)) = x + (r + t)(y - x)$$

για όλα τα r στο IR. θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια παράλληλη μετατόπιση g μιας ακτίνας φωτός R υψώνεται στην $F(R)$ αν υπάρχει παράλληλη μετατόπιση $e : F(R) \to F(R)$ τέτοια ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ g\downarrow & & \downarrow e \\ R & \xrightarrow[F]{} & F(R) \end{array}$$

να αντιμεταθέτεται, δηλαδή $F \circ g = e \circ F$. Μπορούμε να δείξουμε μετά ότι, στην πραγματικότητα, κάθε παράλληλη μετατόπιση του *R* υψώνεται στο *F(R)*.

<u>Λήμμα 1.6.5</u> : Έστω *R* μια ακτίνα φωτός, $g : R \to R$ μια παράλληλη μετατόπιση και *F:* $M \to M$ ένας αυτομορφισμός αιτιότητας. Τότε η *g* υψώνεται σε μια παράλληλη μετατόπιση $e : F(R) \to F(R)$ του *F(R)*.

<u>Απόδειξη</u> :

Για την απόδειξη θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια παράλληλων μετατοπίσεων

του *R* που προφανώς υψώνεται και μετά θα αποδείξουμε ότι αυτή η οικογένεια εξαντλεί όλες τις παράλληλες μετατοπίσεις του *R*.

Επιλέγουμε μια ακτίνα φωτός R_1 παράλληλη στο *R* και έτσι ώστε το επίπεδο των *R* και R_1 να περιέχει δύο ανεξάρτητες μηδενικές κατευθύνσεις. Αυτό το επίπεδο όμως περιέχει μια οικογένεια $\{S_b\}$ των παράλληλων ακτινών φωτός που συναντάνε τις *R* και R_1. Η οικογένεια $\{S_b\}$ όμως καθορίζει μια προφανής παράλληλη απεικόνιση μετατόπισης g_1 του *R* στο R_1 (σχήμα 1.6.2). Αφού η *F* μεταφέρει παράλληλες ακτίνες φωτός σε παράλλληλες ακτίνες φωτός, υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση e_1 του *F(R)* στο $F(R_1)$ για την οποία το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{F} & F(R) \\ g_1 \downarrow & & \downarrow e_1 \\ R_1 & \xrightarrow[F]{} & F(R_1) \end{array}$$

αντιμεταθέτεται. Τώρα επιλέγουμε μια ακτίνα φωτός R_2 παράλληλη στην R_1 (και επομένως στην *R*) έτσι ώστε τα επίπεδα των R_1 και R_2 και των *R* και R_2 να περιέχουν και τα δύο ανεξάρτητες μηδενικές κατευθύνσεις. Κατασκευάζουμε τις g_2, e_2 και τις g_3, e_3 όπως παρακάτω έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμεταθέτεται.

$$
\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{F} & F(R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R_1 & \xrightarrow{F} & F(R_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R_2 & \xrightarrow{F} & F(R_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R & \xrightarrow{F} & F(R)
\end{array}
$$

Τώρα συνθέτουμε για να πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα :

$$
g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \qquad
\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{F} & F(R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R & \xrightarrow{F} & F(R)
\end{array}
\qquad e = e_3 \circ e_2 \circ e_1
$$

Παρατηρούμε ότι αν οι *R*, *R1* και *R2* ήταν συνεπίπεδες, τότε οι *g* και *e* θα έπρεπε απαραιτήτως και οι δύο να ήταν η ταυτότητα. Αφού είναι *g* και *e*, συνθέσεις των παράλληλων μετατοπίσεων, είναι παράλληλες μετατοπίσεις των *R* και *F(R)*, αντίστοιχα. Συνεπώς, οποιαδήποτε παράλληλη μετατόπιση *g* του *R* κατασκευασμένη με αυτόν τον τρόπο – ως σύνθεση τριών παράλληλων μετατοπίσεων – υψώνεται στο *F(R)*.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι για κάποια συγκεκριμένη ακτίνα φωτός $\overline{R}$ κάθε παράλληλη μετατόπιση της $\overline{R}$ πραγματοποιείται ως σύνθεση. Πράγματι, αν αυτό αποδειχθεί για κάποια $\overline{R}$, δείχνουμε ότι είναι επίσης αληθές και για το R ως εξής : Επιλέγουμε μια σύνθεση G μιας παράλληλης μετατόπισης και ενός ορθοχρονικού ορθογώνιου μετασχηματισμού που μεταφέρει την R στην $\overline{R}$ (θεώρημα 1.7.2). Αφού η G είναι ομοπαραλληλική, μια παράλληλη μετατόπιση g του R υψώνεται σε μια παράλληλη μετατόπιση $\overline{g} = G \circ g \circ G^{-1}$ του $\overline{R}$. Αντικαθιστούμε τώρα το $\overline{g}$ ως μια σύνθεση $\overline{g} = \overline{g}_3 \circ \overline{g}_2 \circ \overline{g}_1$ της παράλληλης μετατόπισης, όπως φαίνεται παραπάνω. Τότε

$$g = G^{-1} \circ \overline{g} \circ G = G^{-1} \circ \overline{g}_3 \circ \overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 \circ G$$
$$\Rightarrow g = (G^{-1} \circ \overline{g}_3 \circ G) \circ (G^{-1} \circ \overline{g}_2 \circ G) \circ (G^{-1} \circ \overline{g}_1 \circ G)$$

Επίσης, αφού οι G, G^{-1} είναι αυτομορφισμοί αιτιότητας και επομένως διατηρούν την παράλληλη ακτίνα φωτός από το λήμμα 1.6.4, μπορούμε να παράγουμε μια ανάλυση

$$R = G^{-1}(\overline{R}) \xrightarrow[g_1]{} G^{-1}(\overline{R}_1) \xrightarrow[g_2]{} G^{-1}(\overline{R}_2) \xrightarrow[g_3]{} G^{-1}(\overline{R}_3) = R$$

του g σε μια σύνθεση παράλληλων μετατοπίσεων $g_i = G^{-1} \circ \overline{g}_i \circ G$ όπως ζητούνται.

Η συγκεκριμένη ακτίνα φωτός στην οποία επιλέγουμε να εστιάσουμε την προσοχή μας λαμβάνεται ως εξής : Θέτω μια αποδεκτή βάση $\{e_a\}$ και έστω R η ακτίνα φωτός που περνάει απ' τα σημεία $x = (0,0,0,0)$ και $y = (0,0,1,1)$. Τώρα θεωρώ μια παράλληλη μετατόπιση g του R που ορίζεται από τη συνάρτηση $g(x + r(y - x)) = g(0,0,r,r) = (0,0,r + t, r + t)$. Συγκεκριμένα η g μεταφέρει το $x = (0,0,0,0)$ στο $g(x) = (0,0,t,t)$. Αφήνω τα $x_1 = (0,-t,0,-t)$ και $x_2 = (0,0,0,2t)$ και παίρνω R_1 και R_2 να είναι ακτίνες φωτός παράλληλες στην R και να περνάνε από τα x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι οι επιθυμητές παράλληλες μετατοπίσεις g_1, g_2, και g_3 προσδιορίζονται και επιπλέον ότι

$$x \xrightarrow[g_1]{} x_1 \xrightarrow[g_2]{} x_2 \xrightarrow[g_3]{} g(x) \quad (1.6.1)$$

έτσι *ώστε* $g(x) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x)$.Αφού το $g_3 \circ g_2 \circ g_1$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση του R που συμπίπτει με τη g στο $x = (0,0,0,0)$ τότε $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$. Όλες οι επαληθεύσεις τις (1.6.1) είναι ίδιες έτσι τις δείχνουμε μόνο ότι $g_1(x) = x_1$. (σχήμα).

Παρατηρήστε ότι το επίπεδο που σχηματίζεται από τις R και R_1 μπορεί ναι περιέχει το πολύ 2 οικογένειες παράλληλων ακτινών φωτός. Οι ακτίνες φωτός που είναι παράλληλες στο R (και στο R_1) σχηματίζουν μια τέτοια οικογένεια. Απ' τη στιγμή που η γραμμή που ενώνει τα x και x_1 είναι επίσης μηδενική και

μη παράλληλη στην R πρέπει να ανήκει στη δεύτερη οικογένεια. Οπότε η g_1 υπάρχει και ,προφανώς, $g_1(x) = x_1$.

Με το λήμμα 1.6.5 μπορούμε να δείξουμε ότι ένας αυτομορφισμός αιτιότητας είναι γραμμικός σε κάθε ακτίνα φωτός.

<u>Λήμμα 1.6.6.</u> : Έστω $R = \{x + r(y - x): x < y, r \in R\}$ να είναι μια ακτίνα φωτός, $F: M \longrightarrow M$ ένας αυτομορφισμός αιτιότητας και $F(R) = \{F(x) + s(F(y) - F(x)): s \in R\}$η εικόνα του R πάνω στο F. Τότε, θεωρώντας την s ως συνάρτηση του r, έστω $s = f(r)$, έχουμε $f(r + t) = f(r) + f(t)$ *και* $f(tr) = tf(r)$ για κάθε r και t στο R.

<u>Απόδειξη</u>**:**

Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$.Τώρα παίρνω ένα t από το R. Θέλουμε να δείξουμε ότι, για οποιοδήποτε r του R, $f(r + t) = f(r) + f(t)$,δηλαδή, ότι

$F(x + (r + t)(y - x)) = F(x) + (f(r) + f(t))(F(y) - F(x))$. (1.6.2)

Έστω ότι η $g: R \longrightarrow R$ εκτείνει την παράλληλη μετατόπιση του R κατά t, δηλαδή, $g(x + r(y - x)) = x + (r + t)(y - x)$.Από το λήμμα 1.6.5 υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση του $e: F(R) \longrightarrow F(R)$ του $F(R)$ τέτοια ώστε $F \circ g = e \circ F$. Ας υποθέσουμε ότι το e είναι η παράλληλη μετατόπιση του $F(R)$ κατά $u = u(t)$, δηλαδή, ότι

$e(F(x) + s(F(y) - F(x))) = F(x) + (s + u(t))(F(y) - F(x))$. Τότε

$F(x + (r + t)(y - x)) = F(g(x + r(y - x)))$

$= F \circ g(x + r(y - x))$

$= e \circ F(x + r(y - x))$

$= e(F(x) + f(r)(F(y) - F(x)))$

$= F(x) + [f(r) + u(t)](F(y) - F(x))$

οπότε $f(r + t) = f(r) + f(t)$ για κάθε r. Θέτοντας r = 0 παίρνουμε $f(t) = f(0) + u(t) = u(t)$ οπότε έχουμε το $f(r + t) = f(r) + f(t)$ που θέλουμε.

Συγκεκριμένα, $f(2r) = f(r+r) = 2f(r)$ και ,με επαγωγή, $f(nr) = nf(r)$ για $n = 0,1,2,..$ Επιπλέον, $f(r) = f(-r + 2r) = f(-r) + 2f(r)$ άρα $f(-r) = f(r)$ και ,πάλι με επαγωγή, $f(nr) = nf(r)$ για $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Αν m είναι επίσης ένας ακέραιος και n ένας μη μηδενικός ακέραιος, $nf(\frac{m}{n} r) = f(mr) = mf(r)$ άρα $f(\frac{m}{n} r) = \frac{m}{n} f(r)$. Επομένως $f(tr) = tf(r)$ για κάθε ρητό αριθμό t. Τέλος, παρατηρούμε ότι, αφού το F διατηρεί το $<$ στο M, το f διατηρεί το $<$ στο R και είναι γι' αυτό συνεχές στο R. Επειδή κάθε πραγματικός αριθμός t είναι το όριο μιας σειράς από διαδοχικούς πραγματικούς αριθμούς, βρίσκουμε ότι $f(tr) = tf(r)$ για κάθε t στο R και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Από το λήμμα 1.6.6 συμπεραίνουμε ότι αν $R_{x,y} = \{x + r(y - x) : r \in R\}$ είναι μια ακτίνα φωτός και F ένας αυτομορφισμός αιτιότητας, τότε υπάρχει μια σταθερά k, *που ονομάζεται συντελεστής επέκτασης του* F στο $R_{x,y}$, τέτοια ώστε

$F(R_{x,y}) = \{F(x) + kr(F(y) - F(x)) : r \in R\}$.

<u>Λήμμα 1.6.7.</u> : Έστω $F: M \longrightarrow M$ ένας αυτομορφισμός αιτιότητας. Τότε το F είναι μια ομοπαραλληλική απεικόνιση, δηλαδή η σύνθεσή του με κάποια παράλληλη μετατόπιση του M (πιθανόν την ταυτότητα) είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

<u>Απόδειξη</u> :

Αρχικά παραδεχόμαστε ότι $F(0) = 0$ και έτσι το πρόβλημα μετατίθεται στο να δείξουμε ότι η F είναι γραμμική. (η σύνθεση ενός αυτομορφισμού αιτιότητας και μιας παράλληλης μετατόπισης είναι ξεκάθαρα ένας αυτομορφισμός αιτιότητας).

Διαλέγουμε μια βάση (v_1,v_2,v_3,v_4) για το M που αποτελείται από μηδενικά διανύσματα. Προσδιορίζουμε την απεικόνιση $G: M \longrightarrow M$ από την

$$G(y) = G(\sum_{i=1}^{4} y^i v_i) = \sum_{i=1}^{4} y^i F(v_i)$$

για κάθε $y = \sum_{i=1}^{4} y^i v_i$ (για το υπόλοιπο της απόδειξης θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sum$ αντί για $\sum_{i=1}^{4}$). Η G είναι προφανώς γραμμική και θα δείξουμε ότι η F είναι γραμμική δείχνοντας ,στην πραγματικότητα, ότι $F = G$. Για κάθε $i = 1,2,3,4$ *θέτουμε to* M_i *να προσδιορίζει τον υπόχωρο του* M *παραγόμενος από τα* $\{v_j : j \leq i\}$. Έτσι το M_1 είναι μια ακτίνα φωτός και το M_4 είναι όλο το M. Αποδεικνύουμε ότι $F/M_i = G/M_i$ για όλα τα $i = 1,2,3,4$. Για $i = 1$ είναι προφανές γιατί $F(v_1) = G(v_1)$ και από το λήμμα 1.6.6, η F είναι γραμμική στον M_1. Τώρα υποθέτουμε ότι i = 2,3, ή 4 και ότι $F/\ M_{i-1} = G/M_{i-1}$. Απ' αυτό δείχνουμε ότι $F/M_i = G/M_i$ ως εξής : Οποιοδήποτε y στο M_i μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά ως $y = x + y^i v_i$, όπου x είναι στο M_{i-1} και δεν υπάρχει άθροισμα του i στο $y^i v_i$.. Έτσι $y - x = y^i v_i$ είναι μηδενικό αφού και το v_i είναι μηδέν. Θεωρούμε 2 ακτίνες φωτός, η πρώτη (R_1) περνάει από τα x και y και η δεύτερη (R_2) από τα 0 και $y^i v_i$ (βλέπε σχήμα 1.6.4). Οι R_1 και R_2 είναι παράλληλες και άρα και οι $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλες σύμφωνα με το λήμμα 1.6.4. Επιπλέον, αν οι συντελεστές επέκτασης του F στα R_1 και R_2 δεν ήταν ίδιοι, τότε οι εικόνες των ακτίνων φωτός στο F που τέμνουν και το R_1 και το R_2 δεν θα ήταν παράλληλες (σε περίπτωση που δεν υπάρχει τέτοια οικογένεια χρησιμοποιούμε μια τρίτη ακτίνα φωτός R_3 όπως και στην απόδειξη του λήμματος 1.6.4). Συνεπώς, υπάρχει ένας μη μηδενικός αριθμός k τέτοιος ώστε :

$$F(R_1) = \{F(x) + kr(F(y) - F(x)) : r \in R\}$$

και

$$F(R_2) = \{F(0) + kr(F(y^i v_i) - F(0)) : r \in R\}$$

$$= \{0 + kr(F(y^i v_i) - 0) : r \in R\}.$$

Επειδή τα $F(R_1)$ και $F(R_2)$ είναι παράλληλα και $r = 0$ δίνει 0 στο $F(R_2)$ και $F(x)$ στο $F(R_1)$, η παράλληλη μετατόπιση του $F(R_2)$ κατά $F(x)$ δίνει $F(R_1)$. Για $r = 1$ αυτό δίνει

$$F(x) + [0 + k(F(y^i v_i) - 0)] = F(x) + k(F(y) - F(x)),$$

δηλαδή,

$F(y^i v_i) = F(y) - F(x)$.

Έτσι,

$F(y) = F(x) + F(y^i v_i)$

$= G(x) + F(y^i v_i)$ *αφού* $x \in M_{i-1}$

$= G(x) + y^i F(v_i)$ *από λήμμα 1.6.6*

$= G(x) + y^i G(v_i)$

$= G(x) + G(y^i v_i)$ *από γραμμικότητα του* G

$= G(x + y^i v_i)$

$= G(y)$

και η απόδειξη έχει τελειώσει.

<u>Απόδειξη του θεωρήματος</u> :

Σύμφωνα με το λήμμα 1.6.7 υπάρχει μια παράλληλη μετατόπιση , $T^{-1} : M \to M$, έτσι ώστε η $T^{-1} \circ F$ να είναι γραμμική. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται να παράγουμε μια θετική σταθερά *1/k* έτσι ώστε η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ να διατηρεί την τετραγωνική μορφή του *M*. Μετά, από το λήμμα 1.2.3 η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ είναι μια (απαραιτήτως ορθοχρονική) ορθογώνια παράλληλη μετατόπιση *L*. Θέτοντας *K* τη διαστολή $K(u) = k \cdot u$, η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F = L$ τότε δίνει την $F = T \circ K \circ L$ όπως ζητείται.

Αφού και οι δύο $T^{-1} \circ F$ και η αντίστροφή της παίρνουν *0* στο *0* και διατηρούν τη <, η $T^{-1} \circ F$ μεταφέρει το μηδενικό κώνο $C_N(0)$ στον εαυτό του, δηλαδή $Q(x) = 0$ αν και μόνο αν $Q(T^{-1} \circ F(x)) = 0$. Αφού η $T^{-1} \circ F$ είναι γραμμική, και οι δύο $Q(x)$, $Q(T^{-1} \circ F(x))$ είναι τετραγωνικές μορφές και, όπως έχουμε παρατηρήσει, έχουν τον ίδιο πυρήνα, δηλαδή μηδενίζονται από το ίδιο *x*.

Αλλά δύο τετραγωνικές μορφές με τον ίδιο πυρήνα διαφέρουν κυρίως κατά μια πολλαπλασιαστική σταθερά (θεώρημα 14.10 του [K]) και έτσι υπάρχει μια σταθερά k' έτσι ώστε $Q(x) = k' \cdot Q(T^{-1} \circ F(x))$ για όλα τα x. Αλλά η $T^{-1} \circ F$ είναι αυτομορφισμός αιτιότητας και έτσι διατηρεί το μεγαλύτερο χρονοειδές κώνο. Συγκεκριμένα, $Q(x) < 0$ αν και μόνο αν $Q(T^{-1} \circ F(x)) < 0$, οπότε το k' πρέπει να είναι θετικό. Έστω $k = (k')^{-1/2}$ και τότε έχουμε $Q(x) = Q(\frac{1}{k} T^{-1} \circ F(x))$ και συνεπώς η $\frac{1}{k} T^{-1} \circ F$ διατηρεί την τετραγωνική μορφή του M και η απόδειξη έχει τελειώσει.

6. Μετασχηματισμοί Στροφής και Ομάδα Lorentz

Σε αυτήν την ενότητα αναπτύσσουμε μια νέα και πολύ ισχυρή τεχνική για την κατασκευή και την έρευνα των Lorentz μετασχηματισμών. Κυρίαρχο στοιχείο είναι ένας συγκεκριμένος μετασχηματισμός (καλείται «μετασχηματισμός περιστροφής») από μια ομάδα 2x2 μιγαδικών πινάκων με ορίζουσα 1 πάνω στην Lorentz ομάδα *L*. Με αυτό αποκαλύπτουμε μια αξιοσημείωτη σύνδεση μεταξύ των Lorentz μετασχηματισμών και των γνωστών κλασματικών γραμμικών μετασχηματισμών της Μιγαδικής Ανάλυσης. Αυτό όμως έχει μερικά καταπληκτικά πράγματα να πει για την Lorentz ομάδα και το φαινόμενο των συστολών μήκους.

Ξεκινάμε εδραιώνοντας μερικούς συμβολισμούς. C^{2x2} είναι το σύνολο όλων των 2x2 πινάκων

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

με μιγαδικές εισόδους. Χρησιμοποιώντας μια παύλα για να καθορίσουμε τη ì ιγαδική συζυγία, η συζυγή μεταφορά A^{CT} του A ορίζεται ως

$$A^{CT} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

Ένας H στο C^{2x2} είναι Ερμιτιανός αν $H^{CT} = H$ και τότε ορίζουμε H_2 το σύνολο όλων αυτών.

<u>Παρατήρηση:</u> Ο οποιοσδήποτε ερμιτιανός H στο C^{2x2} εκφράζεται μοναδικά στη μορφή

$$H = \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} \quad (1.7.1)$$

όπου x^α , α=1,2,3,4, είναι πραγματικοί και η αναπαράσταση (1.7.1) είναι ισοδύναμη με το

$$H = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 + x^4\sigma_4 \quad (1.7.2)$$

όπου σ_i , i=1,2,3, είναι οι Pauli πίνακες περιστροφής :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και σ_4 είναι ο 2x2 ταυτοτικός πίνακας.

Με το $SL(2,C)$ ορίζουμε το σύνολο όλων των A στο C^{2x2} με ορίζουσα 1. Η $SL(2,C)$ καλείται ειδική γραμμική ομάδα τάξης 2 και είναι, πράγματι, μια ομάδα πινάκων κλειστή για τα γινόμενα και την αντιστρεψιμότητα. Τα στοιχεία του $SL(2,C)$ καλούνται μετασχηματισμοί περιστροφής. Κάθε $SL(2,C)$ εγείρει μια απεικόνιση $M_A : H_2 \to H_2$ ορισμένη από τον τύπο

$$M_A(H) = AHA^{CT}$$

για κάθε H στο H_2 ($M_A(H)$ είναι στο H_2 αφού $(AHA^{CT})^{CT} = (A^{CT})^{CT}$, $(AH)^{CT} = AH^{CT}A^{CT} = AHA^{CT}$). Επιπλέον,

$$\det M_A(H) = \det(AHA^{CT}) = (\det A)\cdot(\det H)\cdot(\det A^{CT}) = \det H .$$

Αλλά το $M_A(H)$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή :

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} \quad (1.7.3)$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\hat{x}^a$, α=1,2,3,4. Υπολογίζοντας τις ορίζουσες στους (1.7.1) και (1.7.2) έχουμε

$$(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2 - (\hat{x}^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 . \quad (1.7.4)$$

Επομένως η απεικόνιση $[x^a] \to [\hat{x}^a]$ ορίζεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x^3 + x^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + x^4 \end{bmatrix} \cdot A^{CT} \quad (1.7.5)$$

η οποία είναι εμφανώς γραμμική και διατηρεί την τετραγωνική μορφή $n_{a,b} x^\alpha x^b$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.2.3, ο πίνακας αυτής της απεικόνισης ένας γενικός, ομογενής Lorentz μετασχηματισμός. Σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε αυτόν τον πίνακα από τις εισόδους του

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Έστω $h_{11} = x^3 + x^4$, $h_{12} = x^1 + ix^2$, $h_{21} = x^1 - ix^2$, $h_{22} = -x^3 + x^4$. Τότε έχουμε :

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

που συνοπτικά γράφεται $[h_{ij}] = G[x^i]$ και ομοίως για το $[\hat{h}_{ij}]$. Επίσης, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από $AHA^{CT} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\gamma} \\ \hat{\beta} & \hat{\delta} \end{bmatrix}$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$M_A(H) = AHA^{CT}$$

είναι ισοδύναμα με το

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} \\ \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} \\ \hat{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\hat{\alpha} & \alpha\hat{\beta} & \hat{\alpha}\beta & \beta\hat{\beta} \\ \hat{\alpha}\gamma & \hat{\alpha}\delta & \beta\hat{\gamma} & \beta\hat{\delta} \\ \hat{\alpha}\gamma & \hat{\beta}\gamma & \hat{\alpha}\delta & \hat{\beta}\delta \\ \gamma\hat{\gamma} & \gamma\hat{\delta} & \hat{\gamma}\delta & \delta\hat{\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}$$

το οποίο γράφεται συνοπτικά

$$\left[\hat{h}_{ij}\right] = R_A\left[h_{ij}\right].$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $[x^a] \to [\hat{x}^a]$ που ορίζεται στο (1.7.5) δίνεται από το εξής :

$$\left[x^\alpha\right] \xrightarrow[G]{} \left[h_{ij}\right] \xrightarrow[R_A]{} \left[\hat{h}_{ij}\right] \xrightarrow[G^{-1}]{} \left[x^\alpha\right] \quad (1.7.6)$$

και ο Lorentz μετασχηματισμός Λ_A που ορίζεται ανάλογα από το (1.7.5) [ή το (1.7.6)] είναι

$$\Lambda_A = G^{-1} R_A G .$$

Υπολογίζοντας_ το $G^{-1}R_AG$ αναλυτικά παρατηρούμε ότι οι είσοδοι Λ^α_β

του Λ_A δίνονται από τα εξής :

$$\begin{aligned}
\Lambda^1_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\delta} + \hat{\beta}\gamma + \beta\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\delta) & \Lambda^1_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\delta} + \hat{\beta}\gamma - \beta\hat{\gamma} - \hat{\alpha}\delta) \\
\Lambda^2_1 &= \frac{1}{2}(-\alpha\hat{\delta} + \hat{\beta}\gamma - \beta\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\delta) & \Lambda^2_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\delta} - \hat{\beta}\gamma - \beta\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\delta) \\
\Lambda^3_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\beta} - \gamma\hat{\delta} + \hat{\alpha}\beta - \hat{\gamma}\delta) & \Lambda^3_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\beta} - \gamma\hat{\delta} - \hat{\alpha}\beta + \hat{\gamma}\delta) \\
\Lambda^4_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\beta} + \gamma\hat{\delta} + \hat{\alpha}\beta + \hat{\gamma}\delta) & \Lambda^4_2 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\beta} + \gamma\hat{\delta} - \hat{\alpha}\beta - \hat{\gamma}\delta) \\
\Lambda^1_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\gamma - \beta\hat{\delta} - \hat{\beta}\delta) & \Lambda^1_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\gamma + \beta\hat{\delta} + \hat{\beta}\delta) \\
\Lambda^2_3 &= \frac{1}{2}(-\alpha\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\gamma + \beta\hat{\delta} - \hat{\beta}\delta) & \Lambda^2_4 &= \frac{1}{2}(-\alpha\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\gamma - \beta\hat{\delta} + \hat{\beta}\delta) \\
\Lambda^3_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\alpha} - \gamma\hat{\gamma} - \beta\hat{\beta} + \delta\hat{\delta}) & \Lambda^3_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\alpha} - \gamma\hat{\gamma} + \beta\hat{\beta} - \delta\hat{\delta}) \\
\Lambda^4_3 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\alpha} + \gamma\hat{\gamma} - \beta\hat{\beta} - \delta\hat{\delta}) & \Lambda^4_4 &= \frac{1}{2}(\alpha\hat{\alpha} + \gamma\hat{\gamma} + \beta\hat{\beta} + \delta\hat{\delta})
\end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Παρατηρούμε ότι η (4,4) είσοδος του $[x^a] \to [\hat{x}^a]$ του Λ_A είναι θετική και οπότε το Λ_A είναι ορθοχρονοειδές. Επιπλέον,

$$\det \Lambda_A = \det(G^{-1} R_A G) = (\det G^{-1}) \cdot (\det R_A) \cdot (\det G) = \det R_A$$

και μπορεί να δειχθεί με άμεσους υπολογισμούς ότι

$$\det R_A = (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot (\hat{\alpha}\hat{\delta} - \hat{\beta}\hat{\gamma}) = 1$$

και ότι το Λ_A είναι κατάλληλο. Η απεικόνιση $A \to \Lambda_A$ του $SL(2,C)$ στο L καλείται απεικόνιση περιστροφής. Σημειώνουμε ότι αν και το A και το B είναι στο $SL(2,C)$, τότε :

$$\Lambda_A \Lambda_B = (G^{-1} R_A G)(G^{-1} R_B G) = G^{-1}(R_A R_B) G \,. \quad (1.7.8)$$

Αλλά αφού

$$M_{AB}(H) = (AB)H(AB)^{CT} = ABHB^{CT} A^{CT} = A(BHB^{CT})A^{CT} = M_A(BHB^{CT}) =$$
$$= M_A(M_B(H)) = M_A \circ M_B(H)$$

καταλήγουμε στο

$$M_{AB} = M_A \circ M_B$$

και επομένως

$$R_{AB} = R_A R_B \,.$$

Οπότε, η (1.7.8) δίνει

$$\Lambda_A \Lambda_B = G^{-1} R_{AB} G$$

και επομένως

$$\Lambda_A \Lambda_B = \Lambda_{AB} \,. \quad (1.7.9)$$

Ενώ ο πίνακας περιστροφής διατηρεί τον πολλαπλασιασμό δηλαδή είναι μια ομάδα ομομορφισμών του $SL(2,C)$ στο L. Δεν είναι 1-1 αφού είναι προφανές από την (1.7.7) ότι και οι δύο, A, $-A$, έχουν την ίδια εικόνα στο L. Στην πραγματικότητα, ισχυριζόμαστε ότι είναι ακριβώς 2-1, δηλαδή ότι αν τα A, B είναι

στο $SL(2,C)$ και $\Lambda_A = \Lambda_B$, τότε $A = \pm B$. Για να το καταλάβουμε σημειώνουμε ότι το AB^{-1} είναι στο $SL(2,C)$ και, αφού η απεικόνιση περιστροφής είναι ένας ομομορφισμός,

$$\Lambda_{AB^{-1}} = \Lambda_A \Lambda_{B^{-1}} = \Lambda_A (\Lambda_B)^{-1} = \Lambda_A (\Lambda_A)^{-1} = \textit{ταυτοτικός_πίνακας}\ .$$

Έστω :

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.7.7) για $\Lambda_{AB^{-1}}$ (=ταυτοτικός) μπορούμε να δείξουμε οτι

$$AB^{-1} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δηλαδή ότι $A = \pm B$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό θ ορίζουμε έναν 2x2 πίνακα $A(\theta)$ με

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2} \\ -\sinh\frac{\theta}{2} & \cosh\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι ο $A(\theta)$ είναι στο $SL(2,C)$ και ότι :

$$\Lambda_{A(\theta)} = L(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}.$$

Ένα στοιχείο $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ του $SL(2,C)$ καλείται πίνακας ορθογώνιος αν $A^{-1} = A^{CT}$, δηλαδή αν

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} & \hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\hat{\alpha} + \beta\hat{\beta} & \alpha\hat{\gamma} + \beta\hat{\delta} \\ \hat{\alpha}\gamma + \hat{\beta}\delta & \gamma\hat{\gamma} + \delta\hat{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.10)$$

Το σύνολο όλων αυτών των πινάκων ορίζεται ως SU_2 και είναι υποομάδα του $SL(2,C)$, δηλαδή το SU_2 είναι επίσης κλειστό κάτω από τη διαμόρφωση των γινομένων και της αντιστρεψιμότητας.

Σημειώνουμε ότι αν ο A είναι στο SU_2, τότε από την (1.7.10), η (4,4) είσοδος του Λ_A είναι : $\frac{1}{2}(\alpha\hat{\alpha}+\gamma\hat{\gamma}+\beta\hat{\beta}+\delta\hat{\delta})=\frac{1}{2}(1+1)=1$ και επομένως το Λ_A είναι μια περιστροφή στο L από το λήμμα 1.3.4. Επομένως, η απεικόνιση περιστροφής μεταφέρει το SU_2 στην υποομάδα περιστροφής *R* του *L*. Μπορούμε να δείξουμε ότι, στην πραγματικότητα, αυτό απεικονίζει το SU_2 στο *R*. Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας το οποίο ισχυρίζεται ότι οποιοσδήποτε 3x3 πίνακας περιστροφής $\left[R^i_j\right]$, i,j=1,2,3, μπορεί να αντικατασταθεί από τους παράγοντες των «γωνιών Euler» ϕ_1,θ,ϕ_2 ως εξής :

$$\left[R^i_j\right]=\begin{bmatrix}\cos\phi_2\cos\phi_1-\cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\phi_1-\cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & \sin\phi_2\sin\theta\\ \sin\phi_2\cos\phi_1+\cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\sin\phi_1+\cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi_1 & \sin\theta\cos\phi_1 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

.

<u>Παρατήρηση:</u>

Ο $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot i\cdot(\phi_1+\phi_2)} & i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot i\cdot(\phi_2-\phi_1)}\\ i\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot i\cdot(\phi_2-\phi_1)} & \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot i\cdot(\phi_1+\phi_2)}\end{bmatrix}$

είναι στο SU_2 και απεικονίζει στο

$$\begin{bmatrix} & & & 0\\ & \left[R^i_j\right] & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

κάτω από την απεικόνιση περιστροφής.

Με αυτό μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η απεικόνιση περιστροφής είναι μονοσήμαντη, δηλαδή κάθε κατάλληλος, ορθοχρονοειδές Lorentz μετασχηματισμός Λ είναι $\Lambda_{\pm A}$ για κάποια A στο $SL(2,C)$. Από το θεώρημα 1.3.5, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός θ και δύο σχέσεις R_1 και R_2 στο L έτσι ώστε $\Lambda = R_1 L(\theta) R_2$. Εκεί υπάρχουν στοιχεία A_1 και A_2 του $SU_2 \subseteq SL(2,C)$ τα οποία η απεικόνιση περιστροφής μεταφέρει στα R_1 και R_2, αντίστοιχα. Επίσης, ο $A(\theta)$ απεικονίζει στο $L(\theta)$. αφού η απεικόνιση περιστροφής είναι ένας ομομορφισμός, ο $A_1 A(\theta) A_2$ απεικονίζει στο $R_1 L(\theta) R_2 = \Lambda$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Και έτσι τα στοιχεία του $SL(2,C)$ γενικεύουν τους Lorentz μετασχηματισμούς. Αλλά κάνουν και άλλα πράγματα, ίσως πιο γνωστά. Ειδικότερα, κάθε 2x2 ì ιγαδικός μονομετρικός πίνακας ορίζει ένα (κανονικοποιημένο) κλασματικό γραμμικό μετασχηματισμό της σφαίρας του Riemann (σε πιο επεκταμένο επίπεδο). Υπάρχει, στην πραγματικότητα, μια καταπληκτική σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο δραστηριότητες που σκοπεύουμε να ερευνήσουμε αφού δίνει αρκετό φως και στα μαθηματικά αλλά και στην κινηματική της Lorentz ομάδας. Πρώτα όμως μερικά εισαγωγικά.

Μέχρι εδώ έχουμε σκεφτεί το Lorentz μετασχηματισμό A αποκλειστικά ως έναν ισότιμο πίνακα μετασχηματισμού – αυτό που καλείται παθητικός μετασχηματισμός (αφήνοντας σταθεροποιημένα σημεία, αλλά αλλάζοντας ισότιμα συστήματα). Θα είναι χρήσιμο τώρα να καταλάβουμε ότι ο A έχει μια ισοδύναμη φυσική μετάφραση ως έναν ενεργό μετασχηματισμό (αφήνοντας τα ισότιμα σταθεροποιημένα συστήματα, αλλά μετακινώντας σημεία). Πιο συγκεκριμένα, σκεφτόμαστε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό $L: M \to M$ και σταθεροποιούμε μια βάση $\{e_a\}$. Τότε η $\{\hat{e}_a\} = \{Le_a\}$ είναι η εικόνα βάσης και γράφουμε $e_b = \Lambda^a_b e_a$. Τότε ο αντίστοιχος Lorentz μετασχηματισμός Λ ορίζεται ως

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & \Lambda^1_4 \\ \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & \Lambda^2_4 \\ \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & \Lambda^3_4 \\ \Lambda^4_1 & \Lambda^4_2 & \Lambda^4_3 & \Lambda^4_4 \end{bmatrix}.$$

Δίνουμε έμφαση ξανά στο γεγονός ότι το Λ είναι ο πίνακας το L^{-1} σε σχέση με τη βάση $\{e_a\}$. Τώρα για κάθε x στο M μπορούμε να γράψουμε $x = x^a e_a = \hat{x}^a \hat{e}_a$ όπου $[\hat{x}^a] = \Lambda[x^a]$. Οπότε σκεφτόμαστε το Λ σα να δρα πάνω στις ισοτιμίες ενός σταθεροποιημένου σημείου για να δώσει τις ισοτιμίες του ίδιου σημείου σε ένα νέο ισότιμο σύστημα. Όμως, παρατηρούμε ότι $L^{-1}x = L^{-1}(\hat{x}^a \hat{e}_a) = \hat{x}^a L^{-1}\hat{e}_a = \hat{x}^a e_a$ και έτσι θα μπορούσαμε να δούμε το Λ σα να δρα στις ισοτιμίες $[\hat{x}^a]$ κάποιου σημείου σχετικό με την $\{e_a\}$ και αποδίδοντας τις ισοτιμίες $[\hat{x}^a]$ του νέου σημείου (το $L^{-1}x$) στο ίδιο σύστημα ισοτιμιών. Θα είναι χρήσιμο για αργότερα να παρατηρήσουμε ότι, με τη νέα μετάφραση του Λ, το $L^{-1}x$ έχει την ίδια θέση και χρόνο στο S που έχει το x στο S.

Θα μας απασχολήσει περισσότερο στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας οι «παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις» και επιρροή σε αυτές του Lorentz μετασχηματισμού. Για κάθε x στον παρελθοντικό φωτοειδή κώνο $C_N^-(0)$ στο 0 στο M ορίζουμε τη παρελθοντική φωτοειδής κατευθύνση R_x^- διαμέσου του x ως

$$R_x^- = \{ax : a \geq 0\}.$$

Οι μελλοντικές φωτοειδής κατευθύνσεις ορίζονται ανάλογα και όλα τα αποτελέσματα είναι προφανώς τα μελλοντικά δυικά. Η μηδενική κατεύθυνση διαμέσου του x είναι το σύνολο όλων των πραγματικών πολλαπλασιαστών του x, δηλαδή $R_{0,x}$. Προφανώς, αν το y είναι ένας μονοδιάστατος πολλαπλασιαστής του x, τότε $R_y^- = R_x^-$. Παρατηρούμε ότι αν το $L: M \to M$ είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός ανταποκρινόμενος σε οποιονδήποτε ορθοχρονοειδές Lorentz μετασχηματισμό Λ, τότε το $x \in C_N^-(0)$ υποδηλώνει ότι $Lx \in C_N^-(0)$ και επομένως ορίζεται το R_{Lx}^-. Επιπλέον,

$$L(R_x^-) = L(\{ax : a \geq 0\}) = \{L(ax) : a \geq 0\} = \{aLx : a \geq 0\} = R_{Lx}^-$$

δηλαδή

$$L(R_x^-) = R_{Lx}^-.$$

Συνεπώς, το L (και επομένως το L^{-1} και άρα και το Λ) μπορεί να θεωρηθεί σα μια απεικόνιση πάνω στις παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις.

Για να ανακαλύψουμε τη σχέση ανάμεσα στους Lorentz και κλασματικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια φυσική 1-1 ανταπόκριση ανάμεσα στις παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις και στα σημεία πάνω στα αντίγραφα της Riemann σφαίρας. Ειδικότερα, σταθεροποιούμε μια παραδεκτή βάση $\{e_a\}$ του M και θέτουμε με S^- την τομή του παρελθοντικού φωτοειδούς κώνου $C_N^-(0)$ στο *0* με το υπερεπίπεδο $x^4 = -1$:

$$S^- = \{x = x^a e_a : x \in C_N^-(0), x_4 = -1\}.$$

Παρατηρούμε ότι, αφού το $x \in C_N^-(0)$ αν και μόνο αν

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^4)^2 ,$$

$$S^- = \{x = x^a e_a : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

και άρα είναι ένα αντίγραφο της συνηθισμένης 2-σφαιρας S^2 στη στιγμιαία 3-χωρη $x^4 = -1$ (σχήμα 1.7.1).

Αντίστροφα, κάθε σημείο στο S^- προσδιορίζει ένα μοναδικό past φωτοειδές direction στο *M*. Για να καταφέρουμε μια σαφής αναπαράσταση αυτής της past φωτοειδές direction θεωρούμε το S^- ως τη σφαίρα του Riemann, που σημαίνει ότι θέλουμε να ταυτίσουμε τα σημεία του S^- με επεκταμένους μιγαδικούς αριθμούς μέσω στερεογραφικής προβολής (βλέπε, π.χ. το [A]). Σ' αυτό το σημείο παίρνουμε *N = (0,0,1,-1)* στο S^- να είναι ο βόρειος πόλος και προβάλλουμε στο δισδιάστατο επίπεδο *C* στο $x^4 = -1$ που δίνεται από το $x^3 = 0$ (βλέπε σχήμα 1.7.2). Η σχέση μεταξύ ενός σημείου $P(x^1,x^2,x^3,-1)$ εκτός του *N* στο S^- και της εικόνας ζ στο μιγαδικό επίπεδο *C* υπό τη στερεογραφική προβολή από το *N* υπολογίζεται εύκολα και συνοψίζεται στις (1.7.12) και (1.7.13):

$$\zeta = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3} \quad , (1.7.12)$$

$x^1 = \dfrac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\,\bar{\zeta} + 1}$,

$x^2 = \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}}{\imath(\zeta\,\bar{\zeta} + 1)}$, (1.7.13)

$x^3 = \dfrac{\zeta\,\bar{\zeta} - 1}{\zeta\,\bar{\zeta} + 1}$,

$x^4 = -1$

Φυσικά, ο βόρειος πόλος *N(0,0,1,-1)* του S^- αντιστοιχεί στο κατ' εκδοχή σημείο του επεκταμένου μιγαδικού επιπέδου *C*. Για να αποφύγουμε την ανάγκη να αντιμετωπίσουμε το κατ' εκδοχή σημείο προτιμάμε να αναπαραστήσουμε επεκταμένους μιγαδικούς αριθμούς ζ σε ''προβολικές ομογενείς συντεταγμένες'', δηλαδή ένα ζευγάρι $\begin{bmatrix} \xi \\ n \end{bmatrix}$ μιγαδικών αριθμών, όχι και οι 2 μηδενικοί, που ικανοποιούν την $\zeta = \dfrac{\xi}{n}$

(οποιοδήποτε ζευγάρι $\begin{bmatrix} \xi \\ n \end{bmatrix}$ με $\xi \neq 0$ δίνει το κατ' εκδοχή σημείο).

Όσο αφορά το $\begin{bmatrix} \xi \\ n \end{bmatrix}$, η (1.7.13) γίνεται

$x^1 = \dfrac{\xi\bar{n} + \bar{\xi}n}{\xi\bar{\xi} + n\bar{n}}$,

$x^2 = \dfrac{\xi\bar{n} - \bar{\xi}n}{i(\xi\bar{\xi} + n\bar{n})}$, (1.7.14)

$x^3 = \dfrac{\xi\bar{\xi} - n\bar{n}}{\xi\bar{\xi} + n\bar{n}}$,

$x^4 = -1$

Αντιστρέφοντας το σκεπτικό μας βρίσκουμε ότι οποιοδήποτε ζευγάρι $\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix}$ ì ι-γαδικών αριθμών, όχι και οι 2 μηδενικοί, ανυψώνουν το σημείο P(x^1,x^2,x^3,-1) στο S^- που δίνεται από την (1.7.14). Βρισκόμενο στο S^- [και επομένως και στο $C_N^-(0)$] αυτό το σημείο προσδιορίζει ένα past φωτοειδές direction R_P^- το οποίο, για έμφαση, προτιμάμε να συμβολίζουμε $R^-_{\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix}}$.

Πολλαπλασιάζοντας το P με το θετικό πραγματικό αριθμό $\xi\bar{\xi}+n\bar{n}$ εγείρουμε ένα άλλο σημείο X στο $C_N^-(0)$: $X = X^a e_a$, όπου

$$X^1 = \xi\bar{n}+\bar{\xi}n\,,\ X^3 = \xi\bar{\xi}-n\bar{n}\,,$$

$$X^2 = \frac{1}{i}(\xi\bar{n}-\bar{\xi}n)\,,\ X^4 = -(\xi\bar{\xi}+n\bar{n}) \quad (1.7.15)$$

το X , φυσικά, προσδιορίζει επίσης μία past φωτοειδές direction R_X^- και πράγματι,

$$R_X^- = R^-_{\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix}} \quad (1.7.16)$$

Τελικά, είμαστε σε θέση να ενώσουμε όλα τα προηγούμενα σε ένα. Ξεκινάμε με ένα στοιχείο $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ του SL(2C). Τότε το A προσδιορίζει μια απεικόνιση που απεικονίζει οποιοδήποτε ζευγάρι $\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix}$,όχι και οι 2 μηδενικοί, σε ένα άλλο τέτοιο ζευγάρι που συμβολίζουμε

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{n}\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\xi+\beta n\\ \gamma\xi+\delta n\end{bmatrix}, \quad (1.7.17)$$

Παρατηρούμε ότι, αν θεωρηθεί ως απεικόνιση στο S^- (ή στο $\bar{C}$), η (1.7.17)

προσδιορίζει ένα *γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό*. Πράγματι, όσο αφορά τον επεκταμένο μιγαδικό αριθμό ζ = $\frac{\xi}{n}$, η (1.7.17) είναι ίση με

$$\zeta = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

Τώρα, $\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{n} \end{bmatrix}$ καθορίζει έναν $\overline{X}$ στον $C_N^-(0)$ από την (1.7.15)(με καπελάκια) και αυτό, με τη σειρά του, καθορίζει ένα παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις $R_X^- = R_{\begin{bmatrix} \xi \\ n \end{bmatrix}}^-$. Απ' την άλλη, το *A* ανυψώνει επίσης ,μέσω της spinar απεικόνισης, σ' ένα κατάλληλο ορθοχρονοειδές μετασχηματισμό Lorentz Λ_A ο οποίος, λαὶβανόμενος ως ενεργός μετασχηματισμός, απεικονίζει το *X* σ' ένα σημείο $\Lambda_A X$ στον $C_N^-(0)$. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι τα *X* και $\Lambda_A X$ είναι στην ουσία το ίδιο σημείο ,έτσι ώστε, συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα του γραμμικού κλασματικού μετασχηματισμού (1.7.17)που καθορίζεται από το A σε past φωτοειδές directions είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Lorentz Λ_A που καθορίζεται από το A, δηλαδή,

$$R_{\begin{bmatrix} \xi \\ n \end{bmatrix}}^- = R_{\Lambda_A X}^- \text{ , (1.7.18)}$$

Για να τ' αποδείξουμε όλα αυτά συνεχίζουμε ως εξής:

Ξεκινάμε λύνοντας την (1.7.15)

για τα 4 γινόμενα $\xi\overline{n}, \overline{\xi}n, \xi\overline{\xi}, n\overline{n}$ όπου παίρνουμε

$$\xi\overline{\xi} = \frac{1}{2}(X^3 + X^4)\text{ , } \xi\overline{n} = \frac{1}{2}(X^1 + iX^2)$$

$$\overline{\xi}n = \frac{1}{2}(X^1 - iX^2)\text{ , } n\overline{n} = \frac{1}{2}(-X^3 + X^4)\text{ ,}$$

έτσι ώστε,

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X^3 + X^4 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & -X^3 + X^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \text{ (1.7.19)}$$

Τώρα παρουσιάζουμε το μονοπαραμετρικό μετασχηματισμό (1.7.17) για να πάρουμε το $\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{bmatrix}$. Το σημείο ανταπόκρισης $\hat{X} = \hat{X}^a e_a$ που δίνεται από την (1.7.15) με καπελάκια πρέπει να ικανοποιεί την (1.7.19) με καπελάκια, δηλαδή

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\hat{X}^3+\hat{X}^4 & \hat{X}^1+i\hat{X}^2\\ \hat{X}^1-i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3+\hat{X}^4\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\hat{X}^3+\hat{X}^4 & \hat{X}^1+i\hat{X}^2\\ \hat{X}^1-i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3+\hat{X}^4\end{bmatrix}^{ct} =$$

$$= \left[\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\xi} & \hat{\eta}\end{bmatrix}\right]^{CT} = \begin{bmatrix}\hat{\xi} & \hat{\eta}\end{bmatrix}^{CT}\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{bmatrix}^{CT} = \begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{bmatrix}^{CT}\left[A\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}\right]^{CT} = A\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}^{CT} A^{CT} =$$

$$= A\left[\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\xi} & \bar{\eta}\end{bmatrix}\right]A^{CT} = \frac{1}{2}A\begin{bmatrix}X^3+X^4 & X^1+iX^2\\ X^1-iX^2 & -X^3+X^4\end{bmatrix}A^{CT}$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix}\hat{X}^3+\hat{X}^4 & \hat{X}^1+i\hat{X}^2\\ \hat{X}^1-i\hat{X}^2 & -\hat{X}^3+\hat{X}^4\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}X^3+X^4 & X^1+iX^2\\ X^1-iX^2 & -X^3+X^4\end{bmatrix}A^{CT}. \quad (1.7.20)$$

Συγκρίνοντας τις (1.7.20) και (1.7.15) και τον ορισμό του Λ_A βρίσκουμε ότι, πράγματι,

$$\mathrm{X} = \Lambda_A \mathrm{X},$$

κι έτσι η (1.7.18) αποδείχτηκε.

Εφόσον η απεικόνιση περιστροφής είναι μονοσήμαντη, κάθε στοιχείο του *L* είναι Λ_A για κάποια *A* στο *SL(2,C)* και έτσι κάθε στοιχείο του *L* καθορίζει έναν γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό του S^- που έχει την ίδια επιρροή στα past φωτοειδές directions ($\pm$ A ανυψώνει τον ίδιο γραμμικό κλασματικό μετασχηματισμό). Αντίστροφα, αφού τα past φωτοειδές διανύσματα επεκτείνουν το *M* ένας μετασχηματισμός Lorentz προσδιορίζεται πλήρως από τις επιρροές του στα past φωτοειδές directions. Μερικές συνέπειες αυτής της αντιστοιχίας μεταξύ στοιχείων του *L* και γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών του S^- είναι άμεσες.

Θεώρημα 1.7.1 : Ένας κανονικός, ορθοχρονοειδές μετασχηματισμός Lorentz, αν δεν είναι ταυτότητα, αφήνει αναλλοίωτα τουλάχιστον ένα και το πολύ δυο past φωτοειδές directions.

Αυτό φαίνεται από το γνωστό γεγονός ότι οποιοσδήποτε γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός της σφαίρας του Riemann, αν δεν είναι ταυτότητα, έχει δυο (πιθανώς τυχαία) σταθερά σημεία (βλέπε [A]). Μια άλλη γνωστή ιδιότητα του γραμμικού κλασματικού μετασχηματισμού είναι ότι προσδιορίζονται πλήρως από τις τιμές τους σε οποιαδήποτε 3 διακεκριμένα σημεία στο επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο (βλέπε [A]).

Ως εκ τούτου:

Θεώρημα 1.7.2 : Ένας κανονικός, ορθοχρονοειδές μετασχηματισμός Lorentz προσδιορίζεται πλήρως από τις επιδράσεις του σε οποιαδήποτε 3 διακεκριμένα past φωτοειδές directions. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντων 2 ομάδων των τριών διακεκριμένων παρελθοντικών φωτοειδών κατευθύνσεων υπάρχει ένα και μόνον ένα στοιχείο του L που απεικονίζει την πρώτη ομάδα (1-1) στη δεύτερη.

Σαν τελευταία εφαρμογή θα αναπτύξουμε ένα αξιοθαύμαστο αποτέλεσμα του Penrose [**Pen**] που σχετίζεται με αυτό που ονομάζουμε «αφάνεια της συστολής του Lorrentz». Ένας επιτρεπτός παρατηρητής O «παρατηρεί» με έναν αρκετά ακριβή και καλά προσδιορισμένο τρόπο. Κάποιος εικονογραφεί το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή σαν ένα πλέγμα χωρικών συντεταγμένων με ρολόγια τοποθετημένα στα σημεία του πλέγματος και είτε συσκευές εγγραφής είτε βοηθοί μαζί με τα ρολόγια για να κάνουν τις απαραίτητες τοπικές μετρήσεις. Ύστερα ο O παρατηρεί, ας πούμε, μια κινούμενη σφαίρα είτε βάζοντας σε λειτουργία τις συσκευές είτε προειδοποιώντας τους βοηθούς να καταγρά-

φουν τις στιγμές άφιξης διάφορων σημείων της σφαίρας στα σημεία που αυτοί βρίσκονται. Όταν τα πράγματα ξαναηρεμήσουν ο O θα μαζέψει όλες τα δεδομένα για ανάλυση. Τότε θα μπορεί, για παράδειγμα, να κατασκευάσει μια «εικόνα» της σφαίρας διαλέγοντας (αυθαίρετα) κάποια στιγμή του χρόνου, συλλέγοντας όλες τις τοποθεσίες στο πλέγμα του που κατέγραψε το πέρασμα ενός σημείου στα όρια της σφαίρας αυτήν την δεδομένη στιγμή και να «πλέξει» αυτά τα σημεία στο πλέγμα του. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα βρει τον εαυτό του να κατασκευάζει, όχι μια σφαίρα, αλλά μια έλλειψη εξαιτίας της συστολής του μήκους κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Αυτό που ο παρατηρητής μας ''βλέπει'' στην πραγματικότητα (με τα μάτια του ή μέσα απ' τον φακό), παρ' όλ' αυτά, δεν είναι τόσο ξεκάθαρο. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια (παραδεκτά ιδανική) γεωμετρική αναπαράσταση στο M αυτού του ''πεδίου ορατότητας''.

Είναι ένα καθαρό απόγευμα και, όπως περπατάς έξω, κοιτάζεις ψηλά και βλέπεις την Μεγάλη Άρκτο. Πιο συγκεκριμένα, εστιάζεις την ματιά σου σε ένα πλήθος εισερχόμενων φωτονίων (απομόνωσε και θεώρησε ένα από κάθε άστρο του αστερισμού). Άσχετα από το πότε έφυγαν από την πηγή τους αυτά τα φωτόνια φτάνουν στην επιφάνεια ταυτόχρονα (στο δικό σου σύστημα αναφοράς) και συνεπώς δημιουργείς ένα σχέδιο (εικόνα) που καταγράφεται στον δικό σου εγκέφαλο. Αυτό το σχέδιο είναι αυτό που ''βλέπεις''. Που μπορούμε να το βρούμε στο M; Κάθε φωτόνιο που βλέπεις έχει μια κοσμική γραμμή στο M που απλώνεται κατά μήκος του παρελθοντικού φωτοειδούς κώνου $C_N^-(0)$ (βρίσκεστε στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων σας και η εικόνα καταγράφεται στον εγκέφαλό σας όταν $x^4 = 0$).

Λίγο πριν τη στιγμή $x^4 = 0$ τα φωτόνια επέδρασαν στην επιφάνεια των ματιών σας και δημιούργησαν την εικόνα. Όταν $x^4 = -1$ τα φωτόνια βρίσκονταν όλα σε μια σφαίρα ακτίνας 1 πάνω στο σύστημα συντεταγμένων σου και δημιούργησαν το ίδιο σχέδιο που κατέγραψε το μάτι σου λίγο αργότερα. Προβάλλοντας την εικόνα στο επίπεδο $x^4 = -1$ στο M βρίσκουμε την κοσμική γραμμή αυτών των φωτονίων να τέμνει το S^- στη συγκεκριμένη εικόνα που

''βλέπεις''. Ως γεωμετρική αναπαράσταση του τι βλέπεις (για το γεγονός $x^1=x^2=x^3=x^4=0$) παίρνουμε την τομή με το S^- των κοσμική γραμμήss όλων των φωτονίων που προκαλούν τον εγκέφαλό σου να καταγράψει την εικόνα όταν $x^4 = 0$.

Τώρα κάνουμε την εξής ερώτηση. Ας υποθέσουμε ότι αυτό που βλέπεις δεν είναι η Μεγάλη Άρκτος, αλλά κάτι με κυκλικό περίγραμμα, π.χ. μια σφαίρα σε αδράνεια στο σύστημα αναφοράς σου. Τι βλέπει ένας άλλος αποδεκτός παρατηρητής, ο οποίος κινείται σε σχέση με το δικό σου σύστημα αναφοράς, αλλά συναντάται τυχαία με σένα στην αρχή των αξόνων; Σύμφωνα με το νέο παρατηρητή, η σφαίρα κινείται και με βεβαιότητα πρέπει να εμφανίζεται ότι συστέλλεται σύμφωνα με την κατεύθυνση της κίνησης. Σίγουρα, πρέπει να ''βλέπει'' ένα ελλειψοειδές και όχι ένα σφαιρικό σχήμα.

Κι όμως όχι! Θα διαφωνήσουμε ότι, παρ' όλο την συστολή του Lorentz σύìφωνα με την κατεύθυνση της κίνησης, η σφαίρα θα συνεχίσει να παριστά σφαιρικό περίβλημα για τον O (παρ' όλα αυτά, σε εκφυλισμένη περίπτωση, μπορεί να ''φαίνεται'' ο κύκλος ευθεία). Πράγματι, αυτό είναι αντανάκλαση ενός άλλου γνωστού χαρακτηριστικού των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών των σφαιρών του Riemann: απεικονίζουν σφαίρες σε σφαίρες. Έτσι, αν Λ είναι ο μετασχηματισμός Lorentz που σχετίζει το S με το $\widehat{S}$, τότε, θεωρούμενο ως ενεργός μετασχηματισμός σε παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις, απεικονίζει οποιαδήποτε οικογένεια παρελθοντικών φωτοειδών κατευθύνσεων που τέμνουν το S^- ,σε ένα κύκλο σε μια άλλη τέτοια οικογένεια. Με περισσότερες λεπτομέρειες θυμόμαστε ότι, για κάθε x στο M,το $\Lambda(x)[=L^{-1}(x)]$ έχει την ίδια θέση και τον ίδιο χρόνο στο S που το x έχει στο $\widehat{S}$. Συγκεκριμένα, $\Lambda(x)\in S^-$ εάν και μόνον εάν $x\in\widehat{S}^-$. Έτσι, το $\Lambda(R_x^-)=R_{\Lambda(x)}^-$ μοιάζει το ίδιο στον O όταν $x^4 = 0$ όπως το R_x^- μοιάζει στον O όταν $\widehat{x}^4=0$. Τώρα, αν έχουμε μια οικογένεια N από παρελθοντικες φωτοειδής κατευθύνσεις τότε η εμφάνιση της εικόνας στον O όταν $\widehat{x}^4=0$ θα είναι η ίδια όπως όταν $x^4 = 0$ για το Λ(N) του O. Αν οι ακτίνες στο N αναπαριστούν ένα σφαιρι-

κό περίβλημα στον *O* όταν $x^4 = 0$, το ίδιο θα κάνει και το *Λ(N)* και έτσι ο *O* θα δει επίσης σφαιρικό περίβλημα όταν $\hat{x}^4 = 0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. [Nab] Naber, Gregory L., The Geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of the special theory of relativity. Springer-Verlag, New York, 1992.
2. [Dav] Davis M. D. "The Nature and Power of Mathematics", Princeton University Press, 1993
3. [E] Einstein, A., et al., The Principle of Relativity, Dover, New York, 1958.
4. [GMS] Gelfand, I. M., R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications, Perg-amon, New York, 1963.
5. [La] Lang, S., Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1987.
6. [Le] Lenard, A., "A characterization of Lorentz transformations", Amer. J. Phys, 19(1978), 157.
7. [Ne] Newman, M. H. A.. "On the string problem of Dirac", J. London Math. Soc, 17(1942), 173-177.
8. [Pen] Penrose, R, "The apparent shape of a relativistically moving sphere", Proc. Camb. Phil. Soc, 55(1959), 137-139.
9. [PR] Penrose. R. and W. Rindler, Spinors and Spacetime, Vols. I-II, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984, 1986.
10. [R] Robb, A. A., Geometry of Space and Time, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1936.
11. [Sa] Salmon, G., A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions, Vol. 1, Chelsea, New York.
12. [We] Weyl, H., Space-Time-Matter, Dover, New York, 1952.

13. [Wi] Willard, S., General Topology, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.

14. [Z1] Zeeman, E. C, "Causality implies the Lorentz group", J. Math. Phys, (1964), 490-493.

15. [Z2] Zeeman, E. C, "The topology of Minkowski space", Topology, 6(1967), 161-170.

16. Καρτσακλής Χρ. Α "Γενική Θεωρία της Σχετικότητας – Θεωρία της Βαρύτητας", Παν. Εκδόσεις ΕΚΠΑ (2008)