ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**της**
**Ματθαίου Σοφίας**

# Διδασκαλία των θετικών και αρνητικών αριθμών βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης

**Επιβλέπων καθηγητής: Κυνηγός Χρόνης**

**ΙΟΥΝΙΟΣ 2005**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή ..... 3

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**
ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Προέλευση..... 5
1.2 Γνωστικά εμπόδια – Εκπαιδευτική έρευνα ..... 5

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Αρχές διδασκαλίας της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης ..... 9
2.2 Ιστορική εξέλιξη ..... 9
2.2.1 Περιγραφή των στόχων της διδασκαλίας του Wiskobas ..... 10
2.3 Το πλαίσιο της θεωρίας διδασκαλίας της PME ..... 15
2.3.1 Επίπεδα Van Hiele ..... 15
2.3.2 Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal ..... 17
2.3.3 Προοδευτική μαθηματικοποίηση ..... 18
2.3.4 Το πλαίσιο και τα προβλήματα πλαισίου ..... 20
2.3.5 Η χρήση μοντέλων στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση ..... 21
2.3.6 Σύγκριση των τεσσάρων τάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση ..... 21
2.3.7 Ο Κονστρουκτιβισμός και η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση ..... 23
2.3.8 Η χρήση χειρισμών στη PME ..... 24

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**
ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

3.1 Μαθηματικά σε πλαίσιο ( Mathematics in Context) ..... 25
3.1.1 Το εκπαιδευτικό υλικό των MiC ..... 25
3.1.2 Η διαδικασία ανάπτυξης του εκπαιδευτικού υλικού ..... 26
3.1.3 Η φιλοσοφία των MiC ..... 26
3.1.4 Προοδευτική μαθηματικοποίηση των εννοιών στην Άλγεβρα ..... 27
3.1.5 Το διδακτικό μοντέλο των MiC ..... 28
3.1.6 Το μαθησιακό περιβάλλον των MiC ..... 29
3.1.7 Από την παραδοσιακή στη ρεαλιστική διδασκαλία .....29
3.1.8 Οι επιδόσεις των μαθητών .....30
3.2 Νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση ..... 31
3.2.1 Μικρόκοσμοι – Υπολογιστικά περιβάλλοντα μάθησης ..... 31
3.2.2 Υπολογιστικά γεωμετρικά περιβάλλοντα για διερευνητική μάθηση-Logo .... 32
3.2.3 Αβάκιο-Χελωνόκοσμος ..... 32

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

4.1 Η έννοια ..... 34
4.1.1 Παρουσίαση της ανάπτυξης της έννοιας μέσα από το πλαίσιο των γεωμετρικών μοτίβων *(ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΟΤΙΒΑ)* ..... 36
4.2 Πρόσθεση και αφαίρεση *(ΣΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝ ΠΟΝΤΟΙ)* ..... 43
4.3 Άθροισμα πολλών προσθετέων *(ΤΟ ΑΣΑΝΣΕΡ)*..... 48
4.4 Σύγκριση θετικών και αρνητικών αριθμών *(ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ)* .....51
4.5 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση *(ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ -ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ)* ..... 54
4.6 Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων *(ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ -ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ)*... 59
4.7 Απαλοιφή παρενθέσεων *(ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ)* ..... 61
4.8 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ..... 63
4.8.1 Δραστηριότητα 1 (διερεύνηση σε τετραγωνισμένο χαρτί) ..... 63
4.8.2 Δραστηριότητα 2 (διερεύνηση στο «Χελωνόκοσμο») ..... 65

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

5.1 Σύγκριση σκοπών και στόχων της ελληνικής και της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπ/σης ..... 71
5.1.1.Διδακτικό μοντέλο ..... 73
5.1.2 Πρόταση σχεδιασμού της διδασκαλίας ..... 75
5.2 Ανάλυση και σύγκριση της διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών στις δύο προσεγγίσεις ..... 77
5.2.1 ΒΙΒΛΙΟ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ..... 77
5.2.2 ΒΙΒΛΙΟ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ..... 81
5.3 Συμπεράσματα ..... 86

Βιβλιογραφία ..... 88

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι**

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ..... 90

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ**

Διαγωνισμοί TIMSS και PISA (συγκριτικοί πίνακες) ..... 157

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών αποτέλεσαν αντικείμενο ερευνών σε παγκόσμιο επίπεδο οι οποίες κινήθηκαν σε τρεις κατευθύνσεις ( Κολέζα, 2000):

- Έρευνες που είχαν ως στόχο την διατύπωση μιας ολοκληρωμένης θεωρίας για την διδασκαλία και τη μάθηση.
- Έρευνες που προσπάθησαν να ερμηνεύσουν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν και κατανοούν τα Μαθηματικά
- Έρευνες που προσανατολίστηκαν στην ανάπτυξη μεθόδων διδασκαλίας και εκπαιδευτικού υλικού στη βάση των προηγουμένων αποτελεσμάτων.

Η τρίτη κατεύθυνση αποτελεί και την πρακτική εφαρμογή των συμπερασμάτων των ερευνών που έγιναν σε θεωρητικό επίπεδο. Οι ερευνητές προσπαθούν να απαντήσουν σε ένα κεντρικό ερώτημα που είναι και ερώτημα πολλών εκπαιδευτικών: *Τί πρέπει να γίνει σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής, ώστε ο εκπαιδευτικός να μπορέσει να βοηθήσει τους μαθητές αφ' ενός να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη και αφ' ετέρου να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής;*

Μια απάντηση στο ερώτημα μπορεί να αποτελέσει η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση και σε θεωρητικό και σε επίπεδο εφαρμογής.

***Η Ελληνική πραγματικότητα***

Η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα παρουσιάζει προβλήματα και ως προς το περιεχόμενο σπουδών και ως προς τις μεθόδους διδασκαλίας που εφαρμόζονται από τους εκπαιδευτικούς (Tzekaki, Sakonidis, Kaldrimidou, 2003) Οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών στους διεθνείς διαγωνισμούς TIMSS και PISA (Παράρτημα ΙΙ) υποδηλώνουν μια εκπαίδευση που παρέχει αποσπασματική μαθηματική γνώση, τελείως αποκομμένη από την πραγματικότητα. Έρευνες που έγιναν σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου (Tzekaki, Sakonidis, Kaldrimidou, 2003), έδειξαν ότι:

- Η απόδοση των μαθητών είναι σχετικά χαμηλή και κατά τη γνώμη των ερευνητών αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα.
- Οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ακολουθούν στην πλειοψηφία τους την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία: ο καθηγητής διδάσκει και οι μαθητές απομνημονεύουν κανόνες και διαδικασίες και προσπαθούν να τους εφαρμόσουν σε ένα πλήθος ασκήσεων.

Το δασκαλοκεντρικό μοντέλο (Tzekaki, Sakonidis, Kaldrimidou, 2003), που κυριαρχεί στην ελληνική εκπαίδευση, με τη διδασκαλία και τη μάθηση να αποτελούν δύο ξεχωριστές διαδικασίες, έχει προ πολλού αναθεωρηθεί. Εξ' άλλου οι οδηγίες του Π.Ι προς τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για μια πιο ενεργητική διδασκαλία με προσανατολισμό στην επίλυση προβλήματος (problem solving), καταδεικνύει την ύπαρξη του προβλήματος. Σύμφωνα με τον πρόεδρο του Π.Ι (Αλαχιώτης, 2004):

> ..... το εκπαιδευτικό μας σύστημα δεν μπορεί να συνεχίσει να πορεύεται στις γενικές συντεταγμένες του παραδοσιακού γνωσιοκεντρικού χαρακτήρα του σχολείου, της αποσπασματικότητας και της παθητικής απόκτησης των γνώσεων, καθώς οι κατακερματισμένες γνώσεις δεν συνιστούν γνώση. Το σχολείο, αντίθετα, πρέπει να .ναι

> μαθητοκεντρικό, κοινωνιοκεντρικό και βιωματικό, με όλους τους συντελεστές του συμμέτοχους, χώρος ελκυστικός, .....

Από το φθινόπωρο του 2000 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο άρχισε το σχεδιασμό της αναθεώρησης του εκπαιδευτικού συστήματος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Το γενικό πλαίσιο χαρακτηρίζεται από δύο κυρίως παραμέτρους. Την ισόρροπη κάθετη κατανομή της διδακτέας ύλης από τάξη σε τάξη, ένα νέο δηλαδή ενιαίο πλαίσιο προγραμμάτων σπουδών χωρίς άχρηστες επικαλύψεις και πρωθύστερα, και την οριζόντια διασύνδεση των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ.) των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων, παράμετρος που ονομάστηκε ως *«διαθεματική προσέγγιση»* (Αλαχιώτης, 2004)

Έχοντας ως σημείο εκκίνησης την ανάγκη αναθεώρησης της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα και παίρνοντας υπ' όψιν τις σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, πιστεύω ότι οι ιδέες της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης θα μπορούσαν να συνεισφέρουν θετικά στην αναθεώρηση και του περιεχομένου και της διδακτικής μεθοδολογίας στα μαθηματικά Η παρουσίαση της διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών αριθμών βασίσθηκε στο αναλυτικό πρόγραμμα «Μαθηματικά σε πλαίσιο» (Mathematics in Context) που σχεδιάστηκε πάνω στις αρχές της PME και είναι σύμφωνο με τα πρότυπα που έχει θέσει η NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Το αναλυτικό πρόγραμμα είναι αποτέλεσμα συνεργασίας των Ολλανδών ερευνητών του ινστιτούτου Freudenthal και συναδέλφων τους από πανεπιστήμιο των ΗΠΑ και εφαρμόζεται σε σχολεία των Ηνωμένων Πολιτειών.

Η πρόταση διδασκαλίας που περιγράφεται λεπτομερώς στο Παράρτημα Ι, περιλαμβάνει μια συνολική διδασκαλία των θετικών και αρνητικών για την Α΄ γυμνασίου και ολοκληρώνεται σε έξι ενότητες. Μία ενότητα (εν. 2) παρουσιάζεται με ελάχιστες αλλαγές από το πρόγραμμα (MiC), στις ενότητες 1, 4 χρειάστηκε επανασχεδιασμός ή/και προσαρμογή στην ελληνική πραγματικότητα, η 6$^{η}$ ενότητα επανασχεδιάστηκε και έγινε χρήση εκπαιδευτικού διερευνητικού λογισμικού, την 3$^{η}$ ενότητα καθώς και το μεγαλύτερο τμήμα της 5$^{ης}$ ενότητας τα σχεδίασα από την αρχή προσπαθώντας:

1. Να είμαι συνεπής στις αρχές της PME:

> Ο δάσκαλος αναλύει το διδακτικό υλικό και αν είναι απαραίτητο κατασκευάζει ένα παραλλαγμένο που αντικατοπτρίζει τις προσωπικές του απόψεις για τη διδασκαλία. Μετά την διδασκαλία μπορεί να επανεξετάσει όλες τις αλλαγές. Το θέμα λοιπόν δεν είναι ποτέ «τελειωμένο», «αποδεδειγμένο από τον καθηγητή» ούτε «έτοιμο προς χρήση» (Treffers, 1987)

2. Να αποφύγω

> ..... να γεμίσει ο αναθεωρημένος τρόπος διδασκαλίας με παραδοσιακές πρακτικές ή\και να αναπροσαρμοσθεί σε τέτοιον βαθμό ώστε να μη διαφέρει στην ουσία από τον παλαιό. (Romberg, 2001)

Το να εφαρμόζει κανείς αποσπασματικά ένα αναλυτικό πρόγραμμα, το οποίο βασίζεται σε διαφορετική φιλοσοφική θεώρηση της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, χωρίς προηγούμενη προετοιμασία καθηγητών και μαθητών, είναι ένα μάλλον ατυχές εγχείρημα με αμφίβολα αποτελέσματα.(Marshall, 2003) Αυτό που χρειάζεται είναι μία συνολική αναθεώρηση της διδασκαλίας των μαθηματικών που θα καλύπτει και τις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

> Οι θετικοί αριθμοί είναι πιο συγκεκριμένοι με την έννοια ότι είναι οι πρωτότυποι, οι αρχικοί και επομένως μπορεί να κάνει κανείς πράξεις με αυτούς. Οι αρνητικοί είναι δευτερεύοντες, επειδή έχουν εισαχθεί ως αποτέλεσμα πράξης η οποία αρχικά ήταν αδύνατη.....με άλλα λόγια, οι θετικοί είναι ενεργητικοί, οι αρνητικοί είναι παθητικοί.... (Freudenthal, 1983)

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται αφ' ενός στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας των αρνητικών αριθμών και αφ' ετέρου σε κάποιες πλευρές της εκπαιδευτικής έρευνας που αφορά τα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών και των πράξεών τους.

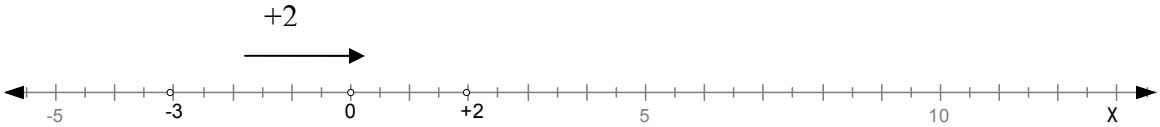
## 1.1 Προέλευση

Ιστορικά οι αρνητικοί αριθμοί οφείλουν την ύπαρξή τους στην ανάγκη για εγκυρότητα των αλγεβρικών τύπων. Συγκεκριμένα η ανάγκη για επίλυση της εξίσωσης $\alpha \cdot x + \beta = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ και $\gamma < \beta$, οδήγησε στην εισαγωγή των αρνητικών αριθμών. Τον $17^{ο}$ αιώνα χρησιμοποιήθηκαν οι αρνητικοί αριθμοί σε μια καινούρια γεωμετρία, την αναλυτική, για να περιγραφούν γεωμετρικές σχέσεις και μετασχηματισμοί. Για αιώνες οι μαθηματικοί έψαχναν να βρουν τρόπους να συγκεκριμενοποιήσουν τους κανόνες προσήμου για τους αρνητικούς αριθμούς. Προσπάθησαν μέσω ενός συγκεκριμένου μοντέλου με μεγέθη ή ποσότητες να εξηγήσουν για παράδειγμα ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Οι προσπάθειες για τη θεωρητική θεμελίωση των αρνητικών μέσω συγκεκριμένων μοντέλων (πάνω και κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, κέρδη και χρέη,..) οδήγησαν σε γνωστικές συγκρούσεις. Μόνο στα μέσα του $18^{ου}$ αιώνα ο Γερμανός μαθηματικός Hankel δουλεύοντας στο πλαίσιο των αριθμητικών συστημάτων της εποχής εκείνης, θεμελίωσε τους αρνητικούς διατυπώνοντας την αρχή της διατήρησης των τυπικών νόμων. Οι πράξεις μεταξύ των αρνητικών αριθμών ακολούθησαν τους διευρυμένους νόμους της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολ/μού και διαίρεσης που ίσχυαν για τους φυσικούς αριθμούς. Η σύνδεση με την πραγματικότητα για τους αρνητικούς κόπηκε και η έρευνα για την θεμελίωση μέσω συγκεκριμένων μοντέλων σταμάτησε.

## 1.2 Γνωστικά εμπόδια – Εκπαιδευτική έρευνα

Ενώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους φυσικούς αριθμούς διαισθητικά, δεν συμβαίνει το ίδιο για τους αρνητικούς ακεραίους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται προβλήματα (Streefland 1996, Gallardo 2003, ΕΜΕ 2004), στη διδασκαλία και τη μάθηση των θετικών και αρνητικών αριθμών και των πράξεών τους. Στη παραδοσιακή διδασκαλία χρησιμοποιήθηκαν οι κανόνες και η τυπική γλώσσα για την εκμάθησή τους. Αργότερα χρησιμοποιήθηκαν διάφορα μοντέλα για υποστηρίξουν την διαισθητική κατανόησή τους, με δημοφιλέστερη την αριθμογραμμή ως φυσική προέκταση της απεικόνισης των φυσικών αριθμών Ο Vergnaud .(Κολέζα, 2000) σε έρευνά του έδειξε ότι οι μαθητές κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών. Μελετώντας τις προσθετικές δομές διέκρινε δύο είδη υπολογισμών: τους αριθμητικούς και τους σχεσιακούς. Οι αριθμητικοί αναφέρονται σε καταστάσεις που μετρώνται με φυσικούς αριθμούς (έχω τρεις βαθμούς) και οι σχεσιακοί αναφέρονται σε μετασχηματισμούς (σχέσεις μεταξύ δύο

καταστάσεων) που εκφράζονται με θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς. Έρευνες επίσης έχουν δείξει ότι οι αριθμοί με πρόσημο ερμηνεύονται στο γνωστό μοντέλο της αριθμογραμμής από τους μαθητές ως δύο διαφορετικά αντικείμενα: ως θέσεις και ως μεταθέσεις.




Ο αριθμός +2 είτε σημαίνει ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στον άξονα είτε μεταφορά ενός σημείου δύο μονάδες προς τα δεξιά. Αυτή η διπλή ερμηνεία δημιουργεί δυσκολίες (Gallardo, 2003) στη χρησιμοποίηση του άξονα κατά την επίλυση προβλήματος.

*Προτάσεις διδασκαλίας*

Αρχικά ο Freudenthal (1973), πρότεινε την διαισθητική προσέγγιση των αρνητικών και των πράξεών τους με την αριθμογραμμή. Επίσης πρότεινε μία επαγωγική διερευνητική μέθοδο για τις πράξεις, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές συμπληρώνουν πίνακες πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, όπως:

| | | |
|---|---|---|
| $3 + 2 = 5$ | $3 – 2 = 1$ | $3 \cdot 2 = 6$ |
| $3 + 1 = 4$ | $3 – 1 = 2$ | $3 \cdot 1 = 3$ |
| $3 + 0 = 3$ | $3 – 0 = 3$ | $3 \cdot 0 = 0$ |
| $3 + (-1)=...$ | $3 - (-1) =...$ | $3 \cdot (-1) =...$ |

Η μέθοδος αυτή, σε συνδυασμό με την διαισθητική, θα μπορούσε να αποτελεί ενεργό συμπλήρωμά της. Ακόμη όμως και αν η διαισθητική δεν χρησιμοποιηθεί, η επαγωγική ήταν μία απολύτως φυσική προσέγγιση των αρνητικών.

– *Παλιά μοντέλα*

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται μοντέλα για την εισαγωγή και τις πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών, όπως:

- Κέρδος και ζημιά
- Ανεβοκατέβασμα σε ορόφους και σε υπόγειο
- Θερμόμετρο

Αυτά τα μοντέλα κατά τον Freudenthal (1983), δουλεύουν ικανοποιητικά μόνο για την πρόσθεση. Για την αφαίρεση είναι κατάλληλα μόνο όταν αφαιρείται θετικός από θετικό ή αρνητικό. Ο ισχυρισμός «πρόσθεση αρνητικού είναι το ίδιο με αφαίρεση θετικού» δεν μπορεί να υποστηριχθεί απο τα μοντέλα αυτά. Κάποιος μπορεί να καταλάβει ότι αρνητικό κέρδος είναι ίδιο με θετική ζημιά, αλλά η ισότητα: αρνητική άνοδος = θετική κάθοδος, δεν έχει νόημα. Η αδυναμία αυτών των μοντέλων κατά τον Freudenthal (1983), οφείλεται στην «διδακτική ασυμμετρία» μεταξύ θετικών και αρνητικών.

– *Νέα μοντέλα και πλαίσια*

Τα παλιά μοντέλα βασίσθηκαν στην αρχή ότι η αφαίρεση είναι η αντίθετη πράξη της πρόσθεσης (αφαίρεση=πρόσθεση αντίθετου), δηλαδή ορίζεται η αφαίρεση ως δευτερεύουσα πράξη βασισμένη στην αρχική, την πρόσθεση. Τα νέα μοντέλα (Freudenthal, 1983) στηρίζονται στην αρχή ότι *η πρόσθεση και η αφαίρεση θετικών και αρνητικών είναι πράξεις με ίδιο status.*

Ένα αλγεβρικό μοντέλο για την πρόσθεση και αφαίρεση είναι οι θετικοί και αρνητικοί μετρητές. Στο μοντέλο αυτό ένας θετικός (μαύρος) μετρητής και ένας αρνητικός

(κόκκινος) αλληλοαναιρούνται. Στην ιδιότητα αυτή στηρίζεται και η «δημιουργία από το τίποτα» που χρησιμοποιείται στην αφαίρεση.

.Είναι προφανές ότι οι παρακάτω πράξεις έχουν το ίδιο status:

3 μαύροι + 2 μαύροι = 5 μαύροι δηλαδή 3 + 2 = 5 και

3 κόκκινοι + 2 κόκκινοι = 5 κόκκινοι δηλαδή (-3) +(-2) = (-5)

Οι πράξεις 7-3 και –7-(-3 ) είναι αφαιρέσεις μαύρων και κόκινων μετρητών αντιστοίχως, ενώ στην πράξη 7- (- 3) πρέπει να αφαιρέσουμε από 7 μαύρους μετρητές 3 κόκκινους. Εδώ χρησιμοποιούμε την «δημιουργία από το τίποτε»: προσθέτουμε τρεις μαύρους και τρεις κόκκινους μετρητές, οπότε έχουμε:

7 μαύροι - 3 κόκκινοι = 7 μαύροι +3 κόκκινοι + 3 μαύροι - 3 κόκκινοι = 10μαύροι

Ένα γεωμετρικό μοντέλο για την πρόσθεση και αφαίρεση είναι η προσέγγιση του Van Hiele. Ο Van Hiele εισήγαγε ένα διδιάστατο πλαίσιο στο οποίο οι αριθμοί είναι σημεία που κινούνται σε τετραγωνισμένο χαρτί. Ο θετικός αριθμός δηλώνει κίνηση σημείου προς τα πάνω ή δεξιά και ο αρνητικός προς τα κάτω ή αριστερά.

Το διατεταγμένο ζεύγος:

( + 3 , + 4 ) σημαίνει 3 βήματα *δεξιά* και 4 βήματα *πάνω*

( - 3 , + 4 ) σημαίνει 3 βήματα *αριστερά* και 4 βήματα *πάνω*

( + 3 , - 4 ) σημαίνει 3 βήματα *δεξιά* και 4 βήματα *κάτω*

( - 3 , - 4 ) σημαίνει 3 βήματα *αριστερά* και 4 βήματα *κάτω*

Η έρευνα και η συζήτηση για τα πλαίσια και τα μοντέλα συνεχίζεται. Ένα κλασσικό πλαίσιο στα ολλανδικά σχολικά εγχειρίδια ήταν «Η μάγισσα». Μία μάγισσα παρασκεύαζε μυστικές δόσεις από καυτούς θετικούς κύβους και παγωμένους αρνητικούς. Βγάζοντας θετικούς ή αρνητικούς κύβους από ένα καζάνι, η θερμοκρασία άλλαζε. Ο Streefland (1996), ισχυρίζεται ότι «τα γνωστικά εμπόδια που προκλήθηκαν, στην ιστορική εξέλιξη της μάθησης του ανθρώπινου γένους, αφ'ενός από την ασυμβατότητα των αρνητικών με μεγέθη και ποσότητες και αφ'ετέρου από την τυπική μαθηματική τους κατασκευή, θα εμφανισθούν στους μαθητές όταν έρθουν αντιμέτωποι με τις δύο όψεις των αρνητικών» Επομένως πλαίσια όπως «Η μάγισσα» πρέπει να απορριφθούν γιατί είναι ψεύτικα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο σκοπός του κεφαλαίου είναι να δώσει μια περιεκτική περιγραφή της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης η οποία αποτελεί και θεωρητικό υπόβαθρο για την διδακτική πρόταση αλλά και πηγή έμπνευσης για τον σχεδιασμό μιας διδασκαλίας βασισμένη στις αρχές της.

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (PME) είναι μία θεωρία διδασκαλίας και μάθησης στην μαθηματική εκπαίδευση και είναι η απάντηση των Ολλανδών στην ανάγκη για αναθεώρηση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η αναθεώρηση αυτή ξεκίνησε στις αχές της δεκαετίας του ’70 όταν διαμορφώθηκαν και άρχισαν να υλοποιούνται οι πρώτες ιδέες της ρεαλιστικής μαθηματικής διδασκαλίας. Ήταν η αντίδραση αφ’ ενός στην κίνηση για «Νέα Μαθηματικά» που προερχόταν από την Αμερική και αφ’ ετέρου στην επικρατούσα μηχανιστική μαθηματική εκπαίδευση στην Ολλανδία. Η ανάπτυξη και η έρευνα συνεχίζεται μέχρι στις μέρες μας και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια αναθεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης, εκτός του ότι χρειάζεται πολλή και σοβαρή δουλιά, χρειάζεται επίσης πολύ χρόνο.

Η θεμελίωση της PME βασίστηκε στις αντιλήψεις του Freudenthal περί μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης. Η φιλοσοφική του θεώρηση είναι ότι *τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα* (Freudenthal, 1973) και επομένως για να αποτελούν ανθρώπινη αξία πρέπει:

- να συνδέονται με την πραγματικότητα
- να είναι κοντά στα παιδιά
- να έχουν σχέση με την κοινωνία

Κατά συνέπεια και η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να εστιάζει στα μαθηματικά όχι ως ένα κλειστό σύστημα, αλλά ως μία δραστηριότητα κατά την διαδικασία της μαθηματικοποίησης.

### *Ένας εκπαιδευτικός ισχυρισμός*

Οι ρεαλιστές ισχυρίζονται ότι ξεκινώντας από το άτυπο και συνδεδεμένο με ένα συγκεκριμένο πλαίσιο επίπεδο, τα παιδιά μπορούν μέσω της κατασκευαστικής διαδικασίας να φτάσουν στο τυπικό επίπεδο, με τη βοήθεια μοντελοποιημένων καταστάσεων, μοντέλων, σχημάτων και συμβόλων.

### *Μια εκπαιδευτική πραγματικότητα*

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση είναι μια πραγματικότητα στην Ολλανδία εδώ και 30 χρόνια. Ήταν μια αθόρυβη «επανάσταση» (Treffers, 1991), που περιελάμβανε ριζική αναθεώρηση των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης, του αναλυτικού προγράμματος, των σχολικών εγχειριδίων, των διδακτικών πρακτικών, της θεώρησης της θέσης και του ρόλου του δασκάλου. Ξεκίνησε από την πρωτοβάθμια οκτάχρονη εκπαίδευση και σταδιακά εφαρμόστηκε και στη δευτεροβάθμια. Αν πέτυχε; Οι Ολλανδοί θεωρούν ότι έχουν κάνει μεγάλα βήματα προόδου. Τα αποτελέσματα των μαθητών τους στους διεθνείς διαγωνισμούς TIMSS, PISA (παράρτημα ΙΙ), οι αναφορές για την επιτυχία της προσπάθειας ανανέωσης στην Ολλανδία σε αντίθεση με τις ΗΠΑ (Case, 2005), η υιοθέτηση ενός προγράμματος σπουδών βασισμένο στις αρχές της PME (Mathematics in

Context) από σχολεία των ΗΠΑ, είναι δείκτες που συνηγορούν στην άποψη ότιη PME πέτυχε στην αναθεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης..

## 2.1 Αρχές διδασκαλίας της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης

1. Εκκίνηση διδασκαλίας από συγκεκριμένα πλαίσια
2. Οικοδόμηση της γνώσης πάνω στην άτυπη γνώση των παιδιών
3. Καθοδηγούμενη επανεφεύρεση των μαθηματικών εννοιών και δομών.
4. Ποικιλία στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων συνδυασμένη με την άτυπη γνώση των μαθητών.
5. Ομαδική διδασκαλία
6. Αλληλεπίδραση στην τάξη
7. Ο καθηγητής δεν διδάσκει επιδεικνύοντας, αλλά παροτρύνοντας τους μαθητές να φτάσουν στις δικές τους λύσεις.

## 2.2 Ιστορική εξέλιξη

Θεμελιωτές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ολλανδία ήταν ο Freudenthal και το Ινστιτούτο για την Ανάπτυξη της Μαθηματικής εκπαίδευσης (IOWO) που σήμερα ονομάζεται «Ινστιτούτο Freudenthal». Το ινστιτούτο περιελάμβανε δύο τμήματα: το Wiskobas που ασχολήθηκε με την παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού και την έρευνα για τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και το Wiskivon υπεύθυνο για την μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 12-16.

Το πρόγραμμα Wiskobas είχε σκοπό την ανανέωση της μαθηματικής εκπαίδευσης σε εθνικό επίπεδο και περιελάμβανε τρεις φάσεις:

- Φάση εξερεύνησης (1971-1973)
- Φάση ολοκλήρωσης (1973-1975)
- Φάση περαιτέρω ανάπτυξης και έρευνας (1975-1977)

Στην πρώτη φάση οι ερευνητές του ινστιτούτου μελέτησαν τα σχολικά εγχειρίδια και κατόπιν προχώρησαν στον σχεδιασμό σημειώσεων μαθημάτων διδασκαλίας. Αυτά τα μαθήματα δοκιμάστηκαν σε πειραματικά σχολεία και τα αποτελέσματά τους αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης σε προγράμματα επιμόρφωσης δασκάλων.

Στη δεύτερη φάση η ομάδα Wiskobas κατασκεύασε ένα υπόδειγμα προγράμματος σπουδών για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση το οποίο διαμορφώθηκε σε τρεις φάσεις:

Σχεδιασμός $\longrightarrow$ Δοκιμή $\longrightarrow$ Επανεξέταση

Στο τέλος αυτής της φάσης εκδόθηκε μία επισκόπηση του προγράμματος σπουδών που σκοπό είχε αφ' ενός να κάνει γνωστή την αλλαγή στην μαθηματική εκπαίδευση σε όλη την Ολλανδία και αφ' ετέρου να αποτελέσει σημείο αναφοράς της. Αποτέλεσε συγχρόνως μια βάση για την εκπαίδευση, την επιμόρφωση, την καθοδήγηση των δασκάλων και μια πηγή έμπνευσης για τους σχεδιαστές του εκπαιδευτικού υλικού.

Στη τρίτη φάση ορισμένα μέρη του προγράμματος σπουδών επαναδημοσιεύτηκαν μετά από λεπτομερέστερη επεξεργασία. Ταυτόχρονα αναπτύχθηκε μεγάλη δραστηριότητα και έρευνα σε συγκεκριμένες περιοχές των μαθηματικών στις οποίες εμφανίστηκαν προβλήματα κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση όπως στα κλάσματα, στη γεωμετρία και στους υπολογιστές τσέπης.

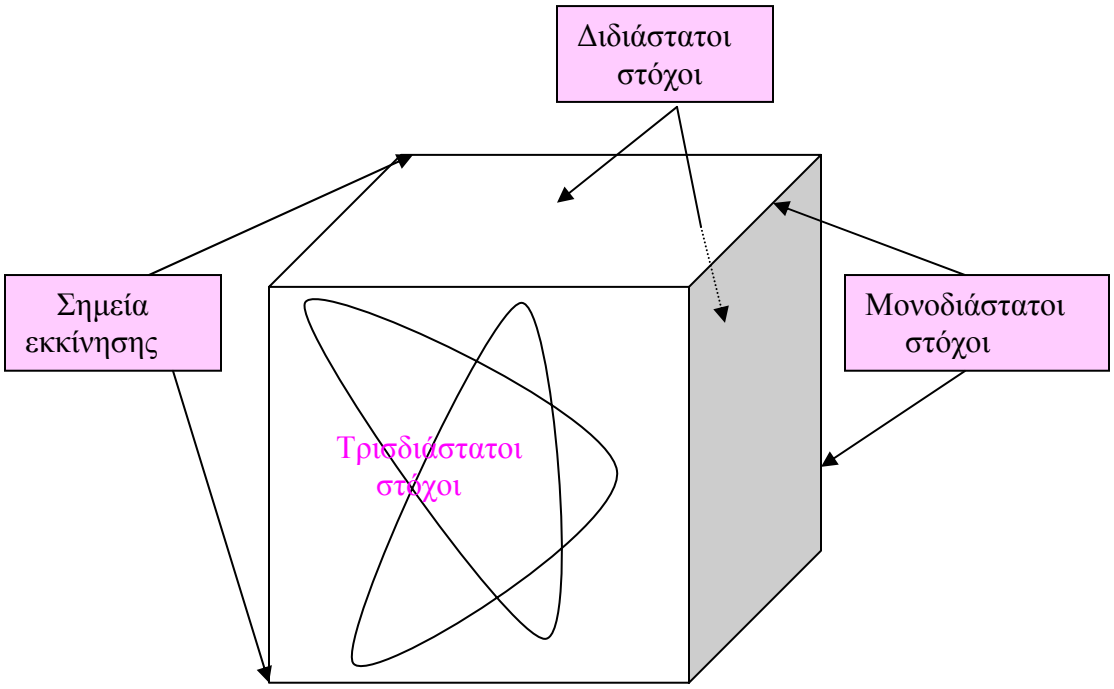
### Η θέση του δασκάλου στο Wiskobas

Η φύση των μαθησιακών δραστηριοτήτων στο Wiskobas οδηγεί αναγκαστικά σε δραστική αλλαγή των αντιλήψεων των δασκάλων για τις διδακτικές δραστηριότητες. *Ο δάσκαλος πρώτα θα δράσει ως μαθητής και στη συνέχεια ως ερευνητής και σχεδιαστής*

*διδακτικών δραστηριοτήτων*. Πρώτα λοιπόν πρέπει να λύσει τα προβλήματα, κατόπιν να διερευνήσει τη δομή και τις εσωτερικές σχέσεις και στη συνέχεια να προβληματισθεί για το περιεχόμενο, την αξία και τις τυχόν αλλαγές που είναι απαραίτητες. Μπορεί να αναθεωρήσει το θέμα ή να προσθέσει δικές του ερωτήσεις ή να παραλλάξει το περιεχόμενο ή να τροποποιήσει ορισμένα μέρη του θέματος. Πρέπει λοιπόν να έχει προσωπική ανάμειξη με θετική συνεισφορά. Συνοπτικά ο Goffree ονομάζει αυτή την διαδικασία «κατασκευαστική ανάλυση».

### 2.2.1 Περιγραφή των στόχων της διδασκαλίας του Wiskobas

Η περιγραφή των στόχων διδασκαλίας της ρεαλιστικής εκπαίδευσης μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα κύβο (Treffers, 1987). Οι οκτώ κορυφές του κύβου αναπαριστούν τα οκτώ σημεία εκκίνησης της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι δώδεκα ακμές τους δώδεκα γενικούς αντικειμενικούς στόχους, οι έξι έδρες αναπαριστούν τις έξι θεματικές περιοχές.




***Σημεία εκκίνησης της μαθηματικής εκπαίδευσης***

Τα ειδικά χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η διαδικασία μάθησης ώστε να είναι δυνατή η μαθηματική δραστηριότητα, είναι τα σημεία εκκίνησης για τη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Περιλαμβάνουν:

1. Τρεις διδακτικές αρχές
   - *Δραστηριότητα*: μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει κάνω μαθηματικά
   - *Διαφοροποίηση*: ο τρόπος μάθησης είναι προσωπικός
   - *Κατακόρυφος σχεδιασμός*: μάθηση μαθηματικών με συγκεκριμένη σειρά
2. Πέντε μαθηματικές αρχές
   - *Δομικός χαρακτήρας*: το περιεχόμενο των μαθηματικών
   - *Γλώσσα*:η μαθηματική γλώσσα
   - *Εφαρμοσιμότητα*: η χρησιμότητα των μαθηματικών
   - *Δυναμική*: η αναπτυξιακή πορεία των μαθηματικών

— *Συγκεκριμένη μαθηματική προσέγγιση*: η μαθηματική μέθοδος

Η μαθηματική – διδακτική δραστηριότητα

Ο Freudenthal (1973), βλέπει τα μαθηματικά ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα και ως εκ τούτου μία δραστηριότητα για τον κάθε άνθρωπο και όχι μόνο για τους ειδικούς. Θεωρώντας την μαθηματική εκπαίδευση ως ανθρώπινη δραστηριότητα θέτει το ερώτημα *Πώς να δώσουμε στους μαθητές το πρόβλημα, ώστε να έχει νόημα γι' αυτούς, δηλαδή να έχει μια αίσθηση πραγματικότητας;*

Πολύ σημαντικό ρόλο σ' αυτό έχει η έννοια του πλαισίου μέσα στο οποίο διατυπώνονται τα μαθηματικά προβλήματα.

Η ουσία της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η μαθηματικοποίηση. *Με τον όρο μαθηματικοποίηση αναφερόμαστε σε εκείνες τις ενέργειες οι οποίες σκοπό έχουν να οργανώσουν τις δραστηριότητες των μαθητών κατά την επίλυση προβλήματος.* Κάποιες από αυτές τις ενέργειες είναι:

— εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών
— εύρεση ή κατανόηση κρυφών δομών σε μαθηματικά μοτίβα μέσω επαγωγικού συλλογισμού.
— συστηματική προσσέγγιση
— απόδειξη
— συμβολισμοί
— γενίκευση λύσεων
— διατύπωση γενικεύσεων και κανόνων
— εύρεση και διατύπωση διαφορετικών λύσεων για το ίδιο πρόβλημα
— απόδειξη λύσης με χρήση επαγωγικής μεθόδου
— ορισμοί εννοιών
— χρήση μοντέλων
— αιτιολόγηση
— σχηματισμός μοντέλου λύσης που οδηγεί σε δημιουργία αλγορίθμου
— μεταφορά και προσαρμογή ενός προβλήματος σε ένα γνωστό μοντέλο
— χρησιμοποίηση στρατηγικών και κανόνων
— εντοπισμός μαθηματικών στοιχείων σε πρόβλημα που δεν έχει προφανή μαθηματική δομή

Η μαθηματική δραστηριότητα υποστηρίζεται και καθοδηγείται από την αντίστοιχη διδακτική δραστηριότητα. Οι μαθητές εργάζονται είτε ατομικά είτε σε ομάδα, βοηθούν ο ένας τον άλλο, διατυπώνουν τις στρατηγικές και λύσεις στην τάξη, τις συζητούν, αποφασίζουν πια είναι η καλύτερη ή η συντομότερη ή ποια προτιμούν.

Ο δάσκαλος οδηγεί την διαδικασια της μάθησης:

— ρωτώντας καθοδηγητικές ερωτήσεις
— ζητώντας αιτιολόγηση
— εξετάζοντας και συζητώντας τις διαφορετικές στρατηγικές και λύσεις των μαθητών
— παρακινώντας τους μαθητές
— ζητώντας να εφαρμόσουν όσα έχουν μάθει από ένα άλλο πρόβλημα
— κάνοντας τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν την διαδικασία μάθησης
— κάνοντας τους μαθητές να αντιληφθούν τα «προφανή», να ακολουθούν δηλαδή την κοινή λογική
— καθορίζοντας κριτήρια αξιολόγησης

Η διαφοροποίηση

Διαφοροποίηση είναι η κατάσταση κατά την οποία ο κάθε μαθητής μπορεί να προσσεγγίζει διαφορετικά το πρόβλημα. Υπάρχουν προβλήματα που πραγματικά έχουν μόνο ένα τρόπο λύσης και αυτός είναι τοσο καλά κρυμένος που η εύρεσή του μοιάζει να είναι ένα τυχαίο γεγονός. Αυτά τα προβλήματα έχουν «ευρετικό χαρακτήρα» και παρόλο που είναι ελκυστικά, παρουσιάζουν χαμηλό βαθμό διαφοροποίησης. Τα «εμπλουτισμένα μαθηματικά» προβλήματα τα οποία ενδείκνυνται περισσότερο για εκπαιδευτικούς σκοπούς, παρουσιάζουν υψηλό βαθμό διαφοροποίησης όσον αφορά το επίπεδο συστηματικής δράσης και αιτιολόγησης (reasoning). Δίνουν τη δυνατότητα σε κάθε μαθητή να βρεί μια λύση στο δικό του προσωπικό επίπεδο και στη συζήτηση που ακολουθεί στην τάξη, ο μαθητής κρίνει και συγκρίνει τον δικό του τρόπο λύσης, με αυτόν των συμμαθητών του. Εκτός από τη διαφοροποίηση που παρουσιάζεται στο επίπεδο σχεδιασμού και επιλογής του τρόπου λύσης, διαφοροποίηση εμφανίζεται και ως προς την επιλογή της υπολογιστικής μεθόδου για την εύρεση της λύσης.

Ο κατακόρυφος σχεδιασμός

Η αρχή του κατακόρυφου σχεδιασμού βασίζεται στην αντίληψη ότι η *« χαμηλού-επιπέδου» δραστηριότητα αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη «υψηλού επιπέδου» δραστηριότητας.*

Στην πορεία της μαθηματικοποίησης παρουσιάζονται πολλές δυσκολίες. Μία δυσκολία είναι να βρεθεί η μαθηματική πλευρά του προβλήματος. Μία άλλη είναι να μπορεί να γενικεύσει ο μαθητής χρησιμοποιώντας μια ειδική περίπτωση και να εφαρμόσει τους κανόνες που ανακάλυψε σε κάποιο άλλο πρόβλημα. Επίσης μπορεί να βρει δυσκολία στο να ανιχνεύσει ομοιότητες σε μια σειρά προβλημάτων ή θεμελιώδη μαθηματικά στοιχεία σε ένα πρόβλημα. Όταν αντιμετωπίσει αυτές τις δυσκολίες με επιτυχία, έχει ανέβει επίπεδο και το αρχικό πρόβλημα το βλέπει διαφορετικά. Αυτή η προοδευτική διαδικασία επέκτασης και αλλαγής επιπέδου είναι πολύ ουσιαστική για τη μαθηματική δραστηριότητα. Τα χαμηλά επίπεδα μπορούν να αποτελέσουν αλγοριθμική βάση για τη δραστηριότητα σε υψηλότερα επίπεδα. Επίσης τα αρχικά προβλήματα μπορούν να γίνουν μοντέλα για την επίλυση νέων προβλημάτων.

Η ιδέα του κατακόρυφου σχεδιασμού βασίζεται στην άποψη του Bruner για την ψυχολογία της μάθησης που συνοψίζεται στην φράση «οποιοδήποτε θέμα μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς με μία διανοητικά ειλικρινή μορφή σε οποιοδήποτε παιδί σε οποιοδήποτε στάδιο ανάπτυξης»

***Μονοδιάστατοι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης***

Οι μονοδιάστατοι στόχοι είναι οι μόνιμοι στόχοι της εκπαίδευσης γενικά και της μαθηματικής εκπαίδευσης ειδικά.. Χωρίζονται στους ολοκληρωμένους στόχους που αφορούν γενικά την εκπαίδευση και στους μαθηματικούς στόχους που αφορούν ειδικά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ολοκληρωμένοι στόχοι της εκπαίδευσης

Η μαθηματική εκπαίδευση συνεισφέρει σημαντικά στο να επιτευχθούν οι γενικοί στόχοι της σχολικής εκπαίδευσης που είναι:

- Η ανάπτυξη της προσωπικότητας του μαθητή
- Η κοινωνικοποίησή του
- Η προετοιμασία για την περαιτέρω επαίδευσή του
- Η σχέση με την κοινωνία

Όταν αναφερόμαστε στη σχέση με την κοινωνία, εννοούμε τη σημασία που έχουν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή καθώς επίσης τη χρησιμότητά τους σε όλους τους τομείς της καθημερινότητας. Ενώ όταν αναφερόμαστε στη κοινωνικοποίηση του μαθητή, εννοούμε τη συνεισφορά της μαθηματικής εκπαίδευσης στο διάλογο και στην ανταλλαγή ιδεών μέσα στην σχολική τάξη. Αυτή επιτυχάνεται όταν οι μαθητές ανταλλάσουν εμπειρίες, συζητούν τις επιλεγείσες στρατηγικές, μοιράζονται τις εργασίες και τις υποχρεώσεις, ακούν προσεκτικά και εξηγούν ο ένα στον άλλον τις λύσεις τους και την αιτιολόγηση αυτών των λύσεων.

Μαθηματικοί στόχοι της εκπαίδευσης

Οι μαθηματικοί μονοδιάστατοι στόχοι της εκπαίδευσης χαρακτηρίζονται από τη βασική αρχή: *Η μαθηματική εκπαίδευση επιβάλλεται να έχει μεγάλη μαθηματική αξία.* Μπορούμε να διακρίνουμε οκτώ αντικειμενικούς στόχους που αφορούν:

- Την αριθμητική
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να βοηθά τον μαθητή να κατανοήσει το αριθμητικό σύστημα, να διευρύνει την αντίληψή του και να τον εφοδιάζει με τις απαραίτητες δεξιότητες για την λύση αριθμητικών προβλημάτων.
- Τη γλώσσα
  Τα μαθηματικά είναι ένα μέσο για να περιγράψει ο άνθρωπος τον περιβάλλοντα κόσμο. Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως στόχο να δώσει στον μαθητή μία επαρκή γνώση της γλώσσας ως μέσο επικοινωνίας.
- Εφαρμοσιμότητα
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να στοχεύει σε γνώση που μπορεί να εφαρμοστεί. Πρέπει δηλαδή να υπάρχει σύνδεση μιας κατάστασης προβλήματος, σε μαθηματικό πλαίσιο ή έξω από αυτό, με μαθηματικές έννοιες, δομές, μοντέλα και οργανωμένες μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος.
- Πρακτική χρήση
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως στόχο να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει την πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών γενικά και επί πλέον να γνωρίσει την αξία τους σε συγκεκριμένες περιοχές γνώσης.
- Δομικός χαρακτήρας
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως στόχο να μάθει στον μαθητή να κάνει συνδέσεις, να βρίσκει σχέσεις, να διερευνά κανονικότητες σε μοτίβα, να ανακαλύπτει και να διατυπώνει κανόνες και νόμους.
- Μεθοδολογία
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να έχει ως στόχο να μάθει ο μαθητής τις μεθόδους για να αναπτύσσει στρατηγικές εξερεύνησης και συλλογισμού στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιήσει την διαίσθηση, την αναλογία, την επαγωγή.
- Δυναμική
  Τα μαθηματικά βρίσκονται σε διαρκή κίνηση και ανάπτυξη. Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να κάνει τον μαθητή γνώστη της δυναμικής φύσης των μαθηματικών και με την υποκειμενική και με την αντικειμενική έννοια.
- Στάσεις
  Η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να εφοδιάσει τον μαθητή με γνώση, δεξιότητες, δυνατότητες και στάσεις στα μαθηματικά, ώστε να μπορούν να πραγματοποιηθούν όλοι οι προηγούμενοι στόχοι.

***Διδιάστατοι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης***

Οι μονοδιάστατοι στόχοι αναφέρονται σε μία μόνο συνιστώσα της μαθηματικής εκπαίδευσης, τη *συμπεριφορική*. Αφορούν δηλαδή τις στάσεις και συμπεριφορές που θέλουμε να αναπτύξουν οι μαθητές κατά τη μάθηση των μαθηματικών και δεν επηρεάζουν καθόλου το είδος της διδασκαλίας που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για συγκεκριμένες ενότητες από το πρόγραμμα σπουδών, για επί μέρους προβλήματα και εργασίες που πρέπει να ανατεθούν στους μαθητές. Μία επί πλέον συνιστώσα πρέπει να προστεθεί η οποία να αφορά το *περιεχόμενο* της μάθησης και να μας δείχνει τι μαθηματικά μαθαίνουν οι μαθητές και τι σχολικά βιβλία και επαιδευτικό υλικό χρησιμοποιούν.

Τους διδιάστατους λοιπόν στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναφέρονται και στη συμπεριφορά των μαθητών και στο περιεχόμενο σπουδών, τους χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες: στους στόχους προϊόντος και στους στόχους διαδικασίας.

*Στόχοι προϊόντος (product goals)*

- Οι στόχοι προϊόντος αναφέρονται στο τι πρέπει είναι ικανός να κάνει ο μαθητής στο τέλος μιας συγκεκριμένης περιόδου διδασκαλίας, αν δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιεί και να εφαρμόζει συγκεκριμένους κανόνες, αλγορίθμους, μεθόδους, πράξεις και έννοιες.

*Στόχοι διαδικασίας (process goals)*

Οι στόχοι διαδικασίας που αναφέρονται στις δραστηριότητες και τα χαρακτηριστικά της κατάστασης μάθησης και δεν μπορούν να περιγραφούν με όρους «τελικού προϊόντος». Οι στόχοι αυτοί αφορούν καταστάσεις μάθησης που έχουν ισχυρό διερευνητικό χαρακτήρα και επιτρέπουν την εύρεση μιας ποικιλίας λύσεων στα προβλήματα. Μπορούμε να έχουμε:

- καταστάσεις μάθησης στις οποίες δεν έχουμε καθαρές ενδείξεις ύπαρξης προβλήματος
- καταστάσεις προβλήματος που έχουν τα χαρακτηριστικά PISA, δηλαδή καθαρή ένδειξη ύπαρξης προβλήματος με ένα σχετικά ανοιχτό σύνολο λύσεων
- καταστάσεις μάθησης με καθαρή ένδειξη ύπαρξης προβλήματος και με συγκεκριμένη λύση, στις οποίες όμως δεν ενδιαφερόμαστε για την λύση αυτή καθ' αυτή αλλά για τη διαδικασία διερεύνησης που οδηγεί σ' αυτή τη λύση. Θέλουμε οι μαθητές να ολοκληρώσουν τον κύκλο της μαθηματικής έρευνας με την εξερεύνηση, τη λύση επί μέρους προβλημάτων, τη συστηματική προσέγγιση, τη χρήση μοντέλων, τη λύση του προβλήματος, τη γενίκευση και τη διατύπωση γενικών κανόνων λύσης.

Όπως είναι φανερό οι στόχοι αυτοί αναφέρονται στη διαδικασία μάθησης και όχι στο τελικό προϊόν, στο τι δηλαδή έμαθε ο μαθητής. Δεν σχετίζονται με τη μεταφορά γνώσης και την επίτευξη συγκεκριμένων δεξιοτήτων αλλά με τις βασικές εμπειρίες και τις διαδικασίες μάθησης όπως εκφράζονται από τα σημεία εκκίνησης και τους γενικούς αντικειμενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο καθηγητής παίζει σημαντικό ρόλο με την έννοια ότι «προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να .....»

***Τρισδιάστατοι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης***

Η τρίτη διάσταση στην περιγραφή των στόχων δεν έχει σχέση με τους ίδιους τους στόχους, αλλά με τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να επιτευχθούν. Χαρακτηρίζεται από το διδακτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο τοποθετούνται και συγκεκριμενοποιούνται οι

διδιάστατοι στόχοι και με την έννοια ότι ο καθηγητής «προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να .....» και με την έννοια ότι «ο μαθητής είναι ικανός να .....»
Οι συνιστώσες του τρισδιάστατου στόχου είναι:

- Διδακτικές δραστηριότητες:
  ─ καθοδηγητικές ερωτήσεις
  ─ υποδείξεις
  ─ μέθοδοι εργασίας
- Δραστηριότητες μάθησης
  ─ επιλεγμένα δύσκολα σημεία στα προβλήματα
  ─ ενδείξεις για ύπαρξη διαφορετικών λύσεων
- Διδακτικά βοηθήματα
  ─ χρήση διαφόρων υλικών και μέσων ( κάρτες, εικόνες, χάρτες,....)

Αυτές οι συνιστώσες όμως δεν είναι άσχετες μεταξύ τους. Όλες περιλαμβάνονται σε μία συνολική περιγραφή της διδακτικής διαδικασίας που έχει ως σκοπό την επίτευξη των στόχων που έχουν ήδη τεθεί. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται αυτή η περιγραφή ως «ολιστική» Η «ολιστική» περιγραφή των στόχων είναι απαραίτητη όταν πρέπει να διατυπωθούν οι στόχοι για ένα συγκεκριμένο κομμάτι διδασκαλίας. Μέσω αυτής οι σχεδιαστές μπορούν να διατυπώσουν ξεκάθαρα το είδος διδασκαλίας που έχουν κατά νου, στον καθηγητή που θα διδάξει το αντίστοιχο θέμα. Ταυτόχρονα προσφέρει στον καθηγητή την ευκαιρία αφ'ενός να διακρίνει τους αντικειμενικούς στόχους πίσω από το εκπαιδευτικό υλικό και αφ'ετέρου να βάλει τη δική του προσωπική πινελιά και ιδέα στη διδασκαλία. Κάποιος θα μπορούσε να αντιτίνει ότι δεν είναι απαραίτητη αυτού του είδους η περιγραφή γιατί θα μπορούσε και μόνος του ο καθηγητής να ανακαλύψει τους αντικειμενικούς στόχους και να κατευθύνει ανάλογα τη διδασκαλία. Είναι όμως σε όλους γνωστό ότι αν δεν γίνουν συγκεκριμένες διδακτικές δραστηριότητες (για παράδειγμα μια ερώτηση που αναγκάζει τον μαθητή να χρησιμοποιήσει συστηματική προσέγγιση), θα χαθεί και η ευκαιρία για τις αντίστοιχες μαθησιακές δραστηριότητες.

## 2.3 Το πλαίσιο της θεωρίας διδασκαλίας της ΡΜΕ

Οι βασικές γραμμές που καθορίζουν το πλαίσιο διδασκαλίας στη ΡΜΕ είναι:

- Η θεωρία επιπέδων του Van Hiele
- Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal
- Η προοδευτική μαθηματικοποίηση

### 2.3.1 Επίπεδα Van Hiele

Ο Van Hiele διακρίνει τρία επίπεδα στη διαδικασία μάθησης. Σε κάθε επίπεδο η σκέψη του παιδιού οργανώνεται διαφορετικά και τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης αναπαριστούν διαφορετικά πράγματα. (Treffers 1987, Κολέζα 2000).

- Το πρώτο επίπεδο είναι το επίπεδο στο οποίο η σκέψη είναι ενσωματωμένη στη διδακτική δραστηριότητα. Τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης, για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού για παράδειγμα, είναι ενσωματωμένα σε πράξεις με υλικά αντικείμενα και σε συγκεκριμένα αντικείμενα όπως είναι συγκεκριμένες ποσότητες πραγμάτων, οπτικά μοντέλα και σχήματα.
- Το δεύτερο επίπεδο είναι το επίπεδο όπου η δράση γίνεται αντικείμενο συζήτησης και διαπραγμάτευσης. Για παράδειγμα οι σχέσεις μεταξύ των αριθμών

και των σχημάτων εξερευνούνται. Το αποτέλεσμα αυτής της εξερεύνησης είναι ότι οι αριθμοί και τα σχήματα συμβολίζουν ιδιότητες.

- Στο τρίτο επίπεδο (τυπική γνώση) οι σχέσεις από μόνες τους αποτελούν αντικείμενο σκέψης. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των σχέσεων είναι πια γνωστά και έτσι είναι δυνατόν η μία να προκύπτει από τις προηγούμενες.

Τα όρια μεταξύ των τριών επιπέδων στις διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών δεν είναι αυστηρά καθορισμένα. Το τρίτο επίπεδο του αριθμητικού συστήματος αποτελεί την στέρεα βάση για το πρώτο επίπεδο της άλγεβρας.

Δεν μπορεί να επιτευχθεί πραγματική μάθηση σε ένα υψηλό επίπεδο αν δεν έχει ολοκληρωθεί η μαθησιακή διαδικασία στο κατώτερο επίπεδο. Αυτό ακριβώς συμβαίνει στην παραδοσιακή διδασκαλία. Τις περισσότερες φορές ξεκινά η διδασκαλία ενός θέματος από το δεύτερο ή ακόμη τρίτο επίπεδο και εκ των υστέρων επιστρέφει στο πρώτο επίπεδο, ψάχνοντας να βρει καταστάσεις για να το εφαρμόσει. Εισάγει σύμβολα και σχέσεις οι οποίες δεν έχουν σαφή αναφορά στο χαμηλότερο επίπεδο επειδή οι έννοιες δεν έχουν επαρκώς κατανοηθεί, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει σύνδεση μεταξύ της έννοιας και των συμβόλων και σχέσεων.

Συγκρίνοντας την παραδοσιακή διδασκαλία με την πορεία διδασκαλίας που προτείνει ο Van Hiele, μπορούμε να διακρίνουμε ότι η διδασκαλία σύμφωνα με την θεωρία επιπέδων ξεκινά από το πρώτο επίπεδο με την φαινομενολογική εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών και δομών και συνεχίζει με τυπικές πράξεις και κανόνες στα επόμενα επίπεδα.

Η μετάβαση των μαθητών από ένα επίπεδο στο αμέσως επόμενο γίνεται σε πέντε φάσεις:

- <u>Φάση πληροφοριών</u>: ο μαθητής εξοικειώνεται με το θέμα
- <u>Φάση εξερεύνησης:</u> έρχεται σε επαφή, μέσω συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, με σχετικές μαθηματικές δομές
- <u>Φάση έκφρασης</u>: αναπτύσσει τα κατάλληλα γλωσσικά μέσα για να περιγράψει και να εκφράσει σχέσεις και δομές.
- <u>Φάση ελεύθερου προσανατολισμού</u>: ελεύθερη εξερεύνηση σε όλο το πεδίο του θέματος με χρήση μέσων οργάνωσης που διαθέτει ο μαθητής.
- <u>Φάση ολοκλήρωσης</u>: συμπύκνωση του προϊόντος μάθησης και προσαρμογή του στο σύνολο γνώσεων και ικανοτήτων που διαθέτει ο μαθητής.

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση αν και αξιολογεί θετικά τη θεωρία επιπέδων του Van Hiele επειδή την θεωρεί καλώς εδραιωμένη στην αναπτυξιακή και μαθησιακή διαδικασία, επισημαίνει ωστόσο ωρισμένα τρωτά σημεία.

Δεν υπάρχουν αυστηρά κριτήρια για την οριοθέτηση των επιπέδων ανεξάρτητα από το περιεχόμενο (έννοιες, δομές,..) και γι'αυτό το λόγο δεν μπορεί κανείς να διαγνώσει με βεβαιότητα σε ποιο επίπεδο πραγματικά συμβαίνει μια διδακτική-μαθησιακή διαδικασία.

Την εποχή βέβαια που ο Van Hiele διατύπωσε τη θεωρία του, το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης ήταν υπό συζήτηση. Δεν υπήρχε προβληματισμός για το πως η μαθηματική εκπαίδευση θα αφορά όλους τους μαθητές, «μαθηματικά για όλους», ή πως θα γίνει αλλαγή του προγράμματος σπουδών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση κ.λ.π. Με τον καιρό έγινε καθαρό ότι στη θεωρία του Van Hiele και στην υλοποίησή της σε σχολικά βιβλία δεν μπορούμε να βρούμε την απάντηση σε δύο βασικά ερωτήματα:

1. Πώς ακριβώς θα γίνει η φαινομενολογική εξερεύνηση στο πρώτο επίπεδο;
2. Ποιές διδακτικές ενέργειες πρέπει να γίνουν ώστε οι μαθητές να ανέβουν από το ένα επίπεδο στο επόμενο;

Την απάντηση στο πρώτο ερώτημα θα την δώσει η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal και στο δεύτερο η προοδευτική μαθηματικοποίηση της ομάδας Wiskobas.

### 2.3.2 Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal

Ο Freudenthal (1983), δίνει τον δικό του νόημα στον όρο «φαινομενολογία» και «διδακτική φαινομενολογία». Πρώτα παραθέτει την αντίθεση μεταξύ των όρων «νοούμενον» και «φαινόμενον».

> Το «νοούμενον» είναι αυτό καθ' αυτό το μαθηματικό αντικείμενο, ενώ η εμπειρία από ένα κομμάτι μαθηματικών είναι ένα φαινόμενο.

Για παράδειγμα ο «αριθμός» ειναι νοούμενο, ενώ το να δουλεύει κανείς με αριθμούς είναι φαινόμενο. Οι μαθηματικές έννοιες, δομές και ιδέες οργανώνουν τα φαινόμενα προερχόμενα και από τον πραγματικό κόσμο και από τα μαθηματικά. Σε ένα πρώτο επίπεδο οι αριθμοί οργανώνουν το φαινόμενο της ποσότητας. Σε ένα υψηλότερο επίπεδο ο «αριθμός» οργανώνεται από το δεκαδικό σύστημα.

Φαινομενολογία μιας μαθηματικής έννοιας, μιας μαθηματικής δομής ή ιδέας, κατά την ορολογία του Freudenthal, είναι η περιγραφή της σχέσης του νοούμενου (μαθηματικού αντικειμένου) με τα φαινόμενα που οργανώνει. Επί πλέον μας δείχνει για την οργάνωση ποιων φαινομένων δημιουργήθηκε το μαθηματικό αντικείμενο και σε ποια μπορεί να επεκταθεί.

> … Αν σ'αυτή τη σχέση του «νοούμενου» με το «φαινόμενον» τονίσω το διδακτικό στοιχείο, τότε μιλώ για διδακτική φαινομενολογία.

Ο Freudenthal αντιπαραθέτει την διδακτική φαινομενολογία της ρεαλιστικής εκπαίδευσης με την στρουκτουραλιστική θεώρηση του Dienes ( πρώτα διδάσκουμε τις αφηρημένες έννοιες και μετά τις συγκεκριμενοποιούμε) ως εξής:

> ...Αυτό που μπορεί να κάνει η διδακτική φαινομενολογία είναι να προετοιμάσει την αντίστροφη προσέγγιση: να ξεκινήσει από τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και από αυτό το σημείο εκκίνησης να διδάξει στον μαθητή να χειρίζεται τα μέσα οργάνωσης. Η διδακτική φαινομενολογία καλείται να αναπτύξει σχέδια για την πραγματοποίηση μιας τέτοιας προσέγγισης. Στη διδακτική φαινομενολογία του μήκους, του αριθμού κ.λ.π. τα φαινόμενα που οργανώνονται από το μήκος, τον αριθμό, κ.λ.π. πρέπει να αναδειχθούν σε ευρεία κλίμακα.....

Η ρεαλιστική εκπαίδευση δεν χρησιμοποιεί την πραγματικότητα μόνο για εφαρμογές, αλλά η πραγματικότητα αποτελεί πηγή σχηματισμού εννοιών ή κατά την ορολογία του Freudenthal συγκρότησης νοητών αντικειμένων.

> ...Αντικατέστησα την κατάκτηση της έννοιας μέσω συγκεκριμένων ενσαρκώσεων με την συγκρότηση νοητών αντικειμένων βασισμένη στη φαινομενολογία.....

Η μαθηματική δομή «εκμαιεύεται» από τα πραγματικά φαινόμενα. Μ' αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκαν τα μαθηματικά ιστορικά, άρα μ' αυτόν τον τρόπο θα επανεφευρεθούν και στην εκπαίδευση (αρχή της επανεφεύρεσης)

Δίνεται έμφαση στο να αποτελεί η πραγματικότητα μια στέρεα βάση για την διαδικασία της μάθησης και όχι μόνο εκ των υστέρων πεδίο εφαρμογής της γνώσης. Με λίγα λόγια η διδακτική πρόταση της ρεαλιστικής προσέγγισης του Freudenthal είναι:

*Φέρε τους μαθητές σε επαφή με εκείνα τα φαινόμενα στα οποία η μαθηματική δομή αποτελεί το οργανωτικό εργαλείο, έχοντας σαν στόχο αφ' ενός να τους αφήσεις να σχηματίσουν μόνοι τους τα εργαλεία οργάνωσης σε μια διαδικασία επανεφεύρεσης και αφ' ετέρου να μάθουν να χειρίζονται και να χρησιμοποιούν αυτά τα εργαλεία στον σχηματισμό εννοιών.*

Ο Freudenthal τέλος δεν ξεχωρίζει τα επίπεδα στη διαδικασία μάθησης με τον τρόπο που το κάνει ο Van Hiele. Κατά την άποψή του δεν υπάρχει αυστηρός διαχωρισμός των επιπέδων αλλά μία πρόοδος χωρίς περιορισμούς σε μικρο-επίπεδα που δεν είναι σαφώς οριοθετημένα μεταξύ τους.

### 2.3.3 Προοδευτική μαθηματικοποίηση

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα δίνεται από την προοδευτική μαθηματικοποίηση. Η μαθηματικοποίηση είναι μια δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης στην οποία ο μαθητής χρησιμοποιώντας την γνώση που έχει αποκτήσει και τις ικανότητες που διαθέτει, ανακαλύπτει άγνωστες για αυτόν μέχρι τώρα σχέσεις, συνδέσεις και δομές. Η μαθηματικοποίηση, όπως προαναφέρθηκε, διακρίνεται σε *οριζόντια* και *κατακόρυφη*.

Στην *οριζόντια* μαθηματικοποίηση μια κατάσταση προβληματισμού μετασχηματίζεται έτσι ώστε να μπορεί να προσεγγισθεί με μαθηματικό τρόπο. Το πραγματικό πρόβλημα, διατυπωμένο σε ένα πλαίσιο, μοντελοποιείται και ο μαθητής μεταφέρεται από τον κόσμο των αισθήσεων στον κόσμο των συμβόλων.

Στην *κατακόρυφη* μαθηματικοποίηση ο μαθητής εργάζεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα. Έχει ήδη μετασχηματίσει το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό, το οποίο στη συνέχεια επεξεργάζεται με μαθηματικά μέσα, δηλαδή σχέσεις, σύμβολα, κανόνες, τύπους.

Η προοδευτική μαθηματικοποίηση (οριζόντια και κατακόρυφη) πραγματοποιείται βασιζόμενη σε πέντε διδακτικές-μαθησιακές αρχές:

1. Αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης
2. Αρχή της γεφύρωσης των επιπέδων με εργαλεία κατακόρυφης μαθηματικοποίησης
3. Αρχή της αυτοδυναμίας
4. Αρχή της αλληλεπίδρασης
5. Αρχή της συνύφανσης

Αυτές οι γενικές αρχές τηρούνται στη προοδευτική μαθηματικοποίηση κατά τη μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο. Η πρόοδος πραγματοποιείται με τον αναστοχασμό και την επανεξέταση σε μια κυκλική πορεία φαινομενολογικής εξερεύνησης και μαθηματικής δόμησης.

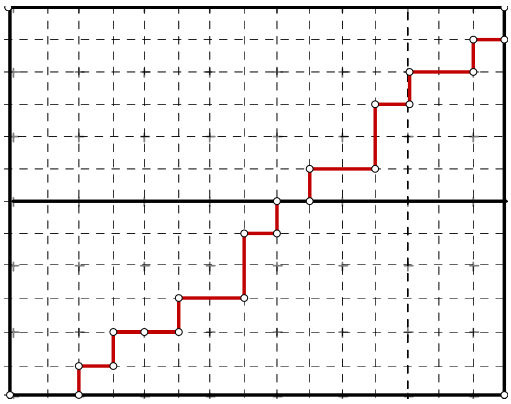
<u>Φαινομενολογική εξερεύνηση</u>

Στηρίζεται στην διδακτική φανομενολογία του Freudenthal σύμφωνα με την οποία κατά την διάρκεια της διδασκαλίας ενός καινούριου θέματος γίνεται μια εκτενής φαινομενολογική εξερεύνηση. Οι μαθηματικές έννοιες και δομές που πρέπει να μελετηθούν, είναι ολοφάνερες μέσα στα ποικίλα φαινόμενα και πρέπει να εξερευνηθούν από όσο το δυνατόν περισσότερες οπτικές γωνίες. Σκοπός της εξερεύνησης είναι να σχηματίσει ο μαθητής μία ευρεία, διαισθητική αντίληψη της έννοιας η οποία θα αποτελέσει την στέρεα βάση για τον σχηματισμό της έννοιας. Οι μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να εξελίσσονται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.

<u>Γεφύρωση των επιπέδων με εργαλεία κατακόρυφης μαθηματικοποίησης</u>

Από πολύ νωρίς στη μαθησιακή διαδικασία, όταν ακόμη βρίσκεται στο στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης, ο μαθητής πρέπει να έχει στη διάθεσή του εργαλεία κατακόρυφης μαθηματικοποίησης όπως μοντέλα, πρότυπες καταστάσεις, διαγράμματα, σχήματα και σύμβολα. Η χρήση αυτών των εργαλείων θα του επιτρέψει να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου και να περάσει από την άτυπη και διαισθητική γνώση του πρώτου επιπέδου, στον αναστοχασμό και τη συστηματική γνώση

που κυριαρχούν στο τρίτο επίπεδο. Βέβαια οι όροι συγκεκριμένο και αφηρημένο δεν είναι απόλυτοι. Αυτό που ήταν αφηρημένο σε κάποιο αρχικό στάδιο διδασκαλίας, ο αριθμός για παράδειγμα στις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, είναι συγκεκριμένο σε μεγαλύτερες ηλικίες. Επομένως και κατά τη διάρκεια της φαινομενολογικής εξερεύνησης τα φαινόμενα δεν είναι απαραίτητο να έχουν υλική βάση. Το αποτέλεσμα της σχηματοποίησης, τα μοντέλα ή το θέμα του μαθήματος μπορούν πολύ καλά να αποτελέσουν τη συγκεκριμένη βάση.
Η μετάβαση από το πρώτο επίπεδο στα επόμενα περιγράφεται από το παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα διακρίνουμε εκτός από τα μακρο-επίπεδα την ύπαρξη πολλών μικρο-επιπέδων. Η τεθλασμένη γραμμή που απεικονίζει τη γεφύρωση περιγράφει ταυτόχρονα και τη δομή της μαθηματικοποίησης η οποία περιλαμβάνει σε κάθε φάση στοιχεία και οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Η τεθλασμένη γραμμή δεν είναι κατά μοναδικό τρόπο σχεδιασμένη. Ο καθηγητής βοηθά τον κάθε μαθητή να βρει τη δική του πορεία προς την κορυφή

Αυτοδυναμία: οι κατασκευές των μαθητών
Οι δραστηριότητες ενός μαθητή δηλώνουν κάθε στιγμή τη θέση του στην πορεία της μαθηματικοποίησης. Οι δραστηριότητες αυτές είναι προσωπικές και επομένως διαφοροποιούνται από μαθητή σε μαθητή και ως προς τον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων στα διάφορα μικροεπίπεδα και ως προς την παραγωγή ιδεών για την εκτέλεση ελεύθερων εργασιών. Οι ελεύθερες δημιουργίες (π.χ. κατασκευές προβλημάτων) καθώς επίσης και τα προβλήματα που οδηγούν σε αντιπαραθέσεις, δίνουν ευκαιρίες και ερεθίσματα στους μαθητές να δημιουργούν συσχετισμούς, να αναστοχάζονται τις πορείες που έχουν ακολουθήσει και να κάνουν προβλέψεις. Όλη αυτή η διαδικασία που προωθείται μέσω του αναστοχασμού, οδηγεί στην αναβάθμιση του επιπέδου της μαθησιακής πορείας.
Αλληλεπίδραση
Η μάθηση είναι μια κοινωνική και όχι ατομική δραστηριότητα. Λαμβάνει χώρα μέσα στην κοινωνία και επομένως όχι μόνο επηρεάζεται αλλά και καθοδηγείται από το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Κατά την διάρκεια της διδασκαλίας στην τάξη, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία αφ’ενός να παρουσιάσουν τις ατομικές τους εργασίες και αφ΄ετέρου γνωρίσουν τη σκέψη και τη δουλιά των συμμαθητών τους. Μέσα από την ανταλλαγή ιδεών και επιχειρημάτων κρίνουν τις εργασίες των άλλων και τις συγκρίνουν με τις δικές τους. Σταθμίζουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δικών τους μεθόδων που συχνά αναθεωρούνται και αναβαθμίζονται.
Στην αλληλεπιδραστική διδασκαλία η ατομική εργασία συνδυάζεται με τη συζήτηση στην τάξη, τη συμβουλή και τη βοήθεια ενός συμμαθητή, την αξιολόγηση των κατασκευών σε διάφορα επίπεδα και από τον καθηγητή και από τους μαθητές.
Συνύφανση
Στη ΡΜΕ οι νέες έννοιες και τα νοητά αντικείμενα ή είναι συμβατά με την υπάρχουσα γνωστική βάση των μαθητών ή έρχονται σε σύγκρουση με τις παγιωμένες γνώσεις και

αντιλήψεις τους. Μέσα από «καταστάσεις σύγκρουσης» μετατρέπεται η δομή της γνώσης σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό.
Οι μαθησιακές πορείες, όπου είναι δυνατόν, πρέπει να συνδέονται και να σχετίζονται μεταξύ τους. Ο καθηγητής όταν ξεκινά την διδασκαλία ενός καινούριου θέματος οφείλει να έχει κατά νου όλες τις συνδέσεις και σχέσεις του θέματος με άλλες θεματικές περιοχές. Η αλληλοπλοκή των θεμάτων βασίζεται στη φαινομενολογική αρχή σύμφωνα με την οποία, *τα φαινόμενα σπανίως φανερώνουν στον μαθητή μία μόνο έννοια ή δομή.*

### 2.3.4 Το πλαίσιο και τα προβλήματα πλαισίου

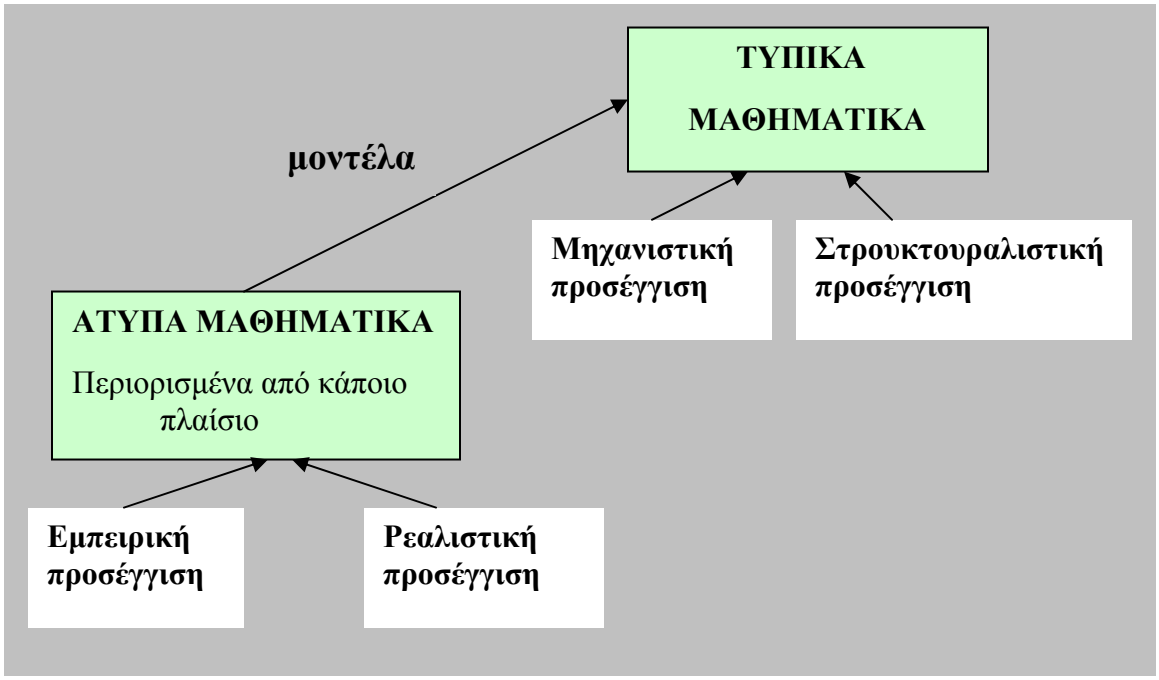
Το πλαίσιο μέσα στο οποίο διατυπώνονται μαθηματικά προβλήματα έχει δεσπόζουσα θέση στη ρεαλιστική εκπαίδευση. Δεν είναι ούτε κάλυμμα, ούτε περιτύλιγμα ενός «καθαρού» μαθηματικού προβλήματος, αλλά αποτελεί την αιτία δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων. Το θέμα για τη μαθηματική μελέτη μπορεί να προέρχεται από τη φυσική, βιολογική και κοινωνική πραγματικότητα αλλά μπορεί να είναι ένα παιχνίδι, ένα παραμύθι, ένας μύθος και οποιαδήποτε άλλη δημουργία που ανήκει στη «φανταστική» πραγματικότητα (Treffers, 1987). Επίσης μπορεί να αναπαρίσταται με μοντέλα, γραφήματα ή σχήματα *Το κριτήριο για την επιλογή πλαισίου είναι οι μαθηματικές ιδιότητες που περικλείει, καθώς επίσης και οι δυνατότητες που προσφέρει για ανάλυση και επεξεργασία.*
Η έννοια του προβλήματος πλαισίου λοιπόν, και ως προς τη μορφή και ως προς τη λειτουργία, είναι πολύ ευρύτερη από αυτήν του λεκτικού πρόβλημματος.
Το πλαίσιο μέσα στο οποίο είναι διατυπωμένο το πρόβλημα επηρεάζει τον τρόπο λύσης του και αυτό γιατί εισάγει παραμέτρους που πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν κατά τη διαδικασία επίλυσης. (Κολέζα 2000). Αν για παράδειγμα πρέπει να μοιράσουμε δίκαια 234 αντικείμενα σε 10 ανθρώπους, το πλαίσιο θα πρέπει να «δώσει» περισσότερες πληροφορίες για τη φύση των αντικειμένων (αν είναι διακριτά ή όχι) και για το αν χρειάζεται να γίνει κάποιος διαχωρισμός των ατόμων ως προς την ηλικία, τις ανάγκες κ.λ.π. Υπάρχουν όμως και προβλήματα όπου το πλαίσιο δεν παίζει τόσο ουσιαστικό ρόλο.Οι μαθητές στην ρεαλιστική διδασκαλία θα πρέπει να επιστρατεύουν την προηγούμενη γνώση και εμπειρία και από τα μαθηματικά αλλά και από την πραγματικότητα.
Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τουλάχιστον στο πρώτο επίπεδο της φαινομενολογικής εξερεύνησης πρέπει να γνωρίζουμε καλά το ρόλο που παίζει το πλαίσιο, δηλαδή αν είναι πρωταρχικός ή δευτερεύων. Και αυτό γιατί αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μία στοιχειώδη κατάσταση προβλήματος ως μοντέλο για μια σειρά άλλων προβλημάτων, τότε πρέπει το πλαίσιο να είναι «αδύνατο»
Σύμφωνα με τον Treffers (1987), τα προβλήματα πλαισίου επιτυγχάνουν στο:

- στο σχηματισμό εννοιών: Στην αρχή του μαθήματος δίνουν στα παιδιά ένα κίνητρο και μία ευκαιρία να ασχοληθούν με τα μαθηματικά.
- στην εφαρμοσιμότητα: Χρησιμοποιούν την πραγματικότητα και ως πηγή και ως πεδίο εφαρμογής.
- στο σχηματισμό μοντέλων: Υποστηρίζουν την μάθηση των τυπικών λειτουργιών, διαδικασιών, συμβολισμών, κανόνων και ταυτόχρονα προσφέρουν υλικά ή οπτικά μοντέλα που υποστηρίζουν τη λειτουργία της σκέψης.
- στη χρησιμοποίηση ειδικών μαθηματικών ικανοτήτων σε εφαρμοσμένες καταστάσεις.

### 2.3.5 Η χρήση μοντέλων στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση

Ένας γενικός κανόνας για τον σχεδιασμό και την οργάνωση μιας ρεαλιστικής διδασκαλίας είναι ο καθηγητής-ερευνητής να αναζητά στην αρχή προβλήματα που έχουν τα χαρακτηριστικά μοντέλου, δηλαδή προβλήματα που μπορούν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα για να βοηθήσουν τον μαθητή να ανέβει από το συγκεκριμένο επίπεδο που υποστηρίζεται από το πλαίσιο, στο τυπικό επίπεδο, στα πλαίσια της προοδευτικής μαθηματικοποίησης.

Οι άτυπες μέθοδοι λύσης των μαθητών αποτελούν την πρόφαση για να φτάσουμε σε τυπικές διαδικασίες μέσω μιας πορείας σχηματοποίησης, αφαίρεσης, γενίκευσης. Τα συνδεδεμένα με το πραγματικό-συγκεκριμένο πλαίσιο μαθηματικά αποτελούν τη στέρεα βάση για το πέρασμα στα τυπικά ,απαλλαγμένα από κάθε πλαίσιο, μαθηματικά. Σ' αυτή τη διαδικασία τα μοντέλα δρουν ως μεσάζοντες. Τα μοντέλα αυτά πρέπει να έχουν πολύ ειδικές προδιαγραφές για να λειτουργούν ως «γέφυρες» μεταξύ άτυπων και τυπικών μαθηματικών.(Treffers, 1991) Πρέπει να είναι μοντέλα πολυδιάστατα, δηλαδή να είναι «μοντέλα των» πραγματικών καταστάσεων τα οποία στην πορεία θα χρησιμεύσουν ως «μοντέλα για» τα τυπικά μαθηματικά. Επίσης πρέπει να είναι «ισχυρά» με την έννοια ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε όλες τις φάσεις της της μαθησιακής- διδακτικής διαδικασίας. Τέλος, να συνδέονται με φυσικό τρόπο με τις μεθόδους λύσης των μαθητών και να οδηγούν σε σχηματοποιήσεις και συντομεύσεις με στόχο τη γενίκευση. Πρέπει λοιπόν, οι καταστάσεις προβλήματος σε πλαίσιο που χρησιμοποιούνται, μαζί με τα αντίστοιχα μοντέλα, να έχουν τέτοια μορφή που να επιτρέπει τους μαθητές να δουλεύουν πάνω σ' αυτές και να διαπραγματεύονται σε αλληλεπιδραστικό περιβάλλον τη γνώση πάντα με τη σωστή καθοδήγηση του δασκάλου.



### 2.3.6 Σύγκριση των τεσσάρων τάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση

Ο παρακάτω συγκριτικός πίνακας περιγράφει την παρουσία της οριζόντιας και κατακόρυφης συνιστώσας της μαθηματικοποίησης στις τέσσερις τάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης.(Treffers, 1987)

| | **Μαθηματικοποίηση** | |
|---|---|---|
| ***Τάσεις στην εκπαίδευση*** | Οριζόντια | Κατακόρυφη |
| *Ρεαλιστική* | + | + |
| *Στρουκτουραλιστική* | | + |
| *Εμπειρική* | + | |
| *Μηχανιστική* | | |

Στη <u>*ρεαλιστική μαθηματική διδασκαλία*</u> δίνεται μεγάλο βάρος και στις δύο συνιστώσες της μαθηματικοποίησης. Τα φαινόμενα από τα οποία απορρέουν οι έννοιες και οι δομές χρησιμοποιούνται και ως πηγή και ως πεδίο εφαρμογής. Προσφέρεται στον μαθητή, μέσα από μία ποικιλία φαινομένων, η ευκαιρία αφ' ενός να οικοδοκήσει τις τυπικές μαθηματικές έννοιες και δομές και αφ' ετέρου να τις εφαρμόσει σε πραγματικές καταστάσεις. Οι μαθητές γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ της άτυπης γνώσης που είναι συνδεδεμένη με ένα πλαίσιο και της τυπικής, ακολουθώντας μια προδιαγεγραμμένη πορεία στην οποία τους καθοδηγεί ο καθηγητής. Η μαθηματικοποίηση προχωρά βήμα-βήμα. Στην πορεία διακρίνονται πολλά μικρο-επίπεδα που μπορούν να ομαδοποιηθούν στα τρία επίπεδα Van Hiele.

Στη <u>*στρουκτουραλιστική διδασκαλία*</u> κυρίαρχο ρόλο παίζει η κατακόρυφη συνιστώσα. Το σύνολο σχεδόν της μαθηματικής δραστηριότητας διεξάγεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα. Οι εφαρμογές εμφανίζονται αφού οι μαθητές έχουν μάθει να λειτουργούν σε τυπικό επίπεδο. Άρα η οριζόντια συνιστώσα εμφανίζεται εκ των υστέρων και με περιορισμένο ρόλο και σημασία. Η επιλογή αυτού του σημείου εκκίνησης, δηλαδή το αφηρημένο επίπεδο, υποδηλώνει και την αντίληψη ότι δεν είναι δυνατόν να χτίσει κανείς κάτι αξιόλογο βασιζόμενος στις άτυπες μεθόδους των παιδιών. Όμως στην στρουκτουραλιστική εκπαίδευση οι ενέργειες πάνω στα αντικείμενα δεν συνδέονται με φυσικό τρόπο με τις νοητικές ενέργειες πάνω στα σύμβολα (Gravenmeijer, 1991). Αρκετές φορές έρχονται σε πλήρη αντίθεση με τις άτυπες μεθόδους που χρησιμποιούνται για τη λύση πραγματικών προβλημάτων. Τα προβλήματα που είναι διατυπωμένα σε ένα πραγματικό πλαίσιο δεν μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για ανάπτυξη τυπικών μεθόδων σε αφηρημένο επίπεδο διότι δεν δίνεται επαρκής βοήθεια από τα μοντέλα, τα σχήματα και τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τα επίπεδα στη μαθησιακή διαδικασία να μη μπορούν, μακροπρόθεσμα, να εξελιχθούν διαδοχικά.

Η <u>*εμπειρική διδασκαλία*</u> βασίζεται στην υπόθεση ότι αν οι μαθητές δουλέψουν με μια μεγάλη ποικιλία πραγματικών προβλημάτων, θα καταφέρουν από μόνοι τους να περάσουν στο τυπικό επίπεδο. Το αν τελικά οι μαθητές περνούν στο τυπικό επίπεδο και τι είδους τυπική γνώση αποκτούν, δεν είναι σαφώς καθορισμένα. Επομένως είναι κυρίαρχο το στοιχείο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα είναι απούσα.

Στη <u>*μηχανιστική διδασκαλία*</u> απουσιάζουν και οι δύο συνιστώσες της μαθηματικοποίησης Λείπουν τα πραγματικά φαινόμενα και ως πηγή και ως πεδίο εφαρμογής. Το σημείο

εκκίνησης δίνεται από τον κόσμο των συμβόλων και συνεχίζεται με αποστήθιση κανόνων και αλγορίθμων και αυτοματοποίηση ενεργειών. Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση για τους περισσότερους μαθητές μπλοκάρεται, γιατί αδυνατούν πολλές φορές να κατανοήσουν το θέμα που διδάσκεται και έτσι οδηγούνται αναγκαστικά στην εξάσκηση και αποστήθιση.

Η ρεαλιστική προσέγγιση έχει τρεις βασικές διαφορές με την μηχανιστική: το πλαίσιο μέσα στο οποίο διατυπωνεται το πρόβλημα, τη γλώσσα και τις ασκήσεις (Van den Brink, F. J., 1991)

Κυρίαρχη όμως είναι η διαφορά στην αντίληψη για τη μάθηση και διδασκαλία. Στη μηχανιστική εκπαίδευση:

─ Η μάθηση δεν θεωρείται κατασκευή αλλά αναπαραγωγή

─ Η διδασκαλία:

- δεν προσανατολίζεται στο συγκεκριμένο, αλλά ξεκινά και ολοκληρώνεται στο αφηρημένο επίπεδο.
- δεν δίνει έμφαση στον αναστοχασμό και στα «λεκτικά» προβλήματα Τα «λεκτικά» προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως τυπικά μαθηματικά προβλήματα εκφρασμένα με λέξεις, μακρυά από την πραγματικότητα, χωρίς να μπορούν να προκαλέσουν γνωστική σύγκρουση και χωρίς να περιέχουν το στοιχείο της ελεύθερης δημιουργίας.
- είναι εξατομικευμένη. Οι μαθητές εργάζονται ατομικά χωρίς αλληλεπίδραση και χωρίς κοινωνικό πλαίσιο.
- οι διδακτικές μέθοδοι δεν συνδέονται μεταξύ τους

### 2.3.7 Ο Κονστρουκτιβισμός και η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση

Η βασική φιλοσοφική θέση του κονστρουκτιβισμού είναι ότι δεν υπάρχει ένας αυστηρά καθορισμένος τρόπος να γνωρίσουμε την αντικειμενική πραγματικότητα. Οι γνώσεις μας είναι στην ουσία θεωρίες για την πραγματικότητα. Ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός υποστηρίζει μάλιστα ότι δεν υπάρχει αντικειμενική πραγματικότητα (Κολέζα, 2000).

Στην εκπαίδευση λοιπόν, υποστηρίζουν οι κονστρουκτιβιστές, πρέπει να δώσουμε στους μαθητές την ευκαιρία να χτίσουν μόνοι τους τη γνώση. Επειδή κάθε άτομο προσπαθεί να κατασκευάσει μια δική του θεωρία της πραγματικότητας είναι επόμενο ότι και οι μαθητές προσπαθούν να κάνουν το ίδιο. Αυτό οδηγεί στην δημιουργία εναλλακτικών θεωριών, των λεγομένων «παρανοήσεων» οι οποίες δεν εγκαταλείπονται εύκολα από τα παιδιά. Για τους κονστρουκτιβιστές οι θεωρίες των μαθητών έχουν την ίδια αξία με αυτές των δασκάλων και οι μαθητές πρέπει να είναι ελεύθεροι να επιλέξουν την δικιά τους θεωρία. Αυτή είναι και η βασική διαφορά με την ρεαλιστική προσέγγιση. Στην ρεαλιστική διδασκαλία οι μαθητές καθοδηγούνται, χωρίς όμως να εξαναγκάζονται, στην προσπάθειά τους να χτίσουν τις θεωρίες τους. Αυτή η καθοδήγηση είναι σχεδιασμένη προσεκτικά ώστε μέσα από κατάλληλες οδηγίες, ερωτήσεις και προβλήματα μέσα σε ένα πλαίσιο, να γίνονται οι απαραίτητες ενέργειες για το κτίσιμο της γνώσης και στη συνέχεια μέσα από την συζήτηση και την αλληλεπίδραση να γίνονται οι «διορθώσεις πορείας».

Επομένως εμφανίζεται και η βασική διαφορά του ρόλου του δασκάλου στην τάξη:

*Στην ΡΜΕ ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές ενώ στην κονστρουκτιβιστική προσέγγιση ο δάσκαλος ακολουθεί τους μαθητές ενώ χτίζουν τις θεωρίες τους* (Gravenmeijer, 1991).

Η ιδέα της επανακατασκευής της γνώσης είναι κοινή και στις δύο θεωρίες.

Στη θεωρία της ρεαλιστικής εκπαίδευσης χρησιμοποιούνται δύο πηγές για τον σχεδιασμό διδασκαλίας που στοχεύει στην επανακατασκευή της γνώσης:
1. Η ιστορία των μαθηματικών
2. Οι αυθόρμητες άτυπες μέθοδοι των παιδιών
Ο διαχωρισμός που κάνει ο Cobb μεταξύ της οπτικής γωνίας του «δρώντα» και του «παρατηρητή» οδηγεί στην συνειδητοποίηση της διαφοράς μεταξύ της πραγματικότητας του δασκάλου και του μαθητή. Με την άποψη αυτή συμφωνεί και η ρεαλιστική προσέγγιση.

### 2.3.8 Η χρήση χειρισμών στη ΡΜΕ

Η χρήση βοηθητικού υλικού έχει παίξει σημαντικό ρόλο στη θεωρία της διδασκαλίας των μαθηματικών. Και η ψυχολογία της δράσης και η γνωστική ψυχολογία εντοπίζουν πρόβλημα στο πέρασμα από τον συλλογισμό με βάση το βοηθητικό υλικό, στον συλλογισμό με βάση τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις. Επισημαίνουν ότι η εργασία με βοηθητικό υλικό δεν προετοιμάζει απαραίτητα τους μαθητές για εργασία χωρίς αυτό.
Ο κονστρουκτιβισμός υποστηρίζει ότι το βοηθητικό υλικό πρέπει να εξετασθεί από την πλευρά του μαθητή και μόνο. Συχνά οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται στις προσδοκίες που έχουν οι ενήλικες για τον ρόλο του βοηθητικού υλικού, επειδή βλέπουν μόνο το υλικό και δεν αναγνωρίζουν τις μαθηματικές σχέσεις που υπάρχουν σ΄αυτό. Η άποψη αυτή είναι συνεπής με την θεωρία για την κατασκευή της γνώσης, σύμφωνα με την οποία ο κάθε άνθρωπος αναπτύσσει τη δική του εικόνα για την πραγματικότητα. Επομένως η πραγματικότητα του μαθητή είναι διαφορετική από την πραγματικότητα του δασκάλου. Με αυτή την έννοια η θεωρία της ΡΜΕ συμφωνεί με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση.
Στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση το υλικό αποτελεί ένα βοήθημα για την επίλυση μερικών πρακτικών προβλημάτων μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Το υλικό δεν μεταφέρει συγκεκριμένη γνώση. Η σκέψη αναπτύσσεται σε ένα γενικό πλαίσιο το οποίο είναι μοντέλο μιας κατάστασης. Οι ενέργειες των μαθητών με βάση το υλικό θεωρούνται ως μία μεταβατική κατάσταση επειδή πολλές φορές οι μαθητές αναπτύσσουν δικές τους μεθόδους λύσης οι οποίες δεν είναι ισόμορφες με τους χειρισμούς του βοηθητικού υλικού (Gravenmeijer, 1991).
Στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση η πορεία ανάπτυξης, ενός αλγόριθμου για παράδειγμα, είναι προκαθορισμένη σε μεγάλο βαθμό. Η διδασκαλία έχει οργανωθεί με τέτοιον τρόπο ώστε, αυτό που ανακαλύπτεται και η σειρά με την οποία ανακαλύπτεται έχει προσχεδιαστεί από τον καθηγητή. Η πορεία αυτή της διδασκαλίας απορρέει από την «αρχή της επανεφεύρεσης» που είναι θεμελιώδης στη ΡΜΕ και η οποία αναγνωρίζει την ιστορία των μαθηματικών ως μια ευρετική διαδικασία. Ο μαθητής ακολουθώντας την ιστορική πορεία του περιεχομένου της διδασκαλίας, επανανακατασκευάζει τα μαθηματικά που προέκυψαν από αυτή την πορεία.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε για τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη της πρότασης είναι:

- Ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, τα Μαθηματικά σε Πλαίσιο, που υποστηρίζει διδασκαλία συνεπή με τις αρχές της ΡΜΕ
- Νέες τεχνολογίες με την μορφή του διερευνητικού λογισμικού «Χελωνόκοσμος» στο ΑΒΑΚΙΟ

## 3.1 Μαθηματικά σε πλαίσιο ( Mathematics in Context)

Τα Μαθηματικά σε Πλαίσιο είναι ένα αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για μαθητές της $5^{ης}$\$6^{ης}$ τάξης του Δημοτικού σχολείου έως και την $2^{α}$\$3^{η}$ Γυμνασίου. Ο σχεδιασμός του ξεκίνησε το 1991 από το Εθνικό κέντρο έρευνας στη Μαθηματική εκπαίδευση του πανεπιστημίου Wisconsin-Madison στις ΗΠΑ σε συνεργασία με το Ινστιτούτο Freudenthal στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης στην Ολλανδία. Ο κύκλος έκδοσης-δοκιμής-αναθεώρησης-επανεξέτασης ολοκληρώθηκε το 1998 με την έκδοση της τελικής μορφής του εκπαιδευτικού υλικού των Mathematics in Context (MiC) που χρησιμοποιείται από σχολεία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε διάφορες πολιτείες των ΗΠΑ και στο Πουέρτο-Ρίκο.

Τα Μαθηματικά σε Πλαίσιο έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να υποστηρίζουν διδασκαλία συνεπή με τις αρχές και τα πρότυπα που έχει θέσει η NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) στο Standards 2000 Project. Σε γενικές γραμμές, σύμφωνα με τα πρότυπα, η κατανόηση στα μαθηματικά είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις εμπειρίες που αποκτούν τα παιδιά κατά την επίλυση προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο. Κατά συνέπεια τα σχολικά μαθηματικά διευρύνονται και εμπλουτίζονται όταν είναι ενσωματωμένα σε ρεαλιστικά πλαίσια που έχουν νόημα για τους μαθητές.

### 3.1.1 Το εκπαιδευτικό υλικό των MiC

Τα σχολικά εγχειρίδια MiC περιέχουν 40 ενότητες (10 για κάθε τάξη), βιβλίο καθηγητή και δύο συμπληρωματικά βιβλία με προβλήματα για επί πλέον εργασία. Οι θεματικές περιοχές που καλύπτουν είναι οι εξής:

1. ΑΡΙΘΜΟΙ (φυσικοί αριθμοί, κλάσματα, λόγοι, δεκαδικοί αριθμοί, ποσοστά, ακέραιοι)
2. ΑΛΓΕΒΡΑ (δημιουργία μαθηματικών παραστάσεων, πινάκων, γραφικών παραστάσεων και τύπων από μοτίβα (patterns) και συναρτήσεις, λύση αλγεβρικών εξισώσεων, μελέτη των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών)
3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (μέτρηση, τρισδιάστατη αναπαράσταση και επεξεργασία, γεωμετρία, αναλυτική γεωμετρία, μετασχηματισμοί)
4. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ & ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, κατανομή και μεταβλητότητα, πιθανότητα, αναμενόμενη τιμή)

Κατά την διάρκεια της 4χρονης εκπαίδευσης, οι μαθητές εξερευνούν και συνδέουν τις θεματικές περιοχές. Αν και κάθε ενότητα επικεντρώνεται σε κάποια ειδικά θέματα, εν

τούτοις οι περισσότερες περιέχουν ιδέες που μπορούμε να τις εντοπίσουμε και σε άλλες ενότητες. Και όχι μόνο αυτό, αλλά δίνεται και ιδιαίτερο βάρος στην διασύνδεση αυτών των ιδεών.
Κάθε ενότητα περιέχει προβλήματα και ερωτήσεις που έχουν σχεδιαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε να αναπτύσουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών. Οι μαθητές, μέσω των δραστηριοτήτων, ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν τις μαθηματικές σχέσεις, να αναπτύξουν δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, να χρησιμοποιήσουν τα κατάλληλα εργαλεία για την λύση των προβλημάτων, να διατυπώσουν προβλήματα, να συνεργαστούν με τους συμμαθητές τους, να μοιραστούν τις λύσεις και στρατηγικές, να τις κρίνουν και να τις συγκρίνουν.

### 3.1.2 Η διαδικασία ανάπτυξης του εκπαιδευτικού υλικού

Η διαδικασία ανάπτυξης του εκπαιδευτικού υλικού διήρκεσε έξι χρόνια. Αρχικά συστήθηκε μία συμβουλευτική επιτροπή από καθηγητές διδακτικής μαθηματικών, μαθηματικούς, επιστήμονες, υπεύθυνους αναλυτικών προγραμμάτων, διευθυντές και καθηγητές, για να εγγυηθεί ότι το αναλυτικό πρόγραμμα MiC θα ήταν συνεπές με τους στόχους και τη φιλοσοφία των προτύπων NCTM. Αυτή η επιτροπή ετοίμασε ένα προσχέδιο για να καθοδηγήσει την ανάπτυξη του εκπαιδευτικού υλικού.
Το Ινστιτούτο Freudenthal, βασισμένο στο προσχέδιο της επιτροπής, έκανε έναν πρώτο σχεδιασμό όλων των ενοτήτων. Στη συνέχεια η ερευνητική ομάδα του πανεπιστημίου Wisconsin-Madison, ανέλαβε να διαμορφώσει το υλικό και να το προσαρμόσει στην πραγματικότητα των ΗΠΑ. Αυτός ο συνεργατικός σχεδιασμός δεν ήταν πάντοτε εύκολος (Romberg, 2001). Οι Ολλανδοί ερευνητές έδιναν έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς και στη λογική-νόημα του αριθμού και όχι στις διαδικαστικές ρουτίνες. Κατ' αυτούς οι μαθητές έπρεπε να αναστοχάζονται τις απαντήσεις τους, τις στρατηγικές, τις διαδικασίες και να κρίνουν το νόημα της δουλιάς τους, κοινώς να καταλαβαίνουν τι κάνουν και γιατί το κάνουν.
Ακολούθησε πιλοτική διδασκαλία των ενοτήτων σε σχολεία της πολιτείας του Wisconsin, από την οποία καθηγητές και μαθητές εισηγήθηκαν τις αλλαγές που έπρεπε να γίνουν. Μερικές φορές ήταν δραστικές, όταν εγείρονταν ερωτηματικά για τη καταλληλότητα και την αυθεντικότητα του χρησιμοποιούμενου πλαισίου. Οι αναθεωρημένες ενότητες επανεξετάσθηκαν και σε άλλα σχολεία της χώρας, έγιναν και πάλι διορθώσεις μέχρι να πάρουν την τελική τους μορφή.

### 3.1.3 Η φιλοσοφία των MiC

Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη των σχολικών εγχειριδίων βασίστηκε σε δύο προϋποθέσεις:

1. *Οι μαθητές κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες μέσω των εμπειριών που αποκτούν κατά την διάρκεια επίλυσης προβλήματος.*
   Η διδασκαλία των MiC ξεκινά μέσα από πλαίσια που απαιτούν μαθηματική οργάνωση, δηλαδή πλαίσια που μπορούν να «μαθηματικοποιηθούν», σύμφωνα με την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Ο Freudenthal υποστηρίζει ότι η διδασκαλία πρέπει να ξεκινά με δραστηριότητες που χρειάζονται μαθηματικοποίηση. Αν οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά έξω από την πραγματικότητα της εμπειρίας τους, τότε ή τα ξεχνούν πολύ γρήγορα ή αδυνατούν να τα εφαρμόσουν. Όταν όμως μέσα από μία πραγματική κατάσταση μπορούν να διακρίνουν και να εξάγουν τα μαθηματικά που

είναι ενσωματωμένα σ' αυτή αυτό σημαίνει ότι :

- Μαθαίνουν να αναπαριστούν σχέσεις ποσότητας και χώρου σε ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών καταστάσεων.
- Εκφράζουν τις σχέσεις χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους, πρόσημα και σύμβολα
- Χρησιμοποιούν διαδικασίες με τα πρόσημα και τα σύμβολα.
- Διατυπώνουν κανόνες
- Κάνουν αριθμητικούς και συμβολικούς υπολογισμούς
- Κάνουν προβλέψεις
- Ερμηνεύουν τα αποτελέσματα που πήραν χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες

Η προσέγγιση αυτή θεωρεί ως δεδομένο, ότι οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν τους λόγους ύπαρξης και χρήσης των μαθηματικών όρων, προσήμων, συμβόλων και κανόνων, που δημιούργησε η ανθρωπότητα στην πορεία εξέλιξής της καθώς και το νόημα που συμφώνησε ιστορικά να τους δώσει.

*2. Η σειρά των δραστηριοτήτων σε πλαίσιο πρέπει να σχεδιάζεται με τέτοιον τρόπο, ώστε να βοηθά τους μαθητές να αναπτύσσουν σταδιακά μεθόδους μοντελοποίησης και συμβολισμού καταστάσεων προβλήματος.*

Όλες οι δραστηριότητες έχουν έναν τελικό σκοπό στη μαθησιακή διαδικασία και είναι το όχημα στην πορεία των μαθητών από την άτυπη στην τυπική σημειωτική (Romberg, 2001). Τα άτυπα μοντέλα των μαθητών με την υποστήριξη και την καθοδήγηση του καθηγητή, μετασχηματίζονται σε μοντέλα για τον αφηρημένο μαθηματικό συλλογισμό. Αντί ο καθηγητής, όπως συμβαίνει στις περισσότερες τάξεις των μαθηματικών, να ξεκινά παρουσιάζοντας τυπικούς όρους, σύμβολα και κανόνες και να περιμένει από τους μαθητές να μάθουν να τους χρησιμοποιούν εδώ ακολουθείται η αντίστροφη πορεία: οι δραστηριότητες οδηγούν τους μαθητές στην χρήση της τυπικής σημειωτικής (προοδευτική μαθηματικοποίηση)

### 3.1.4 Προοδευτική μαθηματικοποίηση των εννοιών στην Άλγεβρα

Μέσω του αναλυτικού προγράμματος MiC οι μαθητές αποκτούν γνώσεις και δεξιότητες αναπαριστώντας και αναλύοντας ρεαλιστικές καταστάσεις και λύνοντας προβλήματα που σχετίζονται με αυτές.

Η θεματική περιοχή της Άλγεβρας καλύπτεται από 14 ενότητες ( οι 4 ανήκουν στη θεματική περιοχή Αριθμοί) που διδάσκονται κατά την τετράχρονη διάρκεια του προγράμματος σπουδών. Δεν θα γίνει εδώ αναφορά στο περιεχόμενο των ενοτήτων αλλά περιγραφή της πορείας των μαθητών από το συγκεκριμένο και συνδεδεμένο με το πλαίσιο επίπεδο, στο τυπικό και ανεξάρτητο από οποιοδήποτε πλαίσιο

Η προοδευτική τυποποίηση των μαθηματικών λοιπόν γίνεται σταδιακά ως εξής:

1$^{o}$ επίπεδο
Οι μαθητές προσεγγίζουν τα προβλήματα και αποκτούν δεξιότητες και γνώση της άλγεβρας με άτυπο τρόπο. Χρησιποποιούν λέξεις, εικόνες, διαγράμματα δικής τους επινόησης για:

- να περιγράψουν μαθηματικές καταστάσεις
- να οργανώσουν τη γνώση τους και τη δουλειά τους
- να λύσουν προβλήματα
- να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους

↓ ↑

2$^{o}$ επίπεδο
Οι μαθητές σταδιακά αρχίζουν αν χρησιμοποιούν σύμβολα για να περιγράψουν μαθηματικές καταστάσεις, να οργανώσουν τη δουλειά τους και να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους Σ' αυτό το επίπεδο ή χρησιμοποιούν σύμβολα δικής τους επινόησης ή μαθαίνουν αντισυμβατικούς συμβολισμούς (π.χ βελάκια που δηλώνουν κατεύθυνση). Οι αναπαραστάσεις των καταστάσεων προβλήματος και οι επεξηγήσεις τους είναι ένα μείγμα από λέξεις και σύμβολα

↓ ↑

3$^{o}$ επίπεδο
Οι μαθητές μαθαίνουν και χρησιμοποιούν τον τυπικό αλγεβρικό συμβολισμό για να:

- να περιγράψουν μαθηματικές καταστάσεις
- να χειριστούν αλγεβρικές παραστάσεις
- να λύσουν εξισώσεις
- να κάνουν γραφικές παραστάσεις

Η μετακίνηση μεταξύ των επιπέδων είναι αμφίδρομη. Οι μαθητές ανεβαίνουν και κατεβαίνουν επίπεδο φορμαλισμού, ανάλογα με την δεδομένη κατάσταση προβλήματος και τα μαθηματικά που περιέχει. Αν και στη πραγματικότητα κάνουν άλγεβρα από τις μικρές τάξεις, εν τούτοις δεν πιέζονται να γενικεύσουν τη γνώση τους, ούτε να λειτουργούν σε ένα πιο φορμαλιστικό επίπεδο, παρά μόνο όταν έχουν αποκτήσει αρκετή εμπειρία με τις έννοιες που βρίσκονται μέσα στις καταστάσεις που επεξεργάζονται.

### 3.1.5 Το διδακτικό μοντέλο των MiC

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, μεταξύ μαθητή και καθηγητή, μεταξύ των καθηγητών, παίζει σπουδαίο ρόλο στην διαδικασία κατασκευής της μαθηματικής γνώσης. Ο διάλογος με τους μαθητές δίνει στον καθηγητή τη δυνατότητα να αντιληφθεί τι ακριβώς σκέφτονται οι μαθητές και να τους βοηθήσει στις μεθόδους που ακολουθούν. Οι συζητήσεις με όλη την τάξη ή με μικρές ομάδες μαθητών δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να μοιραστούν τις ιδέες και τις λύσεις τους, να τις αξιολογήσουν και να αναγνωρίσουν τυχόν παρανοήσεις τους.

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές διδακτικές στρατηγικές: ομαδική εργασία, διδασκαλία σε όλη την τάξη ή ατομική δουλειά. Οι μαθητές κάνουν ομαδικές εργασίες και τις παρουσιάζουν ή λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς ή νέες τεχνολογίες. Αν και το βιβλίο καθηγητή σε κάθε ενότητα παρέχει υποδείξεις για τις διάφορες κατάλληλες μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, οι καθηγητές είναι ελεύθεροι να διαλέξουν αυτές που ταιριάζουν καλύτερα στο μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας και στην ατμόσφαιρα της τάξης.

### 3.1.6 Το μαθησιακό περιβάλλον των MiC

Στο MiC ο καθηγητής διευκολύνει και κατευθύνει την διδακτική-μαθησιακή διαδικασία. Το κέντρο της γνώσης μεταφέρεται από τον καθηγητή στους μαθητές. Ο καθηγητής «προσκαλεί» τους μαθητές να ασχοληθούν με τα προβλήματα και να δουλέψουν με μια ποικιλία προσεγγίσεων. Αντί να «διδάσκει λέγοντας και παρουσιάζοντας», διατυπώνει ερωτήσεις, συζητά προβλήματα και συνοψίζει τα μαθηματικά που κατασκευάστηκαν στην τάξη.

Οι μαθητές έρχονται στο σχολείο μεταφέροντας ένα σύνολο προσωπικών απόψεων, αντιλήψεων και εμπειριών και πρέπει να ενθαρρύνονται να λειτουργούν μέσα από αυτές καθώς «επαναεφευρίσκουν» τις μαθηματικές διαδικασίες. Συνήθως υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι επίλυσης ενός προβλήματος και όχι μία και μοναδική στρατηγική ή μία και μοναδική σωστή απάντηση. Το MiC αναγνωρίζει ότι ο μαθητής έρχεται στην τάξη με τη δική του προηγούμενη γνώση και πρέπει να ενθαρρύνεται να λύνει τα προβλήματα με τον δικό του τρόπο, χρησιμοποιώντας τις δικές του στρατηγικές στο δικό του επίπεδο σκέψης.

Ο ρόλος του καθηγητή είναι με τη συζήτηση να λάβει υπ' όψιν όλες τις στρατηγικές των παιδιών και να τα βοηθήσει να κρίνουν και να συγκρίνουν τις μεθόδους τους. Η αλληλεπίδραση καθηγητή και μαθητών και η ποικιλία στρατηγικών, είναι ένα βασικό στοιχείο στη δυναμική της τάξης. Όταν ο καθηγητής γνωρίζει τις στρατηγικές των μαθητών, έχει τη δυνατότητα να προσανατολίσει τη διδασκαλία με τέτοιον τρόπο ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν νέα και βαθύτερη γνώση των μαθηματικών.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι:

*Η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης προωθείται και υποστηρίζεται από τα προβλήματα, καθοδηγείται από τον καθηγητή και πραγματοποιείται μέσω της αλληλεπίδρασης στη τάξη.*

### 3.1.7 Από την παραδοσιακή στη ρεαλιστική διδασκαλία

**Εμπειρίες των καθηγητών**

Παρακολουθώντας κανείς τις περισσότερες τάξεις των μαθηματικών, θα διαπιστώσει ότι λίγο ως πολύ ακολουθείται ο ίδιος ρυθμός διδασκαλίας από μέρους των καθηγητών και των μαθητών:

*επανάληψη του προηγούμενου μαθήματος ─ παρουσίαση του καινούριου από τον καθηγητή ─ λύση ασκήσεων από τους μαθητές (συνήθως ατομικά) με τη βοήθεια του καθηγητή.*

Η εμπειρία των καθηγητών από τη διδασκαλία των ρεαλιστικών μαθηματικών, όπως καταγράφηκε κατά την περίοδο των πειραματικών διδασκαλιών, ήταν τελείως διαφορετική. Κάποιος καθηγητής ανέφερε:

«Η έκπληξη ήρθε όταν προσπαθήσαμε να διδάξουμε το πρώτο μάθημα. Στην πραγματικότητα υπήρχαν πολύ λίγα να «διδάξει» κανείς. Οι μαθητές έπρεπε να διαβάσουν τον χάρτη, να διαβάσουν τις ερωτήσεις, να προσδιορίσουν τι ακριβώς τους

ζητούσαν να κάνουν, να πάρουν κάποιες πληροφορίες από τον χάρτη που θα τους βοηθούσαν να το κάνουν και τέλος να αποφασίσουν ποιες μαθηματικές δεξιότητες χρειάζονταν για να απαντήσουν στις ερωτήσεις».

***Κάλυψη της ύλης***

Η αγωνία για την κάλυψη της ύλης είναι κοινή σε όλους τους καθηγητές των μαθηματικών. Πάντα ο καθηγητής έχει ως στόχο να τελειώσει την προκαθορισμένη ύλη διδασκαλίας, ώστε να ετοιμάσει τους μαθητές του για το επόμενο επίπεδο της μαθηματικής μελέτης.

Οι καθηγητές που δίδαξαν τα Μαθηματικά σε Πλαίσιο είχαν συχνά εκδηλώσει την επιθυμία να διδάξουν θέματα που αναφερόταν στην παραδοσιακή διδασκαλία. Ο κίνδυνος από ένα τέτοιο εγχείρημα είναι διπλός: να γεμίσει ο αναθεωρημένος τρόπος διδασκαλίας με παραδοσιακές πρακτικές ή\και να αναπροσαρμοσθεί σε τέτοιον βαθμό ώστε να μη διαφέρει στην ουσία από τον παλαιό (Romberg, 2001)

***Οι δυνατότητες των μαθητών***

Οι καθηγητές που δίδαξαν τα Μαθηματικά σε Πλαίσιο άλλαξαν την αντίληψη που είχαν για τις δυνατότητες των μαθητών τους. Όλοι εξεπλάγησαν από τη δουλειά που μπορούσαν να βγάλουν εις πέρας οι μαθητές τους, την οποία οι ίδιοι οι καθηγητές είχαν κρίνει ότι ήταν πολύ δυσκολη γι' αυτούς.

Η αλλαγή της φιλοσοφίας του τρόπου διδασκαλίας που θέλει τους μαθητές « να κάνουν μαθηματικά» αντί « να διδάσκονται τα μαθηματικά» είχε ως συνέπεια:

- Μαθητές που είχαν χαρακτηρισθεί «αδύνατοι στα μαθηματικά», διαπίστωναν ότι μπορούσαν να πετύχουν.
- Κάποιοι απ' αυτούς που θεωρούσαν τους εαυτούς τους «καλούς στα μαθηματικά», αποφάσιζαν ότι «αυτό δεν είναι μαθηματικά».

### 3.1.8 Οι επιδόσεις των μαθητών

Οι μαθητές που διδάχθηκαν πιλοτικά ολόκληρο ή μέρος του προγράμματος MiC κατά τη διάρκεια της δοκιμαστικής περιόδου 1992-1998, πήραν μέρος σε μια σειρά από τεστ (standardized tests) που γίνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα ή σε επίπεδο πολιτείας ή σε εθνικό επίπεδο στις ΗΠΑ. Τα αποτελέσματα (Webb & Meyer, 1999) έδειξαν ότι ακόμη και οι μαθητές που διδάχθηκαν για ένα χρόνο το πρόγραμμα είχαν σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους. Εδώ θα αναφέρω ενδεικτικά μόνο τα αποτελέσματα κάποιων σχολείων.

Οι μαθητές της έκτης δημοτικού-δευτέρας γυμνασίου από σχολεία της Αϊόβα πήραν ένα τέστ (Iowa Test of Basic Skills) και το 1993, πριν το πρόγραμμα MiC, και το 1996 μετά το MiC, που εξέταζε την ικανότητα υπολογισμών, την δυνατότητα επίλυσης προβλήματος και την κατανόηση εννοιών. Τα συγκριτικά αποτελέσματα έδειξαν μία σαφή βελτίωση της επίδοσης μέχρι και 30% σε επιδόσεις που ήταν ήδη μέτριες ή υψηλές.(π.χ από 59% σε 79% ή από 87% σε 96%)

Στην ίδια πολιτεία οι μαθητές της τρίτης γυμνασίου που διδάχθηκαν τα 2/3 του προγράμματος στην έκτη δημοτικού, το ½ στη πρώτη γυμνασίου και ολόκληρο στη δευτέρα γυμνασίου, σε τεστ σε επίπεδο πολιτείας (Iowa Test of Educational Development) είχαν τις εξής επιδόσεις:

- Το 25% είχε επίδοση που ανήκε στο 1% της υψηλότερης σε εθνικό επίπεδο
- Το 47% είχε επίδοση που ανήκε στο 10% της υψηλότερης σε εθνικό επίπεδο
- Το 90% είχε επίδοση πάνω από τον μέσο όρο

Έξω από τις ΗΠΑ, στο Πουέρτο Ρίκο, εφαρμόστηκε πιλοτικά το πρόγραμμα σε μία μόνο τάξη με δύο συμμετέχοντες καθηγητές και 23 μαθητές που διδάχθηκαν το πρόγραμμα στην ισπανική έκδοσή του. Πήραν μέρος σε διαγωνισμό που διοργανώθηκε από το αντίστοιχο Υπουργείο Παιδείας σε εθνικό επίπεδο. Οι 21 είχαν βαθμολογία πάνω από 90% και οι 2 πάνω από 80%. Σήμερα το MiC διδάσκεται σε 50 σχολεία με συμμετοχή 100 καθηγητών.

Συμπερασματικά αναφέρεται (Webb & Meyer, 1999) ότι σε όλα τα σχολεία που εφαρμόσθηκε το πρόγραμμα, οι μαθητές κέρδισαν πολλά. Όχι μόνο πέτυχαν υψηλές βαθμολογίες σε διαγωνισμούς, αλλά και αυτοί που είχαν χαμηλές επιδόσεις τις προηγούμενες χρονιές, βελτίωσαν θεαματικά την βαθμολογία τους έστω και με ένα χρόνο διδασκαλίας του MiC.

Διεξάγεται μία έρευνα μακράς διάρκειας (A longitudinal/cross-sectional study of the impact of MiC on student mathematics performance) που ξεκίνησε το 1996 και η οποία:

1. Εξετάζει την επιρροή της τελικής μορφής του προγράμματος στην γνώση και κατανόηση των μαθηματικών αφ'ενός και αφ' ετέρου στην επίδοση μαθητών που το διδάχθηκαν επί τέσσερα χρόνια.
2. Συγκρίνει τις επιδόσεις των μαθητών που ακολουθούν το MiC με τις επιδόσεις μαθητών που διδάσκονται τα παραδοσιακά προγράμματα ( Romberg & Shafer, 2003)

## 3.2 Νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευση

Η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας των υπολογιστών τα τελευταία χρόνια είχε ως φυσικό επακόλουθο μία αλυσίδα αλλαγών σε πολλούς τομείς και δραστηριότητες της κοινωνίας. Είναι κοινωνική αναγκαιότητα πλέον να παρακολουθήσει το σχολείο τις αλλαγές αυτές και να τις εντάξει στη μαθησιακή διαδικασία προς όφελος και των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

> Η ένταξη της χρήσης της υπολογιστικής τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία συνιστά μία καινοτομία ως προς τις ανθρώπινες διαδικασίες επειδή ακριβώς οι νέες τεχνολογίες, εκτός από εργαλεία, πηγές και μέσα, μπορεί να προσφέρουν δυνατότητα εξέλιξης της εκπαιδευτικής πρακτικής και αναβάθμιση του ρόλου του μαθητή και του εκπαιδευτικού. (Κυνηγός, 2002)

### 3.2.1 Μικρόκοσμοι – Υπολογιστικά περιβάλλοντα μάθησης

Οι μικρόκοσμοι είναι υπολογιστικά περιβάλλοντα στα οποία είναι ενσωματωμένες έννοιες που αναφέρονται σε ένα ή περισσότερα γνωστικά αντικείμενα και τις οποίες εξερευνούν οι μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Ένας καλός μικρόκοσμος είναι αυτός που εύκολα τον χειρίζονται οι μαθητές ώστε μέσα από δραστηριότητες να κατανοήσουν τις κρυμμένες αρχές και δομές. (diSessa A, 2000).

Οι μαθηματικοί μικρόκοσμοι είναι περιβάλλοντα εμπλουτισμένα μαθηματικά και επομένως αποτελούν ένα κατάλληλο πλαίσιο για να αναπτυχθούν μαθηματικές δραστηριότητες. (Freudenthal, 1973) Οι μικρόκοσμοι αυτοί συνήθως δεν περιέχουν μόνο μία έννοια, δομή ή σχέση αλλά περισσότερες, τις οποίες αναγκάζονται να διερευνήσουν οι μαθητές στα πλαίσια της αλληλεπίδρασης.

> Ο μικρόκοσμος είναι ένα διανοητικό περιβάλλον όπου οι μαθητές μαθαίνουν να δουλεύουν σε ένα κόσμο με μεταβλητές, να σκέπτονται με όρους αναλογίας, με όρους κατά προσέγγιση. Μαθαίνουν μαθηματικά και επιστήμη σ΄ένα περιβάλλον όπου το αληθές ή το ψευδές και το σωστό ή λάθος δεν είναι αποφασιστικά κριτήρια (Papert, 1980)

### 3.2.2 Υπολογιστικά γεωμετρικά περιβάλλοντα για διερευνητική μάθηση-Logo

Σ' ένα υπολογιστικό γεωμετρικό περιβάλλον το σχήμα έχει δυναμικό χαρακτήρα, δηλαδή μεταβάλλεται εύκολα και γρήγορα.

Το περιβάλλον είναι γεωμετρικό επειδή περιέχει σχέσεις και δομές της γεωμετρίας τις οποίες αναμένεται να αναγνωρίσουν ή να μάθουν οι μαθητές σε αλληλεπίδραση με αυτό. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργεί προβληματικές καταστάσεις και να βοηθά τους μαθητές να τις επιλύσουν. (Γαβρίλης, 2002 ) Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν αυτές τις καταστάσεις, αλληλεπιδρούν δυναμικά με το περιβάλλον, το τροποποιούν, θέτουν δικούς τους στόχους, εξετάζουν την ορθότητα των σκέψεών τους. Έχουν την δυνατότητα να διαμορφώνουν και να εφαρμόζουν εναλλακτικές στρατηγικές για την επίλυση του προβλήματος και με την άμεση ανατροφοδότηση από το περιβάλλον εμπλουτίζουν ή τροποποιούν την υπάρχουσα γνώση. Ένα περιβάλλον με αυτά τα χαρακτηριστικά υποστηρίζει η *Γεωμετρία της χελώνας* (Papert, 1980) Η χελώνα που αποτελεί την θεμελιώδη οντότητα αυτής της γεωμετρίας έχει θέση, προσανατολισμό και δυνατότητα κίνησης. Η θέση της κάθε φορά προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την προηγούμενη θέση. Η Logo είναι μία γλώσσα προγραμματισμού που επινοήθηκε έτσι ώστε να δημιουργεί και να υποστηρίζει καταστάσεις αλληλεπίδρασης. Όταν ο μαθητής δημιουργήσει μία διαδικασία-πρόγραμμα ή τροποποιήσει μία ήδη υπάρχουσα, έχει άμεση αναπαράσταση των δράσεών του και των αποτελεσμάτων τους.

### 3.2.3 Αβάκιο-Χελωνόκοσμος

Το Αβάκιο είναι ένα μαθησιακό υπολογιστικό περιβάλλον που προσφέρεται για την κατασκευή διερευνητικού εκπαιδευτικού λογισμικού από μη προγραμματιστές. Δίνει την δυνατότητα δημιουργίας Μικρόκοσμων που έχουν ως δομικά υλικά ψηφίδες που συνδέονται και συνεργάζονται. Στο Αβάκιο έχει αναπτυχθεί το λογισμικό Χελωνόκοσμος που βασίζεται μεν στη Γεωμετρία της χελώνας, αλλά έχει επί πλέον την δυνατότητα μέσω της ψηφίδας «μεταβολέας» να χειρίζεται δυναμικά διαδικασίες που περιλαμβάνουν μεταβλητές. Οι μαθητές, με μία συνεχή μεταβολή των τιμών μιας μεταβλητής, μπορούν να παρατηρήσουν τις αλλαγές που επιφέρει αυτή η μεταβολή στο γεωμετρικό σχήμα. Με την χρήση της ψηφίδας αυτής:

- Περιορίζεται σημαντικά η χρονοβόρα διαδικασία δοκιμής-λάθους
- Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν και να μελετήσουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της διαδικασίας-μαθηματικής έννοιας (Kynigos, Koutlis, Hadzilakos, 1997)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το κεφάλαιο διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών αριθμών (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι) αποτελείται από έξι ενότητες:
*Ενότητα 1η: ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΟΤΙΒΑ*
*Ενότητα 2η: ΣΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝ ΠΟΝΤΟΙ*
*Ενότητα 3η: ΤΟ ΑΣΑΝΣΕΡ*
*Ενότητα 4η: ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ*
*Ενότητα 5η: ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ*
*Ενότητα 6η: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ*
Εδώ θα γίνει παρουσίαση αυτής της διδασκαλίας κατά θεματική περιοχή.

## Στόχοι του κεφαλαίου

*Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν την έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια. Αναπτύσσουν κανόνες για τις πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών και τοποθετούν αριθμούς σε σύστημα συντεταγμένων. Οι βασικοί στοχοι του κεφαλαίου είναι:*

- *Να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να προσθέτουν, να αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν, να διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να διατάσσουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να τοποθετούν σημεία σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα συντεταγμένων και στο περιβάλλον Χελωνόκοσμος με τη βοήθεια της Logo.*

***Σκοπός των ερωτήσεων – προβλημάτων***

*Οι ερωτήσεις – προβλήματα που, είτε λύνονται – συζητιούνται στην τάξη, είτε δίνονται ως εργασία για το σπίτι, έχουν ως σκοπό να διευκολύνουν τους μαθητές ώστε και με τη βοήθεια του δασκάλου να καταφέρουν :*

*1. Να αποκτήσουν εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Ειδικότερα:*

- *Να σχεδιάζουν και να περιγράφουν μοτίβα χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να συγκρίνουν και να διατάσσουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να κάνουν τις τέσσερις πράξεις.*
- *Να αναγνωρίζουν και να τοποθετούν διατεταγμένα ζεύγη στο σύστημα συντεταγμένων.*

*2. Να διατυπώνουν τους συλλογισμούς τους, να τους αιτιολογούν, να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις. Δηλαδή:*

- *Να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντιθέτων.*
- *Να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες που υπάρχουν όταν χρησιμοποιούν ακεραίους σε αλγεβρικά και γεωμετρικά πλαίσια.*

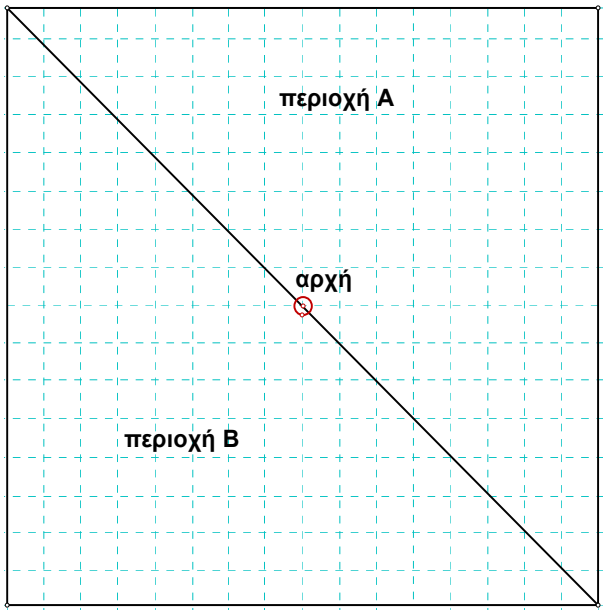
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων σε σύστημα συντεταγμένων.*

3. *Να μοντελοποιούν πολλές διαφορετικές καταστάσεις και να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Ειδικότερα:*
   - *Να μοντελοποιούν καταστάσεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς.*
   - *Να χρησιμοποιούν ένα μοντέλο ή ένα πλαίσιο που θα τους βοηθήσει να λύνουν προβλήματα με ακεραίους.*
4. *Να αποκτήσουν κριτική σκέψη αναλύοντας και αιτιολογώντας και να μπορούν να γενικεύουν. Ειδικότερα:*
   - *Να κάνουν υποθέσεις για την κατεύθυνση ενός σχεδίου όταν δίνονται οι οδηγίες σχεδίασης και να τις αιτιολογούν.*
   - *Να κάνουν υποθέσεις και να αιτιολογούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων.*
   - *Να γενικεύουν και να διατυπώνουν κανόνες για τις πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών.*

## 4.1 Η έννοια

Η έννοια, σύμφωνα με τη ΡΜΕ, εμφανίζεται μέσα από ποικίλα και διαφορετικά πλαίσια και πρέπει να εξερευνηθεί μέσα από όσο το δυνατόν περισσότερες οπτικές γωνίες (Freudenthal 1983, Treffers 1987). Στη διδακτική πρόταση η έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών εμφανίζεται μέσα από το πλαίσιο ενός αρχαϊκού γεωμετρικού μοτίβου, βασισμένη στους προσανατολισμένους αριθμούς (directed numbers) (Freudenthal, 1987). Πρέπει όμως να προηγηθεί η ανάπτυξη της έννοιας μέσα από διαφορετικά πλαίσια τα οποία θα περιγραφούν παρακάτω, καθώς επίσης και ιδέες για δραστηριότητες που μπορούν να σχεδιαστούν. Τα πλαίσια αυτά μπορεί να είναι:

***Παιχνίδι για δύο παίχτες***




Το τετραγωνισμένο χαρτί είναι χωρισμένο διαγώνια σε δύο περιοχές και κάθε παίχτης παίρνει από μία. Οι δύο παίχτες ξεκινούν από την «αρχή» και ο καθένας ρίχνει το ζάρι δύο φορές. Στον πρώτο παίχτη η πρώτη φορά αντιστοιχεί σε κίνηση προς τα ανατολικά και η δεύτερη σε κίνηση προς τον βορρά. Στον δεύτερο παίχτη η πρώτη φορά αντιστοιχεί σε κίνηση προς τα δυτικά και η δεύτερη σε κίνηση προς το νότο. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 5 ή 6 γύρους, όπου ο κάθε γύρος περιλαμβάνει κίνηση και από τους δύο παίχτες. Οι κινήσεις καταγράφονται στο τετραγωνισμένο χαρτί. Νικητής είναι ο παίχτης ο οποίος μετά από τους 5 ή 6 γύρους θα βρεθεί στη δική του περιοχή.

Η δραστηριότητα αφορά το παιχνίδι που πρέπει να παίξουν οι μαθητές μία φορά. Καταγράφονται οι κινήσεις στο χαρτί, οργανώνονται τα δεδομένα σε πίνακες. Ζητείται μετά απο τις κινήσεις κάθε παίχτη, η τελική του θέση καθώς επίσης και συντομεύσεις στη περιγραφή των μετακινήσεων. Στα πλαίσια των συντομεύσεων αντικαθιστούν τις περιγραφές βόρεια, νότια, ανατολικά, δυτικά με βέλη των αντιστοίχων κατευθύνσεων: ↑ ↓ → ← που σχετίζονται με τη το μοντέλο Van Hiele (Freudenthal, 1987).

*Συνδυάζοντας τις πάνω-κάτω μετατοπίσεις και τις αριστερά-δεξιά, άτυπα:*
- *προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*
- *διαγράφουν τους αντίθετους*

***Διαφορετικά ύψη***

Μπορούν να σχεδιαστούν δραστηριότητες όπου οι μαθητές μετρούν τα διαφορετικά ύψη αντικειμένων: έπιπλα σε ένα δωμάτιο ή αίθουσα διδασκαλίας, ύψη βουνών από τη Γεωγραφία, το δικό τους ύψος, κλπ. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να υπολογίσουν ή να εκτιμήσουν τις υψομετρικές διαφορές. Αν το αντικείμενο Α είναι υψηλότερο από το Β, τότε η διαφορά τους είναι θετική (+). Αν, αντίθετα, το αντικείμενο Α είναι χαμηλότερο από το Β, τότε η διαφορά τους είναι αρνητική (-). Χρησιμοποιούν συστηματική μέθοδο οργανώνοντας τις μετρήσεις τους σε πίνακες.

***Διαφορετικά ύψη- Διαφορετικά βάθη***

Η κλασσική εικόνα που υπάρχει στα περισσότερα σχολικά βιβλία για την εισαγωγή των θετικών και αρνητικών είναι αυτή στην οποία υπάρχουν αντικείμενα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (πουλιά, αεροπλάνα,..) και αντικείμενα κάτω από την επιφάνεια (ψάρια, υποβρύχια,..) Το πλαίσιο αυτό μπορεί να εμπλουτισθεί με υποθαλάσσιους χάρτες από τη Γεωγραφία εφοδιασμένους με κλίμακες, ψάρια από τη Βιολογία που ζουν σε διαφορετικά βάθη, υποβρύχια, βαθυσκάφη ή ναυάγια πλοίων. Οι δραστηριότητες - ερωτήσεις που θα σχεδιαστούν θα αφορούν:
- Υπολογισμό ή εκτίμηση της υψομετρικής διαφοράς αντικειμένου που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας και κάτω από αυτήν.
- Επέκταση του άξονα κάτω από το 0 ώστε να συμπεριλάβει και τους αρνητικούς.
- Υπολογισμό ή εκτίμηση υποθαλασσίων αποστάσεων.
- Εκτίμηση και αιτιολόγηση αν το πλήρωμα ενός υποθαλάσσιου σκάφους είναι δυνατόν να έχει οπτική επαφή με ένα ναυάγιο που βρίσκεται σε ένα ορισμένο βάθος ή με ένα ψάρι που ζει και κινείται σε μια ορισμένη ζώνη βάθους.

Το εμπλουτισμένο πλαίσιο (Treffers, 1987), αποτελεί το κατάλληλο μαθηματικό περιβάλλον:

- για τη χρήση της έννοιας των θετικών και αρνητικών στην επίλυση προβλημάτων.
- για την αιτιολόγηση των προσανατολισμένων αριθμών
- για την επέκταση του άξονα κάτω από το 0 ώστε να συμπεριλάβει και τους αρνητικούς
- για την άτυπη πρόσθεση και αφαίρεση των θετικών και αρνητικών
- για την κατανόηση της έννοιας των αντίθετων αριθμών

### 4.1.1 Παρουσίαση της ανάπτυξης της έννοιας μέσα από το πλαίσιο των γεωμετρικών μοτίβων

***Ενότητα 1η: ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΟΤΙΒΑ***

***Περιγραφή της ενότητας***

*Ένα αρχαϊκό γεωμετρικό μοτίβο, ο μαίανδρος, αποτελεί την αφετηρία για την ανάλυση, την περιγραφή και την δημιουργία σχεδίων από τους μαθητές. Αποτελεί δηλαδή το πλαίσιο για τη διερεύνηση των θετικών και αρνητικών κατευθύνσεων σε τετραγωνισμένο χαρτί.*

*Αρχικά οι μαθητές σχεδιάζουν ξανά τον μαίανδρο και αφού αναγνωρίσουν ότι αποτελεί μοτίβο, δηλαδή ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται, συνεχίζουν μόνοι τους το σχέδιο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν μια επαναλαμβανόμενη σειρά από αριθμούς και βελάκια που δηλώνουν τις κατευθύνσεις: δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω για να περιγράψουν και να σχεδιάσουν νέα μοτίβα. Αναλύοντας την «κίνηση» του σχεδίου, βρίσκουν την κατεύθυνσή του και διερευνούν αν πρόκειται για ανοικτή ή κλειστή γραμμή. Στα επόμενα σχέδια η σειρά των κατευθύνσεων είναι καθορισμένη: δεξιά-πάνω-αριστερά-κάτω. Έχοντας τις κατευθύνσεις δεδομένες και μία σειρά αριθμών που επαναλαμβάνεται, υπολογίζουν την τελική μετατόπιση του αρχικού σημείου, διαγράφοντας τις κινήσεις στην αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή άτυπα διαγράφουν τους αντίθετους και προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Ακολούθως αντικαθιστούν τα βελάκια με τα σύμβολα συν και μείον: το συν για την δεξιά και πάνω κατεύθυνση και το μείον για την αριστερά και κάτω κατεύθυνση. Στο τέλος, χρησιμοποιώντας συμβολισμό θετικών και αρνητικών αριθμών σχεδιάζουν και διερευνούν μοτίβα που ξεκινούν από το ίδιο αρχικό σημείο ( αρχή ) προετοιμάζοντας το έδαφος για τις γραφικές παραστάσεις σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν:*

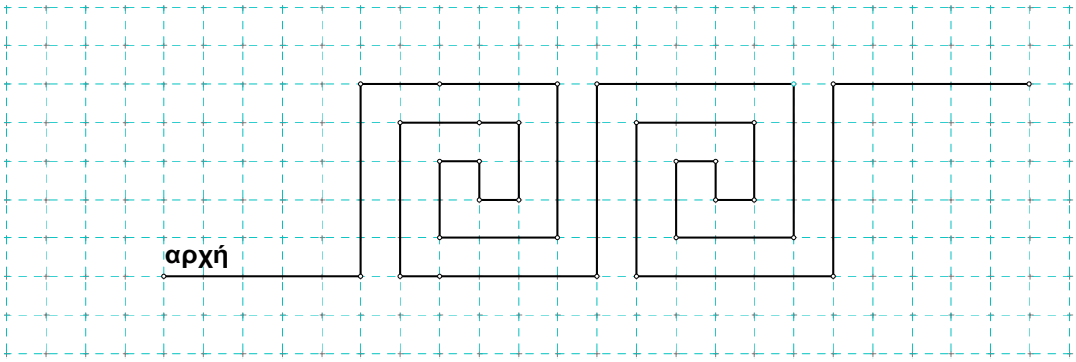
- *να αναπτύξουν την έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών*
- *να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν αρνητικούς αριθμούς*
- *να αναγνωρίζουν ένα γεωμετρικό μοτίβο*
- *να σχεδιάζουν και να αναλύουν γεωμετρικά μοτίβα σε τετραγωνισμένο χαρτί.*
- *άτυπα να διαγράφουν και να προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*

## Η δραστηριότητα

Αρχικά παρουσιάζεται η ιστορική προέλευση του γεωμετρικού μοτίβου «μαίανδρος» και στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να το σχεδιάσουν. Πρέπει να παρατηρήσουν ότι ένα συγκεκριμένο τμήμα του σχεδίου επαναλαμβάνεται, δηλαδή πρόκειται για γεωμετρικό μοτίβο.

Στην αρχαία Ελλάδα, μετά το τέλος του Μυκηναϊκού κόσμου, ακολουθεί μία περίοδος τεσσάρων αιώνων (1100π.Χ-700π.Χ) που ονομάζεται Γεωμετρική εποχή, επειδή το κυρίαρχο στοιχείο στη διακόσμηση των αγγείων και των σκευών είναι τα γεωμετρικά σχήματα. Ένα χαρακτηριστικό γεωμετρικό μοτίβο που εμφανίστηκε εκείνη την εποχή, αλλά διατηρήθηκε και τα επόμενα χρόνια είναι ο *μαίανδρος*

Το παρακάτω σχήμα είναι παρόμοιο με τα σχέδια που χρησιμοποιήθηκαν εκείνη την εποχή. Το χαρακτηριστικό του είναι ότι μπορεί να σχεδιαστεί με μία συνεχόμενη γραμμή, δηλαδή το σχεδιάζουμε χωρίς να σηκώσουμε τη μύτη του μολυβιού.




**1.** Να περιγράψετε πως σχεδιάστηκε το σχήμα.
**2.** Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να το συνεχίσετε. Ποια είναι η κατεύθυνση του σχήματος;

Τα γεωμετρικά μοτίβα περιγράφονται στα μαθηματικά δίνοντας τις συντεταγμένες των σημείων. Οι μαθητές μορούν να χρησιμοποιήσουν αρχικά άτυπο τρόπο περιγραφής. Στη συνέχεια εισάγεται και πάλι η περιγραφή με «προσανατολισμένους» αριθμούς την οποία χρησιμοποίησαν σε προηγούμενες ενότητες.

Ένας τρόπος για να περιγραφεί ένα γεωμετρικό μοτίβο είναι να χρησιμοποιήσουμε τα βελάκια που περιγράφουν τις τέσσερις κατευθύνσεις: ↑ πάνω, ↓ κάτω, ← αριστερά**,** → δεξιά**.**

**→5 ↑6 →5 ↓4 ←3 ↑2 →1 ↓1 →1 ↑2 ←3 ↓4**

**→5 ↑6 →5 ↓4 ←3 ↑2 →1 ↓1 →1 ↑2 ←3 ↓4**

**→5 ↑6 →5**

**3. α.** Τί σημαίνουν οι αριθμοί με τα βελάκια;

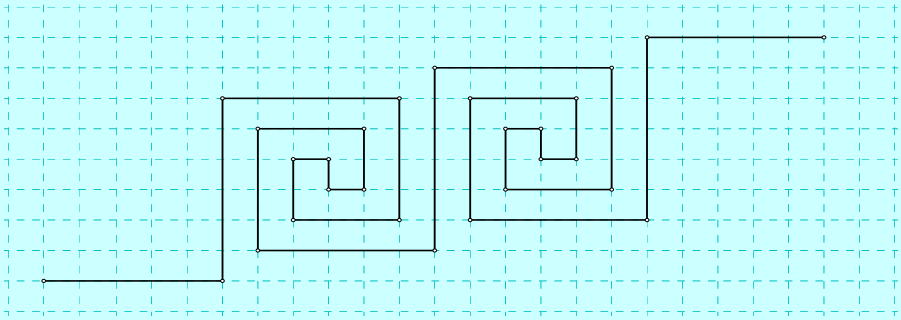
**β.** Να σχεδιάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το μοτίβο που περιγράφεται από τους παραπάνω αριθμούς. Τί παρατηρείτε; Ποιά είναι η κατεύθυνση του σχήματος;

**γ.** Να συνεχίσετε για λίγο το σχέδιο και να συμπληρώσετε τους κατάλληλους αριθμούς και βελάκια.

**Πιθανή απάντηση**

**α.** Μας δηλώνουν σε ποια κατεύθυνση και πόσες μονάδες θα «προχωρήσει» το σχήμα

**β.** Πιθανή απάντηση: Το σχήμα είναι πάλι μαίανδρος μετατοπισμένος προς τα πάνω. Η κατεύθυνση του σχήματος είναι πάνω-δεξιά.



**δ.** Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν ότι υπάρχει μια επαναλαμβανόμενη σειρά αριθμών με παρόμοια βελάκια και ότι αυτή η σειρά δημιουργεί το γεωμετρικό μοτίβο.

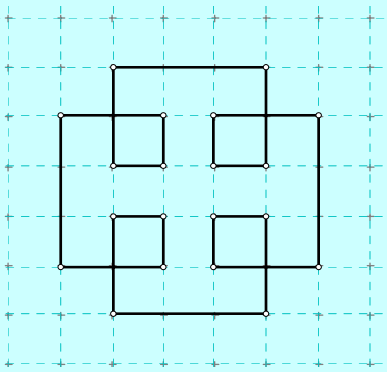
Τα βελάκια στα επόμενα προβλήματα ακολουθούν το ίδιο μοτίβο ( → ↑ ← ↓ ), ώστε αργότερα να αντικατασταθούν με + και - . Επίσης αναμένουμε διαφορετικές απαντήσεις (ερώτηση 4) ή έχουμε ελεύθερες δημιουργίες (ερώτηση 6) (Treffers, 1987)

**4. α.** Ποιο σχέδιο περιγράφει η παρακάτω σειρά αριθμών;

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **→1** | **↑2** | **←3** | **↓2** | **→1** | **↑1** | **←2** | **↓3** | **→2** | **↑1** |
| **←1** | **↓ 2** | **→3** | **↑2** | **←1** | **↓1** | **→2** | **↑3** | **←2** | **↓1** |

**β.** «Περπατάει» το σχέδιο προς κάποια κατεύθυνση;
Τί παρατηρείτε για τη σειρά των αριθμών;

Το σχέδιο δεν συνεχίζεται όσες φορές θέλουμε. Τελειώνει επιστρέφοντας στο αρχικό σημείο.
Πιθανές παρατηρήσεις:
1. Επαναλαμβάνεται 4 φορές η σειρά των αριθμών 1, 2, 3, 2, 1 με διαφορετική κατεύθυνση
2. Επαναλαμβάνεται 2 φορές η σειρά των αριθμών 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1 με ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση



**6. α.** Να σχεδιάσετε το δικό σας γεωμετρικό μοτίβο ακολουθώντας τις κατευθύνσεις:
→ ↑ ← ↓
**β.** Να δώσετε τις οδηγίες σχεδίασης.
**γ.** Αποτελείται το σχέδιό σας κλειστή γραμμή ή ανοιχτή; Αν η γραμμή είναι κλειστή, τί παρατηρείτε στη σειρά των αριθμών;

Τα σχέδια και οι οδηγίες σχεδίασης θα είναι διαφορετικά σε κάθε μαθητή.

Μία γραμμή που τελειώνει εκεί που αρχίζει, την ονομάζουμε κλειστή γραμμή, ενώ αν τα άκρα της δεν συναντώνται την ονομάζουμε ανοιχτή γραμμή.
Για να αποτελεί το μοτίβο μια κλειστή γραμμή θα πρέπει να έχουμε μια σειρά από τρεις αριθμούς που επαναλαμβάνεται τέσσερις φορές. Για παράδειγμα:
→1 ↑2 ←3 ↓1 **→2** ↑3 ←1 ↓2 → 3 ↑1 ←2 ↓3
Οι αριθμοί με το ίδιο χρώμα αλληλοαναιρούνται, οπότε η κίνηση του αρχικού σημείου είναι μηδέν και καταλήγουμε εκεί από όπου ξεκινήσαμε (άτυπα διαγράφουν αντίθετους αριθμούς

Οι μαθητές αλληλοαναιρώντας τις κινήσεις σε αντίθετη κατεύθυνση, άτυπα προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς ή διαγράφουν τους αντίθετους. Τους δίνεται επίσης η ευκαιρία να κάνουν προβλέψεις για τη κατεύθυνση του σχήματος πριν το σχεδιάσουν ώστε να ξέρουν από πιο σημείο πρέπει να αρχίσουν την σχεδίαση. (Treffers, 1987)

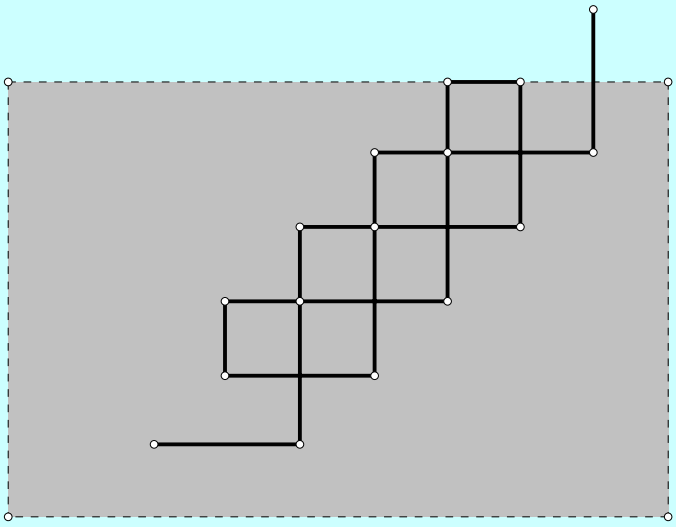
Έχουμε δει ότι μερικά μοτίβα είναι κλειστές γραμμές, ενώ σε άλλα η γραμμή είναι ανοιχτή και μπορούμε να τη συνεχίσουμε όσο θέλουμε. Κάποιες φορές το μοτίβο βγαίνει έξω από το τετράδιό μας, οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να προσπαθούμε να προβλέψουμε την κατεύθυνση του σχήματος, ώστε να ξεκινήσουμε το σχέδιο από το σωστό σημείο.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την παρακάτω σειρά αριθμών και θέλουμε να υπολογίσουμε την κατεύθυνση του σχεδίου. Οι κατευθύνσεις είναι με τη σειρά: → ↑ ← ↓

2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1

**9. α.** Τί σχέση έχουν με τις κατευθύνσεις οι αριθμοί με το κόκκινο χρώμα;
**β**. Μπορείτε να υπολογίσετε αν το σχέδιο πηγαίνει προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά χωρίς να το σχεδιάσετε;
**γ.** Μπορείτε να υπολογίσετε αν το σχέδιο πηγαίνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω χωρίς να το σχεδιάσετε;
**δ.** Από ποια θέση του τετραδίου πρέπει να ξεκινήσετε τη σχεδίαση;

**α.** Οι αριθμοί με το κόκκινο χρώμα είναι οι μετατοπίσεις προς τα δεξιά ή αριστερά.

**β.** Συγκρίνουν τη μετατόπιση στα δεξιά και τη μετατόπιση στα αριστερά για την πρώτη τετράδα αριθμών η οποία και επαναλαμβάνεται. Το σχέδιο «περπατάει» προς τα δεξιά επειδή 2>1.
Αν οι αριθμοί που επαναλαμβάνονται δεν είναι τέσσερις τότε υπολογίζουν τις συνολικές μετατοπίσεις και τις συγκρίνουν.



**γ.** Το σχέδιο «περπατάει» προς τα πάνω επειδή 2>1.
<u>Στρατηγική 1η</u> : Σύγκριση πάνω και κάτω μετατοπίσεων στο πρώτο τμήμα της σειράς που επαναλαμβάνεται όπως και προηγούμενα.
<u>Στρατηγική 2η</u> : Υπολογισμός όλων των μετατοπίσεων προς τα πάνω και προς τα κάτω όπως δίνονται στο πρόβλημα.
**δ.** Η κατεύθυνση του σχεδίου είναι προς τα πάνω και δεξιά άρα πιο πιθανή απάντηση θα είναι να ξεκινήσει κανείς από κάτω αριστερά της σελίδας.

Τελικά οι μαθητές χρησιμοποιούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς για τις οδηγίες σχεδίασης ενός γεωμετρικού μοτίβου.
Η περιγραφή των κατευθύνσεων με συν και μείον έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

1. Η διαγραφή, η πρόσθεση και η αφαίρεση των κατευθύνσεων γίνεται ευκολότερη.
2. Οι μαθητές προετοιμάζονται για τον τρόπο εργασίας και τους συμβολισμούς σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε ένα γεωμετρικό μοτίβο είναι να χρησιμοποιήσουμε το συν (+) και το μείον (-) αντί τη γνωστή σειρά από βελάκια (→ ↑ ← ↓).

**10.** Οι οδηγίες σχεδίασης ενός μοτίβου είναι οι εξής:

**+1 +3 -2 -1 +1 +3 -2 -1 .. .. .. .. ..**

**α.** Τί σχέση μπορεί να έχουν τα συν και μείον με τις κατευθύνσεις;
**β.** Να σχεδιάσετε το μοτίβο

**12.** Έχετε τις παρακάτω οδηγίες για δύο σχέδια.

**Σχέδιο 1ο: +5 +4 -2 -1 +1 +2 -4 -5**

**Σχέδιο 2ο: +2 +4 -1 -1 +2 +4 -1 -1**

**α.** Ένα από τα δύο σχέδια είναι κλειστή γραμμή. Μπορείτε να πείτε ποιο από τα δύο είναι, χωρίς να κάνετε το σχήμα; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.
**β.** Για το σχέδιο που είναι ανοικτή γραμμή να υπολογίσετε την κατεύθυνσή του χωρίς να το σχεδιάσετε.

**Ερώτηση 12**

**α.** Το 1ο σχέδιο είναι κλειστή γραμμή. Επειδή εδώ δεν έχουμε τρεις αριθμούς να επαναλαμβάνονται τέσσερις φορές, ο πιο πιθανός συλλογισμός είναι:
Η συνολική μετατόπιση προς τα δεξιά είναι +6, ενώ η συνολική μετατόπιση προς τα αριστερά είναι -6. Επομένως καθαρή μετατόπιση στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση είναι 0 ( -6 + 6 = 0 ). Επίσης η συνολική μετατόπιση προς τα πάνω είναι +6, ενώ η συνολική μετατόπιση προς τα κάτω είναι -6. Επομένως καθαρή μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι 0.

**β.** Το 2ο σχέδιο κατευθύνεται προς τα πάνω και δεξιά. Πιθανές εξηγήσεις:

1. Η σειρά **+2 +4 -1 -1** επαναλαμβάνεται. Η τελική μετατόπιση στην αριστερά - δεξιά κατεύθυνση είναι: **+ 2 – 1 = + 1**, ενώ η τελική μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι **+ 4 – 1 = + 3.**
2. Υπολογίζουν τις συνολικές μετατοπίσεις και για τους οκτώ αριθμούς που δίνονται και εργάζονται ανάλογα. Η τελική μετατόπιση στην αριστερά - δεξιά κατεύθυνση είναι: **+ 4 – 2 = + 2**, ενώ η τελική μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι **+ 8 – 2 = + 6.**

Στο επόμενο πρόβλημα οι μαθητές τοποθετούν και ονομάζουν την αρχή του σχεδίου με το γράμμα Ο. Σε προηγούμενα προβλήματα εργάστηκαν άτυπα σε σύστημα συντεταγμένων. Εδώ ονομάζουν την αρχή και δίνουν τις θέσεις διαφόρων σημείων σε σχέση με το Ο, δηλαδή στην ουσία τις συντεταγμένες των σημείων. Το πρόβλημα αποτελεί μια εισαγωγή σε εργασία σε σύστημα συντεταγμένων.

**13.** Οι οδηγίες για τέσσερα σχέδια είναι οι εξής:

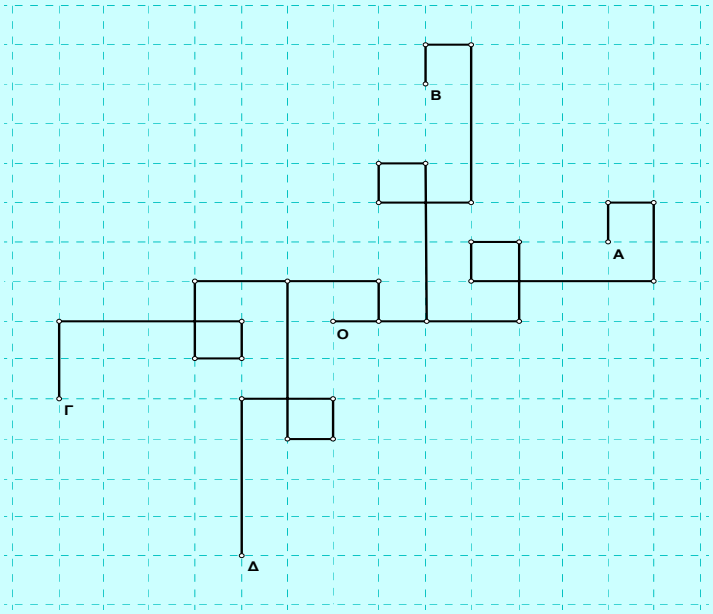
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Σχέδιο 1$^{ο}$:** | **+4** | **+2** | **-1** | **-1** | **+4** | **+2** | **-1** | **-1** |
| **Σχέδιο 2$^{ο}$:** | **+2** | **+4** | **-1** | **-1** | **+2** | **+4** | **-1** | **-1** |
| **Σχέδιο 3$^{ο}$:** | **+1** | **+1** | **-4** | -2 | **+1** | **+1** | **-4** | **-2** |
| **Σχέδιο4$^{ο}$:** | **+1** | **+1** | **-2** | -4 | **+1** | **+1** | **-2** | **-4** |

**α.** Όλα τα σχέδια ξεκινούν από ένα σημείο Ο που θα τοποθετήσετε περίπου στο κέντρο της σελίδας. Να σχεδιάσετε μόνο τα βήματα που δίνονται από τις οδηγίες των σχεδίων. Το τελικό σημείο του 1$^{ου}$ σχεδίου θα το ονομάσετε Α, του 2$^{ου}$ σχεδίου Β, του 3$^{ου}$ θα το ονομάσετε Γ και του τέταρτου Δ.

**β.** Πού βρίσκονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ σε σχέση με το αρχικό σημείο Ο;

Για να περιγράψουν τις θέσεις των σημείων μπορεί να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς συμβολισμούς, είτε λεκτικούς, είτε να κάνουν χρήση συμβόλων

1. Το Α είναι έξι μονάδες δεξιά και δύο μονάδες πάνω
2. Το Α είναι δεξιά και πάνω
3. Α: → 6 ↑2
4. Α: +6, +2




Όταν χρησιμοποιούν το συν και μείον για να περιγράψουν την τελική θέση, υπενθυμίζουμε ότι ο πρώτος αριθμός δίνει την αριστερά-δεξιά κατεύθυνση, ενώ ο δεύτερος τη πάνω-κάτω

Οι μαθητές συγκρίνουν τις περιγραφές τους, συζητούν ποιά είναι η πιο ακριβής, πιο σύντομη, ποια προτιμούν αυτοί.

## 4.2 Πρόσθεση και αφαίρεση

***Ενότητα 2η: ΣΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝ ΠΟΝΤΟΙ***

***Περιγραφή της ενότητας***

*Η ενότητα αυτή δημιουργεί ένα πλαίσιο που βοηθά τους μαθητές να διερευνήσουν και να διατυπώσουν τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης θετικών και αρνητικών αριθμών.*
*Οι μαθητές επεξεργάζονται και αναλύουν τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού ερωτήσεων. Στο παιχνίδι, κάθε απάντηση παίρνει έναν πόντο, είτε θετικό είτε αρνητικό. Μέσα σ΄αυτό το πλαίσιο διαγράφουν θετικούς και αρνητικούς πόντους για να υπολογίσουν το τελικό σύνολο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν μοντέλο που θα τους βοηθήσει να λύσουν προβληματικές καταστάσεις. Μέσα από τη διερεύνηση διαπιστώνουν ότι ίσος αριθμός αντίθετων πόντων μπορεί να αφαιρεθεί ή να αγνοηθεί χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Προσθέτουν και αφαιρούν πόντους που είναι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, γράφουν τις αντίστοιχες μαθηματικές εκφράσεις, διαγράφουν τους αντίθετους, διερευνούν τη σχέση πρόσθεσης-αφαίρεσης. Στο τέλος γενικεύουν διατυπώνοντας τους κανόνες για την πρόσθεση και αφαίρεση των θετικών και αρνητικών αριθμών.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να:*

- *προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*
- *διατυπώνουν τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης θετικών και αρνητικών αριθμών.*
- *αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.*

## Η δραστηριότητα

Στην ενότητα αυτή υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη πόντων (συν και μείον) και δύο διαφορετικά είδη ενεργειών (πρόσθεση και αφαίρεση). (Freudenthal, 1987) Όταν δίνονται πόντοι σε μία ομάδα έχουμε πρόσθεση θετικού ή αρνητικού και όταν αφαιρούνται πόντοι έχουμε αντιστοίχως αφαίρεση θετικού ή αρνητικού. Η ενότητα ξεκινά με την περιγραφή του παιχνιδιού. Σκοπός των πρώτων ερωτήσεων είναι να κατανοήσουν οι μαθητές:

i) Πως υπολογίζεται το σύνολο των πόντων σε ένα παιχνίδι όπου παίρνουμε και θετικούς και αρνητικούς πόντους.
ii) Ότι κάθε ερώτηση παίρνει πόντο είτε θετικό είτε αρνητικό
iii) Ένας θετικός και ένας αρνητικός πόντος αλληλοαναιρούνται και δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα

Η τάξη των Μαθηματικών παίζει το παιχνίδι των ερωτήσεων. Οι μαθητές χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες. Κάθε ομάδα παίρνει ένα «συν» πόντο για κάθε σωστή απάντηση και ένα «μείον» για κάθε λανθασμένη. Οι ομάδες πρέπει να απαντήσουν σε όλες τις ερωτήσεις. Η Άννα και ο Γιώργος υπολογίζουν τους πόντους κάθε ομάδας.
Το σύνολο των πόντων μετά από τέσσερις γύρους είναι το εξής:

| *Σύνολο μετά τον 4ο γύρο* | |
|---|---|
| ***Ομάδα Α*** | +4 |
| ***Ομάδα Β*** | -2 |
| ***Ομάδα Γ*** | 0 |
| ***Ομάδα Δ*** | 0 |

**1.** Πως απάντησε η κάθε ομάδα τις ερωτήσεις στους πρώτους τέσσερις γύρους;

Στον παρακάτω πίνακα μπορείτε να δείτε τους πόντους κάθε ομάδας μετά απο 6 γύρους.

| *Σύνολο μετά τον 6ο γύρο* | |
|---|---|
| ***Ομάδα Α*** | **+6** |
| ***Ομάδα Β*** | **-2** |
| ***Ομάδα Γ*** | **-2** |
| ***Ομάδα Δ*** | |

**2.** Εξηγήστε πως απάντησαν στις ερωτήσεις οι ομάδες Α, Β, Γ.
**3.** Οι πόντοι της Δ ομάδας δεν έχουν υπολογισθεί. Εξηγήστε γιατί η Δ ομάδα δεν μπορεί να έχει +1 πόντους μετά τον 6ο γύρο.

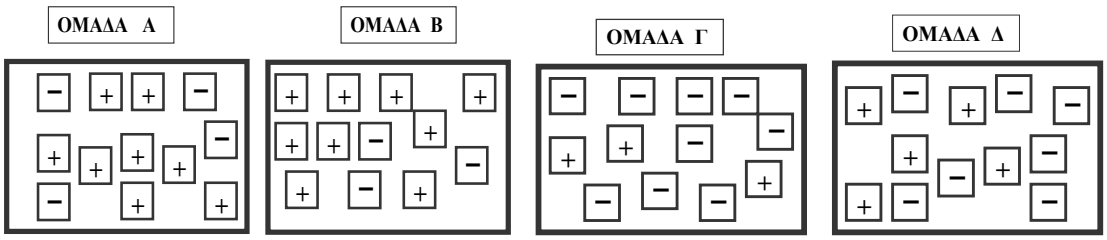
Μετά από μερικούς γύρους το παιχνίδι τελείωσε. Στον πίνακα φαίνεται το σύνολο των πόντων που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα Η Άννα και ο Γιώργος ξαφνικά διαπίστωσαν ότι είχαν κάνει ένα λάθος. Έδωσαν έναν μείον πόντο στην ομάδα Β ενώ έπρεπε να τον δώσουν στην ομάδα Α.

| *Τελικά αποτελέσματα* | |
|---|---|
| ***Ομάδα Α*** | **+9** |
| ***Ομάδα Β*** | **+7** |
| ***Ομάδα Γ*** | **+4** |
| ***Ομάδα Δ*** | **+6** |

**5.** Να διορθώσετε τα αποτελέσματα των ομάδων Α και Β.
**6.** Αφού διορθώσατε τα τελικά και έχοντας το σύνολο των πόντων μετά τον 6ο γύρο, ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός γύρων που χρειάζονται για να τελειώσει το παιχνίδι με τελικό σκορ:
Α: +8 Β: +8 Γ: +4 Δ: +6 ;

Στη συνέχεια οι θετικοί και αρνητικοί πόντοι αντικαθίστανται από θετικές και αρνητικές κάρτες. Οι κάρτες είναι πολύ χρήσιμες για την αναπαράσταση θετικών και αρνητικών αριθμών. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις κάρτες για να υπολογίζουν ευκολότερα το σκορ κάθε ομάδας. Διαπιστώνουν ότι τα ζεύγη αντίθετων καρτών δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα και επομένως μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν χωρίς να αλλάξει το σκορ. Στην προηγούμενη ενότητα συνδύαζαν κινήσεις στην δεξιά-αριστερή κατεύθυνση καθώς επίσης και στην πάνω-κάτω κατεύθυνση. Η ίδια αρχή, σε διαφορετικό όμως πλαίσιο, χρησιμοποιείται σ' αυτήν την ενότητα Συνδυάζοντας λοιπόν είτε κινήσεις, είτε κάρτες, τελικά άτυπα προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

Μετά από 12 γύρους τα αποτελέσματα για τις τέσσερις ομάδες είναι τα εξής:




**9.** Να βρείτε τους πόντους κάθε ομάδας
**10.** Οι κάρτες με τα + τελείωσαν. Να αφαιρέσετε κάποιες κάρτες χωρίς να αλλάξει το σύνολο των πόντων της ομάδας.
**11.** Το παιχνίδι συνεχίστηκε. Μετά από 3 γύρους ποια είναι το πιθανό σκορ κάθε ομάδας

**9**. Μπορούν να τους υπολογίσουν χρησιμοποιώντας δύο πιθανές στρατηγικές:
A) Κάθε ζευγάρι συν και μείον κάρτας αλληλοαναιρούνται οπότε τις αγνοούν στους υπολογισμούς. Μετρώνται μόνο οι κάρτες που μένουν.
B) Προσθέτουν όλες τις συν κάρτες και όλες τις μείον και μετά αφαιρούν.
( Α: +4, Β: +6, Γ: -6, Δ: -2 )
**10.** Η ερώτηση αυτή έχει πολλές διαφορετικές σωστές απαντήσεις που εξαρτώνται από τις στρατηγικές που θα χρησιμοποιηθούν.
<u>Πιθανές στρατηγικές</u>
A) Μπορούν να βγάλουν τον ίδιο αριθμό συν και μείον καρτών από μία ή περισσότερες ομάδες χωρίς να αλλάξει το σκορ.
B) Μπορούν να βγάλουν μία μείον κάρτα από κάποια ομάδα αντί να της δώσουν μία συν. Άτυπα χρησιμοποιούν τον κανόνα: *Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου* +1=-(-1)
**11.** Οι μαθητές πρέπει πριν απαντήσουν σ'αυτή την ερώτηση να συζητήσουν πρώτα τους πόντους που είναι πιθανό να συγκεντρώσει μία ομάδα σε 3 γύρους. Έχοντας 4 πιθανούς συνδυασμούς σωστών και λάθος απαντήσεων, (τρεις σωστές, δύο σωστές και μία λάθος, μία σωστή και δύο λάθος, τρεις λάθος) μπορούν να πάρουν 4 διαφορετικά σύνολα πόντων. +3, +1, -1, -3. Ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν συστηματική μέθοδο για την εύρεση της λύσης. (Treffers, 1987)

Στις επόμενες δύο ερωτήσεις εξετάζεται η δυνατότητα των μαθητών να:

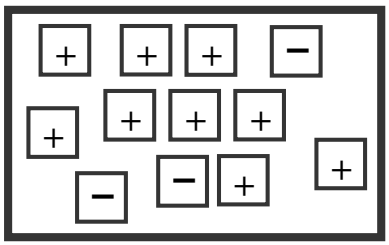
- χρησιμοποιούν μοντέλο που θα τους βοηθήσει να λύσουν προβληματικές καταστάσεις. (Treffers, 1987)
- μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς (Gravenmeijer, 1991)

Πάλι έγινε λάθος στις κάρτες. Η Άννα που είναι αρχηγός της ομάδας Α λέει στον Κώστα: «Αν μου δώσεις δύο μείον κάρτες θα είμαστε εντάξει»
Αυτός όμως της απαντά «Γιατί δεν μου δίνεις εσύ δύο συν κάρτες»;

**12.** Θα είναι το αποτέλεσμα το ίδιο; Εξηγήστε τον συλλογισμό σας.

*Το προηγούμενο πρόβλημα (ερ. 12) αποτελεί ένα κρίσιμο σημείο του μαθήματος. Θα μπορούσαμε να μη δώσουμε τη λύση από το σενάριο και να περιμένουμε να τη δώσουν οι μαθητές.*

**ΟΜΑΔΑ Α**




**13.** Στο διπλανό σχήμα έχετε τις κάρτες της ομάδας Α.

**α)** Να αφαιρέσετε δύο κάρτες χωρίς να αλλάξετε το σκορ.

**β)** Μπορείτε να αφαιρέσετε περισσότερες χωρίς να αλλάξετε το αποτέλεσμα;

**γ)** Μπορείτε να προσθέσετε κάρτες χωρίς να αλλάξετε το αποτέλεσμα;
Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας

Οι μαθητές συμπληρώνουν πίνακα αποτελεσμάτων κάνοντας πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων. Για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάρτες ή εικόνες.

Αν θέλατε να υπολογίσετε τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού, ποιό θα ήταν το τελικό αποτέλεσμα σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συν και μείον κάρτες αν θέλετε.

| ΣΚΟΡ | | ΠΟΝΤΟΙ | ΤΕΛΙΚΟ ΣΚΟΡ |
|---|---|---|---|
| +8 | ΠΡΟΣΘΕΣΕ | +4 | |
| +3 | >> | -2 | |
| +2 | >> | -5 | |
| -4 | >> | +1 | |
| -3 | >> | -2 | |
| +5 | ΑΦΑΙΡΕΣΕ | +2 | |
| +4 | >> | +8 | |
| 0 | >> | +3 | |
| +8 | >> | -2 | |
| +3 | >> | -4 | |
| -6 | >> | -2 | |
| -3 | >> | -5 | |
| 0 | >> | +4 | |
| 0 | >> | -2 | |

Στην περίπτωση της πρόσθεσης, οι μαθητές στις ήδη υπάρχουσες κάρτες προσθέτουν τις καινούριες και απομακρύνουν τα ζευγάρια των αντίθετων καρτών αν υπάρχουν.

*Γραμμή 3:* *<u>+2 πρόσθεσε -5</u>*

*Βάζουμε πρώτα τις δύο + κάρτες και μετά τις πέντε –*
+ + — — — — —
*Διαγράφουμε τα ζευγάρια των θετικών και αρνητικών καρτών*
*Αποτέλεσμα:* — — — = - 3

Για την αφαίρεση όμως, αν οι υπάρχουσες κάρτες είναι διαφορετικές από αυτές που πρέπει να αφαιρεθούν ή δεν είναι αρκετές, τότε έχουμε την «δημιουργία από το τίποτα» (Freudenthal, 1983).

*Γραμμή 10:* *<u>+ 3 αφαίρεσε – 4</u>*

*Βάζουμε πρώτα τις τρεις + κάρτες. Για να μπουν οι τέσσερις μειον κάρτες χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα , βάζουμε τέσσερα ζευγάρια + και – καρτών.*
+ + + + — + — + — + —
*Κάνουμε ότι λέει η μαθηματική πρόταση, δηλαδή αφαιρούμε τις τέσσερις μείον κάρτες.*
*Αποτέλεσμα:* + + + + + + +

Η ίδια μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί και όταν έχω αφαίρεση από το μηδέν.
**0 - ( - 2 ) = - ( - 2 )**
Οι 0 πόντοι ως αποτέλεσμα παιχνιδιού είναι ίσος αριθμός συν και μείον καρτών. Επειδή θέλουμε να αφαιρέσουμε 2 μείον κάρτες, εισάγουμε 2 συν και 2 μείον κάρτες.
Αφού απομακρύνουμε τις δύο μείον κάρτες, έχουμε ως αποτέλεσμα τις δύο συν κάρτες.

Στις επόμενες ερωτήσεις χρησιμοποιείται ο τυπικός μαθηματικός συμβολισμός για την πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων. Οι μαθητές ξαναγράφουν τον πίνακα χρησιμοποιώντας τα σύμβολα της πρόσθεσης και αφαίρεσης, τις παρενθέσεις και τα πρόσημα. Επίσης χρησιμοποιούν τον συλλογισμό της ερώτησης 12 για την αφαίρεση: *αντί να αφαιρέσω έναν αριθμό, μπορώ να προσθέσω τον αντίθετό του.*

**19.** Στην γραμμή 9 έχετε την εξής κατάσταση:
**+8 ΑΦΑΙΡΕΣΕ -2 = +10**
Αντί να αφαιρέσετε -2 μπορείτε να κάνετε κάτι διαφορετικό που να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα;

**20.** Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
**+ 8 αφαιρώ - 2 = + 10** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **+ 8 ..... = + 10**
**- 6 αφαιρώ - 3 = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **- 6 ..... =.....**
**+ 4 αφαιρώ + 3 = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **+ 4 ..... =.....**

**22.** Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες με θετικούς ή αρνητικούς αριθμού
α) ..... + ..... = + 2 β) ..... + ..... = +4
γ) ..... + ..... = 0 δ) ..... — ..... = +1
ι) (+ 7) — ..... = - 1 κ) (+ 2) — ..... = - 8

Η διδασκαλία ολοκληρώνεται με τις ερωτήσεις επανάληψης που βοηθούν τους μαθητές να συνοψίσουν τις μαθηματικές έννοιες και να γενικεύσουν διατυπωνοντας κανόνες για την πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων. Ήδη οι μαθητές έχουν ανακαλύψει τους κανόνες που διέπουν την πρόσθεση και αφαίρεση των ακεραίων. Στο τέλος της ενότητας έχουν την ευκαιρία να τους διατυπώσουν, αφού ανακαλέσουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάστηκαν μέχρι τώρα, καθώς επίσης και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

**23.** **α)** Τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε έναν αρνητικό σε έναν θετικό αριθμό όπως (+5) + (-2) = ..... και τι συμβαίνει όταν τον προσθέτουμε σε έναν αρνητικό όπως (-4) + (-3) = ……;
Το παιχνίδι με τις κάρτες και οι πίνακες με τα σκορ μπορούν να σας βοηθήσουν σε κάθε περίπτωση.

**β)** Τί συμβαίνει όταν από έναν οποιονδήποτε αριθμό αφαιρούμε έναν αρνητικό;
(+3) - (-2) = ..... (-7) - (-10) = .....
Να διατυπώσετε έναν κανόνα

**24.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Όταν προσθέτω δύο θετικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**β)** Όταν προσθέτω έναν θετικό και έναν αρνητικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**γ)** Όταν προσθέτω δύο αρνητικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικός
**δ)** Αν από έναν θετικό αφαιρέσω έναν αρνητικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**ε)** Αν από το μηδέν αφαιρέσω οποιονδήποτε αριθμό το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός.
**ζ)** Αν από έναν αρνητικό αφαιρέσω έναν θετικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός

## 4.3 Άθροισμα πολλών προσθετέων

***Ενότητα 3η ΤΟ ΑΣΑΝΣΕΡ***

***Περιγραφή της ενότητας***

*Οι μαθητές χρησιμοποιούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς για να διερευνήσουν μια καινούρια κατάσταση: την κίνηση ενός ασανσέρ σε ένα πολυώροφο κτίριο με υπόγειο. Προσθέτουν και αφαιρούν ακεραίους για να προσδιορίσουν κάθε φορά τη θέση του και λύνουν προβλήματα που σχετίζονται με την άνοδο και την κάθοδό του.*

*Σ' αυτό το πλαίσιο τα πρόσημα δηλώνουν ενέργεια: η άνοδος συμβολίζεται με + και η κάθοδος με – . Ο αριθμός μετά το σύμβολο + ή – δηλώνει τους ορόφους που ανέβηκε ή κατέβηκε το ασανσέρ. Προσθέτουν τους θετικούς ή αρνητικούς για να βρουν τη θέση του ασανσέρ. Αν το αποτέλεσμα είναι θετικός αυτό σημαίνει ότι κατέληξε σε όροφο πάνω από το ισόγειο, αν είναι αρνητικός στο υπόγειο, ενώ αν είναι μηδέν στο ισόγειο. Άρα τους ακέραιους τους χρησιμοποιούμε όχι μόνο για να περιγράψουμε την ενέργεια, αλλά και για να συμβολίσουμε τη θέση των των ορόφων. Επίσης αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς για να υπολογίσουν τη διαφορά των ορόφων. Χρησιμοποιούν πίνακες οι οποίοι περιγράφουν*

*πολλές διαδοχικές κινήσεις, οπότε άτυπα κάνουν εκτιμήσεις στην αρχή και μετά υπολογίζουν ένα άθροισμα με πολλούς προσθετέους. Στη συνέχεια το διατυπώνουν με τυπική μαθηματική έκφραση, συζητούν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και καταλήγουν στην πιο αποτελεσματική.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να:*

- *προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια*
- *χρησιμοποιούν ακέραιους για να περιγράψουν την άνοδο και την κάθοδο*
- *διερευνούν τους κανόνες υπολογισμού αθροίσματος με πολλούς προσθετέους.*
- *αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.*

## Η δραστηριότητα

Η δραστηριότητα βασίζεται σε μία πραγματική κατάσταση: τα ψώνια σε ένα πολυώροφο κτίριο με υπόγειο. Αρχικά δίνονται οι πληροφορίες και στη συνέχεια διατυπώνεται το πρόβλημα. Στις πρώτες ερωτήσεις οι μαθητές κάνουν παρατηρήσεις, συνδέσεις, εκτιμήσεις και υπολογισμούς και έτσι εξοικειώνονται με το καινούριο πλαίσιο. Αρχικά κωδικοποιούν τις πληροφορίες χρησιμοποιώντας άτυπα θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Επίσης αντιλαμβάνονται ότι το ισόγειο αντιστοιχεί στον αριθμό μηδέν.

Η μητέρα της Άννας με τον 9χρονο αδελφό της Σταμάτη πήγαν για ψώνια σε ένα μεγάλο κατάστημα στο κέντρο της πόλης. Μπαίνοντας στο ισόγειο του καταστήματος συμβουλεύτηκαν το πίνακα δίπλα στο ασανσέρ, όπου έγραφε τι μπορούσες να βρεις σε κάθε όροφο.

**6ος ΟΡΟΦΟΣ : ΕΣΤΙΑΤΟΡΙΟ - ΚΑΦΕΤΕΡΙΑ**
**5ος ΟΡΟΦΟΣ : ΛΕΥΚΑ ΕΙΔΗ - ΔΕΡΜΑΤΙΝΑ ΕΙΔΗ**
**4ος ΟΡΟΦΟΣ : ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ**
**3ος ΟΡΟΦΟΣ : ΠΑΙΔΙΚΑ ΡΟΥΧΑ - ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**2ος ΟΡΟΦΟΣ : ΑΝΔΡΙΚΑ ΡΟΥΧΑ - ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**1ος ΟΡΟΦΟΣ : ΓΥΝΑΙΚΕΙΑ ΡΟΥΧΑ - ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**ΙΣΟΓΕΙΟ ΚΑΛΛΥΝΤΙΚΑ- ΚΟΣΜΗΜΑΤΑ**
**1ο ΥΠΟΓΕΙΟ ΕΙΔΗ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΠΕΡΙΠΟΙΗΣΗΣ - ΕΣΩΡΟΥΧΑ**
**2ο ΥΠΟΓΕΙΟ CD - DVD - ΒΙΒΛΙΑ**

Όταν επέστρεψαν στο σπίτι και η Άννα ρώτησε τον αδελφό της τι πράγματα αγόρασαν, αυτός της είπε:
«*Αρχικά ανεβήκαμε 4 ορόφους, αλλά στη συνέχεια κατεβήκαμε έναν. Πριν φύγουμε πήγαμε να πιούμε ένα χυμό. Όμως η μαμά θυμήθηκε ότι έπρεπε να αγοράσει κάτι ακόμη και έτσι κατεβήκαμε 7 ορόφους*».

1. Τί νομίζετε ότι αγόρασαν ο Σταμάτης και η μητέρα του;
2. Συμπληρώστε πίνακα που δείχνει πως ανεβοκατέβηκαν στους ορόφους
3. Μπορείτε μελετώντας τις πληροφορίες του πίνακα, να εκτιμήσετε αν έκαναν τα τελευταία ψώνια τους σε όροφο πάνω από το ισόγειο ή στο υπόγειο;

Στις επόμενες ερωτήσεις χρησιμοποιούν τα πρόσημα για να δηλώσουν την άνοδο και την κάθοδο. Επίσης:

- Προσθέτουν χωριστά τους τους θετικούς και χωριστά τους αρνητικούς.
- Χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών
- Προσθέτουν διαδοχικά τους ακεραίους
- Αιτιολογούν αν μπορούν να αλλάξουν τα πρόσημα σ' αυτό το πλαίσιο.

**4.** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας + για τους ορόφους που ανέβηκαν και – για τους ορόφους που κατέβηκαν, ακολουθώντας την σειρά των ορόφων από την περιγραφή του Σταμάτη.

| **Άνοδος ή κάθοδος** | αριθμός ορόφων |
|---|---|
| **1η φορά** | |
| **2η φορά** | |
| **3η φορά** | |
| **4η φορά** | |

**α)** Σε ποιον όροφο βρέθηκαν όταν βγήκαν από το ασανσέρ τη 2η φορά;
**β)** Σε ποιον όροφο βρέθηκαν όταν βγήκαν από το ασανσέρ τη 3η φορά;
**γ)** Πόσους ορόφους ανέβηκαν συνολικά και πόσους κατέβηκαν;
**δ)** Σε ποιον όροφο έκαναν τα τελευταία τους ψώνια;

**5.** Ο Σταμάτης και η μητέρα του αφού τέλειωσαν τα ψώνια τους, βγήκαν από το κατάστημα. Ξαναγράψε τον πίνακα συμπληρώνοντας τα στοιχεία που χρειάζονται ώστε να συμπεριλάβετε στην περιγραφή και αυτή την πληροφορία.

**6.** Θα μπορούσε το ταξίδι με το ασανσέρ να γίνει και αντίστροφα; Γιατί;

Ακολουθεί ένα δεύτερο πρόβλημα, εντός πλαισίου, διατυπωμένο όμως σε περισσότερο μαθηματική γλώσσα το οποίο θα οδηγήσει σε ερωτήσεις εκτός πλαισίου και γενίκευση.

Ας υποθέσουμε ότι οι παρακάτω πίνακες περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις στο ίδιο κατάστημα. Οι πελάτες πήραν το ασανσέρ από το ισόγειο.

***Πίνακας 1***

| αριθμός ορόφων |
|---|
| **+ 1** |
| **- 2** |
| **+ 2** |
| **+ 3** |
| **- 4** |
| **- 2** |

***Πίνακας 2***

| αριθμός ορόφων |
|---|
| **+ 3** |
| **- 2** |
| **+ 2** |
| **+ 1** |
| **- 4** |
| **- 1** |

**α)** Βρέθηκαν ποτέ στον ίδιο όροφο;

**β)** Να εκτιμήσετε αν οι πελάτες που χρησιμοποίησαν το ασανσέρ όπως περιγράφεται από τον πίνακα 2, θα βρεθούν ψηλότερα ή χαμηλότερα απ'αυτούς του πίνακα 1.

**γ)** Σε ποιον όροφο θα βρεθούν τελικά οι πελάτες σε κάθε περίπτωση;

Για να διευκολυνθείτε στους υπολογισμούς μπορείτε να ελέγξετε αν υπάρχει άνοδος και κάθοδος ίσου αριθμού ορόφων.

**8.** Χρησιμοποιήστε μαθηματική έκφραση που να συμβολίζει την κατάσταση που περιγράφει ο κάθε πίνακας. Σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσετε τη θέση που θα βρεθεί τελικά το ασανσέρ.

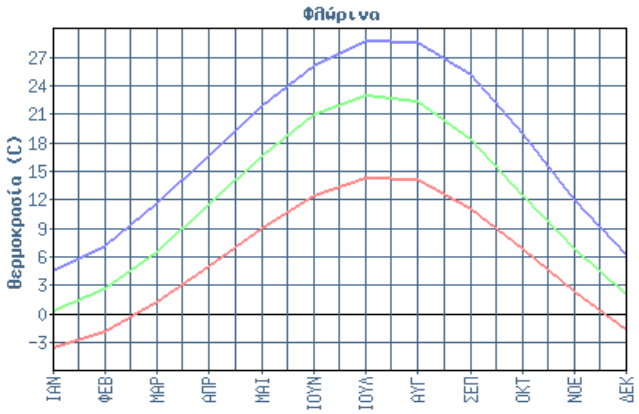
## 4.4 Σύγκριση θετικών και αρνητικών αριθμών

### Η δραστηριότητα ( *Ενότητα 4η: ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ)*

Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν σε μια πόλη της Βόρειας Ελλάδας κυρίως κατά τους χειμερινούς μήνες, αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διερευνώνται οι σχέσεις διάταξης θετικών και αρνητικών αριθμών. Οι μαθητές συγκρίνουν και διατάσσουν μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες ενός εξαμήνου, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα < και >. Συγκρίνουν τις θερμοκρασίες που σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια δύο εβδομάδων του Ιανουαρίου, είτε κατασκευάζοντας συγκριτικό πίνακα, είτε χρησιμοποιώντας γραφικές παραστάσεις, είτε υπολογίζοντας τη μέση τιμή.

Οι μέσες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν στην Φλώρινα το πρώτο εξάμηνο του 2003 είναι οι εξής, όπως δίνονται από την Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία
.

| | *ΙΑΝ* | *ΦΕΒ* | *ΜΑΡ* | *ΑΠΡ* | *ΜΑΙ* | *ΙΟΥΝ* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ΜΕΓΙΣΤΗ ( C° )* | 5 | 7 | 12 | 17 | 22 | 26 |
| *ΕΛΑΧΙΣΤΗ ( C°)* | - 4 | - 2 | 1 | 5 | 9 | 13 |




**1.α)** Ποιός μήνας ήταν ψυχρότερος και ποιος θερμότερος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

**β)** Να γράψετε τις ελάχιστες θερμοκρασίες από την μικρότερη στην μεγαλύτερη. Ήταν η θερμοκρασία πάνω από 0° κάθε μήνα;

Σε αυτό το πλαίσιο, παίρνοντας πληροφορίες από τον πίνακα, χρησιμοποιούν τα σύμβολα της διάταξης για τους ακεραίους. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον άξονα για την αναπαράσταση και σύγκριση των θετικών και αρνητικών.

Τον Ιούνιο η μέγιστη θερμοκρασία ήταν 26° και τον Απρίλιο 17°. Για να δείξουμε ότι ο Ιούνιος ήταν θερμότερος από τον Απρίλιο γράφουμε 26° > 17°.

**4.** Να γράψετε τρεις παρόμοιες αληθείς προτάσεις παίρνοντας πληροφορίες από τον πίνακα.

Η ελάχιστη θερμοκρασία τον Ιανουάριο ήταν χαμηλότερη από την ελάχιστη του Μαρτίου. Αυτό το συμβολίζουμε με τη σχέση – 4° < 1°.

**5.** Ισχύει ότι και η ελάχιστη θερμοκρασία του Φεβρουαρίου είναι μικρότερη από την ελάχιστη του Μαρτίου;

**6.** Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Εξήγησε τι σημαίνει η κάθε μία χρησιμοποιώντας τον πίνακα των θερμοκρασιών.

**α.** -4 < -2 **β.** -2 > 1 **γ.** -4 < 1 **δ.** -2 < 5

Ολοκληρώνουν την διάταξη με ένα πρόβλημα που περιέχει εκτιμήσεις και δέχεται διαφορετικές προσεγγίσεις και απαντήσεις

Κατά τη διάρκεια δύο εβδομάδων του Ιανουαρίου σημειώθηκαν οι παρακάτω θερμοκρασίες:

**1η εβδομάδα**

| | ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΜΕΣΗ ΘΕΡΜ. ( Cº )** | **- 3** | **- 1** | **0** | **3** | **3** | **2** | **0** |
| **ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΡΜ.( Cº)** | **- 7** | **- 6** | **- 4** | **- 2** | **- 3** | **- 4** | **- 5** |

**2η εβδομάδα**

| | ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΜΕΣΗ ΘΕΡΜ. ( Cº )** | **- 1** | **1** | **2** | **0** | **0** | **2** | **3** |
| **ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΡΜ.( Cº)** | **- 5** | **- 4** | **- 2** | **- 4** | **- 3** | **- 1** | **-2** |

**8. α.** Να κατασκευάσετε πίνακα με τις μέσες θερμοκρασίες και των δύο εβδομάδων.

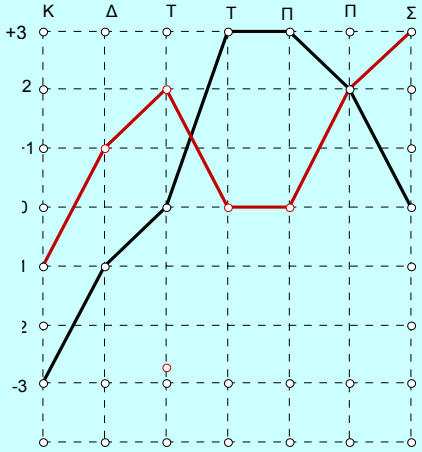
**β.** Να συγκρίνετε τις μέσες θερμοκρασίες και των δύο εβδομάδων. Ποια εβδομάδα ήταν θερμότερη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Επίσης εκτός από τον πίνακα σας δίνεται και η γραφική παράσταση των μέσων θερμοκρασιών της 1ης εβδομάδας.
Μπορείτε να την συμπληρώσετε και με τις θερμοκρασίες της 2ης εβδομάδας και να την χρησιμοποιήσετε για να απαντήσετε την ερώτηση.

**Ερώτηση 8**
Στην ερώτηση αυτή αναμένουμε διαφορετικές απαντήσεις και αιτιολογήσεις. Ο συγκριτικός πίνακας που θα κατασκευάσουν είναι ο εξής:

| | ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ΘΕΡΜΟΚΡ. 1ης εβδομάδας | - 3 | -1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| ΘΕΡΜΟΚΡ. 2ης εβδομάδας | - 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 3 |

Κάποιοι μαθητές μπορεί να απαντήσουν ότι από τον πίνακα δεν μπορούν να αποφασίσουν
ποια εβδομάδα ήταν θερμότερη.
Πιθανώς να καταφύγουν στην γραφική παράσταση την οποία θα συμπληρώσουν και για τα δεδομένα της δεύτερης εβδομάδας.




Οι μαθητές από τον πίνακα και τη γραφική παράσταση θα παρατηρήσουν ότι:

- Οι θερμοκρασίες των μεσαίων ημερών (Τετάρτη-Πέμπτη) της πρώτης εβδομάδας είναι μεγαλύτερες απ' αυτές της δεύτερης εβδομάδας.
- Οι θερμοκρασίες στην αρχή και στο τέλος της πρώτης εβδομάδας είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες της δεύτερης εβδομάδας.

Στη συνέχεια θα τους ζητήσουμε να υπολογίσουν την μέση τιμή της θερμοκρασίας κάθε εβδομάδας και να τις συγκρίνουν.

1η εβδομάδα : ( -3 ) + ( -1 ) + 0 + 3 + 3 + 2 + 0 = 4
μέση θερμοκρασία : 4 / 7
2η εβδομάδα : ( -1) + 1 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2 = 7
μέση θερμοκρασία : 7 / 7 = 1

Επειδή οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την Στατιστική θα πρέπει να γίνει συζήτηση για τον τρόπο υπολογισμού και τις ιδιότητες της μέσης τιμής. Η μέση τιμή μας δίνει ποια εβδομάδα είναι θερμότερη, αλλά δεν έχουμε πληροφορία για την κατανομή των θερμοκρασιών, δηλαδή την εναλλαγή θερμοκρασίας από μέρα σε μέρα, ούτε και για την μέγιστη και ελάχιστη θερμοκρασία της εβδομάδας. Διαιρώντας το συνολικό άθροισμα των θερμοκρασιών με το 7, κάνουμε ίση «μοιρασιά» της θερμοκρασίας και στις επτά ημέρες της εβδομάδας. Επειδή η μέση τιμή θα χρησιμοποιηθεί και στη διαίρεση αρνητικού με θετικό πρέπει ο καθηγητής να σιγουρευτεί ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια πριν προχωρήσει στα επόμενα.

## 4.5 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση διδάσκονται σε δύο ενότητες: στην ενότητα ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ και στην ενότητα ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.
Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του σχεδιασμού μιας διδασκαλίας βασισμένης στις αρχές της ΡΜΕ είναι η διασύνδεση των ιδεών που βρίσκονται σε διαφορετικές θεματικές περιοχές. Αν και κάθε ενότητα επικεντρώνεται σε κάποια ειδικά θέματα, εν τούτοις οι περισσότερες περιέχουν ιδέες που μπορούμε να τις εντοπίσουμε και σε άλλες ενότητες.
Αυτός ο σχεδιασμός είναι απόλυτα σύμφωνος με την αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης σύμφωνα με την οποία «τα φαινόμενα σπανίως φανερώνουν στον μαθητή μία μόνο έννοια ή δομή» (Freudenthal, 1983).
Στην ενότητα ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ οι μαθητές διδάσκονται τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με θετικό διαιρέτη. Οι πρώτες ερωτήσεις αφορούν τον υπολογισμό της μέσης τιμής μιας σειράς αριθμών ο οποίος γίνεται με την κλασσική μέθοδο: προσθέτουν όλες τις τιμές και διαιρούν με το πλήθος των τιμών.

Οι μέσες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν στην Φλώρινα το πρώτο εξάμηνο του 2003 είναι οι εξής, όπως δίνονται από την Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία

| | *ΙΑΝ* | *ΦΕΒ* | *ΜΑΡ* | *ΑΠΡ* | *ΜΑΙ* | *ΙΟΥΝ* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ΜΕΓΙΣΤΗ ( C° )* | 5 | 7 | 12 | 17 | 22 | 26 |
| *ΕΛΑΧΙΣΤΗ ( C°)* | - 4 | - 2 | 1 | 5 | 9 | 13 |

**2.** Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα.
**3.** Ποια είναι η μέση ελάχιστη θερμοκρασία του τριμήνου Ιανουαρίου – Μαρτίου και ποια η μέση μέγιστη;

Για να υπολογίσουν τη μέση τιμή δύο αριθμών τους προσθέτουν και διαιρούν με δύο. Στην ερώτηση 3 η μέση ελάχιστη θερμοκρασία τριμήνου είναι αρνητικός αριθμός. Για πρώτη φορά οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα πρόβλημα που ο διαιρετέος είναι αρνητικός αριθμός.

Στο ίδιο πλαίσιο δίνεται ένα πρόβλημα που για την επίλυσή του οι μαθητές θα χρειαστεί να πολλαπλασιάσουν θετικό με αρνητικό αριθμό. Ανακαλείται η απλούστερη μορφή του της έννοιας του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, ώστε να μπορούν να υπολογίσουν το πρόσημο. Οι μαθητές που δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάποια συντομότερη μέθοδο, ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Για το υπολογισμό της μέσης τιμής μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις παρακάτω στρατηγικές:
1) Προσθέτουν όλα τα δεδομένα και διαιρούν με 31.
2) Πρώτα διαγράφουν τους αντίθετους αριθμούς, μετά προσθέτουν και στο τέλος διαιρούν με 31.
3) Αφού συμπληρώσουν τον πίνακα μετρούν πόσες φορές εμφανίζεται κάθε θερμοκρασία και πολλοπλασιάζουν τον αριθμό με την αντίστοιχη θερμοκρασία.

Προσθέτουν όλα τα γινόμενα που βρήκαν και το άθροισμα το διαιρούν με 31.

Οι μέσες θερμοκρασίες για όλο τον Ιανουάριο δίνονται από τον πίνακα

| ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | - 1 | -2 | 0 | +2 | +1 |
| - 3 | - 1 | 0 | +3 | +3 | +2 | 0 |
| - 1 | +1 | +2 | 0 | 0 | +2 | +3 |
| - 1 | - 2 | - 3 | - 5 | - 2 | - 3 | - 2 |
| +2 | +4 | +3 | +4 | +5 | | |

Ο Δημήτρης και η Μαρία θέλουν να υπολογίσουν τη μέση θερμοκρασία του μήνα. Ο Δημήτρης ξεκινά προσθέτοντας όλες τις θερμοκρασίες με τη σειρά ενώ η Μαρία χρησιμοποιεί άλλη μέθοδο:

1. Γράφει πρώτα όλες τις παρατηρηθείσες διαφορετικές θερμοκρασίες από τον πίνακα
2. Κάτω ή δίπλα σε κάθε μία σημειώνει με γραμμές πόσες φορές εμφανίζεται

**10.** Η Μαρία ήδη σημείωσε τις θερμοκρασίες της πρώτης εβδομάδας. Συνεχίστε να σημειώνετε για όλες τις ημέρες του μήνα, μετρήστε πόσες φορές εμφανίζεται ο κάθε αριθμός και γράψτε το στην τελευταία σειρά του πίνακα.

| Θερμοκρασία | **-3** | **-2** | **-1** | **0** | **+1** | **+2** | **+3** | **+4** | **+5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | \| | \| | \| | \| | \| | | | |
| Μέτρηση | | | | | | | | | |

**11.** Να εξηγήσετε πως πρέπει να συνεχίσουν η Μαρία και ο Δημήτρης ώστε να υπολογίσουν τη μέση θερμοκρασία του μήνα.

**12.** Μπορείτε να βρείτε μία άλλη μέθοδο για να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία; Ποια μέθοδος σας αρέσει περισσότερο και γιατί;

Η Μαρία αφού συμπλήρωσε τον πίνακα, συνεχίζει πολλαπλασιάζοντας την θερμοκρασία επί τη μέτρηση, δηλαδή πόσες φορές σημειώθηκε η συγκεκριμένη θερμοκρασία μέσα στο μήνα. Για την πρώτη στήλη γράφει:

**( - 3) • 3 = ( - 3) + ( - 3) + ( - 3) =**

**13. α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα. Τί πρόσημο έχει;

**β.** Να κάνετε ανάλογους υπολογισμούς για όλες τις στήλες του πίνακα.

**γ.** Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία.

**δ.** Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τη μέση θερμοκρασία του Ιανουαρίου όπως περιγράφεται στη γραφική παράσταση

Ακολουθούν ερωτήσεις που βοηθούν στη γενίκευση καθώς επίσης και ελεύθερες δημιουργίες.

**16.** Στα προηγούμενα προβλήματα υπολογίσατε αρκετές φορές το γινόμενο θετικού με αρνητικό. Τί παρατηρείτε για το πρόσημο του γινομένου;

**17.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες που υπολογίζουν μέσες θερμοκρασίες μιας εβδομάδας, ενός μήνα (Απρίλη), ενός δεκαημέρου και ενός δεκαπενθήμερου.
**α.** εβδομάδα : - 14 : 7 = ..... **β.** μήνας : +180 : .... = .....
**γ.** δεκαήμερο : - 5 : ..... = ..... **δ.** 15/μερο : - 12 : .... = .....
Τί παρατηρείτε για το πρόσημο του πηλίκου;
Να διατυπώσετε κανόνα για την διαίρεση θετικού με θετικό αριθμό και αρνητικού με θετικό.

**18.** Να γράψετε ένα πρόβλημα που για να λυθεί θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε θετικό με αρνητικό αριθμό.

**19.** Να γράψετε ένα πρόβλημα που για να λυθεί θα πρέπει να κάνουμε την πράξη της άσκησης 17α

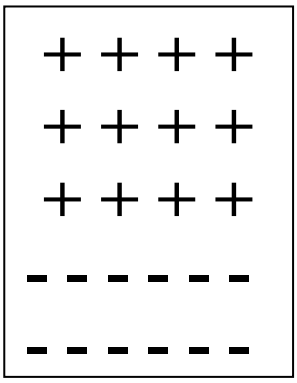
**20.** Έχετε παρατηρήσει ότι μερικές φορές για τους θετικούς αριθμούς παραλείπουμε το πρόσημο συν; Κάνουμε το ίδιο και για τους αρνητικούς; Να διατυπώσετε έναν κανόνα

Στην ενότητα ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ οι θετικές και αρνητικές κάρτες επανέρχονται για να χρησιμοποιηθούν ως ένα δεύτερο πλαίσιο για τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση ακεραίων. Αυτές όμως αποτελούν και το μοναδικό πλαίσιο για τη διαίρεση αρνητικού με αρνητικό μέσα από μία διαίρεση μέτρησης. Στο ίδιο πλαίσιο, σε μία διαίρεση μερισμού, διαιρούν αρνητικό με θετικό ακέραιο. Και οι δύο διαιρέσεις πρέπει να δοκιμασθούν στην τάξη για να εξετασθεί η καταλληλότητα του πλαισίου. Σε κάθε περίπτωση η διαίρεση πρέπει να διδαχθεί και σε φορμαλιστικό πλαίσιο ως πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού. Στο τέλος διερευνώνται και διατυπώνονται οι κανόνες προσήμου για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση
Οι στόχοι της ενότητας όσον αφορά τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό είναι *να* μπορούν οι μαθητές:

- Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια
- Να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.
- Να διερευνούν τους κανόνες πολλαπλασιασμού θετικού και αρνητικού, με θετικό και αρνητικό αριθμό.
- Να διερευνούν τους κανόνες διαίρεσης αρνητικού με θετικό και αρνητικού με αρνητικό αριθμό.
- Να διερευνούν τους κανόνες υπολογισμού παράστασης με πολλαπλασιασμό, πρόσθεση και αφαίρεση θετικών και αρνητικών.

***Θετικές και αρνητικές κάρτες***

Για τις επόμενες ερωτήσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ξανά τις συν και μείον κάρτες. Ο κάθε ένας πρέπει να έχει 12 θετικές κάρτες και 12 αρνητικές.




**13. α.** Πόσους πόντους έχετε συνολικά;

**β.** Να αφαιρέσετε τρεις ομάδες από τέσσερις θετικές κάρτες. Να γράψετε μία μαθηματική παράσταση που να περιγράφει το γεγονός.

**γ.** Έχετε την παράσταση **– 3 • ( - 4 ).** Τί περιγράφει αυτή η παράσταση; Να την υπολογίσετε.

**14.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις **– 3 • ( + 2 )** και **+ 3 • ( - 2 )**
Τί παρατηρείτε; Να κάνετε το ίδιο για τις παραστάσεις **– 2 • (+ 4)** και **+ 2 • (- 4)**
Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

**15.** Να κάνετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θετικές και αρνητικές κάρτες.

**α.** $-2 \cdot (-3)$ **β.** $-3 \cdot (+3)$ **γ.** $+4 \cdot (-2)$ **δ.** $-2 \cdot (-5)$
**ε.** $+2 \cdot (+6)$ **ζ.** $-2 \cdot (-6)$ **η.** $-5 \cdot (+8)$ **θ.** $-2 \cdot (+14)$

**16.** Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω κανόνες.

1. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο θετικούς το γινόμενο είναι .....
2. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο αρνητικούς το γινόμενο είναι .....
3. Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν θετικό και έναν αρνητικό το γινόμενο είναι .....

**17.** Στους παρακάτω πίνακες μερικά αποτελέσματα έχουν συμπληρωθεί. Να υπολογίσετε και να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα

| + | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | |
| -1 | | | | | +1 |
| 0 | | | | | |
| +1 | | | +1 | | |
| +2 | | | | | |

| • | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | |
| -1 | +2 | | | | |
| 0 | | | | | |
| +1 | | | | | +2 |
| +2 | | | | | |

Οι μαθητές κάποια στιγμή πρέπει να απομακρυνθούν από τα πλαίσια και να εργαστούν σε ένα πιο αφηρημένο επίπεδο. Από το σημείο αυτό και μετά, για τη λύση των προβλήμάτων ενθαρρύνονται να μη χρησιμοποιούν συγκεκριμένο πλαίσιο του οποίου ο ρόλος δεν είναι κυρίαρχος.

**Ερώτηση 13**

**α.** 12 • ( - 1 ) + 12 • ( +1 ) = - 12 + 12 = 0

**β.** Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι 12 θετικές κάρτες μαζί με 12 αρνητικές δίνουν άθροισμα 0. Αν αφαιρέσουμε τις 12 θετικές θα μείνουν οι 12 αρνητικές. Δηλαδή

**- 3 • ( + 4 ) = - 12**

***αφαιρώ*** ***θετικές κάρτες***

**γ.** Πάλι έχουμε ότι 12 θετικές κάρτες μαζί με 12 αρνητικές δίνουν άθροισμα 0. Αν αφαιρέσουμε τις 12 αρνητικές θα μείνουν οι 12 θετικές.

**- 3 • ( - 4 ) = + 12**

***αφαιρώ*** ***αρνητικές κάρτες***

**Ερώτηση 14**

Αφαιρούμε τρεις ομάδες από δύο θετικές κάρτες και προσθέτουμε τρεις ομάδες από δύο αρνητικές κάρτες. Με το πρόβλημα αυτό αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς (Gravenmeijer, 1991)

**Ερωτήσεις 15, 16**

Αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν και να διατυπώνουν κανόνες για τον πολλαπλασιασμό θετικών και αρνητικών αριθμών.

**Ερώτηση 17**

Συμπληρώνοντας τους πίνακες οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι υπάρχει συμμετρία των αποτελεσμάτων ως προς τη διαγώνιο του πίνακα. Αυτό αιτιολογείται από την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Αντίθετα η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει στην αφαίρεση και τη διαίρεση.

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις. Εκτός από τις θετικές και αρνητικές κάρτες είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί πλαίσιο για την διαίρεση με αρνητικό διαιρέτη. Η διαίρεση λοιπόν πρέπει να αντιμετωπισθεί ως πράξη που σχετίζεται με τον πολλαπλασιασμό (αντίστροφη) και επομένως ισχύουν γι΄αυτήν οι κανόνες προσήμου του πολλαπλασιασμού.

Για την διαίρεση αρνητικού με αρνητικό χρησιμοποιούμε διαίρεση μέτρησης στο πλαίσιο των θετικών και αρνητικών καρτών. Για την διαίρεση θετικού με αρνητικό δεν βρέθηκε κατάλληλο πλαίσιο.Για την διαίρεση με θετικό διαιρέτη οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν είτε το πλαίσιο των θερμοκρασιών είτε των καρτών όπως δίνεται από μία διαίρεση μερισμού στην ερώτηση 20. Η διδασκαλία της διαίρεσης ολοκληρώνεται με δύο ερωτήσεις γενίκευσης

## 4.6 Υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων

Ο υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων διδάσκεται σε δύο ενότητες: στην ενότητα ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ και στην ενότητα ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.
Στην ενότητα ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ ο υπολογισμός παράστασης με πολλαπλασιασμό και πρόσθεση προκύπτει από δύο προβλήματα υπολογισμού μέσης θερμοκρασίας. Οι μαθητές έχουν ήδη ακολουθήσει την στρατηγική 3 της σελίδας 54. Τώρα έχουν την ευκαιρία μία πραγματική κατάσταση να την εκφράσουν με μαθηματική παράσταση την οποία καλούνται να υπολογίσουν.

**14.** Καταγράψαμε τις μέγιστες θερμοκρασίες ενός δεκαημέρου. Τις τέσσερις ημέρες ήταν -2º, τρεις μέρες ήταν -3º, μία μέρα ήταν -1º και τις υπόλοιπες δύο ήταν +3º. Για να υπολογίσουμε τη μέση θερμοκρασία ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1º : Υπολογίζουμε την παράσταση

**( - 2) • 4 + ( - 3) • 3 + ..... =**

2º : Διαιρούμε το άθροισμα που υπολογίσαμε με .....

Συμπληρώστε τα κενά και κάνετε τους απαραίτητους υπολογισμούς ώστε να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία.

**15.** Καταγράψαμε τις ελάχιστες θερμοκρασίες δύο εβδομάδων του Φεβρουαρίου. Τις πέντε ημέρες ήταν -7º, τρεις ημέρες ήταν -4º, μία μέρα ήταν 0º, τρεις μέρες ήταν +2º και δύο μέρες ήταν -2º. Να υπολογίσετε την μέση θερμοκρασία των δύο εβδομάδων ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου προβλήματος.

Στην ενότητα ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ. για τον υπολογισμό χρησιμοποιούνται δύο πλαίσια:
**1.** Το πλαίσιο των **θερμοκρασιών** όπου έχουμε διατύπωση προβλήματος

Η Μαρία, στην προηγούμενη ενότητα, για να υπολογίσει τη μέση θερμοκρασία κάνει πρώτα την καταμέτρηση θερμοκρασιών που έχουν την ίδια τιμή.

**1.** Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα με θερμοκρασίες για την παράσταση:
**3 • ( - 1 ) + 4 • ( - 3 ) + 2 • ( - 4 )**

**2.** Το πλαίσιο της **βαθμολογίας σε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής**.
Όλες οι απαντήσεις στο τεστ παίρνουν μονάδες θετικές ή αρνητικές. Οι μαθητές βρίσκουν την τελική βαθμολογία, υπολογίζοντας παραστάσεις που έχουν πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Σε περίπτωση λάθος καταχώρησης μονάδων από τον καθηγητή, διορθώνουν τον βαθμό, υπολογίζοντας παραστάσεις και διατυπώνοντας αντίστοιχα προβλήματα, που έχουν τώρα και αφαίρεση.

Ο καθηγητής δίνει στους μαθητές ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής. Επειδή δεν θέλει να επιλέγουν απαντήσεις στην τύχη, δίνει συν και μείον μονάδες για κάθε απάντηση.

σωστή απάντηση: + 4 μονάδες
λάθος απάντηση: - 2 μονάδες
μη απάντηση: + 1 μονάδα

Το διαγώνισμα έχει 20 ερωτήσεις που πρέπει να απαντηθούν

Οι πρώτες ερωτήσεις έχουν ως σκοπό την εξοικείωση των μαθητών με το πλαίσιο.

**6. α.** Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός μονάδων που μπορεί να πάρει ένας μαθητής;
**β.** Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός μονάδων που μπορεί να πάρει ένας μαθητής;
**γ.** Πόσες μονάδες θα πάρει ένας μαθητής αν απαντήσει 10 ερωτήσεις σωστά και 10 λάθος;
**δ.** Μπορεί ένας μαθητής να πάρει συνολικά 0 μονάδες;

**7.** Η Κατερίνα απάντησε λάθος σε 7 ερωτήσεις ενώ οι υπόλοιπες 13 ήταν σωστές.
**α.** Πόσες μείον μονάδες πήρε; Να εξηγήσετε πως το υπολογίσατε.
**β.** Μπορείτε να υπολογίσετε πόσες μονάδες πήρε τελικά η Κατερίνα;

**Ερώτηση 6**
**α.** + 4 • 20 = + 80 **β**. -2 • 20 = - 40
**γ.** -2 • 10 + 4 • 10 = 20 Υπενθυμίζουμε ότι την σειρά των πράξεων που έχουν ήδη διδαχθεί οι μαθητές.
**δ.** ΟΧΙ Οι στρατηγικές που θα χρησιμοποιηθούν ποικίλουν. Η πιο απλή και συνηθισμένη είναι η δοκιμή-λάθος. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ίδια στρατηγική, αφού αποκλείσουν την περίπτωση κάποιες ερωτήσεις να απαντηθούν σωστά και κάποιες να μην απαντηθούν γιατί σ'αυτή την περίπτωση θα έχουν μόνο θετικές μονάδες. Ο καθηγητής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι:

1. Κάθε θετική απάντηση παίρνει + 4 μονάδες άρα χρειαζόμαστε δύο λάθος απαντήσεις ( 2 • (-2 ) = -4 ) για να έχουμε αποτέλεσμα 0.
2. Κάθε αρνητική απάντηση παίρνει -2 μονάδες, άρα πρέπει να μην απαντηθούν δύο ερωτήσεις ( 2 • ( + 1 ) = 2 ) για να έχουμε αποτέλεσμα 0.

Επομένως σε κάθε περίπτωση χρειάζονται τρεις ερωτήσεις για να πάρουμε το 0. Ο αριθμός 20 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

3. Το ίδιο ισχύει αν έχουμε και σωστές και λάθος και ερωτήσεις που δεν απαντήθηκαν.

**Ερώτηση 7**
**α.** 14 αρνητικές μονάδες. Πιθανοί τρόποι υπολογισμού 7 • ( - 2 ) ή ( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 ) +( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 )
**β.** Είχε 7 λάθος και 13 σωστές απαντήσεις.
Άρα 7 • ( - 2 ) + 13 • ( + 4 ) = -14 + 52 = 38

Στη συνέχεια έχουμε υπολογισμό παραστάσεων όταν πρέπει να διορθωθούν βαθμολογίες

Ο καθηγητής ξανακοιτάζοντας το διαγώνισμα του Χρήστου διαπίστωσε ότι είχε κάνει ένα λάθος στη βαθμολογία. Δύο λάθος απαντήσεις τις βαθμολόγησε ως σωστές. Έκανε την διόρθωση γράφοντας δίπλα στο βαθμό: **- 2 • 4 + 2 • ( - 2 )**

**9. α.** Να εξηγήσετε γιατί ο καθηγητής έγραψε αυτή την παράσταση.
**β.** Πόσο άλλαξε η βαθμολογία του Χρήστου; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

**Ερώτηση 9**
**α.** Ο καθηγητής πρώτα αφαίρεσε τις δύο σωστές απαντήσεις και μετά πρόσθεσε τις δύο λάθος. Δηλάδή πρώτα αφαίρεσε τις θετικές μονάδες -2 • 4 και μετά πρόσθεσε τις αρνητικές +2 • ( - 2). Ο πρώτος αριθμός στον πολλαπλασιασμό δηλώνει την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) και ο δεύτερος τις θετικές ή αρνητικές μονάδες.
**β**. Αφαιρέθηκαν 12 μονάδες: -2 • 4 + 2 • ( - 2) = - 8 + ( - 4 ) = - 12

Στη συνέχεια ο καθηγητής αφού έγραψε τις σωστές απαντήσεις στον πίνακα ζήτησε από όλα τα παιδιά να ελέγξουν τις απαντήσεις τους. Η Κατερίνα βρήκε και αυτή λάθος και φώναξε τον καθηγητή να το δει. Αυτός είπε στην τάξη:
«Έχω σημειώσει στο διαγώνισμα της Κατερίνας 7 λάθος απαντήσεις και τις υπόλοιπες σωστές. Ομως τρεις από τις σωστές απαντήσεις της, βαθμολογήθηκαν ως λάνθασμένες.

**10. α.** Να γράψετε μία παράσταση που να διορθώνει την βαθμολογία.
**β.** Ποιος είναι ο τελικός βαθμός της Κατερίνας;
**11. α.** Να διατυπώσετε ένα ανάλογο πρόβλημα για την παράσταση
**45 + 4 • ( - 2 ) – 3 • ( + 4 ) – 1 • ( + 1 )** και να την υπολογίσετε.
**β.** Μπορούμε να γράψουμε διαφορετικά την παράσταση;

**Ερώτηση 10**
**α.** Πρώτα αφαιρούμε τις τρεις λάθος απαντήσεις και μετά προσθέτουμε τις τρεις σωστές, δηλαδή - 3 • ( - 2 ) + 3 • ( + 4 )
**β.** Κατ΄αρχήν υπολογίζουμε την προηγούμενη βαθμολογία της Κατερίνας. Αφού είχε 7 λάθος και 13 σωστές απαντήσεις συγκέντρωσε 7 • ( - 2 ) + 13 • ( + 4 )= 38 μονάδες.
Άρα ο τελικός της βαθμός θα είναι 38 - 3 • ( - 2 ) + 3 • ( + 4 ) = 56
Οι περισσότεροι μαθητές δεν θα χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη παράσταση, αλλά πρώτα θα υπολογίσουν τις συνολικές μονάδες που πρέπει να προστεθούν και στο τέλος θα κάνουν την πρόσθεση.
- 3 • ( - 2 ) + 3 • ( + 4 ) = 18 38 + 18 = 56
**Ερώτηση 11**
**α.** Οι μαθητές διατυπώνουν ανάλογο πρόβλημα για παράσταση που περιλαμβάνει τρεις διορθώσεις. Αν στο προηγούμενο πρόβλημα δεν χρησιμοποιήσαν ανάλογη παράσταση και υπολόγισαν τον τελικό βαθμό σε δύο φάσεις, τώρα αντιμετωπίζουν την κατάσταση στην οποία ο υπλογισμός γίνεται από μία μόνο παράσταση.
**β.** Πρέπει να παρατηρήσουν ότι πρώτα προσθέσαμε τις λάθος απαντήσεις και μετά αφαιρέσαμε τις σωστές και τα κενά. Θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τη σειρά χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα

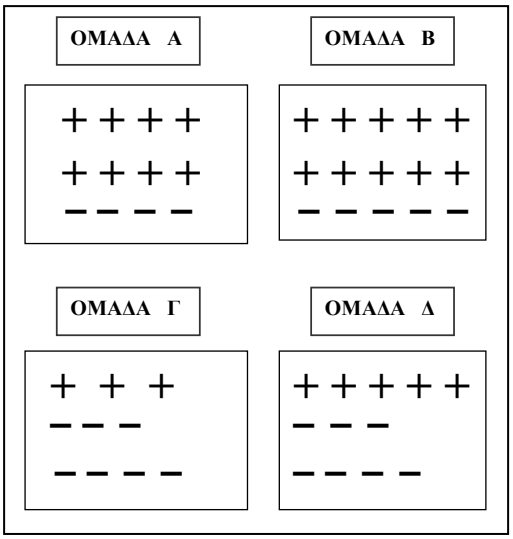
## 4.7 Απαλοιφή παρενθέσεων

Για να βγάλουμε παρενθέσεις και στη συνέχεια να να υπολογίσουμε αριθμητικές παραστάσεις χρησιμοποιούμε το πλαίσιο των θετικών και αρνητικών καρτών. Επίσης διερευνώνται και διατυπώνονται οι αντίστοιχοι κανόνες προσήμου.

***Βγάζουμε παρενθέσεις***
Οι τέσσερις ομάδες που έπαιζαν το παιχνίδι συγκέντρωσαν τους εξής πόντους:
**Α**: + 4 **Β**: + 5 **Γ**: - 4 **Δ**: - 2
Οι κάρτες της ομάδας Β και Γ βρέθηκαν πολύ κοντά και όταν τις μάζεψαν για να τις μετρήσουν, διαπίστωσαν ότι η Β ομάδα είχε πάρει τρεις κάρτες από τη Γ ομάδα.
Ευτυχώς η αρχηγός της ομάδας Β κρατούσε το σκορ της ομάδας της.
«Πρέπει να δώσουμε δύο συν και μία μείον κάρτα πίσω» είπε.

Παίρνουμε από την ομάδα Β μία μείον και δύο συν κάρτες. Ένας τρόπος να περιγράψουμε αυτή την ενέργεια είναι: 5 - ( - 1 + 2)
Δίνουμε στην ομάδα Γ μία μείον και δύο συν κάρτες. Ένας τρόπος να περιγράψουμε αυτή την ενέργεια είναι:
- 4 + ( - 1 + 2)

**24. α.** Να υπολογίσετε πόσοι πόντοι αφαιρέθηκαν από την ομάδα Β.
**β.** Να υπολογίσετε το τελικό σκορ της ομάδας Β και Γ.
**γ.** Υπάρχουν άλλες παραστάσεις που να περιγράφουν τις δύο ενέργειες;




Παίρνουμε από την ομάδα Α δύο μείον και τρεις συν κάρτες.

**25. α.** Να γράψετε μία παράσταση με παρένθεση που να περιγράφει την ενέργεια
**β.** Να υπολογίσετε πόσους πόντους αφαιρέσαμε.
**γ.** Να υπολογίσετε το τελικό σκορ της ομάδας Α.
**δ.** Θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντί να αφαιρέσουμε, δίναμε πέντε κάρτες στην ομάδα Α;

**Ερώτηση 24**
**α.** – 1 + 2 = 1
**β**. ομάδα Β: 5 – 1 = 4 ομάδα Γ: - 4 + 1 = - 3
**γ.** Πιθανές απαντήσεις: **5 - ( - 1 ) - ( + 2)** ή **5 - ( 2 – 1 )** ή **5 - 1** ή **5 -( + 2 ) - ( - 1 )**
για ομάδα Β

**αφαίρεση** **αρνητική κάρτα** **αφαίρεση** **θετικές κάρτες**

**Ερώτηση 25**
Συνιστούμε τους μαθητές να ακολουθήσουν την πορεία και τους συμβολισμούς της προηγούμενης άσκησης.
**α.** Πιθανή παράσταση 4 - ( - 2 + 3 )
**β.** - 2 + 3 = +1 **γ.** 4 – 1 = 3
**δ.** Οι μαθητές ήδη γνωρίζουν ότι: *αφαιρώ έναν αρνητικό πόντο είναι το ίδιο σαν να προσθέτω έναν θετικό. -(-1)=+1*
Χρησιμοποιώντας αυτή τη γνώση αναμένουμε απαντήσεις της μορφής:
4 + 2 - 3 ή 4 + ( 2 – 3 )

Η διδασκαλία ολοκληρώνεται με ερωτήσεις γενίκευσης.

**27.** Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις χωρίς να βάλετε παρενθέσεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θετικές και αρνητικές κάρτες των ομάδων.
**α.** + 4 - ( -3 + 4 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με + 4 .....
⋮
**η.** -3 – ( - 5 + 9 - 2 – 6 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με - 3 .....

## 4.8 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών γίνεται στην 6η ενότητα: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ σε δύο διαφορετικά γεωμετρικά πλαίσια ώστε οι μαθητές να εφαρμόσουν τις πράξεις μεταξύ ακεραίων που έχουν μάθει σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο και να διερευνήσουν τις συνδέσεις ανάμεσα στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.

***Περιγραφή της ενότητας***

*Σ' αυτή την ενότητα οι μαθητές διερευνούν τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα συντεταγμένων και στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου στο ΑΒΑΚΙΟ. Αρχικά μαθαίνουν τα στοιχεία ενός σύστηματος συντεταγμένων, δηλαδή την αρχή Ο και τους κάθετους άξονες με τη μονάδα μέτρησης. Στη συνέχεια απεικονίζουν τα σημεία των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες. Ενώνοντας τα σημεία σχηματίζουν γνωστά γεωμετρικά σχήματα και διερευνούν τους μετασχηματισμούς τους, δηλαδή τη μεταφορά, τη στροφή, τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση. Για να διερευνήσουν τι παθαίνει το σχήμα αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μήκη των πλευρών του με θετικό ή αρνητικό αριθμό, εργάζονται στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου. Εκεί με τη Logo σχεδιάζουν τετράγωνα, τρίγωνα, ορθογώνια και με τη βοήθεια του μεταβολέα διερευνούν:*

- *Τη μεταβολή του μεγέθους του σχήματος (μεγέθυνση – σμίκρυνση)*
- *Τη θέση του σχήματος όταν οι πλευρές πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται με αρνητικό αριθμό.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν:*

- *Να τοποθετούν διατεταγμένα ζεύγη αριθμών σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να εφαρμόζουν τις πράξεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*
- *Να κατανοούν τις ομοιότητες που υπάρχουν στις πράξεις μεταξύ των ακεραίων και στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων στον Χελωνόκοσμο*
- *Να προβλέπουν και να αιτιολογούν τους μετασχηματισμούς και στα δύο πλαίσια.*

### *4.8.1 Δραστηριότητα 1*

Οι μαθητές διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων σε τετραγωνισμένο χαρτί, όταν στις συντεταγμένες των κορυφών του σχήματος προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε έναν αριθμό. Πριν κάνουν το σχήμα διατυπώνουν εικασίες και στη συνέχεια διαπιστώνουν ότι προσθέτοντας έναν θετικό στη τετμημένη κάθε σημείου, το σχήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά, τόσες θέσεις όσος είναι και ο αριθμός, ενώ προσθέτοντας έναν αρνητικό μετατοπίζεται αντιστοίχως προς τα αριστερά. Κάτι ανάλογο συμβαίνει όταν προστεθεί θετικός ή αρνητικός αριθμός στην τεταγμένη κάθε σημείου. Τότε έχουμε μεταφορά του σχήματος προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα.

**3.** Να σχεδιάσετε δύο κάθετους άξονες. Να βάλετε μία μονάδα μέτρησης σε κάθε άξονα. Η τομή των αξόνων είναι το σημείο Ο.

**α.**Τί αριθμό θα βάλουμε στην αρχή;

**β.** Να τοποθετήσετε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία Α(1,1), Β(2,3), Γ(4,3), Δ(5, 1)

**γ.** Αν ενώσετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Α, τί γεωμετρικό σχήμα σχηματίζεται;

Για τα προβλήματα 4-7, να κάνετε πρώτα μια πρόβλεψη για το αποτέλεσμα που θα έχει κάθε πράξη στο σχήμα. Να χρησιμοποιήσετε τις συντεταγμένες του προβλήμ. 3.

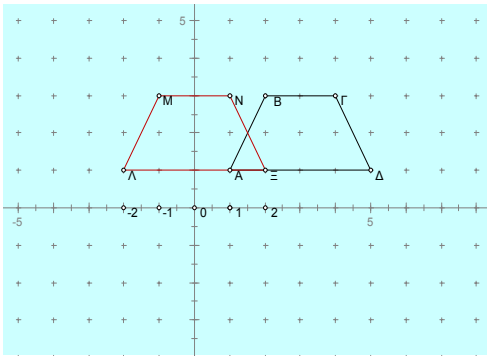
**4.** Να προσθέσετε -3 στην τετμημένη κάθε σημείου. Τί πρόκειται να συμβεί;

**5**. Να προσθέσετε +1 στην τεταγμένη κάθε σημείου. Τί θα συμβεί τώρα;

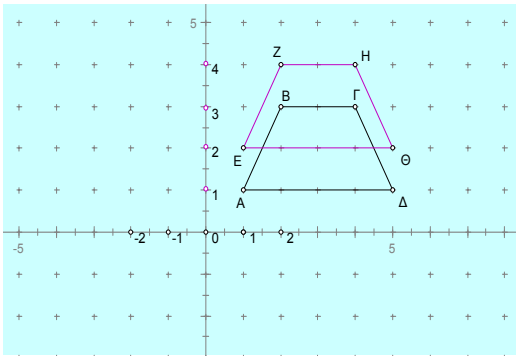
**6.** Τί συμβαίνει αν αφαιρέσετε 1 από τις συντεταγμένες όλων των σημείων;

**7.** Τί πρέπει να κάνετε στις συντεταγμένες των σημείων, αν θέλετε να μετατοπισθεί το αρχικό πολύγωνο προς τα κάτω κατά τέσσερις μονάδες;

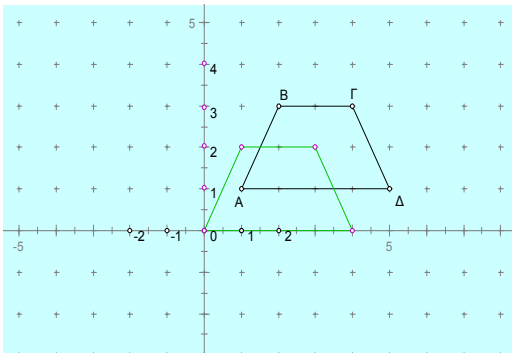
**Ερώτηση 4**
Θα μετατοπισθεί 3 θέσεις αριστερά



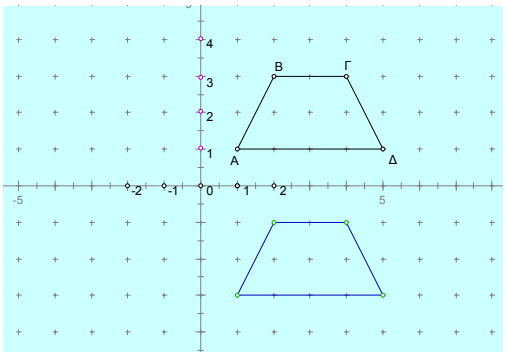

**Ερώτηση 5**
Θα μετατοπισθεί 1 θέση πάνω




**Ερώτηση 6**
Θα μετατοπισθεί 1θέση αριστερά και 1 κάτω.




**Ερώτηση 7**
Πρέπει να προστεθεί στην τεταγμένη κάθε σημείου το -4



### *4.8.2 Δραστηριότητα 2*

Οι μαθητές διερευνούν πως μετασχηματίζονται τα γεωμετρικά σχήματα στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου, όταν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μήκη των πλευρών τους με θετικό ή αρνητικό αριθμό,.

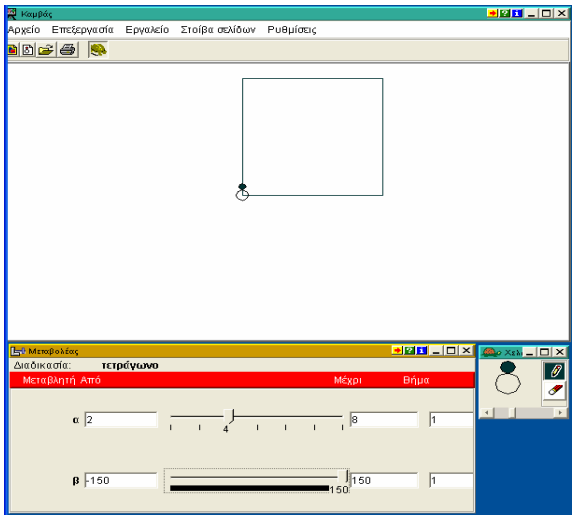
Δίνεται στους μαθητές η ρουτίνα Logo που ορίζει την έννοια «τετράγωνο» την οποία εκτελούν μία φορά με τις τιμές που τους δίνονται.

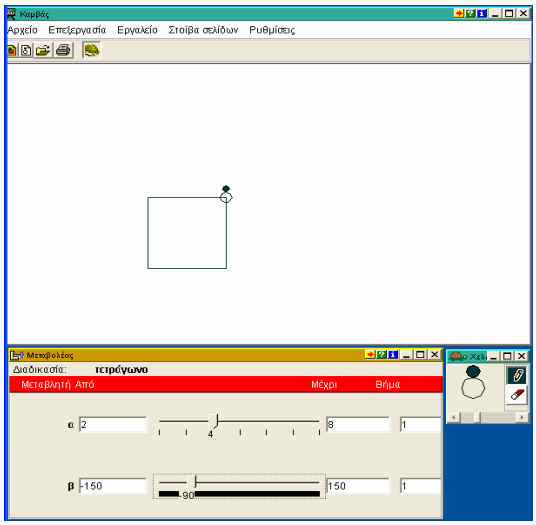
*για τετραγωνο :α :β*
*επαναλαβε :α[μ :β δ :90]*
*τελος*
*τετράγωνο 4 100*

Ενεργοποιούν τον μεταβολέα, πειραματίζονται αλλάζοντας την τιμή της μεταβλητής β και κάνουν προβλέψεις για τις αλλαγές του σχήματος.

**9. α.** Τί συμβολίζει η μεταβλητή β;
**β.** Τί παθαίνει το σχήμα όταν αλλάζουμε τις τιμές της μεταβλητής β; Ποια ακριβώς στοιχεία του σχήματος μεταβάλλονται και ποια παραμένουν σταθερά;
**10.** Τί νομίζετε ότι θα συμβεί αν η μεταβλητή β πάρει αρνητικές τιμές; Να κάνετε μία πρόβλεψη.

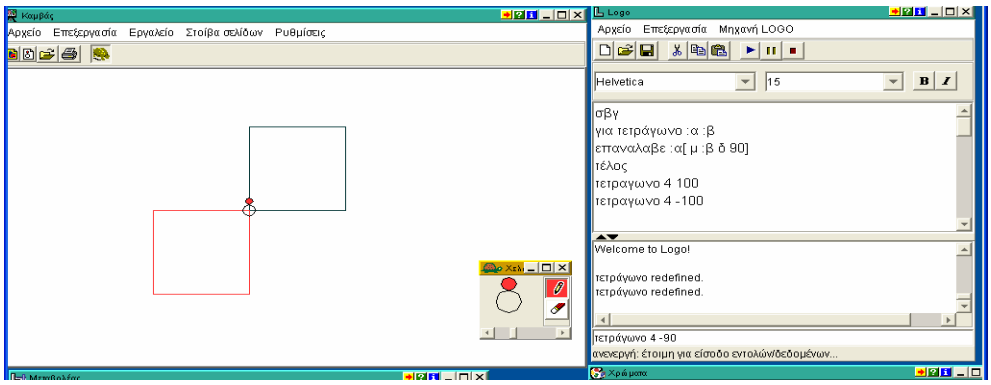
Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι θα αλλάξει η θέση του τετραγώνου. Αλλάζουν το εύρος των τιμών της β ώστε να συμπεριλάβουν και αρνητικές τιμές. Με την ενεργοποίηση του μεταβολέα και τη μετακίνησή του απο τα δεξιά στα αριστερά, το τετράγωνο μικραίνει συνεχώς και μηδενίζεται όταν η β=0. Ακολούθως όταν η β αρχίσει να παίρνει αρνητικές τιμές σχηματίζεται και πάλι το τετράγωνο σε άλλη θέση συμμετρική της αρχικής ως προς την αρχή Ο.



Να αλλάξετε τα όρια των τιμών, ώστε να συμπεριλάβετε και αρνητικές π.χ -100 έως 100. Απενεργοποιήστε τον μεταβολέα.

Απενεργοποιείται ο μεταβολέας, συμπληρώνεται η εντολή *τετράγωνο -100*, και έτσι έχουν τα δύο συμμετρικά σχήματα. Γίνεται σύνδεση της κίνησης της χελώνας με το σύστημα συντεταγμένων που ήδη έχουν μελετήσει.




Στη συνέχεια δίνουμε στους μαθητές την έννοια «τρίγωνο».

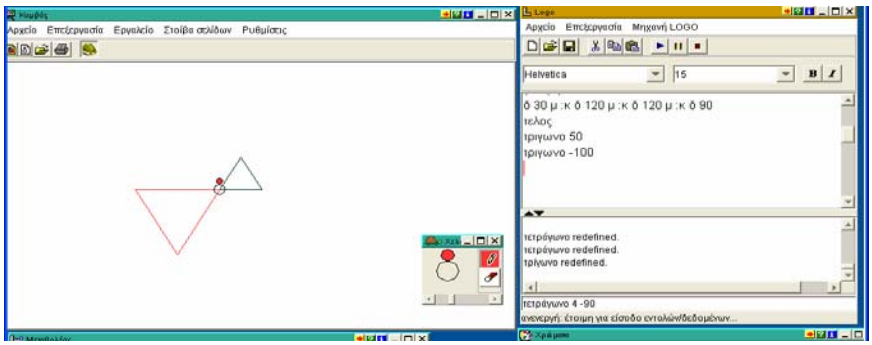
*για τριγωνο :κ*
*δ 30 μ :κ δ 120 μ :κ δ 120 μ :κ δ 90*
*τελος*
*τριγωνο 50*

Εκτελώντας την έννοια παρατηρούν ότι σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο.
Πολλαπλασιάζουν διαδοχικά τις πλευρές του τριγώνου με αρνητικό αριθμό και διατυπώνουν εικασίες.

**13. α.** Τί είδους τρίγωνο σχηματίζεται;
**β.** Να πολλαπλασιάσετε την πλευρά του τριγώνου με -2.και να γράψετε την αντίστοιχη εντολή.
**γ.** Πριν να εκτελέσετε την εντολή, να κάνετε μία πρόβλεψη για το είδος και τη θέση του νέου τριγώνου.
**δ.** Να εκτελέσετε την εντολή. Τί παρατηρείτε; Κάνατε σωστές προβλέψεις;

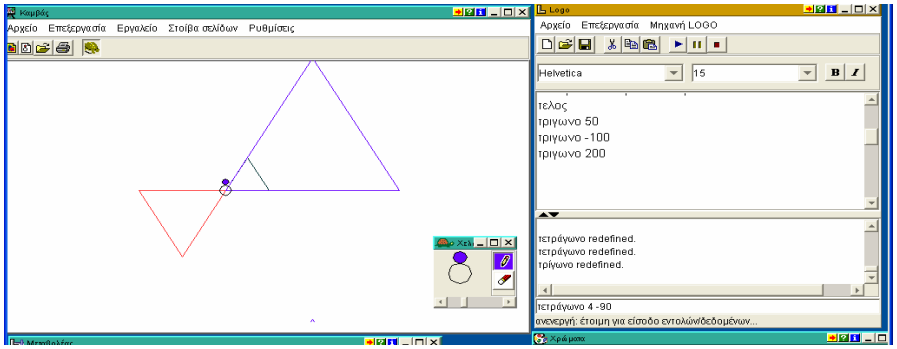
**14. α.** Να πολλαπλασιάσετε την πλευρά του νέου τριγώνου πάλι με -2.και να γράψετε την αντίστοιχη εντολή.
**β.** Πριν την εκτελέσετε να κάνετε μία πρόβλεψη για το είδος και τη θέση του νέου τριγώνου.

**Ερώτηση 13**
Η πλευρά του τριγώνου θα γίνει -2 • 50 = -100. Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι οι πλευρές του τριγώνου θα διπλασιαστούν και το τρίγωνο θα μετατοπισθεί κάτω αριστερά.




## Ερώτηση 14

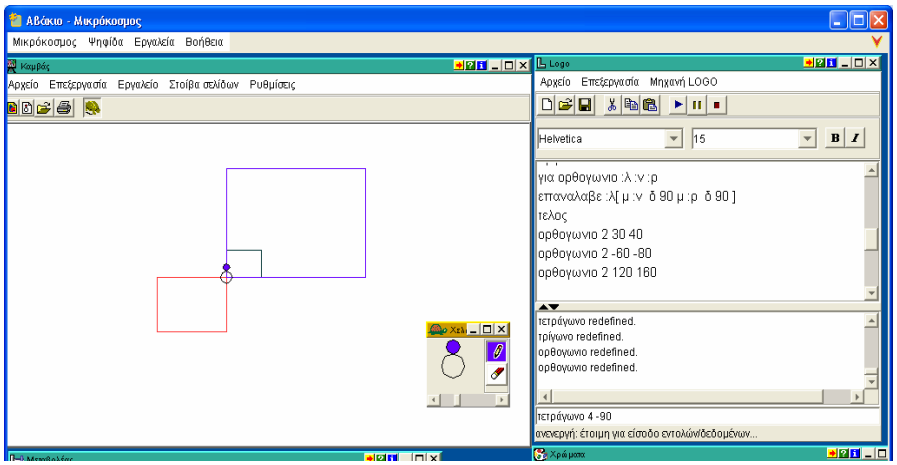
Η πλευρά του τριγώνου θα γίνει -2 • (-100) = 200. Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι το τρίγωνο θα διπλασιαστεί και θα μετατοπισθεί και πάλι πάνω δεξιά.




Εκτελώντας οι μαθητές την έννοια «ορθογώνιο»

*για ορθογώνιο :λ :ν :ρ*
*επανάλαβε :λ[μ :ν δ 90 μ :ρ δ 90]*
*τελος*
*ορθογώνιο 2 30 40*

βλέπουν ότι σχηματίζεται ένα μικρό μικρό μαύρο ορθογώνιο. Στη συνέχεια εκτελούν την έννοια με τα δεδομένα *ορθογώνιο 2 -60 -80* και *ορθογώνιο 2 120 160* και παρατηρούν τον σχηματισμό άλλων δύο ορθογωνίων

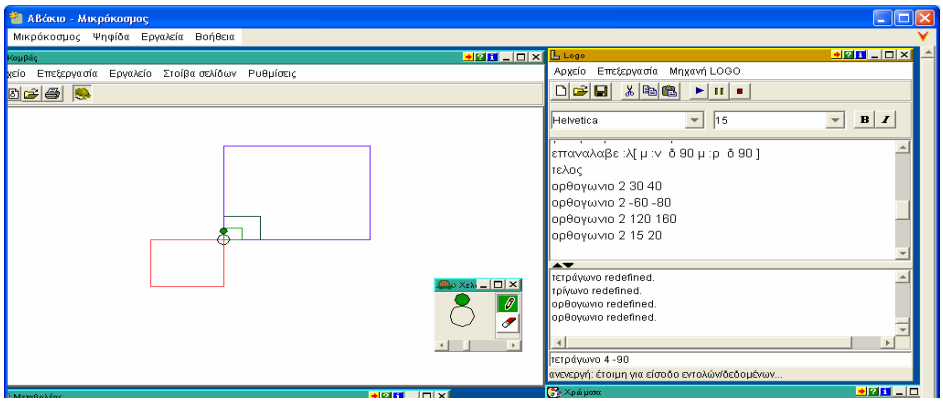


Ατιολογούν τον διαδοχικό μετασχηματισμό των ορθογωνίων και στη συνέχεια καλούνται να διερευνήσουν τους κανόνες προσήμου για τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση δύο αρνητικών αριθμών.

**16.** Να διαιρέσετε τις πλευρές του κόκκινου ορθογωνίου με - 4. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο; Τί συμπεραίνετε για το ( - ... ) : ( - 4 ) ;
**17.** Να πολλαπλασιάσετε το μπλε ορθογώνιο με -1. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο;
**18.** Να πολλαπλασιάσετε τις πλευρές του νέου ορθογωνίου με -1. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο; Τί συμπεραίνετε για το ( - 1 ) • ( - 1 ) ;

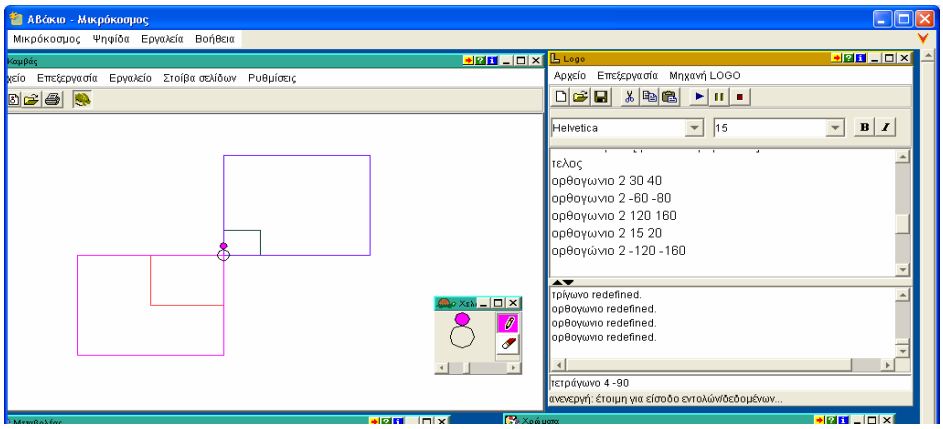
## Ερώτηση 16

Οι πλευρές θα είναι ( - 60 ) : ( - 4 ) = 15 και ( - 80 ) : ( - 4 ) = 20 . Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί πάνω δεξιά.



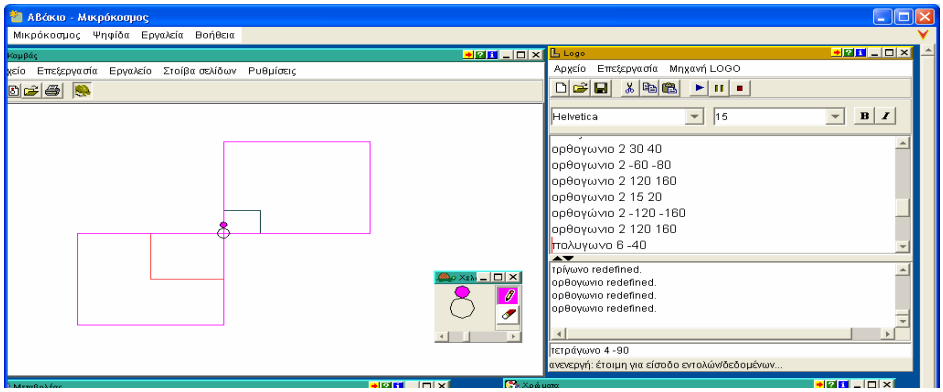

## Ερώτηση 17

Οι πλευρές θα είναι 120 • ( - 1 ) = - 120 και 160 • ( - 1 ) = - 160. Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί κάτω αριστερά.




## Ερώτηση 18

Οι πλευρές θα είναι -120 • ( - 1 ) = +120 και - 160 • ( - 1 ) = + 160. Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί πάνω δεξιά. Ο πολλαπλασιασμός δύο φορές με ( - 1 ) διατηρεί και τη θέση και τις διαστάσεις του ορθογωνίου.




Συνεχίζοντας τη διδασκαλία οι μαθητές επιστρέφουν στο σύστημα συντεταγμένων για να γίνουν οι συνδέσεις και οι γενικεύσεις.

Να τοποθετήσετε όλα τα ορθογώνια σε σύστημα συντεταγμένων.

Η Μαρία βλέποντας τα ορθογώνια λέει:
« Όλα τα ορθογώνια με θετικές πλευρές σχηματίζονται πάνω δεξιά και όλα τα ορθογώνια με αρνητικές πλευρές σχηματίζονται κάτω αριστερά»

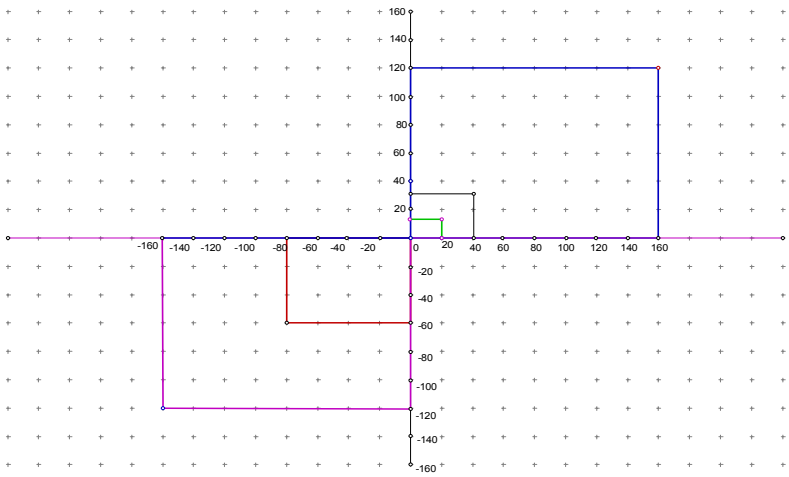
**19.** Έχει δίκιο η Μαρία και γιατί;

**20. α.** Πως μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός ορθογωνίου και να μικρύνετε τις διαστάσεις του;

**β.** Μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με αριθμό, να ελαττώσουμε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου; Να εξηγήσετε την απάντησή σας και να δώσετε ένα παράδειγμα.

**Ερώτηση 19**

Πιθανή γραφική παράσταση αν πάρουν σαν μονάδα μέτρησης το 20. Ανάλογη θα έχουν αν η μονάδα μέτρησης είναι π.χ. το 10. Εδώ συζητάμε πρώτα με τους μαθητές τις δυνατές μονάδες μέτρησης. Για πράδειγμα η μονάδα μέτρησης 1 δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί λόγω χώρου.



**Ερώτηση 20**

**α.** Πιθανή απάντηση: Για να αλλάξει θέση το ορθογώνιο πολλαπλασιάζουμε τη μία ή και τις δύο διαστάσεις του ορθογωνίου με αρνητικό αριθμό. Για να μικρύνουν οι πλευρές του, τις διαιρούμε με ακέραιο.

**β.** Μπορεί να γίνει αν πολλαπλασιάσουμε με κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

Η διδασκαλία ολοκληρώνεται με το τελευταίο πρόβλημα το οποίο εξετάζει την ικανότητα των μαθητών

1. Να κατανοούν τις ομοιότητες που υπάρχουν στις πράξεις μεταξύ των ακεραίων και στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.
2. Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων ( μεταφορά, στροφή, μεγέθυνση, σμίκρυνση ) στο δερευνητικό περιβάλλον του *Χελωνόκοσμου*.
3. Να προβλέπουν τους μετασχηματισμούς και να τους αιτιολογούν.

**21**. Να εκτελέσετε την έννοια *ορθογώνιο* δίνοντας στις μεταβλητές ν και ρ ό,τι τιμές θέλετε. Να πολλαπλασιάσετε τις πλευρές του ορθογωνίου που σχηματίσθηκε με +2. Στο δεύτερο ορθογώνιο να τις πολλαπλασιάσετε με -1. Στο τρίτο ορθογώνιο να τις πολλαπλασιάσετε με +1/2. Πώς θα μπορούσατε να πάρετε το τέταρτο ορθογώνιο κατευθείαν από το πρώτο χωρίς τα ενδιάμεσα στάδια;

**Ερώτηση 21**

Πιθανές τιμές μεταβλητών: ν = 60 και ρ = 80

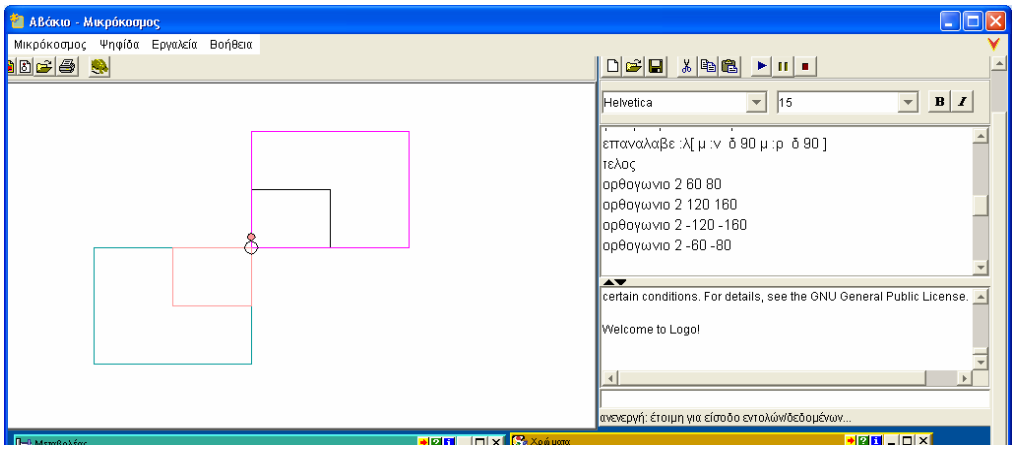
Για το δεύτερο ορθογώνιο έχουμε ν = 2 • 60 =120 και ρ = 2 • 80 =160

Για το τρίτο ορθογώνιο έχουμε ν = ( -1 ) • 120 = -120 και ρ = ( -1 ) • 160 = -160

Για το τέταρτο ορθογώνιο έχουμε:

ν = ( + ½ ) • ( - 120) = - 60 και ρ = ( + ½ ) • ( - 160 ) = - 80

Θα μπορούσαμε να έχουμε κατευθείαν το τέταρτο ορθογώνιο αν πολλαπλασιάζαμε τις διαστάσεις του πρώτου ορθογωνίου με – 1



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Η σύγκριση των δύο προσεγγίσεων θα γίνει ως προς άξονες:

1. Σύγκριση σκοπών και στόχων της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης όπως περιγράφονται στο Βιβλίο οδηγιών για τον καθηγητή, με τους στόχους της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως έχουν περιγραφεί μέχρι τώρα.
2. Ανάλυση και σύγκριση της διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών αριθμών όπως υποστηρίζεται από τα σχολικά βιβλία της πρώτης και δευτέρας γυμνασίου, με την διδασκαλία που υποστηρίζει η ΡΜΕ και ως προς το περιεχόμενο και ως προς τη διδακτική πρακτική.

## 5.1 Σύγκριση σκοπών και στόχων της ελληνικής και της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης

Οι σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών γενικά και στο Γυμνάσιο ειδικά, όπως περιγράφονται στο Βιβλίο οδηγιών για τον καθηγητή είναι οι εξής:

**ΣΚΟΠΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

α) Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και στη μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.

β) Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσουν την πατατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, τη πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

γ) Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με την σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

δ) Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα, κομψότητα.

ε) η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσης και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Ειδικότερα με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, επιδιώκεται:

α) Να εμπεδωθεί καλύτερα και να συμπληρωθεί η ύλη που διδάχθηκε στο Δημοτικό Σχολείο, ώστε οι μαθητές να εφοδιαστούν με όλες τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για τη ζωή και την περαιτέρω μελέτη και εκπαίδευση.

β) Να εμπλουτιστούν οι εμπειρίες των μαθητών με εφαρμογές από την καθημερινή ζωή, την τεχνολογία και τις άλλες εφαρμοσμένες επιστήμες, ώστε να αναπτυχθεί μια θετική στάση των μαθητών προς τα Μαθηματικά.

γ) Να εισαχθούν οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία και να συνειδητοποιήσουν ότι αυτή αποτελεί χρήσιμο και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων.

Οι γενικοί σκοποί της Ελληνικής εκπαίδευσης, όπως περιγράφονται, έχουν πολλές ομοιότητες σε γενικές γραμμές, με τους ολοκληρωμένους στόχους γενικά της εκπαίδευσης και ειδικά της μαθηματικής στη ΡΜΕ. Αυτό που δεν αναφέρεται πουθενά

είναι η κοινωνικοποίηση του μαθητή μέσα από την μαθηματική εκπαίδευση και ο δυναμικός χαρακτήρας των μαθηματικών. Επίσης χρησιμοποιούνται λέξεις που έχουν έντονα συμπεριφορικό χαρακτήρα, οπως «μεθοδική άσκηση του μαθητή...», « Ο εθισμός των μαθητών...», που υποδηλώνουν μάθηση μέσω εξάσκησης και όχι ανάπτυξης και κατασκευής. Ενώ επίσης τονίζονται τα χαρακτηριστικά της γλώσσας, δεν αναφέρεται ο ρόλος της ως μέσο επικοινωνίας του ανθρώπου με τον περιβάλλοντα κόσμο.

Όμως οι ειδικοί σκοποί της μαθηματικής εκπαίδευσης όπως καθορίσθηκαν από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για το Νηπιαγωγείο και για την υποχρεωτική εκπαίδευση (ΦΕΚ 2003), και ως προς τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και ως προς το περιεχόμενο, συμπίπτουν με τις οκτώ μαθηματικούς στόχους της εκπαίδευσης των ρεαλιστικών μαθηματικών.

> Ειδικοί σκοποί
>
> Με την διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο επιδιώκονται οι παρακάτω επιμέρους σκοποί:
>
> Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
>
> Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.
>
> Η σταδιακή κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της δομής των Μαθηματικών.
>
> Η εξοικείωση με την διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
>
> Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.
>
> Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες.
>
> Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
>
> Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.

Όσον αφορά στις οδηγίες προς τον καθηγητή για τη θέση των μαθητών στην τάξη αναφέρεται:

> Σε κάθε ώρα διδασκαλίας των Μαθηματικών πρέπει να κυριαρχεί η προσωπική εργασία των μαθητών. Η τάξη πρέπει να είναι ένας τόπος, όπου οι μαθητές δεν θα είναι παθητικοί δέκτες, αλλά θα εξερευνούν καταστάσεις, θα ανακαλύπτουν νέες γνώσεις και θα προσπαθούν να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν. Κάθε διδασκαλία πρέπει να προχωρεί από το γνωστό στο άγνωστο, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και από το απλό στο σύνθετο.

Ως προς τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η μαθησιακή διαδικασία υπάρχει συμφωνία με τις τρεις διδακτικές αρχές της ΡΜΕ (Δραστηριότητα – Διαφοροποίηση - Κατακόρυφος σχεδιασμός) Όμως στον κατακόρυφο σχεδιασμό δεν αναφέρεται πουθενά ότι «προχωράμε από το απλό στο σύνθετο». Αναφέρεται σε «χαμηλού επιπέδου» και «υψηλού επιπέδου» δραστηριότητες, χωρίς να εννοεί τις δραστηριότητες «χαμηλού επιπέδου» ως εύκολες για τους μαθητές. Για παράδειγμα, η εύρεση θεμελιωδών μαθηματικών στοιχείων σε ένα πραγματικό πρόβλημα χωρίς καθαρές ενδείξεις ύπαρξής τους, είναι δραστηριότητα «χαμηλού επιπέδου» χωρίς όμως να είναι καθόλου εύκολη δουλειά

Συνεχίζοντας με τις οδηγίες, το βιβλίο αναφέρεται και σε ειδικές που αφορούν το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων το οποίο δεν θα εξετασθεί προς το παρόν. Υπάρχει

όμως ανάμεσα σ' αυτές και μία οδηγία ως προς τη χρήση συμβόλων που έρχεται σε ευθεία αντίθεση με την αντίληψη της ΡΜΕ.

> .....Με το συμβολισμό αποφεύγεται η χρήση λέξεων, των οποίων η σημασία έχει γίνει αμφίβολη και ρευστή από την κοινή χρήση.....

¨Οταν αναφέρεται στον συμβολισμό εννοεί τον καθαρά τυπικό μαθηματικό συμβολισμό, επειδή δεν γίνεται καμμία νύξη για χρήση μη συμβατικού συμβολισμού. Στη προοδευτική μαθηματικοποίηση στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν λέξεις και σύμβολα δικής τους επινόησης, καθώς επίσης ενθαρρύνονται (από το σχολικό βιβλίο) να χρησιμοποιούν μη τυπικά σύμβολα (βελάκια που δηλώνουν κατεύθυνση)

### 5.1.1.Διδακτικό μοντέλο

Το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο:

> .....Ο δάσκαλος των μαθηματικών αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας τεχνικής, ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση και ασκήσεις και προβλήματα για εφαρμογή. Το κέντρο βάρους εστιάζεται στην απόκτηση εκείνων ακριβώς των δεξιοτήτων που παρουσιάζει ο δάσκαλος στην τάξη, στην ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων.....

αν και δεν απορρίπτεται τελείως, θεωρείται προβληματικό. Στη συνέχεια αναφέρονται τα προβλήματα που δημιουργεί στην πορεία μάθησης των παιδιών. Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, γίνονται προτάσεις στους καθηγητές για μια πιο «ενεργητική» διδασκαλία. Δεν προτείνεται ένα συγκεκριμένο μοντέλο γιατί υποστηρίζεται ότι δεν υπάρχει, αλλά αναφέρονται γενικές αρχές

> .....με τις οποίες μπορούμε να συγκροτήσουμε κατάλληλα μοντέλα διδασκαλίας.....

Πριν εξετασθούν οι αρχές πρέπει να σημειωθεί η διαφορά των πεποιθήσεων ανάμεσα στην ελληνική και στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Η ΡΜΕ έχει διδακτικό μοντέλο το οποίο εφαρμόζει εδώ και 30 χρόνια σχεδόν, αν και τίποτε δεν είναι τελειωμένο και η έρευνα συνεχίζεται, με ικανοποιητικά αποτελέσματα και στην υποχρεωτική εκπαίδευση σε διεθνείς διαγωνισμούς (TIMSS) και στους 15χρονους ( PISA).

Οι αρχές για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση είναι:

> 1. Η γνώση δεν μεταφέρεται από το δάσκαλο στον μαθητή. Αντίθετα η γνώση και ο μαθητής είναι έννοιες αλληλοσυνδεόμενες: Ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμηση-ανάπτυξη της γνώσης του.
>
> .....Υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση ανάμεσα στο προσωπικό νόημα, που οικοδομεί ο κάθε μαθητής και στην κοινωνική διάσταση της γνώσης στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Τα προσωπικά νοήματα συζητούνται στην τάξη προκειμένου να ομογενοποιηθούν και να γίνουν συμβατά και συνεπή με ό,τι δέχεται η μαθηματική κοινότητα. (Η υπόθεση της αλληλεπίδρασης ή διάδρασης)

Αυτή είναι μία βασική αρχή που υιοθετείται από τους περισσότερους ερευνητές και εκπαιδευτικούς που προβληματίζονται και ασχολούνται με την αναθεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης και φυσικά είναι σύμφωνη με τις αρχές της ΡΜΕ.

Συνεχίζοντας περιγράφεται ο όρος «ενεργητικές μέθοδοι » μάθησης:

> .....Με το όρο αυτό εννοούμε μαθησιακές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ερευνητικές εργασίες, επίλυση προβλημάτων, εργασία σε μικρές ομάδες μαθητών. Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι προσεκτικά σχεδιασμένα προβλήματα που οδηγούν τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις και εικασίες, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους, να παρατηρούν και να αναπτύσσουν ένα μοντέλο, να ακολουθούν προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους, να «μεταφράζουν» ένα μοντέλο από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο.....

Στο σημείο αυτό τονίζεται η σημασία της δραστηριότητας στη μαθησιακή διαδικασία, που είναι κεντρικής σημασίας για την PME, μέσα σε ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον. Τα προβλήματα αποτελούν την πηγή της δραστηριότητας, αλλά δεν αναφέρεται το πλαίσιο στο οποίο τοποθετούνται. Αυτό ίσως να έγινε επειδή οι οδηγίες αφορούν όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, επομένως και μαθητές που δουλεύουν κυρίως στο τυπικό επίπεδο, άρα και το είδος του πλαισίου θα είναι διαφορετικό. Επίσης η χρήση μοντέλων είναι απολύτως σύμφωνη με τις αρχές της PME, μόνο που δεν ξεκαθαρίζεται ο ρόλος τους. Στη PME το πρόβλημα πρέπει να έχει χαρακτηριστικά μοντέλου για να αποτελέσει τη γέφυρα ανάμεσα στα άτυπα και τα τυπικά μαθηματικά όπως περιέγραψα στα προηγούμενα.

> 2. Το ζητούμενο είναι η ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών προς τα Μαθηματικά.
> 3. Το Πρόβλημα είναι η «πηγή» νοήματος της μαθηματικής γνώσης.
> .....Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, το πεδίο «δοκιμασίας» της γνώσης ενός μαθητή είναι η επίλυση προβλημάτων και όχι η εξέταση αλγορίθμων, κανόνων και τύπων.....

Εδώ είναι προφανές ότι δεν αναφέρεται σε ένα απλό λεκτικό πρόβλημα, αλλά σε ένα πρόβλημα πλαισίου όπως περιγράφεται σαφώς στη ρεαλιστική εκπαίδευση. Ο ρόλος του πλαισίου δεν αναφέρεται καθόλου αν και είναι σημαντικός, γιατί επηρεάζει την διαδικασία επίλυσής του προβλήματος.

Στη συνέχεια δίνεται απάντηση στην ερώτηση «τι σημαίνει ότι μαθαίνω μαθηματικά»

> .....Θα μπορούσαμε να πούμε ότι «μαθαίνω μαθηματικά» σημαίνει:
> – Μαθαίνω τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες
> – Μαθαίνω να διακρίνω σε ποια περίπτωση θα χρησιμοποιώ τον κάθε αλγόριθμο και την κατάλληλη αποδεικτική διαδικασία.
> – Μαθαίνω να χρησιμοποιώ τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες στην επίλυση προβλημάτων.
> – Μαθαίνω να σκέπτομαι με μαθηματικό τρόπο, δηλαδή να οικοδομώ τη μαθηματική δομή ενός θέματος ή μιας έννοιας και να εκφράζω τις σκέψεις μου με τη γλώσσα και τα σύμβολα των μαθηματικών.

Ο ορισμός αυτός της μάθησης των μαθηματικών παραπέμπει στη μηχανιστική προσέγγιση των μαθηματικών και έρχεται σε ευθεία αντίθεση όχι μόνο με την ρεαλιστική προσέγγιση, αλλά και με τα όσα καλά αναφέρθηκαν προηγούμενα για την διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

Παρά τις προτάσεις για ενεργητική διδασκαλία, το παραδοσιακό μοντέλο δεν απορρίπτεται τελείως.

> Από την άλλη μεριά, με κανένα τρόπο δεν πρέπει να δημιουργηθεί η εντύπωση πως ό,τι γίνεται σήμερα στην τάξη είναι καταδικαστέο. Αντίθετα, οι επιλογές του «παραδοσιακού μοντέλου» ενσωματώνονται και αποκτούν ένα πιο συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα διδακτικών ενεργειών.

Οι εμπειρίες καθηγητών από την διδασκαλία των MiC σε παραδοσιακές τάξεις έχουν δείξει (Romberg, 2001) ότι:

«Ο κίνδυνος από ένα τέτοιο εγχείρημα είναι διπλός: να γεμίσει ο αναθεωρημένος τρόπος διδασκαλίας με παραδοσιακές πρακτικές ή\και να αναπροσαρμοσθεί σε τέτοιον βαθμό ώστε να μη διαφέρει στην ουσία από τον παλαιό».

Όταν λοιπόν αναθεωρηθεί ο τρόπος διδασκαλίας, αυτή η αναθεώρηση για να έχει αποτέλεσμα, πρέπει να είναι καθολική. Βέβαια, όπως θα δούμε παρακάτω, οι συγγραφείς του Βιβλίου Οδηγιών δεν μπορούν να απορρίψουν την παραδοσιακή διδασκαλία, επειδή

αυτή υποστηρίζεται από τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια. Οι όποιες προτάσεις αναφέρονται, αφορούν τις ατομικές προσπάθειες καθηγητών που θεωρούν την υπάρχουσα κατάσταση προβληματική. Πόσο αποτελεσματική μπορεί όμως να είναι μια αναθεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης που θα βασίζεται στο φιλότιμο του διδάσκοντα; Η ποιότητα και η αποτελεσματικότητα της δουλιάς στην τάξη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα σχολικά βιβλία που καθορίζουν την ύλη που θα διδαχθεί, τον τρόπο που θα διδαχθεί και προβάλλουν το παιδαγωγικό πρότυπο για την μαθηματική εκπαίδευση (Tzekaki, Sakonidis, Kaldrimidou, 2003). Η εμπειρία από την τριαντάχρονη εφαρμογή της ΡΜΕ έδειξε ότι αναθεώρηση εκπαίδευσης, χωρίς αναθεωρημένα μαθηματικά βιβλία, δεν γίνεται.

### 5.1.2 Πρόταση σχεδιασμού της διδασκαλίας

Πριν την πρόταση σχεδιασμού της διδασκαλίας στην τάξη, αναφέρονται ωρισμένες αρχές διδασκαλίας των μαθηματικών:

- Ένα από τα βασικά ζητήματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν ιδέες και έννοιες που η μαθηματική κοινότητα χρειάστηκε εκατοντάδες ή χιλιάδες χρόνια να αναπτύξει...

Εδώ αναφέρεται ο στόχος του δασκάλου να επανακατασκευάσουν τα μαθηματικά οι μαθητές ακολουθώντας την ιστορική πορεία εξέλιξής τους. Η αρχή αυτή είναι σύμφωνη με την αρχή της επανεφεύρεσης όπως διατυπώθηκε από τον Freudenthal (1983) και αποτελεί σημείο εκκίνησης της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

- .....ο δάσκαλος θα πρέπει να τοποθετήσει τη γνώση σε κατάλληλα, οικεία για τον μαθητή πλαίσια, να την «προσωποποιήσει» κατά κάποιον τρόπο.....

Στη φράση αυτή διατυπώνεται η βασική αρχή της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. *Εκκίνηση διδασκαλίας από συγκεκριμένα πλαίσια*

- ...ο μαθητής θα πρέπει να κάνει την αντίθετη τροχιά όπου από τα συγκεκριμένα πλαίσια με διαδοχικές αφαιρέσεις και γενικεύσεις, θα κατακτήσει τη μαθηματική δομή του θέματος...

Εδώ διατυπώνεται η αρχή του κατακόρυφου σχεδιασμού της διδασκαλίας στα πλαίσια της προοδευτικής μαθηματικοποίησης.

Η πρόταση σχεδιασμού, όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο οδηγιών, αποτελείται από τρία μέρη:

> Στο πρώτο μέρος δίνουμε ένα πρόβλημα-ένα ερώτημα, η επίλυση του οποίου θα οδηγήσει στην αναγκαιότητα της εισαγωγής της έννοιας που θέλουμε να διδάξουμε....οι μαθητές θα το προσεγγίσουν διαισθητικά προκειμένου να αναπτύξουν εικασίες ή υποθέσεις τις οποίες στη συνέχεια θα επιχειρήσουν να τις ελέγξουν επίσης διαισθητικά-εμπειρικά.....
> ..Μόνο αφού έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις εικασίες τους οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της γενίκευσης και της απόδειξης....

Στο πρώτο μέρος περιγράφεται η φάση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης ακολουθώντας την αρχή της διαφοροποίησης: *Ο τρόπος μάθησης είναι προσωπικός*
Αυτό που δεν διευκρινίζεται είναι το πως οι μαθητές θα οδηγηθούν στην αναγκαιότητα της γενίκευσης και δεν θα αρκεσθούν στις δικές τους προσωπικές λύσεις. Για να γενικευθούν οι λύσεις, χρειάζονται αφ'ενός μεν περισσότερα από ένα διαφορετικά προβλήματα στα οποία εμφανίζονται οι έννοιες και αφ'ετέρου οι καθοδηγητικές ερωτήσεις του δασκάλου, που θα τους οδηγήσουν στην γενίκευση και τη διατύπωση

κανόνων, αφού βεβαίως προηγηθεί η συζήτηση των διαφορετικών λύσεων στην τάξη. Χρειάζεται ένας πολύ προσεκτικός σχεδιασμός της διδασκαλίας που *θα υποστηρίζεται από τα προβλήματα πλαισίου, θα καθοδηγείται από τον καθηγητή και θα πετυχαίνει τους στόχους του μέσω της αλληλεπίδρασης στην τάξη.*

> Στο δεύτερο μέρος θα γίνει η μετάβαση από τις εμπειρικές - διαισθητικές αντιλήψεις σε «αποδεικτικές» μεθόδους, χωρίς η έννοια της απόδειξης να παραπέμπει απαραίτητα στις γνωστές τυπικές μαθηματικές μεθόδους.

Στο δεύτερο μέρος περιγράφεται μια πλευρά μόνο της κατακόρυφης μαθηματικοποίησης, αυτή που αφορά την αποδεικτική διαδικασία. Η περιγραφή θα ήταν πιο πλήρης αν διατυπωνόταν ως εξής: Γίνεται επεξεργασία του μαθηματικού προβλήματος με μαθηματικά μέσα, δηλαδή σύμβολα, σχέσεις, τύπους, κανόνες. Υπαινίσσεται η αρχή της αυτοδυναμίας-διαφοροποίησης με την έννοια ότι οι μαθητές μεταβαίνουν σε αποδεικτικές μεθόδους δικής τους κατασκευής.

> Στο τρίτο μέρος θεωρείται γνωστή η έννοια που διδάχθηκε και την οποία χρησιμοποιούμε για να λύσουμε προβλήματα και εφαρμογές.....Γι΄αυτό το λόγο θα πρέπει να γίνεται εδώ ένα είδος ανασκόπησης. Με τον όρο ανασκόπηση εννοούμε τη συζήτηση στο τέλος του μαθήματος όπου θα συνοψίζονται οι εφαρμογές της έννοιας έτσι όπως προκύπτουν από τα προβλήματα που λύθηκαν....

Στο τρίτο μέρος αναγνωρίζουμε:

- Την λειτουργία του προβλήματος πλαισίου ως «μοντέλου για...»
- Την εφαρμοσιμότητα του προβλήματος μοντέλου (Treffers, 1987)
- Την τελευταία φάση (φάση ολοκλήρωσης), όπως περιγράφεται από τα επίπεδα Van Hiele.

Στη συνέχεια δίνονται κάποια χαρακτηριστικά του προβλήματος:

> ....Όμως με τον όρο «πρόβλημα» δεν εννοούμε μόνο τα γνωστά προβλήματα των σχολικών βιβλίων, αλλά και τα λεγόμενα «ανοικτά» προβλήματα. Γενικά, θα ονομάσουμε «ανοικτό» ένα πρόβλημα που μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους και επομένως δέχεται διαφορετικές λύσεις...

Τα προβλήματα στα οποία αναφέρεται, είναι τα προβλήματα με χαρακτηριστικά PISA, τα οποία χρησιμοποιούνται στη PME. Δεν τονίζεται όμως και πάλι ο χαρακτήρας και ο ρόλος του πλαισίου στη μαθησιακή διαδικασία ο οποίος και υποστηρίζει τον συλλογισμό και επηρεάζει τον τρόπο λύσης του προβλήματος.

Η πρόταση ολοκληρώνεται με την επισήμανση της αξίας της ομαδικής διδασκαλίας που αποτελεί βασική αρχή της PME:

> Τα τελευταία χρόνια οι έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν αναδείξει την αξία της εργασίας των μαθητών σε ομάδες. Την πρόταση αυτή μπορούμε να τη δούμε σε δύο επίπεδα:
>
> **Σε επίπεδο αρχών**: Σχεδόν καμία λύση επιστημονικού ή κοινωνικού προβλήματος δεν είναι πλέον αποτέλεσμα της εργασίας ενός ατόμου, ενώ θα πρέπει επίσης να τη δούμε και σε συνάρτηση με το ερώτημα «ποιο είναι το είδος του πολίτη που έχει ανάγκη η κοινωνία μας;» Και εδώ εννοούμε..αυτόν που ακούει και υπολογίζει τη γνώμη του άλλου και συνεργάζεται στα πλαίσια μιας ομάδας εργασίας, γεγονός που του προσθέτει αξιόλογα στοιχεία στη γενικότερη παιδεία του και όχι μόνο στη μαθηματική του εκπαίδευση.
>
> **Σε επίπεδο διδακτικής πρακτικής**: Έρευνες έχουν επισημάνει ότι η συνεργασία των μαθητών αναπτύσσει πολλαπλές και διαφορετικές προσεγγίσεις σε ένα πρόβλημα.....

Εδώ συμπληρώνεται και μία έλλειψη που έχουμε επισημάνει στην περιγραφή των γενικών σκοπών της διδασκαλίας των μαθηματικών και αφορά την κοινωνικοποίηση του μαθητή μέσα από τη μαθηματική εκπαίδευση. Ο στόχος αυτός είναι γενικός

(ολοκληρωμένος κατά τον Treffers) και δεν αφορά μόνο τα μαθηματικά, αλλά ολόκληρη τη σχολική εκπαίδευση.

## 5.2 Ανάλυση και σύγκριση της διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών στις δύο προσεγγίσεις

Οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, οι πράξεις και οι αναπαραστάσεις τους διδάσκονται στην Ελλάδα στο τέλος της πρώτης γυμνασίου και στην αρχή της δευτέρας. Ειδικότερα:

Στην πρώτη γυμνασίου διδάσκεται η έννοια των θετικών και αρνητικών με έμφαση στους ρητούς, η παράσταση των ρητών με σημεία ευθείας, το σύστημα συντεταγμένων, η απόλυτη τιμή ρητού, οι αντίθετοι αριθμοί, η πρόσθεση και η αφαίρεση ρητών.

Στη δευτέρα γυμνασίου διδάσκεται το άθροισμα πολλών προσθετέων, η απαλοιφή παρενθέσεων, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση και ο υπολογισμός αριθμητικών παραστάσεων που περιέχουν όλες τις πράξεις.

Η ανάλυση και η σύγκριση θα γίνει στο περιεχόμενο των μαθηματικών που υπάρχει και στα δύο βιβλία (Α&Β γυμνασίου) με το αντίστοιχο της πρότασης διδασκαλίας.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του περιεχομένου των μαθηματικών, οι σύντομες οδηγίες που δίνονται στον καθηγητή θα μας προετοιμάσουν για το είδος της διδασκαλίας που υποστηρίζει το σχολικό βιβλίο.

> Α΄ Γυμνασίου
>
> Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται η έννοια των αρνητικών και θετικών αριθμών με τη βοήθεια μεγεθών που επιδέχονται αντίθεση π.χ θερμοκρασία και ορίζεται ο ρητός αριθμός ως προσημασμένο κλάσμα. Στη συνέχεια εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση ρητού σε μια ευθεία, η διάταξη ρητών και η τεχνική της πρόσθεσης και αφαίρεσης δύο ρητών. Η τεχνική της πρόσθεσης και της αφαίρεσης εξηγείται πρώτα για δύο ακέραιους και στη συνέχεια οι σχετικοί κανόνες γενικεύονται και για την περίπτωση δύο ρητών
>
> Β΄ Γυμνασίου
>
> Γίνεται μια σύντομη επανάληψη της ύλης της Α΄ τάξης που αναφέρεται στους ρητούς και συμπληρώνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης με το άθροισμα πολλών προσθετέων και την απαλοιφή παρανθέσεων. Στη συνέχεια εξηγείται ο τρόπος πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ακεραίων αριθμών και οι σχετικοί κανόνες γενικεύονται για τους ρητούς αριθμούς. Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού εξηγείται ενορατικά....μπορεί ο καθηγητής να δικαιολογήσει τους κανόνες του πολ/σμού και με άλλους τρόπους π.χ. με την επιμεριστική ιδιότητα.

Από τις οδηγίες αυτές γίνεται φανερό ότι η διδασκαλία είναι «δασκαλοκεντρική» και όχι «μαθητοκεντρική» Ο ρόλος του δασκάλου είναι πρωταρχικός επειδή αυτός θα «εξηγήσει» στους μαθητές τις «τεχνικές» και τις γενικεύσεις. Η διδασκαλία αυτή είναι αντίθετη και με τη ρεαλιστική και με τη κονστρουκτιβιστική προσέγγιση οι οποίες συμφωνούν ότι οι μαθητές «επανεφευρίσκουν» ή «επανακατασκευάζουν» τη γνώση και επομένως η διδασκαλία πρέπει να στηρίζεται στις άτυπες μεθόδους τους και να τους δίνει την ευκαιρία να κατασκευάσουν τη γνώση.

### 5.2.1 ΒΙΒΛΙΟ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**1η παράγραφος: Οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Στην πρώτη παράγραφο γίνεται η εισαγωγή στην έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών με την παρουσίαση παραδειγμάτων χρήσης τους στην καθημερινή ζωή:

1. Θερμοκρασίες και μεταβολές θερμοκρασίας: αύξηση (+), ελάττωση (-)
2. Κίνηση στον αέρα (+), στην επιφάνεια της θάλασσας, υποθαλάσσια κίνηση (-)

Ακολουθεί ο ορισμός του συνόλου των ακεραίων, των ρητών, των ομοσήμων και των ετεροσήμων αριθμών.

Συγκρίνοντας τις δύο προσεγγίσεις ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο βρίσκουμε μία ομοιότητα και περισσότερες διαφορές:

Ομοιότητες: Και στις δύο προσεγγίσεις έχουμε φαινόμενα από την πραγματικότητα στα οποία εμφανίζεται η έννοια των θετικών και αρνητικών.

Διαφορές:

1. Στην ελληνική προσέγγιση γίνεται απλά παρουσίαση των φαινομένων και των εννοιών, ενώ στη ρεαλιστική «Οι μαθηματικές έννοιες και δομές που πρέπει να μελετηθούν, είναι ολοφάνερες μέσα στα ποικίλα φαινόμενα και πρέπει να εξερευνηθούν από όσο το δυνατόν περισσότερες οπτικές γωνίες». Για να γίνει όμως φαινομενολογική εξερεύνηση πρέπει να υπάρχουν δραστηριότητες που να την υποστηρίζουν.
2. Οι κανόνες δεν διατυπώνονται ούτε από τον καθηγητή ούτε από το σχολικό εγχειρίδιο, αλλά από τους ίδιους μαθητές Οι μαθητές οδηγούνται στη γενίκευση μέσα από δραστηριότητες που εκτελούνται στο επίπεδο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης.

*Διδακτική πρακτική*

Βρίσκουμε όμως διαφορές και ως προς τη διδακτική πρακτική που μπορεί να εφαρμοστεί. Στην ελληνική προσέγγιση, αν ο καθηγητής δεν βρει μόνος εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας, είναι αναγκασμένος να «διδάσκει λέγοντας και παρουσιάζοντας»

*Ασκήσεις-Ερωτήσεις*

Στο τέλος του μαθήματος υπάρχουν εφαρμογές-ερωτήσεις της μορφής:

1. *Τί εκφράζουν οι αριθμοί +32, +14,-5, -7;*
   *α) σε ένα θερμόμετρο* *β) σε αποστάσεις από την επιφάνεια της θάλασσας*
2. *Να εκφρασθούν με τη βοήθεια προσήμων: κέρδος-ζημιά, κατάθεση-ανάληψη, έσοδα-έξοδα, αύξηση βάρους, ελάττωση βάρους*

Οι άλυτες ασκήσεις είτε αφορούν αναγνώριση αρνητικού και θετικού αριθμού, είτε είναι πανομοιότυπες με τις υποδειγματικές.

Οι ερωτήσεις- ασκήσεις είναι χαμηλού επιπέδου (Lange, J. de, Verhage, 1996) επειδή αφορούν αναγνώριση αντικειμένων, ορισμούς και κανόνες.

**$2^η$, $3^η$ παράγραφος: Παράσταση των ρητών με σημεία μιας ευθείας- Συντεταγμένες σημείου**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Στη $2^η$ παράγραφο γίνεται επέκταση του θετικού ημιάξονα, ώστε να συμπεριληφθούν και οι αρνητικοί ρητοί. Η περιγραφή της κατασκευής του άξονα είναι πολύ αναλυτική και γίνεται με γεωμετρικό τρόπο (ορίζεται ευθεία και σημείο Ο πάνω σ' αυτήν, κατόπιν ορίζονται ίσα ευθύγραμμα τμήματα που τα άκρα τους απεικονίζουν τους ρητούς).

Στη $3^η$ παράγραφο ορίζεται το σύστημα συντεταγμένων.

Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις και στις δύο παραγράφους αναφέρονται σε τοποθέτηση ή αναγνώριση σημείων πάνω στον άξονα ή στο σύστημα συντεταγμένων.

Στη πρόταση διδασκαλίας (*Ενότητα $6^η$: Μετασχηματισμοί γεωμετρικών σχημάτων)***,** εισάγονται στο σύστημα συντεταγμένων με τρόπο που να αποτελεί συνέχεια της $1^{ης}$

ενότητα (*Σχεδιάζουμε μοτίβα*). Αρχικά εισάγεται το σημείο ως προσανατολισμένος αριθμός (δεξιά-πάνω είναι + και αριστερά-κάτω είναι -) και στη συνέχεια ορίζεται το σύστημα συντεταγμένων με τρόπο παρόμοιο του ελληνικού βιβλίου.
Στις ερωτήσεις-ασκήσεις, υπάρχουν ασκήσεις παρόμοιες με του ελληνικού βιβλίου (2β,3). Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ασκήσεις που συγκρίνουμε έχουν καθαρά εισαγωγικό χαρακτήρα. Στη συνέχεια οι μαθητές ασχολούνται με προβλήματα που τους δίνουν την ευκαιρία να κάνουν υποθέσεις, να αιτιολογούν και να διερευνούν τους μετασχηματισμούς και στο τετραγωνισμένο χαρτί και στο περιβάλλον *Χελωνόκοσμος*
Η υπόλοιπη ενότητα ασχολείται με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα.
Το πλαίσιο και στις δύο προσεγγίσεις είναι καθαρά μαθηματικό και οι δραστηριότητες όσον αφορούν την ύλη που συγκρίνουμε, παρουσιάζουν ομοιότητες.

**4η παράγραφος: Απόλυτη τιμή ρητού αριθμού, Αντίθετοι αριθμοί**
*Μαθηματικό περιεχόμενο*
Εισάγεται η έννοια της απόλυτης τιμής, ως απόσταση αριθμού πάνω στον άξονα, από το μηδέν. Ορίζονται ως αντίθετοι αριθμοί, αυτοί που απέχουν ίσο από το μηδέν. Δίνονται οι ορισμοί της απόλυτης τιμής θετικού, αρνητικού και μηδέν.
Στην πρόταση διδασκαλίας δεν υπάρχει η έννοια της απόλυτης τιμής αριθμού. Οι αρνητικοί αριθμοί δεν ορίζονται αλλά, άτυπα αναγνωρίζεται η ιδιότητά τους: ίδιος αριθμός βημάτων σε αντίθετες κατευθύνσεις, έχουν ως αποτέλεσμα να καταλήξεις εκεί από όπου ξεκίνησες.(Ερώτηση 15, ενότητα: *Σχεδιάζουμε μοτίβα*)
Η τρόπος διδασκαλίας είναι και πάλι παρουσίαση από τον καθηγητή του περιεχομένου, δίνοντας τις απαραίτητες εξηγήσεις, με ελάχιστη δραστηριότητα από τους μαθητές.
Οι ερωτήσεις, εκτός από την 3, είναι καθαρά ασκήσεις εξάσκησης.

**4η παράγραφος: Σύγκριση των ρητών αριθμών**
*Μαθηματικό περιεχόμενο*
Το πλαίσιο για τη σύγκριση δυο ρητών είναι μαθηματικό. Χρησιμοποιείται ο άξονας των ρητών αριθμών που είχε κατασκευασθεί στη 2η παράγραφο. Διαισθητικά, μπορούν να διαπιστώσουν τα παιδιά ότι μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα. Αυτή η εμπειρική προσέγγιση εγκαταλείπεται αμέσως και προχωρά στην τυπική γλώσσα. Διατυπώνονται κανόνες που συγκρίνουν δύο αριθμούς με βάση την απόλυτη τιμή τους. Οι μαθητές εγκαταλείποντας την διαισθητική αντίληψη που είχαν, χάνουν και την ικανότητα να συγκρίνουν ρητούς αριθμούς και κυρίως αρνητικούς.
*Διδακτική πρακτική*
Στο τρώτο μέρος της παραγράφου μπορεί να δώσει ο καθηγητής δραστηριότητες στους μαθητές τις οποίες θα δουλέψουν πάνω στον άξονα. Στη συνέχεια όμως και πάλι θα αναγκαστεί να δώσει κανόνες τους οποίους θα απομνημονεύσουν οι μαθητές.
*Ασκήσεις-ερωτήσεις*
Στην εφαρμογή πρέπει να συγκριθούν δύο ζευγάρια αρνητικών. Η λύση βασίζεται στον κανόνα: από δύο αρνητικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή. Αν η λύση στηριζόταν στο πλαίσιο (άξονας των ρητών) θα είχε περισσότερρο νόημα για τα παιδιά.
Οι άλυτες ασκήσεις αναφέρονται σε σύγκριση αριθμών, συμπλήρωση ανισοτήτων, διάταξη σε άξονα, αληθείς ψευδείς και μία που αναφέρεται σε πραγματική κατάσταση (θερμοκρσίες πόλεων). Αν ενθαρρυνθούν οι μαθητές από τον καθηγητή να

χρησιμοποιήσουν τον άξονα των ρητών, από τις ασκήσεις αυτές μπορούν να πάρουν εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τη διάταξη ρητών.

Στη διδακτική πρόταση αυτή η αρχή «το σημείο εκκίνησης είναι η διαισθητική γνώση των παιδιών» γίνεται πράξη. Η σύγκριση αριθμών γίνεται στην ενότητα θερμοκρασίες:

> *Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν σε μια πόλη της Βόρειας Ελλάδας κυρίως κατά τους χειμερινούς μήνες, αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διερευνώνται οι σχέσεις διάταξης θετικών και αρνητικών αριθμών...*

Οι ερωτήσεις-δραστηριότητες που αναφέρονται στην διάταξη αριθμώναν και μπορούν να απαντηθούν μέσα στο πλαίσιο, οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν την ευθεία των ακεραίων-ρητών γαι να έχουν αναπαράσταση των σχέσεων < και >.
Σε κάποιες ερωτήσεις (4, 9) αναμένουμε διαφορετικές λύσεις και αιτιολογήσεις.

**5η - 6η παράγραφος: Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Το μοντέλο που χρησιμοποιείται για την πρόσθεση αριθμών είναι μια θερμομετρική κλίμακα που απεικονίζεται στον άξονα χχ΄. Οποιαδήποτε μεταβολή της θερμοκρασίας συμβολίζεται με πρόσθεση των αντίστοιχων ακεραίων. Χρησιμοποιούνται βέλη για να δείξουν την κατεύθυνση (άνοδος, κάθοδος της θερμοκρασίας). Οι ακέραιοι απεικονίζουν είτε θέσεις πάνω στον άξονα, είτε μετακινήσεις στον άξονα (Gallardo, 2003)
Η πράξη ( - 3 ) + ( + 5 ) = + 2, μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Η πράξη της πρόσθεσης ομοσήμων και ετεροσήμων αριθμών παρουσιάζεται με ορισμένα παραδείγματα και ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των αντιστοίχων κανόνων. Δραστηριότητες για τους μαθητές δεν προβλέπονται, εκτός αν ο καθηγητής σχεδιάσει κάποιες για να γίνουν στην τάξη.
Για την πράξη της αφαίρεσης το μοντέλο αυτό δεν είναι αποτελεσματικό ( Gallardo, 2003). Παρατηρείται διδακτική ασυμμετρία στις πράξεις μεταξύ των θετικών και στις πράξεις μεταξύ των αρνητικών. «Οι θετικοί είναι ενεργητικοί αριθμοί , ενώ οι αρνητικοί είναι παθητικοί (Freudenthal, 1983, σελ.438). Για τον λόγο αυτό η αφαίρεση διδάσκεται βασιζόμενη στην ιστορική ανάγκη που δημιούργησε τους αρνητικούς, δηλαδή στη επίλυση της εξίσωσης $\mathbf{x + \alpha = \beta}$, όπου $\beta<\alpha$. Στην συνέχεια διατυπώνεται ο αντίστοιχος κανόνας. Δεν παρατηρούνται στοιχεία οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Η διαδικασία μάθησης γίνεται μέσα σε φορμαλιστικό πλαίσιο.

*Διδακτική πρακτική*

Η χρήση μοντέλου για την πρόσθεση ενθαρρύνει την ανάπτυξη της διδασκαλίας με επίκεντρο τη δραστηριότητα από τους μαθητές. Εδώ είναι στο χέρι του καθηγητή αν θα κάνει παρουσίαση ή θα αφήσει τους μαθητές μέσα και από άλλες δραστηριότητες, επειδή οι υπάρχουσες δεν επαρκούν, να κατασκευάσουν τη γνώση για την πρόσθεση. Το μάθημα προσφέρεται για συζήτηση και επικοινωνία μεταξύ μαθητών και μεταξύ καθηγητή και μαθητών. Στην αφαίρεση δεν υπάρχει άλλη επιλογή παρά η τυπική: παρουσίαση από τον καθηγητή και μετά την απομνημόνευση του κανόνα, εξάσκηση. Η προσέγγιση εδώ είναι κυρίως μηχανιστική.

*Ασκήσεις-ερωτήσεις*
Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις στηρίζονται στους κανόνες που και πάλι πρέπει να απομνημονευθούν και είναι όλες χαμηλού επιπέδου (Lange, J. de, Verhage, 1996), επειδή απαιτούν γνώση ορισμών και τεχνικών.

Στη διδακτική πρόταση η πρόσθεση ακεραίων βρίσκεται στη 2η ενότητα: Συν και μείον πόντοι.

> *Οι μαθητές επεξεργάζονται και αναλύουν τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού ερωτήσεων. Στο παιχνίδι, κάθε απάντηση παίρνει έναν πόντο, είτε θετικό είτε αρνητικό. Μέσα σ΄αυτό το πλαίσιο διαγράφουν διαισθητικά θετικούς και αρνητικούς πόντους για να υπολογίσουν το τελικό σύνολο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν μοντέλο που θα τους βοηθήσει να λύσουν προβληματικές καταστάσεις.*

Η διδασκαλία διεξάγεται αρχικά αποκλειστικά μέσα στο πλαίσιο και αναπτύσσεται με δραστηριότητες. Στο τέλος της ενότητας οι μαθητές μπορούν να ξεφύγουν από το πλαίσιο και να χρησιμοποιήσουν κανόνες οι οποίοι προκύπτουν επαγωγικά. Χρησιμοποιούνται και ασκήσεις χαμηλού επιπέδου-εξάσκησης, αλλά δεν αποτελούν τον κανόνα.
Υπάρχουν ερωτήσεις με μία μόνο σωστή απάντηση αλλά και ερωτήσεις στις οποίες μπορεί να δώσουν οι μαθητές διαφορετικές λύσεις (ερ. 10, 13, 23) ή να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές (ερ. 7, 8, 10, 13)
Στις ερωτήσεις 12, 13 μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς (Gravenmeijer, 1991)
Οι μαθητές ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν συστηματικό τρόπο για να βρίσκουν τις πιθανές λύσεις (ερ.4)
Για την ερώτηση 17 οι μαθητές πρέπει να κάνουν την αφαίρεση + 6 - ( - 2 ) χρησιμοποιώντας τις κάρτες. Επειδή δεν υπάρχουν μείον κάρτες για να τις αφαιρέσουν, προσθέτουν δύο ζευγάρια συν και μείον καρτών, «δημιουργώντας από το τίποτα» (Freudenthal, 1983, σελ.440)
Η τυπική μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιείται στις ασκήσεις 19-23
Στις ερωτήσεις 24, 25 γενικεύουν διατυπώνοντας κανόνες.
Οι καθηγητές ενθαρρύνουν τους μαθητές να παρουσιάζουν τις λύσεις και στρατηγικές τους και συγκρίνοντας με αυτές των συμμαθητών τους να αποφασίζουν ποιες προτιμούν.
Η διδασκαλία ακολουθεί τα στάδια της μαθηματικοποίησης όπως έχουν ήδη περιγραφεί.

### 5.2.2 Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**3η παράγραφος: Άθροισμα πολλών προσθετέων**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*
Δίνεται μία παράσταση ( -3 ) + ( + 8 ) + ( - 2 ) + ( - 4 ) + ( + 6 ) + ( - 8 ) και οι δύο τεχνικές υπολογισμού της:
- Προσθέτουμε τους δύο πρώτους αριθμούς, στο άθροισμα τον τρίτο κ.λ.π.
- Αφού διαγράψουμε τους αντίθετους, υπολογίζουμε τα μερικά αθροίσματα των θετικών και αρνητικών και στο τέλος το άθροισμα ενός θετικού και ενός αρνητικού

Αναφέρεται ότι η παράσταση μπορεί να γραφεί και χωρίς παρενθέσεις χωρίς να αλλάξει η διαδικασία υπολογισμού της.
Όλη η εργασία γίνεται σε καθαρά μαθηματικό περιβάλλον. Δεν υπάρχει καμμία σύνδεση με την πραγματικότητα.

*Διδακτική πρακτική*
Γίνεται παρουσίαση από τον καθηγητή, των τεχνικών υπολογισμού. Εδώ έχουμε το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.
*Ασκήσεις-ερωτήσεις*
Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις είναι υπολογισμοί πολλών παραστάσεων με/χωρίς παρενθέσεις που περιέχουν ακέραιους, κλάσματα και δεκαδικούς. Υπάρχει μία άσκηση με μαγικά τετράγωνα και μία υπολογισμού αθροίσματος με μεταβλητές x,y,ω. Έχουν όλες μία μόνο σωστή απάντηση.

Στην πρόταση διδασκαλίας, ο υπολογισμός αθροίσματος πολλών προσθετέων γίνεται στο πλαίσιο της κίνησης ενός ασανσέρ *(ενότητα 3η: Το ασανσέρ)*.
Εκτός από τον υπολογισμό αθροίσματος, οι μαθητές επίσης:

- Προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια
- Χρησιμοποιούν ακέραιους για να περιγράψουν την άνοδο και την κάθοδο
- Διερευνούν τους κανόνες-τεχνικές υπολογισμού αθροίσματος με πολλούς προσθετέους.
- Αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.
- Συζητούν και μοιράζονται στρατηγικές (ερ.7)

Η περισσότερη εργασία γίνεται στη φάση της οριζόντιας μαθηματικοποίησης σε ένα «πλούσιο» μαθηματικά πλαίσιο. Στο τέλος μόνο χρησιμοποιείται η τυπική γλώσσα. Δεν υπάρχουν ερωτήσεις που να καταλήγουν σε υπολογισμό άθροισματος με παρενθέσεις.

**5η παράγραφος: Απαλοιφή παρενθέσεων**
*Μαθηματικό περιεχόμενο*
Δίνεται μία παράσταση Σ = ( 9 – 6 + 3 – 1 ) + ( - 7 + 11 + 2 – 8 – 5 )
Υπολογίζεται με δύο τρόπους:
1ος: Υπολογίζουμε πρώτα τα αθροίσματα στις παρενθέσεις και μετά το τελικό άθροισμα.
2ος: Βγάζουμε τις παρενθέσεις και ακολουθούμε την τεχνική υπολογισμού αθροίσματος πολλών προσθετέων.
Στη συνέχεια διατυπώνονται οι κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων.
*Διδακτική πρακτική*
Ο καθηγητής παρουσιάζει και μαζί με τους μαθητές υπολογίζουν παραστάσεις με παρενθέσεις. Η εμπειρία έχει δείξει ότι οι μαθητές δύσκολα πείθονται να βγάλουν παρενθέσεις, όταν μπορούν να τις υπολογίσουν.
*Ασκήσεις-ερωτήσεις*
Οι εφαρμογές είναι υπολογισμός παράστασης με παρενθέσεις και αγκύλες ή με μεταβλητές. Οι άλυτες ασκήσεις περιλαμβάνουν υπολογισμό πλήθους παραστάσεων:
─ ακεραίων και ρητών με παρενθέσεις και αγκύλες
─ μεταβλητών με παρενθέσεις
Όλες οι ασκήσεις έχουν ως στόχο τη «μάθηση μέσω εξάσκησης σε πράξεις και διαδικασίες» Έχουν όλες μία μόνο σωστή απάντηση.

Στη διδακτική πρόταση το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε είναι και πάλι οι θετικές και αρνητικές κάρτες σε παιχνίδι ερωτήσεων *(ενότητα 6η: Όλες οι πράξεις)*. Το πλαίσιο είναι ισχυρό για να στηρίξει τον ισχυρισμό – ( - 1 + 2 ) είναι ισόμορφο με + 1 – 2, δηλαδή το

να αφαιρεί κανείς μία αρνητική και δύο θετικές κάρτες είναι το ίδιο με το να προσθέτει μία θετική και δύο αρνητικές. Η ερώτηση 25δ είναι διερευνητική και σκοπό έχει να βοηθήσει τους μαθητές «αναγνωρίσουν» τον ισομορφισμό. Η 26 είναι καθοδηγητική και σκοπός της είναι η επαλήθευση των εικασιών. Υπάρχουν βέβαια και ερωτήσεις που είναι πιθανό οι μαθητές πρώτα να υπολογίσουν την παρένθεση και μετά να κάνουν τις υπόλοιπες πράξεις. Η 27 είναι διαδικαστική και βοηθά στη γενίκευση. Στις περισσότερες ερωτήσεις οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

**6η παράγραφος: Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Διαπιστώνεται πρώτα, με παράδειγμα, η ισοδυναμία του πολλαπλασιασμού θετικών και φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια, με χρήση επαγωγικού συλλογισμού ορίζεται ο πολλαπλασιασμός ετεροσήμων και αρνητικών ακεραίων:

| | |
|---|---|
| $(+5)\cdot(+4)=+20$ | $(-3)\cdot(+4)=-12$ |
| $(+5)\cdot(+3)=+15$ | $(-3)\cdot(+3)=-9$ |
| $(+5)\cdot(+2)=+10$ | $(-3)\cdot(+2)=-6$ |
| $(+5)\cdot(+1)=+5$ | $(-3)\cdot(+1)=-3$ |
| $(+5)\cdot 0 = 0$ | $(-3)\cdot 0 = 0$ |
| $(+5)\cdot(-1) = .....$ | $(-3)\cdot(-1) = .....$ |
| $(+5)\cdot(-2) = .....$ | $(-3)\cdot(-2) = .....$ |

Διατυπώνονται οι αντίστοιχοι κανόνες και δίνονται λυμένα παραδείγματα με πολλαπλασιασμούς ακεραίων, δεκαδικών και κλασμάτων.

Ορίζεται η αντιμεταθετική ιδιότητα, το μηδενικό και το μοναδιαίο στοιχείο με τυπικούς συμβολισμούς. Από ένα πίνακα εξάγεται επαγωγικά και ορίζεται η προσεταιριστική ιδιότητα. Με παραδείγματα παρουσιάζεται η ιδιότητα των αντίθετων αριθμών που στη συνέχεια ορίζονται. Τέλος μέσα από πίνακες εξάγεται επαγωγικά και ονομάζεται η επιμεριστική ιδιότητα.

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο παρατηρούμε απουσία πραγματικού πλαισίου καθώς επίσης οποιουδήποτε στοιχείου οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Επισημαίνουμε τη χρήση επαγωγικού συλλογισμού που είναι σύμφωνος με την πορεία της μαθηματικοποίησης στα πλαίσια της ΡΜΕ. Η επαγωγική διερευνητική μέθοδος που χρησιμοποιείται, είναι μία απολύτως φυσική προσέγγιση των αρνητικών (Freudenthal, 1973). Παρατηρούμε επίσης περισσότερα στοιχεία φορμαλισμού (ιδιότητες, τύποι)

*Διδακτική πρακτική*

Ο καθηγητής εκ των πραγμάτων είναι αναγκασμένος τον περισσότερο χρόνο να διατυπωνει κανόνες που πρέπει να απομνημονευθούν από τους μαθητές, να παρουσιάζει τις ιδιότητες και να τις εξηγεί. Οι μαθητές θα εξασκηθούν στην εφαρμογή των κανόνων για τον πολλαπλασιασμό λύνοντας πληθώρα ασκήσεων. Μόνο στο στάδιο της επαγωγικής διαδικασίας υπάρχει ευκαιρία για δραστηριότητα, αναγνώριση και αιτιολόγηση.

*Ασκήσεις-ερωτήσεις*

Οι ασκήσεις αναφέρονται σε:

- Πολλαπλασιασμός ομόσημων και ετερόσημων
- Συμπλήρωση πινάκων με πολ/μο ή υπολογισμό αλγεβρικής παράστασης
- Υπολογισμό αριθμητικής παράστασης με/χωρίς παρενθέσεις που να έχει πολλαπλασιασμό, πρόσθεση, αφαίρεση
- Υπολογισμό αλγεβρικής παράστασης με μία ή περισσότερες μεταβλητές
- Χρήση επιμεριστικής για υπολογισμό ή απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Οι περισσότερες ασκήσεις απαιτούν ικανότητα επίλυσης σε υψηλότερο επίπεδο φορμαλισμού από αυτό που βρίσκονται οι μαθητές. Γίνεται ήδη χρήση αλγεβρικών συμβόλων χωρίς να υποστηρίζεται ικανοποιητικά από την προηγούμενη εμπειρία. Εδώ υπάρχει κίνδυνος να μπλοκαριστεί η πορεία της μαθηματικοποίησης για πολλούς μαθητές. Έχουν όλες μία μόνο σωστή απάντηση.

Στη πρόταση, ο πολλαπλασιασμός διδάσκεται μέσα από διαφορετικά πλαίσια. Αρχικά

> *Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν σε μια πόλη της Βόρειας Ελλάδας κυρίως κατά τους χειμερινούς μήνες, αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διδάσκεται ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση. Άτυπα οι μαθητές πολλαπλασιάζουν και διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*

Σ' αυτό το πλαίσιο *(ενότητα 4η: Θερμοκρασίες)*, αντί για πολλαπλασιασμό οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση για τον πολλαπλασιασμό θετικού με αρνητικό. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο άξονας των ρητών για την αναπαράσταση του πολ/σμού (ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση). Για τον πολλαπλασιασμό αρνητικού με αρνητικό το μόνο πλαίσιο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι οι θετικές και αρνητικές κάρτες. Για τις παραστάσεις με πολ/μό, πρόσθεση και αφαίρεση χρησιμοποιούνται δύο πλαίσια: *οι θερμοκρασίες* και *η πολλαπλή επιλογή*.. Στο τέλος της ενότητας βοηθούμε τους μαθητές να μετακινηθούν από τα συγκεκριμένα πλαίσια σε πιο αφηρημένο επίπεδο (ερ.14, 15, 16, 17) Υπάρχουν δραστηριότητες διατύπωσης προβλήματος (ερ.18, *στην ενότητα Θερμοκρασίες* και ερ. 1, 11 στην *ενότητα: Όλες οι πράξεις).* Στις περισσότερες ερωτήσεις οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στις ερωτήσεις 11, 12 αναμένουμε διαφορετικές λύσεις

Συγκρίνοντας τις δύο προσεγγίσεις μπορούμε να πούμε ότι:
Η ελληνική προσέγγιση έχει στρουκτουραλιστικά χαρακτηριστικά, δηλαδή «Το σύνολο σχεδόν της μαθηματικής δραστηριότητας διεξάγεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα».
Η ρεαλιστική προσέγγιση ακολουθεί πιστά όλα τα στάδια της προοδευτικής μαθηματικοποίησης. Παρατηρείται «εκτενής φαινομενολογική εξερεύνηση», «Γεφύρωση των επιπέδων με εργαλεία κατακόρυφης μαθηματικοποίησης» και δίνεται έμφαση στις προσωπικές κατασκευές των μαθητών.

**8η παράγραφος: Διαίρεση ρητών**

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Ανακαλείται, με παράδειγμα, η πράξη της διαίρεσης με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού: το πηλίκο της διαίρεσης δύο φυσικών ως ο αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με τον διαιρέτη μας δίνει τον διαιρετέο. Με τον ίδιο τρόπο διδάσκεται και η τεχνική της διαίρεσης δύο ομόσημων και ετερόσημων αριθμών. Ακολουθεί ο κανόνας της διαίρεσης δύο ακεραίων. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του λόγου δύο αριθμών α/β μαζί με παραδείγματα. Από την εξίσωση $0 \cdot x = 5$ που είναι αδύνατη και την $0 \cdot x = 0$ που δεν έχει μια ορισμένη λύση, συμπεραίνεται ότι «διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται» Από μία ποικιλία παραδειγμάτων ορίζεται ως αντίστροφος του αριθμού α, ο αριθμός 1/α. Με την βοήθεια του ορισμού αυτού μέσω παραδειγμάτων διατυπώνεται ο κανόνας της διαίρεσης ως αντίστροφης πράξης του πολλαπλασιασμού.

*Μαθηματικό περιεχόμενο*

Η διδασκαλία διεξάγεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα χωρίς στοιχεία οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Ορίζεται η διαίρεση ως πράξη αντίθετη του πολλαπλασιασμού.

*Διδακτική πρακτική*
Ισχύουν και στην περίπτωση της διαίρεσης όσα έχουν γραφεί για τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή ακολουθείται το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας.
*Ασκήσεις-ερωτήσεις*
Οι ασκήσεις αναφέρονται σε:
- Υπολογισμό πηλίκων ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων, κλασμάτων και δεκαδικών
- Συμπλήρωση πίνακα με άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, πηλίκο δύο μεταβλητών
- Υπολογισμό αριθμητικής παράστασης με παρενθέσεις και αγκύλες που να έχει και τις τέσσερις πράξεις
- Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$, όπου α,β ρητοί αριθμοί
- Επίλυση εξίσωσης της μορφής $x : \alpha = \beta$, όπου α,β ρητοί αριθμοί
- Εύρεση αντιστρόφων και αντιθέτων

Είναι όλες χαμηλού επιπέδου (Lange, J. de, Verhage, 1996), επειδή απαιτούν γνώση κανόνων και τεχνικών. Έχουν όλες μία μόνο σωστή απάντηση.

Στη διδακτική πρόταση η διαίρεση διδάσκεται μέσα από διαφορετικά πλαίσια που βρίσκονται σε δύο ενότητες: *Θερμοκρασίες* και *Όλες οι πράξεις*
Στο πλαίσιο *Θερμοκρασίες* διδάσκεται μέσω υπολογισμού της μέσης θερμοκρασίας η διαίρεση ακεραίου με θετικό ακέραιο. Επίσης για τη διδασκαλία της ίδιας διαίρεσης χρησιμοποιείται το πλαίσιο των καρτών (με διαίρεση μέτρησης). Στη διαίρεση αρνητικού με αρνητικό χρησιμοποιείται μόνο το πλαίσιο των καρτών επειδή δεν είναι δυνατόν να βρεθεί κάποιο άλλο ( με διαίρεση μερισμού). Η πρόταση διδασκαλίας για τις δύο τελευταίες διαιρέσεις πρέπει να δοκιμασθεί στην πράξη. Αν το πλαίσιο που χρησιμοποιείται δεν υποστηρίζει ικανοποιητικά την πράξη ή περιπλέκει περισσότερο τα πράγματα, είναι προτιμότερο να καταργηθεί (Streefland, 1996). Οι μαθητές θα διδαχθούν τους κανόνες προσήμου βασιζόμενοι στους αντίστοιχους του πολλαπλασιασμού. Θα ακολουθηθεί δηλαδή μία πορεία ανάλογη με αυτή που περιγράφεται στο ελληνικό βιβλίο. Για τη διαίρεση θετικού με αρνητικό δεν υπάρχει πλαίσιο και γι'αυτό το λόγο από την αρχή της διδασκαλίας επισημαίνεται ότι η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.
Η μετάβαση από την οριζόντια στη κατακόρυφη μαθηματικοποίηση γίνεται σταδικά: ερ.3, 17, 20 στην ενότητα *Θερμοκρασίες* και ερ.19, 22, 23 στην ενότητα *Όλες οι πράξεις*. Υπάρχουν ερωτήσεις διατύπωσης προβλήματος (ερ.19, στην ενότητα *Θερμοκρασίες* και ερ. 2 στην ενότητα *Όλες οι πράξεις*).
Στις περισσότερες ερωτήσεις οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Συγκρίνοντας τις δύο προσεγγίσεις μπορούμε να πούμε ότι:
- Και η ελληνική και η ρεαλιστική διδασκαλία της διαίρεσης θετικού με αρνητικό αριθμό ακολουθούν παρόμοια πορεία: Διατυπώνεται κανόνας προσήμου ανάλογος με αυτόν του πολλαπλασιασμού επειδή οι δύο πράξει είναι αντίστροφες.
- Στη διαίρεση αρνητικού με αρνητικό στη πρόταση διδασκαλίας, ελέγχεται αν το πλαίσιο είναι επαρκές. Στην αντίθετη περίπτωση ακολουθείται η προηγούμενη πορεία.
- Στη διαίρεση αρνητικού με θετικό οι δύο προσεγγίσεις ακολουθούν διαφορετικές μεθόδους όπως αναλύθηκε παραπάνω.

## 5.3 Συμπεράσματα

Από την σύγκριση των σκοπών και στόχων της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης όπως περιγράφονται στο Βιβλίο οδηγιών για τον καθηγητή, με τους στόχους της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, προκύπτουν τα εξής:

- Οι γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των μαθηματικών στην ελληνική προσέγγιση παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τους ολοκληρωμένους στόχους της εκπαίδευσης γενικά και της μαθηματικής εκπαίδευσης ειδικά, στην ΡΜΕ. Δεν γίνεται αναφορά:
    - στην κοινωνικοποίηση του μαθητή μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης
    - στη γλώσσα ως μέσο επικοινωνίας
    - στη δυναμική φύση των μαθηματικών
- Οι ειδικοί σκοποί της μαθηματικής εκπαίδευσης όπως καθορίσθηκαν από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών και ως προς τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και ως προς το περιεχόμενο, συμπίπτουν με τους οκτώ μαθηματικούς στόχους της εκπαίδευσης στη ΡΜΕ.
- Ως προς τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η μαθησιακή διαδικασία, υπάρχει ταύτιση με δύο από τις τρεις διδακτικές αρχές της ΡΜΕ (Δραστηριότητα-Διαφοροποίηση) Αντί της αρχής του κατακόρυφου σχεδιασμού, στην ελληνική προσέγγιση έχουμε πορεία «από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, από το γνωστό στο άγνωστο από το απλό στο σύνθετο»
- Απορρίπτεται η χρήση μη συμβατικού συμβολισμού σε αντίθεση με την ΡΜΕ η οποία καθοδηγεί και ενθαρρύνει τους μαθητές στη χρήση «μη μαθηματικών» συμβόλων
- Το «παραδοσιακό» μοντέλο θεωρείται προβληματικό αλλά δεν απορρίπτεται. Και αυτό συμβαίνει επειδή υποστηρίζεται από τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια. Οι όποιες προτάσεις αναφέρονται, αφορούν τις ατομικές προσπάθειες καθηγητών που θεωρούν την υπάρχουσα κατάσταση προβληματική. Αντίθετα η ΡΜΕ υποστηρίζει ότι όταν αναθεωρηθεί ο τρόπος διδασκαλίας, αυτή η αναθεώρηση για να έχει αποτέλεσμα, πρέπει να είναι καθολική.
- Ενθαρρύνεται η ενεργή συμμετοχή του μαθητή στην οικοδόμηση της γνώσης και στις δύο προσεγγίσεις
- Τονίζεται η σημασία της δραστηριότητας στη μαθησιακή διδικασία που αποτελεί βασική διδακτική αρχή για την ΡΜΕ
- Η επανακατασκευή των μαθηματικών (επανεφεύρεση κατά τον Freudenthal) ακολουθώντας την ιστορική πορεία εξέλιξής τους, αποτελεί κοινή αρχή διδασκαλίας και στις δύο προσεγγίσεις
- Η εκκίνηση της διδασκαλίας από συγκεκριμένα πλαίσια και η συνέχειά της με δραστηριότητες εκτός πλαισίου, είναι αποδεκτή και από τις δύο προσεγγίσεις
- Η επίλυση προβλήματος θεωρείται θεμελιώδους σημασίας
- Η χρήση μοντέλων είναι απολύτως σύμφωνη με τις αρχές της ΡΜΕ, μόνο που δεν ξεκαθαρίζεται ο ρόλος τους. Στη ΡΜΕ το πρόβλημα πρέπει να έχει χαρακτηριστικά μοντέλου για να αποτελέσει τη γέφυρα ανάμεσα στα άτυπα και τα τυπικά μαθηματικά
- Ο ορισμός της μάθησης των μαθηματικών αντανακλά μηχανιστική αντίληψη και βρίσκεται σε πλήρη διαφωνία με τη ΡΜΕ

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την μελέτη και ανάλυση και του βιβλίου οδηγιών παρατηρήθηκε η ύπαρξη αλληλοσυγκρουόμενων αντιλήψεων όσον αφορά τη μάθηση και τη φύση των μαθηματικών.

Αναλύοντας και συγκρίνοντας τα σχολικά εγχειρίδια ως προς τον τρόπο που παρουσιάζουν τις μαθηματικές ιδέες, την διδακτική πρακτική που υποστηρίζουν και το είδος των ασκήσεων που περιέχουν, με τη ρεαλιστική προσέγγιση, καταλήγουμε ότι:

- Οι μαθηματικές ιδέες παρουσιάζονται σε καθαρά μαθηματικό πλαίσιο, εκτός από την παρουσίαση της έννοιας του θετικού και αρνητικού αριθμού, σε αντίθεση με τη ΡΜΕ όπου εμφανίζονται μέσα από μια ποικιλία πραγματικών φαινομένων.
- Οι έννοιες παρουσιάζονται από τον καθηγητή και δεν αναπτύσσονται - κατασκευάζονται απο τους μαθητές.
- Δεν υπάρχουν δραστηριότητες, σε αντίθεση με τη ΡΜΕ όπου η εισαγωγή και η ανάπτυξη της έννοιας στηρίζεται πάντα σε δραστηριότητες διερεύνησης
- Κάθε παράγραφος εστιάζει σε μία μόνο ιδέα, σε αντίθεση με τη ΡΜΕ στην οποία υπάρχει διασύνδεση των ιδεών που βρίσκονται σε διαφορετικές θεματικές περιοχές. Αν και κάθε ενότητα επικεντρώνεται σε κάποια ειδικά θέματα, εν τούτοις οι περισσότερες περιέχουν ιδέες που μπορούμε να τις εντοπίσουμε και σε άλλες ενότητες.
- Υπάρχουν πολλά στοιχεία φορμαλισμού, ενώ στη ΡΜΕ υπάρχουν πολύ λίγα.
- Οι ασκήσεις είναι εξάσκησης και οι περισσότερες χαμηλού επιπέδου (Lange, J. de, Verhage, 1996) επειδή αφορούν αναγνώριση αντικειμένων, ορισμούς, κανόνες και εφαρμογές αυτών που διδάχθηκαν ήδη.
- Οι ασκήσεις έχουν πάντα μία μόνο σωστή λύση σε αντίθεση με τη ΡΜΕ στην οποία έχουμε και ασκήσεις που επιδέχονται πολλές διαφορετικές σωστές απαντήσεις.
- Δεν υπάρχουν ελεύθερες δημιουργίες.
- Υποστηρίζεται διδασκαλία που εστιάζει στην εκμάθηση κανόνων και τεχνικών και όχι στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.
- Υποστηρίζεται διδασκαλία «δασκαλοκεντρική» όπου ο δάσκαλος «διδάσκει λέγοντας και παρουσιάζοντας», σε αντίθεση με τη ΡΜΕ όπου ο ρόλος του δασκάλου είναι να διευκολύνει και κατευθύνει την διδακτική-μαθησιακή διαδικασία.

Από την μελέτη και ανάλυση και του βιβλίου οδηγιών και του σχολικού εγχειριδίου, παρατηρήθηκε ότι οι μαθηματικοί στόχοι που τίθενται και το διδακτικό μοντέλο που προωθείται από το βιβλίο οδηγιών, βρίσκονται σε πλήρη αναντιστοιχία με το περιεχόμενο και το είδος της διδασκαλίας που υποστηρίζεται από το σχολικό εγχειρίδιο.

Συνοψίζοντας επίσης μπορούμε να πούμε ότι η ελληνική μαθηματική εκπαίδευση προσεγγίζει τη στρουκτουραλιστική άποψη με έντονα στοιχεία μηχανιστικής προσέγγισης και έχει τα ανάλογα βιβλία. Κατά την άποψη ερευνητών που ασχολήθηκαν με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων (Tzekaki, 1999)

> Τα υπάρχοντα σχολικά βιβλία ανταποκρίνονται με συνέπεια στον ρόλο για τον οποίο προορίζονται. Στην πραγματικότητα αποτελούν «επιστημονικά» βιβλία Μαθηματικών, «μεταφρασμένα» σε «γλώσσα μαθητή», δηλαδή, απλουστευμένα και διατυπωμένα ώστε να ανταποκρίνονται στο γνωστικό επίπεδο των συγκεκριμένων, από άποψη ηλικίας, μαθητών.

## Βιβλιογραφία


Abels, M., Wijers, M., Burrill, G., Simon, A., & Cole, B. (1998), Operations, In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), Mathematics in context, Chicago: Encyclopaedia Britannica.

Αλαχιώτης, (2004), ΓΙΑ ΕΝΑ ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ- Η Διαθεματικότητα και η Ευέλικτη Ζώνη αλλάζουν την παιδεία και αναβαθμίζουν την ποιότητα στην εκπαίδευση, Π.Ι

Αλμπινίσης, Γρηγοριάδης, Ευσταθόπουλος, Κλαουδάτος, Παπασταυρίδης, Σβέρκος (2003), ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, Αθήνα: ΟΕΔΒ

Γαβρίλης, Κ. (2002), Τα υπολογιστικά περιβάλλοντα μάθησης και διδασκαλίας της γεωμετρίας. In: Κυνηγός, Χ, Δημαράκη, Ε, (Ed), Νοητικά εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα, Αθήνα: Καστανιώτη

Case, R. (2005), REPORT FROM THE NETHERLANDS: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics, *Mathematics Teacher*, Vol. 98, No. 6, 374-384

diSessa, A. (2000), Changing Minds: Computers, Learning and Literacy, Cambridge (Massachusetts): The MIT Press

ΕΜΕ (2004), Το αναλυτικό πρόγραμμα και η διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών στη πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, *Πρακτικά του 21ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* 84-94, Τρίκαλα

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure, Dordrecht*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A. (2003), It is possible to die before being born. Negative integers subtraction: A case Study, *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* EUA (2003), 27(2): 405.

Gravenmeijer, K. (1991), Ένας διδακτικο-θεωρητικός συλλογισμός σχετικά με τη χρήση Χειρισμών, In: Streefland, I. (Ed.) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Αθήνα: Leader Books

Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (2000), Εγχειρίδιο Χελωνόκοσμου

Κολέζα, Ε. (2000), Πρόλογος του επιμελητή. In: Streefland, I. (Ed.) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Αθήνα: Leader Books

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, *Αθήνα*: Leader Books

Κυνηγός, Χ., Δημαράκη, Ε, (2002), Νοητικά εργαλεία και Πληροφοριακά μέσα, Αθήνα: Καστανιώτη

Kynigos, C., Koutlis, M. & Hadzilakos, Th. (1997), Mathematics with Component-Oriented Exploratory Software, *Journal for Computers and Mathematical Learning,* Editor in Chief, S. Papert, Kluwer Academic Press.

Lange, J. de & Heleen Verhage (1996), Mathematics education and assessment, Freudenthal Institute, The Netherlands, A mesa conference, 1-5 July 1996

Lange, J. de (1994), Assessment: No Change without Problems, In: T.A. Romberg (Ed), Reform in School Mathematics and Authentic Assessment, SUNY Press, Albany NY, pp 87-172

National Council of Teachers of Mathematics, (2000), Principles and standards for school Mathematics, http:www.nctm.org/standards

Ομάδα Μαθησιακής τεχνολογίας (ΙΤΥ), Αβάκιο E-Slate: Εγχειρίδιο χρήσης, Πάτρα

Papert, S. (1991), Νοητικές θύελλες, Αθήνα: Οδυσσέας,

PISA, (2003), The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills, Organization for Economic Co-operation and Development, http:www.pisa.oecd.org

Romberg, T. A. (2001), Designing middle school mathematics materials using problems created to help students progress from informal to formal mathematical reasoning, NCISLA / Mathematics & Science, University of Wisconsin – Madison

Streefland, L. (1996), Negative numbers: Reflections of a Learning Researcher, *Journal of Mathematical Behavior* 15, 57-77

Streefland, L., Roodhardt, A., Cole, B., & Brinker, L. (1997), Dry and wet numbers. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context*, Chicago: Encyclopaedia Britannica.

TIMSS, (1997), TIMSS Highlights from the primary grades, TIMSS International Study Center, Boston College

Tzekaki, M., Oikonomou, P. & Oikonomou, A. (1999), A new textbook for the 1st gymnasium year, a new conception about teaching mathematics, In P. Michailidis, A. Kollias & A. Margetousaki, *Proceedings of the 4th international conference on the teaching math and informatics in Education,* 542-547, Rethymno

Tzekaki, M., Sakonidis, H., Kaldrimidou, M., (2003), Mathematics Education in Greece: A study, *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education,* 629-637, Athens, Greece

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education, Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991), Το διδακτικό υπόβαθρο ενός προγράμματος Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, In: Streefland, I. (Ed.) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Αθήνα: Leader Books

ΥΠΕΠΘ, Π.Ι .(2002), Οδηγίες για την διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003, τεύχος Β΄, Αθήνα: ΟΕΔΒ

ΦΕΚ 303 (2003), Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά προγράμματα Σπουδών Δημοτικού-Γυμνασίου, Εφημερίδα της Κυβερνήσεως

Van den Brink, F. J. (1991), Η ρεαλιστική αριθμητική στην εκπαίδευση για τα μικρά παιδιά, In: Streefland, I. (Ed.) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, Αθήνα: Leader Books

Webb D., Margaret R. Meyer (2000), Summary report of student achievement data for Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5-8. University of Wisconsin – Madison

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Η διδασκαλία των θετικών και αρνητικών αριθμών

# ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το κεφάλαιο διδασκαλίας των θετικών και αρνητικών αριθμών αποτελείται από έξι ενότητες:
*Ενότητα 1η: ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΟΤΙΒΑ*
*Ενότητα 2η: ΣΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝ ΠΟΝΤΟΙ*
*Ενότητα 3η: ΤΟ ΑΣΑΝΣΕΡ*
*Ενότητα 4η: ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ*
*Ενότητα 5η: ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ*
*Ενότητα 6η: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ*

## Στόχοι του κεφαλαίου

*Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν την έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια. Αναπτύσσουν κανόνες για τις πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών και τοποθετούν αριθμούς σε σύστημα συντεταγμένων. Οι βασικοί στοχοι του κεφαλαίου είναι οι μαθητές:*

- *Να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να προσθέτουν, να αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν, να διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να διατάσσουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να τοποθετούν σημεία σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα συντεταγμένων και στο περιβάλλον Χελωνόκοσμος με τη βοήθεια της Logo.*

***Σκοπός των ερωτήσεων – προβλημάτων***

*Οι ερωτήσεις – προβλήματα που, είτε λύνονται – συζητιούνται στην τάξη, είτε δίνονται ως εργασία για το σπίτι, έχουν ως σκοπό να διευκολύνουν τους μαθητές ώστε και με τη βοήθεια του δασκάλου να καταφέρουν :*

*1. Να αποκτήσουν εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Ειδικότερα:*

- *Να σχεδιάζουν και να περιγράφουν μοτίβα χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να συγκρίνουν και να διατάσσουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να κάνουν τις τέσσερις πράξεις.*
- *Να αναγνωρίζουν και να τοποθετούν διατεταγμένα ζεύγη στο σύστημα συντεταγμένων.*

*2. Να διατυπώνουν τους συλλογισμούς τους, να τους αιτιολογούν, να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις. Δηλαδή:*

- *Να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντιθέτων.*
- *Να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες που υπάρχουν όταν χρησιμοποιούν ακεραίους σε αλγεβρικά και γεωμετρικά πλαίσια.*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς των γεωμετρικών σχημάτων σε σύστημα συντεταγμένων.*

3. *Να μοντελοποιούν πολλές διαφορετικές καταστάσεις και να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Ειδικότερα:*
   - *Να μοντελοποιούν καταστάσεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς.*
   - *Να χρησιμοποιούν ένα μοντέλο ή ένα πλαίσιο που θα τους βοηθήσει να λύνουν προβλήματα με ακεραίους.*
4. *Να αποκτήσουν κριτική σκέψη αναλύοντας και αιτιολογώντας και να μπορούν να γενικεύουν. Ειδικότερα:*
   - *Να κάνουν υποθέσεις για την κατεύθυνση ενός σχεδίου όταν δίνονται οι οδηγίες σχεδίασης και να τις αιτιολογούν.*
   - *Να κάνουν υποθέσεις και να αιτιολογούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων.*
   - *Να γενικεύουν και να διατυπώνουν κανόνες για τις πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών.*

# Ενότητα 1η ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΜΟΤΙΒΑ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Ένα αρχαϊκό γεωμετρικό μοτίβο, ο μαίανδρος, αποτελεί την αφετηρία για την ανάλυση, την περιγραφή και την δημιουργία σχεδίων από τους μαθητές. Αποτελεί δηλαδή το πλαίσιο για τη διερεύνηση των θετικών και αρνητικών κατευθύνσεων σε τετραγωνισμένο χαρτί.*
*Αρχικά, σχεδιάζουν ξανά τον μαίανδρο και αφού αναγνωρίσουν ότι αποτελεί μοτίβο, δηλαδή ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται, συνεχίζουν μόνοι τους το σχέδιο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν μια επαναλαμβανόμενη σειρά από αριθμούς και βελάκια που δηλώνουν τις κατευθύνσεις: δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω για να περιγράψουν και να σχεδιάσουν νέα μοτίβα. Αναλύοντας την «κίνηση» του σχεδίου, βρίσκουν την κατεύθυνσή του και διερευνούν αν πρόκειται για ανοικτή ή κλειστή γραμμή. Στα επόμενα σχέδια η σειρά των κατευθύνσεων είναι καθορισμένη: δεξιά-πάνω-αριστερά-κάτω. Έχοντας τις κατευθύνσεις δεδομένες και μία σειρά αριθμών που επαναλαμβάνεται, υπολογίζουν την τελική μετατόπιση του αρχικού σημείο διαγράφοντας τις κινήσεις στην αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή άτυπα διαγράφουν τους αντίθετους και προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Ακολούθως αντικαθιστούν τα βελάκια με τα σύμβολα συν και μείον: το συν για την δεξιά και πάνω κατεύθυνση και το μείον για την αριστερά και κάτω κατελυθυνση. Στο τέλος, χρησιμοποιώντας συμβολισμό θετικών και αρνητικών αριθμών σχεδιάζουν και διερευνούν μοτίβα που ξεκινούν από το ίδιο αρχικό σημείο ( αρχή ) προετοιμάζοντας το έδαφος για τις γραφικές παραστάσεις σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.*

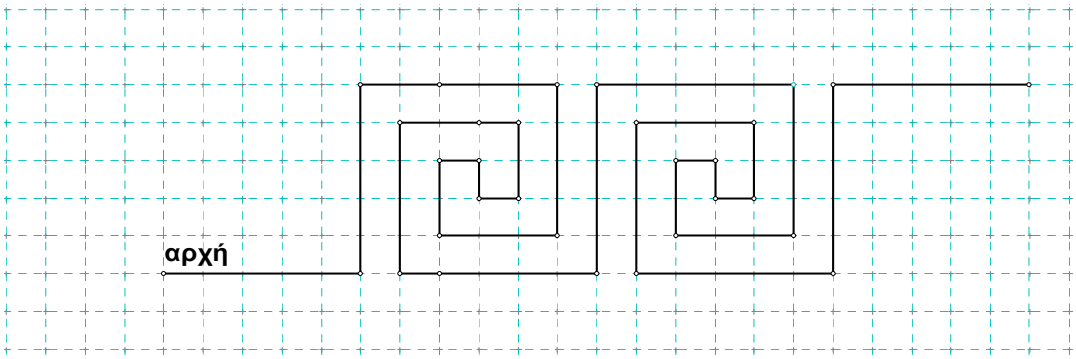
***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν:*

- *να αναπτύξουν την έννοια των θετικών και αρνητικών αριθμών*
- *να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν αρνητικούς αριθμούς*
- *να αναγνωρίζουν ένα γεωμετρικό μοτίβο*
- *να σχεδιάζουν και να αναλύουν γεωμετρικά μοτίβα σε τετραγωνισμένο χαρτί.*
- *άτυπα να διαγράφουν και να προσθέτουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*

Στην αρχαία Ελλάδα, μετά το τέλος του Μυκηναϊκού κόσμου, ακολουθεί μία περίοδος τεσσάρων αιώνων (1100π.Χ-700π.Χ) που ονομάζεται Γεωμετρική εποχή, επειδή το κυρίαρχο στοιχείο στη διακόσμηση των αγγείων και των σκευών είναι τα γεωμετρικά σχήματα. Ένα χαρακτηριστικό γεωμετρικό μοτίβο που εμφανίστηκε εκείνη την εποχή, αλλά διατηρήθηκε και τα επόμενα χρόνια είναι ο *μαίανδρος*

Το παρακάτω σχήμα είναι παρόμοιο με τα σχέδια που χρησιμοποιήθηκαν εκείνη την εποχή. Το χαρακτηριστικό του είναι ότι μπορεί να σχεδιαστεί με μία συνεχόμενη γραμμή, δηλαδή το σχεδιάζουμε χωρίς να σηκώσουμε τη μύτη του μολυβιού.



**1.** Να περιγράψετε πως σχεδιάστηκε το σχήμα.

**2.** Να αντιγράψετε το σχήμα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να το συνεχίσετε. Ποια είναι η κατεύθυνση του σχήματος;

Ένας τρόπος για να περιγραφεί ένα γεωμετρικό μοτίβο είναι να χρησιμοποιήσουμε τα βελάκια που περιγράφουν τις τέσσερις κατευθύνσεις: ↑ πάνω, ↓ κάτω, ← αριστερά**,** → δεξιά**.**

**→5 ↑6 →5 ↓4 ←3 ↑2 →1 ↓1 →1 ↑2 ←3 ↓4**

**→5 ↑6 →5 ↓4 ←3 ↑2 →1 ↓1 →1 ↑2 ←3 ↓4**

**→5 ↑6 →5**

**3. α.** Τί σημαίνουν οι αριθμοί με τα βελάκια;

**β.** Να σχεδιάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί το μοτίβο που περιγράφεται από τους παραπάνω αριθμούς. Τί παρατηρείτε; Ποιά είναι η κατεύθυνση του σχήματος;

**γ.** Να συνεχίσετε για λίγο το σχέδιο και να συμπληρώσετε τους κατάλληλους αριθμούς και βελάκια.

**δ.** Θα μπορούσατε να συμπληρώσετε μερικούς αριθμούς ακόμη, χωρίς όμως να συνεχίσετε το σχέδιο; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

**4. α.** Ποιο σχέδιο περιγράφει η παρακάτω σειρά αριθμών;

**β.** «Περπατάει» το σχέδιο προς κάποια κατεύθυνση;
Τί παρατηρείτε για τη σειρά των αριθμών;

.

**→1 ↑2 ←3 ↓2 →1 ↑1 ←2 ↓3 →2 ↑1**

**←3 ↓ 2 →3 ↑2 ←1 ↓1 →2 ↑3 ←2 ↓1**

**5.** Για το επόμενο σχήμα δίνονται οι παρακάτω οδηγίες σχεδίασης.

**→1 ↑1 ←3 ↓1 →1 ↑3 .. .. .. .. .. .. .. .. .. ..**

**α.** Να σχεδιάσετε ό,τι περιγράφουν οι αριθμοί με τις αντίστοιχες κατευθύνσεις.

**β.** Να συνεχίσετε το σχέδιο μέχρι να φτάσετε στο σημείο από όπου ξεκινήσατε.
Η σειρά των κατευθύνσεων είναι: δεξιά, πάνω, αριστερά, κάτω.

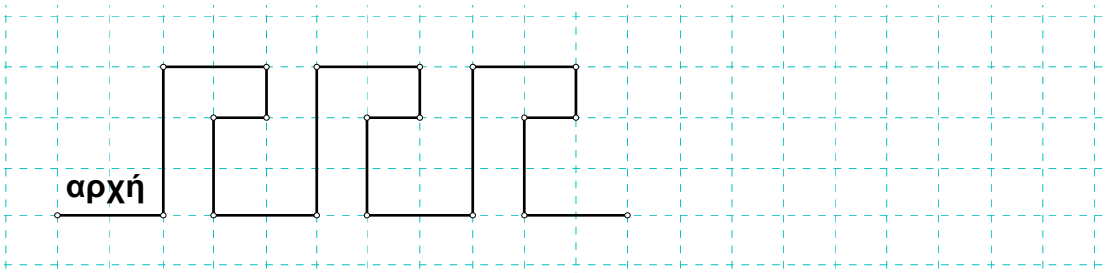
Τί παρατηρείτε για τη σειρά των αριθμών;

**6. α.** Να σχεδιάσετε το δικό σας γεωμετρικό μοτίβο ακολουθώντας τις κατευθύνσεις:
→ ↑ ← ↓

**β.** Να δώσετε τις οδηγίες σχεδίασης.

**γ.** Αποτελείται το σχέδιό σας κλειστή γραμμή ή ανοιχτή; Αν η γραμμή είναι κλειστή, τί παρατηρείτε στη σειρά των αριθμών;

Σε αρκετά αγγεία της μετέπειτα εποχής υπάρχει ανάλογο μοτίβο στη διακόσμηση.




**7. α.** Να γράψετε τις οδηγίες σχεδίασης του μοτίβου.

**β.** Για την ίδια σειρά αριθμών να ξαναγράψετε τις οδηγίες χρησιμοποιώντας την σειρά κατευθύνσεων → ↑ ← ↓

**γ.** Να σχεδιάσετε το νέο μοτίβο. Είναι ανοιχτή ή κλειστή γραμμή; Που κατευθύνεται;

**8. α.** Ποιο γεωμετρικό μοτίβο δημιουργείται από την παρακάτω σειρά αριθμών;

**→3 ↑2 ←1 ↓1 →2 ↑3 .. .. .. .. .. ..**

**β.** Να συμπληρώσετε τους επόμενους έξι αριθμούς.

**γ.** Μπορείτε να βρείτε μια διαφορετική σειρά από έξι αριθμούς ώστε η γραμμή να είναι κλειστή;

Έχουμε δει ότι μερικά μοτίβα είναι κλειστές γραμμές, ενώ σε άλλα η γραμμή είναι ανοιχτή και μπορούμε να τη συνεχίσουμε όσο θέλουμε. Κάποιες φορές το μοτίβο βγαίνει έξω από το τετράδιό μας, οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να προσπαθούμε να προβλέψουμε την κατεύθυνση του σχήματος, ώστε να ξεκινήσουμε το σχέδιο από το σωστό σημείο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την παρακάτω σειρά αριθμών και θέλουμε να υπολογίσουμε την κατεύθυνση του σχεδίου. Οι κατευθύνσεις είναι με τη σειρά: → ↑ ← ↓

2 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 1

**9. α.** Τί σχέση έχουν με τις κατευθύνσεις οι αριθμοί με το κόκκινο χρώμα;
**β**. Μπορείτε να υπολογίσετε αν το σχέδιο πηγαίνει προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά χωρίς να το σχεδιάσετε;
**γ.** Μπορείτε να υπολογίσετε αν το σχέδιο πηγαίνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω χωρίς να το σχεδιάσετε;
**δ.** Από ποια θέση του τετραδίου πρέπει να ξεκινήσετε τη σχεδίαση;

Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε ένα γεωμετρικό μοτίβο είναι να χρησιμοποιήσουμε το συν (+) και το μείον (-) αντί τη γνωστή σειρά από βελάκια (→ ↑ ← ↓).

**10.** Οι οδηγίες σχεδίασης ενός μοτίβου είναι οι εξής:

**+1 +3 -2 -1 +1 +3 -2 -1 .. .. .. .. ..**

**α.** Τί σχέση μπορεί να έχουν τα συν και μείον με τις κατευθύνσεις;
**β.** Να σχεδιάσετε το μοτίβο

**11.** Οι οδηγίες σχεδίασης ενός μοτίβου είναι οι εξής:

**+1 +3 -3 -2 +1 +3 -3 -2 .. .. .. .. ..**

Να κάνετε μια πρόβλεψη για την κατεύθυνση του σχεδίου χωρίς να το σχεδιάσετε.

**12.** Έχετε τις παρακάτω οδηγίες για δύο σχέδια.

**Σχέδιο 1$^{ο}$: +5 +4 -2 -1 +1 +2 -4 -5**

**Σχέδιο 2$^{ο}$: +2 +4 -1 -1 +2 +4 -1 -1**

**α.** Ένα από τα δύο σχέδια είναι κλειστή γραμμή. Μπορείτε να πείτε ποιο από τα δύο είναι χωρίς να κάνετε το σχήμα; Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.
**β.** Για το σχέδιο που είναι ανοικτή γραμμή να υπολογίσετε την κατεύθυνσή του χωρίς να το σχεδιάσετε.

**13.** Οι οδηγίες για τέσσερα σχέδια είναι οι εξής:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Σχέδιο 1$^{ο}$:** | **+4** | **+2** | **-1** | **-1** | **+4** | **+2** | **-1** | **-1** |
| **Σχέδιο 2$^{ο}$:** | **+2** | **+4** | **-1** | **-1** | **+2** | **+4** | **-1** | **-1** |
| **Σχέδιο 3$^{ο}$:** | **+1** | **+1** | **-4** | -2 | **+1** | **+1** | **-4** | **-2** |
| **Σχέδιο4$^{ο}$:** | **+1** | **+1** | **-2** | -4 | **+1** | **+1** | **-2** | **-4** |

**α.** Όλα τα σχέδια ξεκινούν από ένα σημείο Ο που θα τοποθετήσετε περίπου στο κέντρο της σελίδας. Να σχεδιάσετε μόνο τα βήματα που δίνονται από τις οδηγίες των σχεδίων. Το τελικό σημείο του 1$^{ου}$ σχεδίου θα το ονομάσετε Α, του 2$^{ου}$ σχεδίου Β, του 3$^{ου}$ θα το ονομάσετε Γ και του τέταρτου Δ.

**β.** Πού βρίσκονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ σε σχέση με το αρχικό σημείο Ο;

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

**14. α.** Είναι το παρακάτω σχέδιο κλειστή ή ανοιχτή γραμμή; Να εξηγήσετε την απάντησή σας χωρίς να κάνετε το σχέδιο.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **+1** | **+2** | **-3** | **-1** | **+2** | **+3** | **-1** | **-2** | **+3** | **+1** | **-2** | **-3** |

**β.** Να κάνετε το σχέδιο.

**15.** Να αναφέρετε όλους τους τρόπους που μάθατε για την περιγραφή με αριθμούς ενός γεωμετρικού μοτίβου. Ποιος νομίζετε ότι είναι ο καλύτερος;

**16. α.** Να σχεδιάσετε ένα μοτίβο που να πηγαίνει κάτω-δεξιά

**β.** Να γράψετε τις οδηγίες σχεδίασης χρησιμοποιώντας συν και μείον αριθμούς

**γ.** Μπορείτε μόνο από τις οδηγίες να αναγνωρίσετε την κατεύθυνση του σχεδίου σας; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

# Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

Ένα γεωμετρικό μοτίβο μπορεί να περιγραφεί στην τυπική μαθηματική γλώσσα με τις ορθογώνιες συντεταγμένες. Όμως σ' αυτό το σημείο ενθαρρύνουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν οποιονδήποτε άτυπο τρόπο περιγραφής. Επίσης είναι πολύ σημαντικό να δίνονται πρώτα οι δεξιά-αριστερά κατευθύνσεις, επειδή την ίδια λογική κατασκευής-περιγραφής ακολουθούμε και στο σύστημα συντεταγμένων. Σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (5, 3) πρώτα δίνονται οι δεξιά-αριστερά αριθμοί (τετμημένες) και μετά οι πάνω-κάτω (τεταγμένες)

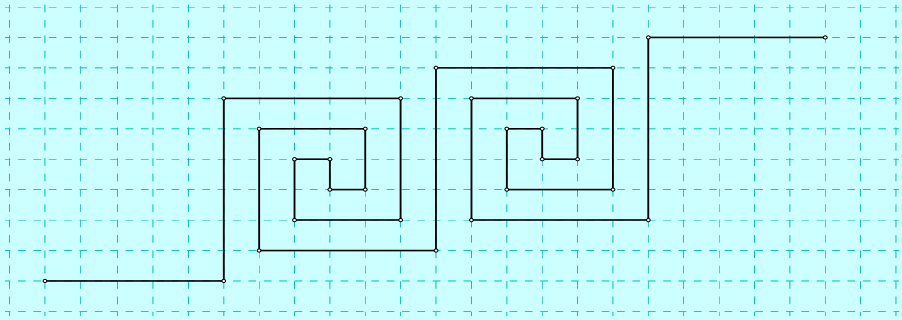
## Ερώτηση 1

Πιθανή απάντηση: Το σχέδιο πηγαίνει 5 μονάδες δεξιά, 5 μονάδες πάνω, 5 μονάδες δεξιά, 4 μονάδες κάτω, 3 μονάδες αριστερά, 2 μονάδες πάνω, 1 μονάδα δεξιά, 1 μονάδα κάτω, 1 μονάδα δεξιά, 2 μονάδες πάνω, 3 μονάδες αριστερά, 4 μονάδες κάτω, 5 μονάδες δεξιά και μετά επαναλαμβάνεται.

## Ερώτηση 3

**α.** Μας δηλώνουν σε ποια κατεύθυνση και πόσες μονάδες θα «προχωρήσει» το σχήμα

**β.** Πιθανή απάντηση: Το σχήμα είναι πάλι μαίανδρος μετατοπισμένος προς τα πάνω. Η κατεύθυνση του σχήματος είναι πάνω-δεξιά.



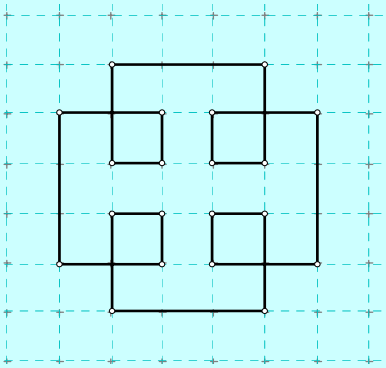
**δ.** Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν ότι υπάρχει μια επαναλαμβανόμενη σειρά αριθμών με παρόμοια βελάκια και ότι αυτή η σειρά δημιουργεί το γεωμετρικό μοτίβο.

## Ερώτηση 4

Το σχέδιο δεν συνεχίζεται όσες φορές θέλουμε. Τελειώνει επιστρέφοντας στο αρχικό σημείο.

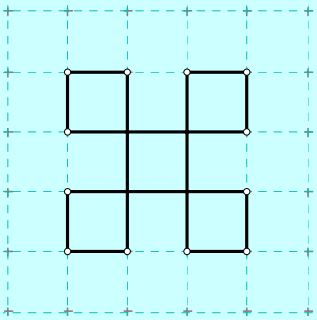
Πιθανές παρατηρήσεις:

1. Επαναλαμβάνεται 4 φορές η σειρά των αριθμών 1, 2, 3, 2, 1 με διαφορετική κατεύθυνση
2. Επαναλαμβάνεται 2 φορές η σειρά των αριθμών 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1 με ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση



## Ερώτηση 5

Παρατηρούν ότι επαναλαμβάνεται η σειρά των αριθμών 1, 1, 3 και ότι για να φτάσουν στο αρχικό σημείο πρέπει η σειρά να επαναληφθεί τέσσερις φορές



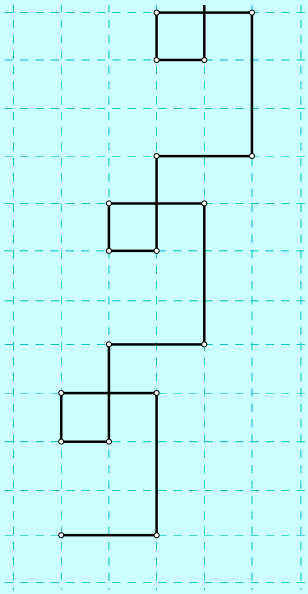
## Ερώτηση 6

Μία γραμμή που τελειώνει εκεί που αρχίζει, την ονομάζουμε κλειστή γραμμή, ενώ αν τα άκρα της δεν συναντώνται την ονομάζουμε ανοιχτή γραμμή.
Για να αποτελεί το μοτίβο μια κλειστή γραμμή θα πρέπει να έχουμε μια σειρά από τρεις αριθμούς που επαναλαμβάνεται τέσσερις φορές. Για παράδειγμα:
→1 ↑2 ←3 ↓1 →**2** ↑3 ←1 ↓2 → 3 ↑1 ←2 ↓3
Οι αριθμοί με το ίδιο χρώμα αλληλοαναιρούνται, οπότε η κίνηση του αρχικού σημείου είναι μηδέν και καταλήγουμε εκεί από όπου ξεκινήσαμε.

## Ερώτηση 7

**α.** Οι οδηγίες σχεδίασης είναι:
**→2 ↑3 →2 ↓1 ←1 ↓2**
και επαναλαμβάνεται

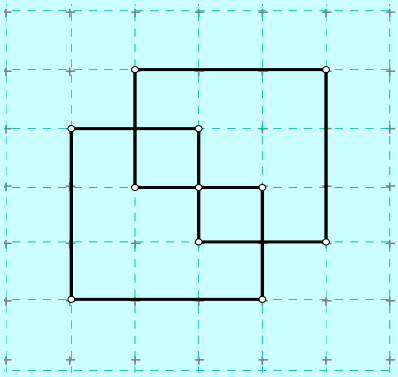
**β.** Οι νέες οδηγίες είναι:
**→2 ↑3 ←2 ↓1 →1 ↑2**



Σ' αυτό το σημείο ο καθηγητής μπορεί να συζητήσει με τους μαθητές για τη συνολική -καθαρή μετατόπιση του αρχικού σημείου είτε στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση είτε στην πάνω-κάτω. Η μετατόπιση 2 μονάδων προς τα αριστερά, για παράδειγμα ακυρώνεται με την μετατόπιση 2 μονάδων προς τα δεξιά. Επίσης αν η μετατόπιση προς τα πάνω είναι 6 μονάδες και προς τα κάτω είναι 4 μονάδες, τότε η συνολική μετατόπιση του σημείου είναι 2 μονάδες προς τα πάνω. Βέβαια όλα τα παραπάνω ξεκαθαρίζονται για τους μαθητές στην άσκηση 9

## Ερώτηση 8

**β.** Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να τελειώσει το σχήμα εκεί που άρχισε. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ίδια σειρά αριθμών ξανά ή να συνεχίσουν με τυχαίο τρόπο.

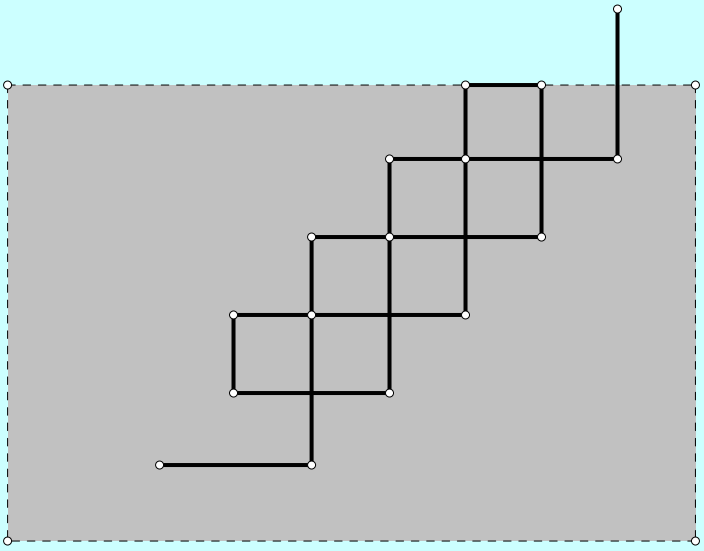


**γ.** Πιθανή σειρά αριθμών:
←3 ↓2 ↑1 →1 ←2 ↓3

Για να βρουν τη κατάλληλη σειρά αριθμών θα πρέπει να υπολογίσουν τη συνολική μετατόπιση στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση η οποία για τους αριθμούς του προβλήματος είναι → 4. Για να είναι η τελική μετατόπιση του αρχικού σημείου μηδέν, πρέπει να βρουν μια σειρά αριθμών που να έχει συνολική μετατόπιση στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση ← 4.

## Ερώτηση 9

**α.** Οι αριθμοί με το κόκκινο χρώμα είναι οι μετατοπίσεις προς τα δεξιά ή αριστερά.



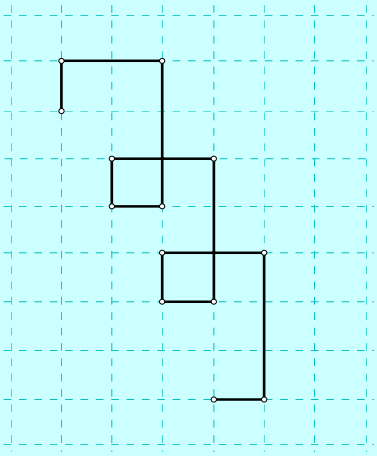
**β.** Συγκρίνουν τη μετατόπιση στα δεξιά και τη μετατόπιση στα αριστερά για την πρώτη τετράδα αριθμών η οποία και επαναλαμβάνεται. Το σχέδιο «περπατάει» προς τα δεξιά επειδή 2>1.
Αν οι αριθμοί που επαναλαμβάνονται δεν είναι τέσσερις τότε υπολογίζουν τις συνολικές μετατοπίσεις και τις συγκρίνουν.

**γ.** Το σχέδιο «περπατάει» προς τα πάνω επειδή 2>1.
<u>Στρατηγική 1η</u> : Σύγκριση πάνω και κάτω μετατοπίσεων στο πρώτο τμήμα της σειράς που επαναλαμβάνεται όπως και προηγούμενα.
<u>Στρατηγική 2η</u> : Υπολογισμός όλων των μετατοπίσεων προς τα πάνω και προς τα κάτω όπως δίνονται στο πρόβλημα.

**δ.** Η κατεύθυνση του σχεδίου είναι προς τα πάνω και δεξιά άρα πιο πιθανή απάντηση θα είναι να ξεκινήσει κανείς από κάτω αριστερά της σελίδας.

Η περιγραφή των κατευθύνσεων με συν και μείον έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

1. Η διαγραφή, η πρόσθεση και η αφαίρεση των κατευθύνσεων γίνεται ευκολότερη.
2. Οι μαθητές προετοιμάζονται για τον τρόπο εργασίας και τους συμβολισμούς σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων



## Ερώτηση 10

Τα βελάκια αντικαθίστανται με τα συν και μείον. Την κατεύθυνση δεξιά και την κατεύθυνση πάνω τις συμβολίζουμε με +. Την κατεύθυνση αριστερά και την κατεύθυνση πάνω τις συμβολίζουμε με -.

## Ερώτηση 11

Το σχήμα κατευθύνεται πάνω αριστερά. Η σειρά των αριθμών που επαναλαμβάνεται είναι: +1 +3 -3 -2. Επομένως στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση η μετατόπιση είναι 2 μονάδες στα αριστερά, δηλαδή -2 και στην πάνω-κάτω κατεύθυνση η μετατόπιση είναι μία μονάδα πάνω, δηλαδή +1.

## Ερώτηση 12

**α.** Το 1$^{ο}$ σχέδιο είναι κλειστή γραμμή. Επειδή εδώ δεν έχουμε τρεις αριθμούς να επαναλαμβάνονται τέσσερις φορές, ο πιο πιθανός συλλογισμός είναι:
Η συνολική μετατόπιση προς τα δεξιά είναι +6, ενώ η συνολική μετατόπιση προς τα αριστερά είναι -6. Επομένως καθαρή μετατόπιση στην αριστερά-δεξιά κατεύθυνση είναι 0 ( -6 + 6 = 0 ). Επίσης η συνολική μετατόπιση προς τα πάνω είναι +6, ενώ η συνολική μετατόπιση προς τα κάτω είναι -6. Επομένως καθαρή μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι 0.

**β.** Το 2$^{ο}$ σχέδιο κατευθύνεται προς τα πάνω και δεξιά. Πιθανές εξηγήσεις:

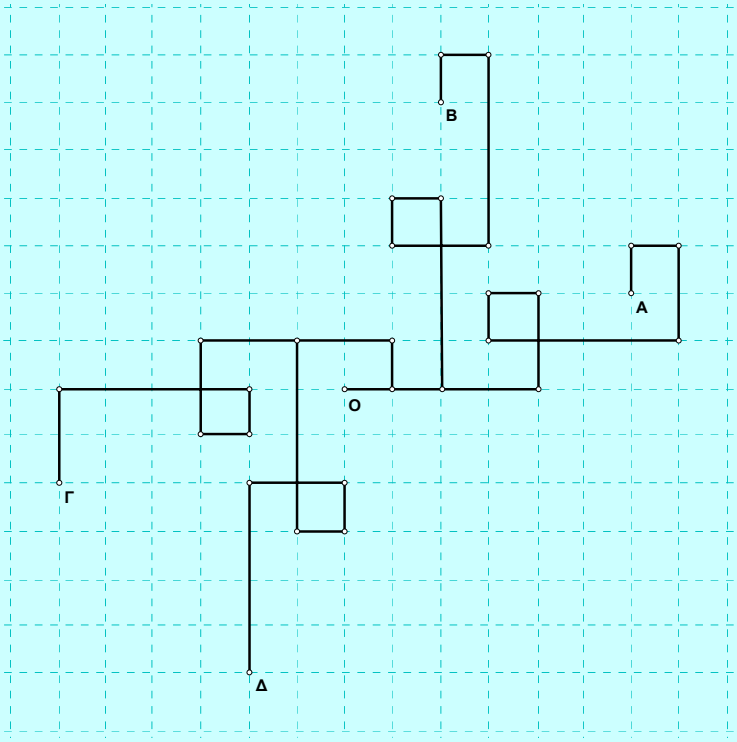
- Η σειρά **+2 +4 -1 -1** επαναλαμβάνεται. Η τελική μετατόπιση στην αριστερά - δεξιά κατεύθυνση είναι: **+ 2 – 1 = + 1**, ενώ η τελική μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι **+ 4 – 1 = + 3.**
- Υπολογίζουν τις συνολικές μετατοπίσεις και για τους οκτώ αριθμούς που δίνονται και εργάζονται ανάλογα. Η τελική μετατόπιση στην αριστερά - δεξιά κατεύθυνση είναι: **+ 4 – 2 = + 2**, ενώ η τελική μετατόπιση στην πάνω-κάτω κατεύθυνση είναι **+ 8 – 2 = + 6.**

## Ερώτηση 13

Σ' αυτό το πρόβλημα οι μαθητές τοποθετούν και ονομάζουν την αρχή του σχεδίου με το γράμμα Ο. Σε προηγούμενα προβλήματα εργάστηκαν άτυπα σε σύστημα συντεταγμένων. Εδώ ονομάζουν την αρχή και δίνουν τις θέσεις διαφόρων σημείων σε σχέση με το Ο, δηλαδή στην ουσία τις συντεταγμένες των σημείων.

Για να περιγράψουν τις θέσεις των σημείων μπορεί να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς συμβολισμούς, είτε λεκτικούς, είτε να κάνουν χρήση συμβόλων

1. Το Α είναι έξι μονάδες δεξιά και δύο μονάδες πάνω
2. Το Α είναι δεξιά και πάνω
3. Α: → 6 ↑2
4. Α: +6, +2




Όταν χρησιμοποιούν το συν και μείον για να περιγράψουν την τελική θέση, υπενθυμίζουμε ότι ο πρώτος αριθμός δίνει την αριστερά-δεξιά κατεύθυνση, ενώ ο δεύτερος τη πάνω-κάτω

Οι μαθητές συγκρίνουν τις περιγραφές τους, συζητούν ποιά είναι η πιο ακριβής, πιο σύντομη, ποια προτιμούν αυτοί.

Τα επόμενα δύο προβλήματα εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών

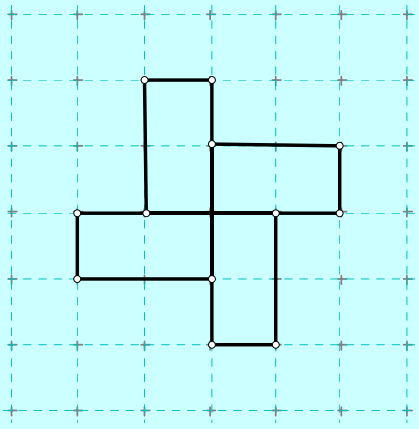
1. Να σχεδιάζουν και να περιγράφουν γεωμετρικά μοτίβα χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς
2. Να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντιθέτων (οι αντίθετοι διαγράφονται)

## Ερώτηση 14

Οι $1^{ος}$, $3^{ος}$,.....,$11^{ος}$ αριθμοί στις οδηγίες δίνουν την αριστερά-δεξιά κατεύθυνση και έχουν άθροισμα 0. Άρα δεν έχουμε μετατόπιση σ'αυτή την κατεύθυνση.

+1 -3 +2 -1 +3 -2 = 0

Οι $2^{ος}$, $4^{ος}$,.....$12^{ος}$ αριθμοί στις οδηγίες δίνουν την πάνω-κάτω κατεύθυνση και έχουν άθροισμα 0. Επομένως δεν έχουμε μετατόπιση ούτε σ'αυτή την κατεύθυνση.



## Ερώτηση 15

Οι απαντήσεις των μαθητών θα διαφέρουν διότι μπορεί να χρησιμοποιήσουν:

- Λεκτικό τρόπο: δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω
- Βελάκια: $\rightarrow$ $\uparrow$ $\leftarrow$ $\downarrow$
- Πρόσημα: +, $-$

Η απάντηση στο ερώτημα ποιος τρόπος περιγραφής είναι ο καλύτερος εξαρτάται από τα κριτήρια επιλογής. Τα κριτήρια μπορεί να είναι:

1. Η ακρίβεια περιγραφής
2. Η ευκολία κατανόησης των οδηγιών
3. Η δυνατότητα ερμηνείας τους με μοναδικό τρόπο

## Ερώτηση 16

Το πρόβλημα αυτό εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν και να δίνουν οδηγίες σχεδίασης γεωμετρικών μοτίβων χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

# Ενότητα 2η ΣΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝ ΠΟΝΤΟΙ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Η ενότητα αυτή δημιουργεί ένα πλαίσιο που βοηθά τους μαθητές να διερευνήσουν και να διατυπώσουν τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης θετικών και αρνητικών αριθμών.*
*Οι μαθητές επεξεργάζονται και αναλύουν τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού ερωτήσεων. Στο παιχνίδι, κάθε απάντηση παίρνει έναν πόντο, είτε θετικό είτε αρνητικό.*
*Μέσα σ΄αυτό το πλαίσιο διαγράφουν θετικούς και αρνητικούς πόντους για να υπολογίσουν το τελικό σύνολο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούν μοντέλο που θα τους βοηθήσει να λύσουν προβληματικές καταστάσεις. Μέσα από τη διερεύνηση διαπιστώνουν ότι ίσος αριθμός αντίθετων πόντων μπορεί να αφαιρεθεί ή να αγνοηθεί χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Προσθέτουν και αφαιρούν πόντους που είναι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί, γράφουν τις αντίστοιχες μαθηματικές εκφράσεις, διαγράφουν τους αντίθετους, διερευνούν τη σχέση πρόσθεσης-αφαίρεσης.*
*Στο τέλος γενικεύουν διατυπώνοντας τους κανόνες για την πρόσθεση και αφαίρεση των θετικών και αρνητικών αριθμών.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να:*

- *προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*
- *διατυπώνουν τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης θετικών και αρνητικών αριθμών.*
- *αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.*

Η τάξη των Μαθηματικών παίζει το παιχνίδι των ερωτήσεων. Οι μαθητές χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες. Κάθε ομάδα παίρνει ένα «συν» πόντο για κάθε σωστή απάντηση και ένα «μείον» για κάθε λανθασμένη. Οι ομάδες πρέπει να απαντήσουν σε όλες τις ερωτήσεις. Η Άννα και ο Γιώργος υπολογίζουν τους πόντους κάθε ομάδας.
Το σύνολο των πόντων μετά από τέσσερις γύρους είναι το εξής:

| *Σύνολο μετά τον $4^o$ γύρο* | |
|---|---|
| ***Ομάδα Α*** | +4 |
| ***Ομάδα Β*** | -2 |
| ***Ομάδα Γ*** | 0 |
| ***Ομάδα Δ*** | 0 |

**1** Πως απάντησε η κάθε ομάδα τις ερωτήσεις στους πρώτους τέσσερις γύρους;

Στον παρακάτω πίνακα μπορείτε να δείτε τους πόντους κάθε ομάδας μετά απο 6 γύρους.

| *Σύνολο μετά τον $6^o$ γύρο* | |
|---|---|
| *Ομάδα Α* | **+6** |
| *Ομάδα Β* | **-2** |
| *Ομάδα Γ* | **-2** |
| *Ομάδα Δ* | |

**2.** Εξηγήστε πως απάντησαν στις ερωτήσεις οι ομάδες Α, Β, Γ.

**3.** Οι πόντοι της Δ ομάδας δεν έχουν υπολογισθεί. Εξηγήστε γιατί η Δ ομάδα δεν μπορεί να έχει +1 πόντους μετά τον $6^o$ γύρο.

**4.** Να υπολογίσετε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς σωστών και λάθος απαντήσεων της ομάδας Δ και να συμπληρώσετε τον πίνακα

| ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ | **ΠΟΝΤΟΙ** |
|---|---|---|
| | | |

Μετά από μερικούς γύρους το παιχνίδι τελείωσε. Στον πίνακα φαίνεται το σύνολο των πόντων που συγκέντρωσε η κάθε ομάδα

| ***Τελικά αποτελέσματα*** | |
|---|---|
| *Ομάδα Α* | **+9** |
| *Ομάδα Β* | **+7** |
| *Ομάδα Γ* | **+4** |
| *Ομάδα Δ* | **+6** |

Η Άννα και ο Γιώργος ξαφνικά διαπίστωσαν ότι είχαν κάνει ένα λάθος. Έδωσαν έναν μείον πόντο στην ομάδα Β ενώ έπρεπε να τον δώσουν στην ομάδα Α.

**5.** Να διορθώσετε τα αποτελέσματα των ομάδων Α και Β.

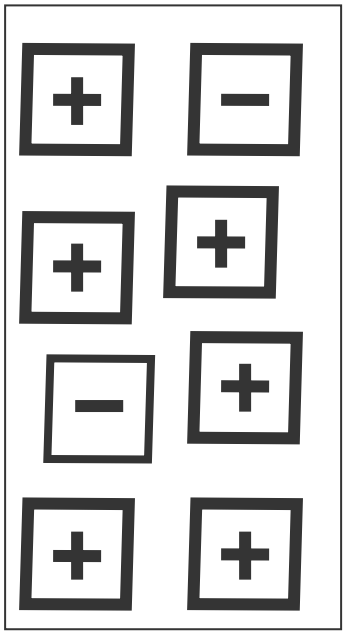
**6.** Αφού διορθώσατε τα τελικά και έχοντας το σύνολο των πόντων μετά τον 6$^{ο}$ γύρο, ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός γύρων που χρειάζονται για να τελειώσει το παιχνίδι με τελικό σκορ: Α: +8 Β: +8 Γ: +4 Δ: +6 ;

Οι μαθητές αποφασίζουν να παίξουν ξανά το παιχνίδι. Ο καθηγητής τότε πρότεινε έναν διαφορετικό τρόπο να υπολογίζουν τους πόντους. Τους έδειξε μερικές κάρτες που είχαν το + ή το – και είπε:

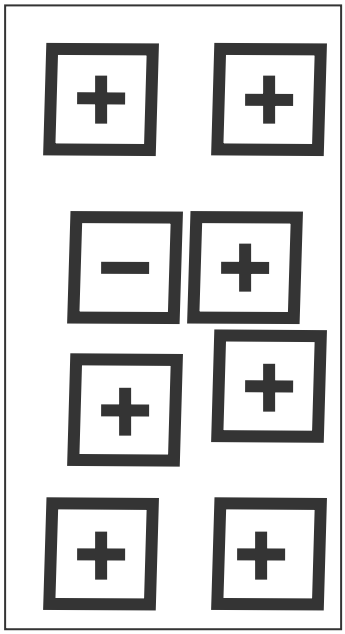
Οι σωστές απαντήσεις παίρνουν μία + κάρτα και οι λάθος μία – κάρτα. Δύο παιδιά θα συγκεντρώσουν τις κάρτες και θα υπολογίσουν τους πόντους.

Μετά από κάποιους γύρους οι ομάδες συγκέντρωσαν τις εξής + και – κάρτες:

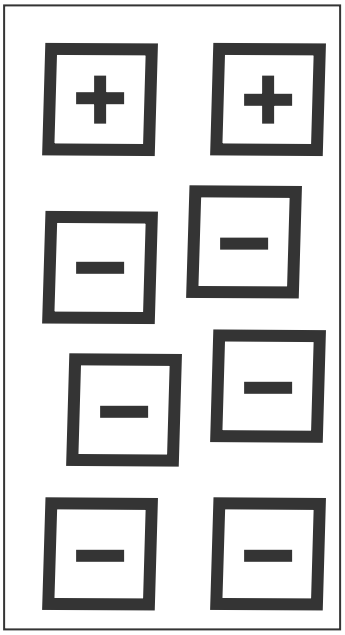
**ΟΜΑΔΑ Α**



**ΟΜΑΔΑ Β**



**ΟΜΑΔΑ Γ**



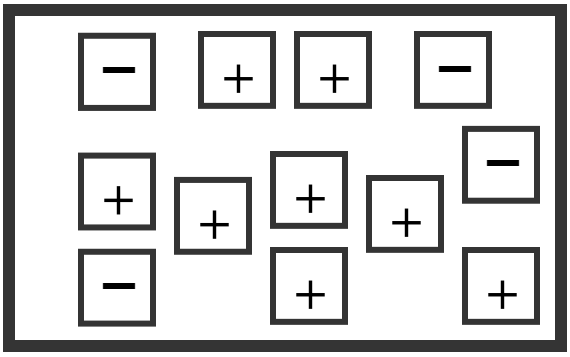
**7.** α) Πόσους γύρους έπαιξαν; Πώς το βρήκες;
β) Να υπολογισθεί το σκορ κάθε ομάδας

Η ομάδα Δ έχει 0 πόντους

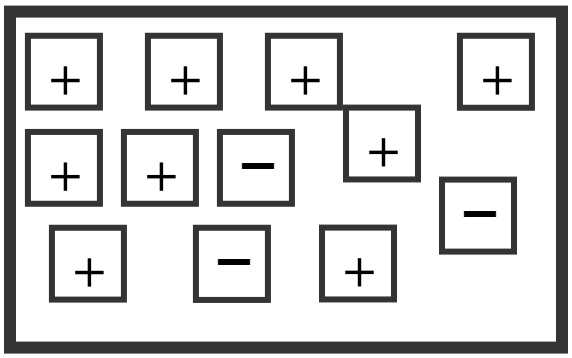
**8.** Γράψε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς + και – καρτών που δίνουν αποτέλεσμα 0.

Μετά από 12 γύρους τα αποτελέσματα για τις τέσσερις ομάδες είναι τα εξής:

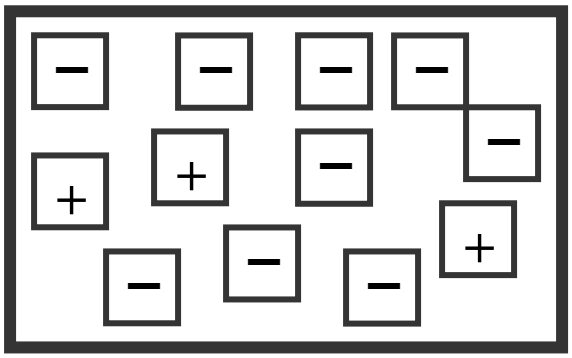
**ΟΜΑΔΑ Α**



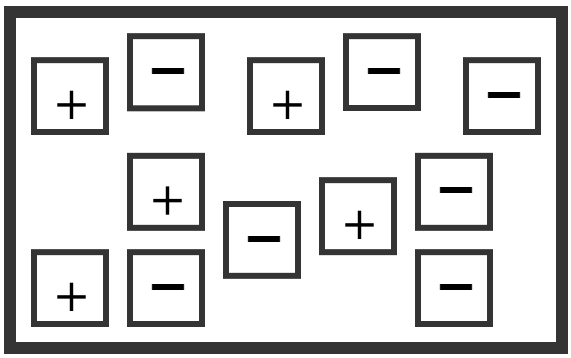
**ΟΜΑΔΑ Β**



**ΟΜΑΔΑ Γ**

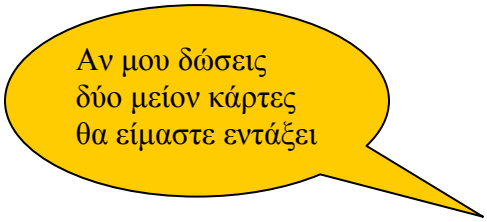


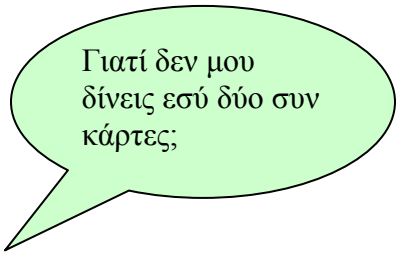

**ΟΜΑΔΑ Δ**




**9.** Να βρείτε τους πόντους κάθε ομάδας
**10.** Οι κάρτες με τα + τελείωσαν. Να αφαιρέσετε κάποιες κάρτες χωρίς να αλλάξει το σύνολο των πόντων της ομάδας.
**11.** Το παιχνίδι συνεχίστηκε. Μετά από 3 γύρους ποια είναι το πιθανό σκορ κάθε ομάδας

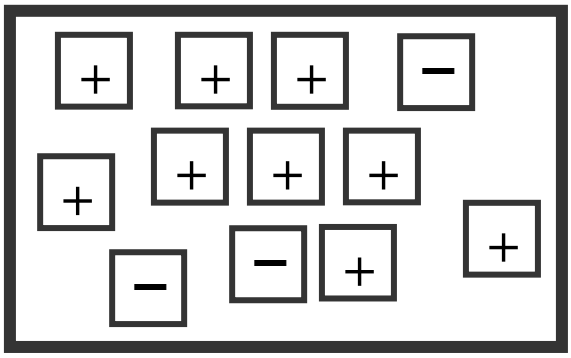
Πάλι έγινε λάθος στις κάρτες. Η Άννα που είναι αρχηγός της ομάδας Α λέει στον Κώστα:




**12.** Θα είναι το αποτέλεσμα το ίδιο;
Εξηγήστε τον συλλογισμό σας.

**ΟΜΑΔΑ Α**




**13.** Στο διπλανό σχήμα έχετε τις κάρτες της ομάδας Α.

**α)**Να αφαιρέσετε δύο κάρτες χωρίς να αλλάξετε το σκορ.
**β)** Μπορείτε να αφαιρέσετε περισσότερες χωρίς να αλλάξετε το αποτέλεσμα;
**γ)** Μπορείτε να προσθέσετε κάρτες χωρίς να αλλάξετε το αποτέλεσμα;

Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας

**14.** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

| | **Πόντοι μετά από 8 γύρους** | | **Πόντοι** | **Πόντοι μετά από 10 γύρους** |
|---|---|---|---|---|
| Α | | πρόσθεσε | | +6 |
| Β | +6 | >> | -2 | +4 |
| Γ | | >> | | -4 |
| Δ | | >> | | -2 |

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα θα μπορούσαμε να περιγράψουμε την ίδια κατάσταση για την ομάδα Α, ως εξής:

**Β: ( + 6 ) + ( - 2 ) = + 4**

**15.** Να κάνετε το ίδιο για τις ομάδες Α, Γ, Δ

**16.** Προσπαθήστε να βρείτε και άλλους τρόπους να περιγράψετε την ίδια κατάσταση

**17.** Αν θέλατε να υπολογίσετε τα αποτελέσματα ενός παιχνιδιού, ποιό θα ήταν το τελικό αποτέλεσμα σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις;
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συν και μείον κάρτες αν θέλετε.

| ΣΚΟΡ | | ΠΟΝΤΟΙ | ΤΕΛΙΚΟ ΣΚΟΡ |
|---|---|---|---|
| +8 | ΠΡΟΣΘΕΣΕ | +4 | |
| +3 | >> | -2 | |
| +2 | >> | -5 | |
| -4 | >> | +1 | |
| -3 | >> | -2 | |
| +5 | ΑΦΑΙΡΕΣΕ | +2 | |
| +4 | >> | +8 | |
| 0 | >> | +3 | |
| +8 | >> | -2 | |
| +3 | >> | -4 | |
| -6 | >> | -2 | |
| -3 | >> | -5 | |
| 0 | >> | +4 | |
| 0 | >> | -2 | |

**18.** Ξαναγράψτε κάθε γραμμή του πίνακα με τον τρόπο που μάθαμε προηγούμενα και συμπληρώστε τις αντίστοιχες ισότητες.

1η γραμμή: **(+8) + (+4) =**

**19.** Στην γραμμή 9 έχετε την εξής κατάσταση:

**+8 ΑΦΑΙΡΕΣΕ -2 = +10**

Αντί να αφαιρέσετε -2 μπορείτε να κάνετε κάτι διαφορετικό που να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα;

**20.** Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

**+ 8 αφαιρώ - 2 = + 10** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **+ 8 .....= + 10**

**- 6 αφαιρώ - 3 = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **- 6 ..... =.....**

**+ 4 αφαιρώ + 3 = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **+ 4 ..... =.....**

**- 5 αφαιρώ + 1 = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **- 5 ..... =.....**

**+ 3 – ( - 4 ) = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **+ 3 ..... = .....**

**- 3 – ( - 5 ) = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **- 3 ..... = .....**

**- 2 – ( + 6 ) = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **- 2 ..... = .....**

**0 – ( - 2 ) = .....** δινει το ίδιο αποτέλεσμα με **0 ..... = .....**

**21.** Ξαναγράψτε τον πίνακα στο τετράδιό σας χρησιμοποιώντας μόνο πρόσθεση

**22.** Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες με θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς

α) ..... + ..... = + 2 β) ..... + ..... = +4

γ) ..... + ..... = 0 δ) ..... – ..... = +1

ε) ..... – ..... = - 3 ζ) ..... – ..... = 0

η) (+ 4) + ..... = + 1 θ) ( - 3 ) – ..... = +2

ι) (+ 7) – ..... = - 1 κ) ( + 2 ) – ..... = - 8

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

**23.** **α)** Τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε έναν αρνητικό σε έναν θετικό αριθμό όπως (+5) + (-2) = ..... και τι συμβαίνει όταν τον προσθέτουμε σε έναν αρνητικό όπως (-4) + (-3) = ……;
Το παιχνίδι με τις κάρτες και οι πίνακες με τα σκορ μπορούν να σας βοηθήσουν. σε κάθε περίπτωση.

**β)** Τί συμβαίνει όταν από έναν οποιονδήποτε αριθμό αφαιρούμε έναν αρνητικό;
(+3) - (-2) = ..... (-7) - (-10) = .....
Να διατυπώσετε έναν κανόνα

**24.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Όταν προσθέτω δύο θετικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**β)** Όταν προσθέτω έναν θετικό και έναν αρνητικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**γ)** Όταν προσθέτω δύο αρνητικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**δ)** Αν από έναν θετικό αφαιρέσω έναν αρνητικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.
**ε)** Αν από το μηδέν αφαιρέσω οποιονδήποτε αριθμό το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός.
**ζ)** Αν από έναν αρνητικό αφαιρέσω έναν θετικό το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός

# Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

## Ερωτήσεις 1-6

Σκοπός των ερωτήσεων αυτών είναι να κατανοήσουν οι μαθητές:

I) Πως υπολογίζεται το σύνολο των πόντων σε ένα παιχνίδι όπου παίρνουμε και θετικούς και αρνητικούς πόντους.

ii) Ότι κάθε ερώτηση παίρνει πόντο είτε θετικό είτε αρνητικό

iii) Ένας θετικός και ένας αρνητικός πόντος αλληλοαναιρούνται και δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα

## Ερωτήσεις 7-11

Οι συν και μείον κάρτες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την αναπαράσταση των θετικών και αρνητικών αριθμών. Οι μαθητές έχουν ένα εργαλείο στα χέρια τους για να συνειδητοποιήσουν ότι:

ι) Για κάθε απάντηση παίρνουν κάρτα

ii) Το σύνολο των καρτών δίνει και το σύνολο των απαντήσεων

iii) Μπορούν να βγάλουν μία + και μία – κάρτα χωρίς να αλλάξει το σκορ

iv) Μπορούν να βγάλουν ίδιο αριθμό + και – καρτών χωρίς να αλλάξει πάλι το σκορ

***Λύσεις και στρατηγικές***

**7**. α) Έπαιξαν 8 γύρους.

<u>Πιθανή απάντηση</u> : Μέτρησαν τον αριθμό των καρτών

<u>Πιθανές στρατηγικές</u>

Α) Κάθε ζευγάρι συν και μείον κάρτας αλληλοαναιρούνται οπότε τις αγνοούν στους υπολογισμούς. Μετρώνται μόνο οι κάρτες που μένουν.

Β) Προσθέτουν όλες τις συν κάρτες και όλες τις μείον και μετά αφαιρούν.

**8**. Υπάρχει μόνο ένας δυνατός συνδυασμός : 3 συν κάρτες και 5 μείον κάρτες

**9**. Μπορούν να τους υπολογίσουν χρησιμοποιώντας δύο στρατηγικές όπως και στην ερώτηση 7. ( Α: +4, Β: +6, Γ: -6, Δ: -2 )

**10.** Η ερώτηση αυτή έχει πολλές διαφορετικές σωστές απαντήσεις που εξαρτώνται από τις στρατηγικές που θα χρησιμοποιηθούν.

<u>Πιθανές στρατηγικές</u>

Α) Μπορούν να βγάλουν τον ίδιο αριθμό συν και μείον καρτών από μία ή περισσότερες ομάδες χωρίς να αλλάξει το σκορ.

Β) Μπορούν να βγάλουν μία μείον κάρτα από κάποια ομάδα αντί να της δώσουν μία συν. Άτυπα χρησιμοποιούν τον κανόνα της αφαίρεσης : *Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου* +1= -(-1)

**11.** Οι μαθητές πρέπει πριν απαντήσουν σ'αυτή την ερώτηση, να συζητήσουν πρώτα τους πόντους που είναι πιθανό να μαζέψει μία ομάδα σε 3 γύρους. Έχοντας 4 πιθανούς συνδυασμούς σωστών και λάθος απαντήσεων, μπορούν να πάρουν 4 διαφορετικά σύνολα πόντων. +3, +1, -1, -3. Οπότε το πιθανό σκορ κάθε ομάδας διαμορφώνεται ως εξής:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Α** | +7 | +5 | +3 | +1 |
| **Β** | +9 | +7 | +5 | +3 |
| **Γ** | - 3 | - 5 | - 7 | - 9 |
| **Δ** | +1 | - 1 | - 3 | - 5 |

Οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν πίνακες για την καλύτερη οργάνωση των δεδομένων τους

## Ερωτήσεις 12-13

Αυτά τα προβλήματα προσδιορίζουν την ικανότητα των μαθητών

1. Να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών και την ιδιότητα της αφαίρεσης ως πρόσθεσης του αντιθέτου.
2. Να χρησιμοποιούν ένα μοντέλο ή ένα πλαίσιο που θα τους βοηθήσει να λύσουν προβλήματα με ακεραίους.
3. Να μοντελοποιούν καταστάσεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας συκεκριμένους χειρισμούς

## Ερωτήσεις 14-16

Οι μαθητές συμπληρώνουν πρώτα έναν πίνακα με πρόσθεση θετικών και αρνητικών αριθμών. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν για το σκοπό αυτό τις συν-μείον κάρτες. Για πρώτη φορά έρχονται σε επαφή με τον τυπικό μαθηματικό συμβολισμό για τη πρόσθεση θετικών αρνητικών αριθμών.

## Ερώτηση 17

Για τη συμπλήρωση των πινάκων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και πάλι οι κάρτες. Ο σκοπός είναι να μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν ακέραιους.

***Λύσεις και στρατηγικές***

Γραμμή 3

<u>+2 πρόσθεσε -5</u>

Βάζουμε πρώτα τις δύο + κάρτες και μετά τις πέντε –

+ +  - - - - -

Διαγράφουμε τα ζευγάρια των θετικών και αρνητικών καρτών

Αποτέλεσμα: - - -  = - 3

Γραμμή 10

<u>+ 3 αφαίρεσε - 4</u>

Βάζουμε πρώτα τις τρεις + κάρτες. Για να μπουν οι τέσσερις μειον κάρτες χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα , βάζουμε τέσσερα ζευγάρια + και – καρτών.

+ + +  + -  + - + -  + -

Κάνουμε ότι λέει η μαθηματική πρόταση, δηλαδή αφαιρούμε τις τέσσερις μείον κάρτες.

Αποτέλεσμα: + + + + + + +

## Ερώτηση 18

Με την άσκηση αυτή οι μαθητές συνηθίζουν να γράφουν στην τυπική μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας τις παρενθέσεις μέσα στις οποίες γράφουν τους θετικούς και αρνητικούς..

## Ερωτήσεις 19 – 21

Οι μαθητές λύνοντας τις ασκήσεις αυτές αποκτούν διαδικαστική γνώση. Για να αφαιρέσουν προσθέτουν τον αντίθετο. Αν θέλουν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις κάρτες τους.

## Ερώτηση 22

Οι ασκήσεις α – ζ δέχονται πολλές διαφορετικές λύσεις. Αν όμως συμπληρωθεί ο ένας από τους δύο αριθμούς που λείπει, τότε δέχονται μοναδική λύση. Αν οι μαθητές έχουν δυσκολία να τις λύσουν μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα πλαίσιο.

## Ερωτήσεις 23 – 24

Οι ερωτήσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές γιατί βοηθούν τους μαθητές να γενικεύσουν. Ήδη οι μαθητές έχουν ανακαλύψει τους κανόνες που διέπουν την πρόσθεση και αφαίρεση των ακεραίων. Στο τέλος της ενότητας έχουν την ευκαιρία να τους διατυπώσουν αφού ανακαλέσουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο εργάστηκαν μέχρι τώρα, καθώς επίσης και να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

# Ενότητα 3η ΤΟ ΑΣΑΝΣΕΡ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Οι μαθητές χρησιμοποιούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς για να διερευνήσουν μια καινούρια κατάσταση: την κίνηση ενός ασανσέρ σε ένα πολυώροφο κτίριο με υπόγειο. Προσθέτουν και αφαιρούν ακεραίους για να προσδιορίσουν κάθε φορά τη θέση του και λύνουν προβλήματα που σχετίζονται με την άνοδο και την κάθοδό του.*

*Σ' αυτό το πλαίσιο η άνοδος συμβολίζεται με + και η κάθοδος με -. Ο αριθμός μετά το σύμβολο + ή – δηλώνει τους ορόφους που ανέβηκε ή κατέβηκε το ασανσέρ. Προσθέτουν τους θετικούς ή αρνητικούς για να βρουν τη θέση του ασανσέρ. Αν το αποτέλεσμα είναι θετικός αυτό σημαίνει ότι κατέληξε σε όροφο πάνω από το ισόγειο, αν είναι αρνητικός στο υπόγειο, ενώ αν είναι μηδέν στο ισόγειο. Άρα τους ακέραιους τους χρησιμοποιούμε όχι μόνο για να περιγράψουμε την ενέργεια, αλλά και για να συμβολίσουμε τη θέση των των ορόφων. Επίσης αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς για να υπολογίσουν τη διαφορά των ορόφων. Χρησιμοπούν πίνακες οι οποίοι περιγράφουν πολλές διαδοχικές κινήσεις, οπότε άτυπα στην αρχή υπολογίζουν ένα άθροισμα με πολλούς προσθετέους. Στη συνέχεια το διατυπώνουν με τυπική μαθηματική έκφραση συζητούν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν και καταλήγουν στην πιο αποτελεσματική.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να:*

- *προσθέτουν και αφαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια*
- *χρησιμοποιούν ακέραιους για να περιγράψουν την άνοδο και την κάθοδο*
- *διερευνούν τους κανόνες υπολογισμού αθροίσματος με πολλούς προσθετέους.*
- *αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.*

Η μητέρα της Άννας με τον 9χρονο αδελφό της Σταμάτη πήγαν για ψώνια σε ένα μεγάλο κατάστημα στο κέντρο της πόλης. Μπαίνοντας στο ισόγειο του καταστήματος συμβουλεύτηκαν το πίνακα δίπλα στο ασανσέρ, όπου έγραφε τι μπορούσες να βρεις σε κάθε όροφο.

**6ος ΟΡΟΦΟΣ : ΕΣΤΙΑΤΟΡΙΟ-ΚΑΦΕΤΕΡΙΑ**
**5ος ΟΡΟΦΟΣ : ΛΕΥΚΑ ΕΙΔΗ- ΔΕΡΜΑΤΙΝΑ ΕΙΔΗ**
**4ος ΟΡΟΦΟΣ : ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ**
**3ος ΟΡΟΦΟΣ : ΠΑΙΔΙΚΑ ΡΟΥΧΑ- ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**2ος ΟΡΟΦΟΣ : ΑΝΔΡΙΚΑ ΡΟΥΧΑ- ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**1ος ΟΡΟΦΟΣ : ΓΥΝΑΙΚΕΙΑ ΡΟΥΧΑ- ΠΑΠΟΥΤΣΙΑ**
**ΙΣΟΓΕΙΟ ΚΑΛΛΥΝΤΙΚΑ- ΚΟΣΜΗΜΑΤΑ**
**1ο ΥΠΟΓΕΙΟ ΕΙΔΗ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΠΕΡΙΠΟΙΗΣΗΣ -ΕΣΩΡΟΥΧΑ**
**2ο ΥΠΟΓΕΙΟ CD- DVD- ΒΙΒΛΙΑ**

Όταν επέστρεψαν στο σπίτι η Άννα ρώτησε τον αδελφό της τί πράγματα αγόρασαν. Αυτός της είπε:

Αρχικά ανεβήκαμε 4 ορόφους, αλλά στη συνέχεια κατεβήκαμε έναν. Πριν φύγουμε πήγαμε να πιούμε ένα χυμό. Όμως η μαμά θυμήθηκε ότι έπρεπε να αγοράσει κάτι ακόμη και έτσι κατεβήκαμε 7 ορόφους.

**1.** Τί αγόρασαν ο Σταμάτης και η μητέρα του;

**2.** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα που δείχνει πως ανεβοκατέβηκαν στους ορόφους

| ΠΑΝΩ | ΚΑΤΩ |
|---|---|
| | |
| | |

**3.** Μπορείτε μελετώντας τις πληροφορίες που σας δίνει ο πίνακας, μπορείτε να εκτιμήσετε αν έκαναν τα τελευταία ψώνια τους σε όροφο πάνω από το ισόγειο ή στο υπόγειο;

**4.** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας + για τους ορόφους που ανέβηκαν και – για τους ορόφους που κατέβηκαν, ακολουθώντας την σειρά των ορόφων από την περιγραφή του Σταμάτη.

| **Άνοδος ή κάθοδος** | αριθμός ορόφων |
|---|---|
| **1η φορά** | |
| **2η φορά** | |
| **3η φορά** | |
| **4η φορά** | |

**α)** Σε ποιον όροφο βρέθηκαν όταν βγήκαν από το ασανσέρ τη 2η φορά;
**β)** Σε ποιον όροφο βρέθηκαν όταν βγήκαν από το ασανσέρ τη 3η φορά;
**γ)** Πόσους ορόφους ανέβηκαν συνολικά και πόσους κατέβηκαν;
**δ)** Σε ποιον όροφο έκαναν τα τελευταία τους ψώνια;

**5.** Ο Σταμάτης και η μητέρα του αφού τέλειωσαν τα ψώνια τους, βγήκαν από το κατάστημα. Ξαναγράψε τον προηγούμενο πίνακα συμπληρώνοντας τα στοιχεία που χρειάζονται ώστε να συμπεριλάβετε στην περιγραφή και αυτή την πληροφορία.

**6.** Θα μπορούσε το ταξίδι με το ασανσέρ να γίνει και αντίστροφα; Γιατί;

**7.** Ας υποθέσουμε ότι οι παρακάτω πίνακες περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις στο ίδιο κατάστημα. Οι πελάτες πήραν το ασανσέρ από το ισόγειο.

**Πίνακας 1**

| αριθμός ορόφων |
|---|
| **+ 1** |
| **- 2** |
| **+ 2** |
| **+ 3** |
| **- 4** |
| **- 2** |

**Πίνακας 2**

| αριθμός ορόφων |
|---|
| **+ 3** |
| **- 2** |
| **+ 2** |
| **+ 1** |
| **- 4** |
| **- 1** |

**α)** Βρέθηκαν ποτέ στον ίδιο όροφο;

**β)** Να εκτιμήσετε αν οι πελάτες που χρησιμοποίησαν το ασανσέρ όπως περιγράφεται από τον πίνακα 2, θα βρεθούν ψηλότερα ή χαμηλότερα απ' αυτούς του πίνακα 1.

**γ)** Σε ποιον όροφο θα βρεθούν τελικά οι πελάτες σε κάθε περίπτωση;

Για να διευκολυνθείτε στους υπολογισμούς μπορείτε να ελέγξετε αν υπάρχει άνοδος και κάθοδος ίσου αριθμού ορόφων.

**8.** Χρησιμοποιήστε μαθηματική έκφραση που να συμβολίζει την κατάσταση που περιγράφει ο κάθε πίνακας. Σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσετε τη θέση που θα βρεθεί τελικά το ασανσέρ.

**9.** Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τον υπολογισμό αθροίσματος θετικών και αρνητικών με πολλούς προσθετέους.

## Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

Το ασανσέρ που ανεβοκατεβαίνει σε ορόφους αποτελεί ένα πλαίσιο που μπορεί να περιγραφεί με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Σ' αυτό το πλαίσιο η ενέργεια «ανεβαίνω» συμβολίζεται με + και η ενέργεια «κατεβαίνω» με -. Το αποτέλεσμα της ενέργειας μπορεί να είναι είτε θετικός αριθμός (όροφος), είτε αρνητικός (υπόγειο), είτε μηδέν (ισόγειο)

### Ερωτήσεις 1-2

Οι μαθητές κάνουν παρατηρήσεις,συνδέσεις και υπολογισμούς και έτσι εξοικειώνονται με το καινούριο πλαίσιο. Αρχικά κωδικοποιούν τις πληροφορίες χρησιμοποιώντας άτυπα θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Επίσης αντιλαμβάνονται ότι το ισόγειο αντιστοιχεί στον αριθμό μηδέν.

### Ερώτηση 3

Σ' αυτή την ερώτηση ζητάμε από τους μαθητές να κάνουν μια εκτίμηση. Πρέπει δηλαδή να μπορούν, χωρίς ακριβείς υπολογισμούς, να βρουν ποια περίπου είναι η θέση του ασανσέρ.

### Ερώτηση 4

**α, β, δ** Χρησιμοποιούν τα πρόσημα +, - για να περιγράψουν την άνοδο ή την κάθοδο και στη συνέχεια προσθέτουν διαδοχικά τους ακεραίους. Το πρόσημο του αθροίσματος που υπολογίζουν δηλώνει και τη θέση του ορόφου.

**γ)** Προσθέτουν χωριστά τους τους θετικούς και χωριστά τους αρνητικούς.

### Ερώτηση 5

Οι μαθητές χρησιμοποιούν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών ( +2 – 2 = 0 ). Αφού βρέθηκαν στο $2^{ο}$ υπόγειο (-2), και πρέπει να πάνε στο ισόγειο (0) για να φύγουν από το κατάστημα, άρα πρέπει να ανέβουν δύο ορόφους (+2).

### Ερώτηση 6

Για να γίνει το ταξίδι αντίστροφα θα πρέπει να αλλάξουν όλα τα πρόσημα στον πίνακα. Επομένως το πρώτο στοιχείο του πίνακα θα είναι το -4 που δηλώνει κάθοδο 4 ορόφους. Οι μαθητές θα πρέπει να αιτιολογήσουν γιατί δεν μπορούν να αλλάξουν τα πρόσημα σ' αυτό το πλαίσιο.

### Ερώτηση 7

Στην ερώτηση αυτή θα πρέπει να παρουσιασθούν και να συζητηθούν οι διαφορετικές στρατηγικές που χησιμοποίησαν οι μαθητές.

**α)** Για να απαντήσουν στην ερώτηση πρέπει να ξεκινήσουν από το πρώτο στοιχείο του πίνακα και να προχωρούν υπολογίζοντας ένα μερικό άθροισμα κάθε φορά.

**β)** Στην περίπτωση του πίνακα 1 θα βρεθούν στη θέση -2, ενώ στην περίπτωση του πίνακα 2 θα βρεθούν στη θέση -1.

**γ)** Μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις εξής στρατηγικές:

Πιθανές στρατηγικές

Α) Μπορούν να ξεκινήσουν από το πρώτο στοιχείο του πίνακα και να προχωρούν υπολογίζοντας ένα μερικό άθροισμα κάθε φορά.

Β) Προσθέτουν όλους τους θετικούς χωριστά, όλους τους αρνητικούς, κρατούν τα μερικά αθροίσματα και στο τέλος αφαιρούν.

Γ) Πρώτα διαγράφουν τους αντίθετους και μετά ακολουθούν τη στρατηγική Β

Πρέπει να συζητηθεί στην τάξη ποιός τρόπος υπολογισμού είναι πιο αποτελεσματικός, δηλαδή δίνει γρηγορότερα και ευκολότερα σωστά αποτελέσματα.

## Ερώτηση 8

Οι μαθητές οδηγούνται από τους πίνακες στην τυπική μαθηματική έκφραση της μορφής +1 -2 +2 +3 -4 -2. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος μπορούν να χρησιμοποιήσουν και τις τρεις προηγούμενες στρατηγικές.

Ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών πρώτα, επειδή θα έχουν λιγότερους προσθετέους.

Επίλυση με την στρατηγική Γ: +1 -2 +2 +3 -4-2 = +1 +3 -4 -2 = + 4 – 6 = -2

Για να καταλήξουν ότι + 4 – 6 = -2, μπορούν να ανακαλέσουν το πλαίσιο ( από το ισόγειο (0) ανέβηκαν 4 ορόφους (+4) και κατέβηκαν 6 (-6). Άρα βρέθηκαν στο $2^{ο}$ υπόγειο (-2).

## Ερώτηση 9

Οι μαθητές γενικεύουν διατυπώνοντας τους κανόνες-τεχνικές υπολογισμού αθροίσματος πολλών προσθετέων που είναι η περιγραφή των προηγούμενων στρατηγικών..

# Ενότητα 4η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν σε μια πόλη της Βόρειας Ελλάδας κυρίως κατά τους χειμερινούς μήνες, αποτελούν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διερευνώνται οι σχέσεις διάταξης θετικών και αρνητικών αριθμών και οι πράξεις τους. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απέκτησαν στην πρόσθεση και αφαίρεση και προχωρούν αντιμετωπίζοντας καταστάσεις και προβλήματα που επιλύονται με πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Συγκρίνουν και διατάσσουν μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες ενός εξαμήνου χρησιμοποιώντας τα σύμβολα < και >. Συγκρίνουν τις θερμοκρασίες που σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια δύο εβδομάδων του Ιανουαρίου, είτε κατασκευάζοντας συγκριτικό πίνακα, είτε χρησιμοποιώντας γραφικές παραστάσεις, είτε υπολογίζοντας τη μέση τιμή. Υπολογίζοντας όμως τη μέση τιμή για τις ελάχιστες θερμοκρασίες, επειδή το άθροισμα θα είναι αρνητικός αριθμός, άτυπα θα κάνουν διαίρεση αρνητικού με θετικό. Θα πρέπει επίσης να υπολογίσουν τη μέση θερμοκρασία ενός ολόκληρου μήνα, ακολουθώντας διάφορες στρατηγικές, σε μία εκ των οποίων πρέπει να κάνουν πολλαπλασιασμό αρνητικού με θετικό αριθμό. Υπολογίζουν παραστάσεις με πολλαπλασιασμό και πρόσθεση μέσα στο πλαίσιο και στη συνέχεια διερευνούν τους αντίστοιχους κανόνες.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν να:*

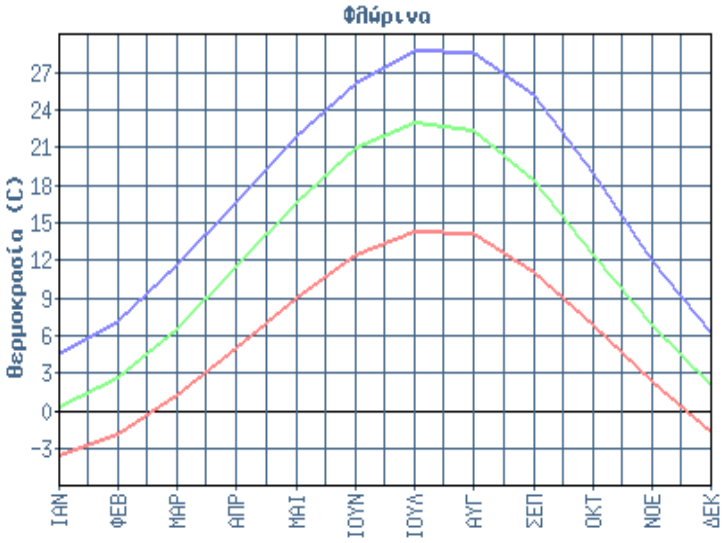
- *Να αναγνωρίζουν τις σχέσεις διάταξης και να χρησιμοποιούν τα σύμβολα της ανισότητας < , >.*
- *Άτυπα να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να διερευνούν τους κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης θετικού και αρνητικού με θετικό αριθμό.*
- *Να διερευνούν τους κανόνες υπολογισμού παράστασης με πολλαπλασιασμό και πρόσθεση θετικών και αρνητικών.*
- *Να αναγνωρίζουν και να εφαρμόζουν την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών.*
- *Να χρησιμοποιούν την γνώση που απέκτησαν για την πρόσθεση και αφαίρεση.*

Οι μέσες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν στην Φλώρινα το πρώτο εξάμηνο του 2003 είναι οι εξής, όπως δίνονται από την Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία

| | ΙΑΝ | ΦΕΒ | ΜΑΡ | ΑΠΡ | ΜΑΙ | ΙΟΥΝ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΜΕΓΙΣΤΗ ΘΕΡΜ. ( C° )** | 5 | 7 | 12 | 17 | 22 | 26 |
| **ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΡΜ.( C°** | - 4 | - 2 | 1 | 5 | 9 | 13 |

**1.α)** Ποιός μήνας ήταν ψυχρότερος και ποιος θερμότερος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

**β)** Να γράψετε τις ελάχιστες θερμοκρασίες από την μικρότερη στην μεγαλύτερη. Ήταν η θερμοκρασία πάνω από 0° κάθε μήνα;




**2.** Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα.

**3.** Ποια είναι η μέση ελάχιστη θερμοκρασία του τριμήνου Ιανουαρίου – Μαρτίου και ποια η μέση μέγιστη;

Τον Ιούνιο η μέγιστη θερμοκρασία ήταν 26º και τον Απρίλιο 17º. Για να δείξουμε ότι ο Ιούνιος ήταν θερμότερος από τον Απρίλιο γράφουμε 26º > 17º.

**4.** Να γράψετε τρεις παρόμοιες αληθείς προτάσεις παίρνοντας πληροφορίες από τον πίνακα.

Η ελάχιστη θερμοκρασία τον Ιανουάριο ήταν χαμηλότερη από την ελάχιστη του Μαρτίου. Αυτό το συμβολίζουμε με τη σχέση – 4º < 1º.

**5.** Ισχύει ότι και η ελάχιστη θερμοκρασία του Φεβρουαρίου είναι μικρότερη από την ελάχιστη του Μαρτίου;

**6.** Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Εξηγήστε τι σημαίνει η κάθε μία χρησιμοποιώντας τον πίνακα των θερμοκρασιών.

**α.** -4 < -2 **β.** -2 > 1 **γ.** -4 < 1 **δ.** -2 < 5

**7.** Να συγκρίνετε τη μέγιστη θερμοκρασία κάθε μήνα με την μέση μέγιστη που υπολογίσατε στην ερώτηση 3.

Κατά τη διάρκεια δύο εβδομάδων του Ιανουαρίου σημειώθηκαν οι παρακάτω θερμοκρασίες:

1η εβδομάδα

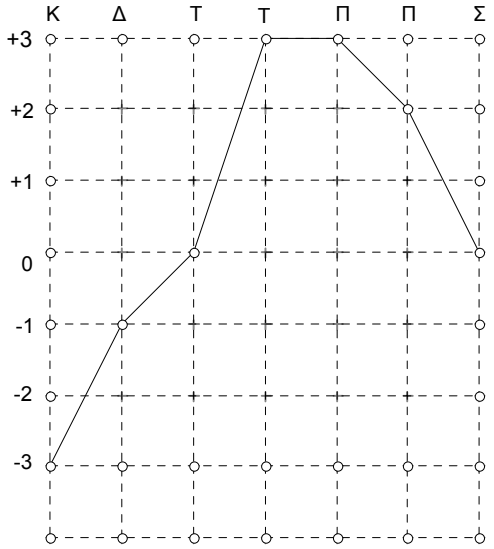
| | **ΚΥΡ** | **ΔΕΥ** | **ΤΡΙ** | **ΤΕΤ** | **ΠΕΜ** | **ΠΑΡ** | **ΣΑΒ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΜΕΣΗ ΘΕΡΜ. ( Cº )** | **- 3** | **- 1** | **0** | **3** | **3** | **2** | **0** |
| **ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΡΜ.( Cº)** | **- 7** | **- 6** | **- 4** | **- 2** | **- 3** | **- 4** | **- 5** |

2η εβδομάδα

| | **ΚΥΡ** | **ΔΕΥ** | **ΤΡΙ** | **ΤΕΤ** | **ΠΕΜ** | **ΠΑΡ** | **ΣΑΒ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ΜΕΣΗ ΘΕΡΜ. ( Cº )** | **- 1** | **1** | **2** | **0** | **0** | **2** | **3** |
| **ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΘΕΡΜ.( Cº)** | **- 5** | **- 4** | **- 2** | **- 4** | **- 3** | **- 1** | **-2** |

**8.** **α.** Να κατασκευάσετε πίνακα με τις μέσες θερμοκρασίες και των δύο εβδομάδων.
**β.** Να συγκρίνετε τις μέσες θερμοκρασίες και των δύο εβδομάδων.
Ποια εβδομάδα ήταν θερμότερη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Επίσης εκτός από τον πίνακα σας δίνεται και η γραφική παράσταση των μέσων θερμοκρασιών της 1ης εβδομάδας.
Μπορείτε να την συμπληρώσετε και με τις θερμοκρασίες της 2ης εβδομάδας και να την χρησιμοποιήσετε για να απαντήσετε την ερώτηση.




.

**γ.** Υπήρξαν ημέρες κατά την 1η εβδομάδα που σημειώθηκε ολικός παγετός;

**9.** Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία της 2ης εβδομάδας ήταν -3º. Να γράψετε μία άλλη σειρά πιθανών θερμοκρασιών της εβδομάδας αυτής με την ίδια μέση ελάχιστη θερμοκρασία.

Οι μέσες θερμοκρασίες για όλο τον Ιανουάριο δίνονται από τον πίνακα:

| ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | - 1 | -2 | 0 | +2 | +1 |
| - 3 | - 1 | 0 | +3 | +3 | +2 | 0 |
| - 1 | +1 | +2 | 0 | 0 | +2 | +3 |
| - 1 | - 2 | - 3 | - 5 | - 2 | - 3 | - 2 |
| +2 | +4 | +3 | +4 | +5 | | |

Ο Δημήτρης και η Μαρία θέλουν να υπολογίσουν τη μέση θερμοκρασία του μήνα. Ο Δημήτρης ξεκινά προσθέτοντας όλες τις θερμοκρασίες με τη σειρά ενώ η Μαρία χρησιμοποιεί άλλη μέθοδο:

1. Γράφει πρώτα όλες τις παρατηρηθείσες διαφορετικές θερμοκρασίες από τον πίνακα
2. Κάτω ή δίπλα σε κάθε μία σημειώνει με γραμμές πόσες φορές εμφανίζεται

**10.** Η Μαρία ήδη σημείωσε τις θερμοκρασίες της πρώτης εδδομάδας. Συνεχίστε να σημειώνετε για όλες τις ημέρες του μήνα, μετρήστε πόσες φορές εμφανίζεται ο κάθε αριθμός και γράψτε το στην τελευταία σειρά του πίνακα.

| Θερμοκρασία | **-3** | **-2** | **-1** | **0** | **+1** | **+2** | **+3** | **+4** | **+5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | **\|** | **\|** | **\|** | **\|** | | | |
| Μέτρηση | | | | | | | | | |

**11.** Να εξηγήσετε πως πρέπει να συνεχίσουν η Μαρία και ο Δημήτρης ώστε να υπολογίσουν τη μέση θερμοκρασία του μήνα.

**12.** Μπορείτε να βρείτε μία άλλη μέθοδο για να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία; Ποια μέθοδος σας αρέσει περισσότερο και γιατί;

Η Μαρία αφού συμπλήρωσε τον πίνακα, συνεχίζει πολλαπλασιάζοντας την θερμοκρασία επί τη μέτρηση, δηλαδή πόσες φορές σημειώθηκε η συγκεκριμένη θερμοκρασία μέσα στο μήνα. Για την πρώτη στήλη γράφει:

**( - 3) • 3 = ( - 3) + ( - 3) + ( - 3) =**

**13. α.** Να υπολογίσετε το άθροισμα. Τί πρόσημο έχει;
**β.** Να κάνετε ανάλογους υπολογισμούς για όλες τις στήλες του πίνακα.
**γ.** Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία.
**δ.** Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με τη μέση θερμοκρασία του Ιανουαρίου όπως περιγράφεται στη γραφική παράσταση στη σελίδα 18.

**14.** Καταγράψαμε τις μέγιστες θερμοκρασίες ενός δεκαημέρου. Τις τέσσερις ημέρες ήταν -2º, τρεις μέρες ήταν -3º, μία μέρα ήταν -1º και τις υπόλοιπες δύο ήταν +3º. Για να υπολογίσουμε τη μέση θερμοκρασία ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1º : Υπολογίζουμε την παράσταση
**( - 2) • 4 + ( - 3) • 3 + ..... =**
2º : Διαιρούμε το άθροισμα που υπολογίσαμε με .....

Συμπληρώστε τα κενά και κάνετε τους απαραίτητους υπολογισμούς ώστε να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία.

**15.** Καταγράψαμε τις ελάχιστες θερμοκρασίες δύο εβδομάδων του Φεβρουαρίου. Τις πέντε ημέρες ήταν -7º, τρεις ημέρες ήταν -4º, μία μέρα ήταν 0º, τρεις μέρες ήταν +2º και δύο μέρες ήταν -2º. Να υπολογίσετε την μέση θερμοκρασία των δύο εβδομάδων ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου προβλήματος.

**16.** Στα προηγούμενα προβλήματα υπολογίσατε αρκετές φορές το γινόμενο θετικού με αρνητικό. Τί παρατηρείτε για το πρόσημο του γινομένου;

**17.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες που υπολογίζουν μέσες θερμοκρασίες μιας εβδομάδας, ενός μήνα (Απρίλη), ενός δεκαημέρου και ενός δεκαπενθήμερου.

**α.** εβδομάδα : - 14 : 7 = ..... **β.** μήνας : + 180 : .... = .....

**γ.** δεκαήμερο : - 5 : ..... = ..... **δ.** 15/μερο : - 12 : ..... = .....

Τί παρατηρείτε για το πρόσημο του πηλίκου;
Να διατυπώσετε κανόνα για την διαίρεση θετικού με θετικό αριθμό και αρνητικού με θετικό.

**18.** Να γράψετε ένα πρόβλημα που για να λυθεί θα πρέπει να κάνουμε πολλαπλασιασμό θετικού και αρνητικού αριθμού.

**19.** Να γράψετε ένα πρόβλημα που για να λυθεί θα πρέπει να κάνουμε την πράξη της άσκησης 17α

**20.** Έχετε παρατηρήσει ότι μερικές φορές για τους θετικούς αριθμούς παραλείπουμε το πρόσημο συν; Κάνουμε το ίδιο και για τους αρνητικούς; Να διατυπώσετε έναν κανόνα

# Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

## Ερώτηση 1

Συζητάμε με τους μαθητές για την κλίμακα Κελσίου. Υπενθυμίζουμε ότι το νερό παγώνει στους 0º και βράζει στους 100º. Οι μαθητές πρέπει επίσης να συζητήσουν ότι -2º είναι μικρότερη θερμοκρασία από 0º και γενικά για τις θερμοκρασίες κάτω από το μηδέν, ότι όσο μεγαλώνει ο αριθμός κατά απόλυτη τιμή, τόσο μικρότερη θερμοκρασία έχουμε.

## Ερωτήσεις 2-3

Για να υπολογίσουν τη μέση τιμή δύο αριθμών τους προσθέτουν και διαιρούν με δύο. Στην ερώτηση 3 η μέση ελάχιστη θερμοκρασία τριμήνου είναι αρνητικός αριθμός. Για πρώτη φορά οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα πρόβλημα που ο διαιρετέος είναι αρνητικός αριθμός.

## Ερωτήσεις 4-7

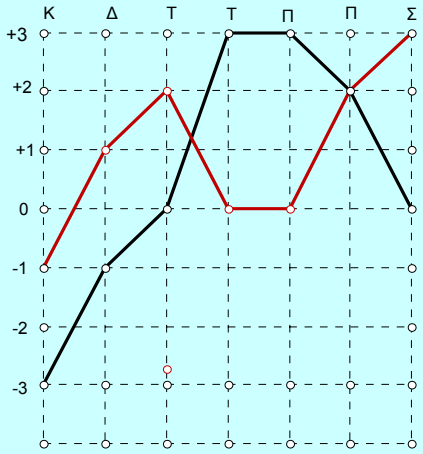
Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα σύμβολα της ανισότητας <, >. Σ' αυτό το σημείο διδάσκουμε στους μαθητές την ευθεία των ακεραίων αριθμών και τους ενθαρρύνουμε να την χρησιμοποιούν για τις συγκρίσεις. Για την ερώτηση 7 επεκτείνουμε την ευθεία των ακεραίων και στους ρητούς αριθμούς.

## Ερώτηση 8

Στην ερώτηση αυτή αναμένουμε διαφορετικές απαντήσεις και αιτιολογήσεις. Ο συγκριτικός πίνακας που θα κατασκευάσουν είναι ο εξής:

| | ΚΥΡ | ΔΕΥ | ΤΡΙ | ΤΕΤ | ΠΕΜ | ΠΑΡ | ΣΑΒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ΘΕΡΜΟΚΡ. 1ης εβδομάδας | - 3 | -1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| ΘΕΡΜΟΚΡ. 2ης εβδομάδας | - 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 3 |

Κάποιοι μαθητές μπορεί να απαντήσουν ότι από τον πίνακα δεν μπορούν να αποφασίσουν ποια εβδομάδα ήταν θερμότερη. Πιθανώς να καταφύγουν στην γραφική παράσταση την οποία θα συμπληρώσουν και για τα δεδομένα της δεύτερης εβδομάδας.



Οι μαθητές από τον πίνακα και τη γραφική παράσταση θα παρατηρήσουν ότι:

- Οι θερμοκρασίες των μεσαίων ημερών (Τετάρτη-Πέμπτη) της πρώτης εβδομάδας είναι μεγαλύτερες απ' αυτές της δεύτερης εβδομάδας.
- Οι θερμοκρασίες στην αρχή και στο τέλος της πρώτης εβδομάδας είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες της δεύτερης εβδομάδας.

Στη συνέχεια θα τους ζητήσουμε να υπολογίσουν την μέση τιμή της θερμοκρασίας κάθε εβδομάδας και να τις συγκρίνουν.

$1^{η}$ εβδομάδα : ( -3 ) + ( -1 ) + 0 + 3 + 3 + 2 + 0 = 4
μέση θερμοκρασία : 4 / 7
$2^{η}$ εβδομάδα : ( -1) + 1 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2 = 7
μέση θερμοκρασία : 7 / 7 = 1

Επειδή οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί την Στατιστική θα πρέπει να γίνει συζήτηση για τον τρόπο υπολογισμού και τις ιδιότητες της μέσης τιμής. Η μέση τιμή μας δίνει ποια εβδομάδα είναι θερμότερη, αλλά δεν έχουμε πληροφορία για την κατανομή των θερμοκρασιών, δηλαδή την εναλλαγή θερμοκρασίας από μέρα σε μέρα, ούτε και για την μέγιστη και ελάχιστη θερμοκρασία της εβδομάδας. Διαιρώντας το συνολικό άθροισμα των θερμοκρασιών με το 7, κάνουμε ίση «μοιρασιά» της θερμοκρασίας και στις επτά ημέρες της εβδομάδας. Επειδή η μέση τιμή θα χρησιμοποιηθεί και στη διαίρεση αρνητικού με θετικό πρέπει ο καθηγητής να σιγουρευτεί ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια πριν προχωρήσει στα επόμενα.

## Ερώτηση 9

Οι απαντήσεις θα είναι διαφορετικές γιατί οποιοδήποτε σύνολο 7 θερμοκρασιών με άθροισμα -21 θα έχει μέση τιμή -21/ 7 = -3

## Ερωτήσεις 10, 11, 12

Εδώ υπολογίζουν την μέση θερμοκρασία ενός μήνα, δηλαδή τη μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις εξής στρατηγικές:

<u>Πιθανές στρατηγικές</u>

1) Προσθέτουν όλα τα δεδομένα και διαιρούν με 31.
2) Πρώτα διαγράφουν τους αντίθετους αριθμούς, μετά προσθέτουν και στο τέλος διαιρούν με 31.
3) Αφού συμπληρώσουν τον πίνακα μετρούν πόσες φορές εμφανίζεται κάθε θερμοκρασία και πολλαπλασιάζουν τον αριθμό αυτό (Μέτρηση) με την αντίστοιχη θερμοκρασία. Προσθέτουν όλα τα γινόμενα που βρήκαν και το άθροισμα το διαιρούν με 31.

Στο σενάριο στο οποίο αναφέρονται οι ερωτήσεις 10,11,12 περιγράφονται, όχι πλήρως, οι στρατηγικές 1,3. Αναμένουμε από τους μαθητές στην ερώτηση 12 να χρησιμοποιήσουν την στρατηγική 2.

## Ερώτηση 13

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές υπολογίζουν την μέση θερμοκρασία ακολουθώντας την στρατηγική 3. Ανακαλείται η απλούστερη μορφή του ορισμού της έννοιας του

πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, ώστε να διευκολυνθούν να υπολογίσουν το πρόσημο. Οι μαθητές που δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν συντομότερη μέθοδο, ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση

## Ερωτήσεις 14, 15

Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία μία πραγματική κατάσταση να την εκφράσουν με μαθηματική παράσταση που περιέχει πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις. Ακολουθώντας από ένα σημείο και μετά την $3^{η}$ στρατηγική πρώτα θα κάνουν τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις. Αν έχουν δυσκολία θα χρησιμοποιήσουν και πάλι το προηγούμενο πλαίσιο.

## Ερώτηση 16

Οι μαθητές παρατηρούν τα πρόσημα και με επαγωγικό συλλογισμό μπορούν να γενικεύσουν. Ο κανόνας που μπορεί να διατυπωθεί είναι:
*΄Οταν πολλαπλασιάζουμε θετικό με αρνητικό αριθμό το γινόμενο είναι αρνητικός.*

## Ερώτηση 17

Στην ερώτηση αυτή χρησιμοποιείται για πρώτη φορά ο τυπικός συμβολισμός για την διαίρεση θετικών και αρνητικών με θετικό αριθμό. Οι μαθητές γενικεύουν και διατυπώνουν τον αντίστοιχο κανόνα:
*Όταν διαιρούμε θετικό με θετικό αριθμό το πηλίκο είναι θετικός, ενώ όταν διαιρούμε αρνητικό με θετικό το πηλίκο είναι αρνητικός.*

## Ερωτήσεις 18, 19

Εδώ οι μαθητές καλούναι όχι να λύσουν αλλά να διατυπώσουν προβλήματα. Αυτό προϋποθέτει βαθιά κατανόηση και της έννοιας του θετικού και αρνητικού αριθμού και των πράξεών τους.

## Ερώτηση 20

Επισημαίνεται η αναγκαιότητα της χρήσης του αρνητικού προσήμου για να δηλωθεί ένας αρνητικός αριθμός.

# Ενότητα 5η ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Οι μαθητές πολλαπλασιάζουν και διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, υπολογίζουν παραστάσεις, βγάζουν παρενθέσεις, χρησιμοποιώντας και νέα πλαίσια και πλαίσια μέσα στα οποία εργάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες.*
*Αρχικά, διατυπώνουν προβλήματα με τη μέση θερμοκρασία από αριθμητικές παραστάσεις με πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Στη συνέχεια συζητούν, αν προτάσεις για τον υπολογισμό προσήμου στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, είναι αληθείς ή ψευδείς. Το πλαίσιο το οποίο εισάγεται σ΄αυτή την ενότητα είναι η βαθμολογία σε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής. Όλες οι απαντήσεις παίρνουν μονάδες θετικές ή αρνητικές. Οι μαθητές υπολογίζουν την τελική βαθμολογία υπολογίζοντας παραστάσεις με πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Σε περίπτωση λάθους καταχώρησης μονάδων από τον καθηγητή, διορθώνουν τον βαθμό, υπολογίζοντας παραστάσεις και διατυπώνοντας αντίστοιχα προβλήματα, που έχουν τώρα και αφαίρεση. Οι θετικές και αρνητικές κάρτες επανέρχονται για να χρησιμοποιηθούν ως ένα δεύτερο πλαίσιο για τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση ακεραίων. Αυτές όμως αποτελούν και το μοναδικό πλαίσιο για τη διαίρεση αρνητικού με αρνητικό μέσα από μία διαίρεση μέτρησης. Στο ίδιο πλαίσιο, σε μία διαίρεση μερισμού, διαιρούν αρνητικό με θετικό ακέραιο. Στο τέλος διερευνώνται και διατυπώνονται οι κανόνες προσήμου για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Τέλος, το ίδιο πλαίσιο χρησιμοποιούμε για να βγάλουμε παρενθέσεις και να υπολογίσουμε αριθμητικές παραστάσεις με πρόσθεση και αφαίρεση. Επίσης διερευνώνται και διατυπώνονται οι αντίστοιχοι κανόνες προσήμου.*

***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν:*

- *Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια*
- *Να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.*
- *Να διερευνούν τους κανόνες πολλαπλασιασμού θετικού και αρνητικού, με θετικό και αρνητικό αριθμό.*
- *Να διερευνούν τους κανόνες διαίρεσης αρνητικού με θετικό και αρνητικού με αρνητικό αριθμό.*
- *Να διερευνούν τους κανόνες υπολογισμού παράστασης με πολλαπλασιασμό, πρόσθεση και αφαίρεση θετικών και αρνητικών.*
- *Να μπορούν να διατυπώνουν προβλήματα για παραστάσεις που περιέχουν και τις τέσσερις πράξεις των ακεραίων*
- *Να κάνουν απαλοιφή παρενθέσεων σε αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων και να διατυπώνουν τους αντίστοιχους κανόνες.*
- *Να ανακαλύψουν την μεταβατική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους ακεραίους.*

*Και τελικά*
*Να μπορούν να επιλύουν προβλήματα εκτός πλαισίου σε ένα πιο αφηρημένο επίπεδο.*

Η Μαρία, στην προηγούμενη ενότητα, για να υπολογίσει τη μέση θερμοκρασία κάνει πρώτα την καταμέτρηση θερμοκρασιών που έχουν την ίδια τιμή.

**1.** Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα με θερμοκρασίες για την παράσταση:

**3 • ( - 1 ) + 4 • ( - 3 ) + 2 • ( - 4 )**

**2.** Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα με θερμοκρασίες για την πράξη **– 36 : 15** και να υπολογίσετε το πηλίκο.

**3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογίσετε την απάντησή σας (πλαίσιο ή αντιπαράδειγμα)

**α.** θετικός · θετικό = θετικός
**β.** αρνητικός · θετικό = θετικός
**γ.** θετικός **:** θετικό = αρνητικός
**δ.** αρνητικός **:** θετικό = αρνητικός
**ε.** αρνητικός · θετικό = αρνητικός

**4.** Να γράψετε δύο ανάλογες προτάσεις ( με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση), μία αληθή και μία ψευδή.

Στην δεύτερη ενότητα χρησιμοποιήσατε κάρτες για να υπολογίσετε το σύνολο των πόντων σε ένα παιχνίδι. Μία συν κάρτα αντιστοιχούσε στον +1 πόντο και μία μείον κάρτα στον –1 πόντο.

**5.** Πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τις συν και μείον κάρτες για να εξηγήσετε τι σημαίνει **3 • ( - 4 )** και **2 • ( + 3 )**;

## *Πολλαπλή επιλογή*

Ο καθηγητής δίνει στους μαθητές ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής. Επειδή δεν θέλει να επιλέγουν απαντήσεις στην τύχη, δίνει συν και μείον μονάδες για κάθε απάντηση.

σωστή απάντηση: + 4 μονάδες
λάθος απάντηση: - 2 μονάδες
μή απάντηση: + 1 μονάδα

Το διαγώνισμα έχει 20 ερωτήσεις που πρέπει να απαντηθούν.

**6.** **α.** Ποιος είναι ο μεγαλύτερος συνολικός αριθμός μονάδων που μπορεί να πάρει ένας μαθητής;
**β.** Ποιος είναι ο μικρότερος συνολικός αριθμός μονάδων που μπορεί να πάρει ένας μαθητής;
**γ.** Πόσες μονάδες θα πάρει ένας μαθητής αν απαντήσει 10 ερωτήσεις σωστά και 10 λάθος;
**δ.** Μπορεί ένας μαθητής να πάρει συνολικά 0 μονάδες;

**7.** Η Κατερίνα απάντησε λάθος σε 7 ερωτήσεις ενώ οι υπόλοιπες 13 ήταν σωστές.
**α.** Πόσες μείον μονάδες πήρε; Να εξηγήσετε πως το υπολογίσατε.
**β.** Μπορείτε να υπολογίσετε πόσες μονάδες πήρε τελικά η Κατερίνα;

**8.** Ο Γιάννης απάντησε λάθος σε τρεις ερωτήσεις και δεν απάντησε σε τέσσερις. Πόσες μονάδες πήρε τελικά; Να δείξετε πως το υπολογίσατε.

Ο καθηγητής ξανακοιτάζοντας το διαγώνισμα του Χρήστου διαπίστωσε ότι είχε κάνει ένα λάθος στη βαθμολογία. Δύο λάθος απαντήσεις τις βαθμολόγησε ως σωστές. Έκανε την διόρθωση γράφοντας δίπλα στο βαθμό: **- 2 • 4 + 2 • ( - 2 )**

**9. α.** Να εξηγήσετε γιατί ο καθηγητής έγραψε αυτή την παράσταση.
**β.** Πόσο άλλαξε η βαθμολογία του Χρήστου; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Στη συνέχεια ο καθηγητής αφού έγραψε τις σωστές απαντήσεις στον πίνακα ζήτησε από όλα τα παιδιά να ελέγξουν τις απαντήσεις τους. Η Κατερίνα βρήκε και αυτή λάθος και φώναξε τον καθηγητή να το δει. Αυτός είπε στην τάξη:

Έχω σημειώσει στο διαγώνισμα της Κατερίνας 7 λάθος απαντήσεις και τις υπόλοιπες σωστές. Όμως τρεις από τις σωστές απαντήσεις της, βαθμολογήθηκαν ως λάνθασμένες.

**10. α.** Να γράψετε μία παράσταση που να διορθώνει την βαθμολογία.
**β.** Ποιος είναι ο τελικός βαθμός της Κατερίνας;

**11. α.** Να διατυπώσετε ένα ανάλογο πρόβλημα για την παράσταση

$$45 + 4 \bullet ( - 2 ) - 3 \bullet ( + 4 ) - 1 \bullet ( + 1 )$$

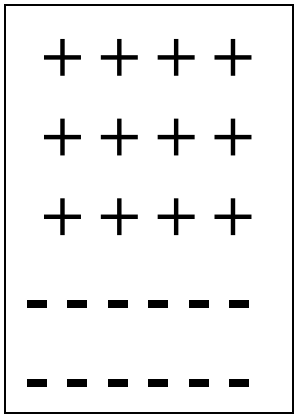
και να την υπολογίσετε.
**β.** Μπορούμε να γράψουμε διαφορετικά την παράσταση;

Ο καθηγητής δίνει το παρακάτω πρόβλημα στους μαθητές:
Ο Γιάννης είχε 35 μονάδες αλλά βαθμολογήθηκε λάθος σε επτά ερωτήσεις. Στις τρεις πήρε -2 μονάδες και στις υπόλοιπες +1 μονάδα, ενώ και οι επτά ήταν σωστές.

**12.** Να γράψετε δύο παραστάσεις που να υπολογίζουν την τελική βαθμολογία.

## *Θετικές και αρνητικές κάρτες*

Για τις επόμενες ερωτήσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ξανά τις συν και μείον κάρτες. Ο κάθε ένας πρέπει να έχει 12 θετικές κάρτες και 12 αρνητικές.




**13. α.** Πόσους πόντους έχετε συνολικά;
**β.** Να αφαιρέσετε τρεις ομάδες από τέσσερις θετικές κάρτες. Να γράψετε μία μαθηματική παράσταση που να περιγράφει το γεγονός.
**γ.** Έχετε την παράσταση **– 3 • ( - 4 ).** Τί περιγράφει αυτή η παράσταση; Να την υπολογίσετε.

**14.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις **– 3 • ( + 2 )** και **+ 3 • ( - 2 )**
Τί παρατηρείτε; Να κάνετε το ίδιο για τις παραστάσεις **– 2 • ( + 4)** και **+ 2 • ( - 4 )**
Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

**15.** Να κάνετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θετικές και αρνητικές κάρτες.

**α.** $-2 \cdot (-3)$ **β.** $-3 \cdot (+3)$ **γ.** $+4 \cdot (-2)$ **δ.** $-2 \cdot (-5)$
**ε.** $+2 \cdot (+6)$ **ζ.** $-2 \cdot (-6)$ **η.** $-5 \cdot (+8)$ **θ.** $-2 \cdot (+14)$

**16.** Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω κανόνες.
1. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο θετικούς το γινόμενο είναι .....
2. Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο αρνητικούς το γινόμενο είναι .....
3. Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν θετικό και έναν αρνητικό το γινόμενο είναι .....

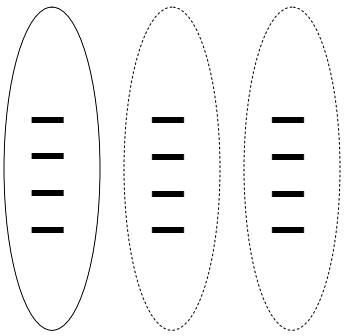
**17.** Στους παρακάτω πίνακες μερικά αποτελέσματα έχουν συμπληρωθεί. Να υπολογίσετε και να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα

| + | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | |
| -1 | | | | | +1 |
| 0 | | | | | |
| +1 | | | +1 | | |
| +2 | | | | | |

| • | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | |
| -1 | +2 | | | | |
| 0 | | | | | |
| +1 | | | | | +2 |
| +2 | | | | | |

Χωρίσαμε τις 12 αρνητικές κάρτες σε ομάδες των τεσσάρων αρνητικών καρτών η κάθε μία. Αυτη την κατάσταση την περιγράφει η παράσταση:

**( - 12 ) : ( - 4 )**



**18**. **α.** Σε πόσες ομάδες τις χωρίσαμε;

**β.** Να γράψετε την παράσταση υπολογισμού

**γ.** Να δείξετε πως μπορούν να περιγραφούν με κάρτες οι παραστάσεις **( - 8 ) : ( - 2 )** και **( - 6 ) : ( - 3)**

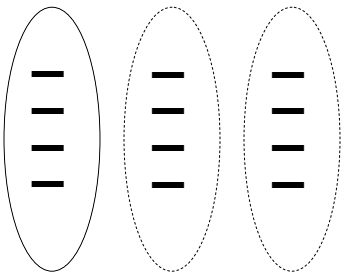
**19.** Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θετικές και αρνητικές κάρτες.

**α.** ( - 12 ) : ( - 2 ) **β.** ( - 12 ) : ( - 3 ) **γ.** ( - 6 ) : ( - 2 ) **δ.** ( - 8 ) : ( - 4 )

**δ.** ( + 9 ) : ( + 3 ) **ε.** ( - 10 ) : ( - 2 ) **ζ.** ( + 10 ) : ( + 5 ) **η.** ( - 12 ) : ( - 6 )

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε τη μέση θερμοκρασία.εβδομάδας ή μήνα. Αρκετές φορές έπρεπε να διαιρέσουμε έναν αρνητικό με ένα θετικό και το πηλίκο το βρήκαμε κάθε φορά αρνητικό. Ας χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις κάρτες μας.

Χωρίσαμε τις 12 αρνητικές κάρτες σε 3 ομάδες.



**20.** **α.** Πόσες κάρτες έχει η κάθε ομάδα; Είναι αρνητικές ή θετικές;

**β.** Να γράψετε την παράσταση που περιγράφει την κατάσταση.

**21.** Να συγκρίνετε τις παραστάσεις **( - 8 ) : 4** και **( - 6 ) : 3** Τί παρατηρείτε;

**22.** Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις.

**α.** ( - 10 ) : 5 **β.** ( - 8 ) : 2 **γ.** ( + 9 ) : ( - 3 ) **δ.** ( + 8 ) : ( - 2 )

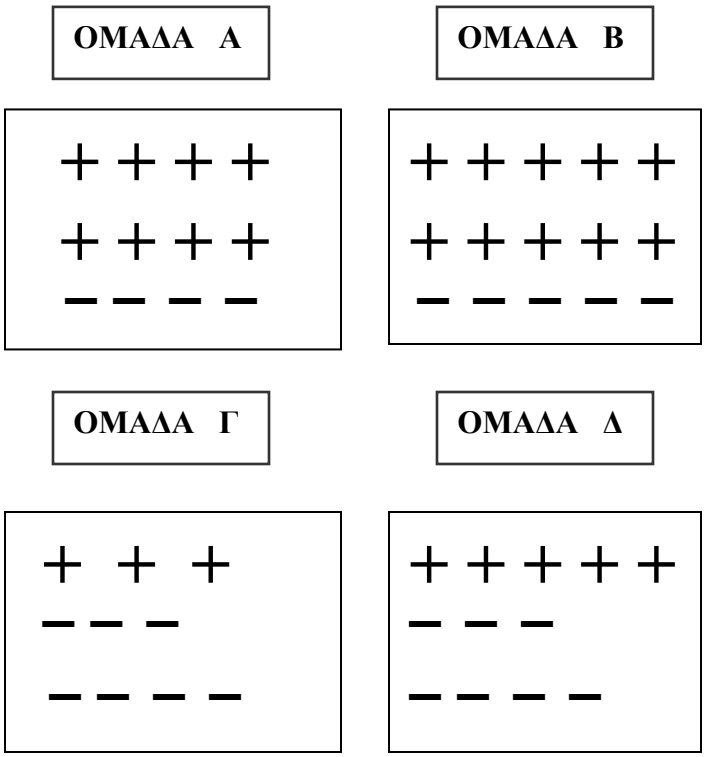
**δ.** ( - 9 ) : 3 **ε.** ( + 10 ) : ( - 2 ) **ζ.** ( + 10 ) : ( - 5 ) **η.** ( - 10 ) : 2

**23.** Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω κανόνες.

1. Όταν διαιρούμε δύο αρνητικούς αριθμούς το πηλίκο είναι .....
2. Όταν διαιρούμε δύο θετικούς αριθμούς το πηλίκο είναι .....
3. Όταν διαιρούμε έναν θετικό και έναν αρνητικό αριθμό το πηλίκο είναι .....

## *Βγάζουμε παρενθέσεις*

Οι τέσσερις ομάδες που έπαιζαν το παιχνίδι συγκέντρωσαν τους εξής πόντους:
Α: + 4 Β: + 5
Γ: - 4 Δ: - 2
Οι κάρτες της ομάδας Β και Γ βρέθηκαν πολύ κοντά και όταν τις μάζεψαν για να τις μετρήσουν, διαπίστωσαν ότι η Β ομάδα είχε πάρει τρεις κάρτες από τη Γ ομάδα. Ευτυχώς η αρχηγός της ομάδας Β κρατούσε το σκορ.της ομάδας της. «Πρέπει να τους δώσουμε δύο συν και μία μείον κάρτα πίσω», είπε.




Παίρνουμε από την ομάδα Β μία μείον και δύο συν κάρτες.
Ένας τρόπος να περιγράψουμε αυτή την ενέργεια είναι:
5 - ( - 1 + 2)
Δίνουμε στην ομάδα Γ μία μείον και δύο συν κάρτες.
Ένας τρόπος να περιγράψουμε αυτή την ενέργεια είναι: - 4 + ( - 1 + 2)

**24. α.** Να υπολογίσετε πόσοι πόντοι αφαιρέθηκαν από την ομάδα Β.
**β.** Να υπολογίσετε το τελικό σκορ της ομάδας Β και Γ.
**γ.** Υπάρχουν άλλες παραστάσεις που να περιγράφουν τις δύο ενέργειες;

Παίρνουμε από την ομάδα Α δύο μείον και τρεις συν κάρτες.

**25**. **α.** Να γράψετε μία παράσταση με παρένθεση που να περιγράφει την ενέργεια
**β.** Να υπολογίσετε πόσους πόντους αφαιρέσαμε.
**γ.** Να υπολογίσετε το τελικό σκορ της ομάδας Α.
**δ.** Θα μπορούσαμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντί να αφαιρέσουμε, προσθέταμε πέντε κάρτες στην ομάδα Α;

Δίνουμε στην ομάδα Α δύο συν και τρεις μείον κάρτες.

**26. α.** Να γράψετε μία παράσταση με παρένθεση που να περιγράφει την ενέργεια
**β.** Να υπολογίσετε πόσους πόντους προσθέσαμε.
**γ.** Να υπολογίσετε το τελικό σκορ της ομάδας Α.
**δ**. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με αυτό της προηγούμενης ερώτησης. Τί παρατηρείτε;

**27.** Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις χωρίς να βάλετε παρενθέσεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις θετικές και αρνητικές κάρτες των ομάδων.

**α.** + 4 - ( -3 + 4 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με + 4 .....

**β**. + 6 – ( - 2 + 3 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με + 6 .....

**γ.** - 6 - ( + 1 – 4 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με - 6 .....

**δ.** + 6 + ( - 2 + 3 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με + 6 .....

**ε.** + 4 + ( + 2 - 4 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με + 4 .....

**ζ.** 8 - ( 3 – 4 – 6 + 10 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με 8 .....

**η.** -3 – ( - 5 + 9 - 2 – 6 ) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με - 3 .....

## Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

### Ερωτήσεις 1, 2

Οι μαθητές διατυπώνουν προβλήματα με θερμοκρασίες που αναφέρονται σε μια δεδομένη μαθηματική παράσταση.

### Ερωτήσεις 3, 4

Προτού απαντήσουν στην ερώτηση 3, θα πρέπει να δοκιμάσουν διαφορετικούς αριθμούς. Για την αιτιολόγηση μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα πλαίσιο ή να δώσουν αντιπαραδείγματα για τις λάθος προτάσεις. Εδώ πρέπει να τονισθεί η σχέση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης: *Πολλαπλασιασμός και διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις*.( Είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί πλαίσιο για διαίρεση με αρνητικό διαιρέτη, οπότε οι κανόνες του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιηθούν και για τη διαίρεση στις επόμενες ερωτήσεις.)

### Ερώτηση 5

Τρεις ομάδες από τέσσερις αρνητικές κάρτες και δύο ομάδες από τρεις θετικές κάρτες.

### Ερώτηση 6

**α.** + 4 • 20 = + 80 **β**. -2 • 20 = - 40

**γ.** -2 • 10 + 4 • 10 = 20 Υπενθυμίζουμε ότι την σειρά των πράξεων που έχουν ήδη διδαχθεί οι μαθητές.

**δ.** ΟΧΙ Οι στρατηγικές που θα χρησιμοποιηθούν ποικίλουν. Η πιο απλή και συνηθισμένη είναι η δοκιμή-λάθος. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιήσουν την ίδια στρατηγική, αφού αποκλείσουν την περίπτωση κάποιες ερωτήσεις να απαντηθούν σωστά και κάποιες να μην απαντηθούν γιατί σ,αυτή την περίπτωση θα έχουν μόνο θετικές μονάδες. Ο καθηγητής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι:

4. Κάθε θετική απάντηση παίρνει + 4 μονάδες άρα χρειαζόμαστε δύο λάθος απαντήσεις ( 2 • (-2 ) = -4 ) για να έχουμε αποτέλεσμα 0.
5. Κάθε αρνητική απάντηση παίρνει -2 μονάδες, άρα πρέπει να μην απαντηθούν δύο ερωτήσεις ( 2 • ( + 1 ) = 2 ) για να έχουμε αποτέλεσμα 0.

Επομένως σε κάθε περίπτωση χρειάζονται τρεις ερωτήσεις για να πάρουμε το 0. Ο αριθμός 20 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

6. Το ίδιο ισχύει αν έχουμε και σωστές και λάθος και ερωτήσεις που δεν απαντήθηκαν.

### Ερώτηση 7

**α.** 14 αρνητικές μονάδες. Πιθανοί τρόποι υπολογισμού 7 • ( - 2 ) ή ( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 ) +( - 2 ) + ( - 2 ) + ( - 2 )

**β.** Είχε 7 λάθος και 13 σωστές απαντήσεις.

Άρα 7 • ( - 2 ) + 13 • ( + 4 ) = -14 + 52 = 38

## Ερώτηση 8

54 μονάδες. Πιθανές στρατηγικές:

***1η στρατηγική***

Αφού απάντησε λάθος σε 3 και άφησε 4 κενά στις υπόλοιπες 13 απάντησε σωστά.
Άρα $3 \bullet ( - 2 ) + 4 \bullet 2 + 13 \bullet ( + 4 ) = 54$

***2η στρατηγική***

Συγκρίνουν τις απαντήσεις του Γιάννη με αυτές της Κατερίνας. Έχουν τον ίδιο αριθμό σωστών απαντήσεων. Όμως ο Γιάννης αντί για 7 λάθος απαντήσεις, έχει 3. Άρα στις 4 απαντήσεις που μένουν δεν θα έχει $4 \bullet ( - 2 ) = - 8$ μονάδες αλλά $4 \bullet ( + 2 ) = + 8$ μονάδες. Επομένως θα έχει συνολικά $8 + 8 = 16$ μονάδες περισσότερες από την Κατερίνα. $38 + 16 = 54$

## Ερώτηση 9

**α.** Ο καθηγητής πρώτα αφαίρεσε τις δύο σωστές απαντήσεις και μετά πρόσθεσε τις δύο λάθος. Δηλάδή πρώτα αφαίρεσε τις θετικές μονάδες $-2 \bullet 4$ και μετά πρόσθεσε τις αρνητικές $+2 \bullet ( - 2)$. Ο πρώτος αριθμός στον πολλαπλασιασμό δηλώνει την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) και ο δεύτερος τις θετικές ή αρνητικές μονάδες.

**β**. Αφαιρέθηκαν 12 μονάδες: $-2 \bullet 4 + 2 \bullet ( - 2) = - 8 + ( - 4 ) = - 12$

## Ερώτηση 10

**α.** Πρώτα αφαιρούμε τις τρεις λάθος απαντήσεις και μετά προσθέτουμε τις τρεις σωστές, δηλαδή $- 3 \bullet ( - 2 ) + 3 \bullet ( + 4 )$

**β.** Κατ΄αρχήν υπολογίζουμε την προηγούμενη βαθμολογία της Κατερίνας. Αφού είχε 7 λάθος και 13 σωστές απαντήσεις συγκέντρωσε $7 \bullet ( - 2 ) + 13 \bullet ( + 4 )= 38$ μονάδες. Άρα ο τελικός της βαθμός θα είναι $38 - 3 \bullet ( - 2 ) + 3 \bullet ( + 4 ) = 56$
Οι περισσότεροι μαθητές δεν θα χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη παράσταση, αλλά πρώτα θα υπολογίσουν τις συνολικές μονάδες που πρέπει να προστεθούν και στο τέλος θα κάνουν την πρόσθεση.
$- 3 \bullet ( - 2 ) + 3 \bullet ( + 4 ) = 18$
$38 + 18 = 56$

## Ερώτηση 11

**α.** Οι μαθητές διατυπώνουν ανάλογο πρόβλημα για παράσταση που περιλαμβάνει τρεις διορθώσεις. Αν στο προηγούμενο πρόβλημα δεν χρησιμοποιήσαν ανάλογη παράσταση και υπολόγισαν τον τελικό βαθμό σε δύο φάσεις, τώρα αντιμετωπίζουν την κατάσταση στην οποία ο υπλογισμός γίνεται από μία μόνο παράσταση.

**β.** Πρέπει να παρατηρήσουν ότι πρώτα προσθέσαμε τις λάθος απαντήσεις και μετά αφαιρέσαμε τις σωστές και τα κενά. Θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τη σειρά χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα

## Ερώτηση 12

Οι παραστάσεις πρέπει να έχουν την μορφή της παράστασης στην ερώτηση 11.

***Παρατήρηση***
Οι μαθητές κάποια στιγμή πρέπει να απομακρυνθούν από τα πλαίσια και να λειτουργήσουν σε ένα πιο αφηρημένο επίπεδο. Από το σημείο αυτό και μετά, για τη λύση των προβλήμάτων ενθαρρύνονται να μη χρησιμοποιούν συγκεκριμένο πλαίσιο.

## Ερώτηση 13

**α.** 12 • ( - 1 ) + 12 • ( +1 ) = - 12 + 12 = 0

**β.** Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι 12 θετικές κάρτες μαζί με 12 αρνητικές δίνουν άθροισμα 0. Αν αφαιρέσουμε τις 12 θετικές θα μείνουν οι 12 αρνητικές. Δηλαδή

**- 3 • ( + 4 ) = - 12**

***αφαιρώ*** ***θετικές κάρτες***

**γ.** Πάλι έχουμε ότι 12 θετικές κάρτες μαζί με 12 αρνητικές δίνουν άθροισμα 0. Αν αφαιρέσουμε τις 12 αρνητικές θα μείνουν οι 12 θετικές.

**- 3 • ( - 4 ) = + 12**

***αφαιρώ*** ***αρνητικές κάρτες***

## Ερώτηση 14

Αφαιρούμε τρεις ομάδες από δύο θετικές κάρτες και προσθέτουμε τρεις ομάδες από δύο αρνητικές κάρτες. Με το πρόβλημα αυτό αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς

## Ερωτήσεις 15, 16

Αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν και να διατυπώνουν κανόνες για τον πολλαπλασιασμό θετικών και αρνητικών αριθμών.

## Ερώτηση 17

Συμπληρώνοντας τους πίνακες οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι υπάρχει συμμετρία των αποτελεσμάτων ως προς τη διαγώνιο του πίνακα. Αυτό αιτιολογείται από την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Αντίθετα η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει στην αφαίρεση και τη διαίρεση.

***Παρατήρηση***
Όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί πλαίσιο για την διαίρεση με αρνητικό αριθμό. Για την ερώτηση 18 χρησιμοποιούμε διαίρεση μέτρησης στο πλαίσιο των θετικών και αρνητικών καρτών.
Για την διαίρεση με θετικό αριθμό οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν είτε το πλαίσιο των θερμοκρασιών είτε των καρτών όπως δίνεται από μία διαίρεση μερισμού στων ερώτηση 20.

## Ερώτηση 18

**α.** Τις χωρίσαμε σε τρεις ομάδες. **β.** ( - 12 ) : ( - 4 ) = 3

**γ.** Χωρίσαμε οκτώ αρνητικές κάρτες σε ομάδες των τριών καρτών
Χωρίσαμε έξι αρνητικές κάρτες σε ομάδες των τριών καρτών

## Ερώτηση 19

Με τις ασκήσεις αυτές αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν. Οι μαθητές χρησιμοποιούν κάρτες μόνο αν συναντήσουν δυσκολία στις διαιρέσεις.

## Ερώτηση 20

**α**. Έχει 4 αρνητικές κάρτες.

**β.** **( - 12 ) : 3 = - 4**

**αρνητικές κάρτες** **αριθμός ομάδων** **αρνητικές κάρτες**

## Ερώτηση 21

Μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά πλαίσια.

1. *Πλαίσιο καρτών*
   Χωρίζουμε οκτώ αρνητικές κάρτες σε τέσσερις ομάδες.
   Χωρίζουμε έξι αρνητικές κάρτες σε τρεις ομάδες.
2. *Πλαίσιο θερμοκρασιών*
   Υπολογίζουμε τη μέση θερμοκρασία τεσσάρων ημερών.
   Υπολογίζουμε τη μέση θερμοκρασία τεσσάρων ημερών.

Με το πρόβλημα αυτό αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους χειρισμούς

## Ερωτήσεις 22, 23

Αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν και να διατυπώνουν κανόνες για τη διαίρεση θετικών και αρνητικών αριθμών. Εδώ πρέπει να εξηγηθεί στους μαθητές ότι η διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού και ότι έχουν τους ίδιους κανόνες προσήμου. Έτσι αιτιολογείται ότι διαίρεση θετικού με αρνητικό δίνει ως αποτέλεσμα αρνητικό αριθμό γιατί δεν είναι δυνατό να βρεθεί πλαίσιο γι' αυτήν την πράξη.

## Ερώτηση 24

**α.** – 1 + 2 = 1

**β**. ομάδα Β: 5 – 1 = 4 ομάδα Γ: - 4 + 1 = - 3

**γ.** Πιθανές απαντήσεις: **5 - ( - 1 ) - ( + 2)** ή **5 - ( 2 – 1 )** ή **5 - 1** ή **5 - ( + 2 ) - ( - 1 )**
για ομάδα Β

**θετικές κάρτες**

**αφαίρεση** **αρνητική κάρτα** **αφαίρεση**

## Ερώτηση 25

Συνιστούμε τους μαθητές να ακολουθήσουν την πορεία και τους συμβολισμούς της προηγούμενης άσκησης.

**α.** Πιθανή παράσταση 4 - ( - 2 + 3 )

**β.** - 2 + 3 = +1 **γ.** 4 – 1 = 3

**δ.** Οι μαθητές ήδη γνωρίζουν ότι: *αφαιρώ έναν αρνητικό πόντο είναι το ίδιο σαν να προσθέτω έναν θετικό*. -(-1) = +1

Χρησιμοποιώντας αυτή τη γνώση αναμένουμε απαντήσεις της μορφής:

4 + 2 - 3 ή 4 + ( 2 – 3 )

Αν οι μαθητές απαντήσουν στο δ της προηγούμενης ερώτησης, τότε η 26 μπορεί να παραληφθεί.

## Ερώτηση 26

Οι μαθητές μέσα στο πλαίσιο συμβολίζουν την ενέργεια «δίνω» με πρόσθεση.

**α.** Πιθανές παραστάσεις: 4 + 2 - 3 4 + ( + 2 – 3 ) 4 + ( + 2 ) + ( - 3 )

**β**. + 2 – 3 = - 1 **γ.** 4 – 1 = 3

## Ερώτηση 27

**α.** + 4 + 3 – 4 = + 3 **β.**.....

Οι ασκήσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές γιατί βοηθούν τους μαθητές να γενικεύσουν. Τις τελευταίες θα πρέπει να τις συμπληρώσουν χωρίς τη βοήθεια καρτών αν μπορούν.

Για τις ερωτήσεις 24, 25, 26 είναι απαραίτητο να παρουσιασθούν όλες οι λύσεις των μαθητών να εξετασθούν και να συζητηθούν. Οι μαθητές πρέπει να πεισθούν ότι όλες οι παραστάσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα και επομένως μπορούμε να μεταβαίνουμε από τη μία στην άλλη.

# Ενότητα 6η ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

***Περιγραφή της ενότητας***

*Σ' αυτή την ενότητα οι μαθητές διερευνούν τον μετασχηματισμό των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα συντεταγμένων και στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου στο ΑΒΑΚΙΟ. Αρχικά μαθαίνουν τα στοιχεία ενός σύστηματος συντεταγμένων, δηλαδή την αρχή Ο και τους κάθετους άξονες με τη μονάδα μέτρησης. Στη συνέχεια απεικονίζουν τα σημεία των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες. Ενώνοντας τα σημεία σχηματίζουν γνωστά γεωμετρικά σχήματα και διερευνούν τους μετασχηματισμούς τους, δηλαδή τη μεταφορά, τη στροφή, τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι προσθέτοντας έναν θετικό στη τετμημένη κάθε σημείου, το σχήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά, τόσες θέσεις όσο είναι και ο αριθμός, ενώ προσθέτοντας έναν αρνητικό μετατοπίζεται αντιστοίχως προς τα αριστερά. Κάτι ανάλογο συμβαίνει όταν προστεθεί θετικός ή αρνητικός αριθμός στην τεταγμένη κάθε σημείου. Τότε έχουμε μεταφορά του σχήματος προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα.*
*Για να διερευνήσουν τι παθαίνει το σχήμα αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μήκη των πλευρών του με θετικό ή αρνητικό αριθμό, εργάζονται στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου. Εκεί με τη Logo σχεδιάζουν τετράγωνα, τρίγωνα, ορθογώνια και με τη βοήθεια του μεταβολέα διερευνούν:*

- *Τη μεταβολή του μεγέθους του σχήματος (μεγέθυνση – σμίκρυνση)*
- *Τη θέση του σχήματος όταν οι πλευρές πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται με αρνητικό αριθμό.*

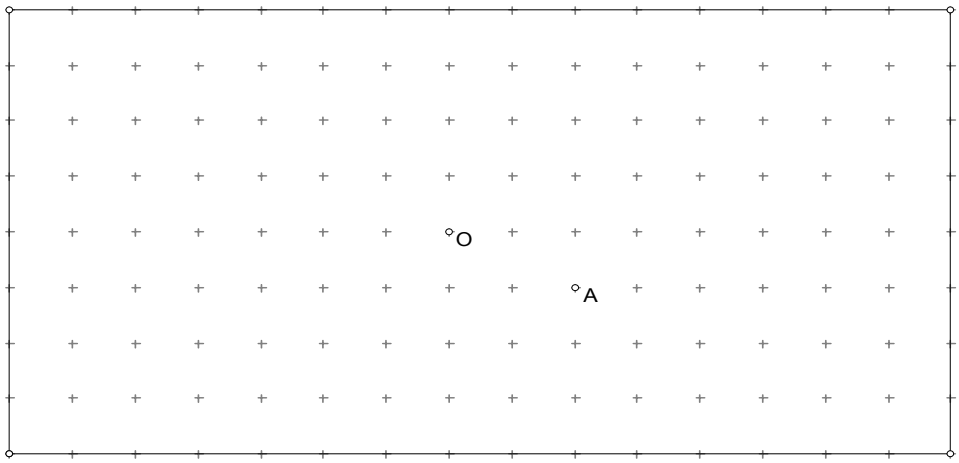
***Στόχος της ενότητας***

*Στόχος της ενότητας είναι οι μαθητές να μπορούν:*

- *Να τοποθετούν διατεταγμένα ζεύγη αριθμών σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να εφαρμόζουν τις πράξεις με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς*
- *Να κατανοούν τις ομοιότητες που υπάρχουν στις πράξεις μεταξύ των ακεραίων και στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων σε σύστημα συντεταγμένων*
- *Να διερευνούν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων στον Χελωνόκοσμο*
- *Να προβλέπουν και να αιτιολογούν τους μετασχηματισμούς και στα δύο πλαίσια.*

Σε τετραγωνισμένο χαρτί παίρνουμε ένα σταθερό σημείο Ο. Το σημείο αυτό ονομάζεται *αρχή* και η θέση οποιουδήποτε άλλου σημείου θα προσδιορίζεται αναφορικά με το Ο.

Στο παρακάτω τετραγωνισμένο χαρτί το σημείο Α βρίσκεται 2 μονάδες στα δεξιά του Ο και μία μονάδα κάτω. Για να περιγράψουμε τη θέση του σημείου αυτού γράφουμε Α(2,-1). Οι αριθμοί 2 και -1 ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου Α.



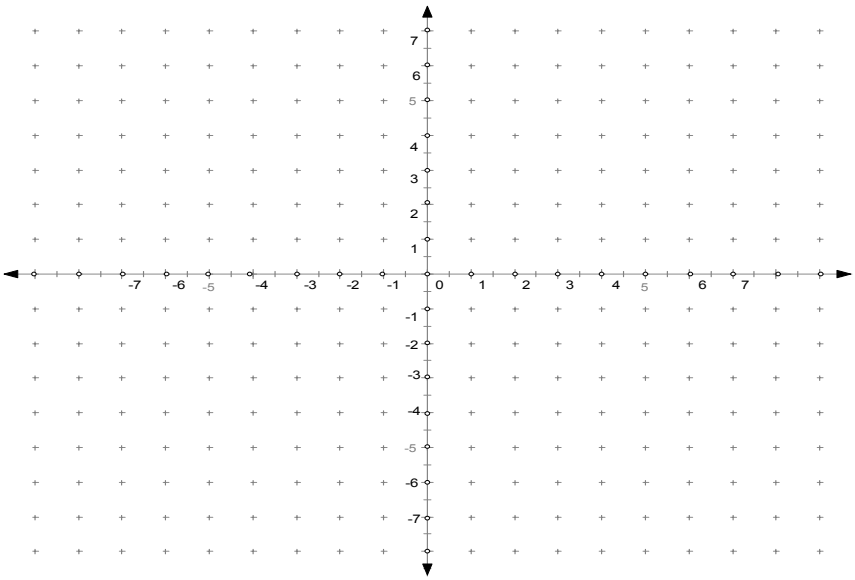

**1.** Η πρώτη συντεταγμένη του Α είναι θετική. Γιατί η δεύτερη είναι αρνητική;

**2. α.** Να τοποθετήσετε το σημείο Β(+2,+1) σε τετραγωνισμένο χαρτί. Πώς θα μπορούσατε να περιγράψετε με λόγια τη θέση του Β;

**β.** Να τοποθετήσετε επίσης τα σημεία Γ(-1,+2), Δ(0,-3), Ε(-1,-3)

**γ.** Είναι το σημείο (-1,+2) ίδιο με το σημείο (2,-1); Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Κάθε φορά που πρέπει να τοποθετήσετε σημεία στο τετραγωνισμένο χαρτί, πρέπει να μετρήσετε. Αν όμως έχετε το παρακάτω σχήμα μπορείτε ευκολότερα να τοποθετήσετε τα σημεία



Το σχήμα αυτό με τους δύο κάθετους άξονες ονομάζεται *σύστημα συντεταγμένων*. Η οριζόντια ευθεία ονομάζεται *οριζόντιος άξονας* και η κάθετη σ' αυτήν, ονομάζεται *κάθετος άξονας*. Η πρώτη συντεταγμένη ονομάζεται *τετμημένη*, ενώ η δεύτερη ονομάζεται *τεταγμένη*.

**3.** Να σχεδιάσετε δύο κάθετους άξονες. Να βάλετε μία μονάδα μέτρησης σε κάθε άξονα. Η τομή των αξόνων είναι το σημείο Ο.
**α.** Τί αριθμό θα βάλουμε στην αρχή;
**β.** Να τοποθετήσετε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία Α(1,1), Β(2, 3), Γ(4, 3), Δ(5, 1)
**γ.** Αν ενώσετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Α, τί γεωμετρικό σχήμα σχηματίζεται;

Για τα προβλήματα 4-7, να κάνετε πρώτα μια πρόβλεψη για το αποτέλεσμα που θα έχει κάθε πράξη στο σχήμα. Να χρησιμοποιήσετε τις συντεταγμένες του προβλήματος 3.

**4.** Να προσθέσετε -3 στην τετμημένη κάθε σημείου. Τί πρόκειται να συμβεί;

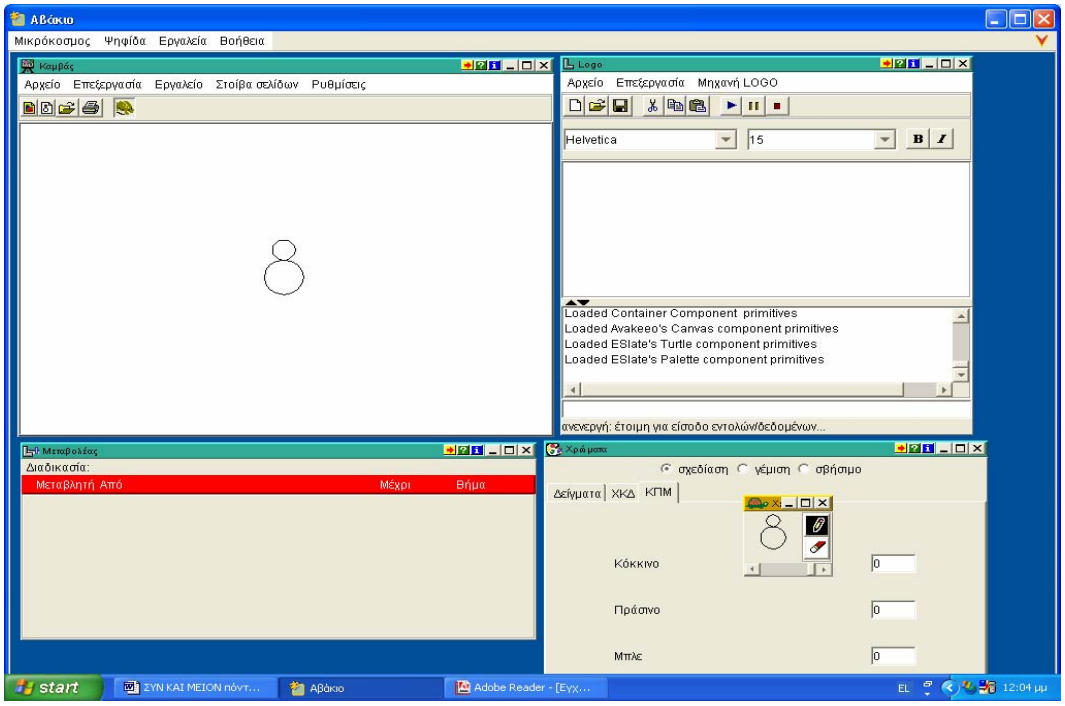
**5**. Να προσθέσετε +1 στην τεταγμένη κάθε σημείου. Τί θα συμβεί τώρα;

**6.** Τί συμβαίνει αν αφαιρέσετε 1 από τις συντεταγμένες όλων των σημείων;

**7.** Τί πρέπει να κάνετε στις συντεταγμένες των σημείων, αν θέλετε να μετατοπισθεί το αρχικό πολύγωνο προς τα κάτω κατά τέσσερις μονάδες;

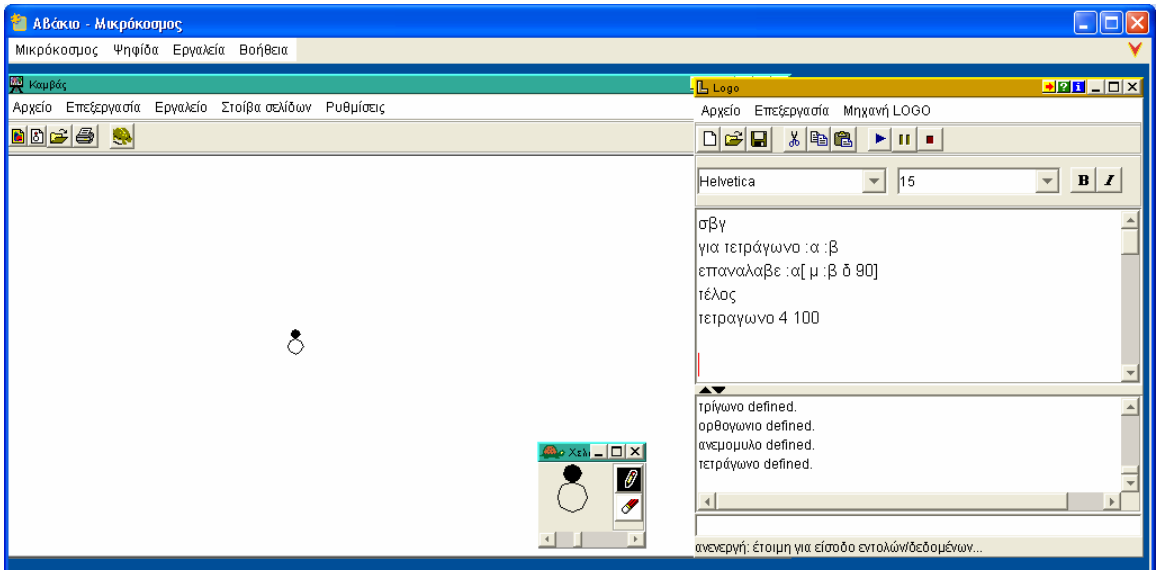
## *Περιβάλλον Αβάκιο*

Για τα επόμενα προβλήματα πρέπει να εργαστείτε στον *Χελωνόκοσμο* του *ΑΒΑΚΙΟΥ*

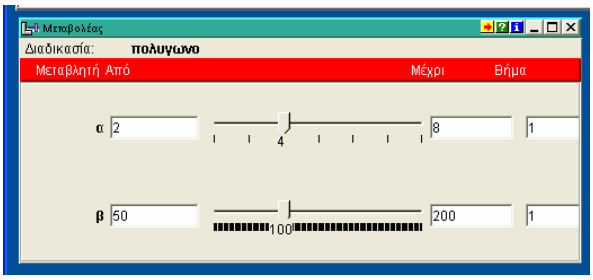


*Τετράγωνο*

**8.** Να εκτελέσετε μία φορά την έννοια *τετράγωνο* στην ψηφίδα *Logo*. Τί παρατηρείτε;




Αφού έχετε εκτελέσει μία φορά την έννοια *τετράγωνο,* ενεργοποιείστε την ψηφίδα *μεταβολέας*. Θα παρατηρήσετε ότι οι τιμές της μεταβλητής β κυμαίνονται από 50 έως 200.

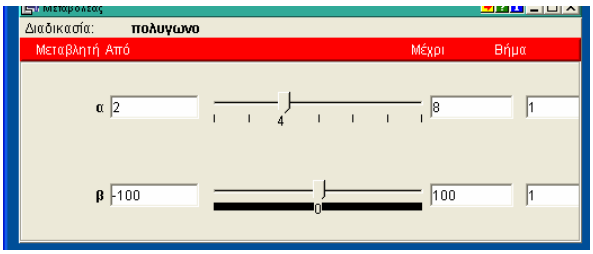



**9. α.** Τί συμβολίζει η μεταβλητή β;

**β.** Τί παθαίνει το σχήμα όταν αλλάζουμε τις τιμές της μεταβλητής β; Ποια ακριβώς στοιχεία του σχήματος μεταβάλλονται και ποια παραμένουν σταθερά;

**10.** Τί νομίζετε ότι θα συμβεί αν η μεταβλητή β πάρει αρνητικές τιμές; Να κάνετε μία πρόβλεψη.

Να αλλάξετε τα όρια των τιμών, ώστε να συμπεριλάβετε και αρνητικές π.χ -100 έως 100.



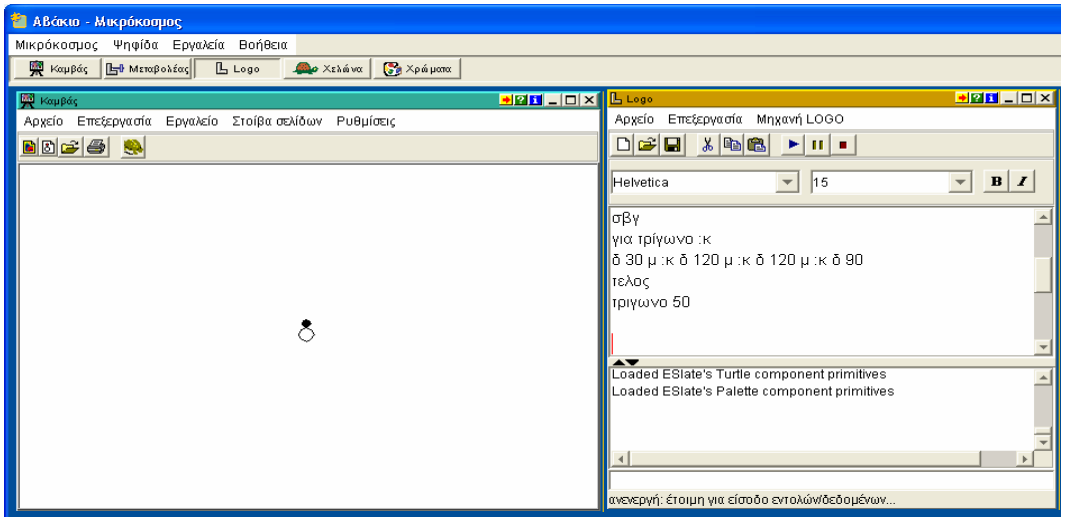
**11.** Ξεκινήστε από το 100 και μετακινείστε τον μεταβολέα προς τα αριστερά. Τί συμβαίνει στο σχήμα;

Να εκτελέσετε μία φορά την έννοια *τετράγωνο* για β=100 και μία φορά για β = -100.

**12.** Αν η χελώνα βρίσκεται στην αρχή Ο των αξόνων να σχεδιάσετε ένα ανάλογο σχήμα σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

## *Τρίγωνο*

Να εκτελέσετε μία φορά την έννοια *τρίγωνο.*




**13. α.** Τί είδους τρίγωνο σχηματίζεται;

**β.** Να πολλαπλασιάσετε την πλευρά του τριγώνου με -2.και να γράψετε την αντίστοιχη εντολή.

**γ.** Πριν να εκτελέσετε την εντολή, να κάνετε μία πρόβλεψη για το είδος και τη θέση του νέου τριγώνου.

**δ.** Να εκτελέσετε την εντολή. Τί παρατηρείτε; Κάνατε σωστές προβλέψεις;

**14. α.** Να πολλαπλασιάσετε την πλευρά του νέου τριγώνου πάλι με -2.και να γράψετε την αντίστοιχη εντολή.

**β.** Πριν την εκτελέσετε να κάνετε μία πρόβλεψη για το είδος και τη θέση του νέου τριγώνου.

## *Ορθογώνιο*

Να εκτελέσετε την έννοια *ορθογώνιο,* με τις τρεις διαφορετικές τιμές των μεταβλητών λ, ν, ρ.

*για ορθογώνιο :λ :ν :ρ*
*επανάλαβε :λ[μ :ν δ 90 μ :ρ δ 90]*
*τελος*
*ορθογώνιο 2 30 40*

*ορθογώνιο 2 -60 -80*
*ορθογώνιο 2 120 160*

**15. α.** Τί συμβολίζουν οι μεταβλητές ν και ρ;
**β.** Να παρατηρήσετε και να περιγράψετε την σχέση των σχημάτων μεταξύ τους.

Στα επόμενα δύο προβλήματα θα πολλαπλασιάσετε ή θα διαιρέσετε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με έναν αριθμό και θα εκτελέσετε τις αντίστοιχες εντολές..

**16.** Να διαιρέσετε τις πλευρές του κόκκινου ορθογωνίου με - 4. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο; Τί συμπεραίνετε για το ( - ... ) : ( - 4 ) ;

**17.** Να πολλαπλασιάσετε το μπλε ορθογώνιο με -1. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο;

**18.** Να πολλαπλασιάσετε τις πλευρές του νέου ορθογωνίου με -1. Πού θα σχηματισθεί το νέο ορθογώνιο; Τί συμπεραίνετε για το ( - 1 ) • ( - 1 ) ;

Να τοποθετήσετε όλα τα ορθογώνια σε σύστημα συντεταγμένων.

Η Μαρία βλέποντας τα ορθογώνια λέει:
« Όλα τα ορθογώνια με θετικές πλευρές σχηματίζονται πάνω δεξιά και όλα τα ορθογώνια με αρνητικές πλευρές σχηματίζονται κάτω αριστερά»

**19.** Έχει δίκιο η Μαρία και γιατί;

**20. α.** Πως μπορείτε να αλλάξετε τη θέση ενός ορθογωνίου και να μικρύνετε τις διαστάσεις του;
**β.** Μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με αριθμό, να ελλατώσουμε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου; Να εξηγήσετε την απάντησή σας και να δώσετε ένα παράδειγμα.

**21**. Να εκτελέσετε την έννοια *ορθογώνιο* δίνοντας στις μεταβλητές ν και ρ ότι τιμές θέλετε. Το ορθογώνιο που σχηματίσθηκε να το πολλαπλασιάσετε με +2. Το δεύτερο ορθογώνιο να το πολλαπλασιάσετε με -1. Το τρίτο ορθογώνιο να το πολλαπλασιάσετε με +1/2. Πώς θα μπορούσατε να πάρετε το τέταρτο ορθογώνιο κατευθείαν από το πρώτο χωρίς τα ενδιάμεσα στάδια;

# Αναμενόμενες απαντήσεις - λύσεις και σχόλια

## Ερώτηση 1

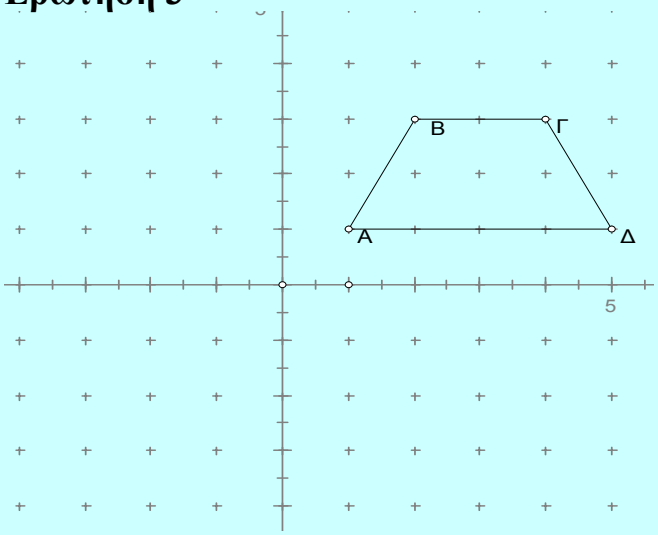
Οι κατευθύνσεις συνδέονται με τους θετικούς και αρνητικούς όπως και στη 1η ενότητα. Η κατεύθυνση δεξιά και η κατεύθυνση πάνω συμβολίζονται με +, ενώ η αριστερά και η κάτω με -.

## Ερώτηση 2

**α, β** Πιθανή περιγραφή είναι η δεξιά-αριστερά και η πάνω-κάτω από την αρχή Ο.

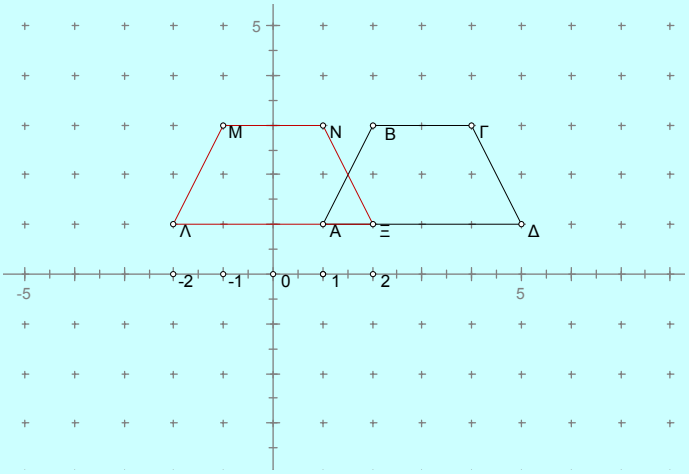
**γ.**.Δεν είναι το ίδιο. Το (-1,2) είναι μία μονάδα αριστερά και δύο μονάδες κάτω, ενώ το (2,-1) είναι δύο μονάδες δεξιά και μία μονάδα κάτω.

## Ερώτηση 3



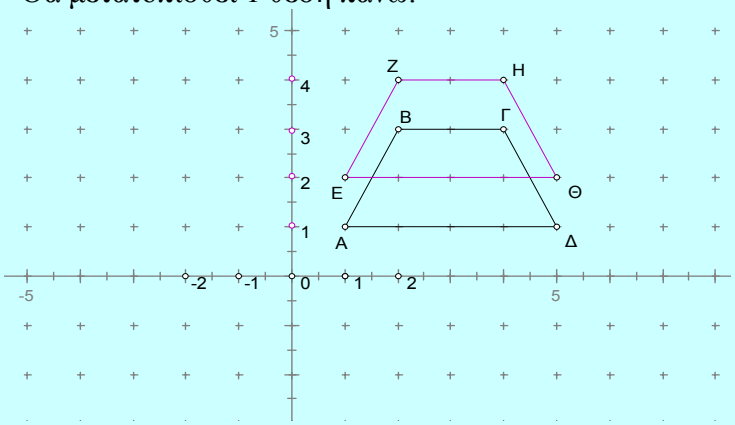

## Ερώτηση 4

Θα μετατοπισθεί 3 θέσεις αριστερά.



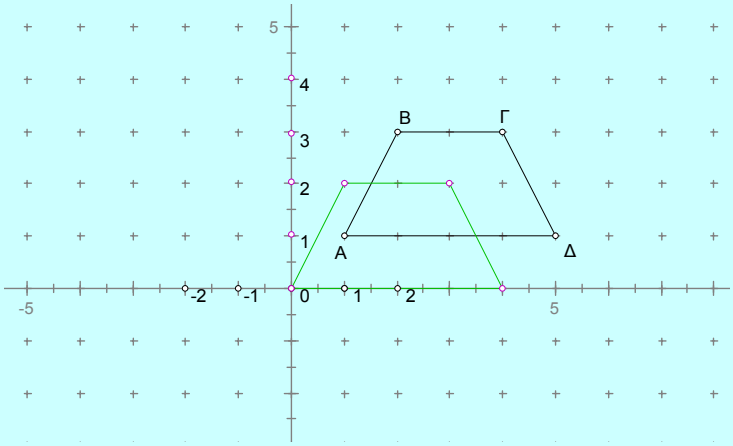
## Ερώτηση 5

Θα μετατοπισθεί 1 θέση πάνω.



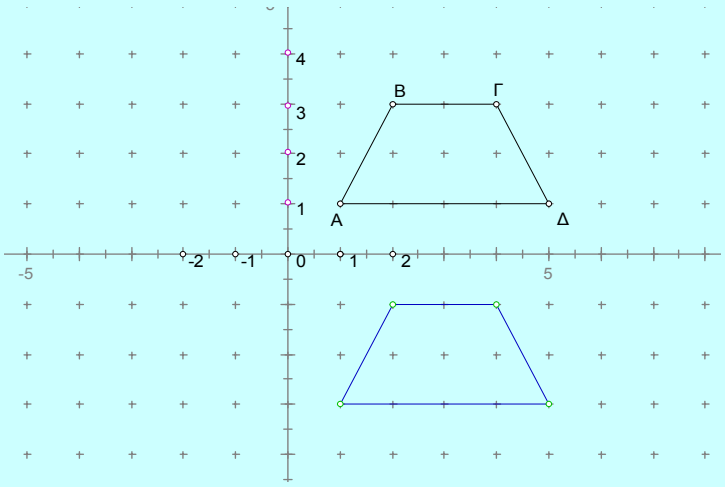

## Ερώτηση 6

Θα μετατοπισθεί 1 θέση αριστερά και 1 κάτω.



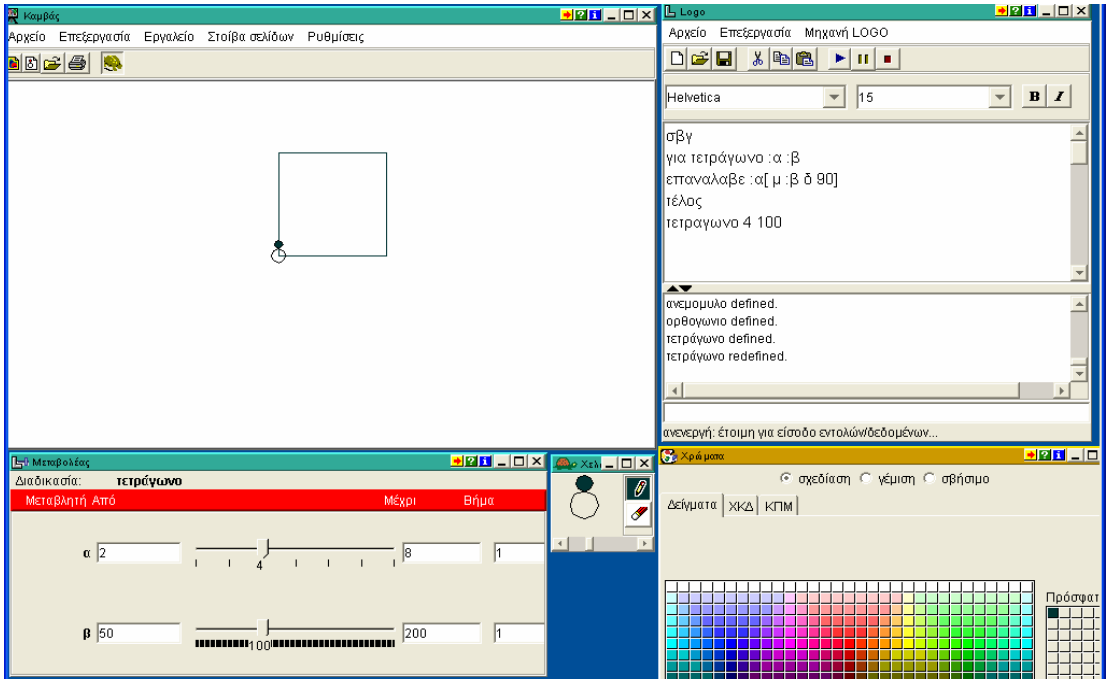

## Ερώτηση 7

Πρέπει να προστεθεί στην τεταγμένη κάθε σημείου το -4

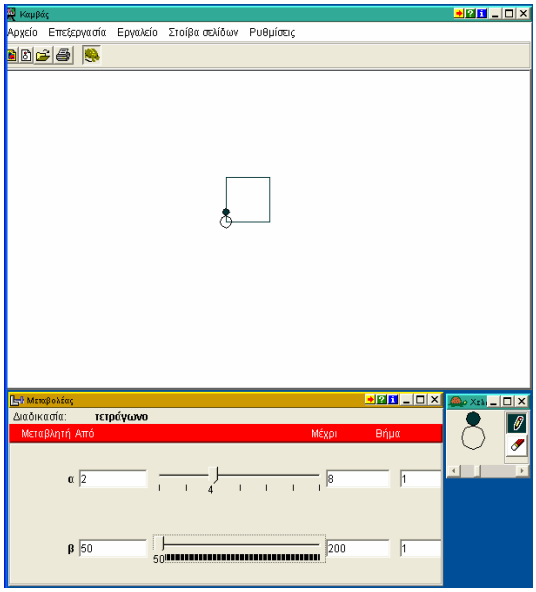


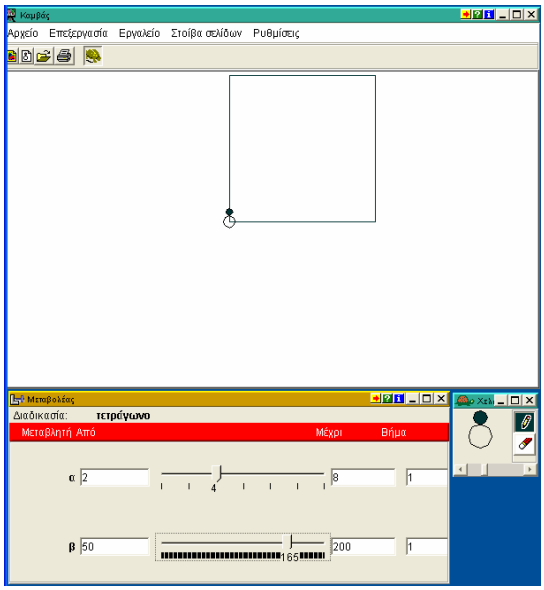
## Ερωτήσεις 8, 9

Σχηματίζεται πάνω δεξιά ένα τετράγωνο με πλευρά 100. Η μεταβλητή β συμβολίζει τη πλευρά του τετραγώνου.



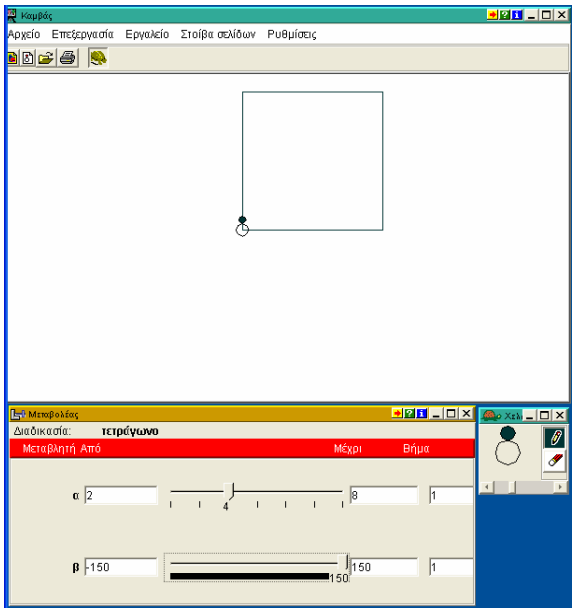

Αλλάζοντας τις τιμές της μεταβλητής β, το τετράγωνο αυξομειώνεται χωρίς ομως να αλλάξει τη θέση του. Δηλαδή αλλάζει το μήκος της πλευράς του αλλά παραμένει τετράγωνο (ορθές γωνίες, ίσες πλευρές)

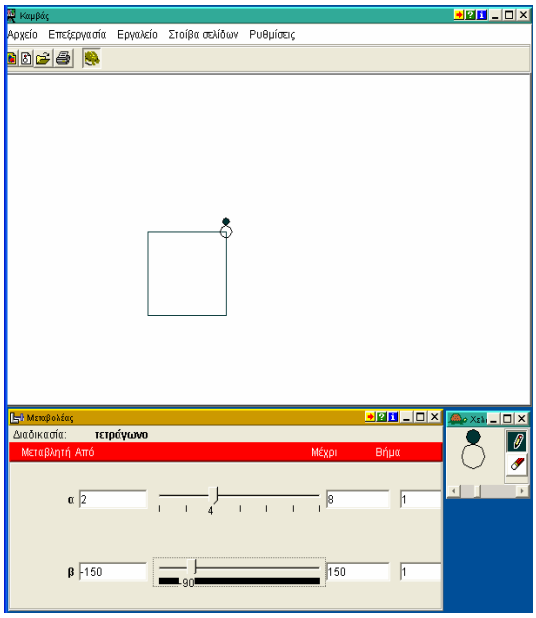


## Ερωτήσεις 10,11

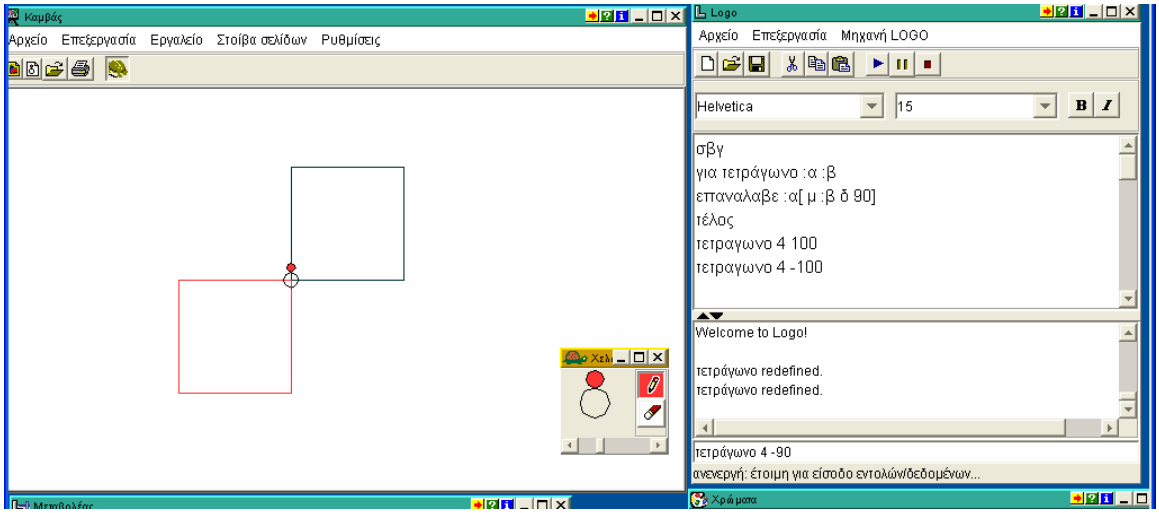
Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι θα αλλάξει η θέση του τετραγώνου. Με την ενεργοποίηση του μεταβολέα και τη μετακίνησή του απο τα δεξιά στα αριστερά το τετράγωνο μικραίνει συνεχώς και μηδενίζεται όταν η β=0. Ακολούθως όταν η β αρχίσει να παίρνει αρνητικές τιμές σχηματίζεται και πάλι το τετράγωνο σε άλλη θέση συμμετρική της αρχικής ως προς την αρχή Ο.



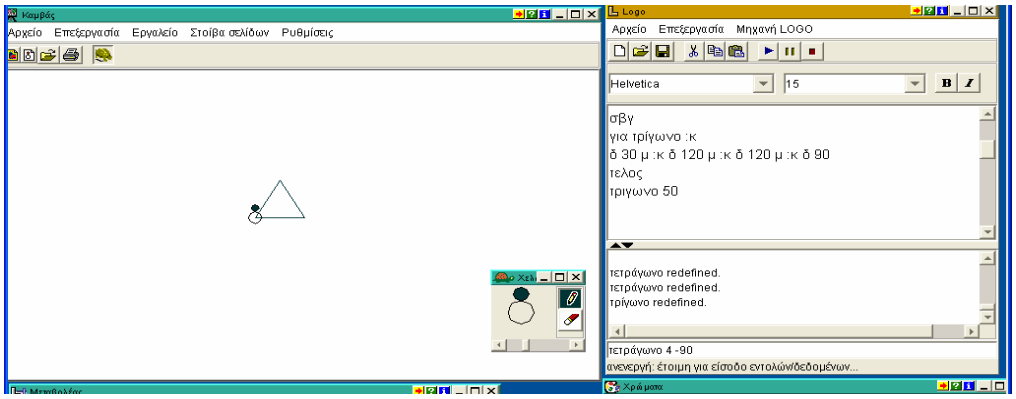

## Ερώτηση 12

Απενεργοποιείται ο μεταβολέας, συμπληρώνεται η εντολή τετράγωνο -100, και έτσι έχουν τα δύο συμμετρικά σχήματα. Γίνεται σύνδεση της κίνησης της χελώνας με το σύστημα συντεταγμένων που ήδη έχουν μελετήσει.

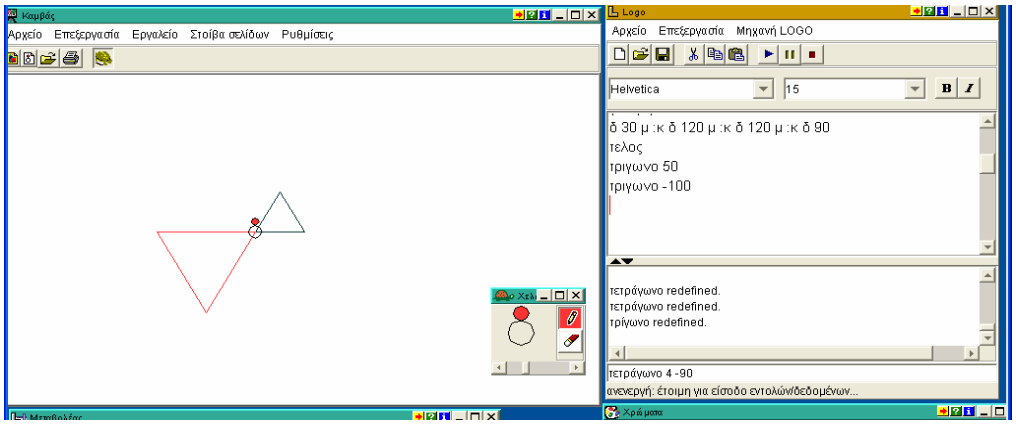


## Ερώτηση 13

Σχηματίζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Η μεταβλητή κ συμβολίζει την πλευρά του τριγώνου. Η πλευρά του τριγώνου θα γίνει -2 • 50 = -100.

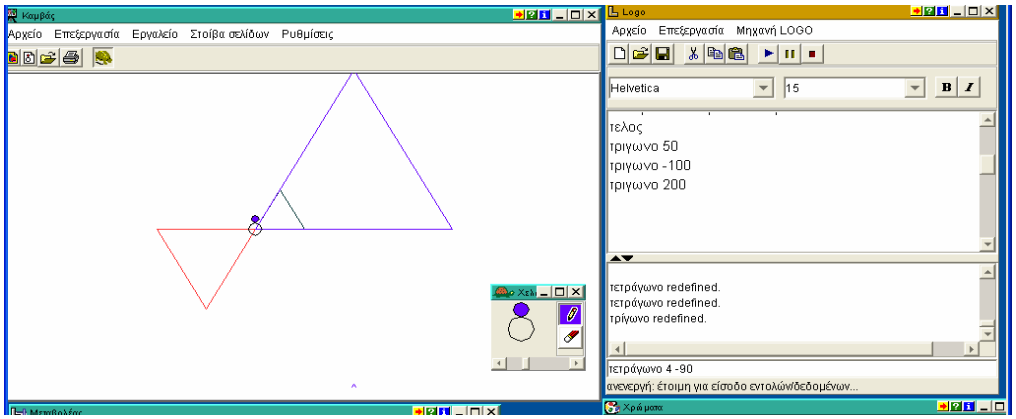



Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι το τρίγωνο θα διπλασιαστεί και θα μετατοπισθεί κάτω αριστερά.



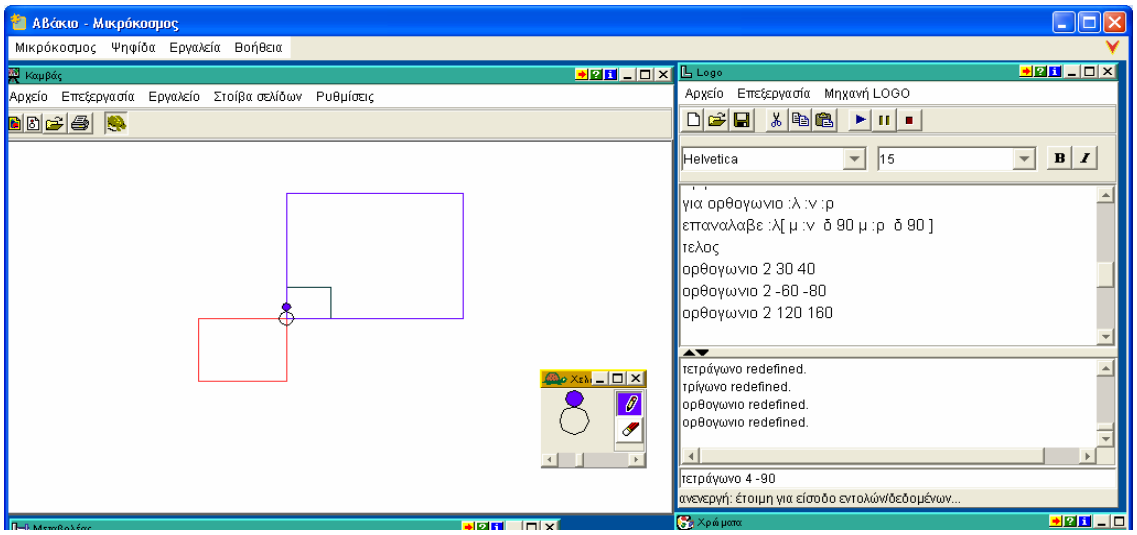

## Ερώτηση 14

Η πλευρά του τριγώνου θα γίνει -2 • (-100) = 200. Πιθανή πρόβλεψη είναι ότι το τρίγωνο θα διπλασιαστεί και θα μετατοπισθεί και πάλι πάνω δεξιά.



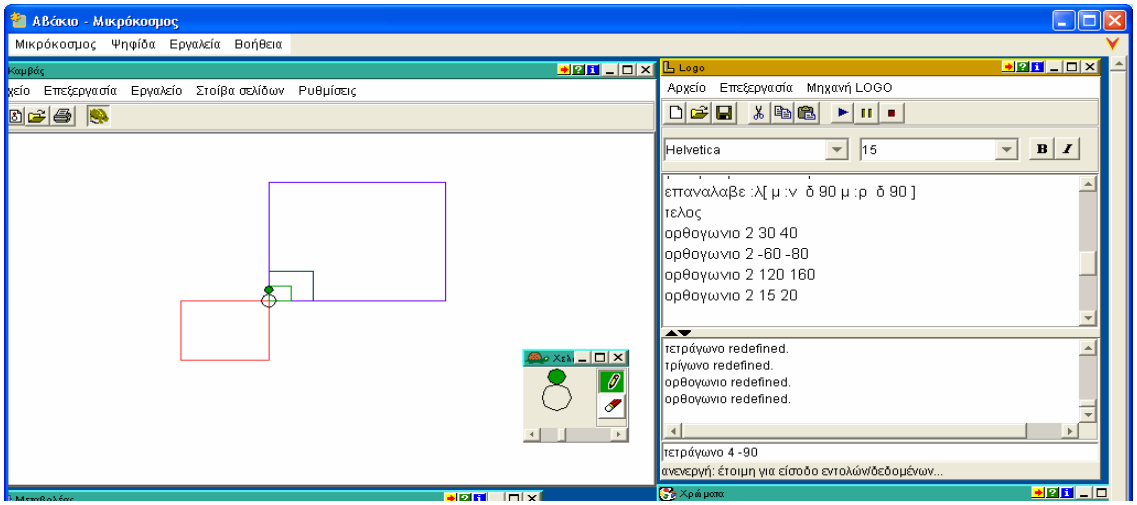
## Ερώτηση 15

Το κόκκινο ορθογώνιο σχηματίζεται συμμετρικά ως προς το σημείο 0 με διπλάσιες διαστάσεις από το αρχικό επειδή οι πλευρές του πολλαπλασιάστηκαν με τον αρνητικό -2. Το μπλε ορθογώνιο σχηματίσθηκε συμμετρικά ως προς το κόκκινο με κέντρο συμμετρίας το σημείο 0 και με διπλάσιες διαστάσεις από το κόκκινο επειδή οι πλευρές του πολλαπλασιάστηκαν και πάλι με τον -2.
Οι μεταβλητές ν, ρ συμβολίζουν τις διαστάσεις του ορθογωνίου.



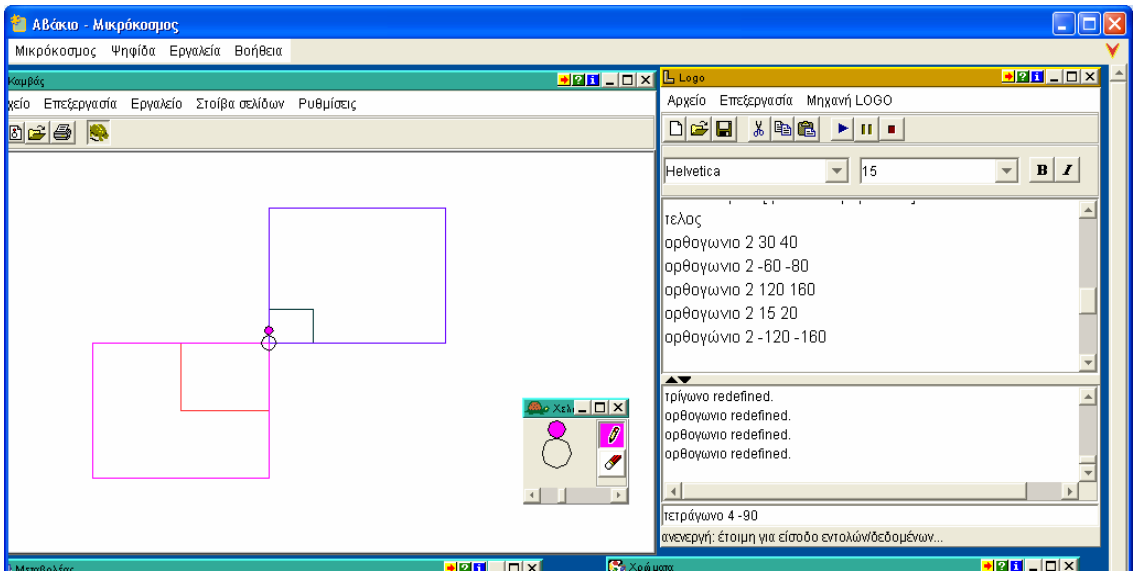

## Ερώτηση 16

Οι πλευρές θα είναι ( - 60 ) : ( - 4 ) = 15 και ( - 80 ) : ( - 4 ) = 20 . Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί πάνω δεξιά.



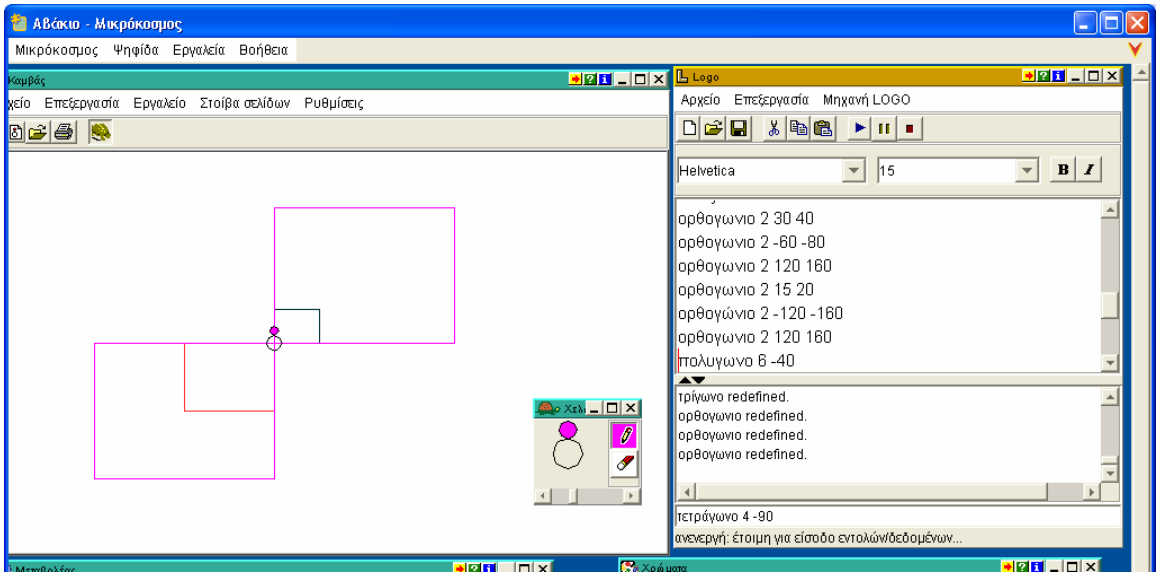
## Ερώτηση 17

Οι πλευρές θα είναι 120 • ( - 1 ) = - 120 και 160 • ( - 1 ) = - 160. Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί κάτω αριστερά.




## Ερώτηση 18

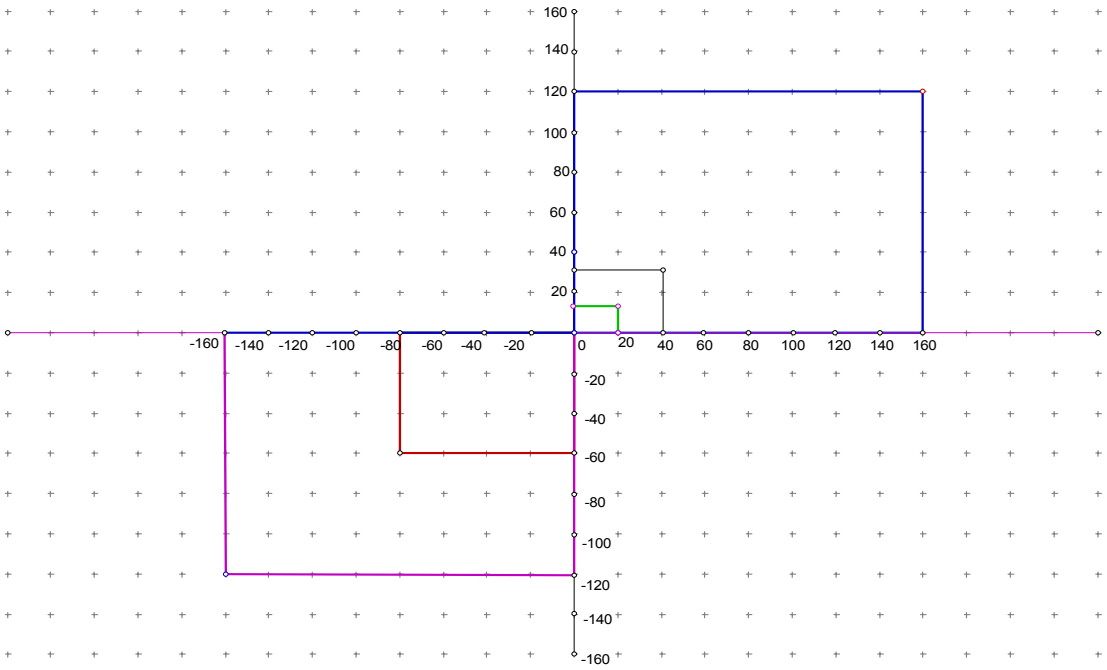
Οι πλευρές θα είναι -120 • ( - 1 ) = +120 και - 160 • ( - 1 ) = + 160. Το νέο ορθογώνιο θα σχηματισθεί πάνω δεξιά.




Οι μαθητές παρατηρούν ότι πολλαπλασιάζοντας με αρνητικό αριθμό το ορθογώνιο μετατοπίζεται από πάνω δεξιά στην θέση κάτω αριστερά και αντίστροφα. Ο πολλαπλασιασμός δύο φορές με ( - 1 ) διατηρεί και τη θέση και τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

## Ερώτηση 19

Πιθανή γραφική παράσταση αν πάρουν σαν μονάδα μέτρησης το 20. Ανάλογη θα έχουν αν η μονάδα μέτρησης είναι π.χ. το 10. Εδώ συζητάμε πρώτα με τους μαθητές τις δυνατές μονάδες μέτρησης. Για πράδειγμα η μονάδα μέτρησης 1 δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί λόγω χώρου.




Η Μαρία έχει δίκιο γιατί όταν οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις πλευρές των ορθογωνίων είναι θετικές, τότε τα ορθογώνια σχηματίζονται πάνω και δεξιά, ενώ όταν είναι αρνητικές σχηματίζονται κάτω αριστερά.

## Ερώτηση 20

**α.** Πιθανή απάντηση: Για να αλλάξει θέση το ορθογώνιο πολλαπλασιάζουμε τη μία ή και τις δύο διαστάσεις του ορθογωνίου με αρνητικό αριθμό. Για να μικρύνουν οι πλευρές του, τις διαιρούμε με ακέραιο.

**β.** Μπορεί να γίνει αν πολλαπλασιάσουμε με κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

## Ερώτηση 21

Πιθανές τιμές μεταβλητών: ν = 60 και ρ = 80

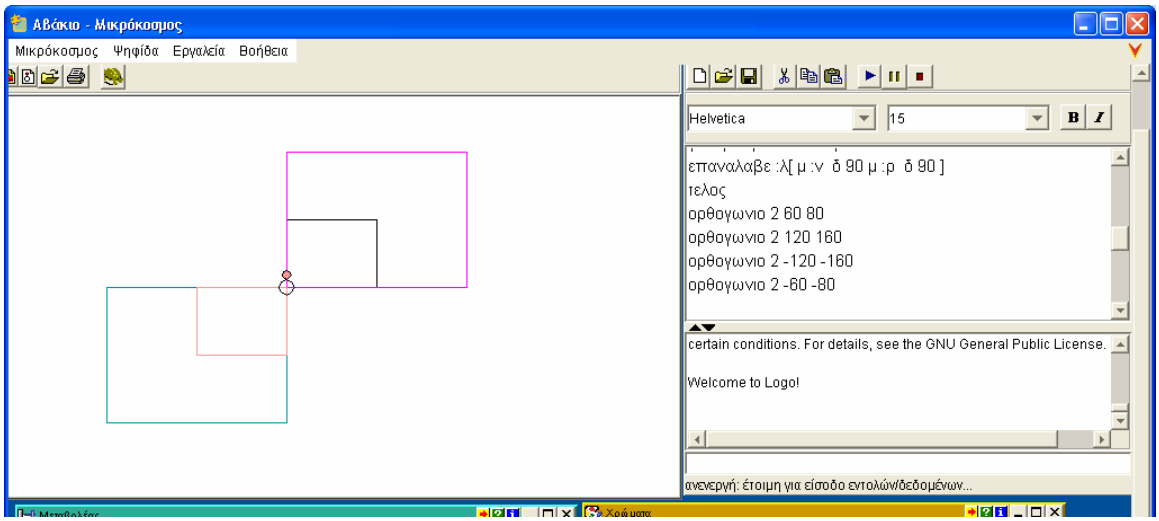
Για το δεύτερο ορθογώνιο έχουμε ν = 2 • 60 =120 και ρ = 2 • 80 =160

Για το τρίτο ορθογώνιο έχουμε ν = ( -1 ) • 120 = -120 και ρ = ( -1 ) • 160 = -160

Για το τέταρτο ορθογώνιο έχουμε:

ν = ( + ½ ) • ( - 120) = - 60 και ρ = ( + ½ ) • ( - 160 ) = - 80

Θα μπορούσαμε να έχουμε κατευθείαν το τέταρτο ορθογώνιο αν πολλαπλασιάζαμε τις διαστάσεις του πρώτου ορθογωνίου με - 1




Το πρόβλημα εξετάζει την ικανότητα των μαθητών

4. Να κατανοήσουν τις ομοιότητες που υπάρχουν στις πράξεις μεταξύ των ακεραίων και στο αλγεβρικό και στο γεωμετρικό πλαίσιο.
5. Να διερευνήσουν τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων ( μεταφορά, στροφή, μεγέθυνση, σμίκρυνση ) στο διερευνητικό περιβάλλον του *Χελωνόκοσμου*.
6. Να προβλέψουν τους μετασχηματισμούς και να τους αιτιολογήσουν.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Συγκριτικοί πίνακες
TIMSS και PISA

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ TIMSS και PISA

### Διαγωνισμός TIMSS

Η TIMSS μετρά την δεξιοτεχνία των μαθητών σε ειδικές γνώσεις, δεξιότητες και έννοιες. Το περιεχόμενο των διαγωνισμάτων βασίζεται σε ένα πρόγραμμα σπουδών που είναι κοινό για τις συμμετέχουσες χώρες και έχει συσταθεί κατόπιν συνεργασίας και συμφωνίας μετξύ τους.

### Διαγωνισμός PISA

Ο διαγωνισμός PISA (Program for International Student Assessment) μετρά τις δυνατότητες των 15-χρονων στην ανάγνωση, στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Ο PISA διαφέρει από τους άλλους διεθνείς διαγωνισμούς. Δίνει έμφαση στην εφαρμογή της γνώσης, δίνοντας στους μαθητές ερωτήματα-προβλήματα που έχουν σχέση όσο το δυνατόν περισσότερο με το πραγματικό κόσμο (PISA, 2003). Αυτά τα ερωτήματα αντανακλούν την άποψη ότι:

Ο 15-χρονος μαθητής πλησιάζει στην ενηλικίωση και επομένως δεν είναι αρκετό να γνωρίζει ανάγνωση, ειδικούς μαθηματικούς τύπους και επιστημονικές έννοιες αλλά θα πρέπει να ξέρει πως θα εφαρμόζει αυτή τη γνώση και τις δεξιότητες σε διάφορες καταστάσεις που θα αντιμετωπίσει στη ζωή του. Γι' αυτό το λόγο το περιεχόμενο των ερωτήσεων δεν είναι αυστηρά προσκολλημένο στα αναλυτικά προγράμματα των σχολείων αλλά είναι ευρύτερο και περιλαμβάνει και τις γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών από το περιβάλλον. Ειδικά ο μαθηματικός αλφαβητισμός (mathematical literacy) είναι η δυνατότητα του ανθρώπου να προσδιορίζει και να κατανοεί τον ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στην καθημερινή μας ζωή, να κάνει αιτιολογημένες κρίσεις και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά με τρόπο που ικανοποιεί τις ανάγκες ενός ανθρώπου που δημιουργεί, ενδιαφέρεται και αναστοχάζεται.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζεται η απόδοση των μαθητών της τετάρτης Δημοτικού και της πρώτης Γυμνασίου

**TIMSS 1995**

| Fourth Grade* | Country Average Achievement | | |
|---|---|---|---|
| 1. Singapore | 625 | 14. Israel | 531 |
| 2. Korea | 611 | 15. Latvia (LSS) | 525 |
| 3. Japan | 597 | 16. Scotland | 520 |
| 4. Hong Kong | 587 | 17. England | 513 |
| 5. Netherlands | 577 | 18. Cyprus | 502 |
| 6. Czech Republic | 567 | 19. Norway | 502 |
| 7. Austria | 559 | 20. New Zealand | 499 |
| 8. Slovenia | 552 | 21. Greece | 492 |
| 9. Ireland | 550 | 22. Thailand | 490 |
| 10. Hungary | 548 | 23. Portugal | 475 |
| 11. Australia | 546 | 24. Iceland | 474 |
| 12. United States | 545 | 25. Iran, Islamic Republic | 429 |
| 13. Canada | 532 | 26. Kuwait | 400 |

**TIMSS 1995**

| Seventh Grade* | Country Average Achievement | | |
|---|---|---|---|
| **1. Singapore** | 601 | **21. Germany** | 484 |
| **2. Korea** | 577 | **22. Sweden** | 477 |
| **3. Japan** | 571 | **23. England** | 476 |
| **4. Hong Kong** | 564 | **24. United States** | 476 |
| **5. Belgium (Fl)** | 558 | **25. New Zealand** | 472 |
| **6. Czech Republic** | 523 | **26. Denmark** | 465 |
| **7. Netherlands** | 516 | **27. Scotland** | 463 |
| **8. Bulgaria** | 514 | **28. Latvia (LSS)** | 462 |
| **9. Austria** | 509 | **29. Norway** | 461 |
| **10. Slovak Rep.** | 508 | **30. Iceland** | 459 |
| **11. Belgium (Fr)** | 507 | **31. Romania** | 454 |
| **12. Switzerland** | 506 | **32. Spain** | 448 |
| **13 Hungary** | 548 | **33. Cyprus** | 446 |
| **14. Russian Fed.** | 501 | **34. Greece** | 440 |
| **15. Ireland** | 500 | **35. Lithuania** | 428 |
| **16. Slovenia** | 498 | **36. Portugal** | 423 |
| **17. Australia** | 498 | **37 Iran, Islamic Rep.** | 402 |
| **18. Thailand** | 495 | **38. Colombia** | 369 |
| **19. Canada** | 494 | **39. South Africa** | 348 |
| **20. France** | 492 | | |

Στην έκθεσή της για τις επιδόσεις των μαθητών η TIMSS (THIRD INTERNATIONAL MATHEMATICS AND SCIENCE STUDY) αναφέρει:
« Στα μαθηματικά η Σιγκαπούρη και η Κορέα ήταν οι χώρες με την υψηλότερη απόδοση και στη 2$^{α}$ και στη 3$^{η}$ Δημοτικού. Η Ιαπωνία και το Χονγκ-Κονγκ ήταν μεταξύ των καλύτερων στον κόσμο όπως και Ολλανδία η Τσεχία και η Αυστρία.» (TIMSS, 1997)
Στον πίνακα αυτό συμπεριλαμβάνεται και η απόδοση των Ελλήνων μαθητών. Η Ελλάδα έκτοτε δεν έλαβε μέρος στους διαγωνισμούς της TIMSS
Στον τελευταίο διαγωνισμό (TIMSS, 2003) η Ολλανδία πήρε την 6$^{η}$ θέση ανάμεσα σε 25 χώρες.

**Συγκριτικός πίνακας TIMSS 1995-1999-2003 στα Μαθηματικά για τους μαθητές 2ας γυμνασίου**

| Country | 1995 | 1999 | 2003 | Difference[1] (2003-1995) | Difference[1] (2003-1999) |
|---|---|---|---|---|---|
| Singapore | 609 | 604 | 605 | -3 | 1 |
| Korea, Republic of | 581 | 587 | 589 | 8▲ | 2 |
| Hong Kong SAR[2,3] | 569 | 582 | 586 | 17▲ | 4 |
| Chinese Taipei | — | 585 | 585 | † | # |
| Japan | 581 | 579 | 570 | -11▼ | -9▼ |
| Belgium-Flemish | 550 | 558 | 537 | -13▼ | -21▼ |
| (Netherlands)[2] | 529 | 540 | 536 | 7 | -4 |
| Hungary | 527 | 532 | 529 | 3 | -2 |
| Malaysia | — | 519 | 508 | † | -11 |
| Russian Federation | 524 | 526 | 508 | -16▼ | -18▼ |
| Slovak Republic | 534 | 534 | 508 | -26▼ | -26▼ |
| (Latvia-LSS)[4] | 488 | 505 | 505 | 17▲ | # |
| (Australia)[5] | 509 | — | 505 | -4 | † |
| **(United States)** | **492** | **502** | **504** | **12▲** | **3** |
| Lithuania[6] | 472 | 482 | 502 | 30▲ | 20▲ |
| Sweden | 540 | — | 499 | -41▼ | † |
| (Scotland)[2] | 493 | — | 498 | 4 | † |
| (Israel)[7] | — | 466 | 496 | † | 29▲ |
| New Zealand | 501 | 491 | 494 | -7 | 3 |
| (Slovenia)[5] | 494 | — | 493 | -2 | † |
| Italy[7] | — | 479 | 484 | † | 4 |
| (Bulgaria) | 527 | 511 | 476 | -51▼ | -34▼ |
| (Romania) | 474 | 472 | 475 | 2 | 3 |
| Norway | 498 | — | 461 | -37▼ | † |
| Moldova, Republic of | — | 469 | 460 | † | -9 |
| Cyprus | 468 | 476 | 459 | -8▼ | -17▼ |
| (Macedonia, Republic of) | — | 447 | 435 | † | -12▼ |
| Jordan | — | 428 | 424 | † | -3 |
| Iran, Islamic Republic of | 418 | 422 | 411 | -7 | -11▼ |
| Indonesia[6] | — | 403 | 411 | † | 8 |
| Tunisia | — | 448 | 410 | † | -38▼ |
| Chile | — | 392 | 387 | † | -6 |
| Philippines | — | 345 | 378 | † | 33▲ |
| South Africa[8] | — | 275 | 264 | † | -11 |

# Αποτελέσματα PISA 2003 για 15-χρονους

| Combined mathematics literacy | | Mathematics subscales: Space and shape | | Mathematics subscales: Change and relationships | |
|---|---|---|---|---|---|
| Country | Score | Country | Score | Country | Score |
| OECD average | 500 | OECD average | 496 | OECD average | 499 |
| OECD countries | | OECD countries | | OECD countries | |
| Finland | 544 | Japan | 553 | Netherlands | 551 |
| Korea | 542 | Korea | 552 | Korea | 548 |
| Netherlands | 538 | Switzerland | 540 | Finland | 543 |
| Japan | 534 | Finland | 539 | Canada | 537 |
| Canada | 532 | Belgium | 530 | Japan | 536 |
| Belgium | 529 | Czech Republic | 527 | Belgium | 535 |
| Switzerland | 527 | Netherlands | 526 | New Zealand | 526 |
| New Zealand | 523 | New Zealand | 525 | Australia | 525 |
| Australia | 524 | Australia | 521 | Switzerland | 523 |
| Czech Republic | 516 | Canada | 518 | France | 520 |
| Iceland | 515 | Austria | 515 | Czech Republic | 515 |
| Denmark | 514 | Denmark | 512 | Iceland | 509 |
| France | 511 | France | 508 | Denmark | 509 |
| Sweden | 509 | Slovak Republic | 506 | Germany | 507 |
| Austria | 506 | Iceland | 504 | Ireland | 506 |
| Germany | 503 | Germany | 500 | Sweden | 505 |
| Ireland | 503 | Sweden | 498 | Austria | 500 |
| Slovak Republic | 498 | Poland | 490 | Hungary | 495 |
| Norway | 495 | Luxembourg | 488 | Slovak Republic | 494 |
| Luxembourg | 493 | Norway | 483 | Norway | 488 |
| Poland | 490 | Hungary | 479 | Luxembourg | 487 |
| Hungary | 490 | Spain | 476 | **United States** | 486 |
| Spain | 485 | Ireland | 476 | Poland | 484 |
| **United States** | 483 | **United States** | 472 | Spain | 481 |
| Portugal | 466 | Italy | 470 | Portugal | 468 |
| Italy | 466 | Portugal | 450 | Italy | 452 |
| Greece | 445 | Greece | 437 | Greece | 436 |
| Turkey | 423 | Turkey | 417 | Turkey | 423 |
| Mexico | 385 | Mexico | 382 | Mexico | 364 |
| Non-OECD countries | | Non-OECD countries | | Non-OECD countries | |
| Hong Kong-China | 550 | Hong Kong-China | 558 | Hong Kong-China | 540 |
| Liechtenstein | 536 | Liechtenstein | 538 | Liechtenstein | 540 |
| Macao-China | 527 | Macao-China | 528 | Macao-China | 519 |
| Latvia | 483 | Latvia | 486 | Latvia | 487 |
| Russian Federation | 468 | Russian Federation | 474 | Russian Federation | 477 |
| Serbia and Montenegro | 437 | Serbia and Montenegro | 432 | Serbia and Montenegro | 419 |
| Uruguay | 422 | Thailand | 424 | Uruguay | 417 |
| Thailand | 417 | Uruguay | 412 | Thailand | 405 |
| Indonesia | 360 | Indonesia | 361 | Tunisia | 337 |
| Tunisia | 359 | Tunisia | 359 | Indonesia | 334 |