ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΡΟΛΟΣ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΥΘΕΝΤΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΜΑΥΡΙΚΙΟΣ

Α.Μ : 214702

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

0. ΠΡΟΛΟΓΟΣ

1.ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Η έννοια της Μεταγνώσης

2. ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η σημασία της Μεταγνώσης

3. ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

Η έννοια του αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος

4. ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

Ο ρόλος της Μεταγνώσης στην επίλυση αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος

4.1 Το στάδιο της Κατανόησης

4.1.1 Η έννοια της αναπαράστασης

4.1.2 Η έννοια της γλώσσας

4.1.3 Η φάση της Ολοκλήρωσης

4.2 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Κατανόησης

4.2.1 Ανάκληση και χειρισμός των κανόνων που διέπουν τη γλώσσα της εκφώνησης

4.2.2 Χειρισμός και αλλαγές αναπαραστάσεων

4.2.3 Βελτίωση της συγκέντρωσης και επεξεργασίας πληροφοριών

4.2.4 Ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης

4.3 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Κατανόησης

4.4 Το στάδιο του σχεδιασμού της λύσης

4.5 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο Σχεδιασμού της Λύσης

4.6 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο του σχεδιασμού της λύσης

4.7 Το στάδιο της Εκτέλεσης της Λύσης

4.8 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Εκτέλεσης της λύσης

4.9 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Εκτέλεσης της Λύσης

4.10 Το στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

4.11 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

4.12 Συνοπτική παρουσίαση του Ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

5.ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ

Η διδασκαλία της Μεταγνώσης και η καλλιέργεια Μεταγνωστικών δεξιοτήτων με στόχο την αποτελεσματικότερη επίλυση μαθηματικού προβλήματος

5.1 Παραγωγή Ερωτήσεων

5.2 Περιγραφή των εσωτερικών νοητικών διεργασιών του δασκάλου και των μαθητών

5.3 Θέσπιση και επιδίωξη στόχων

5.4 Συνεργατική Μάθηση σε Τάξεις Μικτής Ικανότητας και Αλληλοδιδασκαλία μεταξύ μαθητών

5.5 Εξάσκηση σε στρατηγικές Μελέτης

5.6 Εντοπισμός Κομβικών σημείων

5.7 Παράφραση και Επεξεργασία ιδεών

6.ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟ

Έρευνα για το βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

6.1 Στόχοι της Έρευνας

6.2 Τα υποκείμενα της Έρευνας και ο τρόπος διεξαγωγής της

6.3 Πρώτο Έργο

6.4 Δεύτερο έργο

6.5 Ποσοτική ανάλυση και σχολιασμός του πρώτου έργου της έρευνας

6.6 Ποσοτική ανάλυση και σχολιασμός του δευτέρου έργου της έρευνας

6.7 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με τον πρώτο στόχο

6.8 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με το δεύτερο στόχο

6.9 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με τον τρίτο στόχο

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ικανότητα αποτελεσματικής αντιμετώπισης μαθηματικών προβλημάτων, ανέκαθεν αποτελούσε κυρίαρχο στοιχείο προβληματισμού των μαθηματικών κάθε εποχής. Οι περισσότεροι από αυτούς δεν παρέλειψαν μάλιστα να αναφερθούν με κάποιο έργο τους (ή να προσπαθήσουν τουλάχιστον), σε θέματα που σχετίζονταν άμεσα με την επίλυση προβλήματος και με τις "στρατηγικές" που ακολουθεί ο νους προκειμένου να επιλύσει κάποιο πρόβλημα. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε τον Πάππο, όπου στο έβδομο βιβλίο της *Συναγωγής*, αναφέρεται σε ένα κλάδο μελέτης που ονομάζεται *αναλυόμενος* και όπου περιγράφονται οι μέθοδοι της ανάλυσης και της σύνθεσης. Ο Descartes , σχεδίαζε να κατασκευάσει μια καθολική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, άφησε όμως ατελείωτο το έργο του *Κανόνες που κατευθύνουν το νου.* Ο Leibniz σχεδίαζε να γράψει μια *Τέχνη της επινόησης* αλλά ούτε και αυτός έφερε σε πέρας το έργο του. Ο Bolzano αναφέρθηκε εκτενώς στην έννοια της ευρετικής αλλά αυτός ο οποίος έφερε την επανάσταση ήταν ο G. Polya με το έργο του *Πώς να το λύσω.*

Το βασικό στοιχείο προβληματισμού έχει να κάνει με τα χαρακτηριστικά της σκέψης ενός καλού λύτη προβλημάτων. Τι είναι αυτό που χαρακτηρίζει έναν καλό λύτη προβλημάτων και τον κάνει να ξεχωρίζει από ένα μέτριο ή κακό λύτη ; Πως εξηγείται άτομα με παρόμοιες εμπειρίες και σχεδόν τις ίδιες μαθηματικές γνώσεις να διαφέρουν σημαντικά στην επίλυση προβλήματος ; Προφανώς οι απαντήσεις στα παραπάνω και σε συγγενή ερωτήματα αποτελούν βασικό συστατικό των διδακτικών προσεγγίσεων που θα υιοθετήσουμε προκειμένου να βελτιώσουμε τους μαθητές μας στην επίλυση προβλήματος. Η διδασκαλία τυποποιημένων ευρετικών έχει αποδείξει στην πράξη ότι δεν βελτιώνει την ικανότητα επίλυσης των μαθητών οι οποίοι συνήθως περιορίζονται σε μια στείρα εφαρμογή τους σε άκρως παρόμοιες καταστάσεις. Η παραπάνω συμπεριφορά έχει να κάνει με την άγνοια που έχει ο μαθητής σχετικά με το **γιατί, πως** και **πότε** χρησιμοποιούμε μια ευρετική αλλά και με την αδυναμία **επιλογής – κατασκευής** και **ενεργοποίησης** της κατάλληλης ευρετικής. Η **οργάνωση**, ο **έλεγχος** και η **επίγνωση** των ενεργειών μας πολλές φορές αποδεικνύονται παράγοντες καθοριστικής σημασίας για την επίλυση ενός προβλήματος, αφού αποτελούν τη δύναμη που θα δώσει ζωή στις γνώσεις μας.

Δεν είναι λίγες οι φορές που κάποιος μαθητής μας αδυνατεί να προχωρήσει ή να ολοκληρώσει την επίλυση ενός προβλήματος. Ενώ λοιπόν φαίνεται ότι ο συγκεκριμένος μαθητής δεν μπορεί να λύσει το πρόβλημα, ο δάσκαλος θέτοντας μια σειρά από "επιτυχημένες" ερωτήσεις, χωρίς να του δώσει έτοιμες απαντήσεις τον οδηγεί στη λύση.

Οι “επιτυχημένες” ερωτήσεις χαρακτηρίζονται έτσι διότι ο δάσκαλος αναγνωρίζοντας το εμπόδιο που δυσκολεύει το μαθητή και έχοντας **επίγνωση** των δυνατοτήτων και του τρόπου σκέψης του μαθητή, θέτει ερωτήματα που προσανατολίζουν στην ανακάλυψη της δυσκολίας και των χαρακτηριστικών της, στον προσδιορισμό των αιτίων που δημιουργούν αυτό το εμπόδιο, τις πιθανές επιλογές που υπάρχουν, την αξιολόγηση αυτών των επιλογών, τη διαμόρφωση ενός σχεδίου, τον έλεγχο των ενεργειών και πληθώρα άλλων παραγόντων οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με τις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται.

Εάν ο μαθητής είχε την ικανότητα να θέτει ο ίδιος στον εαυτό του τις παραπάνω ερωτήσεις τότε θα ήταν αποτελεσματικότερος λύτης προβλημάτων. Η ικανότητα του δασκάλου να θέτει τις παραπάνω “επιτυχημένες” ερωτήσεις βασίζεται στο ότι είχε γνώση για τον τρόπο σκέψης του μαθητή και τις συμπεριφορές που αυτός υιοθετεί (γνώση επί των γνωστικών διαδικασιών ≈ μεταγνώση). Συνεπώς εάν ο μαθητής αποκτήσει και αυτός το ίδιο είδος γνώσης (μεταγνώση) θα μπορεί να διατυπώνει από μόνος του τα κατάλληλα κάθε φορά ερωτήματα, τα οποία θα τον βοηθούν να ξεπερνάει τις δυσκολίες και να οδηγεί τους συλλογισμούς του στη λύση του προβλήματος. Βέβαια το θέμα είναι αρκετά πιο σύνθετο αφού εμπλέκεται μια ποικιλία παραγόντων ωστόσο με το παραπάνω παράδειγμα δίνεται μια ξεκάθαρη εικόνα του βασικού πυρήνα των απόψεων που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία.

Στόχος μας είναι η διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης η οποία, όχι μόνο θα συμβάλλει στην αποτελεσματικότερη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος αλλά ταυτόχρονα θα εφοδιάζει τους μαθητές με δεξιότητες απαραίτητες για αυτό-εκπαίδευση, αυτό- επιμόρφωση και αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση ακόμη και έξω-μαθηματικών προβλημάτων. Δεξιοτήτων δηλαδή που θα συνοδεύουν τους μαθητές δια βίου και όχι μόνο κατά τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Δεξιότητες οι οποίες θα αναβαθμίζονται προσαρμοζόμενες στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος και δεν θα περιορίζονται στα στείρα χαρακτηριστικά μιας συνήθειας η οποία ατροφεί όταν αλλάζει το ερέθισμα που την προκαλεί.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Η έννοια της Μεταγνώσης

'Να σκέφτεσαι για τις σκέψεις σου'.

Ορίζοντας ο Flavell (1976) τη μεταγνώση, της δίνει τη δυνατότητα να αναφέρεται στη γνώση μας για τη γνωστική διαδικασία (αντίληψη, προσοχή, μνήμη, σκέψη, γλώσσα, μάθηση), στο αποτέλεσμα της, και σε οτιδήποτε σχετικό μ΄ αυτά. Σύμφωνα με τον ευρύτατο αυτό ορισμό **η μεταγνώση δεν αγκαλιάζει μόνο μεταγνωστικές δεξιότητες αλλά και γνωστικές, οι οποίες καθίστανται μεταγνωστικές από την στιγμή που θα αποκτήσουμε την επίγνωση, τον έλεγχο και την οργάνωση τους.** Για παράδειγμα ας πάρουμε τη μνήμη. Διαβάζοντας ένα κείμενο έχουμε την ικανότητα να το αποστηθίσουμε μέχρι κάποιο βαθμό (γνωστική δεξιότητα), εάν διαβάσουμε το ίδιο κείμενο υπογραμμίζοντας τα σημαντικά σημεία, εντοπίζοντας λέξεις κλειδιά, κωδικοποιώντας κάποιες φράσεις, βάζοντας αρίθμηση στα επιμέρους στάδια κ.τ.λ αποσκοπώντας στη βελτίωση του βαθμού αποστήθισης (έχουμε δηλαδή επίγνωση των ενεργειών μας) τότε ελέγχουμε και οργανώνουμε την ικανότητα της αποστήθισης (μεταγνωστική δεξιότητα).

Η μεταγνώση λοιπόν, σχετίζεται με τη γνώση και την κατανόηση που έχει κάποιος για το επίπεδο και τις δυνατότητες της σκέψης του, του προσωπικού του συστήματος επεξεργασίας των πληροφοριών και οικοδόμησης της γνώσης. Σχετίζεται με την επίγνωση και τον έλεγχο που έχει κάποιος επί των σκέψεων και των δραστηριοτήτων που βιώνει. Αναφέρεται συνεπώς **στην γνώση που έχουμε για τις ίδιες τις γνωστικές μας διαδικασίες.** Δηλαδή αναφέρεται στη δυνατότητα κάποιου για τον **αυτοέλεγχο** (self – monitoring), την **αυτοδιόρθωση** (self- regulation) και την **αξιολόγηση** (evaluation).

Η μεταγνώση εμπεριέχει την ικανότητα του μανθάνοντα να σχεδιάζει μια στρατηγική για παραγωγή των πληροφοριών που χρειάζεται, να έχει επίγνωση των ιδιαίτερων βημάτων και στρατηγικών που οδηγούν στην αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση γενικά νέων καταστάσεων και να αξιολογεί τα αποτελέσματα και την πορεία της σκέψης του.

Σύμφωνα με τον Silver (1987), οι διαδικασίες του σχεδιασμού (planning) , του ελέγχου (control) και της αξιολόγησης (evaluation), είναι από τις πιο σημαντικές διαδικασίες της μεταγνώσης. Έτσι, μεταγνώση είναι η γνώση για τη διαδικασία της γνώσης και η επαγρύπνηση για τις πηγές και ικανότητες που απαιτούνται για την κατάκτηση της, καθώς και ο συστηματικός έλεγχος και η αυτοαξιολόγηση των διαδικασιών που οδηγούν σ΄ αυτή. Σε τελευταία ανάλυση **μεταγνώση είναι η ικανότητα μας να γνωρίζουμε τι γνωρίζουμε και τι δεν γνωρίζουμε (θεωρητική πτυχή της μεταγνώσης) και πως θα το γνωρίσουμε (πρακτική πτυχή της μεταγνώσης).** Λέγοντας **πως** θα το γνωρίσουμε, εννοούμε τη γνώση που έχει το άτομο για τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αντλήσει γνώση από το περιβάλλον. Οι τρόποι αυτοί συνθέτουν ένα ευρύ σύνολο επιμέρους ενεργειών (εικασίες, πειραματισμοί, ερωτήσεις, υπολογισμοί, αναπαραστάσεις, κ.α). Οι ενέργειες αυτές άλλοτε εκτελούνται συνειδητά και άλλοτε ασυνείδητα, έχοντας τη μορφή αυτόματων ενεργειών τις οποίες έχουμε υιοθετήσει λόγω της επανειλημμένης αποτελεσματικότητας τους σε προηγούμενες εμπειρίες μας. Η συνειδητή εκτέλεση των παραπάνω ενεργειών παρουσιάζεται κυρίως στο στάδιο εκπαίδευσης της εκτέλεσης αυτών των ενεργειών ή όταν έχουμε πρωτοανακαλύψει την αποτελεσματικότητα τους στην αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων. Επίσης, οι ενέργειες αυτές εμπεριέχουν την **ικανότητα για σχεδιασμό, έλεγχο, αξιολόγηση, διόρθωση και επίγνωση των επιμέρους βημάτων και στρατηγικών που οδηγούν στην επίλυση προβλημάτων.**

Ανάλογα με τη γνωστική λειτουργία στην οποία επικεντρώνεται η μεταγνώση μπορούμε να διακρίνουμε :

- Τη μεταμνήμη, όσον αφορά τη μνήμη και τα περιεχόμενα της
- Τη μεταπροσοχή, την επίγνωση δηλαδή, του πότε και πόσο εύκολα επικεντρώνεται η προσοχή μας
- Τη μετακατανόηση, που αναφέρεται στην επίγνωση του αν κατανοούμε κάτι και ποιες διαδικασίες βοηθούν σε αυτό
- Τη μεταγλώσσα, τη γλώσσα δηλαδή που χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει ή να περιγράψει τη γλώσσα ή ένα γλωσσικό ιδίωμα κ.τ.λ

Πέρα όμως από τις γνωστικές λειτουργίες, ο όρος μεταγνώση επεκτάθηκε, ώστε σήμερα να περιλαμβάνει οτιδήποτε το ψυχολογικό, όπως είναι τα συναισθήματα, τα κίνητρα, την επίγνωση του ατόμου όσον αφορά τις εσωτερικές αυτές καταστάσεις του και την ικανότητα του να τις ελέγχει.

Ανακεφαλαιώνοντας, **ορίζουμε** ως μεταγνώση τη γνώση που έχουμε για τις γνωστικές μας λειτουργίες (αντίληψη, προσοχή, μνήμη, σκέψη, γλώσσα, μάθηση) αλλά και για οποιαδήποτε ψυχολογική παράμετρο εμπλέκεται στις σκέψεις και τις δραστηριότητες που βιώνουμε. Π.χ Έχω άγχος (ψυχολογική παράμετρος) διότι το αυριανό διαγώνισμα είναι πολύ σημαντικό (Επίγνωση) αλλά μάλλον δεν πρέπει να ανησυχώ αφού το μάθημα είναι τόσο εύκολο! (Έλεγχος). Οι επιμέρους πτυχές της μεταγνώσης είναι η θεωρητική και η πρακτική.

Η **θεωρητική πτυχή** αναφέρεται στη γνώση που το άτομο έχει για τη γνώση ή τις πληροφορίες που κατέχει. Π.χ Ξέρω ότι γνωρίζω ποιος είναι ο τύπος για το εμβαδόν τριγώνου.

Η **πρακτική πτυχή** αναφέρεται στη γνώση για τους τρόπους άντλησης, αποθήκευσης και χρήσης γνώσης και πληροφοριών από το περιβάλλον. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για την ικανότητα **Σχεδιασμού, Ελέγχου, Αξιολόγησης, Διόρθωσης και Επίγνωσης** των ενεργειών που οδηγούν στην επίλυση ενός προβλήματος. Π.χ Θέλω να βρω το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου. Αφού γνωρίζω τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου θα χωρίσω το πολύγωνο σε πολλά τρίγωνα (Σχεδιασμός). Όμως τα επιμέρους τρίγωνα είναι ίσα (Αξιολόγηση). Αρκεί λοιπόν να βρω το εμβαδόν ενός μόνο τριγώνου (Διόρθωση).

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η σημασία της Μεταγνώσης

'Τίποτα δεν είναι πιο σημαντικό από το να δει κανείς τις πηγές της επινόησης, που είναι, κατά τη γνώμη μου, πιο ενδιαφέρουσες από τις ίδιες τις επινοήσεις'.
(Leibniz Gottfried Wilhelm)

Επιστρέφεις κουρασμένος από τη δουλειά. Αφηρημένος ακουμπάς 'κάπου' τα κλειδιά σου. Μετά από λίγες ώρες πρέπει να βγεις έξω, χρειάζεσαι τ' αμάξι αλλά… δεν θυμάσαι απολύτως τίποτα σχετικά με το που είναι τα κλειδιά! Πρώτα ελέγχεις τα σημεία στα οποία συνήθως αφήνεις τα κλειδιά σου. Κατόπιν ρίχνεις μια γρήγορη ματιά στα σημεία από τα οποία πέρασες. Μάταιος κόπος! Τώρα θα παίξεις το δυνατό σου χαρτί. Βάζεις τον 'εαυτό' σου να παίξει έναν ρόλο, να ξαναζήσει τις σκηνές γύρω από τη χρονική στιγμή κατά την οποία 'έχασες' τα κλειδιά. Να ξαναπεράσει από τα ίδια σημεία. Το τι έκανες τη συγκεκριμένη στιγμή είναι ασαφές. Θυμάσαι όμως αρκετά καλά κάποιες άλλες στιγμές. Αρχικά άνοιξες την πόρτα, κατόπιν έβγαλες το σακάκι σου και προτού καλά-καλά το κρεμάσεις ένας εκκωφαντικός θόρυβος ακούγεται από το δρόμο. Ανοίγεις τη μπαλκονόπορτα και βλέπεις ότι δυο αυτοκίνητα έχουν τρακάρει. Χαζεύεις το σκηνικό και ξαναμπαίνεις μέσα. Όχι! Προτού μπεις μέσα έκανες και κάτι άλλο. Μα βέβαια, ακούμπησες τα κλειδιά στο τραπεζάκι του μπαλκονιού!

Παρόμοιο σκηνικό έχουμε βιώσει όλοι κάποια στιγμή στη ζωή μας. Ενδεχομένως και εμείς να βρήκαμε τα 'κλειδιά' με τον ίδιο τρόπο. Το 'κόλπο' το ανακαλύψαμε μόνοι μας ή μας το πρότεινε κάποιος όταν μας είδε να ψάχνουμε απεγνωσμένα κάτι. '*Σκέψου τι έκανες πιο πριν',* ήταν η συμβουλή και απέδωσε. Η αποδοτικότητα της συγκεκριμένης συμπεριφοράς αναζήτησης κρίνεται προφανώς εκ' του αποτελέσματος, αλλά που οφείλεται ; Σίγουρα η μνήμη μας, από μόνη της σαν γνωστική λειτουργία δεν μπόρεσε άμεσα να μας λύσει το **πρόβλημα** της εύρεσης των κλειδιών. Ήταν αδύνατο να ανασύρουμε από τη μνήμη μας την συγκεκριμένη στιγμή. Ωστόσο ξέραμε **πως** μπορούμε να το επιτύχουμε. Ξέραμε πως μπορούμε να **αντλήσουμε** τη συγκεκριμένη πληροφορία. **Οργανώσαμε** τις πληροφορίες μας. Βάλαμε τα γεγονότα σε μια σειρά.

Διορθώσαμε τη σειρά των γεγονότων. **Σχεδιάσαμε** ένα ρόλο για τον εαυτό μας, τον εκτελέσαμε, ενώ ταυτοχρόνως δυο αόρατα χέρια ξέμπλεκαν την αλυσίδα των αναμνήσεων μας, αναζητώντας τον χαμένο κρίκο.

Οι παραπάνω ενέργειες δεν είναι τίποτα άλλο παρά η πρακτική πτυχή της μεταμνήμης. Της μεταγνώσης δηλαδή που αναφέρεται στη γνωστική διαδικασία της μνήμης. Εάν δεν είχαμε την παραπάνω μεταγνωστική δεξιότητα, πολλά **προβλήματα** εύρεσης αντικειμένων θα ήταν αδύνατο να τα αντιμετωπίσουμε με επιτυχία. Η εύρεση των χαμένων αντικειμένων θα ήταν για μας κάτι δύσκολο, ακατανόητο και οποιαδήποτε επιτυχία τυχαία.

Σκεφτείτε η έλλειψη αντίστοιχων μεταγνωστικών δεξιοτήτων να επεκταθεί και σε άλλες γνωστικές μας λειτουργίες όπως η σκέψη ,η αντίληψη, η μάθηση κ.τ.λ με αντίστοιχες επιπτώσεις όπως αυτές που θα είχαμε στο παράδειγμα που περιγράψαμε . Το σενάριο είναι εφιαλτικό. Ουσιαστικά μιλάμε για αδυναμία από μέρους μας να ελέγξουμε, να διορθώσουμε και να αξιολογήσουμε τις γνωστικές μας λειτουργίες.

Το παραπάνω παράδειγμα προτιμήθηκε διότι περιέχει ένα οικείο πρόβλημα, όλοι χάνουμε και μετά πρέπει να ξαναβρούμε πράγματα. Δεν προτιμήθηκε για εισαγωγή ένα πιο 'μαθηματικό' πρόβλημα για να μην δοθεί η εντύπωση ότι η μεταγνώση είναι κάτι ξένο προς την ανθρώπινη φύση, κάποια καινούργια ανακάλυψη των μαθηματικών η οποία σχετίζεται μόνο με μαθηματικά προβλήματα. **Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών**
(και όχι μόνο), εφόσον εμπλουτιστεί με την καλλιέργεια μεταγνωστικών διεργασιών, όχι μόνο βελτιώνει τους μαθητές στα μαθηματικά αλλά τους εφοδιάζει με πολύτιμες ικανότητες, όπως αυτή της αυτομόρφωσης και της αποτελεσματικότερης αντιμετώπισης των προβλημάτων της καθημερινής μας ζωής.

Αλήθεια όμως, πόσα 'μαθηματικά' έχουν τα προβλήματα της καθημερινής μας ζωής; Γιατί μαθαίνουμε όλα αυτά τα μαθηματικά ; Και γιατί πρέπει τώρα να ενδιαφερθούμε για κάποιον άλλο τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών ; Προφανώς αν τα μαθηματικά που μαθαίνουμε είναι περιττά, τότε και η αναβάθμιση του τρόπου διδασκαλίας τους (αν αυτή επιτευχθεί), είναι εξίσου περιττή.

Γιατί μαθαίνουμε μαθηματικά ;

Σε αυτή την κλασική και αρκετά προσφιλή στους μαθητές ερώτηση, υπάρχουν μερικές τετριμμένες απαντήσεις οι οποίες τις περισσότερες φορές αποτυγχάνουν παταγωδώς να πείσουν. Για παράδειγμα, μαθαίνουμε μαθηματικά επειδή είναι χρήσιμα στη ζωή μας, επειδή είναι απαραίτητα για την πρόοδο της επιστήμης, επειδή θα γράψουμε εξετάσεις ή επειδή είναι όμορφα (;!) και καλλιεργούν το πνεύμα. Βέβαια, οι ανταπαντήσεις από την πλευρά των μαθητών είναι κλασικές και ενίοτε πιο πειστικές. Αντίστοιχα λοιπόν, θα ακούσουμε από τους μαθητές να μας λένε ότι κανείς ποτέ δεν θα τους ρωτήσει στην

καθημερινή τους ζωή τον νόμο των ημιτόνων , ότι ακόμα κι αν είναι χρήσιμα για την πρόοδο της επιστήμης αυτοί δεν ενδιαφέρονται να γίνουν επιστήμονες διότι το μόνο που τους ενδιαφέρει είναι να τελειώσουν το σχολείο και να δουλέψουν στο μαγαζί του πατέρα τους για παράδειγμα και ότι προφανώς σίγουρα γνωρίζουν χιλιάδες άλλα πιο όμορφα πράγματα από τα μαθηματικά. Κάπου σ' αυτό το σημείο ο διάλογος πάντα σταματάει. Οι δυο πλευρές συμφωνούν ότι διαφωνούν και η αιώνια παρεξήγηση συνεχίζεται. Ο μαθηματικός βέβαια που κοντοστέκεται γεμάτος ικανοποίηση μπροστά από τη λυμένη στον πίνακα άσκηση θα συνεχίσει να μιλάει για την ομορφιά των μαθηματικών και θα καθησυχάζει τον εαυτό του ότι οι προβληματισμοί των παιδιών είναι αποκυήματα ανωριμότητας. Τα μαθηματικά είναι για αυτόν όπως η κλασική μουσική . Είναι ένα προϊόν της ανθρώπινης διάνοιας και κανείς δεν μπορεί να το αμφισβητεί. Πόσο μάλλον όταν κι ο ίδιος ανήκει στους λίγους που μπορούν να μιλάνε και να γράφουν μαθηματικά.

Η αλήθεια είναι ότι από τα μαθηματικά (σαν γνωστικό αντικείμενο) που μαθαίνουμε στο σχολείο, ελάχιστα είναι αυτά που θα χρησιμοποιήσει ο μέσος πολίτης στην καθημερινή του ζωή. Αναμφίβολα μεγάλο μέρος της τεχνολογικής και επιστημονικής προόδου που καρπωνόμαστε όλοι μας, οφείλεται σε επεξεργασία και κατανόηση μαθηματικών εννοιών που υπερκαλύπτουν την ύλη του σχολείου, ωστόσο δεν θα ήταν πιο δίκαιο και πιο ουσιαστικό μόνο το συγκεκριμένο κομμάτι του πληθυσμού που ασχολείται με τις επιστήμες να εμβαθύνει στα μαθηματικά, ενώ για τους υπόλοιπους να αρκούμαστε στα στοιχειώδη ; Είναι όμως δυνατόν η προσφορά των μαθηματικών να περιορίζεται σε υπολογιστικά μόνο οφέλη ; Υπάρχει βέβαια η άποψη ότι τα μαθηματικά εκπαιδεύουν και βελτιώνουν τη διανοητική ικανότητα του ανθρώπου. Ωστόσο, η παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών το μόνο που βελτιώνει είναι η μνήμη, αφού απουσιάζει οποιοδήποτε στοιχείο εξερεύνησης και δημιουργικότητας.

Υπάρχουν άραγε κάποιες πτυχές των μαθηματικών οι οποίες μπορεί να καλλιεργήσουν στάσεις, δεξιότητες και μοντέλα σκέψης απαραίτητα για τις ανάγκες της καθημερινότητας ; Μήπως τα μαθηματικά μέσα από την κατάλληλη διδασκαλία έχουν τη δυνατότητα να μας "εκπαιδεύσουν" έτσι ώστε να γίνουμε πιο αποτελεσματικοί στην αντιμετώπιση πρωτόγνωρων προβληματικών καταστάσεων ;

Προτού απαντήσουμε στους παραπάνω προβληματισμούς θα διακρίνουμε τους επιμέρους σκοπούς διδασκαλίας των μαθηματικών έτσι ώστε να ξεκαθαρίσει το τοπίο μέσα στο οποίο είναι δυνατόν να ευδοκιμήσουν οι προτάσεις μας.

Καταρχάς, έχουμε τους **πρακτικούς σκοπούς.** Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται οι σκοποί που αναφέρονται στην άμεση ή έμμεση χρησιμότητα που

μπορούν να έχουν οι διαδικασίες και οι τεχνικές των μαθηματικών για τη ζωή του ατόμου. Τέτοιοι σκοποί για παράδειγμα είναι :

- Η κατανόηση και η εφαρμογή βασικών αλγεβρικών πράξεων.
- Οι υπολογιστικές ικανότητες.
- Οι προσεγγιστικοί υπολογισμοί.
- Η ικανότητα ερμηνείας γραφημάτων κ.τ.λ

Ακολουθούν οι **ειδολογικοί ή μορφωτικοί σκοποί.** Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι σκοποί που σχετίζονται με τη διανοητική καλλιέργεια του ανθρώπου και συμβάλλουν στην ανάπτυξη και στο σχηματισμό κάποιων γενικών χαρακτηριστικών και διανοητικών γνωρισμάτων, τα οποία αναμένεται να λειτουργήσουν άμεσα ή έμμεσα σε κάποιες άλλες σχετικές ή κοντινές περιοχές ή ακόμη και να μεταφερθούν σε άλλες καταστάσεις. Τέτοιοι σκοποί για παράδειγμα είναι :

- Η ανάπτυξη της ικανότητας για καθαρή και ακριβή σκέψη.
- Η ικανότητα αναγνώρισης λογικών σχέσεων μεταξύ ανεξάρτητων γεγονότων.
- Η ικανότητα για αφαίρεση και γενίκευση κ.τ.λ

Τέλος, διακρίνουμε τους **πολιτισμικούς σκοπούς** οι οποίοι αναφέρονται :

- Στην ικανότητα αναγνώρισης της δύναμης των μαθηματικών και του ρόλου που διαδραματίζουν στη διαμόρφωση της κοινωνίας.
- Στην ικανότητα προσέγγισης των εννοιών της αρμονίας και της γεωμετρίας που χαρακτηρίζει το περιβάλλον μας κ.τ.λ

Η μεταγνώση έρχεται να αναβαθμίσει τη διδασκαλία των μαθηματικών, κυρίως όταν ο σκοπός μας έχει να κάνει με θέματα **μορφωτικά.** Η καλλιέργεια των μεταγνωστικών διεργασιών μπορεί να ευδοκιμήσει μέσα σε ένα μαθηματικό περιβάλλον (κυρίως μέσα από την επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων όπως θα δούμε στη συνέχεια), όπου ο ρόλος των μαθηματικών ανάγεται σε εργαλείο διαμόρφωσης ενός ‘στίβου’ όπου ο μαθητής θα προπονείται στην αποτελεσματικότερη χρήση των γνωστικών του δεξιοτήτων.

Η έρευνα για τη μεταγνώση στηρίχθηκε στην παραδοχή ότι υπάρχει ουσιαστική και θετική σχέση μεταξύ μεταγνωστικών δεξιοτήτων και αντίστοιχων ικανοτήτων απόκτησης γνώσης. Σύμφωνα μ΄ αυτή τη σχέση **η ικανότητα του μαθητή να εξηγεί και να**

αναγνωρίζει τις γνωστικές του δραστηριότητες που κατευθύνονται σε κάποιο στόχο, είναι αντανάκλαση και πρόγνωση των αντίστοιχων γνωστικών του επιτευγμάτων (Quike & Winter, 1994). Σχετικές έρευνες έδειξαν πως **η καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων είναι απαραίτητο στοιχείο της αποτελεσματικής διδασκαλίας, θεμελιώνει κάθε προσπάθεια αυτοβελτίωσης των μαθητών, της αυτομόρφωσης του ατόμου και της δια βιου παιδείας** (Weinstein & Mayer, 1986).

Στόχος της μεταγνώσης είναι να δημιουργήσει επαρκείς δια βίου μαθητές, ικανούς να ανταποκρίνονται με επιτυχία στον ταχύτατο πολλαπλασιασμό των γνώσεων και στις όποιες προκλήσεις της εποχής (Costa 1984). Για το σκοπό αυτό, προσπαθεί να βοηθήσει τους μαθητές να ανακαλύπτουν τη γνώση εφευρίσκοντας τους καταλληλότερους κάθε φορά τρόπους. Ακόμα, στοχεύει στο να βοηθήσει τους μαθητές να οργανώσουν και να ελέγξουν τη σκέψη τους, να επιλέξουν στρατηγικές και τεχνικές κατάλληλες για το πρόβλημα που τους απασχολεί και τις οποίες ενδέχεται να χρειαστεί να τροποποιήσουν ή να βελτιώσουν καταλλήλως ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος ή τις ιδιαιτερότητες του τρόπου σκέψης τους.

Έτσι η μεταγνώση, η συνειδητότητα δηλαδή του πως κάποιος σκέφτεται και του τι και πως το μαθαίνει **εξασφαλίζει** :

Α. Τον **έλεγχο της μάθησης**, μέσα από :

- Την οργάνωση του χρόνου και των επιμέρους βημάτων.
- Την εύρεση και διόρθωση των λαθών στον τρόπο σκέψης.
- Την υποβολή ερωτήσεων για επεξεργασία του θέματος και αυτοαξιολόγηση.
- Τον προσδιορισμό του τι γνωρίζω και του τι δεν γνωρίζω.

Και,

Β. Την ικανότητα **επιλογής και χειρισμού της στρατηγικής**, μέσα από :

- Την επιλογή των αναγκαίων πληροφοριών – δεδομένων.
- Τη σύνδεση των πληροφοριών – δεδομένων μεταξύ τους.
- Τον έλεγχο των επιμέρους βημάτων της στρατηγικής.
- Την αξιολόγηση και διόρθωση των επιμέρους ενεργειών.

Τα παραπάνω εξασφαλίζουν στον μαθητή **καλύτερες επιδόσεις, ικανότητα αυτομόρφωσης** και του παρέχουν **κίνητρα** αφού πλέον η διαδικασία της μάθησης μέσα από την αύξηση της ατομικής συμβολής λαμβάνει πιο προσωπικό χαρακτήρα.

Η μεταγνώση καθιστά τον μαθητή ικανό να διαλέγει, να τροποποιεί και να επινοεί στρατηγικές για να επιλύσει προβλήματα. Σε καμία περίπτωση δεν στοχεύει στο να εντάξει τη σκέψη του μαθητή μέσα σε σχέδια σκέψης τα οποία θα ανακαλούνται πανομοιότυπα.

Η μεταγνώση όμως δεν αρκείται μόνο στα παραπάνω, τα οποία θα αναλύσουμε περαιτέρω σε παρακάτω ενότητες κυρίως μέσα από την επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων, αλλά δίνει απάντηση και σε ένα ερώτημα το οποίο δυστυχώς περνάει απαρατήρητο. **Πόσα μαθηματικά μπορούμε να αναγνωρίσουμε στο περιβάλλον μας και γιατί.** Αυτό το πολύ βασικό ερώτημα, σπανίως προβληματίζει τους ερευνητές. Η έρευνα για το συγκεκριμένο ερώτημα περιορίζεται συνήθως σε θέματα που έχουν να κάνουν με καθαρά μαθηματικό περιβάλλον. Για παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα στο μαθητή και εξετάζουμε αν μπορεί να αναγνωρίσει τις επιμέρους μαθηματικές ιδιότητες (μονοτονία, ακρότατα, ρίζες κ.τ.λ) που "κρύβει" το γράφημα. Τι γίνεται όμως με καθημερινές καταστάσεις της ζωής μας ; Μήπως δεν εμπεριέχουν μαθηματικά αυτές οι καταστάσεις ; Προφανώς αν αυτές οι καταστάσεις εμπεριέχουν μαθηματικά η καλλιέργεια της ικανότητας εντοπισμού και διαχείρισης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών θα πρέπει να αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης αφού έτσι παρέχεται η δυνατότητα για βελτίωση του τρόπου αντιμετώπισης των καθημερινών προβλημάτων. Βέβαια δεν αναφερόμαστε μόνο στα κλασικά υπολογιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής π.χ να υπολογίσουμε τα ρέστα ή να μετρήσουμε το χωράφι μας, αλλά και σε άλλα στα οποία εντοπίζεται δυσκολότερα το μαθηματικό τους υπόβαθρο. Το γεγονός ότι το μαθηματικό υπόβαθρο εντοπίζεται δυσκολότερα σ' αυτές τις περιπτώσεις, δεν υποβιβάζει καθόλου τη συμβολή της αναγνώρισης και επεξεργασίας των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών. Το αντίθετο! Σ΄ αυτή τη δυσκολία αναγνώρισης των εμπλεκομένων μαθηματικών εννοιών στηρίζονται αυτοί που δημιουργούν το πρόβλημα προκειμένου να εξασφαλίσουν την αδυναμία επίλυσης από μέρους μας.

Νομίζετε ότι αυτά τα προβλήματα είναι σπάνια και ότι σίγουρα δεν επηρεάζουν τη δικιά σας ζωή. Κι όμως ! Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα. Στην εποχή μας, από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, τα περισσότερα παιδιά έχουν κινητό τηλέφωνο. Το ίδιο και οι γονείς τους, το ίδιο και εμείς. Οι τρόποι πληρωμής ποικίλουν και τα οικονομικά πακέτα που προσφέρουν οι εταιρείες κινητής τηλεφωνίας όχι μόνο είναι πολλά αλλά έχουν και διαφορετικό τομέα βαρύτητας. Για παράδειγμα το πακέτο Α έχει 15 ευρώ πάγιο και 12 λεπτά δωρεάν χρόνο ομιλίας ενώ το πακέτο Β 10 ευρώ πάγιο και 35 δωρεάν μηνύματα κ.τ.λ Οι εταιρείες προφανώς έχουν μελετήσει πολύ καλά όλα τα πακέτα που παρέχουν και έχουν εξασφαλίσει σε κάθε περίπτωση ότι θα έχουν κέρδος. Το έχουν εξασφαλίσει μέσα από

πολύπλοκα ενδεχομένως μαθηματικά μοντέλα τα οποία το πιθανότερο είναι να μην έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε ακριβώς αλλά σίγουρα μπορούμε να τα προσεγγίσουμε μέσα από συναρτήσεις οι οποίες θα λαμβάνουν υπόψη τους το κόστος των προσφερόμενων υπηρεσιών και τις συνηθισμένες μας ανάγκες. Ούτως ή άλλως δεν μας ενδιαφέρει ο ακριβής προσδιορισμός του κόστους αλλά η σύγκριση των πακέτων. Έτσι, μπορούμε έστω και χονδρικά να επιλέξουμε το πακέτο που μας συμφέρει περισσότερο. Ακόμη κι αν δεν προσεγγίσουμε το θέμα με τον παραπάνω τρόπο είναι σημαντικό **να γνωρίζουμε το σκεπτικό** που διέπει παρόμοιες καταστάσεις, διαφορετικά η άγνοια μας αυξάνει τις πιθανότητες να βρεθούμε στη θέση… του θύματος. Βέβαια πολλοί θα ισχυριστούν ότι ο κόπος για τις παραπάνω μαθηματικές προσεγγίσεις είναι δυσανάλογος του τελικού κέρδους.

Η συγκεκριμένη αντίληψη δεν συνάδει με την πραγματικότητα και για να πειστεί κάποιος γι' αυτό αρκεί να αναφέρουμε το επιπλέον ποσό χρημάτων που απαιτείται για την αποπληρωμή δανείων και αγορών με δόσεις, όπου λόγω των τόκων το τελικό ποσό υπερβαίνει κατά πολύ την αξία του προϊόντος. Προφανώς οι περισσότεροι, σκεπτόμενοι με βάση "λογικά" κριτήρια έχουν την εντύπωση ότι δεν μπορεί η πληρωμή με δόσεις να υπερβαίνει κατά πολύ την αρχική αξία του προϊόντος πράγμα το οποίο διαψεύδουν βέβαια τα "κερδοσκοπικά" κριτήρια αυτών που επιλέγουν τα επιτόκια των δόσεων.

Τα περισσότερα άτομα έχουν διδαχθεί κατά σειρά ετών (και ενδεχομένως με εξαίσιες επιδόσεις) το αντίστοιχο μαθηματικό υπόβαθρο των παραπάνω διαδικασιών, παρόλα αυτά αρκετά συχνά αδυνατούν να εντοπίσουν την ύπαρξη του. Επίσης αδυνατούν να υποψιαστούν τις σκοπιμότητες και τις επιπτώσεις των φαινομένων που υιοθετούν το παραπάνω υπόβαθρο. Σε αυτό ακριβώς το σημείο συμβάλλει η μεταγνώση μέσω της οποίας το άτομο όχι μόνο **ελέγχει και οργανώνει αποτελεσματικότερα τη διαδικασία ερμηνείας των πληροφοριών που δέχεται από το περιβάλλον αλλά ταυτόχρονα οξύνει τις διαδικασίες δημιουργίας και ελέγχου υποθέσεων και συλλογισμών.** Έτσι, η εμπλουτισμένη με μεταγνωστικές διεργασίες διδασκαλία των μαθηματικών ικανοποιεί επιπλέον τις παρακάτω βασικές απαιτήσεις :

- Δημιουργία ατόμων με επαρκές μαθηματικό υπόβαθρο.
- Δημιουργία ατόμων με ικανότητες αυτομόρφωσης.
- Δημιουργία ατόμων με δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων στο συνεχώς μεταβαλλόμενο εργασιακό και κοινωνικό τους περιβάλλον.

Εννοείται βέβαια ότι οι μεταγνωστικές δεξιότητες οι οποίες θα καλλιεργηθούν μέσα σε ένα μαθηματικό περιβάλλον θα έχουν μια ακτίνα δράσεως η οποία θα καλύπτει και εξωμαθηματικές εμπειρίες. Φανταστείτε έναν μαθητή ο οποίος κατά τη διάρκεια της 12χρονης σχολικής του ζωής έχει διδαχθεί την επίλυση προβλήματος μέσα σε ένα πλαίσιο "απαράβατων" μεταγνωστικών κανόνων. Για παράδειγμα συνεχούς ελέγχου και αξιολόγησης των σκέψεων του. Προφανώς και στην εξωσχολική του ζωή η συμπεριφορά αυτή θα είναι ευκολότερο να υιοθετηθεί, πόσο μάλλον όταν θα έχει επιβεβαιωθεί η αξία της μέσα από την αντιμετώπιση απαιτητικότερων καταστάσεων στο περιβάλλον του σχολείου.

Αναφέραμε παραπάνω ότι η μεταγνώση αυξάνει τις ικανότητες για αυτομόρφωση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα όχι μόνο να δημιουργηθούν υψηλά επίπεδα κινήτρου αλλά ταυτοχρόνως να τονωθεί η αυτοπεποίθηση και το θετικό αυτοείδωλο του ατόμου. Οι δεξιότητες για αυτογνώση αναπτύσσουν ακόμη θετικές στάσεις απέναντι στη γνώση, στο γνωστικό αντικείμενο και στο δάσκαλο.

Στη δεκαετία του '80 η διδασκαλία για τη σκέψη και την αυτοβελτίωση της θεωρείτο η σπουδαιότερη εκπαιδευτική ανακάλυψη (Calfee, 1981). Στη δεκαετία του '90 η μεταγνώση επιφορτίστηκε το μεγαλύτερο ίσως μέρος των προσδοκιών μας για αποτελεσματικότερη διδασκαλία – μάθηση και για τη γνώση η οποία θα οδηγήσει σε επαρκείς δια βίου μαθητές ικανούς να ανταποκρίνονται με επιτυχία στις όποιες προκλήσεις της εποχής (Costa, 1984). Σε τελευταία ανάλυση τα δεδομένα έξω από τον άνθρωπο, αυτό που ονομάζουμε πραγματικότητα, αλλάζει καθημερινά και ραγδαία, χωρίς να είναι δυνατόν να ελέγχεται εξ ολοκλήρου και σε πληρότητα από τον μανθάνοντα, ενώ οι διαδικασίες με τις οποίες προσεγγίζουμε και κατακτούμε τη γνώση (η αντίληψη, η σκέψη και οι υπόλοιπες γνωστικές διαδικασίες), μπορούν να ελεγχθούν από το ίδιο το σκεπτόμενο άτομο, να βελτιωθούν και να αυτοβελτιώνονται συνεχώς. Το πρώτο βήμα για τη βελτίωση είναι η συνειδητοποίηση του πως σκεφτόμαστε και του τι συμβαίνει όταν δεν μπορούμε να δράσουμε αποτελεσματικά πάνω στα προβλήματα που μας περιβάλλουν.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

Η έννοια του αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος

Με τον όρο αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα, εννοούμε τα προβλήματα τα οποία μέσα από μια παραστατική εκφώνηση περιγράφουν στο μαθητή μια κατάσταση η οποία βασίζεται σε γεγονότα οικεία με τις εμπειρίες του, την οποία καλείται να αντιμετωπίσει και της οποίας η λύση στηρίζεται σε κάποιον άγνωστο αλγόριθμο τον οποίο πρέπει να κατασκευάσει ο ίδιος ο μαθητής.

Για παράδειγμα, έχουμε την παρακάτω κατάσταση : Κάποια παιδιά θέλουν να διοργανώσουν ένα πάρτι και για αυτό το λόγο πρόκειται να αγοράσουν πίτσες και αναψυκτικά. Στόχος τους είναι να επιλέξουν την πιο συμφέρουσα προσφορά με
βάση τα χρήματα που έχουν, τον αριθμό των καλεσμένων, τις διαφορετικές τιμές της αγοράς, το μέγεθος της πίτσας και τα λοιπά.

Τα αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά :

- Εμπεριέχουν ρεαλιστικά στοιχεία τα οποία αρκετά συχνά είναι ευμετάβλητα ή ελλιπή.
- Αποτρέπουν τους μαθητές από την επίλυση μέσα σε ένα τυποποιημένο περιβάλλον εργασίας.
- Παρέχουν πλήθος πληροφοριών σχετικά με την κατάσταση.
- Περιέχουν σύνθετα μαθηματικά στοιχεία.
- Μπορούν να προσεγγιστούν με διαφορετικούς τρόπους.
- Στηρίζονται σε ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
- Συχνά απαιτούν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις στις λύσεις τους.
- Περιγράφουν ‘αυθεντικές’ καταστάσεις.

Προφανώς το πόσο "αυθεντικό " μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα έχει να κάνει και με το λύτη και τις εμπειρίες που αυτός έχει βιώσει. Εννοείται ότι το παραπάνω πρόβλημα δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί αυθεντικό σε μια κοινωνία όπου τα παιδιά δεν είναι συνηθισμένα σε τέτοιου είδους δραστηριότητες.

Πολλοί μαθητές, είτε χαμηλών είτε υψηλών επιδόσεων, δυσκολεύονται στην επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Οι δυσκολίες εμφανίζονται σε όλα τα στάδια επίλυσης από την κατανόηση του θέματος του προβλήματος, το σχεδιασμό της λύσης, την

επιλογή κατάλληλων στρατηγικών μέχρι και την κριτική του κατά πόσο έχει νόημα αυτό που έχουν επιλέξει ως λύση.

Μερικοί μαθητές, ειδικά χαμηλών επιδόσεων, δεν αντιμετωπίζουν το πρόβλημα σαν ολότητα, αλλά επικεντρώνονται σε μεμονωμένα τμήματα του. Οι συγκεκριμένοι μαθητές συνήθως διαβάζουν γρήγορα την εκφώνηση, δεν αναγνωρίζουν ότι ενδεχομένως να υπάρχει παραπάνω από ένας σωστός τρόπος επίλυσης και δεν είναι σίγουροι σχετικά με το πως θα υπολογίσουν και θα επαληθεύσουν τη λύση. Επίσης, δυσκολεύονται στην αναδιοργάνωση πληροφοριών και στο διαχωρισμό των σχετικών ή άσχετων με το πρόβλημα στοιχείων που τους παρέχει η εκφώνηση.

Οι υψηλών επιδόσεων μαθητές, αντιμετωπίζουν διαφορετικές δυσκολίες. Τα παρατάνε εύκολα, διότι για τέτοιου είδους προβλήματα δεν υπάρχουν έτοιμοι αλγόριθμοι επίλυσης και δυσκολεύονται να γεφυρώσουν αυτά που ξέρουν για τις κλασικές ασκήσεις εφαρμογής γνωστών αλγορίθμων και τα αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα.

Οι παραπάνω δυσκολίες οφείλονται σε μια ποικιλία παραγόντων οι οποίοι σχετίζονται τόσο με τη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων όσο και με τις γενικότερες αντιλήψεις που υπάρχουν για την έννοια του προβλήματος. Γενικότερα υπάρχει μια σύγχυση σχετικά με το τι είναι πρόβλημα και τι είναι άσκηση. Οι περισσότεροι μαθητές έχουν συνδυάσει στο μυαλό τους τη λέξη πρόβλημα με μακροσκελείς εκφωνήσεις όπου μέσα από την περιγραφή μιας ιστορίας προσφέρονται τα δεδομένα και σκιαγραφούνται τα ζητούμενα. Από την άλλη πλευρά πολλοί μαθηματικοί ακόμη κι όταν έχουν ξεκάθαρη αντίληψη σχετικά με το τι είναι πρόβλημα και τι είναι άσκηση αδυνατούν να αντιληφθούν ότι κάθε πρόβλημα από κάποιο σημείο κι ύστερα, αν δοθεί στους μαθητές πολλές φορές για παράδειγμα, παύει να είναι πρόβλημα και καταντάει άσκηση. Ακόμη παρατηρείται το φαινόμενο της επανάληψης πανομοιότυπων φραστικών ασκήσεων με την ψευδαίσθηση ότι πρόκειται για προβλήματα. Έτσι για παράδειγμα αν πούμε στα παιδιά ότι 5 κιλά μήλα κοστίζουν 6 ευρώ και τους ζητάμε να μας βρουν πόσο θα κοστίσουν τα 8 κιλά μήλα, εφόσον τα παιδιά έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την μέθοδο των τριών, προφανώς θα αποτελεί γι' αυτά πρόβλημα η παραπάνω κατάσταση.

Απ' τη στιγμή όμως που θα βιώσουν την παραπάνω εμπειρία και θα γνωρίζουν ότι αντίστοιχες καταστάσεις αντιμετωπίζονται με επιτυχία με τη μέθοδο των τριών, το να τους ρωτήσουμε πόσο κοστίζουν τα 4 κιλά πορτοκάλια όταν τα 3 κιλά κοστίζουν 5 ευρώ, για τα συγκεκριμένα παιδιά δεν θα αποτελεί πλέον πρόβλημα αλλά άσκηση.

Γενικά με τον όρο πρόβλημα αναφερόμαστε σε μια κατάσταση όπου το άτομο δεν γνωρίζει από την αρχή την πορεία που πρέπει να ακολουθήσει για την εξεύρεση της λύσης

ενώ με τον όρο άσκηση σε μια κατάσταση όπου η διαδικασία εξεύρεσης της λύσης είναι γνωστή από προηγούμενες εμπειρίες.

Μια κατηγορία προβλημάτων που προσφέρονται ιδιαίτερα για την ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος, είναι τα λεγόμενα **ανοικτά προβλήματα**, τα οποία χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι μπορούμε να φτάσουμε στην απάντηση με διάφορους τρόπους, ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης που θα επιλέξουμε. Επίσης η απάντηση μπορεί να μην είναι μοναδική οπότε σαν προέκταση του αρχικού προβλήματος μπορούμε να θεωρήσουμε και ερωτήματα που έχουν να κάνουν με θέματα βελτιστοποίησης σχετικά με το ποια από τις προτεινόμενες λύσεις είναι πιο ικανοποιητική, πιο εύκολη, πιο γρήγορη και τα λοιπά.

Γίνεται αντιληπτό, ότι αναφερόμενοι σε αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα εξασφαλίζουμε τα πλεονεκτήματα του όρου πρόβλημα καθώς επίσης και την ύπαρξη ενός περιβάλλοντος οικείου στο μαθητή. Έτσι επηρεάζουμε θετικά τους συναισθηματικούς παράγοντες που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος . Είναι γεγονός ότι η ένταση των συναισθημάτων επηρεάζεται από μια πληθώρα παραγόντων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους εξής :

- Την αίσθηση της πραγματικότητας, δηλαδή από το βαθμό στον οποίο η πηγή του ερεθίσματος αξιολογείται ως πραγματική και σχετική προς τα ενδιαφέροντα του υποκειμένου – αποδέκτη.
- Την εγγύτητα, η οποία εξαρτάται από το πόσο κοντά στο ψυχολογικό του πεδίο αισθάνεται ένα υποκείμενο την κατάσταση που του προκαλεί το συναίσθημα
- Την ελκυστικότητα, η οποία αξιολογείται με βάση τις προδιαθέσεις ή τις στάσεις του υποκειμένου.
- Το βαθμό προσδοκίας, πόσο δηλαδή το υποκείμενο ανέμενε να συμβεί ένα γεγονός ή πόσο καταλήφθηκε εξαπίνης από μια κατάσταση.
- Τη διέγερση, η οποία αναφέρεται στις προηγούμενες αντιλήψεις τοποθετήσεις ή προκαταλήψεις του ατόμου σχετικά με το θέμα.
- Τη σχέση του υποκειμένου με το αντικείμενο, δηλαδή πόσο δικό του ή ξένο και πόσο σημαντικό ή ασήμαντο θεωρεί το υποκείμενο το αντικείμενο.

Οι Lester, Carofalo, και Kroll (1989) υποστηρίζουν ότι κάθε έμπειρος δάσκαλος αντιλαμβάνεται ότι η αποτυχία στη λύση προβλήματος μπορεί να οφείλεται εξίσου σε γνωστικούς, σε μη γνωστικούς ή και σε μεταγνωστικούς παράγοντες, οι οποίοι

παρεμποδίζουν την αξιοποίηση της ήδη υπάρχουσας γνώσης για την επίλυση προβλημάτων. Ως μη γνωστικούς αναφέρουν εσωτερικούς και περιβαλλοντικούς παράγοντες, οι οποίοι μπορούν να ταξινομηθούν στις ακόλουθες τέσσερις κατηγορίες :

- Στάσεις και συναισθήματα.
- Αντιλήψεις και πεποιθήσεις.
- Διαδικασίες ελέγχου.
- Κοινωνικές και πολιτιστικές επιρροές.

Τα παραπάνω καθιστούν σαφές ότι εάν η κατάσταση που προσφέρουμε προς διαπραγμάτευση στους μαθητές δεν έχει μόνο τα στοιχεία αυτά που μας δίνουν το δικαίωμα να τη χαρακτηρίσουμε ως πρόβλημα, αλλά και τα επιμέρους χαρακτηριστικά ενός αυθεντικού (με βάση τα δεδομένα των μαθητών) προβλήματος, τότε έχουμε μειώσει τις αρνητικές συναισθηματικές παραμέτρους που επηρεάζουν την επίλυση του προβλήματος. Προφανώς ένα πρόβλημα το οποίο φαντάζει εξωπραγματικό στα μάτια του μαθητή και το οποίο περιγράφει καταστάσεις πρωτόγνωρες για τις εμπειρίες του, αυξάνει περαιτέρω το βαθμό δυσκολίας και προετοιμάζει το έδαφος για να καλλιεργηθούν στην αντίληψη του μαθητή αρνητικές αντιλήψεις τόσο για τα προβλήματα όσο και για τα μαθηματικά γενικότερα.

Μολονότι τα προβλήματα κατέχουν κεντρική θέση στην ύλη των μαθηματικών, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο και για τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Τη δεκαετία του 1980 αναπτύχθηκε μια κίνηση στη μαθηματική εκπαίδευση και είχε ως κεντρική ιδέα τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Οι τρεις βασικές ερμηνείες που δόθηκαν από την κίνηση αυτή στον όρο **'επίλυση προβλήματος'** περιλαμβάνουν :

- Το σκοπό.
- Τη διαδικασία.
- Τη βασική δεξιότητα.

Όταν η επίλυση προβλημάτων θεωρείται σαν σκοπός, τότε ο σκοπός αυτός είναι ανεξάρτητος από διαδικασίες, μεθόδους ή το αντίστοιχο μαθηματικό περιεχόμενο. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, ο πραγματικός λόγος για τον οποίο διδάσκουμε μαθηματικά, είναι ότι αυτά συνιστούν ένα ωφέλιμο και χρήσιμο μάθημα, επειδή βοηθάει στην επίλυση πολλών και διαφόρων ειδών προβλημάτων. Τα μαθηματικά

θεωρούνται ως μέσο για την καλλιέργεια και εξάσκηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Η δεύτερη σημασία πηγάζει από την ερμηνεία του όρου 'επίλυση προβλήματος', ως μια δυναμική, συνεχή διαδικασία, μια διαδικασία εφαρμογής προγενέστερων γνώσεων σε νέες και πρωτόγνωρες καταστάσεις. Η ερμηνεία αυτή αναφέρεται κυρίως στη διάκριση μεταξύ της απάντησης που δίνουν οι μαθητές σε ένα πρόβλημα και τις τεχνικές ή τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν για να φθάσουν σ' αυτή την απάντηση. Σύμφωνα μ' αυτή την ερμηνεία, αυτό που θεωρείται σπουδαίο είναι οι μέθοδοι, οι διαδικασίες, οι στρατηγικές και οι ευρετικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να λύσουν κάποια προβλήματα.

Τέλος η τρίτη σημασία πηγάζει από την ερμηνεία του όρου 'επίλυση προβλήματος' ως μια βασική δεξιότητα, που πρέπει να αποκτήσουν όλοι οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών, έτσι ώστε να γίνουν ικανοί και αποτελεσματικοί πολίτες.

Ανεξάρτητα όμως από το που δίνουμε βαρύτητα στην ερμηνεία του όρου επίλυση προβλήματος, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένας κοινός παρονομαστής ο οποίος έχει να κάνει με τη σχέση ανάμεσα στο μαθητή και τη γνώση.

Με βάση τις αρχές του Ριζοσπαστικού Κονστρουκτιβισμού η γνώση :

- Κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν συλλαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον και
- Είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών του ατόμου και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το γνώστη.

Η κατασκευή γνώσης, απαιτεί ρήξη με προηγούμενες γνώσεις. Οι γνωστικές αυτές συγκρούσεις μπορούν να επιτευχθούν μέσα από τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων τα οποία ο δάσκαλος θα προσφέρει στο μαθητή με στόχο να φέρει στην επιφάνεια τις παρανοήσεις των μαθητών, να υποδείξει τις ανάγκες για κατασκευή νέων γνώσεων αλλά και να προσφέρει τις εμπειρίες – καταστάσεις μέσα από τις οποίες θα κατασκευαστούν νέες γνώσεις ή θα αναδιοργανωθούν – αναβαθμιστούν οι προϋπάρχουσες.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι οι νέες τάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν προσανατολίσει τους δασκάλους στην επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων. Αυτό έχει τις ρίζες του σε τρεις κυρίως αιτίες :

- Οι σημερινές επαγγελματικές συνθήκες απαιτούν από τον εργαζόμενο να μπορεί να εφαρμόζει τις μαθηματικές του γνώσεις σε πραγματικά προβλήματα των οποίων η λύση δεν είναι γνωστή.
- Πολλοί δάσκαλοι πιστεύουν ότι η μάθηση επιτυγχάνεται αποτελεσματικότερα μέσα από την επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων, όπου οι μαθητές έχουν να διαπραγματευτούν πληθώρα πληροφοριών και βιώνουν γνωστικές συγκρούσεις, παρά με την εφαρμογή έτοιμων αλγόριθμων για την επίλυση συγκεκριμένων ασκήσεων.
- Τέλος, παρέχοντας στους μαθητές ασκήσεις οι οποίες έχουν σχέση με την καθημερινότητα και τον κόσμο τους, αυξάνουμε το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά και τους δίνουμε κίνητρα για περαιτέρω ενασχόληση.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

Ο ρόλος της Μεταγνώσης στην επίλυση αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος

"Ο ευφυής λύτης προβλημάτων συχνά κάνει στον εαυτό του ερωτήσεις παρόμοιες με αυτές που περιέχει ο πίνακας μας (αναφέρεται στον πίνακα του "Πώς να το λύσω"). Ίσως αυτός να έχει ανακαλύψει μόνος του τέτοιου είδους ερωτήσεις ή έχοντας ακούσει μια τέτοια ερώτηση από κάποιον, ανακάλυψε μόνος του πως μπορεί να τη χρησιμοποιήσει σωστά. Πιθανόν δεν έχει επίγνωση ότι επαναλαμβάνει την ίδια στερεότυπη ερώτηση ξανά και ξανά. Η ερώτηση αυτή του είναι ιδιαίτερα προσφιλής, η "ευνοούμενη του" θα λέγαμε. Γνωρίζει ότι αυτή η ερώτηση ταιριάζει με την πνευματική στάση που θεωρεί κατάλληλη στην τάδε φάση της εργασίας και έτσι παίρνει τη σωστή στάση κάνοντας την σωστή ερώτηση.

("Πώς να το λύσω" , G.Polya)

Το παραπάνω απόσπασμα περιγράφει έναν λύτη προβλημάτων με υψηλό επίπεδο μεταγνωστικών διεργασιών. Οι μεταγνωστικές αυτές διεργασίες εκδηλώνονται στη συγκεκριμένη περίπτωση με τη μορφή ενός εσωτερικού διαλόγου του οποίου οι ερωτήσεις – απαντήσεις κατευθύνουν το λύτη. Ο ίδιος ο λύτης δημιουργεί και απαντά αυτές τις ερωτήσεις. Πως όμως ο παραπάνω λύτης επιλέγει τις ερωτήσεις αυτές ; Πως ξέρει πότε και ποια ερώτηση θα απευθύνει στον εαυτό του ; Γιατί κάποιοι λύτες έχουν αυτή την ικανότητα ενώ κάποιοι άλλοι όχι ; Και τέλος, σε τι βαθμό επηρεάζουν οι παραπάνω διεργασίες την επίλυση ή μη του προβλήματος ;

Για να γίνει αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο η μεταγνώση συμβάλλει στην επίλυση προβλήματος, όπως επίσης και ο βαθμός στον οποίο επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα της προσπάθειας του μαθητή, θα αναφερθούμε στα επιμέρους στάδια επίλυσης ενός προβλήματος και θα εντοπίσουμε σε κάθε στάδιο το ρόλο που διαδραματίζουν οι βασικότερες κάθε φορά μεταγνωστικές διεργασίες – δεξιότητες.

Η κατηγοριοποίηση των μεταγνωστικών διεργασιών, θα βασιστεί στο πεδίο το οποίο καλύπτεται κάθε φορά. Έτσι θα έχουμε μεταγνωστικές διεργασίες Κατανόησης, Σύνδεσης, Στρατηγικής και Αναστοχασμού.

Θα μπορούσε η κατηγοριοποίηση αυτή να στηριχθεί σε πιο λεπτομερή χαρακτηριστικά με βάση τον ορισμό της μεταγνώσης ο οποίος αναφέρεται επίσης σε έλεγχο, αξιολόγηση, οργάνωση κ.τ.λ αλλά προς το παρόν θα προτιμήσουμε μια ομαδικότερη κατηγοριοποίηση,

πόσο μάλλον όταν αυτή προτιμάται από τους περισσότερους ερευνητές. Άλλωστε, η λεπτή και ιδιόμορφη φύση των μεταγνωστικών χαρακτηριστικών δεν μας επιτρέπει να ριψοκινδυνέψουμε μια πιο λεπτομερή προσέγγιση. Για παράδειγμα ας πούμε ότι κατηγοριοποιούσαμε τις μεταγνωστικές διεργασίες με βάση τη γνωστική διαδικασία που εμπλέκεται. Σε πολλές περιπτώσεις εκτός του ότι εμπλέκονται παραπάνω από μια γνωστικές διαδικασίες παρατηρείται διαφορά από άτομο σε άτομο τόσο στις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται όσο και στο βαθμό εμπλοκής τους.

Όσον αφορά τώρα τα στάδια επίλυσης προβλήματος θα ακολουθήσουμε την κατηγοριοποίηση του G. Polya . Ο παρακάτω πίνακας δίνει μια σαφή εικόνα της κατηγοριοποίησης που έχουμε επιλέξει, καθώς επίσης και το πώς αυτή συνδέεται με τα είδη των μεταγνωστικών διεργασιών που αναφέραμε.

Στάδια Επίλυσης Προβλήματος (Polya)	Στάδια Επίλυσης Προβλήματος (Αναλυτικότερη Θεώρηση)	Είδη Μεταγνωστικών Διεργασιών (Mevarech & Kramarski)
1.Κατανόηση Προβλήματος	1.Μετάφραση 2.Ολοκλήρωση	Κατανόησης
		Σύνδεσης
2.Κατάστρωση Σχεδίου Λύσης	3.Κατάστρωση Σχεδίου Λύσης	Στρατηγικής
3.Εκτέλεση Σχεδίου	4.Εκτέλεση Σχεδίου	Αναστοχασμού
4.Αναδρομική Διερεύνηση	5.Έλεγχος 6.Ανασκόπηση	Αναστοχασμού .

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η αντιστοίχηση που παρουσιάζεται στον παραπάνω πίνακα χαρακτηρίζεται από μια σχετική ευελιξία. Για παράδειγμα, μεταγνωστικές διεργασίες Αναστοχασμού, εκτός από το στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης, μπορούμε να έχουμε και στο στάδιο της Κατανόησης όπου ενδεχομένως ελέγχουμε ή αξιολογούμε τον τρόπο και τη μορφή που αντιλαμβανόμαστε τα δεδομένα και

τα ζητούμενα όπως επίσης και στο στάδιο εκτέλεσης της λύσης όπου πρέπει να ελέγχουμε κατά πόσο είναι σωστά τα επιμέρους βήματα της επεξεργασίας μας. Επίσης, είναι πολύ πιθανό κάποιος ο οποίος βρίσκεται στο τρίτο για παράδειγμα στάδιο επίλυσης να χρειαστεί να ξαναγυρίσει στο δεύτερο ή στο πρώτο. Μάλιστα η τελευταία κίνηση συνήθως αποτελεί αποτέλεσμα μεταγνωστικών διεργασιών.

Οι μεταγνωστικές διεργασίες – δεξιότητες σκιαγραφούνται πλήρως από τον ορισμό της μεταγνώσης και κυρίως από την πρακτική πτυχή της η οποία αναφέρεται σε ικανότητες ελέγχου, σχεδιασμού, αξιολόγησης, διόρθωσης, επίγνωσης και συνειδητότητας των ενεργειών στις οποίες προβαίνω όπως επίσης και στη γνώση τρόπων για άντληση γνώσεων και πληροφοριών από το περιβάλλον. Γενικά σαν μερικές από τις πιο βασικές μεταγνωστικές δεξιότητες, μπορούμε να θεωρήσουμε :

- Την ικανότητα για αυτοέλεγχο, αυτοδιόρθωση, αυτοαξιολόγηση.
- Την ικανότητα σχεδιασμού.
- Τη διατήρηση του στόχου κατά τη διάρκεια αλληλουχίας ενεργειών.
- Την επίγνωση ότι ένας επιμέρους στόχος έχει επιτευχθεί.
- Την ανακάλυψη των λαθών ή κάποιας πλάνης.
- Την ικανότητα παρότρυνσης του εαυτού μας για αλλαγή αναπαραστάσεων.
- Την ιεράρχηση ενός συνόλου ενεργειών.
- Την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής.
- Την αξιολόγηση των προσφερόμενων πληροφοριών.
- Την αναγνώριση και τη σύνδεση της παρούσας κατάστασης με προηγούμενες εμπειρίες
- Την υποβολή ερωτήσεων στον εαυτό μας σχετικά με τις επιλογές μας, την ορθότητα τους, όπως επίσης και με το στόχο τον οποίο μέσω αυτών επιθυμούμε να επιτύχουμε
- Την επίγνωση των συνεπειών των ενεργειών μας.
- Την ικανότητα περιγραφής του τρόπου σκέψης μας, των επιλογών μας και των συνεπειών που αυτές θα έχουν.

4.1 Το στάδιο της Κατανόησης

Το πρώτο στάδιο στην επίλυση ενός προβλήματος είναι το στάδιο της Κατανόησης. Στο στάδιο αυτό μπορούμε να αναγνωρίσουμε δυο επιμέρους φάσεις. Τη φάση της

Μετάφρασης και τη φάση της Ολοκλήρωσης. **Στη φάση της Μετάφρασης ο βασικός στόχος είναι να μπορέσουμε να μεταφράσουμε κάθε πρόταση του προβλήματος σε μια εσωτερική αναπαράσταση ενώ στη φάση της Ολοκλήρωσης το ζητούμενο είναι η σύνθεση των προτάσεων του προβλήματος σε μια λογικά συνεπή αναπαράσταση.**

Αναφερόμενοι στο στάδιο της Μετάφρασης θα προσπαθήσουμε να διαφωτίσουμε τα βασικότερα χαρακτηριστικά αυτού του σταδίου.

4.1.1 Η έννοια της αναπαράστασης

Οι αναπαραστάσεις αποτελούνται από σύμβολα ή σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν κάτι στον εξωτερικό κόσμο. Αυτό το κάτι μπορεί να είναι ένα αντικείμενο, μια αφηρημένη ιδέα, μια πράξη, μια σχέση ανάμεσα σε αντικείμενα και πράξεις και τα λοιπά.

Τα πρόσφατα συμπεράσματα των ερευνών πάνω στην έννοια της Αναπαράστασης οδήγησαν στη διάκριση ανάμεσα **στο υλικό σημείο-σύμβολο** της αναπαράστασης (το σημαίνον-signifier) και στην **έννοια** η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο (σημαινόμενο-signifier).

Το γεγονός ότι ένα σύμβολο αντιστοιχεί σε μια έννοια στο νου, οδηγεί με τη σειρά του, στη διάκριση ανάμεσα στην **Εξωτερική Αναπαράσταση** και την **Εσωτερική Αναπαράσταση**. Οι Εξωτερικές Αναπαραστάσεις δρουν ως ερεθισμοί στις αισθήσεις και συνίστανται από διαγράμματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις, λέξεις μιας γλώσσας, γραφικά υπολογιστών καθώς και τα τυπικά σύμβολα και άλλες παραστάσεις της γλώσσας των Μαθηματικών.

Η φύση των Εσωτερικών Αναπαραστάσεων είναι πιο ασαφής, επειδή δεν μπορούν να παρατηρηθούν απευθείας αλλά γίνονται αντιληπτές μόνο από παρατηρήσεις επί των μαθητών όταν αυτοί εργάζονται. Μια Εσωτερική Αναπαράσταση (ή και Νοητική Αναπαράσταση), είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ένα άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του όταν βρίσκεται απέναντι σε ένα πρόβλημα. Η Εσωτερική Αναπαράσταση είναι προϊόν νοητικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε και στην οποία προσδίδουμε μια συγκεκριμένη σημασία. Συνεπώς οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις είναι νοητικές αναπαραστάσεις που αντιπροσωπεύουν κάποιες πτυχές του εξωτερικού κόσμου.

Οι γνωστικοί ψυχολόγοι διακρίνουν δυο ειδών εσωτερικών νοητικών αναπαραστάσεων :

- συμβολικές (προτασιακές οι οποίες σχηματίζονται από διακριτά παρόμοια με τη γλώσσα σύμβολα και αναλογικές που είναι συνήθως απεικονίσεις που έχουν τη μορφή νοητικών εικόνων) και
- κατανεμημένες (οι οποίες αποτελούνται από ενεργοποιημένα νευρωνικά δίκτυα).

Οι Εξωτερικές και οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις συνδέονται με τους ακόλουθους δυο τρόπους :

Α. Ομωνυμία. Όπου η ίδια Εξωτερική Αναπαράσταση μπορεί να αντιστοιχεί σε δυο ή περισσότερες Εσωτερικές Αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να αναπαρασταθεί τόσο από τη σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ όπου α, β οι κάθετες πλευρές και γ η υποτείνουσα, όσο και από τη σχέση $A = 90^0$ όπου Α γωνία του τριγώνου.

Β. Συνωνυμία. Όπου η ίδια Εσωτερική Αναπαράσταση , αντιστοιχεί σε διαφορετικές Εξωτερικές Αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα το μονώνυμο 2Χ μπορεί να παρασταθεί με το εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές Χ, 2 αλλά και με το διπλάσιο ενός ευθύγραμμου τμήματος μήκους Χ.

Τέλος θα ήταν χρήσιμο να παρατηρήσουμε, ότι οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις παρόλο ότι αποτελούν προσωπικές κατασκευές προκύπτουν μάλλον μέσα από κοινωνική αλληλεπίδραση σαν μια βιώσιμη ισορροπία ανάμεσα στα πραγματικά προσωπικά ενδιαφέροντα και τους από αυτήν την ισορροπία συνειδητούς περιορισμούς και όχι από ένα εσωτερικό εξ' ολοκλήρου ατομικό σχεδιασμό για κάτι δεδομένο.

Η βασική θέση της Γνωστικής Ψυχολογίας είναι ότι δεν μπορούμε να εξηγήσουμε την ανθρώπινη συμπεριφορά μόνο με αναφορά σε εξωτερικά ερεθίσματα του περιβάλλοντος αλλά είναι αναγκαίο να υποθέσουμε εσωτερικές νοητικές διεργασίες. Πιο συγκεκριμένα, η υπόθεση είναι ότι οι πληροφορίες του περιβάλλοντος γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας από τον εγκέφαλο μέσω γνωστικών διαδικασιών όπως της αντίληψής, της προσοχής της μνήμης και της σκέψης. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι πιστεύουν πως ο τρόπος με τον οποίον ένας οργανισμός αποκτά πληροφορίες από το περιβάλλον εξαρτάται από τρεις βασικές ικανότητες :

- Την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος.
- Την ικανότητα χειρισμού και αλλαγών αυτών των αναπαραστάσεων και
- Την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της γνωστικής διαδικασίας.

Συνεπώς η ικανότητα άντλησης πληροφοριών από την εκφώνηση, στοιχείο απαραίτητο για την επίλυση προβλήματος αφού μέσω αυτής εντοπίζουμε δεδομένα, ζητούμενα και σχέσεις που τα συνδέουν, συνδέεται άμεσα τόσο με το στάδιο της Μετάφρασης όσο και με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα σε έρευνα για την Ικανότητα Μετάφρασης μαθητών Λυκείου, που είχε γίνει σε σχολεία της Κύπρου (Αθανάσιος Γαγάτσης, Ελένη Μιχαηλίδου) σε σύνολο 244 μαθητών της πρώτης και δεύτερης τάξης του Λυκείου, εντοπίστηκε ότι η ικανότητα μετάφρασης ενισχύει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας είναι σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας του Hitt (1998) στα οποία υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα μετάφρασης από το ένα πεδίο αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης στο άλλο και στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος.

4.1.2 Η έννοια της γλώσσας

Για να μπορέσει ο επιλύτης να μεταφράσει όλες τις προτάσεις ενός προβλήματος χρειάζεται κάποια γνώση της γλώσσας **(γλωσσική γνώση)** και κάποια γνώση του κόσμου **(πραγματολογική γνώση)**. Για παράδειγμα για να μεταφράσει ο υποψήφιος λύτης μια δήλωση όπως " Ο Κώστας έχει δυο ευρώ περισσότερα από το Μιχάλη ", χρειάζεται γλωσσικές γνώσεις για να διαχωρίσει την πρόταση σε μεταβλητές (Κώστας, Μιχάλης) και μια ποσοτική σχέση ανάμεσα τους (δυο ευρώ περισσότερα από). Επιπλέον χρειάζεται πραγματολογική γνώση για να αναπαραστήσει τα δυο ευρώ ως 200 λεπτά. Οι άνθρωποι μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την ικανότητα τους να μεταφράζουν σωστά τις προτάσεις των προβλημάτων, κι αυτές οι διαφορές μπορεί να έχουν σχέση με τη γλωσσική και την πραγματολογική γνώση.

Ενώ όμως, οι δυσκολίες που έχουν σχέση με τη πραγματολογική γνώση δείχνουν να ξεπερνιόνται με σχετική ευκολία καθώς το παιδί μεγαλώνει και εμπλουτίζει τις γνώσεις του με πληροφορίες που αφορούν τον κόσμο, δεν φαίνεται να συμβαίνει στον ίδιο βαθμό κάτι αντίστοιχο με τη γλωσσική γνώση. Ποια είναι όμως τα στοιχεία της γλώσσας που της προσδίδουν τέτοια χαρακτηριστικά ώστε η ακατάλληλη προσέγγιση τους να εμποδίζει τους μαθητές στην κατανόηση, ανάλυση και επίλυση μαθηματικών θεμάτων ;
Μήπως η ελλιπής μελέτη των παραπάνω στοιχείων και χαρακτηριστικών από την εκπαιδευτική κοινότητα συντελεί στη διαιώνιση της μη αποτελεσματικής αντιμετώπισης του φαινομένου ;

Η γλώσσα είναι ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας το οποίο βρίσκεται σε συσχέτιση με τη σκέψη. Για τον Vygotsky, η γλώσσα είναι το κύριο

όχημα μεταφοράς πολιτισμικών στοιχείων. Για τον Piaget, η γλώσσα είναι ένα εργαλείο για την έκφραση των σκέψεων. Οι μαθηματικοί εκπαιδευτικοί όμως, οι οποίοι **θέλουν να ερμηνεύσουν την κατάσταση μέσα στην τάξη των Μαθηματικών**, δεν έχουν επαρκείς απαντήσεις από τις θεωρίες αυτές.

Για τον σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε η **Θεωρία της Αλληλεπίδρασης** στην βάση των θέσεων του **Bruner** καθώς και στις ακόλουθες δύο αρχές του όψιμου **Wittgenstein** :

- **Η σημασία μιας λέξης βρίσκεται στη χρήση της**
- **Η καθημερινή γλώσσα είναι επαρκής.** Ειδικά αυτή η αρχή σημαίνει ότι κάποιος θα πρέπει να προσπαθήσει να την καταλάβει, παρά να επισημαίνει τα λογικά της σφάλματα και να απαιτήσει να διορθωθούν.

Στη θεωρία αυτή, η γλώσσα εξακολουθεί να έχει σημαντικό ρόλο, αλλά τώρα η γλώσσα θεωρείται όχι ως σύστημα σημείων - συμβόλων αλλά ως **κοινωνική πρακτική.** Πρόκειται, δηλαδή, για μία γλώσσα σε δράση ή η γλώσσα ως μέσο για την επίτευξη γνωσιακών, κοινωνικών, μαθησιακών και άλλων στόχων. Είναι ένα όχημα για να κάνουμε πράγματα με τους άλλους και για τους άλλους, επομένως η γλώσσα έχει έναν διαπραγματευτικό (discursive) χαρακτήρα.

Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζουμε τη θεωρία αυτή στη μάθηση των μαθηματικών είναι ο ακόλουθος :

Πριν ο μαθητής γίνει ικανός να διατυπώσει έναν ορισμό ή ένα θεώρημα, εισάγεται σε έναν μικρόκοσμο αλληλεπιδράσεων, μερικές από τις οποίες προκαλούνται από τον δάσκαλο αν και οι περαιτέρω μορφές τους εξαρτώνται από τις πρωτοβουλίες του μαθητή. Η μορφή των αλληλεπιδράσεων καθορίζει τα όρια και τους κανόνες για το τι θα πει, πως θα το πει, πότε και ποιος λέει κάτι σε διαφορετικές συνθήκες, αλλά όλοι αυτοί οι κανόνες έχουν ένα διαπραγματευτικό χαρακτήρα : Επιτυγχάνονται διαμέσου κάποιων περισσότερο ή λιγότερων σαφών και άμεσων διαπραγματεύσεων ανάμεσα στον δάσκαλο και το μαθητή και μεταξύ των ίδιων των μαθητών. Το μονοπάτι προς τη μαθηματική σκέψη οδηγεί διαμέσου νύξεων στη μαθηματική διαπραγμάτευση. Γνωρίζοντας **ποιες είναι οι προθέσεις πίσω από συγκεκριμένες εκφράσεις και ποιες είναι οι κοινές προϋποθέσεις.** Αυτά μαθαίνονται από την αλληλεπίδραση με εκείνους που νομιμοποιούνται να θέτουν τα πρότυπα της μαθηματικής διαπραγμάτευσης, οι οποίοι συνήθως είναι οι δάσκαλοι των μαθηματικών, κάνοντας λάθη και διορθώνοντας τα σύμφωνα με τις υποδείξεις των δασκάλων, διαπραγματευόμενος τον τρόπο του να λες κάτι και τον τρόπο του να σκέφτεσαι, ανταλλάσσοντας επιχειρήματα με άλλους μαθητές.

Η αλληλεπιδραστική προσέγγιση, όπως αναπτύχθηκε, διαφέρει από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις που στηρίζονται στον Κονστρουκτιβισμό και στις θεωρίες του Vygotsky, ως προς τις θέσεις τους για τη γλώσσα. Στη θεωρία της αλληλεπίδρασης, η γλώσσα χάνει τη θέση της ως αντικείμενο και ως εργαλείο. Ο Bauersfeld υπογραμμίζει τη διαφορά ανάμεσα ομιλώ (μια γλώσσα - speaking) και εκφράζομαι (languaging).

Η ομιλία (speaking) δεν είναι η έκφραση των σκέψεων με την μια ή την άλλη γλώσσα. Η ομιλία είναι, την ίδια στιγμή, σκέψη, γνώση και το να ζεις με συγκεκριμένο τρόπο. Ο Λόγος - διαπραγμάτευση (discourse) που χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε αντανακλά ένα ολόκληρο σύμπαν, το οποίο έχει δημιουργηθεί διαμέσου της επικοινωνίας και στο οποίο οι άνθρωποι φθάνουν σε συγκεκριμένες συμβάσεις και οικοδομούν μια κοινά αποδεκτή κατανόηση των διαφόρων πλαισίων.

Η στάση αυτή προς τη γλώσσα συνεπάγεται δυο βασικές υποθέσεις στην αλληλεπιδραστική προσέγγιση.

- Την υπόθεση του γλωσσικού και συμβατικού χαρακτήρα της επιστημονικής γνώσης (συμβατικού με την έννοια ότι επιτυγχάνεται διαμέσου διαπραγμάτευσης). Πιο συγκεκριμένα, τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένας ειδικός τρόπος του να βλέπεις τα πράγματα και να σκέφτεσαι. Το γεγονός αυτό οδηγεί στη δεύτερη υπόθεση.
- Μια και όλες οι γλώσσες προκύπτουν διαμέσου της επικοινωνίας, τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο εξαρτώνται πολύ από τα χαρακτηριστικά και τους τρόπους επικοινωνίας που αναπτύσσονται στην τάξη.

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη μας ότι η γλωσσική γνώση αναφέρεται **και στην αναγνώριση της σημασίας των διαφόρων λέξεων ,** οφείλουμε να εστιάσουμε τη προσοχή μας στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζουμε τις διάφορες έννοιες στο περιβάλλον της τάξης, αφού μέσα από τον τρόπο παρουσίασης τους θα " γεννηθεί " η αντίστοιχη γλώσσα που θα τα περιγράφει.

Επομένως, εάν δεν προσφερθούν στο μαθητή οι κατάλληλες εμπειρίες οι οποίες θα τον βοηθήσουν να βιώσει τη " γέννηση " αυτής της " μαθηματικής " γλώσσας, θα είναι υπερβολικά δύσκολο γι' αυτόν να αντιληφθεί τα νοήματα και τις περιγραφές αυτής της γλώσσας όταν θα την συναντήσει στην εκφώνηση ενός προβλήματος.

Η καθοριστικότητα του ρόλου της γλωσσικής γνώσης γίνεται εμφανής σε πληθώρα περιπτώσεων. Ένα όμως από τα σημαντικότερα παραδείγματα είναι αυτό της κατανόησης των **συσχετιστικών προτάσεων,** των προτάσεων δηλαδή που εκφράζουν μια ποσοτική σχέση ανάμεσα σε μεταβλητές. Πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται

να αναπαραστήσουν τις συσχετιστικές προτάσεις. Δεν είναι τυχαίο ότι προβλήματα αυτής της μορφής αποτελούν συνήθως αυτά που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές όλων των τάξεων. Εξάλλου δεν πρέπει να παραβλέπουμε το γεγονός ότι ένα από τα κλασσικότερα χαρακτηριστικά των γρίφων που κυκλοφορούν κατά καιρούς, είναι ακριβώς αυτό. Η ανάπτυξη δηλαδή ποσοτικών σχέσεων ανάμεσα σε μεταβλητές. Για παράδειγμα " *Μιάμιση σαρδέλα - μιάμιση δραχμή, 14.5 σαρδέλες, πόσες δραχμές ; "*

Οι Soloway κ.α (1982) ζήτησαν από φοιτητές να γράψουν εξισώσεις που να αναπαριστούν μια πρόταση όπως :

" Σ' αυτό το Πανεπιστήμιο υπάρχουν έξι φορές περισσότεροι φοιτητές από καθηγητές. "

Το γεγονός ότι πολλοί φοιτητές έκαναν μια **Στατική Μετάφραση** του προβλήματος οδήγησε σε λάθη, όπως εξισώσεις της μορφής 6Φ = Κ.

Αντιθέτως, όσοι φοιτητές χρησιμοποίησαν μια διαδικαστική προσέγγιση (**Διεργαστική Μετάφραση**) οδηγήθηκαν σε σωστές απαντήσεις, όπως Φ = 6Κ.

Είναι γεγονός ότι ο αλγεβρικός συμβολισμός μπορεί να είναι από λίγο έως πολύ ασαφής, κυρίως όταν ο μαθητής δεν έχει κατανοήσει τη **δυναμική των συμβόλων** που χρησιμοποιεί. Στη κατανόηση αυτή, όπως επίσης και στην κατανόηση των συγκεκριμένων " γλωσσικών " κανόνων, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και ο καθηγητής. **Οι λέξεις δεν μεταφράζονται μέσα από μια μονόδρομη διαδικασία σε μαθηματικά σύμβολα.** Τα γράμματα Φ και Κ του παραπάνω παραδείγματος, είναι μεταβλητές, ποσότητες δηλαδή οι οποίες αλλάζουν είτε κατά την είσοδο των δεδομένων , είτε κατά την επεξεργασία τους. Το σύμβολο " = " δεν περιγράφει μια στατική ισότητα, αλλά μια **διαδικασία** σύμφωνα με την οποία καθορίζεται η τιμή της μεταβλητής Φ. Έτσι ο τύπος Φ = 6Κ θα μπορούσε να μεταφραστεί ως εξής : " *Αν ξέρεις πόσοι καθηγητές υπάρχουν και θέλεις να βρεις τους φοιτητές, πολλαπλασίασε το πλήθος των καθηγητών επί έξι".* Έχουμε μια συνάρτηση δηλαδή της μορφής Φ (Κ) = 6Κ, όπου Κ η ανεξάρτητη μεταβλητή και Φ η εξαρτημένη μεταβλητή.

Η δυσκολία των μαθητών, στην αναπαράσταση συσχετιστικών προτάσεων, επαληθεύεται και από άλλες μελέτες. Ο Mayer (1982) ζήτησε από φοιτητές Πανεπιστημίου να διαβάσουν και να θυμηθούν οχτώ αλγεβρικά προβλήματα. Τα προβλήματα περιείχαν τρία είδη προτάσεων :

- **Προσδιορισμούς,** οι οποίοι προσδιόριζαν τη τιμή μιας μεταβλητής.
- **Σχέσεις,** οι οποίες εκφράζουν μια ποσοτική σχέση ανάμεσα σε δυο μεταβλητές και
- **Ερωτήσεις,** οι οποίες ζητούσαν την αριθμητική τιμή μιας μεταβλητής.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές έχουν τρεις φορές περισσότερα σφάλματα στην ανάκληση συσχετιστικών προτάσεων απ' ότι στην ανάκληση προσδιοριστικών προτάσεων. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την άποψη ότι οι φοιτητές δεν ξέρουν πως να αναπαριστούν συσχετιστικές προτάσεις στη μνήμη τους.

Επακόλουθες αναλύσεις έδειξαν ότι κατά την ανάκληση των προτάσεων γίνονται τρία είδη σφαλμάτων :

- **Παράλειψης,** στα οποία οι φοιτητές δε θυμούνται καθόλου τη πρόταση.
- **Καθορισμού,** στα οποία μια μεταβλητή της αρχικής πρότασης μεταβάλλεται σε διαφορετική μεταβλητή στην ανάκληση και
- **Μετατροπής,** στα οποία η μορφή της πρότασης μεταβάλλεται από συσχέτιση σε προσδιορισμό ή αντίστροφα.

Πολλές από τις συσχετιστικές προτάσεις υπέστησαν σφάλματα μετατροπής, κάτι που δεν συνέβη σε κανέναν σχεδόν από τους προσδιορισμούς. Αυτά τα αποτελέσματα υποστηρίζουν την ιδέα ότι μερικοί φοιτητές δεν διαθέτουν τις απαραίτητες γλωσσικές γνώσεις για την αναπαράσταση σχέσεων, κι ότι η προσδιοριστική αναπαράσταση χρησιμοποιείται ως υποκατάστατο μερικών συσχετιστικών προτάσεων.

Αυτή η επισκόπηση δείχνει ότι η μετάφραση των προβλημάτων (το πρώτο τμήμα της αναπαράστασης των προβλημάτων) απαιτεί συγκεκριμένες γνώσεις γλωσσικές και πραγματολογικές. Ιδιαίτερα, για να γίνει σωστή μετάφραση μερικών μαθηματικών προβλημάτων χρειάζεται μια κατανόηση των συσχετιστικών προτάσεων.

Επιπλέον , σημειώνουμε ότι οι μεταβολές στην απόδοση των παιδιών σε μεταβατικά συνεπαγωγικά προβλήματα που στηρίζονται σε συσχετιστικές προτάσεις εξαρτάται από τη σωστή κωδικοποίηση και ανάκληση των προτάσεων και όχι από τους ίδιους τους συλλογισμούς.

Παρόλο που οι γλωσσικές γνώσεις των παιδιών για την μετάφραση συσχετιστικών προτάσεων, αυξάνονται με την ηλικία, φαίνεται πως οι απαιτήσεις στο σχολείο σχεδόν πάντα, είναι ένα επίπεδο παραπάνω. Αυτό υποδηλώνει την ανάγκη για μια επιπλέον στήριξη των μαθητών στον συγκεκριμένο τομέα, προκειμένου να επιτευχθούν να επιθυμητά αποτελέσματα.

4.1.3 Η φάση της Ολοκλήρωσης

Αναφερόμενοι προηγουμένως στη φάση της Ολοκλήρωσης εστιάσαμε την προσοχή μας στη σύνθεση των προτάσεων του προβλήματος σε μια λογικά συνεπή αναπαράσταση.

Για να γίνει κατανοητό τι εννοούμε με τον όρο λογικά συνεπή αναπαράσταση ας δούμε το παρακάτω πρόβλημα :

Ο αριθμός των νομισμάτων των 50 λεπτών που έχει ο Γιώργος είναι εφταπλάσιος απ' τον αριθμό των νομισμάτων των 20 λεπτών που έχει ο Χρήστος. Η συνολική αξία των νομισμάτων των 20 λεπτών είναι μεγαλύτερη απ' τη συνολική αξία των νομισμάτων των 50 λεπτών κατά 2.5 ευρώ. Πόσα νομίσματα έχει ο καθένας απ' το κάθε νόμισμα ;

Εάν μεταφράσουμε σε αλγεβρικές εξισώσεις το παραπάνω πρόβλημα θα έχουμε :

Γ = 7 Χ

Χ 20 = Γ 50 + 250, όπου Γ ,Χ ο αριθμός των νομισμάτων του Γιώργου και του Χρήστου αντίστοιχα. Όμως η αξία των νομισμάτων των 20 λεπτών δεν μπορεί να υπερβαίνει την αξία των νομισμάτων των 50 λεπτών, τη στιγμή που έχουμε περισσότερα νομίσματα των 50 λεπτών! Εάν λοιπόν δεν γίνει ολοκλήρωση του παραπάνω προβλήματος εκτός του ότι θα προβούμε σε περιττούς υπολογισμούς, οι οποίοι σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι αρκετά πιο επίπονοι έως και αδύνατοι, ακόμα κι αν εκτελέσουμε με επιτυχία τους υπολογισμούς αυτούς, το αποτέλεσμα θα είναι λάθος (για παράδειγμα στην περίπτωση μας το πλήθος των νομισμάτων του Χρήστου βγαίνει αρνητικός αριθμός).

Συνεπώς, η δόμηση μιας εσωτερικής αναπαράστασης ενός προβλήματος μπορεί να μην απαιτεί απλώς μια μετάφραση πρόταση προς πρόταση. Σε μελέτες που έχουν γίνει (Paige και Simon, 1966) δόθηκαν αδύνατα προβλήματα (όπως το παραπάνω) σε υποψήφιους λύτες, οι οποίοι χρησιμοποιώντας πραγματολογικές και γλωσσικές γνώσεις μπόρεσαν να μεταφράσουν το πρόβλημα στις κατάλληλες εξισώσεις. Στη προσπάθεια όμως συσχέτισης του συγκεκριμένου προβλήματος με προηγούμενες εμπειρίες έγινε φανερή η ύπαρξη των αντιφάσεων. Έτσι γίνεται φανερό ότι η αναπαράσταση ενός προβλήματος απαιτεί όχι μόνο σωστή μετάφραση αλλά και ολοκλήρωση, αλλιώς θα υπήρχε το ενδεχόμενο να προσπαθούμε ματαίως να λύσουμε αδύνατα ή και λανθασμένα προβλήματα.

Το στάδιο της Ολοκλήρωσης σπανίως προβληματίζει μαθητές και καθηγητές αφού θεωρείται δεδομένο ότι το πρόβλημα που μας δίνεται έχει νόημα γεγονός που δυσκολεύει την ανακάλυψη λαθών στη θεώρηση του προβλήματος ακόμη κι όταν αυτά είναι εμφανή. Φαντάζει λογικότερο στους μαθητές να μην έχουν κατανοήσει αυτοί κάτι παρά να έχει λάθος η εκφώνηση. Η αλήθεια είναι ότι αυτό είναι και το πιθανότερο, όχι όμως επειδή αυτή

είναι η φύση των προβλημάτων αλλά επειδή εμείς κατασκευάζουμε και προσφέρουμε στους μαθητές τέτοιου είδους προβλήματα. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι καθόλου έτσι τα πράγματα αφού στην καθημερινότητα μας εμείς είμαστε αυτοί που κατασκευάζουμε την "εκφώνηση" της προβληματικής κατάστασης που μας απασχολεί και η αδυναμία εύρεσης λαθών ή ασυνεπειών στην εκφώνηση ενός προβλήματος που μας δίνεται αμβλύνει την ικανότητα διατύπωσης συνεπών εκφωνήσεων από μέρους μας.

Για να μπορέσει ο επιλυτής να ολοκληρώσει το πρόβλημα πρέπει να έχει κάποιες γνώσεις πάνω στους διάφορους τύπους προβλημάτων (γνώσεις υποδειγμάτων).Έτσι για παράδειγμα η αναγνώριση ότι ένα πρόβλημα σχετίζεται με εύρεση του μεγίστου ή του ελαχίστου μιας ποσότητας με προσανατολίζει σε μια πιο εξειδικευμένη ανάγνωση της εκφώνησης ,η οποία θα αναζητά τις πληροφορίες αυτές που θα αποκαλύψουν την αντίστοιχη συνάρτηση, η οποία περιγράφει το μέγεθος του οποίου αναζητώ το μέγιστο ή το ελάχιστο. Η ταξινόμηση των διαφόρων προβλημάτων δεν είναι εύκολη υπόθεση και σίγουρα πολλοί ερευνητές θα προβούν σε διαφορετικές ομαδοποιήσεις. Βέβαια, ο κάθε υποψήφιος λύτης έχει κατά νου κατηγοριοποιήσεις που προκύπτουν από τις προσωπικές του εμπειρίες ανάλογα με τη καθοδήγηση που δέχεται και τη γκάμα των προβλημάτων που έχει αντιμετωπίσει κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης του με την επίλυση προβλημάτων.

Περισσότερες πληροφορίες για το πως κατανοούν οι άνθρωποι τα προβλήματα μας παρέχει η δουλειά των Hinsley κ.α (1977). Οι ερευνητές έδωσαν σε υποκείμενα μια σειρά αλγεβρικών προβλημάτων από τυπικά εγχειρίδια και τους ζήτησαν να τα κατατάξουν σε κατηγορίες. Οι περισσότεροι έκαναν την κατάταξη με μεγάλη συμφωνία μεταξύ τους. Επιπλέον, οι περισσότεροι ήταν σε θέση να κατατάξουν τα προβλήματα σχεδόν αμέσως με το που άκουγαν τις πρώτες λέξεις της εκφώνησης. Οι Hayes κ.α (1977) και οι Robinson & Hayes (1978) διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές χρησιμοποιούν τα υποδείγματα προβλημάτων για να κάνουν ακριβείς εκτιμήσεις σχετικά με το ποιες πληροφορίες είναι χρήσιμες για ένα πρόβλημα και ποιες όχι.

Κατ' επέκταση η λανθασμένη επιλογή προτύπου αποπροσανατολίζει τη προσοχή του λύτη και τον οδηγεί σε συστηματικά λάθη στην ερμηνεία των προσφερόμενων πληροφοριών.

4.2 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Κατανόησης

Όπως διαφαίνεται από τα παραπάνω, όσον αφορά το στάδιο της Μετάφρασης, θα πρέπει να αναζητήσουμε τη συμβολή της μεταγνώσης , κυρίως σε θέματα που σχετίζονται με τη

γλώσσα και τις αναπαραστάσεις. Ενώ όσον αφορά το στάδιο της Ολοκλήρωσης θα πρέπει να επικεντρωθούμε στην αναζήτηση υποδειγμάτων και στη σύνθεση των προτάσεων της εκφώνησης σε μια συνεπή αναπαράσταση. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στο ρόλο που διαδραματίζει η μεταγνώση σε επιμέρους τομείς που σχετίζονται άμεσα με τα παραπάνω.

4.2.1 Ανάκληση και χειρισμός των κανόνων που διέπουν τη γλώσσα της εκφώνησης

Οι γλωσσολόγοι διακρίνουν τέσσερις επιμέρους τομείς της γλώσσας : το φωνολογικό, το συντακτικό, το σημασιολογικό και τον πραγματολογικό. Ο φωνολογικός τομέας περιγράφει τους κανόνες για τη συναρμολόγηση των φθόγγων σε λέξεις, ο συντακτικός τους κανόνες για τη συναρμολόγηση των λέξεων σε προτάσεις, ο σημασιολογικός περιγράφει τους κανόνες για τη συναρμολόγηση εννοιών και ο πραγματολογικός τομέας καθορίζει τους κανόνες χρήσης της γλώσσας στο πλαίσιο επικοινωνίας.

Αναφερθήκαμε προηγουμένως σε κανόνες συναρμολόγησης των λέξεων και είπαμε ότι αυτοί οι κανόνες ανήκουν στον συντακτικό τομέα της γλώσσας. Η εφαρμογή αυτών των κανόνων τις περισσότερες φορές ακολουθείται ασυνείδητα. Έτσι για παράδειγμα ποτέ κανείς δεν θα μας ρωτήσει “ Ώρα είναι τι ;” αλλά εφαρμόζοντας τους σωστούς συντακτικούς κανόνες για την συγκεκριμένη πρόταση θα μας ρωτήσει προφανώς “ Τι ώρα είναι ;” Ομοίως ποτέ κανείς δεν θα μας πει “Η αγωνία μου έφτασε τα 10 κιλά”. Διότι σύμφωνα με τους σημασιολογικούς κανόνες της γλώσσας μας, η αγωνία δεν είναι κάτι που έχει βάρος.

Ενώ λοιπόν χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα μας τη γνώση για αυτούς τους κανόνες τις περισσότερες φορές πολλοί μαθητές αδυνατούν να οργανώσουν και να χρησιμοποιήσουν αυτές τις γνώσεις για την κατανόηση ενός προβλήματος που τους δυσκολεύει. Για παράδειγμα ας πάρουμε το παρακάτω ερώτημα : *“ Τα 5 κιλά ρύζι κοστίζουν 3 ευρώ. Πόσο κοστίζουν τα ¾* ; ” Εάν ο μαθητής δεν αναλογιστεί ποιανού πράγματος ψάχνω τα ¾ το πιθανότερο είναι να μην απαντήσει στο ερώτημα. Η παραπάνω ερώτηση (“Ποιανού πράγματος ψάχνω τα ¾ ;”), είναι αποτέλεσμα μεταγνωστικών διεργασιών οι οποίες εμπλέκουν συντακτικούς, σημασιολογικούς και πραγματολογικούς κανόνες της γλώσσας. Αναλυτικότερα, συντακτικούς διότι αναζητώ το αντικείμενο του ¾, σημασιολογικούς διότι το *πόσο κοστίζουν τα ¾* δεν έχει νόημα αφού ο αριθμός ¾ δεν έχει κόστος από μόνος του και πραγματολογικούς διότι η διατύπωση του προβλήματος αν και ελλιπής με βάση τους συντακτικούς και σημασιολογικούς κανόνες της καθημερινότητας

είναι δεκτή με βάση τη μαθηματική γλώσσα διατύπωσης των προβλημάτων. Η ικανότητα επίγνωσης των παραπάνω φαινομένων και η ικανότητα χειρισμού των επιμέρους κανόνων της γλώσσας που εμπλέκονται με στόχο την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος αποτελούν ουσιαστική συμβολή της μεταγνώσης.

4.2.2 Χειρισμός και αλλαγές αναπαραστάσεων

Ας πάρουμε για παράδειγμα την έννοια της συνάρτησης. Μια συνάρτηση μπορούμε να την περιγράψουμε – αναπαραστήσουμε με πολλούς τρόπους όπως για παράδειγμα με ένα τύπο, ένα γράφημα, ένα πίνακα ή ακόμη και μια λεκτική περιγραφή. Η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος και γενικότερα για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών (Janvier, 1987). Το γεγονός αυτό πιστοποιείται από πληθώρα ερευνών (Ασβεστά και Γαγάτσης 1995, Boulton – Lewis 1998, Cifarelli 1998, Duval 1987, Hitt 1998, Goldin & Kaput 1996 κ.α)

Η επιλογή ή όχι της κατάλληλης αναπαράστασης διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση προβλήματος και οι μαθητές, παρόλο το ότι έχουν διδαχθεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις κάποιας έννοιας, συνήθως εγκλωβίζονται στην αναπαράσταση που δίνεται στην εκφώνηση αγνοώντας τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας οι οποίες ενδεχομένως να απλουστεύουν το πρόβλημα.

Η συμπεριφορά αυτή μεταφέρεται και στο στάδιο της μετάφρασης όπου αποφεύγεται από τη πλευρά του μαθητή η μετάβαση σε άλλες αναπαραστάσεις της έννοιας. Για να προσφύγει ο μαθητής σε μια διαφορετική αναπαράσταση της ίδιας έννοιας, θα πρέπει ή να γνωρίζει κάποια τέτοια, για παράδειγμα έχω τη συνάρτηση $y = a x + b$ η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί και με το γράφημα της αντίστοιχης ευθείας, ή να μπορεί να κατασκευάσει μια τέτοια. Για παράδειγμα, "*Να βρεθεί το εμβαδόν ενός χωραφιού με κάθετες πλευρές, 30 μέτρα μήκος και 10 μέτρα πλάτος"*. Στην παραπάνω λεκτική περιγραφή το χωράφι μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ορθογώνιο διαστάσεων 30 x 10. Στην περίπτωση όπου ήδη γνωρίζω και άλλες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας, ο ρόλος της μεταγνώσης επικεντρώνεται στην κινητοποίηση του ατόμου για τη χρήση κάποιας άλλης αναπαράστασης, στην επιλογή της κατάλληλης αναπαράστασης και στο χειρισμό της, έτσι ώστε η εκφώνηση να γίνει πιο κατανοητή. Στην περίπτωση όπου απαιτείται η κατασκευή μιας αναπαράστασης, ο ρόλος της μεταγνώσης επικεντρώνεται στην οργάνωση και αξιολόγηση των στοιχείων της εκφώνησης έτσι ώστε μέσω της σύνδεσης τους με

προϋπάρχουσες εμπειρίες και μοντέλα να κατασκευαστεί η αναπαράσταση αυτή η οποία θα διευκολύνει την κατανόηση του προβλήματος και κατ' επέκταση την επίλυση του.

Οι κανόνες σύμφωνα με τους οποίους οργανώνονται τα διάφορα σύμβολα, εικόνες, λέξεις, ήχοι κ.τ.λ έτσι ώστε να συνθέσουν μια αναπαράσταση ποικίλουν από άτομο σε άτομο χωρίς αυτό βέβαια να αποκλείει και κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Ωστόσο, η ικανότητα να διακρίνουμε το ποιοι είναι αυτοί οι κανόνες που χρησιμοποιούμε κάθε φορά, η αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας τους και η διαχείριση τους με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε κάθε φορά το επιθυμητό αποτέλεσμα, σε όλα τα άτομα οφείλεται στον ίδιο παράγοντα : στο βαθμό των μεταγνωστικών δεξιοτήτων που διαθέτουν.

Η προσφορά όμως της μεταγνώσης δεν περιορίζεται μόνο στην κατανόηση του συγκεκριμένου κάθε φορά προβλήματος αλλά προχωρά και στη διαμόρφωση ενός μοντέλου σκέψης βάσει του οποίου ο μαθητής θα διευκολύνεται στην άντληση επιπλέον πληροφοριών από την εκφώνηση και συνεπώς στην καλύτερη κατανόηση της.

4.2.3 Βελτίωση της συγκέντρωσης και επεξεργασίας πληροφοριών

Ο Chomsky σωστά παρατήρησε πως δεν είναι οι συντακτικοί κανόνες που βάζουν όρια στο μέγεθος μιας πρότασης αλλά η περιορισμένη μνήμη και ικανότητα του ανθρώπου να επεξεργάζεται ταυτόχρονα μόνο έναν ορισμένο αριθμό από πληροφορίες. Ας πάρουμε για παράδειγμα το παρακάτω ερώτημα : *Ο μισθός μου είναι 1560 ευρώ και χρωστάω τα 3/4 του μισθού μου στο Γιώργο ,τα 3/8 του μισθού μου στο Γιάννη, τα 2/3 του μισθού μου στο Θάνο ενώ ο Κώστας μου χρωστάει τα μισά απ' όσα χρωστάω στο Θάνο και ο Μιχάλης τα διπλάσια απ' όσα χρωστάω στο Γιάννη. Εάν με ξεχρεώσουν όσοι μου χρωστάνε μπορώ να καλύψω όλα τα χρέη μου ;*

Η παραπάνω εκφώνηση αποτελείται από δυο προτάσεις. Η δεύτερη περιέχει το ζητούμενο και δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία, ωστόσο η πρώτη έχει μέγεθος τριών γραμμών και εμπεριέχει τεράστιο όγκο πληροφοριών. Ο αναγνώστης με χαμηλό δείκτη μεταγνώσης θα αρκεστεί σε μια συνολική προσέγγιση της συγκεκριμένης πρότασης αδυνατώντας προφανώς να εκμαιεύσει τις πολύτιμες πληροφορίες που αυτή περιέχει. Απ' την άλλη ο αναγνώστης με υψηλό δείκτη μεταγνώσης θα αναρωτηθεί τι είναι αυτό που τον δυσκολεύει, θα αξιολογήσει τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης πρότασης, θα εντοπίσει ότι η δυσκολία έγκειται στο μέγεθος της πρότασης και στην πυκνότητα της πληροφορίας και θα οργανώσει το υλικό που διαθέτει, τεμαχίζοντας ενδεχομένως την πρόταση σε άλλες

μικρότερες και απλούστερες, αίροντας μ' αυτό τον τρόπο την δυσκολία που τον εμπόδιζε να κατανοήσει την εκφώνηση και να συλλέξει τις απαραίτητες πληροφορίες.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό το οποίο ενδέχεται να έχει η εκφώνηση του προβλήματος, είναι η παρουσία "περιττών" στοιχείων είτε αυτά είναι δεδομένα είτε απλές περιγραφές. Για παράδειγμα : *Ένα ηλιόλουστο πρωινό πήγα χαμογελαστός για ψώνια στο 3όροφο Super Market της γειτονιάς του Βασίλη. Αγόρασα πράγματα αξίας 23 ευρώ και έδωσα στον ξανθό ταμία ένα χαρτονόμισμα των 50 ευρώ. Πόσα ρέστα πήρα ;*

Ο λύτης του παραπάνω προβλήματος με βάση τις προϋπάρχουσες εμπειρίες του θα αναγνωρίσει ένα υπόδειγμα προβλήματος αφαίρεσης. Θα περιοριστεί στην πράξη της αφαίρεσης και στα αριθμητικά δεδομένα που αυτή απαιτεί για να εκτελεστεί. Οποιαδήποτε άλλη πληροφορία θα αγνοηθεί από τη στιγμή που δεν διαδραματίζει κανένα ρόλο στην επίλυση του προβλήματος.

Τα άτομα με υψηλό δείκτη μεταγνώσης επικεντρώνονται στο ζητούμενο του προβλήματος και διατηρούν το στόχο της εύρεσης του καθ' όλη τη διάρκεια επεξεργασίας των παρεχόμενων πληροφοριών της εκφώνησης. Αξιολογούν τις προσφερόμενες πληροφορίες και αναζητούν συσχετίσεις και συνδέσεις με τις απαιτήσεις παρόμοιων υποδειγμάτων που γνωρίζουν προσανατολίζοντας την αναζήτηση τους σε πληροφορίες απαραίτητες για το υπόδειγμα που έχουν επιλέξει.

4.2.4 Ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης

Πολλές φορές, δεν δίνουμε μέσα από την εκφώνηση όλες τις πληροφορίες που χρειάζεται ο αναγνώστης. Για παράδειγμα στο ερώτημα : "*Ποιο είναι το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου με βάση 3 και υποτείνουσα 5 ;"* Ο μαθητής για να βρει την απάντηση πρέπει να γνωρίζει τόσο τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου (½ β υ) όσο και το Πυθαγόρειο θεώρημα προκειμένου να βρει το ύψος. Εάν δεν γνωρίζει τα παραπάνω, όχι μόνο δεν θα απαντήσει το ερώτημα, αλλά δεν θα καταλάβει και πιο είναι επί της ουσίας το πρόβλημα, το οποίο στην περίπτωση μας μεταφράζεται ως εξής :

"*Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο, η υποτείνουσα είναι 5 και η μια κάθετη 3, να βρείτε*

i) Πόσο μήκος έχει η άλλη κάθετη.

ii) Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου."

Ο αναγνώστης χρησιμοποιεί τις γνώσεις του για να εξάγει συμπεράσματα που πάνε αρκετά πιο πέρα από τις περιγραφές της εκφώνησης. Η εξαγωγή αυτών των

συμπερασμάτων πολλές φορές στηρίζεται σε υποθέσεις δομικό υλικό των οποίων είναι οι αντίστοιχες γνώσεις. Η αδυναμία κατανόησης και μετάφρασης της εκφώνησης ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι διαβάζουμε περιγραφές για κάτι που δεν γνωρίζουμε. Σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν έχουμε τις γνώσεις που χρειαζόμαστε για να κάνουμε τις κατάλληλες υποθέσεις και να εξάγουμε τα συμπεράσματα που είναι απαραίτητα για να καταλάβουμε τα νοήματα που εκφράζονται.

Μπορεί όμως να έχουμε τις απαιτούμενες γνώσεις αλλά να μην τις ενεργοποιούμε καταλλήλως. Αυτό μπορεί να συμβεί για πολλούς λόγους. Μπορεί να είμαστε κουρασμένοι ή αδιάφοροι ή μπορεί η διατύπωση της εκφώνησης να έχει τέτοια μορφή που να μας δυσκολεύει να αναγνωρίσουμε συσχετισμούς με κάτι που ήδη γνωρίζουμε. Για παράδειγμα ας διαβάσουμε την παρακάτω εκφώνηση : *Αυτό που πρέπει να βρεις είναι απλό. Πρώτα θα βρεις ποιος είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου, μετά ποιος είναι ο συντελεστής του x και μετά ποιος είναι ο σταθερός όρος. Κατόπιν θα πολλαπλασιάσεις τον συντελεστή του x με τον εαυτό του και από αυτό που θα βρεις θα αφαιρέσεις το τετραπλάσιο του γινομένου του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου επί τον σταθερό όρο.*

Το τι υπολογίζουμε ακριβώς με την παραπάνω διαδικασία δεν είναι εύκολα αντιληπτό απ' όλους τους μαθητές. Ακόμα και αυτοί που θα το καταλάβουν θα χρειαστούν αρκετό χρόνο. Εάν όμως στην παραπάνω εκφώνηση βάλουμε τον τίτλο *"Εύρεση της διακρίνουσας του τριωνύμου* $a x^2 + b x + c$*."* Τότε το περιεχόμενο του κειμένου γίνεται αμέσως κατανοητό. Η ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης στη συγκεκριμένη περίπτωση επιτελέστηκε μέσω του παραπάνω τίτλου. Το τίτλο αυτό μπορεί να τον βάλει και ο ίδιος ο μαθητής από μόνος του αυτοενεργοποιώντας τις προϋπάρχουσες γνώσεις του προκειμένου να κατανοήσει καλύτερα την εκφώνηση.

Οι μαθητές με υψηλό δείκτη μεταγνώσης ενεργοποιούν από μόνοι τους προϋπάρχουσες γνώσεις αναζητώντας στην εκφώνηση συνδέσεις με αυτά που ήδη γνωρίζουν. Με αυτό τον τρόπο ανακαλούν γνώσεις που έχουν κωδικοποιήσει και προβαίνουν σε καινούργιες κωδικοποιήσεις όταν δεν τους καλύπτουν οι υπάρχουσες.

Η ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης σχετίζεται άμεσα και με τη φάση της Ολοκλήρωσης και συγκεκριμένα τόσο με την αναζήτηση του κατάλληλου υποδείγματος όσο και με την ανάκληση προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών προκειμένου να αξιολογηθεί η ορθότητα και η λογική συνέπεια της εκφώνησης.

Οι μαθητές με υψηλό δείκτη μεταγνώσης ενεργοποιούν από μόνοι τους προϋπάρχουσες γνώσεις αναζητώντας ομοιότητες και διαφορές του συγκεκριμένου προβλήματος με άλλα που έχουν συναντήσει παλαιότερα. Ενδεχομένως να θυμούνται

λάθος συμπεριφορές στο χειρισμό παρόμοιων εκφωνήσεων και επικεντρώνουν την προσοχή τους στα αντίστοιχα σημεία προκειμένου να μην επαναλάβουν τα ίδια λάθη. Επιβεβαιώνουν γιατί το πρόβλημα μοιάζει ή γιατί δεν μοιάζει με κάποιο που έχουν συναντήσει παλαιότερα. Προσπαθούν να συνδέσουν τις προσφερόμενες πληροφορίες μεταξύ τους προκειμένου να προκύψει μια συνεπής αναπαράσταση και αν αυτή δεν προκύψει επαναπροσδιορίζουν τις εκτιμήσεις και τις ερμηνείες τους.

4.3 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Κατανόησης

1. Ερμηνεία της γλώσσας της εκφώνησης με κατάλληλο χειρισμό κανόνων της γλώσσας.
2. Παρότρυνση για χρήση των κανόνων της γλώσσας.
3. Επίγνωση για τη συμβολή των κανόνων της γλώσσας στην κατανόηση της εκφώνησης.
4. Κινητοποίηση – Παρότρυνση για χρήση εναλλακτικών αναπαραστάσεων.
5. Αξιολόγηση των εναλλακτικών αναπαραστάσεων και επιλογή της καταλληλότερης.
6. Οργάνωση, αξιολόγηση και σύνδεση των στοιχείων της εκφώνησης με βάση προϋπάρχουσες εμπειρίες για την κατασκευή αναπαραστάσεων.
7. Επίγνωση και διαχείριση των κανόνων με βάση τους οποίους κατασκευάζουμε αναπαραστάσεις, αξιολόγηση των κανόνων με βάση την αποτελεσματικότητα τους και τροποποίηση τους προκειμένου να επιτευχθεί το επιθυμητό.
8. Διαμόρφωση τρόπου συμπεριφοράς με βάση τα συμπεράσματα χρήσης – εναλλαγής αναπαραστάσεων.
9. Εντοπισμός δύσκολων σημείων της εκφώνησης και διαμόρφωση συμπεριφοράς με βάση τα χαρακτηριστικά των δύσκολων σημείων.
10. Αναζήτηση υποδειγμάτων και διαμόρφωση συμπεριφοράς με βάση τα χαρακτηριστικά των υποδειγμάτων.
11. Εντοπισμός δεδομένων, ζητουμένων και συνθηκών που τα συνδέουν. Διαμόρφωση συμπεριφοράς με βάση τα χαρακτηριστικά των παραπάνω.
12. Ενεργοποίηση προϋπάρχουσας γνώσης μέσω αναζήτησης συνδέσεων.
13. Έλεγχος του νοήματος των παρεχόμενων πληροφοριών και των προσωπικών συμπερασμάτων. Έλεγχος για αντιφάσεις.
14. Επαναπροσδιορισμός των προσωπικών εκτιμήσεων σε περίπτωση μη ικανοποιητικής ερμηνείας.

4.4 Το στάδιο του Σχεδιασμού της λύσης

Το επόμενο βήμα στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι η επινόηση ενός σχεδίου λύσης. Για να επινοήσει ο επιλυτής ένα τέτοιο σχέδιο πρέπει να έχει κάποια γνώση **ευρετικής** στην επίλυση προβλημάτων (δηλαδή στρατηγική γνώση). Ευρετική σημαίνει μια γενική οδηγία ή στρατηγική **ανεξάρτητη από οποιοδήποτε ειδικό θέμα** , που βοηθά το λύτη να προσεγγίσει και να καταλάβει το πρόβλημα και να διαχειριστεί αποτελεσματικά τις διαθέσιμες γνώσεις του για να το λύσει.

Για παράδειγμα ,

- Χαράξτε ένα σχήμα. Χρησιμοποίησε κατάλληλο συμβολισμό.
- Γνωρίζετε κανένα σχετικό πρόβλημα ; Γνωρίζετε κανένα θεώρημα που θα μπορούσε να είναι χρήσιμο ;
- Αν δεν μπορείτε να λύσετε το συγκεκριμένο πρόβλημα, προσπαθήστε να λύσετε ένα σχετικό. Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ένα σχετικό πρόβλημα πιο προσιτό ; Ένα γενικότερο πρόβλημα ; Ένα ειδικότερο ; Ένα ανάλογο πρόβλημα ;

ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι ευρετικές δεν αντικαθιστούν την έλλειψη γνώσεων.

Διακρίνουμε δυο είδη ευρετικών :

1. Τις γενικές ευρετικές (general heuristics), δηλαδή ευρετικές του τύπου που προαναφέραμε.
2. Τις ειδικές ευρετικές (task-specific heuristics), δηλαδή ευρετικές που αναφέρονται σε συγκεκριμένες περιοχές μαθηματικής γνώσης.

Ειδικότερα θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τις γενικές ευρετικές ως εξής :

- **Λύσε ένα απλούστερο.**

Δοκίμασε : (i) συγκεκριμένους αριθμούς.
(ii) ειδικές περιπτώσεις.
(iii) συγκεκριμένες περιπτώσεις.

- **Λύσε ένα σχετικό πρόβλημα.**

Συνηθισμένη τακτική γι' αυτό το σκοπό η μείωση των προϋποθέσεων.

- **Λύσε ένα ισοδύναμο πρόβλημα.**

Ένας συνήθης τρόπος δημιουργίας ισοδύναμου προβλήματος είναι :

Επαναδιατύπωση του προβλήματος με :

- Αλλαγή οπτικής γωνίας.
- Χρήση της εις άτοπον απαγωγής ή της αντιθετοαντιστροφής.
- Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί.

- **Λύσε ένα ανάλογο πρόβλημα.**

Αντιστοιχία συγκεκριμένων συνθηκών.

Επίπεδα - Χώρος.

Ευθείες - Επίπεδο.

Σημεία - Ευθεία.

- **Κάνε ένα σχήμα.**

Σχεδίασε ένα γράφημα, μια γραφική παράσταση, ένα διάγραμμα.

Οι άνθρωποι μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους στην ικανότητα τους να επινοήσουν σωστά σχέδια επίλυσης και οι διαφορές αυτές μπορεί να έχουν σχέση με τη στρατηγική γνώση. Πρόσφατα πειράματα έχουν δείξει ότι η στρατηγική επίλυσης που χρησιμοποιείται μπορεί να εξαρτάται από την **μορφή** με την οποία παρουσιάζεται το πρόβλημα.

Για παράδειγμα η εύρεση των ριζών της εξίσωσης $x^2 -3x + 2 = 0$ όταν αυτή δοθεί με την παραπάνω μορφή ωθεί τον λύτη στη χρήση της αντίστοιχης μεθοδολογίας με εύρεση της Διακρίνουσας κτλ. αντιστοίχως αν δοθεί η γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης ,τότε προφανώς τον ενδιαφέρον του λύτη θα μεταφερθεί στην εύρεση των σημείων όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x.

Επίσης είναι συνηθισμένο φαινόμενο, οι μαθητές να δυσκολεύονται περισσότερο στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής όταν η εκφώνηση του προβλήματος παρουσιάζει τις πληροφορίες σε λεκτική μορφή. Το συγκεκριμένο γεγονός προφανώς συνδέεται με την δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στον διαχωρισμό των δεδομένων και των πραγματικά χρήσιμων πληροφοριών, μέσα από το προσφερόμενο σύνολο πληροφοριών.

Ένα από τα χρησιμότερα συμπεράσματα που έχουμε αποκομίσει από τις τελευταίες μελέτες για το θέμα των ευρετικών είναι ότι οι ευρετικές μπορούν να διδαχθούν. Συγκεκριμένα, σε μια πρόσφατη μελέτη ο Schoenfeld (1979) προσπάθησε να διδάξει πέντε στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων σε φοιτητές των μαθηματικών. Οι πέντε στρατηγικές ήταν οι εξής :

- Κάνετε σχεδιάγραμμα όταν το επιτρέπει το πρόβλημα.

- Αν υπάρχει ακέραια παράμετρος, εξετάστε αν μπορείτε να εφαρμόσετε τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.
- Εξετάστε αν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα συλλογισμό που να στηρίζεται στην αντίθετη ή την αντιθετοαντίστροφη της αρχικής σχέσης.
- Εξετάστε ένα παρόμοιο πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές.
- Προσπαθείτε να ορίζετε υποστόχους.

Επιπλέον, δόθηκαν στους μαθητές προβλήματα εξάσκησης για κάθε μια από τις πέντε στρατηγικές. Σε μια ομάδα ελέγχου δόθηκαν τα ίδια προβλήματα εξάσκησης, χωρίς όμως να συζητηθούν οι στρατηγικές επίλυσης. Σε όλους τους φοιτητές δόθηκε μια προεξέταση και μια μετεξέταση με μαθηματικά προβλήματα. Όπως είναι φυσικό, η ομάδα που είχαν δοθεί οι στρατηγικές παρουσίασε μεγάλη βελτίωση, ενώ στην άλλη ομάδα δεν σημειώθηκε καμία βελτίωση. Το πείραμα του Schoenfeld υπόσχεται πολλά, γιατί δείχνει ότι μερικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων μπορούν να διδαχθούν στους μαθητές.

4.5 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο Σχεδιασμού της Λύσης

Είναι αλήθεια ότι ο σχεδιασμός – εύρεση μιας λύσης αποτελεί το βασικό στόχο τόσο για τους μαθητές που επιδιώκουν να λύσουν κάποιο πρόβλημα, όσο και για τους καθηγητές που αποσκοπούν στην βελτίωση των μαθητών τους σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα πολλές φορές, κυρίως από την πλευρά των μαθητών να υποτιμούνται τα υπόλοιπα στάδια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος και να δίνεται όλο το βάρος στην προσπάθεια εύρεσης μιας λύσης. Προφανώς αυτού του είδους η συμπεριφορά δεν εξασφαλίζει την επιτυχία των μαθητών στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Είναι λογικό πως αν για παράδειγμα δεν έχουμε δώσει την απαραίτητη βαρύτητα στο στάδιο της κατανόησης είναι μάταιο να προσπαθούμε να βρούμε απάντηση σε ένα ερώτημα το οποίο δεν έχουμε καταλάβει τι μας ζητάει και ταυτοχρόνως δεν έχουμε καταλάβει πιο είναι το υλικό που μας προσφέρει η εκφώνηση και με το οποίο μπορούμε να χτίσουμε τη λύση. Απ' την άλλη αν δεν υπάρχει έλεγχος της λύσης που προτείνουμε, δεν είναι δυνατόν να εντοπιστούν τα λάθη που ενδεχομένως έχουμε κάνει. Συνεπώς είναι απαραίτητο, ο σχεδιασμός της λύσης να προσδιορίζεται σαν ένα τμήμα μιας συνεχούς πορείας, άμεσα αλληλοεξαρτώμενο από τα υπόλοιπα στάδια.

Παρόλο το ότι ο σχεδιασμός της λύσης εξαρτάται από τα υπόλοιπα στάδια και προφανώς από τις γνωστικές λειτουργίες που εμπλέκονται σ' αυτά δεν θα αναφερθούμε εκ'

νέου στις αντίστοιχες μεταγνωστικές δεξιότητες και το ρόλο που αυτές διαδραματίζουν. Έτσι για παράδειγμα ενώ στο σχεδιασμό της λύσης παίζει ρόλο η μορφή της εκφώνησης, δεν θα αναφερθούμε στο ρόλο της μεταγνώσης με βάση τη γλώσσα, απ' τη στιγμή που αναφερθήκαμε εκτενώς στο στάδιο της κατανόησης. Αντίστοιχα για τον ίδιο λόγο δεν θα αναφερθούμε ξανά στο ρόλο της μεταγνώσης με βάση την ενεργοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης και την ανάκληση υποδειγμάτων.

Στο συγκεκριμένο στάδιο, θα δώσουμε βαρύτητα στον τομέα των ευρετικών – στρατηγικών και στο πως σχετίζεται η μεταγνώση μ' αυτό το βασικό χαρακτηριστικό σχεδιασμού της λύσης. Σχετικά με τις ευρετικές έχει γίνει πολύ κουβέντα, με πρωτεργάτη βέβαια τον G.Polya. Κατά καιρούς έχουν παρουσιαστεί πίνακες με ποικιλία ευρετικών ανάλογα με τον αντίστοιχο κλάδο των μαθηματικών. Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα, όταν το αντικείμενο το επιτρέπει, οι ευρετικές αυτές καταλήγουν σε μια αυστηρά τυποποιημένη μεθοδολογία, απόλυτα εξειδικευμένη για κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Άλλοτε πάλι δίνεται βαρύτητα σε κάποιες ευρετικές οι οποίες χαρακτηρίζονται από γενικότητα και ευρύ φάσμα εφαρμογών. Πάντως σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένας πίνακας ο οποίος θα περιέχει όλες τις ευρετικές, έτσι ώστε ελέγχοντας τις μια – μια να μπορούμε να βρίσκουμε πάντα ένα σχέδιο λύσης. Τα παραπάνω δίνουν την εντύπωση ότι οι ευρετικές δεν είναι τελικά και τόσο θαυματουργές .

Το γιατί συμβαίνει αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί εν μέρει με την έλλειψη κατάλληλης διδασκαλίας. Ακόμη κι αν έχω διδαχθεί κάποιες ευρετικές, το γεγονός ότι μπορώ να αντιμετωπίζω επιτυχώς τα προβλήματα που επιλύονται με βάση αυτές τις ευρετικές, δεν μου εξασφαλίζει ότι θα είμαι το ίδιο επιτυχής και σε προβλήματα που στηρίζονται σε κάποιες άλλες ευρετικές. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό ; Μήπως υπάρχουν και κάποιες άλλες δεξιότητες οι οποίες είναι απαραίτητες για τον επιτυχή χειρισμό των ευρετικών ; Η βασική μας θέση, που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, είναι ότι **η ικανότητα αποδοτικού χειρισμού των ευρετικών απαιτεί υψηλό βαθμό μεταγνώσης.** Λέγοντας χειρισμό εννοούμε όχι μόνο τη διαχείριση γνωστών ευρετικών αλλά και τη δημιουργία νέων κατά περίπτωση.

Τις περισσότερες φορές οδηγούμαστε στη λύση μέσα από ένα μονοπάτι ευρετικών. Για παράδειγμα ας πάρουμε το παρακάτω πρόβλημα :

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\ln [(x + 5) (3x – 2)]$

Ένα μονοπάτι ευρετικών (στη συνέχεια θα το ονομάζουμε επίσης διαδρομή ή συνδυασμό ευρετικών) είναι το παρακάτω. Κάτω από κάθε ευρετική, μέσα σε παρένθεση παραθέτουμε τι κερδίζουμε από την συγκεκριμένη ευρετική.

Ποια x ανήκουν στο πεδίο ορισμού ;

(Αυτά για τα οποία έχει νόημα ο τύπος της συνάρτησης)

Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης ;

(ln [(x + 5) (3x – 2)])

Ποια χαρακτηριστικά του τύπου αυτού καθορίζουν το νόημα του ;

(Το ln)

Τι περιορισμούς δημιουργεί το ln ;

(Η ποσότητα μέσα στο ln πρέπει να είναι μεγαλύτερη απ' το μηδέν)

Ποια είναι η σχέση η οποία θα μου δώσει τα ζητούμενα x ;

((x + 5) (3x – 2) > 0)

Η παραπάνω διαδρομή ευρετικών μας οδηγεί σε ένα πολύ ικανοποιητικό σχέδιο λύσης. Για να βρω το πεδίο ορισμού αρκεί να λύσω την ανίσωση. Προφανώς η παραπάνω διαδρομή δεν είναι μοναδική. Ανάλογα το μαθητή μπορεί να προκύψουν διαδρομές λιγότερο ή περισσότερο απλές. Μπορεί, αν ο μαθητής έχει συναντήσει πολλές φορές παρόμοια προβλήματα να έχει αυτοματοποιήσει την παραπάνω διαδρομή και να χρησιμοποιεί κατευθείαν το τελικό προϊόν.

Μερικές κλασικές ευρετικές για την επινόηση ενός σχεδίου είναι οι παρακάτω :

- Γνωρίζετε ένα σχετικό πρόβλημα ;
- Γνωρίζετε κάποιο σχετικό θεώρημα ;
- Πως συνδέονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα ;
- Πως διαμορφώνεται το πρόβλημα αν αλλάξουμε τη συνθήκη ; κ.τ.λ

Ο παραπάνω κατάλογος μπορεί να εμπλουτίζεται και να μεγαλώνει συνεχώς. Οι παραπάνω ευρετικές μπορούν να σπάσουν σε μικρότερες οι οποίες θα αναφέρονται αναλυτικότερα στα επιμέρους στοιχεία του προβλήματος . Για κάθε πρόβλημα κάποιες από τις ευρετικές του καταλόγου που θα δημιουργήσουμε θα είναι πολύ χρήσιμες και κάποιες λιγότερες έως καθόλου χρήσιμες. Κάποιοι κατάλληλοι συνδυασμοί των παραπάνω ευρετικών θα δημιουργούν διαδρομές ευρετικών οι οποίες θα οδηγούν σε κάποια καλά σχέδια για τη λύση του προβλήματος. Μπορεί ακόμη πολλοί διαφορετικοί συνδυασμοί ευρετικών να

οδηγούν στην ίδια λύση. Η κατάσταση περιπλέκεται ακόμα περισσότερο αν αναλογιστεί κανείς τις διαφορές που υπάρχουν στον τρόπο σκέψης από άτομο σε άτομο. Κάθε άτομο έχει το δικό του τρόπο και στυλ σκέψης και μάθησης. Κάθε άτομο έχει τις δικές του γνώσεις. Οι καλές ιδέες, τις οποίες θέλουμε να δημιουργήσουμε μέσω των ευρετικών, βασίζονται σε προηγούμενες εμπειρίες και σε προγενέστερα αποκτημένες γνώσεις. Ήδη έχουμε σκιαγραφήσει ένα βασικό πρόβλημα. **Η γνώση των ευρετικών**, (ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι ο λύτης τις γνωρίζει όλες) , **δεν εξασφαλίζει την ικανότητα επιλογής των κατάλληλων ευρετικών που οδηγούν στη λύση.**

Η κατάσταση είναι ακόμα χειρότερη. Ας υποθέσουμε το φανταστικό σενάριο όπου καταφέραμε να δημιουργήσουμε έναν μαθητή ο οποίος γνωρίζει όλες τις ευρετικές που του έχουμε διδάξει, ας υποθέσουμε επίσης ότι έχει την ικανότητα να επιλέγει κάθε φορά τον κατάλληλο συνδυασμό ευρετικών, είμαστε σίγουροι ότι θα μπορεί να λύνει όλα τα προβλήματα ; Δυστυχώς όχι. Αν κανείς σκεφτεί ότι πολλές ευρετικές σχετίζονται άμεσα με τη γνώση επί συγκεκριμένων θεμάτων (ειδικές ευρετικές) και ότι η σχετιζόμενη με το πρόβλημα γνώση μπορεί να παρουσιαστεί ή να δοθεί με άπειρους συνδυασμούς, είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε εμείς οι ίδιοι κάποια ευρετική η οποία θα συμπληρώνει το χαμένο κρίκο στην διαδρομή των ευρετικών που μας οδηγούν στη λύση.

Τελικά υπάρχουν τρία πολύ βασικά ερωτήματα, για κάθε λύτη :

- Ποιες είναι οι ευρετικές που γνωρίζω ;
- Ποιες είναι οι κατάλληλες ευρετικές για την περίπτωση μου ;
  Ή με άλλα λόγια :
  Πως επιλέγω ευρετικές ;
- Πως κατασκευάζω ευρετικές ;

Ο ρόλος της μεταγνώσης, στο στάδιο του σχεδιασμού της λύσης, σχετίζεται άμεσα με τα παραπάνω τρία ερωτήματα.

Έτσι η μεταγνώση μέσω μνημονικών στρατηγικών οργανώνει, κωδικοποιεί και δίνει σημασία στις ευρετικές που γνωρίζει το άτομο, με αποτέλεσμα να είναι πιο εύκολη η ανάσυρση τους από τη μακροπρόθεσμη μνήμη. Σημαντική παράμετρος των μνημονικών τεχνικών είναι η σύνδεση των νέων πληροφοριών με αυτές που ήδη γνωρίζουμε.

Για την επιλογή της κατάλληλής ευρετικής είναι απαραίτητη η αναγνώριση του συγκεκριμένου προβλήματος, των πληροφοριών που χρειάζονται για να λυθεί και των

πηγών για την άντληση των πληροφοριών. Η μεταγνώση καθιστά το μαθητή ικανό να διαλέγει, να τροποποιεί και να επινοεί ευρετικές για να επιλύσει προβλήματα. Βοηθά το μαθητή να οργανώσει τη σκέψη του να την αυτοκατευθύνει και να εφαρμόσει ευρετικές τις οποίες έχει διδαχθεί και τις οποίες όμως θα επιλέξει, θα προσαρμόσει και θα αναπτύξει με βάση τις ιδιομορφίες του προβλήματος και τον ιδιαίτερο τρόπο σκέψης του.

Τα παραπάνω επιτυγχάνονται μέσω του σχεδιασμού, του ελέγχου της αποτελεσματικότητας των ενεργειών μας, της αναθεώρησης ανεπαρκών σχεδίων και της συνειδητότητας του πως σκεπτόμαστε. Η κατασκευή και η ανάσυρση των κατάλληλων ευρετικών καθοδηγείται από τη φύση και τις δυνατότητες που μας προσφέρουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα και από το κατά πόσο πλησιάζουμε ή όχι στην επίτευξη του στόχου. Ταυτόχρονα ελέγχεται κατά πόσο οι ενέργειες μας αυξάνουν ή μειώνουν τη δυσκολία επίλυσης.

Η ερώτηση : *Ποια σχέση συνδέει τα δεδομένα με τα ζητούμενα ;* αποτελεί από μόνη της μια ευρετική η οποία μπορεί να εξελιχθεί σε μεταγνωστική δεξιότητα όταν ο μαθητής αποκτήσει την ικανότητα να θέτει την συγκεκριμένη ερώτηση στον εαυτό του από μόνος του, την κατάλληλη στιγμή έχοντας επίγνωση της σημασίας και του ρόλου της. Όταν έχει αποκτήσει την ικανότητα μέσω αξιολόγησης των πληροφοριών να αναγνωρίζει τις συνδέσεις και τα χαρακτηριστικά που τον κατευθύνουν στη χρήση αυτής της ερώτησης. Τα ίδια χαρακτηριστικά, (ομοιότητες / διαφορές με γνωστές καταστάσεις, ιδιαίτερες δυσκολίες), είναι αυτά που θα τον καθοδηγήσουν στην κατασκευή των κατάλληλων για την περίπτωση ευρετικών.

4.6 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο του σχεδιασμού της λύσης.

1. Διευκολύνει την ανάσυρση από την μνήμη ευρετικών μέσω μνημονικών στρατηγικών οι οποίες τις οργανώνουν και τις κωδικοποιούν.
2. Αποδίδει νόημα και ρόλο σε κάθε ευρετική .
3. Συνδέει τις ευρετικές με συγκεκριμένες καταστάσεις.
4. Διευκολύνει την αναγνώριση των πιθανών προς χρήση ευρετικών.
5. Διαμορφώνει κριτήρια επιλογής ευρετικών.
6. Δημιουργεί κανόνες τροποποίησης και κατασκευής ευρετικών ανάλογα με τον προσωπικό τρόπο σκέψης του λύτη.
7. Αυξάνει την οργάνωση και την αυτοκατεύθυνση των σκέψεων του μαθητή.

8. Βοηθάει το μαθητή να αναζητά ιδιομορφίες και χαρακτηριστικά του προβλήματος και να τα εμπλέκει στις αποφάσεις του.
9. Αυξάνει τον έλεγχο και την αξιολόγηση των επιλογών του.

4.7 Το στάδιο της Εκτέλεσης της Λύσης

Η εκτέλεση της λύσης απαιτεί από τον επιλυτή να είναι σε θέση να εκτελεί πράξεις και υπολογισμούς. Για να εκτελέσει ο επιλυτής τις λύσεις των προβλημάτων, χρειάζεται κάποια γνώση των διαδικασιών επίλυσης, δηλαδή γνώση του αλγόριθμου. Οι άνθρωποι μπορεί να διαφέρουν ως προς την ικανότητα που έχουν στην εκτέλεση πράξεων κι αυτές οι διαφορές μπορεί να έχουν σχέση με τις γνώσεις του αλγόριθμου. Οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι εξαρτώνται από το αν ο επιλυτής διαθέτει επιδεξιότητες στις οποίες έχει εξασκηθεί και τις γνωρίζει καλά. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντικό να υπάρχει από προηγουμένως η σχετική επαφή και ενασχόληση του μαθητή με **Ασκήσεις.** Τι είναι όμως άσκηση ;

Άσκηση είναι μια επαναλαμβανόμενη πράξη, που στοχεύει στην ενίσχυση αποκτηθείσας δεξιότητας. Η διαδικασία λύσης μιας άσκησης είναι μια επανάληψη γνωστών ενεργειών. Είναι μονοδιάστατη νοητική πράξη, που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μνήμη και την αυτοματοποιημένη επανάληψη αφομοιωμένων αντιδράσεων. Η εφαρμογή θεωριών, μεθόδων και τεχνικών είναι η μεταφορά στην πράξη νοητικά προκαθορισμένων ενεργειών. Σε γενικές γραμμές τα είδη των ασκήσεων που συναντάει ένας μαθητής στη σχολική του ζωή ποικίλουν και διαφοροποιούνται αναλόγως την ηλικία, τις απαιτήσεις της τάξης στην οποία βρίσκεται, τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις κτλ. Ως αναφορά την ομαδοποίηση των ασκήσεων, οι απόψεις ποικίλουν.

Ωστόσο, θα μπορούσαμε με βάση τα ελληνικά δεδομένα να ταξινομήσουμε τα είδη των ασκήσεων στις παρακάτω κατηγορίες :

- **Ασκήσεις εξάσκησης:** Είναι οι ασκήσεις που δίνουμε για να εξασκηθούν οι μαθητές στις διάφορες πράξεις ή αλγόριθμους.
- **Ασκήσεις εμπέδωσης της θεωρίας :** Είναι οι ασκήσεις που δίνουμε για να εμπεδώσουν καλύτερα οι μαθητές ορισμούς, προτάσεις, θεωρήματα ή και ολόκληρη θεωρία.

- **Ασκήσεις συμπλήρωσης της θεωρίας :** Είναι οι ασκήσεις που δίνουμε για να επισημάνουμε ορισμένα επιπλέον στοιχεία της θεωρίας, τα οποία δεν θέλουμε να είναι ενσωματωμένα στη θεωρία.
- **Ασκήσεις εφαρμογής ορισμένης διαδικασίας :** Είναι οι ασκήσεις που δίνονται ως εφαρμογή γνωστής μεθοδολογίας ή διαδικασίας.
- **Ασκήσεις κατασκευών :** Είναι οι ασκήσεις που απαιτούν τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων ή και εργαλείων.

Η επίλυση ασκήσεων περιγράφεται συνήθως από τον όρο **" πρακτική και εξάσκηση ".** Η τεχνική της πρακτικής και εξάσκησης κατείχε και εξακολουθεί να κατέχει μια αξιοσημείωτη θέση στην ιστορία της διδακτικής των μαθηματικών μέχρι σήμερα. Υπήρχε εποχή που αποτελούσε τη βασική αρχή της διδασκαλίας και της μάθησης. Σχεδόν όλοι μας αποδεχόμαστε ότι κάποια μορφή πρακτικής είναι αναγκαία για τη μάθηση των μαθηματικών γιατί, σύμφωνα με το κοινό αίσθημα, η πρακτική και η εξάσκηση βοηθούν στην επίτευξη της τελειότητας και στην καλλιέργεια της ταχύτητας και ακρίβειας, τα οποία είναι κριτήρια για την ανάπτυξη των υπολογιστικών ικανοτήτων.

Οι θεωρητικές και ιστορικές βάσεις για τη στήριξη της τεχνικής της πρακτικής και εξάσκησης, βρίσκονται στην ψυχολογική θεωρία του συνδετισμού ή των δεσμών, με κεντρικό θεμελιωτή της τον Thorndike.

Συγκεκριμένα, ο Thorndike , επειδή οι μαθητές του δημοτικού δεν ήταν ικανοί να εξαγάγουν τους κανόνες της αριθμητικής από παραδείγματα και άλλους κανόνες, σκέφτηκε ότι το έργο της διδασκαλίας ήταν να σχηματίσει προσεκτικά τους αναγκαίους δεσμούς και συνήθειες, οι οποίες θα επέτρεπαν στους μαθητές να εκτελέσουν υπολογισμούς και να λύσουν αριθμητικά προβλήματα. Σαν ένα πρώτο βήμα, θα μπορούσε να επιλεγεί ο σχηματισμός των δεσμών. Για να γίνει αυτό θα έπρεπε το κάθε μάθημα να διαιρεθεί σε υποενότητες. Τη κάθε υποενότητα θα την αποτελούσαν ορισμένες λειτουργίες, τις οποίες θα έπρεπε ο δάσκαλος χωριστά την κάθε μια να ενισχύσει με τις κατάλληλες ασκήσεις εξάσκησης. Ο Thorndike πίστευε ότι οι δεσμοί δημιουργούνται με επανειλημμένη εμφάνιση των δεσμών Ερεθίσματος - Αντίδρασης, οπότε ο ρόλος του δασκάλου είναι απλώς να προσφέρει την κατάλληλη ποσότητα πρακτικής, δίνοντας στους μαθητές επιλεγμένες ασκήσεις. Έτσι ο δάσκαλος πρέπει να καθορίσει τους δεσμούς της συγκεκριμένης ενότητας και έπειτα να τους διατάξει σε σειρά, πρώτα οι ευκολότεροι και μετά οι δυσκολότεροι , έτσι ώστε η μάθηση των ευκολότερων να βοηθήσει τη μάθηση των

επόμενων και δυσκολότερων. Στη συνέχεια αυτό που απομένει είναι να ενισχύει τους δεσμούς με κατάλληλη πρακτική και εξάσκηση.

Βέβαια, η συνδετική θεωρία, έτσι όπως εφαρμόστηκε από τον Thorndike παρουσιάζει δυο " αδύναμα " σημεία τα οποία πρέπει να προσεχθούν.

Αναλυτικότερα,

1. Δεν ελάμβανε καθόλου υπόψη της τις ποιοτικές διαφορές που υπάρχουν στις υπολογιστικές ικανότητες μεταξύ παιδιών και ενηλίκων. Τα παιδιά χρησιμοποιούν και επινοούν πολύ πιο διαφορετικές τεχνικές από τους μεγάλους για να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, ένα παιδί για να υπολογίσει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 8 + 5 μπορεί να σκεφτεί ως εξής : 5 + 5 = 10, 10 + 3 = 13 ή 8 + 8 = 16, 16 - 3 = 13.

2. Η μέθοδος της πρακτικής και εξάσκησης δημιουργούσε μια λανθασμένη άποψη για το σκοπό της μάθησης, που δεν είναι τόσο το αποτέλεσμα αλλά το πως φθάνει κανείς σε αυτό. Έτσι ο μαθητής με τη μέθοδο αυτή κινδυνεύει να φθάσει στο αποτέλεσμα μαθαίνοντας μια διαδικασία εντελώς μηχανικά, χωρίς να καταλαβαίνει τι κάνει στην ουσία και γιατί το κάνει. Η πραγματική κατανόηση απαιτεί προσοχή στις μαθηματικές αρχές, τις δομές πάνω στις οποίες βασίζονται οι υπολογιστικοί κανόνες. Αυτό που πραγματικά χρειάζεται ένας μαθητής είναι να κατανοήσει τη σημασία αυτών των αρχών και όχι να εκτελεί μηχανικά αυτοματοποιημένες κινήσεις. Η εξάσκηση μέσω της επανάληψης δεν αποτελεί εγγύηση για την πραγματική κατανόηση. Με το να μάθουν τα παιδιά τον πίνακα του πολλαπλασιασμού 9 x 9, δεν σημαίνει ότι έχουν καταλάβει τους κανόνες του πολλαπλασιασμού. Επομένως, όταν συναντήσουν πρωτόγνωρες καταστάσεις που χρειάζεται πραγματική κατανόηση των κανόνων, δεν θα είναι σε θέση να τα βγάλουν πέρα.

Η πρακτική και η εξάσκηση αναγνωρίζονται και σήμερα ως σπουδαίες τεχνικές για την ανάπτυξη κάποιων υπολογιστικών δεξιοτήτων και την προώθηση της ταχύτητας και της ακρίβειας στους υπολογισμούς, με την προϋπόθεση βέβαια να μην εθίζουν τους μαθητές στη μηχανική εργασία.

Όσον αφορά τους αρχικούς υπολογιστικούς αλγόριθμους, τείνουν να χρησιμοποιούν την πείρα του μαθητή στη μέτρηση. Σε μελέτες που έχουν γίνει (Groen & Parkman 1972), εντοπίστηκαν τρία μοντέλα αρίθμησης για αθροιστικούς αλγόριθμους παιδιών. Κάθε ένα μοντέλο δείχνει πως ένα παιδί μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα μονοψήφιας πρόσθεσης της μορφής $\mu + \nu = ...$

Τα τρία μοντέλα είναι τα εξής :

Μοντέλο ολικής μέτρησης : Θέτουμε έναν μετρητή στο 0. Τον αυξάνουμε κατά μ και μετά κατά ν. Για την πρόσθεση 3 + 5, το παιδί λεει : " 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ".

Μοντέλο μερικής μέτρησης : Θέτουμε έναν μετρητή στον πρώτο αριθμό (μ) και τον αυξάνουμε κατά ν. Για την πρόσθεση 3 + 5, το παιδί λεει : " 4, 5, 6, 7, 8 ".

Μοντέλο ελάχιστης μέτρησης : Θέτουμε ένα μετρητή στον μεγαλύτερο από τους δυο αριθμούς μ και ν . Αυξάνουμε τον μετρητή κατά τον μικρότερο από τους δυο αριθμούς μ και ν. Για την πρόσθεση 3 + 5, το παιδί λεει : " 6, 7, 8 ".

Παρατηρήθηκε ότι στα παιδιά της Α΄ Δημοτικού ο κύριος αλγόριθμος για απλή πρόσθεση είναι μια διαδικασία μερικής μέτρησης.

Όμως, ο Fuson (1982) έχει παρατηρήσει ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας συχνά χρησιμοποιούν διαδικασίες ολικής μέτρησης, ενώ οι πιο εξελιγμένες μέθοδοι, όπως η μερική μέτρηση, αναπτύσσονται καθώς τα παιδιά αποκτούν περισσότερη πείρα στα προβλήματα πρόσθεσης.

Καθώς τα παιδιά αποκτούν μεγαλύτερη πείρα με τα απλά προβλήματα πρόσθεσης, αναπτύσσεται μια νέα διαδικασία, την οποία ο Fuson ονομάζει " γνωστά δεδομένα ". Η νέα διαδικασία είναι η απομνημόνευση των απαντήσεων για απλά προβλήματα πρόσθεσης. Στην μελέτη των Groen & Parkman 1972 που αναφέραμε παραπάνω παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Α΄ Δημοτικού ήταν πολύ γρήγοροι στις " διπλές "προσθέσεις, όπως 2 + 2, 3 + 3 κτλ. Προφανώς έχουν απομνημονεύσει απαντήσεις για μερικές αλλά όχι για όλες τις προσθέσεις. Έτσι, η διαδικασία των " γνωστών δεδομένων " χρησιμοποιείται για μερικά προβλήματα, ενώ για άλλα χρησιμοποιείται η μέθοδος της μερικής μέτρησης. Όταν το άτομο ενηλικιωθεί έχει απομνημονεύσει πολύ καλά τα δεδομένα και μπορεί να μην του χρειάζονται πια οι αλγόριθμοι της μέτρησης. Επιπλέον καθώς οι μαθητές μαθαίνουν περισσότερα δεδομένα, μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν για να βρουν απαντήσεις σε σχετικά προβλήματα (κάτι που ο Fuson ονομάζει " παραγόμενα δεδομένα "). Για παράδειγμα για την πρόσθεση 5 + 7 μπορείς να πάρεις 1 από το 7 και να το δώσεις στο 5, έτσι που να έχεις την πρόσθεση 6 + 6 . Έτσι ο Fuson προτείνει μια προοδευτική εξέλιξη στην οποία οι μαθητές περνούν από την ολική μέτρηση στη μερική (βασίζοντας τους υπολογισμούς σε μοντέλα μέτρησης), στη συνέχεια στα παραγόμενα δεδομένα και από εκεί στα γνωστά δεδομένα (όπου οι υπολογισμοί βασίζονται σε απομνημονευμένες απαντήσεις.

Στα πλαίσια των παραπάνω διαδικασιών η μνήμη παίζει σπουδαίο ρόλο στην κωδικοποίηση και εναποθήκευση των πληροφοριών. Μόνο με την επεξεργασία της πληροφορίας από τη βραχυπρόθεσμη μνήμη και την κωδικοποίηση της είναι δυνατή η

εναποθήκευση της στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Επίσης, μόνον όταν ανακληθούν οι πληροφορίες από τη μακροπρόθεσμη στη βραχυπρόθεσμη μνήμη μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην πορεία της σκέψης.

Η βραχυπρόθεσμη μνήμη έχει περιορισμένη ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Εάν η βραχυπρόθεσμη μνήμη είναι πλήρης, η νέα πληροφορία που έρχεται είτε από τις αισθητηριακές εγγραφές είτε από τη μακροπρόθεσμη μνήμη, γίνεται αποδεκτή αλλά εις βάρος της παλιάς που χάνεται. Και εδώ βρίσκεται η μεγάλη αξία της επανάληψης. Μέσω της επανάληψης είναι δυνατόν να διατηρηθεί η παλιά πληροφορία μέσα στη βραχυπρόθεσμη μνήμη για περισσότερο χρόνο. Η επανάληψη όμως δεν μπορεί να αυξήσει τη βασική χωρητικότητα της βραχυπρόθεσμης μνήμης. Ένας τρόπος για να επεκταθεί η χωρητικότητα της βραχυπρόθεσμης μνήμης είναι η ανάπτυξη του αυτοματισμού στο ερέθισμα. Αυτό μπορεί να γίνει για τον εξής λόγο : Όταν μια διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί αυτόματα, χωρίς δηλαδή να χρειαστεί ιδιαίτερη προσοχή, τότε δημιουργείται περισσότερος χώρος στη βραχυπρόθεσμη μνήμη για επεξεργασίες που απαιτούν μεγαλύτερη προσοχή. Αυτό σημαίνει ότι εάν ο μαθητής μάθει να εκτελεί αυτόματα κάποιες διαδικασίες ή αλγόριθμούς (όπως π.χ τις βασικές ταυτότητες στην άλγεβρα ή τον αλγόριθμο της διαίρεσης στην αριθμητική), οι υπολογιστικές του ικανότητες σίγουρα θα αυξηθούν.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο ρόλος της εξάσκησης και της πρακτικής και μέσω αυτών του αυτοματισμού, είναι χωρίς αμφιβολία σημαντικός για τη λειτουργία της μάθησης των μαθηματικών. Παρόλα αυτά δεν θα πρέπει να ξεχνάμε και τις αρνητικές τους πλευρές, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε στείρα και μηχανική μάθηση και να εξουδετερώσουν έτσι τη θετική προσφορά τους. Η εξάσκηση και η πρακτική, μπορεί να επιτύχουν μόνο στο βαθμό που θα εξυπηρετούν προφανώς συγκεκριμένες ανάγκες, θα παρουσιάζονται με ευχάριστες μορφές και θα υποβοηθούν με πειστικό τρόπο τους ευρύτερους σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Από τη στιγμή που οι μαθητές θα αποκτήσουν κάποια ευχέρεια στην απλή πρόσθεση (δηλαδή καθώς οι διαδικασίες αυτές γίνονται αυτόματες), ο απλός υπολογισμός μπορεί να γίνει ένα τμήμα μεγαλύτερων αλγορίθμων.

4.8 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Εκτέλεσης της λύσης

Δεν θα πρέπει να παραβλέψουμε την αξία που έχει στην εκτέλεση της λύσης ο έλεγχος σε κάθε βήμα της επίλυσης και η επαλήθευση - απόδειξη ότι κάθε βήμα είναι σωστό. Κάτι τέτοιο συντελεί όχι μόνο στην ολοκλήρωση μιας ορθής λύσης αλλά και στην αφομοίωση των εννοιών και των σκεπτικών που χειρίζεται ο λύτης.

Η ικανότητα ελέγχου, αξιολόγησης και διόρθωσης των επιμέρους βημάτων που συνοδεύουν τους υπολογισμούς που εκτελεί ο μαθητής αποτελούν κλασικές μεταγνωστικές δεξιότητες οι οποίες εξασφαλίζουν όχι μόνο τον ορθό χειρισμό των υπολογιστικών κανόνων αλλά και την βαθύτερη κατανόηση της σημασίας τους. Έτσι ο μαθητής αποκτά την επιπλέον ικανότητα να αναγνωρίζει τις ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις διάφορες υπολογιστικές τακτικές και μέσω της εμπειρίας του να αξιολογεί τις μεθόδους αυτές και να επιλέγει κάθε φορά την καταλληλότερη με βάση την αποτελεσματικότητα, την ασφάλεια των υπολογισμών και τις δικές του ικανότητες. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ότι κάποιος θέλει να εκτελέσει τη διαίρεση 640 **:** 128. Γνωρίζει να εκτελεί την ευκλείδεια διαίρεση και ταυτοχρόνως γνωρίζει να εκτελεί απλοποιήσεις σε κλάσματα. Ο μαθητής με υψηλό δείκτη μεταγνώσης δεν θα προβεί κατευθείαν στην διαίρεση με τον τρόπο που έχει διδαχθεί να εκτελεί τις περισσότερες φορές διαίρεση (την ευκλείδια διαίρεση) αλλά πρώτα απ' όλα θα παρατηρήσει τα χαρακτηριστικά των ποσοτήτων που εμπλέκονται στους υπολογισμούς. Θα αξιολογήσει τις δυνατότητες που του προσφέρουν αυτά τα χαρακτηριστικά και θα αναζητήσει περιπτώσεις οι οποίες μοιάζουν σε απαιτήσεις με την παρούσα κατάσταση. Έτσι θα αναγνωρίσει ότι οι αριθμοί που εμπλέκονται είναι άρτιοι και θα προσπαθήσει να εκμεταλλευτεί αυτή τους την ιδιότητα για την εκτέλεση της διαίρεσης. Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσε να σκεφτεί :

640 **:** 128 = 640 / 128 = 320 / 64 = 160 / 32 = 80 /16 = 40 / 8 = 20 / 4 = 10 / 2 = 5

Η παραπάνω επιλογή έχει ακόμα περισσότερες πιθανότητες να επιλεγεί εάν ο μαθητής έχει επίγνωση ενδεχόμενων αδυναμιών του στην εκτέλεση της ευκλείδειας διαίρεσης.

Κατά τη διάρκεια των εμπειριών που βιώνει, ο μαθητής με υψηλό δείκτη μεταγνώσης παρατηρεί τα είδη των υπολογισμών στα οποία δυσκολεύεται και εντοπίζει τα είδη των λαθών του.

Προσπαθεί να αιτιολογήσει την πραγματοποίηση αυτών των λαθών και να βρει τρόπους να τα διορθώσει μέσω της παρατήρησης της επιτυχημένης συμπεριφοράς άλλων πιο έμπειρων, της αξιοποίησης άλλων προσωπικών του ικανοτήτων ή της καλύτερης κατανόησης των αντίστοιχων κανόνων.

Ακόμα επιδιώκει να διαφυλάξει τον εαυτό του από την πραγματοποίηση παρόμοιων λαθών αυξάνοντας την εγρήγορση του στα επικίνδυνα σημεία, εντείνοντας την προσοχή του και αυξάνοντας τους ελέγχους.

Ο μαθητής με υψηλό δείκτη μεταγνώσης δεν εκτελεί υπολογισμούς αποκομμένους από τον αρχικό του στόχο. Δεν του αρκεί η ορθή εκτέλεση των υπολογισμών . Ο βασικός του στόχος είναι η επίλυση του προβλήματος. Οι υπολογισμοί που κάνει μπορεί να είναι σωστοί αλλά να τον απομακρύνουν από τον στόχο του, γι 'αυτό πάντα ελέγχει το κατά πόσο οι συγκεκριμένοι υπολογισμοί οδηγούν στο επιθυμητό, σε κάτι άλλο ή σε αδιέξοδο. Έχει στο νου του ότι υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά τα οποία πρέπει να τον βάζουν σε υποψίες. Για παράδειγμα οι πολλές και δύσκολες πράξεις οι οποίες αντί να απλοποιούν την κατάσταση δείχνούν να την περιπλέκουν ακόμα περισσότερο, η μη χρήση όλων των δεδομένων, η εμφάνιση περίεργων αποτελεσμάτων , η αύξηση των αγνώστων κ.τ.λ αποτελούν στοιχεία προβληματισμού. Κάπου μπορεί να έχει γίνει λάθος. Ίσως χρειαστεί να ελέγξει τους υπολογισμούς που έχει εκτελέσει, να αλλάξει τον τρόπο υπολογισμού που επέλεξε ή ακόμα και να αναθεωρήσει μια προηγούμενη εικασία του. Μπορεί ακόμα να χρειάζεται να ξαναγυρίσει σε κάποιο προηγούμενο στάδιο και να το προσεγγίσει εκ' νέου.

Ο μαθητής με υψηλό δείκτη μεταγνώσης δεν αφήνει ασχολίαστα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Προσπαθεί να τα επαληθεύσει και να εξετάσει κατά πόσο συνάδουν με τον τελικό του στόχο. Υποψιάζεται ότι οι υπολογισμοί του ενδεχομένως να διευκολυνθούν από στοιχεία της θεωρίας, εφαρμογές ή άλλες παρόμοιες ασκήσεις. Γνωρίζει τα επικίνδυνα σημεία και τα ελέγχει πιο σχολαστικά. Είναι σημεία στα οποία έχει ξανακάνει λάθος ή σημεία στα οποία του έχει επιστήσει την προσοχή ο δάσκαλος του. Τέλος, γνωρίζει ότι ενδέχεται οι υπολογισμοί του να μην τον οδηγήσουν με την πρώτη στη λύση. Ίσως χρειαστεί να πειραματιστεί αρκετές φορές και να επαναπροσδιορίσει τα σχέδια λύσης του. Ξέρει ότι ακόμα και τα λάθη του μπορούν να του ξεσκεπάσουν κάποια άγνωστη πτυχή του προβλήματος βάσει της οποίας θα προβεί σε μια καλύτερη θεώρηση. Η εκτέλεση της λύσης αποτελεί γι' αυτόν πεδίο αναστοχασμού, επαλήθευσης και αναδιοργάνωσης.

4.9 Συνοπτική παρουσίαση του ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Εκτέλεσης της λύσης

1. Έλεγχος – Επαλήθευση της ορθότητας των επιμέρους βημάτων.
2. Αξιολόγηση των υπολογιστικών ενεργειών.
3. Ορθός χειρισμός των υπολογιστικών κανόνων και βαθύτερη κατανόηση τους.

4. Επιλογή κατάλληλης υπολογιστικής τακτικής με βάση τις προσωπικές ικανότητες και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.
5. Εντοπισμός λαθών και παρανοήσεων, αιτιολόγηση και διόρθωση τους.
6. Εγρήγορση σε σημεία με αυξημένη πιθανότητα για πραγματοποίηση λαθών.
7. Διατήρηση του στόχου κατά τη διάρκεια των υπολογισμών.
8. Τροποποίηση της αντιμετώπισης του προβλήματος ανάλογα με τα εξαγόμενα των υπολογισμών.
9. Αξιοποίηση των λαθών.

4.10 Το στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει τόσο στοιχεία ελέγχου όσο και στοιχεία ανασκόπησης. Σ' αυτό το στάδιο ο λύτης ελέγχει το συνολικό αποτέλεσμα και κατά πόσο αυτό συνάδει με την πορεία επίλυσης. Εξετάζει αν υπάρχουν και άλλοι τρόποι να λυθεί το πρόβλημα και κατά πόσο ο συγκεκριμένος τρόπος λύσης μπορεί να επεκταθεί σε άλλα προβλήματα.

Πολλοί μαθητές , ακόμα και αυτοί που αντιμετωπίζουν μαθηματικά προβλήματα με σχετική άνεση, διακόπτουν οποιαδήποτε περαιτέρω ενασχόληση με το πρόβλημα από τη στιγμή που θα βρουν τη λύση. Έτσι στερούν από τους εαυτούς τους τη δυνατότητα να σιγουρευτούν καλύτερα για τη λύση και τις αντίστοιχες γνώσεις που αυτή περιέχει. Προφανώς με αυτή τη συμπεριφορά δυσκολεύουν τους εαυτούς τους από το να γίνουν καλύτεροι λύτες προβλημάτων.

Ένας καλός δάσκαλος, πρέπει να καταλάβει ο ίδιος, αλλά και να εντυπώσει στους μαθητές του ότι κανένα πρόβλημα δεν σταματάει με την εύρεση μιας λύσης. Μπορεί η προτεινόμενη λύση να είναι λάθος και να χρειάζεται ένας ακόμη έλεγχος για να το καταλάβουμε. Μπορεί να υπάρχουν και άλλες λύσεις γρηγορότερες και λιγότερο επίπονες. Υπάρχει μάλιστα ένας είδος προβλημάτων στα οποία δεν μας ενδιαφέρει απλά μια λύση αλλά η βέλτιστη λύση (προβλήματα βελτιστοποίησης). Το συγκεκριμένο είδος προβλημάτων είναι μάλιστα το πλέον κατάλληλο εάν θέλουμε να καλλιεργήσουμε ικανότητες που σχετίζονται με το στάδιο της αναδρομικής διερεύνησης ή αν θέλουμε απλώς να πείσουμε τους μαθητές μας για τη χρησιμότητα αυτού του σταδίου. Διότι στα προβλήματα βελτιστοποίησης η αναδρομική διερεύνηση και αξιολόγηση της λύσης ή των λύσεων που βρήκαμε, είναι ο μοναδικός τρόπος επίλυσης του προβλήματος.

Πριν το στάδιο της αναδρομικής διερεύνησης, ο μαθητής έχει φέρει σε πέρας το σχέδιο του και έχει κάνει κάποιους επιμέρους ελέγχους κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης της λύσης. Η διαδικασία αυτή ενδεχομένως να τον κούρασε αλλά παρόλα αυτά δεν πρέπει να επαναπαυτεί. Όσο καλά κι αν πιστεύει ότι έχει ελέγξει τα προηγούμενα βήματα του, η πιθανότητα να έχει γίνει κάποιο λάθος υπάρχει πάντα ιδίως όταν οι συλλογισμοί και οι υπολογισμοί που προηγήθηκαν είναι μακροσκελείς και περίπλοκοι.

Πολλές φορές κάποιο λάθος που δεν εντοπίστηκε στους προηγούμενους ελέγχους, ξεσκεπάζεται από την αδυναμία του αποτελέσματος να ταιριάξει με τα δεδομένα του προβλήματος. Για παράδειγμα μπορεί η απάντηση να περιγράφει ανθρώπους και εμείς να έχουμε βρει για απάντηση 12.8. Προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε 12.8 ανθρώπους και αυτός είναι ένα καλός λόγος να επανεξετάσουμε την πορεία που μας οδήγησε σε αυτό το αποτέλεσμα.

Εάν υποτιμήσουμε το συγκεκριμένο στάδιο, υπάρχει ο κίνδυνος να δώσουμε την εντύπωση ότι δεν υπάρχει κάποια σημαντική σχέση ανάμεσα στα διάφορα μαθηματικά προβλήματα. Έτσι ο μαθητής ενδεχομένως να δημιουργήσει την εσφαλμένη εντύπωση ότι το κέρδος από την επίλυση κάθε προβλήματος αρχίζει και τελειώνει μέσα στα πλαίσια του συγκεκριμένου προβλήματος. Σε αυτό το στάδιο έχουμε μια καλή ευκαιρία να ερευνήσουμε τη συνάφεια του προβλήματος που λύσαμε με άλλα που λύσαμε παλαιότερα αναζητώντας κοινά χαρακτηριστικά και συμπεριφορές, χρήσιμες για μελλοντικές διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων.

Σημαντική δραστηριότητα αυτού του σταδίου είναι και η παραλλαγή του προβλήματος. Η σημαντικότητα αυτή μπορεί να εξηγηθεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, η πρόοδος στην επίλυση του προβλήματος επιτυγχάνεται μέσω επιστράτευσης και οργάνωσης των γνώσεων που προϋπάρχουν. Για να γίνει κάτι τέτοιο πρέπει να απομονώσουμε και να επεξεργαστούμε από τη μνήμη μας ορισμένα στοιχεία. Πως βοηθάει η παραλλαγή του προβλήματος σ' αυτό ; Θυμόμαστε διάφορα πράγματα μέσω νοητικών συνδέσεων, οι οποίες ομαδοποιούν και συνδέουν γεγονότα, έννοιες, πράγματα κ.τ.λ Αυτό που θα φέρνουμε στο μυαλό μας τείνει να ανακαλέσει τα συναφή. Για παράδειγμα άμα σκεφτώ έναν πελαργό θα μου έρθουν στο μυαλό μου διάφορα πράγματα, λέξεις και έννοιες που έχω συνδέσει με τον πελαργό, όπως πουλί, μεγάλο ράμφος, φωλιές σε καμινάδες κ.τ.λ Παραλλάσσοντας το πρόβλημα δημιουργούμε νέες συνδέσεις και κατ' επέκταση νέες δυνατότητες.

Τις πιο πολλές φορές η εκτέλεση της λύσης σηματοδοτεί και το πέρας της προσπάθειας. Ωστόσο, η στιγμή της επιτυχίας είναι η πιο παραγωγική και η πιο πρόσφορη για μεταγνώση, μέσα από την ανάλυση της σκέψης μας.

4.11 Ο Ρόλος της Μεταγνώσης στο στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

Εφόσον εκτελεστεί η λύση ,ο λύτης έχει στη διάθεση του το συνολικό αποτέλεσμα της προσπάθειας του . Η λύση που έχει μπροστά του δεν είναι απλά η περιγραφή του πως βρέθηκε το αποτέλεσμα. Είναι η περιγραφή μιας ολόκληρης πορείας, προβληματισμού, πειραματισμών και ανακάλυψης. Η λύση είναι αποτέλεσμα αλληλουχίας ενεργειών οι οποίες στηρίζονται σε κάποιες ιδέες. Εάν θέλουμε να είμαστε αποτελεσματικοί στο μέλλον, θα πρέπει να εντοπίσουμε ποιες καλές ιδέες μας βοήθησαν να πλησιάσουμε τη λύση και ποιες κακές ιδέες μας απομάκρυναν από τη λύση. Οι ιδέες αυτές έχουν κάποια χαρακτηριστικά και όσο πιο καλά γνωρίζουμε αυτά τα χαρακτηριστικά τόσο καλύτερα θα χειριζόμαστε τις αντίστοιχες ιδέες αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο την αποτελεσματικότητα μας στην επίλυση προβλημάτων.

Η κατανόηση των παραπάνω χαρακτηριστικών, απαιτεί μια κριτική ενδοσκόπηση. Πρέπει να ανακαλύψω τι με οδήγησε στη λήψη συγκεκριμένων αποφάσεων, ποια υποψία ή παρατήρηση προηγήθηκε κάποιας καλής ιδέας και ποια πλάνη ή παράληψη με οδήγησε σε μια λάθος εκτίμηση. Ο λύτης με υψηλό βαθμό μεταγνώσης προβαίνει στις παραπάνω ενέργειες διότι θέλει να διασφαλίσει τη χρήση αποδοτικών συμπεριφορών και να περιορίσει (έως εξαφανίσει) τη χρήση μη αποτελεσματικών τακτικών. Γνωρίζει ότι η λύση του προβλήματος βασίζεται στις δικές του επιλογές, έτσι κάποια καλή ιδέα που χρησιμοποίησε σήμερα ενδεχομένως να τον βοηθήσει και στο μέλλον. Αντιστοίχως κάποιο λάθος σκεπτικό που τον ταλαιπώρησε, εάν το εντοπίσει σήμερα αυξάνει τις πιθανότητες να αποφύγει το λάθος και σε μια μελλοντική κατάσταση.

Ο λύτης με υψηλό βαθμό μεταγνώσης γνωρίζει ότι κάθε ιδέα είναι προϊόν μιας σειράς σκέψεων γι' αυτό πίσω από κάθε ιδέα προσπαθεί να ανακαλύψει τον τρόπο που γεννήθηκαν αυτές οι σκέψεις. Αυτό τον τρόπο ενδέχεται να τον υιοθετήσει έτσι όπως είναι, να τον τροποποιήσει ή και ακόμα να τον απορρίψει αν κρίνει τελικά ότι δεν τον καλύπτει. Σε κάθε περίπτωση θέλει το συγκεκριμένο τρόπο να τον γνωρίζει προκειμένου να μπορεί να δημιουργήσει παρόμοιες ιδέες, όταν αυτές είναι επιθυμητές ή να προλάβει μια αρνητική εξέλιξη όταν αυτή αρχίσει να δημιουργείται. Γι' αυτό το λόγο "ακτινογραφεί" κάθε ενέργεια του μέσω ενός εσωτερικού διαλόγου.

Μερικά ερωτήματα ενός τέτοιου εσωτερικού διαλόγου μπορεί να είναι τα παρακάτω :

"Γιατί το έκανα αυτό ;", " Πως το σκέφτηκα ;"

" Μπορεί να εφαρμοστεί κάπου αλλού ;", "Γιατί δεν το σκέφτηκα πιο πριν ;"

" Μήπως με δυσκόλευε κάτι να το δω ;", " Τι ήταν αυτό που με δυσκόλευε ;" κ.α

Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουμε τη λύση που εμείς οι ίδιοι διαμορφώσαμε τις περισσότερες φορές είναι παρόμοιος με τον τρόπο που διαβάζουμε μια ήδη λυμένη άσκηση κάποιου άλλου ή ένα παράδειγμα. Η έρευνα σχετικά με το πώς διαβάζουμε λυμένες ασκήσεις και τα οφέλη που αποκομίζουμε από αυτό το διάβασμα δείχνει ότι οι άνθρωποι έχουν περιορισμένες ικανότητες στο να χρησιμοποιούν το υλικό που υπάρχει σ' αυτές τις λύσεις. Συνήθως μεταβιβάζουν αυτές τις λύσεις μόνο σε προβλήματα που έχουν τα ίδια ή πανομοιότυπα χαρακτηριστικά. Οι πιο έμπειροι λύτες είναι ικανοί να ξεπερνούν αυτό το πρόβλημα μέσω της ενεργής επεξεργασίας των λύσεων – παραδειγμάτων καθώς τα μελετούν. Ιδιαίτερη σημασία φαίνεται να έχει η παραγωγή επεξηγήσεων της λύσης του προβλήματος, μια διαδικασία που είναι γνωστή ως **αυτό – εξήγηση** (Chi, Bassok, Lewis, Reimann and Glaser, 1989). Οι μαθητές που χρησιμοποιούν όταν διαβάζουν διαδικασίες αυτό-εξήγησης (πρόκειται προφανώς για καθαρά μεταγνωστικές διαδικασίες), είναι καλύτεροι λύτες προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών δείχνουν ότι υπάρχουν μεγάλα περιθώρια εκπαίδευσης των διαδικασιών της σκέψης που μπορούν να βοηθήσουν τους ανθρώπους να γίνουν πιο αποτελεσματικοί. Η μεταγνωστική διαδικασία της αυτό – εξήγησης μπορεί να είναι αποτέλεσμα εμπειρίας αλλά μπορεί να διδαχθεί σαν συμπεριφορά στο στάδιο της αναδρομικής διερεύνησης. Έτσι όχι μόνο θα έχουμε περισσότερους καλούς λύτες πιο γρήγορα αφού δεν θα χρειάζεται να περιμένουμε να αποκτήσουν (αν αποκτήσουν) αυτή την ιδιότητα μόνοι τους στο πέρασμα του χρόνου, αλλά θα προλάβουμε τις αρνητικές εξελίξεις στην μαθηματική πορεία πολλών μαθητών οι οποίοι ενδεχομένως να τα παρατήσουν νωρίς μη μπορώντας να αντεπεξέλθουν στις απαιτήσεις.

Τέλος μέσω της μεταγνωστικής προσέγγισης του σταδίου της αναδρομικής διερεύνησης, δίνεται η δυνατότητα στο λύτη να οργανώσει καλύτερα τις προϋπάρχουσες γνώσεις του, να δημιουργήσει νέες συνδέσεις και να απλοποιήσει τα σημεία που τον δυσκόλεψαν είτε τροποποιώντας είτε βελτιώνοντας τη λύση.

4.12 Συνοπτική παρουσίαση του Ρόλου της Μεταγνώσης στο στάδιο της Αναδρομικής Διερεύνησης

1. Αναλογισμός σχετικά με το βαθμό κατανόησης του θέματος.
2. Εξέταση της ορθότητας των χειρισμών και της πορείας προς τη λύση.
3. Εντοπισμός – Αιτιολόγηση καλών και κακών ιδεών.
4. Επαλήθευση – Παραλλαγή της λύσης.
5. Κριτική – Προσδιορισμός του τρόπου σκέψης που μας οδήγησε στις διάφορες ενέργειες μας.
6. Εντοπισμός της σκοπιμότητας των ενεργειών μας.
7. Διασφάλιση χρήσης θετικών συμπεριφορών σε άλλα προβλήματα και περιορισμός χρήσης των αρνητικών.
8. Επίγνωση των συνεπειών των ενεργειών μας.
9. Αυτό –εξήγηση των επιμέρους βημάτων της λύσης.
10. Δημιουργία συνδέσεων με προηγούμενες γνώσεις και καλύτερη οργάνωση τους.
11. Απλοποίηση δύσκολων σημείων
12. Τροποποίηση – Βελτίωση της λύσης.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ

Η Διδασκαλία της Μεταγνώσης και η καλλιέργεια Μεταγνωστικών δεξιοτήτων με στόχο την αποτελεσματικότερη επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Ένα βασικό ερώτημα που απασχόλησε στο παρελθόν τους ερευνητές είναι κατά πόσο διδάσκεται και πως η μεταγνώση. Δημιουργήθηκαν ουσιαστικά δυο τάσεις. Σύμφωνα με την πρώτη η διδασκαλία πρέπει να στοχεύει στην αποτελεσματική εκτέλεση της μεταγνωστικής δεξιότητας και να είναι σχετικά απελευθερωμένη από το γνωστικό περιεχόμενο. Σύμφωνα με τη δεύτερη η μεταγνωστική δεξιότητα διδάσκεται ως στρατηγική – συμπεριφορά για τη χρήση συγκεκριμένων δεξιοτήτων σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Εμάς αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μέσω της καλλιέργειας της μεταγνώσης να βελτιώσουμε τους μαθητές στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος και προς αυτή την κατεύθυνση θα επικεντρώσουμε τις προτάσεις μας. Βέβαια εάν επιτευχθεί ο στόχος μας το κέρδος δεν θα περιοριστεί μόνο σε θέματα μαθηματικών αλλά θα επεκταθεί και σε άλλους

τομείς οι οποίοι θα καρπωθούν τα οφέλη των μεταγνωστικών δεξιοτήτων που θα αποκτήσουν οι μαθητές.

Ο έλεγχος της εκτέλεσης του γνωστικού καθήκοντος συνεπάγεται ότι ο μαθητής παρακολουθεί την ίδια την δραστηριότητα του. Έτσι, **βασική παράμετρος της διδασκαλίας της μεταγνώσης είναι η καλλιέργεια της συνειδητότητας του πως σκεφτόμαστε.** Είναι σίγουρο βέβαια ότι οι μαθητές δεν μπορούν να πουν ότι βρίσκονται στη σωστή κατεύθυνση αν δεν γνωρίζουν ποιο είναι το υπό εκτέλεση καθήκον, ποιες είναι οι προϋποθέσεις εκτέλεσης του και προφανώς αν δεν γνωρίζουν το γνωστικό αντικείμενο το οποίο εμπλέκεται. Ο έλεγχος της διαδικασίας της γνώσης και η αυτοδιόρθωση ενώ οι μαθητές εργάζονται, προϋποθέτει την επαλήθευση, την επανεξέταση και ενίοτε την επαναδόμηση του υλικού. Αυτά με τη σειρά τους συνεπάγονται τον καθορισμό ανάλογου χρόνου για κάθε υποενότητα και λειτουργία.

Η μεταγνωστική δεξιότητα αναπτύσσεται μέσα από τη δυναμική αλληλεπίδραση των προσωπικών χαρακτηριστικών του ατόμου και του ιδιαίτερου τρόπου σκέψης του με τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου καθήκοντος και του περιβάλλοντος. Η διδασκαλία της μεταγνώσης αποσκοπεί στο να βοηθήσει το μαθητή να ανακαλύψει τη γνώση, εφευρίσκοντας κάθε φορά τους καταλληλότερους τρόπους. Για να μπορεί όμως ο μαθητής να επιλέγει, να κατευθύνει και να διαμορφώνει στρατηγικές, είναι απαραίτητο να έχει μάθει προηγουμένως στρατηγικές και δεξιότητες που είναι απαραίτητες για την εκτέλεση βασικών καθηκόντων. Η διάκριση της διδασκαλίας της μεταγνώσης, των γνωστικών δεξιοτήτων και του αντίστοιχου περιεχομένου είναι λεπτή. Στόχος μας δεν είναι να διαχωριστούν οι παραπάνω έννοιες αλλά αντιθέτως να ενισχυθούν οι δεσμοί μεταξύ τους μέσω του εμπλουτισμού της διδασκαλίας μας με στοιχεία ανάπτυξης της μεταγνώσης. Προφανώς, όσο οξύνονται οι μεταγνωστικές δεξιότητες του μαθητή, τόσο περισσότερο αποκτά κι ο ίδιος συνείδηση του εαυτού του ως γνώστη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα όχι μόνο να κατανοεί περισσότερο τη σημαντικότητα της απόκτησης γνωστικών δεξιοτήτων αλλά και να μπορεί να τις εφαρμόσει καλύτερα για την κατάκτηση του περιεχομένου.

Βασική αρχή πάνω στην οποία στηρίζεται η καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων είναι **η αρχή της συνειδητοποίησης του πως σκεφτόμαστε.** Έτσι, ο εκπαιδευτικός που ενδιαφέρεται να αναπτύξει τη μεταγνώση, πρέπει να επικεντρώσει τις προσπάθειες του στο **να κάνει τη σκέψη του μαθητή αντικείμενο της σκέψης του.** Έτσι απαραίτητα χαρακτηριστικά ενός προγράμματος καλλιέργειας της μεταγνώσης, είναι ο μαθητής με τη βοήθεια και την παρακίνηση του δασκάλου, να καταστήσει τις αόρατες σκέψεις ορατές και τις ασυνείδητες διαδικασίες που επιστρατεύει για την αντιμετώπιση

διαφόρων καταστάσεων συνειδητές. Απαραίτητα χαρακτηριστικά μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η εξωτερίκευση του τρόπου σκέψης του μαθητή κατά την ώρα της εργασίας, η επεξήγηση των επιλογών του μαθητή από τον ίδιο και η ανάλυση των επιμέρους σταδίων των διαδικασιών που χρησιμοποίησε.

Συνοπτικά θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τα παρακάτω στοιχεία τα οποία θεωρούμε απαραίτητα συστατικά της διδασκαλίας της μεταγνώσης :

- Παρότρυνση για εξωτερίκευση των σκέψεων του μαθητή.
- Στρέψη της προσοχής του μαθητή στην κατανόηση του πως σκέφτεται και τι προβλήματα αντιμετωπίζει.
- Εντοπισμός λαθών που μας εμποδίζουν και καλών ιδεών που μας διευκολύνουν.
- Αναζήτηση όχι μόνο του αποτελέσματος αλλά και του τρόπου σκέψης.
- Διδασκαλία τρόπων προσπέλασης των δυσκολιών.
- Αναζήτηση συνδέσεων με προηγούμενες γνώσεις και διδασκαλία τρόπων κατασκευής τέτοιων συνδέσεων (Π.χ με βάση κάποιες έννοιες κλειδιά).
- Παρότρυνση για υποβολή ερωτήσεων και διαμόρφωσης ενός εσωτερικού διαλόγου με έντονα χαρακτηριστικά αιτιολόγησης των αποφάσεων, ελέγχου και οργάνωσης των ενεργειών μας όπως επίσης και περιγραφής του τρόπου σκέψης.

Ειδικά το τελευταίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ας σκεφτούμε το εξής σκηνικό. Ένας μαθητής προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα και ένας καθηγητής προσπαθεί να τον βοηθήσει να ανακαλύψει τη λύση, συμβάλλοντας όσο το δυνατόν πιο διακριτικά. Για να το επιτύχει αυτό ο καθηγητής θέτει τις κατάλληλες ερωτήσεις στο μαθητή κάθε φορά που αυτός κάνει λάθος ή δυσκολεύεται να προχωρήσει. Ο μαθητής απαντώντας στις ερωτήσεις αυτές του καθηγητή φτάνει τελικά στη λύση. Προφανώς για να μπορέσει ο μαθητής να φτάσει τελικά στη λύση σημαίνει ότι είχε τις αντίστοιχες γνώσεις αλλά δεν μπορούσε να τις χειριστεί με τον κατάλληλο τρόπο. Οι ερωτήσεις του καθηγητή του έδωσαν όμως αυτή τη δυνατότητα. Εάν λοιπόν καλλιεργήσουμε στον μαθητή την ικανότητα διατύπωσης των κατάλληλων ερωτήσεων προς τον εαυτό του τότε θα μπορεί να αυτοδιορθώνεται και να αυτοκατευθύνεται με αποτέλεσμα την αποτελεσματικότερη επίλυση προβλήματος.

Μια ένδειξη για το δάσκαλο σχετικά με το κατά πόσο ο μαθητής έχει συνειδητοποιήσει τον τρόπο που σκέφτεται, είναι η ικανότητα περιγραφής, όχι μόνο των

γνωστικών στρατηγικών που έχει διδαχθεί, αλλά και το πως λειτούργησε η ίδια του η σκέψη **μέχρι τη στιγμή** της συγκεκριμένης επιλογής, **κατά τη διάρκεια** της εφαρμογής της **και μετά.**

Όσον αφορά τις διαδικασίες αυτοαξιολόγησης, είναι λογικό να έχουμε ενημερώσει τους μαθητές για τους τρόπους και τα κριτήρια αξιολόγησης και αυτοαξιολόγησης συγκεκριμένων γνωστικών αντικειμένων αλλά και των διαδικασιών σκέψης.

Η σχετική έρευνα (Flavell 1979, Costa 1987 κ.α) προτείνει διαφόρων ειδών στρατηγικές ανάπτυξης της μεταγνώσης. Οι στρατηγικές αυτές μπορούν να εφαρμοστούν ανεξάρτητα από τις ιδιαίτερες απαιτήσεις του θέματος, εμείς ωστόσο θα επικεντρωθούμε σε παρατηρήσεις και παραδείγματα που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος.

5.1 Παραγωγή ερωτήσεων

Με τη μέθοδο αυτή οι μαθητές ενθαρρύνονται να θέτουν ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις αυτές αποτελούν το βασικό υλικό διαμόρφωσης ενός εσωτερικού διαλόγου, όπου ο μαθητής αυτοκατευθυνόμενος από τις παραπάνω ερωτήσεις βοηθάει τον ίδιο του τον εαυτό να θέσει, διευκρινίσει και να αναθεωρήσει τους στόχους του, να αναλύσει τα στοιχεία και τα επιμέρους χαρακτηριστικά του προβλήματος αλλά και να συνδέσει τις πληροφορίες που του παρέχονται με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις.

Σε σχετικές έρευνες που έχουν γίνει με βάση την παραπάνω μέθοδο, τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ενθαρρυντικά. Συγκεκριμένα οι Mevarech, Kramrski, Liberman χρησιμοποίησαν τη μέθοδο **IMPROVE** όπου οι μαθητές εργαζόμενοι σε ομάδες διδάχθηκαν να διαμορφώνουν και να απαντούν 4 ειδών μεταγνωστικές ερωτήσεις.

- **Κατανόησης,** των οποίων ερωτήσεων ο στόχος ήταν οι μαθητές να σκέπτονται το πρόβλημα προτού προχωρήσουν στην επίλυση. Γι' αυτό οι μαθητές διάβαζαν την εκφώνηση δυνατά, περιέγραφαν την άσκηση με δικά τους λόγια και προσπαθούσαν να κατανοήσουν το νόημα των εννοιών της άσκησης. Π.χ "Με τι έχει να κάνει το πρόβλημα ;", "Ποια είναι η ερώτηση ;", "Ποια είναι τα νοήματα των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται ; "
- **Σύνδεσης** ,ο σχεδιασμός αυτών των ερωτήσεων ήταν τέτοιος ώστε να ωθούν τους μαθητές στο να επικεντρώνονται σε ομοιότητες και διαφορές μεταξύ της συγκεκριμένης άσκησης και άλλων ασκήσεων που είχαν λύσει στο παρελθόν. Π.χ "Πως μοιάζει /

διαφέρει αυτό το πρόβλημα με άλλα που έχω λύσει παλαιότερα ; Γιατί μοιάζει / διαφέρει ;

- **Στρατηγικής,** στόχος αυτών των ερωτήσεων ήταν ο εντοπισμός (με αιτιολόγηση) των κατάλληλων στρατηγικών επίλυσης. Γι ' αυτό οι ερωτήσεις αυτές έπρεπε να περιγράφουν :

Ποια στρατηγική μπορεί να χρησιμοποιηθεί

Γιατί είναι η καταλληλότερη και

Πως μπορούν οι διαθέσιμες πληροφορίες να οργανωθούν, έτσι ώστε με τη κατάλληλη διαχείριση να επιλυθεί το πρόβλημα ; Πως μπορεί το προτεινόμενο σχέδιο να εκτελεστεί ;

- **Αναστοχασμού,** όπου οι μαθητές αναλογίζονται το βαθμό στον οποίο έχουν κατανοήσει το θέμα και κατά πόσο οι χειρισμοί τους αφ 'ενός είναι ορθοί και αφετέρου θα τους οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Π.χ " Τι κάνω τώρα ;", "Έχει νόημα αυτό που κάνω ; ", "Τι είναι αυτό που με δυσκολεύει ;", "Πως μπορώ να επαληθεύσω αυτό που βρήκα ;", "Μπορώ να προσεγγίσω αλλιώς αυτό το θέμα ;"

Οι δάσκαλοι υπέδειξαν τη χρήση των μεταγνωστικών ερωτήσεων μέσα από τη διδασκαλία - παράδοση, τα συμπεράσματα και τη σύνοψη του μαθήματος, όπως επίσης και μέσα από τη βοήθεια που παρείχαν στις ομάδες. Ακολουθώντας τις οδηγίες του δασκάλου οι μαθητές δούλευαν σε μικρές ομάδες χρησιμοποιώντας το υλικό που είχε σχεδιαστεί από τους ερευνητές. Η εργασία σε αυτές τις μικρές ομάδες είχε ως εξής : Κάθε μαθητής με τη σειρά του διάβαζε δυνατά την άσκηση και προσπαθούσε να τη λύσει και να εξηγήσει τη μαθηματική του αιτιολόγηση. Όπου δεν υπήρχε ομοφωνία η ομάδα συζητούσε το θέμα μέχρι να λυθεί η διαφωνία. Οι μαθητές ενθαρρύνονταν να μιλάνε για την άσκηση, να την εξηγούν ο ένας στον άλλο και να τη προσεγγίζουν από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν τις μεταγνωστικές ερωτήσεις κατά τη διάρκεια της συζήτησης. Όταν όλοι οι μαθητές συμφωνούσαν σχετικά με την απάντηση, την έγραφαν στο τετράδιο τους.

Τα συμπεράσματα των παραπάνω ερευνών επισημαίνουν τα εξής :

- Οι μαθητές που έκαναν μάθημα με βάση την παραπάνω μέθοδο απέδωσαν πολύ καλύτερα από τους άλλους μαθητές τόσο στα αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα όσο και στις συνηθισμένες ασκήσεις.

- Οι μαθητές που έκαναν μάθημα με βάση την παραπάνω μέθοδο και ήταν χαμηλών επιδόσεων, ξεπέρασαν σε απόδοση τους αντίστοιχους που δεν είχαν κάνει μάθημα με αυτή τη μέθοδο , στα εξής κριτήρια :

  α) Αναφοράς - χρήσης όλων των στοιχείων - δεδομένων

  β) Οργάνωσης- διαχείρισης των πληροφοριών και

  γ) Εξέλιξης - δικαιολόγησης της διαδικασίας όχι όμως και στην περιγραφή της λύσης και των ενεργειών τους. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται και σε ελλείψεις που είχαν σε άλλα γνωστικά αντικείμενα π.χ στη Γλώσσα.
- Ο αναστοχασμός της διαδικασίας επίλυσης, βοηθάει τους μαθητές να επικεντρωθούν στα δομικά συστατικά του προβλήματος όπως επίσης και στο σύνολο των πληροφοριών που τους παρέχεται. Στοιχεία που χαρακτηρίζουν τους καλούς λύτες προβλημάτων.
- Οι μεταγνωστικές ερωτήσεις κατανόησης και οι ερωτήσεις σύνδεσης ωθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα στην ολότητα του και όχι να επικεντρωθούν σε μεμονωμένα τμήματα του. Στοιχεία που επίσης χαρακτηρίζουν τους καλούς λύτες προβλημάτων.
- Οι μεταγνωστικές ερωτήσεις βοηθούν τους μαθητές να προσεγγίσουν και να αναπτύξουν ευκολότερα πιο σύνθετες στρατηγικές λόγω κυρίως της σφαιρικότητας με την οποία αντιμετωπίζουν το θέμα .
- Οι μεταγνωστικές ερωτήσεις στρατηγικής συντελούν στην καλλιέργεια ικανοτήτων αναδιοργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων, αφού αναγκάζουν τους μαθητές να αναρωτηθούν ποιες στρατηγικές είναι καταλληλότερες και γιατί. Με αυτό το τρόπο οι μαθητές οδηγούνται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και αναλύουν τα υπέρ και τα κατά της κάθε στρατηγικής. Για τους ίδιους λόγους οι συγκεκριμένοι μαθητές επιδεικνύουν μεγαλύτερη άνεση στην αιτιολόγηση των ιδεών τους.
- Ο χειρισμός και η εξοικείωση με τις μεταγνωστικές ερωτήσεις όχι μόνο ενδυναμώνει τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών αλλά ταυτοχρόνως αυξάνει την αυτοπεποίθηση τους, γεγονός το οποίο επαληθεύεται από τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο τέστ με τις συνηθισμένες ασκήσεις.
- Οι μαθητές της ωφελήθηκαν είτε ήταν χαμηλού επιπέδου, είτε υψηλού. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα και άλλων παρόμοιων ερευνών.

Προφανώς το είδος και η ποσότητα των ερωτήσεων που πρέπει να θέσει ένας λύτης στον εαυτό του προκειμένου να αντεπεξέλθει στις απαιτήσεις ενός προβλήματος,

εξαρτώνται από το γνωστικό αντικείμενο που εμπλέκεται στο πρόβλημα, τις ιδιαιτερότητες που παρουσιάζει ο τρόπος σκέψης του λύτη αλλά και οι ενδεχόμενες αδυναμίες του. Έτσι γίνεται αντιληπτό, ότι ο κατάλογος των ερωτήσεων διαμορφώνεται κατά περίπτωση. Το ζητούμενο δεν είναι να γνωστοποιήσουμε στον μαθητή ένα ευρύ σύνολο ερωτήσεων αλλά τον τρόπο διαμόρφωσης αυτών των ερωτήσεων. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι να καλλιεργήσουμε την ικανότητα αναγνώρισης των στοιχείων και των αναγκών που προσανατολίζουν στις κατάλληλες ερωτήσεις. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι προσωπικά όπως για παράδειγμα κάποια λάθη που ο συγκεκριμένος μαθητής συνηθίζει να κάνει, αλλά και γνωστικά όπως για παράδειγμα κάποια λεπτά σημεία τα οποία χαρακτηρίζουν μια μαθηματική έννοια. Ο ρόλος του δασκάλου σ' αυτό το σημείο είναι καθοριστικός. Στα σημεία στα οποία ο μαθητής δυσκολεύεται ο δάσκαλος δεν καλείται να δώσει μια έτοιμη λύση αλλά να αναγνωρίσει τι εμποδίζει το μαθητή, να διαμορφώσει ερωτήσεις οι οποίες θα διευκολύνουν τον μαθητή να αναγνωρίσει τι τον εμποδίζει και στη συνέχεια να διαμορφώσει ερωτήσεις των οποίων οι απαντήσεις θα συντελέσουν στο να αρθούν οι δυσκολίες. Έτσι ο μαθητής δεν θα έρθει παθητικά σε επαφή με ένα σύνολο απρόσωπων ερωτήσεων αλλά θα βιώσει τις αιτίες ύπαρξης ,τον τρόπο δημιουργίας και τη συμβολή αυτών των ερωτήσεων.

Τις παραπάνω εμπειρίες ο μαθητής θα τις βιώσει για παράδειγμα κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Ωστόσο θα πρέπει να καταστεί σαφές από τον καθηγητή ότι τα συμπεράσματα των παραπάνω εμπειριών μπορούν να μεταφερθούν με ή χωρίς προσαρμογές και σε άλλες καταστάσεις. Κρίνεται συνεπώς απαραίτητο να εντοπίζονται οι αντίστοιχες συνδέσεις με προηγούμενες εμπειρίες και να αναφέρονται στον μαθητή ακόμα κι αν χρειάζεται να αναφερθούμε επιγραμματικά σε ένα προηγούμενο πρόβλημα.

Τέλος σημαντικό επίσης είναι να τονίζουμε στο μαθητή την καθοριστική συμβολή μιας βοηθητικής ερώτησης που θέσαμε και να μην του "επιτρέπουμε" να αρκεστεί στο τελικό αποτέλεσμα ή τους υπολογισμούς που εκτελέσαμε. Έτσι θα δώσουμε βαρύτητα στον τρόπο εύρεσης της λύσης και όχι στην αποστήθιση του τελικού αλγόριθμου.

5.2 Περιγραφή των εσωτερικών νοητικών διεργασιών του δασκάλου και των μαθητών.

Μια από τις πιο αποτελεσματικές τεχνικές οι οποίες επηρεάζουν τους περισσότερους μαθητές είναι το πρότυπο του δασκάλου. Καθώς οι μαθητές μαθαίνουν κυρίως μιμούμενοι τους ενήλικες, οι δάσκαλοι που εφαρμόζουν μεταγνωστικές διαδικασίες στην πράξη, έχουν πολύ περισσότερες πιθανότητες να οδηγήσουν τους μαθητές τους στη μεταγνωστική ανάπτυξη. Για παράδειγμα ο δάσκαλος που μεταφράζει τις εσωτερικές νοητικές του διεργασίες σε προφορικό λόγο, μοιράζεται τον προγραμματισμό και τους στόχους του με τους μαθητές του και δικαιολογεί ταυτοχρόνως τις απόψεις και τις επιλογές του, δίνει ένα σωστό πρότυπο μεταγνωστικού τρόπου σκέψης. Πολλές φορές παρατηρείται το φαινόμενο ο καθηγητής να απαντάει σε απορίες των μαθητών παραθέτοντας κατευθείαν τη σωστή απάντηση, το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται και όταν οι μαθητές αδυνατούν να λύσουν κάποιο πρόβλημα. Προφανώς η πίεση του χρόνου πολλές φορές δεν αφήνει περιθώρια για κάποια άλλη συμπεριφορά ωστόσο η παραπάνω συνήθεια φαίνεται να αποτελεί πάγια αντίδραση πολλών εκπαιδευτικών ακόμα και όταν υπάρχει άνεση χρόνου. Έτσι, δίνεται στους μαθητές η εντύπωση ότι η λύση είναι προϊόν της αυθεντίας και των ικανοτήτων του δασκάλου και όχι αποτέλεσμα συλλογισμών οι οποίοι θα μπορούσαν να εκτελεστούν και από τους ίδιους. Μια τέτοια αντίληψη ενισχύει τις αρνητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και δημιουργεί εσφαλμένη εικόνα για την επίλυση προβλήματος. Η αίσθηση για ουρανοκατέβατες λύσεις και μαγικές εμπνεύσεις στοιχειώνει την αντίληψη που έχουν οι μαθητές για πολλές λύσεις τις οποίες δεν κατάφεραν να βρουν. Το μερίδιο ευθύνης των καθηγητών για το παραπάνω φαινόμενο είναι μεγάλο αφού μέσω της στείρας παρουσίασης της λύσης στερούν από το μαθητή μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για ανάλυση του τρόπου σκέψης ο οποίος οδήγησε στην παραγωγή των συλλογισμών που έλυσαν το πρόβλημα. Η αλήθεια είναι ότι τις περισσότερες φορές ο δάσκαλος αδυνατεί να προσεγγίσει τον τρόπο, το ρυθμό και το επίπεδο σκέψης των μαθητών του. Έτσι παρουσιάζει ασυνείδητα τη λύση βασιζόμενος στα προσωπικά του κριτήρια και χαρακτηριστικά. Σε πολλές περιπτώσεις αποτελέσματα που οφείλονται σε σειρά συλλογισμών, τα παρουσιάζει χωρίς αιτιολόγηση και αναφορά στους αντίστοιχους συλλογισμούς.

Αυτό ίσως να οφείλεται στην επανειλημμένη χρήση παρόμοιων συλλογισμών από μέρους του, ωστόσο δεν ισχύει η ίδια οπτική γωνία και για τους μαθητές του. Ο καθηγητής που περιγράφει τις νοητικές του διεργασίες και αιτιολογεί με αυτό τον τρόπο τη διαδικασία

δημιουργίας των συλλογισμών που οδηγούν στη λύση καλείται να υποδυθεί έναν ρόλο. Αφού το ζητούμενο είναι να καλλιεργήσει τις μεταγνωστικές δεξιότητες του μαθητή του και αφού ο μαθητής του είναι αυτός που πρέπει να λύσει το πρόβλημα πρέπει ο καθηγητής να παίξει το ρόλο του μαθητή. Να σκεφτεί με βάση τις εμπειρίες και τις γνώσεις του μαθητή, να δοκιμάσει τις ίδιες ιδέες και να κάνει και τα ίδια λάθη αν χρειαστεί. Με λίγα λόγια να χρησιμοποιήσει το ίδιο υλικό που έχει και ο μαθητής στη διάθεση του. Με μια ειδοποιό διαφορά. Αυτός θα το οργανώσει, θα το χειριστεί και θα το ανασκευάσει αν χρειαστεί, με τέτοιο τρόπο ώστε να φτάσει στη λύση. Η περιγραφή της παραπάνω διαδικασίας θα γνωστοποιήσει στο μαθητή τα μεταγνωστικά χαρακτηριστικά, του τρόπου σκέψης που λύνει το πρόβλημα. Σ' αυτό το σημείο είναι βασικό να τονιστεί από τον καθηγητή η συμβολή των παραπάνω χαρακτηριστικών στην επίλυση του προβλήματος και να μην αρκεστεί ο μαθητής μόνο στο τελικό αποτέλεσμα ή τις αντίστοιχες υπολογιστικές διαδικασίες.

Μέχρι τώρα περιγράψαμε τα βασικά χαρακτηριστικά μιας γόνιμης περιγραφής των νοητικών διεργασιών του δασκάλου από τον ίδιο το δάσκαλο. Τα οφέλη από μια τέτοια διαδικασία μπορούμε να τα αποκομίσουμε κι όταν ο δάσκαλος κατονομάζει τις νοητικές διαδικασίες των μαθητών. Έτσι οι τελευταίοι αποκτούν περισσότερη επίγνωση των ενεργειών τους, αντιλαμβάνονται ευκολότερα τον τρόπο που σκέφτονται και τους είναι πιο εύκολο να αναπτύξουν την αυτοκριτική τους εντοπίζοντας τις παραλείψεις και τα λάθη τους.

Παρομοίως θα μπορούσαμε να ζητήσουμε από έναν μαθητή να περιγράψει τη σκέψη και τους συλλογισμούς ενός συμμαθητή του. Η προσπάθεια να κατανοήσουμε και να περιγράψουμε τη σκέψη την άλλων, μας βοηθάει να καλλιεργήσουμε ικανότητες οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε και να περιγράψουμε και τη δικιά μας σκέψη. Οι ικανότητες αυτές αποτελούν βασικές μεταγνωστικές δεξιότητες, απαραίτητες για τη βελτίωση της παρακολούθησης και του ελέγχου των σκέψεων μας και κατ' επέκταση της βελτίωσης των μαθητών στην επίλυση προβλήματος.

Όσο ο μαθητής βελτιώνεται στην περιγραφή των σκέψεων του, τόσο αυξάνεται και η ικανότητα λήψης κατάλληλων αποφάσεων και επιτυχημένης αντιμετώπισης του προβλήματος (Schoenfeld 1987, Bereiter & Scardamalia 1993). Γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να βιώνει εμπειρίες οι οποίες τον φέρνουν αντιμέτωπο με τον προσωπικό του τρόπο σκέψης. Ένας από τους αποτελεσματικότερους τρόπους που ωθούν το μαθητή προς αυτή την κατεύθυνση είναι η **Φωνακτή Σκέψη.** Με τη μέθοδο αυτή οι μαθητές συνηθίζουν να σκέφτονται φωνακτά, ενώ εργάζονται. Κάτι τέτοιο τους βοηθάει να οργανώνουν και να

αναβαθμίζουν τον τρόπο σκέψης τους, ιδιαίτερα κατά την διάρκεια επίλυσης προβλήματος. Αυτό επιτυγχάνεται κυρίως όταν οι μαθητές όχι μόνο περιγράφουν τις ενέργειες τους αλλά ταυτόχρονα εκφράζουν τις δυσκολίες τους και δικαιολογούν τις επιλογές τους. Η αποτελεσματικότητα της φωνακτής σκέψης έγκειται στο γεγονός ότι ο μαθητής σκεπτόμενος φωνακτά θέτει τις σκέψεις του στο επίκεντρο της προσοχής της μνήμης εργασίας του, αναβαθμίζοντας έτσι ποιοτικά τη συναναστροφή του (οργάνωση, διατύπωση, έλεγχο κ.τ.λ) με τις ίδιες του τις σκέψεις και διευκολύνοντας ταυτοχρόνως την αποθήκευση εννοιών στην μακροπρόθεσμη μνήμη. Γι' αυτό άλλωστε παρατηρείται το φαινόμενο πολλοί μαθητές όταν θέλουν να μάθουν καλά το μάθημα που έχουν να διαβάζουν φωνακτά το κείμενο σαν να το απαγγέλλουν. Βέβαια με το πέρασμα του χρόνου η φωνακτή σκέψη είναι πολύ πιθανό να εξελιχθεί σε ψιθύρισμα ή μια εσωτερική φωνή σαν αποτέλεσμα της ικανότητας του μαθητή να συγκεντρώνεται πλέον ευκολότερα στη σκέψη και στις νοητικές του διεργασίες.

5.3 Θέσπιση και επιδίωξη στόχων.

Οι στόχοι που θέτει ο μαθητής κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος αποτελούν βασικό παράγοντα για την αποτελεσματική αντιμετώπιση του. Λανθασμένοι στόχοι ή μη αναγνώριση ενδιάμεσων στόχων καθιστούν άκαρπη οποιαδήποτε προσπάθεια. Οι στόχοι όμως του μαθητή, εκτός από φάρο προσανατολισμού των ενεργειών του αποτελούν και μέτρο αξιολόγησης των επιλογών στις οποίες προβαίνει. Το κατά πόσο συγκεκριμένες ενέργειες πλησιάζουν ή απομακρύνουν τον λύτη από τους στόχους που έχει θέσει, αποτελεί ένα πρώτης τάξεως κριτήριο της αποτελεσματικότητας τους. Η ενδεχόμενη αποτυχία ορισμένων επιλογών να επιτύχουν το στόχο τους αποτελεί το έναυσμα για αναδιοργάνωση αυτών των επιλογών ή ακόμη και της διαμόρφωσης νέων εικασιών.

Παρατηρείται πολλές φορές το φαινόμενο οι μαθητές να προβαίνουν σε υπολογισμούς χωρίς να έχουν θέσει εκ' των προτέρων κάποιο στόχο. Το αποτέλεσμα είναι πολλές φορές να εγκλωβίζονται σε επίπονους υπολογισμούς οι οποίοι ενδεχομένως να είναι περιττοί. Σ' αυτές τις περιπτώσεις ακόμα κι αν ο μαθητής αντιληφθεί την παγίδα στην οποία έχει πέσει, σπανίως θα ανασυντάξει τη σκέψη του αποτελεσματικά αν δεν θεσπίσει κάποιο στόχο. Τις περισσότερες φορές οι παραπάνω υπολογισμοί θα είναι και η τελευταία τους προσπάθεια για επίλυση του προβλήματος. Αντιθέτως οι καλοί μαθητές θέτουν στόχους, όχι μόνο κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος αλλά και γενικότερα στη

μελέτη τους. Για παράδειγμα θα διαβάσω αυτό το δοκίμιο όχι επειδή μου το είπε ο καθηγητής μου αλλά διότι θέλω να βελτιωθώ στην έκθεση.

Η επίγνωση της σημαντικότητας της θέσπισης στόχων και η διαχείριση τους με τέτοιο τρόπο ώστε να οργανώνω, αξιολογώ, ελέγχω και βελτιώνω τις σκέψεις μου αποτελούν βασικές μεταγνωστικές δεξιότητες.

Μέσα σε μια διδασκαλία όπου οι μαθητές εκπαιδεύονται στη θέσπιση και επιδίωξη στόχων ο καθηγητής τους ενθαρρύνει να θέτουν στόχους και να αιτιολογούν τους λόγους επιλογής των συγκεκριμένων στόχων. Κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος ο καθηγητής παρεμβαίνει υπενθυμίζοντας τους στόχους υπό επιδίωξη και το στάδιο στο οποίο βρίσκονται ως προς το στόχο αυτό.

Εάν σημειωθεί κάποιο λάθος το οποίο σχετίζεται με την απομάκρυνση από τους στόχους που έχει θέσει ο μαθητής, ο καθηγητής με τις κατάλληλες ερωτήσεις προσανατολίζει το μαθητή σε αντίστοιχο προβληματισμό, έτσι ώστε να τονιστεί η αξία της συνέπειας των ενεργειών μας, σε σχέση με τους στόχους μας, αλλά και να γνωστοποιηθεί η έννοια του στόχου ως κριτήριο αξιολόγησης των επιλογών μας. Γι' αυτό θα πρέπει να επικεντρώνουμε την προσοχή του μαθητή σε σχετικά ερεθίσματα ή γεγονότα.

Η θέσπιση και η επιδίωξη στόχων μέσα στο περιβάλλον ενός προβλήματος διαφέρει από άτομο σε άτομο. Ανάλογα με τις γνώσεις και τις ικανότητες που κατέχει ο μαθητής διαμορφώνεται το είδος και η ποσότητα των επιμέρους στόχων. Η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος ενδέχεται να οφείλεται στο ότι ο μαθητής αδυνατεί να εντοπίσει τους επιμέρους στόχους ή στο ότι ο βασικός στόχος, όπως αυτός περιγράφεται από την εκφώνηση του προβλήματος ενδεχομένως να είναι πολύ δύσκολο να προσεγγιστεί με βάση τις ικανότητες του μαθητή και να απαιτεί το διαχωρισμό του σε επιμέρους απλούστερους στόχους.

Η παραπάνω κατάσταση απαιτεί από τον καθηγητή να προβεί στην κατάλληλη διαρρύθμιση του περιβάλλοντος με τέτοιο τρόπο που να υποβοηθά τη σταδιακή αντιμετώπιση του προβλήματος. Η διαρρύθμιση αυτή εξαρτάται από τις ιδιαίτερες αδυναμίες του μαθητή. Ωστόσο εάν θέλουμε να πετύχουμε ανάπτυξη της μεταγνώσης δεν αρκεί ο καθηγητής μόνος του να εντοπίσει αυτές τις αδυναμίες και να διαμορφώσει από μόνος του το αντίστοιχο περιβάλλον. Πρέπει και ο μαθητής να γίνει συμμέτοχος αυτής της διαδικασίας αναγνωρίζοντας τις προσωπικές του αδυναμίες και διαμορφώνοντας αντιστοίχως τους στόχους του.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι χρίζει ιδιαίτερης προσοχής ο τρόπος με τον οποίο χειριζόμαστε την επιλογή λάθος στόχων από τους μαθητές μας. Εάν ο μαθητής θέσει

κάποιο λάθος στόχο είναι πολύ πιθανό να το αντιληφθεί μέσα από μια διαδικασία αιτιολόγησης του, ωστόσο ενδέχεται τα πράγματα να μην είναι τόσο απλά. Πολλές φορές οι λάθος στόχοι διαφαίνονται μετά από κάποια επεξεργασία. Εάν δεν υπάρχει κάποια "οικονομικότερη" δυνατότητα, είναι προτιμότερο να αφήσουμε το μαθητή να οδηγηθεί σε αδιέξοδο παρά να τον αποτρέψουμε επειδή **εμείς** ξέρουμε ότι έχει κάνει λάθος. Το αδιέξοδο στο οποίο θα περιέλθει είναι ένα πολύ καλό επιχείρημα για την μη ορθότητα των επιλογών του σε σχέση με την απροσδιόριστη προτροπή μας "Μην το κάνεις έτσι, δεν βγαίνει."
Εκτός αυτού μ' αυτόν τον τρόπο το λάθος στις επιλογές μας γίνεται κομμάτι της διαδικασίας επίλυσης και όχι απαγορευμένη έκβαση στη λήψη αποφάσεων.

5.4 Συνεργατική Μάθηση σε Τάξεις Μικτής Ικανότητας και Αλληλοδιδασκαλία μεταξύ μαθητών

Κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών σε μικρές ομάδες (από 2 μέχρι 5 μαθητές ανά ομάδα), αναπτύσσονται διάφορες λύσεις με συνεργασία και διαρκή ανταλλαγή απόψεων. Εν τω μεταξύ ο δάσκαλος παρατηρεί τον τρόπο εργασίας των ομάδων και παρεμβαίνει όταν είναι απαραίτητο. Οι παρεμβάσεις του αυτές έχουν συνήθως τη μορφή παρατηρήσεων οι οποίες δεν απαντούν ευθέως σε ερωτήματα των μαθητών αλλά τους προβληματίζουν προς την κατάλληλη κατεύθυνση. Η κατεύθυνση αυτή μπορεί να έχει να κάνει με αλλαγή οπτικής γωνίας, αναδιοργάνωση των δεδομένων, αναγνώριση κάποιας πλάνης στην οποία έχουν περιέλθει οι μαθητές ή οτιδήποτε άλλο μπορεί να αποτελεί την αιτία αδυναμίας εξέλιξης της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος.
Οι αιτίες αυτές, εφόσον εντοπιστούν με παρέμβαση του καθηγητή, συζητιούνται με τους μαθητές και αναλύονται οι λόγοι και οι ενδεχόμενες αδυναμίες των συλλογισμών των μαθητών που τους οδήγησαν σε αδιέξοδο ή παρανόηση. Η παραπάνω διαδικασία είναι σημαντικό να γίνει διότι μόνο έτσι θα συλλάβουν οι μαθητές τον τρόπο που σκέφτονται και θα εντοπίσουν τις προσωπικές τους ατέλειες.

Ακόμη κι αν η ομάδα αντιμετωπίσει επιτυχώς το πρόβλημα, χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή, οι συζητήσεις που θα ακολουθήσουν αποτελούν ένα γόνιμο έδαφος για την ανάπτυξη της μεταγνώσης. Στις συζητήσεις αυτές οι μαθητές εξηγούν, αιτιολογούν και περιγράφουν τις σκέψεις που τους οδήγησαν σε συγκεκριμένες επιλογές. Ο δάσκαλος τους βοηθάει να ξεκαθαρίσουν τις σκέψεις τους, να τις διατυπώσουν καλύτερα και να αναζητήσουν εναλλακτικές λύσεις. Εάν κάποιες λύσεις είναι λανθασμένες ο καθηγητής

θέτει αυτές τις λύσεις προς διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη. Ο διάλογος που θα αναπτυχθεί μεταξύ των διαφόρων ομάδων και του δασκάλου, θα αναγκάσει τους μαθητές να οργανώσουν καλύτερα τις σκέψεις τους και ενδεχομένως να αναζητήσουν εναλλακτικές διατυπώσεις προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητοί και πιο πειστικοί.
Ταυτοχρόνως όλο αυτό το κλίμα καλλιεργεί χαρακτηριστικά απαραίτητα για την αυτοαξιολόγηση είτε μέσω της προσπάθειας των μαθητών να αξιολογήσουν τις απόψεις των συμμαθητών τους, είτε μέσω της προσπάθειας των μαθητών να ελέγξουν την ορθότητα και το ποσοστό αλήθειας των ισχυρισμών που ασκούν κριτική στις δικές τους απόψεις.

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω, η έμφαση που δίνεται σήμερα στην αξία της συνεργατικής μάθησης και της διδασκαλίας σε τάξεις μικτής ικανότητας, δεν στηρίζεται μόνο σε δημοκρατικές και ψυχοπαιδαγωγικές αρχές, ούτε ικανοποιεί μονάχα την ανάγκη για συνεργασία και την προσπάθεια για πρόληψη της σχολικής αποτυχίας. Πέρα από αυτά τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα της, η συνεργατική μάθηση ιδιαίτερα σε ανομοιογενείς ομάδες, υποβοηθά την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων. Η διερεύνηση του τρόπου σκέψης των συνανθρώπων μας και κατ' επέκταση του εαυτού μας, η οργάνωση και η αξιολόγηση των σκέψεων μας, είναι κάποιες από αυτές τις δεξιότητες. Η συνεργατική μάθηση μας βοηθά να μπούμε στην θέση του άλλου, να δούμε τα πράγματα από μια σκοπιά διαφορετική από τη δικιά μας. Αυτό αποτελεί μια εναλλακτική πρόταση για τον τρόπο που σκεπτόμαστε και μας προσφέρει τη δυνατότητα να βελτιώσουμε την οπτική γωνία με την οποία προσεγγίζουμε τα προβλήματα.

Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και η αλληλοδιδασκαλία μεταξύ μαθητών η οποία όχι μόνο συμβάλλει στη συνεργασία και στην κοινωνικοποίηση, αλλά παρέχει επίσης την δυνατότητα στους μαθητές να εξελιχθούν σε καλύτερους "ακροατές" όχι μόνο της σκέψης των άλλων αλλά και της δικής τους.

Αυτό επιτυγχάνεται βασικά μέσα από το διάλογο, την αλληλεπίδραση και την ανατροφοδότηση που δέχονται και δίνουν οι μαθητές στους συμμαθητές τους. Άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός, ότι οι μαθητές που λειτουργούν ως εκπαιδευτές (tutors), αναγκάζονται να οργανώσουν και να διατυπώσουν λεκτικά τις σκέψεις τους ή ακόμη και να τις αναμορφώσουν προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές και αυτή καθεαυτή η ενέργεια τους οδηγεί σε αναβαθμισμένη και ανεξάρτητη μάθηση.

Χαρακτηριστικά από τα παραπάνω περιβάλλοντα μπορούμε να τα εκμεταλλευτούμε ακόμη κι όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα για καθαρά συνεργατική μάθηση ή αλληλοδιδασκαλία.

Για παράδειγμα μια κοινή απορία μεταξύ μαθητών μπορούμε να μην την λύσουμε εμείς αλλά να δώσουμε άλλη μια ευκαιρία στους συγκεκριμένους μαθητές να την αντιμετωπίσουν από κοινού ή κάποιο λάθος κάποιου μαθητή να μην το διορθώσουμε εμείς αλλά να δώσουμε τη δυνατότητα σε έναν, μαθητή που έχει βρει τη σωστή απάντηση να τον διορθώσει.

5.5 Εξάσκηση σε στρατηγικές Μελέτης

Από τη στιγμή που η ανάπτυξη της μεταγνώσης στοχεύει και στην καλλιέργεια ικανοτήτων αυτομάθησης, ο δάσκαλος πρέπει να βοηθήσει τους μαθητές του να εξασκηθούν σε στρατηγικές μελέτης όπως ο προγραμματισμός χρόνου και ενεργειών, η οργάνωση και αλληλουχία ιδεών, η σύνδεση των νέων γνώσεων με τις υπάρχουσες γνωστικές δομές, η ικανότητα να μεταφέρουν γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις, αξίες σε άλλες καταστάσεις, η επισήμανση βασικών εννοιών και ιδεών σε ένα κείμενο κ.τ.λ

Έτσι πριν από κάθε δραστηριότητα, ο μαθητής προγραμματίζει και οργανώνει στρατηγικές και τρόπους επεξεργασίας των δεδομένων, επιλέγει αρχές και ανακαλεί προηγούμενες γνώσεις. Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι εφόσον έχουμε σαν στόχο μέσω της μεταγνώσης να μάθουμε τα παιδιά πώς να μαθαίνουν, πρέπει να τα καθοδηγήσουμε σχετικά με το πώς να ανατρέχουν στις πηγές της μάθησης και της γνώσης. Τέτοιες πηγές μπορεί να είναι έμψυχες (συμμαθητές, δάσκαλοι κ.τ.λ) ή και άψυχες όπως βιβλία, το τετράδιο με τις ασκήσεις του μαθήματος, κάποιο βιβλίο με προβλήματα, το internet κ.τ.λ Σημασία έχει να προβληματίζουμε το παιδί κάθε φορά που αναζητά μια πληροφορία για το ποια είναι η καταλληλότερη πηγή για να την αντλήσει.

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας οι μαθητές μοιράζονται μεταξύ τους ή με το δάσκαλο τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και προσπαθούν να συνειδητοποιήσουν γιατί δεν μπορούν να προχωρήσουν. Ακόμα συμμετέχουν ενεργά στη μάθηση διερευνώντας το πρόβλημα και συμβάλλοντας μ' αυτό τον τρόπο στη μεταγνωστική ανάπτυξη αφού με αυτό τον τρόπο εμπλέκονται σε αφαιρετικές νοητικές διεργασίες, όπως η διατύπωση εικασιών, προβλέψεων και σχεδιασμών, έλεγχο υποθέσεων γενικεύσεις και συμπεράσματα.

Να τονιστεί, ότι η χρήση του πλαισίου (context) για άντληση πληροφοριών και εξαγωγή συμπερασμάτων, αποτελεί μεταγνωστική δεξιότητα αφού ο μαθητής καλείται να εντοπίσει και να συσχετίσει στοιχεία από το άμεσο περιβάλλον του προβλήματος, τα οποία ενδεχομένως να μην είναι εμφανή εκ πρώτης όψεως. Η διαδικασία αυτή αναγκάζει το

μαθητή να στοχαστεί πάνω στη βαθύτερη έννοια του θέματος, να κάνει συλλογισμούς και υποθέσεις και γενικά να ακολουθήσει ένα επαγωγικό τρόπο σκέψης.

Η χρήση του πλαισίου, αποτελεί ένα είδος μικροέρευνας αφού ο μανθάνων καλείται να ενεργοποιηθεί για να συλλέξει τα στοιχεία εκείνα που του είναι απαραίτητα για την εξεύρεση μιας λύσης.

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας είναι σημαντικό οι αποφάσεις των μαθητών να συνοδεύονται από αιτιολόγηση. Γι' αυτό οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να διερευνούν τις συνέπειες των αποφάσεων τους έτσι ώστε να συλλάβουν την αιτιώδη σχέση μεταξύ αποφάσεων και αποτελεσμάτων. Ταυτοχρόνως οι μαθητές οφείλουν να αυτοαξιολογούν τον τρόπο σκέψης και δράσης τους με βάση πολλαπλά κριτήρια όπως συντομία, αποτελεσματικότητα, ορθότητα, αισθητικό αποτέλεσμα, προσωπική ικανοποίηση κ.τ.λ και να δικαιολογούν τις επιλογές τους με βάση αυτά.

Μετά την δραστηριότητα, ο δάσκαλος καλεί τους μαθητές να εξετάσουν κατά πόσο επέλεξαν την καταλληλότερη διαδικασία και κατά πόσο άλλες αποτελεσματικότερες διαδικασίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν.

Όλες αυτές οι δεξιότητες αποσκοπούν στο να αναπτύξουν αυτοεπίγνωση, αυτοέλεγχο και αυτορρύθμιση της μάθησης. Δηλαδή επιδιώκουν να καταστήσουν τους μαθητές ανεξάρτητους στη μάθηση τους και να τους βοηθήσουν να μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν. Τέλος από την παραπάνω διαδικασία διαφαίνεται ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος αποτελεί περιβάλλον ανάπτυξης της μεταγνώσης ακόμα κι όταν οι μεταγνωστικές δεξιότητες τις οποίες θέλουμε να καλλιεργήσουμε δεν στοχεύουν αποκλειστικά σε μαθηματικές ικανότητες.

5.6 Εντοπισμός Κομβικών σημείων

Τις περισσότερες φορές, ο μαθητής βλέπει το πρόβλημα σαν μια ανεξάρτητη οντότητα. Δεν αναλογίζεται ότι αυτό το πρόβλημα μπορεί να συνδέεται με άλλα προβλήματα που έχει λύσει στο παρελθόν ή ότι ενδέχεται αυτό το πρόβλημα να συμβάλλει στην επιτυχία ή μη της αντιμετώπισης ενός μελλοντικού προβλήματος. Με τον όρο κομβικά σημεία εννοούμε σημεία τα οποία διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Τα σημεία αυτά μπορεί να χαρακτηρίζονται από μια πολύ καλή ιδέα, κάποιο λάθος ή κάποια δυσκολία που αντιμετωπίσαμε. Τόσο οι καλές ιδέες, όσο και τα λάθη και οι δυσκολίες μπορεί να έχουν να κάνουν με το γνωστικό αντικείμενο ή με

συμπεριφορές που υιοθετήσαμε τις επίμαχες στιγμές και σίγουρα υπάρχουν διαφορές από άτομο σε άτομο.

Μια καλή ιδέα οφείλεται συνήθως σε προηγούμενες εμπειρίες και σε προγενέστερα αποκτημένη γνώση, ωστόσο κάθε άτομο έχει τους δικούς του επιτυχημένους μηχανισμούς διαμόρφωσης καλών ιδεών. Στόχος μας δεν είναι να χειραγωγήσουμε τους μαθητές στη χρήση ενός "ιδανικού" μοντέλου παραγωγής ιδεών αλλά καλλιεργώντας τις μεταγνωστικές δεξιότητες του κάθε μαθητή να ενισχύσουμε τον προσωπικό τρόπο έκφρασης επιτυχημένων ιδεών ή να διαμορφώσουμε έναν που να συνάδει με τα χαρακτηριστικά του. Έτσι είτε κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλήματος, είτε μετά τη λύση του προβλήματος μπορούμε να αναφερθούμε στις καλές ιδέες των μαθητών μας οι οποίες μας βοήθησαν να λύσουμε το πρόβλημα. Για να επιτύχουμε όμως ανάπτυξη της μεταγνώσης θα πρέπει η αναφορά σε αυτές τις ιδέες να χαρακτηρίζεται από ανάλυση των επιμέρους στοιχείων της σκέψης των μαθητών και να κατονομάζονται συμπεριφορές για τις οποίες ενδεχομένως οι μαθητές να μην έχουν επίγνωση. Πρέπει να καταλάβουν οι μαθητές ότι οι περισσότερες καλές ιδέες αποτελούν προϊόν μιας αλληλουχίας συλλογισμών συνειδητών ή ασυνείδητων και όσο πιο πολύ κατανοούμε και ελέγχουμε αυτούς τους συλλογισμούς τόσο αυξάνονται οι καλές ιδέες και τόσο λιγότερο τις αποδίδουμε σε ουρανοκατέβατες εμπνεύσεις. Ο εντοπισμός των διαδικασιών που οδήγησαν στη δημιουργία μιας καλής ιδέας συμβάλλει στη διαμόρφωση ενός τρόπου σκέψης ο οποίος ενδεχομένως να μας φανεί χρήσιμος και σε μελλοντικές προβληματικές καταστάσεις.

Ένα κομβικό σημείο μπορεί να χαρακτηρίζεται και από την ύπαρξη ενός λάθους. Τα λάθη τις περισσότερες φορές δεν είναι καθόλου τυχαία και κρύβουν κάποια λάθος παγιωμένη αντίληψη του μαθητή. Η επιφανειακή προσέγγιση μιας λάθος συμπεριφοράς κάθε άλλο παρά λύνει το πρόβλημα. Ο μαθητής πρέπει να εντοπίσει, συνήθως με τη βοήθεια του δασκάλου, όχι μόνο πιο είναι το λάθος αλλά και τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες οδηγήθηκε σ' αυτό. Κάποιες λανθασμένες αντιλήψεις και ανεπαρκείς συμπεριφορές είναι πολύ πιθανό να έχουν δομήσει λανθασμένα πρότυπα σκέψης τα οποία εφαρμόζει και σε άλλες καταστάσεις. Για παράδειγμα πολλές φορές οι μαθητές γενικεύουν ιδιότητες που ισχύουν σε σχέσεις με ισότητες σε σχέσεις με ανισότητες. Έτσι επειδή γνωρίζουν ότι αν $(x+1)(x-1)=0$ τότε $x=\pm 1$, προχωρούν στην αυθαίρετη γενίκευση ότι αν $(x+1)(x-1)\leq 0$

τότε $x \leq \pm 1$. Σε αυτό το σημείο η απλή διόρθωση της λανθασμένης σχέσης δεν λύνει το πρόβλημα. Το πιθανότερο είναι ο μαθητής να επαναλάβει το ίδιο λάθος ή στην καλύτερη περίπτωση να αποστηθίσει το σωστό για τη συγκεκριμένη περίπτωση και να επαναλάβει το

ίδιο λάθος σε διαφορετική πλην όμως παρόμοια κατάσταση. Ο ρόλος του δασκάλου είναι σε πρώτη φάση να ζητήσει από το μαθητή να δικαιολογήσει τη σχέση που διατύπωσε. Υπάρχει στη θεωρία ; Την κατασκεύασε με βάση κάποιους υπολογισμούς ; Την έχει επαληθεύσει ; Είναι προϊόν συλλογισμών ή αυθαίρετη γενίκευση επειδή μοιάζει με κάτι που γνωρίζει ; Μήπως κάποιο αντιπαράδειγμα την αναιρεί ; Μήπως την ίδια λάθος συμπεριφορά την εφαρμόζω και σε άλλες καταστάσεις ; Τα παραπάνω ερωτήματα (και όχι μόνο) διαμορφώνουν ένα κλίμα μεταγνωστικής ενδοσκόπησης. Η υιοθέτηση ή όχι της παραπάνω συμπεριφοράς εξαρτάται από το πόσο θα πείσει για την αποτελεσματικότητα της, γεγονός που συνδέεται με την επιμονή του δασκάλου στην επανάληψη τέτοιου είδους συμπεριφορών και στη σύνδεση των συμπεριφορών αυτών με τα λάθη και τη διόρθωση τους.

Τέλος ένα κομβικό σημείο ενδέχεται να σχετίζεται με την ύπαρξη κάποιας δυσκολίας. Πολλές φορές η αδυναμία να πετύχουμε αυτό που θέλουμε σχετίζεται με την αδυναμία μας να εντοπίσουμε αυτό που μας δυσκολεύει. Αυτό που μας δυσκολεύει όμως μας δείχνει το δρόμο. Εκεί πρέπει να στρέψουμε την προσοχή μας και την σκέψη μας. Ο δάσκαλος οφείλει να παροτρύνει τους μαθητές να αναζητούν τις δυσκολίες και τα αίτια αυτών. Οφείλει να τους παροτρύνει να εντοπίζουν τι πληροφορία ζητούν τι υλικά χρειάζονται και ποιες δεξιότητες τους λείπουν στην προσπάθεια τους να πετύχουν το στόχο τους.

Αυτό βοηθά τους μαθητές να προσδιορίσουν τα όρια μεταξύ του τι γνωρίζουν και τι δεν γνωρίζουν αλλά και τους βοηθά να αποκτήσουν τη δεξιότητα να συλλέγουν τα δεδομένα που χρειάζονται.

5.7 Παράφραση και Επεξεργασία ιδεών

Ο δάσκαλος μπορεί επίσης να βοηθήσει τους μαθητές να οργανώσουν και να εμπλουτίσουν τη σκέψη τους, παραφράζοντας ή επεκτείνοντας τις δικές τους ιδέες και συλλογισμούς. Μπορεί ακόμα να παρέμβει οργανώνοντας τις σκέψεις του μαθητή σε πιο αποτελεσματική σειρά, τονίζοντας κάποια σημεία, ξεκαθαρίζοντας κάποια άλλα και δίνοντας βαρύτητα στις ενέργειες του αυτές σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος.

Ο δάσκαλος δηλαδή, βοηθά τους μαθητές να βάλουν σε τάξη τις σκέψεις τους και να τους διδάξει αποτελεσματικότερους τρόπους οργάνωσης και διαχείρισης των συλλογισμών τους, με το να τις ανακατατάσσει την ώρα που τις εκφράζουν ή θέτοντας ερωτήσεις και υποβάλλοντας εισηγήσεις που θα τους βοηθήσουν να οργανώσουν καλύτερα

τις ιδέες τους. Ακόμα ενθαρρύνονται οι μαθητές μεταξύ τους να υποβάλλουν διευκρινιστικές ερωτήσεις ή εισηγήσεις σε συμμαθητές τους που εκφράζουν τις ιδέες τους.

Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές σταδιακά μαθαίνουν πώς να οργανώνουν τις σκέψεις τους μόνοι τους και πώς να κάνουν ξεκάθαρο αυτό που θέλουν να πουν ώστε να επικοινωνούν πιο αποτελεσματικά και συγχρόνως να αναβαθμίζουν το επίπεδο της σκέψης τους.

Οι παραπάνω μέθοδοι ανάπτυξης της μεταγνώσης μπορούν να εμπλουτιστούν ανάλογα με τους ειδικότερους στόχους που έχουμε κάθε φορά. Κάποιες από αυτές τις μεθόδους ενδεχομένως να χρειαστεί να σπάσουνε σε επιμέρους πιο εξειδικευμένα τμήματα ανάλογα με τους μαθητές στους οποίους απευθυνόμαστε. Σε κάθε περίπτωση πάντως, σύμφωνα και με τον Schoenfeld, η δημιουργία μαθηματικής κουλτούρας (για παράδειγμα εμπλουτισμένης με τα χαρακτηριστικά των παραπάνω μεθόδων) είναι ο καλύτερος τρόπος για την ανάπτυξη της μεταγνώσης. Συνεπώς, οι παραπάνω μέθοδοι δεν πρέπει να προσεγγιστούν σαν ανεξάρτητες διδακτικές παρεμβάσεις, αλλά σαν αναπόσπαστα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟ

Έρευνα για το βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

6.1 Οι Στόχοι της Έρευνας

1. Η ανίχνευση του βαθμού ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Κατανόησης, Σύνδεσης, Στρατηγικής και Αναστοχασμού.
2. Η σύνδεση του βαθμού ενεργοποίησης των παραπάνω μεταγνωστικών διεργασιών με την επίδοση των μαθητών στα στάδια επίλυσης του προβλήματος, δηλ. Κατανόηση του Προβλήματος, Κατάστρωση Σχεδίου Λύσης, Εκτέλεση Σχεδίου και Αναδρομική Διερεύνηση.
3. Η σύνδεση των διαφορετικών ειδών μεταγνωστικών διεργασιών.

6.2 Τα υποκείμενα της έρευνας και ο τρόπος διεξαγωγής της

Οι μεταγνωστικές διεργασίες έχουν κατηγοριοποιηθεί σε τέσσερα είδη : Κατανόησης, Σύνδεσης, Στρατηγικής και Αναστοχασμού με βάση τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε και αναλύσαμε στα προηγούμενα μέρη. Οι μαθητές ήταν από 4 διαφορετικά σχολεία (1^{ο} Ενιαίο Λύκειο Βριλησσίων, 2^{ο} Ενιαίο Λύκειο Βριλησσίων, Α΄ Αρσάκειο Ψυχικού και Εκπαιδευτήρια Καντά). Η έρευνα εξελίχθηκε κατά τους μήνες Μάιο και Ιούνιο του 2004. Στους μαθητές δόθηκαν δυο έργα. Το πρώτο ήταν ένα μαθηματικό πρόβλημα με το οποίο μπορούσαν να ασχοληθούν μόνοι τους στο σπίτι όση ώρα εκείνοι επιθυμούσαν και το δεύτερο ήταν ένα ερωτηματολόγιο το οποίο είχε ερωτήσεις οι οποίες ανίχνευαν την ικανότητα ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών σχετικών με το πρόβλημα που είχαν μελετήσει στο σπίτι. Το ερωτηματολόγιο το συμπλήρωναν στην τάξη παρουσία του καθηγητή περίπου μια εβδομάδα μετά την εμπειρία του πρώτου έργου. Η διάρκεια συμπλήρωσης του δεύτερου έργου κυμαινόταν από 35 μέχρι 45 λεπτά. Στην έρευνα έλαβαν συνολικά μέρος 65 μαθητές (26 κορίτσια και 39 αγόρια) των οποίων οι επιδόσεις στην Άλγεβρα στις Πανελλήνιες εξετάσεις, κυμαίνονταν από 14,3 μέχρι 19,1.

6.3 Πρώτο έργο.

Διαβάστε προσεκτικά την παρακάτω εκφώνηση .
Προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα. Ακόμη κι αν δεν καταφέρετε να καταλήξετε σε μια ολοκληρωμένη απάντηση, γράψτε οποιαδήποτε σκέψη ή υπολογισμό που κάνατε. Προσπαθήστε να γράφετε αυτά που σκέφτεστε. Άμα κάτι που γράψατε το θεωρείτε λάθος ή περιττό βάλτε το σε κύκλο. <u>Σε καμία περίπτωση</u> δεν πρέπει να το σβήσετε ή να το μουτζουρώσετε.

Το σχολείο σας ενδιαφέρεται να πάει 5ήμερη εκδρομή. Το 15μελές έχει καταλήξει σε 3 προσφορές. Η προσφορά του πρώτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 500 ευρώ και 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του δεύτερου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 800 ευρώ και 120 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του τρίτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 3000 ευρώ και αφαιρεί από το ποσό αυτό 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Ποιο ταξιδιωτικό γραφείο σας συμφέρει να επιλέξετε ; Ένα τέταρτο ταξιδιωτικό γραφείο σας δίνει τη δυνατότητα να προτείνετε εσείς μια προσφορά υπό την προϋπόθεση ότι η προσφορά αυτή θα είναι συνδυασμός μόνο των παραπάνω 3 προσφορών. Ποια θα ήταν η προσφορά σας ;

6.4 Δεύτερο έργο.

Σχολείο : ……
Φύλο :…….
Βαθμός Εξετάσεων στην Άλγεβρα Β΄ Λυκείου :……

1.Βάλτε σε σειρά ανάλογα με τη σειρά εκτέλεσης, τις παρακάτω δραστηριότητες.

Όταν διαβάζω μια εκφώνηση επιδιώκω :

Α) Να αντιληφθώ αν μοιάζει με κάποια άσκηση που γνωρίζω.

Β) Να αντιληφθώ τις διαφορές της από άλλες παρόμοιες ασκήσεις.

Γ) Να αντιληφθώ το ρόλο-ερμηνεία σημαντικών λέξεων της εκφώνησης.

Δ) Να αντιληφθώ τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται.

……

2.Στο παρακάτω ερώτημα επιλέξτε τη πιο σημαντική από τις προτεινόμενες επιλογές.

Όταν δυσκολεύομαι να ξεκαθαρίσω ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα :

Α) Ψάχνω λέξεις κλειδιά.

Β) Διαβάζω πολλές φορές την εκφώνηση μέχρι να τα ξεκαθαρίσω.

Γ) Σκέφτομαι πως θα λύσω την άσκηση και τα ξεκαθαρίζω στην πορεία.

Δ) Ξεκαθαρίζω τα δεδομένα και τα ζητούμενα μέσα από τους υπολογισμούς και την επεξεργασία που θα κάνω.

3.Διαβάστε προσεκτικά την παρακάτω εκφώνηση και απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν. Δεν είναι απαραίτητο να λύσετε το πρόβλημα.

Το σχολείο σας ενδιαφέρεται να πάει 5ήμερη εκδρομή. Το 15μελές έχει καταλήξει σε 3 προσφορές. Η προσφορά του πρώτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 500 ευρώ και 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του δεύτερου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 800 ευρώ και 120 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του τρίτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 3000 ευρώ και αφαιρεί από το ποσό αυτό 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Ποιο ταξιδιωτικό γραφείο σας συμφέρει να επιλέξετε ; Ένα τέταρτο ταξιδιωτικό γραφείο σας δίνει τη δυνατότητα να προτείνετε εσείς μια προσφορά υπό την προυπόθεση ότι η προσφορά αυτή θα είναι συνδυασμός μόνο των παραπάνω 3 προσφορών. Ποια θα ήταν η προσφορά σας ;

3.1 Ποιες φράσεις της εκφώνησης είναι περιττές κατά τη γνώμη σας ;
(Επιλέξτε τις με υπογράμμιση)

3.2 Το παραπάνω πρόβλημα έχει να κάνει κυρίως με :

Α) Εύρεση μεγίστου – ελαχίστου.

Β) Σύγκριση συναρτήσεων.

Γ) Επίλυση εξισώσεων.

Δ) Εύρεση ριζών.

Πως το καταλάβατε ;

……

3.3 Πόσο σίγουροι είσαστε ότι καταλάβατε την παραπάνω εκφώνηση ; Βαθμολογήστε τον εαυτό σας κυκλώνοντας μια από τις παρακάτω επιλογές.

Α. Ελάχιστα **Β. Μέτρια** **Γ. Καλά** **Δ. Τέλεια**

4. Σχεδιάστε μια εικόνα (γραφική παράσταση) και γράψτε μια σχέση (τύπο, εξίσωση) οι οποίες να αναπαριστούν τη φράση :

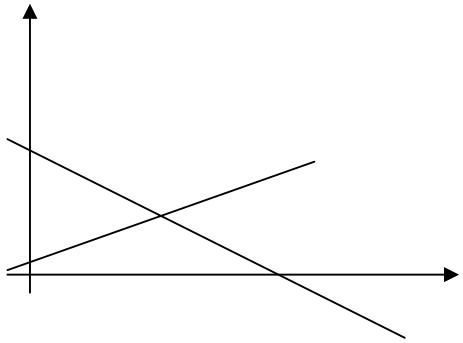
Η προσφορά του πρώτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 500 ευρώ και 100 ευρώ για κάθε μαθητή.

……
……
……
……
……
……
……

5. "Η προσφορά του τρίτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 3000 ευρώ και αφαιρεί από το ποσό αυτό 100 ευρώ για κάθε μαθητή".Ένας μαθητής αναπαριστά την παραπάνω έκφραση με τη σχέση : Προσφορά = 100 + 3000x .Πιστεύετε ότι έχει κάνει λάθος ; Αν ναι, για ποιο λόγο πιστεύετε ότι έκανε αυτό το λάθος ;

……
……
……
……

6. Γράψτε ένα πρόβλημα του οποίου η λύση να εξαρτάται από τη θέση των παρακάτω ευθειών. Συμπληρώστε το σχήμα με ότι άλλο χρειάζεστε.



……
……
……

7. Βάλτε σε σειρά, ανάλογα με τη σειρά εκτέλεσης τις παρακάτω επιλογές.

Α) Εντοπίζω γιατί το συγκεκριμένο πρόβλημα μοιάζει ή διαφέρει με άλλα που έχω λύσει παλαιότερα.

Β) Εντοπίζω τη θεωρία που εμπλέκεται στην άσκηση.

Γ) Ξεκαθαρίζω ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα, όπως επίσης και ποιες άλλες μορφές θα μπορούσαν αυτά να έχουν.

Δ) Αναζητώ ομοιότητες και διαφορές του προβλήματος που έχω να λύσω με άλλα που έχω λύσει παλαιότερα.

……

8. Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες θα προτιμούσατε να αποκτήσετε ;
(Επιλέξτε μόνο μια).

Α) Να ξέρω απ' έξω όλο το βιβλίο των μαθηματικών.

Β) Να ξέρω απ' έξω τις λύσεις 1000 ασκήσεων.

Γ) Να ξέρω απ' έξω τις λύσεις 500 ασκήσεων και να μπορώ πάντα να διακρίνω τις ομοιότητες και τις διαφορές των άλλων ασκήσεων από αυτές.

Δ) Να μπορώ να διακρίνω τις ομοιότητες και τις διαφορές και να καταλαβαίνω γιατί αυτές υπάρχουν.

Γιατί επιλέξατε τη συγκεκριμένη απάντηση ;

……
……
……
……
……

9. Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες θα προτιμούσατε να αποκτήσετε ;
(Επιλέξτε μόνο μια).

Α) Να ξέρω τέλεια μια μέθοδο επίλυσης προβλήματος.

Β) Να ξέρω τις λύσεις 10.000 προβλημάτων.

Γ) Να ξέρω πότε να εφαρμόζω μια μέθοδο επίλυσης προβλήματος.

Δ) Να ξέρω για 50 μεθόδους επίλυσης προβλήματος πως και πότε να τις εφαρμόζω.

Γιατί επιλέξατε τη συγκεκριμένη απάντηση ;

……

……

10.Βάλτε σε σειρά από το περισσότερο στο λιγότερο σημαντικό, τις παρακάτω επιλογές.

Α) Αξιολόγηση των πιθανών σχεδίων λύσης με αιτιολόγηση.

Β) Οργάνωση των δεδομένων με βάση το επιλεγμένο σχέδιο λύσης.

Γ) Ποια είναι τα πιθανά σχέδια λύσης.

Δ) Διαχείριση – επεξεργασία των δεδομένων.

……

11. Ένας μαθητής γνωρίζει να υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου και το εμβαδόν παραλληλογράμμου. Θέλει να υπολογίσει το εμβαδόν ενός τραπεζίου και δεν γνωρίζει τον αντίστοιχο τύπο. Μπορείτε να του θέσετε ερωτήσεις με τέτοια σειρά έτσι ώστε οι απαντήσεις να τον οδηγούν στη λύση ; Ποιες θα ήταν αυτές ;

……

……

12. Έχουμε τις συναρτήσεις $f(x) = 500 + 100x$ και $g(x) = 3000 - 100x$. Θέλουμε να συγκρίνουμε τις δυο συναρτήσεις. Να γράψετε 2 τρόπους αντιμετώπισης του παραπάνω θέματος. Σε ποια περίπτωση θα επιλέγατε τον κάθε τρόπο και γιατί ;

……

……

……

……

13. Να κάνετε την αντιστοίχηση των στοιχείων της στήλης Α με ένα μόνο από τα στοιχεία της
στήλης Β.

Στήλη Α.	**Στήλη Β.**
1.$((x + 1) (x^3)) ' = (x + 1) ' (x^3) '$	**A.** Έχει νόημα αυτό που κάνω ;
2.$g (a) = 3 a^2 + x^2 \Rightarrow g ' (a) = 2x$	**B.** Μήπως να κάνω επαλήθευση;
3. $6 x^2 +3 x + k = 3 x (2 x + 1 + k)$	**C.** Ποια είναι η μεταβλητή;
4.….$(x – 4) (x – 3.3) = 0$, οπότε οι μαθητές που πέρασαν την τάξη θα είναι αντίστοιχα 4 ή 3.3.	**D.** Τι ξέρω από τη θεωρία;

14.Έστω x = y. Τότε θα έχουμε :

$x x = y x$

$x^2 = x y$

$x^2 – y^2 = x y – y^2$

$(x –y) (x + y) = y (x –y)$

$x + y = y$

$2y = y$

$2 = 1.$

Που είναι το λάθος ; Να αναφέρεται 2 « συνήθειες » τις οποίες πρέπει να αποκτήσει ο παραπάνω μαθητής προκειμένου να μην ξανακάνει τέτοιου είδους λάθη.

……
……
……
…….

15. Όταν ένας μαθητής έχει ολοκληρώσει με επιτυχία την επίλυση ενός προβλήματος, ποια από τα παρακάτω θεωρείς ότι είναι σωστό ή λάθος να πραγματοποιήσει άμεσα, προκειμένου να βελτιωθεί κι άλλο .

Α) Να λύσει κι άλλα δυσκολότερα προβλήματα.

Β) Να εξετάσει το ίδιο πρόβλημα αλλάζοντας κάποια στοιχεία του.

Γ) Να διαβάσει νέες μαθηματικές θεωρίες.

Δ) Να ξαναδεί τα λάθη που έκανε.

Ε) Να ξαναδεί τις καλές ιδέες που είχε.

Ζ) Να αποφύγει αλλαγές στην εκφώνηση, διότι έτσι, όχι μόνο δεν εμβαθύνει αλλά αντιθέτως αλλοιώνει τις μαθηματικές έννοιες.

Η) Να αιτιολογήσει γιατί κάποιες ιδέες του ήταν σωστές και γιατί κάποιες άλλες λάθος.

Θ) Να αποφύγει ενέργειες που δεν του προτείνει ο καθηγητής του.

ΣΤ) Να αποφύγει τη μελέτη παραπλήσιων περιπτώσεων, διότι έτσι τα δίκτυα του εγκεφάλου του θα δυσκολευθούν να καταγράψουν τις καινούργιες έννοιες.

6.5 Ποσοτική ανάλυση και σχολιασμός του πρώτου έργου της έρευνας

Σχετικά με το πρώτο έργο, το οποίο είχε να κάνει με επίλυση προβλήματος τα αποτελέσματα ήταν απογοητευτικά. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία (15 μαθητές) δεν ασχολήθηκε καθόλου με το πρόβλημα προβάλλοντας διαφόρων ειδών δικαιολογίες. Οι συγκεκριμένοι μαθητές εκτός από έλλειψη κινήτρων για επίλυση του προβλήματος είναι πολύ πιθανό να είχαν και χαμηλή εκτίμηση των δυνατοτήτων τους.

Η δεύτερη κατηγορία (20 μαθητές), ασχολήθηκε με το πρόβλημα, διατύπωσε τις σωστές εξισώσεις και κάποιον υποτυπώδη σχεδιασμό τον οποίο όμως δεν υλοποίησε. Είναι πολύ πιθανό και αυτή η ομάδα μαθητών να μην πίστευε ότι θα μπορούσε τελικά να λύσει ολοκληρωμένα το πρόβλημα.

Η τρίτη κατηγορία (30 μαθητές), ασχολήθηκε περισσότερο με το πρόβλημα, διατύπωσε τις σωστές εξισώσεις και εφάρμοσε έναν στοιχειώδη σχεδιασμό μέσω του οποίου ο στόχος ήταν να αποκλειστούν κάποιες επιλογές και να μείνει στο τέλος μόνο μια. Προκειμένου να επιτύχουν αυτό το στόχο πειραματίστηκαν με συγκεκριμένα νούμερα τα οποία αντιστοιχούσαν στο πλήθος των μαθητών. Στην ιδανικότερη περίπτωση κατάφεραν να αποκλείσουν τη μια προσφορά. Δεν υπήρξε από κανένα μαθητή εφαρμογή εναλλακτικού σχεδίου το οποίο θα στηριζόταν στα συμπεράσματα της πρώτης αποτυχημένης προσπάθειας και κανένας μαθητής δεν προσέγγισε το πρόβλημα γραφικά. Οι μαθητές της τελευταίας κατηγορίας στο ερωτηματολόγιο είχαν σημειώσει ελαφρώς καλύτερες επιδόσεις από τις υπόλοιπες κατηγορίες.

6.6 Ποσοτική ανάλυση και σχολιασμός του δευτέρου έργου της έρευνας

Οι ερωτήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6 στοχεύουν σε μεταγνωστικές διεργασίες Κατανόησης, οι 7, 8, 9 στοχεύουν σε διεργασίες Σύνδεσης, οι 10, 11, 12, 13 στοχεύουν σε διεργασίες Στρατηγικής και οι ερωτήσεις 14, 15 στοχεύουν σε μεταγνωστικές διεργασίες Αναστοχασμού. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται παρακάτω. Οι σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα είναι γραμμένες με έντονο μαύρο.

1.Βάλτε σε σειρά ανάλογα με τη σειρά εκτέλεσης, τις παρακάτω δραστηριότητες.

Όταν διαβάζω μια εκφώνηση επιδιώκω :

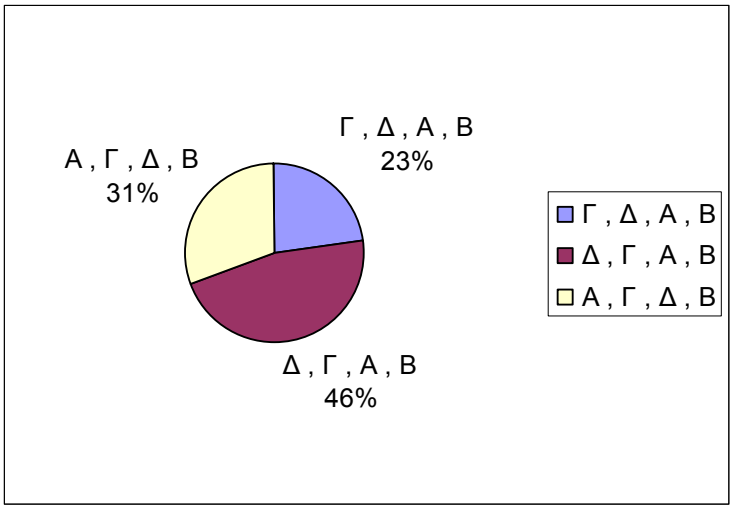
Α) Να αντιληφθώ αν μοιάζει με κάποια άσκηση που γνωρίζω.

Β) Να αντιληφθώ τις διαφορές της από άλλες παρόμοιες ασκήσεις.

Γ) Να αντιληφθώ το ρόλο-ερμηνεία σημαντικών λέξεων της εκφώνησης.

Δ) Να αντιληφθώ τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ %
Γ, Δ, Α, Β	15	23,09
Δ, Γ, Α, Β	30	46,15
Α, Γ, Δ, Β	20	30,76
ΣΥΝΟΛΟ	65	100



2.Στο παρακάτω ερώτημα επιλέξτε τη πιο σημαντική από τις προτεινόμενες επιλογές.

Όταν δυσκολεύομαι να ξεκαθαρίσω ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα :

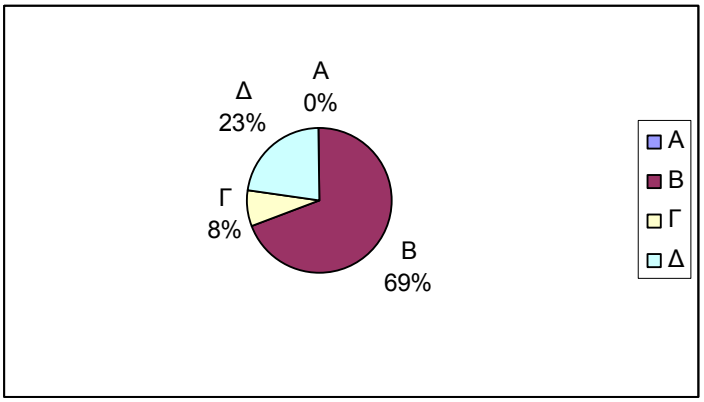
Α) Ψάχνω λέξεις κλειδιά.

Β) Διαβάζω πολλές φορές την εκφώνηση μέχρι να τα ξεκαθαρίσω.

Γ) Σκέφτομαι πως θα λύσω την άσκηση και τα ξεκαθαρίζω στην πορεία.

Δ) Ξεκαθαρίζω τα δεδομένα και τα ζητούμενα μέσα από τους υπολογισμούς και την επεξεργασία που θα κάνω.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ %
Α	0	0
Β	45	69,23
Γ	5	7,69
Δ	15	23,07
ΣΥΝΟΛΟ	65	100



3.Διαβάστε προσεκτικά την παρακάτω εκφώνηση και απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν. Δεν είναι απαραίτητο να λύσετε το πρόβλημα.

Το σχολείο σας ενδιαφέρεται να πάει 5ήμερη εκδρομή. Το 15μελές έχει καταλήξει σε 3 προσφορές. Η προσφορά του πρώτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 500 ευρώ και 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του δεύτερου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 800 ευρώ και 120 ευρώ για κάθε μαθητή. Η προσφορά του τρίτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 3000 ευρώ και αφαιρεί από το ποσό αυτό 100 ευρώ για κάθε μαθητή. Ποιο ταξιδιωτικό γραφείο σας συμφέρει να επιλέξετε ; Ένα τέταρτο ταξιδιωτικό γραφείο σας δίνει τη δυνατότητα να προτείνετε εσείς μια προσφορά υπό την προυπόθεση ότι η προσφορά αυτή θα είναι συνδυασμός μόνο των παραπάνω 3 προσφορών. Ποια θα ήταν η προσφορά σας ;

3.1 Ποιες φράσεις της εκφώνησης είναι περιττές κατά τη γνώμη σας ;
(Επιλέξτε τις με υπογράμμιση)

ΣΧΟΛΙΑ : Στο παραπάνω ερώτημα σχεδόν όλοι οι μαθητές υπογράμμισαν τις δυο πρώτες γραμμές. Μια μικρή μειοψηφία, περίπου 7-8 μαθητές υπογράμμισαν μεμονωμένες λέξεις από αυτές τις δυο γραμμές. Χωρίς συνέντευξη με τους παραπάνω μαθητές είναι δύσκολο να αιτιολογήσουμε γιατί επέλεξαν να υπογραμμίσουν μόνο αυτές τις λέξεις και όχι ολόκληρες τις προτάσεις.

3.2 Το παραπάνω πρόβλημα έχει να κάνει κυρίως με :

Α) Εύρεση μεγίστου – ελαχίστου.

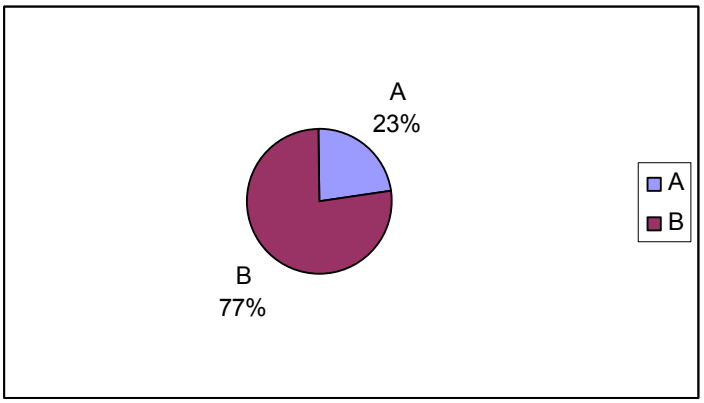
Β) Σύγκριση συναρτήσεων.

Γ) Επίλυση εξισώσεων.

Δ) Εύρεση ριζών.

Πως το καταλάβατε ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ %
Α	15	23,07
Β	50	76,92
ΣΥΝΟΛΟ	65	100

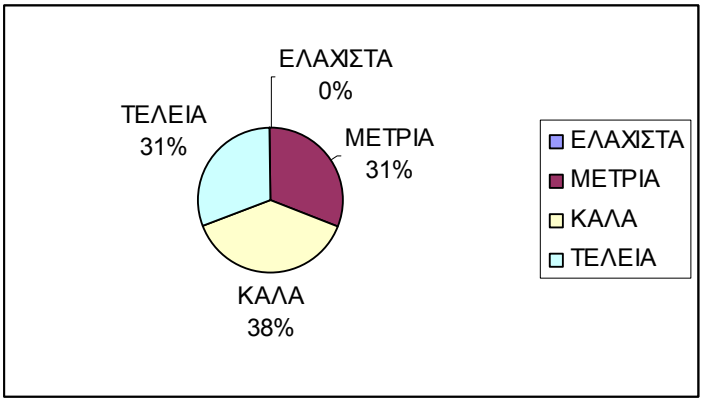


ΣΧΟΛΙΑ : Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι πολλοί μαθητές που επέλεξαν το Α έχουν εντοπίσει την ανάγκη για τη σύγκριση συναρτήσεων ωστόσο το ότι η εκφώνηση τους ζητάει την πιο συμφέρουσα προσφορά (μικρότερη τιμή), φαίνεται ότι τους παρέσυρε.

3.3 Πόσο σίγουροι είσαστε ότι καταλάβατε την παραπάνω εκφώνηση ; Βαθμολογήστε τον εαυτό σας κυκλώνοντας μια από τις παρακάτω επιλογές.

Α. Ελάχιστα **Β. Μέτρια** **Γ. Καλά** **Δ. Τέλεια**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ %
ΕΛΑΧΙΣΤΑ	0	0
ΜΕΤΡΙΑ	20	30,76
ΚΑΛΑ	25	38,46
ΤΕΛΕΙΑ	20	30,76
ΣΥΝΟΛΟ	65	100



4. Σχεδιάστε μια εικόνα (γραφική παράσταση) και γράψτε μια σχέση (τύπο, εξίσωση) οι οποίες να αναπαριστούν τη φράση :

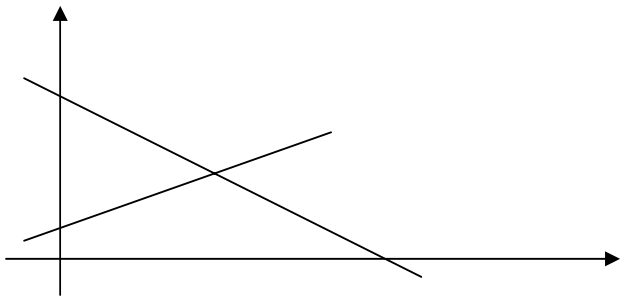
Η προσφορά του πρώτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 500 ευρώ και 100 ευρώ για κάθε μαθητή.

ΣΧΟΛΙΑ : Στην ερώτηση αυτή όλοι οι μαθητές έγραψαν με επιτυχία μια σχέση χωρίς όμως να σχολιάσει κανείς τις τιμές που μπορεί να πάρει το x. Το τοπίο ξεκαθάρισε με το γράφημα, όπου μόνο οι 30 από τους 65 έλαβαν υπόψη τους στο σχεδιασμό ότι το x αναπαριστά μαθητές και πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν.

5. "Η προσφορά του τρίτου ταξιδιωτικού γραφείου χρεώνει το σχολείο με 3000 ευρώ και αφαιρεί από το ποσό αυτό 100 ευρώ για κάθε μαθητή".Ένας μαθητής αναπαριστά την παραπάνω έκφραση με τη σχέση : Προσφορά = 100 + 3000x .Πιστεύετε ότι έχει κάνει λάθος ; Αν ναι, για ποιο λόγο πιστεύετε ότι έκανε αυτό το λάθος ;

ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό όλοι βρήκαν το λάθος. Άλλοι προτίμησαν να το περιγράψουν μόνο με λόγια (περίπου οι μισοί) και άλλοι εκτός από λόγια χρησιμοποίησαν και την αντίστοιχη εξίσωση. Αυτοί που χρησιμοποίησαν και την εξίσωση διατύπωσαν τους ισχυρισμούς τους με μεγαλύτερη σαφήνεια και λιγότερα λόγια.

6. Γράψτε ένα πρόβλημα του οποίου η λύση να εξαρτάται από τη θέση των παρακάτω ευθειών. Συμπληρώστε το σχήμα με ότι άλλο χρειάζεστε.



ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό κανένας μαθητής δεν έγραψε πρόβλημα. Όλοι έγραψαν ασκήσεις υπολογιστικού χαρακτήρα παρόμοιες με αυτές που έχουν συναντήσει στη σχολική τους ζωή όπως εύρεση σημείου τομής ευθειών, υπολογισμός των εξισώσεων των ευθειών και υπολογισμοί διαφόρων εμβαδών που σχηματίζονται.

7. Βάλτε σε σειρά, ανάλογα με τη σειρά εκτέλεσης τις παρακάτω επιλογές.

Α) Εντοπίζω γιατί το συγκεκριμένο πρόβλημα μοιάζει ή διαφέρει με άλλα που έχω λύσει παλαιότερα.

Β) Εντοπίζω τη θεωρία που εμπλέκεται στην άσκηση.

Γ) Ξεκαθαρίζω ποια είναι τα δεδομένα και ποια είναι τα ζητούμενα, όπως επίσης και ποιες άλλες μορφές θα μπορούσαν αυτά να έχουν.

Δ) Αναζητώ ομοιότητες και διαφορές του προβλήματος που έχω να λύσω με άλλα που έχω λύσει παλαιότερα.

ΣΧΟΛΙΑ : Η συγκεκριμένη ερώτηση φαίνεται ότι προβλημάτισε αρκετά τους μαθητές αν κρίνουμε από τις αλλεπάλληλες διορθώσεις και μουτζούρες των ερωτηματολογίων τους. Σαν σωστότερη απάντηση θεωρούμε τη σειρά Γ, Β, Δ, Α την οποία μόνο 10 μαθητές έδωσαν. Οι υπόλοιποι έχουν διασκορπιστεί σχεδόν σε ίσα ποσοστά στους συνδυασμούς Β, Γ, Α, Δ και Γ, Β, Α, Δ. Το πιθανότερο είναι η δυσκολία να προέκυψε από την αδυναμία κατανόησης της διαφοράς ανάμεσα στο Α και το Δ.

8. Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες θα προτιμούσατε να αποκτήσετε ;
(Επιλέξτε μόνο μια).

Α) Να ξέρω απ' έξω όλο το βιβλίο των μαθηματικών.

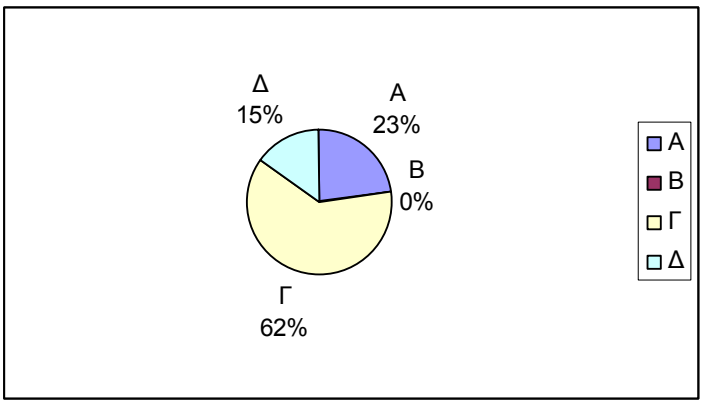
Β) Να ξέρω απ' έξω τις λύσεις 1000 ασκήσεων.

Γ) Να ξέρω απ' έξω τις λύσεις 500 ασκήσεων και να μπορώ πάντα να διακρίνω τις ομοιότητες και τις διαφορές των άλλων ασκήσεων από αυτές.

Δ) Να μπορώ να διακρίνω τις ομοιότητες και τις διαφορές και να καταλαβαίνω γιατί αυτές υπάρχουν.

Γιατί επιλέξατε τη συγκεκριμένη απάντηση ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ %
Α	15	23,07
Β	0	0
Γ	40	61,53
Δ	10	15,38
ΣΥΝΟΛΟ	65	100



9. Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες θα προτιμούσατε να αποκτήσετε ;
(Επιλέξτε μόνο μια).

Α) Να ξέρω τέλεια μια μέθοδο επίλυσης προβλήματος.

Β) Να ξέρω τις λύσεις 10.000 προβλημάτων.

Γ) Να ξέρω πότε να εφαρμόζω μια μέθοδο επίλυσης προβλήματος.

Δ) Να ξέρω για 50 μεθόδους επίλυσης προβλήματος πως και πότε να τις εφαρμόζω.

Γιατί επιλέξατε τη συγκεκριμένη απάντηση ;

ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό, οι μισοί επέλεξαν το Δ που θεωρούμε και σωστότερη απάντηση και οι άλλοι μισοί το Γ. Φαίνεται πως αυτοί που επέλεξαν το Γ αδιαφορούν για το **πώς** εφαρμόζεται μια μέθοδος, όπως και σε προηγούμενα ερωτήματα στα οποία υπήρχε αδιαφορία για το **γιατί** ενεργούμε όπως ενεργούμε έτσι και εδώ η πλειοψηφία ενδιαφέρεται απλώς να μπορεί να γράψει τη λύση.

10.Βάλτε σε σειρά από το περισσότερο στο λιγότερο σημαντικό, τις παρακάτω επιλογές.

Α) Αξιολόγηση των πιθανών σχεδίων λύσης με αιτιολόγηση.

Β) Οργάνωση των δεδομένων με βάση το επιλεγμένο σχέδιο λύσης.

Γ) Ποια είναι τα πιθανά σχέδια λύσης.

Δ) Διαχείριση – επεξεργασία των δεδομένων.

ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε σωστή απάντηση τη σειρά Γ, Α, Β, Δ . Η συντριπτική πλειοψηφία (δηλαδή όλοι εκτός από 2 -3 άτομα) έχουν δώσει σαν σωστή απάντηση τη Δ , Γ, Α, Β. Ίσως τα δεδομένα στα οποία αναφέρεται το Δ να τους παρέσυρε καθώς αυτοί θα είχαν στο νου τους ότι πρώτα κοιτάμε τα δεδομένα κ.τ.λ Η προσέγγιση πάντως από σχετικά καλούς μαθητές είναι αρκετά επιφανειακή και υποδηλώνει άγνοια τόσο για τα στάδια επίλυσης προβλήματος όσο και για οποιαδήποτε έννοια στρατηγικής.

11. Ένας μαθητής γνωρίζει να υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου και το εμβαδόν παραλληλογράμμου. Θέλει να υπολογίσει το εμβαδόν ενός τραπεζίου και δεν γνωρίζει τον αντίστοιχο τύπο. Μπορείτε να του θέσετε ερωτήσεις με τέτοια σειρά έτσι ώστε οι απαντήσεις να τον οδηγούν στη λύση ; Ποιες θα ήταν αυτές ;

ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό όλοι οι μαθητές τα πήγαν αναπάντεχα καλά. Οι ερωτήσεις που έθεσαν ήταν αρκετά εύστοχες και αποτελεσματικές. Όλοι σκέφτηκαν με βάση το σχήμα και με βάση αυτό κατασκεύασαν τις ερωτήσεις τους. Το γεγονός ότι το περιβάλλον της άσκησης τους έδινε τη δυνατότητα να σκεφτούν "εικονικά" φαίνεται ότι έπαιξε καταλυτική σημασία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις ερωτήσεις μιας μαθήτριας.

1. Πως μπορείς να χωρίσεις το τραπέζιο σε τμήματα με γνωστά εμβαδά ;
2. Τι πρέπει να κάνεις για να βρεις στοιχεία για τα επιμέρους αυτά τμήματα του τραπεζίου ;
3. Πως θα βρεις τα επιμέρους εμβαδά ;
4. Πως θα βρεις το συνολικό εμβαδόν ;

12. Έχουμε τις συναρτήσεις $f(x) = 500 + 100x$ και $g(x) = 3000 - 100x$. Θέλουμε να συγκρίνουμε τις δυο συναρτήσεις. Να γράψετε 2 τρόπους αντιμετώπισης του παραπάνω θέματος. Σε ποια περίπτωση θα επιλέγατε τον κάθε τρόπο και γιατί ;

ΣΧΟΛΙΑ : Εδώ 45 μαθητές αναφέρονται μόνο σε επίλυση ανίσωσης και 20 σε επίλυση ανίσωσης και γραφική παράσταση. Από τις αιτιολογήσεις που παραθέτουν γίνεται σαφές ότι ακόμα και αυτοί που γνωρίζουν δυο τρόπους επίλυσης δεν έχουν προσωπική άποψη για το **πότε** και **γιατί** εφαρμόζουμε τον κάθε τρόπο.

13. Να κάνετε την αντιστοίχηση των στοιχείων της στήλης Α με ένα μόνο από τα στοιχεία της
στήλης Β.

Στήλη Α.	**Στήλη Β.**
1. $((x+1)(x^3))' = (x+1)'(x^3)'$	**Α.** Έχει νόημα αυτό που κάνω ;

2.$g(a) = 3a^2 + x^2 \Rightarrow g'(a) = 2x$

B. Μήπως να κάνω επαλήθευση ;

3. $6x^2 + 3x + k = 3x(2x + 1 + k)$

C. Ποια είναι η μεταβλητή;

4.….$(x - 4)(x - 3.3) = 0$, οπότε οι μαθητές που πέρασαν την τάξη θα είναι αντίστοιχα 4 ή 3.3.

D. Τι ξέρω από τη θεωρία ;

ΣΧΟΛΙΑ :Στη συγκεκριμένη ερώτηση θεωρούμε σωστές απαντήσεις τα παρακάτω ζεύγη : (1, D), (2, C), (3, B), (4, A). Εκτός από 10 μαθητές όλοι οι άλλοι έχουν κάνει από 2 λάθη. Το ποσοστό επιτυχίας δεν είναι ικανοποιητικό αν αναλογιστεί κανείς το μικρό πλήθος των ερωτήσεων και το βαθμό ευκολίας τους. Τα κριτήρια ελέγχου φαίνεται ότι κινούνται σε χαμηλά επίπεδα.

14.Έστω x = y. Τότε θα έχουμε :

$x\,x = y\,x$

$x^2 = x\,y$

$x^2 - y^2 = x\,y - y^2$

$(x - y)(x + y) = y(x - y)$

$x + y = y$

$2y = y$

$2 = 1.$

Που είναι το λάθος ; Να αναφέρεται 2 « συνήθειες » τις οποίες πρέπει να αποκτήσει ο παραπάνω μαθητής προκειμένου να μην ξανακάνει τέτοιου είδους λάθη.

ΣΧΟΛΙΑ : Το λάθος εντοπίστηκε από όλους τους μαθητές και οι προτάσεις τους ήταν αρκετά εύστοχες ωστόσο πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας ότι τέτοιου είδους λάθη

σχολιάζονται αρκετά συχνά στην τάξη και ενδεχομένως οι μαθητές απλώς να περιέγραψαν μια εμπειρία που είχαν βιώσει.

15. Όταν ένας μαθητής έχει ολοκληρώσει με επιτυχία την επίλυση ενός προβλήματος, ποια από τα παρακάτω θεωρείς ότι είναι σωστό ή λάθος να πραγματοποιήσει άμεσα, προκειμένου να βελτιωθεί κι άλλο .

Α) Να λύσει κι άλλα δυσκολότερα προβλήματα.

Β) Να εξετάσει το ίδιο πρόβλημα αλλάζοντας κάποια στοιχεία του.

Γ) Να διαβάσει νέες μαθηματικές θεωρίες.

Δ) Να ξαναδεί τα λάθη που έκανε.

Ε) Να ξαναδεί τις καλές ιδέες που είχε.

Ζ) Να αποφύγει αλλαγές στην εκφώνηση, διότι έτσι, όχι μόνο δεν εμβαθύνει αλλά αντιθέτως αλλοιώνει τις μαθηματικές έννοιες.

Η) Να αιτιολογήσει γιατί κάποιες ιδέες του ήταν σωστές και γιατί κάποιες άλλες λάθος.

Θ) Να αποφύγει ενέργειες που δεν του προτείνει ο καθηγητής του.

ΣΤ) Να αποφύγει τη μελέτη παραπλήσιων περιπτώσεων, διότι έτσι τα δίκτυα του εγκεφάλου του θα δυσκολευθούν να καταγράψουν τις καινούργιες έννοιες.

ΣΧΟΛΙΑ : Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε σαν σωστές απαντήσεις τα Β, Δ, Ε και Η. Οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζουν τεράστια ποικιλομορφία η οποία όμως τείνει να επιλέγει την πλειοψηφία των σωστών απαντήσεων. Άξιο σχολιασμού είναι το γεγονός ότι 50 από τους 65 μαθητές έχουν επιλέξει το Α, γεγονός που συνάδει με τα ερεθίσματα που

δέχονται τα παιδιά από το γεμάτο απαιτήσεις περιβάλλον τους. Επίσης χαρακτηριστικό είναι ότι τα ίδια άτομα έχουν επιλέξει ταυτοχρόνως το Δ και το Η παρόλο που δεν φαίνεται να τα εφαρμόζουν και οι ίδιοι στην πράξη.

6.7 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με τον πρώτο στόχο.

(Ανίχνευση του βαθμού ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Κατανόησης, Σύνδεσης, Στρατηγικής και Αναστοχασμού.)

- Στο στάδιο της κατανόησης οι μαθητές στοχεύουν από την αρχή στην εύρεση του μαθηματικού περιεχομένου και των αντίστοιχων υπολογισμών αντί να επικεντρώσουν αρχικά την προσοχή τους στην κατανόηση του προβλήματος. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει το αδυναμία ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Κατανόησης και μια «πρόωρη» ενεργοποίηση μεταγνωστικών διεργασιών Στρατηγικής.
- Οι αδυναμίες κατανόησης της εκφώνησης σπανίως προσεγγίζονται μεταγνωστικά αλλά συνήθως είτε δεν καταβάλλεται επιπλέον προσπάθεια κατανόησης είτε εφαρμόζεται τυφλά κάποια "παλιά" συμβουλή την οποία έχει δεχθεί ο μαθητής π.χ "Διάβασε πολλές φορές την εκφώνηση μέχρι να την καταλάβεις."
- Σε γενικές γραμμές ο μαθητής θεωρεί δεδομένο ότι έχει καταλάβει την εκφώνηση. Ακόμα κι αν υπάρξουν αρνητικά σημάδια σπανίως θα αναρωτηθεί μήπως το πρόβλημα είναι η λανθασμένη κατανόηση της εκφώνησης.
- Ο βαθμός ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Κατανόησης με βάση τις επιδόσεις στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου χαρακτηρίζεται **μέτριος** αφού μόνο σε 3 από τις 6 ερωτήσεις, σημειώθηκαν ικανοποιητικά ποσοστά επιτυχίας.
- **Ικανοποιητικό** επίπεδο εύρεσης ομοιοτήτων – διαφορών με αδιαφορία όμως για τις αιτίες που οδηγούν σε αυτές τις ομοιότητες – διαφορές. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει ενεργοποίηση μεταγνωστικών διεργασιών Σύνδεσης χωρίς όμως να υπάρχει επίγνωση της σημαντικότητας προσδιορισμού των αιτίων αυτών των ομοιοτήτων – διαφορών. Έτσι οι περισσότεροι μαθητές εφαρμόζουν διαδικασίες και υιοθετούν συμπεριφορές χωρίς αναφορά στο αντίστοιχο μεταγνωστικό υπόβαθρο με αποτέλεσμα την περιορισμένη εμβέλεια των συμπεριφορών αυτών και την αδυναμία διαμόρφωσης παρόμοιων προτύπων.

- Ενδιαφέρον μόνο για γνώσεις υπολογιστικού χαρακτήρα οι οποίες υπάρχει πιθανότητα να ζητηθούν στο μέλλον. Απομνημόνευση των παραπάνω γνώσεων και αδιαφορία για γνώσεις που σχετίζονται με τη σκέψη (χαμηλό μεταγνωστικό ενδιαφέρον).
- Μεταγνωστικά ερωτήματα που σχετίζονται με το **πώς** και το **γιατί** αφήνουν αδιάφορους τους περισσότερους μαθητές.
- **Χαμηλός** βαθμός ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Στρατηγικής, ιδιαίτερα όταν αυτές σχετίζονται με το **πότε** και **γιατί** εφαρμόζω μια στρατηγική.
- Χαμηλός βαθμός κινητοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών σε ασαφή ή προβληματικά σημεία. Ακόμα και σε άγνωστες λέξεις πολλές φορές παρατηρείται το φαινόμενο αντί να εξετάζονται να παρακάμπτονται.
- Ευκολία στην ενεργοποίηση μεταγνωστικών διεργασιών όταν εμπλέκεται εμφανώς κάποιο σχήμα.
- Χαλαρά κριτήρια αυτοαξιολόγησης.
- Οι περισσότεροι μαθητές δεν επιδιώκουν να θέσουν τη σκέψη τους αντικείμενο προβληματισμού.
- **Αναγνωρίζουν** τη χρησιμότητα κάποιων μεταγνωστικών διεργασιών Αναστοχασμού αλλά αδυνατούν να τις **ενεργοποιήσουν**. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι μαθητές που απάντησαν ικανοποιητικά στις αντίστοιχες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου δεν έπραξαν αναλόγως στο έργο της επίλυσης του προβλήματος.
- Αδυναμία αναζήτησης και προσδιορισμού των δυσκολιών.

6.8 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με το δεύτερο στόχο.

(Σύνδεση του βαθμού ενεργοποίησης των μεταγνωστικών διεργασιών με την επίδοση των μαθητών στα στάδια επίλυσης του προβλήματος, δηλ. Κατανόηση του Προβλήματος, Κατάστρωση Σχεδίου Λύσης, Εκτέλεση Σχεδίου και Αναδρομική Διερεύνηση.)

- Οι μαθητές των οποίων το πρώτο έργο περιλαμβάνει κατάστρωση και εκτέλεση κάποιου σχεδίου (δηλ. η τρίτη κατηγορία), σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στο δεύτερο έργο, γεγονός το οποίο υποδηλώνει ότι είχαν υψηλότερο δείκτη ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών.
- Οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας , δηλ. αυτοί που αρκέστηκαν στη διατύπωση ενός σχεδίου χωρίς να προβούν σε εφαρμογή του **δεν** διαφέρουν από τους μαθητές

της τρίτης κατηγορίας στις επιδόσεις των ερωτήσεων που σχετίζονται με μεταγνωστικές διεργασίες Σύνδεσης αλλά στις ερωτήσεις που σχετίζονται με τις μεταγνωστικές διεργασίες Στρατηγικής.

- Η πρώτη κατηγορία μαθητών, δηλ. αυτοί που είχαν μηδενική ενασχόληση με το πρόβλημα, έδειξε αδυναμία ακόμα και σε μεταγνωστικές διεργασίες αναστοχασμού φαινόμενο το οποίο δεν παρατηρήθηκε σε αντίστοιχη κλίμακα στους μαθητές των άλλων δυο κατηγοριών.
- Οι μαθητές με ικανοποιητικό βαθμό μεταγνωστικών διεργασιών Στρατηγικής δείχνουν να υπερέχουν και στην αντιμετώπιση των επιμέρους σταδίων επίλυσης του προβλήματος, ιδίως αυτοί που ενεργοποιούν μεταγνωστικά ερωτήματα που σχετίζονται με το **πότε** και το **γιατί** εφαρμόζουμε τη μια ή την άλλη στρατηγική.

6.9 Παρουσίαση των συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με τον τρίτο στόχο.

(Σύνδεση των διαφορετικών ειδών μεταγνωστικών διεργασιών.)

- Μαθητές με χαμηλό βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Αναστοχασμού παρουσιάζουν τους χαμηλότερους βαθμούς ενεργοποίησης και στα άλλα είδη.
- Μαθητές με υψηλό βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Στρατηγικής παρουσιάζουν τους υψηλότερους βαθμούς ενεργοποίησης και στα άλλα είδη.
- Μαθητές με υψηλό βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Σύνδεσης παρουσιάζουν και υψηλό βαθμό ενεργοποίησης μεταγνωστικών διεργασιών Στρατηγικής.

Ο βαθμός ενεργοποίησης των μεταγνωστικών διεργασιών εκτιμάται από την **ορθότητα** των αντίστοιχων ερωτήσεων καθώς και την **πληρότητα** της αιτιολόγησης των απαντήσεων.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα, κατά τη διάρκεια των πανελληνίων εξετάσεων σημείωσαν επιδόσεις στα μαθηματικά τουλάχιστον 14 (με άριστα το 20), τόσο στη Β΄ όσο και στη Γ΄ Λυκείου. Επίσης πρέπει να τονιστεί ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν έχουν λάβει (συστηματικά τουλάχιστον) ερεθίσματα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών , ούτε για την επίλυση προβλήματος, ούτε για τις μεταγνωστικές διεργασίες. Οι μετρήσεις της έρευνας μας για τις μεταγνωστικές

διεργασίες και την επίλυση προβλήματος αντιστοιχούν σε μαθητές που έχουν δεχθεί τα συνηθισμένα σχολικά και φροντιστηριακά ερεθίσματα με βάση τα ελληνικά δεδομένα.

Σίγουρα το δείγμα είναι πολύ μικρό και θα μπορούσαν να ληφθούν ορισμένα πρόσθετα μέτρα για ποιοτικότερη επεξεργασία των δεδομένων, όπως για παράδειγμα προσωπικές συνεντεύξεις. Το γεγονός επίσης, της ανυπαρξίας διδασκαλίας εμπλουτισμένης με στοιχεία μεταγνώσης και επίλυσης προβλήματος, αδικεί τις ικανότητες των μαθητών. Θα ήταν πάρα πολύ ενδιαφέρον να ακολουθήσει μια τέτοια διδασκαλία και μετά να επαναλάβουμε αντίστοιχες έρευνες στους ίδιους μαθητές. Προς το παρόν όμως η παρούσα κατάσταση υποδηλώνει ότι ο μέσος απόφοιτος λυκείου, τελειώνει το λύκειο χωρίς στοιχειώδεις μεταγνωστικές δεξιότητες και βασικές ικανότητες επίλυσης προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βαϊνάς, Κ. (1998), *Η Ερώτηση ως μέσο Αγωγής της σκέψης*, εκδ. Gutenberg.

Βαϊνάς, Κ. (1996), *Ανάλυση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα ,* εκδ. Γρηγόρη.

Βαϊνάς, Κ. (1990), *« Αρχιμήδης, Polya και ευρετικές στρατηγικές στη Διδακτική των Μαθηματικών»*, Σύγχρονη Εκπαίδευση, τ.55, Αθήνα.

Βαϊνάς, Κ. – Βαϊνά, Μ. (1989), *« Μαθηματική γλώσσα και γλώσσα του μαθήματος των Μαθηματικών»,* Σύγχρονη Εκπαίδευση, τ.48 και τ.49, Αθήνα.

Βαϊνάς, Κ. (1998), *« Η μαιευτική μέθοδος διδασκαλίας στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών»,* Διάσταση τ.3 και τ.4, Θεσσαλονίκη.

Βόσκογλου, Μ. (1993), *Το μαθηματικό πρόβλημα σαν παράγοντας για την απόκτηση και μεταφορά της γνώσης,* εκδ. ΕΜΕ.

Βοσνιάδου, Σ. (2000), *Η ψυχολογία των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg.

Βοσνιάδου, Σ. (2002), *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, τ.Α, εκδ. Gutenberg.

Γαγάτσης, Α. – Κατσούλου, Μ. – Μαρκέτος, Α. (1988), *« Ταξινομήσεις διδακτικών στόχων και ασκήσεις Μαθηματικών»,* Ευκλείδης Γ΄, τ.19, ΕΜΕ, Αθήνα.

Δασκαλάκης, Δ. (1986), *« Η μέθοδος της επεξεργασίας στη διδασκαλία »,* Τα Εκπαιδευτικά, τ.6, Αθήνα.

Εξαρχάκος, Θ. (1988), *Διδακτική των Μαθηματικών,* εκδ. Ελληνικά Γράμματα.

Θεοφιλίδης, Χ. (1988), *Η τέχνη των Ερωτήσεων*, εκδ. Γρηγόρη.

Καραγεώργος, Δ. (2000), *Το πρόβλημα και η επίλυση του*, εκδ. Σαββάλας.

Καραγεώργος, Δ. (1991), *«Η ερωτηματική μέθοδος διδασκαλίας, οι ερωτήσεις κρίσης και η χρησιμοποίηση τους στο μάθημα των Μαθηματικών»,* Λόγος και πράξη, τ.45.

Καραγεώργος, Δ. (1994), *« Εμπέδωση Μαθηματικών εννοιών με προβλήματα της καθημερινής ζωής»,* Ευκλείδης Γ΄, τόμος 11, τ.38.

Κλαουδάτος, Ν. (1996), *Σημειώσεις του Μαθήματος Διδακτική των Μαθηματικών*, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κλαουδάτος, Ν. – Παπασταυρίδης Σ. (1994), *Τα σχολικά μαθηματικά και ο πραγματικός κόσμος : Πως θα συνδυάσουμε θεωρία και πράξη,* Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Κουτσελίνη – Ιωαννίδου, Μ. (1995), *«Μεταγνώση, η έννοια και η διδασκαλία της »,* Νέα Παιδεία, τ.74.

Παπαλεοντίου – Λουκά, Ε. (2002), *«Μεταγνώση : Η έννοια και η διδασκαλία της »,* Σύγχρονη Εκπαίδευση, τ.127 .

Τουμάσης, Μ.(1999), *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών, εκδ. Κωστόγιαννος.*

Τουμάσης, Μ. (1999), Σύγχρονη Διδακτική των μαθηματικών, εκδ. Gutenberg.

Φιλίππου, Γ. – Χρίστου, Κ. (2002), *Διδακτική των μαθηματικών*, εκδ. Δαρδανός.

Ξένη Βιβλιογραφία

Biehler R.F. & Snowman J. 1997. *Psychology applied to teaching*. Eight edition.New York: Houghton Mifflin Company.

Brown, A. 1987. Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms. In F. Weinert & R. Kluwe (Eds.) *Metacognition, motivation and understanding*, (pp.65-116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brown, A. L. The development of memory: Knowing, knowing about knowing, and knowing how to know. In H. W. Reese (Ed.), *Advances in child development* (Vol. 10). New York: Academic Press, 1975.

Brown, A. L. Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1978.

Brown, A. L., & Barclay, C. R. The effect of training specific mnemonics on the metamnemonic efficiency of retarded children. *Child Development,* 1976, 47, 71-80.

Brown, A. L., Campione, J. C., & Barclay, C. R. Training self-checking routines for estimating test readiness: Generalization from list learning to prose recall. *Child Development,* 1979, 50, 501-512.

Brown, A. L., Campione, J. C., & Day, J. D. Learning to learn: On training students to learn from text. *Educational Researcher, 1981,* 10, 14-21.

Brown, A. L., & Smiley, S. S. The development of strategies for studying text. *Child De*velopment, 1978, 49, 1076-1088.

Calfee, R.(1981), *« Cognitive psychology and educational practice»,* In D. Berliner (Ed.), Review of Research in Education, 9, Washington, D.C : AERA.

Chi, M. & Bassok, M. 1989. Learning from examples via self-explanations. In L.B. Resnick (Ed.) *Knowing, learning and instruction: Essays in Honor of Robert Glaser*, (pp.251-282). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chi, M., DeLeeuw, N., Chiu, M-H & LaVancher, C. 1994. Eliciting self-explanations Improves understanding. *Cognitive Science, 18*, 439-477.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group ineraction: four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp.25-130). New Jersey: Hillsdale.

Costa, A.L. (1984). *« Mediating the metacognitive »,* Educational Leadership, 42, 3.

Davidson, J.E. & Sternberg, R.J. 1998. Smart problem solving: How metacognition helps. In D. Hacker, J. Dunlosky & A. Graesser (Eds.) *Metacognition in Educational theory and practise,* (pp.47-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

DeCorte, E. 2000. Marrying theory building and the improvement of school practise: a permanent challenge for instructional psychology. *Learning and Instruction, 10,* 249-266.

Derry, S.1992 Metacognitive models of learning and instructional systems design. In Marlene Jones and Philip H Winne, editors, Adaptative Learning Environments Foundations and Frontiers, volume F 5 of NATO ASI Series Books, pages 257-286. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

Derry and Hawkes, 1993 Local Cognitive Modeling of Problem-Solving Behavior: An Application of Fuzzy Theory. In: Computers as Cognitive Tools. Lajoie, Susanne P. and Derry, Sharon J. (Eds.) Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J.1976 Metacognitive Aspects of Problem Solving. In: The Nature of Intelligence. Resnick, Lauren B (Ed.) Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J.1979 Metacognition and cognitive monitoring. American Psychologist 34(10):906-911, october 1979.

Flavell, J.H. 1979. Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist. Vol. 34, No. 10*, 906-911.

Goodman et al., 1998 Encouraging student reflection and articulation using a Learning companion. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 9(3-4):237-255, 1998. Special Issue on Computer Supported Collaborative Learning.

Hinsley, D., Hayes, J.R., & Simon, H.A (1977). From words to equations. P. Carpenter & M. Just. *Cognitive Processes in Comprehension,* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *The journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 123 -134.*

King, A. (1994). Guiding knowledge construction in the classroom: Effects of teaching children how to question and how to explain. *American Educational Research Journal, 31*, 338-368.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Liberman, A. (2001). The Effects of Multilevel - versus Unilevel-Metacognitive Training on Mathematical Reasoning. *Journal for Educational Research, 94 (5),* 292-300.

Lampert. L. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical; knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27* (1), 29-63.

Mevarech, Z.R. & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal, 34* (2), 365-395.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

OECD.PISA (2000). *Measuring Students Knowledge and Skills*. The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy.

Polya,G. 1973. *How to solve it.* New Jersey: Princeton.

Puntambekar & du Boulay, 1999 Design of mist - a system to help students develop metacognition. In Patricia Murphy, editor, Learners, Learning and Assessment, pages 245-257. Paul Chapman Publishing in association with The Open University, 1999.

Quike, J. & Winter, Ch. (1994), *« Teaching the language of learning : Towards a metacognitive approach to pupil empowerment ».* British Educational Reasearch Journal, 20, 4.

Robinson, C.S., & Hayes, J.R. (1978), Making inferences about relevance in understanding problems. R. Revlin & R.E. Mayer *Human Reasoning. Washinghton: Winston.*

Schoenfeld, A.H. 1985. *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A.H. 1987. What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and mathematics education*,(pp.189-215). Hillsdale, NJ: Earlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D.Grouws (Ed.) *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, (pp.334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. 1994. Reflections on doing and teaching mathematics. In A.H. Schoenfeld (Ed.) *Mathematical thinking and problem solving*, (pp.53-70). Hillsdale, NJ: Earlbaum Associates.

Silver, Ed. (1987), *« Foundations of Cognitive theory and research for problem – solving instruction»*, in Scoenfeld (ed), *« Cognitive Science and Mathematics Education»*, p.33-60, Lawrence Erilbraum Associates, Hillsdale: New Jersey.

Soloway, E., Lochhead, J., & Clement, J. (1982). *Does computer programming enhance problem solving ability ? Some positive evidence on algebra word problems.* R.J Seidel, R.E. Anderson & B. Hunter. *Computer Literacy.* New York: Academic Press.

Weinert, F. E. 1987. Introduction and Overview: Metacognition and Motivation as determinants of effective learning and understanding. In F. Weinert & R. Kluwe (Eds.) *Metacognition, motivation and understanding*, (pp.1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Weinstein, C. & Mayer, R. (1986), *« The Teaching of Learning Strategies »*, In M. Wittrick. (Ed.) *Handbook of Research on teaching. New York :* Macmillan Publishing Company.