ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

«Το Διαφορικό ως Θεμελιώδης Έννοια του Απειροστικού Λογισμού, όπως χρησιμοποιήθηκε και ερμηνεύτηκε από τον Leibniz»

Μικέλη Θεοδώρα

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Αθήνα
Μάρτιος 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ...../...../2009 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
1) Ευστάθιος Γιαννακούλιας (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	
2) Διονύσιος Λάππας	Αν. Καθηγητής	
3) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Αν. Καθηγητής	

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα 3

Κατάλογος σχημάτων 5

Gottfried Wilhelm Leibniz 6

Αντί Προλόγου 13

Εισαγωγή 17

Ο απειροστικός λογισμός του Leibniz 27

Η αρχή: αθροίσματα και διαφορές 32

Το χαρακτηριστικό τρίγωνο 36

Ο αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου 45

Η ανακάλυψη του αναλυτικού λογισμού 53

Η πρώτη δημοσίευση για τον λογισμό 62

Διαφορικά ανώτερης τάξης. 66

- Η έννοια των απειροστών του Leibniz 68
- Η καμπύλη ως πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών 73
- Διαφορικά και αθροίσματα, η επίδραση των d και $\int$ στις μεταβλητές 75
- Διαφορικά και αθροίσματα 77
- Το διαφορικό τρίγωνο 78
- Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των d και του $\int$ 79
- Η σχέση των d και $\int$ 80
- Ολοκλήρωση και διαφόριση 81
- Η διάσταση των διαφορικών και των αθροισμάτων 84
- Τάξεις του απείρου 85
- Η Απροσδιοριστία των διαφορικών πρώτης τάξης 87
- Η απροσδιοριστία των αθροισμάτων και των διαφορικών ανώτερης τάξης 91
- Οι κανόνες του λογισμού 93
- Διαφορικές εξισώσεις, η εξάρτησή τους στην πρόοδο των μεταβλητών, η επιλογή μιας ανεξάρτητης μεταβλητής 94

Ο νόμος της υπερβατικής ομογένειας 99

Διάσταση, τάξη του απείρου και οι τελεστές d και $\int$ 101

Οι θεμελιώδεις έννοιες του λογισμού του Leibniz και οι αντίστοιχες σήμερα.... 101

Πτυχές της Τεχνικής και Επιλογή των Προβλημάτων στο Λογισμό του Leibniz 104

Δημιουργία τύπων από τον Jacob Bernoulli 107

Δημιουργία τύπων από τον Leibniz 111

Διαφορικοί τύποι, διαφορικές εξισώσεις και η πρόοδος των μεταβλητών 115

Οι Αναλογίες ως αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών 121

Η ανάγκη να διευκρινιστεί η πρόοδος των μεταβλητών 127

Ο ρόλος του σταθερού διαφορικού 128

Μελέτες του Leibniz για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού..... 131

Η ύπαρξη των απειροστών και η αιτιολόγηση της χρήσης τους στην ανάλυση.. 131

Ο νόμος της συνέχειας..... 133

Η προσπάθεια του Leibniz σε μια παρόμοια αιτιολόγηση της χρήσης των διαφορικών ανώτερης τάξης 137

Οι λόγοι αποτυχίας αυτής της προσπάθειας..... 140

Δυνατότητα επιτυχίας μετά από τον προσδιορισμό της προόδου των μεταβλητών 141

Ο ορισμός του διαφορικού του Leibniz το 1684..... 142

Τα μειονεκτήματα αυτού του ορισμού 147

Το Σχέδιο του Euler να Αποβληθούν τα Διαφορικά Ανώτερης Τάξης από την Ανάλυση 149

Οι τελεστές διαφόρισης και ολοκλήρωσης..... 151

Οι μέθοδοι απαλοιφής των διαφορικών ανώτερης τάξης..... 157

Διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις παραγώγων 159

Ανεξαρτησία και εξάρτηση των διαφορικών εξισώσεων από την πρόοδο των μεταβλητών 161

Η Άποψη του Leibniz σχετικά με τα Αδιαίρετα του Cavalieri, Απείρως Μεγάλες Ποσότητες 165

Η μέθοδος των αδιαιρέτων του Cavalieri 165

Οι τύποι για τον τετραγωνισμό στις πρώτες μελέτες του Leibniz 166

∫y, ∫ydx και η επιλογή της προόδου των μεταβλητών..... 167

Οι αναφορές του Leibniz 168
Η ύπαρξη των απείρως μεγάλων ποσοτήτων..... 169
Ο Λογισμός του Leibniz και η Μη Τυπική Ανάλυση 171
Μη τυπική ανάλυση..... 171
Newton και Leibniz 178
Οι Πηγές 204
Βιβλιογραφία 208

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1.	19	Σχήμα 16.	78
Σχήμα 2.	22	Σχήμα 17.	106
Σχήμα 3.	29	Σχήμα 18.	108
Σχήμα 4.	38	Σχήμα 19.	110
Σχήμα 5.	39	Σχήμα 20.	111
Σχήμα 6.	41	Σχήμα 21.	112
Σχήμα 7.	46	Σχήμα 22.	114
Σχήμα 8.	48	Σχήμα 23.	124
Σχήμα 9.	50	Σχήμα 24.	135
Σχήμα 10.	51	Σχήμα 25.	138
Σχήμα 11.	58	Σχήμα 26.	143
Σχήμα 12.	60	Σχήμα 27.	146
Σχήμα 13.	63	Σχήμα 28.	166
Σχήμα 14.	64	Σχήμα 29.	181
Σχήμα 15.	74		

Gottfried Wilhelm Leibniz

Ο Gottfried Leibniz γεννήθηκε την 1η Ιουλίου 1646 στη Λειψία από τους Friedrich Leibniz και Catherina Schmuck. Ήταν γερμανός φιλόσοφος, μαθηματικός, διπλωμάτης, φυσικός, ιστορικός, βιβλιοθηκονόμος και διδάκτορας των λαϊκών και εκκλησιαστικών Νομικών. Ο Leibniz ήταν ένας από τους βασικούς φιλοσόφους του 17ου και του 18ου αιώνα και θεωρείται ως καθολικό πνεύμα της εποχής του (homo universalis): έχει αποκληθεί «ο πολυμαθέστερος ανήρ μετά τον Αριστοτέλην» (ο άνδρας που είχε τις περισσότερες γνώσεις μετά τον Αριστοτέλη).

Οι γονείς του, του κίνησαν το ενδιαφέρον για νομικά και φιλοσοφικά προβλήματα από νωρίς. Ο πατέρας του πέθανε όταν ήταν έξι ετών, έτσι γαλουχήθηκε με τις θρησκευτικές και ηθικές αξίες της μητέρας του οι οποίες άσκησαν βαθιά επίδραση στη φιλοσοφική του σκέψη. Ως ενήλικας, συχνά καλούσε τον εαυτό του "Von Leibniz", και σε πολλές μεταθανάτιες εκδόσεις των έργων του έδωσε το όνομά του στο εξώφυλλο ως "Freiherr [Baron] GW Von Leibniz." Ωστόσο, δεν έχει βρεθεί έγγραφο που επιβεβαιώνει ότι του είχε ποτέ χορηγηθεί το δίπλωμα των ευγενών.

Όταν πέθανε ο πατέρας του, νομικός και καθηγητής της Ηθικής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο της Λειψίας, άφησε μια προσωπική βιβλιοθήκη στην οποία ο Leibniz θα είχε ελεύθερη πρόσβαση από την ηλικία των επτά ετών και μετά. Ο Leibniz ήταν σε μεγάλο βαθμό αυτοδίδακτος, διαβάζοντας στη περιεκτική βιβλιοθήκη του πατέρα του. Μέχρι την ηλικία των δώδεκα ετών γνώριζε καλά τα λατινικά, τα οποία χρησιμοποιούσε σε όλη του τη ζωή, είχε αρχίσει τις σπουδές του στα Ελληνικά και είχε αναπτύξει ήδη τις αρχές μιας μαθηματικής νοηματικής γλώσσας εξετάζοντας λογικά προβλήματα.

Το 1661 εισήλθε στο πανεπιστήμιο της Λειψίας στην ηλικία των δεκατεσσάρων ετών, και ολοκλήρωσε τις πανεπιστημιακές σπουδές του πριν το εικοστό έτος της ηλικίας του, με ειδίκευση στο δίκαιο, τη λογική και τη φιλοσοφία. Φοίτησε κοντά στο θεολόγο Adam Scherzer και το φιλόσοφο Jacob Thomasius. Με την κατοπινή μεταγραφή του στο πανεπιστήμιο της Jena ασχολήθηκε με πυθαγόρεια προβλήματα κοντά στο μαθηματικό, φυσικό και αστρονόμο Erhard Weigel. Το 1666 σε ηλικία 20

ετών, δημοσίευσε το πρώτο του βιβλίο, καθώς επίσης και τη διδακτορική του διατριβή στη φιλοσοφία, πάνω στην τέχνη των συνδυασμών. Όταν το πανεπιστήμιο της Λειψίας αρνήθηκε να του εξασφαλίσει μια θέση διδασκαλίας στα νομικά, εξαιτίας του νεαρού της ηλικίας του, ο Leibniz υπέβαλε την διατριβή του στο Πανεπιστήμιο του Altdorf , και έλαβε το διδακτορικό δίπλωμα στα νομικά μέσα σε πέντε μήνες. Η διατριβή του, αφορούσε μία νέα μέθοδο διδασκαλίας των νομικών, και την προτεινόμενη επανακωδικοποίησή τους. Παρά το γεγονός ότι του ζητήθηκε από το Πανεπιστήμιο του Altdorf να δεχθεί θέση καθηγητή των νομικών, αρνήθηκε την προσφορά για ακαδημαϊκό διορισμό.

Η πρώτη επ' αμοιβή εργασία του Leibniz ήταν ως αλχημιστής στη Νυρεμβέργη, αν και δεν γνώριζε τίποτα για το αντικείμενο. Εκεί συνάντησε τους Boineburg Johann Christian von (1622-1672), πρώην υπουργό της εκλογικής περιφέρειας του Mainz, και τον Johann Philipp von Schonborn. Ο Von Boineburg προσέλαβε τον Leibniz ως βοηθό, και λίγο αργότερα τον γνωρίζει στον εκλέκτορα του Mainz. Στη συνέχεια ο Leibniz αφιέρωσε μία έκθεσή του για τα νομικά στον εκλέκτορα του Mainz με την ελπίδα να του προταθεί μία θέση εργασίας. Ο εκλέκτορας ζήτησε από τον Leibniz να τον βοηθήσει με την αναδιατύπωση του νομικού κώδικα και τον εισήγαγε σε θέματα πολιτικής και διπλωματίας.

Το 1669, διορίστηκε δικαστικός στο Εφετείο. Κατά τα έτη 1670 και 1671 έγραψε τις πρώτες εργασίες του στη μηχανική, και από το 1671, είχε παρουσιάσει την υπολογιστική μηχανή του, ικανή να κάνει και τις τέσσερις πράξεις καθώς και να βγάζει ρίζες. Έως τότε υπήρχε η υπολογιστική μηχανή του Pascal που έκανε μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Παρότι ο Von Boineburg πέθανε στα τέλη του 1672, ο Leibniz παρέμεινε ως υπάλληλος της χήρας συζύγου του μέχρι που τον απέλυσε το 1674. Ο Von Boineburg έκανε πάρα πολλά για να προωθήσει τη φήμη του Leibniz, τα υπομνήματα και οι επιστολές του οποίου ξεκίνησαν να έχουν αναγνωρισιμότητα. Οι υπηρεσίες του Leibniz στον εκλέκτορα άρχισαν να έχουν διπλωματικό ρόλο. Πριν περάσει αρκετός καιρός του ανατέθηκαν σημαντικές αποστολές που απαιτούσαν εξαιρετική λεπτότητα χειρισμών και παρασκηνιακές διεργασίες. Ταυτόχρονα, του δόθηκε και η ευκαιρία για ταξίδια, στα οποία έκανε και μερικές ιδιαίτερες γνωριμίες. Μία απ' αυτές ήταν η γνωριμία με τον φιλόσοφο Σπινόζα.

Δημοσίευσε ένα δοκίμιο, υπό το ψευδώνυμο ενός πολωνού ευγενή , διαφωνώντας (ανεπιτυχώς) με το Γερμανό υποψήφιο για το Πολωνικό στέμμα. Η κύρια ευρωπαϊκή γεωπολιτική πραγματικότητα κατά τη διάρκεια της ενήλικης ζωής του ήταν η επεκτατική φιλοδοξία του Λουδοβίκου ΙΔ της Γαλλίας, που υποστηρίζονταν από τη Γαλλική στρατιωτική και οικονομική ισχύ. Εν τω μεταξύ, ο Τριακονταετής πόλεμος είχε αφήσει τη γερμανόφωνη Ευρώπη εξαντλημένη, κατακερματισμένη, και

οικονομικά πίσω. Ο Leibniz προτείνεται για την προστασία της γερμανόφωνης Ευρώπης και διαπραγματεύεται με τον Λουδοβίκο ως εξής: Η Γαλλία μπορεί να λάβει την Αίγυπτο ως εφαλτήριο για μια ενδεχόμενη κατάκτηση των Ολλανδικών Ανατολικών Ινδιών. Σε αντάλλαγμα, η Γαλλία θα συμφωνήσει να αφήσει τη Γερμανία και την Ολλανδία ανενόχλητη. Το εν λόγω σχέδιο έχει την επιφυλακτική υποστήριξη και του εκλέκτορα. Το 1672, η γαλλική κυβέρνηση καλεί τον Leibniz στο Παρίσι για συζήτηση, αλλά σύντομα το σχέδιο ήταν πίσω από τα γεγονότα και κατέστη άνευ αντικειμένου. Η αποτυχημένη εισβολή του Ναπολέοντα στην Αίγυπτο το 1798 μπορεί να θεωρηθεί ως εφαρμογή του σχεδίου του Leibniz.

Έτσι ξεκίνησε η πολυετής διαμονή του Leibniz στο Παρίσι. Λίγο μετά την άφιξή του, και τη συνάντηση που είχε με τον Ολλανδό φυσικό και μαθηματικό Christiaan Huygens συνειδητοποίησε ότι η δική του γνώση των μαθηματικών και της φυσικής ήταν ανεπαρκής. Με τον Huygens ως μέντορα, ξεκίνησε ένα πρόγραμμα της αυτοδιδασκαλίας που σύντομα είχε απτά αποτελέσματα και στα δύο θέματα, όπως την επινόηση της δικής του εκδοχής για τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Στο Παρίσι επίσης συνάντησε τους Malebranche και Antoine Arnauld, εκ των μεγαλύτερων Γάλλων φιλόσοφων της εποχής, μελέτησε τα κείμενα του Καρτέσιου και του Pascal, δημοσιευμένα και μη, και πλούτισε τις μαθηματικές του γνώσεις.

Όταν πλέον έγινε σαφές ότι η Γαλλία δεν θα εφαρμόσει το σχέδιο του Leibniz για την Αίγυπτο, ο εκλέκτορας έστειλε τον ανιψιό του, συνοδευόμενο από τον Leibniz, σε μια αποστολή σχετική με την Αγγλική κυβέρνηση στο Λονδίνο, στις αρχές του 1673. Εκεί γνώρισε τους Henry Oldenburg και John Collins. Μετά από την παρουσίαση της υπολογιστικής μηχανής, που είχε σχεδιάσει και κατασκευάσει από το 1670, στη Βασιλική Ακαδημία, το πρώτο τέτοιο μηχάνημα, η Ακαδημία τον έκανε εξωτερικό μέλος.

Μετά την είδηση του θανάτου του εκλέκτορα, ο Leibniz επέστρεψε στο Παρίσι και όχι στο Mainz, όπως ήταν προγραμματισμένο. Μετά από το ξαφνικό θάνατο των δύο χρηματοδοτών του τον ίδιο χειμώνα, ο Leibniz έπρεπε να βρει μια νέα βάση για την καριέρα του. Στο πλαίσιο αυτό, μία πρόσκληση από τον Δούκα του Brunswick το 1669 να επισκεφθεί το Ανόβερο αποδείχθηκε μοιραία. Ο Leibniz, αρνήθηκε την πρόσκληση, αλλά άρχισε να αλληλογραφεί με τον Δούκα το 1671. Το 1673, ο Δούκας του προσέφερε τη θέση του συμβούλου που ο Leibniz πολύ απρόθυμα δέχτηκε δύο χρόνια αργότερα, μόνο αφού κατέστη σαφές ότι δεν υπήρχε μεγάλη πιθανότητα για μία θέση εργασίας στο Παρίσι που να του προσέφερε πνευματική διέγερση.

Η Βουλή του Brunswick ανέχονταν την τεράστια προσπάθεια που αφιέρωνε ο Leibniz στις πνευματικές του επιδιώξεις, ξένες προς τα καθήκοντά του ως αυλικός, όπως την τελειοποίηση του λογισμού του, άρθρα για τα μαθηματικά, τη λογική, τη

φυσική και φιλοσοφία, και την παρακολούθηση μιας τεράστιας αλληλογραφίας. Άρχισε να εργάζεται για τον λογισμό το 1674. Τα πρώτα στοιχεία για τη χρήση του σε διασωθείς σημειώσεις είναι του 1675.

Τον ίδιο καιρό, έκανε μια δυσμενή εντύπωση σε πολλούς επιστήμονες και μαθηματικούς κάνοντας αστήριχτους ισχυρισμούς για τα επιτεύγματά του και προτείνοντας μια αλγεβρική σειρά για την τετραγώνιση του κύκλου που ήδη είχε δημοσιευτεί από πολλούς μαθηματικούς. Τέτοιου είδους βιαστικές ανακοινώσεις απέτρεψαν τον Leibniz από το να του αποδοθεί μια θέση στο Κολλέγιο της Γαλλίας το 1675 (Hoffman, 1973). Παρ' όλα αυτά, έγινε μέλος του δικτύου επικοινωνίας των Oldenburg και Collins και ενημερωνόταν για τις εργασίες των Άγγλων μαθηματικών. Με τον Oldenburg και τον Collins ως μεσάζοντες, ο Newton και ο Leibniz αντάλλασσαν γράμματα το 1676 και το 1677. Ο Leibniz κατάφερε να πείσει το Newton να του στείλει μια περιγραφή της δουλειάς του πάνω στις άπειρες σειρές. Προφανώς καχύποπτος για τα κίνητρα του Leibniz, ο Newton ανέφερε τη συνεχούς αλλαγής μαθηματική ανάλυσή του σε μια απλή κρυπτογραφημένη πρόταση με τη μορφή αναγραμματισμού. Ο Leibniz δεν απόκτησε πολύ άμεση πληροφορία από τον Newton. Όμως ήταν ακριβώς αυτήν την περίοδο που αναφορές από Αγγλικά επιτεύγματα στην επιστήμη και τα μαθηματικά κυκλοφορούσαν ότι ο Leibniz γρήγορα βελτίωσε τη μαθηματική του ανάλυση, χρησιμοποιώντας μια πιο ξεκάθαρη και χρήσιμη σημειογραφία από τον Newton. Περιέγραψε αυτή τη δουλειά στον Newton, αλλά ο Newton δε τη θεώρησε σημαντική. Επειδή ο Leibniz ήταν ακόμα από πολλές πλευρές αρχάριος, είναι πιθανόν ο Newton να υποτίμησε τις μαθηματικές του ικανότητες. Το 1677 ο Leibniz είχε σχεδόν ολοκληρώσει την εργασία του για τον λογισμό, αλλά δεν τη δημοσίευσε μέχρι το 1684.

Ο Leibniz κατάφερε να καθυστερήσει την άφιξή του στο Ανόβερο μέχρι το τέλος του 1676, μετά από ένα ακόμη σύντομο ταξίδι στο Λονδίνο, όπου κάποιοι από τους οπαδούς του Newton υποστηρίζουν ότι ενδεχομένως είδε και την αδημοσίευτη εργασία του για το λογισμό. Το γεγονός αποτελεί το βασικότερο αποδεικτικό στοιχείο αυτών που υποστηρίζουν την κατηγορία, που γίνεται δεκαετίες αργότερα, ότι έκλεψε το λογισμό του Newton. Στο ταξίδι από το Λονδίνο στο Ανόβερο, ο Leibniz σταμάτησε στη Χάγη, όπου συναντήθηκε με τον Leeuwenhoek, που ανακάλυψε τους μικροοργανισμούς. Επίσης ξόδεψε αρκετές ημέρες σε εντατική συζήτηση με τον Spinoza, που μόλις είχε ολοκληρώσει την εργασία του, «η δεοντολογία» ("Ethics"). Έπεισε τον Spinoza να τον αφήσει να ρίξει μια ματιά στα χειρόγραφά του για την *Ηθική*, στα οποία ο Spinoza έδινε αφαιρετικά ένα φιλοσοφικό σύστημα με γεωμετρική (αξιωματική) μορφή. Η φιλοσοφία του Leibniz (που προχωράει πέρα από τον Spinoza) έγινε διάσημη ενώ του Spinoza παρέμεινε αδημοσίευτη και ασαφής για ένα περίπου αιώνα. Ο Leibniz σεβότανε την ισχυρή

πνευματική διάνοια του Spinoza, αλλά ήταν απογοητευμένος από τα συμπεράσματά του περί ανακολουθιών τόσο της χριστιανικής όσο και της εβραϊκής ορθοδοξίας.

Ο Leibniz ήταν ενήμερος για κάθε ευκαιρία - οργανωτική, πολιτική ή πνευματική. Στα πρώτα του χρόνια στο Παρίσι και το Λονδίνο, διείσδυσε στα πιο διαπρεπή δίκτυα και επιθετικά εξοικειώθηκε με τις πιο σημαντικές τάσεις. Δεν υπάρχει απόδειξη ότι έκανε λογοκλοπές, αλλά μάλλον ότι μάθαινε όσα περισσότερα μπορούσε σχετικά με το τι σκεφτόντουσαν οι επιστήμονες. Διάβασε τα αδημοσίευτα χειρόγραφα του Καρτέσιου και του Pascal (Hofmann, 1973: 161). Ο Leibniz είχε την ικανότητα να μαζεύει στοιχεία μέσα από τις ερωτήσεις του, να τις αναπτύσσει γρήγορα και να προλαβαίνει τους δημιουργούς στην δημοσίευση.

Το 1677, προήχθη, κατόπιν αιτήματός του, σε Ιδιαίτερος Σύμβουλος της Δικαιοσύνης, θέση που κατείχε για την υπόλοιπη ζωή του. Ο Leibniz θα υπηρετήσει τρεις συνεχόμενες ηγεμονίες της Βουλής του Brunswick ως ιστορικός, πολιτικός σύμβουλός και ως βιβλιοθηκάριος της δουκικής βιβλιοθήκης. Έκτοτε άρχισε να αρθρογραφεί για όλα τα επιμέρους πολιτικά, ιστορικά και θεολογικά θέματα που αφορούσαν τη Βουλή του Brunswick και τα έγγραφα που προκύπτουν αποτελούν ένα πολύτιμο μέρος της ιστορίας για την περίοδο αυτή.

Απολάμβανε μια τεράστια φήμη στη φιλοσοφία ως ένα αποτέλεσμα της εκτεταμένης αλληλογραφίας του με τους Arnaud, Bayle και άλλους ηγετικούς πνευματικούς ανθρώπους, αλλά οι φιλοσοφικές δουλειές του δεν εμφανίστηκαν γραπτώς, στο μεγαλύτερο μέρος τους, πριν από το 1710.

Από τα λίγα άτομα στην βόρεια Γερμανία με τα οποία είχε ένθερμες σχέσεις ήταν η εκλέκτορας Σοφία του Ανόβερο (1630-1714), η κόρη της Charlotte (1668-1705), η Βασίλισσας της Πρωσίας, και της Caroline του Ανσμπαχ, γιαγιά του Γεωργίου του 2^{ου}. Για κάθε μία από αυτές τις γυναίκες ήταν ανταποκριτής, σύμβουλος και φίλος. Ο Leibniz έγινε ένας αξιοσέβαστος και επιτυχημένος πολιτικός σε αρκετές αυλές. Οι πολιτικές του διασυνδέσεις και η πνευματική του φήμη αλληλοενισχύονταν. Το 1682, το πρώτο εξειδικευμένο πνευματικό περιοδικό στη Γερμανία, *Acta Eruditorum*, ιδρύθηκε στην Λειψία από μέλη του πνευματικού κύκλου του Leibniz, σε μίμηση των Αναφορών της Ακαδημίας των Επιστημών και των Φιλοσοφικών Διεξαγωγών της Βασιλικής Εταιρείας. Τα πιο σημαντικά μαθηματικά άρθρα του Leibniz δημοσιεύτηκαν μεταξύ 1682 και 1692, συνήθως σε αυτό το περιοδικό, το οποίο διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην προώθηση της μαθηματικής και επιστημονικής του φήμης, η οποία με τη σειρά της ενίσχυσε το κύρος του στη διπλωματία, την ιστορία, τη θεολογία και τη φιλοσοφία.

Τώρα που έλεγχε μια έκδοση ανεξάρτητη από τις Αγγλικές και τις Γαλλικές επιρροές, ο Leibniz δημοσίευσε τις αλγεβρικές σειρές για τις οποίες παινευότανε στο Λονδίνο χωρίς να αναφέρει κανέναν προκάτοχο. Το 1684 και το 1686, ο Leibniz

δημοσίευσε σύντομες περιγραφές της μαθηματικής του ανάλυσης και υπαινίχθηκε ότι άνοιξε μια νέα εποχή στην ιστορία των μαθηματικών. Η έκθεσή του συμπιέστηκε υπερβολικά, αλλά αποκάλυψε την προγραμματιστική αξία της μεθόδου του. Μετά από ανάγνωση μιας επισκόπησης της *Principia* του Newton το 1689, έγραφε ταχύτατα μια σειρά από άρθρα για το *Acta* περιγράφοντας την δική του θεωρία για την αστροφυσική χωρίς να αναφέρει πουθενά τον Newton (Hofmann, 1973: 151).

Ο Εκλέκτορας Ernst August ανέθεσε στον Leibniz να γράψει την ιστορία της Βουλής των Brunswick, από το χρόνο του Charlemagne ή και νωρίτερα, με την ελπίδα ότι το βιβλίο θα ενίσχυε τις πολιτικές του φιλοδοξίες. Από το 1687 μέχρι το 1690, ο Leibniz ταξίδεψε εκτενώς στη Γερμανία, την Αυστρία και την Ιταλία, με στόχο την αναζήτηση και εξεύρεση αρχειακού υλικού που θα τον βοηθούσε να φέρει εις πέρας αυτό το έργο. Δεκαετίες πέρασαν άλλα καμία ιστορία δεν φάνηκε. Ο επόμενος εκλέκτορας ήταν αρκετά ενοχλημένος από την εμφανή αναβλητικότητα του Leibniz. Ο Leibniz ποτέ δεν ολοκλήρωσε το έργο, εν μέρει λόγω της τεράστιας ενασχόλησής του σε πολλά άλλα μέτωπα, αλλά και γιατί επέμενε για τη σύνταξη μιας εμπεριστατωμένης μελέτης βασισμένης σε αρχειακές πηγές, όταν οι εντολείς του θα ήταν αρκετά ικανοποιημένοι με ένα σύντομο και δημοφιλές βιβλίο, ίσως λίγο περισσότερο από μια γενεαλογία με σχόλια, που θα είχε ολοκληρωθεί σε τρία έτη ή και λιγότερο. Οι εντολείς του δεν γνώριζαν ότι είχε φέρει εις πέρας ένα σημαντικά μεγάλο κομμάτι της εργασίας του που τελικά δημοσιεύθηκε τον 19ο αιώνα, σε τρεις τόμους.

Ο πληθυσμός του Ανόβερο ήταν μόνο 10000 κάτοικοι και ο επαρχιωτισμός του ενοχλούσε τον Leibniz. Παρ 'όλα αυτά, το γεγονός ότι ήταν βασικός αυλικός στη Βουλή των Brunswick ήταν τιμή για τον ίδιο, ιδιαίτερα υπό το πρίσμα της ραγδαίας αύξησης του κύρους της Βουλής την περίοδο εκείνη. Το 1692, Ο Δούκας του Brunswick έγινε εκλέκτορας με κληρονομική ιδιότητα του Αυτοκράτορα της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας. Με βρετανικό νόμο του 1701 ορίζεται η Εκλέκτορας Σοφία και οι απόγονοί της, ως η βασιλική οικογένεια του Ηνωμένου Βασιλείου, από τη στιγμή που ο Βασιλιάς William III και η κουνιάδα και διάδοχός του, Βασίλισσα Άννα, ήταν νεκροί. Ο Leibniz έπαιξε ρόλο στις πρωτοβουλίες και τις διαπραγματεύσεις που οδήγησαν σε αυτό το νόμο, αλλά δεν είναι πάντα αποτελεσματικές. Παράδειγμα, κάτι που δημοσίευσε ανώνυμα στην Αγγλία, για την προώθηση της σκέψης του Brunswick προκάλεσε την επιβολή κυρώσεων από το Βρετανικό Κοινοβούλιο.

Το 1711, ο John Keill, σε άρθρο του στην Εφημερίδα της Βασιλικής Κοινωνίας και με υποτιθέμενη την ευλογία του Newton, κατηγορεί τον Leibniz για σφετερισμό του λογισμού του Newton. Έτσι άρχισε η διαφορά για το λογισμό η οποία αμαύρωσε το υπόλοιπο της ζωής του Leibniz. Η επίσημη έρευνα της Βασιλικής Κοινωνίας (της οποία ο Newton ήταν ανεπίσημο μέλος), μετά από αίτηση του Leibniz να ανακαλέσει

ο Keill , κατέληξε σε επιβολή κυρώσεων στον Keill. Οι ιστορικοί των μαθηματικών από το 1900 και μετά, τείνουν να απαλλάσσουν από τις κατηγορίες τον Leibniz, δείχνοντας σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο λογισμών.

Το 1711, ενώ ταξίδευε στη βόρεια Ευρώπη, ο Ρώσος Τσάρος Πέτρος ο Μεγάλος σταμάτησε στο Ανόβερο και συναντήθηκε με τον Leibniz, ο οποίος στη συνέχεια άρχισε να δείχνει κάποιο ενδιαφέρον για ρωσικές υποθέσεις. Το 1712, άρχισε η διετής παραμονή του Leibniz στη Βιέννη, όπου ανέλαβε τη θέση του συμβούλου στο Imperial Court of Habsburgs. Με το θάνατο της Βασίλισσας Άννας στο 1714, ο εκλέκτορας Georg Ludwig έγινε ο βασιλιάς Γεώργιος Α' της Μεγάλης Βρετανίας, σύμφωνα με τους όρους του νόμου του έτους 1701. Ακόμη και αν Leibniz είχε κάνει πολλά για να φέρει αυτή τη στιγμή, δεν ήταν η ώρα της δόξας του. Παρά τη μεσολάβηση της πριγκίπισσας της Ουαλίας, Caroline του Ansbach, ο Γεώργιος ο Α' απαγόρευσε στον Leibniz να πάει μαζί του στο Λονδίνο μέχρι να ολοκληρωθεί τουλάχιστον ένας τόμος της ιστορίας του Brunswick που ο πατέρας του είχε αναθέσει σχεδόν 30 χρόνια νωρίτερα. Επιπλέον, για τον Γεώργιο τον Α' θα ήταν προσβολή προς τον Newton, που εκείνο το διάστημα είχε κερδίσει την πατρότητα του λογισμού και απολάμβανε υψηλής εκτίμησης στους επίσημους Βρετανικούς κύκλους, να συμπεριλαμβάνουν τον Leibniz στο δικαστήριο του Λονδίνου. Τέλος, η αγαπητή φίλος και οπαδός του, Πριγκίπισσα Σοφία, πέθανε το 1714.

Ο Leibniz πέθανε στο Ανόβερο το 1716. Ούτε ο Γεώργιος ο Α' (ο οποίος έτυχε να είναι κοντά στο Ανόβερο τότε), ούτε και κανένας άλλος συνεργάτης του αυλικός εκτός από την προσωπική του γραμματέα παρακολούθησαν την κηδεία. Ακόμη και αν μια ζωή ο Leibniz ήταν μέλος της Βασιλικής Κοινωνίας και της Ακαδημίας Επιστημών του Βερολίνου, καμία οργάνωση δεν έκρινε σκόπιμο να τιμήσουν τον Leibniz με την παρουσία τους. Ο τάφος του ήταν ασημάδευτος για περισσότερο από 50 χρόνια. Ο Leibniz εξυμνήθηκε από τον Fontenelle, πριν από την Ακαδημία Επιστημών του Παρισιού, η οποία τον είχε κάνει μέλος από το 1700. Το εγκώμιο συντάχθηκε κατά προτροπή της Δούκισσας της Ορλεάνης, ανιψιάς της Πριγκίπισσας Σοφίας.

Ο Leibniz ποτέ δεν παντρεύτηκε. Παραπονέθηκε περιστασιακά για τα χρήματα, αλλά το ποσό που άφησε στο μοναδικό κληρονόμο του, υιό της αδελφής του, απέδειξε ότι το Brunswicks, σε γενικές γραμμές, τον είχε πληρώσει καλά. Στις διπλωματικές προσπάθειές του, φαινόταν πολύ συχνά ως αδίστακτος, όπως συνέβαινε γενικότερα με τους διπλωμάτες της εποχής εκείνης. Σε αρκετές περιπτώσεις, ο Leibniz προχρονολόγησε και άλλαξε τα προσωπικά χειρόγραφα, ενέργειες που δεν μπορούν να συγχωρηθούν ή να τον υπερασπίσουν στη διαμάχη για το λογισμού. Από την άλλη, ήταν γοητευτικός , ευγενής, με αρκετό χιούμορ και φαντασία και είχε πολλούς φίλους και θαυμαστές σε όλη την Ευρώπη.

Αντί Προλόγου

Περί το έτος 1669 άρχισε ο Isaac Newton να μελετάει μια μαθηματική μέθοδο, η οποία μπορούσε να διαχειριστεί όχι απλά συσχετισμούς (συναρτήσεις) μεταξύ μεταβλητών αλλά και το ρυθμό μεταβολής τους. Στο ίδιο θέμα άρχισε παράλληλα να εργάζεται λίγα χρόνια αργότερα και ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Leibniz (1646-1716), ο οποίος επινόησε την ίδια μέθοδο με τον Newton, με διαφορετικούς όμως συμβολισμούς. Η πρώτη σχετική δημοσίευση του Leibniz περί Διαφορικού Λογισμού έγινε το έτος 1675, ενώ η πρώτη δημοσίευση του Newton που αναφερόταν σε Απειροστικό Λογισμό έγινε το έτος 1704.

Βέβαια, και οι δύο ερευνητές στηρίχτηκαν σε προϋπάρχουσες γνώσεις των συναρτήσεων και της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ο δάσκαλος του Newton, Isaac Barrow, γνώριζε τον προβληματισμό γύρω από τη σχέση εφαπτομένης-χορδής σε μια καμπύλη, καθώς επίσης μεθόδους υπολογισμού επιφανειών. Επίσης ο Fermat είχε διατυπώσει λύσεις για το πρόβλημα ακραίων τιμών των συναρτήσεων (μέγιστα -ελάχιστα). Ο Newton και ο Leibniz συνένωσαν αυτές τις προϋπάρχουσες γνώσεις και διατύπωσαν μια συστηματική και, για την εποχή εκείνη, πρωτότυπη θεωρία. Με τη διατύπωση του Απειροστικού Λογισμού ξεπέρασε η επιστήμη των Μαθηματικών για πρώτη φορά τα πλαίσια που είχαν τεθεί από τους αρχαίους Έλληνες και τα οποία είχαν διαφοροποιηθεί ελάχιστα κατά τους ενδιάμεσους αιώνες.

Αν και από τα χειρόγραφα προκύπτει ότι προηγήθηκε χρονικά ο Newton, ο οποίος είχε καταθέσει στη Βασιλική Εταιρεία σχετικές μελέτες του, χωρίς προηγουμένως να τις δημοσιεύσει, η διατύπωση του Διαφορικού Λογισμού από τον Leibniz έτυχε μεγαλύτερης αποδοχής στην Ευρώπη, λόγω του χρονικού προβαδίσματος, αλλά κυρίως εξ αιτίας του πετυχημένου συμβολισμού που εισήγαγε ο μεγάλος αυτός ερευνητής. Να σημειωθεί ότι ακριβώς αυτός ο συμβολισμός του Leibniz χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα στις μαθηματικές εφαρμογές. Ο Newton, φύση καχύποπτη και μοναχική, κατηγόρησε δημόσια τον Leibniz ότι αντέγραψε τη θεωρία του, όταν ο τελευταίος είχε επισκεφτεί τη Βασιλική Εταιρεία και μελέτησε τα κατατεθειμένα χειρόγραφα του Newton.

Έτσι στην επιστημονική κοινότητα της Ευρώπης άρχισε στις πρώτες δεκαετίες του 18ου αιώνα μια σφοδρή αντιδικία για την προτεραιότητα στην επινόηση του Διαφορικού Λογισμού. Μεταξύ Γερμανών και Άγγλων εξελίχθηκαν «ομηρικές μάχες» επιχειρηματολογίας και κατηγοριών με εθνικιστική χροιά, οι οποίες αναζωπύρωσαν αμοιβαίες έχθρες και προκαταλήψεις μεταξύ των δύο λαών, όπως συμβαίνει πάντα σε ανάλογες περιπτώσεις. Αυτή η αντιδικία δηλητηρίασε την επιστημονική ατμόσφαιρα στην Ευρώπη για πολλές δεκαετίες. Τελικά, όταν ηρέμησαν τα πνεύματα και αφού οι επιστημονικοί πρωτεργάτες είχαν ήδη πεθάνει,

επιβεβαιώθηκε ότι οι δύο αυτοί σπουδαίοι εκπρόσωποι του ευρωπαϊκού πνεύματος, είχαν οδηγηθεί σε όμοιες σκέψεις και ίδια συμπεράσματα, ωθούμενοι από τα προϋπάρχοντα πορίσματα, τους διάχυτους επιστημονικούς προβληματισμούς και τα ερωτήματα των φυσιοδιφών προς τους μαθηματικούς.

Η επιστήμη στις αρχές του 18ου αιώνα δεν ήταν οργανωμένη σύμφωνα με τους σημερινές υποδιαιρέσεις και κατηγοριοποιήσεις. Για παράδειγμα, την εποχή εκείνη δεν υπήρχε επιστήμη της «Φυσικής», όπως διαφοροποιείται σήμερα, αλλά ένα γενικότερο γνωστικό και ερευνητικό αντικείμενο, το οποίο κάλυπτε τα φαινόμενα που αφορούν όλα τα έμβια και μη έμβια όντα. Την εποχή εκείνη, αυτό που αποκαλούμε σήμερα Φυσική ονομαζόταν μικτά μαθηματικά (mixed mathematics) και περιελάμβανε την αστρονομία, την οπτική, τη στατική, την υδραυλική, τη γεωγραφία, την κατασκευή ηλιακών και μηχανικών ρολογιών, τη ναυσιπλοΐα, την τοπογραφία, την οχυρωτική και μερικούς ακόμα τομείς.

Το 17ο και 18ο αιώνα, γιατρός και φυσικός ήταν το ίδιο πράγμα, αν και σταδιακά άρχισαν να διαχωρίζονται οι αρμοδιότητές τους. Η χημεία ήταν τομέας δραστηριοποίησης των γιατρών, η οποία χημεία κάλυπτε όμως και την ορυκτολογία, με αποτέλεσμα να επικαλύπτεται με τη φυσική ιστορία. Ζωολογία, βοτανική, γεωλογία και μετεωρολογία υπάγονταν στη φυσική ιστορία. Σταδιακά άρχισαν βέβαια μετακινήσεις και διαφοροποιήσεις, μέχρι να προκύψουν και νέοι κλάδοι, ώστε να καταλήξουμε στις επιστημονικές κατηγορίες του 20ου αιώνα. Η δημιουργία και καλλιέργεια των νέων επιστημονικών κλάδων αποτελεί άλλο ένα σημαντικό σημάδι για το πέρασμα από την παλιά (ουσιαστικά την αρχαιοελληνική και ό,τι εντωμεταξύ προστέθηκε) στη νέα επιστήμη, αυτή που σήμερα ονομάζουμε σύγχρονη.

Στο πέρασμα προς τη νέα εποχή που ονομάστηκε αργότερα Εποχή του Διαφωτισμού, κληροδοτήθηκε στους επιστήμονες η λεγόμενη μηχανοκρατική (μηχανιστική) αντίληψη. Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη που θεμελίωσε ουσιαστικά ο Καρτέσιος, αλλά επεξεργάστηκαν οι μεταγενέστεροί του, όλα τα φυσικά φαινόμενα εξηγούνταν με βάση τις αρχές της Μηχανικής. Με τη διαγραφή των αριστοτελικών αρχών η μηχανοκρατική αντίληψη έπρεπε να δώσει εξηγήσεις με βάση την κίνηση και τις αλληλεπιδράσεις της ύλης. Οι αποδεχόμενοι τη μηχανοκρατική αντίληψη βρίσκονταν αντιμέτωποι με τους υποστηρικτές των αριστοτελικών απόψεων, ήταν όμως και μεταξύ τους διχασμένοι. Κύριο αντικείμενο διχογνωμίας ήταν η σημασία και ο ρόλος της δύναμης.

Ο Καρτέσιος που δεν είχε απορρίψει στο σύνολό τους τις αριστοτελικές αντιλήψεις, υποστήριζε ότι δεν ενυπάρχουν στην ύλη δυνάμεις και η κίνηση μεταδίδεται από το ένα σώμα στο άλλο με την επαφή. Η έννοια της κινούμενη ύλης ήταν δυνατόν, κατά τον Καρτέσιο, να εξηγήσει όλα τα φυσικά φαινόμενα. Ο λόγος που απέρριπτε ο

Καρτέσιος την ύπαρξη εσωτερικής δύναμης στην ύλη ήταν η αντίθεσή του με την αναγεννησιακή θεωρία του ανιμισμού (ψυχισμού), σύμφωνα με την οποία, κάθε κομμάτι της φύσης είχε ψυχή. Με αυτό το σκεπτικό, διάφοροι οπαδοί αυτών των απόψεων έβαζαν στην κουβέντα και το θεό, λέγοντας ότι, τυχόν ύπαρξη δύναμης στην ύλη μόνο θεϊκής προελεύσεως μπορεί να ήταν. Κατά τη σύγκρουση δύο σωμάτων δεν ασκείται μεταξύ τους καμιά δύναμη, αλλά δίνεται η ευκαιρία στο θεό να δραστηριοποιήσει τις εσωτερικές δυνάμεις και να προσδιορίσει τις κινήσεις που θα προκύψουν! Την εποχή εκείνη, ό,τι δεν μπορούσε να εξηγηθεί επαρκώς με τη λογική, παραπεμπόταν στο θεό και όλα εύρισκαν την τάξη τους.

Ο Leibniz υποστήριζε ότι η δύναμη είναι μια εσωτερική ιδιότητα της ύλης και η δύναμη είναι κάτι περισσότερο πραγματικό από την ίδια την ύλη. Διαιρώντας την ύλη σε όλο και λεπτότερα κομμάτια (κάτι που θυμίζει διαφορικό λογισμό), αυτό που καταλήγουμε δεν είναι πια ύλη αλλά άυλες μεταφυσικές οντότητες, οι οποίες είναι πηγές των δυνάμεων. Για να μπορέσει να περιγραφεί επαρκώς η φύση πρέπει, σύμφωνα με τον Leibniz, εκτός από την ύλη και τις δυνάμεις, να συμπεριλάβουμε στις θεωρήσεις μας την ψυχή και τη βούληση. Το σύνολο αυτό των όντων και των διεργασιών που αποτελεί τη φύση, είναι ο ίδιος ο θεός!

Ο Newton είχε επίσης μηχανοκρατική αντίληψη των πραγμάτων, αλλά αναγνώριζε την ύπαρξη και τη σημασία των δυνάμεων. Για το μεγάλο αυτό ερευνητή η ύλη ήταν σύνολο αδρανών σωματιδίων και ανάμεσα σε κάθε ζεύγος αυτών των σωματιδίων δρα μια, ελκτική ή απωστική δύναμη! Για τη φύση της βαρυτικής δύναμης δεν μπορούσε όμως να πει τίποτα ο Newton και αυτό θεωρείτο τότε ένα μειονέκτημα! Οι αντίπαλοί του θα είχαν βέβαια άλλη άποψη, αν μπορούσαν τότε να φανταστούν ότι και στον 21ο αιώνα αγνοείται η φύση της ελκτικής (και όχι απωστικής) δύναμης μεταξύ μαζών! Πάντως και ο Newton κάνει λόγο σε αλχημιστικές και θεολογικές μελέτες του για παρεμβολή θεϊκών δυνάμεων, οι οποίες όμως σε καμιά περίπτωση δεν ήταν εσωτερικές. Αν αρνηθούμε, έγραφε, την ύπαρξη και των δυνάμεων, είναι σαν να αρνούμαστε την ύπαρξη του θεού!

Μια σημαντική διαμάχη που εξελίχθηκε στο πέρασμα του 17ου προς το 18ο αιώνα, αφορούσε τη ζώσα δύναμη (vis vita), την οποία εισήγαγε ως έννοια ο Leibniz το έτος 1686. Αυτή η «δύναμη» πρέπει να διατηρείται σταθερή στο σύμπαν και να εξασφαλίζει την ανεμπόδιστη λειτουργία του. Έτσι δεν υπήρχε λόγος για οποιαδήποτε παρέμβαση του θεού! Κατά συνέπεια, το σύμπαν συνεχίζει να λειτουργεί μόνο του, σύμφωνα με τους φυσικούς νόμους και ο θεός περιορίζεται από ρυθμιστή κάθε κίνησης στο σύμπαν σε αρχικό δημιουργό του. Ο Newton και οι συμφωνούντες μαζί του υποστήριζαν ότι έτσι μειώνεται ή εξαφανίζεται η σημασία του θεού, ο Leibniz και η πλευρά του απαντούσαν ότι, μια φύση που χρειάζεται συνεχή παρέμβαση και ρύθμιση στη λειτουργία της, θα ήταν ατελής, άρα θα έπρεπε να δεχθούν ότι ο θεός δημιούργησε ένα ατελές κατασκεύασμα.

Για να ξεφύγουν οι φιλόσοφοι από τη θεολογική αντιπαράθεση, εισηγήθηκαν την εισαγωγή ενός φυσικού μεγέθους, το οποίο μένει αναλλοίωτο και δημιουργήθηκε από το θεό για να μην απαιτείται διαρκώς η παρέμβασή του. Ο Καρτέσιος είχε προτείνει ως τέτοιο διατηρητέο μέγεθος το γινόμενο μάζα x ταχύτητα (=ορμή), ενώ ο Leibniz πρότεινε την vis viva, δηλαδή το γινόμενο μάζα x ταχύτητα^2 (=ενέργεια). Τότε δεν ήταν δυνατόν να διαπιστωθεί με τη βοήθεια πειραμάτων ακριβείας, ποιο από τα δύο μεγέθη διατηρείται σταθερό. Σήμερα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν, όχι μόνο δύο αλλά τέσσερις αρχές διατηρήσεως στη Φυσική.

Όλες αυτές οι θεωρίες που περιγράφηκαν και πολλές ακόμα εκείνης της εποχής, απλούστερες ή συνθετότερες, ανταποκρίνονταν σε κάποιο θρησκευτικό κίνητρο. Οι ερευνητές δεν μπορούσαν ακόμα να αποχωριστούν μεταφυσικές αντιλήψεις και δοξασίες πολλών αιώνων για να εξηγήσουν και να περιγράψουν τα φυσικά φαινόμενα. Η διαδικασία απεμπλοκής από τον παλαιό κόσμο της πίστης και το πέρασμα στο νέο κόσμο της επιστημονικής γνώσης ήταν επώδυνος και μακρύς.

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας, είναι να περιγραφεί το **διαφορικό**, η θεμελιώδης έννοια του λογισμού του Leibniz, σύμφωνα με τις αντιλήψεις του Leibniz, άλλα και των μαθηματικών εκείνων που στα τέλη του 17^{ου} αιώνα και τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα ανέπτυξαν τον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό, ακολουθώντας τις απόψεις του μεγάλου Γερμανού στοχαστή. Το μεγαλύτερο μέρος της μελέτης αυτής βασίζεται στο άρθρο του H.J. Bos "Differentials and Derivatives in Leibniz's Calculus".

Υπάρχουν τρεις πορείες στην ιστορία της ανάλυσης κατά τον δέκατο έβδομο και δέκατο όγδοο αιώνα που είναι κρίσιμης σπουδαιότητας για την ιστορία της έννοιας του διαφορικού. Η πρώτη, που σημειώνεται κατά τις δεκαετίες του 1680 και του 1690, είναι η ενσωμάτωση της απειροστικής ανάλυσης του Leibniz στην Καρτεσιανή ανάλυση, η οποία μέχρι εκείνη τη στιγμή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η μελέτη καμπύλων με τη βοήθεια αλγεβρικών τεχνικών, όπως περιγράφεται από τον L'Hôpital το 1696 στο σύγγραμμά του[1].

Η δεύτερη διαδικασία, που εμφανίζεται γύρω στο πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα, ήταν ο διαχωρισμός της ανάλυσης από τη γεωμετρία. Από εργαλείο για τη μελέτη των καμπύλων, η ανάλυση αναπτύχθηκε σε έναν ξεχωριστό κλάδο των μαθηματικών, του οποίου το περιεχόμενο δεν ήταν πλέον οι σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών ποσοτήτων των συνδεδεμένων με κάποια καμπύλη, αλλά οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων γενικά που εκφράζονταν με τύπους που περιέχουν γράμματα και αριθμούς.

Αυτή η αλλαγή του ενδιαφέροντος από την καμπύλη στον τύπο προκάλεσε μια αλλαγή στις θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης. Ενώ στη γεωμετρική φάση η θεμελιώδης έννοια στην αναλυτική μελέτη των καμπύλων ήταν η μεταβλητή γεωμετρική ποσότητα, ο διαχωρισμός της ανάλυσης από τη γεωμετρία κατέστησε δυνατή την ανάγκη εμφάνισης της έννοιας της συνάρτησης μιας μεταβλητής, η οποία αντικατέστησε τελικά τη μεταβλητή γεωμετρική ποσότητα, ως θεμελιώδη έννοια της ανάλυσης.

---

[1] *"Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" - (Ανάλυση των απειροστών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών.)*

Σε αυτήν τη διαδικασία διαχωρισμού από τη γεωμετρία, το διαφορικό οδηγήθηκε σε μια αντίστοιχη αλλαγή. Αποδεσμεύτηκε από τις γεωμετρικές υποστάσεις του και αντιμετωπίστηκε μόνο ως σύμβολο, όπως τα υπόλοιπα σύμβολα που εμφανίζονται στους τύπους. Εντούτοις, σε όλο το πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα το διαφορικό διατήρησε τη θέση του ως θεμελιώδης έννοια του απειροστικού λογισμού του Leibniz.

Η τρίτη ενδιαφέρουσα πορεία, είναι η αντικατάσταση του διαφορικού από την παράγωγο, ως θεμελιώδης έννοια της απειροστικής ανάλυσης. Συνήθως αυτή η διαδικασία είναι συνδεδεμένη με τις εργασίες των Lagrange και Cauchy, αλλά κατά τον Bos, μια σημαντική πτυχή της απορρέει από τις εργασίες του Euler.

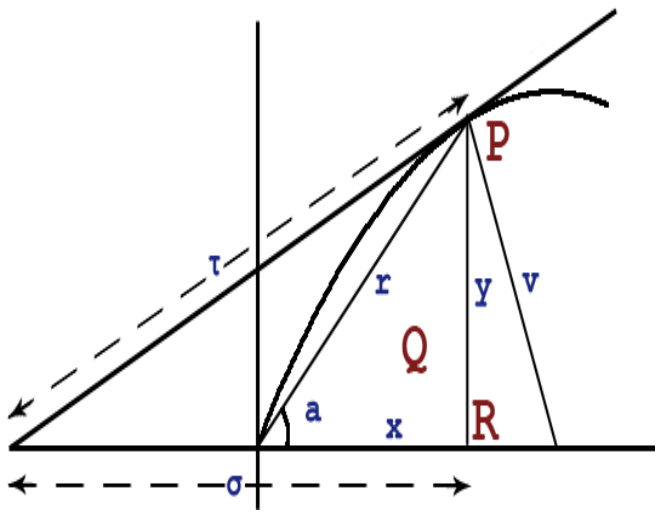
Από την εκτίμηση της χρονολογικής σειράς κατά την οποία συνέβησαν οι τρεις πορείες που προαναφέρθηκαν, είναι σαφές ότι ο εμβρυακός απειροστικός λογισμός του Leibniz, όπως χρησιμοποιήθηκε από τον Leibniz και τους υποστηρικτές του γύρω στα έτη 1680 με 1690, ήταν μέρος μιας ανάλυσης που πρωταρχικά αφορούσε τις καμπύλες ή τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών γεωμετρικών ποσοτήτων που ενσωματώνονταν στην καμπύλη. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ο λογισμός του Leibniz δε γίνεται κατανοητός χωρίς αναφορά στη γεωμετρική του ερμηνεία. Στην πορεία θα γίνει σαφές πόσο πολύ ο εμβρυακός λογισμός του Leibniz διέφερε από τη μαθηματική θεωρία και την πρακτική που θεωρούμε σήμερα με τον όρο «λογισμός».

Η ανάλυση του 17^{ου} αιώνα ήταν ένα σύνολο αναλυτικών εργαλείων (αλγεβρικών εξισώσεων και διαδικασιών και αργότερα το διαφορικό και οι κανόνες λογισμού) για τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων, δηλαδή καμπυλόγραμμων γραμμών. Το πρώτο εγχειρίδιο του απειροστικού λογισμού είχε τον τίτλο: “Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes” (Ανάλυση των απειροστών για την κατανόηση των καμπύλων γραμμών)[2].

Το θεμελιώδες αντικείμενο της έρευνας, επομένως, ήταν η καμπύλη. Μια καμπύλη ενσωματώνει τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων μεταβλητών γεωμετρικών ποσοτήτων που καθορίζονται όσον αφορά ένα μεταβλητό σημείο στην καμπύλη. Τέτοιες μεταβλητές γεωμετρικές ποσότητες - ή μεταβλητές όπως καλούνται σε συντομία - είναι για παράδειγμα (βλέπε το σχήμα):

---

[2] *L'Hopital 1696.*



Σχήμα 1.

x: τετμημένη,

y: τεταγμένη,

s: τόξο,

r: ακτίνα,

α: πολική γωνία,

σ: υποεφαπτομένη

τ: εφαπτομένη,

v: κάθετη

OPR (Q): Η περιοχή μεταξύ του της καμπύλης s και του άξονα X (OR),

xy: περιγεγραμμένο ορθογώνιο.

Οι σχέσεις μεταξύ αυτών των μεταβλητών εκφράστηκαν, όπου μπορούσαν να εκφραστούν, με τη βοήθεια εξισώσεων. Αυτό δεν ήταν πάντα δυνατό. Μέχρι πριν από το τέλος του δέκατου έβδομου αιώνα όπου και δεν υπήρχαν τύποι για τις υπερβατικές σχέσεις, και αυτές εκφράζονταν περιφραστικά, εκφράζοντας μία μέθοδο κατασκευής της καμπύλης που παρίστανε την υπερβατική σχέση.

Η καρτεσιανή ανάλυση ήταν αυτή που εισήγαγε τη χρήση των εξισώσεων ώστε να αντιπροσωπεύσει και να αναλύσει τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών των συνδεδεμένων με την καμπύλη. Συνήθως η σχέση μεταξύ της τεταγμένης και της τετμημένης θεωρούνταν ως θεμελιώδης.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί η απουσία της έννοιας της συνάρτησης σε αυτό το πλαίσιο των αλγεβρικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών. Ούτε οι εξισώσεις ούτε οι μεταβλητές ήταν συναρτήσεις με την έννοια μιας απεικόνισης x→y(x), δηλαδή μιας μονοσήμαντα ορισμένης σχέσης μεταξύ μιας «ανεξάρτητης» μεταβλητής x και μιας «εξαρτημένης» μεταβλητής y. Η σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y θεωρήθηκε ως μια οντότητα, και όχι ως ένας συνδυασμός από δύο αμοιβαία αντίστροφες απεικονίσεις x→y(x) και y→x(y). Κατά συνέπεια η καμπύλη δεν ερμηνεύτηκε ως το γράφημα μιας συνάρτησης x→y(x), αλλά ως ένα σχήμα που εμπεριέχει τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y.

Οι μεταβλητές δεν είναι συναρτήσεις, επειδή η έννοια της μεταβλητής δεν περιέχει την εξάρτηση της μιας μεταβλητής από μία άλλη, ειδικά ορισμένης ως «ανεξάρτητης» μεταβλητής.

Η απουσία της έννοιας της συνάρτησης επηρεάζει διάφορες πτυχές του εμβρυακού λογισμού. Παράδειγμα, δικαιολογείται η απουσία της έννοιας της παραγώγου, καθόσον αυτή προϋποθέτει την έννοια της συνάρτησης.

Οι μεταβλητές της γεωμετρικής ανάλυσης αναφέρονταν σε γεωμετρικές ποσότητες, οι οποίες δεν ήταν πραγματικοί αριθμοί. Για τη γεωμετρική ποσότητα, ή την ποσότητα γενικά, όπως θεωρούνταν από τους μαθηματικούς μέχρι το δέκατο έβδομο αιώνα, λείπει η πολλαπλασιαστική δομή και το μοναδιαίο στοιχείο. Οι ποσότητες θεωρούνταν ότι έχουν μία διάσταση. Οι γεωμετρικές ποσότητες θα μπορούσαν να έχουν τη διάσταση της γραμμής (π.χ. τεταγμένη, μήκος τόξου, υποεφαπτομένη), μιας περιοχής (π.χ. η περιοχή μεταξύ της καμπύλης και των αξόνων) ή ενός στερεού (π.χ. το στερεό που δημιουργεί η περιστροφή μίας καμπύλης). Εκτός γεωμετρίας υπάρχουν οι ποσότητες διαφορετικών διαστάσεων όπως η ταχύτητα, η μάζα, η δύναμη, κ.λπ.. Επιπλέον, ο αλγεβρικός χειρισμός, ειδικά των γεωμετρικών ποσοτήτων, οδήγησε σε διαστάσεις υψηλότερες από αυτές του στερεού. Αν και αυτές οι ποσότητες υψηλότερης διάστασης, όπως για παράδειγμα οι δυνάμεις a^4 και b^5 των ευθυγράμμων τμημάτων a και b, αν και δε φαίνεται να είναι άμεσα αντιληπτές στο χώρο, έγιναν αποδεκτές στην ανάλυση και η διάσταση τους καθορίστηκε από τον αριθμό των παραγόντων με τη διάσταση της γραμμής.

Μόνο οι ποσότητες της ίδιας διάστασης θα μπορούσαν να προστεθούν. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο πολλαπλασιασμός των ποσοτήτων ήταν αποδεκτός, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση δύο ευθυγράμμων τμημάτων, το γινόμενο των οποίων θα μπορούσε να είναι ένα εμβαδόν. Αλλά ο πολλαπλασιασμός δεν ήταν ποτέ μια κλειστή διαδικασία, δηλαδή το γινόμενο δύο ποσοτήτων ίσης διάστασης δεν μπορούσε να έχει την ίδια διάσταση. Ως εκ τούτου μέσα στο σύνολο ποσοτήτων της ίδιας διάστασης δεν υπήρχε η πολλαπλασιαστική δομή και το μοναδιαίο στοιχείο. Η επιλογή ενός ανώτερου στοιχείου στο σύνολο ποσοτήτων της ίδιας διάστασης (για παράδειγμα, ως μία βάση για τη μέτρηση, ή ως θεμελιώδη σταθερά για ορισμένες καμπύλες ή ως μοναδιαίο στοιχείο) ήταν επομένως πάντα αυθαίρετη: η ίδια η δομή της ποσότητας δεν πρόσφερε ένα τέτοιο ανώτερο στοιχείο.

Αυτές οι δυνατότητες του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης κατέστησαν πιθανή την αλγεβρική αντιμετώπιση των ποσοτήτων, αν και με ορισμένους περιορισμούς. Η ειδική φύση του πολλαπλασιασμού προκάλεσε τον κανόνα της ομογένειας των διαστάσεων για τις εξισώσεις που εμφανίζονται σε αυτήν την αλγεβρική επεξεργασία: όλοι οι όροι μιας εξίσωσης έπρεπε να είναι της ίδιας διάστασης.

Ήδη από το 1637 ο Καρτέσιος (René Descartes, 1596-1650) είχε υποδείξει πώς οι απαιτήσεις της ομογένειας των διαστάσεων θα μπορούσαν να παρακαμφτούν και πώς ο πολλαπλασιασμός των ευθυγράμμων τμημάτων—όπως συμβαίνει και με τις

αρχικές ποσότητες γενικά- θα μπορούσε να οριστεί έτσι ώστε το γινόμενο που θα προκύψει να είναι επίσης, ευθύγραμμο τμήμα. Ο Καρτέσιος επέλεξε ένα αυθαίρετο ευθύγραμμο τμήμα ως μοναδιαίο και όρισε το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και b ως το ευθύγραμμο τμήμα c που ικανοποιεί την αναλογία

$$1: a=b: c.$$

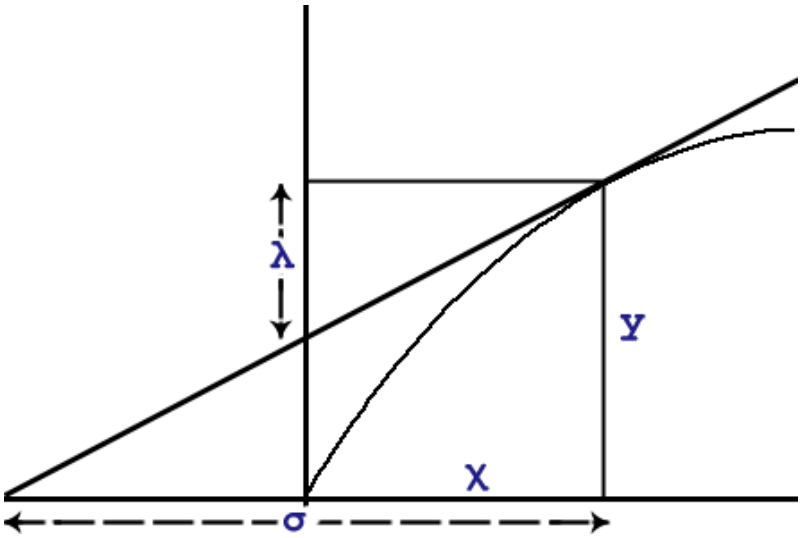
Ειδικότερα, παρουσίασε τις δυνάμεις, με τον εξής τρόπο: εάν x είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, το x^2 είναι ευθύγραμμο τμήμα τέτοιο ώστε

$$1: x=x: x^2.$$

Αυτή η λύση του προβλήματος της διάστασης ήταν χρήσιμη στη θεωρία των εξισώσεων με έναν άγνωστο. Τα παραπάνω θα μπορούσαν σήμερα να ερμηνευθούν ως σχέσεις μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων, και οι λύσεις που θα προέκυπταν θα ήταν επίσης ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε και οι άρρητες λύσεις των εξισώσεων και οι διαστάσεις οι μεγαλύτερες από αυτήν του στερεού έγιναν ερμηνεύσιμες.

Αλλά στην αναλυτική μελέτη των καμπύλων, η ομογένεια των διαστάσεων στις εξισώσεις συνέχισε να είναι μια σημαντική απαίτηση τουλάχιστον μέχρι το δέκατο όγδοο αιώνα. Αυτό δεν μας εκπλήσσει διότι σε εκείνο το κομμάτι των μαθηματικών που ανήκει η ομογένεια των διαστάσεων δεν υπήρχε κάποιο άμεσο πλεονέκτημα, εκτός από το να καταστήσει τις υψηλότερες δυνάμεις ερμηνεύσιμες. Η εισαγωγή της μονάδας προϋποθέτει μια αυθαίρετη επιλογή που παραβιάζει τη γενικότητα, και επίσης η ομογένεια των διαστάσεων επαληθεύει τη φυσική γεωμετρική ερμηνεία κάθε βήματος στην αλγεβρική ανάλυση και έτσι παρέχει ένα χρήσιμο έλεγχο στους περίπλοκους υπολογισμούς.

Σε μια γεωμετρική ανάλυση που διατηρεί την ομογένεια των διαστάσεων δεν είναι απαραίτητο να εισαχθεί μία μονάδα μήκους, και επομένως οι γεωμετρικές ποσότητες όπως το μήκος, το εμβαδόν, κ.λπ. δεν διαβαθμίζονται, καθώς δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, που αντιπροσωπεύουν έναν λόγο προς μία βασική μονάδα. Οι πραγματικοί αριθμοί εμφανίζονται στην ανάλυση μόνο ως ακέραιοι ή κλασματικοί παράγοντες των όρων της εξίσωσης, ή ως κλάσμα δύο ποσοτήτων της ίδιας διάστασης.



Σχήμα 2.

Είναι ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι επιπτώσεις του γεγονότος ότι ο εμβρυακός απειροστικός λογισμός του Leibniz ήταν ένας γεωμετρικός λογισμός και να δοθούν εξηγήσεις για την απουσία της έννοιας της παραγώγου. Η έννοια της παραγώγου, ως γνωστόν, προϋποθέτει την έννοια της συνάρτησης (επειδή η παράγωγος dy/dx είναι η παράγωγος μιας συνάρτησης y(x)), και δεδομένου ότι η τελευταία ήταν ουσιαστικά απούσα από την ανάλυση των γεωμετρικών προβλημάτων, το ίδιο συνέβαινε και με την πρώτη. Στην απεικόνιση της καμπύλης, η εφαπτομένη και οι συνδεδεμένες μεταβλητές (βλέπε σχήμα), η παράγωγος dy/dx, εμφανίζεται μόνο ως λόγος της τεταγμένης y προς την υποεφαπτομένη σ. Αυτός ο λόγος δεν έχει καμία προφανή κεντρική θέση στην απεικόνιση και επομένως, η επιλογή του ως θεμελιώδης έννοια θα ήταν αυθαίρετη. Πράγματι, δεν είναι με αυτόν τον τρόπο σαφές, γιατί πρέπει να επιλεγεί ο λόγος y/σ αντί του λόγου x/λ. Με άλλα λόγια, η επιλογή του y/σ υπονοεί την αυθαίρετη επιλογή της θεώρησης του y ως συνάρτηση του x, παρά του x ως συνάρτηση του y, ή και τις δύο μεταβλητές x και y ως συναρτήσεις κάποιας άλλης μεταβλητής.

Αλλά υπάρχει ακόμα ένας άλλος λόγος για τον οποίο η παράγωγος δεν θα μπορούσε να εμφανιστεί φυσικά σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο, και αυτός ο λόγος είναι συνδεδεμένος με την ερμηνεία των διαστάσεων των γεωμετρικών ποσοτήτων. Εάν ο λόγος y/σ θεωρείται ως παράγωγος της μεταβλητής y, κατόπιν η παραγώγιση θα συσχέτιζε έναν λόγο (την παράγωγο) με μια μεταβλητή που έχει τη διάσταση του μήκους. Αυτό υπονοεί ότι αυτή η λειτουργία δεν μπορεί να επαναληφθεί με φυσικό τρόπο επειδή δεν είναι ξεκάθαρο ποιο είδος ποσότητας θα μπορούσε να συσχετιστεί με μια αναλογία. Ο μόνος τρόπος να εισαχθούν επαναλαμβανόμενες παράγωγοι θα ήταν να ερμηνευθεί ο λόγος y/σ με κάποιο τρόπο ως ευθύγραμμο τμήμα, και στη συνέχεια να σχεδιαστεί μια νέα καμπύλη κατά

μήκος του άξονα των x με τεταγμένη y/σ. Ο λόγος της τεταγμένης και της υποεφαπτομένης αυτής της νέας καμπύλης θα μπορούσε να είναι η παράγωγος της παραγώγου. Αλλά ο λόγος y/σ είναι ένας πραγματικός αριθμός, και επομένως η ερμηνεία του ως ευθύγραμμο τμήμα περιλαμβάνει την επιλογή μιας μονάδας μήκους. Δεδομένου ότι η μονάδα δεν δίνεται από την αρχή, υπονοεί μια αυθαίρετη επιλογή και αυτό σε ένα καθαρά γεωμετρικό πλαίσιο σημαίνει ότι οι παράγωγοι ανώτερης τάξης δεν θα ορίζονταν μοναδικά.

Κατά συνέπεια η παράγωγος δε θα μπορούσε να εμφανιστεί στη γεωμετρική φάση του απειροστικού λογισμού, και αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε γιατί ο εμβρυακός απειροστικός λογισμός χτίστηκε επάνω στην έννοια του διαφορικού με όλα τα συνακόλουθα προβλήματά του που αφορούσαν το απείρως μικρό.

Μέχρι στιγμής έχουν αναφερθεί δύο διαφορετικές αιτίες για την απουσία της παραγώγου στις αρχές της περιόδου του λογισμού: η απουσία της έννοιας της συνάρτησης και οι απαιτήσεις της ερμηνείας των διαστάσεων. Και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά γνωρίσματα άλλαξαν καθώς η ανάλυση χωρίστηκε από τη γεωμετρία. Στο πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα, μια μετατόπιση ενδιαφέροντος εμφανίστηκε από την καμπύλη και τις γεωμετρικές ποσότητες στους τύπους που εξέφραζαν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ποσοτήτων. Οι αναλυτικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν αριθμούς και γράμματα, παρά τα γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία αντιπροσώπευαν, έγιναν το επίκεντρο του ενδιαφέροντος. Η ανησυχία για την ομογένεια των διαστάσεων εξασθένισε στους τύπους. Η ομογένεια σε αυτήν την περίπτωση επέζησε μόνο ως τεχνικός όρος για μια πρόσθετη ιδιότητα των τύπων. Αυτό σήμαινε ότι υποτέθηκε σιωπηλά ότι επιλέχτηκε μια μονάδα ποσότητας, ειδάλλως για την ομογένεια θα ήταν μια ουσιαστική απαίτηση για όλους τους τύπους. Ως εκ τούτου τα γράμματα στους τύπους αντιπροσώπευσαν τις διαβαθμισμένες ποσότητες, έτσι ώστε μπορούμε να πούμε ότι σε αυτήν τη φάση οι ενασχολούμενοι με την ανάλυση εργάζονταν με τους πραγματικούς αριθμούς βασισμένους στο μοντέλο της ευθείας των αριθμών, αλλά υπήρξε μικρό ενδιαφέρον για αυτό που υποδήλωναν τα γράμματα στους τύπους.

Αυτή η αλλαγή ενδιαφέροντος προς τον τύπο κατέστησε πιθανή την εμφάνιση της έννοιας «της συνάρτησης μιας μεταβλητής». Ο όρος «συνάρτηση» έχει την προέλευσή του στη γεωμετρική φάση της ανάλυσης. Ο Leibniz τον εισήγαγε στα μαθηματικά και τον χρησιμοποίησε για τις μεταβλητές γεωμετρικές ποσότητες όπως είναι οι συντεταγμένες, οι εφαπτομένες, οι ακτίνες καμπυλότητας, κ.λπ.. Αυτές ήταν οι «συναρτήσεις» της καμπύλης και δε θεωρήθηκαν ως εξαρτημένες από μια συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή. Στη συνέχεια, ο Johann Bernoulli έγραψε για τις δυνάμεις μιας μεταβλητής «ή για οποιαδήποτε συνάρτηση γενικά» μιας μεταβλητής. Ο Leibniz συμφώνησε με αυτή τη χρήση του όρου, ο οποίος έχασε έτσι

τις αρχικές γεωμετρικές υποστάσεις του και έγινε μια έννοια που συνδέθηκε περισσότερο με τους τύπους παρά με τα σχήματα.

Πράγματι είναι απόλυτα φυσικό ότι καθώς η ανάλυση χωρίστηκε από τη γεωμετρία, τα βασικά συστατικά των τύπων θα μετατραπούν σε θεμελιώδεις έννοιες. Η συνάρτηση, όπως ορίστηκε από το Johann Bernoulli και τον Euler, ήταν ένα βασικό συστατικό μέρος των τύπων, δηλαδή μια έκφραση που περιλάμβανε τις σταθερές ποσότητες (γράμματα και αριθμοί) και μόνο μια μεταβλητή ποσότητα (γράμμα).

Κατά συνέπεια έχουμε τον ορισμό του Bernoulli[3]:

> *Καλούμε συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας, μια ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από εκείνη τη μεταβλητή ποσότητα και από σταθερές.*

Καθώς και του Euler[4]:

> *Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από εκείνη τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.*

Ο Euler, στην πραγματικότητα, κινήθηκε ελαφρώς μακριά από την αναλυτική παρουσίαση: επέτρεψε τις έμμεσες σχέσεις ως συναρτήσεις και σε μελέτη του το 1755 έδωσε μια πολύ γενική διατύπωση της έννοιας της συνάρτησης:[5]

> *Εάν οι ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε εάν οι τελευταίες αλλάξουν, το ίδιο να συμβεί και στις πρώτες, τότε οι αρχικές ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτή η ορολογία είναι πολύ γενική και καλύπτει όλους τους τρόπους με τους οποίους μία ποσότητα μπορεί να οριστεί από άλλες.*

Επίσης, ο Euler επέκτεινε την έννοια της συνάρτησης σε εκφράσεις που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές. Η απαίτηση των συναρτήσεων με περισσότερες από μια μεταβλητές χαρακτηρίζει μια άλλη σημαντική απομάκρυνση από την γεωμετρική εφαρμογή της καμπύλης με τις συνδεδεμένες γεωμετρικές

---

[3] *Johann Bernoulli 1718, Opera II, σελ.241.*

[4] *Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, §4, (2 τόμοι), Lausanne, 1748.*

[5] *Euler, Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum, St. Petersburg, 1755.*

ποσότητες, δηλαδή μια μετακίνηση σε γενικές γραμμές από τα προβλήματα που περιλαμβάνουν μόνο έναν βαθμό ελευθερίας (όπως και για τις καμπύλες), σε εκείνα με οποιοδήποτε αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Ο διαχωρισμός της ανάλυσης από τη γεωμετρία εισήγαγε επομένως την έννοια της συνάρτησης και αφαίρεσε τη διαστατική ερμηνεία από τα αντικείμενα της μελέτης· ο δρόμος ήταν ανοικτός για την εισαγωγή της παραγώγου. Ακόμα το διαφορικό διατήρησε τη θέση του ως θεμελιώδης έννοια του απειροστικού λογισμού ακόμη και όταν η ανάλυση έπαψε να είναι γεωμετρική. Ακόμα και όταν, μέσω των εργασιών των Lagrange, Bolzano και Cauchy, η παράγωγος αντικατέστησε το διαφορικό ως θεμελιώδη έννοια του λογισμού, το διαφορικό αντιστάθηκε σε όλες τις προσπάθειες αποβολής του από την ανάλυση. Εμφανίζεται ακόμα στα μαθηματικά, είτε μη αυστηρά εισαγόμενο, αλλά διδακτικά χρήσιμο, απειροστό στην εισαγωγή του απειροστικού λογισμού, είτε επαναπροσδιορισμένο ως στοιχείο του δυικού ενός εφαπτόμενου χώρου, ή αυστηρά οριζόμενο, ως απειροστό στη μη τυπική ανάλυση.

Το ερώτημα γιατί η παράγωγος αντικατέστησε το διαφορικό ως θεμελιώδη έννοια του απειροστικού λογισμού, χρειάζεται βέβαια περαιτέρω διερεύνηση. Αυτή η αντικατάσταση συχνά θεωρείται ότι έχει προκληθεί από αμηχανία, που γίνεται αισθητή όλο και περισσότερο καθ' όλη τη διάρκεια του δέκατου όγδοου αιώνα, που προέκυπτε από τις λογικές ασυνέπειες του απείρως μικρού, και ως εκ τούτου από την ανεπάρκεια του διαφορικού ως θεμελιώδη έννοια του λογισμού. Οι λόγοι για τους οποίους μια τέτοια ανησυχία μπορεί να φέρει στο προσκήνιο την παράγωγο είναι εμφανείς ακόμη και σε ορισμένες μελέτες του ίδιου του Leibniz στα θεμέλια του λογισμού.

Εντούτοις, υπήρξαν περισσότεροι λόγοι για την εμφάνιση της παραγώγου. Ένας από αυτούς είναι η μελέτη των συναρτήσεων με περισσότερες από μία μεταβλητές. Οι συνηθισμένες αντιλήψεις και οι τεχνικές των διαφορικών καταρίπτονται όταν εφαρμόζονται σε τέτοιες συναρτήσεις, και οι επακόλουθες δυσκολίες έπρεπε να λυθούν από τη συστηματική χρήση των παραγώγων και των μερικών παραγώγων (κατά τον Bos)[6].

---

[6] *Η συνήθης έννοια του διαφορικού ήταν συνδεδεμένη με την έννοια της μεταβλητής καθώς παίρνει τιμές από μία ορισμένη ακολουθία τιμών. Το διαφορικό ήταν η απειροστή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών της μεταβλητής. Οι μεταβλητές που είναι συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών δε μπορεί να υποτεθεί ότι παίρνουν τιμές από ορισμένη ακολουθία τιμών, κατά συνέπεια δεν έχει νόημα η έννοια του διαφορικού ως απειροστή διαφορά μεταξύ διαδοχικών τιμών της μεταβλητής. Ως εκ τούτου το διαφορικό Dv μιας συνάρτησης V(x, y) εμφανίζεται με όρους που συσχετίζονται με τα διαφορικά των x και y: dV=Pdx+Qdy (Euler,*

Ένας άλλος λόγος για την εμφάνιση της παραγώγου συνδέεται με τα διαφορικά ανώτερης τάξης. Αντίθετα από τα διαφορικά πρώτης τάξης, τα διαφορικά ανώτερης τάξης απορρίφθηκαν αρκετά νωρίς. Είναι λογικό να υποθέσει κανείς, ότι οι τεχνικές και εννοιολογικές δυσκολίες που συνδέθηκαν με τα διαφορικά ανώτερης τάξης ήταν τόσο σοβαρές που αυτά τα διαφορικά έπρεπε να εξαλειφθούν. Οι προσπάθειες των μαθηματικών και ειδικά εκείνες του Euler, για την αποβολή των διαφορικών ανώτερης τάξης ήταν από τις κύριες αιτίες εμφάνισης της παραγώγου.

Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum, St. Petersburg, 1755, §213). Σε αυτό το σημείο τα P και Q είναι οι μερικοί παράγωγοι, τις οποίες ο Euler (Όμοια, §231) εισήγαγε σε παρενθέσεις: $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$.

Σε τέτοιες εκφράσεις δε μπορεί να εφαρμοστεί η συνήθης τακτική σε σχέση με τα dx και dy (για παράδειγμα η απλοποίηση των διαφορικών σε έναν λόγο): τα dx στους όρους $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ *και Pdx δεν είναι τα ίδια:* $\left(\frac{dV}{dx}\right)dx \neq dV$.

Ο απειροστικός λογισμός του Leibniz

Ανάμεσα στους Kepler, Γαλιλαίο, Καρτέσιο, Pascal, και Newton, η πλέον πολυσχιδής προσωπικότητα ήταν ο Gottfried Wilhelm Leibniz. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η μελέτη του στα μαθηματικά δεν είχε αρχίσει μέχρι το 1672 (στην ηλικία των είκοσι έξι ετών) όταν εστάλη στο Παρίσι σε μια διπλωματική αποστολή. Τα επόμενα τέσσερα έτη που πέρασε στο Παρίσι ήταν για τον Leibniz η «πρωταρχική ηλικία της εφεύρεσης» στα μαθηματικά (παρόμοια με την περίοδο 1664-66 του Newton). Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στο Παρίσι συνέλαβε τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της εκδοχής του για το λογισμό, μια προσέγγιση που διαμόρφωσε κατά τη διάρκεια της ζωής του, και που κατά τη διάρκεια του δέκατου όγδοου αιώνα ήταν κυρίαρχη ακόμα και από αυτή του Newton. Αν και στην επαγγελματική του σταδιοδρομία αφιερώθηκε κυρίως στη νομική και τη διπλωματία, η συμβολή του στους διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών, της φιλοσοφίας, και της επιστήμης πιθανώς δεν μπορεί να συγκριθεί με την εργασία οποιουδήποτε επόμενου μελετητή.

Όσον αφορά τη μηχανή υπολογισμού που έχτισε κατά τη διάρκεια των ετών που βρισκόταν στο Παρίσι, ο Leibniz σημείωσε: «Δεν αξίζει στα άριστα άτομα να χάνουν τις ώρες τους, όπως οι σκλάβοι στην εργασία, για να κάνουν υπολογισμούς που θα μπορούσαν ακίνδυνα να γίνουν από μηχανές». Ένα δια βίου έργο ήταν η αναζήτησή του μιας καθολικής γλώσσας ή μιας συμβολικής λογικής που θα τυποποιούσε και θα μηχανοποιούσε όχι μόνο τους αριθμητικούς υπολογισμούς αλλά όλες τις διαδικασίες της λογικής ανθρώπινης σκέψης, και θα εξάλειφε τη διανοητική εργασία των στερεότυπων και επαναλαμβανόμενων βημάτων. Ο στόχος του ήταν η δημιουργία ενός συστήματος με ορισμούς και σύμβολα που θα κωδικοποιούσαν και θα απλοποιούσαν τα απαραίτητα στοιχεία του λογικού συλλογισμού ώστε να μας εφοδιάσει κατά την Baron[7]:

> *«με το μίτο της Αριάδνης, δηλαδή, με ένα ορισμένο λογικό και προφανές μέσο, που θα καθοδηγούσε το μυαλό, όπως οι γραμμές που σύρονται στη γεωμετρία και οι τύποι για τις πράξεις, ακόμα και του αρχάριου στην αριθμητική ».*

[7] *M. E. Baron, The Origins of the Infinitesimal Calculus. Oxford: Pergamon, 1969, Κεφ.7.*

Ένα τέτοιο καθολικά αποδεκτό σύστημα σημειογραφίας, ήλπισε, ότι θα παρείχε σε όλους τους μορφωμένους ανθρώπους- και όχι σε λίγους τυχερούς – τα εφόδια του σαφούς και σωστού συλλογισμού.

Προφανώς ο καθορισμός αυτού του μεγαλεπήβολου στόχου απαιτούσε πολύ καλή γνώση των μαθηματικών. Αλλά, όπως επισήμανε ο Hofmann, «ένα άτομο που τοποθετεί τέτοιες σκέψεις στην πρώτη γραμμή του μυαλού του έχει τα μαθηματικά στο αίμα του ακόμα κι αν δεν γνωρίζει τις λεπτομέρειες των μαθηματικών»[8]. Πράγματι, ήταν ακριβώς (και μόνο) στα μαθηματικά που ο Leibniz ολοκλήρωσε πλήρως το στόχο του. Ο απειροστικός του λογισμός είναι το ανώτατο παράδειγμα, για την επιστήμη και τα μαθηματικά, ενός συστήματος με ορισμούς και σύμβολα που ζευγαρώνουν τέλεια. Είναι υπερβολή να πούμε ότι ο λογισμός του Leibniz φέρνει μέσα στα πλαίσια σπουδαστικών ικανοτήτων, προβλήματα που πριν απαιτούσαν την ευστροφία ενός Αρχιμήδη ή ενός Newton. Ίσως το καλύτερο μέτρο του θριάμβου του είναι το γεγονός ότι σήμερα μόλις και μετά βίας μπορούμε να συζητήσουμε τα αποτελέσματα των προκατόχων του Leibniz χωρίς την επαναδιατύπωσή τους στο διαφορικό συμβολισμό και την ορολογία του.

Μερικά παραδείγματα θα προσδιορίσουν τι εννοούσε ο Leibniz θεωρώντας τη συμβολική σημειογραφία, ως «λογικό και προφανές μέσο, το οποίο θα καθοδηγήσει το μυαλό». Στη λειτουργική σημειογραφία που εισάγεται πολύ αργότερα από τον Lagrange, ο κανόνας λέει ότι:

Αν $h(x) = f(g(x))$, τότε $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Τίποτα για τη σημειογραφία στον παραπάνω τύπο δεν δείχνει γιατί είναι αληθινό, ούτε προτείνει τρόπους απόδειξης. Αλλά στη διαφορική σημειογραφία, με $z=f(x)$ και $y=g(x)$, ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Αυτός ο τύπος, σε αντίθεση με τον προηγούμενο, δείχνει εμφανώς την ισχύ του, από την ακύρωση των διαφορικών dy στο δεξιό μέλος, σαν ήταν πραγματικοί αριθμοί. Αυτή η συμβολική ακύρωση των διαφορικών προτείνει επίσης μια λογική απόδειξη του τύπου αντικαθιστώντας τα διαφορικά dx, dy, dz από τις πεπερασμένες αυξήσεις Δx, Δy, Δz, και προχωρώντας στο όριο.

---

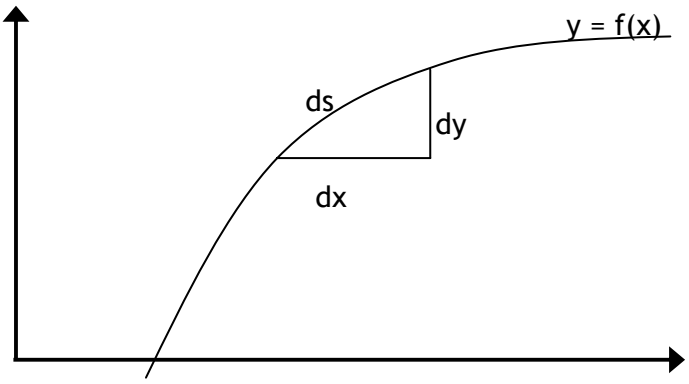
[8] *J. E. Hofmann, Leibniz in Paris 1672-1676. Cambridge University Press, 1974.*

Η εκδοχή του κανόνα μέσα από τον ολοκληρωτικό λογισμό είναι ο τύπος για την ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Η συμβολική αντικατάσταση u=g(x), du=g΄(x) κάνει τον ως άνω τύπο να φαίνεται αναπόφευκτος, οποιαδήποτε και αν μπορεί να είναι η απόδειξή. Αυτό μας οδηγεί στη σταθερότητα της διαφορικής μορφής f(u) du, ανεξάρτητα από τις αυθαίρετες αλλαγές της μεταβλητής. (Μία από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις του Leibniz).

Ας θεωρήσουμε μια επιφάνεια που παράγεται με την περιστροφή της καμπύλης y=f(x) γύρω από των άξονα των x. Ας εστιάσουμε σε ένα απειροελάχιστο τμήμα ds της καμπύλης θεωρώντας το ως υποτείνουσα του «χαρακτηριστικού τριγώνου» με τις πλευρές dx και dy (βλέπε σχήμα).



Σχήμα 3.

Το πυθαγόρειο θεώρημα δίνει:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Όταν περιστρέφεται το τμήμα ds γύρω από τον άξονα των x σε έναν κύκλο της ακτίνας y παράγει μια απειροελάχιστη περιοχή:

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Προσθέτοντας τις απειροελάχιστες περιοχές, λαμβάνουμε για την επιφάνεια:

$$A = \int dA = \int 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

Κατά συνέπεια «ανακαλύπτουμε» το σωστό τύπο από έναν αρκετά εύκολο χειρισμό των συμβόλων του Leibniz. Αντίθετα, η αυστηρή αιτιολόγησή της θα απαιτούσε μια λεπτομερή συζήτηση και έναν καθορισμό της έννοιας της επιφάνειας, ακολουθούμενη από μια απόδειξη (ίσως με τα αθροίσματα του Riemann) ότι ο τύπος (1) συμφωνεί με αυτόν τον ορισμό.

Αυτά τα απλά παραδείγματα επεξηγούν τα κύρια χαρακτηριστικά γνωρίσματα του αναλυτικού ή συμβολικού λογισμού του Leibniz – τον πρωταρχικό ρόλο των απειροελάχιστων διαφορών (διαφορικά) και των αθροισμάτων (ολοκληρώματα) την αντίστροφη σχέση μεταξύ τους, καθώς επίσης και το χαρακτηριστικό τρίγωνο ως σύνδεση μεταξύ εφαπτομένης (διαφορικό) και ολοκληρώματος. Ο μετασχηματισμός των ολοκληρωμάτων μέσω της αντικατάστασης και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτός ο υπολογισμός, πράγματι, οδηγεί το μυαλό στην επίσημη παραγωγή των σωστών αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια θα περιγραφούν τα στάδια από τα οποία ο Leibniz βαθμιαία διαμόρφωσε το λογισμό του. Τα πρώτα κρίσιμα βήματα, όπως ήδη αναφέραμε, έγιναν κατά τη διάρκεια των ετών που ήταν στο Παρίσι, 1672-1676, οκτώ ή δέκα έτη μετά από τη περίοδο του Newton. Εντούτοις, η πρώτη δημοσίευση του Leibniz για το λογισμό του ήταν το 1684, είκοσι έτη πριν από τη δημοσίευση του Newton (De Quadratura) το 1704.

Το 1714, δύο έτη πριν από το θάνατό του, ο Leibniz συνέθεσε το δοκίμιο "*Historia et origo calculi differentialis*" (Ιστορία και προέλευση του διαφορικού λογισμού), ξεκινώντας ως εξής[9]:

> «*Είναι χρήσιμο η αληθινή προέλευση των αξιοσημείωτων εφευρέσεων να είναι γνωστή, ειδικά εκείνων που συλλήφθηκαν όχι τυχαία αλλά από μια προσπάθεια και περισυλλογή. Η χρήση αυτού είναι όχι μόνο ότι η ιστορία μπορεί να δώσει στον καθένα τα οφειλόμενα και να κεντρίσει τους άλλους από την προσδοκία του παρόμοιου επαίνου, αλλά και ότι η τέχνη της ανακάλυψης μπορεί να προωθηθεί και η μέθοδός να γίνει γνωστή μέσω λαμπρών παραδειγμάτων. Μια από τις ευγενέστερες εφευρέσεις του χρόνου μας είναι ένα νέο είδος μαθηματικής ανάλυσης, γνωστό ως διαφορικός λογισμός, αλλά ενώ η ουσία έχει επαρκώς τεκμηριωθεί, η*

[9] *A. Weil, Review of Hofmann. Bull. Am. Math. Soc., 1975.*

πηγή και το αρχικό κίνητρό της δεν έχουν δημοσιοποιηθεί. Είναι σχεδόν σαράντα έτη τώρα που ο συντάκτης το εφεύρε …»

Η αρχή: αθροίσματα και διαφορές

Σε πάρα πολλά σημεία, άλλα και στο έργο του «*Historia et origo*», ο Leibniz επισήμανε πάντα την έμπνευσή του για τον λογισμό η οποία αποτυπώθηκε στην αρχική εργασία του με τις ακολουθίες αθροισμάτων και τις διαφορές των αριθμών. Ως νέος σπουδαστής είχε ενδιαφερθεί για τις απλές ιδιότητες των αριθμών, και το 1666 είχε δημοσιεύσει ένα δοκίμιο που τιτλοφορήθηκε «*De arte combinatorial*» (Στην τέχνη των συνδυασμών) που εξέταζε τις στοιχειώδεις ιδιότητες των συνδυασμών και των μεταθέσεων.

Αμέσως μετά την άφιξή του στο Παρίσι το 1672, παρατήρησε κάτι ενδιαφέρον για το άθροισμα των διαφορών των διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας αριθμών.

Δοθείσης μίας ακολουθίας:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n,$$

μπορούμε να παράγουμε την ακολουθία:

$$d_1, d_2, \ldots\ldots\ldots, d_n,$$

των διαφορών $d_i=\alpha_i-\alpha_{i-1}$, όπου

$$d_1+d_2+ \ldots\ldots\ldots+d_n = (\alpha_1-\alpha_0) + (\alpha_2-\alpha_1) + \ldots\ldots+(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \alpha_n - \alpha_0 \qquad (2)$$

Δηλαδή, *το άθροισμα των διαδοχικών διαφορών μίας ακολουθίας είναι ίσο με τη διαφορά του τελευταίου και του πρώτου όρου της αρχικής ακολουθίας*.

Για παράδειγμα, παρατήρησε ότι η "ακολουθία διαφορών" της ακολουθίας τετραγώνων:

$$0, 1, 4,\ldots\ldots, n^2$$

είναι η ακολουθία διαδοχικών περιττών αριθμών:

$$1, 3, 5, \ldots\ldots, 2n-1,$$

διότι $i^2 - (i-1)^2 = 2i-1$. Επιπρόσθετα, το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών είναι n^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 2n-1 = n^2 \qquad (3)$$

Έτσι, συνδυάζοντας τα παραπάνω οδηγούμαστε στην άθροιση απείρων σειρών. Αν θεωρήσουμε ότι οι όροι της ακολουθίας

$$b_1, b_2, \ldots, b_n,\ldots$$

είναι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της ακολουθίας

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

δηλαδή $b_i=\alpha_i-\alpha_{i+1}$, τότε:

$$b_1+b_2+ \ldots +b_n = \alpha_1 - \alpha_{n+1}. \qquad (4)$$

Αν $\lim_n a_n = 0$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1$. (5)

Λίγο μετά την άφιξή του στο Παρίσι, ο Leibniz κάλεσε τον Christiaan Huygens (1629-1695), που ολοκλήρωνε την εκτεταμένη διατριβή του «Horologiurh oscillatorium (1673)» στη θεωρία του εκκρεμές ρολογιού, και ήταν πιθανώς ο πιο διάσημος επιστήμονας στην ήπειρο. Όταν ο Leibniz περιέγραψε τα αποτελέσματά του για τα ποσά των διαφορών, ο Huygens του πρότεινε να βρει το άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)/2}+\ldots$$

των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών. Αυτό το πρόβλημα είχε προκύψει κάπως νωρίτερα σε μια συζήτηση με τον Hudde σχετικά με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων συγκεκριμένων παιχνιδιών τύχης.

Το πρόβλημα του Huygens ήταν για τον Leibniz ιδιαίτερα καλό για να εξεταστεί εκείνη την περίοδο. Από την προηγούμενη εργασία του ήταν εξοικειωμένος με τους συνδυαστικούς αριθμούς όπως εμφανίζονται στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal. Ας υποθέσουμε ότι το τρίγωνο μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**…**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**…**
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**…**
1	**5**	**15**	**35**	**70**	**126**	**…**
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	

Το νιοστό στοιχείο κάθε σειράς είναι το άθροισμα των πρώτων ν στοιχείων της προηγούμενης σειράς. Ως εκ τούτου το αριθμητικό τρίγωνο παραθέτει τους τριγωνικούς αριθμούς ως αθροίσματα των ακέραιων αριθμών, τους πυραμιδικούς αριθμούς ως αθροίσματα των τριγωνικών αριθμών, κ.λπ. Αντιθέτως, οι τριγωνικοί αριθμοί είναι διαφορές των διαδοχικών πυραμιδικών αριθμών, κ.λπ.

Ο Leibniz παρατήρησε ότι τα προβλήματα του είδους που έθεσε ο Huygens θα μπορούσαν να απαντηθούν αρχίζοντας από την ακολουθία αντίστροφων ακέραιων αριθμών, αντί των ίδιων των ακέραιων, και κατασκευάζοντας τις επόμενες σειρές με τη λήψη των διαφορών αντί αθροισμάτων. Κατ' αυτό τον τρόπο συνέλαβε την ακόλουθη σειρά, που κάλεσε "αρμονικό τρίγωνο".

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & . & . & . \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & . & . & . & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & . & . & . & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & . & . & . & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & . & & & & & & \\
. & . & . & . & & & & & & \\
. & . & . & . & & & & & & \\
. & . & . & . & & & & & &
\end{array}$$

Κατά συνέπεια κάθε σειρά του αρμονικού τριγώνου είναι η ακολουθία διαφορών των διαδοχικών όρων της προηγούμενης σειράς. Επομένως, από τη σχέση (5) έχουμε ότι το άθροισμα των όρων κάθε σειράς είναι ίσο με το πρώτο στοιχείο της προηγούμενης σειράς. Ειδικότερα:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots=1 \qquad (6)$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\ldots=\frac{1}{2} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\ldots=\frac{1}{3} \qquad (8)$$

Το νιοστό στοιχείο της δεύτερης σειράς του αρμονικού τριγώνου είναι:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)} \quad (9)$$

το οποίο είναι το μισό από το αντίστροφο του νιοστού τριγωνικού αριθμού n(n+1)/2. Οπότε πολλαπλασιάζοντας την ισότητα (6) με το 2 μας δίνει το αποτέλεσμα του προβλήματος το οποίο έθεσε ο Huygens,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...=2 \qquad (10)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την ισότητα (7) με το 3 μας δίνει το άθροισμα των αντίστροφων των πυραμιδικών αριθμών.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+...=\frac{3}{2} \qquad (11)$$

Το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal και το αρμονικό τρίγωνο του Leibniz, έχουν μία ορισμένη αντίστροφη σχέση όσον αφορά τους τρόπους σχηματισμού τους - που περιλαμβάνει τα αθροίσματα στην αρχική περίπτωση και τις διαφορές στην τελευταία. Στο αριθμητικό τρίγωνο κάθε σειρά αποτελείται από τα αθροίσματα των κυβικών όρων της προηγούμενης σειράς, και τις διαφορές των όρων στην επόμενη σειρά. Στο αρμονικό τρίγωνο, εντούτοις, κάθε σειρά αποτελείται από τις διαφορές των όρων της προηγούμενης σειράς.

Αυτές οι εκτιμήσεις του Leibniz αποτέλεσαν μια σύλληψη η οποία θα διαδραμάτιζε κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξη της έννοιας του λογισμού από τον ίδιο: Η έννοια μιας αντίστροφης σχέσης μεταξύ της λειτουργίας της λήψης των διαφορών και αυτής της διαμόρφωσης των αθροισμάτων των στοιχείων μιας ακολουθίας.

Το χαρακτηριστικό τρίγωνο

Κατά το χρονικό διάστημα της έρευνάς του για τις ακολουθίες αθροισμάτων και διαφορών στα τέλη του 1672, ο Leibniz κατά ένα μεγάλο μέρος δεν είχε ακόμα επίγνωση της σπουδαιότητάς τους. Σε μια επιστολή του το 1680 στον Tschirnhaus[10], αναφέρει μία αξιοσημείωτη συνομιλία που είχε με τον Huygens το 1673, η οποία τον οδήγησε στη μαθηματική αυτο-εκπαίδευσή του.

> *«Η αρχική περίπτωση από την οποία προέκυψε η ανακάλυψή μου της μεθόδου του χαρακτηριστικού τριγώνου, και άλλα πράγματα του ίδιου είδους, συνέβησαν σε μία εποχή που είχα μελετήσει τη γεωμετρία όχι περισσότερο από έξι μήνες. Ο Huygens, μόλις δημοσίευσε το βιβλίο του, μου έδωσε ένα αντίγραφο, ενώ κατά την περίοδο εκείνη γνώριζα ελάχιστα για την καρτεσιανή άλγεβρα και τη μέθοδο αδιαιρετότητας, πράγματι δεν ήξερα το σωστό καθορισμό του κέντρου βάρους. Όταν κατά τύχη μίλησα με τον Huygens, τον ενημέρωσα ότι σκέφτηκα πως μια ευθεία γραμμή που περνά μέσω του κέντρου βάρος ενός σχήματος κόβει πάντα το σχήμα σε δύο ίσα μέρη. Δεδομένου ότι αυτό σαφώς ισχύει στην περίπτωση ενός τετραγώνου, ενός κύκλου, ή μιας έλλειψης, φαντάστηκα ότι θα ήταν το ίδιο για όλα τα άλλα σχήματα. Ο Huygens γέλασε όταν το άκουσε, και μου είπε ότι τίποτα δεν βρίσκετε πέρα από την αλήθεια. Έτσι, συγκινημένος από αυτό το ερέθισμα, άρχισα τη μελέτη πιο περίπλοκης γεωμετρίας, αν και στην πραγματικότητα εκείνη τη στιγμή πραγματικά δεν είχα μελετήσει τα βασικά στοιχεία. Αλλά βρήκα στην πράξη ότι κάποιος θα μπορούσε να συνεχίσει χωρίς γνώση των βασικών στοιχείων, εάν και μόνο ήταν γνώστης μερικών προτάσεων. Ο Huygens, που με νόμιζε ότι ήμουν καλύτερος γεωμέτρης από ότι πραγματικά ήμουν, μου έδωσε να διαβάσω τις επιστολές του Pascal, που δημοσιεύθηκαν με το όνομα Dettonville και από αυτούς συγκέντρωσα τη μέθοδο της αδιαιρετότητας και του κέντρου βάρους βαρύτητας, δηλαδή οι γνωστές μέθοδοι Cavalieri και Guldinus.»*

Από τη μελέτη της εργασίας του Pascal ο Leibniz «ανακάλυψε» το «χαρακτηριστικό τρίγωνο». Τον Ιούνιο του 1658 ο Pascal είχε προτείνει έναν διαγωνισμό, με ημερομηνία λήξης της προθεσμίας την 1η Οκτωβρίου του ίδιου έτους, για τη λύση

---

[10] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920, σελ. 215.*

διάφορων προβλημάτων σχετικά με τα κυκλοειδή – ανεύρεση του εμβαδού και του κεντροειδή ενός αυθαίρετου κυκλοειδούς σχήματος, και η ανεύρεση του όγκου και του κεντροειδή διάφορων στερεών σχημάτων με την περιστροφή ενός τέτοιου σχήματος είτε τη βάση είτε σε μία συντεταγμένη του. Το 1643, ο Roberval είχε δείξει ότι η περιοχή ολόκληρου του κυκλοειδούς είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από αυτή του παραγωγικού κύκλου του, και ότι ο όγκος που λαμβάνεται με την περιστροφή του κυκλοειδούς στη βάση του είναι πέντε όγδοα αυτής του περιγεγραμμένου κυλίνδρου[11].

Οι περισσότεροι από τους μαθηματικούς, έλαβαν μέρος σε αυτόν τον διαγωνισμό με ενδιαφέρον, και παρέδωσαν έναν αριθμό από προτεινόμενες λύσεις. Εφόσον καμία από τις υποβληθείσες λύσεις δεν κρίθηκε ως πλήρως αποδεκτή, ο Pascal δημοσίευσε την εργασία του για την κυκλοειδή και σχετικά προβλήματα με το όνομα «Lettres de A. Dettonville»

Στο έργο του «*Historia et origo*» ο Leibniz, που αναφέρεται στον εαυτό του στο τρίτο πρόσωπο, περιέγραψε την ανακάλυψή του χαρακτηριστικού τριγώνου ως εξής[12]:

> «*Από ένα παράδειγμα του Dettonville, ένα φως εξερράγη ξαφνικά επάνω σε αυτόν, το οποίο περιέργως ο Pascal δεν είχε αντιληφτεί. Γιατί όταν αποδεικνύει το θεώρημα του Αρχιμήδη για τη μέτρηση της επιφάνειας μιας σφαίρας ή των μερών της, χρησιμοποίησε μια μέθοδο στην οποία ολόκληρη η επιφάνεια του στερεού που διαμορφώνεται από μια περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα μπορεί να μειωθεί σε έναν ισοδύναμο αριθμό απλών σχημάτων. Από αυτό ο νεαρός φίλος μας, εμπνεύστηκε το ακόλουθο γενικό θεώρημα. Τα τμήματα μιας ευθείας γραμμής πάνω σε μια καμπύλη, που σχηματίζονται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα, όταν λαμβάνονται στη σειρά και εφαρμόζονται κάθετα στον άξονα δίνουν ένα σχήμα ισοδύναμο με τη στιγμή της καμπύλης για τον άξονα.*»

Η αναφορά στον Pascal, γίνεται για την «πραγματεία στα ημίτονα ενός τεταρτημόριου ενός κύκλου» που είναι μέρος της πρώτης επιστολής του

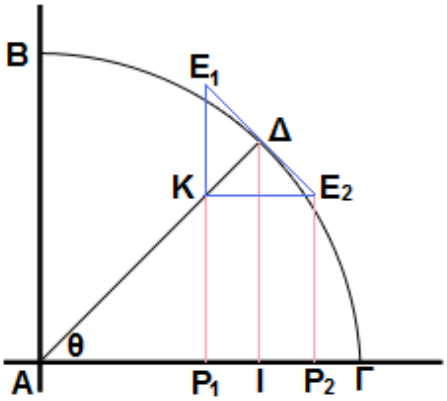
---

[11] *D.J.Struik,A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, MA:Harvard University Press, 1969, σελ. 232-238.*

[12] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920, σελ.38.*

Dettonville[13]. Ο Pascal στην πρώτη του Πρόταση απέδειξε ότι «το άθροισμα[14] των ημιτόνων (τεταγμένων) οποιουδήποτε τόξου του τεταρτημόριου ενός κύκλου είναι ίσο με το τμήμα της βάσης μεταξύ των ακραίων τεταγμένων πολλαπλασιαζόμενων με την ακτίνα». Η χρήση της λέξης ημίτονο για τη τεταγμένη υποδηλώνει το γεγονός ότι, στο άθροισμα που αναφέρεται, κάθε τεταγμένη πρόκειται να πολλαπλασιαστεί με ένα αντίστοιχο απειροελάχιστο τόξο ds του κύκλου (το οποίο είναι προτιμότερο από το να πολλαπλασιαστεί με ένα απειροελάχιστο τμήμα dx της βάσης).

Για να αποδείξει αυτήν την πρόταση, ο Pascal κατασκεύασε το τρίγωνο E_1E_2K με την εφαπτομένη υποτείνουσα E_1E_2 στον κύκλο σε ένα σημείο Δ, και έπειτα παρατήρησε ότι τα τρίγωνα E_1E_2K και ΑΔΙ είναι όμοια.



Σχήμα 4.

Επομένως

$$\frac{A\Delta}{E_1E_2} = \frac{\Delta I}{E_2K}, \text{ οπότε } \Delta I \cdot E_1E_2 = A\Delta \cdot E_2K = A\Delta \cdot P_1P_2$$

---

[13] *D.J.Struik,A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, MA:Harvard University Press, 1969, σελ. 239-241.*

Οπότε αν, $y = \Delta\mathrm{I}$, $a = \mathrm{A}\Delta$, $\Delta s = E_1E_2$, $\Delta x = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, τότε: $y\Delta s = \alpha\Delta x$. Θεωρώντας τα Δs και Δx ως αδιαίρετα και προσθέτοντάς τα, βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του Pascal είναι:

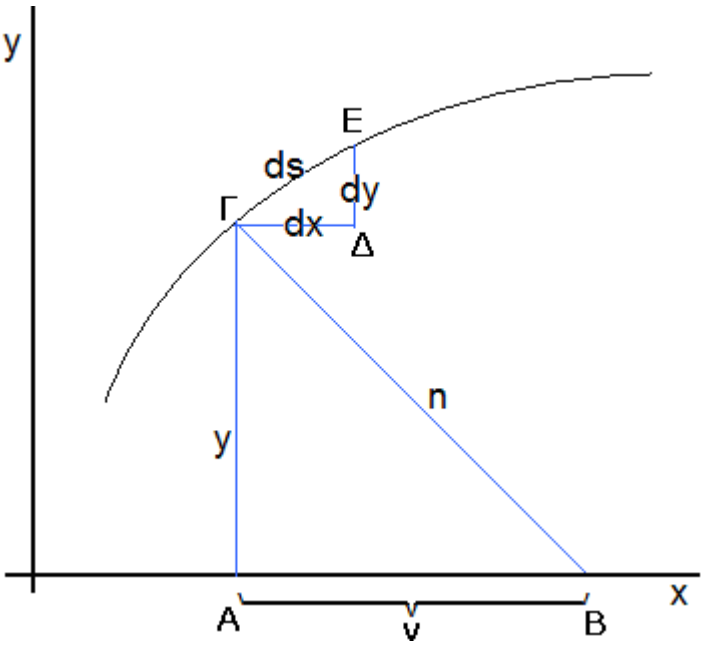
$$\int yds = \int adx \qquad (12)$$

Επειδή $2\pi yds$ είναι το εμβαδόν μιας απειροελάχιστης ζώνης στο ημισφαίριο της ακτίνας που λαμβάνεται με την περιστροφή του τεταρτοκύκλιου γύρω από τον άξονα των x, φαίνεται ότι το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι

$$A = \int 2\pi y\ ds = 2\pi\alpha\int_0^{\alpha} dx = 2\pi\alpha^2.$$

Οπότε η παραπάνω ισότητα (12) παρέχει μια απειροελάχιστη παραγωγή του τύπου του εμβαδού $A = 4\pi\alpha^2$ για τη σφαίρα με ακτίνα *a*.

Κατά τον Leibniz την «έκρηξη του φωτός» (burst of light), αποτελεί η παρατήρηση της αρκετά γενικής εφαρμογής της απειροελάχιστης κατασκευής τριγώνων του Pascal σε μια αυθαίρετη καμπύλη. Κατά συνέπεια, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΓΒ και ΔΓΕ που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα, προκύπτει:



Σχήμα 5.

έχουμε ότι

$$\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y} \text{ ή } yds = ndx$$

Αθροίζοντας τους απειροελάχιστους όρους έχουμε

$$\int yds = \int ndx \qquad (13)$$

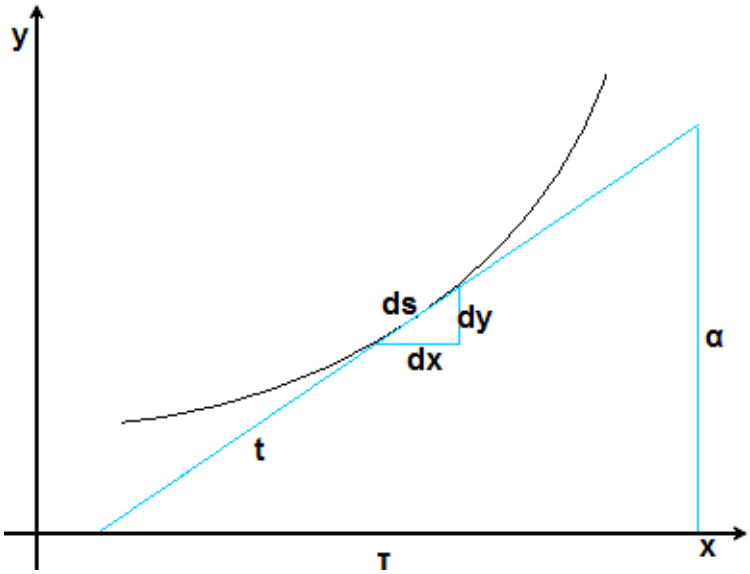
Δεδομένου ότι ο Leibniz δεν είχε βρει το συμβολισμό του για τα διαφορικά και τα ολοκληρώματα (αυτό έγινε δύο έτη αργότερα το 1675), έπρεπε να εκφράσει την παραπάνω ισότητα με λεκτική μορφή: η στιγμή όπου η δοσμένη καμπύλη ως προς τον άξονα των x είναι ίση με το εμβαδόν κάτω από μια δεύτερη καμπύλη της οποίας τεταγμένη είναι η κάθετος n στη δοσμένη καμπύλη[15]. Ο πολλαπλασιασμός της σχέσης με 2π δίνει το εμβαδόν $A = \int 2\pi y\ ds$ της επιφάνειας που λαμβάνεται με την περιστροφή της αρχικής καμπύλης γύρω από τον άξονα των x.

Όταν ο Leibniz παρουσίασε αυτό το αποτέλεσμα στον Huygens του εξομολογήθηκε ότι με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος είχε βρει την επιφάνεια των παραβολικών κωνοειδών και άλλων σχημάτων του ίδιου είδους, που ήταν χωρίς απόδειξη πολλά έτη πριν από το 1657.

Συγχρόνως, ο Leibniz συνειδητοποίησε πώς να εφαρμόσει τη μέθοδο του χαρακτηριστικού τριγώνου στα προβλήματα υπολογισμού του μήκους και του εμβαδού. Δεδομένης μιας καμπύλης, θεωρούμε t το μήκος της εφαπτομένης που περιέχεται μεταξύ του άξονα των x και μιας κάθετης τεταγμένης (του σταθερού) μήκους α.

---

[15] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920,σελ. 38-41.*



Σχήμα 6.

Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων του παραπάνω σχήματος έχουμε ότι:

$$\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a} \quad \text{ή} \quad a\ ds = t\ dy\,.$$

$$\int a\ ds = \int t\ dy \qquad (14)$$

Έτσι ο υπολογισμός του μήκους μιας καμπύλης ανάγεται σε πρόβλημα τετραγωνισμού της περιοχής ανάμεσα στην περιοχή του άξονα των y και μίας δεύτερης καμπύλης της οποίας η τετμημένη x είναι η εφαπτομένη t της αρχικής καμπύλης.

Επίσης, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΕΔ, προκύπτει ότι:

$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{y} \quad \text{ή} \quad v\ dx = y\ dy$$

όπου v είναι η υποκάθετος στην συγκεκριμένη καμπύλη. Οπότε

$$\int v\ dx = \int y\ dy \qquad (15)$$

Ο Leibniz παρατήρησε ότι εάν η δεδομένη καμπύλη περνά από την αρχή των αξόνων και τα διαστήματα της βάσης της είναι [0, b], τότε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους στη σχέση (15) είναι απλά το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση και ύψος ίσα με το b.

Κατά συνέπεια, για να βρεθεί το εμβαδόν ενός δεδομένου σχήματος, ένα άλλο σχήμα χρειάζεται έτσι ώστε οι υποκάθετες του να είναι αντίστοιχα ίσες με τις

τεταγμένες του δεδομένου σχήματος, και στη συνέχεια αυτό το δεύτερο σχήμα είναι η τετραγωνίζουσα του δεδομένου σχήματος[16].

Δεδομένου ότι $v = y\dfrac{dy}{dx}$ από την ισότητα (15) έχουμε:

$$\int y\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int y\ dy\ .$$

Αυτό ήταν η πρώτη εμφάνιση δύο ιδεών που διαδραμάτισαν κεντρικό ρόλο στον λογισμό του Leibniz: ο μετασχηματισμός των ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αντικαταστάσεων, και η αναγωγή των προβλημάτων τετραγωνισμού στα αντίστροφα προβλήματα εφαπτομένης. Τα τελευταία μετατράπηκαν σε προβλήματα στα οποία μια καμπύλη πρόκειται να καθοριστεί από γνώση της εφαπτομένης της.

Για να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο η ισότητα (15) αναγάγει τους τετραγωνισμούς σε αντίστροφα προβλήματα εφαπτομένης, ας υποθέσουμε ότι έχουμε να βρούμε το εμβαδό $\int_0^a x^n dx$ κάτω από την καμπύλη $z = x^n$. Αν μπορούμε να βρούμε μία καμπύλη $y = f(x)$ με υποκάθετη $v = x^n$, τότε η ισότητα (15) δίνει:

$$\int_0^a x^n dx = \int y\ dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2}f(a)^2\ ,$$

υποθέτοντας ότι $f(0) = 0$. Δοκιμάζοντας $y = bx^k$ θέλουμε

$$v = y\frac{dy}{dx} = bx^k \cdot bkx^{k-1} = b^2kx^{2k-1} = x^n\ .$$

Αυτό απαιτεί:

$$k = \frac{1}{2}(n+1) \text{ και } b = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Οπότε:

---

[16] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Chicago,1920, σελ. 41.*

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{2}(ba^k)^2 = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Σε αυτές τις έρευνες του 1673, το πρώτο έτος σοβαρής εργασίας του στα μαθηματικά, ο Leibniz έλαβε λίγα αποτελέσματα που ήταν πραγματικά καινούργια, δηλαδή καμία συγκεκριμένη μέθοδος τετραγωνισμού ή παραγώγισης που δεν ήταν γνωστή από πριν. Ακόμη και η λύδια λίθος του, το χαρακτηριστικό τρίγωνο, ήταν υπονοούμενη στην εργασία του Pascal (και αρκετά σαφής στις «Γεωμετρικές διδασκαλίες» στον Barrow. Όμως, έβαλε τον πρώτο λίθο για τον πραγματικό του στόχο, δηλαδή την ανάπτυξη μιας γενικής αλγοριθμικής μεθόδου που θα ενοποιούσε τα διαφορετικά αποτελέσματα και τις τεχνικές που βρήκε στην υπάρχουσα μαθηματική λογοτεχνία. Δύο δεκαετίες αργότερα, σε μια επιστολή του στον L'Hospital, συνόψισε αυτά τα πρώτα βήματα ως εξής[17]:

> *«Με την χρήση αυτού που καλώ "χαρακτηριστικό τρίγωνο", δημιουργούμενο από τα στοιχεία των συντεταγμένων και της καμπύλης, βρήκα, δεδομένου ότι ήταν εύκολο όσο το ανοιγοκλείσιμο των βλεφάρων, σχεδόν όλα τα θεωρήματα, που στη συνέχεια τα εντόπισα στις εργασίες των Barrow και Gregory. Μέχρι εκείνη τη στιγμή, δεν είχα ασχοληθεί αρκετά με την Καρτεσιανή άλγεβρα και μέχρι τώρα δεν χρησιμοποίησα τις εξισώσεις για να εκφράσω τη φύση των κυρτών γραμμών. Αλλά, κατόπιν συμβουλής του Huygens κάθισα να ασχοληθώ με αυτήν και του είμαι ευγνώμων για αυτό, γιατί μου έδωσε τα μέσα σχεδόν αμέσως για την εύρεση του διαφορικού μου λογισμού.*
>
> *Κάποιο χρόνο πριν είχα την ευχαρίστηση να ασχοληθώ με την εύρεση των αθροισμάτων της σειράς αριθμών, και για αυτό είχα χρησιμοποιήσει το γνωστό θεώρημα, ότι, σε μια σειρά που μειώνεται στο άπειρο, ο πρώτος όρος είναι ίσος με το άθροισμα όλων των διαφορών. Από αυτό είχα επινοήσει αυτό που καλώ «αρμονικό τρίγωνο», σε αντιδιαστολή με το "αριθμητικό τρίγωνο" του Pascal... Αναγνωρίζοντας από αυτό τη μεγάλη χρησιμότητα των διαφορών και εντοπίζοντας στον λογισμό του Descartes, ότι οι συντεταγμένες της καμπύλης θα μπορούσαν να εκφραστούν αριθμητικά, είδα ότι για να βρω τους τετραγωνισμούς ή τα*

[17] *J.M.Child, The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920, σελ. 220-222.*

αθροίσματα των συντεταγμένων ήταν το ίδιο πράγμα με το να βρεθεί μια συντεταγμένη (τετραγωνίζουσα), της οποίας η διαφορά είναι ανάλογη προς τη δεδομένη τεταγμένη. Αναγνώρισα επίσης ότι η εύρεση των εφαπτόμενων δεν είναι τίποτα άλλο από την εύρεση των διαφορών, και ότι η εύρεση των τετραγωνισμών δεν είναι τίποτα άλλο από την εύρεση των αθροισμάτων, υπό τον όρο ότι οι διαφορές είναι εξαιρετικά μικρές.»

Ο αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου

Στο τέλος του 1673 ή στις αρχές του 1674 ο Leibniz ανακάλυψε μία γενική «μετατόπιση" ή μέθοδο μετασχηματισμού με την οποία θα μπορούσε να παραγάγει ουσιαστικά όλα τα προηγουμένως γνωστά αποτελέσματα τετραγωνισμού και την περιγράφει ως ακολούθως[18]:

> *«Η μέθοδός μου είναι μόνο ένα πόρισμα μιας γενικής θεωρίας των μετασχηματισμών, από τη βοήθεια της οποίας οποιοδήποτε δεδομένο σχήμα, από οποιαδήποτε εξίσωση μπορεί να προκύψει, μειώνεται σε ένα άλλο αναλυτικά ισοδύναμο σχήμα... Επιπλέον, η γενική μέθοδος μετασχηματισμών φαίνεται σε εμένα κατάλληλη να συγκριθεί μεταξύ των ισχυρότερων μεθόδων ανάλυσης, όχι μόνο γιατί εξυπηρετεί τις άπειρες σειρές και προσεγγίσεις, αλλά και για τις γεωμετρικές λύσεις και ατελείωτα άλλα πράγματα που είναι μόλις και μετά βίας εύχρηστα... Η βάση του μετασχηματισμού είναι: ότι ένα δεδομένο σχήμα, με τις αναρίθμητες γραμμές (τεταγμένες) που σύρονται σε κάποια κατεύθυνση (υπό τον όρο ότι σύρονται σύμφωνα με κάποιο κανόνα ή νόμο), μπορεί να επιλυθεί σε μέρη, τα οποία όταν συγκεντρωθούν εκ νέου σε μια άλλη θέση ή μια άλλη μορφή συνθέτουν ένα άλλο σχήμα, ισοδύναμο με το πρώτο, από το οποίο μπορούν να υπολογισθούν οι τετραγωνισμοί… Αυτά τα βήματα είναι τέτοια που εμφανίζονται αμέσως σε καθέναν που προχωρά μεθοδικά κάτω από την καθοδήγηση της φύσης και περιέχουν τη γενική μέθοδο της αδιαιρετότητας. Όχι μόνο για τις παράλληλες και συγκλίνουσες ευθείες γραμμές, αλλά και για οποιεσδήποτε άλλες γραμμές επίσης, ευθείες ή καμπύλες, που κατασκευάζονται από έναν καθορισμένο νόμο, μπορεί να εφαρμοστεί στην ανάλυση του αρχικού σχήματος σε μέρη που πρόκειται να συγκεντρωθούν εκ νέου ώστε να σχηματίσουν ένα άλλο σχήμα. Αλλά αυτός που έχει πιάσει την καθολικότητα της μεθόδου θα κρίνει πόσο σπουδαία και πόσο δυσνόητα είναι τα αποτελέσματα που μπορούν από εκεί να επιτευχθούν. Γιατί είναι σίγουρο ότι όλες οι γνωστές έως τώρα μέθοδοι, είτε απόλυτες είτε υποθετικές, είναι περιορισμένα δείγματα αυτής».*

---

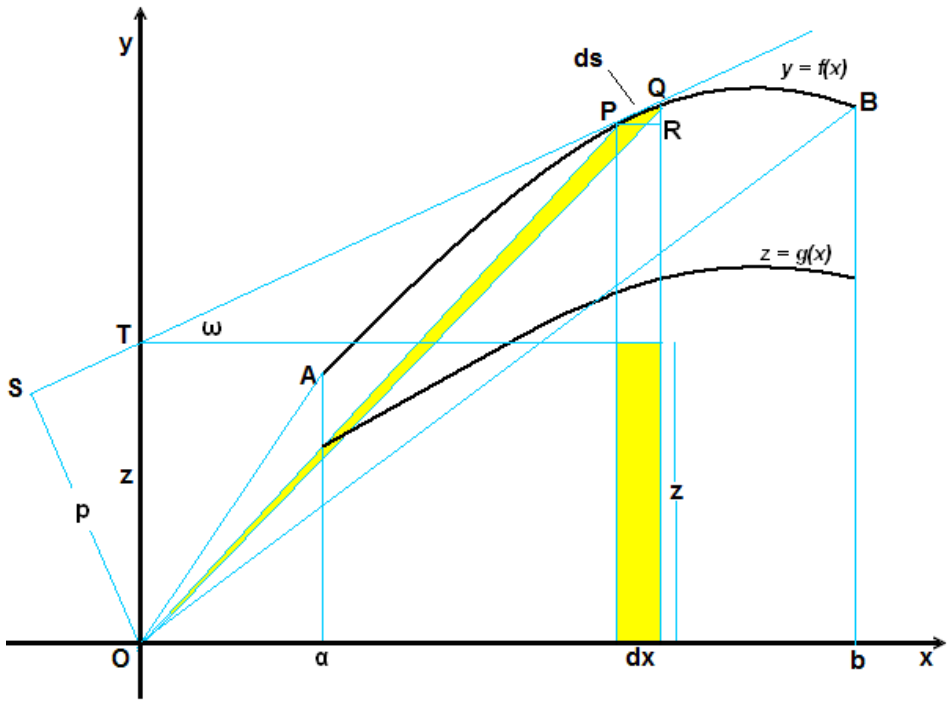
[18] *H.W.Turnbull et al. The Correspondendence of Isaac Newton, τόμος 2ος , Cambridge University Press, 1959-1978, σελ. 65-66.*

Εδώ ο Leibniz περιγράφει με πολύ γενικούς όρους την ακόλουθη αρχή, στην οποία ο όρος "μετατόπιση"(transmutation) εφαρμόστηκε κατά τη διάρκεια του δέκατου έβδομου αιώνα.

Έστω ότι το A και το B είναι δύο απλά επίπεδα ή (χώροι), που κάθε ένα υποδιαιρείται σε αδιαίρετα, γενικά σε απείρως μικρά ορθογώνια (ή πρίσματα). Εάν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ των μικρών σχημάτων (αδιαίρετα) στο A και εκείνα στο B, έτσι ώστε τα αντίστοιχα αδιαίρετα να έχουν ίσο εμβαδό (ή όγκο), τότε λέγεται ότι το B προέρχεται από το A από μια "μετατόπιση", και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το A και το B έχουν ίσο εμβαδό (ή όγκο).

Ως γνωστόν, αυτή η αρχή ήταν βασική για τους υπολογισμούς του Cavalieri και άλλων που χρησιμοποιούσαν ορθογώνια αδιαίρετα, και τους βοήθησε να επιτύχουν (σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις) αυτό που γίνεται σήμερα με τη βοήθεια της μεθόδου αλλαγής μεταβλητής και της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Αν και περιέγραψε τις έμφυτες δυνατότητες κάπως γενικότερα στην επιστολή του στον Newton, η βασική καινοτομία του Leibniz ήταν στην πράξη η χρήση των τριγωνικών αδιαιρέτων σε μια συστηματική διαδικασία μετασχηματισμού.

Δοθέντων των γειτονικών σημείων $P(x,y)$ και $Q(x+dx, y+dy)$ στην καμπύλη $y=f(x), x\in[a,b]$, ο Leibniz εξετάζει το απειροελάχιστο τρίγωνο OPQ όπου το O είναι η αρχή των αξόνων.



Σχήμα 7.

Έστω η γραμμή εφαπτομένης που καθορίζεται από το απειροελάχιστο τόξο ds που ενώνει τα σημεία P και Q ότι τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $T(0,z)$, όπου

$$z = y - x\frac{dy}{dx} \qquad (16)$$

Φέρνουμε την OS ως το κάθετο τμήμα μήκους p από το O έως την ως άνω γραμμή εφαπτομένης. Τότε το τρίγωνο OST είναι όμοιο με το χαρακτηριστικό τρίγωνο PRQ, οπότε

$$\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}.$$

Άρα η περιοχή του απειροστού τριγώνου OPQ είναι

$$a(OPQ) = \frac{1}{2}p\ ds = \frac{1}{2}z\ dx. \qquad (17)$$

Αν θεωρήσουμε τον τομέα OAB που ορίζεται από το τμήμα AB της γραφικής παράστασης $y = f(x)$ και τις ακτίνες OA και OB, έτσι ώστε να υποδιαιρείται σε απειροελάχιστα τρίγωνα όπως το OPQ, τότε από τη σχέση (17) έχουμε

$$a(OAB) = \frac{1}{2}\int_a^b z\ dx\,. \qquad (18)$$

Έστω το $z = g(x)$ που ορίζεται με την ισότητα (16). Αλλά

$$\int_a^b y\ dx = \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + a(OAB)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xy\right]_a^b + a(OAB)\,.$$

Οπότε έχουμε

$$\int_a^b y\ dx = \frac{1}{2}\left(\left[xy\right]_a^b + \int_a^b z\ dx\right). \qquad (19)$$

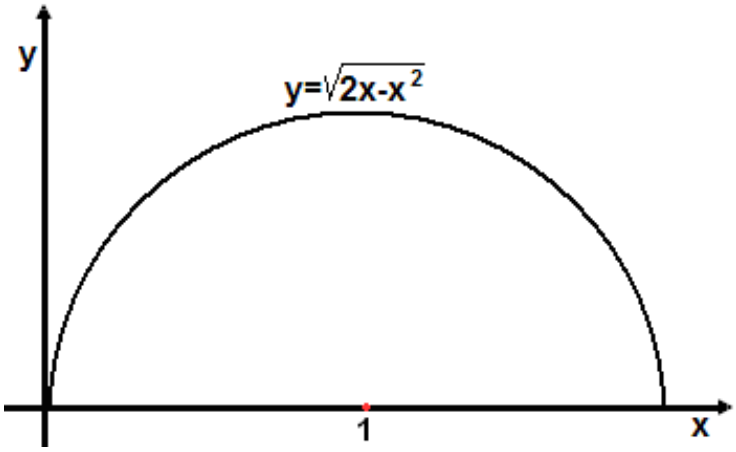
Η ισότητα (19) είναι το θεώρημα μετασχηματισμού του Leibniz. Η σπουδαιότητά του είναι ότι καθιέρωσε μια αντίστροφη σχέση μεταξύ του προβλήματος εφαπτομένης (δεδομένου ότι το z καθορίζεται από την εφαπτομένη) και του

προβλήματος του τετραγωνισμού. Επιπρόσθετα, μία νέα καμπύλη $z = g(x)$ χρησιμοποιείται ως τετραγωνίζουσα για την αρχική καμπύλη $y = f(x)$, όπου το $\int_a^b z\ dx$ θεωρείται απλούστερο ολοκλήρωμα με τη χρήση του οποίου το $\int_a^b y\ dx$ μπορεί να εκτιμηθεί. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η αντικατάσταση του $z = y - x(dy/dx)$ στη σχέση (19) παράγει την ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_a^b y\ dx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x\ dy\ .$$

Η πλέον ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος μετασχηματισμού από τον Leibniz, ήταν αυτή που ο ίδιος καλούσε «αριθμητικός τετραγωνισμός του κύκλου»- η παραγωγή της άπειρης σειράς, η οποία φέρει τώρα το όνομά του:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (20)(\text{σειρά Leibniz})$$



Σχήμα 8.

Το άνω μισό του μοναδιαίου κύκλου που εφάπτεται στον άξονα των y στην αρχή των αξόνων, όπως στο παραπάνω σχήμα, έχει εξίσωση $y = \sqrt{2x - x^2}$. Αφού

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y},$$

έχουμε ότι

$$z = y - x\frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}\ ,$$

ή

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2}\,.$$

Ο Leibniz στη συνέχεια εφαρμόζει τη μέθοδο του μετασχηματισμού για να υπολογίσει το εμβαδό του τεταρτοκύκλιου, ως εξής:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[x\sqrt{2x-x^2}\right]_0 + \int_0^1 z\ dx\right) \quad \text{από (19)}$$

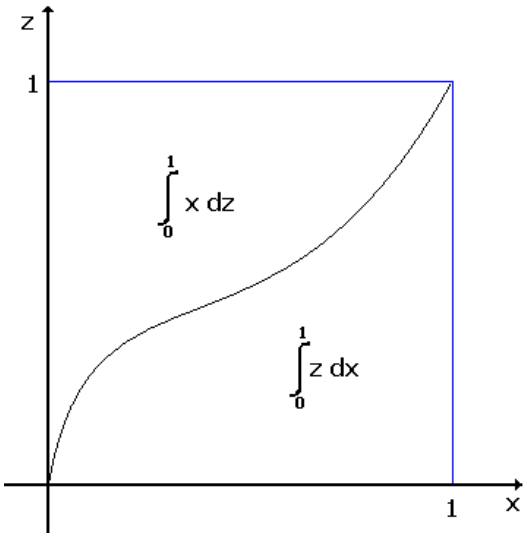
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \int_0^1 x\ dz\right)\right] \qquad \text{(Βλ. Σχήμα 9)}$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{1+z^2}$$

$$= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 + \ldots)\ dz \quad \text{γεωμετρική σειρά}$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 \ldots\right]_0^1 \text{ ολοκλήρωση όρων}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\,,$$



Σχήμα 9.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αγνόησε το ζήτημα της σύγκλισης όταν z=1.

Στη συνέχεια ο Leibniz ήταν ενθουσιασμένος με τη σύγκριση της σειράς:

$$\frac{\pi}{8}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)+\ldots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\ldots.$$

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots. \qquad (21)$$

και της σειράς του Mercator στη μορφή:

$$\frac{1}{4}\log 2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{24}\right)+\ldots$$

$$\frac{1}{4}\log 2=\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{10\cdot 12}+\ldots \qquad (22)$$

Μία ακόμα εντυπωσιακή εφαρμογή της μεθόδου μετασχηματισμού ήταν ο τετραγωνισμός του τμήματος κυκλοειδούς (το πρώτο από τα προβλήματα τα οποία

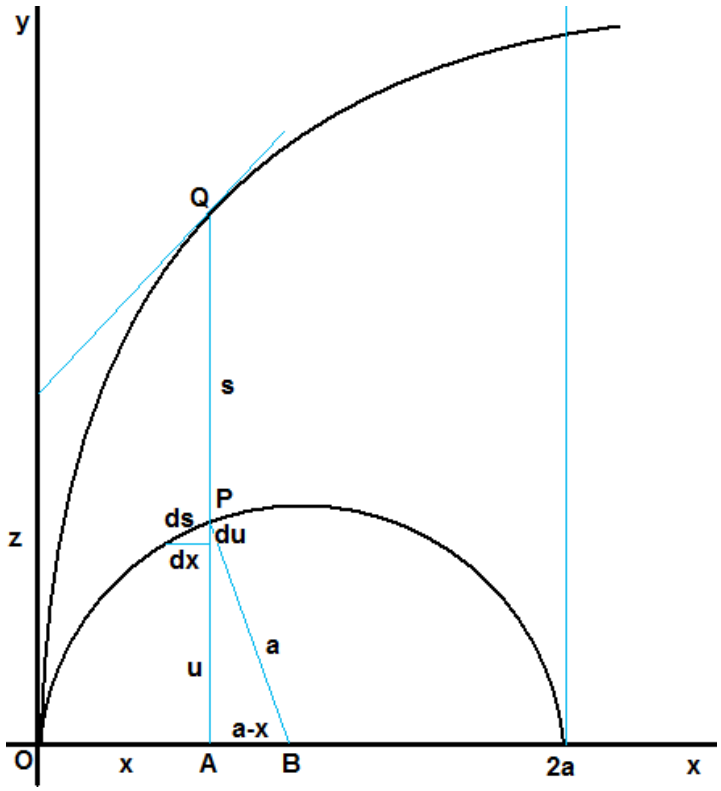
έθεσε σε διαγωνισμό ο Pascal). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μισό ενός κυκλικού τόξου το οποίο δημιουργείται από κύκλο ακτίνας α. Το μήκος y της συντεταγμένης QA ενός σημείου Q πάνω σε ένα κυκλοειδές δίνεται από τον τύπο

$$y = u + s$$

Όπου

$$u = \sqrt{2ax - x^2}$$

είναι το μήκος της συντεταγμένης AP , και s είναι το μήκος του κυκλικού τόξου OP. Το μήκος του τμήματος PQ είναι ίσο με αυτό του τόξου OP.



Σχήμα 10.

Η ομοιότητα του χαρακτηριστικού τριγώνου για τον κύκλο και του τριγώνου ABP δίνει τις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{du}{dx} = \frac{a-x}{u} \text{ και } \frac{ds}{dx} = \frac{a}{u},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dx} = \frac{2a-x}{u}.$$

Επομένως,

$$z = y - x\frac{dy}{dx} = (u+s) - \frac{2ax - x^2}{u} = (u+s) - u = s\,.$$

Από το θεώρημα μετασχηματισμού έχουμε τότε:

$$\int_0^{x_1} s\ dx = \int_0^{x_1} z\ dx = 2\int_0^{x_1} y\ dx - x_1 y_1$$

$$= 2\int_0^{x_1} (u+s)\ dx - x_1(u_1 + s_1) \qquad \text{(23), και άρα}$$

$$\int_0^{x_1} s\ dx = x_1(u_1 + s_1) - 2\int_0^{x_1} u\ dx\,.$$

Αλλά η αφαίρεση του τριγώνου ΑΒΡ από τον κυκλικό τομέα ΟΒΡ δίνει

$$\int_0^{x_1} u\ dx = \frac{1}{2}as_1 - \frac{1}{2}u_1(a - x_1)$$

και από αυτό έχουμε

$$\int_0^{x_1} s\ dx = au_1 - s_1(a - x_1)\,. \qquad \text{(24)}$$

Τελικά, το εμβαδό της κυκλοειδούς περιοχής στο διάστημα $[0,x_1]$ είναι:

$$\int_0^{x_1} y\ dx = \frac{1}{2}x_1 y_1 + \frac{1}{2}\int_0^{x_1} s\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x_1 y_1 + \frac{1}{2}au_1 - \frac{1}{2}s_1(a - x_1) \qquad \text{(25).}$$

Για παράδειγμα, με x_1=2α, y_1=πα, u_1=0, s_1=πα, η (25) δίνει $\frac{3\pi\alpha^2}{2}$.

Η ανακάλυψη του αναλυτικού λογισμού

Ο Leibniz κατέγραψε την ανακάλυψη του αναλυτικού του λογισμού σε μία σειρά κάπως ασύνδετων σημειώσεων που έγραψε κατά τη διάρκεια του Οκτωβρίου και Νοεμβρίου του 1675[19].

Λαμβάνοντας υπόψη μια καμπύλη που περιγράφεται από την τετμημένη του x και την τεταγμένη του y, ο Leibniz προβλέπει μια ιδιαίτερη ακολουθία απείρως πολλών τιμών του y που συνδέονται με την αντίστοιχη ακολουθία τιμών του x. Η ακολουθία τεταγμένων είναι με κάποιο τρόπο ανάλογη με μια συνηθισμένη ακολουθία αριθμών, και οι τετμημένες καθορίζουν την τάξη αυτής της ακολουθίας. Εντούτοις, η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του y υποτίθεται ότι ήταν απειροελάχιστη, ή "αμελητέα" συγκρινόμενη τις τιμές του y.

Αρχικά ο Leibniz χρησιμοποιεί το γράμμα l για να δείξει την απειροελάχιστη διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών του y, και περιγράφει τα αθροίσματα με τον όρο "*omn*" ως σύντμηση του λατινικού *omnia* (άθροισμα). Ως συνέπεια αυτού, στο χειρόγραφο της 29ης Οκτωβρίου, ο Leibniz αρχίζει με το προηγούμενο αποτέλεσμά του

$$= \frac{1}{2} y^2 = \int y \; dy$$

γραμμένο στη μορφή:

$$\overline{\frac{omn.\; l^2}{2}} = omn.\overline{\frac{}{omn.\; l}\frac{l}{a}} \qquad (26)$$

Χρησιμοποιεί οριζόντιες μπάρες πάνω από τα σύμβολα αντί για παρενθέσεις και χρησιμοποιεί τη σταθερά α για να διατηρήσει τις διαστάσεις. Οπότε η παραπάνω ισότητα σημαίνει:

$$= \frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right)dy.$$

Επίσης σημειώνει ότι «*αυτό είναι ένα πολύ καλό άλλα καθόλου προφανές θεώρημα*». Και συνεχίζει λέγοντας: « *Ένα άλλο θεώρημα του ίδιου είδους είναι*

---

[19] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920.*

$$omn.\ xl = xomn.\ l - omn.\ omn\ .l \qquad (27)$$

όπου το l λαμβάνεται ώστε να είναι ένας όρος μιας προόδου (των διαφορών), και το x να είναι ο αριθμός που εκφράζει τη θέση ή την τάξη του l, του αντίστοιχου σε αυτό το x. Η΄ διαφορετικά το x είναι ο τακτικός αριθμός και το l η τάξη του» .

Κατά συνέπεια, αυτό το σημείο αναφέρει μία ακολουθία διαφορών των τεταγμένων και η ισότητα (27) μπορεί να γραφεί:

$$\int x\ dx = x\left(\int dy\right) - \int\left(\int dy\right) = xy - \int y\ dx.$$

Σε αυτές τις αρχικές σημειώσεις συχνά γράφει $\int y$ χωρίς να γίνεται σαφές αν αναφέρεται στο $\int y\ dx$ ή στο $\int y\ dy$ και σε αυτό το σημείο εισάγει το σύμβολο του ολοκληρώματος το οποίο χρησιμοποιεί για να γράψει το omn, έτσι ώστε $\int l = omn.\ l$, ή αλλιώς το άθροισμα των l. Οπότε

$$\frac{\int \bar{l}^{\,2}}{2} = \int\int \overline{\bar{l}\,\frac{l}{a}} \text{ και } \int \overline{xl} = x\int \bar{l} - \int\int l \ . \qquad (28)$$

Επίσης προσθέτει ότι «όλα αυτά τα θεωρήματα είναι αληθή για ακολουθίες των οποίων οι διαφορές των όρων παρέχουν στους όρους έναν λόγο που είναι μικρότερος από οποιαδήποτε προσδιορίσιμη ποσότητα (δηλαδή είναι απειροστό)».

Έχοντας εισάγει το σύμβολο $\int$ (προφανώς το επιμηκυμένο S από το «sum») προχώρησε στην ανεύρεση των κανόνων εφαρμογής του. Για παράδειγμα με το $l = dx$ στην πρώτη εξίσωση από τις σχέσεις 28 βρήκε ότι $\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2$, και με το $l = x\ dx$ στη δεύτερη σχέση παρατήρησε ότι:

$$\int x^2 dx = x\int x\ dx - \int\left(\int x\ dx\right)$$

$$= x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2},$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3$$

Στης 29 Οκτωβρίου, χειρόγραφα σημειώνει $l = \frac{y}{d}$, το οποίο γίνεται αυτό που γνωρίζουμε τώρα ως dx, μόλις τρεις ημέρες αργότερα (1η Νοεμβρίου).

Ο συμβολισμός y/d εμφανίζεται για πρώτη φορά στις σημειώσεις του για το πρόβλημα αντιστροφής της εφαπτομένης:

> *«Δοθέντος του l και της σχέσης του με το x, ας βρούμε το $\int l$. Αυτό πρόκειται να ληφθεί από τον αντίθετο υπολογισμό, δηλαδή, υποθέτοντας ότι $\int l = ya$. Θέτουμε $l = \frac{ya}{d}$, τότε καθώς το $\int$ θα αυξάνεται, έτσι το d θα μικραίνει τις διαστάσεις. Αλλά το $\int$ σημαίνει ένα άθροισμα και το d μία διαφορά. Από το δοθέν y μπορούμε πάντα να βρούμε το $\frac{y}{d}$ ή l, το οποίο είναι οι διαφορές των y. Οπότε μία εξίσωση μπορεί να μεταμορφωθεί σε μία άλλη».*

Σε χειρόγραφο της 11ης Νοεμβρίου, θέτει το ερώτημα σχετικά με το αν ισχύουν οι σχέσεις $d(uv) = d(u)d(v)$ και $d(u/v) = d(u)/d(v)$ και απαντά αρνητικά σημειώνοντας ότι

$$d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2x\ dx + (dx)^2 = 2x\ dx$$

παραλείποντας το απειροστό ανωτέρας τάξης, ενώ

$$d(x)d(x) = (x+dx-x)(x+dx-x) = (dx)^2.$$

Σε αυτή την περίοδο ο Leibniz έψαχνε ακόμα για τους σωστούς κανόνες γινομένου και πηλίκου. Παρόλα αυτά μπορεί να χρησιμοποιεί τον λογισμό του (που βρίσκεται σε εμβρυακή μορφή ακόμα) για την επίλυση εξεζητημένων γεωμετρικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα η εύρεση της καμπύλης $y = f(x)$ της οποίας η υποκάθετη v είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τη τεταγμένη του, δηλαδή,

$$v = \frac{b}{y}.$$

Ξεκινάει με το προηγούμενο αποτέλεσμα $\int v\ dx = \frac{1}{2}y^2$ (τύπος 15).

Η εφαρμογή του αντίστροφου τελεστή d δίνει

$$v\ dx = d\int v\ dx = d(\tfrac{1}{2}y^2) = y\ dy.$$

Η αντικατάσταση του $v = {}^{b}\!/_{y}$ δίνει

$$\frac{b}{y}dx = y\ dy,$$
$$b\ dx = y^2 dy,$$
$$\int b\ dx = \int y^2 dy,$$
$$bx = \tfrac{1}{3}y^3$$

η οποία είναι η εξίσωση της επιθυμητής καμπύλης. Στη συνέχεια ο Leibniz εξετάζει την ορθότητα του αποτελέσματος με τη χρήση του κανόνα εφαπτομένης του Sluse, και με αυτόν τον τρόπο πιστοποιεί την ορθότητα του λογισμού του σε ένα όχι απλό πρόβλημα.

Μέχρι τον Ιούλιο του 1676[20], ο Leibniz χρησιμοποιεί με συνέπεια το διαφορικό κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος. Σε ένα χειρόγραφο του Νοεμβρίου του 1676[21], ορίζει σαφώς τους κανόνες για διαφόριση και ολοκλήρωση δυνάμεων,

$$dx^e = ex^{e-1}dx \text{ και } \int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1},$$

με το e να μην είναι απαραίτητα ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Επίσης προσθέτει τη σημαντική σημείωση ότι *«αυτός ο συλλογισμός είναι γενικός, και δεν εξαρτάται από τ ην πρόοδο των x»*. Αυτός είναι ο τρόπος για να πούμε ότι το x μπορεί να είναι μία συνάρτηση ανεξάρτητης μεταβλητής, γεγονός το οποίο έκανε εφικτή τη μέθοδο της αντικατάστασης για τη διαφόριση των συνθέσεων των συναρτήσεων (αυτό το οποίο σήμερα καλούμε ως αλυσιδωτό κανόνα).

Για παράδειγμα, για να υπολογίσει το $d\sqrt{a+bz+cz^2}$, κάνει την αντικατάσταση $x = a+bz+cz^2$, σημειώνοντας ότι:

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \text{ και } dx = (b+2cz)\ dz,$$

οπότε

---

[20] *F. Cajori, Leibniz, the master builder of notations, Isis 7, 1925,σελ. 118-122.*

[21] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920, σελ.124-127.*

$$d\sqrt{a+bz+cz^2} = \frac{(b+2cz)\ dz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}.$$

Προηγούμενα, ο Leibniz είχε αποδεχθεί τον κανόνα εφαπτομένης του Sluse χωρίς απόδειξη. Στο χειρόγραφο του Νοεμβρίου του 1676, δείχνει πώς παράγεται από το λογισμό του.

Για παράδειγμα, δοσμένης της σχέσης

$$z = ay^2 + byx + cx^2 + fx + gy + h = 0, \qquad (29)$$

ο Leibniz αντικαθιστά το x με $x+dx$ και το y με $y+dy$, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} &ay^2 + 2ay\ dy + a(dy)^2 + by\ x + by\ dx + bx\ dy + b\ dx\ dy \\ &+ cx^2 + 2cx\ dx + c(dx)^2 + fx + f\ dx + gy + g\ dy + h = 0. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (29) και υποθέτοντας ότι

$$a(dy)^2 + b\ dx\ dy + c(dx)^2 = 0,$$

απομένει

$$2ay\ dy + by\ dx + bx\ dy + scx\ dx + f\ dx + g\ dy = 0,$$

οπότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{by+2cx+f}{2ay+bx+g} = -\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y},$$

το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με τον κανόνα του Sluse.

Σε ένα χειρόγραφο της 11ης Ιουλίου του 1677, ο Leibniz δίνει προτάσεις και αποδείξεις για τους κανόνες γινομένου και πηλίκου[22]. Για την απόδειξη της σχέσης

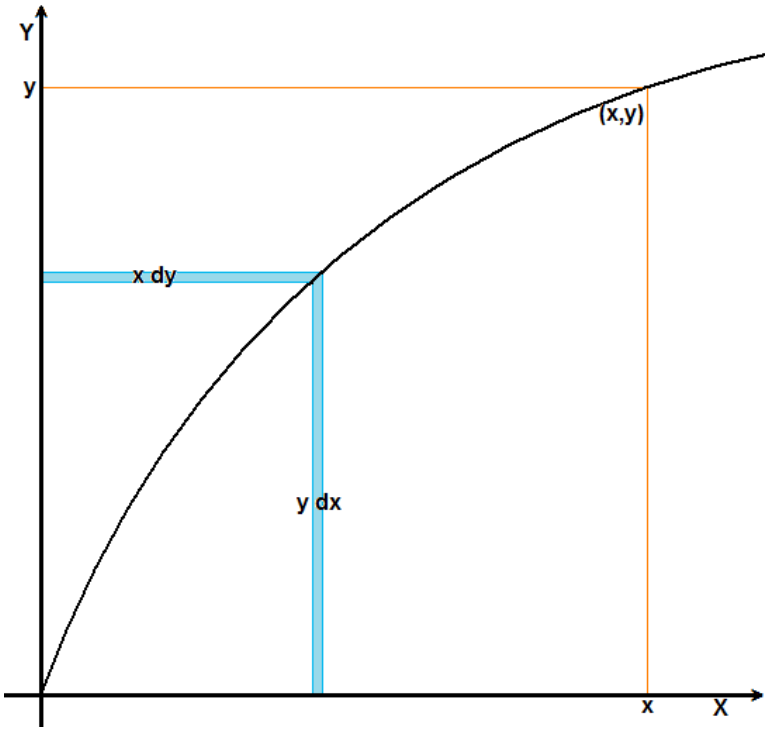
$$d(xy) = x\ dy + y\ dx,$$

ο Leibniz γράφει

[22] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920,σελ.134-144.*

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$$
$$= x\ dy + y\ dx + dx\ dy,$$

και σημειώνει ότι «για την παράλειψη της ποσότητας $dx\ dy$, η οποία είναι απείρως μικρή συγκριτικά με τα υπόλοιπα, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι dx και dy είναι και αυτά απείρως μικρά, οπότε απομένει το $x\ dy + y\ dx$.»



Σχήμα 11.

Για να αποδείξει ο Leibniz ότι ισχύει η σχέση

$$d\frac{y}{x} = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2},$$

γράφει:

$$d\frac{y}{x} = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x} = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + x\ dx}$$

«το οποίο γίνεται (αν γράψουμε x^2 αντί για το $x^2 + x\ dx$, μίας και το $x\ dx$ μπορεί να παραλειφθεί ως απείρως μικρό σε σχέση με το x^2) ίσο με $(x\ dy - y\ dx)/x^2$.»

Ο Leibniz ήταν προσεκτικός στο να ελέγξει όποτε είναι δυνατόν τη συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων του εξελισσόμενου αναλυτικού λογισμού του και των αποτελεσμάτων των γνωστών γεωμετρικών επιχειρημάτων. Για παράδειγμα, σημείωσε ότι ο κανόνας γινομένου $d(xy) = x\ dy + y\ dx$ συμφωνεί με το άθροισμα των περιοχών του ως άνω σχήματος:

$$\int x\ dy + \int y\ dx = xy$$

Ομοίως, η άθροιση των στιγμών για τον άξονα των x και y αντίστοιχα δίνει:

$$\int \tfrac{1}{2} y^2 dx + \int xy\ dy = \tfrac{1}{2} xy^2$$

και

$$\int xy\ dx + \int \tfrac{1}{2} x^2 dy = \tfrac{1}{2} x^2 y\ .$$

Εντούτοις, όπως παρατήρησε στο έργο του *Historia et Origo*[23]*:*

> *«ο λογισμός επίσης παρουσιάζει χωρίς αναφορά σε οποιοδήποτε σχήμα, ότι* $\tfrac{1}{2} d(x^2 y) = xy\ dx + \tfrac{1}{2} x^2 dy$ *, έτσι ώστε τώρα υπάρχει ανάγκη για όχι μεγαλύτερο αριθμό των θεωρημάτων για την Αρχιμήδεια γεωμετρία, από αυτούς που δίνονται από τον Ευκλείδη στο 2ο βιβλίο του ή-αλλού, για τη συνηθισμένη γεωμετρία». Ο λογισμός έχει γίνει ένα «λογικό και προφανές μέσο, το οποίο θα καθοδηγήσει το μυαλό!».*

Στο αναθεωρημένο χειρόγραφο του 1677 ο ρόλος του απειροστού χαρακτηριστικού τριγώνου γίνεται σαφής στο νέο λογισμό. Μια καμπύλη είναι τώρα ένα πολύγωνο με απείρως πολλές γωνίες και απειροελάχιστες πλευρές. Το στοιχείο ds είναι το μήκος της πλευράς του πολυγώνου – ένα απειροελάχιστο τμήμα ευθείας γραμμής που ενώνει δύο διαδοχικές κορυφές. Έτσι:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

---

[23] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920,σελ.55-56.*

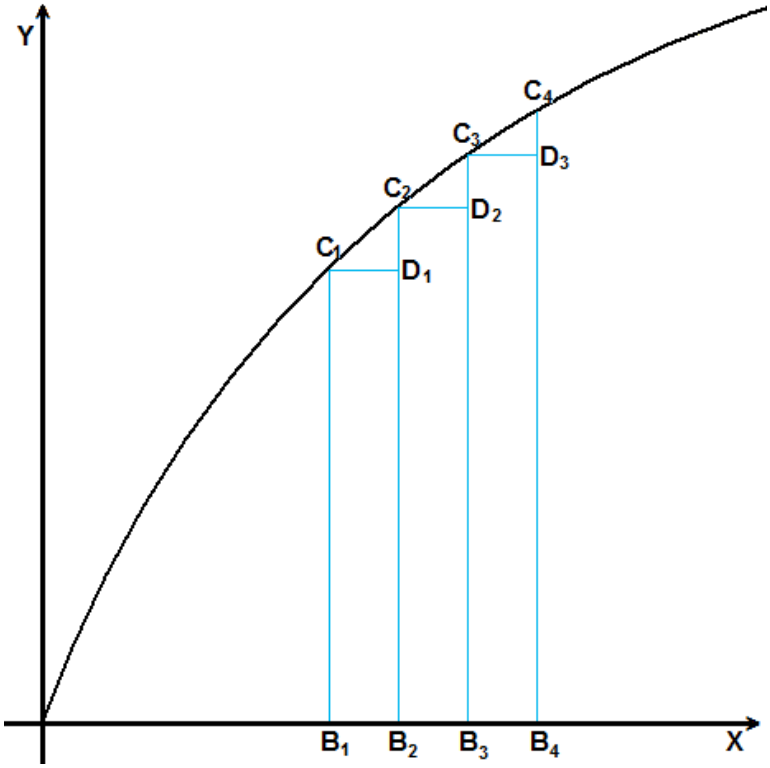
όπου το dx και το dy είναι οι διαφορές των συντεταγμένων x και y των δύο αυτών διαδοχικών κορυφών. Οπότε για την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2$ το μήκος της πλευράς δίνεται από τη σχέση

$$s = \int ds = \int \sqrt{1+x^2}\,dx,$$

ώστε η κατασκευή αυτής της παραβολής να εξαρτάται από τον τετραγωνισμό της υπερβολής $y = \sqrt{1+x^2}$.

Σε αυτό το χειρόγραφο το ολοκλήρωμα $\int y\ dx$ προσδιορίζεται από το άθροισμα των απειροστών ορθογωνίων ύψους y και πλάτους dx.

Αναφερόμενος στο παρακάτω σχήμα ο Leibniz λέει[24]:



Σχήμα 12.

[24] *J.M.Child, The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago, 1920, σελ.13.*

> *«Αναπαριστώ την περιοχή ενός σχήματος από το άθροισμα όλων των περιεχόμενων ορθογωνίων που σχηματίζονται από της συντεταγμένες και τις διαφορές όλων των τετμημένων δηλαδή από $B_1D_1+B_2D_2+B_3D_3$ + κ.λπ.. Τα μικρά τρίγωνα $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$ κ.λπ., επειδή είναι απείρως μικρά σχετικά με τα ορθογώνια μπορούμε να τα παραλείψουμε χωρίς ρίσκο. Έτσι στο λογισμό μου παρουσιάζω την περιοχή του σχήματος ως* $\int y\ dx$*.»*

Στη συνέχεια, ο Leibniz παρουσιάζει αυτό το οποίο σήμερα καλούμε το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού: «τώρα φέρουμε τα ύψη στο ανώτατο σημείο και έχουμε το εμβαδό του σχήματος, βρίσκοντας το σχήμα από τα αθροίσματα των εμβαδών ή των τετραγωνιζουσών του.» Δοθείσης μίας καμπύλης με τεταγμένη z, της οποίας ψάχνουμε το εμβαδό, υποθέτουμε ότι είναι εφικτό να βρούμε μία καμπύλη με τεταγμένη y τέτοια ώστε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$$

όπου το α είναι μία σταθερά (που πιθανώς συμπεριλαμβάνεται στη σχέση ώστε να καλύπτεται η ομογένεια των διαστάσεων) . Τότε

$$z\ dx = a\ dy$$

οπότε η περιοχή κάτω από την αρχική καμπύλη είναι:

$$\int z\ dx = a\int dy = ay \qquad (30)$$

υποθέτοντας (όπως συνήθως με τον Leibniz) ότι η καμπύλη y περνά από την αρχή των αξόνων. Οπότε τα προβλήματα τετραγωνισμού ανάγονται με τη χρήση του λογισμού του Leibniz σε προβλήματα αντιστροφής της εφαπτομένης. Το οποίο σημαίνει ότι για να βρούμε την επιφάνεια κάτω από μία καμπύλη με τεταγμένη z, αρκεί να βρεθεί μια καμπύλη η της οποίας η εφαπτομένη ικανοποιεί τον όρο

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Αφαιρώντας την περιοχή που βρίσκεται στο διάστημα [0,α] από αυτήν που βρίσκεται στο διάστημα [0,b] και θέτοντας α=1 στη σχέση (30) έχουμε

$$\int_a^b z\ dx = y(b) - y(a).$$

Η πρώτη δημοσίευση για τον λογισμό

Η πρώτη δημοσίευση άρθρου από τον Leibniz για τον διαφορικό λογισμό έγινε το 1684 στο περιοδικό *Acta Eruditorum,* αγγλική μετάφραση του οποίου περιέχεται στο βιβλίο του Struik[25]. Το πρώτο κείμενο είχε τίτλο *«Μία νέα μέθοδος για το μέγιστο, το ελάχιστο και τις εφαπτόμενες, που δεν παρεμποδίζονται από κλασματικές ή άρρητες ποσότητες και ένας αξιόλογος τύπος λογισμού για αυτό»*. Τα διαφορικά εισάγονται χωρίς τις θεωρήσεις των απειροστών που αποτελούν το έναυσμά τους. Δεδομένου ενός αυθαιρέτου αριθμού dx, το dy ορίζεται να είναι αυτός ο αριθμός έτσι ώστε ο λόγος dy/dx να ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας. Με σύγχρονες μεθόδους, αυτό δεν είναι τόσο άσχημο, εκτός από το γεγονός ότι δεν παρέχεται κανένας ορισμός της εφαπτομένης ευθείας.

> *«Πρέπει μόνο να έχουμε κατά νου ότι για να βρούμε την εφαπτομένη σημαίνει να σχεδιάσουμε μία γραμμή που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης που απέχουν απείρως μικρή απόσταση, ή τη συνεχή πλευρά του πολυγώνου με άπειρο πλήθος πλευρών, το οποίο για εμάς αντικαθιστά την καμπύλη.»*

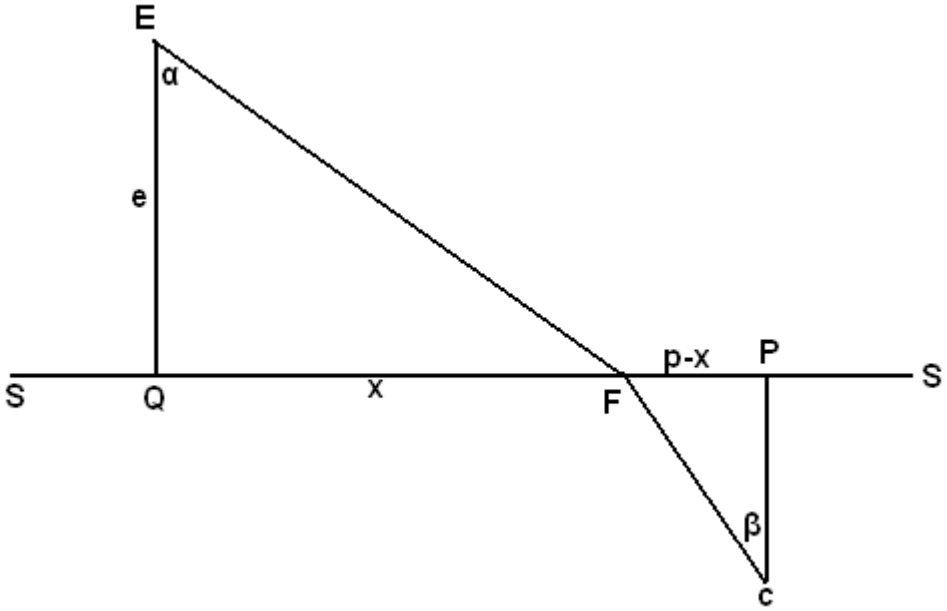
Οι μηχανικοί κανόνες για τον υπολογισμό των διαφορικών των δυνάμεων, γινομένων και πηλίκων διατυπώνονται χωρίς επεξήγηση. Επισημαίνεται ότι το dv είναι θετικό όταν η τεταγμένη *v* αυξάνεται καθώς αυξάνεται το x, ενώ το dv είναι αρνητικό, όταν η τεταγμένη *v* μειώνεται. *«Αν δεν ισχύει καμία από τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή όταν το v ούτε αυξάνεται, ούτε μειώνεται, αλλά είναι σταθερό»*, η απαραίτητη συνθήκη dv=0 για το μέγιστο ή το ελάχιστο αντιστοιχίζεται, όπως παρατηρείται, στην οριζόντια εφαπτόμενη γραμμή. Η απαραίτητη συνθήκη d(dv)=0 για το σημείο καμπής επεξηγείται παρόμοια.

Όπως στην πρώτη εφαρμογή της μεθόδου μεγίστου-ελαχίστου, ο Leibniz επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα.: «Έστω ότι δίνονται τα σημεία C και E και η γραμμή SS στην ίδια περιοχή. Μπορεί να βρεθεί ένα σημείο F της SS έτσι ώστε όταν τα σημεία C και E ενωθούν με το σημείο F το άθροισμα του ορθογωνίου (γινομένου) της CF και

---

[25] *D.J. Struik, A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1969, σελ.272-280.*

της δοσμένης γραμμής h και του ορθογωνίου της FE και της δοσμένης γραμμής r να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο».



Σχήμα 13.

Σύμφωνα με το Σχήμα 13, η ποσότητα που ελαχιστοποιείται είναι: $w = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}$.

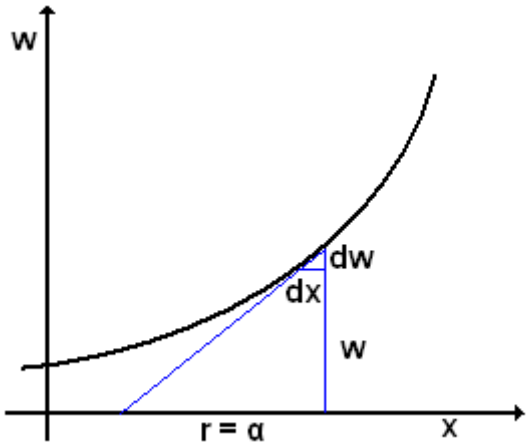
Εφαρμόζοντας τη συνθήκη dw=0 συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{h(p-x)}{\sqrt{(p-x)^2 + c^2}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + e^2}} \text{ και } \frac{\sin a}{\sin \beta} = \frac{h}{r}.$$

Ο Leibniz ερμήνευσε αυτό το αποτέλεσμα ως το νόμο της διάθλασης του φωτός όπου μία ακτίνα φωτός διέρχεται από το μέσο μιας απόστασης r (σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός) σε μία άλλη πυκνότητας h, και η γραμμή SS αναπαριστά τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο μέσων. Προσθέτει ότι

> *«άλλοι πολυμαθείς άνθρωποι έχουν αναζητήσει με αρκετούς αλλά απατηλούς τρόπους αυτό που κάποιος έμπειρος σε αυτόν τον λογισμό επέτυχε σε αυτές τις γραμμές σαν από μαγεία.».*
>
> *«Και αυτή είναι μόνον η αρχή για αρκετή ακόμη υψηλή Γεωμετρία, που αναφέρεται σε ακόμη πιο δύσκολα και πιο όμορφα προβλήματα εφαρμοσμένων μαθηματικών, τα οποία χωρίς τον διαφορικό μας λογισμό ή κάτι παρόμοιο δεν θα ήταν εφικτό να αντιμετωπιστούν από κανέναν σε καμία περίπτωση». Το έγγραφο του 1684 έκλεισε με την επίλυση του*

προβλήματος του De Beaune το οποίο ο Descartes δεν κατάφερε να επιλύσει: να βρει την τεταγμένη w μιας καμπύλης της οποίας η υποεφαπτομένη r είναι σταθερά r=a. Για μία τέτοια καμπύλη (σχήμα 14) $\frac{dw}{dx} = \frac{w}{r} = \frac{w}{a}$, *ή* $w = a\frac{dw}{dx}$. *(31)*



Σχήμα 14.

Ο Leibniz θεωρεί την ακολουθία των τιμών του x με σταθερά τις διαφορές dx=b. Τότε προκύπτει $dw = \frac{b}{a}w$, έτσι ώστε η αντίστοιχη ακολουθία των τεταγμένων w να είναι ανάλογη στην ακολουθία των διαφορών της. Γνωρίζοντας ότι αυτή είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα της γεωμετρικής προόδου, συμπεραίνει ότι «αν το x βρίσκεται σε αριθμητική πρόοδο, τότε το w είναι σε γεωμετρική πρόοδο. Με άλλα λόγια, αν τα w είναι αριθμοί, τα x θα είναι λογάριθμοι, έτσι ώστε η ζητούμενη καμπύλη είναι η λογαριθμική».

Το ολοκλήρωμα και το σύμβολο $\int$ εμφανίστηκαν πρώτη φορά εκτυπωμένα σε περιοδικό που δημοσιεύτηκε από τον Leibniz στο *Acta Eruditorum* το 1686[26], όπου παρουσίασε το αποτέλεσμα που εκφράζονται από την εξίσωση (15). Το θεμελιώδες

[26] *D.J. Struik, A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1969,σελ. 281-282.*

θεώρημα του λογισμού, με την απόδειξη που εξετάζεται στην προηγούμενη παράγραφο, εμφανίστηκε στο Acta Eruditorum το 1693[27].

[27] *D.J. Struik, A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, MA, Harvard University Press, 1969, σελ. 282-284.*

Διαφορικά ανώτερης τάξης.

Έχουμε παρατηρήσει ότι ο απειροστικός λογισμός του Leibniz προέρχεται από συγκεκριμένη λογική συμπερασματολογία: από τις απλές έννοιες του αθροίσματος και της διαφοράς ακολουθιών, όπου ορίζεται η ακολουθία των αριθμών, έως την περίπτωση των ακολουθιών μεταβλητών συσχετιζόμενων με γεωμετρικές καμπύλες. Η καμπύλη προσεγγίζεται από ένα πολύγωνο άπειρων γωνιών όπου οι απείρως μικρές πλευρές του όταν προεκταθούν σχηματίζουν εφαπτομένες ευθείες στην καμπύλη. Οι βασικές ακολουθίες των μεταβλητών των σχετικών με την καμπύλη είναι τότε οι ακολουθίες των τεταγμένων y και των τετμημένων x των απείρου πλήθους πλευρών του πολυγώνου.

Η διαφορά μεταξύ των δύο διαδοχικών τιμών του x αποτελεί το διαφορικό dx και όμοια, προκύπτει το διαφορικό dy. Υποθέτουμε ότι οι ποσότητες dx και dy δεν είναι μηδενικές αλλά ασύγκριτα μικρές, και για αυτόν το λόγο αμελητέες, σε σχέση με τις τιμές των μεταβλητών x και y. Με την ίδια λογική υποθέτουμε ότι το γινόμενο των διαφορικών, όπως το $(dx)(dy)$ ή το $(dx)^2$, είναι αμελητέο συγκριτικά με τα dx και dy. Σύμφωνα με αυτούς τους ισχυρισμούς, και με τους κανόνες των πράξεων ορίζονται οι βασικοί τύποι διαφόρισης.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι τα διαφορικά dx ορίζονται ως μη μηδενικές ποσότητες. Δε θεωρούνται μεταβλητές που πλησιάζουν το μηδέν, ούτε που κάποτε πρόκειται να το πλησιάσουν. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μία ακολουθία διαφορικών dx (ή dy) σχετική με την καμπύλη. Είναι απλά η ακολουθία διαφορών της ακολουθίας των τετμημένων x (ή των τεταγμένων y). Συνεπώς, αυτή η ακολουθία διαφορών περιέχει μία ακολουθία διαφορών που τα στοιχεία της είναι τα διαφορικά δεύτερης τάξης: $d(dx) = ddx = d^2x$.

Όμοια, το d^2y αποτελεί τη διαφορά διαδοχικών διαφορών των τιμών της y. Παίρνοντας τέτοιες διαφορές, κατ'επανάληψη, επιτυγχάνονται τα διαφορικά ανώτερης τάξης $d^kx = d\left(d^{k-1}x\right)$ και $d^ky = d\left(d^{k-1}y\right)$.

Θεωρείται ότι ο όρος d^2y είναι ασύγκριτα μικρός σε σχέση με το dy, και γενικά, ο όρος d^ky είναι ασύγκριτα μικρός σε σχέση με το $d^{k-1}y$. Επιπρόσθετα, θεωρείται ότι το κ^{στης} τάξης διαφορικό d^ky είναι ίδιας τάξης μέγεθος με την κ^{στη} δύναμη $(dx)^k$ του διαφορικού πρώτης τάξης, αρκεί το πηλίκο $d^ky/(dx)^k$ να είναι πραγματικός αριθμός (εκτός από εξαιρέσεις). Σύμφωνα με αυτές τις υποθέσεις , οι κανόνες του

γινομένου και του πηλίκου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν τα διαφορικά των διαφορικών. Παράδειγμα,

$$d(xdy) = (dx)(dy) + xd^2y,$$

$$d^2(x^n) = d(nx^{n-1}dx) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + nx^{n-1}d^2x, \qquad (32)$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d^2y)(dx) - (d^2x)(dy)}{(dx)^2}. \qquad (33)$$

Στους υπολογισμούς του Leibniz με τα διαφορικά, η επιλογή του x ως ανεξάρτητης μεταβλητής ήταν αποτελεσματική όταν επιλεγόταν η βασική ακολουθία των τιμών της x ή των τετμημένων ως μία αριθμητική πρόοδος, έτσι ώστε το dx να είναι σταθερό και ως εκ τούτου $d^2x = 0$. Παρατηρούμε ότι για $d^2x = 0$, οι τύποι (32) και (33) γίνονται $d^2(x^n) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2$ και $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx}$, από όπου προκύπτει ότι $\frac{d^2(x^n)}{(dx)^2} = n(n-1)x^{n-2}$ και $\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{(dx)^2}$.

Καθώς, τα διαφορικά ανώτερης τάξης, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα πρώτης τάξης, δε τα συναντούμε στους καθημερινούς υπολογισμούς μας, η κληρονομιά τους επιβιώνει μέσα από το συμβολισμό $\frac{d^ny}{dx^n}$ για τη νιοστή παράγωγο της συνάρτησης y της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Στα προβλήματα όπου υποδεικνύεται η y ως ανεξάρτητη μεταβλητή, λήφθηκε η ακολουθία των τεταγμένων y (περισσότερο από τις τεταγμένες x) ως αριθμητική πρόοδος, έτσι ώστε $d^2y = 0$ (αντί για $d^2x = 0$). Αυτή η επιλογή αναφέρεται ως « ο προσδιορισμός της προόδου των μεταβλητών». Παρακάτω θα αναφερθούν οι συνέπειες, σύμφωνα με τον Bos που προκύπτουν από αυτή την επιλογή. Ειδικότερα, αυτή η ελευθερία επιλογής ήταν η βάση της μεθόδου ολοκλήρωσης με αντικατάσταση. Παράδειγμα, αν η ακολουθία των τετμημένων x ληφθεί ως ακολουθία τετραγώνων, κάποια στιγμή θα γίνει η αντικατάσταση $x = t^2$ και $dx = 2tdt$, όπου το t είναι η καινούρια ανεξάρτητη μεταβλητή με $d^2t = 0$. Όπως το τοποθέτησε ο ίδιος ο Leibniz: *«Με αυτόν τον τρόπο μπορώ να μετασχηματίσω το δοσμένο τετράγωνο σε άλλα με άπειρο πλήθος τρόπων, και κατά συνέπεια να βρεθεί το ένα μέσω του άλλου.»*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα παρουσίασης γεωμετρικών εφαρμογών των διαφορικών ανώτερης τάξης, αποτελεί από τον John Bernoulli η διαφόριση του

τύπου για την ακτίνα καμπυλότητας σε ένα σημείο της καμπύλης, που θα αποδειχθεί στη συνέχεια.

Η έννοια των απειροστών του Leibniz.

Στις δημοσιεύσεις του τις σχετικές με τον λογισμό, ο Leibniz έδωσε έμφαση στον τετριμμένο και τυπικό χαρακτήρα των κανόνων λογισμού και διαχείρισης των διαφορικών και υποστήριξε ότι η κατάλληλη εφαρμογή αυτών των λειτουργικών κανόνων μπορούν σταθερά να οδηγήσουν σε σωστά και ουσιαστικά αποτελέσματα, ακόμη και αν η αμφιβολία παρέμενε για την ακριβή έννοια των απειροστών που εμφανίστηκε στους υπολογισμούς. Πράγματι, η ορθότητα των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκε υπήρξε ο οδηγός του στη διατύπωση των αλγορίθμων του, και εδραιώθηκε η εμπιστοσύνη του στη λειτουργική τους ισχύ.

Η μαθηματική παράδοση γενικά απέδωσε στον Leibniz την πεποίθηση της πραγματικής ύπαρξης των απειροστών ποσοτήτων. Απειροστή είναι μία ποσότητα που χωρίς να είναι μηδέν είναι μικρότερη από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό. Ο ισχυρισμός αυτής της πεποίθησης συναντήθηκε κάποιες φορές σε συζητήσεις τον εικοστό αιώνα για τη μη τυπική ανάλυση. Παρόλα αυτά, ο Leibniz δε φαίνεται πεπεισμένος ως προς το ερώτημα της πραγματικής ύπαρξης των απειροστών, και σίγουρα εξέφρασε αμφιβολίες σε αυτήν την περίπτωση[28]. Εν πάση περιπτώσει, αναγνώρισε ότι το ερώτημα της ύπαρξης των απειροστών είναι ανεξάρτητο από το ερώτημα αναφορικά με το κατά πόσο οι υπολογισμοί των απειροστών που εφαρμόζονται σε συμφωνία με τους λειτουργικούς κανόνες του λογισμού, οδηγούν σε σωστές λύσεις των προβλημάτων. Ο Leibniz έδωσε μία εκτενή έκθεση αυτής της άποψης σε ένα μη δημοσιευμένο χειρόγραφο που πιθανολογείται ότι γράφτηκε λίγο μετά το 1700, σε απάντηση της κριτικής που υποβλήθηκε ο λογισμός το 1694 από τον Ολλανδό φυσικό και γεωμέτρη Bernard Nieuwentijdt[29]:

> *«Είτε άπειρες επεκτάσεις (ποσότητες) διαρκώς μεγαλύτερες, είτε απείρως μικρές ποσότητες διαρκώς μικρότερες, τα οποία είναι θεμιτοί στοχασμοί, είναι ζήτημα ότι αξιώνομαι πιθανόν να ανοίξω το ερώτημα.*

---

[28] *C. B. Boyer, The History of the Calculus and Its Conceptual Development. New York. Dover, 1959, Κεφ.4, σελ. 219.*

[29] *J.M.Child,The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Chicago,1920, σελ.149-150.*

Αλλά για αυτόν που θα μελετήσει αυτά τα ζητήματα, δεν είναι απαραίτητο να υποχωρήσει σε μεταφυσικές διενέξεις, όπως η σύνθεση του συνεχούς, ή να κάνει γεωμετρικές υποθέσεις εξαρτημένες επ' αυτού. Θα είναι επαρκές, όταν μιλάμε για απείρως μεγάλες (ή με μεγαλύτερη ακρίβεια χωρίς όριο), ή για απείρως μικρές ποσότητες (τα ελάχιστα αυτών που γνωρίζουμε) να είναι κατανοητό ότι εννοούμε ποσότητες που είναι απείρως μεγάλες ή απείρως μικρές, ή διαφορετικά όσο μεγάλες ή όσο μικρές σε ευχαριστεί, έτσι ώστε το σφάλμα που προσδιορίζει να είναι μικρότερο από οποιαδήποτε ορισμένη προσδιορίσιμη ποσότητα. Επίσης, από τη στιγμή που γενικά θα φανερωθεί ότι όταν οποιοδήποτε μικρό σφάλμα προσδιορίζεται, υποδεικνύεται ότι μπορεί να γίνει μικρότερο, έπεται ότι το σφάλμα είναι απολύτως τίποτα...Αν κάποιος επιθυμεί να κατανοήσει αυτά (το απείρως μεγάλο και το απείρως μικρό) ως θεμελιώδης έννοιες ή ως αληθινά άπειρες, μπορεί να γίνει, και αυτό χωρίς να υποχωρήσει η διένεξη για την πραγματικότητα των επεκτάσεων ή του απείρως συνεχούς, γενικά, ή του απείρως μικρού, ακόμη και αν πιστεύει ότι τέτοια πράγματα είναι εντελώς απίθανα. Θα είναι αρκετά απλό να τα χρησιμοποιήσουμε ως ένα εργαλείο που έχει πλεονεκτήματα με σκοπό τον υπολογισμό, ακριβώς όπως οι αλγεβριστές υποστηρίζουν τις φανταστικές ρίζες με τεράστιο όφελος. Διότι διαθέτουν ένα εύχρηστο μέτρο υπολογισμού, όπως προφανώς επαληθεύεται σε κάθε περίπτωση κατά τέτοιο αυστηρό τρόπο με τη μέθοδο που έχει ήδη αναφερθεί».

Κατά συνέπεια, ο Leibniz παρουσιάζει τον λογισμό του των απειροστών ως μία συντομευμένη μορφή της σπουδαίας Αρχαιοελληνικής μεθόδου της εξάντλησης, της οποίας η μεστή γλώσσα είναι καλύτερα προσαρμόσιμη στην τέχνη της ανακάλυψης. Η βάση για αυτήν τη διαφωνία είναι ότι δεδομένης μιας ισότητας μεταξύ δύο εκφράσεων που περιέχουν διαφορικά, αυτά που έχουν επικρατήσει αποβάλλοντας τα διαφορικά ανώτερης τάξης, έχουν επιτευχθεί επακριβώς (και περισσότερο πληκτικά) αντικαθιστώντας για κάθε διαφορικό την αντίστοιχη πεπερασμένη διαφορά, και στη συνέχεια, αποδεικνύοντας ότι η διαφορά μεταξύ των καταληκτικών εκφράσεων μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή επιλέγοντας τις πεπερασμένες διαφορές κατάλληλα μικρές.

«Τελικά, πρέπει να παρατηρηθεί πως, δεδομένου ότι ο ίδιος ο Leibniz υπήρξε μάλλον επιφυλακτικός αναφορικά με την πραγματική ύπαρξη των απειροστών, αυτή η αρμόζουσα σύνεση δεν ακολουθήθηκε από τους άμεσους οπαδούς του (στους οποίους ανήκαν και οι αδελφοί Bernoulli), οι οποίοι άκριτα αποδέχτηκαν τα απειροστά ως γνήσιες μαθηματικές οντότητες. Πράγματι, αυτή η έλλειψη αμφιβολιών για τα θεμέλια του

λογισμού πιθανόν να συνέβαλλε στη ραγδαία ανάπτυξη του περιεχομένου του, καθώς και των εφαρμογών του[30]».

Ο απειροστικός λογισμός του Leibniz, κατά τον Bos[31]

Αυτό το κεφάλαιο παρέχει μια περίληψη της θεωρίας, των τεχνικών και των ελλοχευουσών εννοιών του απειροστικού λογισμού που χρησιμοποιήθηκαν από τον Leibniz και τους πρώτους οπαδούς του όπως ήταν ο Jacob και ο Johann Bernoulli, καθώς και ο L'Hôpital.

Η παρουσίαση μιας τέτοιας περίληψης παρουσιάζει τα μεθοδολογικά προβλήματα που σχετίζονται με την ιδέα των ελλοχευουσών εννοιών, γιατί οι έννοιες δε γίνονται πάντα σαφείς στα αρχικά κείμενα. Ακόμα και όταν δεν είναι διατυπωμένες σαφώς, συγκεκριμένες έννοιες μπορούν έντονα να επηρεάσουν και να κατευθύνουν την ανάπτυξη ενός κλάδου της επιστήμης, και ο ιστορικός δε μπορεί να καταλάβει μια τέτοια ανάπτυξη εκτός αν για αυτόν καθίστανται σαφείς. Μια περίληψη του λογισμού του Leibniz παρουσιάζει επομένως έναν διπλό στόχο: αφ' ενός μεν, να γραφεί σαν ήταν μια σύγχρονη έκδοση εγχειριδίων του λογισμού του Leibniz όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτό που ο Leibniz και οι μεταγενέστεροι οπαδοί της θεωρίας του σκέφτηκαν και εφάρμοσαν, αφετέρου δε, να υποδείξει πόσο απέχουν τα στοιχεία μιας τέτοιας ενοποιημένης και σαφούς θεωρίας από την πραγματική πρακτική με την οποία εμφανίστηκαν.

Στα ακόλουθα θα γίνει μια διάκριση μεταξύ αυτών των δύο πτυχών της περίληψης. Δύο επιπλέον προκαταρκτικές παρατηρήσεις είναι απαραίτητες. Η περίληψη του λογισμού του Leibniz δεν καλύπτει τη γένεση αυτού του λογισμού το 1670's, ο οποίος περιγράφτηκε πολύ καλά από τον Hofmann το 1949. Πιθανόν να περιγράφει τον λογισμό μετά από μια ορισμένη σταθεροποίηση, στην οποία αφαιρέθηκαν οι ασυνέπειες, που προκλήθηκαν από τις επιρροές του λογισμού των πεπερασμένων

---

[30] *C.H.Edwards, The Historical Development of the Calculus, Springer Verlag, New York, 1979.*

[31] *Bos.H.J.M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, Archive for history of Exact Sciences 14 (1974), σελ.1-90.*

ακολουθιών αριθμών[32] και από τη θεωρία των αδιαιρέτων. Το παράρτημα 1 περιέχει μερικές παρατηρήσεις στις σχέσεις μεταξύ του λογισμού του Leibniz και των τεχνικών των αδιαιρέτων: η περίληψη καλύπτει τον παγιωμένο λογισμό του Leibniz περίπου από το έτος 1680.

Οι απείρως μικρές καθώς και οι απείρως μεγάλες ποσότητες θεωρούνταν πραγματικές μαθηματικές οντότητες. Δεχόμενοι αυτές τις ποσότητες, προκύπτουν όλες οι ασυνέπειες που κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα έγιναν αισθητές και προκάλεσαν αμηχανία και που ξεπεράστηκαν τον 19ο αιώνα με το να αποβληθούν οι απειροελάχιστες ποσότητες από τον λογισμό. Αυτές οι ασυνέπειες και η προκύπτουσα ανεπάρκεια των θεμελίων του λογισμού έχουν προσελκύσει μεγαλύτερη προσοχή από τους ιστορικούς των μαθηματικών από το ερώτημα για το πώς, σε τέτοια επισφαλή θεμέλια, ο λογισμός θα μπορούσε να αναπτυχθεί κατά τρόπο τόσο παραγωγικό όπως συνέβη κατά το χρόνο από τον Leibniz έως τον Cauchy.

Κατά τον Bos μία προκαταρκτική εξήγηση γιατί ο λογισμός θα μπορούσε να αναπτυχθεί στο επισφαλές περιβάλλον όπου αποδεχόμαστε τις απείρως μικρές και τις απείρως μεγάλες ποσότητες παρέχεται από την πρόσφατα αναπτυγμένη μη τυπική ανάλυση, η οποία δείχνει ότι είναι δυνατό να αφαιρεθούν οι ασυνέπειες χωρίς να αφαιρεθούν τα ίδια τα απειροστά.

> *«Ο λογισμός του Leibniz[33] έχει την προέλευσή του στη θεωρία των αριθμητικών ακολουθιών καθώς και στις ακολουθίες διαφορών και αθροισμάτων. Ο Leibniz ερεύνησε αυτήν την θεωρία γύρω στα 1670. Την εφάρμοσε στη μελέτη καμπύλων εξετάζοντας τις ακολουθίες τεταγμένων, τετμημένων κ.λπ., και υποθέτοντας τις διαφορές μεταξύ των όρων αυτών των ακολουθιών απείρως μικρές (δηλαδή αμελητέες όσον αφορά τις πεπερασμένες ποσότητες, αλλά όχι ίσες με το μηδέν). Επομένως, οι θεμελιώδεις έννοιες του απειροστικού λογισμού του Leibniz μπορούν να*

---

[32] *Ο λογισμός των ακολουθιών αριθμών είχε ως αποτέλεσμα οι νεότερες μελέτες του Leibniz οι σχετικές με τον λογισμό (αναφέρθηκε από τον Hofmann σε έργο του το 1949) να είναι λιγότερο αυστηρά γεωμετρικές από ότι στο προηγούμενο έργο του. Παράδειγμα, σε αυτές τις τελευταίες μελέτες του οι τύποι εμφανίζονται να καταπατούν την απαίτηση της ομογένειας των διαστάσεων.*

Hofmann,J.E.Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizsehen Mathematih wahrend des Au]enthaltes in Paris (1672-1676), Munchen, 1949.

[33] *Hofmann & Wieleitner 1931 και Hofmann 1949, σελ.6-13.*

γίνουν καλύτερα κατανοητές ως προέκταση στο άπειρο των εννοιών του λογισμού των πεπερασμένων ακολουθιών. Με τον όρο προέκταση αποκλείεται η έννοια του ορίου. Οι διαφορές των όρων των ακολουθιών δε θεωρήθηκαν ότι πλησιάζουν το μηδέν. Υποτίθενται σταθερές, αλλά απείρως μικρές».

Συγκεκριμένα, ο Leibniz γράφει (σύμφωνα με τον Bos)[34]:

«Η εκτίμηση των διαφορών και των αθροισμάτων στις αριθμητικές ακολουθίες μου έδωσαν την πρώτη ενόραση, όταν συνειδητοποίησα ότι οι διαφορές αντιστοιχούν στις εφαπτομένες και τα αθροίσματα στους τετραγωνισμούς».

Επίσης[35]:

«Για παράδειγμα η $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ *κ.λπ., ή* $\int -\frac{dx}{xx-1}$ *με το x ίσο με 2, 3, 4, κ.λπ. είναι μία ακολουθία εξ' ολοκλήρου παρμένη στο άπειρο, μπορεί να αθροιστεί, και το dx εδώ είναι 1. Στην περίπτωση των αριθμών οι διαφορές είναι προσδιορίσιμες (…). Αλλά εάν το x ή το y δεν είναι διακριτοί όροι, αλλά συνεχείς, δηλαδή δεν είναι αριθμοί οι διαφορές των οποίων είναι προσδιορίσιμα διαστήματα, αλλά τετμημένες από ευθείες γραμμές που αυξάνονται συνεχώς ή από τα στοιχεία, εκείνα που προέρχονται από μη προσδιορίσιμα διαστήματα έτσι ώστε η ακολουθία των όρων να αποτελεί το σχήμα….»*

Η άποψη του Leibniz για τις απείρως μικρές ποσότητες είναι η ακόλουθη[36]:

«Και μια τέτοια αύξηση (συγκεκριμένα η πρόσθεση μιας ασύγκριτα μικρότερης γραμμής σε μια πεπερασμένη γραμμή) δε μπορεί να κατασκευαστεί με οποιοδήποτε τρόπο. Γιατί συμφωνώ με τον 5^{ο} ορισμό του 5ου βιβλίου του Ευκλείδη ότι μόνο οι ομοιογενείς ποσότητες είναι συγκρίσιμες, εκ των οποίων η μία μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από άλλη εάν πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, και συγκεκριμένα με έναν

---

[34] *Leibniz to Wallis, 28-5-1697, Math. Schr., IV, σελ. 25.*

[35] *Leibniz, Math.Schr., V, 1702, σελ.356-357.*

[36] *Leibniz, Math.Schr., V, 1695, σελ.322.*

> *πεπερασμένο αριθμό. Ισχυρίζομαι ότι οι οντότητες, η διαφορά των οποίων δεν είναι τέτοια ποσότητα, είναι ίσες. (...) Αυτό ακριβώς εννοούμε λέγοντας ότι η διαφορά είναι μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα».*

Η καμπύλη ως πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών

Η σημασία των θεωριών των πεπερασμένων ακολουθιών για προβλήματα που αφορούν καμπύλες, στις οποίες εφαρμόστηκε αρχικά ο λογισμός του Leibniz, έγκειται στο γεγονός ότι είναι συχνά χρήσιμο να προσεγγίζουμε την καμπύλη από ένα πολύγωνο. Οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων που αντιστοιχούν στις κορυφές του πολυγώνου αποτελούν πεπερασμένες ακολουθίες. Σύμφωνα με τη σύλληψη του διαφορικού λογισμού ως προέκταση του λογισμού των πεπερασμένων ακολουθιών στο άπειρο, οι ενασχολούμενοι με το λογισμό του Leibniz υπογράμμισαν ότι το κλειδί για τον λογισμό ήταν να προσεγγιστεί η καμπύλη από ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών.

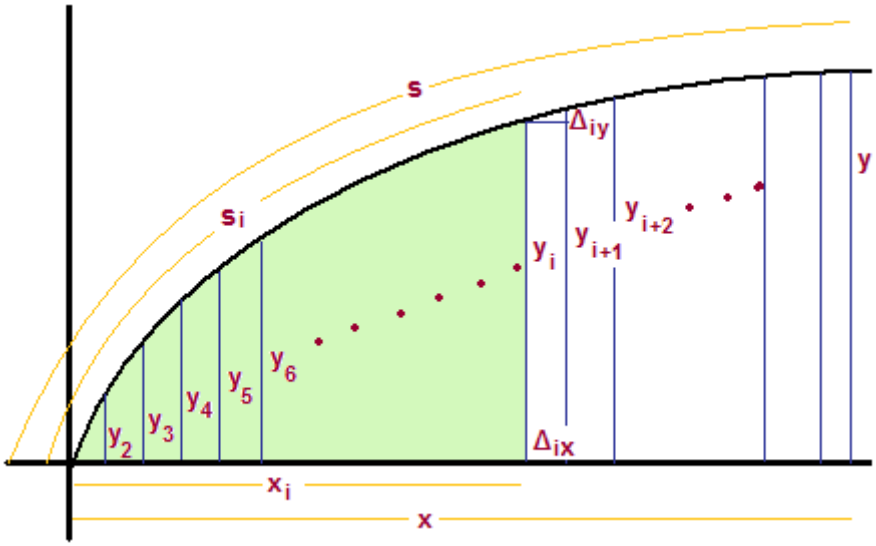
Η σύλληψη της προσέγγισης της καμπύλης από ένα πολύγωνο διαδραμάτισε ένα σημαντικό ρόλο στις νέες απειροστικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν τον 17^{ο} αιώνα. Για παράδειγμα ο Leibniz τόνισε τη σημασία του για τον λογισμό του ως εξής[37]:

> *«Έχω την αίσθηση ότι αυτή η μέθοδος και άλλες που βρίσκονται σε χρήση μέχρι τώρα μπορούν να συναχθούν από μια γενική αρχή, την οποία χρησιμοποιώ στη μέτρηση των καμπυλόγραμμων σχημάτων. Σύμφωνα με αυτήν ένα καμπυλόγραμμο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί το ίδιο με ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών».*

Ο Leibniz θα εφαρμόσει αποτελέσματα που είχε για ακολουθίες αριθμών στις καμπύλες, τις οποίες προσεγγίζει με πολύγωνα με άπειρο πλήθος πλευρών. Η προσέγγιση μιας καμπύλης από ένα πολύγωνο με πεπερασμένου πλήθους πλευρές (βλέπε σχήμα) δημιουργεί τις ακολουθίες των τεταγμένων $\{y_i\}$, των τετμημένων $\{x_i\}$, των μηκών τόξου $\{S_i\}$, των εμβαδών $\{Q_i\}$, και γενικά όλων των μεταβλητών που μπορούν να εξεταστούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτές οι ακολουθίες αποτελούνται από έναν πεπερασμένο πλήθος πεπερασμένων όρων. Εάν μία περιοχή της καμπύλης επεκτείνεται στο άπειρο, το πλήθος των όρων μπορεί να είναι άπειρο, αλλά αυτό δεν έχει επιπτώσεις στο επιχείρημά του.

---

[37] *Leibniz, Math.Schr., V, 1684, σελ.126.*



Σχήμα 15.

Οι τελεστές που διαμορφώνουν τις ακολουθίες των διαφορών ή των αθροισμάτων μιας δεδομένης ακολουθίας, τελεστές που συμβολίζονται με Δ και Σ, αντίστοιχα, και παράγουν νέες πεπερασμένες ακολουθίες πεπερασμένων όρων:

$$\Delta\{x_i\} = \{\Delta_i x\}$$

όπου $\Delta_i x \underset{D}{=} x_{i+1} - x_i$

και $\Sigma\{y_i\} = \{\Sigma_{j=1}^{i} y_j\}$, κ.λπ.

Σε αυτές τις πρώτες μελέτες του με τις διαφορές ή τα αθροίσματα ακολουθιών, ο Leibniz ασχολήθηκε με τις σχέσεις που είδαμε παραπάνω, καθώς και άλλες που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Στην επέκταση από την πεπερασμένη περίπτωση στο πραγματικό άπειρο το πολύγωνο μετατρέπεται σε ένα πολύγωνο του οποίου οι πλευρές είναι απείρως μικρές και οι γωνίες του είναι απείρου πλήθους. Αυτό το πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών θεωρείται ότι συμπίπτει με την καμπύλη, όπου οι απείρως μικρές πλευρές του όταν προεκταθούν σχηματίζουν εφαπτομένες ευθείες στην καμπύλη.

Οι ακολουθίες των τεταγμένων, των τετμημένων κ.λπ. αποτελούνται από άπειρο πλήθος όρων. Οι διαδοχικοί όροι αυτών των ακολουθιών έχουν απείρως μικρές διαφορές. Μιλώντας κάποιος σε σύγχρονη γλώσσα μπορεί να πει ότι οι όροι κείτονται πυκνά στο σύνολο τιμών της αντίστοιχης μεταβλητής. Εφαρμόζοντας το λογισμό του Leibniz, η μεταβλητή θεωρείται ότι παίρνει μόνο τις τιμές των όρων της

ακολουθίας. Κατά συνέπεια η αντίληψη μιας μεταβλητής και η αντίληψη μιας ακολουθίας απείρως κοντινών τιμών της μεταβλητής, συμπίπτουν.

Οι τελεστές Δ και Σ της πεπερασμένης περίπτωσης δρουν σε ακολουθίες. Κατά συνέπεια, όταν επεκταθούν στο άπειρο, το Δ και το Σ μετασχηματίζονται στους τελεστές d και $\int$, αντίστοιχα, που ενεργούν σε ακολουθίες απείρως κοντινών τιμών των μεταβλητών. Αλλά δεδομένου ότι αυτές οι ακολουθίες δεν διακρίνονται από τις ίδιες τις μεταβλητές, οι d και $\int$ είναι τελεστές που ενεργούν πάνω σε μεταβλητές.

> *«Για την εύρεση της ιδιότητας*[38] $d(xy) = xdy + ydx$, *θεωρούμε τους όρους* x *και* y *να αυξάνονται κατά* dx *και* dy, *αντίστοιχα. Τότε έχουμε την αύξηση* $(x+dx)(y+dy)$, *και άρα* $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$ *ή* $xdy + ydx + dxdy$, *και αυτό θα είναι ίσο με* $xdy + ydx$ *εάν παραλείψουμε την ποσότητα* $dxdy$, *η οποία είναι απείρως μικρή συγκρινόμενη με τις υπόλοιπες ποσότητες, επειδή οι ποσότητες* dx *και* dy *θεωρούνται απείρως μικρές σε σχέση με τους προηγούμενους όρους».*

Ο Leibniz χρησιμοποίησε το επίθετο «continuus» για να χαρακτηρίσει μία μεταβλητή που διατρέχει μια άπειρη ακολουθία τιμών. Χρησιμοποίησε επίσης την ορολογία της αύξησης και της κίνησης, μιλώντας για παράδειγμα για «την αύξηση από τα ελάχιστα» (« per minima crescentes»), «συνεχώς αυξανόμενος από τα μη προσδιορίσιμα» («continue crescentes per inassignabilia»), «στιγμιαία αυξανόμενος» («momentanee crescentes»), στα οποία «τα ελάχιστα» και «μη προσδιορίσιμα» αντιπροσωπεύουν τα διαφορικά σα διαφορές μεταξύ των διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Εάν αυτές οι διαφορές είναι όλες ίσες, ο Leibniz μερικές φορές χρησιμοποίησε τον όρο «ομοιόμορφα αυξανόμενος» (« aequabiliter crescere»).

Διαφορικά και αθροίσματα, η επίδραση των d και $\int$ στις μεταβλητές

Αναρωτώμενοι τώρα πώς οι πεπερασμένες ακολουθίες διαφοράς και οι ακολουθίες αθροίσματος επηρεάζονται από την επέκταση στον άπειρο, βλέπουμε ότι μια ακολουθία διαφορών μετασχηματίζεται σε μια ακολουθία ενός άπειρου πλήθους

---

[38] *Leibniz Elementa, σελ. 154.*

απείρως μικρών όρων, όπου αυτοί οι όροι καλούνται διαφορικά. Μια πεπερασμένη ακολουθία αθροίσματος μετασχηματίζεται σε μια ακολουθία ενός άπειρου πλήθους απείρως μεγάλων όρων, όπου αυτοί οι όροι καλούνται αθροίσματα.

Τα διαφορικά και τα αθροίσματα διαμορφώνουν τις ακολουθίες και για αυτό είναι μεταβλητές από το ίδιο είδος με τις ακολουθίες των συνηθισμένων μεταβλητών που συζητήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Το διαφορικό είναι μια απείρως μικρή μεταβλητή ενώ, το άθροισμα είναι μια απείρως μεγάλη μεταβλητή. Κατά συνέπεια ο τελεστής Δ, στην επέκταση, μετασχηματίζεται σε έναν τελεστή διαφόρισης που συμβολίζεται με το σύμβολο d, που αντιστοιχίζει μια απείρως μικρή μεταβλητή σε μια πεπερασμένη μεταβλητή, όπως την dy στην y. Ομοίως, ο τελεστής Σ, στην επέκταση, μετασχηματίζεται σε έναν τελεστή άθροισης που συμβολίζεται με το σύμβολο $\int$, που αντιστοιχίζει μια απείρως μεγάλη μεταβλητή σε μια πεπερασμένη μεταβλητή, όπως την ∫y στην y.

Οι λατινικοί όροι είναι «differentia» ή «differentiale», και «summa» το τελευταίο χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα και αντικαταστάθηκε σύντομα από τον όρο «integrale». Για τον τελεστή $\int$ εμφανίζονται και οι όροι summatio και το integratio. Ο τελεστής d καλείται differentiatio.

Κατά τον Bos είναι σημαντικό να τονιστεί η έννοια του διαφορικού ως μεταβλητή, και της διαφόρισης ως τελεστή που αντιστοιχίζει τις μεταβλητές σε μεταβλητές. Η έννοια της μεταβλητής διαφέρει από την έννοια της συνάρτησης δεδομένου ότι δεν είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί από ποια «ανεξάρτητη» μεταβλητή εξαρτάται μια δεδομένη μεταβλητή. Τα διαφορικά και τα αθροίσματα παίρνουν διαφορετικές τιμές σύμφωνα με το γεωμετρικό σχήμα στο οποίο εμφανίζονται. Αν και οι όροι είναι απείρως μικροί, ή απείρως μεγάλοι αντίστοιχα, έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά που μετατρέπουν την τεταγμένη, την τετμημένη κ.λπ. σε μεταβλητές, έτσι ώστε να θεωρούνται σωστά ως μεταβλητές. Το γεγονός ότι το διαφορικό θεωρείται κάποιες φορές σταθερά, αυτό δεν είναι σε αντίθεση με τη φύση του ως μεταβλητή. Οι σταθερές μεταβλητές εμφανίζονται σε πολλές καταστάσεις, όπως για παράδειγμα η σταθερή τεταγμένη μιας οριζόντιας ευθείας γραμμής, η σταθερή ακτίνα της κυρτότητας του κύκλου και η σταθερή υποεφαπτομένη της λογαριθμικής καμπύλης.

Η κοινή ανησυχία των ιστορικών για τις δυσκολίες που συνδέονται με το απείρως μικρό μέγεθος των διαφορικών έχει αποσπάσει την προσοχή από το γεγονός ότι στην πρακτική του λογισμού του Leibniz τα διαφορικά δεν εμφανίζονται σχεδόν ποτέ ως ενιαίες οντότητες. Τα διαφορικά κυμαίνονται στις ακολουθίες κατά μήκος των αξόνων της καμπύλης και είναι όλα μεταβλητές, εξαρτημένες από άλλες μεταβλητές που περιέχονται στο πρόβλημα, και αυτή η εξάρτηση μελετάται από τις διαφορικές εξισώσεις.

Επιπλέον, για να εισαχθούν τα διαφορικά ανώτερης τάξης, τα διαφορικά πρώτης τάξης πρέπει να ληφθούν ως μεταβλητές που κυμαίνονται πέρα από μια διατεταγμένη ακολουθία. Αν θεωρούμε μόνο ένα απλό dx, ο όρος ddx δεν έχει νόημα. Η ακόλουθη αναφορά από τον Leibniz το επεξηγεί αυτό[39]:

> *«Περαιτέρω, ο όρος ddx είναι το στοιχείο του στοιχείου της διαφοράς των διαφορών, όπου η ποσότητα dx δεν είναι πάντα σταθερή, αλλά συνήθως αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς».*

Διαφορικά και αθροίσματα

Το απείρως μικρό διαφορικό και το απείρως μεγάλο άθροισμα θεωρούνται στην πραγματικότητα ως διαφορά ή άθροισμα. Το διαφορικό dy μιας πεπερασμένης μεταβλητής y λαμβάνεται ως η διαφορά μεταξύ των y^I και y, όπου το y^I είναι η αμέσως επόμενη τεταγμένη μετά το y στην άπειρη ακολουθία των τεταγμένων. Το άθροισμα ∫y λαμβάνεται ως το άθροισμα όλων των όρων στην ακολουθία των τεταγμένων, από την αρχική τεταγμένη (ή μια άλλη σταθερή τεταγμένη) ως την τεταγμένη y.

Η εξήγηση του Leibniz έχει ως εξής[40]:

> *«Εδώ το dx σημαίνει το στοιχείο που είναι η (στιγμιαία) αύξηση ή η μείωση, της (συνεχώς) αυξανόμενης ποσότητας x. Καλείται επίσης διαφορά, ως διαφορά μεταξύ δύο εγγύτατων x που διαφέρουν κατά ένα στοιχείο, ώστε το ένα να προέρχεται από το άλλο, καθώς το δεύτερο αυξάνεται ή μειώνεται (στιγμιαία).*

Ως ένα παράδειγμα τέτοιου αθροίσματος αποτελούν μερικές γραμμές του Johann Bernoulli, στις οποίες περιγράφει τα αθροίσματα ως πηλίκα με απείρως μικρούς παρονομαστές[41]:

---

[39] *Leibniz, Math. Schr. VII, 1710, σελ. 322-323.*

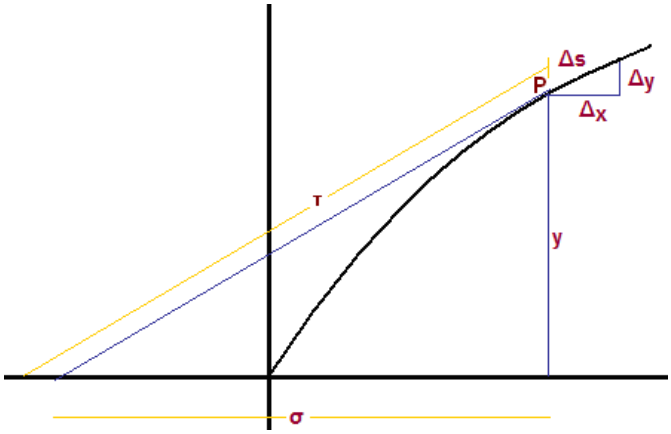
[40] *Leibniz, Math. Schr. VII, 1710, σελ.222-223.*

[41] *Johann Bernoulli to Leibniz, Math.Schr., III, 27-7-1695, σελ. 199.*

«Για το λόγο αυτό (εάν το dz υποτεθεί σταθερά) οι όροι $\int z$, $\int^2 z$, $\int^3 z$, $\int^4 z$, κ.λπ., ισούνται με τα κλάσματα $\frac{zz}{1\cdot 2\cdot dz}$, $\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dz^2}$, $\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dz^3}$, $\frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot dz^4}$, κ.λπ.....»

Το διαφορικό τρίγωνο

Στην πεπερασμένη σειρά, οι λόγοι $\Delta x : \Delta y : \Delta s$ είναι περίπου ίσοι με τους λόγους $\sigma : y : \tau$ της υποεφαπτομένης, της τεταγμένης και της εφαπτομένης. Στην επέκταση



Σχήμα 16.

στο άπειρο το τρίγωνο γίνεται το διαφορικό τρίγωνο με τις πλευρές dx, dy και ds. Η υποτείνουσα του διαφορικού τριγώνου είναι μια πλευρά του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών, και επομένως, εάν προεκταθεί, συμπίπτει με την ευθεία της εφαπτομένης στην καμπύλη. Ως εκ τούτου η σχέση $dx : dy : ds = \sigma : y : \tau$ είναι θεμελιώδης για την εφαρμογή των διαφορικών σε προβλήματα με εφαπτομένες. Ο Leibniz ενημερώθηκε για τη σπουδαιότητα του διαφορικού τριγώνου μελετώντας την εργασία του Pascal. Στην πρώτη του δημοσίευσή για τον λογισμό[42], ο Leibniz χρησιμοποίησε τη σχέση $dx : dy = \sigma : y$ για να εισαγάγει το διαφορικό ως πεπερασμένη γραμμή. Σύμφωνα με τον H.J.M.Bos αυτός ο ορισμός είναι μάλλον

---

[42] *Leibniz, G. W. "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus".Acta Erud., Oct. 1684, σελ.467-473, Math. Schr., V, σελ. 220-226.*

αδύναμος στην εργασία του Leibniz για τον λογισμό. Σε ακόλουθο κεφάλαιο ερευνούνται οι λόγοι για τους οποίους τον υιοθέτησε στην πρώτη δημοσίευσή του.

Ο Leibniz επεξηγεί περαιτέρω τα παραπάνω[43]:

> *«… για να βρούμε μια εφαπτομένη πρέπει να σχεδιάσουμε μια ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν απείρως μικρή απόσταση, και αυτή είναι η προεκταμένη πλευρά του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών η οποία για εμάς είναι το ίδιο με την καμπύλη».*

Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των d και του ∫

Οι τελεστές Δ και Σ της πεπερασμένης σειράς μπορούν να εφαρμοστούν επανειλημμένα:

$$\Delta\Delta\{y_i\} = \{\Delta_i^2 y\}$$

$$\Delta_i^2 y = \Delta_{i+1} y - \Delta_i y = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$\Sigma\Sigma\{y_i\} = \{\Sigma_{J=1}^{i}\Sigma_{k=1}^{j} y_k\}$, κ.λπ.

Συνεπώς, οι τελεστές d και $\int$ μπορούν να εφαρμοστούν επανειλημμένα, και η εφαρμογή παράγει τα διαφορικά διαφορικών, ή τα διαφορικά ανώτερης τάξης, και τα αθροίσματα ανώτερης τάξης. Στην περίπτωση της μεταβλητής y, για παράδειγμα, το d που αντιστοιχίζεται στη μεταβλητή dy παράγει το διαφορικό δεύτερης τάξης ddy, μια μεταβλητή απείρως μικρή σε σύγκριση με το dy. Ο όρος ddy μπορεί να ληφθεί ως η διαφορά μεταξύ των όρων dy^1 και dy, όπου το dy^1 είναι το αμέσως επόμενο διαφορικό μετά το dy στην άπειρη ακολουθία των διαφορικών. Η περαιτέρω εφαρμογή του d παράγει τα διαφορικά ανώτερης τάξης $dddy$ $(ή\ d^3y)$, d^4y , d^5y κ.λπ. Ο όρος $\int$ που αντιστοιχίζεται στη μεταβλητή ∫y παράγει το διπλό ολοκλήρωμα ∫∫y, μια μεταβλητή απείρως μεγάλη σε σύγκριση με το ∫y, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των όρων της ακολουθίας

---

[43] *Hofmann, J. E. 1949. Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik wahrend des Aufenthaltes in Paris (1672-1676), Munchen, 1949, σελ. 28-29.*

∫y. Η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των παραπάνω παράγει τα ολοκληρώματα ∫∫∫y $\left(ή \int^3 y\right)$, $\int^4 y$, κ.τ.λ.

Ο Leibniz εξηγεί τα παραπάνω ως ακολούθως[44]:

> *«Περαιτέρω, ο όρος ddx είναι το στοιχείο της διαφοράς των διαφορών, όπου η ποσότητα dx δεν είναι πάντα σταθερή, αλλά συνήθως αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς. Και με τον ίδιο τρόπο μπορεί να παραχθεί το $dddx$ ή d^3x και ούτω καθ' εξής».*

Η σχέση των d και ∫

Οι τελεστές Δ και Σ στην πεπερασμένη περίπτωση βρίσκονται σε μία αντίστροφη σχέση:

$$\Delta\Sigma\{y_i\} = \{y_{i+1}\} \text{ και } \Sigma\Delta\{y_i\} = \{y_{i+1} - y_1\}.$$

Αυτές οι ιδιότητες απεικονίζονται σε μια αντιστρεψιμότητα του d και του $\int$:

$d\int y = y$ και $\int dy = y$.

Στον τελευταίο τύπο πρέπει να προστεθεί μια σταθερά, αλλά συνήθως παραλείπεται. Η ισότητα $\int dy = y$ απεικονίζεται εύκολα δηλώνοντας ότι το άθροισμα των διαφορικών σε ένα τμήμα είναι ίσο με το μήκος του τμήματος. Για την ισότητα $d\int y = y$ λείπει μια προφανής γεωμετρική ερμηνεία, επειδή ο όρος $\int y$ είναι μια ακολουθία απείρως μεγάλων όρων. Εντούτοις, εάν αντί της πεπερασμένης μεταβλητής y θεωρήσουμε μία απείρως μικρή μεταβλητή, όπως η ydx, τότε η ισότητα $d\int ydx = ydx$ μπορεί να κατανοηθεί πως δηλώνει ότι οι διαφορές μεταξύ των όρων της ακολουθίας των εμβαδών $\int ydx$ είναι ydx.

Ο Leibniz ισχυρίζεται[45]:

---

[44] *Leibniz, Math. Schr. V, 1684, σελ. 223.*

[45] *Leibniz, Elementa, σελ. 153.*

> *«Οι διαφορές και τα αθροίσματα είναι αντίστροφες η μια της άλλης, δηλαδή το άθροισμα των διαφορών μιας ακολουθίας είναι όρος των ακολουθιών, και η διαφορά των αθροισμάτων μιας ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας. Η πρώτη σχέση συμβολίζεται* $\int dx = x$ *, ενώ η τελευταία συμβολίζεται* $d\int x = x$ *»,*

και συνεχίζει σε κάποιο άλλο σημείο[46]:

> *«Αντίστροφο στο στοιχείο ή το διαφορικό είναι το άθροισμα, επειδή εάν μια ποσότητα μειώνεται (συνεχώς) μέχρις ότου εξαλειφθεί, τότε εκείνη η ποσότητα είναι το άθροισμα όλων των διαδοχικών διαφορών, έτσι ώστε ο όρος* $d\int ydx$ *να ισούται με τον όρο* ydx *. Αλλά ο όρος* $\int ydx$ *σημαίνει το εμβαδόν που είναι το σύνολο όλων των ορθογωνίων, καθένα από τα οποία έχει ένα (μετρήσιμο) μήκος* y *και (το στοιχειώδες) πλάτος* dx *που αντιστοιχεί στην ακολουθία των* y *. Υπάρχουν επίσης αθροίσματα των αθροισμάτων και ούτω καθ' εξής, για παράδειγμα* $\int dx \int ydx$ *, το οποίο είναι το στερεό που προκύπτει από όλα τα εμβαδά όπως το* $\int ydx$ *που πολλαπλασιάζονται με τα στοιχεία* dz *που αντιστοιχούν στην ακολουθία».*

Ολοκλήρωση και διαφόριση

Η σχέση αντιστρόφου των τελεστών d και $\int$ φανερώνει τη δυνατότητα το ολοκλήρωμα $\int$ να είναι το αντίστροφο του d βάσει ορισμού. Στην πραγματικότητα, ένας τέτοιος ορισμός υποκρύπτεται στον λογισμό όπως αναπτύσσεται στις πρώτες μελέτες του Bernoulli.

Στην ορολογία που εισάγεται από τον Bernoulli, η ολοκλήρωση, με σύμβολο $\int$, είναι ο τελεστής που αντιστοιχίζει σε μια απείρως μικρή μεταβλητή το ολοκλήρωμά της, που ορίζεται από την ιδιότητα ότι το διαφορικό του ολοκληρώματος είναι ίσο

---

[46] *Leibniz, Math. Schr. VII, 1710, σελ. 222-223.*

με την αρχική ποσότητα. Με αυτόν τον τρόπο ορισμένο, το ολοκλήρωμα, όπως το άθροισμα, είναι μια μεταβλητή.

Η αντίθεση μεταξύ της ολοκλήρωσης και του αθροίσματος μπορεί να εμφανιστεί στην περίπτωση του τετραγωνισμού

$$\int ydx = Q.$$

Σύμφωνα με την πρόσθεση, η παραπάνω ισότητα δηλώνει ότι το άθροισμα των απείρως μικρών ορθογωνίων ydx ισούται με το Q. Σύμφωνα με την ολοκλήρωση, η παραπάνω ισότητα δηλώνει ότι το Q είναι μια ποσότητα της οποίας το διαφορικό είναι ydx.

Ο Jacob και ο Johann Bernoulli γνωστοποίησαν ο ένας στον άλλον το λογισμό του Leibniz την περίοδο από το 1687 έως το 1690. Μέχρι το 1690 τα μόνα άρθρα του Leibniz στα οποία θα μπορούσαν να βασίσουν τις μελέτες τους ήταν ένα άρθρο του 1684, το οποίο αφορούσε μόνο τη διαφόριση, και το άρθρο του 1686[47]. Το τελευταίο άρθρο ανέφερε την άθροιση, χρησιμοποίησε το σύμβολο $\int$, και υπέδειξε την αμοιβαιότητα των αθροισμάτων και των διαφορικών. Τα αθροίσματα αναφέρονται ως τα αθροίσματα των διαφορικών. Δεν προκαλεί έκπληξη, επομένως, ότι ο Bernoulli ανέπτυξε την έννοια της ολοκλήρωσης ως αντίστροφη της διαφόρισης. Παραδείγματος χάριν, στον *Ολοκληρωτικό Λογισμό* του Johann Bernoulli, τα ολοκληρώματα εισάγονται ως εξής[48]:

> *«Έχουμε δει παραπάνω πώς μπορούν να βρεθούν τα Διαφορικά των μεγεθών. Θα δείξουμε τώρα, αντιθέτως, πώς μπορούν να βρεθούν τα Ολοκληρώματα των διαφορικών, τα οποία είναι εκείνες οι ποσότητες των οποίων είναι τα διαφορικά».*

Ο Leibniz, ο οποίος είδε τη χρήση του όρου «ολοκλήρωμα» για πρώτη φορά σε εργασία του Jacob Bernoulli το 1690, προσπάθησε αργότερα να πείσει το Johann Bernoulli να υιοθετήσει την ορολογία «των αθροισμάτων»[49]:

---

[47] *"De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum (...)." Acta Erud., June 1686, σελ. 292-300. Math. Schr. V, σελ. 226-233.*

[48] *Johann Bernoulli Integral Calculus, σελ. 387.*

[49] *Leibniz to Bernoulli, Math. Schr. III, 28-2-1695, σελ. 168.*

> *«Το εναποθέτω στην κρίση σας εάν θα ήταν καλύτερα στο μέλλον, προς χάριν ομοιομορφίας και αρμονίας, όχι μόνο μεταξύ μας αλλά σε ολόκληρο το πεδίο της μελέτης, να υιοθετηθεί η ορολογία της άθροισης αντί της ορολογίας των ολοκληρωμάτων που χρησιμοποιείτε. Σε αυτήν την περίπτωση, για παράδειγμα, το* $\int ydx$ *θα συμβόλιζε το άθροισμα όλων των* y *πολλαπλασιασμένων επί το αντίστοιχο* dx*, ή το άθροισμα όλων των ορθογωνίων αυτού του είδους. Αναρωτιέμαι πρώτιστα για αυτό, επειδή με αυτόν τον τρόπο τα γεωμετρικά αθροίσματα, ή οι τετραγωνισμοί, αντιστοιχούν καλύτερα στα αριθμητικά αθροίσματα ή τα αθροίσματα των ακολουθιών. (...) Ομολογώ ότι βρήκα ολόκληρη αυτήν τη μέθοδο με το συλλογισμό της σχέσης αντιστρόφων των αθροισμάτων και των διαφορών, και ότι οι εκτιμήσεις μου προχώρησαν από τις ακολουθίες αριθμών σε ακολουθίες γραμμών ή τεταγμένων».*

Σε αυτό το αίτημα ο Johann Bernoulli απάντησε εξηγώντας την προέλευση του όρου «ολοκλήρωμα»(σύμφωνα με τον Bos)[50]:

> *«Περαιτέρω, όσον αφορά στην ορολογία του αθροίσματος των διαφορικών θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω με ευκολία στο μέλλον τη δική σας ορολογία των αθροίσεων αντί για τη δική μας των ολοκληρωμάτων. Θα το είχα κάνει αυτό ήδη πολύ νωρίτερα εάν ο όρος «ολοκλήρωμα» δεν είχε τύχει τόσο μεγάλης εκτίμησης από ορισμένους γεωμέτρες [μια αναφορά σε Γάλλους μαθηματικούς, ειδικά στον L'Hôpital, ο οποίος είχε μελετήσει τον ολοκληρωτικό λογισμό του Bernoulli] οι οποίοι με αναγνώρισαν ως δημιουργό του όρου. Επομένως θα θεωρούνταν ότι θα προκαλούσα σύγχυση ως προς το γεγονός, εάν υποδείκνυα το ίδιο πράγμα τότε με τον έναν όρο και τώρα με τον άλλο. Ομολογώ ότι πράγματι η ορολογία δεν συμφωνεί απόλυτα με το αντικείμενο καθαυτό (σκέφτηκα τον συγκεκριμένο όρο που προτάθηκε δεδομένου ότι θεώρησα το διαφορικό ως το απειροελάχιστο μέρος ενός συνόλου ή του ολόκληρου. Δεν το σκέφτηκα περισσότερο)».*

Το θέμα σταμάτησε εκεί, και βαθμιαία η ορολογία των ολοκληρωμάτων αντικατέστησε την αρχική ορολογία των αθροισμάτων του Leibniz.

---

[50] *Leibniz to Bernoulli, Math. Schr., III, 30-4-1695, σελ.172.*

Ο λογισμός που χτίστηκε πάνω στην έννοια της ολοκλήρωσης και η ολοκλήρωση που χτίστηκε πάνω στην έννοια του αθροίσματος διαφέρουν ως προς το γεγονός ότι η άθροιση οδηγεί φυσικά σε απείρως μεγάλες ποσότητες, ενώ σε έναν λογισμό βασισμένο στην έννοια της ολοκλήρωσης, τέτοιες ποσότητες είναι λιγότερο πιθανό να εμφανιστούν, δεδομένου ότι η ολοκλήρωση εφαρμόζεται μόνο σε ποσότητες που αποτελούν οι ίδιες διαφορικά.

Η διάσταση των διαφορικών και των αθροισμάτων

Τα διαφορικά και τα αθροίσματα, που εισάγονται με τους τελεστές d και $\int$, είναι μεγέθη, και επομένως έχουν μια διάσταση. Εάν αυτά τα απειροελάχιστα μεγέθη είναι της ίδιας διάστασης, μπορούν να προστεθούν. Επίσης τα γινόμενα τέτοιων μεγεθών μπορούν να διαμορφωθούν και η διάσταση του γινομένου σχετίζεται με τις διαστάσεις των παραγόντων με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων μεγεθών.

Στην πεπερασμένη διάταξη, οι όροι των ακολουθιών διαφορών και αθροισμάτων έχουν την ίδια διάσταση με τους όρους της αρχικής ακολουθίας (εάν y_i είναι ευθύγραμμα τμήματα, το ίδιο θα συμβαίνει και με τα $\Delta_i y$ και $\Sigma_{j=1}^{i} y_i$. Συνεπώς, τα d και $\int$ διατηρούν τη διάσταση. Εάν το y είναι ένα μεταβλητό ευθύγραμμο τμήμα, τότε το dy είναι ένα απείρως μικρό μεταβλητό ευθύγραμμο τμήμα και το $\int y$ είναι ένα απείρως μεγάλο μεταβλητό ευθύγραμμο τμήμα. Εάν το Q είναι ένα εμβαδό, το dQ είναι μια απείρως μικρή περιοχή, κ.λπ.

Ο Johann Bernoulli κατά τον Bos δίνει την ακόλουθη εξήγηση για τη διατήρηση της διάστασης μέσω της διαφόρισης[51]:

> *«Τα μέρη ενός στερεού, αν και απείρως μικρά, είναι πάντα στερεά. Τα μέρη μιας επιφάνειας είναι πάντα επιφάνειες, και τα μέρη μιας γραμμής είναι πάντα γραμμές, διότι είναι αδύνατο ένα είδος ποσότητας μέσα από τη διαίρεση να μετατραπεί σε άλλο είδος ποσότητας».*

---

[51] *Johann Bernoulli, Opera IV, σελ. 162.*

Τάξεις του απείρου

Τα διαφορικά και τα αθροίσματα διαμορφώνουν τις κατηγορίες που έχουν διαφορετικές τάξεις του απείρου. Για το λόγο αυτό για παράδειγμα το dy είναι απείρως μικρό σχετικά με το y, το ddy είναι απείρως μικρό σχετικά με το dy, και γενικά το $d^{k+1}y$ είναι απείρως μικρό σχετικά με το $d^k y$. Όμοια το $\int^{k+1} y$ είναι απείρως μεγάλο σχετικά με το $\int^k y$, κ.λπ.

Όλα τα διαφορικά πρώτης τάξης των πεπερασμένων μεταβλητών έχουν την ίδια τάξη του απείρου (δηλαδή οποιαδήποτε δύο από αυτά έχουν πεπερασμένο λόγο, εκτός από τις ανώμαλες περιπτώσεις). Συνεπώς, για κάθε k, όλα τα διαφορικά k τάξης έχουν την ίδια μορφή του απείρου. Επιπλέον, η τάξη του απείρου των διαφορικών k τάξης είναι η ίδια με αυτήν των δυνάμεων εις την k των διαφορικών 1ης τάξης (το οποίο σημαίνει ότι το $d^k y$ εμφανίζει έναν πεπερασμένο λόγο με το $(dy)^k$, εκτός από τις μοναδικότητες). Αυτός ο κανόνας προκύπτει από τις υποθέσεις για την τακτικότητα του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών.

Ομοίως, τα αθροίσματα και τα επαναλαμβανόμενα αθροίσματα διαμορφώνουν τις κατηγορίες που έχουν τις ευδιάκριτες μορφές του απείρου. Εξαιτίας των προαναφερθέντων σχέσεων μεταξύ των στοιχείων των κατηγοριών διαφορετικών τάξεων του απείρου, το πλήθος των τάξεων του απείρου είναι άπειρο, αλλά αριθμήσιμο. Κάθε απείρως μικρή ποσότητα έχει ένα πεπερασμένο λόγο με το $(dx)^k$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς k και κάθε απείρως μεγάλη ποσότητα έχει έναν πεπερασμένο λόγο με το $\left[\int y\right]^k$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς k.

Παραδείγματα της ορολογίας με την οποία αυτές οι τάξεις του απείρου υποδείχθηκαν, δίνονται τα ακόλουθα από τον Johann Bernoulli[52]:

> *«Έστω ότι a είναι μία πεπερασμένη γραμμή, το adx είναι απείρως μικρό πρώτου είδους, ενώ το $dddy$ είναι απείρως μικρό τρίτου είδους. Πρόκειται να αποδειχθεί ότι το κλάσμα $\frac{adx}{dddy}$ είναι απείρως μεγάλο*

[52] *Johann Bernoulli, Opera IV, σελ. 166.*

δευτέρου είδους. Για αυτό το σκοπό, καλούμε z το κλάσμα $\frac{adx}{dddy}$. Οπότε $adx = zdddy$ και $dx : dddy = z : a$. Σε αυτό το σημείο το dx είναι απείρως μεγαλύτερο από το $dddy$. Ως εκ τούτου το z, που είναι το πηλίκο που προκύπτει από τη διαίρεση, θα είναι απείρως μεγαλύτερο του a, το οποίο είναι μια πεπερασμένη γραμμή. Επακολουθεί ότι το z θα είναι απείρως μεγάλο δεύτερου είδους».

Είναι σημαντικό για τη διδασκαλία σε αυτό το κείμενο να αναφερθεί μία απόδειξη του Leibniz που δείχνει ότι το ddx είναι μια ποσότητα απείρως μικρή συγκριτικά με το dx. Η παρακάτω απόδειξη εμφανίζεται ως διάψευση της άποψης του Nieuwentijt ότι δεν υπάρχουν διαφορικά δεύτερης τάξης[53]:

«Όταν οι όροι δεν αυξάνονται ομοιόμορφα, επακόλουθα οι αυξήσεις θα έχουν διαφορές μεταξύ τους, και προφανώς αυτές οι διαφορές θα είναι οι διαφορές των διαφορών. Περαιτέρω, ο διάσημος συγγραφέας [ο οποίος είναι ο Nieuwentijt] παραδέχεται ότι το dx είναι μια ποσότητα. Ισχύει ότι ο τρίτος ανάλογος δύο ποσοτήτων είναι επίσης μία ποσότητα, και η ποσότητα ddx είναι ίδιου είδους ποσότητα εξαιτίας των ποσοτήτων x και dx, το οποίο αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι το x ανήκει σε μία γεωμετρική πρόοδο και το y ανήκει σε μία αριθμητική πρόοδο, τότε το dx θα είναι ως προς το σταθερό dy ότι το x σε ένα σταθερό a, δηλαδή $dx = xdy : a$ και ως εκ τούτου $ddx = dxdy : a$. Απομακρύνοντας το $dy : a$ από την προηγούμενη εξίσωση, αυτή γίνεται $xddx = dxdx$, από όπου προκύπτει ότι το x είναι στο dx το ίδιο με το dx στο ddx».

Αυτό το χωρίο έχει συγχύσει επανειλημμένα τους ιστορικούς των μαθηματικών. Πρόκειται, εντούτοις, για ένα τέλεια αποδεκτό επιχείρημα, εάν θεωρήσουμε ότι ο Leibniz δεν υποστηρίζει ότι το ddx είναι πάντα ο τρίτος ανάλογος των x και dx αλλά δίνει ένα παράδειγμα στο οποίο κάτι τέτοιο συμβαίνει. Το παράδειγμα σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύει την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων συγκριτικά με το dx. Η εν λόγω καμπύλη είναι, φυσικά, η λογαριθμική καμπύλη

---

[53] *Leibniz, Math. Schr. V, 1695, σελ. 325.*

$\left(x = be^{y/a}\right)$, η οποία ορίζεται συνήθως ως η καμπύλη στην οποία μια γεωμετρική ακολουθία τεταγμένων (ή τετμημένων) αντιστοιχεί σε μια αριθμητική ακολουθία τετμημένων (ή τεταγμένων). Ως εκ τούτου ο Leibniz θεωρεί το dy σταθερό και γνωρίζει ότι το dx σχηματίζει μια γεωμετρική ακολουθία.

Για να αποφευχθούν οι ασάφειες, υπάρχουν ορισμένοι κανόνες στο συμβολισμό. Εάν δεν χρησιμοποιούνται παρενθέσεις, οι τελεστές d, dd, d^3, κ.λπ. πρέπει να ερμηνευθούν ενεργώντας στη μεταβλητή που τους ακολουθεί. Εάν ο τελεστής προορίζεται να ενεργήσει σε μια σύνθετη μεταβλητή, πρέπει να προστεθούν παρενθέσεις. Κατά συνέπεια, στο dx^2 συμβολίζεται και $(dx)^2$, το d δρα μόνο στο x. Το διαφορικό του x^2 συμβολίζεται με $d(x^2)$. Ομοίως, το d^2x^3 συμβολίζεται και $(d^2x)^3$. Διαφορικά πηλίκα όπως τα $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ κ.λπ. ερμηνεύονται ως

$\frac{d^2y}{(dx)^2}$, $\frac{d^3y}{(dx)^3}$, κ.λπ. Ο τελεστής $\int$ ερμηνεύεται ενεργώντας σε όλα τα γράμματα που το ακολουθούν. Κατά συνέπεια το $\int ydx$ συμβολίζεται και $\int(ydx)$.

Ο Leibniz χρησιμοποιούσε τις παύλες πάνω από τα σύμβολα αντί για παρενθέσεις , παράδειγμα χρησιμοποιούσε το $d\overline{xy}$ αντί για το $d(xy)$. Χρησιμοποιούσε επίσης το κόμμα για το διαχωρισμό των συμβόλων, παράδειγμα χρησιμοποιούσε το $dxy + a^2$ αντί για το $d(xy + a^2)$. Ο Euler δίνει ρητά αυτούς τους κανόνες συμβολισμού το 1755.

Η Απροσδιοριστία των διαφορικών πρώτης τάξης

Υπάρχει μια δυσκολία η οποία απαραιτήτως αναδύεται από οποιαδήποτε προσπάθεια να οργανωθεί ένας απειροστικός λογισμός που έχει το διαφορικό ως θεμελιώδη έννοια, καλούμενη ως απροσδιοριστία των διαφορικών.

Το πρώτο διαφορικό dx της μεταβλητής x είναι απείρως μικρό συγκριτικά με το x, και έχει την ίδια διάσταση με το x. Αυτοί είναι οι μόνοι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιήσει, και δεν καθορίζουν ένα μοναδικό dx, διότι εάν το dx ικανοποιεί αυτούς τους περιορισμούς, το ίδιο ισχύει και για το $2dx$, το $\frac{1}{2}dx$ και γενικά για όλα τα adx για πεπερασμένους αριθμούς a. Δηλαδή όλες οι ποσότητες που έχουν

την ίδια διάσταση και την ίδια τάξη του απείρου με το dx μπορούν να αντιμετωπιστούν ως dx.

Επιπλέον, υπάρχουν στοιχεία, όχι από αυτήν την κατηγορία, που ικανοποιούν τους όρους για το dx. Για παράδειγμα το dx^2/a και το $\sqrt{adx}$, για α πεπερασμένο θετικό είναι της ίδιας διάστασης όπως το x. Το dx^2/a είναι απείρως μικρό συγκριτικά με το όσον αφορά το dx και το $\sqrt{adx}$ είναι απείρως μεγάλο συγκριτικά με το dx, έτσι ώστε να μην υπάρχει ούτε μία ανώτερη κατηγορία άπειρης μικρότητας από την οποία να επιλεχτεί το dx. Δεν υπάρχει καμία «πρώτη» κατηγορία άπειρης μικρότητας παρακείμενη της πεπερασμένης. Κατά συνέπεια τα διαφορικά πρώτης τάξης περιλαμβάνουν μία θεμελιώδη απροσδιοριστία.

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με το λογισμό του Leibniz φαίνεται να μην παρατήρησαν αυτήν την απροσδιοριστία των διαφορικών πρώτης τάξης.

Είναι δύσκολο να δοθούν οι αιτίες, ή να συναχθούν συμπεράσματα, για το γεγονός ότι αυτό το πρόβλημα εντοπίστηκε αργά. Μια σημαντική αιτία, αναμφίβολα, είναι ότι δεν επηρεάζει τις υπολογιστικές τεχνικές ή την ερμηνεία των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Η γεωμετρική διαίσθηση μας πείθει ότι οι πεπερασμένοι λόγοι $dx:dy:ds$ είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του dx σε οποιαδήποτε κατηγορία απείρως μικρών ποσοτήτων, έτσι ώστε, αν και τα διαφορικά πρώτης τάξης είναι απροσδιόριστα, οι σχέσεις μεταξύ τους προσδιορίζονται. Επίσης το άθροισμα των διαφορικών δεν επηρεάζεται από αυτήν την απροσδιοριστία. Η σχέση $\int dx = x$ ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή dx. Κατά συνέπεια στην αντιμετώπιση των πιο κοινών προβλημάτων του απειροστικού λογισμού, των εμβαδών, των προβλημάτων εφαπτομένης, των αντίστροφων προβλημάτων εφαπτομένης, της ευθειοποίησης καμπύλης, του υπολογισμού όγκου κ.λπ., η απροσδιοριστία της θεμελιώδους έννοιας δεν επηρέασε την τεχνική της ανάλυσης.

Εντούτοις, υπάρχει ένα άλλο είδος απροσδιοριστίας, το οποίο έχει επιπτώσεις στα διαφορικά ανώτερης τάξης και που βαθιά επηρέασε τις έννοιες και τις τεχνικές του πρόωρου διαφορικού υπολογισμού. Αυτή η απροσδιοριστία θα αντιμετωπιστεί παρακάτω.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να προσεγγιστεί μια καμπύλη από ένα πολύγωνο. Αναφέρουμε τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:

α) πολύγωνα με ίσες τις πλευρές τους,

β) πολύγωνα, με ίσες όλες τις προβολές των πλευρών τους στον άξονα των x,

γ) πολύγωνα, με ίσες όλες τις προβολές των πλευρών τους στον άξονα των y.

Σε αυτές τις τρεις περιπτώσεις οι τελεστές Δ και Σ χρησιμοποιούνται σε κατάλληλες ακολουθίες, αλλά τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής μπορούν να διαφέρουν. Στην πρώτη περίπτωση, τα $\Delta_i s$ είναι σταθερά, συνεπώς τα $\Delta_i^k s = 0$ για k≥2 αλλά γενικά τα $\Delta_i^k x$ και $\Delta_i^k y$ δεν είναι ίσα με το μηδέν. Στη δεύτερη περίπτωση, τα $\Delta_i x$ είναι σταθερά (έστω ίσα με Δx), ως εκ τούτου $\Delta_i^k x = 0$ εάν k≥2, αλλά τα $\Delta_i^k y$ και $\Delta_i^k s$ γενικά δεν θα είναι ίσα με μηδέν.

Επιπλέον, στη δεύτερη περίπτωση, το $\Delta x \Sigma \{y_i\}$ είναι μια προσέγγιση του εμβαδού. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $\{\Sigma_{j=1}^{i} y_i\}$ είναι περίπου ανάλογη προς την ακολουθία των εμβαδών {Qi}. Στην πρώτη και την τρίτη περίπτωση αυτή η προσέγγιση δεν ισχύει. Επομένως, το αποτέλεσμα μιας τέτοιας προσέγγισης εξαρτάται από την επιλογή του πολυγώνου.

Η μορφή του πολυγώνου καθορίζει τις ακολουθίες τετμημένων, τεταγμένων, μηκών τόξου, κ.λπ. Αντιθέτως, εάν η ακολουθία τιμών μιας μεταβλητής δίνεται (και θεωρείται προϋπόθεση ότι οι κορυφές του πολυγώνου ανήκουν στην καμπύλη), τότε το πολύγωνο καθορίζεται και ως εκ τούτου και οι ακολουθίες τιμών των άλλων μεταβλητών. Η δεύτερη και η Τρίτη υπόθεση, που συζητούνται ανωτέρω, μπορούν έτσι να περιγραφούν ως πολύγωνα που δημιουργούνται από τις αριθμητικές ακολουθίες τετμημένων και τεταγμένων, αντίστοιχα.

Η απροσδιοριστία του πολυγώνου που προσεγγίζεται στην άπειρη διάταξη, ή η ελευθερία να επιβληθεί μια πρόσθετη απαίτηση (όπως το να σχηματίζει μία αριθμητική πρόοδο) στην ακολουθία τιμών μιας μεταβλητής, διατηρείται στην επέκταση πραγματικά στο άπειρο. Κατά συνέπεια η έννοια του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών υπονοεί μία απροσδιοριστία: επιτρέπει την ελεύθερη επιλογή μιας πρόσθετης υπόθεσης για την ακολουθία πέρα από αυτές που ορίζει το εύρος των τιμών της μεταβλητής. Ο προφανής τρόπος ώστε να κάνουμε μια τέτοια πρόσθετη υπόθεση είναι να επεκταθεί η έννοια της αριθμητικής ακολουθίας στα απειροστά. Κατά συνέπεια η υπόθεση ότι η ακολουθία τιμών του x είναι αριθμητική μετατρέπεται, για τα απειροστά, στην υπόθεση ότι το dx είναι σταθερό.

Αντίστοιχα στις τρεις περιπτώσεις που συζητούνται ανωτέρω υπάρχουν οι ακόλουθες δυνατότητες για πρόσθετες υποθέσεις που αφορούν το πολύγωνο:

α') ds σταθερά,

β') dx σταθερά,

γ') dy σταθερά.

Χρησιμοποιώντας την ορολογία του Leibniz, μπορούμε να θεωρήσουμε την επιβολή μιας πρόσθετης υπόθεσης για το πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών ως την επιλογή ή την εξειδίκευση της προόδου των μεταβλητών. Διότι κάποιος μπορεί να συλλάβει αυτήν την επιλογή ή την εξειδίκευση ώστε να ασχοληθεί με τον τρόπο που οι μεταβλητές κινούνται κατά μήκος των περιοχών τους.

Η ελευθερία της επιλογής της προόδου των μεταβλητών περιγράφεται στις ακόλουθες αναφορές από τον Leibniz[54]:

> *«Για να πάρουμε τα αθροίσματα είναι περιττό να είναι το dx ή το dy είναι σταθερό και το $ddx = 0$, αλλά κάποιος υποθέτει την πρόοδο του x ή του y ανάλογα με αυτό που επιθυμεί (ανάλογα με το τι θα επιλέξει ως τετμημένη».*
>
> *«… συγκεκριμένα η πρόοδος του x μπορεί να υποτεθεί "ad libitum''…»*[55]

Αυτές οι διαφορετικές πρόοδοι των μεταβλητών θα μπορούσαν να μελετηθούν όπως εμφανίζονται από μια επιστολή του Varignon στον Leibniz, όπου γράφει για ένα πρόβλημα που περιλαμβάνει τις μεταβλητές x, y, s και z [56]:

> *«Εκτός από αυτούς τους 18 τύπους (...) από τους οποίους οι τελευταίοι 12 συνάγονται από τους έξι πρώτους υποθέτοντας τα dx, dy, ds, και dz διαδοχικά σταθερά, κάποιος μπορεί να συνάγει άπειρο πλήθος τέτοιων τύπων από τους οποίους οι πρώτοι έξι προκύπτουν υποθέτοντας με τον ίδιο τρόπο κάτι άλλο σταθερό (...) για παράδειγμα υποθέτοντας διαδοχικά τα $\frac{dy}{y}$, $\frac{ds^2}{y}$, $y^m dx$, $y^m ds$ σταθερά κ.λπ».*

Όπως εμφανίζεται σε αυτό το χωρίο, η πρόοδος των μεταβλητών διευκρινίζεται από τον προσδιορισμό του διαφορικού πρώτης τάξης που υποτίθεται σταθερά. Μερικές φορές αυτό περιγράφεται πλήρως με την έκφραση: «το μήκος των τόξων αυξάνεται ομοιόμορφα» με σταθερά τη ds, και «το x αυξάνεται ομοιόμορφα» με σταθερά τη dx. [57]

---

[54] *Leibniz to Von Bodenhausen, Math. Schr. VII, σελ. 387.*
[55] *Leibniz, Math. Schr. V, 1684, σελ. 233.*
[56] *Varignon to Leibniz, Math. Schr., 4-12-1710, σελ.173.*

Η απροσδιοριστία των αθροισμάτων και των διαφορικών ανώτερης τάξης

Οι κανόνες για τους τελεστές d και $\int$ που συζητούνται μέχρι τώρα δεν εξαρτώνται από την επιλογή της προόδου των μεταβλητών, αλλά όσο δε διευκρινίζεται η πρόοδος, οι μεταβλητές που εισάγονται με τους τελεστές d και $\int$ επηρεάζονται από την ίδια την απροσδιοριστία με το πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών. Για παράδειγμα, στην πρώτη περίπτωση, το $dds = 0$ (επειδή το ds είναι σταθερό), αλλά στη δεύτερη περίπτωση το $dds = 0$ δεν είναι ίσο με μηδέν. Τα διαφορικά και οι σχέσεις μεταξύ τους εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών. Επίσης τα αθροίσματα εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών. Η σχέση του $\Sigma\{y_i\}$ με το εμβαδόν, που συνδέεται με τη δεύτερη περίπτωση, μετασχηματίζεται, από την επέκταση, στον ισχυρισμό ότι, κάτω από την υπόθεση ενός σταθερού dx, το $\int y$ είναι ανάλογο προς το εμβαδόν Q, με το dx αναλογικά ως απείρως μικρό παράγοντα: $dx\int y = Q$. Αυτή η σχέση δεν ισχύει κάτω από οποιαδήποτε άλλη υπόθεση για την πρόοδο των μεταβλητών.

Αυτό το θέμα θα συζητηθεί περαιτέρω σε σχέση με τις θεωρίες του Cavalieri. Προς το παρόν έχουμε την ακόλουθη αναφορά, στην οποία ο Leibniz εξηγεί ότι εάν η dx ληφθεί ως σταθερά, κάποιος μπορεί να λάβει το εμβαδόν ως $\int y$ (« άθροισμα όλων των y »), όπως συμβαίνει στη θεωρία των αδιαιρέτων, αλλά εάν κάποιος επιθυμεί να εξετάσει τις διαφορετικές προόδους των μεταβλητών, το εμβαδόν πρέπει να εκτιμηθεί ως $\int ydx$ [58]:

> *«Και αυτό είναι πράγματι άλλο ένα από τα πλεονεκτήματα του διαφορικού λογισμού μου, ότι κάποιος δεν καλεί, όπως ήταν στο παρελθόν σύνηθες, το άθροισμα όλων των y, αλλά το άθροισμα όλων των ydx, ή το $\int \overline{ydx}$, και με αυτόν τον τρόπο μπορώ να καταστήσω σαφές το dx και να μετατρέψω με άπειρους τρόπους το δοσμένο εμβαδόν σε άλλα, βρίσκοντας έτσι το ένα με τη βοήθεια των άλλων».*

---

[58] *Leibniz to Von Bodenhausen, Math. Schr. VII, σελ. 387.*

Οι ιδιότητες των διαφορικών και των αθροισμάτων όπως περιγράφηκαν προϋποθέτουν κάποιες συνθήκες κανονικότητας του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών. Η απαίτηση ότι τα διαφορικά δευτέρας τάξης είναι απείρως μικρά συγκριτικά με τα διαφορικά πρώτης τάξης υπονοεί ότι τα διαφορικά πρώτης τάξης πρέπει να μεταβάλλονται ομαλά: δύο γειτονικά διαφορικά πρέπει να είναι περίπου ίσα. Αυτή η απαίτηση δεν προκύπτει άμεσα από την επέκταση από την πεπερασμένη σειρά. Πράγματι, στην πεπερασμένη σειρά κάποιος μπορεί να φανταστεί ένα πολύγωνο με μήκη πλευρών h και 2h εναλλάξ, στην οποία η ακολουθία διαφοράς $\Delta_i S$ των μηκών τόξων θα ήταν {h, 2h, h, 2h, h…. } και η ακολουθία δεύτερης διαφοράς θα ήταν {h, -h, h, -h, h, -h…. }. Επεκτείνοντας αυτήν την περίπτωση στο πραγματικό άπειρο τα διαφορικά δευτέρας τάξης dds έχει την ίδια τάξη του απείρου με το διαφορικό πρώτης τάξης ds .

Τέτοιες ανάλογες πρόοδοι των μεταβλητών πρέπει να αποκλειστούν. Αυτό μπορεί να γίνει αποτελεσματικά θεωρώντας μόνον προόδους στις οποίες το πρώτο διαφορικό μιας εκ των μεταβλητών είναι σταθερό. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό αναδρομικά από το γεγονός ότι οι καμπύλες που μελετήθηκαν προϋπέθεταν, εκτός από τις ανώμαλες περιπτώσεις, αρκετές διαφορίσιμες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Ως εκ τούτου εάν το u είναι μεταβλητή με σταθερό το πρώτο διαφορικό, η αντίστοιχη ακολουθία του y , έστω $y = f(u)$, διαμορφώνεται από την επέκταση από μια πεπερασμένη ακολουθία όπως η

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ f(a+3h),\ldots$$

Η ιδιότητα ότι τα $dy,\ ddy,\ d^3y$ κ.λπ. ανήκουν σε διαφορετικές διαδοχικές τάξεις του απείρου συνυπάρχει με τις διαφορετικές τάξεις του h

$$\Delta y = f(a+h) - f(a) = O(h),$$

$$\Delta^2 y = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = O(h^2),$$

$$\Delta^3 y = f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a) = O(h^3).$$

Από αυτές τις σχέσεις μπορούμε επίσης να δούμε ότι εάν το πρώτο διαφορικό μιας εκ των μεταβλητών υποτίθεται σταθερά, τα διαφορικά k τάξης είναι της ίδιας τάξης του απείρου με τις δυνάμεις k τάξης των διαφορικών πρώτης τάξης.

Το παραπάνω επιχείρημα συνιστά ότι η μεταβλητή που έχει σταθερά το πρώτο διαφορικό αποκτά το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Έχουν βρει πολύ λίγα ίχνη μιας επίγνωσης ότι οι συνηθισμένες υποθέσεις για την πρόοδο των μεταβλητών υπονοούν τους όρους κανονικότητας που είναι ασαφής

στην έννοια του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών. Πιθανότατα αυτή η έλλειψη συνειδητοποίησης προκλήθηκε από το γεγονός ότι εάν οι κανόνες του λογισμού ακολουθηθούν και εάν κάποιος καθορίσει την πρόοδο των μεταβλητών με τον καθορισμό ενός σταθερού διαφορικού, τότε δύσκολα αντιμετωπίζει τα προβλήματα που αναδύονται από αυτήν την ερώτηση. Ακόμα, η ερώτηση αναδύεται και από το γεγονός ότι το μηδέν δεν έχει καμία σταθερή τάξη του απείρου. Ως παράδειγμα αποτελεί μία μελέτη του διαφορικού του x^2 του Jacob Bernoulli.

$$d\left(x^2\right) = \left(x + dx\right)^2 - x^2 = 2xdx + \left(dx\right)^2,$$

και συμπέρανε από αυτό ότι, για $x \neq 0$, $d\left(x^2\right) = 2xdx$, ενώ για x=0 έχουμε $d\left(x^2\right) = \left(dx\right)^2$. Ο τελευταίος τύπος παραβιάζει τον όρο κανονικότητας ότι τα διαφορικά πρώτης τάξης πρέπει όλα να είναι της ίδιας τάξης του απείρου. Όσον αφορά τα διαφορικά πρώτης τάξης, το $\left(dx\right)^2$ πρέπει να απορριφθεί και το $d\left(x^2\right)$ πρέπει να εκτιμηθεί ίσο με μηδέν για x=0.

Οι κανόνες του λογισμού

Η καμπύλη περιέχει τις σχέσεις μεταξύ των συσχετιζόμενων μεταβλητών. Όπως οι πεπερασμένες μεταβλητές, τα διαφορικά επιδέχονται μεταξύ τους σχέσεις που δημιουργούνται από την καμπύλη. Οι εξισώσεις που εκφράζουν αυτές τις σχέσεις είναι οι διαφορικές εξισώσεις.

Οι όροι των εξισώσεων που εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ των πεπερασμένων μεταβλητών είναι αναλυτικοί συνδυασμοί (γινόμενα, αθροίσματα κ.λπ.) αυτών των μεταβλητών. Επομένως αυτοί οι όροι είναι και οι ίδιοι μεταβλητές και ο τελεστής d μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτές. Οι κανόνες του λογισμού διδάσκουν πώς τα διαφορικά τέτοιων αναλυτικών συνδυασμών συσχετίζονται με τα διαφορικά των συστατικών όρων και των παραγόντων τους. Αυτοί οι κανόνες είναι:

$$d\left(x + y\right) = dx + dy$$

$$d\left(xy\right) = xdy + ydx$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{xdy - ydx}{y^2}$$

$dx^a = ax^{a-1}dx$, για ρητό α

$$d\log x = \frac{adx}{x}$$

$db^x = ab^x dx$, με $a = \ln b$

$d\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x dx$

$d\tau o\xi\eta\mu x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ κ.λπ.

Επειδή αυτοί οι κανόνες είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή της προόδου των μεταβλητών, κάποιος μπορεί να τους εφαρμόσει χωρίς να κάνει κάποια υπόθεση για αυτήν την πρόοδο.

Στην εργασία του ο Leibniz δημοσίευσε τους κανόνες της διαφόρισης για τα αθροίσματα, τα γινόμενα, τα πηλίκα, τις δυνάμεις και τις ρίζες. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι η δυνατότητα εφαρμογής του αλγορίθμου του Leibniz στις ρίζες και τις περίπλοκες άρρητες παραστάσεις αποτέλεσε ένα μεγάλο πλεονέκτημα διότι μέχρι τότε οι ήδη γνωστοί κανόνες για τις εφαπτομένες και τις ακραίες τιμές (Fermat, Sluse), ίσχυαν μόνο στις πολυωνυμικές εξισώσεις για τις αλγεβρικές καμπύλες. Ο υπολογισμός τέτοιων εξισώσεων για δοσμένες καμπύλες (ένα αντίστοιχο παράδειγμα του Leibniz είναι το εξής: ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από έξι δεδομένα σημεία έχουν άθροισμα μία δεδομένη σταθερά) συχνά απαίτησαν τους μακροχρόνιους και κουραστικούς υπολογισμούς επειδή έπρεπε να απαλειφθούν οι ρίζες. Συνέπεια αυτού είναι και ο τίτλος του[59]: *«Μια νέα μέθοδος για τα μέγιστα και τα ελάχιστα, και επίσης για τις εφαπτομένες, η οποία δεν εμποδίζεται από τα κλάσματα ή τις άρρητες ποσότητες, καθώς και ένα μοναδικό είδος υπολογισμού για αυτές»*.

Οι κανόνες για τη διαφόριση μη-αλγεβρικών συνθέσεων των μεταβλητών (εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές σχέσεις) δε δόθηκαν σε αυτό το άρθρο του Leibniz. Περιλαμβάνουν ορισμένες δυσκολίες που συνδέονται με την έννοια της διάστασης.

Διαφορικές εξισώσεις, η εξάρτησή τους στην πρόοδο των μεταβλητών, η επιλογή μιας ανεξάρτητης μεταβλητής

Με την εφαρμογή του τελεστή d και στα δύο μέλη της εξίσωσης της καμπύλης και στη συνέχεια επεξεργαζόμενοι τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τους κανόνες,

---

[59] *Leibniz, Math. Schr. V, 1684, σελ.220.*

παράγεται η διαφορική εξίσωση της καμπύλης. Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του d οδηγεί σε διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξης της καμπύλης. Καθώς οι κανόνες του υπολογισμού είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή της προόδου των μεταβλητών, οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις ισχύουν για κάθε τέτοια πρόοδο. Εντούτοις, η επιλογή της προόδου των μεταβλητών μπορεί να μετασχηματίσει τις δεύτερες και ανώτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις σε απλούστερες, οι οποίες, φυσικά, ισχύουν μόνο για την πρόοδο που επιλέχθηκε.

Αυτή η πτυχή των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης, που συσχετίζεται με την απροσδιοριστία του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών, μπορεί να αποτυπωθεί καλύτερα με ένα παράδειγμα, όπου παίρνω την παραβολή $ay = x^2$. Η επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του d και στις δύο πλευρές της εξίσωσης παράγει τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης και ανωτέρας τάξης, που ισχύουν για κάθε πρόοδο των μεταβλητών:

$$ady = 2xdx,$$

$$addy = 2(dx)^2 + 2xddx, \qquad (34)$$

$$ad^3y = 6dxddx + 2xd^3x,$$

$ad^4y = 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x$, κ.λπ.

Εάν η πρόοδος των μεταβλητών ορίζεται με dy σταθερά $(ddy = 0)$, αυτές οι εξισώσεις μετασχηματίζονται ως εξής:

$$ady = 2xdx,$$

$$0 = 2(dx)^2 + 2xddx, \qquad (35)$$

$$0 = 6dxddx + 2xd^3x,$$

$0 = 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x$, κ.λπ.

και εάν η dx υποτίθεται σταθερά, $(ddy = 0)$, οι εξισώσεις μετασχηματίζονται ως εξής:

$$ady = 2xdx,$$

$$addy = 2(dx)^2, \qquad (36)$$

$$ad^3y = 0,$$

$ad^4y = 0$, κ.λπ.

Το παράδειγμα φανερώνει ότι οι γενικές διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξης μιας καμπύλης μπορούν να απλοποιηθούν αρκετά από την επιλογή μιας κατάλληλης προόδου των μεταβλητών. Ως εκ τούτου υπάρχουν δύο είδη διαφορικών εξισώσεων στον λογισμό: εκείνες που ισχύουν ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών, και εκείνες που ισχύουν μόνο για μια συγκεκριμένη πρόοδο. Στη θεώρηση μιας διαφορικής εξίσωσης, πρέπει πάντα να γίνεται σαφές σε ποιο είδος ανήκει, και στην περίπτωση που ανήκει στο δεύτερο είδος, πρέπει να οριστεί η πρόοδος. Αυτό κατορθώνεται με τη διευκρίνιση του διαφορικού πρώτης τάξης που υποτίθεται σταθερά.

Οι ανωτέρας τάξης διαφορικές εξισώσεις της ίδιας καμπύλης, αλλά που ισχύουν σε διαφορετικές προόδους των μεταβλητών θα διαφέρουν αρκετά. Αντιθέτως, η ίδια διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης, εάν γίνεται κατανοητή όσον αφορά διαφορετικές προόδους των μεταβλητών, θα ορίσει διαφορετικές καμπύλες. Παρακάτω θα εξεταστεί με περισσότερες λεπτομέρειες αυτή η εξάρτηση των διαφορικών εξισώσεων ανωτέρας τάξης από την πρόοδο των μεταβλητών.

Στις τεχνικές για το σχηματισμό των διαφορικών εξισώσεων ανωτέρας τάξης από τα δεδομένα ενός φυσικού ή γεωμετρικού προβλήματος καθώς και στις τεχνικές για τη επίλυση τέτοιων εξισώσεων η επιλογή των κατάλληλων προόδων των μεταβλητών διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο.

Η επιλογή της προόδου των μεταβλητών συσχετίζεται με την επιλογή μιας ανεξάρτητης μεταβλητής εάν κάποιος ήθελε να θεωρήσει τις μεταβλητές ως συναρτήσεις. Αυτό παρουσιάζεται στις εξισώσεις (35) και (36). Οι εξισώσεις (35) στις οποίες το dy υποτίθεται σταθερά, αντιστοιχούν στις εξισώσεις:

$a = 2xx'$,

$0 = 2(x')^2 + 2xx''$,

$0 = 6xx''+2xx'''$, ,

$0 = 6(x'')^2 + 8x'x'''+2xx''''$, κ.λπ.

στις οποίες τα x', x'' κ.λπ. είναι οι παράγωγοι του x συναρτήσει του y $\left(x = \sqrt{ay}\right)$. Ομοίως, οι εξισώσεις (36), που προϋποθέτουν το dx ως σταθερά, αντιστοιχούν στις εξισώσεις:

$ay' = 2x$,

$ay''= 2,$

$ay'''= 0$,

$ay''''= 0$, κ.λπ.

στις οποίες τα y', y'' κ.λπ. είναι οι παράγωγοι του y συναρτήσει του x $\left(y = x^2/a\right)$.

Η αντιστοιχία μεταξύ της μεταβλητής με το σταθερό πρώτης τάξης διαφορικό και της «ανεξάρτητης» μεταβλητής που εμφανίζεται στις συναρτήσεις μπορεί επίσης να διευκρινιστεί θεωρώντας για τη δεύτερη παράγωγο τον τύπο που ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται: $\frac{d^2y}{dx^2}$

Για την $y = f(x)$, η παράγωγος ορίζεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Η δεύτερη παράγωγος συνήθως παρουσιάζεται ως η παράγωγο της παραγώγου. Εντούτοις, κάποιος θα μπορούσε να την παρουσιάσει ως εξής:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+2h)-f(x+h)\right]-\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h^2}$$

το οποίο είναι ανάλογος με:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy^I - dy}{dx^2}$$

Για αυτόν τον ορισμό της δεύτερης παραγώγου είναι ουσιαστικό ότι θεωρεί δύο ίσα τμήματα h κατά μήκος του άξονα των x. Αυτό γίνεται σαφές εάν αναρωτηθούμε πώς η δεύτερη παράγωγος θα μπορούσε να οριστεί άμεσα ως όριο ενός πηλίκου των πεπερασμένων διαφορών συγκριτικά με τα άνισα τμήματα h_1 και h_2 κατά μήκος του άξονα των x. Ο αριθμητής ενός τέτοιου πηλίκου θα ήταν

$$\left[f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)\right]-\left[f(x+h_1)-f(x)\right]$$

Αλλά υπάρχει πρόβλημα επιλογής για τον παρονομαστή, και συγκεκριμένα για το αν θα επιλεχθεί το h_1^2, το h_2^2 ή το h_1h_2. Αλλά αν δεν επιλεγεί ο παρονομαστής το διπλό όριο υπάρχει, καθώς $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$ όπως μπορεί εύκολα να ελεγχθεί στο παράδειγμα $f(x) = x$. Έτσι πρέπει να υποθέσουμε ότι $h_1 = h_2$, το οποίο είναι

ισοδύναμο στην ορολογία του Leibniz με την υπόθεση του dx ως σταθερά. Ως εκ τούτου μόνο εάν το dx θεωρείται ως σταθερά το d^2y σχετίζεται με τη δεύτερο παράγωγο του y ως συνάρτηση του x. Κατά συνέπεια η μεταβλητή της οποίας το διαφορικό πρώτης τάξης υποτίθεται σταθερά έχει ρόλο ισοδύναμο με αυτόν της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στις εξισώσεις (34), (35) και (36) φαίνεται ότι οι πρώτης τάξης διαφορικές εξισώσεις δεν επηρεάζονται από την αλλαγή της προόδου των μεταβλητών. Αυτό είναι ένας γενικός κανόνας, και η επίδρασή του είναι ότι στην επεξεργασία των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης η πρόοδος των μεταβλητών δεν χρειάζεται να διευκρινιστεί και μπορεί να αφεθεί ακαθόριστη. Ως εκ τούτου σε εκείνη την περίπτωση καμία μεταβλητή δεν χρειάζεται να επιλεγεί και να της δοθεί ένα σταθερό διαφορικό πρώτης τάξης, και έτσι όλες οι μεταβλητές έχουν ίδια θέση στο λογισμό. Επίσης η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης δεν επηρεάζεται από την προσδιορισμό ή την αλλαγή της προόδου των μεταβλητών.

Ο κανόνας ισχύει για τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης οποιουδήποτε βαθμού (δηλαδή η εξίσωση μπορεί να περιλάβει τις δυνάμεις και τα παράγωγα των διαφορικών πρώτης τάξης). Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ομογενής όσον αφορά την τάξη του απείρου. Στην περίπτωση των εξισώσεων που περιλαμβάνουν μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης αυτό σημαίνει ότι είναι ομογενείς σε αυτά τα διαφορικά. Ως εκ τούτου ο πολλαπλασιασμός όλων των διαφορικών με τον ίδιο παράγοντα δεν επηρεάζει την εξίσωση. Έτσι σε κάθε σημείο της καμπύλης, η σχέση

$$dx : dy : ds = \sigma : y : \tau$$

ισχύει ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών. Ως εκ τούτου εάν dx, dy, ds και dx*, dy*, ds* συνεπάγονται από δύο διαφορετικές προόδους μεταβλητών,

$$dx : dx^* = dy : dy^* = ds : ds^*,$$

το οποίο σημαίνει ότι στην αλλαγή από μια πρόοδο των μεταβλητών σε άλλη, τα διαφορικά όλα πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα, έτσι ώστε η σχέση μεταξύ τους, εκφρασμένη από τη διαφορική εξίσωση, παραμένει η ίδια. (Το επιχείρημα μπορεί να επεκταθεί ώστε να καλύψει τις περιπτώσεις που περιλαμβάνουν μεταβλητές άλλες εκτός των x, y και s).

Ο κανόνας διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στα επιχειρήματα του Johann Bernoulli και του Euler για το πώς μετασχηματίζονται οι διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης από τις διαφορετικές επιλογές της προόδου των μεταβλητών, θέμα που θα συναντήσουμε παρακάτω.

Γενικά, οι συγγραφείς διευκρινίζουν ευσυνείδητα την πρόοδο των μεταβλητών σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου αυτή είναι απαραίτητη. Υπάρχουν παραδείγματα όπου ο προσδιορισμός παραλείπεται. Μια τέτοια περίπτωση επιδεικνύει πόσο κρίσιμος είναι αυτός ο προσδιορισμός για την κατανόηση των υπολογισμών. Αυτό παρουσιάζεται και στον ολοκληρωτικό λογισμό του Johann Bernoulli:

Επειδή $s = adx : dy$ [αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που ο Bernoulli εξετάζει] έχουμε $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = addx : dy$, και ως εκ τούτου $dy = addx : \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Σύμφωνα με αυτό, τα ολοκληρώματα μπορούν να ληφθούν και στις δύο πλευρές, και οι δύο πλευρές πολλαπλασιάζονται με το dx, το οποίο οδηγεί στη σχέση $dxdy = adxddx : \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Παίρνοντας τα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στη σχέση $xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$, και μετά για να απλοποιήσουμε την εξίσωση, βρίσκουμε $dy = adx : \sqrt{x^2 - a^2}$ όπως προηγούμενα. [Ο Bernoulli είχε εξετάσει προηγουμένως αυτήν τη διαφορική εξίσωση].

Αυτοί οι υπολογισμοί είναι ακατανόητοι επειδή ο Bernoulli δεν υπέδειξε ότι παίρνει τη dy ως σταθερά.

Ο νόμος της υπερβατικής ομογένειας

Η γεωμετρική ερμηνεία των ποσοτήτων που εισάγουν την ανάλυση απαιτεί οι εξισώσεις να είναι ομοιογενείς στη διάσταση. Επιπλέον, υπάρχει ένα δεύτερο είδος ομογένειας, το οποίο απαιτεί όλοι οι όροι μιας εξίσωσης να είναι της ίδιας τάξης του απείρου. Μια ποσότητα που είναι απείρως μικρή συγκρινόμενη με μία άλλη ποσότητα μπορεί να παραληφθεί εάν συγκριθεί με εκείνη την ποσότητα. Κατά συνέπεια όλοι οι όροι σε μια εξίσωση εκτός από εκείνους της υψηλότερης τάξης του απείρου, ή της χαμηλότερης τάξης της άπειρης μικρότητας, μπορούν να απορριφθούν. Παραδείγματος χάριν,

$a + dx = a$

$dx + ddy = dx$ κ.λπ.

Οι προκύπτουσες εξισώσεις ικανοποιούν αυτήν τη δεύτερη απαίτηση της ομογένειας.

Ο Leibniz εκτίμησε τους δύο νόμους της ομογένειας ιδιαίτερα, όπως παρατηρείται σε κείμενό του[60], όπου εισήγαγε μια νέα σημείωση για τις δυνάμεις και επέκτεινε τη σημείωση για τα διαφορικά προκειμένου να επιδειχθεί η αναλογία μεταξύ των δυνάμεων και των διαφορικών, και, αντίστοιχα, η αναλογία μεταξύ των νόμων της ομογένειας των διαστάσεων και της ομογένειας των τάξεων του απείρου. Έγραψε $p^k x$ για το x^k (που τονίζει έτσι το γεγονός ότι το να παίρνεις δυνάμεις είναι, όπως το να παίρνεις διαφορικά, ένας τελεστής) και επέκτεινε το $d^n x$ για την περίπτωση κατά την οποία n=0 ορίζοντας $d^0 x = x.$ Στη συνέχεια εξέθεσε την αναλογία μεταξύ των δυνάμεων των αθροισμάτων και των διαφορικών των γινομένων, η οποία είναι, στην πραγματικότητα, «ο κανόνας του Leibniz»:

$$p^e(x+y) = 1p^e xp^0 y + \frac{e}{1} p^{e-1} xp^1 y + \frac{e(e-1)}{1\cdot 2} p^{e-2} xp^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1\cdot 2\cdot 3} p^{e-3} xp^3 y + \ldots$$

$$d^e(xy) = 1d^e xd^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} xd^1 y + \frac{e(e-1)}{1\cdot 2} d^{e-2} xd^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1\cdot 2\cdot 3} d^{e-3} xd^3 y + \ldots$$

Επέκτεινε την αναλογία στα αθροίσματα τριών όρων και τα γινόμενα τριών παραγόντων. Μετά από αυτό παρατήρησε:

«Και αυτή η αναλογία προχωράει ομοιόμορφα κατά τον ίδιο τρόπο με αυτόν της σημείωσης (που μπορεί να σας εκπλήξει), και επίσης το $p^0(x+y+z)$ πραγματικά αντιστοιχεί στο $d^0(xyz)$, για $p^0(x+y+z) = 1 = p^0 xp^0 yp^0 z$ και $d^0(xyz) = xyz = d^0 xd^0 yd^0 z.$

Συγχρόνως ένας υποθετικός νόμος της ομογένειας εμφανίζεται που δεν είναι εξίσου προφανής με τον αντίστοιχο που αναφέρεται στα διαφορικά. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιούμε αυτό το νόμο, φαίνεται ότι τα $addx$ και $dxdx$ δεν είναι μόνο αλγεβρικά ομοιογενή (όπως και στις δύο περιπτώσεις δύο ποσότητες πολλαπλασιάζονται), αλλά ότι είναι επίσης υποθετικά ομοιογενή και συγκρίσιμα. Το πρώτο μπορεί να γραφτεί ως $d^0 ad^2 x$, ενώ το επόμενο ως $d^1 xd^1 x$, όπου και στις δύο περιπτώσεις οι διαφορικοί εκθέτες έχουν το ίδιο άθροισμα, δηλαδή 0 + 2 = 1 + 1. Ο υποθετικός νόμος της ομογένειας προϋποθέτει τον αλγεβρικό νόμο».

---

[60] *"Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de lege homogeneorum transcendentali." Misc. Berol., 1710, σελ. 160-165. Math. Schr. V, σελ. 377-382.*

Διάσταση, τάξη του απείρου και οι τελεστές d και $\int$

Η διάσταση και η τάξη του απείρου των πεπερασμένων και απειροελάχιστων ποσοτήτων επηρεάζονται από τον πολλαπλασιασμό και από την εφαρμογή των τελεστών d και $\int$ ως εξής:

Ο πολλαπλασιασμός αλλάζει την τάξη του απείρου εκτός αν ο παράγοντας είναι πεπερασμένος. Αλλάζει τη διάσταση εκτός αν ο παράγοντας είναι ένας αριθμός ή ένας λόγος.

Ο τελεστής d διατηρεί τη διάσταση και αλλάζει τη τάξη του απείρου: για οποιαδήποτε μεταβλητή ποσότητα Α, η dA είναι απείρως μικρή συγκριτικά με το Α.

Ο τελεστής $\int$ διατηρεί τη διάσταση και αλλάζει τη τάξη του απείρου: το $\int A$ είναι απείρως μεγάλο συγκριτικά με το Α. Μερικά παραδείγματα μπορούν να αρκέσουν για περαιτέρω διευκρίνιση:

$a\frac{ddy}{dx^2}$ είναι ένας πεπερασμένος λόγος,

$\frac{dy}{ds}\iint x$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, απείρως μεγάλο δεύτερης τάξης,

abx είναι μια απείρως μικρή περιοχή

$\frac{ds}{a}ddx$ είναι μια γραμμή, απείρως μικρή τρίτης τάξης κ.λπ.

Οι θεμελιώδεις έννοιες του λογισμού του Leibniz και οι αντίστοιχες σήμερα

Ο κατάλληλος τρόπος να ολοκληρωθεί αυτή η περίληψη του λογισμού του Leibniz είναι να υποδειχθεί ότι οι βασικές έννοιες, διαφόριση και άθροιση, έρχονται σε αντίθεση με τις έννοιες της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης όπως χρησιμοποιούνται στο σύγχρονο απειροστικό λογισμό των πραγματικών συναρτήσεων. Με σαφήνεια: Η παραγώγιση είναι ο τελεστής που αντιστοιχίζει σε μια συνάρτηση f την παράγωγο f', η οποία είναι επίσης μία συνάρτηση, που ορίζεται από τη σχέση: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η ολοκλήρωση είναι ο τελεστής που αντιστοιχίζει σε μία συνάρτηση f ένα ολοκλήρωμα $\int f(t)dt$ του f, το οποίο είναι επίσης μία συνάρτηση, ορισμένη (modulo ένας σταθερός όρος) από

την απαίτηση ότι κάθε παράγωγος της ισούται με f, ή, εναλλακτικά, ορισμένη ως $\int_a^x f(t)dt$, χρησιμοποιώντας έναν άμεσο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος με την έννοια των ορίων των αθροισμάτων που προκύπτουν εκλεπτύνοντας τις διαμερίσεις (ολοκλήρωμα Riemann).

Η σύγκριση αυτών των εννοιών αποκαλύπτει τρεις σημαντικές αντιθέσεις:

(i) Η διαφόριση και η άθροιση εφαρμόζονται σε μεταβλητές, ανεξάρτητα από την εξάρτηση αυτών από άλλες «ανεξάρτητες» μεταβλητές. Η παραγώγιση και η ολοκλήρωση ισχύουν για τις συναρτήσεις μιας συγκεκριμένης μεταβλητής.

(ii) Η διαφόριση και η άθροιση εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών υπό την έννοια ότι τα πρώτης τάξης και ανωτέρας τάξης διαφορικά και αθροίσματα παραμένουν ακαθόριστα έως ότου διευκρινιστεί η πρόοδος των μεταβλητών, αν και σε μερικές περιπτώσεις οι σχέσεις μεταξύ των διαφορικών και των αθροισμάτων είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών και επομένως δεν επηρεάζονται από αυτήν την απροσδιοριστία.

(iii) Η διαφόριση και η άθροιση αλλάζουν την τάξη του απείρου και αφήνουν τη διάσταση αμετάβλητη. Η παραγώγιση και η ολοκλήρωση μεταβάλλουν τη διάσταση και αφήνουν την τάξη του απείρου (σε αυτήν την περίπτωση, πεπερασμένη) αμετάβλητη.

Το τρίτο σημείο χρειάζεται κάποια διευκρίνιση καθώς εδώ ο αναχρονισμός, υπονοούμενος σε οποιαδήποτε σύγκριση των εννοιών που χρησιμοποιήθηκαν σε διαφορετικές περιόδους, γίνεται εμφανής: η παραγώγιση και η ολοκλήρωση δεν εμφανίζονται σε ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό πλαίσιο. Εντούτοις, το να εξετάσει κάποιος την προφανή γεωμετρική ερμηνεία αυτών των τελεστών είναι διαφωτιστικό. Έστω, επομένως, ότι το x και το $y = f(x)$ έχουν τη διάσταση μιας γραμμής, τότε το όριο ενός λόγου γραμμών $y = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, είναι χωρίς διάσταση (ένας λόγος ή ένας αριθμός), και το $\int_a^x f(t)dt$ είναι μια περιοχή. Ως εκ τούτου η παραγώγιση και η ολοκλήρωση αλλάζουν τη διάσταση. Από την άλλη η $f'(x)$ και το $\int_a^x f(t)dt$ είναι πεπερασμένα, έτσι ώστε οι τελεστές να διατηρούν την τάξη του απείρου.

Οι τρεις αντιθέσεις επεξηγούν τη θεμελιώδη αλλαγή κατά την οποία υποβλήθηκε ο απειροστικός λογισμός από τον καιρό του Leibniz έως κατά προσέγγιση το τέλος

του δέκατου ενάτου αιώνα. Η αλλαγή αυτή υπήρξε μια βαθμιαία και αρκετά σύνθετη διαδικασία η οποία δε θα μπορούσε να γίνει κατανοητή εκτός αν τα εννοιολογικά θεμέλια του λογισμού στο αρχικό στάδιο γίνονταν σαφή.

Πτυχές της Τεχνικής και Επιλογή των Προβλημάτων στο Λογισμό του Leibniz

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθούν ορισμένα αποσπάσματα από τις μελέτες των πρώτων ενασχολούμενων με το λογισμό του Leibniz, οι οποίες δείχνουν πώς τα εννοιολογικά θεμέλια του λογισμού, που συζητήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, επηρέασαν την επιλογή των προβλημάτων και τις τεχνικές λύσης. Θα επικεντρωθούμε στα παραδείγματα σχετικά με την απροσδιοριστία της προόδου των μεταβλητών και των νόμων της ομογένειας, επειδή αυτά είναι χαρακτηριστικά γνωρίσματα που ο λογισμός έχασε στην κατοπινή ανάπτυξή του. Κατά συνέπεια η περιγραφή αυτών θα συμβάλει σε μεγαλύτερο βαθμό στο να κατανοήσουμε το αρχικό στάδιο του λογισμού. Υπάρχουν τρεις ομάδες παραδειγμάτων: τα πρώτα δύο, εξετάζουν τις τεχνικές που συνδέονται με την επιλογή της προόδου των μεταβλητών, και το τρίτο εξετάζει τους νόμους της ομογένειας.

Όπως έχουμε δει, οι διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης, και γενικά οι εκφράσεις που περιέχουν τα διαφορικά ανώτερης τάξης, εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών. Η κατάλληλη επιλογή της προόδου μπορεί να απλοποιήσει αρκετά τέτοιες εκφράσεις, και οι διαφορετικές επιλογές οδηγούν σε διαφορετικούς τύπους για τις ίδιες γεωμετρικές σχέσεις ή οντότητες. Οι περισσότερες διαφορικές εκφράσεις ανώτερης τάξης είναι ερμηνεύσιμες μόνο εάν διευκρινίζεται η πρόοδος των μεταβλητών για τις οποίες προορίζονται να ισχύσουν. Όπως θα δούμε, η επιλογή της προόδου μπορεί να γίνει σε διαφορετικά στάδια του όλου εγχειρήματος, ενώ μερικές φορές μπορεί και να αποφευχθεί εξ ολοκλήρου.

Σε αυτό το κομμάτι θα δούμε αυτήν την πτυχή των τεχνικών διαφορικών ανώτερης τάξης με διάφορες παραγωγές τύπων για την ακτίνα της καμπυλότητας σε ένα σημείο μιας δεδομένης καμπύλης. Αυτές οι διαδικασίες παραγωγής και οι προκύπτοντες τύποι διαφέρουν πολύ μεταξύ τους, και θα γίνει σαφές ότι αυτές οι διαφορές συσχετίζονται με τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους γίνεται η επιλογή της προόδου των μεταβλητών.

Δεδομένου ότι θα περιγράψουμε στις τεχνικές πτυχές των διαφόρων κατασκευών των τύπων για την ακτίνα της καμπυλότητας, θα δοθεί εδώ μόνο μια συνοπτική ένδειξη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των σχετικών κειμένων.

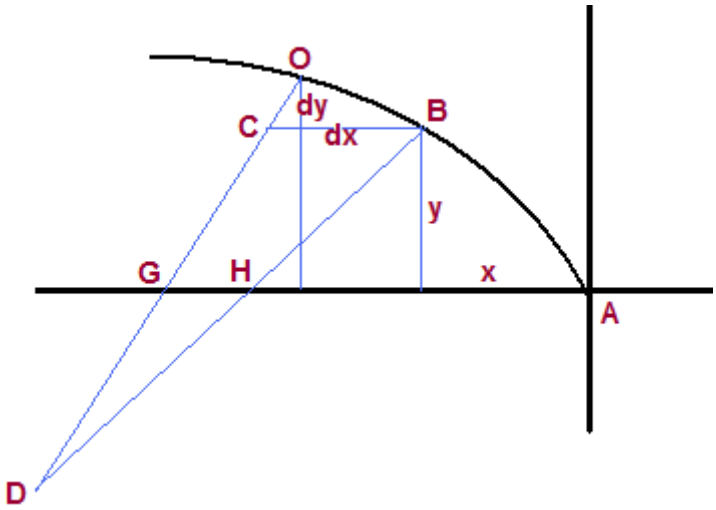
Όταν ο Johann Bernoulli έφθασε στο Παρίσι το 1691, κατείχε έναν τύπο για την ακτίνα της καμπυλότητας, η χρήση του οποίου εντυπωσίασε τον L'Hôpital τόσο πολύ ώστε ο Bernoulli κλήθηκε να γίνει ο ιδιωτικός δάσκαλος του μαρκησίου. Πιθανόν, ο συγκεκριμένος τύπος να ήταν αυτός που εμφανίζεται στον Ολοκληρωτικό Λογισμό του Bernoulli, την κατασκευή του οποίου θα δούμε στη

συνέχεια. Επίσης, ο Jacob Bernoulli, ανεξάρτητα από τον αδελφό του, κατείχε τύπους για την ακτίνα της καμπυλότητας. Αυτούς τους τύπους τους χρησιμοποίησε στην παραγωγή των αποτελεσμάτων για τις διακαυστικές καμπύλες οι οποίες δημοσιεύθηκαν, χωρίς αποδείξεις, το 1693 από τον Jacob Bernoulli. Για αυτό το κείμενο (δημοσιευμένο τον Μάιο του 1694) ο L'Hôpital κατείχε τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων του Jacob Bernoulli καθώς επίσης και τις κατασκευές των τύπων για την ακτίνα της καμπυλότητας, αναφερόμενους σε ένα είδος πολικών συντεταγμένων αλλά και σε ορθογώνιες συντεταγμένες, όπου τα τελευταία παράχθηκαν με τρόπο λίγο διαφορετικό από αυτόν που αναφέρεται στον Ολοκληρωτικό Λογισμό του Johann Bernoulli. (Αυτή η παραγωγή από τον L'Hôpital μαζί με άλλους τύπους για την ακτίνα της καμπυλότητας, βρίσκεται επίσης σε κείμενο του L'Hôpital του 1696.)

Εν τω μεταξύ ο Jacob Bernoulli δημοσίευσε, στο 1694 κείμενό του, τους τύπους για την ακτίνα της καμπυλότητας, σε ορθογώνιες και ένα είδος πολικές συντεταγμένες, με μια απειροελάχιστη γεωμετρική αφαίρεση από τα πρώτα. Θα περιγράψουμε αυτά, καθώς επίσης και την απόδειξη για τους τύπους σε πολικές συντεταγμένες που παρέχονται από τον εκδότη G.Cramer του Opera του Jacob Bernoulli. Ο Leibniz σχολίασε τους τύπους του Jacob Bernoulli στην εργασία του και έδωσε άλλους τύπους, τους οποίους θα αναφέρουμε, συναγμένους με μια μέθοδο σχετική με τη δική του θεωρία των περιβαλλουσών (invelopes).

Οι συζητήσεις σχετικά με την ακτίνα της καμπυλότητας στα παραπάνω κείμενα αφορούσαν εν μέρει μια διαμάχη μεταξύ του Jacob Bernoulli και του Leibniz για το πλήθος των κοινών σημείων της καμπύλης και του εφαπτόμενου κύκλου. Επίσης, αποκαλύπτουν μια αυξημένη ένταση μεταξύ των αδελφών Bernoulli. Εντούτοις, αυτές οι πτυχές δεν αφορούν το συγκεκριμένο κείμενο. Τελικά μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι συντάκτες δεν χρησιμοποίησαν τον όρο ακτίνα καμπυλότητας, αλλά μάλλον την ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου.

Το πρώτο παράδειγμα είναι η κατασκευή ενός τύπου του Johann Bernoulli για την ακτίνα της καμπυλότητας στον Ολοκληρωτικό Λογισμό (Opera III 437), που χρονολογείται από το 1691. Οι ακτίνες OD και BD (δείτε το σχήμα) είναι κάθετες στην καμπύλη AB συναντιούνται στο κέντρο καμπυλότητας. Το OB είναι το διαφορικό του μήκους τόξου, που αντιστοιχεί στα διαφορικά dx και dy. Το DB = r είναι η ακτίνα της καμπυλότητας.



Σχήμα 17.

Επειδή η HB είναι κάθετη στην καμπύλη,

$$AH = x + y\frac{dy}{dx}$$

Η GH είναι το διαφορικό της AH, και ο Bernoulli καταλήγει σε αυτό επιλέγοντας την πρόοδο των μεταβλητών λαμβάνοντας τη dx ως σταθερά («θέτοντας ddx =0»):

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$$

Το HG εμφανίζεται στην αναλογία $BC : HG = BD : HD$ όπου $BC = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$, $BD = r$ και $HD = r - BH = r - \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το r, το οποίο οδηγεί σε $r = \frac{-(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxddy}$ έναν τύπο που ισχύει μόνο κάτω από την υπόθεση ότι το dx είναι σταθερό.

Με την αντικατάσταση $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, την οποία ο Johann Bernoulli δεν κάνει στο χωρίο που συζητήθηκε παραπάνω αν και βεβαίως είχε δει τη δυνατότητα, το r παίρνει τη μορφή $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ για σταθερό dx,

ο όποιος, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι ένας από τους τύπους που δίνονται από το Jacob Bernoulli. Όπως έχει επισημανθεί προηγούμενα, η επιλογή της προόδου των μεταβλητών με τη λήψη ενός σταθερού dx αντιστοιχεί στην επιλογή του x ως ανεξάρτητης μεταβλητής στην επίλυση ενός προβλήματος με χρήση συναρτήσεων. Ο τύπος, επομένως, αντιστοιχεί στο γνωστό τύπο

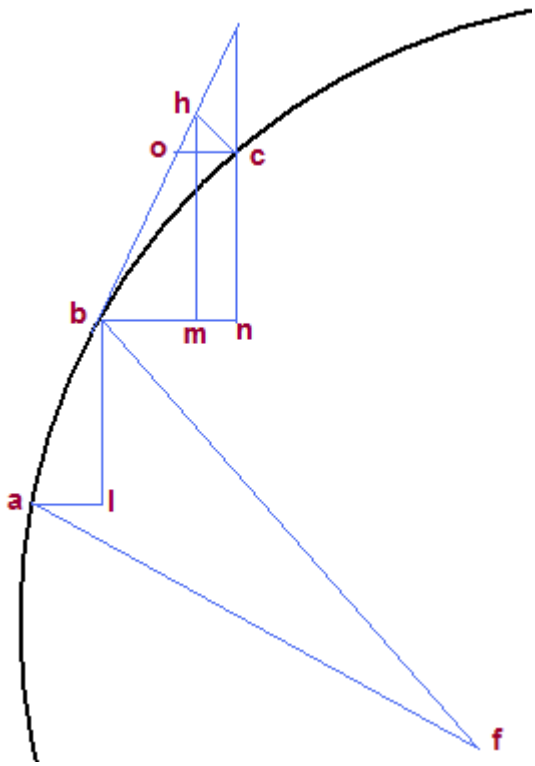
$$r = \frac{\left[\frac{ds}{dx}\right]^3}{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]} = \frac{\left[1+\frac{dy^2}{dx}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}$$

Δημιουργία τύπων από τον Jacob Bernoulli

Στο παραπάνω παράδειγμα, η επιλογή της προόδου των μεταβλητών γίνεται στο αναλυτικό μέρος της αφαίρεσης, αφότου συνάγονται ορισμένες σχέσεις μεταξύ των πρώτης τάξης απειροστών (GH, CB) από την προσεκτική εξέταση του σχήματος. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι οι σχέσεις μεταξύ των διαφορικών ανώτερης τάξης μπορούν να συναχθούν άμεσα από το σχήμα, οπότε σ' αυτή την περίπτωση η επιλογή της προόδου των μεταβλητών μπορεί να γίνει κατά το σχεδιασμό του σχήματος. Το παράδειγμα είναι η παραγωγή ενός τύπου για την ακτίνα της καμπυλότητας του Jacob Bernoulli όπως εμφανίζεται σε κείμενό του το 1694. Στο σχήμα, αν υποτεθεί ότι το ds είναι σταθερό, τότε προκύπτει ab=bc. Το af είναι κάθετο στο ab, το bf είναι κάθετο στο bc, έτσι ώστε το f να είναι το κέντρο της καμπυλότητας και bf= r η ακτίνα της καμπυλότητας. Επιπλέον, το ab προεκτείνεται κατά h, bh=bc, από όπου προκύπτει ότι al=bm, καθώς και οι ακόλουθες ομοιότητες (προσεγγιστικά):

$\Delta bmh \sim \Delta hoc$,

$\Delta hcb \sim \Delta abf$.



Σχήμα 18.

Ως εκ τούτου

$$\frac{ho}{bc}=\frac{ho}{hc}\cdot\frac{hc}{bc}=\frac{bm}{bh}\cdot\frac{ab}{bf}=\frac{al}{ab}\cdot\frac{ab}{bf}$$

(σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται το γεγονός ότι το ds είναι σταθερό), έτσι ώστε

$$\frac{ho}{bc}=\frac{al}{bf}\ .$$

Τώρα

$$bf=r\ ,$$

$$al=dx\ ,$$

$$bc=ds\ ,$$

$$ho=hm-nc=bl-nc=ddy$$

(σημειώστε ότι κανένα πρόσημο δεν λαμβάνεται υπόψη). Ως εκ τούτου

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds}$$

έτσι ώστε $r = \frac{dxds}{ddy}$ για το σταθερό ds.

Δεδομένου ότι η υπόθεση του σταθερού ds αντιστοιχεί στη λήψη του s ως ανεξάρτητη μεταβλητή (βλέπε παραπάνω), ο σχετικός τύπος με τη χρήση συναρτήσεων είναι

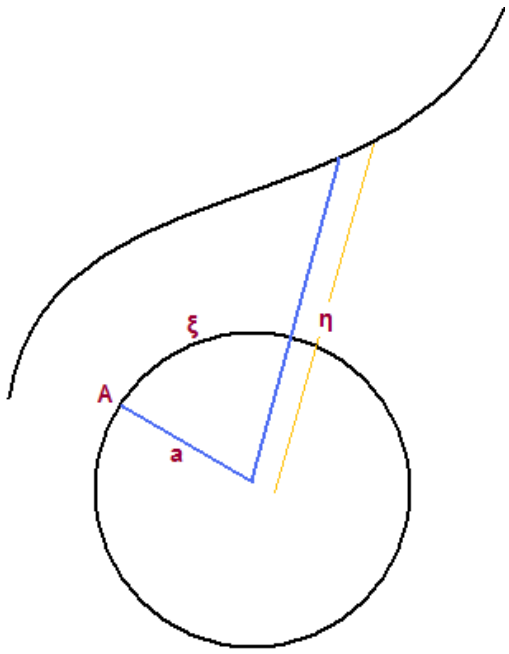
$$r = \left[\frac{dx}{ds}\right] \Big/ \left[\frac{d^2y}{ds^2}\right].$$

Ο Jacob Bernoulli εξετάζει σε αυτό το άρθρο και άλλες προόδους των μεταβλητών και συμπεραίνει από ένα παρόμοιο απειροστικό γεωμετρικό επιχείρημα στο οποίο το αl υποτίθεται ίσο με το bn (δηλαδή το dx θεωρείται σταθερό), τον τύπο $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ για σταθερό dx και όμοια, $r = \frac{ds^3}{dyddx}$ για σταθερό dy.

Σύμφωνα με τις συναρτήσεις, τα παραπάνω αντιστοιχούν στους ακόλουθους τύπους:

$$r = \left[\frac{ds}{dx}\right]^3 \Big/ \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] \text{ και } r = \left[\frac{ds}{dy}\right]^3 \Big/ \left[\frac{d^2x}{dy^2}\right].$$

Στο ίδιο άρθρο ο Jacob Bernoulli δίνει, χωρίς απόδειξη, τους τύπους για την ακτίνα της καμπυλότητας σε ένα είδος πολικών συντεταγμένων ξ και η (που διαφέρουν από τις σύγχρονες πολικές συντεταγμένες δεδομένου ότι και οι δύο έχουν τη διάσταση μιας γραμμής. Το ξ είναι το μήκος τόξου ενός σταθερού βασικού κύκλου που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο A ως το σημείο τομής της ακτίνας η με τον κύκλο. Ο βασικός κύκλος έχει ακτίνα α (βλέπε σχήμα):



Σχήμα 19.

Οι τύποι που προκύπτουν είναι:

$$r = \frac{ad\eta ds}{2d\xi d\eta + \eta dd\xi}$$ για σταθερό ds,

$$r = \frac{a\eta d\xi ds}{\eta d\xi^2 - \alpha\alpha dd\eta}$$ για σταθερό ds,

$$r = \frac{ads^3}{d\xi ds^2 + d\xi d\eta^2 - \eta d\xi dd\eta}$$ για σταθερό dξ,

$$r = \frac{ads^3}{d\xi ds^2 + d\xi d\eta^2 + \eta d\eta dd\xi}$$ για σταθερό dη,

στους οποίους τύπους, όπως επισημαίνει ο Bernoulli, το διαφορικό ds του μήκους τόξου πρέπει να υπολογιστεί ως

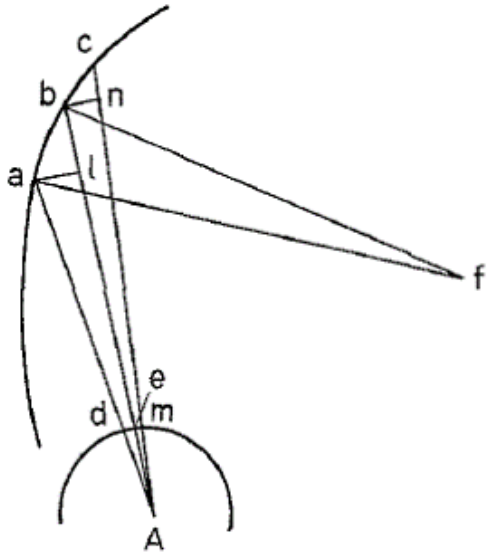
$$ds = \frac{\sqrt{\eta^2 d\xi^2 + \alpha^2 d\eta^2}}{\alpha}$$

Ο εκδότης G.Cramer, του Opera του Jacob Bernoulli (1744), έχει προσθέσει μια σημείωση στην ανατύπωση του Opera του 1696 του Jacob Bernoulli, στην οποία παρείχε μια απειροστική γεωμετρική απόδειξη για αυτούς τους τύπους σε πολικές συντεταγμένες (Opera 579). Η απόδειξη είναι αξιοπρόσεκτη επειδή δε γίνονται

υποθέσεις για την πρόοδο των μεταβλητών στηριζόμενες στο σχήμα, και με αυτόν τον τρόπο ο Cramer έφθασε σε έναν τύπο για την ακτίνα της καμπυλότητας που ισχύει για όλες τις προόδους, και συγκεκριμένα, τον τύπο

$$r = \frac{ads^3}{d\xi ds^2 + d\xi d\eta^2 + \eta d\eta dd\xi - \eta d\xi dd\eta},$$

από τον οποίο παρήγαγε τους τέσσερις τύπους που προαναφέρθηκαν λαμβάνοντας dds =0, ddξ =0 και ddη=0 αντίστοιχα. Η αρχή της πολύπλοκης απειροστικής γεωμετρικής απόδειξης, έχει ως ακολούθως:



$$Ad = a,\ Aa = \eta,\ de = d\xi,$$
$$lb = d\eta, \quad em = d\xi + dd\xi,$$
$$nc = d\eta + dd\eta,$$
$$ab = ds = \sqrt{a^2 d\eta^2 + \eta^2 d\xi^2}/a,$$
$$bc = ds + dds, \quad af = r,$$
$$al = \frac{\eta d\xi}{a},$$
$$bn = \frac{\eta d\xi + d\eta d\xi + \eta dd\xi}{a}.$$

Σχήμα 20.

Δημιουργία τύπων από τον Leibniz

Ο Leibniz σε άρθρο του, το 1694[61], σχολίασε τους τύπους για την ακτίνα της καμπυλότητας που παρουσιάστηκαν σε άρθρο του 1694 από τον Jacob Bernoulli. Ο Leibniz παρατήρησε ότι αυτοί οι τύποι είναι υπονοούμενοι στη μέθοδο που ακολουθεί για την εύρεση της εξειλιγμένης (δηλαδή του γεωμετρικού τόπου των κέντρων της καμπυλότητας μιας καμπύλης) ως περιβάλλουσας της οικογένειας των

---

[61] *Leibniz, "Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica. Ubi et generaliora quaedam de natura et calculo differentiali osculorum, (...)." Acta Erud., Aug., 1694, σελ.364-375, Math. Schr, V, σελ. 309-318.*

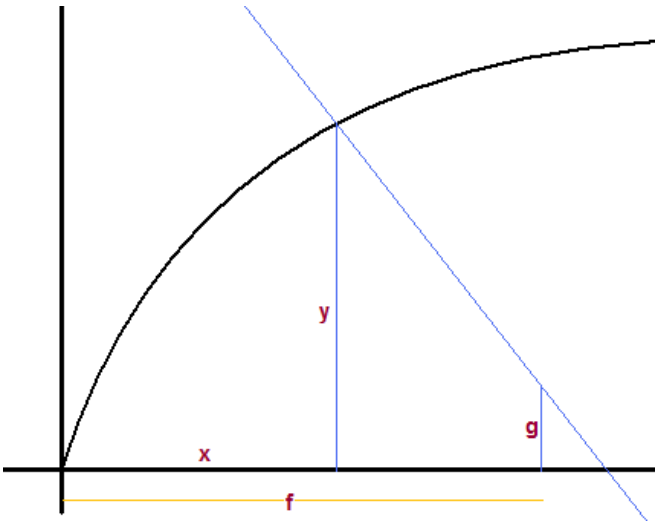
καθέτων στην καμπύλη. Το 1692[62] καθώς και, το 1694[63] ο Leibniz είχε μελετήσει τον υπολογισμό των περιβαλλουσών, («*calculus differentialis reciprocus*» όπως το ονόμασε), όπου δείχνει πώς θα βρίσκεται η περιβάλλουσα της οικογένειας ευθειών γραμμών

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

με διαφόριση της (1) όσον αφορά την παράμετρο c, και στη συνέχεια την εξάλειψη του c από την προκύπτουσα εξίσωση και την (1).

Αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για να βρεθεί η εξειλιγμένη μιας καμπύλης ως περιβάλλουσα των καθέτων στην καμπύλη. Η εξίσωση της καθέτου στο σημείο (x, y) της καμπύλης είναι η ακόλουθη σχέση (2): (βλέπε σχήμα)

$$y - g = (f - x)\frac{dx}{dy}$$



Σχήμα 21.

---

[62]*Leibniz, "De linen ex lineis infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus lormata, easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu." Acta Erud., April, 1692, σελ. 168-171. Math. Schr. V, σελ. 266-269.*

[63] *"Nova calculi differentialis applicatio et usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione." Acta Erud., July, 1694, σελ.311-316. Math. Schr. V, σελ. 301-306.*

και αυτή η εξίσωση περιγράφει την οικογένεια των καθέτων εάν το x και το $y(x)$ θεωρηθούν ως παράμετροι (ανάλογες του c στην (1)). Κατά συνέπεια κάποιος πρέπει να διαφορίσει τη σχέση (2) υποθέτοντας σταθερά τα g και f και μεταβλητές τα x και y, από όπου παράγεται η σχέση:

$$dy = (f - x)d\frac{dx}{dy} - dx\frac{dx}{dy}. \qquad (3)$$

Τώρα από την εξίσωση της καμπύλης, σε σχέση με τις σχέσεις (2) και (3), οι παράμετροι x και y μπορεί να απαλειφθούν ώστε να οδηγηθούμε στην εξίσωση της εξειλιγμένης των g και f. Αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει τα διαφορικά διαφορικών, αλλά ο Leibniz υπέδειξε ότι αυτά μπορούν να απαλειφθούν με τον υπολογισμό της διαφορικής εξίσωσης της καμπύλης, η οποία οδηγεί σε μια έκφραση dx/dy που περιέχει τα x και y. Εάν αυτή η έκφραση εισαχθεί στη σχέση (3), κανένα διαφορικό ανωτέρας τάξης δε θα εμφανιστεί. Οι τύποι για την ακτίνα της καμπυλότητας που προκύπτουν από αυτήν την διαδικασία της εξάλειψης των διαφορικά διαφορικών είναι ανεξάρτητοι από την πρόοδο των μεταβλητών. Αυτή η ιδιότητα αποτελεί κατά την άποψη του Leibniz ένα πλεονέκτημα που καθιστά τους συγκεκριμένους τύπους ανώτερους από τους τύπους του Jacob Bernoulli.

Στην κατασκευή των τύπων του ο Leibniz δεν χρησιμοποίησε ρητά το «*calculus differentialis reciprocus*», έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να επεξηγήσει τη διαδικασία άμεσα από την παραγωγή δύο τύπων του, και συγκεκριμένα τους εξής:

$$r = dy \Big/ d\left[\frac{dx}{ds}\right] \text{ και } r = (-)dx \Big/ d\left[\frac{dy}{ds}\right]$$

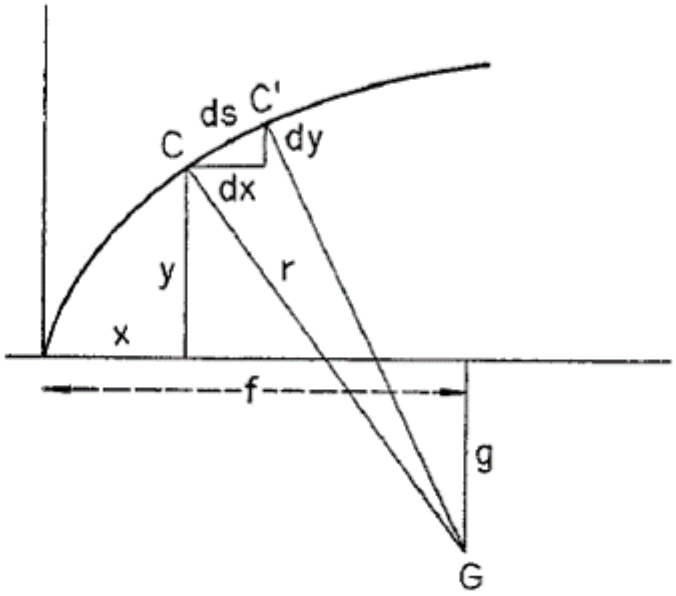
ή, όπως τους εκφράζει ο Leibniz[64]:

> «*Η ακτίνα του εφαπτόμενου κύκλου έχει λόγο προς τη μονάδα ίσο με το λόγο του στοιχείου μιας εκ των συντεταγμένων προς το στοιχείο του λόγου των στοιχείων της άλλης συντεταγμένης και της καμπύλης*».

Η ακτίνα της καμπυλότητας CG (βλέπε το σχήμα) είναι κάθετη στην καμπύλη ACC', από όπου προκύπτει

[64] *Leibniz , Math. Schr., V, 1694, σελ. 309.*

$$r:(f-x)=ds:dy, \quad \text{or} \quad r\frac{dy}{ds}=f-x.$$



Σχήμα 22.

Ο Leibniz διαφόρισε αυτήν την εξίσωση, θεωρώντας το r και το f ως σταθερές, και προκύπτει η σχέση:

$$rd\left[\frac{dy}{ds}\right]=-dx\,.$$

Αυτή η διαδικασία είναι η ανάλογη της διαφόρισης της εξίσωσης της οικογένειας των καθέτων, αναφορικά με τα x και y, διατηρώντας το g και το f ως σταθερές.

Τότε έχουμε ότι :

$$r=-dx\Big/d\left[\frac{dy}{ds}\right],$$

και, από ένα παρόμοιο επιχείρημα, παράγεται ο τύπος:

$$r=dy\Big/d\left[\frac{dx}{ds}\right]$$

Το παραπάνω παράδειγμα είναι σημαντικό για τον Bos για τρεις λόγους. Πρώτον οι τύποι περιλαμβάνουν μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης των πεπερασμένων

μεταβλητών ποσοτήτων x, y, s, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ και είναι εξαιτίας αυτού ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών, μια πτυχή που όπως έχουμε δει προηγούμενα, ο Leibniz εκτίμησε ιδιαίτερα. Αφετέρου, αυτή η ανεξαρτησία της προόδου των μεταβλητών επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των διαφορικών πηλίκων $\frac{dy}{ds}$ και $\frac{dx}{ds}$ ως νέων μεταβλητών. Αυτά τα δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα, η προσπάθεια να βρεθεί τύπος ανεξάρτητος της προόδου των μεταβλητών καθώς και η προκύπτουσα εισαγωγή των διαφορικών πηλίκων, στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπόκεινται σε ένα πρόγραμμα του Euler αποβολής όλων των διαφορικών ανώτερης τάξης από τον λογισμό.

Τρίτον, το παράδειγμα επιδεικνύει πόσο διαφορετικός είναι ο λογισμός του Leibniz από τον λογισμό που περιλαμβάνει συναρτήσεις. Πράγματι οι τύποι που παρήγαγε ο Leibniz, σε αντίθεση με τους τύπους του Bernoulli, δεν μπορούν να μεταφραστούν άμεσα από τις συναρτήσεις και τις παραγώγους, ακριβώς επειδή η πρόοδος των μεταβλητών δεν είναι, και δεν χρειάζεται να είναι, καθορισμένη.

Στη συνέχεια θα δούμε πως ο JJohann Bernoulli μετασχημάτισε μία πρόοδο μεταβλητών σε άλλη. Αυτή η παραγωγή του Bernoulli φανερώνει ότι τέτοιοι κανόνες μετασχηματισμού περιλαμβάνουν την εισαγωγή των διαφορικών πηλίκων ή των διαφορικών συντελεστών. Επομένως είναι σημαντικοί για την εμφάνιση της έννοιας του παραγώγου.

Με τον όρο διαφορικό πηλίκο συμβολίζουμε ένα πηλίκο των διαφορικών, για παράδειγμα το dy/dx, και τον όρο διαφορικός συντελεστής για να συμβολίσουμε έναν συντελεστή σε μια ισότητα μεταξύ των διαφορικών, όπως το p στην ισότητα dy =pdx. Προφανώς, τα διαφορικά πηλίκα και οι διαφορικοί συντελεστές διαφέρουν μόνο με τον τρόπο που εισάγονται στους υπολογισμούς. Ο ρόλος τους στην ανάλυση είναι συγγενής με το ρόλο των παραγώγων, αλλά υπάρχει μια σημαντική διαφορά: τα διαφορικά πηλίκα ή οι συντελεστές δεν καθορίζονται με τη βοήθεια των ορίων, και δεν χρειάζεται να ληφθούν ως συναρτήσεις.

Διαφορικοί τύποι, διαφορικές εξισώσεις και η πρόοδος των μεταβλητών

Οι τύποι για την ακτίνα της καμπυλότητας είναι εκφράσεις που περιλαμβάνουν τα διαφορικά ανωτέρας τάξης. Τέτοιες εκφράσεις γενικά εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών. Δοθείσης μιας μεταβλητής V, της οποίας ο καθορισμός περιλαμβάνει διαφόριση ανωτέρας τάξης (παράδειγμα η ακτίνα της καμπυλότητας), οι αναλυτικές εκφράσεις A_i για αυτήν την μεταβλητή, που υπολογίζονται σε σχέση

με τις διαφορετικές προόδους P_i των μεταβλητών, θα διαφέρουν γενικά η μια της άλλης και θα υπάρξει επίσης μια αναλυτική έκφραση A η οποία θα αντιπροσωπεύει τη μεταβλητή V σε σχέση με κάθε πρόοδο των μεταβλητών. Η ερώτηση που προκύπτει σε αυτήν την κατάσταση είναι πώς συσχετίζονται το A_i και το A, και εάν υπάρχουν κανόνες μετασχηματισμού από τους οποίους τα A_i και A μπορούν να υπολογιστούν αν δίνονται τα A_1, P_1 και P_i.

Η ίδια κατάσταση εμφανίζεται στην περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων ανωτέρας τάξης. Θα αρκεστούμε σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι μια διαφορική εξίσωση ανωτέρας τάξης $\mathrm{E}_1 = 0$, έγκυρη όσον αφορά μια συγκεκριμένη πρόοδο P_1 των μεταβλητών, καθορίζει μια καμπύλη ή μια σχέση μεταξύ συγκεκριμένων πεπερασμένων μεταβλητών (ή, ένα σύνολο καμπύλων ή σχέσεων, στην περίπτωση που δεν επιβάλλεται καμία συνθήκη συνόρων). Σε σύγκριση με άλλες προόδους P_i των μεταβλητών, η ίδια καμπύλη ή σχέση μπορεί να καθοριστεί από διαφορικές εξισώσεις $\mathrm{E}_i = 0$, και θα υπάρξει επίσης μια διαφορική εξίσωση $\mathrm{E} = 0$ που καθορίζει την καμπύλη ή τη σχέση αναφορικά σε κάθε πρόοδο των μεταβλητών (όταν E = 0 θα χρησιμοποιηθεί ο όρος «γενική διαφορική εξίσωση»). Και σε αυτήν την περίπτωση η προφανής ερώτηση που υποβάλλεται είναι πώς το E_1 και το E συσχετίζονται, και εάν υπάρχουν κανόνες μετασχηματισμού από τους οποίους το E_1 και το E μπορούν να προέλθουν από δεδομένα E_1, P_1 και P_i.

Περίπου στα μέσα του δέκατου όγδοου αιώνα το πρόβλημα του μετασχηματισμού της προόδου των μεταβλητών είχε αναγνωριστεί και η λύση του είχε γίνει μια από τις τυποποιημένες τεχνικές του λογισμού. Ο Bos σχολιάζει τη λύση όπως δόθηκε από το Johann Bernoulli σε ένα «Anecdoton»[65] χρονολογώντας το πιθανώς αμέσως μετά το 1715 αλλά δημοσιευμένο το 1742. Ο τίτλος της σύντομης σημείωσης είναι[66]:

---

[65] *Johann Bernoulli Opera IV, σελ. 77-79.Το σχόλιο ξεκινούσε με μία αναφορά στο πρόβλημα που διατύπωσε ο Taylor το 1715, το οποίο είναι η τυποποίηση σύμφωνα με τα διαφορικά του προβλήματος μετασχηματισμού μιας διαφορικής εξίσωσης με dz σταθερά στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με dx σταθερά.*

[66] *Πρόβλημα:«Aequationes differentiales incompletas cujuseunque gradus reddere completas, hoc est, eas transmutare in alias, in quibus nulla differentialis supponatur constans»." (Johann Bernoulli Opera IV, σελ. 77). Αυτό το πρόβλημα αφορά, αν αποτελεί το ίδιο πρόβλημα με αυτό του Taylor που αναφέρθηκε προηγούμενα, στην παραγωγή της εξίσωσης E από τις εξισώσεις E_1 και P_1. Ο Bernoulli χρησιμοποιούσε το επίθετο «πλήρης» (complete) για τη γενική διαφορική εξίσωση και υπέθετε τη διαφορική εξίσωση με ορισμένη την πρόοδο των μεταβλητών ως «μη πλήρη» (incomplete) ίσως επειδή*

> *«Πρόβλημα. Να γίνουν πλήρεις οι μη πλήρεις διαφορικές εξισώσεις αυθαίρετου βαθμού, δηλαδή να μετασχηματιστούν σε άλλες, στις οποίες κανένα διαφορικό δεν πρέπει να υποτεθεί σταθερό.»*

Η λύση του Bernoulli μας πληροφορεί ότι οι διαφορικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν μόνο τα πρώτης τάξης διαφορικά των πεπερασμένων μεταβλητών είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών. Κατά συνέπεια εάν κάποιος μπορεί να μετασχηματίσει τη δεδομένη διαφορική εξίσωση σε μια διαφορική εξίσωση που περιλαμβάνει μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης, τότε μπορεί να εξαλείψει τον περιορισμό για διευκρίνιση της προόδου των μεταβλητών. Στο σημείωμά του ο Bernoulli επεξεργάστηκε αυτό για την περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων που ισχύουν κάτω από την υπόθεση ενός σταθερού dx.

Πρώτα εισήγαγε τους διαφορικούς συντελεστές (ή τα διαφορικά πηλίκα, αλλά ο Bernoulli δεν χρησιμοποίησε έναν ξεχωριστό όρο για αυτά) z, t, v, κ.λπ. Αυτές είναι πεπερασμένες μεταβλητές, και ο καθορισμός τους περιλαμβάνει μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης, έτσι ώστε να είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών, και το z να καθορίζεται από τη σχέση $dy = zdx$ ή $z = \frac{dy}{dx}$.(4)

Η διαφόριση της (4) οδηγεί (επειδή dx είναι σταθερό), στη σχέση:

$$ddy = dzdx .$$

Ο Bernoulli εισάγει το t με τη σχέση:

$$ddy = dzdx = tdx^2 \quad (5)$$

από όπου προκύπτει:

$$t = \frac{dz}{dx} .$$

Η διαφόριση της (5) οδηγεί στη σχέση:

$$d^3y = dtdx^2 .$$

Το υ εισάγεται ως ακολούθως:

παράγονται από την «πλήρη» διαφορική εξίσωση παραλείποντας αυτούς τους όρους, που στην περίπτωση της ορισμένης προόδου των μεταβλητών, είναι ίσοι με το μηδέν.

$$d^3y = dtdx^2 = \upsilon dx^3 .$$

Από όπου προκύπτει:

$$\upsilon = \frac{dt}{dx} .$$

Προφανώς, αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να επιτευχθεί το διαφορικό ανωτέρας τάξης που απαιτείται.

Εάν τώρα, στην αρχική διαφορική εξίσωση, γίνουν οι ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$dy \to dy$, $ddy \to dzdx$, $d^3y \to dtdx^2$, $d^4y \to d\upsilon dx^3$, κ.λπ.,

στη συνέχεια η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση θα περιλαμβάνει μόνο τα πρώτης τάξης διαφορικά των πεπερασμένων μεταβλητών (συγκεκριμένα των x , y , z , t , v , κ.λπ.), και επομένως θα είναι ανεξάρτητη από την πρόοδο των μεταβλητών. Από αυτήν την προκύπτουσα διαφορική εξίσωση, οι διαφορικοί συντελεστές πρέπει να αποβληθούν, αλλά χωρίς να χάσουμε την ανεξαρτησία της προόδου των μεταβλητών. Για να επιτευχθεί αυτό ο Bernoulli εφάρμοσε τους κανόνες του λογισμού χωρίς να κάνει υπόθεση για την πρόοδο των μεταβλητών:

$$dz = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} ,$$

$$dt = d\left(\frac{dz}{dx}\right) = d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x}{dx^4}$$

$$d\upsilon = d\left(\frac{dt}{dx}\right) = d\left(\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x}{dx^4}\right)$$

$$= \frac{1}{dx^6}(dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y + 15dxddx^2ddy - 15ddx^3dy -$$
$$- 4dx^2d^3xddy + 10dxddxd^3xdy - dx^2d^4xdy)$$

Η αντικατάσταση αυτών των αποτελεσμάτων παράγει μια διαφορική εξίσωση που είναι ανεξάρτητη από την πρόοδο των μεταβλητών (η οποία κατά την ορολογία του Bernoulli καλείται «πλήρης») και που περιλαμβάνει μόνο τις αρχικές μεταβλητές x και y καθώς και τα διαφορικά τους.

Η εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών z , t , v , κ.λπ. ήταν απαραίτητη για να αποδείξει τους κανόνες μετασχηματισμού, οι οποίοι τώρα μπορούν να δηλωθούν άμεσα: Συγκεκριμένα, προκειμένου να παραχθεί η γενική διαφορική εξίσωση από

την αρχική διαφορική εξίσωση που ισχύει για το σταθερό dx, πρέπει να γίνουν οι ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$dy \to dy,$$

$$ddy \to \frac{dxddy - dyddx}{dx},$$

$$d^3y \to \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x}{dx^2},$$

$$d^4y \to \frac{1}{dx^3}(dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y + 15dxddx^2ddy - 15ddx^3dy -$$
$$- 4dx^2d^3xddy + 10dxddxd^3xdy - dx^2d^4xdy)$$

Σε ένα σχόλιο που έπεται αυτών των κανόνων μετασχηματισμού ο Bernoulli στράφηκε στο πρόβλημα της παραγωγής της διαφορικής εξίσωσης για οποιαδήποτε καθορισμένη πρόοδο των μεταβλητών από τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για την πρόοδο με το σταθερό dx, ή, όπως το έθεσε σε όχι και πολύ αυστηρή ορολογία[67]:

> *«Αυτός ο κανόνας είναι χρήσιμος στο μετασχηματισμό των σταθερών διαφορικών σε άλλα σταθερά διαφορικά.»*

Για να το κάνει αυτό κάποιος, όπως υπέδειξε ο Bernoulli, πρέπει να κατασκευάσει τη γενική διαφορική εξίσωση από τους κανόνες μετασχηματισμού και στη συνέχεια να εφαρμόσει την ιδιότητα των διαφορικών που υπονοούνται στον καθορισμό της νέας προόδου των μεταβλητών για να μετασχηματίσουν τη γενική διαφορική εξίσωση στην απαιτούμενη διαφορική εξίσωση. Η παραπάνω διαδικασία επεξηγείται με παραδείγματα: Εάν η νέα πρόοδος των μεταβλητών απαιτεί ως σταθερά τη dy, τότε όλοι οι όροι στη γενική διαφορική εξίσωση που περιέχουν το ddy, d^3y κ.λπ. πρέπει να απορριφθούν. Εάν το στοιχείο του τόξου ds υποτίθεται σταθερό, συνεπάγεται ότι $d\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$, από όπου $dxddx + dyddy = 0$, έτσι ώστε

[67] *Johann Bernoulli, Opera IV, σελ. 78.*

$ddy = -\frac{dxddx}{dy}$. Από αυτήν την επαναλαμβανόμενη διαφόριση, μπορούν να βρεθούν τύποι για το d^3y, d^4y, κ.λπ., οι οποίοι, εάν αντικατασταθούν στη γενική διαφορική εξίσωση, παράγουν τη διαφορική εξίσωση που ισχύει για σταθερά ds. Ομοίως, ο Bernoulli εξέτασε την περίπτωση στην οποία θεωρούμε ως σταθερά την ydx.

Αξιοσημείωτες είναι δύο παρατηρήσεις στην επεξεργασία των κανόνων μετασχηματισμού του Bernoulli. Κατ' αρχάς, όπως στην περίπτωση του τύπου του Leibniz για την ακτίνα της καμπυλότητας, η ανεξαρτησία της προόδου των μεταβλητών επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών, ή τα διαφορικά πηλίκα $z = \frac{dy}{dx}$, $t = \frac{dz}{dx}$ κ.λπ., έτσι ώστε βλέπουμε σε αυτό το σημείο ένα παράδειγμα του γεγονότος ότι η μελέτη των προβλημάτων των σχετικών με την απροσδιοριστία των διαφορικών ανωτέρας τάξης ανακύπτει με την εμφάνιση των διαφορικών συντελεστών και των διαφορικών πηλίκων. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα από τις μελέτες του Leibniz και του Euler στις οποίες επίσης αυτή η διαδικασία είναι εμφανής.

Όπως είδαμε η επιλογή της προόδου των μεταβλητών αντιστοιχεί στην επιλογή μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στην αντιμετώπιση του προβλήματος σύμφωνα με τις συναρτήσεις. Εντούτοις, στη μελέτη του Bernoulli, καθώς και στις περισσότερες μελέτες για αυτούς τους κανόνες μετασχηματισμού, χρησιμοποιείται η ορολογία των σταθερών διαφορικών, δηλαδή δεν περιλαμβάνεται η έννοια της συνάρτησης μιας διευκρινισμένης μεταβλητής, το πρόβλημα συλλαμβάνεται και αντιμετωπίζεται εξ ολοκλήρου στηριζόμενο στις μεταβλητές και τις προόδους τους. Το πόσο ισχυρή ήταν αυτή η σύλληψη, παρουσιάζεται από το γεγονός ότι όταν ο Cauchy το 1823, παρουσίασε τους κανόνες μετασχηματισμού που εξετάστηκαν παραπάνω ως κανόνες που περιγράφουν αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής, χρησιμοποίησε την ορολογία του σταθερού διαφορικού[68]:

> *«Είναι από τις αντικαταστάσεις αυτού του είδους που κάποιος μπορεί να αλλάξει την ανεξάρτητη μεταβλητή (...). Για να επιστρέψουμε στην περίπτωση κατά την οποία το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, θα αρκούσε*

[68] *Cauchy, Oeuvres (II) IV, 1823, σελ. 74.*

> *να υποθέσουμε τη διαφορικό* dx *σταθερό, και ως εκ τούτου* $d^2x = 0$, $d^3x = 0$,...»

Στον δέκατο έβδομο αιώνα οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων συνήθως αντιπροσωπεύονταν από τις εξισώσεις, αλλά αυτό με κανένα τρόπο δεν ήταν ο μόνος τρόπος. Στην πραγματικότητα, όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, υπήρξαν τύποι σχέσεων που δεν θα μπορούσαν να αντιπροσωπευθούν από τις εξισώσεις, όπως η σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των υπερβατικών καμπύλων. Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων ο οποίος ήταν πολύ κοινός στο δέκατο έβδομο αιώνα, ήταν η αναλογία. Χρησιμοποιήθηκε ειδικά σε εκείνες τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η παρουσίαση των σχέσεων από μια εξίσωση θα περιλάμβανε δυσκολίες ως προς τις διαστάσεις.

Για την αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των απειροστικών μεταβλητών ποσοτήτων χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις και οι αναλογίες. Οι πρώτες, φυσικά, ήταν οι διαφορικές εξισώσεις, και θα αναφερθούν οι τελευταίες ως διαφορικές αναλογίες. Στη συνέχεια θα εξεταστεί ο ρόλος της προόδου των μεταβλητών σε σχέση με τις διαφορικές αναλογίες.

Οι Αναλογίες ως αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών

Οι διαφορικές αναλογίες εμφανίζονται ιδιαίτερα στην αντιμετώπιση προβλημάτων φυσικής, και για την ακρίβεια προβλημάτων μηχανικής. Επομένως πρέπει να κάνουμε μερικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις για τη μαθηματική αντιμετώπιση των προβλημάτων φυσικής το δέκατο έβδομο και την αρχή του δέκατου όγδοου αιώνα. Αυτό το θέμα αξίζει μεγαλύτερης έκτασης και προσοχής από αυτό που μπορούμε να αφιερώσουμε σε αυτήν τη μελέτη. Πράγματι η ανεπιτυχής συνήθεια των ιστορικών της επιστήμης να μετασχηματίζουν τη μαθηματική αντιμετώπιση των προβλημάτων φυσικής απευθείας στο σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό επισκίασε πολλές σημαντικές πτυχές της φυσικής του δέκατου έβδομου αιώνα. Πιθανότατα μια εκτεταμένη μελέτη της επιρροής των μαθηματικών μεθόδων και μορφών στην ανάπτυξη της φυσικής θα παρουσιάσει σημαντικές νέες ιδέες.

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην αντιμετώπιση των προβλημάτων φυσικής για να αντιπροσωπεύσουν και να αναλύσουν τις σχέσεις μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων όπως του μήκους, του βάρους, του χρόνου, της μάζας, της ταχύτητας, της δύναμης, της ορμής, κ.λπ.. Η αναπαράσταση αυτών των σχέσεων από εξισώσεις, για τον μαθηματικό του δέκατου έβδομου αιώνα, περιλάμβαναν ιδιαίτερες εννοιολογικές δυσκολίες που συνδέονταν με την προϋπόθεση της ομογένειας των διαστάσεων. Όπως είδαμε προηγούμενα, οι ποσότητες με

διαφορετική διάσταση δεν θα μπορούσαν να προστεθούν, και ο πολλαπλασιασμός των ποσοτήτων πάντα προκαλεί αλλαγή της διάστασης. Αυτές οι εννοιολογικές δυσκολίες επιλύθηκαν αργότερα στο δέκατο όγδοο και δέκατο ένατο αιώνα με την αποδοχή στους τύπους οποιουδήποτε συνδυασμού ενός περιορισμένου αριθμού βασικών διαστάσεων (μάζα, μήκος, χρόνος καθώς και μερικών άλλων), και με την ανοχή οι παράγοντες με διάσταση στις εξισώσεις να δημιουργούν ίσες διαστάσεις και στα δύο μέλη της ισότητας. Αλλά στο δέκατο έβδομο αιώνα τέτοιοι παράγοντες με διάσταση δεν ήταν αποδεκτοί, και έτσι η άμεση σύγκριση των ποσοτήτων διαφορετικής διάστασης με τη βοήθεια των εξισώσεων ήταν ουσιαστικά αδύνατη.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις εννοιολογικές δυσκολίες τις σχετικές με την ομογένεια των διαστάσεων δε δημιουργεί έκπληξη το γεγονός ότι δύο άλλοι τρόποι παρουσίασης σχέσεων μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων ήταν προεξέχοντες στη μαθηματική φυσική του δέκατου έβδομου αιώνα, δηλαδή οι αναλογίες και η αναλογική αντιπροσώπευση από ευθύγραμμα τμήματα. Οι αναλογίες εφαρμόζονται για τη γραμμική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών ποσοτήτων, μέθοδος που είναι ίσως η παλαιότερη και σίγουρα η σημαντικότερη που αναπτύχθηκε μεταξύ φυσικών ποσοτήτων και για την οποία αναπτύχθηκε μια εξαιρετική τεχνική ορολογία. Δύο αλληλοεξαρτώμενες μεταβλητές ποσότητες, έστω x και y, θεωρούνται ανάλογες, ή ότι μεταβάλλονται αναλογικά, εάν για οποιαδήποτε δύο ζεύγη των αντίστοιχων τιμών x, y και x', y', ισχύει πάντα $x : x' = y : y'$.

Η ορολογία (το x είναι «ανάλογο» του y) καθώς επίσης και η ερμηνεία του, αποτρέπει όλες τις δυσκολίες των διαστάσεων επειδή εξετάζει μόνο τις αναλογίες μεταξύ ποσοτήτων της ίδιας διάστασης. Όλοι οι φυσικοί νόμοι που η φιλοσοφία του δέκατου έβδομου αιώνα ανακάλυψε και οι οποίοι αφορούσαν γραμμικές σχέσεις μεταξύ διαφορετικών φυσικών ποσοτήτων αντιπροσωπεύθηκαν από την ορολογία των αναλογιών.

Ο μαθηματικός του δέκατου έβδομου αιώνα για να αναπαραστήσει τις μη γραμμικές σχέσεις μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων μπορούσε να χρησιμοποιήσει μια μέθοδο που θα μπορούσε να ονομαστεί αναλογική αναπαράσταση από ευθύγραμμα τμήματα. Αυτή η διαδικασία περιείχε την εισαγωγή των μεταβλητών ευθυγράμμων τμημάτων ανάλογων προς τις αρχικές φυσικές ποσότητες. Κατά συνέπεια εάν εξετάζεται μια σχέση μεταξύ των φυσικών μεταβλητών ποσοτήτων ξ και η, κάποιος μπορεί να εισάγει τα μεταβλητά ευθύγραμμα τμήματα x και y, όπου το x είναι ανάλογο προς το ξ, και το y ανάλογο προς το η, και η παραγόμενη σχέση μεταξύ των x και y θα μπορούσε να απεικονιστεί με μια καμπύλη στους άξονες Χ και Υ. Αυτή η εισαγωγή των ευθυγράμμων τμημάτων των ανάλογων προς τις φυσικές ποσότητες εκφράζεται σαφώς στο ακόλουθο χωρίο από ένα άρθρο του Leibniz, στο οποίο εξέτασε μία συγκεκριμένη περίπτωση της επιβραδυνόμενης

κίνησης όπου τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας (υ), του χρόνου (t) και του διανυθέν διαστήματος (s), θα μπορούσαμε να εκφράσουμε με την εξίσωση:

$$at - s = \beta\upsilon$$

(με α και β σταθερά), αλλά που ο Leibniz υπέδειξε ως εξής[69]:

> *«Υπάρχουν ευθείες γραμμές ανάλογες προς το χρονικό διάστημα που παρήλθε, και εάν από κάθε μία από αυτές τις ευθείες γραμμές αφαιρεθεί η ευθεία που είναι ίση με το αντίστοιχο διανυθέν διάστημα από το κινούμενο σημείο, τότε η υπόλοιπη ευθεία γραμμή θα είναι ανάλογη προς την αποκτηθείσα ταχύτητα».*

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τόσο για τις αναλογίες όσο και για την αναλογική αναπαράσταση δεν εισήχθη καμία μονάδα μήκους ή μονάδα ποσοτήτων. Ως εκ τούτου οι σχέσεις δεν υποβιβάζονται σε σχέσεις μεταξύ των πραγματικών αριθμών (όπως στη σύγχρονη μαθηματική φυσική), αλλά ουσιαστικά σε σχέσεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων. Η μαθηματική φυσική του δέκατου έβδομου αιώνα ήταν πραγματικά μια γεωμετρική φυσική.

Επιπλέον, η αναλογική αναπαράσταση, ελλείψει των σταθερών μονάδων, δημιούργησε μια ελευθερία επιλογής στους μαθηματικούς του δέκατου έβδομου αιώνα την οποία συχνά εκμεταλλεύτηκαν κατάλληλα: εάν δύο φυσικές ποσότητες είναι ανάλογες, τότε κάποιος μπορεί να θεωρήσει ένα μεταβλητό ευθύγραμμο τμήμα για να αναπαραστήσει και τις δύο. Κατά συνέπεια, για παράδειγμα, στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης, όπου η ταχύτητα είναι ανάλογη προς το χρόνο, τόσο η ταχύτητα όσο και ο χρόνος μπορούν να αναπαρασταθούν με την ίδια γεωμετρική ποσότητα. Αυτό πραγματικά έκαναν ο Leibniz και ο Huygens έκαναν στη μελέτη τους σχετικά με την κίνηση σε ανθιστάμενα μέσα . Κατά συνέπεια, στη γεωμετρική ανάλυσή τους, ο νόμος της πτώσης λήφθηκε ως $v = t$. Φυσικά τα τελικά αποτελέσματα ήταν διατυπωμένα πάλι με όρους αναλογιών.

Ο κλάδος της φυσικής στον οποίο αυτές οι γεωμετρικές μέθοδοι εφαρμόστηκαν με την μεγαλύτερη επιτυχία ήταν η μηχανική, ειδικά η μελέτη των δυνάμεων και των αλλαγών που προκαλεί η κίνηση. Αυτή η μελέτη της αλλαγής της κίνησης περιέλαβε τα απειροστά, και με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τις διαφορικές αναλογίες στη δυναμική. Όπως οι διαφορικές εξισώσεις, οι διαφορικές αναλογίες γενικά

---

[69] *Leibniz , Math. Schr. VI, 1689, σελ.138.*

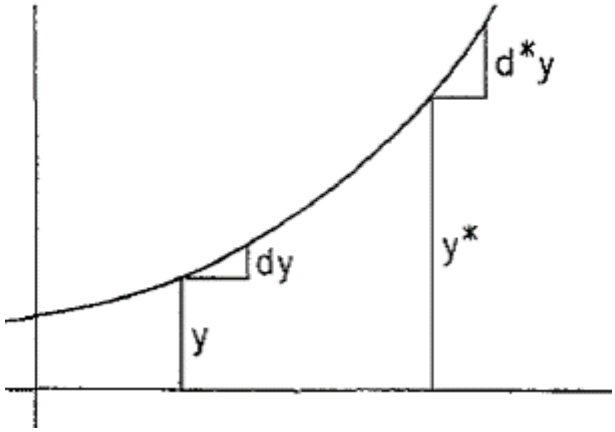
εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών, δηλαδή η ίδια διαφορική αναλογία μπορεί να αντιπροσωπεύσει διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που περιέχονται σε διαφορετικές προόδους μεταβλητών για τις οποίες όμως η αναλογία υποτίθεται ότι ισχύει.

Σε αντίθεση με την περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών, υπάρχουν διαφορικές αναλογίες που περιλαμβάνουν μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης που εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι

$dy \sim y$

το οποίο σημαίνει (δείτε το σχήμα) ότι για κάθε αντίστοιχο y, dy και y*, d*y ισχύει:

$$dy : d^*y = y : y^*.$$



Σχήμα 23.

Προφανώς αυτή η ερμηνεία είναι αναποτελεσματική εκτός αν έχει υποδειχθεί η σχέση μεταξύ των dy και d*y. Η επιλογή των διαφορετικών προόδων των μεταβλητών επηρεάζει το αριστερό μέλος αλλά όχι το δεξιό. Για παράδειγμα εάν το dx υποτίθεται σταθερά, η σχέση $dy \sim y$ συνεπάγεται τη σχέση $y = ce^x$. Αν το ydx υποτεθεί σταθερό, η $dy \sim y$ συνεπάγεται τη σχέση $y = \frac{1}{x}$. Εάν το dy υποτεθεί σταθερό, δεν είναι σαφής η ερμηνεία, επειδή η σχέση $dy \sim y$ θα συνεπαγόταν $y = c$ και $dy = 0$, και έτσι το y δε συμμετέχει σε κάποια πρόοδο των μεταβλητών.

Οι περιπτώσεις στις οποίες οι διαφορικές αναλογίες δεν εξαρτώνται από την πρόοδο των μεταβλητών είναι εκείνες στις οποίες οι αναλογίες είναι άμεσα αναγώγιμες από τις διαφορικές εξισώσεις που είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο. Δηλαδή η διαφορική αναλογία

$A \sim B$

είναι ανεξάρτητη από την πρόοδο των μεταβλητών αρκεί τα Α και Β να είναι της ίδιας τάξης του απείρου καθώς επίσης, και τα δύο να περιλαμβάνουν διαφορικά μόνο πρώτης τάξης. Σε εκείνη την περίπτωση η αναλογία είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$A = cB$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση του τύπου που περιγράψαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Το 1689[70] ο Leibniz δημοσίευσε μερικά αποτελέσματα για την κίνηση σε ανθιστάμενα μέσα. Διέκρινε την αντίσταση σε δύο είδη, την απόλυτη και τη σχετική. Η διάκριση αυτή σχετίζεται με την εξάρτηση της αντίστασης από την ταχύτητα. Ο Leibniz θεώρησε την αντίσταση ως τη δράση του μέσου που ελαττώνει τη «δύναμη» του σώματος. Θεώρησε ως δεδομένο η μείωση της ταχύτητας του σώματος να είναι ανάλογη προς τη μείωση «της δύναμής του».

Οι ορισμοί του Leibniz για τα δύο είδη αντίστασης ήταν οι ακόλουθοι[71]:

> *«Απόλυτη αντίσταση είναι η αντίσταση που απορροφά ίσα αθροίσματα των δυνάμεων ενός κινούμενου σώματος, είτε αυτό κινείται με μικρή ή με μεγάλη ταχύτητα, αρκεί να κινείται, και αυτή η αντίσταση εξαρτάται από το ιξώδες του μέσου (...). Η σχετική αντίσταση προκαλείται από την πυκνότητα του μέσου, και μεγαλώνει αναλογικά καθώς μεγαλώνει η ταχύτητα του κινούμενου σώματος (...)».*

Αργότερα στο ίδιο άρθρο ο Leibniz κατέστησε ρητό ότι στην περίπτωση της σχετικής αντίστασης, η κίνηση επιβραδύνεται αναλογικά προς την ταχύτητα. Η μείωση της δύναμης, ή της ταχύτητας, αποτελεί ένα διαφορικό, έτσι αυτοί οι ορισμοί να υποδηλώνουν διαφορικές αναλογίες, δηλαδή

απόλυτη αντίσταση: dv *σταθερό,*

σχετική αντίσταση: $dv \sim v$. (7)

---

[70] *"Schediasma de resistentia medii, et motu projectorum in medio resistente." Acta Erud., Jan., 1689, σελ. 38-47. Math. Schr. VI, σελ. 135-143.*

[71] *Leibniz , Math. Schr. VI, 1689, σελ. 136.*

Και οι δύο σχέσεις (και επομένως και οι δύο ορισμοί του Leibniz) δεν έχουν νόημα, εκτός αν διευκρινίζεται η πρόοδος των μεταβλητών. Στην περίπτωση που διευκρινίζεται, αυτό φανερώνει κατά πόσο οι μειώσεις λαμβάνονται πέρα από τα ίσα διαστήματα του χρόνου (με σταθερά τη dt) ή πέρα από τα ίσα διαστήματα κάποιας άλλης μεταβλητής. Όπως παρουσιάζεται από το άρθρο ο Leibniz, εξέτασε τη μείωση πέρα από τα ίσα διαστήματα του επιπέδου (με σταθερά τη ds), το οποίο είναι κατανοητό επειδή θεώρησε την αντίσταση ως ιδιότητα του μέσου. Πράγματι στην περίπτωση της απόλυτης αντίστασης, διευκρίνισε το εξής[72]:

> *«Τα στοιχεία της ταχύτητας τα οποία χάνει ένα σώμα είναι ανάλογα των στοιχείων του διαστήματος που διανύει». (8)*

και στην περίπτωση της σχετικής αντίστασης[73]:

> *«Οι μειώσεις της ταχύτητας βρίσκονται στο σύνθετο λόγο της πραγματικής ταχύτητας και των αυξήσεων του διαστήματος που διανύεται». (8΄)*

Οι σχέσεις (8) αντιστοιχούν στα ακόλουθα:

απόλυτη αντίσταση: $dv \sim ds$ (9)

και

σχετική αντίσταση: $dv \sim vds$. (9΄)

Οι τύποι (9) είναι διαφορικές αναλογίες μεταξύ των όρων της ίδιας τάξης του απείρου, περιέχουν μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης, και είναι επομένως ανεξάρτητοι από την πρόοδο των μεταβλητών. Αλλά είναι σαφές ότι η μετάφραση της σχέσης (6) στη σχέση (9) ισχύει μόνο εάν ληφθεί σταθερά η ds, με αποτέλεσμα ο καθορισμός της προόδου των μεταβλητών να διαδραματίζει έναν κρίσιμο ρόλο στη μετάφραση της περιγραφής του κειμένου αυτού του είδους εξαιτίας της καθυστερημένης εξέλιξης στον αποτελεσματικό μαθηματικό συμβολισμό. Μόνο εάν η ds θεωρείται σταθερά μπορεί η απόλυτη αντίσταση να θεωρηθεί ανεξάρτητη από την ταχύτητα καθώς, και τη σχετική αντίσταση που είναι ανάλογη προς την ταχύτητα.

---

[72] *Leibniz , Math. Schr. VI, 1689, σελ. 137.*

[73] *Leibniz , Math. Schr. VI, 1689, σελ. 140.*

Η ανάγκη να διευκρινιστεί η πρόοδος των μεταβλητών

Στο άρθρο του 1689 ο Leibniz δεν ήταν σαφής για την ανάγκη του καθορισμού της προόδου των μεταβλητών, και αναγκάστηκε σε αυτό το σημείο να επεκταθεί σε μία λεπτομερειακά πολύ αποκαλυπτική αλληλογραφία με τον Huygens για αυτό το θέμα. Γράφοντας στον Huygens στις 6-11-1691, ο Leibniz συνέκρινε τα αποτελέσματά του με τις μελέτες των Huygens και Newton για την κίνηση στην αντίσταση των μέσων, και διαπίστωσε ότι τα αποτελέσματα για αυτό που αποκαλούσε σχετική αντίσταση, ή αντίσταση ανάλογη προς την ταχύτητα, συνέπιπταν με τα αποτελέσματα που ο Huygens και ο Newton είχαν παραγάγει και στα οποία η αντίσταση εμφανιζόταν ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αυτή η απόκλιση στη διατύπωση προκλήθηκε από το γεγονός ότι ο Huygens και ο Newton είχαν εξετάσει τη μεταβολή της ταχύτητας σε ίσα διαστήματα του χρόνου, ενώ ο ίδιος είχε εξετάσει τη μεταβολή της ταχύτητας σε ίσα διαστήματα του διαστήματος. Πράγματι, εάν εξετάζουμε τον τύπο (9) για τη σχετική αντίσταση που είναι ανεξάρτητη από την πρόοδο των μεταβλητών

$$dv \sim vds$$

και εάν υποθέτουμε ως σταθερά τη dt, τότε (επειδή $ds \sim vdt$)

$$dv \sim vds \sim v^2 dt.$$

Κατά συνέπεια εάν η dt θεωρείται σταθερά, μπορούμε να πούμε ότι η σχετική αντίσταση είναι ανάλογη στο τετράγωνο της ταχύτητας. Ο Leibniz αντιτάχθηκε στον Huygens ως προς το γεγονός ότι αυτός και ο Newton έπρεπε να είχαν καταστήσει σαφές το εξής[74]:

> *«Για να το τοποθετήσει κάποιος ακριβώς, επιτρέπεται μόνο να πει ότι οι αντιστάσεις είναι ανάλογες προς την ταχύτητα, ή προς το τετράγωνο της ταχύτητας, αρκεί να υποδεικνύει το χρόνο ή το μέσο, όπως έχω κάνει εγώ».*

Επανήλθε σε αυτό το θέμα το 1691 με προσθήκη στο άρθρο του σχετικά με την κίνηση στην αντίσταση των μέσων, όπου έγραψε[75]:

---

[74] *Huygens, Oeuvres X, σελ.12.*

[75] *Leibniz , Math. Schr. VI, 1691, σελ. 144.*

«Όσον αφορά τη σχετική αντίσταση διαπιστώνω ότι τα επιχειρήματά μας είναι βασισμένα στα ίδια ευρήματα, αν και εκ πρώτης όψεως αυτό μπορεί να μην φαίνεται ότι συμβαίνει. Γιατί εκείνοι [δηλ. ο Huygens και ο Newton] υποθέτουν τις αντιστάσεις στη διπλή αναλογία των ταχυτήτων, ενώ εγώ, που αναφέρομαι σε απόλυτους όρους, έχω δηλώσει ότι οι αντιστάσεις (τις οποίες μετρώ από τις μειώσεις της ταχύτητας που προκαλούνται από την πυκνότητα του μέσου) βρίσκονται σε σύνθετη αναλογία με τις ταχύτητες και τα στοιχεία του διαστήματος που πρόκειται να διανυθεί με τις αντίστοιχες ταχύτητες. Αλλά στη συνέχεια αν τα χρονικά διαστήματα ληφθούν ίσα (οπότε σ' αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του διαστήματος που διανύονται είναι ανάλογα προς τις ταχύτητες) οι αντιστάσεις βρίσκονται πράγματι σε διπλή αναλογία των ταχυτήτων».

Ο Huygens τελικά συμφώνησε ότι τα αποτελέσματα του Leibniz ανταποκρίνονταν στα δικά του καθώς και του Newton, αλλά ακόμα αντιδρούσε στη θεώρηση της αντίστασης ως ανάλογη προς την ταχύτητα, σε εκείνη την περίπτωση. Υποστήριξε ότι η σταθερότητα των διαστημάτων δεν είχε καμία σχέση με το εξεταζόμενο ζήτημα, ότι η αντίσταση ήταν μια δύναμη με τον ίδιο τρόπο όπως η βαρύτητα είναι μια δύναμη, και εξέταζε τις μειώσεις της ταχύτητας σε συγκεκριμένα διαστήματα του χρόνου ή της απόστασης δεδομένου ότι η αντίσταση έπαιρνε το αποτέλεσμα αντί για την αιτία (επιστολή του Huygens στον Leibniz στις 23-02-1691, Huygens, Oeuvres, X 19).

Η συζήτηση αυτή είναι σημαντική επειδή στράφηκε στον εξαιρετικό ρόλο της μεταβλητής *χρόνος* στη μελέτη της δύναμης σύμφωνα με την επιτάχυνση, η οποία έγινε προεξέχουσα από τον Newton στο έργο του *Principia*. Ο αλγόριθμος των διαφορικών κατέστησε αυτόν τον ρόλο σαφή: η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Ως εκ τούτου εάν κάποιος θελήσει να εισαγάγει τα διαφορικά, πρέπει να θεωρήσει την πρόοδο των μεταβλητών με σταθερά τη dt. Με άλλα λόγια, εάν κάποιος εφαρμόσει αυτήν την Νευτώνεια έννοια της δύναμης, μπορεί να συγκρίνει τις δυνάμεις μόνο συγκρίνοντας τις μεταβολές της κίνησης που αυτές προκαλούν σε ίσα (απειροελάχιστα) διαστήματα του χρόνου.

Ο ρόλος του σταθερού διαφορικού

Το σταθερό διαφορικό όχι μόνο είναι κρίσιμο στην ερμηνεία των διαφορικών αναλογιών, αλλά διαδραματίζει και έναν σημαντικό ρόλο στην τεχνική της αντιμετώπισης και της επίλυσης τέτοιων αναλογιών. Στον παραπάνω μετασχηματισμό των αναλογιών των σχέσεων (7) στις σχέσεις (9), η σταθερά ds χρησιμοποιείται για να κάνουν ίση την τάξη του απείρου και στα δύο μέλη της

αναλογίας. Προκειμένου να μετασχηματιστούν οι σχέσεις (9) σε διαφορικές εξισώσεις ήταν απαραίτητη η εισαγωγή των παραγόντων που έχουν διάσταση, γεγονός το οποίο, όπως είδαμε παραπάνω, θα περιελάμβανε για τον μαθηματικό του δέκατου έβδομου αιώνα εννοιολογικές δυσκολίες. Εντούτοις, στην περίπτωση των διαφορικών αναλογιών μεταξύ των γεωμετρικών ποσοτήτων αυτές οι δυσκολίες δεν έγιναν αισθητές, και αυτό οδηγεί στην υπόθεση ότι ο παράγοντας της αναλογικότητας πιθανόν να έχει μία ερμηνεύσιμη γεωμετρική διάσταση. Πράγματι, αν ο παράγοντας αναλογικότητας είναι διάστασης m και τάξης του απείρου n, και εάν dt είναι το σταθερό διαφορικό ενός μεταβλητού ευθυγράμμου τμήματος t, τότε ο ζητούμενος παράγοντας θα είναι $a^{m-n}(dt)^n$, όπου α είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Ένα παράδειγμα της χρήσης του σταθερού διαφορικού και των παραγόντων με διάσταση ώστε να αναγάγει τις γεωμετρικές διαφορικές αναλογίες σε διαφορικές εξισώσεις παρέχεται από μια σειρά προβλημάτων που ο Leibniz πρότεινε σε κείμενό του το 1692[76] σχετικά με την αλυσοειδή καμπύλη. Όπως ο Leibniz και άλλοι είχαν σημειώσει, η αλυσοειδής καμπύλη ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$ddx \sim (dy)^3$ (με ds σταθερό).

Αυτή η ιδιότητα οδήγησε τον Leibniz στο ερώτημα σχετικά με το ποιες καμπύλες έχουν τις ιδιότητες

$ddx \sim (dy)^2$ (με ds σταθερό)

και $ddx \sim dy$ (με ds σταθερό).

Ο Leibniz, στην πραγματικότητα, περιέγραψε αυτές τις διαφορικές αναλογίες εξ ολοκλήρου στο συγγραφικό του έργο, και το ακόλουθο χωρίο αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα[77]:

> *«Επίσης μπορώ να λύσω χωρίς δυσκολία το ακόλουθο πρόβλημα: να βρω μία γραμμή με την ιδιότητα εάν το τόξο της αυξάνεται ομοιόμορφα, τα στοιχεία των στοιχείων των τετμημένων είναι ανάλογα προς τους κύβους των αυξήσεων ή των στοιχείων των τεταγμένων. Είναι πέρα ως πέρα*

---

[76] *"Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnulis." Acta Erud., Sept., 1692, σελ. 440-446. Math. Schr. V, σελ. 279-285.*

[77] *Leibniz , Math. Schr. V, 1692, σελ. 285.*

αληθινό ότι αυτό ισχύει στην περίπτωση της αλυσοειδούς καμπύλης ή της σχοινοειδούς. Επειδή όμως αυτό παρατηρήθηκε ήδη από το Bernoulli θα προσθέσω εδώ ότι εάν, αντί για τους κύβους των στοιχείων των τεταγμένων, λάβουμε τα τετράγωνα, η ζητούμενη γραμμή θα είναι η λογαριθμική. Επίσης, διαπιστώνω ότι εάν τα στοιχεία τα ίδια των τεταγμένων είναι ανάλογα προς τα στοιχεία των στοιχείων, ή τα δεύτερα διαφορικά των τετμημένων, η ζητούμενη γραμμή είναι ο κύκλος».

Ο Jacob Bernoulli, σχολιάζει αυτές τις διαφορικές αναλογίες σε κείμενό του το 1693, και τις μετασχηματίζει σε διαφορικές εξισώσεις προσαρμόζοντας τις, με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, σε κατάλληλες δυνάμεις ενός αυθαίρετου ευθυγράμμου τμήματος a και της σταθεράς ds. Ως αποτέλεσμα προκύπτουν οι σχέσεις:

$adsddx = (dy)^3$ (ds σταθερά),

$addx = (dy)^2$ (ds σταθερά),

$addx = dsdy$ (ds σταθερά).

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι εάν αυτές οι διαφορικές εξισώσεις μετασχηματίζονται στις αντίστοιχες εξισώσεις παραγώγων, η σταθερά ds χρησιμοποιείται με παρόμοιο τρόπο: και τα δύο μέλη της εξίσωσης διαιρούνται με την κατάλληλη δύναμη του ds προκειμένου να γίνουν πεπερασμένα. Κατά συνέπεια οι αντίστοιχες εξισώσεις παραγώγων είναι

$a\dfrac{d^2x}{ds^2} = \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^3$ (διαιρεί με το ds^3),

$a\dfrac{d^2x}{ds^2} = \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2$ (διαιρεί με το ds^2),

$a\dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{dy}{ds}$ (διαιρεί με το ds^2).

Μελέτες του Leibniz για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε ορισμένες πτυχές των μελετών του Leibniz για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού. Η σημασία αυτών των μελετών βρίσκεται πρώτιστα στο γεγονός ότι επιδεικνύουν πόσο βαθειά ο Leibniz αντιλήφθηκε τις ερωτήσεις για τη φύση και την ύπαρξη των διαφορικών και των διαφορικών ανωτέρας τάξης και πόσο επιτυχής ήταν στις προσπάθειές του να λύσει το πρόβλημα των θεμελίων του λογισμού. Επιπλέον, στην εξέταση αυτών των μελετών, μπορούμε να επιτύχουμε μια εξήγηση του ζητήματος ενός εναλλακτικού ορισμού του διαφορικού σε ορισμένα από τα τελευταία άρθρα του Leibniz σχετικά με τον λογισμό. Επίσης, οι μελέτες επιδεικνύουν πώς το ενδιαφέρον για τα θεμελιώδη ζητήματα σχετικά με το διαφορικό οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης και του διαφορικού πηλίκου, και με αυτόν τον τρόπο σε μια έννοια που έρχεται κοντά σε αυτήν της παραγώγου.

Εντούτοις, πρέπει να γίνει μία προκαταρκτική παρατήρηση: αυτές οι μελέτες του Leibniz δεν άσκησαν καμία επιρροή στην πραγματική ανάπτυξη του λογισμού το δέκατο όγδοο αιώνα. Η πρωταρχική πηγή που αναφέρεται ο H.J.M.Bos είναι ένα χειρόγραφο που πρωτοδημοσιεύτηκε το 1846. Αυτή η έλλειψη άμεσης επιρροής οφείλεται τόσο στις μελέτες του Leibniz όσο και σε άλλες περισσότερο δημόσια διεξαγόμενες συζητήσεις σχετικά με τα θεμέλια του λογισμού, όπως στην κριτική του Nieuwentijt, στη διαμάχη στη Γαλλική Βασιλική Ακαδημία και στην πιο διάσημη από τις συζητήσεις σχετικά με την ανακάλυψη των απειροστικών μαθηματικών, η οποία ξεκίνησε από το Berkeley. Φαίνεται ότι τίποτα από αυτά δεν είχε σημαντική επιρροή στην πραγματική πρακτική και τα αποτελέσματα της απειροστικής ανάλυσης στο πρώτο μισό του δέκατου όγδοου αιώνα.

Η ύπαρξη των απειροστών και η αιτιολόγηση της χρήσης τους στην ανάλυση

Οι περισσότεροι από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με το λογισμό του Leibniz (αν και όχι ο ίδιος ο Leibniz) αποδέχτηκαν την ύπαρξη των απειροστών ποσοτήτων και δικαιολόγησαν τους κανόνες του λογισμού στηριζόμενοι σε αυτήν την ύπαρξη. Η συνηθισμένη κριτική του λογισμού αμφισβήτησε, ή οπωσδήποτε εξέτασε την ύπαρξη των απειροστών ποσοτήτων. Ο Leibniz ο ίδιος διέθετε μια βαθύτερη κατανόηση της φύσης του προβλήματος. Γνώριζε ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο ξεχωριστά ερωτήματα: το ένα αφορά το εάν οι απειροστές ποσότητες υπάρχουν πραγματικά και το άλλο ασχολείται με το εάν η ανάλυση που

στηρίζεται στα διαφορικά, ακολουθούμενη τους κανόνες του λογισμού, οδηγεί σε ορθές λύσεις των προβλημάτων.

Στην πρώτη, μεταφυσική, ερώτηση ο Leibniz δε δεσμεύθηκε απόλυτα. Πράγματι αμφέβαλε για τη δυνατότητα απόδειξης της ύπαρξης απειροστών ποσοτήτων. Επομένως, η απάντησή του στη δεύτερη ερώτηση, που αφορούσε την υπεράσπιση του λογισμού, έπρεπε να είναι ανεξάρτητη από την πρώτη. Δεν θα μπορούσε να επικαλεσθεί την ύπαρξη των απειροστών ώστε να απαντήσει στις αντιρρήσεις για την ισχύ του λογισμού. Αντ' αυτού, έπρεπε να μεταχειριστεί τα απειροστά « ως αληθή, αν και ψευδή», που αν και δεν αντιστοιχούν σε πραγματικά υπάρχουσες ποσότητες, εντούτοις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των προβλημάτων.

Ο Leibniz προσπάθησε, με αρκετή επιτυχία, να αιτιολογήσει τον λογισμό. Εντούτοις, στα συγγράμματα τα οποία δημοσίευσε κατά τη διάρκεια της ζωής του, υπήρξε μάλλον αόριστος σχετικά με τη συγκεκριμένη ερώτηση, με αποτέλεσμα οι παρατηρήσεις του να προκαλέσουν μεγαλύτερη σύγχυση από ότι αποσαφήνιση. Ακόμα και μετά από τη δημοσίευση, στο δέκατο ένατο και εικοστό αιώνα, στα χειρόγραφα που περιέχουν τους πληρέστερους απολογισμούς αυτών των προσπαθειών, έχει παραμείνει ένα μεγάλο μέρος της σύγχυσης σχετικά με την άποψη του Leibniz ως προς αυτές τις ερωτήσεις.

Ο Leibniz εξέτασε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με τα θεμέλια του λογισμού. Η μία προσέγγιση συνδεόταν με τις κλασσικές αποδείξεις που στηρίζονταν στη μέθοδο της «εξάντλησης», ενώ η άλλη ήταν σχετική με τον νόμο της συνέχειας. Στην πρώτη προσέγγιση συνέλαβε το λογισμό ως συντομευμένη γλώσσα για τις αποδείξεις με τη μέθοδο της εξάντλησης. Στηριζόμενη σε αυτή τη λογική, η ισότητα μεταξύ δύο εκφράσεων που περιλαμβάνουν διαφορικά θα σήμαινε ότι, εάν αντί των διαφορικών αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές, επιλέγοντας τις αρκετά μικρές, θα μπορούσε να γίνει αυθαίρετα μικρή και η διαφορά μεταξύ των τιμών αυτών των εκφράσεων (όσον αφορά τις ίδιες τιμές). Κατά συνέπεια θα μπορούσε να δικαιολογηθεί η απόρριψη των διαφορικών ανώτερης τάξης συγκρινόμενη με τα διαφορικά πρώτης τάξης.

Αυτή η προσέγγιση διαμορφώνει το υπόβαθρο της παρατήρησης του Leibniz (σε μια επιστολή στον Pinson, η οποία δημοσιεύθηκε το 1701), ότι το διαφορικό μπορεί να υποτεθεί ως προς τη μεταβλητή σαν ένας κόκκος άμμου στη γη[78]:

---

[78] *Leibniz , Math. Schr. V, 1701, σελ.350.*

> *«Αντί του άπειρου ή του απείρως μικρού, κάποιος θεωρεί ποσότητες μεγάλες, ή μικρές, ανάλογα με τις ανάγκες ώστε το σφάλμα που προκύπτει να είναι μικρότερο από το δεδομένο σφάλμα, με αποτέλεσμα αυτή η μέθοδος να διαφέρει από τη μέθοδο του Αρχιμήδη μόνο ως προς τις εκφράσεις, οι οποίες στη δική μας περίπτωση είναι αμεσότερες και προσαρμόζονται περισσότερο στην τέχνη της επινόησης».*

Δικαιολογημένα, αυτή η παρατήρηση προκάλεσε μεγάλη σύγχυση στο γαλλικό μαθηματικό κύκλο, στον οποίο ο L'Hôpital και ο Varignon υπερασπίζονταν πάντα τον λογισμό του Leibniz γοητευμένοι από την πραγματική ύπαρξη των απειροστών. Με αυτήν την ευκαιρία οι αντίπαλοι του λογισμού χρησιμοποίησαν την επιστολή στον Pinson για να επιτεθούν στον Varignon με τις ίδιες τις λέξεις του Leibniz: «τα διαφορικά ήταν πεπερασμένα». Ο Varignon ζήτησε διευκρίνιση πάνω σε αυτό, η οποία οδήγησε τον Leibniz σε νέα επιστολή το 1702, στην οποία ο Leibniz έγραψε[79]:

> *«Και υπ' αυτή την έννοια έδωσα μια φορά μερικά λήμματα για τα ασύγκριτα στα Leipzig Acta (πρακτικά της Λειψίας), που κάποιος μπορεί να κατανοήσει όπως επιθυμεί, είτε ως αυστηρά άπειρα, είτε μόνο ως μεγέθη, το ένα εκ των οποίων δεν υπολογίζεται ως προς το άλλο. Αλλά συγχρόνως πρέπει να θεωρήσει ότι αυτά τα συνηθισμένα ασύγκριτα, δεν είναι με κανένα τρόπο σταθερά ή καθορισμένα: μπορούν να ληφθούν τόσο μικρά όσο κάποιος επιθυμεί για τα γεωμετρικά επιχειρήματά μας. Κατά συνέπεια είναι το ίδιο αποτελεσματικά με τις αυστηρές, απείρως μικρές ποσότητες, και εάν ένας αντίπαλος αρνούνταν τον ισχυρισμό μας, που προκύπτει από τον λογισμό μας ότι το σφάλμα θα ήταν μικρότερο από οποιοδήποτε σφάλμα θα μπορούσε να προσδιορίσει, και έγκειται στην ευχέρειά μας να πάρουμε το αρκετά μικρό ασύγκριτα μικρό, δεδομένου ότι κάποιος μπορεί πάντα να πάρει ένα μέγεθος οσοδήποτε μικρό».*

Ο νόμος της συνέχειας

Η κύρια πηγή για τη δεύτερη προσέγγιση του Leibniz στο να αιτιολογήσει τη χρήση των «φανταστικών» απειροστών στο λογισμό είναι ένα χειρόγραφο, που χρονολογείται μετά το 1701 και δημοσιεύτηκε το 1846 από τον C. I. Gerhardt. Είναι

---

[79] *Leibniz , Math. Schr. IV, 1702, σελ.92.*

ένα προσχέδιο για ένα άρθρο που δημοσιεύτηκε το 1684 σε κείμενο του Leibniz, όπου επρόκειτο να αποδειχθούν οι κανόνες του λογισμού. Ο Leibniz βάσισε τις αποδείξεις του στο νόμο της συνέχειας, τον οποίο διατύπωσε ως εξής[80]:

> *«Εάν οποιαδήποτε συνεχής μετάβαση θεωρηθεί ότι τερματίζεται σε ένα ορισμένο όριο, τότε είναι πιθανό να διαμορφωθεί ένας γενικός συλλογισμός, ο οποίος να καλύπτει και το τελικό όριο».*

Ο νόμος, ο οποίος δεν είναι αρκετά σαφής στη διατύπωσή του, διευκρινίστηκε από ορισμένα παραδείγματα: για παράδειγμα, στην περίπτωση των τεμνόμενων ευθειών, τα επιχειρήματα που περιλαμβάνουν την τομή θα μπορούσαν να επεκταθούν (με την εισαγωγή ενός «φανταστικού» σημείου της τομής και τη λήψη της γωνίας μεταξύ των ευθειών ως «απείρως μικρή») στην περίπτωση της παραλληλίας. Επίσης, τα επιχειρήματα για τις ελλείψεις θα μπορούσαν να επεκταθούν στις παραβολές με την εισαγωγή μιας εστίας καμπύλης απείρως μακρινή από την άλλη, (τη σταθερή εστία).

Κατά συνέπεια τέτοιες επεκτάσεις λογικών συλλογισμών στις οριακές περιπτώσεις («τελικό σημείο») περιλαμβάνουν τη χρήση όρων ή συμβόλων τα οποία καταλήγουν χωρίς νόημα στην οριακή περίπτωση, ενώ το επιχείρημα που περιγράφουν παραμένει εφαρμόσιμο, και σε τέτοιες περιπτώσεις οι όροι και τα σύμβολα μπορούν να θεωρηθούν ως «αληθή αν και ψευδή». Σύμφωνα με τον Leibniz, η χρήση των απειροστών ανήκει σε αυτό το είδος επιχειρήματος.

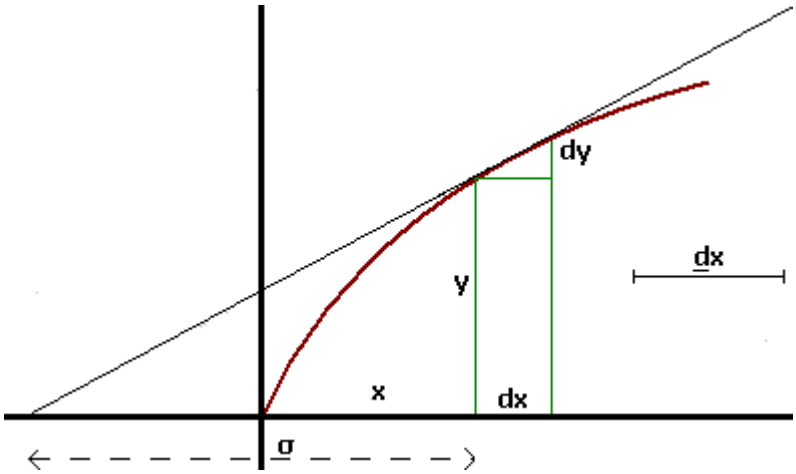
Οι αποδείξεις του Leibniz για τους κανόνες λογισμού βασίστηκαν σε αυτόν το νόμο της συνέχειας, όπως δίνεται στο χειρόγραφο, οι οποίοι μπορούν να συνοψιστούν ως εξής (κατά τον Bos)[81]:

Έστω (βλέπε το σχήμα) ότι τα dx και dy αφορούν πεπερασμένες αντίστοιχες διαφορές, και

---

[80] *Leibniz, Cum prodiisset, σελ. 40.*

[81] *Ο Bos διαφοροποιείται ελαφρώς του συμβολισμού του Leibniz. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί το σύμβολο* $\underline{d}$ *αντί του* d *του Leibniz, οπότε τα* $(d)x$, $(d)dx$, $(dd)x$ *μετατρέπονται σε* $\underline{d}\,x$, $\underline{d}\,dx$, $\underline{d}\,\underline{d}\,x$, *αντίστοιχα. Αντί του* ${}_2(d)x$, *χρησιμοποιεί* $\underline{d}^{+}\,x$. *Αντί του κόμματος διαχωρισμού του Leibniz, χρησιμοποιεί παρενθέσεις.*



Σχήμα 24.

έστω ότι το dx αναφέρεται σε ένα σταθερό πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα. Για τα σταθερά x και y, ορίζουμε το $\underline{d}y$ από την αναλογία

$$\underline{d}y : \underline{d}x = dy : dx \qquad (1)$$

όπου το $\underline{d}y$ είναι πεπερασμένο, εξαρτημένο από το dx και ορισμένο από τη σχέση (1) για $dx \neq 0$. Ο Leibniz υποστήριξε ότι το $\underline{d}y$ μπορεί επίσης να ερμηνευτεί και στην περίπτωση που $dx = 0$, δηλαδή όπως ορίζεται από τη σχέση

$\underline{d}y : \underline{d}x = y : \sigma$,

όπου σ είναι η υποεφαπτομένη. Θεώρησε δηλαδή την εφαπτομένη ως την τελική θέση της τέμνουσας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι για τα παραπάνω δεν επικαλέστηκε το νόμο της συνέχειας. Όπως θα δούμε, χρησιμοποίησε το νόμο αργότερα, προϋποθέτοντας ότι η τελική θέση της τέμνουσας είναι η εφαπτομένη.

Στην περίπτωση που έχουμε $dx \neq 0$, ο λόγος $\underline{d}y : \underline{d}x$ μπορεί να αντικατασταθεί από το λόγο $dy : dx$ στον τύπο που εκφράζει τη σχέση μεταξύ των πεπερασμένων διαφορών dx και dy. Μόλις γίνει αυτή η υπόθεση, το επιχείρημα που συνδέεται με αυτούς τους τύπους μπορεί να επεκταθεί, όπως πράγματι υποστηρίζει ο νόμος της συνέχειας, στην οριακή περίπτωση με $dx = 0$, επειδή σε εκείνο την περίπτωση ο λόγος $\underline{d}y : \underline{d}x$ είναι ακόμα ερμηνεύσιμος και έχει έννοια ως λόγος πεπερασμένων ποσοτήτων. Αλλά στη συνέχεια κάποιος μπορεί να αντικαταστήσει ξανά το λόγο $dy : dx$ με το λόγο $\underline{d}y : \underline{d}x$ και στις δύο υποθέσεις με $dx \neq 0$ και $dx = 0$, που ερμηνεύοντας, στην τελευταία περίπτωση, το dx και dy ως « φανταστικά». Για να αποδειχθούν οι κανόνες του λογισμού, πρέπει να δειχτεί ότι αυτοί οι κανόνες χειρισμού των φανταστικών dx και dy στην περίπτωση κατά την οποία $dx = 0$,

είναι πράγματι ερμηνεύσιμοι σε συμφωνία με τους σωστούς χειρισμούς για τα πεπερασμένα $\underline{d}x$ και $\underline{d}y$.

Τέτοιες ήταν οι αποδείξεις που έδωσε ο Leibniz σε χειρόγραφό του για τους κανόνες που καλύπτουν την πρόσθεση, την αφαίρεση, τη διαίρεση, καθώς και τις δυνάμεις γενικά. Η σχετική διαδικασία εμφανίζεται περισσότερο ξεκάθαρα στην απόδειξή του για τον κανόνα διαφόρισης γινομένου $d(xv) = xdv + vdx$, που παρατίθεται παρακάτω:

Πολλαπλασιασμός: Έστω $ay = xv$, τότε $a\underline{d}y = x\underline{d}v + v\underline{d}x$.

Απόδειξη: $ay + ady = (x + dx)(v + dv) = xv + xdv + dxdv$,

και μετά τη διαγραφή των όρων ay και $x\upsilon$, που είναι ίσοι, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$ady = xdv + vdx + dxdv$$

ή $$\frac{ady}{dx} = \frac{xdv}{dx} + v + dv$$

και θεωρώντας γραμμές που δε μηδενίζονται ποτέ, η σχέση γίνεται

$$\frac{a\underline{d}y}{\underline{d}x} = \frac{x\underline{d}v}{\underline{d}x} + v + dv$$

έτσι ώστε ο όρος dv είναι ο μόνος που δε μπορεί να μηδενιστεί, και στην περίπτωση του μηδενισμού των διαφορών, επειδή $dv = 0$, προκύπτει

$$a\underline{d}y = x\underline{d}v + v\underline{d}x$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό του.

(...) Άλλωστε, επειδή ο λόγος $\underline{d}y : \underline{d}x$ είναι πάντα ίσος με το λόγο $dy : dx$, στην περίπτωση των μηδενιζόμενων dx και dy κάποιος μπορεί να υποθέσει και να συμπεράνει ότι:

$$ady = xdv + vdx$$

Κατά τον Bos αρχικά, το $\underline{d}y$, που εισάγεται από τον Leibniz, είναι ίσο, στην περίπτωση κατά την οποία $dx = 0$, με το διαφορικό όπως ορίζεται από τον Cauchy, καθώς εάν τεθεί $y = f(x)$, η σχέση (1) δίνει:

$$\underline{d}y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\underline{d}x = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot \underline{d}x\,, \qquad (2)$$

και το επιχείρημα του Leibniz ότι για $\Delta x = 0$ η τέμνουσα μετατρέπεται σε εφαπτομένη, αντιστοιχεί στη λήψη του ορίου στη σχέση (2):

$$\underline{d}y\,|_{\Delta x=0} = f'(x)\cdot \underline{d}x$$

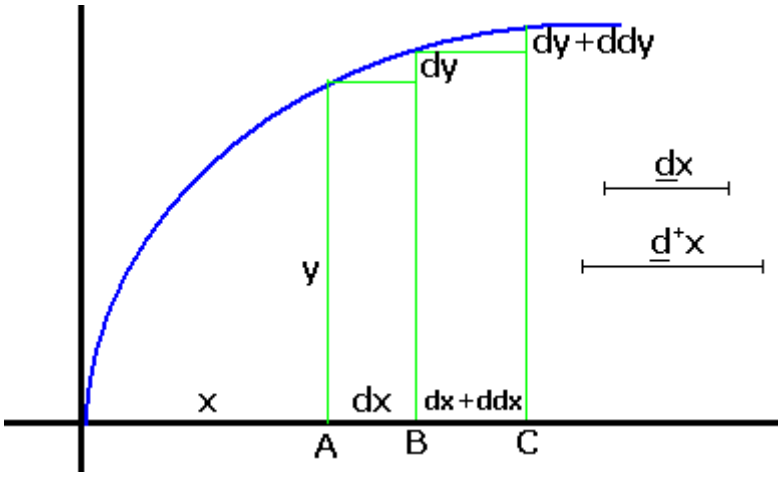
Επίσης, οι προσπάθειες του Leibniz φανερώνουν ότι ένα εγχείρημα για να διασφαλιστούν τα θεμέλια του λογισμού οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης. Η επιλογή ενός σταθερού $\underline{d}x$, και η εισαγωγή των λόγων $dy:dx$, $dv:dx$ ώστε να αντικατασταθούν από τους λόγους $\underline{d}y:\underline{d}x$, $\underline{d}v:\underline{d}x$ είναι ισοδύναμη με την επιλογή του x ως ανεξάρτητης μεταβλητής, από την οποία εξαρτώνται οι συναρτήσεις των άλλων μεταβλητών. Όπως θα παρουσιαστεί αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο, αυτή η επιλογή είναι επίσης ισοδύναμη με την επιλογή του dx ως σταθερού διαφορικού στα πλαίσια των απειροστικών διαφορικών. Αυτή η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης σε μια κατεξοχήν γεωμετρική θέση μιας καμπύλης σε σχέση με τους άξονες περιλαμβάνει, όπως έχει ήδη λεχθεί, κάποια αυθαιρεσία. Πράγματι, ο Leidniz ξεκίνησε όπως είδαμε με την επιλογή ενός σταθερού $\underline{d}y$ και με την θεώρηση των αναλογιών $dx:dy$, $dv:dy$ κ.λπ.. Επίσης, προκειμένου να αντικατασταθούν τα $\underline{d}x$ και $\underline{d}y$ αντί των διαφορών dx και dy, πρέπει κανείς να θεωρήσει τα πηλίκα $\frac{dy}{dx}$ και, στην περίπτωση του ορίου, την έκφραση $\left.\frac{\underline{d}y}{\underline{d}x}\right|_{dx=0}$.

Αυτό κατά τον Bos δείχνει ότι η προσπάθεια να δικαιολογηθεί ο λογισμός οδηγεί φυσικά στις έννοιες των διαφορικών πηλίκων και ως εκ τούτου στις παραγώγους.

Η προσπάθεια του Leibniz σε μια παρόμοια αιτιολόγηση της χρήσης των διαφορικών ανώτερης τάξης

Ο Leibniz προσπαθεί στη συνέχεια να αποδείξει με τον ίδιο τρόπο ότι το διαφορικό δευτέρας τάξης του xv είναι $xddv + vddx + 2dxdv$. Αυτή η προσέγγιση είναι σημαντική γιατί υπονοεί την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης. Αλλά σε αυτό το σημείο ο Leibniz απέτυχε διότι δεν συνειδητοποίησε ότι έπρεπε να επιλέξει μια από τις μεταβλητές ως ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή ότι έπρεπε να εισαγάγει την έννοια της συνάρτησης. Αν και το κείμενο είναι συχνά σε αρκετά σημεία μάλλον μπερδεμένο, η ουσία του αποδίδεται από τον Bos ως ακολούθως.

Ο Leibniz θεώρησε ένα σχήμα του οποίου τα ουσιαστικά μέρη παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα στο οποίο τα x και y είναι σταθερά και τα dx, ddx, dy και ddy είναι πεπερασμένα.



Σχήμα 25.

Τα σημεία Β και C υποτίθεται ότι κινούνται ταυτόχρονα προς το Α έως ότου συμπέσουν με το Α την ίδια χρονική στιγμή. Ο Leibniz δεν υπέθεσε ότι $AB = BC$ κατά τη διάρκεια αυτής της μετατόπισης, δηλαδή δεν υπέθεσε αριθμητική την ακολουθία των τιμών του x. Επίσης, δεν έθεσε την απαίτηση της ομαλότητας για το πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών, το οποίο απαιτεί το κλάσμα $\frac{BC - AB}{AB}$ να τείνει στο μηδέν, έτσι ώστε το ddx να γίνεται απείρως μικρός συγκριτικά με το dx.

Ο Leibniz εισήγαγε δύο βασικές πεπερασμένες σταθερές γραμμές $\underline{d}x$ και $\underline{d}^{+}x$, τις οποίες επέτρεψε να είναι άνισες, όπως μπορεί να προκύψει από το σχήμα που δίνει. Στη συνέχεια, εισήγαγε τα $\underline{d}y$ και $\underline{d}v$ όπως ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \underline{d}y : \underline{d}x &= dy : dx, \\ \underline{d}v : \underline{d}x &= dv : dx \end{aligned} \qquad (3)$$

και επιπλέον εισήγαγε το Ψ που ορίζεται ως εξής:

$$\underline{d}^{+}y : \underline{d}^{+}x = (dy + ddy) : (dx + ddx)\,.$$

Αν και τελικά δε χρησιμοποίησε το συγκεκριμένο $\underline{d}^{+}y$ στα επιχειρήματά του, φάνηκε να υποθέτει ότι τα όρια $\underline{d}y$ και $\underline{d}^{+}y$ είναι ίσα, το οποίο, εντούτοις, συμβαίνει μόνο εάν $\underline{d}x = \underline{d}^{+}x$.

Στη συνέχεια ο Leibniz υπολόγισε από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$ay = xv,$$
$$a(y+dy) = (x+dx)(v+dv)$$
$$a(y+2dy+ddy) = (x+2dx+ddx)(v+2dv+ddv)$$

την εξίσωση διαφοράς

$$addy = xddv + vddx + 2dxdv + 2dvddx + 2dxddv + ddxddv \qquad (4)$$

στην οποία διαίρεσε κάθε όρο με το $addx$ προκειμένου να εισαχθούν τα πηλίκα των διαφορών:

$$\frac{ddy}{ddx} = \frac{xddv}{addx} + \frac{v}{a} + \frac{2dxdv}{addx} + \frac{2dv}{a} + \frac{2dxddv}{addx} + \frac{ddv}{a} \qquad (5)$$

Για να προχωρήσει ομοίως στην περίπτωση των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ο Leibniz έπρεπε να εισαγάγει πεπερασμένες μεταβλητές, ερμηνεύσιμες στην περίπτωση που ισχύει $dx = 0$, και τα πηλίκα των οποίων θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν τα πηλίκα των διαφορών στη σχέση (5). Για το να κάνει αυτό εισήγαγε το $\underline{d}dx$ ορίζοντας το από τη σχέση:

$$\underline{d}dx : \underline{d}x = dx : \underline{d}^{+}x \text{ , } (6)$$

και με τον ίδιο τρόπο όρισε τα $\underline{d}dy$ και $\underline{d}dv$. Υπέθεσε ότι

$$\frac{ddy}{ddx} = \frac{\underline{d}dy}{\underline{d}dx} \text{ και } \frac{ddv}{ddx} = \frac{\underline{d}dv}{\underline{d}dx} \quad (7)$$

Αυτό το βήμα παρέμεινε εξ ολοκλήρου αδικαιολόγητο, και ακόμα κι αν ο Leibniz θα μπορούσε να το υποστηρίξει, φαίνεται ότι δεν γνώριζε ότι οι αντικαταστάσεις (7) δεν θα έλυναν το πρόβλημα, επειδή τα $\underline{d}dx$, $\underline{d}dy$ και $\underline{d}dv$ όπως καθορίζονται από τη σχέση (6) (που περιλαμβάνει τις ανομοιογενείς αναλογίες) δεν είναι πεπερασμένες μεταβλητές αλλά απείρως μικρές μεταβλητές, με αποτέλεσμα οι λόγοι $\frac{\underline{d}dy}{\underline{d}dx}$ και $\frac{\underline{d}dv}{\underline{d}dx}$ να είναι ανερμήνευτοι στην περίπτωση που ισχύει $dx = 0$.

Για να εξετάσει το κλάσμα $\frac{2dxdv}{addx}$ ο Leibniz όρισε το πεπερασμένο μεταβλητό $\underline{d}\underline{d}x$ από τη σχέση:

$$\underline{d}\underline{d}x : \underline{d}x = addx : (dx)^2 \text{ . } (8)$$

Ο παράγοντας $\underline{d}\underline{d}x$ είναι πράγματι πεπερασμένος, αλλά η υπόθεση είναι ερμηνεύσιμη στην περίπτωση κατά την οποία η ισότητα $dx = 0$ υπονοεί τη συνθήκη

της τάξης για το πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών που αναφέρθηκε ανωτέρω, δηλαδή ο όρος ddx γίνεται απείρως μικρός σχετικά με τον όρο dx. (Ο ρόλος του α στη σχέση (8) για να εξασφαλίζει την ομογένεια της διάστασης και της τάξης του απείρου).

Ισχύει

$$\frac{dxdv}{addx} = \frac{(dx)^2 dv}{addxdx} = \frac{\underline{d}x\underline{d}v}{\underline{d}\underline{d}x\underline{d}x} = \frac{\underline{d}v}{\underline{d}\underline{d}x} \qquad (9)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (7) και (9) στη σχέση (5) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\underline{\underline{d}}dy}{\underline{d}dx} = \frac{x\underline{d}dv}{a\underline{d}dx} + \frac{v}{a} + \frac{2\underline{d}v}{\underline{d}\underline{d}x} + \frac{2dv}{a} + \frac{2\underline{d}dvdx}{a\underline{d}dx} + \frac{ddv}{a}$$

η οποία, όπως λανθασμένα υπέθεσε ο Leibniz, ήταν ακόμα ερμηνεύσιμη στην περίπτωση κατά την οποία $dx = 0$, κατά την οποία προκύπτει

$$\frac{\underline{\underline{d}}dy}{\underline{d}dx} = \frac{x\underline{d}dv}{a\underline{d}dx} + \frac{v}{a} + \frac{2\underline{d}v}{\underline{d}\underline{d}x}$$

από όπου, στηριζόμενοι στο ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιείται και στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, τα διαφορικά διατηρήθηκαν, στην περίπτωση κατά την οποία $dx = 0$, ως «φανταστικά», έτσι ώστε να ισχύει τα ακόλουθο αποτέλεσμα, με το οποίο ολοκληρώνεται το χειρόγραφο:

$$\frac{ddy}{ddx} = \frac{xddv}{addx} + \frac{v}{a} + \frac{2dxdv}{addx}$$

Οι λόγοι αποτυχίας αυτής της προσπάθειας

Η αποτυχημένη προσπάθεια του Leibniz οφείλεται στο γεγονός ότι υπονοεί την έννοια των μεταβλητών ως συναρτήσεις μιας συγκεκριμένης μεταβλητής, και σε αυτήν την περίπτωση της x. Το να θεωρήσουμε την $\underline{d}x$ ως σταθερά αντιστοιχεί στη λήψη της ακολουθίας των τιμών της x ως αριθμητική. Αλλά, κατά τον Bos, προφανώς ο Leibniz θέλησε να συντηρήσει την ελευθερία της επιλογής της προόδου των μεταβλητών και για αυτό το λόγο, αποδέχτηκε τη σχέση $ddx \neq 0$ και εισήγαγε τους όρους $a\underline{d}x$ και $a\underline{d}^{+}x$. Κατά συνέπεια, η αποτυχία αυτής της προσπάθειάς του προκλήθηκε από μια υπονοούμενη αντίφαση μεταξύ της θεώρησης των μεταβλητών ως συναρτήσεις μιας συγκεκριμένης μεταβλητής και ακόμα της προσπάθειας να μην προσδιοριστεί η πρόοδος των μεταβλητών.

Δυνατότητα επιτυχίας μετά από τον προσδιορισμό της προόδου των μεταβλητών

Από τη στιγμή που θα υποτεθεί ότι το διαφορικό μιας μεταβλητής είναι σταθερό, η προσέγγιση του Leibniz μπορεί να ακολουθηθεί επιτυχώς. Πράγματι, σύμφωνα με τη μέθοδο του Leibniz για $ay = xv$, η διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης είναι $addy = xddv + 2dxdv$, κάτω από την υπόθεση ότι $ddx = 0$. Για να αποδειχθεί αυτό, πρέπει να εισαχθούν οι όροι $\underline{d}y$ και $\underline{d}v$ όπως προηγούμενα, και να οριστούν οι όροι $\underline{d}\underline{d}y$ και $\underline{d}\underline{d}v$ με τις σχέσεις:

$$\underline{d}\underline{d}y : \underline{d}x = \underline{d}xddy : (dx)^2$$

$$\underline{d}\underline{d}v : \underline{d}x = \underline{d}xddv : (dx)^2 . \quad (10)$$

Πρέπει να διευκρινιστεί η χρήση του $\underline{d}x$ για να αντιστραφεί η ομογένεια της διάστασης και η τάξη του απείρου. Για το σκοπό αυτό είναι προτιμότερο να επιλεχθεί ο όρος $\underline{d}x$ παρά ένα αυθαίρετο σταθερό α, επειδή με αυτόν τον τρόπο η σχέση (10) βρίσκεται σε συμφωνία με τη σχέση (3):

$$\underline{d}\underline{d}y = \underline{d}(\underline{d}y) = \frac{d(\underline{d}y)}{dx}\underline{d}x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\underline{d}x\right)}{dx}\underline{d}x = \frac{d^2y}{dx^2}\underline{d}x .$$

Διαιρώντας με το $(dx)^2$ κάθε όρο της εξίσωσης διαφοράς (4) (από την οποία παραλείπονται οι όροι που περιέχουν το ddx):

$$\frac{addy}{dx^2} = \frac{xddv}{dx^2} + \frac{2dxdv}{dx^2} + \frac{2dxddv}{dx^2} ,$$

και αντικαθιστώντας τους αντίστοιχους λόγους των όρων $\underline{d}y$, $\underline{d}v$, $\underline{d}x$, $\underline{d}\underline{d}y$ και $\underline{d}\underline{d}v$, έχουμε:

$$\frac{a\underline{d}\underline{d}y}{(\underline{d}x)^2} = \frac{x\underline{d}\underline{d}v}{(\underline{d}x)^2} + \frac{2\underline{d}v}{\underline{d}x} + \frac{2\underline{d}\underline{d}vdx}{(\underline{d}x)^2} .$$

Αυτός ο τύπος ερμηνεύεται στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει $dx = 0$ (ο τελευταίος όρος στη συνέχεια μηδενίζεται), έτσι ώστε, μετά από το επιχείρημα του Leibniz, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαφορικά ως «φανταστικά» ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση:

$$\frac{addy}{dx^2} = \frac{xddv}{dx^2} + \frac{2dv}{dx} \text{ ή } addy = xddv + 2dxdv$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης της $ay = xv$ κάτω από την υπόθεση του σταθερού dx.

Ο ορισμός του διαφορικού του Leibniz το 1684

Η θεμελιώδης ιδέα του Leibniz να επιλέξει ένα πεπερασμένο σταθερό $\underline{dx}$ και να ορίσει ένα πεπερασμένο $\underline{dy}$ με τη βοήθεια αυτού του $\underline{dx}$, πρέπει να του προέκυψε πολύ νωρίτερα από το 1701. Πράγματι εμφανίζεται στην πρώτη του δημοσίευση για τον λογισμό, σε κείμενο του 1684[82], καθώς και στη συζήτησή του με τον Nieuwentijt το 1695 σχετικά με τη φύση των διαφορικών.

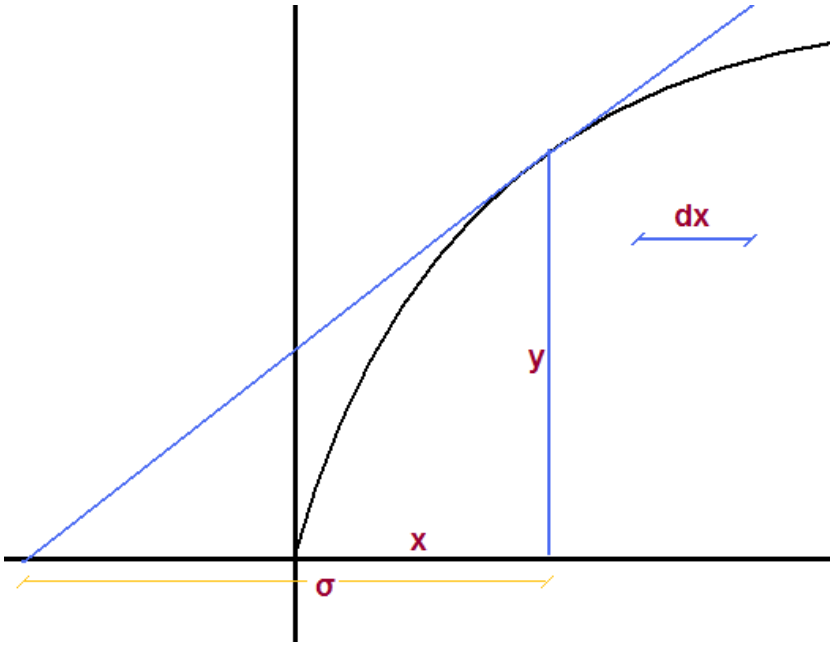
Στο κείμενο του 1684 ο Leibniz εισήγαγε τα διαφορικά και δήλωσε (χωρίς απόδειξη) τους κανόνες της διαφόρισης. Ο ορισμός του διαφορικού που έδωσε, δεν αναφερόταν στα απειροστά. Υπέθεσε ένα σταθερό πεπερασμένο τμήμα γραμμών το οποίο κάλεσε dx[83], και όρισε τον όρο dy ως την τέταρτη ανάλογο προς την υποεφαπτομένη, την τεταγμένη και το dx (δείτε το σχήμα που ακολουθεί):

$dy : dx = y : \sigma$ (11)

---

[82] *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus." Acta Erud., Oct. 1684, σελ. 467-473. Math. Schr. V, σελ. 220-226.*

[83] *Ο Leibniz σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούσε το συμβολισμό dx, dy. Αργότερα, υιοθέτησε το συμβολισμό $(d)x$, $(d)y$.*



Σχήμα 26.

Το πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα dy, όπως ορίστηκε, καλείται διαφορικό. Προφανώς, αυτό το dy είναι το ίδιο με το:

$\underline{dy}\big|_{dx=0}$ (βλέπε σχέση (5)).

Ο Leibniz δεν αιτιολόγησε γιατί επέλεξε αυτόν τον ορισμό για το διαφορικό, αλλά φαίνεται πιθανό να τον επέλεξε για να αποφύγει τη σύγχυση που προκλήθηκε από τα απειροστά. Το γεγονός ότι ήταν μια συνειδητή επιλογή μπορεί να προκύψει από ένα χειρόγραφο του Gerhardt[84], αναγνωρισμένο ως εναλλακτικό σχέδιο για την πρώτη δημοσίευση των κανόνων του λογισμού, στον οποίο τα διαφορικά εισάγονται ως απειροστά.

Στο κείμενο του Leibniz το 1684 οι σχέσεις των διαφορικών όπως ορίζονται από τη σχέση (11), που περιέχει απειροστά, μετά τη διατύπωση της μαθηματικής πρότασης για τους κανόνες του λογισμού, αναφέρονται σχεδόν συμπτωματικά[85]:

---

[84] *Gerhardt, C. I., Die Geschichte der hoheren Analysis, erste Abteilung, Die Entdeckung der hoheren Analysis, Halle, 1855.*

[85] *Leibniz. Math. Schr. V, 1684, σελ. 223.*

> *«Η απόδειξη όλων αυτών των πραγμάτων είναι εύκολη για κάποιον που είναι καλά εξοικειωμένος με αυτά τα θέματα, αρκεί να λαμβάνει υπόψη του ένα σημείο που δεν έχει ακόμα εκτεθεί αρκετά, δηλαδή ότι τα dx, dy, du, dw, dz μπορούν να θεωρηθούν ανάλογα προς τις διαφορές, ή τις στιγμιαίες μειώσεις ή αυξήσεις, των αντίστοιχων x, y, υ, w, z. (...)…. για να βρεις μια εφαπτομένη πρέπει να σύρεις μια ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης που έχουν απείρως μικρή απόσταση μεταξύ τους ή την παραγόμενη πλευρά του πολυγώνου με άπειρο πλήθος γωνιών που για μας ισοδυναμεί με την καμπύλη. Αυτή η απείρως μικρή απόσταση, εντούτοις, μπορεί πάντα να εκφραστεί από ένα δοσμένο διαφορικό, όπως το du, ή από μια σχέση ως προς αυτό, δηλαδή από μια δοσμένη εφαπτομένη».*

Στην πραγματικότητα, σε επόμενα άρθρα του ο Leibniz δε χρησιμοποίησε τον ορισμό που προκύπτει από τη σχέση (11) αλλά αντιμετώπισε τα διαφορικά κατευθείαν ως απειροστά(εξαίρεση αποτελεί η απάντησή του στις αντιρρήσεις του Nieuwentijt). Κατά συνέπεια η επιλογή της σχέσης (11) ως ορισμού στο κείμενο του Leibniz του 1684[86] ήταν μάλλον ανεπιτυχής (πράγματι, ο όρος διαφορικό σε σχέση με αυτόν τον ορισμό είναι μια εσφαλμένη ονομασία). Το γεγονός αυτό πρέπει να έχει εμποδίσει την κατανόηση του παραπάνω άρθρου, το οποίο και για άλλους λόγους ήταν ήδη πολύ δυσνόητο.

Ο Leibniz επέστρεψε στον ορισμό της σχέσης (11) στην απάντησή του στην κριτική που έκανε ο Nieuwentijt στον λογισμό. Ο Nieuwentijt (το 1694) θα μπορούσε να αποδεχτεί την ύπαρξη των διαφορικών πρώτης τάξης (σκέφτηκε ότι αυτό ήταν μια συνέπεια άπειρης διαιρετότητας της ποσότητας) αλλά αρνήθηκε την ύπαρξη των διαφορικών ανώτερης τάξης. Στην απάντησή του σε αυτό ο Leibniz (το 1695) απέφυγε το οντολογικό επιχείρημα στην αντίρρηση του Nieuwentijt, λέγοντας ότι τα διαφορικά ήταν απείρως μικρές, και πραγματικές ποσότητες[87]:

> *«Επομένως δέχομαι όχι μόνο τις απείρως μικρές γραμμές, όπως τα dx, dy, ως πραγματικές ποσότητες στο είδος τους, αλλά και τα τετράγωνα ή τα ορθογώνιά τους, όπως τα dxdx, dydy, dxdy. Επίσης, δέχομαι τους*

---

[86] *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus." Acta Erud., Oct. 1684, σελ. 467-473.Math. Schr. V, σελ. 220-226.*

[87] *Leibniz. 1695; Math. Schr. V, σελ. 322*

> *κύβους και άλλες μεγαλύτερες δυνάμεις καθώς, και τα γινόμενα τους, πρωτίστως επειδή τα θεωρώ χρήσιμα για το συλλογισμό και την ανακάλυψη».*

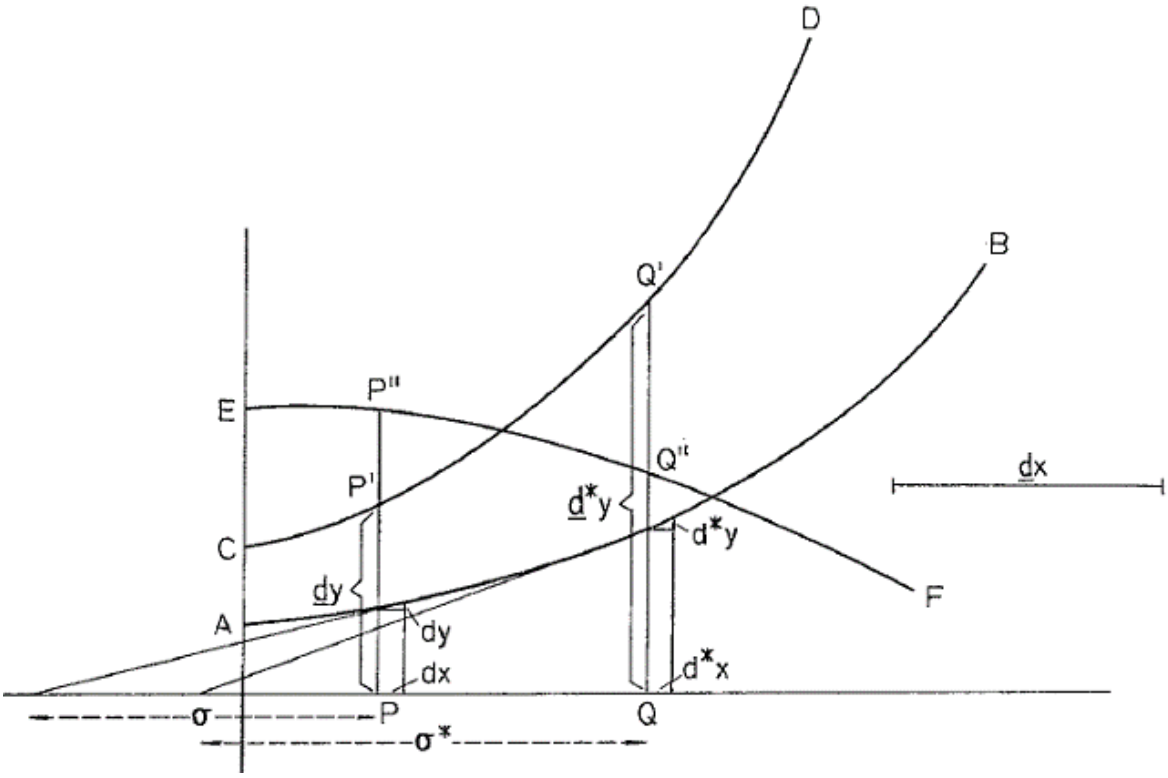
Αλλά, διαισθανόμενος ότι αυτό δεν θα ικανοποιούσε τον αντίπαλό του, ο Leibniz επέστρεψε σε αυτό το ερώτημα σε μια κατοπινή προσθήκη στο άρθρο[88], στο οποίο έδειξε ότι, αν και τα διαφορικά πρώτης και ανώτερης τάξης είναι απείρως μικρά, κάποιος μπορεί να προσδιορίσει πεπερασμένες μεταβλητές που μεταβάλλονται αναλογικά ως προς αυτά.

Στο σημείο αυτό, χρησιμοποίησε τον ορισμό της σχέσης (11), και το επιχείρημά του είναι σημαντικό επειδή υποδεικνύει πώς αυτός ο ορισμός υπονοεί την έννοια της συνάρτησης, καθώς και την υπόθεση ότι το διαφορικό του x είναι σταθερό. Προκειμένου να παρουσιαστεί το επιχείρημά του, συμβολίζουμε τα σταθερά dx και dy που καθορίζονται από τη σχέση (11) ως $\underline{d}x$ και $\underline{d}y$, αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τώρα τα dx και dy για να συμβολίσουμε αποκλειστικά τα απειροστά διαφορικά.

---

[88] *"Addenda ad (...) schediasma proximo mensi julio (...) insertum."*

Acta Erud., Aug., 1695, σελ. 369-372. Math. Schr. V, σελ. 327-328.



Σχήμα 27.

Ο Leibniz εξήγησε ότι, δεδομένης μιας καμπύλης AB (βλέπε το παραπάνω σχήμα[89]), κάποιος μπορεί να σχεδιάσει τα $\underline{d}y$ (αναφερόμενος στο παραπάνω άρθρο του, του έτους 1684) ως τεταγμένες κατά μήκος του άξονα των x, λαμβάνοντας με αυτόν τον τρόπο τη νέα καμπύλη CD, της οποίας οι τετμημένες μεταβάλλονται αναλογικά ως προς τα διαφορικά dy. Δηλαδή, εάν τα dx, dy και $d*x$, $d*y$ είναι τα απειροστά διαφορικά που αντιστοιχούν στα σημεία P και Q, προκύπτει η σχέση:

$PP':QQ'=\underline{d}y:\underline{d}*y=dy:d*y$. (12)

Η παρατήρηση του Leibniz στο ίδιο άρθρο, που αναφέρθηκε παραπάνω, ότι το διαφορικό όπως ορίστηκε από τη σχέση (11), μπορεί να θεωρηθεί ανάλογο προς τις στιγμιαίες αυξήσεις, ή τα απειροστά διαφορικά, προφανώς επίσης αφορούσε την αναλογικότητα, όπως προκύπτει από τη σχέση (12).

---

[89] *Το σχήμα σχεδιάστηκε από τον Bos. Η αντίστοιχη εξήγηση του Leibniz δε συνοδευέται από σχήμα.*

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στην καμπύλη CD παράγεται η καμπύλη EF, της οποίας οι τεταγμένες είναι ανάλογες προς τα διαφορικά της CD, και επομένως προς τα διαφορικά δευτέρας τάξης της AB:

$PP'':QQ''=ddy:d*d*y$.

Προφανώς, αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και άλλες φορές, και από αυτήν τη διαδικασία ο Leibniz απέδειξε ότι οι πεπερασμένες μεταβλητές γραμμές μπορούν να δοθούν ανάλογα προς τα διαφορικά οποιασδήποτε τάξης. Εντούτοις, αυτό που ο Leibniz δεν έδειξε είναι ότι αυτό το επιχείρημα ισχύει μόνο εάν υποτεθεί ότι $dx=d*x$, δηλαδή εάν υποτεθεί η πρόοδος των μεταβλητών έτσι ώστε το dx να παραμείνει σταθερό.

Πράγματι, $\underline{d}y:\underline{d}*y=\frac{y}{\sigma}\underline{d}x:\frac{y*}{\sigma*}\underline{d}x=\frac{dy}{dx}:\frac{d*y}{d*x}$,

έτσι ώστε $\underline{d}y:\underline{d}*y=dy:d*y$

μόνο εάν ισχύει η $dx=d*x$.

Τα μειονεκτήματα αυτού του ορισμού

Κατά συνέπεια η απάντηση του Leibniz στον Nieuweintijt παρουσιάζει σαφώς τις επιπτώσεις του ορισμού των διαφορικών από τη σχέση (11): ένας τέτοιος ορισμός υποδηλώνει την αυθαίρετη επιλογή μιας μεταβλητής ως ανεξάρτητης μεταβλητής της οποίας το διαφορικό πρέπει στη συνέχεια να υποτεθεί σταθερά. Αυτό, κακώς, περιορίζει τη γενικότητα του διαφορικού λογισμού, δεδομένου ότι επιβάλλει την επιλογή μιας πρόσθετης προόδου των μεταβλητών. Για παράδειγμα, η αφαίρεση των διαφορικών εξισώσεων ή των εκφράσεων από την παρατήρηση των σχημάτων, όπως στην περίπτωση της ακτίνας της καμπυλότητας, θα είχε εμποδιστεί σοβαρά εάν αυτός ο ορισμός είχε σημαντικότερο αντίκτυπο στον εμβρυακό λογισμό.

Από την άλλη μεριά, είναι επίσης εμφανές από τις μελέτες του Leibniz που συζητούνται σε αυτό το κεφάλαιο, ότι η ανησυχία για τα θεμέλια του λογισμού οδηγεί σε μια εισαγωγή των διαφορικών πηλίκων ή ακόμα και των παραγώγων, και ως εκ τούτου σε μια επικράτηση της έννοιας της συνάρτησης. Και πράγματι, όπως παρουσιάζεται στη μεταγενέστερη ιστορία των θεμελίων του λογισμού, η λύση βρέθηκε σε αυτήν την κατεύθυνση.

Κατά συνέπεια το αρχικό στάδιο του λογισμού δεν ήταν ευνοϊκό για τις μελέτες των θεμελίων του, και μάλιστα, τέτοιες μελέτες περισσότερο θα είχαν εμποδίσει, παρά ενδυναμώσει, την πρακτική του λογισμού σε εκείνη την περίοδο. Αυτό μπορεί να δικαιολογήσει γιατί ο Leibniz δυσκολεύτηκε να δημοσιεύσει κάτι σχετικό με τις

μελέτες του προς αυτήν την κατεύθυνση, καθώς επίσης, γενικά, γιατί τέτοιες μελέτες θα μπορούσαν να επικρατήσουν πολύ αργότερα, όταν καθιερώθηκε και σταθεροποιήθηκε η έννοια της συνάρτησης στην ανάλυση.

Το Σχέδιο του Euler να Αποβληθούν τα Διαφορικά Ανώτερης Τάξης από την Ανάλυση

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάται η αντιμετώπιση των διαφορικών και των διαφορικών ανώτερης τάξης από τον Euler. Μετά τις διεισδυτικές μελέτες των θεμάτων των σχετικών με την απροσδιοριστία των διαφορικών ανώτερης τάξης, ο Euler κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, ακριβώς εξαιτίας της απροσδιοριστία τους, τέτοια διαφορικά πρέπει να απαλειφθούν από την ανάλυση. Επίσης, υπέδειξε τις μεθόδους με τις οποίες αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί, και θα δούμε ότι σε αυτές τις μεθόδους ο διαφορικός συντελεστής και η έννοια της συνάρτησης μιας μεταβλητής παίζει σημαντικό ρόλο. Κατά συνέπεια, η απροσδιοριστία των διαφορικών ανώτερης τάξης ήταν μια από τις κύριες αιτίες εμφάνισης της παραγώγου ως θεμελιώδη έννοια του λογισμού.

Ο Euler γνώριζε καλά τα προβλήματα για τις ασυνέπειες του απείρως μικρού, και στο Institutiones Calculi Differentialis (1755) αφιέρωσε μεγάλα μέρη της εισαγωγής και του 2ου κεφαλαίου σε μια εξέταση αυτών των προβλημάτων. Ο στόχος των επιχειρημάτων του ήταν να παρουσιαστεί ότι, αν και η έννοια του απείρως μικρού δεν μπορεί να υποστηριχτεί αυστηρά, η υπολογιστική πρακτική που στηρίζεται στα διαφορικά οδηγεί στα σωστά αποτελέσματα. Τα επιχειρήματά του έχουν συζητηθεί επαρκώς από τους ιστορικούς των μαθηματικών, έτσι ώστε μπορούμε να περιοριστούμε σε μια πολύ συνοπτική περίληψη. Ο Euler υποστήριξε ότι οι απείρως μικρές ποσότητες είναι ίσες με το μηδέν, αλλά ότι δύο ποσότητες που είναι ίσες και οι δύο με το μηδέν, μπορούν να έχουν έναν σταθερό λόγο. Αυτός ο λόγος των μηδενικών ήταν το πραγματικό θέμα του διαφορικού λογισμού, και αποτέλεσε[90]

> «*μία μέθοδο καθορισμού του λόγου των ελάχιστων αυξήσεων, τις οποίες οι συναρτήσεις αποκτούν όταν μία ελάχιστη αύξηση δίνεται στη μεταβλητή ποσότητα της οποίας είναι συναρτήσεις*».

Ο Euler θεώρησε επίσης αυτόν το λόγο των μηδενικών ως όριο. Εξετάζοντας το λόγο $\Delta(x)^2 : \Delta x$ για $\Delta x = \omega$, ανέφερε[91]:

---

[90] *Euler, Opera (I) X, 1755, σελ. 5.*

[91] *Euler, Opera (I) X, 1755, σελ.7.*

> *«Αλλά είναι σαφές ότι όσο μικρότερη ληφθεί η αύξηση ω, τόσο περισσότερο προσεγγίζεται αυτός ο λόγος* $(2x:1)$*. Ως εκ τούτου είναι σωστό και αρκετές φορές κατάλληλο να θεωρήσει αυτές τις αυξήσεις αρχικά ως πεπερασμένες και στη συνέχεια να τις αναπαραστήσει σε σχήματα, εάν αυτές είναι κατάλληλες για να επεξηγήσουν το θέμα, ως πεπερασμένες. Στη συνέχεια, κάποιος πρέπει να φανταστεί αυτές τις αυξήσεις να γίνονται μικρότερες και μικρότερες, και έτσι ο λόγος τους να πλησιάζει όλο και περισσότερο σε ένα ορισμένο όριο, στο οποίο μπορεί να φθάσει μόνο όταν εξαφανιστούν πλήρως αυτές οι αυξήσεις. Αυτό το όριο, που αποτελεί τον έσχατο λόγο των αυξήσεων, είναι το αληθινό αντικείμενο του διαφορικού λογισμού.»*

Η μέθοδος των υπολογισμών με τη βοήθεια των διαφορικών, έπρεπε στην πραγματικότητα να ερμηνευθεί συσχετιζόμενη με αυτούς τους λόγους[92]:

> *«Αν και οι κανόνες, όπως παρουσιάζονται συνήθως, φαίνονται να αφορούν τις εκλιπούσες αυξήσεις, οι οποίες πρέπει να καθοριστούν, τα συμπεράσματα δεν προέρχονται ποτέ από την εκτίμηση των αυξήσεων ξεχωριστά, αλλά πάντα από τον λόγο τους. (...) Αλλά προκειμένου να περιλάβουν και να αναπαραστήσουν αυτούς τους συλλογισμούς στους υπολογισμούς ευκολότερα, οι εκλιπούσες αυξήσεις συμβολίζονται από συγκεκριμένα σύμβολα, αν και αποτελούν ένα τίποτα, και δεδομένου ότι αυτά τα σύμβολα χρησιμοποιούνται, δεν υπάρχει καμία δικαιολογία ώστε να μην τους δίνονται συγκεκριμένα ονόματα.»*

Κατά συνέπεια το παραπάνω επιχείρημα δικαιολόγησε τη χρήση των διαφορικών, και ο Euler προχώρησε σε αυτήν τη βάση την εισαγωγή του διαφορικού λογισμού. Αφού αντιμετώπισε στα πρώτα δύο κεφάλαια, τη θεωρία των πεπερασμένων ακολουθιών διαφοράς, καθόρισε το διαφορικό λογισμό ως το λογισμό των απειροστών διαφορών[93]:

> *«Η ανάλυση των απείρων, με την οποία ασχολούμαι τώρα, δεν αποτελεί τίποτα άλλο από μια εξαιρετική περίπτωση της μεθόδου των διαφορών που αναπτύσσονται στο πρώτο κεφάλαιο, η οποία εμφανίζεται, όταν οι*

---

[92] *Euler, Opera (I) X, 1755, σελ. 5.*

[93] *Euler, Opera (I) X, 1755, §114.*

> *διαφορές, οι οποίες προηγούμενα θεωρούνταν πεπερασμένες, λαμβάνονται απείρως μικρές».*

Τα παραπάνω βρίσκονται μάλλον σε αντίθεση με τις παρατηρήσεις που αναφέρθηκαν προηγούμενα, μια αντίφαση που δείχνει ότι τα επιχειρήματά του για το απείρως μικρό δεν επηρέασαν πραγματικά την παρουσίαση του λογισμού.

Οι τελεστές διαφόρισης και ολοκλήρωσης

Αυτή η εισαγωγή του λογισμού όπως σχετίζεται με τις ακολουθίες απειροστών διαφορών είναι συναφής με τη σύλληψη του λογισμού του Leibniz, όπως εξετάστηκε στο κεφάλαιο 2. Εντούτοις, μια σημαντική διαφορά, που απεικονίζει τη μετάβαση από μια γεωμετρική ανάλυση σε μια ανάλυση των συναρτήσεων και των τύπων, πρέπει να υποδειχθεί σε αυτό το σημείο: οι απειροστές ακολουθίες, μέσω αυτής της ανάλυσης δεν προκαλούνται από ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος γωνιών που αντιπροσωπεύει μια καμπύλη, αλλά από μια συνάρτηση που, εάν οι εξαρτώμενες μεταβλητές παίρνουν τιμές από μία απειροστή ακολουθία x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$,... δίνει την ακολουθία $f(x)$, $f(x+dx)$, $f(x+2dx)$, $f(x+3dx)$,... .

Η διαφόριση είναι, για τον Euler, ένας τελεστής που συσχετίζει μια συνάρτηση, ή γενικά σε μια ποσότητα, με το διαφορικό της[94]:

> *«Στο διαφορικό λογισμό διδάσκονται οι κανόνες μέσω των οποίων μπορεί να βρεθεί το πρώτης τάξης διαφορικό οποιουδήποτε δοθέντος μεγέθους. Τα δεύτερα διαφορικά βρίσκονται από τη διαφόριση του πρώτου, τα τρίτα διαφορικά προκύπτουν με την ίδια διαδικασία από τα δεύτερα και με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν τα επόμενα διαφορικά από τα προηγούμενα. Κατά συνέπεια ο διαφορικός λογισμός περιλαμβάνει τη μέθοδο εύρεσης όλων των διαφορικών οποιασδήποτε τάξης. (...) Η διαφόριση συμβολίζει τη διαδικασία από την οποία προκύπτουν τα διαφορικά.»*

Η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη διαδικασία, αλλά ο Euler έδειξε επίσης τη σχέση της ολοκλήρωσης με την άθροιση.

---

[94] *Euler, Opera (I) X, 1755, §138.*

Η διαφόριση αυξάνει την τάξη του απείρως μικρού μεγέθους. Η ολοκλήρωση επιτυγχάνει το αντίστροφο, όπου κυριαρχεί το απείρως μεγάλο. Για τις τάξεις του απείρου, ο Euler εξέφρασε απόψεις παρόμοιες με αυτές που εξετάσαμε στην παράγραφο §2.13, αλλά ταυτόχρονα επέκτεινε τις ιδέες του πάνω στο ίδιο θέμα.

Η αντιμετώπιση από τον Euler της διαφόρισης ανώτερης τάξης και ο ρόλος του διαφορικού συντελεστή περιγράφεται στο κεφάλαιο IV του έργου του, το 1755 (§124)[95]. Εκεί ο Euler εισήγαγε τη διαφόριση ανώτερης τάξης κάτω από την υπόθεση ενός σταθερού dx, ή ισοδύναμα $ddx = 0$. Αυτό είναι σύμφωνο με την άποψή που είχε ο Euler ότι ο διαφορικός λογισμός αποτελεί επέκταση του λογισμού των πεπερασμένων διαφορών, γιατί στον τελευταίο είχε μελετήσει τις ακολουθίες $f(a)$, $f(\alpha+\omega)$, $f(a+2\omega)$,... . Θέτοντας τώρα το απείρως μικρό $\omega = dx$, κατέληξε στην περίπτωση όπου το dx είναι σταθερό. Συνεπώς στα κεφάλαια V και VI του 1755 η διαφόριση των αλγεβρικών και υποθετικών συναρτήσεων αντιμετωπίζεται κάτω από την υπόθεση ενός σταθερού dx.

Εντούτοις, ήδη στο κεφάλαιο IV ο Euler σχολίασε τον περιορισμό που υπονοήθηκε σε αυτήν την υπόθεση. Εξέτασε την εξάρτηση των διαφορικών ανώτερης τάξης από την πρόοδο των μεταβλητών, χωρίζοντας αυτήν την εξάρτηση σε τρεις σημαντικές περιπτώσεις. Παραθέτουμε αυτές τις περιπτώσεις εδώ επειδή περιέχουν μία σαφή έκθεση των προβλημάτων σχετικά με την απροσδιοριστία των διαφορικών ανώτερης τάξης. Συγκεκριμένα, πρέπει να τονιστούν τα ακόλουθα σημεία: η πρόοδος των μεταβλητών είναι αυθαίρετη. Τα διαφορικά πρώτης τάξης δεν εξαρτώνται από την πρόοδο αλλά από τα διαφορικά ανώτερης τάξης: τα διαφορικά ανώτερης τάξης των συναρτήσεων μπορούν να εκφραστούν από τους διαφορικούς συντελεστές και το διαφορικό πρώτης τάξης από την ανεξάρτητη μεταβλητή. Η πρόοδος των μεταβλητών μπορεί να καθοριστεί ορίζοντας τη μεταβλητή με σταθερό το διαφορικό πρώτης τάξης[96].

> *Το δεύτερο και τα επόμενα διαφορικά δεν μπορούν να υπάρξουν εκτός αν υποτεθεί οι διαδοχικές τιμές του x ότι ακολουθούν έναν δεδομένο νόμο. Δεδομένου ότι αυτός ο νόμος είναι αυθαίρετος, υποθέτουμε ότι αυτές οι τιμές ακολουθούν αριθμητική πρόοδο, διότι μία τέτοια πρόοδος είναι η ευκολότερη καθώς επίσης, και η περισσότερο κατάλληλη. Για τον ίδιο λόγο τίποτα δεν μπορεί να δηλωθεί με βεβαιότητα για τα δεύτερα*

---

[95] *Euler, L., Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doetrina serierum,St. Petersburg, 1755, Opera (I) X (1913).*

[96] *Euler, Opera, 1755, §§ 128-130.*

διαφορικά, εκτός και αν τα πρώτα διαφορικά, με τα οποία η μεταβλητή ποσότητα x υποτίθεται συνεχώς αυξανόμενη, προχωρούν σύμφωνα με έναν δεδομένο νόμο. Σε αυτό το σημείο εκ των προτέρων υποθέτουμε ότι τα πρώτα διαφορικά του x, δηλαδή τα dx, dx ^{I}, dx ^{II}, κ.λπ., είναι όλα ίσα μεταξύ τους, από όπου προκύπτει ότι τα δεύτερα διαφορικά ισούνται:

$ddx = dx^{I} - dx = 0$, $ddx^{I} = dx^{II} - dx^{I} = 0$ *κ.λπ.*

Κατά συνέπεια τα δεύτερα και ανώτερης τάξης διαφορικά εξαρτώνται από την τάξη που τα διαφορικά της μεταβλητής ποσότητας x έχουν μεταξύ τους, και αυτή η τάξη είναι αυθαίρετη. Δεδομένου ότι αυτή η κατάσταση δεν επηρεάζει τα διαφορικά πρώτης τάξης, υπάρχει μια τεράστια διαφορά μεταξύ των πρώτων και ανώτερων διαφορικών, όσον αφορά τον τρόπο που υπολογίζονται.

Αλλά εάν οι διαδοχικές τιμές του x, x ^{I}, x ^{II}, x ^{III}, x ^{IV}, υποτίθενται ότι δεν ακολουθούν αριθμητική πρόοδο, αλλά ακολουθούν οποιοδήποτε άλλο νόμο, τότε τα πρώτα διαφορικά τους dx, dx ^{I}, dx ^{II} κ.λπ. δεν θα είναι ίσα το ένα με το άλλο και ως εκ τούτου το ddx δεν θα γίνεται μηδέν. Για αυτόν τον λόγο τα δεύτερα διαφορικά οποιωνδήποτε συναρτήσεων του x αποκτούν άλλη μορφή, διότι εάν το πρώτο διαφορικό μιας τέτοιας συνάρτησης y είναι ίσο με το pdx, τότε, για να βρεθεί το δεύτερο διαφορικό του, δεν θα είναι αρκετό να πολλαπλασιαστεί το διαφορικό του p με το dx, αλλά πρέπει επίσης, να θεωρήσουμε το διαφορικό του dx, το οποίο είναι ddx. Το δεύτερο διαφορικό προκύπτει εάν το pdx αφαιρεθεί από την επόμενη διαδοχικά τιμή του, η οποία προκύπτει εάν το x +dx αντικαταστήσει το x, και το dx +ddx αντικαταστήσει το dx. Υποθέστε επομένως ότι η επόμενη τιμή του p είναι το p + qdx, οπότε η επόμενη τιμή του pdx θα είναι

$$= (p + qdx)(dx + ddx) = pdx + pddx + qdx^2 + qdxddx$$

από την οποία απαλείφεται το pdx, έτσι ώστε το δεύτερο διαφορικό να ισούται με

$$ddy = pddx + qdx^2 + qdxddx = pddx + qdx^2,$$

επειδή ο όρος qdxddx μηδενίζεται συγκριτικά με το pddx.

Αν και η ισότητα είναι η απλούστερη και η περισσότερο χρήσιμη σχέση που μπορεί να υποτεθεί μεταξύ όλων των αυξήσεων του x, συμβαίνει συχνά να μην υποτίθενται ίσες οι αυξήσεις της μεταβλητής ποσότητας x,

της οποίας είναι συνάρτηση το y, αλλά να θεωρούνται ίσες κάποιες άλλες ποσότητες των οποίων το x είναι συνάρτηση. Συχνά επίσης τα πρώτα διαφορικά μιας τέτοιας ποσότητας υποτίθενται ίσα αν και η σχέση αυτής της ποσότητας με το x παραμένει άγνωστη. Στην πρώτη περίπτωση τα δεύτερης και ανώτερης τάξης διαφορικά του x εξαρτώνται από τη σχέση του x με την ποσότητα που υποτίθεται ότι αυξάνεται ομοιόμορφα, και από αυτήν την ποσότητα πρέπει να οριστούν με τον ίδιο τρόπο όπως έχουμε υποδείξει τον ορισμό του δευτέρου διαφορικού του y από τα διαφορικά του x. Στην τελευταία περίπτωση τα δεύτερα και ανώτερης τάξης διαφορικά του x πρέπει να θεωρηθούν άγνωστα και να συμβολιστούν ddx, d^3x, d^4x, κ.λπ.».

Η έννοια των διαφορικών ανώτερης τάξης εξαρτάται από την πρόοδο των μεταβλητών στις οποίες αναφέρονται. Ως εκ τούτου η έννοια των τύπων για τους οποίους εμφανίζονται τα διαφορικά ανώτερης τάξης εξαρτάται με τον ίδιο τρόπο από την πρόοδο των μεταβλητών, καθώς και από τις επιπτώσεις αυτού του γεγονότος για το οποίο ο Euler αφιέρωσε ένα μεγάλο μέρος του όγδοου και ένατου κεφαλαίου του άρθρου 1755.

Στις παραγράφους 251-261 του κεφαλαίου VIII ο Euler εισήγαγε την απροσδιοριστία των τύπων που περιλαμβάνουν τα διαφορικά ανώτερης τάξης μέσα από τα παραδείγματα των ddx και $\frac{x^3d^3x}{dxddx}$. Εάν το dx θεωρηθεί σταθερό, τότε προκύπτει $ddx=0$ και $\frac{x^3d^3x}{dxddx}=\frac{0}{0}$. Αλλά εάν το $d(x^2)$ υποτεθεί σταθερά, τότε $ddx=-\frac{dx^2}{x}$ και $\frac{x^3d^3x}{dxddx}=-3x^2$. Γενικότερα, εάν το $d(x^n)$ υποτεθεί σταθερά, τότε $ddx=-\frac{n-1}{x}dx^2$ και $\frac{x^3d^3x}{dxddx}=-(2n-1)x^2$.

Για την περίπτωση των τύπων που περιλαμβάνουν δύο αλληλοεξαρτώμενες μεταβλητές x και y, ο Euler εξέτασε τον τύπο $\frac{yddx+xddy}{dxdy}$, ο οποίος όπως απέδειξε εξαρτάται από την πρόοδο των μεταβλητών εξετάζοντας την ειδική περίπτωση της σχέσης $y=x^2$ μεταξύ των x και y. Σε αυτή την περίπτωση, εάν το dx είναι σταθερό, τότε προκύπτει

$$\frac{yddx+xddy}{dxdy}=\frac{xddy}{dxdy}=\frac{x\cdot 2dx^2}{dx\cdot 2xdx}=1$$

Ενώ, εάν το dy είναι σταθερό, τότε προκύπτει

$$\frac{yddx + xddy}{dxdy} = \frac{yddx}{dxdy} = \frac{x^2 \cdot \frac{-2}{2x} dx^2}{dx \cdot 2xdx} = -\frac{1}{2}.$$

Ο Euler από τα παραπάνω κατέληξε στο συμπέρασμα ότι μια έκφραση που περιλαμβάνει τα διαφορικά ανώτερης τάξης των αλληλοεξαρτώμενων μεταβλητών θα εξαρτηθεί γενικά από την πρόοδο των μεταβλητών. Μόνο στην περίπτωση που τα διαφορικά ανώτερης τάξης ακυρώνουν το ένα το άλλο, καθώς αντικαθίσταται η σχέση μεταξύ των μεταβλητών, ο τύπος είναι ανεξάρτητος της προόδου των μεταβλητών. Ως παράδειγμα παρουσίασε τον λόγο $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$, όπου αντικατέστησε $y = x^2$, $y = x^n$, και $y = -\sqrt{1-x^2}$ αντίστοιχα, αποδεικνύοντας ότι σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι μια πεπερασμένη έκφραση μόνο του x και επομένως ανεξάρτητη της προόδου των μεταβλητών. Για να αποδειχθεί ότι ο όρος $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ είναι ανεξάρτητος από την πρόοδο των μεταβλητών για οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των x και y, ο Euler εισήγαγε τους διαφορικούς συντελεστές p και q, που ορίστηκαν από τις σχέσεις dy =pdx και το dp=qdx. Δεδομένου ότι αυτοί οι ορισμοί περιλαμβάνουν μόνο τα διαφορικά πρώτης τάξης, οι διαφορικοί συντελεστές p και q είναι ανεξάρτητοι από την πρόοδο των μεταβλητών. Προκύπτει ότι $ddy = pddx + qdx^2$

από όπου $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = \frac{pdxddx - dx(pddx + qdx^2)}{dx^3} = -q$ έτσι ώστε ο όρος $\frac{dyddx - dxddy}{dx^3}$ δεν εξαρτάται από την πρόοδο των μεταβλητών.

Μετά από αυτά τα παραδείγματα των συνεπειών της απροσδιοριστίας των διαφορικών ανώτερης τάξης, ο Euler εισήγαγε ένα σημαντικό επιχείρημα, το συμπέρασμα του οποίου είναι ότι τα διαφορικά ανώτερης τάξης πρέπει να εξαλειφθούν από την ανάλυση, επειδή, σε κάθε περίπτωση, είτε μπορούν να αποβληθούν από την έκφραση στην οποία εμφανίζονται, ή είναι εγγενώς ασαφή. Εάν ένα συγκεκριμένο διαφορικό πρώτης τάξης υποτεθεί σταθερό, τα διαφορικά ανώτερης τάξης μπορούν να αποβληθούν από τις εκφράσεις τους σύμφωνα με τα διαφορικά πρώτης τάξης. Στις εκφράσεις που είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών τα διαφορικά ανώτερης τάξης μπορούν να εξαλειφθούν επειδή ακυρώνουν το ένα το άλλο. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή εάν καμία πρόοδος των μεταβλητών δεν διευκρινίζεται και οι τύποι που αναφέρονται

εξαρτώνται από την πρόοδο, τα διαφορικά ανώτερης τάξης είναι χωρίς νόημα και ασαφή, επομένως μη αποδεκτά στην ανάλυση. Επομένως[97]

> *«Έπεται από αυτό ότι τα δεύτερα και ανώτερης τάξης διαφορικά στην πραγματικότητα ποτέ δεν εμφανίζονται στο λογισμό και αυτό, εξαιτίας της ασάφειας της έννοιάς τους. Δεν έχουν καμία περαιτέρω χρήση στην ανάλυση. (...)*
>
> *Ήταν απαραίτητο, εντούτοις, να αναπτύξουμε τη μέθοδο αντιμετώπισή τους, επειδή χρησιμοποιούνται συχνά, αλλά μόνο εικονικά, στο λογισμό. Αλλά θα υποδείξουμε σύντομα μια μέθοδο με την οποία τα δεύτερα και ανώτερης τάξης διαφορικά μπορούν πάντα να απαλειφθούν.»*

Ο Euler προχώρησε στη συνέχεια για να επιδείξει πώς τα διαφορικά ανώτερης τάξης μπορούν πραγματικά να απαλειφθούν από τους τύπους.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποίησε για αυτήν την απαλοιφή, και που θα συνοψίσουμε στη συνέχεια, είναι πολύ σημαντικές στην ιστορία των θεμελιωδών εννοιών της ανάλυσης, επειδή περιλαμβάνουν τη συστηματική χρήση των διαφορικών συντελεστών. Από την εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών, ο Euler υποβίβασε τα διαφορικά ανώτερης τάξης σε διαφορικά πρώτης τάξης, επιτυγχάνοντας με αυτόν τον τρόπο την ανεξαρτησία της προόδου των μεταβλητών.

Σε αυτό το σημείο η χρήση των διαφορικών συντελεστών p, q, r, κ.λπ., μιας σχέσης μεταξύ των x και y, οριζόμενης από τις σχέσεις dy =pdx, dp=qdx, dq =rdx, κ.λπ., υπονοεί την επιλογή μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (σε αυτήν την περίπτωση της x) της οποίας τα y, p, q, r, κ.λπ. θεωρούνται συναρτήσεις. Κατά συνέπεια οι διαφορικοί συντελεστές είναι υπολογιστικοί και βρίσκονται εννοιολογικά πολύ κοντά στις παραγώγους-- μόνο η χρήση των ορίων λείπει από τον ορισμό τους.

Η εμφάνιση και η συστηματική χρήση των διαφορικών συντελεστών πρέπει εκ των προτέρων να θεωρηθούν ως το σημαντικότερο στάδιο στη διαδικασία εμφάνισης της παραγώγου ως θεμελιώδη έννοιας του λογισμού.

Η χρήση από τον Euler των διαφορικών συντελεστών συνδέθηκε άμεσα με την πεποίθησή του ότι η απροσδιοριστία των διαφορικών ανώτερης τάξης είναι ένα

---

[97] *Euler, Opera, 1755, §263.*

τόσο ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό γνώρισμα που τα διαφορικά ανώτερης τάξης πρέπει να εξαλειφθούν εξ ολοκλήρου από την ανάλυση. Κατά συνέπεια μπορούμε να πούμε ότι μια από τις σημαντικότερες αιτίες εμφάνισης της παραγώγου αποτέλεσε η απροσδιοριστία των διαφορικών ανώτερης τάξης.

Οι μέθοδοι απαλοιφής των διαφορικών ανώτερης τάξης

Οι μέθοδοι απαλοιφής των διαφορικών ανώτερης τάξης που ο Euler παρουσίασε στο άρθρο του 1765 (παράγραφοι 264-270) μπορούν να συνοψιστούν ως εξής: Εάν μια έκφραση περιλαμβάνει μόνο το μεταβλητό x και τα διαφορικά της, και εάν το t είναι η μεταβλητή της οποίας το διαφορικό dt είναι σταθερό, οι διαφορικοί συντελεστές p, q, r, κ.λπ. μπορούν να εισαχθούν ως εξής:

$dx = pdt$, $dp = qdt$, $dq = rdt$ κ.λπ.

Τα διαφορικά μπορούν στη συνέχεια να εκφραστούν ως εξής:

$dx = pdt$, $ddx = qdt^2$, $d^3x = rdt^3$ κ.λπ.

αντικατάσταση των οποίων παράγει έναν τύπο στον οποίο το μόνο απειροστό που παρουσιάζεται είναι μία δύναμη του dt. Επιπλέον, καθώς

$$dt = \frac{dx}{p},$$

και το p, q, r, κ.λπ. μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις του x, προκύπτει

$d^2x = \frac{q}{p^2}dx^2$, $d^3x = \frac{r}{p^3}dx^3$ κ.λπ.,

οπότε η αρχική έκφραση μπορεί να υποβιβαστεί σε μια μορφή στην οποία το μόνο απειροστό είναι μια δύναμη του dx και στην οποία το t δεν εμφανίζεται ρητά.

Για τις εκφράσεις που περιλαμβάνουν δύο αλληλοεξαρτώμενες μεταβλητές x και y, η περίπτωση ενός σταθερού dx αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών ως εξής:

$dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, κ.λπ.,

από τις οποίες σχέσεις τα πρώτα και διαφορικά ανώτερης τάξης του y μπορούν να απαλειφθούν:

$dy = pdx$, $ddy = qdx^2$, $d^3x = rdx^3$ κ.λπ.

Η περίπτωση να είναι ο όρος dy σταθερός αντιμετωπίζεται ανάλογα. Εάν στη γενική περίπτωση ο όρος dt είναι σταθερός και τα x, y εξαρτώνται από το t κάποιος μπορεί να προχωρήσει ως εξής:

$dx = pdt$, $dp = qdt$, $dq = rdt$, κ.λπ.,

$ddx = qdt^2$, $d^3x = rdt^3$, κ.λπ.

$dy = Pdt$, $dP = Qdt$, $dQ = Rdt$ κ.λπ.

$ddy = Qdt^2$, $d^3y = Rdt^3$, κ.λπ.

Στις περιπτώσεις όπου το σταθερό διαφορικό εκφράζεται συναρτήσει των x, y, dx και dy, η απαλοιφή των διαφορικών ανώτερης τάξης μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τους διαφορικούς συντελεστές της σχέσης μεταξύ των x και y:

$dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$.

Ο Euler παρουσίασε αυτή την διαδικασία στις περιπτώσεις των προόδων των μεταβλητών που έχουν ως σταθερές τους όρους ydx και $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Για παράδειγμα η αντιμετώπιση της περίπτωσης όπου ydx σταθερό. Έχουμε:

$yddx + dxdy = 0$,

από όπου προκύπτει:

$$ddx = -\frac{dxdy}{y} = -\frac{p}{y}dx^2$$

από τους οποίους τύπους με περαιτέρω διαφόριση μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους d^3x, d^4x, κ.λπ. Επίσης, ισχύει

$$ddy = d(pdx) = qdx^2 + pddx = \left(q - \frac{p^2}{y}\right)dx^2 \ ,$$

από τους οποίους τύπους με περαιτέρω διαφόριση μπορούν να παραχθούν οι όροι d^3y, d^4y, κ.λπ. Με τη βοήθεια αυτών των σχέσεων, οποιαδήποτε έκφραση που περιλαμβάνει τα διαφορικά ανώτερης τάξης, κάτω από την υπόθεση ότι ydx σταθερό, μπορεί να υποβιβασθεί σε μια έκφραση που περιλαμβάνει κάποια δύναμη του dx ως το μοναδικό απειροστό, και ως εκ τούτου είναι ανεξάρτητη από την

πρόοδο των μεταβλητών. Ο Euler ολοκλήρωσε την έκθεσή του για τις τεχνικές απαλοιφής των διαφορικών ανώτερης τάξης με μια σειρά παραδειγμάτων.

Διαφορικές εξισώσεις και εξισώσεις παραγώγων

Προφανώς, η απαλοιφή των διαφορικών ανώτερης τάξης επιδρά άμεσα στην αντιμετώπιση των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης. Στην πραγματικότητα, τέτοιες εξισώσεις μετασχηματίζονται σε εξισώσεις μεταξύ των διαφορικών συντελεστών και με αυτόν τον τρόπο αποκτούν τη μορφή με την οποία αντιμετωπίζονται σήμερα οι διαφορικές εξισώσεις (παρά το όνομά τους), δηλαδή μετατρέπονται σε εξισώσεις μεταξύ των παραγώγων.

Είναι αρκετά ενδιαφέρον, επομένως, σε αυτό το σημείο να συνοψιστούν τα επιχειρήματα των θέσεων του Euler για το μετασχηματισμό των διαφορικών εξισώσεων στις εξισώσεις μεταξύ των διαφορικών συντελεστών, τους οποίους εισήγαγε στην αρχή του δεύτερου τόμου, στην ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης, από το βιβλίο του Institutiones Calculi Integralis (1768).

Ο Euler εισήγαγε τους διαφορικούς συντελεστές στον ορισμό που έδωσε για τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης[98]:

> «*Δοσμένων δύο μεταβλητών* x *και* y*, εάν dy =pdx και dp = qdx, οποιαδήποτε εξίσωση που ορίζει μια σχέση μεταξύ των όρων* x*,* y*, p και q καλείται διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης των μεταβλητών* x *και* y ».

Ως πλεονεκτήματα της χρήσης των διαφορικών συντελεστών, ο Euler ανέφερε ότι η πρόοδος των μεταβλητών δεν χρειάζεται να υποδειχθεί και ότι μόνο οι πεπερασμένες ποσότητες (αφού ακόμα και τα διαφορικά πρώτης τάξης απουσιάζουν από τον ορισμό) εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση.

Αφού έχει δείξει πώς μια εξίσωση μεταξύ διαφορικών, για μια δεδομένη πρόοδο των μεταβλητών, μπορεί να υποβιβασθεί σε μια εξίσωση μεταξύ των διαφορικών συντελεστών, και αντίστροφα, ο Euler ανέφερε ως επιπλέον πλεονέκτημα ότι κατά αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η ύπαρξη μεγάλου πλήθους διαφορικών εξισώσεων

---

[98] *Euler 1768 (τομ. II,) § 706.*

για την ίδια σχέση μεταξύ των x και y. Για το συνήθη τρόπο αντιμετώπισης των διαφορικών εξισώσεων η ίδια σχέση μεταξύ των x και y δίνει τη δυνατότητα για διαφορετικούς τύπους της σχετικής διαφορικής εξίσωσης, σύμφωνα με την επιλογή της προόδου των μεταβλητών.

Επιπλέον, οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι έγκυρες όσον αφορά τις διάφορες προόδους των μεταβλητών είναι συνήθως περισσότερο περίπλοκες από την αντίστοιχη εξίσωση μεταξύ των διαφορικών συντελεστών, ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα που ο Euler παρουσίασε σε διάφορα παραδείγματα.

Η ύπαρξη πολλών διαφορικών εξισώσεων (σύμφωνα με την επιλογή της προόδου των μεταβλητών), για την ίδια σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y, υποβάλλει την ιδέα του αντιστρόφου ερωτήματος, δηλαδή εάν μια εξίσωση μεταξύ διαφορικών ανώτερης τάξης μπορεί να υποδηλώσει διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των x και y (διαφορετικές λύσεις) αρκεί να θεωρείται έγκυρη όσον αφορά τις διαφορετικές προόδους των μεταβλητών. Αυτό το ερώτημα της εξάρτησης της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης από την πρόοδο των μεταβλητών αντιμετωπίστηκε από τον Euler στο ένατο κεφάλαιο του 1755. Πράγματι, αν και ο Euler υπέδειξε τον τρόπο με τον οποίο τα διαφορικά ανώτερης τάξης θα μπορούσαν να εξαλειφθούν από την ανάλυση, αντιμετώπισε δύο επιπλέον πτυχές αυτών των διαφορικών, και συγκεκριμένα, μετασχηματισμός των κανόνων για τους τύπους που αφορούν διαφορετικές προόδους των μεταβλητών καθώς, και των κριτηρίων ώστε οι διαφορικές εξισώσεις να είναι ανεξάρτητες από την πρόοδο των μεταβλητών.

Στους κανόνες μετασχηματισμού, η αντιμετώπισή τους από τον Euler διαφέρει από την αντιμετώπισή μόνο στο γεγονός ότι είναι περισσότερο επιμελημένη. Οι διαφορικοί συντελεστές p, q, r, κ.λπ., μπορούν να εκφραστούν από τα διαφορικά ανώτερης τάξης, ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών, ως εξής:

$$p = \frac{dy}{dx},$$

$$q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3},$$

$$r = \frac{dx^2 d^3 y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3 x}{dx^5}, \text{ κ.λπ.}$$

Ο μετασχηματισμός ενός τύπου που ισχύει για μία πρόοδο P_1 των μεταβλητών σε έναν τύπο που αντιπροσωπεύει την ίδια μαθηματική οντότητα για μία πρόοδο P_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα τα διαφορικά ανώτερης τάξης αποβάλλονται με την εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών με τον τρόπο που συζητήθηκε παραπάνω. Κατόπιν εφαρμόζεται η αντικατάσταση των τύπων (1),

παρέχοντας ως αποτέλεσμα έναν τύπο που περιλαμβάνει τα διαφορικά ανώτερης τάξης αλλά είναι ανεξάρτητος της προόδου των μεταβλητών. Από αυτόν τον τύπο, με την αντικατάσταση της σχέσης μεταξύ των διαφορικών που χαρακτηρίζουν την πρόοδο P_2, παράγεται ο ζητούμενος τύπος.

Ο Euler εξήγησε αυτήν την διαδικασία διεξοδικά με τη βοήθεια παραδειγμάτων, καταλήγοντας τελικά σε έναν κατάλογο κανόνων μετασχηματισμού για τις πιο συνηθισμένες από τις προόδους των μεταβλητών, δηλαδή με dx σταθερά, dy σταθερά, ydx σταθερά και $\sqrt{dx^2+dy^2}$ σταθερά. Οι τύποι που ισχύουν για οποιαδήποτε από αυτές τις τέσσερις προόδους μπορούν να μετασχηματιστούν άμεσα με τη βοήθεια αυτών των κανόνων σε έναν τύπο ανεξάρτητο από την επιλογή της προόδου.

Ανεξαρτησία και εξάρτηση των διαφορικών εξισώσεων από την πρόοδο των μεταβλητών

Ο Euler χρησιμοποίησε αυτούς τους κανόνες μετασχηματισμού στο ένατο κεφάλαιο του 1755 ώστε να ερευνήσει περαιτέρω την εξάρτηση των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης από την πρόοδο των μεταβλητών. Εξήγησε την τεχνική της αναγωγής των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης με συγκεκριμένη πρόοδο μεταβλητών σε εξισώσεις μεταξύ των πεπερασμένων μεταβλητών και των διαφορικών συντελεστών. Μετά από αυτό έθεσε το ερώτημα: τι μπορεί να ειπωθεί για τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ανώτερης τάξης εάν δε διευκρινίζεται η πρόοδος των μεταβλητών; Ως απάντηση σε αυτήν την ερώτηση υπέδειξε πώς οι κανόνες μετασχηματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξακριβώσουν εάν μια συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης, χωρίς την υπόδειξη της προόδου των μεταβλητών, προϋποθέτει μια καθορισμένη σχέση μεταξύ των x και y, δηλαδή εάν υπάρχει μια σχέση μεταξύ των x και y που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση για όλες τις πιθανές προόδους των μεταβλητών. Μονόδρομος ώστε να εξακριβωθεί αυτό είναι να υποτεθούν διαφορετικές πρόοδοι των μεταβλητών και να εξακριβωθεί εάν οι αντίστοιχες εξισώσεις μεταξύ των διαφορικών συντελεστών υπονοούν τις ίδιες σχέσεις μεταξύ των x και y. (§ 301).

Μια άλλη μέθοδος, περισσότερο ασφαλής και εύκολη, είναι να επιλεχτεί μια πρόοδος των μεταβλητών, για παράδειγμα με σταθερά τη dx, και να εφαρμοστούν οι κανόνες μετασχηματισμού που συνάγουν από τη δεδομένη διαφορική εξίσωση με σταθερά τη dx, την αντίστοιχη γενική (δηλαδή ανεξάρτητη της προόδου) διαφορική εξίσωση. Η σύγκριση των δύο μορφών της εξίσωσης μπορεί να αποκαλύψει μία συνθήκη για τη συνάρτηση $y(x)$ κάτω από την οποία οι δύο μορφές συμπίπτουν.

Μία συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες μπορεί να είναι μια πρόοδος-ανεξάρτητη λύση της διαφορικής εξίσωσης (§ 302).

Αυτό ο Euler το διευκρίνισε στις ακόλουθες παραγράφους. Εξέτασε αρχικά τη γενική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$Pd^2x + Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0. \quad (2)$$

Υπό την υπόθεση του σταθερού dx, η σχέση (2) γίνεται:

$$Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0,$$

οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα μετασχηματισμού έχουμε:

$$d^2y \to d^2y - \frac{dy}{dx}d^2x$$

και για το μετασχηματισμό της προόδου στην ανεξάρτητη περίπτωση, ο Euler ανακάλυψε τη σχέση:

$$-Q\frac{dy}{dx}d^2x + Qd^2y + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0. \quad (3)$$

Η σύγκριση των σχέσεων (2) και (3) φανερώνει ότι η συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί τη σχέση (2) ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών μόνο εάν ισχύει:

$$P = -Q\frac{dy}{dx}$$

ή $Pdx + Qdy = 0$. Αλλά εάν ισχύει η σχέση $Pdx + Qdy = 0$ (και τα P και Q δεν είναι ίσα με μηδέν, προϋπόθεση την οποία ο Euler δεν ανέφερε), τότε, από τη διαφόριση, προκύπτει η σχέση:

$$Pd^2x + Qd^2y + dPdx + dQdy = 0,$$

η οποία, συγκρινόμενη με τη (2), παράγει τη σχέση:

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας τη σχέση $dy = -\frac{P}{Q}dx$, μπορούν να αποβληθούν τα διαφορικά, καταλήγοντας σε μία πεπερασμένη εξίσωση, παρέχοντας τη συνθήκη για τη συνάρτηση $y(x)$ σύμφωνα με τη σχέση μεταξύ των x και y. Απαιτείται στη συνέχεια να ελεγχθεί κατά πόσο η $y(x)$ που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη ικανοποιεί επίσης τη διαφορική εξίσωση (2), αλλά σε αυτή την περίπτωση, αυτό είναι μια

μέθοδος υπολογισμού για την πρόοδο-ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης (2) χωρίς ολοκλήρωση.

Ο Euler έδωσε δύο παραδείγματα αυτής της διαδικασίας, ένα στο οποίο η συγκεκριμένη διαδικασία οδηγεί σε λύση και ένα στο οποίο δεν οδηγεί. Το πρώτο παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση:

$x^3 d^2x + x^2 y d^2 y - y^2 dx^2 + x^2 dy^2 + a^2 dx^2 = 0$. (4)

Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση $Pdx + Qdy = 0$ συνεπάγεται τη σχέση:

$x^3 dx + xy^2 dy = 0$.

Διαφοροποιώντας αυτήν την σχέση, παίρνουμε:

$x^3 d^2x + xy^2 d^2 y + 3x^2 dx^2 + 2xydxdy + x^2 dy^2 = 0$.

Συγκρίνοντας την με τη σχέση (4) οδηγούμαστε στη σχέση:

$ad^2x - y^2 dx - 3x^2 dx - 2xydy = 0$.

Η χρήση της σχέσης $dy = -\frac{x}{y}dx$, μετασχηματίζει την παραπάνω εξίσωση, ως εξής:

$a^2 dx - y^2 dx - x^2 dx = 0$

από όπου προκύπτει η σχέση:

$y^2 + x^2 = a^2$,

την οποία ο Euler υπέδειξε ως λύση της (4) που ισχύει ανεξάρτητα από την πρόοδο των μεταβλητών (§ 305).

Το δεύτερο παράδειγμα ήταν η εξίσωση:

$y^2 d^2x - x^2 d^2 y + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0$.

Το κριτήριο σε αυτήν την περίπτωση είναι η σχέση:

$y^2 dx - x^2 dy = 0$,

και η πεπερασμένη σχέση μεταξύ των x και y, η οποία παράγεται με τη διαδικασία που περιγράφτηκε στην παράγραφο 305 είναι

$x^3 - y^3 + axy = 2xy^2 + 2x^2 y$,

η οποία, εντούτοις, εμφανίζεται να μην συμπίπτει με τη σχέση $y^2dx - x^2dy = 0$, εκτός και αν, όπως ανέφερε ο Euler, τα dx και dy είναι και τα δύο ίσα με μηδέν (δηλαδή σταθερά τα x και y), αλλά σε αυτήν την περίπτωση η λύση ισχύει για κάθε διαφορική εξίσωση.

Αυτές οι έρευνες του Euler είναι αντίστοιχες με την παρατήρησή του που αναφέρθηκε ανωτέρω, δηλαδή ότι ένα από τα μειονεκτήματα των διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης αποτελεί το γεγονός ότι η μοναδική σχέση μεταξύ των x και y δίνει τη δυνατότητα για πολλές διαφορετικές διαφορικές εξισώσεις, σύμφωνα με την πρόοδο των μεταβλητών που επιλέχτηκαν. Εδώ, αντιθέτως, ο Euler υπέδειξε ότι η μοναδική αυτή εξίσωση μεταξύ των διαφορικών μπορεί να υπονοήσει πολλές διαφορετικές λύσεις, και ότι μόνο ειδικές περιπτώσεις εμφανίζονται να έχουν λύσεις που ισχύουν σε όλες τις προόδους.

Επιπρόσθετα, ο Euler μετά από αυτές τις έρευνες έπρεπε να είχε ακολουθήσει το πρόγραμμά του για την απαλοιφή των διαφορικών ανώτερης τάξης, και τη συνεπακόλουθη απροσδιοριστία, με την εισαγωγή των διαφορικών συντελεστών.

Η Άποψη του Leibniz σχετικά με τα Αδιαίρετα του Cavalieri, Απείρως Μεγάλες Ποσότητες

Αυτό το παράρτημα εξετάζει συγκεκριμένες θέσεις του Leibniz που αφορούν τη μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri καθώς και τη διαφορά μεταξύ αυτής της μεθόδου και του διαφορικού λογισμού του Leibniz.

Η σχέση του λογισμού του Leibniz με τις θεωρίες του Cavalieri είναι σημαντική ειδικά για τα παραγωγικά έτη του λογισμού του Leibniz. Αυτό το γεγονός περιγράφεται λεπτομερώς από τον Hofmann το 1949, και η παρούσα μελέτη αφιερώνεται στον λογισμό του Leibniz της μεταγενέστερης περιόδου. Επομένως θα περιοριστούμε σε μερικές παρατηρήσεις που αφορούν τις σχετικές αναφορές του Leibniz.

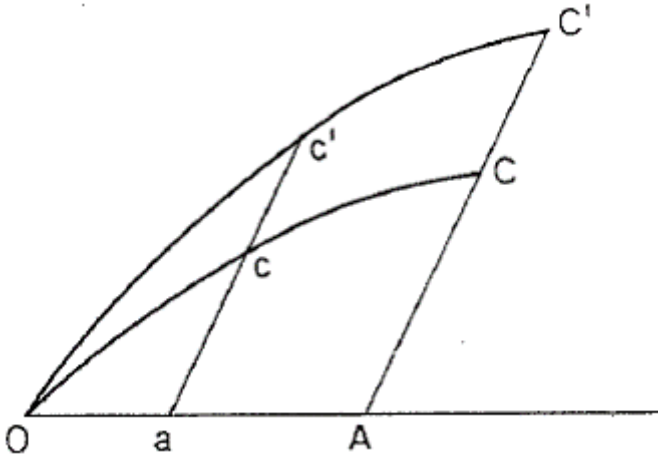
Η σημασία των αναφορών έγκειται στο γεγονός ότι ο Leibniz εξέφρασε τις απόψεις του σύμφωνα με τις προόδους των μεταβλητών και την ελεύθερη ή περιορισμένη επιλογή αυτών των προόδων. Η παρούσα μελέτη πάνω σε αυτήν την έννοια μπορεί επομένως να παράσχει κάποια νέα ενόραση στο ερώτημα της σχέσης του λογισμού του Leibniz με τις μεθόδους του Cavalieri.

Επιπλέον, οι αναφορές είναι σχετικές με το ερώτημα του ρόλου του απείρως μεγάλου στον λογισμό του Leibniz. Συγκριτικά με το απείρως μικρό, το απείρως μεγάλο δεν εμφανίζεται σχεδόν ποτέ στο λογισμό. Αυτό το γνώρισμα φαίνεται εκ πρώτης όψεως ότι βρίσκεται σε αντίθεση με τη θεωρία του Leibniz για τους τελεστές της διαφόρισης και της άθροισης ως αντίστροφους. Συγκεκριμένα, όπως για τη διαφόριση θα μπορούσε να εισαγάγει τα απείρως μικρά διαφορικά, έτσι για το άθροισμα θα μπορούσε να εισαγάγει τα απείρως μεγάλα αθροίσματα. Η αιτία για την οποία σπάνια εμφανίζονται τα απείρως μεγάλα είναι ότι ο Leibniz αξιολόγησε με συνέπεια τους τετραγωνισμούς ως (πεπερασμένα) αθροίσματα των περιοχών-διαφορικών, και όχι ως (απείρως μεγάλα) αθροίσματα των τεταγμένων. Επέλεξε συνειδητά την προηγούμενη προσέγγιση, όντας ενήμερος ότι τα μειονεκτήματά της είναι προφανή στη μέθοδο αδιαιρέτων του Cavalieri.

Η μέθοδος των αδιαιρέτων του Cavalieri

Η εκτίμηση των τετραγωνισμών ως σύνολα ή αθροίσματα των πεπερασμένων μεταβλητών γραμμών υποδηλώνεται στη μέθοδο αδιαιρέτων του Cavalieri. Η περιοχή μεταξύ της καμπύλης OC και του άξονα OA λήφθηκε ως το σύνολο όλων των τεταγμένων ac που εκτείνονται από τον άξονα OA κάτω από μια σταθερή γωνία

προς την καμπύλη. Ο Cavalieri χρησιμοποίησε για αυτό το σύνολο τον όρο «omnes lineae» («όλες οι γραμμές»).



Σχήμα 28.

Αυτή η έννοια του τετραγωνισμού προσφέρει τη δυνατότητα εύρεσης σχέσεων ανάμεσα στους τετραγωνισμούς των καμπυλών και τις σχέσεις μεταξύ των τεταγμένων τους. Για παράδειγμα, εάν, κατά μήκος του AC, οι τεταγμένες των OC και OC΄ βρίσκονται σε μια σταθερή αναλογία $ac:ac'=p:q$, τότε και οι τετραγωνισμοί βρίσκονται στην ίδια αναλογία $\widehat{OCA}:\widehat{OC'A}=p:q$. Η θεωρία ότι ένα σχήμα χτίζεται από τα αδιαίρετά του μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στα στερεά, όπου σε αυτήν την περίπτωση οι αδιαίρετες «τεταγμένες» είναι παράλληλα επίπεδα τμήματα του σχήματος.

Η μέθοδος του Cavalieri επιτρέπει μια εκτεταμένη μετάφραση σε μαθηματικά σύμβολα. Το σύνολο των τεταγμένων y της καμπύλης συμβολίζεται με $omn \cdot y$, και με τη βοήθεια αυτού του συμβολισμού των διάφορων σχέσεων μεταξύ των τετραγωνισμών μπορεί να αντιπροσωπευθεί αναλυτικά, και μπορεί να επιτευχθεί ο υπολογισμός αυτών των τετραγωνισμών.

Οι τύποι για τον τετραγωνισμό στις πρώτες μελέτες του Leibniz

Ο Leibniz, μετά από τον Cavalieri και τον Fabri, χρησιμοποίησε έναν τέτοιο συμβολισμό στις μελέτες του τον Οκτώβριο και Νοέμβριο του 1675 (Leibniz *Analysis Tetragonistica*), οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ότι περιέχουν την επινόηση του

διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.[99] Ένα σημαντικό βήμα στη διαδικασία αυτής της επινόησης ήταν η απόφαση του Leibniz να αντικατασταθεί το σύμβολο $omn \cdot y$, το οποίο θεωρούνταν ότι συμβόλιζε το άθροισμα όλων των γραμμών l, από το σύμβολο $\int l$. Κατά συνέπεια, σε αυτές τις πρώτες μελέτες, το $\int l$ συμβόλισε έναν τετραγωνισμό, όχι μια απείρως μακριά γραμμή. Εντούτοις, αρκετά σύντομα ο Leibniz αντιλήφθηκε την ανάγκη να εισαχθούν τα διαφορικά στο συγκεκριμένο συμβολισμό για τον τετραγωνισμό και να συμβολιστεί ο τετραγωνισμός από το $\int ydx$.

∫y, ∫ydx και η επιλογή της προόδου των μεταβλητών

Ο Leibniz έχει τονίσει επανειλημμένα τη σημασία του γεγονότος ότι στο λογισμό του τα εμβαδά ερμηνεύονται ως αθροίσματα των διαφορικών περιοχής παρά ως αθροίσματα ή σύνολα γραμμών. Υπογράμμισε ότι αυτή η πτυχή αποτελεί τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ του λογισμού του και της μεθόδου των αδιαιρέτων του Cavalieri. Βεβαίωσε ότι ο Cavalieri εκτίμησε τους τετραγωνισμούς ως ∫y, το άθροισμα όλων των τεταγμένων. Εάν η dx υποτεθεί σταθερά, υπάρχει, σύμφωνα με τον Leibniz, μόνο μια τυπική διαφορά μεταξύ του συμβόλου ∫y του Cavalieri και του δικού του συμβόλου ∫ydx. Εάν όμως η dx δεν υποτεθεί σταθερά, αλλά επιτραπούν οι αυθαίρετες πρόοδοι των μεταβλητών, τότε η αντιμετώπιση των τετραγωνισμών ως ∫y καταρρίπτεται, ενώ αποδεχόμαστε τη χρήση του ∫ydx, και αυτό επειδή ο όρος ∫ydx είναι ανεξάρτητος από την πρόοδο των μεταβλητών. Είναι πράγματι χαρακτηριστικό ότι ο Leibniz έπρεπε να επιτρέψει τις αυθαίρετες προόδους των μεταβλητών στη μελέτη των τετραγωνισμών, διαφορετικά δε μπορούσαν να εφαρμοστούν οι μετασχηματισμοί των μεταβλητών. Για παράδειγμα στην περίπτωση του μετασχηματισμού ∫ndx=∫yds (n: κάθετη στην καμπύλη, s: μήκος τόξου), είναι απίθανο να υποτεθούν ταυτόχρονα τα dx και ds σταθερά, έτσι ώστε τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα να μην μπορεί να αποδοθεί άμεσα από την ορολογία και το συμβολισμό του Cavalieri.

---

[99] *Hofmann, J. E., Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizsehen Mathematik wahrend des Aufenthaltesin Paris (1672-1676), Munchen, 1949 σελ.118-130.*

Ο Leibniz είχε αναγνωρίσει αυτό το γεγονός και ως εκ τούτου, κατά την άποψή του, η αναγνώριση του τετραγωνισμού ως ∫ydx φανερώνει ένα μεγάλο πλεονέκτημα του λογισμού του έναντι του αντιστοίχου του Cavalieri.

Οι αναφορές του Leibniz

Οι απόψεις του Leibniz που συνοψίστηκαν προηγούμενα εκφράστηκαν, για παράδειγμα, με τις ακόλουθες αναφορές:

> *«Προτού να τελειώσω, θα προσθέσω μια ειδοποίηση, δηλαδή δεν πρέπει να παραλείπεται εύκολα το dx από τις διαφορικές εξισώσεις σαν αυτή που συζητήθηκε παραπάνω:* $a = \int \overline{dx : \sqrt{1-xx}}$ *διότι στην περίπτωση κατά την οποία το* x *υποτίθεται ότι αυξάνεται ομοιόμορφα, το dx μπορεί να παραλειφθεί. Το παραπάνω αποτελεί ένα σημείο που πολλοί έχουν σφάλει, και με αυτόν τον τρόπο έχουν κλείσει το δρόμο τους για ανώτερα επιτεύγματα, επειδή δεν έχουν εναποθέσει στα αδιαίρετα όπως το dx την καθολικότητά τους (συγκεκριμένα ότι η πρόοδος του x μπορεί να υποτεθεί ad libitum) αν και από αυτά προκύπτουν μόνο αναρίθμητες μεταμορφώσεις και ισοδυναμίες των σχημάτων».*[100]
>
> *«… Συμβολίζω το εμβαδόν ενός σχήματος στο λογισμό μου ως εξής:* $\int ydx$ *ή το άθροισμα όλων των ορθογωνίων που σχηματίζονται από το γινόμενο κάθε* y *και του αντιστοίχου dx. Μέσα από το οποίο, εάν τα dx υποτεθούν ίσα μεταξύ τους, προκύπτει η μέθοδος αδιαιρέτων του Cavalieri».*[101]
>
> *«Και αυτό είναι πράγματι ένα επίσης από τα πλεονεκτήματα του διαφορικού λογισμού μου, και κάποιος δεν θα διατύπωνε, όπως συνηθιζόταν στο παρελθόν, το άθροισμα όλων των* y *, αλλά το άθροισμα όλων των ydx, ή* $\int \overline{ydx}$ *, διότι κατά αυτόν τον τρόπο να μπορεί να γίνει το dx συγκεκριμένο και να μετασχηματιστεί το δοσμένο εμβαδόν σε άλλα με*

---

[100] *Leibniz 1686. Math. Schr. V, σελ. 233.*

[101] *Leibniz Elementa, σελ . 150.*

> *άπειρο πλήθος τρόπων, και να υπολογιστεί έτσι με τη βοήθεια κάποιου άλλου.»*[102]
>
> *«Αλλά αυτή [δηλαδή του Cavalieri] η μέθοδος των αδιαιρέτων περιείχε μόνο το ξεκίνημα της τέχνης (...). Γιατί όποτε τα στοιχεία των διαστημάτων μεταξύ των παράλληλων τεταγμένων (ευθείες γραμμές ή επίπεδες επιφάνειες) δεν είναι ίσα το ένα με το άλλο, κατόπιν, προκειμένου να βρεθεί το περιεχόμενο του σχήματος, δεν επιτρέπεται να προστεθούν όλες οι τεταγμένες σε ένα σύνολο αλλά πρέπει να υπολογισθούν τα απείρως μικρά στοιχεία του διαστήματος μεταξύ των τεταγμένων. (...) Πράγματι, αυτός ο υπολογισμός του απείρως μικρού υπερείχε της μεθόδου του Cavalieri.»*[103]

Η ύπαρξη των απείρως μεγάλων ποσοτήτων

Το γεγονός ότι τα εμβαδά δεν εισήγαγαν τις απείρως μεγάλες ποσότητες στον λογισμό του Leibniz, δεν συνεπάγεται ότι αυτές οι ποσότητες ήταν εξ ολοκλήρου απούσες. Στην πραγματικότητα, ο ελεύθερος χειρισμός των διαφορικών στους τύπους οδήγησε ορισμένες φορές σε εκφράσεις που έπρεπε να ερμηνευθούν ως απείρως μεγάλες ποσότητες. Για το λόγο αυτό, για παράδειγμα, ο Leibniz υποστήριξε:

> *«Με σιγουριά λαμβάνουμε στην ανάλυσή μας μια ευθεία γραμμή με άπειρο μήκος, όπως το aa:dx.»*[104]

Και ο Johann Bernoulli χαρακτήρισε, σε ένα χωρίο που αναφέρθηκε ήδη, την ποσότητα $\frac{adx}{dddy}$ ως «απείρως μεγάλη δευτέρου είδους».

Ειδικά το απείρως μεγάλο εμφανίστηκε στις μελέτες του Leibniz και του Johann Bernoulli, τις οποίες αντάλλαξαν σε επιστολές το 1695, και αφιερώθηκαν στην αναλογία μεταξύ των δυνάμεων και των διαφορικών σε σχέση με τον κανόνα του Leibniz για τη διαφόριση ενός γινομένου. Εδώ η αμοιβαιότητα των τελεστών

---

[102] *Leibniz to Von Bodenhausen; Math. Schr. VII, σελ . 387.*

[103] *Leibniz Scientiarum gradus σελ. 597.*

[104] *Leibniz to Grandi 6-11-1713; Math. Schr. IV, σελ. 218.*

διαφόρισης και αθροίσματος έκανε τις απείρως μεγάλες ποσότητες, τα αθροίσματα, να εισαχθούν στις έρευνες φυσικά.

Ως παράδειγμα της ύπαρξης του απείρως μεγάλου σε αυτές τις μελέτες αναφέρουμε έναν χαρακτηριστικό τύπο:

$\int ndz = nz - dn\int z + d^2n\int^2 z - d^3n\int^3 z$ κ.λπ.

Ο Λογισμός του Leibniz και η Μη Τυπική Ανάλυση

Σε αυτό το παράρτημα γίνονται κάποια σχόλια για τη σχέση μεταξύ του απειροστικού λογισμού του Leibniz και της τυπικής ανάλυσης. Η μη τυπική ανάλυση είναι μια προσέγγιση της ανάλυσης που οφείλεται στον A. Robinson (1966)[105]. Η σχέση της με τον απειροστικό λογισμό του Leibniz τονίζεται τόσο από τον ίδιο το Robinson όσο και από άλλους.

Μη τυπική ανάλυση

Στη μη τυπική ανάλυση, ορισμένες έννοιες και τυπικά εργαλεία της μαθηματικής λογικής χρησιμοποιούνται για να παράσχουν μια αυστηρή θεωρία των απείρως μικρών και απείρως μεγάλων αριθμών. Αποδεικνύεται ότι ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια αυτών των απείρως μικρών και απείρως μεγάλων αριθμών. Δηλαδή αποδεικνύεται ότι είναι δυνατό να καθοριστούν οι θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης (συνέχεια, διαφόριση, ολοκλήρωση, κ.λπ.) περισσότερο σε σχέση με τα απειροστά παρά μέσω των ορίων.

Η μη τυπική ανάλυση, όχι μόνο παρέχει μια νέα προσέγγιση στο διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό αλλά και οι μέθοδοί της παράγουν ενδιαφέρουσες αναδιατυπώσεις, κομψότερες αποδείξεις και νέα αποτελέσματα, για παράδειγμα, στη διαφορική γεωμετρία, την τοπολογία, και τον υπολογισμό των μεταβολών, σε θεωρίες συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής, γραμμικών χώρων, και τοπολογικών ομάδων.

Οι απείρως μικροί και απείρως μεγάλοι αριθμοί εισάγονται στη μη τυπική ανάλυση με μια μέθοδο μαθηματικής λογικής η οποία αποδεικνύει την ύπαρξη επεκτάσεων των μοντέλων συγκεκριμένων μαθηματικών θεωριών. Αυτές οι επεκτάσεις είναι τα αποκαλούμενα «μη τυπικά» μοντέλα των θεωριών. Εφαρμοσμένη στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών, που θεωρείται ως μοντέλο της θεωρίας των πραγματικών αριθμών, η μέθοδος οδηγεί στην επέκταση R* του R, έτσι ώστε οι προτάσεις για τους πραγματικούς αριθμούς, εάν ερμηνευτούν ξανά σύμφωνα με τους κανόνες για την επέκταση των θεωριών, ισχύουν για όλα τα στοιχεία του R*. Συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι η επέκταση μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε το R*

---

[105] *Robinson, A. Non-standard Analysis, Amsterdam, 1966.*

να καταστεί ένα πλήρως διατεταγμένο σύνολο, το οποίο δεν είναι Αρχιμήδειο και το οποίο περιέχει το R ως γνήσιο υπόσωμα. Αυτό σημαίνει ότι το R* περιλαμβάνει τα στοιχεία i, άνισα με το μηδέν, με την ιδιότητα, για κάθε πραγματικό αριθμό α > 0,

$$-a < i < a.$$

Αυτά τα στοιχεία i καλούνται απειροστά, ή απείρως μικροί αριθμοί, ενώ τα αντίστροφά τους καλούνται απείρως μεγάλοι αριθμοί. Ένα στοιχείο α του R*, που δεν είναι απείρως μεγάλο, έχει ένα μοναδικό τυπικό τμήμα, που ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός °α, η διαφορά του οποίου από το α είναι μηδέν ή ένα απειροστό. Περαιτέρω, σε κάθε δεδομένη συνάρτηση $f: R \to R$, ορίζεται μια μοναδική επέκταση f^*, $f^*: R^* \to R^*$, η οποία διατηρεί συγκεκριμένες ιδιότητες της f.

Το σύνολο R* παρέχει το πλαίσιο για την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού με τη βοήθεια των απείρως μικρών και απείρως μεγάλων αριθμών.

Για παράδειγμα, η παράγωγος μιας πραγματικής συνάρτησης f μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$f'(x) \underset{D}{\overset{0}{=}} \left(\frac{f^*(x+dx) - f^*(x)}{dx} \right),$$

όπου το dx είναι ένα αυθαίρετο απειροστό.

Προφανώς, η χρήση των απειροστών στη μη τυπική ανάλυση είναι όμοια με τον απειροστικό λογισμό του Leibniz, και η μη τυπική ανάλυση μπορεί, κατά συνέπεια, να θεωρείται από τους σύγχρονους μαθηματικούς ως υστερογενής αποκατάσταση της χρήσης από τον Leibniz των απείρως μικρών μεγεθών. Αυτή η άποψη υποστηρίζεται θερμά από τον Robinson. Συγκεκριμένα αναφέρει, ότι το βιβλίο του δείχνει «ότι οι ιδέες του Leibniz μπορούν να δικαιωθούν πλήρως και ότι οδηγούν σε μια νέα και καρποφόρο προσέγγιση της κλασσικής ανάλυσης και πολλών άλλων κλάδων των μαθηματικών». Οι ασυνέπειες των απειροστών του Leibniz απομακρύνονται από τη μη τυπική ανάλυση, και ο Robinson βεβαιώνει ότι «η θεωρία των απείρως μικρών και απείρως μεγάλων αριθμών του Leibniz (...) παρά τις ασυνέπειές της (...) μπορεί να θεωρηθεί ως γνήσιος πρόδρομος της θεωρίας του παρόντος βιβλίου» (1986, σελίδα 269). Η δημιουργία της μη τυπικής ανάλυσης καθιστά απαραίτητο, σύμφωνα με τον Robinson, το γεγονός να συμπληρωθεί και να αναδιατυπωθεί η ιστορική εικόνα της ανάπτυξης της ανάλυσης. Αυτό γιατί η ιστορία γράφεται συνήθως υπό το φως των πιο πρόσφατων εξελίξεων, και η μη τυπική ανάλυση πρέπει να θεωρηθεί ως η θεμελιώδης αλλαγή σε αυτές τις πρόσφατες

εξελίξεις, επειδή «η θεωρία συγκεκριμένων μορφών μη-Αρχιμήδειων συνόλων μπορεί πράγματι να έχει μια θετική συμβολή στην κλασσική ανάλυση».

Αποτελεί πράγματι ενδιαφέρον χαρακτηριστικό γνώρισμα το γεγονός ότι, αντίθετα προς αυτό που θεωρούνταν ότι ισχύει για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, η χρήση των απειροστών του Leibniz μπορεί να ενσωματωθεί (μετά από μερικές επανερμηνείες και αναπροσαρμογές) σε μια θεωρία που είναι αποδεκτή από τα σύγχρονα πρότυπα της μαθηματικής αυστηρότητας. Κατά συνέπεια είναι κατανοητό ότι για τους μαθηματικούς που θεωρούν ότι αυτά τα σύγχρονα πρότυπα είναι τελικά, η μη τυπική ανάλυση απαντά θετικά στην ερώτηση εάν, σε τελευταία ανάλυση, η θεωρία του Leibniz ήταν σωστή.

Στο σημείο αυτό ο Bos αναρωτιέται αν το να είναι «σωστή» η θεωρία του Leibniz από αυτή την άποψη αποτελεί μια σημαντική πτυχή της αξιολόγησης των μαθηματικών θεωριών του παρελθόντος. Οι ιδρυτές, οι ενασχολούμενοι και οι κριτικοί τέτοιων θεωριών κρίθηκαν με τα σύγχρονα πρότυπα αποδοχής, και αυτά τα πρότυπα διέφεραν συνήθως αρκετά από εκείνα των προγενέστερων μαθηματικών.

Έτσι διαφωνεί με την άποψη του Robinson σχετικά με την επιρροή που πρέπει να είχε η εμφάνιση της μη τυπικής ανάλυσης στην ιστορική εικόνα του λογισμού του Leibniz, ή της ανάλυσης γενικότερα. Δε θεωρεί ότι η αξιολόγηση μιας μαθηματικής θεωρίας, όπως ο λογισμός του Leibniz, πρέπει να επηρεαστεί από το γεγονός ότι δύο και τρία τέταρτα αιώνων αργότερα, η συγκεκριμένη θεωρία «υπερασπίζεται» υπό την έννοια ότι αποδεικνύεται να μπορεί να ενσωματωθεί σε μια θεωρία που είναι αποδεκτή από τα παρόντα μαθηματικά πρότυπα.

Εάν ο λογισμός του Leibniz απαιτεί μία αποκατάσταση εξαιτίας της πάρα πολύ αυστηρής αντιμετώπισης που υπέστη από τους ιστορικούς του προηγούμενου μισού αιώνα, όπως υπαινίσσεται ο Robinson, πρέπει οι πραγματικοί λόγοι για μια τέτοια αποκατάσταση να βρεθούν στην ίδια τη θεωρία του Leibniz. Προκειμένου να αποδειχθεί η αξία του ως μαθηματική θεωρία, ο λογισμός του Leibniz δεν χρειάζεται τροποποίηση μέσω μιας αναδιατύπωσης σύμφωνα με την τυποποιημένη ανάλυση, ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του εικοστού αιώνα.

Εκτός από αυτό το γενικό επιχείρημα για τη σχέση της μη τυπικής ανάλυσης με την αξιολόγηση του απειροστικού λογισμού του Leibniz, ο Bos δε θεωρεί ότι οι δύο αυτές θεωρίες μοιάζουν τόσο πολύ ώστε η ιστορική ενόραση της τελευταίας να μπορεί να προαχθεί περαιτέρω με την αντιμετώπισή της ως πρόωρη μορφή μη τυπικής ανάλυσης. Για το σκοπό αυτό δίνει μερικές πτυχές κατά τις οποίες διαφέρουν ουσιαστικά η μη τυπική ανάλυση και η απειροστική ανάλυση του Leibniz.

Η μη τυπική ανάλυση παρέχει μια απόδειξη ότι υπάρχει (με τη συνήθη σύγχρονη μαθηματική έννοια του όρου) ένα σώμα R* με τις ιδιότητες που αναφέραμε, δηλαδή ότι υπάρχει ένα σύνολο που περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς καθώς και τα απειροστά. Όπως ο Robinson υποστηρίζει, ο Leibniz και οι οπαδοί της φιλοσοφίας του δεν κατάφεραν να δώσουν μια τέτοια απόδειξη. Επιπλέον, το μεγάλο πλήθος επιχειρημάτων του δέκατου έβδομου και δέκατου όγδοου αιώνα σχετικά με την ύπαρξη των απειροστών, ή την αποδοχή της χρήσης τους, δεν ήρθαν με κανέναν τρόπο κοντά στις μεθόδους της απόδειξης ύπαρξης της μεταβλητής ανάλυσης. Ο Robinson αναφέρει το επιχείρημα του Leibniz που υποστηρίζει ότι «αυτό που επιτυγχάνεται για τους πεπερασμένους αριθμούς επιτυγχάνεται επίσης και για τα άπειρα και αντίστροφα», αλλά ο Bos δε συμφωνεί με τον Robinson στο γεγονός αυτό είναι «εντυπωσιακά κοντά στη μεταφορά των ιδιοτήτων από το R στο R* και αντίστροφα», καθώς στα πλαίσια αυτού του συγγράμματος ο ίδιος ο Robinson είχε υποστηρίξει ότι ο Leibniz δεν έδωσε αλλά και δεν θα μπορούσε να έχει δώσει μία τέτοια απόδειξη. Κατά συνέπεια το ουσιαστικό μέρος της μη τυπικής ανάλυσης, δηλαδή η απόδειξη της ύπαρξης των οντοτήτων που εξετάζει, απείχε εξ ολοκλήρου από την απειροστική ανάλυση του Leibniz, και αυτό αποτελεί, κατά την άποψή του Bos, μια θεμελιώδη διαφορά μεταξύ των θεωριών που υποστηρίζουν ότι η ανάλυση του Leibniz δεν μπορεί να θεωρηθεί μια εμβρυακή μορφή, ή πρόδρομος, της μεταβλητής ανάλυσης.

Μια άλλη πτυχή κατά την οποία διαφέρουν οι δύο θεωρίες αφορά τη σύλληψη του συνόλου των απειροστών. Ο Leibniz καθώς και οι περισσότεροι από τους οπαδούς της θεωρίας του (αν και όχι ο Euler όπως θα δείτε παρακάτω) συνέλαβαν το σύνολο των απειροστών ως αποτελούμενο από τα απειροστά διαδοχικών θετικών ακεραίων «τάξεων απείρου μικρού μεγέθους». Κατά συνέπεια εάν το dx είναι ένα διαφορικό πρώτης τάξης, κατόπιν όλα τα άλλα διαφορικά πρώτης τάξης βρίσκονται σε πεπερασμένο λόγο με το dx, και γενικά όλα τα διαφορικά νιοστής τάξης βρίσκονται σε πεπερασμένο λόγο με το dx^n, και το σύνολο απειροστών συνίσταται μόνο από αυτές τις κατηγορίες διαφορικών.

Εντούτοις, στο σύνολο απειροστών του R* της μη τυπικής ανάλυσης, δεν υπάρχει ένα προνομιούχο υποσύνολο των διαφορικών πρώτης τάξης ή των απειροστών. (Στον ορισμό της παραγώγου που αναφέρθηκε προηγούμενα, κανένα απειροστό δε μπορεί να επιλεχτεί για το dx). Για ένα σταθερό απειροστό h κάποιος μπορεί να θεωρήσει, ως ανάλογες με τις κατηγορίες του Leibniz, των απειροστών διαδοχικών τάξεων απείρως μικρού μεγέθους άπειρης μικρότητας, τις κατηγορίες I_n των απειροστών, iεR*, όπου υπάρχει το $^0\left(i/h^n\right)$ και είναι διαφορετικός από το μηδέν. Αλλά είναι ξεκάθαρο ότι η ένωση αυτών των I_n, δεν διαμορφώνει ολόκληρο το σύνολο των απειροστών στο R* (ο όρος $h^{1/2}$ δεν ανήκει σε οποιοδήποτε I_n).

Ως εκ τούτου οι δύο θεωρίες διαφέρουν σε μια σημαντική πτυχή, δηλαδή στη σύλληψη της δομής του συνόλου των απειροστών.

Μια τρίτη διαφορά μεταξύ των δύο θεωριών έγκειται στο γεγονός ότι η απειροστική ανάλυση του Leibniz εξετάζει τις γεωμετρικές ποσότητες, τις μεταβλητές και τα διαφορικά, ενώ η μη τυπική ανάλυση, καθώς επίσης και η σύγχρονη πραγματική ανάλυση γενικότερα, εξετάζουν τους πραγματικές αριθμούς, τις συναρτήσεις και τις παραγώγους (παρά την αποδοχή των διαφορικών του). Επομένως, τα προβλήματα που σχετίζονται με τη διαφόριση ανώτερης τάξης των μεταβλητών ποσοτήτων δεν εμφανίζονται στην μη τυπική ανάλυση. Ο Robinson ορίζει τα διαφορικά ανώτερης τάξης, αλλά αυτά είναι διαφορικά μιας συνάρτησης f και ορίζονται με τη βοήθεια ενός σταθερού διαφορικού dx.

Για τους λόγους που αναπτύχθηκαν παραπάνω, ο Bos δε θεωρεί ότι η δημιουργία της μη τυπικής ανάλυσης απαιτεί να επαναξιολογηθεί η ιστορία της ανάλυσης. Αλλά από την μη τυπική ανάλυση θα μπορούσαν βεβαίως να προκύψουν ενδιαφέροντα ιστορικά ερωτήματα για τα αρχικά στάδια της ανάλυσης. Για παράδειγμα, το ερώτημα της δομής του συνόλου των απειροστών. Αν η μη τυπική ανάλυση δείχνει πως απαιτείται τα απειροστά να υπόκεινται στις ίδιες διαδικασίες με τους πραγματικούς αριθμούς, τότε η δομή που σκέφτηκε ο Leibniz για το σύνολο των απειροστών είναι ανεπαρκής. Επομένως κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί εάν αυτό το πρόβλημα εμφανίστηκε στους μαθηματικούς που ασχολούνται με τη σύλληψη των απειροστών του Leibniz, καθώς αυτά διαιρούνται σε κατηγορίες διαδοχικών τάξεων απείρου μικρού μεγέθους.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, δεν υπάρχει ίχνος μιας συνειδητοποίησης αυτού του προβλήματος στις μελέτες του Leibniz. Ωστόσο, ο Euler, ήταν γνώστης αυτού του προβλήματος, και η στάση του απέναντι σε αυτό ήταν ότι αφέθηκε χωρίς δισταγμό να καθοδηγείται από τις τάξεις του απείρως μικρού μεγέθους του Leibniz σύμφωνα με τους κανόνες των διαδικασιών. Η τοποθέτησή του αυτή παρουσιάζεται με σαφήνεια σε άρθρο του το 1778.

Στο πρώτο μέρος αυτού του άρθρου ο Euler ερεύνησε τους διαφορετικούς πιθανούς «βαθμούς» («gradus») του απείρου ή του απείρως μικρού μεγέθους. Δύο απειροστές ποσότητες είναι του ίδιου βαθμού εάν ο λόγος τους είναι πεπερασμένος. Ο Euler θεώρησε μια απείρως μεγάλη ποσότητα x και παρατήρησε ότι οι όροι x, x^2, x^3, κ.λπ. είναι διαφορετικών βαθμών. Υπέδειξε ότι, επειδή ο όρος $y = x^{1/1000}$ είναι επίσης απείρως μεγάλος, ο βαθμός του x δεν είναι ο χαμηλότερος βαθμός και ότι μεταξύ των διαδοχικών βαθμών των όρων x, x^2, x^3, κ.λπ. υπάρχουν αυθαίρετα πολλοί ενδιάμεσοι βαθμοί. Τους βαθμούς του x^a, όπου α θετικό, τους ονόμασε βαθμούς πρώτης κατηγορίας.

Κατόπιν ο Euler έδειξε ότι υπάρχουν βαθμοί απείρως χαμηλότεροι από όλους τους βαθμούς πρώτης κατηγορίας. Για αυτό εξέτασε τον λογάριθμο του x: $\log x$ και ισχυρίστηκε ότι ο $\log x$ είναι απείρως μικρός όρος σε σχέση με το $x^{1/n}$ για κάθε n. Ως εκ τούτου ο βαθμός του $\log x$, καθώς και του $(\log x)^a$ για α θετικό γενικότερα, δεν ανήκει στην πρώτη κατηγορία, με αποτέλεσμα πλήθος νέων βαθμών να εισάγεται μέσω των λογαρίθμων, που ποικίλλουν ακόμη και μεταξύ εκείνων της πρώτης κατηγορίας, από τη στιγμή που το $x^a \log x$ είναι απείρως μεγάλο συγκριτικά με το x^a, αλλά απείρως μικρό συγκριτικά με το $x^{a+(1/n)}$ για κάθε n.

Μια εκτίμηση εκθετικά οδήγησε στη συνέχεια με παρόμοιο τρόπο σε μια κατηγορία βαθμών του απείρου, υψηλότερων από όλους τους βαθμούς της πρώτης κατηγορίας.

Αυτές οι εκτιμήσεις των διαφορετικών κατηγοριών των βαθμών του απείρου έγιναν για να εφαρμοστούν, τηρουμένων των αναλογιών, στις απείρως μικρές ποσότητες, «επειδή αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως αντίστροφες των απείρως μεγάλων ποσοτήτων».

Μια αξιοσημείωτη πτυχή των επιχειρημάτων του Euler είναι η χρήση του κανόνα του L'Hôpital στις αποδείξεις των ισχυρισμών του. Κατά συνέπεια, για παράδειγμα, ο ισχυρισμός ότι ο $\log x$ είναι απείρως μικρός συγκριτικά με το $x^{1/n}$ για κάθε n, αποδείχθηκε ως εξής:

Έστω $\frac{x^{1/n}}{\log x} = v$, $\frac{1}{\log x} = p$ και $\frac{1}{x^{1/n}} = q,$ οπότε $v = \frac{p}{q}$.

Για $x = \infty$ έχουμε p=0 και q=0. Ως εκ τούτου ο κανόνας L'Hôpital ισχύει και $v = \frac{dp}{dq}$.

Τώρα $dp = \frac{-dx}{x(\log x)^2}$,

και $dq = \frac{-dx}{nx^{(1/n)+1}}$,

οπότε $v = \frac{nx^{1/n}}{(\log x)^2}$.

Εφόσον έχουμε $v = \frac{x^{1/n}}{\log x}$,

ή ισοδύναμα $v^2 = \dfrac{x^{2/n}}{(\log x)^2}$.

συνεπάγεται ότι

$$v = \frac{v^2}{v} = \left(\frac{x^{2/n}}{(\log x)^2}\right) \Big/ \left(\frac{nx^{1/n}}{(\log x)^2}\right) = \frac{x^{1/n}}{n}$$

(στην πραγματικότητα ο Euler βρήκε $v = n \cdot x^{1/n}$, το οποίο πρέπει να οφείλεται σε λάθος υπολογισμό), από όπου συμπεραίνουμε ότι το υ είναι απείρως μεγάλο, το οποίο αποδεικνύει τον αρχικό ισχυρισμό.

Η χρήση του κανόνα του L'Hôpital σε αυτές τις αποδείξεις είναι πολύ αποκαλυπτικός, επειδή φανερώνει το ύφος του Euler και τη δυσκολία που προκλήθηκε από την απουσία ενός σαφούς ορισμού των απειροστών. Πράγματι, η εφαρμογή του κανόνα εμπεριέχει την έννοια του απείρως μεγάλου x ως συνάρτηση που τείνει στο άπειρο (και του $1/x$ που τείνει στο μηδέν). Κατά συνέπεια είναι αποδεκτό μόνο σε μια θεωρία που θεωρεί τα απειροστά ως συναρτήσεις που τείνουν στο μηδέν ή το άπειρο, έτσι ώστε οι τάξεις του απείρου να αντιστοιχούν σύμφωνα με την προσέγγιση στο μηδέν ή το άπειρο. Εντούτοις, ο Euler δεν υπέδειξε πουθενά ότι συνέλαβε τα απειροστά κατά αυτόν τον τρόπο. Θεώρησε το x ως πραγματική απείρως μεγάλη ποσότητα, και εφάρμοσε τον κανόνα του απλά ως επίσημο κανόνα.

Στο δεύτερο μέρος του άρθρου του ο Euler εξέτασε τις συναρτήσεις $y = c \cdot x^a$ και $y = c \cdot x^a (\log(1/x))^m$, για απείρως μικρές τιμές του x. Βρήκε, με απλή εφαρμογή τους κανόνες διαφόρισης και ολοκλήρωσης, όπου οι όροι dy/dx και ∫ydx είναι απείρως μικροί και απείρως μεγάλοι, αντίστοιχα, σε σχέση με το y. Εφαρμόζοντας τους κανόνες απαλοιφής για τα απειροστά, ήταν σε θέση να υπολογίσει το ολοκλήρωμα σε κάποιες περιπτώσεις όπου αυτό δεν μπορούσε να γίνει άμεσα εάν το x υποτεθεί πεπερασμένο. Ερμήνευσε τα αποτελέσματα που βρήκε ως ισχυρισμούς για την περιοχή κάτω από τη σχετική καμπύλη η οποία βρίσκεται απείρως κοντά στην αρχική καμπύλη.

Newton και Leibniz

Σε αυτήν την ενότητα καθώς και στις προηγούμενες έχουν εκτεθεί οι διαφορετικές προσεγγίσεις από τον Leibniz και τον Newton της ανάπτυξης του λογισμού ως ένας νέος και συνεπής επιστημονικός κλάδος. Είναι αποτελεσματικό διδακτικά, εντέλει, να συγκρίνουμε και να αντιπαραβάλλουμε αυτές τις δύο προσεγγίσεις.

Η προσήλωση του Leibniz στα πλεονεκτήματα του κατάλληλου συμβολισμού ήταν τόσο ειλικρινής ώστε κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί ποιο από τα δύο ανακάλυψε, το λογισμό ή μόνο ένα συγκεκριμένο κατάλληλο σύστημα συμβολισμού για το λογισμό. Βέβαια, η απάντηση είναι ότι έκανε και τα δύο. Πράγματι, η διαφορική και ολοκληρωτική του αρίθμηση συνέλαβε το κύριο στοιχείο του λογισμού του ως το γεγονός να κάνει την αρίθμηση και το περιεχόμενό του ουσιαστικά αδιάσπαστα. Ο Newton από την άλλη μεριά, ενδιαφερόταν ελάχιστα για αριθμητικά ζητήματα. Ούτε υπαινισσόμενη, ούτε συνεπής η αρίθμηση ήταν σημαντική για εκείνον.

Ο σταθερός στόχος του Leibniz ήταν η τυποποίηση των γενικών μεθόδων και αλγορίθμων έτσι ώστε να ενώνουν την αντιμετώπιση των προβλημάτων αντιστροφής. Οι γενικές μέθοδοι είναι σίγουρα απόλυτες σε όλη τη δουλειά του Newton, αλλά ο τεράστιος ενθουσιασμός του για την επίλυση των ειδικών προβλημάτων είναι έκδηλος. Μία διαφορά τους έγκειται ως προς την έμφαση που δίνουν. Ο Leibniz δίνει έμφαση στις γενικές τεχνικές οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε συγκεκριμένα προβλήματα, ενώ ο Newton δίνει έμφαση σε συγκεκριμένα αποτελέσματα που μπορούν να γενικευτούν.

Αναφορικά με τον ίδιο το λογισμό, ασυνεχείς απειροστές διαφορές από γεωμετρικές μεταβλητές έπαιξαν τον κεντρικό ρόλο στην προσέγγιση του Leibniz, όπου η θεμελιώδης έννοια του Newton ήταν η ροή ή η στιγμή της αλλαγής, που βασιζόταν στη διαισθητική ιδέα της συνεχούς κίνησης. Ως αποτέλεσμα, ο συμβολισμός και η ορολογία του Leibniz καλύπτει αποτελεσματικά το θέμα του ορίου, σε αντίθεση με το λογισμό του Newton όπου είναι αρκετά σαφές.

Για τον Leibniz, τα διαφορετικά διαφορικά dx και dy είναι θεμελιώδη. Ο λόγος τους dy/dx είναι «απλά» ένα απλό γεωμετρικό πηλίκο. Για τον Newton, άλλωστε, ειδικά στο τελευταίο του έργο, η παράγωγος από μόνη της- ως ένας λόγος ροών ή ως ο «έσχατος λόγος των μηδενιζόμενων ποσοτήτων»- είναι η καρδιά του ζητήματος. Η δεύτερη παράγωγος είναι απλά η ροή της ροής, όπου κάθε ροή περιέχει μόνο απειροστά πρώτης τάξης, έτσι ώστε ο Newton να μην χρειάζεται τα απειροστά ανώτερης τάξης του Leibniz.

Το ολοκλήρωμα του Newton είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα, το ρέον που ορίζεται από τη ροή του. Ο Newton επιλύει προβλήματα εμβαδού και όγκου ερμηνεύοντας τα ως αντίστροφη διαδικασία των προβλημάτων μεταβολής. Σε αντίθεση, το ολοκλήρωμα του Leibniz αποτελεί ένα άπειρο άθροισμα διαφορικών. Βέβαια, τελικά και οι δύο υπολογίζουν τα ολοκληρώματά τους με τη μέθοδο της αντιδιαφόρισης. Η υπολογιστική εκμετάλλευση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ των προβλημάτων τετραγωνισμού και εφαπτομένης ήταν το κλειδί της κοινής τους συνεισφοράς.

Δεδομένου ότι ο Leibniz είχε δευτερεύοντος σημασίας ενδιαφέρον στις άπειρες σειρές (εκτός από τη συνεισφορά του στην όψιμη του δραστηριοποίηση) η επέκταση των συναρτήσεων σε σειρές δυνάμεων ήταν για τον Newton ένα καθημερινής χρήσης εργαλείο το οποίο πάντοτε θεωρούσε ως ένα αναπόσπαστο κομμάτι της μεθόδου του της ανάλυσης. Για παράδειγμα, ο Newton ήταν ευχαριστημένος να εκτιμήσει ένα ολοκλήρωμα ή να επιλύσει μία διαφορική εξίσωση με όρους από άπειρες σειρές για την επίλυση του, αλλά ο Leibniz πάντοτε προτιμούσε μία λύση «κλειστού τύπου».

Έχουμε παρατηρήσει ότι η παραγωγική εργασία του Newton για τον λογισμό χρονολογείται από τα έτη 1664-1666, ενώ η αντίστοιχη περίοδος για την εργασία του Leibniz ήταν τα έτη 1672-1676. Άλλωστε, οι πρώτες εκδόσεις του Leibniz για τον λογισμό εμφανίστηκαν τα έτη 1684 και 1686(τα άρθρα του στο *Acta Eruditorum*) ενώ ο Newton, αν και είχε παρουσιάσει χειρόγραφα στους συναδέλφους του στην Αγγλία, δε δημοσίευσε τίποτα για το λογισμό έως το 1687 στο *Principia* καθώς, και το 1704 στο *Opticks* (με το *De Quadratura* ως παράρτημα μαθηματικών).

Ξεκινώντας στα τέλη του 1690 ο Leibniz δέχτηκε επίθεση από τους οπαδούς του Newton που υπέθεταν ότι είχε πάρει και χρησιμοποιήσει κρίσιμες προτάσεις (χωρίς να επιδείξει σεβασμό στον Newton) από τα γράμματα του το 1676, και τα οποία είχε αποσπάσει από την εργασία του Newton κατά τη διάρκεια των σύντομων επισκέψεων του στο Λονδίνο το 1673 και 1676 (αν και δεν είχαν συναντηθεί ποτέ με τον Newton). Τελικά, τα συμπεράσματα παρουσιάστηκαν δημόσια ως προϊόντα λογοκλοπής. Ο Leibniz το 1711 προσέφυγε για την αποκατάσταση αυτής της κατηγορίας στη Βασιλική Ακαδημία του Λονδίνου (όπου ανήκε ως μέλος, και ο Newton ήταν πρόεδρος). Η Βασιλική Ακαδημία διόρισε επιτροπή, η οποία το 1712, κατέληξε σε απόφαση προφανώς επηρεασμένη από τον Newton, με την κατηγορία ότι ο Leibniz ήταν προφανώς ένοχος.

Αυτή η άτυχη διένεξη δεν είχε να κάνει τόσο με τα μαθηματικά, όσο με εθνικιστικούς ανταγωνισμούς μεταξύ των Άγγλων και των μαθηματικών της

ηπειρωτικής Ευρώπης[106]. Οποιαδήποτε σοβαρή μελέτη των ερευνών των Newton και Leibniz ξεκαθαρίζει ότι τα αντίστοιχα έργα τους ανακαλύφθηκαν ανεξάρτητα.

Η ειρωνεία της «νίκης» της Αγγλίας στη διένεξη των Newton και Leibniz, ήταν ότι οι Άγγλοι μαθηματικοί, ακολουθώντας με προσήλωση τον Newton και αρνούμενοι να υιοθετήσουν τις αναλυτικές μεθόδους του Leibniz, ουσιαστικά απέκλεισαν τους εαυτούς τους από την επικρατούσα τάση της μαθηματικής προόδου για τον επόμενο αιώνα. Παρά το γεγονός ότι οι εκπληκτικές μαθηματικές εφαρμογές του Newton σε επιστημονικά προβλήματα ενέπνευσαν αρκετά την πρόοδο του δεκάτου ογδόου αιώνα στα μαθηματικά, αυτή η πρόοδος παρήλθε κυρίως στα χέρια των μαθηματικών της ηπειρωτικής Ευρώπης, οι οποίοι χρησιμοποίησαν τον αναλυτικό μηχανισμό του λογισμού του Leibniz, περισσότερο από τις μεθόδους του Newton.

Η πρώτη μαθηματική εργασία του Leibniz είχε ως αντικείμενο τη συνδυαστική ανάλυση, ενώ διατήρησε πάντα μια ισχυρή αριθμητική τάση. Ένας από τους πρώτους καρπούς της ενασχόλησής του με τα προβλήματα τετραγωνισμών ήταν ο «Αριθμητικός Τετραγωνισμός», όπου ανακάλυψε ότι το εμβαδόν ενός του τριγωνομετρικού κύκλου ισοδυναμεί με το τετραπλάσιο του αθροίσματος απείρων όρων: 1-1/3+1/5-1/7+…[107]. Οι φορμαλιστικοί και αριθμητικοί αυτοί προβληματισμοί επρόκειτο τώρα να συνδυαστούν κατά ένα ενδιαφέροντα τρόπο με τη γεωμετρία την οποία ο Leibniz άρχιζε πλέον να κατέχει σε βάθος.

Στις μελέτες του εκείνης της εποχής, ο Leibniz επιχειρούσε να λύσει το πρόβλημα των εφαπτόμενων, καθώς και εκείνο των τετραγωνισμών, και είχε πλησιάσει στη λύση η οποία βασιζόταν στο «χαρακτηριστικό τρίγωνο». Το χαρακτηριστικό τρίγωνο αποτελούσε το διαφορικό τρίγωνο το οποίο είχε εμφανιστεί με διάφορες μορφές, ιδιαίτερα στις εργασίες των Torricelli, Fermat και Barrow. Είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η σχέση των γεγονότων που οδήγησαν τον Leibniz στη δημιουργία του διαφορικού λογισμού, αλλά ο ίδιος σε μια επιστολή που συνέταξε τριάντα χρόνια αργότερα, απέδωσε την έμπνευση που είχε για την χρήση του διαφορικού τριγώνου σε ένα σχήμα, το οποίο είχε δει τυχαία, περί το 1673, στο έργο «*Traité des sinus du quart de cercle*» του Pascal[108]. Ο Leibniz όπως έχουμε ήδη αναφέρει

---

[106] *I.E. Hofmann, Leibniz in Paris 1672-1676. Cambridge University Press,1974, σελ.164-165.*

[107] *Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.5, σελ.88• πβ και Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ.16.3*

[108] *Οι Gerhardt και Zeuthen τονίζουν την υποχρέωση που έχει ο Leibniz απέναντι στον Pascal. Ο Child έχει την αίσθηση ότι εφόσον ο Leibniz θα είχε βρει σαφέστερες προσδοκίες του διαφορικού τριγώνου στον Barrow από ότι στον Pascal, θα είχε παραλείψει να αναφέρει*

διαβάζοντας αυτό το παράδειγμα στο έργο του Pascal, είχε μια έκλαμψη και ότι κατόπιν αυτού συνειδητοποίησε αυτό που δεν είχε αντιληφθεί ο Pascal – ότι ο προσδιορισμός της εφαπτομένης μιας καμπύλης εξαρτάται από το λόγο των *διαφορών* των τεταγμένων και των τετμημένων, καθώς αυτές τείνουν να γίνουν άπειρα μικρές και ότι ο τετραγωνισμός εξαρτάται από το άθροισμα των τεταγμένων ή των άπειρα λεπτών ορθογώνιων παραλληλογράμμων, θεωρώντας απειροστά διαστήματα στις τετμημένες. Επιπλέον, οι μαθηματικές πράξεις της πρόσθεσης και του υπολογισμού διαφορών ήταν αμοιβαία αντίστροφες. Αυτό το είχε συνειδητοποιήσει και ο Barrow, κατά μια έννοια, διότι οι μέθοδοι α και ε που εφάρμοσε για τις εφαπτομένες περιλάμβαναν τις διαφορές τετμημένων και τεταγμένων, οι τετραγωνισμοί του πραγματοποιούνταν με την άθροιση των απειροστών ενώ το θεώρημα της αντιστροφής που διατύπωσε απέδειξε τη σχέση μεταξύ των δύο προβλημάτων. Αλλά ποτέ δεν ανέπτυξε τα παραπάνω ως μια ενοποιημένη διαδικασία. Ο Leibniz, από την άλλη πλευρά, συνέχισε να μελετά το χαρακτηριστικό τρίγωνο, με την υποστήριξη του Huygens, και συσχέτισε αυτή την εργασία με το προηγούμενο ενδιαφέρον του για τη συνδυαστική ανάλυση[109].

Στο αρμονικό τρίγωνο του Leibniz και στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, υπάρχουν εντυπωσιακές σχέσεις.

Αριθμητικό τρίγωνο

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\
 & & 1 & 3 & 6 & 10 \ldots \\
 & & & 1 & 4 & 10 \ldots \\
 & & & & 1 & 5 \ldots \\
 & & & & & 1 \ldots
\end{array}
$$

Αρμονικό τρίγωνο

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \ldots \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} \ldots \\
 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} \ldots \\
 & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} \ldots \\
 & & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \ldots \\
 & & & & & \frac{1}{6} \ldots
\end{array}
$$

Σχήμα 29.

τον Barrow είτε λόγω της επιθυμίας του να μην επισημάνει αυτό το χρέος του είτε διότι θα είχε ξεχάσει την επιρροή που ασκούσε επάνω του ο Barrow. Ειδικότερα, βλέπε Leibniz, Early Mathematical Manuscript, σελ. 15-16, για μια συζήτηση των διαγραμμάτων των σχετικών με αυτό το σημείο.

[109] Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.5, σελ.108. Επίσης, Newton, Opera Omnia, IV, σελ.512-515, και Gerhardt, Leibniz, Die Endeckung der Differentialrechnung durch Leibniz.

Στο αριθμητικό τρίγωνο του Pascal εάν ορίσουμε ως x τους αριθμούς οποιασδήποτε γραμμής, οι αριθμοί που βρίσκονται στην πρώτη από κάτω γραμμή από αυτή θα είναι το άθροισμα όλων των x, παίρνοντας τους από αριστερά προς τα δεξιά, οι αριθμοί που βρίσκονται στη δεύτερη από κάτω γραμμή θα είναι το άθροισμα των αθροισμάτων όλων των x κ.τ.λ. Αντίθετα, οι γραμμές που προηγούνται, αντιστοιχούν στις διαφορές, τις διαφορές των διαφορών κ.τ.λ. Ομοίως, στο αρμονικό τρίγωνο αναφορικά προς τα στοιχεία κάθε γραμμής, τα ακριβώς από κάτω στοιχεία αντιστοιχούν στις διαφορές, τις διαφορές των διαφορών, κ.τ.λ. Τα ακριβώς επάνω στοιχεία αντιστοιχούν στα αθροίσματα, τα αθροίσματα των αθροισμάτων , κ.τ.λ., διαβάζοντας, ωστόσο, από τα δεξιά. Επομένως, σε αυτά τα τρίγωνα διαπιστώνουμε ότι αθροίσματα και διαφορές είναι αντίστροφα τα μεν των δε[110], όπως και το πρόβλημα των εφαπτομένων, το οποίο εξαρτάται από τις διαφορές των τεταγμένων, είναι το αντίστροφο του προβλήματος των τετραγωνισμών, το οποίο εξαρτάται από το άθροισμα όλων των τεταγμένων, σύμφωνα με τον Cavalieri. Ωστόσο, ενώ οι διαφορές μεταξύ των στοιχείων στο αριθμητικό και το αρμονικό τρίγωνο είναι πεπερασμένες, οι διαφορές μεταξύ των τεταγμένων μιας καμπύλης είναι απειροστές, και οι τύποι που εφαρμόζονται στην προηγούμενη περίπτωση δεν ισχύουν στην περίπτωση των καμπυλών.

Ήταν, συνεπώς, αναγκαίο για τον Leibniz να αναπτύξει μια διαδικαστική μέθοδο προσδιορισμού των αθροισμάτων και διαφορών των απειροστών. Αυτό φαίνεται να το κατόρθωσε γύρω στο 1676, την εποχή όπου ο Newton συνέγραψε το έργο «*De quadratura*». Είχε, περίπου ένα χρόνο πριν, υιοθετήσει τη χαρακτηριστική μαθηματική παράσταση. Χρησιμοποίησε το $\int x$ ή αργότερα το $\int xdx$, για το «άθροισμα» όλων των x - ή το «ολοκλήρωμα» των x, όπως το ονόμασε αργότερα, μετά από υπόδειξη των αδελφών Bernoulli[111]. Για τις «διαφορές» των τιμών του x, έγραψε *dx*, παρά το γεγονός ότι αρχικά χρησιμοποίησε το συμβολισμό $\frac{x}{d}$, υποδηλώνοντας ότι ο υπολογισμός της «διαφοράς» συνεπάγεται τη μείωση της διάστασης της ποσότητας.

Όπως στο έργο του «*Principia*», ο Newton είχε αρχίσει με τον υπολογισμό της ροπής του γινομένου *AB*, έτσι και ο Leibniz προσδιόρισε τη «διαφορά» του

---

[110] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ. 142, και Mathematische Schriften, τομ.V. σελ.397.*

[111] *Jakob Bernoulli, "Analysis problematic antehac propositi", σελ. 218*

γινομένου *xy*. Παρόλο που στην αρχή ο Leibniz δεν ήταν σίγουρος για τη μέθοδό του και δίσταζε κατά πόσο το *d(xy)* συμπίπτει με το *dxdy* και εάν το $d\left(\frac{x}{y}\right)$ ισοδυναμεί με το $\frac{dx}{dy}$ [112], στο τέλος απάντησε σωστά σε αυτά τα ερωτήματα, ορίζοντας τη σχέση $d(xy) = xdy + ydx$ καθώς και, $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Τις σχέσεις αυτές τις υπολόγισε επιτρέποντας στο x και το y να γίνουν *x+dx* και *y+dy* αντίστοιχα. Στη συνέχεια, αφαιρώντας την αρχική τιμή της συνάρτησης από τη νέα και παρατηρώντας ότι το *dxdy* είναι άπειρα μικρό σε σύγκριση με τους όρους *xdy* και *ydx*, κατέληξε σε αυτά τα αποτελέσματα.

Έχοντας παγιώσει τους κανόνες για τις διαφορές και τα πηλίκα, ο Leibniz μπόρεσε στη συνέχεια να τα επεκτείνει σε όλα τα ολοκληρώματα δυνάμεων μιας μεταβλητής, όπου η διαφορά που προκύπτει για το x^n είναι $x^{n-1}dx$. Καθώς η άθροιση είναι η αντίστροφη διαδικασία της διαφοράς, το ολοκλήρωμα του x^n είναι, κατά συνέπεια, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ [113].

Είχαμε την ευκαιρία να παρατηρήσουμε την παραγωγή των τελευταίων αποτελεσμάτων που οδηγούν σε διάφορους τύπους με τις μεθόδους των προηγούμενων ερευνητών, αλλά μόνο τα έργα του Newton και του Leibniz κατέδειξαν κάτι τέτοιο ως το αντίστροφο μιας άλλης θεμελιώδους πράξης. Η σύγκριση της παραγώγισης με τις μεθόδους των ροών και των διαφορών με τις αντίστοιχες των τετραγωνισμών όπως δίνονται από τους Cavalieri, Torricelli, Roberval, Pascal, Fermat και Wallis θα πείσουν οποιονδήποτε για την τεράστια λειτουργική ευκολία που επιτυγχάνεται με τη χρήση μιας τέτοιας μεθόδου διαδικασίας. Όπως ο Newton έθεσε τους κανόνες των ροών ως βάση της μεθόδου του, έτσι και ο Leibniz θεώρησε την πράξη της εύρεσης των «διαφορών» ως θεμελιώδη για τον «διαφορικό και αθροιστικό» λογισμό του. Από τη στιγμή που ο Newton και ο Leibniz εφήυραν τις μεθόδους τους και τις συνδύασαν κατ' αυτόν τον τρόπο με την ανακάλυψη της θεμελιώδους αντίστροφης ιδιότητας, η άποψη αυτή συνέχισε να υφίσταται στον στοιχειώδες λογισμό. Η διαφοροποίηση συνιστά,

---

[112] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts. σελ. 102 • Gerhardt, Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, σελ . 24, 38.*

[113] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.V., σελ. 226*

γενικά, τη θεμελιώδης πράξη ενώ η ολοκλήρωση θεωρείται απλά ως το αντίστροφο αυτής.

Διατηρήθηκε, επίσης, στον λογισμό ένα ορισμένο στοιχείο σύγχυσης στην ορολογία το οποίο απορρέει από τις κάπως διαφορετικές νοοτροπίες των Newton και Leibniz όχι τόσο αναφορικά προς τον προσδιορισμό του ολοκληρώματος, αλλά τον ορισμό του. Ο Newton όρισε τη μεταβλητή της «ρέουσας» ως την ποσότητα που παράγεται από μία δεδομένη ροή – δηλαδή ως την ποσότητα που διαθέτει ένα δεδομένο μέγεθος ως ροή της ή την αντιστροφή της ροής της. Διατηρώντας αυτή την έμφαση στο αόριστο ολοκλήρωμα, ο Newton περιέλαβε τόσο στο έργο του «*Methodus fluxionum*» όσο και στο έργο του «*De quadratura*» όσα συνθέτουν έναν πίνακα ολοκληρωμάτων. Ο Leibniz, από την άλλη πλευρά, όρισε το ολοκλήρωμα ως το άθροισμα όλων των τιμών ενός μεγέθους[114], ή το άθροισμα ενός απείρου πλήθους απείρως στενών ορθογωνίων, ή -όπως θα εκφραζόταν από τα σύγχρονα μαθηματικά – ως το όριο ενός χαρακτηριστικού αθροίσματος. Οι δύο αυτές απόψεις διαιωνίστηκαν στον στοιχειώδες λογισμό, στον οποίο υπάρχουν δύο ολοκληρώματα: το αόριστο ολοκλήρωμα και το ορισμένο ολοκλήρωμα. Η προέλευση αυτών, στο ιστορικό του αντικειμένου, επανέρχεται ενίοτε ζωηρά στη μνήμη σε σχέση με το πρώτο ως «το ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον Newton» και με το δεύτερο ως «το ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον Leibniz»[115]. Δεν πρέπει, ωστόσο, να δίδεται ιδιαίτερη έμφαση στην εν λόγω διάκριση καθώς ο Newton και ο Leibniz γνώριζαν αμφότεροι τις δύο πτυχές του ολοκληρώματος [116].

Οι Newton και Leibniz είναι γνωστοί ως οι θεμελιωτές του διαφορικού λογισμού, κυρίως διότι καθιέρωσαν κατά τις περιόδους 1665-66 και 1673-76 αντίστοιχα, τις μεθόδους και τις σχέσεις που περιγράφονται πιο πάνω. Υπήρχε, επίσης, και μια άλλη πλευρά του έργου τους η οποία, κατά την άποψη των δημιουργών της, ήταν ιδιαίτερα σημαντική – ο γενικός χαρακτήρας των μεθόδων τους. Και οι δύο άνδρες

---

[114] *«Seu data differentia dy invenire terminum y, est intervenire summas omnium differentiarum seu dy". Βλέπε Leibniz, «Isaaci Newtoni tractatus duo". Βλέπε, επίσης, Gerhardt, Die Entdechung der Differentialrechnung durch Leibniz, σελ. 45.*

[115] *Saks, Théorie de l' integrale, σελ. 122.*

[116] *Ο Hoppe ("Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung", σελ.186-187), παραπλανήθηκε από το σύμβολο 0 του Newton, και παρερμήνευσε τα στοιχεία σε αυτό το σημείο. Θα έβαζε τον Newton να θεωρεί ως θεμελιώδη για τη θεωρία του την άθροιση των αδιαίρετων και θα έκανε τον Leibniz να αμφισβητεί αυτή την άποψη τονίζοντας την πράξη της διαφόρισης. Η πραγματική κατάσταση είναι, ωστόσο, αν μη τι άλλο, αντίθετη προς αυτό.*

τόνισαν ότι, σε αντίθεση με τις συντηρητικές διαδικασίες, οι μέθοδοί τους ήταν δυνατόν να εφαρμοστούν ακόμη και στην περίπτωση των ριζών. Η αιτιολόγηση ενός τέτοιου ισχυρισμού έγινε από τον Newton και βασιζόταν σε μεγάλο βαθμό στις άπειρες σειρές. Εάν ο όρος $(x+0)^n$ πρόκειται να επεκταθεί στο δυωνυμικό θεώρημα, ο αριθμός των όρων θα είναι άπειρος για τις τιμές του n που δεν είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Γενικά, δεν είναι δυνατό να συναχθεί συμπέρασμα από την εφαρμογή του θεωρήματος σε αυτή την περίπτωση παρά μόνο εάν οι σειρές είναι συγκλίνουσες, αλλά ούτε ο Newton ούτε οι διάδοχοί του εκτίμησαν πλήρως για έναν αιώνα αργότερα την ανάγκη διερεύνησης του ζητήματος της σύγκλισης. Ο Leibniz ήταν, από αυτή την άποψη, πολύ λιγότερο επιφυλακτικός, από πολλούς συγχρόνους του διότι εξέταζε σοβαρά κατά πόσο το άπειρο άθροισμα 1-1+1-1+1-… ισούται με $\frac{1}{2}$[117]. Είχε, επίσης, λιγότερους ενδοιασμούς από τον Wallis ως προς την ευρύτερη γενίκευση των κανόνων που αποδεικνύονται μόνο για έναν μικρό αριθμό περιπτώσεων. Αν και είχε παρουσιάσει αποδείξεις του κανόνα του για τη «διαφορά» του x^n μόνο για τις ακέραιες τιμές του n, ανήγγειλε ότι αυτό θα ίσχυε για όλες τις τιμές και τιτλοφόρησε την πρώτη έντυπη περιγραφή του λογισμού *«Μια Νέα Μέθοδος Μεγίστων και Ελαχίστων, Καθώς και Εφαπτομένων, Που δεν περεμποδίζεται από Κλασματικές ή Άρρητες Ποσότητες»* (A New Method for Maxima and Minima, as well as Tangents, Which is not obstructed by Fractional or Irrational Quantities")[118].

Αυτή η πρώτη δημοσιευθείσα πραγματεία του λογισμού, ένα μνημόνιο έξι σελίδων που δημοσιεύτηκε στο έργο «*Acta eruditorum*» το 1684, τρία χρόνια νωρίτερα από την πρώτη περιγραφή του Newton[119], πρέπει να απώθησε τους περισσότερους αναγνώστες που αναζητούσαν μια εισαγωγή σε μια νέα μέθοδο. Ακόμη και για τους αδελφούς Bernoulli, οι οποίοι έκαναν τόσα για να διαδώσουν το αντικείμενο αυτό στα πρώτα του στάδια, «αυτό αποτελούσε μάλλον αίνιγμα παρά εξήγηση»[120].

---

[117] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.V, σελ. 382-87*

[118] *«Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, que nec fractas nec irrationals quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". Acta eruditorum, 1684 σελ. 467. Βλέπε . Mathematische Schriften, τομ.V, σελ. 220. Για την αγγλική μετάφραση αυτού, βλέπε Raphson, History of Fluxions, σελ. 19-27.*

[119] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.V, σελ.220.*

[120] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.III (Part I),σελ. 5.*

Πρώτον, περιείχε πολλά τυπογραφικά λάθη[121]. Δεύτερον, ο Leibniz μιμήθηκε εδώ την φτωχή και απλή επιχειρηματολογία της «*Geometrie*» του Καρτέσιου, παρόλο που σε μετέπειτα άρθρα του αποπειράθηκε να δώσει πιο τεκμηριωμένες εξηγήσεις. Το έργο του 1684 περιλάμβανε, εκτός του ορισμού της «διαφοράς» ή του διαφορικού μιας ποσότητας, τους κανόνες -χωρίς απόδειξη- για τα διαφορικά των αθροισμάτων, των γινομένων, των πηλίκων, των δυνάμεων και των ριζών, με λίγες εφαρμογές αυτών σε εφαπτομένες και σε προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων καθώς και σημείων καμπής. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι μεταξύ αυτών των παραδειγμάτων συγκαταλέγεται ένα βάσει του οποίου ο Leibniz συνήγαγε το νόμο της διάθλασης, εφαρμόζοντας την αρχή του Fermat. Αυτό είναι ενδεικτικό της επιρροής που ασκούσε ο Fermat, οποίος είχε και ο ίδιος καταδείξει κάτι παρόμοιο και η εργασία του οποίου επαναλήφθηκε αργότερα από τον Huygens. Ο Leibniz, όμως, δεν αναφέρεται σε αυτόν σε αυτό το σημείο. Παρά το γεγονός ότι οι τετραγωνισμοί δεν περιλαμβάνονταν σε αυτήν την πρώτη εργασία, ο Leibniz ανέπτυξε τις εφαρμογές σε παρόμοια προβλήματα δύο χρόνια αργότερα, σε μια άλλη εργασία στο «*Acta eruditorum*» [122]. Σε μετέπειτα άρθρα του στο ίδιο και άλλα έντυπα[123], ο Leibniz παρουσίασε περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογές του διαφορικού λογισμού του – όπως ο προσδιορισμός των διαφορικών των λογαρίθμων και των εκθετικών εξισώσεων καθώς και των εφαπτόμενων σχημάτων.

Στο σύνολο αυτού του έργου, ο Leibniz συνειδητοποίησε ότι δημιουργούσε ένα νέο αντικείμενο. Διατυπώθηκε η άποψη ότι μόνο αφού η μέθοδος του Leibniz γνώρισε τόσο μεγάλη επιτυχία, κατέληξε ο Newton να θεωρεί ότι η μέθοδος των ροών αποτελεί ένα νέο αντικείμενο και έναν οργανωμένο τρόπο μαθηματικής έκφρασης,[124] και όχι μια χρήσιμη τροποποίηση ορισμένων προϋπαρχόντων κανόνων. Αυτό διαψεύδεται από το γεγονός ότι ο Newton είχε συντάξει, έως το 1676, τρεις αποδόσεις της μεθόδου του. Αληθεύει, όμως, το γεγονός ότι ο Leibniz εκφράστηκε με δυναμικότερο τρόπο σε αυτό το θέμα από τον Newton. Υποστήριξε ότι η ανάλυσή του έπρεπε να συγκριθεί με τις μεθόδους του Αρχιμήδη με τον ίδιο σχεδόν τρόπο με τον οποίο είχε συγκριθεί το έργο των Viete και Καρτέσιου με την

---

[121] *Eneström, "Uber die este Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung".*

[122] *"De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum" Acta eruditorum, 1686, σελ. 292-300. Βλέπε, επίσης, Leibniz, Mathematische Schrifte, τομ.V, σελ.220.*

[123] *Βλέπε Leibniz, Mathematische Schriften,V, για αυτές τις εργασίες.*

[124] *De Morgan, Essays on the Life and Work of Newton, σελ. 32-34.*

Ευκλείδειο Γεωμετρία,[125] καθώς ήταν απαλλαγμένο από την αναγκαιότητα της φαντασίας. Έχοντας ως στόχο να διαδώσει το έργο του, ανακοίνωσε ρητά όλους τους κανόνες των πράξεων, ακόμη και τους απλούστερους[126], παρουσιάζοντάς τους σαν να ήταν κανόνες της άλγεβρας και ορίζοντας την αντίστροφη σχέση δυνάμεων και ριζών ως ανάλογη εκείνης που υφίσταται μεταξύ των «αθροισμάτων» και των «διαφορών» του, ή μεταξύ ολοκληρωμάτων και διαφορικών [127].

Το διδακτικό αυτό πνεύμα του Leibniz έρχεται σε αντίθεση με την επιφυλακτικότητα που επιδείκνυε ο Newton για το ζήτημα της μεθόδου των ροών, ενδεχομένως προερχόμενη από έναν νοσηρό φόβο αντιπαράθεσης. Αναφορικά προς τη λογική και φιλοσοφική αιτιολόγηση των διαδικασιών του, από την άλλη πλευρά, ο Leibniz ήταν λιγότερο κατηγορηματικός από τον Newton. Δεν κατέβαλε σημαντική προσπάθεια ως προς αυτό το σημείο, διότι αισθανόταν ότι ο διαφορικός λογισμός, ως *modus operandi*, μπορούσε αποδειχθεί από μόνος του. Δεν επιθυμούσε να καταστήσει το άπειρα μικρό κάτι το μυστηριώδες, όπως είχε πράξει ο Pascal, ούτε να στραφεί προς τη γεωμετρική διαισθητικότητα για διευκρινήσεις. Επικαλούμενος μόνο τη νοημοσύνη, τόνισε αντ'αυτού την αλγοριθμική φύση της μεθόδου του, όπως ο ίδιος μιλούσε γι' αυτή. Υπό αυτή την έννοια, δικαίως θεωρείται ως ένας εκ των θεμελιωτών του φορμαλισμού, σε αντιδιαστολή προς τη θεωρία της διασθαντικότητας (intuitionism) στα μαθηματικά. Ήταν πεπεισμένος ότι εάν διατύπωνε με σαφήνεια τους σωστούς κανόνες πράξεων και εάν αυτοί εφαρμόζονταν ορθά, αυτό θα οδηγούσε σε ένα λογικό και απλό αποτέλεσμα[128], όσο αμφίβολο και εάν ήταν το νόημα των εμπλεκόμενων συμβόλων. Η στάση αυτή αντανακλά πλήρως τις αντίστοιχες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν εκείνη την εποχή λόγω των φανταστικών αριθμών. Ο Leibniz, σε αντίθεση με τον Αριστοτέλη, φαινόταν να πιστεύει ότι η θέση του μπορούσε να τεκμηριωθεί εάν επικαλούνταν την αρχή του επαρκούς αιτίου για να προσδιορίσει, από αυτή την άποψη, τη μετάβαση από την πιθανότητα στην πραγματικότητα.[129] Η πίεση από τους σύγχρονούς του, ωστόσο, τον ανάγκασε να επιχειρεί κατά καιρούς, να διευκρινίσει

---

[125] *Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.ΙΙ,σελ. 123.*

[126] *Zeuthen, "Notes" 1895, σελ. 236.*

[127] *Mathematische Schriften, τομ.V, σελ.231,308.*

[128] *Klein, Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, σελ. 215.*

[129] *Enriques, Historic Development of Logic, σελ.77.*

περαιτέρω τις βασικές έννοιες του διαφορικού του λογισμού. Από αυτή την άποψη δεν ήταν ούτε σαφής ούτε συνεπής[130].

Από τα πρώιμα έως τα πιο πρόσφατα έργα του, ο Leibniz εφάρμοσε την αρχή ότι σε μια σχέση που περιλαμβάνει διαφορικά διαφόρων τάξεων, μόνο εκείνα της χαμηλότερης τάξης πρόκειται να διατηρηθούν, διότι όλα τα άλλα θα είναι άπειρα μικρά σε σύγκριση με αυτά. Αυτό συμπίπτει, σε μια νέα αλγεβρική μορφή, κατ' ουσίαν με τη θεωρία την οποία οι Roberval και Pascal χρησιμοποίησαν όταν υποστήριξαν ότι μια γραμμή δεν είναι ίση σε τίποτε όταν συγκριθεί με ένα τετράγωνο. Ο Leibniz συνέχισε αναλύοντας την έννοια των άπειρα μικρών ποσοτήτων των διαφόρων τάξεων, βασιζόμενος στην αρχή της ομογένειας η οποία προερχόταν από γεωμετρικούς προβληματισμούς. Ενώ οι Fermat, Barrow και Newton είχαν χρησιμοποιήσει μόνο τα απειροστά πρώτης τάξης, ο Leibniz συνέλαβε έναν άπειρο αριθμό τέτοιων τάξεων, που αντιστοιχούσε, υπό μια έννοια, στις άπειρες σειρές που υπάρχουν στο σύστημα των μονάδων που εντοπίζονται στο φιλοσοφικό του μοτίβο. Ωστόσο, στον ορισμό του διαφορικού της πρώτης τάξης, ο Leibniz αμφιταλαντεύτηκε ενώ σχετικά με τα διαφορικά ανώτερης τάξης απείχε πολύ από την παροχή μιας ικανοποιητικής εξήγησης.

Στην πρώτη δημοσιευμένη διατύπωση του λογισμού, ο Leibniz παρουσίασε έναν μοναδικά ικανοποιητικό ορισμό των διαφορικών πρώτης τάξης. Υποστήριξε ότι, το διαφορικό *dx* της τετμημένης *x* είναι μια αυθαίρετη ποσότητα, και ότι το διαφορικό *dy της* τετμημένης *y* ορίζεται ως η ποσότητα η οποία είναι για το *dx* το αντίστοιχο του λόγου της τεταγμένης προς την υποεφαπτομένη. Ο κανόνας του Barrow για τις εφαπτομένες είχε, υπό μια έννοια, υποδηλώσει έναν παρόμοιο ορισμό, διότι απαιτούσε την αντικατάσταση της τεταγμένης με το *a* και της υποεφαπτομένης με το *e*, αλλά το *a* και το *e* του Barrow ήταν αόριστα απειροστά. Στον προαναφερθέντα ορισμό του Leibniz, τα διαφορικά είναι πεπερασμένες, προσδιορίσιμες ποσότητες, οι οποίες είναι πλήρως συγκρίσιμες με εκείνες που ορίζονται από τον σύγχρονο διαφορικό λογισμό. Αυτό το γεγονός οδήγησε στον ισχυρισμό ότι «ο Leibniz από την αρχή του νέου λογισμού όρισε το διαφορικό ακριβώς όπως και ο Cauchy»[131].

---

[130] *Ο Hoppe ("Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung" σελ.184) υποστήριξε ότι η σκέψη του Leibniz ήταν πολύ βαθύτερη και ακριβέστερη από τη σκέψη του Newton, αλλά αυτή η άποψή του βασίζεται στην παρερμήνευση του έργου του τελευταίου.*

[131] *Mansion, Resume du cours d' analyse infinitesimale, Παράρτημα, "Esqusse historique", σελ. 221, πβ. Επίσης τη Σημείωση του Αρχισυντάκτη, Mathesis,τομ. IV (1884), σελ.177.*

Υπό μια έννοια αυτό είναι αλήθεια, αλλά μια τέτοια δήλωση είναι αρκετά παραπλανητική για δύο λόγους. Κατ' αρχήν, ο ορισμός του Leibniz προϋποθέτει λογικά έναν ικανοποιητικό ορισμό της γραμμής της εφαπτομένης, όπως και το διαφορικό του Cauchy εξαρτάται από την έννοια του παραγώγου. Σε κάθε περίπτωση, θα ήταν αναμενόμενο η εξήγηση να δίνεται αναφορικά προς τα όρια. Ο Leibniz, ωστόσο, σε αντίθεση με τον Cauchy, όρισε την εφαπτομένη ως τη γραμμή που ενώνει δύο άπειρα κοντινά σημεία της καμπύλης, ενώ αυτές οι άπειρα μικρές αποστάσεις μπορούν να εκφραστούν από διαφορικά ή διαφορές μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών της μεταβλητής[132]. Αυτό συνιστά μια «*petitio principii*», που δηλώνει ότι η αποφυγή των απείρως μικρών ποσοτήτων στην σκέψη του Leibniz ήταν μόνο επιφανειακή. Είναι, βεβαίως, δυνατό να είχε ο Leibniz ως στόχο την ερμηνεία της γλώσσας του υπό την ακριβή έννοια των ορίων, όπως πράττουμε όταν μιλούμε για την εφαπτομένη ως τη γραμμή που περνά από δύο διαδοχικά ή συμπτωματικά σημεία. Περαιτέρω, όμως, εξέταση των γραπτών του Leibniz θα κάνει αυτή την άποψη να φαίνεται ως παρερμήνευση ολόκληρης της σκέψης του. Ο Leibniz, σε όλο το έργο του, θεώρησε το διαφορικό ως θεμελιώδες, όπως απέδειξε πρόσφατη έρευνα.[133] Τα σύγχρονα μαθηματικά συμφωνούν, ωστόσο, με τον Cauchy, διότι εξάρτησαν την έννοια του διαφορικού από την έννοια του ορίου ορίζοντάς την βάσει της παραγώγου. Η αιτία αυτής της αλλαγής άποψης πρέπει να αναζητηθεί στην αδυναμία του Leibniz και άλλων να διατυπώσουν έναν ικανοποιητικό ορισμό του διαφορικού, ανεξάρτητου από τη μέθοδο των ορίων.

Οι απόπειρες του Leibniz να δώσει ικανοποιητικούς ορισμούς των διαφορικών των ανώτερων τάξεων ήταν ανεπιτυχείς. Υποστήριξε ότι το ddx ή d^2x είναι για το dx ότι είναι το dx για το x[134] μην κάνοντας καμία διάκριση μεταξύ των διαφορικών εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Ομοίως, υποστήριξε ότι, εφόσον $dx:x = dh:a$ όπου το a είναι σταθερά και το dh διαφορικό σταθερά, τότε το $d^2x:dx=dh:a$ ή $d^2x:x = dh^2: a^2$, και γενικά $d^ex:x = dh^e:a^e$ όπου το e ενδέχεται να είναι ακόμη και κλασματικό.[135] Αντιλαμβανόμενος ίσως ότι δεν ήταν δυνατή η συνεπής εφαρμογή του εν λόγω ορισμού, εκπόνησε αργότερα μια γεωμετρική ερμηνεία η οποία,

---

[132]*Mathematische Schriften, τομ.V, σελ.220. Gerhardt, Die Entdechung Der Differentialrechnung durch Leibniz, σελ. 35.*

[133]*Petronievics, 'Uber Leibnizens Methods der directen Differentiation".*

[134]*Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.V, σελ. 325. Επίσης, τομ. III (Part 1), σελ.228.*

[135]*Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.III (Part 1), σελ. 228.*

παρόλο που στερείτο ακρίβειας ως προς τους ισχυρισμούς που περιλάμβανε, θα μπορούσε να ερμηνευτεί ορθά από άποψη παραγώγων. Σε οποιαδήποτε καμπύλη, ας οριστεί το *dx* οποιουδήποτε σημείου μια προσδιορίσιμη ποσότητα και το *dy* να είναι τέτοιο ώστε ο λόγος *dy* προς το *dx* να είναι ίσος με τον λόγο της τεταγμένης προς την υποεφαπτομένη.

Εάν σχεδιάσουμε, στη συνέχεια, για κάθε σημείο της καμπύλης στους ίδιους άξονες ένα νέο σημείο του οποίου η τεταγμένη είναι ανάλογη προς το dy, θα προκύψει μια νέα καμπύλη, τα διαφορικά της οποίας θα είναι τα «διαφορικά διαφορικών» ή «δεύτερα διαφορικά» της αρχικής καμπύλης.[136] Αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση είναι, γενικά, ισοδύναμη, με αυτή που θα προέκυπτε εάν από τον σχεδιασμό των τιμών του λόγου $\frac{dy}{dx}$ για κάθε σημείο. Το δεύτερο διαφορικό d^2y δύναται στη συνέχεια να προσδιοριστεί από την παράγωγο της νέας καμπύλης, δηλαδή από την δεύτερη παράγωγο της αρχικής καμπύλης. Ο Leibniz, ωστόσο, δεν θεωρούσε τις παραγώγους θεμελιώδους σημασίας, και συνεπώς, οι παρατηρήσεις του εδώ δεν μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούν ικανοποιητικό ορισμό του d^2y, όπως και του *dy* από άποψη εφαπτομένης. Η έλλειψη παρόμοιων κατάλληλων ορισμών οδήγησε σε παράξενες χρήσεις του διαφορικού συμβολισμού. Το 1695 ο John Bernoulli, σε επιστολή του προς τον Leibniz περιέλαβε εκφράσεις όπως: $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$ και $\frac{d^3y}{d^2x} = d^3yd^{-2}x = d^3y\int^2 x$.[137]

Ελλείψει ικανοποιητικών ορισμών, ο Leibniz κατέφυγε πολύ συχνά στη χρήση αναλογιών για να αποσαφηνίσει τη φύση των άπειρα μικρών διαφορικών του. Κάποτε χρησιμοποίησε τους συμβολισμούς του Newton και αναφέρθηκε στα διαφορικά του ως στιγμιαίες αυξομειώσεις των ποσοτήτων.[138] Εφάρμοσε και πάλι τη σκέψη του Hobbes υποστηρίζοντας ότι το *conatus* είναι για την κίνηση ό,τι ένα σημείο για τον χώρο ή ό,τι το ένα για το άπειρο.[139] Θεωρούσε το άπειρα μικρό ως μελέτη της εξαφάνισης ή της αρχής των μεγεθών σε αντιδιαστολή προς τις ήδη

---

[136] *"Addenda ad schediasma proximo", σελ. 370.*

[137] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.III (Part 1), σελ.180.*

[138] *Leibniz, Mathematische Schriften, τομ.VII, σελ. 222.*

[139] *Philosophische Schriften, IV, σελ. 229.ΠΒ. και Leibniz, Mathematische Schriften τομ.III, σελ.536.*

σχηματισμένες ποσότητες.[140] Εφάρμοσε αυτή την αναλογία και στα διαφορικά δεύτερης τάξης. Εάν στη φύση μια κίνηση νοείται ως η οπτική εικόνα μιας γραμμής, τότε η ροπή της αδράνειας ή η ταχύτητα αναπαριστώνται από μια άπειρα μικρή γραμμή ενώ η επιτάχυνση από μια γραμμή διπλά απείρως μικρή.[141]

Καθώς απευθύνεται και πάλι στο αισθητήριο της γεωμετρίας, ο Leibniz υποστήριξε ότι κατά τον ίδιο τρόπο που ένα σημείο δεν προσέθετε τίποτε σε μια γραμμή, διότι δεν είναι ομοιογενές ή συγκρίσιμο, ομοίως και τα διαφορικά ανώτερης τάξης μπορούν να αγνοηθούν στη μέθοδό του.[142] Αναπτύσσοντας περαιτέρω αυτόν τον συλλογισμό, υποστήριξε ότι εάν κάποιος θεωρεί ότι τα γεωμετρικά μεγέθη αναπαρίστανται από τις κοινές αλγεβρικές ποσότητες, τότε τα πρώτα διαφορικά αναφέρονται στις εφαπτομένες ή τη φορά των γραμμών ενώ τα ανώτερα διαφορικά αναφέρονται στις ταλαντώσεις και τις καμπυλότητες[143]. Υπό αυτή την έννοια τα διαφορικά έπρεπε να συγκριθούν με την Ευκλείδειο γωνία επαφής η οποία υπολείπεται οποιασδήποτε προσδιορίσιμης ποσότητας χωρίς, ωστόσο, να μηδενίζεται. [144]

Ελλείψει αυστηρών ορισμών, ο Leibniz συνέχισε να κάνει πολλαπλή χρήση αναλογιών. Με κάπως λιγότερο κριτικό πνεύμα υποστήριξε ότι το διαφορικό μιας ποσότητας δύναται να νοηθεί ότι έχει προς την ίδια την ποσότητα μια σχέση ανάλογη προς τη σχέση ενός σημείου προς τη γη ή της ακτίνας της γης προς την ακτίνα του ουρανού[145]. Σε άλλο σημείο αναφέρει ότι όπως η γη είναι άπειρη σε σύγκριση με μια σφαίρα που κρατούμε στο χέρι μας έτσι και η διαφορά των σταθερών ουράνιων σωμάτων είναι διπλά άπειρη σε σχέση με τη σφαίρα[146]. Αυτή την αναλογία την επανέλαβε αργότερα, αντικαθιστώντας τη σφαίρα με έναν κόκκο άμμου.

---

[140] *Leibniz, Philosophische Schriften, 7 τόμοι, εκδ. C. I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890. Reprint Hildesheim, τομ. IV, σελ. 90.*

[141] *"Testamen de motuum coelestium", σελ. 86.*

[142] *Leibniz, Mathematische Schriften, V, σελ. 322.*

[143] *Leibniz, Mathematische Schriften, V, 325-26. ΠΒ. και σελ. 408.*

[144] *Leibniz, Mathematische Schriften, V, σελ. 388.*

[145] *"Testamen de motuum coelestium" σελ. 85.*

[146] *Leibniz, Mathematische Schriften, V, σελ. 350, 389.*

Ο John Bernoulli, μαθητής του Leibniz επεσήμανε ατυχώς και άλλα αναλογικά σχήματα που είχαν καταστήσει δυνατά τα έργα του Γαλιλαίου και του Leeuwenhoek. Συνέκρινε τις τάξεις του άπειρα μεγάλου με τις σχέσεις των ουράνιων σωμάτων προς τον ήλιο, τους πλανήτες, τους δορυφόρους τους, τα όρη των τελευταίων κτλ. Οι άπειρα μικρές ποσότητες παρομοιάζονταν, έτσι, με τις εμφανώς αναρίθμητες τάξεις των μικροσκοπικών οργανισμών που είχε αποκαλύψει το μικροσκόπιο[147]. Ο Leibniz, παρόλο που εκτίμησε τη σύγκριση, επεσήμανε στον Bernoulli ότι τα τελευταία είχαν πεπερασμένο μέγεθος ενώ τα διαφορικά ήταν απειροστά[148].

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι ενώ ο Newton είχε χρησιμοποιήσει την έννοια των απειροστών στα πρώτα του έργα για να την αποκηρύξει αργότερα κατηγορηματικά και να επιχειρήσει να καθιερώσει την ιδέα των διαφορικών στη θεωρία των πρώτων και εσχάτων λόγων των πεπερασμένων διαφορών – δηλαδή, ως προς τα όρια. Θα διαπιστώσουμε στον Leibniz ότι αυτή η τάση έχει πάρει μια κάπως διαφορετική κατεύθυνση. Ξεκινώντας από πεπερασμένες διαφορές, επρόκειτο να επιβεβαιωθεί η χρήση του των απειροστών εννοιών από τη λειτουργική επιτυχία που γνώρισε η μέθοδος των διαφορικών του, παρά το γεγονός ότι φαίνεται να διατηρούσε σοβαρές αμφιβολίες σχετικά με τη λογική της τεκμηρίωση. Οι αποκλίνουσες απόψεις αυτών των δύο ανδρών δεν οφείλονταν ίσως τόσο στο ότι ανήκαν σε διαφορετική μαθηματική παράδοση όσο στις διαφορετικές τους προτιμήσεις. Ο Newton, ο επιστήμονας, ανακάλυψε στην έννοια της ταχύτητας μια βάση την οποία έκρινε ικανοποιητική. Ο Leibniz, ο φιλόσοφος, ο οποίος ήταν ταυτόχρονα στον ίδιο βαθμό θεολόγος όσο και επιστήμονας[149], προτίμησε να την εντοπίσει στο διαφορικό, το ισοδύναμο στη σκέψη με τη μονάδα, η οποία έμελλε να παίξει τόσο σημαντικό ρόλο στο σύστημα μεταφυσικής του.

Παρόλο που ο Leibniz συνέχιζε να χρησιμοποιεί τις έννοιες και τις μεθόδους των απειροστών, η αιτιολόγησή του για το άπειρα μικρό δεν ήταν αρχικά απόρροια μιας σοβαρής προσπάθειας διότι η εν λόγω έννοια είχε χρησιμοποιηθεί από τους γεωμέτρες με αρκετή ανοχή κατά τη διάρκεια όλου του αιώνα. Παρόλο που ο Huygens και ορισμένοι άλλοι δεν αποδέχθηκαν αμέσως τον νέο διαφορικό λογισμό, δεν αντιτάχθηκαν, όμως, σε αυτόν. Το 1694, ωστόσο, ο Ολλανδός φυσικός και γεωμέτρης Bernard Nieuwentijdt, τον οποίο επρόκειτο να διαδεχθεί μια μακρά

---

[147] *Leibniz και Bernoulli, Commercium Philosophicum.*

[148] *Leibniz και Bernoulli, Mathematische Schriften,III (Part 2), σελ.518, 524.*

[149] *Mach, Science of Mechanics, σελ. 449.*

σειρά μαθηματικών, επιτέθηκε στην έλλειψη σαφήνειας του έργου του Newton και στην εγκυρότητα των ανώτερων διαφορικών του Leibniz. Παρόλο που αποδέχθηκε, γενικά, την ορθότητα των αποτελεσμάτων των νέων μεθόδων, είχε τη αίσθηση ότι χαρακτηρίζονταν από ασάφεια και ισχυρίστηκε ότι ενίοτε οδηγούσαν σε παραλογισμό. Άσκησε κριτική στην διαδικασία εύρεσης εφαπτομένης του Barrow επειδή είχε εκλάβει τις τιμές του *a* και *e* ως μηδενικές[150]. Θεώρησε τις εκλιπούσες ποσότητες του Newton εξαιρετικά αόριστες και είπε ότι αδυνατούσε να ακολουθήσει τη λογική στα αξιώματα σχετικά με τα όρια σύμφωνα με τα οποία οι ποσότητες που σε κάποια στιγμή στο χρόνο τείνουν προς την ισότητα είναι τελικά ίσες.[151] Στην ανάλυση του ο Leibniz αμφισβήτησε τον τρόπο με τον οποίο το άθροισμα των απειροστών μπορεί να αποτελέσει πεπερασμένη ποσότητα. [152]

Σε μια νέα επίθεση την επόμενη χρονιά, ο Nieuwentijdt είπε ότι ο Leibniz δεν είχε διευκρινίσει περισσότερο από τον Newton και τον Barrow τη φύση των άπειρα μικρών ποσοτήτων, ούτε ήταν σε θέση να εξηγήσει με ποιόν τρόπο τα διαφορικά ανώτερης τάξης διέφεραν από εκείνα πρώτης τάξης.[153] Ο Nieuwentijdt επιχείρησε να αναπτύξει μια μέθοδο που θα επίλυε τα προβλήματα του Leibniz χωρίς να χρησιμοποιεί απειροστά ανώτερης τάξης· όμως το αποτέλεσμα ήταν ανεπιτυχές.[154] Ο ορισμός του Nieuwentijdt για το άπειρο και το απειροστό αντιστοίχως ως ποσότητες μεγαλύτερες και μικρότερες οποιουδήποτε δεδομένου μεγέθους[155] δεν θεωρήθηκε ικανοποιητικός, όπως επίσης συνέβη και με τον Nicholas of Cusa. Επομένως, ενώ οι εργασίες του Newton και του Leibniz έτειναν κατά κάποιο τρόπο προς τη θεωρία του ορίου, η άποψη του Nieuwentijdt αντιπροσώπευε μια υποτροπή σε μια λιγότερο κριτική αντιμετώπιση του στατικού απείρου και του απειροστού, η οποία τον επόμενο αιώνα επεκτάθηκε τολμηρότερα στο απείρως μεγάλο και το απείρως μικρό ανώτερης τάξης, ειδικά από τον Fontenelle. Αυτό θεωρήθηκε ατυχές, καθώς ένα σοβαρό εγχείρημα να καθιερωθεί μια ασφαλής θεμελίωση του λογισμού ήταν επιθυμητό εκείνη τη συγκεκριμένη εποχή.

---

[150] *B.Nieuwentijdt, Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, Amsterdam,1694, σελ.8.*

[151] *Όμοια, σελ. 9-15*

[152] *Όμοια, σελ. 34. Επίσης σελ. 15-24.*

[153] *Leibniz, Analysis infinitorum seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae.*

[154] *Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis.*

[155] *Leibniz, Analysis infinitorum, σελ.1.*

Ο Leibniz απάντησε στον Nieuwentijdt το 1695 στο «*Acta eruditorum*»,[156] όπου υπερασπίστηκε τον εαυτό του από «υπερβολικά ακριβείς» επικριτές, τους οποίους παρομοίωσε με τους Σκεπτικιστές παλαιότερων εποχών. Υποστήριξε ότι δε θα πρέπει να μας επηρεάζει η υπερβολική προσκόλληση στην ακρίβεια σε τέτοιο βαθμό ώστε να απορρίπτουμε τους καρπούς μιας ανακάλυψης. Επέμενε πως η μέθοδός του διέφερε από εκείνη του Αρχιμήδη μόνο στη χρήση των εκφράσεων και ότι σε αυτά τα πλαίσια ήταν πιο άμεση και καλύτερα προσαρμοσμένη στην τέχνη της ανακάλυψης.[157] Εξάλλου, υποστήριζε ότι ήταν εκείνος αυτός που είχε εισαγάγει τις φράσεις «άπειρο» και «απειροστό» και «δεν σημαίνουν τίποτε παραπάνω από ποσότητες που δύναται κανείς να εκλάβει είτε ως μεγάλες ή ως μικρές ανάλογα με την προτίμηση» -περίπου όπως και ο Αριστοτέλης είχε θεωρήσει το άπειρα μικρό ως ένδειξη μόνο μιας δυνατότητας, «προκειμένου να δείξει ότι ένα σφάλμα είναι μικρότερο από κάτι που μπορεί να προσδιοριστεί, δηλαδή ότι δεν υπάρχει σφάλμα». [158] Ωστόσο, επαναλάμβανε ότι μπορεί κανείς να τα χρησιμοποιήσει αυτά ως «τέλεια πράγματα»- δηλαδή ως πραγματικά άπειρα και απείρως μικρές ποσότητες - σαν εργαλείο, όπως ακριβώς και «οι αλγεβρίστες χρησιμοποιούν με μεγάλη επιτυχία υποθετικές ρίζες».[159]Αυτή η διπρόσωπη εμφάνιση του διαφορικού επαναλαμβάνεται συχνά στο έργο του Leibniz. Ενώ αναφέρεται συχνά σε αυτό ως άπειρα μικρό, χρησιμοποιούσε πολλάκις και τον όρο «ασύγκριτα μικρό».[160] Υποστήριζε πως «εάν επιθυμεί κανείς να απορρίψει τις άπειρα μικρές ποσότητες, θα μπορούσε να υποθέσει ότι είναι τόσο μικρές όσο κανείς κρίνει αναγκαίο προκειμένου να μην είναι συγκρίσιμες και ότι το σφάλμα που παράγεται δεν θα επιφέρει συνέπειες, ή θα είναι μικρότερο από οποιαδήποτε δεδομένο μέγεθος». [161]

Σε κάποιο άλλο σημείο ο Leibniz αναφέρει πως το διαφορικό είναι «μικρότερο από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα» και συνέκρινε την αγνόηση των διαφορικών με το έργο του Αρχιμήδη, ο οποίος «υπέθεσε, όπως και όλοι οι υπόλοιποι που ακολούθησαν τη θεωρία του, ότι οι ποσότητες που δεν διέφεραν κατά μια

---

[156] *Mathematische Schriften,V, σελ. 318.*

[157]*Mathematische Schriften, V, σελ. 350*

[158]*Leibniz, Philosophische Schriften, 7 τόμοι, εκδ. C. I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890. Reprint Hildesheim, τομ. VI, σελ. 90.*

[159]*Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ. 150*

[160]*Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ.V, σελ. 407 ·πβ. επίσης σελ. 322. "Testamen de motorum coelestium" σελ.85.*

[161]*"Testamen de motorum coelestium" σελ.85.*

συγκεκριμένη ποσότητα μεταξύ τους ήταν πράγματι ίσες».[162] Εδώ φαίνεται να διαισθάνθηκε ότι η μέθοδος αυτή αποτελούσε τελικά μια κεκαλυμμένη μορφή της έκφρασης της μεθόδου της εξάντλησης, άρα οποιαδήποτε επιπλέον επαλήθευση ήταν πλεονασμός. Ωστόσο, το νόημα των ίδιων των συμβόλων δεν είχε αποσαφηνιστεί ακόμα.

Η αμφιβολία που επέδειξε ο Leibniz σε σχέση με το αν οι διαφορές θα έπρεπε να θεωρούνται προσδιορίσιμες ή μη προσδιορίσιμες διατυπώνεται εναργέστερα σε μια διαδικασία που προτείνει στο έργο του «*Historia et origo calculi differentialis*», που συνέγραψε ένα ή δύο χρόνια πριν το θάνατό του. Προκειμένου να αποφύγει να εργαστεί με ποσότητες που δεν ήταν πραγματικά απειροστές αλλά που αντιμετωπίζονται ως τέτοιες -αμφίβια μεταξύ ύπαρξης και ανυπαρξίας, όπως ονόμαζε ο Leibniz τους φανταστικούς αριθμούς- κατέφυγε σε «ταχυδακτυλουργίες». Ο Leibniz εδώ χρησιμοποίησε τα σύμβολα *(d)x* και *(d)y* για να αναπαραστήσει πεπερασμένες προσδιορισμένες διαφορές· έπειτα, μετά την ολοκλήρωση του υπολογισμού, τα αντικατέστησε από τα μη προσδιορίσιμα απειροστά ή τα διαφορικά *dx* και *dy* ως «ένα είδος φαντασίας», διότι εξάλλου « ο λόγος *dy*:*dx* δύναται πάντα να μειωθεί σε έναν λόγο (*d)y* : *d(x)* μεταξύ ποσοτήτων που είναι πραγματικές και προσδιορισμένες πέραν κάθε αμφιβολίας».[163]

Τώρα, πως τεκμηριώνεται αυτό το άλμα από τα προδιορίσιμα ποσά στα μη προσδιορίσιμα και αντίστροφα, δε το ξεκαθάρισε ο Leibniz. Από το επιχείρημά του φαίνεται ότι συνειδητοποίησε πως δεν ήταν τα διαφορικά από μόνα τους, αλλά μόνον ο λόγος τους που δημιούργησε τη σημαντική αυτή διαπίστωση. Επίσης, ο Newton κατανόησε παρομοίως ότι η σπουδαιότητα αυτής της μεθόδου έγκειται στο λόγο των διαφορικών, έτσι ώστε όσον αφορά τα διαφορικά θα μπορούσε κανείς να αντικαταστήσει άλλες πεπερασμένες ποσότητες με την ίδια αναλογία. Το γεγονός ότι η θεωρία του ορίου δεν διατυπώνεται ξεκάθαρα στις εργασίες τους οφείλεται προφανώς στο γεγονός ότι οι ίδιοι και οι σύγχρονοί τους αντιλαμβάνονταν πάντοτε έναν λόγο ως το πηλίκο δύο αριθμών και όχι σαν ένα μοναδικό αριθμό από μόνο του.[164] Μόνο μετά την ανάπτυξη της γενικής αφηρημένης έννοιας του πραγματικού αριθμού άνοιξε ο δρόμος για την ερμηνεία των διαφορικών λογισμών στηριζόμενων στο όριο μιας άπειρης ακολουθίας λόγων ή αριθμών· όμως αυτή η ερμηνεία δεν

---

[162] *"Responsio ad nonnullas difficultates, a Dn. Bernardo Nieuwentijt" σελ.311.*

[163] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σ. 155. Weisenborn, Die Principien der höheren Analysis, σ. 104. Gerhardt, Die Entdekung der Differebtialrechnung durch Leibnis, σελ. 31.*

[164] *Pringsheim, "Nombres irrationales et notion de limite" σελ. 143-44.*

έγινε ευρέως αποδεκτή παρά μόνο μετά από έναν αιώνα. Οι έννοιες των όρων «εκλιπούσες ποσότητες» και «λόγος πρώτων προς έσχατων» δεν είχαν εξηγηθεί καθαρά από τον Newton και οι απαντήσεις του έμοιαζαν περισσότερο ταυτολογίες.

Η απάντηση όμως είναι απλή διότι με τον όρο τελική επιτάχυνση εννοούσε εκείνη την επιτάχυνση που κινεί το σώμα όχι προτού φτάσει στον τελικό προορισμό, ούτε μετά το σταμάτημα της κίνησής του, αλλά ακριβώς τη στιγμή που αφικνείται… Παρομοίως, στην περίπτωση των εσχάτων τιμών των εκλιπουσών ποσοτήτων θα πρέπει να ερμηνεύεται ως ο λόγος των ποσών όχι πριν χαθούν, ούτε μετά, αλλά αυτός που έχουν όταν εξαφανίζονται[165].

Αυτό θυμίζει αρκετά το πηλίκο των δύο απειροστών παρότι ο Newton πρόσθεσε ότι «αυτοί οι έσχατοι λόγοι με τους οποίους τέτοιες ποσότητες εξαφανίζονται δεν είναι στην πραγματικότητα οι λόγοι εσχάτων ποσοτήτων αλλά τα όρια όπου οι λόγοι των ποσοτήτων ελαττώνονται ατελείωτα και πάντα συγκλίνουν». Με άλλα λόγια, ο έσχατος λόγος είναι εκείνο που ενδιαφέρει τον Newton και όχι οι «εκλιπούσες ποσότητες» καθαυτές · ωστόσο απέτυχε να προσδιορίσει με απόλυτη βεβαιότητα αυτόν τον λόγο.

Ο Leibniz είχε μια σχετικώς παρόμοια ιδέα. Όπως και ο Newton που δεν υπολόγιζε ποτέ μία μόνο ροή αλλά πάντα έναν λόγο, έτσι και ο Leibniz κατάλαβε ότι ήταν ο λόγος ή η συσχέτιση μεταξύ των διαφορικών που ήταν σημαντικά. Αυτά θα μπορούσαν να θεωρηθούν συνεπώς ως οποιεσδήποτε πεπερασμένες ποσότητες ο λόγος των οποίων θα ήταν ίδιος με αυτόν της τεταγμένης με την υποεφαπτομένη. Για αντικειμενικούς λόγους, ωστόσο, ο Leibniz διατήρησε το απείρως μικρό, αιτιολογώντας το υποστηρίζοντας ότι αν επιθυμούσε να επαληθεύσει θα μπορούσε να αντικαταστήσει τα μη προσδιορίσιμα με τα προσδιορίσιμα και να έχουν τον ίδιο λόγο. Πάντως, όπως και ο Newton δεν εξήγησε ακριβώς πως προκύπτουν οι τιμές των «εκλιπόντων ποσοτήτων» και πως αυτές σχετίζονται με τους πρώτους ή έσχατους λόγους, έτσι και ο Leibniz δεν κατόρθωσε να εξηγήσει τη μετάβαση από τα πεπερασμένα στα άπειρα μεγέθη. Παραδέχτηκε δε ότι δεν θα μπορούσε κανείς να επιβεβαιώσει την ύπαρξη ή όχι των απείρως μικρών ποσοτήτων[166].

---

[165]*Newton, Opera omnia, (4 τόμοι, G. Cramer), Lausanne and Geneva, 1742,τομ.I, σελ.250-251, II, σελ. 40-41.*

[166]*Leibniz and Bernoulli, Commercium philosophicum et mathematicum, I, σελ. 402. Επίσης, Mathematische Schriften, III, σελ.524.*

Επιπλέον, ο Leibniz θεωρούσε ότι η επαλήθευση του λογισμού του βρισκόταν στις απλές μαθηματικές έννοιες που ήταν ήδη γνωστές και σε χρήση και ότι «δεν ήταν απαραίτητο να υποπέσουμε σε μεταφυσικές διχογνωμίες όπως για παράδειγμα η σύνθεση του συνεχούς»[167]. Ωστόσο, όταν κλήθηκε να εξηγήσει τη μετάβαση από τα πεπερασμένα στα άπειρα μεγέθη κατέφυγε σε μια φιλοσοφικού τύπου αρχή γνωστή ως τον νόμο της συνέχειας. Έχουμε δει πρότερες εφαρμογές αυτού του δόγματος από τον Kepler και τον Nicholas of Cusa. Ο τελευταίος πιθανόν να επηρέασε τον Leibniz τόσο σε αυτό το θέμα, όσο και στη φιλοσοφική αρχή των μονάδων[168].

Από την άλλη πλευρά όμως, ο Leibniz έδωσε στην αρχή της συνέχειας μια διαύγεια της σχηματοποίησης που έλλειπε από το προσκήνιο και ίσως γι' αυτό το λόγο να το θεωρούσε δική του ανακάλυψη. Αυτό το αξίωμα το εξέφρασε σε μια επιστολή του προς τον Bayle το 1687 ως εξής: «Σε οποιαδήποτε υποτιθέμενη μετάβαση που λήγει σε οποιοδήποτε τέρμα, υπάρχει το περιθώριο να εισαγάγει κανείς μια γενική λογική όπου θα συμπεριλαμβάνεται και ο τελικός προορισμός»[169]. Συνεπώς στις πράξεις του για το λογισμό «η διαφορά δεν θα πρέπει να θεωρείται μηδενική έως ότου ο υπολογισμός να επεκτείνεται όσο το δυνατόν περισσότερο με σωστές διαγραφές και να μειώνεται σε τιμές μη εκλιπόντων ποσοτήτων και τελικά φτάνουμε στο σημείο όπου το αποτέλεσμα οδηγεί στην τελική τιμή»[170] προφανώς βάση της ισχύος του νόμου της συνέχειας. Συνεπώς, ακόμα και στο έργο του Leibniz η ιδέα ενός ορίου είχε υπονοηθεί, παρά το γεγονός ότι η λογική σειρά είχε αντιστραφεί. Ο Leibniz εξήγησε την έννοια του ορίου με το νόμο της συνέχειας αλλά έκτοτε τα μαθηματικά έχουν δείξει ότι ο νόμος της συνέχειας πρέπει πρώτα να προσδιοριστεί σε σχέση με τα όρια. Σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο ο Leibniz φαίνεται ότι προσπαθεί ακόμα να εφαρμόσει μια αόριστη ιδέα συνέχειας την οποία πιστεύουμε ότι κατέχουμε και η οποία έχει απασχολήσει τους διανοητές από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας.

Ο Newton βεβαίως κάλυψε και αποσιώπησε μέρος της δυσκολίας του με το συνεχές με την παρηγορητική ιδέα της συνεχούς κίνησης, ενώ και ο ίδιος στους πρώτους και έσχατους λόγους επικαλέστηκε καθαρά τον νόμο της συνέχειας του Leibniz. Ενώ ο Newton επεδίωκε να αποφύγει τη θεωρία του ορίου υιοθετώντας ιδέες που θα ήταν αποδεκτές από τον επιστημονικό εμπειρισμό, ο Leibniz κατέφυγε σε ιδέες του

---

[167] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ. 149-50.*

[168] *Zimmerman, "Der Cardinal Nicolaus Cusanus als Vorläufer Leibnizens".*

[169] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ.147. Βλέπε επίσης, Philosophische Schriften,III, σελ .52- Mathematische Schriften,V, σελ .385.*

[170] *Leibniz, Early Mathematical Manuscripts, σελ.151-52*

απόλυτων σχημάτων που προτείνει ο μεταφυσικός ιδεαλισμός. Ακόμα και όταν οι ποσότητες –όπως τα διαφορικά- εμπλέκονται σε μια σχέση και γίνουν μη προσδιορίσιμα πίστευε ότι το απόλυτο σχήμα παρέμενε. Υποστήριζε ότι ένα σημείο δεν ήταν αυτό που αποτελούνταν από το μηδέν αλλά η επέκτασή του είναι μηδέν[171]. Σε μια παρόμοια συσχέτιση ο Leibniz είχε θέσει το ερώτημα στον Wallis: «Ποιος δεν παραδέχεται ένα σχήμα χωρίς μέγεθος?»[172]. Το χαρακτηριστικό τρίγωνο ήταν για τον Leibniz εκείνο του οποίου το σχήμα παρέμεινε άθικτο αφού όλα τα μεγέθη είχαν αφαιρεθεί από αυτό[173], όπως ακριβώς και ο Newton είχε αναφερθεί στις απόλυτες μορφές των εκλιπόντων τριγώνων (evanescent triangles)[174].

Η πρόθεση του Leibniz ήταν να συγγράψει ένα σύγγραμμα πάνω στο θέμα του απείρου. Αυτό το βιβλίο που θα αποτελούσε μια εναργή έκφραση των απόψεών του, δε γράφτηκε ποτέ. Πάραυτα, η στάση που εξέφρασε ο Leibniz σε σχέση με τον νόμο του της συνέχειας είναι η ίδια- με κάποιες παρεκκλίσεις και μετατροπές- που υποστήριζε μέχρι το θάνατό του. Στο έργο του «*Théodicée*» είχε πει σε μια αναφορά στο άπειρο και τις άπειρα μικρές ποσότητες «μα όλα αυτά δεν είναι παρά μυθοπλασίες· κάθε αριθμός είναι πεπερασμένος και προσδιορίσιμος όπως ακριβώς και κάθε ευθεία»[175]. Όμως, μερικά χρόνια αργότερα, σε ένα γράμμα του στον Grandi ανέφερε: «Εν τω μεταξύ, αντιλαμβανόμαστε το απείρως μικρό όχι ως ένα απλό και απόλυτο μηδέν αλλά ως σχετικό μηδέν (όπως και εσείς ο ίδιος παρατηρήσατε) δηλαδή, μια εκλιπούσα ποσότητα που πάραυτα διατηρεί τα χαρακτηριστικά αυτού που τείνει να εξαφανιστεί»[176].

Εδώ ο Leibniz έχει ξεκάθαρα κατά νου το νόμο της συνέχειας. Αυτή την αρχή, η καταγωγή της οποίας βρίσκεται στην φύση του απείρου, ένιωθε ότι ήταν απολύτως απαραίτητη στη γεωμετρία αλλά και χρήσιμη στη φυσική[177]. Αντίστοιχα, θεωρούσε

---

[171]*Philosophische Schriften, 7 τόμοι, εκδ. C.I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890, Reprint Hildesheim, 1965, τομ.IV, σελ. 229.*

[172]*Leibniz, Mathematische Schriften, Berlin and Halle, 1849-1863, τομ. IV, σελ.54. Επίσης, στο ίδιο έργο, σελ. 63.*

[173] *Freyer, Studien zur Metaphysik, σελ.10.*

[174]*Newton, Opera omnia, (4 τόμοι, G. Cramer), Lausanne and Geneva, 1742,τομ.I, σελ 243.*

[175] *Philosophische Schriften, 7 τόμοι, εκδ. C. I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890, Reprint Hildesheim, 1965, τομ. VI, σελ.90.*

[176]*Mathematische Schriften, τομ.IV, σελ .218.*

[177] *Philosophische Schriften, τομ.III, σελ.52.*

το ίσο ως απαραίτητη προϋπόθεση του άνισου και την άπειρα μικρή ανισότητα ως μια εν δυνάμει ισότητα[178]. Συνεπώς η αποδοχή του νόμου της συνέχειας θα δικαίωνε την διαγραφή των διαφορικών ανώτερης τάξης και φαίνεται ότι σε αυτή τη βάση θα θεμελίωνε τον λογισμό του. Μία όχι και τόσο ακριβής παράδοση θα ήταν η αιτία να πιστέψει ο Leibniz σε πραγματικά άπειρα μεγέθη[179]. Πάραυτα, ο ίδιος ο Leibniz, σε μια επιστολή που συνέγραψε δύο μήνες πριν πεθάνει τόνισε εμφατικά πως «δεν πιστεύω διόλου ότι υπάρχουν μεγέθη απόλυτα άπειρα ή πραγματικά μη προσδιορίσιμα[180]. Τις θεωρίες αυτές τις έβλεπε ως «μυθοπλασίες, χρήσιμες για συντμήσεις και για να απευθύνεται κανείς οικουμενικά»[181]. Ένιωθε χωρίς αμφιβολία ότι η σύνδεση μεταξύ αυτών των μυθοπλασιών και της πραγματικότητας έγκειται στον νόμο του της συνέχειας που χρησιμοποίησε ως βάση σε όλα τα κατοπινά έργα του που πραγματεύονται το λογισμό[182].

Ακολουθήσαμε την εξέλιξη του λογισμού μέσω της σύλληψης των μεθόδων του Newton και του Leibniz και ανακαλύψαμε ότι οι έννοιες που εμπλέκονται δεν έχουν ακόμα ξεκαθαριστεί. Ο Newton έδωσε τρεις ερμηνείες της διαδικασίας του και ενώ δήλωσε μια προτίμηση στην έννοια των πρώτων και έσχατων λόγων ως τις πιο ευσταθείς δεν ανέπτυξε καμία από τις δύο σε ένα προσεκτικά εκλογικευμένο σύστημα. Ο Leibniz επέδειξε μια ανάλογη αναποφασιστικότητα διότι ενώ εφάρμοσε μέχρι τέλους την μέθοδο των απειροστών, αμφιταλαντεύτηκε όσον αφορά την στάση απέναντι στα διαφορικά, θεωρώντας τα ταυτόχρονα μη προσδιορίσιμα, ποιοτικά μηδενικά καθώς και, βοηθητικές μεταβλητές.

Έχει διατυπωθεί λανθασμένα ότι ο Leibniz ανέπτυξε τη μέθοδό του βασισμένος στη λογική, ενώ ο Newton άλλαζε τις θεωρήσεις του χρησιμοποιώντας οριακούς λόγους για να καλύψει τα απειροστά[183]. Μπορεί να υποστηριχθεί το αντίθετο και να αποδοθεί περισσότερη δικαιοσύνη. Η θέση του Leibniz ήταν πιο δύσκολο να παγιωθεί από εκείνη όσων χρησιμοποιούσαν αδιαίρετους αριθμούς διότι εκείνος έπρεπε να εξηγήσει τα απειροστά όχι μόνο πρώτης τάξης αλλά όλων των τάξεων. Ο

---

[178] *Philosophische Schriften, II, σελ 105.*

[179] *Klein, Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, σελ.214.*

[180] *Opera omnia, (Dutens), III, σελ. 500.*

[181] *Opera omnia, (Dutens), II, σελ .105.*

[182] *Scholtz, Die exacte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz, σελ. 39.*

[183] *Hoppe, "Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung" σελ. 184- Moritz Cantor, "Origines du calcul infinitesimal", σελ.24.*

Newton είχε αποφύγει την πολλαπλότητα των απειροστών με τη μέθοδο των ροών που απαιτούσε μονάχα μια αυξομείωση -αυτή του χρόνου *ο*. Η μέθοδός του ήταν συνεπώς καλά προσαρμοσμένη σε μια ερμηνεία αναφορικά με τα όρια με την προϋπόθεση ότι η ιδέα της ροής έχει οριστεί σωστά ή έχει αναγνωριστεί ως μια πρωτογενής απροσδιόριστη σύλληψη. Ο Leibniz από την άλλη δεν είχε κάποια ποσότητα να λειτουργήσει ως ανεξάρτητη μεταβλητή, έτσι ενώ παραδεχόταν ότι δεν ήταν τα απλά διαφορικά αλλά μόνο ο λόγος τους που ήταν σημαντικός, δεν μπορούσε να προσδιορίσει πως αυτό το γεγονός θα έβρισκε εφαρμογή στην εργασία του. Ο Newton είχε αντιμετωπίσει την ίδια δυσκολία όταν στην παρουσίαση του έργου «*Principia*» εγκατέλειψε τη μέθοδο των ροών και κατέφυγε στη χρήση των απειροστών σε συνδυασμό με τη λειτουργία δύο μεταβλητών .

Επιπλέον, η θεώρηση του Leibniz έκρυβε πιθανόν πιο αποτελεσματικά από εκείνη του Newton τη λογική βάση του λογισμού. Ο Leibniz είχε αναπτύξει –και ήταν αποτέλεσμα επίπονων ερευνών, υπομονετικών πειραματισμών και συχνής αλληλογραφίας με άλλους μαθηματικούς[184] πάνω στο θέμα (ειδικά με τους αδερφούς Bernoulli)- έναν συμβολισμό που ήταν ιδιαιτέρως κατάλληλος κατά την εφαρμογή του στην επίλυση ασκήσεων. Καθώς ήταν τόσο βολικό που έδινε σχεδόν αυτόματα λύσεις, αυτή η παράσταση έχει διατηρηθεί έως και σήμερα. Ωστόσο, η ίδια αυτή επιτυχία λειτούργησε αποτρεπτικά στον Leibniz όσον αφορά την ευστάθεια του θέματος. Το σύστημα των αναπαραστάσεών του τον οδήγησε να εκλάβει τους διαφορικούς λόγους ως πηλίκα και τα ολοκληρώματά του για αθροίσματα -τίνος, δε μπορούσε να εξηγήσει- και όχι ως περιοριστικές τιμές κάποιων χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η άποψή του φαίνεται να ήταν ότι τα διαφορικά πρώτης τάξης ήταν μοναδικά (μία χρήσιμη υπόθεση) που σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας είχαν την ίδια τιμή με την τεταγμένη και την υποεφαπτομένη. Τα διαφορικά δεύτερης τάξης ήταν τα μη προσδιορίσιμα διαφορικά που ήταν για τα πρώτης τάξης ότι ήταν τα τελευταία για την μονάδα. Βέβαια, ένας τέτοιος ορισμός δημιούργησε σύγχυση του $\frac{d^2y}{dx^2}$ με το $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ και αυτή η μη ικανοποιητική κατάσταση των πραγμάτων δεν αποσαφηνίστηκε έως ότου ο απειροστικός λογισμός εξηγήθηκε αργότερα με τη βοήθεια των ορίων.

Παρομοίως, η θεώρηση του Newton παρουσίασε δυσκολίες στον τρόπο που αναπτύχθηκε η λογική της. Όχι μόνο το άπειρα μικρό το υπονοούσε στη μέθοδο των ροών με τη μορφή μιας «στιγμής», αλλά ο Newton πολλές φορές αποτύγχανε να

---

[184] *F. Cajori, A History of Mathematical Notations, II, σελ. 180-81.*

είναι προσεκτικός στη σαφή διάκριση μεταξύ των ροών και των στιγμών. Επιπλέον, στην ορολογία «πρώτος και έσχατος λόγος» ενέχεται η ιδέα που θα επικρατούσε για έναν αιώνα ότι οι οριακές ποσότητες είναι λόγοι και όχι απλές αριθμητικές τιμές. Ο Newton αναγνώριζε ότι ο έσχατος λόγος ήταν λόγος ροών και όχι στιγμών. Ωστόσο δεν ήταν σαφής στις επεξηγήσεις του στο σημείο αυτό και απέτυχε να αποδείξει την αναλογία μεταξύ αυτού του λόγου και του καλούμενου αθροίσματος μιας άπειρης σειράς. Καθώς η άποψη του Ευκλείδη για τον αριθμό είχε βασιστεί στο λόγο των γεωμετρικών μεγεθών, παρόμοια και εδώ ο Newton έδωσε έμφαση στο λόγο των δύο ταχυτήτων και όχι σε μια μοναδική οριακή τιμή μιας συνάρτησης όπως φανερώνουν οι ορισμοί της παραγώγου κατά τον δέκατο ένατο αιώνα.

Με τέτοια αναποφασιστικότητα και έλλειψη σαφήνειας από πλευράς των εφευρετών του διαφορικού λογισμού δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι υπάρχει σύγχυση στους οπαδούς τους σχετικά με τη φύση του ζητήματος. Αυτό τονίστηκε ακόμα πιο πολύ από το γεγονός ότι πολλοί μαθηματικοί απέτυχαν παταγωδώς να κάνουν τη διάκριση μεταξύ των δύο συστημάτων και συνεπώς παρερμήνευσαν τα επιχειρήματα των δημιουργών τους, Αυτή η απουσία διάκρισης οφείλεται σε κάποιο βαθμό στους ίδιους τους Newton και Leibniz. Στο έργο «*Acta eruditorum*» του 1705[185] δόθηκε μια περιγραφή του «*De quadratura*» του Newton πιθανόν από τον Leibniz, όπου δηλώνεται με σαφήνεια ότι στο βιβλίο αυτό απλά αντικαταστάθηκαν τα διαφορικά του Leibniz με τις ροές και υπονοείται ότι είναι ουσιαστικά ταυτόσημα. Στην Αγγλία, η επιτροπή της Βασιλικής Ακαδημίας ερεύνησε τα δικαιώματα προτεραιότητας μεταξύ του Newton και του Leibniz και το πόρισμά της στο «Commercium epistolicum» του 1712[186] ήταν το εξής: «Η διαφορική μέθοδος είναι ταυτόσημη με την μέθοδο των ροών· διαφέρουν μόνο κατ'όνομα και στον τρόπο αναπαράστασης. Ο κ. Leibniz ονομάζει αυτές τις ποσότητες διαφορές ενώ ο κ. Newton στιγμές ή ροές και τα συμβολίζει με το γράμμα d, γράμμα που δεν χρησιμοποιεί ο κ. Newton»[187]. Συνεπώς και οι ίδιοι οι συμπατριώτες του Newton δεν είχαν συνειδητοποιήσει ότι ενώ είχε χρησιμοποιήσει άπειρα μικρές στιγμές στα πρώιμα έργα του επέδειξε ότι δεν είχε καμία σχέση με αυτές στις κατοπινές

---

[185] *Leibniz, "Isaaci Newtoni tractatus duo" σελ.34. Επίσης Bertrand, "De l'invention du calcul infinitesimal."*

[186] *Newton, Opera omnia, IV, σελ.497-592, επανεκτύπωση αυτού. Δες επίσης την κριτική (πιθανά από τον ίδιο τον Newton), Philosophical Transactions, XXIX (1714-16), σελ. 173-224.*

[187] *Newton, Opera omnia, (4 τόμοι, G. Cramer), Lausanne and Geneva, 1742, τομ.IV, σελ.588-89.*

πραγματείες του αναφορικά με τις ροές και τους πρώτους και έσχατους λόγους. Αυτό είναι ευκολότερα κατανοητό από τη στιγμή που ο ίδιος ο Newton δεν παραδέχτηκε ποτέ ότι άλλαξε γνώμη και ότι οι πρώτοι και έσχατοι λόγοι του, παρεκτός εάν ερμηνευτούν σε σχέση με την θεωρία των ορίων ή τον νόμο της συνέχειας, εμπλέκουν το άπειρα μικρό.

Η πρώτη έκδοση που ήταν αφιερωμένη αποκλειστικά στην ιστορία του λογισμού- το έργο «*The History of Fluxions*» του Joseph Raphson- δημοσιεύτηκε το 1715 και περιέγραφε πολύ καλά την σύγχυση των εννοιών που επικρατούσε τότε. Ο Newton είχε σχεδιάσει να εμπιστευτεί το 1961 στον συγγραφέα αυτού του έργου, καθώς και, στον Halley την προετοιμασία για την έκδοση του *De quadratura*[188].Ωστόσο, άλλαξε γνώμη και ο Newton τελικά ανέβαλε την έκδοση μέχρι το 1704 έως τότε όμως, όπως σημειώθηκε ήδη, είχε με έμφαση αποκηρύξει τα απειροστά. Ο Raphson όμως, δεν κατόρθωσε να παρουσιάσει μια διαφορετική άποψη και συνέχισε να συγχέει τις ροές με τις στιγμές. Τα μικρά γράμματα τα οποία χρησιμοποιούσε ο Newton στο *Principia* για να προσδιορίσει τις στιγμές, τα ερμήνευσε ο Raphson ως σύμβολα των ροών και τα ταυτοποίησε (αρκετά άκριτα μάλιστα) με τα απειροστά του Barrow και του Nieuwentidjt και με τα διαφορικά του Leibniz[189].Ο Raphson έφτασε στο σημείο να θεωρεί τις ρέουσες απείρως μεγάλες σε σχέση με τις πεπερασμένες ποσότητες από τις οποίες προήλθαν, ενώ οι ρέουσες ανώτερης τάξης ερμηνεύτηκαν παρομοίως ως ανώτερες τάξεις του απείρου[190].

Για να αποδώσουμε τα δίκαια θα πρέπει να σημειωθεί ότι το αντικείμενο της εργασίας του Raphson δεν ήταν να προσφέρει μια αποσαφήνιση των βασικών εννοιών του λογισμού. Μάλιστα, το βιβλίο δεν περιέχει κανέναν επίσημο ορισμό για όρους όπως οι ροές, οι στιγμές ή οι ρέουσες. Ο σκοπός ήταν εν μέρει να παρουσιαστούν οι διάφορες μέθοδοι με τέτοιον τρόπο ώστε να διευκολυνθεί η εφαρμογή των κανόνων της διαδικασίας σε συγκεκριμένα προβλήματα αλλά «κυρίως για να αποδοθεί δικαιοσύνη στους συγγραφείς τους σε σχέση με τη χρονολογική σειρά»[191]. Και στις δύο περιπτώσεις ο Raphson υποστήριζε σθεναρά την ανωτερότητα της εργασίας του Newton. Αναφορικά με την προτεραιότητα, οι

---

[188] *Raphson, The history of Fluxions, σελ. 2-3.*

[189] *Raphson, The history of Fluxions, σελ. 4.*

[190] *Raphson, The history of Fluxions, σελ. 5.*

[191] *Raphson, The history of Fluxions, σελ. 5.*

απόψεις του ήταν βασικά οι ίδιες που εκφράστηκαν στην αναφορά στο *Commercium epistolicum* που προηγήθηκε κατά τρία έτη και όπου προτεινόταν η πιθανότητα λογοκλοπής από την πλευρά του Leibniz [192].

Όσον αφορά την μέθοδο και το λογισμό του Leibniz, ο Raphson αρκετά άδικα τις χαρακτήρισε «λιγότερο εύστοχες και περισσότερο επίπλαστες» και «παρατραβηγμένο συμβολισμό ασήμαντων νεωτερισμών»[193]. Αυτή η ατυχής αντιμετώπιση που γέννησε ο μεγάλος σεβασμός στην φήμη του Newton επρόκειτο να επικρατήσει στους κόλπους των Άγγλων μαθηματικών για έναν περίπου αιώνα μετά την έκδοση της εργασίας του Raphson και είχε ως αποτέλεσμα ο διαφορικός λογισμός να κάνει ελάχιστη πρόοδο στην Αγγλία πριν το 1816. Αυτή η περίοδος χαρακτηρίστηκε επίσης από μια παρόμοια σύγχυση των ροών και του απείρως μικρού όπως την εξέθεσε ο Raphson. Πράγματι, ένα μεγάλο μέρος των βιβλίων διδασκαλίας για τη μέθοδο των ροών ερμήνευαν συστηματικά τις ροές σαν άπειρα μικρές ποσότητες[194] ενισχύοντας ακόμα περισσότερο την επικρατούσα σύγχυση στην ερμηνεία της θεωρητικής βάσης του λογισμού η οποία έστρωσε το έδαφος για τον ερχομό ενός αιώνα κριτικής και αντιπαράθεσης σχετικά με το ίδιο ζήτημα.

---

[192] *Raphson, The history of Fluxions, σελ.8,19,61,92.*

[193] *Raphson, The history of Fluxions, σελ. 19.*

[194] *F.Cajori, A history of the Conceptions of Limits and Fluxions, Κεφ. II- De Morgan, "On the Early History of Infinitesimals in England."*

Οι Πηγές

[1] Acta Eruditorum, Leipzig, from 1682.

[2] BERNOULLI, JAKOB I., 1690. "Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae deseensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur: et alterius eujusdam problematis propositio." Acta Erud. May 1690.

[3] BERNOULLI, JAKOB I., 1693. "Curvae diacausticae, earum relatio ad evolutas, aliaque nova his affinia. Item: natura osculorum uberius explicata. Celeritates navium definitae. Regulae pro resistentiis, quas figurae in fluido motae patiuntur etc." Acta Erud. June 1693.

[4] BERNOULLI, JAKOB I., 1694. "Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam theorematis huc pertinentibus." Acta Erud., June 1694.

[5] BERNOULLI, JAKOB I., 1744.Opera (2 τόμοι), Geneva, 1744.

[6] BERNOULLI, JOHANN I., 1718. "Remarque sur ce qu'on a donne jusqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimetres." Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris, (1718).

[7] BERNOULLI, JOHANN I., Opera. Opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. (4 τόμοι, G. CRAMER), Lausanne and Geneva, 1742. Reprint Hildesheim, 1968.

[8] BERNOULLI, JOHANN I., Brifwechsel. Der Briefwechsel von Johann Bernoulli.Basel, 1955.

[9] EULER, L. 1748. Introductio in Analysin Infinitorum (2 τόμοι), Lausanne, 1748. Opera (I) VIII-IX (1922, 1945).

[10] EULER, L.1755, Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum, St. Petersburg, 1755. Opera (I) X (1913).

[11] EULER, L.1768, Institutionum calculi integralis volumen primum (3 τόμοι), St. Petersburg, 1768-1770. Opera (I) XI-XIII (1913-1914).

[12] EULER, L.1778, "De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite.

[13] EULER, L.Opera. Opera Omnia, Leipzig, 1911.

[14] GERHARDT, C. I., 1855. Die Geschichte der hoheren Analysis, erste Abteilung, Die Entdeckung der hoheren Analysis, Halle, 1855.

[15] GERHARDT, C. I. Leibniz, Die Endeckung der Differentialrechnung durch Leibniz.

[16] GERHARDT, C. I., 1875. "Zum zweihundertjahrigen Jubilaum der Entdeckung des Algorithmus der hoheren Analysis durch Leibniz." Mon.-ber. Kon. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1875.

[17] HUYGEN$, C. (Euvres. (Euvres completes de Christiaan Huygens, publiees par la Societe Hollandaise des Sciences (22 τόμοι), The Hague, 1888-1950.

[18] LEIBNIZ, G. W., 1684. "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus." Acta Erud., Oct. 1684. Math. Schr. V.

[19] LEIBNIZ, G. W., 1684. "Additio (...) de dimensionibus curvilineorum." Acta Erud., Dec. 1684. Math. Schr. V.

[20] LEIBNIZ, G. W., 1686. "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum (...)."

[21] LEIBNIZ, G. W., Acta Erud., June 1686. Math. Schr. V.

[22] LEIBNIZ, G. W., 1689. "Schediasma de resistentia medii, et motu projectorum in medio resistente " Acta Erud., Jan., 1689. Math. Schr. VI.

[23] LEIBNIZ, G. W., 1689. "Tentamen de motuum coelestium causis." Acta Erud., Febr., 1689. Math. Schr. VI.

[24] LEIBNIZ, G. W., 1691. "Additio ad schediasma de medii resistentia (...)." Acta Erud., April, 1691. Math. Schr. VI.

[25] LEIBNIZ, G. W., 1692. "De linen ex lineis infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu." Acta Erud., April, 1692. Math. Schr. V.

[26] LEIBNIZ, G. W., 1692. "Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, et eorum usibus nonnulis." Acta Erud., Sept., 1692. Math. Schr. V.

[27] LEIBNIZ, G. W., 1694. "Nova calculi differentialis applicatio et usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione." Acta Erud., July, 1694. Math. Schr. V.

[28] LEIBNIZ, G. W., 1694. "Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica. Ubi et generaliora quaedam de natura et calculo differentiali osculorum, (...)." Acta Erud., Aug., 1694. Math. Schr. V.

[29] LEIBNIZ, G. W., 1695. "Responsio ad nonnullas difficultates a dn. Bernardo Nieuwentijt circa methodum differentialem sen infinitesimalem motas." Acta Erud., July, 1695. Math. Schr. V.

[30] LEIBNIZ, G. W., 1695. "Addenda ad (...) schediasma proximo mensi julio (...) insertum." Acta Erud., Aug., 1695. Math. Schr. V.

[31] LEIBNIZ, G. W., 1701. "Memoire de Mr. Leibnitz touchant son sentiment sur le calcul differentiel." Mem. Trev., Nov., 1701. Math. Schr. V. Math. Schr. IV.

[32] LEIBNIZ, G. W., 1702. "Extrait d'une lettre de M. Leibnitz a M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporte de luy, clans les Memoires de Trevoux des mois de Novembre et Decembre derniers." Journal des Savans, 20 March, 1702. Math. Schr. IV.

[33] LEIBNIZ, G. W., 1702. "Specimen novum analyseos quadraturarum pro scientia infiniti, circa summas et quadraturas." Acta Erud., May, 1702. Math. Schr. V.

[34] LEIBNIZ, G. W., 1710. "Monitum de characteribus algebraicis." Misc. Berol., 1710. Math. Schr. VII.

[35] LEIBNIZ, G. W., 1710. "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de lege homogeneorum transcendentali." Misc. Berol., 1710. Math. Schr. V.

[36] LEIBNIZ, G. W., Analysis Tetragonistica. "Analysis Tetragonistica ex centrobaricis." (25, 26, 29 Oct. and 1 Nov. 1675) in LEIBNIZ Briefwechsel.

[37] LEIBNIZ, G. W., Quad Arith. Circ. "De quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae cuius corollarium est Trigonometria sine tabulis." (1676)

[38] LEIBNIZ, G. W., Hist. et Orig. 1846. Historia et Origo calculi differentialis a G.G.Leibnitzio conscripta, Hannover, 1846.

[39] LEIBNIZ, G. W., Early Mathematical Manuscripts.

[40] LEIBNIZ, G. W., Elementa. "Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque eommunem calculum transcendentibus." in GERHARDT 1855, Beilage VI.

[41] LEIBNIZ, G. W., Scientiarum gradus, "Scientiarum diversos gradus nostra imbecillitas facit .... ", GERHARDT 1875.

[42] LEIBNIZ, G. W., Cum Prodiisset... "Cum prodiisset atque increbuisset Analysis mea infinitesimalis ..." in LEIBNIZ Hist. et Orig. 1846.

[43] LEIBNIZ, G. W., Math. Schr. Mathematische Schriften (7 τόμοι, εκδ.C. I. GERHARDT), Berlin and Halle, 1849-1863. Reprint Hildesheim, 1961-1962.

[44] LEIBNIZ, G. W., Phil. Schr. Philosophische Schriften (7 τόμοι, εκδ. C. I. GERHARDT), Berlin, 1875-1890. Reprint Hildesheim, 1965.

[45] LEIBNIZ, G. W., Briefwechsel. Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern (εκδ.C. I. GERHARDT), Berlin, 1899.

[46] MENGER, K., 1955. Calculus, a modern approach, Boston, 1955.

[47] NEWTON, Opera Omnia, τόμος IV.

[48] NIEUWENTIJT, B., 1694. Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis, Amsterdam, 1694.

[49] NIEUWENTIJT, B., 1696. Considerationes secundae circa calculi differentialis principia; et responsio advirum nobilissimum G. G. Leibnitium, Amsterdam, 1696.

Βιβλιογραφία

[1] D.J.Struik. Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, Ι. Ζαχαρόπουλος, μετάφραση Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, Αθήνα, 1982.

[2] C.H.Edwards, The Historical Development of the Calculus, Springer Verlag, New York, 1979.

[3] C. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, New York, 1959.

[4] V.Katz, A History Of Mathematics, Addison-Wersley Longman, New York, 1998.

[5] M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, Fair Lawn, N.Y.,1972.

[6] M. Baron, The origins of the infinitesimal calculus, Oxford Pergamon Press, 1969.

[7] Bos.H.J.M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, Archive for history of Exact Sciences 14 (1974), σελ.1-90.

[8] Γιαννακούλιας Ευστάθιος, Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική εξέλιξη από τον 5^{ο} π.χ. έως και τον 19^{ο} αιώνα, Εκδόσεις συμμετρία, Αθήνα 2008.

[9] Whiteside, D.T., "Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century." Arch. Hist. Ex. Sci., 1961.