ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Νικόλαος Δ. Μπάκος
Δ 200302

Επιβλέποντες καθηγητές:
ΛΑΠΠΑΣ ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ (Αν. Καθηγητής)
ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ (Αν. Καθηγητής)
ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ (Αν. καθηγητής)

Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Οκτώβριος 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) *Λάππας Διονύσιος* (επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	
2) *Βασιλείου Ευστάθιος*	Αναπλ. Καθηγητής	
3) *Γιαννακούλιας Ευστάθιος*	Αναπλ. Καθηγητής	

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να πρωτίστως να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κ. Λάππα Διονύσιο που είχε την κύρια επίβλεψη της παρούσας Διπλωματικής, τόσο για την ενδιαφέρον, την υποστήριξη και τον πολύτιμο χρόνο του που μου διέθεσε, όσο και για την εν γένει συμπαράστασή του κατά την περίοδο των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ευχαριστώ επίσης, τους καθηγητές: Κ.Κ. Βασιλείου Ευστάθιο και Γιανακκούλια Ευστάθιο, που πρόθυμα συμμετείχαν στην τριμελή επιτροπή και με βοήθησαν τόσο στη συγγραφή όσο και στην αρτιότερη παρουσίαση της Διπλωματικής.

Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους διδάσκοντες και συμμετέχοντες στο ΠΜΣ για την προσφορά τους στην επιστημονική και παιδαγωγική μου κατάρτιση κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή……1
Βιβλιογραφία……..3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
Καμπύλες

1.1 Μετρική και εσωτερικό γινόμενο, Norm, Στοιχεία Τοπολογίας του $\mathbf{R}^n$, Συνεχής συνάρτηση……9
1.2 (Παραμετρισμένη) καμπύλη, Είδη καμπυλών…….....12
1.3 Διαφορικό απεικόνισης $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ και ειδικές περιπτώσεις, Μερικές παράγωγοι, Συναρτήσεις κλάσεως C^m, Διαφορίσιμη ή λεία καμπύλη, Διάνυσμα ταχύτητας και επιτάχυνσης καμπύλης……...13
1.4 Κανονική καμπύλη, Αναπαραμέτρηση καμπύλης, Αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου……18
1.5 Προσανατολισμός καμπύλης……. ..21
1.6 Πλαίσιο Serret-Frenet, Καμπυλότητα καμπύλης, Προσημασμένη καμπυλότητα, Στρέψη καμπύλης, Γωνία καμπυλών……..21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
Επιφάνειες: Η πορεία προς την Εσωτερική Γεωμετρία των επιφανειών

2.1 Τα διαχρονικά ζητήματα των επιφανειών και του επιπέδου……31
2.2 Επιφάνειες, Κανονική παραμετρική παράσταση επιφάνειας, Κανονικές επιφάνειες, (Τοπικό) σύστημα συντεταγμένων ή παραμέτρηση, Περιοχή συντεταγμένων, Θεώρημα του μετασχηματισμού ή της αλλαγής των παραμέτρων……..34
2.3 Παραμετρικές γραμμές επιφάνειας, Καμπυλόγραμμες τοπικές συντεταγμένες, Εσωτερικά και εξωτερικά περιγραφόμενα τοπικά συστήματα συντεταγμένων……..43
2.4 Γράφημα συνάρτησης, Το γράφημα μιας συνάρτησης είναι (τοπικά) κανονική επιφάνεια……..48
2.5 Κρίσιμα σημεία, Κρίσιμες τιμές συνάρτησης, Επιφάνειες στάθμης, Οι επιφάνειες στάθμης είναι κανονικές επιφάνειες……...51
2.6 Απεικονίσεις επί επιφανειών $f: M \to \mathbf{R}$……53
2.7 Απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών $\mathbf{f}: M_1 \to M_2$, Αμφιδιαφορικές επιφάνειες, Κανονική διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών……...54
2.8 Εφαπτόμενος χώρος, Εφαπτόμενο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, Συνεκτικό, Κατά τόξο συνεκτικό σύνολο και επιφάνειες……56
2.9 Εφαπτόμενο διάνυσμα και εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας σε σημείο της, Βάση του εφαπτόμενου επιπέδου κανονικής επιφάνειας, Το διαφορικό της απεικόνισης μεταξύ (κανονικών) επιφανειών……..59

2.10 Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, Γωνία δύο κανονικών επιφανειών……....63
2.11 Προσανατολισμένη και προσανατολίσιμη επιφάνεια: οι επιφάνειες στάθμης, τα γραφήματα συναρτήσεων, η επιφάνεια της σφαίρας και του ορθού κυλίνδρου είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες, Προσανατολισμένη γωνία εφαπτόμενων διανυσμάτων μιας προσανατολισμένης επιφάνειας……..65

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Επιφάνειες: Η Εσωτερική Γεωμετρία των επιφανειών

3.1 Γενικά περί Εσωτερικής Γεωμετρίας……...73
3.2 Παράγωγος συνάρτησης κατά τη κατεύθυνση διανύσματος (παράγωγος κατά κατεύθυνση), Παράγωγος κατά την κατεύθυνση (κατά μήκος) καμπύλης.....74
3.3 Συναλλοίωτη παράγωγος……76
3.4 Σχέση παραγωγισιμότητας κατά κατεύθυνση και συναλλοίωτης παραγώγου συνάρτησης με την παραγωγισιμότητα (διαφορισιμότητα) της συνάρτησης.....77
3.5 Διανυσματικό πεδίο συνόλου και επιφάνειας, Γραμμές ροής……..78
3.6 Απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση, Τελεστής σχήματος-απεικόνιση Weingarten……...80
3.7 $1^{η}$ θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης……...84
3.8 Μετρική Riemann-Η μετρική μιας επιφάνειας, Σύμμορφη μετρική……88
3.9 $2^{η}$ θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη $2^{ης}$ τάξης……...91
3.10 Κάθετη καμπυλότητα καμπύλης, Κάθετη καμπυλότητα επιφάνειας, Κάθετη τομή……..92
3.11 Κύριες διευθύνσεις, Κύριες καμπυλότητες……..95
3.12 Συνάρτηση καμπυλότητας Gauss, Συνάρτηση μέσης καμπυλότητας……..95
3.13 Ομφαλικό σημείο……98
3.14 Γραμμές καμπυλότητας……99
3.15 Ισομετρικές απεικονίσεις επιφανειών, Εσωτερική απόσταση……...102
3.16 Εξισώσεις Gauss-Weingarten, Σύμβολα Christoffel $2^{ου}$ είδους……108
3.17 Theorema Egregium (Gauss), Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπύλης, Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας επιφάνειας (Θεώρημα Bonnet)……...109

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Γεωδαισιακές καμπύλες και εξισώσεις τους
Θεωρήματα Gauss-Bonnet

4.1 Γεωδαισιακή καμπυλότητα, Γεωδαισιακή καμπυλότητα και παραμετρικές γραμμές……...115
4.2 Γεωδαισιακές καμπύλες, Γεωδαισιακά τόξα, Γεωδαισιακή πληρότητα……118
4.3 Παραμετρικές γραμμές και γεωδαισιακές, (Διαφορικές) εξισώσεις γεωδαισιακών……122
4.4 Γεωδαισιακές συν/νες, Τύπος του Liouiville……130

4.5 Καμπυλόγραμμο πολύγωνο, Κ-διαφορικές μορφές, Τοπικό θεώρημα-τύπος Gauss-Bonnet…….132
4.6 Ο ρόλος των γωνιών του (καμπυλόγραμμου) πολυγώνου, Ολονομία καμπύλης μιας επιφάνειας, Ολικό θεώρημα Gauss-Bonnet……..137

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Η παράλληλη μεταφορά διανύσματος στις επιφάνειες Η περίπτωση της σφαίρας

5.1 Τα ζητήματα της συναλλοίωτης παραγώγου…….149
5.2 Παράλληλα διανυσματικά πεδία, Παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος καμπύλης: συναλλοίωτη παράγωγος και ολονομία, Παράλληλη μεταφορά κατά μήκος καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής ή πολυγώνου……..153
5.3 Η παράλληλη μεταφορά στο επίπεδο…….160
5.4 Παράλληλη μεταφορά και καμπυλότητες: γεωδαισιακή καμπυλότητα και καμπυλότητα Gauss, Γεωμετρική απόδοση της καμπυλότητας Gauss……..161
5.5 Παράλληλη μεταφορά διανύσματος στην επιφάνεια της σφαίρας……168

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Το εκκρεμές του Foucault: Μια περίπτωση άξια μελέτης

6.1. Το φαινόμενο της αιώρησης του εκκρεμούς του Foucault και η σημασία του.....183
6.2. Η ιστορία της ανακάλυψης του εκκρεμούς……186
6.3. Το μηχανικό μέρος…….187
6.4. Το εκκρεμές του Foucault και τα θεμελιώδη επιστημολογικά ερωτήματα του χώρου……..189
6.5. Οι δυο προσεγγίσεις του φαινομένου: Μαθηματική και Φυσική….....190

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα της παρούσας διπλωματικής είναι η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος (κάποιου διανυσματικού πεδίου) κατά μήκος μιας καμπύλης μιας επιφάνειας. Η έννοια αυτή είναι το αντίστοιχο ισοδύναμο της (παράλληλης) μεταφοράς ενός διανύσματος του επιπέδου και κατά μήκος μιας σταθερής ευθείας του επιπέδου, ενός μετασχηματισμού (απεικόνισης) δηλαδή μεταξύ των σημείων ολόκληρου του επιπέδου.

Η «καθολικότητα» όμως της ισχύος της έννοιας αυτής στο επίπεδο παύει να συναντάται στις γενικότερες επιφάνειες του 3-διάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbf{R}^3$ (ή και του $\mathbf{R}^n$) όπου και υποκαθίσταται από την αντίστοιχη έννοια, με τοπική όμως ισχύ, την έννοια της παράλληλης μεταφοράς κατά μήκος μιας (γεωδαισιακής) καμπύλης της επιφάνειας.

Το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση και την ανάπτυξη της έννοιας είναι αυτό πάνω στο οποίο στηρίζεται και η ανάπτυξη της Εσωτερικής Γεωμετρίας των επιφανειών, έργο που στην 3-διάστατη περίπτωσή του (2-διάστατες επιφάνειες εμφυτευμένες στον 3-διάστατο χώρο) οφείλεται στον Gauss και τους προκατόχους του. Η γενικότερη, n-διάστατη περίπτωση αναπτύχθηκε μέσα από το έργο του μαθητή του, του Riemann, και την ιδέα της γεωμετρικής πολλαπλότητας («αφηρημένης» επιφάνειας), μιας ιδέας που διεύρυνε την ερμηνευτική ισχύ των προηγούμενων προσεγγίσεων και μας απελευθέρωσε από τα δεσμά της εποπτείας.

Η εφαρμογή τώρα της έννοιας της παράλληλης μεταφοράς στις 2-διάστατες επιφάνειες και ειδικά στην επιφάνεια μιας σφαίρας, μας οδηγεί σε «απροσδόκητα» αποτελέσματα όσον αφορά την έννοια της παραλληλίας, την οποία διδασκόμαστε ακαδημαϊκά και συγκροτούμε εποπτικά μέσω της αντίστοιχης έννοιας για το επίπεδο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να κλονίζονται οι συμβατικές μας αντιλήψεις και γνώσεις για τον γεωμετρικό χώρο, πράγμα που αντανακλάται και στην αποδοχή ενός φυσικού χώρου διαφορετικού από αυτό που αισθητηριακά βιώνουμε στην περιορισμένη χωροχρονικότητα της γης μας και του εύρους της όρασής μας.

Ο γόνιμος όμως από φορμαλιστική μαθηματική αλλά και φιλοσοφική άποψη προβληματισμός, που αναπτύχθηκε γύρω από το ζήτημα του χώρου και της «εσωτερικής ματιάς» στις επιφάνειες και ιδιαίτερα της σφαίρας, στην οποία τελικά θα περιορίσουμε τη μελέτη μας, θα παρέμενε ένα υπό αίρεση θεωρητικό δημιούργημα αν δεν έβρισκε τη φυσική του επικύρωσή μέσω ενός επιτυχώς (από μαθηματική άποψη) ερμηνεύσιμου πειράματος.

Το πείραμα αυτό μας το πρόσφερε η κατασκευή μιας στοιχειώδους πειραματικής διάταξης του εργαστηρίου της Φυσικής: του εκκρεμούς. Η συμπεριφορά λοιπόν του εκκρεμούς του Foucault σε σχέση με τη γη, βρίσκει την απόλυτη ερμηνεία της μέσω του θεωρητικού μαθηματικού οικοδομήματος που αναπτύχθηκε για το αντίστοιχο μοντέλο: τη παράλληλη μεταφορά του διανύσματος ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας καμπύλης της εξιδανικευμένης γης, δηλαδή της γεωμετρικής σφαίρας. Παράλληλα παρουσιάζουμε και την φυσική προσέγγιση του φαινομένου, που σίγουρα εμπλουτίζει τη γνώση και την κατανόησή του ενώ ταυτόχρονα αναδεικνύει, λόγω απλότητας, τα πλεονεκτήματα της καθαρά μαθηματικής προσέγγισης.

Από διδακτική άποψη, το θέμα της διπλωματικής κινείται στα πλαίσια μιας προσπάθειας να φωτιστεί (από την άποψη του μαθηματικού) η αυτονόητη διαθεματικότητα μεταξύ των ζητημάτων της Φυσικής και των Μαθηματικών στο ακαδημαϊκό επίπεδο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπου και κάτι τέτοιο είναι

περισσότερο εύκολο, ιδιαίτερα ενδιαφέρον, γόνιμο και διαφωτιστικό. Θα λέγαμε μάλιστα ότι η καθαρά γεωμετρική-μαθηματική άποψη, που είναι αυτή η οποία και κυρίως μας ενδιαφέρει, παρουσιάζει εμφανή πλεονεκτήματα αν συγκριθεί με την αντίστοιχη προσέγγιση από την πλευρά του Φυσικού, είτε στο επίπεδο της χρήσης των αναγκαίων μαθηματικών εργαλείων είτε στο επίπεδο της φυσικής εποπτείας, όπου και αναδεικνύονται σοβαρά προβλήματα επιστημολογικής ή διδακτικής φύσης.

Γενικότερα, κατά την επεξεργασία των θεμάτων στεκόμαστε με το αναγκαίο ενδιαφέρον απέναντι σε σχετιζόμενα φιλοσοφικά, επιστημολογικά και ιστορικά ζητήματα, που ουσιαστικά ανέδειξαν ή αναδείχθηκαν σε αυτήν τη παράλληλη πορεία, προκειμένου να δοθούν απαντήσεις για το πώς είναι δομημένος ο φυσικός μας χώρος και κατά πόσο οι διάφορες κατά καιρούς θεωρήσεις και μαθηματικές μοντελοποιήσεις του τον αναπαριστούν με ακρίβεια. Απώτερος σκοπός είναι να εμπλουτιστούν τα αντίστοιχα θέματα και να τονιστούν πτυχές τους που μια «αποστειρωμένη» φορμαλιστική περιγραφή αποκρύπτει.

Το υλικό που χρησιμοποιείται αναπτύσσεται, κατά κανόνα, εκκινώντας από πολύ στοιχειώδες επίπεδο και βασικές γνώσεις, παρέχοντας έτσι το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται προκειμένου, από τη μια, να μη χρειάζεται κάποιος να ανατρέξει σε κάποιο άλλο εγχειρίδιο για αναζήτηση συμπληρωματικών πληροφοριών και από την άλλη, τα ζητήματα των επιφανειών, της σφαίρας και της παράλληλης μεταφοράς να καταστούν οι (αυτονόητοι) περιορισμοί και οι εφαρμογές γενικότερων προσεγγίσεων. Ταυτόχρονα, επιχειρείται η διατήρηση μιας ομοιομορφίας ως προς τη χρήση του συμβολισμού πράγμα που επιτρέπει ακριβώς αυτή τη διαπίστωση της γενικευμένης ισχύος ή τον περιορισμό της ισχύος των όποιων συμπερασμάτων.

Βιβλιογραφία

Η ανάπτυξη των θεμάτων που διαπραγματεύεται η διπλωματική υποστηρίχθηκε βιβλιογραφικά από τα παρακάτω έργα:

Ξενόγλωσση

Arnold V.I., *Graduate texts in Mathematics: Mathematical methods of Classical Mechanics*, Springler-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1978

Breitenberger E., Gauss Geodesy and the Axiom of parallels, *Archive for the History of the Exact Sciences (ed. Truesdell C.),* Vol 31, No 3, 273-289, Springer-Verlag, 1984

Do Carmo M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

Durran D.R., Is the Coriolis force really responsible for the inertial oscillation? *Bulletin of the American Meteorological Society*, 74(11), 2179-2184 (1993)

Heath T.L.*, Eulid: The thirteen Books of Elements* (2nd ed). Vol. I & II., Dover Publications, New York, 1956

Henderson D.W., *Differential Geometry, A Geometric introduction*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998

Henderson D.W., *Experiencing Geometry in Enclidean, Spherical and Hyperbolic spaces* (2nd ed), Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001

Lipschutz M.M., *Schaum's outline of Theory and problems of Differential Geometry,* Mc Graw-Hill, New York, 1974

Mersden J. & Tromba A., *Vector Calculus (3rd ed.)*, W.H.Freeman and Co., New York, 1988

O' Neil B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966

Oprea J., *Differential Geometry and its applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1977

Oprea J., Geometry and the Foucault pendulum, *American Mathematical Monthly,* 192(6), 512-522, 1995

Penrose R., *The Geometry of the universe στο Mathematics today-Twelve informal essays (ed. Steen. L.A),* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978

Persson A.O., How do we understand the Coriolis force? *Bulletin of the American Meteorological Society,* 79(7), 1373-1385, 1998

Persson A.O., The Coriolis effect: Four centuries of conflict between common sense and Mathematics, Part I: A history to 1885, *History of Meteorology*, 2, 1-21, 2005

Phillips N.A., An explication of the Coriolis effect, *Bulletin of the American Meteorological Society*, 81(2), 299-303, 2000

Rosenfeld B.A., *Studies in the History of Mathematics, A History of non-Euclidean Geometry,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1988

Russel B.A.W., *An essay on the foundations of Geometry*, Dover Publications Inc., New York, 1956

Thorpe J.A., *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979

Ελληνική

Alonso-Finn, *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Ι, Μηχανική και Θερμοδυναμική (2η έκδοση),* (Μετ.-Επιμ. Ρεσβάνη Λ.-Φίλιππα Τ.), Αθήνα, 1981

Βασιλείου Ε., *Πρόχειρες σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος: Γεωμετρία για τη Διδακτική,* Αθήνα, 2005

Vilenkin N.Y., *Αναζητώντας το άπειρο* (Μετ. Μουζακίτης Α., Μπούκης Γ.), Κάτοπτρο, Αθήνα, 1997

Γιαννίκου Α. *Στοιχεία από τη Σφαιρική Γεωμετρία και τις εφαρμογές της,* Διπλωματική εργασία στα πλαίσια του Π.Μ.Σ. στη Διδακτική και τη Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 2002

Ζορμπαλά Κ., Η έννοια του επιπέδου και ο ορισμός του. Ένα ιστορικό πρόβλημα στην αξιωματική της Στοιχειώδους Γεωμετρίας, *Νεύσις,* 3, 155-182, 1995

Κέντρο έρευνας επιστήμης και εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ), *Ευκλείδη Στοιχεία,* Τόμος Ι, Αθήνα, 2001

Λάππας Δ., *Θεωρία καμπυλών και επιφανειών, Σημειώσεις μαθήματος*, Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 2003

Λάππας Δ., *Πρόχειρες σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος: Ιστορία των Νεότερων Μαθηματικών,* Αθήνα, 2004

Lelek A., *Εισαγωγή στα σύνολα και την Τοπολογία* (μετ. Σκανδάλης Κ, επιμ. Σπύρου Π), Τροχαλία, Αθήνα, 1992

Παντελίδης Γ.Ν., *Μαθηματική Ανάλυση, Τόμος ΙΙΙ (2η έκδοση)*, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 1997

Σταμάτη Ε., *Ευκλείδου Γεωμετρία, Τόμος Ι*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1975α

Στράντζαλος Χ., ***Η εξέλιξη των Ευκλείδιων και των μη-Ευκλείδιων Γεωμετριών (μέρος πρώτο)***, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1987

Στράντζαλος Χ., ***Στοιχεία από τη νεότερη Ιστορία των Μαθηματικών: Η εξέλιξη των μη-Ευκλείδιων Γεωμετριών μετά το 1750 (ενδεικτικές σημειώσεις μέρους του μαθήματος: Νεότερη Ιστορία των Μαθηματικών)***, Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 2002

Τσικοπούλου Σ., ***Ισομετρίες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου. Συνθετική και αναλυτική προσέγγιση-Εφαρμογές,*** Διπλωματική εργασία στα πλαίσια του Π.Μ.Σ. στη Διδακτική και τη Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 2003

Χασάνης Θ., ***Στοιχεία από τη θεωρία καμπυλών και επιφανειών***, Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Γιάννενα, 1987

Ηλεκτρονική

TLG Musaios 1.0e-32

http://www.calacademy.org/products/pendulum.html

http://www.calacademy.org/products/pendulum/+Foucault+pendulum

http://www.edu/resource/faq/nmah/pendulum.html

http://www.phys-astro.sonoma.edu/people/students/baker/SouthPoleFoucault.html

http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/coriolis.html

http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/pendulumdetails.html

http://www.phys.unsw.edu.au/PHYSICS_!/FOUCAULT_PENDULUM/foucault_pendulum.html

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Καμπύλες

1.1 Μετρική και εσωτερικό γινόμενο, Norm, Στοιχεία Τοπολογίας του $\mathbf{R}^n$, Συνεχής συνάρτηση

1.2 (Παραμετρισμένη) καμπύλη, Είδη καμπυλών

1.3 Διαφορικό απεικόνισης $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ και ειδικές περιπτώσεις, Μερικές παράγωγοι, Συναρτήσεις κλάσεως C^m, Διαφορίσιμη ή λεία καμπύλη, Διάνυσμα ταχύτητας και επιτάχυνσης καμπύλης

1.4 Κανονική καμπύλη, Αναπαραμέτρηση καμπύλης, Αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου

1.5 Προσανατολισμός καμπύλης

1.6 Πλαίσιο Serret-Frenet, Καμπυλότητα καμπύλης, Προσημασμένη καμπυλότητα, Στρέψη καμπύλης, Γωνία καμπυλών

1.1 Μετρική και εσωτερικό γινόμενο, Norm, Στοιχεία Τοπολογίας του R^n, Συνεχής συνάρτηση

Για τη συνέχεια της Διπλωματικής, εκείνο που θα κυριαρχήσει είναι η δυνατότητα ανάπτυξης και χρήσης ενός μηχανισμού μέτρησης των γεωμετρικών αντικειμένων και περιγραφής της σχέσης τους, της συμπεριφοράς τους και των μεταβολών τους μέσω αριθμητικών δεδομένων. Πρόκειται, ως επί το πλείστον, για την **αναλυτική προσέγγιση της Γεωμετρίας** (η Γεωμετρία μέσω αριθμών), με σημείο εκκίνησης την εφαρμογή του καρτεσιανού μοντέλου, των συστημάτων δηλαδή συν/νων.

Στην αναζήτησή μας για την κατάλληλη εκείνη μαθηματική δομή που θα μας οδηγήσει σε κάποιον τρόπο μέτρησης των «αποστάσεων» (και όχι μόνο), καταλήξαμε στη δομή του **διανυσματικού χώρου με μετρική**, ενός διανυσματικού δηλαδή χώρου V που διαθέτει μια (κατάλληλη) απεικόνιση $<,>:V\times V\rightarrow \mathbf{R}$ των στοιχείων του σε έναν πραγματικό αριθμό. Μέσω της απεικόνισης αυτής θα γίνει δυνατόν να οριστεί η «απόσταση» μεταξύ δύο σημείων του διανυσματικού χώρου.

Η καταλληλότητα της απεικόνισης συνίσταται στη ικανοποίηση, για τα στοιχεία $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}$ του διανυσματικού χώρου V, των ιδιοτήτων:

α) Συμμετρική: $<\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{w},\mathbf{v}>$

β) Διγραμμική: $\alpha<\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\alpha\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{v},\alpha\mathbf{w}>$, για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$

$<\mathbf{v},\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}>=<\mathbf{v},\mathbf{w_1}>+<\mathbf{v},\mathbf{w_2}>$

$<\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2},\mathbf{w}>=<\mathbf{v_1},\mathbf{w}>+<\mathbf{v_2},\mathbf{w}>$

γ) Συνθήκη μη εκφυλισμού: Αν $<\mathbf{v},\mathbf{w}>=0$ για κάθε $\mathbf{w}$, τότε $\mathbf{v}=\mathbf{0}$

Στην περίπτωση που αυστηροποιήσουμε τη συνθήκη μη εκφυλισμού, καθιστώντας ουσιαστικά την μετρική μια απεικόνιση $<,>:V\times V\rightarrow[0,+\infty)$, τότε η συνθήκη μη εκφυλισμού δίνει: $<\mathbf{v},\mathbf{v}>\geq 0$, για κάθε $\mathbf{v}$ και αν $<\mathbf{v},\mathbf{v}>=0$ τότε $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (και αντιστρόφως), καθιστώντας τη μετρική **θετικά ορισμένη**.

Η δομή που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ή αλλιώς η **Γεωμετρία του Ευκλείδειου χώρου R^n**. Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να συμβολίσουμε τη μετρική $<\mathbf{v},\mathbf{w}>$ με την παράσταση $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, που αποτελεί το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbf{R}^n$ και τις προηγούμενες ιδιότητες να διατυπώνονται ανάλογα με το συμβολισμό αυτό.

Ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος V πάνω στο **R**, θα ονομάζεται **χώρος Norm** όταν σε κάθε στοιχείο $\mathbf{v}\in V$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $||\mathbf{v}||$ (**norm του v**) έτσι ώστε να ισχύει:

α) $||\mathbf{v}||\geq 0$, για κάθε $\mathbf{v}\in V$ και $||\mathbf{v}||=0$ αν και μόνο αν $\mathbf{v}=\mathbf{0}$

β) $||\alpha\mathbf{v}||=|\alpha|\cdot||\mathbf{v}||$, για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$ και $\mathbf{v}\in V$

γ) $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||\leq||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||$, για κάθε $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$

Ειδικά, ως **Ευκλείδεια norm** ή **μέτρο-μήκος του διανύσματος** $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$ με $\mathbf{v}=(v^1,v^2,\ldots,v^n)$ θα καλούμε τη norm για την οποία ισχύει:

$$||\mathbf{v}||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=\sqrt{<\mathbf{v},\mathbf{v}>},$$

με το $<,>$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Από τη στιγμή που έχουμε καθορίσει την έννοια της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ του $\mathbf{R}^3$, ως τη μικρότερη γωνία που σχηματίζεται από το $\mathbf{v}$, καθώς «περιστρέφεται» μέχρι να συναντήσει το $\mathbf{w}$ πάνω στο επίπεδο που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά και του μήκους ενός διανύσματος του Ευκλείδειου χώρου $\mathbf{R}^3$

(ή γενικότερα $\mathbf{R}^n$), τότε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των διανυσμάτων **v**,**w** υπολογίζεται από τη σχέση:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta,$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **v**,**w** με μέτρα ||**v**|| και ||**w**|| αντίστοιχα.

Η γωνία τότε δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}.$$

Ορθογώνια προβολή του διανύσματος v (πάνω) στο διάνυσμα a, καλούμε το διάνυσμα $\text{προβ}_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος a, καλούμε το διάνυσμα: $\text{προβ}_{\mathbf{a}\perp}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \text{προβ}_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$

Ξεκινώντας από μια τυχαία βάση ενός διανυσματικού χώρου, μπορούμε να κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου αυτού, σύμφωνα με τη διαδικασία της **ορθοκανονικοποίησης κατά Gram-Schmidt**:

Πρόταση

Αν $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_n}\}$ *είναι οποιαδήποτε βάση ενός διανυσματικού χώρου (υποχώρου του* $\mathbf{R}^n$*), τότε υπάρχει μια άλλη βάση* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ *ίσης διάστασης, για την οποία ισχύει:*

α) *Για κάθε i ο υπόχωρος που παράγεται από τα* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_i}\}$ *να είναι ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από τα* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_i}\}$.

β) $\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_j} = 0$, *για κάθε* $i \neq j$ *και* $\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{e_i} = \|\mathbf{e_i}\|^2 = 1$.

Ως προς μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^n$, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{v}=(v^1,v^2,\ldots, v^n)$ και $\mathbf{w}=(w^1,w^2,\ldots, w^n)$ είναι ίσο με:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v^1w^1+v^2w^2+\ldots+v^nw^n.$$

ε-περιοχή του $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$, καλούμε το σύνολο $B(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n / \|\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\|<\varepsilon, \varepsilon>0\}$.

Ειδικά, για το χώρο $\mathbf{R}^n$ και τα σημεία του $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n)$, μια ε-περιοχή του **α** είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ για τα οποία ισχύει: $\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-\alpha^i)^2} < \varepsilon$.

Περιοχή του $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$, καλούμε το σύνολο $U(\boldsymbol{\alpha})\subset\mathbf{R}^n$ το οποίο περιέχει μια ε-περιοχή $B(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)$ που περιέχεται σε ένα σύνολο $X\subset\mathbf{R}^n$.

Εσωτερικό σημείο ενός συνόλου X, καλούμε το σημείο $\boldsymbol{\alpha}\in X\subset\mathbf{R}^n$ για το οποίο υπάρχει περιοχή (ε-περιοχή) του που να περιέχεται στο X.

Σημείο συσσωρεύσεως, καλούμε το σημείο $\boldsymbol{\alpha}\in X\subset\mathbf{R}^n$ για το οποίο σε κάθε περιοχή του (ε-περιοχή) υπάρχουν άπειρα στοιχεία του X.

Συνοριακό σημείο, καλούμε το σημείο $\boldsymbol{\alpha}\in X\subset\mathbf{R}^n$ όταν σε κάθε περιοχή $U(\boldsymbol{\alpha})\subset\mathbf{R}^n$ (ε-περιοχή) υπάρχουν σημεία τόσο από το X όσο και από το $X'=\mathbf{R}^n-X$, δηλαδή $U(\boldsymbol{\alpha})\cap X\neq\varnothing$ και $U(\boldsymbol{\alpha})\cap X'\neq\varnothing$. Με X^o συμβολίζουμε το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου και με ∂X το σύνολο των συνοριακών σημείων (**σύνορο του X**).

Τότε:

Ανοικτό σύνολο, καλούμε ένα σύνολο $U \subset \mathbf{R}^n$ το οποίο αποτελείται μόνο από εσωτερικά σημεία του, δηλαδή $U^o=U$.

ή διαφορετικά

το $U \subset \mathbf{R}^n$ καλείται ανοικτό όταν, για κάθε $\boldsymbol{\alpha}$ στο U υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $B(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon) \subset U$.

Το ίδιο το $B(\boldsymbol{\alpha},\varepsilon)$ θεωρείται ανοικτό σύνολο ενώ στην περίπτωση του $\mathbf{R}^2$ και του $\mathbf{R}^3$ οι ε-περιοχές καλούνται **ανοιχτός δίσκος** ή **κύκλος** και **ανοιχτή σφαίρα**, αντίστοιχα.

Κλειστό σύνολο, καλούμε ένα σύνολο $C \subset \mathbf{R}^n$ του οποίου το $C' = \mathbf{R}^n - C$ είναι ανοικτό.

Φραγμένο σύνολο, καλούμε το σύνολο $X \subset \mathbf{R}^n$ για το οποίο υπάρχει $M>0$ έτσι ώστε για κάθε $\boldsymbol{\alpha} \in X$ να ισχύει $\|\boldsymbol{\alpha}\|<M$.

Συμπαγές σύνολο, καλούμε ένα υποσύνολο $K \subset \mathbf{R}^n$ για το οποίο κάθε ακολουθία x_ν στοιχείων του περιέχει (τουλάχιστον) μια υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα στοιχείο του K.

Για ένα συμπαγές σύνολο ισχύει η πρόταση:

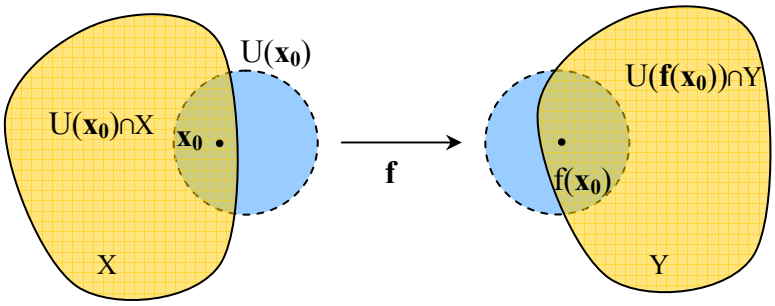
Πρόταση

Ένα σύνολο $K \subset \mathbf{R}^n$ *είναι συμπαγές αν και μόνο αν το* K *είναι κλειστό και φραγμένο.*

Μια απεικόνιση $\mathbf{f}: X \subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^m$ θα καλείται **συνεχής στο σημείο** $\mathbf{x_0} \in \mathbf{X}$, αν για κάθε περιοχή $U(\mathbf{f}(\mathbf{x_0}))$ (ή ε-περιοχή) του Y υπάρχει περιοχή $U(\mathbf{x_0})$ (ή ε-περιοχή) του X τέτοια ώστε, το $\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$ να ανήκει στην $U(\mathbf{f}(\mathbf{x_0})) \cap Y$ για κάθε $\mathbf{x}$ που ανήκει στο $U(\mathbf{x_0}) \cap X$

ή ισοδύναμα

Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0}$, αν για κάθε περιοχή $U(\mathbf{f}(\mathbf{x_0}))$ υπάρχει περιοχή $U(\mathbf{x_0})$ τέτοια ώστε $f(U(\mathbf{x_0}) \cap X) \subseteq U(\mathbf{f}(\mathbf{x_0})) \cap Y$ (σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1

Με χρήση του ε-δ συμβολισμού η συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο διατυπώνεται ως εξής:

Μια συνάρτηση $\mathbf{f}: X \subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^m$ και $\mathbf{x_0} \in X$ θα καλείται συνεχής στο $\mathbf{x_0}$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon,\mathbf{x_0})>0$ έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|<\delta$ να ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})\|<\varepsilon$.

Στην περίπτωση που η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής για κάθε $\mathbf{x_0} \in X$ τότε λέμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **συνεχής στο** $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$.

1.2 (Παραμετρισμένη) καμπύλη, Είδη καμπυλών

Ο Ευκλείδης στο έργο του δε δίνει αυστηρούς ορισμούς. Θα πρέπει επομένως κάποιος, προκαταβολικά και προκειμένου να προχωρήσει στη σωστή χρήση τους (μάλλον θα πρέπει για την εποχή του να θεωρούνται ως αυτονόητοι) να γνωρίζει για τη φύση των εννοιών που χρησιμοποιεί: σημείο, ευθεία, καμπύλη, επιφάνεια…. Εξαιτίας όμως αυτής της ασάφειας των ορισμών δεν μπορεί κανείς να αντλήσει από αυτούς αξιόπιστες πληροφορίες.

Ως αποτέλεσμα, μετά την επικράτηση του πνεύματος για αυστηρότητα στα Μαθηματικά κατά τον 19^{ο} αι. και μετά τις ανακαλύψεις Cantor, ο χώρος των καμπύλων και του ορισμού τους αποτέλεσε ένα πεδίο ανάδειξης διαφωνιών και συγκρούσεων. Και αυτό γιατί, ενώ υπήρχαν γνωστές καμπύλες με άπειρο μήκος (ευθεία, παραβολή) και κλειστές καμπύλες με πεπερασμένο μήκος (κύκλος, έλλειψη), στο προσκήνιο εμφανίστηκαν και κλειστές καμπύλες με άπειρο μήκος (καμπύλη Koch-καμπύλη που δεν έχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο της, έχει δηλαδή άπειρα γωνιακά σημεία). Κάποια στιγμή επομένως ήταν απαραίτητο να δοθούν ακριβείς ορισμοί για τις θεμελιώδεις γεωμετρικές έννοιες της καμπύλης, της επιφάνειας και του στερεού (Vilenkin, 1997, σελ. 136-142,143). Ο ορισμός της καμπύλης δίνεται για εμάς στο πλαίσιο της Διαφορικής Γεωμετρίας και διαμορφώθηκε κυρίως ως αποτέλεσμα της δουλειάς του Camile Jordan.

Παραμετρισμένη καμπύλη του $\mathbf{R}^3$ ή απλά **καμπύλη του $\mathbf{R}^3$** (καμπύλη του 3-διάστατου Ευκλείδειου χώρου) θα καλούμε κάθε συνεχή απεικόνιση $\boldsymbol{\alpha}$: $I \to \mathbf{R}^3$, όπου το I είναι ένα υποσύνολο του **R** της μορφής (α,β), $(\alpha,\beta]$, $(-\infty,\alpha]$ κ.λ.π.

Συμβολίζουμε: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$, με τις $\alpha^i(t)$, i=1,2,3, να είναι συνεχείς συναρτήσεις α^i: $I \to \mathbf{R}$ και το t να είναι η παράμετρος της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$.

Προφανώς, στην περίπτωση που πρόκειται για **καμπύλη του $\mathbf{R}^2$** μιλάμε για καμπύλη του επιπέδου (**επίπεδη καμπύλη**) και θα έχουμε: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t))$.

Παρατηρήσεις

☑ Συχνά ταυτίζουμε την καμπύλη, που είναι μια απεικόνιση, με το **ίχνος** (**εικόνα** ή **τροχιά**) της καμπύλης, το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ (ή του $\mathbf{R}^2$), το:

$$C=\{(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)/\ \alpha^1=\alpha^1(t),\ \alpha^2=\alpha^2(t),\ \alpha^3=\alpha^3(t),\ t\in I\}.$$

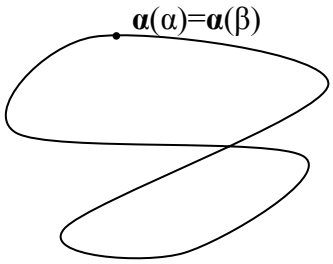
Στη συνέχεια, όπου αναφέρεται «καμπύλη» και δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος έμφασης ή δημιουργίας σύγχυσης ο όρος θα χρησιμοποιείται αδιάκριτα είτε με την έννοια της απεικόνισης είτε με την έννοια του ίχνους.

☑ Για μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$, το $\boldsymbol{\alpha}(t)$ παριστάνει επίσης και το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου που «κινείται» στο ίχνος της καμπύλης.

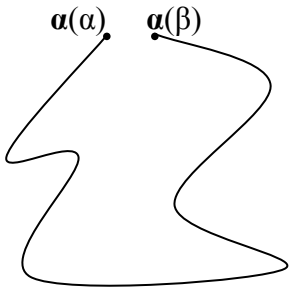
☑ Το πεδίο ορισμού I των καμπυλών επιλέγεται να είναι διάστημα, προκειμένου να εξασφαλιστεί η διαφορισιμότητά τους και η ύπαρξη μήκους για τα ίχνη τους.

Κλειστή καμπύλη, καλούμε την καμπύλη που τα άκρα της συμπίπτουν, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}(\alpha)=\boldsymbol{\alpha}(\beta)$ για την καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ (Σχήμα 1.2).

Απλή καμπύλη, καλούμε την καμπύλη που τα σημεία της **P** είναι απλά, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $t\in I$ ώστε $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{P}$ (η καμπύλη δεν αυτοτέμνεται) (Σχήμα 1.3).

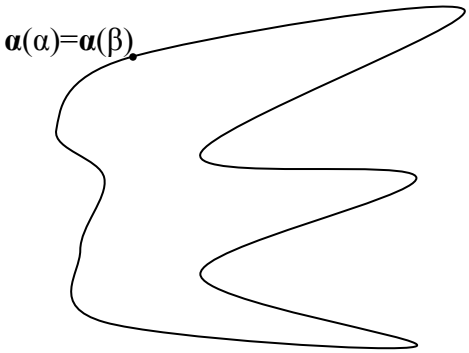


Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.3

Jordan καμπύλη, καλείται η καμπύλη που είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) στο διάστημα (α,β) και ταυτόχρονα **α**(α)=**α**(β). Άρα η καμπύλη Jordan είναι μια απλή, στο (α,β) και ταυτόχρονα κλειστή, στο [α,β], καμπύλη (Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4

1.3 Διαφορικό ή παράγωγος απεικόνισης $\mathbf{R^n \to R^k}$ και ειδικές περιπτώσεις, Μερικές παράγωγοι, Λεία (διαφορίσιμη) καμπύλη, Διάνυσμα ταχύτητας και επιτάχυνσης καμπύλης

Μια διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής **f**: $\mathbf{R^n \to R^k}$, η οποία είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $X \subset \mathbf{R^n}$, θα λέμε ότι είναι **διαφορίσιμη (παραγωγίσιμη)** ή **λεία** στο $\mathbf{x_0} \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση **L**: $\mathbf{R^n \to R^k}$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{x_0+h}$ που ανήκει σε μια ε-περιοχή U του $\mathbf{x_0}$ ($U \subset X$) να ισχύει:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{L}(\mathbf{h})=R(\mathbf{x_0},\mathbf{h}), \text{ όπου } \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}}\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{L}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}=\mathbf{0}.$$

Σημειώνουμε ότι:

Η απεικόνιση **L** συμβολίζεται και $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ ή $d_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f}$ και καλείται **«παράγωγος» της f στο $\mathbf{x_0}$** ή **διαφορικό της f στο $\mathbf{x_0}$**.

Παρατηρήσεις

☑ Το ότι η απεικόνιση διαφορικό $d_{x_0}\mathbf{f}$ είναι γραμμική σημαίνει ότι:

α) Για κάθε $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2} \in \mathbf{R^n}$ ισχύει $d_{x_0}\mathbf{f}(\mathbf{h_1}+\mathbf{h_2}) = d_{x_0}\mathbf{f}(\mathbf{h_1}) + d_{x_0}\mathbf{f}(\mathbf{h_2})$

β) Για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbf{R^n}$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ ισχύει $d_{x_0}\mathbf{f}(\lambda\mathbf{h}) = \lambda d_{x_0}\mathbf{f}(\mathbf{h})$

☑ Στην περίπτωση που μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε κάθε στοιχείο $\mathbf{x_0}$ του συνόλου ορισμού της X, θα λέμε ότι αυτή είναι **διαφορίσιμη σε ολόκληρο το X**.

☑ Στην πραγματικότητα, το διαφορικό και η παράγωγος δεν είναι το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο: η «παράγωγος» είναι ένας πίνακας (ο Jacobian πίνακας που θα συναντήσουμε παρακάτω) ενώ το διαφορικό είναι μια (γραμμική) απεικόνιση η οποία εκφράζεται με τη βοήθεια του πίνακα αυτού.

☑ Για μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής (f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) «χάνεται» η γραμμική δομή του χώρου και το διαφορικό καταλήγει να ταυτίζεται με την παράγωγο της συνάρτησης στο x_0, δηλαδή $df(x_0) = f'(x_0)$ (για την ακρίβεια: $f'(x_0) = 1 \cdot f'(x_0) = [df(x_0)](1)$).

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \ldots, f^k(\mathbf{x}))$ με $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ και $\mathbf{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$, τότε η τιμή του διαφορικού στο $\mathbf{x_0}$ ως προς $\mathbf{h}$ μιας διαφορίσιμης στο $\mathbf{x_0}$ συνάρτησης $\mathbf{f}$ είναι το αποτέλεσμα του πολ/μου ενός kxn με έναν nx1 πίνακα, δηλαδή:

$$d_{x_0}\mathbf{f}(\mathbf{h}) = (\mathbf{J}_{x_0}\mathbf{f}) \cdot \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\theta f^1(\mathbf{x}_0)}{\theta x^1} & \cdots & \frac{\theta f^1(\mathbf{x}_0)}{\theta x^n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\theta f^k(\mathbf{x}_0)}{\theta x^1} & \cdots & \frac{\theta f^k(\mathbf{x}_0)}{\theta x^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h^1 \\ \cdots \\ h^n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \frac{\theta f^i(\mathbf{x}_0)}{\theta x^j} h^j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\theta x^j} h^j = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$$

Σημειώνουμε ότι:

Ο kxn πίνακας $\mathbf{J}_{x_0}\mathbf{f}$ αποτελεί τον **Jacobian πίνακα της συνάρτησης f**.

Έτσι, στην περίπτωση της συνάρτησης $\mathbf{f}$: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ που θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στη συνέχεια, το διαφορικό της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R^2}$ θα είναι ίσο με:

$$(d_{x_0}\mathbf{f})(\mathbf{h}) = (\mathbf{J}_{x_0}\mathbf{f}) \cdot \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\theta f^1(\mathbf{x}_0)}{\theta x^1} & \frac{\theta f^1(\mathbf{x}_0)}{\theta x^2} \\ \frac{\theta f^2(\mathbf{x}_0)}{\theta x^1} & \frac{\theta f^2(\mathbf{x}_0)}{\theta x^2} \\ \frac{\theta f^3(\mathbf{x}_0)}{\theta x^1} & \frac{\theta f^3(\mathbf{x}_0)}{\theta x^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \frac{\theta f^i(\mathbf{x}_0)}{\theta x^j} h^j = \sum_{j=1}^{2} \frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\theta x^j} h^j$$

Θα λέμε ότι, η συνάρτηση $\mathbf{f}$: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^k}$ ορισμένη στο $X \subset \mathbf{R^n}$ είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς τη συνιστώσα** ή **μεταβλητή** $\mathbf{x^j}$ (j=1,2,…,n) (**μερική παράγωγος 1ης τάξης**) στο σημείο $\mathbf{a} = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$, αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x^j \to \alpha^j} \frac{f^i(\alpha^1, \ldots, x^j, \ldots, \alpha^n) - f^i(\alpha^1, \ldots, \alpha^j, \ldots, \alpha^n)}{x^j - \alpha^j}$$

$$= \lim_{h^j \to 0} \frac{f^i(\alpha^1,...,\alpha^j + h^j,...,\alpha^n) - f^i(\alpha^1,...,\alpha^j,...,\alpha^n)}{h^j}$$

$$= \lim_{h^j \to 0} \frac{\mathbf{f}(\alpha^1,...,\alpha^j + h^j,...,\alpha^n) - \mathbf{f}(\alpha^1,...,\alpha^j,...,\alpha^n)}{h^j},$$

για κάθε i=1,2,…,k και j=1,2,…,n, τα οποία συμβολίζουμε με $\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x^j} = \mathbf{f}_{x^j}(\mathbf{a})$

Σημειώνουμε ότι, η μερική παράγωγος $\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x^j} = \begin{bmatrix} \frac{\theta f^1(\mathbf{a})}{\theta x^j} \\ \frac{\theta f^2(\mathbf{a})}{\theta x^j} \\ \vdots \\ \frac{\theta f^k(\mathbf{a})}{\theta x^j} \end{bmatrix}$ είναι ένας kx1 πίνακας ο οποίος μπορεί και να γραφεί με τη μορφή ενός διανύσματος του $\mathbf{R}^k$, δηλαδή: $\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x^j} = (\frac{\theta f^1(\mathbf{a})}{\theta x^j}, \frac{\theta f^2(\mathbf{a})}{\theta x^j}, \ldots, \frac{\theta f^k(\mathbf{a})}{\theta x^j})$.

Για τη συνάρτηση **f**: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$, η μερική της παράγωγος (1ης τάξης) ως προς (τη μεταβλητή) x^1 (αντίστοιχα ως προς τη x^2) είναι ίση με:

$$\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x^1} = \mathbf{f}_{x^1}(\mathbf{a}) = \lim_{x^1 \to \alpha^1} \frac{\mathbf{f}(x^1,\alpha^2) - \mathbf{f}(\alpha^1,\alpha^2)}{x^1 - \alpha^1} = \lim_{h^1 \to 0} \frac{\mathbf{f}(\alpha^1 + h^1,\alpha^2) - \mathbf{f}(\alpha^1,\alpha^2)}{h^1},$$

εφόσον βέβαια υπάρχουν τα όρια: $\lim_{h^1 \to 0} \frac{f^1(\alpha^1 + h^1,\alpha^2) - f^1(\alpha^1,\alpha^2)}{h^1}$,

$\lim_{h^1 \to 0} \frac{f^2(\alpha^1 + h^1,\alpha^2) - f^2(\alpha^1,\alpha^2)}{h^1}$, $\lim_{h^1 \to 0} \frac{f^3(\alpha^1 + h^1,\alpha^2) - f^3(\alpha^1,\alpha^2)}{h^1}$.

Σημειώνουμε ότι, συχνά, αντί για x^1 και x^2 έχουμε αντίστοιχα x και y, οπότε μιλάμε για τις μερικές παραγώγους: $\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x} = \mathbf{f}_x(\mathbf{a})$ και $\frac{\theta \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta y} = \mathbf{f}_y(\mathbf{a})$, αντίστοιχα.

Πρόταση (κριτήριο διαφορισιμότητας)

Αν μια συνάρτηση **f**: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^k}$ *έχει συνεχείς μερικές παραγώγους* $\theta f^i/\theta x^j$, *για κάθε* i=1,2,…,k *και* j=1,2,…,n, *σε ένα ανοικτό σύνολο* $X \subset \mathbf{R^n}$, *τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο* $\mathbf{x_0}$ *του* X *με «παράγωγο» που δίνεται από τον Jacobian πίνακα:*

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0).$$

Αντίστοιχα με τον ορισμό της μερικής παραγώγου 1ης τάξης για μια συνάρτηση **f**, μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο 2ης τάξης (και σε προέκταση τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης).

Έτσι, για μια συνάρτηση **f**: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ ο ορισμός αυτός θα είναι:

Θα λέμε ότι η συνάρτηση **f**: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$, ορισμένη στο $X \subset \mathbf{R}^2$, **έχει μερικές παραγώγους 2ης τάξης** ως προς τις συνιστώσες (μεταβλητές) x^j και x^i (με αυτή τη σειρά και για i,j=1,2) στο σημείο $\mathbf{a}=(\alpha^1,\alpha^2)$, αν και μόνο αν η συνάρτηση $\mathbf{f}_{x^j}$ είναι (μερικώς) παραγωγίσιμη ως προς τη συνιστώσα x^i στο $\mathbf{a} \in X$ και θα συμβολίζουμε:

$$\frac{\theta(\mathbf{f}_{x^j})}{\theta x^i}(\mathbf{a}) = \frac{\theta}{\theta x^i}(\frac{\theta \mathbf{f}}{\theta x^j})(\mathbf{a}) = \frac{\theta^2 \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\theta x^i \theta x^j} = \mathbf{f}_{x^j x^i}(\mathbf{a})$$

Σημειώνουμε ότι, στην περίπτωση που είναι $x^1=x$ και $x^2=y$ τότε τα παραπάνω δίνουν τις μερικές παραγώγους: $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$ (μικτές παράγωγοι), $\mathbf{f}_{x^2}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{y^2}(\mathbf{a})$.

Παρατήρηση

Γενικά, οι $\mathbf{f}_{x^i x^j}(\mathbf{a})$, για $i \neq j$ αλλά και ειδικότερα οι $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$ δεν είναι ίσες μεταξύ τους, σύμφωνα όμως με το **θεώρημα Schwarz**, θα είναι ίσες μεταξύ τους στο **a** όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\mathbf{f}_x(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_y(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})$ και είναι συνεχείς σε μια περιοχή U του σημείου **a**.

Στην περίπτωση αυτή θα είναι: $\mathbf{f}_{xy}(\mathbf{a})=\mathbf{f}_{yx}(\mathbf{a})$.

Στην πράξη, απαιτούμε γενικά οι συναρτήσεις μας **f**: $I \to \mathbf{R}^k$ να έχουν παραγώγους τουλάχιστον 1ης τάξης ενώ συχνά επίσης απαιτούμε να έχουν παραγώγους 2ης ή ανώτερης τάξης. Θα λέμε τότε ότι: μια διανυσματική (ή πραγματική συνάρτηση) **f** είναι **κλάσεως C^m** ή **διαφορίσιμη τάξεως C^m** ($m \geq 1$) σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ αν υπάρχει η παράγωγός της τάξεως m και είναι συνεχής στο I. Προφανώς, μια συνάρτηση που είναι κλάσεως C^κ θα είναι και κλάσεως C^λ, με $\lambda \leq \kappa$.

Συμβολίζουμε την κλάση των συνεχών συναρτήσεων με C^0, ενώ την κλάση των συναρτήσεων που έχουν παραγώγους όλων των τάξεων με C^∞.

Πρόταση

Αν οι συναρτήσεις **f,g**: $I \to \mathbf{R}^k$ *είναι κλάσεως* C^m *στο* I, *τότε οι συναρτήσεις* **f+g, f-g, fg** *καθώς και η σύνθεση* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *είναι συναρτήσεις κλάσεως* C^m.

Στην περίπτωση μιας καμπύλης του $\mathbf{R}^3$, που αποτελεί μια απεικόνιση $I \to \mathbf{R}^3$, θα λέμε ότι αυτή είναι **διαφορίσιμη** ή **λεία στο R** (στο $I \subset \mathbf{R}$), αν οι συνιστώσες της α^i (i=1,2,3) είναι παραγωγίσιμες (διαφορίσιμες) συναρτήσεις οποιασδήποτε τάξης στο **R** και μάλιστα οι παράγωγοί τους είναι συναρτήσεις συνεχείς στο **R**. Η **α** είναι τότε μια **λεία καμπύλη κλάσεως C^∞** ή απλά **λεία καμπύλη**.

Το διαφορικό της **α** στο t_0 είναι τότε το:

$$d_{t_0}\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{\theta\alpha^1(t_0)}{\theta t}, \frac{\theta\alpha^2(t_0)}{\theta t}, \frac{\theta\alpha^3(t_0)}{\theta t}\right) = \left(\frac{d\alpha^1(t_0)}{dt}, \frac{d\alpha^2(t_0)}{dt}, \frac{d\alpha^3(t_0)}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

$$= ([\alpha^1(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]'_{t=t_0}) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0) \text{ και } (d_{t_0}\boldsymbol{\alpha})(h) = \boldsymbol{\alpha}'(t_0)\cdot h.$$

Για μια λεία καμπύλη κλάσεως (τουλάχιστον) C^1, η $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ είναι η 1η παράγωγος της **α** στο t_0 και αποτελεί (γεωμετρικά) το **διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης α στο σημείο t_0**. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_0+h)-\boldsymbol{\alpha}(t_0)}{h} = ([\alpha^1(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]'_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]'_{t=t_0})$$

Γενικότερα, το διάνυσμα ταχύτητας μιας (λείας) καμπύλης σε οποιοδήποτε $t \in I \subset R$ θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ και το μέτρο του θα το ονομάζουμε **ταχύτητα** ή **μέτρο της ταχύτητας** της **α** στο t και θα είναι ίσο με:

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{\left[\frac{d\alpha^1(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d\alpha^2(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d\alpha^3(t)}{dt}\right]^2} = \sqrt{([\alpha^1(t)]')^2 + ([\alpha^2(t)]')^2 + ([\alpha^3(t)]')^2}$$

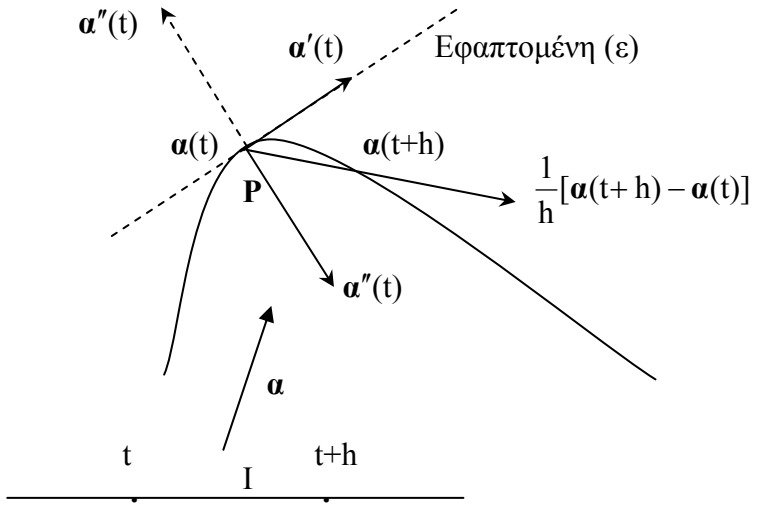
Για μια λεία καμπύλη κλάσεως (τουλάχιστον) C^2, το $\boldsymbol{\alpha}''(t_0)$ είναι η 2η παράγωγος της **α** στο t_0 και αποτελεί (γεωμετρικά) το **διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης α στο σημείο t_0**. Είναι δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha}''(t_0) = ([\alpha^1(t)]''_{t=t_0}, [\alpha^2(t)]''_{t=t_0}, [\alpha^3(t)]''_{t=t_0})$$

Γενικότερα, το διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης σε οποιοδήποτε $t \in I \subset R$ θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}''(t)$ και το μέτρο του θα το ονομάζουμε **επιτάχυνση** ή **μέτρο της επιτάχυνσης** της **α** στο t και θα είναι ίσο με:

$$\|\boldsymbol{\alpha}''(t)\| = \sqrt{([\alpha^1(t)]'')^2 + ([\alpha^2(t)]'')^2 + ([\alpha^3(t)]'')^2}$$

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα δύο θεωρήματα που αφορούν τις καμπύλες και τα οποία θα έχουν ευρεία εφαρμογή στη συνέχεια (σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5

Θεώρημα

Το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ *μιας λείας καμπύλης του* $\mathbf{R}^3$*, είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (στο ίχνος της) στο σημείο της* **α**(t).

Απόδειξη

Έστω η καμπύλη **α**: $I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ μια λεία καμπύλη με $t \in I$ και **P=α**(t) η εικόνα (σημείο) της **α** στο t και **Q=α**(t+h), $h \in I$, η εικόνα της **α** στο t+h. Έστω επίσης (ε) η ευθεία των **P**,**Q**. Τότε το διάνυσμα **PQ** είναι ίσο με **PQ=α**(t+h)-**α**(t) και η (ε) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα: $\frac{1}{h}[\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)] = \frac{\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)}{h}$.

$$\text{Για } h \to 0 \text{ είναι: } \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}(t+h) - \boldsymbol{\alpha}(t)}{h} = \boldsymbol{\alpha}'(t)$$

και η (ε) παίρνει τη θέση της εφαπτομένης της καμπύλης στο **P**. Άρα το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (στο ίχνος της) στο σημείο της **α**(t).

Θεώρημα

Αν η καμπύλη **α**(t) *έχει σταθερή ταχύτητα για κάθε* $t \in I \subset R$ *(*$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$*=σταθ.) τότε το διάνυσμα ταχύτητας* $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ *είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιτάχυνσης* $\boldsymbol{\alpha}''(t)$.

Απόδειξη

Επειδή $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$=σταθερό θα είναι $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2$=σταθ. $\Leftrightarrow <\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}'(t)>$=σταθ. και με παραγώγιση της ισότητας $<\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}'(t)>$=σταθ. ως προς t (παράγωγος εσωτερικού γινομένου) προκύπτει:

$$<\boldsymbol{\alpha}''(t),\boldsymbol{\alpha}'(t)>+<\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}''(t)>=0 \Leftrightarrow 2<\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}''(t)>=0 \Leftrightarrow <\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}''(t)>=0,$$

δηλαδή το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''(t)$.

Σημειώνουμε ότι με αντίστοιχη διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και γενικότερα:

Το διάνυσμα της παραγώγου $\mathbf{u}'(t)=\dfrac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$ *ενός διανύσματος* **u** *που έχει σταθερό μέτρο, είναι κάθετο στο* $\mathbf{u}''(t)$.

1.4 Κανονική καμπύλη, Αναπαραμέτρηση καμπύλης, Αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου (φυσική παραμέτρηση)

Μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^3$ θα καλείται **κανονική** όταν:

α) Είναι κλάσεως (τουλάχιστον) C^1 στο I (διαφορίσιμη στο I)

β) $\boldsymbol{\alpha}'(t)\neq\mathbf{0}$ (έχει μη μηδενικό διάνυσμα ταχύτητας)

Σημειώνουμε ότι, η καμπύλη είναι κανονική αν και μόνο αν και οι τρεις συναρτήσεις $\alpha^i(t)$, i=1,2,3, είναι κλάσεως C^1 στο I και για κάθε $t\in I$ μια τουλάχιστον από τις $(\alpha^i)'$ είναι διάφορη του μηδενός.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που μια καμπύλη δεν είναι κανονική (ή λεία) μπορούμε να τη χωρίσουμε σε τμήματα στα οποία να είναι κανονική (ή λεία) (**κατά τμήματα κανονική** ή **λεία καμπύλη**).

Η διαδρομή κατά μήκος του ίχνους της καμπύλης και μεταξύ δύο σημείων της καλείται **τόξο της καμπύλης**.

Θεώρημα

Το μήκος του τόξου μιας κανονικής καμπύλης μεταξύ των σημείων της $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ *και* $\boldsymbol{\alpha}(t)$, (t_0, $t\in I$) *είναι ίσο με το ολοκλήρωμα:* $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$.

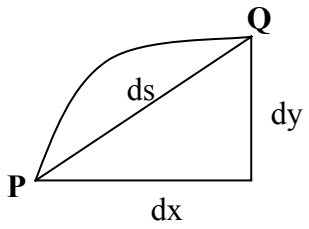
Απόδειξη

Έστω ένα απειροστό τμήμα (τόξο) καμπύλης ds. Αυτό είναι τότε, προσεγγιστικά, ίσο με το ευθ. τμήμα **PQ** (σχήμα 1.6). Από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε:
$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ και με την **α** παραμετρισμένη ως προς t:

$$(dx)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2(dt)^2,\ (dy)^2=\left(\frac{dy}{dt}\right)^2(dt)^2,\ (dz)^2=\left(\frac{dz}{dt}\right)^2(dt)^2 \text{ θα προκύψει:}$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

και ολοκληρώνοντας ως προς u από t_0 έως t:



Σχήμα 1.6

$$s(t)-s(t_0)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$$

$=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$ και για $s(t_0)=0$:

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du\text{, με } t_0<t.$$

Σημειώνουμε ότι: $\frac{ds}{dt}=\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$.

Αν θεωρήσουμε τη λεία καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ και τη διαφορίσιμη συνάρτηση h: $I\to J\subset\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει h(J)=I, τότε η καμπύλη $\boldsymbol{\beta}$: $J\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ με $\boldsymbol{\beta}(s)=\boldsymbol{\alpha}(h(s))=(\boldsymbol{\alpha}\circ h)(s)$ λέγεται **αναπαραμέτρηση της α με την h**.

Παρατηρήσεις

☑ Οι **αναπαραμετρισμένες καμπύλες α**, **β** έχουν την ίδια τροχιά, διέρχονται δηλαδή από τα ίδια σημεία αλλά για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου τους (σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αν υποτεθεί ότι η παράμετρος εκφράζει το χρόνο).

☑ Το μήκος τόξου μιας αναπαραμετρισμένης καμπύλης παραμένει το ίδιο και δεν επηρεάζεται από την αναπαραμέτρηση.

Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε τον **«κανόνα της αλυσίδας»** που αφορά την παραγώγιση (διαφόριση) σύνθετων διανυσματικών συναρτήσεων διανυσματικής (και πραγματικής) μεταβλητής:

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $\mathbf{g}$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ *είναι διαφορίσιμη στο* $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ *και η* $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^k$ *είναι διαφορίσιμη στο* $\mathbf{g(x)}\in\mathbf{R}^n$*, τότε η συνάρτηση* $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ *είναι διαφορίσιμη στο* $\mathbf{x}$ *και ισχύει:*

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

Σημειώνουμε ότι, οι παραπάνω παράγωγοι αποτελούν τους Jacobian πίνακες των αντίστοιχων συναρτήσεων άρα θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})=\mathbf{J}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{f}\cdot\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{g}$$

Θεώρημα

Τα διανύσματα ταχύτητας αναπαραμετρησμένων καμπύλων είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι: $\boldsymbol{\beta}(s)=\boldsymbol{\alpha}(h(s))$ οπότε παραγωγίζοντας τη σύνθετη συνάρτηση $\boldsymbol{\beta}$ με βάση τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει: $\boldsymbol{\beta}'(s)=\boldsymbol{\alpha}'(h(s))\cdot h'(s)$ $=h'(s)\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)$ οπότε τα διανύσματα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ είναι συγγραμμικά. Προφανώς, αν $h'(s)>0$ τότε τα $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ είναι ομόρροπα ενώ αν $h'(s)<0$ τα $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ είναι αντίρροπα.

Μια αναπαραμέτρηση $\boldsymbol{\beta}$: $J\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ της $\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ με την h: $I\to J$ (t=h(s)) θα λέγεται λέγεται **κανονική αναπαραμέτρηση της α με την h** αν $h'(s)\neq 0$, για κάθε $s\in J$.

Εκείνη η αναπαραμέτρηση μιας κανονικής καμπύλης που χρησιμοποιεί σα νέα παράμετρο το μήκος τόξου s της καμπύλης μεταξύ μιας αρχικής τιμής t_0 της παραμέτρου μέχρι μια οποιαδήποτε τιμή της t, καλείται **αναπαραμέτρηση με**

(παράμετρο το) μήκος τόξου ή **φυσική (ανα)παραμέτρηση** ή **φυσική παράσταση της (αρχικής) καμπύλης**, το δε s καλείται και **φυσική παράμετρος**.

Σημειώνουμε ότι, με τη φυσική αναπαραμέτρηση αποκτούμε **καμπύλες με μοναδιαία ταχύτητα** (διάνυσμα ταχύτητας με μέτρο ίσο με τη μονάδα) και επιτυγχάνουμε έτσι την απλοποίηση πολλών αποτελεσμάτων χωρίς βλάβη της γενικότητας της ισχύος τους.

Θεώρημα

Αν **α** *είναι μια λεία και κανονική καμπύλη τότε αυτή μπορεί να αναπαραμετριστεί ώστε να έχει μοναδιαία ταχύτητα.*

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση μήκος τόξου: $s(t)=\int_{t_0}^{t} \| \boldsymbol{\alpha}'(u) \| du$, με $t_0<t$. Σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα έχουμε: $\frac{ds}{dt}=\| \boldsymbol{\alpha}'(t) \|>0$, άρα η συνάρτηση s(t) είναι γνησίως αύξουσα και επομένως θα αντιστρέφεται με αντίστροφη την t=t(s) οπότε: $\frac{dt(s)}{ds}=\frac{1}{\frac{ds(t(s))}{dt}}>0$.

Αν $\boldsymbol{\beta}(s)=\boldsymbol{\alpha}(t(s))$ είναι η αναπαραμέτρηση της **α** με την φυσική παράμετρο τότε:

$$\boldsymbol{\beta}'(s)=\boldsymbol{\alpha}'(t(s))\cdot t'(s)=\boldsymbol{\alpha}'(t(s))\cdot\frac{d(t(s))}{ds} \text{ και}$$

$$\| \boldsymbol{\beta}'(s) \|=\| \boldsymbol{\alpha}'(t(s)) \| \cdot \left| \frac{d(t(s))}{ds} \right| = \left| \frac{d(s(t))}{dt} \right| \cdot \left| \frac{1}{\frac{d(s(t))}{dt}} \right| = 1.$$

Παρατηρήσεις

☑ Για την καμπύλη **α**: $[t_0,t]\to \mathbf{R}^3$ με μοναδιαία ταχύτητα, το μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ των t_0 και t είναι ίσο με $L=L_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t} 1\,dt=t-t_0$ (και γενικότερα $|t-t_0|$, αν δε γνωρίζουμε την ακριβή ανισοτική σχέση μεταξύ t_0 και t) οπότε η συνάρτηση μήκους τόξου θα είναι η $s(t)=t-t_0$.

Θα λέμε τότε ότι η καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου s από t_0 έως t.

☑ Για την αναπαραμετρισμένη καμπύλη **β** με παράμετρο το μήκος τόξου s, το διάστημα ορισμού είναι το [0,L].

☑ Παρότι, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, όλες οι λείες και κανονικές καμπύλες μπορούν να αναπαραμετριστούν έτσι ώστε να έχουν μοναδιαία ταχύτητα, εντούτοις μπορεί να μην υπάρχει ένα τύπος με τον οποίο να υπολογίζεται η αντικατάσταση t=t(s), λόγω αδυναμίας υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^{t} \| \boldsymbol{\alpha}'(u) \| du$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που για καμπύλη θεωρηθεί η έλλειψη καταλήγουμε σε ένα μη υπολογιζόμενο (αναλυτικά) ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

☑ Κατά τη φυσική αναπαραμέτρηση βέβαια δεν αλλάζει η διεύθυνση του (εφαπτόμενου) διανύσματος ταχύτητας.

1.5 Προσανατολισμός καμπύλης

Έστω η καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $[\alpha,\beta]\subset \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}^3$. Με τον ορισμό της καμπύλης ορίζεται αυτόματα πάνω σε αυτή μια φορά διαγραφής του ίχνους της μεταξύ του $\boldsymbol{\alpha}(\alpha)$ και του $\boldsymbol{\alpha}(\beta)$, καθώς το t πηγαίνει από το α στο β. Ορίζουμε δηλαδή έναν προσανατολισμό της εικόνας $\boldsymbol{\alpha}([\alpha,\beta])$ ή αλλιώς έναν **προσανατολισμό της καμπύλης**.

Αν ως θετική φορά διαγραφής χαρακτηριστεί η φορά από το $\boldsymbol{\alpha}(\alpha)$ μέχρι το $\boldsymbol{\alpha}(\beta)$ (καθώς το t πηγαίνει από το α στο β) τότε η φορά από το $\boldsymbol{\alpha}(\beta)$ μέχρι το $\boldsymbol{\alpha}(\alpha)$ θα χαρακτηριστεί ως **αντίθετη** της προηγούμενης. Για παράδειγμα, οι καμπύλες $\boldsymbol{\alpha}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ και $\boldsymbol{\beta}(t)=\boldsymbol{\alpha}(\alpha+\beta-t)$ έχουν αντίθετη φορά.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι, η παραμέτρηση μιας καμπύλης με παράμετρο του μήκος τόξου δεν είναι μοναδική, μια και εξαρτάται και από την εκλογή του αρχικού σημείου t_0 (που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου s=0) αλλά και από το πρόσημο του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|du$, ανάλογα με τον αν είναι $t>t_0$ ή $t<t_0$. Άρα η παραμέτρηση μια καμπύλης εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης.

Ισχύει γενικότερα το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

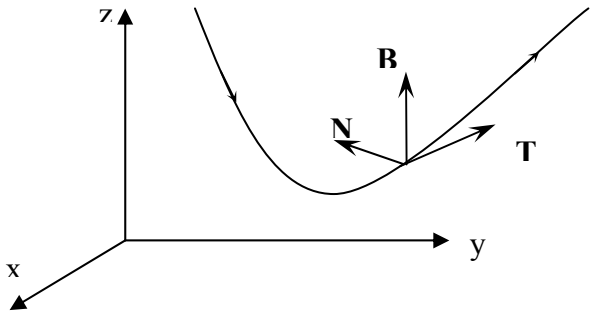
Αν $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(s)$ *είναι μια φυσική παράσταση της καμπύλης* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}(s^*)=\boldsymbol{\alpha}(s(s^*))$ *είναι μια άλλη φυσική παράσταση της καμπύλης* $\boldsymbol{\alpha}$*, τότε* $s=\pm s^*+c$, c *σταθερά.*

Απόδειξη

Αν $\boldsymbol{\alpha}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s^*)$ είναι δύο φυσικές παραστάσεις της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ (δηλαδή $\|\boldsymbol{\alpha}'(s)\|=1$, $\|\boldsymbol{\beta}'(s^*)\|=1$) τότε: $\boldsymbol{\beta}'(s^*)=\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s(s^*))}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*}$ και $\|\boldsymbol{\beta}'(s^*)\|=|\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds}|\cdot|\frac{ds}{ds^*}|$ $=\|\boldsymbol{\alpha}'(s)\|\cdot|\frac{ds}{ds^*}|$ άρα $|\frac{ds}{ds^*}|=1$ ή $ds=\pm ds^*$ και με ολοκλήρωση $s=\pm s^*+c$.

1.6 Πλαίσιο Serret-Frenet, Καμπυλότητα καμπύλης, Προσημασμένη καμπυλότητα, Στρέψη καμπύλης, Γωνία καμπυλών

Πλαίσιο Serret-Frenet ή **κινούμενο τρίεδρο**, καλούμε την τριάδα των μοναδιαίων και καθέτων μεταξύ τους διανυσμάτων $\{\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}\}$, τα οποία αποτελούν μια **δεξιόστροφη βάση** (φορά που προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού) σε κάθε σημείο μιας καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$, η μελέτη της οποίας δίνει κρίσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της καμπύλης (σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7

Ας δούμε τα στοιχεία του πλαισίου αυτού:

α) Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα Τ

Είδαμε στον προσανατολισμό της καμπύλης ότι, για δύο διαφορετικές φυσικές παραστάσεις μιας καμπύλης, ως προς s* και s αντίστοιχα, ισχύει: $\|\boldsymbol{\beta}'(s^*)\| = \|\boldsymbol{\alpha}'(s)\| = 1$ άρα $\boldsymbol{\beta}'(s^*) = \pm\boldsymbol{\alpha}'(s)$ ή $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds^*} = \pm\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}$ και επομένως τα διανύσματα ταχύτητας: $\boldsymbol{\beta}'(s^*) = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds^*}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(s) = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}$ θα έχουν την ίδια ή αντίθετη φορά ανάλογα με τον προσανατολισμό της καμπύλης (της ίδιας αναπαραμετρισμένης καμπύλης).

Άρα το $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ είναι ένα «προσανατολισμένο μέγεθος» και μάλιστα «δείχνει» προς την κατεύθυνση που η παράμετρος s «αυξάνει».

Το $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ λέγεται **μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα** της προσανατολισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(s)$ στο σημείο της $\boldsymbol{\alpha}(s)$ και συμβολίζεται και με $\mathbf{T}(s)$.

Άρα $\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$.

Στην περίπτωση που $\boldsymbol{\alpha}(t)$ είναι μια τυχούσα κανονική (όχι φυσική) παραμετρική παράσταση της καμπύλης τότε θα είναι:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}(s)\cdot(\pm\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|),$$

ανάλογα με τον προσανατολισμό της καμπύλης. Στην περίπτωση μάλιστα που οι $\boldsymbol{\alpha}(t)$ και $\boldsymbol{\alpha}(s)$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό θα είναι: $\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$

β) Το διάνυσμα της πρώτης καθέτου ή **πρώτο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα**

Με την ανάπτυξη της έννοιας αυτής είναι πολύ στενά συνδεδεμένη μια άλλη έννοια που αφορά τις καμπύλες: η έννοια της καμπυλότητας μιας καμπύλης, για αυτό και θα προηγηθεί η αναφορά της.

Θεωρούμε την κανονική καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(s)$ κλάσεως C^m $(m \geq 2)$, στη φυσική της παράσταση. Λέμε τότε, **διάνυσμα καμπυλότητας** της καμπύλης στο σημείο της $\boldsymbol{\alpha}(s)$ το διάνυσμα: $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}(s) = \mathbf{T}'(s) = \boldsymbol{\alpha}''(s)$.

Αν και η φορά του $\mathbf{T}(s)$ ή $\mathbf{T}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης, η φορά του $\boldsymbol{\kappa}(s)$ είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού, γιατί για κάποια άλλη φυσική παραμέτρηση του $\mathbf{T}$ θα είχαμε: $\mathbf{T}'(s^*) = \frac{d\mathbf{T}}{ds^*} = \frac{d}{ds^*}\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds^*}\right) = \frac{d}{ds^*}\left(\pm\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\right)$

$$= \pm\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\right)\frac{ds}{ds^*} = \pm\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\right)(\pm 1) = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{T}'(s).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα διανύσματα $\boldsymbol{\kappa}(s)$ και $\mathbf{T}(s)$ είναι κάθετα μεταξύ του και στην περίπτωση που είναι $\boldsymbol{\kappa}(s) \neq \mathbf{0}$ τότε το $\boldsymbol{\kappa}(s)$ «δείχνει» προς την κατεύθυνση που καμπυλώνεται η καμπύλη.

Το μέτρο του διανύσματος καμπυλότητας $\|\boldsymbol{\kappa}(s)\| = \|\boldsymbol{\alpha}''(s)\|$, καλείται **καμπυλότητα** ή **μέτρο καμπυλότητας της καμπύλης στο σημείο της α(s)** και συμβολίζεται με κ(s), είναι δε $\kappa(s) \geq 0$.

Παρατηρήσεις

Ο αντίστροφος της μη μηδενικής καμπυλότητας $\rho = 1/\kappa(s)$ καλείται **ακτίνα καμπυλότητας** και αποτελεί την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται στην καμπύλη

στο σημείο της α(s) (εγγύτατος κύκλος). Έτσι, κατά μήκος μιας καμπύλης που η διεύθυνση της εφαπτομένης μεταβάλλεται γρήγορα, για παράδειγμα, περιφέρεια με μικρή ακτίνα, η καμπυλότητα είναι μεγάλη ή αλλιώς η ακτίνα καμπυλότητας είναι μικρή.

Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο **α**(s) είναι κ(s)=0, τότε το σημείο αυτό καλείται σημείο καμπής και σε αυτό αντιστοιχεί άπειρη ακτίνα καμπυλότητας

Στην περίπτωση που σε κάθε σημείο **α**(s) είναι κ(s)=0, τότε η καμπύλη δεν καμπυλώνεται καθόλου άρα είναι μια ευθεία.

Ως ορισμό της καμπυλότητας θα μπορούσαμε να δώσουμε και τον παρακάτω, μια και ένας αντίστοιχος ορισμός θα μας απασχολήσει όταν αναφερθούμε σε καμπύλες που ανήκουν σε επιφάνειες.

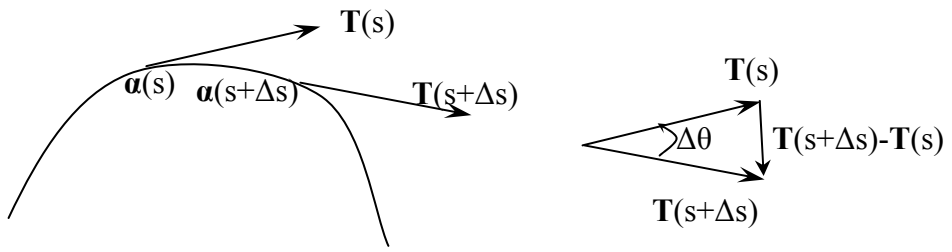
Θεώρημα

Αν **α**(s) *είναι μια φυσική παράσταση μιας καμπύλης* **α** *κλάσεως* C^m ($m \geq 2$) *και* Δθ *είναι η γωνία που σχηματίζουν τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα* **T**(s) *και* **T**(s+Δs) *(*Δs>0*) στα γειτονικά σημεία* **α**(s) *και* **α**(s+Δs) *αντίστοιχα της τροχιάς της, τότε:*

$$\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}.$$

Απόδειξη

Με το **T**(s) μοναδιαίο, το ||**T**(s+Δs)-**T**(s)|| εκφράζει το μήκος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές μήκους 1 (σχήμα 1.8).



Σχήμα 1.8

Άρα: $\|\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)\|=2\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)$ γιατί $\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)=\dfrac{\frac{\|\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)\|}{2}}{\|\mathbf{T}(s)\|}$.

Με χρήση του αναπτύγματος Taylor για το ημίτονο προκύπτει:

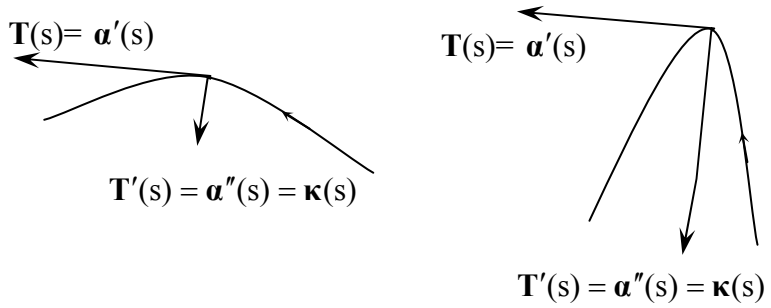
$2\sin(\frac{1}{2}\Delta\theta)=\Delta\theta+(\circ\Delta\theta)$, όπου $(\circ\Delta\theta)$ το σύμβολο Landau για το Δθ που δείχνει ότι το υπόλοιπο του αναπτύγματος είναι αμελητέο σε σχέση με το Δθ. Τότε:

$$\kappa(s)=\|\mathbf{T}'(s)\|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{T}(s+\Delta s)-\mathbf{T}(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta+(\circ\Delta\theta)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}(1+\frac{\circ\Delta\theta}{\Delta\theta})\right|$$

και με $\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=0$ θα είναι και $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\circ\Delta\theta}{\Delta\theta}=0$ άρα: $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}$.

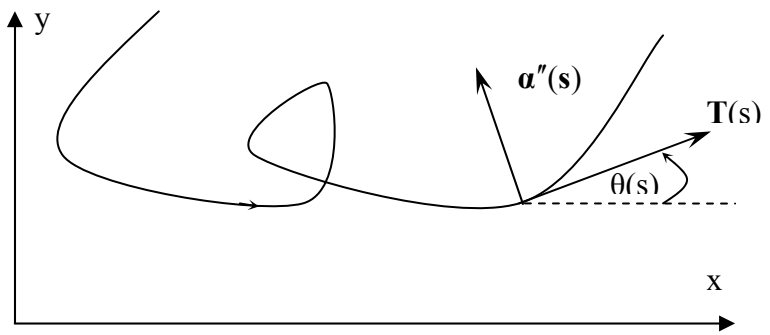
Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, η καμπυλότητα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής, της διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης προς το μήκος τόξου και μάλιστα, η καμπυλότητα είναι μεγάλη κατά μήκος μιας καμπύλης που η διεύθυνση της

εφαπτομένης μεταβάλλεται γρήγορα (περιφέρεια με μικρή ακτίνα καμπυλότητας) και μικρή στην αντίθετη περίπτωση (σχήμα 1.9).



Σχήμα 1.9

Σημειώνουμε ότι: για γωνία θ θα μπορούσε να θεωρηθεί η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων εφαπτόμενων σε κάθε σημείο και μιας σταθερής διεύθυνσης. Για παράδειγμα, όσον αφορά τις επίπεδες καμπύλες, η σταθερή αυτή διεύθυνση θα μπορούσε να είναι η οριζόντια διεύθυνση ή ο άξονας $x'x$ (σχήμα 1.10).



Σχήμα 1.10

Παρατήρηση

Όταν αναφερόμαστε σε **σταθερή καμπυλότητα** θα εννοούμε το μέτρο του διανύσματος καμπυλότητας, μια και η διεύθυνση του διανύσματος για κάθε καμπύλη που δεν είναι ευθεία αλλάζει συνεχώς.

Ερχόμαστε τώρα στο διάνυσμα **N** της πρώτης καθέτου.

Για μια καμπύλη κλάσεως C^m $(m \geq 2)$, το διάνυσμα καμπυλότητας $\boldsymbol{\kappa}(s)$ μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο κατά μήκος της καμπύλης. Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\dfrac{\boldsymbol{\kappa}(s)}{\|\boldsymbol{\kappa}(s)\|}$ έχει τη διεύθυνση και τη φορά του $\boldsymbol{\kappa}$ ενώ όταν $\boldsymbol{\kappa}=0$ δε μπορεί να οριστεί. Επίσης, μπορεί να παρουσιάζει και ασυνέχεια.

Έτσι, αντί για το μοναδιαίο διάνυσμα τη καμπυλότητας χρησιμοποιούμε συχνά ένα μοναδιαίο διάνυσμα, συγγραμμικό με το $\boldsymbol{\kappa}$, με αυθαίρετη όμως φορά, με τρόπο ώστε αυτό να μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο (όπου αυτό είναι δυνατόν) κατά μήκος του ίχνους της καμπύλης. Το διάνυσμα αυτό καλείται **διάνυσμα της πρώτης καθέτου** ή **πρώτο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\mathbf{N}(s)$ ή $\mathbf{N}$.

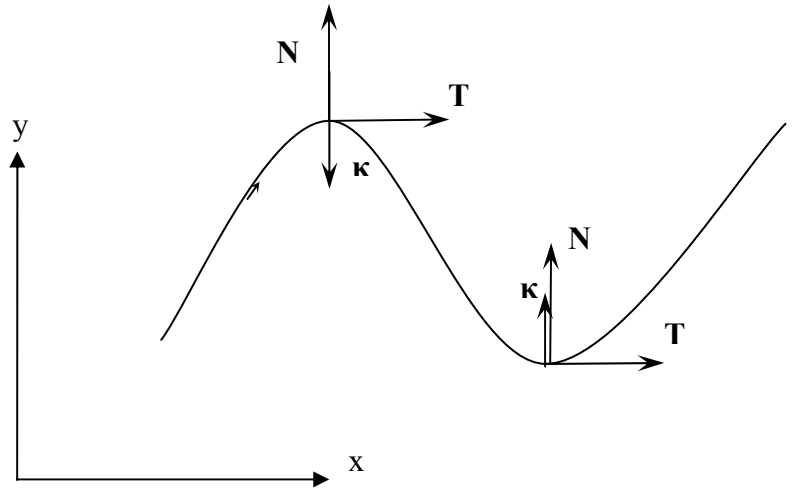
Για τα σημεία για τα οποία είναι $\boldsymbol{\kappa}(s) \neq \mathbf{0}$ θα είναι: $\mathbf{N}(s)=\dfrac{\boldsymbol{\kappa}(s)}{\|\boldsymbol{\kappa}(s)\|}$.

Σημειώνουμε ότι: $\|\mathbf{N}(s)\|=\|\dfrac{\boldsymbol{\kappa}(s)}{\|\boldsymbol{\kappa}(s)\|}\|=1$.

Όσον αφορά τις επίπεδες καμπύλες, μετά την εκλογή του **N**(s) διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση **κ**(s) κατά μήκος της καμπύλης για την οποία ισχύει **κ**(s)=κ(s)**N**(s). Στα σημεία της καμπύλης στα οποία τα διανύσματα **κ** και **N** είναι ομόρροπα είναι κ(s)=||**κ**(s)||, ενώ όπου τα διανύσματα **κ** και **N** είναι αντίρροπα θα ισχύει: κ(s)=-||**κ**(s)||. Εκεί βέβαια όπου είναι **κ**(s)=0 θα είναι και κ(s)=0.

Τον αριθμό κ(s) καλούμε τότε **προσημασμένη καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο α(s).** Επειδή το **N**(s) είναι αρχικά αυθαίρετο ως προς τη φορά, το πρόσημο της καμπυλότητας δεν είναι καθορισμένο. Άρα, μόνο το μέτρο του διανύσματος καμπυλότητας κ(s)=||**κ**(s)|| αποτελεί όπως λέμε μια **εσωτερική ιδιότητα** της καμπύλης, δηλαδή είναι μια έννοια αναλλοίωτη από τις αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων. Στην περίπτωση αυτή γίνεται καταχρηστική χρήση του συμβόλου κ(s) και για το μέτρο της καμπυλότητας ($\kappa(s)\geq 0$) αλλά και για την προσημασμένη καμπυλότητα ($\kappa(s)\in \mathbf{R}$) (σχήμα 1.11).

Σημειώνουμε ότι, με πολ/μο με το μοναδιαίο διάνυσμα **N**(s), η ισότητα **κ**(s)=κ(s)**N**(s) δίνει: κ(s)=<**κ**(s),**N**(s)>, τύπος που ουσιαστικά αποτελεί και τον ορισμό της προσημασμένης καμπυλότητας.



Σχήμα 1.11

γ) Το διάνυσμα της δεύτερης καθέτου ή **δεύτερο μοναδιαίο κάθετο** ή **δεύτερη κάθετος.**

Πρόκειται για το διάνυσμα **B**(s)=**T**(s)×**N**(s) και προφανώς είναι:
||**B**(s)||=||**T**(s)×**N**(s)||=||**T**(s)|||| **N**(s)|||ημφ|=1, όπου φ=90° η γωνία μεταξύ των **T**,**N**.

Παρατήρηση

Το επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα: **T**,**N** καλείται **εγγύτατο επίπεδο**, τα **T**,**B** **ευθειοποιούν** και τα **N**,**B** **κάθετο επίπεδο** μιας καμπύλης σε ένα σημείο της.

Οι **τύποι των Serret-Frenet** (S-F) ή **οι δομικές εξισώσεις μιας καμπύλης**, είναι οι τύποι που μας δίνουν τις παραγώγους των διανυσμάτων **T**,**N**,**B**.

Α) Στην περίπτωση που η καμπύλη α: $[\alpha,\beta]\subset \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}^3$ είναι λεία και παραμετρησμένη με μήκος τόξου (φυσική παράσταση), οι τύποι των S-F είναι οι:

$$\mathbf{T}'(s)=\kappa(s)\mathbf{N}(s),\quad \mathbf{N}'(s)=-\kappa(s)\mathbf{T}(s)+\tau(s)\mathbf{B}(s),\quad \mathbf{B}'(s)=-\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

και ισχύουν όταν η καμπύλη έχει $\kappa(s)>0$ και στρέψη $\tau(s)$.

Σημειώνουμε ότι, **στρέψη μια καμπύλης** είναι ο αριθμός $\tau(s)$ ο οποίος είναι ίσος με $\tau(s)=-<\mathbf{B}'(s),\mathbf{N}(s)>$, είναι επομένως οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός (σε αντίθεση με την καμπυλότητα) ενώ δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης, άρα αποτελεί μια **εσωτερική ιδιότητά** της. Ισχύει δε για αυτή το θεώρημα:

Θεώρημα

Μια καμπύλη κλάσεως C^m $(m\geq 3)$ *κατά μήκος της οποίας η (διανυσματική) συνάρτηση* **N** *είναι κλάσεως* C^1*, είναι επίπεδη καμπύλη αν και μόνο αν είναι* $\tau(s)=0$*, για κάθε* s.

Απόδειξη

■ Έστω ότι $\tau(s)=0$. Τότε και $\mathbf{B}'(s)=-\tau(s)\mathbf{N}(s)=\mathbf{0}$ επομένως $\mathbf{B}(s)=\mathbf{B_0}$=σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς s το εσωτερικό γινόμενο $<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}_0>$ προκύπτει:

$$<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}_0>'=<\boldsymbol{\alpha}'(s),\mathbf{B_0}>+<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}_0'>=<\mathbf{T}(s),\mathbf{B_0}>=0,$$

επειδή το **T** είναι κάθετο στο $\mathbf{B_0}$. Άρα $<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B_0}>$=σταθερό, πράγμα που σημαίνει ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(s)$ είναι επίπεδη και βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο των **T**,**N**.

■ Αν η καμπύλη είναι επίπεδη τότε: $<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}(s)>$=σταθερό και παραγωγίζοντας την ισότητα προκύπτει:

$<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}(s)>'=0$ ή $<\boldsymbol{\alpha}'(s),\mathbf{B}(s)>+<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{B}'(s)>=0$ ή $<\mathbf{T}(s),\mathbf{B}(s)>+<\boldsymbol{\alpha}(s),-\tau(s)\mathbf{N}(s)>=0$

και με **T**,**B** κάθετα μεταξύ τους θα είναι: $-\tau(s)<\boldsymbol{\alpha}(s),\mathbf{N}(s)>=0$ οπότε και $\tau(s)=0$, για κάθε s.

Παρατηρήσεις

☑ Η καμπυλότητα αποτελεί ένα μέτρο της απόκλισης μιας καμπύλης από το να είναι ευθεία, ενώ η στρέψη ένα μέτρο της απόκλισης μιας καμπύλης από το να είναι επίπεδη.

☑ Αν η στρέψη μια καμπύλης είναι θετική τότε η καμπύλη χαρακτηρίζεται σα **δεξιόστροφη**, ενώ στην αντίθετη περίπτωση σαν **αριστερόστροφη**.

Επισήμανση

Στα επόμενα και όπου δεν επισημαίνεται διαφορετικά, θα θεωρούμε ότι οι καμπύλες είναι κανονικές, κλάσης C^m $(m\geq 3)$ και ότι οι αντίστοιχες διανυσματικές συναρτήσεις **N** είναι κλάσεως τουλάχιστον C^1. Στην περίπτωση αυτή, η στρέψη τ θα είναι μια συνεχής συνάρτηση ενώ οι συναρτήσεις κ,**T**,**N**,**B** θα είναι κλάσεως τουλάχιστον C^1.

Β) Στην περίπτωση που η καμπύλη α: $[\alpha,\beta]\subset \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}^3$ είναι λεία αλλά δεν είναι παραμετρισμένη με μήκος τόξου (το διάνυσμα ταχύτητας δεν είναι μοναδιαίο ή δεν είναι καν σταθερού μήκους) τότε στους τύπους των S-F έχουμε επιπλέον τον όρο: $v(t)=\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=\dfrac{ds(t)}{dt}$. Οι τύποι τότε γίνονται:

$$\mathbf{T}'(t)=\frac{d\,\mathbf{T}(s(t))}{dt}=\frac{d\,\mathbf{T}(s(t))}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\mathbf{T}'(s(t))v(t)=\kappa(t)\mathbf{N}(t)v(t) \text{ και αντίστοιχα}$$

$$\mathbf{N}'(t)=-\kappa(t)\mathbf{T}(t)v(t)+\tau(t)\mathbf{B}(t)v(t),\quad \mathbf{B}'(t)=-\tau(t)\mathbf{N}(t)v(t)$$

Παρατήρηση

Είναι: $\boldsymbol{\alpha}'(t)=\mathbf{T}(t)v(t)$ και $\boldsymbol{\alpha}''(t)=\frac{d\,v(t)}{dt}\mathbf{T}(t)+\kappa(t)\mathbf{N}(t)v^2(t)$

Στην περίπτωση που η λεία και κανονική καμπύλη δεν έχει μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας τότε ισχύουν οι εναλλακτικοί τύποι:

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|},\quad \mathbf{N}(t)=\mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t),\quad \mathbf{B}(t)=\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}$$

$$\kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3},\qquad \tau(t)=\frac{<\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t),\boldsymbol{\alpha}'''(t)>}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\|^2}$$

Σημειώνουμε ότι, **γωνία δύο καμπυλών** στο κοινό τους σημείο $\boldsymbol{\alpha}(t_0)=\boldsymbol{\beta}(t_0)$, καλούμε τη γωνία θ που σχηματίζουν τα μοναδιαία εφαπτόμενά τους διανύσματα στο κοινό τους σημείο. Είναι δε:

$$\cos\theta=\frac{<\boldsymbol{\alpha}'(t_0),\boldsymbol{\beta}'(t_0)>}{\|<\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|}=<\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|},\frac{\boldsymbol{\beta}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\beta}'(t_0)\|}>=<\mathbf{T}_{\boldsymbol{\alpha}}(t_0),\mathbf{T}_{\boldsymbol{\beta}}(t_0)>.$$

Εφαρμογή

Ένας κύκλος ακτίνας R *έχει καμπυλότητα* 1/R*, ενδεχομένως και με αλλαγή προσήμου κατά την αλλαγή προσανατολισμού του κύκλου (φορά των* κ, N*).*

Πράγματι.

Ένας κύκλος ακτίνας R με αναλυτική μορφή $x^2+y^2=R^2$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί σύμφωνα με την εξίσωση: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos t,R\sin t,0)$, $t\in[0,2\pi)$. Το διάνυσμα ταχύτητάς της είναι τότε το: $\boldsymbol{\alpha}'(t)=(-R\sin t,R\cos t,0)$ με $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=R$ και το διάνυσμα επιτάχυνσης το: $\boldsymbol{\alpha}''(t)=(-R\cos t,-R\sin t,0)$. Επομένως $\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\alpha}''=(0,0,R^2)$ και η καμπυλότητα κ του κύκλου είναι ίση με: $\kappa(t)=\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\times\boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3}=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}$.

Παρατήρηση

Αυτό που αξίζει κάποιος να παρατηρήσει και το οποίο θα επικαλεστούμε αργότερα, είναι η αντίθετη φορά του διανύσματος θέσης $\boldsymbol{\alpha}(t)$ κάθε σημείου του κύκλου σε σχέση με το αντίστοιχο διανύσματα επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''(t)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα της επιτάχυνσης να βρίσκεται στο επίπεδο του κύκλου και με φορά προς το κέντρο του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

Επιφάνειες

Η πορεία προς την Εσωτερική Γεωμετρία των επιφανειών

2.1 Τα διαχρονικά ζητήματα των επιφανειών και του επιπέδου

2.2 Επιφάνειες, Κανονική παραμετρική παράσταση επιφάνειας, Κανονικές επιφάνειες, (Τοπικό) σύστημα συντεταγμένων ή παραμέτρηση, Περιοχή συντεταγμένων, Θεώρημα του μετασχηματισμού ή της αλλαγής των παραμέτρων

2.3 Παραμετρικές γραμμές επιφάνειας, Καμπυλόγραμμες τοπικές συντεταγμένες, Εσωτερικά και εξωτερικά περιγραφόμενα τοπικά συστήματα συντεταγμένων

2.4 Γράφημα συνάρτησης, Το γράφημα μιας συνάρτησης είναι (τοπικά) κανονική επιφάνεια.

2.5 Κρίσιμα σημεία, Κρίσιμες τιμές συνάρτησης, Επιφάνειες στάθμης, Οι επιφάνειες στάθμης είναι κανονικές επιφάνειες

2.6 Απεικονίσεις επί επιφανειών f: $M \to \mathbf{R}$.

2.7 Απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών **f**: $M_1 \to M_2$, Αμφιδιαφορικές επιφάνειες, Κανονική διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών

2.8 Εφαπτόμενος χώρος, Εφαπτόμενο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, Συνεκτικό, Κατά τόξο συνεκτικό σύνολο και επιφάνειες

2.9 Εφαπτόμενο διάνυσμα και εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας σε σημείο της, Βάση του εφαπτόμενου επιπέδου κανονικής επιφάνειας, Το διαφορικό της απεικόνισης μεταξύ (κανονικών) επιφανειών

2.10 Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, Γωνία δύο κανονικών επιφανειών

2.11 Προσανατολισμένη και προσανατολίσιμη επιφάνεια: οι επιφάνειες στάθμης, τα γραφήματα συναρτήσεων, η επιφάνεια της σφαίρας και του ορθού κυλίνδρου είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες, Προσανατολισμένη γωνία εφαπτόμενων διανυσμάτων μιας προσανατολισμένης επιφάνειας

2.1 Τα διαχρονικά ζητήματα των επιφανειών και του επιπέδου

Τα ζητήματα αυτά δεν περιορίζονται στη μελέτη μόνο των δύο αυτών γεωμετρικών αντικειμένων αλλά είναι ένα μέρος του γενικότερου προβλήματος που αφορά τον προσδιορισμό της **έννοιας του χώρου, των εννοιών και των αντικειμένων του** (της ίδιας της Γεωμετρίας δηλαδή) καθώς και την αγκίστρωσή τους στην αισθητηριακή αντίληψη των πρώτων χρόνων (ο φυσικός ως Γεωμετρικός χώρος), την πλήρη αριθμητικοποίηση (Descartes-Fermat), αλγεβροποίηση (Klein), θεωρητικοποίηση (Riemann), αξιωματικοποίηση (Hilbert) μέχρι και την σχετικοποίησή του (Einstein).

Ο όρος «επιφάνεια» φέρεται να έχει χρησιμοποιηθεί και σε εποχές προγενέστερες του Ευκλείδη. Έτσι ο Πρόκλος αναφέρει στο έργο του «Σχόλια εις το πρώτον των Ευκλείδου Στοιχείων» (115,1-3) ότι: «*Οι δε Πυθαγόρειοι τη τριάδι προσήκειν έλεγον αυτήν (την επιφάνεια), διότι δη τα επ' αυτής σχήματα πάντα πρώτιστην αιτίαν έχει την τριάδα*» καθώς και (Πρόκλος, Σχόλια, 116,17-24) «*τοις μεν παλαιοτέροις των φιλοσόφων ουκ εδόκει της επιφανείας είδος τίθεσθαι το επίπεδον, αλλά ως ταύτο εκάτερον παραλαμβάνειν εις παράστασιν, του διχή διαστάντος μεγέθους. Ούτω γαρ και ο θείος Πλάτων την γεωμετρίαν των επιπέδων εφάτο θεωρητικήν είναι, προς τη στερεομετρία αυτήν αντιδιαιρών ως αν της αυτής ούσης τω επιπέδω της επιφανείας και ο δαιμόνιος Αριστοτέλης ωσαύτως*», πράγμα που σημαίνει ότι επίπεδο και επιφάνεια αντιμετωπιζόταν ως ισοδύναμοι όροι: «*ως αν της αυτής ούσης τω επιπέδω της επιφανείας*».

Ο διαχωρισμός επιφάνειας και επιπέδου («*επίπεδος επιφάνεια*») πραγματοποιείται από τον Ευκλείδη στους Ορισμούς 5, 6 και 7, αντίστοιχα, του Βιβλίου Ι των Στοιχείων: «*Επιφάνεια δε εστίν, ο μήκος και πλάτος μόνον έχει*» και «*Της δε επιφάνειας τα πέρατα γραμμές*». Ο Ευκλείδης επομένως αναφέρεται σε επιφάνειες κάθε είδους (κατά τον Πρόκλο, σε επίπεδες, σφαιρικές και μικτές, με τις μικτές να αποτελούν παράγωγα της κίνησης απλών καμπυλών-ευθεία, κύκλος-και μικτών καμπυλών-παραβολή, έλλειψη, υπερβολή), ονομάζοντας το επίπεδο επίπεδη επιφάνεια και ακολουθώντας ουσιαστικά την Αριστοτελική ιεράρχηση του γένους (επιφάνεια) και του είδους (επίπεδο) (Πρόκλος, Σχόλια,116, 25-26): «*γένος μεν ποιούσι την επιφάνειαν, είδος δε το επίπεδον*».

Ο ορισμός του επιπέδου δίνεται στο Ορισμό 7: «*Επίπεδος επιφάνεια εστίν, ήτις εξ' ίσου ταις εφ' εαυτής ευθείας κείται*» και είναι αντίστοιχος με τον προσδιορισμό «*εξ' ίσου τοις εφ' εαυτής σημείοις κείται*», που ο Ευκλείδης δίνει στην ευθεία-ευθύγραμμο τμήμα, με την έννοια όμως της ευθείας να προσδιορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια μέσω των άλλων Αιτημάτων και Ορισμών (Αιτήματα 1,2, Ορισμοί 1,2).

Σύμφωνα όμως με τα Σχόλια του Πρόκλου (110, 10-12) και σε αντιστοιχία με τον ορισμό του Αρχιμήδη, ευθεία είναι εκείνη η γραμμή της οποίας η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων της είναι μικρότερη από την «απόσταση» μεταξύ δύο σημείων οποιασδήποτε άλλης γραμμής (καμπύλης) ενώνει τα σημεία αυτά: «*ο δ' αυ Αρχιμήδης την ευθείαν ωρίσατο γραμμήν ελαχίστην των τα αυτά πέρατα εχουσών. Διότι γαρ, ως ο ευκλείδειος λόγος φησίν, εξ ίσου κείται τοις εφ' εαυτοίς σημείοις, δια τούτο ελάχιστη έστιν των τα αυτά πέρατα εχουσών*». Ανάλογα λοιπόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι η επίπεδη επιφάνεια είναι η ελάχιστη επιφάνεια (με ελάχιστο εμβαδό) από όλες τις επιφάνειες που έχουν τα ίδια πέρατα (ευθείες) (Πρόκλος, Σχόλια, 117, 2-6) «*...κατά το ανάλογον τη ευθείαν...και ταύτην (επίπεδη επιφάνεια) ομοίως δυείν ευθειών εκκειμένων η εξ' ίσου κειμένη ταις εφ' εαυτοίς ευθείαις*».

Οι υπόλοιποι ορισμοί που προτείνονται από κάποιους (επίπεδο είναι η επιφάνεια: που επεκτείνεται όσο γίνεται περισσότερο, που η ευθεία εφαρμόζει σε όλα τα σημεία της, που τα ενδιάμεσα τμήματά της εμποδίζουν τη θέα των άκρων, που αποτελεί ένα είδος του γένους των επιφανειών, σε αντιστοιχία με την κατηγοριοποίηση των γραμμών σε ευθείες, κύκλους και μικτά παράγωγα αυτών) είναι, κατά τον Πρόκλο, ισοδύναμοι με αυτόν (Προκλος, Σχόλια, 117, 7-13): «*...ην και έτεροι το αυτό δηλούντες, επ' άκρον τεταμένην ειρήκασιν, οι δε ης πάσι τοις μέρεσιν ευθεία εφαρμόζει…και ης τα μέσα τοις άκροις επιπροσθεί και πάντας τους της ευθείας όρους και εις την επίπεδον επιφάνειαν το γένος μόνο εξαλλάττοντες δυνήσονται μεταφέρειν*»

Κατά τον Ευκλείδη επομένως, η (τυχαία) επιφάνεια επεκτείνεται σε δύο διαστάσεις (χωρίς «βάθος») (Πρόκλος, Σχόλια, 114, 5-23): «*αβαθής δε μείνασα…αίσθησιν δε τινά λαμβάνειν εις τας σκιάς αποβλέποντας*», αποτελώντας έτσι μια «υποβαθμισμένη» και ταυτόχρονα απλούστερη περίπτωση (υποσύνολο-μικρότερη διάσταση) του στερεού (*«μέγεθος διχή διαστατόν»* κατά άλλους), εφοδιάζοντάς το με ένα «όριο» (Πρόκλος, Σχόλια, 114,14, 117,1 και 116,3): «*την μεν υπεροχήν της επιφανείας την κατά απλότητα προς το στερεόν σημαίνει…ώσπερ δη και εν τούτοις ορίζεται μεν το στερεόν υπό της επιφανείας, ορίζεται δε και η επιφάνεια υπό της γραμμής και αύτη υπό του σημείου…ούτως αυτώ δίδωσι τον όρον*».

Στον Ευκλείδη η έννοια του επιπέδου παίζει πρωταρχικό ρόλο αλλά αναδύονται προβλήματα λογικής και εννοιολογικής φύσης. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου, το επίπεδο δεν αποτελεί άμεσα αντικείμενο μελέτης αλλά κάποιες από τις εγγενείς του ιδιότητες θέτουν περιορισμούς ως προς τη δυνατότητα πραγματοποίησης κάποιων γεωμετρικών κατασκευών συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων, όπως στην Πρόταση 1 του Βιβλίου Ι των Στοιχείων («*επί της δοθείσας ευθείας πεπερασμένης τρίγωνον ισόπλευρο συστάσθαι*») μια τέτοια ιδιότητα που δημιουργεί περιπλοκές είναι η (μη αξιωματικοποιημένη) ιδιότητα που αφορά τη δυνατότητα ύπαρξης σημείων τομής μεταξύ δύο κύκλων. Από την άλλη, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του χώρου, το επίπεδο αποτελεί ένα αυτόνομο, ανεξάρτητο αντικείμενο, συνδεόμενο με άλλα αντικείμενα του χώρου, όπως στην Πρόταση 3 του Βιβλίου ΧΙ των Στοιχείων: «*Εάν δύο επίπεδα τέμνει άλληλα, η κοινή αυτών τομή ευθεία εστίν*» (Ζορμπαλά, 1995, σελ. 156-157).

Παρότι όμως ο Ευκλείδης δίνει έναν ορισμό για το επίπεδο (Ορισμός 7), εντούτοις αυτό δε θεμελιώνεται αξιωματικά. Θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει στον ορισμό την έλλειψη προηγούμενων (αλλά και επόμενων) διευκρινήσεων (από την πλευρά του Ευκλείδη) για την έννοια του «*εξ' ίσου*» αλλά και την έλλειψη, στη συνέχεια, οποιασδήποτε αναφοράς στη χρήση του ορισμού. Από την άλλη, η σύνδεση του επιπέδου με την ευθεία εξασφαλίζει την ευθύγραμμη φύση του (Παρμενίδης στον Πρόκλο, Σχόλια, 117, 18-20): «*είπερ ουν εθέλοις το ευθύ θεωρείν εν επιφανεία, λάβε το επίπεδο, ω εφαρμόζει παντοίως η ευθεία*») ενώ το *«εξ' ίσου»* υπονοεί κάποια συγκεκριμένη θέση μεταξύ των ευθειών (Ζορμπαλά, 1995, σελ. 158).

Ο Πρόκλος κάνει επίσης έναν αρχικό διαχωρισμό σε πεπερασμένες επιφάνειες (όπως το επίπεδο), που περιορίζονται (οριοθετούνται) από διακριτά μεταξύ τους πέρατα-γραμμές (μήκος και πλάτος) και πεπερασμένες επιφάνειες (όπως η σφαίρα), που περιορίζονται από τον ίδιο τους τον εαυτό (Σχόλια, 116,4-17 και 12-13): «*...πάσης επιφάνειας πέρατα γραμμές, μη δε της πεπερασμένης πάσης-η γαρ επιφάνεια της σφαίρας πεπέρασται μεν, ουχ υπό γραμμών δε, αλλ' αυτή υφ' αυτής…και πέρας και αρχή συνάψασαν και εκ των δύο περάτων εν ποιήσασαν…* », θεωρεί δε ότι η γενίκευση της ονοματολογίας και της απόδοσης ιδιοτήτων, αντίστοιχων των γραμμών και στις επιφάνειες, θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με σκεπτικισμό μια και (Σχόλια, 120, 7-13):

«*και μην και τούτο δει προειλήφθαι περί των γραμμών και επιφανειών διαφοράς, ότι γραμμαί μεν εισί τρεις ομοιομερείς [ευθεία, περιφέρεια κύκλου, (κυλινδρική) έλικα], ώσπερ ήδη προείπομεν, επιφάνειαι δε δύο μόνον, επίπεδος και σφαιρική, ουκέτι δε και η κυλινδρική*».

Υιοθετεί μάλιστα τη διαφοροποίηση γραμμών-επιφανειών του Γέμινου, στη βάση της δημιουργίας των μεικτών γραμμών: οι μεικτές καμπύλες (για παράδειγμα η κυλινδρική έλικα) δεν προέρχονται ούτε από τη «*σύνθεσιν*» ούτε από την «*κράσιν*» απλούστερων γραμμών (η φύση των απλούστερων γραμμών που τις δημιούργησαν δεν είναι πλέον ορατή) (Πρόκλος, Σχόλια, 118, 2-5): «*...ουκ εστί μέρος μεν αυτής ευθύ, μέρος δε περιφερές ώσπερ των κατά σύνθεσιν μικτών, ουδέ τεμνομένη πως η έλιξ έμφασιν παρέχεται των απλών, όπερ υπομένει τα μεμιγμένα κατά κράσιν…* », σε αντίθεση με τις μεικτές επιφάνειες (κωνικές, κυλινδρικές) από τις οποίες, με κατάλληλες (επίπεδες) τομές, μπορεί να διαφανεί η φύση των καμπυλών που τις παρήγαγαν (Πρόκλος, Σχόλια, 118, 21-23) «*αι δε επιφάνειαι τεμνόμεναι ευθύς εμφαίνουσιν και δι' οποίων εισί γεγονυίαι γραμμών*».

Αυτό πάντως που σε κάθε περίπτωση διαπιστώνεται είναι η ύπαρξη λογικού κενού ως προς την αντιμετώπιση των εννοιών επιφάνεια και επίπεδο. Το κενό χαρακτηρίζεται ως τέτοιο με βάση το λογικό σύστημα παραγωγής και χρήσης των εννοιών: οι «*πρώτες*» έννοιες (Αιτήματα) αξιωματικά θεμελιωμένες μέσω μιας κατασκευής (Αίτημα $1^{ο}$ και ύπαρξη ευθείας) και οι «*εκ τούτων*» (παράγωγες), από τις πρώτες, μέσω κατασκευής και απόδειξης (Ζορμπαλά, 1995, σελ. 158-160). Στις παραπάνω διαδικασίες οι επιφάνειες και το επίπεδο δεν εμφανίζονται ούτε σαν πρώτες ούτε σαν παράγωγες έννοιες, ενώ η κατασκευή τους με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη μια και προϋποθέτει την ύπαρξη του επιπέδου (Ζορμπαλά, 1995, σελ. 158-160).

Μετά την αξιωματικοποίηση των θεμελίων της Γεωμετρίας από τον Hilbert (1899), το ζήτημα των γεωμετρικών ορισμών και εννοιών αντιμετωπίζεται με σιγουριά. Στην αξιωματικοποίηση αυτή, το επίπεδο καθίσταται «πρωταρχική έννοια» δηλαδή (κατά τη λογική) δεν ορίζεται, ενώ κατά άλλες σύγχρονες θεμελιώσεις η θέση του επιπέδου καθίσταται άλλοτε πρώτη και άλλοτε παράγωγη. Κατά την θεώρηση του Hilbert (τυπική θεώρηση), αξιώματα ή πρώτες έννοιες είναι εκείνες οι προτάσεις που θεμελιώνουν τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών, δηλαδή αποτελούν έμμεσους ορισμούς ενώ τι θα αποτελέσει αξίωμα προσδιορίζεται κυρίως από τις (ρητές ή υπόρρητες) επιστημολογικές πεποιθήσεις του μαθηματικού και της εποχής (Ζορμπαλά, 1995, σελ. 155-156).

Η παραπάνω **συνθετική προσέγγιση** (χρήση μόνο όρων και θεωρημάτων της ίδιας της Γεωμετρίας και όχι με τη βοήθεια των μοντέλων της στο Ευκλείδειο επίπεδο) του ζητήματος του επιπέδου και των επιφανειών (αλλά και γενικότερα της Γεωμετρίας) αδυνατεί να δώσει απαντήσεις σε προβλήματα που εμπλέκουν τις φυσικές διεργασίες, ως αποτέλεσμα της ενασχόλησης με φυσικά προβλήματα: κίνησης και κίνησης υπό περιορισμούς κατά μήκος «καμπυλών» του χώρου ή «επιφανειών» (Lagrange, Euler, Huygens,...).

Επιπρόσθετα, η αποτελεσματική παραγωγή μοντέλων για τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες καθιστά δυνατή την ενοποιημένη αναλυτική προσέγγιση στις έννοιες των καμπυλών και των επιφανειών στις οποίες ανήκουν και οδηγούν, με την εκτεταμένη χρήση ενός μαθηματικά θεμελιωμένου Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, σε μια ολοκληρωμένη ανάπτυξη μιας μαθηματικά έγκυρης και αποδεκτής **«θεωρίας των επιφανειών» (Gauss)**.

2.2 Επιφάνειες, Κανονική παραμετρική παράσταση επιφάνειας, Κανονικές επιφάνειες, Συστήμα συντεταγμένων ή παραμέτρηση, Περιοχή συν/νων, Θεώρημα αλλαγής των παραμέτρων

Αν και δεν είναι δυνατόν να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός στο σημείο αυτό, θα λέγαμε ότι: **επιφάνεια M** είναι ένα σύνολο σημείων του χώρου που αποτελεί την εικόνα μιας διανυσματικής συνάρτησης (με τη συνθήκη της κανονικότητας όπως θα δούμε στη συνέχεια) ενός (υπο)συνόλου του επιπέδου (του $\mathbf{R}^2$ ή ακόμη και του **R**) στον $\mathbf{R}^3$. Εποπτικά, θα θεωρούσαμε ως επιφάνεια ένα σύνολο σημείων του χώρου το οποίο τοπικά «μοιάζει» με ένα τμήμα του επιπέδου.

Ως **κανονική παραμετρική παράσταση ενός (υπο)συνόλου M του $\mathbf{R}^3$ (μιας επιφάνειας** δηλαδή) **κλάσεως C^m ($m \geq 1$)**, θα καλούμε μια διανυσματική συνάρτηση:

$\mathbf{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \to M \subset \mathbf{R}^3$, με $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ (u,v παράμετροι),

με τις ιδιότητες:

α) Η **x** είναι κλάσεως C^m ($m \geq 1$) στο U

β) Αν $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbf{R}^3$ τότε:

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\theta x(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta x(u,v)}{\theta v} \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\theta y(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta y(u,v)}{\theta v} \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\theta z(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta z(u,v)}{\theta v} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Παρατήρηση

Η ιδιότητα β) παραπάνω έχει τις παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις:

β_1) Αν $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbf{R}^3$ τότε για κάθε $(u,v) \in U$ η βαθμίδα του Jacobian πίνακα $\mathbf{J}_P\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\theta x(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta x(u,v)}{\theta v} \\ \frac{\theta y(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta y(u,v)}{\theta v} \\ \frac{\theta z(u,v)}{\theta u} & \frac{\theta z(u,v)}{\theta v} \end{bmatrix}$ σε κάθε σημείο **P**(u,v) του U θα είναι ίση με 2, δηλαδή μία τουλάχιστον από τις 2x2 υποορίζουσες $\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}$, $\det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}$, $\det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}$ του πίνακα $\mathbf{J}_P\mathbf{x}$ θα είναι μη μηδενική για κάθε $(u,v) \in U$.

Σημειώνουμε ότι: **βαθμίδα** ή **τάξη** ενός πίνακα λέμε την μεγαλύτερη τάξη των μη μηδενικών ελασσόνων οριζουσών του πίνακα (για παράδειγμα, μια μη μηδενική ορίζουσα 2×2 είναι τάξης 2).

β_2) Το διαφορικό $d_Q\,\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ **Q** είναι σε κάθε σημείο $\mathbf{Q} \in U$ αμφιμονοσήμαντη (1-1) συνάρτηση.

Επισημάνσεις

Στην πράξη η απαίτηση για τη συνάρτηση **x** να είναι C^m, για κάθε $m \geq 1$, είναι υπερβολική. Συνήθως εργαζόμαστε για m μέχρι 3 ή 4.

Οι παραμετρικές παραστάσεις που εμείς θα θεωρούμε στη συνέχεια θα είναι κλάσης τουλάχιστον C^m, $m \geq 1$, ακόμη και αν αυτό δε συμβαίνει σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Ένα υποσύνολο $M \subset \mathbf{R}^3$ θα αποτελεί μια **κανονική επιφάνεια** αν για κάθε σημείο **P** της M υπάρχει ανοικτή περιοχή $V \subset \mathbf{R}^3$ και μια απεικόνιση:

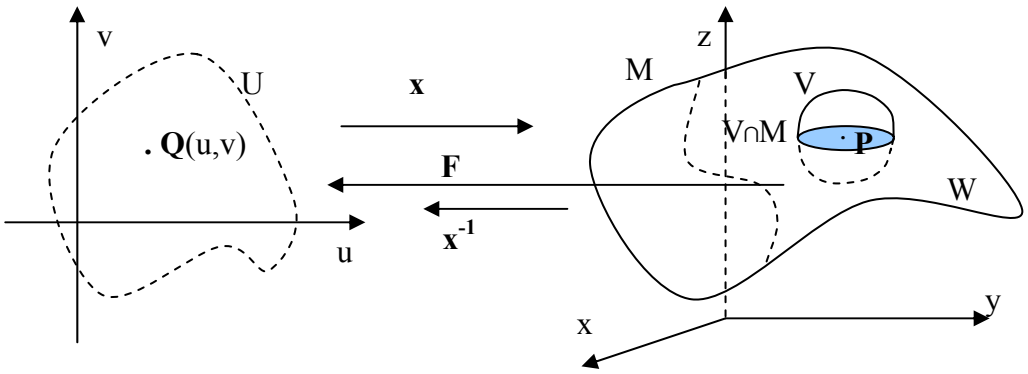
$$\mathbf{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \to V \cap M \subset \mathbf{R}^3 \text{ με } \mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

για την οποία να ισχύουν:

I) Η **x** είναι κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ (λεία απεικόνιση με συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης στο U).

II) Για κάθε σημείο $\mathbf{Q}=(u,v) \in U$ η **x** είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση (**συνθήκη κανονικότητας** ή **μη εκφυλισμού**).

III) Η **x** είναι **αμφισυνεχής (ομοιομορφισμός)**. Αυτό σημαίνει ότι η **x** είναι συνεχής στο U και υπάρχει η αντίστροφή της $\mathbf{x}^{-1}$, η οποία είναι επίσης συνεχής, στο $V \cap M$. Η $\mathbf{x}^{-1}$ είναι ένας περιορισμός της συνεχούς απεικόνισης $\mathbf{F}: W \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ η οποία είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο W που περιέχει το $V \cap M$ $(\mathbf{x}(U) \subset W)$ (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1

Σημειώνουμε ότι: η απεικόνιση **x** με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **σύστημα (τοπικών) συντεταγμένων** ή **παραμέτρηση** γύρω από το σημείο **P** του $V \cap M$, το δε σύνολο $V \cap M$ λέγεται **περιοχή συντεταγμένων** γύρω από το **P**.

Στην πραγματικότητα μια κανονική επιφάνεια αποτελείται από τη M μαζί με την οικογένεια ***B*** (**βάση της M**) των περιοχών συν/νων που προκύπτουν από συστήματα συν/νων, κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες:

■ Η εικόνα της ***B*** καλύπτει την M, δηλαδή για κάθε σημείο **P** υπάρχει σύστημα συν/νων της ***B*** που η εικόνα του περιέχει το **P**.

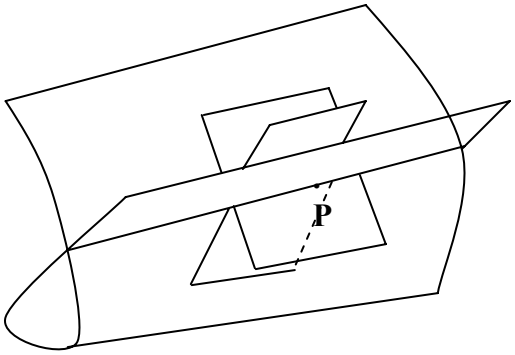
■ Κάθε σύστημα συν/νων της ***B*** έχει εικόνα που είναι τομή της M με ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

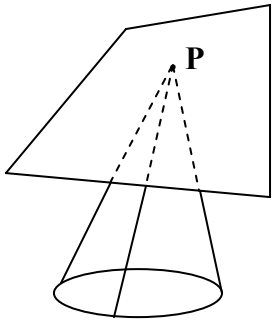
Παρατηρήσεις

☑ Με τον ορισμό της κανονικής επιφάνειας μπορούμε να μελετήσουμε τις **τοπικές ιδιότητες** των επιφανειών σε μια περιοχή ενός σημείου τους. Πράγματι, ένα σημείο **P** μιας επιφάνειας ανήκει στην εικόνα ενός συστήματος συν/νων και στα σημεία μιας περιοχής του σημείου **P** αντιστοιχούν οι συν/νες (x(u,v),y(u,v),z(u,v)), με βάση τις οποίες μελετάμε τις ιδιότητες της επιφάνειας.

☑ Η συνθήκη Ι) εξασφαλίζει τη δυνατότητα χρήσης των «εργαλείων» που μας προσφέρει ο Διαφορικός Λογισμός (διαφόριση κ.λ.π.)
☑ Η συνθήκη ΙΙ), όπως είδαμε και προηγούμενα, σημαίνει ότι το διαφορικό $d_Q\,\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ είναι στο U μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Αυτό εξασφαλίζει (όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο) την ύπαρξη ενός εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας M, του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{x_u}, \mathbf{x_v}$ (μερικές παράγωγοι ως προς u,v αντίστοιχα).

Η συνθήκη όμως αυτή μπορεί να μην ισχύει για ένα ή περισσότερα σημεία μιας επιφάνειας με αποτέλεσμα να μην υπάρχει το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό και η επιφάνεια να μην είναι κανονική στο σημείο αυτό (σχήμα 2.2β).
☑ Η συνθήκη ΙΙΙ) δεν επιτρέπει στην επιφάνεια να έχει αυτοτομές (αν και αυτή η συνθήκη μπορεί να «χαλαρώσει», περιορίζοντας το ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbf{R}^2$). Πράγματι, επειδή η απεικόνιση **x** είναι μια 1-1 απεικόνιση ενός ανοικτού υποσυνόλου U του $\mathbf{R}^2$ η εικόνα του μπορεί να βρίσκεται μόνο στα ένα από τα δύο μέρη της επιφάνειας που περιέχει την αυτοτομή. Όμως, κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ που περιέχει ένα σημείο της αυτοτομής θα περιέχει και σημεία της επιφάνειας που δεν ανήκουν στην εικόνα του U, πράγμα άτοπο (σχήμα 2.2α).





Σχήμα 2.2α και σχήμα 2.2β

Δυο ζητήματα θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια σε σχέση με τα συστήματα συν/νων: η υπέρβαση της δυσκολίας στην εξασφάλιση της συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης $\mathbf{x}^{-1}$ και η επάρκεια ενός μοναδικού συστήματος συν/νων για την κάλυψη (με την εικόνα του) μιας επιφάνειας. Στην εμπλοκή μας με τα ζητήματα αυτά, κάποιες στιγμές θα είμαστε λιγότερο και κάποιες φορές περισσότερο αυστηροί.

Ας υπενθυμίσουμε αρχικά το **θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης**:
Έστω $\mathbf{f}$: $U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *(*U *ανοικτό) κλάσεως* C^m $(m \geq 1)$ *και* $\mathbf{x_0} \in U$. *Αν ισχύει* $\det \mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} \neq 0$ *τότε:*

α) *Υπάρχει περιοχή* $U' \subset U$ *του* $\mathbf{x_0}$ *και ε-περιοχή* V *του* $\mathbf{y_0}=\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$ *έτσι ώστε η* **f** *να είναι 1-1 απεικόνιση του* U' *επί του* V *(*V *ανοικτό σύνολο).*
β) *Η αντίστροφη συνάρτηση* $\mathbf{f}^{-1}$ *της* **f** *είναι κλάσης* C^m $(m \geq 1)$ *στο* V *και μάλιστα ισχύει:* $\mathbf{J}_{\mathbf{y}_0}\mathbf{f}^{-1} = (\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f})^{-1}$ *(δηλαδή* $(\mathbf{f}^{-1})'\ (\mathbf{y_0}) = [\mathbf{f}'(\mathbf{x_0})]^{-1}$*).*

Επειδή γενικά είναι δύσκολο να διαπιστώσει κάποιος τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης $\mathbf{x}^{-1}$ (που απαιτείται ώστε να είναι αμφισυνεχής μια

απεικόνιση **x**) με σκοπό η **x** να αποτελέσει ένα σύστημα συν/νων μιας (κανονικής) επιφάνειας (με την εικόνα του να αποτελεί μια περιοχή συν/νων γύρω από ένα σημείο της), εργαζόμαστε με βάση την πρόταση:

Πρόταση

Ας είναι M *μια κανονική επιφάνεια και* **P** *ένα σημείο της. Έστω* $\mathbf{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *μια απεικόνιση έτσι ώστε* $\mathbf{P} \in \mathbf{x}(U) \subset M$ *και έστω επίσης ότι ισχύουν οι συνθήκες* I *και* II *του ορισμού της κανονικής επιφάνειας που δόθηκε παραπάνω. Αν η* **x** *είναι 1-1 τότε η* $\mathbf{x}^{-1}$ *είναι συνεχής και το* **x** *είναι ένα σύστημα συν/νων γύρω από το* **P**.

Θα θέλαμε η εικόνα ενός συστήματος συν/νων (ή περιοχή συν/νων επί της επιφάνειας) να μπορεί να καλύπτει ολόκληρη την προς μελέτη επιφάνεια. Αυτό όμως δεν είναι συνήθως δυνατό. Έτσι, οι παράμετροι δύο συστημάτων συντεταγμένων, που έχουν την ίδια εικόνα, δε συνδέονται απαραίτητα με μια 1-1 μεταξύ τους απεικόνιση. Στην καλύτερη περίπτωση θα μείνουν «ακάλυπτα» πεπερασμένα στο πλήθος σημεία (κάτι το οποίο θα είναι και αυτό που εμείς θα αντιμετωπίσουμε στη συνέχεια).

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, θεωρούμε περισσότερες από μια περιοχές συν/νων (μια βάση), με τη χρήση περισσότερων του ενός συστήματος συν/νων. Οι παράμετροι των διαφόρων αυτών συστημάτων συνδέονται με μια 1-1 μεταξύ τους απεικόνιση (άρα ορίζεται και η αντίστροφη απεικόνιση), η οποία είναι και διαφορίσιμη (**αμφιδιαφόριση**), ενώ οι περιοχές συν/νων που ορίζουν μπορούν να καλύψουν με την ένωσή τους όλη την επιφάνεια. Πράγματι:

Θεώρημα του μετασχηματισμού ή **της αλλαγής των παραμέτρων**

Ας είναι **P** *ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας* M *και*

$$\mathbf{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \to M \subset \mathbf{R}^3 \text{ με } \mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$\bar{\mathbf{x}}: V \subset \mathbf{R}^2 \to M \subset \mathbf{R}^3 \text{ με } \bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})=(x(\bar{u},\bar{v}),y(\bar{u},\bar{v}),z(\bar{u},\bar{v})),$$

δύο συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι εικόνες αποτελούν περιοχές συν/νων γύρω από το $\mathbf{P} \in M$, *δηλαδή* $\mathbf{P} \in \mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(V)=W$. *Τότε η απεικόνιση*

$$\mathbf{h}=\mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}: \ \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$$

είναι αμφιδιαφόριση κλάσεως C^m $(m \geq 1)$.

Απόδειξη

Οι συνιστώσες συναρτήσεις της **h** είναι οι $u=u(\bar{u},\bar{v})$, $v=v(\bar{u},\bar{v})$, με $(\bar{u},\bar{v}) \in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι οι u,v είναι κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ και ότι αντιστρέφονται, δηλαδή μπορούν να υπολογιστούν τα $\bar{u}=\bar{u}(u,v)$ και $\bar{v}=\bar{v}(u,v)$ και μάλιστα ότι αυτά είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσεως C^m $(m \geq 1)$.

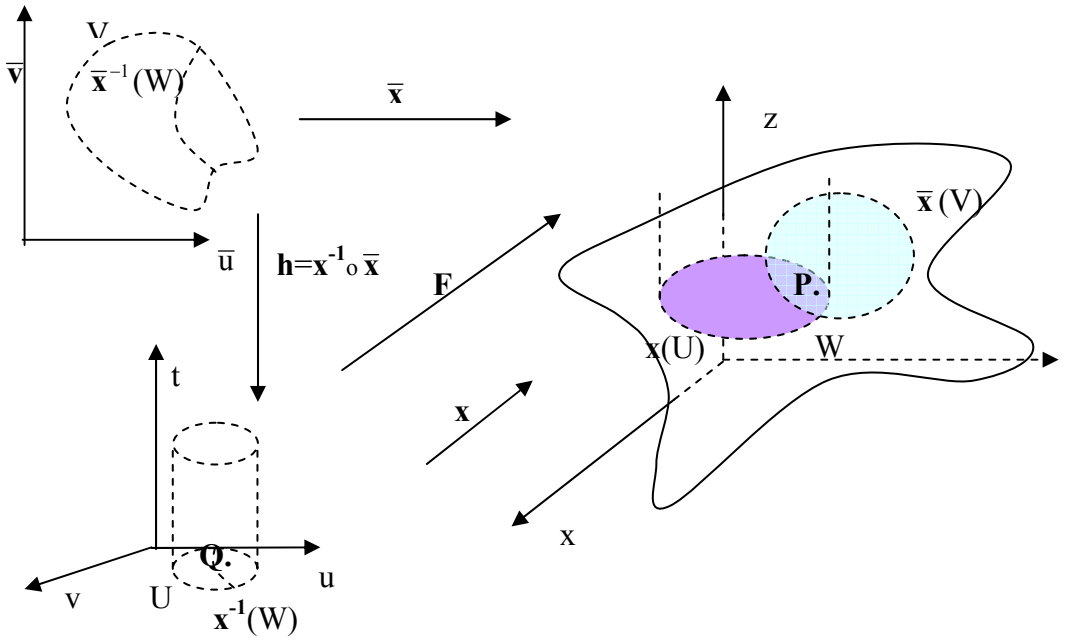
■ Επειδή οι **x**, $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}^{-1}$, $\bar{\mathbf{x}}^{-1}$ είναι αμφισυνεχείς η σύνθεση $\mathbf{h}=\mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$ θα είναι μια συνάρτηση 1-1.

■ Έστω $\mathbf{r} \in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$. Τότε θα είναι $\mathbf{Q}=\mathbf{h}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q})$. Επειδή **x**(u,v) είναι ένα σύστημα συν/νων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det \frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}(\mathbf{Q}) \neq 0$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση **F**: $U \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ με $\mathbf{F}(u,v,t)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)+t)$, $(u,v) \in U$ και $t \in \mathbf{R}$ (γεωμετρικά η **F** απεικονίζει ένα ορθό κύλινδρο με βάση U σε ένα ορθό κύλινδρο με βάση **x**(U) (σχήμα 2.3).

Η **F** είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ (x,y,z,t διαφορίσιμες) και η **x** είναι ο περιορισμός της **F** στο $U \times \{\mathbf{0}\}$.

Επίσης, $\det \mathbf{J}_{(\mathbf{Q},t)}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\theta x(\mathbf{Q})}{\theta u} & \frac{\theta x(\mathbf{Q})}{\theta v} & \frac{\theta x(\mathbf{Q})}{\theta t} \\ \frac{\theta y(\mathbf{Q})}{\theta u} & \frac{\theta y(\mathbf{Q})}{\theta v} & \frac{\theta y(\mathbf{Q})}{\theta t} \\ \frac{\theta (z+t)(\mathbf{Q})}{\theta u} & \frac{\theta (z+t)(\mathbf{Q})}{\theta v} & \frac{\theta (z+t)(\mathbf{Q})}{\theta t} \end{vmatrix} = \det \frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}(\mathbf{Q}) \neq 0$, άρα η

F είναι κανονική παραμετρική παράσταση στο (**Q**,t) και τοπικά θα αντιστρέφεται (θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης), επομένως θα υπάρχει μια περιοχή A του $\mathbf{R}^3$ γύρω από το **P**=**x**(**Q**) και μια περιοχή B του $\mathbf{R}^3$ γύρω από το (**Q**,0) έτσι ώστε η $\mathbf{F}^{-1}$: $A \to B$ να υπάρχει και να είναι διαφορίσιμη κλάσης C^m $(m \geq 1)$.



Σχήμα 2.3

Αλλά η $\bar{\mathbf{x}}$ είναι συνεχής (ως διαφορίσιμη) άρα θα υπάρχει περιοχή N του **r**, με $\bar{\mathbf{x}}(N) \subset A$ και ο περιορισμός της **h** στο N είναι η συνάρτηση $\mathbf{F}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$. Επειδή οι $\mathbf{F}^{-1}$, $\bar{\mathbf{x}}$ είναι διαφορίσιμες κλάσης C^m $(m \geq 1)$, η **h** θα είναι διαφορίσιμη κλάσης C^m $(m \geq 1)$ στο τυχαίο $\mathbf{r} \in \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$ άρα θα είναι διαφορίσιμη και σε ολόκληρο το $\bar{\mathbf{x}}^{-1}(W)$.

■ Μπορούμε να εργαστούμε με ανάλογο τρόπο με αυτόν που εργαστήκαμε για την **h** και να δείξουμε έτσι ότι και η $\mathbf{h}^{-1} = \bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x}$ είναι διαφορίσιμη.

Τελικά η **h** είναι αμφιδιαφόριση κλάσεως C^m $(m \geq 1)$.

Να σημειώσουμε ότι, η δυνατότητα του μετασχηματισμού των παραμέτρων, με τις παραπάνω προϋποθέσεις και συμπεράσματα, αφορά την τομή W των δύο (αλληλοεπικαλυπτόμενων) περιοχών συν/νων πάνω στην M.

Μια ιδιότητα μιας επιφάνειας που ορίζεται με τη βοήθεια κάποιου τοπικού συστήματος συν/νων μπορεί να εξαρτάται ή και όχι από την εκλογή του συστήματτος αυτού. Αν η ιδιότητα είναι ανεξάρτητη του συστήματος τότε λέμε ότι είναι **εσωτερική ιδιότητα** της επιφάνειας. Ειδικά, μια τοπική ιδιότητα είναι εσωτερική ιδιότητα της επιφάνειας αν και μόνο αν είναι ανεξάρτητη από κάθε μετασχηματισμό των παραμέτρων.

Ας δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές των παραπάνω.

Η τρίτη εφαρμογή αφορά τον τρόπο κάλυψης με περιοχές συν/νων της επιφάνειας της σφαίρας με ακτίνα R=1 (**μοναδιαία σφαίρα S^2**) έτσι ώστε αυτή να γίνει κανονική επιφάνεια.

Η τέταρτη εφαρμογή στοχεύει, αφενός στην εισαγωγή ενός συστήματος συν/νων **x της σφαίρας ακτίνας R** (S_R^2), που θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στη συνέχεια και αφετέρου στην περιγραφή της διαδικασίας εξασφάλισης της συνθήκης της συνέχειας της αντίστροφης $\mathbf{x}^{-1}$ της απεικόνισης **x**, με τη βοήθεια μόνο των συνθηκών I και II της κανονικότητας μιας επιφάνειας.

Εφαρμογές

1) *Η επιφάνεια του (Ευκλείδειου) επιπέδου είναι μια κανονική επιφάνεια.*

Πράγματι, για τα σημεία (x,y,z) του επιπέδου ισχύει η σχέση ax+by+cz+d=0 ή au+bv+cw+d=0, οπότε ($c\neq 0$): $w=-\frac{d+au+bv}{c}$. Αν θεωρήσουμε τότε το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)=(u,v,-\frac{d+au+bv}{c})$, $(u,v)\in U=\mathbf{R}^2$, θα έχουμε:

■ Ισχύει η συνθήκη I, μια και με $(u,v)\in U$ οι συναρτήσεις $u,v,-\frac{d+au+bv}{c}$ είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m ($m\geq 1$).

■ Ισχύει η συνθήκη II, μια και $\det\frac{\theta(u,v)}{\theta(u,v)}=1\neq 0$, για κάθε σημείο του U.

■ Ισχύει η συνθήκη III, μια και η **x** είναι 1-1 επομένως η αντίστροφή της $\mathbf{x}^{-1}$: $\mathbf{x}(U)\subset\mathbf{R}^3\to U=\mathbf{R}^2$ είναι συνεχής στο **x**(U). Η $\mathbf{x}^{-1}$ είναι συνεχής γιατί είναι ίση με τη συνάρτηση προβολή $\boldsymbol{\pi}_3$: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ του **x**(U) πάνω στο uv-επίπεδο:

$$\mathbf{x}^{-1}(u,v,w)=\boldsymbol{\pi}_3(u,v,w)=(u,v).$$

2) *Μια επιφάνεια εκ περιστροφής είναι κανονική επιφάνεια.*

Πράγματι, μια επιφάνεια εκ περιστροφής παράγεται από μια καμπύλη C (**γενέτειρα** ή **καμπύλη κατατομής** ή **μεσημβρινός**) που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο του $\mathbf{R}^3$ και περιστρέφεται γύρω από μια ευθεία, η οποία δεν τέμνει την C. Αν με f(v)>0 συμβολίσουμε την ακτίνα ενός **παρ/λου κύκλου (κάθετη τομή)** σε απόσταση g(v) κατά μήκος της ευθείας (άξονα) περιστροφής της C, τότε το σύστημα συν/νων:

$\mathbf{x}(u,v)=(f(v)\cos u,f(v)\sin u,g(v))$ με $(u,v)\in U=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2/\ 0<u<2\pi,\ \alpha<v<\beta$ ή $v\in\mathbf{R}\}$

ορίζει μια κανονική παραμετρική παράσταση της επιφάνειας εκ περιστροφής (σχήμα 2.4).

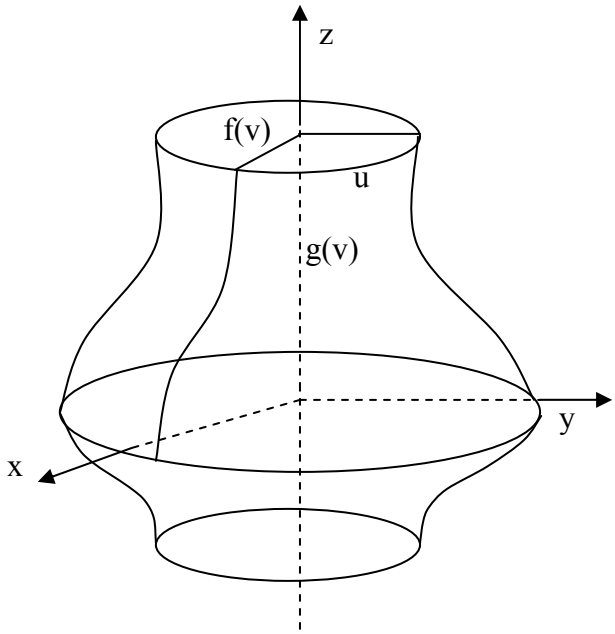
Η επιφάνεια εκ περιστροφής είναι κανονική επιφάνεια γιατί:

■ Ισχύει η συνθήκη I, μια και για κάθε $(u,v)\in U$ θεωρούμε τις f,g,cosu,sinu διαφορίσιμες κλάσεως C^m ($m\geq 1$).

■ Ισχύει η συνθήκη κανονικότητας μια και:

$$\left(\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}\right)^2+\left(\det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}\right)^2+\left(\det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$(f(v)f'(v))^2+(f(v)g'(v)\sin u)^2+(f(v)g'(v)\cos u)^2=0\Leftrightarrow f(v)^2[(f'(v))^2+(g'(v))^2]>0.$



Σχήμα 2.4

■ **(α)** Η **x** είναι 1-1.

Επειδή το (f(v),g(v)) αποτελεί μια παραμέτρηση της γενέτειρας, δοθέντος του z και του $x^2+y^2=(f(v))^2$, μπορούμε να υπολογίσουμε μοναδικά το v, άρα η **x** είναι 1-1.

(β) Η **x** είναι συνεχής

Σύμφωνα με το προηγούμενο, η v είναι μια συνεχής συνάρτηση του z και του $\sqrt{x^2+y^2}$, άρα συνεχής συνάρτηση των (x,y,z).

Αντίστοιχα η u είναι μια συνεχής συνάρτηση των (x,y,z). Πράγματι, στην περίπτωση που είναι $u \neq \pi$ είναι $f(v) \neq 0$ και: $\tan\frac{u}{2} = \frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{1+\frac{x}{f(v)}}$

$= \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$, οπότε $u=2\mathrm{Arctan}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

Και στην περίπτωση που το u ανήκει σε μια περιοχή γύρω από το π, τότε $u=\mathrm{Arctan}\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$ και η u είναι πάλι συνεχής συνάρτηση των (x,y,z).

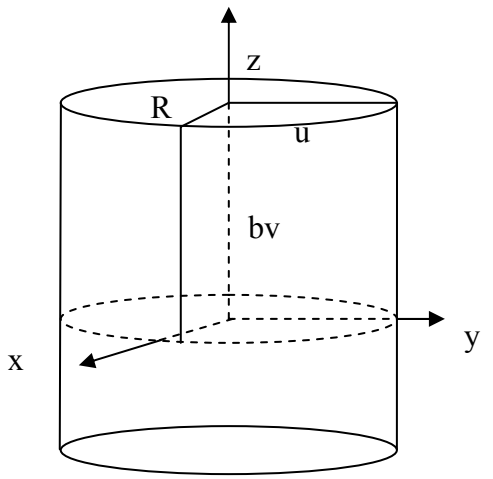
Τελικά η $\mathbf{x}^{-1}$ είναι συνεχής.

Στην περίπτωση των επιφανειών εκ περιστροφής θα μπορούσαμε να εντάξουμε και τον (ορθό κυκλικό) κύλινδρο, την επιφάνεια εκείνη που αποτελείται από το σύνολο των σημείων $\{(u,v,w)\in \mathbf{R}^3/\ u^2+v^2=R^2,\ w\in \mathbf{R}\}$. Η γενέτειρα στην περίπτωση του κυλίνδρου είναι μια ευθεία που περιστρέφεται γύρω από κάποιον από τους άξονες των συν/νων και κάθετα προς το επίπεδο ενός κύκλου.

Με f(v)=R (ακτίνα του κύκλου) και g(v)=v ή bv, $b\in \mathbf{R}$, το σύστημα συν/νων:

$\mathbf{x}(u,v)=(R\cos u, R\sin u, bv)$ με $(u,v)\in U=\{(u,v)\in \mathbf{R}^2/\ 0<u<2\pi,\ v\in \mathbf{R}\}$

αποτελεί μια κανονική παραμέτρηση της επιφάνειας του κυλίνδρου και η επιφάνεια του κυλίνδρου γίνεται κανονική επιφάνεια (σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5

Επειδή θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, σημειώνουμε ότι:

$\mathbf{x_u}$=(-Rsinu,Rcosu,0) και $\mathbf{x_v}$=(0,0,b) οπότε $\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}$ =(Rbcosu,Rbsinu,0).

3) *Έστω το σύνολο* $S^2 \subset \mathbf{R^3}=\{(u,v,w) \in \mathbf{R^3} / u^2+v^2+w^2=1\}$ *(Μοναδιαία σφαίρα).*
Αν $U=\{(u,v) \in \mathbf{R^2} / u^2+v^2<1\}$ τότε η απεικόνιση $\mathbf{x_1}=\mathbf{x_1}(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$, $(u,v) \in U$, είναι ένα σύστημα συν/νων του οποίου η εικόνα $\mathbf{x_1}(U)$ είναι ένα ανοικτό (υπο)σύνολο της S^2 πάνω από το uv-επίπεδο (το άνω ημισφαίριο της σφαίρας S^2 χωρίς τον Ισημερινό του).

■ Ισχύει η συνθήκη I, μια και με $(u,v) \in U$ και $u^2+v^2<1$ οι συναρτήσεις u,v, $\sqrt{1-u^2-v^2}$ είναι διαφορίσιμες κλάσεως C^m $(m \geq 1)$.

■ Ισχύει η συνθήκη II, μια και $\det \frac{\theta(u,v)}{\theta(u,v)}=1 \neq 0$, για κάθε σημείο $(u,v) \in U$.

■ Ισχύει η συνθήκη III, μια και η $\mathbf{x_1}$ είναι συνεχής και 1-1 και η αντίστροφή $\mathbf{x_1}^{-1}$: $\mathbf{x_1}(U) \subset \mathbf{R^3} \to U \subset \mathbf{R^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_1}(U)$ γιατί είναι ίση με τη συνάρτηση προβολή $\boldsymbol{\pi_3}$: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ του $\mathbf{x_1}(U)$ πάνω στο uv-επίπεδο:

$$\mathbf{x_1}^{-1}(u,v,w)= \boldsymbol{\pi_3}(u,v,w)=(u,v).$$

Άρα το $\mathbf{x_1}$ είναι ένα σύστημα συν/νων της S^2.
Το $\mathbf{x_1}$ όμως δεν καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια της S^2. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο θα θεωρήσουμε άλλα πέντε ανάλογα συστήματα συν/νων, τα:

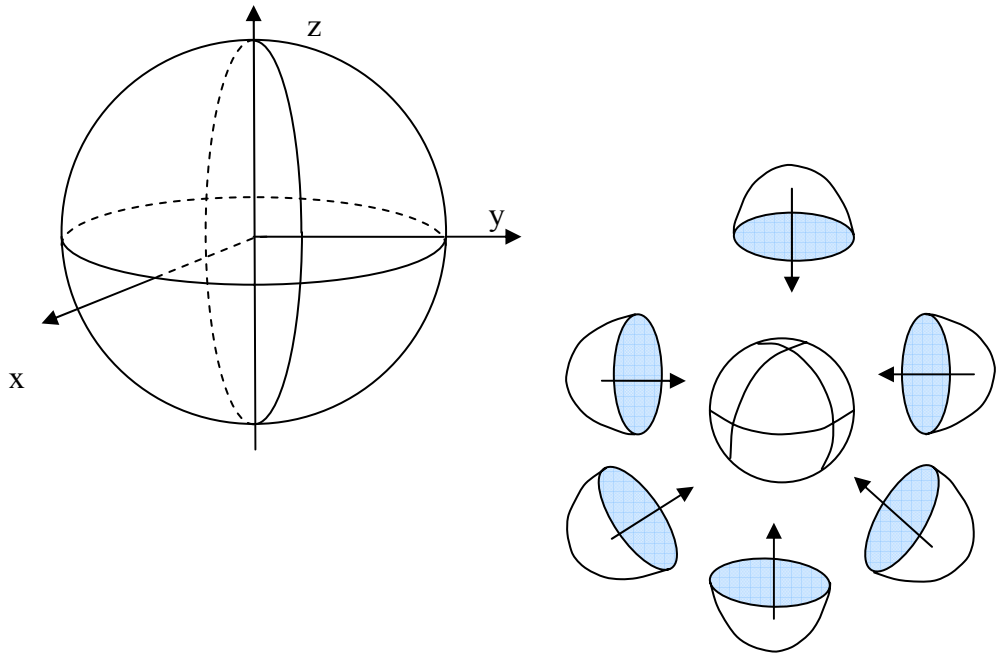
$$\mathbf{x_2}=\mathbf{x_2}(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}), \quad \mathbf{x_3}=\mathbf{x_3}(u,w)=(u,\sqrt{1-u^2-w^2},w),$$

$$\mathbf{x_4}=\mathbf{x_4}(u,w)=(u,-\sqrt{1-u^2-w^2},w), \quad \mathbf{x_5}=\mathbf{x_5}(v,w)=(\sqrt{1-v^2-w^2},v,w),$$

$$\mathbf{x_6}=\mathbf{x_6}(v,w)=(-\sqrt{1-v^2-w^2},v,w).$$

Παρατηρούμε ότι, οι περιοχές συν/νων $\mathbf{x_1}(U)$, $\mathbf{x_2}(U)$ καλύπτουν όλη την επιφάνεια της S^2 εκτός από τον Ισημερινό $\{(u,v,w) \in \mathbf{R^3} / u^2+v^2=1, w=0\}$. Όλες όμως μαζί καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια της S^2 και επομένως η S^2 αποτελεί μια κανονική επιφάνεια (σχήμα 2.6).

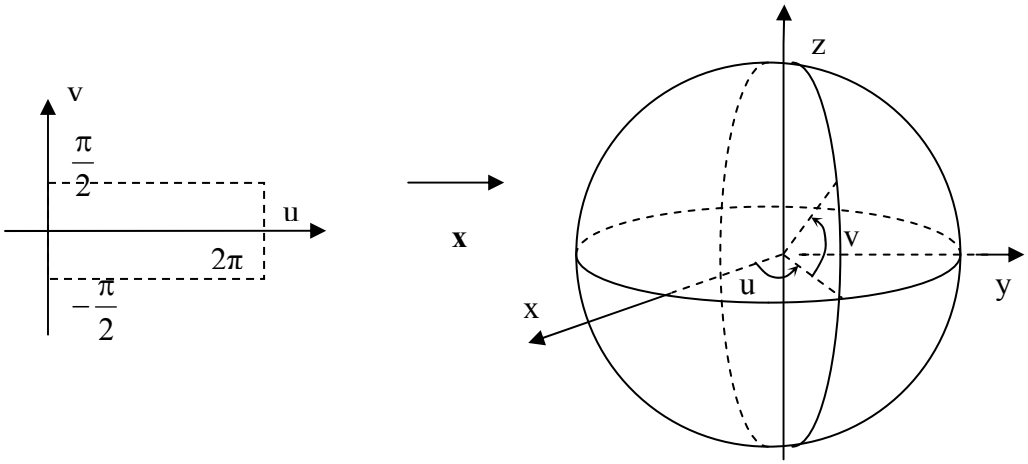
Σημειώνουμε ότι με τον ίδιο τρόπο, με μόνη διαφοροποίηση την παρεμβολή του όρου R, μπορούμε να δείξουμε ότι και η S^2_R **είναι κανονική επιφάνεια**.



Σχήμα 2.6

4) Ας θεωρήσουμε τώρα ανοικτό σύνολο $U=\{(u,v)\in \mathbf{R}^2 / \ 0<u<2\pi$ και $-\pi/2<v<\pi/2\}$ και την απεικόνιση $\mathbf{x}$: $U\subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ με:

$$\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(R\cos u \cos v,\ R\sin u \cos v,\ R\sin v).$$



Σχήμα 2.7

Είναι φανερά $\mathbf{x}(U)\subset S_R^2$ μια και η εικόνα $\mathbf{x}(U)$ που ορίζει η $\mathbf{x}$ πάνω στην επιφάνεια της S_R^2 την καλύπτει ολόκληρη εκτός από τους δύο Πόλους (σχήμα 2.7).

■ Ισχύει η συνθήκη I, μια και οι cosu, sinu, cosv, sinv είναι κλάσεως C^m $(m\geq 1)$.

■ Ισχύει η συνθήκη II. Πράγματι:

$$\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}=R^2\cos v \sin v,\ \ \det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}=R^2\cos^2 v \cos u,\ \ \det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}=-R^2\cos^2 v \sin u$$

Τότε: $\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}=\det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}=\det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}=0\Leftrightarrow\left(\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}\right)^2+\left(\det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}\right)^2$

$+\left(\det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}\right)^2=0\Leftrightarrow R^4\cos^2v\sin^2v+R^4\cos^4v\cos^2u+R^4\cos^4v\sin^2u=0$

$\Leftrightarrow R^4[\cos^2v\sin^2v+\cos^4v(\cos^2u+{}^4v\sin^2u)]=0\Leftrightarrow R^4\cos^2v(\sin^2v+\cos^2v)=0$

$\Leftrightarrow R^4\cos^2v=0\Leftrightarrow\cos^2v=0$. Είναι δε $\cos v=0$ όταν $v=2\kappa\pi-\pi/2$ ή $v=2\kappa\pi+\pi/2$ ($\kappa\in\mathbf{Z}$) πράγμα αδύνατο στο U. Άρα μία τουλάχιστον από τις προηγούμενες ορίζουσες θα είναι μη-μηδενική.

Παρατηρούμε ότι, για το ημικύκλιο $C=\{(x,y,z)\in S_R^2\ /\ y=0,\ x\geq 0\}$, αν θεωρήσουμε ένα σημείο $(x,y,z)\in S_R^2-C$, τότε η γωνία v ορίζεται μοναδικά ως $v=\mathrm{Arcsin}z$, καθώς $-\pi/2<v<\pi/2$. Έτσι, γνωρίζοντας το v μπορούμε να βρούμε τα sinu και cosu από τις σχέσεις: $x=R\cos u\cos v$ και $y=R\sin u\cos v$ με αποτέλεσμα το u να προσδιορίζεται μοναδικά στο $(0,2\pi)$.

Τότε η **x**, ως 1-1, θα αντιστρέφεται, με την $\mathbf{x}^{-1}$ να είναι συνεχής μια και στην προηγούμενη εφαρμογή είδαμε ότι η επιφάνεια S_R^2 είναι κανονική.

Σημειώνουμε ότι: η περιοχή συν/νων **x**(U) εξαιρεί μόνο το ημικύκλιο C μαζί με τους Πόλους και επομένως η S_R^2 μπορεί να καλυφθεί πλήρως με δυο συστήματα συν/νων του παραπάνω τύπου.

Παρατήρηση

Την παράμετρο u την αποκαλούμε συνήθως **μήκος** και τη v **πλάτος**.

2.3 Παραμετρικές γραμμές επιφάνειας, Καμπυλόγραμμες τοπικές συντεταγμένες, Εσωτερικά και εξωτερικά περιγραφόμενα τοπικά συστήματα συν/νων

Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση (τουλάχιστον, μια και θα μπορούσε να είναι και ένα σύστημα συν/ων) ενός συνόλου $M\subset\mathbf{R}^3$ κλάσεως C^m $(m\geq 1)$, ορισμένη στο $U\subset\mathbf{R}^2$.

Η εικόνα της ευθείας $v=v_0$ του U είναι η καμπύλη:

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=\mathbf{x}(u,c)=(x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))$$

της M με παράμετρο το u και καλείται **u-παραμετρική γραμμή**.

Η εικόνα της ευθείας $u=u_0$ του U είναι η καμπύλη:

$$\boldsymbol{\alpha}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=\mathbf{x}(c,v)=(x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v))$$

της M με παράμετρο το v και καλείται **v-παραμετρική γραμμή**.

Τα **διανύσματα ταχύτητας** των παραμετρικών γραμμών **α** και **β**, των εφαπτόμενων δηλαδή διανυσμάτων των αντίστοιχων καμπύλων στο σημείο τους (u_0,v_0), είναι τα:

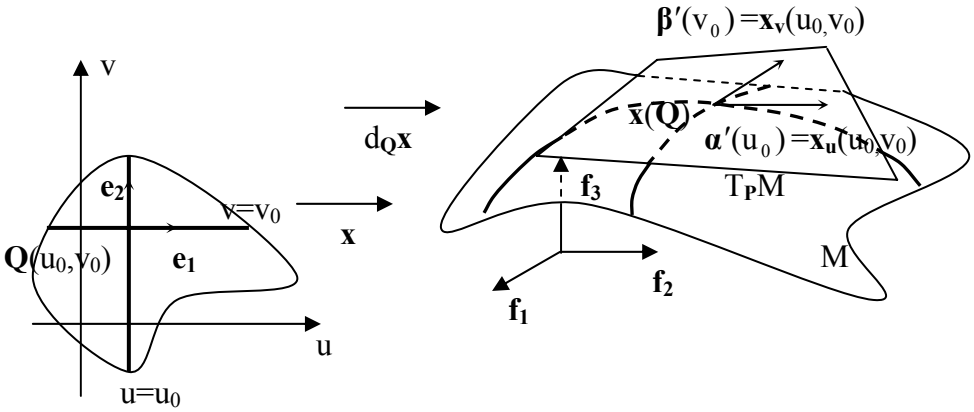
$$\boldsymbol{\alpha}'(u_0)=\mathbf{x}_u(u_0,v_0)=\left(\frac{\theta x}{\theta u}(u_0,v_0),\frac{\theta y}{\theta u}(u_0,v_0),\frac{\theta z}{\theta u}(u_0,v_0)\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}'(v_0)=\mathbf{x}_v(u_0,v_0)=\left(\frac{\theta x}{\theta v}(u_0,v_0),\frac{\theta y}{\theta v}(u_0,v_0),\frac{\theta z}{\theta v}(u_0,v_0)\right)$$

Στην περίπτωση που οι παράγωγοι $\boldsymbol{\alpha}'(u_0)$ και $\boldsymbol{\beta}'(v_0)$ γράφονται με τη βοήθεια του διαφορικού και του Jacobian πίνακα, έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha}'(u_0)=\mathbf{x_u}(u_0,v_0)=\mathbf{d}_{(u_0,v_0)}\mathbf{x}(\mathbf{e_1})=(\mathbf{J}_{(u_0,v_0)}\mathbf{x})\cdot\mathbf{e_1}$$
$$\boldsymbol{\beta}'(v_0)=\mathbf{x_v}(u_0,v_0)=\mathbf{d}_{(u_0,v_0)}\mathbf{x}(\mathbf{e_2})=(\mathbf{J}_{(u_0,v_0)}\mathbf{x})\cdot\mathbf{e_2},$$

όπου $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ η κανονική βάση του $\mathbf{R^2}$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}'(u_0), \boldsymbol{\beta}'(v_0)$ γράφονται ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R^3}$ (σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8

Παρατηρήσεις

☑ Ένας εναλλακτικός ορισμός των παραμετρικών γραμμών, με βάση τον οποίο τα δύο είδη παραμετρικών γραμμών εκφράζονται με την ίδια παράμετρο t, θα μας διευκολύνει στις πράξεις γι' αυτό θα χρησιμοποιηθεί και αυτός στη συνέχεια. Σύμφωνα με αυτόν, οι u και v-παραμετρικές γραμμές θα γράφονται αντίστοιχα:

$\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{M}$ με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u_0+t,v_0)$ και $\boldsymbol{\beta}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{M}$ με $\boldsymbol{\beta}(t)=\mathbf{x}(u_0,v_0+t)$

☑ Μπορούμε να εξασφαλίσουμε πάνω σε μια επιφάνεια, τοπικά και σε μια περιοχή ενός σημείου της ένα ορθογώνιο (οι παραμετρικές γραμμές κάθετες μεταξύ τους) και όχι ένα απλό σύστημα παραμετρικών γραμμών. Το σύστημα συν/νων, με τη βοήθεια του οποίου εξασφαλίζεται κάτι τέτοιο, καλείται **ορθογώνιο σύστημα συν/νων** ή **ορθογώνια παραμέτρηση**. Αυτό εξασφαλίζεται με την πρόταση:

Πρόταση

Για κάθε σημείο $\mathbf{P}\in$ M *υπάρχει πάντα μια περιοχή συν/νων* $\mathbf{x}$(u,v) *σε μια περιοχή* V *του* **P** *έτσι ώστε, οι παραμετρικές γραμμές* α(u), β(v) *να τέμνονται κάθετα σε κάθε σημείο της περιοχής* V.

Σημειώνουμε ότι, οι παραμετρικές γραμμές αποτελούν δύο οικογένειες καμπυλών πάνω στην επιφάνεια. Από κάθε σημείο της επιφάνειας περνά ακριβώς μια καμπύλη $v=v_0$ (u-παραμετρική γραμμή) και μια καμπύλη $u=u_0$ (v-παραμετρική γραμμή), δηλαδή οι καμπύλες αυτές ορίζουν πλήρως το σημείο $\mathbf{x}(u_0,v_0)$ της επιφάνειας.

Οι **καμπυλόγραμμες τοπικές συν/νες** είναι οι συν/νες που αποδίδονται σε ένα σημείο μιας (τοπικά) κανονικής επιφάνειας με τη χρήση συστημάτων «αξόνων» συντεταγμένων οι οποίοι δεν είναι, αόριστα, ευθείες του $\mathbf{R}^3$ (για παράδειγμα, οι άξονες συν/νων ενός καρτεσιανού συστήματος συν/νων) αλλά καμπύλες της επιφάνειας. Η μελέτη των διαφόρων φαινομένων ή καταστάσεων που λαμβάνουν χώρα πάνω σε μια επιφάνεια διευκολύνεται σημαντικά όταν χρησιμοποιούμε καμπυλόγραμμες συν/νες.

Για παράδειγμα, για να προσδιορίσουμε ένα σημείο στην επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου που έχει άξονα τον άξονα των z, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα καμπυλών που αποτελείται από τους κύκλους ακτίνας R, που δημιουργούνται από: τις τομές επιπέδων καθέτων προς τον άξονα του κυλίνδρου με τον ίδιο τον κύλινδρο (**κάθετες τομές**) και από τις ευθείες του κυλίνδρου που είναι παρ/λες προς τον άξονα των z (**γενέτειρες του κυλίνδρου**).

Αν u είναι η γωνία που σχηματίζεται από την ακτίνα που αντιστοιχεί σε ένα σημείο της επιφάνειας σε σχέση με μια αρχική θέση της ακτίνας ($\mathbf{x}(0,0)$) και v είναι η ευθύγραμμη απόσταση του σημείου από τον κύκλο ακτίνας R (**καμπύλη βάσης**), που βρίσκεται στο xy-επίπεδο και με κέντρο την αρχή $\mathbf{O}(0,0,0)$ ενός καρτεσιανού συστήματος αξόνων του χώρου, τότε οι καμπυλόγραμμες συν/νες R,u,v θα συνδέονται με τις καρτεσιανές συν/νες με τις σχέσεις:

$$x=R\cos u,\ y=R\sin u,\ z=v,\ \text{με } R\geq 0,\ 0\leq u<2\pi,\ v\in \mathbf{R}.$$

Στην παραπάνω περίπτωση, το σύστημα των καμπυλόγραμμων συν/νων που προκύπτει από το $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(R\cos u,R\sin u,v)$ χαρακτηρίζεται ως **εξωτερικό τοπικό σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων (κυλινδρικές συν/νες)**, μια και για την περιγραφή του χρησιμοποιείται το «εξωτερικό» στοιχείο γωνία u που δεν είναι στοιχείο της επιφάνειας του κυλίνδρου αλλά του $\mathbf{R}^3$.

Οι «άξονες» αυτού του συστήματος των καμπυλόγραμμων συν/νων είναι οι παραμετρικές γραμμές:

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=(R\cos u,R\sin u,v_0) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=(R\cos u_0,R\sin u_0,v)$$

Αν θέλαμε να αποκτήσουμε ένα **εσωτερικό τοπικό σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων**, τότε θα χρησιμοποιούσαμε πάλι το ίδιο σύστημα καμπυλών μόνο που η περιγραφή των συν/νων θα γινόταν με **εσωτερικούς** όρους, δηλαδή:

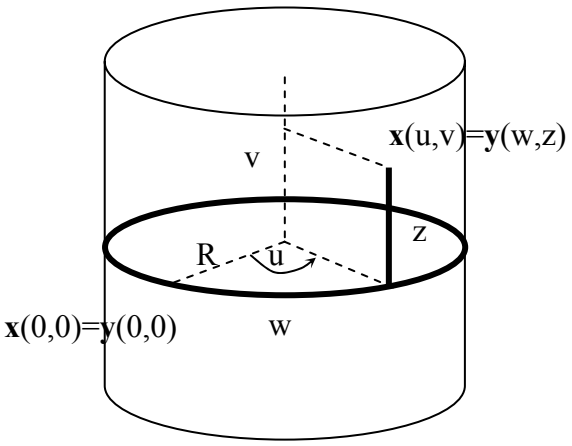
- Θα επιλέγαμε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας του κυλίνδρου ως (εσωτερική) αρχή, δηλαδή το σημείο με συν/νες (0,0) (στην πραγματικότητα το $\mathbf{y}(0,0)$).
- Θα επιλέγαμε στο $\mathbf{y}(0,0)$, τη μία από τις δύο διευθύνσεις πάνω σε μια από τις καμπύλες (την καμπύλη βάσης) που θα παίξουν το ρόλο των αξόνων του συστήματος συν/νων ως θετική.
- Και την μια από τις δύο διευθύνσεις που είναι κάθετες στην καμπύλη βάσης ως τη θετική φορά του άξονα z.

Το εσωτερικό σύστημα συν/νων θα μπορούσε τότε να περιγραφεί ως:
$\mathbf{y}(w,z)$={το σημείο προσδιορίζεται από την μετακίνηση (από την «εσωτερική» αρχή) και κατά μήκος της καμπύλης βάσης κατά w και κατόπιν τη στροφή σε κάθετη διεύθυνση κατά μήκος του θετικού άξονα των z και σε απόσταση z πάνω σε αυτόν}.

Παρατηρήσεις

☑ Συν/νες σαν τις παραπάνω (της εσωτερικής περίπτωσης) καλούνται και **γεωδαισιακές ορθογώνιες συν/νες**. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό οφείλεται στο ότι οι καμπύλες του συστήματος αξόνων δεν είναι τυχαίες καμπύλες αλλά γεωδαισιακές καμπύλες. Αν δεν είναι και οι δύο γεωδαισιακές (που δεν είναι απαραίτητο παρά μόνο να είναι λείες καμπύλες), θα πρέπει να είναι γεωδαισιακή τουλάχιστον η καμπύλη εκείνη που στην περίπτωσή μας είναι η κάθετη στην καμπύλη βάσης.

☑ Οι εσωτερικές και οι εξωτερικές τοπικές συν/νες είναι διαφορετικές, με την έννοια ότι $\mathbf{x}(\alpha,\beta)\neq \mathbf{y}(\alpha,\beta)$ (σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9

Αντίστοιχα, σε έναν (ορθό, κυκλικό) κώνο, ένα **εξωτερικό τοπικό σύστημα καμπυλόγραμων συν/νων** θα μπορούσε να έχει για (φυσική) αρχή (0,0,0) την κορυφή του κώνου και να προκύπτει από το:

$$\mathbf{x}(u,v)=(v\sin\varphi\cos\frac{2\pi u}{\theta},\ v\sin\varphi\sin\frac{2\pi u}{\theta},\ v\cos\varphi),$$

όπου θ είναι η γωνία του κώνου (η οποία θα πρέπει να είναι μικρότερη από 2π), φ η γωνία μεταξύ του άξονα του κώνου και μιας ημιευθείας της επιφάνειας που έχει για αρχή την κορυφή του κώνου (μιας γενέτειρας δηλαδή), u η γωνία της επιφάνειας του κώνου που σχηματίζεται μεταξύ μιας αρχικής και μιας τελικής διεύθυνσης από γενέτειρες της επιφάνειας και v η απόσταση κατά μήκος της τελικής αυτής διεύθυνσης και της κορυφής του κώνου.

Οι άξονες του συστήματος των καμπυλόγραμμων συν/νων είναι οι παραμετρικές γραμμές:

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=(v_0\sin\varphi\cos\frac{2\pi u}{\theta},\ v_0\sin\varphi\sin\frac{2\pi u}{\theta},\ v_0\cos\varphi) \text{ και}$$

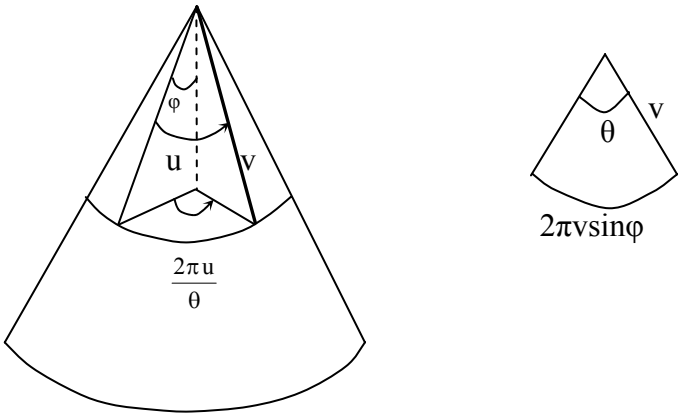
$$\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=(v\sin\varphi\cos\frac{2\pi u_0}{\theta},\ v\sin\varphi\sin\frac{2\pi u_0}{\theta},\ v\cos\varphi)$$

Αν θέλαμε να αποκτήσουμε ένα **εσωτερικό τοπικό σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων**, τότε θα χρησιμοποιούσαμε πάλι το ίδιο σύστημα καμπυλών μόνο που η περιγραφή των συν/νων θα γινόταν με **εσωτερικούς** όρους, δηλαδή:

- Θα επιλέγαμε ως (εσωτερική) αρχή, δηλαδή το σημείο με συν/νες (0,0) (στην πραγματικότητα το **y**(0,0)), την κορυφή του κώνου.
- Θα θεωρούσαμε ως έναν άξονα τη μια από τις γενέτειρες.
- Και ως καμπύλη βάσης θα θεωρούσαμε ένα κύκλο με το επίπεδό του κάθετο στον άξονα του κώνου και με χαρακτηρισμό της μιας από τις δύο διευθύνσεις πάνω σε αυτόν ως θετική.

Το εσωτερικό σύστημα συν/νων θα μπορούσε τότε να περιγραφεί ως:
y(u,v)={το σημείο προσδιορίζεται από την απόστασή του v από την κορυφή του κώνου και κατά μήκος μιας γενέτειρας και ταυτόχρονα από τη γωνία u (που μπορεί να είναι και μεγαλύτερη από 2π) κατά μήκος της επιφάνειας, μεταξύ της γενέτειρας στην οποία βρίσκεται το σημείο και μιας σταθερής γενέτειρας αναφοράς} (σχήμα 2.10).

Σημειώνουμε ότι, συν/νες σαν τις παραπάνω (της εσωτερικής περίπτωσης) καλούνται και **γεωδαισιακές πολικές συν/νες**.



Σχήμα 2.10

Αντίστοιχα συμπεράσματα θα προκύψουν και στην περίπτωση της σφαίρας όπου ένα εξωτερικό τοπικό σύστημα συν/νων είναι το:

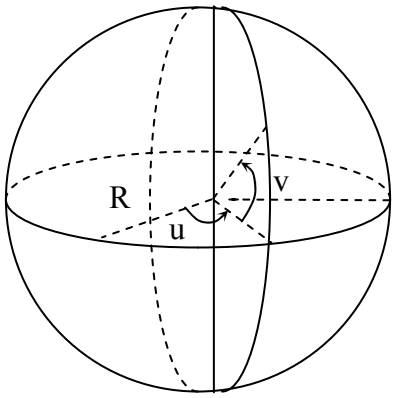
$$\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(R\cos u \cos v,\ R\sin u \cos v,\ R\sin v)$$

το οποίο έχει το R σταθερό για την επιφάνεια μιας συγκεκριμένης σφαίρας και τα u,v να εκφράζονται από τις γωνίες (εξωτερικά στοιχεία της επιφάνειας) του σχήματος 2.11 με: $0<u<2\pi$ και $-\pi/2<v<\pi/2$ (**σφαιρικές συν/νες**)

Οι παραμετρικές γραμμές της επιφάνειας είναι τότε οι:

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=(R\cos u \cos v_0,\ R\sin u \cos v_0,\ R\sin v_0) \text{ και}$$

$$\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=(R\cos u_0 \cos v,\ R\sin u_0 \cos v,\ R\sin v).$$



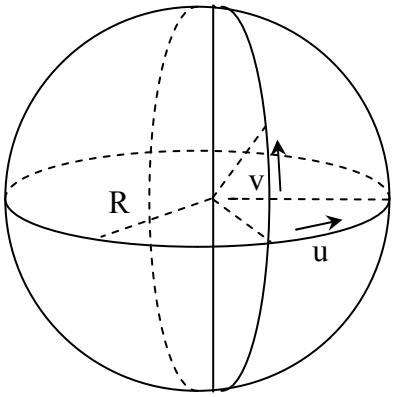
Σχήμα 2.11

Αν θέλαμε να αποκτήσουμε ένα **εσωτερικό τοπικό σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων**, τότε θα χρησιμοποιούσαμε πάλι το ίδιο σύστημα καμπυλών μόνο που η περιγραφή των συν/νων θα γινόταν με **εσωτερικούς όρους**, δηλαδή θα θεωρούσαμε για αρχή ένα σημείο του Ισημερινού της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας R και το σύστημα να περιγράφεται ως εξής (πρόκειται για **γεωδαισιακές ορθογώνιες συν/νες**):

y(u,v)={το σημείο προσδιορίζεται αν με αρχή ένα σημείο του Ισημερινού κινηθούμε κατά (ένα θετικά προσανατολισμένο) τόξο u ($0<u<2\pi R$) και στη συνέχεια προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου και για απόσταση v ($-\pi R/2<v<\pi R/2$) πάνω σε αυτόν}.

Σε αναλυτική μορφή, για μία σφαίρα ακτίνας R, ένα εσωτερικό σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων προκύπτει από την (κατάλληλα περιορισμένη) κανονική παραμετρική παράσταση (R>0, 0<u<2πR, -πR/2<v<πR/2) (σχήμα 2.12):

$$\mathbf{y}(u,v)=(R\cos\frac{v}{R}\cos\frac{u}{R},\ R\cos\frac{v}{R}\sin\frac{u}{R},\ R\sin\frac{v}{R})$$



Σχήμα 2.12

Οι άξονες του συστήματος των καμπυλόγραμμων συν/νων είναι οι παραμετρικές γραμμές :

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{y}(u,v_0)=(R\cos\frac{v_0}{R}\cos\frac{u}{R},\ R\cos\frac{v_0}{R}\sin\frac{u}{R},\ R\sin\frac{v_0}{R})$$

$$\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{y}(u_0,v)=(R\cos\frac{v}{R}\cos\frac{u_0}{R},\ R\cos\frac{v}{R}\sin\frac{u_0}{R},\ R\sin\frac{v}{R})$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που το σύστημα των καμπυλόγραμμων συν/νων, το οποίο διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο, αποτελείται από γραμμές κάθετες μεταξύ τους (τα διανύσματα ταχύτητας των καμπυλών σε κάθε σημείο είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα καμπυλόγραμμων συν/νων**. Τέτοια συστήματα είναι τα συστήματα των κυλινδρικών και των σφαιρικών συν/νων.

2.4 Γράφημα συνάρτησης, Το γράφημα μιας συνάρτησης είναι (τοπικά) κανονική επιφάνεια

Έστω f: $U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ μια πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση κλάσεως C^m ($m\geq 1$) ορισμένη στο ανοικτό σύνολο U.

Γράφημα της f καλείται το υποσύνολο Γ_f του $\mathbf{R}^{n+1}$.

$$\Gamma_f=\{(x^1, x^2,\ldots, x^{n+1})\in \mathbf{R}^{n+1}/\ x^{n+1}=f(x^1, x^2,\ldots, x^n)\}.$$

Για n=2 έχουμε f: $U\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ και το γράφημα είναι το $\Gamma_f=\{(u,v,w)\in \mathbf{R}^3/\ w=f(u,v)\}$.

Για το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης κλάσεως C^m ($m\geq 1$) ισχύει το παρακάτω θεώρημα, το οποίο θα αποδείξουμε στην περίπτωση που είναι n=2:

Θεώρημα

Αν η f: $U\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *(*U *ανοικτό) είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση κλάσεως* C^m *(*$m\geq 1$*), τότε το γράφημά της* Γ_f *είναι (τοπικά) κανονική επιφάνεια.*

Απόδειξη

Η απεικόνιση $\mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ με $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(u,v,f(u,v))$ είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση με την εικόνα της γύρω από κάθε σημείο του Γ_f.

Πράγματι:

■ Ικανοποιείται η συνθήκη I, μια και οι u,v, f(u,v) είναι κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ στο U.

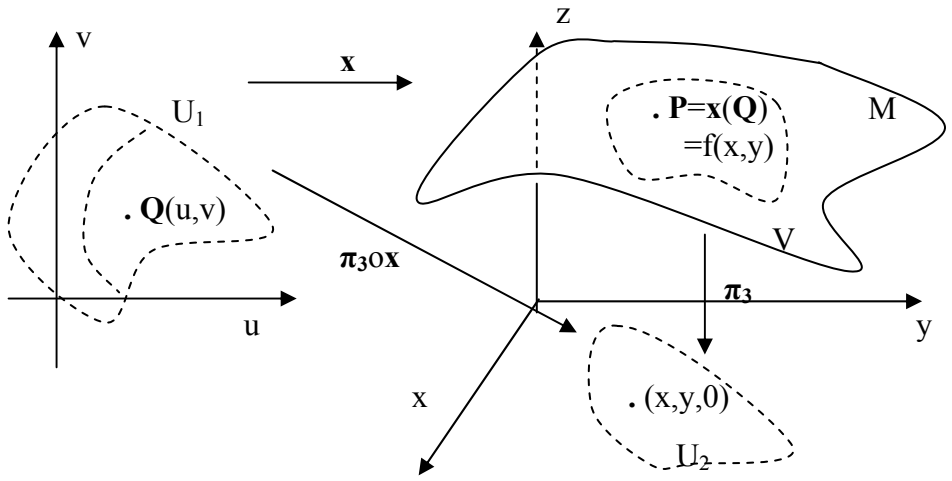
■ Ικανοποιείται η συνθήκη II, μια και με $\mathbf{x}_u=(1,0,f_u(u,v))$ και $\mathbf{x}_v=(0,1,f_v(u,v))$ θα είναι:

$$\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_3 & f_u(u,v) & f_v(u,v) \end{bmatrix} \text{ με την υποορίζουσα } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

■ Ικανοποιείται η συνθήκη III, μια και η $\mathbf{x}$:$(u,v) \to (x,y,z)$ είναι συνεχής και 1-1, οπότε υπάρχει η $\mathbf{x}^{-1}$:$(x,y,z) \to (u,v)$ (προβολή στο uv-επίπεδο) η οποία είναι επίσης συνεχής.

Άρα το Γ_f είναι (τοπικά) κανονική επιφάνεια.

Ισχύει και το αντίστροφο, μόνο όμως τοπικά, σύμφωνα με το θεώρημα (σχήμα 2.14):



Σχήμα 2.14

Θεώρημα

Αν η $M \subset \mathbf{R}^3$ *είναι κανονική επιφάνεια και σημείο* $\mathbf{P} \in M$, *τότε υπάρχει περιοχή* $V \subset M$ *γύρω από το* **P** *έτσι ώστε το* V *να αποτελεί το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f κλάσεως* C^m $(m \geq 1)$ *της μορφής:* z=f(x,y) *ή* x=h(y,z) *ή* y=g(x,z).

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ με $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ ένα σύστημα συν/νων του οποίου η εικόνα βρίσκεται πάνω στην κανονική επιφάνεια M. Τότε για το σημείο $\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q})$ της M ισχύει ότι, ο Jacobian πίνακας $\mathbf{J_Q x}$ θα έχει μια τουλάχιστον από τις υποορίζουσες: $\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)}$, $\det\frac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}$, $\det\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}$ διάφορη του μηδενός.

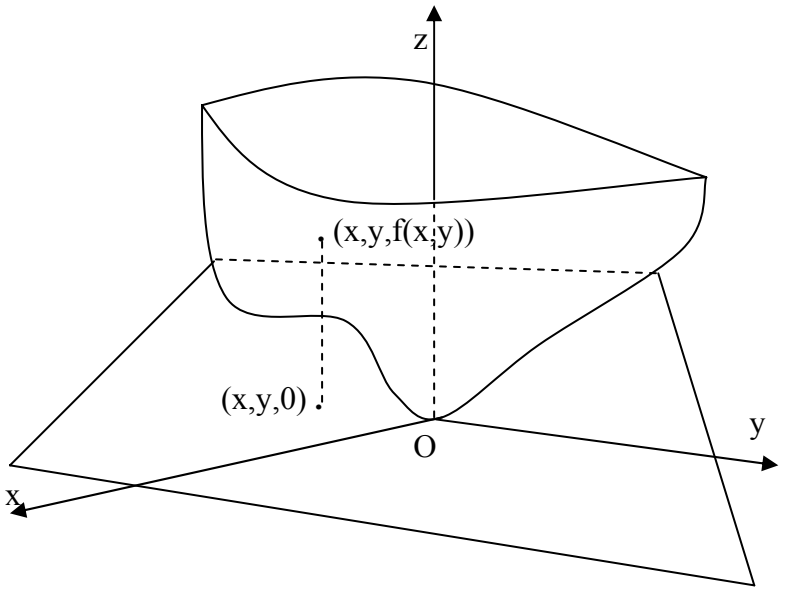
Έστω ότι είναι $\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)} \neq 0$. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $\boldsymbol{\pi_3} \circ \mathbf{x}$: $U \to \mathbf{R}^2$ με $(\boldsymbol{\pi_3} \circ \mathbf{x})(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ η οποία είναι κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ στο U. Επειδή η παράγωγος της συνάρτησης αυτής στο **Q** (ο Jacobian πίνακας) είναι ίση με

$\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\pi}_3 \circ \mathbf{x}) = \det\dfrac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)} \neq 0$, από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης θα υπάρχει περιοχή $U_1 \subset U$ του **Q** και περιοχή U_2 του $\boldsymbol{\pi}_3(\mathbf{P})$ ($\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q}) \in V$) έτσι ώστε η $\boldsymbol{\pi}_3 \circ \mathbf{x}$ να είναι 1-1 απεικόνιση του U_1 επί του U_2 (U_2 ανοικτό σύνολο) και να έχει αντίστροφη (την $(\boldsymbol{\pi}_3 \circ \mathbf{x})^{-1}$) η οποία είναι κλάσης C^m ($m \geq 1$) στο U_2.

Αν θέσουμε $\mathbf{x}(U_1)=V \subset M$ και θεωρήσουμε τη συνάρτηση $F: U_1 \to \mathbf{R}$ με $F(u,v)=z(u,v)$ τότε έχουμε: $F \circ (\boldsymbol{\pi}_3 \circ \mathbf{x})^{-1}: U_1 \to \mathbf{R}$ με $(F \circ (\boldsymbol{\pi}_3 \circ \mathbf{x})^{-1})(x,y)=F(u(x,y), v(x,y))=z(u(x,y),v(x,y))=f(x,y)$, δηλαδή το V αποτελεί το γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $z=f(x,y)$.

Όμοια εργαζόμαστε στην περίπτωση που κάποια από τις άλλες υποορίζουσες $\det\dfrac{\theta(x,z)}{\theta(u,v)}$, $\det\dfrac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)}$ είναι διαφορετική από το μηδέν.

Σύστημα συν/νων Monge καλείται ένας ειδικός τύπος συστήματος συν/νων που η εικόνα του δίνει το γράφημα μιας συνάρτησης. Επιπλέον όμως, η εικόνα του σύστηματος συν/νων καλύπτει (τοπικά) την περιοχή ενός σημείου **P** της M το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το (0,0,0) του $\mathbf{R}^3$ και το xy-επίπεδο έχει, σε σχέση με το γράφημα, μια ειδική θέση την οποία θα μελετήσουμε αργότερα στο κεφάλαιο αυτό: είναι εφαπτόμενο του γραφήματος (σχήμα 2.15).



Σχήμα 2.15

Ένα παράδειγμα συστήματος συν/νων Monge είναι το $\mathbf{x}(u,v)=(u,v, u^2+v^2)$ για την επιφάνεια του **παραβολοειδούς** $z= x^2+y^2$.

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι **η επιφάνεια του κώνου δεν είναι κανονική στο κωνικό του σημείο** (στην κορυφή του κώνου).

Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,u)$ με $u>0$ και $0<v<2\pi$, που αντιστοιχεί στον κώνο με εξίσωση $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z>0$, και κωνικό σημείο το (0,0,0), τότε τα εφαπτόμενα διανύσματα των παραμετρικών γραμμών $\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=(u\cos v_0,u\sin v_0,u)$ και $\boldsymbol{\beta}(v)=x(u_0,v)=(u_0\cos v,u_0\sin v,u_0)$ είναι αντίστοιχα τα $\boldsymbol{\alpha}'(u)=(\cos v_0,\sin v_0,1)$ και $\boldsymbol{\beta}'(v)=(-u_0\sin v,u_0\cos v,0)$ και στο (0,0):

$$\mathbf{x}_{\mathbf{u}|(0,0)} = \boldsymbol{\alpha}'(0) = (1,0,1) \text{ και } \mathbf{x}_{\mathbf{v}|(0,0)} = \boldsymbol{\beta}'(0) = (0,0,0) \text{ άρα } \mathbf{x}_{\mathbf{u}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

επομένως δεν ικανοποιείται η συνθήκη της κανονικότητας.

Στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κανένα σύστημα συν/νων που να καταστήσει την επιφάνεια του κώνου κανονική. Πράγματι, αν ήταν κανονική επιφάνεια σε μια περιοχή του (0,0,0) της κορυφής του κώνου, τότε θα αποτελούσε το γράφημα (περιοχή Monge) μια διαφορίσιμης συνάρτησης με κάποιον από τους τρεις τύπους: z=f(x,y), x=h(y,z), y=g(x,z). Οι δύο τελευταίοι όμως από τους τύπους αυτούς μπορούν να απορριφθούν καθώς οι προβολές της επιφάνειας του κώνου στο yz και xz-επίπεδο αντίστοιχα, δεν είναι 1-1 (δεν υπάρχουν μοναδικές λύσεις ως προς x,y).

Την ίδια στιγμή, η συνάρτηση $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0), άρα σε μια γειτονιά του (0,0,0) κανένας από τους τρεις τύπους δε μπορεί να αποτελέσει το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης και ο κώνος δεν είναι κανονική επιφάνεια. Θα μπορούσε όμως να αποτελέσει μια κανονική επιφάνεια αν εξαιρέσουμε το κωνικό σημείο.

2.5 Κρίσιμα σημεία, Κρίσιμη τιμή συνάρτησης, Επιφάνειες στάθμης, Οι επιφάνειες στάθμης είναι κανονικές επιφάνειες

Κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης **f**: $U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, καλείται το σημείο εκείνο $\mathbf{P} \in U \subset \mathbf{R}^n$ (U ανοικτό σύνολο) για το οποίο το διαφορικό της **f** στο **P** ($d_{\mathbf{P}}\,\mathbf{f}$) δεν είναι συνάρτηση «επί».

Το **f**(**P**) καλείται **κρίσιμη τιμή** της **f**, ενώ κάθε σημείο που δεν είναι κρίσιμη τιμή λέγεται **μη κρίσιμη τιμή**.

Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια την περίπτωση της συνάρτησης **f**: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, που είναι αυτή η οποία κυρίως θα μας απασχολήσει. Για αυτήν ισχύει η πρόταση:

Πρόταση

Έστω f: $U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *με* f=(f^1,f^2,f^3). *Αν το διαφορικό* $d_{\mathbf{P}}\,\mathbf{f}$ *, για* **P**=(p^1,p^2,p^3)*, δεν είναι συνάρτηση «επί» (δηλαδή το* **P** *είναι κρίσιμο σημείο) τότε ο Jacobian πίνακας* $\mathbf{J}_{\mathbf{P}}\mathbf{f}$ *είναι τάξης μηδέν, δηλαδή:* $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x} = \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y} = \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z} = 0.$

Επιφάνεια στάθμης ή **ισοσταθμική** επιφάνεια καλούμε το υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ που αποτελεί την αντίστροφή εικόνα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f κλάσεως C^m ($m \geq 1$), εφαρμοσμένης πάνω σε μια μη κρίσιμη τιμή της. Δηλαδή, αν f: $U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ είναι μια τέτοια συνάρτηση και $\alpha \in f(U)$ είναι μια μη κρίσιμη τιμή της τότε επιφάνεια στάθμης είναι το σύνολο $f^{-1}(\alpha)$.

Για παράδειγμα, η επιφάνεια $M=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\}$ (**ελλειψοειδές**) είναι μια επιφάνεια στάθμης μια και η συνάρτηση $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1$ ορισμένη στο $U \subset \mathbf{R}^3$ είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m ($m \geq 1$) και έχει για μη κρίσιμη τιμή το 0. Πράγματι:

$f(\mathbf{P})=f(0,0,0)=-1\neq 0$ ενώ $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x}=\frac{2x}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow x=0$, $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y}=\frac{2y}{\beta^2}=0\Leftrightarrow y=0$,

$\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}=\frac{2z}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow z=0$, επομένως το σημείο $\mathbf{P}(0,0,0)$ δεν ανήκει στην $f^{-1}(0)$.

Άρα το σύνολο $f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3/\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0\}$ είναι μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1$.

Αναγάγοντας το ζήτημα της κανονικότητας μιας επιφάνειας στάθμης στο ζήτημα της κανονικότητας του γραφήματος μιας συνάρτησης, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί και ένα εύκολο κριτήριο για τη διαπίστωση της κανονικότητας μιας επιφάνειας, εφόσον βέβαια είναι επιφάνεια στάθμης.

Θεώρημα

Αν για τη διαφορίσιμη κλάσεως C^m *(*$m\geq 1$*) συνάρτηση* $f: U\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ *το α είναι μη κρίσιμη τιμή της, τότε το σύνολο* $f^{-1}(\alpha)$ *είναι κανονική επιφάνεια.*

Απόδειξη

Έστω **P** ένα σημείο του $f^{-1}(\alpha)$. Επειδή η τιμή α είναι μη κρίσιμη τιμή, το **P** θα είναι μη κρίσιμο σημείο και τουλάχιστον μια από τις μερικές παραγώγους $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y}$, $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}$ θα είναι μη μηδενική, έστω μάλιστα $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}\neq 0$.

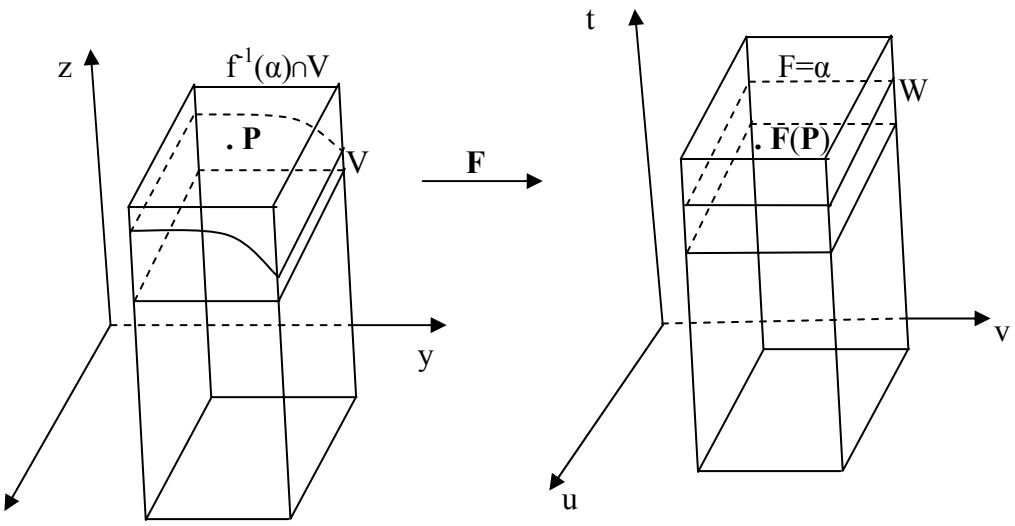
Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $\mathbf{F}: \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ με $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z))=(u,v,w)$, της οποίας ο πίνακας Jacobi στο **P** θα είναι ο $\mathbf{J_P F}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x} & \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y} & \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}\end{bmatrix}$, ο οποίος έχει τάξη 3 μια και $\det(\mathbf{J_P F})=\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}\neq 0$.

Σύμφωνα όμως με το θέωρημα τη αντίστροφης συνάρτησης, θα υπάρχει μια περιοχή V του **P** και μια περιοχή W του $f(\mathbf{P})$ έτσι ώστε η $F: V\to\mathbf{R}^3$ να είναι αμφιδιαφόριση. Τότε θα υπάρχει η $\mathbf{F}^{-1}: W\to V$ που είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ και μάλιστα $\mathbf{F}^{-1}(u,v,w)=(x,y,z)$, με $x=u$, $y=v$, $z=g(u,v,w)$. Με $w=\alpha$ έχουμε:

$$z=g(u,v,w)=g(x,y,\alpha)=h(x,y) \text{ και } f(x,y,g(x,y,\alpha))=f(x,y,h(x,y))=\alpha.$$

Δηλαδή, το σύνολο $V\cap f^{-1}(\alpha)$ αποτελεί το γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $z=h(x,y)$ οπότε θα αποτελεί και μια περιοχή συν/νων του $f^{-1}(\alpha)$ γύρω από το **P** (σχήμα 2.16).

Επειδή αυτή η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί γύρω από κάθε σημείο του $f^{-1}(\alpha)$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο αυτό είναι μια κανονική επιφάνεια.



Σχήμα 2.16

2.6 Απεικονίσεις επί επιφανειών f: M→R

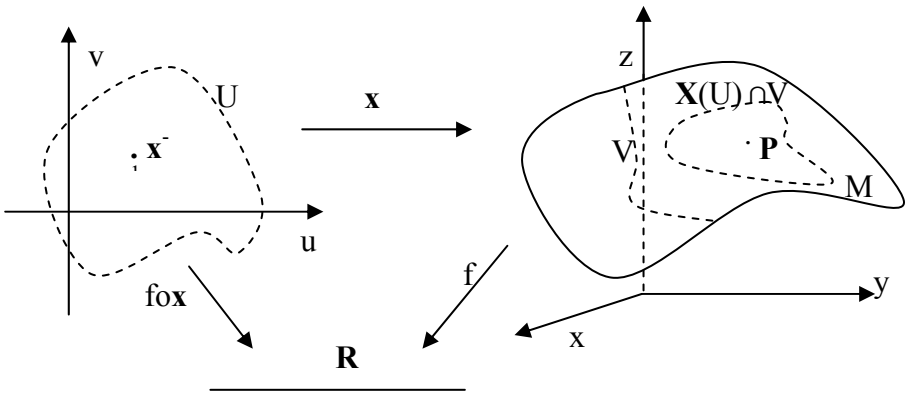
Συχνά στα ζητήματα που αφορούν τις επιφάνειες μας ενδιαφέρουν απεικονίσεις που ορίζονται στα σημεία μιας (κανονικής) επιφάνειας (ως σύνολο) και οι εικόνες τους είναι πραγματικοί αριθμοί. Ιδιαίτερα μάλιστα μας ενδιαφέρουν εκείνες που είναι διαφορίσιμες στα σημεία αυτά.

Ως φυσική πορεία θεωρείται η εξασφάλιση μιας περιοχής συν/νων, γύρω από ένα σημείο **P** της επιφάνειας μέσω του συστήματος συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M \subset \mathbf{R}^3$ με **x**(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)). Στην περίπτωση μάλιστα που το σημείο ανήκει σε περισσότερες από μια περιοχές συν/νων (στην τομή τους) τότε εξασφαλίζουμε τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης, ανεξάρτητα από το θεωρούμενο σύστημα συν/νων, με τη βοήθεια του **θεωρήματος της αλλαγής** ή **του μετασχηματισμού των παραμέτρων**, που εξασφαλίζει τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο κατά διαφορίσιμο τρόπο.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό ο οποίος δεν εξαρτάται από το σύστημα συν/νων που επιλέγουμε:

Αν είναι $f: V \subset M \to \mathbf{R}$ μια συνάρτηση που ορίζεται στο ανοικτό σύνολο V της κανονικής επιφάνειας M, τότε η **f είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m ($m \geq 1$) στο σημείο $P \in V$** αν για κάποιο σύστημα συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$ ($P \in \mathbf{x}(U) \cap V$) η σύνθεση $f \circ \mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m ($m \geq 1$) στο $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{P})$ (σχήμα 2.17).

Σημειώνουμε ότι, η παραπάνω ιδιότητα μεταφέρεται σε όλο το V αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του V και ότι η διαφορισιμότητα της f εξασφαλίζεται μέσω της ύπαρξης του συστήματος συν/νων **x** και της ύπαρξης και διαφορισιμότητας της $f \circ \mathbf{x}$.



Σχήμα 2.17

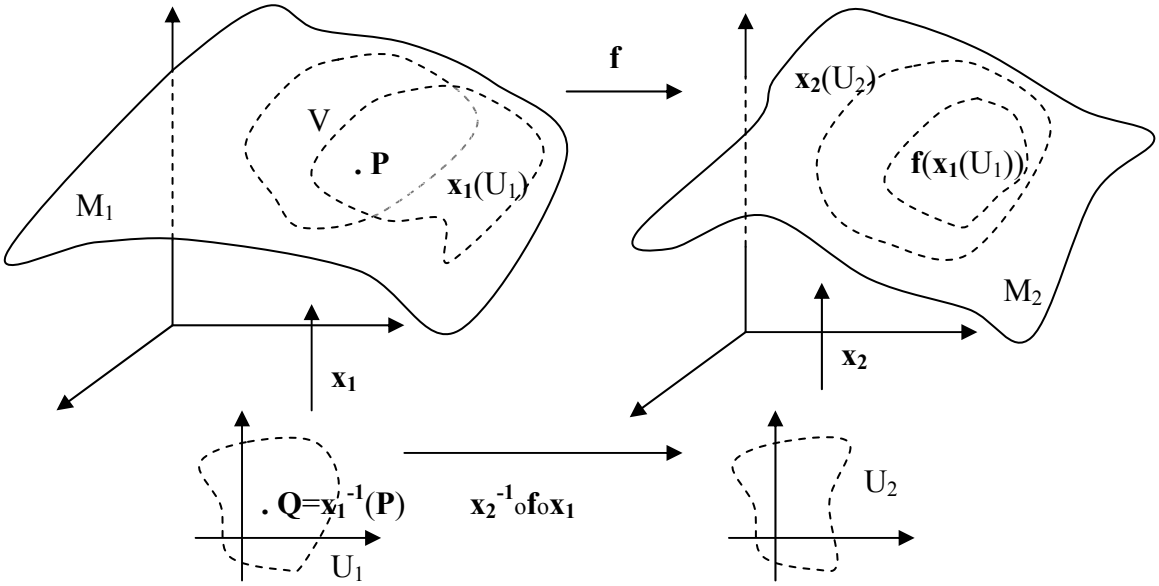
2.7 Απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών f: $M_1 \to M_2$, Αμφιδιαφορικές επιφάνειες, Κανονική διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ επιφανειών

Στην ενότητα αυτή παρέχεται το απαραίτητο υλικό για τη θεώρηση, τοπικά, των κανονικών επιφανειών ως επίπεδα, πράγμα που μας εφοδιάζει με τον αλγεβρικό μηχανισμό των διανυσματικών χώρων στη μελέτης μιας επιφάνειας, ενώ ταυτόχρονα παρέχει και ένα κριτήριο κανονικότητας των επιφανειών: κανονικές μπορούν να θεωρηθούν οι επιφάνειες που είναι τοπικά αμφιδιαφορικές με το $\mathbf{R}^2$.

Έστω η συνεχής απεικόνιση **f**: $V \subset M_1 \to M_2$ (V ανοικτό υποσύνολο της επιφάνειας M_1) μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών M_1 και M_2. Η **f** θα είναι **διαφορίσιμη** στο $\mathbf{P} \in V$ αν για δύο συστήματα συν/νων

$$\mathbf{x_1}: U_1 \subset \mathbf{R}^2 \to M_1 \text{ και } \mathbf{x_2}: U_2 \subset \mathbf{R}^2 \to M_2,$$

με $\mathbf{P} \in \mathbf{x_1}(U_1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}(U_1)) \subset \mathbf{x_2}(U_2)$, η συνάρτηση $\mathbf{x_2}^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{x_1}: U_1 \to U_2$ είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{Q} = \mathbf{x_1}^{-1}(\mathbf{P})$ (σχήμα 2.18).



Σχήμα 2.18

Σημειώνουμε ότι, η παραπάνω ιδιότητα μεταφέρεται σε όλο το V αν η **f** είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του V και ότι η διαφορισιμότητα της **f** εξασφαλίζεται μέσω της ύπαρξης των δύο συστημάτων συν/νων $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ και της ύπαρξης και διαφορισιμότητας της σύνθεσης $\mathbf{x_2^{-1}} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{x_1}$.

Δύο **επιφάνειες** M_1, M_2 λέγονται **αμφιδιαφορικές** αν υπάρχει μεταξύ τους μια αμφιδιαφόριση, μια διαφορίσιμη δηλαδή απεικόνιση **f** (**f**: $M_1 \to M_2$) που έχει αντίστροφη την $\mathbf{f}^{-1}$: $M_2 \to M_1$, η οποία είναι επίσης διαφορίσιμη.

Παρατηρήσεις

☑ Η έννοια της αμφιδιαφόρισης έχει για τη μελέτη των κανονικών επιφανειών, το ρόλο που η έννοια του ισομορφισμού έχει στη μελέτη των διανυσματικών χώρων ή η ισότητα στην Ευκλείδια Γεωμετρία, δηλαδή από την άποψη της διαφορισιμότητας, δύο αμφιδιαφορικές επιφάνειες είναι ταυτόσημες.

Έτσι, για το σύστημα συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R^2} \to M$ οι επιφάνειες U (τμήμα του επιπέδου) και **x**(U) (τμήμα της επιφάνειας) είναι αμφιδιαφορικές, μια και για κάθε σημείο $\mathbf{P} \in \mathbf{x}(U)$ και κάθε άλλο σύστημα συν/νων $\bar{\mathbf{x}}: V \subset \mathbf{R^2} \to M$ στο **P** η απεικόνιση $\mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}: \bar{\mathbf{x}}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ $(W=\mathbf{x}(U) \cap \bar{\mathbf{x}}(V))$ είναι διαφορίσιμη.

Άρα οι U και **x**(U) είναι αμφιδιαφορικές και επομένως οι επιφάνειες μπορούν να θεωρηθούν τοπικά αμφιδιαφορικές με το $\mathbf{R^2}$.

☑ Σε κάποιες περιπτώσεις και προκειμένου να δείξουμε τη διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης μεταξύ επιφανειών, μας εξυπηρετεί να δείξουμε τη διαφορισιμότητα μιας επέκτασης (σε ένα ευρύτερο σύνολο του $\mathbf{R^3}$) της απεικόνισης αυτής, βάσει της πρότασης:

Πρόταση

Αν M_1, M_2 *κανονικές επιφάνειες και* $V \subset \mathbf{R^3}$ *έτσι ώστε* $M_1 \subset V$ *και* $\mathbf{f}: V \to \mathbf{R^3}$ *μια διαφορίσιμη απεικόνιση τέτοια ώστε* $\mathbf{f}(M_1) \subset M_2$, *τότε η απεικόνιση περιορισμός της* **f** *στη* M_1 (**f**: $M_1 \to M_2$) *είναι διαφορίσιμη*.

Αν M_1 μια κανονική επιφάνεια κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ και M_2 μια κανονική επιφάνεια κλάσεως C^n $(n \geq 1)$, τότε η απεικόνιση **f**: $M_1 \to M_2$ θα λέγεται **κανονική διαφορίσιμη απεικόνιση της M_1 στη M_2 κλάσεως C^r $(r \leq \min(m,n))$**, αν για κάθε σύστημα συν/νων $\mathbf{x_1}=\mathbf{x_1}(u,v)$ (με πεδίο ορισμού το U) με την εικόνα του στην M_1, η σύνθετη απεικόνιση $\mathbf{x_2}=\mathbf{x_2}(u,v)=\mathbf{f}(\mathbf{x_1}(u,v))$ του U στην M_2 είναι κανονική παραμετρική παράσταση κλάσεως C^r $(r \leq \min(m,n))$.

Σημειώνουμε ότι: αν η **f** έχει την ιδιότητα η $\mathbf{x_2}=\mathbf{f}(\mathbf{x_1}(u,v))$ να είναι κανονική παραμετρική παράσταση κλάσεως C^r για κάθε σύστημα συν/νων $\mathbf{x_1}$ μιας βάσεως με την εικόνα του στην M_1, τότε η **f** έχει την ιδιότητα αυτή για όλα τα συστήματα συν/νων με την εικόνα τους στην επιφάνειας M_1, πράγμα που σημαίνει ότι αρκεί στην πράξη να ελέγχουμε τη σύνθεση $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}(u,v))$ μόνο για μια οικογένεια συστημάτων συν/νων των οποίων οι εικόνες καλύπτουν την M_1.

Παρατηρήσεις

☑ Μια κανονική διαφορίσιμη απεικόνιση κλάσεως C^r μεταξύ επιφανειών, απεικονίζει μια περιοχή συν/νων της M_1 σε μια περιοχή συν/νων της M_2, βάσει της πρότασης:

Πρόταση

Αν **f** *είναι μια κανονική απεικόνιση* **f**: $M_1 \to M_2$ *κλάσεως* C^r *(το r όπως ορίστηκε προηγούμενα), τότε για κάθε σημείο* **P** *της* M_1 *υπάρχει σύστημα συν/νων* $\mathbf{x_1}= \mathbf{x_1}(u,v)$ *της* M_1*, που περιέχει το* **P***, τέτοιο ώστε η σύνθεση* $\mathbf{x_2}=\mathbf{f}(\mathbf{x_1}(u,v))$ *να είναι επίσης ένα σύστημα συν/νων της* M_2 *(που περιέχει το* $\mathbf{f}(\mathbf{P})$*).*

☑ Μια κανονική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών, απεικονίζει τις κανονικές καμπύλες της μιας επιφάνειας σε κανονικές καμπύλες της άλλης βάσει της πρότασης:

Πρόταση

Αν **f** *είναι μια κανονική απεικόνιση* **f**: $M_1 \to M_2$ *κλάσεως* C^r *και* $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(t)$ *μια κανονική καμπύλη της* M_1 *κλάσεως* C^r*, τότε η* $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(t)=\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ *είναι μια κανονική καμπύλη της* M_2 *κλάσεως* C^r.

Σημειώνουμε ότι, στα παρακάτω και όπου αναφερόμαστε σε απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών θα εννοούμε κανονικές απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών.

2.8 Εφαπτόμενος χώρος, Εφαπτόμενο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, Συνεκτικό, Κατά τόξο συνεκτικό σύνολο και επιφάνειες

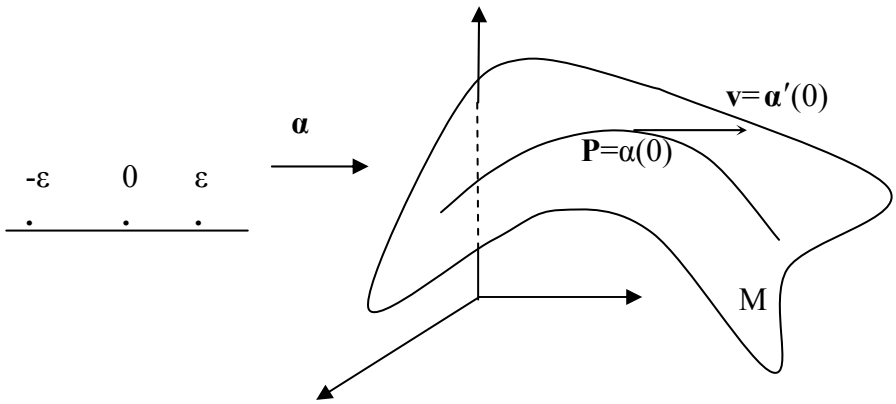
Σε αντιστοιχία με την έννοια του εφαπτόμενου διανύσματος μιας κανονικής καμπύλης, θα μπορούσαμε να μιλήσουμε και για το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο (αρχή του διανύσματος) μιας κανονικής επιφάνειας, μέσω όμως μιας καμπύλης της επιφάνειας που διέρχεται από το σημείο αυτό και έχει για διάνυσμα ταχύτητας το εν λόγω διάνυσμα.

Θα ορίσουμε σαν **εφαπτόμενο χώρο** σε ένα σημείο **P** του $\mathbf{R}^3$ (ή γενικότερα του $\mathbf{R}^n$), το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^3$ που έχουν για αρχή τους το **P**. Θα τον συμβολίζουμε μάλιστα: $T_P\mathbf{R}^3$.

Έστω M μια κανονική επιφάνεια και **P** ένα σημείο της. Ένα διάνυσμα **v** του εφαπτόμενου χώρου $T_P\mathbf{R}^3$ θα καλείται **εφαπτόμενο διάνυσμα της κανονικής επιφάνειας M στο P** αν και μόνο αν υπάρχει μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)$ της επιφάνειας με

$$\boldsymbol{\alpha}: I=(-\varepsilon,\varepsilon)\subset \mathbf{R}\to M, \text{ έτσι ώστε } \boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P} \text{ και } \boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$$

ή αλλιώς, όταν υπάρχει μια καμπύλη της επιφάνειας που διέρχεται από το **P** και η οποία έχει αρχική ταχύτητα **v** (σχήμα 2.19).



Σχήμα 2.19

Παρατήρηση

Αν $\mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$ είναι ένα σύστημα συν/νων με $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ του οποίου η εικόνα περιέχει το $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q})=\mathbf{x}(u_0,v_0)$), τότε για τις παραμετρικές γραμμές (ως προς το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}$) $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u_0+t,v_0)$ και $\boldsymbol{\beta}(t)=(u_0,v_0+t)$ (δυνατότητα παραμετρικοποίησης της καμπύλης της επιφάνειας λόγω της διαφορισιμότητας των u,v), τα εφαπτόμενα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}'(0)$ και $\boldsymbol{\beta}'(0)$ είναι αντίστοιχα των $\mathbf{x_u}(u_0,v_0)$ και $\mathbf{x_v}(u_0,v_0)$.

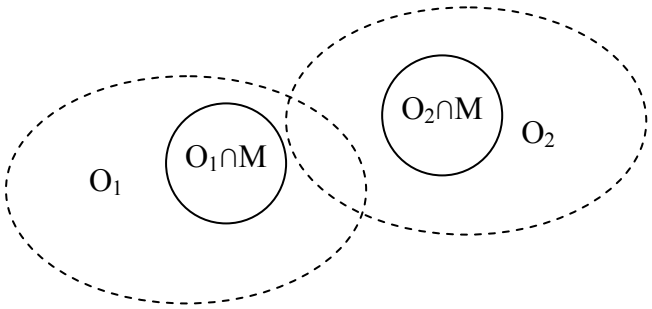
Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τους ορισμούς **συνεκτικού** και **κατά τόξο συνεκτικού συνόλου**.

Έστω ένα σύνολο M που αποτελείται από δύο κλειστούς δίσκους ξένους μεταξύ τους (σχήμα 2.20). Το σύνολο M θα λέγεται **μη συνεκτικό** όταν υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 έτσι ώστε:

α) $M \subseteq O_1 \cup O_2$ (τα O_1,O_2 καλύπτουν το M).

β) $O_1 \cap M \neq \varnothing$, $O_2 \cap M \neq \varnothing$ (καθένα από τα O_1,O_2 να έχει μη κενή τομή με το M).

γ) $(O_1 \cap M) \cap (O_2 \cap M) = O_1 \cap O_2 \cap M = \varnothing$ (οι τομές των O_1,O_2 με το M είναι ξένες μεταξύ τους.



Σχήμα 2.20

Ένα μη κενό σύνολο M θα λέγεται συνεκτικό, όταν δεν είναι μη συνεκτικό και αυτό θα συμβαίνει όταν κάθε κλειστή καμπύλη του M μπορεί, με μια συνεχή απεικόνιση, να συρρικνωθεί σε ένα σημείο του M.

Παρατήρηση

Αν η αφαίρεση ενός αριθμήσιμου πλήθους ανοιχτών κύκλων (αφαιρούμε το εσωτερικό του δίσκου ενώ διατηρούμε στο σχήμα το σύνορό του) από ένα σχήμα δίνει ένα σχήμα που αποτελεί ενιαίο τμήμα, τότε το σύνολο των σημείων του σχήματος αυτού είναι ένα συνεκτικό σύνολο (Vilenkin, 1997, σελ. 153).

Στο $\mathbf{R}$ τα μόνα συνεκτικά (υπο)σύνολα είναι τα διαστήματα, στο $\mathbf{R}^2$ είναι εκείνα τα υποσύνολά του που περιέχουν κάθε φραγμένο υποσύνολο που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη τους ενώ στο $\mathbf{R}^3$ είναι τα ανοικτά διαστήματα, οι ανοικτές σφαίρες , κάθε ανοικτό και κυρτό σύνολο κ.α.

Ένα μη κενό σύνολο M θα λέγεται **κατά τόξο συνεκτικό**, αν κάθε ζεύγος σημείων του μπορεί να ενωθεί με ένα συνεχές τόξο που περιέχεται στο M. Δηλαδή, αν για κάθε $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2} \in M$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\mathbf{f}(t)$, $t \in [0,1]$ έτσι ώστε οι τιμές $\mathbf{f}(t)$ να ανήκουν στο M για κάθε t και $\mathbf{f}(0)=\mathbf{x_1}$, $\mathbf{f}(1)=\mathbf{x_2}$.

Η σύνδεση συνεκτικότητας και κατά τόξο συνεκτικότητας γίνεται μέσω της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση

Ένα σύνολο που είναι κατά τόξο συνεκτικό είναι και συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Αν όμως το σύνολο είναι συνεκτικό και ανοικτό (τόπος) τότε είναι και κατά τόξο συνεκτικό.

Επειδή είναι πιθανόν να μην υπάρχει ένα σύστημα συν/νων που η εικόνα του να περιέχει ολόκληρη την (κανονική) καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)$ κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ μιας επιφάνειας, για αυτό εργαζόμαστε σε ένα συνεκτικό (υπο)σύνολο που να περιέχει το ίχνος της καμπύλης και το οποίο να περιέχεται στην εικόνα ενός συστήματος συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$. Πέρα από αυτό, εμείς εργαζόμαστε συνήθως σε **κατά τόξο συνεκτικές επιφάνειες**, σε επιφάνειες δηλαδή για τις οποίες για δύο οποιαδήποτε σημεία τους $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ υπάρχει καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $[0,l] \to M$ έτσι ώστε $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}(1)=\mathbf{Q}$.

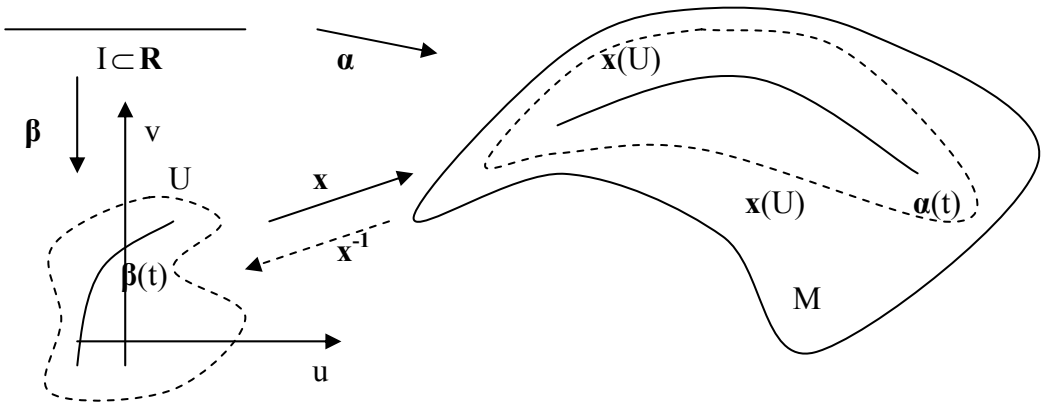
Θα δούμε τώρα ότι κάθε κανονική καμπύλη μιας επιφάνειας αποτελεί (τοπικά) την εικόνα της σύνθεσης, μιας κανονικής καμπύλης του επιπέδου με το σύστημα συν/νων που περιέχει το ίχνος της καμπύλης της επιφάνειας (ή ένα συνεκτικό υποσύνολό του). Έτσι, προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις καμπύλες των επιφανειών θα μπορούμε να αναχθούμε σε καμπύλες των οποίων τα ίχνη βρίσκονται σε ανοικτά (υπο)σύνολα του $\mathbf{R}^2$ (επιπέδου).

Θεώρημα

Έστω M *μια κανονική επιφάνεια και* $\mathbf{x}$ *ένα σύστημα συν/νων* $\mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$. *Αν για την καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$ *τάξεως* C^m $(m \geq 1)$ *της επιφάνειας* M *είναι* $\boldsymbol{\alpha}$: $I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{x}(U) \subseteq M$, *τότε υπάρχει μοναδική κανονική καμπύλη* $\boldsymbol{\beta}(t)=(u(t),v(t))$ *τάξεως* C^m $(m \geq 1)$ *έτσι ώστε να ισχύει:* $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\mathbf{x} \circ \boldsymbol{\beta})(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$, $t \in I$, $(u(t),v(t)) \in \mathbf{R}^2$.

Απόδειξη

Επειδή οι $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{x}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ με το $\mathbf{x}$ ένα σύστημα συν/νων $\mathbf{x}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$, ορίζεται η σύνθεση $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha}$: $I \to U \subset \mathbf{R}^2$ η οποία είναι διαφορίσιμη κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ με $\boldsymbol{\beta}(t)=(\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha})(t)=(u(t),v(t))$ άρα $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\mathbf{x} \circ \boldsymbol{\beta})(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ (σχήμα 2.21).



Σχήμα 2.21

Η μοναδικότητα της $\boldsymbol{\beta}$ προκύπτει από τη μοναδικότητα των $u(t),v(t)$: $I \to R$. Πράγματι, αν υπήρχαν δύο άλλες συναρτήσεις $\bar{u}, \bar{v}$ για τις οποίες να ισχύει επίσης $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(\bar{u}(t),\bar{v}(t))$ τότε $(u(t),v(t))=(\mathbf{x}^{-1} \circ \boldsymbol{\alpha})(t)=\mathbf{x}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(t))=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(\bar{u}(t),\bar{v}(t))=(\bar{u}(t),\bar{v}(t))$.

Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι: επειδή η **β** είναι μια κανονική καμπύλη ($\boldsymbol{\beta}'(t) \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} \neq 0$ και $\frac{dv}{dt} \neq 0$) και απεικόνιση **x** είναι ένα σύστημα συν/νων ($\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$ και τα $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ γραμμικά ανεξάρτητα), η **α** είναι μια κανονική καμπύλη.

2.9 Εφαπτόμενο διάνυσμα και εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας σε σημείο της, Βάση του εφαπτόμενου επιπέδου κανονικής επιφάνειας, Το διαφορικό της απεικόνισης μεταξύ (κανονικών) επιφανειών

Με τα θεωρητικά μαθηματικά εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί μέχρι στιγμής, μπορούμε να δούμε ότι, με αναφορά στις παραμετρικές καμπύλες μιας κανονικής επιφάνειας M και μάλιστα στα εφαπτόμενα διανύσματά τους σε κάθε σημείο τους, θα μπορέσουμε να μεταβούμε στην πολύ σημαντική έννοια (κυρίαρχη για την περαιτέρω μαθηματική περιγραφή μας) τους εφαπτόμενου επιπέδου μιας κανονικής επιφάνειας.

Το εφαπτόμενο επίπεδο αποτελεί μια «εξωτερική» της επιφάνειας έννοια, τα διανύσματα που το παράγουν όμως μπορούν να γίνουν, με τη βοήθεια των συστημάτων συν/νων της επιφάνειας, διανύσματα ταχύτητας δύο παραμετρικών γραμμών της επιφάνειας, που είναι «εσωτερικά» στοιχεία της επιφάνειας.

Έστω M μια κανονική επιφάνεια και **P** ένα σημείο της. Ένα διάνυσμα **v** του εφαπτόμενου χώρου $T_P\mathbf{R}^3$ γύρω από το **P** καλείται **εφαπτόμενο διάνυσμα της M στο P**, αν υπάρχει μία καμπύλη **α**: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbf{R} \to M$, τέτοια ώστε $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$ ή αλλιώς, αν υπάρχει μια καμπύλη που διέρχεται από το **P** και έχει αρχική ταχύτητα **v** (σχήμα 1.17).

Έστω τώρα ένα σύστημα συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$ γύρω από ένα σημείο $\mathbf{P}=\mathbf{x}(\mathbf{Q})=\mathbf{x}(u_0,v_0)$, $\mathbf{Q} \in U$, με $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. **Εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας M στο σημείο της P** ($T_P(M)$), καλούμε το πεδίο τιμών της απεικόνισης του διαφορικού του **x** στο $\mathbf{Q} \in U$, $d_Q\,\mathbf{x}: T_Q\mathbf{R}^2 \to T_P\mathbf{R}^3$ ($T_Q\mathbf{R}^2$, $T_P\mathbf{R}^3$ εφαπτόμενοι χώροι γύρω από τα σημεία **Q**,**P** αντίστοιχα).

Σημειώνουμε ότι: επειδή η απεικόνιση **x** είναι κανονική, ορισμένη σε μια περιοχή του **Q**, η παράγωγος απεικόνιση $d_Q\,\mathbf{x}$ θα είναι μια 1-1 απεικόνιση και το σύνολο τιμών τα $d_Q\,\mathbf{x}\,(T_Q\mathbf{R}^2)$ θα αποτελεί, σύμφωνα με τη Γραμμική Άλγεβρα, έναν διανυσματικό (υπο)χώρο του $T_P\mathbf{R}^3$ διάστασης n-1=3-1=2, θα αποτελεί δηλαδή ένα επίπεδο συντεταγμένων.

Παρατήρηση

Το εφαπτόμενο επίπεδο δεν εξαρτάται από το σύστημα συν/νων **x** που επιλέγουμε, είναι δηλαδή το ίδιο ανεξάρτητα από το σύστημα συν/νων που έχουμε επιλέξει.

Πράγματι, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

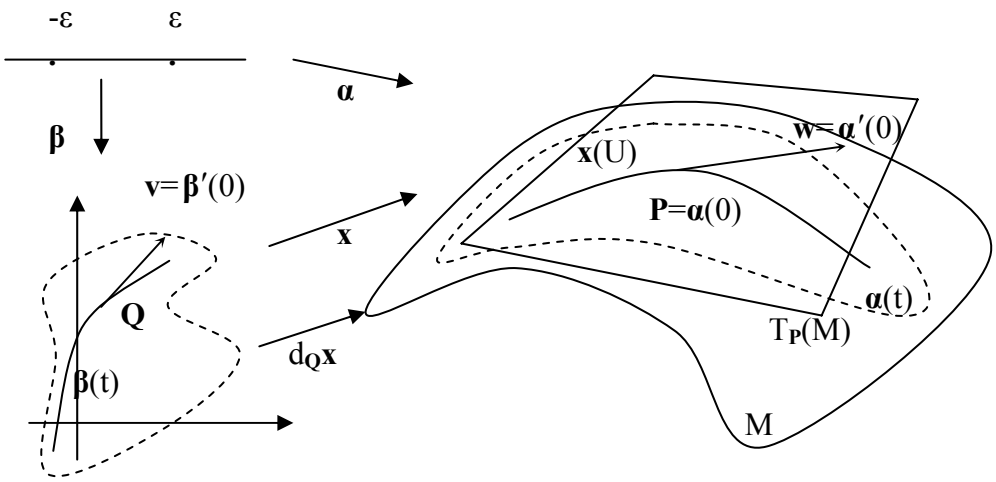
Αν M *είναι μια κανονική επιφάνεια,* **P** *ένα σημείο της και το σύστημα συντεταγμένων* **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$ *με* $\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, *το οποίο ορίζει μια περιοχή συν/νων της* M *γύρω από το* **P** *με* $\mathbf{x}(\mathbf{Q})=\mathbf{P}$ ($\mathbf{Q}=(u_0,v_0) \in U$), *τότε το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων του* M *στο* **P** ($T_P(M)$) *ταυτίζεται με το σύνολο (επίπεδο)* $d_Q\,\mathbf{x}\,(T_Q\mathbf{R}^2)$.

Απόδειξη

■ Έστω **w** είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα τα κανονικής επιφάνειας M με αρχή το **P**. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα υπάρχει καμπύλη **α**(t) (δεν είναι μοναδική) με **α**: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset \mathbf{R}\to M$, έτσι ώστε **α**(0)=**P** και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{w}$. Είδαμε τότε ότι, η απεικόνιση: $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{x}^{-1}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\to U\subset \mathbf{R}^2$ είναι καμπύλη του U οπότε: $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta}$ και από τον κανόνα τα σύνθετης συνάρτησης θα έχουμε: $\boldsymbol{\alpha}'(t)=\dfrac{d\,\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}(t))}{dt}\cdot\dfrac{d\,\boldsymbol{\beta}(t)}{dt}=d_{\boldsymbol{\beta}(t)}\,\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}'(t)$.

Άρα $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'(0)=d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\beta}'(0)=d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}'(0))$ και $\mathbf{w}\in d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2)$ μια και $\boldsymbol{\beta}'(0)\in T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2$ (σχήμα 2.22).

Επομένως, αν $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{P}}(M)$ τότε $\mathbf{w}\in d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2)$.



Σχήμα 2.22

■ Έστω $\mathbf{w}\in d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2)$, δηλαδή $\mathbf{w}=d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(\mathbf{v})$ με $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2$. Τότε η καμπύλη **β**: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset \mathbf{R}\to U$, με **β**(t)=**Q**+t**v** είναι μια καμπύλη του $\mathbf{R}^2$ με διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\beta}'(0)=\mathbf{v}$. Και η απεικόνιση $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset \mathbf{R}\to \mathbf{x}(U)\subset M$ είναι μια καμπύλη της M με $\boldsymbol{\alpha}(0)=(\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta})(0)=(\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}(0))=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}'(0))=d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ (από τον ορισμό του διαφορικού του **x** στο **Q**) και το **w** είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της M στο **P**.

Επομένως, αν $\mathbf{w}\in d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2)$ τότε $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{P}}(M)$.

Τελικά, το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της M στο **P** ($T_{\mathbf{P}}(M)$) ταυτίζεται με το σύνολο (επίπεδο) $d_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x}\,(T_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^2)$.

Παρατήρηση

Σε κάθε σημείο **P** μιας κανονικής επιφάνεια M υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{P}}(M)$, που αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα των διαφόρων (όχι μοναδικών) παραμετρικών γραμμών (που διέρχονται από το **P**) και οι οποίες ορίζονται με τη βοήθεια διαφόρων περιοχών συν/νων που περιέχουν το **P**.

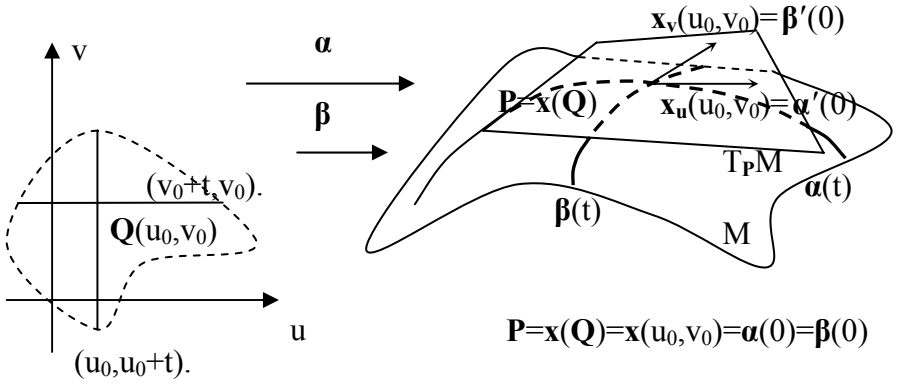
Το ερώτημα που αναδύεται τώρα είναι, ποια διανύσματα αποτελούν μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου; Η κύρια επεξεργασία των στοιχείων που είναι απαραίτητη ώστε να δοθεί η απάντηση έχει ήδη γίνει.

Βάση του εφαπτόμενου επιπέδου μιας κανονικής επιφάνειας M σε ένα σημείο της $\mathbf{P}(u_0,v_0)$ αποτελούν τα (εφαπτόμενα στις παραμετρικές γραμμές και στην

επιφάνεια) διανύσματα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{x_u}(u_0,v_0)$ και $\boldsymbol{\beta}'(0)=\mathbf{x_v}(u_0,v_0)$, των παραμετρικών γραμμών την επιφάνειας M (για το σύστημα συν/νων **x**), όπου

$\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M$ με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u_0+t,v_0)$ και $\boldsymbol{\beta}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M$ με $\boldsymbol{\beta}(t)=\mathbf{x}(u_0,v_0+t)$.

Πράγματι, εξαιτίας της συνθήκης II ($\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\neq\mathbf{0}$) τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, παράγουν και τον (υπο)χώρο (επίπεδο) $T_P(M)$ (σχήμα 2.23).



Σχήμα 2.23

Επειδή τώρα το εφαπτόμενο επίπεδο $T_P(M)$ μιας επιφάνειας M στο σημείο της **P** είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbf{R}^2$, εφοδιάζοντάς τον με μια μετρική μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μετρική αυτή είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του Ευκλείδειου χώρου.

Στην περίπτωση αυτή, με τα διανύσματα $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$ να αποτελούν μια (τυχαία) βάση του, δύο οποιαδήποτε διανύσματα **v**,**w** του εφαπτόμενου επιπέδου $T_P(M)$ θα γράφονται: $\mathbf{v}=v^1\mathbf{x_u}+v^2\mathbf{x_v}$ και $\mathbf{w}=w^1\mathbf{x_u}+w^2\mathbf{x_v}$, οπότε το εσωτερικό γινόμενο των **v**,**w** θα είναι ίσο με:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>=[v^1\ v^2]\begin{bmatrix}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>\\ <\mathbf{x_v},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}>\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^1\\ w^2\end{bmatrix}.$$

Προφανώς, διαφορετικές βάσεις δίνουν διαφορετικούς πίνακες ενώ στην περίπτωση που είναι **v**=**w** τότε $<\mathbf{w},\mathbf{w}>=\|\mathbf{w}\|^2=[w^1\ w^2]\begin{bmatrix}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>\\ <\mathbf{x_v},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}>\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^1\\ w^2\end{bmatrix}$, με τα w^1,w^2 να αποτελούν τις συν/νες του $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'(0)$.

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>\\ <\mathbf{x_v},\mathbf{x_u}> & <\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}>\end{bmatrix}$ είναι υπολογισμένος στο σημείο **P** και είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Θεώρημα

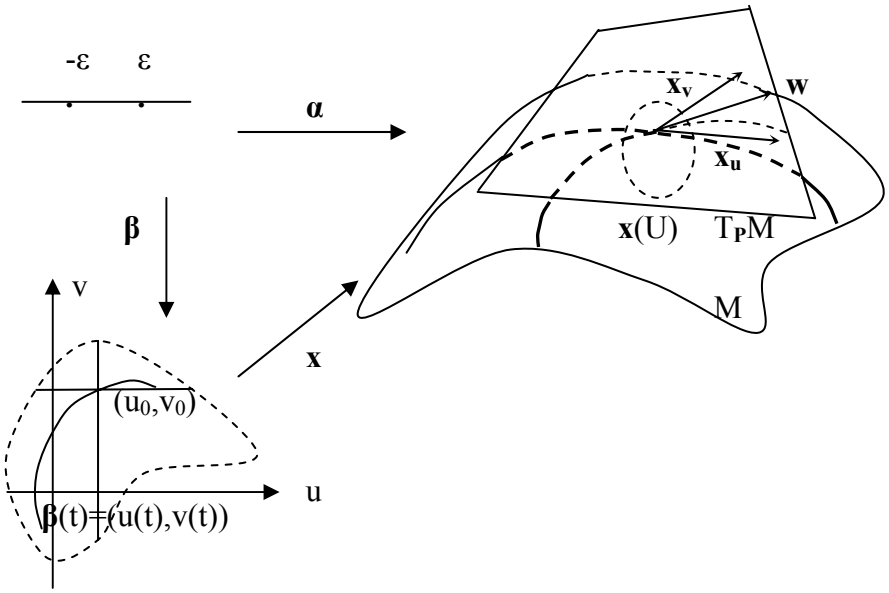
Για κάθε $\mathbf{w}\in T_P(M)$ *υπάρχουν* $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ *έτσι ώστε να ισχύει:* $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{x_u}+\beta\mathbf{x_v}$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα υπάρχει καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to\mathbf{x}(U)\subset M$, για την οποία θα ισχύει: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta})(t)=(\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta})(t))=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ (σχήμα 2.24).

Τότε το $\mathbf{w}\in T_P(M)$ θα γράφεται: $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'(0)=d_Q\,\mathbf{x}(\boldsymbol{\beta}'(0))=\dfrac{d(\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\beta}(t))}{dt}\Big|_{t=0}$ και από την παραγώγιση της σύνθετης συνάρτησης:

$$\mathbf{w}=\frac{d(\mathbf{x}(u(t),v(t)))}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{d(\mathbf{x}(u(t),v(t))}{du}\Big|_{t=0}\cdot\frac{du(t)}{dt}\Big|_{t=0}+\frac{d(\mathbf{x}(u(t),v(t))}{dv}\Big|_{t=0}\cdot\frac{dv(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$
$$=\mathbf{x_u}(u_0,v_0)\,u'(0)+\mathbf{x_v}(u_0,v_0)\,v'(0)=\mathbf{x_u}(\mathbf{Q})\,u'(0)+\mathbf{x_v}(\mathbf{Q})\,v'(0),$$
επομένως για το διάνυσμα **w** υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha=u'(0)$ και $\beta=v'(0)\in\mathbf{R}$ έτσι ώστε: $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{x_u}+\beta\mathbf{x_v}$.



Σχήμα 2.24

Παρατήρηση

Προφανώς, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $\mathbf{x_0}$ της εικόνας ενός συστήματος συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$ δίνεται από την εξίσωση: $y=\mathbf{x_0}+h\mathbf{x_u}+k\mathbf{x_v}$, $h,k\in\mathbf{R}$.

Στην περίπτωση μιας (διαφορίσιμης) απεικόνισης **f** μεταξύ επιφανειών ($\mathbf{f}$: $M_1\to M_2$ ή $\mathbf{f}$: $V_1\subset M_1\to M_2$), το διαφορικό (παράγωγος) της **f** στο σημείο $\mathbf{P}\in M_1$ είναι η γραμμική απεικόνιση $d_{\mathbf{P}}\mathbf{f}$: $T_{\mathbf{P}}(M_1)\to T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$, δηλαδή η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί τα διανύσματα του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\mathbf{P}}(M_1)$ της M_1 στο σημείο της **P**, στα διανύσματα του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$ της M_2 στο σημείο της **f**(**P**).

Το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$ εξαρτάται μόνο: από το σημείο **P** της M_1 (που αποτελεί την εικόνα $\boldsymbol{\alpha}(0)$ μιας τυχαίας καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ της M_1 η οποία διέρχεται από το **P**), το διάνυσμα **w** (το διάνυσμα ταχύτητας της παραπάνω καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$) και από την απεικόνιση **f** μεταξύ των M_1, M_2. Προφανώς, για όλες τις καμπύλες της M_1 που διέρχονται από το ίδιο σημείο **P** και έχουν το ίδιο διάνυσμα ταχύτητας **w** στο **P**, το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$ της M_2 στο **f**(**P**) παραμένει το ίδιο.

Επιπλέον ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω **f** *μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δύο κανονικών επιφανειών* M_1 *και* M_2 ($\mathbf{f}$: $M_1\to M_2$ *ή* $\mathbf{f}$: $V_1\subset M_1\to M_2$). *Αν* $\mathbf{P}\in V_1$ *με* $\mathbf{P}=\boldsymbol{\alpha}(0)$ *και* $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'(0)$ *είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της* $\boldsymbol{\alpha}$ *στο σημείο* **P** *για μια διαφορίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to V_1$, *τότε:*

α) *Η καμπύλη* $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{f}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M_2$ *είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της* $\boldsymbol{\alpha}$.

β) *Η απεικόνιση* $d_{\mathbf{P}}\mathbf{f} : T_{\mathbf{P}}(M_1) \to T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$, *που θα αποκαλούμε* ***παράγωγο απεικόνιση*** *ή* ***διαφορικό της*** **f** ***στο*** **P**, *είναι γραμμική.*

Απόδειξη

α) Ας είναι $\mathbf{x}(u,v)$ και $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{u}, \bar{v})$ δύο συστήματα συν/νων γύρω από τα **P** και **f**(**P**) αντίστοιχα. Έστω ότι σε αυτά τα συστήματα η **f** εκφράζεται ως: $\mathbf{f}(u,v)=(f^1(u,v), f^2(u,v))$ ενώ η καμπύλη **α** ως $\alpha(t)=(u(t),v(t))$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Τότε η καμπύλη $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{f}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbf{R} \to M_2$ εκφράζεται ως: $\boldsymbol{\beta}(t)= (f^1(u(t),v(t)), f^2(u(t),v(t)))$ και η έκφραση της $\boldsymbol{\beta}'(0)$ στη βάση $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ είναι:

$$\boldsymbol{\beta}'(0)=\left(\frac{\theta f^1(u(0))}{\theta u}u'(0)+\frac{\theta f^1(v(0))}{\theta v}v'(0),\ \frac{\theta f^2(u(0))}{\theta u}u'(0)+\frac{\theta f^2(v(0))}{\theta v}v'(0)\right),$$

άρα η $\boldsymbol{\beta}'(0)$ εξαρτάται μόνο από την **f** και τις συν/νες $u'(0)$, $v'(0)$ του **w** στη βάση $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, είναι επομένως ανεξάρτητη της **α**.

β) Σύμφωνα με τα παραπάνω η $\boldsymbol{\beta}'(0)$ γράφεται και ως: $\boldsymbol{\beta}'(0)=\begin{bmatrix} \frac{\theta f^1}{\theta u} & \frac{\theta f^1}{\theta v} \\ \frac{\theta f^2}{\theta u} & \frac{\theta f^2}{\theta v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$

$=d_{\mathbf{P}}\mathbf{f}(\mathbf{w})$ και επομένως το $d_{\mathbf{P}}\mathbf{f}(\mathbf{w})$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του $T_{\mathbf{P}}(M_1)$ στο $T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$, της οποίας ο πίνακας στις βάσεις $\{\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\}$ του $T_{\mathbf{P}}(M_1)$ και $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ του $T_{\mathbf{f(P)}}(M_2)$ είναι ο παραπάνω.

Παρατήρηση

Η ύπαρξη και η συνέχεια («ομαλή» μεταβολή από σημείο σε σημείο) του εφαπτόμενου επιπέδου μιας κανονικής επιφάνειας που προκύπτει ως εικόνα μιας συνάρτησης **f**, εξαρτάται μόνο από την ύπαρξη και τη συνέχεια των μερικών παραγώγων $1^{\eta\varsigma}$ τάξης της **f** χωρίς να ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή μπορεί μια επιφάνεια να δέχεται εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της χωρίς απαραίτητα να είναι επαρκώς διαφορίσιμη (ύπαρξη μερικών παραγώγων ανώτερης τάξης) ώστε η επιφάνεια να καταστεί κανονική επιφάνεια.

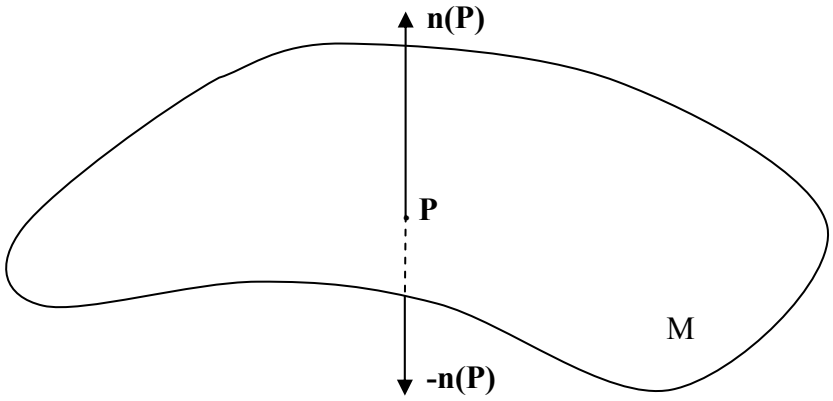
2.10 Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κανονικής επιφάνειας, γωνία δύο κανονικών επιφανειών

Άρρηκτα συνδεδεμένο με το εφαπτόμενο επίπεδο μιας κανονικής επιφάνειας σε ένα σημείο της, είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Μέσω αυτού θα οριστεί ο προσανατολισμός της επιφάνειας, η γωνία μεταξύ επιφανειών καθώς και οι πολύ σημαντικές για την ανάπτυξη της Εσωτερικής Γεωμετρίας μιας επιφάνειας, απεικονίσεις Gauss και Weingarten.

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο **P** πάνω σε μια κανονική επιφάνεια M τότε μπορούμε να βρούμε δύο μοναδιαία και κάθετα προς την επιφάνεια διανύσματα (κάθετα στο $T_{\mathbf{P}}(M)$ στο **P**) και μάλιστα με αντίθετη φορά. Αν το ένα το ονομάσουμε **n**(**P**) τότε το άλλο θα είναι το –**n**(**P**), με τα δυο να βρίσκονται πάνω στην κάθετη διεύθυνση προς το $T_{\mathbf{P}}(M)$ στο **P** (σχήμα 2.25).

Γενικά δεν είναι πάντα δυνατόν να επιλέγουμε ένα από τα κάθετα διανύσματα με τρόπο ώστε αυτό να μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο πάνω σε ολόκληρη την επιφάνεια. Όταν όμως πρόκειται για ένα τμήμα της επιφάνειας που καλύπτεται εξ'

ολοκλήρου από την περιοχή συν/νων ενός συστήματος $\mathbf{x}(u,v)$, τότε επιλέγουμε εκείνο το κάθετο διάνυσμα που μαζί με τα $\mathbf{x_u}$,$\mathbf{x_v}$ αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα στο **P**.



Σχήμα 2.25

Με αυτόν τον τρόπο επιλογής το διάνυσμα $\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{P})=\dfrac{\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}$ είναι μοναδιαίο, είναι κάθετο στο $T_P(M)$ (κάθετο στα $\mathbf{x_u}$,$\mathbf{x_v}$) και τέλος μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο στην περιοχή συν/νων που ορίζει το **x** πάνω στην M, μια και οι συναρτήσεις $\mathbf{x_u}$, $\mathbf{x_v}$ είναι τουλάχιστον κλάσεως C^o (αφού η **x** είναι κλάσεως C^m, $m\geq 1$) και $\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\neq\mathbf{0}$.

Το παραπάνω διάνυσμα **n** θα καλείται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς την επιφάνεια M στο P**.

Σημειώνουμε ότι: στην περίπτωση που το **P** ανήκει, εκτός από την περιοχή συν/ων που προκύπτει από το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$ και σε μια άλλη περιοχή συν/νων που προκύπτει (έστω) από το σύστημα $\overline{\mathbf{x}}(\overline{u},\overline{v})$, τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{n},\overline{\mathbf{n}}$ (αντίστοιχα) προς την επιφάνεια M στο σημείο της **P** και ως προς τα δύο συστήματα συν/νων, θα είναι ή ίσα ή αντίθετα, ανάλογα με το πρόσημο της (υπο)ορίζουσας $\det\dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\overline{u},\overline{v})}$. Αυτό είναι κάτι που θα αποδείξουμε στη επόμενη παράγραφο όταν θα ασχοληθούμε με τον προσανατολισμό μιας (κανονικής) επιφάνειας.

Παρατηρήσεις

☑ Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το **P** και είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο στο **P** (είναι ανεξάρτητη του **x**) καλείται **κάθετος στην M στο P** και στο σημείο $\mathbf{x_0}$ μιας περιοχής συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$ δίνεται από την εξίσωση: $y=\mathbf{x_0}+k\mathbf{n}$, $k\in\mathbf{R}$.

☑ Το σύνολο των καθέτων διανυσμάτων μιας κανονικής επιφάνειας M σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου $\mathbf{x}(U)\subset M$, ορίζει ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο στο $\mathbf{x}(U)$: το **μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο**.

Γωνία δύο κανονικών επιφανειών M_1, M_2 στο σημείο τομής τους P, καλείται η γωνία των καθέτων ευθειών των δύο επιφανειών στο σημείο αυτό. Ουσιαστικά πρόκειται για τη γωνία των εφαπτόμενων επιπέδων τους στο **P**.

2.11 Προσανατολίσιμη και προσανατολισμένη επιφάνεια: οι επιφάνειες στάθμης, τα γραφήματα συναρτήσεων, η επιφάνεια της σφαίρας και του ορθού κυλίνδρου είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες, Προσανατολισμένη γωνία εφαπτόμενων διανυσμάτων μιας προσανατολισμένης επιφάνειας

Αν και ο προσανατολισμός μιας (κανονικής) επιφάνειας είναι μια τοπολογική ιδιότητα και επομένως μπορεί να οριστεί με τη χρήση της έννοιας της συνέχειας, εμείς θα προτιμήσουμε να τον ορίσουμε με βάση τη διαφορική δομή (τα συστήματα συν/νων) της επιφάνειας.

Μια κανονική επιφάνεια M θα καλείται **προσανατολίσιμη** (και αντιστρόφως) αν μπορούμε για αυτή να βρούμε ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο, να βρούμε δηλαδή μια διαφορίσμη απεικόνιση **n**: $\mathbf{P} \in M \to \mathbf{n}(\mathbf{P}) \in \mathbf{R}^3$ κλάσεως C^m $(m \geq 1)$, όπου $\mathbf{n}(\mathbf{P})$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $T_{\mathbf{P}}(M)$.

Σημειώνουμε ότι στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πως, εκτός από το διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο σε μια κανονική επιφάνεια διάνυσμα **n**, υπάρχει και το αντίθετό του –**n**, που έχει και αυτό τις ίδιες ιδιότητες με το **n**.

Προσανατολισμένη θα καλείται μια επιφάνεια στην οποία έχουμε επιλέξει ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος, ο οποίος και διατηρείται κατά τη συνεχή μεταβολή του διανύσματος αυτού πάνω στην επιφάνεια.

Στην πραγματικότητα, επειδή σε κάθε σημείο **P** μιας κανονικής επιφάνειας M υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{P}}(M)$, η επιλογή ενός προσανατολισμού στο $T_{\mathbf{P}}(M)$ (για παράδειγμα, αυτού που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού για τα διανύσματα που το παράγουν) επάγει και έναν προσανατολισμό στην ίδια την επιφάνεια.

Θεώρημα

Αν κάθε σημείο μιας κανονικής επιφάνειας ανήκει στην τομή δύο περιοχών συν/νων της επιφάνειας και η τομή αυτή είναι συνεκτικό σύνολο, τότε η επιφάνεια αυτή είναι προσανατολίσιμη.

Απόδειξη

Έστω σημείο **P** μιας κανονικής επιφάνειας M και **x**(u,v) ένα σύστημα συν/νων που η εικόνα του περιέχει το **P**. Επιλέγουμε ως μοναδιαίο κάθετο της επιφάνειας M στο **P** το διάνυσμα $\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{P})=\dfrac{\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}}{\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \|}$. Θεωρώντας τώρα ένα άλλο σύστημα συν/νων $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})$ του οποίου επίσης η εικόνα περιέχει το **P**, στη τομή των δύο περιοχών θα έχουμε: $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = (\mathbf{x_u}\, u_{\bar{u}} + \mathbf{x_v}\, v_{\bar{u}}) \times (\mathbf{x_u}\, u_{\bar{v}} + \mathbf{x_v}\, v_{\bar{v}}) = (\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_u})(u_{\bar{u}} u_{\bar{v}}) + (\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v})(u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}}) + (\mathbf{x_v} \times \mathbf{x_v})(v_{\bar{u}} v_{\bar{v}})$ και λόγω συγγραμμικότητας $(\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_u} = \mathbf{0} = \mathbf{x_v} \times \mathbf{x_v})$ θα είναι: $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = (\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}) \det \dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})}$. Άρα,

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{\|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\|} = \frac{(\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}) \det \dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})}}{\| (\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}) \det \dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})} \|} = \frac{\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}}{\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \|} \frac{\dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})}}{\left| \dfrac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})} \right|} = \mathbf{n}\,\mathrm{sign}\left(\det \frac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})}\right).$$

Λόγω της συνεκτικότητας της τομής των δύο περιοχών συν/νων, το πρόσημο $\text{sign}(\det\frac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})})$ παραμένει σταθερό, -1 ή +1. Ειδικά αν $\det\frac{\theta(u,v)}{\theta(\bar{u},\bar{v})}>0$ τότε τα **n**, $\bar{\mathbf{n}}$ έχουν την ίδια φορά ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα έχουν αντίθετη φορά. Με εναλλαγή των u,v μπορούμε να αλλάζουμε το πρόσημο της ορίζουσας και να κάνουμε το $\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}$ στο **P** να έχουν την ίδια φορά.

Εργαζόμενοι ανάλογα και για κάθε άλλο σημείο της επιφάνειας, μπορούμε με μια οικογένεια περιοχών συν/νων να καλύπτουμε ολόκληρη την επιφάνεια και να έτσι να την καταστήσουμε προσανατολίσιμη.

Σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια μπορούμε να ορίσομε και τη γωνία μεταξύ δύο μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων (δύο μη μηδενικά διανύσματα γίνονται εύκολα μοναδιαία διαιρώντας με το αντίστοιχο μέτρο τους). Έτσι:

Για δύο μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα **v**,**w** σε ένα σημείο μιας προσανατολισμένης επιφάνειας M, ορίζουμε ως **προσανατολισμένη γωνία από το v στο w** τον αριθμό φ για τον οποίο ισχύει: **w**=(cosφ)**v**+(sinφ)J(**v**). Επειδή υπάρχει μοναδική επιλογή της φ στο διάστημα [0,2π), κάθε τέτοια γωνία θα είναι της μορφής φ+2κπ.

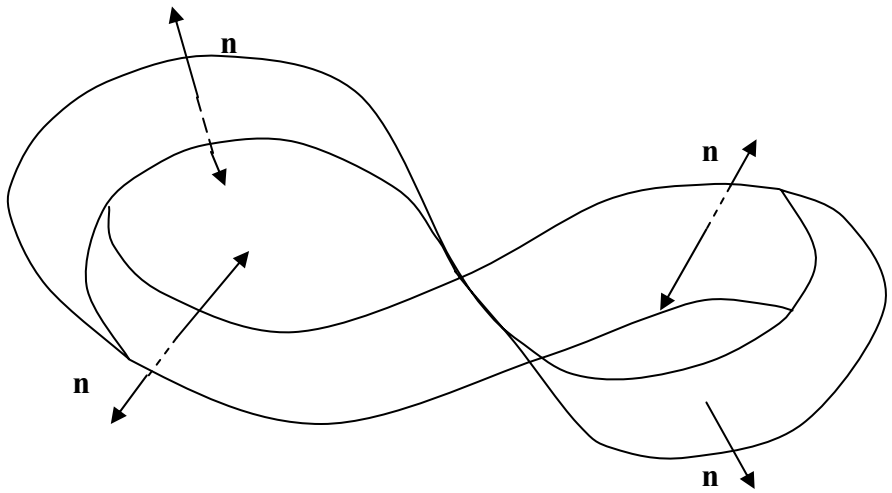
Το σύμβολο J(**v**) είναι ένας γραμμικός τελεστής, ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της M, ορθογώνιο με το **v** και με ίδιο μέτρο με αυτό, που ορίζεται στον εφαπτόμενο χώρο της M μέσω του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ και που περιστρέφει το διάνυσμα **v** κατά γωνία $+90^{o}$. Ονομάζεται δε **τελεστής στροφής της M**.

Παρατηρήσεις

☑ Κατά τετριμμένο τρόπο, κάθε επιφάνεια που καλύπτεται από μία μόνο περιοχή συν/νων είναι προσανατολίσιμη.

☑ Η προσανατολισιμότητα είναι μια ολική ιδιότητα μιας επιφάνειας (μας ενδιαφέρει ολόκληρη η επιφάνεια), μια και κάθε κανονική επιφάνεια είναι πάντα τοπικά προσανατολίσιμη.

☑ Υπάρχουν επιφάνειες που είναι μη προσανατολίσιμες. Μια τέτοια επιφάνεια είναι η λεγόμενη **λωρίδα του Möbius**. Αυτό οφείλεται στο ότι, ένα κάθετο διάνυσμα που ορίζουμε αρχικά σε μια περιοχή της, μπορεί να επεκταθεί σε όλη την επιφάνεια κατά συνεχή τρόπο έτσι ώστε, όταν φτάσουμε στην αρχική περιοχή να έχει αντίθετη φορά (σχήμα 2.26).



Σχήμα 2.26

☑ Εποπτικά, ο προσανατολισμός σχετίζεται με τη φορά του **n** σε σχέση με την καμπύλωση της επιφάνειας. Έτσι, θα χαρακτηρίζεται ως **θετικός ο προσανατολισμός στην περίπτωση που το n «δείχνει προς τη εξωτερικό μέρος της επιφάνειας»** και αρνητικός στην αντίθετη περίπτωση. Αυτό για τη σφαίρα είναι προφανές, για τις άλλες όμως επιφάνειες μένει να προσδιοριστούν επακριβώς οι έννοιες «εξωτερικό» και «εσωτερικό» μέρος της επιφάνειας.

Αντίθετα, μια επιφάνεια στάθμης είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια σύμφωνα με το θεώρημα:

Θεώρημα

Αν f: $\mathbf{R}^3 \to R$ *είναι μια διαφορίσμη συνάρτηση κλάσεως* C^m $(m \geq 1)$ *και* α *μια μη κρίσιμη τιμή της, τότε η κανονική επιφάνεια* $f^{-1}(\alpha)=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 / f(x,y,z)=\alpha\}$ *είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια.*

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι για ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ της $f^{-1}(\alpha)$, το διάνυσμα $(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z})$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της $f^{-1}(\alpha)$ στο $\mathbf{P_0}$, δηλαδή κάθετο σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου αυτού.

Έστω λοιπόν **v** είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της $f^{-1}(\alpha)$ στο $\mathbf{P_0}$. Τότε θα υπάρχει καμπύλη **α**: $(-\varepsilon,\varepsilon) \to f^{-1}(\alpha) \subset \mathbf{R}^3$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P_0}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$. Αν $\alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$ θα έχουμε $f(\alpha(t))=f((\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))=\alpha$.

Με παραγώγιση ως προς t και με εφαρμογή του «κανόνα της αλυσίδας» θα έχουμε: $[f(\boldsymbol{\alpha}(t))]'=0$ οπότε: $\frac{\theta f(\alpha(t))}{\theta x}\cdot\frac{d\alpha^1(t)}{dt}+\frac{\theta f(\alpha(t))}{\theta y}\cdot\frac{d\alpha^2(t)}{dt}+\frac{\theta f(\alpha(t))}{\theta z}\cdot\frac{d\alpha^3(t)}{dt}=0$ και

για t=0: $\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}\cdot\frac{d\alpha^1(0)}{dt}+\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}\cdot\frac{d\alpha^2(0)}{dt}+\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}\cdot\frac{d\alpha^3(0)}{dt}=0$, αφού είναι:

$\boldsymbol{\alpha}(0)=(\alpha^1(0),\alpha^2(0),\alpha^3(0))=\mathbf{P}_0$. Επομένως τα διανύσματα:

$$(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}) \text{ και } (\frac{d\alpha^1(0)}{dt}, \frac{d\alpha^2(0)}{dt}, \frac{d\alpha^3(0)}{dt})=\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$$

είναι κάθετα μεταξύ τους (το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με 0).

Έτσι, το διάνυσμα $(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z})$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της $f^{-1}(\alpha)$ στο σημείο $\mathbf{P_0}$ και το: $\mathbf{n}(\mathbf{P_0})=\dfrac{(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}, \frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z})}{\sqrt{\left(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}\right)^2}}$

είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\mathbf{P_0}$.

Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να οριστεί για κάθε σημείο **P** της $f^{-1}(\alpha)$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση:

$$\mathbf{n}: f^{-1}(\alpha) \to \mathbf{R}^3 \text{ με } \mathbf{n}(\mathbf{P})=\frac{(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x}, \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y}, \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z})}{\sqrt{\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta x}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta y}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta z}\right)^2}},$$

η οποία να αποτελεί ένα διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο πεδίο σε όλη την επιφάνεια στάθμης $f^{-1}(\alpha)$, δηλαδή η $f^{-1}(\alpha)$ είναι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια.

Παρατηρήσεις

☑ Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $f^{-1}(\alpha)$ στο σημείο της $\mathbf{P_0}$ είναι η:

$$\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x}(x-x_0)+\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y}(y-y_0)+\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}(z-z_0)=0$$

☑ Το διάνυσμα $\left(\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x},\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y},\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}\right)$ είναι μη μηδενικό, αφού μια τουλάχιστον από τις ποσότητες $\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta x},\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta y},\frac{\theta f(\mathbf{P_0})}{\theta z}$ είναι μη μηδενική (το α δεν είναι κρίσιμη τιμή της f).

Εφαρμογές

1) *Το γράφημα* Γ_f *μιας διαφορίσιμης συνάρτησης* $f: U\subset \mathbf{R^2}\to \mathbf{R}$, *κλάσεως* C^m $(m\geq 1)$, *είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια, μια και μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια στάθμης της διαφορίσμης συνάρτησης* $g(x,y,z)=z-f(x,y)$ *κλάσεως* C^m $(m\geq 1)$.

Πράγματι:

Με $g(x,y,z)=z-f(x,y)$ και για κάθε σημείο της $\mathbf{P}(x,y,z)$ έχουμε:

$$\frac{\theta g(\mathbf{P})}{\theta x}=-\frac{\theta f(x,y)}{\theta x},\ \frac{\theta g(\mathbf{P})}{\theta y}=-\frac{\theta f(x,y)}{\theta y}\ \text{και}\ \frac{\theta g(\mathbf{P})}{\theta z}=1\neq 0,$$

επομένως κάθε σημείο $\mathbf{P}$ είναι μη κρίσιμο σημείο και κάθε αντίστοιχη τιμή $g(\mathbf{P})$ μη κρίσιμη τιμή. Άρα το 0 είναι μη κρίσιμη τιμή και το σύνολο $g^{-1}(0)=\{(x,y,z)\in \mathbf{R^3}/\ g(x,y,z)=z-f(x,y)=0$ ή $z=f(x,y)\}$ είναι μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης g.

2) *Η επιφάνεια της σφαίρας* $S_R^2=\{(u,v,w)\in \mathbf{R^3}/\ u^2+v^2+w^2=R^2\}$ *είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια, μια και μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια στάθμης της διαφορίσιμης συνάρτησης* f *κλάσεως* C^m $(m\geq 1)$ *με:* $f(u,v,w)=u^2+v^2+w^2-R^2$.

Πράγματι:

Είναι: $f(\mathbf{P})=f(0,0,0)=-R^2\neq 0$ ενώ $\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta u}=0\Leftrightarrow u=0,\ \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta v}\Leftrightarrow v=0,\ \frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta w}\Leftrightarrow w=0,$

επομένως το σημείο $\mathbf{P}(0,0,0)$ είναι μη κρίσιμο σημείο και η τιμή 0 είναι μη κρίσιμη τιμή. Άρα το σύνολο $f^{-1}(0)=\{(u,v,w)\in \mathbf{R^3}/\ f(u,v,w)=u^2+v^2+w^2-R^2=0\}$ είναι μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης f.

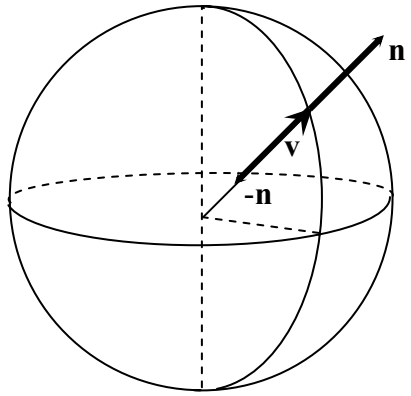
Στην περίπτωση αυτή, ενδιαφέρον παρουσιάζει η εύρεση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\mathbf{n}(\mathbf{P})$ στην επιφάνεια της σφαίρας S_R^2 σε κάποιο σημείο της $\mathbf{P}(u,v,w)$. Αυτό έχει τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης $\mathbf{v}$ του $\mathbf{P}$ ως προς την αρχή O(0,0,0).

Πράγματι:

Ως επιφάνεια στάθμης η S_R^2 θα έχει μοναδιαίο κάθετο το:

$$\mathbf{n}(\mathbf{P})=\frac{\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta u},\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta v},\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta w}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta u}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta v}\right)^2+\left(\frac{\theta f(\mathbf{P})}{\theta w}\right)^2}}=\frac{2(u,v,w)}{\sqrt{(2u)^2+(2v)^2+(2w)^2}}$$

$$=\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\frac{1}{R}\mathbf{v}$$ (σχήμα 2.27).



Σχήμα 2.27

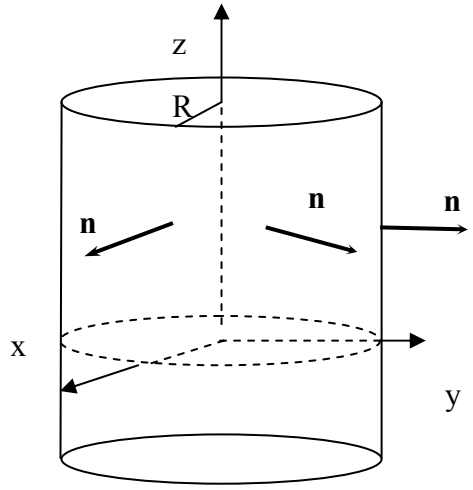
3) *Η επιφάνεια του (ορθού κυκλικού) κυλίνδρου* $\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3/\ x^2+y^2=R^2,\ z\in \mathbf{R}\}$ *είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια*

Θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε την επιφάνεια του κυλίνδρου ως επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2-R^2$ αλλά θα προτιμήσουμε να εργαστούμε με τη βοήθεια του συστήματος συν/νων:

$\mathbf{x}(u,v)=(R\cos u,R\sin u,bv)$, με $(u,v)\in U=\{(u,v)\in \mathbf{R}^2/\ 0<u<2\pi,\ v\in \mathbf{R}\}$ και $b\in \mathbf{R}$.

Είδαμε ότι τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα της επιφάνειας του παραπάνω κυλίνδρου είναι τα: $\mathbf{x_u}=(-R\sin u,R\cos u,0)$ και $\mathbf{x_v}=(0,0,b)$ οπότε:

$$\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}=(Rb\cos u,Rb\sin u,0) \text{ και } \|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|=Rb.$$



Σχήμα 2.28

Τότε: $\mathbf{n}(P)=\frac{\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}=(\cos u,\sin u,0)=\frac{1}{R}(R\cos u,R\sin u,0)=\frac{1}{R}(x,y,0)$, δηλαδή το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας του κυλίνδρου είναι κάθετο στον άξονα Oz (σχήμα 2.28).

Παρατηρήσεις

☑ Εποπτικά, ο προσανατολισμός σχετίζεται με τη φορά του **n** σε σχέση με την καμπύλωση της επιφάνειας. Έτσι, θα χαρακτηρίζεται ως θετικός ο προσανατολισμός όταν το **n** «δείχνει προς τη εξωτερικό μέρος της επιφάνειας» και αρνητικός στην αντίθετη περίπτωση. Αυτό για τη σφαίρα είναι προφανές (ίδια φορά με το **v**) για τις άλλες όμως επιφάνειες μένει να προσδιοριστούν επακριβώς οι έννοιες «εξωτερικό» και «εσωτερικό» μέρος της επιφάνειας.

☑ Τα παραπάνω αποτελέσματα που αφορούν το μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα **n** της σφαίρας S_R^2 θα μπορούσαν να προκύψουν και από τη θεώρηση του συστήματος συν/νων **x**(u,v)=(Rcosucosv, Rsinucosv, Rsinv), με $u \in (0,2\pi)$ και $v \in (-\pi/2,\pi/2)$. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει:

$$\mathbf{x_u}=(-R\sin u\cos v, R\cos u\cos v, 0) \text{ και } \mathbf{x_v}=(-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v)$$

επομένως:

$$\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} = (R^2\cos u\cos^2 v, R^2\sin u\cos^2 v, R^2\sin v\cos v) = R^2\cos v(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$$

οπότε: $\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| = \sqrt{R^4\cos^2 v(\cos^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 v)} = R^2\cos v$.

Τότε **n**=(cosucosv, sinucosv, sinv)=$\frac{1}{R}$(Rcosucosv, Rsinucosv, Rsinv)=$\frac{1}{R}$**v**, όπου **v** το διάνυσμα θέσης, με αρχή το κέντρο της σφαίρας, οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειάς της.

☑ Από τη στιγμή που ο θετικός προσανατολισμός της σφαίρας έχει καθοριστεί όπως παραπάνω, είναι δυνατόν η υιοθέτηση ενός διαφορετικού συστήματος συν/νων να αλλάξει τον προσανατολισμό αυτό. Για παράδειγμα, το σύστημα συν/νων **x**(u,v)=(Rcosusinv, Rsinusinv, Rcosv) δίνει με αντίστοιχη διαδικασία **n**=-$\frac{1}{R}$**v**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Επιφάνειες

Η Εσωτερική Γεωμετρία των επιφανειών

3.1 Γενικά περί Εσωτερικής Γεωμετρίας

3.2 Παράγωγος συνάρτησης κατά τη κατεύθυνση διανύσματος (παράγωγος κατά κατεύθυνση), Παράγωγος κατά την κατεύθυνση (κατά μήκος) καμπύλης

3.3 Συναλλοίωτη παράγωγος

3.4 Σχέση παραγωγισιμότητας κατά κατεύθυνση και συναλλοίωτης παραγώγου συνάρτησης με την παραγωγισιμότητα (διαφορισιμότητα) της συνάρτησης

3.5 Διανυσματικό πεδίο συνόλου και επιφάνειας, Γραμμές ροής

3.6 Απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση, Τελεστής σχήματος-απεικόνιση Weingarten

3.7 1^{η} θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη 1^{ης} τάξης

3.8 Μετρική Riemann-Η μετρική μιας επιφάνειας, Σύμμορφη μετρική

3.9 2^{η} θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη 2^{ης} τάξης

3.10 Κάθετη καμπυλότητα καμπύλης, Κάθετη καμπυλότητα επιφάνειας, Κάθετη τομή

3.11 Κύριες διευθύνσεις, Κύριες καμπυλότητες

3.12 Συνάρτηση καμπυλότητας Gauss, Συνάρτηση μέσης καμπυλότητας

3.13 Ομφαλικό σημείο

3.14 Γραμμές καμπυλότητας

3.15 Ισομετρικές απεικονίσεις επιφανειών, Εσωτερική απόσταση

3.16 Εξισώσεις Gauss-Weingarten, Σύμβολα Christoffel 2^{ου} είδους

3.17 Theorema Egregium (Gauss), Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπύλης, Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας επιφάνειας (Θεώρημα Bonnet)

3.1 Γενικά περί Εσωτερικής Γεωμετρίας

Ένας αρχικός τρόπος προσέγγισης των επιφανειών είναι η εισαγωγή συν/νων σε κάθε σημείο τους, αποδεχόμενοι τη φυσική εμφύτευσή τους στον Ευκλείδειο 3-διάστατο χώρο $\mathbf{R}^3$. Μια πιο εκλεπτυσμένη, ιδίου όμως τύπου προσέγγιση, είναι να επιδιώξουμε την «ανάπτυξη» των επιφανειών στο επίπεδο και την αντιμετώπισή τους ως αντικείμενα εμφυτευμένα στον $\mathbf{R}^2$, με ό,τι αλγεβρικά και αναλυτικά πλεονεκτήματα προσφέρει κάτι τέτοιο. Με βάση την προσέγγιση αυτή, επιχειρείται η ανάπτυξη ενός τμήματος του επιπέδου γύρω από μια επιφάνεια και η εξαγωγή πληροφοριών για την επιφάνεια με βάση το «τέντωμα» ή την «συστροφή» του επιπέδου χωρίς το «τσαλάκωμα» ή το «σχίσιμό» του. Αυτό λειτουργεί με τρόπο ανάλογο που το πλαίσιο Serret-Frenet λειτουργεί για τις καμπύλες.

Το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο και η βασική επιδίωξη πίσω από την προσέγγιση αυτή, είναι η γραμμικοποίηση ή η γραμμική προσέγγιση μη-γραμμικών διαδικασιών ή αντικειμένων: η εφαπτομένη ως γραμμική προσέγγιση καμπύλης σε σημείο της και το εφαπτόμενο επίπεδο ως γραμμική προσέγγιση επιφάνειας σε σημείο της.

Όσον αφορά τις επιφάνειες, αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει είναι όχι το ίδιο το εφαπτόμενο επίπεδο αλλά το πως το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα μιας επιφάνειας σε σημείο της (άρα κάθετο και στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό) μεταβάλλεται καθώς κινούμαστε στη διεύθυνση ενός εφαπτόμενου διανύσματος της επιφάνειας (παράγωγος κατά κατεύθυνση και συναλλοίωτη παράγωγος). Η «αλλαγή» του καθέτου διανύσματος περιγράφει τις αλλαγές στην καμπύλωση της επιφάνειας στη διεύθυνση αυτή.

Ένα πρόβλημα βέβαια που παρουσιάζεται είναι ότι, όταν μια επιφάνεια χρειάζεται περισσότερες από μια περιοχές συν/νων για να καλυφθεί, τα διανύσματα που ορίζονται από τα διάφορα συστήματα συν/νων μπορεί να είναι «ασυμβίβαστα» μεταξύ τους, και αυτό συμβαίνει όταν η επιφάνεια είναι μη προσανατολίσιμη. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε μόνο με προσανατολίσιμες επιφάνειες.

Η αισθητηριακή προσέγγιση που γίνεται στην Εσωτερική Γεωμετρία μιας επιφάνειας είναι αυτή που απορρέει από τη θεώρηση των γεωμετρικών αντικειμένων και τη χρήση των «εργαλείων» που παρέχει η ίδια η επιφάνεια (καμπύλες της επιφάνειας, σημεία της επιφάνειας,…). Από την «οπτική» επομένως της ίδιας της Εσωτερικής Γεωμετρίας μιας επιφάνειας, τα ζητήματα που αφορούν την επιφάνεια και την αντίληψή που έχουμε για αυτή θα πρέπει να αντιμετωπίζονται όπως θα αντιμετωπιζόταν από κάποιον που θα ήταν κάτοικος της επιφάνειας αυτής, χωρίς δηλαδή να έχει τη δυνατότητα αντίληψης και αισθητηριακής επεξεργασίας στοιχείων που βρίσκονται έξω από αυτή.

Το μαθηματικό «οπλοστάσιο» για κάτι τέτοιο παρέχεται, κυρίως, μέσω της χρήση της $1^{ης}$ θεμελιώδους μορφής, η οποία αναφέρεται μεν στο εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας αλλά στην ουσία οφείλει την ύπαρξή και αναφορά της στις καμπύλες (παραμετρικές γραμμές) της ίδιας της επιφάνειας.

3.2 Παράγωγος συνάρτησης κατά την κατεύθυνση διανύσματος (παράγωγος κατά κατεύθυνση), Παράγωγος κατά την κατεύθυνση (κατά μήκος) καμπύλης

Έστω η πραγματική (βαθμωτή) συνάρτηση f: $U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (U ανοικτό σύνολο) και $\mathbf{x} \in U$, ενώ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$ με αντίστοιχο μοναδιαίο το $\mathbf{v_0}$ ($\mathbf{v_0} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$). Ορίζουμε σαν **παράγωγο της συνάρτησης** f **στο σημείο x κατά την κατεύθυνση του διανύσματος v**, την τιμή του ορίου: $\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{v_0}) - f(\mathbf{x})}{t}$, όταν αυτό υπάρχει. Συμβολίζουμε δε $\mathbf{v_x}[f]$ ή $D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{v})$.

Παρατηρήσεις

☑ Η $\mathbf{v_x}[f]$ δίνει ένα μέτρο της μεταβολής των τιμών της f στην κατεύθυνση του διανύσματος **v**, δηλαδή πόσο γρήγορα μεταβάλλονται οι τιμές της f κατά μήκος της ευθείας $\mathbf{x}+t\mathbf{v_0}$ στο τυχαίο σημείο της **x**.

☑ Η τιμή του παραπάνω ορίου είναι ίση και με:

$$\mathbf{v_x}[f] = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{v_0}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{df(\mathbf{x} + t\,\mathbf{v_0})}{dt}\Big|_{t=0}$$

☑ Η $\mathbf{v_x}[f]$ μπορεί να υπάρχει ως προς την κατεύθυνση του **v** και να μην υπάρχει ως προς την κατεύθυνση άλλου διανύσματος.

☑ Για την παράγωγο κατά κατεύθυνση ισχύει ο **κανόνας του Leibniz**:

$$\mathbf{v_x}[f \cdot g] = \mathbf{v_x}[f] \cdot g + f \cdot \mathbf{v_x}[g],$$

που αποτελεί γενίκευση της απλής παραγώγισης του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων του επιπέδου.

Στην περίπτωση της συνάρτησης f: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ και όταν από το σημείο $\mathbf{x} \in \mathbf{R^3}$ διέρχεται η διαφορίσιμη καμπύλη **α**: $I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R^3}$, με παραμετρική παράσταση $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t)) \in \mathbf{R^3}$, τότε η παράγωγος της f στο σημείο **x** κατά την κατεύθυνση του **v** σημαίνει **παράγωγος στο σημείο x κατά την κατεύθυνση (κατά μήκος) της καμπύλης α με x=α(t) και v=α′(t), t∈I**.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που η f είναι συνάρτηση ορισμένη σε επιφάνεια $M \subset \mathbf{R^3}$ και η **α** είναι καμπύλη της επιφάνειας αυτής θα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f: $M \subset \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ *(*M *επιφάνεια) για την οποία υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι (1ης τάξης) και ως προς τις τρεις μεταβλητές της, καθώς και η καμπύλη* **α**: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset R \to M \subset \mathbf{R^3}$ *(το ίχνος της στην* M*) με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας* **v** *και παραμετρική παράσταση* $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t),\alpha^3(t))$. *Τότε, η παράγωγος της* f *στο σημείο* **x** *κατά την κατεύθυνση του* **v** *σημαίνει παράγωγος στο σημείο* **x** *κατά την κατεύθυνση (κατά μήκος των σημείων) της καμπύλης* **α** *και είναι ίση με:*

$$\mathbf{v_x}[f] = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}, \text{ όπου } \mathbf{x}=\boldsymbol{\alpha}(0) \text{ και } \mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}'(0).$$

Απόδειξη

Για τη σύνθεση $f \circ \boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbf{R}$ ο «κανόνας της αλυσίδας» δίνει:

$$\frac{d[(f\circ\boldsymbol{\alpha})(t)]}{dt}=\frac{d[f(\boldsymbol{\alpha}(t)]}{dt}=\frac{\theta f}{\theta x}\frac{d\alpha^1(t)}{dt}+\frac{\theta f}{\theta y}\frac{d\alpha^2(t)}{dt}+\frac{\theta f}{\theta z}\frac{d\alpha^3(t)}{dt}=$$

$$=\left(\frac{\theta f}{\theta x},\frac{\theta f}{\theta y},\frac{\theta f}{\theta z}\right)\cdot\left(\frac{d\alpha^1(t)}{dt},\frac{d\alpha^2(t)}{dt},\frac{d\alpha^3(t)}{dt}\right)=\nabla f((\boldsymbol{\alpha}(t))\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)$$

Για την καμπύλη όμως $\boldsymbol{\alpha}$ της M με $\mathbf{x}=\boldsymbol{\alpha}(0)$ θα είναι $\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}'(0)$ οπότε:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]=\frac{d[(f\circ\boldsymbol{\alpha})(t)]}{dt}\Big|_{t=0}=\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}$$

Παρατήρηση

Από την τελευταία ισότητα διαπιστώνουμε ότι, για την καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$ που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}$ και έχει διάνυσμα ταχύτητας το $\mathbf{v}$, η $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης αυτής παρά μόνο από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{v}$.

Σημειώνουμε ότι, το σύμβολο $\nabla=\left(\frac{\theta}{\theta x_1},...,\frac{\theta}{\theta x_n}\right)$ καλείται το **ανάδελτα** ή **(διαφορικός) τελεστής Nabla-Hamilton** και για μια συνάρτηση f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ το $\nabla f(\mathbf{x})=\left(\frac{\theta f(\mathbf{x})}{\theta x_1},...,\frac{\theta f(\mathbf{x})}{\theta x_n}\right)$ καλείται **ανάδελτα** ή **(διαφορικός) τελεστής Nabla-Hamilton της f στο σημείο x**.

Επίσης η f δεν είναι απαραίτητο να είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}$. Αρκεί μόνο να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της ως προς τις συνιστώσες του $\mathbf{x}$. Το $\nabla f(\mathbf{x})$ αποτελεί τότε τον Jacobian πίνακα γραμμένο σε μορφή διανύσματος.

Για το σύμβολο ∇ ισχύουν οι διότητες:

$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$ $\qquad$ $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$ $\qquad$ $\nabla(\lambda f)=\lambda\nabla f,\ \lambda\in\mathbf{R}$

$\nabla(fg)=f(\nabla g)+g(\nabla f)$ $\qquad$ $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g(\nabla f)-f(\nabla g)}{g^2},\ g\neq 0$

Παρατήρηση

Συνήθως στον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση το διάνυσμα $\mathbf{v}$ επιλέγεται να είναι μοναδιαίο. Υπάρχουν δύο λόγοι για αυτό:

Κατ' αρχήν, αν λ είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός τότε το διάνυσμα $\lambda\mathbf{v}$ έχει την ίδια φορά με το $\mathbf{v}$, το οποίο μπορεί να έχει μικρότερο ($0<\lambda<1$) ή μεγαλύτερο ($\lambda>1$) μέτρο από το $\mathbf{v}$. Αλλά από τη σχέση $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]=\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}$, η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του $\lambda\mathbf{v}$ θα είναι $(\lambda\mathbf{v})_{\mathbf{x}}[f]=\nabla f(\mathbf{x})\cdot(\lambda\mathbf{v})=\lambda(\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v})$, η οποία είναι λ φορές η $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]$ και επομένως όχι ίση με αυτή.

Αν όμως η $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]$ οριστεί για κάθε $\mathbf{v}$ τότε δε θα εξαρτάται μόνο από το σημείο $\mathbf{x}$ και κάποια κατεύθυνση αλλά και από το μέτρο του διανύσματος, πράγμα που δυσχεραίνει τους υπολογισμούς χωρίς να προσφέρει κάποια ιδιαίτερη πρόσθετη πληροφόρηση. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$ μοναδιαίο με αποτέλεσμα η διεύθυνση του $\mathbf{v}$ να είναι και διεύθυνση του $\lambda\mathbf{v}$ (αν $\lambda>0$), ενώ η $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]$ ορίζεται μοναδικά από τη σχέση $\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}$.

Επιπλέον, αν ερμηνεύσουμε το $\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}$ σα ρυθμό μεταβολής της f στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ τότε, για μοναδιαίο $\mathbf{v}$ το σημείο $\mathbf{x}+t\mathbf{v}$ «κινείται» κατά s όταν το t αυξηθεί κατά s, με αποτέλεσμα την επιλογή μιας κλίμακας πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y}=\mathbf{x}+t\mathbf{v}$.

Στην περίπτωση που το διάνυσμα $\mathbf{v}$ δεν είναι μοναδιαίο, τότε:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[f]=(\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{w})\,\|\,\mathbf{v}\,\|,$$

όπου $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο στην κατεύθυνση του **v**.

Εμείς πάντως στη συνέχεια θα θεωρούμε το διάνυσμα **v** μοναδιαίο.

Ας δούμε τώρα πως λειτουργεί η παράγωγος κατά κατεύθυνση σε σχέση με ένα σύστημα συν/νων, που ορίζει μια περιοχή συν/νων πάνω σε μια επιφάνεια.

Έστω η συνάρτηση f: $M \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ για την οποία υπάρχουν οι μερικές της παράγωγοι ως προς τις συνιστώσες της μεταβλητής της και **x** το σύστημα συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M$ κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ με $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Αν η σύνθεση $f \circ \mathbf{x}$ είναι κλάσεως C^1 τότε, η παράγωγος της f (σε σύνθεση με το **x**) σε ένα σημείο **P** κατά την κατεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας της u-παραμετρικής γραμμής δίνει την μερική παράγωγο, ως προς u, της f (αντίστοιχα για το v). Δηλαδή:

$$(\mathbf{x_u})_\mathbf{P}[f] = \mathbf{x_u}[f] = \frac{\theta f}{\theta u}\Big|_{u=u_0} \text{ και } (\mathbf{x_v})_\mathbf{P}[f] = \mathbf{x_v}[f] = \frac{\theta f}{\theta v}\Big|_{v=v_0}.$$

Πράγματι,

$$\mathbf{x_u}[f] = \frac{d[(f \circ \boldsymbol{\alpha})(t)]}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d[(f \circ \mathbf{x})(u_0 + t, v_0)]}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d[(f \circ \mathbf{x})(u, v_0)]}{du}\Big|_{u=u_0} = \frac{\theta f}{\theta u}\Big|_{u=u_0}$$

Γενικότερα ισχύει: η παράγωγος μιας συνάρτησης f κατά την κατεύθυνση των διανυσμάτων της βάσης $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ του $\mathbf{R}^n$, ταυτίζεται με τις μερικές παραγώγους της f ως προς τις (αντίστοιχης θέσης) συνιστώσες της μεταβλητής της, δηλαδή:

$$\mathbf{e_k}[f] = \frac{\theta f}{\theta x_k} = f_{x_k}$$

3.3 Συναλλοίωτη παράγωγος

Κατ' αναλογία με ότι έχει ειπωθεί για τη βαθμωτή συνάρτηση f σε σχέση με την παράγωγο κατά κατεύθυνση, ορίζεται και η παράγωγος κατά κατεύθυνση μιας διανυσματικής συνάρτησης **f**: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$.

Έστω η διανυσματική συνάρτηση **f**: $U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ (U ανοικτό) και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$ με αντίστοιχο μοναδιαίο το το $\mathbf{v_0}$ ($\mathbf{v_0} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$). Ορίζουμε σαν **παράγωγο της συνάρτησης f** ή **συναλλοίωτη παράγωγο της f στο σημείο x κατά την κατεύθυνση του διανύσματος v** την τιμή του ορίου: $\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{v_0}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}$, όταν αυτό υπάρχει. Συμβολίζουμε δε $\mathbf{v_x}[\mathbf{f}]$ ή $D_\mathbf{x}\,\mathbf{f}(\mathbf{v})$ ή $\nabla_\mathbf{v}\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Στην πραγματικότητα, η συναλλοίωτη παράγωγος είναι η παράγωγος κατά κατεύθυνση, εφαρμοσμένη σε κάθε μια από τις συνιστώσες f^i της συνάρτησης $\mathbf{f}=(f^1,f^2,\ldots,f^k)$.

Άρα $\nabla_\mathbf{v}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{v_x}[f^1],\ \mathbf{v_x}[f^2],\ldots,\mathbf{v_x}[f^k])$.

Παρατηρήσεις

☑ Η **f** δεν είναι απαραίτητο να είναι διαφορίσιμη στο **x**. Αρκεί μόνο να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της ως προς τις μεταβλητές της. Το $\nabla_\mathbf{v}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ αποτελεί τότε τον Jacobian πίνακα (των μερικών παραγώγων) της **f**.

☑ Για τη συναλλοίωτη παράγωγο ισχύει ο **κανόνας του Leibniz**:

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x})=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}+\mathbf{f}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

3.4 Σχέση παραγωγισιμότητας κατά κατεύθυνση και συναλλοίωτης παραγώγου μιας συνάρτησης με την παραγωγισιμότητα (διαφορισιμότητα) της συνάρτησης

Στην περίπτωση που έχουμε μια συνάρτηση f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι γνωστό ότι αυτή είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Το ίδιο ισχύει και για τις διανυσματικές συναρτήσεις **f**: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$.

Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει απαραίτητα για τις διανυσματικές συναρτήσεις **f**: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$, όταν η παραγωγισιμότητα (διαφορισιμότητα) αφορά την παράγωγο κατά κατεύθυνση (συναλλοίωτη παράγωγο). Δηλαδή, μια συνάρτηση μπορεί να έχει παράγωγο στο σημείο $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ κατά την κατεύθυνση οποιουδήποτε διανύσματος $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$, χωρίς απαραίτητα η **f** να είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση **f**: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ με τύπο:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},1\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,1), & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

έχει παραγώγους στο (0,0) ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, χωρίς όμως η **f** να είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Αυτό συμβαίνει γιατί η ύπαρξη της παραγώγου κατά κατεύθυνση δεν ταυτίζεται με την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης: η παράγωγος κατά κατεύθυνση εξαρτάται από τις τιμές της **f** μόνο κατά μήκος μιας καμπύλης που διέρχεται από το θεωρούμενο σημείο **x** και όχι από τις τιμές της σε μια ολόκληρη περιοχή του σημείου αυτού. Αυτό επομένως που ισχύει είναι μόνο το παρακάτω:

Θεώρημα

Αν μια διανυσματική συνάρτηση **f**: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ *είναι διαφορίσιμη στο σημείο* $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, *τότε υπάρχει η συναλλοίωτη παράγωγος της* **f** *στο* **x** *για κάθε κατεύθυνση*.

Απόδειξη

Ας θυμηθούμε από το 1ο Κεφάλαιο ότι: μια διανυσματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής **f**: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ η οποία είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $X\subset\mathbf{R}^n$, θα λέμε ότι είναι **διαφορίσιμη (παραγωγίσιμη)** ή **λεία** στο $\mathbf{x_0}\in X$ αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση **L**: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ τέτοια ώστε, για κάθε $\mathbf{x_0}+\mathbf{h}$ που ανήκει σε μια ε-περιοχή U του $\mathbf{x_0}$ ($U\subset X$) να ισχύει: $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{L}(\mathbf{h})=R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})$, με το όριο $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\dfrac{R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0$ ή ισοδύναμα: $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\dfrac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{L}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}=0$.

Αν θεωρήσουμε τώρα το μη μηδενικό διάνυσμα **v** και το $t\in\mathbf{R}$ αρκετά μικρό, θα έχουμε: $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+t\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})-\mathbf{L}(t\mathbf{v})=R(\mathbf{x_0},t\mathbf{v})$ οπότε: $\dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+t\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}{t}$

$=\dfrac{\mathbf{L}(t\mathbf{v})}{t}+\dfrac{R(\mathbf{x_0},t\mathbf{v})}{t}$ και με την **L** γραμμική $\dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+t\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}{t}=L(\mathbf{v})+\dfrac{R(\mathbf{x_0},t\mathbf{v})}{t}$.

Όμως, όταν $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\dfrac{R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0$ τότε είναι και $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{R(\mathbf{x_0},t\mathbf{v})}{t}=0$.

Πράγματι. Επειδή $\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0$, για κάθε ε>0 θα υπάρχει δ>0 με 0<||**h**||<δ έτσι ώστε: $\left|\frac{R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\right|=\frac{\|R(\mathbf{x_0},\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}\|}$. Τότε όμως: $\left|\frac{R(\mathbf{x_0},t\,\mathbf{v})}{t}\right|=\left|\frac{R(\mathbf{x_0},t\,\mathbf{v})}{\|t\,\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\|\right|$ $=\left|\frac{R(\mathbf{x_0},t\,\mathbf{v})}{\|t\,\mathbf{v}\|}\right|\|\mathbf{v}\|<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\|=\varepsilon$ για $0<\|t\mathbf{v}\|<\delta$ ή $0<|t|<\frac{\delta}{\|\mathbf{v}\|}$, άρα $\lim_{t\to 0}\frac{R(\mathbf{x_0},t\,\mathbf{v})}{t}=0$.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η **f** είναι διαφορίσιμη ισχύει:

$$(d_x\mathbf{f})(\mathbf{v})=(\mathbf{J}_x\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}_x[\mathbf{f}]=D_x\mathbf{f}(\mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

3.5 Διανυσματικό πεδίο συνόλου και επιφανείας, Γραμμές ροής

Αναφερθήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο (2.10) στο σύνολο των καθέτων διανυσμάτων μιας κανονικής επιφάνειας M και το χαρακτηρίσαμε ως (διαφορίσιμο, μοναδιαίο και κάθετο) διανυσματικό πεδίο στην M. Η έννοια όμως του διανυσματικού πεδίου είναι γενικότερη και δε συνδέεται μόνο με την έννοια της καθετότητας.

Διανυσματικό πεδίο F (ορισμένο) σε ένα ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbf{R}^n$ είναι μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $\mathbf{P}\in U$ ένα διάνυσμα $\mathbf{w}(\mathbf{P})\in\mathbf{R}^n$.

Άρα πρόκειται για την απεικόνιση **F**: $U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$

Παρατηρήσεις

☑ Γραφικά, παριστάνουμε ένα διανυσματικό πεδίο αποδίδοντας σε κάθε σημείο ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο, δηλαδή το παριστάνουμε με τα διανύσματα που ξεκινάνε από διάφορα σημεία **P** ή (παρ/λα μεταφερόμενα) από μια καθορισμένη αρχή O.

☑ Χρησιμοποιώντας αντίστοιχη ορολογία, την απεικόνιση **F**: $U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ θα την καλούμε **βαθμωτό πεδίο** στο $U\subset\mathbf{R}^n$.

☑ Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με διανυσματικά πεδία για τα οποία είναι n=2 ή n=3.

Ένα **διανυσματικό πεδίο F**: $U\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ **θα είναι διαφορίσιμο κλάσεως** $\mathbf{C^m}$ **(**$\mathbf{m\geq 1}$**)**, αν τα βαθμωτά διανυσματικά πεδία που αποτελούν οι συνιστώσες της **F**, είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσεως C^m $(m\geq 1)$.

Μπορούμε να συνδέσουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου με τις καμπύλες ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbf{R^2}$ καθώς και με τις καμπύλες μιας περιοχής συν/νων μιας επιφάνειας. Συγκεκριμένα για τις καμπύλες του επιπέδου ισχύει η πρόταση:

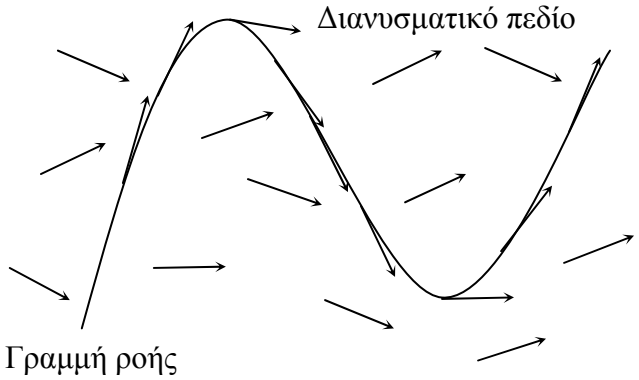
Πρόταση

Αν **w** *είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε ένα ανοικτό σύνολο* $U\subset\mathbf{R^2}$, *τότε για δοσμένο σημείο* $\mathbf{P}\in U$ *υπάρχει μοναδική τροχιά (καμπύλη)* $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset R\to U$ *για την οποία ισχύει* $\boldsymbol{\alpha}'(t)=\mathbf{w}(\boldsymbol{\alpha}(t))$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$) *με* $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$.

Η εύρεση της συγκεκριμένης καμπύλης ανάγεται στη λύση της διαφορικής εξίσωσης (προβλήματος αρχικών τιμών): $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbf{w}(\boldsymbol{\alpha}(t))$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, με $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ (για t=0).

Η τροχιά της καμπύλης **α** κατά την κίνηση ενός μικρού υλικού σωματιδίου που αιωρείται μέσα σε ένα ρευστό καλείται και **γραμμή ροής**. Στην περίπτωση επομένως του διανυσματικού πεδίου **w**, μια γραμμή ροής είναι η τροχιά εκείνης της καμπύλης στην οποία το διανυσματικό πεδίο αποδίδει το σύνολο των διανυσμάτων ταχύτητάς της (άρα εφαπτόμενων διανυσμάτων) σε κάθε σημείο της.

Γεωμετρικά, το πρόβλημα της εύρεσης μιας γραμμής ροής που να διέρχεται από ένα σημείο **P** για ένα δοσμένο διανυσματικό πεδίο **w**, είναι το πρόβλημα της χάραξης μιας καμπύλης μέσα σε ένα διανυσματικό πεδίο με τέτοιο τρόπο ώστε, το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης να συμπίπτει με το διανυσματικό πεδίο, ενώ αναλυτικά το πρόβλημα ανάγεται στη λύση του προηγούμενου προβλήματος αρχικών τιμών (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1

Παρατήρηση

Διαφορετικά διανυσματικά πεδία μπορεί να έχουν την ίδια γραμμή ροής.

Επειδή, όταν το διανυσματικό πεδίο **w** είναι C^1 υπάρχει μοναδική λύση για κάθε **P** (χωρίς η λύση να ορίζεται απαραίτητα για κάθε χρονική στιγμή t), μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $\varphi(\mathbf{x},t)$, που περιγράφει τη θέση **x** ενός σημείου **P** πάνω σε μια γραμμή ροής μετά την παρέλευση χρόνου t. Αν ως **x** θεωρήσουμε την αρχική θέση του σημείου για t=0, τότε η $\varphi(\mathbf{x},t)$ ορίζεται ως η θέση που «προσεγγίζεται» μετά από χρόνο t και υπολογίζεται από τη λύση του διαφορικού συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\theta}{\theta t}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{w}(\phi(\mathbf{x},t)) \\ \\ \phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{x} \end{array}\right\}$$

Αντίστοιχα συμπεράσματα με τις επίπεδες καμπύλες προκύπτουν και για τις καμπύλες που βρίσκονται πάνω σε επιφάνειες. Έτσι:

Ένα διανυσματικό πεδίο w (ορισμένο) σε ένα ανοικτό σύνολο U μιας κανονικής επιφάνειας M, είναι μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $\mathbf{P} \in U$ ένα διάνυσμα $\mathbf{w}(\mathbf{P})$ του εφαπτόμενου χώρου $T_{\mathbf{P}}M$.

Στην περίπτωση που το διάνυσμα **w** είναι διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\mathbf{P}}(M)$, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις α(u,v), β(u,v) για τις οποίες ισχύει:

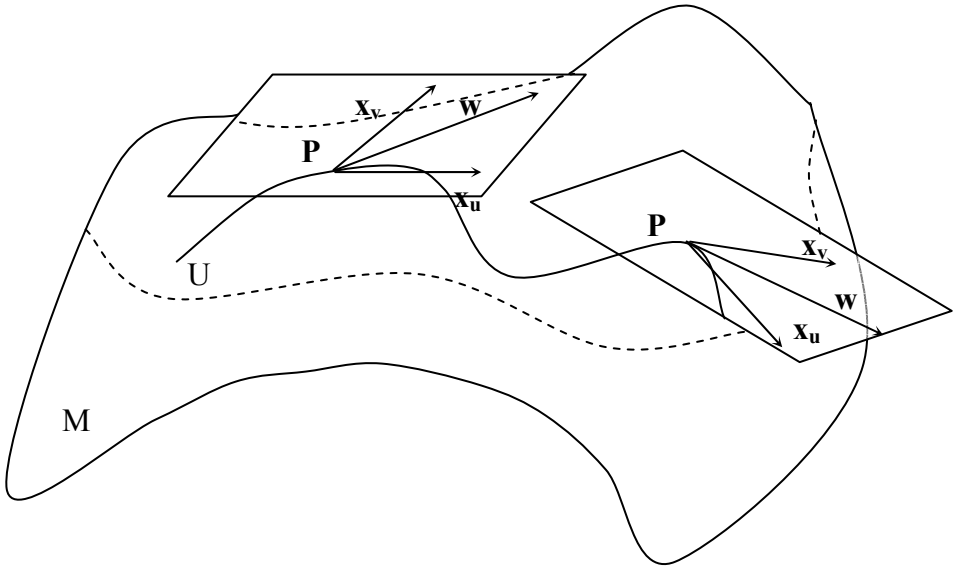
$\mathbf{w}(\mathbf{P})=\alpha(u,v)\mathbf{x_u}+\beta(u,v)\mathbf{x_v}$, τότε το διανυσματικό πεδίο καλείται και **εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο** της επιφάνειας M στο σημείο της **P** (σχήμα 3.2).

Ένα τέτοιο **διανυσματικό πεδίο w θα είναι διαφορίσιμο στο** $\mathbf{P}\in\mathbf{U}$ αν υπάρχει κάποιο σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$ στο **P** (η επιλογή του συστήματος συν/νων **x** δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα) ως προς το οποίο το **w** γράφεται:

$$\mathbf{w}(\mathbf{P})=\alpha(u,v)\mathbf{x_u}+\beta(u,v)\mathbf{x_v},$$

με τις συναρτήσεις α(u,v) και β(u,v) να είναι διαφορίσιμες στο **P**.

Το διαφορίσιμο, εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο μιας επιφάνειας, αποτελείται από τα διανύσματα ταχύτητας $\mathbf{w}=\mathbf{w}(\boldsymbol{\alpha}(t))=\boldsymbol{\alpha}'(t)$ μιας διαφορίσιμης παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\rightarrow U\subset M$ για την οποία ισχύει $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{P}$, για κάθε σημείο $\mathbf{P}\in U$ της τροχιάς της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$.



Σχήμα 3.2

3.6 Απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση, Τελεστής σχήματος-Απεικόνιση Weingarten

Είδαμε στο 1° κεφάλαιο ότι, η καμπυλότητα μιας επίπεδης καμπύλης εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης προς το μήκος του τόξου της, δηλαδή το ρυθμό με τον οποίο μια καμπύλη σε κάποιο σημείο της «αποκλίνει» από το να είναι ευθεία.

Αναζητώντας μια αντίστοιχη έννοια για τις επιφάνειες, θα επιχειρήσουμε να μετρήσουμε το ρυθμό με τον οποίο μια κανονική επιφάνεια, σε μια περιοχή ενός σημείου της, «αποκλίνει» από το να είναι επίπεδο, δηλαδή από το εφαπτόμενο επίπεδό της. Κάτι τέτοιο θα είναι ισοδύναμο με το να μετρήσουμε το ρυθμό αλλαγής, σε μια περιοχή του εν λόγω σημείου, του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος της επιφάνειας. Ο ρυθμός αυτός, θα δούμε ότι υπολογίζεται μέσω μιας αυτοσυζυγούς, γραμμικής απεικόνισης του εφαπτόμενου επιπέδου.

Σύμφωνα με τον γενικό ορισμό που δόθηκε για το διανυσματικό πεδίο στην προηγούμενη ενότητα, δύο συγκεκριμένα διανυσματικά πεδία που μπορούν να «συνδεθούν» με μια επιφάνεια M στο σημείο της **P**, είναι το **κάθετο διανυσματικό**

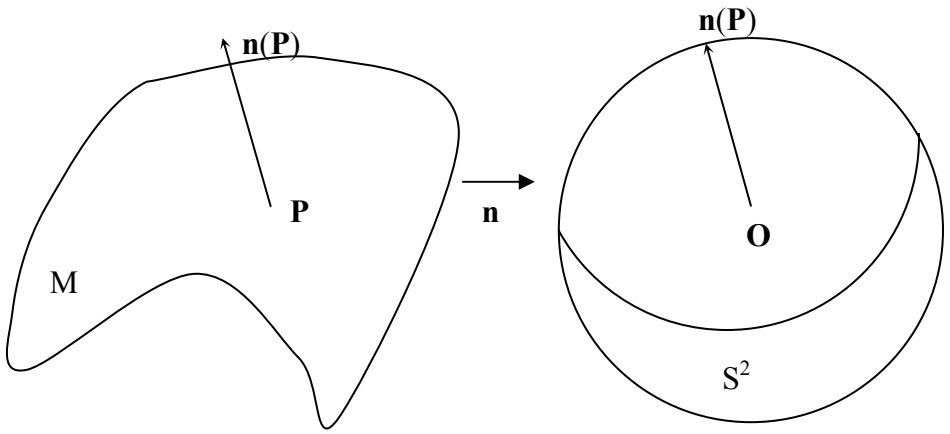
πεδίο n (σε κάθε $\mathbf{P} \in U$, U ανοικτό υποσύνολο της επιφάνειας) και το **εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο** (σε κάθε $\mathbf{P} \in U$).

Η μελέτη του κάθετου διανυσματικού πεδίο (του διανύσματος **n**(**P**)) θα μας δώσει πληροφορίες για τη Γεωμετρία της επιφάνειας σε μια περιοχή του σημείο **P**. Συγκεκριμένα, αν γνωρίζουμε πως μεταβάλλεται η διεύθυνση του **n** καθώς κινούμαστε στη διεύθυνση-κατεύθυνση που ορίζεται από το αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης της επιφάνειας, τότε γνωρίζουμε και το πώς η ίδια η επιφάνεια μεταβάλλεται στη κατεύθυνση αυτή (παράγωγος κατά την κατεύθυνση διανύσματος και συναλλοίωτη παράγωγος).

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση που η επιφάνεια απαιτεί περισσότερες από μια περιοχές συν/νων για να καλυφθεί και άρα υπάρχει η πιθανότητα τα διανύσματα του κάθετου διανυσματικού πεδίου **n** που προκύπτουν από τα διάφορα συστήματα συν/νων να είναι ασύμβατα μεταξύ τους (λωρίδα του Möbius), θεωρούμε μόνο προσανατολίσιμες επιφάνειες, επιφάνειες δηλαδή για τις οποίες ορίζεται ένα λείο διανυσματικό πεδίο **n** παντού πάνω σε αυτές.

Απεικόνιση Gauss ή **σφαιρική απεικόνιση** καλείται η απεικόνιση **n**: $M \subset \mathbf{R}^3 \to S^2$ που κατασκευάζεται ως εξής: η εικόνα **n**(**P**) ενός σημείου **P** μιας κανονικής επιφάνειας, είναι το σημείο που παίρνουμε αν μεταφέρουμε το **n**(**P**) (το μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια M στο **P**), παρ/λα προς τον εαυτό του, μέχρι που η αρχή του να συμπέσει με το κέντρο **O** της σφαίρας S^2.

Προφανώς, αφού πρόκειται για μοναδιαία διανύσματα, το πέρας τους θα βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της S^2 ενώ η παράλληλη μεταφορά των διανυσμάτων γίνεται κατά μήκος της ευθείας **OP** και πάνω στο επίπεδο που ορίζουν το διανύσμα **n**(**P**) της M και η **OP** (σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3

Παρατηρήσεις

☑ Το πεδίο που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{n}(\mathbf{P}) = \dfrac{\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}}{\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \|}$ είναι ένα διαφορίσιμο πεδίο, μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων.

☑ Αν $\mathbf{P} \in M$, η απεικόνιση διαφορικό $d_{\mathbf{P}}\,\mathbf{n} : T_{\mathbf{P}}(M) \to T_{\mathbf{n}(\mathbf{P})}(S^2)$ είναι, ως γνωστόν, η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί εφαπτόμενα διανύσματα της M σε εφαπτόμενα διανύσματα της S^2.

☑ Τα επίπεδα $T_P(M)$ και $T_{n(P)}(S^2)$ είναι παρ/λα μεταξύ τους γιατί είναι κάθετα στο **n**(**P**) και στην παρ/λη μεταφορά του στο κέντρο Ο της σφαίρας S^2 (αρχή των αξόνων), με αποτέλεσμα τα διανύσματα του ενός επιπέδου να μπορούν να ταυτιστούν (μεταφερόμενα παρ/λα) με τα διανύσματα του άλλου επιπέδου. Με την παρατήρηση όμως αυτή θα μπορούσαμε να ορίσουμε το διαφορικό της απεικόνισης **n** ως την απεικόνιση $d_P\,\mathbf{n}: T_P(M) \to T_P(M)$ και επομένως το $d_P\,\mathbf{n}$ να γίνει ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο.

Απεικόνιση Weingarten ή **τελεστής σχήματος**, λέγεται η γραμμική απεικόνιση (μετασχηματισμός του εφαπτόμενου επιπέδου μιας κανονικής επιφάνειας M σε οποιοδήποτε σημείο της) $S_P: T_P(M) \to T_P(M)$.

Παρατήρηση

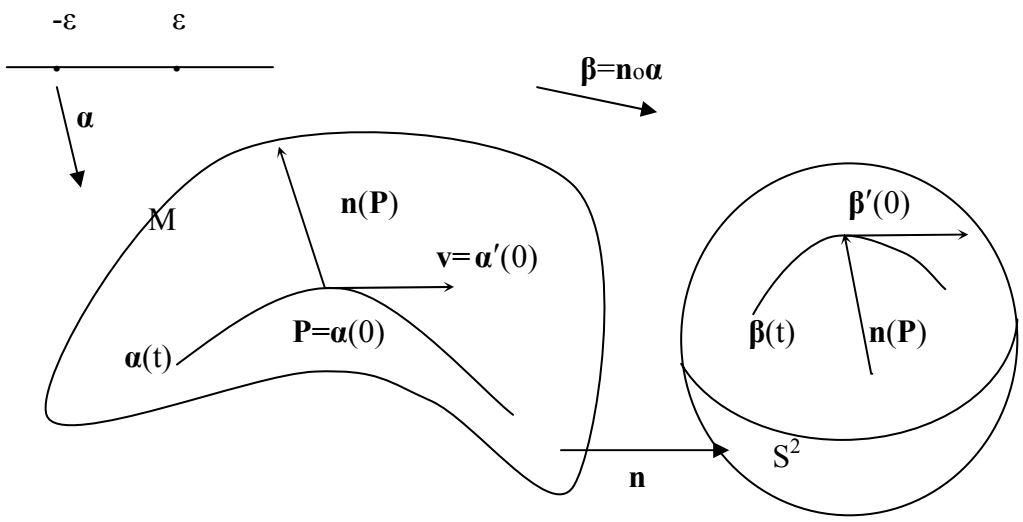
Η μελέτη του τελεστή σχήματος μας δίνει πληροφορίες για πολλές τοπικές ιδιότητες της επιφάνειας, μια και από τον τρόπο ορισμού του (που θα δούμε στη συνέχια) μας πληροφορεί για το πώς η επιφάνεια καμπυλώνεται κατά την κατεύθυνση ενός διανύσματος της επιφάνειας. Πλεονέκτημά του, η θεωρητική περιγραφή της Γεωμετρίας με όρους Γραμμικής Άλγεβρας και με τη βοήθεια του Απειροστικού Λογισμού.

Ας δούμε τώρα πως «δουλεύει» ο τελεστής σχήματος

Αν $\mathbf{v} \in T_P(M)$ τότε θεωρούμε την διαφορίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset R \to M \subset \mathbf{R}^3$ με $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$ (**v** μοναδιαίο). Με $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{n}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbf{R} \to S^2$ είναι $\boldsymbol{\beta}(t)=(\mathbf{n}\circ\boldsymbol{\alpha})(t)=\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ και $\boldsymbol{\beta}'(t)=\mathbf{n}'(\boldsymbol{\alpha}(t))\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t))\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'(t)}\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ οπότε:

$$\boldsymbol{\beta}'(0)=\nabla\mathbf{n}(\mathbf{P})\cdot\mathbf{v}=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}(\mathbf{P})=\mathbf{v}_P[\mathbf{n}]=d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v}),$$

μια και το διανυσματικό πεδίο **n** είναι (πάντα) διαφορίσιμο (Πρόκειται για τη συναλλοίωτη παράγωγο του κάθετου διανυσματικού πεδίου **n** ως προς την κατεύθυνση του **v** που διέρχεται από το $\mathbf{P} \in T_P(M)$ (σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4

Ο **τελεστής σχήματος** θεωρείται ίσος με την παράσταση:

$$S_P(\mathbf{v})=-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}(\mathbf{P})=-\mathbf{v}_P[\mathbf{n}]=-d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v}).$$

Σύμφωνα επομένως με τα προηγούμενα, η εικόνα του διανύσματος $\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}'(0)$ μέσω του τελεστή σχήματος $S_P(\mathbf{v})$, είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}'(0)=(\mathbf{n}\circ\boldsymbol{\alpha})'(0)$.

Σημειώνουμε ότι, το πρόσημο «-» χρησιμοποιείται για ιστορικούς λόγους και γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να αποδώσουμε, παρακάτω, στην αρνητική και τη θετική καμπυλότητα μιας επιφάνειας φυσική ερμηνεία.

Παρατηρήσεις

☑ Ο τελεστής σχήματος $S_P(\mathbf{v})$ μετράει το ρυθμό μεταβολής του καθέτου διανύσματος $\mathbf{n}$ της επιφάνειας (και της S^2), περιορισμένο όμως πάνω στην καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)$ της επιφάνειας αυτής, για την οποία ισχύει $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το: $\mathbf{n}'(0)=d_P\,\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}'(0))\in T_P(M)$.

Το διαφορικό $d_P\,\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}'(0))$ μετράει το πώς το $\mathbf{n}$ «έλκεται» μακριά από το $\mathbf{n}(\mathbf{P})$, σε μια γειτονιά του $\mathbf{P}$. Κάτι τέτοιο στις καμπύλες περιγράφεται από το μέτρο κ της καμπυλότητάς τους, ενώ στις επιφάνειες από έναν πίνακα γραμμικής απεικόνισης.

☑ Ο τελεστής σχήματος ως απεικόνιση του διανυσματικού χώρου $T_P(M)$ στον εαυτό του εκτός από γραμμική είναι και αυτοσυζυγής, πράγμα που απαιτεί την παραδοχή μιας έννοιας μετρικής με την οποία θα εφοδιάσουμε το $T_P(M)$. Η μετρική αυτή θα επιλέξουμε να είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, αλλά αυτά θα μελετηθούν παρακάτω.

Θεώρημα

Ο τελεστής σχήματος S_P: $T_P(M)\to T_P(M)$ *με* $S_P(\mathbf{v})=-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}(\mathbf{P})=-\mathbf{v}_P[\mathbf{n}]=-d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v})$ *είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του επιπέδου στον εαυτό του.*

Απόδειξη

Εξαιτίας της γραμμικότητας του διαφορικού (ή του ανάδελτα αντίστοιχα) προκύπτει ότι: $S_P(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=-d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=-[d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v}_1)+d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v}_2)]=S_P(\mathbf{v}_1)+S_P(\mathbf{v}_2)$ και

$S_P(\lambda\mathbf{v})=-d_P\,\mathbf{n}(\lambda\mathbf{v})=-\lambda[d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v})]=\lambda S_P(\mathbf{v})$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

Παρατηρήσεις

☑ Ένας γραμμικός τελεστής είναι, γενικά, ένας γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανυσματικού χώρου στον εαυτό του.

☑ Ο τελεστής σχήματος είναι ο αντίθετος πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση διαφορικό της απεικόνισης Gauss μιας κανονικής επιφάνειας στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας ($S_P(\mathbf{v})=-d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v})$). Είναι δε αντίστοιχος του Jacobian πίνακα των απεικονίσεων μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

Θεώρημα

Ο τελεστής σχήματος S_P: $T_P(M)\to T_P(M)$ *έχει τις ιδιότητες:*

α) $S_P(\mathbf{x}_u)=\mathbf{n}_u$ *και* $S_P(\mathbf{x}_v)=\mathbf{n}_v$

β) *Είναι αυτοσυζυγής (αυτοπροσαρτημένος), δηλαδή για οποιαδήποτε βάση* $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ *του* $T_P(M)$ *ισχύει:* $\langle S_P(\mathbf{w}_1),\mathbf{w}_2\rangle=\langle\mathbf{w}_1,S_P(\mathbf{w}_2)\rangle$, *ενώ ειδικότερα για τη βάση* $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ *ισχύει:*

$$\langle S_P(\mathbf{x}_u),\mathbf{x}_u\rangle=\langle\mathbf{x}_{uu},\mathbf{n}\rangle,\ \langle S_P(\mathbf{x}_v),\mathbf{x}_v\rangle=\langle\mathbf{x}_{vv},\mathbf{n}\rangle,\ \langle S_P(\mathbf{x}_u),\mathbf{x}_v\rangle=\langle\mathbf{x}_{uv},\mathbf{n}\rangle$$

Απόδειξη

α) Έστω $\mathbf{x}(u,v)$ σύστημα συν/νων που ορίζει μια περιοχή συν/νων στην κανονική επιφάνεια M και $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ η συνδεδεμένη με την επιφάνεια αυτή βάση του $T_P(M)$.

Αν $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R}^3$ με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ μια παραμετρισμένη καμπύλη της M με $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$, τότε:

$$d_P\,\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = d_P\,\mathbf{n}\left(\frac{d\,\mathbf{x}(u(t),v(t))}{du}\Big|_{t=0}\cdot\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{d\,\mathbf{x}(u(t),v(t))}{dv}\Big|_{t=0}\cdot\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}\right)$$

$= d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_u\,u'(0) + \mathbf{x}_v\,v'(0))$ και από τη γραμμικότητα του διαφορικού:

$d_P\,\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}'(0)) = d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_u)\,u'(0) + d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_v)\,v'(0) = \mathbf{n}_u\,u'(0) + \mathbf{n}_v\,v'(0)$, όπου:

$$\mathbf{n}_u = d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_u) = \mathbf{x}_u[\mathbf{n}] \text{ και } \mathbf{n}_v = d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{x}_v) = \mathbf{x}_v[\mathbf{n}].$$

Άρα $S_P(\mathbf{x}_u)=\mathbf{n}_u$ και $S_P(\mathbf{x}_v)=\mathbf{n}_v$

β) Επειδή ο τελεστής σχήματος είναι γραμμική απεικόνιση, για να δείξουμε το αυτοσυζυγές αρκεί να το δείξουμε για τη βάση $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ (ή για οποιαδήποτε άλλη) του $T_P(M)$. Στην απόδειξη, θα εργαστούμε με τη βοήθεια της συναλλοίωτης παραγώγου μια και θα αποτελέσει το «εργαλείο» μας και για αποδείξεις που θα ακολουθήσουν αργότερα.

Έστω $\mathbf{n}=(n^1,n^2,n^3)$ και $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Τότε:

$$\mathbf{0}=\mathbf{x}_u[0]=\mathbf{x}_u[<\mathbf{n},\mathbf{x}_v>]=\mathbf{x}_u[\,n^1\frac{\theta x(u,v)}{\theta v}+n^2\frac{\theta y(u,v)}{\theta v}+n^3\frac{\theta z(u,v)}{\theta v}]$$

$$=\mathbf{x}_u[n^1]\frac{\theta x(u,v)}{\theta v}+\mathbf{x}_u[n^2]\frac{\theta y(u,v)}{\theta v}+\mathbf{x}_u[n^3]\frac{\theta z(u,v)}{\theta v}+$$

$n^1\,\mathbf{x}_u[\frac{\theta x(u,v)}{\theta v}]+n^2\,\mathbf{x}_u[\frac{\theta y(u,v)}{\theta v}]+n^3\,\mathbf{x}_u[\frac{\theta z(u,v)}{\theta v}]$, που προκύπτει από τον κανόνα του Leibniz και την ιδιότητα του αθροίσματος της συναλλοίωτης παραγώγου.

Τότε: $<\mathbf{x}_u[n^1]\mathbf{e}_1,\mathbf{x}_v>+<\mathbf{x}_u[n^2]\mathbf{e}_2,\mathbf{x}_v>+<\mathbf{x}_u[n^3]\mathbf{e}_3,\mathbf{x}_v>$

$$+<\mathbf{n},\frac{\theta^2 x}{\theta u\theta v}>+<\mathbf{n},\frac{\theta^2 y}{\theta u\theta v}>+<\mathbf{n},\frac{\theta^2 z}{\theta u\theta v}>=0 \Leftrightarrow <\mathbf{x}_u[\mathbf{n}],\mathbf{x}_v>+<\mathbf{n},\mathbf{x}_{vu}>=0$$

$$\Leftrightarrow <\mathbf{x}_u[\mathbf{n}],\mathbf{x}_v>+<\mathbf{n},\mathbf{x}_{uv}>=0$$

Άρα: $<-S_P(\mathbf{x}_u),\mathbf{x}_v>=-<\mathbf{n},\mathbf{x}_{uv}> \Leftrightarrow <S_P(\mathbf{x}_u),\mathbf{x}_v>=<\mathbf{n},\mathbf{x}_{uv}>=<\mathbf{x}_{uv},\mathbf{n}>$.

Αντίστοιχα και τα υπόλοιπα.

3.7 1η θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της τοπικής θεωρία των καμπυλών (αναφορά γίνεται στο τέλος του κεφαλαίου), μια καμπύλη του $\mathbf{R}^3$ ορίζεται μονοσήμαντα από δύο (τοπικά) αναλλοίωτα μεγέθη: την (θετική) καμπυλότητα και τη στρέψη (όταν τα μεγέθη αυτά εκφράζονται ως συναρτήσεις του μήκους τόξου).

Αντίστοιχα, μια επιφάνεια του $\mathbf{R}^3$ ορίζεται μονοσήμαντα από δύο (τοπικά) αναλλοίωτα μεγέθη: την 1η και τη 2η θεμελιώδη μορφή (Στη συνέχεια η μετρική που θα χρησιμοποιείται είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, μια και το εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbf{R}^2$).

Έστω $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ ένα σύστημα συν/νων μιας επιφάνειας M ($\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$) κλάσεως C^m ($m\geq 1$). Το διαφορικό της $\mathbf{x}$ στο σημείο (u,v) είναι μια 1-1 απεικόνιση που υπολογίζεται ως εξής: $d\mathbf{x}=d\mathbf{x}(\mathbf{h})=\frac{\theta\mathbf{x}}{\theta u}h^1+\frac{\theta\mathbf{x}}{\theta v}h^2$ και με $\mathbf{h}=(h^1,h^2)=d\mathbf{x}=(du,dv)$ προκύπτει: $d\mathbf{x}=\frac{\theta\mathbf{x}}{\theta u}du+\frac{\theta\mathbf{x}}{\theta v}dv$ ή $d\mathbf{x}=\mathbf{x}_u du+\mathbf{x}_v dv$.

Σημειώνουμε ότι, για παραδοσιακούς λόγους χρησιμοποιούμε τα du,dv και ως τα διαφορικά των συν/νων-συνιστωσών u,v ενός σημείου του U (uv-επιπέδου), αλλά και ως τις συν/νες του διανύσματος d$\mathbf{x}$ του U. Όμοια, θα λέγαμε ότι το σύμβολο d$\mathbf{f}$ μιας συνάρτησης $\mathbf{f}$:

$$d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(d\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot d\,\mathbf{x}=\frac{\theta\mathbf{f}}{\theta x^1}dx^1+\ldots+\frac{\theta\mathbf{f}}{\theta x^n}dx^n,$$

εκφράζει και το διαφορικό της **f** αλλά και το διάνυσμα $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(d\mathbf{x})$ που είναι η τιμή του $d_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ στο διάνυσμα $d\mathbf{x}$.

Άρα το διαφορικό $d\mathbf{x}$ απεικονίζει το τυχαίο διάνυσμα (du,dv) του uv-επιπέδου στο αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv$ της επιφάνειας, στο αντίστοιχο σημείο της $\mathbf{x}(u,v)$.

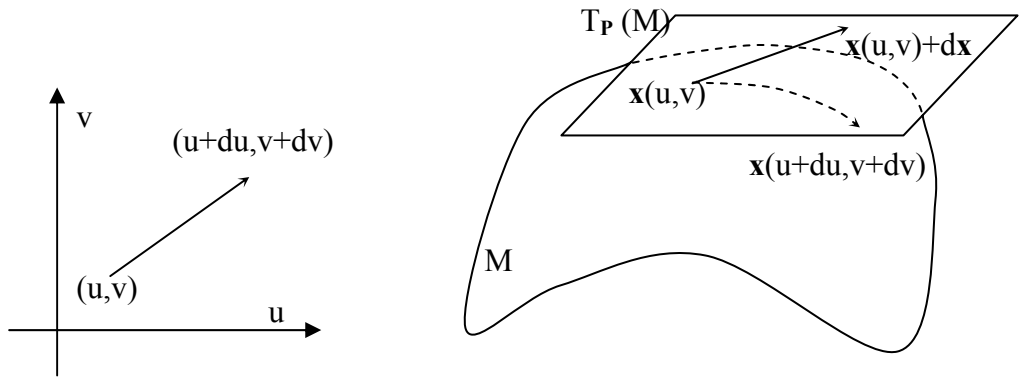
Από τον τύπο ανάπτυγμα του Taylor για τη διαφορίσιμη συνάρτηση **x** στο σημείο της (u+du,v+dv) θα έχουμε:

$$\mathbf{x}(u+du,v+dv)=\mathbf{x}(u,v)+d_{(du,dv)}\,\mathbf{x}(u,v)+o(\sqrt{du^2+dv^2})$$

$$=\mathbf{x}(u,v)+\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv+o(\sqrt{du^2+dv^2})=\mathbf{x}(u,v)+d\mathbf{x}+o(\sqrt{du^2+dv^2}),$$

όπου $\dfrac{\sqrt{du^2+dv^2}}{du^2+dv^2}\to 0$ όταν $(du,dv)\to(0,0)$.

Επομένως $d\mathbf{x}=\mathbf{x}(u+du,v+dv)-\mathbf{x}(u,v)$ και το διαφορικό $d\mathbf{x}$ αποτελεί μια προσέγγιση $1^{\eta\varsigma}$ τάξης του διανύσματος $\mathbf{x}(u+du,v+dv)-\mathbf{x}(u,v)$, με $\mathbf{x}(u,v)$ σημείο της περιοχής συν/νων της επιφάνειας και $\mathbf{x}(u+du,v+dv)$ γειτονικό του σημείο, επίσης πάνω στην επιφάνεια (σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5

1^{η} θεμελιώδης μορφή ή **θεμελιώδης μορφή $1^{\eta\varsigma}$ τάξης**, λέμε τη συνάρτηση: **I** ή $\mathbf{I_P}$: $T_P(M)\subset\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ που η τιμή της σε τυχαίο διάνυσμα $d\mathbf{x}=(du,dv)$ του uv-επιπέδου είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος του διαφορικού $d\mathbf{x}$, δηλαδή:

$$\mathbf{I}(du,dv)=\|d\mathbf{x}\|^2.$$

Η **I** γίνεται: $\mathbf{I}(du,dv)=\|d\mathbf{x}\|^2=\langle d\mathbf{x},d\mathbf{x}\rangle=\langle\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv,\ \mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv\rangle$

$$=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle du^2+2\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle dudv+\langle\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}\rangle dv^2=Edu^2+2Fdudv+Gdu^2,$$

όπου $E=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle$, $F=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle$ και $G=\langle\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}\rangle$.

Τα E,F,G καλούνται **θεμελιώδη μεγέθη $1^{\eta\varsigma}$ τάξης** και είναι συναρτήσεις των u,v.

Σημειώνουμε ότι, συχνά στη βιβλιογραφία, ορίζεται ως 1^{η} θεμελιώδης μορφή μια συνάρτηση στο εφαπτόμενο επίπεδο της οποίας η τιμή στο τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $d\mathbf{x}=\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv$ είναι ίση με $\mathbf{I}(d\mathbf{x})=Edu^2+2Fdudv+Gdu^2$ και γενικότερα, για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{x_u}+\beta\mathbf{x_v}$ του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η:

$$\mathbf{I}(\mathbf{v})=\|\mathbf{v}\|^2=\alpha^2E+2\alpha\beta F+\beta^2G.$$

Παρατηρήσεις

☑ Η **I** είναι μια διγραμμική, ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς du,dv και ταυτόχρονα θετικά ορισμένη, δηλαδή για κάθε du,dv είναι **I**(du,dv)=$\|d\mathbf{x}\|^2 \geq 0$, ενώ θα είναι **I**=0 $\Leftrightarrow$ $|\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv|^2=0$, που για τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$, σημαίνει ότι du=dv=0.

☑ Η **I** εξαρτάται, κατά κάποιο τρόπο, μόνο από την επιφάνεια και όχι από την συγκεκριμένη περιοχή συν/νων που έχει επιλεγεί πάνω σε αυτή. Δηλαδή, αν $\mathbf{I}, \bar{\mathbf{I}}$ είναι οι θεμελιώδεις μορφές 1ης τάξης που αντιστοιχούν σε δυο διαφορετικά συστήματα συν/νων **x**(u,v) και $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})$ γύρω από ένα σημείο **P**, των οποίων οι αντίστοιχες περιοχές συν/νων έχουν κοινό τμήμα που περιέχει το **P**, τότε **I**(du,dv)=$\bar{\mathbf{I}}(d\bar{u},d\bar{v})$.

Ενώ όμως οι θεμελιώδεις μορφές παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς των παραμέτρων, τα θεμελιώδη μεγέθη αλλάζουν μέσω γνωστών μετασχηματισμών και γίνονται αντίστοιχα:

$$E = \bar{E}\bar{u}_u^2 + 2\bar{F}\bar{u}_u\bar{v}_u + \bar{G}\bar{v}_u^2, \quad G = \bar{E}\bar{u}_v^2 + 2\bar{F}\bar{u}_v\bar{v}_v + \bar{G}\bar{v}_v^2$$

$$F = \bar{E}\bar{u}_u\bar{u}_v + \bar{F}(\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{u}_v\bar{v}_u) + \bar{G}\bar{v}_u\bar{v}_v$$

☑ Επειδή η **I** είναι θετικά ορισμένη, τα θεμελιώδη μεγέθη ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$E>0,\ G>0 \text{ και } EG-F^2>0.$$

Κατά προφανή τρόπο είναι E>0, G>0 ενώ $EG-F^2=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle\langle\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}\rangle-\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle^2$ $=(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})=\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|^2>0$, που προκύπτει από την ταυτότητα του Lagrange και από το γεγονός ότι, για τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{x_u}$, $\mathbf{x_v}$ ισχύει $\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\neq\mathbf{0}$.

Εφαρμογές

1) *Υπολογισμός μήκους τόξου*

Έστω **α**(t)=**x**(u(t),v(t)) καμπύλη μιας επιφάνειας M όπου **x**(u,v) ένα σύστημα συν/νων, του οποίου η περιοχή συν/νων που ορίζει στην M περιέχει το σημείο **P** για το οποίο ισχύει **α**(0)=**P**.

Τότε: $\boldsymbol{\alpha}'(t)=\mathbf{x_u}\,u'(t)+\mathbf{x_v}\,v'(t)$ και $\mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2=\langle\boldsymbol{\alpha}'(t),\boldsymbol{\alpha}'(t)\rangle$

$$=\langle\mathbf{x_u}\,u'(t)+\mathbf{x_v}\,v'(t),\mathbf{x_u}\,u'(t)+\mathbf{x_v}\,v'(t)\rangle=E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

οπότε: $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$.

Τότε, το μήκος του τόξου της καμπύλης από 0 έως t θα είναι:

$$s(t)=\int_0^t\|\boldsymbol{\alpha}'(\theta)\|\,d\theta=\int_0^t\sqrt{E\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+2F\left(\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{dv}{d\theta}\right)+G\left(\frac{dv}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

2) *Η γωνία εφαπτόμενων διανυσμάτων επιφάνειας*

Η γωνία φ μεταξύ των δύο εφαπτόμενων d**x**, δ**x** διανυσμάτων (διαφορικών) σε ένα σημείο **x**(u,v) μιας επιφάνειας M υπολογίζεται ως εξής: $\cos\phi=\dfrac{\langle d\mathbf{x},\delta\mathbf{x}\rangle}{\|d\mathbf{x}\|\cdot\|\delta\mathbf{x}\|}$.

Πράγματι, με $d\mathbf{x}=\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv$ και $\delta\mathbf{x}=\mathbf{x_u}\delta u+\mathbf{x_v}\delta v$ προκύπτει:

$$\cos\phi = \frac{< \mathbf{x_u}\, du + \mathbf{x_v}\, dv, \mathbf{x_u}\delta u + \mathbf{x_v}\delta v >}{\| \mathbf{x_u}\, du + \mathbf{x_v}\, dv \| \cdot \| \mathbf{x_u}\delta u + \mathbf{x_v}\delta v |} =$$

$$= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

ενώ τα εφαπτόμενα διανύσματα d**x**,δ**x** θα είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\cos\varphi=0 \text{ ή } Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0$$

Ειδικά: αν φ είναι **η γωνία μεταξύ των u και v-παραμετρικών γραμμών στο σημείο P μιας περιοχής συν/νων x(u,v)**, τότε:

$$\cos\phi = \frac{< \mathbf{x_u}, \mathbf{x_v} >}{\| \mathbf{x_u} \| \cdot \| \mathbf{x_v} \|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Οι παραμετρικές γραμμές θα καλούνται **ορθογώνιες** μεταξύ τους αν και μόνο αν F=0 για κάθε $(u,v) \in U \subset \mathbf{R^2}$, ενώ εκείνες οι ορθογώνιες παραμετρικές γραμμές για τις οποίες ισχύει E=F για κάθε $(u,v) \in U \subset \mathbf{R^2}$, θα καλούνται **ισόθερμες**.

3) *Υπολογισμός εμβαδού (τμήματος) επιφάνειας*

Έστω R ένα κομμάτι μιας κανονικής επιφάνειας M, που περιέχεται στην εικόνα **x**(U) ενός συστήματος συν/νων **x**: $U \subset \mathbf{R^2} \to M \subset \mathbf{R^3}$ (θα ασχοληθούμε με αυτή τη ειδική περίπτωση). Εμβαδό του κομματιού R καλούμε τότε το ολοκλήρωμα:

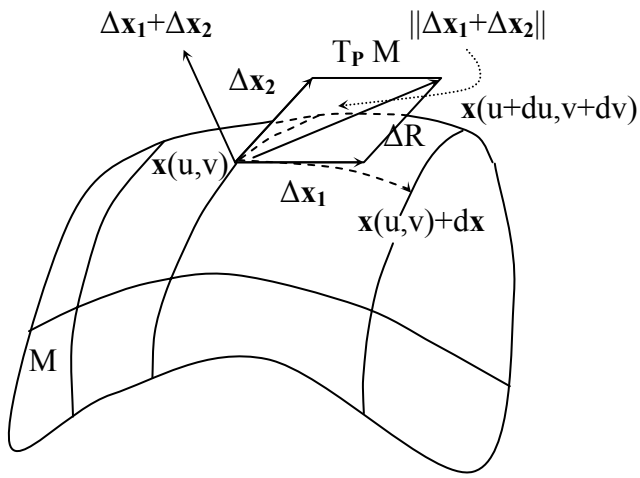
$$E(R)=\iint_Q \| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, dudv \text{, όπου } Q=\mathbf{x}^{-1}(R) \text{ (Q φραγμένο).}$$

Απόδειξη

Έστω ΔR ένα αρκετά μικρό, κλειστό σύνολο, στην εικόνα **x**(Q) (Q φραγμένο υποσύνολο του U, για να μπορούμε να ολοκληρώσουμε) ενός συστήματος συν/νων, του οποίου το σύνορο αποτελούν οι γειτονικές u-παραμετρικές γραμμές u και u+du και οι γειτονικές v-παραμετρικές γραμμές v και v+dv.

Σαν μια πρώτη προσέγγιση του (στοιχειώδους) εμβαδού ΔR, παίρνουμε το εμβαδό του παρ/μου, του οποίου οι πλευρές είναι τα διανύσματα $\Delta\mathbf{x_1}=\mathbf{x_u}du$ και $\Delta\mathbf{x_2}=\mathbf{x_v}dv$ ($d\mathbf{x}=\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv=\Delta\mathbf{x_1}+\Delta\mathbf{x_2}$). Με την υπόθεση ότι du,dv>0, το εμβαδό δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta R \approx \| \Delta\mathbf{x}_1 \times \Delta\mathbf{x}_2 \| = \| \mathbf{x_u}du \times \mathbf{x_v}dv \| = \| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv \text{ (σχήμα 3.6).}$$



Σχήμα 3.6

Στη συνέχεια, αθροίζοντας τα εμβαδά όλων των επιμέρους κομματιών της επιφάνειας που βρίσκονται στην εικόνα του R=**x**(Q), προκύπτει το εμβαδό του κομματιού R και είναι ίσο με:

$$E(R)=\iint_Q \| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \iint_Q \sqrt{EG-F^2}\, dudv \text{, όπου } Q=\mathbf{x}^{-1}(R).$$

Δίνοντας έναν γενικότερο ορισμό του εμβαδού ενός κομματιού μιας επιφάνειας, θα ορίζαμε σαν εμβαδό ενός κλειστού, συνεκτικού κομματιού (συνόλου) R που περιέχεται στη εικόνα ενός συστήματος συν/νων **x**(u,v), το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο υποσύνολο W του uv-επιπέδου που απεικονίζεται (μέσω του **x**) στο R (το σύνορο του R μπορεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να μην περιέχει και κάποιες γραμμές μια και αυτές δεν έχουν εμβαδό). Υποθέτουμε ότι, το σύνορο του R και μια περιφέρεια (σύνορο) μπορούν να συνδεθούν με μια 1-1, κανονική, αμφισυνεχή απεικόνιση, εκτός ίσως από πεπερασμένο αριθμό σημείων. Άρα:

$$E(R) = \iint_W \| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \iint_W \sqrt{EG-F^2}\, dudv .$$

Σημειώνουμε ότι, για τις προσανατολισμένες επιφάνειες ο ορισμός αυτός του εμβαδού είναι ανεξάρτητος από το σύστημα συν/νων που καλύπτει το R.

Πράγματι, αν **x**(u,v): $U \subset \mathbf{R^2} \to M \subset \mathbf{R^3}$ και $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})$: $\bar{U} \subset \mathbf{R^2} \to M \subset \mathbf{R^3}$ είναι δύο συστήματα συν/νων που καλύπτουν το R, τότε είδαμε ότι τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης μετασχηματίζονται ως εξής:

$$E = \bar{E}\bar{u}_u^2 + 2\bar{F}\bar{u}_u\bar{v}_u + \bar{G}\bar{v}_u^2, \quad G = \bar{E}\bar{u}_v^2 + 2\bar{F}\bar{u}_v\bar{v}_v + \bar{G}\bar{v}_v^2$$

$$F = \bar{E}\bar{u}_u\bar{u}_v + \bar{F}(\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{u}_v\bar{v}_u) + \bar{G}\bar{v}_u\bar{v}_v$$

Άρα: $E(R) = \iint_W \| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \iint_W \sqrt{EG-F^2}\, dudv$ και μετά από αντικατάσταση και πράξεις: $E(R)= \iint_W \sqrt{(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)(\bar{u}_u\bar{u}_v-\bar{v}_u\bar{v}_v)^2}\, dudv = \iint_W \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\left|\frac{\theta(\bar{u},\bar{v})}{\theta(u,v)}\right| dudv$

$= \iint_W \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2} \cdot \frac{\theta(\bar{u},\bar{v})}{\theta(u,v)} dudv$, για μια προσανατολισμένη επιφάνεια ($\left|\frac{\theta(\bar{u},\bar{v})}{\theta(u,v)}\right|>0$)

Τελικά $E(R)=\iint_{\bar{W}} \sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\, d\bar{u}d\bar{v}$, σύμφωνα με το θεώρημα μετασχηματισμού (αλλαγής μεταβλητών) των πολ/πλών ολοκληρωμάτων, όπου $\bar{W}$ είναι το (ανοικτό) (υπο)σύνολο του $\bar{u}\bar{v}$-επιπέδου στο οποίο απεικονίζεται, μέσω του μετασχηματισμού $\bar{u} = \bar{u}(u,v)$ και $\bar{v} = \bar{v}(u,v)$, το W στο $\bar{U}$.

Σημειώνουμε ότι, οι ποσότητες $\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| dudv = \sqrt{EG-F^2}\, dudv$ καλούνται **εμβαδικά στοιχεία μιας (κανονικής) επιφάνειας ως προς ένα σύστημα συν/νων x**.

3.8 Μετρική Riemann-Η μετρική μιας επιφάνειας, Σύμμορφη μετρική

Η γνώση των E,F,G που υπολογίστηκαν παραπάνω, μας επιτρέπει, όπως είδαμε, να κάνουμε μετρήσεις στην επιφάνεια: μέτρηση μήκους καμπυλών, γωνιών, εμβαδών, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τον περιβάλλοντα χώρο $\mathbf{R^3}$. Αυτό αποτελεί τον πυρήνα της ανάπτυξης της **Εσωτερικής Γεωμετρίας** μιας επιφάνειας.

Πράγματι, τη θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή:

$$d\mathbf{x}^2=(d\mathbf{x})^2=\|d\mathbf{x}\|^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

που υπολογίζει την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων της επιφάνειας, την οποία καλούμε και **μετρική της επιφάνειας**, τη βρήκαμε αφού υποθέσαμε ότι τα μήκη διανυσμάτων θα τα βρίσκουμε σα να ήταν διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ και με βάση αυτή τη μετρική μπορούμε να βρίσκουμε μήκη καμπυλών και γενικά, μπορούμε να κάνουμε **Γεωμετρία πάνω σε μια επιφάνεια**.

Αλλά και γενικότερα όμως, όταν μας δοθεί μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή του τύπου $g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}du^2$ με g_{11}, g_{12}, g_{22} συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbf{R}^2$, μπορούμε κατά αντίστοιχο τρόπο να κάνουμε Γεωμετρία πάνω σε μια επιφάνεια με βάση αυτή την μετρική. Αυτό αποτελεί και τη βάση της **Γεωμετρίας Riemann**.

Ως **μετρική Riemann** (που συχνά είναι αυτή που καλείται και $1^η$ θεμελιώδης μορφή) καλούμε την επαγώμενη από τον $\mathbf{R}^3$ μετρική σε ένα σημείο **P** μιας λείας επιφάνειας M του $\mathbf{R}^3$ (ή γενικότερα του $\mathbf{R}^n$). Αυτή ορίζεται τότε ως:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>=||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||\cos\theta,$$

όπου **v**,**w** είναι διανύσματα του $T_P(M)$ και θ η γωνία μεταξύ των **v**,**w**.

Πρόκειται δηλαδή για την απεικόνιση <,>: $M\mathrm{x}M\rightarrow[0,+\infty)$, που εκφράζει την εσωτερική απόσταση $\mathbf{d}_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ δύο σημείων **P**,**Q** της επιφάνειας M (το inf του μήκους της καμπύλης που τα συνδέει. Ο όρος θα αναλυθεί περισσότερο στη συνέχεια).

Σημειώνουμε ότι, ο ορισμός αυτός είναι ένας εσωτερικός ορισμός, καθώς τα διανύσματα του $T_P(M)$ μπορούν να περιγραφούν εσωτερικά ως διανύσματα ταχύτητας παραμετρικών γραμμών της επιφάνειας και επομένως τα μήκη τους και η γωνίες μεταξύ τους μπορούν να μετρηθούν εσωτερικά.

Για τη μετρική Riemann ισχύουν οι (γνωστές) ιδιότητες:

α) Συμμετρική: $<\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{w},\mathbf{v}>$

β) Διγραμμική: $\alpha<\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\alpha\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{v},\alpha\mathbf{w}>$, $\alpha\in\mathbf{R}$

$<\mathbf{v},\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2>=<\mathbf{v},\mathbf{w}_1>+<\mathbf{v},\mathbf{w}_2>$

$<\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{w}>=<\mathbf{v}_1,\mathbf{w}>+<\mathbf{v}_2,\mathbf{w}>$

γ) Θετικά ορισμένη: $<\mathbf{v},\mathbf{v}>\geq 0$ και $<\mathbf{v},\mathbf{v}>=0$ αν και μόνο αν $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Σημειώνουμε ότι, οι ιδιότητες αυτές, ιδιότητες που προκύπτουν άμεσα από τον γεωμετρικό ορισμό της μετρικής, ισχύουν ανεξάρτητα από το σύστημα συν/νων που χρησιμοποιούμε και μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε με έναν δυναμικό και γόνιμο τρόπο τα συστήματα των τοπικών συν/νων στις γειτονίες των σημείων μιας επιφάνειας.

Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ αποτελούν μια τυχαία βάση $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$του $T_P(M)$ (θα μπορούσαν να είναι και τα $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$), τότε δύο οποιαδήποτε διανύσματα **v**,**w** του $T_P(M)$ θα γράφονται: $\mathbf{v}=v^1\mathbf{x}_1+v^2\mathbf{x}_2$ και $\mathbf{w}=w^1\mathbf{x}_1+w^2\mathbf{x}_2$, οπότε η μετρική Riemann των **v**,**w** θα είναι ίση με:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>=[v^1\ v^2]\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix},$$

όπου $g_{ij}=<\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j,>$, i,j=1,2.

Προφανώς, διαφορετικές βάσεις δίνουν διαφορετικούς πίνακες με (γενικά) στοιχεία g_{ij}.

■ Αν η βάση $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ είναι ορθογώνια ($<\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2>=0$), τότε $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$.

■ Αν η βάση $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ είναι ορθοκανονική ($<\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2>=0$ και $<\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1>=<\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_2>=1$), τότε $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ο ταυτοτικός 2x2 πίνακας) και η μετρική Riemann ταυτίζεται

με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο (ως προς οποιοδήποτε 2-διάστατο ορθοκανονικό σύστημα συν/νων του $T_P(M)$ ή γενικότερα του $\mathbf{R}^n$), είναι δηλαδή:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v^1w^1+v^2w^2.$$

Σημειώνουμε ότι, είναι πάντα δυνατόν να επιλέξουμε ένα σύστημα συν/ων το οποίο να είναι ορθοκανονικό σε ένα συγκεκριμένο σημείο, αλλά δεν είναι πάντα δυνατόν αυτό να συμβαίνει για όλα τα σημεία, παρά μόνο αν η επιφάνεια είναι αναπτύξιμη σε επίπεδο (τοπικά ισομετρική με το επίπεδο).

Είναι επίσης σημαντικό να θεωρούμε τη μετρική Riemann **ελεύθερη συν/νων**, (ειδική διγραμμική μορφή στον εφαπτόμενο χώρο) διότι ακόμη και αν μια επιφάνεια είναι πάντα εμφυτευμένη στον $\mathbf{R}^3$ για τον οποίο θεωρούμε ένα σύστημα συν/νων, αυτό το σύστημα συν/νων δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί και ένα «φυσικό» σύστημα συν/νων του εφαπτόμενου επιπέδου $T_P(M)$ της επιφάνειας. Για παράδειγμα, για μια καμπύλη που διέρχεται από ένα σημείο **P** μιας επιφάνειας M, επιθυμούμε τα διανύσματα της βάσης του $T_P(M)$ να είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο της καμπύλης και το μοναδιαίο κάθετο σε αυτή (στο **P**), αντίστοιχα. Στην περίπτωση όμως που ενδιαφερόμαστε για την καμπυλότητα της επιφάνειας, είναι βολικότερο να επιλέγουμε σα διανύσματα της βάσης τα διανύσματα των κύριων διευθύνσεων (κύρια διανύσματα).

Εφαρμογή

Για το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$, *με* $u\in(0,2\pi)$ *και* $v\in(-\pi/2,\pi/2)$ *(σύστημα τοπικών συν/νων μιας σφαίρας ακτίνας* R*) και για τα διανύσματα* $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$, *η βάση* $\{\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\}$ *είναι ορθοκανονική μόνο στον Ισημερινό και μόνο για τη μοναδιαία σφαίρα. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι μια ορθογώνια βάση.*

Απόδειξη

Πράγματι: $\mathbf{x_u}=(-R\sin u\cos v, R\cos u\cos v, 0)$, $\mathbf{x_v}=(-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v)$ και

$g_{11}=<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}>=R^2\cos^2 v$, $g_{12}=g_{21}=<\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>=0$ (ορθογώνια βάση), $g_{22}=R^2$, οπότε:

$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$ και θα είναι $\begin{bmatrix} R^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αν και μόνο αν $R^2=1$ ή $R=1$ (μοναδιαία σφαίρα) και $R^2\cos^2 v=1$ ή $v=0$ (στον Ισημερινό).

Επειδή τις επιφάνειες του $\mathbf{R}^3$ τις βλέπουμε συχνά εμφυτευμένες μέσα σε αυτόν, η Γεωμετρία τους είναι επόμενο να αντανακλά τη Γεωμετρία του $\mathbf{R}^3$. Αν θελήσουμε να επεκτείνουμε την αντίληψή μας για τη Γεωμετρία πέρα από τον $\mathbf{R}^3$ (επιφάνειες που δεν ανήκουν στον $\mathbf{R}^3$ και γενικότερα στον Ευκλείδειο $\mathbf{R}^n$) τότε θα πρέπει να αποδεσμευτούμε από την επαγομένη από αυτόν μετρική Riemann. Το ελάχιστο που θα μπορούσαμε να κάνουμε στην προσπάθειά μας αυτή είναι να μορφοποιήσουμε κατάλληλα την εξάρτησή μας από την μετρική Riemann στον $\mathbf{R}^n$, για παράδειγμα θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τον πίνακα A των g_{ij}.

Έτσι, με $A=\begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha>0$ για τα διανύσματα **v**,**w** προκύπτει η μετρική:

$$<\mathbf{v},\mathbf{w}>=[v^1\ v^2]\begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}=\frac{v^1w^1+v^2w^2}{\alpha}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\alpha}.$$

Στην περίπτωση που το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ αφορά τα διανύσματα των εφαπτόμενων επιπέδων μιας επιφάνειας M στα σημεία της **P**, ο αριθμός α μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε σημείο έτσι ώστε να είναι $\alpha=f^2(\mathbf{P})$, για τη συνάρτηση $f: M\to\mathbf{R}$

και $\mathbf{P}\in M$. Τότε, για δυο διανύσματα του $T_P(M)$ έχουμε: $<\mathbf{v},\mathbf{w}>=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{f^2(\mathbf{P})}$ και με βάση αυτή τη μετρική μπορούμε επίσης να κάνουμε μετρήσεις στην επιφάνεια M.

Η παραπάνω μετρική καλείται **σύμμορφη της Ευκλείδειας μετρικής** με παράγοντα κλίμακας την f.

Παρατήρηση

Η επιλογή μιας σύμμορφης της Ευκλείδειας μετρικής, διαφοροποιεί σε υπολογιστική βάση τα αποτελέσματα αλλά συνεχίζει να παρέχει ποιοτικά τις ίδιες πληροφορίες για τη Γεωμετρία των επιφανειών.

3.9 2η θεμελιώδης μορφή, Θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης

Έστω $\mathbf{x}(u,v)$ ένα σύστημα συν/νων μιας κανονικής επιφάνειας M κλάσεως C^m $(m\geq 1)$. Είδαμε ότι, σε κάθε σημείο **P** της M που ανήκει στην περιοχή συν/νων του **x**, αντιστοιχεί το διαφορίσιμο, μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (διανυσματικό πεδίο) $\mathbf{n}(\mathbf{P})=\dfrac{\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}$ και μέσω αυτού ορίσαμε την απεικόνιση Gauss $\mathbf{n}: M\to S^2$ η οποία είναι κλάσης τουλάχιστον C^1 ως προς τα u,v.

Τότε: $\dfrac{d\mathbf{n}}{dt}=\dfrac{d\mathbf{n}}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}+\dfrac{d\mathbf{n}}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dt}$ και $d\mathbf{n}=\mathbf{n_u}du+\mathbf{n_v}dv$.

Το διάνυσμα d**n**, προσδιορίζεται από την τιμή του διαφορικού d**n** στο διάνυσμα $d\mathbf{x}=\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv$, είναι κάθετο στο **n** μια και $0=d(1)=d(<\mathbf{n},\mathbf{n}>)=2<d\mathbf{n},\mathbf{n}>$ ή $<d\mathbf{n},\mathbf{n}>=0$ (εφαπτόμενο στη σφαιρική εικόνα της απεικόνισης Gauss **n**) και επομένως το d**n** είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο της επιφάνειας M στο σημείο **x** αυτής.

2η θεμελιώδης μορφή ή **θεμελιώδη μορφή 2ης τάξης**, καλούμε τη συνάρτηση **II** ή $\mathbf{II_P}$: $T_P(M)\subset\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$ που η τιμή της στο τυχαίο διάνυσμα $d\mathbf{x}=(du,dv)$ του uv-επιπέδου, είναι ίση με το εσωτερικό γινόμενο: $\mathbf{II}(du,dv)=-<d\mathbf{n},d\mathbf{x}>$.

Με αντικατάσταση των d**n**, d**x** η **II** γίνεται:

$$\mathbf{II}(du,dv)=-<\mathbf{n_u}du+\mathbf{n_v}dv,\ \mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv>=\ell\, du^2+2m\,du\,dv+n\,dv^2,\ \text{όπου}$$

$$\ell=-<\mathbf{x_u},\mathbf{n_u}>,\ m=-<\mathbf{x_u},\mathbf{n_v},>=-<\mathbf{x_v},\mathbf{n_u},>,\ n=-<\mathbf{x_v},\mathbf{n_v}>.$$

Τα ℓ,m,n καλούνται **θεμελιώδη μεγέθη 2ης τάξης** και είναι συναρτήσεις των u,v.

Σημειώνουμε ότι: συχνά στη βιβλιογραφία ορίζεται ως 2η θεμελιώδης μορφή μια συνάρτηση στο εφαπτόμενο επίπεδο, της οποίας η τιμή στο τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $d\mathbf{x}=\mathbf{x_u}du+\mathbf{x_v}dv$ είναι ίση με $\mathbf{II}(d\mathbf{x})=\ell\, du^2+2m\,du\,dv+n\,du^2$ και γενικότερα, για οποιοδήποτε διάνυσμα **v** του εφαπτόμενου επιπέδου είναι ίση με: $\mathbf{II}(\mathbf{v})=-<\mathbf{v},S_P(\mathbf{v})>$.

Παρατηρήσεις

☑ Η **II** είναι μια διγραμμική, ομογενής συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς du,dv.

☑ Η **II** παραμένει αναλλοίωτη κατά τους μετασχηματισμούς των παραμέτρων που διατηρούν όμως τη φορά του **n**, ενώ απλά αλλάζει πρόσημο κατά την αλλαγή της φοράς του **n**.

Τα θεμελιώδη μεγέθη όμως αλλάζουν μέσω γνωστών μετασχηματισμών, αντίστοιχων με αυτούς για τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης και γίνονται:

$$\ell=\bar{\ell}\,\bar{u}_u^2+2\,\overline{mu}_u\bar{v}_u+\overline{nv}_u^2,\quad n=\bar{\ell}\,\bar{u}_v^2+2\,\overline{mu}_v\bar{v}_v+\overline{nv}_v^2$$

$$m=\bar{\ell}\,\bar{u}_u\bar{u}_v+\overline{m}(\bar{u}_u\bar{v}_v+\bar{u}_v\bar{v}_u)+\overline{nv}_u\bar{v}_v$$

☑ Σύμφωνα με τις ιδιότητες του τελεστή σχήματος $S_P(\mathbf{v})$ που είδαμε, θα ισχύουν:

$$\ell = \mathbf{II}(\mathbf{x_u}) = -\langle \mathbf{x_u}, S_P(\mathbf{x_u})\rangle = \langle \mathbf{x_{uu}}, \mathbf{n}\rangle$$

$$m = -\langle \mathbf{x_u}, S_P(\mathbf{x_v})\rangle = -\langle \mathbf{x_u}, \mathbf{n_v}\rangle = \langle \mathbf{x_{uv}}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{x_{vu}}, \mathbf{n}\rangle$$

$$n = \mathbf{II}(\mathbf{x_v}) = -\langle \mathbf{x_v}, S_P(\mathbf{x_v})\rangle = \langle \mathbf{x_{vv}}, \mathbf{n}\rangle$$

3.10 Κάθετη καμπυλότητα καμπύλης, Κάθετη καμπυλότητα επιφάνειας, Κάθετη τομή

Το σημείο εκκίνησης του ορισμού της κάθετης καμπυλότητας μιας καμπύλης στα διάφορα εγχειρίδια ποικίλει. Εμείς θα υιοθετήσουμε ένα από αυτούς και στη συνέχεια θα δούμε τις ισοδύναμες εκφράσεις του καθώς και τις πληροφορίες που αυτές παρέχουν και οι οποίες αφορούν τη συμπεριφορά της καμπύλης μιας επιφάνειας. Η συμπεριφορά αυτή είναι «εξωτερική» για την επιφάνεια αλλά δεν είναι τελικά ανεξάρτητη από «εσωτερικά χαρακτηριστικά» της επιφάνειας (όπως η γεωδαισιακή καμπυλότητα). Η προσέγγιση που θα κάνουμε θα είναι διανυσματική.

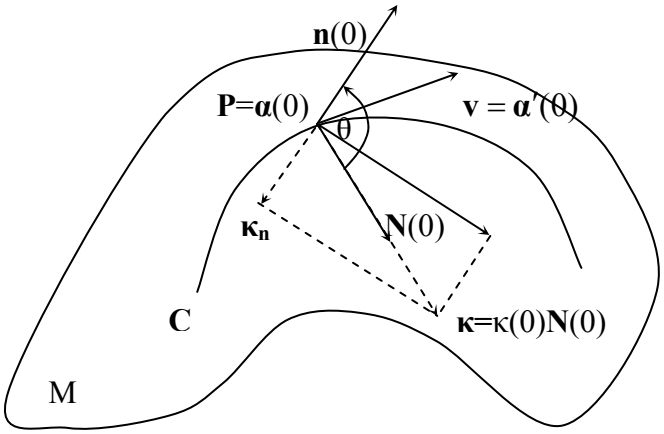
Έστω **P** ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας και **x** ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ του οποίου η αντίστοιχη περιοχή συν/νων περιέχει το **P**. Έστω επίσης C μια παραμετρισμένη καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbf{R} \to M \subset \mathbf{R}^3$ της επιφάνειας, κλάσεως C^m $(m \geq 1)$, με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ και η οποία διέρχεται από το **P**.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\kappa}_n$ της κάθετης καμπυλότητας της καμπύλης C στο P, είναι η διανυσματική προβολή του διανύσματος καμπυλότητας $\boldsymbol{\kappa}$ της C στο **P** στο κάθετο, μοναδιαίο διάνυσμα **n** της επιφάνειας στο **P** (η προβολή στην κάθετη δηλαδή διεύθυνση της επιφάνειας στο **P**). Άρα $\boldsymbol{\kappa}_n = \dfrac{<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}>}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\rangle \mathbf{n}$

Ως **κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης C στο P** θα θεωρούμε τον αριθμό:

$$\kappa_n = \langle \boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\rangle$$

Σημειώνουμε ότι: το $\boldsymbol{\kappa}_n$ είναι ανεξάρτητο από τη φορά του **n** (προσανατολισμό της επιφάνειας) και ότι με $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ θα είναι $\boldsymbol{\kappa}=\kappa(0)\mathbf{N}(0)$, όπου **N**(0) το πρώτο κάθετο διάνυσμα (διάνυσμα της πρώτης καθέτου) της καμπύλης στο **P** και κ(0) το μέτρο της καμπυλότητας της καμπύλης στο **P**.



Σχήμα 3.7

Παρατηρήσεις

☑ Το διάνυσμα $\boldsymbol{\kappa}_n$ είναι ανεξάρτητο και από τη φορά (προσανατολισμό) της καμπύλης μια και το $\boldsymbol{\kappa}$ είναι ανεξάρτητο και από τη φορά διαγραφής της καμπύλης, αλλά και της φοράς του **N**.

☑ Το πρόσημο της κ_n εξαρτάται από τη φορά του **n**, ενώ είναι ανεξάρτητο από τη φορά διαγραφής της καμπύλης (σχήμα 3.7).

Θεώρημα

Έστω μια *καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\rightarrow M\subset\mathbf{R}^3$ *με μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας για την οποία ισχύει* $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ *και* $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$. *Τότε*:

α) $\mathbf{II}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=\langle\boldsymbol{\kappa}(t),\mathbf{n}(t)\rangle=\kappa_n$

β) $\kappa_n=\kappa(0)\cos\theta$, *όπου* κ *το μέτρο της καμπυλότητα της καμπύλης στο* **P** *και* θ *η γωνία μεταξύ* $\mathbf{N}(0)$ *και* $\mathbf{n}(0)$.

Απόδειξη

α) Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$: $U\subset\mathbf{R}^2\rightarrow M$ με την τροχιά της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ να περιέχεται στην περιοχή συν/ων $\mathbf{x}(U)$ της επιφάνειας M, τότε η καμπύλη θα γράφεται: $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$, για τις παραγωγίσιμες, κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ συναρτήσεις u,v. Άρα:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)=\mathbf{x_u}\frac{du}{dt}+\mathbf{x_v}\frac{dv}{dt}=\mathbf{x_u}u'+\mathbf{x_v}v' \text{ και } \boldsymbol{\alpha}''(t)=\mathbf{x_{uu}}(u')^2+2\mathbf{x_{uv}}u'v'+\mathbf{x_{vv}}(v')^2+\mathbf{x_u}u''+\mathbf{x_v}v''$$

Αλλά $\langle\mathbf{x_u},\mathbf{n}\rangle=\langle\mathbf{x_v},\mathbf{n}\rangle=0$ οπότε $\langle\boldsymbol{\alpha}'',\mathbf{n}\rangle=\langle\mathbf{x_{uu}}(u')^2+2\mathbf{x_{uv}}u'v'+\mathbf{x_{vv}}(v')^2,\mathbf{n}\rangle$

Άρα: $\mathbf{II}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=\mathbf{II_P}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=-\langle\boldsymbol{\alpha}'(t),S_P(\boldsymbol{\alpha}'(t))\rangle=-\langle\mathbf{x_u}u'+\mathbf{x_v}v',S_P(\mathbf{x_u}u'+\mathbf{x_v}v')\rangle$

$=-(u')^2\langle\mathbf{x_u},S_P(\mathbf{x_u})\rangle-u'v'\langle\mathbf{x_v},S_P(\mathbf{x_u})\rangle-u'v'\langle\mathbf{x_u},S_P(\mathbf{x_v})\rangle-(v')^2\langle\mathbf{x_v},S_P(\mathbf{x_v})\rangle$

$=(u')^2\langle\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}\rangle+u'v'\langle\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}\rangle+u'v'\langle\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}\rangle+(v')^2\langle\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}\rangle$

$=\langle\mathbf{x_{uu}}(u')^2+2\mathbf{x_{uv}}u'v'+\mathbf{x_{vv}}(v')^2,\mathbf{n}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}'',\mathbf{n}\rangle$.

Όμως $\kappa_n=\langle\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}'',\mathbf{n}\rangle$ (στην περίπτωση της μοναδιαίας ταχύτητας) οπότε:

$$\mathbf{II}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=\langle\boldsymbol{\kappa}(t),\mathbf{n}(t)\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}''(t),\mathbf{n}(t)\rangle=\kappa_n$$

β) Από το **α)** για t=0 προκύπτει: $\kappa_n=\langle\boldsymbol{\alpha}''(0),\mathbf{n}(0)\rangle=\langle\kappa(0)\mathbf{N}(0),\mathbf{n}(0)\rangle=\kappa(0)\langle\mathbf{N}(0),\mathbf{n}(0)\rangle$ και για τα μοναδιαία $\mathbf{N}(0),\mathbf{n}(0)$: $\kappa_n=\kappa(0)\cos\theta$.

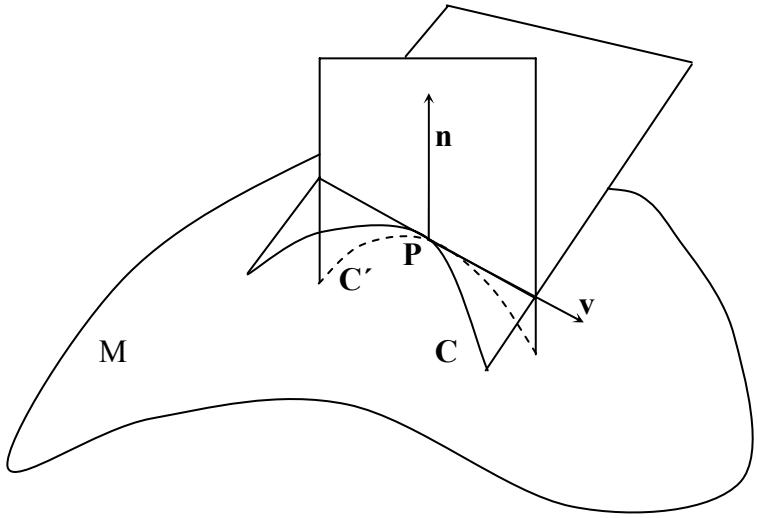
Ας θεωρήσουμε τώρα την κανονική επιφάνεια M και **v** ένα μη μηδενικό διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου της $T_P(M)$ στο σημείο της **P**. Αν $u=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο του **v**, τότε ως **κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας M στο P ως προς τη διεύθυνση v** καλούμε τον αριθμό $\kappa_n(\mathbf{v})=\mathbf{II_P}(\mathbf{u})=-\frac{\langle S_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$.

Αν υποθέσουμε ότι το διάνυσμα **v** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας μιας καμπύλης της επιφάνειας που διέρχεται από το **P** ($\mathbf{v}\in T_P(M)$), τότε η κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας στο **P** ως προς τη διεύθυνση **v** είναι ίση με την κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης αυτής στο εν λόγω σημείο, είναι δηλαδή ίση με $\kappa(0)\cos\theta$. Τα **v** και $\mathbf{n}(0)$ ορίζουν ένα επίπεδο που τέμνει την επιφάνεια σε μια καμπύλη C' το οποίο καλείται **κάθετη τομή** (σχήμα 3.8).

Αν θεωρήσουμε ότι η C' έχει μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας (αλλιώς κάνουμε αναπαραμέτρησή της) τότε: $N_{C'}(0)=\pm\kappa(0)$ ($\theta=0$ ή $\theta=\pi$) και η καμπυλότητα της επιφάνειας θα είναι ίση με $\kappa_n(\mathbf{v})=\pm\kappa_{C'}(0)$ (όπου $\kappa_{C'}(0)$ η καμπυλότητα της κάθετης τομής C' στο **P**). Άρα:

Πρόταση

Η κάθετη καμπυλότητα μιας κανονικής επιφάνειας M *σε ένα σημείο της* **P** *και ως προς μια διεύθυνση* **v**, *είναι στην ουσία η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της επιφάνειας (με ένα + ή -).*



Σχήμα 3.8

Παρατηρήσεις

☑ Το πρόσημο της κ_n μας λέει σχετικά με την καμπύλωση της M προς το μέρος ή προς την αντίθετη κατεύθυνση από το κάθετό της διάνυσμα **n**, σε μια δοσμένη διεύθυνση **v**. Αλλαγή της φοράς του **n**(**P**) σημαίνει αλλαγή του προσήμου της κ_n.

☑ Από τον ορισμό της κάθετης καμπυλότητας μιας επιφάνειας προκύπτει ότι αν **v**,**w** είναι παράλληλα και εφαπτόμενα διανύσματα του $T_P(M)$ τότε $\kappa_n(\mathbf{v})=\kappa_n(\mathbf{w})$. Επομένως μπορούμε να υπολογίζουμε κάθετες καθετότητες μόνο για τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα.

Θεώρημα (Meusnier)

Όλες οι καμπύλες μιας κανονικής επιφάνειας M που διέρχονται από ένα σημείο της **P** *και έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό, έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα.*

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε καμπύλη **α** της επιφάνειας που διέρχεται από το **P**=**α**(t) και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο **P** το **v**=**α**′(t) θα έχει κάθετη καμπυλότητα:

$$\kappa_n=\mathbf{II_P}(\boldsymbol{\alpha}'(t))=-\langle\boldsymbol{\alpha}'(t),S_P(\boldsymbol{\alpha}'(t))\rangle,$$

η οποία θα είναι η ίδια, ανεξάρτητα από την καμπύλη.

Πρόταση

Για την κάθετη καμπυλότητα ισχύει: $\kappa_n=\dfrac{\mathbf{II_P}}{\mathbf{I_P}}=\dfrac{\ell\,du^2+2\,m\,du\,dv+n\,dv^2}{E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2}$.

Παρατήρηση

Η κ_n, με προσέγγιση προσήμου (ανάλογα με το αν οι μετασχηματισμοί των συν/νων, μεταξύ των διαφόρων συστημάτων συν/νων διατηρούν ή όχι τη φορά του **n**) είναι ανεξάρτητη του συστήματος συν/νων και επειδή η $\mathbf{I_P}$ είναι θετικά ορισμένη, το πρόσημο ή ο μηδενισμός της γίνονται ταυτόχρονα με την $\mathbf{II_P}$.

3.11 Κύριες διευθύνσεις, Κύριες καμπυλότητες

Με τη βοήθεια της κάθετης καμπυλότητας κ_n σε ένα σημείο **P** μιας επιφάνειας M (ή μιας καμπύλης της επιφάνειας M όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο) μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση της κάθετης καμπυλότητας μιας (κανονικής) επιφάνειας M στο σημείο της P**.

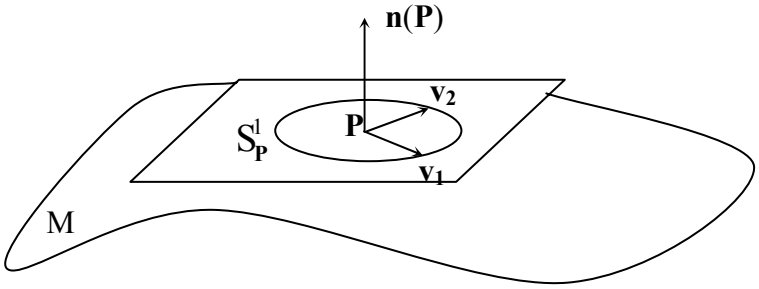
Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει τα μοναδιαία διανύσματα του $T_P(M)$, τα διανύσματα δηλαδή του μοναδιαίου κύκλου S^1_P ο οποίος έχει κέντρο το **P** και ακτίνα 1, στην κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας M ως προς τη διεύθυνση **v**.

$$\text{Άρα } \kappa_n\colon S^1_P \to \mathbf{R},\ \mathbf{v} \to \kappa_n(\mathbf{v}).$$

Σημειώνουμε ότι: η συνάρτηση της κάθετης καμπυλότητας είναι συνεχής (λόγω της διαφορισιμότητας της $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$), άρα θα υπάρχει μια διεύθυνση $\mathbf{v_1}$ ως προς την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της $\kappa_1(\mathbf{P})$ και μια διεύθυνση $\mathbf{v_2}$ ως προς την οποία η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή της $\kappa_2(\mathbf{P})$, αντίστοιχα.

Οι κ_1,κ_2 λέγονται **κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας M στο P**, ενώ οι διευθύνσεις των $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ **κύριες διευθύνσεις** (σχήμα 3.9).

Προφανώς, αν σε ένα σημείο **P** μιας επιφάνειας είναι $\kappa_1=\kappa_2$ η συνάρτηση της κάθετης καμπυλότητας είναι σταθερή και κάθε διεύθυνση της επιφάνειας από το σημείο αυτό θα είναι κύρια διεύθυνση.



Σχήμα 3.9

3.12 Συνάρτηση καμπυλότητας Gauss, Συνάρτηση μέσης καμπυλότητας

Ένας αριθμός κ είναι κύρια καμπυλότητα σε ένα σημείο μιας κανονικής επιφάνειας αν και μόνο αν για κάποιο σύστημα συν/νων ο κ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(EG-F^2)\kappa^2-(En+G\ell-2Fm)\kappa+(\ell n-m^2)=0.$$

Αν διαιρέσουμε με $EG-F^2>0$ η εξίσωση γίνεται: $\kappa^2-2H\kappa+K_G=0$, όπου:

$$K_G=\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2} \quad \text{και} \quad H=\frac{En+G\ell-2Fm}{2(EG-F^2)}$$

Τα K_G και H αποτελούν αντίστοιχα, την **καμπυλότητα Gauss** και τη **μέση καμπυλότητα**, σε ένα σημείο **P** μιας κανονικής επιφάνειας M.

Με τη βοήθεια τους, ορίζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις καμπυλότητας, δηλαδή:

Η συνάρτηση της καμπυλότητας Gauss στο σημείο P της M:

$$K_G\colon M \to \mathbf{R} \text{ με } K_G(\mathbf{P})=\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=\kappa_1(\mathbf{P})\kappa_2(\mathbf{P}).$$

Προφανώς, η K_G σε κάθε σημείο του Ευκλείδειου επιπέδου είναι ίση με το μηδέν γιατί το διάνυσμα της κάθετης καμπυλότητας σε κάθε σημείο είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα, ενώ και σε κάθε σημείο της επιφάνειας ενός κυλίνδρου (ή του κώνου και γενικότερα κάθε επιφάνειας στην οποία μπορούν να χαραχθούν ευθείες) είναι επίσης ίση με το μηδέν γιατί η μια από τις κύριες καμπυλότητες είναι αυτή της (ευθείας) γενέτειρας του κυλίνδρου (ή του κώνου αντίστοιχα).

Η συνάρτηση της μέσης καμπυλότητας στο σημείο P της M:

$$H: M \to \mathbf{R} \text{ με } H(\mathbf{P}) = \frac{En + G\ell - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{\kappa_1(\mathbf{P}) + \kappa_2(\mathbf{P})}{2}$$

Παρατηρήσεις

☑ Η διακρίνουσα της εξίσωσης $(EG-F^2)\kappa^2-(En+G\ell-2Fm)\kappa+(\ell n-m^2)=0$ είναι πάντα θετική. Πράγματι η διακρίνουσα Δ γράφεται:

$$\Delta=4\left(\frac{EG-F^2}{E^2}\right)(Em-F\ell)^2+[En-G\ell-\left(\frac{2F}{E}\right)(Em-F\ell)]^2>0.$$

☑ Η K_G είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού της επιφάνειας γιατί σε μια αλλαγή του προσανατολισμού οι ακραίες τιμές κ_1, κ_2 της κ_n αλλάζουν μόνο πρόσημο, άρα παραμένουν πάλι ακραίες.

Μια **αλγεβρική προσέγγιση** στον υπολογισμό της καμπυλότητας Gauss K_G και της μέσης καμπυλότητας H, περιλαμβάνει τις ιδιότητες του αυτοσυζυγούς του τελεστή σχήματος και του αναλλοίωτου κατά την αλλαγή βάσης, της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα της απεικόνισης αυτής.

Πρόταση

Αν μια απεικόνιση $\mathbf{f}: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ *(ο* $\mathbf{R^2}$ *εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο <,>) είναι γραμμική και αυτοσυζυγής στο* $\mathbf{R^2}$*, τότε:*

α) *Έχει πραγματικές ιδιοτιμές*

β) *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Μια τέτοια απεικόνιση είναι και ο τελεστής σχήματος $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{v})$.

Στην περίπτωση μάλιστα που οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους τότε η συνάρτηση της κάθετης καμπυλότητας $\kappa_n(\mathbf{v})=\mathbf{II_P}(\mathbf{v})=-\langle S_{\mathbf{P}}(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle$ ($\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$, για την μοναδιαίας ταχύτητας καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R^3}$ της επιφάνειας M) έχει δύο ακριβώς ακρότατα: τις κύριες καμπυλότητες κ_2 και κ_2. Πράγματι:

Πρόταση

Αν η αυτοσυζυγής απεικόνιση $\mathbf{f}: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ *έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές (έστω* $\lambda_1<\lambda_2$*) τότε η συνάρτηση* $g: S^1 \to \mathbf{R}$ *με τύπο* $g(\mathbf{v})=\langle f(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle$ *έχει δύο ακριβώς ακρότατα.*

Οι **αντίθετες των ιδιοτιμών αυτών** αποτελούν τις κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας (και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα κύρια διανύσματα). Πράγματι:

Πρόταση

Αν $\mathbf{P}$ *είναι το σημείο μιας κανονικής επιφάνειας* M *και* $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{P}}(M)$ *ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης* $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{v})$ ($S_{\mathbf{P}}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, λ πραγματικός), *τότε το* $\mathbf{v}$ *είναι κύριο διάνυσμα με αντίστοιχη ιδιοτιμή την* $-\lambda$.

Επειδή τώρα:

Πρόταση

Σε κάθε σημείο **P** *μιας κανονικής επιφάνειας* M *υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$ *με τα* $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}$ *κύρια διανύσματα, αντίστοιχες ιδιοτιμές* κ_1,κ_2 *και πίνακα της απεικόνισης* $S_{\mathbf{P}}$ *τον* $A=\begin{bmatrix}-\kappa_1 & 0\\ 0 & -\kappa_2\end{bmatrix}$ ($S_{\mathbf{P}}(\mathbf{e_1})=-\kappa_1\mathbf{e_1}$ *και* $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{e_2})=-\kappa_2\mathbf{e_2}$). *Τότε θα είναι*:

$$\det A=\kappa_1(\mathbf{P})\kappa_2(\mathbf{P}) \text{ και } \operatorname{trace}A=-\frac{\kappa_1(\mathbf{P})+\kappa_2(\mathbf{P})}{2}$$

Ακόμη και αν η βάση αλλάξει (γίνει η $\{\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\}$) με πίνακα βάσης τον B, τα det και trace παραμένουν αναλλοίωτα και με:

$$\det B=\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2} \quad \text{και} \quad \operatorname{trace}B=-\frac{En+G\ell-2Fm}{2(EG-F^2)}$$

θα πρέπει: $\kappa_1(\mathbf{P})\kappa_2(\mathbf{P})=\dfrac{\ell n-m^2}{EG-F^2}$ και $\dfrac{\kappa_1(\mathbf{P})+\kappa_2(\mathbf{P})}{2}=\dfrac{En+G\ell-2Fm}{2(EG-F^2)}$

Ορίζοντας ως: $K_G(\mathbf{P})=\kappa_1(\mathbf{P})\kappa_2(\mathbf{P})$ θα είναι $K_G(\mathbf{P})=\dfrac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=\kappa_1(\mathbf{P})\kappa_2(\mathbf{P})$ και ως:

$H(\mathbf{P})=\dfrac{\kappa_1(\mathbf{P})+\kappa_2(\mathbf{P})}{2}$ θα είναι $H(\mathbf{P})=\dfrac{En+G\ell-2Fm}{2(EG-F^2)}=\dfrac{\kappa_1(\mathbf{P})+\kappa_2(\mathbf{P})}{2}$.

Πράγματι:

Με $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_u})=B_1^1\mathbf{x_u}+B_1^2\mathbf{x_v}$ και $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_v})=B_2^1\mathbf{x_u}+B_2^2\mathbf{x_v}$, λαμβάνοντας υπόψη τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{\eta\varsigma}$ και $2^{\eta\varsigma}$ τάξης και πολ/ντας με το $\mathbf{x_u}$ θα προκύψουν:

$$\langle S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_u}),\mathbf{x_u}\rangle=B_1^1E+B_1^2F=-\ell,\ \langle S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_u}),\mathbf{x_v}\rangle=B_1^1F+B_1^2G=-m,$$

$$\langle S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_v}),\mathbf{x_u}\rangle=B_2^1E+B_2^2F=-m,\ \langle S_{\mathbf{P}}(\mathbf{x_v}),\mathbf{x_v}\rangle=B_2^1F+B_2^2G=-n$$

και από τη λύση του συστήματος θα προκύψει η εξίσωση πινάκων:

$$\begin{bmatrix}-\ell & -m\\ -m & -n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1^1 & B_1^2\\ B_2^1 & B_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}$$

οπότε: $\begin{bmatrix}B_1^1 & B_1^2\\ B_2^1 & B_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\ell & -m\\ -m & -n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}^{-1}$ ($EG-F^2>0$) και λύσεις του συστήματος:

$$B_1^1=\frac{mF-\ell G}{EG-F^2},\ B_1^2=\frac{\ell F-mE}{EG-F^2},\ B_2^1=\frac{nF-mG}{EG-F^2},\ B_2^2=\frac{mF-nE}{EG-F^2}$$

Τελικά: $\det\begin{bmatrix}B_1^1 & B_1^2\\ B_2^1 & B_2^2\end{bmatrix}=\det B=\dfrac{\ell n-m^2}{EG-F^2}$ και $\operatorname{trace}B=\dfrac{En+G\ell-2Fm}{2(EG-F^2)}$

Εφαρμογές

1) *Η καμπυλότητα Gauss του επιπέδου είναι ίση με το μηδέν.*

Θεωρούμε για το επίπεδο το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)=(u,v,-\dfrac{d+au+bv}{c})$,

($(u,v)\in U\subseteq\mathbf{R}^2$ και $c\neq 0$) για το οποίο είναι $\mathbf{x_u}=(1,0,-\dfrac{a}{c})$ και $\mathbf{x_v}=(1,0,-\dfrac{b}{c})$ οπότε

$\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1)$ και $\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$ άρα το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι σταθερό, το: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}}{\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b,c)$.

Τότε: $E = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_u} \rangle = \frac{a^2+c^2}{c^2}$, $F = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_v} \rangle = \frac{ab}{c^2}$, $G = \langle \mathbf{x_v}, \mathbf{x_v} \rangle = \frac{b^2+c^2}{c^2}$ και $\ell = -\langle \mathbf{n_u}, \mathbf{x_u} \rangle = 0$, $m = -\langle \mathbf{n_u}, \mathbf{x_v} \rangle = 0$, $n = -\langle \mathbf{n_v}, \mathbf{x_v} \rangle = 0$ άρα η καμπυλότητα Gauss είναι ίση με:

$$K_G = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = 0.$$

2) *Η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας του γραφήματος μιας συνάρτησης f (ή μιας περιοχής Monge) δίνεται από τον τύπο:* $K_G = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$.

Θεωρούμε για την επιφάνεια του γραφήματος μιας συνάρτησης f το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v) = (u,v,w=f(u,v))$ $((u,v) \in U \subseteq \mathbf{R^2})$ για το οποίο προκύπτει $\mathbf{x_u} = (1,0,f_u)$, $\mathbf{x_v} = (0,1,f_v)$, $\mathbf{x_{uu}} = (0,0,f_{uu})$, $\mathbf{x_{uv}} = (0,0,f_{uv})$, $\mathbf{x_{vv}} = (0,0,f_{vv})$.

Τότε: $\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} = (-f_u, -f_v, 1)$, $\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$ οπότε το μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα είναι ίσο με $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}}{\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$. Άρα:

$$E = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_u} \rangle = 1 + f_u^2,\ F = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_v} \rangle = f_u f_v,\ G = \langle \mathbf{x_v}, \mathbf{x_v} \rangle = 1 + f_v^2 \text{ και}$$

$$\ell = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x_{uu}} \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},\ m = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x_{vu}} \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},\ n = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x_{vv}} \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}.$$

Τότε η καμπυλότητα Gauss γίνεται ίση με $K_G = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$.

3.13 Ομφαλικό σημείο

Ένα σημείο **P** μιας κανονικής επιφάνειας M θα λέγεται **ομφαλικό** αν $\kappa_1(\mathbf{P}) = \kappa_2(\mathbf{P})$, ενώ στην περίπτωση που είναι $\kappa_1(\mathbf{P}) \neq \kappa_2(\mathbf{P})$ τότε το σημείο θα λέγεται **μη ομφαλικό**. Για παράδειγμα, η σφαίρα έχει όλα τα σημεία της ομφαλικά.

Πράγματι:

Θεωρούμε το σύστημα συν/νων της επιφάνειας της σφαίρας:

$\mathbf{x}(u,v) = (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$, για $0<u<2\pi$ και $-\pi/2<v<\pi/2$.

Τότε:

$\mathbf{x_u} = (-R\sin u\cos v, R\sin u\cos v, 0)$, $\mathbf{x_v} = (-R\cos u\sin v, -R\sin u\sin v, R\cos v)$

$\mathbf{x_{uu}} = (-R\cos u\cos v, -R\sin u\cos v, 0)$, $\mathbf{x_{uv}} = (R\sin u\sin v, -R\cos u\sin v, 0)$,

$\mathbf{x_{vv}} = (-R\cos u\cos v, -R\sin u\cos v, -R\sin v)$

$\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} = (R^2\cos u\cos^2 v, R^2\sin u\cos^2 v, R^2\sin v\cos v)$ και $\| \mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v} \| = R^2\cos v$ άρα

$$\mathbf{n} = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v).$$

Οπότε: $E = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_u} \rangle = R^2\cos^2 v$, $F = \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_v} \rangle = 0$, $G = \langle \mathbf{x_v}, \mathbf{x_v} \rangle = R^2$ και

$\ell = \langle \mathbf{x_{uu}}, \mathbf{n} \rangle = -R\cos^2 v$, $m = \langle \mathbf{x_{uv}}, \mathbf{n} \rangle = 0$, $n = \langle \mathbf{x_{vv}}, \mathbf{n} \rangle = -R$

Άρα $\kappa_n = \frac{\ell\, du^2 + 2\, m du dv + n dv^2}{E du^2 + 2\, F du dv + G dv^2} = \frac{-R\cos^2 v du^2 - R dv^2}{R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2} = -\frac{1}{R}$ και η κ_n είναι σταθερή σε κάθε σημείο και σε κάθε κατεύθυνση. Επομένως σε κάθε σημείο **P** θα είναι $\kappa_1(\mathbf{P}) = \kappa_2(\mathbf{P}) = -\frac{1}{R}$ και όλα τα σημεία είναι ομφαλικά.

Προφανώς η καμπυλότητα Gauss K_G της επιφάνειας της σφαίρας είναι σταθερή, θετική και ίση με $K_G = \kappa_1\kappa_2 = -\frac{1}{R}\left(-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}$.

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω, μια κάθετη τομή σε ένα σημείο της σφαίρας είναι μέγιστος κύκλος, ενώ το πρόσημο – στην κ_n οφείλεται στη συγκεκριμένη επιλογή φοράς του μοναδιαίου κάθετου **n**(**P**) της επιφάνειας.

Παρατήρηση

Επειδή η κ_n είναι σταθερή, οποιαδήποτε διεύθυνση παραμετρικής γραμμής της επιφάνειας της σφαίρας, είναι κύρια διεύθυνση. Μια τέτοια παραμετρική γραμμή, θα είναι αυτή που θα ονομάσουμε στη συνέχεια γραμμή καμπυλότητας.

3.14 Γραμμές καμπυλότητας

Μια καμπύλη μιας κανονικής επιφάνειας θα λέγεται **γραμμή καμπυλότητας**, αν σε κάθε σημείο της η διεύθυνση της εφαπτομένης είναι μια κύρια διεύθυνση, δηλαδή το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ για την $\boldsymbol{\alpha}: I \subset \mathbf{R} \to M \subset \mathbf{R}^3$ είναι κύριο διάνυσμα της M στο $\boldsymbol{\alpha}(t)$.

Για να είναι μια καμπύλη γραμμή καμπυλότητας θα πρέπει να ικανοποιείται το παρακάτω κριτήριο:

Πρόταση

Έστω $\boldsymbol{\alpha}: I \subset \mathbf{R} \to M \subset \mathbf{R}^3$ (M *κανονική επιφάνεια) μια καμπύλη της* M *με διάνυσμα ταχύτητας* $\boldsymbol{\alpha}'(t)$. *Η* $\boldsymbol{\alpha}$ *θα είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν:*

$$S_P(\boldsymbol{\alpha}'(t)) = \mathbf{n}'(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{\alpha}'(t), \text{ δηλαδή}$$

τα $\mathbf{n}'(t)$ *και* $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ *είναι παράλληλα για κάθε* t.

Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ένα σύστημα ορθογώνιων γραμμών καμπυλότητας σε μια περιοχή ενός μη ομφαλικού σημείου, με βάση την πρόταση:

Πρόταση

Σε μια περιοχή ενός μη-ομφαλικού σημείου μιας επιφάνειας M, κλάσεως C^m *(*$m \geq 3$*), υπάρχουν δύο οικογένειες γραμμών καμπυλότητας που είναι κάθετες μεταξύ τους.*

Σύμφωνα με την πρόταση, για την περιοχή ενός μη ομφαλικού σημείου μιας επιφάνειας (με κατάλληλη διαφορισιμότητα), μπορεί να βρεθεί ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^2, του οποίου οι u,v-παραμετρικές γραμμές να είναι γραμμές καμπυλότητας. Στην πράξη είναι αρκετό να βρούμε ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^m ($m \geq 2$) (ή μόνο C^2) που να περιέχει το σημείο και του οποίου οι διευθύνσεις (των εφαπτομένων) των u,v-παραμετρικών γραμμών να συμπίπτουν (μόνο στο σημείο αυτό) με τις κύριες διευθύνσεις. Αυτό εξασφαλίζεται από την πρόταση:

Πρόταση

Για κάθε σημείο **P** *μιας επιφάνειας κλάσεως* C^m *(*$m\geq 2$*), υπάρχει σύστημα συν/νων που περιέχει το* **P** *και του οποίου οι διευθύνσεις των u,v-παραμετρικών γραμμών που διέρχονται από το* **P** *είναι κύριες διευθύνσεις.*

Δεδομένου τώρα ότι, οι διευθύνσεις των u,v-παραμετρικών γραμμών ενός συστήματος συν/νων σε ένα μη ομφαλικό σημείο είναι κύριες διευθύνσεις, έχουμε την παρακάτω πρόταση που αποτελεί και ένα κριτήριο για να είναι οι παραμετρικές γραμμές καμπυλότητας:

Πρόταση

Οι u,v-παραμετρικές γραμμές μιας περιοχής συν/νων μιας επιφάνειας M που δεν έχει ομφαλικά σημεία, είναι γραμμές καμπυλότητας αν και μόνο αν σε κάθε σημείο της περιοχής συν/νων ισχύει F=m=0.

Στην περίπτωση μάλιστα αυτή, οι κύριες καμπυλότητες σε τυχόν σημείο της επιφάνειας δίνονται από τις σχέσεις: $\kappa_1=\frac{\ell}{E}$ και $\kappa_2=\frac{n}{G}$.

Παρατηρήσεις

Οι (ορθογώνιες) κύριες διευθύνσεις σε ένα σημείο μιας επιφάνειας το οποίο είναι μη ομφαλικό, προκύπτουν από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$(Em-\ell F)du^2+(En-G\ell)dudv+(Fn-Gm)dv^2=0.$$

Για την ακρίβεια, οι κύριες διευθύνσεις θα προκύψουν μετά την παραγοντοποίηση της εξίσωσης σε (δύο) παράγοντες της μορφής Adu+Bdv=0.

Εφαρμογές

1) *Οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας του ορθού κυλίνδρου (κανονική επιφάνεια), του οποίου τα σημεία* (x,y,z) *περιγράφονται από τις εξισώσεις* $x^2+y^2=R^2$ *και* $z\in\mathbf{R}$, *είναι οι κάθετες τομές προς τον άξονα του κυλίνδρου (κύκλοι) και οι γενέτειρες της επιφάνειάς του.*

Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σύστημα συν/νων: **x**(u,v)=(Rcosu,Rsinu,bv), όπου R η ακτίνα του κύκλου και $b\in\mathbf{R}$, με: $(u,v)\in U=\{(u,v\}\in\mathbf{R}^2$, $0<u<2\pi$, $v\in\mathbf{R}\}$ και τις παραμετρικές γραμμές: $\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x_u}=(-R\sin u,R\cos u,0)$, $\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x_v}=(0,0,b)$, τότε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι το:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}=(\cos u,\sin u,0)=\frac{1}{R}\ (R\cos u,R\sin u,0).$$

Οι παραμετρικές αυτές γραμμές είναι: οι κύκλοι οι κάθετοι στον άξονα του κυλίνδρου ($(-R\sin u)^2+(R\cos u)+0^2=R^2$) και οι γενέτειρες του κυλίνδρου (ευθείες παρ/λες στο διάνυσμα (0,0,b)).

Τότε: $\mathbf{n_u}=(-\sin u,\cos u,0)$, $\mathbf{n_v}=(0,0,0)$, $\mathbf{x_{uu}}=(-R\cos u,-R\sin u,0)$, $\mathbf{x_{uv}}=(0,0,0)$, $\mathbf{x_{vv}}=(0,0,0)$. Άρα $E=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle=R^2$, $F=\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle=0$, $G=\langle\mathbf{x_v},\mathbf{x_v}\rangle=1$ και $\ell=\langle\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}\rangle=-R$, $m=\langle\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}\rangle=0$, $n=\langle\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}\rangle=0$ οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, οι u,v-παραμετρικές γραμμές $\boldsymbol{\alpha}(u),\boldsymbol{\beta}(v)$ θα είναι γραμμές καμπυλότητας με κύριες καμπυλότητες ίσες αντίστοιχα με: $\kappa_1=\frac{\ell}{E}=-\frac{1}{R}$ και $\kappa_2=\frac{n}{G}=0$ (η επιφάνεια του κυλίνδρου δεν έχει ομφαλικά σημεία μια και είναι $\kappa_1\neq\kappa_2$).

Για τον κύλινδρο, η καμπυλότητα Gauss είναι ίση με $K_G=\kappa_1\kappa_2=0$, στοιχείο που είδαμε και προηγούμενα αλλά θα σχολιαστεί ξανά σε επόμενη ενότητα.

2) *Το ζήτημα των γραμμών καμπυλότητας του κυλίνδρου θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί και στη γενικότερη περίπτωση των επιφανειών εκ περιστροφής.*

Η επιφάνεια εκ περιστροφής, που εμείς θα αντιμετωπίσουμε, προκύπτει από την περιστροφή της εικόνας C της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$: $I=(\alpha,\beta)\to\mathbf{R}^2$ με τύπο $\boldsymbol{\alpha}(v)=(f(v),g(v))$ γύρω από τον άξονα των z (η περιστροφή θα μπορούσε να γίνει γύρω από τον άξονα των x ή των y με αντίστοιχα αποτελέσματα).

Οι γραμμές καμπυλότητας μιας επιφάνειας εκ περιστροφής (κανονική επιφάνεια), είναι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι κύκλοι (οι u και v-παραμετρικές, αντίστοιχα, γραμμές). Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σύστημα συν/νων:

$\mathbf{x}(u,v)=(f(v)\cos u,f(v)\sin u,g(v))$ με $(u,v)\in U=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2/\ 0<u<2\pi,\ \alpha<v<\beta$ ή $v\in\mathbf{R}\}$,

για το οποίο είναι $f(v)>0$, προκύπτουν:

$$\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}_u=(-f(v)\sin u,f(v)\cos u,0),\ \boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}_v=(f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)),$$

$$\mathbf{x}_{uu}=(-f(v)\cos u,-f(v)\sin u,0),\ \mathbf{x}_{uv}=(-f'(v)\sin u, f'(v)\cos u,0),$$

$$\mathbf{x}_{vv}=(f''(v)\cos u, f''(v)\sin u, g''(v)).$$

Τότε: $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}=\dfrac{1}{\sqrt{[f']^2+[g']^2}}(g'\cos u, g'\sin u,-f')$ και επομένως:

$$E=\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u\rangle=f^2(v),\ F=\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle=0,\ G=\langle\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v\rangle=[f'(v)]^2+[g'(v)]^2 \text{ και}$$

$$\ell=\langle\mathbf{x}_{uu},\mathbf{n}\rangle=-\frac{fg'}{\sqrt{[f']^2+[g']^2}},\ m=\langle\mathbf{x}_{uv},\mathbf{n}\rangle=0,\ n=\langle\mathbf{x}_{vv},\mathbf{n}\rangle=\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{[f']^2+[g']^2}}.$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, οι u,v-παραμετρικές γραμμές $\boldsymbol{\alpha}(u),\boldsymbol{\beta}(v)$ θα είναι γραμμές καμπυλότητας με κύριες καμπυλότητες ίσες αντίστοιχα με:

$$\kappa_1=\frac{\ell}{E}=-\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \quad \text{και} \quad \kappa_2=\frac{n}{G}=\frac{f''g'-f'g''}{[(f')^2+(g')^2]^{3/2}}.$$

Η καμπυλότητα Gauss είναι ίση τότε με: $K_G=-\dfrac{g'(f''g'-f'g'')}{f[(f')^2+(g')^2]^2}$.

3) *Μια επιφάνεια εκ περιστροφής η οποία έχει σταθερή αρνητική καμπυλότητα Gauss, είναι η επιφάνεια της* ***ψευδόσφαιρας****. Η επιφάνεια αυτή «υλοποιεί» ένα μέρος του υπερβολικού επιπέδου.*

Η επιφάνεια αυτή προκύπτει ως εξής: Θεωρούμε μια καμπύλη C στο xz-επίπεδο η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathbf{P}(k,0)$, $k>0$ (το k λέγεται και **ψευδοακτίνα** της ψευδόσφαιρας). Θεωρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα της εφαπτομένης με άκρα το σημείο **P** και το σημείο τομής της με τον άξονα των z έχει μήκος k. Η C λέγεται **έλκουσα** και η εξίσωση που την περιγράφει είναι η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{x},\ z(k)=0.$$

Η ψευδόσφαιρα προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης C γύρω από τον άξονα των z, συνεπώς η παραμετρική της εξίσωση θα είναι η:

$$\mathbf{x}(u,v)=(v\cos u,v\sin u,g(v)),\ \text{με } g(v)>0 \text{ και } g'(v)=-\frac{\sqrt{k^2-v^2}}{v}.$$

Σύμφωνα τότε με αυτά που ισχύουν για τις επιφάνειες εκ περιστροφής και επειδή:

$$f(v)=v,\ f'(v)=1,\ f''(v)=0,\ g'(v)=-\frac{\sqrt{k^2-v^2}}{v} \text{ και } g''(v)=-\frac{k^2}{v^2\sqrt{k^2-v^2}},$$

οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας θα είναι οι:

$$\kappa_1 = -\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}} = -\frac{\sqrt{k^2-v^2}}{vk} \quad \text{και} \quad \kappa_2 = \frac{f''g'-f'g''}{[(f')^2+(g')^2]^{3/2}} = \frac{v}{k\sqrt{k^2-v^2}}$$

Τότε η καμπυλότητα Gauss θα είναι ίση με: $K_G = \kappa_1\,\kappa_2 = -\frac{1}{k^2} < 0$.

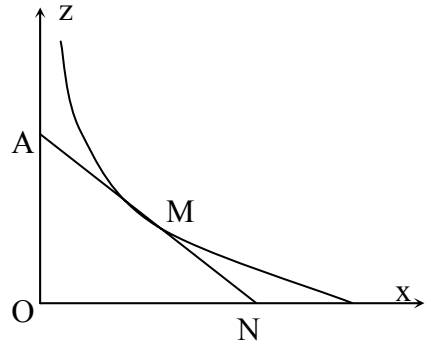
Παρατήρηση

Η καμπυλότητα Gauss μιας σφαίρας είναι σταθερή και θετική σε όλα τα σημεία της, ενώ η καμπυλότητα Gauss της ψευδόσφαιρας είναι σταθερή αλλά αρνητική σε όλα τα σημεία (εκτός από κάποια σημεία).

Ας δούμε, μέσα από ένα πείραμα, πως μπορεί να προκύψει η επιφάνεια της ψευδόσφαιρας.

«Ας φανταστούμε έναν άνθρωπο στο σημείο Α που κρατά με ένα τεντωμένο λουρί το σκύλο του, ο οποίος βρίσκεται στο σημείο Ο. Ο σκύλος τρέχει με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της ημιευθείας Ox ενώ το αφεντικό του τον ακολουθεί έτσι ώστε το διάνυσμα της ταχύτητάς του να έχει πάντοτε την κατεύθυνση του τεντωμένου λουριού (αρχικά το αφεντικό του θεωρείται ότι τρέχει στην κατεύθυνση ΑΟ). Καθώς ο σκύλος συνεχίζει να τρέχει κατά μήκος της Ox, η γωνία που σχηματίζεται από την Ox και την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του αφεντικού του ελαττώνεται συνεχώς, ενώ η απόσταση ανάμεσα στο σκύλο και το αφεντικό παραμένει σταθερή. Η καμπύλη που διαγράφει το αφεντικό ονομάζεται έλκουσα και έχει την εξής ιδιότητα: Αν φέρουμε την εφαπτομένη προς το Μ και ονομάσουμε Ν το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την Ox, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ έχει σταθερό μήκος (το ΜΝ παριστάνεται από το τεντωμένο λουρί)» (Vilenkin, 1997, σελ. 44).

Στη συνέχεια θεωρούμε το συμμετρικό της έλκουσας ως προς την ευθεία ΟΑ και περιστρέφουμε την καμπύλη που προκύπτει γύρω από τον άξονα Oz με αποτέλεσμα να προκύπτει η επιφάνεια εκ περιστροφής που καλούμε ψευδόσφαιρα (σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10

3.15 Ισομετρικές απεικονίσεις επιφανειών, Εσωτερική απόσταση

Είχαμε δει στην παράγραφο 2.6, τις απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφανειών. Από αυτές μας απασχόλησαν και θα μας απασχολήσουν κυρίως οι διαφορίσιμες και κανονικές απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτες κάποιες από τις ιδιότητες των επιφανειών (ισομετρίες), ενώ η δυσκολία εξασφάλισης του 1-1 περιορίζει την ισχύ των ιδιοτήτων μόνο τοπικά (τοπικές ισομετρίες).

Μια αμφιδιαφόριση **f**: $M_1 \to M_2$ μεταξύ των κανονικών επιφανειών M_1, M_2 λέγεται **ισομετρία** στο σημείο $\mathbf{P} \in M_1$, αν για όλα τα ζεύγη $(\mathbf{w_1},\mathbf{w_2})$, με $\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}$ διανύσματα του $T_P(M)$, ισχύει:

$$<\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}>_P = <d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_1}), d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_2})>_{f(P)},$$

δηλαδή το διαφορικό διατηρεί τη μετρική ή το εσωτερκό γινόμενο.

Αν ο ορισμός ισχύει για κάθε $\mathbf{P} \in M_1$ τότε η **f** είναι μια ισομετρία μεταξύ των M_1, M_2 και οι M_1, M_2 καλούνται **ισομετρικές** ή **εφαρμόσιμες** επιφάνειες.

Παρατήρηση

Η σχέση ισομετρίας μεταξύ επιφανειών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα

Αν **f**: $M_1 \to M_2$ *είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των κανονικών επιφανειών* M_1, M_2*, με θεμελιώδεις μορφές* $1^{ης}$ *τάξης* $\mathbf{I_P}$ *και* $\mathbf{I_{f(P)}}$ *στα σημεία* **P** *και* **f(P)** *αντίστοιχα, τότε:*

Η **f** *θα είναι ισομετρία αν και μόνο αν* $\mathbf{I_P(w)} = \mathbf{I_{f(P)}}(d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w}))$*, για κάθε* $\mathbf{w} \in T_P(M)$.

Απόδειξη

■ Αν η **f** είναι ισομετρία τότε $\mathbf{I_P(w)} = <\mathbf{w},\mathbf{w}>_P = <d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w}), d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w})>_{f(P)} = \mathbf{I_{f(P)}}(d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w}))$.

■ Είναι: $<\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}>_P = \frac{1}{2}\{<\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}, \mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}> - <\mathbf{w_1}, \mathbf{w_1}> - <\mathbf{w_2}, \mathbf{w_2}>\}$

$$= \frac{1}{2}\{(\mathbf{I_{f(P)}}\,(d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2})) - (\mathbf{I_{f(P)}}\,(d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_1})) - (\mathbf{I_{f(P)}}(d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_2})\}$$

$$= \frac{1}{2} 2 <d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_1}),\ d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_2})> = <d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_1}), d_P\, \mathbf{f}\,(\mathbf{w_2})>$$

Ορίζουμε την τοπική ισομετρία ως εξής:

Η απεικόνιση **f**: $V_1 \to M_2$ (V_1 γειτονιά του $\mathbf{P} \in M_1$) θα είναι μια **τοπική ισομετρία στο P**, αν υπάρχει περιοχή V_2 του $\mathbf{f(P)} \in M_2$ έτσι ώστε η **f**: $V_1 \to V_2$ να είναι ισομετρία. Οι επιφάνειες M_1, M_2 θα καλούνται **τοπικά ισομετρικές** μεταξύ τους.

Προφανώς, δύο επιφάνειες μπορεί να είναι τοπικά ισομετρικές χωρίς να είναι και ολικά ισομετρικές (κύλινδρος και επίπεδο). Για να συμβεί κάτι τέτοιο απαιτείται, επιπλέον, η f να είναι και αμφιδιαφόριση.

Θεώρημα

Έστω η απεικόνιση **f**: $M_1 \to M_2$ *η οποία είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των κανονικών επιφανειών* M_1 *και* M_2*. Η* **f** *θα είναι ισομετρία αν και μόνο αν, για κάθε καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$ *της* M_1 *και* $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\alpha}$ *της* M_2*, οι* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\alpha}$ *έχουν το ίδιο μήκος.*

Απόδειξη

■ Έστω ότι η **f** είναι ισομετρία. Τότε, για την (κανονική) καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}: I \subset \mathbf{R} \to M_1 \subset \mathbf{R}^3$ θα ισχύει: $<\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)>_P = <d_P\, \mathbf{f}\,(\boldsymbol{\alpha}'(t)),\ d_P\, \mathbf{f}\,(\boldsymbol{\alpha}'(t))>_{f(P)}$ ή $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \|d_P\, \mathbf{f}\,(\boldsymbol{\alpha}'(t))\|$ και ολοκληρώνοντας στο I: $\int_I \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt = \int_I \|d_P\, \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}'(t))\|\,dt$, δηλαδή οι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\alpha}$ έχουν το ίδιο μήκος.

■ Έστω ότι η απεικόνιση **f** διατηρεί τα μήκη. Θεωρούμε τότε το σύστημα συν/νων $\mathbf{x_1}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M_1 \subset \mathbf{R}^3$ το οποίο ορίζει μια περιοχή συν/νων γύρω από το $\mathbf{P} \in M_1$. Τότε το σύστημα συν/νων $\mathbf{x_2} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x_1}$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M_2 \subset \mathbf{R}^3$ ορίζει μια περιοχή συν/νων γύρω από το **f(P)**.

Έστω $\boldsymbol{\alpha}$: $[0,\alpha]\to M_1$ με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ και $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$. Τότε η $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{f}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $[0,\alpha]\to M_2$ είναι καμπύλη της M_2 με $\boldsymbol{\beta}(0)=\mathbf{f}(\mathbf{P})$ και $\boldsymbol{\beta}'(0)=(d_{\mathbf{P}}\mathbf{f})(\mathbf{v})$.

Τα μήκη των τόξων (καμπυλών) με αρχή το Ο είναι: $s_1=\int_0^t \|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|\,du$ και $s_2=\int_0^t \|d\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}'(u))\|\,du$. Με την υπόθεση ότι η $\mathbf{f}$ διατηρεί τα μήκη θα είναι $s_1=s_2$ οπότε $\|\boldsymbol{\alpha}'(u)\|=\|d\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}'(u))\|$ και για u=0: $\|\boldsymbol{\alpha}'(0)\|=\|d\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}'(0))\|$ ή $\|\mathbf{v}\|=\|d_{\mathbf{P}}f(\mathbf{v})\|$, άρα $\mathbf{I}_{\mathbf{P}}(\mathbf{v})=\mathbf{I}_{\mathbf{f}(\mathbf{P})}(d_{\mathbf{P}}\mathbf{f}(\mathbf{v}))$ δηλαδή η $\mathbf{f}$ είναι ισομετρία.

Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι ισομετρία και με βάση το θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω τα συστήματα συν/νων $\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M_1\subset\mathbf{R}^3$ *και* $\bar{\mathbf{x}}$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M_2\subset\mathbf{R}^3$ *(*M_1, M_2 *κανονικές επιφάνειες). Η απεικόνιση* $\mathbf{f}=\bar{\mathbf{x}}\circ\mathbf{x}^{-1}$: $\mathbf{x}(U)\subset M_1\to M_2$ *θα είναι (τοπικά) ισομετρία αν τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης των* $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ *είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή αν:*

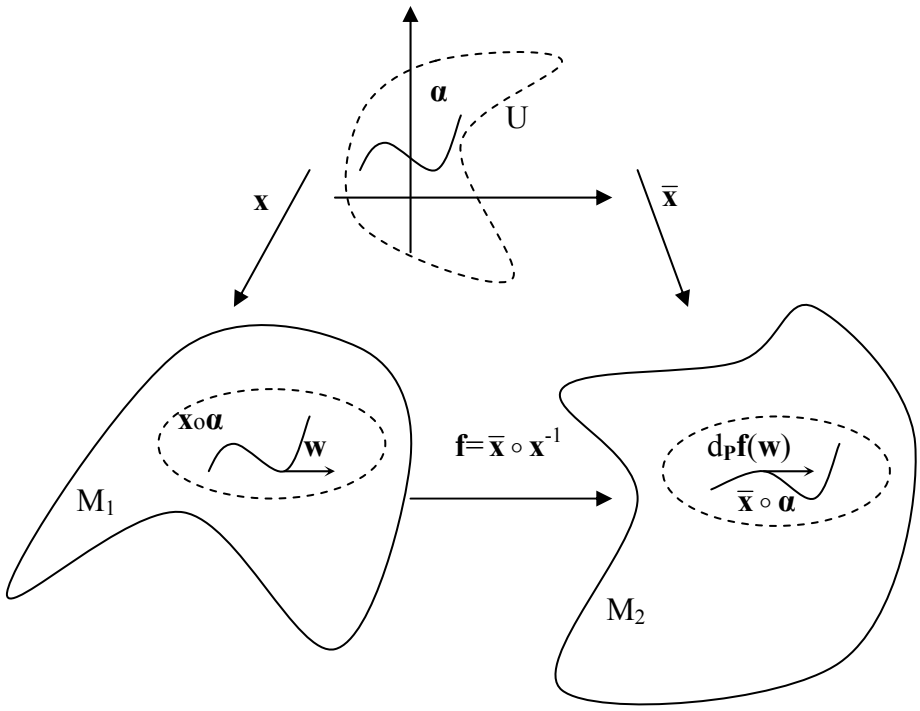
$$E=\bar{E},\ F=\bar{F},\ G=\bar{G}.$$

Απόδειξη

Έστω το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M_1\subset\mathbf{R}^3$, το σημείο $\mathbf{P}\in\mathbf{x}(U)\subset M_1$ καθώς και το διάνυσμα $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{P}}(M_1)$. Τότε θα υπάρχει καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$ του U, η $\boldsymbol{\alpha}$:$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to U$, με $\boldsymbol{\alpha}(t)=(u(t),v(t))$ και έτσι το διάνυσμα $\mathbf{w}$ θα γράφεται (για t=0):

$$\mathbf{w}=\mathbf{x}_{\mathbf{u}}\frac{du}{dt}+\mathbf{x}_{\mathbf{v}}\frac{dv}{dt}=\mathbf{x}_{\mathbf{u}}u'+\mathbf{x}_{\mathbf{v}}v'.$$

Εξ' ορισμού, το διάνυσμα $(d_{\mathbf{P}}\mathbf{f})(\mathbf{w})$ αποτελεί το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $(\bar{\mathbf{x}}\circ\mathbf{x}^{-1}\circ\mathbf{x})(\boldsymbol{\alpha}(t))$ του $\bar{\mathbf{x}}(U)\subset M_2$ (της καμπύλης $\bar{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ στο t=0) και επομένως: $(d_{\mathbf{P}}\mathbf{f})(\mathbf{w})=\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}}u'+\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{v}}v'$ (σχήμα 3.11).



Σχήμα 3.11

Αλλά: $\mathbf{I_P(w)}=E(u')^2+2F\,u'v'+G(v')^2$ και $\mathbf{I_{f(P)}}(d_{\mathbf{P}}\,\mathbf{f})(\mathbf{w})=\overline{E}\,(u')^2+2\overline{F}\,u'v'+\overline{G}\,(v')^2$, οπότε με $E=\overline{E}$, $F=\overline{F}$, $G=\overline{G}$ θα είναι και $\mathbf{I_P(w)}=\mathbf{I_{f(P)}}((d_{\mathbf{P}}\,\mathbf{f})(\mathbf{w}))$, για κάθε $\mathbf{P}\in\mathbf{x}(U)\subset M_1$ και για κάθε $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{P}}(M_1)$, επομένως η **f** είναι (τοπικά) ισομετρία.

Θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε την ύπαρξη τοπικής ισομετρίας μεταξύ δύο (κανονικών) επιφανειών και μέσω της καμπυλότητας Gauss. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση του θεωρήματος Minding.

Πρόταση (Θεώρημα Minding)
Για δύο κανονικές επιφάνειες (κλάσεως C^m $(m\geq 3)$*) οι οποίες έχουν την ίδια σταθερή καμπυλότητα Gauss (*K_G*=σταθερή), μια κατάλληλη περιοχή τυχόντος σημείου της μιας είναι (τοπικά) ισομετρική με μια κατάλληλη περιοχή τυχόντος σημείου της άλλης (και αντιστρόφως).*

Εφαρμογές

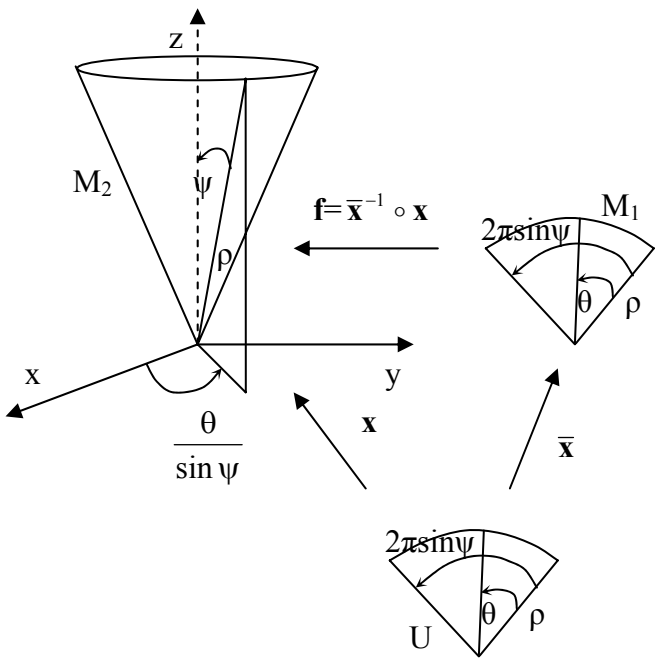
1) *Αν από τον (ορθό κυκλικό) κώνο εξαιρέσουμε την κορυφή του και μια γενέτειρα, τότε η επιφάνεια του κώνου είναι τοπικά ισομετρική με (ένα κομμάτι) το επίπεδου.*

Είχαμε δει σε προηγούμενη παράγραφο ότι αν από έναν κώνο (έστω με αναλυτική εξίσωση $z=k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$ ή απλούστερα $z=\sqrt{x^2+y^2}$) εξαιρέσουμε την κορυφή του ((x,y,z)=(0,0,0)) τότε η επιφάνειά του είναι κανονική.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ανοικτό σύνολο $U\subset\mathbf{R}^2$, με:

$U=\{(\rho,\theta)/\ \rho>0,\ 0<\theta<2\pi\sin\psi\}$, όπου 2ψ είναι η γωνία στην κορυφή του κώνου.
Ας θεωρήσουμε επίσης το ορισμένο στο U και κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ σύστημα συν/νων (σχήμα 3.12):

$$\mathbf{x}(\rho,\theta)=\left(\rho\sin\psi\cos\frac{\theta}{\sin\psi},\ \rho\sin\psi\sin\frac{\theta}{\sin\psi},\ \rho\cos\psi\right)$$



Σχήμα 3.12

Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι η εικόνα **x**(U) περιέχεται στην επιφάνεια του κώνου, μια και με k=ctanψ προκύπτει: $k\sqrt{x^2+y^2}=k\sqrt{\rho^2\sin^2\psi}=z$.

Επιπλέον, για $\theta\in(0,2\pi\sin\psi)$ το $\frac{\theta}{\sin\psi}\in(0,2\pi)$ και επομένως όλα τα σημεία του κώνου (εκτός από τη γενέτειρα θ=0) καλύπτονται από το **x**(U).

Είναι: $\mathbf{x_\rho}=(\sin\psi\cos\frac{\theta}{\sin\psi}, \sin\psi\sin\frac{\theta}{\sin\psi}, \cos\psi)$ και $\mathbf{x_\theta}=(-\rho\sin\frac{\theta}{\sin\psi}, \rho\cos\frac{\theta}{\sin\psi}, 0)$,

οπότε: $\mathbf{x_\rho}\times\mathbf{x_\theta}=(-\rho\cos\psi\cos\frac{\theta}{\sin\psi}, \rho\sin\frac{\theta}{\sin\psi}\cos\psi, \rho\sin\psi)\neq\mathbf{0}$, μια και

$$(-\rho\cos\psi\cos\frac{\theta}{\sin\psi})^2+(\rho\sin\frac{\theta}{\sin\psi}\cos\psi)^2+(\rho\sin\psi)^2=\rho^2\neq\mathbf{0}$$

και η **x** είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση και ταυτόχρονα αμφιδιαφόριση στο U (εκτός από μια γενέτειρα).

Τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης για την **x** είναι:

$$E=\langle\mathbf{x_\rho},\mathbf{x_\rho}\rangle=(\sin\psi\cos\frac{\theta}{\sin\psi})^2+(\sin\psi\sin\frac{\theta}{\sin\psi})^2+\cos^2\psi=1,$$

$$F=\langle\mathbf{x_\rho},\mathbf{x_\theta}\rangle=0 \text{ και } G=\langle\mathbf{x_\theta},\mathbf{x_\theta}\rangle=(-\rho\sin\frac{\theta}{\sin\psi})^2+(\rho\cos\frac{\theta}{\sin\psi})^2=\rho^2.$$

Αν θεωρήσουμε τώρα το σύστημα συν/νων:

$\bar{\mathbf{x}}(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,0)$, με $(\rho,\theta)\in U=\{(\rho,\theta)/\ \rho>0,\ 0<\theta<2\pi\sin\psi\}$

και το $U(=\bar{\mathbf{x}}(U))$ ως την (κανονική) επιφάνεια M_1, τότε η απεικόνιση $\mathbf{f}=\bar{\mathbf{x}}^{-1}\circ\mathbf{x}$: $M_1\to M_2$ (κώνος) αποτελεί μια ισομετρία του τμήματος U του επιπέδου, στον κώνο (με τους περιορισμούς που θέσαμε).

Πράγματι, για το σύστημα $\bar{\mathbf{x}}$ έχουμε:

$\bar{\mathbf{x}}_\rho=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ και $\bar{\mathbf{x}}_\theta=(-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta,0)$ και τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης είναι:

$$\bar{E}=\langle\bar{\mathbf{x}}_\rho,\bar{\mathbf{x}}_\rho\rangle=1,\quad \bar{F}=\langle\bar{\mathbf{x}}_\rho,\bar{\mathbf{x}}_\theta\rangle=0 \text{ και } \bar{G}=\langle\bar{\mathbf{x}}_\theta,\bar{\mathbf{x}}_\theta\rangle=\rho^2,$$

άρα $E=\bar{E}$, $F=\bar{F}$, $G=\bar{G}$ η **f** είναι ισομετρία και ο κώνος είναι μια (τοπικά) ισομετρική επιφάνεια με το επίπεδο.

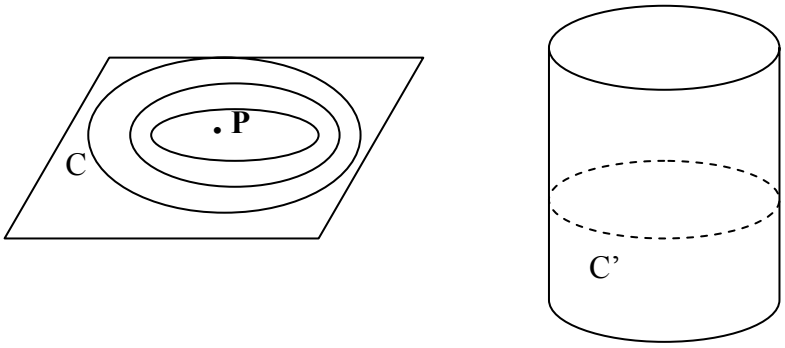
2) *Ο (ορθός) κύλινδρος είναι τοπικά ισομετρικός με το επίπεδο.*

Είδαμε προηγούμενα ότι για τον κύλινδρο, του οποίου τα σημεία (x,y,z) περιγράφονται από τις σχέσεις: $x^2+y^2=R^2$ και $z\in\mathbf{R}$, έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $K_G=0$. Και για το επίπεδο με εξίσωση ax+by+cz+d=0 βρήκαμε επίσης ότι $K_G=0$. Σύμφωνα τότε με το θεώρημα του Minding, οι δύο επιφάνειες θα είναι τοπικά ισομετρικές. Το ζήτημα βέβαια είναι αν είναι και ολικά ισομετρικές.

Η απάντηση είναι πως όχι, μια και για να συμβεί κάτι τέτοιο απαιτείται η τοπική ισομετρία να είναι επιπλέον και αμφιδιαφόριση. Ας προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε με τη βοήθεια ενός εποπτικού επιχειρήματος.

Αν θεωρήσουμε ότι, **απλά συνεκτικό σύνολο** είναι κάθε υποσύνολο D του $\mathbf{R}^3$ για το οποίο κάθε κλειστή καμπύλη του μπορεί να «συσταλεί», κατά τρόπο συνεχή σε ένα σημείο χωρίς να αφήσει καθόλου το D και η ιδιότητα αυτή να διατηρείται κάτω από μια απεικόνιση f που είναι ομοιομορφισμός (οι f, f^{-1} 1-1 και συνεχείς), τότε μπορούμε να πούμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος ομοιομορφισμός (άρα, κατ' επέκταση,

δεν υπάρχει και αμφιδιαφόριση) μεταξύ ολοκλήρου του επιπέδου (απλά συνεκτικό σύνολο) και του κυλίνδρου (όχι απλά συνεκτικό σύνολο) (σχήμα 3.13).



Σχήμα 3.13

Έτσι, για παράδειγμα, μια κλειστή καμπύλη C του επιπέδου μπορεί να «συσταλεί» κατά συνεχή τρόπο σε ένα σημείο παραμένοντας συνεχώς στο επίπεδο, χωρίς να μπορεί να συμβεί το ίδιο και για έναν εγκάρσιο κύκλο C' της επιφάνειας του κυλίνδρου (παράλληλος) που αποτελεί την ομοιομορφική του εικόνα.

3) *Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Minding μπορεί κάποιος εύκολα να δείξει ότι, μεταξύ σφαίρας και (τμήματος) επιπέδου δεν μπορεί να υπάρξει κανενός είδους τοπική ισομετρία.*

Πράγματι, για τη σφαίρα ακτίνας R βρήκαμε την $K_G=\frac{1}{R^2}>0$, ενώ για το επίπεδο $K_G=0$.

Δίνουμε τώρα ένα τελευταίο κριτήριο με το οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια αμφιδιαφόριση μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι ισομετρία.

Έστω **P**,**Q** σημεία μιας κανονικής επιφάνειας M. Θεωρούμε όλες τις καμπύλες που ενώνουν τα **P**,**Q**. Το infimum των μηκών όλων των καμπυλών που ενώνουν τα **P**,**Q** καλείται **εσωτερική απόσταση των P,Q** και συμβολίζεται $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})$.

Για την εσωτερική απόσταση ισχύουν οι ιδιότητες:

α) $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})=d_M(\mathbf{Q},\mathbf{P})$

β) $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \leq d_M(\mathbf{P},\mathbf{R})+d_M(\mathbf{R},\mathbf{Q})$

γ) $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \geq 0$ και $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})=0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$

Σημειώνουμε ότι, μπορεί να μην υπάρχει καμπύλη που να ενώνει τα **P**,**Q** και να έχει μήκος όσο το $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Για παράδειγμα, αν από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία λείπει ένα εσωτερικό σημείο.

Εντούτοις, η εσωτερική απόσταση δύο σημείων μιας επιφάνειας υπάρχει πάντα, μια και το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών που περιέχει τα μήκη των (τόξων) καμπυλών δεν είναι κενό (η επιφάνεια είναι συνεκτική άρα και κατά τόξο συνεκτική) και είναι κάτω φραγμένο από την Ευκλείδεια απόσταση $\|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\|$ των σημείων **P**,**Q**.

Πρόταση

Η αμφιδιαφόριση $\mathbf{f}: M_1 \to M_2$ *είναι ισομετρία αν για κάθε ζεύγος σημείων* **P**,**Q** *της* M_1 *ισχύει:* $d_{M_1}(\mathbf{P},\mathbf{Q})=d_{M_2}(\mathbf{f}(\mathbf{P}),\mathbf{f}(\mathbf{Q}))$.

3.16 Εξισώσεις Gauss-Weingarten, Σύμβολα Christoffel $2^{ου}$ είδους

Όπως οι εξισώσεις Serret-Frenet εκφράζουν για τις καμπύλες τις παραγώγους $\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}'$ σε συνάρτηση με τα **T**,**N**,**B** (με συντελεστές που εξαρτώνται από την καμπυλότητα και τη στρέψη), έτσι και οι εξισώσεις Gauss-Weingarten εκφράζουν τις παραγώγους $\mathbf{x_{uu}}$, $\mathbf{x_{vv}}$, $\mathbf{x_{uv}}$, $\mathbf{n_u}$, $\mathbf{n_v}$ ως συναρτήσεις των $\mathbf{x_u}$, $\mathbf{x_v}$, **n**, με συντελεστές που εξαρτώνται από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης (και τελικά μόνο $1^{ης}$ τάξης, άρα κινούμαστε πάλι στο χώρο της Εσωτερικής Γεωμετρίας μιας επιφάνειας).

Θεώρημα

Έστω το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ *κλάσεως* C^m $(m\geq 2)$, *το οποίο ορίζει μια περιοχή συν/νων πάνω στην κανονική επιφάνεια* M. *Τότε, οι διανυσματικές συναρτήσεις* $\mathbf{x_u}$, $\mathbf{x_v}$, **n**, *και οι παράγωγοί τους* $\mathbf{x_{uu}}$, $\mathbf{x_{uv}}$, $\mathbf{x_{vv}}$, $\mathbf{n_u}$, $\mathbf{n_v}$ *θα ικανοποιούν τις σχέσεις:*

$$\mathbf{x_{uu}}=\Gamma^1_{11}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{11}\mathbf{x_v}+\ell\,\mathbf{n}\ (1)\quad \mathbf{x_{uv}}=\Gamma^1_{12}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{12}\mathbf{x_v}+m\mathbf{n}\ (2)\quad \mathbf{x_{vv}}=\Gamma^1_{22}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{22}\mathbf{x_v}+n\mathbf{n}\ (3)$$

$$\mathbf{n_u}=B^1_1\mathbf{x_u}+B^2_1\mathbf{x_v}\ (4)\quad \mathbf{n_v}=B^1_2\mathbf{x_u}+B^2_2\mathbf{x_v}\ (5),\ \text{όπου:}$$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)},\ \Gamma^2_{11}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)},\ \Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},\ \Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\ \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}\ \text{και}$$

$$B^1_1=\frac{mF-\ell G}{EG-F^2},\ B^2_1=\frac{\ell F-mE}{EG-F^2},\ B^1_2=\frac{nF-mG}{EG-F^2},\ B^2_2=\frac{mF-nE}{EG-F^2}$$

Οι εξισώσεις (1), (2), (3) καλούνται **εξισώσεις του Gauss**, ενώ οι εξισώσεις (4), (5) **εξισώσεις του Weingarten**.

Οι συναρτήσεις Γ^k_{ij}, i,j,κ=1,2, καλούνται **σύμβολα Christoffel $2^{ου}$ είδους μιας επιφάνειας M για το σύστημα συν/νων x** και, όπως θα δούμε, εξαρτώνται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης και τις παραγώγους τους, ενώ οι συναρτήσεις B^i_j, i,j=1,2, εξαρτώνται από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης.

Επειδή $\mathbf{x_{uv}}=\mathbf{x_{vu}}$ θα είναι και $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}$ και $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}$, δηλαδή τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά ως προς τους κάτω δείκτες. Για το λόγο αυτό και στις εξισώσεις Gauss δεν περιέχεται και η τέταρτη εξίσωση $\mathbf{x_{vu}}=\Gamma^1_{21}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{21}\mathbf{x_v}+m\mathbf{n}$.

Απόδειξη

Έστω ότι αρχικά είναι:

$$\mathbf{x_{uu}}=\Gamma^1_{11}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{11}\mathbf{x_v}+\alpha_{11}\mathbf{n},\ \mathbf{x_{uv}}=\Gamma^1_{12}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{12}\mathbf{x_v}+\alpha_{12}\mathbf{n},\ \mathbf{x_{vv}}=\Gamma^1_{22}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{22}\mathbf{x_v}+\alpha_{22}\mathbf{n}\ \text{και}$$

$$\mathbf{n_u}=B^1_1\mathbf{x_u}+B^2_1\mathbf{x_v}+\gamma_1\mathbf{n},\ \mathbf{n_v}=B^1_2\mathbf{x_u}+B^2_2\mathbf{x_v}+\gamma_2\mathbf{n}.$$

■ **Υπολογισμός των γ_i.**

Επειδή $\mathbf{n_u}\perp\mathbf{n}$, $\mathbf{n_v}\perp\mathbf{n}$, $\mathbf{x_u}\perp\mathbf{n}$, $\mathbf{x_v}\perp\mathbf{n}$ και το **n** είναι μοναδιαίο θα ισχύει:

$\mathbf{n_u}=B^1_1\mathbf{x_u}+B^2_1\mathbf{x_v}+\gamma_1\mathbf{n}$ οπότε: $0=\langle\mathbf{n_u},\mathbf{n}\rangle=B^1_1\langle\mathbf{x_u},\mathbf{n}\rangle+B^2_1\langle\mathbf{x_v},\mathbf{n}\rangle+\gamma_1\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle$ επομένως $\gamma_1=0$. Όμοια: $\gamma_2=0$.

Άρα $\mathbf{n_u}=B^1_1\mathbf{x_u}+B^2_1\mathbf{x_v}$ και $\mathbf{n_v}=B^1_2\mathbf{x_u}+B^2_2\mathbf{x_v}$.

■ **Υπολογισμός των B^i_j.**

Επειδή $\mathbf{n_u}=B^1_1\mathbf{x_u}+B^2_1\mathbf{x_v}+\gamma_1\mathbf{n}$ θα είναι:

$\langle\mathbf{x_u},\mathbf{n_u}\rangle=B^1_1\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle+B^2_1\langle\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle$ ή $-\ell=B^1_1E+B^2_1F$ ή $B^1_1E+B^2_1F=-\ell$.

Όμοια: $B^1_1F+B^2_1G=-m$, $B^1_2E+B^2_2F=-m$ και $B^1_2F+B^2_2G=-n$.

Από τη λύση του συστήματος των δύο πρώτων εξισώσεων που περιέχουν τα B^i_j προκύπτει:

$$B^1_1=\frac{mF-\ell G}{EG-F^2},\quad B^2_1=\frac{\ell F-mE}{EG-F^2}$$

Και από τη λύση των δύο τελευταίων:

$$B^1_2=\frac{nF-mG}{EG-F^2},\quad B^2_2=\frac{mF-nE}{EG-F^2}.$$

■ **Υπολογισμός των α_{ij}.**

Επειδή: $\mathbf{x_{uu}}=\Gamma^1_{11}\mathbf{x_u}+\Gamma^2_{11}\mathbf{x_v}+\alpha_{11}\mathbf{n}$ θα είναι: $<\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}>=\Gamma^1_{11}<\mathbf{x_u},\mathbf{n}>+\Gamma^2_{11}<\mathbf{x_v},\mathbf{n}>+\alpha_{11}<\mathbf{n},\mathbf{n}>$ ή $\ell=\alpha_{11}$ ή $\alpha_{11}=\ell$. Όμοια: $\alpha_{12}=m$, $\alpha_{22}=n$.

■ **Υπολογισμός των Γ^k_{ij}.**

Είναι:

$<\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uu}}>=\frac{1}{2}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}>_u=\frac{1}{2}E_u$ και όμοια $<\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uv}}>=\frac{1}{2}E_v$, $<\mathbf{x_v},\mathbf{x_{vv}}>=\frac{1}{2}G_v$, $<\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uv}}>=\frac{1}{2}G_u$.

Επίσης:

$F_u=<\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>_u=<\mathbf{x_{uu}},\mathbf{x_v}>+<\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uv}}>=<\mathbf{x_{uu}},\mathbf{x_v}>+\frac{1}{2}E_v$ ή $<\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uu}}>=F_u-\frac{1}{2}E_v$.

Όμοια: $<\mathbf{x_u},\mathbf{x_{vv}}>=F_v-\frac{1}{2}G_u$. Τότε η εξισώση (1) του Gauss δίνει:

$<\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uu}}>=\Gamma^1_{11}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}>+\Gamma^2_{11}<\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}>+\alpha_{11}<\mathbf{x_u},\mathbf{n}>$ ή $\Gamma^1_{11}E+\Gamma^2_{11}F=\frac{1}{2}E_u$. Όμοια:

$\Gamma^1_{11}F+\Gamma^2_{11}G=F_u-\frac{1}{2}E_v$, $\Gamma^1_{12}E+\Gamma^2_{12}F=\frac{1}{2}E_v$, $\Gamma^1_{12}F+\Gamma^2_{12}G=\frac{1}{2}G_u$, $\Gamma^1_{22}E+\Gamma^2_{22}F=F_v-\frac{1}{2}G_u$

και $\Gamma^1_{22}F+\Gamma^2_{22}G=\frac{1}{2}G_v$.

Λύνοντας το σύστημα των δύο πρώτων από τις παραπάνω εξισώσεις που περιέχουν τα Γ^k_{ij} προκύπτει:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{11}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)}$$

και όμοια τα υπόλοιπα ζεύγη:

$$\Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

3.17 Theorema Egregium (Gauss), Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπύλης, Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας επιφάνειας (Θεώρημα Bonnet)

Το Theorema Egregium είναι ένα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο μας λέει ότι: οι επιφάνειες που έχουν την ίδια καμπυλότητα Gauss (δηλαδή τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης) είναι ουσιαστικά (τοπικά) ταυτόσημες ακόμη και στην περίπτωση που μεταβάλλουμε τη μορφή τους με συγκεκριμένο τρόπο (λύγισμα ή άπλωμα).

Είναι: $\frac{\theta(\mathbf{x}_{uu})}{\theta v}=(\mathbf{x}_{uu})_v$, $\frac{\theta(\mathbf{x}_{uv})}{\theta u}=(\mathbf{x}_{uv})_u$ και με το σύστημα $\mathbf{x}(u,v)$ να είναι μια συνάρτηση κλάσεως τουλάχιστον C^3, οι μικτές παράγωγοι $3^{ης}$ τάξης θα είναι ανεξάρτητες από τη σειρά παραγώγισης, άρα $\frac{\theta(\mathbf{x}_{uu})}{\theta v}=\frac{\theta(\mathbf{x}_{uv})}{\theta u}$ ή $(\mathbf{x}_{uu})_v=(\mathbf{x}_{uv})_u$.

Όμοια $(\mathbf{x}_{uv})_v=(\mathbf{x}_{vv})_u$.

Τότε από τις εξισώσεις (1) και (2) του Gauss θα έχουμε:

$$(\mathbf{x}_{uu})_v=(\mathbf{x}_{uv})_u \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u+\Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v+\ell\,\mathbf{n})=\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u+\Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v+m\mathbf{n}) \quad (4),$$

και από τις (2), (3):

$$(\mathbf{x}_{uv})_v=(\mathbf{x}_{vv})_u \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^1\mathbf{x}_u+\Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v+m\mathbf{n})=\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^1\mathbf{x}_u+\Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v+n\mathbf{n}) \quad (5).$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις στις παραπάνω ισότητες και αντικαθιστώντας τα $\mathbf{x}_{uu},\mathbf{x}_{uv}=\mathbf{x}_{vu},\mathbf{x}_{vv}$ από τις εξισώσεις Gauss και τα $\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v$ από τις εξισώσεις Weingarten θα προκύψουν εξισώσεις τις οποίες, αν διατάξουμε ως προς $\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{n}$, οι συντελεστές τους θα είναι ίσοι με το μηδέν (γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα).

Έτσι, η (4) από τις παραπάνω ισότητες δίνει τρεις ισότητες:

$$F\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=FK_G=\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{12}^1)-\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{11}^1)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1$$

$$-E\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=-EK_G=\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{12}^2)-\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{11}^2)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2$$

$$\frac{\theta\ell}{\theta v}-\frac{\theta m}{\theta v}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-n\Gamma_{11}^2$$

και ομοίως η (5):

$$F\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=FK_G=\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^2)-\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^2)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 \quad (6)$$

$$-G\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=-GK_G=\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^1)-\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^1)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2+\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 \quad (7)$$

$$\frac{\theta m}{\theta v}-\frac{\theta n}{\theta u}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-n\Gamma_{12}^2$$

Οι εξισώσεις:

$$\frac{\theta\ell}{\theta v}-\frac{\theta m}{\theta v}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-n\Gamma_{11}^2 \quad \text{και} \quad \frac{\theta m}{\theta v}-\frac{\theta n}{\theta u}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-n\Gamma_{12}^2$$

καλούνται **εξισώσεις των Mainardi & Godazzi**.

Από τις εξισώσεις (6) και (7) με πολ/μο με F και E αντίστοιχα και στη συνέχεια πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $F^2\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}-EG\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}$

$$=F(\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^2)-\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^2)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1)+E(\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^1)-\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^1)+\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2+$$
$$+\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2)$$ άρα

$$\ell n-m^2=F(\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^2)-\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^2)-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1)+E(\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{22}^1)-\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{12}^1)-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1+$$
$$+\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2-\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2)$$

Τότε η K_G είναι ίση με: $K_G=\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}$, με την ποσότητα $\ell n-m^2$ να προκύπτει από την προηγούμενη ισότητα.

Οι συντελεστές Γ_{ij}^k όμως εκφράζονται, ως γνωστόν, με τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης και των παραγώγων τους, άρα η K_G εκφράζεται τελικά μόνο με τη βοήθεια των θεμελιωδών μεγεθών $1^{ης}$ τάξης (και των παραγώγων τους).

Με αντικατάσταση μάλιστα των Γ_{ij}^k προκύπτει:

$$K_G=-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{EG_u-FE_v}{E\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\theta}{\theta v}\left(\frac{2EF_u-FE_u-EE_v}{E\sqrt{EG-F^2}}\right)\right)$$

και για ορθογώνιο σύστημα (F=0)

$$K_G=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\theta}{\theta v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right)$$

Μετά τα παραπάνω, το **Theorema Egregium** μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η K_G μιας κανονικής επιφάνειας κλάσεως C^m $(m\geq 3)$ εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης και τις παραγώγους τους,

Ή, δεδομένου ότι οι ισομετρίες διατηρούν τα ίδια θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης:
Η K_G μιας κανονικής επιφάνειας κλάσεως C^m $(m\geq 3)$ μένει αναλλοίωτη από τις τοπικές ισομετρίες.

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με το Theorema Egregium, ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της συμπεριφοράς μιας επιφάνειας (η K_G) δεν εξαρτάται από τη θέση της επιφάνειας στο χώρο αλλά από τη μετρική δομή ($1^η$ θεμελιώδη μορφή) της επιφάνειας. Επειδή μάλιστα και πολλές άλλες έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας έχουν την ίδια συμπεριφορά με την K_G και εξαρτώνται μόνο από την $1^η$ θεμελιώδη μορφή, μπορούμε να μιλάμε για τη **Γεωμετρία της $1^{ης}$ θεμελιώδους μορφής**, ταυτίζοντάς την με την Εσωτερική Γεωμετρία μιας επιφάνειας.

Παρατήρηση

Η εξίσωση (γνωστή και ως **εξίσωση Gauss**):

$$-E\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}=-EK_G=\frac{\theta}{\theta u}(\Gamma_{12}^2)-\frac{\theta}{\theta v}(\Gamma_{11}^2)+\Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^2-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2$$

καθώς και οι εξισώσεις των Mainardi & Godazzi:

$$\frac{\theta\ell}{\theta v}-\frac{\theta m}{\theta v}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)-n\Gamma_{11}^2 \quad \text{και} \quad \frac{\theta m}{\theta v}-\frac{\theta n}{\theta u}=\ell\,\Gamma_{12}^1+m(\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1)-n\Gamma_{12}^2$$

(ή οι ισοδύναμές τους $(\mathbf{x}_{uu})_v=(\mathbf{x}_{uv})_u$, $(\mathbf{x}_{uv})_v=(\mathbf{x}_{vv})_u$ και $\mathbf{n}_{uv}=\mathbf{n}_{vu}$) αποτελούν τις **εξισώσεις συμβιβαστότητας** της θεωρίας των επιφανειών και αφορούν τη συμβιβαστότητα μεταξύ των θεμελιωδών μεγεθών $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης, που ικανοποιούν τις εξισώσεις Gauss και Weingarten. Το ερώτημα, αν αυτές είναι και οι μοναδικές εξισώσεις που θα καθορίσουν (τοπικά) μια επιφάνεια, θα απαντηθεί παρακάτω.

Θα αντιπαραβάλουμε τώρα δύο θεμελιώδη θεωρήματα που αφορούν τις καμπύλες και τις επιφάνειες αντίστοιχα, προκειμένου να δούμε ότι, υπό συνθήκες, μια καμπύλη και μια επιφάνεια μπορούν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα.

Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας καμπύλης

Έστω $\tau(s)$ *και* $\kappa(s)$ *τυχούσες συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο* $[\alpha,\beta]$. *Τότε υπάρχει μοναδική καμπύλη* C *με στρέψη* $\tau(s)$ *και καμπυλότητα* $\kappa(s)$ *(*s *φυσική παράμετρος), της οποίας η θέση στο χώρο μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα.*

Θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας επιφάνειας
Θεώρημα Bonnet

Αν E,F,G,ℓ,m,n *είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο* $V\subset\mathbf{R}^2$ *με* $E,G>0$, *οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση Gauss και τις εξισώσεις Mainardi & Godazzi και επιπλέον ισχύει* $EG-F^2>0$, *τότε για κάθε* $\mathbf{Q}\in V$ *υπάρχει μια περιοχή* $U\subset V$ *του* $\mathbf{Q}$ *και μια αμφιδιαφόριση* $\mathbf{x}:U\to\mathbf{x}(U)\subset\mathbf{R}^3$ *έτσι ώστε η κανονική επιφάνεια* $\mathbf{x}(U)\subset\mathbf{R}^3$ *να έχει τα* E,F,G,ℓ,m,n *ως θεμελιώδη μεγέθη* $1^{ης}$ *και* $2^{ης}$ *τάξης αντίστοιχα. Αν επιπλέον το* U *είναι συνεκτικό και* $\bar{\mathbf{x}}:U\to\bar{\mathbf{x}}(U)\subset\mathbf{R}^3$ *είναι μια άλλη αμφιδιαφόριση που ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες, τότε υπάρχει μια μεταφορά* T *και ένας κατάλληλος γραμμικός ορθογώνιος μετασχηματισμός* ρ *του* $\mathbf{R}^3$ *έτσι ώστε* $\bar{\mathbf{x}}=T\circ\rho\circ\mathbf{x}$.

Παρατήρηση

Το θεώρημα Bonnet εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της επιφάνειας από την άποψη του σχήματος και όχι της θέσης, μια και αυτή μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής μετασχηματισμού στην αρχική επιφάνεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Γεωδαισιακές καμπύλες και εξισώσεις τους
Θεωρήματα Gauss-Bonnet

4.1 Γεωδαισιακή καμπυλότητα, Γεωδαισιακή καμπυλότητα και παραμετρικές γραμμές

4.2 Γεωδαισιακές καμπύλες, Γεωδαισιακά τόξα, Γεωδαισιακή πληρότητα

4.3 Παραμετρικές γραμμές και γεωδαισιακές, (Διαφορικές) εξισώσεις γεωδαισιακών

4.4 Γεωδαισιακές συν/νες, Τύπος του Liouiville

4.5 Καμπυλόγραμμο πολύγωνο, Κ-διαφορικές μορφές, Τοπικό θεώρημα-τύπος Gauss-Bonnet

4.6 Ο ρόλος των γωνιών του (καμπυλόγραμμου) πολυγώνου, Ολονομία καμπύλης μιας επιφάνειας, Ολικό θεώρημα Gauss-Bonnet

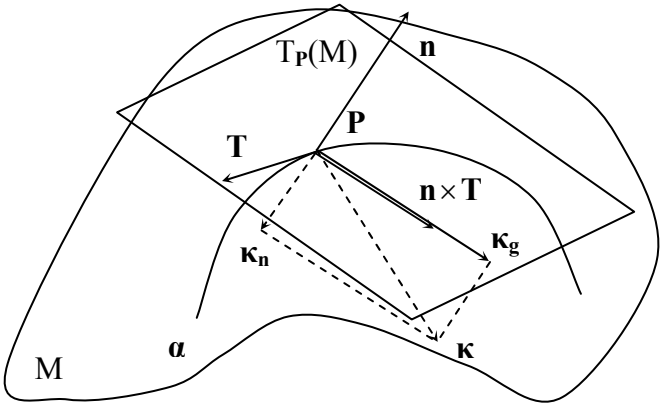
4.1 Γεωδαισιακή καμπυλότητα, Γεωδαισιακή καμπυλότητα και παραμετρικές γραμμές

Έστω η καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(s)$ η οποία ανήκει σε μια κανονική επιφάνεια M, όπου s το μήκος τόξου έτσι ώστε η $\boldsymbol{\alpha}$ να έχει μοναδιαία ταχύτητα. Αν θεωρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{T}$ (εφαπτόμενο της καμπύλης στο σημείο της $\mathbf{P}$) και $\mathbf{n}$ (το μοναδιαίο κάθετο της επιφάνειας M στο $\mathbf{P}$) τότε, με το διάνυσμα $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$ αποκτούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $T_P(M)$ με τρόπο ώστε η βάση $\{\mathbf{T},\mathbf{n}\times\mathbf{T},\mathbf{n}\}$ να είναι δεξιόστροφη και ορθοκανονική (αν μας ενδιέφερε απλά μια βάση τότε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την $\{\mathbf{T},\mathbf{T}\times\mathbf{n},\mathbf{n}\}$).

Θα λέμε **διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας** $\boldsymbol{\kappa}_g$, την προβολή του διανύσματος $\boldsymbol{\kappa}$ της καμπυλότητας της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ στο $\mathbf{P}$, στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_P(M)$ της επιφάνειας M στο $\mathbf{P}$, δηλαδή: $\boldsymbol{\kappa}_g=<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\times\mathbf{T}>(\mathbf{n}\times\mathbf{T})$

Διαφορετικά,

Θα λέμε **διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας** $\boldsymbol{\kappa}_g$, το διάνυσμα προβολή επί του εφαπτόμενου επιπέδου $T_P(M)$ στο $\mathbf{P}$, του διανύσματος καμπυλότητας $\boldsymbol{\kappa}$ μιας καμπύλης της επιφάνειας M στο σημείο της $\mathbf{P}$ (σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

Γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ (της επιφάνειας M) σε ένα σημείο της $\mathbf{P}$, θα καλούμε την ποσότητα κ_g η οποία προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\kappa}_g=\kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{T}) \text{ οπότε } \kappa_g=<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\times\mathbf{T}>=[\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}'(s)]=[\boldsymbol{\alpha}'(s),\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}]$$

Σημειώνουμε ότι η κ_g (σε αντίθεση με το διάνυσμα $\boldsymbol{\kappa}_g$) εξαρτάται και από τον προσανατολισμό της επιφάνειας (από το $\mathbf{n}$) αλλά και από τον προσανατολισμό της καμπύλης (από το $\mathbf{T}$).

Ας δούμε τι ακριβώς συμβαίνει.

Για τη βάση $\{\mathbf{T},\mathbf{n}\times\mathbf{T},\mathbf{n}\}$ του $\mathbf{R}^3$ το διάνυσμα της επιτάχυνσης της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ στο τυχαίο s θα γράφεται (έστω) ως: $\boldsymbol{\alpha}''(s)=A\mathbf{T}(s)+B(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)+\Gamma\mathbf{n}(s)$ (1).

Πολ/ντας (εσωτερικό γινόμενο) τη σχέση (1) με τα διανύσματα $\mathbf{T},\mathbf{n}\times\mathbf{T},\mathbf{n}$ αντίστοιχα και λαμβάνοντας υπόψη την καθετότητα και τα μοναδιαία μέτρα των διανυσμάτων, προκύπτει: $A=<\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{T}(s)>$, $B=<\boldsymbol{\alpha}''(s),(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)>$ και $\Gamma=<\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}(s)>$.

Αλλά $\|\boldsymbol{\alpha}'(s)\|^2=1$ οπότε $<\boldsymbol{\alpha}'(s),\boldsymbol{\alpha}'(s)>=1$ και διαφορίζοντας ως προς s:

$2<\boldsymbol{\alpha}''(s),\boldsymbol{\alpha}'(s)>=0$ ή $<\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{T}(s)>=0$ άρα A=0. Με A=0 η (1) δίνει:

$$\boldsymbol{\alpha}''(s)=<\boldsymbol{\alpha}''(s),(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)>(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)+<\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}(s)>\mathbf{n}(s) \quad (2)$$

Το διάνυσμα $<\boldsymbol{\alpha}''(s),(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)>(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)$ του $T_P(M)$, είναι αυτό που αποκαλούμε διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας $\boldsymbol{\kappa}_g$, ενώ η γεωδαισιακή καμπυλότητα κ_g είναι ίση με:

$$\kappa_g=<\boldsymbol{\alpha}''(s),(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)>=<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}\times\mathbf{T}>=[\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}'(s)]=[\boldsymbol{\alpha}'(s),\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}]=[\mathbf{T},\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}]$$

Θεώρημα

Αν κ *είναι η καμπυλότητα μιας καμπύλης* **α** *(με παράμετρο το μήκος τόξου) μιας επιφάνειας* M *τότε* $\kappa_g=\kappa\cos\varphi$*, όπου* φ *η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}''\times\boldsymbol{\alpha}',\mathbf{n}$.

Απόδειξη

Αν φ είναι η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{\alpha}''\times\boldsymbol{\alpha}',\mathbf{n}$ τότε φ θα είναι και η γωνία μεταξύ των $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$ και $\boldsymbol{\alpha}''$ (με το $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$ στο $T_P(M)$), αφού το $\mathbf{T}=\boldsymbol{\alpha}'$ είναι εφαπτόμενο και της καμπύλης και της επιφάνειας στο **P**. Επομένως:

$$\kappa_g=[\boldsymbol{\alpha}'(s),\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}]=<\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\alpha}'',\mathbf{n}>=\|\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\alpha}''\|\|\mathbf{n}\|\cos\varphi=\kappa\cos\varphi,$$

μια και το **n** είναι μοναδιαίο ενώ $\kappa=\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\alpha}''\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|^3}=\|\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\alpha}''\|$.

Από τη σχέση (2): $\boldsymbol{\alpha}''(s)=<\boldsymbol{\alpha}''(s),(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)>(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(s)+<\boldsymbol{\alpha}''(s),\mathbf{n}(s)>\mathbf{n}(s)$ προκύπτει: $\boldsymbol{\kappa}=\kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{T})+<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}>\mathbf{n}$ και με το διάνυσμα της κάθετης καμπυλότητας $\boldsymbol{\kappa}_n$ να είναι ίσο με $\boldsymbol{\kappa}_n=<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}>\mathbf{n}=\kappa_n\mathbf{n}$ θα έχουμε: $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n$ (σχήμα 4.1)

Θεώρημα

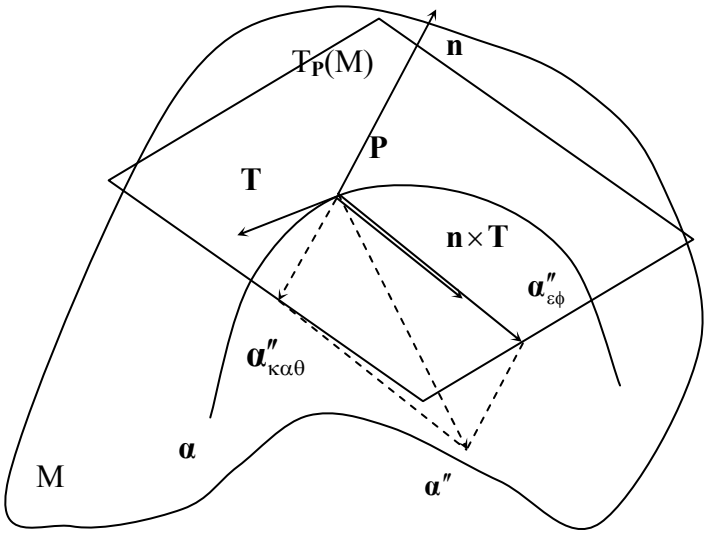
Η καμπυλότητα κ *μιας καμπύλης μιας κανονικής επιφάνειας, η γεωδαισιακή καμπυλότητα* κ_g *και η κάθετη καμπυλότητα* κ_n*, συνδέονται με τη σχέση:*

$$\kappa^2=\kappa_g^2+\kappa_n^2$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε αρχικά (για λόγους απλότητας) ότι η παραμέτρηση της καμπύλης είναι με τη φυσική παράμετρο. Αν φ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$ και $\boldsymbol{\alpha}''$ και θ η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{\alpha}''$ (ή **κ**) και **n**, τότε οι φ,θ είναι συμπληρωματικές ή θα διαφέρουν κατά 90° και επομένως: $\kappa_g^2+\kappa_n^2=(\kappa\cos\phi)^2+<\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}>^2$ ή

$$\kappa_g^2+\kappa_n^2=(\kappa\cos\phi)^2+[\pm\|\boldsymbol{\kappa}\|\|\mathbf{n}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\phi)]^2=(\kappa\cos\phi)^2+(\kappa\sin\phi)^2=\kappa^2.$$



Σχήμα 4.2

Παρατήρηση

Η σχέση (2) μας δίνει την ανάλυση του διανύσματος της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''(s)$ της καμπύλης ως προς τις δύο, κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις: αυτής που βρίσκεται στο $T_P(M)$ και αυτής που βρίσκεται στο $N_P(M)$ (κάθετο επίπεδο) (σχήμα 4.2).

Είναι μάλιστα:

$$\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\phi}=\kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{T}) \text{ και } \boldsymbol{\alpha}''_{\kappa\alpha\theta}=\kappa_n\mathbf{n}$$

Πρόταση

Για μια καμπύλη της οποίας το διάνυσμα ταχύτητας δεν είναι μοναδιαίο (ούτε και σταθερό) αλλά $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=v(t)$*, το διάνυσμα επιτάχυνσης δίνεται από τον τύπο:*

$$\boldsymbol{\alpha}''(t)=\frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t)+\kappa_g v^2(\mathbf{n}\times\mathbf{T})(t)+<\boldsymbol{\alpha}''(t),\mathbf{n}(t)>\mathbf{n}(t)$$

Παρατήρηση

Αντίθετα από την κ_n, η οποία εξαρτάται από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης (δείχθηκε στο 2° κεφάλαιο ότι $\kappa_n=\frac{\mathbf{II_P}}{\mathbf{I_P}}$), η γεωδαισιακή καμπυλότητα κ_g εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης και τις παραγώγους τους, άρα αποτελεί μια γεωμετρική αναλλοίωτη της επιφάνειας στην οποία ανήκει η καμπύλη (Εσωτερική Γεωμετρία της επιφάνειας).

Είναι δε (η παραμέτρηση της καμπύλης με φυσική παράμετρο):

$$\kappa_g=[\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3+2(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3+\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}]\sqrt{EG-F^2}\,.$$

Απόδειξη

Είναι: $\mathbf{T}=\frac{d\boldsymbol{\alpha}(s)}{ds}=\frac{d\,\mathbf{x}(u(s),v(s))}{ds}=\mathbf{x_u}\frac{d\,u(s)}{ds}+\mathbf{x_v}\frac{d\,v(s)}{ds}$ και παραγωγίζοντας:

$$\boldsymbol{\kappa}=\frac{d\,\mathbf{T}(s)}{ds}=\mathbf{x_{uu}}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\mathbf{x_{uv}}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\mathbf{x_{vv}}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\mathbf{x_u}\frac{du^2}{ds^2}+\mathbf{x_v}\frac{d^2v}{ds^2}$$

Τότε με: $\kappa_g=[\mathbf{T},\boldsymbol{\kappa},\mathbf{n}]$ είναι: $\kappa_g=[\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}]\left(\frac{du}{ds}\right)^2+(2[\mathbf{xu_u},\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}]+[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}]\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}+$

$$+([\mathbf{x_u},\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}]+2[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}])\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}]\left(\frac{dv}{ds}\right)^3+[\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}](\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds})$$

Αλλά $\mathbf{x_{uu}}=\Gamma_{11}^1\mathbf{x_u}+\Gamma_{11}^2\mathbf{x_v}+\ell\,\mathbf{n}$ (εξίσωση Gauss) οπότε:

$$[\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}]=\Gamma_{11}^1[\mathbf{x_u},\mathbf{x_u},\mathbf{n}]+\Gamma_{11}^2[\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}]+\ell\,[\mathbf{x_u},\mathbf{n},\mathbf{n}]=\Gamma_{11}^2[\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}].$$

Όμως: $[\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}]=\frac{(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})^2}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}=\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|=\sqrt{EG-F^2}$ άρα $[\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}]=\Gamma_{11}^2\sqrt{EG-F^2}$

και όμοια $[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uu}},\mathbf{n}]=-\Gamma_{11}^1\sqrt{EG-F^2}$, $[\mathbf{x_u},\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}]=\Gamma_{12}^2\sqrt{EG-F^2}$,

$[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{uv}},\mathbf{n}]=-\Gamma_{12}^1\sqrt{EG-F^2}$, $[\mathbf{x_u},\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}]=\Gamma_{22}^2\sqrt{EG-F^2}$, $[\mathbf{x_v},\mathbf{x_{vv}},\mathbf{n}]=-\Gamma_{22}^1\sqrt{EG-F^2}$.

Με αντικατάσταση στην κ_g προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Με βάση τον τελευταίο τύπο, μπορούμε να βρούμε την **κ_g των u και v-παραμετρικών γραμμών** (αντίστοιχα) μιας καμπύλης.

■ Για την u-παραμετρική γραμμή $\boldsymbol{\alpha}(u(s))=\mathbf{x}(u(s),c)$, c σταθερό ($\frac{dv}{ds}=0$), όπου $\mathbf{x}$ ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^m ($m\geq 1$) και s η φυσική παράμετρος, είναι:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}(u(s))}{ds}=\frac{d\mathbf{x}(u(s),c)}{du}\cdot\frac{du(s)}{ds}=\mathbf{x_u}\frac{du}{ds} \text{ οπότε } \frac{du}{ds}=\frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(s)\|}{\|\mathbf{x_u}\|}=\frac{1}{\sqrt{<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}>}}=\frac{1}{\sqrt{E}}.$$

■ Όμοια, για τη v-παραμετρική γραμμή: $\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}$ ($\frac{du}{ds}=0$), οπότε αντίστοιχα θα έχουμε:

$$(\kappa_g)_{v=\text{σταθερό}}=\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=\Gamma_{11}^2\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}} \text{ και}$$

$$(\kappa_g)_{u=\text{σταθερό}}=-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3\sqrt{EG-F^2}=-\Gamma_{22}^1\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}.$$

Στην περίπτωση που οι παραμετρικές γραμμές είναι ορθογώνιες θα είναι F=0 και

$$(\kappa_g)_{v=\text{σταθερό}}=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \text{ γιατί } \Gamma_{11}^2=-\frac{E_v}{2G} \text{ και}$$

$$(\kappa_g)_{u=\text{σταθερό}}=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}, \text{ γιατί } \Gamma_{22}^1=-\frac{G_u}{2E}.$$

4.2 Γεωδαισιακές καμπύλες, Γεωδαισιακά τόξα, Γεωδαισιακή πληρότητα

Ο Euler ασχολούμενος με την «Εσωτερική Γεωμετρία» μιας επιφάνειας, δίνει το 1862 τις συνθήκες «εφαρμοσιμότητας» μιας επιφάνειας σε άλλη και μελετάει τις γεωδαισιακές τους. Ο όρος βέβαια «γεωδαισιακές» πρωτοεμφανίζεται στο έργο του Laplace (1794) «Ουράνια μηχανική», όμως το πρόβλημα της εύρεσης των γεωδαισιακών έχει τεθεί για πρώτη φορά το ήδη από το 1697 από τον Johann Bernoulli (1667-1748), όπου σε επιστολή του στον De L' Hospital υποστηρίζει ότι βρήκε τη γενική διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών (Rosenfeld, 1988, σελ. 282).

Η οπτική θεώρηση της Εσωτερικής Γεωμετρίας μιας επιφάνειας, με βάση την οποία αναπτύσσονται εδώ τα θέματα, είναι χρήσιμη στη διαμόρφωση αναλογιών μεταξύ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και της Γεωμετρίας σε καμπύλες γραμμές και επιφάνειες. Για παράδειγμα, στον $\mathbf{R}^3$ γνωρίζουμε ότι οι γραμμές που παραμετρικοποιούνται στη μορφή $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{v}+t\mathbf{w}$, για σταθερά $\mathbf{v},\mathbf{w}$ διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ και $t\in\mathbf{R}$ (εξίσωση ευθείας), αποτελούν τις «συντομότερες διαδρομές» μεταξύ σημείων. Επίσης για τις γραμμές αυτές (ευθείες) ισχύει $\boldsymbol{\alpha}''=0$ (μηδενικό διάνυσμα επιτάχυνσης) ή τα εγγύτατο επίπεδό τους (το επίπεδο των $\mathbf{T}$ και $\mathbf{N}$ ή των $\boldsymbol{\alpha}'$ και $\boldsymbol{\alpha}''$, αντίστοιχα) είναι κάθετο στο (εφαπτόμενο) επίπεδο των ευθειών.

Κατ' αναλογία επομένως, οι «συντομότερες διαδρομές» (γεωδαισιακές) στη σφαίρα θα μπορούσαν να χαρακτηρίζονται από την απαίτηση για μηδενικά διανύσματα επιτάχυνσης, θεωρούμενα πάντα από την οπτική της επιφάνειας της σφαίρας. Δηλαδή, σε μια σφαίρα γεωδαισιακή θα είναι εκείνη η καμπύλη για την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης δε διαθέτει «επίπεδους όρους» αλλά μόνο «κάθετο όρο». Γενικότερα τώρα, οι γεωδαισιακές καμπύλες μιας επιφάνειας αποτελούν, κατά κάποιο τρόπο, τις «εσωτερικές ευθείες» μιας επιφάνειας, και διαθέτουν (κάποια από) εκείνα τα χαρακτηριστικά τα οποία διαθέτουν κατ' αντιστοιχία, οι ευθείες του επιπέδου.

Ταυτόχρονα όμως, η μελέτη των γεωδαισιακών αναδεικνύει και τις διαφοροποιήσεις που η έννοια της «εσωτερικής» ευθείας (αλλά και γενικότερα οι έννοιες που συνδέονται με αυτή αλλά και την επιφάνεια στην οποία ανήκουν) υφίσταται κατά τη θεώρηση των διάφορων επιφανειών.

Έτσι για παράδειγμα, δύο σημεία του επιπέδου, της σφαίρας ή του υπερβολικού επιπέδου ορίζουν μια μοναδική γεωδαισιακή (η σφαίρα δύο τμήματα γεωδαισιακής) ενώ δύο σημεία της επιφάνειας του κυλίνδρου μπορούν να ορίσουν άπειρες γεωδαισιακές (κυλινδρικές έλικες διαφορετικού βήματος) ή ακόμη, από δύο σημεία να μη διέρχεται καμία γεωδαισιακή (κώνος με γωνία μεγαλύτερη από 450°). Στην περίπτωση μάλιστα του κώνου αυτού, παύει να ισχύει και η ταύτιση της συντομότερης διαδρομής με την έννοια της «εσωτερικής» ευθείας. Το συντομότερο εκεί (και αλλού) μπορεί να μην είναι καν το ευθύ, μια και οι γεωδαισιακές του κώνου (για παράδειγμα) συμπεριφέρονται διαφορετικά, για διαφορετικές γωνίες του κώνου. Στον κύλινδρο αντίθετα, η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι μεταξύ των δύο άκρων ενός «εσωτερικά» ευθυγράμμου τμήματος, αλλά το τμήμα αυτό θα πρέπει να επιλεγεί μεταξύ άπειρων άλλων «εσωτερικά» ευθυγράμμων τμημάτων με τα ίδια άκρα.

Σε μια προσπάθεια για μια εποπτική, με διδακτικούς στόχους προσέγγιση των ζητημάτων που αφορούν τις γεωδαισιακές των διαφόρων επιφανειών ως «εσωτερικές» τους ευθείες, θα μπορούσε κάποιος να εισάγει ως κριτήριο κάποιο ή κάποια από τα διάφορα είδη συμμετρίας, που εμφανίζονται στη Γεωμετρία του επιπέδου και με τα οποία είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι: ανάκλαση ως προς κάποιον κάθετο άξονα, ως προς την ίδια τη γεωδαισιακή-ευθεία, ημιστροφή ως προς σημείο της, μεταφορά, συμμετρία ως προς σημείο της….

Μερικά όμως από αυτά τα εποπτικά εργαλεία αποδεικνύονται κάποιες φορές ανίσχυρα ή και παραπλανητικά μια και ισχύουν μόνο για τις πραγματικές ευθείες και όχι για άλλες καμπύλες των επιφανειών, που θεωρούμε ότι μπορούν να παίξουν το ρόλο αυτό. Δεδομένου ότι, το χαρακτηριστικό των διαφόρων ειδών συμμετρίας των ευθειών είναι η μεταβίβαση της ιδιότητας αυτής (της συμμετρίας) και σε όλο το χώρο στον οποίο ανήκουν, μια κυλινδρική έλικα δε θα μπορούσε να αποτελέσει μια «εσωτερική» ευθεία (αλλά είναι) ενώ ο κύκλος μιας εγκάρσιας τομής της επιφάνειας του κυλίνδρου θα μπορούσε να είναι (και είναι). Αντίστοιχα, μια πραγματική ευθεία της επιφάνειας του κώνου (μια γενέτειρα) δε θα μπορούσε να είναι, αλλά είναι!

Αυτό που διαφωτίζει τις καταστάσεις στα προηγούμενα παραδείγματα είναι η επισήμανση της «τοπικότητας» στα ζητήματα των «εσωτερικών» ευθειών των επιφανειών: οι γεωδαισιακές έχουν (γενικά) μόνο τοπικές, εσωτερικές συμμετρίες και η επέκτασή τους (ολική συμμετρία) δεν είναι πάντα δυνατή. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που θα χαρακτηρίζαμε κάτι ως «τοπικά ευθύ», θα έπρεπε με μεγαλύτερη σαφήνεια να προσδιορίσουμε το εύρος του χαρακτηρισμού «τοπικά», μια και η ακρίβεια του χαρακτηρισμού εξαρτάται από την κλίμακα με την οποία θεωρούμε τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων της επιφάνειας. Για να διασαφηνίσουμε λοιπόν τα πράγματα, θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι εργαζόμαστε σε επιφάνειες που είναι τοπικά ισομετρικές με το επίπεδο (λείες και αναπτύξιμες), ενώ τα εργαλεία μας θα είναι αυστηρά μαθηματικά με αποτέλεσμα:

Οι γεωδαισιακές της επιφάνειας να αποτελούν τις συντομότερες διαδρομές μεταξύ δύο γειτονικών σημείων της επιφάνειας ενώ αν θεωρήσουμε την επιπλέον απαίτηση της γεωδαισιακής πληρότητας της επιφάνειας (δυνατότητα της άπειρης επέκτασης των γεωδαισιακών, ισοδύναμο με το 2° Αίτημα του Ευκλείδη), τότε οποιαδήποτε δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με μια γεωδαισιακή, που αποτελεί τη συντομότερη διαδρομή ανάμεσα στα δύο σημεία.

Στη βιβλιογραφία, υπάρχει ποικιλία ορισμών και σημείων εκκίνησης για τον ορισμό των γεωδαισιακών καμπυλών μιας επιφάνειας, αλλά από τη στιγμή που επιλεγεί κάποιος από αυτούς οι υπόλοιποι συνιστούν ιδιότητες των γεωδαισιακών και αποδεικνύονται. Εμείς θα επιλέξουμε τον παρακάτω ορισμό, βασισμένο στην έννοια της γεωδαισιακής καμπυλότητας, της καμπύλης μιας επιφάνειας.

Μια καμπύλη μιας συνεκτικής, κανονικής επιφάνειας M του $\mathbf{R}^3$ καλείται **γεωδαισιακή**, αν κατά μήκος της το διάνυσμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή $\boldsymbol{\kappa}_g=\mathbf{0}$ (ισοδύναμα $\kappa_g=0$).

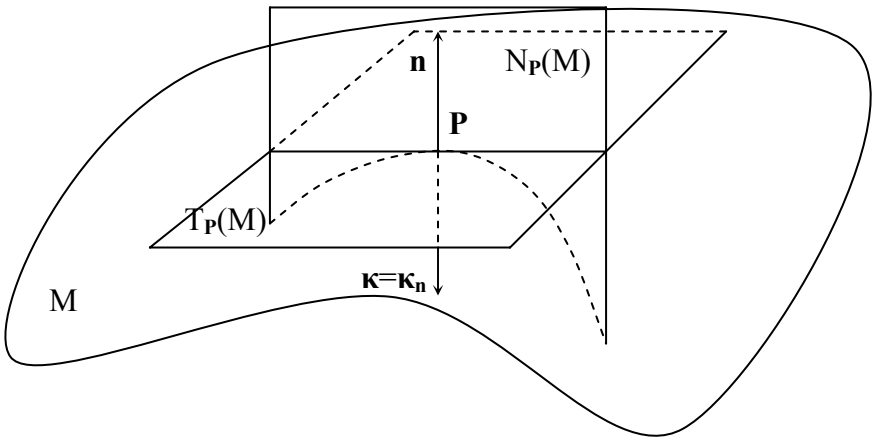
Έτσι, οι συνήθεις ευθείες (με την Ευκλείδεια έννοια) μιας επιφάνειας είναι γεωδαισιακές μια και για τις ευθείες είναι $\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{0}$, οπότε και $\boldsymbol{\kappa}_g=\mathbf{0}$.

Θεώρημα

Μια καμπύλη παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο, είναι γεωδαισιακή μιας επιφάνειας αν και μόνο αν το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης (σε ένα σημείο της) είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας (στο εν λόγω σημείο).

Απόδειξη

■ Είναι: $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n$ αλλά με την καμπύλη να είναι γεωδαισιακή θα είναι $\boldsymbol{\kappa}_g=\mathbf{0}$ οπότε $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}_n$ (σχήμα 4.3). Το $\boldsymbol{\kappa}_n$ όμως είναι παρ/λο προς το μοναδιαίο κάθετο **n** της επιφάνειας άρα το **κ** θα είναι κάθετο στην επιφάνεια. Με τον τρόπο αυτό όμως, το εγγύτατο επίπεδο (το επίπεδο του **κ**) γίνεται το επίπεδο του **n** (κάθετο επίπεδο), δηλαδή γίνεται κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας.



Σχήμα 4.3

■ Αν αντίστροφα υποθέσουμε ότι, το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης μιας επιφάνειας είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, τότε το **κ** είναι παρ/λο προς το **n** άρα η εφαπτομενική συνιστώσα $\boldsymbol{\kappa}_g$ της **κ** μηδενίζεται και με $\boldsymbol{\kappa}_g=\mathbf{0}$ η καμπύλη γίνεται γεωδαισιακή της επιφάνειας.

Θεώρημα

Μια κανονική καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}: I\subset\mathbf{R}\rightarrow M\subset\mathbf{R}^3$ *με το ίχνος της σε μια κανονική επιφάνεια* M *είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης* $\boldsymbol{\alpha}''(t)$ *είναι κάθετο στην επιφάνεια* M, *για κάθε* $t\in I$ *(ή αλλιώς παράλληλο στο μοναδιαίο κάθετο της επιφανείας).*

Απόδειξη

■ Έστω ότι η **α** είναι γεωδαισιακή. Στην περίπτωση που αυτή είναι παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο θα είναι $\boldsymbol{\alpha}'' \perp \boldsymbol{\alpha}'$ και με το εγγύτατο επίπεδο (το επίπεδο των $\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'$) κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο, το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}''$ θα είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο, αφού το μοναδιαίο κάθετο **n** της επιφάνειας και το $\boldsymbol{\alpha}'$ είναι επίσης κάθετα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που η γεωδαισιακή δεν είναι παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο, με μια κατάλληλη αναπαραμέτρησή της καταλήγουμε στην προηγούμενη περίπτωση.

■ Αν αντίστροφα υποθέσουμε ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''$ είναι κάθετο στην επιφάνεια M, τότε το $\boldsymbol{\alpha}''$ θα είναι κάθετο και στο $\boldsymbol{\alpha}'$. Με το $\boldsymbol{\alpha}''$ όμως να ανήκει στο εγγύτατο επίπεδο και το $\boldsymbol{\alpha}'$ να ανήκει και στο εγγύτατο και στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης γίνεται κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας και η καμπύλη **α** είναι γεωδαισιακή.

Παρατήρηση

Το να είναι $\boldsymbol{\alpha}'' \perp M$ (η **α** γεωδαισιακή) σημαίνει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\phi} = \kappa_g(\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\alpha}''_{\kappa\alpha\theta} = \kappa_n \mathbf{n} = \boldsymbol{\alpha}''$$

Θεώρημα

Το (μη μηδενικό) μέτρο της ταχύτητας μιας γεωδαισιακής καμπύλης μιας κανονικής επιφάνειας είναι σταθερό, δηλαδή $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| =$*σταθερό.*

Απόδειξη

Πράγματι, για μια γεωδαισιακή είναι:

$$\frac{d\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2}{dt} = \frac{d < \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)) >}{dt} = 2 < \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t)) > = 0, \; t \in I,$$

μια και για τις γεωδαισιακές τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε όμως για τη γεωδαισιακή, που έχει μη μηδενικό μέτρο ταχύτητας $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$, θα είναι: $\frac{d\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}{dt} = 0$ δηλαδή $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| =$σταθερό.

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα: υπάρχουν καμπύλες με σταθερό μέτρο ταχύτητας χωρίς να είναι γεωδαισιακές (θα πρέπει $\kappa_g = 0$).

Ένα άλλο κριτήριο για το χαρακτηρισμό μιας καμπύλης ή ενός τόξου μιας καμπύλης ως γεωδαισιακής ή τόξου γεωδαισιακής, βασίζεται στην έννοια του τόξου ελαχίστου μήκους.

Αρχικά, ως **γεωδαισιακό τόξο** θα χαρακτηρίζαμε ένα τμήμα μιας γεωδαισιακής καμπύλης. Σε προηγούμενο κεφάλαιο (3.15), είχαμε ορίσει την εσωτερική απόσταση $d_M(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ δύο σημείων **P**,**Q** μιας επιφάνειας M ως το inf των μηκών όλων των δυνατών (κανονικών) τόξων της M που ενώνουν τα **P**,**Q**. Προφανώς, η απόσταση αυτή υπάρχει πάντα χωρίς να υπάρχει σίγουρα και τόξο που την υλοποιεί.

Στην περίπτωση όμως που υπάρχει τόξο καμπύλης που να υλοποιεί την εσωτερική απόσταση μεταξύ δύο σημείων μιας επιφάνειας, τότε το μήκος αυτού του τόξου είναι ίσο με την εσωτερική απόσταση των δύο σημείων και το τόξο καλείται **τόξο ελαχίστου μήκους μεταξύ των P,Q** και ανήκει στην Εσωτερική Γεωμετρία της επιφάνειας.

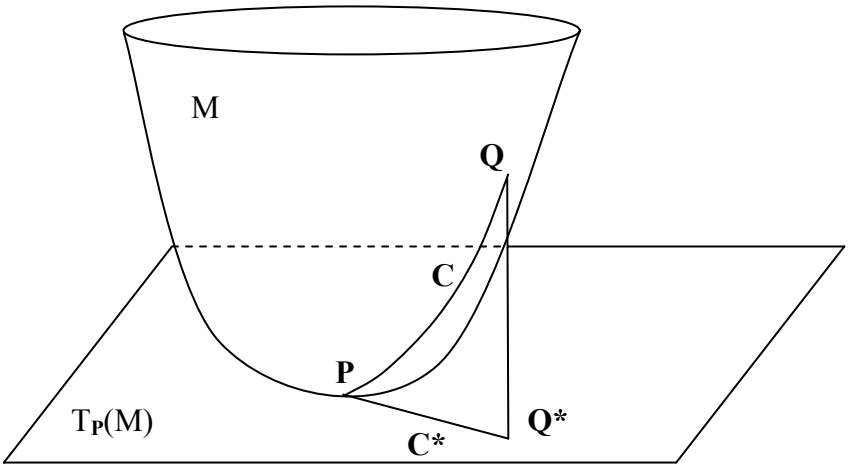
Η εξασφάλιση της ύπαρξης του τόξου ελαχίστου μήκους επιτυγχάνεται με βάση την έννοια της **γεωδαισιακής πληρότητας μιας επιφάνειας**, που μας εξασφαλίσει ότι οι γεωδιασιακές της «τρέχουν κατά συνεχή τρόπο» πάνω στην επιφάνεια (μια κλειστή επιφάνεια του $\mathbf{R}^3$ θεωρείται γεωδαισιακά πλήρης).

Πρόταση (Θεώρημα Hopf-Rinow)
Αν M είναι μια επιφάνεια γεωδαισιακά πλήρης, τότε δύο οποιαδήποτε σημεία της μπορούν να συνδεθούν με μια γεωδαισιακή καμπύλη (τόξο καμπύλης), η οποία έχει το μικρότερο μήκος από όλες τις άλλες καμπύλες που μπορούν να συνδέσουν τα σημεία αυτά.

Το κριτήριο λοιπόν για το χαρακτηρισμό μιας καμπύλης ή ενός τόξου της ως γεωδαισιακής δίνεται από την πρόταση:

Πρόταση
Αν C *είναι ένα τόξο ελαχίστου μήκους μεταξύ δύο σημείων μιας επιφάνειας* M *κλάσεως* C^m $(m \geq 3)$, *τότε το* C *είναι γεωδασιακό τόξο.*

Παρατήρηση
Στην περίπτωση που είναι C το τόξο ελαχίστου μήκους μεταξύ δύο γειτονικών σημείων **P**,**Q** μιας επιφάνειας M, τότε εποπτικά «αναμένουμε» το τμήμα (κάθετη προβολή) C* μεταξύ των σημείων **P** και **Q***, όπου **Q*** η προβολή του **Q** πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{P}}(M)$ της επιφάνειας M, να είναι επίσης ένα τόξο ελαχίστου μήκους πάνω στο $T_{\mathbf{P}}(M)$. Τότε όμως το C* θα πρέπει να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ισοδύναμα μια καμπύλη του επιπέδου με καμπυλότητα μηδέν (σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4

Επομένως, η προβολή της γεωδαισιακής μιας επιφάνειας στο εφαπτόμενο επίπεδό της σε κάθε σημείο της (γύρω από κάθε σημείο της) είναι ευθεία (και αντιστρόφως)

4.3 Παραμετρικές γραμμές και γεωδαισιακές, (Διαφορικές) εξισώσεις γεωδαισιακών

Θυμίζουμε ότι, παραμετρικές γραμμές μιας επιφάνειας M ως προς ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^m $(m \geq 2)$, λέμε τις παραμετρισμένες καμπύλες:
$\boldsymbol{\alpha}$: $I \subset \mathbf{R} \rightarrow M$, με $\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=\mathbf{x}(u,c)=(x(u,c),y(u,c),z(u,c))$ (u-παραμετρική γραμμή)

$\boldsymbol{\beta}$: $J\subset\mathbf{R}\to M$ με $\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=\mathbf{x}(c,v)=(x(c,v),y(c,v),z(c,v))$ (v-παραμετρικές γραμμές) Πρόκειται για τις εικόνες (μέσω του $\mathbf{x}$) των οριζόντιων και καθέτων ευθειών του uv-επιπέδου.

Τα διανύσματα ταχύτητας των καμπυλών-γραμμών αυτών είναι αντίστοιχα τα: $\boldsymbol{\alpha}'(u)=\mathbf{x_u}(u,c)$ και $\boldsymbol{\beta}'(v)=\mathbf{x_v}(c,v)$.

Πως μπορούν να βρεθούν οι εξισώσεις των γεωδαισιακών γραμμών μιας επιφάνειας;

Είδαμε ότι, για μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R}^3$ παραμετρισμένη ως προς t (M κανονική επιφάνεια) και για ένα σύστημα συντεταγμένων κλάσεως C^m $(m\geq 2)$ $\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R}^3$ με $\boldsymbol{\alpha}(I)\subset\mathbf{x}(U)$, η καμπύλη $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{x}^{-1}\circ\boldsymbol{\alpha}$: $I\subset\mathbf{R}\to U$ είναι μια καμπύλη του $U\subset\mathbf{R}^2$. Αν $\boldsymbol{\beta}(t)=(u(t),v(t))$ τότε για τις μονοσήμαντα ορισμένες διαφορίσιμες, κλάσεως C^m $(m\geq 2)$ συναρτήσεις u,v: $I\to\mathbf{R}$, η καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$ γράφεται: $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$.

Θεώρημα

Μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ *με τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι διαφορικές εξισώσεις:*

$$u''(t)+\Gamma^1_{11}[u'(t)]^2+2\Gamma^1_{12}\,u'(t)\,v'(t)+\Gamma^1_{22}[v'(t)]^2=0 \quad \text{και}$$
$$v''(t)+\Gamma^2_{11}[u'(t)]^2+2\Gamma^2_{12}\,u'(t)\,v'(t)+\Gamma^2_{22}[v'(t)]^2=0,$$

από τις λύσεις των οποίων προκύπτουν οι u,v *άρα και οι γεωδαισιακές.*

Απόδειξη

Από τον κανόνα της αλυσίδας, το διάνυσμα ταχύτητας της $\boldsymbol{\alpha}$ στο τυχαίο $t\in I$ θα είναι ίσο με: $\boldsymbol{\alpha}'(t)=\mathbf{x_u}\,u'(t)+\mathbf{x_v}\,v'(t)$ (1).

Σε κάθε σημείο της καμπύλης τα διανύσματα $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}$ αποτελούν μια βάση του εφαπτόμενου χώρου του $\mathbf{R}^3$ στο σημείο αυτό, άρα το διάνυσμα της επιτάχυνσης θα γράφεται στη βάση αυτή ως: $\boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}''(t)=\lambda\mathbf{x_u}+\mu\mathbf{x_v}+\nu\mathbf{n}$ (2).

Ταυτόχρονα και παραγωγίζοντας την (1) ως προς t προκύπτει:

$$\boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}''(t)=(\mathbf{x_{uu}}\,u'+\mathbf{x_{uv}}\,v')\,u'+\mathbf{x_u}\,u''+(\mathbf{x_{vu}}\,u'+\mathbf{x_{vv}}\,v')+\mathbf{x_v}\,v''=$$
$$=\mathbf{x_u}\,u''+\mathbf{x_v}\,v''+\mathbf{x_{uu}}(u')^2+2\mathbf{x_{uv}}\,u'\,v'+\mathbf{x_{vv}}\,(v')^2.$$

Με αντικατάσταση των $\mathbf{x_{uu}},\mathbf{x_{uv}},\mathbf{x_{vv}}$ από τις εξισώσεις Gauss και διάταξη του $2^{ου}$ μέλους της ισότητας που προκύπτει ως προς τα διανύσματα της βάσης $\{\mathbf{x_u},\mathbf{x_v},\mathbf{n}\}$, έχουμε: $\boldsymbol{\alpha}''=(u''+\Gamma^1_{11}(u')^2+2\Gamma^1_{12}\,u'\,v'+\Gamma^1_{22}(v')^2)\mathbf{x_u}+(v''\,\Gamma^2_{11}(u')^2+2\Gamma^2_{12}\,u'\,v'+$
$+\Gamma^2_{22}(v')^2)\mathbf{x_v}+((u')^2+2m\,u'\,v'+n(v')^2)\mathbf{n}$ (3).

Με την εξίσωση των (2), (3) προκύπτει:

$$\lambda=u''+\Gamma^1_{11}(u')^2+2\Gamma^1_{12}\,u'\,v'+\Gamma^1_{22}(v')^2,$$
$$\mu=v''\,\Gamma^2_{11}(u')^2+2\Gamma^2_{12}\,u'\,v'+\Gamma^2_{22}(v')^2$$
$$\nu=(u')^2+2m\,u'\,v'+n(v')^2.$$

Σύμφωνα όμως με τα προηγούμενα, μια καμπύλη είναι γεωδαισιακή μιας επιφάνειας αν και μόνο αν η εφαπτομενική συνιστώσα του διανύσματος της επιτάχυνσης είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα ή ισοδύναμα το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι παρ/λο με το μοναδιαίο κάθετο $\mathbf{n}$ της επιφάνειας, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\phi}=\lambda\mathbf{x_u}+\mu\mathbf{x_v}=\mathbf{0}$ και για τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$ θα είναι $\lambda=\mu=0$. Τότε όμως:

$$u''(t)+\Gamma^1_{11}[u'(t)]^2+2\Gamma^1_{12}\,u'(t)\,v'(t)+\Gamma^1_{22}[v'(t)]^2=0 \quad \text{και}$$
$$v''(t)+\Gamma^2_{11}[u'(t)]^2+2\Gamma^2_{12}\,u'(t)\,v'(t)+\Gamma^2_{22}[v'(t)]^2=0$$

Από τις λύσεις των τελευταίων εξισώσεων υπολογίζονται οι συναρτήσεις u(t),v(t) και κατά συνέπεια, οι **εξισώσεις των γεωδαισιακών γραμμών της μορφής α(t)= =x(u(t),v(t))**.

Σημειώνουμε ότι, επειδή το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που υπολογίζει τις εξισώσεις των γεωδαισιακών γραμμών είναι δευτέρου βαθμού, για να βρούμε ακριβώς μια λύση χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες, δηλαδή τα (u(0),v(0)) και $(u'(0), v'(0))$ ή ισοδύναμα:

το σημείο **P**(**x**(u(0),v(0)) και το διάνυσμα $\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{x_u}(\mathbf{P})\,u'(0)+\mathbf{x_v}(\mathbf{P})\,v'(0)$.

Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα συν/νων **x** είναι ορθογώνιο (F=0) οι διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών γράφονται:

$$u''(t)+\frac{E_u}{2E}[u'(t)]^2+\frac{E_v}{E}u'(t)v'(t)-\frac{G_u}{2E}[v'(t)]^2=0 \quad \text{και}$$

$$v''(t)-\frac{E_v}{2G}[u'(t)]^2+\frac{G_u}{G}u'(t)v'(t)+\frac{G_v}{2G}[v'(t)]^2=0$$

Πρόταση (για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της γεωδαισιακής)
Όταν δοθεί ένα σημείο **P** *μιας κανονικής επιφάνειας και ένα μη μηδενικό διάνυσμα* $\mathbf{v}\in T_P(M)$*, τότε υπάρχει μία και μόνο μία γεωδαισιακή* $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R}^3$ *για την οποία ισχύουν:* $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ *και* $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}$.

Διαφορετικά, η παραπάνω πρόταση θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:
Στην περιοχή ενός σημείου **P** *μιας κανονικής επιφάνειας κλάσεως* C^m $(m\geq 3)$, *υπάρχει μία και μόνο μία γεωδαισιακή που διέρχεται από το* **P** *για κάθε διεύθυνση. Η γεωδαισιακή αυτή είναι κλάσεως* C^3.

Παρατηρήσεις

☑ Οι παραπάνω γενικές εξισώσεις των γεωδαισιακών ισχύουν και στην περίπτωση που η καμπύλη **α** είναι παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο s, μόνο που οι παράγωγοι v'', v', u'', u' θα εκφράζουν παραγωγίσεις ως προς s.

☑ Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών γραμμών εξαρτώνται από τα θεμελιώδη μεγέθη $1^{ης}$ τάξης και τις παραγώγους τους άρα δεν αλλάζουν κατά την καμπύλωση της επιφάνειας.

Ας δούμε τώρα πότε οι u και v-παραμετρικές γραμμές μιας επιφάνειας είναι γεωδαισιακές.

Θεώρημα

Αν το σύστημα συν/νων **x**=**x**(u,v) *ορίζει μια περιοχή συν/νων μιας κανονικής επιφάνειας κλάσεως* C^m $(m\geq 3)$*, τότε η* u-*παραμετρική γραμμή (*v=c, c=*σταθερό) είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν* E(u,c)=*σταθερό και* $E_u(u,c)=2F_u(u,c)$.

Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα είναι ορθογώνιο (F=0) *τότε* E(u,c)=*σταθερό.*

Απόδειξη

Η u-παραμετρική γραμμή v=c έχει εξίσωση **α**(u)=**x**(u(t),c)=**x**(u,c), δηλαδή έχει παράμετρο το u. Τότε u(t)=u, v(t)=c, $u'(t)=1$, $u''(t)=0$, $v''(t)=v'(t)=0$ και οι διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών δίνουν:

$$\Gamma_{11}^1=0=\Gamma_{11}^2 \text{ ή } \begin{Bmatrix} GE_u - 2FF_u + FE_v = 0 \\ 2EF_u - EE_v - FE_u = 0 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} GE_u + FE_v = 2FF_u \\ FE_u + EE_v = 2EF_u \end{Bmatrix}.$$

Η λύση του τελευταίου συστήματος ως προς E_u, E_v δίνει για (μοναδική) λύση την:

$$E_u=0 \text{ ή } E(u,c)=\text{σταθερό και } E_v(u,c)=2F_u(u,c).$$

Στην περίπτωση μάλιστα που το σύστημα είναι ορθογώνιο (F=0) τότε οι εξισώσεις αυτές συμπυκνώνονται στην E(u,c)=σταθερό.

Παρατήρηση

Το ότι η συνθήκη για την u-παραμετρική γραμμή είναι η E(u,c)=σταθερό είναι αναμενόμενο, μια και $E(u,c)=\|\mathbf{x_u}(u,c)\|$, που είναι το μέτρο του διανύσματος ταχύτητας το οποίο είναι σταθερό για τις γεωδαισιακές.

Θεώρημα

Αν το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ *ορίζει μια περιοχή συν/νων μιας κανονικής επιφάνειας κλάσεως* C^m $(m\geq 3)$*, τότε η* v-*παραμετρική γραμμή (*u=c, c=*σταθερό) είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν* $GG_u+FG_v=2GF_v$.

Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα είναι ορθογώνιο (F=0) *τότε* $G_u(c,v)=0$.

Απόδειξη

Η v-παραμετρική γραμμή u=c έχει εξίσωση $\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(c,v(t))=\mathbf{x}(c,v)$, δηλαδή έχει παράμετρο το v. Τότε v(t)=v, u(t)=c, $v'(t)=1$, $v''(t)=0$, $u''(t)=u'(t)=0$ και οι διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών δίνουν:

$$\Gamma_{22}^1=0 \text{ οπότε } 2GF_v-GG_u-FG_v=0 \text{ ή } GG_u+FG_v=2GF_v.$$

Στην περίπτωση μάλιστα που το σύστημα είναι ορθογώνιο (F=0) τότε $F=F_v=0$ οπότε:

$$G_u=0 \text{ ή } G_u(c,v)=0.$$

Πρόταση

Αν το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ *ορίζει μια περιοχή συν/νων μιας επιφάνειας κλάσεως* C^m $(m\geq 2)$ *έτσι ώστε* E=E(u) *(το* E *συνάρτηση μόνο του* u*)*, F=0 *(ορθογώνιο)*, G=G(u) *(το* G *συνάρτηση μόνο του* u*), τότε: μια καμπύλη της μορφής* $\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v(u))$ *είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν* $v=\pm\int\frac{c^*\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-(c^*)^2}}du$, c*=*σταθερό.*

Εφαρμογές

1) *Οι γεωδαισιακές του επιπέδου (π) είναι οι ευθείες και αντιστρόφως*

Αν και γενικότερα το ζήτημα των ευθειών (με την Ευκλείδεια έννοια) οποιασδήποτε επιφάνειας σχολιάστηκε νωρίτερα (αυτές είναι πάντα γεωδαισιακές), θα αναφερθούμε σε αυτές εκτενέστερα στις εφαρμογές που ακολουθούν.

■ Έστω η ευθεία $\boldsymbol{\alpha}(t)$ του επιπέδου (π) με $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{v}+t\mathbf{w}$, $\mathbf{v},\mathbf{w}$ διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ $(\mathbf{w}\neq\mathbf{0})$ και $t\in I\subset\mathbf{R}$. Τότε θα είναι $\boldsymbol{\alpha}''(t)=\mathbf{0}$ και επομένως $\boldsymbol{\alpha}''\perp(\pi)$. Αν θεωρήσουμε το μοναδιαίο κάθετο $\mathbf{n}$ της επιφάνειας του επιπέδου, τότε θα είναι $\boldsymbol{\alpha}''//\mathbf{n}$. Άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}''$ είναι κάθετο στο επίπεδο και η ευθεία αποτελεί μια γεωδαισιακή του επιπέδου.

■ Αν $\boldsymbol{\alpha}(t)$ είναι μια γεωδαισιακή του επιπέδου (π) και $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο του επιπέδου τότε θα είναι $<\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}'(t)>=0$ και παραγωγίζοντας ως προς t: $<\mathbf{n}',\boldsymbol{\alpha}'(t)>+<\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}''(t)>=0$. Αλλά το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι σταθερό οπότε $\mathbf{n}'=\mathbf{0}$ και

$<\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}''(t)>=0$, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}''(t)//\mathbf{n}$. Για τη γεωδαισιακή όμως **α** ισχύει $\boldsymbol{\alpha}''(t)\perp\mathbf{n}$ οπότε $\boldsymbol{\alpha}''(t)=\mathbf{0}$. Με ολοκλήρωση τέλος ως προς t προκύπτει: $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{v}+t\mathbf{w}$ και η **α** είναι ευθεία.

2) *Οι γεωδαισιακές του κυλίνδρου είναι οι εγκάρσιες τομές (κύκλοι), οι γενέτειρές του (ευθείες) και οι κυλινδρικές του έλικες.*

Αν θεωρήσουμε την επιφάνεια του κυλίνδρου $M=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x^2+y^2=R^2$ και $z\in\mathbf{R}\}$, τότε η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης της επιφάνειάς του θα είναι η:

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos u(t),\ R\sin u(t), v(t)),\ t\in I\subset\mathbf{R}.$$

Με παραγώγιση ως προς t προκύπτει:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t)=(-R\sin u(t)\,u'(t),\ R\cos u(t)\,u'(t),\ v'(t))\ \text{ με }\ \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=\sqrt{R^2[u'(t)]^2+[v'(t)]^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}''(t)=(-R\cos u(t)[u'(t)]^2-R\sin u(t)\,u''(t),\ -R\sin u(t)[u'(t)]^2+R\cos u(t)\,u''(t),\ v''(t)).$$

Η **α** θα είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}''$ είναι κάθετο στην επιφάνεια του κυλίνδρου, δηλαδή παράλληλο με το μοναδιαίο κάθετο **n** της επιφάνειας. Είχαμε δει όμως ότι το **n** που αντιστοιχεί στον παραπάνω κύλινδρο M είναι το $\mathbf{n}=(R\cos u, R\sin u, 0)$, το οποίο είναι κάθετο στον άξονα των z, άρα για την **α** θα είναι: $v''(t)=0$ και ολοκληρώνοντας δύο φορές $v(t)=ct+b$, $c,b\in\mathbf{R}$.

Όμως, για την **α** θα ισχύει επιπλέον:

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=\text{σταθερό}=g\Leftrightarrow u'(t)=\sqrt{\frac{g^2-[v'(t)]^2}{R^2}}=\sqrt{\frac{g^2-c^2}{R^2}}=a \text{ και } u(t)=at+b,\ a,b\in\mathbf{R}.$$

Άρα η **α** γράφεται τελικά: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos(at+b), R\sin(at+b), ct+d)$.

■ Αν a=0 τότε η **α** γράφεται: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos b, R\sin b, ct+d)$ και η γεωδαισιακή είναι ο κύκλος ακτίνας R της εγκάρσιας τομής.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με μια γεωμετρική προσέγγιση της κατάστασης, μια και για τον παραπάνω κύλινδρο και τον κύκλο $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t, 0)$ που συνδέεται με αυτόν είναι:

$$\mathbf{n}=\frac{1}{R}(R\cos t, R\sin t, 0)=(\cos t, \sin t, 0) \text{ και } \boldsymbol{\gamma}''(t)=-R(\cos t, \sin t, 0) \text{ για κάθε t, άρα } \boldsymbol{\gamma}''//\mathbf{n}.$$

■ Αν c=0 τότε **α** γράφεται: $\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos(at+b), R\sin(at+b), d)$ και η γεωδαισιακή είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των z (γενέτειρα).

■ Στην περίπτωση που είναι $a,c\neq 0$ τα πράγματα είναι πιο σύνθετα. Ας θυμηθούμε ότι μια καμπύλη ενός κυλίνδρου είναι **(κυλινδρική) έλικα**, αν και μόνο αν το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα **T** της καμπύλης σχηματίζει, σε κάθε σημείο της, σταθερή γωνία με κάποιο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα **u**, δηλαδή $<\mathbf{T},\mathbf{u}>=$σταθερό.

Στην περίπτωση του παραπάνω ορθού κυλίνδρου M το **u** μπορεί να είναι το διάνυσμα (0,0,1), το παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής z. Είναι:

$\boldsymbol{\alpha}(t)=(R\cos(at+b), R\sin(at+b), ct+d)$ οπότε $\boldsymbol{\alpha}'(t)=(-aR\sin(at+b), aR\cos(at+b), c)$

και $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|=\sqrt{a^2R^2+c^2}$ άρα το μοναδιαίο εφαπτόμενο **T** της καμπύλης είναι το:

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{a^2R^2+c^2}}(-aR\sin(at+b), aR\cos(at+b), c).$$

Τότε: $<\mathbf{T}(t),\mathbf{u}>=\dfrac{c}{\sqrt{a^2R^2+c^2}}=$σταθερό και οι γεωδαισιακές στην περίπτωση αυτή είναι οι έλικες του κυλίνδρου.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με την εξασφάλιση ενός συστήματος συν/νων **x** το οποίο να είναι μια τοπική ισομετρία (για παράδειγμα το $\mathbf{x}(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$ και να απεικονίζει μια γειτονιά U του σημείου (0,0) του uv-επιπέδου στο σημείο $\mathbf{P}=\mathbf{x}(0,0)$ της επιφάνειας του κυλίνδρου. Στην περίπτωση αυτή,

η γεωδιασιακή του επιπέδου (u(s),v(s)) (s μήκος τόξου) που διέρχεται από το (0,0) (ευθεία για την οποία ισχύει u(s)=as, v(s)=ct, $a^2+c^2=1$), θα απεικονίζεται (τοπικά) στη γεωδαισιακή του κυλίνδρου που διέρχεται από το **P**.

Μια κανονική τότε καμπύλη (που δεν είναι κύκλος ή ευθεία) η οποία είναι γεωδαισιακή του κυλίνδρου, θα έχει την παραμετρική παράσταση (cos(as), sin(as),cs), δηλαδή θα είναι μια κυλινδρική έλικα.

Παρατήρηση

Δύο σημεία ενός κυλίνδρου που δε βρίσκονται πάνω σε μια εγκάρσια τομή ή σε μια γενέτειρα του κυλίνδρου, είναι δυνατόν να συνδεθούν με άπειρο αριθμό κυλινδρικών ελίκων, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει για τις ευθείες του επιπέδου. Αρκεί βέβαια η έλικα να συμπληρώνει μια πλήρη στροφή, μια και σε αντίθετη περίπτωση, η επιφάνεια του κυλίνδρου, αφαιρούμενης μιας γενέτειρας, είναι (τοπικά) ισομετρική με το επίπεδο.

3) *Οι γεωδαισιακές μιας επιφάνειας εκ περιστροφής, όπως προκύπτει από τις διαφορικές εξισώσεις των γεωδαισιακών, είναι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι των οποίων όμως το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής.*

Πράγματι.

Για το σύστημα συν/ων **x**(u,v)=(f(v)cosu,f(v)sinu,g(v)), g(v)>0, του οποίου η εικόνα καλύπτει μια επιφάνεια εκ περιστροφής, τα σύμβολα Christoffel θα είναι:

$$\Gamma_{11}^1=0,\ \Gamma_{11}^2=-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2},\ \Gamma_{12}^1=\frac{ff'}{f^2},\ \Gamma_{12}^2=0,\ \Gamma_{22}^1=0,\ \Gamma_{22}^2=\frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}.$$

Οι εξισώσεις των γεωδαισιακών παίρνουν τότε τις μορφές:

$$u''+\frac{2ff'}{f^2}u'v'=0\ \ (1)\ \ \text{και}\ \ v''-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(u')^2+\frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^2=0\ \ (2)$$

■ Οι μεσημβρινοί της επιφάνειας (u=σταθερό και v=v(s), s το μήκος τόξου) είναι γεωδαισιακές, αφού επαληθεύονται και η (1) (κατά τετριμμένο τρόπο) και η (2), σύμφωνα με τα παρακάτω:

Με u=σταθερό θα είναι $u'=0$, οπότε:

$$E=\langle \mathbf{x_u},\mathbf{x_u}\rangle=f^2,\ F=\langle \mathbf{x_u},\mathbf{x_v}\rangle=0,\ G=\langle \mathbf{x_v},\mathbf{x_v}\rangle=(f')^2+(g')^2$$

και η $1^η$ θεμελιώδης μορφή για ένα εφαπτόμενο διάνυσμα **v** της επιφάνειας και του μεσημβρινού (**v**=$\mathbf{x_u}u'+\mathbf{x_u}v'=v'\mathbf{x_u}$) θα δώσει:

$$[(f')^2+(g')^2](v')^2=1\ \ \text{ή}\ \ (v')^2=\frac{1}{(f')^2+(g')^2}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς s προκύπτει:

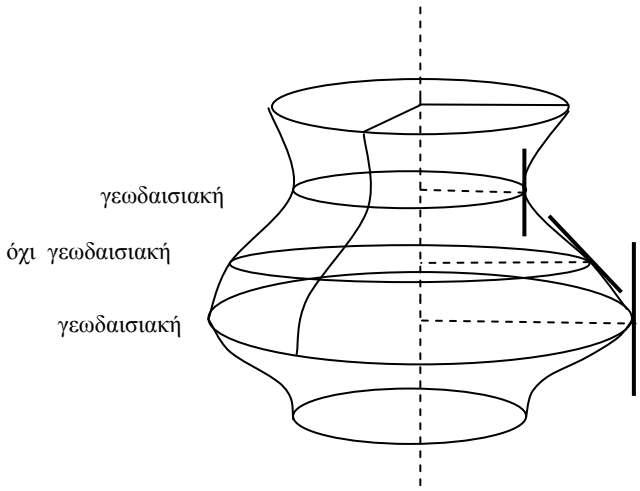
$$2v'v''=-\frac{2(f'f''+g'g'')}{[(f')^2+(g')^2]^2}v'=-\frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^3\ \ \text{ή}\ \ v''=-\frac{f'f''+g'g''}{(f')^2+(g')^2}(v')^2,\ \ v'\neq 0,$$

δηλαδή ικανοποιείται και η (2).

■ Θα βρούμε τώρα ποιοι από τους παράλληλους της μορφής v=σταθερό, u=u(s) είναι γεωδαισιακές. Η εξίσωση (1) δίνει: u'=σταθ. και η (2): $\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(u')^2=0$.

Προκειμένου οι παράλληλοι, όπως περιγράφονται παραπάνω, να είναι γεωδαισιακές θα πρέπει $u'\neq 0$. Καθώς $(f')^2+(g')^2\neq 0$ και $f\neq 0$ θα είναι $f'=0$, δηλαδή αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας παράλληλος γεωδαισιακή είναι να παράγεται από την περιστροφή ενός σημείου της γενέτειρας, στο οποίο η εφαπτόμενη να είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής. Η συνθήκη αυτή είναι ουσιώδης καθώς

εκφράζει τι γεγονός ότι η κάθετος στον παράλληλο βρίσκεται στη διεύθυνση της καθέτου της επιφάνειας στο σημείο αυτό (σχήμα 4.5)



Σχήμα 4.5

4) *Οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι οι μέγιστοι κύκλοι της, παραμετρισμένοι όμως έτσι ώστε το διάνυσμα ταχύτητάς τους να είναι μοναδιαίο.*

Ας υπενθυμίσουμε αρχικά ότι, **μέγιστος κύκλος** μιας σφαίρας είναι εκείνος ο κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, με το κέντρο του να γίνεται τότε και κέντρο της σφαίρας. Κάθε άλλος κύκλος λέγεται **παράλληλος της σφαίρας**.

Η αντιμετώπιση του θέματος θα μπορούσε να γίνει και μέσω των γενικών διαφορικών εξισώσεων των γεωδαισιακών (τακτική που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη εφαρμογή), θα προτιμήσουμε όμως μια πιο στοιχειώδη και σύντομη διαδικασία, με τη χρήση του τελεστή σχήματος.

■ Έστω **α** μια γεωδαισιακή της σφαίρας ακτίνας R με παράμετρο το μήκος τόξου (αλλιώς κάνουμε αναπαραμέτρηση). Επειδή η **α** είναι γεωδαισιακή, το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha}''$ θα είναι παράλληλο με το μοναδιαίο κάθετο **n** της επιφάνειας της σφαίρας. Από τους τύπους Serret-Frenet θα έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha}''(s)=\mathbf{T}'(s)=\kappa(s)\mathbf{N}(s) \text{ και με } \mathbf{N},\mathbf{n} \text{ μοναδιαία θα είναι } \mathbf{n}=\pm\mathbf{N}.$$

Για τον τελεστή σχήματος όμως S_P ενός διανύσματος **v** του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας είδαμε ότι ισχύει: $S_P(\mathbf{v})=\frac{1}{R}\mathbf{v}$, οπότε: $S_P(\mathbf{T})=\frac{1}{R}\mathbf{T}$ (1). Όμως: $S_P(\mathbf{T})=S_P(\boldsymbol{\alpha}'(s))=-d_P\mathbf{n}(\boldsymbol{\alpha}'(s))=\pm\mathbf{N}'(s)$ και από τους τύπους Serret-Frenet προκύπτει:

$$S_P(\mathbf{T})=\pm(-\tau\mathbf{B}+\kappa\mathbf{T}) \quad (2).$$

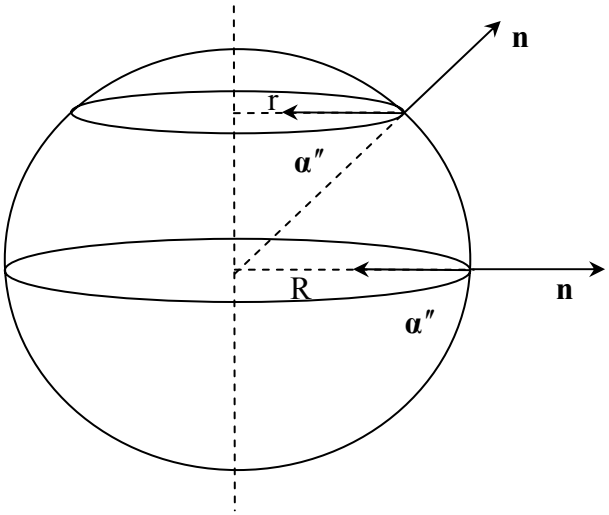
Η σύγκριση των (1), (2) δίνει: $\kappa=\pm\frac{1}{R}$ και $\tau=0$, επομένως η τροχιά της γεωδαισιακής **α** πάνω στη σφαίρα θα είναι μια επίπεδη καμπύλη (στέψη $\tau=0$) η οποία έχει σταθερή καμπυλότητας $\kappa=\pm\frac{1}{R}$, πρόκειται δηλαδή για ένα κύκλο που έχει το ίδιο κέντρο με τη σφαίρα (μέγιστος κύκλος).

■ Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για έναν κύκλο, το διάνυσμα επιτάχυνσης σε κάθε σημείο του είναι αντίθετο του διανύσματος θέσης του αντίστοιχου σημείου και με φορά προς το κέντρο του κύκλου. Στην περίπτωση επομένως ενός μέγιστου κύκλου, το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας άρα το διάνυσμα

επιτάχυνσης έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος της επιφάνειας της σφαίρας, δηλαδή ένας μέγιστος κύκλος είναι γεωδαισιακή της σφαίρας.

Παρατήρηση

Με βάση τον τελευταίο σχολιασμό μπορεί κάποιος εύκολα να δει ότι, οι παράλληλοι κύκλοι μια σφαίρας (εκτός βέβαια του Ισημερινού) δεν είναι γεωδαισιακές της, μια και το διάνυσμα επιτάχυνσής τους έχει τη διεύθυνση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του αντίστοιχου κύκλου ακτίνας r, η οποία δε συμπίπτει με τη διεύθυνση του μοναδιαίου καθέτου **n** της επιφάνειας της σφαίρας (σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6

Στο σημείο αυτό μπορούμε να δούμε, πως μπορεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων μιας επιφάνειας να υλοποιείται από το μήκος τόξου της αντίστοιχης γεωδαισιακής. Θα το εξετάσουμε για την επιφάνεια της σφαίρας και για μια γεωδιασιακή της: έναν μέγιστο κύκλο.

Είδαμε ότι για την περιοχή συν/νων που ορίζει στην επιφάνεια της σφαίρας (κανονική επιφάνεια και γεωδαισιακά πλήρης) το σύστημα συν/νων:

$$\mathbf{x}(u,v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v),\ \text{με } 0<u<2\pi,\ -\pi/2<v<\pi/2,$$

τα θεμελιώδη μεγέθη 1^{ης} τάξης είναι τα $E=R^2\cos v^2$, $F=0$, $G=R^2$. Το τόξο κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου, έστω του μεσημβρινού v και μεταξύ δύο σημείων του, έστω των $v_1=v(t_1)$ και $v_2=v(t_2)$ ($I=[v_1,v_2]$) θα έχει μήκος:

$$s_1=\int_I \sqrt{E^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right)+G^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_I \sqrt{R^2\cos^2 u\left(\frac{du}{dt}\right)^2+R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

Επειδή βρισκόμαστε πάνω στον μεσημβρινό v θα είναι $\frac{du}{dt}=0$, οπότε:

$$s_1=\int_I \sqrt{R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=R\left\|\int_I dv\right\|=R\|v_1-v_2\|.$$

Από την άλλη, το τόξο κατά μήκος οποιασδήποτε άλλης καμπύλης της επιφάνειας της σφαίρας και μεταξύ των ίδιων σημείων της v_1,v_2 θα είναι ίσο με:

$$s_2=\int_I \sqrt{R^2\cos^2 u\left(\frac{du}{dt}\right)^2+R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\ \geq \int_I \sqrt{R^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=R\|v_1-v_2\|=s_1,$$

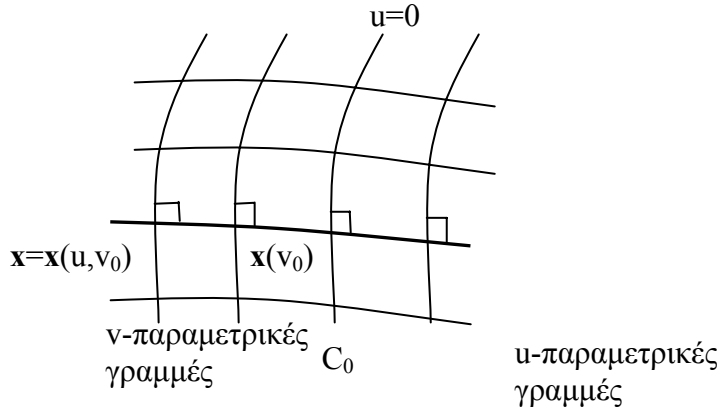
επομένως, η απόσταση δύο σημείων και κατά μήκος μιας γεωδαισιακής θα είναι η μικρότερη από κάθε άλλη απόσταση μεταξύ των ίδιων σημείων και κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης.

4.4 Γεωδαισιακές συν/νες, Τύπος του Liouiville

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να επιλέγουμε, όταν μπορούμε, συστήματα συν/νων των οποίων οι αντίστοιχες παραμετρικές γραμμές να έχουν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες. Ένα τέτοιο σύστημα γραμμών θα μπορούσε να είναι ορθογώνιο και η μια από τις δυο οικογένειες των παραμετρικών γραμμών να αποτελείται από γεωδαισιακές γραμμές. Ένα τέτοιο σύστημα θα καλείται **σύστημα γεωδαισιακών συν/νων**.

Ένα σύστημα γεωδαισιακών συν/νων μπορεί να εισαχθεί με άπειρους τρόπους. Εμείς θα ακολουθήσουμε τη παρακάτω (γενική) πορεία:

Έστω $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=\mathbf{x}(v)$, $\alpha \le v \le \beta$ τυχαίο τόξο C_0 καμπύλης κλάσεως C^2 μιας επιφάνειας κλάσεως C^m $(m \ge 3)$. Σύμφωνα με την πρόταση της ύπαρξης και του μονοσημάντου των γεωδαισιακών, από το σημείο $\mathbf{x}(v_0)$ του C_0 θα διέρχεται μοναδική γεωδαισιακή, ορθογώνια ως προς το τόξο C_0, της οποίας η παραμετρική παράσταση $\mathbf{x}(u,v_0)$ έχει ως παράμετρο u το μήκος τόξου και είναι τέτοια ώστε $\mathbf{x}(0,v_0)= \mathbf{x}(v_0)$ (σχήμα 4.7).



Σχήμα 4.7

Μπορεί να δειχθεί ότι, για κατάλληλα μικρό $\varepsilon>0$, η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$, $-\varepsilon<u<\varepsilon$, $\alpha<v<\beta$ είναι μια κανονική παραμετρική παράσταση κλάσεως C^2, ενώ οι παραμετρικές γραμμές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες. Τότε, με βάση την επόμενη πρόταση, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ένα σύστημα παραμετρικών γραμμών εκ των οποίων η μία οικογένεια του συστήματος να αποτελείται από γεωδαισιακές.

Πρόταση

Έστω $\mathbf{x}=\mathbf{x}(v)$, $\alpha \le v \le \beta$ *τυχαίο τόξο καμπύλης κλάσεως* C^2 *μιας επιφάνειας* M *κλάσεως* C^m $(m \ge 3)$. *Υπάρχει τότε ένα σύστημα γεωδαισιακών συν/νων* $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$, $-\varepsilon<u<\varepsilon$, $\alpha<v<\beta$ *στην* M *κλάσεως* C^2, *τέτοιο ώστε* $\mathbf{x}=\mathbf{x}(0,v)=\mathbf{x}(v)$ *και οι* u-*παραμετρικές γραμμές να είναι γεωδαισιακές με φυσική παράμετρο (το μήκος τόξου των γεωδαισιακών).*

Παρατήρηση

Στην παραπάνω κατασκευή, οι αποστάσεις κατά μήκος των γεωδαισιακών μεταξύ δύο ορθογωνίων προς τις γεωδαισιακές τροχιών είναι ίσες (οι γεωδαισιακές παραμετρισμένες με την φυσική παράμετρο). Αυτό εξάλλου συμβαίνει σε κάθε σύστημα γεωδαισιακών συν/νων.

Πράγματι. Αν $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$, ένα σύστημα γεωδαισιακών συν/νων στην M κλάσεως C^2, με $-\varepsilon<u<\varepsilon$, $\alpha<v<\beta$ και οι u-παραμετρικές γραμμές είναι γεωδαισιακές με φυσική παράμετρο, τότε από την ορθογωνιότητα των u,v-παραμετρικών γραμμών (F=0) η ισότητα $(\kappa_g)_{v=\text{σταθερό}} = -\dfrac{E_v}{2E\sqrt{G}}$ δίνει $(\kappa_g)_{v=\text{σταθερό}} = 0$ οπότε $E_v=0$ ή $E=E(u)$.

Η $1^{\eta\varsigma}$ θεμελιώδης μορφή τότε γράφεται: $\mathbf{I}=E(u)du^2+G(u,v)dv^2$. Κατά μήκος της γεωδαισιακής v=σταθερό είναι dv=0 οπότε, το μήκος τόξου της γεωδαισιακής μεταξύ των δύο ορθογώνιων προς τη γεωδαισιακή τροχιών, $u=u_1$ και $u=u_2$ δίνεται από το ολοκλήρωμα: $s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\mathbf{I}}\, du$ $s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u)}\, du$, που είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου v και συνεπώς το ίδιο για όλες τις γεωδαισιακές.

Έχουμε δει ότι για μια καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ με το ίχνος της πάνω σε μια επιφάνεια M (s η φυσική παράμετρος) και για το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}^2 \to M$, η γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης είναι ίση με:

$$\kappa_g=\sqrt{EG-F^2}\,\Big[\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^3+2(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}+(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2-\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^3$$

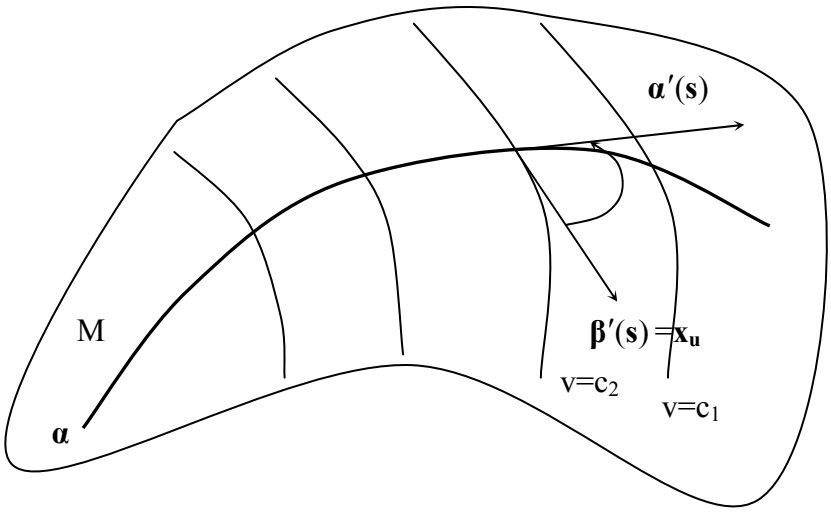
$$+\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\Big] \quad (1).$$

Θεώρημα

Αν θεωρήσουμε τώρα $\theta=\theta(s)$ *τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$ *με τις* u-*παραμετρικές (*v=*σταθερό), τότε η γεωδαισιακή καμπυλότητα της δίνεται από τον τύπο:* $\kappa_g=\dfrac{d\theta}{ds}+\dfrac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}}(2EF_u-FE_u-EE_v)\dfrac{du}{ds}+\dfrac{1}{2E\sqrt{EG-F^2}}(EG_u-FE_v)\dfrac{dv}{ds}$ (2).

Απόδειξη

Το διάνυσμα ταχύτητας της $\boldsymbol{\alpha}$, για κάθε s, είναι: $\boldsymbol{\alpha}'(s)=\mathbf{x_u}\dfrac{du}{ds}+\mathbf{x_v}\dfrac{dv}{ds}$, ενώ το διάνυσμα ταχύτητας των u-παραμετρικών γραμμών είναι το: $\boldsymbol{\beta}'(s)=\mathbf{x_u}$ (σχήμα 4.8).



Σχήμα 4.8

Τότε: $\cos\theta(s)=\dfrac{<\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'>}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|\|\boldsymbol{\beta}'\|}=\dfrac{<\mathbf{x_u}\frac{du}{ds}+\mathbf{x_v}\frac{dv}{ds},\mathbf{x_u}>}{1\cdot\|\mathbf{x_u}\|}=\dfrac{<\mathbf{x_u},\mathbf{x_u}>\frac{du}{ds}+<\mathbf{x_v},\mathbf{x_u}>\frac{dv}{ds}}{\|\mathbf{x_u}\|}$

$=\dfrac{E\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}}{\sqrt{E}}=\sqrt{E}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{dv}{ds}$.

Και $\dfrac{d(\cos\theta)}{ds}=\sqrt{E}\dfrac{d^2u}{ds^2}+\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{d^2v}{ds^2}+\dfrac{E_u\frac{du}{ds}+E_v\frac{dv}{ds}}{2\sqrt{E}}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{F_u\frac{du}{ds}+F_v\frac{dv}{ds}}{\sqrt{E}}\dfrac{dv}{ds}$ -

$-\dfrac{F(E_u\frac{du}{ds}+E_v\frac{dv}{ds})}{2E^{3/2}}\dfrac{dv}{ds}$ ή

$-\sin\theta(s)\dfrac{d\theta}{ds}=\sqrt{E}\dfrac{d^2u}{ds^2}+\dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{d^2v}{ds^2}+\dfrac{E_u\frac{du}{ds}+E_v\frac{dv}{ds}}{2\sqrt{E}}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{F_u\frac{du}{ds}+F_v\frac{dv}{ds}}{\sqrt{E}}\dfrac{dv}{ds}$ -

$-\dfrac{F(E_u\frac{du}{ds}+E_v\frac{dv}{ds})}{2E^{3/2}}\dfrac{dv}{ds}$ (3). Αλλά $\sin\theta(s)=\dfrac{\|\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\beta}'\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|\|\boldsymbol{\beta}'\|}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\dfrac{dv}{ds}$, οπότε αντικαθιστώντας στην (3) το $\sin\theta(s)$ λύνουμε ως προς $\dfrac{d\theta}{ds}$.

Ταυτόχρονα, αντικαθιστώντας στην (1) τις εκφράσεις των Γ_{ij}^k και το $\dfrac{d\theta}{ds}$ στο 2° μέλος της (2), προκύπτει η ζητούμενη ισότητα της (2).

Ειδικά, αν το σύστημα συν/νων **x** είναι ορθογώνιο (F=0), τότε η σχέση (2) γίνεται: $\kappa_g=\dfrac{d\theta}{ds}-\dfrac{E_v}{2\sqrt{EG}}\dfrac{du}{ds}+\dfrac{G_u}{2\sqrt{EG}}\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{d\theta}{ds}-\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v\dfrac{du}{ds}-G_u\dfrac{dv}{ds})$ ή

$=\dfrac{d\theta}{ds}-\dfrac{E_v}{2E\sqrt{G}}(\sqrt{E}\dfrac{du}{ds})+\dfrac{G_u}{2G\sqrt{E}}(\sqrt{G}\dfrac{dv}{ds})$ (4).

Όμως, για F=0 είναι ταυτόχρονα $\cos\theta=\sqrt{E}\dfrac{du}{ds}$ και $\sin\theta=\sqrt{G}\dfrac{dv}{ds}$, οπότε η σχέση (4) γράφεται και: $\kappa_g=\dfrac{d\theta}{ds}+(\kappa_g)_{v=\text{σταθερό}}\cos\theta+(\kappa_g)_{u=\text{σταθερό}}\sin\theta$.

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή και σαν **τύπος του Liouville**.

4.5 Καμπυλόγραμμο πολύγωνο, Κ-διαφορικές μορφές, Τοπικό θεώρημα-τύπος των Gauss-Bonnet

Θεωρείται το «βαθύτερο» ίσως θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών και αποτελεί το σημείο σύγκλισης Ευκλείδειας, Υπερβολικής και Διαφορικής Γεωμετρίας, μια και προσδιορίζει το άθροισμα των γωνιών «τριγώνων» και «πολυγώνων» της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρία με βάση τη «μορφή» της επιφάνειας αυτής. Η μαθηματική έκφραση που το περιγράφει συνδέει, την τοπολογία μιας (συμπαγούς) επιφάνειας, με την (ολική) καμπυλότητα της επιφάνειας (το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss).

Θα ξεκινήσουμε με κάποιους αναγκαίους ορισμούς που αφορούν το τι θα θεωρούμε ως «τρίγωνο» ή «πολύγωνο» πάνω σε μια επιφάνεια.

Τόξο Jordan κλάσεως C^m ($m \geq 1$), θα καλούμε μια πεπερασμένη ακολουθία από διαδοχικά κανονικά τόξα C_i (τμήματα κανονικών καμπυλών) όπου το πέρας του ενός γίνεται αρχή του επομένου.

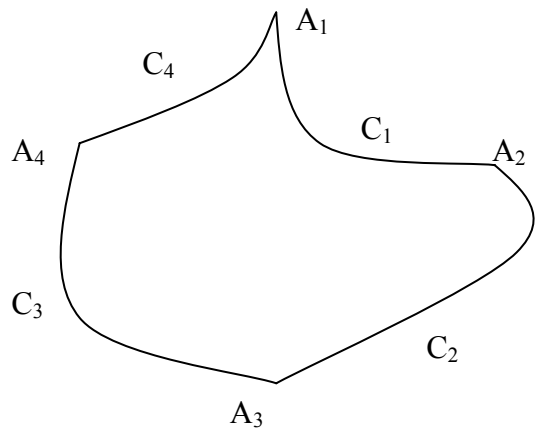
Σημειώνουμε ότι, κάθε τόξο Jordan μπορεί να έχει μια συνεχή παραμετρική παράσταση $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_m$, τέτοια ώστε, τα τόξα του C_i να έχουν για παραμετρική παράσταση τον περιορισμό της $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ στα υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i]$, $i=1,2,\ldots,m$. Επίσης, ένα τόξο Jordan είναι υπολογίσιμο και το μήκος του είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των τμημάτων που το αποτελούν.

Κλειστό καλείται το **τόξο Jordan** που τα άκρα του συμπίπτουν.

Απλό, κλειστό τόξο Jordan ή **καμπυλόγραμμο πολύγωνο** ή **κλειστή καμπυλόγραμμη πολυγωνική γραμμή**, καλείται το κλειστό τόξο Jordan του οποίου κάθε παραμετρική παράσταση έχει για πολλαπλά σημεία μόνο τα άκρα της και όχι εσωτερικά σημεία των τμημάτων της.

Σε ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο διακρίνουμε τις **ακμές** του $C_1, C_2, \ldots$ και τις **κορυφές** του $A_1, A_2, \ldots$ (σχήμα 4.9).

Η συνθήκη της κανονικότητας του απλού κλειστού τόξου Jordan στις κορυφές των διαδοχικών κανονικών τόξων, σημαίνει ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{t \to t_i^-} \boldsymbol{\alpha}'(t)$, $\lim\limits_{t \to t_i^+} \boldsymbol{\alpha}'(t)$ και είναι διαφορετικά του μηδενός.



Σχήμα 4.9

Αναφέρουμε τώρα πως, ως **απλά συνεκτικό σύνολο** θα θεωρούμε κάθε υποσύνολο D του $\mathbf{R}^3$ για το οποίο κάθε (κλειστό) καμπυλόγραμμο πολύγωνό του μπορεί να «συσταλεί» κατά τρόπο συνεχή σε σημείο χωρίς να αφήσει καθόλου το D.

Εσωτερικό καμπυλόγραμμου πολυγώνο καλείται ό,τι περιέχεται από ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο. Αποτελεί έναν φραγμένο και απλά συνεκτικό τόπο, του οποίου το πολύγωνο αποτελεί το σύνορο.

Παρακάτω δίνουμε το **θεώρημα Jordan για καμπύλες (καμπυλόγραμμα πολύγωνα) του επιπέδου**:

Πρόταση

Κάθε επίπεδο καμπυλόγραμμο πολύγωνο χωρίζει το επίπεδο ($\mathbf{R}^2$) *σε δύο τμήματα* D_1 *και* D_2 *που έχουν κοινό σύνορο το πολύγωνο. Το ένα από τα τμήματα είναι φραγμένο και καλείται εσωτερικό και το άλλο (που δεν είναι φραγμένο) καλείται εξωτερικό του πολυγώνου.*

Παρατήρηση

Αν $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$: $U\subset\mathbf{R}^2\rightarrow M\subset\mathbf{R}^3$ (U ανοικτό) είναι ένα σύστημα συν/νων, τότε μια καμπύλη C: $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ είναι ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο της αντίστοιχης περιοχής συν/νων που ορίζεται πάνω στην M, αν και μόνο αν το τόξο u=u(t), v=v(t) είναι ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο C* του U. Ορίζουμε τότε ως εσωτερικό του C, την εικόνα του εσωτερικού του C*, του U.

Θα λέμε επίσης ότι, το C έχει θετικό προσανατολισμό στην περιοχή συν/νων που ορίζει το **x**, αν το C* έχει θετικό προσανατολισμό στο U. Τέλος, το εσωτερικό του C είναι απλά συνεκτικό υποσύνολο της περιοχής συν/νων που ορίζει το **x** αν και μόνο αν το εσωτερικό του C* είναι απλά συνεκτικό υποσύνολο του U (μεταβίβαση των ιδιοτήτων από το U στο **x**(U)). Χρήση της παρατήρησης αυτής θα γίνει παρακάτω, στην απόδειξη του τοπικού θεωρήματος των Gauss-Bonnet. Πριν όμως θα αναφερθούμε στο θεώρημα Green-Stokes:

Πρόταση

Αν P(u,v) *και* Q(u,v) *είναι συναρτήσεις κλάσεως* C^1 *ενός ανοικτού συνόλου* U *του επιπέδου, που περιέχει ένα καμπυλόγραμμο πολύγωνο* C *μαζί με το εσωτερικό του* D και *το* C *έχει θετικό προσανατολισμό, δηλαδή η κίνηση κατά τη θετική φορά ενός εφαπτόμενου διανύσματος του* C *(αφήνει το εσωτερικό D στα αριστερά του) ορίζει με το κάθετο στην επιφάνεια έναν δεξιόστροφο κοχλία, τότε ισχύει:*

$$\int_C (P\frac{du}{dt}+Q\frac{dv}{dt})dt=\iint_R (\frac{\theta Q}{\theta u}-\frac{\theta P}{\theta v})\,dudv,$$

όπου R *είναι το κλειστό σύνολο* $D\cup C$.

Οι εκφράσεις dx, Pdx+Qdy (θεώρημα Stokes), Fdxdy, κ.λ.π. αποτελούν εκφράσεις μιας και μοναδικής μαθηματικής θεωρίας που υπόκειται όλων αυτών και η οποία παρέχει την αναγκαία γλώσσα που τις γενικεύει και στις n-διαστάσεις. Πρόκειται για τις διαφορικές μορφές και μια πρώτη προσέγγιση που θα μπορούσε να γίνει σε αυτές θα ήταν η κατάταξή τους σε κατηγορίες, ανάλογα με τη συνθετότητά τους.

Μέσα σε ένα ανοικτό υποσύνολο K του $\mathbf{R}^3$ διακρίνουμε τρία είδη υποσυνόλων (στοιχεία θέσης):

(I) Σημεία του K

(II) Προσανατολισμένες απλές και προσανατολισμένες κλειστές καμπύλες C (στοιχεία μήκους)

(III) Προσανατολισμένες επιφάνειες S (στοιχεία επιφάνειας)

(IV) Στοιχειώδεις υποπεριοχές R (των τύπων I-IV) (στοιχεία όγκου)

0-μορφές

Ας είναι $K \subset \mathbf{R}^3$, K ανοικτό σύνολο. Μια 0-μορφή στο K είναι μια συνάρτηση **f**: $K \to \mathbf{R}$, δηλαδή για μια πραγματική συνάρτηση διανυσματικής μεταβλητής.

Αν οι f_1, f_2 είναι 0-μορφές, τότε και οι f_1+f_2 και $f_1 f_2$ είναι επίσης 0-μορφές (οι συνήθεις πράξεις). Στην περίπτωση που διαφορίζουμε την f μια φορά τότε τη θεωρούμε C^1, ενώ στην περίπτωση που τη διαφορίζουμε δύο φορές τη θεωρούμε C^2.

Ένα παράδειγμα 0-μορφής είναι η συνάρτηση f(x,y,z)=xy+yz

1-μορφές

Οι βασικές 1-μορφές είναι εκφράσεις των dx,dy,dz. Μια 1-μορφή ω σε ένα ανοικτό σύνολο $K \subset \mathbf{R}^3$ είναι ένα γραμμικός συνδυασμός των dx,dy,dz, δηλαδή:

$$\omega=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=Pdx+Qdy+Rdz, \text{ με } P,Q,R: K \to \mathbf{R}.$$

Αν οι ω_1, ω_2 είναι 1-μορφές, τότε και οι $\omega_1+\omega_2$ και $f\omega_1$ είναι επίσης 1-μορφές (**f**: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$). Η 1-μορφή αντιστοιχεί **(II)** $\to \mathbf{R}$ (στον αριθμό $\int_C \omega$), για παράδειγμα ω: $C \to \mathbf{R}$, με: $\int_C \omega = \int_C (P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz)$

και με σ: $[\alpha,\beta] \to K$ όπου σ(t)=(x(t),y(t),z(t)) μια παραμέτρηση που διατηρεί τον προσανατολισμό, θα είναι: $\int_C \omega\, d\ell = \int_\sigma \omega\, d\ell = \int_\alpha^\beta [P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}]dt$.

(Το $\int_C \omega$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης)

2-μορφές

Οι βασικές 2-μορφές είναι εκφράσεις των dxdy, dxdz, dydz (γινόμενα των dx,dy,dz με ανασυνδυασμό). Μια 2-μορφή στο $K \subset \mathbf{R}^3$ είναι μια τυπική έκφραση του τύπου:

$$n=Fdxdy+Gdydz+Hdzdx, \text{ όπου } F,G,H: K \to \mathbf{R}.$$

Αν οι n_1, n_2 είναι 2-μορφές τότε και οι n_1+n_2 και fn_1 είναι επίσης 2-μορφές (**f**: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$). Η 2-μορφή αντιστοιχεί **(III)** $\to \mathbf{R}$ (στον αριθμό $\iint_S n$), για παράδειγμα n: $S \to \mathbf{R}$, με:

$$\iint_S n dS = \int_C [F(x,y,z)\det\frac{\theta(x,y)}{\theta(u,v)} + G(x,y,z)\frac{\theta(y,z)}{\theta(u,v)} + H(x,y,z)\frac{\theta(z,x)}{\theta(u,v)}]dudv,$$

όπου (x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) (το $\iint_S n dS$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης).

3-μορφές

Αντίστοιχα προς τα προηγούμενα ορίζεται η 3-μορφή:

$$v=f(x,y,z)dxdydz+g(x,y,z)dydzdt+h(x,y,z)dzdtdx+r(x,y,z)dtdxdy.$$

Παρατηρήσεις

Οι μορφές είναι, κατά κάποιον τρόπο, γενικεύσεις των f: $K \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ που μελετήθηκαν στον Απειροστικό Λογισμό.

Ερμηνεύουμε τις διαφορίσιμες κ-μορφές ($\kappa \geq 1$) όχι ως συναρτήσεις εφαρμοσμένες σε σημεία του K, αλλά ως συναρτήσεις σε γεωμετρικά αντικείμενα: καμπύλες, επιφάνειες. Η ερμηνεία ταιριάζει με την ερμηνεία των αρχαίων γεωμετρών

που έβλεπαν τις ευθείες και τις καμπύλες ως αποτελούμενες από άπειρα σημεία και τα επίπεδα και τις επιφάνειες ως αποτελούμενες από άπειρες γραμμές.

Η παράγωγος μιας κ-μορφής είναι: μια (κ+1)-μορφή για κ<3 και 0 για κ=3 ενώ τη συμβολίζουμε με dω, όπου ω είναι η κ-μορφή.

Ιδιότητες

(1) Αν η f είναι 0-μορφή τότε: $df = \frac{\theta f}{\theta x}dx + \frac{\theta f}{\theta y}dy + \frac{\theta f}{\theta z}dz$

(2) Αν οι ω_1, ω_2 είναι κ-μορφές τότε: $d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

(3) $d(d\omega)=0$, $d(dx)=d(dy)=d(dz)=0$ ή $d^2=0$.

Θεώρημα (Τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet)

Έστω ένα σύστημα συν/νων $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$: $U \subset \mathbf{R}^2 \to M \subset \mathbf{R}^3$ *κλάσεως* C^m $(m \geq 1)$ *μιας κανονικής επιφάνειας* M *κλάσεως* C^m $(m \geq 3)$ *με ορθογώνιες παραμετρικές γραμμές (ισχύει και γενικότερα). Αν* $\boldsymbol{\alpha}(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ *είναι η παραμετρική παράσταση ενός καμπυλόγραμμου πολυγώνου* C *κλάσεως* C^2 *(εκτός των κορυφών του), το οποίο ανήκει στην περιοχή συν/νων που ορίζει το* **x**, *έχει θετικό προσανατολισμό και το εσωτερικό του* D *είναι απλά συνεκτικό σύνολο, ενώ θ(s) είναι η κατά τμήματα κλάσεως* C^1 *συνάρτηση που εκφράζει τη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα καθενός από τα τμήματα* C_i *του C με τις u-παραμετρικές γραμμές (με το μοναδιαίο εφαπτόμενο των u-παραμετρικών γραμμών στο τυχόν σημείο) τότε:*

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_R K_G dS,$$

όπου R *είναι το κλειστό σύνολο* $D \cup C$ *πάνω στην* M.

Απόδειξη

Από τον τύπο του Liouville (σχέση 4) για ένα ορθογώνιο σύστημα παραμετρικών γραμμών θα έχουμε:

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C \frac{d\theta}{ds}ds + \int_C \left(-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}\right)ds$$

$$= \int_C d\theta + \iint_{R'} \frac{1}{2}\left[\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\theta}{\theta v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]dudv,$$

σύμφωνα με το θ. Green-Stokes και με το $R' = \mathbf{x}^{-1}(R)$ να αποτελεί την ένωση του καμπυλόγραμμου πολυγώνου του uv-επιπέδου u=u(s), v=v(s) με το εσωτερικό του.

Άρα:

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta + \iint_{R'} \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\theta}{\theta u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\theta}{\theta v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]\sqrt{EG}\, dudv = \int_C d\theta - \iint_{R'} K_G \sqrt{EG}\, dudv.$$

Με το στοιχειώδες εμβαδό dS του παραλληλογράμμου με διανύσματα πλευρών τα $\mathbf{x_u}, \mathbf{x_v}$ να είναι ίσο με $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \sqrt{EG}\, dudv$ ο **(τοπικός) τύπος των Gauss-Bonnet** γράφεται:

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_R K_G dS \quad \text{ή} \quad \iint_R K_G dS == \int_C d\theta - \int_C \kappa_g ds,$$

με το R να αποτελεί την ένωση του καμπυλόγραμμου πολυγώνου με το εσωτερικό του αλλά πάνω στην επιφάνεια M.

Παρατήρηση

☑ Το ότι το καμπυλόγραμμο πολύγωνο είναι κλάσεως C^2 (εκτός των κορυφών του) σημαίνει ότι αποτελεί μια, κατά τμήματα, λεία καμπύλη κλάσεως C^2. Για το λόγο αυτό εξάλλου υπάρχει και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \kappa_g ds$ (η κ_g συνεχής κατά μήκος του C).

☑ Ο τύπος των Gauss-Bonnet μας δίνει πλήθος πληροφορίες, τόσο σε ότι αφορά το άθροισμα των γωνιών καμπυλόγραμμων πολυγωνικών γραμμών επιφανειών, όσο και για στοιχεία που αφορούν τις γεωδαισιακές (τις «ευθείες») μιας επιφάνειας:

Στην Υπερβολική Γεωμετρία (επιφάνειες με αρνητική καμπυλότητα Gauss K_G) οι γεωδαισιακές δεν αυτοτέμνονται, δύο διαφορετικές γεωδαισιακές που βρίσκονται πάνω σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια με αρνητική ή μηδενική K_G έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο

ή και γενικότερα χαρακτηριστικά μιας επιφάνειας:

Μια συμπαγής επιφάνεια με θετική καμπυλότητα είναι ομοιομορφική μιας σφαίρας κ.λ.π.

4.6 Ο ρόλος των γωνιών του (καμπυλόγραμμου) πολυγώνου, Ολονομία καμπύλης μιας επιφάνειας, Ολικό θεώρημα Gauss-Bonnet

Θα μελετήσουμε τώρα: τον ρόλο που οι εξωτερικές (και οι εσωτερικές) γωνίες ενός (καμπυλόγραμμου) πολυγώνου παίζουν στη διερεύνηση του είδους της επιφάνειας (της καμπύλωσης της επιφάνειας) μέσω της διασύνδεσής τους με μια αναλλοίωτη της επιφάνειας (της καμπυλότητας Gauss K_G), καθώς και την έννοια της ολονομίας (κατά μήκος της) καμπύλης μιας επιφάνειας. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως η ολονομία συσχετίζεται με τις παράλληλες μεταφορές διανυσμάτων κατά μήκος των σημείων λείων καμπυλών ή καμπυλόγραμμων τριγώνων και γενικότερα, καμπυλόγραμμων πολυγώνων.

Από τον τύπο (τοπικό) των Gauss-Bonnet της προηγούμενης ενότητας είδαμε πως: $\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_R K_G dS$ ή $\iint_R K_G dS = \int_C d\theta - \int_C \kappa_g ds$ ή $\int_C d\theta = \int_C \kappa_g ds + \iint_R K_G dS$

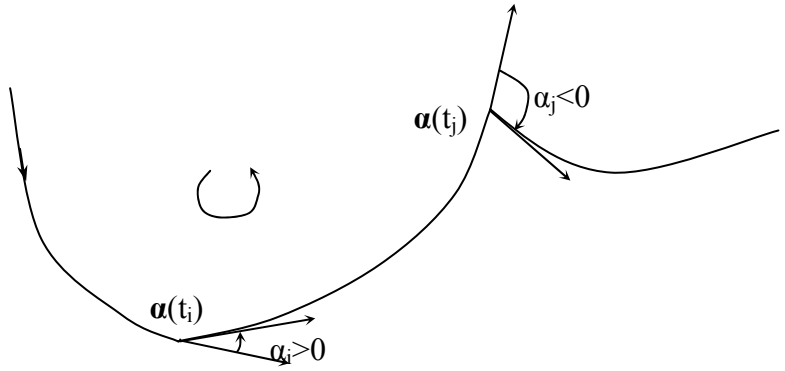
Θα διερευνήσουμε τώρα τι εκφράζει το ολοκλήρωμα $\int_C d\theta$.

Απαντώντας, αρχικά, θα λέγαμε ότι εκφράζει τη μεταβολή της γωνίας θ που σχηματίζει η (καμπυλόγραμμη) πολυγωνική γραμμή (κάθε τμήμα της κατά τμήματα λείας πολυγωνικής γραμμής) με τις u-παραμετρικές γραμμές (v=σταθερό). Επειδή η πολυγωνική γραμμή είναι απλή, είναι γνωστό από την Τοπολογία ότι η συνολική μεταβολή της γωνίας θ κατά μήκος της καμπύλης είναι ίση 2π (**θεώρημα Hopf**).

Για μια καμπυλόγραμμη πολυγωνική γραμμή που ανήκει σε μια κανονική επιφάνεια, ισχύει το **θεώρημα των στρεφομένων εφαπτομένων** που ακολουθεί (αφού πρώτα γίνουν οι αναγκαίες διευκρινήσεις που αφορούν τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό).

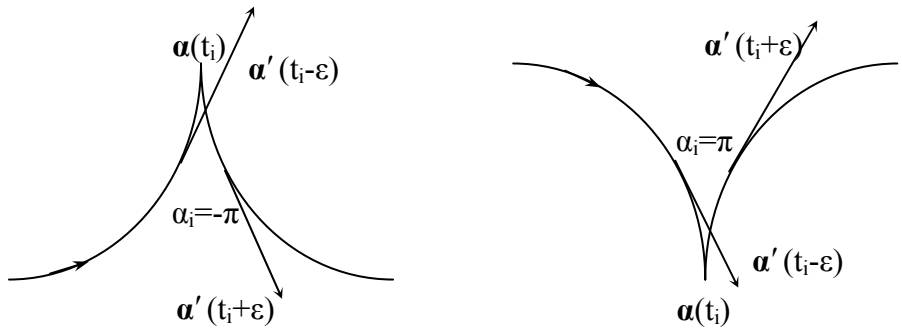
Αν υποθέσουμε ότι η κανονική επιφάνεια M είναι προσανατολίσιμη και ορίσουμε ως α_i ($0<|\alpha_i|\leq\pi$) τη μικρότερη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}'(t_i^-)$ και

$\boldsymbol{\alpha}'(t_i^+)$ τότε, στην περίπτωση που είναι $\alpha_i \neq \pi$, αποδίδουμε στην α_i το πρόσημο της ορίζουσας των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}'(t_i^-), \boldsymbol{\alpha}'(t_i^+), \mathbf{n}$, πράγμα που σημαίνει ότι: αν η κορυφή A_i δεν είναι «μύτη», το πρόσημο της α_i δίνεται από τον προσανατολισμό της M (που καθορίζει και τον προσανατολισμό της πολυγωνικής γραμμής). Αυτή (η προσανατολισμένη γωνία) είναι και η γωνία που αποκαλούμε **εξωτερική γωνία** της πολυγωνικής γραμμής (της επιφάνειας M) στην κορυφή A_i (πρόκειται για το «άλμα» που κάνει η θ(s) στην κορυφή A_i) (σχήμα 4.10).



Σχήμα 4.10

Στην περίπτωση που είναι $\alpha_i=\pi$ (η κορυφή A_i είναι «μύτη») η επιλογή του προσήμου της α_i καθορίζεται ως εξής: Από τη συνθήκη της κανονικότητας εξασφαλίζεται η ύπαρξη του $\varepsilon'>0$ έτσι ώστε η ορίζουσα των $\boldsymbol{\alpha}'(t_i-\varepsilon), \boldsymbol{\alpha}'(t_i+\varepsilon), \mathbf{n}$ να μην αλλάζει πρόσημο για κάθε $0<\varepsilon<\varepsilon'$. Αποδίδουμε τότε στην α_i το πρόσημο αυτής της ορίζουσας (σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το σύστημα συν/νων $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M\subset\mathbf{R}^3$ κλάσεως C^m $(m\geq 1)$ είναι συμβιβαστό με τον προσανατολισμό της M, με το U να αποτελεί μια ανοικτή περιοχή του επιπέδου. Ας είναι επίσης C η τροχιά μιας απλής, κλειστής, κατά τμήματα λείας, κανονικής, παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$: $[0,L]\subset\mathbf{R}\to\mathbf{x}(U)$ (L το μήκος της καμπύλης) με κορυφές $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$ και εξωτερικές γωνίες α_i.

Αν οι θ_i: $[t_i,t_{i+1}]\to\mathbf{R}$ (i=1,2,…,κ) είναι οι διαφορίσιμες συναρτήσεις που μετράνε σε κάθε $t\in[t_i,t_{i+1}]$ τη θετική γωνία από το $\mathbf{x_u}$ (στο $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$) έως το $\boldsymbol{\alpha}'(t)$, τότε με τις μέχρι τώρα παραδοχές ισχύει:

Πρόταση (θεώρημα των στρεφομένων εφαπτομένων)

$$\sum_{i=1}^{\kappa}(\theta_i(t_{i+1})-\theta_i(t_i))+\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i=\pm 2\pi,$$

με το πρόσημο του 2π *να εξαρτάται από τον προσανατολισμό της* **α**.

Παρατήρηση

Η τελευταία πρόταση αποτελεί ένα πόρισμα του θεωρήματος Hopf (Hopf's Umlaufsatz: *«Η εφαπτομένη κατά μήκος μιας απλής, κλειστής, κατά τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης η οποία περικλείει μια απλή συνεκτική επιφάνεια στρέφεται κατά γωνία 2π»*) το οποίο παρότι βρίσκεται εκτός της ιστορικής συνέχειας της απόδειξης του θ. Gauss-Bonnet, αποτέλεσε μια **σιωπηρή υπόθεση** κατά την απόδειξη του θεωρήματος με τη μορφή που ακολουθεί.

Χρησιμοποιώντας σαν παράμετρο τη φυσική παράμετρο s και θεωρώντας ότι η **α** αποτελεί μια θετικά προσανατολισμένη πολυγωνική γραμμή μιας κανονικής επιφάνειας, το παραπάνω θεώρημα εκφράζεται ως: $\sum_i(\theta_i(s_{i+1})-\theta_i(s_i))=2\pi-\sum_i\alpha_i$.

Τότε: $\int_C d\theta=\sum_i\int_{s_i}^{s_{i+1}}d\theta_i=\sum_i(\theta_i(s_{i+1})-\theta_i(s_i))=2\pi-\sum_i\alpha_i$ και το (τοπικό) θεώρημα των Gauss-Bonnet γράφεται:

$$\int_C\kappa_g ds=2\pi-\sum_i\alpha_i-\iint_R K_G dS \quad \text{ή} \quad \iint_R K_G dS=2\pi-\sum_i\alpha_i-\int_C\kappa_g ds.$$

Σημειώνουμε ότι: την ποσότητα $2\pi-\sum_i\alpha_i-\int_C\kappa_g ds$ την καλούμε και **ολονομία *H*(α) (των γωνιών) της καμπύλης ή της (κατά τμήματα λείας και κανονικής) κλειστής καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής**.

Αν αντί για τις εξωτερικές γωνίες α_i χρησιμοποιήσουμε τις εσωτερικές γωνίες $\beta_i=\pi-\alpha_i$ της πολυγωνικής γραμμής, τότε ο τοπικός τύπος των Gauss-Bonnet γράφεται:

$$\iint_R K_G dS=2\pi-\sum_i(\pi-\beta_i)-\int_C\kappa_g ds.$$

Παρατήρηση

Αν καλέσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss πάνω σε έναν απλό συνεκτικό τόπο **ολική καμπυλότητα της επιφάνειας**, τότε το τοπικό θεώρημα των Gauss-Bonnet θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:

Αν μια καμπυλόγραμμη πολυγωνική καμπύλη (γραμμή) μιας κανονικής επιφάνειας περικλείει έναν απλό συνεκτικό τόπο, τότε η ολική καμπυλότητα της επιφάνειας είναι ίση με την ολονομία της πολυγωνικής καμπύλης

Θα εξετάσουμε τώρα τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

1) Η καμπύλη να είναι μια λεία γραμμή χωρίς γωνίες.

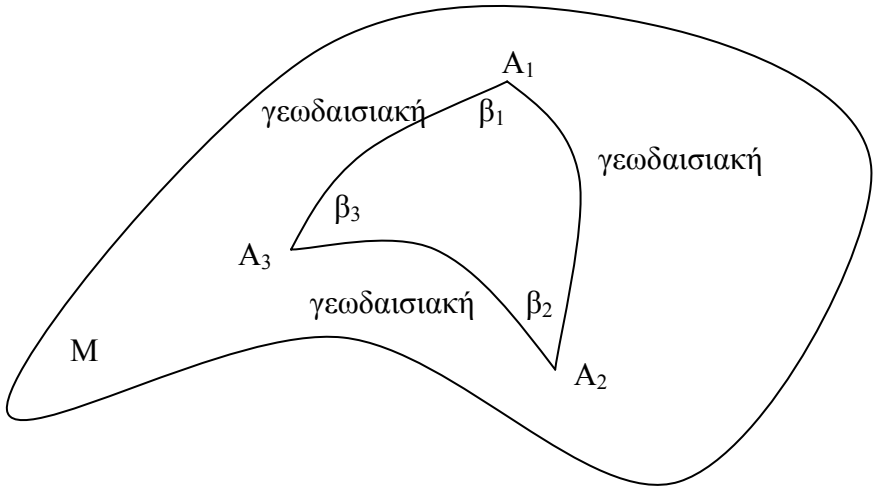
Στην περίπτωση αυτή είναι $\sum_i\alpha_i=0$ οπότε: $\iint_R K_G dS=2\pi-\int_C\kappa_g ds$.

Αν μάλιστα η καμπύλη είναι και γεωδαισιακή ($\kappa_g=0$) τότε: $\iint_R K_G dS=2\pi$.

2) Τα τμήματα-τόξα της πολυγωνικής γραμμής είναι τμήματα γεωδαισιακών.

Στην περίπτωση αυτή (κ_g=0) είναι: $\iint_R K_G dS = 2\pi - \sum_i \alpha_i$

Ας δούμε τώρα την εφαρμογή του τοπικού θεωρήματος των Gauss-Bonnet στην εύρεση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου μιας επιφάνειας. Θα ασχοληθούμε με τρίγωνα των οποίων οι πλευρές είναι τμήματα (τόξα) γεωδαισιακών, πράγμα που σημαίνει ότι κατά μήκος τους είναι κ_g=0. Ένα τέτοιο καμπυλόγραμμο τρίγωνο καλείται **γεωδαισιακό τρίγωνο** (σχήμα 4.12).



Σχήμα 4.12

Σύμφωνα με την παραπάνω ειδική περίπτωση 2), για ένα γεωδαισιακό τρίγωνο (i από 1 έως 3) θα έχουμε:

$$\iint_R K_G dS = 2\pi - \sum_i^3 \alpha_i = 2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=2\pi-(\pi-\beta_1)-(\pi-\beta_2)-(\pi-\beta_3)=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\pi=\sum_i^3 \beta_i - \pi$$

■ Στην περίπτωση **σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου** (ελλειπτικό-Riemann «επίπεδο» με $K_G=\frac{1}{R^2_{\sigma\varphi.}}$) θα είναι (σχήμα 4.13):

$$\iint_R K_G dS = \frac{1}{R^2}\iint_R dS = \frac{1}{R^2_{\sigma\varphi.}} E_{\sigma\varphi.\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$$ οπότε:

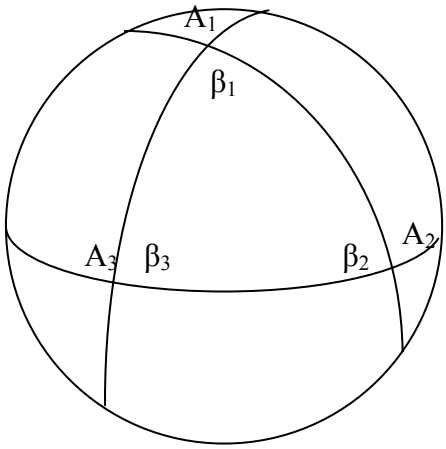
$$\sum_i \beta_i - \pi = \frac{E_{\sigma\varphi.\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}}{R^2_{\sigma\varphi.}} > 0.$$

Άρα το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από π.

Σημειώνουμε ότι, την ποσότητα:

$$(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\pi=\sum_i^3 \beta_i - \pi$$

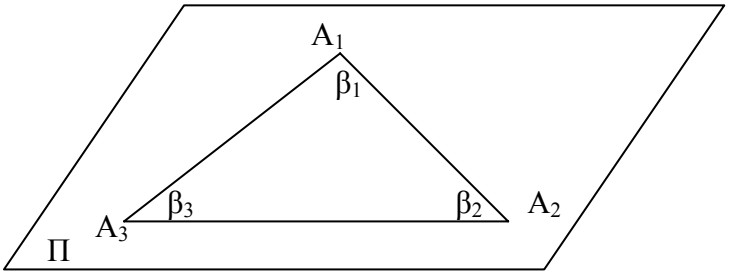
την καλούμε και **(γωνιακή) υπεροχή του τριγώνου** ή **υπεροχή των γωνιών του τριγώνου**.



Σχήμα 4.13

■ Στην περίπτωση **γεωδαισιακού τριγώνου του Ευκλείδειου επιπέδου (ευθύγραμμο τρίγωνο** με $K_G=0$**)** θα είναι (σχήμα 4.14):

$$\iint_R K_G \, dS = 0 \text{ οπότε: } \sum_i \beta_i - \pi = 0 \text{ ή } \sum_i \beta_i = \pi .$$



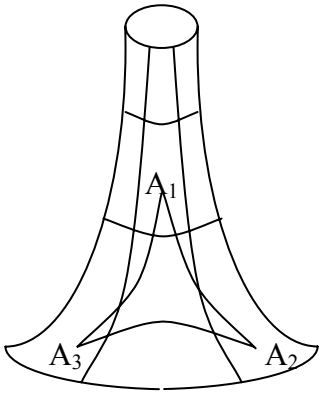
Σχήμα 4.14

■ Στην περίπτωση **γεωδαισιακού τριγώνου του υπερβολικού επιπέδου** (Gauss-Lobachevsky-Bolyai με $K_G=-\frac{1}{k^2}$) θα είναι (σχήμα 4.15):

$$\iint_R K_G \, dS = -\frac{1}{k^2}\iint_R dS = -\frac{1}{k^2} E_{\text{σφ.τριγώνου}} \text{ οπότε:}$$

$$\sum_i \beta_i - \pi = -\frac{E_{\text{υπερ.τριγώνου}}}{k^2} < 0.$$

Άρα το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου του υπερβολικού επιπέδου (της επιφάνειας της ψευδόσφαιρας για παράδειγμα) είναι μικρότερο από π.



Σχήμα 4.15

Παρατήρηση

Τα παραπάνω συμπεράσματα (ή κάποια από αυτά) ήταν ήδη γνωστά στην εποχή του Gauss ως αποτέλεσμα την διαχρονικής εμπλοκής με τα θέματα που ανέκυψαν στα πλαίσια της κριτικής στο 5ο Αίτημα και όχι μόνο (Μενέλαος και «Σφαιρικά», σφαιρικά τρίγωνα και Girard, τετράπλευρο Saccheri και Lambert, σφαίρα φανταστικής ακτίνας του Lambert).

Η ενασχόληση του Gauss με τα ζητήματα αυτά, ανέδειξε τις διάφορες πτυχές τους σε νέα βάση και κυρίως εκείνες που αφορούν τα ζητήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας, που στη συνέχεια οδήγησαν στην κατοχύρωση της δυνατότητας ύπαρξης και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Ιστορικά, τα ζητήματα αυτά παρουσιάζονται στο έργο του **«Disquisitiones generales circa superfisies curvas» (1828)** όπου Gauss συμπεραίνει μερικές από τις βασικές ιδιότητες των γεωδαισιακών τριγώνων, αποδεικνύει τη (γενική) σχέση μεταξύ εμβαδού και αθροίσματος γωνιών, που επεκτείνει τις ήδη γνωστές περιπτώσεις σφαίρας και επιπέδου.

Αντίστοιχα ο Bonnet στο έργο του **«Sur la theorie generale de surfases» (1848)** εισάγει τον όρο της γεωδαισιακής καμπυλότητας και εφαρμόζει το θ. Green για την απόδειξη της γενίκευσης του θ. Gauss για πολύγωνα με πλευρές που δε διαθέτουν για πλευρές γεωδαισιακά τόξα.

Συγκεκριμένα, για ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο, η διαφορά $\sum_i \beta_i - \pi$ (η υπεροχή) δίνεται ακριβώς από το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R K_G \, dS = \frac{1}{R^2_{\sigma\varphi.}} E_{\sigma\varphi.\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$ (R είναι το κλειστό γεωδαισιακό τρίγωνο). Το συμπέρασμα αυτό με τη μορφή $E_{\sigma\varphi.\tau\rho\iota\gamma.}=[(A+B+\Gamma)-\pi]R^2_{\sigma\varphi.}$, όπου $R_{\sigma\varphi.}$ η ακτίνα της σφαίρας και Α,Β,Γ οι (εσωτερικές) γωνίες του σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου ΑΒΓ, ήταν γνωστό από το 1650 (Girard) ενώ την απόδειξή του φέρεται να διατύπωσε ο Euler το 1780.

Αν $K_G \neq 0$ στο R, η υπεροχή δίνει το εμβαδό της εικόνας του R μέσω της απεικόνισης Gauss **n**: $M \rightarrow S^2$. Αυτή ήταν και η μορφή με την οποία και ο ίδιος ο Gauss διατύπωσε το θεώρημά του:

Η υπεροχή ενός γεωδαισιακού τριγώνου Τ είναι ίση με το εμβαδό της σφαιρικής εικόνα n(T).

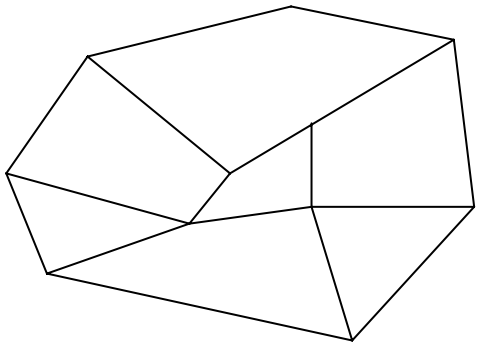
Πολλά από τα παραπάνω ζητήματα είπαμε, συνδέονται με τις αντιπαραθέσεις σχετικά με τη δυνατότητα απόδειξης (της ανεξαρτησίας) του 5^{ου} Αιτήματος (αξίωμα των παρ/λων), από το οποίο προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου (του Ευκλείδειου επιπέδου) είναι ίσο με π. Στην προσπάθεια αυτή επιδιώχθηκε να δειχθεί, θεωρώντας τις γεωδαισιακές ως τις συνήθεις ευθείες του επιπέδου, ότι οι επιφάνειες με σταθερή αρνητική καμπυλότητα (υπερβολικό επίπεδο) συνιστούν ένα (τοπικό) μοντέλο για μια Γεωμετρία στην οποία να ισχύουν όλα τα Αιτήματα, εκτός από το 5° Αίτημα και το 2° Αίτημα (της άπειρης επέκτασης των ευθειών)

Ο Hilbert έδειξε ότι δεν υπάρχει στον $\mathbf{R}^3$ μια επιφάνεια με αυτά τα χαρακτηριστικά και επομένως στον $\mathbf{R}^3$ δε μπορεί να υπάρξει, από μόνο του, ένα μοντέλο για την ανεξαρτησία του 5^{ου} Αιτήματος (η ψευδόσφαιρα που προτάθηκε διαθέτει άκρη που αποτελείται από απλά σημεία). Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση της έννοιας της αφηρημένης επιφάνειας, μια και έτσι καθίσταται δυνατό να παρακαμφθεί η δυσκολία και να δημιουργηθεί ένα μοντέλο της επιθυμητής Γεωμετρίας: το 5° Αίτημα γίνεται ανεξάρτητο από τα άλλα (Στράντζαλος, 1987, σελ. 94-120 και 2002, σελ. 1-17).

Να επισημάνουμε ξανά ότι, η κλειστή καμπυλόγραμμη πολυγωνική γραμμή στην οποία αναφερόμαστε περικλείει έναν (κλειστό) τόπο R (της επιφάνειας) ο οποίος είναι υποσύνολο του **x**(U), όπου **x**: $U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow M$ είναι ένα σύστημα συν/νων κλάσεως C^m $(m \geq 1)$ (Στην πραγματικότητα βέβαια το διπλό ολοκλήρωμα στο R σημαίνει διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο $\mathbf{x}^{-1}(R) \subset \mathbf{R}^2$).

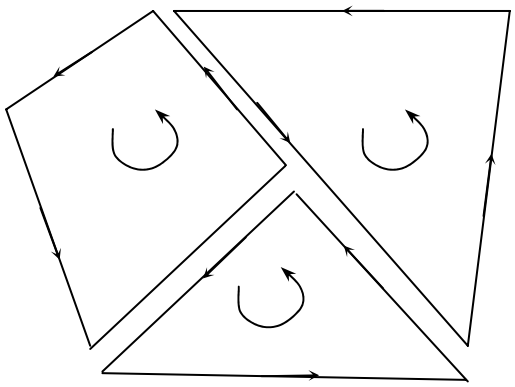
Αν κάτι τέτοιο δε συμβαίνει, τότε χωρίζουμε τον τόπο R σε μικρότερα «κομμάτια» (καμπυλόγραμμα πολύγωνα) έτσι ώστε κάθε «κομμάτι» να ανήκει στην περιοχή ενός συστήματος συν/νων και στη συνέχεια αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Τα μικρότερα βέβαια «κομμάτια» για τα οποία μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο είναι τα τρίγωνα, μέσω μιας διαδικασίας που καλείται **τριγωνοποίηση** μιας κανονικής επιφάνειας.

Έστω η συμπαγής (κλειστή και φραγμένη) και προσανατολίσιμη επιφάνεια M. Μπορεί να δειχθεί ότι μια τέτοια επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί πάντοτε με πεπερασμένο αριθμό κλειστών τόπων (περιοχών) R_i, i=1,2,…,n, έτσι ώστε κάθε τέτοια περιοχή να αποτελείται από την ένωση, ενός καμπυλόγραμμου πολυγώνου C_i, με το εσωτερικό του D_i και τα ζεύγη των περιοχών R_i που επικαλύπτονται να έχουν κοινή (το πολύ) ή μία μόνο ακμή (με τις δυο κορυφές της) ή μια μόνο κορυφή. Η κάλυψη R_i, i=1,2,..,n, λέγεται **πολυγωνική ανάλυση της κανονικής επιφάνειας M** (σχήμα 4.16).



Σχήμα 4.16

Αν μάλιστα εκλέξουμε έναν προσανατολισμό στην επιφάνεια (την καταστήσουμε προσανατολισμένη) τότε υπάρχει μια πολυγωνική ανάλυση σε πολύγωνα που έχουν θετικό προσανατολισμό και είναι τέτοια ώστε οι προσανατολισμοί τους, σε κάθε ζεύγος επικαλυπτόμενων ακμών, να είναι αντίθετοι (σχήμα 4.17).



Σχήμα 4.17

Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε, αντί της ανάλυσης της επιφάνειας M (ή ενός υποσύνόλου της) σε πολύγωνα, να αναλύσουμε την επιφάνεια σε τρίγωνα με τους ίδιους όρους που αυτό έγινε και για τα πολύγωνα. Δηλαδή σε μια πεπερασμένη οικογένεια τριγώνων T_i, i=1,2,…,n έτσι ώστε να ισχύει: $\bigcup_{i=1}^{n} T_i = M$ και στην περίπτωση που είναι $T_i \cap T_j \neq \varnothing$, τότε τα T_i, T_j θα έχουν ή κοινή κορυφή ή κοινή ακμή. Η διαδικασία αυτή **τριγωνοποίησης** μπορεί, σε ένα απλό πολύγωνο στη σφαίρα, στο επίπεδο ή στο υπερβολικό επίπεδο, να πραγματοποιηθεί (με μικρά τρίγωνα) χωρίς την πρόσθεση επιπλέον κορυφών. Τα ζητήματα αυτά εξετάζονται αναλυτικότερα στην παράγραφο 5.5, όταν γίνεται η μελέτη της σφαίρας.

Η ύπαρξη τριγωνοποίησης επικυρώθηκε τον 19° αι. από τον Gauss λόγω της ενασχόλησής του με τη γεωδαισία (τοπογραφική μελέτη). Διασπούσε μεγάλες γεωγραφικές περιοχές σε γεωδαισιακά τρίγωνα με τα χαρακτηριστικά εκείνα που προσδιορίζουν τη διαδικασία ως τριγωνοποίηση. Η απόδειξη της δυνατότητας ύπαρξης τριγωνοποίησης κάθε συμπαγούς επιφάνειας από την άλλη απαιτεί τη χρήση Τοπολογίας, βάση του **θεωρήματος της καμπύλης του Jordan** (πρώτη πλήρης απόδειξη για όλες τις 2-διάστατες πολλαπλότητες-επιφάνειες έγινε το 1924 από τον Tibor Rado και για όλες τις 3-διάστατες πολλαπλότητες το 1952 από τον E. Moise).

Η εφαρμογή του τοπικού θεωρήματος Gauss-Bonnet για κάθε πολύγωνο (ή τρίγωνο) μιας πολυγωνικής κάλυψης (ή μέσω τριγωνοποίησης) και στη συνέχεια η άθροιση των απολεσμάτων για όλα τα πολύγωνα της κάλυψης, οδηγεί στο **ολικό θεώρημα Gauss-Bonnet**.

Θεώρημα (ολικό θεώρημα των Gauss-Bonnet)
Αν M είναι μια προσανατολισμένη, συμπαγής επιφάνεια κλάσεως C^3 *χωρίς σύνορο τότε έχουμε:*

$$\iint_M K_G dS = 2\pi\chi(M),$$

όπου χ *είναι η χαρακτηριστική του Euler της επιφάνειας* M.

Απόδειξη

Θεωρούμε, αρχικά, ότι για την συμπαγή επιφάνεια M (ή ένα υποσύνολο αυτής) διαθέτουμε μια πολυγωνική ανάλυσή της, δηλαδή έναν πεπερασμένο αριθμό κλειστών τόπων (περιοχών) R_i με σύνορο C_i, i=1,2,…,n, που την καλύπτουν.

Με εφαρμογή του τοπικού θεωρήματος των Gauss-Bonnet για κάθε i-πολύγωνο μιας τέτοιας κάλυψης θα έχουμε:

$$\iint_{R_i} K_G dS = 2\pi - \sum_j \alpha_{ij} - \int_{C_i} \kappa_g ds = 2\pi - k_i\,\pi + \sum_j \beta_{ij} - \int_{C_i} \kappa_g ds\,,$$

όπου α_{ij} οι εξωτερικές και $\beta_{ij}=\pi-\alpha_{ij}$ οι εσωτερικές γωνίες στις διάφορες κορυφές της πολυγωνικής γραμμής.

Στη συνέχεια αθροίζουμε για όλες τις πολυγωνικές γραμμές C_i. Επειδή όμως κάθε ακμή περιέχεται δύο φορές στο άθροισμα, και μάλιστα με αντίθετο προσανατολισμό, θα είναι: $\sum_i \int_{C_i} \kappa_g ds = 0$, συνεπώς:

$$\iint_M K_G dS = 2\pi\sum_{i=1}^{n} 1 - \pi\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_j \beta_{ij}\,.$$

Έτσι, κάθε ακμή υπάρχει δύο φορές στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} k_i$ και επειδή σε κάθε κορυφή του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{n}\sum_j \beta_{ij}$ αντιστοιχούν γωνίες με άθροισμα 2π, θα έχουμε τελικά τον τύπο: $\iint_M K_G dS = 2\pi(f-e+v)$, όπου f είναι ο αριθμός των πολυγώνων, e ο αριθμός των ακμών και v ο αριθμός των κορυφών της πολυγωνικής ανάλυσης.

Την ποσότητα **f-e+v** την **καλούμε χαρακτηριστική του Euler (ή Euler-Poincare) μιας επιφάνειας M** και τη συμβολίζουμε με χ(M).

Σημειώνουμε ότι: η χαρακτηριστική του Euler μένει αναλλοίωτη κατά τις 1-1 αμφισυνεχείς απεικονίσεις της επιφάνειας. Έτσι, κάτω από μια τέτοια απεικόνιση, μια οποιαδήποτε πολυγωνική ανάλυση της επιφάνειας M απεικονίζεται σε μια πολυγωνική ανάλυση της εικόνας της με τον ίδιο αριθμό πολυγώνων, ακμών και κορυφών.

Επειδή στις συμπαγείς και προσανατολισμένες επιφάνειες (χωρίς σύνορο) η ολική καμπυλότητα δεν εξαρτάται από την πολυγωνική ανάλυση ή την τριγωνοποίηση, **η ολική καμπυλότητα (άρα και η χαρακτηριστική Euler) είναι μια τοπολογική αναλλοίωτη** (απόδειξη από τον Poincare το 1893 στο έργο του «Homology Theory»). Η γενικότερη μάλιστα ιδέα προσδιορισμού μιας Γεωμετρίας μέσω της μελέτης των αναλλοιώτων που συνδέονται με αυτή, πρόγονος της οποίας αποτελεί το ολικό θεώρημα Gauss-Bonnet, συνδέεται με σημαντικά συμπεράσματα

στα Μαθηματικά, τα οποία σχετίζονται με τη μοντέρνα Διαφορική Γεωμετρία και την Αλγεβρική Τοπολογία.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν παραμορφώσουμε μια επιφάνεια χωρίς να αλλοιώσουμε τον τοπολογικό της τύπο, τότε η χαρακτηριστική του Euler παραμένει σταθερή. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής:

1) *Σαν ένα είδος «ακαμψίας» της επιφάνειας*

Αν πατήσουμε με το δάχτυλό μας ένα μπαλόνι (εξειδανικευμένη σφαίρα), φουσκώνει σε άλλο σημείο προκειμένου να μειώσει την «αύξηση» της K_G γύρω από τα δάχτυλο που πιέζει. Αν επιπλέον απαιτηθεί η K_G να είναι σταθερή τότε η κλάση των παραμορφώσεων είναι πολύ (αυστηρά) συγκεκριμένη για τη σφαίρα: Μεταφορές-περιστροφές-ανακλάσεις.

2) *Υποδεικνύει τους τρόπους με τους οποίους μια επιφάνεια βρίσκεται εμφυτευμένη στον* $\mathbf{R}^3$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο τόρος έχει χαρακτηριστική $\chi=0$ άρα και ολική καμπυλότητα ίση με το μηδέν. Επειδή η επιφάνειά του είναι συμπαγής θα έχει ένα σημείο το οποίο είναι το πιο απομακρυσμένο από την αρχή άρα θα έχει $K_G>0$ (ελλειπτικό σημείο), επομένως θα υπάρχουν και σημεία για τα οποία θα ισχύει $K_G<0$ (υπερβολικό σημεία). Ταυτόχρονα υπάρχουν και σημεία τα οποία έχουν $K_G=0$ (επίπεδα σημεία). Επομένως ο τόρος δεν μπορεί να εμφυτευτεί ως επιφάνεια με σταθερή K_G στον $\mathbf{R}^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

Η παράλληλη μεταφορά διανύσματος στις επιφάνειες- η περίπτωση της σφαίρας

5.1 Τα ζητήματα της συναλλοίωτης παραγώγου

5.2 Παράλληλα διανυσματικά πεδία, Παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος καμπύλης: συναλλοίωτη παράγωγος και ολονομία, Παράλληλη μεταφορά κατά μήκος καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής ή πολυγώνου

5.3 Η παράλληλη μεταφορά στο επίπεδο

5.4 Παράλληλη μεταφορά και καμπυλότητες: γεωδαισιακή καμπυλότητα και καμπυλότητα Gauss, Γεωμετρική απόδοση της καμπυλότητας Gauss

5.5 Παράλληλη μεταφορά διανύσματος στην επιφάνεια της σφαίρας

5.1 Τα ζητήματα της συναλλοίωτης παραγώγου

Στην ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε την επέκταση της έννοιας της παραλληλίας διανυσμάτων (ενός διανυσματικού πεδίου) του επιπέδου, σε οποιαδήποτε επιφάνεια του $\mathbf{R}^3$. Θα μελετήσουμε δηλαδή την παράλληλη μεταφορά διανύσματος ενός διανυσματικού πεδίου, το ρόλο και τη διασύνδεσή της με τη μορφή της επιφάνειας (την καμπυλότητα Gauss K_G της επιφάνειας), την έννοια της ολονομίας σε συνδυασμό με την παραλληλία και γενικότερα τις γεωμετρικές ιδιότητες μιας επιφάνειας. Με συγκεκριμένη στόχευση, θα μελετήσουμε το ζήτημα της **παράλληλης μεταφοράς διανύσματος** στην επιφάνεια της σφαίρας και κατά μήκος διαφόρων καμπυλών που ανήκουν σε αυτή (μέγιστοι κύκλοι, παράλληλοι κύκλοι).

Γενικά, η έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου καθώς και η έννοια της παράλληλης μεταφοράς (που ακολουθεί) είναι κεντρικές έννοιες σε επιστημονικούς κλάδους όπως η Φυσική και η Μηχανική, μια και συνδέονται με μερικές από τις συμαντικότερες θεωρίες τους που είναι υποψήφιες για να αποτελέσουν την επιδιωκόμενη «Θεωρία Ενοποιημένου Πεδίου», η οποία θα ενοποιήσει όλους τους μέχρι τώρα γνωστούς φυσικούς νόμους οι οποίοι αφορούν τις δυνάμεις που συναντάμε στη φύση.

Η αναφορά, εκ νέου, σε έννοιες που έχουν μελετηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια (παράγωγος κατά κατεύθυνση, συναλλοίωτη παράγωγος, διαφορικό συνάρτησης, εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας κ.λ.π.) θα γίνεται με την προϋπόθεση της γνώσης τους, ενώ όπου επιλέγεται κάποια διαφοροποίηση σε ζητήματα συμβολισμού (κυρίως), αυτό θα γίνεται με τη μεγαλύτερη δυνατή επιμέλεια και προσοχή. Πάντως, για λόγους οικονομίας των συμβόλων, θα συμβολίζουμε στη συνέχεια το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο <,> με $(\cdot)$.

Στα προηγούμενα και κατά την προσέγγιση της Γεωμετρίας των επιφανειών που βρίσκονται εμφυτευμένες στον $\mathbf{R}^3$, η συναλλοίωτη παράγωγος χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό του τελεστή σχήματος $S_P(\mathbf{v})=-\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}(\mathbf{P})=-d_P\,\mathbf{n}(\mathbf{v})$ και των διαφόρων ειδών αναλλοιώτων της καμπυλότητας (κάθετη καμπυλότητα κ_n, καμπυλότητα Gauss $K_G(\mathbf{P})$, μέση καμπυλότητα $H(\mathbf{P})$), που προέκυψαν από τον τελεστή αυτό.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα συν/νων $\mathbf{x}(u,v)$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M$ (U ανοικτό σύνολο), κλάσεως C^m $(m\geq 1)$, για το οποίο ισχύει F=0 (τα $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$ αποτελούν μια ορθογώνια, τουλάχιστον, βάση) καθώς και μια κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ της επιφάνειας M (με τις γνωστές προϋποθέσεις κανονικότητας και διαφορισιμότητας), με μοναδιαίο ή τουλάχιστον σταθερό διάνυσμα ταχύτητας.

Τότε, τα διανύσματα $\mathbf{E_1}=\dfrac{\mathbf{x_u}}{\sqrt{E}}$ και $\mathbf{E_2}=\dfrac{\mathbf{x_v}}{\sqrt{G}}$ αποτελούν διανυσματικά πεδία κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ενώ συνιστούν επίσης μια ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}\}$ του εφαπτόμενου χώρου T_xM σε κάθε σημείο $\mathbf{x}(u,v)$ της επιφάνειας M. Τα διανύσματα αυτά λέμε ότι αποτελούν ένα **κινούμενο πλαίσιο στην περιοχή συν/νων** που ορίζει το $\mathbf{x}$ πάνω στην M.

Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί μια και:

$$\mathbf{E_1}\cdot\mathbf{E_2}=\frac{\mathbf{x_u}\cdot\mathbf{x_v}}{\sqrt{EG}}=\frac{F}{\sqrt{EG}}=0 \text{ ενώ } \|\mathbf{E_1}\|=\sqrt{\frac{\mathbf{x_u}\cdot\mathbf{x_u}}{\sqrt{E}\sqrt{E}}}=\sqrt{\frac{E}{E}}=1 \text{ και } \|\mathbf{E_2}\|=\sqrt{\frac{\mathbf{x_v}\cdot\mathbf{x_v}}{\sqrt{G}\sqrt{G}}}=1.$$

Τα $\mathbf{E_1},\mathbf{E_2}$ μαζί με το μοναδιαίο, κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}}{|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}|}$ στην επιφάνεια Μ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R^3}$. Η ύπαρξη της παραπάνω ορθοκανονικής βάσης $\{\mathbf{E_1},\mathbf{E_2},\mathbf{n}\}$ μπορεί να εξασφαλιστεί ακόμη και στην περίπτωση που η περιοχή συν/νων **x** δεν είναι ορθογώνια ($F\neq 0$).

Πως όμως τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{E_1},\mathbf{E_2}$ μεταβάλλονται κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}(t)$; Η απάντηση θα δοθεί με τα βοήθεια της συναλλοίωτης παραγώγου.

Ας είναι $\mathbf{z}=(z^1,z^2,z^3)$ ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbf{R^3}$ με τις z^i συναρτήσεις z^i: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Τότε, η προβολή $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ της συναλλοίωτης παραγώγου $\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}$ του διανύσματος **z** κατά την κατεύθυνση του διανύσματος **v** (Jacobian πίνακας ή διαφορικό στην περίπτωση διαφορίσιμης συνάρτησης) στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{p}}(M)$, αποτελεί τη (συναλλοίωτη) παράγωγο του **z** κατά την κατεύθυνση του διανύσματος **v**, που είναι εσωτερικό στοιχείο της ίδιας της επιφάνειας και είναι ίση με την $\nabla_{\mathbf{v}}^{R^3}\mathbf{z}$, αν αφαιρέσουμε την κάθετη συνιστώσα $(\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Άρα:

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}=\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}-\text{προβ}_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}=\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}-(\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\,.$$

Σημειώνουμε ότι: η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{z}$, αποτελεί τη παράγωγο κατά τη διεύθυνση του διανύσματος **v** η οποία εφαρμόζεται σε όλες τις συνιστώσες του **z** και αναφέρεται στον $\mathbf{R^3}$, ενώ η συναλλοίωτη παράγωγος (προβολή) $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ δεν αναφέρεται (γενικά) στον $\mathbf{R^3}$ αλλά στο εφαπτόμενο επίπεδο οποιασδήποτε αφηρημένης επιφάνειας («εσωτερική» συναλλοίωτη παράγωγος).

Η $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη, κατά μήκος της οποίας μεταβάλλεται το διανυσματικό πεδίο **z**, αλλά από το ίδιο το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{v}=u'\mathbf{x_u}+v'\mathbf{x_v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης (δηλαδή από τα u',v'), το οποίο μπορεί να είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο και σε άλλη καμπύλη που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο. Πράγματι:

Θεώρημα

Έστω $\boldsymbol{\alpha}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M$ *η παραμετρισμένη καμπύλη για την οποία ισχύει* $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ *και* $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}\in T_{\mathbf{P}}(M)$. *Η συναλλοίωτη παράγωγος* $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{w}$ *(*w *διάνυσμα του* $T_{\mathbf{P}}(M)$*) είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη* $\boldsymbol{\alpha}$ *και εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα* **v**, *του εφαπτόμενου επιπέδου της* M *στο* **P**.

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{x}(u,v)$ ένα σύστημα συν/νων για το οποίο η αντίστοιχη περιοχή συν/νων πάνω στην επιφάνεια Μ περιέχει το **P**. Τότε, η $\boldsymbol{\alpha}$ καμπύλη γράφεται: $\boldsymbol{\alpha}(t)=\mathbf{x}(u(t),v(t))$ ενώ κάθε διάνυσμα **w** του $T_{\mathbf{P}}(M)$ θα γράφεται ως προς το σύστημα συν/νων **x**:

$$\mathbf{w}(t)=\alpha(u(t),v(t))\mathbf{x_u}+\beta(u(t),v(t))\mathbf{x_v}.$$

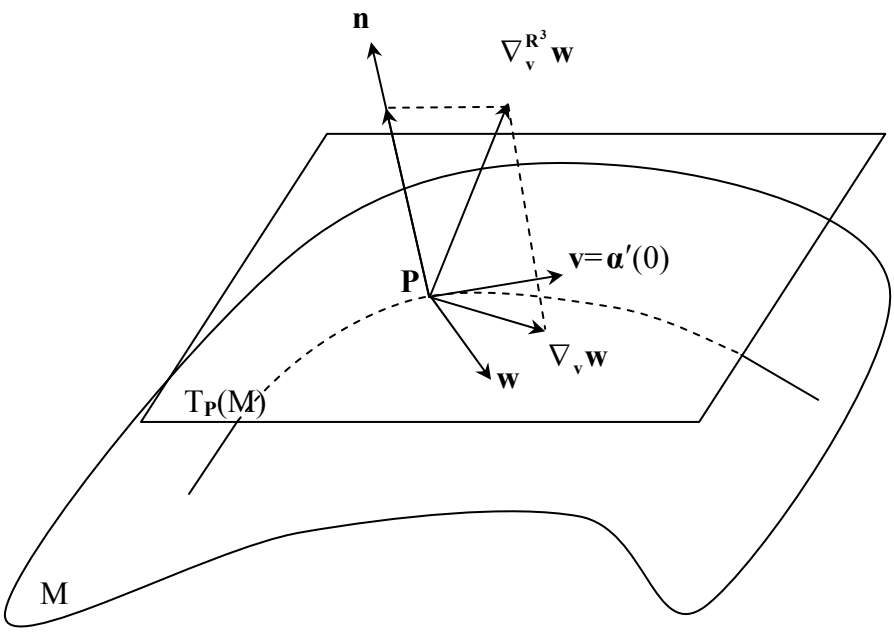
Επομένως: $\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}=\alpha(t)\mathbf{x_{uu}}\dfrac{du(t)}{dt}+\alpha(t)\mathbf{x_{uv}}\dfrac{dv(t)}{dt}+\alpha'(t)\mathbf{x_u}+\beta(t)\mathbf{x_{vu}}\dfrac{du(t)}{dt}$

$+\beta(t)\mathbf{x_{vv}}\dfrac{dv(t)}{dt}+\beta'(t)\mathbf{x_v}$. Με αντικατάσταση των:

$$\mathbf{x_{uu}}=\Gamma_{11}^1\mathbf{x_u}+\Gamma_{11}^2\mathbf{x_v}+\ell\,\mathbf{n},\quad \mathbf{x_{uv}}=\Gamma_{12}^1\mathbf{x_u}+\Gamma_{12}^2\mathbf{x_v}+m\mathbf{n},\quad \mathbf{x_{vv}}=\Gamma_{22}^1\mathbf{x_u}+\Gamma_{22}^2\mathbf{x_v}+n\mathbf{n}$$

και διάταξη ως προς $\mathbf{x_u},\mathbf{x_v}$ προκύπτει:

$\nabla^{R^3}_{\alpha'}\mathbf{w} = (\alpha' + \Gamma^1_{11}\alpha u' + \Gamma^1_{12}\alpha v' + \Gamma^1_{12}\beta u' + \Gamma^1_{22}\beta v')\mathbf{x_u} + (\beta' + \Gamma^2_{11}\alpha u' + \Gamma^2_{12}\alpha v' + \Gamma^2_{12}\beta u' + \Gamma^2_{22}\beta v')\mathbf{x_v} + (\alpha\ell\, u' + \alpha m\, v' + \beta m\, u' + \beta n\, v')\mathbf{n}$ (σχήμα 5.1)



Σχήμα 5.1

Τότε, η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}$, που είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της $\nabla^{R^3}_{\alpha'}\mathbf{w}$, θα είναι ίση με: $\nabla_{\alpha'}\mathbf{w} = (\alpha' + \Gamma^1_{11}\alpha u' + \Gamma^1_{12}\alpha v' + \Gamma^1_{12}\beta u' + \Gamma^1_{22}\beta v')\mathbf{x_u} +$
$+(\beta' + \Gamma^2_{11}\alpha u' + \Gamma^2_{12}\alpha v' + \Gamma^2_{12}\beta u' + \Gamma^2_{22}\beta v')\mathbf{x_v}$.

Η τελευταία έκφραση περιέχει εκφράσεις μόνο των Γ^k_{ij} (που εκφράζονται με τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης τάξης), των u', v' (που είναι οι συνιστώσες του $\mathbf{v} = u'\mathbf{x_u} + v'\mathbf{x_v} \in T_P(M)$) και των διανυσμάτων $\mathbf{x_u}, \mathbf{x_v}$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_P(M)$.

Άρα η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla_v\mathbf{w} = \nabla_{\alpha'}\mathbf{w}$ εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα **v** και αποτελεί μια έννοια της Εσωτερικής Γεωμετρίας της επιφάνειας στην οποία ανήκει η καμπύλη.

Παρατήρηση

Επειδή στο επίπεδο μπορούμε να βρίσκουμε ένα σύστημα συν/νων **x**(u,v) για το οποίο να προκύπτει E=G=1 και F=0 (ορθοκανονικό), στην τελευταία παραπάνω έκφραση της συναλλοίωτης παραγώγου $\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}$ οι συντελεστές Γ^k_{ij} μηδενίζονται και επομένως αυτή γράφεται: $\nabla_{\alpha'}\mathbf{w} = \alpha'\mathbf{x_u} + \beta'\mathbf{x_v}$, καταλήγει έτσι να ισοδυναμεί (μόνο στο $\mathbf{P}=\boldsymbol{\alpha}(0)$ με $\boldsymbol{\alpha}'(0)$, σε γειτονικά σημεία μπορεί να μην ισχύει) με τη συνήθη παράγωγο του διανύσματος **w** του επιπέδου, δηλαδή:

$$\nabla_{\alpha'}\mathbf{w} = \text{προβ}_{T_P(M)}\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}.$$

Έστω τώρα: $\nabla^{R^3}_{\alpha'}\mathbf{E_1} = \omega_{11}\mathbf{E_1} + \omega_{21}\mathbf{E_2} + s_1\mathbf{n}$ και $\nabla^{R^3}_{\alpha'}\mathbf{E_2} = \omega_{12}\mathbf{E_1} + \omega_{22}\mathbf{E_2} + s_2\mathbf{n}$, με τα ω_{ij} να είναι συναρτήσεις της παραμέτρου t (1-μορφές που θεωρούνται ως

συναρτήσεις μια και περιορίζονται κατά μήκος καμπύλης). Σύμφωνα με τον ορισμό για τη συναλλοίωτη παράγωγο μιας συνάρτησης g: $\mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}=\boldsymbol{\alpha}'(t) \in T_{\mathbf{P}}(M)$ μιας επιφάνειας M του $\mathbf{R^3}$ και για την καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)$ της M στο σημείο της $\mathbf{P}=\boldsymbol{\alpha}(0)$ ισχύει:

$$\mathbf{u}[g](\mathbf{P})=\mathbf{u}_{\mathbf{P}}[g]=\nabla_{\mathbf{u}}^{\mathbf{R}^3} g(\mathbf{P})=\frac{d(g(\boldsymbol{\alpha}(t))}{dt}|_{t=0}=\nabla^{\mathbf{R}^3} g(\mathbf{P})\cdot\mathbf{u}$$

Τότε για τα διανύσματα $\mathbf{v}=(v^1,v^2,v^3)$ και $\mathbf{w}=(w^1,w^2,w^3)$ ισχύει:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})=\boldsymbol{\alpha}'[\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}]=\boldsymbol{\alpha}'[\sum_{i=1}^{3} v^i w^i]=\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{\alpha}'[v^i]w^i+v^i\,\boldsymbol{\alpha}'[w^i])=$$

$$\sum_{i=1}^{3}((\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v})w^i+v^i(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}))=(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}).$$

Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$ τότε προκύπτει:

$$0=\boldsymbol{\alpha}'[\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}]=(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}) \text{ άρα } (\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=-\mathbf{v}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}).$$

Η εφαρμογή των παραπάνω για $\mathbf{v}=\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{w}=\mathbf{E_2}$ δίνει:

$0=\boldsymbol{\alpha}'[\mathbf{E_1}\cdot\mathbf{E_1}]=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E_1}\cdot\mathbf{E_1}+\mathbf{E_1}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E_1}=2\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E_1}\cdot\mathbf{E_1}=(\omega_{11}\mathbf{E_1}+\omega_{21}\mathbf{E_2}+s_1\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_1=$
$=\omega_{11}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1+\omega_{21}\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{E}_1+s_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1=\omega_{11}$ ή $\omega_{11}=0$. Όμοια: $\omega_{22}=0$.

Επίσης $0=\boldsymbol{\alpha}'[\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2]=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_1\cdot\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_2$
$=(\omega_{11}\mathbf{E}_1+\omega_{21}\mathbf{E}_2+s_1\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_1\cdot(\omega_{12}\mathbf{E}_1+\omega_{22}\mathbf{E}_2+s_2\mathbf{n})$
$=(\omega_{11}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+\omega_{21}\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{E}_2+s_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2)+(\omega_{12}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1+\omega_{22}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+s_2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n})=\omega_{21}+\omega_{12}=0$ ή $\omega_{21}=-\omega_{12}$. Τότε: $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1=\omega_{21}\mathbf{E}_2+s_1\mathbf{n}$ και $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_2=-\omega_{21}\mathbf{E}_1+s_2\mathbf{n}$.

Αλλά ο τελεστής σχήματος $S_{\mathbf{P}}$ του διανύσματος $\mathbf{u}$ στο $\mathbf{P}$ είδαμε ότι είναι ίσος με $S_{\mathbf{P}}(\mathbf{u})=-\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$, άρα για τα $\mathbf{n}\perp\mathbf{E}_1$ θα έχουμε: $0=\boldsymbol{\alpha}'[\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1]=-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1)$
$=\mathbf{n}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_1\cdot\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{n}$ οπότε $(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_1=-\mathbf{n}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1 \Leftrightarrow (\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{n}+(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_1$
$=-\mathbf{n}(\omega_{21}\mathbf{E}_2+s_1\mathbf{n}) \Leftrightarrow (\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_1=-s_1 \Leftrightarrow s_1=S_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}')\cdot\mathbf{E}_1$. Όμοια $s_2=S_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}')\cdot\mathbf{E}_2$.

Τελικά προκύπτει:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1=\omega_{21}\mathbf{E}_2+(S_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}')\cdot\mathbf{E}_1)\mathbf{n} \text{ και } \nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_2=-\omega_{21}\mathbf{E}_1+(S_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}')\cdot\mathbf{E}_2)\mathbf{n}$$

και για τις προβολές $\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1$ και $\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_2$ των αντίστοιχων $\nabla^{\mathbf{R}^3}$ στο $T_{\mathbf{P}}(M)$ (η κάθετη συνιστώσα απαλοίφεται): $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1-(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}=\omega_{21}\mathbf{E}_2+(S_{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}')\cdot\mathbf{E}_1)\mathbf{n}$
$-(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}=\omega_{21}\mathbf{E}_2$ και όμοια $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_2=-\omega_{21}\mathbf{E}_1$.

Άρα $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1=\omega_{21}\mathbf{E}_2$ και $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_2=-\omega_{21}\mathbf{E}_1$

Σημειώνουμε ότι, για τις προβολές $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ ισχύουν οι ιδιότητες:

(1) Στην απεικόνιση $\nabla:(\mathbf{v},\mathbf{z})\to\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ τα $\mathbf{v},\mathbf{z},\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ είναι διανυσματικά πεδία της M.

Για σταθερά $\mathbf{v}$ η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύουν:

(2) (α) $\nabla_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}\mathbf{z}=\nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{z}+\nabla_{\mathbf{v}_2}\mathbf{z}$ **(Κανόνας του αθροίσματος)**

(β) $\nabla_{\alpha\mathbf{v}}\mathbf{z}=\alpha\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$, $\alpha\in\mathbf{R}$

(3) (α) $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}+\mathbf{w})=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}+\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w}$ **(β)** $\nabla_{\mathbf{v}}\alpha\mathbf{z}=\alpha\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z}$, $\alpha\in\mathbf{R}$ **(Γραμμικότητα)**

(4) $\nabla_{\mathbf{v}} f\,\mathbf{z} = \mathbf{z}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}^{\mathbf{R}^3} f + f\,\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{z} = \frac{d(f\circ\boldsymbol{\alpha})}{dt}\mathbf{z} + f\,\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{z}\,,(\mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}'(0))$, για την πραγματική συνάρτηση f (**Κανόνας του Leibniz**)

Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για πιο γενικές μορφές επιφανειών (όχι μόνο του $\mathbf{R}^3$) και συνδέονται με την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου με τη μορφή ομως της **συνοχής Riemann**.

Ισχύουν επίσης και οι παρακάτω ιδιότητες:

(5) Αν **x**(u,v) είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συν/νων τότε:

$$\nabla_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v = \nabla_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_u \quad (\textbf{Κανόνας της αντιμετάθεσης}).$$

(6) Για το $\mathbf{w}\in T_{\mathbf{P}}(M)$ ισχύει:

$$\mathbf{w}[E]=2\,(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{x}_{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{u}} \text{ και } \mathbf{w}[G]=2\,(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{x}_{\mathbf{v}})\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{v}} \quad (\textbf{Κανόνας συμβιβαστότητας})$$

Παρατήρηση

Μερικές φορές στη βιβλιογραφία, οι όροι «συναλλοίωτη παράγωγος» και «συνοχή» χρησιμοποιούνται αδιάκριτα, με τον όρο «συνοχή» να χρησιμοποιείται περισσότερο όταν δίνεται έμφαση στις αφηρημένες ιδιότητες (1)-(4) και με τον όρο «συναλλοίωτη παράγωγο» όταν δίνεται έμφαση στο ρόλο που αυτή έχει στο να εκφράζει ρυθμό μεταβολής ή αλλαγής.

Χρησιμοποιήθηκε ο όρος «συνοχή», γιατί μια συνοχή-σύνδεση μας επιτρέπει να συνδέσουμε (μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού) τα εφαπτόμενα επίπεδα $T_{\mathbf{P}}(M)$ και $T_{\mathbf{Q}}(M)$ μιας επιφάνειας M, σε δυο διαφορετικά, γειτονικά της σημεία **P**,**Q**. Αυτό, θα δούμε παρακάτω, ότι πραγματοποιείται μέσω της παράλληλης μεταφοράς ενός εφαπτόμενου διανύσματος της επιφάνειας, κατά μήκος μιας καμπύλης της **α** που συνδέει τα **P**,**Q**.

5.2 Παράλληλα διανυσματικά πεδία, Παράλληλη μεταφορά διανύσματος διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης: συναλλοίωτη παράγωγος και ολονομία, Παράλληλη μεταφορά κατά μήκος καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής ή πολυγώνου

Η έννοια της παραλληλίας (διανυσμάτων) αποτελεί μια **ολική έννοια** για το επίπεδο και γενικότερα τις αναπτύξιμες («παραλληλίσιμες») επιφάνειες του Ευκλείδειου χώρου $\mathbf{R}^3$, όπως για παράδειγμα ο κύλινδρος ή ο κώνος.

Αν **v** είναι ένα διάνυσμα του επιπέδου ($\mathbf{R}^2$), τότε ορίζουμε ως $\mathbf{v}_{\mathbf{P}}$ το μοναδικό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου γύρω από ένα σημείο **P** του επιπέδου το οποίο είναι (Ευκλείδεια) παράλληλο με το **v**, δηλαδή έχει την ίδια διεύθυνση και μέτρο με αυτό **(η έννοια της παραλληλίας ως έννοια διατήρησης της διεύθυνσης και του μέτρου ενός διανύσματος σε δυο διαφορετικές θέσεις του)**.

Ο ορισμός αυτός όμως δε μπορεί να έχει την ίδια ισχύ σε όλες τις επιφάνειες. Εκεί έχουμε την ισχύ (σχεδόν πάντα) μιας **«τοπικής έννοιας παραλληλίας»**, της παράλληλης δηλαδή μεταφοράς διανυσμάτων κατά μήκος μιας καμπύλης της επιφάνειας (συνήθως γεωδαισιακής). Εποπτικά, θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για τη διατήρηση μιας σταθερής γωνίας (διατήρηση σταθερής διεύθυνσης) μεταξύ ενός ευθυγράμμου τμήματος και μιας ευθείας γραμμής ή μιας γεωδαισιακής (της επιφάνειας), κατά το «σύρσιμο» του ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της γραμμής

αυτής και πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, στα διάφορα σημεία της γεωδαισιακής (εσωτερική αλλαγή κατά μήκος της καμπύλης).

Έτσι, αυτό που στον $\mathbf{R}^3$ θα φαινόταν σαν ανόητη ερώτηση «ποτέ δύο εφαπτόμενα διανύσματα της σφαίρας, που ανήκουν σε διαφορετικά εφαπτόμενα επίπεδα είναι παρ/λα;», με τους όρους της Εσωτερικής Γεωμετρίας της σφαίρας έχει νόημα γιατί δύο τέτοια διανύσματα μπορεί πράγματι να είναι «παράλληλα». Αυτό συμβαίνει **όταν είναι διανύσματα που προέρχονται από «παρ/λη μεταφορά» κατά μήκος μιας γεωδασιακής (μέγιστου κύκλου)** (σχήμα 5.2).

Σχήμα 5.2

Η **συναλλοίωτη παράγωγος** $\nabla_{\alpha'}\mathbf{v}$ του (εφαπτόμενου) διανυσματικού πεδίου **v** κατά μήκος της καμπύλης **α** περιγράφει το πώς η **το πεδίο μεταβάλλεται (εσωτερικά) κατά μήκος της α**. Για να παραμένουν μάλιστα όλα τα διανύσματα του **v** «παράλληλα» μεταξύ τους κατά την κίνηση αυτή, θα πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτα (να μην μεταβάλλονται δηλαδή) από την «οπτική της επιφάνειας» και αυτό θα συμβαίνει όταν τα διανύσματα του **v** αλλάζουν μόνο κατά την κάθετη συνιστώσα Αυτό είναι και το ζήτημα της «παραλληλίας» **(Levi-Civita παρ/λία)** που ανακύπτει στη Διαφορική Γεωμετρία ή αλλιώς στις τυχαίες επιφάνειες. Άρα θα πρέπει:

$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v} \perp T_{\mathbf{P}} \ \left(\text{ή } \frac{d\,\mathbf{v}(s)}{ds} \perp T_{\mathbf{P}}(M),\ s \text{ ή φυσική παράμετρος}\right) \text{ ή ισοδύναμα } \nabla_{\alpha'}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ο παραπάνω ορισμός της «παραλληλίας» με τη μορφή $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v} \perp T_{\mathbf{P}}$, αποτελεί ένα **εξωτερικό ορισμό**, μια και αφορά στοιχεία του περιβάλλοντος χώρου της επιφάνειας. Αντίθετα, ο ορισμός $\nabla_{\alpha'}\mathbf{v} = 0$ αποτελεί έναν **εσωτερικό ορισμό**, μια και η αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγος συνδέεται με εσωτερικά στοιχεία της επιφάνειας (καμπύλες της επιφάνειας και εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία κατά μήκος των καμπυλών αυτών).

Ας θεωρήσουμε τώρα το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{v_0}$ στο σημείο $\boldsymbol{\alpha}(0)$ της καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}(t)$, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v_0}$. Τότε όλα τα διανύσματα του παράλληλου διανυσματικού πεδίου **v** θα **έχουν το ίδιο μήκος με το $\mathbf{v_0}$ και η μεταξύ τους γωνία θα παραμένει σταθερή**. Πράγματι:

Θεώρημα

Έστω **v**,**w** *παράλληλα διανύσματα ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της καμπύλης* **α**: $I \subset \mathbf{R} \to M$. *Τότε το εσωτερικό γινόμενο* $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{w}(t)$ *είναι σταθερό, δηλαδή τα μέτρα* $\|\mathbf{v}(t)\|$, $\|\mathbf{w}(t)\|$ *και η γωνία των* **v**,**w** *είναι σταθερή.*

Απόδειξη

Επειδή το **w** ανήκει σε ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο (πάνω στο $T_P(M)$) κατά μήκος της **α**, το $\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}$ θα είναι κάθετο στο $T_P(M)$ στα σημεία $\mathbf{P}=\boldsymbol{\alpha}(t)$, $t\in I$.

Άρα $\mathbf{v}\cdot\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}=0$ (1). Όμοια $\mathbf{w}\cdot\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v}=0$ (2).

Αλλά: $\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\nabla_{\alpha'}^{\mathbf{R}^3}\mathbf{v}=0$, σύμφωνα με τις (1),(2), άρα $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$=σταθερό και επομένως τα μέτρα $\|\mathbf{v}(t)\|$, $\|\mathbf{w}(t)\|$ και η γωνία των **v**,**w** είναι σταθερά.

Ένα **παράλληλο διανυσματικό πεδίο v υπάρχει πάντα κατά μήκος μιας καμπύλης α**, αρκεί να οριστεί ένα αρχικό διάνυσμα $\mathbf{v}_0$, το οποίο για λόγους απλότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι και μοναδιαίο. Αυτό που επίσης προκύπτει από την απόδειξη του επομένου θεωρήματος είναι ότι προκειμένου να διατηρηθεί η παραλληλία των διανυσμάτων αυτά **μπορεί και να περιστρέφονται (από μια εξωτερική οπτική)**.

Θεώρημα (ύπαρξης και μοναδικότητας παράλληλου διανυσματικού πεδίου)
Αν M *είναι μια επιφάνεια και* $\boldsymbol{\alpha}: I\subset\mathbf{R}\to M$ *μια καμπύλη της, τότε για οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα* $\mathbf{v_0}$ *τη* **α** *στο σημείο της* $\boldsymbol{\alpha}(0)$*, υπάρχει πάντα ένα μοναδικό διανυσματικό πεδίο* **v** *παράλληλο προς το* $\mathbf{v_0}$ *και κατά μήκος της* **α***, για το οποίο ισχύει* $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}(0)}=\mathbf{v_0}$.

Απόδειξη

Αν θεωρήσουμε το $\mathbf{v_0}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη τότε και όλα τα διανύσματα του παράλληλου διανυσματικού πεδίου **v** θα είναι μοναδιαία (σταθερό μήκος του παράλληλου πεδίου). Με θ τη γωνία μεταξύ των **v** και $\mathbf{E}_1$ θα έχουμε: $\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2=\cos\theta\,\mathbf{E}_1+\sin\theta\,\mathbf{E}_2$.

Η επιθυμητή συνθήκη της ύπαρξης του παράλληλου πεδίου **v** κατά μήκος της **α** ($\nabla_{\alpha'}\mathbf{v}=\mathbf{0}$), με εφαρμογή του κανόνα του γινομένου και της αλυσίδας, γίνεται:

$$\nabla_{\alpha'}(\cos\theta\mathbf{E}_1+\sin\theta\mathbf{E}_2)=0\Leftrightarrow\nabla_{\alpha'}(\cos\theta\mathbf{E}_1)+\nabla_{\alpha'}(\sin\theta\mathbf{E}_2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{d(\cos\theta(t))}{dt}\mathbf{E}_1+\cos\theta\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1+\frac{d(\sin\theta(t))}{dt}\mathbf{E}_2+\sin\theta\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\sin\theta\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{E}_1+\cos\theta\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1+\cos\theta\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{E}_2+\sin\theta\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_2=0.$$

Αλλά $\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1=\omega_{21}\mathbf{E}_2$ και $\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_2=-\omega_{21}\mathbf{E}_2$ οπότε:

$$-\sin\theta\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{E}_1+\cos\theta\omega_{21}\mathbf{E}_2+\cos\theta\frac{d\theta(t)}{dt}\mathbf{E}_2-\sin\theta\omega_{21}\mathbf{E}_1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\sin\theta(\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21})\mathbf{E}_1+\cos\theta(\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21})\mathbf{E}_2=0.$$

Όμως, τα sinθ και cosθ δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα ίσα με το μηδέν, οπότε: $\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21}=0\Leftrightarrow d\theta=-\omega_{21}dt$ και ολοκληρώνοντας από 0 έως t προκύπτει:

$$\int_0^t d\theta(u)=-\int_0^t\omega_{21}du\quad\text{ή}\quad\theta(t)-\theta(0)=-\int_0^t\omega_{21}du.$$

Επειδή όμως ορίζεται η γωνία θ (η διαφορική εξίσωση που την προσδιορίζει έχει λύση και μάλιστα μοναδική), θα ορίζεται και το παρ/λο (και εφαπτόμενο, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$) διανυσματικό πεδίο και μάλιστα μοναδικά (λόγω αρχικής συνθήκης).

Ένα ερώτημα που ανακύπτει στο σημείο αυτό είναι αν το διανυσματικό πεδίο **v** παράλληλο προς το $\mathbf{v_0}$ και κατά μήκος της **α**, για το οποίο ισχύει η αρχική συνθήκη $\mathbf{v}_{\alpha(0)}=\mathbf{v_0}$ ορίζεται σε όλο το I ή μόνο σε ένα υποσύνολό του που περιέχει το $t_0=0$.

Η απάντηση είναι ότι ορίζεται (επεκτείνεται) σε όλο το I.

Απόδειξη

Έστω $\tilde{I} \subset I$, με το $\tilde{I}$ να είναι το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζεται το **v**. Αν $\tilde{I} \neq I$ τότε το $\tilde{I}$ έχει για άκρο ένα b το οποίο ανήκει στο I. Ας είναι επίσης $\{t_i\}$ μια ακολουθία σημείων του $\tilde{I}$ με $\lim_{i\to\infty} t_i=b$. Επειδή $\|\mathbf{v}\|$=σταθερό στο $\tilde{I}$ για κάθε i, θα είναι $\|\mathbf{v}(t_i)\|=\|\mathbf{v}\|$ και καθώς η ακολουθία $\{v(t_i)\}$ διανυσμάτων της $\{\mathbf{v}(t_i)\}$ λαμβάνει τιμές σε ένα συμπαγές σύνολο (την ακτίνα σφαίρας $\|\mathbf{v}\|$ γύρω από την αρχή του $\mathbf{R}^3$) θα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{ v_{t_{i_\kappa}} \}$ με $\lim_{\kappa\to\infty} v_{t_{i_\kappa}} =w$.

Αν υποθέσουμε ότι σε κάποιο διάστημα J που περιέχει το b ορίζεται το διανυσματικό πεδίο **w**, με **w** (b) να είναι το παράλληλα διανυσματικό πεδίο στη θέση **α**(b) της καμπύλης **α** με $\lim_{\kappa\to\infty} w_{t_{i_\kappa}} =w$, τότε το **w-v** είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο στο $\tilde{I} \cap J$ και ειδικά το $\|$ **w-v** $\|$ είναι σταθερό στο $\tilde{I} \cap J$.

Αλλά: $\lim_{\kappa\to\infty} \| w_{t_{i_\kappa}} - v_{t_{i_\kappa}} \|=\|w-w\|=0$ οπότε $\|$ **w-v** $\|=0$ στο $\tilde{I} \cap J$, δηλαδή **w=v** στο $\tilde{I} \cap J$. Επομένως το διανυσματικό πεδίο το οποίο είναι ίσο με **v** στο I και με **w** στο $\tilde{I}$ επεκτείνει το **v** σε ένα διάστημα μεγαλύτερο του $\tilde{I}$, άτοπο. Άρα $I=\tilde{I}$.

Το προηγούμενο θεώρημα, μας επιτρέπει να ορίσουμε και να αναπτύξουμε την έννοια της παράλληλης μεταφοράς ενός διανύσματος κατά μήκος μιας παραμετρισμένης καμπύλης. Έτσι έχουμε:

Αν **α**(t): $I\subset \mathbf{R}\to M$ είναι μια παραμετρισμένη καμπύλη με $\mathbf{v_0}\in T_{\alpha(t_0)}(M)$, $t_0\in I$ και **v** είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της **α** με $\mathbf{v}(t_0)=\mathbf{v_0}$, τότε το διάνυσμα $\mathbf{v}(t_1)$, $t_1\in I$ (ή γενικότερα **v**(t) για κάθε $t\in I$), καλείται **παράλληλη μεταφορά του $\mathbf{v_0}$ κατά μήκος της α στο σημείο t_1**.

Η παράλληλη μεταφορά του αρχικού διανύσματος $\mathbf{v_0}$ κατά μήκος μιας (τυχαίας) καμπύλης **α** συνίσταται στην κατασκευή ενός (εφαπτόμενου) διανυσματικού πεδίου **v** κατά μήκος της **α** και παρ/λα προς το $\mathbf{v_0}$ (παράλληλου διανυσματικού πεδίου). Το παρ/λα μεταφερόμενο διάνυσμα $\mathbf{v_0}$ που καταλήγει στην τυχαία θέση **α**(t) της καμπύλης **α** συμβολίζεται $\mathbf{v}_{\alpha(t)}$.

Η ανακάλυψη της έννοιας και του όρου **«παράλληλη μεταφορά»** έγινε από τον Levi-Civita ως επακόλουθο της ανάπτυξης της αλληλοτροφοδοτούμενης και καρποφόρας σχέσης της Γεωμετρίας Riemann με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και παρουσιάστηκε στο έργο του (1917): **«Η έννοια της παραλληλίας σε μια τυχαία πολλαπλότητα και ο γεωμετρικός χαρακτηρισμός της καμπυλότητας Riemann που προκύπτει από αυτή»**. Το όνομα προέκυψε από το γεωμετρικό γεγονός ότι στον Ευκλείδειο χώρο, η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς δύο σημεία και κατά μήκος ενός άξονα (ευθείας) αποτελεί μια παράλληλη μεταφορά στο χώρο αυτό και αντίστοιχα σε μια πολ/τα η παράλληλη μεταφορά (μέσω ενός γεωμετρικού ορισμού) καθορίζεται από τις ανακλάσεις πολύ κοντινών γειτονικών σημείων των περιοχών της πολ/τας (Rosenfeld, 1988, σελ. 316-317). Βέβαια η παράλληλη μεταφορά στις 3-διάστατες επιφάνειες του Ευκλείδειου χώρου (2-διάστατες από

εσωτερική άποψη) αποτελεί μια **ειδική περίπτωση της** παράλληλης μεταφοράς κατά Levi-Civita.

Η **γωνία περιστροφής** $\theta(t)-\theta(0)=-\int_0^t \omega_{21}du$ (η γωνία μεταξύ των $\mathbf{v_0}$ και $\mathbf{v}_{\alpha(t)}$) εξαρτάται μόνο από την καμπύλη **α** και την τιμή θ(0) και όχι από το διάνυσμα $\mathbf{v_0}$ (άρα θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της **α**, για παράδειγμα το $\boldsymbol{\alpha}'$) και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η **ολονομία *H*(α) κατά μήκος της α**. Άρα:

$$H(\boldsymbol{\alpha})=\Delta\theta=\theta(t)-\theta(0)=-\int_0^t \omega_{21}du$$

Αν μάλιστα **w** είναι ένα διανυσματικό πεδίο σταθερού μήκους κατά μήκος της **α**, τότε το **w** θα είναι και αυτό παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα ενός διανυσματικού πεδίου αν και μόνο αν η γωνία μεταξύ των **v** και **w** είναι σταθερή.

Παρατήρηση

Η **ολονομία** κατά την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος μιας καμπύλης (ή καμπυλόγραμμου πολυγώνου) είναι γεωμετρικά, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ ενός αρχικού διανύσματος (κατευθυνόμενου γεωδαισιακού τμήματος) και του διανύσματος που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά του αρχικού διανύσματος κατά μήκος της καμπύλης. Προκειμένου μάλιστα να μην προκύψει αρνητική τιμή ίση με –π στην ολονομία κατά μήκος ενός επίπεδου τριγώνου (στην περίπτωση που ορίσουμε ως ολονομία την ολονομία μας μείον 2π) ορίζουμε την **ολονομία να είναι ίση με τη μικρότερη θετικά μετρούμενη γωνία** που σχηματίζει το αρχικό διάνυσμα με την παράλληλη μεταφορά του.

Θεώρημα

Για μια κανονική καμπύλη **α**(t): $I\subset\mathbf{R}\to M$ *η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος* **v** *κατά μήκος της καμπύλης είναι ανεξάρτητη από την παραμέτρηση της καμπύλης.*

Απόδειξη

Έστω **β**(s): $J\subset\mathbf{R}\to M$ μια αναπαραμέτρηση της καμπύλης **α** τότε:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}'}\mathbf{v}=\pi\rho o\beta_{T_{\alpha(t)}(\mathbf{M})}\frac{d\,\mathbf{v}(\boldsymbol{\beta}(s))}{ds}=\pi\rho o\beta_{T_{\alpha(t)}(\mathbf{M})}\frac{d\,\mathbf{v}(\boldsymbol{\beta}(s(t)))}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=$$

$$=\pi\rho o\beta_{T_{\alpha(t)}(\mathbf{M})}\frac{d\,\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(t))}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{v}\cdot\frac{dt}{ds}.$$

Επειδή η καμπύλη **α** είναι κανονική ($\frac{dt}{ds}\neq 0$), το διανυσματικό πεδίο **v**(s) θα αποτελεί παράλληλη μεταφορά αν και μόνο αν το **v**(t) είναι παράλληλη μεταφορά, ανεξάρτητα από την καμπύλη **α**.

Παρατήρηση

Αν **P**,**Q** είναι δύο σημεία της επιφάνειας και **α** είναι μια παραμετρισμένη καμπύλη (έστω) **α**: $I=[0,L]\subset\mathbf{R}\to M$ με **α**(0)=**P** και **α**(L)=**Q**, τότε η παράλληλη μεταφορά (από σημείο σε σημείο της επιφάνειας M) είναι μια απεικόνιση (ισομετρία τελικά): $T_{\mathbf{P}}(M)\to T_{\mathbf{Q}}(M)$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε διάνυσμα **v** του $T_{\mathbf{P}}(M)$ το παράλληλα μεταφερόμενο-«παράλληλο» διάνυσμά του (που ανήκει στο $T_{\mathbf{Q}}(M)$) κατά μήκος της **α** έως το σημείο **Q**. Η απεικόνιση μάλιστα αυτή είναι μια **ισομετρία** (ισομορφισμός διανυσματικών χώρων που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο) αφού αποτελεί μια γραμμική, 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

Θα επιχειρήσουμε να τροποποιήσουμε τον ορισμό της συναλλοίωτης παράγωγου $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(0)}\mathbf{v}$ (που δεν είναι γενικά ένα εφαπτόμενο διάνυσμα) και να οδηγηθούμε **με τη βοήθεια της παρ/λης μεταφοράς** στον ορισμό ενός «εσωτερικού» στοιχείου: τη συναλλοίωτη παράγωγο $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'(0)}\mathbf{v}$.

Για το λόγο αυτό θα διαφοροποιήσουμε λίγο (αρχικά) τον ορισμό και το συμβολισμό της παράλληλης μεταφοράς.

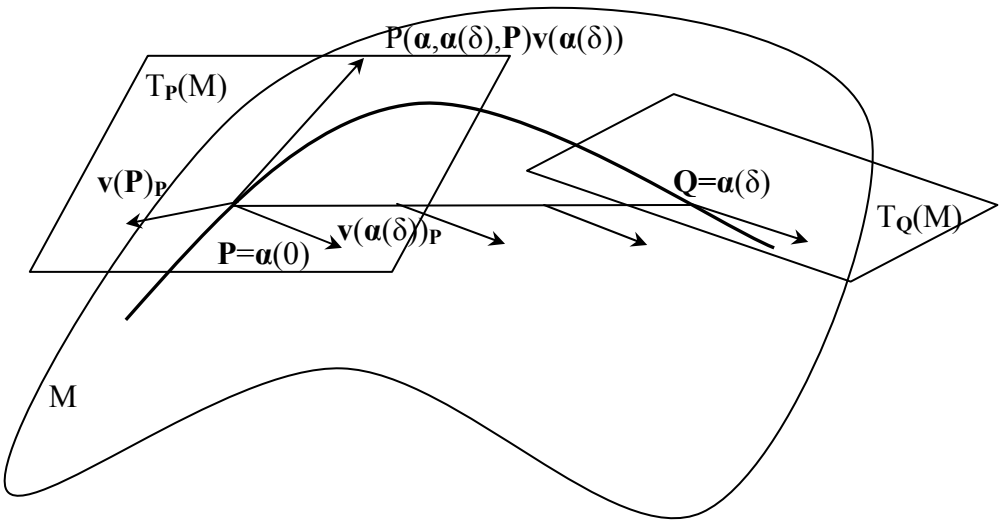
Έστω η καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}(t)$ της M ($I=(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M$) με $\boldsymbol{\alpha}(0)=\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\alpha}'(0)=\mathbf{v}_{\mathbf{P}}$ και $\mathbf{v}$ ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε μια γειτονιά του $\mathbf{P}$ το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ένα επίσης εφαπτόμενο διάνυσμα της M. Τότε:

$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\mathbf{v}_{\mathbf{P}}}\mathbf{v}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{v}(\mathbf{P})}{\delta} \text{ αντίστοιχος του } \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+t\,\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{x_0})}{t}.$$

Ο παράγοντας $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{v}(\mathbf{P})$ δεν είναι «εσωτερικός καθώς το $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))$ είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα με αρχή το σημείο $\boldsymbol{\alpha}(\delta)$ και το $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ ένα ελεύθερο διάνυσμα με αρχή το $\mathbf{P}$. Όπως και στην Ευκλείδειο χώρο, η αφαίρεση $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{v}(\mathbf{P})$ πραγματοποιείται μεταφέροντας, πρώτα, παράλληλα το $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))$ σε ένα εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))_{\mathbf{P}}$ (με αρχή το $\mathbf{P}$).

Άρα $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\mathbf{v}_{\mathbf{P}}}\mathbf{v}=\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{v}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))_{\mathbf{P}}-\mathbf{v}(\mathbf{P})_{\mathbf{P}}}{\delta}$.

Όμως, ούτε και η διαφορά $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))_{\mathbf{P}}-\mathbf{v}(\mathbf{P})_{\mathbf{P}}$ είναι «εσωτερική», γιατί ακόμη και αν το $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))_{\mathbf{P}}$ έχει για αρχή το $\mathbf{P}$, δεν είναι ένα, γενικά, εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας M (διάνυσμα του $T_{\mathbf{P}}(M)$). Για να το «διορθώσουμε» αυτό, μεταφέρουμε το $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))$ παράλληλα, κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$ και έως το σημείο $\mathbf{P}$. Το διάνυσμα που μεταφέρεται παράλληλα ως το $\mathbf{P}$ είναι το $P(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}(\delta),\mathbf{P})\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))$, το οποίο είναι εφαπτόμενο στο ($T_{\mathbf{P}}(M)$) στο $\mathbf{P}$ (σχήμα 5.3).



Σχήμα 5.3

Η διαφορά όμως $P(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}(\delta),\mathbf{P})\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{v}(\mathbf{P})$ είναι «εσωτερική», καθώς πραγματοποιείται στο $T_{\mathbf{P}}(M)$ και συνδέεται με την καμπύλη $\boldsymbol{\alpha}$ της επιφάνειας M. Τεχνικά, αντί για την παραπάνω διαφορά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά $\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-P(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{P},\boldsymbol{\alpha}(\delta))\mathbf{v}(\mathbf{P})$. Αυτό είναι επιτρεπτό, γιατί η αλλαγή στη γωνία μεταξύ του παράλληλα μεταφερόμενου διανύσματος και του διανύσματος ταχύτητας

της **α** εξαρτάται μόνο από τη γεωδαισιακή καμπυλότητα της **α** και όχι από το ποιο είναι το μεταφερόμενο διάνυσμα.

Έτσι, η μεταφορά P(**α**,**Q**,**P**) ορίζει μια **ισομετρία** $T_Q(M) \to T_P(M)$. Καθώς τώρα, ο «ρυθμός αλλαγής του παράλληλου διανυσματικού πεδίου» $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\mathbf{v}_P}\mathbf{v}$ υπάρχει και είναι κάθετος στο $T_P(M)$, αυτή η ισομετρία είναι συνεχής και:

$$P(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}(\delta),\mathbf{P})\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{v}(\mathbf{P})=P(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}(\delta),\mathbf{P})[\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-P(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{P},\boldsymbol{\alpha}(\delta))\mathbf{v}(\mathbf{P})].$$

Μπορούμε τότε να ορίσουμε την εσωτερική συναλλοίωτη παράγωγο $\nabla_{\mathbf{v}_P}\mathbf{v}$ ως:

$$\nabla_{\mathbf{v}_P}\mathbf{v}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(\delta))-\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{P},\boldsymbol{\alpha}(\delta))\mathbf{v}(\mathbf{P})}{\delta}.$$

Παρατήρηση

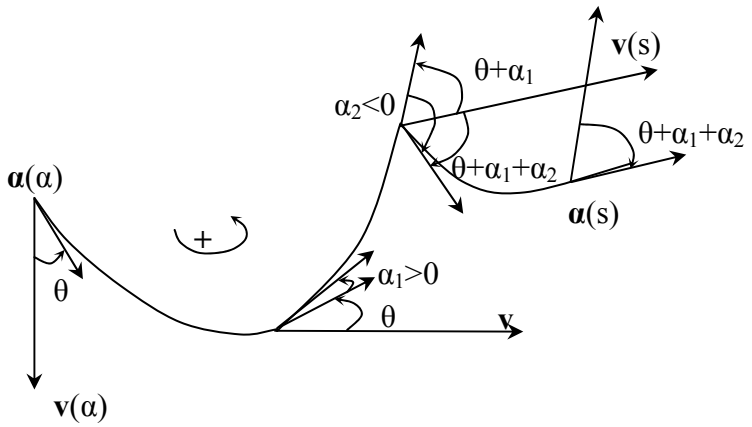
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η επιπλέον δομή με την οποία εφοδιάζουμε τον εφαπτόμενο χώρο σε ένα σημείο **P** του $\mathbf{R}^3$ (τη δυνατότητα της παράλληλης μεταφοράς) μας οδηγεί στον ορισμό της εφαπτομενικής συνιστώσας της συναλλοίωτης παραγώγου («εσωτερική» συναλλοίωτη παράγωγος). Μπορεί να δειχθεί όμως ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Η παράλληλη μεταφορά μπορεί να πραγματοποιηθεί και κατά μήκος μιας παραμετρισμένης (κλειστής ή όχι), **κατά τμήματα λείας (λεία τόξα) και κανονικής καμπύλης** (καμπυλόγραμμη πολυγωνική γραμμή ή πολύγωνο).

Καθώς δε θέλουμε το παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα να αλλάζει διεύθυνση κατά την παράλληλη μεταφορά του, θα πρέπει σε κάθε κορυφή της πολυγωνικής γραμμής και προκειμένου να εξουδετερώσουμε το αποτέλεσμα της αλλαγής της διεύθυνσης της καμπύλης στην αντίστοιχη κορυφή, να αλλάξουμε τη γωνία μεταξύ του παράλληλα μεταφερόμενου διανύσματος και του διανύσματος ταχύτητας της καμπύλης.

Έστω λοιπόν **v** ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο μιας επιφάνειας M στο σημείο **α**(α) μιας κατά τμήματα λείας καμπύλης **α** της επιφάνειας M και θ η γωνία που σχηματίζει το **v** με το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(\alpha)$ της καμπύλης.

Τότε ορίζουμε ως **v**(s)=P(**α**,**α**(α),**α**(s))**v** την **παράλληλη μεταφορά του v κατά μήκος της α στο σημείο α(s)** (για κάθε s που μεταβάλλεται στην **α**) να είναι το διανυσματικό πεδίο για το οποίο ισχύει: έχει το ίδιο μήκος με το **v**, είναι εφαπτόμενο της επιφάνειας στο **α**(s) και η γωνία μεταξύ των **v**(s) και $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ είναι ίση με τη θ αυξημένη κατά το αλγεβρικό άθροισμα των εξωτερικών γωνιών της **α** μεταξύ των **α**(α) και **α**(s) (σχήμα 5.4)



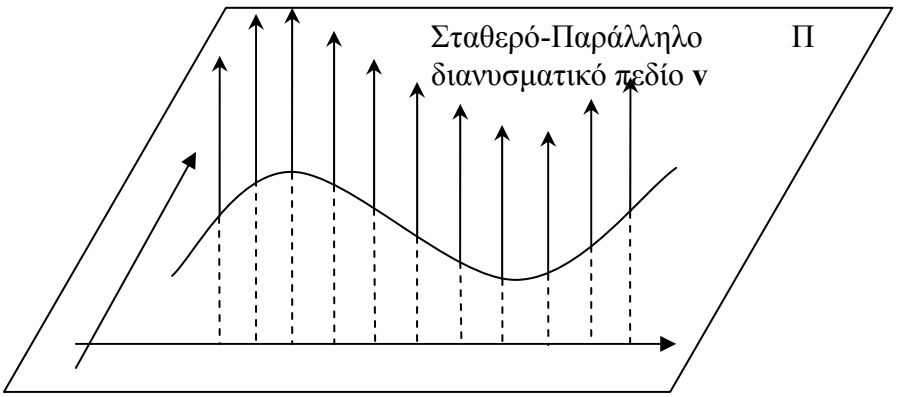
Σχήμα 5.4

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η απεικόνιση **α**: $I=[0,L]\subset \mathbf{R}\rightarrow M$ είναι μια **παραμετρισμένη κατά τμήματα λεία και κανονική καμπύλη με μήκος L**, αν είναι συνεχής στο I και υπάρχει διαμέριση $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=L$ του διαστήματος [0,L], έτσι ώστε ο περιορισμός της **α** σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{i-1},t_i]$, i=1,…,k, (κανονικά τόξα της **α**), να αποτελεί μια παραμετρισμένη λεία και κανονική καμπύλη. Τότε η έννοια της παράλληλης μεταφοράς μπορεί εύκολα να επεκταθεί στις παραμετρισμένες, κατά τμήματα λείες και κανονικές καμπύλες:

Αν το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{v_0}$ ορίζεται σε κάποιο από τα $[t_{i-1},t_i]$ τότε ορίζουμε την παράλληλη μεταφορά κατά μήκος λείου και κανονικού τόξου, που αποτελεί τον περιορισμό της **α** στο $[t_{i-1},t_i]$, όπως και στην περίπτωση της λείας και κανονικής καμπύλης. Αν $t_i\neq L$ τότε θεωρούμε το $\mathbf{v}(t_i)$ ως το αρχικό διάνυσμα που θα μετατοπιστεί παράλληλα στο επόμενο τόξο που είναι περιορισμός της **α** στο διάστημα $[t_i,t_{i+1}]$, κ.λ.π.

5.3 Η παράλληλη μεταφορά στο επίπεδο

Με την έννοια «σταθερό εσωτερικό γινόμενο» συνδέεται η παράλληλη μεταφορά και στο Ευκλείδειο επίπεδο. Δηλαδή, η παράλληλη μεταφορά ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας παραμετρισμένης καμπύλης (ή και μιας γεωδαισιακής-ευθείας) του επιπέδου είναι στην πραγματικότητα η ύπαρξη ενός **σταθερού διανυσματικού πεδίου** κατά μήκος της καμπύλης. Με την έννοια «σταθερό διανυσματικό πεδίο» στην περίπτωση αυτή, εννοούμε ένα διανυσματικό πεδίο σταθερού μήκους και σταθερής γωνίας με μια δεδομένη διεύθυνση του επιπέδου (η οριζόντια διεύθυνση, κάποιος άξονας συν/νων κ.λ.π). Μπορεί έτσι να οριστεί στο επίπεδο μια **ολική έννοια παραλληλίας**, κάτι που δε μπορεί να συμβεί στις τυχαίες επιφάνειες (σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5

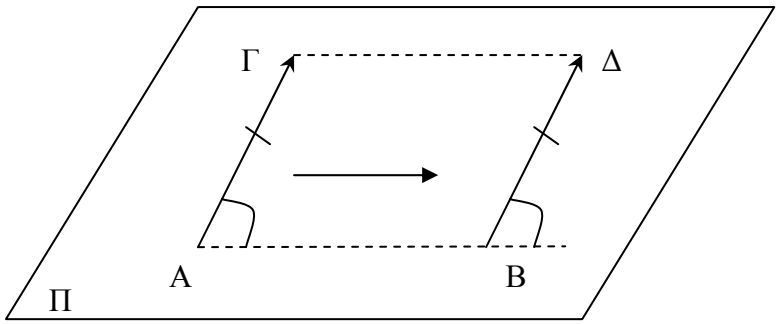
Η δυνατότητα της (παράλληλης) μεταφοράς ενός διανύσματος (ή ευθ. τμήματος) του Ευκλείδειου επιπέδου παράλληλα με τον εαυτό του ή αλλιώς της ύπαρξης ενός σταθερού διανυσματικού πεδίου (με τους παραπάνω όρους) κατά μήκος μιας ευθείας του επιπέδου, αποτελεί τον αντίστοιχο ισοδύναμο της 33^{ης} Πρότασης των Στοιχείων: *«αι τας ίσας τε και παραλλήλους ευθείας επί τα αυτά μέρη επιζευγνυούσαι ευθείαι και αυταί ίσαι τε και παράλληλοι εισί»*

Η πολύ σημαντική αυτή πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θεωρείται το «όριο» ανάμεσα, στις προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποτελούν τη

«Γεωμετρία των παρ/λων» (Προτάσεις 27-32) και στις προτάσεις της **«θεωρίας των εμβαδών»** (Προτάσεις 34-48), που αφορούν τις ιδιότητες των παρ/μων, τριγώνων, τετραγώνων και τη σύνδεσή τους με την έννοια του εμβαδού (Σταμάτης, 1975α, σελ.17, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., 2001, σελ 171,183, Πρόκλος, Σχόλια, 385, 5-7): «*Τούτο το θεώρημα ώσπερ μεθόριον είναι της τε περί των παραλλήλων και των παραλληλογράμμων ζητήσεως».*

Ουσιαστικά με την πρόταση αυτή κατοχυρώνεται ένας υπόρρητος ορισμός του παρ/μου (μια και δε δίνεται κάποιος άλλος, σαφώς διατυπωμένος, ενώ στην αμέσως επόμενη Πρόταση 34 γίνεται χρήση του πρωτοεμφανιζόμενου όρου «*…των παραλληλογράμμων χωρίων…»)* και προτείνεται μια μέθοδος κατασκευής του (Πρόκλος, Σχόλια, 385, 8-15): *«Και γαρ των ίσων και παραλλήλων ευθειών δοκεί τι σύμπτωμα λέγειν και γένεσιν παραλληλογράμμων λεληθυίαν παραδίδωσιν. Γίνεται γαρ παραλληλόγραμμον εκ τε των αρχής ίσων και παραλλήλων και εκ των ταύτας επιζευγνυουσών και δεικνυμένων ωσαύτως ίσων τε και παραλλήλων. Διό και το μετά τούτο ευθύς ως αν υποστάντος ήδη του παραλληλογράμμου τα καθ' αυτά υπάρχοντα τοις τοιούτοις χωρίοις θεωρεί».*

Η ύπαρξη επομένως δύο ίσων και παράλληλων μεταξύ τους ευθειών (ευθ. τμημάτων) ΑΓ, ΒΔ, που έχουν το ένα τους άκρο πάνω σε μια άλλη ευθεία (ευθ.τμήμα) και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος (*επί τα αυτά μέρη*) της ευθείας αυτής (είτε της ΑΒ είτε της ΓΔ), οδηγεί στην ισότητα και στην παραλληλία των ευθειών ΑΒ και ΓΔ (και τελικά στο σχηματισμό του παρ/μου ΑΒΓΔ). Με όρους παράλληλης μεταφοράς δηλαδή, η παράλληλη μεταφορά (για παράδειγμα) του διανύσματος **ΑΓ** (αρχική θέση-μεταφερόμενο διάνυσμα) κατά μήκος του ευθ. τμήματος (γεωδαισιακό τμήμα) ΑΒ και μέχρι να συμπέσει με το **ΒΔ** (τελική θέση), οδηγεί στη χάραξη του τμήματος ΓΔ και επομένως στο σχηματισμό του παρ/μου ΑΒΓΔ (σχήμα 5.6)



Σχήμα 5.6

5.4 Παράλληλη μεταφορά και καμπυλότητες: γεωδαισιακή καμπυλότητα και καμπυλότητα Gauss, Γεωμετρική απόδοση της καμπυλότητας Gauss

Στην παράγραφο 4.6 είχαμε δει τη σύνδεση του (τοπικού) θεωρήματος Gauss-Bonnet με την ολονομία μιας κλειστής λείας καμπύλης ή μιας κλειστής καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής, ενώ στην παράγραφο 5.2 συνδέσαμε την ολονομία με ένα καθαρά γεωμετρικό χαρακτηριστικό: την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος της καμπύλης.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ερμηνεύσουμε (εποπτικά) για ποιο λόγο η συνολική μεταβολή της γωνίας ενός παράλληλα μεταφερόμενου διανύσματος κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης είναι ίση με 2π (θεώρημα Hopf).

Αν ονομάσουμε θ τη γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{\alpha}'$ και $\mathbf{E_1}$ και $\boldsymbol{\alpha}'$ είναι το παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα κατά μήκος της (κλειστής) καμπύλης C, τότε η συνολική μεταβολή $\int_C d\theta$ της γωνίας θ θα πρέπει να είναι ένα ακέραιο πολ/σιο του 2π, δηλαδή:

$$\int_C d\theta = \int_C \kappa_g ds + \iint_R K_G dS = 2\lambda\pi, \ \lambda \text{ ακέραιος.}$$

Για να δούμε τώρα τι είναι το λ, ας θεωρήσουμε ότι η καμπύλη **α** «συστέλλεται» σε ένα σημείο (περιέχει ένα απλά συνεκτικό χωρίο). Επειδή η διαδικασία «συστολής» είναι συνεχής η συνολική στροφή θα πρέπει να παραμείνει σταθερή (και ίση με 2λπ) κατά τη διαδικασία αυτή. Γύρω από ένα σημείο όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η καμπύλη έχει «εκφυλιστεί» σε έναν μικροσκοπικό κύκλο. Αν θεωρήσουμε επίσης το $\mathbf{E_1}=(1,0)$ (ή ως ένα σταθερό διάνυσμα γενικότερα), τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}'$ στρέφεται μια ακριβώς φορά, καθώς μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος του κύκλου και έτσι η συνολική στροφή είναι 2π. Εξαιτίας της συνέχειας της διαδικασίας, θα πρέπει να είναι και γενικότερα λ=1.

Ας δούμε τώρα πιο αναλυτικά τα θέματα που αφορούν, τη σύνδεση της παράλληλης μεταφοράς με αυτά των καμπυλοτήτων ξεκινώντας από ένα σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα

Αν θ είναι η γωνία μεταξύ $\boldsymbol{\alpha}'$ *και* $\mathbf{E}_1$ *(με* $\{\mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{x_u}}{\sqrt{E}}, \mathbf{E}_2=\frac{\mathbf{x_v}}{\sqrt{G}}, \mathbf{n}\}$ *δεξιόστροφη βάση) τότε ισχύει:* $\kappa_g = \frac{d\theta}{dt} + \omega_{21}$, *όπου* κ_g *η γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης* **α**.

Απόδειξη

Έχουμε δει στα προηγούμενα ότι, για ένα ορθογώνιο σύστημα παραμετρικών γραμμών (F=0) και για μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (θα εξετάσουμε αυτήν τη περίπτωση) ισχύει: $\boldsymbol{\alpha}''_{\text{εφαπτ}} = \kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{T}) = \kappa_g(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}')$ (1).

Ταυτόχρονα, με θ τη γωνία μεταξύ $\boldsymbol{\alpha}'$ και $\mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{x_u}}{\sqrt{E}}$ και με $\mathbf{E}_2=\frac{\mathbf{x_v}}{\sqrt{G}}$ ($\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2\}$ ορθοκανονική βάση) το διάνυσμα ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'$ γράφεται:

$\boldsymbol{\alpha}'=\cos\theta(t)\mathbf{E}_1+\sin\theta(t)\mathbf{E}_2$, οπότε: $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}'=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}(\cos\theta(t)\mathbf{E}_1+\sin\theta(t)\mathbf{E}_2)$.

Με διαδικασία ανάλογη με αυτή που ακολουθήθηκε στην απόδειξη του «θεωρήματος την ύπαρξης και της μοναδικότητας του παρ/λου διανυσματικού πεδίου», προκύπτει:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = -\sin\theta\left(\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21}\right)\mathbf{E}_1 + \cos\theta\left(\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21}\right)\mathbf{E}_2 \text{ ή}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = \left(\frac{d\theta(t)}{dt}+\omega_{21}\right)(-\sin\theta\mathbf{E}_1+\cos\theta\mathbf{E}_2) \ (2).$$

Αλλά $\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}' = (\mathbf{E}_1\times\mathbf{E}_2)\times\boldsymbol{\alpha}'$ $\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{n}\}$ δεξιόστροφη βάση) οπότε:

$$\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}' = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin\theta\mathbf{E}_1+\cos\theta\mathbf{E}_2$$ και η (1) γίνεται:

$$\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau} = \kappa_g(-\sin\theta\mathbf{E}_1+\cos\theta\mathbf{E}_2) \quad (3).$$

Επειδή για τη συναλλοίωτη παράγωγο μιας συνάρτησης **f** ισχύει γενικά $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}(t))}{dt}$, με $\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\alpha}'(t) = \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt}$ θα είναι:

$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = \frac{d(\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt})}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}''.$$

Αφού η $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}'$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}'$ και $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}''$, θα είναι $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau}$ (4), οπότε οι (2), (3), (4) δίνουν: $\kappa_g = \frac{d\theta}{dt} + \omega_{21}$.

Σημειώνουμε ότι και η παρ/λη μεταφορά (και η έννοια της γεωδαισιακής) δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας, σε αντίθεση με τη γεωδαισιακή καμπυλότητα που αλλάζει πρόσημο με την αλλαγή του προσανατολισμού.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η βάση $\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{n}\}$ δεν είναι απαραίτητα δεξιόστροφη τότε θα ισχύει γενικότερα $\kappa_g = \pm(\frac{d\theta}{dt} + \omega_{21})$. Είδαμε όμως ότι με θ τη γωνία μεταξύ ενός διανύσματος **v** και του $\mathbf{E}_1$ ισχύει:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1 = \omega_{21}\mathbf{E}_2 \text{ και } \nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_2 = -\omega_{21}\mathbf{E}_1.$$

Στην περίπτωση επομένως της παρ/λης μεταφοράς του $\mathbf{E}_1$ κατά μήκος της καμπύλης **α** θα είναι: $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \omega_{21}=0$ οπότε: $\kappa_g = \pm\frac{d\theta}{dt}$.

Με βάση τη συναλλοίωτη παράγωγο και την παράλληλη μεταφορά (το παράλληλο διανυσματικό πεδίο), μπορούμε να θεωρήσουμε εκ νέου και την έννοια της γεωδαισιακής καμπύλης (μιας επιφάνειας). Έτσι:

Θεώρημα

Μια παραμετρισμένη καμπύλη **α**: $I=(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}\to M$ *θα είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν το πεδίο των διανυσμάτων της ταχύτητάς της* $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ *είναι, για κάθε* $t\in I$, *ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο.*

Απόδειξη

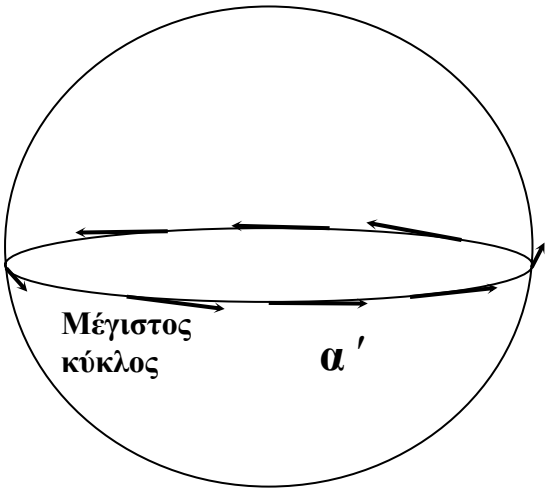
Πράγματι, το πεδίο των διανυσμάτων ταχύτητας $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ της καμπύλης **α**, θα είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο αν και μόνο αν $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{0}$ ή $\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau} = \mathbf{0}$, δηλαδή η **α** είναι γεωδαισιακή και αντιστρόφως.

Παρατήρηση

■ Από το θεώρημα προκύπτει ότι ένα παρ/λο διανυσματικό πεδίο **v** κατά μήκος μιας γεωδαισιακής καμπύλης **α** σχηματίζει με το $\boldsymbol{\alpha}'$ σταθερή γωνία (είναι και τα δύο παράλληλα διανυσματικά πεδία).

■ Το θεώρημα αυτό δίνει μια εικόνα για το πόσο «παράξενο» μπορεί να μοιάζει ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο μιας επιφάνειας. Για παράδειγμα, ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου (γεωδασιακή) της σφαίρας, είναι το διανυσματικό πεδίο των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}'$ (σχήμα 5.7).

Σε μια ευθεία (γεωδαισιακή κάθε επιφάνειας) αντίστοιχα, ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο είναι σύνολο των ίσων διανυσμάτων της ευθείας (έννοια της αυτοπαραλληλίας).



Σχήμα 5.7

■ Στην περίπτωση που η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος γίνεται κατά μήκος μιας καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$ η οποία είναι ταυτόχρονα και παραμετρική γραμμή (για παράδειγμα μια μοναδιαίας ταχύτητας u-παραμετρική γραμμή) τότε είναι:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{x_u}}{\sqrt{E}} = \mathbf{x_u}\text{, οπότε:}$$

α) Αν η u-παραμετρική γραμμή είναι και γεωδαισιακή τότε:

$$\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \omega_{21}\mathbf{E_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \omega_{21} = 0 \text{ οπότε: } H(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \text{ και } \theta(t) = \theta(0).$$

Επομένως, η αρχική γωνία θ(0), μεταξύ του αρχικού διανύσματος $\mathbf{v_0}$ και της παραμετρικής γραμμής δεν αλλάζει κατά την παράλληλη μεταφορά.

β) Αν η u-παραμετρική γραμμή δεν είναι και γεωδαισιακή, τότε θα είναι αντίστοιχα $\omega_{21} \neq 0$ και το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{v}_0$ περιστρέφεται, από την οπτική του 3-διάστατου χώρου, κατά γωνία θ(t)-θ(0) καθώς μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της καμπύλης.

Στα ίδια συμπεράσματα θα μπορούσαμε να φτάσουμε και μέσω μιας γενικότερης προσέγγισης για το παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα.

Ας είναι **w** ένα διαφορίσιμο πεδίο μοναδιαίων διανυσμάτων κατά μήκος μιας παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\alpha}$: $I \subset \mathbf{R} \to M$ μιας προσανατολισμένης επιφάνειας M. Καθώς το **w**(t), $t \in I$, είναι μοναδιαίο (ή τουλάχιστον σταθερό) διανυσματικό πεδίο, το διάνυσμα $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w}$ είναι κάθετο στο **w**(t) και επομένως μπορούμε να ορίσουμε ως **αλγεβρική τιμή της συναλλοίωτης παραγώγου** $\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}$ **του διανύσματος w κατά μήκος της καμπύλης α** (ή ως προς t), τον πραγματικό αριθμό $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}(t)]$, για τον οποίο ισχύει: $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}] = \nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{w})$.

Στην περίπτωση που είναι $\mathbf{w}=\mathbf{E}_1$ και δεδομένου ότι η βάση $\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{n}\}$ είναι ορθοκανονική, θα έχουμε: $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1]=(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{E}_1)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1)=(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{E}_2$

$=(\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1+(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\mathbf{E}_2=(\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{E}_2=\omega_{21}$. Άρα $\omega_{21}=[\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1]$.

Σημειώνουμε ότι: το πρόσημο του όρου $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}(t)]$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας M.

Θεώρημα

Αν είναι $\boldsymbol{\alpha}(s)$ *μια προσανατολισμένη κανονική καμπύλη, παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο* s *σε μια περιοχή ενός σημείου* **P** *της προσανατολισμένης επιφάνειας* M *στην οποία η καμπύλη περιέχεται. Η αλγεβρική τιμή* $[\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}']$ *της συναλλοίωτης παραγώγου* $\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}'$ *της* $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ *στο* **P** *είναι ίση με την γεωδαισιακή καμπυλότητα* κ_g *της καμπύλης* $\boldsymbol{\alpha}$.

Απόδειξη

Είναι: $\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\phi}=\kappa_g(\mathbf{n}\times\mathbf{T})=\kappa_g(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}')$ οπότε: $[\boldsymbol{\alpha}''_{\varepsilon\phi}]=[\kappa_g(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}')]=\kappa_g$ και τελικά $[\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{\alpha}']=\kappa_g$.

Θεώρημα

Αν $\mathbf{v},\mathbf{w}$ *είναι δύο διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της καμπύλης* $\boldsymbol{\alpha}: I\subset\mathbf{R}\to M$ *με* $\|\mathbf{v}(t)\|=\|\mathbf{w}(t)\|=1$, $t\in I$, *τότε* $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}]-[\nabla_{\alpha'}\mathbf{v}]=\frac{d\theta}{dt}$, *όπου* $\theta=\theta(t)$ *είναι η γωνία μεταξύ των* $\mathbf{v},\mathbf{w}$.

Απόδειξη

Έστω: $\overline{\mathbf{v}}=\mathbf{n}\times\mathbf{v}$ και $\overline{\mathbf{w}}=\mathbf{n}\times\mathbf{w}$. Τότε $\mathbf{w}=(\cos\theta)\mathbf{v}+(\sin\theta)\overline{\mathbf{v}}$ και:

$$\overline{\mathbf{w}}=\mathbf{n}\times[(\cos\theta)\mathbf{v}+(\sin\theta)\overline{\mathbf{v}}]=(\cos\theta)(\mathbf{n}\times\mathbf{v})+(\sin\theta)(\mathbf{n}\times\overline{\mathbf{v}})=(\cos\theta)\overline{\mathbf{v}}-(\sin\theta)\mathbf{v},$$

μια και τα $\{\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}},\mathbf{n}\}$ και $\{\mathbf{w},\overline{\mathbf{w}},\mathbf{n}\}$ αποτελούν ορθοκανονικές δεξιόστροφες βάσεις για κάθε $t\in I$.

Υπολογίζοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο του $\mathbf{w}$ κατά την κατεύθυνση των σημείων της $\boldsymbol{\alpha}$ (διαφόριση ως προς t) προκύπτει:

$$(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w})\cdot\overline{\mathbf{w}}=-(\sin^2\theta)\frac{d\theta}{dt}+(\cos^2\theta)(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}+(\cos^2\theta)\frac{d\theta}{dt}-\sin^2\theta(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\overline{\mathbf{v}})\cdot\mathbf{v}$$

$$=\frac{d\theta}{dt}+(\cos^2\theta)\ (\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\ \cdot\overline{\mathbf{v}}-\sin^2\theta(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\text{, επειδή }\mathbf{v}\cdot\overline{\mathbf{v}}=0=\mathbf{v}(\cdot\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v}).$$

Αλλά με $\mathbf{v}\cdot\overline{\mathbf{v}}=0$ θα είναι και: $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}(\mathbf{v}\cdot\overline{\mathbf{v}})=(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}+\mathbf{v}\cdot(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\overline{\mathbf{v}})=0$ ή $(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}=$

$=-(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\overline{\mathbf{v}})\cdot\mathbf{v}$, οπότε:

$$(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w})\cdot\overline{\mathbf{w}}=\frac{d\theta}{dt}+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\ (\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}=\frac{d\theta}{dt}+(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}.$$

Τότε: $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}]=(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w})(\mathbf{n}\times\mathbf{w})=(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{w})\cdot\overline{\mathbf{w}}=\frac{d\theta}{dt}+(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\cdot\overline{\mathbf{v}}$

$$=\frac{d\theta}{dt}+(\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\alpha'}\mathbf{v})\ (\mathbf{n}\times\mathbf{v})=\frac{d\theta}{dt}+[\nabla_{\alpha'}\mathbf{v}]\text{ άρα }[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}]-[\nabla_{\alpha'}\mathbf{v}]=\frac{d\theta}{dt}.$$

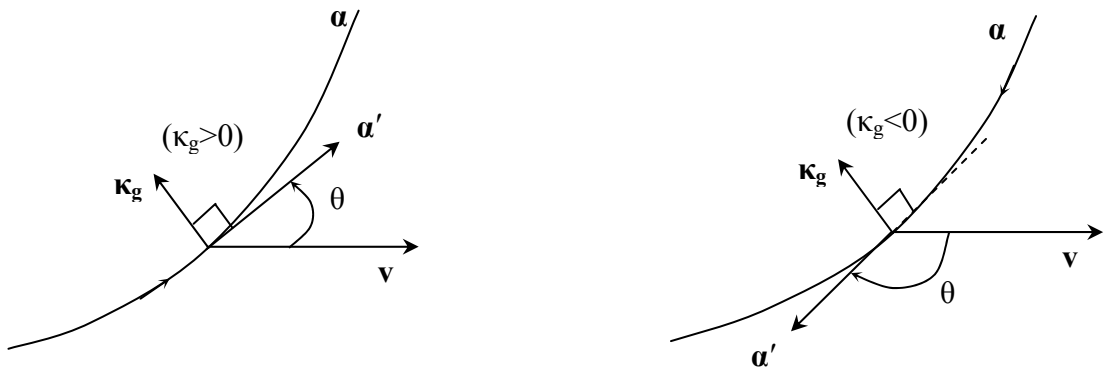
Παρατηρήσεις

Για μια κανονική, προσανατολισμένη, παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο καμπύλη μιας προσανατολισμένης επιφάνειας M στην περιοχή ενός σημείου της για την οποία τα $\mathbf{v},\mathbf{w}$ είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία με $\mathbf{v}=\mathbf{E}_1$, τα δύο τελευταία θεωρήματα δίνουν: $[\nabla_{\alpha'}\mathbf{w}]=[\nabla_{\alpha'}\mathbf{E}_1]+\frac{d\theta}{dt}=\omega_{21}+\frac{d\theta}{dt}$.

☑ Στην περίπτωση επιπλέον που είναι $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'$, τότε:

$$[\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}']=\omega_{21}+\frac{d\theta}{dt} \text{ ή } \kappa_g=\pm(\omega_{21}+\frac{d\theta}{dt}).$$

☑ Αν είναι $\mathbf{w}=\boldsymbol{\alpha}'$ και επιπλέον το $\mathbf{v}=\mathbf{E}_1$ είναι ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$, τότε: $[\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1]=0=\omega_{21}$ και $\kappa_g=[\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}']=\pm\frac{d\theta}{dt}$ (σχήμα 5.8).



Σχήμα 5.8

Να σημειώσουμε την αντιστοιχία της τελευταίας περίπτωσης (αν τη δει κάποιος ως ορισμό της γεωδαισιακής καμπυλότητας μιας καμπύλης) με τον ορισμό της καμπυλότητας μιας επίπεδης καμπύλης, ως το ρυθμό μεταβολής δηλαδή της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο της σε σχέση με μια σταθερή διεύθυνση του επιπέδου.

Στην περίπτωση μάλιστα του επιπέδου, η παράλληλη διεύθυνση είναι σταθερή και η γεωδαισιακή καμπυλότητα καταλήγει να είναι η συνήθης καμπυλότητα της καμπύλης.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να επιτύχουμε μια **απόδοση της K_G με βάση την παραλληλη μεταφορά**.

Έστω $\mathbf{x}$: $U\subset\mathbf{R}^2\to M$ ένα σύστημα συν/νων που ορίζει μια περιοχή συν/νων γύρω από ένα σημείο $\mathbf{P}$ της M και έστω $B\subset\mathbf{x}(U)$ μια απλή περιοχή, χωρίς κορυφές, που περιέχει το $\mathbf{P}$ στο εσωτερικό του. Ας είναι επίσης $\boldsymbol{\alpha}$: $[0,L]\to\mathbf{x}(U)$ μια καμπύλη παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο (L το μήκος της καμπύλης) και τέτοια ώστε αυτή να αποτελεί το σύνορο του B.

Αν $\mathbf{w_0}$ είναι ένα μοναδιαίο, εφαπτόμενο στην M στο $\boldsymbol{\alpha}(0)$ διάνυσμα και $\mathbf{w}(s)$, $s\in[0,L]$, είναι η παράλληλη μεταφορά του $\mathbf{w_0}$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$, τότε, από τη σχέση:

$$[\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{w}]=\omega_{21}+\frac{d\theta}{ds} \text{ προκύπτει } \omega_{21}+\frac{d\theta}{ds}=0 \text{ ή } -\omega_{21}=\frac{d\theta}{ds}$$

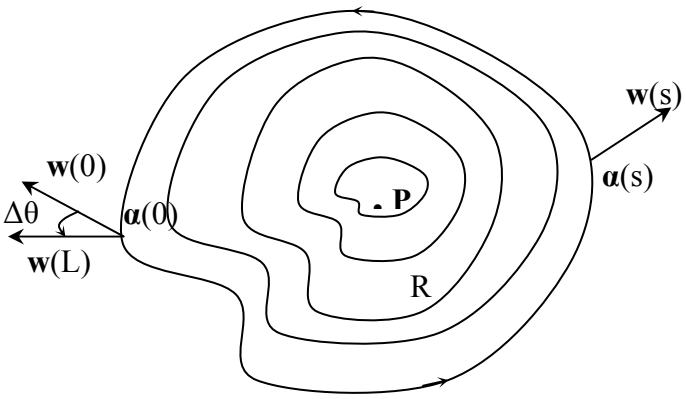
και ολοκληρώνοντας από 0 έως L: $H(\boldsymbol{\alpha})=-\int_0^L\omega_{21}ds=\int_0^L d\theta(s)$ και από το τοπικό θεώρημα Gauss-Bonnet:

$$\iint_R K_G dS=H(\boldsymbol{\alpha})=\int_0^L d\theta(s)=\theta(L)-\theta(0)=\Delta\theta,$$

με το θ να αποτελεί τη γωνία από το $\mathbf{x_u}$ ως το $\mathbf{w}(s)$ (σχήμα 5.9).

Άρα $\Delta\theta=H(\boldsymbol{\alpha})=\iint_R K_G\, dS$ (1)

Το Δθ δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\mathbf{w_0}$ και από την επιλογή της αρχής $\boldsymbol{\alpha}(0)$.



Σχήμα 5.9

Στο σημείο αυτό θα χρειαστούμε για τη συνέχεια το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Ας είναι $\mathbf{P}\in M$ *ένα σημείο για το οποίο ισχύει* $K_G(\mathbf{P})\neq 0$ *και* V *μια συνεκτική γειτονιά του* **P**, *στην οποία η* $K_G(\mathbf{P})$ *δεν αλλάζει πρόσημο. Τότε* $K_G(\mathbf{P})=\lim\limits_{E_B\to 0}\dfrac{E_{\mathbf{n}(B)}}{E_B}$ *όπου:* E_B *είναι το εμβαδό μιας περιοχής* $B\subset V$ *που περιέχει το* **P** *και* $E_{\mathbf{n}(B)}$ *είναι το εμβαδό της εικόνας της* B *μέσω της απεικόνισης Gauss* **n**: $M\to S^2$, *ενώ το όριο λαμβάνεται μέσω μιας ακολουθίας περιοχών (ή μικρών γεωδαισιακών καμπυλόγραμμων πολυγώνων)* B_n *που συγκλίνουν στο* **P**, *με την έννοια ότι κάθε ανοικτή σφαίρα (ε-περιοχή) γύρω από το* **P** *περιέχει όλα τα* B_n, *για* $n\to+\infty$.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι το εμβαδό της B είναι ίσο με $E_B=\iint\limits_R \|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|\,dudv$, όπου $\mathbf{x}(u,v)$ είναι ένα σύστημα συν/νων που ορίζει μια περιοχή συν/νων γύρω από το **P** η οποία περιέχει το V (το V θεωρείται επαρκώς μικρό) και R είναι η περιοχή στο uv-επίπεδο που απεικονίζεται, μέσω του συστήματος **x**, στη περιοχή B της M.

Το εμβαδό $E_{\mathbf{n}(B)}$ με τη χρήση των συμβόλων Christoffel για τα B_i^j γράφεται:

$$E_{\mathbf{n}(B)}=\iint\limits_R \|\mathbf{n_u}\times\mathbf{n_v}\|\,dudv=\iint\limits_R \|(B_1^1\mathbf{x_u}+B_1^2\mathbf{x_v})\times(B_2^1\mathbf{x_u}+B_2^2\mathbf{x_v})\|\,dudv$$

$$=\iint\limits_R \|(B_1^1B_2^2-B_1^2B_2^1)(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv=\iint\limits_R \|(B_1^1B_2^2-B_1^2B_2^1)(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv$$

και με αντικατάσταση από τις εξισώσεις Weingarten:

$$E_{\mathbf{n}(B)}=\iint\limits_R \left|\left(\frac{mF-\ell G}{EG-F^2}\frac{mF-nE}{EG-F^2}-\frac{nF-mG}{EG-F^2}\frac{\ell F-mE}{EG-F^2}\right)\right|\cdot\|(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv=$$

$$=\iint\limits_R \left|\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}\right|\cdot\|(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv=\iint\limits_R |K_G|\cdot\|(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv=$$

$$=\iint\limits_R K_G\,\|(\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v})\|\,dudv.$$

Παίρνοντας το όριο για $E_B\to 0$, ορίζοντας ως E_R το εμβαδό της περιοχής R και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για τα διπλά ολοκληρώματα προκύπτει:

$$\lim_{E_B\to 0}\frac{E_{\mathbf{n}(B)}}{E_B}=\frac{\lim\limits_{R\to 0}\iint\limits_R K_G\,\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|\,dudv}{\lim\limits_{R\to 0}\iint\limits_R\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|\,dudv}=\frac{\lim\limits_{R\to 0}(1/E_R)\iint\limits_R K_G\,\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|\,dudv}{\lim\limits_{R\to 0}(1/E_R)\iint\limits_R\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|\,dudv}=$$

$$=\frac{K_G\,\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}{\|\mathbf{x_u}\times\mathbf{x_v}\|}=K_G(\mathbf{P}).$$

Με τη χρήση του παραπάνω θεωρήματος και της σχέσης (1) το όριο $\lim\limits_{E_B\to 0}\frac{\Delta\theta}{E_B}$ γίνεται:

$$\lim_{E_B\to 0}\frac{\Delta\theta}{E_B}=\lim_{E_B\to 0}\frac{E_{\mathbf{n}(B)}}{E_B}=\lim_{B\to\mathbf{P}}\frac{\Delta\theta}{E_B}=\lim_{B\to\mathbf{P}}\frac{H(\boldsymbol{\alpha})}{E_B}=K_G(\mathbf{P})\text{ ή ισοδύναμα}$$

$$K_G(\mathbf{P})=\lim_{n\to\infty}\frac{H(B_n)}{E_{B_n}}.$$

Επομένως, η καμπυλότητα Gauss (εσωτερική καμπυλότητα) μιας επιφάνειας σε μια ανοικτή (συνεκτική) περιοχή, που δεν έχει κορυφές, ενός σημείου της **P** είναι ίση με το όριο του πηλίκου της ολονομίας κατά την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος του συνόρου της περιοχής αυτής προς το εμβαδό της περιοχής αυτής, καθώς αυτή «συστέλλεται» προς το σημείο **P**.

Σημειώνουμε ότι, στην περίπτωση ενός σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου (με τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει) η καμπυλότητα Gauss μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την ακτίνα R της σφαίρας, από την οπτική της επιφάνειάς της (εσωτερικά) μια και ισχύει: $K_G(\mathbf{P})=\frac{1}{R^2}=\frac{H(\text{τριγ.})}{E_{\text{τριγ.}}}$.

5.5 Η παράλληλη μεταφορά διανύσματος στην επιφάνεια της σφαίρας

Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα τη σύνδεση της ολονομίας μιας κλειστής λείας καμπύλης ή μιας κλειστής καμπυλόγραμμης πολυγωνικής γραμμής με την παράλληλη μεταφορά ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος των σημείων τους. Ας δούμε το θέμα αυτό τώρα μέσα από την οπτική της σφαίρας και την απεικόνιση Gauss, που οδηγεί τελικά στη διασύνδεση των εννοιών της καμπυλότητας, της παράλληλης μεταφοράς και της ολονομίας για τυχαίες επιφάνειες.

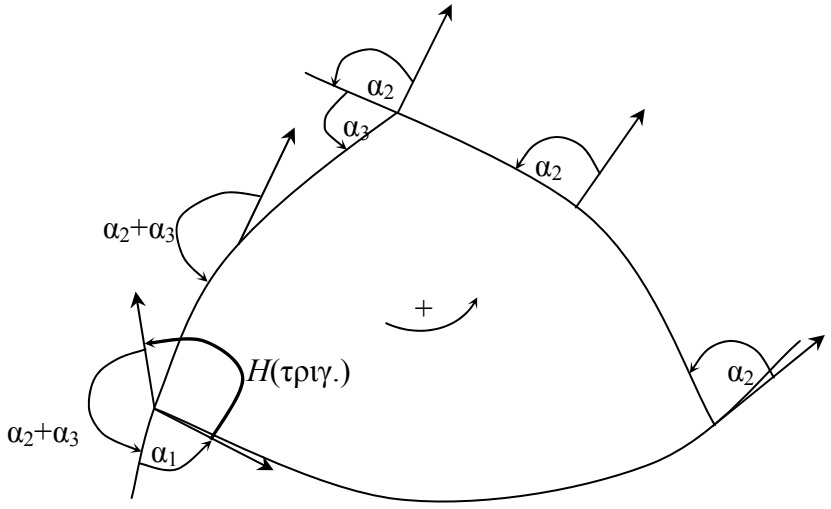
1) Για το σκοπό αυτό θα επανέλθουμε, αρχικά, πάλι στη περίπτωση του γεωδαισιακού τριγώνου Δ στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R (σφαιρικό, γεωδαισιακό τρίγωνο). Είχαμε δει ότι η ολική καμπυλότητα της επιφάνειας που περικλείεται από ένα σφαιρικό τρίγωνο είναι ίση με την (ολονομία) υπεροχή $(\beta_1+\beta_1+\beta_1)-\pi$ (των γωνιών) του τριγώνου Δ, δηλαδή:

$$H(\Delta)=\iint\limits_\Delta K_G\,dS\ \text{ και επίσης: } H(\Delta)=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\pi=\frac{E_{\text{σφ. τριγ.}}}{R^2},$$

όπου α_i οι εξωτερικές και β_i οι (εσωτερικές) γωνίες του τριγώνου με το τρίγωνο να περιέχεται σε ένα ανοικτό ημισφαίριο, είναι δηλαδή επαρκώς μικρό ώστε να μην εισάγουμε στη μαθηματική επεξεργασία έναν παράγοντα της μορφής 2νπ (ν ακέραιος) που να αφορά το άθροισμα των γωνιών.

Η (ολονομία) υπεροχή στην περίπτωση αυτή εκφράζεται με τη μικρότερη γωνία που σχηματίζεται από την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος, κατά τη θετική φορά κίνησης και κατά μήκος των (γεωδαισιακών) τόξων του τριγώνου, από την αρχική του μέχρι την τελική του θέση. Με τον τρόπο αυτό γίνεται και η σύνδεση της παράλληλης μεταφοράς με την ολονομία ενός σφαιρικού τριγώνου. Με βάση τώρα την ολονομία διαπιστώνουμε την «απόκλιση» μιας επιφάνειας από το να είναι επίπεδη ενώ ταυτόχρονα το **μέτρο της απόκλισης** αυτής δίνεται από το μέτρο της ολονομίας.

Να θυμίσουμε επίσης ότι, κατά την παράλληλη μεταφορά, η γωνία μεταξύ του παρ/λα μεταφερόμενου διανύσματος (το οποίο μπορεί αρχικά, για λόγους ευκολίας στους υπολογισμούς, να είναι και το διάνυσμα ταχύτητας κάποιου γεωδαισιακού τόξου του σφαιρικού τριγώνου, μια και δεν έχει σημασία ποια είναι η κορυφή ή το διάνυσμα με το οποίο ξεκινάμε) αλλάζει κατά το μέτρο της αντίστοιχης εξωτερικής γωνίας, προκειμένου να εξουδετερώσει την αλλαγή διεύθυνσης των πλευρών του τριγώνου και έτσι (εσωτερικά) το παράλληλα μεταφερόμενο διάνυσμα να μην αλλάξει διεύθυνση (σχήμα 5.10).



Σχήμα 5.10

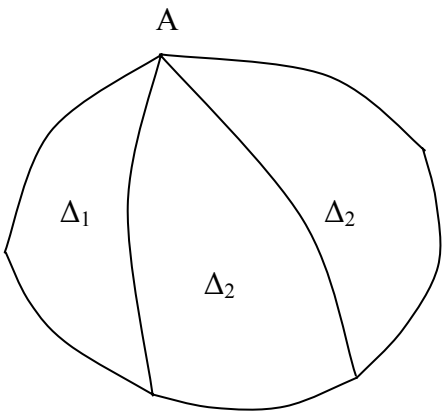
2) Στην περίπτωση που αντί για ένα τρίγωνο έχουμε ένα (μικρό), απλό (μη αυτοτεμνόμενο), κυρτό (γεωδαισιακό) πολύγωνο (η απλούστερη περίπτωση), το οποίο να βρίσκεται όμως σε ένα ανοικτό ημισφαίριο της σφαίρας (ή στο υπερβολικό επίπεδο), μπορούμε πάλι να δείξουμε ότι η ολονομία του είναι ίση με:

$H(\Pi)=2\pi-\sum\alpha_i=E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}K_G=\frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2}$, α_i οι εξωτερικές γωνίες του πολυγώνου.

Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Μεταφέροντας παρ/λα κατά μήκος των πλευρών του πολυγώνου ένα διάνυσμα ξεκινώντας από το σημείο Α, με τον τρόπο που αυτό έγινε και για το σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο παραπάνω. Η ολονομία και στην περίπτωση αυτή εκφράζεται με τη μικρότερη γωνία που σχηματίζεται από την παράλληλη μεταφορά του διανύσματος, κατά τη θετική φορά κίνησης (το πολύγωνο προς τα αριστερά) και κατά μήκος των (γεωδαισιακών) τόξων του πολυγώνου.

β) Ενώνοντας μια κορυφή του πολυγώνου με τις υπόλοιπες (αλλά όχι διαδοχικές) με σκοπό να επιτύχουμε την τριγωνοποίησή του (σχήμα 5.11).



Σχήμα 5.11

Τότε, μπορούμε να μεταφέρουμε παράλληλα και κατά μήκος όλων των πλευρών (γεωδαισαικών τόξων) όλων των σχηματιζόμενων τριγώνων ένα (αρχικό) διάνυσμα με εκκίνηση από το σημείο Α. Στην περίπτωση αυτή, η ολονομία του πολυγώνου Π (n-γώνου) αυτού είναι ίση και με το **άθροισμα των ολονομιών των (n-2) τριγώνων** στα οποία διαιρείται το πολύγωνο μέσω της τριγωνοποίησης και θα έχουμε:

$$H(\Pi)=\sum_i H(\Delta_i)=\sum_i[E_{\tau\rho\iota\gamma.}(\Delta_i)\,K_G]=\sum_i[E_{\tau\rho\iota\gamma.}(\Delta_i)]\,K_G=E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}K_G=\frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2}.$$

Και ταυτόχρονα:

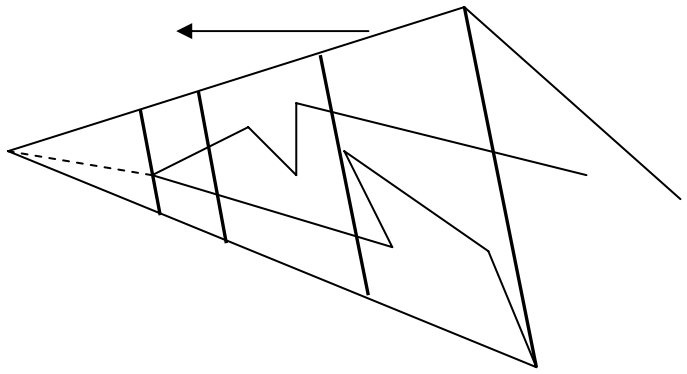
$$H(\Pi)=\sum_i H(\Delta_i)=\sum_i[\,(\text{ άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του }\Delta_i)-\pi]$$

$$=\sum_i\beta_i-(n-2)\pi=\sum_i(\pi-\alpha_i)-(n-2)\pi=(n\pi-\sum_i\alpha_i)-(n-2)\pi=2\pi-\sum_i\alpha_i\,.$$

3) Στην περίπτωση που έχουμε ένα (μικρό) απλό, μη-κυρτό (γεωδαισιακό) πολύγωνο (n-γωνο) το οποίο βρίσκεται σε ένα ανοικτό ημισφαίριο (ή στο επίπεδο ή στο υπερβολικό επίπεδο) τότε μπορούμε να εργαστούμε με κάποιον από τους παρακάτω τρόπους:

α) Να χωρίσουμε την (τουλάχιστον μια) μη-κυρτή γωνία σε δύο κυρτές γωνίες και επομένως να χωρίσουμε το πολύγωνο σε δύο πολύγωνα (ή τρίγωνα) τα οποία, με την ίδια διαδικασία, μπορούμε τελικά να χωρίσουμε σε κυρτά πολύγωνα ή τρίγωνα τα οποία θα αντιμετωπίσουμε όπως και προηγούμενα, ενώ θα αθροίσουμε τα αποτελέσματα (η συνολική ολονομία το άθροισμα των ολονομιών και το συνολικό εμβαδό το άθροισμα των εμβαδών).

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε το γεωδαισιακό τμήμα-τόξο που συνδέει τις δύο γειτονικές κορυφές της κυρτής γωνίας και στην περίπτωση που το τμήμα αυτό βρίσκεται εντός του πολυγώνου να πραγματοποιήσουμε το χωρισμό του πολύγώνου κατά μήκος αυτού του τμήματος, Αν δε βρίσκεται εντός, τότε μπορούμε να μεταφέρουμε παράλληλα το γεωδαισιακό τμήμα προς την κυρτή κορυφή μέχρι να σχηματιστεί το τρίγωνο: από το μεταφερόμενο γεωδαισιακό τμήμα, την κυρτή κορυφή και τις αντίστοιχες πλευρές του πολυγώνου και το οποίο βρίσκεται όλο εντός του πολυγώνου, ενώ το μεταφερόμενο τμήμα συναντά την τελευταία κορυφή μιας μη-κυρτής γωνίας του πολυγώνου. Ο χωρισμός του πολυγώνου μπορεί να γίνει τότε κατά μήκος του τμήματος που ενώνει την αρχική μη-κυρτή γωνία με την τελευταία (σχήμα 5.12)

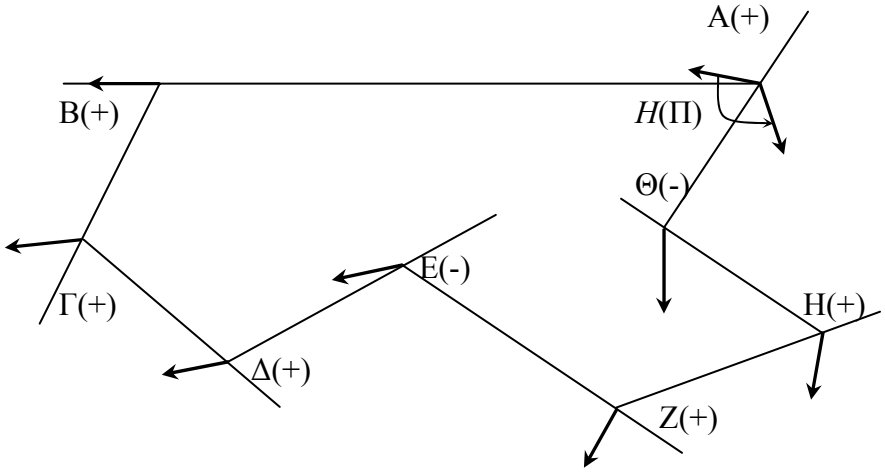


Σχήμα 5.12

β) Να μεταφέρουμε παρ/λα κατά μήκος των πλευρών του πολυγώνου ένα διάνυσμα ξεκινώντας από το σημείο Α, με τον τρόπο που αυτό έγινε και για το κυρτό (γεωδαισιακό) πολύγωνο παραπάνω. Η ολονομία και στην περίπτωση αυτή εκφράζεται με τη μικρότερη γωνία που σχηματίζεται από την παράλληλη μεταφορά του διανύσματος, κατά τη θετική φορά κίνησης (το πολύγωνο προς τα αριστερά) και κατά μήκος των (γεωδαισιακών) τόξων του πολυγώνου. Θα είναι επομένως: $H(\Pi)=2\pi-\sum_i \alpha_i = \frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2}$, με τις γωνίες α_i (ως Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ) να είναι θετικές ή αρνητικές (αλγεβρικές τιμές) ανάλογα με τη φορά διαγραφής τους.

Ας δούμε το ζήτημα πιο αναλυτικά.

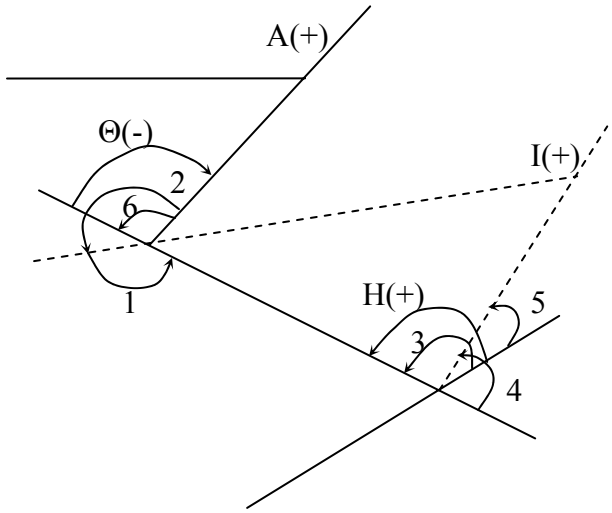
■ Καταρχήν θα δούμε γιατί είναι $H(\Pi)=2\pi-\sum_i \alpha_i$. Για το σκοπό αυτό και για λόγους ευκολίας στη γραφική αποτύπωση της κατάστασης, θα θεωρήσουμε ένα 8-γωνο, για το οποίο τα γεωδαισιακά τόξα θα τα παραστήσουμε με ευθύγραμμα τμήματα, χωρίς όμως να είναι. Οι μεταβολές επομένως των διευθύνσεων κατά την παράλληλη μεταφορά των διανυσμάτων δε θα αντιστοιχούν στις μεταβολές που θα παρατηρούνταν κατά μήκος ευθυγράμμων τμημάτων του επιπέδου (σχήμα 5.12).



Σχήμα 5.12

■ Θα δούμε τώρα γιατί είναι $R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma}$. Θα εργαστούμε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής και μάλιστα θα μελετήσουμε την περίπτωση της μετάβασης από την ισχύ της περίπτωσης για $n\in\mathbf{N}$ στην ισχύ της περίπτωσης για n+1.

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε το προηγούμενο 8-γωνο, για το οποίο θα δεχθούμε ότι ισχύει $H(\Pi)=2\pi-\sum_i \alpha_i = \frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2}$, και θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για ένα 9-γωνο, που σχηματίζεται από το 8-γωνο με την πρόσθεση μιας κορυφής, της Ι (εξωτερική γωνία Ι(+)). Θα κρατήσουμε μόνο ένα κομμάτι του προηγούμενου σχήματος (σχήμα 5.13).



Σχήμα 5.13

Υποθέτουμε ότι για το προηγούμενο 8-γωνο (n-γωνο γενικά) ισχύει:

$$H(\Pi)=2\pi-\sum_i \alpha_i = \frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2} \text{ ή } R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma}.$$

Για το διακεκομμένο τρίγωνο έχουμε: $\sum_i \alpha_i = 1+4+I$ και $R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=E_{\tau\rho\iota\gamma}$.

Για το αρχικό n-γωνο είναι: $\sum_i \alpha_i = A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+3-6$ και $R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=E_{n\text{-}\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$.

Τότε: $E_{(n+1)\text{-}\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}=E_{\tau\rho\iota\gamma}+E_{n\text{-}\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}= R^2[2\pi-(1+4+I)+2\pi-(A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+3-6)]$
$=R^2[4\pi-(A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+I+1-6+3+4)]$.

Για τις γωνίες ισχύει: $2+1-6=\pi$ και $4+3-5=\pi$ οπότε προκύπτουν αντίστοιχα:

$$\pi-2=1-6 \text{ και } \pi+5=3+4.$$

Για το νέο (n+1)-γωνο θα είναι: $\sum_i \alpha_i = A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+5+I-2$ οπότε:

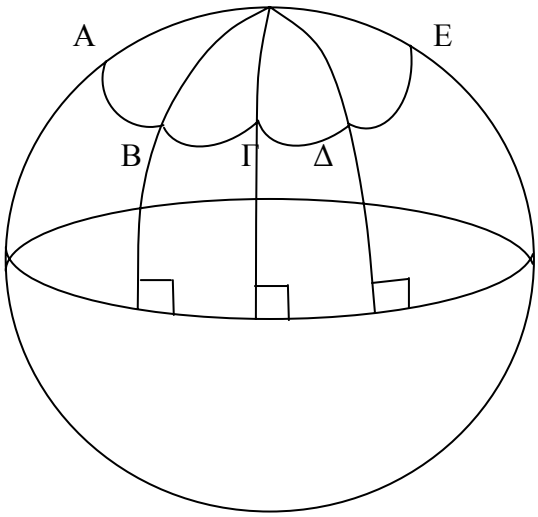
$$E_{(n+1)\text{-}\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}=R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=R^2[2\pi-(A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+5+I-2)]$$

$$=R^2[4\pi-(A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+I+(\pi+5)+(\pi-2)]=R^2[4\pi-(A+B+\Gamma+\Delta-E+Z+I+1-6+3+4)]$$

Τελικά, για το (n+1)-γωνο ισύχει:

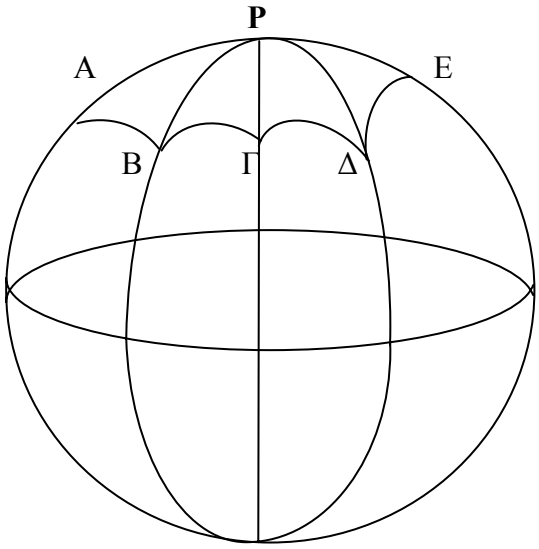
$$R^2(2\pi-\sum_i \alpha_i)=E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma}. \text{ ή } H(\Pi)=2\pi-\sum_i \alpha_i = \frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}}{R^2}.$$

γ) Στην περίπτωση που το πολύγωνο είναι μικρό και δεν έχει καθόλου κυρτές κορυφές, τότε θεωρούμε έναν μέγιστο κύκλο C και από κάθε κορυφή του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ…φέρουμε τον μέγιστο κύκλο που διέρχεται από την κορυφή αυτή και είναι κάθετος στο C (παράλληλες τομές). Χωρίζοντας το πολύγωνο κατά μήκος αυτών των τομών, το πολύγωνο χωρίζεται σε «μικρά» τρίγωνα και ορθογώνια, τα οποία με τη σειρά τους μπορούν να διαιρεθούν σε τρίγωνα (σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.14

δ) Στην περίπτωση που το πολύγωνο είναι μεγάλο (καλύπτει περισσότερο από ένα ημισφαίριο) και δεν έχει καθόλου κυρτές κορυφές, τότε το εξωτερικό του πολυγώνου θα είναι κυρτό και εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο **P** του πολυγώνου που αποτελεί τον αντιδιαμετρικό σημείο ενός σημείου του εξωτερικού του πολυγώνου. Η τριγωνοποίηση θα προκύψει ενώνοντας το **P** (μέσω των μικρότερων τμημάτων μέγιστων κύκλων) με κάθε μια από τις κορυφές του πολυγώνου (σχήμα 5.15).



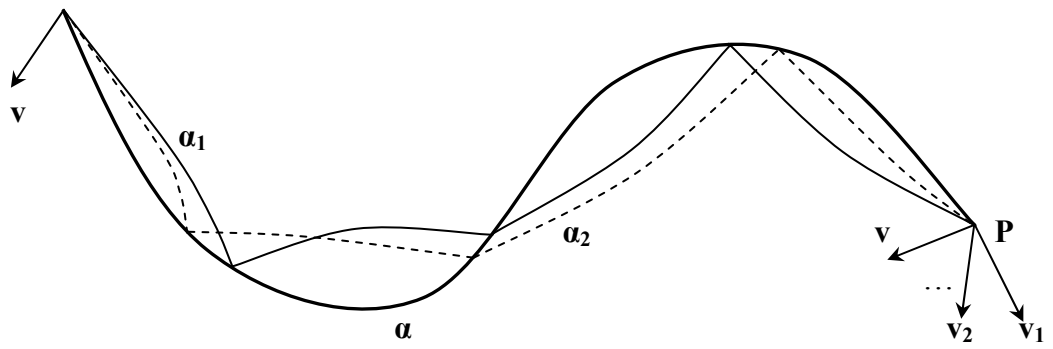
Σχήμα 5.15

Για απλές, κλειστές, κατά τμήματα λείες καπυλόγραμμμες πολυγωνικές γραμμές της επιφάνειας της σφαίρας, που δεν αποτελούνται από τμήματα γεωδαισιακών, η ολονομία θα είναι ίση με: $H(\boldsymbol{\alpha})=2\pi-\sum\alpha_i-\int_{\alpha}\kappa_g ds=\frac{E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma}}{R^2}$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας και $E_{\pi o\lambda\upsilon\gamma.}$ το εμβαδό του πολυγώνου που σχηματίζεται στα αριστερά του παράλληλα μετατοπιζόμενου διανύσματος.

Με τη βοήθεια των πολυγωνικών γραμμών που αποτελούνται από τμήματα γεωδαισιακών, μπορούμε να ορίσουμε **με εσωτερικό τρόπο την παράλληλη μεταφορά κατά τμήματα λείων πολυγωνικών γραμμών της επιφάνειας της σφαίρας**, στη συνέχεια να επεκτείνουμε τον ορισμό στις αντίστοιχες πολυγωνικές γραμμές τυχαίων επιφανειών και έτσι να ορίσουμε την ολονομία για τις γραμμές αυτές.

Με τη βοήθεια μιας καμπύλης που αποτελείται από λεία, γεωδαισιακά τόξα, μπορούμε να δώσουμε τώρα τον **«εσωτερικό» ορισμό της παράλληλης μεταφοράς**.

Έστω **α** μια κατά τμήματα λεία πολυγωνική γραμμή με πεπερασμένο μήκος, η οποία είναι παραμετρισμένη με τη φυσική παράμετρο s και $\boldsymbol{\alpha}_i$ είναι μια ακολουθία πολυγωνικών γραμμών, οι οποίες αποτελούνται από τμήματα γεωδαισιακών (των οποίων τα άκρα βρίσκονται στην **α**) και η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην **α**. Τότε, η **παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος v κατά μήκος της α μέχρι το σημείο P=α(s)**, αποτελεί το όριο των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\mathbf{v}_i$ τα οποία αποτελούν τις παράλληλες μεταφορές κατά μήκος των $\boldsymbol{\alpha}_i$ (σχήμα 5.16).



Σχήμα 5.16

Είχαμε δει στο 3ο κεφάλαιο όταν αντιμετωπίσαμε τα αντίστοιχα ζητήματα που αφορούν την απεικόνιση Gauss **n**: $M \subset \mathbf{R}^3 \to S^2$ (S^2 μοναδιαία σφαίρα), ότι τα επίπεδα $T_{\mathbf{P}}(M)$ και $T_{\mathbf{n(P)}}(S^2)$ είναι παρ/λα μεταξύ τους γιατί είναι κάθετα στο **n**(**P**) και τα διανύσματα του ενός επιπέδου μπορούν να ταυτιστούν, μεταφερόμενα παρ/λα (πάνω σε επίπεδο του $\mathbf{R}^3$), με τα διανύσματα του άλλου επιπέδου. Έτσι, ένα διανυσματικό πεδίο **v** του $T_{\mathbf{P}}(M)$ είναι ταυτόχρονα διανυσματικό πεδίου και του $T_{\mathbf{n(P)}}(S^2)$ και μάλιστα ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο **v** κατά μήκος μιας καμπύλης της M είναι επίσης παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης **n**(**α**).

Για μια «μικρή», κατά τμήματα λεία, κλειστή πολυγωνική γραμμή της M, η ολονομία της είναι ίση με την **ολονομία της σφαιρικής της εικόνας**, δηλαδή:

$$H(\boldsymbol{\alpha})=H(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\alpha}))= 2\pi-\sum \alpha_i - \int_{\alpha} \kappa_g ds = \iint_R K_G dS = E_{\mathbf{n}(R)},$$

όπου R το καμπυλόγραμμο πολύγωνο που περικλείεται από την παραπάνω πολυγωνική γραμμή.

Ας επιστρέψουμε ξανά στη σφαίρα και ας θεωρήσουμε τη σφαίρα ακτίνας R και το σύστημα συν/νων **x**:

$$\mathbf{x}(u,v)=(R\cos u\cos v,\ R\sin u\cos v,\ R\sin v),\ 0<u<2\pi \text{ και } -\pi/2<v<\pi/2,$$

το οποίο ορίζει μια περιοχή συν/νων πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (το v αποτελεί τη γωνία που σχηματίζεται με αρχή τον Ισημερινό και κατεύθυνση προς τα πάνω ή κάτω (Βόρειο και Νότιο γεωγραφικό πλάτος, αντίστοιχα, στην περίπτωση της γης) και όχι από τον Βόρειο Πόλο και προς τα κάτω.

Το σύστημα αυτό συν/νων διαθέτει δύο ειδικές οικογένειες καμπυλών που συνδέονται με αυτό: τα μήκη $\boldsymbol{\beta}(v)=\mathbf{x}(u_0,v)=\mathbf{x}(c,v)$, που προκύπτουν από την θεώρηση του u ως σταθερά και τα πλάτη $\boldsymbol{\alpha}(u)=\mathbf{x}(u,v_0)=\mathbf{x}(u,c)$, που προκύπτουν από την θεώρηση του v ως σταθερά. Καθώς οι $\boldsymbol{\alpha}(u),\boldsymbol{\beta}(v)$ είναι καμπύλες του $\mathbf{R}^3$ τα εφαπτόμενα σε αυτές διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}'(u)$, $\boldsymbol{\beta}'(v)$ στα αντίστοιχα σημεία, προκύπτουν από τη διαφόριση (ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή) κάθε συν/νης των εκφράσεών τους. Δηλαδή:

$\boldsymbol{\alpha}'(u)=\mathbf{x}_u=(-R\sin u\cos v_0, R\cos u\cos v_0, 0)$, $\boldsymbol{\beta}'(v)=\mathbf{x}_v=(-R\cos u_0\sin v, -R\sin u_0\sin v, R\cos v)$.

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{\alpha}'\cdot\boldsymbol{\beta}'=0$ άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ είναι κάθετα μεταξύ τους για κάθε u,v (ορθογώνια διανύσματα) και επομένως μπορούν να αποτελέσουν μια βάση για το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\mathbf{P}}(S^2)$ της σφαίρα και στο σημείο της $\mathbf{P}(u_0,v_0)$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{w}$ (διάνυσμα του $T_{\mathbf{P}}(S^2)$) θα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως προς τα διανύσματα της βάσης, δηλαδή $\mathbf{w}=A\boldsymbol{\alpha}'(u)+B\boldsymbol{\beta}'(v)$ με A,B μοναδικούς πραγματικούς αριθμούς.

Η βάση $\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'\}$ του $T_{\mathbf{P}}(S^2)$ μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbf{R}^3$, αν θεωρήσουμε το κάθετο διάνυσμα στα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$ της βάσης, δηλαδή το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\beta}'$.

Για λόγους απλοποίησης των αποτελεσμάτων η βάση $\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\beta}'\}$ μπορεί από ορθογώνια να γίνει ορθοκανονική αν κανονικοποιήσουμε τα διανύσματά της. Προκύπτει έτσι η βάση $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{n}\}$ με:

$$\mathbf{E}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}'}{|\boldsymbol{\alpha}'|}=\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}=(-\sin u,\cos u,0),\quad \mathbf{E}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}'}{|\boldsymbol{\beta}'|}=\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}=(-\cos u\sin v,-\sin u\sin v,\cos v),$$

$$\mathbf{n}=\frac{\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\beta}'}{|\boldsymbol{\alpha}'\times\boldsymbol{\beta}'|}=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|}=(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v).$$

Η βάση αυτή παρέχει ένα πλαίσιο για τη σύγκριση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του $\mathbf{R}^3$ με τη Γεωμετρία από την οπτική της 2-διάστατης Γεωμετρίας της επιφάνειας της σφαίρας και αυτό γιατί, για την επιφάνεια της σφαίρας κάθε αντικείμενο του $\mathbf{R}^3$ μπορεί να γίνει «ορατό» μέσω της προβολής του στο εφαπτόμενο επίπεδο.

Συγκεκριμένα, κάθε διάνυσμα $\mathbf{w}$ του $\mathbf{R}^3$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως $\mathbf{w}=a\mathbf{E}_1+b\mathbf{E}_2+c\mathbf{n}$ αλλά σε σχέση με τη επιφάνεια της σφαίρας μόνο ο όρος $a\mathbf{E}_1+b\mathbf{E}_2$ είναι «ορατός».

Έτσι, θεωρώντας αρχικά τα διανύσματα (τις συναλλοίωτες παραγώγους ως προς u που εκφράζουν τη μεταβολή των $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$):

$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1=\omega_{11}\mathbf{E}_1+\omega_{21}\mathbf{E}_2+bns_1\mathbf{n}\quad\text{και}\quad \nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_2=\omega_{12}\mathbf{E}_1+\omega_{22}\mathbf{E}_2+s_2\mathbf{n}$$

και εργαζόμενοι με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που εργαστήκαμε σε προηγούμενη παράγραφο, αν θεωρήσουμε τον Παράλληλο κύκλο (u-παραμετρική γραμμή με $v=v_0$=σταθερό) ο οποίος περιγράφεται από την καμπύλη:

$\boldsymbol{\alpha}(u)=(R\cos u\cos v_0, R\sin u\cos v_0, R\sin v_0)$ με $\boldsymbol{\alpha}'(u)=(-R\sin u\cos v_0, R\cos u\cos v_0, 0)$ και $\|\boldsymbol{\alpha}'\|=R\cos v_0$=σταθερό, τότε θα είναι:

$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{E}_1=(-\cos u,-\sin u,0)\ \text{και}\ \nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{E}_2=(\sin u\sin v_0,-\cos u\sin v_0,0),$$

ενώ ταυτόχρονα θα ισχύει:

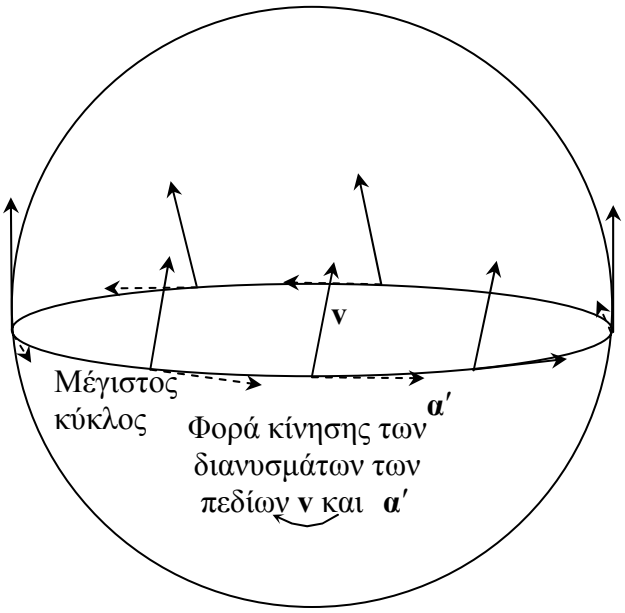
$$\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{E}_1=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_1+s_1\mathbf{n}=\omega_{21}\mathbf{E}_2+s_1\mathbf{n} \text{ και } \nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{E}_2=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'}\mathbf{E}_2+s_2\mathbf{n}=-\omega_{21}\mathbf{E}_1+s_2\mathbf{n}.$$

Με αντικατάσταση για την πρώτη περίπτωση προκύπτει:
$(-\cos u, -\sin u, 0)= (-\omega_{21}\cos u\sin v_0, -\omega_{21}\sin u\sin v_0, \omega_{21}\cos v_0)+(s_1\cos u\cos v_0, s_1\sin u\sin v_0, s_1\sin v_0)$ ή $\omega_{21}=\sin v_0$ και $s_1=-\cos v_0$ και αντίστοιχα για τη δεύτερη $\omega_{21}=-\sin v_0$ και $s_2=0$ (τα $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$ δεν αποτελούν, γενικά, παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$).

Η ολονομία τότε κατά μήκος της $\boldsymbol{\alpha}$ και για την παράλληλη μεταφορά ενός εφαπτόμενου στην επιφάνεια της σφαίρας διανύσματος $\mathbf{v}$, θα είναι ίση με:

$$-\int_0^{2\pi}\omega_{21}\,du=-\int_0^{2\pi}\sin v_0\,du=-2\pi\sin v_0.$$

Ο υπολογισμός της ολονομίας παραπάνω μας λέει ότι τα παράλληλα μεταφερόμενα διανύσματα περιστρέφονται κατά γωνία $-2\pi\sin v_0$, καθώς αυτά κινούνται πλήρως γύρω από έναν παράλληλο. Από την άποψη της Εσωτερικής Γεωμετρίας η περιστροφή δε γίνεται αντιληπτή ως περιστροφή αλλά ως παραλληλία. Αυτό ίσως φαντάζει αντιφατικό καθώς η γωνία μεταξύ των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{E}_1$ μεταβάλλεται με το u, αλλά θα πρέπει κάποιος να έχει υπόψη του ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E}_1$ κατά μήκος της παραλλήλου $\boldsymbol{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο και επομένως κάθε αλλαγή γωνίας μπορεί να αποδοθεί στην αλλαγή διεύθυνσης του $\mathbf{E}_1$. Στην πραγματικότητα, η σταθερότητα του εσωτερικού γινομένου των διανυσμάτων ενός παράλληλου διανυσματικού πεδίου, εγγυάται ότι δύο παρ/λα διανύσματικά πεδία κατά μήκος μιας καμπύλης διατηρούν την ίδια γωνία μεταξύ των διανυσμάτων που τα αποτελούν.θ



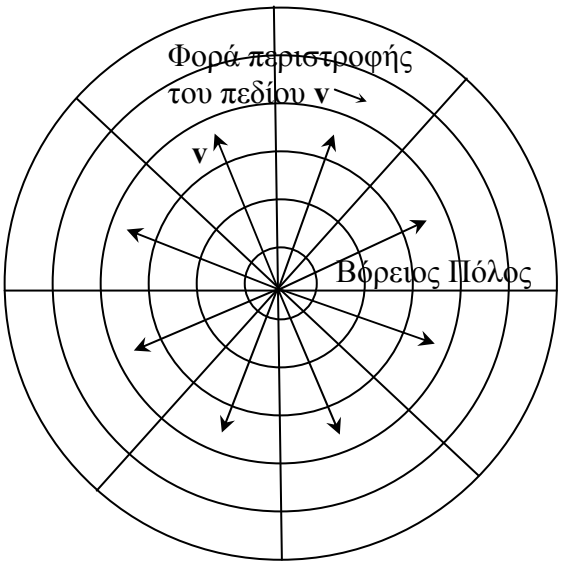
Σχήμα 5.17

Παρατηρήσεις

☑ Από την 3-διάστατη άποψη (εξωτερική οπτική), τα παράλληλα (εφαπτόμενα) μεταφερόμενα διανύσματα καθώς κινούνται κατά μήκος ενός παρ/λου κύκλου περιστρέφονται, ενώ από την άποψη της επιφάνειας (εσωτερική οπτική) τα διανύσματα είναι παρ/λα χωρίς να περιστρέφονται καθόλου.

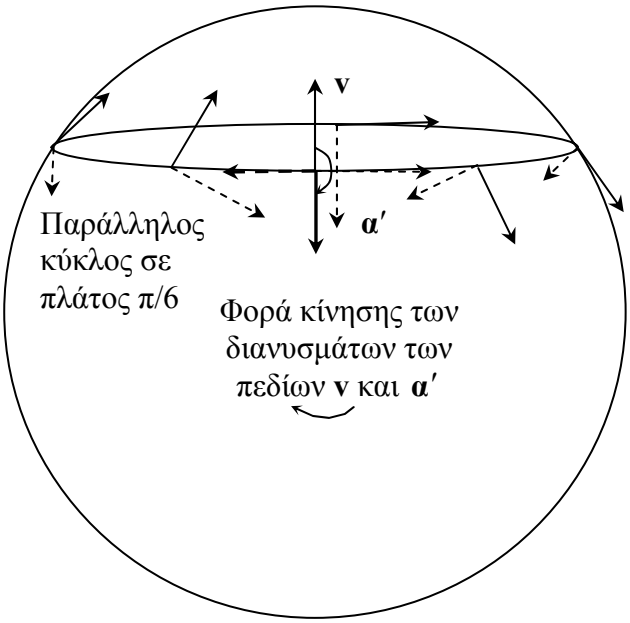
Στην περίπτωση του Ισημερινού ($v_0=0$) η ολονομία είναι ίση με το μηδέν ($\sin v_0=0$) και η γωνία περιστροφής είναι ίση με 2π (σχήμα 5.17), ενώ στην περίπτωση

του Βόρειου Πόλου είναι $v_0=\pi/2$ και η ολονομία είναι -2π (σχήμα 5.18). Αντίστοιχα, στην περίπτωση του Νότιου Πόλου είναι $v_0=-\pi/2$ και η ολονομία είναι ίση με 2π.



Σχήμα 5.18

Στην περίπτωση τώρα ενός παράλληλου κύκλου, για παράδειγμα αυτού που βρίσκεται σε (Βόρειο γεωγραφικό) πλάτος $v_0=\pi/6$, η ολονομία θα είναι ίση με $-2\pi\sin(\pi/6)=-\pi$ (σχήμα 5.19).



Σχήμα 5.19

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε (γωνία της) την ολονομία(ς) κατά την παράλληλη μεταφορά ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος ενός παραλλήλου της σφαίρας, με τη χρήση της παρακάτω πρότασης (ιδιότητα της παράλληλης μεταφοράς):

Πρόταση

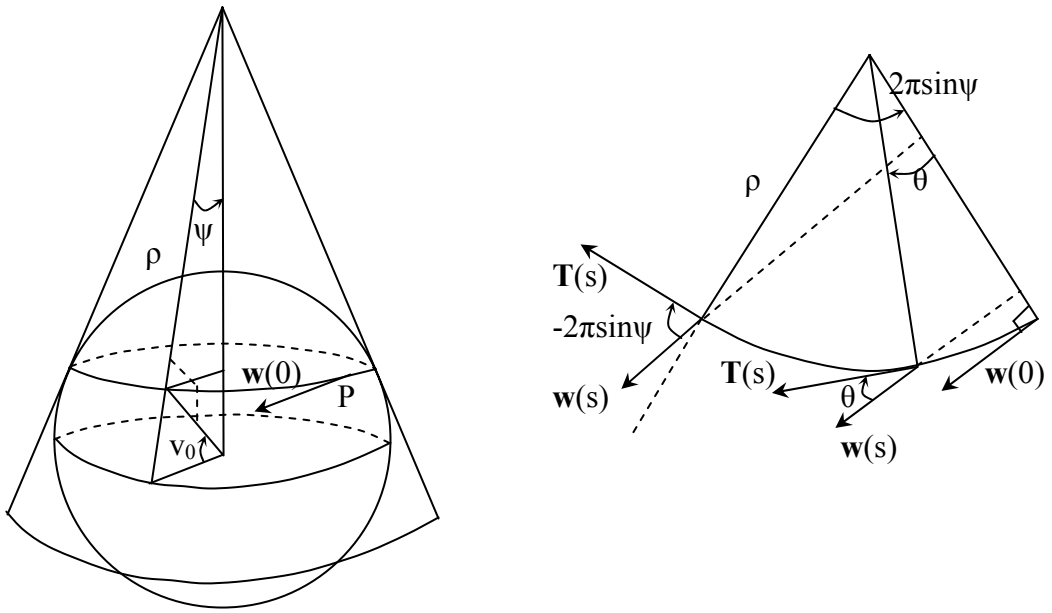
Αν δύο επιφάνειες M *και* $\overline{M}$ *εφάπτονται κατά μήκος μιας παραμετρισμένης καμπύλης* **α** *και* **w**(0) *είναι ένα διάνυσμα των ταυτιζομένων στο σημείο* **α**(t_0) *εφαπτόμενων επιπέδων* $T_{\alpha(t_0)}M$ και $T_{\alpha(t_0)}\overline{M}$, *των δύο επιφανειών αντίστοιχα, τότε το* **w**(t) *είναι η παράλληλη μεταφορά του* **w**(0) *ως προς την επιφάνεια* M *αν και μόνο αν το* **w**(t) *είναι η παράλληλη μεταφορά ως προς την επιφάνεια* $\overline{M}$.

Η απόδειξη της πρότασης βασίζεται στο γεγονός ότι η συναλλοίωτη παράγωγος είναι μοναδική και μάλιστα είναι η ίδια και για τις δύο επιφάνειες (ίδιο διανυσματικό πεδίο και ίδια καμπύλη μεταφοράς).

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την πρόταση για δύο επιφάνειες εκ των οποίων η μία είναι αναπτύξιμη σε επίπεδο, συγκεκριμένα για την επιφάνεια της σφαίρας και για τον κώνο τον εφαπτόμενο κατά μήκος ενός παραλλήλου της. Λόγω της απλότητας του ζητήματος της παράλληλης μεταφοράς στο επίπεδο, μπορούμε να κάνουμε τη μελέτη πάνω στην αναπτύξιμη επιφάνεια του κώνου. Συγκεκριμένα:

Έστω ένα παράλληλος κύκλος σε πλάτος v_0 (έστω $0<v_0<\pi/2$) μιας προσανατολισμένης, μοναδιαίας σφαίρας και ας είναι **w**(0) ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στον παράλληλο κύκλο σε κάποιο σημείο **P** του παράλληλου. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το διάνυσμα **w**(s) είναι η παράλληλη μεταφορά του **w**(0) κατά μήκος του παράλληλου (s η φυσική παράμετρος), με s=0 στο **P**.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον κώνο ο οποίος είναι εφαπτόμενος στη σφαίρα κατά μήκος του παραλλήλου και έχει γωνία (κορυφής) ίση με 2ψ. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η παράλληλη μεταφορά στη σφαίρα καταλήγει σε παράλληλη μεταφορά στην επιφάνεια του (εφαπτόμενου) κώνου και πάντα κατά μήκος του παράλληλου κύκλου.



Σχήμα 5.20

Έχουμε δει όμως ότι ο κώνος (εκτός μιας γενέτειρας) είναι ισομετρικός με το ανοικτό σύνολο U={(ρ,θ), ρ>0, 0<θ<2πsinψ}, το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$ (επίπεδο), οπότε η παράλληλη μεταφορά στον κώνο καταλήγει σε παράλληλη μεταφορά στο επίπεδο, η οποία συμπίπτει με τη συνήθη στερεά κίνηση του Ευκλείδειου επίπεδο. Η

(προσανατολισμένη) γωνία τότε που σχηματίζεται στο τέλος της διαδρομής, από το **w**(s) με το εφαπτόμενο στο τόξο του κυκλικού τομέα διάνυσμα **T**(s) (το ανάπτυγμα του παράλληλου κύκλου), θα είναι ίση με $-2\pi\sin\psi$. Με τις γωνίες ψ, v_0 να είναι συμπληρώματα ίσων γωνιών, προκύπτει ότι η ολονομία είναι ίση με $-2\pi\sin v_0$ (σχήμα 5.20).

☑ Προφανώς για τη σφαίρα, όπως και για τις υπόλοιπες επιφάνειες όπως είδαμε όταν αποδώσαμε την K_G με βάση την παράλληλη μεταφορά σε προηγούμενη παράγραφο, η ολική καμπυλότητα Gauss για το τμήμα της σφαίρας πάνω από τον παρ/λο κύκλο v_0 (γενικότερα για το τμήμα της επιφάνειας της οποία μια καμπύλη αποτελεί σύνορο) θα είναι ίση με την ολονομία γύρω από τον παρ/λο κύκλο v_0, δηλαδή: $H(\boldsymbol{\alpha})=\iint_R K_G \, dS$.

☑ Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο μια και η καμπύλη **α**(u) (παράλληλος κύκλος) είναι μια u-παραμετρική, σταθερού μήκους καμπύλη (μήκος=$2\pi R\cos v$) και κάθε εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο **v** κατά μήκος της δίνεται σε σχέση με το u (**v**=**v**(u)).

Ο ρυθμός τότε μεταβολής του **v** κατά μήκος της **α** είναι ίσος με $\frac{d\,\mathbf{v}(u)}{du}$ και η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla^{\mathbf{R}^3}_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{v}(u)$ στον $\mathbf{R}^3$ (η οποία είναι κατευθυνόμενη διαφόριση ως προς τις συν/νες) υποβιβάζεται στη συνήθη διαφόριση $\frac{d}{du}$.

Στην περίπτωση μάλιστα που το **v** γίνεται ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της **α**, τότε η προβολή του $\frac{d\,\mathbf{v}(u)}{du}$ στο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε **α**(u) είναι ίση με μηδέν, δηλαδή: $\text{προβ}_{T_{\boldsymbol{\alpha}(u)}(S^2)}\frac{d\,\mathbf{v}(u)}{du}=\nabla_{\boldsymbol{\alpha}'(u)}\mathbf{v}(u)=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

Το εκκρεμές του Foucault
Μια περίπτωση άξια μελέτης

6.1 Το φαινόμενο της αιώρησης του εκκρεμούς του Foucault και η σημασία του

6.2 Η ιστορία της ανακάλυψης του εκκρεμούς

6.3 Το μηχανικό μέρος

6.4 Το εκκρεμές του Foucault και τα θεμελιώδη επιστημολογικά ερωτήματα του χώρου

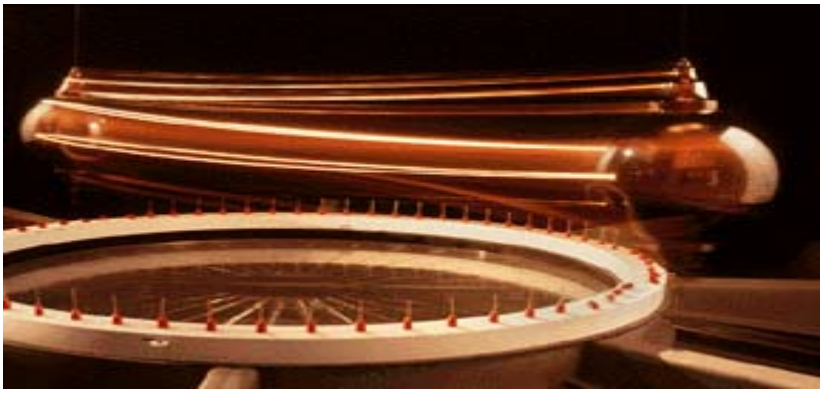
6.5 Οι δυο προσεγγίσεις του φαινομένου: Μαθηματική και Φυσική

6.1 Το φαινόμενο της αιώρησης του εκκρεμούς του Foucault και η σημασία του

Η πειραματική επίδειξη του εκκρεμούς του Foucault (εκκρεμές στη συνέχεια) στις μέρες μας (αλλά και την πρώτη φορά) δεν ανακαλύπτει κάτι νέο αλλά επιβεβαιώνει κάτι ήδη γνωστό: **την περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της**.

Ίσως ακούγεται παράξενο να θεωρούμε αναγκαίο να αποδείξουμε ότι η γη περιστρέφεται καθώς η ανατολή και δύση ηλίου και σελήνης αλλά και η προς τα Δυτικά κίνηση των άστρων κατά τη διάρκεια της νύχτας μοιάζουν να αποτελούν επαρκείς αποδείξεις για το γεγονός αυτό. Οι αρχαίοι όμως πίστευαν ότι η ουρανός περιστρέφεται γύρω από τη γη. Πριν από 400 χρόνια άνθρωποι θανατώνονταν γιατί πίστευαν ότι η γη και όχι ο ουρανός περιστρέφεται. Το πείραμα του Foucault έδειξε για πρώτη φορά την περιστροφή της γης με αναφορά μόνο στην ίδια τη γη και όχι σε οποιοδήποτε σημείο εκτός αυτής

Αυτό που κυρίως επιδιώκεται και τελικά επιτυγχάνεται με το πείραμα του εκκρεμούς, είναι ότι επισημαίνει τη θέση μας στο σύμπαν και στο φυσικό χώρο, αναγνωρίζοντας τον πλανήτη μας σαν μια περιστρεφόμενη σφαίρα που «πλέει» στους ουρανούς. Παρότι όμως μετά το πείραμα του Foucault έχουν αναπτυχθεί και μερικές άλλες αποδείξεις της περιστροφής της γης, εντούτοις καμία δεν ήταν τόσο «απλή» και τόσο «δραματική» όσο η κίνηση του ίδιου του εκκρεμούς.



Στιγμιότυπο της κίνησης του εκκρεμούς του Foucault

Το εκκρεμές πήρε το όνομά του από τον Γάλλο φυσικό και αστρονόμο Jean Bernard Leon Foucault που πρώτος το χρησιμοποίησε το 1851 προκειμένου να δείξει την περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της και με φορά από τα Δυτικά προς τα Ανατολικά. Αποτέλεσε δε την πρώτη ικανοποιητική εργαστηριακή και όχι αστρονομική επίδειξη-απόδειξη της περιστροφής της γης. Αυτό που συμβαίνει στο εκκρεμές αυτό είναι ότι αν το κουνήσει κάποιος σε κάποια διεύθυνση, το εκκρεμές μετά από μερικές ώρες θα κινείται (σε κάποιες περιπτώσεις) σε μια εντελώς διαφορετική διεύθυνση. Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως συμβαίνει και που οφείλεται αυτό;

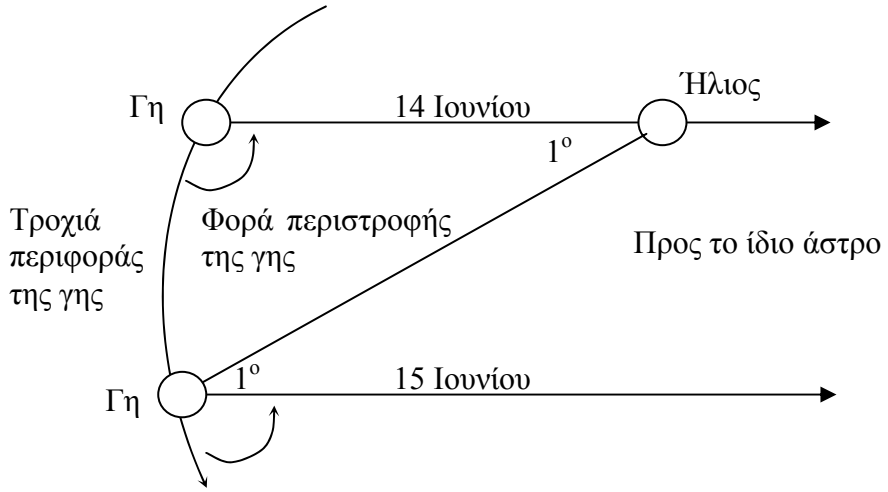
Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα τέτοιο εκκρεμές που βρίσκεται στον **Βόρειο Πόλο** και κρέμεται από το ταβάνι μιας αίθουσας από ένα τέτοιο σημείο ώστε αυτό να βρίσκεται ακριβώς πάνω από τον Βόρειο Πόλο και το εκκρεμές να μπορεί να αιωρείται ελεύθερα ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Αν κουνήσουμε το εκκρεμές προς κάποια κατεύθυνση και το παρατηρήσουμε από πάνω, τότε αυτό θα συνεχίσει να κινείται-αιωρείται συνεχώς στην ίδια κατεύθυνση για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα, εκτός και αν επιδιώξουμε εμείς την αλλαγή της.

Αν κάποιος όμως καθίσει και παρατηρήσει από πάνω το εκκρεμές αυτό, μετά από ένα περίπου τέταρτο είναι πιθανόν να παρατηρήσει ότι η γραμμή της ταλάντωσης-αιώρησης του εκκρεμούς έχει αλλάξει (σε σχέση με τη γη από κάτω του) προς μια διαφορετική κατεύθυνση. Αυτό θα καταστεί ιδιαίτερα φανερό αν κάποιος σημείωνε τη θέση της γραμμής αιώρησης κάποια χρονική στιγμή της ημέρας και μπορούσε να προσαρμόσει μια γραφίδα στο εκκρεμές η οποία να σημειώνει την διεύθυνση της γραμμής αιώρησης κατά τις διαδοχικές αιωρήσεις του.

Αν κάποιος όμως βρίσκεται στο πάτωμα του κτιρίου, στο οποίο βρίσκεται εγκατεστημένο το εκκρεμές (το οποίο και είναι συνδεδεμένο με τη γη), θα αντιλαμβανόταν φυσικά ότι το πάτωμα είναι σταθερό και το εκκρεμές είναι αυτό που κινείται. Αυτό οφείλεται στο ότι υποθέτουμε πως η βάση στην οποία στηριζόμαστε είναι σταθερή, εκτός και αν τα μάτια και η αίσθηση ισορροπίας που διαθέτουμε μας πληροφορούν για το αντίθετο. Στην περίπτωση που η βάση κινείται αργά ή επιταχύνει «ελαφρά» μπορούμε εύκολα να εξαπατηθούμε ότι είναι το άλλο αντικείμενο που βλέπουμε το οποίο κινείται και όχι εμείς (αντίστοιχο φαινόμενο με την «ελαφριά» εκκίνηση ενός αυτοκινήτου, ενός τρένου ή ενός αεροπλάνου).

Αυτό που συμβαίνει με το εκκρεμές είναι ότι, στην πραγματικότητα δεν είναι το εκκρεμές που κινείται, αλλάζοντας συνεχώς την κατεύθυνση της γραμμής αιώρησής του (περιστροφή της γραμμής αιώρησης), αλλά η γη που περιστρέφεται κάτω από αυτό καθιστώντας το όλο φαινόμενο μια οφθαλμαπάτη. Σε μια τέτοια περίπτωση κάποιος θα θεωρήσει ότι η γη περιστρέφεται κάτω από το εκκρεμές κάθε 24 ώρες (σε ηλιακό χρόνο 23 ωρών και 56 λεπτών ή σε μια αστρική ημέρα, ως προς κάποιο μακρινό άστρο). Αυτό που συμβαίνει είναι ότι: κατά την ημερήσια περιφορά της γης γύρω από τον ήλιο και κάθε ημέρα, η γη κινείται κατά γωνία 1° και άρα την επόμενη μιας ημέρας η ήλιος θα φαίνεται 1° ανατολικότερα από ένα οποιοδήποτε πολύ μακρινό άστρο (η απόσταση θεωρείται τόσο μεγάλη ώστε οι νοητές ευθείες που ενώνουν τη γη με το άστρο τις δύο διαδοχικές ημέρες να μπορούν να θεωρηθούν παρ/λες μεταξύ τους).

Προκειμένου τώρα να συμπληρώσει η γη μια πλήρη περιστροφή σε σχέση με τον ήλιο, θα πρέπει να καλύψει αυτή τη 1° κατά την οποία κινείται περιφερόμενη γύρω από τον ήλιο σε διάστημα μιας ημέρας. Αυτό «παίρνει» στη γη 4 περίπου λεπτά. Επομένως η ηλιακή ημέρα (24 ώρες) που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητά μας είναι κατά 4 λεπτά μεγαλύτερη από την πραγματική περίοδο της περιστροφής της γη, η οποία είναι και η αστρική μέρα, η μέρα δηλαδή μετρημένη ως προς τα άστρα (σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1

Στο Βόρειο Πόλο, η φαινομενική περιστροφή (του εκκρεμούς) θα είναι ένας πλήρης κύκλος των 360° κάθε 24 ώρες (15 μοίρες την ώρα). Η περίπτωση του Βόρειου Πόλου (αλλά και του Νότιου) είναι απλή καθώς μεταξύ γης και εκκρεμούς δεν ασκούνται μεγάλες επιδράσεις-δυνάμεις (πρακτικά είναι μηδενικές). Αυτό που συμβαίνει είναι ότι, οι 24 Μεσημβρινοί της γης επεκτείνονται ακτινωτά από κάθε Πόλο (σα να αποτελούν τις ακτίνες ενός «τροχού») και είναι κάθετοι στον άξονα περιστροφής της γης σε κάθε πόλο. Κάθε τέτοιος «τροχός» ολοκληρώνει μια περιστροφή κάτω από το εκκρεμές στη διάρκεια μιας αστρικής ημέρας (το εκκρεμές στην πραγματικότητα δεν αλλάζει τη διεύθυνσή του).

Τι θα συμβεί όμως αν το εκκρεμές μεταφερθεί στον Ισημερινό;

Στην περίπτωση αυτή οι μεσημβρινοί είναι παράλληλοι μεταξύ τους και παράλληλοι με τον άξονα περιστροφής της γης. Ας φανταστούμε τον **Ισημερινό** ως μια σιδηροτροχιά και τους Μεσημβρινούς να τη συναντούν σε 24 τμήματα τομής (τα οποία προφανώς ανήκουν στους Μεσημβρινούς). Καθώς η γη περιστρέφεται, τα τμήματα τομής (ή τμήματα Μεσημβρινών) έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση προς το σύμπαν. Αν τώρα το εκκρεμές αρχίσει την αιώρηση κατά μήκος ενός Μεσημβρινού θα συνεχίσει να κινείται στην ίδια Βορράς-Νότος διεύθυνση καθώς στον Ισημερινό ο Μεσημβρινός δεν αλλάζει διεύθυνση. Το τμήμα τομής του Μεσημβρινού με την σιδηροτροχιά του Ισημερινού, καθώς η γη περιστρέφεται, θα μεταφερθεί ανατολικά και δεν θα περιστραφεί κάτω από το εκκρεμές, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των Πόλων.

Αν τώρα το εκκρεμές ταλαντώνεται σε μια Ανατολική-Δυτική κατεύθυνση (ενώ είναι πάνω στη σιδηροτροχιά του Ισημερινού) τότε η περιστροφή της γης δεν επιφέρει επίσης καμιά αλλαγή στη διεύθυνση αιώρησής του. Η κίνηση του εκκρεμούς σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση μπορεί να αναλυθεί στις διευθύνσεις Βορράς-Νότος και Ανατολή –Δύση που περιγράφηκαν παραπάνω. Άρα το εκκρεμές στον Ισημερινό της γης θα πρέπει πάντα να διαγράφει την ίδια διαδρομή (χωρίς περιστροφή) σε σχέση με την επιφάνεια της γης και επομένως η περίοδος περιστροφής του μπορεί να θεωρηθεί άπειρη (μια αστρική ημέρα στους πόλους).

Καθώς κινούμαστε σε νοτιότερα πλάτη από το Βόρειο Πόλο προς τον Ισημερινό (για παράδειγμα προς τη Washington) η γη δεν περιστρέφεται (κυκλικά) κάτω από το εκκρεμές αλλά μεταφέρει: τη Washington, το κτίριο, και το εκκρεμές πάνω σε έναν μέγιστο κύκλο (Μεσημβρινό), τον οποίο περιστρέφει γύρω από τον άξονά της. Επομένως τώρα, η κίνηση της περιπλέκεται περισσότερο με την κίνηση του εκκρεμούς. Όταν πλησιάζουμε τα διάφορα πλάτη το φαινόμενο γίνεται περίπλοκο με ένα τρόπο που είναι μάλλον δύσκολο να εκτιμηθεί. Παρ' όλες όμως τις δυσκολίες, ο Foucault «διαισθάνθηκε» ότι το **αποτέλεσμα είναι ανάλογο του ημιτόνου του γεωγραφικού πλάτους**.

Τι είναι όμως αυτό που παρατηρείται στην περίπτωση αυτή;

Και στην περίπτωση αυτή (της Washington που βρίσκεται στο Βόρειο Ημισφαίριο) βλέπουμε το δίσκο και το κτίριο στο οποίο είναι προσαρμοσμένος να περιστρέφεται κάτω από το εκκρεμές. Η νοτιότερη άκρη του δίσκου βρίσκεται ελαφρώς μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής της γης από ότι η βορειότερη άκρη. Επομένως, η νοτιότερη άκρη μετατοπίζεται, εξαιτίας της περιστροφής της γης, πιο γρήγορα ανατολικότερα από ότι η βορειότερη άκρη του και η επιφάνεια του δίσκου πρέπει να περιστρέφεται συνεχώς. Η περιστροφή αυτή θα είναι κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού στο Βόρειο Ημισφαίριο και κατά φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού στο Νότιο, κάνοντας το επίπεδο ταλάντωσης του εκκρεμούς να

εμφανίζεται ότι αποκλίνει προς μια κατεύθυνση που ταυτίζεται με αυτή των δεικτών του ρολογιού στην πρώτη και αντίθετη στη δεύτερη περίπτωση αντίστοιχα.

Αυτό που διακρίνεται οπτικά στο γεωγραφικό πλάτος της Washington, είναι η επιβράδυνση της περιστροφής (της γραμμής αιώρησης) με αποτέλεσμα να περιστρέφεται τώρα μόνο κατά 9 μοίρες την ώρα (από το 1/24 του κύκλου τώρα περιστρέφεται μόνο κατά το 1/40 του κύκλου, την ώρα) με φορά αυτή της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Όσο μάλιστα κινούμαστε σε νοτιότερα πλάτη, τόσο περισσότερο η περιστροφή επιβραδύνεται και μάλιστα στον Ισημερινό δεν υπάρχει καθόλου περιστροφή (χρειάζεται άπειρος χρόνος για την περιστροφή του εκκρεμούς).

Σε γεωγραφικά πλάτη κάτω από τον Ισημερινό η περιστροφή αρχίζει και πάλι αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Για παράδειγμα, στο γεωγραφικό πλάτος του Sidney το εκκρεμές θα χρειαστεί 43 ώρες προκειμένου να ολοκληρώσει μια περιστροφή 360° (περιστροφή κατά 8.4 μοίρες την ώρα).

Στο **Νότιο Πόλο** το εκκρεμές έχει περίοδο $24h \pm 50min$ και θα πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή μέσα στο χρονικό διάστημα της περιόδου του (στη διάρκεια μιας ημέρας) μια και θεωρείται ότι από το Νότιο Πόλο διέρχεται ο άξονας περιστροφής της γης ($\pm$ 10m εξαιτίας της μετάπτωσης του άξονα της γης).

6.2 Η ιστορία της ανακάλυψης του εκκρεμούς

Το εκκρεμές ανακαλύφθηκε κατά τύχη. Το 1848 ο J.B.L Foucault κατασκεύαζε στον τόρνο του μια μακριά, λεπτή μεταλλική ράβδο. Την «χτύπησε» και το ένα άκρο του μεταλλικού κομματιού (το άλλο ήταν προσαρμοσμένο σταθερά πάνω στον τόρνο) άρχισε να πηγαίνει μπρος-πίσω. Αν κάποιος χειριστεί τον σφιγκτήρα του τόρνου σαν ρολόγι τότε το ελεύθερο άκρο πάλλεται από τη $12^η$ έως την $6^η$ ώρα και πάλι από την $6^η$ έως την $12^η$. Περιστρέφοντας το σφιγκτήρα του τόρνου κατά 90° ο Foucault παρατήρησε ότι το ελεύθερο άκρο της ράβδου συνέχισε να πάλλεται πάλι μεταξύ 12 και 6 μπρος-πίσω.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις και το σκεπτικό που αναπτύχθηκε με βάση αυτές, ο Foucault κατασκευάζει με τον τόρνο του ένα μικρό εκκρεμές και ξεκινάει την αιώρησή του. Το εκκρεμές αρχίζει την αιώρησή του στο αρχικό της επίπεδο και διατηρείται σε αυτό ανεξάρτητα από το γεγονός ότι το σημείο στο οποίο αναρτάται περιστρέφεται. Στη συνέχεια, κατασκευάζει στην αποθήκη του ένα εκκρεμές μήκους 2 μέτρων με ένα βαρύδι 5 κιλών. Πριν το πλάτος της ταλάντωσης αποσβεστεί εντελώς (λόγω τριβών και αντιστάσεων), παρατήρησε ότι το βαρύδι στο αιωρούμενο άκρο του εκκρεμούς άρχισε να περιστρέφεται κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Πεπεισμένος για τη βασιμότητα της παρατήρησής του ο Foucault κατασκεύασε ένα δεύτερο εκκρεμές στο Αστεροσκοπείο του Παρισιού με μήκος 11 μέτρα όπου και παρατηρήθηκε το ίδιο γεγονός.

Αφού γνωστοποίησε τις παρατηρήσεις του, προτάθηκε στον Foucault να κατασκευάσει κάτι «μεγάλο» για την έκθεση του Παρισιού του 1850 και αυτός πράγματι κατασκεύασε ένα εκκρεμές μήκους 67 μέτρων στο **Πάνθεον**, μια Γαλλική εκκλησία, την Saint-Genevieve (τον Οκτώβριο του 1995 το αρχικό εκκρεμές με το μπρούτζινο βαρύδι επικαλυμμένο με μόλυβδο επανεγκαταστάθηκε στο Πάνθεον).

Το κύριο πρόβλημα που αντιμετώπισε ήταν η επίτευξη συμμετρίας στην κατασκευή του μεταλλικού καλωδίου, ενώ για βαρύδι χρησιμοποίησε μια μπάλα 28 κιλών. Μια βελόνα (λειτουργώντας ως γραφίδα) τοποθετήθηκε κάτω από την μπάλα ενώ άμμος διασπάρθηκε κάτω από την δυνατή διαδρομή της μπάλας, έτσι ώστε η βελόνα να διαγράψει το ίχνος της διαδρομής της μπάλας πάνω στην άμμο.

Η αιώρηση του εκκρεμούς αρχίζει και η βελόνα γράφει στην άμμο μια ευθεία γραμμή η οποία μετά από λίγα λεπτά αρχίζει να φαρδαίνει καθώς η βελόνα «σαρώνει», στρεφόμενη κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, όλο και μεγαλύτερη επιφάνεια πάνω στην άμμο. Το πείραμα αποτέλεσε έναν θρίαμβο: **η γη περιστρέφεται κάτω από το εκκρεμές**.

Τον επόμενο χρόνο, ο Foucault επανέλαβε το πείραμά του με ένα μεγάλο γυροσκόπιο, ένα εκκρεμές δηλαδή με τη μορφή ενός καλαμιού ψαρέματος και με ένα μεγάλης μάζας βαρύδι στη θέση του αγκιστριού.

Περιγράφοντας τα πειράματά του το 1851, ο Foucault σημείωσε ότι γνώριζε για το έργο του Poisson (1837) σχετικά με την απόκλιση των τροχιών των βολών των πυροβόλων, στο οποίο χρησιμοποίησε του υπολογισμούς του μαθητή του Coriolis (1831) σχετικά με τις επιταχύνσεις σε περιστρεφόμενα πλαίσια συντεταγμένων-αναφοράς. Ο Poisson βέβαια θεωρούσε ότι δεν ήταν δυνατό να παρατηρηθεί εμπειρικά το φαινόμενο αλλά ο Focault τον διέψευσε μια και συνειδητοποίησε ότι: **το εκκρεμές έχει το πλεονέκτημα συσσώρευσης των συνεπειών του φαινομένου**. Το πείραμα ήταν κρίσιμο στην ανάπτυξη της Μηχανικής καθώς οδήγησε στην υιοθέτηση της έννοιας της **δύναμης Coriolis** και στη διασαφήνιση της επίδρασης της περιστροφής της γης στην ροή του αέρα της ατμόσφαιρας.

Από τα φυσικά φαινόμενα που επηρεάζονται από τη δύναμη Coriolis και τα οποία μας ενδιαφέρουν περισσότερο, είναι το σύστημα των ανέμων και των προτύπων-μοντέλων του καιρού της γης. Εξαιτίας της σχετικά γρήγορης κίνησης του αέρα και των μεγάλων αποστάσεων που διανύονται από αυτόν, οι επιπτώσεις του φαινομένου είναι συσσωρευτικές. Μεγάλα καιρικά συστήματα παριστάνουν μια σχετικά σταθερή κατάσταση της ροής του αέρα σε μια (προσεγγιστικά) συγκεκριμένη κατεύθυνση, πράγμα που σημαίνει ότι σχεδόν δεν παρατηρείται επιτάχυνση οποιασδήποτε αέριας μάζας (Η δύναμη Coriolis «εξουδετερώνει» κάθε άλλη εμφανιζόμενη δύναμη οφειλόμενη στη διαφορά ατμοσφαιρικής πίεσης μεταξύ των διαφόρων γεωγραφικών περιοχών).

Ένα ζήτημα που εγείρεται από την παρατήρηση της αιώρησης του εκκρεμούς, είναι το εάν το καλώδιο του εκκρεμούς και η δυνατότητα περιστροφής του γύρω από το σημείο στήριξής του επηρεάζει την μετάπτωση του επιπέδου αιώρησης, μια και αυτό (το καλώδιο) είναι προσαρμοσμένο στην περιστρεφόμενη γη. Οι παρατηρήσεις του Foucault στην διάταξη του τόρνου που περιγράφηκε παραπάνω, επιβεβαιώνουν ότι τέτοια επίδραση δεν υφίσταται: το επίπεδο ταλάντωσης της ράβδου δεν άλλαξε ακόμη και αν ο σφιγκτήρας περιστράφηκε με το χέρι.

Χρόνια αργότερα, ο H.K.Onnes, γνωστός για την προσφορά του στην υπεραγωγιμότητα, εισάγει μια μηχανική τροποποίηση που αντισταθμίζει μια «λανθασμένη» διέγερση που θα οδηγήσει σε μια ελλειπτική-«οβάλ» διαδρομή, με την αντίστοιχη επίδραση βέβαια στο επίπεδο αιώρησης του εκκρεμούς. Στη συνέχεια βέβαια εφευρέθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν διάφοροι διορθωτικοί μηχανισμοί με αντίστοιχες προθέσεις.

6.3 Το μηχανικό μέρος

Ένα εκκρεμές τώρα «τύπου Foucault», αποτελείται από ένα σύρμα, καλώδιο ή σχοινί και από ένα βαρύδι, απαιτείται όμως **το μήκος του καλωδίου να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο** και **το βαρύδι να είναι βαρύ και συμμετρικό**. Αυτό γιατί έτσι επιτυγχάνεται: μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα, λιγότερη αντίσταση αέρα, και πιο αργή μείωση του πλάτους του τόξου της ταλάντωσής του. Επίσης, το σημείο

προσαρμογής του άκρου στήριξης του εκκρεμούς να επιτρέπει την ελεύθερη αιώρηση προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Όπως και όλα τα εκκρεμή, το εκκρεμές «τύπου Foucault» χάνει την ενέργειά του με κάθε αιώρηση λόγω τριβών με τον αέρα, την τριβή λόγω επαφής του καλωδίου και άλλους λόγους, με αποτέλεσμα μετά από λίγες ώρες να πραγματοποιεί όλο και μικρότερες σε πλάτος αιωρήσεις μέχρι να σταματήσει εντελώς. Προκειμένου λοιπόν να διατηρήσουμε την κίνησή του θα πρέπει να αναπληρώνουμε την ενέργεια που χάνεται μέσω μιας μικρής ώθησης και για γίνει κάτι τέτοιο μηχανικά και αυτόματα προσαρμόζουμε έναν μηχανισμό υποστήριξης ο οποίος εντοπίζει την μείωση του πλάτους και ενισχύει την αιώρηση του εκκρεμούς, χωρίς να μεταβάλλει τη κατεύθυνση της κίνησης της γραμμής αιώρησης και επομένως και την «εξαναγκασμένη περιστροφή του εκκρεμούς».

Ένα εκκρεμές τέτοιων προδιαγραφών είναι προσαρμοσμένο σε ένα κτίριο, το κτίριο είναι προσαρμοσμένο στη γη, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της μέσα σε 24 ώρες, η γη περιφέρεται γύρω από τον ήλιο μέσα σε ένα χρόνο και ο ήλιος περιφέρεται με τη σειρά του γύρω από το κέντρο του γαλαξία μέσα σε 250 εκατομμύρια χρόνια. Όλες αυτές οι κινήσεις είναι «τοπικές κινήσεις» και το εκκρεμές αγνοεί όλες αυτές τις τοπικές κινήσεις και «ευθυγραμμίζεται» με το υπόλοιπο σύμπαν Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το εκκρεμές να αιωρείται σε ένα σταθερό, σχετικά με τα μακρινά άστρα, επίπεδο αιώρησης και η γη να συνεχίζει την περιστροφή της γύρω από τον άξονά της.

Πώς όμως το εκκρεμές «γνωρίζει» και αγνοεί τις «τοπικές κινήσεις» ενώ «ευθυγραμμίζεται» με το υπόλοιπο σύμπαν; Κάποιοι φημισμένοι φυσικοί διατείνονται πως δεν ξέρουμε!

Το κύριο πρόβλημα κατά την κατασκευή του εκκρεμούς αφορά το πώς θα εξασφαλιστεί ότι κατά την αιώρησή του το βαρύδι θα διέρχεται από το πραγματικό κέντρο αιώρησης εκτελώντας μια «πραγματική αιώρηση» (και όχι μια ενδεχόμενη ελλειπτική), καθώς και το πώς θα παρέχεται ενέργεια σε αυτό ώστε να μην αποσβεστεί τελικά η αιώρησή του. Για να επιτευχθούν τα παραπάνω υιοθετούνται τρία υποσυστήματα:

(1) Το υποσύστημα του βαρυδίου. Περιλαμβάνει τον βραχίονα στήριξης, το καλώδιο-σύρμα και το βαρύδι που προσαρμόζεται στο ένα άκρο του καλωδίου.

(2) Το υποσύστημα του πλαισίου προστασίας. Σκοπός του είναι η προστατεύσει την αιώρηση από τα αέρια ρεύματα, διατηρώντας στο ελάχιστο τις όποιες επιδράσεις τους.

(3) Το μαγνητικό σύστημα απορρόφησης-υποστήριξης. Σκοπός του είναι η διατήρηση της αιώρησης του εκκρεμούς μέσω της παροχής της αναγκαίας ενίσχυσης-παροχής ενέργειας στο βαρύδι, προκειμένου να διατηρήσει το πλάτος αιώρησής του, διαφορετικά μετά από λίγες ώρες η αιώρηση θα έχει περιοριστεί σε ένα πλάτος λίγων εκατοστών. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε κάτι τέτοιο, «έλκουμε» ελαφρά το καλώδιο σε κάθε πέρας μιας αιώρησης μέσω του παραπάνω μηχανισμού. Η έλξη γίνεται πάντα προς την κατεύθυνση της αιώρησης με αποτέλεσμα να μη την επηρεάζει αλλάζοντάς την.

Η ενίσχυση της κίνησης μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ενός κυκλικού ηλεκτρομαγνήτη που τοποθετείται πάνω από το ταβάνι και κάτω ακριβώς από το σημείο στήριξης του εκκρεμούς. Ο μαγνήτης είναι σταθερός και περιβάλει το καλώδιο. Ένας μεταλλικός δακτύλιος προσαρμόζεται πάνω στο καλώδιο και έλκεται με μεγαλύτερη δύναμη από το μαγνήτη όταν βρίσκεται πιο κοντά σε αυτόν. Όταν παροχετεύεται ρεύμα στη διάταξη τη στιγμή που το εκκρεμές διέρχεται από το κέντρο

της αιώρησης, ο δακτύλιος έλκεται ισχυρότερα προς την πλευρά στην οποία βρίσκεται πιο κοντά. Στο τέλος της αιώρησης το ρεύμα διακόπτεται και το εκκρεμές επιστρέφει πίσω στο κέντρο αιώρησης και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Το ρεύμα που ενεργοποιεί τον ηλεκτρομαγνήτη ελέγχεται από το ίδιο το εκκρεμές. Αυτό γίνεται μέσω ενός μηχανισμού που προσαρμόζεται στο καλώδιο του εκκρεμούς πάνω από το ταβάνι και επιτρέπει σε μια δέσμη φωτός να προσεγγίσει ένα φωτοηλεκτρικό κύτταρο τη στιγμή που το εκκρεμές διέρχεται από το κέντρο της αιώρησης. Αυτός ο μηχανισμός ανοίγει το ρεύμα στον μαγνήτη και ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μέτρησης του χρόνου το κλείνει όταν το εκκρεμές προσεγγίσει το άκρο της αιώρησης του.

6.4 Το εκκρεμές του Foucault και τα θεμελιώδη επιστημολογικά ερωτήματα του χώρου

Ο Newton εισήγαγε την έννοια του απόλυτου και άπειρου χώρου, ως ένα απαραίτητο συστατικό στον ορισμό της επιτάχυνσης καθώς και της ερμηνείας και χρήσης του τύπου **F**=m**a**. Η εμπειρία μας όμως μας πληροφορεί για τη σχετικότητα θέσεων και ταχυτήτων, με αποτέλεσμα το **δόγμα της απολυτότητας του χώρου** να μη γίνεται αβίαστα αποδεκτό. Παρ' όλη όμως την κριτική που δέχτηκε, η εφαρμοσιμότητα και τα καρποφόρα αποτελέσματα που έδωσε για σχεδόν 250 χρόνια έκαναν ευρύτερα αποδεκτή την ισχύ του δόγματος. Για πρακτικούς λόγους και σαν αποτέλεσμα του πειράματος του Foucault, ο απόλυτος χώρος γίνεται ο χώρος των σταθερών άστρων.

Το ζήτημα ανοίγει ξανά στο τέλος του 19^{ου} αι. από τον Mach ο οποίος υποστηρίζει ότι: η συσχέτιση μεταξύ του επιπέδου αιώρησης του εκκρεμούς και των σταθερών άστρων δεν είναι ούτε τυχαία ούτε αποδεικνύει την ύπαρξη του απόλυτου χώρου αλλά μάλλον ότι τα άστρα είναι υπεύθυνα για την αδράνεια του βαρυδίου του εκκρεμούς. Κατά τον Mach επομένως, η θέση του Newton «φλερτάρει» με τη μεταφυσική και προτείνει από την πλευρά του μια αιτία για την μάζα, καθιστώντας την κάτι ανώτερο από μια απλή ελεύθερη παράμετρο της θεωρίας του Newton.

Ο Einstein επηρεάζεται πολύ από τις απόψεις Mach και πράγματι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, εν μέρει, τις επιβεβαιώνει. Γνωρίζουμε σήμερα ότι η μάζα επηρεάζει το χώρο και υπάρχουν μάλιστα υπολογιστικά μοντέλα που εισηγούνται και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτό. Για παράδειγμα, αν ένα περιστρεφόμενο συμπύκνωμα ύλης-μάζας εισάγεται στο κενό χώρο, οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων στο κέντρο του συμπυκνώματος αλλάζουν.

Ειδικά, ένα αδρανειακό σύστημα στο κέντρο του συμπυκνώματος αποτελεί τώρα ένα πλαίσιο που περιστρέφεται με ταχύτητα η οποία καθορίζεται από τη μάζα, την ακτίνα και την ταχύτητα περιστροφής του συμπυκνώματος. Και οι δύο ταχύτητες (κέντρου και συμπυκνώματος) θα μπορούσαν να είναι ίσες μόνο στην οριακή περίπτωση της μεγάλης μάζας και ακτίνας. Επομένως το συμπύκνωμα της ύλης (μακρινά άστρα) έχει επηρεάσει την επιλογή του «απόλυτου χώρου» αλλά δεν την έχει προσδιορίσει εντελώς (όπως απαιτείται από τον Mach) εξαιτίας του γεγονότος ότι η μαθηματική λύση έχει χρησιμοποιήσει (συν)οριακές συνθήκες στο άπειρο, οι οποίες είναι εντελώς ανεξάρτητες από τη διασπορά της ύλης.

Το πρόβλημα παραμένει ένα ενεργό πεδίο έρευνας γιατί, ενώ σε ένα στοιχειώδες επίπεδο κάποιος μπορεί να πει ότι το εκκρεμές σε ένα δωμάτιο δείχνει την περιστροφή της γης τελικά αφήνει ανοικτό τα πλέον θεμελιώδη ερωτήματα σχετικά με την προέλευση της μάζας και της αδράνειας. Αναρωτιόμαστε λοιπόν ακόμη: Γιατί υπάρχει μάζα; Γιατί υπάρχει αδράνεια; Γιατί ισχύει **F**=m**a**;

6.5 Οι δυο προσεγγίσεις του φαινομένου: μαθηματική και φυσική

Ο Foucault παρατήρησε ότι η περιστροφή της γης θα προκαλούσε μια μετάπτωση (ή περιστροφή) στο επίπεδο αιώρησης του εκκρεμούς με το πέρασμα του χρόνου, με αποτέλεσμα αυτό να επιστρέφει τελικά στην αρχική του διεύθυνση μετά από περίοδο $T = \frac{24}{\sin v_0}$ ώρες, όπου v_0 είναι το (γεωγραφικό) πλάτος στο οποίο πραγματοποιείται το πείραμα.

Το φαινόμενο της αιώρησης και της μετάπτωσης του επιπέδου αιώρησης του εκκρεμούς μπορεί να μελετηθεί και να αναλυθεί μέσω δύο προσεγγίσεων:

Η μαθηματική προσέγγιση

Η πρώτη προσέγγιση, είναι αυτή που βασίζεται στην ανάλυση που έγινε στα προηγούμενα κεφάλαια και ειδικά στο 5°, με κατάληξη τη μελέτη της σφαίρας. Επικεντρώνεται στο θέμα από μιας αμιγώς μαθηματική οπτική και εξετάζει το φαινόμενο με βάση τη Διαφορική Γεωμετρία (με τη σύμπραξη Ανάλυσης, Τοπολογίας και Γραμμικής Άλγεβρας), με κυρίαρχες σε αυτή την ανάλυση τις έννοιες της παράλληλης μεταφοράς και της ολονομίας (που εξαρτώνται από την καμπυλότητα της σφαίρας-γης και των καμπυλών της).

Πρόκειται για τη μελέτη της σφαίρας (η γη ως τέλεια σφαίρα), την παράλληλη μεταφορά ενός (εφαπτόμενου) διανυσματικού πεδίου και την προκύπτουσα ολονομία κατά τη μεταφορά των διανυσμάτων του πεδίου κατά μήκος καμπυλών της επιφάνειας της σφαίρας και συγκεκριμένα: κατά μήκος ενός μέγιστου κύκλου (Ισημερινό της γης), ενός Παράλληλου κύκλου σε πλάτος v_0 (Παράλληλος της γης) και γύρω από τους δύο Πόλους. Σύμφωνα με τον J. Oprea (Oprea, 1995, σελ. 522):

> *Με τον απλοϊκό της τρόπο, η μαθηματική ανάλυση του εκκρεμούς αποτελεί την επιτομή της Φυσικής του 20ου αι., μια Φυσική η οποία λαμβάνει πολύ σοβαρά υπόψη τη γεωμετρική θέση της φύσης.*

Κατά την προσέγγιση αυτή υποθέτουμε ότι η γη δεν περιστρέφεται και το εκκρεμές είναι τοποθετημένο σε κάποιο πλάτος v_0. Αντί λοιπόν να θεωρούμε ότι η γη περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της, θεωρούμε ότι το εκκρεμές (το επίπεδο αιώρησής του) είναι αυτό που περιστρέφεται (μεταπίπτει) κατά την αιώρησή του πάνω σε μια σταθερή γη. Η κίνηση αυτή του εκκρεμούς πραγματοποιείται (ολοκληρώνεται) με σταθερή ταχύτητα μέσα σε χρόνο μιας περιόδου ίσης με:

$$T = \frac{24}{\sin v_0} \text{ ώρες.}$$

Σε αυτή την κίνηση (αιώρηση) του εκκρεμούς, το μακρύ καλώδιό του και ο αργός ρυθμός με τον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση εμφανίζουν δύο χαρακτηριστικά με καταλυτικές συνέπειες:

α) Η αιώρηση του εκκρεμούς έχει μικρό πλάτος, με αποτέλεσμα να θεωρείται ότι η νοητή γραμμή της κάθε αιώρησης του βαρυδίου να είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στη γη (ως σφαίρα). Προσανατολίζοντας με συνέπεια τα διανύσματα αυτά των αιωρήσεων, αποκτούμε το διανυσματικό πεδίο **v** των **διευθύνσεων του επιπέδου αιώρησης του εκκρεμούς**. Κάθε μάλιστα χρονική στιγμή t υπάρχει ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο **v**(t) και όλα τα διανύσματά του

μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος ενός Παράλληλου κύκλου **α**(u), αντιστοιχώντας σε κάθε χρονική στιγμή t ένα μοναδικό σημείο, το οποίο να περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς κατά μήκος της **α**(u). Τότε όμως το διανυσματικό πεδίο **v** γίνεται **v**=**v**(u).

β) Επειδή κινούμαστε αργά γύρω από έναν Παράλληλο κύκλο, **η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο εκκρεμές είναι αμελητέα** (το 1/290 της κατακόρυφης mg). Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μόνη δύναμη που ασκείται στο εκκρεμές είναι η βαρύτητα, στην κατακόρυφη (κάθετη) διεύθυνση **n** της επιφάνειας της γης (σφαίρας), δύναμη η οποία δεν επηρεάζει την κατακόρυφη επίπεδη αιώρηση του εκκρεμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το επίπεδο αιώρησης να εμφανίζεται αμετάβλητο από την άποψη της επιφάνειας (εσωτερικά).

Άρα, η προβαλλόμενη στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_P S^2$ της σφαίρας-γης συναλλοίωτη παράγωγος είναι ίση με το μηδέν ή αλλιώς, η προβολή του ρυθμού μεταβολής, ως προς u, του διανυσματικού πεδίου **v**(u) του επιπέδου αιώρησης, είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\nabla_{\alpha'(u)}\mathbf{v}(u) = \text{προβ}_{T_P S^2}\frac{d\,\mathbf{v}(u)}{du} = 0.$$

Σημειώνουμε ότι, η συναλλοίωτη παράγωγος καταλήγει στη συνήθη διαφόριση εξαιτίας της επιλεγείσας παραμέτρησης.

Σύμφωνα επομένως με τα προηγούμενα ισχύει η πρόταση:

Πρόταση

Το διανυσματικό πεδίο **v** *που συνδέεται με το εκκρεμές του Foucault είναι παράλληλο κατά μήκος ενός παρ/λου κύκλου.*

Σημειώνουμε ότι, καθώς το διανυσματικό πεδίο μεταφέρεται παράλληλα (το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο των διευθύνσεων του επιπέδου αιώρησης) κατά μία πλήρη στροφή γύρω από τον Παράλληλο κύκλο, η ολονομία περιστρέφει το πεδίο κατά $-2\pi\sin v_0$ ακτίνια.

Η γωνιακή ταχύτητα του διανύσματος περιστροφής είναι τότε:

$$\omega = \frac{2\pi \sin v_0 \ \text{ακτίνια}}{24 \ \text{ώρες}}$$

με αποτέλεσμα η περίοδος μετάπτωσης του εκκρεμούς (χρόνος πλήρους περιστροφής του παράλληλου διανυσματικού πεδίου) να είναι ίση με:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{24}{\sin v_0} \ \text{ώρες}.$$

Καθώς τώρα το όλο σύστημα του εκκρεμούς θεωρείται σταθερό σε σχέση με τη γη, αυτό που εξηγεί την παρατηρούμενη και «ανεξήγητη» μετάπτωση του επιπέδου αιώρησης δεν είναι τίποτε άλλο παρά η περιστροφή της γης γύρω από τον Παράλληλο σε πλάτος $\mathbf{v_0}$ και γενικότερα τους Παράλληλους κύκλους της.

Η φυσική προσέγγιση

Μια «κινηματική ερμηνεία» της δύναμης Coriolis και ο ρόλος της στην μετάπτωση του εκκρεμούς

Η δεύτερη προσέγγιση, περιλαμβάνει τη συνήθη περίπλοκη ανάλυση που γίνεται στο φαινόμενο της αιώρησης του εκκρεμούς με βάση τα **περιστρεφόμενα πλαίσια** συντεταγμένων και τη **«φανταστική δύναμη»** ή **«ψευδοδύναμη» Coriolis**, που

αναλύεται στη συνέχεια. Για την προσέγγιση αυτή, σημαντικό ρόλο παίζει η θεώρηση των αδρανειακών και μη αδρανειακών συστημάτων συντεταγμένων. Εξάλλου οι «ψευδοδυνάμεις» εμφανίζονται, γενικά, όταν χρησιμοποιούμε περιστρεφόμενα (μη-αδρανειακά συστήματα συν/νων). Μια άλλη τέτοια δύναμη είναι η φυγόκεντρος. Ας τα δούμε λοιπόν περισσότερο αναλυτικά.

Ως **αδρανειακό σύστημα-πλαίσιο συντεταγμένων** ή **σύστημα αδράνειας**, καλούμε εκείνο το σύστημα στο οποίο ισχύει απόλυτα η **Αρχή της Αδράνειας** ($1^{ος}$ Νόμος του Newton):

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι ίση με το μηδέν, τότε το σώμα ή θα παραμείνει ακίνητο ή θα εξακολουθήσει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά,

ενώ οι τροχιές των σωμάτων που κινούνται καθορίζονται πλήρως από τους νόμους της Δυναμικής. Αυτό μάλιστα θα συμβεί ανεξάρτητα από τη θέση του σώματος σε σχέση με το σύστημα συν/νων και την αρχική διεύθυνση της κίνησης.

Με αυτή επομένως της έννοια **δεν είναι αδρανειακό** ένα σύστημα:

- το οποίο είναι προσαρμοσμένο πάνω στη γη μια και ένα τέτοιο σύστημα επηρεάζεται από την κεντρομόλο επιτάχυνση που αναπτύσσεται στο σύστημα, εξαιτίας της περιστροφής της γης. Το αποτέλεσμα είναι ότι, οι νόμοι της κίνησης που αναφέρονται σε αυτά τα συστήματα θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη εκτός από τις **εξωτερικές δυνάμεις** (τάση νήματος και βάρος του βαρυδίου στο εκκρεμές) και τις **δυνάμεις αδράνειας**, οι οποίες εμφανίζονται κατά τις φάσεις της επιτάχυνσης των σωμάτων και κατά τις περιστροφικές κινήσεις (δύναμη Coriolis και δύναμη επαναφοράς στο εκκρεμές).

Στο εκκρεμές, για παράδειγμα, η εμφάνιση αυτών των δυνάμεων έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του επίπεδου αιώρησής του ενώ στην ελεύθερη πτώση των σωμάτων την απόκλιση από την κατακόρυφο.

- το σύστημα που έχει αρχή το κέντρο της γης, άξονα των x που συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης και άξονα y την ευθεία προς τον ήλιο. Αυτό οφείλεται στο ότι η γη πραγματοποιεί περιφορά γύρω από τον ήλιο και επομένως εμφανίζεται κεντρομόλος (μικρή βέβαια) επιτάχυνση σε σχέση με αυτόν.
- το σύστημα που έχει αρχή το κέντρο του ήλιου, άξονα x τον άξονα τον κάθετο στο επίπεδο του γαλαξία και άξονα y πάνω στην ευθεία που ενώνει το κέντρο του ήλιου με το κέντρο του γαλαξία. Αυτό οφείλεται στην περιφορά του ήλιου γύρω από το κέντρο του γαλαξία.

Ένα τέτοιο σύστημα όμως μπορεί, κατά προσέγγιση, να θεωρηθεί αδρανειακό, μια και η επιτάχυνση του ήλιου ως προς το γαλαξιακό κέντρο είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις επιταχύνσεις που μετριούνται στη γη.

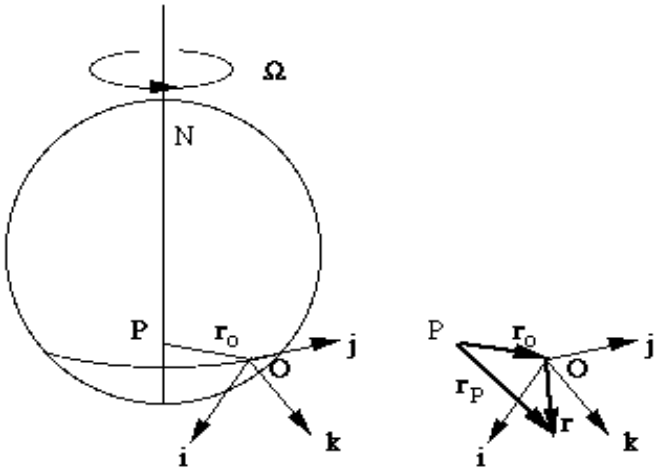
Αδρανειακό σύστημα, με μεγάλη όμως προσέγγιση, είναι ένα σύστημα συν/νων που έχει αρχή το κέντρο του ήλιου και άξονες που κατευθύνονται προς κάποιους μακρινούς αστέρες (αμελητέα επιτάχυνση και ταχύτητα περιστροφής). Σε ένα τέτοιο σύστημα, η τροχιά ενός ελεύθερου σώματος (δεν ασκούνται δυνάμεις πάνω του) θα φαίνεται, με μεγάλη προσέγγιση, σαν ευθεία γραμμή.

Θα αναπτύξουμε τώρα μια φυσική ανάλυση της κίνησης του εκκρεμούς με τη βοήθεια του διανυσματικού λογισμού, μια και αποτελεί το καλύτερο εργαλείο για μια, κατά το δυνατόν, σύντομη και επιδέξια ανάλυση. Επειδή στην περίπτωση των Πόλων το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς δεν επιταχύνεται, η μελέτη της περίπτωση αυτής δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία και επιπλοκή, γι' αυτό θα ασχοληθούμε με άλλα γεωγραφικά πλάτη όπου η επιτάχυνση του σημείου

ανάρτησης οδηγεί στη μελέτη κάποιων περισσότερο περίπλοκων, χρονοεξαρτόμενων δυνάμεων που ενεργούν στο εκκρεμές.

Θεωρούμε λοιπόν ότι η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα **Ω** μέτρου Ω=0,00007292 rad/sec και διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής της γης σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα (Alonso & Finn, 1981, σελ. 138). Σε ένα σημείο **O** της επιφάνειας (το οποίο μπορούμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε στο Νότιο Ημισφαίριο) με γεωγραφικό πλάτος v_0 (προφανώς $-\pi/2 \leq v_0 \leq 0$) θεωρούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συν/νων (μη αδρανειακό μια και περιστρέφεται μαζί με τη γη) με αρχή το σημείο **O**, με τον άξονα των x να είναι στο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο **O** και να έχει φορά προς το Νότο, τον άξονα των y να είναι στο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο **O** και να έχει φορά προς τα Ανατολικά και τον άξονα των z να είναι κάθετος στο εφαπτόμενο επίπεδο στο **O** και να έχει φορά εξωτερική προς τη επιφάνεια της γης.

Έστω επίσης **P** το σημείο του άξονα περιστροφής της γης το οποίο απέχει και τη μικρότερη απόσταση από το **O** και $\mathbf{r}_o$ το διάνυσμα **PO**. Αν το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου σχετικά με το **O** είναι ίσο με **r**, τότε η θέση του σχετικά με το **P** προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r_P}=\mathbf{r}+\mathbf{r_o}$ (σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2

Ας υποθέσουμε ότι το **r** είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε το βαρυτικό πεδίο να μη μεταβάλλεται ιδιαίτερα μεταξύ των σημείων **O** και **r**. Το **P** είναι πάνω σε ένα αδρανειακό σύστημα (της σταθερής γης) και επομένως η εξίσωση της κίνησης του σωματιδίου ως προς το αδρανειακό σύστημα αυτό θα είναι:

$$m\mathbf{r}''_{\mathbf{P}}=m\mathbf{G}+\mathbf{F} \quad (1),$$

όπου m είναι η μάζα του σωματιδίου, **G** είναι το βαρυτικό πεδίο στο **O** (δύναμη ανά μονάδα μάζας) και αποτελεί την επιτάχυνση της βαρύτητας που θα μετρούσαμε σε ένα σημείο της επιφάνειας της γης αν αυτή δεν περιστρεφόταν (η γη θεωρείται σφαιρική χωρίς ανωμαλίες και η φορά της **G** προς το κέντρο της γης), **F** είναι το άθροισμα όλων των άλλων δυνάμεων (πέρα από τη βαρύτητα) ενώ το σύμβολο ' σημαίνει την παράγωγο $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ως προς το χρόνο (την παράγωγο της αντίστοιχης διανυσματικής ακτίνας ως προς το χρόνο και ως προς το αδρανειακό σύστημα).

Η εξίσωση (1) είναι μια (πολύ απλή) εξίσωση κίνησης στο αδρανειακό σύστημα. Τα $\mathbf{r_P}$ και $\mathbf{r_o}$ είναι διανύσματα στο εν λόγω αδρανειακό σύστημα. Το

διάνυσμα **r** όμως είναι ένα διάνυσμα θέσης σε ένα μη αδρανειακό σύστημα (με αρχή το **O**). Θα γράψουμε τώρα την εξίσωση (1) σε σχέση με το **r** και έτσι αυτή θα αναφέρεται σε κίνηση στο μη αδρανειακό περιστρεφόμενο σύστημα. Οι επιπλέον όροι που θα εμφανιστούν στο δεξί μέλος όταν κάνουμε την αντικατάσταση θα είναι οι «φανταστικές» δυνάμεις στις οποίες αναφερθήκαμε παραπάνω.

Για την κίνηση στο σύστημα (μη αδρανειακό) της επιφάνειας της γης στο **O** η επιτάχυνση είναι ίση με $\mathbf{r}''=\mathbf{r}''_P-\mathbf{r}''_o$. Το σημείο **O** περιστρέφεται με την γωνιακή ταχύτητα **Ω** της γης με μέτρο Ω, επομένως η κεντρομόλος επιτάχυνση θα είναι ίση με (**v** η γραμμική ταχύτητα):

$$\mathbf{r}''_o=-\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}_o}=-\frac{(\Omega\mathbf{r}_o)^2}{\mathbf{r}_o}=-\Omega^2\mathbf{r}_o.$$

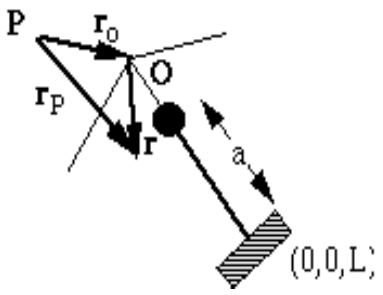
Επειδή το $\mathbf{r}_o$ βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα **i**,**k** (xz-επίπεδο) του μη αδρανειακού συστήματος, θα είναι $\mathbf{r}_o= r_o(\sin v_0\mathbf{i}+\cos v_0\mathbf{k})$ και επομένως:

$$\mathbf{r}''_o=-\Omega^2 r_o(\sin v_0\mathbf{i}+\cos v_0\mathbf{k}) \quad (2)$$

Τότε η (1) γίνεται: $m(\mathbf{r}''+\mathbf{r}''_o)=m\mathbf{G}+\mathbf{F}$ ή $m\mathbf{r}''=m\mathbf{G}+\mathbf{F}-m\mathbf{r}''_o$ ή

$$m\mathbf{r}''=m\mathbf{G}+\mathbf{F}+m\Omega^2 r_o(\sin v_0\mathbf{i}+\cos v_0\mathbf{k}) \quad (3).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα εκκρεμές που αποτελείται από ένα βαρύδι στο άκρο ενός νήματος μήκους a, με το άλλο του άκρο να είναι προσαρμοσμένο στο σημείο με συν/νες (0,0,L), ως προς το σύστημα αναφοράς του **O**. Ας υποθέσουμε επίσης αρχικά ότι το εκκρεμές είναι ακίνητο και κατακόρυφο στο σύστημα αυτό (σχήμα 6.3). Η τάση $\mathbf{T}_o$ είναι τότε η μόνη εξωτερική δύναμη και είναι ίση με: $\mathbf{T}_o=mg\mathbf{k}$ (4), όπου g είναι η τοπική (φαινόμενη ή ενεργός) επιτάχυνση της βαρύτητας στο σύστημα του **O** (τα διανύσματα των **g**, **G** δεν είναι ούτε παράλληλα ούτε ίσα σε μέγεθος εξαιτίας της περιστροφής της γης. Το **g** είναι η επιτάχυνση όπως αυτή διαμορφώνεται εξαιτίας της περιστροφής της γης-ενεργός επιτάχυνση-ενώ το m**g** είναι το βάρος που τελικά μετρά η ζυγαριά).



Σχήμα 6.3

Στην περίπτωσή μας, όπου και δεν έχουμε αιώρηση του εκκρεμούς (ισορροπία) είναι: $\mathbf{r}'=\mathbf{r}''=\mathbf{0}$ και η (3) με απλοποίηση του όρου m δίνει:

$$\mathbf{G}+\Omega^2 r_o(\sin v_0\mathbf{i}+\cos v_0\mathbf{k})=-g\mathbf{k} \quad (6).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κινούμενο εκκρεμές με τάση **T** και ας αντικαταστήσουμε την (6) στην (3) προκειμένου να απαλείψουμε τον όρο **G**, του οποίου η διεύθυνση και το μέγεθος είναι δύσκολο να μετρηθούν με ακρίβεια (λόγω περιστροφής εμείς μετράμε το g). Τότε προκύπτει:

$$m\mathbf{r}''=\mathbf{T}-mg\mathbf{k} \quad (7).$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να αναλυθεί ως προς το σύστημα {**O**,**i**,**j**,**k**}, θεωρώντας ότι το σύστημα αυτό περιστρέφεται με $\mathbf{\Omega}=-\Omega\cos v_0\mathbf{i}+\Omega\sin v_0\mathbf{k}$ (το – για την αλλαγή της φοράς ως προς το **i** και $-\pi/2\le v_0\le 0$).

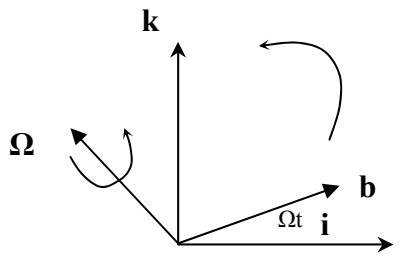
Πράγματι, αν είναι $\mathbf{r}=r_x\mathbf{i}+r_y\mathbf{j}+r_z\mathbf{k}$ παραγωγίζοντας ως προς t θα προκύψει:

$$\mathbf{r}'=(r_x)'\mathbf{i}+(r_y)'\mathbf{j}+(r_z)'\mathbf{k}+r_x\mathbf{i}'+r_y\mathbf{j}'+r_z\mathbf{k}',$$

όπου $\mathbf{i}'=\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ είναι η ταχύτητα ενός σημείου που βρίσκεται στο **i** σε σχέση με το **O** και οφείλεται στην περιστροφή με Ω του συστήματος {**O**,**i**,**j**,**k**}. Τα **j**',**k**' αντίστοιχα.

Θα δείξουμε τώρα ότι: $\mathbf{i}'=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i}$ και όμοια: $\mathbf{j}'=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{k}'=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k}$.

Έστω γενικά ένα διάνυσμα **b** το οποίο ως προς το περιστρεφόμενο {**O**,**i**,**k**} γράφεται: $\mathbf{b}=(\cos\Omega t)\mathbf{i}+(\sin\Omega t)\mathbf{k}$ (σχήμα 6.4).



Σχήμα 6.4

Τότε: $\frac{d\mathbf{b}}{dt}=-\Omega(\sin\Omega t)\mathbf{i}+\Omega(\cos\Omega t)\mathbf{k}=\Omega[-(\sin\Omega t)\mathbf{i}+(\cos\Omega t)\mathbf{k}]$.

Για t=0 είναι **b**=**i** και $\frac{d\mathbf{b}}{dt}=\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\Omega\mathbf{k}$. Για **i**,**k** μοναδιαία και μέτρο **Ω** ίσο με Ω είναι:

$$\mathbf{i}'=\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i} \text{ και όμοια: } \mathbf{j}'=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{j},\ \mathbf{k}'=\frac{d\mathbf{i}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k}.$$

Τότε: $\mathbf{r}'=(r_x)'\mathbf{i}+(r_y)'\mathbf{j}+(r_z)'\mathbf{k}+r_x(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i})+r_y(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{j})+r_z(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k})$

$$=(r_x)'\mathbf{i}+(r_y)'\mathbf{j}+(r_z)'\mathbf{k}+\mathbf{\Omega}\times(r_x\mathbf{i}+r_y\mathbf{j}+r_z\mathbf{k})=\{(\mathbf{r}_x)'\mathbf{i}+(\mathbf{r}_y)'\mathbf{j}+(\mathbf{r}_z)'\mathbf{k}\}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}.$$

Άρα η **r**', με βάση τον ορισμό, θα είναι: $\mathbf{r}'=\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r}'=(\mathbf{r}_x)'\mathbf{i}+(\mathbf{r}_y)'\mathbf{j}+(\mathbf{r}_z)'\mathbf{k}$ με το σύμβολο **'** να σημαίνει μερική παράγωγο ως προς το χρόνο και ως προς το μη αδρανειακό σύστημα {**O**,**i**,**j**,**k**}.

Παραγωγίζοντας ξανά προκύπτει:

$$\mathbf{r}''=\frac{d}{dt}\{(\mathbf{r}_x)'\mathbf{i}+(\mathbf{r}_y)'\mathbf{j}+(\mathbf{r}_z)'\mathbf{k}\}+(\mathbf{r}_x)'\frac{d\mathbf{i}}{dt}+(\mathbf{r}_y)'\frac{d\mathbf{j}}{dt}+(\mathbf{r}_z)'\frac{d\mathbf{k}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\mathbf{\Omega} \text{ σταθερό}).$$

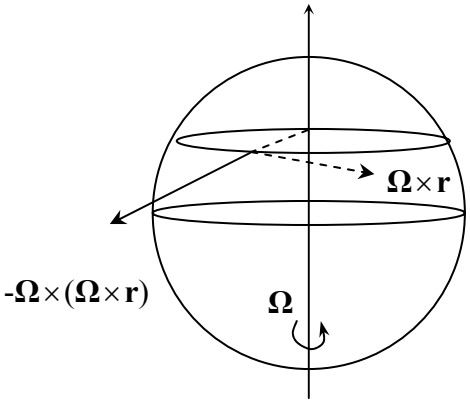
$$=\frac{d^2\mathbf{r}_x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2\mathbf{r}_y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2\mathbf{r}_z}{dt^2}\mathbf{k}+(r_x)'\mathbf{i}'+(r_y)'\mathbf{j}'+(r_z)'\mathbf{k}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'$$

$$=(\frac{d^2\mathbf{r}_x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2\mathbf{r}_y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2\mathbf{r}_z}{dt^2}\mathbf{k})+[(r_x)'(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i})+(r_y)'(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{j})+(r_z)'(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{k})+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'$$

άρα $\mathbf{r}''=\mathbf{r}''+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{r}''+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$ ή

$$\mathbf{r}''=\mathbf{r}''+2(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}')+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) \quad (8).$$

Ο όρος $-2(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}')$ είναι γνωστός με το όνομα **επιτάχυνση Coriolis** ενώ ο όρος $-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$ αντιστοιχεί στη **φυγόκεντρη επιτάχυνση** λόγω περιστροφής (σχήμα 6.5). Η τάξη μεγέθους (για ημίτονο ίσο με 1 και r την ακτίνα της γης 6370km) της φυγόκεντρης επιτάχυνσης είναι περίπου $|-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})|=\Omega^2 r=0{,}0339$ m/sec^2 και ελαττώνεται από τον Ισημερινό προς τους Πόλους (ελάττωση της ακτίνας του κύκλου που διαγράφει ένα σώμα που βρίσκεται σε κάποιο γεωγραφικό πλάτος). Η τιμή αυτή είναι είναι πάρα πολύ μικρή συγκρινόμενη με την επιτάχυνση της βαρύτητας σε ένα μέσο γεωγραφικό πλάτος (G=9,8 m/sec^2) όμως παρόλα αυτά είναι η υπεύθυνη για τη μεταβολή της G σε σχέση με το γεωγραφικό πλάτος (από 9,7799 έως 9,8321) (Alonso & Finn, 1981, σελ. 139).



Σχήμα 6.5

Για το $\mathbf{r}_o$, ένα σημείο ακίνητο σε σχέση με την επιφάνεια της γης, έχουμε ήδη περιλάβει τις επιπτώσεις της Ω στην τοπική επιτάχυνση (σε **g** και **k**). Για ένα μικρό εκκρεμές σε σχέση με το μέγεθος της γης, το **r** δεν είναι αρκετά μακριά από το $\mathbf{r}_o$ και η Ω είναι μικρή, έτσι ο όρος $\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$ στην (8) απαλοίφεται και οι (7), (8) δίνουν μαζί την εξίσωση της κίνησης του εκκρεμούς στο σύστημα {**O,i,j,k**}:

$$m(\mathbf{r''}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r'})=\mathbf{T}-mg\mathbf{k} \text{ ή } m\mathbf{r''}=\mathbf{T}-mg\mathbf{k}-2m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r'}) \quad (9).$$

Στη σχέση (9) οι όροι περιλαμβάνουν: την **T** τάση του νήματος, το «φαινόμενο» βάρος mg**k** στο περιστρεφόμενο σύστημα και το $m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r'})$, που εξαρτάται από την ταχύτητα **r'** του εκκρεμούς και την περιστροφή **Ω** της γης και αποτελεί τη «φανταστική» **δύναμη Coriolis** ($\mathbf{F_c}$ στη συνέχεια).

Αναλύοντας την (9) ως προς το αδρανειακό σύστημα συν/νων (που είναι σταθερό σε σχέση με τη γη) προκύπτει:

$$m\mathbf{r''}=\mathbf{T}-mg\mathbf{k}-2m[(-\Omega\cos v_0\mathbf{i}+\Omega\sin v_0\mathbf{k})\times\{(r_x)'\mathbf{i}+(r_y)'\mathbf{j}+(r_z)'\mathbf{k}\}]=$$
$$=\mathbf{T}-mg\mathbf{k}-2m[(-\Omega(r_x)'\sin v_0\mathbf{i}+\Omega[(r_x)'\sin v_0+(r_z)'\cos v_o]\mathbf{j}+(-\Omega(r_y)'\cos v_0)\mathbf{k}] \text{ ή}$$

$$m(r_x)''=T_x+2m\Omega(r_y)'\sin v_0 y' \text{ ή } mx''=T_x+2m\Omega\sin v_0 y' \quad (9.1),$$
$$m(r_y)''=T_y-2m\Omega[(r_x)'\sin v_0+(r_z)'\cos v_0] \text{ ή } my''=T_y-2m\Omega(\sin v_0 x'+\cos v_0 z') \quad (9.2)$$
$$m(r_z)''=T_z-mg+2m\Omega(r_y)'\cos v_0 \text{ ή } mz''=T_z-mg+2m\Omega\cos v_0 y' \quad (9.3).$$

Για z πολύ μικρότερο του L (πράγμα που συμβαίνει και στις αιωρήσεις του εκκεμούς του), η κίνηση στην κάθετη διεύθυνση z είναι μικρή και έτσι οι z' και z'' είναι προσεγγιστικά ίσες με μηδέν. Η εξίσωση (9.3) τότε γίνεται:

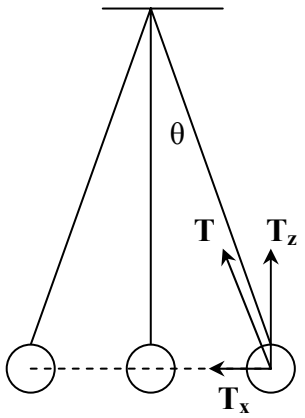
$$0=T_z-mg+2m\Omega\cos v_0 y' \text{ ή } T_z=mg-2m\Omega\cos v_0 y' \quad (9.3^*),$$

Αλλά ο όρος $-2m\Omega\cos v_0 y'$ είναι πολύ μικρός (Ω μικρή) άρα $T_z=mg$.

Για μικρές ταλαντώσεις (τα x,y,z πολύ μικρότερα του L) η γωνία εκτροπής θ ενός εκκρεμμούς από τη θέση ισορροπίας του είναι πολύ μικρή άρα το $\cos\theta\approx 1$ και επομένως $T_z=T\cos\theta\approx T$. Επίσης, για τη γωνία αυτή θα είναι $\sin\theta\approx\tan\theta=\frac{x}{L}$, όπου x η απόσταση του εκκρεμούς από τη θέση ισορροπίας (σχήμα 6.6).

Τελικά, $T_x=-T\sin\theta=-T\tan\theta=-T\frac{x}{L}=-\frac{Tx}{L}$ και λόγω συμμετρίας $T_y=-\frac{Ty}{L}$.

Τις σχέσεις $T_x=-\frac{Tx}{L}$, $T_y=-\frac{Ty}{L}$, $T_z=T$ τις καλούμε (10).



Σχήμα 6.6

Η (9.1) μέσω των (10) γράφεται: $mx''=-\frac{Tx}{L}+2m\Omega\sin v_0 y'$. Αλλά $T_z=T=mg$ οπότε:

$$mx''=-\frac{mgx}{L}+2m\Omega\sin v_0 y'=-m\frac{g}{L}x+2m\Omega\sin v_0 y'=-m\omega^2 x+2m\Omega\sin v_0 y',$$

γιατί για το εκκρεμές ισχύει $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς) και $\omega=\frac{2\pi}{T}$ (γωνιακή ή κυκλική συχνότητα του εκκρεμούς όταν δεν έχουμε περιστροφή του). Άρα: $\omega^2=\frac{g}{L}$ και και με απλοποίηση του όρου m προκύπτει:

$$x''-2\Omega\sin v_0 y'+\omega^2 x=0 \quad (9.1^*).$$

Όμοια, με z' μικρό: $$y''+2\Omega\sin v_0 x'+\omega^2 y=0 \quad (9.2^*).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη μιγαδική μεταβλητή $Z=x+iy=|Z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|Z|\,e^{i\phi}$, φ το όρισμα του μιγαδικού, η οποία παριστάνει τη θέση του εκκρεμούς στο οριζόντιο (εφαπτόμενο στην επιφάνεια της γης) επίπεδο. Πολ/ντας την (9.2*) με i και προσθέτοντας την στην (9.1*) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο:

$$x''+iy''-2\Omega\sin v_0 y'+2i\Omega\sin v_0 x'+\omega^2 x+i\omega^2 y=0 \text{ ή}$$
$$(x''+iy'')+2i\Omega\sin v_0(x'+iy')+\omega^2(x+iy)=0 \text{ ή}$$
$$Z''+2i\Omega\sin v_0 Z'+\omega^2 Z=0 \quad (11).$$

Η εξίσωση (11) είναι μια μορφή της εξίσωσης που ικανοποιεί ένας αρμονικός ταλαντωτής ($Z''+\omega^2 Z=0$ είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης που ικανοποιεί ένας αρμονικός ταλαντωτής με λύσεις της μορφής $Z=\alpha\cos\omega t+i\beta\sin\omega t$ και α,β πραγματικές σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες) αλλά πρέπει να επισημανθεί ότι ο συντελεστής $2i\Omega\sin v_0$ (του όρου Z') είναι καθαρά φανταστικός και επομένως δε συνεισφέρει στην απόσβεση της ταλάντωσης.

Για να υπήρχε συνεισφορά στην ταλάντωση θα έπρεπε οι (9.1*), (9.2*) να ήταν εξισώσεις που να περιλαμβάνουν μόνον τους όρους x'', x', x και y'', y', y και όχι τους x'', y', x και x'', y', x αντίστοιχα. Ο όρος y' και οι όροι x'', x στην (9.1*) προκαλούν σύζευξη των ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται κατά τις διευθύνσεις των x και y και όχι απόσβεση κατά τη διεύθυνση των x. Αντίστοιχα για την (9.2*).

Λύση και διερεύνηση της εξίσωσης (11)

Θυμίζουμε ότι ήδη έχουμε υποθέσει πως, εξαιτίας της αργής περιστροφής της γης (Ω πολύ μικρό) το μέτρο της φυγόκεντρης επιτάχυνσης $|-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})|\approx\Omega^2\mathbf{r}\approx 0$ ή $\Omega^2\approx 0$. Το Ω^2 επομένως είναι πολύ μικρό σε σχέση με το ω^2 του εκκρεμούς.

Για την εξίσωση (11) είναι $\Delta=-4\Omega^2\sin^2 v_0-4\omega^2=-4(\Omega^2\sin^2 v_0+\omega^2)<0$, οπότε:

$$z_{1,2}=\frac{-2i\Omega\sin v_0\pm 2i(\Omega^2\sin v_0+\omega^2)}{2}=-i\Omega\sin v_0\pm i\omega$$

και οι λύσεις της (11) δίνονται από τον τύπο:

$$Z=A\,e^{z_1 t}+B\,e^{z_2 t}=A\,e^{-i\Omega\sin v_0 t+\omega t}+B\,e^{-i\Omega\sin v_0 t-\omega t}=(A\,e^{i\omega t}+B\,e^{-i\omega t})\,e^{-i\Omega\sin v_0 t}\quad(12),$$

με τις A,B μιγαδικές σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες της θέσης και της ταχύτητας.

■ Αν $\Omega=0$ (και $\omega\neq 0$), δηλαδή αν η γη δεν περιστρέφεται, τότε η (11) γίνεται: $Z''+\omega^2 Z=0$ και έχει για λύσεις τις $Z=A\,e^{i\omega t}+B\,e^{-i\omega t}$, A,B μιγαδικοί.

◆ Για τις διάφορες τιμές των A,B με $A+B\neq 0$ και $A-B\neq 0$, το εκκρεμές διαγράφει μια (γενικά) ελλειπτική τροχιά (ή κυκλική ως ειδική περίπτωση), με τους άξονες της έλλειψης να μη μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο ($\Omega=0=\Omega^2$).

Για παράδειγμα:

Αν οι A, B είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$Z=A(\cos\omega t+i\sin\omega t)+B(\cos\omega t-i\sin\omega t)=(A+B)\cos\omega t+i(A-B)\sin\omega t$$

και η εξίσωση της έλλειψης είναι η: $\dfrac{x^2}{(A+B)^2}+\dfrac{y^2}{(A-B)^2}=1$

Επειδή τα A+B και A-B είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί οι άξονες δε μεταβάλλονται με το χρόνο και επομένως δεν υπάρχει μετάπτωσή τους.

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε τον A πραγματικό και το B=0, τότε το εκκρεμμές διαγράφει έναν κύκλο, τον $x^2+y^2=A^2$.

◆ Αν το A=B τότε $Z=A(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})=2A\cos\omega t$ και η τροχιά αντιστοιχεί σε κίνηση που εκφράζει ταλάντωση ως προς τον x άξονα με διέλευση από τη θέση ισορροπίας (Z=0 για $\cos\omega t=0$ ή $t=\dfrac{\kappa\pi+\pi/2}{\omega}$, κ φυσικός).

◆ Αν το A=-B τότε $Z=A(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})=2Ai\sin\omega t$ και η τροχιά αντιστοιχεί σε κίνηση που εκφράζει ταλάντωση ως προς τον y άξονα με διέλευση από τη θέση ισορροπίας.

Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση με $\dfrac{2\pi}{\omega}$, ενώ η ίδια κατάσταση εμφανίζεται αν το εκκρεμές αιωρείται στον Ισημερινό όπου και είναι $v_0=0$ άρα $\sin v_0=0$.

■ Αν $\omega=0$ (και $\Omega\neq 0$, $v_0\neq 0$), τότε έχουμε την περίπτωση που το εκκρεμές λειτουργεί ως ένα απλό σωμάτιο που κινείται μόνο λόγω της περιστροφής της γης πάνω στην οποία βρίσκεται και όχι λόγω της δικής του αιώρησης. Στην περίπτωση αυτή η (11) γίνεται: $Z=C\,e^{-i\Omega\sin v_0 t}$, με C μιγαδικό.

Για τις διάφορες τιμές του $C\neq 0$ το εκκρεμές διαγράφει έναν κύκλο (με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $-\Omega\sin v_0$ μέσα σε μια περίοδο:

$$\frac{2\pi}{-\Omega\sin v_0}=\frac{2\pi}{-\Omega}\cdot\frac{1}{\sin v_0}=-T_{\gamma\eta\varsigma}\cdot\frac{1}{\sin v_0}=-\frac{T_{\gamma\eta\varsigma}}{\sin v_0}\ \text{ώρες},$$

$\sin v_0<0$ για το Νότιο Ημισφαίριο και $T_{\gamma\eta\varsigma}$ η περίοδος περιστροφής της γης (περίπου 24 ώρες).

■ Αν $\Omega \neq 0$ και $\omega \neq 0$, $\sin v_0<0$ (πάντα όμως $\Omega^2 \approx 0$) τότε πρόκειται για την περίπτωση κατά την οποία το εκκρεμές αιωρείται ενώ, ταυτόχρονα, η γη περιστρέφεται (που είναι και η περίπτωση που κυρίως μας ενδιαφέρει).

Στην περίπτωση που η τροχιά του εκκρεμούς (το επίπεδο αίωρησής του) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας (αρχή του μη αδρανειακού συστήματος) τότε η τροχιά αυτή, λόγω συμμετρίας, θα παραμένει σταθερή (δε θα παρουσιάζει μετάπτωση) ως προς το αδρανειακό σύστημα (αντίστοιχη είναι και η περίπτωση του Ισημερινού όπου $\sin v_0=0$).

Αν όμως η τροχιά δε διέρχεται από τη θέση ισορροπίας (αν το αφήσουμε για παράδειγμα από το σημείο στο οποίο το εκκρεμές παρουσιάζει το μέγιστο πλάτος), η τροχιά θα αποκλίνει-μεταπίπτει (όπως το βλέπουμε από πάνω ή αλλιώς ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα). Προκειμένου τώρα να εξασφαλίσουμε ότι η μετάπτωση αυτή δεν οφείλεται σε ασυμμετρίες στη στήριξη ή άλλου είδους αντιστάσεις, θεωρούμε το εκκρεμές του Foucaul με μεγάλο καλώδιο, σταθερά και συμμετρικά συναρμολογημένο.

Η θεώρηση αυτή είναι αναγκαία και για έναν επιπλεόν λόγο: ένα πεπερασμένο εκκρεμές που η αιώρηση του δεν πραγματοποιείται σε ένα επίπεδο διαγράφει μια ελλειπτική τροχιά της οποίας οι άξονες μεταπίπτουν (στη διεύθυνση της κίνησης) ακόμη και σε ένα Νευτώνιο πλαίσιο. Αν η τροχιά του εκκρεμούς διέρχεται από την αρχή, λόγω συμμετρίας αυτή δε θα μεταπίπτει. Προκειμένου τώρα να διαπιστωθεί η μετάπτωση που οφείλεται στην περιστροφή της γης το εκκρεμές θα πρέπει να μετακινηθεί ελαφρά κατά μια μικρή γωνία και στη φάση αυτή οποιεσδήποτε κατασκευαστικές και μηχανικές «ατέλειες» μπορεί να έχουν κρίσιμο ρόλο στην εξαγωγή λανθασμένων συμπερασμάτων

Ποια θα είναι όμως η διεύθυνση της μετάπτωσης;

Επειδή στο Νότιο Ημισφαίριο είναι $\sin v_0<0$ ενώ το $\Omega>0$ (γη περιστρέφεται από τα Δυτικά προς τα Ανατολικά κατά φορά δηλαδή αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού-θετική), ο όρος $-\Omega \sin v_0>0$, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης του εκκρεμούς είναι θετική, δηλαδή το επίπεδο αιώρησης του εκκρεμούς «στρίβει» σε κάθε αιώρησή του προς προς τα αριστερά Το ίδιο ακριβώς θα συμβαίνει και στο Νότιο Πόλο. Στο Βόρειο Ημισφαίριο και στο Βόρειο Πόλο, αντίστοιχα, η φορά μετάπτωσης θα είναι αυτή των δεικτών του ρολογιού (αρνητική).

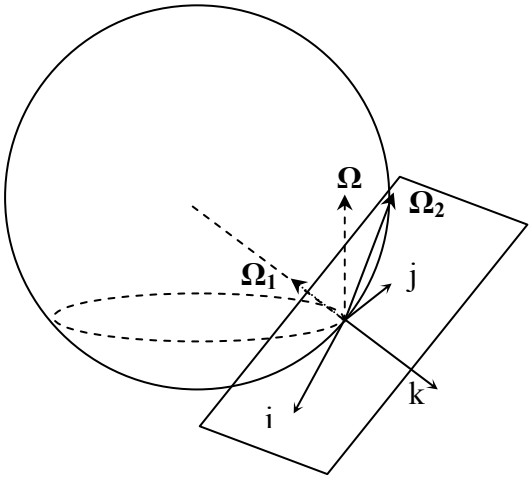
Και στην περίπτωση αυτή η περίοδος μετάπτωσης θα είναι ίση με:

$$T=\frac{2\pi}{-\Omega \sin v_0}=-\frac{T_{\gamma\eta\varsigma}}{\sin v_0}=-\frac{24}{\sin v_0} \text{ ώρες.}$$

Προφανώς στους δύο πόλους έχουμε περίοδο μετάπτωσης (μιας πλήρους περιστροφής) ίση με 24 ώρες ($\sin v_0=1$ και -1 αντίστοιχα), στα διάφορα άλλα γεωγραφικά πλάτη περίοδο μεγαλύτερη από 24 ώρες με αυξητική τάση όσο προχωράμε προς τον Ισημερινό, ενώ στο Ισημερινό η περίοδος αυτή είναι «άπειρη», μια και δεν παρατηρείται καμιά μετάπτωση του εκκρεμούς.

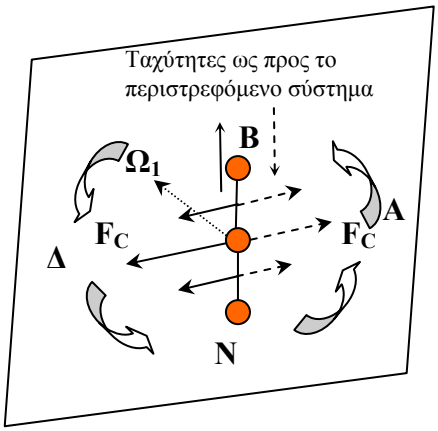
Τα προηγούμενα συμπεράσματα και για την περίπτωση του Νοτίου ημισφαιρίου (αντίστοιχα συμπεράσματα θα έχουμε για το Βόρειο), θα μπορούσαν, με βάση το σχήμα (6.2), να αποδοθούν εποπτικά με τη μορφή των σχημάτων (6.7).

Συγκεκριμένα: Η ανάλυση του διανύσματος $\mathbf{\Omega}$ ως προς τις διευθύνσεις των $\mathbf{i}$ και $\mathbf{k}$ δίνει αντίστοιχα τις συνιστώσες $\mathbf{\Omega_1}$ και $\mathbf{\Omega_1}$ (σχήμα 6.7α).

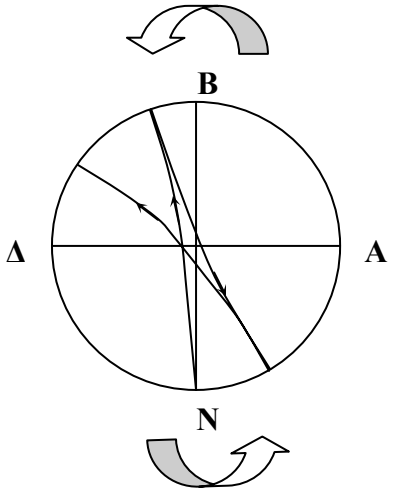


Σχήμα 6.7α

Η συνιστώσα $\mathbf{\Omega_1}$ έχει μέτρο $-\Omega\sin v_0$ και η $\mathbf{\Omega_2}$ $-\Omega\cos v_0$, με Ω το μέτρο της **Ω**. Για την κίνηση-αιώρηση του εκκρεμούς στη **διεύθυνση Βορράς-Νότος** η συνιστώσα $\mathbf{\Omega_2}$ δε συνεισφέρει στη μετάπτωση μια και είναι $\mathbf{\Omega_2}\times\mathbf{v_r}=\mathbf{0}$, όπου $\mathbf{v_r}=\mathbf{r'}$ η (σχετική) ταχύτητα του εκκρεμούς ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα. Η κατεύθυνση της δύναμης Coriolis $\mathbf{F_C}$ κατά την αιώρηση του εκκρεμούς φαίνεται στο σχήμα (6.7β) ενώ η προβολή της τροχιάς της αιώρησης του εκκρεμούς πάνω στο οριζόντιο επίπεδο στο συγκεκριμένο σημείο της γης φαίνεται στο σχήμα (6.7γ). Η μετάπτωση του επιπέδου αιώρησης (όπως το βλέπουμε από πάνω) είναι συνεχώς προς τα αριστερά της φοράς κίνησης (θετική φορά).

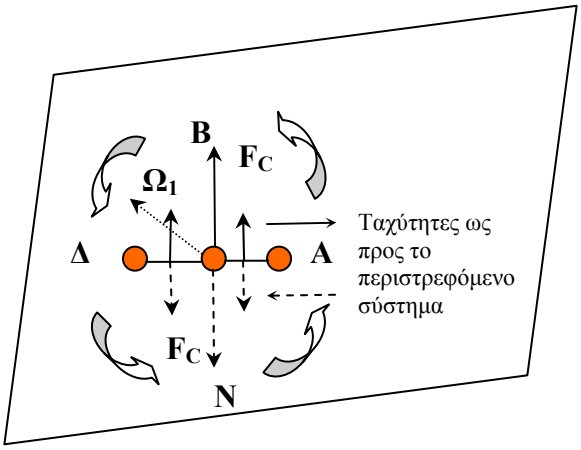


Σχήμα 6.7β

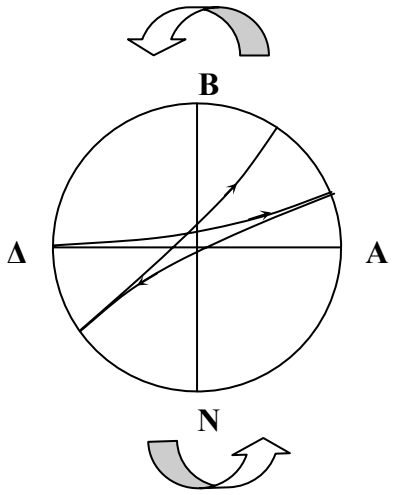


Σχήμα 6.7γ

Για την κίνηση του εκκρεμούς στη **διεύθυνση Ανατολή–Δύση** η εποπτική απόδοση των συμπερασμάτων θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια των σχημάτων (6.7δ) και (6.7ε). Και στην περίπτωση αυτή η συνιστώσα $\mathbf{\Omega_2}$ δε συνεισφέρει στη μετάπτωση μια και το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{\Omega_2}\times\mathbf{v_r}$ έχει διεύθυνση που βρίσκεται στο επίπεδο αιώρησης. Η μετάπτωση του επιπέδου αιώρησης του εκκρεμούς (όπως το βλέπουμε από πάνω) είναι και πάλι προς τα αριστερά τη φοράς κίνησης (θετική φορά).

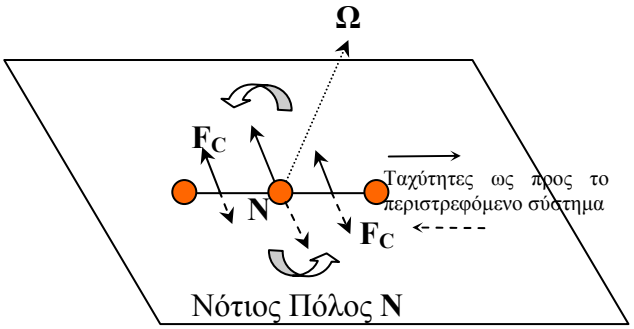


Σχήμα 6.7δ



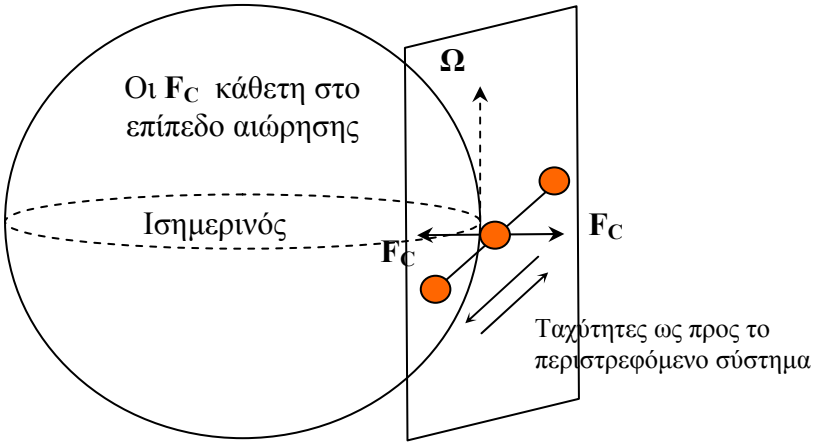
Σχήμα 6.7ε

Στην περίπτωση του Νότιου Πόλου το διάνυσμα της **Ω** είναι κάθετο προς τις σχετικές ταχύτητες $\mathbf{v_r}$, οπότε και έχουμε τη μέγιστη τιμή της $\mathbf{F_C}$ ανεξαρτήτως του προσανατολισμού της τροχιάς της αιώρησης και η φορά της μετάπτωσης είναι πάλι προς τα αριστερά, όπως φαίνεται από κάτω στο σχήμα 6.7ζ.



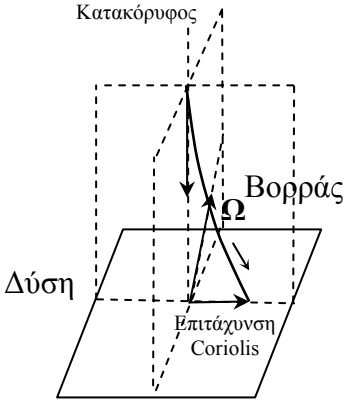
Σχήμα 6.7ζ

Όσον αφορά την περίπτωση του Ισημερινού και για την κατεύθυνση της αιώρησης Βορράς-Νότος, η $\mathbf{F_C=\Omega_2\times v_r=0}$ άρα δεν παρατηρείται μετάπτωση του επιπέδου αιώρησης ενώ για την περίπτωση της κατεύθυνσης της αιώρησης στη διεύθυνση Ανατολή-Δύση ισχύει η κατάσταση του σχήματος 6.8 και όπου η $\mathbf{F_C}$ είναι κάθετη στο επίπεδο αιώρησης άρα δεν προκαλεί μετάπτωση.



Σχήμα 6.8

Στο σημείο αυτό μπορεί να ερμηνευτεί και ένα άλλο αποτέλεσμα της επίδρασης του «φαινομένου Coriolis»: η **απόκλιση προς τα δεξιά της τροχιάς πτώσης του**ς, όλων των σωμάτων που πραγματοποιούν ελεύθερη πτώση ανεξάρτητα από το Ημισφαίριο στο οποίο αυτή πραγματοποιείται (σχήμα 6.9). Θα μπορούσε μάλιστα αυτό να αποτελέσει μια ακόμη απόδειξη της περιστροφής της γης. Οι Gauss και Laplace, υπολογίζουν το 1801 μια απόκλιση 8,8cm (μέση τιμή 8,5cm) κατά την πτώση 29 σωμάτων σε ένα πηγάδι βάθους 90m δίνοντας ταυτόχρονα και τις πλήρεις 3-διάστατες εξισώσεις για τις κινήσεις στην περιστρεφόμενη γη και γίνονται έτσι οι πρώτοι που συνεισφέρουν στην κατανόηση του φαινομένου.



Σχήμα 6.9

Επιπλοκές

Στη μελέτη που προγήθηκε τα πράγματα είναι πιο σύνθετα από ότι παρουσιάστηκαν. Σε όλα τα εκκρεμή, ακόμη και σε αυτά που μετράνε το χρόνο, εμφανίζεται μια επιπλοκή.

Στα προηγούμενα θεωρήσαμε κάποια στιγμή και για τη συνέχεια ότι Ω=0 και $|-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})|=0$. Γενικά όμως αυτό δε συμβαίνει. Θεωρώντας τώρα τις συνιστώσες x,y της εξίσωσης (8) ($\mathbf{r}''=\mathbf{r}''+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$, προκύπτει μια ασυμμετρία στις διευθύνσεις των x,y (υποτίθεται πάντα ότι z",z' είναι πολύ μικρά, μια και η κίνηση στην z διεύθυνση είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος του καλωδίου του εκκρεμούς):

$$x''-2\Omega\sin v_0 y'+(\omega^2-\Omega^2\sin v_0^2)x = 0 \text{ και } y''+2\Omega\sin v_0 x'+(\omega^2-\Omega^2)\, y = 0 \text{ ή}$$

$$x''-2\Omega\sin v_0 y'+(\frac{g}{L}-\Omega^2\sin v_0^2)x = 0 \text{ και } y''+2\Omega\sin v_0 x'+(\frac{g}{L}-\Omega^2)\, y = 0.$$

(Μπορεί να παρατηρήσει κάποιος πως για Ω πολύ μικρό-Ω=0-ή στην περίπτωση των Πόλων-$\sin v_0$=0-προκύπτουν οι προηγούμενες σχέσεις (9.1*) και (9.2*)).

Επομένως, οι ταλαντώσεις στις διευθύνσεις x (Βόρεια-Νότια) και y (Ανατολική-Δυτική) αντίστοιχα, γίνονται με διαφορετικές συχνότητες (γιατί $\omega^2-\Omega^2\sin v_0^2 \neq \omega^2-\Omega^2$). Για δε τους Πόλους, η διαφοροποίηση στις διευθύνσεις δεν παίζει κανένα ρόλο, μια και $\sin v_0=0$. Ως προς τον άξονα x η γωνιακή συχνότητα τώρα θα είναι ίση με: $\omega_x^2=\omega^2-\Omega^2\sin v_0^2$ ενώ ως προς τον άξονα y: $\omega_y^2=\omega^2-\Omega^2$, όπου $\omega^2=\frac{g}{L}$.

Μια πιο «μηχανική-δυναμική» ερμηνεία της δύναμης Coriolis και του ρόλου της στη μετάπτωση του εκκρεμούς.

Μέχρι στιγμής είδαμε την δύναμη Coriolis να προκύπτει ως αποτέλεσμα ενός φορμαλιστικού μετασχηματισμού συν/νων μεταξύ ενός αδρανειακού και ενός μη

αδρανειακού συστήματος και μέσω μιας τεχνικής βασιζόμενης ουσιαστικά στην Κινηματική. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η φυσική της σπουδαιότητα να μην γίνεται απολύτως κατανοητή για απλά μηχανικά συστήματα όπως το εκκρεμές, αλλά και για τις διαδικασίες της ατμόσφαιρας όπου η παρουσία της είναι ιδιαίτερα σημαντική. Αυτό έχει άμεση και σημαντική επίπτωση στις διδακτικές προσεγγίσεις του θέματος (Persson, 1998, σελ. 1375):

Η ευκολία των Μαθηματικών είναι το τίμημα, με τη μορφή της παιδαγωγικής δυσκολίας, που πληρώνεται προκειμένου να γεφυρωθεί το κενό μεταξύ της φορμαλιστικής προσέγγισης και της γνήσια φυσικής κατανόησης.

Η διδακτική δυσκολία της φύσης της δύναμης Coriolis (και του μηχανισμού μετάπτωσης) σχετίζεται με τα ζητήματα της σχετικής κίνησης, πράγμα που καθιστά δύσκολη την εποπτική της κατανόηση (αντίστοιχη δυσκολία αντιμετωπίζεται και στην κατανόηση της κίνησης χωρίς τριβή). Το αποτέλεσμα είναι, όσον αφορά την κίνηση των σωμάτων, οι φοιτητές να παραμένουν εγκλωβισμένοι σε «απλοϊκές» αντιλήψεις και ιδέες του τύπου: *«οι δυνάμεις κινούν τα σώματα και η απουσία τους τα ακινητοποιεί»*.

Οι Αριστοτελικού τύπου ιδέες του «κοινού νου» που αναπτύσσονται ακόμη και σήμερα γύρω από το θέμα, αναδεικνύονται μέσα από την επιστημολογική εξέλιξη του θέματος και τα (λανθασμένα) μοντέλα που έχουν κατά καιρούς προταθεί και αφορούν: τη διατήρηση της απόλυτης ταχύτητας ενός περιστρεφόμενου σώματος (υποβιβασμός του ρόλου της δύναμης Coriolis), τη μοναδικότητα της δύναμης Coriolis ως αιτία της μετάπτωσης σε ένα περιστρεφόμενο πλαίσιο (υπερτονισμός του ρόλου της δύναμης Coriolis), τη διαφοροποίηση στην αξιολόγηση των «φανταστικών» δυνάμεων ως «περισσότερο» ή «λιγότερο φανταστικών» (και η φυγόκεντρη δύναμη είναι μια «φανταστική δύναμη» αλλά η εξοικείωσή μας με αυτή την καθιστά περισσότερο αποδεκτή), το πώς μπορεί μια «φανταστική δύναμη» να προκαλέσει μετάπτωση (πάντα σε σχέση με τα μακρινά άστρα) ενώ από την άλλη να μην παράγει έργο.

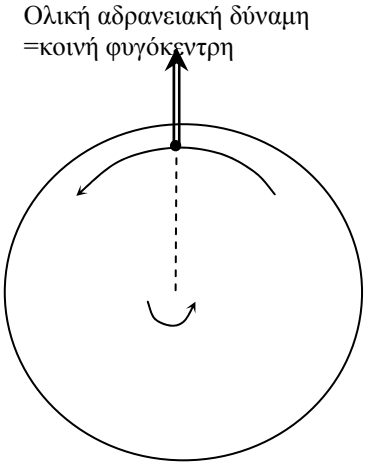
Όσον αφορά το τελευταίο, αυτό οφείλεται στο ότι η δύναμη Coriolis είναι κάθετη στη σχετική κίνηση (για την ακρίβεια, στην ταχύτητα του εκκρεμούς $\mathbf{r'}=\mathbf{v_r}$ ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα) και στην $\mathbf{\Omega}$. Για το λόγο αυτό και όχι μόνο επειδή είναι αδρανειακή δύναμη (για την ακρίβεια η μια συνιστώσα της ολικής αδρανειακής δύναμης που εμφανίζεται κατά την κίνηση ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα· η άλλη συνιστώσα είναι η φυγόκεντρος, αμελητέα κατά την αιώρηση του εκκρεμούς), η δύναμη Coriolis δεν παράγει έργο (δεν αλλάζει ταχύτητα και κινητική ενέργεια) παρά μόνο τη διεύθυνση της κίνησης με τον τρόπο που θα δούμε παρακάτω. Το ότι δεν παράγει έργο δε σημαίνει ότι δεν κάνει και τίποτα! Το αντίθετο μάλιστα. (Persson, 2005, σελ. 1-2,8).

Επειδή (Comte στο Persson, 1998, σελ 1373): *«Προκειμένου να κατανοήσουμε μια επιστήμη είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε την ιστορία της»*, ας δούμε σύντομα το ιστορικό της ανακάλυψης της δύναμης Coriolis, του ρόλου της στην κίνηση σε περιστρεφόμενα συστήματα και τις κύριες εφαρμογές της.

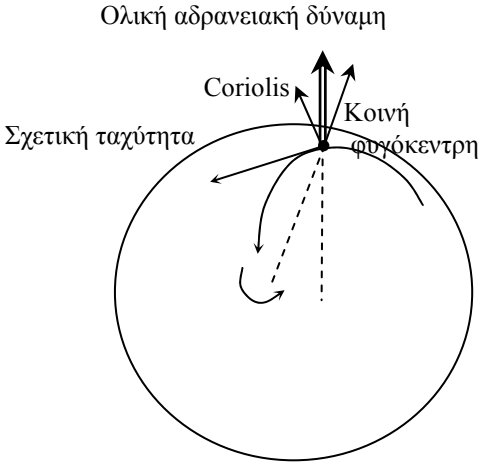
Μέχρι και το 1885, οπότε σχεδόν τα πάντα σχετικά με τη δύναμη Coriolis ήταν γνωστά και ευρέως δημοσιευμένα, τα πράγματα δεν ήταν καθόλου απλά και ξεκάθαρα. Ενδιάμεσα προτείνονται διάφορες ερμηνείες που καθεμιά συνεισφέρει στη διασαφήνιση του φαινομένου, αλλά που παρουσιάζουν όμως ελλείψεις, αδύνατα σημεία και δίνουν ανεπαρκείς ή παραπλανητικές ερμηνείες (Hadley, Clairaut, Laplace, Tracy,…) (Persson, 2005, σελ. 6-7, 16).

Η προσέγγιση του Coriolis που έθεσε τα πράγματα στη σωστή του βάση προέκυψε ως το γόνιμο αποτέλεσμα μια γενικότερης συζήτησης για τη δυναμική ενός περιστρεφόμενου συστήματος. Ήδη από το 1829, ως καθηγητής στο Ecole Polytechnique, δημοσιεύει σε ένα εγχειρίδιο μηχανικής με προσανατολισμό τη βιομηχανική παραγωγή, τον σωστό τύπο για την κινητική ενέργεια ($E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}mv^2$) και το 1831 προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ $E_{\kappa\iota\nu}$ και $E_{\delta\upsilon\nu}$ σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα.

Η «δύναμη μετάπτωσης» εμφανίζεται εντελώς ξεκάθαρα το 1835 κατά τη λύση ενός προβλήματος που σχετίζονταν με το σχεδιασμό κάποιων τύπων μηχανών με χωριστά μέρη τα οποία κινούνταν ενώ ταυτόχρονα περιστρέφονταν. Εκεί δέχεται ότι για ένα περιστρεφόμενο σύστημα η **ολική αδρανειακή δύναμη είναι ίση με την κοινή φυγόκεντρη** αν ένα σώμα είναι σταθερό ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα (Σχήμα 6.10α), ενώ **είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της φυγόκεντρης και μιας άλλης δύναμης** (συνιστώσας) στην περίπτωση που το σώμα κινείται (Σχήμα 6.10β). Η άλλη αυτή συνιστώσα είναι αυτή που σήμερα καλούμε δύναμη Coriolis και είναι κάθετη στη σχετική ταχύτητα του σώματος (Persson, 2005, σελ. 7-10).



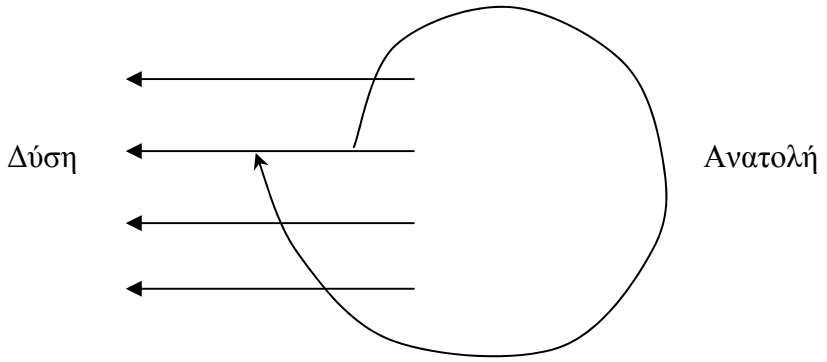
Σχήμα 6.10α



Σχήμα 6.10β

Στα παραπάνω σχήματα (6.10α και 6.10β) έχουμε την περίπτωση ενός περιστρεφόμενου δίσκου και ενός σώματος πάνω σε αυτόν (ακίνητο στην πρώτη περίπτωση και κινούμενο στη δεύτερη). Η σχετική ταχύτητα έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιά κίνησης και η δύναμη Coriolis είναι κάθετη σε αυτή. Η διεύθυνση της ολικής αδρανειακής δύναμης είναι πάντα η κάθετη διεύθυνση (τοπική κάθετος) στην τροχιά κίνησης, ενώ η διεύθυνση της φυγόκεντρης είναι η διεύθυνση που συνδέει το κέντρο περιστροφής με το σώμα.

Στη συνέχεια, ο William Ferrel (1817-1891) το 1858, διορθώνει οποιεσδήποτε παρανοήσεις υπήρχαν σχετικά με το μηχανισμό μετάπτωση σε οποιαδήποτε διεύθυνση («Νόμος Ferrel» στο Persson, 2005, σελ. 11): *«Αν ένα σώμα κινείται σε οποιαδήποτε διεύθυνση τότε υπάρχει μια δύναμη που οφείλεται στην περιστροφή της γης και η οποία κατευθύνεται προς τα δεξιά στο Βόρειο Ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο Νότιο»*. Ο ίδιος φαίνεται να είναι ο πρώτος που αναγνωρίζει την κίνηση του **«αδρανειακού κύκλου»** (αποτελεί την εξιδανικευμένη συμπεριφορά της κίνησης μιας μάζας που περιορίζεται σε οριζόντια κίνηση-εφαπτόμενο επίπεδο-πάνω στη γη και την οποία κίνηση τη θεωρούμε ως προς ένα μη αδρανειακό σύστημα εφαρμοσμένο πάνω στη γη) (σχήμα 6.11 το οποίο αφορά το Βόρειο Ημισφαίριο).

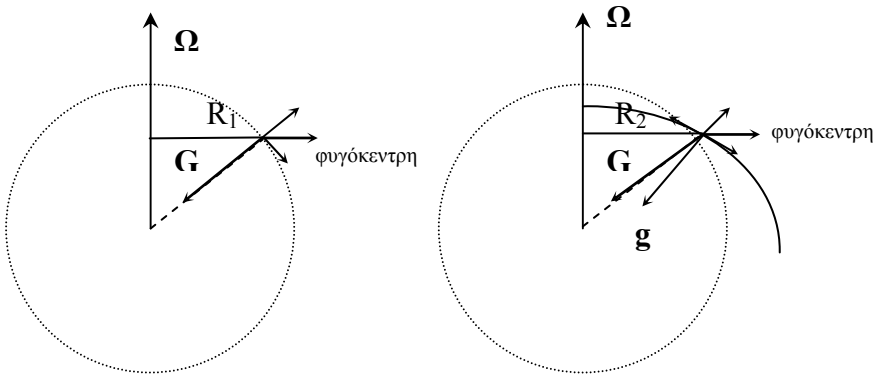


Σχήμα 6.11

Οι οριζόντιες μετατοπίσεις θεωρούμε ότι οφείλονται μόνο στην επίδραση της δύναμης Coriolis) (Ferrel στο Persson, 2005, σελ. 11): *«Αν ένα σώμα κινείται σε οποιαδήποτε διεύθυνση διαγράφει την περιφέρεια ενός κύκλου. Αν το εύρος της κίνησης είναι μικρό η ακτίνα του κύκλου είναι είναι ίση με* $\frac{V}{2\,\Omega sinv_0}$ *και ο χρόνος περιστροφής είναι ίσος με* $\frac{T_{\gamma\eta\varsigma}}{2\,sinv_0}$ *».* Αναγνωρίζει επίσης ότι όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση από τον κύκλο αλλά δε λαμβάνει υπόψιν το **«β-φαινόμενο»** (μεταφορά των αδρανειακών κύκλων προς τα δυτικά με τη μορφή σπειρών και όχι κύκλων, εξαιτίας της μεταβολής της δύναμης Coriolis με το γεωγραφικό πλάτος) (Phillips, 2000, σελ. 299 και Persson, 2005, σελ. 3).

Είδαμε προηγούμενα στην περίπτωση του περιστρεφόμενου δίσκου (2-διάστατη περίπτωση) τη «φυσική υφή» της δύναμης Coriolis. Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στην 3-διάστατη περίπτωση της γης.

Καταρχήν, η γη έχει ελλειπτικό σχήμα (πεπλατυσμένη σφαίρα) και αυτό οφείλεται στα αρχικά στάδια διαμόρφωσής της ως πλανήτης. Συγκεκριμένα, λόγω της περιστροφής της η φυγόκεντρος δύναμη «πίεσε» τα ελαφρά και μαλακά υλικά προς τον Ισημερινό με αποτέλεσμα να εμφανιστεί η φαινόμενη επιτάχυνση **g** στη διεύθυνση της τοπικής καθέτου, η οποία είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της (πραγματικής) βαρύτητας **G** και της φυγόκεντρης Ω^2R_2.



Σχήμα 6.12

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής επήλθε κάποια στιγμή ισορροπία, όταν πια η οριζόντια συνιστώσα (στο εφαπτόμενο επίπεδο) της βαρύτητας **G** (με φορά προς τους Πόλους και ίση με το μηδέν στους Πόλους και τον Ισημερινό) εξισσορόπησε την οριζόντια συνιστώσα της φυγόκεντρης δύναμης (με φορά προς τον Ισημερινό) (σχήμα 6.12, το οποίο αφορά το Βόρειο Ημισφαίριο).

Ένα σταθερό μη περιστρεφόμενο σώμα που βρίσκεται στην επιφάνεια της γης παραμένει στη θέση του εξαιτίας της ισορροπίας των παραπάνω οριζόντιων δυνάμεων. Όταν όμως το σώμα κινηθεί τότε η παραπάνω ισορροπία διαταράσεται.

Για παράδειγμα, μια **κίνηση προς τα Ανατολικά** αυξάνει τη φυγόκεντρο δύναμη και το σώμα αποκλίνει προς τον Ισημερινό (προς τα δεξιά της κίνησης στο Βόρειο Ημισφαίριο και αντίθετα στο Νότιο). Αντίθετα μια **κίνηση προς τα Δυτικά** «αδυνατίζει» τη φυγόκεντρο με αποτέλεσμα να μην μπορεί πια να εξισορροπήσει την οριζόντια βαρυτική συνιστώσα και το σώμα να κινείται προς τους Πόλους (προς τα δεξιά της κίνησης στο Βόρειο Ημισφαίριο και αντίθετα στο Νότιο).

Στα ίδια αποτελέσματα θα καταλήξουμε αν λάβουμε υπόψη μας ότι για τις κινήσεις που συνήθως θεωρούμε ως προς τη γη (κίνηση αεριών μαζών, βολές σωμάτων, την αιώρηση του εκκρεμούς του Faucoult,…) η τριβή (ή δυνάμεις πίεσης) δεν παίζει κανένα ρόλο με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται κανενός είδους ροπή (στρέψης) ως προς τον άξονα περιστροφής (στην κατεύθυνση της περιστροφής) και επομένως να ισχύει για την κίνηση σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα η «**Αρχή της διατήρησης της γωνιακής ταχύτητας**» (ουσιαστικά, δεν ασκούνται δυνάμεις στη διεύθυνση των ισοδυναμικών επιφανειών της γης).

Με βάση την Αρχή αυτή μπορούμε να ερμηνηνεύσουμε εποπτικά (αλλά και μαθηματικά με την αποδοχή όμως της ισχύος περισσότερων προϋποθέσεων-Αρχών) την μετάπτωση των παραπάνω κινήσεων όταν αυτές πραγματοποιούνται στη διεύθυνση Βορράς-Νότος.

Για παράδειγμα, στις **κινήσεις προς το Βορρά** (Ισημερινό αντίστοιχα) μια μείωση (αύξηση) της απόστασης από τον άξονα περιστροφής της γης (λόγω κλίσης προς τους Πόλους του οριζόντιου επιπέδου κίνησης) συνδέεται με μια αύξηση της προς τα Ανατολικά ταχύτητα ζώνης. Η αύξηση αυτή οφείλεται στην αύξηση της Ανατολικής συνιστώσας της σχετικής, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, ταχύτητας και προκαλεί αύξηση και στην απόλυτη-ολική Ανατολική συνιστώσα της ταχύτητας. Η αύξηση αυτή της ταχύτητας ζώνης καθιστά την ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή της γης με αποτέλεσμα η οριζόντια συνιστώσα της κεντρομόλου δύναμης να υπερβαίνει την οριζόντια συνιστώσα της βαρύτητας και η εμφάνιση της δύναμης Coriolis να οδηγεί σε απόκλιση της κίνησης προς τα δεξιά στο Βόρειο Ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο Νότιο. Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και για τις **κινήσεις προς το Νότο** (Persson, 1998, σελ. 1375-1376, Philips, 2000, σελ. 300-303, Duran, 1993, σελ. 2180).