ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σχήματα και Διαγράμματα

Ο ρόλος τους στην διαμόρφωση και κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών

Νόκας Ευστάθιος

Επιβλέπων Καθηγητής: Διονύσης Λάππας

Αθήνα 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Εγκρίθηκε την ..... από την Εξεταστική Επιτροπή που αποτελείτο από τους:

Ονοματεπώνυμο Βαθμίδα Υπογραφή

1) ΛΑΠΠΑΣ Δ (Επιβλέπων Καθηγητής) Αναπληρωτής Καθηγητής .....

2) ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΛΙΑΣ Ε Αναπληρωτής Καθηγητής .....

3) ΣΠΥΡΟΥ Π Επίκουρος Καθηγητής .....

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή Διονύση Λάππα για την καθοδήγηση, τη βοήθεια και τις καίριες υποδείξεις του κατά την συγγραφή της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας.

Αντίστοιχα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και συναδέλφους για την υπομονή τους, καθώς και για την άλλη οπτική γωνία περί της διδακτικής των μαθηματικών που μου προσέφεραν μέσω της συμπόρευσής μας στα χρόνια που προηγήθηκαν.

Στην οικογένειά μου, στη Σωτηρία και σε όσους αγαπούν τη Γεωμετρία

Περιεχόμενα:

0.Εισαγωγή.....11
0.1.Πρόλογος.....11
0.2.Τα Διαγράμματα και τα Σχήματα.....12
0.3.Γεωμετρική Πρακτική.....15
0.4.Έννοιες και Νοητικές Αναπαραστάσεις.....21
0.5.Το Σχήμα Κατευθύνει.....28
1.Έννοιες.....32
1.1.Διαμόρφωση Εννοιών.....32
1.2.Γεωμετρικές Έννοιες.....37
2.Οι Εικόνες.....41
2.1.Η Πρόσληψη και Κατανόηση της Εικόνας.....41
2.1.1.Οπτική Αντίληψη.....41
2.1.2.Επικοινωνία της Πληροφορίας με Εικόνες.....42
2.1.3.Πρόσληψη της Εικόνας.....43
2.2.Η Έννοια της Μορφής.....47
2.2.1.Κατανόηση της Μορφής.....50
2.2.2.Η Μορφή στη Γεωμετρία.....51
2.3.Αναπαραστάσεις.....55
2.3.1.Χρήση Αναπαραστάσεων.....62
2.3.2.Μετασχηματισμοί Αναπαραστάσεων.....67
3.Η Επιστημολογία των Διαγραμμάτων.....71
3.1.Τα Διαγράμματα του Ευκλείδη.....73
3.2.Το Διάγραμμα Σήμερα.....76
3.3.Το Θεμέλιο της Γεωμετρίας.....79
3.4.Τοξικό Διάγραμμα.....84
4.Σχέση Εννοιών και Εικόνων.....89
4.1.Ο Δυαδικός Κώδικας.....89
4.2.Προτασιακή Θεωρία.....92
5.Γνωστικές Θεωρίες.....96
5.1.Piaget & Inhelder.....96
5.2.Επίπεδα Σκέψης van Hiele.....99

5.3.Duval.....103
6.Σχηματοποιημένες Έννοιες.....108
6.1.Παράδειγμα.....114
6.2.Ελάχιστο Προβολικό Επίπεδο.....119
7.Σχήμα και Ορισμός.....123
7.1.Παράδειγμα 1ο.....126
7.2.Παράδειγμα 2ο.....128
7.2.1.Απόδειξη 1η 130
7.2.2.Απόδειξη 2η 131
7.2.3.Οι δύο Αποδείξεις.....132
8.Τα Διαγράμματα ως Εμπόδια.....134
8.1.Μη Αιτιολογημένες Θεωρήσεις.....140
9.Case Study 143
9.1.Το Υπερβολικό Επίπεδο.....143
9.2.Τα Ασυμπτωτικά Τρίγωνα.....148
9.3.Παρατηρήσεις.....157
10.Συμπεράσματα.....161
11.Βιβλιογραφία.....166

Σχήματα:

0.5.1……28
0.5.2……...29
0.5.3……..29
2.3.1.1……66
3.4.1……..84
3.4.2……..85
3.4.3……..86
3.4.4……...87
6.1……111
6.2……111
6.3……111
6.4……111
6.5……...112
6.1.1……114
6.1.2……115
6.2.1……120
7.1.1……126
7.2.1……128
7.2.1.1……..130
7.2.2.1……..131
8.1……136
8.2……137
8.3……138
9.1.1……143
9.1.2……144
9.1.3……145
9.1.4……146

9.2.1……148
9.2.2……150
9.2.3……150
9.2.4……150
9.2.5……152
9.2.6……153
9.2.7……154
9.2.8……155

Τρεις άντρες πηγαίνοντας σε ένα συνέδριο βρέθηκαν συνεπιβάτες στο ίδιο τραίνο. Το τραίνο κινούμενο σε μία περιοχή της Σκωτίας περνούσε μέσα από κάποιες γεωργικές εκτάσεις. Τότε ο ένας από αυτούς, ο μηχανοδηγός του τραίνου, έβγαλε το κεφάλι από το παράθυρο και παρατηρώντας είπε.

«Κοιτάξτε, όλα τα πρόβατα στη Σκοτία είναι μαύρα».

Τότε ο θεωρητικός φυσικός της παρέας του απάντησε:

«Όχι, υπάρχει ένα τουλάχιστον χωράφι στην Σκοτία στο οποίο επάνω τα ευρισκόμενα πρόβατα είναι μαύρα».

Ο λογικιστής πάγωσε για μία στιγμή στην άκρη της καμπίνας και μετά από λίγη ώρα σιωπής αναφώνησε:

«Όχι, υπάρχει ένα τουλάχιστον χωράφι στην Σκωτία στο οποίο επάνω τα ευρισκόμενα πρόβατα είναι τουλάχιστον κατά το ήμισυ μαύρα».

David Tall (1989)

0.Εισαγωγή

0.1.Πρόλογος

Τα σχήματα εξ αρχής καθόρισαν την πορεία της γεωμετρικής σκέψης, όντας διάμεσοι ανάμεσα στις αφηρημένες έννοιες και στην αισθητηριακή αντίληψη. Σε επίπεδο διδασκαλίας αποτελούν καθοριστικό σύνδεσμο, καθώς υπάρχει άμεση και αναπόσπαστη σύνδεση αυτών με την αιτιολόγηση και την παραγωγική σκέψη μαθητών αλλά και καθηγητών.

Στην παρακάτω διπλωματική θα γίνει μία προσπάθεια οριοθέτησης του ρόλου των σχημάτων στις διάφορες γεωμετρικές θεωρίες (Ευκλείδειες ή μη) όχι μόνο ως βοηθητικών στοιχείων αλλά και ως προωθητικών μέσων για την ανάπτυξη των θεωριών αυτών. Ακολούθως θα εντοπιστούν συγκεκριμένα επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται άμεσα με αφηρημένα - ιδανικά γεωμετρικά αντικείμενα και την υλοποίησή τους σε έννοιες, με χρήση ως διάμεσου των σχημάτων.

Τα παραδείγματα που θα δοθούν και θα αναλυθούν έχουν ως στόχο την απόδειξη κατά το δυνατό της διπλής φύσης των σχημάτων και διαγραμμάτων η οποία θέση και είναι η κυρίαρχη θέση της Διπλωματικής αυτής. Η εννοιολογική ποιότητα των διαγραμμάτων σε συνάρτηση με την αισθησιοκεντρική προσέγγιση που προσφέρουν τα κατατάσσουν ως αναπόσπαστα συστατικά μίας επιτυχημένης γεωμετρικής πρακτικής ή ενός μαθήματος.

0.2. Τα Διαγράμματα και τα Σχήματα

Τα διαγράμματα αποτελούν μία ευρύτερη οικογένεια από αυτή των σχημάτων. Τα διαγράμματα παίρνουν διαφορετικές μορφές ανάλογα με τις εφαρμογές τους, όπως νοητικά διαγράμματα, διαγράμματα που περιγράφουν αλγορίθμους ή μαθηματικές διεργασίες. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν συνειδητά τα διαγράμματα κυρίως ως εικονικά δεδομένα που κωδικοποιούν πληροφορίες. Όπως και άλλες εικόνες ακόμα και νοητικές, τα διαγράμματα αποτελούν πραγματικά ή φανταστικά δημιουργήματα, σαν βοηθητικά στοιχεία μίας διαδικασίας αιτιολόγησης. Πλήθος προβλημάτων, σε πολλά γνωστικά αντικείμενα των επιστημών, προσεγγίζονται και τελικά επιλύονται, από μία αλληλεπίδραση αντιληπτικών διαδικασιών (εικονοποίησης) και λεκτικών, λογικών ακολουθιών αιτιολογήσεων. Οι λογικές αυτές ακολουθίες βασίζονται σε εννοιολογικές δομές συχνά όχι πλήρως διαχωρισμένες από τα εικονικά δεδομένα. Η χρήση των διαγραμμάτων συνιστά χωρική αιτιολόγηση, η οποία συνίσταται στη χρήση του χώρου αναπαραστάσεων των αφηρημένων γεωμετρικών αντικειμένων. Οι αναπαραστάσεις αυτές υποβοηθούν και συμμετέχουν σε εφαρμογές που απαντώνται στην επίλυση προβλημάτων, την εξαγωγή συμπερασμάτων και την γενικότερη διαδικασία της μάθησης.

Μπορούμε να δεχτούμε πως ο κόσμος των εικονικών αναπαραστάσεων βοηθά την ανθρώπινη αιτιολόγηση προσφέροντας ψυχολογικά και υπολογιστικά, παραγωγικούς τρόπους σύλληψης και προπαγάνδισης των περιορισμών τόσο του αληθινού κόσμου όσο και αυτού των μαθηματικών αφαιρετικών συλλογισμών.

Η μελέτη της δομής και λειτουργικότητας των διαγραμμάτων και των σχημάτων κατά την Γεωμετρική πρακτική είναι το αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Ο Μπαμπινιώτης (2004) ορίζει το διάγραμμα ως σχηματική απεικόνιση που επεξηγεί τα σχήματα ή τον τρόπο λειτουργίας ενός αντικειμένου. Στα μαθηματικά το διάγραμμα αναφέρεται σε μία γραφική απεικόνιση, παράσταση που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε ένα μαθηματικό θέμα ή μία μαθηματική έννοια. Ακόμα υπάρχουν διαγράμματα που κωδικοποιούν τα

βασικά σημεία ενός θέματος. Υπάρχουν βέβαια και πλήθος άλλων τύπων διαγραμμάτων που απαντώνται σε άλλα γνωστικά αντικείμενα και υποβοηθούν την σκέψη. Τα διαγράμματα ροής ή λογικά διαγράμματα αναφέρονται σε σχηματικό τρόπο αναπαράστασης ενός αλγορίθμου με χρήση ειδικών σχημάτων. Τα διαγράμματα που κωδικοποιούν νόμους (συνήθως επιστημονικούς) ονομάζονται Law Encoding Diagrams (LEDs) και αποτελούν μία ακόμα τάξη διαγραμμάτων που παρουσιάζουν αυξημένο ενδιαφέρον.

Τα διαγράμματα είναι δημιουργήματα του πολιτισμού μας που έχουν ως στόχο την επικοινωνία της πληροφορίας ή την πιο γρήγορη και επιτυχημένη κυκλοφορία και διάχυσή της. Τα διαγράμματα βοηθούν ουσιαστικά τόσο στην κωδικοποίηση των πληροφοριών όσο και στην αποκωδικοποίηση αυτών λειτουργώντας ως διάμεσος ανάμεσα στην καθαρή λογική και στον κόσμο των αισθήσεων (όραση).

Υπάρχουν ουσιαστικά ανεξάντλητες δυνατότητες χρήσης των διαγραμμάτων, στην έρευνα αλλά και στην διδακτική της Γεωμετρίας. Ιδιαίτερα, στην διδακτική πρακτική της γεωμετρίας και των στοιχειωδών εννοιών αυτής, κανείς δεν μπορεί κανένας να φανταστεί ένα μάθημα γεωμετρίας χωρίς την ύπαρξη διαγραμμάτων, εικονικών ή λογικών, σχημάτων και γενικότερα εικονικών αναπαραστάσεων. Η πρακτική αυτή είναι η συνήθης ως επακόλουθο του γεγονότος ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση για απόλυτα αφηρημένους συλλογισμούς, σε τυπική λογική γλώσσα, χωρίς να υπάρχει ένδειξη για κάποιο σημείο ή αντικείμενο αναφοράς που να παρεμβάλλεται καλύπτοντας τον κενό χώρο ανάμεσα στους φορμαλισμούς και τις άτυπες συλλογιστικές πορείες.

Γεωμετρικό σχήμα, ή απλά σχήμα, ονομάζεται στα μαθηματικά ένα σύνολο σημείων στο *χώρο*. Ένας τέτοιος ορισμός είναι πολύ γενικός και αφηρημένος όπως άλλωστε και κάθε μαθηματικός ορισμός. Το γεωμετρικό σχήμα ως μαθηματική έννοια αποτελεί το κατεξοχήν αντικείμενο της γεωμετρίας, τουλάχιστον στο επίπεδο της διδακτικής. Το σύνολο της πρακτικής γίνεται υπεράνω του σχήματος και ο ρόλος του είναι βασικός σε πλήθος γνωστικών δεξιοτήτων και λειτουργιών όπως η κατηγοριοποίηση, η αναγνώριση και η δημιουργία εικασιών.

Η ανακάλυψη της χρησιμότητάς των σχημάτων ανάγεται σε εποχές παλαιότερες ακόμα και της εποχής συγγραφής των Στοιχείων του Ευκλείδη. Πλήθος εφαρμογών των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών αποδεικνύουν του λόγου το αληθές. Ακόμα και μία αναφορά ή σωστότερα εικασία στο ποια θα μπορούσε να αποτελεί μία πρώτη απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος για να είναι αξιόπιστη πρέπει να περιέχει ένα κατάλληλο σχήμα, από το οποίο να ρέει η απόδειξη ώστε να θεωρηθεί άξια αναφοράς και εξέτασης.

0.3 Η Γεωμετρική Πρακτική

Η Γεωμετρία είναι ένα σχολικό μάθημα, αλλά πρώτα από όλα υπήρξε ένας τομέας μαθηματικής γνώσης. Ως μαθηματικοί αλλά και ως καθηγητές των Μαθηματικών, το ενδιαφέρον μας δεν απομονώνεται στην μία μόνο όψη του νομίσματος αλλά απεναντίας επεκτείνεται και προωθείται προς και την άλλη κατεύθυνση. Παραδοσιακά η σχέση μεταξύ του φυσικού και του μαθηματικού κόσμου θεωρείται δεδομένη και αλληλεξάρτησης αλλά η φύση της έχει γίνει αντικείμενο μεγάλων μαχών στην ιστορική πορεία. Επιπλέον, η Ευκλείδεια παράδοση έχει την τάση να υποκρύπτει μία ιεράρχηση που ακολουθεί την πορεία από την παρατήρηση στη θεωρία[1], ενώ ακόμα και η διάκριση που επιδεικνύεται μέσω του αναλυτικού προγράμματος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, που εμφανώς διαχωρίζει την γεωμετρία της παρατήρησης (γυμνάσιο) από την γεωμετρία της απόδειξης (λύκειο), δεν επαρκεί για να αρθεί η σύγχυση που έχει δημιουργηθεί σε προηγούμενο στάδιο στους μαθητές, που θεωρούν την παρατήρηση ισοδύναμη της απόδειξης.

Ο *στόχος* ενός μαθήματος γεωμετρίας[2] είναι: από την ικανότητα ενός μαθητή να παρατηρεί και να ανακαλύπτει γεωμετρικές ιδιότητες να φτάσει στο σημείο να μπορεί να τις εξηγεί – να πιστοποιεί την ισχύ τους – με λογικά επιχειρήματα καθώς και να τις περιγράφει με βάση την λογική του. Βέβαια, για την κατάκτηση αυτού του στόχου ο μαθητής θα πρέπει να περάσει από το στάδιο της παρατήρησης μεμονωμένων στοιχείων, στη σύνθεση πολλαπλών συνιστωσών. Εδώ γίνεται σαφές, πως μία ακόμα χρήση - λειτουργία του σχήματος αποτελεί ακριβώς αυτή η σύνθεση των συνιστωσών και η οργάνωσή τους ώστε να καθίστανται ευκολότερα προσβάσιμες και κατανοητές.

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι η μελέτη του χώρου και των ιδιοτήτων των σχημάτων αυτού. Ο Ευκλείδειος είναι ο χώρος που βρίσκεται εγγύτερος προς τις αισθήσεις, άποψη που υποστηρίζει και ο Kant θεωρώντας την ως την μοναδική ακριβή και a priori αληθή, μορφή

---

[1] Όπως αποδεικνύει και η επιλογή των αξιωμάτων που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης

[2] Εδώ κάνουμε λόγο αποκλειστικά για μαθητές Λυκείου

Γεωμετρίας. Το γνωστό μας Ευκλείδειο επίπεδο είναι ο ευκολότερα κατανοητός χώρος καθώς έχουμε εμπειρικά δεδομένα που μας καθοδηγούν στην όποια αναζήτησή μας. Σε μία πιο μαθηματικοποιημένη προσέγγιση θα λέγαμε πως το Ευκλείδειο επίπεδο πολύ περισσότερο από μία αναπαράσταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποτελεί ένα *συνεπές* μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επίσης, το Ευκλείδειο επίπεδο είναι ταυτόχρονα αναπαράσταση αλλά και πολύ περισσότερο μοντέλο της θεωρίας, την στιγμή που στο ίδιο επίπεδο μπορούμε να δημιουργήσουμε αναπαραστάσεις μη Ευκλείδειων Γεωμετριών οι οποίες όμως δεν θα αποτελούν και μοντέλο της θεωρίας.

Στο χώρο του Ευκλείδειου επιπέδου μπορούμε να διακρίνουμε τις επιφάνειες, τις γραμμές και τα σημεία. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία και τα σημεία δεν έχουν καμία διάσταση σύμφωνα με τις ιδιότητες που τους αποδίδουμε στην παραδοσιακή μορφή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (καθώς στην σύγχρονη πρακτική όλα τα παραπάνω είναι απροσδιόριστοι όροι και δεν ορίζονται). Αυτές οι ιδιότητες όμως, είναι δεδομένα, κατά κάποιο τρόπο και αισθητικού περιεχομένου, που τα δεχόμαστε στην γεωμετρική μας πρακτική αν και αντιβαίνουν στη καθημερινή μας πρακτική, στις συνήθειές μας αλλά και στις αισθήσεις μας.

Η αξιωματική θεμελίωση και η Ευκλείδεια παράδοση με τους ορισμούς της, μας ωθούν προς την κατεύθυνση να δεχθούμε πως τα σημεία είναι αδιάστατα, η ευθεία έχει μία διάσταση και όλα τα υπόλοιπα ακολούθως. Στην καθημερινή ζωή και τις εφαρμογές, που είμαστε τρόπον τινά, υποχρεωμένοι να πράττουμε, μπορούμε και ουσιαστικά είμαστε υποχρεωμένοι να δεχόμαστε τις προσεγγίσεις. Η ενασχόλησή μας, όμως, με την αυστηρά θεμελιωμένη γεωμετρία δεν επιτρέπει τέτοιες πολυτέλειες. Η όλη νοητική μας λειτουργία αναφέρεται σε αφηρημένες έννοιες, συχνά όχι πλήρως ορισμένες, αλλά με ορισμούς βραχείς και ασαφείς για τους μη εξοικειωμένους που αποκαλούμε έννοιες της γεωμετρίας.

Η γεωμετρία, όπως και σχεδόν στο σύνολό τους όλες οι επιστήμες που έχουν μία μακρά διαδρομή μέσα στα πλαίσια της ανθρώπινης ιστορίας, ξεκίνησε ως μία εμπειρική επιστήμη (Van der Wearden, 2003) στην οποία σημαντικό ρόλο έπαιζε η διαδικασία της παρατήρησης (Netz, 2003).

Η διαφοροποίηση στην μεθοδολογία ανάμεσα στην Πρακτική Γεωμετρία και την Θεωρητική συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής και των φορμαλισμών για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας με στόχο την υπέρβαση των δυσκολιών που πιθανώς να προέκυπταν από επιμέρους μετρήσεις και αμφίβολης ορθότητας συμπεράσματα. Η διατήρηση της αναγκαιότητας μέσω της θεμελίωσης της Γεωμετρίας ως επιστήμης δημιούργησε μία σειρά αληθών αποτελεσμάτων, τα οποία δημιούργησαν μία αίσθηση αναγκαιότητας γύρω από τον εαυτό τους και έπειτα προσφέρθηκαν στον άνθρωπο για πρακτική χρήση.

Στη σύγχρονη πρακτική που ακολουθείται για την διδασκαλία της γεωμετρίας, σε οποιοδήποτε επίπεδο και αν γίνεται η διδασκαλία αυτή, είναι πάντα επικεντρωμένη στην έννοια της απόδειξης αγνοώντας σχεδόν επιδεικτικά το πολύ σημαντικό επίπεδο της οπτικοποίησης που σχεδόν πάντα προηγείται και που συχνά χρησιμεύει για την διατύπωση εικασιών, για την καθοδήγηση της προσπάθειας του διδασκόμενου και για την επιτυχή περάτωση του έργου που του έχει ανατεθεί.

Μία τέτοια πρακτική δεν λαμβάνει υπ' όψιν της μία θεώρηση σε σχέση με την γενετική επιστημολογία καθώς αδιαφορεί για την βήμα με βήμα θεμελίωση της επιστήμης και πως αυτή επιτεύχθηκε. Είναι πολύ λογικό και παράλληλα από τις βασικές αρχές που διέπουν την σύγχρονη διδακτική, να θεωρούμε πως η κατανόηση στο χρόνο των μαθητών θα ακολουθήσει ανάλογη πορεία με τα στάδια της ιστορικής εξέλιξης της ίδιας της επιστήμης.

Η απομάκρυνση από το σχήμα όμως παραμένει ένα γεγονός. Πολλοί θα μπορούσαν να προτείνουν πως οφείλεται στην πληθώρα λαθών στα οποία οδηγήθηκαν οι γεωμέτρες κατά τις προσπάθειες τους να αποδείξουν ή να απορρίψουν το Ευκλείδειο αίτημα. Στο σύνολό τους, τα λάθη αυτά ήταν προϊόντα μίας διαισθητικής προσέγγισης γεωμετρικών καταστάσεων - διατυπώσεων που φαινόντουσαν προφανή. Έτσι, συχνά χρησιμοποιήθηκαν ισοδύναμες του Ευκλείδειου αιτήματος προτάσεις για την απόδειξη αυτού, όπως το ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι σταθερό και ίσο με δύο ορθές, η ισαπέχουσα καμπύλη και πλήθος άλλων προσπαθειών. Θα

δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο, πως δεν είναι το σχήμα αυτό που φταίει σε τέτοιες καταστάσεις, αλλά η λάθος χρήση του.

Γίνεται λοιπόν κατανοητό, πως ιστορικά τουλάχιστον η απόρριψη των παρατηρησιακής προέλευσης (αναπαραστάσεων) δεδομένων είναι σχετικά δικαιολογημένη και εύλογη εξαιτίας των δεινών που αντιμετώπισε ο επιστημονικός και πιο συγκεκριμένα ο μαθηματικός κόσμος ως επακόλουθα της χρήσης δεδομένων που ήταν αμφίβολης ορθότητας αλλά ταυτόχρονα ήταν προφανή σε ένα επίπεδο βασισμένο σε αισθητικές (οπτικές) παρατηρήσεις.

Στους τελευταίους δύο αιώνες και με αυξανόμενη ένταση του φαινομένου εμφανίζεται μία επικρατούσαν τάση προς μία προοδευτική αλλά συνάμα σταθερή αποξένωση των γεωμετρικών και κιναισθητικών στοιχείων από τη μαθηματική εκπαίδευση και την έρευνα.

Στην περίοδο αυτή επήλθε μία στροφή προς τα τυπικά, αναλυτικά, συμβολικά και λεκτικά στοιχεία που κυριάρχησαν στο προσκήνιο της έρευνας, της διδασκαλίας και γενικότερα του ενδιαφέροντος και έβαλαν σε σκέψεις τους καθηγητές και γενικότερα τους ασχολούμενους με τα μαθηματικά.

Η στροφή αυτή μαζί με τον παράλληλο ξεπεσμό των γεωμετρικών και κιναισθητικών στοιχείων έχει κάποιες αιτίες οι οποίες αξίζει να επισημανθούν. Παρακάτω απαριθμούνται οι κυριότερες αυτές αιτίες (Davis, P και Hersh, R. 1981):

1ον Το έργο του Descartes La Geometrie γίνεται αποδεκτό σε μεγάλο βαθμό και με ιδιαίτερο ενθουσιασμό από τον μαθηματικό κόσμο. Οι θέσεις που υποστηρίζει πως η γεωμετρία πρέπει να ανάγεται σε άλγεβρα επηρεάζουν την οπτικοποιημένη μέσω σχημάτων προσέγγιση της γεωμετρίας.

2ον Αντίστοιχη επίδραση στον μαθηματικό κόσμο παρουσίασε και η εμφάνιση του προγράμματος του Felix Klein που εμφανίστηκε στα τέλη του δέκατου ενάτου αιώνα για να ενοποιηθούν οι γεωμετρίες, υπό την σκέπη της θεωρίας ομάδων, μέσω ισομορφισμών.

3ον Ένας ίσως από τους πιο σημαντικούς λόγους που συνετέλεσαν αποφασιστικά στην περιθωριοποίηση των οπτικών ερεθισμάτων ήταν η πτώση της *a priori* αλήθειας που θεωρούσαν ότι εμπεριείχε μέχρι τότε η Ευκλείδεια

Γεωμετρία. Μέχρι το δέκατο ένατο αιώνα η περιορισμένη αίσθηση της εμπειρίας οδηγούσε στο συμπέρασμα πως η Ευκλείδεια γεωμετρία ήταν το μοναδικό μοντέλο του σύμπαντος και του φυσικού κόσμου.

4ον Ακόμα συνέβαλε η έλλειψη πληρότητας της λογικής δομής του σώματος της κλασικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποτελούμενη μόνο από τα πέντε συνήθη αξιώματα. Η έλλειψη πληρότητας εντοπίστηκε το δέκατο ένατο αιώνα και αντιμετωπίστηκε από τον Hilbert στα πλαίσια του Περατοκρατικού του συστήματος.

5ον Τους περιορισμούς που επιβάλει το περιβάλλον των δύο ή τριών φυσικών διαστάσεων που αποτελούν και το φόντο για την οπτικοποίηση της γεωμετρίας, δεν μπορεί να τους υπερβεί μία προσέγγιση βασισμένη σε οπτικά ερεθίσματα. Τα σχήματα ήδη από τις τρεις διαστάσεις περιπλέκουν ιδιαίτερα την οπτική τους προσέγγιση και κάνουν την ακρίβεια σχεδόν απρόσιτη.

6ον Η ανακάλυψη των Υπερβολικών και Ελλειπτικών γεωμετριών εμφανίζει σημάδια περιορισμού του οπτικού υπόβαθρου πάνω στο οποίο δομήθηκε η οπτική γεωμετρία και βρίσκεται σε άμεση και προφανή αντίθεση με την γενίκευση που μπορεί σε αντίστοιχες συνθήκες να προσφέρει η αλγεβρική προσέγγιση των ίδιων ζητημάτων. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε τις περιπτώσεις των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, Μιγαδικών Γεωμετριών, Πεπερασμένων Γεωμετριών, Γραμμικής Άλγεβρας και Μετρικών Χώρων.

7ον Τέλος, το μάτι ως όργανο επιβάλει περιορισμούς στην αντίληψη των μαθηματικών αληθειών. Οι έννοιες όπως η συνέχεια, οι μη διαφορίσιμες συναρτήσεις αλλά και άλλες οπτικές απάτες με ειδικές, παραπλανητικές περιπτώσεις που μπορούν να υποβάλλουν είναι σαφέστατα δυσπρόσιτες μέσω οπτικών ερεθισμάτων αλλά και τα ίδια τα ερεθίσματα είναι συχνά παραπλανητικά.

Έχει καθιερωθεί ποια να θεωρείται, ότι αυτά τα παθολογικά παραδείγματα δείχνουν και καταδεικνύουν τις ανεπάρκειες της οπτικής διαίσθησης[3]. Αντίστοιχα, όμως κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς, πως

[3] Ένα τέτοιο παθολογικό παράδειγμα διαπραγματευόμαστε στο κεφάλαιο της Επιστημολογίας του Διαγράμματος

αυτό που καταδεικνύουν τα παραδείγματα αυτά, είναι οι ανεπάρκειες που ενυπάρχουν στον αναλυτικό τρόπο δημιουργίας μοντέλων της οπτικής διαδικασίας. Προβλήματα αντίστοιχα με αυτά που αντιμετωπίζουν οι μαθητές καλούμενοι να μοντελοποιήσουν ή εικονοποιήσουν μία έννοια.

Έτσι, είναι εύλογο το ότι στη σύγχρονη οπτική των διδασκάλων ο ρόλος του σχήματος έχει γίνει προβληματικός για τους ίδιους όσο και για τους μαθητές. Οι καθηγητές προτρέπουν τους μαθητές να μην βασίζονται στο σχήμα απόλυτα, αλλά αντιθέτως να βασίζονται σε φορμαλισμούς (με τους οποίους δεν υπάρχει καμία εξοικείωση ή και ασφαλής τρόπος προσαρμογής με αυτούς). Ωστόσο, δεν μπορούν και να απορρίψουν την λειτουργικότητα του σχήματος καθώς δεν υπάρχει επαρκής εναλλακτική λύση που να προσφέρει όσα και το σχήμα για μία οντολογική προσέγγιση της γνώσης, που προσφέρει η γεωμετρία.

Ο διπλός αυτός δρόμος στον οποίο καλούνται να βαδίσουν οι μαθητές, αναφορικά με τη χρήση των σχημάτων, αγχώνει και μπερδεύει τους μαθητές καθώς ακόμα δεν κατέχουν την ωριμότητα του να ελέγχουν δεδομένα που διαισθητικά ή σε οπτικό επίπεδο φαντάζουν προφανή. Έτσι συχνά οδηγούνται σε συμπεράσματα αυθαίρετα ή εσφαλμένα βασιζόμενοι υπέρ το δέον στο σχήμα που περιέχει πληροφορίες τυχαίες ή που απαιτούν αιτιολόγηση αν και οπτικά φαντάζουν προφανείς.

0.4 Έννοιες και Νοητικές Αναπαραστάσεις

Οι έννοιες και νοητικές αναπαραστάσεις συνήθως διακρίνονται στις σύγχρονες ψυχολογικές θεωρίες (Fiscbein, 1993). Θα μπορούσαμε να ορίζουμε την έννοια ως: Συμβολική αναπαράσταση (σχεδόν πάντα λεκτική) που χρησιμοποιείται στη διαδικασία της αφηρημένης σκέψης και κατέχει μία γενικευμένη σημαντικότητα ανταπόκρισης σε ένα σύνολο συγκεκριμένων αναπαραστάσεων σε σχέση με το τι έχουν κοινό. Αυτό που χαρακτηρίζει έπειτα μία έννοια και ταυτόχρονα την διακρίνει από μία απλή εικόνα, είναι το γεγονός πως εκφράζει μία ιδέα, μία γενική, ιδανική περιγραφή μίας τάξης αντικειμένων, βασισμένη στα κοινά τους χαρακτηριστικά και μένει μόνο σε αυτά μη ασχολούμενη με τα χαρακτηριστικά που δεν μοιράζονται.

Αντίθετα, μία εικόνα (εδώ αναφερόμαστε και σε νοητικές εικόνες και στα αντίγραφα αυτών που αποτυπώνονται ως εικονικά δεδομένα μέσω της όρασης στο επίπεδο) είναι μία αισθητικής προέλευσης αναπαράσταση ενός αντικειμένου και μόνο ή ενός φαινομένου. Αν θα θέλαμε να γενικεύσουμε την έννοια της εικόνας, πέρα από τα όρια του νοητού, θα πρέπει να εισάγουμε αισθησιοκεντρικά χαρακτηριστικά στην θεωρία μας γεγονός όμως που δεν είναι το κυρίαρχο στην γεωμετρική πρακτική.

Η έννοια του παραλληλογράμμου είναι η γενική ιδέα ενός συνόλου αντικειμένων που έχουν ένα σύνολο κοινών ιδιοτήτων: ίσες τις απέναντι πλευρές, ίσες τις απέναντι γωνίες, οι διαγώνιες αυτού διχοτομούνται, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. Όλα τα παραλληλόγραμμα μοιράζονται όλες αυτές τις ιδιότητες, αλλά υπάρχουν και ιδιότητες επιμέρους παραλληλογράμμων που αντικατοπτρίζονται σε αυτά και μόνο. Για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο μπορεί να έχει το λόγο των μη παράλληλων πλευρών του ίσο με δύο.

Η εικόνα ενός παραλληλογράμμου είναι μία αισθητικής προέλευσης αναπαράσταση ενός συγκεκριμένου αντικειμένου, δηλαδή ενός συγκεκριμένου παραλληλογράμμου (που περιλαμβάνει στοιχεία όπως το χρώμα, το μέγεθος και άλλα του συστατικά) και για το άτομο που κάνει χρήση αυτού, αντιπροσωπεύει το σύνολο της κλάσεως των παραλληλογράμμων.

Η έννοια της τομής ενός κώνου με ένα επίπεδο από την άλλη, βρίσκεται πολύ κοντά στην εικόνα που θα αποδίδαμε σε μία λειτουργία και δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένας κυκλικός δίσκος ή μία έλλειψη ή μία παραβολή ή μία υπερβολή πράγμα το οποίο και φανερώνεται στο τέλος αυτής.

Σε όλες τις υπάρχουσες γνωστικές θεωρίες, οι έννοιες και οι εικόνες θεωρούνται δύο βασικά διακεκριμένες κατηγορίες νοητικών οντοτήτων. Ακόμα και στην προτασιακή θεωρία – σύμφωνα με την οποία και οι δύο τύποι πληροφοριών είναι τελικά κωδικοποιημένοι στον ίδιο δηλωτικό τύπο – η αναφορά σε εικόνες και έννοιες σαν δύο διαφορετικές νοητικές οντότητες είναι αδιαπραγμάτευτη.

Πλήθος ερευνητών υποστηρίζουν ότι το παιδί πρέπει να περάσει ξανά από τα ιστορικά στάδια που ιστορικά βίωσε ο ανθρώπινος νους. Αυτό αληθεύει σε γενικές γραμμές αλλά με σημαντικές εξαιρέσεις οι οποίες αφορούν ακριβώς τις μαθηματικές πράξεις. Ο Αριστοτέλης έλεγε ότι αυτό το οποίο είναι πρώτο στην τάξη της γένεσης μπορεί να είναι το τελευταίο στην τάξη της ανάλυσης. Ο λόγος είναι πως ανακαλύπτουμε τα αποτελέσματα μίας νοητικής πράξης πολύ πριν συνειδητοποιήσουμε την ύπαρξη αυτής και κυρίως τους μηχανισμούς που διέπουν τέτοιες νοητικές πράξεις: σύμφωνα με αυτό, ορισμένες πολύ πρωτόγονες νοητικές πράξεις είναι δυνατόν να εμφανιστούν πολύ αργότερα στην ιστορία των επιστημών (Fishbein, 1993).

Μελετώντας ιδιαίτερα την αυθόρμητη γεωμετρία του παιδιού (τα σχέδια του, τις διάφορες αναπαραστάσεις του, τις αντιδράσεις του σε μία σειρά από σχολικές ερωτήσεις), καταλαβαίνει κανείς ότι πράγματι ο σχηματισμός ενοράσεων και των αντίστοιχων νοητικών πράξεων (σε αντίθεση με τα αντιληπτικά (αισθητικά) δεδομένα, στα οποία όμως είναι αδύνατο να αναχθεί ο χώρος) δεν συμφωνεί καθόλου με την ιστορική πορεία (Ευκλείδεια Μετρική, κατόπιν Προβολικοί Χώροι και τέλος Τοπολογικές δομές), αλλά πλησιάζει περισσότερο στη θεωρητική σειρά: οι πρώτες πραξιακές ενοράσεις είναι τοπολογικής φύσης (Ευκλείδειας Τοπολογίας φυσικά αλλά λαμβάνονται υπόψη οι γειτνιάσεις, τα περιβλήματα, το άνοιγμα και το κλείσιμο, τα όρια κ.τ.λ), ενώ για μεγάλο διάστημα προέχουν συστηματικά οι σχέσεις τάξεις που

είναι ισχυρότερες από κάθε μετρική. Στη συνέχεια αλλά μόνο πολύ αργότερα δημιουργούνται οι προβολικές δομές και η Ευκλείδεια Μετρική.

Σε ένα μαθηματικό συλλογισμό δεν αναφερόμαστε στις μαθηματικές οντότητες και αναπαραστάσεις ούτε σαν υλικά αντικείμενα αλλά και ούτε σαν απλά σχέδια. Τα υλικά αντικείμενα - στερεά μοντέλα ή σχέδια δύο διαστάσεων - αποτελούν μόνο ατελή μοντέλα των νοητικών οντοτήτων στα οποία αναφέρεται η ενασχόληση των μαθηματικών αλλά και των μαθητών. Θα ήταν επίσης ανώφελο να προσπαθήσει κανείς να προσεγγίσει την απόλυτη τελειότητα που επιβάλλεται από τους ορισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων, στα γεωμετρικά αντικείμενα με τρόπο διαφορετικό από την εννοιολογική προσέγγιση των οντοτήτων αυτών καθώς οποιαδήποτε άλλη προσέγγιση θα θυσίαζε ποσοστό της τελειότητας που μόνο η νόηση μπορεί να προσφέρει και επιτύχει. Είναι σαφές πως οι εννοιολογικές ποιότητες που αποδίδονται στα γεωμετρικά αντικείμενα δεν ανήκουν στη σφαίρα του φυσικού ή του αισθητού κόσμου.

Όπως έχουμε προαναφέρει οι γεωμετρικές αυτές οντότητες με τις οποίες καταπιανόμαστε, δεν έχουν αυθεντικές υλικές ανταποκρίσεις και καταστασιακά αναφερόμενα. Τα σημεία ως αντικείμενα μηδενικής διάστασης, οι γραμμές ως αντικείμενα μονοδιάστατα και τα επίπεδα ως αντικείμενα δύο διαστάσεων δεν υπάρχουν στη εμπειρική μας πραγματικότητα καθώς ο κόσμος μας αποτελείται από αντικείμενα τριών τουλάχιστον διαστάσεων. Δεν υφίσταται εμπειρικό αντικείμενο που να έχει λιγότερες από τρεις διαστάσεις. Ακόμα όμως και ο κύβος, ως αυστηρά ορισμένο μαθηματικό αντικείμενο, που είναι αντικείμενο τριών διαστάσεων δεν ανήκει στη σφαίρα της αισθητής πραγματικότητας. Η θέση αυτή, έχει να κάνει με το γεγονός πως ο κύβος, όπως και κάθε Γεωμετρικό αντικείμενο, είναι νοητικό κατασκεύασμα και δεν μπορεί να κατέχει πραγματικό υλικό υπόστρωμα και αποτελεί μόνο προϊόν πολλαπλών συμβιβασμών και συχνά χοντροειδών προσεγγίσεων. Οποιαδήποτε αναπαράσταση του κύβου στο χαρτί ή κάποια αναπαράσταση άλλου τύπου δεν θα είναι ακριβής ακριβώς γιατί μία τέτοια αναπαράσταση θα παραβιάζει τους ορισμούς. Έτσι θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε λέγοντας πως:

Οποιαδήποτε αναπαράσταση προσεγγίζει αλλά ποτέ δεν ταυτίζεται με το μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται.

Ακολούθως θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε ακόμα ένα σημείο διάκρισης, σε αυστηρά μαθηματικά πλέον σε επίπεδο πιστότητας των αναπαραστάσεων. Ένα τέτοιο κριτήριο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε στην έννοια της μοντελοποίησης που έχουμε προαναφέρει και νωρίτερα.

Μία ακόμα ποιότητα που κάνει την εμφάνισή της διαμέσου των οντοτήτων της ενασχόλησης της γεωμετρίας, των σχημάτων και των διαγραμμάτων δηλαδή, είναι το γεγονός πως οι οντότητες αυτές είναι *γενικές αναπαραστάσεις*, όπως άλλωστε και κάθε έννοια, ενώ *δεν είναι ποτέ νοητικά αντίγραφα συγκεκριμένων αντικειμένων*. Όταν σχηματίζουμε ένα δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα χαρτί για να ελέγξουμε κάποιες ιδιότητες αυτού όπως το ότι τα ύψη ή οι διάμεσοι αυτού συντρέχουν, δεν αναφερόμαστε ποτέ σε αυτό το συγκεκριμένο τρίγωνο-σχήμα αλλά σε ένα σχήμα-ιδέα που μπορεί να είναι μία άπειρη οικογένεια αντικειμένων. Έτσι, ακόμα και αυτό το συγκεκριμένο σχήμα που αποτυπώνεται στο χαρτί αντιστοιχεί σε μία άπειρη τάξη γεωμετρικών αντικειμένων η οποία όμως με βάση το σχήμα στο χαρτί είναι οριοθετημένη.

Αν θελήσουμε να γίνουμε πιο ακριβείς θα πρέπει να πούμε πως υπάρχει μία ιεραρχία σχημάτων. Έτσι, από ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, που να ανταποκρίνεται σε μία απειρία πιθανών αντικειμένων θα οδηγούμαστε σε συμπεράσματα για την καθολική κατηγορία των τριγώνων. Ποιότητες όπως η ιδανικότητα, το αφηρημένο της έννοιας, η απόλυτη τελειότητα και καθολικότητα είναι φυσικά ταυτισμένες και αλληλένδετες με το χώρο των μαθηματικών ιδεών-εννοιών[4].

Το σημαντικότερο βέβαια, από όλα χαρακτηριστικό είναι πως αυτές οι γεωμετρικές απεικονίσεις, τα σχήματα δηλαδή και η εννοιολογική φύση αυτών έχουν να κάνουν με ρητούς ορισμούς. Οι ορισμοί απαιτούν ακρίβεια και παρά το γεγονός ότι επιβάλλεται να είναι φτωχοί σε υποθέσεις φαίνεται και

[4] Εδώ θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε την σημαντική επιρροή της Πλατωνικής παράδοσης στον μαθηματικό κόσμο εκδηλώσεις της οποίας είναι εμφανείς ακόμα και σήμερα

αποδεικνύεται πως μπορούν να οδηγήσουν σε πολύ μεγάλο πλήθος αποτελεσμάτων και σε πολύ σύνθετα για την απλοϊκή δομή τους αποτελέσματα[5]. Έτσι οι ιδιότητες των σχημάτων επιβάλλονται ή το λιγότερο προκύπτουν από τη δύναμη του ορισμού και μέσα στα πλαίσια και τους περιορισμούς ενός αξιωματικά θεμελιωμένου συστήματος. Από μία τέτοια σκοπιά είναι προφανές πως ένα γεωμετρικό σχήμα έχει ένα εννοιολογικό υπόβαθρο. Έτσι ένα παραλληλόγραμμο δεν είναι απλώς ένα σχήμα στο χαρτί. Είναι ένα αντικείμενο που ελέγχεται από τον ορισμό του και καθορίζεται από αυτόν. Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο παράλληλες πράγμα που οδηγεί στα αποτελέσματα ότι οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες και οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Η έννοια έχει δημιουργηθεί και κρίνεται εκ των πραγμάτων λειτουργική. Πλήθος άλλων αποτελεσμάτων μπορούν να προκύψουν από αυτά και η ακολουθία μπορεί να συνεχιστεί διατηρώντας παράλληλα τον χαρακτήρα της αναγκαιότητας κατά τον τρόπο που τον εισαγάγει ο Netz (2003).

Τότε μπορούμε να προχωρήσουμε την μελέτη μας πάνω σε ένα γεωμετρικό αντικείμενο και να το περιγράφουμε-προσεγγίζουμε με βάση τις συγκεκριμένες ατομικές του ιδιότητες που θα το κάνουν μονοσήμαντο και αναγνωρίσιμο (ως κλάση αντικειμένων). Όμως αυτό δεν μπορεί να φτάσει ώστε ένα γεωμετρικό αντικείμενο να θεωρηθεί σκέτο εννοιολογικό μόρφωμα. Είναι μία εικόνα, μία οπτική εικόνα και αυτό συμβαίνει διότι έχει μία ιδιότητα που οι συνήθεις έννοιες δεν κατέχουν. Αυτό είναι ότι ενυπάρχουν στο σχήμα νοητικές αναπαραστάσεις ιδιοτήτων του χώρου σε αρμονία και χωρίς να μπορούμε να τις διαχωρίσουμε από αυτό.

Όταν για παράδειγμα μπούμε στη διαδικασία να δούμε με εννοιολογικό μάτι ένα τροχό ώστε να φτάσουμε στην έννοια της κυκλικότητας, όχι μόνο το σχήμα του τροχού με τον οποίο ασχολούμαστε αλλά και μία δεύτερη εικόνα

[5] Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί - φιλόσοφοι σύμφωνα με τον Καθηγητή Νεγρεπόντη, πίστευαν πως αποδεικτική ισχύ είχαν οι ίδιοι οι ορισμοί. Μάλιστα είχαν την άποψη πως τα αξιώματα μπορούσαν να παρακαμφθούν αν βρεθεί ο κατάλληλος ορισμός και αυτός ήταν και ένας από τους λόγους που προσπαθούσαν να αποδείξουν πως το Ευκλείδειο Αίτημα προέκυπτε σαν συνέπεια των υπολοίπων αξιωμάτων και ορισμών. Ήθελαν δηλαδή να δημιουργήσουν μία μαθηματική επιστήμη (γεωμετρία) στις απαρχές της οποίας να υπάρχουν μόνο ορισμοί και όχι αξιώματα

αυτή του γεωμετρικού αντικειμένου που αποκαλούμε κύκλο κάνει την εμφάνισή της.

Αν κάποιος πρέπει να λύσει ένα πρόβλημα η επίλυση του οποίου απαιτεί υπολογισμούς, για παράδειγμα, η απόσταση που καλύπτει ένα αυτοκίνητο αν γνωρίζαμε την ακτίνα των τροχών, τον αριθμό των περιστροφών σε μονάδα χρόνου και το συνολικό χρονικό διάστημα που διαρκεί η κίνηση, τότε ο υπολογισμός προκύπτει θεωρώντας ένα αφηρημένο και στην πραγματικότητα προσεγγιστικό μοντέλο του τροχού που δεν είναι ούτε καθαρή ιδέα ούτε και ένα απλό σχήμα. Θα πρέπει επίσης να πούμε πως γίνονται και άλλες συμβάσεις που αφορούν στη συμπεριφορά των τροχών αλλά δεν αφορούν το μαθηματικό-γεωμετρικό σκέλος της επίλυσης αλλά το κομμάτι της θεωρητικής φυσικής και τις συμβάσεις που αυτή επιβάλλει.

Επιστρέφοντας στο αντικείμενο ενδιαφέροντός μας θα πρέπει να πούμε πως οι έννοιες δεν στρέφονται[6] και δεν μπορούν γενικότερα να τεθούν σε κίνηση[7]. Από την άλλη μεριά τα σχήματα, τα οποία μπορούν να συμμετέχουν σε τέτοιες διαδικασίες, δεν κατέχουν την ιδανικότητα, την γενικότητα, την καθαρότητα και δεν μπορούν να προσεγγιστούν με αφηρημένη σκέψη όπως οι ιδέες και τα νοητικά αντικείμενα, δεν μπορούν να διπλασιαστούν. Όλα αυτά τα στοιχεία είναι σαφώς απαραίτητα όταν εκτελούνται οι διαδικασίες αιτιολόγησης. Για να είμαστε πιο ακριβείς θα λέγαμε πως οι ποιότητες αυτές είναι προαπαιτούμενες ώστε να μπορούμε να οδηγηθούμε σε ορθές διαδικασίες αιτιολόγησης.

Το τρίγωνο, το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο είναι γεωμετρικά σχήματα τα οποία αναπαριστούν νοητικές κατασκευές οι οποίες κατέχουν ανάκατες νοητικές και σχηματικές ιδιότητες, όχι κατά κανόνα πλήρως διακεκριμένες και μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Σαφέστατα όταν φανταζόμαστε ένα κύκλο φανταζόμαστε ένα κύκλο σχεδιασμένο πάνω σε ένα κομμάτι χαρτί. Ο κύκλος, περιλαμβάνει στοιχεία που

---

[6] Στην Γεωμετρία Δημιουργούμε στερεά από περιστροφή, όπως για παράδειγμα ο ορθός κώνος που προκύπτει από την περιστροφή ορθογωνίου τριγώνου περί την μία ορθή του πλευρά.

[7] Βλέπε και το παράδειγμα στο Κεφάλαιο για την ισότητα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου.

δεν έχουν σχέση με την ιδέα του κύκλου ως νοητικό αντικείμενο. Επί παραδείγματι ο κύκλος που φανταζόμαστε θα έχει κάποιο χρώμα ενώ παράλληλα η γραμμή θα έχει κάποιο πλάτος και αναπόφευκτα θα καταλαμβάνει κάποιο χώρο, στοιχεία που τον κάνουν να απέχει από τον ιδανικό τέλειο κύκλο που μας αποδίδει ο ορισμός[8] αυτού στα πλαίσια της ευκλείδειας ή κάποιας άλλης γεωμετρίας καθώς ο ιδανικός κύκλος είναι αποκομμένος από τέτοιες ιδιότητες. Οι αισθήσεις αντιλαμβάνονται περισσότερα από ότι οι ορισμοί απαιτούν και κατά κάποιο τρόπο μολύνουν την οικονομία, ιδανικότητα και αυστηρότητα του ορισμού.

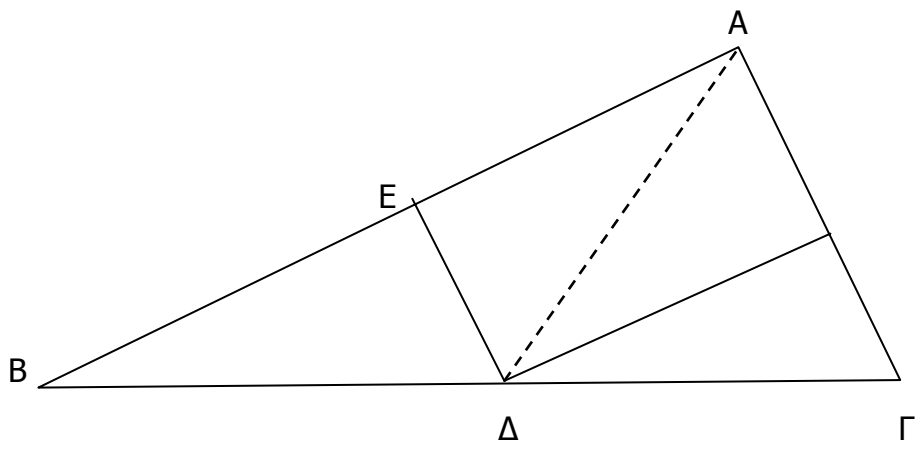
Όμως αυτό που είναι αξιοσημείωτο και προκαλεί μέγιστο ενδιαφέρον είναι πως ακόμα και σε αυτή την ατελή μορφή του μπορεί ακόμα να συμμετέχει και να υποβοηθά σε διαδικασίες μαθηματικών συλλογισμών ενεργά και μάλιστα πολλές φορές να βοηθά κατά ουσιαστικό τρόπο στην διαμόρφωση και τον έλεγχο υπεράνω των συλλογισμών αυτών (Fishbein, 1993).

Ένα αντικείμενο, λοιπόν, που γνωρίζουμε πως είναι μία ατελής προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα έγκυρα για το τέλειο αντικείμενο του οποίου αποτελεί αναπαράσταση.

[8] Εδώ μιλάμε για τον ορισμό στην Ευκλείδεια οπτική που αποδίδεται σε αυτόν.

0.5 Το Σχήμα Κατευθύνει

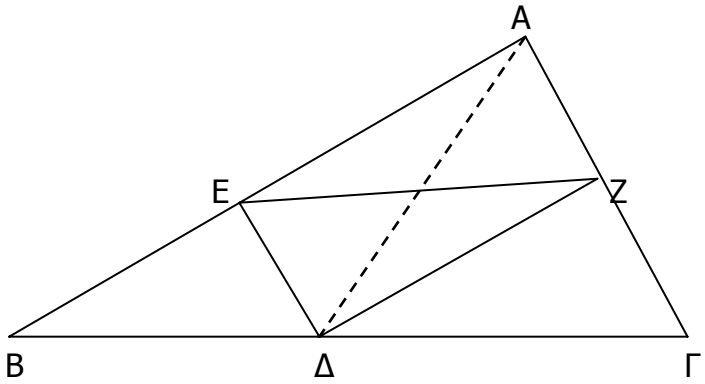
Υπάρχουν πολλά παραδείγματα που μπορούν να κάνουν σαφές το πόσο υποβοηθητικό μπορεί να είναι ένα σχήμα. Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α την ορθή του γωνία. Θεωρώ στην υποτείνουσα του τυχαίο σημείο Δ και από αυτό φέρω παράλληλες προς τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Θέλω να βρεθεί το σημείο Δ της ΒΓ που κάνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ ελάχιστο.



Σχήμα 0.5.1

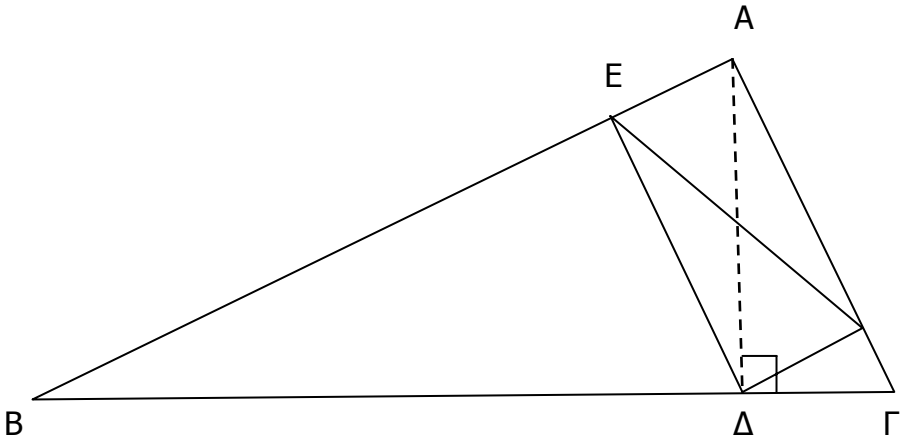
Με μία πρώτη ανάγνωση το ερώτημα δεν φαίνεται να έχει άμεση και λογικά έγκυρη απάντηση και αυτό γιατί το γεγονός πως το Δ είναι τυχαίο μας κάνει αρκετά επιφυλακτικούς. Κάποιος εξαιρετικά εξοικειωμένος με αναλυτικές μεθόδους θα προσπαθούσε να φτιάξει τη συνάρτηση της απόστασης και να προσπαθήσει να την ελαχιστοποιήσει.

Ευτυχώς, υπάρχει πολύ πιο σύντομος και εύκολος τρόπος για να εντοπίσουμε την θέση του σημείου.



Σχήμα 0.5.2.

Μία πρώτη επιφανειακή παρατήρηση είναι αρκετή για να απογοητεύσει οποιονδήποτε πιστεύει σε μία εύκολη λύση χωρίς την χρήση αναλυτικών μεθόδων. Αλλά όταν κάποιος παρατηρήσει το σχήμα πιο προσεκτικά θα δει πως το τετράπλευρο ΕΑΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το γεγονός αυτό μας εφοδιάζει με όλα όσα θα χρειαστούμε. Η ισότητα των διαγωνίων του είναι δεδομένη και άρα το ΕΖ είναι ίσο με το ΑΔ.



Σχήμα 0.5.3

Η ισότητα των διαγωνίων είναι μία αλήθεια αδιαπραγμάτευτη και καθολικά αποδεκτή καθώς αποτελεί άμεσο αποτέλεσμα του ορισμού και μέσω των αξιωμάτων έχει διατηρήσει την έννοια του αναγκαίου (Netz, 2003). Οι σχέσεις αυτές δεν είναι αλήθειες που επιβάλλονται από το σχήμα αλλά υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτό με προέλευση από τα αξιώματα της γεωμετρίας μας και τους ορισμούς. Η αναγκαιότητα λοιπόν των ισχυρισμών

μας την οποία και θέλουμε να τονίσουμε και τα τελικά μας συμπεράσματα δεν καταστρώνονται όταν θεωρούμε χωριστά το σχήμα και τους τυπικούς χειρισμούς που προκύπτουν ως επακόλουθα των λογικών περιορισμών αλλά ως μοναδικό επακόλουθο μίας διαδικασίας στην οποία ένα προϊόν απόσταξης των πιο χαρακτηριστικών γνωρισμάτων σχημάτων και των αντίστοιχων εννοιών που αυτά αντιπροσωπεύουν.

Την απόδειξη ολοκληρώνει η παρατήρηση πως το ύψος του ορθογωνίου πραγματώνει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ του σημείου Α και του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Άρα το αποτέλεσμα πως η επιλογή ως σημείου πραγμάτωσης του ελάχιστου ΕΖ είναι το ίχνος του ύψους του τριγώνου είναι άμεσο και προφανές.

Με την βοήθεια ενός κατάλληλου προγράμματος για ηλεκτρονικό υπολογιστή θα μπορούσαμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να «δουν» το τελικό αποτέλεσμα. Θα μπορούσαμε να έχουμε ένα σημείο που να σέρνεται πάνω στην υποτείνουσα και έτσι ενεργοποιώντας την οπτική αντίληψη να ωθήσουμε τα παιδιά στην δημιουργία της εικασίας. Αυτό θα ήταν μία πολύ ενδιαφέρουσα διαδικασία για απόκτηση ερευνητικών δεδομένων.

Επιστρέφοντας, στο πρόβλημα συμπεραίνουμε πως τελικά, θεωρούμε ένα σχήμα του οποίου τα γνωρίσματα τα βλέπουμε από οπτική γωνία τέτοια ώστε να μιλάμε για αυτά και μόνο αυτά, που αντιστοιχούν στην έννοια αυτή καθαυτή. Τα υπόλοιπα γνωρίσματα που εμφανίζονται στο σχήμα, δεν αποτελούν αντικείμενα μελέτης και σπουδής. Περνάνε απαρατήρητα και δεν έχουν ρόλο στην ακολουθία των συλλογισμών.

Τα γνωρίσματα που τελικά παίρνουν μέρος στην διαπραγμάτευση είναι αυτά ακριβώς που δύνανται να αποκαλύπτουν σε εμάς τις κρυμμένες και άρρητες λογικές σχέσεις που διέπουν το εν λόγω σχήμα. Με πολύ μικρές ποσότητες εμπειρίας ο ασχολούμενος με την Γεωμετρία καλείται να καταβάλει ελάχιστη προσπάθεια για να εξαγνίσει το κάθε σχήμα που εμφανίζεται στο προσκήνιο κατά την διαπραγμάτευση, από τις τυχόν ατέλειες του.

Οι νοητικές διεργασίες μπορούν να ξεχωρίσουν αυτό που μπορούμε να ονομάζουμε έννοια του σχήματος ή εννοιολογικό υπόβαθρο του σχήματος, από το σχήμα καθαυτό και τις όποιες ανομοιομορφίες ή ατέλειες μπορεί να

παρουσιάζει σε σχέση με τον αυστηρό μαθηματικό και λογικό ορισμό του. Μία αυστηρή διαδικασία για να τροποποιούμε το σχήμα ώστε να προσεγγίζει το ιδανικό[9] είναι ανέφικτη. Σε εννοιολογικό επίπεδο βέβαια, μία τέτοια διαδικασία, γίνεται αυτόματα ώστε να επιβάλει το διάγραμμα ή σχήμα σε ένα ακέραιο και σταθερό ενεργό συστατικό μίας αυστηρής λογικής διαδικασίας δικαιολόγησης των ισχυρισμών.

Το γεγονός ότι καταλήγουμε ξαφνικά στο συμπέρασμα της ισότητας των διαγωνίων και αυτό μας οδήγησε άμεσα στη λύση, την ίδια στιγμή που παρατηρούμε πως το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και χωρίς κάποια ενδιάμεση έρευνα, ενισχύει την άποψη πως το συγκεκριμένο θεωρούμενο σχήμα, εξαρχής δεν ήταν μία απλή εικόνα αλλά μία ήδη λογικά καθορισμένη και προσδιοριζόμενη δομή - κατασκευή. Η σύγχυση σχετικά με τα όρια του σχήματος σε σχέση με τα όρια της έννοιας φαίνεται σε αυτή την περίπτωση να είναι ολοκληρωτική και μάλλον ένα τέτοιο ερώτημα να μην έχει κάποια απάντηση καθώς το σχήμα επενεργεί καθοριστικά στην διαμόρφωση οποιασδήποτε έννοιας και αντίστροφα. Αν θέλαμε όμως να θεωρήσουμε μία από τις δύο κυρίαρχη ως δομή, αυτή θα λέγαμε πως είναι η έννοια η οποία καθορίζει και δεν υποβοηθά απλώς.

Θα πρέπει σε κάποιο σημείο να αναλύσουμε την διαφορετική φύση των Γεωμετρικών Χώρων σε σχέση με την φύση των Αναπαραστασιακών Χώρων. Έτσι αυθόρμητα και χωρίς καθυστέρηση στο προσκήνιο εμφανίζονται πλήθος ερωτημάτων που έχουν να κάνουν με την διπλή φύση των Γεωμετρικών Αντικειμένων.

---

[9] Με την νοητική προσέγγιση του όρου

1. Οι Έννοιες

1.1 Διαμόρφωση Εννοιών

Ο Piaget (1970), διέκρινε δύο τύπους μαθηματικής σκέψης: ένα σχηματικό (figurative), που αναφέρεται στη δυνατότητα οπτικής επαφής και επίδρασης στην σκέψη με βάση ακίνητα εικονικά δεδομένα τα οποία και αντιμετωπίζουμε ως μια ολότητα πλήρη και σαφή αλλά στερείται αυστηρότητας δηλαδή μίας οπτικής αντίληψης, και έναν λειτουργικό (operative) που σχετίζεται με έγκυρους νοητικούς χειρισμούς υπεράνω συνόλων χαρακτηριστικών.

Αναπόφευκτα μετά τον Piaget κάποιοι επιχείρησαν να ενοποιήσουν τους δύο τύπους, έτσι αρκετά αργότερα η Sfard (1991), επιχειρεί μια σύνθεση αλλά και σύμπραξη του σχηματικού με τον λειτουργικό τρόπο σκέψης. Η γεφύρωση της έλλειψης επικοινωνίας των δύο τύπων που θεωρεί ο Piaget αποτελεί ένα εξίσου σημαντικό στόχο για την Sfard. Στην πρότασή της, η Sfard θέλει τη διαδικασία της μάθησης στα Μαθηματικά, να συνίσταται σε μια σύμπραξη και αλληλεπίδραση λειτουργικών και δομικών αντιλήψεων της ίδιας μαθηματικής έννοιας και αποτελεί μία σαφώς πιο σύγχρονη και σύνθετη άποψη από αυτή που ο Piaget πρωτοεισήγαγε. Ο έλεγχος και συνάμα η κατεύθυνση αυτών των διαδικασιών από την πλευρά των διδασκόμενων σηματοδοτεί και καθορίζει το επίπεδο που έχει κατακτηθεί η γνώση και άρα είναι απαραίτητα στοιχεία στον δρόμο για την κατανόηση και προώθηση της μαθηματικής και άρα και της γεωμετρικής γνώσης.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η Sfard (1991) υποστηρίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να προσεγγιστούν παράλληλα, δομικά και λειτουργικά. Η δομική προσέγγιση έγκειται σε μια σφαιρική αντίληψη της έννοιας από την κατασκευή της, έως το σύνολο των ιδιοτήτων της, σε αντίθεση με τη λειτουργική η οποία και συνεπάγεται την ερμηνεία της μαθηματικής έννοιας ως διαδικασίας και προφανώς την χρήση της, ως:

«…μια δυναμική μάλλον, παρά ως μια ενεργή οντότητα η οποία αρχίζει να υπάρχει όταν οι συνθήκες το επιβάλλουν σε μια ακολουθία δράσεων» (Sfard, 1991 σελ. 4).

Όλες όμως οι αναπαραστάσεις μιας έννοιας δεν ερμηνεύονται με την ίδια ευκολία δομικά και λειτουργικά. Σε κάποιες υπερέχει η δομική και σε άλλες η λειτουργική συνιστώσα, την στιγμή που σε κάποιες συνυπάρχουν και οι δύο μορφές αρμονικά και υποστηρίζοντας η μία την άλλη.

Για παράδειγμα, η έννοια της διχοτόμου μίας γωνίας ενός τριγώνου γίνεται αντιληπτή σε λειτουργικό επίπεδο περιέχοντας το σύνολο των ιδιοτήτων της όπως το γεγονός ότι κάθε σημείο της ισαπέχει από τις πλευρές της και οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών συντρέχουν, ενώ σε δομικό επίπεδο έχουμε μόνο την ισότητα των δύο γωνιών που δημιουργούνται από τον χωρισμό της αρχικής γωνίας, αλλά όπως και να προσεγγιστεί το ζήτημα και οι δύο μορφές συνυπάρχουν γεγονός που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε χαρακτηριστικό των γεωμετρικών αντικειμένων.

Η δυνατότητα αντίληψης μιας έννοιας από ένα υποκείμενο λειτουργικά και παράλληλα δομικά είναι απαραίτητη για την πλήρη κατανόηση αυτής της έννοιας. Παρόλα αυτά επισημαίνεται από την Sfard κάτι που σχεδόν καθημερινά εντοπίζεται στην τάξη:

> *«..στη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας η λειτουργική αντίληψη συνήθως προηγείται της δομικής»* (1991, σελ.10)

Οι αλγόριθμοι και οι συγκεκριμένες διαδικασίες που μία έννοια μπορεί να συμμετέχει είναι σαφώς ευκολότερα προσβάσιμες για τους μαθητές. Μία τέτοια διαπίστωση στηρίζει την άποψη του Duval (1995), πως οι διαδικασίες σχηματισμού των εννοιών δεν ακολουθούν την πορεία που ακολουθούμε στην αυστηρή μαθηματική πρακτική.

Ο Bruner (1966), στο βιβλίο του Towards a Theory of Instruction, οριοθέτησε και όρισε ως στάδια της γνωστικής ανάπτυξης ενός ατόμου την ικανότητα έκφρασής του ατόμου, μέσω τριών ειδών αναπαραστάσεων: την πρακτική (enactive), την εικονική (iconic) και την συμβολική (symbolic). Για τον Bruner αυτά τα στάδια ήταν διαδοχικά και ιεραρχικά τοποθετημένα στην νοητική εξέλιξη του κάθε ατόμου. Βασική θέση του Bruner αποτελεί πως

οποιοδήποτε γνωστικό αντικείμενο μπορεί να γίνει προσβάσιμο από οποιονδήποτε αρκεί να μεταφερθεί στο πλαίσιο της γνωστικής του ανάπτυξης. Δηλαδή, πρακτικά μπορεί κάποιος να μάθει να χειρίζεται έννοιες, πριν μάθει να τις αναγνωρίζει ως εικόνες και να χειρίζεται τις εικόνες και τέλος έρχεται η αυστηρότητα που μία τυπική συμβολική γλώσσα επιβάλει.

Άρα, κατά τον Bruner, τα σχήματα μπορούν να απλοποιήσουν την γνώση και να την καταστήσουν λειτουργική και ελεγχόμενη για μεγαλύτερα κομμάτια του πληθυσμού, τόσο σε αναπτυξιακό-ηλικιακό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο γνώσεων, από ότι οι αυστηροί φορμαλισμοί. Προφανώς την στιγμή που κανένας από τους μαθητές μίας τάξης δεν γνωρίζει την αυστηρά δομημένη αξιωματική θεωρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά Hilbert μεγάλο ποσοστό των μαθητών είναι ικανό να εισέλθει σε διαδικασίες διαπραγμάτευσης να τις ακολουθήσει ή ακόμα και να τις κατευθύνει με χρήση του σχήματος για να γίνουν υπεράνω αυτού οι λογικές πράξεις.

Ο Davis (1984, σελ.29-30), διατύπωσε την άποψη ότι:

«…*όταν μια διαδικασία μαθαίνεται για πρώτη φορά, το υποκείμενο τη βιώνει βήμα-βήμα. Δεν είναι ικανό να αντιληφθεί ακόμα τη συνέχεια, τη ροή, την ολότητα της δραστηριότητας. Μέσα όμως από την εξάσκηση της πρακτικής, η διαδικασία αποκτάει ξεχωριστή και ανεξάρτητη οντότητα, γίνεται ένα «αντικείμενο» Γίνεται αυτή το αντικείμενο του ενδιαφέροντος και μιας λεπτομερούς εξέτασης… επισημαίνονται οι ομοιότητες και οι διαφορές της με άλλες διαδικασίες (μέσω γνωστικών δεξιοτήτων). Και ενώ η διαδικασία αρχικά ήταν ρήμα που δηλώνει ενέργεια, τελικά γίνεται ουσιαστικό που απαιτεί ενδελεχή διερεύνηση, όντας πλέον αυτή στο επίκεντρο».*

Στην ιστορική εξέλιξη των πραγμάτων, οι ερευνητές προσπάθησαν να προσεγγίσουν την διαδικασία μετασχηματισμού μιας «γνωστικής επεξεργασίας» (process), σε μαθηματική «έννοια» (concept) με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Παρατηρούμε πως η λειτουργική συνιστώσα αναγνωρίζεται και από τον Bruner και από την Sfard. Ακόμα, η Sfard περιγράφει ως δομική αντίληψη την εικονική και συμβολική συνιστώσα του Bruner. Η Sfard (1992 σελ. 64)

περιγράφει τη μετάβαση από την «λειτουργική» (operational) στη «δομική» (structural) αντίληψη ως μια δομή τριών βημάτων:

«Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας σαν μία συμπαγής και ανεξάρτητη ολότητα, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης (θα γίνει έννοια) αυτής της νέας οντότητας σαν ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο».

Ο Dubinsky (1991) εκφράζει την ίδια άποψη μέσω της θεωρίας APOS: (Action – Process – Object). Τα τρία βήματα της θεωρίας APOS: Δράση – Επεξεργασία - Αντικείμενο, οδηγούν τελικά στην συγκρότηση του νοητικού Αντικειμένου (Object), που δεν είναι παρά μια συμπυκνωμένη επεξεργασία, ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών, ενσωματωμένη σε ένα νοητικό αντικείμενο (Ενσωμάτωση:Process Encapsulated into an Object).

Ένα άτομο έχει κατασκευάσει μια μαθηματική έννοια ως νοητικό αντικείμενο, όταν έχει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται την επεξεργασία ως ένα συνεκτικό όλο (επεξεργασία ενσωματωμένη σε ένα αντικείμενο: Process Encapsulated into an Object).

Για παράδειγμα, το άτομο έχει κατασκευάσει το νοητικό αντικείμενο του ρόμβου όταν δύναται να αντιμετωπίζει ένα ρόμβο ως σύνδεση δύο ίσων ισοσκελών τριγώνων, χωρίς παράλληλα να αισθάνονται την υποχρέωση να ανατρέχει σε συγκεκριμένα παραδείγματα για να επιβεβαιώσει ή να τεκμηριώσει τις απόψεις του.

Αν αναλογιστεί κανείς τα γεγονότα αυτά, θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για το διαδικαστικό-αντικείμενο (procept) την έννοια του οποίου πρώτοι εισήγαγαν οι Gray και Tall (Gray & Tall, 1994). Τα αντικείμενα βέβαια αυτά είναι ξένα προς την παραδοσιακή γεωμετρία αλλά συνδέονται με τις πιο σύγχρονες προσεγγίσεις της γεωμετρίας μέσω αναλυτικών εξισώσεων, μέσω ισομορφισμών αλλά και άλλες.

Η ενσωμάτωση (encapsulation) είναι μία φυσική συνάρτηση[10] - διαδικασία της ανθρώπινης νόησης. Μία διαδικασία που χρησιμοποιείται στην

[10] Με την έννοια της αντιστοίχισης

πρακτική μας, αρχίζει να γίνεται αντιληπτή ως ένα αντικείμενο μέσω της διαδικασίας αυτής. Στην γεωμετρία παρατηρούμε μία τέτοια τάση των μαθητών όταν βλέπουν για πρώτη φορά την δυναμικότητα της μεταφοράς του σχήματος για παράδειγμα την οποία και οι μαθητές κατατάσσουν ως νοητικό αντικείμενο. Το όνομα του νέου αυτού αντικειμένου ταυτίζεται με το όνομα της διαδικασίας.

«Η αναπτυγμένη μαθηματική νόηση-σκέψη δεν περιέχει μόνο ένα μεγαλύτερου βαθμού αταξίας, σύμπλεγμα ιδεών. Παράλληλα τις συστηματοποιεί σε ένα οργανωμένο πλαίσιο και τελικά οδηγεί στις σύγχρονες αξιωματικές θεωρίες του εικοστού αιώνα. Εδώ η ανάγκη για αποδείξεις οδηγεί στη χρήση εννοιολογικών ορισμών που θα συστήσουν μαθηματικές έννοιες, ειδικότερα σαν νοητικά αντικείμενα που περιγράφουν λεκτικές και συμβολικές ιδιότητες» (Tall, 1994).

Κάπως έτσι, αντιμετωπίζουμε σήμερα την διαδικασία επινόησης ή εντοπισμού των νέων γεωμετρικών εννοιών και την κατανόησή τους σε επίπεδο έρευνας αλλά και σε διδακτικό επίπεδο. Η ανάγκη μας για ορθά αποτελέσματα οδηγεί στην κατεύθυνση των εννοιολογικών προσεγγίσεων μέσω αυστηρών φορμαλισμών, οι οποίες όμως δεν καταφέρνουν να αποκόψουν τα σχήματα από το μαθηματικό προσκήνιο.

Το διαδικαστικό αντικείμενο, είναι δηλαδή το αποτέλεσμα μίας διαδικασίας πραγματοποίησης (Sfard), ή μίας διαδικασίας ενσωμάτωσης (κατά τη θεωρία APOS). Για τους Gray και Tall (1994),ένα στοιχειώδες διαδικαστικό αντικείμενο, είναι σύνθεση τριών συνιστωσών: μιας επεξεργασίας που παράγει μια μαθηματική έννοια, και ενός συμβόλου που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει είτε την επεξεργασία είτε την έννοια χωρίς ποτέ να υπάρχει ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στην επεξεργασία και την έννοια.

1.2.Γεωμετρικές Έννοιες

Ο Tall (2000) αναγνωρίζει σε συμφωνία και με πολλούς άλλους, η ανάπτυξη στη Γεωμετρία διαφέρει ουσιαστικά από εκείνη στους άλλους κλάδους των φυσικών επιστημών αλλά και των Μαθηματικών. Η φύση αλλά και η προέλευση των εννοιών που αναφέρονται σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα γνώσης, είναι διαφορετική από τη φύση των εννοιών στη Γεωμετρία. Σε κάθε περίπτωση ο πραγματικός κόσμος είναι αυτός που αποτελεί εφαλτήριο για την όποια πρακτική θα αναπτυχθεί σε οποιοδήποτε επιστημονικό πεδίο, όμως στην γεωμετρική πρακτική η αντίληψη της ύπαρξης του αντικειμένου προηγείται της εργασίας πάνω στο ίδιο το αντικείμενο.

Αν και το θέμα φαντάζει εξαιρετικά φιλοσοφικό, το γεγονός πως στη γεωμετρία το οντολογικό κενό καλύπτεται από το διάγραμμα, όπως και ο Netz (2003) αναφέρει για την πρακτική που εξελίχθηκε στην Αρχαία Ελλάδα, στην αριθμητική για παράδειγμα τα θεμέλια βρίσκονται πάνω σε αντικείμενα καθημερινά (όπως δέκα μήλα και τρία μήλα πόσα μήλα μας δίνουν) και άρα η πρακτική της αριθμητικής αναφέρεται άμεσα και με προφανή τρόπο, στον φυσικό κόσμο. Η γεωμετρία λοιπόν, κατασκευάζει με αφαίρεση αντικείμενα την στιγμή που οι άλλοι κλάδοι των βασικών μαθηματικών έχουν έτοιμο το οντολογικό τους υπόβαθρο και άμεση απρόσκοπτη πρόσβαση σε αυτό εξασφαλισμένη.

Ο Tall (1999), αμφισβητεί την εφαρμογή της θεωρίας APOS, στην περίπτωση των γεωμετρικών εννοιών, δεδομένου ότι στο εμπειρικό στάδιο, τα σχήματα συνδέονται με πραγματικά αντίστοιχά τους (real-world prototypes), και αναγνωρίζονται ως ολότητες (μορφές-gestalts). Ως εκ τούτου, στην περίπτωση της Γεωμετρίας, η δομική αντίληψη των αντικειμένων προηγείται της λειτουργικής:

«Η Γεωμετρία περιλαμβάνει πολλές ενέργειες εμπειρικής αφαίρεσης εστιάζοντας σε αντικείμενα (σε αντίθεση με την Αριθμητική και την Άλγεβρα που ξεκινούν με ψευδο-εμπειρική αφαίρεση)….Ισχυρίζομαι ως εκ τούτου ότι η Γεωμετρία ξεκινά ως μια θεωρία που στηρίζεται στα

αντικείμενα (και όχι σε ενέργειες πάνω σε αντικείμενα). Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν επεξεργασίες στη Γεωμετρία (processes) - ασφαλώς και υπάρχουν (σχεδιασμός, μέτρηση, κατασκευή κλπ). Εντούτοις, ο στόχος αυτών των επεξεργασιών, (δεν είναι ο νοητικός σχηματισμός αυτών των αντικειμένων, αλλά) είναι να αποκτηθεί γνώση σχετικά με αυτά τα ίδια τα αντικείμενα»

Η διαφορά ανάμεσα σε μία γεωμετρική έννοια και σε μία άλλη που απαντάται σε κάποιο άλλο γνωστικό αντικείμενο των θετικών επιστημών είναι αυτή που γίνεται προφανής αν την γεωμετρική έννοια την ονομάσουμε αντιληπτό αντικείμενο (perceived object) και τις έννοιες με διαφορετική προέλευση τις ονομάζουμε κατανοηθέν αντικείμενο (conceived object).

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γνώση που προκύπτει από εμπειρική αφαίρεση είναι η γεωμετρική γνώση, σε αντίθεση με την συμβολική γνώση (αριθμητική ή αλγεβρική γνώση) που προκύπτει από ψευδο-εμπειρική αφαίρεση ενώ κάποιος θα μπορούσε να μιλάει για την μη ύπαρξη αφαίρεσης. Η διαφορά αυτή μεταξύ γεωμετρικής και συμβολικής γνώσης, έχει αντίκτυπο στο τρόπο οικειοποίησής της από το υποκείμενο.

«Οι γεωμετρικές ιδέες …γίνονται αντιληπτές δομικά πριν κατανοηθούν οι εναλλακτικές διαδικαστικές περιγραφές τους…….η ιστορική ανάλυση των άλλων (μη γεωμετρικών εννοιών) δείχνει ότι στα συμβολικά Μαθηματικά η πλειοψηφία των ιδεών δημιουργήθηκε μέσα από επεξεργασίες.
(Sfard, 1991, σελ 11).

Σύμφωνα με τον Fischbein (1993), η εικόνα και η έννοια μαζί αποτελούν ένα υβριδικό τρίτο είδος της οντότητας: "Το αντικείμενο της έρευνας και της ενασχόλησης σε μία γεωμετρική συλλογιστική αποτελείται πάντα από ψυχικούς φορείς, και ζητάει από εμάς εικονιστικές έννοιες και προσεγγίσεις, οι οποίες αντανακλούν χωρικές ιδιότητες (σχήμα, θέση, μέγεθος) και ταυτόχρονα, εμπεριέχουν εννοιολογικές ιδιότητες όπως η ιδανικότητα, γενικότητα και η τελειότητα. Σε ένα θεωρητικό μοντέλο απόδειξης σε υψηλό γεωμετρικό επίπεδο η ενασχόληση αρχίζει με μια έννοια εικονιστική και τελειώνει με μια εικονιστική αντίληψη στην οποία περιέχεται η παρεχόμενη πληροφόρηση και τη σύναψη όλων των ιδιοτήτων που

προκύπτουν. Όλα τα παραπάνω πλήθη πληροφοριών και απεικονίσεων συμπυκνώνονται σε μία δήλωση που έχει προκύψει από τις παρεχόμενες και προκύπτουσες πληροφορίες.

Εκεί ανάμεσα βρίσκονται μια σειρά ενδιάμεσων εικονιστικών εννοιών. Οι κανόνες που εξουσιάζουν και διέπουν την αιτιολόγηση με χρήση ως διάμεσο τις εικόνες δημιουργούν ένα σύνολο διακεκριμένων αρχών για μία όχι και τόσο αυστηρή σε διατυπώσεις παραγωγική γεωμετρία.

Ένα πλαίσιο που περιγράφει την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης και ειδικότερα της παραγωγής μαθηματικών αποτελεσμάτων και γεωμετρικών εννοιών και έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς έρευνας είναι το Van Hiele μοντέλο της γεωμετρικής σκέψη (Van Hiele 1986). Τα επίπεδα αυτά συνιστούν μία μέθοδο για την προσέγγιση των εννοιών και την ανάπτυξή τους με βάση τα επίπεδα της σκέψης τα οποία έχει καταφέρει να κατακτήσει ο μαθητής, κοινώς γνωστό ως «τα επίπεδα Van Hiele». Αρχικά η θεωρία ήρθε στο προσκήνιο με στόχο την διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας και αργότερα εντοπίστηκε πως μπορεί να έχει αρκετά ευρύτερες εφαρμογές από αυτές της διδασκαλίας της γεωμετρίας.

Ο Hasegawa (1997) σε συμφωνία με όσα ο De May (1982) ισχυρίζεται διακρίνει τέσσερα διακριτά και ταυτόχρονα εξελικτικά στάδια, στην δημιουργία της έννοιας του πολυγώνου. Ως τέτοια ιεραρχεί, τα στάδια που αποκαλεί Μοναδιαίο (monadic), Δομικό (structural), το Στάδιο του Περιεχομένου (contextual) και τελικά το Γνωστικό Ομοειδές (cognitive) στάδιο. Το πρώτο στάδιο αντιστοιχεί στο γνωστικό στάδιο που το κάθε αντικείμενο θεωρείται απομονωμένο και όχι ως αντικείμενο που εκπροσωπεί κάποια πολλαπλότητα. Το στάδιο αυτό αντιστοιχεί στο αντίστοιχο στάδιο Ο (μηδέν) των επιπέδων van Hiele. Το επόμενο στάδιο οριοθετείται από την λειτουργία της αποσύνθεσης της έννοιας στα επιμέρους στοιχεία της, όπως για παράδειγμα στο πολύγωνο στις πλευρές, γωνίες και κορυφές του. Το 3^{ο} στάδιο εισαγάγει την δυνατότητα ταύτισης της έννοιας με ένα διάγραμμα ή σχήμα, ενώ το τελευταίο σημαίνει και την δυνατότητα των μαθητών να δημιουργούν ένα δεδομένο ποσό δεδομένων που θα τους βοηθήσουν ώστε να φτάσουν στους γνωστικούς τους στόχους.

Η εξελικτικότητα των σταδίων αυτών γίνεται εμφανής από το γεγονός πως η έκταση των σχέσεων από τα μεμονωμένα δεδομένα και σχέσεις καταλήγουν στο γενικότερο σύστημα που ανήκουν και άρα δεν μπορεί παρά να είναι εξελεκτικά καθώς κινούνται από το ειδικό στο γενικό.

Ο Duval δηλώνει πως τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απευθείας προσβάσιμα στην αντίληψη ως ας πούμε αληθινά ή φυσικά αντικείμενα. Αυτό για τον Duval σημαίνει πως διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι απολύτως απαραίτητες. Παρόλα αυτά τονίζει πως είναι τα ίδια τα αντικείμενα που είναι το επίκεντρο του ενδιαφέροντος της μελέτης και όχι οι σημειωτικές τους αναπαραστάσεις, οπότε ο σαφής και ρητός διαχωρισμός ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και το ίδιο το αντικείμενο είναι σημαντικότατο κομμάτι της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και ως εκ τούτου θα πρέπει να αποτελεί και σημαντικό κομμάτι της διδασκαλίας τους (Duval, 1993 σελ37-38). Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις και ο τρόπος ή οι λειτουργίες που καθιστούν εφικτή την δημιουργία τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τον τρόπο που γίνεται η δημιουργία της εννοιολογικής κατανόησης του αντικείμενου αλλά και το ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο.

2. Οι Εικόνες

2.1.Η Πρόσληψη και Κατανόηση της Εικόνας

2.1.1.Οπτική Αντίληψη

Η ικανότητά μας να αντιλαμβανόμαστε αυτό που βλέπουμε χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, εξαρτάται από την ασυνείδητη αλλά «έξυπνη» αξιοποίηση γνώσης για τον εξωτερικό κόσμο, που βρίσκεται αποτυπωμένη στα νευρωνικά κυκλώματα του εγκεφάλου.

Γνωρίζουν, όμως, τα νευρικά υποσυστήματα των αισθήσεων αλλά και ειδικότερα της όρασης τους νόμους της φυσικής και των μαθηματικών; Η απάντηση μάλλον προφανώς θα πρέπει να είναι όχι καθώς η αισθητηριακή μας αντίληψη είναι κυρίαρχα Ευκλείδεια την στιγμή που η επιστήμη δεν δέχεται ως μοναδική αληθινή και αποδεκτή την Ευκλείδεια γεωμετρία. Πολύ δε περισσότερο, έχουμε φτάσει στο σημείο να θεωρούμε σίγουρο πως η Γεωμετρία του σύμπαντος δεν είναι Ευκλείδεια. Η Ευκλείδεια γεωμετρία θεωρείται ένα ικανοποιητικό γεωμετρικό μοντέλο για τοπική χρήση. Άρα και οι αισθήσεις μας μπορούν να μας παρέχουν δεδομένα που θα δεχόμαστε ως αληθή αλλά θα υπόκεινται σε περιορισμούς.

Αυτό το εμπόδιο για να ξεπεραστεί θα χρειαζόταν ισχυρός περιορισμός του επιστημονικού πεδίου αναφοράς, χρησιμότητας και των εφαρμογών της γεωμετρίας που θα χρησιμοποιούσαμε. Κάτι τέτοιο στην μαθηματική πρακτική δεν μπορεί να γίνει φυσικά αποδεκτό.

Ακόμα, μένει να απαντηθεί το ερώτημα αν τα δίκτυα νευρώνων χρησιμοποιούν μόνο επαγωγικούς συλλογισμούς ή μήπως μπορούν να κάνουν και παραγωγικούς συλλογισμούς, (πράγμα μάλλον απίθανο), με στόχο να καταλήξουν σε συμπεράσματα και τέλος πώς αντιμετωπίζουν τα παράδοξα, τις αντιφάσεις και τις ατελείς πληροφορίες που καλούνται να επεξεργαστούν. Τέλος, μία σημαντική πτυχή που πρέπει να διερευνηθεί αποτελεί η θέση πως οι εικονικές παραστάσεις από μόνες τους μπορούν να βοηθήσουν στον καθορισμό του κατά πόσο κάποιος επιχειρηματολογεί υπεράνω του

αναφερόμενου ή της εικόνας. Μπορεί δηλαδή η φύση και η μορφή της εικόνας να μας βοηθήσει να καταλάβουμε κατά πόσο κανείς, επικεντρώνει το ενδιαφέρον του στο σημαίνον ή στο σημαινόμενο. Ο Schwartz (1995) αναγνώρισε σε έρευνα του πως υπάρχουν σημαντικά δεδομένα που υποστηρίζουν πως η πιστότητα της εικόνας σε σχέση με το αντικείμενο βοηθά στο να γίνει η όλη επιχειρηματολογία υπεράνω του αντικειμένου και όχι της εικόνας.

Για όλα αυτά υπάρχουν θεωρίες που δίνουν κάποιες απαντήσεις. Με αυτές τις θεωρίες αυτές θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

2.1.2.Επικοινωνία της Πληροφορίας με Εικόνες

Η διαδικασία της μάθησης είναι ένα καθαρά επικοινωνιακό φαινόμενο. Ο στόχος είναι ο μαθητής να επικοινωνήσει με την γνώση. Ανάμεσα στο μαθητή και τη γνώση υπάρχει ένα κενό που έρχονται να καλύψουν διάφορες κατασκευές του ανθρώπου, όπως οι εικονικές αναπαραστάσεις. Στην παρούσα διπλωματική εξετάζουμε την λειτουργία των διαγραμμάτων ως ενδιάμεσο σκαλοπάτι για να φτάσει κάποιος στην γνώση η οποία για την παρούσα διπλωματική ταυτίζεται με την δημιουργία εννοιών. Βέβαια, τα διαγράμματα είναι κάποια μορφοποιημένα σύνολα πληροφοριών, με κωδικοποιημένες σημειωτικές αναπαραστάσεις τυπικά εκφρασμένες σε κατάλληλες εικόνες και αυτό προϋποθέτει με την σειρά του κάποιου είδους *δεξιότητες κατανόησης* που θα οδηγήσουν στην αποκωδικοποίηση των αναπαραστάσεων.

Εάν υποθέσουμε πως ο δέκτης μίας εικόνας εκτέθηκε ή επικοινώνησε δια μέσου μίας εικόνας, με την πληροφόρηση που αυτή περιέχει, ακολούθως έρχεται μία δεύτερη φάση χωρίς την οποία η εικόνα δεν θα είχε καμία απολύτως επίπτωση πάνω του και η παρουσία αυτής θα ήταν απολύτως αδιάφορη. Η φάση αυτή αφορά ένα σύνολο από φαινόμενα που σχετίζονται με την αποκωδικοποίηση των πληροφοριών που η εικόνα αυτή περιέχει.

Τέτοια φαινόμενα είναι η μετατόπιση της προσοχής του δέκτη, ο τρόπος που γίνεται η πρόσληψη της εικόνας από το δέκτη και τέλος ο

ουσιαστικός στόχος της κατανόησης των εικονικών δεδομένων από μεριάς του δέκτη.

Το πλήθος των ερεθισμάτων που επιβάλλονται σε ένα άτομο είναι τέτοιο που το άτομο αδυνατεί να συγκρατήσει και να αλληλεπιδράσει με το όλο σύνολο των ερεθισμάτων αυτών. Οι πολύ μικρές λεπτομέρειες και στοιχεία, που μας φαίνονται να μην σχετίζονται με το υπό διαπραγμάτευση πρόβλημα – ζήτημα, απωθούνται ή απορρίπτονται. Τα ερεθίσματα αυτά που θα ξεχωρίσουν, θα αποτελέσουν στη συνέχεια αντικείμενο πρόσληψης, γνωστικής επεξεργασίας και τελικά θα οδηγήσουν στην επίτευξη του στόχου που είναι η κατανόηση. Επομένως μία σημαντική δεξιότητα που θα πρέπει να αναπτυχθεί από τους μαθητές είναι η δυνατότητα να κρίνουν ποια από τα ερεθίσματα αυτά ανήκουν στην ομάδα των ερεθισμάτων που χρήζουν περαιτέρω μελέτης και αξιοποίησης.

Η προσοχή που θα αποδώσει κάποιος στα οπτικά ερεθίσματα είναι ένα ξεκάθαρα επιλεκτικό φαινόμενο από την ίδια την φύση του. Η αντιμετώπιση που θα τύχουν τα ερεθίσματα εξαρτάται από ορισμένα χαρακτηριστικά των ίδιων των οπτικών ερεθισμάτων - εικόνων στις οποίες καλείται να ανταποκριθεί, όπως είναι η καινοτομία της εικόνας, η πολυπλοκότητα της ίδιας και του νοήματος που αυτή η εικόνα περιέχει αλλά και το πλαίσιο εντός του οποίου η εικόνα αυτή θα κάνει την εμφάνισή της.

2.1.3.Πρόσληψη της Εικόνας

Η επεξεργασία των αισθητηριακών εντυπώσεων που προκαλεί μία εικόνα είναι ίσως το σημαντικότερο σημείο που προηγείται της κατανόησης των εννοιών που η εικόνα αυτή περιέχει. Οι εικόνες ως φορείς πληροφοριών αποτελούν επικοινωνιακά εργαλεία με τεράστια ισχύ καθώς επικοινωνούν οικουμενικά με οποιονδήποτε χωρίς άλλες παρεμβολές. Στο μέτρο που η επικοινωνία μέσω εικόνων, εξαρτάται από την όσον το δυνατόν καλύτερη και σωστότερη αντιστοιχία ισοδυναμιών μεταξύ των κωδικοποιημένων πληροφοριών που περιέχονται σε μία εικόνα και της αποκωδικοποίησης των στοιχείων αυτής που σε νοητικό επίπεδο καλείται να κάνει ο δέκτης, η γνώση

των διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα (κατά την αποκωδικοποίηση της εικόνας) μας επιτρέπει να εντοπίσουμε τα συγκεκριμένα σημεία στα οποία η ισοδυναμία αυτή ενδέχεται να χαθεί ή έστω να μειωθεί η αξία της.

Αυτό έχει τεράστιο ενδιαφέρον ούτως ή άλλως σε επίπεδο ψυχολογίας, αλλά αποκτά ακόμα μεγαλύτερο όταν το εξετάσουμε από τη σκοπιά ενός καθηγητή γεωμετρίας, εργαλείο του οποίου και μάλιστα από τα σημαντικότερα αποτελούν οι εικόνες των σχημάτων που θα χρησιμοποιήσει στην διδακτική πρακτική. Θα μπορούσε λοιπόν, μία τέτοια πληροφορία να αξιοποιηθεί σε διδακτικό επίπεδο βοηθώντας να περιοριστούν ή να εξαλειφθούν τελείως σημεία που αποδυναμώνουν την ισοδυναμία της αντιστοιχίας ανάμεσα σε κωδικοποιημένες πληροφορίες και της αποκωδικοποίησης της εικόνας αλλά και των πληροφοριών που ενυπάρχουν μέσα σε αυτή.

Κατ' αρχήν, η πρόσληψη είναι μία διαδικασία επεξεργασίας των οπτικών ερεθισμάτων που προκαλεί μία εικόνα σχήματος ή ένα οποιοδήποτε άλλο οπτικό ερέθισμα. Μολονότι, έχουμε την αίσθηση πως η πρόσληψη μέσω οράσεως είναι μία στιγμιαία διαδικασία για τον άνθρωπο, το πώς βλέπουμε δηλαδή ένα τετράγωνο που προσφέρεται στην όρασή μας στιγμιαία, (αν αυτό είναι καλοσχηματισμένο ή όχι, το χρώμα του, το μέγεθός του κτλ), στην πραγματικότητα η πρόσληψη του τετραγώνου προϋποθέτει μία ταχύτατη αλλά ταυτόχρονα σε κάποια έκταση χρόνου και παράλληλα αναγκαία επεξεργασία της εικόνας. Η διαδικασία αυτή έχει οικοδομητικά[11] χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια η πρόσληψη δεν είναι μία παθητική διαδικασία ή φαινόμενο που περιορίζεται στο να αναπαράγει τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου αλλά αντίθετα αναπτύσσει μία δυναμική ανάλυσης και σύνθεσης των επιμέρους χαρακτηριστικών.

Προκύπτει, λοιπόν, από την σύνθεση πληροφοριών που παρέχουν δύο διαφορετικές και ανεξάρτητες πηγές (Σακαλάκη, 1994):

Α) *το οπτικό ερέθισμα* και

Β) *η μνήμη του υποκειμένου, οι επιθυμίες και ανάγκες του, οι ειδικές γνωστικές διεργασίες του, από την άλλη.*

---

[11] Εδώ θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε την έννοια του Στρουκτουραλισμού όχι ρητά διατυπωμένη

Δηλαδή, εξαρτάται από το αντικείμενο της γνώσης[12] αλλά και το υποκείμενο ταυτόχρονα και χωρίς να μπορεί να υπάρξει οποιοσδήποτε διαχωρισμός. Ανάλογα σημαντικό ρόλο παίζει και το πεδίο αναφοράς στο οποίο θα κάνει την εμφάνισή του ένα σχήμα. Όταν, επί παραδείγματι, δούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στην σχολική αίθουσα δεν θα είναι παρά ένα γεωμετρικό αντικείμενο, ενώ όταν το ίδιο σχήμα το δούμε σε ένα πολεοδομικό σχέδιο αυτό θα μπορεί να είναι ένα οικόπεδο, ένα κτήριο, μία πλατεία κτλ. Η απόδοση νοήματος του σχήματος εξαρτάται από το περιβάλλον στον οποίο το συναντάμε ή βρισκόμαστε.

Ένα πρώτο κυρίαρχο χαρακτηριστικό της οπτικής πρόσληψης είναι πως σε πρώτη φάση, το οπτικό ερέθισμα θα υποδιαιρεθεί σε επιμέρους πρωταρχικές μονάδες που θα υποστούν μία ξέχωρη επεξεργασία προτού εξακριβωθεί η ταυτότητα των οπτικών αυτών ερεθισμάτων (Σακαλάκη, 1994).

Ως παράδειγμα μπορούμε πάλι να αναφέρουμε ένα ορθογώνιο και παραλληλόγραμμο (Βλέπε σχήμα). Τα στοιχεία του είναι ευθύγραμμα τμήματα και σημεία τα οποία και προφανώς αναφέρονται σε πολύ πρώιμες και πρωταρχικές έννοιες της γεωμετρίας. Τα ευθύγραμμα τμήματα μετά για να προσδώσουμε την ένταξή τους στο σχήμα τα αποκαλούμε πλευρές και τις τομές αυτών κορυφές του ορθογωνίου. Επίσης, έτσι σχηματίζονται και οι

Σχήμα 3ο

[12] Εδώ δεχόμαστε πως το αντικείμενο είναι το σχήμα χωρίς αυτό να είναι απολύτως ακριβές

γωνίες του ορθογωνίου και πλήθος άλλων που ακολουθούν αυτή την αναπαραγωγική διαδικασία αφού μετά από κάποιους χειρισμούς ή καλύτερα συνθέσεις των πρωταρχικών εννοιών θα φτάσουμε στην έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Η μετάβαση από τα αρχικά βασικά μαθηματικά στα πιο προχωρημένα (αντίστοιχα για τις γεωμετρικές έννοιες από τις πρωταρχικές στις πιο σύνθετες) φαίνεται να περιλαμβάνει την κατασκευή νοητικών αντικειμένων, τα οποία μπορούν να υποστούν χειρισμούς σε επίπεδο σκέψης, με διάμεσο κάποιες αναλογίες ή με πράξεις πάνω σε αντικείμενα που είναι αντικείμενα που απαντώνται στην εμπειρία του φυσικού - αισθητού κόσμου. Το νοητικά αυτά αντικείμενα περιέχουν συμπιεσμένη εννοιολογική γνώση, η οποία μπορεί με πολλούς τρόπους να μας αποζημιώσει για τους περιορισμούς στους οποίους υποβαλλόμαστε όταν επικεντρωνόμαστε σε νοητικό επίπεδο σε συγκεκριμένα σημεία της πρακτικής μας.

Η διαδικασία της εξέλιξης φαίνεται να πηγάζει, οφείλεται και γενικότερα κατευθύνεται από το σύνολο των διαφορετικών τρόπων που η ροή πληροφοριών και γνώσεων κατευθύνεται προς το μέρος του ατόμου που ενασχολείται με τα μαθηματικά. Η φύση των διαφορετικών ερεθισμάτων, οπτικών ή οποιουδήποτε άλλου είδους, είναι σημαντική και στο επίπεδο της πειστικότητας που απαιτείται για την εδραίωση της ίδιας της γνώσης σε ψυχολογικό επίπεδο για τον ίδιο τον ασχολούμενο με την γεωμετρία ή της αποτελεσματικής τεκμηρίωσής της ώστε να πειστεί κάποιος που δεν την κατέχει και έρχεται σε επαφή με αυτή για πρώτη φορά.

2.2 Η έννοια της Μορφής

Μία γρήγορη ματιά γύρω μας, μας δείχνει ένα από τα πλέον εμφανή στοιχεία της οπτικής αντίληψης: ο κόσμος είναι οργανωμένος σε ευδιάκριτα αντικείμενα και ομάδες αντικειμένων τις οποίες αναγνωρίζουμε αυτομάτως. Αυτή η οπτική οργάνωση είναι το αποτέλεσμα εξοικείωσης που έρχεται με το χρόνο αλλά και δημιουργίας μηχανισμών που καθορίζουν την αντίληψη που έχουμε για τις μορφές των αντικειμένων ερμηνεύοντας τις αισθήσεις των ματιών μας.

Η παράδοση που συνέβαλε καθοριστικά στη μελέτη των διαδικασιών διαμόρφωσης αυτών των πρωταρχικών μονάδων ανήκει στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου και αποκαλείται Ψυχολογία της Μορφής ή Gestalt Psychologie.

Η σχολή αυτή θεωρεί ως βασική μονάδα πρόσληψης τη μορφή (Gestalt). Η πρόσληψη της μορφής προηγείται της πρόσληψης των επιμέρους στοιχείων που την αποτελούν ή την δημιουργούν σαν εικόνα. Δηλαδή, το πρωταρχικό δομικό στοιχείο της αντίληψης είναι η μορφή και όχι το μεμονωμένο ερέθισμα με το αίσθημα που ακολουθεί.

Η λέξη Gestalt σημαίνει ένα οργανωμένο σύνολο ή μία οργανωμένη δομή που είναι διακριτή από τις άλλες δομές. Αυτό που δημιουργεί τη μορφή είναι η σχέση των επιμέρους στοιχείων που την αποτελούν και όχι απλώς τα στοιχεία αυτής. Οι οπαδοί αυτής της σχολής μέσα από τις έρευνές τους για τα οπτικά ερεθίσματα έδειξαν πως το αντιλαμβανόμενο σύνολο είναι διαφορετικό από το άθροισμα των μερών του. Όταν κοιτά κάποιος ένα γεωμετρικό σχήμα ή και οποιοδήποτε νοητικό ή φυσικό κατασκεύασμα, η εντύπωση που αποκτά δεν συνίσταται αποκλειστικά στο συνδυασμό ή την άθροιση των επιμέρους μερών του, όπως τα χρώματα ή οι καμπύλες του σχήματος αλλά σε μία γενικότερη αντίληψη περί του συνόλου της εικόνας. Με άλλα λόγια, αυτό που προσδιορίζει μία οπτική μορφή είναι μία σειρά από ιδιότητες που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ των στοιχείων.

Αναμφίβολα η αντίληψη περί των μορφών που αναπτύσσει η ανθρώπινη νόηση και η οργάνωση των μορφών σε ενότητες μετά από κάποιο χρονικό διάστημα που απαιτείται για την εξοικείωση γίνεται αυτόματα και

χωρίς να καθίσταται απαραίτητη μία κάποια παρέμβαση ανώτερης νοητικής τάξης λειτουργίας. Οι αντιληπτικές μορφές που δομούνται, παρουσιάζουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά

1.Εμπεριέχουν από μόνες τους δυναμική ώστε δεν μπορούν από μόνες τους να θεωρηθούν ως το άθροισμα των μερών τους[13](Βαϊνάς, 2004). Για παράδειγμα, το να θεωρήσει κανείς πως ένα πολύγωνο μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των πλευρών του είναι λάθος αφού μπορούμε να φτιάξουμε ένα δεύτερο διαφορετικό πολύγωνο χρησιμοποιώντας τις ίδιες πλευρές.

2.Τα επιμέρους ερεθίσματα παίρνουν νόημα ανάλογα με το πλαίσιο που μέσα στο οποίο τοποθετούνται (Βαϊνάς, 2004). Το ίδιο οπτικό ερέθισμα έχει διαφορετικό νόημα ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο τοποθετείται.

3. Οι αντιληπτικές μορφές παρουσιάζονται κατά περιοχές ως ομάδες ερεθισμάτων, και μέσα σε αυτές εκ των υστέρων επιχειρούνται αναλύσεις και διαφοροποιήσεις (Βαϊνάς, 2004). Πρώτα δηλαδή σε ένα ρόμβο γίνεται αντιληπτός ή καθίσταται ορθότερα αναγνωρίσιμος ο ρόμβος και κατόπιν γίνονται αντιληπτές οι πλευρές του, οι γωνίες του και οι σχέσεις που συνεπάγονται.

Έτσι οδηγηθήκαμε στους νόμους της σχολής Gestalt οι οποίοι περιγράφουν αλλά δεν εξηγούν πως λειτουργεί η οπτική οργάνωση. Η περιγραφή είναι σίγουρα ενδιαφέρουσα και έχει διδακτικές προεκτάσεις αλλά σίγουρα θα ήμασταν σε θέση να αποκτήσουμε τεράστια πλεονεκτήματα στον τομέα της διδασκαλίας αν μπορούσαμε να επέμβουμε στην ίδια τη λειτουργία την καθοδηγήσουμε και να την βελτιστοποιήσουμε.

Οι νόμοι της σχολής Gestalt[14] είναι οι εξής (Culkin, J and Perrotto, R, 2004):

1. Κλείσιμο: υπάρχει η τάση να βλέπουμε τα αντικείμενα ως ολοκληρωμένα ή πλήρως διαμορφωμένα, ακόμα και όταν οι οπτικές πληροφορίες που δεχόμαστε δεν είναι ολοκληρωμένες. Δηλαδή το κλειστό σχήμα και οι συνεχείς γραμμές ευνοούν την οργάνωση της μορφής.

[13] Των στοιχείων που τις αποτελούν

[14] Οι βασικότεροι νόμοι της σχόλης

2. Συνέχεια: Βλέπουμε τα αντικείμενα σαν να έχουν συνέχεια, συνεχόμενα περιγράμματα και όρια[15].
3. Ομοιότητα: αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα σαν να ανήκουν σε μία ομάδα, όταν έχουν παρόμοιο σχήμα ή κάποια άλλα χαρακτηριστικά[16].
4. Εγγύτητα: βλέπουμε τα αντικείμενα που βρίσκονται κοντά σαν να ανήκουν σε μία ομάδα.
5. Μορφή – Φόντο: το οπτικό μας πεδίο οργανώνεται σε μορφές, αντικείμενα που ξεχωρίζουν στο μπροστινό μέρος του πεδίου και σε φόντο, αντικείμενα του φόντου που δεν καταφέρνουν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον μας.
6. Ο νόμος της διαθέσεως ή της στάσεως. Σύμφωνα με τον οποίο εκείνο που βλέπουμε συχνά δεν εξαρτάται μόνο από το ίδιο το αντικείμενο αλλά και από υποκειμενικές στάσεις. Συχνά δηλαδή βλέπουμε αυτό που θέλουμε[17].

Μετά την υποδιαίρεση του πεδίου σε επιμέρους στοιχεία η επόμενη φάση συνίσταται στην υποδιαίρεση των επιμέρους στοιχείων σε δύο βασικές ενότητες: τη μορφή και το φόντο όπως ορίζει και η Πέμπτη αρχή της θεωρίας.

Η μορφή συγκεντρώνει το σύνολο του ενδιαφέροντος καθώς και τις περαιτέρω επεξεργασίες ερμηνείας. Έτσι, ταυτόχρονα με την επιλογή της μορφής επέρχεται και μία απομάκρυνση από το προσκήνιο των υπολοίπων στοιχείων που στο εξής συνθέτουν το φόντο και η σημασία τους ελαχιστοποιείται. Το τελευταίο μοιάζει απομακρυσμένο ενώ παράλληλα η μορφή μοιάζει εγγύτερη γεγονός που δίνει το τελειωτικό χτύπημα στην δυνατότητα επαναφοράς του φόντου στο προσκήνιο του ενδιαφέροντος.

---

[15] Αιτιολόγηση της έλλειψης στην αρχαία αξιωματική θεμελίωση της απαίτησης της συνέχειας των γραμμών αλλά αυτή να θεωρείται διαισθητικά προφανής. Ας μην ξεχνάμε άλλωστε και την εξάρτηση των αρχαίων Ελλήνων από το σχήμα σε μεγάλο βαθμό, γεγονός που αποδεικνύει και η γεωμετρική άλγεβρα.

[16] Ο νόμος αυτός εξηγεί και το πώς δημιουργούνται και οι οπτικές κλάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων

[17] Συνήθης πρακτική μαθητών να θεωρούν δεδομένα στο σχήμα επειδή αυτά θα τους οδηγήσουν στη λύση

Η επιλογή της μορφής εξαρτάται, όπως είναι αναμενόμενο και φυσικό, και από τη βούληση, τα κίνητρα, τις ανάγκες, τις επιθυμίες τις στάσεις, τις προδιαγραφές του υποκειμένου και το πλαίσιο αναφοράς στο οποίο απαντάται μία εικόνα.

2.2.1. Κατανόηση της Μορφής

Τι σημαίνει όμως κατανόηση; Σίγουρα δεν επαρκεί η γνώση[18] από μόνη της ώστε να μπορούμε να μιλάμε για κατανόηση. Ποια είναι η διαδικασία που οδηγεί στην κατανόηση ενός οπτικού ερεθίσματος και μίας λεκτικής πρότασης; Εδώ τα πράγματα φαντάζουν ακόμα πιο συγκεχυμένα.

Οι γνώσεις που διαθέτουμε πάνω στο θέμα είναι ακόμα ανεπαρκείς. Ωστόσο, υπάρχουν πλήθος εργασιών που διερεύνησαν του παράγοντες που συμβάλουν στην διευκόλυνση της κατανόησης. Μιλώντας αποκλειστικά για μία μαθηματική πρακτική οι παράγοντες αυτοί είναι αρκετά πολυάριθμοι. Σαν τέτοιοι θα μπορούσαν ενδεικτικά να χαρακτηριστούν:

1. Το είδος του μέσου που μεταφέρει την πληροφορία. Αν για παράδειγμα, το μέσο είναι ένα οπτικό ερέθισμα (ένα σχήμα ή διάγραμμα) ή μία λεκτική διατύπωση. Μία λεκτική διατύπωση είναι σαφώς πιο ανίσχυρη από ένα σχήμα στο επίπεδο της πειστικότητας. Η διατύπωση μπορεί να κρύβει λεπτά σημεία (που θα πρέπει να διευκρινιστούν) ή να περιέχει λέξεις που έχουν διαφορετική σημασία στην καθημερινή γλώσσα από ότι σε μία επιστημονική πρακτική. Το σχήμα από την άλλη μεριά έχει πλήθος ζωντανών ερεθισμάτων να προσφέρει, οι έννοιες αποκτούν αναπαραστάσεις και άρα αυτοτελή οντότητα ακόμα και έξω από την θεωρία και γενικότερα κινητοποιεί αμεσότερα τις αντιληπτικές μας δεξιότητες μας ενώ παράλληλα τις διευκολύνει.
2. Η απλότητα και ο αριθμός των επιχειρημάτων. Το σχήμα είναι σίγουρα ευκολότερα προσβάσιμο από ότι μία λεκτική διατύπωση. Η απλότητά του

[18] Κάποιος μπορεί να γνωρίζει αρκετά καλά ως τέλεια τους ορισμούς και τα θεωρήματα και να μην μπορεί να βρει την λειτουργική τους πλευρά. Κάποιος που ξέρει τον ορισμό του τετραγώνου και του παραλληλογράμμου θα μπορούσε να πιστεύει πως το τετράγωνο δεν είναι παραλληλόγραμμο.

έγκειται στο γεγονός πως όλα τα επιχειρήματα φανερώνουν την ισχύ τους σε οπτικό επίπεδο και αυτό από την μία επιτρέπει τον άμεσο έλεγχο αυτών μέσω των αισθήσεων και από την άλλη την ευκολότερη εικονική αποθήκευση των πληροφοριών. Τα επιχειρήματα σε μία προσέγγιση μέσω σχήματος τώρα θα είναι και λεκτικά και εικονικά. Αυτή η σύμπλευση αναπαράστασης και λεκτικής διατύπωσης δίνει την δυνατότητα πολύπλευρου ελέγχου των εννοιών που χρησιμοποιούμε.

3. Η ταχύτητα της παρουσίασης είναι σαφώς μεγαλύτερη όταν χρησιμοποιούμε ένα σχήμα. Οι μαθητές δεν έχουν μεγάλα κενά ανάμεσα στις δράσεις που καλούνται να πραγματοποιήσουν και άρα δεν χάνουν το ενδιαφέρον τους και δεν κουράζονται.
4. Οι μαθητές είναι επίσης εξοικειωμένοι με τις εικονικές αναπαραστάσεις. Αυτό έχει να κάνει και με τις σύγχρονες δομές της κοινωνίας και την κοινωνία της επικοινωνίας και των μέσων μαζικής ενημέρωσης (συγκεκριμένα της τηλεόρασης και του διαδικτύου). Τα παιδιά έχουν μάθει να αντιδρούν σε οπτικά ερεθίσματα πιο άμεσα και με μεγαλύτερη ευχέρεια σε σχέση με κάθε άλλου είδους. Τα οπτικά ερεθίσματα τα αποκωδικοποιούν γρηγορότερα και τους είναι πιο αρεστά και ευχάριστα.

Για παράδειγμα όταν το συμπέρασμα μιας μαθηματικής και συγκεκριμένα γεωμετρικής ενασχόλησης αναφέρεται ρητά και εύληπτα (και γίνεται αντιληπτό και μέσα από το σχήμα απλό και ξεκάθαρο) και τα γεγονότα ή τα επιχειρήματα που οδήγησαν στο συμπέρασμα και υποστηρίζουν το ίδιο το συμπέρασμα, είναι εκτεθειμένα κατά οργανωμένο τρόπο, οι έννοιες και η ίδια η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την ενασχόληση γίνεται ευκολότερα κατανοητή από τους μαθητές.

2.2.2. Η Μορφή στην Γεωμετρία

Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως ο τρόπος που θα κατασκευαστεί και θα παρουσιαστεί ένα γεωμετρικό σχήμα, παίζει σημαντικό ρόλο στη λύση μιας άσκησης ή στην απόδειξη ενός θεωρήματος. Πολλές φορές όλοι οι ασχολούμενοι με την Γεωμετρία έχουμε αντιμετωπίσει ένα θέμα που μας έχει

δυσκολέψει και όταν οι συνθήκες ωριμάσουν και επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε συγκεκριμένο σημείο του σχήματος ή συνδυασμό επιμέρους χαρακτηριστικών ή στην χρήση κατάλληλης βοηθητικής γραμμής η λύση έρχεται λογικά και εύκολα καθώς οι παραπάνω διεργασίες αναδιέταξαν κατάλληλα το αντιληπτικό μας σύστημα.

Οι Stalo, Elia, Gagatsis, Theoklitou και Savva (2006) εντοπίζουν σε έρευνά τους, πως η αρχική αναπαραστασιακή μορφή επηρεάζει το επίπεδο της απόδοσης των μαθητών γεγονός που συμφωνεί με τις αρχές της σχολής Gestalt. Το φαινόμενο γίνεται εντονότερο όσο η πολυπλοκότητα αυξάνεται. Οι μαθητές φαίνεται σαφώς να μπορούν να δουλέψουν καλύτερα με την εικονική προσέγγιση των εννοιών σε σχέση με την λεκτική τους απόδοση. Παρόμοια θέση έχει και ο Schwartz (1995) καθώς σε έρευνά του παρατηρεί πως η πιστότητα της αναπαράστασης σε σχέση με το αντικείμενο επηρεάζει την απόδοση των μαθητών.

Ο Βαϊνάς (2004) αναφέρει πως στην συγκεκριμένη περίπτωση του Γεωμετρικού σχήματος θα πρέπει να δημιουργείται και παρουσιάζεται εις τρόπο ώστε να αναδεικνύεται η Γεωμετρική Μορφή. Η Γεωμετρική Μορφή αντανακλά την συνθετική παρουσίαση του συνόλου των βασικών στοιχείων που είναι απαραίτητα για την επίλυση του δοθέντος γεωμετρικού προβλήματος.

Στην απόδοση εννοιολογικής αξίας σε ένα σχήμα, ο ρόλος της οπτικής σκέψης είναι τόσο θεμελιώδης στην κατανόηση, ώστε είναι δύσκολο να φανταστούμε μια ακολουθία μαθημάτων που δε θα δίνει έμφαση στην οπτική σκέψη του υποκειμένου - μαθητή. Αυτό είναι ιδιαίτερα αληθές αν η εν λόγω σειρά μαθημάτων επιχειρεί να δώσει έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και όχι στη δομή των χειρισμών και την λειτουργία τους, γεγονός το οποίο ευρέως αναγνωρίζεται ως στόχος πρωταρχικός μεν αλλά που συχνά διαφεύγει από πολλές σειρές μαθημάτων που διδάσκονται ελέω κυρίως της έλλειψης διδακτικού χρόνου.

Σε ένα γεωμετρικό επίπεδο, για παράδειγμα, τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου που είναι εξωτερικά προς τον ασχολούμενο αρχικά γίνονται αντιληπτά ως δομές (Gestalts). Στη συνέχεια στις δομές αυτές κατόπιν της

παρατήρησης και με ένα δεδομένο ποσό νοητικής αφαίρεσης, αποδίδονται συγκεκριμένες ιδιότητες και χαρακτηριστικά που μπορούν και τελικά αποδίδονται σε λεκτικό επίπεδο. Αυτά τα χαρακτηριστικά εμφανίζονται και σε άλλα αντικείμενα και άρα υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης αναλογιών και αργότερα να αποδοθούν ως ορισμοί εννοιών σε ιδεατό επίπεδο.

Το τελικό στάδιο είναι η κατανόηση των ορισμών αυτών και της λειτουργικότητάς τους και η χρήση τους σε αυστηρές μαθηματικολογικές παραγωγικές διαδικασίες ή συλλογισμούς. Η είσοδος των φορμαλισμών δημιουργεί το σταθερό υπόβαθρο πάνω στο οποίο δομείται η Γεωμετρική Θεωρία και η αλήθεια που περιέχει θεωρείται δεδομένη και μη αμφισβητήσιμη. Αυτό μας οδηγεί σε μία άποψη για την εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών πολύ κοντινή με το μοντέλο Van Hiele το οποίο και θα δούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Σε μία παιδαγωγική πρακτική, θα πρέπει να είμαστε σίγουροι πως οι διδασκόμενοι έχουν αναπτύξει την *δεξιότητα* να κάνουν ορθή διάκριση ανάμεσα στη μορφή και στο φόντο. Μία τέτοια δεξιότητα θα συνεπαγόταν αμέσως πως οι μαθητές είναι σε θέση να διακρίνουν τα σημαντικά και τα δευτερεύοντα δεδομένα ενός γεωμετρικού προβλήματος[19]. Αν κάτι τέτοιο δεν ισχύει τότε θα πρέπει η διδασκαλία να έχει επιπροσθέτως και την κατεύθυνση της ανάπτυξης μίας τέτοιας δεξιότητας.

Ας μην επιπλέον, ξεχνάμε πως μία λάθος επιλογή των μαθητών μπορεί να μην οφείλεται στην έλλειψη γνώσεων αλλά αντιθέτως να οφείλεται στην ύπαρξη συγκεκριμένων γνώσεων[20]. Οι γνώσεις αυτές μπορεί να είναι προερχόμενες από κάποιο άλλο γνωστικό αντικείμενο ή να αποτελούν ακούσια γνώση με βάση τις αισθητικές παρατηρήσεις ή ένα ορισμό[21] για την χρήση και

---

[19] Δεδομένου ότι θα μπορούσαν να κατασκευάσουν ή θα τους δινότανε έτοιμο το σχήμα.

[20] Για παράδειγμα γραφική αναπαράσταση συνεχούς συνάρτησης ως συνεχούς μη διακοπτόμενης γραμμής και άρα κάθε μη συνεχές (διακοπτόμενο) γράφημα συνάρτησης αναφέρεται σε μη συνεχή συνάρτηση

[21] Για παράδειγμα όπως θα δούμε ο ορισμός μίας ευθείας ή ενός ευθυγράμμου τμήματος ως σημειοσειράς δεν επιτρέπει στους μαθητές να έχουν την έννοια του σημείου ξεκάθαρα

την λειτουργικότητα του οποίου βρίσκονται σε σύγχυση. Μία απόρριψη της προϋπάρχουσας γνώσης η μία αναθεώρηση αυτής είναι ο τελικός στόχος της πρακτικής στην τάξη. Πρέπει όμως να είμαστε έτοιμοι να βλέπουμε τέτοιες γνώσεις να επανακάμπτουν ξανά και ξανά.

Ο ρόλος λοιπόν, του καθηγητή είναι να επιλέξει κατάλληλα παραδείγματα ώστε οι βιωματικές καταστάσεις που θα προσφερθούν στο μαθητή να διευρυνθούν προς την πορεία διεύρυνσης και των εννοιών που αποτελούν το αντικείμενο και στόχο της διδασκαλίας.

Από την άλλη πλευρά, οι διαδικασίες που εμφανίζονται στην αριθμητική, στην άλγεβρα, στη θεωρία αριθμών είναι είτε αλγόριθμοι που έχουν μορφή ρουτίνας και κάτω από αυτό το πρίσμα εκτελούνται χρησιμοποιώντας λιγότερο ποσό συνειδητής προσοχής ή ακόμα πιο ισχυρά αποτελούν μία αμιγώς συμβολική προσέγγιση. Τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα, τα οποία και αυτά από μόνα τους αποτελούν εικόνες, μπορούν να δημιουργήσουν την διαδικασία ή την έννοια που παράγεται μέσω της διαδικασίας αυτής δρώντας και ως οντολογικά υποκατάστατα[22] για τους μαθητές. Κάτι τέτοιο δεν εξυπηρετεί σε μεγάλο βαθμό την λειτουργία της γεωμετρίας σε επίπεδο σχολικών μαθηματικών.

στο μυαλό τους καθώς βλέπουν αθροίσματα αντικειμένων μηδενικής διάστασης (σημεία) να συγκροτούν αντικείμενα που έχουν διάσταση (ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες).

[22] Κάτι το οποίο το συμβολίζω και το ονομάζω, μπορώ να το αναγνωρίσω και άρα υπάρχει.

2.3.Αναπαραστάσεις

Η αναπαράσταση είναι κάτι που παίρνει τη θέση κάποιου άλλου. Η βασική αυτή θέση σε σχέση με τις αναπαραστάσεις είναι πρωταρχική και παράλληλα, μη αυστηρή αλλά εντυπωσιακά ακριβής. Το ζήτημα είναι αν η αναπαράσταση μπορεί να βρίσκεται αυτή στον κεντρικό ρόλο. Δηλαδή να ξεκαθαρίσουμε αν ο κεντρικός ρόλος είναι αυτός του ατόμου και των εμπειριών του, ή αν αντιθέτως το βασικό ρόλο παίζουν τα αντικείμενα της γνώσης με την παράλληλες επιστημολογικές απαιτήσεις που αυτά αναπόφευκτα προβάλλουν.

Το ότι οι μαθηματικές έννοιες, δεν προσεγγίζονται αποκλειστικά μέσω των αισθήσεων -γεγονός που διαφοροποιεί τα Μαθηματικά από τις άλλες Θετικές Επιστήμες - είναι μια αδιαμφισβήτητη θέση. Ακόμα, είναι καθολικά αποδεκτό πως προσεγγίζοντας μαθηματικές έννοιες ή ζητήματα με ένα πιο αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, που περιορίζει τις λειτουργίες μας στο λογικό επίπεδο είμαστε αρκετά πιο ασφαλείς σε σχέση με πιθανές πλάνες, παρανοήσεις και προεκτάσεις στις οποίες θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε, οι οποίες όμως δεν θα διέπονται από ορθότητα ή ακρίβεια. Ίσως αυτές οι σταθερές βάσεις που η αξιωματική παραγωγική μέθοδος παρέχει ως εχέγγυα, να είναι αυτές που έχουν οδηγήσει την εκπαίδευση στο σύνολό της να στραφεί προς αυτή παραμερίζοντας τις λειτουργίες μίας πιο οπτικής προσέγγισης ή ακόμα χειρότερα αποφεύγοντας την αισθητική προσέγγιση ακόμα και για απλές μαθηματικές νοητικές διεργασίες.

Ιστορικά, οι παιδαγωγικές τάσεις και η μαθηματική παράδοση στα μέσα του προηγούμενου αιώνα οδήγησαν σε ορισμένες περιπτώσεις σε προγράμματα που επικεντρωνόντουσαν στην διδασκαλία των λεγόμενων μοντέρνων μαθηματικών (new mathematics). Τέτοια προγράμματα απέτυχαν στην διδακτική πράξη, καθώς εστίαζαν σε αυστηρούς ορισμούς και διαδικασίες απαιτώντας μεγαλύτερη γνώση περί θεωρίας συνόλων από ότι ένας μαθητής θα μπορούσε να αφομοιώσει και εκμηδενίζοντας την αξία των αυθόρμητων γνώσεων του παιδιού. Τα αντίστοιχα εκπαιδευτικά εγχειρήματα προσπαθούσαν να διδάξουν τα «μοντέρνα» μαθηματικά με απαρχαιωμένες

μεθόδους, δηλαδή κυρίως με λεκτικές προσεγγίσεις και βασισμένες περισσότερο στην απλή μετάδοση γνώσεων παρά στην επινόηση ή την ανακάλυψη εκ νέου της γνώσης από τον ίδιο των μαθητή σε μία κονστρουκτιβιστική προσέγγιση.

Πολύ σημαντικό για τον χώρο των μαθηματικών είναι πως κάποιος που ασχολείται με τα μαθηματικά είναι σε θέση να αναφέρεται σε μαθηματικά αντικείμενα, μαθηματικές έννοιες και τις ιδιότητες αυτών μέσω των αναπαραστάσεών τους καταφέρνοντας παράλληλα να αποφεύγει τις ακανθώδεις ερωτήσεις, καθαρά φιλοσοφικής χροιάς, περί της ύπαρξης ή μη των μαθηματικών αντικειμένων και κατ' επέκταση εννοιών αυτών, ερωτήσεις που πολλοί μαθηματικοί θα θεωρούσαν αποπροσανατολιστικές και ερωτήσεις που στερούνται ενδιαφέροντος για τη συνήθη πρακτική τους.

Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων είναι κυρίως σημειωτικές αναπαραστάσεις**.** Σημειωτικές αναπαραστάσεις ονομάζονται οι αναπαραστάσεις που εκφέρονται με χρήση σημείων (signs), (εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα) και αποτελούν το μέσο που διαθέτει το άτομο για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις.

Είναι, επομένως, εξαρτώμενες από τις νοητικές αναπαραστάσεις και δεν εξυπηρετούν παρά την ανάγκη επικοινωνίας. Η δυνατότητα χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων, εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα. Οι μαθηματικές επεξεργασίες δεν μπορούν να γίνουν παρά μέσω σημειωτικών αναπαραστάσεων και όχι μέσω νοητικών αναπαραστάσεων (Κολέζα, 2003). Όντως, ακόμα και οι πιο απλές επεξεργασίες απαιτούν

Η εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης δεν νοείται ανεξάρτητα από την εξέλιξη ιδιαίτερων συμβολισμών για την αναπαράσταση αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Η ιστορία δείχνει ότι η εξέλιξη των Μαθηματικών συνδέεται με την εξέλιξη διαφόρων σημειωτικών συστημάτων που είχαν ως απαρχή τα δυο βασικά αντιληπτικά συστήματα της γλώσσας και της εικόνας. Θα μπορούσε όμως κάποιος να πει πως ο Θεωρία των Αλγεβρών εξελίχθηκε και αναπτύχθηκε μόνο και μόνο επειδή εντοπίστηκαν τα κατάλληλα σύμβολα;

Ασφαλώς και ουδείς μπορεί να θεωρεί πως κάτι τέτοιο οφείλεται στην ύπαρξη αυτών. Τα σύμβολα σε κάθε μαθηματική αλλά και γενικότερα επιστημονική θεωρία παίζουν τον ρόλο των επικοινωνιακών εργαλείων και θα ήταν εντελώς αδύναμα χωρίς το εννοιολογικό περιεχόμενο που εμείς τους αποδίδουμε (Κολέζα, 2003).

Για παράδειγμα:

Από τη *γλώσσα*, προέκυψε η ανάγκη καταγραφής αυτής σε σταθερό υπόβαθρο. Η γραπτή γλώσσα δημιουργήθηκε και έπειτα από αυτή προέκυψαν τα συμβολικά συστήματα, από αυτά η αλγεβρική γραφή και από αυτή, οι τυπικές γλώσσες όπως αυτή της λογικής.

Από την *εικόνα*, προέκυψαν τα γεωμετρικά σχήματα, τα διαγράμματα, οι γραφικές παραστάσεις, στη συνέχεια τα σχήματα σε προοπτική, οι συμμετρίες και άλλα πολλά δεδομένα μπορούν και είναι χρήσιμο να έχουν εικονική αναπαράσταση καθώς οι άνθρωποι έχουν την τάση να θυμούνται καλύτερα τις εικονικές αναπαραστάσεις.

Η ενασχόληση των μαθητών με την επικοινωνία των μαθηματικών τους γνώσεων, είναι ένας απαραίτητος στόχος που πρέπει να πραγματωθεί. Η μετάβαση από τις άτυπες μορφές γνώσης, που χαρακτηρίζονται από μη ακριβείς λεκτικές διατυπώσεις, στις πιο τυπικές και αυστηρές που απαιτούν αυστηρές διατυπώσεις, αναμφίβολες συνίσταται στην συνεπή μεταβίβαση των πληροφοριών (μέσω λεκτικών διατυπώσεων ή εφεύρεση νέων συμβόλων και διαγραμμάτων).

Κάθε σημειωτικό σύστημα εξασφαλίζει ιδιαίτερους τρόπους αναπαράστασης και εισάγει νέους φορμαλιστικούς τρόπους μαθηματικής σκέψης. Η εσωτερίκευση αυτών των σημειωτικών αναπαραστάσεων ως νοητικές αναπαραστάσεις δημιουργεί (ίσως και νέες) νοητικές εικόνες (mental images) ή εμπλουτίζει άλλες προϋπάρχουσες ή τις αντικαθιστά με κάποιες αναθεωρημένες.

Επομένως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε μονομερώς ότι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι προϊόντα νοητικών αναπαραστάσεων. Το αντίστροφο ισχύει με ανάλογη συνέπεια.

Σύμφωνα με τον Duval (1995):

«η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Αρκεί να εξετάσει κάποιος την περίπτωση της Αριθμητικής για να το καταλάβει: δεν παρατηρείται το ίδιο επίπεδο δυσκολίας στην περίπτωση της δεκαδικής γραφής και στη περίπτωση της κλασματικής γραφής ενός αριθμού…Αν δούμε το θέμα σφαιρικά, η πρόοδος στα Μαθηματικά συνοδεύεται πάντα από την εμφάνιση και εξέλιξη νέων σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν με το πρώτο και βασικότερο σύστημα, εκείνο της φυσικής γλώσσας[23]*… Η ποικιλία των σημειωτικών συστημάτων επιτρέπει την ύπαρξη διαφόρων μορφών αναπαράστασης του ίδιου αντικειμένου αυξάνοντας έτσι τις γνωστικές δυνατότητες του υποκειμένου και κατά συνέπεια τις νοητικές του αναπαραστάσεις…»*

Ένα άτομο μπορεί να έχει έγκυρη και ικανή πρόσβαση σε μια μαθηματική έννοια, μόνον αν διαθέτει τουλάχιστον δύο διαφορετικά και ανεξάρτητα σημειωτικά συστήματα γι' αυτή την έννοια, και αν μπορεί να περνά χωρίς δυσκολία από το ένα σύστημα στο άλλο (Duval 1995, σελ. 22).

Ο Anderson (1980) υποστηρίζει πως υπάρχουν επαρκή στοιχεία που καταδεικνύουν πως λεκτικά και εικονικά δεδομένα αποθηκεύονται σε μορφές και εις τρόπο ώστε να κατέχουν το νόημα συνολικά ως προς την κλάση και το νόημα αυτής και όχι σε σχέση μόνο με το συγκεκριμένο αντικείμενο αναφοράς ανά περίσταση. Πολύ δε περισσότερο είναι ξεκάθαρα εφικτό για τον κοινό νου να μεταφράζουμε από την μία μορφή στη άλλη. Η απόκτηση μίας τέτοιας δεξιότητας - λειτουργίας θα πρέπει να είναι στόχος και για την διδασκαλία των μαθηματικών στο σύνολό τους.

Ο Vinner (1992 σελ 212) συμπεραίνει πως:

«οι άνθρωποι έχουν την τάση να θυμούνται καλύτερα και ευκολότερα, οπτικές πτυχές μίας ιδέας σε σχέση με τις αντίστοιχες αναλυτικές – εννοιολογικές πτυχές της ίδιας έννοιας».

Μια μαθηματική έννοια, το «αναπαριστώμενο»: (represente) μπορεί να θεωρηθεί ως το «περιεχόμενο» μιας σημειωτικής αναπαράστασης, η οποία ως

[23] Αναγνώριση της σημασίας της φυσικής γλώσσας σε συμφωνία με τα πιστεύω του Lev Vygotsky

εκ τούτου συνιστά την «εικόνα», το «αναπαριστόν»: (representant) της έννοιας. Το «περιεχόμενο» μπορεί να εκφράζεται μέσα από διαφορετικές «εικόνες» (για παράδειγμα, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του αλγεβρικού της τύπου, μέσω μιας γραφικής παράστασης ή μέσω ενός πίνακα τιμών, βέβαια υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν έχουν εικονική αναπαράσταση ακόμα και αν μπορούμε να φανταστούμε την μορφή του γραφήματος αυτό δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε). Το σημαντικό είναι να μπορεί κάποιος να διακρίνει την έννοια μέσα από τις διαφορετικές της αναπαραστάσεις, να την διακρίνει από άλλες που τυχόν εμφανίζονται στο ίδιο σχήμα και κατόπιν η αναπαράσταση να δίνει την δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν οι κατάλληλες διαδικασίες ώστε να προωθηθεί η κατανόηση της γνώσης.

Ένα σύμβολο μπορεί να αντιστοιχεί σε μία έννοια στο νου και έτσι μπορούμε να κάνουμε μία επιπλέον διάκριση στην κλάση των αναπαραστάσεων. Θα μπορούσαμε να κάνουμε λόγο για εσωτερικές (internal) και εξωτερικές (external) αναπαραστάσεις. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις απαντώνται ως ερεθίσματα καθαρά αισθητικής προέλευσης και γίνονται αντιληπτά μέσω σχημάτων (στο χαρτί), διαγραμμάτων (στο χαρτί) και άλλων τυπικών συμβόλων που υποπίπτουν στην οπτική μας αντίληψη. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις από την μεριά τους κινούνται σε ένα τοπίο λιγότερο σαφές και σε ένα πλαίσιο το οποίο δεν είναι σαφώς ορισμένο. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν μπορούν να γίνονται άμεσα αντιληπτές. Ο μόνος τρόπος να γίνονται αντιληπτές είναι μέσω παρατήρησης επί των μαθητών ή οποιουδήποτε άλλου ασχολείται με μαθηματικές έννοιες μέσω των θέσεων, στάσεων και αντιλήψεων που εμφανίζονται κατά την πρακτική.

Μία εσωτερική αναπαράσταση θα μπορούσε να αποκαλείται και νοητική αναπαράσταση καθώς έχει και μία εξατομικευμένη συνιστώσα ενώ παράλληλα είναι διαφορετικός ο τρόπος που κάποιος κινητοποιείται μπροστά σε κάποιο πρόβλημα σε σχέση με κάποιον άλλο. Η εσωτερική αναπαράσταση βρίσκεται πιο κοντά στην εννοιολογική προσέγγιση καθώς είναι προϊόν νοητικής λειτουργίας και στοχαστικής αφαίρεσης, διαμέσου της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα και της αποδίδεται συγκεκριμένη σημασία. Έτσι θα

μπορούσαμε να πούμε πως μπορούμε να βλέπουμε ένα τρίγωνο στο χαρτί και να μιλάμε για την εξωτερική αναπαράσταση ενός τριγώνου, ενώ παράλληλα θα έχουμε ένα δεύτερο πεδίο αναφοράς στο οποίο θα κινείται η έννοια της τριγωνικότητας η οποία είναι εσωτερική αναπαράσταση και ξεκάθαρα εξατομικευμένη.

Μία εξωτερική αναπαράσταση μπορεί να διαχωριστεί στους κανόνες με τους οποίους την κατασκευάζουμε και αποτελούν «το συντακτικό» (syntax) επίπεδο αυτής και «το σημασιολογικό ή εννοιολογικό» (semantics) που αντιστοιχεί στη σύνδεση της εξωτερικής αναπαράστασης με την αντίστοιχη εσωτερική αναπαράσταση.

Για παράδειγμα όταν σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η εικόνα του σχήματος (η χωρική του μορφή) αλλά και ο συμβολισμός που τοποθετούμε στο σχήμα για τις ορθές γωνίες ανήκουν στο συντακτικό επίπεδο. Στο σημασιολογικό επίπεδο ανήκει η έννοια της ορθής γωνίας, η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος και του σημείου, το γεγονός πως τις απέναντι πλευρές τις σχηματίζουμε να «μοιάζουν» να είναι ίσες.

Είναι λοιπόν, προφανές πως ακόμα και για την πολύ απλή απεικόνιση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο χαρτί είναι απαραίτητη η χρήση τόσο στοιχείων από το συντακτικό επίπεδο όσο και στοιχείων προερχόμενων από το σημασιολογικό επίπεδο ώστε να έχουμε μία σχετικά πλήρη εικόνα περί του σχήματος αλλά και γενικότερα της έννοιας στην οποία αυτό αντιστοιχεί σαν αδιαίρετη ολότητα.

Αποτελεί πάγια θέση και καθολικά αποδεκτή, ότι η γεωμετρία αποτελείται και ασχολείται με νοητικές οντότητες σχεδόν πλήρως καθοριζόμενες από ορισμούς[24], τα αποκαλούμενα γεωμετρικά σχήματα, όπως ο κύκλος, η ευθεία, το επίπεδο και πολλά άλλα. Τα αντικείμενα αυτά στα οποία επικεντρώνεται το ενδιαφέρον της γεωμετρίας είναι φορείς αφηρημένων εννοιών και ποιοτήτων ενώ παράλληλα δύνανται να μορφοποιούνται ή να οπτικοποιούνται έτσι ώστε να γίνονται φανερά και προσιτά μέσω των αισθήσεων. Η σφαίρα επί παραδείγματι, είναι μία αφηρημένη ιδέα αλλά ταυτόχρονα είναι και μία πλήρως φορμαλιστικά

[24] Ίσως και πλήρως οπτικοποιήσιμες μέσω των ορισμών.

ορισμένη οντότητα όπως άλλωστε και κάθε αυθεντική έννοια. Η σφαίρα έχει επιπλέον σχηματικές ιδιότητες όπως το γεγονός πως έχει δεδομένο σχήμα και σταθερή καμπυλότητα. Η ιδανικότητα - τελειότητα του σχήματος της σφαίρας αλλά και κάθε άλλου γεωμετρικού αντικειμένου δεν απαντάται στον πραγματικό κόσμο[25] παρά μόνο με προσεγγίσεις και συμβιβασμούς.

Σε αυτή τη συμβίωση μεταξύ των ιδεών και των σχημάτων, η οποία παρουσιάζεται αλλά και αποτυπώνεται στις γεωμετρικές οντότητες σε πολύ εμφανή βαθμό, είναι το απεικονιστικό-αναπαραστασιακό συστατικό αυτών των οντοτήτων που δημιουργεί νέους τρόπους σκέψης και διαφορετικές προσεγγίσεις.

Οι αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων δεν διέπονται από κάποια σχέση ταύτισης με τις ίδιες τις έννοιες αλλά σχετίζονται με την ανακάλυψη αυτών και την περαιτέρω επεξεργασία τους και μάλιστα σε οικοδομητικό πλαίσιο (Κολέζα, 2003).

Άρα τα γεωμετρικά σχήματα δεν μπορούμε να θεωρούμε ότι ταυτίζονται με τις αντίστοιχες Γεωμετρικές Έννοιες αλλά εντάσσονται στο γενικότερο πλαίσιο ανάπτυξης, επεξεργασίας και εξέλιξης αυτών.

Οι νέες αυτές κατευθύνσεις που τα σχήματα μας παρέχουν, θα μετουσιωθούν σε εικασίες και τελικά υπό την επίδραση λογικών, εννοιολογικών περιορισμών θα οδηγήσουν στην αυστηρή διατύπωση και τελικά απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικών με τις νέες αυτές έννοιες. Θα λέγαμε δηλαδή ότι τα γεωμετρικά σχήματα δίνουν τροφή για σκέψη αλλά αδυνατούν από μόνα τους να προχωρήσουν βαθύτερα σε ζητήματα γνώσης όντας σχετικά αδύναμα λόγω μη ύπαρξης πλαισίου ελέγχου.

Παράλληλα αποτελεί καθολικά αποδεκτό γεγονός, πως τα διαγράμματα και τα σχήματα λειτουργούν καθοδηγητικά και εμπεριέχουν στοιχεία των ορισμών των εννοιών, των οποίων αποτελούν αναπαραστάσεις αλλά και άμεσο διάμεσο επικοινωνίας ανάμεσα στην αισθητή πραγματικότητα και την ιδανικότητα που οι ορισμοί των Γεωμετρικών εννοιών επιβάλουν.

---

[25] Μία μάλλον λίγο Πλατωνική άποψη αλλά παράλληλα και αρκετά ρεαλιστική δεδομένου πως η τελειότητα της νοητικής κατασκευής είναι απρόσιτη για τον εμπειρικό κόσμο ΄΄η και μη πραγματοποιήσιμη

2.3.1 Χρήση Αναπαραστάσεων

Το ποια μπορεί να είναι η χρήση των αναπαραστάσεων στην μαθηματική πρακτική και στην μαθηματική εκπαίδευση είναι από τα βασικά ερωτήματα που έπονται της πρώτης μας επαφής με την έννοια των αναπαραστάσεων. Η οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης μπορεί να βοηθηθεί από την χρήση διαγραμμάτων και σχημάτων. Συγκεκριμένα γίνεται χρήση σχηματικών ή εικονικών αναπαραστάσεων για να (α) επιτευχθεί καλύτερη και πληρέστερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, (β) την δημιουργία νέων εννοιών (απόδοση εννοιολογικής υφής σε εικονικά δεδομένα), (γ) την δημιουργία εικασιών και την παροχή βεβαιότητας κατά την αιτιολόγηση, (δ) ως οντολογικό υπόβαθρο και (ε) την περιγραφή μαθηματικών συμπερασμάτων.

Η καλύτερη κατανόηση δεν μπορεί να είναι επιτεύξιμη χωρίς να έχει ένα, έστω κατά προσέγγιση, αντικείμενο αναφοράς. Έρευνες ακόμα και στην διδασκαλία της άλγεβρας, φανερώνουν πως οι μαθητές αποδίδουν καλύτερα όταν τους παρέχεται καταστασιακό αναφερόμενο (Resnick, 1999). Στην γεωμετρία συγκεκριμένα οι έννοιες δεν μπορούμε να πούμε πως είναι ιδιαίτερα αφηρημένες και λεκτικά προσβάσιμες αφού το διάγραμμα καλύπτει αυτό το ρόλο. Οι ορισμοί δίνονται πάντα λεκτικά αλλά στην γεωμετρία μπορούν άμεσα να είναι εικονοποιήσιμες.

Οι τυπικοί ορισμοί δεν είναι ποτέ εύκολοι στους χειρισμούς. Αντίθετα, η εικονική αναπαράσταση είναι πολύ πιο εύκολη στους χειρισμούς καθώς ρέπει προς πιο δομικές συνιστώσες της έννοιας. Η αισθητική αντίληψη προσθέτει σε μία έννοια επιπλέον στοιχεία και ανοίγει νέους ορίζοντες.

Αντίστροφα, οι εικόνες είναι δυνατόν να οδηγήσουν στην κατασκευή νέων εννοιών. Ιδιαίτερα, στις απαρχές της γεωμετρίας οι έννοιες της παραλληλίας, της καθετότητας και άλλες υπήρξαν προϊόν οπτικής παρατήρησης. Άρα το σχήμα εκπληρώνει τον διπλό ρόλο της απαρχής της έρευνας μέσω σταθερών εννοιών και μάλιστα έτσι που να υπάρχει το απαραίτητο οντολογικό υπόβαθρο. Βέβαια, υπάρχει η προβληματική της ταύτισης της έννοιας με την απεικόνισή της.

Για παράδειγμα ταυτίζοντας την έννοια της συνάρτησης με το γράφημα αυτής αργά η γρήγορα θα έρθουμε αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις. Οι συναρτήσεις των Dirichlet και Gelbaum είναι δύο συναρτήσεις που δεν μπορούν να παρασταθούν γραφικά. Επιπλέον, το ζήτημα της ύπαρξης μίας συνάρτησης παντού συνεχούς και πουθενά παραγωγίσιμης της οποίας μπορούμε να φανταστούμε την όψη του γραφήματος αλλά δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα γράφημα που να την περιγράφει ικανοποιητικά.

Η δημιουργία εικασιών είναι ένα ζήτημα που στην Ελληνική Δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν απολαμβάνει της αναγνώρισης που του αρμόζει. Η εικασία όμως είναι απαραίτητη τόσο στο σχολείο όσο και στην έρευνα. Η εικασία μας δίνει μία πρώτη γραμμή να ακολουθήσουμε και μας κατευθύνει προς κάποιο στόχο. Τελικό στόχο αποτελεί η διαδρομή μέσα από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι είναι πολύ πιθανό να ισχύει η συγκεκριμένη εικασία.

Τέλος, τα διαγράμματα είναι εργαλεία που διευκολύνουν την επικοινωνία. Σε μία ακολουθία συμπερασμάτων ένα διάγραμμα βοηθά στην κατανόηση των εννοιών, των λογικών βημάτων και του τελικού παραγόμενου γεωμετρικού προϊόντος.

Ο Duval παρατηρεί πως τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απευθείας προσβάσιμα για την κατανόηση ως κομμάτια της πραγματικότητας έχοντα υλική υπόσταση και καταλήγει στο συμπέρασμα.

«*Διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου είναι απολύτως απαραίτητες* (Duval, 1993 σελ 37)»

Έπειτα, ο ίδιος επισημαίνει πως το σημαντικό στοιχείο της μελέτης και αυτό στο οποίο θα πρέπει να επικεντρωθούμε δεν είναι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις, αλλά αντιθέτως είναι το ίδιο το αντικείμενο. Μία στρατηγική για την ανάπτυξη της κατανόησης των εννοιών είναι η δημιουργία μίας γνωστικής διαδικασίας που να επιτρέπει την αναγνώριση και διάκριση ανάμεσα στο σημειωτικό επίπεδο και στο επίπεδο που αναφέρεται το ίδιο το αντικειμένου. Για τον Duval η ύπαρξη πολλών διαφορετικών σημειωτικών αναπαραστάσεων είναι εξίσου σημαντική με την διασύνδεση αυτών με το εννοιολογικό υπόβαθρο τους.

«Η σχετικιστική διαδικασία της ανθρώπινης σκέψης είναι μη διαχωρίσιμη από την ύπαρξη μίας ποικιλίας σημειωτικών αναπαραστάσεων. Αν καλέσουμε σημείωση (semiosis) την γνώση ενός προϊόντος σημειωτικής αναπαράστασης και νόηση (noesis) την εννοιολογική γνώση του ίδιου αντικειμένου, θα πρέπει να παραδεχτούμε πως τα δύο αυτά είναι μη διαχωρίσιμα (Duval, 1993 σελ 37-38)*».*

Πραγματικά, πως κανείς μπορεί να διαχωρίσει την εικόνα ενός τριγώνου από την εννοιολογική δομή και ταυτότητα αυτού, αφού η Γεωμετρική μορφή του τριγώνου είναι αυτή που γίνεται σε πρώτο χρόνο αντιληπτή. Η αναπαράσταση του τριγώνου για εμάς αλλά και για τον κάθε ασχολούμενο έστω και περιστασιακά με την Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι ανεξάρτητη των εννοιολογικών περιορισμών που επιδέχεται στη εξελικτική πορεία της θεωρίας. Έτσι, στην αναπαράσταση του τριγώνου οι εννοιολογικές ποιότητες επιβάλλουν περιορισμούς όπως ότι κάθε πλευρά του είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο, το άθροισμά των γωνιών του είναι ίσο με 2π.

Επειδή στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με διαγράμματα και σχήματα σε σχέση με γεωμετρικές έννοιες είναι χρήσιμο να δοθεί ο ορισμός των μαθηματικών αναπαραστάσεων. Οι Confrey και Smith (1991) έδωσαν τον ακόλουθο ορισμό των μαθηματικών αναπαραστάσεων:

«Με τον όρο αναπαράσταση εννοούμε μια νοητική δομή η οποία αποτελείται από διάφορα εργαλεία, όπως πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις και τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και εννοιών».

Υπάρχει μία πολύ μεγάλη ποικιλία σημειακών αναπαραστάσεων η οποία και χρησιμοποιείται κατά την μαθηματική ενασχόληση. Επιπλέον των αριθμών θα μπορούσαμε να προσθέσουμε αλγεβρικά σύμβολα σε αυστηρές διατυπώσεις, γραφικές αναπαραστάσεις, εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας (έστω και αν χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο από αυτόν της καθημερινότητας και σαφώς εμπεριέχοντας διαφορετικό νόημα) και τα γεωμετρικά διαγράμματα ή σχήματα. Για να επιτευχθεί ένας ικανοποιητικός διαχωρισμός μεταξύ των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται κατά την

μαθηματική πρακτική, θα ακολουθήσουμε τον διαχωρισμό του Duval ο οποίος και σε συνέχεια των απόψεων του Καρτέσιου κάνει λόγο για την εισαγωγή των αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα κατηγοριοποιεί τις εισαγωγές σε τέσσερις διαφορετικούς τύπους. Μία σύντομη αλλά και περιεκτική περιγραφή των τύπων αυτών παρατίθεται στον πίνακα της επόμενης σελίδας.

Ένα κυρίαρχο χαρακτηριστικό της μαθηματικής ενασχόλησης και πρακτικής είναι η σχεδόν αυθόρμητη κινητοποίηση τουλάχιστον δύο διακριτών και αλληλοσυνδεόμενων αναπαραστάσεων του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου. Ακόμα είναι πάρα πολύ συνηθισμένο στη διάρκεια της ενασχόλησης αυτής και ανάλογα με τα ερεθίσματα ή τις εμπειρίες του ενασχολούμενου να αλλάζει το σύστημα των αναπαραστάσεων.

Θα μπορούσαμε να είμαστε πιο ακριβείς αν θέταμε το ζήτημα ως εξής: Ανάλογα με το μαθηματικό τομέα στον οποίο κάποιος εργάζεται μίας μορφής αναπαράσταση δύναται να παίζει πρωταρχικό και κυρίαρχο ρόλο, σε σχέση με τις άλλες, ώστε να κάνει τους υπόλοιπους τύπους αναπαραστάσεων να φαντάζουν δευτερεύοντες, όμως θα πρέπει πάντα να υπάρχει η δυνατότητα να περνάμε από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

Στην γεωμετρία οι εικονικές αναπαραστάσεις διαδραματίζουν τον κυρίαρχο λόγο. Αυτό γιατί μέσα από αυτές μπορούμε να κατευθύνουμε την νόησή μας, να εντοπίσουμε ορθούς ισχυρισμούς και πορείες απόδειξης αυτών, να ακολουθήσουμε ισχυρισμούς άλλων, να καλύψουμε το ψυχολογικό κενό που δημιουργούν οι αυστηροί λογικοί συλλογισμοί.

Όλα τα παραπάνω θα μπορούσαν να συνοψιστούν στην θέση ότι η κατανόηση σε ικανοποιητικό επίπεδο των μαθηματικών απαιτεί τουλάχιστον το συνδυασμό χειρισμού δύο τουλάχιστον συστημάτων σημειωτικών αναπαραστάσεων σε συμφωνία και με τις απόψεις του Duval.

	Λεκτική Αναπαράσταση	Μη Λεκτικές Αναπαραστάσεις
Καταχώρηση ως συνάρτηση πολλών λειτουργιών (οι διαδικασίες δεν μπορούν να μετατραπούν σε αλγόριθμους)	*Φυσική γλώσσα:* *Γλωσσικοί (εννοιολογικοί) σύνδεσμοι* *Αιτιολόγηση:* *-Επιχειρήματα από παρατηρήσεις και πεποιθήσεις...* *- έγκυρα επιχειρήματα από ορισμούς ή θεωρήματα*	Επίπεδα ή με προοπτική γεωμετρικά σχήματα: (αποτελούμενα από σχήματα μίας δύο ή και τριών διαστάσεων) *Επιδέχονται χειρισμών και όχι μόνο αισθητηριακής αντίληψης* *Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη*
Καταχώρηση ως συνάρτηση μίας μόνο λειτουργίας (οι διαδικασίες μπορούν να μετατραπούν σε αλγορίθμους)	Αντιληπτικά συστήματα: - αριθμητικό - αλγεβρικό - συμβολικό (τυπικές επιστημονικές γλώσσες)	Γραφήματα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες: *Αλλαγές συστημάτων αναφοράς* *Στροφή και μεταφορά αξόνων*

Διάταξη των δύο τύπων καταχωρήσεων - αναπαραστάσεων που μοντελοποιούνται σε μαθηματικές διαδικασίες

Πίνακας 2.3.1.1

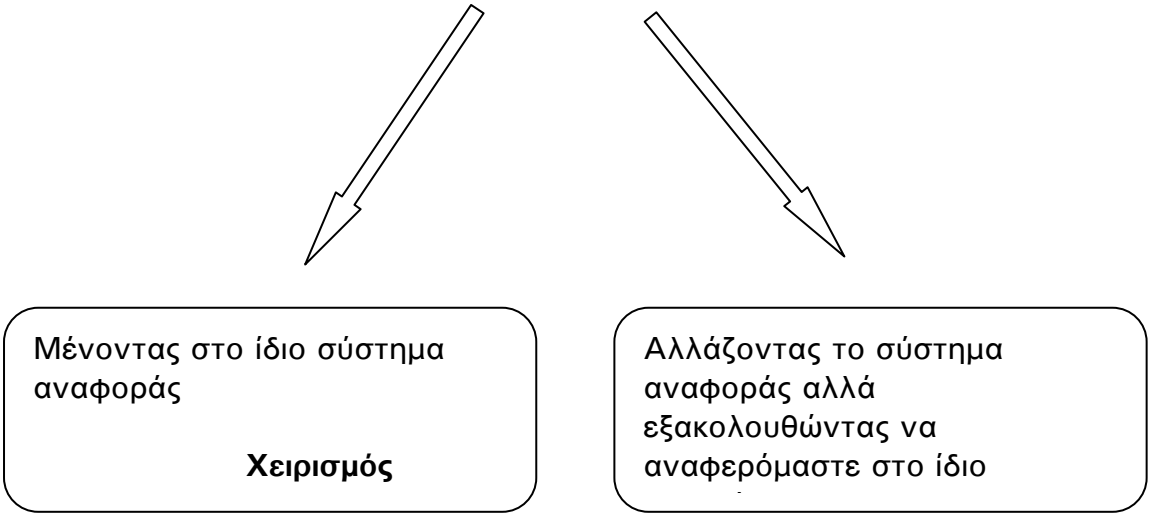
Μία τέτοια δεξιότητα από πλευράς όμως παιδαγωγικής προσέγγισης είναι πολύ αμφίβολο κατά πόσο δημιουργείται αυθόρμητα στους μαθητές. Σύμφωνα με τον Duval η μάθηση μέσω γραφικών αναπαραστάσεων χρειάζεται μία ιδιαίτερη δουλειά, και μία τέτοια δεξιότητα είναι αδύνατο να εξαρτάται από τυχαία κατανόηση εικόνων και σχημάτων.

2.3.2 Μετασχηματισμοί Αναπαραστάσεων

Υπάρχει και είναι αισθητός ένας ιδιαίτερος διαχωρισμός για την ανάλυση της μαθηματικής δραστηριότητας μιλώντας από μία προοπτική σχετική με την διδασκαλία και την κατανόηση του διδασκομένου γεγονός που δεν γίνεται ομοίως αντιληπτό όταν μιλάμε για μία πρωτότυπη μαθηματική έρευνα.

Υπάρχουν δύο τύποι μετασχηματισμών σημειωτικών αναπαραστάσεων οι οποίοι είναι ριζικά διαφορετικοί. Από την μία μεριά έχουμε τους χειρισμούς και από την άλλη τις μετατροπές. Συχνά για τους μαθητές οι δύο αυτοί τύποι μετασχηματισμών είναι μη διακριτοί. Αυτό έχει να κάνει συνήθως με την πρακτική άσκηση στην διάρκεια της οποίας μας είναι αδιάφορο αν μιλάμε για χειρισμούς ή μετατροπές. Επιπροσθέτως, οι καθηγητές είναι και από την μεριά τους αδιάφοροι ή δεν έχουν συνείδηση της διάκρισης αυτής.

Μετασχηματισμός μίας σημειωτικής αναπαράστασης σε μία άλλη διαφορετική σημειωτική αναπαράσταση



Οι χειρισμοί είναι μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων που λαμβάνουν χώρα μέσα στο ίδιο σύστημα αναφοράς έχοντας τον ίδιο δηλωτικό αντίκτυπο. Για παράδειγμα η πρόσθεση πρόσθετων στοιχείων σε ένα σχήμα με χρήση συμμετρίας ή βοηθητικών γραμμών.

Οι μετατροπές είναι μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων οι οποίοι αποτελούνται από την αλλαγή, για τα υπό εξέταση αντικείμενα, δήλωσης

χωρίς να αλλάζουμε τα ίδια τα αντικείμενα που δηλώνονται. Για παράδειγμα η μετατροπή μίας αλγεβρικής εξίσωσης σε μία γραφική αναπαράσταση ή η μετατροπή μίας πρότασης φυσικής γλώσσας γεωμετρικού περιεχομένου σε ένα σχήμα. Στην Γεωμετρία μας ενδιαφέρουν και οι δύο τύποι μετασχηματισμών.

Μιλώντας από μία καθαρά μαθηματική σκοπιά, η μετατροπή έχει ένα και αποκλειστικό σκοπό να εξυπηρετήσει. Μέσω της μετατροπής επιλέγουμε το πιο πρόσφορο έδαφος και ευκολότερο συγχρόνως ώστε να οδηγηθούμε στη λύση ή εναλλακτικά χρησιμοποιείται ως δεύτερη πηγή αναφορών για επιπλέον στήριξη μέσω ανατροφοδοτήσεων και επαλήθευση των αποτελεσμάτων ή καθοδήγηση. Σε ακόμα πιο απλή γλώσσα, οι μετατροπές από μόνες τους δεν παίζουν κανένα ιδιαίτερο ρόλο στην επίλυση, την αιτιολόγηση και γενικότερα την μαθηματική αναζήτηση γιατί όλα τα παραπάνω εκτελούνται κατά τη διάρκεια χειρισμών σε ένα συγκεκριμένο περιορισμένο πλαίσιο.

Για το λόγο αυτό οι μετατροπές δεν έλκουν την προσοχή, θεωρούμενες σαν δράσεις πλευρικές και προφανείς. Για παράδειγμα η Έννοια του Μιγαδικού αριθμού μετατρέπεται σε σημείο καρτεσιανών συντεταγμένων ή σε διάνυσμα και η μετατροπή αυτή θεωρείται φυσική και αυτονόητη. Έτσι περνούν απαρατήρητες και δεν μπαίνουν ποτέ στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος.

Έτσι όλοι (μαθητές και καθηγητές) επιμένουν να τις αγνοούν (ως προς την προέλευση, δομή και λειτουργικότητα) και να προχωρούν σε αυτό που για αυτούς είναι η πραγματική μαθηματική δραστηριότητα. Από μία άλλη οπτική γωνία, και συγκεκριμένα αυτή της θεωρίας του Duval, η δράση της μετατροπής που εμφανίζεται σε ένα δομικό αναπαραστασιακό μετασχηματισμό είναι αυτή που συγκεκριμένα οδηγεί τους διδασκόμενους στους μηχανισμούς που υποκρύπτονται πίσω από τη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι ίδιες οι δράσεις αυτές είναι αυτές που συγκροτούν και περιέχουν τη γνώση αυτή καθαυτή και μαθαίνουμε μέσω δράσεων. Στο μεταξύ αυτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο οπτικές δεν λαμβάνεται συχνά υπόψη κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Αν αναλογιστούμε πως ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της μαθηματικής πρακτικής αποτελεί η ποικιλία των μεταβλητών των σημειακών συστημάτων αναπαραστάσεων η οποία και απαραίτητα κινητοποιεί τις λογικές διεργασίες. Παρόλα αυτά η διακριτότητα και ποικιλία αυτή σπάνια λαμβάνεται υπόψη κατά τη διάρκεια μίας διδακτικής προσέγγισης. Αν ποτέ κάποιος θελήσει να αναλύσει και να καταλάβει τις δυσκολίες της διδασκαλίας αλλά από την άλλη μεριά και του επιπέδου κατανόησης στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να φτάσουν στο συμπέρασμα πως σημαντικότατος παράγοντας είναι ότι ποτέ δεν δίνεται έμφαση στο κομμάτι των μετασχηματισμών από ένα σύστημα σε ένα άλλο, αλλά αντίθετα η έμφαση τοποθετείται στο κομμάτι του χειρισμού ειδικών προβληματικού τύπου καταστάσεων.

Είναι απολύτων θεμιτό, προφανές και κατανοητό πως για να μπορέσει κάποιος κάποτε να φτάσει σε ένα σημείο να παρατηρήσει και να κατανοήσει την λειτουργία των μετασχηματισμών αναπαραστάσεων θα πρέπει σε πρώτη φάση να είναι σε θέση να διακρίνει τους δύο τύπους μετασχηματισμών των απεικονίσεων.

Αυτό σπάνια επιτυγχάνεται ακόμα και σε μαθητές ή πολύ περισσότερο σε φοιτητές. Οι αίσθηση πως η καθημερινή πρακτική αναφέρεται σε χειρισμούς προβληματικών καταστάσεων υπερισχύει και έτσι οι μετασχηματισμοί υποβιβάζονται σε απλούς χειρισμούς προβληματικών καταστάσεων. Η έννοια του μετασχηματισμού απουσιάζει και μαζί με αυτή απουσιάζει και η πραγματική γνώση του αντικειμένου. Άλλες φορές ο μετασχηματισμός πιστεύεται πως αποτελείται από καθαρά εννοιολογική κατανόηση που είναι καθαρά λογική και καμία σχέση δεν έχει με το αντικείμενο στο οποίο αναφερόμαστε.

Το να δύναται κάποιος να αποσυνθέσει νοητικά τα κομμάτια (decompartmentalization) μίας εισαγόμενης πληροφορίας - ενός εισαγόμενου αντικειμένου και συγκεκριμένα εδώ μίας εικόνας είναι από μόνο του μία από τις προϋποθέσεις ώστε να φτάσει κανείς στη κατανόηση των μαθηματικών. Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι προβληματικός στη βάση της δομής του. Η σύνθεση δεν εξυπηρετεί το επίπεδο της κατανόησης αλλά ένα επίπεδο που άπτεται περισσότερο των χειρισμών.

Εδώ θα επισημανθεί πως υπάρχει μεγάλο πλήθος διδακτικών προσεγγίσεων που έχει την λανθασμένη οπτική γωνία. Αυτό μας προβληματίζει και μας κινητοποιεί ώστε να εντοπίσουμε τις αιτίες που οδήγησαν σε αυτά τα αποτελέσματα.

Ένας από τους λόγους θα μπορούσε να εντοπιστεί στην αυξανόμενη έμφαση που αποδίδεται από τον μαθηματικό κόσμο στην μελέτη των ισομορφισμών ιδιαίτερα μετά την εμφάνιση της άποψης του Klein περί της γεωμετρίας. Μία τέτοια απόδοση κεντρικής θέσης στους ισομορφισμούς απορρίπτει τη θέση κλειδί των διακριτών εισαγόμενων πληροφοριών μέσω απεικονίσεων. Ας επισημάνουμε πως ο ίδιος ο Piaget έκανε την έρευνα περί ισομορφισμών από το ίδιο το παιδί, μία βασική αρχή της θεωρίας του περί της γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών, ακόμα και αν αργότερα εν μέρει αναθεώρησε μιλώντας πλέον για όχι ολικούς ισομορφισμούς. (Piaget, 1967). Εκτενής ανάλυση και χρήση των παραπάνω έγινε στον τομέα της γενετικής ψυχολογίας και της παρουσίασης αυτή σε αρκετές διδακτικές προσεγγίσεις.

Κατόπιν πλήθος ερευνητών απέρριψαν τις ιδέες αυτές. Ο Vygotski δεν επέμεινε στην αναζήτηση των ισομορφισμών γιατί μία τέτοια αντίληψη φτάνει τελικά στο συμπέρασμα πως η ανάπτυξη δεν φέρνει τελικά τίποτα το δραστικά καινούργιο παρά μόνο έχει την τάση να ανακυκλώνει αυτό που προϋπήρχε. Αν κάποιος δεν δέχεται το πόσο σημαντικό ρόλο παίζουν οι πληθωριστικές προσεγγίσεις των αναφερόμενων μέσω αναπαραστάσεων θα φτάσουμε στο σημείο όλες οι αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου να έχουν το ίδιο περιεχόμενο ή ως σαν το περιεχόμενο μίας αναπαράστασης, να μπορεί να προκύψει από μία άλλη ως πληροφορία που υπάρχει σε αυτή ρητά και ξεκάθαρα.

Υπό αυτό το πρίσμα η αντίθεση που συχνά αποτυπώνεται μεταξύ κατανόησης ως μία εννοιολογικής διαδικασίας ή καθαρά νοητικής και των σημειωτικών αναπαραστάσεων ως εξωτερικών ερεθισμάτων φαίνεται να αποτελεί μία πλάνη επειδή οι νοητικές αναπαραστάσεις που είναι, το λιγότερο χρήσιμες στη μαθηματική πρακτική, είναι πάντα εσωτερικοποιημένες σημειωτικές αναπαραστάσεις που φτάνουν το βιωματικό επίπεδο.

3. Η Επιστημολία των Διαγραμμάτων

Για να εξετάσουμε επιστημολογικά τα σχήματα ή διαγράμματα θα πρέπει αναπόφευκτα να αναφερθούμε και να αντιπαραβάλουμε τις σχέσεις τους με τις αντίστοιχες έννοιες, που περιέχουν, καθώς αυτές αποτελούν τον πυρήνα της ύπαρξής τους. Θα χρειαστεί να εξετάσουμε, τα πιθανά ενδεχόμενα ως προς την ποιότητα της αλήθειας που περιέχουν και άρα αναπόφευκτα ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στην έννοια του a priori και a posteriori.

Θα ξεκαθαρίσουμε την έννοια του a priori με αυτή του εμπειρικού ή a posteriori. Η έννοια της a priori αλήθειας υποκρύπτει πως η αλήθεια δεν χρειάζεται την συμβολή της εμπειρίας αλλά η αλήθεια είναι ανεξάρτητη αυτής ή απαιτεί μόνο την άσκηση της λογικής. Η εμπειρική αλήθεια συνίσταται στην μη ανεξαρτησία από την εμπειρία ή εμπεριέχει περισσότερα στοιχεία που προκύπτουν από διαφορετικές πηγές από την απλή, συνήθη χρήση της λογικής.

Από όλες αυτές τις θέσεις θα πρέπει αυτόματα να ξεκαθαρίσουμε πως δεν μπορούμε παρά να απορρίψουμε την πιθανότητα μία γεωμετρική θεωρία[26] να περιέχει a priori ποιότητα αλήθειας. Μία τέτοια λογική άλλωστε θα είχε σαφείς Καντιανές αναφορές που είχαν ιστορικά σαν επακόλουθο την επιβράδυνση της ανακάλυψης των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Αυτό βέβαια δεδομένα δεν μπορεί να μεταφερθεί στα διαγράμματα. Τα γεωμετρικά διαγράμματα δεν κατέχουν αναγκαστικά a posteriori ποιότητα αλήθειας. Τα διαγράμματα ορίζονται, καθορίζονται και λειτουργούν μέσα της εκάστοτε θεωρίας στην οποία εντάσσονται και άρα μπορούν να περιέχουν a priori ποιότητα αλήθειας. Η ειδική περίπτωση του Ευκλείδειου επιπέδου μας δίνει a priori ορθά δεδομένα και αυτό συμβαίνει και εξαιτίας του ότι το επίπεδο του χαρτιού μας αποτελεί μοντέλο της όλης θεωρίας. Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, θα δούμε και ένα παράδειγμα διαγράμματος που θα μπορούσε να δημιουργήσει προβλήματα στην θεωρία μας και θα το εξετάσουμε διεξοδικά.

[26] Εδώ μιλάμε για την τυπική λογική που εισάγει και μόνο για αυτή

Θα πρέπει να υπάρξει μία συζήτηση περί της έννοιας της εμπειρίας και της χρήσης που η εμπειρία μπορεί να τυγχάνει. Η ερώτηση που σχεδόν αυτόματα αναδύεται είναι εάν και εάν ναι, σε ποιο βαθμό η εμπειρία του ασχολούμενου με την γεωμετρία εξυπηρετεί μία λειτουργία ως απόδειξη για την ορθότητα των απόψεών του. Θα μπορούσαμε να πούμε πως υπάρχουν μόνο δύο εναλλακτικές. Θα μπορούσε η οπτική εμπειρία της επαφής με το διάγραμμα να λειτουργεί ως απόδειξη για την ορθότητα των απόψεών μας ή όχι. Αν όχι τότε η αιτιολόγηση και άρα και η αξία του διαγράμματος είναι εμπειρική και άρα το διάγραμμα θα μπορούσε κάποιος να πει πως δεν βοηθά σε κανένα σημείο της πρακτικής.

Όμως θα μπορούσαμε εύκολα να αναγνωρίσουμε τουλάχιστον τρεις παράγοντες που η λειτουργία του διαγράμματος είναι χρήσιμη αν όχι απαραίτητη. Το διάγραμμα βοηθά στον καθορισμό του επιχειρήματος, βοηθά στην ρητή έκφραση θέσεων και να βοηθήσει κάποιον να ακολουθήσει επιχειρήματα παίζοντας τον ρόλο του διάμεσου ανάμεσα στην τυπική λογική και την ανατροφοδότηση αυτής.

Η επιστημολογική θέση που παίρνουμε είναι πως τα σχήματα έχουν επιστημονική αξία και παίζουν κυρίαρχο ρόλο στον σχηματισμό, την κατανόηση, την εξέλιξη και την παραγωγικότητα που μπορούν να συνεπάγονται οι Γεωμετρικές έννοιες. Μία ενδεχόμενη θεώρηση πως τα διαγράμματα κατέχουν a priori ποιότητα αλήθειας, εντασσόμενα σε δεδομένη θεωρία θα μπορούσε να γίνει αποδεκτή αλλά δεν αποτελεί τον κυρίως στόχο μας.

3.1. Τα Διαγράμματα του Ευκλείδη

Η μορφή της οπτικής συλλογιστικής που ακολουθείται στον Ευκλείδη έχει υψηλή επιστημονική αξία. Συγκεκριμένα, μπορεί αυτή η συλλογιστική να δικαιολογήσει την πίστη μας και να αναπτύξει την γνώση. Ο Netz στο βιβλίο του «The Shaping of Deduction in Greek Mathematics», διατυπώνει τον εξής ισχυρισμό:

> *«Τα Ελληνικά μαθηματικά, για να το θέσουμε λακωνικά, ήταν μία πολιτισμική πρακτική στην οποία το κυρίαρχο στοιχείο ήταν ο φορμαλισμός».*

Είναι η ίδια η ανακάλυψη «της μορφής της δικαιολόγησης των αποτελεσμάτων» που οδηγεί τον συγγραφέα σε ένα τέτοιο ισχυρισμό. Το περιεχόμενο της γνώσης που τα Ελληνικά μαθηματικά προσφέρουν είναι σε σχέση με την δημιουργία του φορμαλισμού πολύ υποδεέστερο επίτευγμα (Netz, 2003). Παράλληλα όμως δεν παραβλέπει τον ρόλο που τα διαγράμματα έπαιξαν ώστε να οδηγηθούν οι Αρχαίοι Έλληνες στον φορμαλισμό.

Ας μην αμελούμε το γεγονός πως οι μαθηματικοί της εποχής εκείνης ήταν αυτοί που έπρεπε να ξεκινήσουν την αναζήτηση της γνώσης με συστηματικά εργαλεία και όχι να επεξεργαστούν ερχόμενοι ως κατοπινοί την γνώση η οποία ήδη θεμελιωμένη και με συγκεκριμένα αποδεκτά εργαλεία ήταν σε λειτουργία και αναπτυχθεί σε πλήθος εφαρμογών. Η θεμελίωση είναι πάντα δυσκολότερη από την επαναδιαπραγμάτευση ή την δημιουργία γνώσης σε στέρεα οικοδομημένες βάσεις. Για να θεμελιώσουν την πρακτική τους χρησιμοποίησαν δύο πολύ βασικά εργαλεία.

Το πρώτο από αυτά είναι τα *διαγράμματα*. Τα διαγράμματα – με τον συγκεκριμένο τρόπο που χρησιμοποιούνται στα Ελληνικά μαθηματικά – είναι ο τρόπος και η δίοδος μέσω του οποίου συσκευάζονται και παίρνουν μορφή οι οπτικές γνωστικές πηγές που αναφέρονταν σε καθημερινές εμπειρίες. Από την άλλη μεριά υπάρχει η μαθηματική γλώσσα η οποία, όντας ένα υποσύνολο της καθημερινής γλώσσας, κωδικοποιεί γνωστικές πηγές στην καθημερινή φυσική γλώσσα. Είναι προφανές πως πολλές λέξεις της

καθημερινής και της μαθηματικής γλώσσας κρύβουν διαφορετικό περιεχόμενο στο μαθηματικό και το φυσικό σύνολο των εννοιών. Τα δύο αυτά εργαλεία έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην επικοινωνία καθώς την εποχή εκείνη έλειπαν οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε ευρέως σήμερα.

Πλήθος όμως από ζητήματα έμενε να απαντηθούν. Τα κενά της πρακτικής ήταν πολλά και σημαντικά.

Πως μπορούμε να επιδείξουμε την αποκτηθείσα μαθηματική γνώση σε κάποιον; Πως μπορούμε να εικονοποιήσουμε τα αποτελέσματά μιας μαθηματικής πρακτικής, πως σχεδιάζουμε το σωστό σχήμα; Πως ονομάζουμε αυθαίρετα τα σημεία του σχήματος τις ευθείες; Πως μπορείς να είσαι σίγουρος ότι έχεις κερδίσει την συγκατάθεση του συνόλου των μαθηματικών για την ορθότητα των πορισμάτων σου όταν κανένας από αυτούς δεν είναι παρόντας; Πως έπειτα μπορείς να μοιραστείς μαζί τους τα στοιχεία που αναδεικνύουν την ορθότητα των ισχυρισμών;

Είναι το επίπεδο των σημειωτικών αναπαραστάσεων, που έχει ήδη αναφερθεί, στο οποίο τα στοιχεία της πρακτικής που έχει ένας μαθηματικός περατώσει έχουν αφήσει ανεξίτηλα τα σημάδια τους αυτό που θα έρθει να συμπληρώσει τα κενά. Το αναμφίβολα μεγάλο ποσό πληροφοριών που μία σημειωτική αναπαράσταση περιέχει μπορεί μέσω της κατάλληλης σύνταξης να αποδώσει ή ορθότερα να ξαναζωντανέψει ανακατασκευάζοντας τα επιμέρους κομμάτια και τελικά το σύνολο της πρακτικής που έχει περατωθεί και πλέον ανήκει στο παρελθόν.

Αυτό κατά τον Netz, (2003) για μία ακόμα φορά αποδεικνύει πως η γεωμετρική πρακτική δεν είναι κάτι που απλώς παρατηρούμε και παράλληλα γίνεται κατανοητή σε οπτικό επίπεδο, αλλά είναι αντιθέτως ένα επεξηγηματικό παράδειγμα με στόχο την δόμηση φορμαλιστικών δομών που θα οδηγήσουν στην γνώση.

Η προσκόλληση στους φορμαλισμούς μπορεί να προσφέρει μία καινούργια πηγή βεβαιότητας για τους μαθητές και όσους ασχολούνται με την Γεωμετρία, αρκεί να καταφέρουν να εντοπίσουν το συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής της γεωμετρίας και να το χειριστούν κατά τον ίδιο φορμαλιστικό τρόπο.

Ο Latour (2007) θεωρεί πως οι αρχαίοι Έλληνες σκόπιμα και συνειδητά δημιούργησαν ένα μόρφωμα που τους επέτρεπε να διαφοροποιήσουν το σύστημά τους από κάθε άλλη μέχρι τότε εμφανισμένη διανοητική πρακτική. Μην έχοντας ανάγκη να κάνουν δεύτερης τάξης αναστοχασμούς σχετικά με τις αποδείξεις και αποκλείοντάς τους από το σύνολο των επιτευγμάτων της πρακτικής τους οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δημιούργησαν κάτι νέο και πρωτοποριακό. Ο Netz, (2003) φαίνεται να συμφωνεί καθώς αναφέρει χαρακτηριστικά:

«Το διάγραμμα με τα σημεία αντιστοιχισμένα σε γράμματα, μας εφοδιάζει με ένα σύμπαν διαπραγμάτευσης. Οι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την παραμικρή ανάγκη να καθορίσουν τις οντολογικές τους αρχές, όταν μιλούσαν και πραγματεύονταν μέσω διαγραμμάτων. Οι αποδείξεις γίνονταν σε ένα αντικειμενικό επίπεδο και οι όποιες άλλες ερωτήσεις[27] περιθωριοποιούνταν. Κάποιος με την απευθείας μετάβασή του στο διάγραμμα, έκανε απάνω στο διάγραμμα την βρώμικη δουλειά και όταν τον ρωτούσαν ποια ήταν η οντολογία της πρακτικής του σφύριζε αδιάφορα και επέστρεφε στην πρακτική του (…) η επιλογή των Ελλήνων να κάνουν μαθηματικά και μόνο μαθηματικά ήταν εφικτή και ταυτόχρονα εξηγήσιμη διότι το διάγραμμα έπαιζε αποδοτικά και εμφατικά το ρόλο του υποκατάστατου της οντολογίας» (σελ 59)

Ο van der Waerden (1954) έχει μία διαφορετική άποψη για το τι ώθησε τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς στην εκτεταμένη χρήση σχημάτων αλλά και γενικότερα στις Γεωμετρικές Προσεγγίσεις ακόμα και στις αριθμητικές προτάσεις[28]. Ο van der Waerden αναγνωρίζει την αισθητική απόλαυση ως κίνητρο για την χρήση των διαγραμμάτων σε όλες τις μαθηματικές διατυπώσεις των μαθηματικών της εποχής, υπογραμμίζει όμως πως όλα αυτά δεν αρκούν για την αιτιολόγηση της απάλειψης της άλγεβρας. Θεωρεί πως είναι η ανακάλυψη της ασσυμετρίας που τους οδήγησε στην χρήση των διαγραμμάτων σε όλο το εύρος των μαθηματικών που εμφανίζονται στην πρακτική που εμφάνισαν.

---

[27] Φιλοσοφικές σχετικές με τη οντολογία του διαγράμματος και των αντικειμένων που βρίσκονταν υπό διαπραγμάτευση.

[28] Βλέπε της προτάσεις της Γεωμετρικής Άλγεβρας του Δεύτερου Βιβλίου των Στοιχείων

3.2.Το Διάγραμμα Σήμερα

Όμως το διάγραμμα δημιουργούσε παράλληλα και διάφορες επιπλοκές. Ότι ήταν εμφανές με την χρήση του διαγράμματος και μέσω παρατήρησης και πειραματισμών, ήταν αυτό ακριβώς που δεν μπορούσε κάποιος να θεωρεί δεδομένο όταν χρησιμοποιούσε αφαιρετική – παραγωγική σκέψη (deduction). Κάποιοι έχουν αντιτείνει πως η χρήση των διαγραμμάτων θα πρέπει να περιοριστεί στα σχολεία και μόνο για καθαρά διδακτικούς λόγους. Όπως αναφέρει και ο Lakatos (1976):

«…η νόηση από μόνη της αναλαμβάνει και σπρώχνει το μυαλό μας ανάμεσα στα λογικά βήματα μίας απόδειξης μη χρειαζούμενη την βοήθεια κανενός ροπάλου ή διαγράμματος. (…) για τον λόγο αυτό τα μαθηματικά διαφέρουν από τις άλλες επιστήμες. Τα μαθηματικά δεν βασίζονται σε μία βήμα προς βήμα παρατήρηση, μίας προηγουμένως τροποποιημένης υλικής πραγματικότητας, ώστε να εξαγάγουν νέες διαισθητικής προέλευσης εικασίες σχετικά με τον κόσμο των αισθήσεων και κάνοντας χρήση ως διαμέσου τα αντικείμενα του κόσμου αυτού».

Σε σχέση με την θέση αυτή του Lakatos ο Latour δεν μπορεί παρά να διαφωνεί. Θεωρεί αδιανόητο το να καταφέρει κάποιος χωρίς να κάνει καμία αναφορά σε αισθητικά δεδομένα να απαγκιστρωθεί από αυτά και να αγγίξει την ιδανικότητα χωρίς ένα αμφιβόλου ιδανικότητας σημείο αναφοράς όπως η βιωματική πραγματικότητα.

Τα διαγράμματα, μαζί με την ειδική μορφή τους η οποία περιέχει και προτασιακές ποιότητες, έχουν την λειτουργία του να παρουσιάζουν επιχειρήματα, ενώ παράλληλα ουσιαστικά συνεισφέρουν στην αιτιολόγηση, μιλώντας πάντα για τύπους αιτιολόγησης που αναφέρονται σε συγκεκριμένου τύπου λογικές ακολουθίες. Τα διαγράμματα ακόμα και αν πιστέψουμε ότι πρόκειται μόνο για απλές εικόνες, κατευθύνουν τις λειτουργίες που παρουσιάζουν πληροφορίες και αποτελούν διαμέσους επίδρασης πάνω στο γεωμετρικό ζητούμενο.

Για να απορρίψει την θέση του Lakatos ο Latour (2007) σημειώνει χαρακτηριστικά:

«...οποιοδήποτε ποσοστό έμφασης και αν αποδώσουμε στις διανοητικές τεχνικές αυτό δεν θα μπορεί να εξηγήσει πως μία νοητική οντότητα καταφέρνει ξαφνικά να αποδεσμευτεί από την υποκειμενικότητα και να αποφύγει την αισθητηριακή πραγματικότητα για να εισέλθει σε ένα επίπεδο ανώτερης πραγματικότητας - ένα επίπεδο που κανένα ποσό αισθητικών δεδομένων θα μπορέσει ποτέ να φτάσει». (σελ 11)

Όπως συμβαίνει και με τις προτάσεις, αν κάποιος εξαλείψει ένα διάγραμμα από ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό επιχείρημα αυτό θα έχει σίγουρα αρνητικό αντίκτυπο στην ευκολία με την οποία κάποιος θα μπορεί να ακολουθήσει το επιχείρημα αυτό οποιοδήποτε άλλο υποκατάστατο και να χρησιμοποιηθεί. Θα μπορούσε δηλαδή από την μία μεριά το επιχείρημα να χάσει σε σαφήνεια. Σε αυτό θα οδηγήσει μία πιθανή απώλεια δεδομένων λόγω της απουσίας της αναφοράς και της σύνοψης που το σχήμα προσφέρει, τα λογικά βήματα ή άλματα μπορεί να μην ακολουθούνται κατά γράμμα και κενά δύνανται να εμφανιστούν.

Ο Poincare φαίνεται να έχει μία οπτική γωνία που συγκλίνει προς αυτή του Lakatos καθώς δεν αποδίδει περιεχόμενο γνώσης στο σχήμα ή τουλάχιστον δεν αναγνωρίζει περιεχόμενο γνώσης χωρίς την χρήση φορμαλισμών. Έτσι φτάνει στο σημείο να δώσει τον ακόλουθο ορισμό για το τι ονομάζει αυτός γεωμετρία:

«Γεωμετρία είναι η τέχνη της ορθής και αντικειμενικής δικαιολόγησης ισχυρισμών σχετικά με σχήματα που είναι ατελή».

Σε ένα τέτοιο ορισμό θα λέγαμε ότι η αξία του σχήματος δεν είναι και δεν μπορεί να είναι μηδενική. Το σχήμα αναγνωρίζεται ως ένα εργαλείο αλλά ταυτόχρονα επισημαίνεται πως δεν αποτελεί το κλειδί της μαθηματικής πρακτικής. Τι αποτελεί αυτό το κλειδί; Προφανώς η παραγωγική αφαιρετική σκέψη. Ασχέτως πόσο άσχημο και αναξιόπιστο είναι το σχήμα[29] η αιτιολόγηση ρέει, ορθά και χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, από μέσα του ή ορθότερα μέσα του. Η αιτία για αυτό το φαινόμενο είναι πως στο επίπεδο των αφαιρετικών

[29] Και πάντα σε επίπεδο ορισμών των εννοιών που αναπαριστούνται, έτσι θα είναι.

παραγωγικών πράξεων, που ορίζει και κατευθύνει αυτό των μαθηματικών αντικειμένων[30], το σχήμα μπορεί να θεωρηθεί πλήρες και ιδανικό.

Γιατί όμως ένα διάγραμμα να μπορεί να θεωρείται αξιόπιστο[31]. Πρώτα από όλα οι αναφορές που γίνονται σε αυτό είναι αναφορές που γίνονται σε ένα δικό μας κατασκεύασμα το οποίο εξ ορισμού ως δικό μας κατασκεύασμα είναι υπό τον έλεγχό μας. Το έχουμε κατασκευάσει βήμα προς βήμα και άρα έχουμε αντιμετωπίσει σε αισθητικό επίπεδο τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές του. Αν κάποιος συναντούσε ένα αυτόνομο διάγραμμα θα του ήταν αδύνατο να το κατευθύνει, να το αναδιοργανώσει ή να αιτιολογήσει ισχυρισμούς με βάση αυτό (Latour, 2007). Έτσι, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε τον συνδυασμό διαγράμματος με την απόδοση των εννοιών μέσω της φυσικής γλώσσας.

«Το οπτικό ερέθισμα με την παρουσία του επιτρέπει μία συνοπτική σκοπιά του προβλήματος, μία εύκολη πρόσβαση στα περιεχόμενα. Η λεκτική προσέγγιση που ακολουθεί αναπόφευκτα περιορίζει τα περιεχόμενα (αφαίρεσης - deduction). Το κείμενο από μόνο του είναι πολύ δύσκολο για να το κατανοήσει κανείς, ενώ το διάγραμμα από μόνο του είναι πολύ άγριο και απρόβλεπτο. Η σύνθεση της ενότητας των δύο αποτελεί το αντικείμενο των Ελληνικών μαθηματικών…» (Netz, 2003 σελ 181).

Τελικά καταλήγουμε στο σαφές συμπέρασμα πως το διάγραμμα είναι πολύ χρήσιμο αν όχι απαραίτητο. Πρώτα από όλα η αιτιολόγηση με βάση ένα διάγραμμα είναι, εξ υποθέσεως, επαρκής ώστε να δικαιολογήσει την αίσθηση περί του ορθού του σκεπτόμενου περί των σχετικών Γεωμετρικών εννοιών. Ακολούθως, το διάγραμμα έχει θετική επιστημονικό αντίκτυπο, καθώς αν κάποιος κληθεί να κρίνει περί Γεωμετρικών εννοιών χωρίς τη βοήθεια διαγράμματος θα διστάζει να πάρει σαφή θέση ή δεν θα μπορεί καθόλου να πάρει θέση.

---

[30] Με μία Πλατωνική θεώρηση των όρων

[31] Οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν με βάση προφανώς την οπτική επαφή με το διάγραμμα θεωρήσει πως ευθείες και κύκλοι κατάλληλα τοποθετημένοι στο επίπεδο θα έχουν αναγκαστικά σημείο τομής χωρίς να έχουν πρώτα απαιτήσει την συνέχεια των γραμμών.

3.3. Το Θεμέλιο της Γεωμετρίας

Η ικανότητα κάποιου να κάνει αφαιρετικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς δεν εξαρτάται μόνο από την αφαίρεση που το υποκείμενο μπορεί να επιβάλει στην σκέψη του. Ο Netz πιστεύει (2003), ότι οι αφαιρετικές και παραγωγικές σκέψεις συναποτελούνται από τον δυισμό παρατήρησης και εντοπισμού[32] σχετικών δεδομένων από την μία μεριά και παράλληλα αλλά εξίσου σημαντικός είναι ο παραγωγικός συνδυασμός γνωστών δεδομένων της προϋπάρχουσας θεωρίας. Οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί είχαν επιπλέον να αντιμετωπίσουν την έλλειψη προηγούμενης γνώσης και αυτό έκανε τα επιτεύγματα των πρακτικών τους ακόμα πιο σημαντικά. Σε σχέση με αυτή του τη θέση υποστηρίζει πως ο εντοπισμός του ορθού θα πρέπει να ακολουθείται από ορθές κρίσεις επι των αποτελεσμάτων αυτού.

«…η δυνατότητα του εντοπισμού του προφανούς είναι εξίσου σημαντική με την δυνατότητα εντοπισμού του προφανούς αποτελέσματος. (…) οι δύο αυτές δυνατότητες αναπτύσσονται και δουλεύουν ταυτόχρονα…» (Netz, 2003, σελ 171)

Η διαφορετικότητα των μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι συμπεριφέρονται στο ιδανικό κόσμο (ιδεατό) όχι με ένα ιδεατό τρόπο αλλά σαν ο κόσμος αυτός να έχει υλική υπόσταση. Η ανάπτυξη των φορμαλισμών και η προσκόλληση σε αυτούς, με αυτόν τον πολύ συγκεκριμένο τρόπο, επιτρέπει στον κόσμο των ιδεών να εμφανιστεί στην επιφάνεια της πρακτικής και στον εμπειρικό κόσμο να κάνει την εμφάνισή του ως κόσμος των ιδεών. Είναι δηλαδή σαν να έχουμε στην βιτρίνα το εμπόρευμα των ιδεών και στο εσωτερικό να πουλάμε εμπειρικά δεδομένα. Τώρα δεν μιλάμε για τον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων αλλά για τον κόσμο των ιδεών των λογικών σχέσεων και συνεπαγωγών.

Ένας τέτοιος κόσμος δεν μπορεί να προϋπήρχε ανεξάρτητα από τον γνώστη του και από αυτόν που κατευθύνει τους συλλογισμούς αυτούς[33].

---

[33] Αριστοτελικές καταβολές

«Κάποιες θεωρήσεις και επιχειρήματα τα βλέπουμε ως διαισθητικά και αναγκαστικά απαραίτητα – αποτελούν τους πυλώνες της θεωρίας και τον πυρήνα της αναγκαιότητας. Κατόπιν αυτά συνδυάζονται με φορμαλισμούς οι οποίοι διατηρούν την έννοια της αναγκαιότητας και άρα της αλήθειας της γεωμετρίας. Σήμερα τις θεωρήσεις αυτές τις αναγνωρίζουμε ως αιτήματα και αποτελούν την απαρχή της κάθε επιστημονικής πρακτικής». (Netz, 2003, σελ 168)

Η διατήρηση της αναγκαιότητας μέσω των επιτυχών μετασχηματισμών είναι ένα από τα μεγαλύτερα λογικά επιτεύγματα των αρχαίων Ελλήνων. Η αντίληψη που υπάρχει ακόμα και σήμερα είναι πως η εξαγωγή των σχέσεων που μπορούσαν να περιέχονται σε ένα απόσπασμα κειμένου μπορούσε να διατηρήσει την αναγκαιότητα των ισχυρισμών από την αρχή μέχρι το τέλος μίας απόδειξης. Άρα μέσω αυτής της πρακτικής μπορεί μία αλυσίδα αποτελεσμάτων να δημιουργηθεί και ανάμεσα στους κρίκους της αλυσίδας αυτής να υπάρχουν δεσμοί που δεν σπάνε.

Στον πραγματικό κόσμο δεν υπάρχουν αλυσίδες μετασχηματισμών που αφήνουν το αντικείμενο ανεπηρέαστο έπειτα από την εφαρμογή τους. Στον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών, τον οποίο εξερευνούν είτε ανακαλύπτουν[34] οι μαθηματικοί, μπορείς να έχεις όσους μετασχηματισμούς θέλεις χωρίς να επηρεαστεί το αντικείμενο ή το περιεχόμενο της πρακτικής σου. Το γνωστικό κομμάτι των μαθηματικών περιέχει το ίδιο σύνολο ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών κάτω από ακριβείς μαθηματικούς μετασχηματισμούς.

«*Με άλλα λόγια μπορείς να έχεις κινητικότητα αλλά και καμία μετάλλαξη»* (Latour, 1990).

Αυτή είναι μία διάκριση μεταξύ του εμπειρικού και του κόσμου των ιδεών. Αυτό που όμως συναντά στη γεωμετρία (τουλάχιστον στις κλασσικές εκδοχές της ή σε αυτές που συναντά στο πλαίσιο της διδασκαλίας της

[34] Στο σημείο αυτό αναφερόμαστε στα κυρίαρχα φιλοσοφικά ρεύματα της ύπαρξης ή όχι μαθηματικών και γεωμετρικό αντικειμένων σε ένα σύμπαν διαφορετικό ξεχωριστό και ανεξάρτητο από τον αισθητό κόσμο που μας περιβάλει. Το επιχείρημα είναι ανεξάρτητο του φιλοσοφικού ρεύματος που οποιοσδήποτε θέλει να ακολουθήσει.

γεωμετρίας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση) είναι πως η ιδανικότητα των γεωμετρικών εννοιών ή ιδεών είναι ένα φαινόμενο που επιτυγχάνεται για τους μαθητές μέσω εντελώς πρακτικών πειραμάτων στην βάση ενός διαγράμματος που περιέχει γράμματα τα οποία αποδίδονται σε σχηματικές έννοιες για να τις ονομάσουν και μόνο για τον λόγο αυτό. Αυτού του τύπου την αφαίρεση έμαθαν να κάνουν οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί και τέτοιου τύπου αφαίρεση καλούνται να κάνουν και οι μαθητές όταν διδάσκονται το μάθημα της γεωμετρίας.

Ο πλατωνισμός έχει ένα ιδιαίτερα γοητευτικό χαρακτήρα για οποίον ασχολείται με τα μαθηματικά. Θα μπορούσε κανείς να πει πως είναι και ο πιο βολικός τρόπος να προσεγγίσει ο μαθηματικός το αντικείμενο ενασχόλησής του. Σύμφωνα λοιπόν, με το αυτό το φιλοσοφικό ρεύμα οι μαθηματικές αλήθειες είναι ανεξάρτητες από τον φορμαλισμό που σύμφωνα με τον Πλάτωνα, συγκεκριμένα χρησιμοποιείται για τη διατύπωσή τους και η χρήση σχημάτων και γραμμών ή γενικότερα εικόνων δεν έχει σχέση με τις ίδιες. Η σχέση τους εντοπίζεται στο ότι αποτελούν εργαλεία για την ανακάλυψή τους. Η χρήση σχημάτων, γραμμών και εικόνων σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση που υποβοηθά στη σύλληψη των εννοιών και όχι στην δημιουργία τους. Πολλές φορές η ανακάλυψη αυτών των γεωμετρικών αληθειών διέρχεται από δαιδάλους συγκεκριμένων κατασκευαστικών αλγορίθμων. Οι αλγόριθμοι αυτοί δεν είναι απαραίτητοι για τον χαρακτηρισμό μίας πρότασης ως αληθούς ή ψευδούς. Δηλαδή δεν αποτελούν αναπόσπαστο συστατικό μίας γεωμετρικής αλήθειας[35].

Η αίσθηση παρεμποδίζει την ανάπτυξη της επιστήμης όταν αυτή ορίζεται ως σωματικό πάθος, ως ατομική, ως φορέας των πολλών χωρίς το εν, ως ασταθής και μεταβαλλόμενη, ως ασαφής φύσις, ως είναι πως, ως φαίνεσθαι, ή ως επιστήμη με το νόημα που έδινε στη λέξη ο Πρωταγόρας ως απλή αίσθηση ουκ άλλο εστίν επιστήμη ή αίσθησις[36].

Μία τέτοια θέση απορρίπτει πλήρως την εποπτεία και θα έχει σαν επακόλουθο τον εξοβελισμό της χρήσης των σχημάτων για την μαθηματική

---

[36] Θεαίτητος, 151e

αιτιολόγηση. Επίσης, γίνεται προφανές το πόσο νωρίς το πρόβλημα αυτό είχε γίνει αντιληπτό από φιλοσόφους πολύ προγενέστερους των σύγχρονων. Η γεωμετρική αιτιολόγηση με χρήση στοιχείων που βασίζονται σε στοιχεία που η προέλευσή τους είναι απευθείας από το σχήμα και άρα αισθητικής (οπτικής) προέλευσης είναι λοιπόν κάτω από καθεστώς αμφισβήτησης. Στόχος, λοιπόν θα είναι μία πλήρης κατανόηση του κατά πόσο είναι αναγκαία μία διαδικασία σκέψης πάνω σε σχήμα, τις τυχόν επιπλοκές που μπορεί να εμφανιστούν κατά την διάρκεια μίας τέτοιας διαδικασίας καθώς και τα μειονεκτήματα μίας τέτοιας οπτικής περί της γεωμετρίας.

Για να καταστεί εφικτός ένας τέτοιος διαχωρισμός και να οργανώσουμε την κατανόησή μας γύρω από τα παραπάνω θέματα είναι αναγκαίος ένας σε βάθος στοχασμός πάνω σε διάφορα επιστημονικά θέματα, σε θέματα της ιστορίας της γεωμετρίας αλλά και τις παιδαγωγικές προεκτάσεις των θεμάτων αυτών. Άλλωστε είναι γενικά αποδεκτό πως η πορεία των επιστημών πολλές φορές έχει οδηγηθεί στα ίδια λάθη και τα ίδια αδιέξοδα που οδηγούνται και οι μαθητές όταν για πρώτη φορά διαπραγματεύονται με έννοιες νέες και πολύπλευρες τις οποίες δεν έχουν ακόμα ξεκαθαρίσει. Ακόμη είναι σκόπιμο να εξετάσουμε κάποια γεωμετρικά σχήματα που είναι δημιουργήματα μίας μόνο εικόνας της φαντασίας μας. Τέτοια σχήματα παρότι προκύπτουν με πολύ αυθαίρετο τρόπο, όταν εντάσσονται σε μία αξιωματικά θεμελιωμένη θεωρία έχουν ιδιότητες οι οποίες προκύπτουν από τα αξιώματα και είναι σύμφωνες με το αυθαίρετα δομημένο αυτό σχήμα και επαληθεύονται και διαισθητικά.

Η γνώση που θα κατακτήσουν ακολουθώντας το μονοπάτι αυτό είναι δεδομένη, αγνή και δεν θα επιδέχεται αμφισβήτηση αν καταφέρουν να επιμείνουν σε φορμαλισμούς και να μην παραπλανηθούν από εικασίες που πιθανόν να κάνουν σχετικά με το σχήμα.

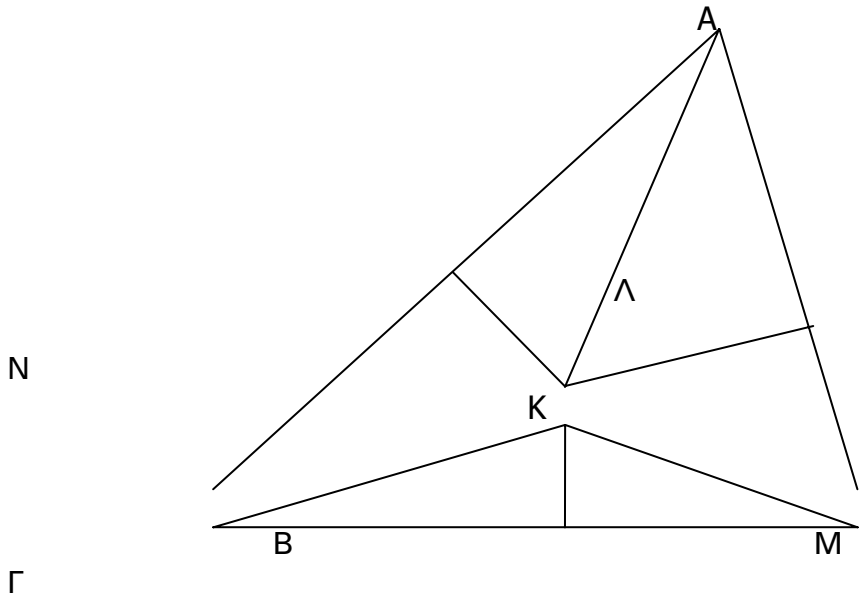
Ακόμα και τότε όμως ο κόσμος της γεωμετρίας δεν θα είναι πλήρως διαμορφωμένος και δεν θα έχουμε πλήρη πρόσβαση σε αυτόν. Τα σχήματα όσο και να έχουν βοηθήσει στη ανάπτυξη παρουσιάζουν και σημαντικά μειονεκτήματα. Ο κόσμος των ιδεών, που προέκυψαν από την νοητική αφαίρεση που επιβάλαμε στο διάγραμμα, δεν μπορεί να λειτουργήσει χρησιμοποιώντας ως οντολογικό οδηγό κανένα διάγραμμα ή σχήμα.

Η χρήση του σχήματος δεν επιτρέπει την δημιουργία προτάσεων που να αφορούν στο σύμπαν ή σε άπειρους χώρους. Οι γραμμές και τα σχήματα είναι πάντα πεπερασμένα και αυτό ισχύει και για το ίδιο το επίπεδο της εργασίας μας. Έτσι η έκταση της ισχύς της απόδειξης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τον μικρόκοσμο του σχήματος στο οποίο αναφέρεται.

Οι γραμμές είναι πραγματικά επ' άπειρο επεκτάσιμες, στο νοητικό επίπεδο, όμως παρόλα αυτά στο σχήμα είναι πάντα πεπερασμένες. Οι αποδείξεις αυτές ισχύουν παντού και είναι ορθές και πλήρεις όμως η ισχύς των εφαρμογών τους περιορίζεται μόνο σε τοπικό επίπεδο.

3.4.Τοξικό Διάγραμμα

Κάποιος θα μπορούσε εύκολα να κληθεί να αντιμετωπίσει, με χρήση ενός ακατάλληλου διαγράμματος ένα σημαντικό παράδοξο που μάλιστα αντίκειται τόσο στην αισθητική – οπτική μας αντίληψη όσο και στη λογική μας. Θα μπορούσε να αποδείξει πως όλα τα τρίγωνα του Ευκλείδειου Επιπέδου είναι ισοσκελή. Παραθέτοντας το παρακάτω διάγραμμα ενός τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ και θεωρώ σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας Α και της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ. Ακόμα από το σημείο Κ φέρνουμε τις ΚΛ και ΚΝ οι οποίες είναι κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τα τρίγωνα ΚΜΒ και ΚΜΓ είναι ίσα διότι οι γωνίες ΚΜΒ και ΚΜΓ είναι ορθές τα τμήματα ΜΒ και ΜΓ είναι ίσα αφού ΚΜ μεσοκάθετος και η ΚΜ είναι κοινή πλευρά των δύο τριγώνων. Άρα έχουμε πως ΚΒ=ΚΓ (1).



Σχήμα 3.4.1.

Ακολούθως συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΑΝΚ έχουμε πως και αυτά είναι ίσα αφού έχουν ΑΚ κοινή, τις γωνίες ΚΑΝ και ΚΑΛ ίσες αφού ΑΚ διχοτόμος και οι γωνίες ΑΝΚ και ΑΛΚ είναι ορθές από την κατασκευή τους. Άρα, έπεται ως συμπέρασμα πως ΑΛ=ΑΝ (2) και ΛΚ=ΚΝ (3).

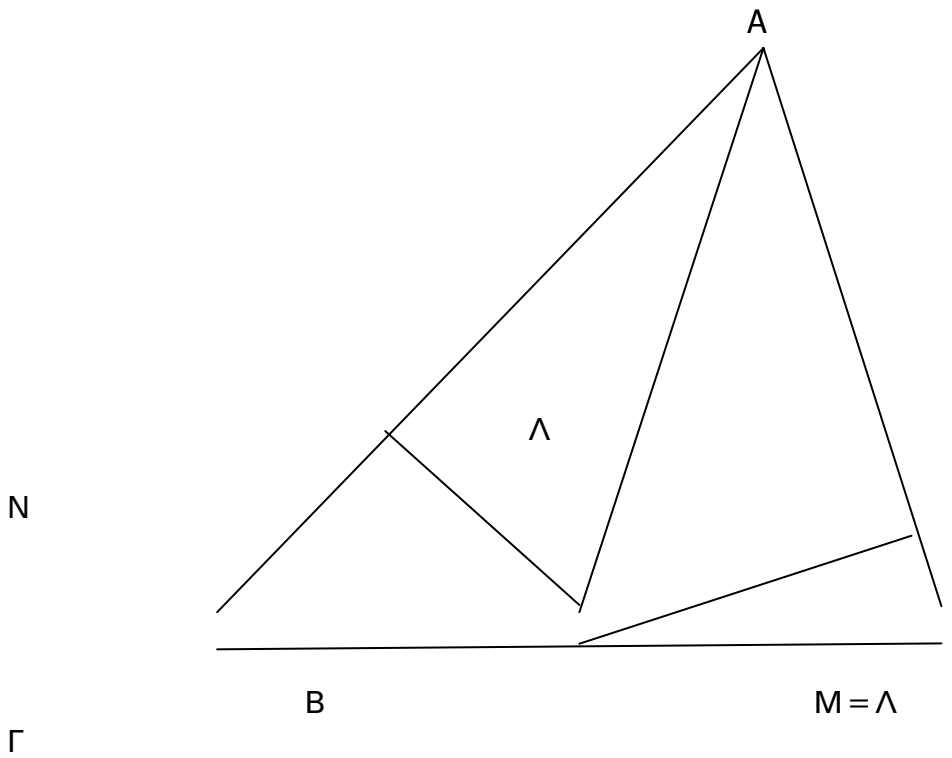
Τώρα όμως, τρίγωνα ΚΓΝ και ΚΒΓ είναι ίσα αφού έχουν ΚΓ=ΚΒ από σχέση (1) τις γωνίες ΚΝΓ και ΚΛΒ ίσες ως ορθές και ΚΝ=ΚΛ από την σχέση (3). Τα αποτελέσματα της απόδειξης είναι πως ΝΓ=ΒΛ (4).

Οι σχέσεις (2) και (4) μπορούν να προστεθούν κατά μέλη και τότε θα έχουμε:

ΑΛ+ΛΒ=ΑΝ+ΝΓ (5)

Η σχέση αυτή αποτυπώνει το τελικό αποτέλεσμα της πρακτικής μας και με βάση την οπτική μας αίσθηση συνοψίζεται στο αναπάντεχο αποτέλεσμα ΑΒ=ΑΓ (6). Το αποτέλεσμα αυτό έχει σαν συνέπεια πως όλα τα τρίγωνα του Ευκλείδειου επιπέδου είναι ισοσκελή, δηλαδή υπάρχει μόνο μία κλάση τριγώνων, τα ισοσκελή.

Όλες οι λογικομαθηματικές διαδικασίες που ακολουθήθηκαν στην παραπάνω απόδειξη είναι έγκυρες και επιτρεπτές. Παρόλα αυτά το αποτέλεσμα είναι μη αποδεκτό, άρα κάπου θα πρέπει να έχουμε κάνει κάποιο λάθος.

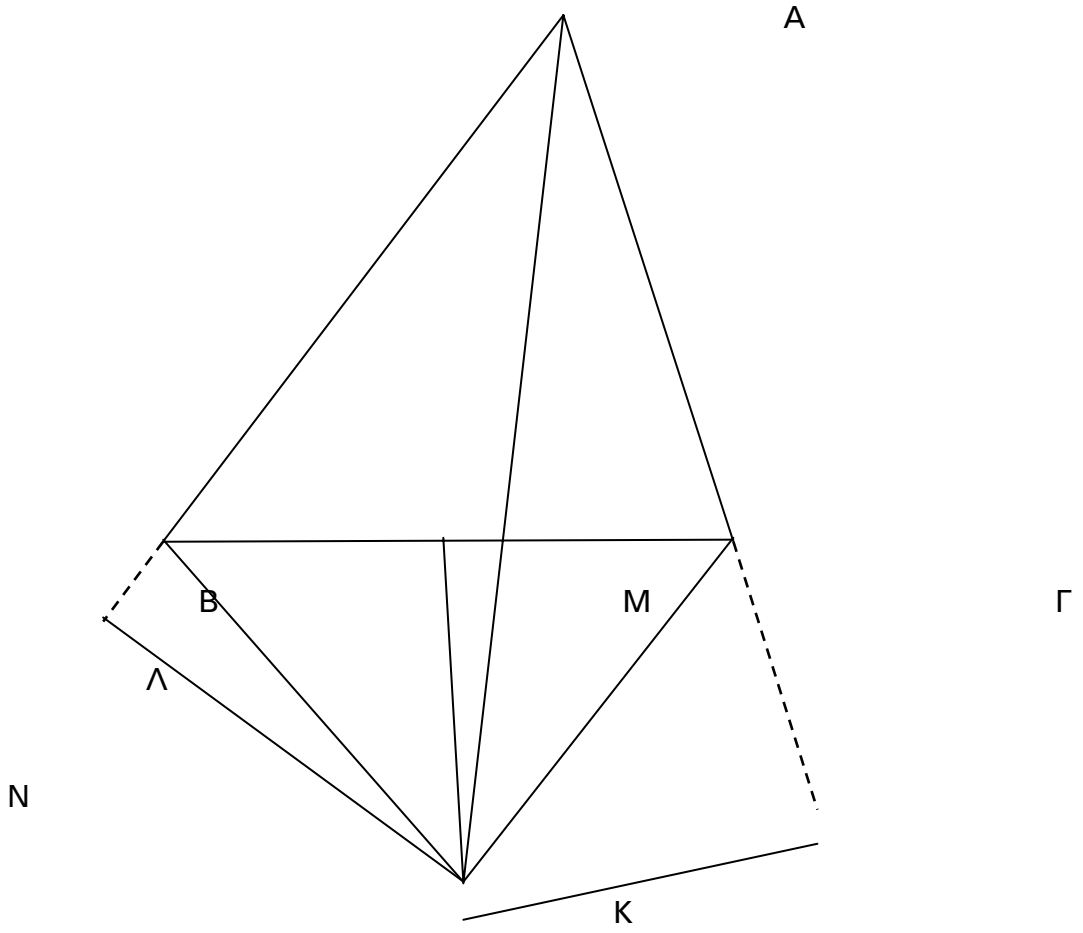


Σχήμα 3.4.2.

Μήπως, το γεγονός ότι βασιστήκαμε στο διάγραμμα είναι αυτό που μας οδήγησε σε αυτά τα απροσδόκητα αποτελέσματα. Θα μπορούσε το σχήμα να

είναι διαφορετικό και ως εκ τούτου να μας αποδώσει διαφορετικά αποτελέσματα αναφορικά με τα τρίγωνα. Θα μπορούσε για παράδειγμα η τομή της διχοτόμου με την μεσοκάθετο να βρίσκεται πάνω στην ΒΓ (βλέπε σχήμα). Τότε, πάλι το τρίγωνο θα ήταν ισοσκελές καθώς οι ισότητες που περιγράφονται στην απόδειξη εξακολουθούν να ισχύουν.

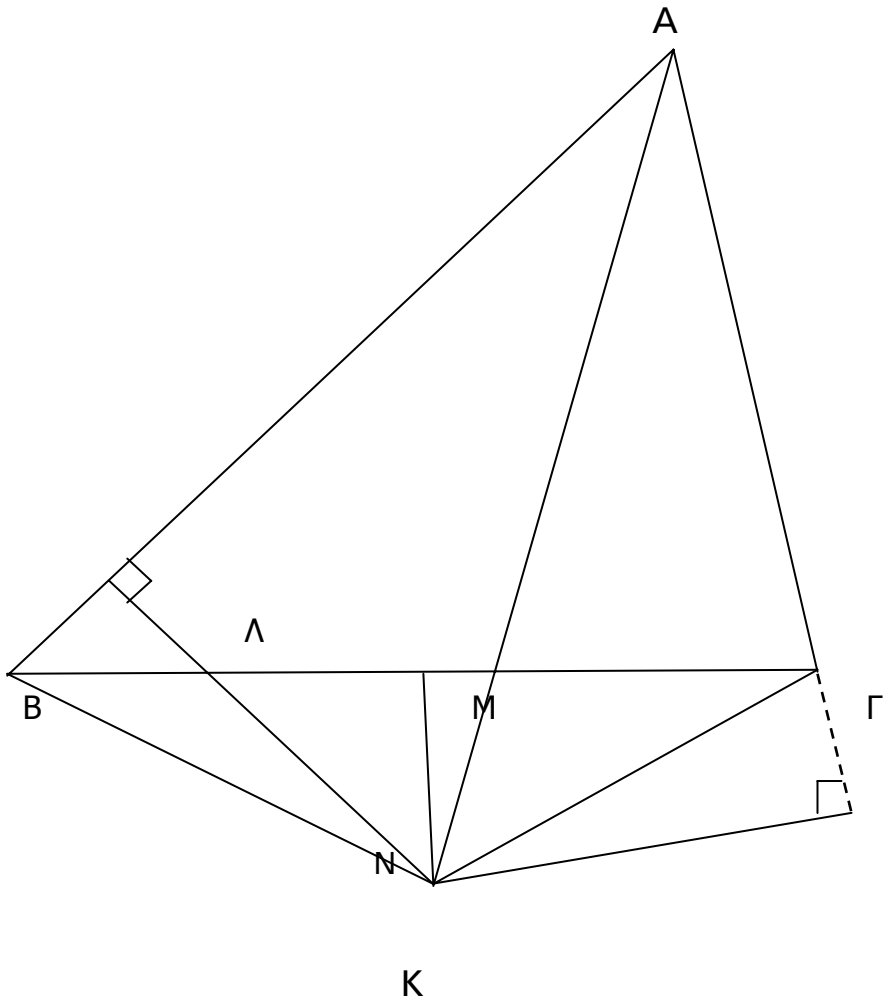
Συνεπώς, το πρόβλημα παραμένει και θα πρέπει να προσπαθήσουμε περισσότερο ώστε να βρούμε από πού πηγάζει η προβληματική της κατάστασης. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως η τομή των διχοτόμου και μεσοκαθέτου βρίσκεται εκτός του τριγώνου ΑΒΓ. Μία τέτοια περίπτωση φαντάζει πολλά υποσχόμενη αλλά όταν δημιουργήσουμε το σχήμα η ελπίδα καταρρέει (βλέπε επόμενο σχήμα).



Σχήμα 3.4.3.

Το μόνο που αλλάζει είναι πως αντί τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΝ και ΝΓ και ΑΛ και ΛΒ να προστίθενται ώστε να δημιουργηθούν οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ αφαιρούνται κατά μέλη.

Μήπως τελικά έκανε λάθος ο Ευκλείδης που είχε εμπιστοσύνη στα διαγράμματα. Η απάντηση είναι όχι. Τα διαγράμματα που έχουμε σχεδιάσει μέχρι τώρα είναι στο σύνολό τους ανακριβή. Υπάρχει όμως, αν συνεχίσουμε να αναζητούμε τις διαφορετικές περιπτώσεις, μία τέταρτη περίπτωση που τυχαίνει να είναι και η σωστή. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στο επόμενο διάγραμμα, το οποίο τοποθετεί το σημείο τομής έξω από το τρίγωνο και τα σημεία Λ, Ν το ένα εντός του ΑΒ και το άλλο εκτός του ΑΓ αντίστοιχα.
Αυτό είναι και το διάγραμμα που Η Ευκλείδεια Γεωμετρία χρειάζεται καθώς αποδεικνύει πως όλα τα τρίγωνα δεν είναι ισοσκελή και παράλληλα δεν είναι



Σχήμα 3.4.4.

αποπροσανατολιστικό, καθώς τοποθετεί τα πράγματα (σημεία) στην θέση τους. Το διάγραμμα αυτό, αντιστοιχεί στην γενική περίπτωση και άρα δεν είναι η χρήση των σχημάτων υπεύθυνη για το αποτέλεσμα αλλά η μη σωστή χρήση αυτών. Επιπλέον, θα πρέπει να τονιστεί πως όπως η μη ορθή χρήση, ή ορθότερα κατασκευή, του διαγράμματος μπόρεσε και σε κάποιο βαθμό μας παραπλάνησε, είναι η ίδια η χρήση του διαγράμματος που μας βοήθησε να υπερβούμε αυτή την πλάνη. Όλα τα τρίγωνα δεν είναι όμοια και μία απόδειξη για το γεγονός αυτό εμπεριέχει στοιχεία οπτικής προέλευσης από το σχήμα.

Για να δούμε την δυναμική που το σχήμα προσδίδει στην συνήθη Γεωμετρική πρακτική είναι λογικό να πιστεύουμε πως κάποιος με ελάχιστη άσκηση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία θα είναι σε θέση να καταλήξει σε τέτοια αποτελέσματα και με ελάχιστο κόπο. Τα άλλα διαγράμματα που προηγήθηκαν δεν είναι αληθή καθώς είναι αποτελέσματα κακού σχεδιασμού. Κάποιοι συχνά χρησιμοποιούν τέτοιου είδους παραδείγματα, που έχουν εσφαλμένη βάση ώστε να επιχειρήσουν μία επίθεση στη λειτουργικότητα των διαγραμμάτων στην λογική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ή της Γεωμετρίας συνολικότερα.

Κάποιος, λοιπόν που αποδέχεται ως αληθές ένα διάγραμμα που γνωρίζει πως είναι ανακριβές έχει ο ίδιος κάνει το λάθος. Το επιστημονικό λάθος, ανήκει και οφείλεται αποκλειστικά στον ίδιο και όχι στην χρήση των διαγραμμάτων. Θα μπορούσε μία διδακτική στρατηγική να εμφανίζει τέτοια παραδείγματα στους μαθητές, ώστε να γίνεται εμφανής η σημασία της σωστής δημιουργίας και χρήσης των διαγραμμάτων αλλά σε καμία περίπτωση δεν θα πρέπει τέτοια παραδείγματα να δρουν ως αποτρεπτικά στοιχεία για την χρήση των διαγραμμάτων από πλευράς των μαθητών. Παρότι, συχνά απαιτούνται προσεκτικοί και λεπτοί χειρισμοί, δεν μπορούμε να πούμε πως οι αιτιολογήσεις που βασίζονται σε αυτά εδραιώνονται σε λάθος βάση.

s4.Σχέση Εννοιών και Εικόνων

4.1.Ο Δυαδικός Κώδικας

Ο Paivio έχει αναπτύξει μέσα από ένα αριθμό ερευνών το ρόλο των νοητικών εικόνων και μάλιστα εστιάζοντας στο ρόλο τους κατά την διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας. Σε συμφωνία και με άλλους ερευνητές δίνει έμφαση στον συμβολικό χαρακτήρα των εννοιών και στη φύση των νοητικών εικόνων ενώ παράλληλα εντοπίζει ένα διαχωρισμό από τις λεκτικές προσεγγίσεις των αντίστοιχων εννοιών (Dual Code Theory).

Σύμφωνα με Paivio, νοητικές εικόνες είναι αναλογικοί κώδικες, ενώ η λεκτική αναπαράσταση των λέξεων είναι συμβολικοί κώδικες. Οι αναλογικοί κώδικες παρουσιάζουν τα φυσικά ερεθίσματα που παρατηρούμε στο περιβάλλον μας, όπως τα σχήματα στο χαρτί. Οι κωδικοί αυτοί είναι μια μορφή αναπαράστασης της γνώσης που διατηρεί τα κύρια χαρακτηριστικά της αντίληψης αυτού που παρατηρείται. Οι συμβολικοί κώδικες, από την άλλη πλευρά, είναι μια μορφή αναπαράστασης της γνώσης έχει επιλεγεί για να εκπροσωπήσει κάτι αυθαίρετα, σε αντίθεση με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

Η θεωρία αυτή θεωρεί πως ισχύει το αξίωμα πως οπτικές και λεκτικές πληροφορίες επεξεργάζονται με διαφορετικό τρόπο και ακολουθώντας διαφορετικές κανάλια έρχονται σε επαφή με την ανθρώπινη νόηση. Το ανθρώπινο μυαλό δημιουργεί χωριστές παραστάσεις για πληροφορίες των οποίων η επεξεργασία ανάγεται σε κάθε κανάλι. Και δύο οπτικοί και λεκτικοί κώδικες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρουσίαση των πληροφοριών και για την οργάνωση αυτών των εισερχόμενων πληροφοριών σε γνώσεις που μπορούν να εκτελεστούν, αποθηκευτούν, ανακτηθούν και οποιουδήποτε τύπου μετέπειτα χρήση.

Κάθε κανάλι υπόκειται επίσης σε περιορισμούς. Για παράδειγμα, οι άνθρωποι έχουν δυσκολία να παρακολουθούν ταυτόχρονα πολλαπλές ακουστικές ή οπτικές υποδείξεις, ανάλογα με την εμπειρία με την εργασία τους ή την εκ των προτέρων γνώση τους σχετικά με το γνωστικό αντικείμενο.

Η εμπειρική προσέγγιση, σχετικά με τα διαφορετικά σύνολα διαδικασιών μετασχηματισμού γεωμετρικών εννοιών, μπορεί να συνδεθεί με το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο οι λειτουργίες που αποδίδονται στις εικόνες και πιο συγκεκριμένα στη μάθηση των εννοιών και την μνημονική διαδικασία που αυτές επιβάλλουν, είναι πλήρως διαχωρισμένες από αυτές που αποδίδονται σε λεκτικές διαδικασίες. Χωρίς ένα τέτοιο διαχωρισμό είναι δύσκολο να διατηρήσουμε και τις εικονικές και τις λεκτικές διαδικασίες ως θεωρητικές κατασκευές.

Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να μιλήσει για δύο διαφορετικούς κώδικες ευρισκόμενους σε απόσταση και μη αλληλοεπηρεαζόμενους.

Ένας τέτοιος διαχωρισμός συνίσταται στο γεγονός πως οι εικόνες συνδέονται με τις αισθήσεις και με συγκεκριμένα προβλήματα, που απαιτούν συγκεκριμένες λύσεις, ενόσω οι λεκτικές προσεγγίσεις είναι αρκετά πιο ανεξάρτητες από αυτή την σκοπιά της συγκεκριμενοποίησης.

Εν κατακλείδι θα μπορούσαμε να πούμε πως οι εικόνες είναι πιο χρήσιμες όταν εργαζόμαστε σε συγκεκριμένο αντικείμενο από όταν εργαζόμαστε σε κάτι αφηρημένο και μη προσβάσιμο μέσω αισθήσεων. Εδώ κάποιος θα μπορούσε να αντιτείνει πως οι εικόνες τελικά οδηγούν σε μιας μορφής γενίκευση, αλλά σίγουρα όχι στην ευρύτητα που μπορεί να επιτύχει κανείς μέσω λεκτικών προσεγγίσεων σε συνδυασμό με τις εικόνες.

Ο Paivio έχει να επισημάνει ένα ακόμα λόγο που οι εικόνες και η εννοιολογική προσέγγιση πρέπει να θεωρούνται ξένα σώματα.

«Μία ακόμα θεωρητική πτυχή του διαχωρισμού αποτελεί το γεγονός ότι η εικόνα είναι προορισμένη για χωρικές πληροφορίες ενώ το λεκτικό - γλωσσικό σύστημα χαρακτηρίζεται περισσότερο από την χωρητικότητά του σε ακολουθητικές (sequential) διαδικασίες» (Paivio, 1970, σελ 386-387)

Η εικόνα δίνει πληροφορίες σχετικές με την οργάνωση και δομή του χώρου ενώ η λεκτική προσέγγιση θέλει να τονίσει την λογική ακολουθία των διαδικασιών.

Αποδεικτικά στοιχεία προερχόμενα από διάφορες έρευνες δείχνουν ότι η μνήμη αυξάνεται για κάποιες λεκτικές πληροφορίες, εάν ταυτόχρονα ένα σχετικό οπτικό αντικείμενο παρουσιάζεται, ή εάν ο μαθητής μπορεί να

φανταστεί μια οπτική εικόνα για να την ταιριάξει με τις προφορικές πληροφορίες. Ομοίως, οπτικές πληροφορίες μπορούν συχνά να ενισχυθούν όταν απαντώνται σε συνδυασμό με τις σχετικές προφορικές πληροφορίες, είτε σε πραγματικό κόσμο ή σε κάποιον κόσμο που αποτελεί δημιούργημα της φαντασίας (Anderson και Bower, 1973). Έρευνα σχετικά με τις προτάσεις όταν αυτές συνδυάζονται με μια, φανταστική ή πραγματική εικόνα, έδειξε αυξημένη ενεργοποίηση του εγκεφάλου για την επεξεργασία αφηρημένων λεκτικών διατυπώσεων όταν αυτές δεν είναι εύκολο να αντιστοιχιστούν σε μια εικόνα.

Ο Paivio διαπίστωσε ότι δοθείσης μίας ταχείας ακολουθίας εικόνων, καθώς και αντίστοιχα μίας ταχείας ακολουθίας λέξεων τα αποτελέσματα ήταν καλύτερα όταν μιλούσαμε για εικόνες όταν ζητούσαμε την ανάκληση τους με τυχαία σειρά. Αντιθέτως όταν ζητείται να γίνει η ανάκληση με την σειρά εμφάνισης τα αποτελέσματα είναι καλύτερα για τις λεκτικές διατυπώσεις. Τα αποτελέσματα αυτά υποστηρίζουν την υπόθεση του Paivio ότι οι λεκτικές πληροφορίες επεξεργάζονται με διαφορετικό τρόπο από ό, τι οι οπτικές πληροφορίες (Paivio, 1969).

4.2.Προτασιακή Θεωρία

Η προηγούμενη θεωρία εξετάζεται με επιφύλαξη από πολλούς ερευνητές. Πολλοί έχουν με την σειρά τους αντιτείνει πως οι εικόνες όπως και οι λεκτικές προσεγγίσεις είναι κωδικοποιημένες σε ένα αφηρημένο σχέδιο προτάσεων (propositions). Ο Anderson (1978) περιγράφει τα τρία χαρακτηριστικά που καθορίζουν μία πρόταση:

Α) είναι αφηρημένη

Β) έχει μία αξία που συνίσταται στην αλήθεια που εμπεριέχει

Γ) έχει τους δικούς της κανόνες σύνταξης.

Μία πρόταση δεν είναι μία απλή πρόταση με την συντακτική έννοια του όρου. Η αίσθηση του αφηρημένου είναι συνδεδεμένη με μία έννοια ανελαστικότητας όταν αυτή επιχειρηθεί να παραφραστεί. Αυτό έχει ως επακόλουθο πως διαφορές στην προφορά ή διαφορετικές μεταφράσεις από γλώσσα σε γλώσσα θα αποδίδουν την ίδια απεικόνιση της προτάσεως. Η πρόταση ανεξαρτητοποιείται από μη λογικές διεργασίες στις οποίες τυχόν να υποβληθεί. Οι προτάσεις θεωρούνται ως η γέφυρα που ενώνει τις λεκτικές με τις εικονικές προσεγγίσεις με ομαλό και ακριβή τρόπο.

Οι υποστηρικτές της θεωρίας αυτής πιστεύουν πως η θεωρία του δυαδικού κώδικα αδυνατεί να εξηγήσει τις νοητικές διαδικασίες που συνδέονται με τις νοητικές εικόνες και την λεκτική μνήμη. Οι άνθρωποι μπορούν να περιγράψουν εικόνες ή και να δημιουργήσουν εικόνες ώστε να εκφράσουν λεκτικά δοσμένες ιδέες. Ένα απτό παράδειγμα είναι και η τέχνη της ζωγραφικής. Ένας κώδικας, λοιπόν, προτάσεων θα εξυπηρετούσε το σημαντικό ρόλο της αναπαράστασης του ίδιου του νοήματος.

Η εισαγωγή της Θεωρία της Προτασιακής Αναπαράστασης από τον Dr. Zenon Pylyshyn ο οποίος την επινόησε το 1973. Ο ίδιος περιέγραψε την θεωρία του ως ένα φαινόμενο το οποίο συνοδεύει την διαδικασία της εικονοποίησης, αλλά δεν αποτελεί κομμάτι αυτής. Οι νοητικές εικόνες δεν μπορούν να μας δώσουν την δομή της λειτουργίας της νόησης. Το μόνο που αυτές αποδεικνύουν είναι πως κάτι όντως συμβαίνει.

Η βασική ιδέα της Προτασιακής Θεωρίας Αναπαραστάσεων είναι πως οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων αναπαρίστανται μέσω συμβολισμών και όχι από χωρικές νοητικές εικόνες των σχέσεων αυτών. Για παράδειγμα η μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από την ακολουθία: κάθετος [ευθεία, μέσο (ευθυγράμμου τμήματος)]. Ο όρος πρόταση είναι προέλευσης του χώρου της λογικής και υποκρύπτει την έννοια της ελάχιστης ποσότητας πληροφοριών και μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής.

Η θεωρία του Stephen Kosslyn αντιτίθεται στην Προτασιακή Προσέγγιση του Pylyshyn υπογραμμίζοντας πως οι εικόνες δεν αναπαριστούνται από προτάσεις. Ο ίδιος προσπάθησε να εντοπίσει αποδείξεις για την ύπαρξη ενός συστήματος χωρικών αναπαραστάσεων το οποίο κατασκευάζει νοητικές αναλογίες σε τρισδυάστα μοντέλα. Ο πρωταρχικός ρόλος αυτού του συστήματος είναι η οργάνωση των χωρικών πληροφοριών σε μία γενική μορφή η οποία γίνεται προσιτή και με αντιληπτικούς (αισθητικούς) μηχανισμούς αλλά και με λεκτικούς μηχανισμούς. Παράλληλα παρέχει συνεργαζόμενα πλαίσια ώστε να περιγράφει την τοποθεσία των αντικειμένων και έτσι να δημιουργεί ένα μοντέλο αντίληψης του κόσμου και ταυτόχρονα και ένα περιγραφικό μοντέλο αυτού. Το πλεονέκτημα μίας αναπαράστασης που συνδυάζει δεδομένα προερχόμενα από περισσότερα από ένα πλαίσια, είναι πως μπορεί να είναι ευθέως ανάλογη της δομής του πραγματικού χώρου και συλλαμβάνει όλες τις πιθανές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων που κωδικοποιούνται στον εν λόγω χώρο που η αναπαράσταση δημιουργεί.

Η ύπαρξη των σχηματικών εννοιών, σε αντίθεση με την ύπαρξη μόνο των εννοιών αποκομμένων από τα σχήματα και αντίστροφα, έρχεται να δημιουργήσει ένα πολύ ισχυρό επιχείρημα περί της ανάγκης ύπαρξης ενός κεντρικού, ενοποιημένου, σχετικά αυτόνομου νοητικού επιπέδου το οποίο δεν εξυπηρετεί μόνο την επικοινωνία μεταξύ λεκτικών και εικονικών αναπαραστάσεων-πληροφοριών. Οι προεκτάσεις της ύπαρξης ενός τέτοιου επιπέδου δημιουργούν τις προϋποθέσεις-πιθανότητες ώστε οι δημιουργίες της νόησης να καταλαμβάνουν αυτόματα και εννοιολογικές ιδιότητες όπως αυτές

που κατέχουν τα γεωμετρικά αντικείμενα (ιδανικότητα, γενικότητα κτλ) αλλά και αισθητική προέλευσης (οπτικής στο παράδειγμα της Γεωμετρίας) ιδιότητες (πχ χωρικές).

Το τι μπορούμε μετά να πούμε για τα πρωταρχικά συστατικά της σχετικιστικής χωρικής αναπαράστασης είναι πως ο διαχωρισμός ανάμεσα στον εξωτερικό κόσμο και την εσωτερική μας οπτική (εσωτερική αναπαράσταση) υπεράνω αυτού είναι απαραίτητος. Ακολούθως, είναι αρκετά προσοδοφόρο να εξερευνήσουμε τις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσά τους πέρα από μία διαδικαστικής λογικής οπτική γωνία. Το σημαντικό δηλαδή είναι οι ίδιες οι σχέσεις και όχι ο τρόπος - διαδικασία μετάβασης από τον ένα χώρο στον άλλο ή από την μία σχέση στην άλλη.

Μία κλασσική προσέγγιση θεωρεί ως δεδομένο πως μία πολύπλοκη εσωτερική αναπαράσταση του νου κατασκευάζεται μέσω μίας σειράς συγκεκριμένων ερεθισμάτων (οπτικών) που υποπίπτουν στην αντίληψή μας και συγκεκριμένα οπτικά ερεθίσματα προκαλούν συγκεκριμένες εσωτερικές αντιδράσεις. Με άλλα λόγια, οπτικά στοιχεία που συναντάμε μέσα στο περιβάλλον μας δρουν ως εξωτερικές μονάδες αποθήκευσης γνώσης. Κάθε εξωτερική αναπαράσταση ή ακόμα και συμβολισμός αποκτά νόημα το οποίο και που αποδίδει σε αυτόν η προσωπική εμπειρία. Το νόημα αυτό δεν μπορεί να διαχωριστεί από τον λόγο που αρχικά δημιουργήθηκε το σύμβολο αλλά και την οπτική του υποκειμένου. Για να φτάσουμε στο χειρισμό ενός σχήματος, μία χωρική αναπαράσταση κρίνεται απαραίτητη. Μία τέτοια αναπαράσταση θα πρέπει να ελέγχεται από τον ορισμό αυστηρά αλλά και ταυτόχρονα μη αφήνοντας τον ορισμό να περιορίσει τις θετικές πτυχές της ώστε να γίνει αντιπαραγωγική. Μία τέτοια προσέγγιση του σχήματος θα ήταν ανέφικτη αν υπήρχαν μόνο δύο διακεκριμένοι διαδικαστικοί κώδικες. Αυτό αποτελεί ένα σαφές χτύπημα στην θεωρία του δυαδικού κώδικα. Ο Fishbein αναφέρει χαρακτηριστικά:

«Όταν λύνουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα χειριζόμαστε τα γεωμετρικά σχήματα σαν να είναι ομογενείς νοητικές οντότητες και όχι σαν συνδυασμό δύο κατηγοριών ετερογενών νοητικών κατασκευών». (Fishbein,1993,σελ153)

Σε πολλές περιπτώσεις κατά την διάρκεια γεωμετρικής ενασχόλησης το σχήμα φαίνεται να διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο σε σχέση με τους αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς. Το σχήμα κινητοποιεί την φαντασία και την σκέψη. Υπάρχουν περιπτώσεις που αποκολλάται από τον εαυτό του εξαιτίας των σχηματικών κανόνων και οι αυστηρές διατυπώσεις δεν το ελέγχουν πια.

Εν συντομία θα μπορούσαμε να καταλήξουμε πως με βάση τα σημερινά δεδομένα είναι αδύνατο να υποστηρίξουμε την υπεροχή μίας εκ των δύο θεωριών. Οι δύο αυτές θεωρίες παρουσιάζουν σημαντικά μειονεκτήματα στο να ερμηνεύσουν πλήρως την αποθήκευση και την αναπτυσσόμενη δυναμική των λεκτικών και οπτικών αναπαραστάσεων στο σύνολό τους.

5.Γνωστικές Θεωρίες

5.1.Piaget και Inhelder

Ένα πραγματικό και βασικό πρόβλημα που θα κληθεί κάποιος να επιλύσει πριν επιχειρήσει να μελετήσει την δόμηση της έννοιας του χώρου είναι να αναρωτηθεί αν υπάρχει μόνο μία έννοια που να αναφέρεται στο χώρο. Υπάρχουν πολλοί εννοιολογικοί προσδιορισμοί αυτού που αποκαλείται χώρος από διάφορους επιστημονικούς κλάδους και στις διάφορες σχετικές με αυτόν, θεωρίες.

Κάποιοι από τους χώρους αυτούς είναι α) ο αντιληπτικός χώρος β) αναπαραστασιακός χώρος και γ) ο αξιωματικός. Ο Piaget αναφέρει και άλλους χώρους οι οποίοι όμως δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της παρούσης διπλωματικής.

Α) Ο αντιληπτικός είναι ο χώρος που γνωρίζουμε από το συντονισμό των αισθήσεων μας και των κινήσεων μας σε σχέση με τον φυσικό κόσμο που μας περιβάλει και δομείται στο αισθητηριοκινητικό στάδιο (έως τα δύο μας χρόνια)

Β) Αναπαραστατικός καλείται ο χώρος που δομείται μέσω της νοητικής εικόνας. Ο χώρος αυτό αποτελεί αναπαράσταση του φυσικού κόσμου που έχουμε ήδη αντιληφθεί και οργανώσει μέσα από τις αισθήσεις και τις κινήσεις μας. Ο χώρος αυτός ονομάζεται και ενορατικός και εικονικός.

Γ) Αξιωματικός ονομάζεται ο χώρος που περιέγραψε η σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση α οποία, μέσα από τον επαγωγικό συλλογισμό και τις διαδικασίες τις τυπικής λογικής, καταλήγει στον ορισμό και τη μελέτη ενός νοητού χώρου, τον οποίο ο άνθρωπος δεν μπορεί να αντιληφθεί ποτέ (κατά τον Piaget) και με τον οποίο δεν μπορεί να πειραματιστεί.

Οι δύο αυτοί ερευνητές προσπάθησαν μετά την διατύπωση τον παραπάνω θέσεων του Piaget, μέσω μελετών να εντοπίσουν τους διαύλους επικοινωνίας και τις γενικότερες σχέσεις μεταξύ των εικόνων και των διαδικασιών. (Piaget και Inhelder, 1966). Θα μπορούσαμε να πούμε πως

ουσιαστικά οι μελέτες τους έψαχναν τις λογικές δομές που αναπτύσσονται ανάμεσα στις εικόνες και τις διαδικασίες. Η οπτική τους θέλει τις εικόνες και τις έννοιες να ανήκουν σε δύο διαφορετικά και ξένα σύνολα. Άρα θα έπρεπε να είναι θιασώτες της Θεωρίας του Δυαδικού Κώδικα. Παρόλα αυτά αναγνωρίζουν πως υπάρχει μία προφανής σχέση μεταξύ των δύο. Σε αυτή τη σχέση οι διαδικασίες ή χειρισμοί κατέχουν ιεραρχικά ανώτερο ρόλο από τις εικόνες. Ο ρόλος των χειρισμών-διαδικασιών αναπτύσσεται βαθμιαία με το χρόνο και παράλληλα μειώνει την επίδραση των εικόνων.

Η γεωμετρία είναι για αυτούς μία ιδιαίτερη περίπτωση:

«…στην ειδική περίπτωση των γεωμετρικών χειρισμών - διαδικασιών, ο ρόλος των οποίων είναι να περιγράψουν τα χωρικά σχήματα και τους μετασχηματισμούς τους, υπάρχει μία ομοιογένεια μεταξύ του συμβολιζόμενου, το οποίο και αποτελείται από χωρικές διαδικασίες και του συμβόλου στο οποίο αντιστοιχεί και είναι από την φύση του αναφορά στο χώρο: αυτό ακολουθείται από την προνομιούχα κατάσταση της γεωμετρικής διαίσθησης, η διπλή φύση της οποίας ταυτόχρονα μέσω διαδικασιών-χειρισμών αλλά και φαντασίας, φτάνει σε μία αυθόρμητη σύνθεση περισσότερο από οπουδήποτε αλλού…» (Piaget και Inhelder, 1966, σελ 394-395)

Εμφανίζεται στο σημείο αυτό μία σαφής ένδειξη πως οι δύο ερευνητές είχαν εντοπίσει την σύγχυση που αναπτύσσεται ανάμεσα στις εννοιολογικές και τις σχηματικές πλευρές των γεωμετρικών αντικειμένων. Θα λέγαμε πως η κατάληξη που είχε η έρευνά τους, αν και δεν έχει σαφή διατύπωση, προσεγγίζει αυτό που αργότερα ο Fishbein (1993) ονόμασε σχηματικές έννοιες (figural concepts).

Οι Piaget και Inhelder συνειδητοποίησαν πως υπάρχουν δύο λόγοι που η φυσική γλώσσα (ως ένα συλλεκτικό σημειωτικό σύστημα) πρέπει να συνδυάζεται με ένα σύστημα νοητών συμβόλων που αναφέρονται στη σφαίρα της φαντασίας και της νόησης. Ο πρώτος είναι πως καθώς τα σύμβολα της γλώσσας είναι κοινωνικά κατασκευάσματα και ταυτόχρονα αφηρημένα, ένας οποιοσδήποτε άνθρωπος κάνει διακριτές επιλογές αναφορικά με τις λέξεις που κάποιος χρησιμοποιεί σε αντιστοιχία με το δικό του σύστημα εικόνων. Ο άλλος λόγος είναι πως η εικόνα είναι και αυτή από μόνη της ένα σύμβολο, στην

λογική ότι συνιστά ένα σημειωτικό εργαλείο, απαραίτητο ώστε να γίνει ανάκληση και να εισέλθουμε σε διαδικασίες σκέψης ως προς το τι έχει υποπέσει στην αντίληψη μας (Piaget και Inhelder, 1971).

Σε γενικές γραμμές όπως συγκεκριμένα αναφέρουν οι Piaget και Inhelder, το εξατομικευμένο σύστημα εικόνων, στο εσωτερικό του οποίου ευρίσκονται σε τυχαίο συνδυασμό κοινωνικές και αφηρημένες σημειωτικές αναπαραστάσεις, είναι απαραίτητο για την λειτουργική συνιστώσα της σκέψης. Όταν όμως ένα τέτοιο σύστημα συσταθεί, τα πρότυπα που αποτυπώνονται στο εσωτερικό του επηρεάζουν σε κρίσιμο βαθμό την αναγνώριση των εικόνων και λειτουργώντας ανεξάρτητα και ξέχωρα από τις έννοιες μπορούν από μόνα τους να αποδειχθούν εξαιρετικά εργαλεία (Hasegawa, 1997).

Για παράδειγμα ένας ρόμβος συχνά δεν αναγνωρίζεται από τους μαθητές ως παραλληλόγραμμο γιατί το παραλληλόγραμμο δεν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Αυτή η αδυναμία συμφωνίας ανάμεσα στις νοητικές εικόνες και τα σχετικά αντικείμενα από την μία μεριά και τους μαθηματικούς ορισμούς των γεωμετρικών εννοιών αναγνωρίζεται ως το χαρακτηριστικό που ξεχωρίζει τις σημειωτικές αναπαραστάσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού κατά Zykova (1969) και τις σχηματοποιημένες έννοιες από τους εννοιολογικούς ορισμούς κατά Vinner (1983) και Hershkowitz (1990). Οι μαθητές δημιουργούν αναπόφευκτα και εξαιτίας πολλών αιτιών αλλά και συναντώντας κατάλληλες αφορμές πρότυπα. Κρατώντας αυτό ως δεδομένο, θα πρέπει η διδασκαλία να ακολουθά διαδρομές, που με βάση την θεωρία των σταδίων του van Hiele, θα ωθεί τους μαθητές να περάσουν στο επόμενο στάδιο (Hasegawa, 1997).

5.2.Επίπεδα Σκέψης van Hiele

Ένα πλαίσιο που περιγράφει την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης και ειδικότερα της παραγωγής μαθηματικών αποτελεσμάτων και γεωμετρικών εννοιών και έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς έρευνας είναι το Van Hiele μοντέλο της γεωμετρικής σκέψη (Van Hiele 1986). Τα επίπεδα αυτά συνιστούν μία μέθοδο για την προσέγγιση των εννοιών και την ανάπτυξή τους με βάση τα επίπεδα της σκέψης κοινώς γνωστό ως «τα επίπεδα Van Hiele», αρχικά με στόχο την διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας που αργότερα εντοπίστηκε πως μπορεί να έχει αρκετά ευρύτερες εφαρμογές από αυτή της γεωμετρίας.

Στο Van Hiele μοντέλο υπάρχουν τουλάχιστον πέντε επίπεδα παρόλο που υπάρχουν μελετητές που μπορούν να μιλάνε για ως και οχτώ διακριτά επίπεδα. Η δομή του μοντέλου van Hiele έχει κάποια ομοιότητα με το πλαίσιο που προτείνεται από την Μαθηματική Ένωση του Ηνωμένου Βασιλείου το 1923, το οποίο αναγνώρισε τρεις φάσεις κατά τη διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας. Τα τρία αυτά στάδια ήταν, εν συντομία (Jones, K. 1998):

Το στάδιο Α: *περιλαμβάνει διαισθητική, αφαιρετική πειραματική εργασία*

Το στάδιο Β: *συνεπάγεται περιορισμένη χρήση επίσημου συμβολισμού και αφαιρετικής συλλογιστική εισάγεται, αλλά διαίσθηση και επαγωγή χρησιμοποιούνται για τη γεφύρωση των λογικών δυσκολιών*.

Το στάδιο Γ: *Το έργο σε αυτό το στάδιο είναι απόλυτα ακριβές.*

Με μία παρόμοια συλλογιστική οι Kuzniak, Gagatsis, Ludwig, Marchini (2007) αναγνωρίζουν τρία στάδια ανάπτυξης της Γεωμετρικής ικανότητας των μαθητών ή αλλιώς τρείς διαφορετικές προσεγγίσεις της Γεωμετρίας σε σχέση με την γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Έτσι μιλάνε για τρεις ουσιαστικά Γεωμετρίες:

(α) Η Γεωμετρία Ι ή Φυσική Γεωμετρία, (Natural Geometry) στην οποία χρησιμοποιείται ως πηγή επικύρωσης των επιχειρημάτων των μαθητών η διαίσθηση και η αισθητική πραγματικότητα που αναπόφευκτα θα οδηγήσει σε μετρήσεις ή σε κατασκευές που θα βασίζονται σε πραγματικά εργαλεία, όπως

ο χάρακας, ο διαβήτης και πολλά άλλα. Μία τέτοια Γεωμετρία έχει πολλές αντιστοιχίες με το είδος της γεωμετρίας που διδάσκεται στα Δημοτικά και Γυμνάσια της Ελλάδος.

(β) Η Γεωμετρία ΙΙ ή Φυσική και Αξιωματική (Natural and axiomatic Geometry) η οποία χρησιμοποιεί υποθετικούς και παραγωγικούς συλλογισμούς και νόμους που έχουν προκύψει από ένα σύνολο αξιωμάτων όσο το δυνατό πλησιέστερο προς την αισθητική πραγματικότητα. Μία τέτοια γεωμετρία είναι προφανώς μία ικανοποιητική της Γεωμετρίας που διδάσκεται με βάση το Αναλυτικό πρόγραμμα στις τάξεις του Ελληνικού Λυκείου.

(γ) Η Γεωμετρία ΙΙΙ ή Αυστηρή Αξιωματική Θεωρία (formal and axiomatic geometry) η Γεωμετρία αυτή ξεφεύγει από τα πλαίσια των μαθημάτων του Αναλυτικού Προγράμματος της Πρωτοβάθμιας αλλά και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Προφανώς τέτοια είδη Γεωμετρίας απαντώνται στα Προπτυχιακά μαθήματα Μαθηματικών Σχολών.

Με ένα παρόμοιο τρόπο και μία ανάλογη συλλογιστική εισάγεται η αναγκαιότητα της διαίσθησης και της επαγωγής ως μέσα που καλούνται να χρησιμοποιηθούν για τη γεφύρωση όποιων λογικών δυσκολιών ανακύψουν στην γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Οι Kuzniak, Gagatsis, Ludwig, Marchini (2007) εντοπίζουν την δυσκολία μετάβασης από την Γεωμετρία Ι στην Γεωμετρία ΙΙ.

Τα επίπεδα Van Hiele προσεγγίζουν και παράλληλα ενισχύουν την ιδέα πως τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών πρέπει αρχικά να είναι επικεντρωμένα στην χρήση της διαίσθησης και στην απλής μορφής αιτιολόγηση (Van Hiele, 1986).

Ο μαθητής προχωρά στη συνέχεια, μέσω μιας σειράς «επιπέδων», που χαρακτηρίζεται από αύξηση της γενικότητας της σκέψης αλλά και των εφαρμογών αυτής. Ο τελικός σκοπός είναι να προσεγγίζει ένα ένα τα στάδια που αναφέρονται σε μια διαδικασία σκέψης όλο και πιο ανεξάρτητη και συνεχώς πιο αφηρημένη.

Μπορούμε να δώσουμε την ακόλουθη περιγραφή των διαφόρων επιπέδων, με βάση την μετάφραση του έργου του ίδιου του Van Hiele (Van Hiele, 1986):

Επίπεδο 0: Στο επίπεδο αυτό, ο μαθητής προσδιορίζει, ονόματα, συγκρίνει και λειτουργεί με γεωμετρικά ποσά. Είναι σαφές πως με βάση τέτοιες ενέργειες ο μαθητής ανακαλύπτει πρωταρχικές έννοιες τις οποίες καθιστά διακριτές και τις ταυτίζει με ονομασίες. Η ονοματοδοσία είναι αυτή που λειτουργεί ως οντολογικό υπόβαθρο των εννοιών.

Επίπεδο 1: Ο διδασκόμενος αναλύει στοιχεία από την άποψη των συστατικών τους και των σχέσεών τους ενώ παράλληλα ανακαλύπτει σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών και ανακαλύπτει ιδιότητες και κανόνες. Η πιο αναπτυγμένη θεώρηση αυτή διευρύνει τις έννοιες και τις εφαρμογές του.

Επίπεδο 2: Ο μαθητής με βάση την λογική του εσωτερικοποιεί σχέσεις μεταξύ προηγουμένων ανακαλύψεων με αναφορά σε ιδιότητες και κανόνες δίνοντας ή απλά ακολουθώντας άτυπα μη φορμαλιστικά επιχειρήματα.

Επίπεδο 3: Ο σπουδαστής αποδεικνύει θεωρήματα αφαιρετικά και καθιερώνει εσωτερικές σχέσεις μεταξύ των δικτύων των θεωρημάτων.

Επίπεδο 4: Ο μαθητής θεσπίζει θεωρήματα σε διαφορετικά συστήματα και έπειτα σε γνωστικό επίπεδο αναλύει και συγκρίνει αυτά τα αποτελέσματα και δημιουργηθέντα συστήματα.

Σύμφωνα με την θεωρία των σταδίων του Van Hiele, κάθε στάδιο έχει την δική του γλώσσα, όπως αναγνωρίζουν και οι Burger και Shaughnassy, (1986). Δεν μπορούμε παρόλα αυτά να διδάξουμε μόνο τον ορισμό μίας Γεωμετρικής έννοιας ξεκομμένο από την εικόνα αυτής της έννοιας διότι κάτι τέτοιο θα είχε αρνητικό αντίκτυπο στην ετυμηγορία μας σχετικά με γεωμετρικές εικόνες. (Hasegawa, 1997). Όπως έχει άλλωστε τονίσει και ο Vygotsky, η άμεση διδασκαλία εννοιών είναι αδύνατη όσο και μη προσοδοφόρα. Κάτι τέτοιο θα συντελούσε στην ύπαρξη κενών νοήματος βερμπαλισμών (Vygotsky, 1962).

Το Van Hiele μοντέλο έχει υποβληθεί σε κάποια κρίσιμη συζήτηση συμπεριλαμβανομένων ερωτήσεων όπως για παράδειγμα το αν η διακριτότητα των επιπέδων είναι δεδομένη και ποια είναι η ακριβής φύση των επιπέδων. Η διακριτότητα των σταδίων δεν μπορεί να είναι δεδομένη καθώς αυτό θα προϋπόθετε μία γραμμικού τύπου εξέλιξη της κατανόησης των

μαθητών. Το Van Hiele μοντέλο είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την αξιολόγηση των διδακτικών στόχων.

Επιπροσθέτως θα πρέπει να τονιστεί και να επισημανθεί πως ο καθηγητής και ο μαθητής που εμπλέκονται στην διαδικασία της μάθησης λειτουργούν αν όχι πάντα τότε τουλάχιστον κατά κανόνα σε διαφορετικά επίπεδα σκέψης δημιουργώντας έτσι ένα κενό που πρέπει να καλυφθεί (Senk, 1985, 1989) ή πολύ περισσότερο είναι δύσκολο να εντοπιστεί.

5.3.Η Άποψη του Duval

Η εξέταση των δυσκολιών των μαθητών με στόχο να καθοριστεί ο τρόπος μέσω του οποίου η κατανόηση της γεωμετρίας είναι δυνατή και έτσι μπορούμε να καθορίσουμε την προέλευση της κατανόησης των εννοιών. Το χαρακτηριστικό στοιχείο μίας τέτοιας προσέγγισης είναι η αναζήτηση κατά πρώτο λόγο ο καθορισμός των συναρτήσεων που υπογραμμίζουν την ποικιλία των μαθηματικών διαδικασιών.

Αποτελείται σύμφωνα με τον Duval από το να σκεφτεί κανείς δύο αρκετά διαφορετικές, αλλά αλληλοσυμπληρούμενες ερωτήσεις:

1. Τι γνωστικά συστήματα απαιτούνται και κινητοποιούνται για να δώσουν δίοδο στα μαθηματικά αντικείμενα και ταυτόχρονα να επηρεάζουν και ελέγχουν τους πολλαπλούς μετασχηματισμούς διαφόρων τύπων οι οποίοι συνιστούν τις μαθηματικές διαδικασίες;

2. Είναι αυτά τα συστήματα κοινά για όλες τις διαδικασίες γνώσης ή αντιθέτως δεν είμαστε σίγουροι για αυτό. Ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε μαθηματική δραστηριότητα μήπως αυτό δεν ισχύει, για αυτό το λόγο και δεν απαιτούν κατασκευή νέας γνώσης αλλά για μία ανάπτυξη αυτών των συγκεκριμένων συστημάτων.

Μόνο αν καταφέρουμε να συλλέξουμε τα δεδομένα αναφορικά με αυτές τις δύο ερωτήσεις μπορούμε να ελπίζουμε πως θα καταλάβουμε τις πραγματικές αιτίες των δυσκολιών που ανακύπτουν κατά την διδασκαλία των μαθηματικών και της γεωμετρίας ιδιαίτερα.

Ο Duval δηλώνει πως τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι απευθείας προσβάσιμα στην αντίληψη ως ας πούμε αληθινά ή φυσικά αντικείμενα. Αυτό για τον Duval σημαίνει πως διαφορετικές σημειωτικές αναπαραστάσεις ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι απολύτως απαραίτητες για την επικοινωνία αλλά και την ίδια την πρακτική. Παρόλα αυτά τονίζει πως είναι τα ίδια τα αντικείμενα που είναι το επίκεντρο του ενδιαφέροντος της μελέτης και όχι οι σημειωτικές τους αναπαραστάσεις, οπότε ο σαφής και ρητός διαχωρισμός ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και το ίδιο το αντικείμενο είναι σημαντικότατο κομμάτι της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και ως εκ τούτου θα

πρέπει να αποτελεί και σημαντικό κομμάτι της διδασκαλίας τους (Duval, 1993).

Οι σημειωτικές αναπαραστάσεις και ο τρόπος ή οι λειτουργίες που καθιστούν εφικτή την δημιουργία τους, είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τον τρόπο που γίνεται η δημιουργία της εννοιολογικής κατανόησης του αντικείμενου και επιτυγχάνεται η γνώση του ίδιου του αντικειμένου.

Ο σαφής διαχωρισμός των αναπαραστάσεων από τα ίδια τα αντικείμενα δεν λειτουργεί αρνητικά για την σημασία των αναπαραστάσεων. Αποτελεί πάγια θέση πως δεν γίνεται να αποφευχθεί η χρήση των σχημάτων τουλάχιστον όταν αφορά την διδασκαλία της γεωμετρίας, ενώ παράλληλα μπορεί να βοηθήσει και στη διδασκαλία και άλλων σχολικών μαθηματικών όπως η άλγεβρα. Άλλωστε, σύμφωνα με τις νεότερες αντιλήψεις περί της διδακτικής των μαθηματικών οι διάφορες μορφές αναπαραστάσεων που αλληλοσυνδέονται είναι το τελικό ζητούμενο για ένα καλό επίπεδο γνώσης των μαθητών. Το σημαντικό επίτευγμα μίας γνωστικής προσέγγισης μίας έννοιας είναι να μπορεί κάποιος να διακρίνει την έννοια μέσα από τις διαφορετικές της αναπαραστάσεις.

Ο Duval προσεγγίζει την γεωμετρία με μία οπτική σχετικιστική και αισθητηριοκεντρική. Συγκεκριμένα, οριοθετεί σε μία αναλυτική παρουσίαση, σε μορφή οργανωμένης δομής, τις πηγές ανάλυσης των σημειωτικών αναπαραστάσεων ενός γεωμετρικού σχήματος. Σε αυτή την οργανωμένη δομή επισημαίνει τέσσερις τύπους κατανόησης, που κατηγοριοποιεί ως τύπους σχετικιστικής κατανόησης (Duval 1995 σελ. 145-147).

(α) Αισθητική Κατανόηση *(perceptual apprehension)*: Η αισθητική κατανόηση αναφέρεται σε αυτό που μπορούμε να αναγνωρίσουμε με μία πρώτη ματιά. Για παράδειγμα αναφέρεται σε υπομονάδες του σχήματος ή του διαγράμματος τα οποία μπορεί να μην είναι σχετικά με την κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος. Εδώ εντοπίζεται και η λειτουργία των νόμων της σχολής της μορφής (Gelstad). Σε έρευνα που έγινε από τον Hassan (2006) ανακαλύφθηκε πως υπάρχει στενή διασύνδεση μεταξύ της οπτικής αντίληψης και της επίδοσης στη γεωμετρία. Άρα η αισθητική αντίληψη και κατανόηση παίζουν πρωταρχικό ρόλο στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και θα

πρέπει να βρεθούν διδακτικές μέθοδοι που να βελτιώνουν την οπτική αντίληψη.

(β) Ακολουθητική Κατανόηση *(Sequential Apprehension)*: Ένας τέτοιος τύπος όταν κατασκευάζουμε ένα σχήμα ή όταν περιγράφουμε την κατασκευή του σχήματος αυτού(βλέπε στη συνέχεια παράδειγμα κατασκευής του ελάχιστου Προβολικού Επιπέδου). Σε τέτοιες καταστάσεις δεν είναι το αισθητικό στοιχείο που υπερέχει αλλά αντίθετα είναι οι λογικοί και μαθηματικοί περιορισμοί που κατευθύνουν την πρακτική αλλά ταυτόχρονα και την ελέγχουν (σε ένα αργότερο στάδιο ένα τέτοιο ρόλο στην Ευκλείδεια πρακτική θα κληθούν να παίξουν ο κανόνας και ο διαβήτης).

(γ) Ασυνάρτητη Κατανόηση *(discursive apprehension):* Η αισθητική αναγνώριση εξαρτάται από ασυνάρτητα στοιχεία επειδή οι μαθηματικές ιδιότητες που αναπαριστούνται σε ένα διάγραμμα δεν μπορούν να καθοριστούν πλήρως μόνο από την αισθητική κατανόηση, κάποια στοιχεία πρέπει πρώτα να αποκτήσουν εννοιολογικό υπόβαθρο και παράλληλα, να αποδοθούν με λεκτικές διατυπώσεις. Άρα ενός είδους υπόβαθρο γνώσης (ρητά εκπεφρασμένης ή μη) είναι απαραίτητο.

(δ) Λειτουργική Κατανόηση (*discursive apprehension*): Αυτού του τύπου η κατανόηση περιλαμβάνει χειρισμούς πάνω στο σχήμα. Οι χειρισμοί αυτοί μπορεί να είναι είτε σε φυσικό είτε σε νοητικό επίπεδο. Τέτοιοι χειρισμοί μπορούν να οδηγήσουν σε βαθειά γνώση της λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος και να αμβλύνουν την απόσταση που το σχήμα πάντα θα έχει από το να ταυτιστεί με την έννοια (βλέπε παράδειγμα σύγκρισης του πλήθους των σημείων δύο ευθυγράμμων σχημάτων).

Ο Duval αναγνωρίζει πως πάντα υπάρχει ένα περιθώριο και μία δυνατότητα αντιπαράθεσης ανάμεσα στην αισθητική κατανόηση ενός διαγράμματος και στην αυστηρή μαθηματική κατανόηση του ίδιου σχήματος.

«Δυσκολίες μετάβασης από τα αισθητικά δεδομένα του σχήματος, μπορεί να παραπλανήσουν ένα μαθητή σε σχέση με της μαθηματικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία αναπαριστούνται από το σχήμα, και έτσι ίσως πλήθος μαθητών να υπερβαίνει την αναγκαιότητα της ανακάλυψης των αυστηρών μαθηματικών αποδείξεων» (Duval, 1995 σελ. 155).

Η αναγνώριση που φαίνεται στο σημείο αυτό αναφέρεται στην τάση πολλών μαθητών να μην θεωρούν ως απαραίτητη μία απόδειξη γιατί το ζητούμενο αποτέλεσμα φαίνεται από το σχήμα. Η δυνατότητα διαχωρισμού των πραγματικών δεδομένων όπως έχουμε ήδη προαναφέρει είναι μία δεξιότητα που πολλοί μαθητές δεν κατέχουν. Ο διαχωρισμός του διαισθητικά προφανούς από το πραγματικό δεδομένο δεν εξαρτάται από την ποσότητας γνώσης που κάποιος κατέχει καθώς υπάρχουν περιπτώσεις από την ιστορία των μαθηματικών που συντείνουν στην άποψη πως το ποσοστό γνώσης είναι αδιάφορο.

Ο Duval θεωρεί πως η λειτουργική κατανόηση δεν είναι σε θέση να δουλεύει ανεξάρτητα από τις άλλες μορφές κατανόησης. Απεναντίας, η ασυνάρτητη και η αισθητική κατανόηση μπορούν συχνά να δρουν χωρίς την εμφάνιση της λειτουργικής συνιστώσας. Ο Duval βλέπει μία διδακτική προέκταση σε αυτό το γεγονός. Θεωρεί πως η διδασκαλία της λειτουργικής κατανόησης πρέπει να θεωρείται ειδική και ξεχωριστή καθώς και η αισθητική και η ασυνάρτητη συνιστώσα θα πρέπει να είναι παρούσες, πριν κάποιος φτάσει στο στάδιο αυτό.

Στην τελική θεώρηση του ζητήματος ο Duval αναφέρει πως μία καθαρά μαθηματική θεώρηση των σχημάτων ή διαγραμμάτων προκύπτει από μία αναδιοργάνωση και ταυτόχρονη χρήση διαφορετικών διαδικασιών κατανόησης για μακρά χρονικά διαστήματα. Είναι λοιπόν σαφές πως οι διαδικασίες κατανόησης κατά τον Duval ανήκουν σε συγκοινωνούντα δοχεία.

Καθώς τα παραπάνω αναφέρονται σε γεωμετρικές πρακτικές, στην διάρκεια των οποίων γίνεται χρήση σχήματος ή γενικότερα οπτικών δεδομένων, ο Duval (1998) έχει προχωρήσει στην πρόταση πως οι γεωμετρικές πρακτικές και αιτιολογήσεις έχουν στην σύνθεσή τους τρεις μορφές γνωστικών διαδικασιών οι οποίες συγκεντρώνουν και συμπληρώνουν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες. Αυτές οι σχετικιστικές λειτουργίες είναι οι εξής:

- Διαδικασίες Οπτικοποίησης (*visualization processes)*, για παράδειγμα η οπτική αναπαράσταση μίας γεωμετρικής πρότασης ή χειρισμών εξερεύνησης μίας σύνθετης γεωμετρικής κατάστασης.

- Διαδικασίες Κατασκευής (*construction processes)* με χρήση εργαλείων.
- Διαδικασίες Αιτιολόγησης (*reasoning processes)* - συγκεκριμένα, ασυνάρτητες διαδικασίες για την επέκταση της γνώσης, για την δικαιολόγηση και για αυστηρές λογικές αποδείξεις.

Ο Duval επισημαίνει ότι αυτές οι διαφορετικές διαδικασίες μπορούν να εκτελούνται ξεχωριστά. Για παράδειγμα, η οπτικοποίηση δεν εξαρτάται απαραίτητα από την κατασκευή. Σε συνέχεια του προηγούμενου επιχειρήματος, ακόμα και αν η κατασκευή οδηγεί σε οπτικοποίηση, οι διαδικασίες κατασκευής, πραγματικά εξαρτώνται μόνο από τις συνδέσεις μεταξύ σχετικών μαθηματικών ιδιοτήτων των αντικειμένων και τους περιορισμούς που σε αυτές τις κατασκευές επιβάλουν τα εργαλεία με τα οποία εργαζόμαστε. Ακόμα και αν η οπτικοποίηση μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο ή μία σημαντική βοήθεια στην διαδικασία της λογικής αιτιολόγησης ή μίας απόδειξης μπορεί εξίσου εύκολα να παραπλανήσει κάποιους μαθητές.

Ο ίδιος ο Duval επιμένει πως οι τρεις αυτοί τύποι των διαδικασιών - λειτουργιών είναι πολύ στενά συνδεδεμένοι και η συνέργειά τους είναι σχετικιστικά απαραίτητη για την επίτευξη υψηλού επιπέδου δεξιότητας στη γεωμετρία (Duval, 1998 σελ. 38).

Το πρόβλημα που παραμένει σε ισχύ είναι πως θα μπορέσουμε να κάνουμε κατανοητή και προσιτή για τους μαθητές την σχέση και τις μορφές επικοινωνίας που αναπτύσσονται μεταξύ αυτών των τριών ειδών διαδικασιών. Ο Duval επισημαίνει πως στην προσπάθεια που κάνουμε να καταλάβουμε την ανάπτυξη της δεξιότητας της γεωμετρικής αιτιολόγησης, θα πρέπει να κινηθούμε στους εξής τρεις άξονες.

1. τα τρία είδη διαδικασιών πρέπει να αναπτύσσονται ανεξάρτητα.
2. Η εργασία των διαφορικών διαδικασιών οπτικοποίησης και η εργασία διαμέσου διαφορετικών διαδικασιών αιτιολόγησης είναι αναγκαία στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος.
3. Η αναδιοργάνωση των τριών αυτών τύπων διαδικασιών μπορεί πραγματικά να συντελεστεί έπειτα από την επεξεργασία της εργασίας αυτής σε αντιπαράθεση με άλλες παρόμοιες.

6.Σχηματοποιημένες Έννοιες - Fishbein

Δεν χρειάζεται καν να σημειώσουμε ότι στην Ευκλείδεια γεωμετρία απαιτείται η χρήση ιδιοτήτων των σχημάτων. Ταυτόχρονα το να μπορεί κάποιος να αποτυπώνει σε ένα χαρτί και να χρησιμοποιεί ένα σχήμα σαν να είναι μία ανεξάρτητη έννοια θα μπορούσε να ταυτιστεί με την δημιουργία ενός συνόλου ιδιοτήτων που αληθεύουν για το συγκεκριμένο σχήμα.

Σύμφωνα με πολλούς υπάρχουν δύο διακεκριμένες και διαφορετικές φόρμες μέσω των οποίων μπορούν να γίνουν αντιληπτές, αλλά παράλληλα και αντικείμενο επεξεργασίας οι γεωμετρικές έννοιες τουλάχιστον μιλώντας για την γεωμετρία σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αυτές οι δύο φόρμες αναφέρονται, μόνο στο οπτικό ερέθισμα από τη μια μεριά και από την άλλη μεριά υπάρχει η άποψη για την αυστηρή θεώρηση μέσω των ορισμών.

Σύμφωνα με τον Fischbein (1993), η εικόνα και η έννοια μαζί αποτελούν ένα υβριδικό τρίτο είδος της οντότητας: Το αντικείμενο της έρευνας και της ενασχόλησης σε μία γεωμετρική συλλογιστική αποτελείται πάντα από ψυχικούς φορείς, και ζητάει από εμάς εικονιστικές έννοιες και προσεγγίσεις, οι οποίες αντανακλούν χωρικές ιδιότητες (σχήμα, θέση, μέγεθος) και ταυτόχρονα, εμπεριέχουν εννοιολογικές ιδιότητες όπως η ιδανικότητα, γενικότητα και η τελειότητα. Σε ένα θεωρητικό μοντέλο απόδειξης σε υψηλό γεωμετρικό επίπεδο η ενασχόληση αρχίζει με μια έννοια εικονιστική και τελειώνει με μια εικονιστική αντίληψη στην οποία περιέχεται η παρεχόμενη πληροφόρηση και τη σύναψη όλων των ιδιοτήτων που προκύπτουν. Όλα τα παραπάνω πλήθη πληροφοριών και απεικονίσεων συμπυκνώνονται σε μία δήλωση που έχει προκύψει από τις παρεχόμενες και προκύπτουσες πληροφορίες.

Η θεωρία των σχηματικών εννοιών (figural concepts) μας παρέχει τα απαραίτητα εφόδια και εργαλεία ώστε να φτάσουμε να αναλύουμε τις γνωστικές διαδικασίες θεωρώντας τις εικόνες και τις έννοιες της γεωμετρίας να συμβιώνουν σε ιδεατό επίπεδο μέσα στα γεωμετρικά αντικείμενα. Τα λάθη και οι δυσκολίες μπορούν τότε εύκολα να εξηγηθούν ως οφειλόμενες στη μη

ύπαρξη αρμονίας στην συμβίωση των δύο στο ίδιο αντικείμενο. Με το πέρασμα του χρόνου και την πρακτική εξάσκηση στην τάξη που αυτός επιφέρει η συμβίωση γίνεται αρμονικότερη, αλλά τα προβλήματα επιμένουν. Η Mariotti (2009) επισημαίνει πως οι αποδείξεις που κάνουν χρήση της «εις άτοπο απαγωγής» αποδεικνύουν του λόγου το αληθές.

Στην πραγματικότητα, σε μία τέτοια περίπτωση η σύνοψη οδηγεί σε μία ρήξη μεταξύ του εικονικού και του εννοιολογικού κομματιού του αντικειμένου, οδηγώντας τους μαθητές σε αδιέξοδο (Mariotti, 2009 σελ 84) .

Για να αρθεί αυτό το αδιέξοδο οι μαθητές καλούνται να ανακατασκευάσουν τη εικόνα που αντιστοιχεί στην έννοια (ή την ίδια την έννοια), μία ανακατασκευή που θα κληθεί να γεφυρώσει το δημιουργημένο χάσμα.

Εκεί ανάμεσα βρίσκονται μια σειρά ενδιάμεσων εικονιστικών εννοιών. Οι κανόνες που εξουσιάζουν και διέπουν την αιτιολόγηση με χρήση ως διάμεσο τις εικόνες δημιουργούν ένα σύνολο διακεκριμένων αρχών για μία όχι και τόσο αυστηρή σε διατυπώσεις παραγωγική γεωμετρία. Θεωρείται απαραίτητο να μορφοποιήσουμε και να επεκτείνουμε το μοντέλο του Fischbein σε δύο κατευθύνσεις.

Πρώτον, το μοντέλο του Fischbein προϋποθέτει την ύπαρξη ενός αυστηρού υπόβαθρου μαθηματικής γνώσης το οποίο θα ελέγχει τις λειτουργίες και αυτή η προϋπόθεση είναι συνετό να αφεθεί να επιτρέπει ιδέες από χώρους βρισκόμενους έξω από αυτό το αυστηρό αξιωματικό πλαίσιο λειτουργίας του όλου συστήματος αλλά που θα είναι αλληλοεξαρτώμενη με το πλαίσιο αυτό. Οι ιδέες αυτές μπορεί να είναι βιωματικής αναφοράς μέσω της καθημερινής πρακτικής με τον έξω κόσμο, αντιλήψεις περί των πραγμάτων ή δεδομένα αποθηκευμένα σε κάποια μορφή εικόνων.

Σε δεύτερο πλάνο, οι σχηματοποιημένες έννοιες αποτελούν ένα στατικής δομής μοντέλο το οποίο γίνεται πιο εύκολα και σαφώς ορθότερα αντιληπτό και κατανοητό ως μία δυναμική - δραστική μορφή αλληλεξάρτησης και αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην εικόνα και την ιδέα στην οποία ο ασχολούμενος με την γεωμετρία συνεχώς ενσωματώνει και ταυτίζει

νέα γεωμετρικά δεδομένα στοιχεία που απορρέουν από την εικόνα μέσω της αναπτυσσόμενης θεωρίας.

Αυτές οι λογικές ακολουθίες προκύπτουν μέσω μιας ενδοσκοπικής ανάλυσης της διαδικασίας σκέψης που θα πρέπει να ακολουθηθεί ώστε να οδηγηθεί στη επιτυχία μία άτυπη γεωμετρική απόδειξη (Handscomb, 2006 σελ 419)

Θεωρώντας ως δεδομένες αυτές τις δομές του σχήματος-έννοια και την συνύπαρξη τους ενδεχομένως, θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε και να διακρίνουμε πέντε βασικές αρχές που διέπουν την δημιουργία τέτοιων εννοιών (Handscomb, 2006 σελ 419) .

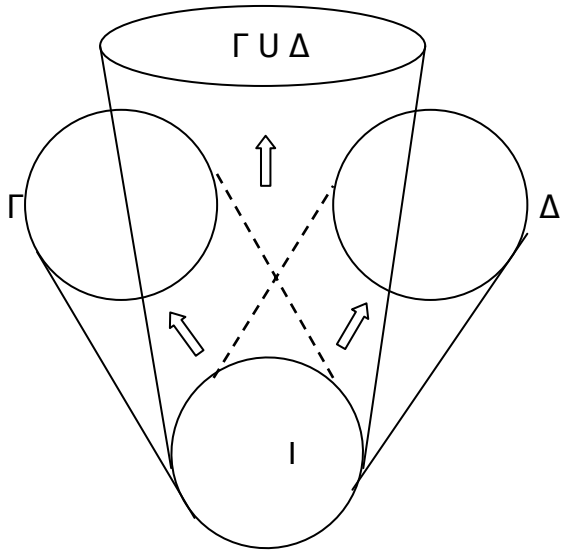
Αρχή 1: Αν Γ και Δ αποτελούν δύο όχι ταυτόσημες συλλήψεις μιας εικόνας I, τότε η ένωση των ιδιοτήτων των Γ και Δ είναι επίσης μία σύλληψη της ίδιας εικόνας I (σχήμα 1ο).

Αρχή 2: Εάν C είναι μία σύλληψη (conceptualization) της εικόνας I, και D είναι ένα υποσύνολο της C, τότε D είναι επίσης μία σύλληψη της I (προφανώς διαφορετική και λιγότερο ακριβής) (σχήμα2ο).

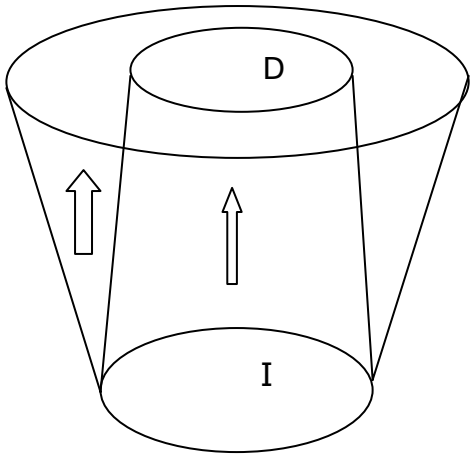
Αρχή 3: Εάν C είναι μία σύλληψη (conceptualization) της εικόνας I και D ένα σύνολο ιδιοτήτων και οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να συναχθούν από το C, τότε το σύνολο αυτό είναι επίσης σύλληψη της I (σχήμα3ο).

Αρχή 4: Όταν μία εικόνα I θα περιέχεται στην εικόνα J, και C είναι μία σύλληψη (conceptualization) της I, τότε C είναι επίσης μία ανεξάρτητη σύλληψη της εικόνας J (σχήμα4ο).

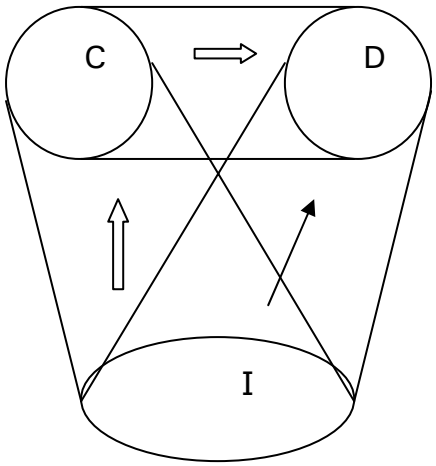
Αρχή 5: Όταν μία εικόνα I θα περιέχεται σε μία εικόνα J και C είναι μία σύλληψη (conceptualization) του J, τότε υπάρχει ένα υποσύνολο D του C τέτοιο ώστε D είναι σύλληψη (conceptualization) της I (σχήμα5ο).



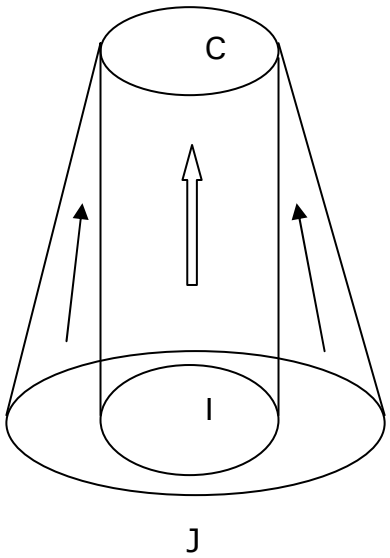
Σχήμα 6.1.



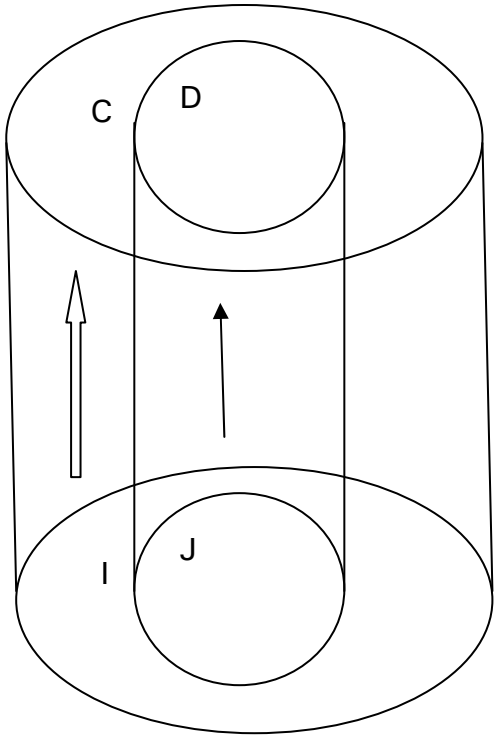
Σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.4.



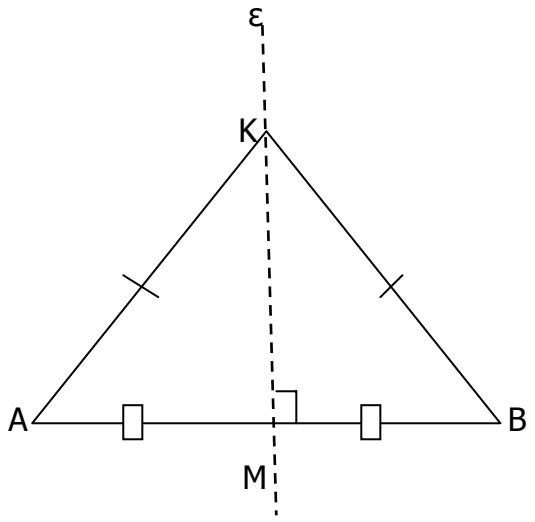
Σχήμα 6.5

Διαγραμματική απεικόνιση των εν λόγω ιδεών δίνεται στα σχήματα 1, 2, 3, 4 και 5 που προηγούνται. Οι αρχές 1 και 2, μπορούν να θεωρηθούν ως ιδιαίτερες-ειδικές περιπτώσεις της αρχής 3. Ο μόνος λόγος που αυτά εξετάζονται ξεχωριστά είναι ώστε να προκύψει πρόσθετη σαφήνεια. Σημειώνεται ότι η Αρχή 4 σίγουρα δεν ισχύει σε τυπική αυστηρή μαθηματική λογική. Θα πρέπει να τονισθεί ότι αυτές οι προτάσεις δεν είναι μαθηματικά, αλλά γνωστικές αρχές στο ίδιο πνεύμα με αυτό που διέπει τους νόμους της Gestalt Theory που έχουμε ήδη αναφέρει.

Στο πνεύμα της εργασίας καλούμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει πόσο πιο εύκολη είναι η απόδοση νοήματος μέσω των διαγραμμάτων 1 έως 5 σε σύγκριση με μία σκέτη λεκτική προσέγγιση. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν διαγράμματα Law Encoding Diagrams (LEDs) σε Ελληνική μετάφραση Διαγράμματα Κωδικοποίησης Νόμων. Τα διαγράμματα αυτού του τύπου έχουν χρησιμοποιηθεί και έχουν αξιολογηθεί ως

αποτελεσματικά σε καταστάσεις μάθησης και διδασκαλίας από διάφορους ερευνητές όπως οι Kaput (1992) και Cheng (1999). Η ισχύς τους κρύβεται στο ότι μπορούν να κάνουν μία συγκεκριμένη σχέση οποιουδήποτε γνωστικού επιστημονικού κλάδου πιο άμεσα προσβάσιμη σε σχέση με παραδοσιακές μορφές αναπαραστάσεων.

Παράδειγμα τέτοιου διαγράμματος σε επίπεδο γεωμετρίας μπορεί να είναι ένα σχήμα όπως αυτό του παρακάτω σχήματος.



Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του εν λόγω ευθυγράμμου τμήματος. Το σύνολο της λεκτικής αυτής διατύπωσης και των εννοιολογικών ποσοτήτων που αυτή περιέχει εδράζονται και ταυτόχρονα γίνονται προφανείς πάνω στο διάγραμμα. Το διάγραμμα συμπυκνώνει την γνώση που περιέχει και η διατύπωση. Η ευθεία ε του διαγράμματος είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ αφού ΑΜ = ΒΜ και είναι κάθετη στο ΑΒ. Τότε οι αποστάσεις των άκρων του τμήματος ΑΒ από το τυχαίο σημείο Κ της μεσοκαθέτου ΑΚ και ΒΚ ισούνται.

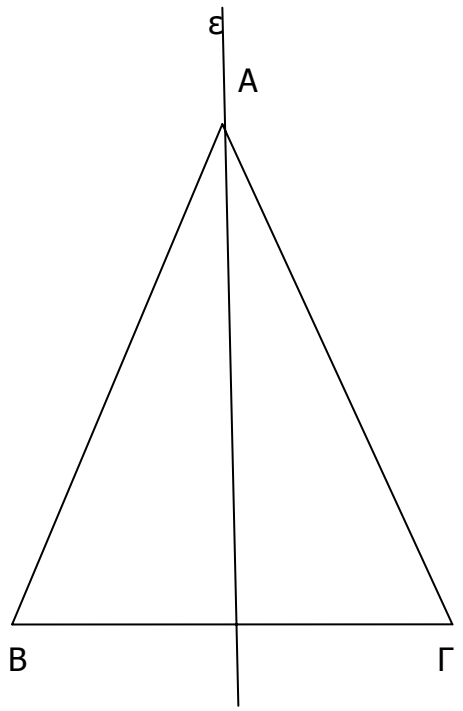
Πλήθος ανάλογων παραδειγμάτων μπορεί να δοθεί. Ιδιαίτερα τα σχολικά βιβλία χρησιμοποιούν μεγάλη ποικιλία από διαγράμματα Κωδικοποίησης Νόμων[37].

[37] Στη Γεωμετρία ίσως θα ήταν καλύτερο να μιλάμε για διαγράμματα κωδικοποίησης θεωρημάτων.

6.1.Παράδειγμα

Το Γεωμετρικό σχήμα είναι ένα νοητικό κατασκεύασμα, μία ιδανική οντότητα, το νόημα του οποίου κυβερνάται από ένα ορισμό. Παράλληλα όμως είναι και μία εικόνα, ένα αισθητικό δεδομένο: είναι εκτατό (spatiality), έχει σχήμα μέγεθος και δημιουργεί ένα κάποιο αντίκτυπο (Fishbein, 1998).

Ας ασχοληθούμε λίγο με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα γνωστό στους αρχαίους Έλληνες από την εποχή του Νεοπυθαγόρειου Πάππου. Το παράδειγμα είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιεί και ο Fishbein. Πρόκειται για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα απόδειξης που φανερώνει την διάσταση ανάμεσα σε έννοιες και εικόνες αλλά και τους πιθανούς χειρισμούς που θα μπορούσαν να αναδείξουν την διάσταση αυτή, κατά την διάρκεια μίας τυπικής και πλήρως αποδεκτής απόδειξης. Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε πως οι γωνίες Α και Β ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=ΑΓ είναι μεταξύ τους ίσες. Η απόδειξη που θα δοθεί χρησιμοποιεί καθαρά νοητικές διαδικασίες που είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν στη συνήθη πρακτική και σε εμπειρικό επίπεδο.

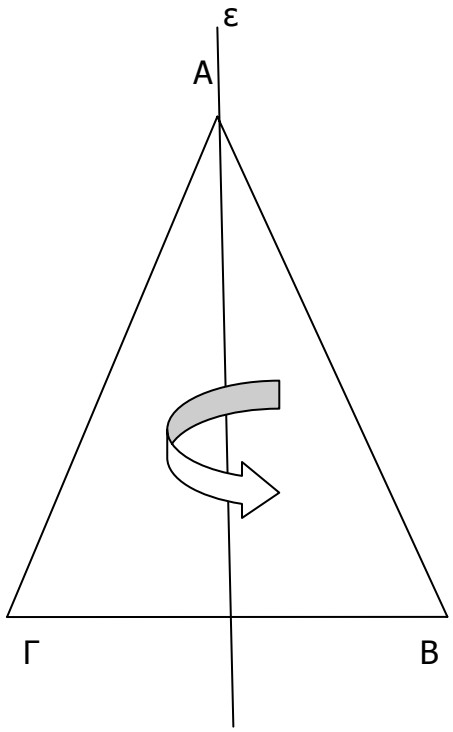


Σχήμα 6.1.1.

Ας θεωρήσουμε πως κάποιος έχει την δυνατότητα να αποκόψει το τρίγωνο από τον εαυτό του και να το στρέψει κατά 180 μοίρες, με άξονα περιστροφής την μεσοκάθετο της άνισης πλευράς ΒΓ.

Τότε αν επανατοποθετήσει το στραμμένο τρίγωνο στο αρχικό ώστε να ταυτίσει την πλευρά ΑΒ με την ΑΓ του στραμμένου τριγώνου, η γωνία Α θα παραμένει αμετάβλητη ενώ παράλληλα οι πλευρές θα ταιριάξουν απόλυτα. Από τον ορισμό της ισότητας των τριγώνων το αρχικό και το στραμμένο τρίγωνο θα είναι ίσα.

Σε μία τέτοια απόδειξη έχουμε χρησιμοποιήσει ένα δεδομένο ποσό γνώσης εκφρασμένο μέσω νοητικής μοντελοποίησης. Τις δύο πλευρές τις θεωρούμε ίσες και ένας έχει χρησιμοποιήσει τις έννοιες του σημείου, της πλευράς, της γωνίας, και της τριγωνικότητας[38].



Σχήμα 6.1.2.

[38] Κάποιος θα μπορούσε δικαίως να ισχυριστεί πως με βάση αυστηρά κριτήρια νομιμότητας μία τέτοια απόδειξη θα ήταν μη αποδεκτή, καθώς η σύμπτωση των άκρων των πλευρών δεν είναι δεδομένη καθώς δεν μπορούμε να ελέγξουμε την σύμπτωση των αδιάστατων σημείων ή τουλάχιστον είναι αδύνατος ο έλεγχος της ορθότητας του ισχυρισμού αυτού παρά μόνο χρησιμοποιώντας ως αποκλειστικό διάμεσο την καθαρή νόηση.

Έχουμε ακόμα, εκφράσει λεκτικά την στρέψη του τριγώνου και την επανατοποθέτησή του πάνω στο αρχικό τρίγωνο. Ταυτόχρονα, το μυαλό μας απασχολούν (ή υποβοηθούν) και διάφορες σχηματικές πληροφορίες και σχηματικά αναπαριστώμενες διαδικασίες όπως αυτή της αποκοπής του τριγώνου από τον εαυτό του και έπειτα την στρέψη και επανατοποθέτηση αυτού πάνω στο αρχικό.

Μήπως εδώ η ενασχόλησή μας τοποθετείται στη βάση δύο ανεξάρτητων και πλήρως καθορισμένων οντοτήτων; Πως το ένα τρίγωνο μπορεί να διπλασιαστεί; Μήπως λοιπόν από τη μία μεριά έχουμε αφηρημένες ιδέες (έννοιες) και από την άλλη αισθητικής προέλευσης αναπαραστάσεις που αντανακλούν κάποιους συγκεκριμένους χειρισμούς υπεράνω των εννοιών; Πως αυτά τα δύο μπαίνουν σε μία διαδικασία ταύτισης και ποιες επιπλοκές μπορεί να εμφανιστούν και πως μπορούν να αντιμετωπιστούν;

Το σημαντικότερο σημείο της απόδειξης είναι η αποκοπή και επανατοποθέτηση του τριγώνου έπειτα από τη στροφή υπεράνω του αρχικού. Όμως οι ιδέες, όπως αυτή της τριγωνικότητας, δεν μπορούν να αποκοπούν, να στραφούν και να ταιριάξουν τέλεια κατόπιν επανατοποθέτησης. Οι διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη είναι καταφανώς πρακτικές και με δεδομένη εμπειρικά προερχόμενη επιβεβαίωση. Το γεγονός ότι σε ένα τρίγωνο κατασκευασμένο από κάποιου είδους υλικό μπορούμε να εκτελέσουμε τέτοιους χειρισμούς μας ωθεί να νομιμοποιήσουμε ανάλογους χειρισμούς και στην ιδέα του ισοσκελούς τριγώνου. Παρόλα αυτά, ακόμα και στην εμπειρική μας πραγματικότητα δεν μπορούμε να αποκόψουμε ένα αντικείμενο από τον εαυτό του γιατί αυτό θα σήμαινε πως έχουμε τον διπλασιασμό ενός φυσικού αντικειμένου πράγμα που αντίκειται στην αισθητική πραγματικότητα.

Μία τέτοια διαδικασία στερείται νοήματος για τον εμπειρικά προσανατολισμένο άνθρωπο του 21^{ου} αιώνα. Βέβαια, εισέρχονται με την απόδειξη αυτή και κάποιες υπαναχωρήσεις σε σχέση με την εννοιολογική ποιότητα των γεωμετρικών αντικειμένων. Για παράδειγμα η ταύτιση που θεωρούμε δεδομένη μεταξύ των κορυφών του τριγώνου δεν μπορεί να ελεγχθεί και πολύ δε περισσότερο επαληθευτεί, καθώς δεν μπορούμε να

ελέγξουμε αντικείμενα μηδενικής διάστασης και να επαληθεύσουμε την ταύτιση αντικειμένων μηδενικής διάστασης[39].

Ο μαθηματικός λοιπόν, αλλά και όποιος ασχολείται με τα μαθηματικά, επικεντρώνει την ενασχόλησή του σε ένα ιδεατό κόσμο που αποτελείται από ιδεατά αντικείμενα στον οποίο και τα νοήματα, που αυτά τα αντικείμενα περιέχουν, είναι ιδεατά. Τα αντικείμενα ή οι έννοιες στις οποίες αναφερόμαστε ή οι οποίες αποτελούν το επίκεντρο της μελέτης μας, δηλαδή τα σημεία, οι πλευρές και γενικότερα τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τρίγωνα και άλλα, έχουν μόνο ιδεατή ύπαρξη.

Τέτοια αντικείμενα δεν απαντώνται στο φυσικό κόσμο καθώς η αυστηρά καθορισμένη τελειότητα, που προέρχεται από τους ορισμούς αυτών, καθώς και η απουσία υλικού υπόβαθρου αποτελούν ανυπέρβλητα εμπόδια για την ύπαρξή τους ανεξάρτητα από ένα μελετητή τους. Έτσι τα αντικείμενα της μελέτης της γεωμετρίας έχουν εννοιολογική υπόσταση και φύση και το σχήμα έρχεται να καλύψει μία ψυχολογική ανεπάρκεια των αυστηρών φορμαλισμών. Παράλληλα τα γεωμετρικά αντικείμενα, έχουν μία εσωτερική σχηματική υπόσταση και φύση η οποία είναι και αυτή που μας επιτρέπει να πραγματοποιούμε (αφού πρώτα έχουμε νομιμοποιήσει) και αναφερόμενοι σε δεδομένα-συγκεκριμένα σχήματα (που αντιστοιχούν βέβαια σε άπειρες πολλαπλότητες σχημάτων) χειρισμούς όπως η αποκοπή, η αναστροφή και η επανατοποθέτηση αυτών όπως έγινε και στην προηγούμενη απόδειξη.

«Γίνεται άμεσα κατανοητό και προφανές πως οι οντότητες με τις οποίες η γεωμετρία καταπιάνεται και στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφερόμαστε στο τρίγωνο και σε όλα τα στοιχεία αυτού, δεν είναι ούτε αποκλειστικά εννοιολογικής υφής αλλά ούτε και αποκλειστικά κοινές εικόνες ή σχήματα. Οι χειρισμοί που ενεπλάκησαν στην προηγούμενη απόδειξη δεν είναι δυνατό να επιτευχθούν ούτε αν αντιμετωπίζαμε τα γεωμετρικά αντικείμενα αποκλειστικά ως έννοιες αλλά και ούτε αν τα αντιμετωπίζαμε αποκλειστικά ως πραγματικά αντικείμενα. Άρα το τρίγωνο έχει δύο διαφορετικές όψεις οι οποίες όμως αν και πλήρως διαχωρισμένες

[39] Άλλωστε για το λόγο αυτό φτάσαμε στην σύγχρονη μορφή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να θεωρούμε το ένα από τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων να το θεωρούμε αξίωμα

αδυνατούν από μόνες τους ανεξάρτητα να οδηγήσουν στη λύση που μόλις δόθηκε στο πρόβλημα». (Fishbein,1993 σελ 155).

Είναι όμως γεγονός πως αυτές οι όψεις εμφανίζονται και παίζουν κρίσιμο ρόλο σε αυτή την ακριβή και πλήρη απόδειξη, μαθηματικά έγκυρη όπως αυτή που προηγήθηκε, η οποία μας δίνει την ισότητα των δύο γωνιών ενώ παράλληλα το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επαληθευτεί και με βάση την εμπειρία μας με πρακτικό τρόπο αλλά σε φανταστικό επίπεδο καθώς είναι αδύνατη η αποκόλληση ενός τριγώνου από τον εαυτό του ακόμα περισσότερο η επικόλληση του αποκολλημένου τριγώνου πάνω στο αρχικό από το οποίο και προήλθε.

6.2.Ελάχιστο Προβολικό Επίπεδο

Το ακόλουθο παράδειγμα αναφέρεται στο προβολικό επίπεδο και συγκεκριμένα είναι ένα από τα πρώτα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε κατά την ενασχόληση μας με το προβολικό επίπεδο. Τι όμως είναι ένα προβολικό επίπεδο; Στο προβολικό επίπεδο τα σχήματα παίζουν πρωταρχικό ρόλο. Δεν είναι τυχαίο πως ιστορικά η Προβολική Γεωμετρία ονομαζόταν και γεωμετρία του καμβά και έχει τις πρώτες καταβολές της αλλά και γίνεται πιο εμφανής στα έργα τέχνης που χρησιμοποιούν προοπτική. Με ένα αυστηρό μαθηματικό ορισμό θα μπορούσαμε να πούμε πως:

Ένα προβολικό επίπεδο (projective plane) είναι μία τριάδα (***P,L,I***), που ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

(Π.Ε 1) Για οποιαδήποτε σημεία P, Q **Є *P*** με P ≠ Q, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία *l* **Є *L***, τέτοια ώστε (P,*l*) **Є *I***, (Q,*l*) **Є *I***

(Π.Ε 2) Για οποιεσδήποτε ευθείες *k,l* **Є *L***, με *k* ◻ *l* υπάρχει σημείο P **Є *P*** τέτοιο ώστε (P, *l*) **Є *I***, (P, *k*) **Є *I***

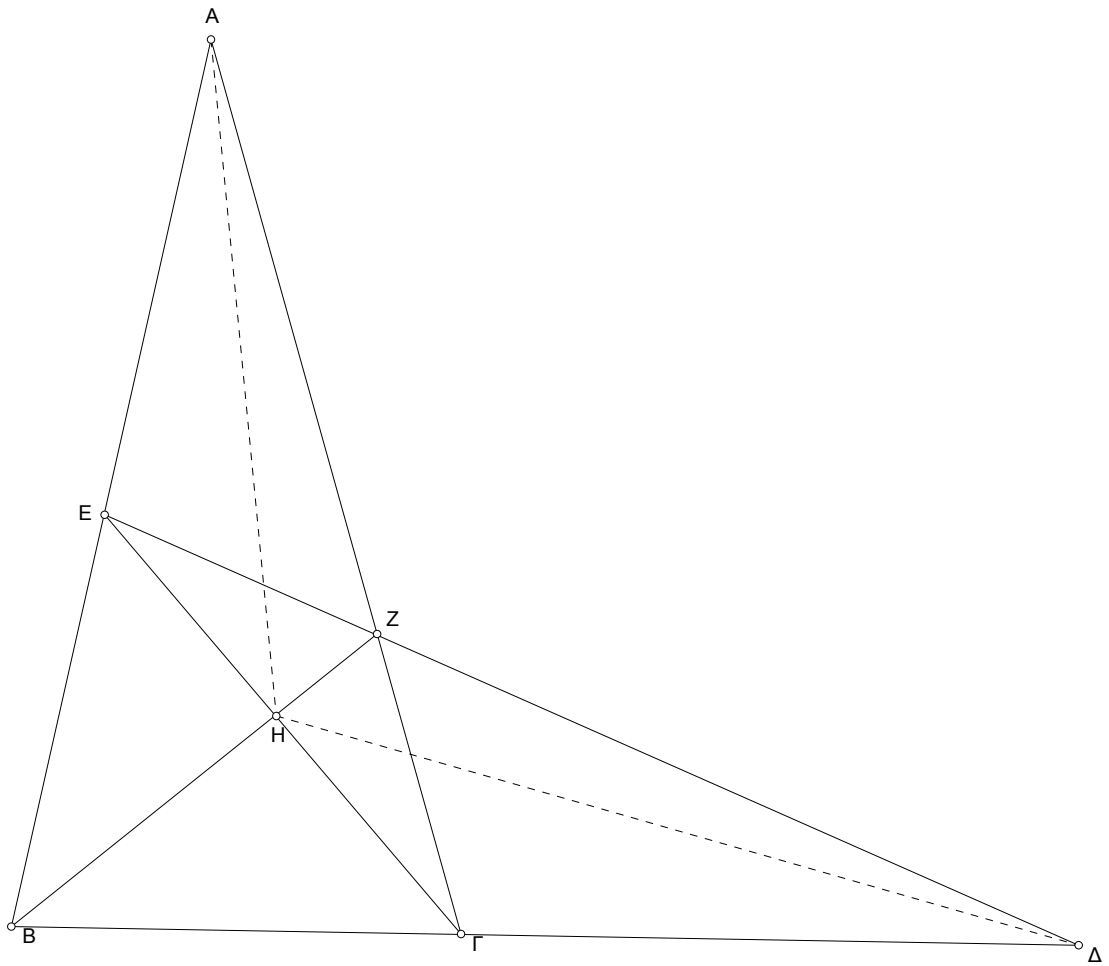
(Π.Ε 3) Υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικά σημεία και ανά τρία μη συγγραμμικά

Τώρα ουσιαστικά χρησιμοποιώντας μόνο το (Π.Ε 3) θα αποδείξουμε πως ο ελάχιστος αριθμός σημείων που μπορεί να διαθέτει ένα προβολικό επίπεδο είναι 7. Αυτό θα συμπυκνωθεί ως γνώση σε ένα μόνο σχήμα. Το σχήμα θα περιέχει πάμπολλα στοιχεία για το προβολικό επίπεδο και θα μας βοηθήσει στην ανάπτυξη της θεωρίας. Μέσω του σχήματος αυτού θα επαναπροσδιορίσουμε την άποψή μας για τις ευθείες ενός επιπέδου και θα προσεγγίζουμε διαφορετικά τις έννοιες που θα έχουν το ίδιο όνομα όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία αλλά θα αναφέρονται σε διαφορετικά (σε επίπεδο αισθητηριακής πρόσληψης) γεωμετρικά αντικείμενα. Το σχήμα θα συνεργαστεί με την θεωρία και θα δημιουργήσει την έννοια αλλά ταυτόχρονα και την εικόνα του ελάχιστου προβολικού επιπέδου.

Ξεκινώντας από τα τέσσερα σημεία που μας παρέχει το (Π.Ε 3) ως σημεία δεδομένης ύπαρξης και ονομάζοντας τα τέσσερα αυτά σημεία Α, Β, Γ,

Δ θα έχουμε τις διαφορετικές ευθείες από (Π.Ε 1) (βλέπε σχήμα) που αυτά ορίζουν ανά δύο:

Α **V** Β, Α **V** Γ, Α **V** Δ, Β **V** Γ, Β **V** Δ και **Γ V** Δ[40]



Σχήμα 6.2.1.

Αφού αυτές οι ευθείες είναι διαφορετικές ανά δύο θα έχουν ανά δυο ένα κοινό σημείο[41]. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε και τα σημεία

[40] με Α **V** Β συμβολίζουμε την μοναδική ευθεία που διέρχεται και από το σημείο Α και από το σημείο Β
[41] Από (Π.Ε 2)

Ε=(Α **V** Β) **Λ** (**Γ V** Δ), Ζ= (Α **V** Δ) **Λ** (Β **V** Γ) και Η=(Β **V** Δ) **Λ** (Α **V** Γ)

Εδώ κανείς μπορεί να διερωτηθεί τι ρόλο έπαιξε το σχήμα; Η αλήθεια πως με βάση την αυστηρή διατύπωση που προηγήθηκε το σχήμα φαίνεται να έχει πλήρως παρακαμφθεί. Όμως μία δεύτερη πιο προσεκτική ανάγνωση των χειρισμών θα επιτρέψει την ανάδειξη των χειρισμών που κάναμε ως τυπικών χειρισμών υπεράνω ενός σχήματος. Τι κάναμε λοιπόν, πήραμε τέσσερα σημεία τα οποία ενώσαμε ανά δύο σχηματίζοντας τις αντίστοιχες ευθείες, μία εντελώς οπτικοποιημένη διαδικασία δηλαδή. Έπειτα βρήκαμε τα σημεία τομής αυτών τα οποία προκύπτουν άμεσα (εξαιτίας της μη ύπαρξης παραλλήλων) και συμπληρώσαμε το επίπεδο με τα απαραίτητα αυτά σημεία.

Σε τελική ανάλυση η συγκεκριμένη απόδειξη δεν είναι τίποτα παραπάνω από μία διαδικασία περιγραφής της κατασκευής (Duval και ακολουθητική κατανόηση) ενός νέου σχήματος και τίποτα περισσότερο. Όμως το σχήμα παράλληλα αναδομεί και προεκτείνει την έννοια της ευθείας που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Τότε όμως εγείρεται το ερώτημα αν τελικά μόνο το σχήμα θα ήταν αρκετό για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού.

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί πως το σχήμα από μόνο του θα ήταν αρκετό για να είναι πλήρης η απόδειξη καθώς φανερώνει στο σύνολό τους τα χαρακτηριστικά του ελάχιστου Προβολικού Επιπέδου. Αυτό εν μέρει και με βάση όσα προαναφέραμε θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως σωστό, όμως αν μέναμε μόνο στο σχήμα και δεν εσωτερικεύαμε τις έννοιες που επεξεργαζόμαστε θα χάναμε πολύτιμα στοιχεία της θεωρίας τα οποία και είναι απαραίτητα για να ολοκληρωθεί η θεωρία και να είναι ευκολότερα κατανοήσιμη.

Είναι σχεδόν βέβαιο πως χωρίς την επέμβαση μίας εννοιολογικής σκοπιάς πάνω στην απόδειξη αυτή, θα αποτυγχάναμε να εντοπίσουμε το γεγονός πως η ευθεία Ε **V** Ζ ταυτίζεται με την ευθεία Ζ **V** Η. Πιθανότατα, ακόμα θα είχαμε προβλήματα αναφορικά με την φύση των ευθειών που στην προκειμένη περίπτωση φέρονται να έχουν πέρατα σε σχέση με την συνήθη έννοια της ευθείας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που εκτείνεται στο άπειρο. Η ταύτιση αυτή, μεταξύ του σχήματος και της έννοιας είναι που τελικά μας

οδηγεί σε μία ριζική αναδιοργάνωση της άποψής μας σχετικά με την έννοια της ευθείας και μία σαφή διεύρυνση της έννοιας αυτής προς παραγωγικές κατευθύνσεις και νέα αποτελέσματα.

Σε σχέση τώρα με την ευθεία Ε **V** Ζ για την οποία γίνεται ο λόγος δεν είναι μία συνήθης ευθεία με την έννοια-σημασία που εμείς αποδίδαμε στον όρο κατά την συνήθη ενασχόλησή μας με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αντίθετα, πάνω στο σχήμα εμφανίζεται ως μία τεθλασμένη γραμμή και είναι αυτή της η εμφάνιση που οδηγεί την έννοια της ευθείας σε μία διαφορετικού τύπου προσέγγιση αλλά ακόμα και γραφική αναπαράσταση. Τέλος, τα σημεία που γραφικά αναπαρίστανται ανάμεσα στα τρία σημεία της κάθε ευθείας δεν ανήκουν στην ευθεία πράγμα αναπάντεχο για την συνήθη πρακτική.

Πρακτικά, είναι ένα πρώτο παράδειγμα για το τι μπορεί να ειδωθεί ως ευθεία έξω από τα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ίσως τελικά να μπορεί να οδηγήσει τις αναζητήσεις μας και στην συνολοθεωρητική προσέγγιση της έννοιας της ευθείας (ως ένα σύνολο σημείων ή ως μία σημειοσειρά) ώστε να αποφεύγονται και σκόπελοι όπως αυτοί της απεικόνισης των ευθειών στο χαρτί.

7.Σχήμα και Ορισμός

Υπάρχουν έννοιες στις οποίες αντιστοιχούν μία αρκετά εκτεταμένη ποικιλία σχημάτων, όπως για παράδειγμα τα παραλληλόγραμμα και οι γωνίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις κάποιος πρέπει να αντιμετωπίσει την αλληλεπίδραση μίας ανελαστικής συνιστώσας (δηλαδή μίας έννοιας το νόημα της οποίας είναι ρητά εκφρασμένο μέσω του ορισμού της) και μίας άπειρης πολλαπλότητας εικόνων που αντιπροσωπεύουν την έννοια αυτή. Σε μία τέτοια περίπτωση κάποιος θα πρέπει να αντιμετωπίσει την πρόκληση του ελέγχου της έννοιας υπεράνω της σχηματικής απεικόνισης (Fishbein, 1998).

Αποτελεί κοινό τόπο και όχι κάποια καλά κρυμμένη αλήθεια πως ο ορισμός που αντιστοιχεί σε ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι στην βάση της δομής του διαφορετικός από οποιοδήποτε ορισμό δίνεται σε οποιαδήποτε άλλη εμπειρική επιστήμη ακόμα και στις λοιπές θετικές. Όταν η αναφορά μας γίνεται σε ορισμό των εμπειρικών επιστημών, τότε ο ορισμός αυτός είναι προϊόν παρατήρησης των σχέσεων και των ιδιοτήτων της υπό εξέτασης κατηγορίας αντικειμένων. Για παράδειγμα ο μεταλλικός χαρακτήρας είναι μία καταγραφή των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των μετάλλων (μεταλλική λάμψη, ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα, ελατά και όλκιμα). Στα μαθηματικά αντικείμενα συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο. Ο ορισμός ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι αυτός που επιβάλει αυτόματα ή μέσω παραγωγικής σκέψης τις ιδιότητες ενός μαθηματικού αντικειμένου. Σαν παράδειγμα θα μπορούσαμε να δούμε το τρίγωνο της Ευκλείδειας γεωμετρίας (ύψη, μεσοκάθετοι, διάμεσοι και διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο, έχει άθροισμα γωνιών δύο ορθές και τόσα άλλα).

Επακόλουθο, της σχέσης αυτής μεταξύ σχήματος και ορισμού στα γεωμετρικά αντικείμενα, αποτελεί το γεγονός πως η εννοιολογική συνιστώσα ενός σχήματος θα πρέπει να είναι πάντοτε παρούσα και η σχηματική να είναι συνεχώς υποβαλλόμενη σε έλεγχο από αυτή. Μία τέτοια προσέγγιση δεν γίνεται εύκολα κατανοητή από τους μαθητές. Ιδιαίτερα όταν αυτοί βρίσκονται στα πρώτα στάδια της ενασχόλησής τους με την γεωμετρία έχουν την τάση να ταυτίζουν το σχήμα με την έννοια. Ακόμα και σε πολύ αργότερα στάδια της

γνωστικής εξέλιξης των μαθητών αυτοί έχουν την τάση να αποστασιοποιούνται από την ασφάλεια του ορισμού και των αυστηρών διατυπώσεων τελώντας υπό την πλάνη του σχήματος. Ο έλεγχος από τα αυστηρά μαθηματικά είναι εύκολο να ξεχαστεί και να αφεθεί στην άκρη.
Τα αυστηρά διατυπωμένα μαθηματικά είναι το στέρεο έδαφος στο οποίο οι μαθητές θα πρέπει να βασίζονται για να ελέγχουν την ορθότητα των ισχυρισμών ή αποτελεσμάτων τους.

Υπάρχει ένα σημείο που κάνει τελείως ξεκάθαρο τον λόγο που η μαθητές δεν πρέπει να αυτοπεριορίζονται σε σχηματικές προσεγγίσεις αλλά θα πρέπει να μάθουν να τις ελέγχουν. Μπορεί κάποιος μαθητής να έχει αποδεχτεί ως αληθή ένα ισχυρισμό (θεώρημα) για μία ομάδα αντικειμένων όμως συχνά απαντάται το παράδοξο γεγονός όταν κάποιος ρωτήσει αν ο ισχυρισμός ισχύει για μία υποομάδα της αρχικής ο μαθητής αρχίζει να μπαίνει στην διαδικασία αναζήτησης πρόσθετων δεδομένων ή και ακόμα μίας πλήρους απόδειξης αισθανόμενος παράλληλα τελείως απροστάτευτος και ανήμπορος (θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε αν το τραπέζιο είναι παραλληλόγραμμο στο κεφάλαιο των παραλληλογράμμων της γεωμετρίας Α' λυκείου και οι μαθητές θα δίσταζαν να απαντήσου αυτόματα πως είναι). Το οπτικό ερέθισμα λοιπόν, έχει την τάση να αυτονομηθεί και να οδηγήσει σε πλάνη τον μαθητή.

Η δυσκολία του διδασκόμενου έγκειται στο γεγονός πως τα οπτικά ερεθίσματα περιορίζουν την φαντασία του και την οδηγούν σε μία και μόνο κατεύθυνση, ωθώντας τον να αποκηρύξει τον ορισμό και το δικαίωμα στην επαλήθευση του ισχυρισμού του μέσω αυτού.

Από διδακτικής σκοπιάς, θα πρέπει ο μαθητής να έρθει αντιμέτωπος πολλές φορές με τέτοιου είδους καταστάσεις ώστε να μάθει να τις αντιμετωπίζει και να μην χειραγωγείται από αυτές.

Ο Fishbein θεωρεί πως η μαθηματική παιδεία θα πρέπει να ξεκαθαρίζει τον διαχωρισμό ανάμεσα στην αυστηρή γενική μαθηματική γνώση και κάποιες πολύ συγκεκριμένες καταστάσεις που είναι δυνατόν να ανακύψουν. Αναφέρει συγκεκριμένα πως:

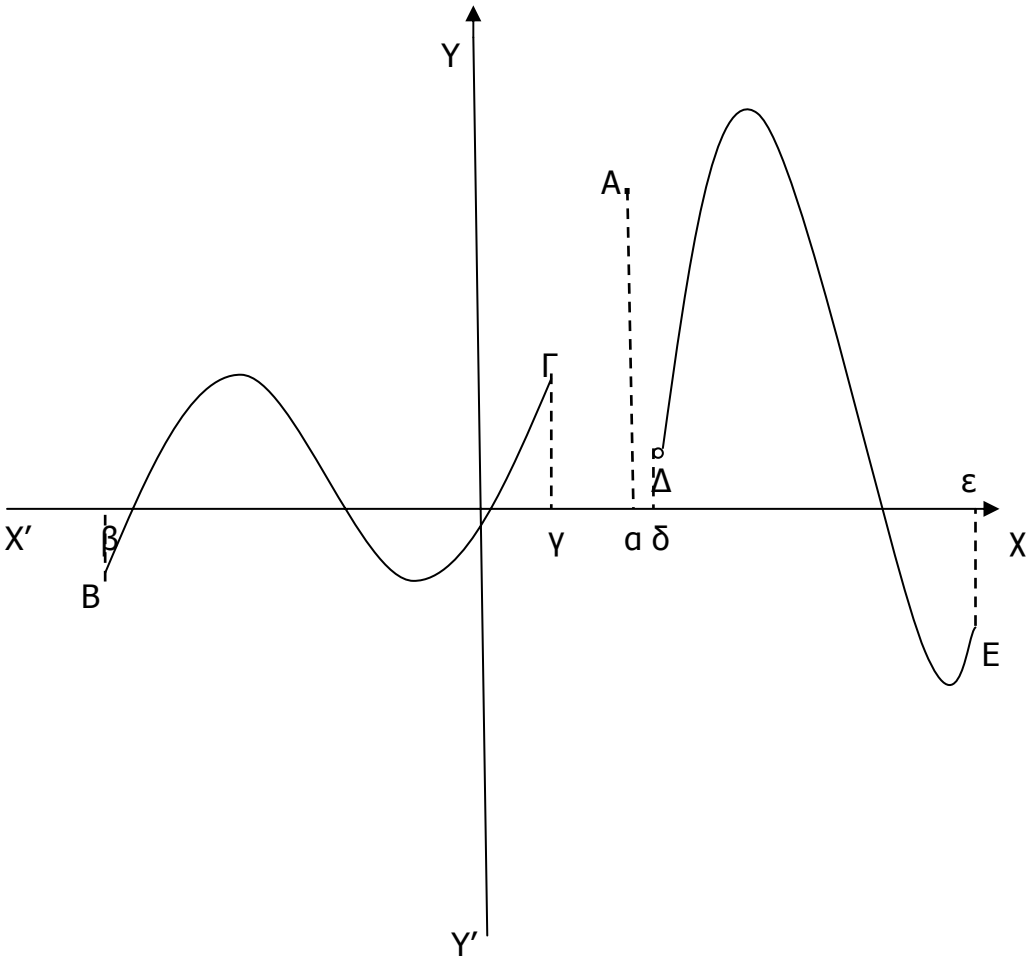
«η διαδικασία της μαθηματικής παιδείας θα πρέπει να περιέχει καταστάσεις στις οποίες θα φανερώνεται η ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στην αυστηρή

μαθηματική πραγματικότητα και τις επιμέρους περιπτώσεις. Ο μαθητής θα πρέπει να μάθει να αναλύει τέτοιες καταστάσεις και να αποφασίζει τελικά σύμφωνα με τους αυστηρούς περιορισμούς της θεωρίας – ορισμούς και θεωρήματα αγνοώντας την προφανή αντιπαράθεση με την εκάστοτε συγκεκριμένη περίπτωση ή σχήμα» (Fishbein, 1998).

Τελικός στόχος λοιπόν είναι η αναγνώριση της σημασίας του διαγράμματος και η οριοθέτηση της δυναμικής του. Το σχήμα μπορεί να καθοδηγεί, μπορεί να βοηθά στην διαδικασία παρακολούθησης μίας απόδειξης ή μπορεί ακόμα και να λειτουργεί ως οντολογικό υποκατάστατο των γεωμετρικών εννοιών αλλά δεν μπορεί από μόνο του να προσφέρει γνώση. Η σχέση σχήματος και ορισμού – επιστημονικής θεωρίας είναι μία σχέση αλληλεπίδρασης και αλληλοσυμπλήρωσης.

7.1.Παράδειγμα 1^{ο}

Αν σε κάποιους μαθητές λυκείου δοθεί μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού διάστημα είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα θεωρήσουν πως η συνάρτηση είναι μη συνεχής.



Σχήμα 7.1.1.

Αυτό βεβαίως και οφείλεται στην οπτική προσέγγιση της έννοιας της συνέχειας που έχει ταυτιστεί με την έννοια του συνεκτικού γραφήματος. Οι μαθητές στην καθημερινή πρακτική έχουν συνηθίσει να ασχολούνται με συναρτήσεις που αφενός έχουν ως πεδίο ορισμού διάστημα και αφετέρου το γράφημά τους είθισται να είναι μία συνεχής γραμμή. Για να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η έννοια της συνέχειας πρόσθετα στοιχεία θα πρέπει να δοθούν

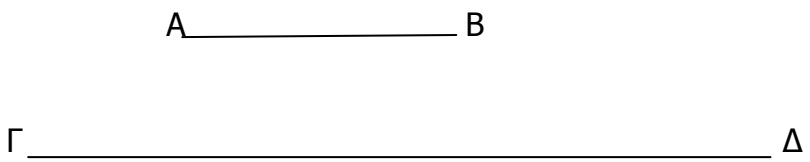
στους μαθητές. Γραφήματα συνεχών συναρτήσεων που δεν έχουν γράφημα συνεχή γραφή είναι σκόπιμο να εμφανίζονται. Ένα τέτοιο γράφημα είναι και αυτό που εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα (σχήμα 6°). Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα είναι η ένωση δύο διαφορετικών και ξένων διαστημάτων και ενός σημείου που δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο διαστήματα και συγκεκριμένα το σύνολο [β , γ] U { α } U (δ, ε]

Η εικονιστική αντίληψη περί της έννοιας της συνέχειας θα πρέπει να αναθεωρηθεί. Οι άνθρωποι συνολικά έχουν την τάση να θυμούνται ευκολότερα δεδομένα που είναι συνδεδεμένα με κάποια εικόνα και αυτό σε αυτή την περίπτωση είναι κάτι που αντί να συντελεί ως βοηθητικό στοιχείο είναι ένα πισωγύρισμα. Οι μαθητές έχουν κάνει ταύτιση της έννοιας της συνέχειας με ένα γράφημα συνάρτησης που προκύπτει χωρίς να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί. Είναι πολύ πιο δύσκολο να παρατηρεί κανείς όταν μία έννοια έχει σχηματική απεικόνιση το τι δεν έπεται από τον ορισμό από το να προσέχει τι έπεται από τον ορισμό. Τα επιπλέον, συστατικά ή χαρακτηριστικά του σχήματος πρέπει να εντοπίζονται και να επισημαίνονται.

Θα πρέπει κατόπιν να τους δοθεί η διευκρίνιση πως ο ορισμός είναι αυτός που καθορίζει το πότε μία συνάρτηση είναι συνεχής και όχι μία εικόνα περί της συνέχειας που αυτοί έχουν σχηματίσει μέσα στο μυαλό τους από την καθημερινή πρακτική (συνεχής συνάρτηση είναι μία μη διακοπτόμενη γραμμή). Ο έλεγχος μέσω του ορισμού μπορεί να επανακαθοριστεί και τα όχι και τόσος φωτεινά του σημεία να επισημανθούν καλύτερα. Αυτό γίνεται εξαιτίας αυτού καθαυτού του σχήματος που εισάγει μία νέα εικονική προσέγγιση του γεωμετρικού ζητήματος της συνέχειας.

7.2.Παράδειγμα 2^{ο}

Ένα άλλο παράδειγμα ακόμα πιο τρανταχτό θα μπορούσε να είναι η ερώτηση ποιο ανάμεσα σε δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα έχει περισσότερα σημεία.



Σχήμα 7.2.1

Στο σύνολό τους οι μαθητές αλλά και πολλοί φοιτητές θα απαντούσαν πως θα ήταν αυτό με το μεγαλύτερο μήκος βασιζόμενοι στην διαίσθηση και ξεχνώντας πως τα σημεία είναι, εξ ορισμού, αντικείμενα μηδενικής διάστασης. Η γνώση του σημείου μόνο μέσω της απεικόνισης αυτού θα είναι καταστροφική. Τα σημεία απεικονιζόμενα έχουν διάσταση δύο και όχι μηδενική διάσταση.

Οι ευθείες και τα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται ως σημειοσειρές. Επιπλέον, είναι μία προφανής γνώση πως τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν διάσταση ένα. Άρα πως είναι δυνατόν το άθροισμα των μηδενικών διαστάσεων των σημείων να μας δημιουργεί ένα αντικείμενο με διάσταση ένα;

Δεν είναι η έλλειψη γνώσης σε σχέση με το ζήτημα που μας φέρνει σε δύσκολη θέση. Αντίθετα είναι η ύπαρξη μίας συγκεκριμένης αντίληψης περί της υπάρχουσας γνώσης που στέκεται εμπόδιο. Η γνώση αυτή που προϋπάρχει έχει σταθεί καλά στο πλάι μας και δεν μας έχει απογοητεύσει. Μας έχει οδηγήσει σε ορθά αποτελέσματα, στα όρια του συγκεκριμένου πλαισίου που είχαμε κινηθεί, και δεν φαίνεται να απαιτεί αναδιάρθρωση ή αναθεώρηση. Η γνώση αυτή συνεχίζει να ανθίσταται και να μην είναι εύκολη η υπέρβασή της.

Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος σημείων. Για μία απόδειξη θα χρειαστεί ένα δεδομένο ποσό γνώσης, δεξιοτήτων και χρήσης των ορισμών.

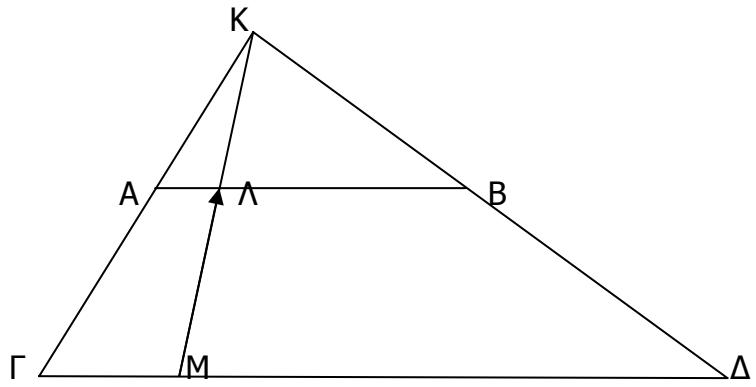
Εδώ θα πρέπει οι μηχανισμοί απόδειξης να ενεργοποιούνται και όχι η αισθητηριακή αντίληψη. Τα μαθηματικά προσφέρουν πλήθος παραδόξων για τον μη μυημένο στον κόσμο τους και αυτό πρέπει να προσφέρεται για διδακτικούς λόγους και την διέγερση του ενδιαφέροντος. Το σημαντικό και ιδιαίτερα ενδιαφέρον στην διαδικασία μίας τέτοιας απόδειξης είναι πως αυτή μπορεί να γίνει αντιληπτή και σε οπτικό σχηματικό επίπεδο (βλέπε σχήμα $8^{ο}$ και σχήμα $9^{ο}$). Δύο προσεγγίσεις διαφορετικές αλλά πάνω στην ίδια λογική του να γίνει και σχηματοποιημένη και προφανής η λογική της απόδειξης είναι οι ακόλουθες.

Και στις δύο περιπτώσεις θα ορίζουμε συναρτήσεις ένα προς ένα και επί μέσω ενός σχήματος και θα μπορούσαμε να το κάνουμε πραγματικότητα και λειτουργικά άρτια την διαδικασία αυτή ακόμα και αν δεν κατείχαμε πλήρως την έννοια της ένα προς ένα συνάρτησης.

Εδώ θα πρέπει οι μηχανισμοί απόδειξης να ενεργοποιούνται ταυτόχρονα με την αισθητηριακή αντίληψη. Όμως σε μία άτυπη προσέγγιση του ζητήματος κάποιος θα μπορούσε να φτάσει στις αποδείξεις χωρίς να ξέρει τυπικά τις έννοιες που θα χειριστεί. Μία άτυπη προσέγγιση των εννοιών, χωρίς ουσιαστικά συνείδηση των ορισμών, αρκεί για να καταλάβει κανείς τις αποδείξεις αυτές και τα αποτελέσματά τους. Το σχήμα λοιπόν που δίνεται σε κάθε μία από τις δύο αποδείξεις που θα παρατεθούν παρακάτω εμπεριέχει όλο το πλήθος των πληροφοριών και γνώσεων που απαιτούνται καθώς από μόνο του κάνει προφανή τον λειτουργικό ορισμό των εννοιών ένα προς ένα και των επί συναρτήσεων.

7.2.1.Απόδειξη 1η

Τοποθετούμε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα και ενώνουμε τα άκρα του Α με Γ και Β με Δ. Έπειτα προεκτείνουμε τους φορείς των τμημάτων ώστε να τμηθούν σε σημείο Κ.



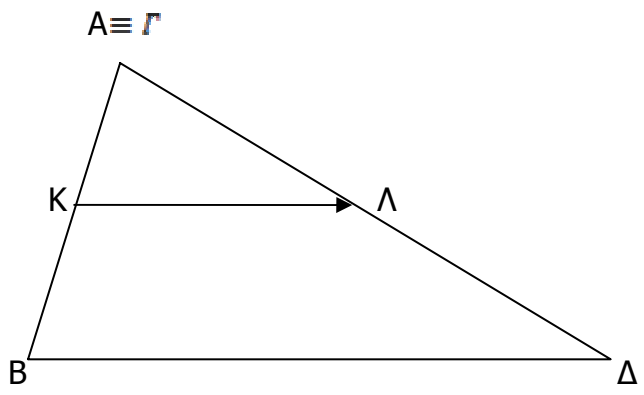
Σχήμα 7.2.1.1

Τώρα κάθε σημείο Μ του μεγαλύτερου σε μήκος ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ μπορεί να ορίσει το ευθύγραμμο τμήμα ΜΚ. Ως συνέπεια των παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε στην τομή των ΑΒ και ΜΚ το σημείο Λ (σχήμα 8ο), το οποίο και θα είναι διαφορετικό για κάθε Μ διότι διαφορετικά δύο διακεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα θα είχαν δύο κοινά σημεία. Αυτό θα ήταν άτοπο καθώς από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία από αξίωμα της γεωμετρίας.

Οπότε είναι προφανές πως για κάθε σημείο του ΓΔ υπάρχει μοναδικό σημείο του ΑΒ στο οποίο αντιστοιχεί αλλά και αντίστροφα στο οποίο θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί καθώς η διαδικασία μπορεί να ειδωθεί και αντίστροφα ξεκινώντας από ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Εδώ κρύβεται η έννοια της ένα προς ένα και επί αντιστοιχίας η οποία δίνει την ισοδυναμία κλειδάριθμων συνόλων. Ακόμα όμως και να απουσιάζει η έννοια αυτή από τις γνώσεις κάποιου το οπτικό ερέθισμα είναι ικανό από μόνο του να οδηγήσει κάποιον στο σωστό αποτέλεσμα. Η ακρίβεια πάντως και η απόλυτη εγκυρότητα του αποτελέσματος απαιτεί την γνώση των ορισμών.

7.2.2.Απόδειξη 2η

Θα μπορούσε κάποιος να φτάσει στις ίδιες διαδικασίες με διαφορετική σχηματική προσέγγιση και χρησιμοποιώντας λίγο διαφορετικά μαθηματικά. Θα μπορούσε να τοποθετήσει τα ευθύγραμμα τμήματα σε ένα τρίγωνο ως πλευρές αυτού (σχήμα 7.2.2.1).



Σχήμα 7.2.2.1

Τότε τα σημεία Α και Γ ταυτίζονται και ορίζεται η Τρίτη πλευρά ΒΔ. Από κάθε σημείο Κ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μπορούμε να φέρουμε παράλληλο τμήμα ΚΛ. Μέσω αυτής της κατασκευής κάθε σημείο Κ του ΑΒ θα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο σημείο Λ του $ΑΔ \equiv ΓΔ$ και αντίστροφα. Η αντιστοιχία θα είναι ένα προς ένα διότι αν σε ένα σημείο του ΑΒ αντιστοιχούσαν περισσότερα από ένα σημεία του ΑΓ θα είχαμε περισσότερες από μία παράλληλες από ένα σημείο εκτός ευθείας. Η απόδειξη είναι και πλήρης και έγκυρη αν και θα πρέπει να διατυπωθεί με πιο αυστηρά μαθηματικά.

7.2.3.Οι δύο Αποδείξεις

Παρατηρούμε πως το σχήμα στις αποδείξεις αυτές διαδραματίζει ένα ρόλο σημαντικότερο από αυτόν της απλής καθοδήγησης. Το σχήμα τείνει να εμπεριέχει όλες τις απαιτούμενες γνώσεις αλλά και έννοιες για την επίτευξη της ορθής απάντησης. Ουσιαστικά κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί πως τα σχήματα αυτό από μόνα τους αποτελούν έγκυρη απάντηση στην ερώτηση ποιο από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα περιέχει μεγαλύτερο αριθμό σημείων. Θα καταλήγαμε λοιπόν στην διαπίστωση πως το σχήμα και η λογική θα πρέπει να είναι αδιαχώριστες. Τα σχήματα ως στοιχεία γίνονται εσωτερικό κομμάτι της λογικά παραγωγικής διαδικασίας και συμπεριφέρονται στα πλαίσια των αποδείξεων σαν αυθεντικές έννοιες. Αν μία εμφανής διαφοροποίηση εμφανίζεται είναι επειδή τα σχήματα αδυνατούν να υπακούσουν στην λογική των εννοιών σαν επακόλουθο των σχηματικών λογικών δυνάμεων που οδηγούν συχνά σε πλάνες.

Ακόμα ο ορισμός των σημείων από μόνος του δεν θα μπορούσε να απαντήσει στο ερώτημα περί του πλήθους των σημείων. Το σχήμα από την άλλη οδηγεί σε πλάνες. Άρα μόνο ο συνδυασμός των δύο μπορεί να μας οδηγήσει σε επιτυχείς αποδείξεις. Πολύ δε περισσότερο μέσω του συνδυασμού των δύο και παράλληλα της απόδειξης η κατανόηση της έννοιας του σημείου αναδομείται, τροποποιείται και βελτιώνεται.

Αυτά δεν είναι τα πιο απλά παραδείγματα αλλά δίνονται στο σημείο αυτό για να τονιστεί το σε πόσο προχωρημένο επίπεδο (ακόμα και τελειώνοντας το σχολείο) οι μαθητές κάνουν τέτοιου είδους και τέτοιας φύσεως λάθη. Πλήθος αντίστοιχων παραδειγμάτων μπορεί να εντοπιστεί σε όλες τις τάξης της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά για αυτά δεν επέρχεται η απαλοιφή καθώς ακόμα και σε πτυχιούχους μαθηματικούς ανάλογα λάθη εμφανίζονται. Αυτό σημαίνει πως ο χρόνος και η τριβή από μόνοι τους δεν είναι δύο παράγοντες που αναγκαστικά θα οδηγήσουν στη εξάλειψη του φαινομένου. Πρέπει πάντα οι ελεγκτικοί μας μηχανισμοί να είναι σε εγρήγορση για να ελέγχουν την εικονιστική λειτουργία της λογικής μας.

Τέλος θα πρέπει να επιμείνουμε στην επισήμανση του γεγονότος πως αν και είναι το σχήμα αυτό που μπορεί να ξεγελάσει τους μαθητές να ακολουθήσουν λάθος θέσεις στις παραπάνω μαθηματικές αναζητήσεις η υπέρβαση της δυσκολίας που τους παρουσιάζεται είναι και πάλι εφικτή μέσω του ίδιου σχήματος. Το σχήμα μπορεί να γίνει προάγγελος λαθών αλλά και σημαντικό εργαλείο στις παραγωγικές μαθηματικές διαδικασίες ανάλογα με το βαθμό δεξιότητας στην χρήση του.

Πέρα από το σχήμα που θα βλέπω μπροστά μου θα υπάρχει ένα άλλο σχήμα το οποίο δεν θα είναι μπροστά μου σαν μία αισθητηριακή απεικόνιση αλλά θα γίνεται αντιληπτό διαμέσου της σκέψης και της νόησης και αυτό θα είναι και το αντικείμενο που αποτελεί το στόχο μου και το αντικείμενο της γεωμετρικής μου ενασχόλησης και διαπραγμάτευσης. Σε αυτό αναφέρομαι όταν πραγματοποιώ γεωμετρικούς χειρισμούς και είναι αυτό που μου επιτρέπει να δουλεύω σε υψηλότερο επίπεδο αψηφώντας οποιεσδήποτε ατέλειες του σχήματός που με βοηθά εποπτικά. Τελικά και τα δύο αντικείμενα είναι παράλληλα παρόντα και συμμετέχοντα ενώ επιδρούν με διαφορετικό τρόπο αλλά προς την ίδια κατεύθυνση. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε-ισχυριστούμε πως ενώ θα μπορούσαν τα δύο αντικείμενα να θεωρούνται ως ένα έχουν πλήθος διαφορών που τα καθιστούν ιεραρχικά διακριτά και διαχωρίζουν τους επιμέρους ρόλους αυτών.

8.Τα διαγράμματα ως Εμπόδια

Οι ορισμοί, οι έννοιες και τα θεωρήματα επιβάλλουν χαρακτηριστικά στα γεωμετρικά αντικείμενα. Είναι όμως γενικά παραδεκτό πως αυτοί οι ορισμοί και οι έννοιες δεν καθίστανται πάντα ξεκάθαροι για τους μαθητές και συχνά αμελείται η ύπαρξή τους από μέρους των μαθητών. Σαν επακόλουθο αυτού, το σχήμα φαίνεται να αυτονομείται και να δρα ανεξάρτητα από ορισμούς και έννοιες καθορίζοντας πλήρως την νοητική λειτουργία των μαθητών. Το πολύ δύσκολο κομμάτι της λειτουργίας μέσω ενός σχήματος δεν είναι ο καθορισμός των στοιχείων που το σχήμα μας προσφέρει απλόχερα, αλλά ο καθορισμός των στοιχείων που δεν προσφέρονται αν και έτσι φαίνεται με μία πρώτη ματιά. Για παράδειγμα μία γωνία που φαίνεται ορθή ή δύο ευθείες που φαίνονται να είναι παράλληλες.

Έχουμε ήδη δει και αντιμετωπίσει το παράδειγμα ενός διαγράμματος που οδηγούσε σε αμφιλεγόμενα αποτελέσματα. Βέβαια, εξηγήσαμε πως το λάθος αποτέλεσμα, ότι όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, δεν οφείλεται στο διάγραμμα – σχήμα αλλά στην αδυναμία μας να εντοπίσουμε το σωστό διάγραμμα.

Οι Fischbein, (1993) και Mariotti (1997) κατέληξαν μέσα από σχετικές έρευνες σε αποτελέσματα περί της αυτονόμησης και λειτουργίας των εικονικών αναπαραστάσεων. Ως αποτέλεσμα αυτών τα σχήματα στην ενασχόληση με την γεωμετρία μπορούν εκτός από απαραίτητος διάμεσος ανάμεσα στον φυσικό κόσμο και τα ιδανικά γεωμετρικά αντικείμενα να αποτελέσουν και σημαντικό ανάχωμα ανάμεσα στην γνώση και τον μαθητή.

Σε μελέτη της η Lanciano (2003) ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών όταν έρχονται αντιμέτωποι με τεχνικές δυσκολίες που έχουν να κάνουν με την ποιότητα των υλικών που χρησιμοποιούν ή στην δεξιότητα που κατέχουν στη χρήση αυτών, είναι πρόθυμοι να εγκαταλείψουν την αίσθηση περί ακρίβειας των εργαλείων και άρα και της ίδιας τους της πρακτικής. Αυτό μας αποκαλύπτει σύμφωνα με την Lanciano (2003 σελ 9)

«..οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει σε αρκετό – ικανοποιητικό βαθμό την δυναμική των γεωμετρικών εννοιών που τα όργανα αυτά εισάγουν».

Η έμφαση που δίνεται στο σημείο αυτό στην εργασία με τα όργανα είναι σε αυτή την περίπτωση σημαντική βοήθεια ώστε να φτάσουμε τον αναστοχασμό μας στις γενεσιουργούς ρίζες των εννοιών και την ίδια την δημιουργία τους.

Οι Dvora και Dreyfus (2004) σε μία έρευνά τους κατηγοριοποίησαν τα εμπόδια αυτά που το σχήμα μπορεί να προβάλει, σε σχέση με την δημιουργία ή την αναγνώριση των εννοιολογικών ποιοτήτων, σε τρεις κατηγορίες:

Α) Εμπόδια που προκύπτουν από την ιδιαιτερότητα του αντικειμένου

Β) Αναγνώριση μόνο του ακριβούς μοντέλου

Γ) Αδυναμία στην Αλλαγή της Οπτικής

Τα περισσότερα σχήματα στα σχολικά μαθηματικά και ιδιαίτερα στη γεωμετρία έχουν το σκοπό να λειτουργήσουν ως μοντέλα κάποιων νοητικών αντικειμένων. Όμως, σε κάθε περίπτωση το κάθε γεωμετρικό αντικείμενο έχει δικά του χαρακτηριστικά τα οποία περιορίζουν την φαντασία των παιδιών και τους στερούν από την δυνατότητα που έχουν για τις γενικευμένες αφαιρέσεις. Για παράδειγμα, ένα ισοσκελές τρίγωνο δεν μπορεί να αναπαριστά το σύνολο των τριγώνων, αφού έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που δεν έχουν όλα τα τρίγωνα και μπορεί να εισάγει ψευδή στοιχεία σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα.

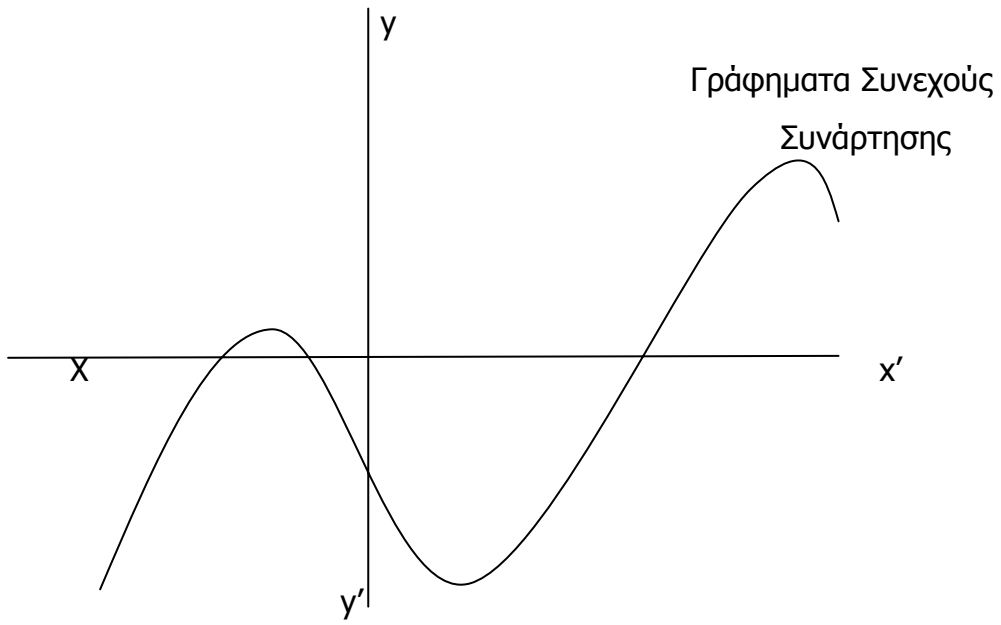
Σύμφωνα με τον Berkeley δεν υπάρχουν γενικές αφηρημένες ιδέες. Έτσι η έννοια της τριγωνικότητας δεν μπορεί να αποτελεί ξεχωριστή εικόνα - ιδέα. Ο φιλόσοφος πιστεύει πως όταν σκεφτόμαστε ένα τρίγωνο, έχουμε στο νου μας ένα συγκεκριμένο νοητό αντικείμενο, που δεν μπορεί αν μην είναι την ώρα που το σκεφτόμαστε, ούτε ισόπλευρο, ούτε ισοσκελές, ούτε τρίγωνο με πλευρές άνισες.

Τα παιδιά του εικοστού πρώτου αιώνα είναι ξεκάθαρα εμπειρικά προσανατολισμένα και άρα είναι λογικό να αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα όπως αυτό εδώ ταυτίζοντας ακούσια μία εικόνα με το σύνολο μίας τάξης αντικειμένων. Τελικά το εμπόδιο συνίσταται στην αποδοχή των μαθητών μίας ειδικής περίπτωσης ως γενικής η οποία ενδέχεται να περιέχει άσχετα ή ακόμη και αναληθή δεδομένα (Yerushalmy και Chazan, 1990).

Αξίζει να αναφέρουμε πως ο στα πλαίσια της θεωρίας του έχει επισημάνει την ύπαρξη αυτής της μορφής των προβλημάτων και έχει

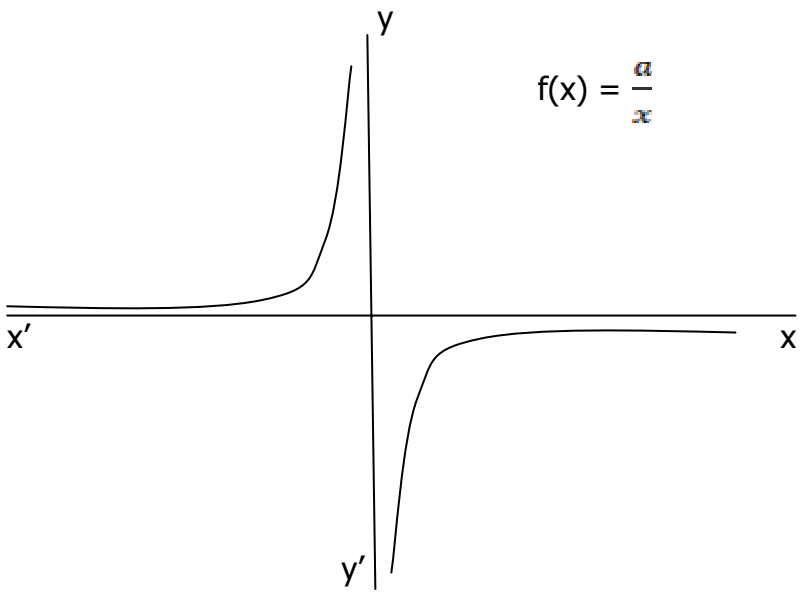
προτείνει η μαθηματική παιδεία να έχει ως στόχο την ρήξη ανάμεσα στα εικονικά περιστασιακά δεδομένα και την αυστηρή θεώρηση των πραγμάτων[42].

Σε ένα διαφορετικό πρόβλημα οδηγούνται οι μαθητές όταν καλούνται να αναγνωρίσουν την ύπαρξη συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου. Οι μαθητές μη έχοντας την εξοικείωση που απαιτείται με τις έννοιες, αυτές καθαυτές, που απαιτούνται έχουν την τάση να τις ταυτίζουν με πολύ συγκεκριμένες εικονικές αναπαραστάσεις που περιορίζουν την λειτουργικότητα του μοντέλου. Αυτή η ταύτιση δεν είναι απαραιτήτως κακή αλλά μπορεί να δημιουργήσει μία σημαντική δυσλειτουργία του συστήματος αναγνώρισης των εννοιών που θα έπρεπε να γίνονται αντιληπτές ως παρούσες στο σχήμα.



Σχήμα 8.1.

[42] Βλέπε παράγραφο για την σχέση του ορισμού με το σχήμα.



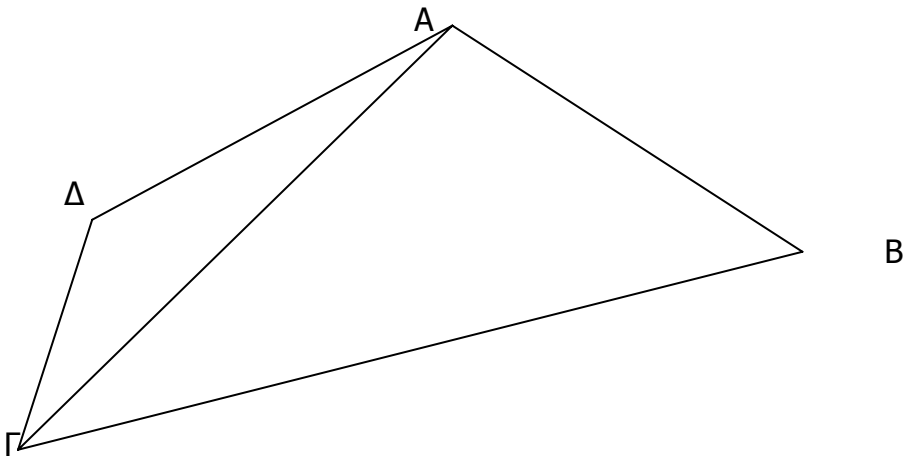
Σχήμα 8.2.

Η ταύτιση μίας έννοιας με ένα και μόνο οπτικό ερέθισμα μπορεί να κάνει την αναγνώριση της έννοιας αυτής ανελαστική και τους μαθητές να αναγνωρίζουν την ύπαρξη αυτής μόνο σε ένα πολύ συγκεκριμένο διάγραμμα.

Για παράδειγμα έχουμε την έννοια της συνέχειας που στο σύνολό τους σχεδόν καθηγητές και μαθητές τη έχουν ταυτίσει με την εικόνα ενός γραφήματος συνάρτησης ή γραμμής, που προκύπτει χωρίς να σηκωθεί το μολύβι από το χαρτί. Αυτό έχει ως επακόλουθο την αδυναμία δημιουργίας γραφήματος πέρα από το χρησιμοποιούμενο ως μοντέλο και την αδυναμία στην κατανόηση εναλλακτικών εικονικών κατασκευών της έννοιας της συνέχειας εν προκειμένω αλλά και πλήθους άλλων γενικότερα όπως έχουν παρατηρήσει διάφοροι ερευνητές (Yerushalmy και Chazan, 1990). Όπως δείχνει και το παράδειγμα των δύο σχημάτων (γραφημάτων). Ακόμα και το γράφημα της f(x) = $\frac{a}{x}$ που είναι μία από τις πιο πολυχρησιμοποιημένες και προσιτές συναρτήσεις δεν αναγνωρίζεται συχνά από τους μαθητές. Άρα η δεξιότητες της αναγνώρισης και της κατηγοριοποίησης της έννοιας περιορίζεται σημαντικά από την προσκόλληση του μαθητή μόνο στο ακριβές μοντέλο.

Ένα συχνό ψυχολογικό τεστ είναι αυτό κατά το οποίο το άτομο που λαμβάνει μέρος βρίσκεται αντιμέτωπο με μία σύνθετη εικόνα μέσα στην οποία καλείται να αναγνωρίσει την ύπαρξη επιμέρους πιο απλών εικόνων. Οι Yerushalmy και Chazan, (1990) χαρακτηρίζουν μία τέτοια δεξιότητα πολύ σημαντική ως κεντρικό ζήτημα της μαθηματικής δημιουργικότητας και άρα γενικότερα της ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και συλλογισμών.

Είναι όμως γεγονός πως μία τέτοια δεξιότητα δεν αποκτάται εύκολα και σίγουρα από το σύνολο των μαθητών. Αυτό σημαίνει πως η δεξιότητα αυτή δεν είναι μία γενετικά προκαθορισμένη στιγμή στην γνωστική ανάπτυξη. Σύμφωνα με το Hoffer (1981) και την διάκριση του στα επίπεδα van Hiele ο μαθητής αναγνωρίζει το σχήμα ως το σύνολό του[43] κατά το 1^{ο} στάδιο της αναγνώρισης και είναι αργότερα το 2^{ο} επίπεδο της ανάλυσης το στάδιο που επιτρέπει στον μαθητή να επικεντρωθεί σε επιμέρους υποσχήματα και να αναλύσει ιδιότητες και χαρακτηριστικά των κομματιών αυτών του συνολικού σχήματος.



Σχήμα 8.3.

Για παράδειγμα στο σχήμα που προηγείται (σχήμα 8.3.) οι μαθητές μπορούν να βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ ως διαγώνιο του τετραπλεύρου αλλά δυσκολεύονται να το αναγνωρίσουν ως την κοινή πλευρά των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΒΓ. Αντίστοιχα μαθητές θα μπορούσαν να έχουν

[43] Βλέπε και Gelstad Theory

αδυναμία στην αλλαγή οπτικής σε σχέση με το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου και την αντιμετώπιση αυτού ως διαμέσου ή διχοτόμου.

Τα συγκεκριμένα αυτά δύο παραδείγματα κάνουν σαφές πως μία τέτοια δυσκολία δεν προκύπτει μόνο από την έλλειψη εννοιολογικής γνώσης ή από σκέτη αδυναμία ως προς την οπτική αντίληψη. Είναι σαφές πως μπορεί μία τέτοια προβληματική να αναπτυχθεί από οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο παράγοντες ή από κάποιο συνδυασμό των δύο.

8.1.Μη Αιτιολογημένες Θεωρήσεις

Για την ώρα έχουμε εντοπίσει τις αδικαιολόγητες θεωρήσεις των μαθητών αλλά δεν έχουμε δει καθόλου την πλευρά των μαθητών. Τι είναι αυτό που τους οδηγεί σε αυτές τις θεωρήσεις και από πού πηγάζει; Πληροφορίες αυτού του είδους είναι πολύ χρήσιμες για την αντιμετώπιση του φαινομένου σε διδακτικό επίπεδο όσο και για να είναι έτοιμοι οι καθηγητές για τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουν. Άρα ένα σύνολο δεδομένων που μας αφορούν άμεσα είναι και αυτό που θεώρησαν και οι Dvora. T. και Dreyfus. T. (2004) στην έρευνά τους.

Α) Κίνητρα για την δημιουργία μη αιτιολογημένων θεωρήσεων

Β) Χρήση των μη αιτιολογημένων θεωρήσεων για την απόδειξη των σχετικών δηλώσεων.

Γ) Χρήση μη αιτιολογημένων θεωρήσεων ευθέως ή αντιστρόφως

Δ) Γνώση του γεγονότος ότι η θεώρηση είναι μη αιτιολογημένη

Ε) Τα αποτελέσματα της χρήσης μη αιτιολογημένων θεωρήσεων

Μία πιο εκτεταμένη θεώρηση των ως άνω παραγόντων είναι επιβεβλημένη.

Δύο ήταν τα κυρίαρχα κίνητρα που εντοπίζονται στην μελέτη των Dvora. T. και Dreyfus. T. (2004), τα οποία και στο σύνολό τους όσοι ασχολούνται με την μαθηματική εκπαίδευση και ειδικότερα την διδασκαλία της γεωμετρίας, έχουν βρεθεί αντιμέτωποι ή έχουν αναγνωρίσει σε συνήθειες των μαθητών τους. Τα δύο αυτά κίνητρα είναι το χρησιμοθηρικό και το οπτικό ερέθισμα. Το χρησιμοθηρικό είναι το κίνητρο της επίλυσης του γεωμετρικού προβλήματος. Οι μαθητές κάνουν ένα νοητικό άλμα (μία υπέρβαση των δεδομένων) με σαφή στόχο και προσανατολισμό την μετάβαση του προβλήματος σε ένα στάδιο που θα επιτρέπει την άμεση και εύκολη επίλυσή του.

Πρόκειται για ένα καθαρά ψυχολογικής διάστασης και προεκτάσεως κίνητρο το οποίο μπορεί να οφείλεται ταυτόχρονα σε ψυχικούς φορείς αλλά και σε αδυναμία ελέγχου του σχήματος από τους ορισμούς, αιτήματα και θεωρήματα. Από την άλλη μεριά έχουμε το οπτικό ερέθισμα. Η εικόνα του

σχήματος ενισχύει την βεβαιότητα των μαθητών για την ορθότητα του ισχυρισμού και της διαίσθησης για το στάδιο στο οποίο επιθυμούν να φτάσουν ότι είναι σωστό. Πολλές φορές όλοι οι καθηγητές της γεωμετρίας έχουν ακούσει τον ισχυρισμό «φαίνεται από το σχήμα». Άρα θεωρούν μία σχέση ή ένα ισχυρισμό σωστό επειδή μπορούν να το δουν πάνω στο σχήμα ως αληθή. Τέτοια λάθη καταδεικνύουν το πόσο χρήσιμη είναι η εισαγωγή της σχηματικής έννοιας (figural concept) από τον Fishbein (1993) καθώς αυτή ενυπάρχει μέσα στο σχήμα αλλά παράλληλα έχει μία θεωρία από πίσω της οδηγό και ελεγκτή της.

Οι μαθητές έχουν την τάση να χρησιμοποιούν στις αποδείξεις που αυτοί κατασκευάζουν μη αιτιολογημένες θεωρήσεις. Οι θεωρήσεις αυτές έχουν συγκεκριμένο ρόλο και αντικαθιστούν σημαντικά συστατικά των αυστηρών λογικών αποδείξεων. Δεν είναι δεδομένο πως οι μαθητές δεν ξέρουν την έννοια της απόδειξης και τι σημαίνει αυστηρή μαθηματική απόδειξη, όμως χρησιμοποιούν τις μη αιτιολογημένες θεωρήσεις στη θέση προτάσεων που δίνουν το ζητούμενο αποτέλεσμα αλλά δεν μπορούν να αποδείξουν ή στην θέση προτάσεων που απλώς θεωρούν σωστές βασιζόμενοι στο σχήμα ή σε κάποια άλλης μορφής (ίσως όπως έχουμε προαναφέρει να εμπλέκονται και ψυχολογικοί φορείς) διαισθητική προσέγγιση.

Οι μαθητές που κάνουν χρήση μη αιτιολογημένων θεωρήσεων κάνουν χρήση αυτών είτε ευθέως είτε αντιστρόφως. Αυτοί που έκαναν χρήση αντιστρόφως σύμφωνα με τους Dvora. T. και Dreyfus. T. (2004), σκέφτονται τα στάδια που πρέπει να φτάσουν, ώστε να αποδείξουνε το δοθέν πρόβλημα (από το τέλος προς την αρχή). Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν τα μη τεκμηριωμένα δεδομένα ευθέως είναι αυτοί που σκέφτηκαν πως θα χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα και τα σχετικά θεωρήματα δημιουργώντας λογικές προτάσεις με τελικό στόχο να φτάσει στο ζητούμενο συμπέρασμα (από την αρχή προς το τέλος). Ανεξάρτητα από τον τρόπο σκέψης των μαθητών (ευθέως ή αντιστρόφως) οι μαθητές εξακολουθούν να υποπίπτουν σε ατεκμηρίωτους ισχυρισμούς.

Στην μελέτη των Dvora και Dreyfus (2004), συντριπτικό ποσοστό των συμμετεχόντων που οδηγήθηκαν σε αβάσιμους ισχυρισμούς δεν είχαν

συνείδηση των λαθών τους ούτε την στιγμή του τεστ αλλά ούτε και αργότερα όταν έδωσαν συνεντεύξεις.

Υπήρξαν όμως και μαθητές που ήξεραν πως ο ισχυρισμός τους ήταν αβάσιμος και παρόλα αυτά τον χρησιμοποίησαν γιατί τους φαινόταν αληθής και δεν ήξεραν με ποιο τρόπο να φτάσουν στο συμπέρασμα αυτό. Άρα το σχήμα του κατεύθυνε σε βαθμό χειραγώγησης και η εξάρτησή τους από το σχήμα ήταν καθολική.

Σχεδόν σε κάθε πρακτική, υπήρξε ένα καθαρά εικονικό κίνητρο στην λογική που έχουμε ήδη αναφέρει. Άρα μας επιτρέπεται να υποστηρίξουμε ότι το στοιχείο της εικόνας του σχήματος επηρεάζει τον τρόπο που οι μαθητές σκέφτονται και ευθύνονται σε σημαντικό βαθμό για την δημιουργία μη αιτιολογημένων παρανοήσεων. Ακόμη παρατηρήθηκε από τους Dvora. T. και Dreyfus. T. (2004), το φαινόμενο ορισμένοι μαθητές να φτιάχνουν καινούργια διαγράμματα στα οποία τα δεδομένα που χρησιμοποιούσαν χωρίς απόδειξη ήταν εύκολα αναγνωρίσιμα. Έτσι, κάνοντας χρήση των διαγραμμάτων αυτών θεωρούσαν την ύπαρξή τους ως απόδειξη της ορθότητας των θεωρήσεών τους.

Παρατηρούμε λοιπόν, πως οι μαθητές στις περισσότερες περιπτώσεις έκαναν χρήση δεδομένων που δεν είχαν ισχύ χωρίς να έχουν συνείδηση του γεγονότος αυτού. Για να προλάβουμε σε επίπεδο διδαχής τις παρανοήσεις σχετικά με αυτό το φαινόμενο, οι καθηγητές θα πρέπει να εφοδιαστούν με κατάλληλα εργαλεία ώστε να καταφέρνουν να παρουσιάζουν πλήθος γεωμετρικών προβλημάτων με έμφαση στην αντιμετώπιση των τριών τρόπων παρουσίασης μη τεκμηριωμένων θεωρήσεων που έχουμε ήδη αναφέρει. Το πλήθος και η ποικιλία των σχηματικών αντιστοιχιών κάθε περίπτωσης είναι βασικό συστατικό της ευρύτερης κατανόησης της έννοιας που εισάγεται.

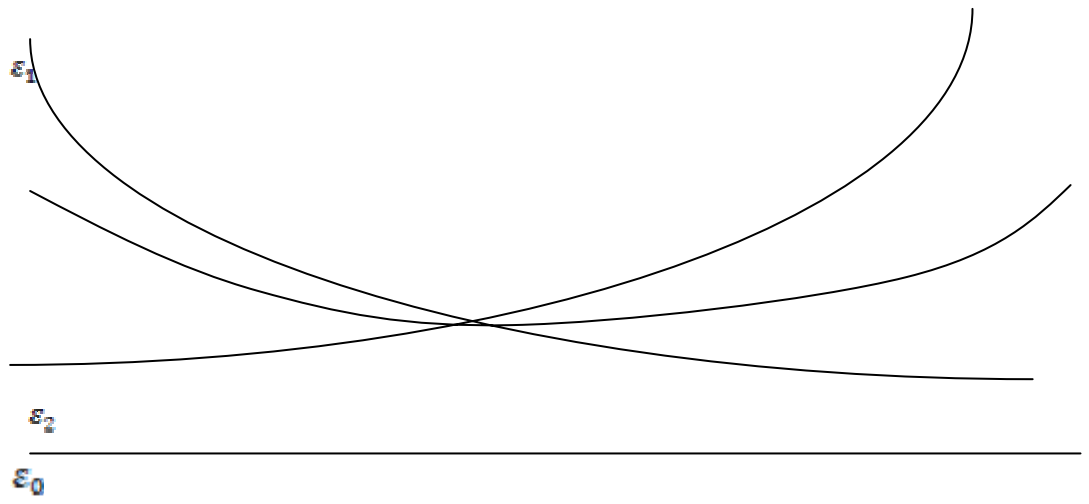
9.Case Study

9.1. Το Υπερβολικό Επίπεδο

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο αρχικά να υπενθυμίσουμε λίγα πράγματα για την Υπερβολική Γεωμετρία. Θυμίζουμε πως η Υπερβολική Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία που θεωρεί ως δεδομένη την ύπαρξη περισσότερων από μίας παραλλήλων γραμμών ως προς μία δοσμένη γραμμή που διέρχονται από δοθέν σημείο εκτός της γραμμής αυτής.

Ο όρος γραμμή είναι ένας απροσδιόριστος όρος και ο μόνος τρόπος να το προσεγγίσουμε είναι μέσω του σχήματος το οποίο τακτοποιεί τα δεδομένα και δίνει μία οντολογική μορφή στον απροσδιόριστο αυτό όρο στο πνεύμα των όσων αναφέρει και ο Netz (2003).

Δεχόμενοι πως υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες από δεδομένο σημείο δεν μπορούμε παρά να δεχτούμε πως υπάρχουν τελικά άπειρες παράλληλες[44] (βλέπε και σχήμα). Η απειρία των παραλλήλων που διέρχονται από συγκεκριμένο σημείο ως προς ευθεία ξένη προς το σημείο αυτό θα πρέπει να είναι άπειρες είναι ένα συμπέρασμα που θα έχει και

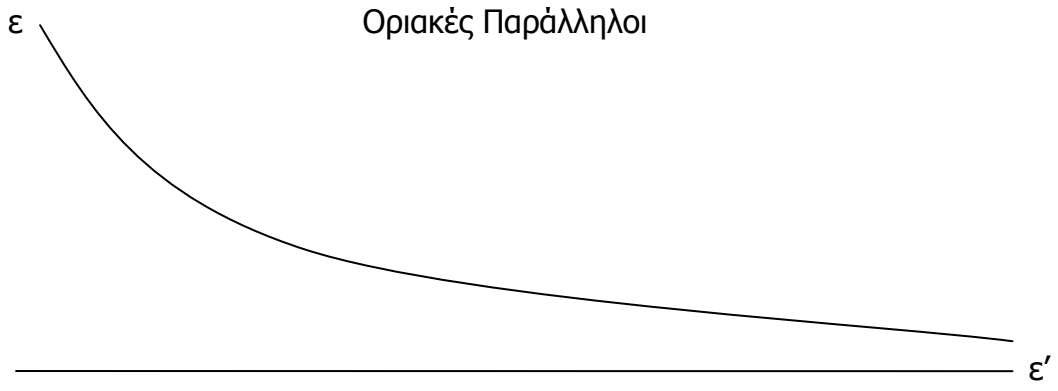


Σχήμα 9.1.1.

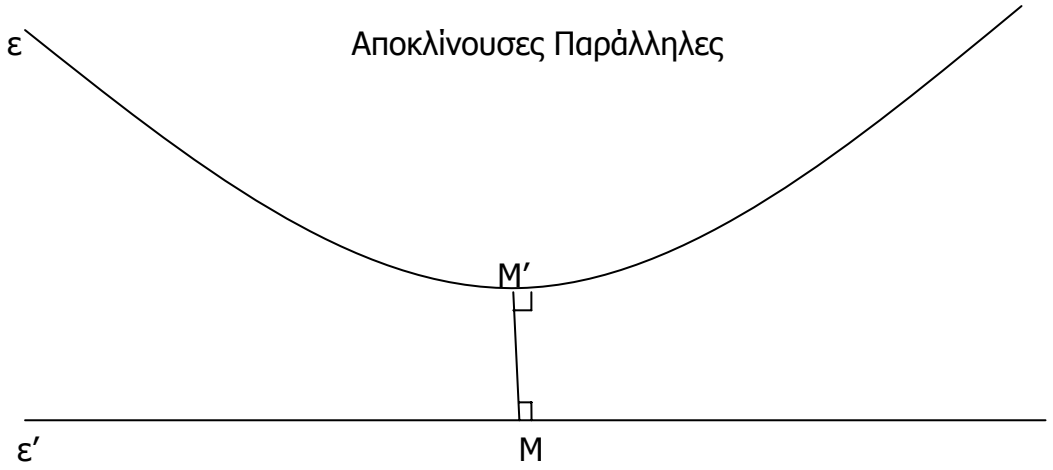
[44] Με τον συνήθη ορισμό της παραλληλίας δύο ευθειών ως δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο.

εφαρμογές στη συνέχεια προκύπτει άμεσα από τα αξιώματα και δεν επιδέχεται αμφισβήτησης. Ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε παράλληλες βρίσκονται άπειρο πλήθος διαφορετικών γραμμών που καταλήγουν να θεωρούνται παράλληλες πρώτα διαισθητικά και έπειτα σε αυστηρό μαθηματικολογικό επίπεδο με χρήση της Συνέχειας των γραμμών και του Αξιώματος του Μεταξύ του Pasch. Σε διαφορετική περίπτωση θα δεχόμασταν την ύπαρξη διαφορετικών γραμμών που θα είχαν δύο κοινά σημεία. Τα δεδομένα αυτά είναι πολύ εύκολα εικονοποιήσιμα και μπορούν να εσωτερικοποιηθούν μέσω του παραπάνω σχήματος.

Η απειρία των παραλλήλων είναι σχεδόν μη αποδεκτή αφού είναι σίγουρα μη προσοδοφόρα στην διαδικασία ανάπτυξης της Θεωρίας. Η ύπαρξη άπειρων παραλλήλων δεν είναι βολική για την πρόοδο της θεωρίας καθώς, δεν μπορούμε να αποδεχτούμε πως όλες οι παράλληλες είναι ισοδύναμες και κατά κάποιο τρόπο ως προς τις ιδιότητες ισοδύναμες. Αυτό που θέλουμε, είναι κάποιο κατάλληλο κριτήριο που να καθορίζει ποιες είναι οι «καλές» και ποιες οι «κακές» παράλληλες ή τουλάχιστον να τις ιεραρχεί σε βαθμό που να ωθεί τη θεωρία μας σε κατευθύνσεις ανάπτυξης. Επιπροσθέτως, αν μέναμε σε ένα



Σχήμα 9.1.2.



Σχήμα 9.1.3.

γνωστικό μοντέλο που θα μιλούσε απλώς για παράλληλες, δεν θα μπορούσαμε να έχουμε την παραλληλία ως μία σχέση ισοδυναμίας. Οπότε θα πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να τις κατατάξουμε κατάλληλα.

Έτσι θα γίνει η εισαγωγή της έννοιας της Οριακής Παραλλήλου την οποία τελικά θα αποκαλούμε απλώς Παράλληλο και η έννοια των Αποκλινουσών παραλλήλων.

Οι Οριακές παράλληλες είναι οι παράλληλες που σε κανένα τους σημείο δεν δέχονται κοινή κάθετο με την παράλληλό τους. Οι υπόλοιπες παράλληλες θα ονομάζονται Αποκλίνουσες διότι όσο απομακρύνεται κανείς από την κοινή τους κάθετο[45] η απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων αυξάνει. Οι Οριακές παράλληλες αντίθετα, μονόπλευρα πλησιάζουν σε οριακό σημείο μεταξύ τους. Άρα, μπορούμε σε αισθητικό αναπαραστασιακό επίπεδο να μιλάμε για κατεύθυνση της παραλληλίας και να βλέπουμε τις οριακές παραλλήλους ως ημιευθείες. Για την έννοια των Οριακών Παραλλήλων έχουμε μία κατά Duval Ασυνάρτητη κατανόηση καθώς δεν επαρκεί ο λεκτικός ορισμός αλλά ούτε και μόνο η εικόνα για να έχουμε πλήρη και λειτουργική κατανόηση της έννοιας. Ιδιαίτερα δε αφού η εικόνα δεν εισάγεται μέσα σε ένα μοντέλο Υπερβολικής

[45] Η οποία αποδεικνύεται πως είναι και μοναδική. Ουσιαστικά ευθείες που δέχονται περισσότερες από μία κοινές καθέτους δεν είναι παράλληλες.

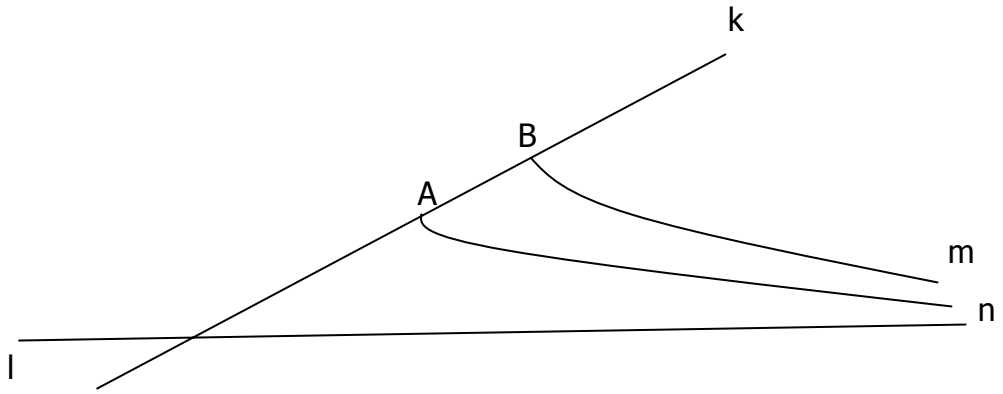
Γεωμετρίας, αλλά μέσω μίας εικονοποίησης του υπερβολικού μοντέλου η οποία αδυνατεί να καλύψει τις ανάγκες του μοντέλου.

Η δημιουργία των σχημάτων έγκειται σε μία διαδικασία συνδυασμένης οπτικοποίησης και ακολουθίας αφαιρετικών κατασκευών όπως άλλωστε προβλέπει και η γνωστική θεωρία του Duval. Παράλληλα, η ύπαρξη αυστηρού μαθηματικού υπόβαθρου που ελέγχει και κατευθύνει το διάγραμμα επιτρέπει στην έννοια και την εικόνα να υπάρχουν ως μία οντότητα (Fishbein) και να συναποτελούν τα δεδομένα Γεωμετρικά Αντικείμενα.

Στον αναπαραστασιακό χώρο του ψευδο - Υπερβολικού Επιπέδου, στο πνεύμα του Piaget, έχουμε την παρουσία ταυτόχρονα του αντιληπτικού αλλά και του αξιωματικού παράγοντα. Η όρασή μας, μας επιτρέπει την εισαγωγή της ασύμπτωτης και η αξιωματική θεωρία την ύπαρξη περισσότερων της μίας παραλλήλων. Η ομοιογένεια της έννοιας των παραλλήλων και του σχήματος αυτής είναι περισσότερο από προφανής.

Στο πλαίσιο του συστήματος των σταδίων του van Hiele θα πρέπει να αναγνωρίσουμε πως κινούμαστε από το 3^{ο} στάδιο και αργότερα. Η γλώσσα που απαιτείται απαιτεί αφηρημένους χειρισμούς και σκέψεις. Η γλώσσα είναι και απαιτείται να είναι καθαρά επιστημονική και αυστηρή.

Έτσι έχοντας δύο τεμνόμενες ευθείες μπορούμε από οποιαδήποτε σημείο της μίας να φέρνουμε δύο[46] οριακές παραλλήλους και μία αποκλίνουσα. Η σχέση τότε της οριακής παραλληλίας και της αποκλίνουσας παραλληλίας είναι σχέσης ισοδυναμίας.



Σχήμα 9.1.4

[46] Μία σε κάθε κατεύθυνση

Σημειώνουμε πως το σχήμα μπορεί να μεγεθυνθεί απεριόριστα για να γίνουν οι ισχυρισμοί που προηγήθηκαν, ακόμα πιο προφανείς και προσεγγίσιμοι μέσω των αισθήσεων. Μάλιστα, η απόσταση μίας ευθείας από μία αποκλίνουσα παράλληλη αυτής μπορεί να αποδειχθεί εύκολα πως τελικά απειρίζεται, αλλά κάτι τέτοιο δεν αποτελεί σημαντικό σημείο για την παρούσα διπλωματική.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να επισημάνουμε πως η ευθεία είναι ένας απροσδιόριστος όρος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει και προσεγγίζεται μόνο με διάμεσο το σχήμα. Είναι προφανές πως ο ορισμός της ευθείας που συναντάμε στην Ευκλείδεια παράδοση «*ευθεία είναι μία γραμμή που κείται εξίσου προς τα σημεία της*» δεν είναι ούτε ακριβής αλλά ούτε και επαρκής στα πλαίσια της θεωρίας της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Για τον λόγο αυτό έχουμε καθιερώσει την χρήση του όρου γραμμή και όχι για ευθεία στην λογική της εύρεσης κατάλληλου ονόματος για το αντικείμενο – έννοια που εισαγάγουμε.

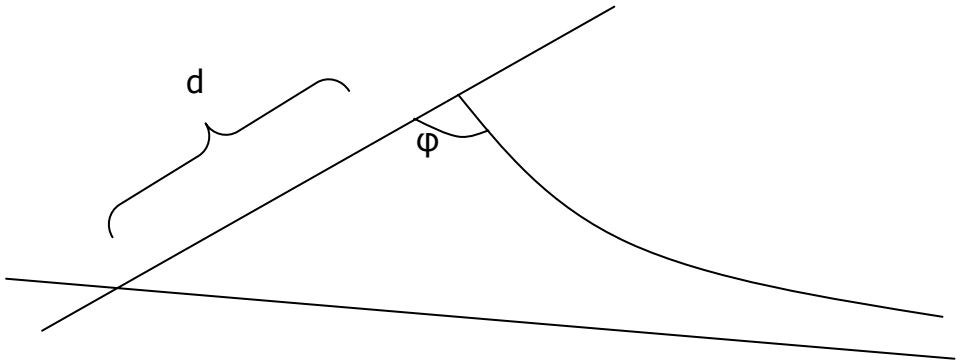
Επισημαίνεται τέλος, ένα αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε στην μελέτη των Ασυμπτωτικών τριγώνων. Στα τρίγωνα της Υπερβολικής Γεωμετρίας ισχύει το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας.

9.2.Τα Ασυμπτωτικά Τρίγωνα

Η παρατήρηση του σχήματος μπορεί να οδηγήσει στην απομόνωση κομματιών του σχήματος ή στην προώθηση αυτού σε δρόμους εμπλουτισμού των εννοιών ή της δημιουργίας νέων. Οι κατασκευαστικές ακολουθίες που έχουμε χρησιμοποιήσει στο παρελθόν μπορούν να μας κατευθύνουν σε άλλες μελλοντικές κατασκευές. Το γεγονός πως κάποιες έννοιες, που με επιτυχία είχαν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν, στα νέα δεδομένα παρουσιάζουν αδυναμία κάλυψης των αναγκών που τότε κάλυπταν, μας ωθούν στην δημιουργία νέων που θα μας προσφέρουν αντίστοιχες δυνατότητες. Μία τέτοια έννοια θα είναι το Ασυμπτωτικό τρίγωνο που θα έρθει να αντικαταστήσει την λειτουργική θέση του συνήθους τριγώνου.

Δύο οριακά παράλληλες και ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του στις δύο αυτές παράλληλες ονομάζεται απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο.

Στην Υπερβολική Γεωμετρία υπάρχει η έννοια του συνήθους τριγώνου αλλά αδυνατεί να εξυπηρετήσει τον ρόλο που παίζει στην Ευκλείδεια. Ο ρόλος του τριγώνου ως έννοια στην συνήθη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι να εισάγει μέτρηση. Στην Υπερβολική Γεωμετρία όμως στο σύνηθες τρίγωνο καταστρέφονται οι κλάσεις ισοδυναμίας των ίσων τριγώνων καθώς η έννοια της ισότητας ταυτίζεται με την έννοια της ομοιότητας. Άρα, για να θέσουμε το ζήτημα χρησιμοποιώντας μόνο την οπτική αντίληψη, οποιαδήποτε μεγέθυνση ενός τριγώνου είναι ισοδύναμη με το αρχικό και άρα δεν μπορούμε να εισαγάγουμε μέτρηση στον χώρο μας μέσω του συνήθους τριγώνου.



Σχήμα 9.2.1.

Έτσι ψάχνουμε μία έννοια - ένα σχήμα το οποίο να έχει σταθερά συστατικά ώστε να ορίσουμε μία σχέση ισότητας η οποία και θα μας επιτρέπει να εισάγουμε μέτρηση στο χώρο. Παρατηρώντας το σχήμα που προκύπτει ανάμεσα σε δύο οριακές παράλληλες και μία τέμνουσα αυτών (σχήμα 10.6) βλέπουμε πως το σχήμα αυτό έχει δύο σταθερά μεγέθη τα οποία μπορούν να ορίσουν μία σχέση ισότητας στην κλάση των σχημάτων αυτών. Τα στοιχεία αυτά είναι η γωνία φ η οποία και αποκαλείται γωνία παραλληλίας και το μήκος d της πεπερασμένης πλευράς[47]. Κατόπιν αποδεικνύεται πως υπάρχει μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα στο μήκος d και της γωνίας παραλληλίας φ. Άρα η ισότητα δύο Ασυμπτωτικών Τριγώνων συμπυκνώνεται στην ισότητα των μη πεπερασμένων πλευρών και μόνο ή των γωνιών και μόνο. Τα σχήματα αυτά αποκτούν εξαιτίας της χρήσης τους εννοιολογικό υπόβαθρο και αποκαλούνται Ασυμπτωτικά Τρίγωνα.

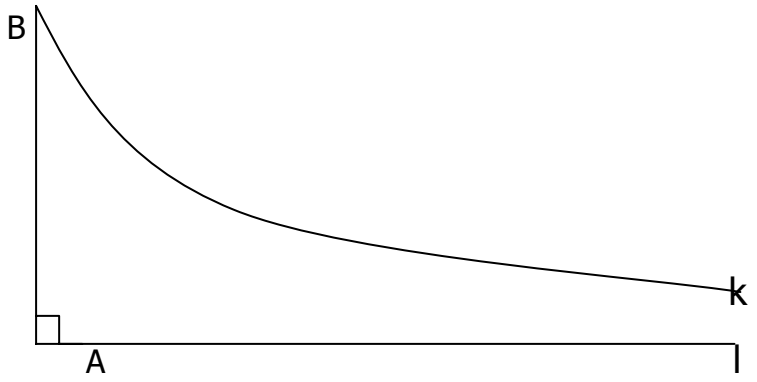
Ήδη από την όλη διαδικασία της ανακάλυψης και κατασκευής του, καταλαβαίνουμε πως το Ασυμπτωτικό τρίγωνο είναι τόσο μία εννοιολογική δομή όσο και μία εικόνα, ένα ερέθισμα της οπτικής αντίληψης. Αποτελεί δηλαδή αυτό που ο Fischbein αποκαλεί υβριδικό τρίτο είδος, δηλαδή ούτε απλά μία εικόνα αλλά ούτε και έννοια. Το Ασυμπτωτικό τρίγωνο περιέχει και εικονικές αλλά και εννοιολογικές ποιότητες.

Ξεκάθαρα, η διαδικασία της κατασκευής του τριγώνου μας παρέχει εκτεταμένα δεδομένα για την έννοια που εισάγουμε σε μία ακολουθητική μορφή κατά τον Duval. Η αισθητική κατανόηση της έννοιας είναι δεδομένη μέσω των κοινών καθέτων και την μετουσίωσή τους σε σχήμα, ενώ η εικόνα και η έννοια του Ασυμπτωτικού τριγώνου έχουν γίνει ένα και θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για μία οριακή σχέση ταύτισης. Το γεωμετρικό αντικείμενο (τρίγωνο) εμπεριέχει την έννοια και η έννοια άμεσα αποδίδει το αντικείμενο μέσω της αναπαράστασης αυτού.

[47] Αποδεικνύεται πως αν δύο ασυμπτωτικά τρίγωνα έχουν ίσες μία προς μία δύο γωνίες των πεπερασμένων πλευρών τότε και το άλλο ζεύγος των γωνιών που είναι προσκείμενες στην πεπερασμένη πλευρά θα είναι ίσες

Η αλληλεπίδραση του ορισμού με το αντικείμενο είναι προφανής. Το αντικείμενο που ονομάζουμε τρίγωνο[48], δεν έχει τρεις κορυφές σαν αποτέλεσμα του ορισμού και παράλληλα το σχήμα ρητά υποδεικνύει πως δεν πρόκειται για ένα σύνηθες τρίγωνο αλλά για κάτι που στην οπτική μας αντίληψη μοιάζει με τρίγωνο[49]. Το Ασυμπτωτικό τρίγωνο, όπως έχουμε προαναφέρει, σε επίπεδο εκτεταμένης θεωρητικής μελέτης, είναι για την υπερβολική γεωμετρία, ότι και το σύνηθες τρίγωνο για την Ευκλείδεια. Για να γίνουμε ακόμα σαφέστεροι, αποτελεί τον δομικό λίθο του επιπέδου και με βάση αυτό το «σχήμα» μπορούμε να το αναδομήσουμε και κατόπιν να το μελετήσουμε.

Στην διαδικασία της μελέτης θα προσπαθήσουμε αργά ή γρήγορα να εξετάσουμε πως συμπεριφέρονται έννοιες και στοιχεία που ήταν κεντρικά στην προηγούμενα αναπτυγμένη πρακτική. Έτσι, θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο Ασυμπτωτικό Τρίγωνο. Στην εικονοποιημένη μορφή είναι μία κατασκευή προφανής και ευλογοφανής (βλέπε σχήμα 10.7).

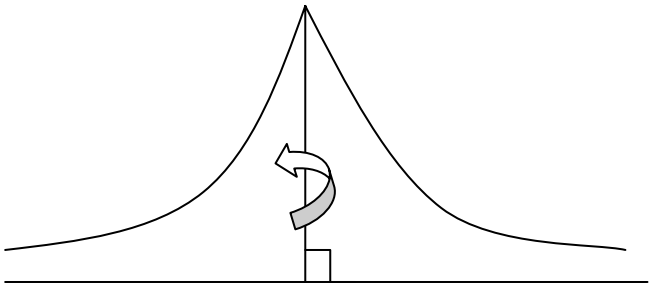


Σχήμα 9.2.2.

Τότε μπορούμε αυτό το Τρίγωνο να το στρέψουμε 180° περί την πεπερασμένη πλευρά ώστε να προκύψει αυτό που θα αποκαλούμε Διπλά Ασυμπτωτικό τρίγωνο. Σε αυστηρά μαθηματικά θα μπορούσαμε να πούμε πως:

[48] Στην συνήθη πρακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

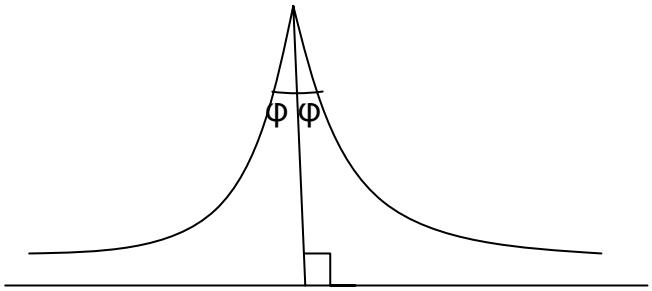
[49] Βλέπε και νόμους της σχολής Gelstad



Σχήμα 9.2.3

Ένα διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο αποτελείται από δύο τεμνόμενες ημιευθείες και την μοναδική τους κοινή οριακή παράλληλο.

Παρατηρούμε πως η προηγούμενη σχέση γωνίας παραλληλίας με το Απλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο μπορεί να διατηρηθεί κατά προφανή και σαφή τρόπο και στο Διπλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο.



Σχήμα 9.2.4.

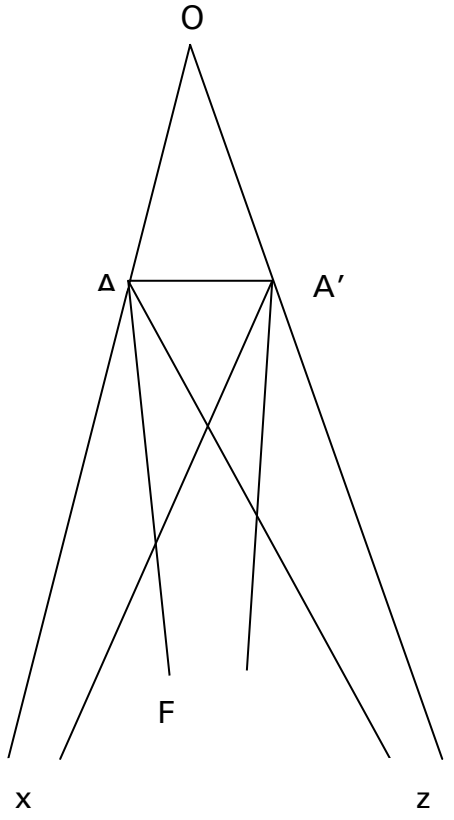
Προφανώς την θέση της προηγούμενης γωνίας παραλληλίας παίρνει η διπλάσια αυτής που σχηματίζεται μετά την στροφή. Αυτή θα είναι χαρακτηριστική του κάθε τριγώνου ώστε να το χαρακτηρίζει μονοσήμαντα[50]. Η στροφή είναι το βασικό σημείο και η βασική λειτουργία – διαδικασία που απλοποιεί την πρακτική, αλλά τα ερωτήματα του κατά πόσο μπορεί το αρχικό τρίγωνο να διπλασιαστεί ή έννοια του τριγώνου να στραφεί παραμένουν.

[50] Κάθε δύο Διπλά Ασυμπτωτικά Τρίγωνα ταυτίζονται όταν οι μη παράλληλες πλευρές τους σχηματίζουν ίσες γωνίες

Είναι σαφές πως το σχήμα μπορεί να στραφεί[51] και η έννοια που δεν αποτελεί αντικείμενο της αισθητής πραγματικότητας να διπλασιαστεί. Το γεγονός λοιπόν είναι πως μόνο η μία οπτική γωνία (εννοιολογική ή εικονική) δεν επαρκεί ώστε να κατοχυρωθεί η διαδικασία της κατασκευής του Διπλά Ασυμπτωτικά Τριγώνου.

Αυτή είναι βέβαια μία πιο εικονοκεκτρική απόδειξη σε σχέση με μία βασισμένη σε πιο αυστηρά μαθηματικά. Μία τέτοια απόδειξη θα είχε ως στόχο απλώς να αποδείξει πως με βάση δύο δοσμένες γραμμές υπάρχει μία μοναδική κοινή τους παράλληλος και αυτό θα αποδείξουμε αμέσως.

Να κατασκευαστεί κοινή οριακή παράλληλος προς δύο τεμνόμενες ημιευθείες.

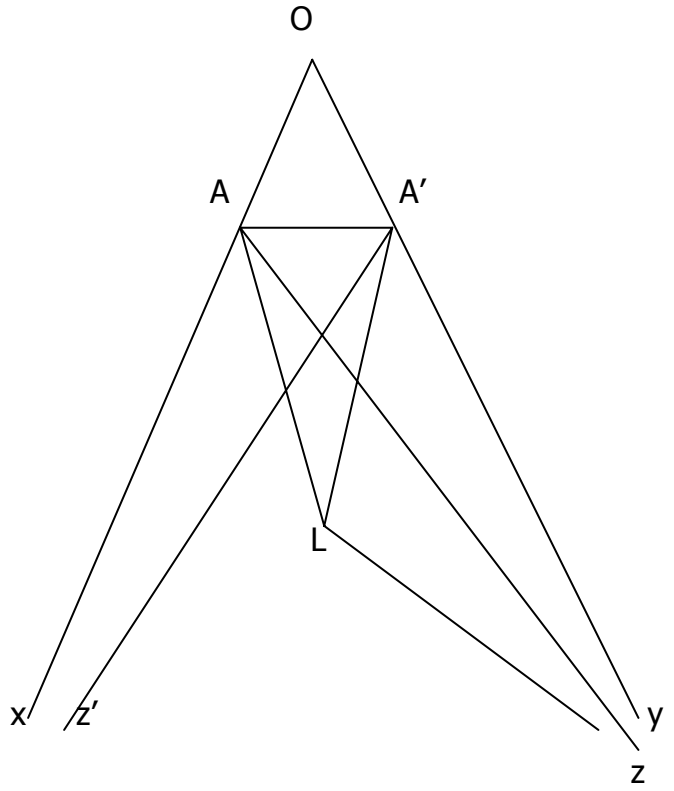


Αν xOy είναι η γωνία που σχηματίζουν οι δύο τεμνόμενες ημιευθείες θεωρούμε σημεία A και A′ τέτοια ώστε OA=OA′. Από τα σημεία A και A′ θεωρούμε τις Οριακές Παράλληλες Az & A′z′ προς τις Oy & Ox αντίστοιχα. Στις γωνίες yA′z′ & xAz θεωρούμε τις διχοτόμους αυτών A′F′ & AF. Τα απλά Ασυμπτωτικά Τρίγωνα OAx & OA′y είναι ίσα καθώς έχουν μία γωνία κοινή (xOy) και μία πεπερασμένη πλευρά ίση (OA = OA′). Από την ισότητα των δύο τριγώνων έχουμε την ισότητα των γωνιών OAz = OA′z′. Από το ισοσκελές τρίγωνο AOA′ έχουμε πως οι γωνίες OAA′ και OA′A είναι ίσες οπότε οι γωνίες παραλληλίας των δύο τριγώνων είναι ίσες.

[51] Σε πολλές εφαρμογές στρέφουμε Γεωμετρικά αντικείμενα, όπως στην κατασκευή στερεών εκ περιστροφής

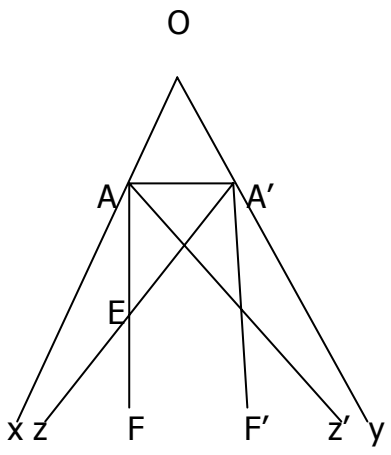
Τελικά έχουμε τις εξής ισότητες γωνιών: xAz = yA′z′, yA′F′=F′A′z′=xAF=FAz και OAA′=OA′A και άρα zAA′=z′A′A

Οι ημιευθείες AF & A′F′ δεν μπορούν να συναντώνται. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμός αυτό με χρήση της εις άτοπο απαγωγής. Έστω λοιπόν πως είχαν κοινό σημείο το L. Τότε φέρνω την οριακή παράλληλο στην Oy από το L. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι γωνίες LAA′ & LA′A είναι ίσες. Οπότε το τρίγωνο LAA′ είναι ισοσκελές και οι LA & LA′ είναι ίσες. Από την σύγκριση των απλά ασυμπτωτικών τριγώνων yAL και yLA′ (LA = LA′, yAL = yA′L) τα οποία είναι ίσα τελικά προκύπτει πως yLA = yLA′ γεγονός άτοπο αφού τα A και A′ δεν ταυτίζονται.



Σχήμα 9.2.6

Τώρα θα αποδείξουμε πως οι AF & A′F′ δεν μπορεί να είναι οριακά παράλληλες. Έστω, λοιπόν, πως είναι οριακά παράλληλες. Τότε σχηματίζονται απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα. Από αυτά συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEx & F′A′EF

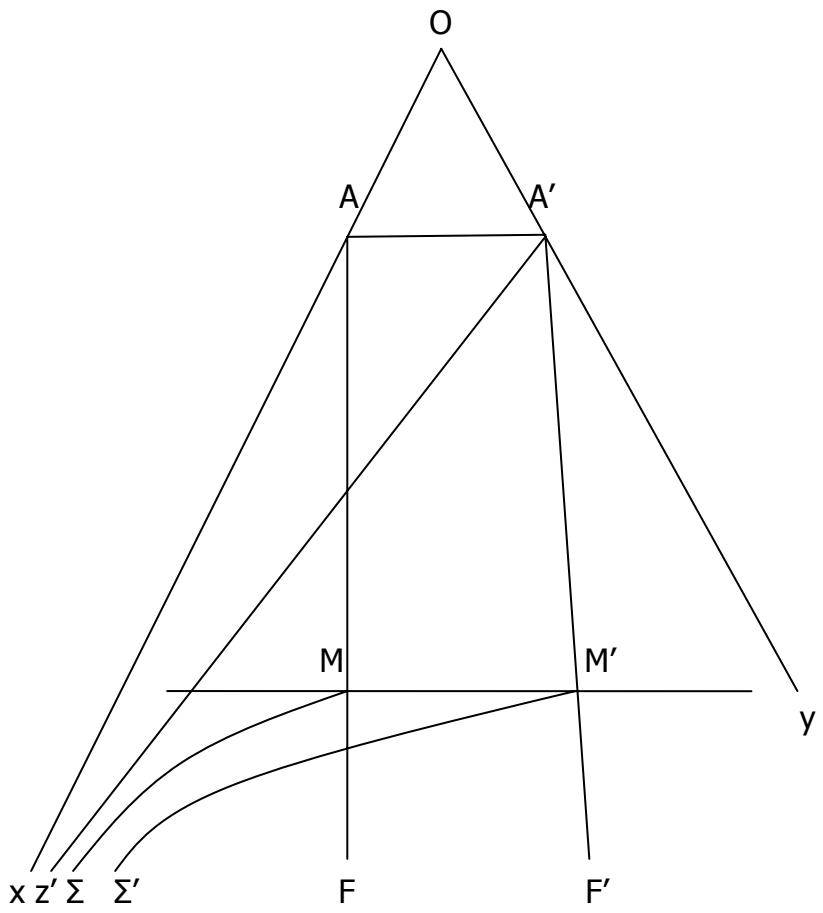


Σχήμα 9.2.7.

στα οποία παρατηρούμε πως οι γωνίες ΕΑx & ΕΑ′F′ είναι ίσες. Οπότε χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα περί της ένα προς ένα και επί αντιστοιχίας μεταξύ γωνίας παραλληλίας και πεπερασμένης πλευράς έχουμε πως ΑΕ=Α′Ε. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι τότε θα ίσχυε ΑΕΕ′ ισοσκελές και άρα ΕΑΑ′=ΕΑ′Α ενώ ΕΑ′Α=ΕΑz′.

Αφού λοιπόν οι διχοτόμοι δεν μπορούν να έχουν σημείο τομής αλλά ούτε και αν είναι οριακά παράλληλες θα δέχονται κοινή κάθετο. Η κάθετος αυτή θα είναι και μοναδική.

Οι κοινή κάθετος των ΑF & Α′F′ είναι η ζητούμενη κοινή παράλληλος. Πράγματι αν δεν ήταν θα μπορούσαμε να φέρουμε οριακές παραλλήλους ΜΣ και Μ′Σ′ προς την Ox όπως φαίνεται στο σχήμα 10.11.



Σχήμα 9.2.8.

Τότε από την σύγκριση των τριγώνων ΑΜΣ και Α′Μ′Σ′ έχουμε Μ′Α′z′=ΜΑx και άρα ΑΜ=Α′Μ′. Άρα και οι γωνίες Α′Μ′Σ′ και ΑΜΣ είναι ίσες. Οπότε, Σ′Μ′Μ=ΣΜx γεγονός άτοπο από το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας.

Η απόδειξη αυτή είναι πλήρης και σαφής ενώ παράλληλα μπορούμε εύκολα να ακολουθήσουμε την λογική της μέσω του διαγράμματος. Η αίσθηση πληρότητας όμως θα χανόταν πλήρως αν από την απόδειξη αυτή αφαιρούσαμε τα διαγράμματα. Θα μιλούσαμε πλέον για στείρους βερμπαλισμούς, το νόημα των οποίων θα μπορούσαν να καταλάβουν ελάχιστοι και ακόμη περισσότερο αυτοί οι ελάχιστοι ίσως να δημιουργούσαν ένα νοητό διάγραμμα μέσω της φαντασίας τους για να αποδώσουν νόημα.

Η πρώτη προσέγγιση αφορά κυρίως μία απόδειξη που στοχεύει στη οπτική αντίληψη και λιγότερο στους φορμαλισμούς. Η δεύτερη με την σειρά της στοχεύει σε πιο αυστηρά μαθηματικά.

Στην πιο φορμαλιστική προσέγγιση αξίζει να επισημάνουμε την άποψη της Mariotti για την χρήση της εις άτοπο απαγωγής. Η Mariotti προτείνει την χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου με στόχο να φτάσουν οι μαθητές να καταλάβουν σαφώς την σχέση του διαγράμματος με τις λογικές ακολουθίες επιχειρημάτων. Δηλαδή θεωρεί πως η μέθοδος αυτή φέρνει τους μαθητές αντιμέτωπους με διαφορετικά εικονικά δεδομένα από αυτά που η θεωρία επιβάλει. Άρα τελικά θα μάθουν να χρησιμοποιούν παραγωγικά το σχήμα αλλά να αποφεύγουν παράλληλα της παρανοήσεις σχετικά με το τι μπορεί ένα σχήμα να μας προσφέρει.

Παρατηρούμε λοιπόν πως και στις δύο περιπτώσεις το διάγραμμα είναι βασικό και αναπόσπαστο κομμάτι αυτών όπως και είχαμε άλλωστε προβλέψει. Είναι όμως αντίστοιχα παραδεκτό πως και οι δύο αποδείξεις απαιτούν ένα σημαντικό ποσό εννοιολογικών ποιοτήτων χωρίς το οποίο δεν θα μπορούσαμε να έχουμε τις αντίστοιχες αποδείξεις.

9.3 Παρατηρήσεις

Στην προηγούμενη πρακτική έγινε προσπάθεια να ακολουθήσουμε μία λογική που να προσεγγίζει, ως προς την σκέψη, την συνήθη πρακτική της διδασκόμενης στην εκπαίδευση γεωμετρίας. Σε μία τέτοια πρακτική καλούμαστε να φέρουμε εις πέρας διάφορες επιμέρους κατασκευές, ώστε να οπτικοποιήσουμε την κατάσταση σε αναλογία με τα διαγράμματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Διαβάζοντας την βασική αρχή της Υπερβολικής Γεωμετρίας περιμένουμε, σε κάποιο βαθμό να κατανοήσουμε την πρόταση: από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται περισσότερες από μία κάθετες. Ακολούθως, θα κατανοήσουμε την αλήθεια της σε σχέση με ένα διάγραμμα που θα δημιουργήσουμε κατάλληλα[52] και τέλος η πρακτική μας αναμένεται να προχωρήσει σε κατευθύνσεις μετάβασης από την μία πρόταση στην άλλη με έγκυρους λογικούς μετασχηματισμούς.

Υπάρχει όμως μία πολύ ουσιώδης και σαφής διαφορά. Το σύνηθες Ευκλείδειο επίπεδο αποτελεί μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας την στιγμή που το επίπεδο που χρησιμοποιήσαμε στην πρακτική μας δεν είναι μοντέλο της θεωρίας της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Στις μέχρι τώρα πρακτικές που εμφανίστηκαν στην πορεία της διπλωματικής όλα τα σχήματα ήταν τοποθετημένα μέσα σε ένα μοντέλο άρα τα σχήματα ήταν σαφέστατα και πλήρη φανερώνοντας την αλήθεια της θεωρίας και ακολουθώντας πλήρως τις επιταγές αυτής. Ότι βλέπαμε δηλαδή πάνω στο σχήμα ήταν αυτό που είχαμε.

Τα διαγράμματα που δημιουργήσαμε ασχολούμενοι με τα Ασυμπτωτικά Τρίγωνα δεν μπορούν να ενταχθούν σε ένα μοντέλο ως έχουν. Προφανώς υπάρχει μοντελοποίηση των διαγραμμάτων αυτών αλλά το ερώτημα παραμένει: Ακόμα και σε αυτή τη μορφή της νοητικά κατευθυνόμενης εικόνας, μπορεί ένα διάγραμμα να λειτουργήσει υπέρ της πρακτικής. Εκεί εισέρχεται η ερμηνεία που αποδίδουμε στο διάγραμμα και μας λύνει τα χέρια.

Στην διαδικασία της άσκησης αυτών των ενεργειών, το άτομο που εμπλέκεται είναι δεδομένο πως θα κάνει χρήση ενός σημαντικού ποσού

[52] Αλλά όχι μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας

προσωπικής ή μη εμπειρίας. Έχοντας, μία συνειδητή εμπειρία το λογικό είναι κάποιος να έχει αποδώσει κάποιες ποιότητες στην εμπειρία αυτή. Αυτό θα μπορούσαμε να το αποδώσουμε με τον όρο Φαινομενολογία της εμπειρίας. Έχουμε δηλαδή με άλλα λόγια, αναπτύξει μία επιστημονική παρατήρηση των γεγονότων ή δεδομένων. Έτσι μπορούμε ακόμα και γνωρίζοντας πως δύο γραμμές δεν είναι παράλληλες να τις αντιμετωπίζουμε εντός των πλαισίων του διαγράμματος ως τέτοιες. Η ανάπτυξη τέτοιων δεξιοτήτων σηματοδοτεί αναπτυγμένη αντίληψη και ώριμη σκέψη.

Προφανώς τέτοιες δεξιότητες αντιστοιχούν σε προχωρημένο στάδιο γεωμετρικής σκέψης (van Hiele), εμπεριέχουν στοιχεία που τονίζουν πως τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι άμεσα προσβάσιμα στην αντίληψη ως αληθινά ή φυσικά αντικείμενα (Duval) και απαιτούν την ύπαρξη αυστηρού συστήματος γνώσης (Fishbein).

Θα χρειαστεί να εξετάσουμε κάπως βαθύτερα την έννοια της φαινομενολογίας. Θα λέμε ότι δύο περιπτώσεις (διαγράμματος) έχουν την ίδια φαινομενολογία, όταν, σε ατομικό επίπεδο, αποδίδουν τις ίδιες ποιότητες στον ασχολούμενο με αυτές. Άρα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως τα τρίγωνα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχουν ανάλογα συγγενείς φαινομενολογίες με τα τρίγωνα της Υπερβολικής Γεωμετρίας (απλά ή και ασυμπτωτικά).

Πολύ δε περισσότερο θα μπορούμε να θεωρούμε πως ένα διάγραμμα που ανήκει σε ένα μοντέλο της θεωρίας θα έχει την ίδια φαινομενολογία με ένα νοητικά κατευθυνόμενο διάγραμμα όπως αυτά που δημιουργήσαμε στην προηγούμενη πρακτική.

Στον τομέα της εμπειρίας, όπως και σε αυτόν της νόησης η κατανόηση των εμπειριών ή αισθήσεων όπως και αυτή των νοητικών σκέψεων μπορούν να έχουν μία αναπτυγμένη φαινομενολογία. Έτσι, τα διαγράμματα όπως και οι έννοιες μπορούν να έχουν μία δομημένη φαινομενολογική αντίληψη, η οποία μάλιστα να μην είναι ευδιάκριτα διαφορετική από τον ένα τομέα στον άλλο. Τα διαγράμματα δηλαδή που κατασκευάσαμε στο ψευδο – Υπερβολικό επίπεδο μπορούν να κάνουν χρήση της επιστημονικά εννοιολογικά δομημένης φαινομενολογίας που έχουμε αναπτύξει.

Η έννοια της φαινομενολογίας μας παρέχει ευρεία μέσα ώστε να ταξινομήσουμε δύο διαφορετικές διαδικασίες αιτιολόγησης, σε ένα επίπεδο πρώτης όψεως. Δύο διαδικασίες αιτιολόγησης που έχουν την ίδια ή παρόμοια φαινομενολογία θα θεωρούνται εκ πρώτης όψεως ως συμβολισμοί της ίδιας ή μίας παρόμοιας διαδικασίας αιτιολόγησης. Ένας τέτοιος διαχωρισμός είναι ανέφικτος. Θα μπορούσαν να υπάρχουν επιπλέον όροι (όπως η μορφή ευθέως ή αντιστρόφως και άλλοι) που μπορεί να είναι αρκετά ισχυροί ώστε να μας ωθούν να διαφοροποιήσουμε τις αρχικές μας θέσεις σχετικά με την κατηγοριοποίηση αυτών. Μία κατάταξη στην βάση της φαινομενολογίας θα είναι αρκετά ασαφής.

Οι εμπειρίες μας παίζουν το ρόλο του οδηγού στην πρακτική που αναπτύσσουμε, αλλά οι εμπειρίες από μόνες τους δε θα σήμαιναν τίποτα χωρίς το ενδιάμεσο στάδιο της ερμηνείας. Το τι μπορούμε να χαρακτηρίζουμε ως εμπειρία δεν είναι όμως, πλήρως συγκεκριμενοποιημένο. Θα μπορούσαμε να θεωρούμε ως εμπειρικά τα δεδομένα που μας έχουν προκύψει από την ενασχόληση μας με νοητικά κατασκευάσματα, με νοητικές οντότητες και γενικότερα με αντικείμενα που δεν απαντώνται στη σφαίρα της πραγματικότητας. Η απάντηση θα πρέπει να είναι πως ναι.

Όπως διαπιστώνεται εύκολα ανατρέχοντας, για παράδειγμα στα μοντέλα, της Υπερβολικής Γεωμετρίας μπορεί να υπάρχουν τριάδες μη τεμνόμενων ευθειών που όμως δεν δέχονται κοινή τέμνουσα.

Για αυτά τα δεδομένα διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Η μία αφορά οπτικά δεδομένα και στοιχεία, όπως για παράδειγμα τα διαγράμματα και τα σχήματα και σε δεύτερο πλάνο έχουμε την εμπειρία της απόδοσης συγκεκριμένων ισχυρισμών, που εμφανίζονται σε ρητή μορφή στο κείμενο και παράλληλα οι ισχυρισμοί αυτοί είναι αληθείς και στην οπτική προσέγγιση μέσω του σχήματος. Θα μπορούσαμε όμως να διακρίνουμε τρία ακόμα στοιχεία.

Πρώτα, το σχήμα μας παρέχει ένα αίσθημα προσβασιμότητας: Ο ενασχολούμενος με γεωμετρικές έννοιες και ποσά φαίνεται να κατανοεί κάθε διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων και τα επιχειρήματα ως μία ολότητα. Τα επιχειρήματα στην γεωμετρία είναι μικρά και η ακολουθία της σκέψης είναι προφανής. Η αναφορά σε ειδικές γνώσεις είναι πολύ μικρή. Τα στοιχεία που

απαιτούν ενδελεχή έρευνα είναι πολύ λίγα ή περνάνε απαρατήρητα ως ασήμαντα. Άρα, η ροή της σκέψης δεν μπορεί να παρεμποδιστεί ή να διακοπεί από αντίστοιχες δυσκολίες. Κανείς δεν θα προσπαθήσει να εξετάσει αν όντως οι θεωρούμενες ως παράλληλες θα τμηθούν σε κάποιο σημείο γιατί αυτό στερείται νοήματος στο επίπεδο[53] που εργαζόμαστε και τους περιορισμούς που αυτό επιδέχεται.

Έπειτα, ένα αίσθημα βεβαιότητας περιβάλει τις διαδικασίες μας. Το αίσθημα αυτό, προκύπτει και αναπτύσσεται μέσα από την ισχυρά πειστική διαδρομή των επιχειρημάτων και του σχήματος που συμβαδίζει με αυτά και τελικά καταλήγει να μεγιστοποιείται ως προς την τελική διατύπωση του υπό διαπραγμάτευση ισχυρισμού. Η πίστη μας δεν ελαττώνεται από οποιαδήποτε αναγνώριση ανακολουθίας λεκτικών διατυπώσεων ή εννοιολογικών δομών και σχήματος. Τα σχήματα πάντα απλώς προσεγγίζουν τις εννοιολογικές δομές και τα νοητικά αντικείμενα.

Σε τρίτο πλάνο, εμφανίζεται μία αίσθηση σαφήνειας. Η πρακτική μας ωθεί να κατακτήσουμε όχι απλώς την γνώση, την αλήθεια της οποίας και θα θεωρούμε αδιαπραγμάτευτη, αλλά και να την κατανοούμε σε βαθμό που να μπορούμε να την παρατηρούμε σε άλλες καταστάσεις, να την ανακαλούμε όταν μας χρειαστεί και να την χειριζόμαστε όταν αντιμετωπίσουμε προβληματικές καταστάσεις. Αυτό συνεπάγεται πως όχι μόνο κατανοούμε πως η κατάληξη θα πρέπει να είναι αυτή στην οποία καταλήξαμε αλλά και να μπορούμε να δικαιολογήσουμε γιατί θα πρέπει να είναι αυτή και όχι οποιαδήποτε άλλη. Για παράδειγμα το γιατί οι οριακές παράλληλες πλησιάζουν συνεχώς προς την μία κατεύθυνση ή γιατί οι Αποκλίνουσες παράλληλες απομακρύνονται συνεχώς καθώς φεύγουμε από την κοινή τους κάθετο. Τότε, έχοντας αυτά ως δεδομένα η έννοια της παραλληλίας στο Υπερβολικό επίπεδο γίνεται σαφέστερη και ακολούθως ο χειρισμός της ευκολότερος.

[53] Και εικονικό αλλά και νοητικό.

10.Συμπεράσματα

Μία ολοκληρωμένη θεωρία της κατασκευής, κατανόησης και εξέλιξης των εννοιών (γεωμετρικών ή μη) μπορεί να προσφέρει πολλά και στον τομέα της διδακτικής προσέγγισης συγκεκριμένων προβληματικών καταστάσεων. Παρόλα αυτά, ο εντοπισμός μίας τέτοιας θεωρίας, που να εξηγεί και να προβλέπει όλα τα φαινόμενα που σχετίζονται με την διδακτική πρακτική παραμένει ανοιχτό πρόβλημα. Οι υπάρχουσες θεωρίες από την άλλη μεριά εξηγούν ένα μεγάλο ποσοστό φαινομένων και η χρήση τους ρητά ή άρρητα αντικείμενο της συνήθους σχολικής πρακτικής. Οι καθηγητές σίγουρα πολλές φορές έχουν χρησιμοποιήσει στοιχεία που έχουν δοθεί αλλά όταν η θεωρία δεν είναι τυπική γνώση δεν μπορεί να αξιολογηθεί και ουσιαστικά να ενταχθεί σε μία παιδαγωγική προσέγγιση.

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί πως, μία τέτοια γνώση των στοιχείων των θεωριών, είναι μία άτυπη γνώση που εμφανίζεται σποραδικά και αποσπασματικά. Η ένταξη συγκεκριμένων προσεγγίσεων σε μία διδακτική θεωρία βοηθά τόσο στην εφαρμογή μίας ομαλά εξελισσόμενης διδασκαλίας όσο και στην διατύπωση των διδακτικών στόχων και στον έλεγχο του βαθμού επίτευξης των στόχων αυτών.

Η αιτιολόγηση ισχυρισμών χωρίς την χρήση αυστηρών βερμπαλισμών, παρά μόνο με την χρήση εικονικών αναπαραστάσεων είναι απαραίτητη για την μη αξιωματική θεωρία που διδάσκεται στα σχολεία της πρωτοβάθμιας αλλά και κατόπιν στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (μιλώντας μόνο για τα γυμνασιακά μαθηματικά). Η αξία των ισχυρισμών απευθείας μέσω του σχήματος μπορεί να μειώνεται σταδιακά (λύκειο) αλλά ο ρόλος του σχήματος δεν παραγνωρίζεται ποτέ και το διάγραμμα πάντα αντιμετωπίζεται ως ένα παραγωγικό εργαλείο για την δόμηση αλλά και την προαγωγή της σκέψης.

Μία πολύ σημαντική παράμετρος που μας κάνει να στεκόμαστε με κριτική διάθεση απέναντι στην χρήση των σχημάτων αποτελεί το γεγονός πως από το συγκεκριμένο σχήμα καταλήγουμε σε συμπεράσματα για μία άπειρη πολλαπλότητα σχημάτων, δηλαδή για την γενική περίπτωση.

Ο Berkeley έχοντας εντοπίσει αυτή τη δυσκολία την αντιμετωπίζει

αποδίδοντας στο τυχαίο τρίγωνό την έννοια της τριγωνικότητας η οποία είναι κοινή για την κλάση όλων των τριγώνων και δεν περιλαμβάνει επιμέρους χαρακτηριστικά γνωρίσματα(κοινή φαινομενολογία). Πολλά από τα ολισθήματα στα οποία οδηγούνται οι μαθητές όταν κάνουν χρήση εικονικής προέλευσης επιχειρημάτων οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης περί του τύπου των ιδιοτήτων που μπορούν να προσφερθούν από τα εικονικά δεδομένα. Η απόδοση στην έννοια που αναπαρίσταται, ιδιοτήτων που είναι συμπτωματικές έχει την βάση της στην μη ρητή διδασκαλία του σχήματος και των ιδιοτήτων που απορρέουν από αυτό.

Έχει ήδη αναφερθεί πως η γνώση ενός μαθηματικού αντικειμένου ή μίας μαθηματικής έννοιας προϋποθέτει ή ακόμα και απαιτεί την ύπαρξη διαχωρισμών διασύνδεσης ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα συστήματα σημειωτικών αναπαραστάσεων (Duval). Τέτοια συστήματα είναι το εννοιολογικό σύμπαν και το σύνολο των εικόνων (νοητικών ή μη).

Ένα πρόβλημα που πάντα θα υπάρχει και θα γίνεται ορατό στην πράξη είναι η σχέση ανάμεσα στο σχήμα και στην αντίστοιχη έννοια. Ακόμα, παραμένει ανοιχτή στην διαπραγμάτευση η έννοια της όρασης όταν την τοποθετούμε υπεράνω ενός γεωμετρικού σχήματος καθώς πάντα θα παραμείνει διφορούμενη. Η αιτία είναι πως είναι πολύ λίγα αυτά που μπορούμε να πούμε σχετικά με το αν μιλώντας για την οπτική στο επίπεδο του γεωμετρικού σχήματος μιλάμε για το πόσο καλά μπορεί κάποιος κυριολεκτικά να δει το σχήμα δηλαδή μία οπτική αντίληψη που να επικεντρώνεται στην αισθητική πτυχή (πράγμα μάλλον αστείο και στερούμενο ενδιαφέροντος στην διδακτική) ή μιλάμε για κάτι άλλο που εμπεριέχει ποσοστό γνώσης και παράλληλης σκέψης σε ορθές κατευθύνσεις.

Σίγουρα πάντως, όταν μιλάμε για την οπτική που προσφέρει το σχήμα στον κάθε ξεχωριστό μαθητή δεν μπορούμε να μιλάμε για μία δυνατότητα ενόρασης του μαθητή αναπτυγμένη ή μη. Κάτι τέτοιο θα αποτελούσε σαφή υπαινιγμό πως αυτό το ποσοστό ενόρασης του μαθητή είναι ένα γενετικής προδιάθεσης χαρακτηριστικό και άρα η διδασκαλία δεν παίζει κανένα σημαντικό ρόλο. Θα ήταν σαν οι καθηγητές των μαθηματικών να θεωρούσαν πως η επίδρασή τους και οι επιδόσεις τους, μαζί με την όποια κατάρτιση

διαθέτουν, δεν θα μπορούσε να φέρει καρπούς αφού τα πάντα είχαν προκαθοριστεί σε ένα επίπεδο στο οποίο δεν θα μπορούσαν να παρέμβουν. Η διδακτική ως επιστήμη θα παραιτούταν από την όποια αξία της και ποσό επιστημονικού επιπέδου.

Η γεωμετρία είναι ένα πεδίο επιστημονικής γνώσης η λειτουργία του οποίου επιτρέπει στα σχήματα και στις έννοιες να αλληλεπιδρούν και να αλληλοπροσαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο (Fishbein). Τα σχήματα παραδοσιακά[54] να έχουν την λειτουργία του να οδηγούν στις έννοιες και να λειτουργούν ως διάμεσος ανάμεσα στον κόσμο των αισθήσεων και την επιστημονική γνώση και ιδανικότητα των θεωριών.

Ακόμα και αν δεχτούμε πως η χρήση των σχημάτων είναι εφικτή και προσοδοφόρα σε πολλούς τομείς των μαθηματικών[55] και των άλλων φυσικών επιστημών[56], στο χώρο της γεωμετρίας η χρήση τους και η αλληλεπίδρασή τους με τις γεωμετρικές έννοιες τόσο σε επίπεδο κατανόησης όσο και σε επίπεδο νόησης είναι το ίδιο εφικτή όσο και απαραίτητη ιδιαίτερα όταν μιλάμε για παιδαγωγικές προεκτάσεις.

Μία παραγωγική χρήση οποιουδήποτε οπτικού μοντέλου επιτάσσει την τελειοποίηση των χωρικών ιδιοτήτων οι οποίες αναφέρονται είτε στο σχήμα ως εικόνα, είτε σε αυτό από τη σκοπιά της επεξεργασίας αυτού ως έννοια. Αυτή η ανάγκη επιβάλει συγκεκριμένες ερμηνείες των δεδομένων που το σχήμα εισάγει και έπειτα την χρήση φορμαλισμών στην γεωμετρική ενασχόληση. Θα πρέπει να επισημανθεί πως διαφορετικά επίπεδα κατανόησης μπορεί να υπάρχουν, όπως άλλωστε και οι διαφορετικές προσεγγίσεις μπορούν να αλληλοσυνδέονται ανεξαρτήτως του συστήματος αναπαραστάσεων το οποίο χρησιμοποιούμε. Η κατανόηση της έννοιας του σημείου για παράδειγμα, έχει άμεσα να κάνει με τη οπτικοποιημένη μορφή που του αποδίδουμε στο χαρτί αλλά και όχι καθώς η οπτικοποιημένη μορφή αντίκειται στον ορισμό του σημείου. Στην σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση ξεπερνάμε τον σκόπελο αυτό

---

[54] Προφανώς μιλάμε για τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

[55] Στη θεωρία Ομάδων για τις ομάδες Μεταθέσεων, στη Θεωρία Πιθανοτήτων τα διαγράμματα Venn και σε άλλους τομείς

[56] Και όντως έτσι συμβαίνει

θεωρώντας το σημείο πρωταρχική έννοια και άρα ο ορισμός της είναι περιττός. Σε κάθε περίπτωση η άποψη που μας δημιουργείται για το αντικείμενο, δηλαδή η νοητική κατασκευή στην οποία αποδίδουμε τα ίδια χαρακτηριστικά είναι πάντα ένα γεωμετρικό κατασκεύασμα. Η Mariotti (1991) περικλείει το σύνθετο αυτό νόημα σε λίγες λέξεις.

«Η γεωμετρία του οπτικού μοντέλου είναι το σύστημα αναφοράς στο οποίο το αναπαραστασιακό σύστημα βασίζεται, και πάνω στο οποίο το χειριστικό συστατικό της αναλογίας βασίζεται οποτεδήποτε μία διαδικασία οπτικοποίησης γίνεται πραγματικότητα. Για το λόγο αυτό η γεωμετρική αιτιολόγηση αναπτύσσει αυξημένη δυναμική στην ανάπτυξη σημαντικών νοητικών συμπεριφορών και συνηθειών» (Mariotti, 1991).

Η γεωμετρία αποτελεί ίσως τον καταλληλότερο χώρο που θα μπορούσε να εκφράσει την δυναμική ενός σχήματος. Η αιτιολόγηση με βάση το σχήμα βρίσκει στο πρόσωπο της γεωμετρίας τον κατάλληλο χώρο που μπορεί να δεχτεί τέτοιες προσεγγίσεις των προβλημάτων που σε άλλους χώρους θα φάνταζαν πειραματικές ή ακόμα και προβληματικές. Ο τύπος της σκέψης με βάση την οπτική που συχνά χρησιμοποιείται στην συνήθη πρακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να είναι επιστημολογικά ορθή και επιστημονικά πολύτιμη. Σε συγκεκριμένες καταστάσεις μπορεί να δικαιολογήσει τα πιστεύω μας και να προσφέρει γνώση. Η χρήση διαγραμμάτων μπορεί όπως έχουμε ήδη δείξει, να κάνει πολύ πιο προσιτές έννοιες ή διαδικασίες που δεν ανήκουν με προφανή και σαφή τρόπο στις Γεωμετρικές έννοιες ή διαδικασίες[57]. Παρατηρούμε πως συχνά στα πλαίσια μίας απόδειξης πολλά επιχειρήματα έχουν διαγραμματική προέλευση ενώ άλλα έχουν προτασιακή.

Η οπτικοποίηση (μέσω διαγραμμάτων και σχημάτων) είναι ένα πολύπλευρο εργαλείο. Είναι πολύτιμη όταν χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης και δεν μπορεί να θεωρείται ως ένα αναλώσιμο στοιχείο της σκέψης που κάποια στιγμή, στην γνωστική εξέλιξη του κάθε ατόμου, ίσως θα αφεθεί πίσω ή τουλάχιστον θα αποδυναμωθεί. Ακόμα τα σχήματα και διαγράμματα

[57] Όπως για παράδειγμα η «ένα προς ένα» και «επί» αντιστοιχία (συνάρτηση) που έχουμε ορίσει μέσω σχήματος στο παράδειγμα της σύγκρισης του κλειδάριθμου του συνόλου των σημείων δύο άνισων ευθυγράμμων τμημάτων.

επιδρούν στην βαθμιαία αποδοτική κατάκτηση της γνώσης αλλά και σχετικών με αυτή τεχνικών, για την κατανόηση των εννοιών και των γεωμετρικών αντικειμένων. Ο ρόλος των διαγραμμάτων θα πρέπει να αναθεωρηθεί και από το η δημιουργία του να αποτελεί τον τελικό και κύριο στόχο ενός μαθήματος θα μετουσιωθεί σε δυνατό και προσοδοφόρο διδακτικό μέσο.

Αποτελεί την ελάχιστη αναγνώριση, στην θέση του σχήματος ή διαγράμματος και της λειτουργίας αυτού, να τονιστεί ο ρόλος του, ως μέσο προσέγγισης και υπέρβασης της διαίσθησης. Ο συνδυασμός αυτός των δύο λειτουργιών, είναι κυρίαρχο συστατικό του σταδίου της εκπαίδευσης που εισάγει τους μαθητές στις αφηρημένες σκέψεις και χειρισμούς που η Γεωμετρία ως τομέας επιστημονικής γνώσης απαιτεί. Το επιστημονικό status του διαγράμματος είναι οριστικά αναγνωρίσιμο.

11.Βιβλιογραφία:

1. Anderson, J. R. & Bower, G. H. (1973). *Human associative memory*. Washington, DC: Winston.
2. Anderson, J.R (1978) Arguments concerning representations for mental imagery, Psychological Review, 249-277
3. Anderson, J.R (1980). Cognitive psychology and implications
4. Bruner, J. S.: 1966, *Towards a theory of instruction*, New York: Norton.
5. Burger, W and Shaughnessy, J (1986) Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry Journal for Research in Mathematics Education 17 (1)
6. Cheng, P. C-H (1999). *Interactive Law Encoding Diagrams for Learning and Instruction* Learning and Instruction 9 (1999) 309-325
7. Davis, P and Hersh, R (1981) *The Mathematical Experience* Birkhauser, Boston
8. Davis, R (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education,* Norwood NJ: Ablex
9. Duval, R. (1995), *Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings*, In R. Suttherland & J. Mason (eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Berlin: Springer, 142-157.
10. Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana and V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
11. Dubinsky, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 95-123.
12. Dvora. T & Dreyfus. T. (2004) *Unjustified Assumptions Based on Diagrams in Geometry* Proceedings of the 28th Conference of the

International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 2 pp 311–318

13. Fischbein. E & Nachlieli, T. (1998) *Concepts and Figures in Geometrical Reasoning*, International Journal of Science Education, 20 (10) 1193-1211
14. Fishbein, E (1993) *The theory of figural concepts*: Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162
15. Geometry Working Group, A report on the meeting at the King's College, University of London, 28th February 1998 Convenor: Keith Jones, University of Southampton, UK, Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning
16. Geometry Working Group, Convenor: Keith Jones, University of Southampton, UK Visualisation, *Imagery and the Development of Geometrical Reasoning* A report based on the meeting at the University of Birmingham, 20th June 1998 by Keith Jones, University of Southampton and Chris Bills, University of Warwick
17. Hassan. A. (2006) *Relationship Between Visual Perception of Geometric Shapes and Achievement of Students in Junior Secondary Schools.*
18. Hardy, G. H.: 1967, A mathematician's apology, Cambridge University Press, Cambridge.
19. Heath, T.:1956, The thirteen Books of Euclid's Elements, Dover, vol. 1, 2, 3
20. Hoffer, A. (1981). *Geometry is more than proof.* Mathematics Teacher 74, 11-18.
21. Junichi Hasegawa (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade, Educational studies in mathematics 32: 157-179, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
22. Jones, K. (1998), Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

23. Jones, K. School of Education, University of Southampton, UK Shinya Yamamoto, Faculty of Education, Kumamoto University, Japan Learning of Geometrical Reasoning: The Role Of Intuition in Geometry Education: Learning From The Teaching: Practice In The Early 20th Century
24. Lakatos, I (1976) *Proofs and Refutations* Cambridge C. U. P
25. Latour, B (1990) *Drawing Things Together*, In M. Lynch and S. Woolgar, *Representations in Scientific Practice* (Cambridge, Mass: MIT press): pp. 19-68
26. Mariotti. M. A (1991). Images and Concepts in Geometrical Reasoning
27. Mariotti. A, Antonini. S, (2009) *Breakdown and Reconstruction of Figural Concepts in Proofs by Contradiction in Geometry* ICMI Study 19 2009 pp 2-82 to 2-93
28. Netz, R (2003) the Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a Study in Cognitive History. (Cambridge: Cambridge University Press)
29. Olga F. Lazareva, Leyre Castro, Shaun P. Vecera, and Edward A. Wasserman University of Iowa, Iowa City, Iowa, Figure–ground assignment in pigeons: Evidence for a figural benefit, Perception & Psychophysics 2006, 68 (5), 711-724
30. Paivio, A (1969). *Mental Imagery in associative learning and memory*. Psychological Review, 76(3), 241-263
31. Paivio, A.(1970) *On the functional significance of imagery* Psychological Bulletin 73(6), 385-392
32. Piaget. J & Inhelder. B (1966) L' *Image Mentale Chez l'Enfant. Etude sur le Deneloppement des Representations Imagees*, PUF,Paris
33. Piaget, J and Inhelder, B (1971) Mental Imagery in the Child, Routledge and Kegan Paul
34. Piaget, J.: 1970, *Genetic Epistemology*, W. W. Norton, New York.
35. Schoenfeld, A. H.: 1986, *On having and using geometric knowledge, in J. Hierbert (eds), Conceptual and Procedural Knowledge*: The Case of Mathematics, Erlbaum, 225-264.

36. Senk, S. L. (1985), *How well do students write geometry proofs?* Mathematics Teacher, 78, 448–456.
37. Senk, S. L. (1989), *Van Hiele levels and achievement in writing Geometry proofs*, Journal for Research in Mathematics Education, 20, 309–321.
38. Sfard, A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.
39. Sfard, A.: 1992, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function, In G. Harel & E. Dubinsky, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, Washington DC: MAA., 59-84
40. Stalo. M. Iliada. E. Gagatsis. A. Theoklitou. A. Savva. A. (2006) *Levels of Understanding of patterns in Multiple Representations* Department of Education, University of Cyprus, Cyprus, PME30 — 2006
41. Tall, D. (1994) *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind M*athematics, Education Research Centre, University of Warwick
42. Tall, D. (1994), *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics*, Plenary presentation, CIEAM, Toulouse, France
43. Tall, D. (2000), *What is the object of the encapsulation process?* Journal of Mathematical Behavior*,* 18(2), 1-19.
44. Tall, D. (1999), *Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking*, Proceedings of the 23rd Conference of PME*,* Haifa, Israel, 1, 111-118.
45. Taro Fujita, *Curriculum Studies*, University of Glasgow, UK
46. Vinner, S and Hershkowitz,R (1983) *On Concept Formation in Geometry*, ZDM 83 (1)
47. Vinner, S (1992), *Function concept as prototype for problem in mathematics*: Harel, G.& Dubinsky, E. *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213

48. Vygotsky, L (1962) Thought and Language, MIT Press, Cambridge MA

49. Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). *Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. Educational Studies in Mathematics* 21, 199-219.

50. Zykova, V.I (1969) The Psychology of Sixth Grade Pupils 'Mastery of Geometric Concepts' in J. Kilpatric and I. Wirszup (eds), Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics

51. Αναπολιτάνος, Δ (1985) *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών* Εκδόσεις Νεφέλη Δ' έκδοση

52. Βαϊνάς, Κ (2004) *Η Επίδραση της Μορφολογικής Ψυχολογίας στη Διδακτική των Μαθηματικών – Πρόταση για μία Θεωρία της Γεωμετρικής Μορφής* Διεπιστημονική Προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους. Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών - V Επιμέλεια: Καλαβάσης, Φ και Μεϊμάρης,Μ Εκδόσεις Gutenberg

53. Κολέζα, Ε (2003) *Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών* Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

54. Ματσαγγούρας, Η (2006) *Η εξέλιξη της Διδακτικής - Επιστημολογική Θεώρηση* Παιδαγωγική Σειρά Gutenberg, Αθήνα

55. Ματσαγγούρας, Η (2005) *Στρατηγικές διδασκαλίας - Η Κριτική Σκέψη στη Διδακτική Πράξη* Παιδαγωγική Σειρά Gutenberg, Αθήνα

56. Πανοπούλου-Μαράτου. Ο. (1998) *Παιδί, Επιστήμη και Ψυχανάλυση - - οι διαδρομές του Jean Piaget* Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα

57. Σακαλάκη. Μ (1994) *Ψυχολογία της Επικοινωνίας - θεωρητικά ρεύματα και προοπτικές της έρευνας* Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα

58. Στράντζαλος, Χ (1989) *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών* (μέρος πρώτο) Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα Δεύτερη Έκδοση

59. Στράντζαλος, Χ (1989) Εισαγωγή στις Ευκλείδειες και Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Σημειώσεις Παραδόσεων) Αθήνα

60. Χριστιανίδης, Γ (2003) *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών* Π.Ε.Κ
61. Culkin, J and Perrotto, R (2004) *Θεμελιώδεις Αρχές της Ψυχολογίας «Εφαρμογές στην Ζωή και την Εργασία»* Μετάφραση: Μαρία Πάντα Επιμέλεια: Αντωνίου Σταμάτιος – Αλέξανδρος και Μπακοπούλου Γεωργία, Εκδόσεις Έλλην Αθήνα
62. Davies, D.M (2005) *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών* (The Nature and Power of Mathematics) Απόδοση στα Ελληνικά: Καραγιαννάκης, Δ και Μαγειρόπουλος, Μ Π.Ε.Κ
63. Resnick,L.B (1999) Η Κατανόηση της Άλγεβρας, Μετάφραση: Μπαρουξής, Γ. Σταφυλίδου, Μ. Βοσνιάδου, Σ. Η Ψυχολογία των Μαθηματικών – Εκδόσεις Gutenberg Αθήνα
64. van der Waerden, B. L (2003) *Η Αφύπνιση της Επιστήμης* (Science Awakening I) Απόδοση στα Ελληνικά: Χριστιανίδης, Γ Π.Ε.Κ