ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

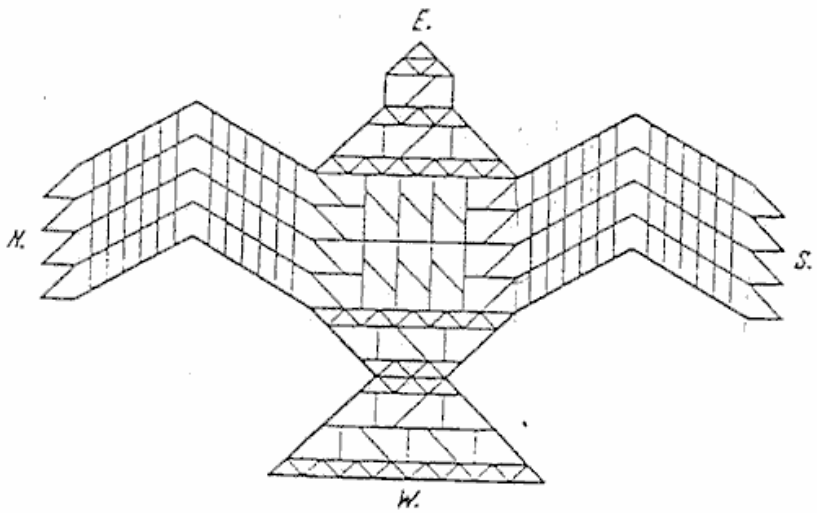
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΝΤΑΛΑ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΙΝΔΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 7ο μ.Χ. ΑΙΩΝΑ



Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Φαρμάκη Βασιλική

ΑΘΗΝΑ 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Βεβαίωση

Η μεταπτυχιακή φοιτήτρια Ντάλα Γεωργία ολοκλήρωσε τη διπλωματική εργασία της με τίτλο:

«ΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΙΝΔΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 7^{ο} μ.Χ. ΑΙΩΝΑ»

στα πλαίσια των σπουδών της για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στο Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».

Την Εργασία αυτή παρουσίασε σε δημόσια διάλεξη στις.....

Μετά από προφορική εξέταση που ακολούθησε τη διάλεξη, η τριμελής εξεταστική επιτροπή, ενέκρινε ομόφωνα τη διπλωματική αυτή εργασία.

Αθήνα .....

Η εξεταστική Επιτροπή

Ονοματεπώνυμο		Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Φαρμάκη Βασιλική	(Επιβλ. Καθηγήτρια)	Αναπλ. Καθηγήτρια	…….....
2) Νεγρεπόντης Στυλιανός		Καθηγητής	……
3) Γιαννακούλιας Ευστάθιος		Αναπλ. Καθηγητής	...……

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΙΝΔΙΑΣ

Β. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΙΝΔΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 5^{ο} μ.Χ. ΑΙΩΝΑ

1. **ΒΕΔΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ**
1.1 Η βεδική λατρεία
1.2 Το περιεχόμενο των Βεδών

2. **ΤΑ ΣΟΥΛΒΑΣΟΥΤΡΑΣ**
2.1 Το περιεχόμενο των Σουλβασούτρας
2.2 Πυθαγόρειο θεώρημα και οι Πυθαγόρειες τριάδες
2.3 Γεωμετρικές κατασκευές
2.4 Προβλήματα που σχετίζονται με κατασκευές βωμών
α. Υπολογισμός εμβαδού τραπεζίου
β. Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δοθέν ορθογώνιο
γ. Ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τιμή του π
δ. Ο διπλασιασμός τετραγώνου
2.5 Κοινά πολιτισμικά στοιχεία Ινδών και Ελλήνων απόρροια θρησκευτικών τελετών

3. **ΟΙ ΣΙΔΧΑΝΤΕΣ**
3.1 Η Πολίσα Σιδχάντα
3.2 Η Σούρια Σιδχάντα

Γ. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΙΝΔΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 7^{ο} μ.Χ. ΑΙΩΝΑ

1. **Ο ΑΡΙΑΜΠΑΤΑ**
1.1 Η Αριαμπατίγια
1.2 Αστρονομία
1.3 Γεωμετρία
1.4 Τριγωνομετρία
1.5 Αριθμητικός και Αλγεβρικός λογισμός
α. Υπολογισμός τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμού
β. Αριθμητικοί πρόοδοι
γ. Άθροισμα τετραγώνων και κύβων των ν πρώτων φυσικών αριθμών
δ. Μέθοδος των τριών
ε. Διοφαντικές εξισώσεις

2. Ο ΒΡΑΧΜΑΓΚΟΥΠΤΑ (Brahmagupta)
2.1 Γεωμετρία
2.2 Άλγεβρα
2.3 Η εξίσωση του Pell στα ινδικά μαθηματικά
2.4 Η επίλυση των εξισώσεων Pell (με τη μέθοδο Βραχμαγκούπτα)
` 2.5 Η μέθοδος «CHAKRAVALA»

Δ. Η ΙΝΔΙΚΗ ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

1. Τα πρώτα αριθμητικά σύμβολα
2. Οι αριθμοί Χαρότσι
3. Οι αριθμοί Βραχμί
4. Οι ποιητικοί αριθμοί
5. Οι συλλαβικοί αριθμοί του Αριαμπάτα
6. Η προέλευση του μηδενός και η καθιέρωση του θεσιακού συστήματος
7. Η επικράτηση των Ινδικών ψηφίων

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αρχαιολογικές ανασκαφές στο Μοχένζο Ντάρο έφεραν στο φως, στοιχεία ενός πολύ ανεπτυγμένου πολιτισμού στην Ινδία, την ίδια εποχή περίπου που οι Αιγύπτιοι έκτιζαν τις περίφημες πυραμίδες τους. Συγκεκριμένα στις εκατοντάδες οικίες και καταστήματα που ανακαλύφθηκαν εκεί, βρέθηκαν λουτρά και φρεάτια, καθώς και ένα πολύπλοκο αποχετευτικό σύστημα. Μεταξύ των αντικειμένων που βρέθηκαν, ήταν νομίσματα και σφραγίδες που πάνω τους ήταν χαραγμένα κάποια σχήματα ή επιγραφές, οι οποίες δεν έχουν αποκρυπτογραφηθεί μέχρι σήμερα.

Η Ινδία όπως και η Αίγυπτος είχε τους δικούς της «αρπεδονάπτες». Οι πρώτες γεωμετρικές γνώσεις βρίσκονται καταχωρημένες στα Σουλβασούτρας, που ήταν παραρτήματα των Βεδών, των θρησκευτικών βιβλίων των Ινδών. Τα Σουλβασούτρας δίνουν κανόνες για την ακριβή κατασκευή βωμών, που ήταν απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχή έκβαση μιας θυσίας. Επειδή ο χρόνος σύνθεσης του έργου είναι δύσκολο να προσδιοριστεί, οι χρονολογίες που δίνονται από τους διάφορους μελετητές, έχουν μεγάλη απόκλιση που είναι μεταξύ του 800 π.Χ. και 200 μ.Χ. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να πούμε, ότι τα Σουλβασούτρας είναι τα αρχαιότερα κείμενα όπου ανιχνεύουμε τα πρώτα σπέρματα μαθηματικών γνώσεων στην Ινδία.

Την περίοδο των Σουλβασούτρας διαδέχεται μια άλλη, αυτή των Σιδχάντων ή συστημάτων αστρονομίας. Στις Σιδχάντες που γράφτηκαν περίπου στα τέλη του 4^{ου} μ.Χ. αιώνα, διακρίνονται σαφή σημάδια ελληνικής επιρροής. Όμως οι Ινδοί καινοτομούν σε σχέση με τους Έλληνες, αντικαθιστώντας την συναρτησιακή σχέση μεταξύ χορδών και των αντίστοιχων επίκεντρων γωνιών τους, με ημιχορδές και αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες, δηλαδή με ημίτονα. Ακόμη και η λέξη ημίτονο προέρχεται από την παραποιημένη απόδοση της σανσκριτικής λέξης jya-ardha, που σημαίνει μισή χορδή. Η εισαγωγή αυτής της ημιτονοειδούς συνάρτησης, είναι η βασική συνεισφορά των Σιδχάντων στην ιστορία των μαθηματικών.

Το έτος 476 μ.Χ. που θεωρείται βασικά σαν το τέλος της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, γεννιέται στην Ινδία ο πρώτος σπουδαίος αστρονόμος, ο Αριαμπάτα. Είναι ο πρώτος Ινδός αστρονόμος που το έργο του περιέχει κεφάλαια με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Το έργο του που φέρει το όνομα Αριαμπατίγια, είναι μια πραγματεία αστρονομικού κυρίως περιεχομένου, περιέχει όμως κάποια κεφάλαια με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο και έτσι μας παρέχεται η δυνατότητα, να εκτιμήσουμε το επίπεδο των μαθηματικών γνώσεων στην Ινδία κατά τον 6^{ο} μ.Χ.

Μετά τον Αριαμπάτα αρχίζουν να εμφανίζονται στην Ινδία σημαντικοί μαθηματικοί, με μεγάλη προσφορά στα ινδικά μαθηματικά. Οι

πιο σημαντικοί από αυτούς είναι: ο Βραχμαγκούπτα ($7^{ος}$ αι. μ.Χ.), και δύο με το όνομα Μπασκάρα, οι οποίοι ζουν σε διαφορετικές εποχές ο Μπασκάρα Ι ($7^{ος}$ αι. μ.Χ.), ο Μπασκάρα ΙΙ ($12^{ος}$ αι. μ.Χ.) και αρκετοί άλλοι.

Ένα σημαντικό επίτευγμα των Ινδών μαθηματικών είναι και η λύση των Διοφαντικών εξισώσεων. Ενώ ο Διόφαντος και η Υπατία ασχολήθηκαν με την εύρεση ρητών λύσεων των εξισώσεων αυτών, στα ινδικά έργα για πρώτη φορά αναζητούνται ακέραιες λύσεις τέτοιων εξισώσεων. Ο Αριαμπάτα, έδωσε τη γενική λύση της γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης $ax + c = by$ όπου οι a, b, c είναι ακέραιοι. Η μέθοδος του η οποία βασίζεται στον Ευκλείδειο αλγόριθμο, φέρει την χαρακτηριστική ονομασία «κονιοποιητής» (kuttaka). Ο Βραχμαγκούπτα ασχολήθηκε κυρίως με τη δευτεροβάθμια διοφαντική εξίσωση $Dx^2 \pm 1 = y^2$, η οποία κατά λάθος φέρει το όνομα του John Pell (1611-1685). Η μέθοδος του Βραχμαγκούπτα βασίζεται σε μια βοηθητική εξίσωση όπου με δύο ακέραιες λύσεις αυτής, βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Ένας μεταγενέστερος σπουδαίος μαθηματικός ο Μπασκάρα ΙΙ (1150 μ.Χ.), έρχεται να δώσει μια κομψή και δυναμική λύση που φέρει το όνομα «Chakravala» ή «κυκλική μέθοδος». Αυτή η μέθοδος είναι ευρέως γνωστή και δίνει την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας διοφαντικής εξίσωσης, χωρίς την παραγωγή βοηθητικής εξίσωσης. Ο Μπασκάρα μεταξύ των άλλων, δίνει τις λύσεις των εξισώσεων $67x^2 + 1 = y^2$ και $61x^2 + 1 = y^2$. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι, ότι η εξίσωση $61x^2 + 1 = y^2$, προτάθηκε μισό αιώνα αργότερα, για επίλυση από τον Fermat στον Frencil.

Ένα άλλο αξιοσημείωτο επίτευγμα του ινδικού λαού είναι τα εννιά σύμβολα αρίθμησης. τα γνωστά σε όλους μας «αραβικά ψηφία», τα οποία ονομάσθηκαν έτσι, όχι γιατί προέρχονται από τους Άραβες αλλά γιατί διαδόθηκαν και έγιναν γνωστά από αυτούς στον υπόλοιπο κόσμο. Η Ινδική παράδοση αποδίδει τα σύμβολα αυτά, στον «Αγαθοεργό Δημιουργό του σύμπαντος». Παρόμοιες πεποιθήσεις περί θεϊκής έμπνευσης ισχύουν άλλωστε και για τα πρωιμότερα ινδικά έργα. Πάντως σήμερα επικρατεί η αντίληψη ότι, αριθμητικά μας σύμβολα προέρχονται από τα δυτικο-αραβικά, που και αυτά με τη σειρά τους κατάγονται από τα ινδικά ψηφία. Τα ινδικά ψηφία εμφανίζονται για πρώτη φορά, σε διάφορες επιγραφές που χρονολογούνται τον $3^{ο}$ αιώνα π.Χ.

Α. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΙΝΔΙΑΣ

Η Ινδία η οποία είναι σήμερα, ένα από τα μεγαλύτερα κράτη του κόσμου από άποψη πληθυσμού και έκτασης, η χώρα των μεγάλων αντιθέσεων, υπήρξε η κοιτίδα ενός από τους αρχαιότερους πολιτισμούς, ίχνη του οποίου βρέθηκαν στην κοιλάδα του Ινδού ποταμού. Πριν όμως ασχοληθούμε με την ανάπτυξη των μαθηματικών στην χώρα αυτή, θα κάνουμε μια συνοπτική ιστορική αναδρομή, των σημαντικότερων γεγονότων και προσώπων που διαδραματίστηκαν στην χώρα αυτή.

Ο Πολιτισμός της Χαράππα (3000-1500 π.Χ.)

Οι αρχαιολογικές ανασκαφές που πραγματοποιήθηκαν στο νότιο μέρος του Ινδού ποταμού κατά το 1924 από τον Τζων Μάρσαλ, στο μέρος όπου βρίσκονται σήμερα τα ερείπια της αρχαίας πόλης Μοχένζο Ντάρο (Mohejo Daro), αποκάλυψαν την ύπαρξη ενός αρχαίου πολιτισμού, που φαίνεται να είναι ο αρχαιότερος από όσους γνωρίζουμε μέχρι σήμερα. Οι ανασκαφές στο Μοχένζο Ντάρο όπως και στη Χαράππα που είναι μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα βορειότερα, έφεραν στο φως τέσσερεις ή πέντε πόλεις με εκατοντάδες σπίτια και καταστήματα τα οποία μάλιστα ήταν κατασκευασμένα από τούβλα. Μεταξύ των αντικειμένων που βρέθηκαν, ήταν διάφορα οικιακά σκεύη, πήλινα αγγεία σε κάποια από οποία υπήρχαν αποτυπωμένες ζωγραφιές, αντικείμενα καλλωπισμού, ζάρια, πιόνια σκακιού κ.ά. Ακόμη βρέθηκαν, τα αρχαιότερα νομίσματα απ' όσα γνωρίζουμε μέχρι σήμερα καθώς και σφραγίδες. Πάνω τους ήταν χαραγμένα σχέδια ή επιγραφές με κάποια γραφή εικονογραφική, η οποία παραμένει άγνωστη σε μας μέχρι σήμερα. Όσον αφορά την ηλικία των κατασκευών αυτών ο ίδιος ο Τζων Μάρσαλ αναφέρει τα εξής:

> «Οι ανακαλύψεις στο Σιντ και το Παντζάμ (περιοχή που βρίσκεται γύρω από τον Ινδό ποταμό), απέδειξαν την ύπαρξη μιας ανεπτυγμένης αστικής ζωής κατά την $4^{η}$ και $3^{η}$ χιλιετία π.Χ. Η ύπαρξη φρεάτων και λουτρών στις πολυάριθμες οικίες και η ανακάλυψη πολύπλοκου αποχετευτικού συστήματος μαρτυρούν ότι η ζωή και οι κοινωνικές συνθήκες ήταν τουλάχιστον ανάλογες με εκείνες των Σουμέριων και ανώτερες των Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων της αντίστοιχης εποχής».

Ο λαός που δημιούργησε αυτόν τον πολιτισμό ονομάζονταν Δραβίδες.

Ινδο-Άριοι ή Άριοι (1500 π.Χ.)

Κατά τη $2^{η}$ χιλιετία π.Χ. κάποιοι επιτακτικοί λόγοι, όπως η αύξηση του πληθυσμού και η έλλειψη βοσκής ανάγκασε τα διάφορα Ινδοευρωπαϊκά φύλα που ζούσαν μέχρι τότε σε περιοχές της κεντρικής Ευρώπης, να μετακινηθούν νοτιότερα. Μεταξύ αυτών οι Ινδοάριοι ή απλώς Άριοι, προχωρούν νοτιοανατολικά και καταλαμβάνουν τμήματα της Ινδικής χερσονήσου υποτάσσοντας τις φυλές των ιθαγενών. Οργανώνουν μικρά κράτη τα οποία σύντομα αναπτύχθηκαν στις εύφορες κοιλάδες του

Ινδού και Γάγγη ποταμού και προσπαθούν να επιβάλλουν τον διαχωρισμό του λαού σε κάστες.

Το κράτος της Μαγκάντα (6ος αιώνας π.Χ.)

Από τα κράτη που δημιουργήθηκαν στην κοιλάδα του Γάγγη, σπουδαιότερο αναδείχθηκε το κράτος της Μαγκάντα (Magadha) κατά τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Μπιμπισάρα (543-491 π.Χ.) υπήρξε ένας από τους πιο σπουδαίους βασιλείς του κράτους αυτού. Υπέταξε πολλά γειτονικά κρατίδια και έθεσε τις βάσεις της πρώτης Ινδικής αυτοκρατορίας. Κατά την περίοδο αυτή, το σύστημα καστών εδραιώνεται ακόμη περισσότερο και σταθεροποιείται. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο διαχωρισμός των τάξεων που επέβαλε το σύστημα αυτό, ήταν τόσο αυστηρός, που ακόμη και η διάλεκτος που χρησιμοποιούσε κάθε άνθρωπος, προσδιόριζε την κοινωνική του τάξη, την κάστα του. Για θρησκεία τους είχαν τον Βραχμανισμό, την αρχαιότερη θρησκεία στην Ινδική χερσόνησο. Οι ιερείς τους, οι ονομαζόμενοι βραχμάνες, ανήκαν στην ανώτερη κάστα, ήταν οι φορείς των θρησκευτικών παραδόσεων και μόνον αυτοί είχαν το δικαίωμα να ερμηνεύουν τα ιερά κείμενα.

Ο 6ος π.Χ. αιώνας σημαδεύεται και από άλλο ένα σπουδαίο γεγονός, τη γέννηση του Σιντάρτα Γκαουτάμα (Βούδας) το 563 περίπου π.Χ., ενός φωτισμένου άνδρα που έμελλε να παίξει σημαντικότατο ρόλο στη ζωή εκατομμυρίων ανθρώπων. Ο Βούδας δίδαξε στη γλώσσα του απλού λαού της Μαγκάντα και όχι στην σανσκριτική που ήταν η γλώσσα των ανώτερων κοινωνικών τάξεων της Ινδίας. Η διδασκαλία του έδωσε στο λαό των κατώτερων τάξεων την ελπίδα βελτίωσης της ζωής του μέσα από μελλοντικές αναγεννήσεις πράγμα που ο βραχμανισμός αποδεχόταν μόνο για τις ανώτερες κοινωνικές τάξεις. Αρκετοί από τους βασιλείς της Μαγκάντα ασπάστηκαν επίσης τον Βουδισμό. Στα μέσα του 4ου αιώνα π.Χ, ιδρύεται η δυναστεία των Nanda

Ο Μέγας Αλέξανδρος (327-326 π.Χ.)

Το 327 π.Χ. ο Μέγας Αλέξανδρος έχοντας κατακτήσει την Αίγυπτο, Βαβυλωνία, Περσία και Βακτριανή, διέσχισε την οροσειρά του Ινδοκαυκάσου και υπέταξε τα μικρά ινδικά βασίλεια της περιοχής. Το μεγαλεπήβολο έργο του Μεγάλου Αλεξάνδρου δεν ήταν μόνον η κυριαρχία των περιοχών αυτών αλλά και μια αποστολή εκπολιτισμού των λαών αυτών της ανατολής. Η κατάκτηση των Ινδιών από τον Μέγα Αλέξανδρο υπήρξε «η κοσμοϊστορική αποστολή του πνεύματος κατά των βαρβάρων». (Στρ. 66, Humbolt Kosmos II 184,433).

Η δυναστεία των Μαουρίγια (322-184 π.Χ.)

Μετά τον πρόωρο θάνατο του Μεγάλου Αλεξάνδρου το 323 π.Χ., δημιουργήθηκε αναστάτωση στην περιοχή και μεγάλη διαμάχη μεταξύ των στρατηγών του. Ο Σαντρακούπτα (Chamdragupta Maurıya), επωφελούμενος την κατάσταση ανακατάλαβε τις ινδικές επαρχίες και έγινε ο ηγέτης μιας νέας δυναστείας, αυτής των Μαουρίγια (Maurıya) 322-

184 π.Χ. Επί των ημερών του το κράτος του περιελάμβανε όλη την βόρεια Ινδία από τον κόλπο της Βεγκάλης μέχρι την αραβική θάλασσα. Επίσης ο Σαντραγκούπτα δημιούργησε φιλικές και εμπορικές σχέσεις με τον Σέλευκο καθώς και με άλλους διαδόχους του Μεγάλου Αλεξάνδρου.

Ως ο σπουδαιότερος από διαδόχους του Σαντραγκούπτα μπορεί να θεωρηθεί ο **Ασόκα** (Ashoka 273-232π.Χ.). Ο Ασόκα πριν γίνει βασιλιάς, υπήρξε αντιβασιλέας στα Τάξιλα, πόλη που είχε ιδιαίτερα έντονο το ελληνικό στοιχείο και πολύ στενές με γειτονικές ελληνικές πόλεις. Στις κτήσεις που κληρονόμησε πρόσθεσε και άλλες και υπήρξε ο πρώτος βασιλιάς που καθιέρωσε ένα σύστημα καταγραφής διαταγμάτων τα οποία χαράσσονταν πάνω σε πέτρινες στήλες και οι οποίες από το όνομά του, πήραν την ονομασία «ένδικτα του Ασόκα». Οι στήλες αυτές βρισκόταν διάσπαρτες σε διάφορα σημεία της χώρας, και τα κείμενα τους είναι τα αρχαιότερα γραπτά κείμενα που έχουν βρεθεί στην Ινδία, όπου μεταξύ των άλλων περιέχουν κάποια από τα σύμβολα αριθμών που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα.

Στη συνέχεια μεσολαβεί μια περίοδος πολιτικής αποσύνθεσης, η οποία σημαδεύεται από τις εισβολές των Ελλήνων , των Σκυθών και των Κουσάν.

Η δυναστεία των Κουσάν (1ος αι. π.Χ. – 3ος αι. μ. Χ.)

Κατά τον 1ο π.Χ. αιώνα καταλαμβάνουν την βόρεια Ινδία οι επιδρομείς Κουσάν (Kushan). Η αυτοκρατορία των Κουσάν, γίνεται σύντομα ένα σπουδαίο εμπορικό κέντρο μεταξύ ανατολής και δύσης.

Η δυναστεία των Γκούπτα (320 – 480 μ.Χ.)

Από τις αρχές του 4ου μ.Χ. αιώνα, μια νέα δυναστεία γηγενών αυτοκρατόρων που φέρουν το όνομα Γκούπτα (Gupta), έρχεται να κυβερνήσει την χώρα και αυτός ο αιώνας διακυβέρνησης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ο χρυσός αιώνας της σανσκριτικής λογοτεχνίας. Κατά την περίοδο αυτή που διήρκησε περίπου 1.5 αιώνα άρχισε μια εποχή άνθησης των τεχνών, των επιστημών και ιδιαίτερα της ιατρικής. Ινδοί άποικοι μεταφέρουν τις γνώσεις αυτές και τον πολιτισμό τους, σε διάφορες περιοχές της νοτιοανατολικής Ασίας. Όμως η δυναστεία των Γκούπτα έφτασε στην παρακμή της γύρω στο 480 μ.Χ.. Παρόλα αυτά όμως, συνέχισε την διακυβέρνηση σε κάποιες ανατολικές επαρχίες μέχρι τον 8ο αιώνα.

Ο Χάρσα-Βαρδάνα (7ος αι. μ.Χ.)

Γύρω στα 606 μ.Χ., ένα ισχυρό βασίλειο αναδύεται στην Ινδία κάτω από την εξουσία του Χάρσα (Harsha), του τελευταίου σπουδαίου μονάρχη στην ιστορία της χώρας αυτής πριν την μεσαιωνική εποχή. Όμως μετά τον θάνατο του το 647 μ.Χ., το βασίλειό του καταρρέει και διαιρείται σε πολλά μικρά κρατίδια. Τα κοινά πολιτισμικά στοιχειά που συνέδεαν τα διάφορα κρατίδια, αποτέλεσαν έναν ισχυρό συνδετικό κρίκο μεταξύ των ακόμη και μετά τον 7ο αιώνα. Μέχρι αυτή την εποχή, στο τομέα των

μαθηματικών έχουμε να αναφέρουμε και τους πρώτους μαθηματικούς-αστρονόμους. (Aryabhata, Braghmagupta, Bhaskara κ.ά.).

Μουσουλμάνοι και Μογγόλοι κατακτητές ($8^{ος}$ -$16^{ος}$ αιώνας)

Από τις αρχές του $8^{ου}$ αιώνα οι μουσουλμάνοι άραβες εισβάλουν στην βόρεια Ινδία όπου διαδραματίζονται πολλές μάχες μεταξύ των δυο αυτών λαών. Προς το τέλος του $12^{ου}$ αιώνα όμως, επικράτησε ο μουσουλμανικός στρατός με αρχηγό το Μοχάμεντ Χόρι και το 1206 ο σουλτάνος του Δελχί ιδρύει την αυτοκρατορία του η οποία διήρκησε πάνω από 300 χρόνια. Το 1398 γίνεται η εισβολή του Ταμερλάνου και διαλύονται μεγάλο μέρος των βασιλείων της Βόρειας Ινδίας. Κατά τον $16^{ο}$ αιώνα ο Μαμπέρ απόγονος του Ταμερλάνου, ιδρύει την Μογγολική αυτοκρατορία της Βορειοδυτικής Ινδίαςκαι η οποία γνωρίζει ιδιαίτερη άνθιση κυρίως πνευματική και πολιτιστική την περίοδο του Άκμπαρ. Αν και η Ινδία δέχτηκε πολλούς εισβολείς και διαιρέθηκε σε αρκετά μακρά βασίλεια εν τούτοις η μελέτη και η πρόοδος των μαθηματικών και ιδιαίτερα της αστρονομίας όχι μόνο δεν σταμάτησε, αλλά ενδυναμώθηκε. Αιτία αυτής της προόδου μπορεί να πήγαζε από την ανάγκη των διάφορων κυβερνητών για τις απαραίτητες γι' αυτούς αστρολογικές προβλέψεις. Τα περισσότερα μαθηματικά έργα αυτής της περιόδου, αποτελούν τμήματα έργων με περιεχόμενο αστρονομικό. Εδώ όπως και αλλού, η επίλυση πρακτικών προβλημάτων του λαού, οδήγησε κάποιους αξιόλογους μαθηματικούς στην ανακάλυψη νέων περιοχών στα μαθηματικά.

Ευρωπαίοι άποικοι- Βρετανική κυριαρχία($16^{ος}$ –μέσα $20^{ου}$ αιώνα)

Από τον $16^{ο}$ αιώνα φθάνουν στην Ινδία οι Ευρωπαίοι. Πρώτοι οι Πορτογάλοι, έπειτα οι Ολλανδοί και οι Γάλλοι και τελευταίοι οι Άγγλοι, οι οποίοι κατόρθωσαν να διώξουν όλους τους άλλους Ευρωπαίους και να γίνουν απόλυτοι κυρίαρχοι της χώρας. Ο Άγγλοι μονοπωλούν το εμπόριο, επιβάλουν δυσβάσταχτους φόρους και δίνουν χαμηλούς μισθούς. Η Ινδία έμεινε αποικία της Αγγλίας ως το 1947.

Ανεξαρτησία της Ινδίας(1947- σήμερα)

Οι Ινδοί όμως δεν έπαυσαν να ζητούν την ανεξαρτησία τους, την οποία πέτυχαν το 1947, έπειτα από σκληρούς αγώνες επικεφαλής των οποίων ήταν ο μεγάλος Ινδός ηγέτης Μαχάτμα Γκάντι. Τότε ανακηρύχτηκε αυτοκυβέρνητη χώρα με καθεστώς κτήσης. Στις 26 Ιανουαρίου 1950 έγινε ανεξάρτητη δημοκρατία, αλλά παραμένει στην Βρετανική κοινοπολιτεία.

Β. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΙΝΔΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ 7^{Ο} μ.Χ. ΑΙΩΝΑ

Για να κατανοήσουμε και συνδέσουμε καλύτερα τα επιτεύγματα των Ινδών στον τομέα των μαθηματικών, κρίνουμε σκόπιμο να διαχωρίσουμε την ιστορία των ινδικών μαθηματικών σε κάποιες περιόδους, έτσι ώστε να γίνει ευχερέστερη η μελέτη τους. Αυτός ο διαχωρισμός μας δίνει την δυνατότητα να κατανοήσουμε το χρονικό πλαίσιο δημιουργίας και εξέλιξης των ινδικών μαθηματικών, επειδή η έλλειψη επαρκών αποδεικτικών στοιχείων δεν αφήνει περιθώρια για ακριβείς χρονικούς προσδιορισμούς. Επίσης μας βοηθά αποτελεσματικά, στην σύνδεση των διάφορων μαθηματικών εννοιών, και την μελέτη και ερμηνεία αυτών σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό.

Αρχικά κρίνουμε απαραίτητο, να αναφερθούμε στην ονομαζόμενη **βεδική περίοδο.** Η περίοδος αυτή ενώ έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον από λογοτεχνική άποψη, παρουσιάζει μικρό ενδιαφέρον από μαθηματική σκοπιά. Παρόλα αυτά οφείλουμε να την αναφέρουμε γιατί από τις κατασκευαστικές εφαρμογές βωμών εκείνης της εποχής, αντλούμε τις πρώτες πληροφορίες περί των μαθηματικών γνώσεων των Ινδών.

Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν, ότι τα πρώτα σπέρματα των μαθηματικών στην Ινδία εντοπίζονται στα λογοτεχνικά κείμενα της Βεδικής περιόδου.

1. ΒΕΔΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Η αρχή της περιόδου αυτής, συμπίπτει με την άφιξη και εγκατάσταση στην περιοχή της Ινδικής χερσονήσου γύρω στο 1500 π.Χ., των διάφορων ινδοευρωπαϊκών φύλων, που φέρουν το όνομα Ινδιοάριοι ή Άριοι.

Η βεδική περίοδος πήρε το όνομά της από την λέξη Βέδα (veda), που στα σανσκριτικά σημαίνει γνώση και έχει σχέση με την ελληνική ρίζα Fοιδ (οίδα). Η ίδια λέξη (Βέδα ή Βέδες), χρησιμοποιείτο και για τα βιβλία της γνώσης δηλαδή τα θρησκευτικού περιεχομένου βιβλία, όπου σύμφωνα με τις δοξασίες των Ινδών ήταν καταχωρημένη όλη η εξ' αποκαλύψεως γνώση.

Δεν υπάρχουν σωζόμενα γραπτά τεκμήρια αυτής της περιόδου. Το παράδοξο στην περίπτωση αυτή είναι, ότι τα ιερά κείμενα των Βεδών, μπόρεσαν να διασωθούν και μάλιστα αναλλοίωτα για πολλούς αιώνες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, τα κείμενα αυτά μεταφερόταν προφορικά αποκλειστικά και μόνον από τους ιερείς. Έτσι την θέση του αντιγραφέα έπαιρνε εδώ, η μνήμη του ιερέα που έπρεπε να αποστηθίσει το περιεχόμενο αυτών και μάλιστα απαρέγκλιτα. Η διατήρηση άθικτου του

περιεχομένου των Βεδών, προερχόταν από την επιτακτική ανάγκη πραγμάτωσης της θυσιαστήριας τελετής ακολουθώντας με ιδιαίτερη σχολαστικότητα το τυπικό της, προκειμένου να αποβεί επιτυχής.

1.1 Η βεδική λατρεία

Η θυσία αποτελούσε τη κεντρική πράξη της βεδικής λατρείας. Ήταν το επίσημο προσφερόμενο συμπόσιο στους θεούς, ήταν η τροφή που χρειαζόταν για να αναζωογονήσουν οι θεοί τις δυνάμεις τους.

«οι θεοί μεγαλώνουν με την θυσία. Αντλούνε δύναμη από την θυσία»,

λέει ένας ύμνος. Γίνεται από τους ανθρώπους με σκοπό να κινήσει την ευγνωμοσύνη των θεών να εισακούσουν τις ικεσίες τους.

Ο M. Hollesbecque [(Η)], περιγράφει ένα ακόμη αυστηρά τελετουργικό σκηνικό:

«Οι Γοτάμας (οικογένεια ιερέων), κάνοντας την παράκλησή τους κύλισαν του νερού τ'ασκί, για να το πιούνε».

Ριγ- Βέδα 188,4

Η μεγάλη σημασία των τύπων με την πάροδο των χρόνων ολοένα πληθαίνει και έτσι κάνει απαραίτητη την ειδίκευση μιας συγκεκριμένης τάξης αυτής των ιερέων, που γρήγορα καταλαμβάνουν μια εξέχουσα θέση, στην ινδική κοινωνία. Όμως το έργο τούτο της θυσίας, έγινε τόσο πολύπλοκο και τόσο αυστηρό, που χρειάστηκε να μοιραστεί σε διάφορες λειτουργίες.

> «Ο Χοτάρ και οι βοηθοί του απαγγέλλοντας στροφές της Ριγ-Βέδα, στις οποίες απαντούσε ο Ουτγκατάρ με άσματα της Σάμα-Βέδα. Ο Αβδαρυού και οι υπηρέτες του βοηθούσαν σε όλες τις υλικές δουλειές, ενώ ο Βραχμάνας ντυμένος με τα ιερατικά του ρούχα, στεκόταν δεξιά ακίνητος και σιωπηλός, επιβλέποντας για την τάξη της ιεροτελεστίας. Ένα λάθος αν γινόταν, μια μακρόσυρτη συλλαβή να προφερόταν αντί μιας σύντομης, έπεφτε πάνω στην ιερή φωτιά- σαν γιατρός της θυσίας- και επανόρθωνε την ζημιά που έγινε στους θεούς».

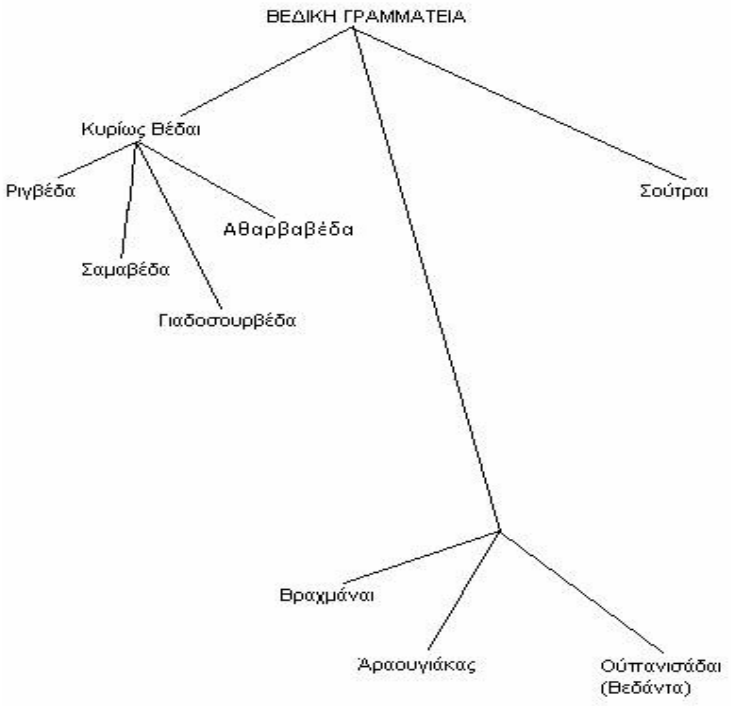
Αποτέλεσμα λοιπόν, του αυστηρού θρησκευτικού τυπικού που επέβαλε την αποκλειστικότητα και την προφορική μεταφορά της ιερής γνώσης μόνο από ιερείς, ήταν η γνώση που έχουμε εμείς σήμερα για τα ιερά αυτά κείμενα.

1.2 Το περιεχόμενο των Βεδών

Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τις Βέδες σαν την Παλαιά Διαθήκη των Ινδιών. Διαφέρει όμως από την δική μας Παλαιά Διαθήκη, διότι είναι πολύ ογκωδέστερη και αποτελείται από πολλά βιβλία που παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις ως προς τον χρόνο σύνθεσής των. Στις Βέδες οι μελετητές διακρίνουν δύο εξελικτικά στάδια. Το αρχαιότερο, που περιλαμβάνει τις κυρίως Βέδες, με τα τρία κανονικά βιβλία της Ριγ-βέδας, της Σαμαβέδας και της Γιαδσουρβέδας και ένα μη κανονικό της Αθαρβαβέδας, και το νεώτερο, που αποτελούν οι λεγόμενες Βραχμάνες (Brahmanas) (σχ. 1).

Οι κυρίως Βέδες αποτελούνται από συλλογές ωδών που ονομάζονται Μαντράς και περιέχουν θρησκευτικούς ύμνους καθώς και οδηγίες για θρησκευτικές τελετές. Από τις τέσσερες συλλογές σπουδαιότερη θεωρείται η Ριγ-βέδα (Rig-Veda), που σημαίνει « γνώση των στίχων» (ρίτς), των ύμνων και των θυσιαστήριων ωδών. Περιλαμβάνει 1028 ύμνους και διαιρείται σε 10 βιβλία.

Κατωτέρω, βλέπουμε το σχεδιάγραμμα των μερών που απαρτίζουν τη Βεδική γραμματεία



(Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια)
(Σχήμα1)

Τα κείμενα των κυρίως Βεδών είναι έμμετρα, για την εύκολη και χωρίς παρεκκλίσεις αποστήθιση αυτών. Όμως η συμπυκνωμένη έμμετρη γραφή χωρίς αμφιβολία αποτελεί ένα βασικό εμπόδιο στην κατανόησή τους. Έτσι έρχονται στη συνέχεια μεταγενέστερα θρησκευτικά κείμενα, οι Βραχμάνες, γραμμένες σε πεζό λόγο για να βοηθήσουν στην συμπλήρωση και επεξήγηση των πρώτων.

Ως συμπλήρωμα των Βραχμάνων έχουμε μεταγενέστερα έργα που είναι οι Ουπανισάδες (Upanishads=διδασκαλίες) και οι Αραουγιάκας.

Για την ηλικία των συλλογών των κυρίως Βεδών, μόνον υποθετικές εκτιμήσεις μπορούν να γίνουν. Κατά τους Jacobi και Thibau ο βεδικός πολιτισμός ανάγεται στο 2000 ίσως και 4000 π.Χ. Όμως οι αριθμοί αυτοί είναι πολύ υποθετικοί και αμφιλεγόμενοι. Η επικρατέστερη άποψη για τον χρόνο σύνθεσης των Βεδών, βρίσκεται μεταξύ του 1500 και 1000 π.Χ.

Ένα τρίτο μεταγενέστερο στρώμα στον κύκλο των Βεδών, είναι τα **Σούτρας** (Sutras). Η σύνθεση των υπολογίζεται προς το τέλος της Βεδικής περιόδου (500-200π.Χ.). Τα Σούτρας είναι συλλογές από αποφθέγματα και κανόνες που αφορούν θρησκευτικές τελετουργίες και τελετουργίες κοινωνικού και αστικού βίου. Ανάλογα με το περιεχόμενό τους φέρουν διάφορες ονομασίες όπως, Κάμα Σούτρα, Γιόγκα Σούτρα, Σούλβα Σούτρα κ.ά.

2. ΤΑ ΣΟΥΛΒΑΣΟΥΤΡΑΣ (Sulvasûutras)

Όπως αναφέραμε, τα Σουλβασούτρας είναι παραρτήματα των Βεδών και είναι τα αρχαιότερα κείμενα, μέσα από τα οποία αντλούμε πληροφορίες για την απαρχή των ινδικών μαθηματικών. Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι η ανάπτυξη των ινδικών μαθηματικών δεν είχε σαν στόχο κάποια θεωρητική θεμελίωση αυτών, όπως συνέβη με τους Έλληνες, αλλά καθαρά θρησκευτικό σκοπό.

Τα κείμενα των Σουλβασούτρας περιγράφουν τον τρόπο κατασκευής βωμών, δεδομένου ότι αυτοί έπρεπε να έχουν συγκεκριμένο σχήμα και μέγεθος. Αυτά αποτελούν ακόμη, συμπλήρωμα ενός άλλου έργου που πραγματεύεται επίσης κατασκευές βωμών, και φέρει το όνομα Kalpasutras.

Η λέξη Σουλβασούτρας προέρχεται από σύνθεση των λέξεων «sulva» που σημαίνει νήμα, σχοινί, χορδή και «sutra» που σημαίνει βιβλίο κανόνων ή αφορισμών. Όμως άλλοι μελετητές ερμηνεύουν την λέξη ως «κανόνες των σχοινιών», αφού τα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν για την κατασκευή βωμών ήταν η σφήνα και το σχοινί και άλλοι πάλι δίνουν την ερμηνεία «κανόνες των χορδών» επειδή ένα μέρος του έργου περιέχει στοιχεία αστρονομίας που προϋποθέτουν σχέσεις χορδών.

Τα κείμενα των Σουλβασούτρας βασίζονται σε μια πολύ παλιά προφορική παράδοση. Χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι η ποιητική τους δομή. Το ιδιαίτερο αυτό χαρακτηριστικό που διευκόλυνε κατά πολύ την απομνημόνευση, είχε σαν αποτέλεσμα να διατηρηθεί σχεδόν αναλλοίωτο το περιεχόμενό τους. Με αυτή την μορφή πέρασαν από γενιά σε γενιά, μέχρι να έλθει η στιγμή να τυπωθούν και μελετηθούν.

Υπάρχουν πολλές εκδόσεις Σουλβασούτρας. Οι σημαντικότερες και παλαιότερες είναι εκείνες που έγραψαν οι Baudhayana και Apastamba, ενώ μικρότερο ενδιαφέρον έχουν αυτές των Manava και Katayana.

Για τους συνθέτες των Σουλβασούτρας δεν γνωρίζουμε τίποτε περισσότερο από το όνομα και την περίοδο που αυτοί έζησαν. Κάποιοι ιστορικοί θεωρούν, ότι αυτοί ενδεχομένως προέρχονται από την τάξη των ιερέων που πραγματοποιούσαν τις θυσίες και που στην συνέχεια κατέγραψαν τα γεγονότα αυτά. Για κάποια αντίστοιχη τάξη ιερέων, που είχαν την άνεση (μάλλον με την έννοια του ελεύθερου χρόνου), για πρακτική στη γεωμετρία, μνημονεύει και ο Αριστοτέλης. [(VW1)]

Ο χρόνος συγγραφής των Σουλβασούτρας δεν είναι εύκολο να καθοριστεί. Η χρονολόγηση των κειμένων των αρχαίων πολιτισμών της Άπω Ανατολής σπάνια είναι αξιόπιστη, όταν η ορθόδοξη ινδική παράδοση καυχιέται την ύπαρξη σημαντικών αστρονομικών έργων πριν 2.000.000 χρόνια και οι υπολογισμοί μας οδηγούν σε δισεκατομμύρια ημερομηνιών από την αρχή της ζωής του Βούδα έως το 400 μ.Χ. περίπου. Οι αναφορές στις αριθμητικές και γεωμετρικές σειρές στη Βεδική βιβλιογραφία που υποτίθεται ότι τοποθετούνται γύρω στα 2.000 π.Χ. ίσως να είναι πιο αξιόπιστες, αλλά δεν υπάρχουν σύγχρονά τους ντοκουμέντα από την Ινδία που να τις επιβεβαιώνουν.[(B-M)]

Παρ' όλα αυτά διάφοροι μελετητές επιχείρησαν να δώσουν κάποιο χρονικό προσδιορισμό των Σουλβασούτρας κατά προσέγγιση. Όμως παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις στις προτεινόμενες από αυτούς χρονολογίες. Ο G. R. Kaye.[(K)], μας αναφέρει τις εκτιμήσεις κάποιων μελετητών όπως: Τον Max Müller που προσδιορίζει τον χρόνο σύνθεσης των Σουλβασούτρας μεταξύ του 500 και 200 π.Χ. , τον R. C. Dutt που δίνει το 800 π. Χ. περίπου, τον Büller που υπολογίζει ως χρόνο έναρξης της σχολής του Apastamba τον 4^{ο} αιώνα π. Χ. και αυτής του Baudhayana λίγο νωρίτερα, τον Macdonnell που τοποθετεί τα Σουλβασούτρας μεταξύ του 500 π.Χ. και 200 μ.Χ.[(K)]

Ακόμη ο Richard Mankiewiewicz δηλώνει ότι, οι πρώτοι στίχοι των Σουλβασούτρας γράφτηκαν περίπου το 800-600 π.Χ., πριν την κωδικοποίηση των σανσκριτικών από τον Πανίνι (4^{ος} αιώνας π. Χ.). Την ίδια άποψη φαίνεται να έχει και ο Seidenberg υποστηρίζοντας ότι, κάποιες γεωμετρικές κατασκευές που περιγράφονται στα Σουλβασούτρας, βρισκόταν ήδη καταγεγραμμένες σ' ένα προγενέστερο εγχειρίδιο, το Satapatha Brahmana, και ότι ο συγγραφέας του έργου αυτού έζησε

πιθανότατα πριν το 600 π.Χ. Προσθέτει ακόμη, ότι δεν ήταν δυνατόν να είχε δεχθεί κάποια επιρροή από την γεωμετρία των Ελλήνων. [(VW1)]

2.1 Το περιεχόμενο των Σουλβασούτρας

Όπως προείπαμε, τα κείμενα των Σουλβασούτρας αποσκοπούσαν να δώσουν τις απαραίτητες οδηγίες για τον τρόπο κατασκευής βωμών. Το σχήμα και το μέγεθος αυτών, είχε βαρύνουσα σημασία στην πραγμάτωση θρησκευτικών τελετών. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι πολλοί από τους βωμούς είχαν περίπλοκα σχήματα, όπως γερακιού με καμπυλωμένα φτερά (σχ.8), χελώνας με τεταμένα πόδια και κεφάλι κ.α. Η κατασκευή των βωμών γινόταν με πλίνθινα τούβλα και όπως καταλαβαίνουμε δεν ήταν εύκολη υπόθεση για εκείνη την εποχή, αλλά απαιτούσε εκτός από δεξιοτεχνία και γνώση. Η ακρίβεια της κατασκευής μαζί με την ορθή προφορά των στίχων, ήταν στοιχεία απαραίτητα, για την επιτυχή έκβαση της θυσίας. Υπόβαθρο για τις γεωμετρικές κατασκευές βωμών ήταν αναμφίβολα η μαθηματική γνώση. Η γνώση αυτή είχε καθαρά πρακτικό στόχο και δεν αποσκοπούσε σε κάποια θεωρητική θεμελίωση. Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι στα Σουλβασούτρας περιέχονται μόνο κανόνες κατασκευών, συνοδευμένοι από αντίστοιχα αριθμητικά παραδείγματα, χωρίς να αναφέρονται σε κάποια μαθηματική θεωρία ή απόδειξη.

Για την ιστορία των μαθηματικών, το αρχαιότερο έργο όπου μέσα από πρακτικές εφαρμογές θρησκευτικής φύσεως, ανιχνεύουμε τα πρώτα δείγματα μαθηματικών γνώσεων της Ινδίας, είναι τα Σουλβασούτρας (Sulvasûutras).

2.2 Πυθαγόρειο θεώρημα και οι Πυθαγόρειες τριάδες

Οι Ινδοί, λαός με βαθύ θρησκευτικό αίσθημα πίστευαν ότι στις θρησκευτικές τελετουργίες τους οι βωμοί όπου γινόταν οι θυσίες έπρεπε να έχουν συγκεκριμένο σχήμα και μέγεθος. Όπως μας πληροφορεί ο R. Cooke[(C)], σε κάθε ινδικό σπίτι υπήρχαν τρεις φωτιές που έκαιγαν σε τρείς διαφορετικούς βωμούς. Οι βωμοί, οι οποίοι διέφεραν ως προς το σχήμα, έπρεπε όμως να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Η ανάγκη εκπλήρωσης αυτής της απαίτησης γινόταν με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. [(C)]

Το γεγονός αυτό γρήγορα τους έκανε να έλθουν αντιμέτωποι με προβλήματα, που η λύση τους απαιτούσε μαθηματικές γνώσεις. Ένα βασικό θεώρημα, το Πυθαγόρειο, ήταν απαραίτητο εργαλείο. Για αυτό άλλωστε το Πυθαγόρειο θεώρημα, παίζει ρόλο πρωταγωνιστικό στα Σουλβασούτρας. Η διατύπωσή του δεν φανερώνει κάποιο επιστημονικό

υπόβαθρο. Δίνεται μ' έναν αρκετά περιγραφικό τρόπο, και συνοδεύεται από μια σειρά Πυθαγορείων τριάδων.

Στο αρχαιότερο και σημαντικότερο Σουλβασούτρας του Baudhayana, βρίσκουμε την διατύπωση του Πυθαγορείου θεωρήματος ως εξής:

« Η διαγώνιος ορθογωνίου παράγει από μόνη της το εμβαδόν, που παράγουν οι δύο πλευρές του ορθογωνίου χωριστά».

(δηλ. το τετράγωνο της διαγωνίου ενός ορθογωνίου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών). [(VW1)]

Ο Baudhayana για να γίνει πιο σαφής και να αποφύγει τυχόν παρερμηνείες του κανόνα, δίνει στη συνέχεια μια σειρά παραδειγμάτων, δηλαδή ορθογωνίων που τα μήκη των πλευρών τους είναι:

(3,4) , (12,16) , (15,8) , (7,24) , (12,35) και (15,36).

Εδώ παρατηρούμε ότι γίνεται σύνδεση των πυθαγορείων τριάδων με το Πυθαγόρειο θεώρημα, αλλά αυτές που περιλαμβάνουν οι διάφορες εκδόσεις δεν είναι πάντοτε ίδιες. Συγκεκριμένα στις εκδόσεις των Apastamba και Baudhayana συναντούμε τις ακόλουθες τριάδες:

APASTAMBA	BAUDHAYANA
$3^2 + 4^2 = 5^2$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
$12^2 + 16^2 = 20^2$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
$15^2 + 20^2 = 25^2$	$8^2 + 15^2 = 17^2$
$5^2 + 12^2 = 13^2$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
$15^2 + 36^2 = 39^2$	$12^2 + 35^2 = 37^2$
$8^2 + 15^2 = 17^2$	$15^2 + 36^2 = 39^2$
$12^2 + 35^2 = 37^2$	

Το Σουλβασούτρας του Katayana διαφοροποιείται κάπως σ' αυτό το σημείο. Δεν περιέχει καθόλου ρητά παρά μόνον άρρητα παραδείγματα τριάδων, όπως:

$$1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{και} \quad 2^2 + 6^2 = 40$$

Όμως και οι τρείς εκδόσεις περιλαμβάνουν μια σημαντική τριάδα, αυτή που με σύγχρονο συμβολισμό είναι η $(a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3})$, και που παράγεται όταν οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίσες με την πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου πλευράς a. Δεν γνωρίζουμε με ποιόν τρόπο βρήκαν τις τριάδες αυτές οι συνθέτες των Σουλβασούτρας. Δεν υπάρχει καμιά ένδειξη που να καταμαρτυρεί ότι προέρχονται από κάποιο κανόνα.(G R. Kaye)[(K)]. Ακόμη ο Seideberg, αναφέρει ότι οι τριάδες της έκδοσης Apastamba έχουν κατασκευαστεί με τον ίδιο τρόπο όπως στα «Μετρικά» του Ήρωνα (1ος αιώνας μ. Χ.). [(S)]

Ένα άλλο σημείο που έχει άμεση σχέση με το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι ο σχηματισμός τετραγώνου με την επιτυχή προσθήκη του γνώμονα. Το σχετικό κείμενο αναφέρει ο G. R. Kaye[(K)]:

«Διακόσια και είκοσι πέντε από αυτά τα τούβλα σχηματίζουν το επτά-στηλο «agni» με «aratni» και «pradesa». Σ' αυτά προσθέτουμε ακόμη εξήντα τέσσερα. Με αυτά τα τούβλα σχηματίζεται ένα τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου αποτελείται από δεκαέξι τούβλα. Απομένουν ακόμη τριάντα τρία τούβλα, και αυτά τοποθετούνται γύρω από τα άκρα (sic) των πλευρών».

2.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εμφανίζεται ακόμη, μέσα από διάφορους κανόνες κατασκευών, όπως τετραγώνων και ορθογωνίων καθώς και σχέσεων διαγωνίων και πλευρών. Κατασκευές που περιέχονται στη έκδοση Baudhayana είναι οι εξής:

1) Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με άθροισμα δοθέντων τετραγώνων.
2) Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με διαφορά δοθέντων τετραγώνων.
3) Κατασκευή ορθογωνίου ισοδύναμου με δοθέν τετράγωνο.
4) Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δοθέν ορθογώνιο.

Από τους ανωτέρω κανόνες οι δύο πρώτοι είναι απλές εφαρμογές του τύπου, $c^2 = a^2 + b^2$. Ο τρίτος, δίνει την γεωμετρική κατασκευή ορθογωνίου με πλευρές $a\sqrt{2}$ και $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ο τέταρτος, δίνει την σημαντική γεωμετρική κατασκευή $ab = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$, που σχετίζεται με την πρόταση (II.14) των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Ανάλογες κατασκευές βρίσκουμε και στην έκδοση Apastamba. Το σημαντικό στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι, τέτοιες γεωμετρικές κατασκευές δεν βρίσκονται σε κανένα μεταγενέστερο ινδικό έργο. (G. R. Kaye) [(K)]

Μια άλλη σημαντική πρόταση είναι αυτή που δίνει την διαγώνιο ενός τετραγώνου από την σχέση:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Η πρόταση αυτή δίνεται αυθαίρετα και χωρίς επεξηγήσεις. Φαίνεται μάλιστα να είχε βαρύνουσα σημασία για τον Ινδικό λαό, γιατί αν θεωρήσουμε ότι το τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος 1, τότε η πρόταση μας δίνει την τιμή του $\sqrt{2}$ δηλαδή,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Η σχέση αυτή απασχόλησε αρκετούς μελετητές.

Ο G.R.Kaye [(K)], την χαρακτηρίζει «ως τυχαία τιμή» και θεωρεί ότι το αποτέλεσμα προέρχεται από κάποια κλίμακα μετρήσεων, βασισμένη στην εναλλαγή των λόγων 3, 4, και 34 και μια τέτοια κλίμακα χρησιμοποιούσε ο Baudhayana. Ακόμη δεν πιστεύει ότι μπορεί να προέρχεται από κάποιο προσεγγιστικό τύπο, γιατί δεν ήταν δυνατόν να είχαν ανάλογες γνώσεις οι συνθέτες των Σουλβασούτρας. Τονίζει όμως ότι το μόνο σημαντικό στην προκειμένη περίπτωση, είναι η γραφή κλασμάτων με αριθμητή την μονάδα και ότι ούτε η τιμή ούτε αυτός ο τύπος κλασμάτων, συναντώνται σε μεταγενέστερα έργα.

Μέσα στο πλαίσιο κατασκευών, φαίνεται να ήταν και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Έτσι διάφορες σχέσεις που συνδέουν την διάμετρο του κύκλου, με την πλευρά του ισοδύναμου προς αυτό τετράγωνο, όπως:

α) $$d = a + \frac{1}{3}(a\sqrt{2} - a)$$

β) $$a = d - \frac{2}{15}d$$

γ) $$a = d(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8})$$

Οι δύο πρώτοι κανόνες δεν παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον, και ότι ο τρίτος που δίνεται μόνον από τον Baudhayana, παράγεται από τον πρώτο, με αντικατάσταση της αριθμητική τιμής του $\sqrt{2}$, που δόθηκε προηγουμένως. Έτσι έχουμε:

$$\frac{a}{d} = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} = \frac{3}{2 + \frac{377}{408}} = \frac{1224}{1393}$$

$$= 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}$$

Στην παραπάνω σχέση αν αφαιρέσουμε τον τελευταίο όρο, παίρνουμε τον (γ) κανόνα. Εδώ έχουμε μια διαδικασία αντικατάστασης κλασμάτων, με κλάσματα που έχουν ως αριθμητή την μονάδα. Αλλά ο Kaye[(K)], διατηρεί επιφυλάξεις για το αν οι συνθέτες των Σουλβασούτρας μπορούσαν να έχουν αυτή τη γνώση. Συμπληρώνει ακόμη με την άποψη του Thibeau ότι τίποτε από αυτούς τους κανόνες, δεν μπορεί να τεκμηριώσει ότι οι Ινδοί ήταν έμπειροι σε μεγάλους υπολογισμούς και δεν υπάρχουν ακόμη ενδείξεις ότι ασχολήθηκαν με προόδους.[(K)]

Όμως οι συνθέτες των Σουλβασούτρας δεν έχουν πρωταρχικό σκοπό αυτά καθ' αυτά τα μαθηματικά, αλλά τους κανόνες που θα βοηθήσουν στην επιτυχή έκβαση θρησκευτικών τελετών. Δεν τους ενδιέφεραν τα μαθηματικά ως επιστήμη, με την έννοια που αντιμετωπίστηκαν αυτά στην Ελλάδα, αλλά σαν μέσο κάλυψης θρησκευτικών αναγκών. Αυτός φαίνεται να είναι και ο λόγος που στα κείμενά τους δεν συναντούμε καθόλου αποδείξεις ή επεξηγήσεις, παρά μόνο στεγνά γεγονότα. Ο Kaye[(K)], τονίζει το γεγονός ότι οι μεταγενέστεροι Ινδοί μαθηματικοί αγνοούσαν παντελώς το περιεχόμενο των Σουλβασούτρας. Αυτοί δεν έκαναν καμιά αναφορά αλλά ούτε χρησιμοποιούσαν τα αποτελέσματα που υπήρχαν σ 'αυτά. Ακόμη δεν αναφέρεται το περιεχόμενο του έργου αυτού από κανένα ινδό συγγραφέα μέχρι τον $12^{ο}$ αιώνα

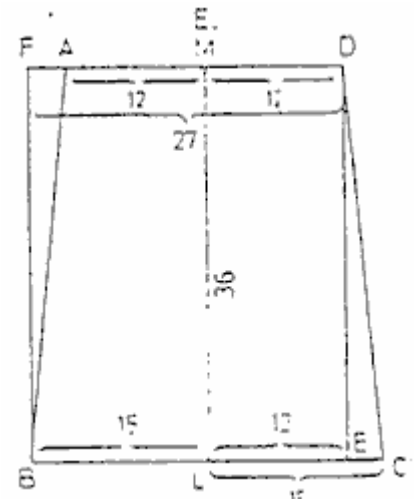
Αντίθετη άποψη με τον Kaye, έχει ο B.L.van der Waerden[(VW1)], ο οποίος πιστεύει ότι τα επιτεύγματα των Ινδών στην γεωμετρία, βρίσκονται σε αρκετά υψηλό επίπεδο. Αναφέρει μάλιστα και κάποιες γεωμετρικές κατασκευές που υπάρχουν στα Σουλβασούτρας, από τις οποίες οι σημαντικότερες είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου και η κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου προς δοθέν ορθογώνιο.

2.4 Προβλήματα που σχετίζονται με κατασκευές βωμών

α. Υπολογισμός εμβαδού τραπεζίου

Ο B.L. van der Waerden[(VW1)], μας δίνει ένα πρόβλημα που υπάρχει στο Σουλβασούτρας του Apastamba και που ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν ισοσκελούς τραπεζίου, όταν δίνονται οι δύο βάσεις και το ύψος αυτού. Η διατύπωση του προβλήματος είναι ακόλουθη:

«Σε έναν βωμό που έχει σχήμα ισοσκελούς τραπεζίου, η ανατολική βάση είναι 24 μονάδες, η δυτική βάση 30, το πλάτος του 36. Το κείμενο αναφέρει ότι το εμβαδόν είναι 972 τετραγωνικές μονάδες».



(Σχήμα 4)

Ο Seidenberg δίνει την απόδειξη στο έργο του «Η αρχή των μαθηματικών» που είναι η εξής:

«Μπορεί να σχεδιάσει κάποιος (μια γραμμή) από το σημείο D (amsa) (σχ.4), και με κατεύθυνση προς τη νότια πλευρά να πάρει το σημείο E που απέχει 12 padas από το σημείο L του (prsihya). Δημιουργείται έτσι το κομμάτι (DEC). Στη συνέχεια στρέφοντας το κομμάτι αυτό, τα τοποθετεί το στην άλλη πλευρά του τραπεζίου. Έτσι ο vedi επιτυγχάνει τον σχηματισμό ενός ορθογωνίου».

Παρατηρούμε ότι με τον απλό αυτό τρόπο, το τραπέζιο μετασχηματίζεται σε ορθογώνιο (FBED), που το εμβαδό του εύκολα θα μπορούσε κάποιος να υπολογίσει. Η απόδειξη αυτή μας είναι γνωστή και χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα. Εντύπωση προκαλεί το γεγονός, ότι οι οδηγίες για τη θέση των σημείων και τη χάραξη ευθυγράμμων τμημάτων, δίνονται με βάση τον προσανατολισμό αυτών. Ας μη μας διαφεύγει ότι οι αρχαίοι Ινδοί, για την κατασκευή των βωμών εκτός από το μέγεθος και το σχήμα έδιναν βαρύτητα και στον προσανατολισμό αυτών. Η λέξη vedi στην τελευταία πρόταση, πιθανώς να αναφέρεται σε τίτλο ή αξίωμα ατόμου, που είχε την εποπτεία της κατασκευής.

Ο Seidenberg μετά την παράθεση της απόδειξης, φαίνεται ιδιαίτερα ικανοποιημένος και με ενθουσιασμό δηλώνει ότι:

«το καταπληκτικό εδώ είναι ότι έχουμε μια απόδειξη»

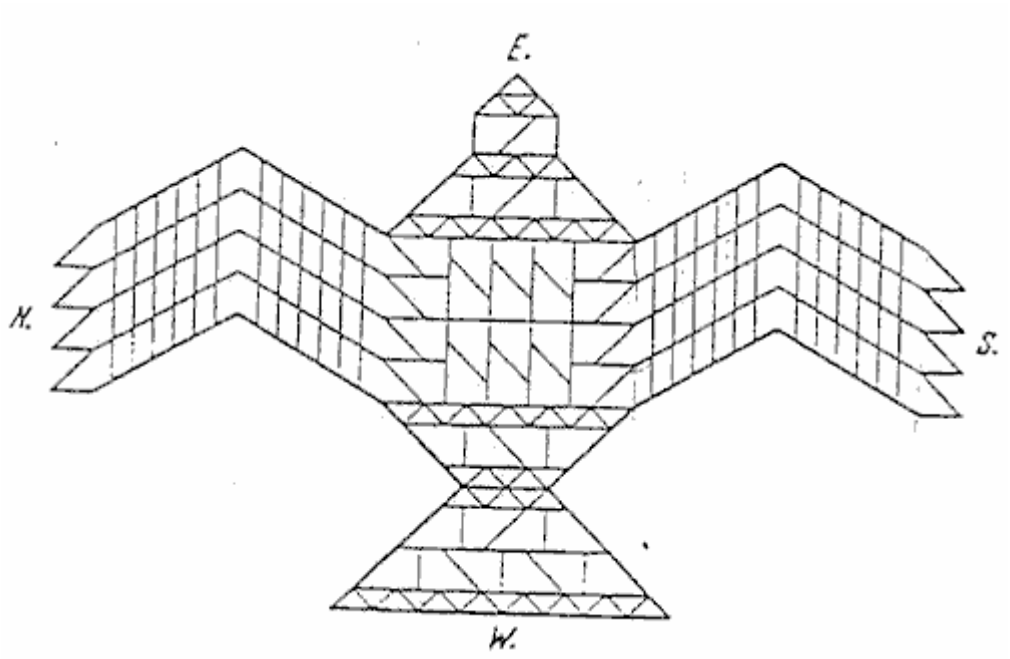
β. Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δοθέν ορθογώνιο

Όμως η πιο δύσκολη περίπτωση από σκοπιά κατασκευαστική, ήταν αυτή που απαιτούσε η επίλυση του προβλήματος:

«να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσου εμβαδού, με δοθέν ορθογώνιο».

Ο B.L.van der Waerden[(VW1)], μας λέει ότι για την συγκεκριμένη κατασκευή, οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν ανάλογες μεθόδους με εκείνες των Ελλήνων. Μεθόδους που στηριζόταν βασικά στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στα Σουλβασούτρας συναντούμε ένα ιδιαίτερο πρόβλημα που σχετίζεται με μια πολύπλοκη κατασκευή και η διατύπωσή του είναι η εξής:

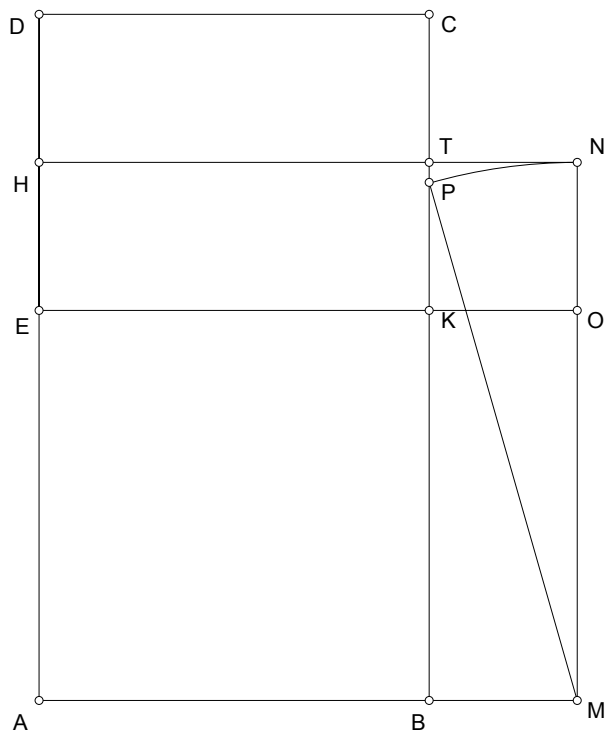
«Δίνεται βωμός σχήματος γερακιού (σχ.5), εμβαδού $7\frac{1}{2}$ *purushas να κατασκευαστεί βωμός με το ίδιο σχήμα έχοντας εμβαδό* $8\frac{1}{2}$ *purushas ».*



(Σχήμα 5)

Η κατασκευή αυτή συνδέεται, με την πρόταση II. 14 των Στοιχείων του Ευκλείδη και η λύση του προϋποθέτει δύο βήματα. Το πρώτο βήμα είναι, να πάρουμε εκτός του ορθογωνίου (με βάση a και ύψος b), ένα μικρό ορθογώνιο με βάση $\frac{(a-b)}{2}$ και ύψος b και να το τοποθετήσουμε στο πάνω μέρος του ορθογωνίου. Έτσι έχουμε επιτύχει να μετασχηματίσουμε το ορθογώνιο σε διαφορά δύο τετραγώνων ισοδύναμο με το αρχικό. Στο δεύτερο βήμα εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα δηλ. $z^2 - y^2 = x^2$, η διαφορά αυτή μπορεί να γίνει τετράγωνο. [(VW1)]

Μια ανάλογη λύση δίνει και ο Cooke [(C)]. Ο ίδιος σχολιάζει ακόμη, ότι η κατασκευή αυτή έχει περισσότερα κοινά σημεία με την πρόταση ΙΙ. 5 των Στοιχείων του Ευκλείδη, παρά με την έννοια των αναλογιών του 6^{ου} βιβλίου των Στοιχείων. Η λύση του προβλήματος, βασίζεται στην κατασκευή τετραγώνου, ισοδύναμου με δοθέν ορθογώνιο. Η διαδικασία που ακολουθεί ο Cooke, είναι η εξής:



(Σχήμα 6)

Έστω ότι έχουμε ορθογώνιο $ABCD$ με $AD \rangle AB$. Στην πλευρά του AD παίρνουμε τμήμα $AE = AB$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το μέσο Η της ED. Ακολούθως στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BM = EH$. Φέρουμε κάθετο στην ΑΜ που να περνά από το Μ καθώς και τις καθέτους στην AD από τα Ε και Η. Βλέποντας το σχήμα παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABCD$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΚΕ και δύο φορές το εμβαδόν του ορθογωνίου ΕΚΤΗ τα μικρά ορθογώνια ΒΜΟΚ, ΕΚΤΗ και $HTCD$ είναι μεταξύ τους ίσα). Έτσι το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου γίνεται ισοδύναμο με την διαφορά των τετραγώνων $AMNH$ και $KONT$. Τώρα με κέντρο το M και ακτίνα MN γράφουμε κύκλο που τέμνει την BT στο P. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BMP εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$BP^2 = MP^2 - BM^2 \quad (1)$$

Για ευκολία στους υπολογισμούς θέτουμε: $AB = a$ και $AD = b$

Τότε $MP = MN = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ και $BM = \frac{b-a}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

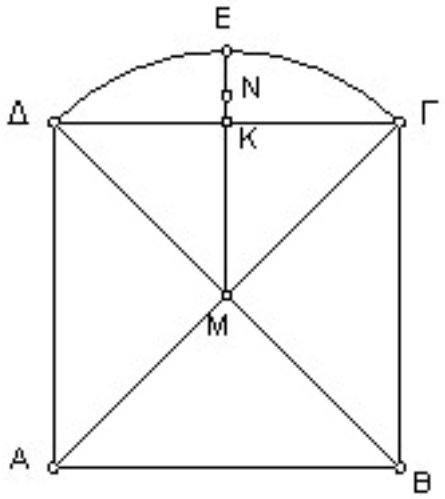
$$BP^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{b-a}{2})^2 = ab \text{ (εμβαδόν ορθογωνίου)}$$

Άρα η ζητούμενη πλευρά τετραγώνου θα είναι ίση με το τμήμα BP.

γ. Ο τετραγωνισμός του κύκλου και η τιμή του π

Στα Σουλβασούτρας το πρόβλημα μετασχηματισμού ενός τετραγώνου σε ισοδύναμο κύκλο, έχει για μια ακόμη φορά χαρακτήρα τελετουργικό.

«Κάποιος έχει έναν τετράγωνο βωμό και επιθυμεί να κατασκευάσει έναν κυκλικό βωμό που να έχει το ίδιο εμβαδό».



(Σχήμα 7)

Το πρόβλημα καθώς και η λύση του, δίνεται από τον van der Waerden [(VW1)].

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ η τομή των διαγωνίων του. Με κέντρο το Μ και ακτίνα ΜΓ γράφουμε κύκλο. Από το Μ φέρουμε κάθετη στη ΔΓ την ΜΚ. Η προέκτασή της ΜΚ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Παίρνουμε $\text{ΚΝ} = \frac{1}{3}\text{ΚΕ}$.

Τότε η ΜΝ είναι η ζητούμενη ακτίνα κύκλου, ισοδύναμου προς το αρχικό τετράγωνο.

Όμως διαπιστώνουμε ότι, η λύση του προβλήματος αυτού, μας δίνει παράλληλα και μια προσεγγιστική τιμή του π. Για ευκολία στους υπολογισμούς, θα πάρουμε πλευρά τετραγώνου ίση με 2. Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, μπορούμε τώρα, να γράψουμε την σχέση:

$$\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2 = 4 \qquad (1)$$

$$\pi = \left(\frac{6}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\pi \approx 3{,}08$$

Ο G.R.Kaye [(K)], συμβολίζοντας με α την πλευρά τετραγώνου και d την διάμετρο ενός κύκλου ισοδύναμου προς το τετράγωνο, δίνει μια άλλη σχέση ισοδύναμη της (1) δηλ. την

$$d = a + \frac{1}{3}(a\sqrt{2} - a)$$

Όπως αναφέραμε, η λύση του προβλήματος αυτού, δίνει την προσεγγιστική τιμή $\pi \approx 3{,}08$. Ας σημειωθεί ότι οι προσεγγιστικές τιμές του π ποικίλουν όχι μόνο σε διαφορετικές εκδόσεις των Σουλβασούτρας, αλλά ακόμη και στην ίδια έκδοση. Για παράδειγμα στο Baudhayana Sulvasutras βρίσκουμε διάφορες τιμές για το π όπως, $\frac{675}{225}$, $\frac{900}{289}$, $\frac{1156}{361}$. Ακόμη στο Manava Sulvasutras υπάρχει επί πλέον η τιμή, **π =25/8 ≈ 3.125**

δ. Ο διπλασιασμός τετραγώνου

Όμως η πιο σημαντική, από μαθηματικής άποψης περίπτωση που περιέχεται στα Σουλβασούτρας, είναι αυτή στην οποία γίνεται η προσπάθεια προσέγγισης της $\sqrt{2}$. Η προσέγγιση αυτή που αναφέρεται μόνο από τους Apastamba και Katayana διατυπώνεται με τον ακόλουθο τρόπο.

«Πρόσθεσε στη μονάδα το τρίτο της και κατόπιν (πρόσθεσε) το τέταρτο του τρίτου αυτού και στη συνέχεια ελάττωσε κατά το τριακοστό τέταρτο αυτού του τετάρτου».

δηλ. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686$

Συγκρίνοντας την τιμή αυτή με την σημερινή, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι ακριβής για τα πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία. Το αξιόλογο αυτό αποτέλεσμα απασχόλησε πολλούς μελετητές. Λόγω έλλειψης αποδεικτικών στοιχείων κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι βρήκαν το αποτέλεσμα αυτό οι συνθέτες των Σουλβασούτρας είτε εμπειρικά κατόπιν μετρήσεων, είτε από τον προσεγγιστικό τύπο :

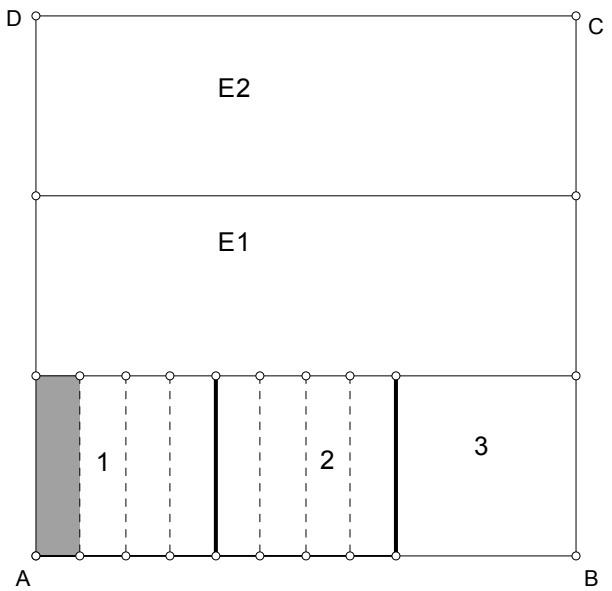
$$\sqrt{a^2} + b \approx a + \frac{b}{2a}$$

που ήταν ήδη γνωστός στους Βαβυλωνίους.

Ο Datta [(D)] το 1932, παίρνοντας σαν τον πιο πιθανό λόγο εύρεσης της $\sqrt{2}$, την ανάγκη κατασκευής βωμού διπλάσιου εμβαδού κάποιου άλλου δίνει μια πολύ ενδιαφέρουσα πρακτική λύση του προβλήματος.Ο Datta, παραθέτει μια διαδικασία επίλυσης του προβλήματος αυτού, που κατά την κρίση του είναι ανάλογη με εκείνη των συνθετών των Σουλβασούτρας.

Παίρνουμε δύο ίσα τετράγωνα τριχοτομούμε το ένα απ' αυτά παίρνοντας έτσι τρία ίσα ορθογώνια. Τα δύο απ' αυτά τα ορθογώνια, έστω Ε1 και Ε2 τα τοποθετούμε σε δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου τετραγώνου. (σχ.9).

Στη συνέχεια τριχοτομούμε το τρίτο ορθογώνιο, παίρνοντας έτσι τρία ίσα τετράγωνα.

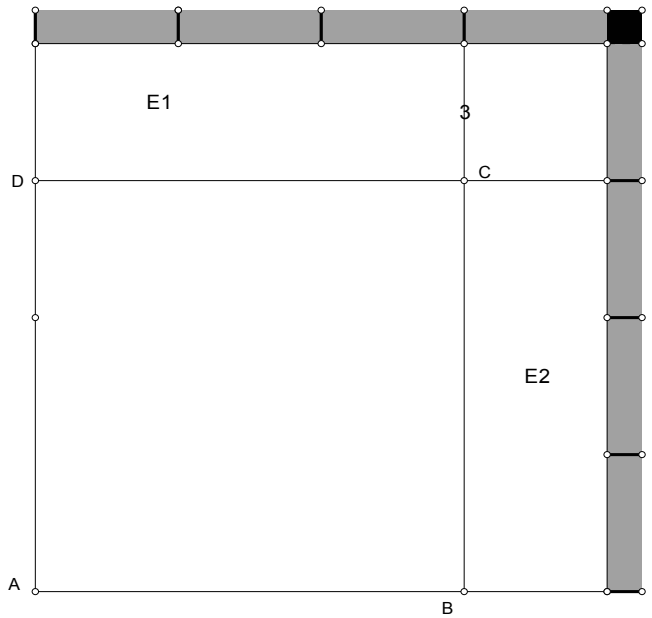


(Σχήμα 8)

Το ένα από τα τετράγωνα αυτά έστω το (3), τοποθετείται στο κενό μεταξύ των δύο ορθογωνίων. Δημιουργήσαμε τώρα ένα νέο τετράγωνο.

Υποθέτοντας ότι η πλευρά των αρχικών τετραγώνων είναι η μονάδα, τότε η πλευρά του νέου τετραγώνου που σχηματίσαμε, είναι $1+\frac{1}{3}$ (δηλαδή έχουμε τους δύο πρώτους όρους της προσέγγισης). Απομένουν ακόμη δύο τετράγωνα. Χωρίζοντας το καθ' ένα απ' αυτά σε τέσσερα ίσα μέρη, παίρνουμε οκτώ ίσα ορθογώνια.

Με τον ίδιο τρόπο τοποθετούμε αυτά σε δύο διαδοχικές πλευρές του νέου τετραγώνου. Παρατηρούμε τώρα ότι σχηματίστηκε ένα άλλο *μη ολοκληρωμένο τετράγωνο* πλευράς $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}$(οι 3εις πρώτοι όροι της προσέγγισης). Όπως βλέπουμε στο σχήμα, για να συμπληρωθεί το τετράγωνο, υπάρχει ένα κενό, (μαυρισμένο τετραγωνάκι) στη πάνω δεξιά πλευρά αυτού, του οποίου το εμβαδόν είναι $(\frac{1}{12})^2$



(Σχήμα 9)

Η προσπάθειά μας είναι τώρα, να ελαττώσουμε κατά x το πλάτος των μικρών ορθογωνίων, για να καλύψουμε το κενό αυτό. Έτσι θα έχουμε:

$$2\cdot x\cdot(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})=(\frac{1}{12})^2$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x βρίσκουμε: $x=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$.

Άρα το πλάτος που πρέπει να αφαιρέσουμε για να έχουμε πλήρες το τετράγωνο είναι $x=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$ που είναι και ο τελευταίος όρος της προσέγγισης.

2.5 Κοινά πολιτισμικά στοιχεία Ινδών και Ελλήνων απόρροια τελετουργικών απαιτήσεων

Η βαρύνουσα σημασία που είχαν οι κατασκευές βωμών, δεν παρατηρείται μόνο στα κείμενα των Σουλβασούτρας, αλλά και στα ελληνικά κείμενα. Οι τελετουργικές απαιτήσεις ως προς κάποιο προκαθορισμένο σχήμα και μέγεθος των βωμών, συσχετίζονταν με επερχόμενες συμφορές από τους θεούς. Επικρατούσε δε η αντίληψη ότι οι δυστυχίες αυτές θα μπορούσαν να αποφευχθούν με την ακριβή κατασκευή βωμών. Μια σημαντική διαφορά που παρατηρείται μεταξύ Ελλήνων και Ινδών και την οποία επισημαίνει ο van der Waerden [(VW1)], είναι ότι το πρόβλημα που έπρεπε να επιλύσουν οι Έλληνες είχε σχέση με τον όγκο των βωμών, ενώ αντίθετα οι Ινδοί με το εμβαδόν αυτών.

Ας θυμηθούμε ακόμη, το φημισμένο Δήλιο πρόβλημα στην Αρχαία Ελλάδα, που περιγράφει ο Ερατοσθένης στο βιβλίο του Πλατωνικός:

«Όταν ο θεός ανήγγειλε δια χρησμού στους Δηλίους ότι για να απαλλαγούν από τον λοιμό, έπρεπε να κατασκευάσουν βωμό διπλάσιο του ήδη υπάρχοντος, οι αρχιτέκτονες περιέπεσαν σε μεγάλη αμηχανία ζητώντας με ποιό τρόπο μπορεί να διπλασιαστεί ένα στερεό και πήγαν στον Πλάτωνα σχετικά με αυτό. Αυτός τους απάντησε ότι ο θεός έδωσε αυτόν τον χρησμό στους Δηλίους, όχι επειδή είχε ανάγκη ενός διπλάσιου βωμού, αλλά για να κατακρίνει και επιπλήξει τους Έλληνες επειδή αμελούν τα μαθηματικά και περιφρονούν την γεωμετρία»

Η ίδια ιστορία επαναλαμβάνεται και στον Πλούταρχο (Περί του ΕΙ του εν Δελφοίς 386 e).

Μας κάνει εντύπωση, ότι σε κάποιο ανάλογο γεγονός αναφέρεται και ο ινδικός λαός. Συγκεκριμένα στο Satapatha Brahmana διαβάζουμε:

«Αυτός, (που εκτελεί την θυσία) επεκτείνει (την φτερούγα) τόσο όσο συστέλλεται και επομένως στην πραγματικότητα δεν υπερβαίνει το κανονικό μέγεθος, ούτε γίνεται πολύ μικρό».

Αμέσως μετά τονίζεται η υποχρέωση αυστηρής τήρησης του τυπικού της θυσίας, με τον φόβο επικείμενου κινδύνου:

«αυτοί οι οποίοι δεν προσφέρουν τις πραγματικές αναλογίες που πρέπουν στον βωμό, θα υποφέρουν τα χειρότερα κατά την διάρκεια της θυσίας».

Οι ομοιότητες ανάμεσα στους δύο λαούς δεν εντοπίζονται μόνο στις θρησκευτικής σπουδαιότητας γεωμετρικές κατασκευές βωμών, αλλά και στις τεχνικές που αυτοί χρησιμοποιούσαν. Για την λύση του προβλήματος, τις ίδιες ακριβώς μεθόδους είχαν τόσο οι Έλληνες, όσο και οι Ινδοί.

Μεθόδους που είχαν ως βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα. Ο προβληματισμός τώρα του van der Waerden [(VW1)], για όλα αυτά τα κοινά στοιχεία που χαρακτήριζαν όχι μόνο αυτούς τους δύο αυτούς πολιτισμούς, τον οδήγησαν στην ανάπτυξη δύο σημαντικών υποθέσεων:

ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΚΟΙΝΗΣ ΑΡΧΗΣ

ΚΑΙ

ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ

Για την πρώτη υπόθεση προβάλλει τα ακόλουθα επιχειρήματα:

- Η ομοιότητα που παρουσιάζουν οι ιδέες των δύο λαών, επιδεικνύοντας τόσο μεγάλη βαρύτητα στις γεωμετρικές κατασκευές.
- Η ομοιότητα στις μεθόδους για την πραγματοποίηση αυτών των κατασκευών.
- Η εύρεση σε τελετουργικές εφαρμογές των ίδιων Πυθαγορείων τριάδων στην Αγγλία και την Ινδία.
- Τα κοινά πολιτισμικά στοιχεία όπως η γλώσσα και οι θρησκευτικές τελετές, είναι πολύ πιθανόν να προέρχονται από την εποχή ακόμη που οι πρόγονοι των λαών αυτών, ζούσαν μαζί στην περιοχή του Δούναβη. Μεταναστεύοντας αργότερα μετέφεραν και όλα αυτά τα στοιχεία που είχαν γίνει κτήμα τους και τα προσάρμοσαν στις δικές τους ανάγκες.
- Για την κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου προς δοθέν ορθογώνιο, τόσο οι Έλληνες όσο και οι Ινδοί, βασίστηκαν αμφότεροι στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι μέθοδοι υπολογισμού Πυθαγορείων τριάδων ήταν γνωστά από τους πρώτους κιόλας χρόνους στην Βαβυλώνα, Ινδία, Ελλάδα και Κίνα.

Για όλους αυτούς τους λόγους, θεωρεί λοιπόν πολύ πιθανό το Πυθαγόρειο θεώρημα να ήταν ήδη γνωστό από το 2000 π.Χ., όταν οι πρόγονοι των Ελλήνων και Ινδοαρίων, ζούσαν ακόμη μαζί στην περιοχή του Δούναβη.

Η δεύτερη υπόθεση λειτουργεί υποστηρικτικά της πρώτης, και συχνά βρίσκει χαμένους κρίκους ή ενδείξεις αλληλεπιδράσεων μεταξύ των πολιτισμών. Αυτή η υπόθεση δέχεται ότι όλες οι σπουδαίες εφευρέσεις πλην ελαχίστων εξαιρέσεων έγιναν μία μόνο φορά. Τότε ένα τόσο σημαντικό θεώρημα όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα, πως θα μπορούσε να αποτελεί εξαίρεση και να περιλαμβάνεται όχι μόνο στα Ινδικά και Ελληνικά μαθηματικά, αλλά και σε αυτά των Βαβυλωνίων και Κινέζων;

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, θέλουμε να υπενθυμίσουμε ότι οι συνθέτες των Σουλβασούτρας, δεν είχαν σκοπό να παρουσιάσουν κάποιο μαθηματικό έργο, αλλά να καταγράψουν κανόνες που θα εξυπηρετούσαν την κατασκευή βωμών. Λόγω αυτού του γεγονότος, δεν γίνεται καμιά αναφορά ή απόδειξη των κανόνων. Γι’ αυτό και το μαθηματικό μέρος που περιέχεται στα Σουλβασούτρας, αγνοήθηκε παντελώς από μεταγενέστερους Ινδούς μαθηματικούς.

3. ΟΙ ΣΙΔΧΑΝΤΕΣ Ή (ΣΙΝΤΑΝΤΑΣ)

Μετά την λήξη της περιόδου των Σουλβασούτρας τον 2^{ο} μ.Χ. αιώνα περίπου ακολουθεί μια νέα εποχή για τα μαθηματικά, αυτή των Σιδχάντων ή συστημάτων αστρονομίας. Την ίδια περίοδο έρχεται στην εξουσία, ο ινδικής καταγωγής βασιλιάς Γκούπτα (290 μ.Χ.). Αυτός ιδρύει την δυναστεία του, κατά την διάρκεια της οποίας σημειώνεται μια αναγέννηση του σανσκριτικού πολιτισμού, καρπός της οποίας είναι και οι Σιδχάντες.

Όπως είδαμε προηγουμένως, τα Σουλβασούτρας περιείχαν μαθηματικά για εφαρμογές σ' ένα καθαρά θρησκευτικό πεδίο. Οι Σιδχάντες που τα διαδέχονται, έχουν ένα διαφορετικό αντικείμενο ενδιαφέροντος, την αστρονομία. Δεν φαίνεται όμως να υπάρχει κάποιος συνδετικός κρίκος ανάμεσα στα μαθηματικά που περιέχονται στα Σουλβασούτρας και στα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν αργότερα. Ο G R. Kaye[(K)], τονίζει το γεγονός αυτό λέγοντας, ότι αν αποδεχθούμε σαν χρόνο σύνθεσης των Σουλβασούτρας το 500 π.Χ. περίπου, τότε μεσολαβεί μια περίοδος σχεδόν 1000 χρόνων όπου έχουμε πλήρη άγνοια για την πρόοδο των μαθηματικών ιδεών στην Ινδία.

Η αστρονομία και η μαντική τέχνη έρχονται στο προσκήνιο την εποχή εκείνη, για να καλύψουν κάποιες βαθύτερες ανάγκες του ανθρώπου, να βρει και να ερμηνεύσει στον ουρανό τα διάφορα ανεξήγητα γι' αυτόν φαινόμενα της φύσης και να προβλέψει το μέλλον του μέσα από τις κινήσεις των πλανητών.

Σημαντικό ρόλο στα πρώτα τουλάχιστον στάδια ανάπτυξης της Ινδικής αστρονομίας, παίζουν και πάλι οι ιερείς. Αυτοί, ταυτίζοντας τις διάφορες θεότητες με ουράνια σώματα κάνουν σημαντικές παρατηρήσεις ως προς την θέση και κίνηση των πλανητών. Με την πάροδο των χρόνων δέχονται σημαντικές επιρροές από διάφορους πολιτισμούς, όπως τους Έλληνες και τους Ρωμαίους, οι οποίοι είχαν κάνει σπουδαία βήματα στον τομέα αυτό.

Η λέξη Σιδχάντες που σημαίνει σύστημα, φαίνεται να βρίσκεται σε αρμονία με τον τίτλο «Σύνταξις», της πραγματείας του Πτολεμαίου. [(C)]

Υπάρχουν αρκετές εκδόσεις Σιδχάντων. Οι πέντε αρχαιότερες και εγκυρότερες, δίνονται από τον Varăha Mihira και είναι οι:

- Πολίσα (Paulisa)
- Ρομάκα (Romaka)
- Βασισίστχα (Vasisistha)
- Σούρια (Sûrya)
- Παϊταμάχα (Paitamaha), [(K)]

Για μια άλλη Σιδχάντα που φέρει το όνομα Pancha siddhantika μας πληροφορεί ο G.R.Kaye και είναι μια επιτομή που έγραψε ο Βαραχα-

Μιχίρα (Varăha Mihira) τον 6^{ο} αιώνα μ.Χ. Η Pancha siddhantika λοιπόν, θεωρείται το πλέον αξιόπιστο και αρχαιότερο αστρονομικό έργο, από το οποίο μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες, σχετικά με την αστρονομία στην Ινδία.

Ως προς την ανεξαρτησία του περιεχομένου των Σιδχάντων έχουν γίνει αρκετές συζητήσεις. Ενώ όλοι οι ερευνητές φαίνεται να συμφωνούν ότι οι Σιδχάντες γράφτηκαν στα τέλη του 4^{ου} ή τις αρχές του 5^{ου} αιώνα, διαφωνούν όμως έντονα ως προς την καταγωγή τους.

Οι Ινδοί επιστήμονες ισχυρίζονται, ότι αυτά αποτελούν καθαρό δημιούργημα της δικής τους φυλής, χωρίς ξένες επιρροές. Οι πλειοψηφία όμως των μελετητών επιμένουν ότι τα έργα αυτά βασίζονται κατά μεγάλο μέρος στην ελληνική αστρονομία. Για να δικαιολογήσουν την θέση τους αυτή προβάλουν βασικά το επιχείρημα ότι οι Σιδχάντες περιέχουν όρους καθαρά ελληνικής προέλευσης όπως: « Kendra»(από το ελληνικό κέντρο), «lipta» (από το λεπτό) κ.α. Ακόμη και η τιμή του π = 3177/1250 που δίνεται στην Πολίσα Σιδχάντα, συμφωνεί απόλυτα με την εξηκονταδική τιμή 3:8,30 του Πτολεμαίου.

Ακόμη ο Thibeau δηλώνει ότι «οι Ινδοί έμαθαν από τους Έλληνες». Την ίδια γνώμη έχει ο Άραβας σοφός Αλ Μπιρούνι αναφερόμενος σε έντονες ελληνικές επιρροές. Ο Μιχίρα όμως παρόλο που δεν αναφέρει πουθενά στοιχεία ή γεγονότα που να δείχνουν κάποια εξάρτηση της ινδικής αστρονομίας, από την επιστήμη της Αλεξάνδρειας, χρησιμοποιεί όπως γνωρίζουμε, όρους που αναμφίβολα είναι ελληνικής προέλευσης. Έτσι λοιπόν μπορούν να δικαιολογηθούν οι ομοιότητες που υπάρχουν στις Σιδχάντες και στη τριγωνομετρία και αστρονομία του Πτολεμαίου. [(K)]

Το σημαντικό στη προκειμένη περίπτωση δεν είναι αν οι Ινδοί γνώρισαν την τριγωνομετρία από τους Έλληνες, αλλά το γεγονός ότι όλες αυτές οι γνώσεις πήραν μια καινούργια μορφή στα χέρια τους.

Μέχρι τότε αντί του ημιτόνου του συνημίτονου και της εφαπτομένης, οι Έλληνες αστρονόμοι Ίππαρχος (150 π.Χ.) και Πτολεμαίος (150 μ.Χ.) χρησιμοποιούσαν πάντοτε χορδές κυκλικών τόξων. Στην πραγματικότητα δεν έχει μεγάλη διαφορά αν εργάζεται κανείς με χορδές ή ημίτονα, αφού ότι ονομάζουμε σήμερα ημίτονο, είναι το πηλίκο του μισού της χορδής του διπλασίου τόξου στο οποίο βαίνει η γωνία προς την ακτίνα. Η διαίρεση με την ακτίνα άρχισε να γίνεται από το 1800 και μετά. Μέχρι τότε το ημίτονο ήταν το μισό της χορδής του διπλασίου τόξου, για μια τυχούσα ακτίνα. [(VW2)]

(Σχήμα 10)

Από τον 5° αιώνα οι Ινδοί καινοτομούν και υιοθετούν μια διαφορετική άποψη. Αντικαθιστούν τις χορδές με ημίτονα. Έτσι η αντιστοιχία χορδής και επίκεντρης γωνίας, αλλάζει και γίνεται συναρτησιακή σχέση μεταξύ ημιχορδής και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που την υποτείνει.

Η εισαγωγή αυτής της ημιτονοειδούς συνάρτησης, αποτελεί την βασική συνεισφορά των Σιδχάντων στην ιστορία των μαθηματικών.

Θα δούμε στη συνέχεια μερικά αποσπάσματα των Πολίσα και Σούρια όπως τα περιγράφουν κάποιοι μελετητές, ώστε να διαμορφώσουμε μια εικόνα ως προς το περιεχόμενο και τον τρόπο γραφής αυτών.

3.1 Η Πολίσα Σιδχάντα

Η Πολίσα, αναφέρεται συχνά από τον μουσουλμάνο σχολιαστή Αλ Μπιρούνι. Το όνομα της φαίνεται να οφείλεται στο ίδιο, ο οποίος μας λέει ακόμη ότι γράφτηκε από κάποιον αστρολόγο της Αλεξάνδρειας που ονομαζόταν Παύλος. [(Β-Μ)] Η σύνθεση της Πολίσα υπολογίζεται γύρω στα 380 μ.Χ. Δίνει την εντύπωση ότι είναι αρχαιότερη της Σούρια Σιδχάντα, και από κάποια αποσπάσματα που παραθέτει ο Μπατοτπαλά, συναντούμε εδώ και τους ποιητικούς αριθμούς, για τους οποίους θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Ο G.R.Kaye[(K)], που θεωρεί πιο ενδιαφέρουσα από μαθηματική άποψη τη Πολίσα Σιδχάντα, μας παρουσιάζει κάποιους κανόνες που περιέχονται σ' αυτήν.

1) *«Η τετραγωνική ρίζα του δέκατου μέρους του τετραγώνου της περιφέρειας, η οποία περιέχει 360 μέρη, είναι η διάμετρος».*

Χρησιμοποιώντας σύγχρονη ορολογία αν r και d είναι αντίστοιχα η ακτίνα και η διάμετρος του κύκλου, ο κανόνας αυτός δίνει τον τύπο :

$$\frac{\sqrt{(2\pi r)^2}}{10} = d$$

από τον οποίο παίρνουμε την τιμή π=$\sqrt{10}$. Την ίδια τιμή για το π χρησιμοποιούσαν και οι Αιγύπτιοι.

2) *«Πάρε το τετράγωνο της ακτίνας (ενός κύκλου) και ονόμασέ το σταθερά. Το τέταρτο μέρος αυτής (της σταθεράς) είναι το τετράγωνο του Άρη. Από το τετράγωνο της σταθεράς αφαίρεσε το τετράγωνο του Άρη. Η τετραγωνική ρίζα αυτών των δύο είναι το ημίτονο».*

(Σημειώνουμε εδώ, ότι με το όνομα «Άρης» εννοεί το ημ30°).
Δηλαδή ο 2ος κανόνας με σύγχρονο συμβολισμό μας δίνει τους εξής τύπους:

α) ημ30°= $\frac{1}{2}$ και

β) ημ60°= $\sqrt{1-\frac{1}{4}}$

Μετά τους κανόνες υπολογισμού ημιτόνων, ακολουθεί ένας πίνακας τιμών 24 ημιτόνων, αρχίζοντας από 3°45΄ έως 90°με βήμα 3°45΄Οι γωνίες αυτές προκύπτουν από την διαίρεση του τεταρτοκυκλίου σε 24 ίσα μέρη.. Η ιδέα αυτού του διαχωρισμού, μπορεί να προέρχεται από τον πίνακα χορδών του Πτολεμαίου με μία όμως διαφορά. Ο Πτολεμαίος διαιρεί την ακτίνα σε 60 μέρη, ενώ στη Πολίσα η ακτίνα διαιρείται σε 120. Αυτό πιθανά να είχε σαν στόχο την απλούστευση των πράξεων για τον υπολογισμό των ημιτόνων, από τον τύπο: ημ $\frac{a}{2}=\frac{\chi\rho\delta.\alpha}{2}$

Στη Σούρια Σιδχάντα βρίσκουμε μία άλλη ακτίνα που η τιμή της είναι ίση με 3438΄και που παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία στον υπολογισμό ημιτόνων.

Ο G.R.Kaye[(K)], διακρίνει τρία διαφορετικά στάδια εξέλιξης ως προς τον υπολογισμό των ημιτόνων που είναι τα ακόλουθα:

α) Τις «χορδές» του Πτολεμαίου ή χρδ α με r=60

β) Το «ημ» στη Πολίσα ή ημ$\frac{a}{2}=\frac{\chi\rho\delta.\alpha}{2}$ με r=120

γ) Το «ημ» στη Σούρια ή ημ$\frac{a}{2}=\frac{\pi}{3}\frac{\chi\rho\delta.\alpha}{2}$ με r=3438΄

Το σημαντικό στην (γ) περίπτωση είναι ότι η τιμή του π είναι ίση με 600/191 (=3, 1416…) που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση.

3.2 Η Σούρια Σιδχάντα

Η Σούρια Σιδχάντα ή σύστημα του Ήλιου, γράφτηκε στα τέλη του $4^{ου}$ μ.Χ. αιώνα περίπου και θεωρείται η πιο πλήρης έκδοση, που διασώθηκε αναλλοίωτη.(Roger Cooke) [(C)] Το περιεχόμενο της Σούρια βασίζεται κατά μεγάλο μέρος στην προ Πτολεμαίου ελληνική αστρονομία. Όπως γνωρίζουμε, ο Πτολεμαίος (150 μ.Χ.) συνέχισε το έργο του Ίππαρχου και έφερε τη θεωρητική αστρονομία, σε ένα αληθινό σημείο ανάπτυξης. Στη Σούρια Σιδχάντα συναντούμε μεταξύ των άλλων, μια θεωρία ισορροπήσεως των ισημερινών, ένα σύστημα κοσμικών κύκλων ή Γιούγκα, καθώς και κανόνες που έχουν ως σκοπό, να εξηγήσουν και να προείπουν την κίνηση ουρανίων σωμάτων, χρησιμοποιώντας την θεωρία της Νακσάτρα (Naksatra), που ήταν προιόν βεδικών αντιλήψεων. Η Σούρια είναι ακόμη το αρχαιότερο γνωστό έργο, όπου εμφανίζονται πίνακες ημιτόνων με μορφή έμμετρη και παρέμεινε μέχρι πρόσφατα κλασικό έργο της ινδικής αστρονομίας. [(VW2)]

Ο Katz [(Kt)], παραθέτει από την Σούρια Σιδχάντα, τους τρεις πρώτους στίχους που αναφέρονται στον υπολογισμό ημιτόνων. Διαβάζοντας το κείμενο, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα τραχύ δείγμα γραφής, πολύ συνοπτικό, δοσμένο πάλι με μορφή κανόνων. Μπορεί να μας φαίνεται παράξενο, όμως αυτός ο ιδιάζων τρόπος γραφής ήταν πολύ οικείος στον Ινδικό λαό.

Να πως διατυπώνονται οι στίχοι αυτοί:

1) *«Το όγδοο μέρος των λεπτών ενός σημείου, ονομάζεται 1° ημίτονο: Σ' αυτό (το 1° ημίτονο) αν προσθέσουμε τη διαφορά του ($1^{ου}$ ημιτόνου) με το πηλίκο αυτού με τον εαυτό του, θα έχουμε το 2° ημίτονο».*
2) *«Έτσι, διαιρώντας τα διαδοχικά ημίτονα με το 1° (ημίτονο)και προσθέτοντας αυτά, τότε σε κάθε περίπτωση προσθέτοντας στο προηγούμενο ημίτονο την διαφορά του αθροίσματος των πηλίκων από το 1° (ημίτονο), το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 24 ημιτόνων όπως:»*
3) *225 , 449 , 671 , 890 , 1105 , 1315 ...*

Στη συνέχεια δίνει τα απαραίτητα επεξηγηματικά σχόλια. Μας λέει ότι, ο συνθέτης της Σούρια Σιδχάντα αναφέρει στον 1° κανόνα, «το όγδοο μέρος των λεπτών ενός σημείου». Η λέξη «σημείο» σαν όρος στην αστρονομία ήταν ήδη γνωστός και από άλλους πολιτισμούς προγενέστερα. Συγκεκριμένα πρώτοι οι Βαβυλώνιοι και κατόπιν οι Έλληνες τον χρησιμοποιούσαν για το τόξο των 30° της εκλειπτικής. Ο Ίππαρχος (150π.Χ.) κατά τους υπολογισμούς του χρησιμοποιούσε χορδές κυκλικών τόξων με διαφορά 15° ή των $7\frac{1}{2}^{o}$.

Οι Ινδοί αστρονόμοι όμως, προχώρησαν ένα βήμα πιο πέρα και υπολόγιζαν τα ημίτονα γωνιών με βήμα $3\frac{3}{4}^{o}$, δηλ. 3°45΄. Η γωνία αυτή προκύπτει, από την διαίρεση της ορθής γωνίας σε 24 ίσα μέρη δηλ. 90° : 24 =3°45΄.

Για την εύρεση της τιμής των ημιτόνων, τα μήκη των μισών χορδών υπολογιζόταν, παίρνοντας την ίδια ακτίνα $r = 3438'$ που χρησιμοποιούσε και ο Ίππαρχος, (που είναι η περιφέρεια κύκλου σε λεπτά, διαιρούμενη με το 2π, δηλαδή $\frac{360° \times 60'}{2\pi} = 3438'$).

Το 1° ημίτονο, είναι το ημίτονο του τόξου 3°45΄ = 225΄. Η τιμή του λαμβάνεται ίσο με το ίδιο το τόξο. Η τιμή αυτή είναι ορθή μόνο στην περίπτωση που η ακτίνα είναι ίση με 3438΄.

Ο υπολογισμός των υπόλοιπων ημιτόνων γίνεται μέσα από μια πεπερασμένη διαδικασία διαφορών. Ο δεύτερος κανόνας δίνει βασικά τον γενικό τύπο υπολογισμού ημιτόνων:

$$s_{\nu+1} = s_\nu + s_1 - \sum \frac{s_\nu}{s_1} \qquad (1)$$

Η διαδικασία για τον υπολογισμό του 2^{ου} ημιτόνου $s_2 =$ ημ$(7°30')$, βάσει της σχέσης (1)είναι η ακόλουθη:

$$s_2 = s_1 + s_1 - \frac{s_1}{s_1}$$
$$= 225' + 224'$$
$$= 449'.$$

Ομοίως για το 3° ημίτονο,

$$s_3 = \text{ημ}(11°15')$$
$$= s_2 + s_1 - \left(\frac{s_1}{s_1} + \frac{s_2}{s_1}\right)$$
$$= 449' + (225-3)'$$
$$= 671', \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκονται οι τιμές των ημιτόνων, που αναφέρονται στον τρίτο κανόνα.

Στο (σχ.11) βλέπουμε ένα απόσπασμα από το αρχαιότερο αστρονομικό έργο της Ινδίας. Είναι από την πρώτη εκτύπωση της Σούρια Σιδχάντα που έγινε το 1867 στο Meerut και απεικονίζει ένα πίνακα ημιτόνων, μέρος του οποίου φαίνεται στον πίνακα [(Sm)]

द्वितीयाऽध्याय ३३

घटाने पर शेष २२४ होगा। इस २२४ को प्रथम ज्यार्द्ध २२५ के साथ जोड़ देने से योगफल ४४९ होगा। यही द्वितीय ज्यार्द्ध है ॥१५॥ उक्त द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ को प्रथम ज्यार्द्ध से भाग करके भागफल २ लेकर यह २ इसके साथ पूर्व द्वितीय ज्यार्द्ध निष्कासन भाग फल से जो १ मिला है, जोड़ने से ३ होगा। इस ३ को उक्त भाजक २२५ से घटाने पर २२२ बचेगा, इसी २२२ को द्वितीय ज्यार्द्ध ४४९ के साथ जोड़ने से ६७१ होगा, यही तृतीय ज्यार्द्ध है। इसी प्रकार क्रमशः २४ ज्यार्द्ध गणना करनी होगी ।।१६॥ किसी वृत्त के चतुर्थांश जिस का व्यासार्द्ध ३४३८ उस के ३४ अंश की ज्यार्द्ध निम्नलिखित होंगी ।।

	अंश	वा	कला	ज्या		अंश	वा	कला	ज्या
प्रथम कोण	$3\frac{3}{4}$		२२५	२२५	१३ वां कोण	४८।।।		२४७५	२२६७
द्वितीय ,,	$7\frac{1}{2}$		४५०	४४९	१४ वां ,,	$52\frac{1}{2}$		२७००	२४३१
तृतीय ,,	$11\frac{1}{4}$		६७५	६७१	१५ वां ,,	$56\frac{1}{4}$		२९२५	२५८२
चतुर्थ ,,	१५		९००	८९०	१६ वां ,,	६०		३१५०	२७२८
पञ्चम ,,	$18\frac{3}{4}$		११२५	११०५	१७ वां ,,	६३।।।		३३७५	२८५९
छठा ,,	$22\frac{1}{2}$		१३५०	१३१५	१८ वां ,,	$67\frac{1}{2}$		३६००	२९७८
सप्तम ,,	$26\frac{1}{4}$		१५७५	१५२०	१९ वां ,,	$71\frac{1}{4}$		३८२५	३०८४
अष्टम ,,	३०		१८००	१७१९	२० वां ,,	७५		४०५०	३१७७
नवम ,,	$33\frac{3}{4}$		२०२५	१९१५	२१ वां ,,	७८।।।		४७२५	३३७२
दशम ,,	$37\frac{1}{2}$		२२५०	२०९३	२२ वां ,,	$82\frac{1}{2}$		४९५०	३४०९
एकादश ,,	$41\frac{1}{4}$		२४७५	२२६७	२३ वां ,,	$86\frac{3}{4}$		५१७५	३४३१
द्वादश ,,	४५		२७००	२४३१	२४ वां ,,	९०		५४००	३४३८

पूर्वोक्त ज्यार्द्ध परिमाण सब को उलटे प्रकार से ३४३८ व्यासार्द्ध से पृथक् पृथक् घटाने पर जो अङ्क घटाने से बचेंगे उन को उत्क्रमज्या कहते हैं। प्रति ३४ अंश में इस प्रकार उत्क्रमज्या हो जाती हैं। १६–२२ श्लोक तक ॥

मुनयोरन्ध्रयमला रसषट्कामुनीश्वराः। द्व्यष्टैकारूप-
षड्दस्राः सागरार्थहुताशनाः ॥२३॥ खर्तुवेदा नवाद्र्यर्था
दिङ्नगास्त्र्यर्थकुञ्जराः। नगाम्बरवियच्चन्द्रारूपभूधरश-

Πίνακας ημιτόνων από την πρώτη εκτύπωση της Σούρια Σιδχάντα το 1867
(Σχήμα 11)

Γωνία	Ημίτονο	Σημερινή τιμή ημιτόνου
3° 45′	225′	224,84′
7° 30′	449′	448,72′
11° 15′	671′	670,67′
15°	890′	889,76′

Υπάρχει πιθανότητα, τα ημίτονα να μην υπολογίστηκαν με τον κανόνα που περιγράψαμε πιο πάνω, αλλά με την αντίστοιχη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Ίππαρχος, δηλαδή : το ημίτονο των 90º είναι ίσο με την ακτίνα 3438′, το ημίτονο των 30º ίσο με το μισό της ακτίνας 1719′, το

ημίτονο των 45º είναι $3438\sqrt{2} = 2431'$ και ο υπολογισμός των υπολοίπων ημιτόνων με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος και τον τύπο της μισής χορδής.

Είναι δύσκολο να δοθεί απάντηση στο ερώτημα, γιατί οι Ινδοί επέλεξαν αυτόν τον τρόπο υπολογισμού ημιτόνων. Για ποιο λόγο άραγε προτίμησαν αυτή την πεπερασμένη διαδικασία διαφορών ημιτόνων, από την μέθοδο του Ίππαρχου που χρησιμοποιούσε το Πυθαγόρειο θεώρημα για την εύρεση των ημιτόνων; Μία υποθετική εξήγηση που καταθέτει ο συγγραφέας V. Katz [(Kt)], είναι η εξής:

«Παράλληλα με την κατασκευή του πίνακα των ημιτόνων από 3°45΄ μέχρι 90° με βήμα 3°45΄ θα πρέπει να είχε δημιουργηθεί και κάποιος άλλος πίνακας πρώτων και δεύτερων διαφορών ημιτόνων προς διευκόλυνση της κατασκευής του αρχικού πίνακα. Εάν όμως οι Ινδοί είχαν αντιληφθεί ότι οι δεύτερες διαφορές ήταν ανάλογες προς τα ημίτονα, τότε δεν θα ήταν δύσκολο γι' αυτούς να βρουν τον κανόνα που δόθηκε ανωτέρω».

Παρόμοιοι πίνακες ημιτόνων κυκλοφόρησαν στην Ινδία από πολλούς συγγραφείς κατά τη διάρκεια των επόμενων ετών χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για την ακτίνα, όπως για παράδειγμα την τιμή 120 από τον Varahamihira (6ο αιώνα), 3270 από τον Brahmagupta (7ο αιώνα) και 3415 από τον Sripati (11ο αιώνα).

Η ετυμολογία της λέξης «ημίτονο»

*Η λέξη «ημίτονο» προήλθε μέσα από μια διαδικασία, παραποιημένης απόδοσης της σανσκριτικής λέξης **jya-ardha**, που σημαίνει μισό χορδής. Οι Ινδοί είχαν επιλέξει ως πιο εύχρηστο εργαλείο το μισό της χορδής του διπλάσιου τόξου, από εκείνο των χορδών του Ίππαρχου και του Πτολεμαίου. Παρ' όλο που ο Πτολεμαίος χρησιμοποιούσε την μέθοδο αυτή για υπολογισμούς, δεν έκανε αυτό που πρώτοι οι Ινδοί εφάρμοσαν, δηλαδή την καταγραφή των αποτελεσμάτων σε πίνακες. Η αγγλική λέξη «sine», προέρχεται από μη σωστή απόδοση της σανσκριτικής λέξης jya-ardha. Ο Aryambhata έγραφε αυτόν τον όρο για συντομία σαν **jya ή jiva***

*Όταν αργότερα οι Άραβες άρχισαν να μεταφράζουν τα διάφορα ινδικά κείμενα, η λέξη αυτή αντιγράφηκε ως **jiba** η οποία όμως δεν είχε καμία έννοια στα Αραβικά. Στη συνέχεια αφού η Αραβική γραφή στερείται φωνηέντων, μετέπειτα αντιγραφείς απέδωσαν την λέξη **jb** ως **jaib** που σημαίνει κόλπος ή στήθος. Τον 12ο αιώνα όταν η τριγωνομετρία των Αράβων μεταφράστηκε στα λατινικά, η λέξη **jaib** μεταφράστηκε στην αντίστοιχή της λατινική sinus. Η λατινική αυτή λέξη έγινε κατόπιν στα Αγγλικά **sine.** Η Αγγλική λέξη **«sine»,** προέρχεται από μη σωστή απόδοση της σανσκριτικής λέξης jya-ardha,*

Γ. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΙΝΔΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ 6^{Ο} ΑΙΩΝΑ μ.Χ.

1. Ο ΑΡΙΑΜΠΑΤΑ(Aryabhata)

Από το τέλος του 5^{ου} αιώνα, εκτός από το έργο των Ινδών μαθηματικών, αρχίζουμε να γνωρίζουμε και τα ονόματα των σπουδαιότερων από αυτούς. Η συνεισφορά των στην ανάπτυξη της τριγωνομετρίας, της άλγεβρας και της θεωρίας των εξισώσεων ήταν σημαντική.

Τα πιο γνωστά ονόματα Ινδών μαθηματικών είναι των : Aryabhata (μεταξύ 5^{ου} και 6^{ου} αιώνα μ.Χ.), Brahmagupta και Bhaskara I (7^{ος} αιώνας μ.Χ.), Mahavira (πιθανόν 9^{ος} αιώνας μ.Χ.), Bhaskara II (12^{ος} αιώνας μ.Χ.), Parameshvara(15^{ος} αιώνας μ.Χ). Αν και υπάρχουν και άλλα ονόματα μαθηματικών, αναφέρουμε όμως τα ονόματα εκείνων που το έργο τους ή κάποια μετάφρασή τους μπόρεσε να διασωθεί και να μελετηθεί από μεταγενέστερους επιστήμονες.

Ο Αριαμπάτα, είναι ο πρώτος σημαντικός Ινδός αστρονόμος, του οποίου το έργο περιλαμβάνει κάποια κεφάλαια με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Γεννήθηκε το 476 μ.Χ. σύμφωνα με την πληροφορία που δίνει ο ίδιος, δηλ. ότι ήταν 23 ετών κατά το έτος 3600 της περιόδου Kaliyuga, που αντιστοιχεί με την χρονολογία 499 μ.Χ.

Έζησε στην πόλη Kusumapura (την σημερινή Patua), πρωτεύουσα της αρχαιότερης ινδικής μοναρχίας. Το έργο του, που φέρει το όνομα Aryabhatiya, είναι το πρώτο αξιόλογο έργο μαθηματικού ενδιαφέροντος. Θεωρείται το παλαιότερο σωζόμενο έργο εκείνης της περιόδου και περιέχει το σύνολο της μέχρι τότε αστρονομικής και μαθηματικής γνώσης των Ινδιών.

1.1 Η Αριαμπατίγια (Aryabatiya)

Κατά τον B.L.Waerden [(VW2)], η Aryabhatiya είναι μια ολοκληρωμένη αστρονομική εργασία, και βασίζεται στην ελληνικής προέλευσης θεωρία των επικύκλων και έκκεντρων κύκλων της προγενέστερης του Πτολεμαίου περιόδου, καθώς και στην ελληνική τριγωνομετρία. Ο R.Billard ακόμη πιστεύει ότι το αστρονομικό σύστημα του Αριαμπάτα, βασίζεται σε πολύ ακριβείς παρατηρήσεις, που έγιναν στην Ινδία περίπου το 510 μ.Χ.)

Το έργο παρουσιάζεται σε μορφή έμμετρη, μ' έναν τρόπο πολύ συνοπτικό που κάνει ιδιαίτερα δύσκολη την κατανόησή του και είναι γραμμένο στη σανσκριτική γλώσσα. Αποτελείται από 123 στίχους και διαιρείται σε τέσσερα μέρη, που φέρουν τον τίτλο:

Gitika ή Dasagitikâ (Ουράνιες αρμονίες),
Ganita ή μαθηματικά (Στοιχεία αριθμητικού λογισμού),
Kâlakriyâ (Ο χρόνος και η μέτρησή του),
Gôla (Σφαίρα).

Το πρώτο μέρος, είναι αστρονομικού περιεχομένου και περιέχει μια συλλογή από αστρονομικούς πίνακες και πίνακες ημιτόνων. Το δεύτερο μέρος, αποτελείται από 33 μόνο δίστιχα, περιλαμβάνει στοιχεία αριθμητικού και αλγεβρικού λογισμού καθώς και μια συνοπτική αναφορά στην επίλυση της γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης. Το τρίτο μέρος, αναφέρεται στον χρόνο και τη μέτρησή του και το τέταρτο, στην μέτρηση επιφανειών και στον όγκο της σφαίρας.

Η Aryabhatiya είχε χαθεί για αρκετούς αιώνες, και ανακαλύφθηκε από τον Ινδό μελετητή Bhau Daji το 1864. Οι μελετητές όμως γνώριζαν πολύ νωρίτερα για την ύπαρξή της, από τις μαρτυρίες διάφορων σχολιαστών. Το 1817 ο Άγγλος μελετητής T. Colebrooke παρατηρεί, «Εντούτοις μία μακρά και σχολαστική αναζήτηση στις διάφορες περιοχές της Ινδίας, απέτυχε στην ανακάλυψη κάποιων αποσπασμάτων…της Άλγεβρας ή άλλων έργων του Αριαμπάτα». Αργότερα το 1874, βρέθηκαν τελείως συμπτωματικά στη Καλκούτα από τον Ολλανδό H. Kern, δύο άλλα αντίγραφά της Aryabhatiya, τα οποία είχαν γραφεί το 1820 και το 1863. [(C)]

Το μικρό αυτό περιγραφικό βιβλίο έχει σκοπό, να δώσει τους συνήθεις κανόνες λογισμού στην αστρονομία και τα μαθηματικά και το περιεχόμενό του παρουσιάζεται χωρίς καμιά προηγούμενη μεθοδολογία, κάτι σαν περίληψη προηγούμενων εργασιών.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια αποσπάσματα κυρίως από το δεύτερο μέρος της Aryabhatiya για να διαμορφώσουμε μια γενική

εικόνα του περιεχομένου της. Στην αρχή ο συγγραφέας θεωρεί αναγκαίο, να κάνει μια εισαγωγική επίκληση προς τον Βράχμα, την Γη, τα Άστρα και τους Αστερισμούς και συνεχίζει, δίνοντας τα ονόματα για την μονάδα και τις πρώτες εννέα δυνάμεις του δέκα.

1.2 Αστρονομία

Ο Αριαμπάτα υπήρξε κατ' εξοχήν αστρονόμος, όπως άλλωστε και οι Brahmagupta και Baskara II, γι' αυτό τμήμα του έργου του περιλαμβάνει αστρονομικές παρατηρήσεις καθώς και διάφορα αστρονομικά προβλήματα. Αρκετές εφαρμογές αυτών των προβλημάτων, που έχουν σχέση με τον αριθμό περιστροφών των πλανητών σε μεγάλες αστρονομικές περιόδους, όπως για παράδειγμα ένα «yuga», δίνει ο Brahmagupta (κεφάλαιο 18), με την γνωστή μέθοδο της «κονιοποίησης».

Ας δούμε πως εκθέτει ο Αριαμπάτα κάποια αστρονομικά γεγονότα στο πρώτο κεφάλαιο.

«Σ' ένα yuga οι πλήρεις περιστροφές του ήλιου είναι 4 320 000, της σελήνης 57 753 336, της γης(περιστρεφόμενης ανατολικά) 1 582 237 500, του Κρόνου 146 564, του Δία 364 224, του Άρη 2 296 824, του Ερμή και της Αφροδίτης ίδιες με αυτή του ηλίου».

Η λέξη yuga σημαίνει ζευγάρωμα, δίπλωμα. Ένα yuga λοιπόν, είναι η κοινή περίοδος όλων των ουράνιων σωμάτων, δηλαδή στο τέλος ενός yuga, τα ουράνια σώματα θα βρίσκονται στην ίδια ακριβώς θέση που ήταν και στην αρχή αυτού. Η ανωτέρω περιγραφή του Αριαμπάτα όμως εγκυμονεί κινδύνους. Κατ' αρχάς αναφέρεται σε μια περιστροφή της γης με φορά από δυσμάς προς ανατολάς, υποδηλώνοντας ότι ο συγγραφέας θεωρεί τα αστέρια ακίνητα, με την γη να περιστρέφεται κάτω από αυτά, και τον ήλιο, τη σελήνη και τους πλανήτες περιφερόμενους μεταξύ των αστεριών. Όντας τα αστέρια ακίνητα, οι συνολικοί χρονικοί περίοδοι ονομάζονται αστρικοί περίοδοι.

Διαιρώντας τον αριθμό περιστροφών της γης με τον αντίστοιχο αριθμό του ήλιου, βρίσκουμε ότι ένα αστρικό έτος περιλαμβάνει 366,26 αστρικές ημέρες, τιμή πολύ κοντά στη σημερινή.(Ένα αστρικό έτος είναι κατά μία μέρα μεγαλύτερο από το κανονικό έτος, επειδή ο ήλιος κάνει μία επί πλέον περιστροφή κατά την διάρκεια του έτους που οφείλεται στη περιστροφή των αστεριών από ανατολάς προς δυσμάς σχετικά με την γη, μία επί πλέον φορά από ότι ο ήλιος.)

Οι αριθμοί που αναφέρει ο Αριαμπάτα δίνουν ένα αστρονομικό έτος για τον Δία, ίσο προς 11,86 κανονικά έτη και του Ερμή ένα έτος 687 ημερών. Οι τιμές αυτές συγκρινόμενες με τις σημερινές είναι ακριβείς. Στη περίπτωση του Κρόνου, η τιμή του αστρικού έτους είναι 29,47 έτη,

έναντι 29,46 της σημερινής. Όσον αφορά τον Ερμή και την Αφροδίτη, αυτοί ευρισκόμενοι πολύ κοντά στον ήλιο είναι φυσικό να κάνουν τον ίδιο αριθμό περιστροφών μ' αυτόν. [(C)]

Ακόμη ο P. C. Sengupt, σε μια πολύ ενδιαφέρουσα εργασία του με τον τίτλο «ο Αριαμπάτα ο πατέρας των Ινδικών επικύκλων της αστρονομίας», παραδέχεται ότι ο Αριαμπάτα, είχε αναπτύξει δύο αστρονομικά συστήματα τα οποία διέφεραν μεταξύ τους σε λεπτομέρειες και ήταν τα εξής:

«Το Σύστημα του Μεσονυχτίου» και το «Σύστημα της Ανατολής». Αμφότερα τα συστήματα βασίζονταν σε μία θεμελιώδη περίοδο περιστροφής όλων των πλανητών το Mahayuga ή το τετραπλάσιο του yuga, που αντιστοιχεί με 4 320 000 Αστρικά έτη. Αυτό διαιρείτο σε τέσσερα ίσης χρονικής διάρκειας «quarteyugas». Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, εμείς διανύουμε την περίοδο του τελευταίου quarteyuga, που φέρει το όνομα Kaliyuga. Στο μεν Σύστημα της Ανατολής αναφέρεται ως αρχή της περιόδου του Kaliyuga η:

Παρασκευή, 18η Φεβρουαρίου του έτους 3102 π.Χ.

στο δε Σύστημα του Μεσονυχτίου, έξι ώρες νωρίτερα δηλ. τα μεσάνυχτα. [(VW1)]

ΠΙΝΑΚΑΣ
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ ΠΛΑΝΗΤΩΝ ΣΕ ΕΝΑ MAHAYUGA

	ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΣΟΝΥΧΤΙΟΥ		ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΤΟΛΗΣ	
Πλανήτες	Περιστροφές	Απόγειο	Περιστροφές	Απόγειο
Ήλιος	4 320 000	80º	4 320 000	78º
Σελήνη	57 753 336		57 753 336	
Ερμής	17 937 000	220º	17 937 020	210º
Αφροδίτη	7 022 883	80º	7 022 388	90º
Άρης	2 296 824	110º	2 296 824	118º
Δίας	364 220	160º	364 224	180 º
Κρόνος	146 564	240º	146 564	236º

Όπως βλέπουμε, τα δύο συστήματα διαφέρουν ελάχιστα. Ο Billard υποστηρίζει ότι οι θέσεις των πλανητών που δόθηκαν την εποχή του Αριαμπάτα, (510 μ.Χ.), δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από τις σημερινές εκτιμήσεις.

1.3 Γεωμετρία

Ο Αριαμπάτα αρχίζει το δεύτερο μέρος του έργου του, που φέρει το όνομα Ganita δίνοντας τους κανόνες εύρεσης εμβαδού και όγκου διαφόρων σχημάτων. Από αυτούς κάποιοι τύποι είναι σωστοί και κάποιοι λανθασμένοι. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, το βασικό του λάθος πιθανόν να απορρέει από την αντίληψη ότι τα εμβαδά επιπέδων σχημάτων και οι όγκοι στερεών διέπονται από ανάλογους κανόνες. Έτσι ο κανόνας για το εμβαδόν ενός τριγώνου, ως:

«το γινόμενο του μισού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος»

είναι σωστός, ενώ προσπαθώντας να εφαρμόσει ανάλογο τύπο με αυτόν του τριγώνου και στις τρείς διαστάσεις, μας δίνει λάθος τον όγκο της πυραμίδας που θεωρεί ότι είναι ίσος:

«το γινόμενο του μισού εμβαδού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος».

Παρόμοιο σφάλμα διαπιστώνουμε στη συνέχεια. Δίνει τον ορθό τύπο για το εμβαδόν του κύκλου, όμως ο τύπος του όγκου της σφαίρας είναι λανθασμένος. Ο σχετικός κανόνας για το εμβαδόν του κύκλου, είναι το πρώτο μισό δίστιχο της Aryabhatiya II 7. Ο B.L. Waerden [(VW1)], μας δίνει αυτόν τον κανόνα όπως μεταφράσθηκε από τον Clark:

II 7. *«Το μισό της περιφέρειας πολλαπλασιασμένο με την ακτίνα, είναι το εμβαδόν του κύκλου».*

Δηλαδή αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε σύγχρονη ορολογία,

$$A = \frac{1}{2} C \cdot r$$

όπου A, C, r είναι αντίστοιχα το εμβαδόν, η περιφέρεια και η ακτίνα του κύκλου.

Το δεύτερο μισό του ιδίου στίχου αναφέρεται στον όγκο της σφαίρας. Όμως ο συνοπτικός τρόπος περιγραφής καθιστά δύσκολη την ερμηνεία του. Για τον λόγο αυτό ο B. L. Waerden [(VW1)] τον παραλείπει, ενώ ο G.Loria μας δίνει τον τύπο του όγκου της σφαίρας ως «το γινόμενο του μέγιστου κύκλου της, επί την τετραγωνική ρίζα του εμβαδού αυτού». δηλ.

$$V = \pi\sqrt{\pi}\, r^3.$$

Ο G.Loria, σχολιάζοντας τον τύπο αυτό, παρατηρεί ότι μόνο στην περίπτωση που ο π θα έπαιρνε την τιμή $\frac{16}{9}$, αυτός θα ήταν σωστός. Τον προβληματίζει ακόμη, αν είναι σύμπτωση το γεγονός ότι και οι Αιγύπτιοι είχαν υιοθετήσει την ίδια ακριβώς τιμή για το π, για να καταλήξει στο συμπέρασμα, ότι όσοι χρησιμοποιούσαν αυτή την τιμή, δεν είχαν γνώση για τα δύο βιβλία του Αρχιμήδη «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», γραμμένα πριν από επτά αιώνες.

Στη συνέχεια δίνονται δύο ακόμη σωστοί κανόνες. Ο πρώτος αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού τραπεζίου και ο δεύτερος στις αποστάσεις του σημείου τομής των διαγωνίων τραπεζίου από τις βάσεις.

Μια άλλη πολύ σημαντική πρόταση είναι η ΙΙ 10, από την οποία πληροφορούμαστε ότι μια περιφέρεια κύκλου με διάμετρο 20000, έχει μήκος 62832. Η διατύπωσή της έχει ως εξής: [(VW1)]

ΙΙ 10. «Πρόσθεσε το 4 στο 100, πολλαπλασίασέ το με το 8 και στη συνέχεια πρόσθεσε το 62000. Το αποτέλεσμα αυτό είναι η περίμετρος κύκλου κατά προσέγγιση, του οποίου η διάμετρος είναι 20000».

Αν υποθέσουμε ότι δ είναι η διάμετρος του κύκλου και C μήκος της περιφέρειας αυτού, τότε εφαρμόζοντας τον ανωτέρω κανόνα, θα έχουμε:

$$C = \pi.20000 \quad \text{και} \quad (100+4).8+62000 = \pi.20000.$$

Ο ανωτέρω κανόνας, φανερώνει σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Αριαμπάτα, τη τιμή του $\pi = \frac{62832}{20000} \cong 3{,}1416$ που αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση. Ο συγγραφέας φαίνεται να γνωρίζει ότι η τιμή αυτή είναι προσεγγιστική αφού το αναφέρει ρητά στο κανόνα του. Πάνω σ' αυτό ο B. L. Waerden [(VW1)], συμπληρώνει ότι εκτός του Aryabhata, τόσο ο Liu Hui ($3^{ος}$ αιώνας), όσο και ο Bhuskara II (12οςαιώνας) χρησιμοποιούν την ίδια τιμή για το π δηλαδή, το κλάσμα $\frac{3927}{1250} \approx 3{,}1416$. Πιστεύει ακόμη ότι η γνώση τους αυτή προέρχεται από την ίδια προϋπάρχουσα πηγή. Ο G.Loria τονίζει επίσης ότι η τιμή αυτή του π, είναι βέβαια μια αρκετά καλή προσέγγιση, αλλά αυτή ήταν ήδη γνωστή στον Κλαύδιο Πτολεμαίο από το 150 μ.Χ. [(L)]

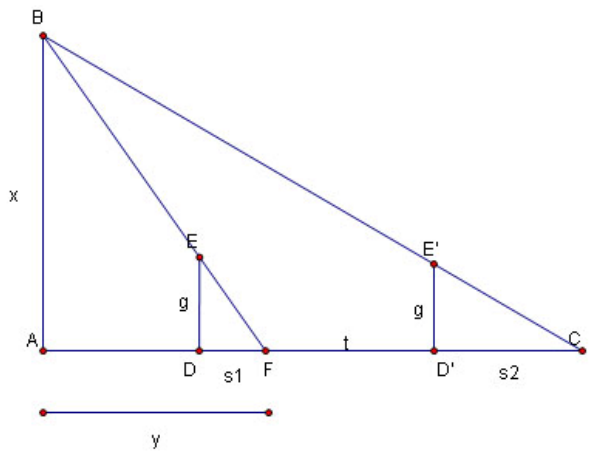
Τέλος θα παρουσιάσουμε ένα πρόβλημα που δίνεται από τον V. Katz[(Kt)], για τον υπολογισμό του ύψους ενός αντικειμένου, από την σκιά αυτού.

ΙΙ 16. «Η απόσταση του πέρατος των δύο σκιών πολλαπλασιασμένο με το μήκος της πρώτης σκιάς και διαιρούμενο με το μήκος των δύο σκιών δίνει το kotî. Το kotî πολλαπλασιασμένο με το μήκος του γνώμονα και διαιρούμενο με το μήκος της (πρώτης) σκιάς, μας δίνει το μήκος του στύλου (bhujã)».

Ο στίχος αυτός, δίνει την μέθοδο εύρεσης του ύψους ενός αντικειμένου, τοποθετώντας υποθετικά μια φωτεινή πηγή στην κορυφή αυτού και μετρώντας το μήκος της σχηματιζόμενης σκιάς, από την τοποθέτηση κάποιου γνώμονα σε διαφορετικές αποστάσεις. Στην προκειμένη περίπτωση (σχ.12), το αντικείμενο είναι ένας στύλος (bhujã), που υποτίθεται ότι φέρει έναν λαμπτήρα στην κορυφή B.

Αν DE και D΄E΄ είναι δύο γνώμονες μήκους g, τότε τα μήκη $DF = s_1$ και D΄C=s_2 των σκιών που σχηματίζονται από το υποτιθέμενο φως καθώς και η απόσταση FC του πέρατος των δύο σκιών, είναι εύκολο να μετρηθούν. Υποθέτοντας τώρα ότι το μήκος του στύλου AB=x και της σκιάς του y, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτά, από σχέσεις που προκύπτουν από τα όμοια τρίγωνα. Ο ανωτέρω στίχος λοιπόν, μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής, κάνοντας χρήση της σύγχρονης ορολογίας:

$$y = \frac{(s_2 + t)s_1}{s_2 - s_1} \quad \text{και} \quad x = \frac{yg}{s_1}$$



(Σχήμα 12)

Από τα ανωτέρω παρατηρούμε ότι τον Αριαμπάτα δεν τον απασχολούν καθόλου οι αποδείξεις των τύπων που δίνει. Αυτός, όπως άλλωστε και ο Ευκλείδης συγκέντρωσε και κατέγραψε το μαθηματικό έργο των προκατόχων του. Όμως σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί να αναμετρηθεί μαζί του. Φαίνεται να είναι αξιόπιστος όσον αφορά τα επίπεδα σχήματα, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο όταν πρόκειται για τα στερεά.

1.4 Τριγωνομετρία
Ο πίνακας ημιτόνων του Aryabhata

Οι στίχοι ΙΙ 11-12. αναφέρονται στο υπολογισμό των Ημιτόνων. Σύμφωνα με τον B. L. Waerden [(VW1)], ο Αριαμπάτα μεταχειρίζεται στους υπολογισμούς του, έναν όρο για το ημίτονο, διαφορετικό από αυτόν που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα.

Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί ως Ημίτονο αυτό που με σημερινή ορολογία ορίζεται από την σχέση:

$$\text{Η}\,\mu\varphi = R\eta\mu\varphi \quad , \text{ όπου R αυθαίρετη ακτίνα} \quad (1)$$

Όπως γνωρίζουμε με την σύγχρονη αντίληψη της τριγωνομετρίας, το ημίτονο μιας γωνίας ισούται με το μισό της χορδής του διπλάσιου τόξου, στο οποίο βαίνει η γωνία, προς την ακτίνα. Συνεπώς το Ημφ, είναι απλά το μισό της χορδής του διπλάσιου τόξου.

Πρέπει ακόμη να αναφέρουμε ότι ο Aryabhata Αριαμπάτα κάνει τους υπολογισμούς των γωνιών και των Ημιτόνων, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης τα λεπτά (΄) και όχι μοίρες (º). Από τον στίχο Ι 10 της Aryabhatiya, παρατηρούμε ότι ο συγγραφέας για να συνθέσει τον πίνακα των Ημιτόνων του, παίρνει μια συγκεκριμένη ακτίνα, την R=3438΄ Η επιλογή του αυτή βέβαια δεν είναι τυχαία. Έχει το πλεονέκτημα ότι μόνο για τη συγκεκριμένη ακτίνα (3438΄) και για μικρές γωνίες, το Ημίτονο γίνεται ίσο με την ίδια την γωνία. Είναι εύλογο το ερώτημα λοιπόν, πως βρήκε αυτή την ακτίνα ο Αριαμπάτα.

Ο B. L. Waerden [(VW1)] έρχεται, να μας δώσει μια λογική εξήγηση. Κατ' αρχάς κρίνει ότι για τον υπολογισμό της ακτίνας απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχει η τιμή του π. Αυτό είναι δεδομένο από τον στίχο ΙΙ 10, όπου βρίσκει την προσεγγιστική τιμή π ≅ 3,1416.

Έτσι για μικρές γωνίες φ (εκφρασμένες σε λεπτά), παίρνουμε την σχέση:

$$\text{Ημφ}=\text{Rημφ} \cong \text{R}\frac{\pi}{180\times 60}\varphi \ ,$$

Για να γίνει το Ημφ ίσο με φ, θα πρέπει η ακτίνα να πάρει τη τιμή:

$$R = \frac{180\times 60}{\pi} = \frac{10800}{\pi}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του π από την ΙΙ 10 βρίσκουμε την τιμή της ακτίνας ίση με:

$$R = \frac{10800}{3;1416} = 3437',7...$$

η οποία βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή 3438΄ που χρησιμοποιεί για ακτίνα ο Αριαμπάτα. Τα Ημίτονα που περιέχονται στον πίνακα του Αριαμπάτα, αρχίζουν από γωνίες 225΄ και με βήμα 225΄, φθάνουν έως τις 90º. Πως όμως, ο Αριαμπάτα επέλεξε αυτές τις γωνίες; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ας παρακολουθήσουμε τον παρακάτω συλλογισμό.

Στον στίχο ΙΙ 11, υποδεικνύεται ο υπολογισμός Ημιτόνων από ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένα σε κύκλο. Λόγω του συμπυκνωμένου τρόπου γραφής, ο Clark απέτυχε να ερμηνεύσει την μέθοδο αυτή του Αριαμπάτα. Όμως μια πλήρη περιγραφή αυτής δίνει ο μαθηματικός Bhaskara (629μ. Χ.). Ο Bhaskara μας πληροφορεί, ότι ο Αριαμπάτα πήρε αρχικά ένα τόξο 90º ακτίνας 3438΄και το διαίρεσε σε 6 μέρη. Κατόπιν με διαδοχικές διχοτομήσεις χώρισε το τόξο σε 12 και τέλος σε 24 ίσα μέρη. Είναι προφανές ότι τα τελικά τόξα είναι 225΄. Στη συνέχεια υπολόγισε το μήκος των 24 χορδών και κατόπιν διχοτομώντας αυτές, βρίσκει τα 24 Ημίτονα του. Το γεγονός ότι ο Bhaskara χρησιμοποιεί χορδές, προκειμένου να μας δώσει τον τρόπο παραγωγής αυτών των πινάκων Ημιτόνων, αποτελεί μια ένδειξη ότι οι πίνακες αυτοί, προέρχονται από τους πίνακες χορδών των Ελλήνων. Στη συνέχεια θα δούμε μία άλλη μέθοδο υπολογισμού Ημιτόνων.

Η μέθοδος αυτή η οποία βασίζεται σε διαφορές Ημιτόνων παρουσιάζεται στον στίχο ΙΙ 12 της Aryabhatiya, και παρουσιάζει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το πρώτο μισό δίστιχο της ΙΙ 12 δίνει τις οδηγίες για την εύρεση του δεύτερου Ημιτόνου, γνωστού όντος του πρώτου. Η διατύπωσή του έχει ως εξής:

ΙΙ 12. «Αν το πρώτο Ημίτονο διαιρεθεί με το εαυτό του και το πηλίκο αφαιρεθεί από το ίδιο, παίρνουμε την δεύτερη διαφορά Ημιτόνων».

Συμβολίζοντας με $R_1, R_2 .... R_4$ τα 24 Ημίτονα και με την υπενθύμιση ότι το πρώτο Ημίτονο R_1=Ημ (225΄)=225΄, βρίσκουμε το R_2. Το πηλίκο που αναφέρει ο κανόνας είναι ένα και η διαφορά του από το R_1=225΄ δίνει 224΄. Δηλαδή η δεύτερη διαφορά είναι $R_2 - R_1$ =224΄ ή R_2=224΄ $+ R_1$ ή R_2=449΄. Άρα το δεύτερο Ημίτονο είναι 449΄.

Στο δεύτερο μισό δίστιχο της ΙΙ 12. διαβάζουμε:

ΙΙ 12. «*Το πρώτο Ημίτονο, ελαττωμένο κατά το πηλίκο που προκύπτει από την διαίρεση όλων των προηγούμενων Ημιτόνων με το πρώτο (Ημίτονο) δίνει την διαφορά ημιτόνων».*

Ο Αριαμπάτα εδώ μας δίνει, τον γενικό κανόνα υπολογισμού όλων των άλλων Ημιτόνων. Με σύγχρονο συμβολισμό έστω, $R_1, R_2, ..., R_{24}$, τα 24 Ημίτονα. Από τον ορισμό έχουμε: $R_n =$ Sinnα= R sinna , με α $= \frac{90^\circ}{24} = 225'$.

Ο Αριαμπάτα λοιπόν, αρχίζει με $R_1 = 225'$ και συνεχίζει την εύρεση των Ημιτόνων διαδοχικά, από τον τύπο:

$$R_{n+1} - R_n = R_1 - \frac{R_1 + R_2 + ... + R_n}{R_1} \quad (1)$$

Έτσι εφαρμόζοντας την σχέση (1) βρίσκουμε:

$$R_2 - R_1 = R_1 - \frac{R_1}{R_1} = 225' - 1 = 224'$$

δηλ. $$R_2 = R_1 + 224' = 225' + 224' = 449'$$

Όμως, η σχέση (1) δεν είναι απολύτως σωστή. Με τις σημερινές γνώσεις της τριγωνομετρίας, θα είχαμε ένα σωστό αποτέλεσμα, αν η διαίρεση του αθροίσματος $R_1 + R_2 + ... + R_n$, δεν γινόταν με το R_1 αλλά με το $2(1 - \cos a)$. Με άλλα λόγια, ο Αριαμπάτα διαιρεί το άθροισμα με R_1=225, όπου $\frac{1}{225} = 0,00444$. Οι τιμές των Ημιτόνων θα ήταν ακριβείς, αν η διαίρεση γινόταν με το 233,6 αντί του 225. Η απόκλιση της τιμής των Ημιτόνων ενώ στην αρχή είναι αμελητέα, γίνεται όμως φανερή προς το τέλος.

1.5 Αριθμητικός και Αλγεβρικός λογισμός

α. Υπολογισμός τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμού

Στους στίχους ΙΙ 4 και ΙΙ 5, ο Αριαμπάτα περιγράφει μια διαδικασία εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμού. Η μέθοδός του αυτή βασίζεται στις ταυτότητες:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Επειδή η διαδικασία εύρεσης των ριζών απαιτεί κάποια δεξιότητα ως προς την σειρά των απαιτούμενων πράξεων, ο Αριαμπάτα δίνει στα ψηφία του αριθμού, κάποιες ενδεικτικές ονομασίες, προς αποφυγή λαθών. Έτσι για παράδειγμα, προκειμένου να υπολογίσει την τετραγωνική

ρίζα του αριθμού, 45369 αρχίζει από δεξιά προς τα αριστερά, ονομάζει τα ψηφία που βρίσκονται στην 1η, 3η, κ.λ.π. θέση “τετράγωνα ψηφία ”, ενώ αυτά που βρίσκονταν στην 2η, 4η,κ.λ.π. “ μη τετράγωνα ψηφία”. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τετράγωνα ψηφία τα 9,3,4 και μη τετράγωνα τα 6 και 5. Για διευκόλυνση τοποθετούμε ένα σύμβολο (ˈ), πάνω από κάθε τετράγωνο αριθμό.

Η διαδικασία εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας αριθμού, που περιγράφει ο στίχος ΙΙ 4 είναι η ακόλουθη:

```
 ˈ    ˈ    ˈ
 4  5  3  6  9    ) 2   [2² = 4 ]  πρώτο ψηφίο ρίζας
-4                        [2² = 4  και  2 · 2 = 4]
 0  5          )1        [5 :4= 1]  δεύτερο ψηφίο ρίζας
   -4                     [2·2 = 4]
    1  3
   -1                     [1²=1]
      1  2  6    )3   [126 : 2·21 = 3]τρίτο ψηφίο ρίζας
     -1  2  6            [2 ·21·3 =126
      =  =  =  9
              -9         [3²=9]
               =
```

Αρχίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά, έως ότου συναντήσουμε το πρώτο τετράγωνο ψηφίο, που στη προκειμένη περίπτωση είναι το 4. Βρίσκουμε την τετραγωνική του ρίζα του 4 που είναι 2 και αυτό, αποτελεί το $1^{ο}$ ψηφίο της ρίζας. Στη συνέχεια, αφαιρούμε το τετράγωνο του αριθμού αυτού, ($2^2 = 4$) από το 4. Η διαφορά είναι 0. Δίπλα στο 0 τοποθετούμε τώρα το επόμενο ψηφίο, το 5 (μη τετράγωνο ψηφίο). Διαιρούμε το 5 με το διπλάσιο του 2 δηλ. $2 \cdot 2 = 4$. Από την διαίρεση αυτή παίρνουμε πηλίκο 1. Αυτό το πηλίκο θα είναι το $2^{ο}$ ψηφίο της ρίζας. Από το 5 αφαιρούμε το διπλάσιο του 2 δηλ. το 4 και δίπλα στο υπόλοιπό του που είναι 1 και γράφουμε το επόμενο ψηφίο, το 3. Έχουμε τώρα τον αριθμό 13, από τον οποίο αφαιρούμε το τετράγωνο του $2^{ου}$ ψηφίου της ρίζας που είναι 1και έχουμε υπόλοιπο 12. Δίπλα στο 12 γράφουμε το επόμενο ψηφίο που είναι το 6 (μη τετράγωνο). Διαιρούμε τώρα το 126 με το διπλάσιο του 21 δηλ. $2 \cdot 21 = 42$ (όπου21 είναι τα δύο πρώτα ψηφία της ρίζας) και έχουμε πηλίκο 3.Το 3 λοιπόν, είναι το $3^{ο}$ ψηφίο της ρίζας. Αφαιρούμε το $2 \cdot 21 \cdot 3 = 42 \cdot 3 = 126$ και έχουμε υπόλοιπο 0. Δίπλα στο 0 τοποθετούμε τώρα το τελευταίο ψηφίο, το 9 και από αυτό αφαιρούμε το τετράγωνο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας, δηλ.το3^2. Έτσι έχουμε τελικό υπόλοιπο 0.

Από την ανωτέρω διαδικασία εξαγωγής της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού, μπορούμε συνοπτικά να πούμε ότι, μετά από κάθε αφαίρεση

έχουμε κάποιο υπόλοιπο και στη συνέχεια τοποθετούμε δίπλα του το επόμενο ψηφίο του αριθμού. Αν ο αριθμός είναι μη τετράγωνο ψηφίο, τότε σε 1η φάση υπολογίζουμε το επόμενο ψηφίο της ρίζας και σε 2η , αφαιρούμε το διπλάσιο γινόμενο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας με τον αριθμό που ορίζεται από τα προηγούμενα ψηφία αυτής. Όταν ο αριθμός είναι τετράγωνο ψηφίο, τότε αφαιρούμε το τετράγωνο του τελευταίου ψηφίου της ρίζας που έχουμε βρει. Με την μέθοδο αυτή βρήκαμε λοιπόν ότι, η τετραγωνική ρίζα του 45369 είναι ο αριθμός 213.

Ας μη λησμονούμε ότι ο Αριαμπάτα περιγράφει αυτή τη μέθοδο πολύ συνοπτικά, θα μπορούσαμε να πούμε επιγραμματικά, αφού την περικλείει μέσα σ' ένα μόνο δίστιχο. Επεξηγήσεις δόθηκαν αργότερα από διάφορους μεταγενέστερους μαθηματικούς και μελετητές. Σαν αιτιολόγηση μιας τόσο σύντομης περιγραφής είναι ότι, ο Aryabhata επεδίωκε να δώσει απλώς τον κανόνα και ότι ο τρόπος εύρεσης ή άλλες εξηγήσεις δινόταν κατά την διάρκεια των μαθημάτων στην ομώνυμη σχολή που δίδασκε.

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ

Η διαδικασία εύρεσης της κυβικής ρίζας ενός αριθμού είναι ανάλογη, με εκείνη της τετραγωνικής ρίζας.

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον αριθμό 12977875, αρχίζουμε με τον χαρακτηρισμό των ψηφίων του, ανάλογα με την θέση που κατέχουν. Μετρώντας από αριστερά προς τα δεξιά, οι αριθμοί που κατέχουν την $1^{η}$, $4^{η}$, κ.λ.π. θέση, ονομάζονται "κυβικοί" (ghana), αυτοί που κατέχουν την $2^{η}$, $5^{η}$, κ.λ.π. θέση, ονομάζονται"$1^{οι}$ μη- κυβικοί " ($1^{οι}$ aghana) και τέλος αυτοί που κατέχουν την $3^{η}$, $6^{η}$, κ.λ.π. θέση, "$2^{οι}$ μη- κυβικοί " ($2^{οι}$ aghana).

Τη διατύπωση του στίχου II 5, βρίσκουμε στο βιβλίο του V.Katz [(Kt)]:

«Μπορεί κάποιος να διαιρέσει τον $2^{ο}$ μη- κυβικό αριθμό, με το τριπλάσιο του τετραγώνου της κυβικής ρίζας που βρήκαμε από τον προηγούμενο κυβικό αριθμό. Το τετράγωνο (του πηλίκου) πολλαπλασιασμένο με το τριπλάσιο του purva (δηλ. τα ψηφία της κυβικής ρίζας που έχουμε ήδη βρει), αφαιρείται από τον $1^{ο}$ μη-κυβικό και ο κύβος (του πηλίκου της ανωτέρω διαίρεσης) αφαιρείται από τον κυβικό αριθμό».

Εφαρμόζοντας τον ανωτέρω κανόνα, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την κυβική ρίζα του αριθμού 12977875.

```
                 |  _  °  |  _  °  |
            1  2  9  7  7  8  7  5   )2      {πρώτο ψηφίο ρίζας 2=∛12 }
            - 8                                  2³=8
1 2          4 9                      )3        12=3·2²
            -3 6                     49:12=3 (1ο πηλίκο, το 4 είναι μεγάλο)
             1 3 7                          {δεύτερο ψηφίο ρίζας}
               -5 4                          3²· 3 · 2=54
              8 3 7                          3³ =27
                -2 7
1 5 8 7       8 1 0 8                  )5     3 · 23²=1587
             -7 9 3 5                        8108:1587=5 (2ο πηλίκο)
               1 7 3 7                       {τρίτο ψηφίο ρίζας}
              -1 7 2 5                       5²· 3 · 23=1725
                  1 2 5
                 -1 2 5                      5³=125
                  = = =
```

Αρχίζοντας από αριστερά προς τα δεξιά, παίρνουμε ως πρώτο αριθμό όλα τα ψηφία μέχρι και τον $1^{ο}$ κυβικό αριθμό που θα συναντήσουμε. Στην προκειμένη περίπτωση είναι ο αριθμός 12. Βρίσκω αριθμό του οποίου ο κύβος να είναι ίσος ή μικρότερος (2^3) του 12.Αφαιρούμε από το 12, το $2^3=8$ και έχουμε υπόλοιπο 4. Δίπλα του φέρουμε το επόμενο ψηφίο το 9($2^{ος}$ μη- κυβικός)
Εφαρμόζοντας τον κανόνα λοιπόν, διαιρούμε το 49 , (με το τριπλάσιο του τετραγώνου της κυβικής ρίζας που βρήκαμε από τον προηγούμενο κυβικό αριθμό, δηλ. $3.2^2=12$) με το 12 και έχουμε πηλίκο 3. Το 3 είναι το $2^{ο}$ ψηφίο της κυβικής ρίζας. Αφαιρούμε από το 49 το $3\cdot 12$,και στο νέο υπόλοιπο (13) τοποθετούμε το 7 ($1^{ος}$ μη- κυβικός). Από το 137 αφαιρούμε το γινόμενο $3\cdot 3^2\cdot 2=54$ και στο υπόλοιπο 83 βάζουμε τώρα τον κυβικό αριθμό 7. Από το 837 αφαιρούμε τον κύβο του $2^{ου}$ ψηφίου της ρίζας, το $3^3=27$, και έχουμε υπόλοιπο 810.

Με ανάλογο τρόπο, το 810 γίνεται 8108, με την προσθήκη του 8 ($2^{ος}$ μη- κυβικός)Διαιρούμε το 8108 με το τριπλάσιο γινόμενο του τετραγώνου των δύο πλέον ψηφίων της ρίζας που έχουμε βρει. Το πηλίκο είναι 5, και αυτό είναι το $3^{ο}$ ψηφίο της ρίζας. Αφαιρούμε από το 8108 το γινόμενο $3\cdot 23^2\cdot 5=7935$ και έχουμε υπόλοιπο 173. Τοποθετούμε το 7 ($1^{ος}$ μη- κυβικός) και έχουμε τον αριθμό 1737, από τον οποίο αφαιρούμε το τριπλάσιο γινόμενο του $23\cdot 5^2$, δηλ.$3\cdot 23\cdot 5^2=1725$, με υπόλοιπο 12. Τοποθετούμε τέλος και τον τελευταίο κυβικό αριθμό το 5 και αφαιρώντας τον κύβο του $3^{ου}$ ψηφίου της ρίζας έχουμε υπόλοιπο 0.

Έτσι βρήκαμε ότι το 235, είναι η κυβική ρίζα του αριθμού 12977875.

β. Αριθμητικοί πρόοδοι

Ένα τυπικό δείγμα της Aryabhatiya είναι αυτό που αναφέρεται σε αριθμητικές προόδους και το οποίο περιλαμβάνει αυθαίρετους κανόνες για την εύρεση του αθροίσματος των όρων μιας προόδου και τον αριθμό των όρων μιας ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον 1^{ο} όρο, τη διαφορά και το άθροισμα των όρων.

ΙΙ 19. «Αν το πλήθος των όρων ελαττωθεί κατά ένα και διαιρεθεί με το δύο, έπειτα πολλαπλασιαζόμενο με την (κοινή) διαφορά των όρων και αυξανόμενο κατά τον πρώτον όρο, είναι ο μεσαίος όρος. Αυτός (ο μεσαίος όρος) αν πολλαπλασιαστεί με το πλήθος των όρων δίνει το άθροισμα των όρων. Ή διαφορετικά το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου όρου πολλαπλασιαζόμενο με το μισό του πλήθους των όρων (δίνει το άθροισμα των όρων)».

Ο Αριαμπάτα εδώ μας δίνει τον τύπο του αθροίσματος Sn, των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου, με πρώτο όρο α και διαφορά d. Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό, ο τύπος αυτός γράφεται:

$$S_n = n\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)d + a\right] =$$
$$= \frac{n}{2}\left[a + \left(a + (n-1)d\right)\right]$$

Ο επόμενος κανόνας που χαρακτηρίζεται από τον B. Boyer σαν περίεργη και πολύπλοκη μικρή έκθεση λέει τα εξής:

ΙΙ 20. «Πολλαπλασίασε το άθροισμα της προόδου με το οκταπλάσιο της κοινής διαφοράς, πρόσθεσε το τετράγωνο της διαφοράς του διπλάσιου του πρώτου όρου και της (κοινής) διαφοράς, πάρε την τετραγωνική ρίζα αυτού, αφαίρεσε το διπλάσιο του πρώτου όρου, διαίρεσε με την (κοινή) διαφορά, πρόσθεσε ένα και διαίρεσε με το δύο. Το αποτέλεσμα θα είναι το πλήθος των όρων».

Σε αυτήν την περίπτωση ο αντίστοιχος τύπος με σύγχρονη ορολογία είναι:

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8S_n d + (2a-d)^2} - 2a}{d} + 1\right]$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από τον προηγούμενο κανόνα. Πράγματι ο κανόνας αυτός μας δίνει μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως n, δηλ. την $dn^2 + (2a - d)n - 2S_n = 0$, της οποίας μια ρίζα της είναι η ανωτέρω σχέση.

γ. Άθροισμα τετραγώνων και κύβων των ν πρώτων φυσικών αριθμών

II 22. «Το ένα έκτο του γινομένου τριών ποσοτήτων, (δηλαδή αυτών που περιλαμβάνουν), το πλήθος των όρων, το πλήθος των όρων συν ένα, και το διπλάσιο του πλήθους συν ένα, είναι το άθροισμα των τετραγώνων. Το τετράγωνο του αθροίσματος της (αρχικής) σειράς είναι το άθροισμα των κύβων».

Ο στίχος αυτός μας δίνει τους τύπους εύρεσης του αθροίσματος $S_n^{\,2}$ και $S_n^{\,3}$ των τετραγώνων και κύβων αντίστοιχα, των n πρώτων όρων, των φυσικών αριθμών δηλ. τους

$$S_n^{\,2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{και} \quad S_n^{\,3} = (1+2+...+n)^2 .$$

Ο πρώτος τύπος ήταν γνωστός ήδη στον Αρχιμήδη. Ο δεύτερος τύπος, είναι σχεδόν προφανής και μπορεί να φθάσει κανείς αρχίζοντας με κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Δεν είναι γνωστό όμως με ποιο τρόπο ο $\bar{A}ryabhat\dot{a}$ κατέληξε σ' αυτούς τους τύπους.

δ. Μέθοδος των τριών

Μετά από μερικά πολύπλοκα προβλήματα ανατοκισμού, ο Αριαμπάτα στρέφει το ενδιαφέρον του στο στοιχειώδες πρόβλημα εύρεσης του τέταρτου όρου μιας απλής αναλογίας. Χρησιμοποιεί δε, γλαφυρότατες εκφράσεις όπως:

« Στη μέθοδο των τριών, πολλαπλασίασε το φρούτο με την επιθυμία και διαίρεσε με το μέγεθος. Το αποτέλεσμα θα είναι το φρούτο της επιθυμίας.»

Πρόκειται για την οικεία πρόταση, όπου αν $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ τότε $x = \frac{b \cdot c}{a}$ όπου a είναι το «μέγεθος», b το «φρούτο», c η «επιθυμία» και x το «φρούτο της επιθυμίας».

ε. Διοφαντικές εξισώσεις

Ο Αριαμπάτα κλείνει το ΙΙ κεφάλαιο της Aryabhatiya, με δύο στίχους που θεωρούνται και οι πιο σημαντικοί του έργου του. Αναφέρονται στη λύση Διοφαντικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Το κείμενο και εδώ είναι ιδιαίτερα συνοπτικό και δυσνόητο, δοσμένο κατ' αυτόν τον τρόπο, για εύκολη απομνημόνευση και με την προϋπόθεση ότι οι απαραίτητες εξηγήσεις και διευκρινήσεις, δίνονται κατά την προφορική διδασκαλία. Πολλά ερμηνευτικά σχόλια και παραδείγματα έχουν δοθεί για τον σκοπό αυτό από διάφορους μελετητές. Ο B. L. Waerden [(VW1)] μαζί με το κείμενο παραθέτει μέσα σε αγκύλες, κάποιες απαραίτητες επεξηγήσεις που πρόσθεσε κατά την μετάφρασή του ο Clark και ο οποίος με την σειρά του βασίστηκε σε σχόλια και ερμηνείες των Ινδών μαθηματικών Parameshvara και Brahmagupta. Η διατύπωση των στίχων αυτών είναι η ακόλουθη:

ΙΙ 32-33. «Διαίρεσε τον διαιρέτη που δίνει το μεγαλύτερο υπόλοιπο με τον διαιρέτη που δίνει το μικρότερο υπόλοιπο. Το υπόλοιπο διαιρείται αμοιβαία, [θα λέγαμε ότι, το υπόλοιπο γίνεται διαιρέτης του αρχικού διαιρέτη και το υπόλοιπο της δεύτερης διαίρεσης, γίνεται διαιρέτης του δεύτερου διαιρέτη κ.λ.π]. [Τοποθετώντας τα πηλίκα το ένα κάτω του άλλου, σχηματίζεται έτσι η λεγόμενη αλυσίδα].[Το τελευταίο υπόλοιπο] πολλαπλασιάζεται με έναν υποθετικό αριθμό και προστίθεται στη διαφορά μεταξύ υπολοίπων. Πολλαπλασιάστε τον προτελευταίο αριθμό με τον αριθμό που είναι πάνω απ' αυτόν και προσθέστε τον αριθμό που είναι κάτω απ' αυτόν. [Συνεχίστε αυτή την διαδικασία μέχρι την αρχή της αλυσίδας]. Διαιρέστε τον αριθμό που βρίσκεται στην αρχή, με τον αριθμό που δίνει το μικρότερο υπόλοιπο. Πολλαπλασιάστε το υπόλοιπο, με τον διαιρέτη που δίνει το μεγαλύτερο υπόλοιπο. Το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός, που ικανοποιεί τους δύο διαιρέτες και τα δύο υπόλοιπα».

Ο B. L. Waerden [(VW1)], βασιζόμενος στο σχετικό έργο του Colebrooke και σε αντίστοιχα κείμενα των Brahmagupta και Baskara II, μας δίνει τον τρόπο που υποδεικνύει ο Αριαμπάτα, για την επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό. Από όσα γνωρίζουμε από τους σχολιαστές, μπορούμε να πούμε ότι ο Aryabhata, ασχολήθηκε με ζεύγη γραμμικών εξισώσεων
της μορφής:

$$a_1x_1 + c_1 = b_1y$$
$$a_2x_2 + c_2 = b_2y \qquad (1)$$

ζητώντας την εύρεση ακεραίων λύσεων για τα x_1, x_2 και y. Ο Parameshvara μας πληροφορεί ότι βρίσκουμε τη λύση του ζεύγους αυτού

των εξισώσεων , αν γνωρίζουμε τον τρόπο επίλυσης της εξίσωσης με γενικό τύπο:

(A) $$ax + c = by$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την εύρεση ακεραίων λύσεων αυτής

είναι η εξής: Το πρώτο βήμα είναι, να βρούμε το μέγιστο κοινό

διαιρέτη d των συντελεστών α και β.

Αν ο d διαιρεί το c, τότε όλοι οι όροι της εξίσωσης διαιρούνται με d και όπως ορθά παρατηρεί ο Baskara II, «διαιρώντας τους συντελεστές με το κοινό μέτρο, μένουν οι τελικές ποσότητες».Αν ο d όμως δεν διαιρεί το c, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι d=1. Το επόμενο βήμα είναι να διαιρέσουμε το b με το a:

(2) $$b = qa + r \quad \text{με} \quad r < a$$

Θέτουμε

(3) $$x = qy + z$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2) και (3) στην (A) έχουμε

$$a(qy + z) + c = (qa + r)y$$

Ή αφαιρώντας τον όρο aqy από τα δύο μέλη,

(4) $$ry - c = az\,.$$

Η (4), έχει τον ίδιο τύπο με την αρχική εξίσωση (A). Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι εκείνου του σημείου που θα έχουμε (τελικό) υπόλοιπο, τη μονάδα. Ο Baskara II αναφέρει σχετικά: «Διαιρέστε συνεχώς τους, μέχρις ότου γίνει μονάδα το υπόλοιπο».

Έτσι τελικά φτάνουμε σε μια εξίσωση της μορφής

(5) $$1 \cdot u + c' = gw,$$

Όπου 1 και g είναι το τελευταίο και προτελευταίο υπόλοιπο. Ο όρος c' είναι ίσος με c αν ο αριθμός των διαιρέσεων που έγιναν είναι άρτιος και ίσος με -c αν ο αριθμός των διαιρέσεων περιττός. Το σημείο αυτό τονίζει ρητά ο Baskara II «Αυτή ακριβώς είναι η λειτουργία όταν ο αριθμός των πηλίκων είναι άρτιος. Αλλά αν είναι περιττός, οι αριθμοί που βρέθηκαν πρέπει να αφαιρεθούν». Μπορούμε τώρα, να πάρουμε μια

τυχαία ακέραια τιμή του w και να υπολογίσουμε από την (5) το u. Συνήθως ο Baskara II επέλεγε την τιμή $w=0$, ενώ ο Baskara I πρότεινε την επιλογή ενός «κατάλληλου» αριθμού w, που αφού πολλαπλασιαστεί με το προτελευταίο υπόλοιπο, να αφαιρεθεί απ' αυτό ο όρος c', δηλ.

(6) $$u = gw - c'$$

Έστω $q_1, q_2, ...q_k$, τα πηλίκα των διαιρέσεων. Οι Ινδοί σχολιαστές προτείνουν για ευκολία, να γράφονται αυτά (τα πηλίκα) σε μια στήλη, το ένα κάτω του άλλου και στο τέλος να βάζουμε τα u και w. (πιν. 2)

Οι επαναλαμβανόμενες διαιρέσεις απαιτούν την προσθήκη νέων αγνώστων, των $z, t, ..., v, u, w$ και έτσι δημιουργούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= q_1 y + z \\ y &= q_2 z + t \\ &\dots \\ v &= q_k u + w \end{aligned}$$

Τώρα έχοντας υπολογίσει τα u και w, ακολουθούμε αντίστροφη διαδικασία αρχικά υπολογίζουμε τα u, w και στη συνέχεια βρίσκουμε με την σειρά, τους υπόλοιπους αγνώστους, καταλήγοντας στους y, x. Οι τιμές των x, y είναι μια μερική λύση της (A). Για την κατανόηση αυτής της μεθόδου θα δώσουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα, που σύμφωνα με τον B. L. Waerden[(VW1)], το παραθέτει ο Parameshvara στα αντίστοιχα σχόλιά του και που είναι η κατωτέρω εξίσωση:

Να λυθεί η εξίσωση:

(7) $$29x + 4 = 8y$$

Ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε αναλυτικά ανωτέρω έχουμε:
Διαιρώντας το 8 με το 29 έχουμε πηλίκο 0 και υπόλοιπο 8. Κάνουμε την πρώτη αντικατάσταση.

(8) $$x = 0 \cdot y + z$$

Στη συνέχεια διαιρούμε το 29 με το υπόλοιπο 8 της πρώτης διαίρεσης και παίρνουμε το πηλίκο 3 και υπόλοιπο 5. Έτσι, η δεύτερη αντικατάσταση γίνεται:

(9) $y = 3 \cdot z + t$

Ομοίως ενεργούμε μέχρι να βρούμε υπόλοιπο ίσο με την μονάδα.

(10) $z = 1 \cdot t + v$

(11) $t = 1 \cdot v + u$

(12) $v = 1 \cdot u + w$

Από τις διαδοχικές αυτές διαιρέσεις, είχαμε τα πηλίκα 0,3,1,1,1 και τα υπόλοιπα 8,5,3,2,1, αντίστοιχα. Επειδή ο αριθμός των διαιρέσεων είναι περιττός, έχουμε $c' = -c =$ - 4 και η τελευταία εξίσωση γράφεται:

(13) $u - 4 = 2w$

Ο Parameshvara επιλέγει $w = 1$ και βρίσκει $u = 6$. Ακολούθως προχωρώντας αντίστροφα στην αλυσίδα των αντικαταστάσεων, υπολογίζει τα v, t, z, y και x.Τέλος προτείνει έναν πίνακα, για την ευκολότερη πραγματοποίηση όλων αυτών των υπολογισμών:

ΠΗΛΙΚΑ	ΤΙΜΕΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ
0	20	$x = 0 \cdot 73 + 20 = 20$
3	73	$y = 3 \cdot 20 + 13 = 73$
1	20	$z = 1 \cdot 13 + 7 = 20$
1	13	$t = 1 \cdot 7 + 6 = 13$
1	7	v = 1.6 + 1 = 7
2	6	u = 2.1 + 4 = 6
		w = 1

(Πίνακας 2)

Όμως το ζεύγος (x, y) = (20,73) που βρήκαμε, δεν σημαίνει ότι είναι και οι μικρότερες ακέραιες τιμές που επαληθεύουν αυτή την εξίσωση. Για να επιτευχθεί αυτό, σύμφωνα με την υπόδειξη του Bhaskara, αρκεί να διαιρέσουμε το x με το b την εξίσωση (A) και έστω ότι έχουμε ένα πηλίκο m και ένα υπόλοιπο x'. Έτσι γράφουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

(14) $$x = mb + x'$$
(15) $$y = ma + y'$$
Είναι προφανές ότι το ζεύγος (x', y') είναι μια μερική λύση της εξίσωσης (Α) και στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$x = 20\,,\ y = 73\ ,\ a = 29 \text{ και } b = 8\,.$$

Επομένως διαιρώντας το 20 με το 8 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 4. Άρα οι (14) και (15) γράφονται αντίστοιχα:

$$x = 8m + 4$$
$$y = 29m + 15$$

και αποτελούν την γενική λύση της (Α), ενώ οι τιμές $x' = 4$ και $y' = 15$, είναι οι μικρότερες ακέραιες λύσεις αυτής.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι Ινδοί μαθηματικοί, για την επίλυση των γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων, φέρει την χαρακτηριστική ονομασία «κονιοποιητής» (kuttaka). Ο λόγος που δόθηκε αυτή η ονομασία είναι προφανής, αφού οι αρχικοί συντελεστές a και b, μέσα από την διαδικασία που προαναφέραμε, γίνονται κάθε φορά όλο και μικρότεροι, είναι σαν να «κονιοποιούνται».

Ο Parameshvara στα σχετικά σχόλιά του πάνω στους στίχους του Αριαμπάτα επεξηγεί μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, που αποτελούν σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. Η μέθοδος αυτή βασίζεται πάλι, στους στίχους II 32-33 της Aryabhatiya. Ο Parameshvara παρουσιάζει δύο τύπους προβλημάτων, εκ των οποίων το δεύτερο είναι ειδική περίπτωση του πρώτου και είναι τα εξής:

(Α) «*Να βρεθείτε έναν αριθμό y τέτοιο ώστε, αν το $b_1 y$ διαιρεθεί με το a_1 να αφήνει υπόλοιπο c_1, και το $b_2 y$ αν διαιρεθεί με το a_2 να αφήνει υπόλοιπο c_2*».

(Β) «*Να βρεθείτε έναν αριθμό y τέτοιο ώστε, αν διαιρεθεί με το a_1 να αφήνει υπόλοιπο c_1, και αν διαιρεθεί με το a_2 να αφήνει υπόλοιπο c_2*».

Όπως είπαμε το πρόβλημα (Β) αποτελεί ειδική περίπτωση του (Α), με $b_1 = b_2 = 1$. Η ερμηνεία του προβλήματος (Α), μας οδηγεί σ' ένα ζεύγος εξισώσεων του τύπου:

(16) $$a_1 x_1 + c_1 = b_1 y$$
(17) $$a_2 x_2 + c_2 = b_2 y$$

Ο Parameshvara προτείνει την εξής μέθοδο για την επίλυση του συστήματος: Πρώτα να βρεθεί η γενική λύση της (16), μετά η γενική λύση της (17) και τέλος να εξισώσουμε τις δύο εκφράσεις ως προς τον κοινό άγνωστο y

Ο Parameshvara δίνει στη συνέχεια το εξής παράδειγμα:

(18) $$29x_1 + 4 = 8y$$

(19) $$45x_2 + 7 = 17y$$

Όσον αφορά τη λύση της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (18), έχουμε ήδη ασχοληθεί αναλυτικά στο προηγούμενο παράδειγμα και έχουμε βρει την γενική λύση αυτής.

$$x_1 = 8m + 4$$
$$y = 29m + 15.$$

Με την ίδιο ακριβώς τρόπο, βρίσκουμε την γενική λύση της (19):

$$x_2 = 17n + 4$$
$$y = 45n + 11$$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις ως προς y, βρίσκουμε:

$$29m + 15 = 45n + 11$$

ή

(20) $$29m + 4 = 45n$$

Η (20) είναι πάλι γραμμική εξίσωση του ιδίου τύπου και η επίλυσή της δίνει ως τις μικρότερες ακέραιες τιμές για τα m και n τις:

$$m = 34 \qquad \text{και} \qquad n = 22$$

Στη συνέχεια με αντικατάσταση βρίσκουμε την πρώτη τριάδα ακεραίων, που επαληθεύει το σύστημα:

$$y = 1001$$
$$x_1 = 276$$
$$x_2 = 378.$$

Κλείνοντας, θα χαρακτηρίζαμε το έργο του Αριαμπάτα, σαν μίγμα του απλού και του περίπλοκου, του σωστού και θα λανθασμένου. Δικαιολογημένα λοιπόν, ο Άραβας μελετητής Αλ-Μπιρούνι πέντε αιώνες αργότερα, έρχεται να περιγράψει τα ινδικά μαθηματικά,

«*σαν μίγμα απλών βοτσάλων και πολύτιμων κρυστάλλων*».

2. Ο ΒΡΑΧΜΑΓΚΟΥΠΤΑ (BRAHMADUPTA)

Έναν αιώνα μετά τον Αριαμπάτα, το 598 μ.Χ. γεννιέται στη βορειοδυτική Ινδία, ένας αξιόλογος μαθηματικός ο Βραχμαγκούπτα (Brahmagupta). Κατά πάσα πιθανότητα πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην πόλη Bhillamãla (σημερινό Bhinmal), στην αυτοκρατορία των Χάρσα. Ο Βραχμαγκούπτα έγραψε το σπουδαιότερο έργο του που φέρει τον τίτλο Brãhmasphutasiddhãnta (Διόρθωση του αστρονομικού συστήματος του Brahma), σε ηλικία μόλις 30 ετών. Διετέλεσε για πολλά χρόνια επικεφαλής του αστεροσκοπείου της Ujjain, που ήταν ένα από τα σημαντικότερα αστεροσκοπεία της Ινδίας εκείνη την εποχή. Το μαθηματικό έργο του Βραχμαγκούπτα, όπως άλλωστε και τα περισσότερα έργα αυτής της περιόδου, είναι κυρίως αστρονομικού περιεχομένου. Περιγράφουν βέβαια κάποιες μαθηματικές πρακτικές που είναι πρωτίστως απαραίτητες, για την επίλυση διαφόρων αστρονομικών προβλημάτων. Ο Βραχμαγκούπτα αν και έζησε έναν αιώνα μετά τον Αριαμπάτα, στο έργο του συναντά κανείς, ελάχιστα κοινά σημεία με αυτά του προκατόχου του. Αυτό το φαινόμενο παρατηρούμε ότι συμβαίνει αρκετά συχνά στους Ινδούς συγγραφείς, δηλαδή σπάνια αναφέρονται στους προκατόχους τους και δείχνουν μια αξιοσημείωτη ανεξαρτησία στην προσέγγιση των μαθηματικών.

Όσον αφορά τη δομή του κειμένου της Brãhmasphutasiddhãnta, παρατηρούμε ότι είναι γραμμένο σε στίχους, στη σανσκριτική γλώσσα. Ο τρόπος περιγραφής των διαφόρων μεθόδων του Βραχμαγκούπτα είναι και εδώ συνοπτικός, αλλά θα μπορούσαμε να πούμε ότι, είναι πληρέστερος από εκείνους των προγενέστερων μαθηματικών και ότι συμπληρώνει αυτούς με παραδείγματα. Όμως είτε λόγω λανθασμένης αντιγραφής των κειμένων, είτε λόγω της προφορικής παράδοσης που συμπλήρωνε τα κείμενα, οι αναγραφόμενοι μέθοδοι δεν περιγράφονται πάντα με τα αντίστοιχα παραδείγματα. Τελικά κάποιοι επιστήμονες μελετώντας το έργο του κατόρθωσαν να δώσουν τις απαραίτητες επεξηγήσεις, που κάλυπταν τις βασικές του ιδέες.

Θα αναφερθούμε περιληπτικά στο έργο του Βραχμαγκούπτα και θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στη διαδικασία επίλυσης απροσδιόριστων εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού. Αρχικά παραθέτουμε κάποια ενδεικτικά σημεία του έργου του, για να δούμε με ποιους τομείς των μαθηματικών ασχολήθηκε και το αποτέλεσμα αυτών. Όσο για τις απροσδιόριστες εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, η συμβολή του Βραχμαγκούπτα είναι πολύ σημαντική, αφού με τα τρία λήμματα που ανακάλυψε, μπορούν να επιλυθούν αυτές με αρκετή ευκολία.

2.1 Γεωμετρία

Η Γεωμετρία του Βραχμαγκούπτα δεν παρουσιάζει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Όπως και στο έργο του Αριαμπάτα έτσι και εδώ, υπάρχουν τύποι σωστοί και τύποι λανθασμένοι. Φαίνεται ότι η Γεωμετρία είχε σαν απώτερο σκοπό την εξυπηρέτηση πρακτικών αναγκών, γι' αυτό δεν διαφαίνεται κάποια προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης ή αιτιολόγησης.

Ο Βραχμαγκούπτα δίνει για το π, δύο τιμές την «πρακτική τιμή», που είναι το 3 και την «σωστότερη», που είναι η $\sqrt{10}$ αλλά όχι την «ακριβέστερη» $\pi = \frac{62832}{20000} \cong 3{,}1416$ του Αριαμπάτα. Στην τριγωνομετρία υιοθέτησε ακτίνα με τιμή 3270 αντί της τιμής 3438 του Αριαμπάτα.

Υπολόγισε «χονδρικά» το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου, πολλαπλασιάζοντας το μισό της βάσης του με μια από τις ίσες πλευρές του. Υπολόγισε ακόμη «χονδρικά» το εμβαδόν ενός σκαληνού τριγώνου, βάσης 14 μονάδων και πλευρών 13 και 15, πολλαπλασιάζοντας το μισό της βάσης με τον αριθμητικό μέσο των δύο άλλων πλευρών. Όμως για τον «ακριβή» υπολογισμό του εμβαδού αυτού, χρησιμοποιεί τον τύπο του Αρχιμήδη και του Ήρωνα. Όσον αφορά την ακτίνα του περιγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου, παρουσίασε προτάσεις αντίστοιχες με το σωστό τριγωνομετρικό αποτέλεσμα: $2R = \frac{a}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\gamma}{\eta\mu\gamma}$,

που δεν είναι τίποτε άλλο από μια αναδιατύπωση του αποτελέσματος που είχε παρουσιάσει ο Πτολεμαίος στη γλώσσα των χορδών. Το πιο ωραίο και ενδιαφέρον αποτέλεσμα του Βραχμαγκούπτα, ίσως είναι η γενίκευση του τύπου του Ήρωνα, για την εύρεση του εμβαδού ενός τετραπλεύρου. Ο τύπος αυτός είναι ο ακόλουθος:

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad \text{όπου} \quad a,b,c,d$$

είναι οι πλευρές και s η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου. Ο τύπος αυτός που φέρει ακόμη το όνομά του, σκιάζεται από την παράλειψή του να αναφέρει ότι είναι σωστός μόνο στην περίπτωση του κυκλικού τετραπλεύρου. Όσον αφορά στον «χονδρικό» υπολογισμό του εμβαδού ενός τετραπλεύρου, ο Βραχμαγκούπτα έδωσε τον προελληνικό τύπο, ως το γινόμενο των αριθμητικών μέσων των απέναντι πλευρών. Για παράδειγμα, για ένα τετράπλευρο με πλευρές $a = 25, b = 25, c = 25, d - 39,$ βρήκε ότι το εμβαδόν του ήταν 800.[(Β-Μ)]

2.2 Άλγεβρα

Η συνεισφορά του Βραχμαγκούπτα στην άλγεβρα, είναι σαφώς πιο αξιόλογη από τους κανόνες μέτρησης που παρουσιάζει. Συναντούμε γενικές λύσεις δευτεροβαθμίων εξισώσεων, ακόμη και αν μία από αυτές είναι αρνητική. Ο τρόπος προσέγγισης αυτών γίνεται με προβλήματα αρκετά παραστατικό, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

«Το ένα τέταρτο από ένα κοπάδι καμήλες φάνηκε στο δάσος. Ο διπλάσιος αριθμός της τετραγωνικής ρίζας (αυτού του κοπαδιού) πήγαν στους πρόποδες του βουνού και οι υπόλοιπες δεκαπέντε καμήλες παρέμειναν στην όχθη του ποταμού. Ποιος είναι ο αριθμός των καμήλων σε αυτό το κοπάδι»;

Το πρόβλημα αυτό απαιτεί προφανώς την εύρεση θετικών λύσεων της εξίσωσης που με σύγχρονη συμβολισμό είναι η $\frac{1}{4}x = +2\sqrt{x} + 15 = x$, για την οποία δίνεται ο αντίστοιχος κανόνας.

Ένα άλλο πρόβλημα απροσδιόρισης ανάλυσης αυτή τη φορά, με διατύπωση πολύ εντυπωσιακή που θα μπορούσε να είναι απόσπασμα λογοτεχνικού κειμένου μας αναφέρει:

«Μέσα στις φωτεινές και αναζωογονητικές παρυφές του δάσους, τις γεμάτες από αναρίθμητα δένδρα, με τα κλαδιά τους λυγισμένα από το βάρος των λουλουδιών και των φρούτων, δέντρα όπως νεραντζιές, λεμονιές, φλαμουριές, μπανανιές, παλμίρες και μάγκο, μέσα στις παρυφές τις γεμάτες ήχους, από πλήθος παπαγάλων και κούκων που βρισκόταν κοντά σε πηγές γεμάτες νούφαρα, με τις μέλισσες να βουίζουν γύρω από αυτά, ένας αριθμός από κουρασμένους ταξιδιώτες μπήκαν με χαρά. Εκεί υπήρχαν 63 ίσοι τον αριθμό, σωροί από μπανάνες και επτά άλλοι σωροί από τα ίδια φρούτα, που μοιράστηκαν ίσα σε 23 ταξιδιώτες, έτσι ώστε να μην υπάρχει υπόλοιπο. Πείτε μου τώρα το αριθμητικό μέτρο του κάθε σωρού από μπανάνες».[(Sm)]

Συναντούμε ακόμη τη συστηματοποίηση των αρνητικών αριθμών και του μηδενός, για πρώτη φορά στο έργο του Βραχμαγκούπτα. Τα ελληνικά γεωμετρικά θεωρήματα για την αφαίρεση σχετίζονταν με κανόνες για αρνητικά μεγέθη, όπως $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$. Οι Ινδοί, όμως μετέτρεψαν αυτούς τους κανόνες σε αριθμητικούς κανόνες για θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Ακόμη μολονότι οι Έλληνες είχαν την έννοια του «τίποτα», ποτέ δεν την εξέφρασαν ως έναν αριθμό, όπως έκαναν οι Ινδοί. Όμως και εδώ ο Βραχμαγκούπτα, δεν στάθηκε στο ύψος των περιστάσεων, δηλώνοντας ότι 0:0=0. Όσον αφορά στο ευαίσθητο θέμα της διαίρεσης $a \div 0$ όπου $a \neq 0$ δεν πήρε θέση.

«Η διαίρεση θετικού με θετικό ή αρνητικού με αρνητικό, δίνει αποτέλεσμα θετικό. Η διαίρεση θετικού με αρνητικό, αποτέλεσμα

αρνητικό. Η διαίρεση μηδέν με μηδέν μας δίνει μηδέν. Η διαίρεση αρνητικού με θετικό, αρνητικό. Η δε διαίρεση θετικού ή αρνητικού με το μηδέν είναι ένα κλάσμα με παρονομαστή μηδέν».(Colebrook 1817, τόμος Ι)

Πρέπει ακόμη να σημειώσουμε ότι οι Ινδοί σε αντίθεση με τους Έλληνες θεωρούσαν τις άρρητες ρίζες των αριθμών, αριθμούς. Η αναγνώριση αυτή συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της άλγεβρας αλλά ας μην ξεχνούμε ότι η συνεισφορά αυτή από μέρους των Ινδών, ήταν αποτέλεσμα λογικής αθωότητας και όχι μαθηματικής ενόρασης.[(Β-Μ)]

2.3 Η εξίσωση του Pell στα ινδικά μαθηματικά.

Τα Ινδικά μαθηματικά όπως ήδη είπαμε, ήταν ένα μίγμα καλού και κακού. Ένα τμήμα, όμως, του καλού ήταν εξαίρετο και στο σημείο αυτό ο Βραχμαγκούπτα αξίζει ιδιαίτερης μνείας. Η ινδική άλγεβρα προώθησε πολύ την αόριστη ανάλυση στην οποία η συνεισφορά του Βραχμαγκούπτα είναι πολύ σημαντική. Οι ινδοί μαθηματικοί ασχολήθηκαν συστηματικά θα λέγαμε με την επίλυση απροσδιόριστων εξισώσεων.

Όπως είδαμε, οι στίχοι ΙΙ 32-33 της Aryabhatiya αναφέρουν τον τρόπο επίλυσης των απροσδιόριστων εξισώσεων με την μέθοδο της "κονιοποίησης", που είναι καθαρά εφαρμογή του Ευκλείδιου αλγόριθμου. Μεταγενέστεροι μαθηματικοί, όπως ο Brahmagupta και ο Baskara ΙΙ ασχολήθηκαν κυρίως με εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού του τύπου, $Dx^2 \pm b = y^2$. Ειδική κατηγορία των ανωτέρω εξισώσεων, είναι οι εξισώσεις της μορφής, $x^2 = Dy^2 \pm 1$ οι οποίες σήμερα ονομάζονται και εξισώσεις του Pell.(εσφαλμένα πήραν το όνομα του John Pell μετά τον $17^{ο}$ αιώνα) Πολλοί αξιόλογοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι ασχολήθηκαν με τις εξισώσεις αυτές και μάλιστα από αρχαιοτάτων χρόνων. Όμως ολοκληρωμένη λύση τους δόθηκε πολύ αργότερα, από τον J.L.Lagrange (1736-1813).

Ιστορικά γεγονότα καταμαρτυρούν ότι, η προσπάθεια επίλυσης τέτοιων εξισώσεων άρχισε τουλάχιστον 500 χρόνια προ Χριστού. Όπως αναφέρουν ο Θέων ο Σμυρνεύς ($2^{ος}$ αιώνας μ. Χ.) και ο Πρόκλος ($5^{ος}$ αιώνας μ. Χ.), οι Πυθαγόρειοι για να υπολογίσουν τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, βρήκαν την λύση της εξίσωσης $x^2 + 2y^2 = \pm 1$. Ακόμη ο Πυθαγόρας και ο Πλάτων έδωσαν δύο μεθόδους επίλυσης της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$.

Ένας άλλος μεγάλος μαθηματικός ο Διόφαντος τον $3^{ο}$ αιώνα μ.Χ. περίπου, ασχολήθηκε εκτενώς με τις απροσδιόριστες εξισώσεις, οι οποίες

μάλιστα ονομάστηκαν προς τιμήν του, *Διοφαντικές εξισώσεις* και έχουν συνήθως άπειρες λύσεις. Ο Διόφαντος αποδεχόταν κυρίως μόνο θετικές ρητές λύσεις. Συνήθως ήταν αρκετή γι' αυτόν η εύρεση μιας μόνο λύσης και του ήταν αδιάφορο αν η λύση αυτή ήταν ακέραιη ή κλασματική.

Την γενική λύση των Διοφαντικών εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού υπέδειξε για πρώτη φορά ο Αριαμπάτα (500 μ.Χ.) και επεξεργάστηκαν στη συνέχεια ο Brahmagupta (625 μ.Χ.) και ο Bhaskara II (1150 μ.Χ.). Ο Bhaskara στο έργο του που φέρει το όνομα BeejaGanita, μεταξύ των άλλων δίνει τις λύσεις των εξισώσεων $67x^2+1=y^2$ και $61x^2+1=y^2$.

Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι η εξίσωση $61x^2+1=y^2$, προτάθηκε για λύση από τον Fermat στον Frencil σε ένα γράμμα που του έστειλε τον Φεβρουάριο του 1657. Οι δύο αυτοί επιστήμονες συνεργαζόμενοι κατόρθωσαν να λύσουν την εξίσωση με γενικό τύπο $x^2 \pm 1 = Dy^2$, για τιμές του D μικρότερες του 150. Στη συνέχεια ο Fermat στέλνει την εργασία του στον J.Wallis (1616-1703 μ.Χ.), ένα αξιόλογο Άγγλο μαθηματικό της εποχής εκείνης και του ζητά να βρει τις λύσεις για όλες τις τιμές του D. Ο Wallis σε συνεργασία με τον Lord Brouncker έλυσαν την εξίσωση,

$x^2 = Dy^2 + 1$ για $D \leq 200$ και για D=313.

Αργότερα ο Euler (1707-1783 μ.Χ.), έλυσε αυτή την εξίσωση με την μέθοδο των συνεχών κλασμάτων. [(Μν)]

2.4 Η επίλυση των εξισώσεων Pell (με την μέθοδο Βραχμαγκούπτα)

Αρχικά θα παραθέσουμε τρία σημαντικά λήμματα του Βραχμαγκούπτα, που είναι απαραίτητα για την περαιτέρω μελέτη του θέματος.

ΛΗΜΜΑ 1 (Βραχμαγκούπτα)

Αν η $(x,y) = (a,b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

(2) $$Dx^2 + k = y^2,$$

Και αν η $(x,y) = (a',b')$ είναι μια λύση της εξίσωσης

(3) $$Dx^2 + k' = y^2$$

τότε

$$(x,y) = \begin{matrix} (ab' + a'b, bb' + Daa') \\ (ab' - a'b, bb' - Daa') \end{matrix}$$

είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$Dx^2 + kk' = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αφού οι $(a,b),(a',b')$ είναι λύσεις της εξίσωσης, έχουμε τις σχέσεις:

$$Da^2 + k = b^2, \quad Da'^2 + k' = b'^2$$

Παίρνουμε $(x,y) = (ab' + a'b, bb' + Daa')$

Και βρίσκουμε ότι

$$y^2 - Dx^2 = (bb' + Daa')^2 - D(ab' + a'b)^2$$
$$=$$
$$(b^2b'^2 + D^2a^2a'^2 + 2bb' \cdot Daa') - D(a^2b'^2 + a'^2b^2 + 2ab'a'b)$$
$$= b'^2(b^2 - Da^2) - Da'^2(b^2 - Da^{2)}$$
$$= (b^2 - Da^2) \cdot (b'^2 - Da'^2) = kk'$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι τιμές :

$$(x,y) = (ab' - a'b, bb' - Daa')$$

Ικανοποιούν την εξίσωση: $Dx^2 + kk' = y^2$.

ΛΗΜΜΑ 2 (Βραχμαγκούπτα)

Αν η $(x,y) = (a,b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

(2) $$Dx^2 + k = y^2,$$

Τότε η $(x,y) = (2ab, b^2 + Da^2)$ είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$Dx^2 + k^2 = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η απόδειξη αυτή προκύπτει από το Λήμμα 1 θέτοντας

$$k = k' \text{ και } (a',b') = (a,b)$$

Έχουμε:

$$y^2 - Dx^2 = (b^2 + Da^2)^2 - D \cdot (2ab)^2$$

$$= (b^2 + Da^2)^2 - 4b^2 \cdot Da^2$$
$$= (b^2 - Da^2)^2 = k^2,$$

αφού ισχύει η σχέση $Da^2 + k^2 = b^2$.

ΛΗΜΜΑ 3 (Βραχμαγκούπτα)

Αν η $(x, y) = (a, b)$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + k^2 = y^2,$$

Αν k / a και k / b τότε η $(\frac{a}{k}, \frac{b}{k})$ είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έχουμε τους $a' = a / k$ και $b' = b / k$, ακέραιους και

$$b'^2 - Da'^2 = \frac{b^2}{k^2} - D \cdot \frac{a^2}{k^2} = \frac{1}{k^2}(b^2 - Da^2) = 1$$

Αφού $Da^2 + k^2 = b^2$.

Παρατήρηση: Αν στο Λήμμα 2 πάρουμε $k = 1$ τότε:

(6) Αν η (a, b) είναι μια λύση της $Dx^2 - 1 = y^2$, τότε η $(2ab, b^2 + Da^2)$ είναι μια λύση της $Dx^2 + 1 = y^2$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι σε αντίθεση με την εξίσωση $Dx^2 + 1 = y^2$, η εξίσωση $Dx^2 - 1 = y^2$, μπορεί να μην έχει ακέραιες λύσεις.

Παράδειγμα.

Η εξίσωση $3x^2 - 1 = y^2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Αν x ακέραιος, έχουμε:

$$x^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4 & \text{για } x \text{ άρτιο} \\ 1 \pmod 4 & \text{για } x \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$3x^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4 & \text{για } x \text{ άρτιο} \\ 3 \pmod 4 & \text{για } x \text{ περιττό} \end{cases}$$

και

$$y^2+1 \equiv \begin{cases} 1(\text{mod}4) & \text{για } x \text{ άρτιο} \\ 2(\text{mod}4) & \text{για } x \text{ περιττό} \end{cases}$$

Συνεπώς, για κάθε ακέραιο x, y έχουμε: $3x^2 \neq y^2+1$

Το ίδιο ισχύει και όταν αντί του 3 έχουμε οποιοδήποτε αριθμό $D \equiv 3(\text{mod}4)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι :

Η εξίσωση $Dx^2-1=y^2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις όταν $D \equiv 3(\text{mod}4)$.

Ας δούμε ένα πρόβλημα του Brahmagupta, που παρακινεί στην επίλυσή του, ώστε εκείνος που κατορθώσει να βρει τη λύση του μέσα σε έναν χρόνο, χαρακτηρίζεται «μαθηματικός».

« Όποιος κατορθώσει να βρει σε ένα χρόνο, το τετράγωνο (ενός αριθμού) πολλαπλασιασμένο με το 92 και αυξανόμενο κατά 1, ώστε (το αποτέλεσμα αυτό) να είναι τέλειο τετράγωνο, τότε αυτός θα είναι μαθηματικός» [(Kt)]

Όμως με την βοήθεια των λημμάτων του Brahmagupta, η λύση του προβλήματος αυτού είναι μια εύκολη υπόθεση.

ΛΥΣΗ

Έχουμε την εξίσωση:

$$92x^2+1=y^2,$$

και βρίσκουμε μια βοηθητική εξίσωση αυτής που είναι η:

$92x^2+8=y^2$, με μία λύση της το ζεύγος (x, y) =(1,10)

Το (x, y) =(1/2,5) είναι μια λύση της εξίσωσης $92x^2+2=y^2$

Από το 2^{ο} λήμμα, έχουμε ότι το (x, y) =(5,48) είναι μία λύση της

$$92x^2+4=y^2$$

Από το 3^{ο} λήμμα, το (x, y) =(5/2,24) είναι μία ρητή λύση της

$$92x^2+1=y^2.$$

Εφαρμόζοντας ξανά το 1^{ο} λήμμα, βρίσκουμε μια ακέραια λύση της αρχικής εξίσωσης που είναι η (x, y) =(120,1151)

Τα λήμματα του Brahmagupta έχουν περιγραφεί από τους Bhaskara II (1150 μ.Χ.), Narayana (1350 μ.Χ.), Jnana Raja (1503 μ.Χ.) και Kamalakara (1658 μ.Χ.).

Τα ανωτέρω λήμματα αναφέρονται ως προς τον τεχνικό σχεδιασμό τους: «BHÂVANÂ».

Οι Euler(1764 μ.Χ.) και Lagrange(1768μ.Χ.) ανακάλυψαν εκ νέου τα λήμματα του Brahmagupta και αναγνώρισαν την θεμελιώδη σημασία τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ο Bhaskara II αναφέρει τα εξής προβλήματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι.

(Α) Ποιό τετράγωνο(αριθμού) αν πολλαπλασιαστεί με το 8 και αυξηθεί κατά μία μονάδα , είναι τετράγωνο;

(Β) Ποιό τετράγωνο(αριθμού) αν πολλαπλασιαστεί με το 11 και αυξηθεί κατά μία μονάδα , είναι τετράγωνο;

Στην περίπτωση του προβλήματος (Α) αρκεί να επιλύσουμε την γραμμική εξίσωση 2ου βαθμού: $8x^2+1=y^2$ και στην περίπτωση του προβλήματος (Β) την: $11x^2+1=y^2$.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ:

$$8x^2+1=y^2,\ (D=8)$$

Αναζητώντας μια λύση της εξίσωσης αυτής, με ευκολία βρίσκουμε την (x_0, y_0) = (1,3)

Από το 2ο λήμμα παίρνουμε μια δεύτερη λύση αυτής, την:

$$(x_1, y_1) = (2x_0y_0, Dx_0{}^2 + y_0{}^2) = (6,17)$$

Στη συνέχεια από το 1ο λήμμα επιτυγχάνουμε μια νέα λύση από τις δύο προηγούμενες, (x_0, y_0) = (1,3) και (x_1, y_1) = (6,17) με την σύνθεση (Bhavana) την:

$$(x_2, y_2) = (x_0y_1 + x_1y_0, Dx_0x_1 + y_0y_1) = (35,99)$$

Έτσι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε έναν άπειρο αριθμό λύσεων αυτής.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ:

$$11x^2+1=y^2,\ (D=11)$$

Παίρνοντας για x_0 =1 παρατηρούμε ότι $11x_0{}^2$ = 11 = 3^2+2, που σημαίνει ότι το ζεύγος (x_0, y_0) = (1,3) είναι μια λύση της βοηθητικής εξίσωσης:

$$11x^2-2=y^2$$

Για (x_0, y_0) = (1,3) και από το λήμμα 2, βρίσκουμε το:
(x_1, y_1) = $(2x_0y_0, Dx_0{}^2 + y_0{}^2)$ = (6,20) που είναι λύση της εξίσωσης
(8) $11x^2{}_1 + (-2)^2 = y_1{}^2$, ή $11x_1^2 + 4 = y_1^2$.

Παίρνοντας (x_2, y_2) = $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$ = (3,10) και από την (8) έχουμε:

$$11 \cdot (2x_2)^2 + 4 = (2y_2)^2$$

ή $$11x_2{}^2 + 1 = y_2{}^2$$

Αφού η (x_2, y_2) = (3,10) είναι μια λύση της εξίσωσης, από το λήμμα 2, βρίσκουμε μια νέα λύση την: $(x_3, y_3) = (2x_2y_2, Dx_2^2 + y_2^2) = (60,199)$
Από τις δύο λύσεις (x_0, y_0) = (1,3) και $(x_3, y_3) = (69,199)$ της εξίσωσης και με εφαρμογή του 1ου και 2ου λήμματος παίρνουμε έναν άπειρο αριθμό λύσεων.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος του Brahmagupta.για την εύρεση ακεραίων λύσεων της εξίσωσης με γενικό τύπο:

$$Dx^2 + 1 = y^2 \quad , \; D \neq a \, , a \text{ τέλειο τετράγωνο}$$

σχετίζεται με την εύρεση μιας λύσης της βοηθητικής εξίσωσης που είναι της μορφής:

$$Dx_0^2 + k = y_0^2 \quad , \; (k = \pm 1, \pm 2, \pm 4) \, ,$$

όπου $(x_0, y_0$ φυσικοί αριθμοί)

Έπειτα εφαρμόζοντας κατά περίπτωση τα λήμματα που προαναφέραμε επιτυγχάνουμε την εύρεση άπειρου πλήθους λύσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙ. [Ρητές λύσεις της εξίσωσης $11x^2 + 1 = y^2$]. Αν και το πραγματικό ενδιαφέρον εστιάζεται στην εύρεση θετικών ακεραίων λύσεων, στο παράδειγμα αυτό θα αναζητήσουμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης. Αν m ρητός αριθμός, τότε

$$(x, y) = \left(\frac{2m}{m^2 - D}, \frac{m^2 + D}{m^2 - D} \right)$$

θα είναι πάντοτε μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

Αυτό αποδεικνύεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$y^2 - Dx^2 = \frac{1}{(m^2 - D^2} \left\{ \left(m^2 + D^2 - D(2m)^2 \right) \right\} = \frac{(m^2 - D)^2}{(m^2 - D)^2} = 1$$

Αν θέλουμε να βρούμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης, $11x^2+1=y^2$, παίρνουμε x_0=1 και τότε έχουμε τη σχέση: 11 $x_0{}^2$+5=11+5=4^2,
οπότε το ζεύγος (x_0, y_0) = (1,4) θα είναι μια λύση της βοηθητικής εξίσωσης:

$$11x^2+5=y^2$$

Από το 2ο λήμμα βρίσκουμε, (x_1, y_1) = ($2x_0y_0, Dx_0{}^2+y_0{}^2$)=(8,27), που είναι μια λύση της εξίσωσης:

$$11x^2+25=y^2$$

Από το 3ο λήμμα παίρνουμε, (x_2, y_2) = $(\frac{x_1}{5}, \frac{y_1}{5})$.

Τότε έχουμε, $11x_1{}^2+25=y_1{}^2 \Leftrightarrow 11(\frac{x_1}{5})^2+1=(\frac{y_1}{5})^2$, δηλαδή η (x_2, y_2)=$(\frac{8}{5}, \frac{27}{5})$ είναι μια ρητή λύση της εξίσωσης $11x^2+1=y^2$. Μια άλλη λύση της ίδιας εξίσωσης είναι η (3,10). Με συνδυασμό αυτών των δύο λύσεων και κάνοντας χρήση του 1ου λήμματος, βρίσκουμε τις λύσεις: (x_3, y_3) και (x_3', y_3') που είναι οι εξής:

$$\left\{\begin{array}{l} x_3=3(\frac{27}{5})+10(\frac{8}{5}) \\ y_3=10(\frac{27}{5})+11\cdot 3(\frac{8}{5}) \end{array}\right\} \quad \text{και} \quad \left\{\begin{array}{l} x_3'=3(\frac{27}{5})-10(\frac{8}{5}) \\ y_3'=10(\frac{27}{5})-11\cdot 3(\frac{8}{5}) \end{array}\right\}$$

έτσι

οι (x_3, y_3)=$(\frac{161}{5}, \frac{534}{5})$ και $(x_3', y_3')=(\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$

είναι ρητές λύσεις της εξίσωσης $11x^2+1=y^2$.

Όπως είδαμε, η μέθοδος Brahmagupta για την εύρεση ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$Dx^2+1=y^2$, $D \neq a$, όπου a τετράγωνος ακέραιος
βασίζεται στην ύπαρξη μιας βοηθητικής εξίσωσης της μορφής

$$Dx_0{}^2+k=y_0^2 \ , \ (k=\pm 1, \pm 2, \pm 4)$$

όπου (x_0, y_0 θετικοί ακέραιοι)

Στη συνέχεια με κατάλληλο συνδυασμό των 3ων λημμάτων του Brahmagupta, επιτυγχάνουμε την εύρεση οποιουδήποτε αριθμού λύσεων επιθυμούμε.

2.4 Η μέθοδος «CHAKRAVALA»
(Ή ΚΥΚΛΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ)

Όμως ο Brahmagupta δεν είχε να προτείνει κάποια μέθοδο για την εύρεση της βοηθητικής εξίσωσης, που ήταν απαραίτητη προϋπόθεση για την λύση της εξίσωσης. Ένας μεταγενέστερος σπουδαίος μαθηματικός ο Bhaskara II, έρχεται να δώσει τη λύση στο πρόβλημα αυτό. Η κομψή και δυναμική μέθοδός του που φέρει το όνομα «Chakravala» (ή «κυκλική μέθοδος»), έγινε ευρέως γνωστή και δίνει τον τρόπο παραγωγής μιας βοηθητικής εξίσωσης με τις δύο ακέραιες λύσεις αυτής.

ΛΗΜΜΑ (Bhaskara)

Αν $F(x,y)=Dx^2-y^2$ και $h_0=F(x_0,y_0)$ και

(1) $$\boxed{(x_1,y_1,h_1)=\left(\frac{m_0x_0+y_0}{h_0},\frac{Dx_0+m_0y_0}{h_0},\frac{D-m_0^2}{h_0}\right)}$$

τότε έχουμε την ταυτότητα, την οποία στο εξής θα ονομάζουμε ταυτότητα του Bhaskara.

$$\boxed{Dx_1^{\,2}-y_1^2=-h_1} \quad (2)$$

δηλαδή,

$$\boxed{F(x_1,y_1)=-h_1} \quad (3)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned}
F(x_1,y_1)=Dx_1^{\,2}-y_1^{\,2}&=D\left(\frac{m_0x_0+y_0}{h_0}\right)^2-\left(\frac{Dx_0+m_0y_0}{h_0}\right)^2\\
&=\frac{1}{h_0^2}\left[D(m_0^2x_0^2+2m_0x_0y_0+y_0^2)-(D^2x_0^2+2Dx_0m_0y_0+m_0^2y_0^2)\right]\\
&=\frac{1}{h_0^2}\left[Dx_0^2(m_0^{\,2}-D)-y_0^2(m_0^2-D)\right]\\
&=\frac{1}{h_0^2}\left[(Dx_0^2-y_0^2)(m_0^{\,2}-D)\right]\\
&=\frac{1}{h_0^2}\cdot h_0(m_0^2-D)\\
&=-\frac{D-m_0^2}{h_0}=-h_1
\end{aligned}$$

Θα υποθέσουμε ότι x_0, y_0 είναι πρώτοι: (x_0, y_0)=1. Αλλά αφού το $h_0 = F(x_0, y_0) = Dx_0{}^2 - y_0{}^2$ τότε x_0, y_0 και h_0 είναι πρώτοι. Στη συνέχεια θα ορίσουμε έναν θετικό ακέραιο m_0, από την κατωτέρω σχέση

(4) $$\boxed{m_0 x_0 + y_0 \equiv 0 (\bmod h_0)}$$

Τότε το $x_1 = (\frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0})$ είναι ακέραιος, καθώς επίσης και τα y_1 και h_1 που παίρνουμε από την σχέση (1). Πράγματι αυτό ισχύει, αφού $h_0 = Dx_0{}^2 - y_0{}^2$ τότε

$$Dx_0{}^2 \equiv y_0^2 (\bmod h_0)$$

και από την (4)

$$m_0 x_0 + y_0 \equiv -y_0 (\bmod h_0)$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με y_0 και προσθέτοντας την προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$Dx_0^2 + m_0 x_0 y_0 \equiv 0 (\bmod h_0)$$
$$x_0 (Dx_0 + m_0 y_0) \equiv 0 (\bmod h_0)$$

και αφού (x_0, h_0)=1, συνεπάγεται

(5) $$\boxed{Dx_0 + m_0 y_0 \equiv 0 (\bmod h_0)}$$

δηλαδή και ο $y_1 = \frac{Dx_0 + m_0 y_0}{h_0}$, θα είναι ακέραιος.

Πάλι από την (4), έχουμε $y_0 \equiv -m_0 x_0 + (\bmod h_0)$ και αφαιρώντας από την (5) παίρνουμε

$$Dx_0 - m_0{}^2 x_0 \equiv 0 (\bmod h_0) \Leftrightarrow (D - m_0{}^2) x_0 \equiv (\bmod h_0)$$

όμως επειδή (x_0, h_0)=1, συνεπάγεται ότι

(6) $$\boxed{D - m_0{}^2 \equiv 0 (\bmod h_0)}$$

που σημαίνει ότι και ο $h_1 = \frac{D - m_0^2}{h_0}$, θα είναι ακέραιος.

Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = x_0 (\frac{Dx_0 + m_0 y_0}{h_0}) - (\frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0}) y_0$$
$$= \frac{1}{h_0} (Dx_0{}^2 - y_0{}^2) = 1$$

άρα

(7) $$\boxed{x_0 y_1 - x_1 y_0 = 1}$$

Η επίλυση της εξίσωσης $Dx^2 + 1 = y^2$

με (D>0 και $D \neq a$, a τετράγωνος ακέραιος)

ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ BHASKARA

Παίρνουμε την $F(x, y) = Dx^2 - y^2$ και θέτουμε

(8) $$\boxed{\begin{array}{ll} x_0 = 1, & y_0 = [\sqrt{D}], \\ h_0 = F(x_0, y_0) & \end{array}} \quad (h_0 > 0)$$

Από την (1) έχουμε

$$\boxed{(x_1, y_1, h_1) = \left(\frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0}, \frac{Dx_0 + m_0 y_0}{h_0}, \frac{D - m_0^2}{h_0}\right)}$$

που δίνει την ταυτότητα του Bhaskara.

(9) $$\boxed{F(x_1, y_1) = -h_1} \quad (h_1 > 0)$$

Μέχρι τώρα ο πολλαπλασιαστής m_0 υπόκειται σε έναν περιορισμό, αυτόν που ικανοποιεί την σχέση:

(10) $$\boxed{m_0 x_0 + y_0 \equiv 0 (\bmod h_0)}$$

Μπορούμε ακόμη να ορίσουμε τις ανισοτικές σχέσεις που πρέπει να ικανοποιεί ο πολλαπλασιαστής m_0.

(11) $$\boxed{m_0 < \sqrt{D} < m_0 + h_0}$$

Με ανάλογη διαδικασία εκείνης των (x_0, y_0, h_0), μπορούμε να βρούμε τώρα τα (x_1, y_1, h_1). Έτσι παράγεται μια τετράδα ακολουθιών, αποτελούμενη από θετικούς ακεραίους αριθμούς,

$$(m_\lambda, x_\lambda, y_\lambda, h_\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, 2, ...)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

1η $h_\lambda = (-1)^\lambda F(x_\lambda, y_\lambda)$

2η $(x_{\lambda+1}, y_{\lambda+1}, h_{\lambda+1}) = (\frac{m_\lambda x_\lambda + y_\lambda}{h_\lambda}, \frac{Dx_\lambda + m_\lambda y_\lambda}{h_\lambda}, \frac{D - m_\lambda^2}{h_\lambda})$

3η $m_\lambda x_\lambda + y_\lambda \equiv 0 (\bmod h_\lambda)$

4η $m_\lambda < \sqrt{D} < m_\lambda + h_\lambda$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bhaskara:

Υπάρχει N τέτοιος ώστε, $h_{N-1} = 1$

Δηλ. $F(x_{N-1}, y_{N-1}) = (-1)^N$

Με άλλα λόγια η (x_{N-1}, y_{N-1}), είναι μια λύση της εξίσωσης

$$Dx^2 - y^2 = (-1)^N$$

Αν ο N περιττός, τότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση

$$Dx^2 + 1 = y^2$$

Αν ο N άρτιος, τότε μπορούμε να λύσουμε

$$Dx^2 - 1 = y^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι [Bhaskara II]

«Ποιος είναι ο αριθμός του οποίου το τετράγωνο αν πολλαπλασιαστεί με 67 και κατόπιν προστεθεί η μονάδα, γίνεται τέλειο τετράγωνο»;

ΛΥΣΗ

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση

$Dx^2 + 1 = y^2$, με D=67

Αφού $8^2 < D < 9^2$, $8 < \sqrt{D} < 9$, έχουμε $\left[\sqrt{D}\right]$=8

Παίρνουμε $(x_0, y_0) = (1, 8)$, και βρίσκουμε το και h_0 από την σχέση: $h_0 = Dx_0^2 - y_0^2$ =67- 64=3

Έτσι βρήκαμε την τριάδα

(13) $(x_0, y_0, h_0) = (1, 8, 3)$

Προτού προχωρήσουμε στην εύρεση της 2ης τριάδας (x_1, y_1, h_1), έχουμε να υπολογίσουμε το m_0 από την σχέση:

$$m_0 x_0 + y_0 = 0 (\bmod h_0)$$
$$m_0 + 8 = 0 (\bmod 3)$$

$$m_0 \equiv 1 (\bmod 3)$$

Δηλ. ο m_0 μπορεί να πάρει τις τιμές 1,4,7,10,… Στην περίπτωσή μας επιλέγουμε την $\underline{m_0 = 7}$, γιατί ικανοποιεί την σχέση $7 < \sqrt{D} < 10$.

Τότε

$$x_1 = \frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0} = \frac{7+8}{3} = 5$$

$$y_1 = \frac{D x_0 + m_0 y_0}{h_0} = \frac{67+56}{3} = 41$$

$$h_1 = \frac{D - m_0^2}{h_0} = \frac{67-49}{3} = 6$$

Και έτσι έχουμε,

(14) $(x_1, y_1, h_1) = (5, 41, 6)$ και από την σχέση,

$$m_1 x_1 + y_1 \equiv 0 (\bmod h_1)$$

$$5m_1 + 41 \equiv 0 (\bmod 6)$$

$$5m_1 \equiv 1 (\bmod 6)$$

$$m_1 \equiv 5 (\bmod 6)$$

Από την νέα αριθμητική πρόοδο,

$m_1 = 5, 11, 16, \ldots$ έχουμε $5 < \sqrt{D} < 11$ και

Έτσι $m_1 = 5$

$$x_2 = \frac{m_1 x_1 + y_1}{h_1} = \frac{25+41}{6} = 11$$

$$y_2 = \frac{D x_1 + m_1 y_1}{h_1} = \frac{335+205}{6} = 90$$

$$h_2 = \frac{D - m_1^2}{h_1} = \frac{67-25}{6} = 7$$

(15) $(x_2, y_2, h_2) = (11, 90, 7)$

Από την σχέση,

$$m_2 x_2 + y_2 \equiv 0 (\bmod h_2)$$

$$11m_2 + 90 \equiv 0 (\bmod 7)$$

$$4m_2 \equiv 1 (\bmod 7)$$

Βρίσκουμε $m_2 = 2, 9, 16, \ldots$, και αφού $2 < \sqrt{D} < 9$, το $m_2 = 2$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο

$$x_3 = \frac{m_2 x_2 + y_2}{h_2} = \frac{22+90}{7} = 16$$

$$y_3 = \frac{D x_2 + m_2 y_2}{h_2} = \frac{737+180}{7} = 131$$

$$h_3 = \frac{D - m_2^2}{h_2} = \frac{67-4}{7} = 9$$

(16) $(x_2, y_2, h_2) = (11, 90, 7)$. Βρίσκουμε m_3

$$m_3 x_3 + y_3 \equiv 0 (\bmod h_3)$$

$$16 m_3 + 131 \equiv 0 (\bmod 9)$$

$$5 m_3 + 5 \equiv 0 (\bmod 9)$$

$m_3 = 7, 16, 25, \ldots$, και αφού $7 < \sqrt{D} < 16$, το $m_3 = 7$.

$$x_4 = \frac{m_3 x_3 + y_3}{h_3} = \frac{112+131}{9} = 27$$

$$y_4 = \frac{D x_3 + m_3 y_3}{h_3} = \frac{1072+917}{9} = 221$$

(17) $$h_4 = \frac{D - m_3^2}{h_3} = \frac{67-49}{9} = 2$$

Από την απόδειξη του λήμματος του Bhaskara βρήκαμε ότι,

$$h_\lambda = (-1)^\lambda (D x_\lambda{}^2 - y_\lambda{}^2) = (-1)^\lambda F(x_\lambda, y_\lambda)$$

και από την (17) βρήκαμε το $h_4 = 2$, έτσι

(18) $$\boxed{D x_4{}^2 - y_4{}^2 = 2}$$

και $(x_4, y_4) = (27, 221)$.

Παρατηρούμε ότι, επιτύχαμε για το h_λ μια από τις τιμές $h_\lambda = \pm 2, \pm 4$. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τα λήμματα του Brahmagupta, ο συνδιασμός των οποίων θα μας δώσει την λύση της εξίσωσης,

$$D x^2 + 1 = y^2$$

Πράγματι, από την (18) βρίσκουμε ότι η λύση

$(x_4{}', y_4{}') = (2 x_4 y_4, D x_4^2 + y_4^2) = (11934, 97684)$,

ικανοποιεί την σχέση

$$D x_4'^2 + 4 = y_4'^2$$

Συνεπώς η

$$\left(\frac{x_4{}'}{2}, \frac{y_4{}'}{2}\right) = (5967, 48842)$$

θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$D x^2 + 1 = y^2$$

Άρα

(19) $$\boxed{\begin{array}{c} 67 x^2 + 1 = y^2 \\ (x, y) = (5967, 48842) \end{array}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι Ι [Bhaskara II]

Ποιος είναι ο αριθμός του οποίου το τετράγωνο αν πολλαπλασιαστεί με 61 και κατόπιν προσθέτοντας μία μονάδα, γίνεται τέλειο τετράγωνο;

ΛΥΣΗ

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση

$$Dx^2 + 1 = y^2, \qquad \text{με } D=61$$

Αφού $7 < \sqrt{D} < 8$, έχουμε $\left[\sqrt{D}\right]=7$

Παίρνουμε $(x_0, y_0) = (1,7)$, τότε $h_0 = Dx_0^2 - y_0^2 = 61 - 49 = 12$

Έτσι βρήκαμε την 1η τριάδα

$$(x_0, y_0, h_0) = (1,7,12)$$

Υπολογίσουμε το m_0 από την σχέση $m_0 x_0 + y_0 = 0 (\bmod h_0)$

$$m_0 + 7 \equiv 0 (\bmod 12)$$

$$m_0 \equiv 5 (\bmod 12)$$

Ο m_0 λοιπόν, μπορεί να πάρει τις τιμές 5,17,… Εμείς παίρνουμε την τιμή $m_0 = 5$.

$$x_1 = \frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0} = 1$$

$$y_1 = \frac{D x_0 + m_0 y_0}{h_0} = 8$$

$$h_1 = \frac{D - m_0^2}{h_0} = 3 \qquad \text{και} \qquad (x_1, y_1, h_1) = (1,8,3)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε

$$m_1 x_1 + y_1 \equiv 0 (\bmod h_1)$$

$$m_1 + 8 \equiv 0 (\bmod 3)$$

$$m_1 \equiv 1 (\bmod 3)$$

$m_1 = 1,4,7,10,...$ έχουμε $7 < \sqrt{D} < 10$ άρα $m_1 = 7$

$$x_2 = \frac{m_1 x_1 + y_1}{h_1} = 5$$

$$y_2 = \frac{D x_1 + m_1 y_1}{h_1} = 39$$

$$h_2 = \frac{D - m_1^2}{h_1} = 4 \quad , (x_2, y_2, h_2) = (5,39,4)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι, $h_\lambda = (-1)^\lambda F(x_\lambda, y_\lambda)$ και $h_\lambda = 4$, δηλαδή έχουμε

$$Dx_2^{\,2} - y_2^{\,2} = 4$$

ή (20) $\boxed{Dx_2^{\,2} - 4 = y_2^{\,2}}$

με $(x_2, y_2) = (5, 39)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε κατάλληλα τα λήμματα του Brahmagupta και παίρνουμε το $(a,b) = (\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{39}{2})$ που ικανοποιεί την εξίσωση

(21) $$Da^{\,2} - 1 = b^{\,2} \quad , \quad (a,b) = (\frac{5}{2}, \frac{39}{2})$$

Η $(a_1, b_1) = (2ab, Da^2 + b^2) = (\frac{195}{2}, \frac{1523}{2})$ είναι τώρα μια λύση της εξίσωσης

(22) $$Da^{\,2} + 1 = b^{\,2}, \quad (a_1, b_1) = (\frac{195}{2}, \frac{1523}{2})$$

Εφαρμόζοντας το 1ο λήμμα του Brahmagupta στις εξισώσεις (21) και (22), βρίσκουμε ότι το (ξ,η) =(3805, 29718) είναι μια λύση της

(23) $$\boxed{D\xi^{\,2} - 1 = \eta^{\,2}}$$

Τέλος εφαρμόζοντας για την εξίσωση αυτή το 2ο λήμμα, βρίσκουμε την λύση: (ξ_0, η_0) =(226153910, 1766319049) η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $Dx^2 + 1 = y^2$.

Έτσι βρήκαμε την λύση της εξίσωσης:

$$\boxed{\begin{array}{l} 61x^2 + 1 = y^2 \\ (x, y) = (226153910,\ 1766319049) \end{array}}$$

Γ. Η ΙΝΔΙΚΗ ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Από αρχαιοτάτων χρόνων οι διάφοροι λαοί χρησιμοποιούσαν δικά τους λεκτικά και γραπτά σύμβολα για την μεταξύ τους επικοινωνία και τα οποία με την πάροδο των χρόνων εξελίσσονταν και διαφοροποιούντο. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η μετατροπή της αιγυπτιακής γραφής από ιερογλυφική σε ιερατική. Τα αριθμητικά συστήματα με την σειρά τους υπέστησαν και αυτά αλλαγές και εξελίξεις, που ήταν αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων των διάφορων λαών.

Οι πληροφορίες που έχουμε για τον συμβολικό τρόπο γραφής των αριθμών προέρχονται κυρίως από επιγραφές και άλλα μνημεία που χρονολογούνται πριν την $4^{η}$ χιλιετηρίδα π.Χ., καθώς και από κάποια αποσπάσματα βιβλίων μαθηματικού περιεχομένου από την $3^{η}$ χιλιετηρίδα. Οι αριθμοί επινοήθηκαν από τους διάφορους λαούς για να καλύψουν βασικές τους ανάγκες, όπως αυτές της συνεννόησης, της επικοινωνίας καθώς και βασικών εμπορικών συναλλαγών. Ο τρόπος γραφής και αρίθμησης αντικατόπτριζε κατά κάποιο τρόπο και το πολιτισμικό επίπεδο του λαού που το χρησιμοποιούσε και αποτελούσε ενδεικτικό στοιχείο της ταυτότητάς του.

Με την πάροδο των χρόνων αναπτύχθηκαν στους διάφορους πολιτισμούς αντίστοιχα συστήματα αρίθμησης. Μεταξύ αυτών, το αριθμητικό σύστημα των Ινδών θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατέχει εξέχουσα θέση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα γνωστά σε όλους μας σήμερα αριθμητικά σύμβολα, επινοήθηκαν από αυτούς, όπως μας καταμαρτυρούν αρκετές Αραβικές πηγές του $10^{ου}$ μ. Χ. αιώνα.

Οι Ινδοί εγκαταστάθηκαν στις Ινδίες κατά την προϊστορική εποχή. Τα πιο παλαιά αριθμητικά σύμβολα των Ινδιών, είναι τα βραχμανικά ψηφία (σχ. 17) που βρέθηκαν σε επιγραφές. χρονολογούνται από τον τρίτο αιώνα π.Χ.. Κατά τον Bunt αυτό το σύστημα αρίθμησης παρουσίαζε αρκετά κοινά σημεία με εκείνο των Ελλήνων. Δεν διέθεταν σύμβολα μόνο για το 1 ως το 9, αλλά και για το 10, 20, 30,…,90, 100, 200 κ.ο.κ. Η ύπαρξη διαφορετικών συμβόλων για αριθμούς μεγαλύτερους του 9 δηλαδή για τα πολλαπλάσια του 10: 10, 20,30 κ.ο.κ., μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δεν είχαν την απαιτούμενη γνώση κάποιου συστήματος θέσης. Ακόμη, αφού το σύμβολο για το μηδέν δεν τους ήταν αναγκαίο, δεν υπήρχε. [(B-J-B)]

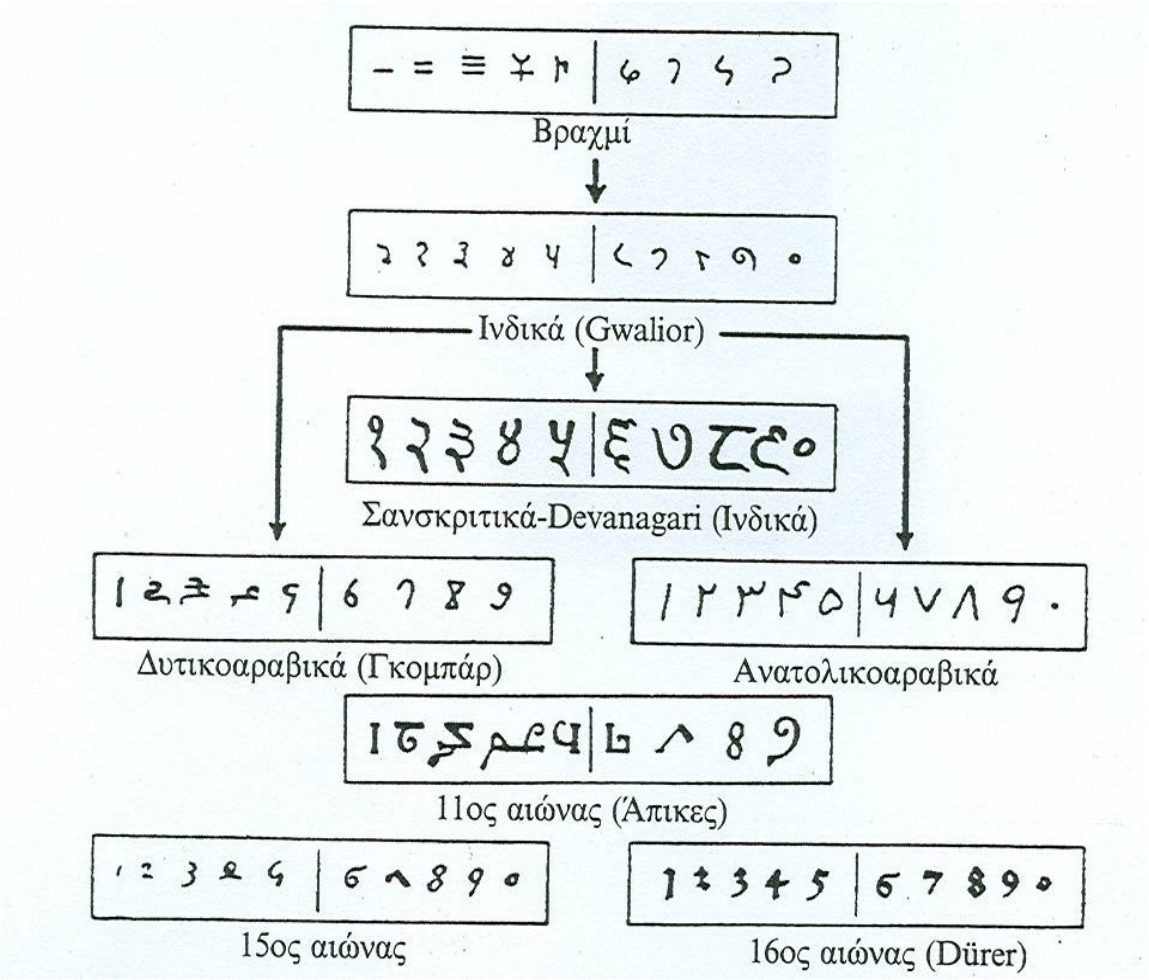
Αριθμητικό σύστημα θέσης με 10 σύμβολα, όπου το ένα απ' αυτά είναι για το μηδέν, αναπτύχθηκε ίσως, γύρω στο 500 μ. Χ., την εποχή που ζούσε ο μαθηματικός Αριαμπάτα. Άλλοι θεωρούν ότι η χρήση αυτού του συστήματος, γενικεύτηκε ύστερα από το 700 μ.Χ.

Δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα, ότι η εφεύρεση συστήματος θέσης, ανήκει αποκλειστικά στους Ινδούς. Είναι γεγονός ότι

αρκετά χρόνια πριν οι Ινδοί είχαν έλθει σε επαφή με τον ελληνικό πολιτισμό και ακόμη ήταν ενημερωμένοι για το έργο του αστρονόμου Πτολεμαίου. Ο Πτολεμαίος μάλιστα κατά τους υπολογισμούς του με εξηκονταδικά κλάσματα, χρησιμοποιούσε το σύμβολο «0» για το μηδέν. Όπως καταλαβαίνουμε η τεκμηρίωση της καταγωγής του αριθμητικού συστήματος που χρησιμοποιούμε σήμερα, είναι μια υπόθεση δύσκολη και αμφισβητήσιμη.

Παρόλα αυτά, ο B.L. Waerden [(VW2)], θερμός υποστηρικτής της προέλευσης από τους Ινδούς των σύγχρονων αριθμητικών συμβόλων, λέει χαρακτηριστικά:

«Σε όλους τους λαούς που υιοθέτησαν τα «αραβικά» ψηφία, των ίδιων των Αράβων συμπεριλαμβανομένων, τα γραπτά αριθμητικά σύμβολα εμφανίζονται στον γραπτό λόγο σαν ξένα σώματα. Μόνο για τους Ινδούς δεν είναι ξένα. Είναι τα ίδια αριθμητικά σύμβολα από το 1 έως και το 9, τα οποία εμφανίζονται ήδη από τον 3^{ο} π Χ. αιώνα και που αργότερα, αφού συμπληρωθούν με ένα σύμβολο για το μηδέν, θα χρησιμοποιηθούν για να παραστήσουν οποιοδήποτε αριθμό».



(Σχήμα 13)

Ο ίδιος, συγκρίνοντας τις μορφές των ψηφίων που έχουν ληφθεί από το εξαιρετικό βιβλίο του Menninger υποστηρίζει ότι τα σημερινά ψηφία προέρχονται από δυτικο-αραβικά, που και αυτά με την σειρά τους κατάγονται από τα ινδικά ψηφία. [(VW2)]

Την ίδια άποψη με τον B.L.Waerden ως προς την προέλευση των σύγχρονων αριθμητικών συμβόλων, φαίνεται να έχει και ο Burton [(B)] υποστηρίζοντας ότι, η γένεση του συστήματος οφείλεται στους Ινδούς κατά τον $3^{ο}$ αιώνα μ. Χ. Στη συνέχεια αυτό μεταφέρθηκε στην Βαγδάτη κατά τον $8^{ο}$ αιώνα μ. Χ. και τέλος έγινε γνωστό στην Δυτική Ευρώπη από τους Άραβες–Μαυριτανούς που είχαν κυριεύσει την Ισπανία.

Ο G. R.Kaye [(K)] όμως, διατηρεί κάποιες επιφυλάξεις, ως προς την αυτονομία και ανεξαρτησία της επινόησης αυτής των Ινδών. Παραδέχεται βέβαια ότι στην Ινδία εμφανίστηκαν τα πρώτα σπέρματα του σύγχρονου συμβολισμού των αριθμών, αποδίδει όμως την έμπνευση της δημιουργίας αυτής, στην επίδραση του ελληνικού πνεύματος, τόσο της εποχής του Μεγάλου Αλέξανδρου, όσο και της μεταγενέστερης Αλεξανδρινής εποχής. Την ίδια γνώμη φαίνεται να έχουν και άλλοι επιστήμονες όπως ο Ολλανδός καθηγητής Freudenthal του Πανεπιστημίου Utrecht και ο Neugebauer του Κέντρου προκεχωρημένων σπουδών του Princeton υποστηρίζοντας ότι, την περίοδο μεταξύ 200-600 μ.Χ. που αρχίζει να δημιουργείται το σύστημα θέσης των αριθμών στην Ινδία, οι Ινδοί γνώριζαν ήδη και μελετούσαν την ελληνική αστρονομία του Πτολεμαίου.[(Στ)]

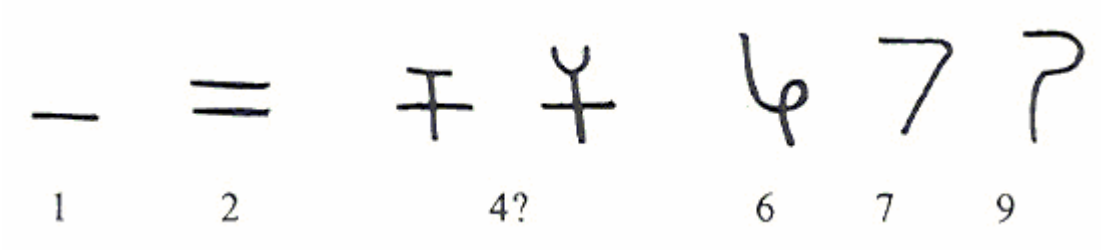
Όπως βλέπουμε, υπάρχει γενικά η παραδοχή, ότι τα αριθμητικά σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα είναι Ινδικής προέλευσης. Εν τούτοις αυτά ονομάστηκαν Αραβικά, εξ αιτίας του γεγονότος ότι έγιναν σε μας γνωστά από τους Άραβες, που η κυριαρχία τους εκείνη την εποχή έφτανε μέχρι την Ισπανία.

1.1 Τα πρώτα αριθμητικά σύμβολα

Τα πρώτα γραπτά μνημεία στην Ινδία που περιέχουν κάποια αριθμητικά σύμβολα είναι επιγραφές χαραγμένες πάνω σε πέτρινες στήλες, που βρισκόταν σε διάφορα σημεία της ινδικής αυτοκρατορίας κατά την εποχή του μεγάλου βουδιστή βασιλιά Ασόκα ($3^{ος}$ π.Χ. αιώνας).

Αριθμητικά σύμβολα που χρονολογούνται περίπου την ίδια εποχή, βρέθηκαν ακόμη χαραγμένα σε τοιχώματα σπηλαίου, σ' ένα λόφο πλησίον της Βομβάης, που φέρει το όνομα Nana Chat.[(B)] Τα σύμβολα αυτά φαίνονται στο (σχ.14) και σύμφωνα με την γνώμη των ειδικών,

αντιστοιχούν πιθανότατα με τους αριθμούς που αναγράφονται κάτω από τα σύμβολα:

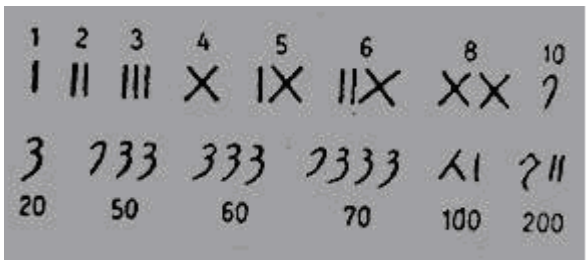


(3ος αιώνας π. Χ.)
(Σχήμα 14)

Από την εποχή του βασιλιά Ασόκα και μετά συναντούμε αριθμητικά σύμβολα επίσης σε κάποια βιβλία. Την εποχή εκείνη ήταν σε χρήση διάφορες μορφές γραφής όπως η Χαρότσι και η Βραχμί, που η κάθε μια από αυτές είχε τα δικά της σύμβολα για τους αριθμούς.

1.2 Οι αριθμοί Χαρότσι

Όπως βλέπουμε στο (σχ.15) οι αριθμοί Χαρότσι έχουν διαφορετικά σύμβολα για το 1, 4, 10, 20 και 100.



(Σχήμα 15)

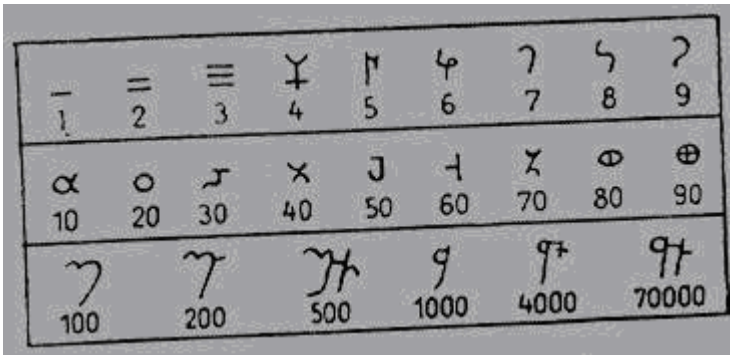
Για την αναπαράσταση ενός αριθμού επαναλαμβάνονταν τα σύμβολα αυτά όσες φορές χρειαζόταν δηλαδή κάτι ανάλογο με το σύστημα αρίθμησης των Ρωμαίων. Στη γραφή αυτή οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά δηλαδή το μικρότερο στοιχείο βρισκόταν στο αριστερό μέρος του αριθμού. Δεν υπάρχει ακόμη κάποιο σύμβολο για το μηδέν.

Σύμφωνα με τον G.R.Kaye[(K)], οι αριθμοί Χαρότσι προήλθαν από το Αραμαϊκό σύστημα και χρησιμοποιούνταν στην Β.Δ. Ινδία, Αφγανιστάν και κεντρική Ασία στις αρχές της Χριστιανικής εποχής.

Έχει μικρή συνοχή με τους άλλους ινδικούς συμβολισμούς και δεν παρουσιάζει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

1.3 Οι αριθμοί Βραχμί

Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για τους μελετητές παρουσιάζουν οι αριθμοί Βραχμί, οι οποίοι φαίνονται στο (σχ.16) Είναι από τους αρχαιοτέρους συμβολισμούς των Ινδιών και εμφανίζονται σε πολλές επιγραφές της εποχής του βασιλιά Ασόκα ($3^{ος}$ αιώνας π.Χ.). Για πολλούς αιώνες υπήρξαν ο πλέον διαδομένος συμβολισμός στην Ινδία και περιστασιακά χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα σε κάποιες περιοχές.



(Σχήμα 16)

Κατά την άποψη του B.L.Waerden[(VW2)], οι αριθμοί Βραχμί περιέχουν τα σπέρματα της μετέπειτα ανάπτυξης. Επισημαίνει το ακόλουθο σημαντικό στοιχείο. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του δέκα παριστάνονται με ένα και μόνο σύμβολο και όχι με δύο ή τρία όπως στο σύστημα Χαρότσι. Παρατηρεί ακόμη μια εντυπωσιακή ομοιότητα που έχουν τα σύμβολα αυτά με τα αραβικά ψηφία. Λέει χαρακτηριστικά ότι «ειδικά για τους αριθμούς 6, 7, 8 και 9 θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελούν τα αρχέτυπα των δικών μας ψηφίων». Για αριθμούς μεγαλύτερους του 100, αρχίζει να αναδύεται ένα είδος «κατονομασμένου θεσιακού συστήματος». Το σύμβολο για το 100 ή για το 1000 συνδυάζεται με το ψηφίο που δηλώνει τον αριθμό των εκατοντάδων ή χιλιάδων. [(VW2)]

Για αριθμούς από το 400 ως το 900 και από το 4000 ως το 70000 που είναι και οι μεγαλύτεροι που βρέθηκαν μέχρι σήμερα, γινόταν συνδυασμός των αριθμών 100, 1000, καθώς και των αριθμών από το 4 ως το 9.[(Λ)]

Ένα άλλο σημείο που παρατηρεί ο Kaye είναι ότι, τα τρία πρώτα ψηφία διαφέρουν από τα άλλα αριθμητικά συστήματα γιατί σχηματίζονται από οριζόντιες και όχι από κατακόρυφες γραμμές. Ο

ίδιος θεωρεί ότι η δημιουργία των αριθμών από το 1 έως το 9 δεν διέπονται από κάποιο κανόνα, όμως είναι πολύ πιθανόν το 40 να δημιουργήθηκε από το 30 με την προσθήκη μιας γραμμής, καθώς επίσης το 70 και 90 από το 60 και το 80 αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι το σύμβολο για το μηδέν απουσιάζει και ότι το σύστημα δεν είναι ακόμη θεσιακό.

Η εξέλιξη των αριθμών Βραχμί στα σημερινά σύμβολα, κατά τον Boyer αρχίζει με την συνειδητοποίηση του συστήματος θέσης, δηλαδή τα ίδια σύμβολα που χρησιμοποιούμε για τους 9 πρώτους αριθμούς, να χρησιμοποιούνται και για τα αντίστοιχα πολλαπλάσια οποιασδήποτε δύναμης του 10. Με αυτόν τον τρόπο σταδιακά άρχισαν να αχρηστεύονται οι χαρακτήρες Βραχμί που ήταν μεγαλύτεροι του 9. Δεν γνωρίζουμε πότε έγινε η ελάττωση των συμβόλων σε 9 αλλά είναι πιθανόν αυτή η μετάβαση στο «οικονομικότερο» να έγινε σταδιακά. Διάφορα σωζόμενα στοιχεία αποδεικνύουν ότι η αλλαγή αυτή έλαβε χώρα στην Ινδία, αλλά παραμένουν άγνωστοι οι εμπνευστές της αλλαγής. [(Β–Μ)]

Ο Kaye όμως, διατηρεί επιφυλάξεις ως προς την Ινδική καταγωγή του σύγχρονου αριθμητικού μας συστήματος. Επίσης διακεκριμένοι ινδολόγοι όπως ο G, Thibeau, ο G. Buhler και άλλοι δέχονται ότι, ήδη από τον $6^{ο}$ αιώνα μ.Χ. οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν την αρχή του θεσιακού συστήματος και το μηδέν.[(Λ)]

Η διάσταση απόψεων μεταξύ των μελετητών οφείλεται κυρίως, στην ανεπάρκεια αποδεικτικών στοιχείων λόγω φθοράς των υλικών γραφής, που δεν αφήνουν περιθώρια για μια επαρκή τεκμηρίωση.

Ο Κ. Λούκα [(Λ)], για να τεκμηριώσει τη θέση, ότι η αρχή του θεσιακού συστήματος πηγάζει από τον Ινδικό λαό, παραθέτει κάποια αποσπάσματα Ινδικών μύθων. Υποστηρίζει ότι, σ' αυτό συντέλεσε η ιδιαίτερη κλίση που είχε ο λαός αυτός στη χρήση πολύ μεγάλων αριθμών. Οι Ινδοί, λαός με φαντασία αρέσκονταν να πλάθουν μύθους, που περιείχαν εντυπωσιακά μεγάλους αριθμούς. Όπως θα δούμε στα αποσπάσματα αυτά, οι δυνάμεις του δέκα αναφέρονταν με διαφορετικές ονομασίες. Στο ποίημα Mahbhata βρίσκουμε ονόματα δυνάμεων μέχρι το 10^{17} και σε κάποιο άλλο ποίημα μέχρι το 10^{53}. (Κατά τον Mahabharata υπήρχαν 24.10^{15} θεοί και ο Βούδας είχε 600000 εκατομμύρια γιούς.) Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι, τα σύμβολα που χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες για την γραφή των αριθμών έφταναν έως το 10^4 (μυριάδα) και οι Ρωμαίοι έως το 10^3.

Ένας άλλος μύθος των Ινδιών αναφέρεται σε μια μάχη όπου έλαβαν μέρος 10^{40} πίθηκοι. Εδώ ο αριθμός 86,789,235,178 δηλώνεται ως εξής: 8 kharva, 6 yrinda, 7 vyrbuda, 8 kṓti, 9 prayuta, 2 ayuta, 3 niyuta, 5 sahasra, 1 cata, 9 daçan, 8. Όπως παρατηρούμε, ένα είδος κατονομασμένου αριθμητικού συστήματος αρχίζει να αναδύεται. Αν

τώρα στο παράδειγμα αυτό παραλείψουμε τα ονόματα kharva, yrinda κ.λ.π., φαίνεται καθαρά η αξία των διάφορων αριθμών ανάλογα με την θέση που αυτοί βρίσκονται. Για την ολοκλήρωση του θεσιακού συστήματος όμως, υπολείπεται η εφεύρεση του μηδέν. Σημαντικό ρόλο γι' αυτή την εφεύρεση έπαιξε ο άβακας, που σύμφωνα με τον F. Woepeke, από πολύ νωρίς τον χρησιμοποιούσαν οι Ινδοί για τους υπολογισμούς τους.[(Λ)] Βλέπουμε ακόμη ότι οι αριθμοί εδώ, είναι διατεταγμένοι από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή όπως ακριβώς γράφονται σήμερα.

1.4 Οι ποιητικοί αριθμοί

Η ευρηματικότητα όμως του Ινδικού λαού στην αναπαράσταση αριθμών με διαφορετικούς τρόπους συνεχώς εμπλουτίζεται. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε, μια όμορφη και πρωτότυπη ιδέα αναπαράστασης αριθμών. Πρώτα όμως ας σκεφτούμε τι θα απαντούσαμε, σε κάποιον που μας ζητούσε να απομνημονεύσουμε έναν λογαριθμικό πίνακα ή έναν πίνακα ημιτόνων. Σίγουρα θα λέγαμε, ότι κάτι τέτοιο είναι πολύ δύσκολο, ή αδύνατον να γίνει.

Αυτό όμως το επίτευγμα κατόρθωσαν οι Ινδοί αστρονόμοι μ' έναν ιδιαίτερα ευφυή τρόπο. Θα λέγαμε ότι πρόκειται για έναν απίστευτο άθλο, που όμως τον κατάφεραν χρησιμοποιώντας μια τεχνική που ήταν ιδιαίτερα οικεία και δημοφιλής σ' αυτούς, την έμμετρη γραφή. Έτσι αν ο πίνακας ημιτόνων ήταν γραμμένος σε μορφή ποιητική, τότε ήταν σε θέση να απομνημονεύσουν αυτόν χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Έτσι μπήκαν χωρίς να το γνωρίζουν, στην οδό που θα τους οδηγούσε μια μέρα χρησιμοποιούμε στην ανακάλυψη του αξιώματος θέσης και του μηδενός, επειδή το σύστημα αυτό περιείχε με τη μορφή του σπόρου, αυτές τις δύο βασικές ανακαλύψεις. [(Ι)]

Όπως όλοι γνωρίζουμε, οι αριθμοί δεν έχουν σχεδόν καθόλου συνώνυμα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι, ταιριάζουν πιο πολύ με τον πεζό παρά με τον έμμετρο λόγο. Για να δημιουργήσουν την έμμετρη και ρηματική μορφή οι Ινδοί αστρονόμοι, επινόησαν την αντικατάσταση των αριθμών με κάποιες λέξεις που τους αντικατόπτριζαν πλήρως. Ίσως να φαίνεται λίγο παράξενος ένας τέτοιος συμβολισμός αριθμών, αλλά ακόμη και σήμερα εμείς χρησιμοποιούμε μερικές φορές συμβολικά κάποιους αριθμούς, όπως την λέξη χάριτες αντί του αριθμού 3 ή την λέξη μούσες, αντί του 9.

Για να μην επαναλαμβάνεται πολλές φορές η ίδια λέξη και για να επιτευχθεί το μέτρο για τον αριθμό που ήθελαν να δηλώσουν , χρησιμοποιούσαν διάφορα σανσκριτικά συνώνυμα των ονομάτων των αριθμών. Για παράδειγμα, για το «ντβι» (δύο), μπορούσαν να

χρησιμοποιήσουν, ότι κατά την παράδοση, τη φύση και κατά τη μυθολογία, πηγαίνουν δύο μαζί, όπως: «Ασβίν» (οι δίδυμοι θεοί), «Γιαμά» (το πρωταρχικό ζευγάρι), «νέτρα» (τα μάτια), μπαχού (τα χέρια), «γκούλφα» (οι αστράγαλοι), «πακσά» (τα φτερά) κ.λ.π.

Γενικά, εξάντλησαν όλα τα σύμβολά τους για τη φύση, τη μορφολογία των ζώων και του ανθρώπου, όπως επίσης και για τις παραδοσιακές ή τις μυθολογικές έννοιες του πολιτισμού τους. Ουσιαστικά, καθένα από τα διάφορα συνώνυμα του ονόματος ενός αριθμού, επιλεγόταν ανάλογα με αναζητούμενο ποιητικό αποτέλεσμα. Τόσο που η ονομασία ενός αστρονομικού αριθμού, χωρίς να είναι αποκρουστική, έμοιαζε με επικό ποίημα, και χάρη σε τέτοιες εικονοποιημένες παραστάσεις, οι πιο άχαρες μαθηματικές σχέσεις μετατρεπόντουσαν σε στίχους.

Όσο για το «σουνυά», (κενό) που είχε τη σημασία του μηδενός σ' αυτή την προφορική αρίθμηση θέσης, είχαν να επιλέξουν ανάμεσα στις λέξεις: μπίντου (σημείο) και σε όλα τα συνώνυμα του «ουρανού» (κχα, γκαγκανά,κ.λ.π.) της «ατμόσφαιρας» (αμπαρά, ακασά, βίγιατ, κ.λ.π.) και του «διαστήματος» (αμπχρά, ναμπχά, κ.λ.π.) [(I)]

Στο σύστημα αυτό λοιπόν, αντί των αριθμών έχουμε συμβολικές λέξεις. Ο αριθμός απεικονίζονταν από διαδοχικές λέξεις, αρχίζοντας από αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή η πρώτη λέξη αντιπροσώπευε τον μικρότερο σε αξία αριθμό και η τελευταία τον μεγαλύτερο, φορά αντίθετη από αυτή που χρησιμοποιούμε εμείς σήμερα.

Για παράδειγμα ο αριθμός 1021 γραφόταν ως εξής :

Sasi	– paksa	– kha	– eka	
Φεγγάρι	– φτερά	– κενό	– ένα	
1	2	0	1	= 1021

Τα αρχαιότερα ινδικά έργα όπου συναντούμε ποιητικούς αριθμούς είναι η Πουλίσα – Σιντάντα και η περίφημη Σούρια – Σιντάντα που μέχρι σήμερα παραμένει το κλασικό έργο της ινδικής αστρονομίας. Χρονολογία σύνθεσης της Πουλίσα – Σιδχαντα αναφέρεται το 380 μ.Χ. όμως κάποιοι μελετητές δεν δέχονται ως σωστή την ανωτέρω χρονολογία και ισχυρίζονται ότι το έργο είναι του 5^{ου} μ.Χ. αιώνα. Η Σούρια Σιντάντα ήταν ήδη γνωστή κατά το πρώτο ήμισυ του 6^{ου} μ.Χ. αιώνα. Ποιητικοί αριθμοί εμφανίζονται επίσης σε μια επιτομή θρησκευτικού περιεχομένου την Άγκνι – Πουράνα.

Δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά οι ποιητικοί αριθμοί, όμως ο B.L.Waerden[(VW2)] μας πληροφορεί, ότι αυτοί ήταν σε χρήσει γύρω στα 500 μ.Χ.

1.5 Οι συλλαβικοί αριθμοί του Αριαμπάτα

Περίπου την ίδια εποχή ο Αριαμπάτα, ο αρχαιότερος αστρονόμος της Ινδίας, στο έργο του Padastika (το οποίο είναι αστρονομικού περιεχομένου) δίνει έναν άλλο συμβολισμό, χρησιμοποιώντας τα γράμματα της αλφαβήτου. Ο Αριαμπάτα επινόησε το νέο αυτό σύστημα γιατί του παρείχε την δυνατότητα να εκφράσει πολύ μεγάλους αριθμούς (όπως συμβαίνει στους αστρονομικούς υπολογισμούς) μ'έναν σύντομο μνημονικό τρόπο.

Όπως φαίνεται στο (σχ.17) με τα πρώτα 25 σύμφωνα της αλφαβήτου από το k ως το m συμβόλιζε τους αριθμούς από το 1 έως το 25 και με τα υπόλοιπα 8 τους αριθμούς 30,40 … έως το 100. Χρησιμοποιούσε ακόμη τα 9 φωνήεντα για να δηλώσει δυνάμεις του 100. Από τον G. R. Kaye[(K)], παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

αριθμοί :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γράμματα :	*k*	kh	g	gh	ń	c	ch	j	jh	ň

αριθμοί :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
γράμματα :	*ṭ*	*ṭh*	*ḍ*	*ḍ*h	ṇ	t	th	d	dh	η

αριθμοί :	21	22	23	24	25
γράμματα :	*p*	ph	b	bh	m

αριθμοί :	30	40	50	60	70	80	90	100
γράμματα :	*y*	r	l	u	ś	sh	s	h

φωνήεντα:	α	i	u	ri	li	e	ai	o	au
δυνάμεις του 10:	1	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}

(Σχήμα 17)

Αυτό το σύστημα αρίθμησης παρουσιάζεται με μια μορφή συλλαβική, δηλαδή κάθε σύμφωνο συνοδεύεται από ένα φωνήεν που δηλώνει παράλληλα και τον πολλαπλασιαστή του αριθμού που συμβολίζει το σύμφωνο. Στην περίπτωση που το φωνήεν συνοδεύει δύο διαδοχικά σύμφωνα τότε το άθροισμα των αριθμών αυτών (που εκφράζουν τα δύο σύμφωνα) πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό που δηλώνει το φωνήεν. Έτσι οι συλλαβές που περιέχουν α συμβολίζουν τις μονάδες και τις δεκάδες, οι

συλλαβές με Ι τις εκατοντάδες και χιλιάδες, κ.λ.π. το μηδέν δεν χρειάζεται στο σύστημα αυτό. Οι κενές θέσεις απλώς παραλείπονται.

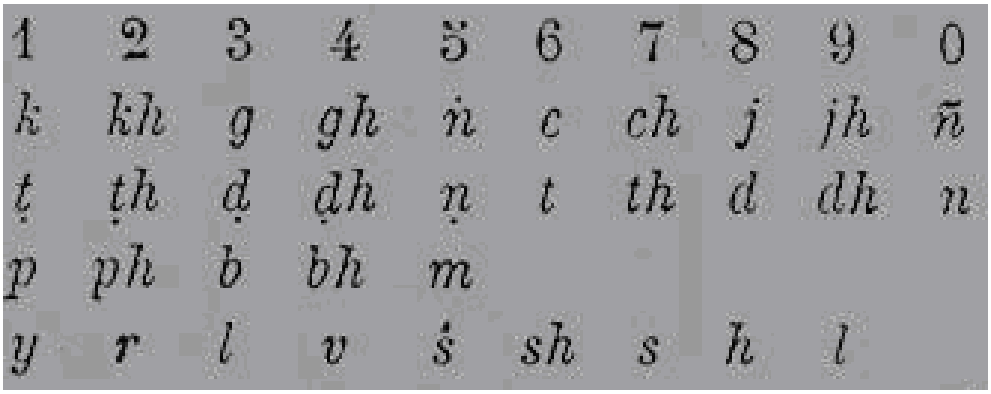
Τα παραδείγματα που ακολουθούν, μας δίνουν μια εικόνα για την εφαρμογή του συστήματος αυτού.

khyughri = $(2+30)\ 10^4\ +4\ \cdot 10^6$=320000 +4000000 =4320000

cayagiyiṅuśulchli=

$$6+30+3\cdot 10^2+30\cdot 10^2+5\cdot 10^4+70\cdot 10^4+(50+7)\cdot 10^8=57753336$$

Όπως αναφέραμε ο συμβολισμός αυτός έδινε την δυνατότητα της έκφρασης μεγάλων αριθμών με έναν συνοπτικό μνημονικό τρόπο, γι' αυτόν τον λόγο και ο Αριαμπάτα τον χρησιμοποιούσε αποκλειστικά στην αστρονομία. Αυτός ο τρόπος αρίθμησης δεν ήταν ευρέως διαδεδομένος στην Ινδία. Όμως μερικούς αιώνες αργότερα εμφανίζεται με μια τροποποιημένη μορφή (σχ.18) που εμπεριέχει την ιδέα του συστήματος θέσης. Τα πρώτα δείγματα αυτού του τροποποιημένου συστήματος χρονολογούνται τον δωδέκατο αιώνα και έχουν τον ακόλουθο συμβολισμό:



(Σχήμα 18)

Εδώ παρατηρούμε ότι οι αριθμοί γράφονται από αριστερά προς τα δεξιά δηλαδή έχοντας τον μικρότερο αριθμό στο αριστερό μέρος. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι στον συμβολισμό του Αριαμπάτα αρχίζουν να αναδύονται τα πρώτα σπέρματα του θεσιακού συστήματος. Φαίνεται ότι οι Ινδοί εκείνης της εποχής ήταν οι προπομποί ενός θεσιακού συστήματος σε δεκαδική ή εκατονταδική κλίμακα.

Από το γεγονός ότι αμέσως μετά τον αριθμητικό συμβολισμό ο Αριαμπάτα παραθέτει τους κανόνες εύρεσης τετραγωνικής και κυβικής ρίζας αριθμών κάποιοι μελετητές όπως ο L. Robert, θεωρούν ότι οι Ινδοί πρέπει να γνώριζαν κάποιο σύστημα όμοιο με το σύγχρονο αριθμητικό μας σύστημα. Ο G. R. Kaye [(K)], διαφωνεί ως προς αυτή τη λογική με

το σκεπτικό, ότι οι κανόνες για τις τετραγωνικές και κυβικές ρίζες είναι πολύ γενικοί και μπορούν να εφαρμοστούν σε όλα τα συστήματα.

Πάντως είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι διάφοροι μεταγενέστεροι Ινδοί μαθηματικοί όπως οι Mahavirachava, Sridhara, Bhaskara και Brahmagoupta δίνουν περίπου τους ιδίους κανόνες εξαγωγής κυβικής ρίζας ενώ δεν έχουμε κανένα παρόμοιο δείγμα γραφής από τους Έλληνες εκείνης της εποχής.

1.6 Η προέλευση του μηδενός και η καθιέρωση του θεσιακού συστήματος

Όμως το θεσιακό σύστημα δεν μπορούμε να πούμε ότι δεν είναι ακόμη πλήρες. Για να ολοκληρωθεί, απομένει η εφεύρεση του πιο σημαντικού ψηφίου και αυτό είναι το μηδέν. Όπως λέει ο Halsted, είναι μεγαλοφυές να φτιάχνεις κάτι από το τίποτα, δίνοντάς του ένα όνομα και επινοώντας ένα σύμβολο γι' αυτό, «είναι σαν να παράγεις τη Νιρβάνα σε γεννήτρια»,,. Το βαβυλωνιακό σύστημα ήταν ατελές, εξ αιτίας του γεγονότος ότι δεν υπήρχε το μηδέν. Δεν υπήρχε καμία διαφορά ανάμεσα στο 60, το 1 και το 1/60. Αργότερα, για να καλυφθεί αυτό το κενό, όταν έλειπε κάποιο ενδιάμεσο ψηφίο, τοποθετούσαν στη θέση του κάποιο σύμβολο, όχι όμως αν ήταν στο τέλος.

Εκείνοι που συμπλήρωσαν το σύστημα με την προσθήκη του συμβόλου "0,, για το μηδέν, από το πρώτο γράμμα της λέξης ουδέν ήταν οι έλληνες αστρονόμοι. Ο Ε. Σταμάτης [(Στ)], αποδίδει την επινόηση αυτού του συμβόλου στον μεγάλο Έλληνα μαθηματικό και αστρονόμο Πτολεμαίο (100 – 178 μ. Χ.), τεκμηριώνοντας με παραδείγματα, που περιέχονται στο περίφημο έργο του Πτολεμαίου, «Μαθηματική Σύνταξις».

ο	μζ΄	η΄	(= 0°	47΄	8΄΄)
μα΄	ο	ιη΄	(= 41°	0΄	18΄΄)

Ο Freudenthal υποστηρίζει ότι, υπάρχει συσχετισμός ανάμεσα στο βαβυλωνιακό σύστημα, το ελληνικό σύμβολο του μηδενός και στο πανομοιότυπο μηδέν «0» του ινδικού δεκαδικού συστήματος. Τεκμηριώνει αυτό από το γεγονός, ότι η ελληνική αστρονομία περιήλθε σε γνώση των Ινδών κατά την ίδια περίοδο (200 – 600 μ. Χ.) που άρχισαν να χρησιμοποιούν και το δεκαδικό σύστημα. Μαζί με την ελληνική αστρονομία και τριγωνομετρία οι ινδοί αστρονόμοι γνώρισαν, εντελώς φυσικά, το εξηκονταδικό θεσιακό σύστημα και το μηδέν.[(Στ)]

Για την επινόηση του μηδενός και την καθιέρωση του θεσιακού συστήματος, υπάρχει και μια άλλη θεωρία που φέρνει τον άβακα στο

προσκήνιο και που όπως υποστηρίζει ο F. Woepcke, ήταν από πολύ νωρίς σε χρήση από τους Ινδούς. Οι Ινδοί λόγιοι κατά την Χριστιανική περίοδο, έκαναν τους υπολογισμούς τους με άβακες που περιείχαν άμμο. Στην αρχή κάθε στήλης του άβακα γραφόταν το όνομα της θέσης που αντιπροσώπευε, δηλαδή οι δυνάμεις του 10. Έτσι αντί να σημειώνουν στις στήλες του άβακα το πλήθος των μονάδων κάθε ψηφίου με γραμμές ή ψηφίδες, όπως έκαναν οι Ρωμαίοι και οι Έλληνες, έγραφαν μόνο το αντίστοιχο σύμβολο. Όμως για την κενή θέση αρχικά δεν είχαν κάποιο σύμβολο. Αργότερα άρχισαν τα βάζουν στην θέση αυτή μια τελεία, κάτι που ακόμη και σήμερα κάνουν οι Άραβες.

Με την πάροδο του χρόνου, διαπίστωσαν την μη αναγκαιότητα ύπαρξης τόσο των στηλών όσο και των γραμμών. Με αυτόν τον τρόπο άρχισαν σιγά-σιγά να αποδεσμεύονται τα σύμβολα των αριθμών από τις ψηφίδες και να γράφουν τους αριθμούς στα διαθέσιμα για την εποχή εκείνη υλικά γραφής.

Το πρωιμότερο δείγμα μιας τέτοιας γραφής, βρέθηκε σε χάλκινη πλάκα του 595 μ. Χ. στην Νότια Ινδία, στην οποία για πρώτη φορά εμφανίζεται ο αριθμός 346 με θεσιακό συμβολισμό.[(Λ)] Στο γραμμένο σε φύλλο σημύδας χειρόγραφο Bakshali που βρέθηκε στην Βόρεια Ινδία, η τελεία εκτός από το μηδέν, παρίστανε και την άγνωστη ποσότητα. Αργότερα χρησιμοποιήθηκε για το μηδέν το σύμβολο «0» που σύμφωνα με τον Hill, το πρώτο αδιάψευστο τεκμήριό του χρονολογείται από το 876 μ. Χ.

Μια ιστορική αναδρομή στον τρόπο γραφής των αριθμών στους διαφόρους λαούς συμπεριλαμβανομένων και των Αράβων φανερώνει μια ασυνέχεια ως προς το πριν και το μετά της καθιέρωσης των λεγόμενων «Αραβικών συμβόλων». Μόνο με τους Ινδούς δεν συμβαίνει αυτό .Τα ίδια αριθμητικά σύμβολα από το 1 έως το 9 εμφανίζονται ήδη από τον 3^{ο} π.Χ. αιώνα και αργότερα αφού συμπληρωθούν με ένα ακόμη σύμβολο για το μηδέν, χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση οποιουδήποτε αριθμού.

Στα επιχειρήματα αυτά, προσθέτουμε και την υπόθεση του Freudenthal που αναφέρει τα εξής: Πριν δεχθούν την ελληνική επίδραση, οι Ινδοί είχαν ένα θεσιακό σύστημα με έμμετρη μορφή, που ήταν διατεταγμένο δεκαδικά και άρχιζε από τις μονάδες μικρότερης τάξης. Είχαν τα ψηφία 1 – 9 και παρόμοια σύμβολα για το 10, το 20 κ.λ.π. Μαζί με την ελληνική αστρονομία οι Ινδοί έγιναν γνώστες του εξηκονταδικού συστήματος και του μηδενός. Ανάμιξαν το θεσιακό αυτό σύστημα με το δικό τους. Στα δικά τους βραχμανικά ψηφία 1 – 9 προσάρτησαν το ελληνικό «0» και υιοθέτησαν την ελληνο-βαβυλωνιακή διάταξη. Είναι πολύ πιθανόν τα πράγματα να έλαβαν χώρα κατ' αυτόν τον τρόπο. Αυτό δεν μειώνει καθόλου τις οφειλόμενες στους Ινδούς

τιμές αφού αυτοί είναι που ανέπτυξαν τον τελειότερο συμβολισμό των αριθμών που γνωρίζουμε. [(VW2)]

1.7 Η επικράτηση των Ινδικών ψηφίων

Ύστερα από τη φυγή του Μωάμεθ στη Μεδίνα, το 622 μ. Χ., και την θριαμβευτική επιστροφή του αργότερα στη Μέκκα, οι Άραβες άρχισαν τους κατακτητικούς πολέμους. Σε λιγότερο από μισό αιώνα, κατόρθωσαν όχι μονάχα να καθυποτάξουν όλη τη βόρεια Αφρική, αλλά και να σχηματίσουν μια τεράστια αυτοκρατορία, που εκτεινόταν από τις Ινδίες ως την Ισπανία. Οι Άραβες κατακτητές ήταν αρκετά ανεκτικοί απέναντι στους λαούς της αυτοκρατορίας τους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, να να μην σβήσει ο πολιτισμός των λαών που υποτάχτηκε, αλλά να απορροφηθεί και να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του ισλαμικού πολιτισμού.

Το 766 μ. Χ. ο χαλίφης Αλ-Μανσούρ, ιδρύει την Βαγδάτη, κοντά στα ερείπια της Σελεύκειας και της Βαβυλώνας. Η μυθική αυτή πόλη θα συγκεντρώσει τις σπουδαιότερες πολιτιστικές δυνάμεις της μουσουλμανικής ανατολής, για 300 περίπου χρόνια. Οι γενναιόδωρες παροχές από τους Άραβες κατακτητές, προσείλκυσαν σημαντικό αριθμό επιστημόνων και καλλιτεχνών, προερχομένων από διάφορες περιοχές που είχαν υποταγεί. Εδώ αρχίζουν να μεταφράζονται στην αραβική γλώσσα και να σχολιάζονται τα έργα των αρχαίων συγγραφέων, όπως του Αρχιμήδη, Ευκλείδη, Απολλώνιου, Πτολεμαίου, Αριστοτέλη, κ.α. Μεγάλη αποδοχή βρήκαν επίσης, οι μαθηματικές και αστρονομικές γνώσεις των Ινδών. Έτσι σχηματίζεται μια γέφυρα πνευματικής επικοινωνίας μεταξύ Ινδιών, Αραβίας και Ευρώπης. Πολλά απ' αυτά που ξέρουμε για τους Έλληνες καθώς επίσης για τις γνώσεις των Ινδών, είναι σήμερα σε μας γνωστά, χάρις στις αραβικές μεταφράσεις οι οποίες είχαν γίνει από επιστήμονες, οι οποίοι είχαν εργαστεί σε κείνα τα μέρη.

Το πρώτο σύγγραμμα που αναφέρεται στην αριθμητική των Ινδών, κάνει την εμφάνισή του το 662 μ.Χ. Είναι γραμμένο από τον σύριο επίσκοπο Σεβήρο Σεμπόχτ (Severus Sebokht) ο οποίος εκτός από την μελέτη της φιλοσοφίας, μαθηματικών και θεολογίας ήταν γνώστης και της ελληνικής γλώσσας. Στο σύγγραμμά του αυτό ο Severus διαμαρτύρεται για την έπαρση των Ελλήνων «ότι το πάν εγίγνωσκον», επικαλούμενος τις γνώσεις των Βαβυλωνίων και Ινδών και ανέφερε «την εύστοχον μέθοδο υπολογισμού», που μπορούσε να πραγματοποιηθεί με εννιά μόνο ψηφία, χωρίς όμως να τα καταγράφει και τα οποία είναι βέβαιο ότι γνώριζε αφού μάλιστα τα δίδασκε στους μαθητές του.

Στα πρώτα χρόνια της Αραβικής επέκτασης, τα δημόσια διατάγματα γραφόταν εκτός από τα Αραβικά και στα Ελληνικά και αυτό γιατί τα

δεύτερα ήταν ευρέως κατανοητά στην Εγγύς Ανατολή. Όμως για την προάσπιση της Αραβικής γλώσσας, εκδίδεται το 706 μ. Χ. διάταγμα που απαγόρευε την χρήση της Ελληνικής γλώσσας. Ωστόσο άφηνε το δικαίωμα να χρησιμοποιείται το Ελληνικό αλφάβητο ,μόνο στην περίπτωση γραφής αριθμών. Αυτό το γεγονός, καταδεικνύει ότι τα Ινδικά σύμβολα δεν είχαν διεισδύσει ακόμη στην Δαμασκό την έδρα των χαλίφηδων.

Το 773 μ. Χ. ένας Ινδός αστρονόμος επισκέφτηκε στη Βαγδάτη, τον χαλίφη Αλ-Μανσούρ και του χάρισε μια αστρονομική πραγματεία, μια Σιδχάντα, η οποία σύντομα μεταφράστηκε στα αραβικά. Αυτή έγινε πολύ δημοφιλής με τον τίτλο Σιντχάιντ και η οποία μεταξύ των άλλων περιείχε τα εννιά ινδικά ψηφία.

Σύμφωνα με την άποψη του D.M. Burton[(B)], ιστορικά γεγονότα βεβαιώνουν ότι, η ιδέα του θεσιακού συμβολισμού των αριθμών καθώς και του μηδέν ήταν ήδη γνωστά στην Ινδία ήδη από τον 5^{ο} μ. Χ. αιώνα. Το σύμβολο για το μηδέν όμως δεν είχε αποσαφηνιστεί ακόμη και εναλλασσόταν από μια κουκκίδα έως ένα μικρό κύκλο.

Αργότερα το 820 μ. Χ. περίπου ο μαθηματικός και αστρονόμος ο Μωχάμεντ μπεν Μούσα (Muhamment ben Musa) ο επονομαζόμενος Αλ-Χουαρίζμι (Al-Khwarizmi) καταγόμενος από την ανατολική περσική επαρχία Khorassan έγραψε το αραβικό βιβλίο άλγεβρας που έφερε τον τίτλο «Αλ-τζάμπρ ουάλ μουκάμπαλα». Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι από την παραλλαγή του ονόματος του συγγραφέα αυτού, προήλθε η λέξη «αλγόριθμος» όρος που δηλώνει μια υπολογιστική διαδικασία. Αλλά και ο τίτλος του βιβλίου συντομεύτηκε και έγινε πρώτα «άλτζεμπρα και αλμουκάμπαλα» και έπειτα συντομεύτηκε ακόμη και έμεινε «άλτζεμπρα».

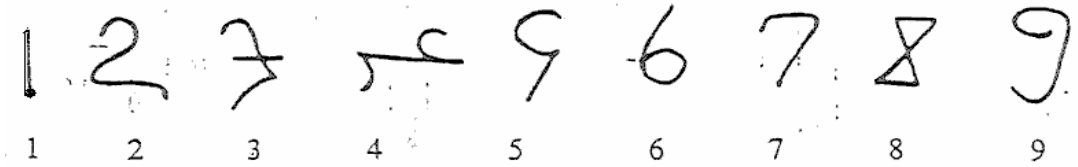
Ο Αλ-Χουαρίζμι έγραψε επίσης ένα μικρό βιβλίο για τον Ινδικό λογισμό. Το περιεχόμενό του έγινε σε μας γνωστό από μια λατινική μετάφραση του δωδέκατου αιώνα, γραμμένη από τον Άγγλο μοναχό Αδελάρδο του Bath. Στο βιβλίο αυτό βρίσκουμε μια αναφορά για το μηδέν, την εξής :

«Όταν (σε μια αφαίρεση) δεν απομένει τίποτα, τότε πρέπει να σημειώνεται ένας μικρός κύκλος, ώστε η θέση να μην μένει κενή. Η θέση πρέπει να καταλαμβάνεται από τον μικρό κύκλο, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγόστευαν και η δεύτερη θέση θα μπορούσε να εκληφθεί ως πρώτη». [(VW2)]

Τα αριθμητικά σύμβολα τα οποία ήταν σε χρήση κατά τον 8^{ο} αιώνα, ονομαζόταν «Devanagari» ή «ιερά» και οι χαρακτήρες τους είναι:

(Σχήμα 19)
(Devanagari, όγδοος αιώνας)

Κατά την μετάβαση από τους Ινδούς στους Άραβες η μορφή των ψηφίων πέρασε από κάποια στάδια αλλαγών, ώστε να είναι πιο εύκολη η γραφή των αριθμών. Τα σύμβολα που τελικά υιοθετήθηκαν από τους Άραβες της Δυτικής Ευρώπης ή Μαυριτανούς, ονομάστηκαν γκομπάρ «Gobar» από την αντίστοιχη Αραβική λέξη που σημαίνει «σκόνη». Πήραν αυτή την ονομασία από το μέσο που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες μαθητές για την γραφή των αριθμών. Λόγω ελλείψεως υλικών γραφής έριχναν άσπρη σκόνη πάνω σε μια μαύρη πλάκα (άβακας)και με μια γραφίδα έκαναν τους υπολογισμούς τους. Όπως βλέπουμε στο σχήμα τα σημερινά αριθμητικά σύμβολα ομοιάζουν πολύ περισσότερο με τα ψηφία Gobar παρά με τα αντίστοιχα Ινδικά. [(Β)]



(Σχήμα 20)
Δυτικο-Αραβικά Gobar, δέκατος αιώνας)

Τα ψηφία Gobar ήταν εννιά και το σύμβολο για το μηδέν ήταν μια τελεία που τοποθετείτο πάνω από τον αριθμό, όπως για παράδειγμα: $\dot{6} = 60$, $\ddot{6} = 600$, $\dddot{6} = 6000$.

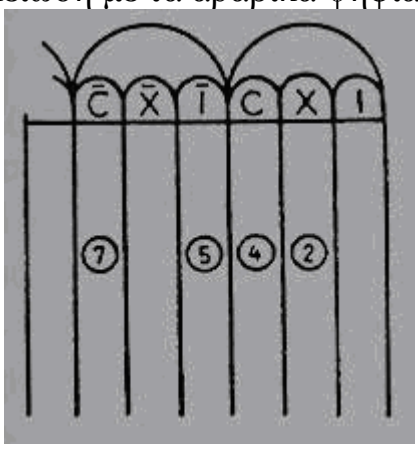
Άξιο παρατήρησης είναι ότι ανάλογη χρήση της τελείας γινόταν στην μεταγενέστερη παλαιά συριακή γραφή αριθμών και σε ψηφία του ανατολικού αραβικού κράτους. Αλλά και οι Ινδοί συμβόλιζαν με τον ίδιο τρόπο τις δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες, όπως καταμαρτυρούν κάποιες Αραβικές πηγές του $10^{ου}$ αιώνα.

Τα ανατολικο-αραβικά χρησιμοποιούνται μέχρι τις μέρες μας στην Τουρκία, στην αραβική χερσόνησο και στην Αίγυπτο, όπου φέρουν και την ονομασία “ινδικά ψηφία„. Είναι βέβαιο ότι και οι δύο μορφές αποτελούν μετεξελίξεις των βραχμανικών ψηφίων.

Στα τέλη του $9^{ου}$ αιώνα είχε ολοκληρωθεί ο τρόπος γραφής των αριθμών με βάση την θεμελιώδη αρχή του θεσιακού συμβολισμού, η οποία μεταδόθηκε μέσω του ανατολικού αραβικού κράτους, στους Άραβες της Δύσης.

Ο πρώτος άνθρωπος, που συνειδητοποίησε τα πλεονεκτήματα αυτού του συμβολισμού, και κατέβαλε προσπάθειες να καθιερωθεί η χρήση τους στη δυτική Ευρώπη, ήταν ο Ζερμπέρ (Gerbert, ο μετέπειτα Πάπας Σίλβεστρος Β΄), τον Ι΄ αιώνα. Ο Ζερμπέρ κατά την διάρκεια ενός ταξιδιού του στην Ισπανία, γνώρισε τα αραβικά ψηφία, και υποψιασμένος για την σπουδαιότητά τους έγραψε ένα φυλλάδιο στο οποίο συνιστούσε τη χρήση των νέων συμβόλων, και περιέγραφε με ποιο τρόπο μ΄ αυτά τα σύμβολα μπορεί να λειτουργήσει ο άβακας. Τα μπαλάκια του άβακα θα έπρεπε να αντικατασταθούν με δισκία (άπικες), πάνω στα οποία ήταν γραμμένοι οι αριθμοί. Έτσι, για να παρασταθεί στον άβακα ο αριθμός 314, λ.χ., δεν θα απαιτείτο να τοποθετηθούν 3, 1 και 4 μπαλάκια στις στήλες των εκατοντάδων, δεκάδων και μονάδων αντίστοιχα, αλλά η τοποθέτηση σε κάθε στήλη ενός μόνο αριθμημένου δισκίου. [(Β - J - Β)]

Ωστόσο θα ήταν λάθος να θεωρήσουμε ότι, τόσο εύκολα άνοιξε ο δρόμος για την χρήση των αραβικών ψηφίων. Ο λόγος που καθυστέρησε η παραδοχή του νέου συστήματος, βρίσκεται στο ότι οι υπολογισμοί με τα μπαλάκια γίνονταν ευκολότερα απ' ότι με τους άπικες. Η πρόσθεση και η αφαίρεση μπορούσαν να εκτελεσθούν με τα μπαλάκια χωρίς δυσκολία, απλώς μετακινώντας αυτά. Δεν ήταν ανάγκη να απομνημονευτούν τα διάφορα αθροιστικά αποτελέσματα. Επειδή η χρήση του άβακα με τους άπικες του Ζεμπέρ ήταν άβολη, το πλατύ κοινό συνέχιζε τον παραδοσιακό τρόπο υπολογισμού, που είχε ως αποτέλεσμα την μη εξοικείωση με τα αραβικά ψηφία.



(Σχήμα 21)
Ο άβακας του Ζερμπέρ

Κάποιοι βέβαια αντιλήφθηκαν ότι τα ψηφία αυτά ήταν εξαιρετικά χρήσιμα, όταν οι υπολογισμοί αυτοί γινόταν στο χαρτί, αλλά ας μην ξεχνούμε ότι, τα υλικά γραφής ήταν σπάνια εκείνη την εποχή. Επομένως σημαντικός παράγοντας για την συνέχιση της χρήσης του άβακα, ήταν τα λιγοστά υλικά γραφής και η επάρκεια των ήδη δοκιμασμένων

ρωμαϊκών ψηφίων για την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Έτσι τα δυτικο-αραβικά ψηφία δεν ήταν κοινής αποδοχής εκείνη την εποχή.

Είναι ενδιαφέρον να υπενθυμίσουμε ότι, την περίοδο που ο Ζεμπέρ υποστήριζε - χωρίς όμως ανταπόκριση - τα δυτικο-αραβικά ψηφία, αυτά χρησιμοποιούνταν ήδη στις αραβικές χώρες. Ένας λόγος γι' αυτό μπορεί να ήταν η λειτουργία χαρτοποιείου στη Βαγδάτη, ήδη από το 794, ενώ το πρώτο χαρτοποιείο στη δυτική Ευρώπη άνοιξε το1154 στην Ισπανία. [(B - J - B)]

Μετά τον 10ο αιώνα, ξέσπασε μεγάλη διαμάχη ανάμεσα στους υποστηρικτές των δύο μεθόδων υπολογισμού, των «αβακιστών» και των «αλγοριστών». Τελικά επικράτησαν οι αλγοριστές. Πρώτη η Ιταλία, κέντρο εμπορίου εκείνη την εποχή, αναγνώρισε τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει το γράψιμο των υπολογισμών στο χαρτί, ένα από τα οποία ήταν η δυνατότητα ελέγχου, μετά την εκτέλεση των πράξεων.

Το 1202 ο Λεονάρδος Πιζάνο (Leonardo Pisano),το πραγματικό του όνομα ήταν Φιμπονάτσι (Fibonacci) παρουσιάζει το βιβλίο του Liber abaci,το οποίο έμελλε να επηρεάσει σημαντικά όχι μόνο τους μαθηματικούς αλλά και τους εμπόρους, όσον αφορά τη διάδοση και παραδοχή των δυτικο-αραβικών ψηφίων. Το Liber abaci ξεκινά με μια ιδέα που φαίνεται σχεδόν σύγχρονη, αλλά είναι χαρακτηριστική της ισλαμικής και χριστιανικής μεσαιωνικής σκέψης-ότι η αριθμητική και η γεωμετρία συνδέονται μεταξύ τους και υποστηρίζουν η μία την άλλη. Κατ' αρχήν, περιγράφει τα «εννέα ινδικά ψηφία» καθώς και το σύμβολο 0, το οποίο ονομάζεται «ζεφίριουμ» στα αραβικά. Αναφέρουμε σχετικά ότι οι λέξεις «zero» και «cipher» προέρχονται από τη λέξη ζεφίριουμ και τις παραλλαγές της.

Ένα γεγονός που απεικονίζει την άρνηση της αποδοχής των δυτικο-αραβικών ψηφίων, φαίνεται από την απαγόρευση που επέβαλε η Δημαρχία της Φλωρεντίας, στη χρήση των νέων συμβόλων μέχρι το 1299, με την πρόφαση ότι μ' αυτά μπορούν εύκολα να φαλκιδευτούν οι λογαριασμοί. Άλλοι όμως υποστηρίζουν ότι οι κρατικοί υπάλληλοι που ήταν υποχρεωμένοι να κάνουν τον έλεγχο των βιβλίων, δεν γνώριζαν τη νέα μέθοδο και προσπαθούσαν να της φράξουν το δρόμο. Τα πλεονεκτήματά της, όμως, ήταν τόσο καταφανή, ώστε η νέα μέθοδος επιβλήθηκε στη Γερμανία (το 1200), στη Γαλλία (το 1275) και στην Αγγλία (το 1300). Όμως, πέρασαν αρκετά χρόνια ακόμη και φτάσαμε στα μέσα του δεκάτου έκτου αιώνα, έως ότου η υπόθεση κερδηθεί οριστικά υπέρ των δυτικο-αραβικών ψηφίων [(B - J - B)]

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[(B-M)] Carl B. Boyer - Uta C Merzbach, «Η ιστορία των μαθηματικών», Εκδόσεις Πνευματικού, Αθήνα 1997.

[(B)] David M. Burton, «The history of mathematics», University of New Hampshire, 3η Έκδοση.

[(B-J-B)] Lucas N.H.Bunt-Phillip S.Jones-Jack D.Bedient, «Οι ιστορικές ρίζες των Μαθηματικών», Γ.Πνευματικός, Αθήνα 1981.

[(C)] Roger Cooke, « The history of mathematics», Villey and sonw,1997.

[(D)] B.Datta, «The science of the Sulva», Calcuta 1932.

[(E)] Θ. Εξαρχάκος, «Ιστορία των μαθηματικών», τόμος 2ος, Αθήνα 1999.

[(I)] G. Ifrah, «Παγκόσμια ιστορία των αριθμών», Εκδόσεις Σμυρνιωτάκης, Αθήνα 1985.

[(H)] M. Hollesbecgue, «Η αρχαία ινδική», Εκδοτικός οίκος Κοραής, Αθήνα 1920.

[(Kt)] Victor Katz, «A history of mathematics», Harper Collins College Publishers, Έκδοση 1993.

[(K)] G.R.Kaye, «Indian mathematics», Issis, vol.2, 1914.

[(L)] G.Loria, «Ιστορία των μαθηματικών», Εκδόσεις Παπαζήσης, Αθήνα 1999.

[(Λ)] Κ.Λ.Λούκας, «Ο αριθμός και η αρίθμησις ανά τους αιώνας», Φιλοσοφική, ψυχολογική και ιστορική έρευνα, 1935.

[(Μν)] Μέντορας, Περιοδικό επιστημονικών και εκπαιδευτικών ερευνών, τόμος 1, Αθήνα 1999.

[(M)] T.S. Bhanu Murthy, «A modern introduction to ancient Indian mathematics» Madras, 1992.

[(Στ)] Ε.Σταμάτης, «Η προέλευσις των σύγχρονων συμβόλων των αριθμών», Ανατύπωση από το Περιοδικό Ευκλείδης, Αθήνα 1971.

[(Sm)] David E. Smith, « History of mathematics», Dover publications INC, New York, vol. 1.

[(St)] D.J.Struik, «Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών», Ι.Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1982.

[(VW1)] B.L.Van der Waerden, «Geometry and Algebra in Ancient Civilizations», Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[(VW2)] B.L.Van der Waerden, «Η αφύπνηση της επιστήμης», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000.