ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μια προσέγγιση της διδασκαλίας εννοιών που σχετίζονται με άπειρες διαδικασίες: Η περίπτωση της διδασκαλίας του ορισμένου ολοκληρώματος με τη χρήση του λογισμικού Autograph

Δημήτριος Παλαιογιαννίδης

Επιβλέπων Καθηγητής
Χρόνης Κυνηγός

Αθήνα
Νοέμβριος, 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …….. από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Χρόνη Κυνηγό (επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής	…….
2) Θεοδόσιο Ζαχαριάδη	Αν. Καθηγητής	…….
3) Βασιλική Φαρμάκη	Αν. Καθηγήτρια	…….

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΑΛΑΙΟΓΙΑΝΝΙΔΗΣ, Νοέμβριος 2007

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ AUTOGRAPH (σελ. 206)

Παρά το γεγονός ότι ο ορισμός της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος (κατά Riemann) περιέχεται συνεχώς στα αναλυτικά προγράμματα του Ελληνικού σχολείου τα τελευταία 30 χρόνια παρατηρείται μια απροθυμία όλων των εμπλεκόμενων στη διδακτική διαδικασία μερών για τη διδασκαλία του. Η απροθυμία αυτή οφείλεται αφ' ενός μεν στα διδακτικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσει ο διδάσκων για να επιτύχει μια νοηματική διδασκαλία, αφ' ετέρου δε στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο θέμα της κατανόησης του ίδιου του ορισμού αλλά και της έννοιας.

Η έρευνα αυτή είναι μια έρευνα σχεδιασμού με την έννοια που δίνουν στον όρο οι Cobb et al (2003), Kelly (2003), Collins et al (2004) και Κυνηγός (2007). Είναι δηλαδή μια ποιοτική έρευνα που επικεντρώνεται στο να εξετάσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί ο καθηγητής των μαθηματικών στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και ειδικότερα ο καθηγητής του Λυκείου, να προσεγγίσει διδακτικά με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών σημαντικές για τους μαθητές του έννοιες του αναλυτικού προγράμματος των σπουδών της Γ΄ τάξης του Λυκείου. Το ενδιαφέρον του ερευνητή εστιάστηκε στη διδασκαλία του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και στη βοήθεια που μπορεί να πάρει ο εκπαιδευτικός από τη χρήση του λογισμικού Autograph. Είναι προφανές ότι ένα μεγάλο μέρος της προσοχής μας

θα πρέπει να συγκεντρωθεί και σε πιο στοιχειώδεις θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, όπως είναι η έννοια του ορίου, που εμπεριέχονται στο εννοιολογικό πεδίο του ορισμένου ολοκληρώματος.

Ο σκοπός της έρευνας αυτής είναι να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να αναζητήσει κατάλληλους και πρόσφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί ο εκπαιδευτικός να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες που παρέχονται αλλά και την πρόσθετη παιδαγωγική αξία παράγεται από τη χρήση του λογισμικού πακέτου Autograph 3.0 στην διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας. Το πλαίσιο μελέτης ήταν η θεωρία της ενοργάνωσης αναπτύχθηκε από τους Verillon & Rabardel στα πλαίσια της γνωστικής εργονομίας και της ανθρωπολογικής θεωρίας που ανέπτυξε ο Chevallard.

Στην έρευνα συμμετείχαν οι μαθητές της Θετικής και της Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης τριών Λυκείων οι οποίοι εργάστηκαν σε διμελείς ομάδες στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου τους.

Στην ανάλυση που ακολούθησε εξετάστηκαν η προσαρμογή των μαθητών στο λογισμικό, ο τρόπος που το ίδιο το λογισμικό αλλά και το διδακτικό συμβόλαιο καθορίζουν την οικοδόμηση σχημάτων από τους μαθητές και την ανάδυση του εργαλείου-οργάνου, η παραγωγή μαθηματικού νοήματος και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών, οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρέμβει ο διδάσκων σε επίπεδο του σχεδιασμού ή σε επίπεδο διδακτικής διαδικασίας και, τέλος, οι αλληλεπιδράσεις που παρατηρήθηκαν μεταξύ των παραγόντων της διδακτικής διαδικασίας.

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ AUTOGRAPH

Παλαιογιαννίδης Δημήτριος

Υποβλήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών
στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει
το Μαθηματικό Τμήμα

Αθήνα, Ελλάδα

Νοέμβριος, 2007

© Παλαιογιαννίδης Δημήτριος, 2007

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στόχος της έρευνας είναι να εξετάσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί ο καθηγητής των μαθηματικών στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και ειδικότερα ο καθηγητής του Λυκείου, να προσεγγίσει διδακτικά με τη βοήθεια των νέων ψηφιακών τεχνολογιών σημαντικές για τους μαθητές του έννοιες του αναλυτικού προγράμματος των σπουδών της Γ΄ τάξης του Λυκείου. Ειδικότερα επιχειρείται να διερευνηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να αναζητηθούν κατάλληλοι και πρόσφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί ο εκπαιδευτικός να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες που του παρέχονται, αλλά και την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από τη χρήση του λογισμικού πακέτου Autograph 3.0 στην διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας στο πλαίσιο της θεωρίας της ενοργάνωσης που αναπτύχθηκε από τους Verillon & Rabardel.

Η εργασία αποτελείται από δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος επιχειρείται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού από τον Εύδοξο και τον Αρχιμήδη μέχρι τις μέρες μας. Το δεύτερο μέρος είναι η κυρίως έρευνα και αποτελείται από πέντε κεφάλαια: Το Πρόβλημα, Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας, Μέθοδος, Αποτελέσματα και Συμπεράσματα.

Στο τέλος υπάρχουν δύο παραρτήματα στα οποία παρατίθενται τα φύλλα εργασίας με τα οποία εργάστηκαν οι μαθητές.

Ευχαριστώ τους διευθυντές, τους διδάσκοντες καθηγητές αλλά και τους μαθητές των τριών σχολείων που συμμετείχαν στην έρευνα. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα πρέπει να εκφράσω στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χρόνη Κυνηγό για την υπομονή που επέδειξε και την βοήθεια που μου προσέφερε, στην κ. Φαρμάκη και τον κ. Ζαχαριάδη που με τίμησαν με το να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής, στη συνάδελφο και συμφοιτήτρια στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα κ. Αργυρώ Παπαδοπούλου για τη συμμετοχή της ως παρατηρήτρια στην ερευνητική διαδικασία και, ιδιαίτερα, στον συνάδελφο κ. Κώστα Γαβρίλη για την πολύτιμες παρατηρήσεις του στο σχεδιασμό αλλά και τη βοήθειά του στην πρώτη διεξαγωγή της έρευνας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ…… xi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ..... xii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ…… xv
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ…… xvii
ΜΕΡΟΣ 1^{ο} : ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ……... 1
Το γνωστικό αντικείμενο……..... 3
Η εξέλιξη της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος……..... 3
Οι απαρχές του ολοκληρωτικού λογισμού……... 3
Η μέθοδος της εξάντλησης του Ευδόξου…….. 4
Ο τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου από τον Αρχιμήδη……..... 6
Η συμβολή των Αράβων……... 13
Η εξέλιξη από τον 17^{ο} μέχρι τον 19^{ο} αιώνα…….. 15
Ο Ολοκληρωτικός Λογισμός στον 20^{ο} αιώνα……... 35

ΜΕΡΟΣ 2^{Ο} : Η ΕΡΕΥΝΑ…… 37
Ι. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ…… 39
Περίληψη…….....
Εισαγωγή……..... 39
Διατύπωση του προβλήματος…….. 39
Σκοπός της έρευνας…….. 43
Τα ερευνητικά ερωτήματα……... 44
Αναγκαιότητα και σημαντικότητα της έρευνας……... 44
Οριοθέτηση της έρευνας…….. 45
ΙΙ. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ…….. 47
Περίληψη……. 47
Εισαγωγή…….. 47
Θεωρητικό πλαίσιο…….. 48
Οι γνωστικές και κοινωνικές θεωρίες για τη μάθηση των Μαθηματικών 48
Από την Γενετική Επιστημολογία του Piaget στον Κοινωνικό Κονστρουκτιβισμό…….. 48
Οι αναπαραστάσεις και τα τεχνουργήματα (artifacts)…… 53
Η θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων του Brousseau……... 56
Το διδακτικό συμβόλαιο……. 57
Καταστάσεις προβλήματος……. 58
Η μάθηση των Μαθηματικών……. 60
Οι ψηφιακές τεχνολογίες στην Εκπαίδευση……. 62
Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στην Εκπαίδευση…… 62
Εκπαιδευτικά λογισμικά……. 76
Τα Computer Algebra Systems (CAS)……... 80
Το Διερευνητικό Λογισμικό Autograph……. 82
Μια σύντομη παρουσίαση……. 82
Μπορεί το Autograph να θεωρηθεί ως CAS;…… 86
Ποια είναι τα εναλλακτικά λογισμικά;……. 87
Η θεωρία της ενοργανωμένης δραστηριότητας…… 88
Η διαλεκτική μεταξύ εννοιολογικής κατανόησης και τεχνικής εργασίας 94

ΙΙΙ. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ…… 97
Περίληψη……. 97
Εισαγωγή…….. 97
Η διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας……... 97
Οι παραδοχές της έρευνας……... 100
Μέσα συλλογής δεδομένων……. 101
Επεξεργασία των δεδομένων……... 101
IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ…….. 103
Περίληψη……. 103
Εισαγωγή……..... 103
Αποτελέσματα……..... 104
Η χρήση του λογισμικού……... 104
Η προσαρμογή στο λογισμικό……. 104
Οι περιορισμοί που επιβάλλει το λογισμικό……... 107
Το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα…… 107
Το άθροισμα Riemann…….. 110
Η διαμέριση……... 111
Οι προσεγγίσεις……. 111
Το διδακτικό συμβόλαιο, η επίδρασή του στην στρατηγική που επιλέγεται και τα σχήματα που δομούνται…… 114
Η ανάδυση του οργάνου……... 117
Η παραγωγή μαθηματικού νοήματος…… 121
Οι ευκαιρίες που παρέχει το λογισμικό…….. 121
Το όριο…….. 121
Η δυσκολία στην αναγνώριση της έννοιας του ορίου…… 123
Το όριο και οι τιμές της ακολουθίας……... 129
Το κριτήριο παρεμβολής……... 137
Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδό παραβολικού χωρίου…… 141
Η εκμετάλλευση των περιορισμών που επιβάλλει το λογισμικό…… 142
Η εξαγωγή και διατύπωση κανόνα……... 144
Η δυσκολία στη μετάβαση στο περιβάλλον «χαρτί – μολύβι»……. 149
Η πεποίθηση ότι τα ορθογώνια είναι ίσα…… 150
Ο υπολογισμός του εμβαδού του τυχαίου ορθογωνίου…….. 152
Ο υπολογισμός της βάσης……. 152
Ο υπολογισμός του ύψους……. 154
Η συνεργασία…… 159
Η αλληλεπίδραση στο πλαίσιο της ομάδας……. 160
Οι ρόλοι των μελών της ομάδας……... 160
Η εναλλαγή ρόλων…… 161
Η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδων…….. 163
Η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδας και διδάσκοντος……... 164
V. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ…… 169
Περίληψη……. 169
Συμπεράσματα……. 169
Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση……. 176
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν κατά τις δυο πρώτες εφαρμογές της έρευνας……. 179

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν κατά την τρίτη διεξαγωγή της έρευνας για την έρευνα – διδακτική πρόταση……. 187
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ…….. 197

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 :	Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ υπερβαίνει το ήμισυ του εμβαδού του παραβολικού χωρίου……	8
Σχήμα 2 :	Ο τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου…….	9
Σχήμα 3 :	Η μέθοδος εγγραφής ορθογωνίων……..	12
Σχήμα 4 :	Το στερεό εκ περιστροφής.....	13
Σχήμα 5:	Το ορθογώνιο από το οποίο προκύπτει ο αναδρομικός τύπος……...	14
Σχήμα 6 :	Η μέθοδος της εξάντλησης του Stevin για την εύρεση του κέντρου βάρους του τριγώνου…….	16
Σχήμα 7 :	Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ταχύτητας-χρόνου ισούται με το διανυθέν διάστημα……...	17
Σχήμα 8 :	Υπολογισμός εμβαδού έλλειψης……	18
Σχήμα 9 :	Ο υπολογισμός του $\int_0^a xdx$ …….	21
Σχήμα 10:	Ο υπολογισμός του $\int_0^a x^2dx$ ……...	22
Σχήμα 11:	Ο υπολογισμός των αθροισμάτων $\sum_{B}^{A} x^k$ ……...	23
Σχήμα 12:	Ο υπολογισμός των αθροισμάτων $\sum_{B}^{A} x^k$ ……...	24
Σχήμα 13:	Η νέα μέθοδος……	24
Σχήμα 14:	Ο υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου από τον Wallis….	27
Σχήμα 15:	Το χαρακτηριστικό τρίγωνο……...	29
Σχήμα 16:	Τετραγωνισμός καμπύλης από τον Νεύτωνα…….	31
Σχήμα 17:	Το σχήμα της απόδειξης του Pascal……...	32
Σχήμα 18:	Το χαρακτηριστικό τρίγωνο του Leibniz……...	33

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Διάγραμμα 1: Μοντέλο του συνεχούς γνώσης και δεξιοτήτων που απαιτούνται στη χρήση των νέων τεχνολογιών…… 75

Διάγραμμα 2: Ο διαμεσολαβητικός ρόλος του οργάνου στην αλληλεπίδραση υποκειμένου-αντικειμένου…….. 90

Διάγραμμα 3: Μοντέλο αλληλεπιδραστικής επικοινωνίας δυο υποκειμένων με τη διαμεσολάβηση σημειολογικού οργάνου……. 92

Διάγραμμα 4: Η ενοργανωτική γένεση……...……. 119

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Παράδειγμα 1: Μια σελίδα 1D του λογισμικού Autograph…….. 83
Παράδειγμα 2: Μια σελίδα 2D του λογισμικού Autograph…….. 84
Παράδειγμα 3: Μια σελίδα 3D του λογισμικού Autograph…….. 86

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1:	Η επιλογή Rectangle (-) στο [-10, 10]……	109
Εικόνα 2:	Το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα στο [0, 10]…...	110
Εικόνα 3:	Το εμβαδόν είναι 99,99… και τείνει στο 100…….	122
Εικόνα 4:	Η εξήγηση με ορολογία ανάλυσης……..	124
Εικόνα 5:	Η στρατηγική της ικανοποιητικής τιμής……..	130
Εικόνα 6:	Το όριο της αύξουσας ακολουθίας εμβαδών……...	131
Εικόνα 7:	Οι τιμές της ακολουθίας δεν μπορούν να υπερβούν το όριο……...	133
Εικόνα 8:	Η γεωμετρική εποπτεία……	134
Εικόνα 9:	Για να υπάρχει όριο πρέπει η ακολουθία να είναι τελικά σταθερή……	135
Εικόνα 10:	Από ένα σημείο και μετά οι τιμές της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων ταυτίζονται με το εμβαδόν του χωρίου……	135
Εικόνα 11:	Το εμβαδόν του χωρίου είναι μεταβαλλόμενο μέγεθος...	136
Εικόνα 12:	Ο κανόνας είναι η χρήση ορισμένου ολοκληρώματος…	145
Εικόνα 13:	Ο κανόνας του ορισμένου ολοκληρώματος…….	146
Εικόνα 14:	Η μετατροπή του παραβολικού χωρίου σε τριγωνικό….	147
Εικόνα 15:	Το παραβολικό χωρίο και το τρίγωνο……..	147
Εικόνα 16:	Ο κανόνας για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου……	148
Εικόνα 17:	Ο λεπτομερής κανόνας…….	149
Εικόνα 18:	Το λάθος στον υπολογισμό του ύψους του τελευταίου ορθογωνίου……...	157
Εικόνα 19:	Η απόδειξη……...	159

ΜΕΡΟΣ 1ο

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

ΣΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Το γνωστικό αντικείμενο

Το γνωστικό αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά Riemann) και ακριβέστερα ο ορισμός του. Η μελέτη των δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας άπτεται και της γνώσης της ίδιας της έννοιας καθώς και της ιστορικής της εξέλιξης. Η αφετηρία λοιπόν της έρευνας, που αποτελεί και το πρώτο μέρος της, δεν μπορεί παρά να είναι μια σύντομη ιστορική αναδρομή της ανάδειξης και της εξέλιξης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

Η εξέλιξη της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος

⊣ Οι απαρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού ⊢

Οι απαρχές του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα πρέπει να αναζητηθούν στους γεωμετρικούς υπολογισμούς εμβαδών και όγκων κατά την αρχαιότητα. Είναι γνωστό ότι οι Αιγύπτιοι μπορούσαν να υπολογίσουν το εμβαδόν επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων. Έκοβαν το σχήμα σε τρίγωνα τα οποία αναδιέτασσαν με τρόπο ώστε να δημιουργήσουν ορθογώνια των οποίων γνώριζαν να υπολογίζουν εμβαδόν. Οι Βαβυλώνιοι εξάλλου είχαν αναπτύξει εμπειρικές μεθόδους για τον υπολογισμό εμβαδών τριγώνων και τραπεζοειδών και όγκων κυλίνδρων και πρισμάτων (Νεγρεπόντης κ.α. 1999). Όλα αυτά τα σημαντικά επιτεύγματα όμως ήταν εμπειρικά. Σε κανένα σημείο δεν φαίνεται να υπάρχει αντίληψη της διαφοράς προσεγγιστικού και ακριβούς υπολογισμού. Όπως επίσης δεν εμφανίζεται πουθενά έστω και υποτυπώδης απόδειξη ή έστω προσπάθεια αιτιολόγησης. Τα μαθηματικά της εποχής ήταν χρηστικά. Αρκούσε ο προσεγγιστικός υπολογισμός του εμβαδού ή του όγκου. Δεν υπήρχε προβληματισμός σχετικά με το αν η προσέγγιση είναι ικανοποιητική ή γιατί είναι ικανοποιητική. Η έννοια της αιτιολόγησης και της αυστηρής απόδειξης εισάγεται από τους Έλληνες στοχαστές και μαθηματικούς. Η πρώτη απόδειξη αποδίδεται στο Θαλή το Μιλήσιο γύρω στο 600 π.Χ. Αυτή είναι και η αρχή της Μαθηματικής Επιστήμης που άκμασε στην αρχαία Ελλάδα.

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, το ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα, είναι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Είναι γνωστή η προσπάθεια του Ιπποκράτη του Χίου να τετραγωνίσει

κυκλικούς μηνίσκους, προσπάθεια που εντάσσεται στο πλαίσιο αυτό και έχει προφανή στόχο τον τετραγωνισμό του κύκλου. Είναι επίσης γνωστό ότι από την εποχή ακόμα των Πυθαγορείων ήταν γνωστή η μέθοδος τετραγωνισμού ευθύγραμμων χωρίων μια και η μέθοδος περιέχεται στο δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη το οποίο αποδίδεται στους Πυθαγόρειους. Φαίνεται λοιπόν ότι η προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου και άλλων καμπυλόγραμμων χωρίων, όπως το παραβολικό, εντάσσεται σε ένα πλαίσιο γενίκευσης των όσων οι αρχαίοι γνώριζαν σχετικά με τον τετραγωνισμό ευθύγραμμων σχημάτων. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι οι αρχαίοι Έλληνες διαισθητικά αποδέχονταν ότι το εμβαδόν ενός καμπυλόγραμμου χωρίου ήταν μέγεθος του ίδιου τύπου με το εμβαδόν ενός ευθύγραμμου χωρίου (Γιαννακούλιας, 2005).

Οι αρχαίοι Έλληνες δέχονταν επίσης ότι για τον υπολογισμό των εμβαδών επίπεδων χωρίων οποιουδήποτε είδους ισχύουν οι εξής δυο θεμελιώδεις ιδιότητες των εμβαδών:

α) Αν το σχήμα Α περιέχεται στο Β, τότε Εμβ(Α)<Εμβ(Β) και

β) Αν το χωρίο Α χωρίζεται στα Β και Γ, τότε Εμβ(Α)=Εμβ(Β)+Εμβ(Γ).

Αυτά είναι τα στοιχεία στα οποία στηρίχτηκε ο Εύδοξος για να αναπτύξει τη μέθοδό του για τον υπολογισμό εμβαδών.

⊣ Η μέθοδος της εξάντλησης του Ευδόξου ⊢

Κορυφαίος μαθηματικός της κλασσικής περιόδου θεωρείται ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.) που έζησε και έδρασε στην Αθήνα και ήταν μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Στον Εύδοξο οφείλουμε τη μέθοδο της εξάντλησης η οποία αποτελεί τη βάση του ορισμού του ολοκληρώματος κατά Riemann. Η μέθοδος στηρίζεται στην πρόταση Χ.1 των στοιχείων του Ευκλείδη:

> Πρόταση Χ.1: Δοθέντων δυο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέρος του μεγαλύτερο του μισού και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί και πάλι μέρος του μεγαλύτερο του μισού και αυτό γίνεται συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο από το μικρότερο από τα δυο μεγέθη.

Η μέθοδος της εξάντλησης συνίσταται στο να φράξουμε το χωρίο άνω και κάτω με δύο ακολουθίες εμβαδών. Η μία ακολουθία είναι αύξουσα με εγγεγραμμένα στο χωρίο σχήματα ενώ η άλλη είναι φθίνουσα με περιγεγραμμένα σχήματα . Η ζητούμενη τιμή του εμβαδού του σχήματος Α βρίσκεται μεταξύ των τιμών των εμβαδών αυτών και επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι ισούται με την γνωστή τιμή Ε. Ουσιαστικά η ιδέα αυτή αντικατοπτρίζει στην σημερινή ορολογία την έννοια του ορίου, οπότε το Α βρίσκεται σαν το όριο της μιας ή της άλλης ακολουθίας. Με την τιμή Ε γνωστή το χαρακτηριστικό της μεθόδου της εξάντλησης ήταν η χρήση της ιδιότητας του Αρχιμήδους – Ευδόξου οδηγώντας την απόδειξη σε μία διπλή απαγωγή σε άτοπο.

Ας επιχειρήσουμε να δούμε πως θα μπορούσε να εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή.

Υποθέτουμε αρχικά ότι το εμβαδόν του σχήματος Α είναι ίσο με S. Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το S. Βρίσκουμε αρχικά δυο σχήματα Β, Γ με εμβαδά Β0 και Γ0 αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{B}_0 < S < \Gamma_0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε δυο ακόμα σχήματα με εμβαδά B_1, Γ_1 ώστε $\mathrm{B}_1 < S < \Gamma_1$ με $\Gamma_1 - \mathrm{B}_1 < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2}$. Συνεχίζουμε βρίσκοντας δυο ακόμα σχήματα με εμβαδά B_2 και Γ_2 ώστε $\mathrm{B}_2 < S < \Gamma_2$ με $\Gamma_2 - \mathrm{B}_2 < \frac{\Gamma_1 - \mathrm{B}_1}{2}$, κοκ.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\Gamma_n - \mathrm{B}_n < \varepsilon$.

Σύμφωνα με την αρχή Αρχιμήδους-Ευδόξου για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(n+1)\varepsilon > \Gamma_0 - \mathrm{B}_0$. Τότε $\frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{n+1} < \varepsilon$.

Αλλά μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε επαγωγικά ότι $2^n > n+1$, οπότε $\frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^n} < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{n+1} < \varepsilon$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\Gamma_n - \mathrm{B}_n < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^n}$.

Παρατηρούμε ότι η σχέση ισχύει για $\mathrm{n}=1$, αφού $\Gamma_1 - \mathrm{B}_1 < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2}$.

Δεχόμαστε ότι ισχύει για n=k. Δηλαδή ότι $\Gamma_\kappa - \mathrm{B}_\kappa < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^\kappa}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n=k+1. Δηλαδή $\Gamma_{\kappa+1} - \mathrm{B}_{\kappa+1} < \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^{\kappa+1}}$.

Πραγματικά $\Gamma_{\kappa+1} - \mathrm{B}_{\kappa+1} < \frac{\Gamma_\kappa - \mathrm{B}_\kappa}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^\kappa} = \frac{\Gamma_0 - \mathrm{B}_0}{2^{\kappa+1}}$.

Άρα, πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\Gamma_n - \mathrm{B}_n < \varepsilon$.

Το δεύτερο βήμα της διαδικασίας συνίσταται στην ανάπτυξη μιας εικασίας για το ζητούμενο εμβαδόν. Ο Αρχιμήδης, έναν περίπου αιώνα αργότερα, στο βήμα αυτό χρησιμοποιούσε τη μηχανική του μέθοδο για τον προσδιορισμό του εμβαδού. Έστω λοιπόν ότι εικάζουμε πως το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε. Δηλαδή έστω Ε ώστε $\mathrm{B}_n \le E \le \Gamma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Στο τρίτο στάδιο της διαδικασίας αποδεικνύουμε ότι $S = E$.

Έστω S>E. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{S-E}{2}$. Τότε, από το πρώτο στάδιο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\Gamma_n - \mathrm{B}_n < \varepsilon$. Από το δεύτερο στάδιο όμως έχουμε: $S - E < \Gamma_n - \mathrm{B}_n$. Επίσης $0 < S - E$. Άρα $0 < S - E < \Gamma_n - \mathrm{B}_n < \frac{S-E}{2}$, άτοπο.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $S < E$. Άρα $S = E$.

Το πρόβλημα με τη μέθοδο της εξάντλησης είναι, όπως γίνεται φανερό από το δεύτερο βήμα, ότι για να εφαρμοστεί θα πρέπει το εμβαδόν να είναι γνωστό. Αποτελεί δηλαδή μια αποδεικτική αλλά μη ευρετική μέθοδο.

⊣ Ο τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου από τον Αρχιμήδη ⊢

Ο κορυφαίος ίσως μαθηματικός της αρχαιότητας και ένα από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς στην ιστορία της ανθρωπότητας είναι ο Αρχιμήδης. Έζησε έναν περίπου αιώνα μετά τον Εύδοξο (287-212 π.Χ.) και εκμεταλλεύτηκε κατά κόρον τη μέθοδο της εξάντλησης. Έδωσε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης της μεθόδου με τον υπολογισμό του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου (αυτό που με σύγχρονο συμβολισμό εκφράζεται ως $\int_0^1 x^2 dx$ και του οποίου η διδασκαλία αποτελεί το

αντικείμενο έρευνας της παρούσας διπλωματικής εργασίας). Η πρόταση για τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που αποδεικνύει ο Αρχιμήδης είναι η εξής (Χριστιανίδης, 2003):

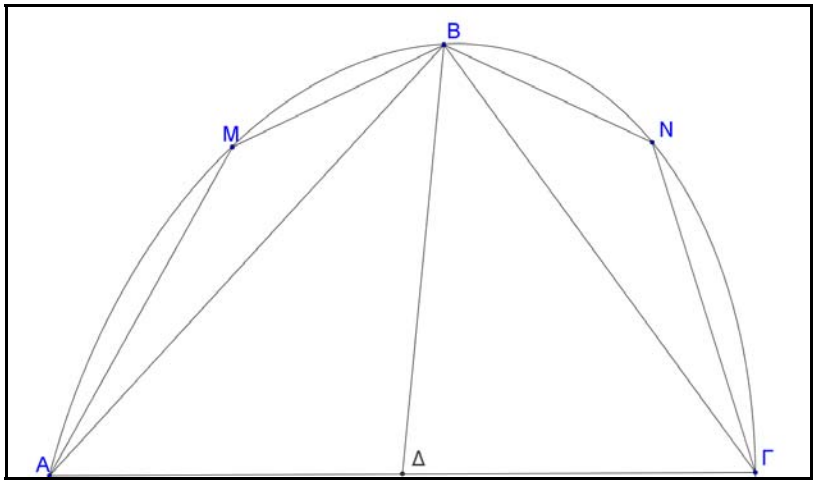
> Πρόταση 1: Έστω το τμήμα ΑΒΓ, το περιεχόμενο υπό της ευθείας ΑΓ και της παραβολής ΑΒΓ. Ας τμηθεί η ΑΓ στο μέσον, στο [σημείο] Δ, ας αχθεί η ΔΒΕ παράλληλη προς τη διάμετρο και ας αχθούν οι ΑΒ, ΒΓ. Λέγω ότι το τμήμα ΑΒΓ είναι ένα και ένα τρίτο του τριγώνου ΑΒΓ

Για τις ανάγκες των υπολογισμών του επαναδιατύπωσε τη μέθοδο της εξάντλησης ως εξής: «*Για μεγέθη συγκρίσιμα μεταξύ τους δεχόμαστε ότι καθένα από αυτά πολλαπλασιαζόμενο με κάποιο αριθμό μπορεί να υπερβεί το άλλο*». Πρόκειται για τον όρο (ορισμό) V.4 στα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδη και είναι ακριβώς η πρόταση που αποκαλούμε σήμερα ιδιότητα Αρχιμήδους-Ευδόξου.

Ο Αρχιμήδης έδωσε δυο αυστηρές αποδείξεις της πρότασης που αφορά το εμβαδό του παραβολικού χωρίου. Μια μηχανική (ευρετική) και μια γεωμετρική (Van der Waerden, 2003; Χριστιανίδης, 2003). Αυτό ήταν κάτι που έκανε συστηματικά ο Αρχιμήδης και πήγαζε από την αναγκαιότητα να ξεπεραστεί το μειονέκτημα της μεθόδου της εξάντλησης που προαναφέρθηκε. Η μέθοδος ήταν μια «στείρα» μέθοδος με την έννοια ότι δεν παρήγαγε η ίδια αποτελέσματα αλλά απλά χρησίμευε στην απόδειξη της ορθότητας αποτελεσμάτων τα οποία είχαν ανακαλυφθεί με άλλους τρόπους. Κατά τους Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο και Γιαννακούλια (1999) ο Αρχιμήδης έδωσε τρεις διαφορετικές αποδείξεις της πρότασης. Μια διαισθητική (η μηχανική) και δυο γεωμετρικές. Στη μηχανική απόδειξη στο έργο του '*Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος*' στην οποία ο παραγωγικός συλλογισμός είναι ουσιαστικά ο ίδιος όπως στη «*Μέθοδο*». Το στοιχείο που προστίθεται και την καθιστά αυστηρή μαθηματική απόδειξη είναι η χρήση της μεθόδου της εξάντλησης για την απόδειξη των διαισθητικών αποτελεσμάτων (Van der Waerden, 2003). Οι δυο γεωμετρικές αποδείξεις περιέχονται στο έργο του '*Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*' (πιο γνωστής ως '*Τετραγωνισμός παραβολής*') και συνίστανται στην εγγραφή πολυγώνων στο χωρίο. Στην πρώτη απόδειξη εγγράφει στο χωρίο τρίγωνα και στη δεύτερη ορθογώνια. Αξιοσημείωτο είναι ότι στην πρώτη απόδειξη σε αντίθεση με τα άλλα έργα του χρησιμοποιεί μόνο εγγραφή και όχι περιγραφή τριγώνων. Στην απόδειξη αυτή αναφέρονται μεταξύ άλλων και οι Νεγρεπόντης κ.α. (1999), Heath

(2001, 2002), Van der Waerden (2003) και Χριστιανίδης (2003). Η πορεία της απόδειξης είναι η εξής:

Η βασική ιδέα (Χριστιανίδης, 2003) είναι η χρήση της μεθόδου της εξάντλησης. Αν από το παραβολικό χωρίο αφαιρέσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 1), που είναι περισσότερο από το μισό του, στη συνέχεια από τα δυο χωρία που απομένουν αφαιρέσουμε τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΝΓ, δηλαδή και πάλι περισσότερο από το μισό τους, και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται, τότε το παραβολικό χωρίο θα «εξαντλείται» συνεχώς με αποτέλεσμα να απομείνει τελικά επιφάνεια 'όσο μικρή θέλουμε', δηλαδή μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη επιφάνεια. Ας σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι τα σημεία Β, Μ και Ν δεν είναι τυχαία. Το Β είναι η κορυφή του παραβολικού τμήματος ΑΒΓ, το Μ είναι η κορυφή του ΑΜΒ και το Ν η κορυφή του ΒΝΓ (ως κορυφή ενός παραβολικού τμήματος ο Αρχιμήδης ορίζει το σημείο του που

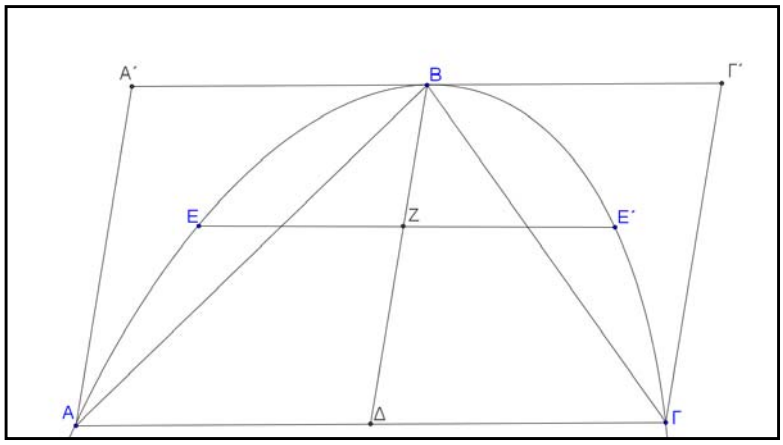


Σχήμα 1: Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ υπερβαίνει το ήμισυ του εμβαδού του παραβολικού χωρίου

απέχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση).

Στην πρώτη φάση της απόδειξης λοιπόν ο Αρχιμήδης επικεντρώνεται στο να αποδείξει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του χωρίου (πρόταση 20). Με σύγχρονο συμβολισμό αν S είναι το εμβαδό του χωρίου και $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)$ είναι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right) > \frac{1}{2}S$. Για να καταφέρει να αποδείξει τη σχέση αυτή ο Αρχιμήδης φέρνει από τα σημεία Α και Γ τις παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής (για τον οποίο γνωρίζει ότι είναι

παράλληλος προς την ΒΔ, όπου Δ το μέσο της βάσης ΑΓ) που τέμνουν την εφαπτόμενη της παραβολής στην κορυφή της Β στα σημεία Α΄ και Γ΄ αντίστοιχα (σχήμα 2). Το τετράπλευρο ΑΑ΄Γ΄Γ προφανώς είναι παραλληλόγραμμο (Σε πρόταση



Σχήμα 2: Ο τετραγωνισμός παραβολικού χωρίου

που προηγείται ο Αρχιμήδης έχει αποδείξει ότι η εφαπτόμενη στην κορυφή της παραβολής είναι παράλληλη προς τη βάση της ΑΓ). Έτσι $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)=\frac{1}{2}\left(\text{ΑΑ΄Γ΄Γ}\right)$ και

$\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)<S<\left(\text{ΑΑ΄Γ΄Γ}\right)$. Άρα $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)>\frac{1}{2}S$.

Στη συνέχεια αποδεικνύει (πρόταση 21) ότι $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)=8\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΜΒ}}\right)=8\left(\overset{\Delta}{\text{ΓΝΒ}}\right)$. Έτσι γνωρίζει πια ότι $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΜΒ}}\right)+\left(\overset{\Delta}{\text{ΓΝΒ}}\right)=\frac{1}{4}\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)$.

Τώρα μπορεί πια είναι σε θέση να εφαρμόσει τη μέθοδο της εξάντλησης. Ακολουθεί μια διαδικασία πέντε βημάτων.

Βήμα $1^{\text{ο}}$: Εγγράφει στο παραβολικό χωρίο το τρίγωνο ΑΒΓ που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το παραβολικό τμήμα ΑΒΓ.

Βήμα $2^{\text{ο}}$: Στα παραβολικά τμήματα ΑΜΒ και ΒΝΓ που απέμειναν εγγράφει τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΒΝΓ αντίστοιχα με βάσεις και ύψη τις βάσεις και τα ύψη των παραβολικών τμημάτων.

Βήμα $3^{\text{ο}}$: Επαναλαμβάνει τη διαδικασία για τα παραβολικά τμήματα που έχουν απομείνει (οπότε δημιουργούνται 4 τρίγωνα).

Βήμα 4° : Επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία για τα παραβολικά τμήματα που έχουν και πάλι απομείνει (8 τρίγωνα).

Βήμα 5° : Επαναλαμβάνει τη διαδικασία για τα εναπομείναντα παραβολικά χωρία (16 τρίγωνα).

Για λόγους ευκολίας ας ονομάσουμε E το εμβαδόν $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)$, E_1 το άθροισμα $\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΜΒ}}\right)+\left(\overset{\Delta}{\text{ΓΝΒ}}\right)$ των εμβαδών των τριγώνων που εγγράφει στο δεύτερο βήμα, και E_2, E_3 και E_4 το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων, οκτώ και δεκαέξι αντίστοιχα τριγώνων που εγγράφονται στα παραβολικά χωρία στο τρίτο, τέταρτο και πέμπτο βήμα αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν την εξής κατάσταση:

$E_1 = \frac{1}{4}E$ (στο δεύτερο βήμα)

$E_2 = \frac{1}{4}E_1$ (στο τρίτο βήμα)

$E_3 = \frac{1}{4}E_2$ (στο τέταρτο βήμα) και

$E_4 = \frac{1}{4}E_3$ (στο πέμπτο βήμα).

Το ζητούμενο επομένως είναι να υπολογιστεί το άθροισμα $E + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. Στο σημείο αυτό καλό θα ήταν να σχολιαστεί ότι με μια σύγχρονη μαθηματική οπτική τα πράγματα είναι εύκολα. Η άπειρη επανάληψη της διαδικασίας μας οδηγεί σε ένα άπειρο άθροισμα και μέσα από αυτό σε ένα όριο (πρόκειται για το άθροισμα των άπειρων όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου). Σήμερα ο υπολογισμός ενός ορίου θα έδινε τη λύση στο πρόβλημα. Ο Αρχιμήδης όμως δεν διέθετε αυτού του είδους τη γνώση. Έτσι αρκείται στον υπολογισμό του παραπάνω μερικού αθροίσματος. Αποδεικνύει (πρόταση 23) ότι αν το άθροισμα αυτό αυξηθεί κατά το 1/3 του τελευταίου όρου , θα ισούται ακριβώς με τα 4/3 του πρώτου όρου. Δηλαδή αποδεικνύει ότι $E + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \frac{1}{3}E_4 = \frac{4}{3}E$.

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι γιατί ο Αρχιμήδης δεν προχωράει και σε άλλα βήματα αλλά σταματάει στο βήμα αυτό και χρησιμοποιεί το μερικό άθροισμα. Είναι προφανές από το συλλογισμό μέχρι το σημείο αυτό αλλά και την αναδιατύπωση της μεθόδου της εξάντλησης ότι κατανοεί πως αν κάνει ακόμα ένα βήμα και πάρει και το επόμενο μερικό άθροισμα, τότε το άθροισμα αυτό θα διαφέρει από το σταθερό $\frac{4}{3}\mathrm{E}$ κατά ένα μέγεθος $\frac{1}{3}\mathrm{E}_5$ που είναι μικρότερο από το $\frac{1}{3}\mathrm{E}_4$. Και αυτό μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον. Κατανοεί δηλαδή ότι, με τη σημερινή εψιλοντική ορολογία, για κάθε θετικό αριθμό ε μπορούμε να βρούμε ένα μερικό άθροισμα το οποίο να διαφέρει από το $\frac{4}{3}\mathrm{E}$ κατά ένα μέγεθος μικρότερο του ε. Αυτό όμως σημαίνει ότι το άπειρο άθροισμα ισούται με $\frac{4}{3}\mathrm{E}$ (Χριστιανίδης, 2003, σελ. 144).

Έχει λοιπόν πια ανακαλύψει ποιο είναι το ζητούμενο εμβαδόν. Μένει να το αποδείξει. Προφανώς δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει οριακές διαδικασίες. Ακολουθεί λοιπόν η τρίτη φάση της μεθόδου της εξάντλησης με την διπλή απαγωγή σε άτοπο όπως περιγράφηκε παραπάνω.

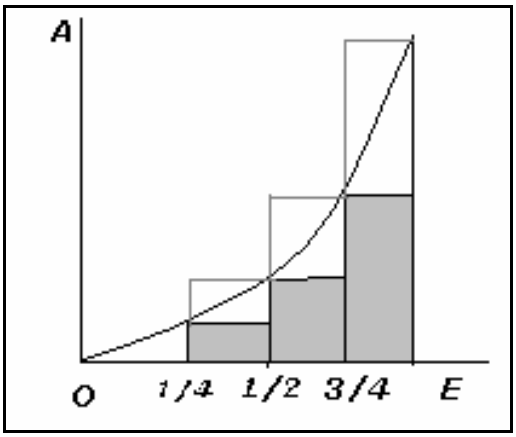
Ο στόχος είναι να αποδείξει ότι $S = \frac{4}{3}\mathrm{E}$.

Υποθέτει αρχικά ότι $S > \frac{4}{3}\mathrm{E}$. Τότε θα ισχύει και ότι $\mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4 > \frac{4}{3}\mathrm{E}$ αφού το άθροισμα $\mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4$ διαφέρει από το χωρίο κατά μια οσονδήποτε μικρή ποσότητα, οπότε δεν μπορεί παρά και αυτό να είναι μεγαλύτερο από το μέγεθος $\frac{4}{3}\mathrm{E}$. Άρα φτάσαμε σε αντίφαση αφού $\mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4 + \frac{1}{3}\mathrm{E}_4 = \frac{4}{3}\mathrm{E}$ που σημαίνει ότι $\mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4 < \frac{4}{3}\mathrm{E}$.

Με ανάλογο συλλογισμό οδηγείται σε άτοπο αν $S < \frac{4}{3}\mathrm{E}$.

Άρα $S = \frac{4}{3}\mathrm{E}$.

Η δεύτερη απόδειξη περιέχει τη διαδικασία την οποία ουσιαστικά ακολουθεί ο Riemann στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 3:



Σχήμα 3: Η μέθοδος εγγραφής ορθογωνίων

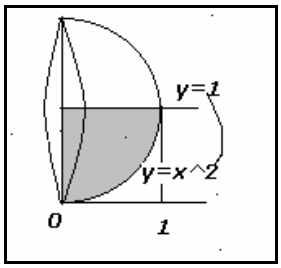
Στην απόδειξη αυτή ο Αρχιμήδης υπολογίζει το εμβαδόν S του χωρίου κάτω από την παραβολή με ΟΕ=1. Η απόδειξη αυτή δεν θα περιγραφεί με μεγάλη λεπτομέρεια. Απλά θα σκιαγραφηθεί η δομή της. Η πορεία της είναι αυτή που ακολουθούμε και σήμερα για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Διαιρεί λοιπόν πρώτα ο Αρχιμήδης το τμήμα ΟΕ σε 4 ίσα τμήματα μήκους 1/4. Ορίζονται έτσι το 'κάτω άθροισμα' β_4 και το 'άνω άθροισμα' α_4. Στη συνέχεια ακολουθούν βήματα για τον ορισμό των ακολουθιών (β_ν) και (α_ν) των κάτω και των άνω αθροισμάτων αντίστοιχα. Η διαφορά με τη μέθοδο που ακολουθούμε σήμερα εντοπίζεται στο τελείωμα της απόδειξης και οφείλεται στο γεγονός ότι, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ο Αρχιμήδης δεν κατείχε το ισχυρότατο εργαλείο που αποκαλούμε όριο. Έτσι καταφεύγει και πάλι στη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης. Αποδεικνύει ότι $\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\nu}$. Επομένως, σύμφωνα με την ιδιότητα Αρχιμήδους-Ευδόξου, η διαφορά $\beta_\nu - \alpha_\nu$ γίνεται αυθαίρετα μικρή καθώς το ν αυξάνεται. Άρα, με σύγχρονο συμβολισμό, $\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \frac{1}{3}$.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα στοιχεία στη μηχανική μέθοδο, η οποία δεν θα παρουσιαστεί, είναι η αποδόμηση των σχημάτων σε απειροστά και η επαναδόμησή τους σε «όλον». Θεωρεί ο Αρχιμήδης ότι '… *ένα επίπεδο σχήμα δομείται από «όλα» τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται με ορισμένη διεύθυνση και έχουν τα άκρα τους στην περιφέρεια του σχήματος. Ένα επίπεδο σχήμα, λοιπόν, μπορεί να αποδομηθεί σε*

τέτοιες παράλληλες χορδές με ορισμένα μήκη και να δομηθεί εκ νέου από αυτές. Το «άθροισμα» των ευθυγράμμων τμημάτων δίνει την επιφάνεια του σχήματος' (Χριστιανίδης, 2003). Αυτή η μετάβαση από το απειροστό μέρος σε ολόκληρη την ποσότητα είναι το βασικό βήμα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

⊣ Η συμβολή των Αράβων ⊢

Η μετά τον Αρχιμήδη εποχή για τα ελληνικά μαθηματικά δεν έχει να επιδείξει τίποτα σπουδαίο στο πεδίο αυτού που σήμερα ονομάζουμε Ολοκληρωτικό Λογισμό με την εξαίρεση του Διονυσόδωρου, ο οποίος υπολόγισε τον όγκο σπειροειδούς, και του Πάππου στα τέλη του $3^{ου}$ μ.Χ αιώνα (Γιαννακούλιας, 2005). Μετά την πτώση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας το ενδιαφέρον για τη μελέτη των μαθηματικών μεταφέρεται στην Ανατολή. Στο Βυζάντιο, στην Περσία, την Ινδία και στις Αραβικές χώρες. Στο διάστημα από τον $9^{ο}$ μέχρι και τον $12^{ο}$ αιώνα μ.Χ. οι Άραβες μετάφρασαν και μελέτησαν συστηματικά τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και κυρίως τον



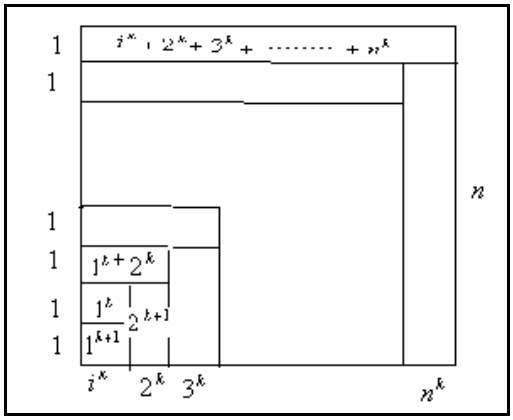
Σχήμα 4: Το στερεό εκ περιστροφής

Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Ένας σημαντικός Άραβας μαθηματικός και εκφραστής αυτής της τάσης ήταν ο Al-Haitham (965-1032 μ.Χ.), γνωστός σαν Alharen, που υπολόγισε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που ορίζεται από τις σχέσεις: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$ γύρω από τον άξονα ψ = 1 (σχήμα 4).

Ο όγκος αυτός υπολογίζεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_0^1 (1-x^2)^2\, dx = \pi\left(\int_0^1 1dx - 2\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx\right).$$

Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι τα δύο πρώτα ολοκληρώματα είναι τυπικά Αρχιμήδεια και υπολογίζονται εύκολα μια και δεν απαιτείται η γνώση κάποιου νέου στοιχείου. Το τρίτο όμως απαιτεί τη γνώση του υπολογισμού του αθροίσματος $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$ που όλα τα στοιχεία συνηγορούν ότι δεν ήταν γνωστός στον Αρχιμήδη. Ο Alharen υπολόγισε το άθροισμα αυτό, και κατά συνέπεια και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα, με τη βοήθεια ενός αναδρομικού τύπου στηριζόμενος στο σχήμα:



Σχήμα 5: Το ορθογώνιο από το οποίο προκύπτει ο αναδρομικός τύπος

Ο αναδρομικός τύπος, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα είναι:

$$\left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right)(n+1) =$$
$$\left(1^{k+1} + 2^{k+1} + \cdots + n^{k+1}\right) + 1^k + \left(1^k + 2^k\right) + \cdots + \left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right)$$

ή, με σύγχρονο συμβολισμό, $(n+1)\sum_{m=1}^{n} m^k = \sum_{m=1}^{n} m^{k+1} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} p^k$.

Ο τύπος αυτός για κ=0 δίνει: n(n+1)=(1+2+…+n)+1+2+…+(n-1)+n, δηλαδή

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Για κ=1 δίνει: $(1 + 2 + \cdots + n)(n+1) = \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} p =$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m^2 + m}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right).$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ο γνωστός τύπος $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Με τον ίδιο τρόπο με βάση τον αναδρομικό τύπο, αλλά με σαφώς αυξανόμενη πολυπλοκότητα όπως φαίνεται και από τις δυο πρώτες περιπτώσεις εφαρμογής του, μπορούν να υπολογιστούν όλα τα αθροίσματα αυτής της μορφής και κατά συνέπεια, με σύγχρονη ορολογία, τα αντίστοιχα ολοκληρώματα πολυωνυμικών συναρτήσεων.

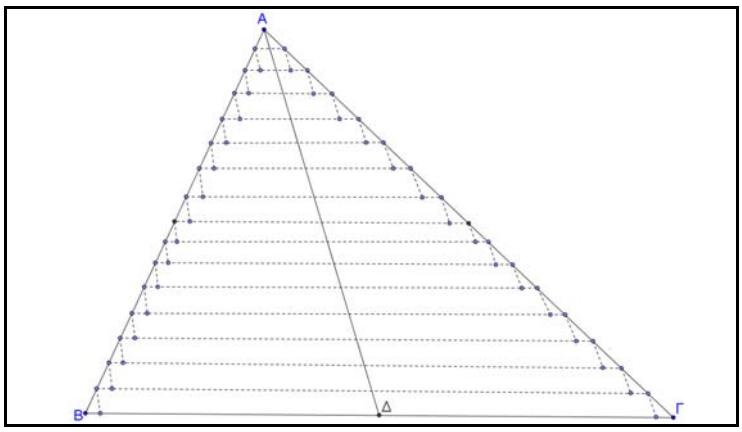
Την ίδια εποχή και μέχρι την κατάλυσή της δεν συμβαίνει τίποτα σημαντικό στο χώρο των μαθηματικών στο Βυζάντιο. Αντίθετα, στη Δυτική Ευρώπη αυτό είναι ένα διάστημα ζυμώσεων. Οι Ευρωπαίοι μέσα από τις αραβικές μεταφράσεις είτε από απευθείας μεταφράσεις των πρωτότυπων κειμένων στα Λατινικά γνωρίζουν το έργο των μεγαλύτερων Ελλήνων διανοητών της αρχαιότητας. Για τους μαθηματικούς αυτός ο φιλοσοφικός προβληματισμός αυτής της περιόδου έχει σημασία ως προβληματισμός στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών (Νεγρεπόντης κ.α., 1999). Ειδικότερα καθοριστική κρίνεται η πρώτη έκδοση των έργων του Αρχιμήδη με τα ελληνικά πρωτότυπα και βελτιωμένη μετάφραση που έγινε από τον Thomas Gechauff (Venatorius) το 1455 στη Βασιλεία της Ελβετίας. Κατά τους Νεγρεπόντη κ.α. (1999, σελ.202) *'Η μετάφραση των έργων του Αρχιμήδη στα Λατινικά είχε μια τεράστια επίδραση στη μαθηματική εξέλιξη της Ευρώπης σε δυο στάδια. … Σε πρώτο στάδιο προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθηματικών της εποχής και τη μελέτη, με τις μεθόδους του Αρχιμήδη, διαφόρων προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού εμβαδών και όγκων, και κέντρου βάρους.'* Σε δεύτερη φάση επηρέασε την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού από την αρχή του 17^{ου} αιώνα.

⊣ Η εξέλιξη από τον 17^{ο} μέχρι τον 19^{ο} αιώνα ⊢

Στο πλαίσιο του πρώτου σταδίου επίδρασης εντάσσονται η δουλειά του βέλγου μαθηματικού Simon Stevin και λίγο αργότερα του Γάλλου μαθηματικού Francois Viète. Ο Simon Stevin (1548-1620), επηρεασμένος από το έργο του Αρχιμήδη, χρησιμοποίησε μία μέθοδο εξάντλησης για τον προσδιορισμό του κέντρου βάρους τριγώνου. Απέδειξε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι χρησιμοποιεί μόνο εγγεγραμμένα στο τρίγωνο ορθογώνια όπως και ο Αρχιμήδης στον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου. Η βασική διαφορά της μεθόδου του Stevin με τη μέθοδο του Αρχιμήδη είναι ότι ενώ για τον Αρχιμήδη η διαφορά των δυο μεγεθών συνεχίζει πάντα να υπάρχει ως μέγεθος, αν και μπορεί να γίνει μικρότερη από

οποιοδήποτε άλλο ομοειδές μέγεθος, ο Stevin δέχεται (με σύγχρονη ορολογία) ότι στο άπειρο η διαφορά αυτή μηδενίζεται. Η μέθοδος που ακολούθησε ο Stevin προχωράει με τον εξής τρόπο:

Εγγράφει αρχικά στο τρίγωνο ισοϋψή παραλληλόγραμμα (σχήμα 6). Αξιοποιεί την αρχή του Αρχιμήδη ότι τα «*αμφιπλεύρως συμμετρικά σχήματα ισορροπούν*» για να ισχυριστεί ότι για κάθε εγγεγραμμένο σχήμα και για το τρίγωνο το κέντρο βάρους του βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΔ. Αν τώρα Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου και S_v το

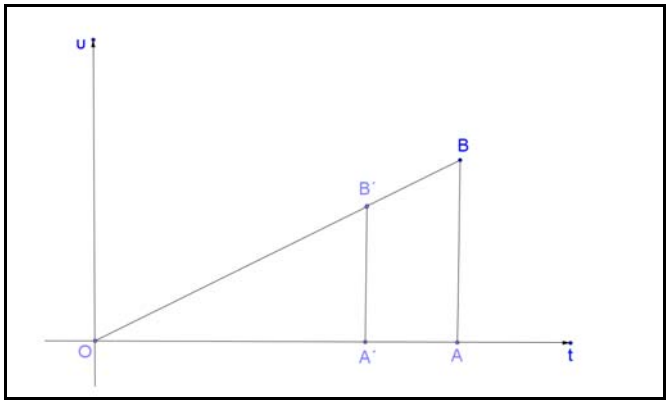


Σχήμα 6: Η μέθοδος της εξάντλησης του Stevin για την εύρεση του κέντρου βάρους του τριγώνου

άθροισμα των εμβαδών των εγγεγραμμένων ορθογωνίων, τότε καθώς το ν αυξάνεται η διαφορά $E-S_v$ μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων στο άπειρο ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου. Θεωρεί στη συνέχεια τα εμβαδά E_1 και E_2 των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ αντίστοιχα και αποδεικνύει ότι $E_1=E_2$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης. Υποθέτει ότι $E_1>E_2$ και θέτει $E_1-E_2=\varepsilon$. Στη συνέχεια εγγράφει στα δυο τρίγωνα ισοϋψή παραλληλόγραμμα. Αν Σ_v και Σ_v' είναι τα αθροίσματα των εμβαδών των παραλληλογράμμων που έχουν εγγραφεί στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα οι διαφορές $E_1-\Sigma_v$ και $E_2-\Sigma_v'$ μπορούν να γίνουν όσο μικρές θέλουμε για αρκούντως μεγάλες τιμές του ν. Δηλαδή $E_1-\Sigma_v<\varepsilon$ και $E_2-\Sigma_v'<\varepsilon$. Τότε όμως προκύπτει $E_1-E_2<0$, άτοπο. Όμοια οδηγείται σε άτοπο όταν $E_1<E_2$. Άρα $E_1=E_2$, οπότε το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΔ.

Η επιρροή των μεθόδων του Αρχιμήδη είναι παραπάνω από φανερή στο έργο του Stevin. Το ίδιο συμβαίνει με όλους τους μεγάλους μαθηματικούς της εποχής. Παρόλα αυτά τα πράγματα έχουν αρχίσει να αλλάζουν. Κατά πρώτον, η οπτική με την οποία

αντιμετωπίζονται τα μαθηματικά κατά τον 17^{ο} αιώνα διαφοροποιείται από αυτή των αρχαίων Ελλήνων. Γράφει ο μεγάλος αστρονόμος Huygens το 1657: «… *ο σκοπός (της ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού) δεν ήταν η απόλυτη απόδειξη με σαφήνεια, κομψότητα και ευρηματικότητα, όπως σε όλα τα έργα του Αρχιμήδη, αλλά η αναζήτηση της νέας γνώσης*» (Νεγρεπόντης κ.α., 1999, σελ. 204). Κατά δεύτερον διαφαίνεται ακόμα και στην απόδειξη του Stevin μια διαφοροποίηση στην ίδια τη μαθηματική σκέψη. Οι αρχαίοι Έλληνες, πιθανότατα επηρεασμένη από τα παράδοξα του Ζήνωνα, έχουν απορρίψει κάθε άπειρη διαδικασία. Αντίθετα, κατά τον 17^{ο} αιώνα οι απειροστικές διαδικασίες γίνονται αποδεκτές και αποτελούν πλέον ένα από τα πιο ισχυρά όπλα στη φαρέτρα ενός μαθηματικού. Κομβικά σημεία για τις εξελίξεις είναι η ανακάλυψη από τον Francois Viète (γνωστότερο ως Vieta, 1540-1603) της συμβολικής άλγεβρας το 1591 και της αναλυτικής γεωμετρίας από τους Κατρέσιο (Renè Descartes, 1596-1650) και Pierre de Fermat (1601-1665) στη διάρκεια της δεκαετίας του 1630. Σημαντική στην κατεύθυνση αυτής της εξέλιξης είναι η συμβολή του Γαλιλαίου (1564-1642). Ο Γαλιλαίος ασχολείται συστηματικά με τις έννοιες του απείρου, του απειροστού και του αδιαιρέτου, πολλές από τις ιδιότητες των οποίων μελετά και διατυπώνει στο έργο του '*Δύο νέες επιστήμες*' το 1638 (Γιαννακούλιας, 2005). Κατά τη μελέτη της ομοιόμορφης επιταχυνόμενης κίνησης παρατηρεί ότι το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη ταχύτητας – χρόνου ισούται με το διάστημα που έχει διανυθεί. Θεωρεί ένα κινητό που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα $\upsilon = 32t$.



Σχήμα 7: Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ταχύτητας-χρόνου ισούται με το διανυθέν διάστημα

Παρατηρεί ότι κάθε γραμμή Α΄Β΄ εκφράζει τη στιγμιαία (τοπική) ταχύτητα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (σχήμα 7). Ταυτόχρονα όμως θεωρεί τη γραμμή Α΄Β΄ ως μια απειροστή απόσταση που διανύεται αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι μπορεί να θεωρήσει ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ παράγεται από το άθροισμα των γραμμών Α΄Β΄. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ολική διανυθείσα απόσταση ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου. Τώρα αφού $\upsilon = \mathrm{AB} = 32t$ και $\mathrm{OA}=t$, για το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ θα ισχύει:

$$(OAB) = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = \frac{1}{2}t\cdot 32t = 16t^2.$$

Η απόδειξη αυτή του Γαλιλαίου στηρίζεται στην αντίστοιχη απόδειξη που έχει κάνει για το ίδιο πρόβλημα ο Nicole Oresme (1323-1382) αλλά διαφέρει από αυτήν στην αυστηρότητα που επιδεικνύεται (Boyer, 1949). Αξιοσημείωτο είναι πως η χρήση των απειροστών είναι ουσιώδης και χαρακτηριστική.

Από τους πρώτους που εγκαταλείπουν την τυπική αποδεικτική δομή του Αρχιμήδη κατά τον 17^{ο} αιώνα και υιοθετούν τη ελεύθερη χρήση των απειροστών για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων είναι ο Johann Kepler (1571-1630), ο οποίος προσπαθώντας να αποδείξει με μαθηματικό τρόπο το δεύτερο νόμο της κίνησης των ηλιακών πλανητών (η ακτίνα που συνδέει τον πλανήτη με τον ήλιο κατά την περιστροφή του γύρω από αυτόν διαγράφει σε ίσα χρονικά διαστήματα ίσα εμβαδά) γράφει: « … *εφ' όσον γνώριζα ότι στην τροχιά υπήρχε απειρία σημείων, και άρα απειρία αποστάσεων (από τον ήλιο) είχα την ιδέα ότι το άθροισμα αυτών των αποστάσεων περιέχεται στο εμβαδόν της τροχιάς. Όπως θυμάμαι δε ο Αρχιμήδης υποδιαίρεσε τον κύκλο σ' ένα άπειρο αριθμό τριγώνων*» (Νεγρεπόντης κ.α., 1999). Αυτή ακριβώς την αντίληψη αξιοποιεί στο έργο του *Nona Stereometria* για να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου. Θεωρεί ότι ο κύκλος είναι ένα πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών απειροστού μήκους. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα άπειρο πλήθος ισοσκελών τριγώνων με κορυφή το κέντρο του κύκλου και βάσεις τις απειροστές πλευρές του πολυγώνου. Συνέπεια της θεώρησης του κύκλου ως πολυγώνου είναι πως η περίμετρος του πολυγώνου δεν μπορεί παρά να είναι ίση με το μήκος Γ του κύκλου. Έτσι υπολογίζει το εμβαδόν του κύκλου ως άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που δημιουργήθηκαν καταλήγοντας στον τύπο $E = \frac{1}{2}\Gamma\cdot R$

Τη σκυτάλη παραλαμβάνει από τον Kepler ο μαθητής και συνεργάτης του Γαλιλαίου Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Διαφοροποιείται όμως από αυτούς κατά το ότι απομακρύνεται από την προσέγγιση των απειροστών και αναπτύσσει τη θεωρία των 'αδιαιρέτων', τα οποία όμως είχε ήδη χρησιμοποιήσει ο Γαλιλαίος στη φυσική. Σε κανένα σημείο του έργου του δεν ορίζει ο Cavalieri το αδιαίρετο. Απλά χρησιμοποιεί τον όρο 'αδιαίρετα' για να χαρακτηρίσει τα απειροστά στοιχεία που χρησιμοποιεί στη μέθοδό του. Κάθε αδιαίρετο με την κίνησή του παράγει το επόμενο ανώτερης διάστασης συνεχές. Έτσι το σημείο κινούμενο δημιουργεί μια γραμμή. Μια γραμμή κινούμενη παράγει ένα επίπεδο και ένα επίπεδο με την κίνησή του παράγει ένα στερεό. Συνεπώς το επίπεδο απαρτίζεται από ένα άπειρο πλήθος παράλληλων γραμμών που ισαπέχουν μεταξύ τους, και το στερεό από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Έτσι, κατά τον Cavalieri το εμβαδόν αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό ισαπεχόντων ευθύγραμμων τμημάτων και ο όγκος από ένα άπειρο πλήθος ισαπεχόντων παράλληλων επιπέδων. Δηλαδή το σημείο είναι το αδιαίρετο της γραμμής, η γραμμή είναι το αδιαίρετο του επιπέδου και το επίπεδο είναι το αδιαίρετο του στερεού σχήματος. Αυτό που δεν ξεκαθαρίζει ο Cavalieri είναι αν το αδιαίρετο έχει πάχος (Γιαννακούλιας, 2005). Το στοιχείο που τον διαφοροποιεί από τους προηγούμενους είναι η θεώρηση ότι τα μεγέθη δεν διασπώνται σε απειροστά αλλά παράγονται μέσα από την κίνηση των αδιαιρέτων. Ο Kepler θεωρούσε ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα συντίθεται από απειροστά της ίδιας διάστασης. Ο Cavalieri θεωρεί ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα παράγεται από την κίνηση αδιαιρέτων της προηγούμενης διάστασης.

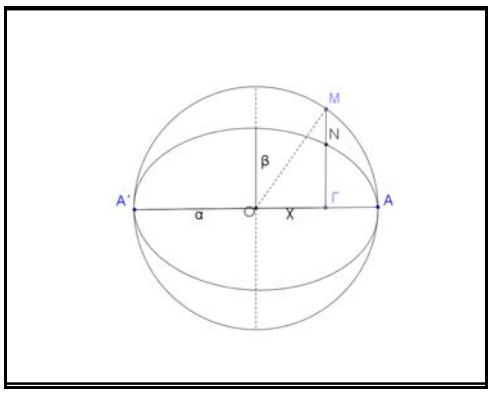
Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο της θεώρησης του Cavalieri είναι η εισαγωγή της έννοιας '*όλων των γραμμών*' (omnes lineae). Αν C είναι για παράδειγμα ένα επίπεδο σχήμα και (ε) μια ευθεία οδηγός που καθορίζει μια διεύθυνση στο επίπεδο του σχήματος, θεωρεί δυο επίπεδα παράλληλα προς την (ε) που τέμνουν το επίπεδο του σχήματος C (συνήθως κάθετα σε αυτό). Στη συνέχεια θεωρεί ότι το ένα από τα δυο επίπεδα κινείται παράλληλα προς τον εαυτό του μέχρι να συμπέσει με το δεύτερο. Οι τομές του επιπέδου αυτό με το C είναι αυτό που ο Cavalieri ονομάζει '*όλες οι γραμμές*' ως προς τη διεύθυνση της (ε). Χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία στο έργο του *Geometria indivisibilibus Continuorum nova quadam ratione promota* διατυπώνει και επιχειρεί να αποδείξει την αρχή '*Αν δύο επίπεδα εμβαδά είναι τέτοια ώστε κάθε*

παράλληλη προς μια σταθερή κατεύθυνση, τέμνει τα δυο σχήματα σε ευθύγραμμα τμήματα το μήκος των οποίων βρίσκεται σε σταθερή σχέση λόγου, τότε και τα δυο εμβαδά βρίσκονται στην ίδια σχέση λόγου', αλλά και μια ανάλογή της για όγκους. Σε απόδοση στα σύγχρονα μαθηματικά η πρόταση αυτή είναι:

(i) Αν δύο επίπεδα σχήματα με ίσα ύψη περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων γραμμών και φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις αρχικές ώστε να τέμνουν τα επίπεδα σχήματα, τότε αν τα μήκη των ευθυγράμμων σχημάτων που κάθε ευθεία δημιουργεί στα δύο σχήματα έχουν σταθερό λόγο, τον ίδιο λόγο θα έχουν και τα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων.

(ii) Αν δύο στερεά έχουν ίσα ύψη, και αν οι τομές από επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις και σε ίσες αποστάσεις από αυτές βρίσκονται πάντα σε δοθέντα λόγο, τότε οι όγκοι των στερεών έχουν επίσης τον ίδιο λόγο.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της πρότασης είναι ο υπολογισμός του εμβαδού της έλλειψης. Υπολογίζει το εμβαδόν της έλλειψης με τη βοήθεια του εμβαδού κύκλου



Σχήμα 8: Υπολογισμός εμβαδού έλλειψης

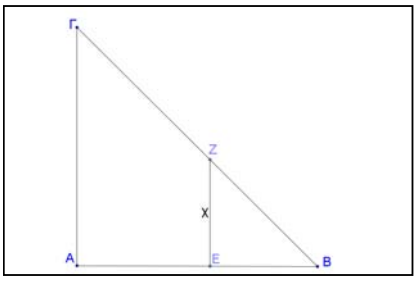
που θεωρεί γνωστό.

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζει την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=\alpha^2$ (σχήμα 8). Θεωρεί τυχαίο σημείο Μ του κύκλου (για ευκολία στους υπολογισμούς επιλέγει το Μ να βρίσκεται στο πρώτο τεταρτοκύκλιο) και φέρνει το τμήμα ΜΓ κάθετο προς την ΑΑ΄ που τέμνει την έλλειψη στο Ν. Αν ΟΓ=x, τότε $\text{ΜΓ}=y_M=\left(\alpha^2-x^2\right)^{1/2}$ και $\text{ΝΓ}=y_N=\frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha^2-x^2\right)^{1/2}$. Δηλαδή ο λόγος των τεταγμένων των σημείων Μ και Ν, οπότε και ο λόγος των αντίστοιχων κάθετων

χορδών, είναι β/α. Αν τώρα Ε και ε είναι τα εμβαδά της έλλειψης και του κύκλου αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με την παραπάνω αρχή θα ισχύει $\frac{\mathrm{E}}{\varepsilon}=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $\mathrm{E}=\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon=\frac{\beta}{\alpha}\pi\alpha^2=\pi\alpha\beta$.

Ο Cavalieri χρησιμοποίησε επίσης τη θεωρία των αδιαιρέτων για να υπολογίσει το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y=x^n$ στο διάστημα $[0,\alpha]$, που με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό αντιστοιχεί στο $\int_0^\alpha x^n dx$. Απέδειξε (όχι πλήρως) ότι $\int_0^\alpha x^n dx=\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$.

Θεωρεί ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ=ΑΓ=α.



Σχήμα 9: Ο υπολογισμός του $\int_0^a xdx$

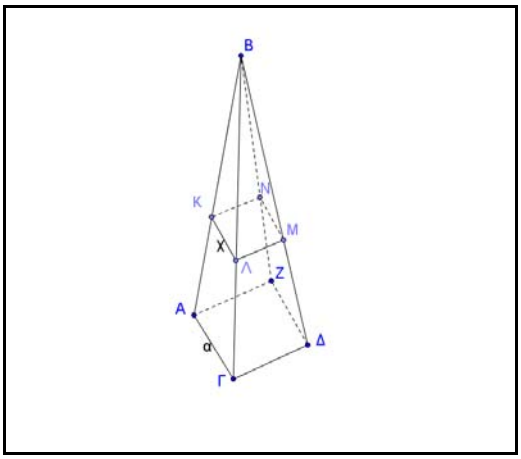
Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ=x είναι μια από 'όλες τις γραμμές' στην κατεύθυνση της ΑΓ (σχήμα 9). Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ διαγράφεται λοιπόν από την κίνηση του ΕΖ από το Β μέχρι την ΑΓ. Έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το άθροισμα των γραμμών ΕΖ, οπότε $(\mathrm{AB\Gamma})=\sum_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} x$. Αλλά είναι γνωστό ότι $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\alpha\cdot\alpha=\frac{\alpha^2}{2}$.

Άρα $\sum_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} x=\frac{\alpha^2}{2}$ ή τελικά με σύγχρονο συμβολισμό $\int_0^\alpha xdx=\frac{\alpha^2}{2}$.

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος $\sum_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} x^2$ θεωρεί τετραγωνική πυραμίδα (Ρ) με κορυφή το σημείο Β και βάση τετράγωνο πλευράς ΑΓ=α (σχήμα 10). Στη συνέχεια θεωρεί μια τομή της πυραμίδας με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της. Η τομή αυτή είναι τετράγωνο πλευράς x και εμβαδού x^2. Η πυραμίδα διαγράφεται από την

κίνηση του τετραγώνου ΚΛΜΝ από το Β μέχρι τη βάση ΑΓΔΖ. Έτσι η πυραμίδα είναι το άθροισμα των τετραγώνων ΚΛΜΝ, οπότε $V(P)=\sum_{B}^{A} x^2$.

Για τον υπολογισμό των αθροισμάτων $\sum_{B}^{A} x^k$ εργάστηκε με τον εξής τρόπο:

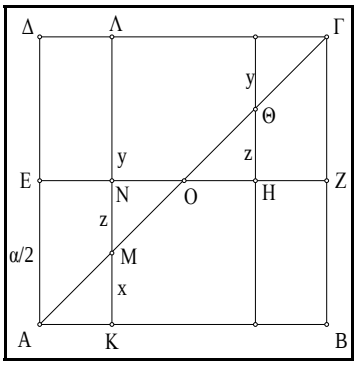


Σχήμα 10: Ο υπολογισμός του $\int_0^a x^2 dx$

Θεώρησε τετράγωνο ΑΒΓΔ και το διαίρεσε σε δύο τρίγωνα φέροντας τη διαγώνιο ΑΓ (σχήμα 11). Τώρα, αν ΚΜ=x και ΜΛ=y, τότε $x+y=\alpha$. Επομένως $\sum_{B}^{A}\alpha=\sum_{B}^{A}(x+y)=\sum_{B}^{A}x+\sum_{B}^{A}y$. Αλλά τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα και διαγράφονται από τα τμήματα ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα, οπότε $(\text{ΑΒΓ})=\sum_{B}^{A}x$ και $(\text{ΑΔΓ})=\sum_{B}^{A}y$. Άρα $\sum_{B}^{A}x=\sum_{B}^{A}y$. Έτσι, $\sum_{B}^{A}\alpha=2\sum_{B}^{A}x$ ή $\sum_{B}^{A}x=\frac{1}{2}\sum_{B}^{A}\alpha=\frac{\alpha^2}{2}$ μια και το $\sum_{B}^{A}\alpha$ εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου.

Επίσης $\sum_{B}^{A}\alpha^2=\sum_{B}^{A}(x+y)^2=\sum_{B}^{A}x^2+2\sum_{B}^{A}xy+\sum_{B}^{A}y^2$. Όμως λόγω συμμετρίας θα ισχύει $\sum_{B}^{A}x^2=\sum_{B}^{A}y^2$, οπότε $\sum_{B}^{A}\alpha^2=2\sum_{B}^{A}x^2+2\sum_{B}^{A}xy$. Αν τώρα θέσουμε ΜΝ=$z$, τότε $x=\frac{\alpha}{2}-z$ και $y=\frac{\alpha}{2}+z$, οπότε $xy=\left(\frac{\alpha}{2}-z\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+z\right)=\frac{\alpha^2}{4}-z^2$.

Άρα $\sum_{B}^{A}\alpha^2 = 2\sum_{B}^{A}x^2 + 2\sum_{B}^{A}\left(\frac{\alpha^2}{4} - z^2\right)$, οπότε τελικά $\sum_{B}^{A}\alpha^2 = 4\sum_{B}^{A}x^2 - 4\sum_{B}^{A}z^2$.



Σχήμα 11: Ο υπολογισμός των αθροισμάτων

Αλλά το $\sum_{B}^{A}z^2$ είναι το άθροισμα των τετραγώνων 'όλων των γραμμών' στα τρίγωνα ΟΜΝ και ΟΗΘ των οποίων οι πλευρές είναι μισές των πλευρών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Το άθροισμα όλων των γραμμών στα τρίγωνα αυτά εκφράζει λοιπόν τον όγκο πυραμίδας με διαστάσεις μισές της πυραμίδας όγκου $\sum_{B}^{A}x^2$. Επομένως $\sum_{B}^{A}z^2 = 2\cdot\frac{1}{8}\sum_{B}^{A}x^2 = \frac{1}{4}\sum_{B}^{A}x^2$.

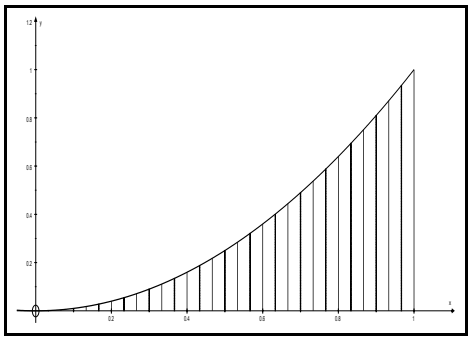
Άρα $\sum_{B}^{A}\alpha^2 = 4\sum_{B}^{A}x^2 - \sum_{B}^{A}x^2$ ή $\sum_{B}^{A}x^2 = \frac{1}{3}\sum_{B}^{A}\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^3$ μια και το $\sum_{B}^{A}\alpha^2$ εκφράζει τον όγκο κύβου πλευράς α.

Χρησιμοποιώντας τεχνάσματα κατόρθωσε να αποδείξει ότι

$\sum_{B}^{A}x^n = \frac{\alpha^n}{n+1}$ για $n = 1, 2, \cdots, 9$. Δεν μπόρεσε να αποδείξει τον τύπο για μεγαλύτερες τιμές του n που οι υπολογισμοί γίνονται εξαιρετικά δύσκολοι. Διατύπωσε λοιπόν την εικασία ότι ο τύπος αυτός ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n. Αυτό είναι και το στοιχείο που καθιστά την απόδειξη ατελή. Την εικασία του Cavalieri θα αποδείξουν μεταξύ 1625 και 1655 οι Fermat, Pascal και Roberval.

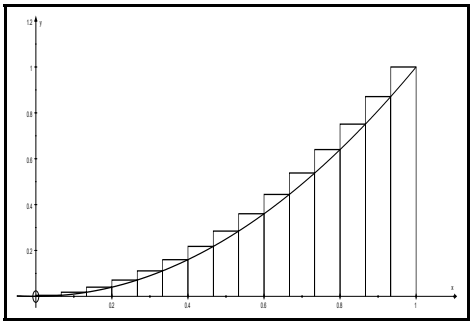
Ο Γάλλος μαθηματικός Giles Persone de Roberval (1602-1675) πιστεύεται ότι ανακάλυψε τη μέθοδο των αδιαιρέτων ανεξάρτητα από τον Cavalieri. Σε αντίθεση όμως με τον Cavalieri ο Roberval δέχεται ότι η γραμμή αποτελείται από άπειρο πλήθος απειροστών αδιαίρετων τμημάτων και όχι από άπειρο πλήθος σημείων.

Επίσης δέχεται ότι μια επιφάνεια συντίθεται από άπειρο πλήθος απειροστών αδιαίρετων επίπεδων κομματιών και ένα στερεό από άπειρο πλήθος απειροστών



Σχήμα 12: Το εμβαδόν κάτω από την $y = x^n$

αδιαίρετων στερεών κομματιών και όχι από ευθείες ή επίπεδα αντίστοιχα. Έτσι θεωρεί ότι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y = x^n$ στο διάστημα $[0,1]$ αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό «άπειρα στενών» ορθογωνίων λωρίδων (σχήμα 12). Αυτή η παραδοχή οδηγεί σε μια νέα αντίληψη για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων κατά τον $17^{\text{ο}}$ αιώνα που διαφοροποιείται από τη μέθοδο της εξάντλησης. Αρχίζει να υιοθετείται μια συστηματική διαδικασία με την εγγραφή ορθογωνίων (σχήμα 13) σε κάθε περίπτωση αντί της χρήσης οποιουδήποτε ευθύγραμμου σχήματος που θεωρείτο κατάλληλο, όπως γινόταν μέχρι τότε.



Σχήμα 13: Η νέα μέθοδος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την καμπύλη $y = x^2$. Έστω ότι l είναι το πλάτος κάθε ορθογωνίου. Τότε καθώς το l μικραίνει το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει το εμβαδόν του χωρίου. Αν λοιπόν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου και S είναι το άθροισμα των

εμβαδών των ορθογωνίων, τότε $S = l \cdot l^2 + l \cdot (2l)^2 + \cdots + l \cdot (nl)^2 = l^3 \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)$.

Άρα $S = l^3 \cdot \dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = (nl)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}\right)$.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα διαφοροποίηση. Όταν το n γίνεται άπειρα μεγάλο τότε οι όροι $1/2n$ και $1/2n^2$ γίνονται τόσο μικροί που θεωρούνται αμελητέοι. Άρα, αν OA=nl, τότε $S = \dfrac{1}{3}(\mathrm{OA})^3$, οπότε και $\mathrm{E} = \dfrac{1}{3}(\mathrm{OA})^3$.

Είναι φανερό ότι ο Roberval επιχειρεί να εισάγει μεθόδους για τη σύγκριση των αδιαιρέτων, ώστε ακόμη κι αν αυτά δεν διαθέτουν κάποιο μέγεθος, να είναι δυνατόν να οριστούν λόγοι μεγεθών τους. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα άλμα στη μελέτη των άπειρων διαδικασιών, μια και η θεώρηση αυτή του παρέχει, και αυτό γίνεται για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, τη δυνατότητα να αγνοήσει μεγέθη που είναι μικρά σε σχέση με άλλα.

Η νέα μέθοδος βασίζεται και πάλι στην προσέγγιση καμπυλόγραμμων σχημάτων από ευθύγραμμα σχήματα, όπως και στη μέθοδο της εξάντλησης. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι αντί της έμμεσης απόδειξης που χρησιμοποιείτο στη μέθοδο της εξάντλησης με τη διπλή απαγωγή σε άτοπο, στη μέθοδο που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα γίνεται χρήση μιας πρώτης προσέγγισης της έννοιας του ορίου (καθώς το n γίνεται άπειρο το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει το εμβαδόν του χωρίου). Το πρόβλημα είναι ότι η έννοια του ορίου έχει μόλις αρχίσει να αναπτύσσεται και επομένως είναι ακόμα ασαφής με αποτέλεσμα την έλλειψη αυστηρότητας στις αποδείξεις στις οποίες χρησιμοποιείται (Γιαννακούλιας, 2005).

Παρόλα αυτά ο Fermat χρησιμοποιεί τη μέθοδο αυτή για να υπολογίσει το άθροισμα $\sum_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} x^{\rho}$, δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_0^{\beta} x^{\rho} dx$, όπου ρ είναι ρητός αριθμός διάφορος του 1. Διαφοροποιείται επίσης όλων των προηγουμένων κατά το ότι διαιρεί το διάστημα $[0, \beta]$ όχι σε πεπερασμένο πλήθος ίσων υποδιαστημάτων των οποίων τα άκρα αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου, όπως γινόταν μέχρι

τότε, αλλά σε άπειρα το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής $[t_{n+1}, t_n]$, $n = 0,1,2,\ldots$, των οποίων τα άκρα $t_n = \beta \cdot \rho^n$, $n = 0,1,2,\ldots$, για κάποιο ρ με $0 < \rho < 1$ (όπως για παράδειγμα για $\rho = \frac{m-1}{m}$, $m = 2,3,\ldots$) αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Ακόμα πιο κοντά στο σύγχρονο τρόπο θεώρησης του ολοκληρώματος βρίσκεται ο Blaise Pascal (1623-1662). Προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα $1^m + 2^m + \cdots + n^m$ υποχρεώνεται να αποδείξει τον επαναληπτικό τύπο

$$\binom{m+1}{m}\sum_{i=1}^{n} i^m + \binom{m+1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} i^{m-1} + \cdots + \binom{m+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{m+1} - n - 1,$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n > k$.

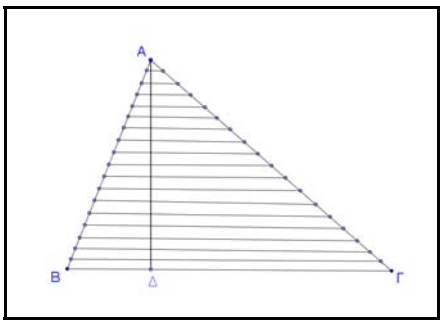
Στη συνέχεια κάνοντας χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής στο n και χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα στον παράγοντα $(n+1)^{m+1}$ απέδειξε ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + s$, όπου s το άθροισμα των όρων με μικρότερες δυνάμεις του n. Αλλά αφού η πρόσθεση ενός σημείου σε μια γραμμή δεν προσθέτει τίποτα στο μήκος της μια και το σημείο είναι το αδιαίρετο της γραμμής και αφού η πρόσθεση μιας γραμμής στην επιφάνεια δεν προσθέτει τίποτα στο εμβαδόν της μια και η γραμμή είναι το αδιαίρετο της επιφάνειας, έτσι και οι όροι με μικρότερες δυνάμεις του n είναι πολύ μικροί μπροστά στο $\frac{n^{m+1}}{m+1}$, οπότε μπορούν να διαγραφούν αφού δεν προσθέτουν τίποτα στο άθροισμα. (Ο Boyer, 1949, σελ. 214, αποδίδει το επιχείρημα αυτό στον Leibniz και όχι στον Pascal). Έτσι για τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από την καμπύλη $y = x^m$ στο διάστημα $[0, \alpha]$, δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^{\alpha} x^m dx$, χωρίζει την επιφάνεια σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος n ορθογωνίων λωρίδων με πλάτος $h = \frac{\alpha}{n}$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\left(h^m+(2h)^m+\cdots+(nh)^m\right)\cdot h=h^{m+1}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^m\cong\frac{(nh)^{m+1}}{m+1}=\frac{\alpha^{m+1}}{m+1}.$$

Και ο Pascal λοιπόν χρησιμοποιεί τα αδιαίρετα στην απόδειξή του με τη διαφορά ότι προσπαθεί να είναι πιο αυστηρός στον υπολογισμό των αθροισμάτων και να χρησιμοποιήσει λιγότερο τις γεωμετρικές μεθόδους.

Στην κατεύθυνση αυτή προχωράει ακόμα παραπάνω ο John Wallis (1616-1703) ο οποίος επιχειρεί να αντικαταστήσει τα γεωμετρικά επιχειρήματα της θεωρίας των αδιαιρέτων με αλγεβρικά επιχειρήματα που να βασίζονται στην αναλυτική γεωμετρία που έχουν ήδη εισάγει οι Descartes και Fermat. Στόχος του είναι να συσχετίσει τους τετραγωνισμούς καμπυλών με τη μέθοδο του Cavalieri με τις εργασίες των Roberval και Fermat (Γιαννακούλιας, 2005). Διαφοροποιείται όμως από τον Cavalieri κατά το ότι θεωρεί ότι μια επίπεδη επιφάνεια αποτελείται από άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων με άπειρα μικρό ύψος και όχι από ένα άπειρο πλήθος γραμμών. Έτσι η γραμμή, την οποία θεωρεί ως παραλληλόγραμμο με απειροστό ύψος, είναι διασταλτή και έχει ικανοποιητικό πάχος ώστε με έναν άπειρο πολλαπλασιασμό να μπορεί να συγκριθεί με το ύψος του σχήματος στο οποίο έχει εγγραφεί. Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτει το πρόβλημα του πάχους του αδιαιρέτου που αντιμετώπιζε ο Cavalieri. Υποστηρίζει ότι η αύξηση της επιφάνειας επιτυγχάνεται με τη διαστολή των απειροστών παραλληλογράμμων και όχι με την παράθεση νέων γραμμών. Αυτό ελάχιστα διαφέρει από την έννοια της γέννησης των ποσοτήτων που αποτέλεσε τη βάση για τη θεωρία των ροών (fluxions) του Newton (ibid).

Ένα παράδειγμα της δουλειάς του Wallis και της προσπάθειας που καταβάλλει να μετατοπίσει το βάρος της επιχειρηματολογίας του από τα γεωμετρικά σε αλγεβρικά επιχειρήματα είναι ο τρόπος που υπολογίζει το εμβαδόν ενός τριγώνου. Θεωρεί ένα



Σχήμα 14: Ο υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου από τον Wallis

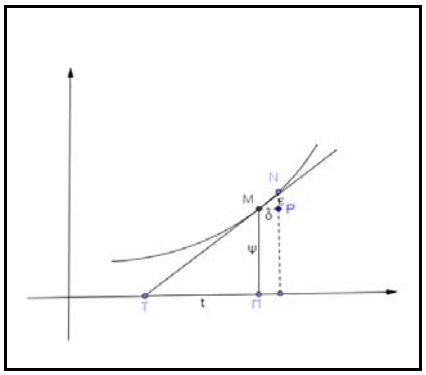
τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=α και ύψος ΑΔ=υ (σχήμα 14). Θεωρεί επίσης ότι το τρίγωνο ΑΒΓ αποτελείται από άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων με απειροστό ύψος $h = \frac{1}{\infty}\upsilon$. Υποστηρίζει ότι κάθε ένα από αυτά τα παραλληλόγραμμα με απειροστό ύψος μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμή. Θεωρεί ότι αρχικά έχει εγγράψει ένα πλήθος ν παραλληλογράμμων για μεγάλο ν. Τότε τα εμβαδά των παραλληλογράμμων αυτών ξεκινώντας από την κορυφή Α και προς τη βάση ΒΓ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το μηδέν και τελευταίο όρο το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάση την ΒΓ. Δηλαδή $\alpha_\nu = \alpha \cdot h$. Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων είναι $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2} \cdot \nu = \frac{1}{2}\alpha h \nu$.

Στη συνέχεια επεκτείνει τη σχέση αυτή για άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων. Τότε είναι $h = \frac{1}{\infty}\upsilon$, οπότε $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{\infty}\upsilon \cdot \infty = \frac{1}{2}\alpha\upsilon$.

Ο Wallis στην απόδειξη αυτή μπολιάζει τη μέθοδο των αδιαιρέτων με μια νέα αντίληψη για την αριθμητική του απείρου. Οι τεχνικές των αδιαιρέτων είναι φανερό πως ήταν ευρύτατα διαδεδομένες κατά τη διάρκεια του 17^{ου} αιώνα μια και ήταν εύκολα εφαρμόσιμες και το πεδίο χρήσης τους ήταν πολύ μεγάλο. Από την άλλη πλευρά παρουσίαζαν το μειονέκτημα ότι υστερούσαν σε αυστηρότητα, γεγονός που επιχείρησε να αντιμετωπίσει ο Wallis εισάγοντας αυτή τη στοιχειώδη αριθμητική του απείρου. Το εγχείρημα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιτυχές μια και αντιμετωπίστηκε και αυτή με τον ίδιο διαισθητικό τρόπο που αντιμετωπίστηκαν και τα αδιαίρετα. Τα αποτελέσματά της θεωρήθηκαν προφανή και δεν θεμελιώθηκαν σε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις. Παρόλα αυτά η θεωρίες των αδιαιρέτων και αυτή η πρώιμη αριθμητική του απείρου μπορούν να θεωρηθούν ως οι πρόδρομοι της αυστηρής θεωρίας της ολοκλήρωσης.

Ο Isaac Barrow (1639-1677) μελέτησε συστηματικά το έργο όσων προηγήθηκαν, και κυρίως το έργο του Cavalieri. Δεχόταν την επικρατούσα στα μέσα του 17^{ου} αιώνα κινηματική άποψη της γεωμετρίας και συχνά αναφερόταν στην ομαλή ροή του χρόνου και στη δημιουργία των καμπυλών με άθροιση κατά τη συνεχή κίνηση σημείων και γραμμών. (ibid). Έτσι ήταν σε θέση να αντιληφθεί ότι η γνώση των αποτελεσμάτων των προηγουμένων του οδηγούσε σε μια πρώτη μορφή του

Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού. Αυτό που προσπάθησε ήταν να γενικεύσει όλα αυτά τα αποτελέσματα χωρίς όμως να συνδέει τις καμπύλες με την



Σχήμα 15: Το χαρακτηριστικό τρίγωνο

κίνηση. Κατόρθωσε να δώσει μια απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος χωρίς να αναφερθεί σε καμπύλες που ορίζονται κινηματικά. Απέδειξε επίσης αρκετά γεωμετρικά θεωρήματα και πρότεινε κατασκευές για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων οι τιμές των οποίων σήμερα υπολογίζονται με τις αναλυτικές διαδικασίες του απειροστικού λογισμού. Ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα της ενασχόλησής του με το πρόβλημα της εφαπτόμενης μιας καμπύλης είναι ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο του χαρακτηριστικού τριγώνου, το οποίο θα παίξει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού από τον Leibniz. Ο τρόπος που ο Barrow ορίζει την εφαπτόμενη σε μια καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y)=0$, όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών, είναι ο εξής (Νεγρεπόντης κ.α., 1999):

Θεωρεί ένα «*απεριόριστα μικρό τόξο*» MN της καμπύλης $f(x,y)=0$ με άκρα τα σημεία $\mathrm{M}(x,y)$ και $\mathrm{N}(x+\delta, y+\varepsilon)$ (σχήμα 15). Τότε $f(x+\delta, y+\varepsilon)=f(x,y)=0$ αφού τα σημεία M και N ανήκουν και τα δυο στο γράφημα της *f*.

Στη συνέχεια απαλείφει «*όλους τους όρους που περιέχουν μια δύναμη του δ ή του ε ή γινόμενά τους, εφ' όσον οι όροι αυτοί είναι αμελητέοι*», όπως ο ίδιος ο Barrow γράφει. Αγνοώντας τώρα τη διαφορά μεταξύ του απεριόριστα μικρού τόξου MN και του ευθύγραμμου τμήματος MN παρατηρεί την ομοιότητα του τριγώνου ΤΜΠ με το χαρακτηριστικό τρίγωνο MNP. Έτσι καταλήγει ότι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x,y)=0$ στο σημείο της $\mathrm{M}(x,y)$ ισούται με $\frac{y}{t}=\frac{\varepsilon}{\delta}$.

Με τον τρόπο αυτό κατά τους Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο και Γιαννακούλια (1999, σελ. 325) «… ο Barrow εφαρμόζει τη μέθοδο του χαρακτηριστικού τριγώνου και μεταβαίνει στο όριο (καθώς ε, δ→0) με το να παραλείπει τα '*διαφορικά υψηλότερης τάξης*'». Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι η ομοιότητα της σύγχρονης λογικής για τον ορισμό της εφαπτόμενης σε καμπύλη με τη μέθοδο που ανέπτυξε ο Barrow.

Το 1666 ο Isaac Newton (1642-1727), μαθητής και φίλος του Barrow, περιγράφει χειρόγραφό του που έμεινε γνωστό ως «The October 1666 Tract on fluxions»τον υπολογισμό εμβαδών με τη βοήθεια της αντιδιαφόρισης. Ιστορικά αυτή είναι η πρώτη εμφάνιση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού υπό τη μορφή $\frac{dE}{dx} = y$, όπου Ε συμβολίζει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$, θέτοντας μ' αυτό τον τρόπο τη βάση για μια αλγοριθμική προσέγγιση υπολογισμού των εμβαδών και φθάνοντας σ' αυτό που οι ιστορικοί αποκαλούν «ανακάλυψη» του απειροστικού λογισμού (Γιαννακούλιας, 2005). Με τον όρο «ανακάλυψη» εννοούμε τρία πράγματα:

i) Την ένταξη όλων των μεθόδων που ήταν γνωστές μέχρι τότε σε δυο γενικές έννοιες, την «παράγωγο» και το «ολοκλήρωμα».

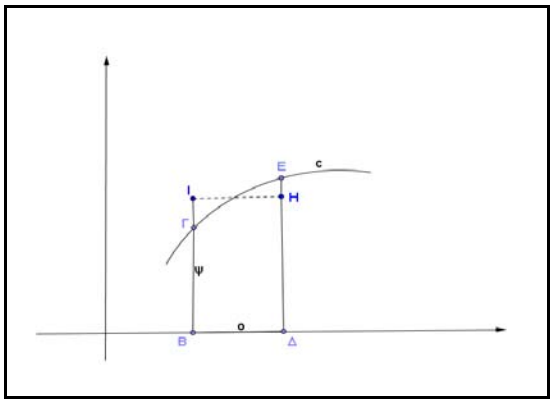
ii) Την επινόηση συμβολισμών που καθιστούν εύκολη τη χρήση των εννοιών αυτών, και

iii) Την «ανακάλυψη» και απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού που καθιστά φανερό ότι οι διαδικασίες της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης είναι αντίστροφες διαδικασίες.

Ο Νεύτωνας προσεγγίζει στο χειρόγραφο αυτό τη διαφόριση όχι με χρήση της έννοιας του ορίου, που άλλωστε ήταν σε εμβρυακή μορφή την εποχή αυτή, αλλά μέσα από τη φυσική διαίσθηση (Νεγρεπόντης κ.α.,1999). Ονομάζει την ταχύτητα με την οποία παράγεται η γραμμή fluxium (ροή) και τη συμβολίζει με $\dot{x}$. Προφανώς η ροή αντιστοιχεί στην έννοια της παραγώγου. Χρησιμοποιεί επίσης την ιδέα ενός απείρως μικρού ορθογωνίου, της «στιγμής» (moment) του εμβαδού το οποίο εκφράζει την άπειρα μικρή αύξηση της επιφάνειας σε απειροστό χρόνο '*ο*' και την συμβολίζει $\dot{x}o$. Έτσι προχωράει στον τετραγωνισμό μιας δεδομένης καμπύλης $y = f(x)$. Για τη δεδομένη καμπύλη θεωρεί την σχέση $z = z(x)$ του εμβαδού της

επιφάνειας που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο με τετμημένη x. Θεώρησε αρχικά τη συνάρτηση $z = x^3$ και παρατήρησε ότι αν η τιμή της μεταβλητής x αυξηθεί κατά μια απειροστή ποσότητα 'o', τότε το εμβαδόν του χωρίου θα μεταβληθεί κατά το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ΒΓΕΔ. Επέλεξε ένα σημείο Ι στην προέκταση του ΒΓ ώστε τα εμβαδά των μικτόγραμμων τριγώνων που σχηματίζονται από την ΙΗ, την καμπύλη και τα τμήματα ΙΓ και ΕΗ να είναι ίσα (σχήμα 16).

Τότε όμως ισχύει $(\text{ΒΓΕΔ}) = (\text{ΒΙΗΔ})$. Αν λοιπόν θέσουμε ΒΓ=$\upsilon$, θα πάρουμε $(\text{ΒΓΕΔ}) = \text{ΒΙ} \cdot \text{ΒΔ} = \upsilon o$.



Σχήμα 16: Τετραγωνισμός καμπύλης από τον Νεύτωνα

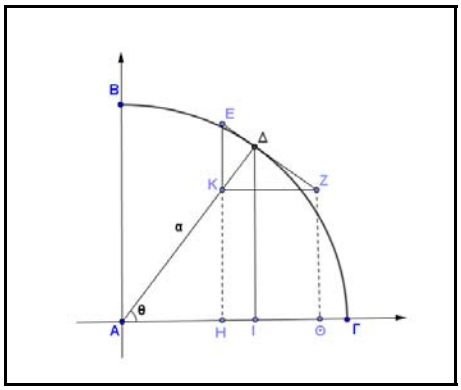
Στο σημείο αυτό ο Νεύτωνας κάνει τον εξής συλλογισμό: Όταν το ΒΔ μηδενιστεί, το 'o' εξαφανίζεται και η ΒΙ γίνεται ίση με την ΒΓ=y. Συνεπώς η μεταβολή της επιφάνειας είναι yo. Τότε $z + yo = (x+o)^3 = x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3$, οπότε $(z + yo) - z = x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 - x^3$ ή, τελικά, $yo = 3x^2o + 3xo^2 + o^3$.

Τώρα διαιρεί τη σχέση με την απειροστή ποσότητα 'o' και παίρνει $\frac{y}{o} = 3x^2 + 3xo + o^2$. Παραλείπει τους όρους που έχουν παράγοντα την ποσότητα 'o' και καταλήγει στον τύπο $y = 3x^2$.

Σε σύγχρονη ορολογία ο Newton για την εύρεση του εμβαδού της ζητούμενης επιφανείας υπολογίζει μια συνάρτηση z, τέτοια ώστε $z' = 3x^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ισούται με την κλίση $3x^2$ της εφαπτομένης της καμπύλης $z = x^3$. Έτσι γίνεται κατανοητό ότι οι «παράγωγοι» και εφαπτόμενες εμπεριέχονται στα εμβαδά. Με τον τρόπο αυτό λοιπόν ο Newton κατόρθωσε να βρει

την επιφάνεια μέσω μιας διαδικασίας αντίστροφης της διαφόρισης. Με άλλα λόγια βρήκε τη διαδικασία αορίστου ολοκληρώματος. Η πρωτοτυπία του Newton έγκειται στο γεγονός ότι για πρώτη φορά υπολόγισε το εμβαδόν μιας επιφανείας από το λόγο μεταβολής σε ένα μόνο σημείο, δηλαδή με αντιδιαφόριση (Γιαννακούλιας, 2005).

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ήρθε για πρώτη φορά σε επαφή με τις μεθόδους των απειροστών και του κέντρου βάρους από τις Επιστολές του Pascal, τις οποίες είχε δημοσιεύσει ο Pascal με το ψευδώνυμο Amos Bettonville. 'Από αυτές πληροφορήθηκα', γράφει ο Leibniz, τη μέθοδο των απειροστών και του κέντρου βάρους, δηλαδή τις γνωστές μεθόδους των Cavalieri και Guldinus». Ο Pascal σε μια από τις επιστολές αυτές είχε αποδείξει ότι το άθροισμα των ημιτόνων κάθε τόξου ενός τεταρτημόριου του κύκλου ισούται με το τμήμα της βάσης μεταξύ των ακραίων ημιτόνων επί την ακτίνα. Για να αποδείξει την πρόταση ο Pascal κατασκεύασε το εφαπτόμενο τμήμα ΕΖ σε κύκλο (Α,α) σε σημείο του Δ και, στη συνέχεια το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΕΖ με υποτείνουσα το εφαπτόμενο τμήμα ΕΖ και την κορυφή Κ στην ακτίνα ΑΔ (σχήμα 17). Παρατήρησε ότι τα τρίγωνα ΚΕΖ και ΑΔΙ είναι όμοια.



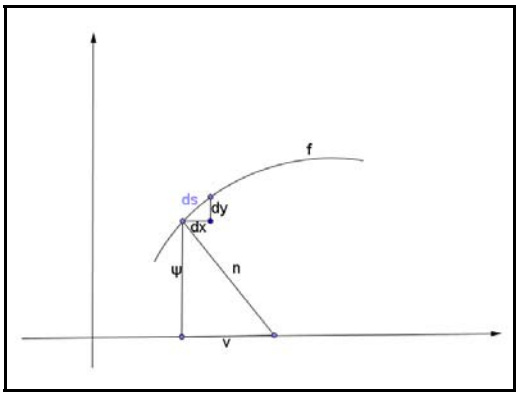
Σχήμα 17: Το σχήμα της απόδειξης του Pascal

Άρα $\frac{\text{AΔ}}{\text{EZ}} = \frac{\text{ΔI}}{\text{ZK}}$ ή $\text{ΔI} \cdot \text{EZ} = \text{AΔ} \cdot \text{ZK}$. Αν λοιπόν θέσουμε $\text{ΔI} = y$, $\text{EZ} = \Delta s$ και $\text{KZ} = \Delta x$, η σχέση αυτή γράφεται $y \cdot \Delta s = \alpha \cdot \Delta x$.

Αν τώρα κατά τους Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλο και Γιαννακούλια (1999) θεωρήσουμε τα Δs και Δx ως απειροστά και τα αθροίσουμε (δηλαδή ολοκληρώσουμε), τότε το αποτέλεσμα του Pascal παίρνει τη μορφή $\int y ds = \int \alpha dx$.

Ο Leibniz κατάλαβε ότι η μέθοδος του Αρχιμήδη στη μορφή που την οδήγησε ο Pascal μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε συνάρτηση. Μόνο που στο απειροστό τρίγωνο του Pascal για μια τυχαία συνάρτηση το ρόλο της ακτίνας παίζει η

κάθετη στην καμπύλη στο συγκεκριμένο σημείο (Γιαννακούλιας, 2005), όπως φαίνεται στο σχήμα 18. Για παράδειγμα αν ds είναι ένα απειροστό τόξο της καμπύλης



Σχήμα 18: Το χαρακτηριστικό τρίγωνο του Leibniz

$y = f(x)$, από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει η σχέση $\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}$ ή $yds = ndx$. Αθροίζοντας τώρα τα απειροστά παίρνουμε $\int yds = \int ndx$. Αυτή η μέθοδος του χαρακτηριστικού τριγώνου αποτελεί την αποφασιστικής σημασίας ανακάλυψη του Leibniz στον Απειροστικό Λογισμό (Νεγρεπόντης κ.α., σελ. 328). Εφάρμοσε τη μέθοδο σε πληθώρα προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού μήκους καμπυλών και, ακόμα, στην απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

Ο Leibniz θεωρούσε, και είχε με μεγάλη σαφήνεια και επιμονή διακηρύξει τη θέση του αυτή, ότι στο λογισμό του οι τετραγωνισμοί προκύπτουν από αθροίσματα διαφορικών εμβαδών και όχι ως αθροίσματα γραμμών. Αυτό είναι ακριβώς το στοιχείο που οριοθετεί τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ του λογισμού του και της μεθόδου των αδιαιρέτων του Cavalieri που θεωρούσε τους τετραγωνισμούς ως το άθροισμα των τεταγμένων.

Αρχικά χρησιμοποίησε για το ολοκλήρωμα τον όρο omnes ή omn., που είναι συντόμευση της λατινικής λέξης omnia η οποία σημαίνει άθροισμα. Πολύ σύντομα όμως εισήγαγε το σύμβολο $\int$. Αντίθετα ο Νεύτων και πολλοί άλλοι χρησιμοποιούσαν για το ολοκλήρωμα το συμβολισμό □f(x) που παραπέμπει στον τετραγωνισμό της παραβολής. Ο Leibniz βέβαια ποτέ δεν θεώρησε ικανοποιητικό τον

όρο ολοκλήρωμα που εισηγήθηκε ο Jacob Bernoulli και επέμεινε πάντα στον όρο άθροισμα.

Κατόρθωσε λοιπόν ο Leibniz να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό διαφορικό λογισμό, καθιερώνοντας μια νέα ορολογία και ένα απλό και λειτουργικό συμβολισμό. Έτσι με την ολοκλήρωση του έργου του Barrow και την εμφάνιση των Newton και Leibniz κλείνει μία περίοδος ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού στην οποία σημαντική συμβολή έχει ο Αρχιμήδης (Νεγρεπόντης κ.α., 1999, σελ. 209). Με το έργο των Newton και Leibniz ο Ολοκληρωτικός Λογισμός συνδέεται, μέσα από το αόριστο ολοκλήρωμα, με τον Διαφορικό Λογισμό. Έτσι ο Ολοκληρωτικός Λογισμός εντάσσεται στον Απειροστικό Λογισμό, όπου κυριαρχεί η έννοια της διαφόρισης. Το ολοκλήρωμα είναι πια απλά η αντίστροφη έννοια της παραγώγου. Κατά τον 18^{ο} αιώνα το ενδιαφέρον των μαθηματικών έχει στραφεί στη μελέτη και την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι η ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού ουσιαστικά διακόπτεται.

Κατά τον 19^{ο} αιώνα όμως δημιουργούνται και πάλι οι κατάλληλες συνθήκες για την ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Η δουλειά του Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) στην αναπαράσταση συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές οδήγησε στην αναγκαιότητα ολοκλήρωσης ασυνεχών συναρτήσεων. Έτσι έγινε απαραίτητη η πιο προσεκτική μελέτη της γενικής έννοιας του ολοκληρώματος με αποτέλεσμα *'την βαθμιαία και αργή αποκατάσταση της θεωρίας της Ολοκλήρωσης στην κυρίαρχη θέση που είχε ιστορικά'* (ibid, σελ. 211). Ο Augustin-Louis Cauchy (1798-1857) επιχειρεί να δώσει έναν ορισμό του ολοκληρώματος μιας συνεχούς πραγματικής συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται σε ένα κλειστό πραγματικό διάστημα. Για τον σκοπό αυτό θεωρεί μια διαμέριση $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και το αντίστοιχο άθροισμα $S=\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})$. Υποστηρίζει ότι καθώς τα μήκη των διαστημάτων $(t_{i-1},t_i), i=1,2,\ldots,n$ της διαμέρισης μικραίνουν και ο αριθμός των διαστημάτων γίνεται πολύ μεγάλος, η διαμέριση P έχει μόνον ανεπαίσθητη επίδραση στην τιμή του S. Και συνεχίζει υποστηρίζοντας πως αν τα μήκη των υποδιαστημάτων της διαμέρισης φθίνουν

απεριόριστα καθώς ο αριθμός n των υποδιαστημάτων της διαμέρισης του $[\alpha, \beta]$ αυξάνει, τότε η τιμή του S γίνεται ουσιαστικά σταθερή. Δηλαδή φθάνει σε κάποιο όριο που εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και τα άκρα α, β του διαστήματος. Το πρόβλημα είναι ότι ο Cauchy αιτιολογεί μεν αλλά δεν μπορεί να αποδείξει τους ισχυρισμούς του γιατί δεν έχει στα χέρια του τα κατάλληλα εργαλεία. Δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας που θα του έλυνε τα χέρια στην κατεύθυνση της απόδειξης των ισχυρισμών του.

Ο Γερμανός μαθηματικός Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) παρατήρησε ότι ο μόνος τρόπος για να αποδείξουμε τα αποτελέσματα σύγκλισης των τριγωνομετρικών σειρών Fourier και Dirichlet είναι να καθορίσουμε υπερβολικά ισχυρές περιοριστικές υποθέσεις σε σχέση με τη συνέχεια των συναρτήσεων μια και το ολοκλήρωμα οριζόταν ουσιαστικά μόνο για συνεχείς συναρτήσεις. Αποφάσισε λοιπόν να επιχειρήσει να γενικεύσει και να διευρύνει τον ορισμό σε ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων. Έτσι οδηγήθηκε στην αναγκαιότητα ορισμού του αθροίσματος Riemann και στη συνέχεια του ολοκληρώματος Riemann με τη μορφή που το ξέρουμε σήμερα. Μια παραλλαγή του ορισμού στην οποία ορίζονται και χρησιμοποιούνται τα άνω και κάτω αθροίσματα, που είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα έρευνα, οφείλεται στον Gaston Darboux (1824-1917). Απέδειξε λοιπόν ο Riemann την ύπαρξη συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες ενώ είναι ασυνεχείς σε άπειρο πλήθος σημείων.

⊣ Ο Ολοκληρωτικός Λογισμός στον 20ο αιώνα ⊢

Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα η μελέτη των τριγωνομετρικών σειρών υποχρέωσε τους μαθηματικούς να συνειδητοποιήσουν ότι η βασική ιδέα στις συναρτήσεις θα έπρεπε να είναι μια σημείο προς σημείο αντιστοίχηση και όχι μια ομοιόμορφη μεταβολή (Boyer & Merzbach, 1997). Άρχισαν λοιπόν να ασχολούνται με την έννοια των μετρήσιμων συνόλων. Η ενασχόληση του Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) με τα μετρήσιμα σύνολα δεν απέδωσε τα επιθυμητά αποτελέσματα μια και σύμφωνα με τον ορισμό του το μέτρο της ένωσης δυο συνόλων μπορεί να είναι μικρότερο από το άθροισμα των μέτρων τους. Αυτός που απάλλαξε τον ορισμό του μετρήσιμου συνόλου από τα προβλήματα που παρουσίαζε και έδωσε μια νέα ώθηση

στη θεωρία ήταν ο Emile Borel (1871-1956). Στο έργο του Borel στηρίχτηκε ο Henri Lebesgue (1875-1941) για να διευρύνει τη θεωρία ολοκλήρωσης που είχε αναπτύξει ο Riemann η οποία κυριαρχούσε εκείνη τη εποχή και να αναπτύξει τη σύγχρονη θεωρία ολοκλήρωσης και μέτρου. Μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη της θεωρίας αυτής είχαν πολλοί μαθηματικοί όπως ο Ούγγρος Frigyes Riesz (1880-1956) και ο Έλληνας μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873-1950), γνωστός και για το ομώνυμο, εξαιρετικής σημασίας για τη θεωρία μέτρου, θεώρημα (Νεγρεπόντης κ.α., 1999).

Παρατήρησε λοιπόν ο Lebesgue ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος κατά Riemann έχει το μειονέκτημα ότι περιορίζεται αποκλειστικά σε συναρτήσεις που έχουν λίγα μόνο σημεία ασυνέχειας. Το πρόβλημα είναι ότι αν η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει πολλά σημεία ασυνέχειας, τότε δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι, καθώς το διάστημα (x_i, x_{i+1}) μικραίνει, οι τιμές $f(x_i)$ και $f(x_{i+1})$ θα πλησιάζουν. Ξεπέρασε αυτό το πρόβλημα με την κίνηση να διαμερίσει το σύνολο τιμών και όχι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Διαμέρισε λοιπόν το σύνολο τιμών σε υποδιαστήματα Δy_i και επέλεξε σε κάθε υποδιάστημα μια τιμή n_i. Αξιοποίησε την έννοια του μετρήσιμου συνόλου και όρισε το μέτρο Lebesgue. Στη συνέχεια βρήκε το μέτρο $\mu(E_i)$ του συνόλου E_i των σημείων του άξονα των τετμημένων για τα οποία οι τιμές $f(x)$ είναι σχεδόν ίσες με το n_i. Έτσι είναι σε θέση πια να ορίσει το άθροισμα Lebesgue $S_n = \sum n_i \mu(E_i)$ και στη συνέχεια το ολοκλήρωμα Lebesgue. Η διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος Lebesgue είναι αρκετά περίπλοκη και ξεφεύγει από τα όρια αυτής της ιστορικής αναδρομής στην εξέλιξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Οι ιδέες του Lebesgue άνοιξαν το δρόμο και σε άλλους μαθηματικούς να επιτύχουν περαιτέρω γενικεύσεις, όπως ο Γάλλος Arnaud Denjoy (1884-1974) και ο Ούγγρος Alfred Haar (1885-1933) (Boyer & Merzbach, 1997). Άξιο αναφοράς είναι επίσης και το ολοκλήρωμα Lebesgue-Stieltjes που αποτελεί μια σύνθεση των ιδεών των Lebesgue και Stieltjes.

ΜΕΡΟΣ 2ο

Η ΕΡΕΥΝΑ

I. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος στο σχολικό εγχειρίδιο της τρίτης τάξης του Λυκείου στη χώρα μας καθώς και οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία της και επιχειρείται μια εκτίμηση για τα αίτια των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόησή της. Καθορίζεται ο σκοπός της έρευνας, τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία θα επιχειρηθεί να απαντηθούν και, τέλος, οριοθετείται η έρευνα στην εξέταση των προβλημάτων που προκύπτουν από τη μελέτη του ορισμού μόνο του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann.

Εισαγωγή

Μεγάλο πλήθος ερευνών έχει μέχρι τώρα ασχοληθεί με τη διδακτική διαδικασία και το πρόβλημα της εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στα πλαίσια αυτά και φιλοδοξεί να συνεισφέρει στον προβληματισμό για καλύτερη κατανόηση των δυσκολιών αλλά και των ευκαιριών που παρουσιάζονται από τη χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και των εννοιών που συναποτελούν το συγκεκριμένο εννοιολογικό πεδίο. Είναι μια έρευνα που σκοπό έχει να εξετάσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί ο καθηγητής των μαθηματικών να προσεγγίσει διδακτικά με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών αυτή τη σημαντική για τους μαθητές του έννοια του αναλυτικού προγράμματος των σπουδών της Γ΄ τάξης του Λυκείου. Το ενδιαφέρον του ερευνητή εστιάστηκε στη βοήθεια που μπορεί να πάρει ο εκπαιδευτικός από τη χρήση του διερευνητικού λογισμικού Autograph.

Διατύπωση του προβλήματος

Οι καθηγητές του μαθήματος των Μαθηματικών που έχουν διδάξει το μάθημα των μαθηματικών της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης στην τρίτη τάξη του Λυκείου στη χώρα μας έχουν βρεθεί αντιμέτωποι με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Οι δυσκολίες αυτές πηγάζουν από την ελλειμματική εννοιολογική

κατανόηση της έννοιας του ορίου και τα προβλήματα που το γεγονός αυτό συνεπάγεται, από την άγνοια από την πλευρά των μαθητών ακόμα και της ύπαρξης της έννοιας της ακολουθίας και, τέλος, από την αδυναμία του εκπαιδευτικού μας συστήματος να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν παράλληλα με τις διαδικασιακές δεξιότητες και την εννοιολογική κατανόηση των εννοιών. Το ίδιο ακριβώς φαινόμενο έχει παρατηρηθεί και σε άλλες χώρες. Κατά τον Orton (1983) η διαδικασία διαμέρισης και η χρήση οριακών διαδικασιών για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος δεν αποτελούν στοιχεία της κατανόησης των μαθητών σε σχέση με την έννοια. Από τους 79 μαθητές που ρωτήθηκαν στην έρευνά του αν μπορούμε να έχουμε μια ακριβή απάντηση στο ερώτημα ποιο είναι το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = x^2$ παίρνοντας όλο και περισσότερα ορθογώνια μόνο οι 10 έθεσαν το θέμα της αναγκαιότητας χρήσης οριακής διαδικασίας. Οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν ότι θα παίρνουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις αλλά ποτέ δεν θα επιτύχουμε το ακριβές εμβαδόν. Παρόλα αυτά, τονίζει ο Orton, οι περισσότεροι από τους μαθητές αυτούς ήταν ικανοί να χειριστούν, και μάλιστα με σχετική ευκολία, τις βασικές τεχνικές της ολοκλήρωσης. Οι Rasslan και Tall (2002) αναφέρουν ότι σε έρευνα που έγινε στη Μεγάλη Βρετανία σε δείγμα 41 μαθητών ηλικίας 16 έως 18 ετών, των οποίων το επίπεδο ξεπερνούσε το μέσο όρο, μόνο 7 γνώριζαν και μπορούσαν να χειριστούν τον ορισμό της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Θεωρούν ότι αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν κατ' ανάγκην τον ορισμό μιας έννοιας προκειμένου να αποφασίσουν αν έχουν να κάνουν με αυτήν ή για να χειριστούν σχετικές με την έννοια καταστάσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις αποφασίζουν με βάση τις νοητικές εικόνες που έχουν σχηματίσει για την έννοια, τις ιδιότητες που της έχουν προσδώσει και τις διαδικασίες που έχουν συνδέσει στο μυαλό τους με αυτήν (Tall & Vinner, 1981; Rasslan & Vinner, 1997).

Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου στη χώρα μας της εισαγωγής της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος προηγείται η εισαγωγή αυτής του αόριστου ολοκληρώματος. Αυτός ο τρόπος εισαγωγής της έννοιας είναι κατά το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των

μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2004-2005, Τεύχος Β) θετικός:

> «Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται πρώτα η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και στη συνέχεια η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου. Ο τρόπος αυτός εισαγωγής του ολοκληρώματος, μολονότι δεν συμφωνεί με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος, εξυπηρετεί τη διδακτική πράξη».

Πιο συγκεκριμένα ακολουθείται από το σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, 2003) η εξής διδακτική προσέγγιση. Υπολογίζεται πρώτα το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου που περιέχεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=x^2$, τις ευθείες x=0 και x=1 και τον άξονα x΄x, ως το κοινό όριο των ακολουθιών ανώτερων και κατώτερων αθροισμάτων. Στη συνέχεια ορίζεται η ακολουθία των αθροισμάτων Riemann $(S_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$, με $S_\nu=\sum_{i=1}^{\nu} f(\xi_i)\Delta x$, και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής υπολογίζεται το όριό της καθώς $\nu\to+\infty$ και αποδεικνύεται ότι ισούται με το ζητούμενο εμβαδόν. Ακολουθεί ο ορισμός του εμβαδού του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς και μη αρνητικής συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β, ως το όριο της ακολουθίας αθροισμάτων Riemann. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν αποδεικνύεται ότι η ακολουθία συγκλίνει. Το επόμενο βήμα είναι ο ορισμός της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β] ως εξής:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_\nu=\beta$ χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa\in[x_{\kappa-1},x_\kappa]$, για κάθε $\kappa\in\{1,2,\cdots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\kappa)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\cdot$$

Αποδεικνύεται ότι

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right).$$

Ο Μεταξάς (2006) παρατηρεί ότι όλοι οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνά του δήλωσαν ότι δεν είχαν καμία αναπαράσταση ή σύνδεση του (αόριστου) ολοκληρώματος με οποιαδήποτε άλλη γνωστή τους έννοια. Διαπιστώνει επίσης την ύπαρξη ενός κοινού συμπεράσματος της έρευνάς του με αυτήν που διεξήγαγαν οι Carpenter et al (1980). Το συμπέρασμα αυτό είναι ότι η ανάπτυξη μιας υπολογιστικής τεχνικής είναι στενά συνδεδεμένη με την κατανόηση της έννοιας που βρίσκεται πίσω από την τεχνική αυτή και ότι συχνά οι μαθητές μαθαίνουν τη διαδικασία εκτέλεσης υπολογισμών χωρίς όμως να επιτυγχάνουν βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που αυτή η διαδικασία αντιπροσωπεύει. Όσοι έχουν διδάξει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος στην τρίτη τάξη του Λυκείου στη χώρα μας έχουν παρατηρήσει ότι και τα δυο αυτά συμπεράσματα ισχύουν και για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Η εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως και του αόριστου, στο σχολείο μας γίνεται με τρόπο φορμαλιστικό Το γεγονός αυτό αυξάνει τον κίνδυνο να οδηγηθούμε σε καταστάσεις ανάλογες του παραπάνω συμπεράσματος. Ζητούμενο κατά το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο είναι (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003):

- Να κατανοήσουν (οι μαθητές) την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με τη βοήθεια του παραβολικού χωρίου.
- Να κατανοήσουν (οι μαθητές) τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορούν να τις εφαρμόζουν.

- Να γνωρίζουν (οι μαθητές) το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.
- Να υπολογίζουν (οι μαθητές) τα εμβαδά επίπεδων χωρίων που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Η έρευνα αυτή εστιάζεται στο πρώτο από τα παραπάνω ζητούμενα. Δηλαδή αναζητά τρόπους για την καλύτερη κατανόηση του ορισμού της έννοιας μέσα από τον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Η αφετηρία της είναι η υπόθεση ότι η τυπική διδασκαλία της έννοιας και η συνεπαγομένη μηχανοποίηση της διαδικασίας, αν δεν συνοδευτεί από προσπάθεια εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας, είναι πιθανόν να οδηγήσει τους μαθητές στο χειρισμό των καταστάσεων που την εμπεριέχουν μέσα από μια διαδικασία ρουτίνας που θα στερείται μαθηματικού περιεχομένου (Artigue, 2002). Αυτόν ακριβώς τον κίνδυνο έρχεται να βοηθήσει να αποφύγουμε η χρήση των νέων ψηφιακών τεχνολογιών. Οι νέες τεχνολογίες και ειδικότερα τα CAS μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υποστηρίξουν τις αδυναμίες των μαθητών στο πεδίο αυτό (Kutzler, 1994). Ένα λογισμικό που μπορεί, μεταξύ άλλων, να χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό είναι το Autograph 3.0. Η επιλογή του συγκεκριμένου λογισμικού έγινε αφ' ενός γιατί είναι ένα νέο λογισμικό οι δυνατότητες του οποίου δεν έχουν διερευνηθεί επαρκώς και αφ' ετέρου γιατί, αν και εξαιρετικά ισχυρό, είναι πολύ εύκολο στο χειρισμό του ακόμα και από μαθητές που δεν έχουν εμπειρία χρήσης διερευνητικού λογισμικού.

Σκοπός της έρευνας

Ο σκοπός της έρευνας αυτής είναι να διερευνήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να αναζητήσει κατάλληλους και πρόσφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί ο εκπαιδευτικός να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες που του προσφέρει το λογισμικό πακέτο Autograph 3.0 στην διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα

Πιο συγκεκριμένα η έρευνα αυτή επιδιώκει να εξακριβώσει αν:

1. Είναι το λογισμικό Autograph ένα εύχρηστο ακόμα και από μαθητές με μικρή εμπειρία στη χρήση ψηφιακών τεχνολογιών εργαλείο για τη μελέτη και διερεύνηση των εννοιών που σχετίζονται με το εννοιολογικό πεδίο του ορισμένου ολοκληρώματος.
2. Μπορούν οι μαθητές χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό Autograph και αξιοποιώντας τις δυνατότητες που αυτό τους παρέχει να οδηγηθούν στην εννοιολογική κατανόηση του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.
3. Μπορούν οι μαθητές μέσα από τη χρήση του διερευνητικού λογισμικού Autograph στη μελέτη του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος να οδηγηθούν στην βαθύτερη και εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου.
4. Ο δάσκαλος των μαθηματικών αξιοποιώντας την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από την ένταξη στη διδακτική διαδικασία της χρήσης του λογισμικού Autograph αποκτά τη δυνατότητα να σχεδιάσει και να οργανώσει μια νοηματική διδασκαλία με στόχο τη εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές του των αντικειμένων τα οποία συνιστούν το εννοιολογικό πεδίο του ορισμένου ολοκληρώματος.

Αναγκαιότητα και σημαντικότητα της έρευνας

Μεγάλος αριθμός ερευνητών έχει ασχοληθεί στη χώρα μας αλλά κυρίως στο εξωτερικό με το πρόβλημα της χρήσης των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των εννοιών του Απειροστικού λογισμού (Heid et al, 1990; Guin & Trouche, 1999; Lagrange,1999; Lagrange, 2000; Mariotti, 2002), όπως επίσης και με τα προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη διδασκαλία των εννοιών του ορίου και της συνέχειας (Tall & Vinner, 1981; Artigue, 1997a) όπως και του ορισμένου ολοκληρώματος (Πάσχος & Φαρμάκη, 2005). Λίγες μόνο όμως έρευνες έχουν γίνει για την διερεύνηση των ωφελειών αλλά και των προβλημάτων που μπορούν να προκύψουν από τη χρήση των

νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος (Rasslan & Tall, 2002).

Οι εκπαιδευτικοί που εμπλέκονται στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού στην Γ΄ τάξη του Λυκείου στη χώρα μας γνωρίζουν ότι οι μαθητές δεν επιτυγχάνουν την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου και, κατά συνέπεια, της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Μπορούν παρόλα αυτά να χειριστούν παραδείγματα των εννοιών σε διαδικασιακό επίπεδο (Tall, 2004). Επιπλέον, λόγω της ιδιαιτερότητας της τάξης ως τάξη προετοιμασίας για τις εξετάσεις εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και της σημασίας που έχουν οι εξετάσεις αυτές, η χρήση πειραματικών μεθόδων διδασκαλίας καθώς και η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία της ύλης που περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα είναι, άτυπα βέβαια, περίπου «απαγορευμένη». Έτσι παρουσιάζεται το φαινόμενο η έρευνα στο πεδίο αυτό να είναι περιορισμένη.

Από την άλλη πλευρά το λογισμικό Autograph είναι ένα νέο λογισμικό που δεν έχει ακόμα χρησιμοποιηθεί ευρέως (αν και είναι συζητήσιμο το κατά πόσο είναι δόκιμη η χρήση της λέξης «ευρέως» όταν αναφέρεται σε χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα) στην εκπαιδευτική διαδικασία. Είναι λοιπόν αναγκαίο όσο και σημαντικό να επιχειρηθεί να αξιολογηθεί αν η χρήση του λογισμικού Autograph 3.0 μπορεί να βοηθήσει στην πιο αποτελεσματική διδασκαλία και στην καλύτερη και εννοιολογική κατανόηση των εννοιών του ορίου και του ορισμένου ολοκληρώματος.

Οριοθέτηση της έρευνας

Η έρευνα αυτή ενδιαφέρεται για την πιο αποτελεσματική χρήση ψηφιακών εργαλείων, και ειδικότερα του λογισμικού Autograph, στη διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Εστιάζεται στη διδασκαλία του ορισμένου ολοκληρώματος ως μια χαρακτηριστική τέτοια έννοια. Περιορίζεται όμως, όπως ήδη παρουσιάστηκε, στο πρώτο από τα ζητούμενα που θέτει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, δηλαδή την εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν παραβολικού χωρίου. Πρέπει να τονιστεί ότι η παρούσα έρευνα περιορίζεται στον ορισμό της έννοιας που δίνεται σχολικό εγχειρίδιο. Δηλαδή θεωρείται δεδομένος ο περιορισμός της κλάσης των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

στις συνεχείς συναρτήσεις. Επίσης η έρευνα δεν επεκτείνεται στον ορισμό άλλων ορισμένων ολοκληρωμάτων, όπως για παράδειγμα το ολοκλήρωμα Lebesgue.

ΙΙ. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μια επισκόπηση του προβληματισμού γύρω από το θέμα της χρησιμότητας της ένταξης και της χρήσης των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών και γίνεται μια προσπάθεια ανάλυσης κάποιων βασικών σύγχρονων θεωριών μάθησης που συνδέονται με το θέμα αυτό. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στα οφέλη που μπορούν να προκύψουν από τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και στη διερεύνηση για την εξεύρεση του πλέον κατάλληλου τρόπου ένταξης της τεχνολογίας αυτής στη διδακτική πρακτική. Εξετάζεται η συμβολή των νέων ψηφιακών τεχνολογιών γενικά και των αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων (CAS) ειδικότερα στην βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές και στον εμπλουτισμό του ρεπερτορίου των δασκάλων των μαθηματικών με τρόπους πρόσφορους για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Στην κατεύθυνση αυτή, ως πλέον πρόσφορη, εξετάζεται η θεωρία της ενοργανωμένης δραστηριότητας (instrumental activity).

Εισαγωγή

Η διδακτική των μαθηματικών είναι μια σχετικά πρόσφατη επιστήμη. Μόνο τα περίπου σαράντα τελευταία χρόνια εξελίσσεται σε έναν αυτόνομο επιστημονικό κλάδο επιχειρώντας να απογαλακτισθεί από τις γενικότερες θεωρίες μάθησης στις οποίες μέχρι τότε την ενέτασσαν και να αποκτήσει δική της ταυτότητα (Κυνηγός, 2007). Όμως αυτή η προσπάθεια απογαλακτισμού δεν σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι απορρίπτονται όλες οι θεωρίες μάθησης που έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια κυρίως της γνωστικής ψυχολογίας. Αντίθετα σε πολλές περιπτώσεις αποτελούν το θεμέλιο λίθο για την δόμηση θεωριών εστιασμένων στη διδακτική των μαθηματικών. Έτσι κρίθηκε σκόπιμο να γίνει μια σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης των κυριότερων θεωριών μάθησης και των επιδράσεων που αυτές είχαν στα θεωρητικά δομήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον σε σχέση με την έρευνα αυτή, όπως η θεωρία των εννοιολογικών πεδίων και η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, τα οποία αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της νέας επιστήμης της διδακτικής των μαθηματικών.

Επιπλέον τα τελευταία χρόνια βρισκόμαστε μπροστά σε μια έκρηξη στην ανάπτυξη των ψηφιακών τεχνολογιών σε κάθε τομέα της ζωής μας. Όπως είναι φυσικό το γεγονός αυτό δεν άφησε ανεπηρέαστο και τον κλάδο της έρευνας στην

παιδαγωγική επιστήμη και στη διδακτική γενικά αλλά και στη διδακτική των μαθηματικών ειδικότερα. Νέες τάσεις αναπτύχθηκαν στα πλαίσια των παιδαγωγικών επιστημών με αφορμή την ανάπτυξη της τεχνολογίας και προτάσεις για τη χρήση των νέων ψηφιακών τεχνολογιών στην εκπαίδευση είδαν το φως της δημοσιότητας. Οι απαρχές των αντιλήψεων αυτών εντοπίζονται στην εργασία του Seymour Papert στο Media Lab του MIT στα μέσα της δεκαετίας του 1960. Ο Papert, ο οποίος είχε βαθύτατα επηρεαστεί από τις απόψεις του Piaget, παρέμεινε επιφυλακτικός ως προς την πορεία των θεωριών μάθησης της εποχής του. Θεωρούσε ότι ο Piaget και οι παιδαγωγικές επιστήμες είχαν επικεντρωθεί στο τι δεν μπορεί να κάνει ένα παιδί και όχι στο τι μπορεί να κάνει σε μια συγκεκριμένη ηλικία (Κυνηγός, 2007). Για να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία πρότεινε τη ένταξη των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση. Υποστηρίζει ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε τεχνητά περιβάλλοντα τα οποία να είναι πολύ πιο πλούσια σε δυνατότητες ώστε να δίνουν στο παιδί εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων (Papert, 1991). Από το σημείο αυτό και μετά, και κυρίως την τελευταία εικοσαετία, οι ρυθμοί εξέλιξης ήταν καταιγιστικοί. Το πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται η έρευνα αυτή εδράζεται στη θεωρία της ενοργάνωσης (instrumentation theory) που αναπτύχθηκε από τους Verillon & Rabardel (1995) στα πλαίσια της γνωστικής εργονομίας (cognitive ergonomics) και της ανθρωπολογικής θεωρίας (anthropological theory) που ανέπτυξε ο Chevallard (1992). Είναι λοιπόν χρήσιμο πριν από την παρουσίαση της θεωρίας της ενοργάνωσης να γίνει μια επισκόπηση των αντιλήψεων γύρω από την οντολογία του όρου «νέες τεχνολογίες», την χρησιμότητά της ένταξής τους στη μαθησιακή και στη διδακτική διαδικασία και τις αλλαγές που αυτή η ένταξη επιβάλλει.

Θεωρητικό πλαίσιο

⊣ Οι γνωστικές και κοινωνικές θεωρίες για τη μάθηση των Μαθηματικών ⊢

Από τη Γενετική Επιστημολογία του Piaget στον Κοινωνικό Κονστρουκτιβισμό

Ο Jean Piaget ανέπτυξε τη Γενετική Επιστημολογία ως ένα πλαίσιο μελέτης της ανάπτυξης και της εξέλιξης των εννοιών, των λογικών ενεργειών και πράξεων και της συμβολικής σκέψης στο νου του παιδιού μέσα από μια σύνθεση της Φιλοσοφίας της Επιστήμης και της Ψυχολογίας (Κλαουδάτος, 1996). Επέμενε να δηλώνει ότι η

δουλειά του στην Ψυχολογία οριοθετείται από αυτό που εκείνος όριζε ως επιστημικό αντικείμενο ανάλυσης, δηλαδή μια κατασκευή από το υποκείμενο ως παραγωγού και επεξεργαστή της γνώσης (Verillon, 2000). Θεωρούσε τη γνωστική ανάπτυξη ως μια πολύ γενική διαδικασία που, αν και ατομική, δεν περιορίζεται στην ανάπτυξη κάθε ατόμου ξεχωριστά αλλά υποστηρίζεται από τη μια πλευρά από τη βιολογική εξέλιξη και από την άλλη από την ιστορική γένεση της επιστημονικής γνώσης.

Το πιο ενδιαφέρον και ελκυστικό ταυτόχρονα στοιχείο των απόψεων του Piaget είναι η θέση του ότι το υποκείμενο είναι το ίδιο ο κατασκευαστής της γνώσης και ότι δημιουργεί γνωστικές δομές και κατασκευάζει τη γνώση μόνο μέσα από την αλληλεπίδρασή του με τον εξωτερικό κόσμο (ibid). Τοποθετεί το υποκείμενο στο κέντρο της μαθησιακής πορείας καθιστώντας το πρωταγωνιστή που οικοδομεί τη γνώση του μέσα από την αλληλεπίδρασή του με το περιβάλλον (Henry, 2006). Ο Piaget (1980) υποστηρίζει «… *Όλη η γνώση που σχετίζεται με την πραγματικότητα…προκύπτει ως αποτέλεσμα δράσεων ή σειράς λειτουργιών πάνω σε αυτήν που της επιβάλλουν να μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκαλύπτει τις σταθερές αναλλοίωτες και τις παραλλάσσουσες ιδιότητές της*». Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Vergnaud «*η πράξη είναι πηγή και κριτήριο της γνώσης*». Κατά τον Verillon (2000) γνώση είναι κατά βάση η επίγνωση των αναλλοίωτων ιδιοτήτων των πραγμάτων (μέσα από τη διεργασία που ο Piaget ονομάζει εμπειρική αφαίρεση) και των αναλλοίωτων ιδιοτήτων -κυρίως λογικών- της δράσης (μέσα από την αναστοχαστική αφαίρεση).

Το υποκείμενο κατά τον Piaget μαθαίνει πραγματοποιώντας διαδοχικές προσαρμογές (adaptations) περνώντας μέσα από φάσεις ρήξεων και επαναϊσορροπιών με αφομοιώσεις (assimilations) και συμμορφώσεις (accommodations). Ο Piaget χρησιμοποιεί τον όρο αφομοίωση για να περιγράψει τη διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες δομές της γνώσης και τον όρο συμμόρφωση όταν αναφέρεται στη διαδικασία τροποποίησης των γνωστικών δομών του ατόμου (Κολέζα, 2000). Τι είναι όμως οι γνωστικές δομές; Είναι λιγότερο ή περισσότερο σταθεροί σχηματισμοί οι οποίοι σε κάθε στάδιο της ανάπτυξης υποστηρίζουν μια κλάση παρεμφερών ενεργειών (ibid). Ο όρος αφομοίωση λοιπόν υποδεικνύει την ενσωμάτωση από το υποκείμενο όλων των δεδομένων στοιχείων που είναι εξωτερικά. Κάποια από αυτά ενσωματώνονται σε

σχήματα και έννοιες ήδη κατασκευασμένες. Κάποια άλλα όμως παραμερίζονται ασυνείδητα γιατί δεν μπορούν να βρουν ένα νοητικό πλαίσιο κατάλληλο για την ένταξή τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το υποκείμενο να μην επείγεται να επιλύσει τις αντιφάσεις που αυτά προκαλούν. Όταν ο μαθητής δεν μπορεί πια να ξεπεράσει την ανισορροπία που προκαλείται από τις αντιφάσεις αυτές αρχίζει η αναπροσαρμογή (Henry, 2006). Πολύ σημαντική στο σημείο αυτό είναι η θεωρία της εξισορρόπησης. Η εξισορρόπηση είναι μια βασική διαδικασία της γνωστικής ανάπτυξης. Ο ίδιος ο Piaget γράφει:

> Οι γνώσεις περνούν από ένα στάδιο ισορροπίας σε ένα άλλο μέσα από φάσεις μεταβατικές, στη διάρκεια των οποίων οι προηγούμενες γνώσεις αμφισβητούνται. Αν αυτή η στιγμή της ανισορροπίας ξεπεραστεί, προκύπτει μια αναδιοργάνωση στις γνώσεις κατά τη διάρκεια της οποίας οι νέες γνώσεις ενσωματώνονται μέσα στις παλιές.

Σύμφωνα με τη θεωρία της εξισορρόπησης λοιπόν ο μαθητής βρίσκεται αρχικά σε μια θέση γνωστικής ισορροπίας. Κάποια στιγμή βρίσκεται αντιμέτωπος με διαταραχές αυτής της ισορροπίας που μπορούν να προκληθούν από γνωστικές συγκρούσεις, από αντιθέσεις, ρήξεις κλπ. Όταν ο μαθητής δεν μπορεί να ξεπεράσει εύκολα αυτές τις διαταραχές παρατηρείται μια φάση ύφεσης. Ακολουθεί μια φάση αναδιοργάνωσης των γνώσεων που τελικά οδηγεί σε μια νέα ισορροπία (ibid). Η διαδικασία της εξισορρόπησης περιλαμβάνει και την κατανόηση ως μια μακρά και συνεχή διαδικασία αναδιοργάνωσης των γνωστικών σχημάτων του υποκειμένου (Κλαουδάτος, 1996). Κατά την Sierpinska (1992) η κατανόηση περιέχει τέσσερις κατηγορίες ενεργειών: Την αναγνώριση, τη διάκριση, τη γενίκευση και τη σύνθεση. Αρχικά το υποκείμενο αναγνωρίζει ότι μια κατάσταση ή ένας όρος κλπ παρουσιάζει ενδιαφέρον για αυτό (αναγνώριση). Στη συνέχεια διακρίνει το συγκεκριμένο αντικείμενο από άλλα που σχετίζονται με αυτό. Παρατηρεί τις ομοιότητες και τις διαφορές τους (διάκριση). Έτσι οδηγείται στο σημείο να μπορεί να κατανοήσει τη δυνατότητα εφαρμογής των ιδιοτήτων του εξεταζόμενου αντικειμένου και σε άλλα πεδία (γενίκευση). Τέλος είναι πια σε θέση να συνδέσει έννοιες που μέχρι τη στιγμή αυτή θεωρούσε διαφορετικές (σύνθεση).

Η μάθηση λοιπόν θεωρούμενη σε αυτό το πλαίσιο είναι μια διαδικασία συνεχούς νοητικής αναδιοργάνωσης. Αυτή η οργάνωση και επανοργάνωση πραγματοποιείται μέσα από μια διαδικασία εμπειρικής και αναστοχαστικής αφαίρεσης κατά την οποία

το κύριο βάρος για την ερμηνευτική διαδικασία αποδίδεται στο υποκείμενο (Κολέζα, 2000). Αλλά η διαδικασία της μάθησης δεν είναι γραμμική. Πολύ συχνά παρατηρούνται παλινδρομήσεις κατά την εξέλιξή της. Οι μαθητές πρέπει να επιστρέψουν σε μια προηγούμενη κατάσταση, να ανατρέξουν στις υπάρχουσες γνώσεις τους και να τις χρησιμοποιήσουν με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν βγαίνοντας από την προβληματική κατάσταση στην οποία βρίσκονται. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι πάντα άμεσα δυνατό. Η γνώση κατά την Robert διακρίνεται σε κατεχόμενη και διαθέσιμη. Κατεχόμενη είναι η γνώση την οποία κατ' αρχήν είναι ικανός ο μαθητής να χρησιμοποιήσει για να λύσει ένα πρόβλημα που του τίθεται με ρητό τρόπο. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι μιλάμε για κατεχόμενη γνώση και στην περίπτωση που ο μαθητής δεν μπορεί από μόνος του να ανακαλέσει αυτή τη γνώση, αλλά μπορεί να τη χρησιμοποιήσει αν προκληθεί με τον κατάλληλο τρόπο. Διαθέσιμη είναι μια επαρκώς σταθεροποιημένη γνώση την οποία μπορεί να ανακαλέσει ο μαθητής χωρίς καμία υπόδειξη και να τη χρησιμοποιήσει σαν εργαλείο (Henry, 2006).

Στις απόψεις του Piaget εδράζεται ο ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός που αναπτύχθηκε πάνω στις ιδέες του Von Glasersfeld και στηρίζεται πάνω στις εξής δυο υποθέσεις:

- Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν συλλαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον.
- Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τον χρήστη.

Έτσι η μαθηματική γνώση θεωρείται απλά ως το προϊόν των νοητικών λειτουργιών του ατόμου. Η επίδραση και η συμβολή του περιβάλλοντος στη γνωστική ανάπτυξη αγνοείται. Αυτός είναι ένας από τους παράγοντες για τους οποίους ασκήθηκε πολύ σοβαρή κριτική στον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό. Το πιο βασικό σημείο αυτής της κριτικής είναι ότι η φύση των νοημάτων που δομούνται από το υποκείμενο δεν καθορίζεται αποκλειστικά από το ίδιο το υποκείμενο αλλά και από τους τρόπους αλληλεπίδρασής του με το περικείμενο, τη φύση της ανατροφοδότησης που δέχεται από το περιβάλλον του και τη φύση των περιορισμών και των ορίων που θέτει αυτή η αλληλεπίδραση (Sutherland & Balacheff, 1999).

Αναπτύχθηκε λοιπόν μια άλλη τάση, η θεωρία του κοινωνικού-πολιτισμικού πλαισίου, η οποία λαμβάνει υπόψη της τη σημασία του πολιτισμικού και κοινωνικού περιβάλλοντος στην έρευνα και την εκπαίδευση. Το κέντρο του ενδιαφέροντος δεν είναι πια το άτομο αλλά η ομάδα. Κατά τους Edwards και Mercer (1987) η παιδοκεντρική ιδεολογία απαιτείται να αντικατασταθεί από μια άλλη που θα δίνει έμφαση στις κοινωνικοπολιτισμικές και επικοινωνιακές βάσεις της γνώσης και της μάθησης.

Ο Van Oers (1996) υποστηρίζει ότι οι βασικές ιδέες στις οποίες στηρίζεται μια κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι οι εξής:

- Το κοινωνικό, πολιτισμικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον δεν διευκολύνει ούτε παρεμποδίζει απλά τη μάθηση. Οι κοινωνικές οργανωτικές διαδικασίες είναι έμφυτο χαρακτηριστικό της μάθησης είτε αυτή λαμβάνει χώρα σε ένα ανοικτό κοινωνικό πλαίσιο είτε όχι.
- Η μάθηση πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια μορφή μαθητείας κατά τη διάρκεια της οποίας οι αρχάριοι γίνονται «ειδικοί» μέσα από τη συμμετοχή σε δραστηριότητες μιας κοινωνικής ομάδας.
- Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια επικοινωνιακή δραστηριότητα.
- Η μάθηση απαιτεί διαπραγμάτευση του νοήματος στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας.

Οι θεωρίες αυτές έχουν αφετηρία το έργο του Vygotsky και των συνεχιστών του. Και ο Vygotsky, όπως ο Piaget, θεωρεί ότι η γνώση είναι μια κατασκευή του υποκειμένου που πηγάζει από τις ενέργειές του. Η θεμελιώδης διαφορά τους βρίσκεται στο ότι ενώ ο Piaget αντιμετωπίζει το άτομο σε πλήρη απομόνωση, εκτός ίσως από το άμεσο φυσικό περιβάλλον του, ο Vygotsky υπογραμμίζει τη σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης (Κολέζα, 2000). Προτεραιότητα δεν έχει ο εγωκεντρικός εσωτερικός λόγος που μετασχηματίζεται σε κοινωνικό αλλά, αντίθετα, ο κοινωνικός λόγος που εξελίσσεται σε εσωτερικό. Για τον Vygotsky ο ρόλος της γλώσσας είναι καθοριστικός στην γνωστική ανάπτυξη. Η επικοινωνία είναι ένα πολιτισμικό γεγονός και η γλώσσα ένα πολιτισμικό εργαλείο που σχετίζεται με τη σκέψη. Επομένως η δομή των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων διαμορφώνει τη βάση της δομής της σκέψης. Έτσι θεωρεί ότι η μάθηση προηγείται της εξέλιξης. Εισάγει την έννοια της ζώνης της

επικείμενης ανάπτυξης (zone of proximal development). Η ζώνη επικείμενης ανάπτυξης ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ του τρέχοντος αναπτυξιακού επιπέδου, όπως αυτό καθορίζεται από την ανεξάρτητη επίλυση προβλημάτων, και του εν δυνάμει επιπέδου όπως αυτό προσδιορίζεται μέσα από την επίλυση προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση ενός ενήλικα ή σε συνεργασία με ένα πιο ικανό άτομο της ίδιας περίπου ηλικίας. Έτσι η μάθηση δεν αντιμετωπίζεται πια ως μια απλή σχέση μεταξύ του ατόμου και της γνώσης αλλά ως εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα, σε ένα πολιτισμικό περιβάλλον. Το βάρος δεν πέφτει πια στην εξάσκηση του παιδιού στο τρέχον επίπεδο ανάπτυξης αλλά στην προσπάθεια να του δοθεί μια ώθηση προς τα πάνω μέσα στο πλαίσιο της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης.

Επηρεασμένη από τις απόψεις του Vygotsky και την κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η θεωρία της δράσης (activity theory) που αναπτύχθηκε ως θεωρητικό πλαίσιο για το σχεδιασμό της διδασκαλίας και την ερμηνεία της συμπεριφοράς των μαθητών. Σημαντικό για τη θεωρία αυτή είναι το θέμα της εσωτερίκευσης (internalization ή interiorization). Η εσωτερίκευση στη θεωρία δράσης κατανοείται ως ο μετασχηματισμός μιας διαψυχολογικής διαδικασίας (μεταξύ ατόμων) σε ενδοψυχολογική (μέσα στο άτομο). Είναι ακριβώς η διαδικασία μέσα από την οποία ο κοινωνικός λόγος εξελίσσεται σε εσωτερικό.

Κυρίαρχο ρόλο στις διδακτικές προσεγγίσεις της θεωρίας της δράσης έχει η έννοια της διαμεσολάβησης (mediation). Η γνωστική εξέλιξη θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας διεργασίας στην οποία γίνεται ευρεία χρήση τεχνουργημάτων (artefacts) και στην οποία η διαμεσολάβηση των οργάνων (instruments) έχει πρωτεύοντα ρόλο (Verilllon, 2000). Ο Vygotsky υποστηρίζει (1935/1980) ότι η χρήση οργάνων επιφέρει τεράστιες αλλαγές στη γνώση. Ισχυρίζεται ότι η χρήση οργάνων «*…ενεργοποιεί μια ολόκληρη σειρά νέων λειτουργιών που συνδέονται με τη χρήση και τον έλεγχο του οργάνου που έχει επιλεγεί. Αντικαθιστά και καθιστά άσκοπες έναν σοβαρό αριθμό φυσικών λειτουργιών των οποίων η δουλειά αναπτύσσεται από το όργανο*».

Οι αναπαραστάσεις (representations) και τα τεχνουργήματα (artefacts)

Μια αναπαράσταση είναι ένας σχηματισμός (συνδυασμός χαρακτήρων ή συμβόλων-σημείων), ο οποίος αναπαριστά κάτι άλλο με έναν συγκεκριμένο τρόπο

(Σακονίδης, 2005). Κατά τον Goldin (2002) ο σχηματισμός αυτός «μπορεί να δρα στη θέση, να ερμηνεύεται ως, να αντιστοιχεί σε, να υποδηλώνει, να απεικονίζει, να ενσαρκώνει, να κωδικοποιεί, να επικαλείται, να ονοματίζει, να συνδέεται με, να σημαίνει, να παράγει, να αναφέρεται σε, να μοιάζει με, να εξυπηρετεί ως μεταφορά για, να σηματοδοτεί, να αντικαθιστά, να αντιπροσωπεύει, να προτείνει ή να συμβολίζει αυτό που αναπαρίσταται». Ο Goldin αναφέρεται εδώ στις λεγόμενες εξωτερικές αναπαραστάσεις. Οι εσωτερικές (ή νοητικές) αναπαραστάσεις είναι νοητικοί σχηματισμοί που αναπτύσσει το υποκείμενο, μαθητής ή λύτης προβλήματος, για να αναπαραστήσει την πραγματικότητα (Γαγάτσης, Σπύρου, & Ευαγγελίδου, 2004). Είναι δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο ένα άτομο κινητοποιεί τις γνώσεις του όταν βρίσκεται απέναντι από ένα πρόβλημα (Κλαουδάτος, 1996). Ο Bruner (1964) στηριζόμενος στη θεωρία του Piaget ισχυρίζεται ότι η σημαντικότερη λειτουργία σε σχέση με τη μνήμη δεν είναι η αποθήκευση της πληροφορίας, αλλά η κατανόηση της πληροφορίας που μας χρειάζεται κάθε φορά. Η ανάκληση εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο έχει κωδικοποιηθεί και έχει υποστεί επεξεργασία η παρελθούσα εμπειρία ώστε να είναι χρηστική. Το τελικό προϊόν της κωδικοποίησης και επεξεργασίας είναι αυτό που ονομάζουμε αναπαράσταση. Κατά τις Robert και Robinet (1989) η αναπαράσταση είναι το προϊόν μιας διανοητικής ενέργειας από την οποία το άτομο (ή μια ομάδα ατόμων) ξαναφτιάχνει το πραγματικό το οποίο αντιμετωπίζει και του προσδίδει μια ορισμένη σημασία. Οι αναπαραστάσεις, συνεχίζουν οι Robert και Robinet, είναι οργανωμένες σε ένα συμβολικό δομημένο σύστημα του οποίου η κύρια λειτουργία είναι η αντίληψη και η ρύθμιση του κόσμου από το υποκείμενο, επιτρέποντάς του να τον κατανοήσει και να τον ερμηνεύσει. Από το σημείο αυτό και μετά, η αναπαράσταση επιτρέπει την προσαρμογή του υποκειμένου και γίνεται έτσι ένα κύριο στοιχείο που καθοδηγεί τη συμπεριφορά του.

Οι Goldin και Kaput (1996) κάνουν τη διάκριση μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων. Θεωρούν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις ως δυνατούς νοητικούς σχηματισμούς προσβάσιμους από τους παρατηρητές μόνο ως κατασκευές τις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε μέσα από την παρατήρηση της συμπεριφοράς του υποκειμένου και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις ως φυσικά ενσωματωμένες αξιοπρόσεκτες και προσιτές στον εξωτερικό παρατηρητή. Ο Duval (1999) όμως θεωρεί ότι η σημαντική διάκριση δεν είναι αυτή μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών

αναπαραστάσεων αλλά εκείνη μεταξύ σημειολογικών ή συμβολικών (semiotic) αναπαραστάσεων και αναπαραστάσεων που παράγονται από ένα οργανικό σύστημα ή μια φυσική συσκευή. Ορίζει ως σημειολογικές (συμβολικές) αναπαραστάσεις εκείνες που παράγονται με την εσκεμμένη χρήση οποιουδήποτε σημειολογικού (συμβολικού) συστήματος. Η διάκριση λοιπόν συνίσταται ακριβώς στο σύστημα μέσα στο οποίο παράγεται η αναπαράσταση.

Ένα τεχνούργημα (artefact) είναι ένα κατασκευασμένο υλικό αντικείμενο, όπως ένα εργαλείο ή ένα μηχάνημα, που έχει σχεδιαστεί για να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο συγκεκριμένο έργο. Όταν τεθεί σε χρήση είναι φορέας σκόπιμα οργανωμένων σταθερών (invariants) που σχεδιάστηκαν αποσκοπώντας στον χειρισμό συγκεκριμένων προσδοκώμενων μετασχηματισμών του ανθρώπινου ή του υλικού περιβάλλοντος. (Verillon & Andreucci, 2005). Ο χρήστης καθώς το χειρίζεται αναπτύσσει νέες αναπαραστάσεις σχετικά με τη χρήση του. Σχήματα δράσης δημιουργούνται. Η ανάπτυξή του artefact βέβαια συνδέεται με την προσδοκία ότι, αν χρησιμοποιηθεί σωστά, λόγω του σχεδιασμού του θα μας δώσει εντυπωσιακά αποτελέσματα. Αλλά, μια και οι συνθήκες δεν είναι ποτέ ίδιες, το artefact δεν εμπλέκεται ποτέ σε μια κατάσταση με τον ίδιο τρόπο, ακόμα και όταν χρησιμοποιείται σύμφωνα με τον σχεδιασμό του. Δηλαδή κάθε μεμονωμένη χρήση του το επαναπροσδιορίζει (ibid). Όπως παρατηρεί ο Verillon (2000) δίνοντας το παράδειγμα ενός κατσαβιδιού που μπορεί κάποιες φορές να χρησιμοποιηθεί και σαν σφυρί, τα artefacts μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για έργα διαφορετικά από αυτά για τα οποία σχεδιάστηκαν. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, μέσα από την ποικιλία των τρόπων χρήσης του από τον άνθρωπο, η διαδικασία σχεδιασμού του συνεχίζεται αρκετά μετά την ίδια την κατασκευή του (Rabardel, 1995). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι μετασχηματίζεται το ίδιο το artefact. Σημαίνει απλά ότι αλλάζει η θεώρηση του υποκειμένου για αυτό. Επομένως η λειτουργικότητα και η αποτελεσματικότητα ενός artefact γίνεται φανερή μόνο μέσα από τη δράση του χρήστη του (Verillon & Andreucci, 2005). Η κατανόηση όμως της συμβολής της χρήσης ενός artefact στην γνωστική ανάπτυξη του υποκειμένου δεν είναι κάτι το απλό. Θα πρέπει να λάβει κανείς υπόψη του συνολικά τις εννοιολογικές δομές του υποκειμένου για το ίδιο το artefact, για την πραγματικότητα προς στην οποία

κατευθύνεται η δράση του και την συνεπαγόμενη αλληλεπίδρασή του με την πραγματικότητα (ibid).

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau

Ο Brousseau (1986) ανέπτυξε τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων ως θεωρητική προσέγγιση της διαδικασίας της μάθησης. Μια διδακτική κατάσταση είναι το σύνολο των αναφορών που εγκαθίστανται ρητά ή υπόρρητα ανάμεσα σε έναν μαθητή ή μια ομάδα μαθητών, ένα μέσο (συμπεριλαμβανομένων πιθανώς και οργάνων ή αντικειμένων) και ένα διδακτικό σύστημα (τον καθηγητή) με σκοπό να μεταδώσει στους μαθητές αυτούς μια θεσμοποιημένη γνώση. Σύμφωνα με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων η διαδικασία της μάθησης χωρίζεται σε τέσσερις διαδοχικές φάσεις κατά τη διάρκεια των οποίων η γνώση δεν έχει την ίδια λειτουργία και ο μαθητής δεν έχει την ίδια εμπλοκή με αυτήν (Henry, 2006). Οι φάσεις αυτές είναι :

- Κατάσταση δράσης: Ο μαθητής βρίσκεται μπροστά σε μια κατάσταση δράσης που προκαλείται από ένα πρόβλημα. Αναγκάζεται λοιπόν για να την αντιμετωπίσει να δημιουργήσει ένα αρχικό μοντέλο. Δεν μπορεί όμως ακόμα να διατυπώσει και να οργανώσει σε θεωρητικό επίπεδο τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων του.
- Κατάσταση διατύπωσης: Ο μαθητής προσπαθεί να βελτιώσει το μοντέλο του και να δημιουργήσει σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον της τάξης, επικοινωνώντας με αυτό σε απλή ή σε μαθηματική γλώσσα, ένα καινούριο που έχει νόημα και περιεχόμενο για αυτόν.
- Κατάσταση επικύρωσης: Είναι η φάση της απόδειξης. Ο μαθητής πρέπει να φύγει από την εμπειρική επικύρωση που επιτυγχάνεται με επιχειρηματολογία και να μπορέσει να δώσει απόδειξη των όσων προτείνει.
- Κατάσταση θεσμοποίησης: Μετά την επικύρωσή της η νέα γνώση είναι πια μέρος της μαθηματικής γνώσης της τάξης. Για να καταστεί κοινωνική γνώση απαιτείται η επέμβαση του διδάσκοντα που ορίζει συμβατικά και ρητά τη γνωστική υπόσταση της παραχθείσας γνώσης.

Οι τρεις πρώτες καταστάσεις αφορούν κατά κύριο λόγο τον μαθητή. Ο μαθητής κινητοποιείται με αφορμή το πρόβλημα, ο μαθητής αλληλεπιδρά με το περιβάλλον της τάξης αναπτύσσοντας εικασίες και αναμορφώνοντας το μοντέλο του, ο μαθητής, τέλος, οδηγείται μέσα από αυτές τις διαδικασίες στο μαθηματικό νόημα του προς συζήτηση αντικειμένου. Η τέταρτη όμως είναι αποκλειστική ευθύνη του διδάσκοντα ο οποίος θα πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός γιατί κατά τον Henry (2006) «*η πρόωρη θεσμοποίηση διακόπτει τη κατασκευή του νοήματος και η όψιμη ενισχύει τις ανακριβείς ερμηνείες*».

Το στοιχείο που διαφοροποιεί τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων από άλλα κονστρουκτιβιστικά δομήματα είναι η σαφής προτεραιότητα που η θεωρία δίνει στην στοχευμένη μάθηση των μαθηματικών (intentional mathematical knowledge) σε αντίθεση με την επικρατούσα στα δεύτερα τάση να δίνεται έμφαση στην υποστήριξη των μαθητών στη χρήση μεγάλης ποικιλίας μεθόδων που θεωρείται ο κυριότερος παράγοντας της μάθησης στα μαθηματικά (Sutherland & Balacheff, 1999).

Το διδακτικό συμβόλαιο

Μια έννοια που άμεσα συνδέεται με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων είναι αυτή του Διδακτικού Συμβολαίου (Brousseau, 1982, 1997). Το Διδακτικό Συμβόλαιο είναι το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντα που αναμένονται από το μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από τον διδάσκοντα. Είναι επομένως το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν, από τη μια μεριά, ρητά αυτή τη σχέση, αλλά, από την άλλη, υπόρρητα το γεγονός ότι ο κάθε συμμετέχων στη διδακτική σχέση θα διαχειρίζεται τη σχέση αυτή με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, αλλά πάντα έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του άλλου. Δηλαδή αποτελεί μια συμφωνία ανάμεσα στους μαθητές και το δάσκαλο η οποία μπορεί να είναι εκφρασμένη σαφώς και ρητά ή να περιέχεται ως υπονοούμενη, μέσα στη δομή του κοινωνικού συστήματος και αναφέρεται στους διαφορετικούς ρόλους του δάσκαλου και του μαθητή. Το διδακτικό συμβόλαιο δεν αφορά μόνο τη διδασκαλία. Είναι το χτίσιμο μιας σχέσης όπου φανερά ή σιωπηρά ο κάθε συντελεστής, ο δάσκαλος και ο μαθητής, έχει την ευθύνη να συνεισφέρει με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο, είναι υπεύθυνος απέναντι στον άλλο (Κολέζα, 2000). Σύμφωνα με τον Mellin-Olsen (1987) το Διδακτικό Συμβόλαιο είναι μια αντιφατική κατάσταση.

Για να επιτευχθεί η μάθηση πρέπει αυτό να ακυρωθεί. Έτσι το διδακτικό συμβόλαιο κατανοείται καλύτερα μέσα από τις ρήξεις του (Κολέζα, 2000).

Καταστάσεις προβλήματος

Μια κατάσταση προβλήματος είναι κατά τον Henry (2006) το δεδομένο των ανοικτών ερωτήσεων μιας κατάστασης λίγο ή πολύ μαθηματικοποιημένης, η οποία ξεπροβάλλει σ' ένα πεδίο προβλημάτων, που τίθεται μέσα σ' ένα ή πολλά πλαίσια. Το ζητούμενο μιας κατάστασης προβλήματος είναι να οδηγηθούν οι μαθητές στη χρήση νέων μαθηματικών εργαλείων. Αυτό μπορεί να γίνει με καθοδήγηση των μαθητών μέσα από μια διαδοχή ερωτημάτων που σταδιακά θα τους οδηγήσουν πρώτα σε μια άτυπη και τέλος σε μια ξεκάθαρη χρήση αυτών των νέων εργαλείων. Συνεπώς οι καταστάσεις προβλήματος πρέπει να είναι πολύ προσεκτικά σχεδιασμένες ώστε να οδηγήσουν αναγκαία τους μαθητές ακριβώς στην ανάπτυξη και χρήση των εργαλείων αυτών. Ποια είναι όμως τα χαρακτηριστικά που πρέπει να πληροί μια κατάσταση προβλήματος; Είναι κατά τον Henry (2006) τα εξής:

- Πρέπει οι μαθητές να μπορούν εύκολα να καταλάβουν τα δεδομένα και να χρησιμοποιήσουν τις υπάρχουσες γνώσεις τους στην αναζήτηση μιας κατάλληλης απάντησης.
- Πρέπει η κατάσταση προβλήματος να οδηγεί σε ένα εννοιολογικό πεδίο στο οποίο τοποθετείται αυτό που έχουμε στόχο να μαθευτεί.
- Οι παλιές γνώσεις των μαθητών δεν θα πρέπει να επαρκούν για να μπορούν να λύσουν αμέσως το πρόβλημα.
- Οι γνώσεις που αποτελούν το αντικείμενο της διδασκαλίας θα πρέπει να μας εφοδιάζουν με εργαλεία που είναι καλύτερα προσαρμοσμένα ώστε να επιτευχθεί μια λύση.
- Η ερώτηση θα πρέπει να μπορεί να διατυπωθεί σε διάφορα πλαίσια (αλγεβρικά, γεωμετρικά κλπ) στα οποία μπορούν να ενεργήσουν τα προς κατασκευή εργαλεία.

Με τον όρο «εννοιολογικό πεδίο» θεωρούμε τον χώρο των προβλημάτων ή των καταστάσεων-προβλήματος των οποίων η διαχείριση περικλείει έννοιες και διαδικασίες πολλών τύπων σε στενή μεταξύ τους συνοχή (Vergnaud, 1991). Σύμφωνα

με τη θεώρηση αυτή δεν έχει νόημα να σκεφτόμαστε πάνω σε μια συγκεκριμένη έννοια μεμονωμένα Κάθε έννοια θα πρέπει να θεωρείται ως μια τριάδα. Ως ένα σύνολο συναφών εννοιών του οποίου η εξεταζόμενη έννοια είναι ο πυρήνας, ως ένα σύνολο καταστάσεων στις οποίες η συγκεκριμένη έννοια λύνει κάποιο πρόβλημα και ως ένα σύνολο αναπαραστάσεων της έννοιας. Δηλαδή μια έννοια κατά τον Vergnaud χαρακτηρίζεται από μια τριάδα (S, l, s) όπου:

- S είναι το σύνολο καταστάσεων που δίνουν νόημα στην έννοια
- l είναι το σύνολο των αμετάβλητων λειτουργιών της έννοιας, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές στα στοιχεία του S και
- s είναι ένα σύνολο αναπαραστάσεων της έννοιας.

Οι Balacheff και Gaudin (2002) επεξέτειναν τη θεώρηση αυτή προσθέτοντας μια επιπλέον πτυχή στον ορισμό του εννοιολογικού ή νοητικού πεδίου. Έτσι το νοητικό πεδίο χαρακτηρίζεται πλέον ως μια τετράδα (P, R, L, Σ), όπου:

- P είναι ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων ή προβλημάτων
- R είναι ένα σύνολο πράξεων, σχέσεων και αξιωμάτων
- L είναι ένα αναπαραστασιακό σύστημα και
- Σ είναι μια δομή ελέγχου.

Το πρόσθετο στοιχείο είναι η δομή ελέγχου Σ που είναι ακριβώς το απαραίτητο στοιχείο ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να κάνουν κρίσεις και επιλογές και να λαμβάνουν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (Κυνηγός, 2007).

Με τη βοήθεια των εννοιολογικών πεδίων μπορούμε να περιγράψουμε με καλύτερο τρόπο τις δυνατότητες της γνώσης και να κατανοήσουμε καλύτερα το φαινόμενο της μάθησης μια και η προοδευτική συγκρότησή τους, η συναρμογή τους και η περιπλοκότητά τους είναι στην πραγματικότητα η κυριότερη διαδικασία μάθησης (Henry, 2006).

Η μάθηση των μαθηματικών

Το πρόβλημα της μάθησης των μαθηματικών δεν είναι απλό και προφανώς δεν επιδέχεται μοναδική λύση. Οι αντιλήψεις πάνω στο θέμα της φύσης των ίδιων των μαθηματικών αντικειμένων αλλά και της φύσης της μαθησιακής διαδικασίας καθορίζουν και την άποψη του υποκειμένου για τη μάθηση των μαθηματικών. Μια πλατωνική αντίληψη σε σχέση με τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων είναι λογικό να οδηγεί σε αντιλήψεις που σχετίζονται με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας για τη «μεταφορά της γνώσης» και τη «μεταδοτικότητα του δασκάλου». Είναι η κυρίαρχη τάση στο σχολείο μας και τα κυριότερα χαρακτηριστικά της είναι η μετωπική διδασκαλία και η αταλάντευτη συνέπεια στη μετάδοση έγκυρης και μη επιδεχόμενης αμφισβήτηση «γνώσης». Τα μαθηματικά λοιπόν σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή είναι αντικείμενα υπαρκτά έξω από το υποκείμενο και η μάθησή τους συνίσταται κατά κύριο λόγο στην απομνημόνευση και στην εκμάθηση αλγοριθμικών κανόνων μέσα από εξαντλητικές επαναλήψεις για εξάσκηση κάτω από την επιτήρηση και καθοδήγηση του δασκάλου ο οποίος είναι ο κάτοχος της απόλυτης αλήθειας την οποία μεταδίδει στους μαθητές του. Μια διαφορετική αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών είναι αυτή που θεωρεί τα μαθηματικά ως ένα ανθρώπινο λογικό δημιούργημα του οποίου η διαδικασία παραγωγής, ανάπτυξης και εξέλιξης αποτελείται από εικασίες, υποθέσεις, απορρίψεις και επαληθεύσεις (Davis & Hersh, 1981; Lakatos, 1996). Στο πλαίσιο αυτό «Η μάθηση των μαθηματικών έχει την ίδια φύση με τη διαδικασία που εμπλέκονται οι μαθηματικοί επιστήμονες. Συνίσταται δηλαδή στην εμπειρική, υποθετικο-παραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους.» (Κυνηγός, 2007, σελ.33).

Κάτω από αυτό το πρίσμα λοιπόν τα γενικά χαρακτηριστικά της μάθησης στα μαθηματικά, δηλαδή της απόκτησης μαθηματικής γνώσης, μπορούν κατά την Κολέζα (2000) να συνοψιστούν στα εξής:

- Η απόκτηση γνώσης είναι μια συνεχής διαδικασία επαναδόμησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν αυξάνεται απλά η ποσότητα της γνώσης, αλλά και ότι η προσθήκη της νέας γνώσης προκαλεί επαναδιάταξη της προϋπάρχουσας. Η επαναδόμηση αυτή μπορεί να συμβεί σε ατομικό ή σε κοινωνικό επίπεδο.

- Η διαδικασία κατασκευής της γνώσης δεν είναι μια καθαρά ατομική γνωστική διαδικασία αλλά επηρεάζεται, θετικά ή αρνητικά, από εσωτερικούς (έμφυτοι γνωστικοί περιορισμοί και προϋπάρχουσα γνώση) και εξωτερικούς (πολιτιστικοί, όπως τα κοινωνικά αποδεκτά «εργαλεία», και κοινωνικοί όπως οι διαδικασίες αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών της κοινότητας κλπ) παράγοντες.
- Η διαδικασία απόκτησης γνώσης επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη γνωστική περιοχή. Το σύνολο των γνώσεων που κατέχει ένα άτομο χωρίζεται σε αυτοτελή γνωστικά συστήματα που εμπλουτίζονται ανεξάρτητα το ένα από τα άλλα παρά το γεγονός ότι μπορεί να υπάρξει μεταφορά γνώσης από ένα σύστημα σε άλλο.
- Η αποκτηθείσα γνώση εξαρτάται από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτήθηκε.
- Η διαδικασία απόκτησης της μαθηματικής γνώσης είναι μια κατασκευαστική διαδικασία και όχι μια διαδικασία μετάδοσης, με την εξαίρεση της διαδικαστικής γνώσης, όπως για παράδειγμα τα βήματα επίλυσης ενός αλγόριθμου, αλλά και της εννοιολογικής γνώσης όταν αυτή έχει επαρκώς κωδικοποιηθεί.

⊣ Οι ψηφιακές τεχνολογίες στην Εκπαίδευση ⊢

Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στην Εκπαίδευση

Στην παγκόσμια εκπαιδευτική κοινότητα και ειδικότερα στο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας παραμένει ανοικτό το θέμα της αναγκαιότητας και της χρησιμότητας της ένταξης των νέων ψηφιακών τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά και της κατάλληλης και αποδοτικής αξιοποίησής τους. Υποστηρίζεται από κάποιους, και αυτή είναι μια άποψη με την οποία συμφωνούν κυρίως οι οπαδοί της παραδοσιακής διδακτικής πρακτικής, ότι η αυξανόμενη χρήση των Η/Υ και των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση οδηγεί σε υποβάθμιση του ρόλου της μνήμης καθώς και στον περιορισμό της χρήσης των ασκήσεων εξάσκησης, παράγοντες τους οποίους οι υποστηρικτές της άποψης αυτής θεωρούν σημαντικούς για την εκπαιδευτική διαδικασία (Wu, 1998). Από την άλλη πλευρά οι υποστηρικτές της κονστρουκτιβιστικής αντίληψης υποστηρίζουν ότι οι αντιλήψεις και οι πρακτικές τους οδηγούν τους μαθητές σε μια πολύ ισχυρότερη εννοιολογική κατανόηση και τους δίνουν τη δυνατότητα να καταστούν ικανοί και ανεξάρτητοι μελετητές, με αποτέλεσμα την αποδοτικότερη και πιο κατάλληλη χρήση των νέων τεχνολογιών (Leinbach, Pountney & Etchells, 2002). Όλο και περισσότεροι βέβαια πλέον συμφωνούν ότι η χρήση των νέων τεχνολογιών έχει ισχυρή θετική επίδραση στη διδακτική πρακτική και την αναβαθμίζει σε όλα τα επίπεδα της Εκπαίδευσης (Knop, 2003). Αυτό που ήταν όμως, και σε μεγάλο βαθμό παραμένει ακόμα και σήμερα, ζητούμενο από την μαθηματική εκπαίδευση δεν ήταν τόσο μια κατάλληλη, και επομένως αποτελεσματική, χρήση των διαθέσιμων υπολογιστικών εργαλείων και των νέων τεχνολογιών γενικότερα στα σχολεία μας, όσο κυρίως αυτά «…να είναι παιδαγωγικά εργαλεία για τη μελέτη μαθηματικής γνώσης και αξιών που αναπτύχθηκαν πιθανότατα όταν αυτά τα εργαλεία ήταν ακόμα ανύπαρκτα» (Artigue, 2002). Έτσι «…*η πιο συνηθισμένη δουλειά για την οποία χρησιμοποιείται ο υπολογιστής στην εκπαίδευση είναι να τροφοδοτεί με το ζόρι το αχώνευτο υλικό που έμεινε από την προϋπολογιστική εποχή*» (Papert, 1991, σελ. 74). Ανακύπτει επομένως ένα πολύ σημαντικό διπλό ερώτημα: Ποιο είναι το περιεχόμενο του όρου «νέες τεχνολογίες στην Εκπαίδευση» και τι εννοούμε μιλώντας για ένταξη και χρήση των νέων τεχνολογιών στην Εκπαίδευση; Κατά τους Κυνηγό και Δημαράκη (2002) οι νέες

τεχνολογίες προσεγγίζονται από δυο πλευρές. Ως νοητικά εργαλεία και ως πηγές πληροφόρησης και μέσα επικοινωνίας.

Τα νοητικά εργαλεία αφορούν σε εξειδικευμένες εφαρμογές στις οποίες έχει δοθεί και το όνομα «διερευνητικό λογισμικό». Χρησιμοποιούνται από το μαθητή ως εργαλεία των οποίων η εκμάθηση έχει παιδαγωγική αξία, μια και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου. Με τη βοήθειά τους ο μαθητής είναι σε θέση να δημιουργήσει μοντέλα φαινομένων, σχέσεων και αναπαραστάσεων, να πειραματιστεί και να διερευνήσει, να εκφράσει εικασίες και να διατυπώσει ιδέες και συμπεράσματα για τις έννοιες που εμπλέκονται. Ειδικότερα στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών κατά τον Κυνηγό (2005) «*το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως σε νοητικά εργαλεία που εμπεριέχουν κανόνες λειτουργίας άρρηκτα συνδεδεμένους με τα μαθηματικά*». Τα εργαλεία αυτά μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες (ibid):

- Τα ψηφιακά συστήματα για την άλγεβρα (Computer Algebra Systems).
- Τα συστήματα δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων (Dynamic Geometry Systems).
- Τα συστήματα συμβολικής έκφρασης μαθηματικών εννοιών (Programming Environments).
- Τα συστήματα διαχείρισης και στατιστικής επεξεργασίας δεδομένων.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι αυτή που είναι πιο γνωστή στο κοινωνικό σύνολο. Στην προσέγγιση αυτή οι νέες τεχνολογίες, και ο Η/Υ ειδικότερα, αποτελούν το μέσο για πληροφόρηση και επικοινωνία. Δεν αναπτύχθηκαν έχοντας ως σημείο εκκίνησης εξειδικευμένες παιδαγωγικές εφαρμογές αλλά εφαρμογές γενικής χρήσης (Κυνηγός, 2007). Η χρήση του διαδικτύου είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με την προσέγγιση αυτή. Στο πλαίσιο αυτό και «*στον ευρύτερο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας η ψηφιακή τεχνολογία χρησιμοποιείται κυρίως για διακίνηση και πρόσβαση σε πληροφορίες, ως επικοινωνιακό και συνεργατικό μέσο, ως σύστημα διαχείρισης της εκπαίδευσης και τέλος ως εργαλείο καθοδήγησης του χρήστη και ασκησιολόγιο*» (Κυνηγός, 2005).

Η προσέγγιση που ακολουθείται στην παρούσα έρευνα είναι η πρώτη. Οι νέες ψηφιακές τεχνολογίες προσεγγίζονται ως νοητικά εργαλεία ικανά να οδηγήσουν στην

αναβάθμιση της διδακτικής πρακτικής και να υποστηρίξουν τόσο τον διδάσκοντα όσο και τους μανθάνοντες στην προσπάθεια για νοηματική μάθηση. Από τη σκοπιά της διδακτικής λοιπόν μπορούν να ιδωθούν ως φορείς νέας γνώσης αλλά και ως πρόσθετοι διαμεσολαβητικοί παράγοντες. Από την μαθησιακή σκοπιά μπορούν να ιδωθούν ως ένα νέο στοιχείο στο μαθητικό περιβάλλον που προσφέρει ευκαιρίες για νέες εμπειρίες και οικοδόμηση νέων νοημάτων. Έτσι «…*η παρουσία του υπολογιστή μπορεί να αλλάξει όχι μόνο τον τρόπο με τον οποίο διδάσκουμε στα παιδιά μας τα μαθηματικά, αλλά, πολύ πιο ουσιαστικά, τον τρόπο με τον οποίο σκέπτεται η παιδεία μας ως σύνολο με τη γνώση και τη μάθηση*» (Papert, 1991, σελ. 58). Με αυτή τη λογική οι υπολογιστές και τα υπολογιστικά συστήματα θα πρέπει να θεωρούνται ως γνωστικά συστήματα με τα οποία επικοινωνούμε και συνεργαζόμαστε. (Sutherland & Balacheff, 1999).

Ένα ακόμη ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: Ποιοι είναι οι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντικό να αξιοποιήσουμε τις νέες τεχνολογίες στην εκπαίδευσή μας; Κατά την Δημητροπούλου (2002) οι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντικό να αξιοποιήσουμε τις ψηφιακές τεχνολογίες στην εκπαίδευση κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες:

- Επιστημολογικοί λόγοι: Η τεχνολογική εξέλιξη έχει οδηγήσει στη μεταβολή του τρόπου εργασίας των επιστημόνων και της ανάπτυξης των γνωστικών πεδίων σήμερα. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια και την αναπροσαρμογή των προγραμμάτων σπουδών. Είναι πλέον επιβεβλημένη η ενσωμάτωση νέων δραστηριοτήτων που είναι πιο κοντά στις σημερινές επιστήμες. Για να έχουμε λοιπόν νέες δραστηριότητες που να είναι πιο κατάλληλες από τις προηγούμενες για την εκπαίδευση των μαθητών θα πρέπει να αξιοποιήσουμε τη δυνατότητα που μας προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες να εμπλέξουμε τους μαθητές σε αυτές τις νέες δραστηριότητες.
- Μαθησιακοί λόγοι: Τα περισσότερα από τα λογισμικά που χρησιμοποιούνται έχουν σχεδιαστεί με βασική προϋπόθεση τη βελτίωση της διαδικασίας της μάθησης.
- Κοινωνικοί λόγοι: Στην εποχή μας οι τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας είναι πλέον εργαλεία της καθημερινότητάς μας. Συνεπώς η εκμάθηση της χρήσης τους και η εκμετάλλευση των δυνατοτήτων που μας

παρέχουν στην εκπαίδευση από μικρή ηλικία και με φυσικό τρόπο είναι προφανές ότι θα πρέπει να είναι ένας από τους στόχους ενός σύγχρονου προγράμματος σπουδών.

Κατά τον Κυνηγό (2007) οι λόγοι είναι βαθύτεροι και πιο ουσιαστικοί. Η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε βρίσκεται σε αυτό που ονομάζει «*πρόσθετη παιδαγωγική αξία ως προς την εκπαιδευτική πράξη*». Το ερώτημα λοιπόν που πραγματικά τίθεται είναι κατά τον Κυνηγό τι μπορεί να κάνει σήμερα ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός με τη διαθέσιμη τεχνολογία που πρακτικά είναι αδύνατο ή πολύ δύσκολο να γίνει όταν δεν τη διαθέτει; Αυτό είναι το περιεχόμενο του όρου «πρόσθετη παιδαγωγική αξία». Όμως σε τι ακριβώς συνίσταται αυτή η πρόσθετη παιδαγωγική αξία για την ψηφιακή τεχνολογία; Κατά τον Κυνηγό (ibid, σελ 33) στο ότι «*μπορεί να διαθέσει πολύ-αναπαραστασιακά εργαλεία με τα οποία ο μαθητής θα αποκτήσει εμπειρίες έκφρασης εννοιών και επιστημονικής επιχειρηματολογίας, διαχείρισης της πληροφορίας, δράσης μέσα σε πολυποίκιλες συλλογικότητες, εξάσκησης στην κρίση και τη δημιουργική αμφισβήτηση*». Έτσι η ψηφιακή τεχνολογία έχει πρόσθετη παιδαγωγική αξία στην εκπαίδευση όταν χρησιμοποιείται ως πολιτισμικό εκφραστικό μέσο, ως ένα νέο εναλλακτικό δυναμικό εργαλείο έκφρασης μαζί και παράλληλα με τον προφορικό και τον γραπτό λόγο (ibid).

Ο Κυνηγός (ibid) αναφέρεται ειδικότερα στις πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας που μπορούν να καλλιεργηθούν αξιοποιώντας την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προκύπτει από τη χρήση διερευνητικού λογισμικού και οι οποίες, παρά το γεγονός ότι είναι εξαιρετικά σημαντικές για τη μάθηση, είναι υποβαθμισμένες στην εκπαιδευτική πρακτική. Η πρώτη από τις πτυχές αυτές είναι η δράση. Ο μαθητής θα πρέπει να εμπλακεί σε μια προβληματική κατάσταση, για την οποία κατά προτίμηση θα πρέπει να εμφανίζει και κάποιο προσωπικό ενδιαφέρον. Μέσα από την κινητοποίηση και τη δράση του στο πλαίσιο αυτό θα υποχρεωθεί να «*κάνει μαθηματικά*», να εισχωρήσει με έναν πολύ ουσιαστικό και βαθύ τρόπο στον πυρήνα της γνώσης στο συγκεκριμένο πεδίο που μελετάται. Ο Papert (1991) θεωρεί καθοριστική την προσωπική εμπλοκή των μαθητών σε τέτοιες καταστάσεις. Θεωρεί ότι η δράση τους μέσα σε τέτοια πλούσια τεχνητά περιβάλλοντα τους προσφέρει ακριβώς τη δυνατότητα να «κάνουν» μαθηματικά. Βέβαια μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον ο μαθητής καλλιεργεί τη διαίσθησή του και αποκτά πλούσιες εμπειρίες που σε άλλα περιβάλλοντα δεν θα

μπορούσε να αποκτήσει σε αυτό το βαθμό. Έτσι η μάθηση καθίσταται βιωματική. Το βίωμα λοιπόν είναι η δεύτερη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που καλλιεργείται με τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Η μάθηση σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή καλλιεργείται μέσα από δραστηριότητες που δημιουργούν βιώματα ή εμπειρίες σχετικές με το διδακτικό στόχο (Κυνηγός, 2007).

Μια τρίτη πτυχή είναι ο πειραματισμός. Ο Papert (1991) μιλάει για μαθητές «μικρούς επιστήμονες» που κάνουν υποθέσεις, διατυπώνουν εικασίες, προσπαθούν να τις επιβεβαιώσουν ή να τις διαψεύσουν, διατυπώνουν συμπεράσματα. Όλα αυτά γίνονται μέσα από μια διαδικασία πειραματισμού, προσπάθειας εκτέλεσης ενός πειράματος, που σε μια τυπική αίθουσα διδασκαλίας είναι πολύ δύσκολο, και κάποιες φορές αδύνατο, να εφαρμοστεί. Αντίθετα τα υπολογιστικά περιβάλλοντα προσφέρουν στους μαθητές τη δυνατότητα της εκτέλεσης ενός πειράματος, έστω και εικονικά, και τη δυνατότητα της επανάληψης της πειραματικής διαδικασίας κάτω από άλλες συνθήκες όποτε αυτό χρειαστεί. Έτσι ο πειραματισμός γίνεται μια προσιτή μορφή δράσης για τους μαθητές που μαθαίνουν να δρουν και να σκέφτονται με έναν επιστημονικό τρόπο. Μέσα από τον πειραματισμό ο μαθητής χρησιμοποιώντας γνωστούς του αλγορίθμους οδηγείται σε νέα παραδείγματα και στη συνέχεια, μέσα από την παρατήρηση των νέων ιδιοτήτων που ανακαλύπτει με τη βοήθεια των παραδειγμάτων αυτών, οδηγείται στην ανάπτυξη εικασιών (Kutzler, 2000). Αυτή η διαδικασία σε περιβάλλον 'χαρτί-μολύβι' είναι χρονοβόρα και επισφαλής μια και αφ' ενός στο διαθέσιμο σχολικό χρόνο οι μαθητές μπορούν να παράγουν μόνο έναν πολύ μικρό αριθμό παραδειγμάτων τα οποία θα μελετήσουν με σκοπό να ανακαλύψουν ιδιότητες και να αναπτύξουν εικασίες και αφ' ετέρου κάποια από τα παραδείγματα αυτά μπορεί να είναι λανθασμένα λόγω υπολογιστικών λαθών (ibid). Η χρήση όμως υπολογιστικών εργαλείων προσφέρει από τη μια πλευρά τη δυνατότητα ανάπτυξης πολλών παραδειγμάτων και από την άλλη εγγυάται την ορθότητα των υπολογισμών. Δίνει ακόμα τη δυνατότητα στο μαθητή να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει με τη βοήθεια νέων παραδειγμάτων τις εικασίες του. Οι Arcavi & Hadas (2000) συνδέουν άμεσα με τον πειραματισμό, ως αποτελέσματά του, δυο χαρακτηριστικά της μάθησης: την έκπληξη και την ανατροφοδότηση. Η ανατροφοδότηση (feedback) προκαλείται από το ίδιο το υπολογιστικό περιβάλλον το οποίο αντιδρά άμεσα με τον τρόπο που του ζητείται. Ο μαθητής βρίσκεται λοιπόν άμεσα αντιμέτωπος με τις συνέπειες των

ενεργειών του. Η απαραίτητη προϋπόθεση για να μπορέσει να εκμεταλλευτεί την ανατροφοδότηση από το περιβάλλον είναι η ύπαρξη προηγούμενων γνώσεων κατάλληλων για το έργο αυτό. Μια τέτοια άμεση ανατροφοδότηση είναι ουσιωδώς πιο αποτελεσματική από αυτήν που παράγεται από τον διδάσκοντα όχι μόνο λόγω της απουσίας της συναισθηματικής φόρτισης που προέρχεται από την έλλειψη αξιολογητικής κρίσης από την πλευρά του διδάσκοντα (γεγονός που συνιστά ένα αρνητικό κίνητρο για τον μαθητή) αλλά και λόγω του γεγονότος ότι δίνει το έναυσμα για επανέλεγχο και αναθεώρηση των προβλέψεων καθώς και του ότι δημιουργεί την ανάγκη για απόδειξη (ibid). Έτσι, μια και είναι απίθανο οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν από την αρχή τον πειραματισμό με παραγωγικό τρόπο, η πρόκληση για τον διδάσκοντα (αλλά και για όσους είναι υπεύθυνοι για τη σύνταξη του αναλυτικού προγράμματος) είναι να κατασκευάσει καταστάσεις προβλήματος στις οποίες το αποτέλεσμα να είναι μη αναμενόμενο και αντίθετο με τη διαισθητική αντίληψη των μαθητών προκαλώντας τους έκπληξη. Έτσι δημιουργείται μια ξεκάθαρη αντίθεση ανάμεσα στο αποτέλεσμα και τις προβλέψεις των μαθητών η οποία μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για αυτούς να επανελέγξουν τις γνώσεις και τις υποθέσεις τους και να εκμεταλλευτούν τις ευκαιρίες που τους προσφέρει ο πειραματισμός και το υπολογιστικό περιβάλλον για νοηματική μάθηση (ibid).

Η τέταρτη πτυχή είναι η έρευνα και η αναζήτηση, μέρος της οποίας είναι βέβαια και ο πειραματισμός. Μέσα από το συνεχή πειραματισμό ο μαθητής αποκτά μια διαφορετική στάση απέναντι στη γνώση. Μαθαίνει να ερευνά, να εκφράζει εικασίες και να προσπαθεί να τις επαληθεύσει ή να τις διαψεύσει. Το γεγονός αυτό τον υποχρεώνει να αναπτύξει την πεποίθηση ότι δεν είναι όλα γύρω του δεδομένα. Θα πρέπει ο ίδιος να δράσει για να ανακαλύψει και να οικοδομήσει τη γνώση του. Αναζητά πλέον μόνος του την κατανόηση και την πληροφορία αντί να περιορίζεται σε αυτή που θα του δοθεί (Κυνηγός, 2007).

Η πέμπτη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που καλλιεργείται με τη χρήση του διερευνητικού λογισμικού και που σχετίζεται άμεσα με τις προηγούμενες είναι η αμφισβήτηση. Η διαδικασία του πειραματισμού, της έρευνας και της αναζήτησης οδηγεί το μαθητή στην υιοθέτηση μιας στάσης αμφισβήτησης απέναντι στη γνώση. Η γνώση δεν είναι πια δεδομένη αλλά προκύπτει μέσα από την αμφισβήτηση όσων παρατηρεί στο περιβάλλον του. Τα δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορούν

να έχουν μεγάλη συμβολή σε μια τέτοια στάση μια και «παρακινούν τους μαθητές να αναγνωρίσουν τη σημασία της χρήσης πολλών παραδειγμάτων, αλλά και να ψάξουν για ακραίες καταστάσεις και για αντιπαραδείγματα» (Yerushalmy, 1993, σελ. 82). Και αυτό μπορεί να επιτευχθεί όχι μόνο παρατηρώντας οπτικά αλλά και μετρώντας, συγκρίνοντας, μεταβάλλοντας ή ακόμα και παραποιώντας σχήματα και αναπαραστάσεις (Arcavi & Hadas, 2000).

Η έκτη πτυχή, που συνδέεται άμεσα με τα προηγούμενα, είναι η δημιουργία και το «μαστόρεμα», όπως την ονομάζει ο Κυνηγός (2007). Ο μαθητής δημιουργώντας ο ίδιος κατασκευές και μοντέλα ή μαστορεύοντας τις κατασκευές του μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον ανακαλύπτει και επεξεργάζεται τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του αντικείμενου στόχου της διδακτικής διαδικασίας. Μια και όπως ήδη αναφέρθηκε οι κανόνες λειτουργίας αυτών των εργαλείων είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τα μαθηματικό αντικείμενο της δραστηριότητας ο μαθητής για να μπορέσει να δημιουργήσει νέες κατασκευές ή για να μαστορέψει προϋπάρχουσες, όπως στην περίπτωση των «μισοψημένων» μικρόκοσμων, χρησιμοποιεί τον πυρήνα της μαθηματικής γνώσης που εμπεριέχεται στη δραστηριότητα ως εργαλείο για τις κατασκευές του.

Η έβδομη πτυχή είναι ο διάλογος και η επιχειρηματολογία. Ο Cobb (1997) αντιμετωπίζει το διάλογο ως μέγιστης σημασίας και άμεσης προτεραιότητας κοινωνικό γεγονός στο οποίο συμμετέχουν οι μαθητές. Ο δάσκαλος κατά τον Cobb (ibid) δεν θα πρέπει να ποδηγετεί τους μαθητές του ούτε και να τους δελεάζει προκειμένου να αποδεχθούν μια συγκεκριμένη ερμηνεία. Αντίθετα θα πρέπει τους μυεί σε συζητήσεις γύρω από αντικείμενα τα οποία κρίνει ότι έχουν σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο. Έτσι ο μαθητής αισθάνεται υποχρεωμένος μέσα σε ένα πλαίσιο συνεργατικής επιστημονικής δράσης να επιχειρηματολογήσει προκειμένου να αιτιολογήσει τις επιλογές του, να διατυπώσει εικασίες, να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει τις εικασίες αυτές (Κυνηγός, 2007). Κατά τους Dreyfus & Hadas (1996) αρκετοί μαθητές, ως συνέπεια της έκπληξης που προκύπτει από την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν κατά τον πειραματισμό, νοιώθουν την ανάγκη να αιτιολογήσουν οι ίδιοι ή να ζητήσουν από τους άλλους να αιτιολογήσουν τα αποτελέσματα με τα οποία βρίσκονται αντιμέτωποι. Οι Arcavi & Hadas (2000) στο σημείο αυτό κάνουν ένα βήμα παραπέρα και αναφέρονται στην αναγκαιότητα απόδειξης και όχι απλά σε

ανάπτυξη διαλόγου και επιχειρηματολογία. Μέσα λοιπόν από το διάλογο που αναπτύσσεται και την επιχειρηματολογία που τον συνοδεύει ο μαθητής οδηγείται στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών με τις οποίες ασχολείται. Η μη επεξεργασμένη πληροφορία δεν μπορεί να τον βοηθήσει σε μια διαδικασία αυτής της μορφής. Έτσι είναι υποχρεωμένος να εμβαθύνει στο περιεχόμενο των διδασκόμενων αντικειμένων. Η εξάσκηση λοιπόν στην ικανότητα επιστημονικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας διευκολύνει την εμβάθυνση και τη διευκρίνιση δυσνόητων ή επιφανειακά κατανοηθεισών εννοιών (Κυνηγός, 2007). Στο επίπεδο του διαλόγου όμως ο ρόλος των ψηφιακών τεχνολογιών δεν περιορίζεται στον εστιασμένο διάλογο που μπορεί να προκληθεί από τη χρήση ενός διερευνητικού λογισμικού. Στην περίπτωση του διαλόγου οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να αξιοποιηθούν και ως εργαλεία για πληροφόρηση και επικοινωνία. Η χρήση αυτών των εργαλείων μπορεί να συντελέσει στην ανάπτυξη της συνεργασίας μεταξύ των μαθητών στο πλαίσιο μιας ομάδας, μιας τάξης ή και στην περίπτωση απομακρυσμένης επικοινωνίας.

Μια ακόμα πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που μπορεί να καλλιεργηθεί με την αξιοποίηση της πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας που προκύπτει από τη χρήση του διερευνητικού λογισμικού, η όγδοη, είναι λοιπόν ακριβώς η συνεργασία. Προϋπόθεση της ανάπτυξης του διαλόγου είναι η κατάκτηση ενός ικανοποιητικού επιπέδου συνεργασίας. Από την άλλη πλευρά η συνεργασία μεταξύ των μαθητών απαιτείται και όταν πρέπει να εργαστούν από κοινού για να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί. Με την έννοια αυτή η συνεργατική μάθηση είναι ένας σημαντικός παράγοντας στην διδακτική διαδικασία. Παράλληλα είναι πολύ χρήσιμη και επωφελής για τους ίδιους τους μαθητές. Μέσα από τη συνεργασία των μαθητών στις δραστηριότητες που τους ανατίθενται από τον εκπαιδευτικό ωφελούνται τόσο ο κάθε μαθητής μεμονωμένα όσο και όλα τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Πως όμως αξιοποιούνται οι ψηφιακές τεχνολογίες σε αυτή την κατεύθυνση; Και στην περίπτωση αυτή ο ρόλος τους είναι διττός. Αφενός τα διερευνητικά λογισμικά μπορούν να αξιοποιηθούν ως παράγοντες συνεργατικής μάθησης μέσα από καλά και προσεκτικά σχεδιασμένες δραστηριότητες. Αφετέρου ως εργαλεία επικοινωνίας παρέχουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να επιτύχει το διάλογο και τη συνεργασία μαθητών που βρίσκονται σε διαφορετικά απομακρυσμένα σημεία και χωρίς τη χρήση των τεχνολογιών αυτών δεν θα είχαν τη δυνατότητα της

επικοινωνίας. Αποτελούν δηλαδή ισχυρούς παράγοντες αλλά και συντελεστές ενεργοποίησης διαδικασιών συνεργατικής μάθησης. Δίνουν τη δυνατότητα σε μαθητές και δασκάλους να ενταχθούν σε ευρύτερες συλλογικότητες εκτός αυτής της παραδοσιακής τάξης. Έτσι «με την κατάλληλη διδακτική μπορεί με τον τρόπο αυτό να δημιουργηθούν κοινότητες μάθησης, όπου οι μαθητές διδάσκονται εκτός από το γνωστικό αντικείμενο τη συλλογική συμπεριφορά, πως δηλαδή να δρουν, να συνεισφέρουν και να αυτοπροσδιορίζονται μέσα σε μαθητικές κοινότητες» (Κυνηγός, 2007, σελ. 43). Αυτή η συμμετοχή σε μορφές συλλογικότητας είναι μια ακόμα πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που μπορεί να καλλιεργηθεί με τη χρήση των νέων τεχνολογιών.

Η δέκατη πτυχή, και μια από τις πιο σοβαρές, είναι η δημιουργία νοημάτων. Η μάθηση χαρακτηρίζεται κατά κύριο λόγο από τη δημιουργία νοημάτων από το μαθητή και όχι από την κατανόηση έτοιμων και αφηρημένων πληροφοριών και νοημάτων (ibid). Όμως διαφορετικά λογισμικά είναι δυνατόν να οδηγήσουν τους μαθητές στην οικοδόμηση διαφορετικών νοημάτων ακόμα και όταν αυτοί δουλεύουν πάνω στο ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικά περιβάλλοντα (Sutherland & Balacheff, 1999). Ο μαθητής λοιπόν δεν μπορεί να αφεθεί μόνος του να παράγει νοήματα. Το να λέμε ότι τα νοήματα και οι διανοητικές δομές κτίζονται από τον μαθητή παρά διδάσκονται από το δάσκαλο δεν σημαίνει ότι κατασκευάζονται από το τίποτα. Τα παιδιά, όπως και οι άλλοι δημιουργοί, χρησιμοποιούν τα υλικά που βρίσκουν στο περιβάλλον τους, ιδίως τα μοντέλα και τις μεταφορές που υποβάλλει το μορφωτικό περιβάλλον (Papert, 1991). Επομένως η κουλτούρα της τάξης επηρεάζει το ποια γνώση μπορούμε να προσεγγίσουμε μέσα από κάθε μικρόκοσμο (Sutherland & Balacheff, 1999). Έτσι, πολύ συχνά, τα νοήματα που παράγονται από τους μαθητές μέσα στη σχολική τάξη είναι πολύ διαφορετικά από αυτά που προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα (Κυνηγός, 2007). Στο θέμα αυτό είναι καθοριστικός ο ρόλος του δασκάλου. Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία επηρεάζεται ουσιωδώς από τον δάσκαλο ο οποίος έχει την ευθύνη της οργάνωσης της τάξης (Sutherland & Balacheff, 1999).

Η ενδέκατη πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που καλλιεργείται με τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών γενικά και τη των διερευνητικών λογισμικών ειδικότερα είναι η αναπαράσταση. Τα ψηφιακά εργαλεία ενέχουν πολυποίκιλες αναπαραστάσεις

εννοιών και πληροφοριών κάποιες φορές ως πηγή και κάποιες άλλες ως εκφραστικά μέσα (Κυνηγός, 2007). Οι Arcavi & Hadas (2000) περιοριζόμενοι στις οπτικές αναπαραστάσεις τις συνδέουν με εκείνο το χαρακτηριστικό της μάθησης που ονομάζουν οπτικοποίηση (visualization) «*η οποία αναφέρεται στη δυνατότητα αναπαράστασης, μετασχηματισμού, δημιουργίας, επικοινωνίας, τεκμηρίωσης και στοχασμού πάνω σε οπτικές πληροφορίες*» (Herrshkowitz, 1989, σελ.75). Κατά τον Kutzler (2000) είναι η εικονογράφηση ενός αντικειμένου, ενός γεγονότος ή μιας διαδικασίας. Η οπτικοποίηση «*όχι μόνο οργανώνει τα δεδομένα που κατέχουμε σε πλήρεις νοήματος δομές, αλλά είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας που καθοδηγεί την αναλυτική ανάπτυξη μιας λύσης*» (Fischbein, 1987, σελ. 101). Προσφέρει ακόμα στο μαθητή την ικανότητα εναλλαγής αναπαραστάσεων (Kutzler, 2000). Δίνει επομένως στους μαθητές την δυνατότητα να αναπτύξουν πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας. Τέλος, μια οπτική εικόνα είναι ένας ουσιώδης παράγοντας για τη δημιουργία της αίσθησης της αμεσότητας (Fischbein, 1987). Έτσι, μέσα από την οπτικοποίηση την οποία επιτυγχάνει, ένα δυναμικό υπολογιστικό περιβάλλον επιτρέπει στο χρήστη να οικοδομήσει σχήματα αλλά και να τα μετασχηματίσει σε πραγματικό χρόνο (Arcavi & Hadas, 2000). Έτσι για τα εργαλεία που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τη βασική εκπαίδευση η επιλογή των αναπαραστάσεων είναι κρίσιμη μια και αυτές συνδέονται άμεσα με τη δημιουργία νοημάτων (Κυνηγός, 2007).

Αρκεί όμως η χρήση των νέων τεχνολογιών από μόνη της για την αναβάθμιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας; Η απάντηση είναι αρνητική. Θα πρέπει η ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία να συνοδεύεται από τεκμηριωμένο σχέδιο των νέων προτεινόμενων τρόπων διεξαγωγής του μαθήματος, καθώς και του είδους της επιμόρφωσης που χρειάζεται ο εκπαιδευτικός για να ενταχθεί σε μια τέτοια μαθησιακή διαδικασία (Sutherland & Balacheff, 1999). Επομένως είναι απαραίτητο να αλλάξει ο τρόπος παροχής της εκπαιδευτικής υπηρεσίας στο εκπαιδευτικό μας σύστημα (Κυνηγός, 2007). Η έρευνα Task Force (1996) για την Ευρώπη απέδειξε ότι η ένταξη των πολυμέσων στη σχολική πρακτική μπορεί να έχει αποτελέσματα μόνο αν συνδυάζεται με καινοτόμες εκπαιδευτικές πρακτικές και ευνοϊκές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές κατά την έρευνα συνοψίζονται στα παρακάτω:

- Μετάβαση από τη μετωπική διδασκαλία στη διδασκαλία σε ομάδες.

- Μετάβαση από τη διάλεξη σε μορφές διδασκαλίας που επικεντρώνονται στην αναζήτηση και τη διαμεσολάβηση.
- Μετάβαση από μια σχολική τάξη που «αδιαφορεί» σε αυτή που κινητοποιείται μέσα από την ενεργητική συμμετοχή, την επικοινωνία με άλλους και τις αυθεντικές δραστηριότητες.
- Μετάβαση από μια αξιολόγηση που στηρίζεται στον έλεγχο του βαθμού «συγκράτησης» των γνώσεων σε μια διαμορφωτική αξιολόγηση που βασίζεται στις διαδικασίες και τα παραγόμενα προϊόντα.
- Μετάβαση από μια ανταγωνιστική κοινωνική δομή σε μια δομή που ευνοεί τη συνεργασία των μαθητών.
- Μετάβαση από ένα σύστημα στο οποίο όλοι οι μαθητές μαθαίνουν τα ίδια ακριβώς πράγματα προς ένα σύστημα στο οποίο κάθε μαθητής μαθαίνει ενδεχομένως διαφορετικά πράγματα.
- Μετάβαση από τους γνωστούς τρόπους έκφρασης και επικοινωνίας (κυρίως λεκτική) σε τρόπους που ενσωματώνουν διαφορετικές αναπαραστάσεις (εικόνες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις, αλγεβρικές αναπαραστάσεις, πίνακες τιμών, χάρτες πολλαπλών αναπαραστάσεων κλπ)

Έτσι, κατά τον Δαπόντε (2002), οι νέες τεχνολογίες αποτελούν έναν «έξυπνο τρόπο» για να αναθεωρήσουμε ορισμένες πλευρές της διδασκαλίας εφόσον με αυτές επιδιώκουμε:

- Τη συνεργατική μάθηση (διδασκαλία σε ομάδες, παιδαγωγική projects)
- Την αλλαγή του ρόλου του δασκάλου (ο δάσκαλος διαμεσολαβητής, σύμφωνα με τον Vygotsky, 1988, 1997)
- Τη διεπιστημονική προσέγγιση
- Την οικοδόμηση γνώσεων από τους ίδιους τους μαθητές (σύμφωνα με τον J. Piaget και τον S. Papert).

Η χρήση των νέων τεχνολογιών λοιπόν οδηγεί στην αναθεώρηση του τρόπου δουλειάς του μαθηματικού μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας. Η εμπειρία από τάξεις που δουλεύουν σε περιβάλλον βασισμένο στους Η/Υ και στα νέα εργαλεία ψηφιακής

τεχνολογίας δείχνει ότι νέες διδακτικές μέθοδοι είναι πια πραγματικότητα (Weigand & Weller, 2001). Για παράδειγμα μετά την εισαγωγή της χρήσης των νέων τεχνολογιών έχει παρατηρηθεί μεταβολή του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζεται η διδακτική μέθοδος επίλυσης προβλήματος. Σύμφωνα με την αναφορά του Εθνικού Συμβουλίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του Ενωμένου Βασιλείου (The United Kingdom's National Council for Educational Technology) του 1994:

> Για κάθε πρόβλημα υπάρχει τώρα μια γκάμα μεθόδων επίλυσης. Τυπικά μπορούν να υπάρχουν αριθμητικές και γραφικές προσεγγίσεις όπως επίσης αλγεβρικές και αναλυτικές. Στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχει μια ποικιλία αλγεβρικών προσεγγίσεων. Συνεπώς το πιθανότερο είναι ότι ένα πρόβλημα θα αντιμετωπίζεται με το βλέμμα της σύγκρισης και αντιπαραβολής διαφορετικών μεθόδων με κάθε λύση να φέρνει πιθανόν στην επιφάνεια κάποια νέα μαθηματικά.

Μέθοδοι λοιπόν που στο παρελθόν δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν με ευκολία και αποτελούσαν την τελευταία λύση όταν όλες οι άλλες είχαν αποτύχει, όπως για παράδειγμα η γραφική επίλυση εξίσωσης, σήμερα με τη χρήση προηγμένων υπολογιστικών εργαλείων μπορούν να μας δώσουν λύσεις εύκολα και γρήγορα (Stacy, 2001).

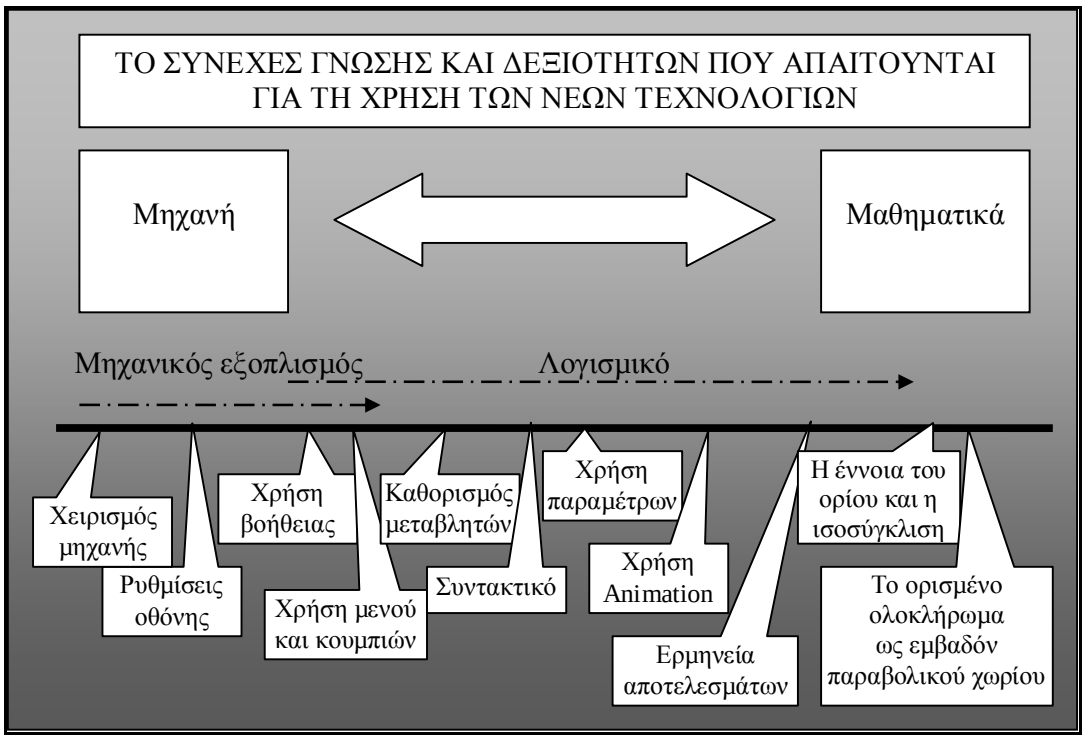
Σε ένα τέτοιο περιβάλλον όμως ο δάσκαλος των μαθηματικών θα πρέπει πια να υποστηρίζει τους μαθητές του τόσο στον τομέα της μάθησης των μαθηματικών όσο και σε αυτόν της τεχνολογίας, καθώς η ίδια η μαθηματική πρακτική μεταβάλλεται. Οι διαφορετικές στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι υποδηλώνουν ότι μπορούμε να έχουμε μια ποικιλία επιτυχών λύσεων στο πρόβλημα της παράλληλης διδασκαλίας των μαθηματικών και της χρήσης της τεχνολογίας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει τη μάθηση και τη διδακτική πρακτική σε διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεταξύ άλλων σε μια διδασκαλία που δίνει έμφαση στο διαδικαστικό μέρος αλλά και σε μια διδασκαλία που δίνει έμφαση στην κατανόηση (ibid). Για παράδειγμα για την περίπτωση της χρήσης υπολογιστών γραφημάτων (graphic calculators) στη διδασκαλία των μαθηματικών ο Jost (1992) παρατηρεί ότι εκείνοι οι δάσκαλοι που τους αντιμετωπίζουν ως εργαλεία για υπολογισμούς έχουν την τάση να θέτουν στόχους προσανατολισμένους στο περιεχόμενο. Παρατηρεί επίσης ότι οι δάσκαλοι που έχουν την τάση να εντάσσουν στη διδασκαλία τους διαδραστικές ή ανακαλυπτικές μεθόδους χρησιμοποιούν τους υπολογιστές γραφημάτων περισσότερο από τους συναδέλφους τους που προτιμούν

άλλες διδακτικές προσεγγίσεις και ότι οι στόχοι εκείνων των δασκάλων που θεωρούν τους υπολογιστές γραφημάτων ως εργαλεία για μάθηση επικεντρώνονται στους μαθητές τους. Οι Tharp, Fitzsimmons και Brown Ayres (1997) σημειώνουν ότι οι δάσκαλοι που επικεντρώνουν τη δουλειά τους σε κανόνες και διαδικασίες φαίνεται να συμφωνούν στην άποψη ότι οι υπολογιστές γραφημάτων μπορεί να παρεμποδίζουν τη διδασκαλία και, ως αποτέλεσμα αυτής της θεώρησης, θέτουν περιορισμούς στη χρήση τους ως διερευνητικό εργαλείο, σε αντίθεση με αυτούς που τους απασχολεί περισσότερο η εννοιολογική κατανόηση που επιτυγχάνουν οι μαθητές τους και, συνεπώς, δεν θέτουν περιορισμούς στην διερευνητική χρήση των υπολογιστών από τους μαθητές. Σε κάθε περίπτωση η απόφαση για τη χρήση ψηφιακών εργαλείων καθώς και για τον τρόπο χρήσης τους εξαρτάται από τους παιδαγωγικούς στόχους που θέτει ο δάσκαλος (Kutzler, 2000).

Από την πλευρά τους οι μαθητές μπορούν να αποκομίσουν σημαντικότατα οφέλη από την ένταξη των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική πρακτική. Σύμφωνα με την Stacy (2001) ένας ικανός δάσκαλος μπορεί να εστιάσει την προσοχή των μαθητών του σε μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν από αυτούς να εξερευνήσουν το νόημα των εξεταζόμενων μαθηματικών εννοιών. Έτσι οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να κατασκευάσουν ενεργητικά τη γνώση, να αποκτήσουν διορατικότητα στη λύση προβλήματος, να αναπτύξουν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση και υψηλότερο επίπεδο σκέψης, και να κατακτήσουν την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μπορούν να επικυρώσουν και να ερμηνεύσουν τις λύσεις (ibid). Για να γίνουν όμως πραγματικότητα όλα αυτά θα πρέπει οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν την τεχνολογία με αποτελεσματικό τρόπο και να εντάξουν τα ψηφιακά εργαλεία στο προσωπικό τους ρεπερτόριο τεχνικών που χρησιμοποιούν για να κάνουν μαθηματικά και για να μελετήσουν μαθηματικά (Pierce & Stacey, 2004). Κατά τους Arcavi & Hadas (2000) τα δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα συνιστούν εικονικά εργαστήρια στα οποία οι μαθητές μπορούν να παίξουν, να ερευνήσουν και να μάθουν μαθηματικά ασκώντας διάφορα χαρακτηριστικά της μάθησης και καλλιεργώντας ποικίλες πτυχές της, όπως έχει ήδη αναλυθεί.

Οι Pierce και Stacey (2004) ασχολούνται κυρίως με το πρόβλημα της αποτελεσματικής χρήσης μιας συγκεκριμένης κατηγορίας δυναμικών υπολογιστικών συστημάτων, των ψηφιακών αλγεβρικών συστημάτων (Computer Algebra Systems ή

CAS) και προτείνουν ένα πλαίσιο αποδοτικής χρήσης των εργαλείων αυτών. Υποστηρίζουν όμως ότι το πλαίσιο χρήσης που προτείνουν για τα συγκεκριμένα εργαλεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για πολλά άλλα μαθηματικά υπολογιστικά συστήματα. Κατά την άποψή τους το πρόβλημα της αποτελεσματικής χρήσης της τεχνολογίας έχει δυο βασικές συνιστώσες, μια συναισθηματική και μια γνωστική. Η συναισθηματική συνιστώσα είναι η προσωπική συνιστώσα και έχει να κάνει με την ανταπόκριση των μαθητών στις δυνατότητες που τους προσφέρει η τεχνολογία. Σχετίζεται με αρκετούς παράγοντες, όπως η προθυμία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν την τεχνολογία και η άνεση που νοιώθουν όταν την χρησιμοποιούν, οι αντιλήψεις τους για το τι είδους μαθηματικά πρέπει να μάθουν και για το κατά πόσο είναι αποδεκτή η χρήση της τεχνολογίας στο υπολογιστικό μέρος της διαδικασίας. Ακόμα σχετίζεται με τον τρόπο που εντάσσεται στο περιβάλλον της τάξης η χρήση των νέων τεχνολογιών και με το αν η χρήση τους προωθείται με προνομιακό τρόπο από τον διδάσκοντα (Kendal & Stacey, 2001).



Διάγραμμα 1: Μοντέλο του συνεχούς γνώσης και δεξιοτήτων που απαιτούνται στη χρήση των νέων τεχνολογιών

Η γνωστική συνιστώσα αναλύεται σε τρεις επιμέρους συνιστώσες: τη μαθηματική, την τεχνική και τη μηχανική. Για να κάνουμε μαθηματικά με τη βοήθεια των νέων ψηφιακών τεχνολογιών απαιτείται η παραδοσιακή μαθηματική γνώση, η

γνώση της μηχανής, όπως επίσης και συνεχής αλληλεπίδραση της μαθηματικής γνώσης και της γνώσης γύρω από την τεχνολογία (Pierce & Stacey, 2004). Η συνεχής αυτή αλληλεπίδραση είναι ακριβώς η τεχνική συνιστώσα και η λειτουργία της παρουσιάζεται από τους Pierce & Stacey στο μοντέλο του διαγράμματος 1.

Στο ένα άκρο του μοντέλου έχουμε τη γνώση που σχετίζεται μόνο με το μηχανικό εξοπλισμό, όπως το πώς ανοίγουμε ή κλείνουμε το μηχάνημα ή το πώς ρυθμίζουμε την αντίθεση της οθόνης και χρησιμοποιούμε τη βοήθεια, και στο άλλο άκρο την καθαρή μαθηματική γνώση που σε μεγάλο βαθμό δεν σχετίζεται με την παρουσία ή την απουσία της τεχνολογίας. Ανάμεσα στα δυο αυτά άκρα βρίσκεται ο χώρος που οι Pierce & Stacey (2004) αποκαλούν τεχνική συνιστώσα και είναι ο χώρος που περιέχει τόσο μαθηματική γνώση όσο και γνώση του μηχανικού εξοπλισμού αλλά και του λογισμικού. Στον χώρο αυτό ακριβώς απαιτείται η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικής από τη μια μεριά και τεχνολογικής από την άλλη πλευρά γνώσης (ibid). Στο διάγραμμα 1 η επιλογή των παραδειγμάτων έγινε με κριτήριο την παρουσίαση του συνεχούς γνώσης και δεξιοτήτων όπως αυτό παρατηρείται κατά τη χρήση του λογισμικού Autograph στην παρούσα έρευνα.

Εκπαιδευτικά Λογισμικά

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί πολλών ειδών λογισμικά που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία. Κάποια από αυτά έχουν σχεδιαστεί ακριβώς για παιδαγωγικούς και εκπαιδευτικούς λόγους, όπως για παράδειγμα η γλώσσα Logo και οι μικρόκοσμοι που στηρίζονται σε αυτήν, και άλλα αποτελούν λογισμικά ευρείας χρήσης που μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν με πρόσφορο τρόπο στην εκπαίδευση, όπως οι διάφοροι επεξεργαστές κειμένου ή τα λογιστικά φύλλα ή ακόμα οι βάσεις δεδομένων, τα ψηφιακά αλγεβρικά συστήματα κλπ. Αυτή είναι η πρώτη διάκριση μεταξύ λογισμικών. Διακρίνονται δηλαδή σε λογισμικά που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για την εκπαίδευση και σε λογισμικά γενικής χρήσης. Κατά τον Κυνηγό (2007) μια γενική ταξινόμηση των λογισμικών με βάση την προσέγγιση στο εκπαιδευτικό έργο έχει ως εξής:

- Τεχνολογίες διαχείρισης της εκπαίδευσης (learning management systems): Προέρχονται από το χώρο της ενδοεταιρικής κατάρτισης και στοχεύουν κυρίως στην τεχνική και ενημερωτική κατάρτιση των στελεχών τους. Το

κύριο αντικείμενο της κατάρτισης είναι η διαχείριση της πληροφορίας. Έτσι και τα συστήματα αυτά βασίζονται ακριβώς στο μοντέλο διαχείρισης της πληροφορίας.

- Τεχνολογίες ως πηγές πληροφοριών: Πρόκειται σχεδόν αποκλειστικά για το διαδίκτυο και τις πληροφοριακού χαρακτήρα ιστοσελίδες, όπου μπορεί να γίνει αναζήτηση πληροφοριών και πλοήγηση ελεύθερη ή προκαθορισμένη από τον εκπαιδευτικό.
- Καθοδηγητικές τεχνολογίες: Είναι τα λεγόμενα «ευφυή συστήματα» διδασκαλίας (intelligent tutoring systems). Αποτελούν εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης. Διέπονται από μια αμιγώς συμπεριφοριστική αντίληψη για την εκπαιδευτική διαδικασία. Περιέχουν αυτοματοποιημένα μοντέλα μαθητή, εκπαιδευτικού και διαχείρισης της χρήσης τους με διαβαθμισμένη πρόσβαση ανάλογα με το ρόλο του χρήστη.
- Τεχνολογίες ως μέσα επικοινωνίας και συνεργασίας: Πρόκειται για τις εκπαιδευτικές πύλες και για ειδικά σχεδιασμένα συστήματα συλλογικών συζητήσεων.
- Τεχνολογίες ως νοητικά και εκφραστικά εργαλεία: Είναι λογισμικά που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τη μαθησιακή διαδικασία. Δίνουν τη δυνατότητα στο μαθητή να τα χρησιμοποιήσει ως εργαλεία έκφρασης, δημιουργίας, πειραματισμού και κατασκευών. Έχουν αυστηρά ουδέτερη ανταπόκριση και η μάθηση προκύπτει από τη σταδιακή εκμάθηση των κανόνων χρήσης τους, οι οποίοι είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με το προς μάθηση αντικείμενο.
- Τεχνολογίες για τη διδακτική των μαθηματικών: Όλες οι παραπάνω τεχνολογίες μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδακτική των μαθηματικών. Η επιλογή γίνεται ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών και την επιλογή του στόχου της διδασκαλίας. Τα «ευφυή» συστήματα και τα συστήματα διαχείρισης πληροφοριών μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν οι μαθητές θεωρείται ότι κατανοούν τα μαθηματικά που θα διδαχθούν και έχουν την ικανότητα μαθηματικής σκέψης. Αντίθετα, όταν το ζητούμενο είναι η καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και η εμπλοκή με δυσνόητες έννοιες, τότε καταλληλότερα είναι τα νοητικά εργαλεία και τα εργαλεία επικοινωνίας

και συνεργασίας.

Η Δημητρακοπούλου (2002) επιχειρεί μια λεπτομερή καταγραφή των κατηγοριών των νέων τεχνολογιών, τις οποίες ονομάζει τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας ή συντομότερα ΤΠΕ, που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση. Οι κυριότερες κατηγορίες εφαρμογών των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας (ΤΠΕ) λοιπόν που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαίδευση είναι οι παρακάτω:

- Συστήματα προσομοιώσεων: Πρόκειται για εκπαιδευτικά λογισμικά που επιτρέπουν τη δημιουργία προσομοιώσεων φαινομένων, καταστάσεων ή συσκευών. Οι μαθητές μπορούν να χειριστούν μεταβλητές που επηρεάζουν το φαινόμενο, να παρατηρήσουν τη συμπεριφορά του προσομοιούμενου φαινομένου και να μελετήσουν τις αναπαραστάσεις των μετρήσεων που παρέχει το λογισμικό. Ένα τέτοιο λογισμικό είναι το Interactive Physics.
- Συστήματα μοντελοποίησης: Πρόκειται για εκπαιδευτικά λογισμικά που επιτρέπουν τη δημιουργία, τη διερεύνηση και τον έλεγχο μοντέλων. Ένα τέτοιο λογισμικό είναι το Modellus.
- Συστήματα εκπαιδευτικής ρομποτικής: Αποτελούνται συνήθως από ένα σύνολο εξωτερικών συσκευών και συνοδεύονται από ειδικό λογισμικό αφενός για τον προγραμματισμό της επικοινωνίας μεταξύ των συσκευών και αφετέρου τον προσδιορισμό της λειτουργίας τους. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η χελώνα εδάφους Logo.
- Συστήματα υποστήριξης και λήψης δεδομένων από πειραματικές διατάξεις: Είναι ειδικά λογισμικά και συσκευές λήψης δεδομένων από τα εργαστηριακά πειράματα που επιτρέπουν, μέσω κατάλληλης σύνδεσης με υπολογιστή, τη μεταφορά, ψηφιοποίηση, παρουσίαση και επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων. Τέτοια συστήματα έχουν εγκατασταθεί στα εργαστήρια φυσικής και χημείας των σχολείων.
- Ανοικτά περιβάλλοντα διερεύνησης ειδικών θεμάτων: Είναι ανοικτά σε «κατασκευές» και μπορούν να αξιοποιηθούν σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Παραδείγματα τέτοιων λογισμικών είναι τα λογισμικά Gabri-Geometry II, Geometer's Sketchpad, Function Prob, Table Top, καθώς και

τα αλγεβρικά υπολογιστικά συστήματα (CAS).

- Προγραμματιζόμενα περιβάλλοντα: Είναι συστήματα που επιτρέπουν στους μαθητές να δημιουργήσουν δικά τους μικρά ή μεγάλα προγράμματα χρησιμοποιώντας ένα σύνολο βασικών οντοτήτων προγραμματισμού. Παράδειγμα τέτοιας εφαρμογής είναι τα περιβάλλοντα Logo.
- Εκπαιδευτικά παιχνίδια: Απευθύνονται κυρίως σε μαθητές μικρής ηλικίας στη χώρα μας. Αποτελούν μια ευρεία κατηγορία.
- Λογισμικά πρακτικής εξάσκησης: Παρουσιάζουν αποσπάσματα περιεχομένου. Η δραστηριότητα συνίσταται στο να απαντήσουν οι μαθητές σε ένα σύνολο ερωτήσεων ή σε απλά προβλήματα.
- Υπερκείμενα και ηλεκτρονικά βιβλία πολυμέσων: Τα υπερκείμενα νοούνται ως ηλεκτρονικά ντοκουμέντα. Ένα λογισμικό υπερκειμένου χαρακτηρίζεται από την τμηματοποίηση της πληροφορίας σε μονάδες που αποτελούν τις στοιχειώδεις συνιστώσες του κειμένου, που καλούνται κόμβοι, και συνδέονται μεταξύ τους μέσω των συνδέσμων των πληροφοριών σε ένα δίκτυο πολλαπλών νοημάτων (όπως για παράδειγμα αποσπάσματα περιεχομένου που αποτελείται από πολυμεσικό υλικό ή ψηφιακές εγκυκλοπαίδειες.
- Νοήμονα συστήματα επίλυσης προβλημάτων: Αποτελούν εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης και μπορούν να επιλύουν προβλήματα μιας συγκεκριμένης γνωστικής περιοχής
- Συστήματα συνεργατικής μάθησης: Έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπουν και να υποστηρίζουν τη συνεργασία από απόσταση (κυρίως μέσω διαδικτύου) αυτών που μαθαίνουν.
- Ανοικτά εργαλεία, ανεξάρτητα περιεχομένου: Είναι εργαλεία για επαγγελματική ή προσωπική χρήση που δεν έχουν σχεδιαστεί για εκπαιδευτικούς σκοπούς αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εκπαίδευση. Τέτοια λογισμικά είναι για παράδειγμα οι κειμενογράφοι, τα λογιστικά φύλλα, τα εργαλεία του Internet κλπ.

Η έρευνα αυτή εστιάζεται στη χρήση ανοικτών περιβαλλόντων διερεύνησης, δηλαδή αυτών που χαρακτηρίζονται ως διερευνητικά λογισμικά. Ακριβέστερα το

ενδιαφέρον εστιάζεται στη χρήση των ψηφιακών αλγεβρικών συστημάτων (Computer Algebra Systems) γενικά και ειδικότερα του λογισμικού Autograph.

Τα Computer Algebra Systems (CAS)

Μια κατηγορία διερευνητικού λογισμικού αποτελούν όπως προαναφέρθηκε και τα ψηφιακά αλγεβρικά συστήματα (Computer Algebra Systems) ή, όπως θα τα αναφέρουμε στη συνέχεια, CAS. Από την πρώτη τους εμφάνιση στη δεκαετία του '70 αλλά ακόμα περισσότερο μετά την ένταξή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία, στην τριτοβάθμια κυρίως εκπαίδευση αρχικά, κατά τη δεκαετία του '80 αναγνωρίστηκε η μεγάλη δύναμη των CAS σε αυτό που αποκαλείται στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών «να κάνουμε μαθηματικά» όπως και η πολύτιμη βοήθεια που μπορούν να προσφέρουν στην διδασκαλία και στη μελέτη των μαθηματικών (Pierce & Stacey, 2004).

Κατά τον Cuoco (2002) τα περισσότερα CAS, σε αντίθεση με άλλα μαθηματικά λογισμικά, ενσωματώνουν αρκετά υπολογιστικά μέσα που έχουν αναπτυχθεί εκ των προτέρων, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνονται και τα εξής:

- Υψηλής ακρίβειας αριθμητικές ρουτίνες και εγγενώς ενσωματωμένες μαθηματικές συναρτήσεις.
- Μια πλήρης γλώσσα προγραμματισμού που υποστηρίζει διαδικαστικούς, λειτουργικούς και αντικειμενοστραφείς τρόπους εργασίας.
- Γραφικές δυνατότητες που περιέχουν δυνατότητα γραφικής παράστασης για όλων των ειδών τις συναρτήσεις που ορίζονται στο R2, στο R3 ή στο C.
- Πινακοποίηση και δυνατότητες χειρισμού δεδομένων που να επιτρέπουν στους χρήστες να κατασκευάζουν και να χειρίζονται πίνακες και μήτρες αποδεκτών αντικειμένων.

Τα περισσότερα πακέτα CAS συγκεντρώνουν ένα υπερσύγχρονο εκλεπτυσμένο επιστημονικό υπολογιστή, μια γλώσσα προγραμματισμού, ένα γραφικό περιβάλλον και ένα λογιστικό φύλλο. Συνήθως περιέχουν επίσης αλγεβρικές εκφράσεις και συναρτήσεις, όπως και αλγεβρικούς συνδυασμούς υπερβατικών συναρτήσεων και συναρτήσεων που ορίζει ο χρήστης. Σε μηχανήματα όπως το TI-89 ή το TI-92 (που περιέχει επιπλέον και περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας) τα διαφορετικά

περιβάλλοντα καθίστανται προσπελάσιμα μέσα από διαφορετικά μενού στην οθόνη. Σε άλλα περιβάλλοντα, όπως το Mathematica και τα υπόλοιπα CAS σε μορφή λογισμικού πακέτου, αυτό που βλέπει ο χρήστης είναι ένα αψεγάδιαστο πακέτο που είναι προσβάσιμο μέσω ενός συνόλου συνδεδεμένων εντολών (ibid).

Η ένταξη ενός CAS στην διδακτική πρακτική επιφέρει μια σειρά αλλαγών και μεταβάλλει την εικόνα της αίθουσας διδασκαλίας. Η εισαγωγή του δεν προσθέτει μόνο νέες μεταβλητές αλλά είναι δυνατό να αλλάξει και το εύρος των τιμών των μεταβλητών που υπάρχουν ήδη (Zbiek, 2001). Ακόμα και έμπειροι δάσκαλοι μπορεί στα αρχικά στάδια της ένταξης ενός CAS στην πραγματικότητα της τάξης τους να νοιώσουν ως πρωτόπειροι. Η άνεση της τάξης εξαφανίζεται καθώς η χρήση του απαιτεί και συγχρόνως επιτρέπει εναλλακτικούς τρόπους δράσης, άλλου τύπου αποφάσεις και διαφορετικό τρόπο κατανόησης των καταστάσεων. Ο δάσκαλος αγωνίζεται να ισορροπήσει ανάμεσα στην τεχνολογία, τους νέους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων που εισάγουν αυτές τις μεθόδους, τις ανάγκες των μαθητών του, τις προσδοκίες όλης της κοινότητας και τις προσωπικές του αντιλήψεις και πεποιθήσεις. Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι η αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας με τη χρήση CAS επηρεάζεται και εξαρτάται από την προηγούμενη εμπειρία του δάσκαλου στη διδασκαλία των μαθηματικών με τη βοήθεια της τεχνολογίας (ibid). Έτσι για να έχει νόημα και για να είναι αποτελεσματική η χρήση ενός CAS θα πρέπει να στηρίζεται σε μια σωστή παιδαγωγική αντίληψη και να έχει ξεκάθαρους στόχους (Leinbach, Pountney & Etchells, 2002). Η χρήση ενός CAS για παράδειγμα μπορεί να υποστηρίξει έναν μαθητή που αντιμετωπίζει προβλήματα στο πέρασμα στο υψηλότερο επίπεδο. Καθώς ο μαθητής προσπαθεί να αναπτύξει τις δεξιότητες που απαιτούνται σε αυτό το υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής παιδείας, το CAS καλύπτει τα προβλήματα που οφείλονται σε έλλειψη δεξιοτήτων των προηγούμενων επιπέδων (Kuttzler, 2000). Ή, ακόμα, μας δίνει τη δυνατότητα να μειώσουμε την ποσότητα των βαρετών επαναλαμβανόμενων ασκήσεων εξάσκησης. Ο κερδισμένος χρόνος μπορεί να αξιοποιηθεί για την εξερεύνηση άλλων περισσότερο ελκυστικών πλευρών του μελετώμενου αντικειμένου (Leinbach, Pountney & Etchells, 2002). Ο τρόπος όμως που ένα CAS θα χρησιμοποιηθεί στο περιβάλλον της τάξης φαίνεται να επηρεάζεται από τις αντιλήψεις του κάθε δάσκαλου για το ρόλο των μαθητών του στην διαδικασία της μάθησης (Zbiek, 2001). Η χρήση του

αντανακλά ακριβώς αυτό που ο δάσκαλος φέρνει στην τάξη, συμπεριλαμβανομένων και των αντιλήψεών του για το τι θα πρέπει να περιλαμβάνει μια διδασκαλία και ποια είναι τα αποτελέσματά της (ibid). Παρά το γεγονός αυτό όμως η χρήση των CAS έχει την τάση να οδηγήσει σε συνεργατικές μορφές μάθησης καθώς δημιουργεί τις προϋποθέσεις για έναν πιο σύνθετο ρόλο για τον δάσκαλο που πρέπει ταυτόχρονα να είναι αρωγός στην επίλυση τεχνικών προβλημάτων αλλά και να διευκολύνει την εργασία και να παίζει το ρόλο του καταλύτη των εξελίξεων σε περισσότερους από έναν μαθητές ή σε ομάδες μαθητών (Heid, Sheets και Matras, 1990).

Το Διερευνητικό Λογισμικό Autograph

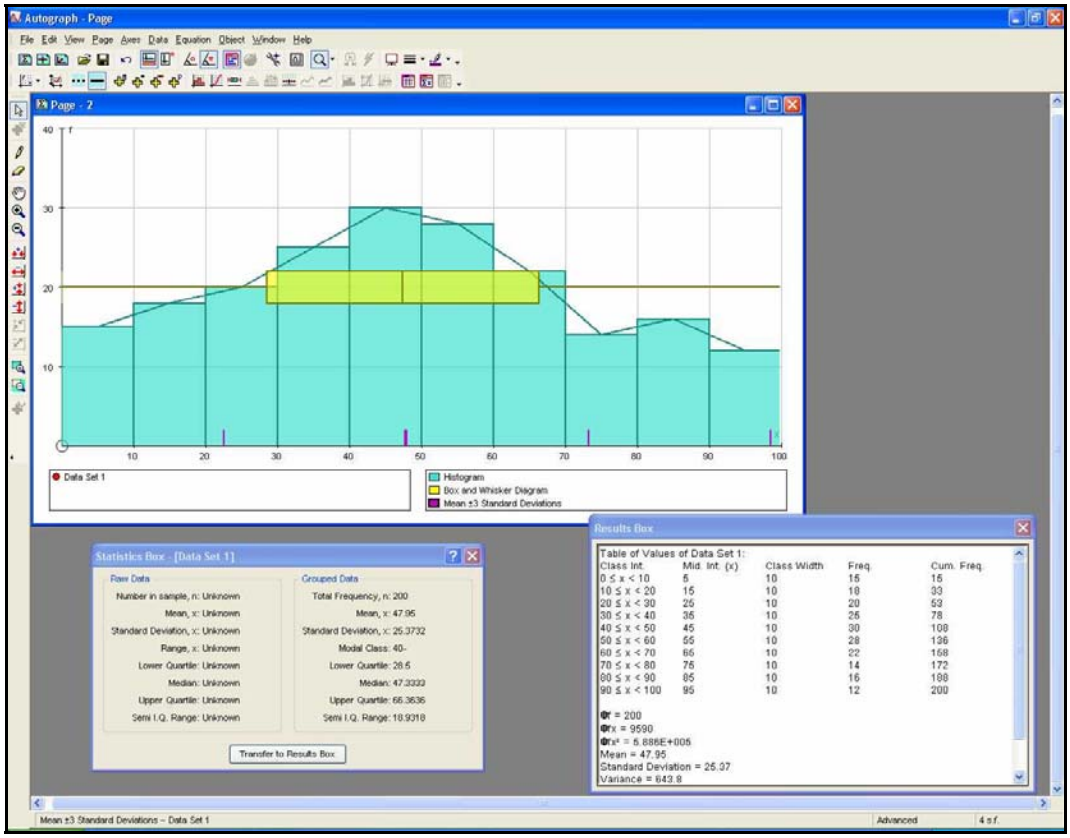
Μια σύντομη παρουσίαση

Το λογισμικό πακέτο Autograph είναι ένα διερευνητικό λογισμικό που αναπτύχθηκε στη Μεγάλη Βρετανία. Στο πακέτο περιλαμβάνονται δυο διαφορετικές εκδόσεις του, που είναι και οι δυο προσβάσιμες κατά την εκκίνηση του λογισμικού. Η πρώτη είναι η 'standard' η οποία έχει ένα απλοποιημένο interface και προσφέρει περιορισμένες επιλογές παραμετροποίησης στο χρήστη. Απευθύνεται σε χρήστες με μικρή εμπειρία σε χρήση παρόμοιων λογισμικών. Η δεύτερη είναι η 'advanced' και προσφέρει στο χρήστη πολλές δυνατότητες παραμετροποίησης και ένα πλούσιο interface. Προφανώς απευθύνεται σε έμπειρους χρήστες. Στη διάρκεια όμως της παρούσας έρευνας παρατηρήθηκε ότι και χρήστες που δεν είχαν μέχρι την ενασχόλησή τους με την ερευνητική διαδικασία καμία εμπειρία σε χρήση διερευνητικού λογισμικού μπόρεσαν να χειριστούν το λογισμικό και να εκμεταλλευτούν τις δυνατότητες που αυτό τους παρείχε σε επίπεδο 'advanced'. Το μεγάλο του πλεονέκτημα στο επίπεδο αυτό είναι ότι διατηρεί την εμφάνιση και τις λειτουργικότητες των εφαρμογών που σχεδιάζονται για το περιβάλλον των Windows με τις οποίες είναι εξοικειωμένοι οι περισσότεροι χρήστες. Έτσι ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να πλοηγείται σε πολλαπλά διαφορετικά παράθυρα, που ονομάζονται σελίδες (pages), και έχει στη διάθεσή του όλες τις λειτουργίες που μπορεί να χρησιμοποιήσει σε οποιαδήποτε εφαρμογή συμβατή με το λειτουργικό, όπως η λειτουργία 'δεξί κλικ' με το ποντίκι για ανάδυση μενού, η αποθήκευση των σελίδων και των γραφικών, ή, ακόμα, η αντιγραφή, η αποκοπή και η επικόλληση σελίδων, γραφικών, εξισώσεων και status bars σε άλλες εφαρμογές. Μπορεί να αξιοποιήσει

λογιστικά φύλλα ή βάσεις δεδομένων για εισαγωγή δεδομένων ή για να εξάγει δεδομένα σε αυτά. Το λογισμικό είναι σχεδιασμένο για διαδραστική λειτουργία με τη βοήθεια ενός βιντεοπροβολέα ή μιας ηλεκτρονικής 'πένας' σε πίνακα ή σε tablet PC.

Ισχυρότατα εργαλεία στα χέρια του χρήστη είναι οι ρυθμίσεις εμφάνισης των αξόνων – παρέχονται επιλογές για καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες, εύρος τιμών κλπ – ο ελεγκτής παραμέτρων (constant controller) και ο ελεγκτής κίνησης γραφικών (animation controller) που μπορούν να αξιοποιηθούν με πολλαπλούς δημιουργικούς τρόπους. Ακόμα ο χρήστης μπορεί να παρακολουθεί τα αποτελέσματα των μετρήσεων στο 'πεδίο αποτελεσμάτων' (result box) ή στο στον πίνακα στατιστικών (Table of Statistics). Μπορεί ακόμα να προσθέσει κείμενο στις σελίδες προσθέτοντας ένα 'πεδίο κειμένου' (Text box).

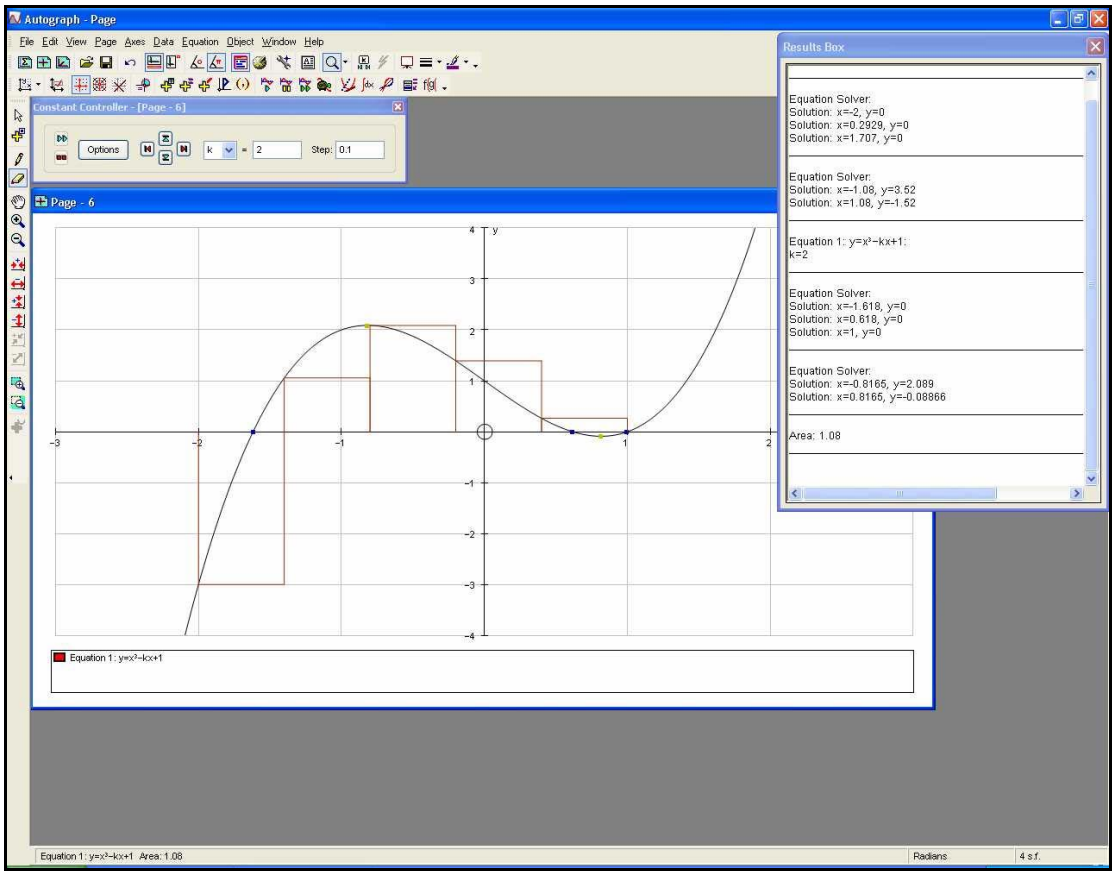
Το παράθυρο της εφαρμογής όταν αυτή ανοίγει περιέχει τη γραμμή μενού, δυο μπάρες εργαλείων (Main and Modes Toolbar) μια σελίδα 2D. Ο χρήστης στη συνέχεια μπορεί να εργαστεί στη σελίδα αυτή όταν ασχολείται με συναρτήσεις και γραφήματα στο $\mathbb{R}^2$ ή να ανοίξει άλλη σελίδα αν το ενδιαφέρον του στρέφεται σε θέματα Στατιστικής και Πιθανοτήτων (1D Page) ή τον απασχολούν αντικείμενα του τρισδιάστατου χώρου (3D Page).



Παράδειγμα 1: Η σελίδα 1D του λογισμικού Autograph

Στο παράδειγμα 1 φαίνεται το παράθυρο της εφαρμογής με ανοιγμένη μια σελίδα 1D. Πρόκειται για μια συνεχή μεταβλητή οι τιμές της οποίας έχουν εισαχθεί από λογιστικό φύλλο. Διακρίνονται η κύρια και η modes μπάρα εργαλείων (Main and Modes Toolbar), η 1D σελίδα, και τα πεδία στατιστικών και αποτελεσμάτων (Statistics Box και Result Box). Στη σελίδα 1D έχει επιλεγεί να παρουσιάζονται το ιστόγραμμα και το πολύγωνο κατανομής συχνοτήτων, τα τεταρτημόρια και το θηκόγραμμα . Στο κάτω μέρος της σελίδας αναγράφονται στο αριστερό πλαίσιο το όνομα του συνόλου δεδομένων (Data set) και στο δεξιό πλαίσιο οι γραφικές αναπαραστάσεις που εμφανίζονται στη σελίδα. Από όλα τα στοιχεία που μπορούν να παρουσιαστούν στο παράθυρο της εφαρμογής επιλέχτηκε να εμφανίζονται τα πεδία στατιστικών και αποτελεσμάτων.

Στο παράδειγμα 2 φαίνεται το παράθυρο της εφαρμογής όταν είναι ανοικτή μια



Παράδειγμα 2: Μια σελίδα 2D του λογισμικού Autograph

σελίδα 2D. Στο παράθυρο περιέχονται και πάλι η γραμμή μενού – που είναι ίδια με τη γραμμή μενού του προηγούμενου παραδείγματος - και οι δυο μπάρες εργαλείων (Main και Modes). Η δεύτερη γραμμή όμως της Main Toolbar είναι αυτή τη φορά

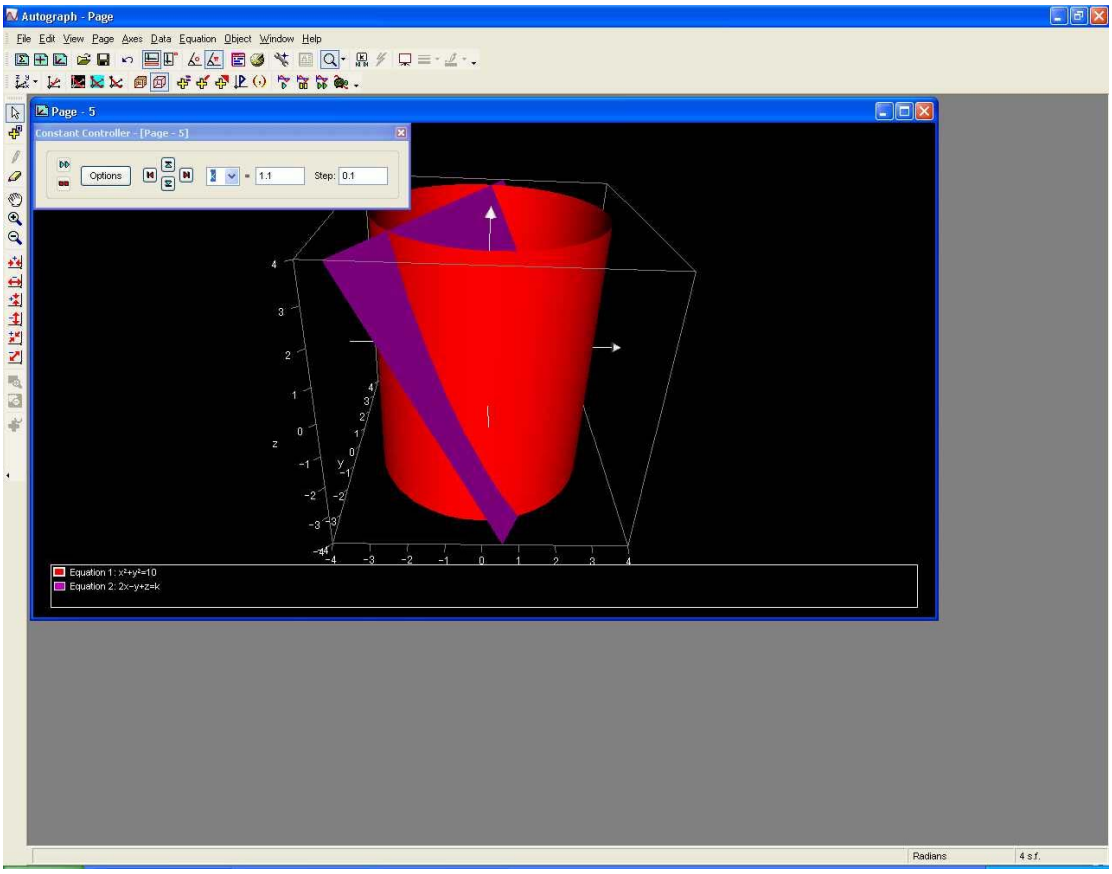
διαφορετική γιατί περιέχει κουμπιά που σχετίζονται με λειτουργίες που αφορούν συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις στο επίπεδο αντί λειτουργιών που αφορούν σε μεγέθη της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.

Στο κάτω μέρος της σελίδας αναγράφεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - kx + 1$ που μελετάται. Μεταξύ όλων των στοιχείων που θα μπορούσαν να εμφανίζονται στο παράθυρο επιλέχτηκαν ο ελεγκτής παραμέτρων και το πεδίο αποτελεσμάτων. Πάνω αριστερά φαίνεται ο ελεγκτής παραμέτρων (constant controller) με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου k. Στο παράδειγμα έχει τεθεί $k = 2$. Δεξιά φαίνεται το πεδίο αποτελεσμάτων (result box) όπου εμφανίζονται οι λύσεις των εξισώσεων $f(x) = 0$ και $f'(x) = 0$ για δυο τιμές της παραμέτρου, καθώς και η τιμή του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων για μια διαμέριση του διαστήματος $[-2,1]$ που ορίζει πέντε υποδιαστήματα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι το άθροισμα αυτό δεν αντιστοιχεί στο κατώτερο ούτε στο ανώτερο άθροισμα της συνάρτησης για τη διαμέριση αυτή μια και η συνάρτηση δεν διατηρεί σταθερή μονοτονία. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που θα εξεταστεί στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων. Στη σελίδα 2D φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 - kx + 1$ για $k = 2$ και τα ορθογώνια του αθροίσματος. Φαίνονται επίσης σημειωμένα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης τα σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι οι λύσεις των εξισώσεων $f(x) = 0$ και $f'(x) = 0$.

Μπορούμε επίσης να εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις της παραγώγου της συνάρτησης, της αρχικής της η οποία διέρχεται από σημείο που καθορίζουμε, της δεύτερης παραγώγου, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε κάποιο σημείο της, οι ασύμπτωτες , σειρές Maclaurin και πολλά ακόμα στοιχεία. Μπορούμε ακόμα από τη γραφική παράσταση να εξάγουμε δεδομένα σε λογιστικά φύλλα και να δημιουργήσουμε πίνακες. Πρόκειται λοιπόν για ένα εργαλείο πολλαπλών αναπαραστάσεων που μπορεί να αξιοποιηθεί στη διδακτική διαδικασία.

Εκτός των συναρτήσεων μπορούμε να χειριστούμε κωνικές τομές που ορίζονται με παραμετρικές εξισώσεις. Ακόμα δίνεται στο χρήστη η δυνατότητα να μεταφερθεί από το καρτεσιανό σε σύστημα πολικών συντεταγμένων.

Όμοια με την παραπάνω είναι και η μορφή μιας σελίδας 3D. Το παράθυρο της εφαρμογής με μια σελίδα 3D φαίνεται στο παράδειγμα 3.



Παράδειγμα 3: Μια σελίδα 3D του λογισμικού Autograph

Το παράθυρο μοιάζει με τα προηγούμενα. Διαφέρουν η δεύτερη γραμμή της κύριας μπάρας εργαλείων, της οποίας τα κουμπιά τώρα αναφέρονται σε αντικείμενα του τρισδιάστατου χώρου, και το φόντο της σελίδας για το οποίο η προεπιλογή είναι το μαύρο χρώμα. Επιλέχτηκε στο παράθυρο εκτός της 3D σελίδας να εμφανίζεται αυτή τη φορά μόνο ο ελεγκτής παραμέτρων.

Μπορεί το Autograph να θεωρηθεί ως CAS;

Το σημαντικότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε προκειμένου να χαρακτηρίσουμε το λογισμικό Autograph ως CAS είναι ότι στερείται ενός υπολογιστή συμβόλων (symbolic calculator). Το γεγονός αυτό μας εμποδίζει να το κατατάξουμε στην κατηγορία των λογισμικών CAS. Περιλαμβάνει όμως όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά που αποδίδει σε ένα CAS ο Cuoco. Περιλαμβάνει δηλαδή έναν ισχυρό υπολογιστή γραφημάτων (graphic calculator), παρέχει εξαιρετικές δυνατότητες πινακοποίησης και στο πακέτο περιλαμβάνονται αριθμητικές ρουτίνες και ενσωματωμένες μαθηματικές συναρτήσεις. Μας αποζημιώνει για την έλλειψη του

υπολογιστή συμβόλων με το ότι είναι απλούστερο στη χρήση του από όλα τα CAS που διατίθενται σε μορφή λογισμικού (Mathematica κλπ). Κατά τον Knop (2003) δεν είναι καθόλου αποτελεσματικό το να πρέπει κανείς να μάθει μια γλώσσα για να διδάξει το μαθηματικό θεωρητικό υπόβαθρο και μια διαφορετική γλώσσα για να εντάξει τα μαθηματικά στην τεχνολογική πλατφόρμα. Αυτή ακριβώς τη δυσκολία μπορούμε να αποφύγουμε με τη χρήση του Autograph μια και δεν απαιτείται από το χρήστη του η γνώση καμιάς γλώσσας προγραμματισμού και επιπλέον είναι πολύ απλό στη χρήση.

Ποια είναι τα εναλλακτικά λογισμικά;

Αν θεωρήσουμε το λογισμικό Autograph ως CAS, τότε θα πρέπει να το εντάξουμε στην κατηγορία των αντίστοιχων λογισμικών όπως το Mathematica, το Mapple, ή το Mathcad. Αλλά, όπως ήδη παρατηρήσαμε, μια τέτοια σύγκριση είναι προβληματική γιατί το λογισμικό Autograph εμφανίζει ένα ουσιώδες βασικό μειονέκτημα που δεν είναι άλλο από την έλλειψη υπολογιστή συμβόλων. Παρατηρώντας προσεκτικά τις δυνατότητές του και εξετάζοντας τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αξιοποιηθεί μπορεί κανείς να αποφασίσει ότι είναι προτιμότερο να το εντάξουμε στην κατηγορία των υπολογιστών γραφημάτων (graphic calculators) και των εργαλείων πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στην περίπτωση αυτή, που αποτελεί και την πιο κατάλληλη κατηγοριοποίηση, ως εναλλακτικό λογισμικό μπορεί να θεωρηθεί το Function Probe.

Η θεωρία της ενοργανωμένης δραστηριότητας

Η προσέγγιση της μάθησης ως ενοργανωμένης δραστηριότητας (instrumented activity) στηρίζεται στη θεωρία της ενοργάνωσης (instrumentation theory) που αναπτύχθηκε από τους Verillon & Rabardel (1995) στα πλαίσια της γνωστικής εργονομίας (cognitive ergonomics) και της ανθρωπολογικής θεωρίας (anthropological theory) που ανέπτυξε ο Chevallard (1992).

Θεμελιώδης έννοια της θεωρίας της ενοργανωμένης δραστηριότητας είναι αυτή του οργάνου (instrument). Ως όργανο θεωρούμε κάθε αντικείμενο το οποίο κάποιο υποκείμενο συνδέει με τη δράση του με σκοπό την επίτευξη ενός έργου (Verillon, 2000). Το όργανο όμως διαφοροποιείται από το αντικείμενο, υλικό ή συμβολικό, στο οποίο βασίζεται για το οποίο χρησιμοποιείται ο όρος τεχνούργημα (artefact). Για να αναβαθμιστεί όμως ένα artefact και να μετατραπεί σε όργανο απαιτείται η φυσική και η ψυχολογική συμμετοχή ενός χρήστη. Συνεπώς, εργαλεία και artefacts των οποίων δεν γνωρίζουμε τον τρόπο χρήσης δεν μπορούν να μετατραπούν σε όργανα (Verillon & Andreucci, 2005). Ένα όργανο είναι λοιπόν μια σύνθετη οντότητα. Είναι εν μέρει ένα artefact και εν μέρει ένα γνωστικό σχήμα, που είναι ακριβώς αυτό που το καθιστά όργανο (Artigue, 2002). Δηλαδή είναι στην πραγματικότητα μια δισυπόστατη οντότητα. Η μια συνιστώσα του είναι τεχνουργηματική (artefactual) και η άλλη είναι ψυχολογική (Rabardel, 1995). Ένα artefact καθίσταται όργανο μέσα από μια διαδικασία που περιλαμβάνει την οικοδόμηση από το υποκείμενο προσωπικών σχημάτων ή γενικότερα την οικειοποίηση (appropriation) προϋπαρχόντων κοινωνικών σχημάτων. Η διαδικασία αυτή κατά την Artigue (2002) ονομάζεται ενοργανωτική γένεση (instrumental genesis).

Η ενοργανωτική γένεση δουλεύει σύμφωνα με την Artigue (ibid) σε δυο κατευθύνσεις.

- Προς το artefact: Το φορτώνει προοδευτικά με δυνατότητες μετασχηματίζοντάς το τελικά σε όργανο κατάλληλο για μια συγκεκριμένη χρήση. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται κατά τον Rabardel (1995) ενοργανοποίηση (instrumentalisation) του artefact.
- Προς το υποκείμενο: Οδηγεί στην ανάπτυξη ή οικειοποίηση σχημάτων ενοργανωμένης δράσης τα οποία σταδιακά σχηματοποιούνται ως τεχνικές που

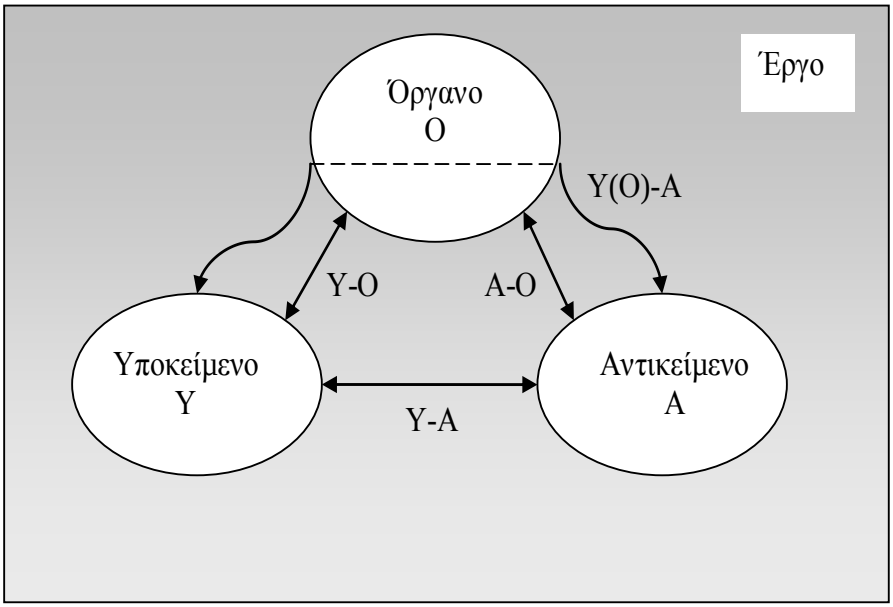
επιτρέπουν μια αποτελεσματική απάντηση σε δοσμένα έργα. Η κατεύθυνση αυτή ονομάζεται κατά τον Rabardel (1995) ενοργάνωση (instrumentation).

Δηλαδή οι δυο κατευθύνσεις της ενοργανωτικής γένεσης είναι μια προς το εσωτερικό (προς τον χρήστη) και μια προς το εξωτερικό (προς την εξωτερική πραγματικότητα). Η κατεύθυνση προς τον χρήστη είναι η ενοργάνωση (instrumentation) και απαιτεί την ένταξη του artefact στις γνωστικές δομές του υποκειμένου (όπως τις υπάρχουσες αναπαραστάσεις, τα σχήματα δράσης κλπ). Κάτι τέτοιο όμως απαιτεί με τη σειρά του την προσαρμογή (adaptation) των γνωστικών δομών του χρήστη. Η κατεύθυνση προς τα έξω είναι η ενοργανοποίηση (instrumentalisation) του artefact. Το artefact πρέπει να ενταχθεί με κατάλληλο τρόπο στο περικείμενο. Ο χρήστης προσδίδει σε αυτό δυνατότητες και λειτουργικές ιδιότητες που δεν είναι απαραίτητο να αποτελούσαν στόχους του σχεδιαστή του. Προβαίνει σε ρυθμίσεις και διορθώσεις ώστε να εξυπηρετεί τις ανάγκες του για την επίτευξη των στόχων του (Verillon, 2000).

Μια διάκριση της ενοργανωμένης δράσης γίνεται κατά τον Verillon (ibid) σε αυτήν που αποσκοπεί στον μετασχηματισμό του περιβάλλοντος και σε αυτήν που παρέχει γνώση. Στην πρώτη περίπτωση ο στόχος είναι ένας ελεγχόμενος μετασχηματισμός του περιβάλλοντος, ή ενός μέρους του περιβάλλοντος, ώστε αυτό να εμπλουτιστεί με νέες επιθυμητές ιδιότητες. Η επίτευξη ενός τέτοιου στόχου έχει ως προφανή συνέπεια την αναβάθμιση της αξίας του ίδιου του περιβάλλοντος. Κατά τους Inhelder και Cellerier (1992) μια δράση αυτού του είδους ονομάζεται «πραγματική» (pragmatic). Στη δεύτερη περίπτωση ένα όργανο, ή ακόμα και ένα artefact, μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να καταστεί δυνατή η παραγωγή γνώσης από το περιβάλλον. Ένα παράδειγμα στην κατεύθυνση αυτή είναι η χρήση ενός οργάνου μέτρησης σε κάποιο πείραμα. Με τη βοήθειά του μπορούμε να παρατηρήσουμε, να καταγράψουμε και να μετρήσουμε μια όψη του κόσμου που μπορεί να μην μας είναι άμεσα προσβάσιμη. Μια δράση αυτού του τύπου ονομάζεται «επιστημική» (epistemic). Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις η ενοργανωμένη δραστηριότητα στρέφεται προς το υλικό περιβάλλον. Είναι όμως δυνατόν να στρέφεται και προς πρόσωπα. Μια δράση αυτού του τύπου αποσκοπεί στο να μεταβάλλει και να αναβαθμίσει το επίπεδο του συστήματος πληροφοριών ενός άλλου ατόμου, του αποδέκτη της δράσης αυτής. Αυτού του είδους είναι η επικοινωνιακή

δράση. Τα όργανα που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες αυτές χαρακτηρίζονται κατά τον Verillon (2000) σημειολογικά (semiotic). Μια σημειολογική ενοργανωμένη δραστηριότητα στο χώρο της εκπαίδευσης αποτελεί επομένως μια σημειολογική παρέμβαση του διδάσκοντα και είναι φανερό ότι έχει συγχρόνως «πραγματικούς» και «επιστημικούς» στόχους. Στην πράξη βέβαια δεν παρατηρείται συχνά αυτόνομη ως προς τους στόχους της χρήση του ενός ή του άλλου τύπου ενοργανωμένης δραστηριότητας. Σχεδόν κάθε ενοργανωμένη δραστηριότητα, υλική ή σημειολογική, εμπεριέχει φάσεις στις οποίες η δράση μπορεί να χαρακτηριστεί ως «πραγματική» και άλλες στις οποίες η δράση χαρακτηρίζεται ως «επιστημική».

Στη διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης η ενοργανωτική φύση του artefact επιβάλλεται σταδιακά. Ένα artefact βέβαια ανήκει στον κόσμο των αντικειμένων. Όταν όμως σταδιακά αναβαθμιστεί σε όργανο παρεμβάλλεται ως «διασύνδεση» (interface) μεταξύ του υποκειμένου και του περιβάλλοντος (Verillon & Andreucci, 2005). Ένα όργανο λοιπόν έχει διαμεσολαβητικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ο διαμεσολαβητικός αυτός ρόλος του οργάνου όταν αυτό ενταχθεί στη διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου, που δεν μπορεί να ερμηνευτεί στα πλαίσια ενός απλού δυαδικού μοντέλου αλληλεπίδρασης υποκειμένου – αντικειμένου, φαίνεται στο διάγραμμα 2.



Διάγραμμα 2: Ο διαμεσολαβητικός ρόλος του οργάνου στην αλληλεπίδραση υποκειμένου-αντικειμένου

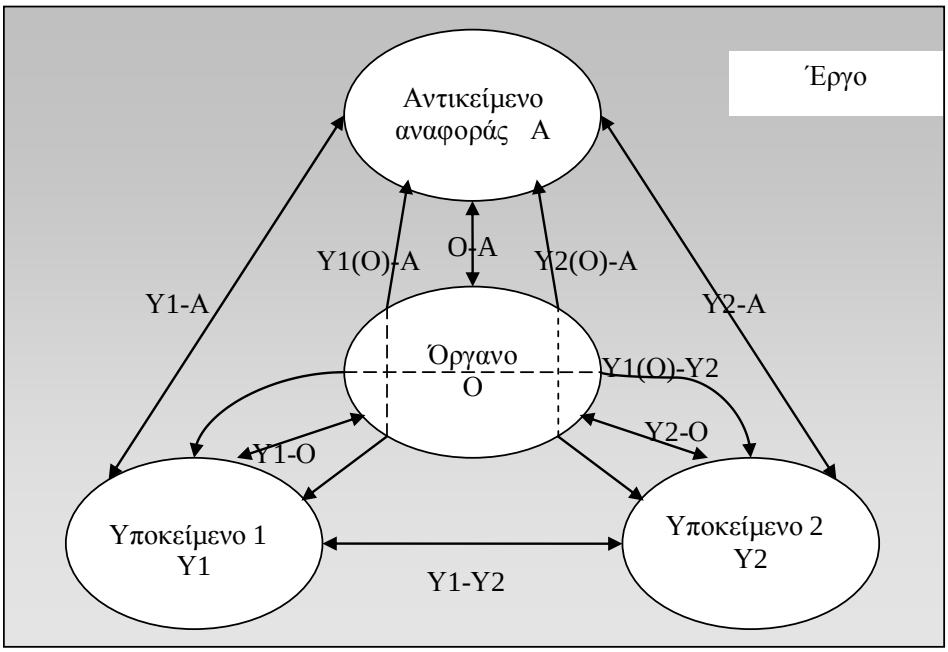
Το σύνηθες δυαδικό μοντέλο αλληλεπίδρασης υποκειμένου – αντικειμένου εμπλουτίζεται με νέες πολλαπλές σχέσεις που στο πλαίσιο της ενοργανωμένης

δραστηριότητας αναπτύσσονται ανάμεσα στο υποκείμενο, το όργανο και το αντικείμενο στο οποίο στρέφεται η ενοργανωμένη δράση επιτυγχάνοντας τη μεταξύ τους διασύνδεση. Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν έχουμε μόνο την άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στο υποκείμενο και το αντικείμενο (Υ-Α) ή στο υποκείμενο και το όργανο (Υ-Ο), αλλά και αυτή ανάμεσα στο αντικείμενο και το όργανο (Α-Ο) όπως επίσης και την έμμεση αλληλεπίδραση μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου με τη διαμεσολάβηση του οργάνου (Υ(Ο)-Α). Το υπόβαθρο όλων αυτών των αλληλεπιδράσεων είναι βέβαια πάντα το ανατεθειμένο έργο που με τη σειρά του είναι ακριβώς αυτό που δίνει νόημα στην κατάσταση.

Κατά τους Verillon και Rabardel (1995) η διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης εξελίσσεται σε γενικές γραμμές με τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά έχουμε άμεση αλληλεπίδραση ανάμεσα στο υποκείμενο και το αντικείμενο (Υ-Α) η οποία οδηγεί το υποκείμενο στην ανάπτυξη των κατάλληλων αναπαραστάσεων. Στη συνέχεια η προσπάθεια κατάλληλης χρήσης ενός artefact υποχρεώνει το υποκείμενο να αναπτύξει νέα σχήματα και αναπαραστάσεις που συνδέονται με το ίδιο το artefact αλλά και με το αντικείμενο της εργασίας του. Οι διαδοχικές δοκιμές που απαιτούνται ώστε να ξεπεραστεί η αρχικά αναποτελεσματική χρήση του αλλά και οι νέες ιδιότητες τόσο του ίδιου του artefact όσο και του αντικειμένου που ανακαλύπτονται σταδιακά μέσα από τις δοκιμές αυτές από το χρήστη οδηγούν τελικά στην ενοργανοποίηση του artefact και την ενοργάνωση της δραστηριότητας.. Έτσι τώρα, στα πλαίσια πια της ενοργανωμένης δραστηριότητας, μπορούμε να παρατηρήσουμε και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ οργάνου και αντικειμένου (Ο-Α), υποκειμένου και οργάνου (Υ-Ο) και τελικά την έμμεση αλληλεπίδραση μεταξύ υποκειμένου και αντικειμένου με τη διαμεσολάβηση του οργάνου (Υ(Ο)-Α). Η δράση του υποκειμένου λοιπόν και η αλληλεπίδρασή του με το αντικείμενο, είτε αυτή είναι άμεση (Υ-Α) ή έμμεση (Υ(Ο)-Α), σχετίζεται πάντα με τις αναπαραστάσεις που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα στάδια της ενοργανωτικής γένεσης.

Στην περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με σημειολογικό ή συμβολικό (semiotic) όργανο το μοντέλο της ανάλυσης είναι πιο περίπλοκο. Τα σημειολογικά όργανα (σύμβολα, κώδικες κλπ) διαφέρουν από τα φυσικά κατά το ότι δεν αποσκοπούν στο να προκαλέσουν τη μεταβολή ενός αντικειμένου αλλά στο να επηρεάσουν και να χειραγωγήσουν τον ψυχισμό ή τη συμπεριφορά του ίδιου μας του εαυτού ή κάποιου

άλλου προσώπου (Vygotsky, 1930/1985, σελ.45). Συνεπώς το μοντέλο θα πρέπει να παρουσιάζει την αλληλεπιδραστική επικοινωνία μεταξύ δυο υποκειμένων με τη διαμεσολάβηση του σημειολογικού οργάνου. Βέβαια αφού το σημειολογικό όργανο στοχεύει στη μεταβολή του συστήματος πληροφοριών και των αναπαραστάσεων του υποκειμένου είναι απαραίτητο να εισαχθεί ένα ακόμα στοιχείο, που είναι αυτό με το οποίο σχετίζονται οι πληροφορίες ή οι αναπαραστάσεις. Αυτό το νέο στοιχείο θα το ονομάζουμε αντικείμενο αναφοράς (referent). Ως αντικείμενο αναφοράς λοιπόν θεωρούμε εκείνο το αντικείμενο (ή η κλάση αντικειμένων) στο οποίο αναφέρεται η ενοργανωμένη δράση του πομπού προς τον αποδέκτη. Το μοντέλο που περιγράφεται στο διάγραμμα που ακολουθεί καταδεικνύει όλες τις αλληλεπιδράσεις, άμεσες και έμμεσες, που αναπτύσσονται μεταξύ των δυο υποκειμένων (Y1-Y2, Y1(O)-Y2), των υποκειμένων και του οργάνου (Y1-O, Y2-O), των υποκειμένων και του αντικειμένου αναφοράς (Y1-A, Y2-A, Y1(O)-A, Y2(O)-A) και, τέλος, μεταξύ του οργάνου και του αντικειμένου αναφοράς (O-A).



Διάγραμμα 3: Μοντέλο αλληλεπιδραστικής επικοινωνίας δυο υποκειμένων με τη διαμεσολάβηση σημειολογικού οργάνου

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ οργάνου και αντικειμένου αναφοράς (O-A) αφορά την κωδικοποίηση (coding), δηλαδή τις σημειολογικές λύσεις που έχουμε για να συνδέσουμε τη σημαινόμενη πληροφορία που αφορά το αντικείμενο αναφοράς με τα σημαίνοντα (αντιληπτές μονάδες σημαινόντων μέσα σε έναν δοσμένο κώδικα). Η αλληλεπίδραση υποκειμένου και αντικειμένου αναφοράς με

τη διαμεσολάβηση του οργάνου (Y1(O)-A και Y2(O)-A) κάνει φανερή τη σχέση υποκειμένου και αντικειμένου αναφοράς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης. Τέλος, η άμεση αλληλεπίδραση υποκειμένου και αντικειμένου αναφοράς καταδεικνύει τη γνώση, τις αναπαραστάσεις και την πραγματική , εικονική ή ανακλητική αντίληψη του υποκειμένου για το αντικείμενο αναφοράς.

Από τη μελέτη του μοντέλου αυτού γίνεται άμεσα αντιληπτή η δυαδική λειτουργία ενός σημειολογικού οργάνου. Η σηματοδοτική λειτουργία που οδηγεί στην αισθητηριακή και γνωστική διέγερση του αποδέκτη και η αναφορική λειτουργία που επιτρέπει στο υποκείμενο να συνδέσει το εκπεμπόμενο σήμα με ένα εξωτερικό αντικείμενο (Verillon & Andreucci, 2005). Με άλλα λόγια σε μια σημειολογικά ενοργανωμένη κατάσταση η διαμεσολάβηση έχει δυο πτυχές. Διαμεσολάβηση της δράσης του πομπού πάνω στον αποδέκτη αφ' ενός και διαμεσολάβηση προς ένα αντικείμενο αναφοράς κοινό και στους δυο αφ' ετέρου (Verillon, 2000).

Η διαλεκτική μεταξύ εννοιολογικής κατανόησης και τεχνικής εργασίας

Τα μαθηματικά θεωρούνται σύμφωνα με την κοινωνικο-πολιτισμική θεώρηση (Sierpinska & Lerman, 1996) και την ανθρωπολογική προσέγγιση (Chevallard, 1992) ως παράγωγα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Μια τέτοια θεώρηση όμως μας επιβάλλει την αποδοχή της άποψης ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών εξαρτάται από το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον μέσα στο οποίο αυτά αναπτύσσονται. Συνέπεια αυτής της παραδοχής είναι ότι δεν μπορούμε πια να αντιμετωπίσουμε τα μαθηματικά αντικείμενα ως αυθύπαρκτα, αλλά ως οντότητες που ανακύπτουν μέσα από τις πρακτικές δεδομένων θεσμών. Ο θεσμός (institution) εδώ θεωρείται με μια πολύ ευρεία έννοια. Για παράδειγμα η οικογένεια νοείται ως ένας θεσμός. Ως διδακτικοί θεσμοί νοούνται εκείνοι που είναι προσηλωμένοι σε σκόπιμη μαθητεία σε ένα συγκεκριμένο πεδίο γνώσης. Οι διδακτικοί θεσμοί αναπτύσσουν σε σχέση με τα γνωστικά αντικείμενα ιδιαίτερες πρακτικές (practices) που οδηγούν σε ιδιαίτερες εξειδικευμένες νόρμες και θεωρήσεις ως προς το νόημα και το περιεχόμενο της απόκτησης της γνώσης και της κατανόησης (Artigue, 2002). Ακριβώς μέσα από αυτές τις πρακτικές μπορεί η τεχνική εργασία (technical work) να παίξει έναν αποφασιστικό ρόλο στην κατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων όπως και των μεταξύ τους συνδέσμων που αποτελούν μέρος της εννοιολογικής κατανόησης (Lagrange, 2000). Οι πρακτικές περιγράφονται από τέσσερις συνιστώσες:

- Ένα τύπο ανατεθειμένου έργου στο οποίο έχει ενσωματωθεί το αντικείμενο.
- Τις τεχνικές (techniques) που χρησιμοποιούνται για να αντιμετωπιστεί αυτός ο τύπος έργου. Μια τεχνική είναι ένας τρόπος επίλυσης ενός ανατεθειμένου έργου και, όταν έχει να κάνει με μη τετριμμένα έργα, είναι μια σύνθετη συναρμογή εργασίας ρουτίνας και αιτιολόγησης.
- Την «τεχνολογία», δηλαδή τη διαπραγμάτευση που χρησιμοποιείται προκειμένου να ερμηνευθούν και να αιτιολογηθούν αυτές οι τεχνικές.
- Τη «θεωρία» που μας προμηθεύει μια δομική διαρθρωτική βάση για την ίδια την τεχνολογική διαπραγμάτευση. Έτσι η θεωρία μπορεί να ιδωθεί ως η τεχνολογία της τεχνολογίας (Artigue, 2002).

Για να γίνει όμως αποτελεσματική η ανάπτυξη της γνώσης απαιτείται η τυποποίηση (routinisation) των τεχνικών. Η τυποποίηση της τεχνικής με τη σειρά της

συνοδεύεται από εξασθένηση της θεωρητικής διαπραγμάτευσης που συνδέεται με αυτήν. Έτσι μια τεχνική που έχει εξελιχτεί σε ρουτίνα στα πλαίσια κάποιου θεσμού έχει την τάση να «απομαθηματικοποιηθεί» για τα μέλη του θεσμού αυτού. Για παράδειγμα η διαδικασία επίλυσης μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης από έναν μαθητή του Γυμνασίου μέσα από την τυποποιημένη μηχανική εργασία (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, όποιος όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο κλπ) έχει οδηγήσει στην απώλεια του μαθηματικού περιεχομένου της. Οι τεχνικές λοιπόν έχουν χάσει στην περίπτωση αυτή τη μαθηματική τους «καταγωγή» και καθαρότητα και έχουν καταντήσει απλές πράξεις (Artigue, 2002). Απλά οι ενέργειες που γίνονται από τον μαθητή θεωρούνται από αυτόν φυσικές και ας μην έχουν κανένα μαθηματικό περιεχόμενο. Αν εστιάσουμε όμως το ενδιαφέρον μας μόνο σε αυτό το μέρος της τεχνικής θα χάσουμε το υπόλοιπο ευρύ φάσμα των δυνατοτήτων που μας παρέχει. Φυσικά κάποιες φορές μια τεχνική μπορεί να πάρει τη μορφή μηχανικής δράσης για να λειτουργήσει ως δεξιότητα. Αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση που απαιτείται η τυποποίηση και η μηχανική εργασία. Αλλά δεν θα πρέπει να θεωρούμε μια τεχνική μόνο σε αυτή τη μορφή. Η διαδικασία θεσμοποίησης των τεχνικών που συνδέονται με το συγκεκριμένο έργο που πρέπει να φέρουμε σε πέρας και η θεωρητική επεξεργασία των προβλημάτων που οι τεχνικές αυτές θέτουν παραμένουν θεμελιώδη στοιχεία για τη διαδικασία της μάθησης (Lagrange, 2000). Η εννοιολογική ανάπτυξη μπορεί να διογκωθεί από τις νέες τεχνικές που θεσμοποιούνται ως απάντηση σε ευρύτερα πεδία έργων και από τις αυξημένες ευκαιρίες για θεωρητική επεξεργασία αυτών των τεχνικών. Την ίδια στιγμή αναδύονται μέσα από αυτά τα νέου τύπου έργα νέα πρότυπα στοιχεία, χαρακτηριστικά του τύπου των προβλημάτων που τέθηκαν και της μορφής των αναπαραστάσεων που εμπλέκονται, δημιουργώντας ένα νέο σώμα δεξιοτήτων διαφορετικών από τις επίσημα αναγνωρισμένες (Ruthven, 2002).

Η ανάπτυξη λοιπόν της τεχνολογίας έχει μεταβάλλει τις ισορροπίες μεταξύ εννοιολογικής και τεχνικής εργασίας. Για παράδειγμα η ευκολία που προσφέρει η τεχνολογία στον τομέα της διερεύνησης ενός προβλήματος αλλά και της διαδικασίας της εκτέλεσης της λύσης έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της ανάγκης για μηχανική τυποποιημένη εργασία. Έτσι οι τεχνικές που οργανώνονται με την τεχνολογία των υπολογιστών είναι διαφορετικές από τις τεχνικές που αναπτύσσονται και οργανώνονται χωρίς αυτήν. Αυτό το γεγονός όμως έχει συνέπεια να μεταβάλλονται

και οι μαθηματικές ανάγκες μιας τεχνικής. Καινούργιες απαιτήσεις ανακύπτουν που συνδέονται με τον τρόπο εκπλήρωσης της μαθηματικής γνώσης από τον υπολογιστή και από τα συστήματα αναπαραστάσεων που εμπλέκονται (Balacheff, 1994). Οι μαθητές αναπτύσσουν γνωστικές δομές καλά προσαρμοσμένες στις πολιτισμικές νόρμες που οριοθετούν τα σχολικά μαθηματικά, στις καταστάσεις που είναι συνηθισμένοι να αντιμετωπίζουν, στις πηγές που είναι διαθέσιμες για αυτούς και στις προσδοκίες που έχουν αναπτυχθεί. Αν το έργο που τους ανατίθεται είναι κατακερματισμένο, οι τεχνικές περιγράφονται λεπτομερώς και η διαπραγμάτευση είναι πολύ περιορισμένη, τότε και οι μαθηματικές έννοιες και τα γνωστικά σχήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι αντίστοιχα αποσπασματικά και άκαμπτα. Κατά τον Ruthven (2002) είναι ευρέως αποδεκτό ότι η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών θα πρέπει να στοχεύει στην ανάπτυξη συντεταγμένων μαθηματικών εννοιών και γνωστικών σχημάτων που συνιστούν τις δυο όψεις της εννοιολογικής κατανόησης.

ΙΙΙ. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται τα κριτήρια επιλογής των σχολείων και των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και ο σχεδιασμός της. Αποσαφηνίζονται οι παραδοχές που θεωρήθηκαν δεδομένες κατά το σχεδιασμό και την εφαρμογή της έρευνας και καταγράφονται τα μέσα συλλογής των δεδομένων καθώς και ο τρόπος επεξεργασίας τους.

Εισαγωγή

Για την πραγματοποίηση της πρώτης φάσης της έρευνας επιλέχτηκαν δυο Λύκεια. Σε κάθε Λύκειο επιλέχτηκαν 12 μαθητές που χωρίστηκαν σε ομάδες των δυο ατόμων. Η επιλογή των σχολείων και των μαθητών ήταν συμπτωματική. Στους μαθητές χορηγήθηκε την προηγούμενη ημέρα της διδασκαλίας ένα προπειραματικό δοκίμιο που σκοπό είχε να εξακριβωθούν οι υπάρχουσες γνώσεις στο γνωστικό αντικείμενο της διδασκαλίας. Η διδασκαλία διήρκεσε τρεις διδακτικές ώρες και έγινε στο εργαστήριο Η/Υ των σχολείων. Η εργασία των μαθητών έγινε με βάση φύλλα εργασίας που τους χορηγήθηκαν. Στους μαθητές του ενός από τα δυο σχολεία χορηγήθηκε και μεταπειραματικό δοκίμιο που σκοπό είχε να διερευνηθεί αν η χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας βοήθησε τους μαθητές να εμβαθύνουν στο περιεχόμενο της έννοιας που διδάχτηκε. Στη δεύτερη φάση, η οποία πραγματοποιήθηκε ένα χρόνο αργότερα, επιλέχτηκε ένα Λύκειο. Επιχειρήθηκε η έρευνα να συνδυαστεί με μια διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά των βασικών ιδιοτήτων της. Δεν χορηγήθηκε προπειραματικό δοκίμιο γιατί οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τον ορισμό της έννοιας. Δεν χορηγήθηκε επίσης μεταπειραματικό δοκίμιο μια και δεν υπήρχε ομάδα ελέγχου. Η επιλογή του Λυκείου ήταν και πάλι συμπτωματική. Τη φορά αυτή στην έρευνα συμμετείχαν και οι 16 μαθητές ενός τμήματος τεχνολογικής κατεύθυνσης χωρισμένοι σε 8 διμελείς ομάδες.

Η διαδικασία εκτέλεσης της έρευνας

Η πρώτη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο του 2006. Έλαβαν μέρος σε αυτήν οι μαθητές της Θετικής και της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της

τρίτης τάξης δυο Λυκείων. Το ένα είναι σχολείο προαστίου της Αθήνας και το άλλο είναι Λύκειο στην περιφέρεια νησιωτικής περιοχής της Δυτικής Ελλάδας. Οι μαθητές του πρώτου Λυκείου ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση διερευνητικών λογισμικών, ενώ οι μαθητές του δεύτερου δεν είχαν καμιά τέτοιου είδους εμπειρία στη μαθητική τους ζωή. Ο αρχικός σχεδιασμός της έρευνας προέβλεπε και τη χρήση ομάδας ελέγχου και για το λόγο αυτό είχε προβλεφθεί και η προετοιμασία μιας δοκιμασίας για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας. Ο σχεδιασμός αυτός όμως δεν ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί. Η μεγάλη πίεση που ασκείται σε όλους τους παράγοντες της εκπαιδευτικής διαδικασίας, μαθητές, καθηγητές, γονείς, σχολικό και κοινωνικό περιβάλλον, λόγω της σημαντικότητας των Γενικών Εξετάσεων που ακολουθούν στο τέλος της χρονιάς επιβάλλει έναν εξαιρετικά εντατικό ρυθμό στα μαθήματα της τρίτης τάξης του Λυκείου και κυρίως αυτών της Κατεύθυνσης. Με την κατάσταση αυτή δεδομένη είναι δύσκολος ο σχηματισμός πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου. Έτσι αναγκαστικά σχηματίστηκαν μόνο πειραματικές ομάδες. Επειδή όμως οι μαθητές του σχολείου της Δυτικής Ελλάδας δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία σε αυτού του είδους τις έρευνες, επιλέχτηκε να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές της τάξης αυτής ένα μεταπειραματικό δοκίμιο μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην τάξη, με το οποίο επιχειρήθηκε να ελεγχθεί η συνεισφορά της διδασκαλίας με χρήση ψηφιακής τεχνολογίας στη βελτίωση του επιπέδου κατανόησης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Το πρόβλημα είναι ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα παρακολούθησαν και τη διδασκαλία της έννοιας στην τάξη. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι δεν μπορούμε να έχουμε ένα αξιόπιστο στατιστικό αποτέλεσμα μια και οι μαθητές αυτοί διδάχθηκαν την έννοια με δυο διαφορετικούς τρόπους σε αντίθεση με τους συμμαθητές τους που τη διδάχθηκαν μόνο με τον παραδοσιακό τρόπο. Συνεπώς δεν μπορούμε να έχουμε σύγκριση της αποτελεσματικότητας των δυο μεθόδων.

Η επιλογή των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, αλλά και των σχολείων ήταν συμπτωματική. Επελέγησαν σχολεία στα οποία ο ερευνητής, ο ίδιος ή ο επιβλέπων καθηγητής, είχε πρόσβαση και μπορούσε να ζητήσει την πραγματοποίηση της έρευνας. Γενικά μια τέτοια έρευνα δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί με μαθητές της Γ' Λυκείου για τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Οι μαθητές στο πρώτο σχολείο επελέγησαν από τον διδάσκοντα καθηγητή. Στο δεύτερο σχολείο η

συμμετοχή των μαθητών ήταν εθελοντική. Κάποιους από τους μαθητές του δεύτερου σχολείου γνώριζε ο ερευνητής από τη θητεία του κατά το παρελθόν σε Γυμνάσιο της περιοχής.

Η έρευνα και στα δυο σχολεία πραγματοποιήθηκε αμέσως πριν από την διδασκαλία της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος στις τάξεις που συμμετείχαν στο πείραμα. Είχε προηγηθεί η διδασκαλία του αόριστου ολοκληρώματος σύμφωνα με τις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και η έρευνα προηγήθηκε της διδασκαλίας του ορισμένου ολοκληρώματος. Οι διδάσκοντες καθηγητές των δυο τάξεων βοήθησαν τον ερευνητή ως παρατηρητές κατά την ερευνητική διδακτική διαδικασία. Στο σχολείο του προαστίου της Αθήνας ο διδάσκων καθηγητής της τάξης είναι έμπειρος ερευνητής, ενώ ο διδάσκων καθηγητής στο δεύτερο σχολείο δεν είχε ερευνητική εμπειρία. Στο πρώτο σχολείο πολύτιμη βοήθεια παρείχε στον ερευνητή ως παρατηρητής και συνάδελφος στο ίδιο μεταπτυχιακό πρόγραμμα με ερευνητική εμπειρία από τη διεξαγωγή της δικής της έρευνας για τη διπλωματική εργασία της.

Η διδακτική διαδικασία διήρκεσε τρεις διδακτικές ώρες. Οι δυο πρώτες ήταν συνεχόμενες και έγιναν την πρώτη μέρα και η τρίτη έγινε την επόμενη ημέρα. Ένα αρκετά μεγάλο μέρος της πρώτης διδακτικής ώρας χρησιμοποιήθηκε για την εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό πακέτο Autograph 3.0 το οποίο οι μαθητές και των δυο σχολείων δεν γνώριζαν. Η διαδικασία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Η/Υ των δυο σχολείων. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα χωρίστηκαν σε διμελείς ομάδες με ευθύνη των διδασκόντων καθηγητών. Τον καταρτισμό των ομάδων ανέλαβαν οι διδάσκοντες καθηγητές με στόχο την επίτευξη καλύτερης συνεργασίας μεταξύ των μελών τους μια και αυτοί γνώριζαν τους μαθητές και μπορούσαν να κάνουν την επιλογή με καλύτερα κριτήρια από τον ερευνητή. Σχηματίστηκαν έξι ομάδες σε κάθε σχολείο. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 24 μαθητές.

Προηγήθηκε η χορήγηση από τους διδάσκοντες καθηγητές, απόντος του ερευνητή, προπειραματικού δοκιμίου σε όσους μαθητές συμμετείχαν στην έρευνα με το οποίο επιχειρήθηκε να ελεγχθεί η ύπαρξη πρότερων γνώσεων των μαθητών για την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Η εργασία στο εργαστήριο Η/Υ έγινε με βάση τα φύλλα εργασίας που χορηγήθηκαν στους μαθητές. Σε κάθε μαθητή χορηγήθηκε ένα φύλλο εργασίας την πρώτη ημέρα και ένα ακόμα τη δεύτερη. Κάθε

ομάδα επέστρεψε ένα συμπληρωμένο φύλλο εργασίας κάθε ημέρα. Στο σχολείο της νησιωτικής περιοχής της Δυτικής Ελλάδας χορηγήθηκε από τον διδάσκοντα καθηγητή, απόντος του ερευνητή, ένα μεταπειραματικό δοκίμιο σε όλους τους μαθητές της τάξης, και όχι μόνο σε όσους μετείχαν στην ερευνητική διαδικασία, αφού πρώτα ολοκληρώθηκε η διδασκαλία του κεφαλαίου του Ολοκληρωτικού Λογισμού στην τάξη.

Θεωρήθηκε χρήσιμο να επαναληφθεί η έρευνα, ελαφρά διαφοροποιημένη μετά την εμπειρία της αρχικής της εφαρμογής, ώστε, εκτός των άλλων, να δοκιμαστεί κατά πόσον μπορεί να αποτελέσει ταυτόχρονα και μια διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος καθώς και των θεμελιωδών ιδιοτήτων της έννοιας. Η δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε έναν χρόνο μετά την πρώτη. Συγκεκριμένα πραγματοποιήθηκε στο τέλος του δεύτερου δεκαήμερου του Απριλίου του 2007. Αυτή τη φορά επιλέχτηκε ένα Λύκειο σε λαϊκή συνοικία μεγάλου Δήμου στα νότια προάστια της Αθήνας. Η επιλογή του σχολείου ήταν και πάλι συμπτωματική και έγινε με τα ίδια κριτήρια, δηλαδή με βάση τη γνωριμία του ερευνητή με καθηγητές που διδάσκουν στο σχολείο. Στην έρευνα–διδασκαλία συμμετείχαν όλοι οι μαθητές ενός τμήματος τεχνολογικής κατεύθυνσης της τρίτης τάξης του σχολείου. Η έρευνα διήρκεσε δυο διδακτικές ώρες συνεχόμενες κατά τη διάρκεια μιας σχολικής ημέρας. Ο αρχικός σχεδιασμός ήταν και πάλι για τρεις διδακτικές ώρες με αποτέλεσμα η διαδικασία να είναι πολύ σφιχτή χρονικά. Δεν δόθηκε προπειραματικό δοκίμιο γιατί όταν πραγματοποιήθηκε η έρευνα οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τον ορισμό και τις ιδιότητες της έννοιας. Επίσης δεν κρίθηκε σκόπιμο να χορηγηθεί μεταπειραματικό δοκίμιο μια και όλοι οι μαθητές του τμήματος συμμετείχαν στη διαδικασία, οπότε ήταν αδύνατος ο σχηματισμός ομάδας ελέγχου.

Οι παραδοχές της έρευνας

Ζητήθηκε από τους διδάσκοντες καθηγητές να επιλέξουν τους μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα (στο Λύκειο της Αττικής) και να καταρτίσουν τις ομάδες. Επομένως ως μια βασική παραδοχή της έρευνας θεωρείται η εγκυρότητα της επιλογής των μαθητών και του καταρτισμού των ομάδων. Μια άλλη σημαντική παραδοχή της έρευνας είναι ότι οι μαθητές συνεργάστηκαν με τον καλύτερο δυνατό

τρόπο και οι απαντήσεις τους σε όλες τις φάσεις της έρευνας ήταν ειλικρινείς και συνειδητές.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Η παρούσα έρευνα στηρίζεται σε θεατή συμμετοχική παρατήρηση της διδακτικής διαδικασίας. Στο Λύκειο της Αττικής ο ερευνητής εστίασε την προσοχή του στην παρακολούθηση της δουλειάς της μιας ομάδας, η οποία βιντεοσκοπήθηκε, παρεμβαίνοντας στη διαδικασία θέτοντας ερωτήσεις και κατευθύνοντας τη διαδικασία. Τον ίδιο ρόλο είχαν και οι δυο παρατηρητές. Με τη βοήθεια των παρατηρητών καταγράφηκε αφ' ενός με μηχανικά μέσα (μαγνητόφωνα) και αφ' ετέρου με σημειώσεις η δουλειά των άλλων ομάδων. Στο Λύκειο της νησιωτικής περιοχής της Δυτικής Ελλάδας ο ερευνητής δεν παρακολούθησε αποκλειστικά την εργασία μιας ομάδας αλλά μαζί με τον διδάσκοντα καθηγητή κατέγραψε πληροφορίες για την εργασία όλων των ομάδων. Χρησιμοποιήθηκαν και πάλι τεχνικά μέσα καταγραφής. Βιντεοσκοπήθηκε η εργασία μιας ομάδας και μαγνητοφωνήθηκε η εργασία των υπολοίπων ομάδων. Ως μέσα συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν:

- Το προπειραματικό δοκίμιο
- Τα φύλλα εργασίας των ομάδων
- Το μεταπειραματικό δοκίμιο
- Τα αρχεία από τους Η/Υ
- Οι βιντεοσκοπημένες και μαγνητοφωνημένες καταγραφές της εργασίας των ομάδων και
- Οι καταγραφές σε μορφή σημειώσεων του ερευνητή και των παρατηρητών.

Επεξεργασία των δεδομένων

Έγινε απομαγνητοφώνηση όλων των καταγεγραμμένων με μηχανικά μέσα πληροφοριών. Ακολούθησε η διεξοδική μελέτη των πληροφοριών αυτών σε σχέση με τις καταγεγραμμένες σημειώσεις του ερευνητή και των παρατηρητών, τα αρχεία που λήφθηκαν από τους Η/Υ στους οποίους εργάστηκαν οι ομάδες και τις απαντήσεις που δόθηκαν στα φύλλα εργασίας. Έγινε σύγκριση των απαντήσεων στα

προπειραματικά δοκίμια με τα φύλλα εργασίας και τις παρατηρήσεις. Τέλος για το δεύτερο Λύκειο επιχειρήθηκε σύγκριση των στοιχείων που προέκυψαν από τη μελέτη του προπειραματικού δοκιμίου, των φύλλων εργασίας και των παρατηρήσεων του ερευνητή και των παρατηρητών με το μεταπειραματικό δοκίμιο.

IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται τα δεδομένα που συλλέχτηκαν κατά την ερευνητική διαδικασία. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη δεν ήταν ομοειδή. Αντίθετα μελετήθηκαν διαφορετικής μορφής δεδομένα. Εξετάστηκαν επεισόδια που καταγράφηκαν ζωντανά με ηλεκτρονικά οπτικοακουστικά μέσα κατά τη διάρκεια της έρευνας, καταγραφές των μαθητών στα φύλλα εργασίας στα προπειραματικά και στα μεταπειραματικά δοκίμια και οι σημειώσεις του ερευνητή και των παρατηρητών. Το πρίσμα κάτω από το οποίο μελετήθηκαν τα δεδομένα είναι η θεωρία της ενοργανωμένης δράσης. Σημαντικό ρόλο ενέχει επομένως στη μελέτη η ανάδυση του εργαλείου-οργάνου και των σχημάτων που οικοδομούνται από τους μαθητές. Καταβάλλεται προσπάθεια να αναλυθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών του ορίου και του ορισμένου ολοκληρώματος και να προταθούν τρόποι για την επιτυχή αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών. Τέλος επιχειρείται μια ανάλυση των αλληλεπιδράσεων που παρατηρήθηκαν κατά την διάρκεια της διαδικασίας.

Εισαγωγή

Η μελέτη και η επεξεργασία των δεδομένων που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία έγινε σε τρία επίπεδα. Εξετάστηκε πρώτα η ευκολία προσαρμογής των μαθητών στο λογισμικό Autograph και οι δυνατότητες που αυτό προσφέρει σε μαθητές έμπειρους σε δραστηριότητες σε ψηφιακά περιβάλλοντα αλλά και σε μαθητές που δεν είχαν ανάλογες εμπειρίες. Παράλληλα επιχειρήθηκε αφ' ενός μεν μια αποτίμηση των προβλημάτων που ανέκυψαν κατά τον σχεδιασμό της δραστηριότητας από τους περιορισμούς που θέτει το λογισμικό, αφ' ετέρου δε μια εκτίμηση για την ορθότητα των τρόπων αντιμετώπισής τους. Στη συνέχεια εξετάστηκε η παραγωγή μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές εξατομικευμένα αλλά και σε επίπεδο ομάδας. Τέλος επιχειρήθηκε να μελετηθεί η αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας μεταξύ τους, η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδων και μεταξύ ομάδων ή μελών τους με τον διδάσκοντα. Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι ότι οι απομαγνητοφωνημένες καταγραφές δεν μπορούν να αποδώσουν την πραγματικότητα κατά τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας. Οι παύσεις, οι χειρονομίες, η διστακτικότητα και η αναποφασιστικότητα των μαθητών σε κάποια φάση της διαδικασίας δεν είναι δυνατόν να αναδειχθούν μέσα από την απλή καταγραφή των επεισοδίων που μελετώνται. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να γίνουν αντιληπτά μόνο μέσα από την

παράλληλη μελέτη του κειμένου και των καταγραφών με ηλεκτρονικά μέσα. Παρόλα αυτά καταβλήθηκε προσπάθεια στην καταγραφή των επεισοδίων να αποδοθεί κατά το δυνατόν η πραγματική εικόνα. Όπου κρίθηκε σημαντικό σημειώνονται οι παύσεις και οι χειρονομίες. Μέσα σε παρενθέσεις σχολιάζονται ενέργειες και κινήσεις των μαθητών που δεν είναι δυνατό να γίνουν αντιληπτές μέσα από τη γραπτό λόγο. Στα επεισόδια που ακολουθούν με το γράμμα Ε αναφέρεται ο ερευνητής και με το γράμμα Π ο εκάστοτε παρατηρητής.

Αποτελέσματα

⊣ Η χρήση του λογισμικού ⊢

Στο φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές υπήρχαν σαφείς και αναλυτικές οδηγίες για την εκκίνηση του λογισμικού και την κατασκευή του σχήματος. Αυτό έγινε με στόχο την εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό και την όσο το δυνατόν πιο εύκολη προσαρμογή τους στις λειτουργίες του και τις δυνατότητες που τους παρέχει. Επιλέχτηκε να μη δοθούν από την αρχή της διαδικασίας στους μαθητές πληροφορίες για την ύπαρξη της δυνατότητας μεταβολής του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων των αποτελεσμάτων. Αυτό έγινε με στόχο να εξακριβωθεί αν οι μαθητές θα αρκούνταν στα αποτελέσματα όπως αυτά εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή τους ή αντίθετα θα επιχειρούσαν, με βάση την ανατροφοδότηση που δέχτηκαν, να τα ερμηνεύσουν και να οδηγηθούν σε μια λεπτομερέστερη διερεύνηση.

Η προσαρμογή στο λογισμικό

Ένας σημαντικός παράγοντας για την αποτελεσματική ένταξη και χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η εξοικείωση και η προσαρμογή των μαθητών. Κατά την διάρκεια της εφαρμογής του προγράμματος DERIVE στα σχολεία της Γαλλίας παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν απέκτησαν την απαιτούμενη εξοικείωση με την τεχνολογία ώστε να τη χρησιμοποιήσουν πραγματικά και με ουσιαστικό τρόπο για να υποστηρίξουν τις μαθηματικές τους δραστηριότητες και τη μάθηση των μαθηματικών (Lagrange, 1999). Θεωρήθηκε λοιπόν σημαντικό στην έρευνα αυτή να υποστηριχθούν ουσιαστικά οι μαθητές στην προσαρμογή και την εξοικείωσή τους με το λογισμικό. Οι διεξοδικές οδηγίες που δόθηκαν στο φύλλο εργασίας όπως και αυτές που δόθηκαν από τον ερευνητή και τους διδάσκοντες

καθηγητές στο πρώτο κυρίως στάδιο της διαδικασίας σε όλες τις ομάδες αλλά και μεμονωμένα σε κάποια ομάδα ή μαθητή, όποτε αυτό χρειάστηκε, βοήθησαν όλους τους μαθητές να προσαρμοστούν με ευκολία στο λογισμικό και τη χρήση του. Αυτό ισχύει τόσο για τους έμπειρους μαθητές όσο και για αυτούς που για πρώτη φορά ήλθαν σε επαφή με μια διδακτική διαδικασία στην οποία γίνεται χρήση διερευνητικού λογισμικού. Χαρακτηριστικά είναι τα επόμενα επεισόδια:

Α: Τι λέει εδώ; Equation.
Δ: Ναι.
Α: Enter Equation.
Δ: Ναι.
Α: Βάλε την εξίσωση. y=0,3x2.
Δ: y=0,3;
Α: Την εξίσωση της παραβολής. Α! Για το x2 βάλε x επί x.
Ε: (Ακούγεται να δίνει οδηγίες σε όλη την τάξη) Απενεργοποιείστε την επιλογή Fill Shape.
Δ: Ωχ!
Α: Έλα! Ξαναπάτα το!
Δ: Που είναι; Στο Object;
Α: (Συμβουλεύεται τις οδηγίες) Object. Edit Shape και πάτα το.
Π: Έτσι, μπράβο!
Δ: Λοιπόν που ήμασταν πριν; Equation;

Επεισόδιο 1: Ο χειρισμός του λογισμικού από έμπειρους μαθητές

Στο επεισόδιο αυτό οι δυο μαθητές συνεργάζονται ακολουθώντας τις οδηγίες που παρέχονται στο φύλλο εργασίας με σκοπό να κατασκευάσουν το σχήμα. Ο Α διαβάζει τις οδηγίες και ο Δ χειρίζεται το μηχάνημα. Δεν αντιμετωπίζουν πρόβλημα ακόμα και όταν ο ερευνητής επιβάλλει στην τάξη μια διαφορετική επιλογή για μια ρύθμιση που αυτοί έχουν ήδη κάνει. Επιστρέφουν στο κατάλληλο πλαίσιο διαλόγου, διορθώνουν την επιλογή και συνεχίζουν την εργασία τους. Οι δυο μαθητές έχουν αρκετά μεγάλη εμπειρία στη χρήση λογισμικού στη διδασκαλία των Μαθηματικών και οι αναλυτικές οδηγίες που περιέχονται στο φύλλο εργασίας τους βοήθησαν να ξεπεράσουν εύκολα το πρόβλημα που εμφανίστηκε.

Στο επόμενο επεισόδιο δυο άπειρες σε παρόμοιες δραστηριότητες μαθήτριες συνεργάζονται επίσης για την κατασκευή του σχήματος της δραστηριότητας. Στην αρχή η Λ διαβάζει τις οδηγίες που περιέχονται στο φύλλο εργασίας και η Π χειρίζεται τον υπολογιστή. Κατά τη διάρκεια του επεισοδίου οι μαθήτριες αλλάζουν ρόλους.

Λ: Επιλέξτε από τη γραμμή εργαλείων το κουμπί Edit Axes.
Π: Ναι.
Λ: Στην καρτέλα Ranges μπορείτε να καθορίσετε τις τιμές των μεταβλητών στους δυο άξονες. Ορίστε για το x τις τιμές minimum -12 και maximum 12.
Π: Μισό λεπτό.
Λ: Ορίστε για το y τις τιμές minimum -5 και maximum 35.
Π: Ναι.
Λ: (Απευθυνόμενη στον ερευνητή) Να πατήσουμε OK εδώ;
Ε: Ναι. Εννοείται.
Λ: Πάτα OK.
Π: Εντάξει.
Λ: Επιλέξτε από τη γραμμή μενού Object και Enter Shape.
Π: Τι κάνουμε εδώ; (Διαβάζουν χαμηλόφωνα τις οδηγίες)
Λ: Βάλε. -10. Εδώ. -10, κόμμα, 0.
Π: Τι κόμμα μηδέν;
Λ: Στο x. Όχι, στο y. Μηδέν.
Ε (Απευθυνόμενος σε όλες τις ομάδες) : Παιδιά να απενεργοποιήσετε την επιλογή Fill Shape.
Λ: Ναι. Πάτα το! Λοιπόν, μετά. Πάμε.
Π: Τι μείον δέκα μηδέν. Πρώτα είναι το -10, 30. Όχι το 0.
Λ: Ναι. Εδώ. (Διορθώνει η Λ παίρνοντας τον έλεγχο του Η/Υ) Μετά -10 και 0. Μηδέν. Τώρα 10 κόμμα 0;
Π: Ναι. Και 10,30.
Λ: 30. Εντάξει;
Π: Ναι. (Διαβάζει) Μπορούμε να αφήσουμε τσεκαρισμένη την επιλογή Fill shape αν θέλουμε το εσωτερικό του πολυγώνου να χρωματιστεί.
Λ: Όχι. Δεν το θέλουμε. Το είπαμε. Συνεχίζουμε.

Επεισόδιο 2: Ο χειρισμός του λογισμικού από άπειρους μαθητές

Παρά την έλλειψη ανάλογων εμπειριών οι δυο μαθήτριες είναι φανερό ότι προσαρμόζονται εύκολα στο λογισμικό. Απλά η ανασφάλεια που νοιώθουν ακριβώς λόγω της απειρίας τους τις οδηγεί να ζητήσουν επιβεβαίωση για μια ενέργειά τους από τον ερευνητή. Στο επεισόδιο που ακολουθεί μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ακόμα και σε καταστάσεις που τους δημιουργούν έντονο προβληματισμό ως προς το χειρισμό του λογισμικού καταφέρνουν να αντιδράσουν με τη βοήθεια των οδηγιών. Οι μαθήτριες στο επεισόδιο διατηρούν τους ρόλους που είχαν στο τέλος του προηγούμενου επεισοδίου.

Λ: Συνεχίζουμε τώρα;
Π: Ναι.
Λ: Επιλέξτε τη γραφική παράσταση. Κάντε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε Find Area. Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Που είναι το Method;

Π: Περίμενε. Να το δούμε. Κάντε δεξί κλικ και επιλέξτε Find Area.
Λ: Find Area. Εγώ πάτησα Edit.
Π: Α! Καλά.
Λ: Λοιπόν, Find Area.
Π: Ναι.
Λ: Να. Πατάω Find Area και μου βγάζει Edit Area.
Π: Α! Να, πατάμε αυτό ρε! Το Rectangle (-) (Δείχνει στην οθόνη)
Λ: Που είναι το Method; (Αρχίζει να ξαναδιαβάζει τις οδηγίες)
Π: Νάτο ρε!
Λ: Α, ναι. Δεν το είδα. Ωραία.
Π: Λοιπόν. Στο πλαίσιο Parameters επιλέξτε
Λ: start point 0 και end point 10. Εντάξει.

Επεισόδιο 3: Η αυξανόμενη αυτοπεποίθηση στην αντιμετώπιση των δυσκολιών κατά το χειρισμό από άπειρους μαθητές

Οι δυο μαθήτριες αντιμετωπίζουν στο επεισόδιο αυτό κάποια δυσκολία στη χρήση του λογισμικού. Δεν είναι εξοικειωμένες με το λογισμικό και δυσκολεύονται να ακολουθήσουν τις οδηγίες. Προβληματίζονται γιατί αναμένουν το παράθυρο που θα ανοίξει να έχει τον ίδιο τίτλο με την επιλογή τους (Find Area αντί του Edit Area). Η λύση στο πρόβλημα δίνεται μέσα από τη συνεργασία τους. Ξαναγυρίζουν στις οδηγίες και παρατηρούν πιο προσεκτικά την οθόνη. Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία. Μελετούν προσεκτικά την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν από το λογισμικό και καταφέρνουν να επιλύσουν το πρόβλημα χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουν στη βοήθεια του ερευνητή ή του παρατηρητή. Δεν ένοιωσαν την ανάγκη αυτή τη φορά να ζητήσουν επιβεβαίωση για την ορθότητα των ενεργειών τους. Παρατηρείται λοιπόν μια προϊούσα εξοικείωση των μαθητριών με το λογισμικό και τη χρήση του και κατά συνέπεια αυξανόμενη αυτοπεποίθηση των μαθητριών στις ενέργειές τους.

Η μελέτη των 3 πρώτων επεισοδίων οδηγεί επομένως στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές, ανεξάρτητα από το αν έχουν εμπειρία στη χρήση διερευνητικού λογισμικού, μπορούν εύκολα να εξοικειωθούν με το λογισμικό Autograph.

Οι περιορισμοί που επιβάλλει το λογισμικό

⊣ Το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα δεν προέκυψε πρόβλημα σε σχέση με το λογισμικό. Πρόβλημα όμως μπορεί να εμφανιστεί σε άλλες παρόμοιες διερευνήσεις όταν η χρησιμοποιούμενη συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα. Οι επιλογές που προσφέρει το λογισμικό για τον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού του χωρίου

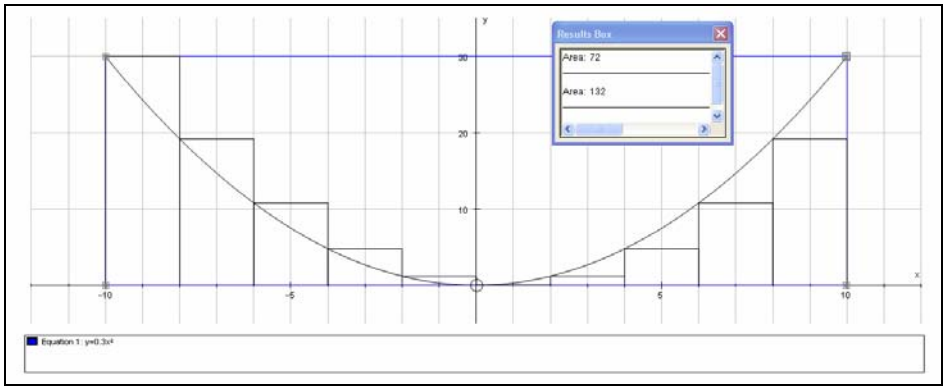
είναι Rectangle(-), Rectangle(+), Trapezium Rule και Simpson's Rule. Στην Αγγλία οι μαθητές διδάσκονται την υπολογιστική μέθοδο του τραπεζίου (trapezium rule) για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος πράγμα που δεν συμβαίνει στην Ελλάδα. Οι πρόσφορες επιλογές για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα είναι οι Rectangle(-) και Rectangle(+). Η συνάρτηση που δόθηκε στους μαθητές στην έρευνα αυτή ήταν η $f(x) = 0,3x^2$ που είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,10]$. Στην περίπτωση αυτή οι επιλογές Rectangle(-) και Rectangle(+) αντιστοιχούν η πρώτη στο κατώτερο και η δεύτερη στο ανώτερο άθροισμα της συνάρτησης στο διάστημα $[0,10]$. Το πρόβλημα είναι ότι το λογισμικό επιλέγει αυτόματα – και σε αυτό δεν έχουμε την παραμικρή δυνατότητα επέμβασης - για κάθε διάστημα που ορίστηκε από τη διαμέριση που καθορίσαμε την τιμή της συνάρτησης στο αριστερό άκρο του διαστήματος για την επιλογή Rectangle(-) και στο δεξί άκρο για την Rectangle(+) αντί της ελάχιστης και της μέγιστης αντίστοιχα τιμής που θα ήταν το επιθυμητό. Έτσι αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, όπως η συνάρτησή μας στο διάστημα $[-10,0]$, τότε η επιλογή Rectangle(-) αντιστοιχεί στο ανώτερο άθροισμα και η Rectangle(+) στο κατώτερο άθροισμα. Ακόμα χειρότερα, αν η συνάρτηση μεταβάλλει μονοτονία στο διάστημα που μας ενδιαφέρει τότε δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των επιλογών του λογισμικού και του κατώτερου ή του ανώτερου αθροίσματος της συνάρτησης. Αυτός ήταν και ο λόγος για τον οποίο επιλέχτηκε η ολοκλήρωση της συνάρτησης $f(x) = 0,3x^2$ στο διάστημα $[0,10]$. Μια μαθήτρια έθεσε το θέμα του τι συμβαίνει από την '*άλλη πλευρά του σχήματος*' (εννοεί στο διάστημα $[-10,0]$):

Ε: Τι αποτέλεσμα έχετε στο result box;
Δ: 72.
Ε: Δηλαδή; Τι είναι αυτό;
Δ: Εμβαδό.
Ε: Εμβαδό. Ποιο εμβαδό;
Δ: Των ορθογωνίων (Δείχνει στην οθόνη τα ορθογώνια)
Ζ: Το εμβαδόν όλων των ορθογωνίων (Δείχνει και αυτή τα ορθογώνια)
Ε: Μάλιστα. Εκφράζει λοιπόν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.
Ζ: Το ίδιο είναι και από εδώ; (Δείχνει το χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση και τον αρνητικό ημιάξονα των x)

Δ: Απλώς από εδώ έχει μόνο πλην. (Δείχνει το -10 στον άξονα των x)

Επεισόδιο 4: Το κατώτερο άθροισμα και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Από το επεισόδιο γίνεται αντιληπτό ότι οι δυο μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα που παίρνουν. Αντιλαμβάνονται ότι έχουν να κάνουν με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων και όχι με το ίδιο το εμβαδό του χωρίου. Επίσης αξιοποιούν την ανατροφοδότηση που δέχονται από το μηχάνημα και αναπτύσσουν προβληματισμό. Η παρατήρηση της Δ είναι σημαντική. Η μαθήτρια εκφράζει την άποψη ότι δεν αλλάζει τίποτα στο διάστημα $[-10,0]$ παρά μόνο το πρόσημο των τιμών της μεταβλητής. Η εξήγηση σε αυτό μπορεί να είναι η εποπτεία της συμμετρίας που αναπτύσσεται από την παρατήρηση του σχήματος, αλλά και το γεγονός ότι στην διατύπωση του προβλήματος γίνεται σαφής αναφορά στη συμμετρία αυτή. Η επιλογή αυτή κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας έγινε ακριβώς για να αποφευχθεί το πρόβλημα που αναφέρθηκε παραπάνω σχετικά με το λογισμικό. Αν στο διάστημα $[-10,0]$ επιλεγεί μέτρηση του εμβαδού με τη μέθοδο Rectangle(-) η τιμή που θα πάρουμε για 5 ορθογώνια θα είναι 132 και όχι 72 όπως θα αναμέναμε. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως φαίνεται στην εικόνα 1, στο διάστημα $[0,10]$ έχουμε να κάνουμε με το κατώτερο άθροισμα, ενώ στο $[-10,0]$ με το ανώτερο άθροισμα της συνάρτησης.



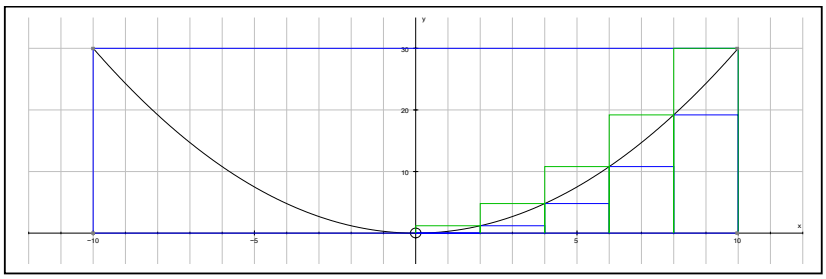
Εικόνα 1: Η επιλογή Rectangle (-) στο [-10, 10]

Ένα αποτέλεσμα σαν αυτό είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί θετικά από τον σχεδιαστή της δραστηριότητας και τον διδάσκοντα δημιουργώντας τις κατάλληλες συνθήκες για την εννοιολογική κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα στο ανώτερο και

το κατώτερο άθροισμα. Κάτι τέτοιο όμως δεν ήταν στους στόχους του σχεδιασμού, δεδομένου μάλιστα του περιορισμένου χρόνου που είχε διατεθεί.

⊣ **Το άθροισμα Riemann**

Είναι άμεσα αντιληπτό με βάση τα προηγούμενα ότι το λογισμικό δεν παρέχει τη δυνατότητα της επιλογής ενός τυχαίου σημείου σε κάθε υποδιάστημα που ορίζεται από την διαμέριση. Συνεπώς δεν μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα Riemann για τη συνάρτησή μας. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αν παραμείνουμε στο επίπεδο της έρευνας όπως αυτή εφαρμόστηκε στα δυο πρώτα σχολεία τον Μάρτιο του 2006, δηλαδή αν περιοριστούμε στην εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου. Αν όμως θελήσουμε να αξιοποιήσουμε τη διαδικασία διδακτικά κάνοντας μια πρόταση για μια ολοκληρωμένη διδασκαλία του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως έγινε τον Απρίλιο του 2007 στο τρίτο σχολείο, τότε εμφανίζεται σοβαρό πρόβλημα μια και ο ορισμός απαιτεί την ύπαρξη συνόλου ενδιάμεσων σημείων και του αθροίσματος Riemann. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα επιλέχτηκε οι μαθητές στο τρίτο σχολείο να εργαστούν στο σημείο αυτό αποκλειστικά σε περιβάλλον «χαρτί-μολύβι» αξιοποιώντας τα δεδομένα που είχαν ήδη συλλέξει. Τους δόθηκε στο φύλλο εργασίας το σχήμα της δραστηριότητας με τα όρια του κήπου, την γραφική παράσταση της συνάρτησης και τις γραφικές αναπαραστάσεις του κατώτερου και του ανώτερου αθροίσματος για πλήθος 5 ορθογωνίων (εικόνα 2), που είναι και η προεπιλογή του



Εικόνα 2: Το ανώτερο και το κατώτερο άθροισμα στο [0, 10]

λογισμικού

Τους ζητήθηκε να επιλέξουν αρχικά ένα τυχαίο σημείο σε κάθε διάστημα που ορίστηκε από τη διαμέριση αυτή, να κατασκευάσουν τα αντίστοιχα ορθογώνια και να διερευνήσουν τη σχέση μεταξύ του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων που

κατασκεύασαν και των αθροισμάτων των εμβαδών των ορθογωνίων που είχαν ήδη υπολογίσει με τη βοήθεια του λογισμικού. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους.

- **Η διαμέριση**

Ένα ακόμα πρόβλημα του λογισμικού είναι ότι μπορούμε να επιλέξουμε μόνο διαμερίσεις που χωρίζουν το διάστημα σε υποδιαστήματα ίσου μήκους. Αυτό βέβαια στην συγκεκριμένη δραστηριότητα δεν αποτέλεσε πρόβλημα μια και στο επίπεδο της Γ΄ Λυκείου η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ορίζεται με χρήση διαμερίσεων ακριβώς αυτού του τύπου.

- **Οι προσεγγίσεις**

Η Artigue (2002), συνοψίζοντας μελέτες της ίδιας (1997b) αλλά και άλλων Γάλλων ερευνητών όπως οι Trouche (1997), Guin & Trouche (1999), Defouad (2000) και Lagrange (2000) οι οποίοι για περισσότερο από μια δεκαετία ασχολήθηκαν με το θέμα της ένταξης της χρήσης των CAS στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη Γαλλία, αναφέρεται στο γνωστικό σχήμα που ονομάζει 'σχήμα πλαισίωσης' (framing scheme). Οι μαθητές των τάξεων που συμμετείχαν στις έρευνες αυτές εφοδιάστηκαν και χρησιμοποίησαν, στα πλαίσια της έρευνας αλλά και εκτός αυτής, για έναν χρόνο το TI-92, ένα CAS χειρός. Παρατηρεί η Artigue ότι μόνο δυο από τους εννέα μαθητές που συμμετείχαν σε μια από τις έρευνες που εξέταζε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν οι μαθητές το CAS σε μια μελέτη μονοτονίας συνάρτησης μπόρεσαν να φτάσουν σε ακριβή γραφική παράσταση της συνάρτησης που τους δόθηκε. Ακόμα πιο σημαντικό είναι το ότι οι πέντε από τους εννέα μαθητές δεν κατόρθωσαν να αναπτύξουν οποιασδήποτε μορφής στρατηγική για να έχουν μια καλύτερη απεικόνιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης μεταβάλλοντας το προεπιλεγμένο παράθυρο στην οθόνη του CAS (που είναι $[-10,10]\times[-10,10]$). Και αυτό παρά το γεγονός ότι αντιλαμβάνονταν αφ' ενός μεν πως η γραφική παράσταση δεν μπορεί να βρίσκεται μόνο στο 2ο και 3ο τεταρτημόριο αφ' ετέρου δε είχαν την πεποίθηση ότι η μονοτονία της συνάρτησης δεν μπορεί να διατηρείται σταθερή. Το γνωστικό σχήμα που οι μαθητές αναπτύσσουν μέσα από τη χρήση του CAS και τους δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τις κατάλληλες στρατηγικές για να μεταβάλλουν τις ρυθμίσεις της οθόνης ή να μεταβούν σε άλλο mode λειτουργίας του CAS ώστε να

έχουν καλύτερη εικόνα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι το 'σχήμα πλαισίωσης'. Ένα ανάλογο φαινόμενο, το οποίο όμως δεν έχει σχέση με τη γραφική παράσταση αλλά με τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στο παράθυρο Result box, παρατηρήθηκε στην παρούσα έρευνα. Θα μπορούσε κανείς κατ' αναλογία να μιλήσει για 'σχήμα προσέγγισης'. Επιλέξαμε την συνάρτηση $f(x) = 0,3x^2$ και το διάστημα $[0,10]$, αντί της $f(x) = x^2$ και του διαστήματος $[0,1]$ που συνηθίζεται, για τα 'καλά' αποτελέσματα που δίνουν οι πράξεις. Πράγματι το εμβαδόν που ζητείται να υπολογιστεί είναι 100 έναντι του 1/3 που προκύπτει στην περίπτωση της συνάρτησης x^2 στο $[0,1]$. Αλλά τα αποτελέσματα των μετρήσεων που παίρνουμε όταν επιλέξουμε Find Area και ορίσουμε ως μέθοδο Rectangle (-) ή Rectangle (+) μόνο σε περιορισμένο αριθμό συγκεκριμένων περιπτώσεων είναι ακριβή. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις στο παράθυρο αποτελεσμάτων καταγράφεται μια προσέγγιση του αποτελέσματος με συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Το λογισμικό επιτρέπει τον έλεγχο του πλήθους των ψηφίων από τον χρήστη μέσω των επιλογών: Edit → Preferences → General → Accuracy. Το μέγιστο επιτρεπόμενο πλήθος ψηφίων είναι 10 μη συμπεριλαμβανομένης της υποδιαστολής. Για την περίπτωση της συνάρτησης και του διαστήματος που επιλέξαμε στην έρευνα αυτή η προεπιλογή του λογισμικού ήταν τα αποτελέσματα στο Result box να δίνονται σε format 4 ή 5 το πολύ ψηφίων (μέχρι δυο δεκαδικά ψηφία). Στις αναλυτικές οδηγίες που δόθηκαν στους μαθητές μαζί με το φύλλο εργασίας δεν έγινε καμία αναφορά στο γεγονός ότι το πλήθος των ψηφίων στα αποτελέσματα μπορεί να μεταβληθεί. Το αποτέλεσμα ήταν ότι κανένας μαθητής και στα τρία σχολεία δεν αναρωτήθηκε αν μπορεί να μεταβάλλει το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων ώστε να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια. Η ρύθμιση αυτή έγινε μόνο μετά από παρέμβαση του ερευνητή ή των παρατηρητών. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω επεισόδιο.

Η: 99,85 βγάζει για το 1000. Εμείς θέλουμε 99,9. Πόσα να βάλουμε; Παραπάνω θέλει. Θέλει παραπάνω ορθογώνια. Να βάλουμε 1200;
Β: Ναι.
Η: 99,87. Παραπάνω θέλει! Έλεος! Να βάλουμε 1400;
Β: Βάλε 1500.
Η: Να βάλουμε 1450 ή 1500; Για 1500 βγαίνει κάτι παραπάνω νομίζω.
Β: Ναι;
Η: Ναι. Να βάλω 1500; (Περιμένει το αποτέλεσμα) 99,9. Βάλε 1450.
Π: Τώρα, μισό λεπτό! Κοιτάξτε εδώ! Βλέπετε ότι εδώ έχουμε 99,87 και

μετά 99,9. Πόσο ακριβώς είναι αυτό το 99,9; Είναι 99,885 ή είναι 99,002; Αυτό δεν πρέπει να το ξέρετε;

Η: Ναι. Κολλάει! Κολλάει!

Π: Οπότε μπορούμε να πάμε στο View → Preferences → General και βάλτε 8 στο Accuracy. Πατάτε OK. Οπότε τώρα αν κάνετε δεξί κλικ και update θα έχετε μεγαλύτερη ακρίβεια.

Η: 99,90 και κάτι. Γράψε 1450.

Επεισόδιο 5: Αύξηση του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων μόνο μετά από παρέμβαση του παρατηρητή

Η χρήση του λογισμικού επομένως δεν αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε οι μαθητές να δομήσουν σχήματα που να τους επιτρέπουν να αποκτήσουν μεγαλύτερο έλεγχο πάνω στα αποτελέσματα μεταβάλλοντας το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης. Κάτι τέτοιο έγινε μόνο μετά από την παρέμβαση του ερευνητή ή των παρατηρητών. Όμως και μετά την παρέμβαση αυτή οι δυο μαθητές δεν μπορούν να αξιοποιήσουν τις νέες δυνατότητες που τους παρέχονται. Αρκούνται στην τιμή 1450 για την οποία υποθέτουν ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι μικρότερο από 99,9 μια και για την τιμή 1500 είναι πολύ λίγο μεγαλύτερο από 99,9. Δεν ελέγχουν την εικασία που κάνουν ότι θα πρέπει το άθροισμα των εμβαδών να είναι μικρότερο από 99,9 όταν το πλήθος των ορθογωνίων είναι 1450. Δηλαδή δεν προβαίνουν σε μια πιο λεπτομερή διερεύνηση ώστε να βεβαιωθούν ότι η απάντησή τους είναι σωστή.

Στο επόμενο επεισόδιο εμφανίζεται η δουλειά μιας άλλης ομάδας αφού ο ερευνητής έχει δώσει σε ολόκληρη την τάξη οδηγίες για την αύξηση του πλήθους των ψηφίων.

Ζ: Πόσο να βάλλουμε; 700 να βάλουμε;

Δ: Στο 500 είναι 99,7. (Θέτουν ν=700 και περιμένουν).

Δ: Ω!

Ζ: Πιο πολύ. Περίμενε!

Δ: Λίγο ακόμα θέλει.

Ζ: 800; (Χειρίζεται τον υπολογιστή). 99,81. Πάμε λίγο πιο πίσω;

Δ: 750. Στη μέση για να δούμε αν είναι πάνω ή κάτω

Ζ: 750. (Χειρίζεται τον υπολογιστή. Περιμένουν). Να! Έλα, γράψε. 99,8009.

Δ: Ναι. Για το 749;

Ζ: Περίμενε.

Ε: Έχετε το 750;

Δ: Ναι. Το κρατάμε αυτό. Τώρα, αν το παρακάτω ξεφύγει πολύ θα κρατήσουμε το 750.

Ζ: Πόσο είπαμε; 749, έτσι; Ε! Πάει πιο λίγο. Άρα το 750 θα

κρατήσουμε. Άρα είναι από 300 μέχρι 750.

Επεισόδιο 6: Το 'σχήμα προσέγγισης'

Η σύγκριση της συμπεριφοράς των μαθητών στα επεισόδια 5, 6 καταδεικνύει τον διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος από τους μαθητές. Οι δυο μαθητές του επεισοδίου 5 στηρίζονται στο γεγονός ότι αντιλαμβάνονται διαισθητικά την μονοτονία της ακολουθίας των αποτελεσμάτων. Δεν είναι σε θέση όμως να αναπτύξουν μια συγκροτημένη στρατηγική που θα τους επιτρέψει να φτάσουν σε μια σίγουρα ικανοποιητική απάντηση. Αντίθετα οι μαθήτριες στο επεισόδιο 6 φαίνεται να αναπτύσσουν μια τέτοια στρατηγική. Αφού πρώτα παρατηρούν ότι η ζητούμενη τιμή ν του πλήθους των ορθογωνίων βρίσκεται μεταξύ του 700 και του 800, αποφασίζουν να διχοτομήσουν το διάστημα για να δουν με μεγαλύτερη ακρίβεια σε πιο μισό του είναι το ζητούμενο πλήθος. Στη συνέχεια παρατηρούν ότι για ν=750 το αποτέλεσμα είναι πολύ κοντά στην τιμή που δίνεται. Δεν αρκούνται όμως σε αυτό. Αξιοποιούν τη δυνατότητα για μεγαλύτερη ακρίβεια στις μετρήσεις. Παρατηρούν ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης για ν=750 είναι πολύ κοντά στο 99,9. Ελέγχουν λοιπόν αν τους κάνει η αμέσως μικρότερη τιμή του ν, δηλαδή η τιμή ν=749. Δηλαδή η πληροφορία που δόθηκε από τον ερευνητή τους έδωσε τη δυνατότητα, μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με το λογισμικό, την αξιοποίηση της ανατροφοδότησης που δέχτηκαν από το μηχάνημα και την προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα, να δομήσουν ένα σχήμα το οποίο τις βοηθάει να χειριστούν προβλήματα διάταξης μέσα από συγκρίσεις αποτελεσμάτων με αυξανόμενη ακρίβεια προσέγγισης. Κάτι που είναι φανερό ότι δεν συνέβη στην περίπτωση των μαθητών του αμέσως προηγούμενου επεισοδίου. Αυτό το σχήμα θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε *'σχήμα προσέγγισης'*.

⊣ Το διδακτικό συμβόλαιο, η επίδρασή του στη στρατηγική που επιλέγεται και τα σχήματα που δομούνται ⊢

Είναι εμφανές λοιπόν ότι έχουμε να κάνουμε με διαφορετική ερμηνεία του διδακτικού συμβολαίου παρά το ότι πρόκειται για ομάδες μαθητών από το ίδιο σχολείο που δουλεύουν στον ίδιο χώρο την ίδια περίοδο. Τα δυο αγόρια θεωρούν ότι αρκεί να βρουν οποιαδήποτε τιμή του ν για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων θα είναι μικρότερο από το εμβαδό που τους δίνεται. Η στρατηγική τους είναι απλά να βρουν μια οποιαδήποτε τιμή που να ικανοποιεί το ζητούμενο.

Το ίδιο μπορούμε να παρατηρήσουμε και σε μια ακόμα ομάδα κοριτσιών από το ίδιο σχολείο.

N: (Διαβάζει) Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μικρότερο από 101;
T: Μικρότερο από 101. Για να δούμε. (Ψάχνουν στον πίνακα)
N: 100,8
T: Άρα 200. Τώρα θέλει από 100,5 …εεε…να είναι μικρότερο από 100,5 και μεγαλύτερο από 100,1.
N: Έλα 100,2 ή 100,3.
T: Που είναι το 100,3; Δεν το έχεις σημειώσει.
N: Ναι. Βάλε το εκατό κόμμα ….
T: Για ….
N: Τι για. Που είναι το 100,3; Βρες μου ένα κοντά του.
T: (ψάχνει στον πίνακα) 100,8 για 200. Άρα να βάλω 500;
N: 100,3. Δηλαδή 500.
T: Πόσο;
N: 500. Δίνει 100,3.

Επεισόδιο 7: Μια ερμηνεία του διδακτικού συμβολαίου

Οι δυο μαθήτριες του επεισοδίου 7 θεωρούν ότι πρέπει να βρουν μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων που να ικανοποιεί τη συνθήκη που τους δίνεται. Αξιοποιούν στην κατεύθυνση αυτή την εργασία τους στα προηγούμενα ερωτήματα με συνέπεια και προσεκτικά βήματα. Προσδιορίζουν πρώτα μια τιμή του αθροίσματος των εμβαδών που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ερωτήματος και στη συνέχεια βρίσκουν με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων στον πίνακα την αντίστοιχη τιμή για το πλήθος ν των ορθογωνίων. Για άθροισμα εμβαδών μικρότερο του 101 ψάχνουν στον πίνακα και βρίσκουν το 100,8. Οπότε έχουν την τιμή ν=200. Όταν δεν βρίσκουν μια κατάλληλη τιμή για το άθροισμα των εμβαδών (για παράδειγμα το 100,2 ή το 100,3) αλλά ούτε και κάποια άλλη τιμή που να τους κάνει, αναπτύσσουν μια στρατηγική που στηρίζεται στη μονοτονία της ακολουθίας των αποτελεσμάτων. Βρίσκουν μια τιμή όσο κοντά μπορούν στο στόχο που έχουν θέσει (το 100,2 ή το 100,3) και αυξάνουν το πλήθος των ορθογωνίων μια και κατανοούν ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα. Έτσι βρίσκουν την τιμή ν=500 που ικανοποιεί τη συνθήκη. Σε μια πρώτη ανάγνωση οι στρατηγικές των δυο ομάδων στα επεισόδια 5 και 7 δεν φαίνεται να διαφέρουν. Αλλά μια πιο προσεκτική ματιά μας αναδεικνύει τη διαφορετικότητα των στρατηγικών. Οι δυο μαθήτριες ερευνούν προσεκτικά για να προσδιορίσουν τις ζητούμενες τιμές. Οι δυο μαθητές από την άλλη αξιοποιούν επίσης τη γνώση τους για τη μονοτονία της

ακολουθίας των αποτελεσμάτων αλλά δεν είναι εξίσου προσεκτικοί στο χειρισμό της κατάστασης. Αφού παρατηρούν ότι το άθροισμα των εμβαδών 1500 ορθογωνίων είναι λίγο μεγαλύτερο από 99,9 αρκούνται να καταγράψουν την τιμή 1450 χωρίς να εξετάσουν αν πραγματικά το άθροισμα των εμβαδών των 1450 ορθογωνίων είναι πράγματι μικρότερο από 99,9. Τους φτάνει ότι, αφού η τιμή για ν=1500 είναι πολύ λίγο πάνω από το 99,9, διαισθητικά αντιλαμβάνονται ότι θα πρέπει το άθροισμα των εμβαδών 1450 ορθογωνίων να είναι μικρότερο από 99,9. Δηλαδή, ενώ τα κορίτσια του επεισοδίου 7 εργάζονται μεθοδικά και με συγκεκριμένη στρατηγική, τα αγόρια του επεισοδίου 5 φαίνεται να εργάζονται περίπου τυχαία.

Αντίθετα και προς τις δυο αυτές ομάδες τα δυο κορίτσια στο επεισόδιο 6 προσπαθούν να προσδιορίσουν τη μέγιστη τιμή του πλήθους ν των ορθογωνίων για την οποία το άθροισμα των εμβαδών είναι μικρότερο από τη τιμή που δίνεται. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετώπισαν όλα τα ερωτήματα αυτού του είδους. Η στρατηγική τους επομένως είναι αναγκαία πιο λεπτομερής και περισσότερο επεξεργασμένη.

Το ενδιαφέρον είναι ότι η ομάδα των αγοριών σε προηγούμενα παρόμοια ερωτήματα αντιλαμβάνεται το διδακτικό συμβόλαιο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που το αντιλαμβάνονται οι μαθήτριες του επεισοδίου 6. Ο Η εκφράζει σαφέστατα την αντίληψή του για το διδακτικό συμβόλαιο δηλώνοντας τι νομίζει ότι αναμένουν από αυτούς:

Η: Θέλει να βρεις το ελάχιστο πλήθος ορθογωνίων ώστε να είναι 99. Κατεβαίνουμε κι άλλο λοιπόν.

Επεισόδιο 8: Το διδακτικό συμβόλαιο

Η παρακολούθηση ολόκληρου του επεισοδίου καταδεικνύει ότι τα δυο αγόρια αρχικά αναπτύσσουν στρατηγική παρόμοια με αυτή των κοριτσιών του επεισοδίου 6.

Β: Κάτσε! Κάτσε! Τι λέει; Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μεγαλύτερο από 99; Στα 500 πόσο είναι;
Η: 99,7. Περίμενε. Στα 200 πόσο είναι; 99,25. Θα κατέβουμε κι άλλο.
Β: Γιατί ρε; Δεν κατάλαβα τι κάνεις!
Η: Θέλει να βρεις το ελάχιστο πλήθος ορθογωνίων ώστε να είναι 99. Κατεβαίνουμε κι άλλο λοιπόν. (Ορίζουν ν=150)
Β: Νάτο! (Δείχνει το 150 στον animation controller και το αποτέλεσμα στο result box)
Η: Τόσο είναι.

Β: 149. Βάλε 149 να δούμε.

Επεισόδιο 9: Η επίδραση του διδακτικού συμβολαίου στη στρατηγική που επιλέγεται

Οι δυο μαθητές δεν αρκούνται στην τιμή 150 που δίνει αποτέλεσμα 99 για το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Αναζητούν και το αποτέλεσμα για την τιμή 149. Δηλαδή αναζητούν το ελάχιστο πλήθος ορθογωνίων για το οποίο το άθροισμα των εμβαδών γίνεται μεγαλύτερο από 99. Γιατί λοιπόν αλλάζουν την στρατηγική τους στο επεισόδιο 5; Η απάντηση στο ερώτημα κρύβεται στη μελέτη του επόμενου επεισοδίου το οποίο χρονικά προηγείται των επεισοδίων 5 και 8 και έπεται του επεισοδίου 9.

Β: Άρα είναι 150.
Η: Στα 150 είναι. Γράψε το.
Β: Κάτσε! Περίμενε! (Διαβάζει) Μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μεγαλύτερο (τονίζει τη λέξη μεγαλύτερο) από 99.
Η: Το πλήθος των ορθογωνίων για το οποίο το άθροισμα των εμβαδών είναι ακριβώς 99 είναι 150. Για μεγαλύτερη τιμή είναι μεγαλύτερο.
Β: Αν δώσουμε μεγαλύτερες τιμές είναι μεγαλύτερο.

Επεισόδιο 10: Το ξεκαθάρισμα της στρατηγικής

Στο επεισόδιο 10 καθίσταται φανερό ότι αυτό είναι ακριβώς το σημείο στο οποίο αποκρυσταλλώνεται η στρατηγική που θα ακολουθήσουν οι δυο μαθητές. Βέβαια το αποτέλεσμα που παίρνουν στο result box είναι 99 ακριβώς. Αν είχαν προσέγγιση με ένα παραπάνω δεκαδικό ψηφίο θα έπαιρναν ως αποτέλεσμα το 99,002 και όχι το 99. Δηλαδή το αποτέλεσμα δεν θα ήταν ίσο με 99 αλλά μεγαλύτερο από αυτό. Αναπτύσσουν λοιπόν, με βάση την ανατροφοδότηση που δέχονται, μια στρατηγική που στηρίζεται στην ισότητα και όχι στη διάταξη. Αναζητούν τιμή του ν για την οποία το άθροισμα των εμβαδών ισούται με το δοσμένο εμβαδό. Αυτό ακριβώς επιχειρούν να κάνουν και στο επεισόδιο 5. Ο Η δηλώνει σαφώς ότι θέλουν το άθροισμα να είναι ακριβώς 99,9. Η παρέμβαση του παρατηρητή καταστρέφει τη στρατηγική αυτή. Οι δυο μαθητές δεν μπορούν να διαχειριστούν τη νέα κατάσταση στο πλαίσιο που τέθηκε από τον παρατηρητή μια και είναι αδύνατο να βρουν τιμή του ν για την οποία το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων να είναι ίσο με 99,9. Τα σχήματα όμως αλλάζουν και προσαρμόζονται όταν μεταβάλλονται οι καταστάσεις (Beguin & Rabardel, 2000). Το κατά πόσον είναι παραγωγικά ή όχι εξαρτάται από τη

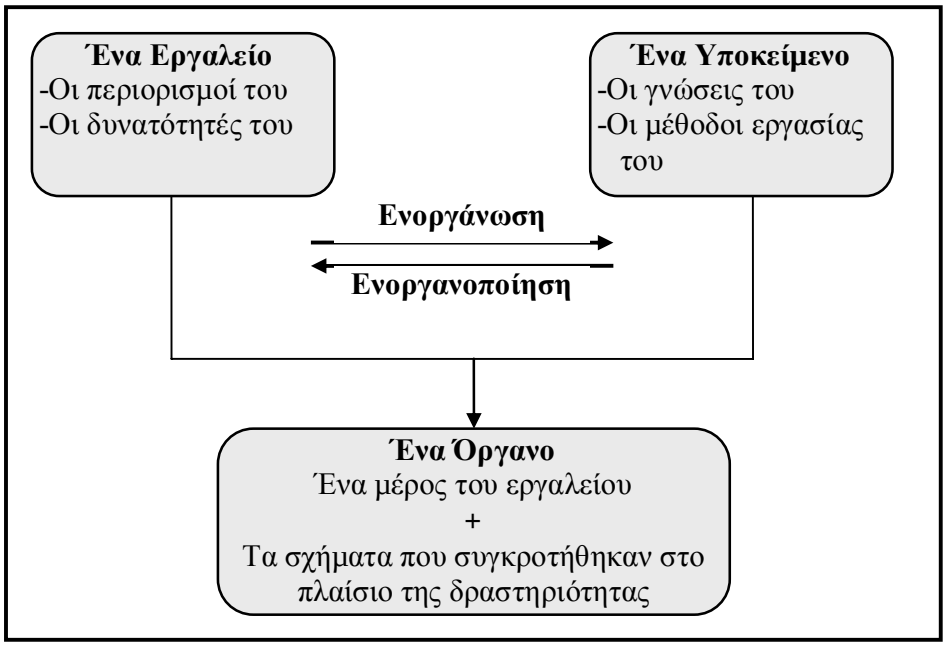
συμβατότητά τους με άλλα σχήματα ή έννοιες (Lagrange, 1999). Η λύση λοιπόν για να βγουν από το αδιέξοδο οι δυο μαθητές είναι να μεταβάλλουν το σχήμα που έχουν ήδη δομήσει ώστε αυτό να γίνει συμβατό με το νέο περικείμενο. Βέβαια ούτε το νέο σχήμα μπορεί να είναι παραγωγικό στα πλαίσια της ερμηνείας του υπάρχοντος διδακτικού συμβολαίου, οπότε οι δυο μαθητές μεταβάλουν την ερμηνεία τους για το διδακτικό συμβόλαιο ώστε το σχήμα να είναι συμβατό με αυτό.

Έχουμε επομένως να κάνουμε με δυο διαφορετικές ερμηνείες του διδακτικού συμβολαίου που οδηγούν σε τρεις διαφορετικές στρατηγικές. Σύμφωνα με την πρώτη ερμηνεία αρκεί να βρεθεί μια μόνο τιμή του πλήθους των ορθογωνίων για την οποία να ικανοποιείται η συνθήκη για το άθροισμα των εμβαδών τους. Η ερμηνεία αυτή οδήγησε σε δυο διαφορετικές στρατηγικές: Μια συγκροτημένη (επεισόδιο 7) και μια λιγότερο επεξεργασμένη (επεισόδιο 5). Η δεύτερη ερμηνεία θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως 'διασταλτική' με την έννοια ότι οι μαθητές δεν περιορίζονται στο ζητούμενο, την εύρεση μιας τιμής, αλλά διαστέλλουν την έννοια του ζητούμενου ερευνώντας για τις καλύτερες δυνατές τιμές (επεισόδια 6 και 9). Αυτή η ερμηνεία οδηγεί (επεισόδιο 6) σε μια λεπτομερέστερη και πιο επεξεργασμένη στρατηγική. Η επιλογή της στρατηγικής όμως συνδέεται με τα σχήματα τα οποία κατά τη διάρκεια της εργασίας τους δομούν, μεταβάλλουν ή οικειοποιούνται οι μαθητές.

Έτσι οι δυο μαθήτριες του επεισοδίου 6 ξεκινούν έχοντας τη δυνατότητα για προσεγγίσεις των αποτελεσμάτων με περισσότερα δεκαδικά ψηφία, οπότε δεν περιορίζονται σε ισότητες. Το αποτέλεσμα είναι ότι το σχήμα που δομούν τις βοηθάει να χειριστούν σχέσεις διάταξης. Αντίθετα οι δυο μαθητές των επεισοδίων 5, 8, 9 και 10, όπως και οι μαθήτριες του επεισοδίου 7, ακριβώς επειδή ξεκινούν από μη ικανοποιητικές προσεγγίσεις των αποτελεσμάτων, οδηγούνται στην ανάπτυξη ενός σχήματος που στηρίζεται στην ισότητα. Η διάταξη προκύπτει μόνο μέσα από τη μονοτονία της ακολουθίας των αποτελεσμάτων όπως γίνεται φανερό στο επεισόδιο 10. Επομένως το πλήθος των ψηφίων της προσέγγισης των αποτελεσμάτων στο result box επηρεάζει και το είδος των σχημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές μέσα από τη χρήση του λογισμικού.

⊣ Η ανάδυση του οργάνου ⊢

Η έννοια της ενοργανωτικής γένεσης (instrumental genesis) εμπεριέχει αφ' ενός μεν την εξέλιξη του artifact καθώς η δράση του χρήστη ξεδιπλώνεται αφ' ετέρου δε την οικοδόμηση από το χρήστη σχημάτων χρησιμοποίησης (utilization schemes). Και τα δυο συμβάλλουν στην ανάδυση και την ανάπτυξη του οργάνου (Beguin και Rabardel, 2000). Τη διαδικασία αυτή περιγράφει μέσα από το παρακάτω διάγραμμα ο Trouche (2004) ως μια αμφίδρομη κίνηση. Η μια φορά της κίνησης, που είναι η ενοργανοποίηση (instrumentalisation) του artifact, κατευθύνεται προς το εργαλείο, με την έννοια ότι ο χρήστης 'παίρνει το εργαλείο στο χέρι', το προσαρμόζει στις μεθόδους του. Η άλλη φορά της κίνησης, που είναι η ενοργάνωση (instrumentation)



Διάγραμμα 4: Η ενοργανωτιή γένεση

της δράσης, έχει κατεύθυνση προς το χρήστη, με την έννοια ότι οι περιορισμοί που το εργαλείο επιβάλλει συμβάλλουν στο να δομηθεί η δραστηριότητα του χρήστη.

Κατά τον Lagrange (1999) '*Μια ανθρώπινη ύπαρξη που θέλει να χρησιμοποιήσει ένα artifact κτίζει τη σχέση του με αυτό σε δυο κατευθύνσεις: Εξωτερικά αναπτύσσει τρόπους χρήσης του και εσωτερικά οικοδομεί γνωστικές δομές για να ελέγξει αυτές τις χρήσεις*'. Οι δυο αυτές κατευθύνσεις δεν είναι ανεξάρτητες. '*Κατά την πρώτη χρήση το υποκείμενο καθοδηγεί το εργαλείο μέσα από τα υπάρχοντα σχήματα. Η πρωτογενής αυτή εμπειρία του παρέχει την ευκαιρία για προσαρμογή των σχημάτων. Τα νέα καλύτερα προσαρμοσμένα στις καταστάσεις σχήματα αποτελούν με τη σειρά τους το*

εφαλτήριο για την ανάπτυξη νέων τρόπων χρήσης κ.ο.κ'. (ibid, σελ. 57). Διακρίνονται λοιπόν δυο φάσεις στη διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης. Η πρώτη είναι η φάση της ανακάλυψης των διάφορων εντολών, της εξερεύνησης της χρήσης τους και της διερεύνησης των αποτελεσμάτων και της οργάνωσής τους. Το κύριο χαρακτηριστικό αυτής της φάσης είναι η ισχυρή εξάρτηση του χρήστη από το μηχάνημα. Οι μαθητές συχνά αγνοούν κατά τη διάρκειά της οποιαδήποτε άλλη πηγή πληροφόρησης. Αλλά, παρόλα αυτά, παρατηρείται στη φάση αυτή μια πρώτη μορφή ενοργάνωσης με μια μεγάλη ποικιλία στρατηγικών και τεχνικών (Guin & Trouche, 1999). Από τη στιγμή που οι εντολές αποκτούν μαθηματικό περιεχόμενο οι μαθητές μπαίνουν στη δεύτερη φάση που είναι φάση οργάνωσης. Το κύριο χαρακτηριστικό της φάσης αυτής είναι ότι οι μαθητές υιοθετούν μια στάση περιορισμού των στρατηγικών και των τεχνικών που έχουν αναπτυχθεί στην προηγούμενη φάση (ibid). Αρχίζουν να οργανώνουν τη δράση τους, να συνδέουν τις εντολές μεταξύ τους και με άλλα διαθέσιμα εργαλεία, να ενδιαφέρονται για τις δυνατότητες και τους περιορισμούς που προκύπτουν.

Όταν λοιπόν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με ένα εργαλείο – στην περίπτωση της έρευνας ο Η/Υ και το λογισμικό – αλληλεπιδρούν με αυτό. Η μια κατεύθυνση αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η δράση των μαθητών με σκοπό τη χρήση του εργαλείου. Οι μαθητές προσπαθούν να το χρησιμοποιήσουν. Αρχίζουν να ανιχνεύουν το τι μπορούν να κάνουν με αυτό. Εξερευνούν τις δυνατότητές του, ανακαλύπτουν κάποιες από τις ιδιότητές του (επεισόδια 1 έως 4). Μερικές φορές μπορεί να αγνοήσουν οποιαδήποτε άλλη πληροφορία (επεισόδια 5 και 7). Σπανιότερα μπορεί ακόμα και να του προσδώσουν νέες ιδιότητες. Η δεύτερη κατεύθυνση είναι αυτή της επίδρασης του εργαλείου πάνω στους μαθητές. Η φύση του ίδιου του εργαλείου, οι περιορισμοί που προκύπτουν από τη φύση του και την κατασκευή του καθώς και οι δυνατότητές του καθορίζουν τα όρια των ενεργειών των μαθητών. Έτσι οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να δομήσουν καινούργια σχήματα (ατομική συνιστώσα) ή να οικειοποιηθούν προϋπάρχοντα στον κοινωνικό περίγυρο σχήματα (κοινωνικο-πολιτισμική συνιστώσα) προκειμένου να επιτύχουν την αποτελεσματική χρήση του εργαλείου στο συγκεκριμένο περικείμενο (επεισόδια 6 και 9). Καθώς η δράση των μαθητών εξελίσσεται, αυτά τα σχήματα είναι δυνατό να μεταβάλλονται με σκοπό να εξυπηρετούν καλύτερα τις ανάγκες των μαθητών στο έργο που έχουν αναλάβει (επεισόδια 5, 9 και 10). Έτσι μέσα από τη δράση των μαθητών αναδύεται μια νέα

οντότητα που είναι μεν ένα εργαλείο, αλλά δεν είναι μόνο αυτό. Είναι το εργαλείο μαζί με τα σχήματα για τη χρήση του που δομήθηκαν στο πλαίσιο της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Αυτή η νέα οντότητα που αναδύθηκε μέσα από την αλληλεπίδραση μαθητών και εργαλείου είναι ένα όργανο.

⊣ Η παραγωγή μαθηματικού νοήματος ⊢

Ο ρόλος των σχημάτων είναι καθοριστικός για την ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων. Τα μαθηματικά νοήματα και η γνώση αυξάνονται με τον πολλαπλασιασμό των σχημάτων που οι μαθητές αναπτύσσουν προσπαθώντας να φέρουν σε πέρας ένα έργο που τους έχει ανατεθεί σε κάποιο εννοιολογικό πεδίο (Lagrange,1999). Το πρόβλημα είναι ότι δεν αποτελούν όλα τα σχήματα παραγωγικούς νοητικούς μηχανισμούς ικανούς για την παραγωγή επαρκούς γνώσης σε κάθε κατάσταση. Ειδικότερα, η παραγωγικότητα των σχημάτων χρήσης ενός οργάνου εξαρτάται από την δυνατότητά τους να συνεργάζονται με άλλα σχήματα ή έννοιες. Επομένως ο δάσκαλος για να υποστηρίξει μια αποδοτική χρήση της τεχνολογίας πρέπει να ελέγξει τα σχήματα χρήσης που αναπτύσσουν οι μαθητές του και τη συνέργειά τους με την ανελισσόμενη μαθηματική γνώση (ibid). Έτσι το ενδιαφέρον του ερευνητή εστιάστηκε στις ευκαιρίες που παρέχει το λογισμικό-εργαλείο για την παραγωγή μαθηματικών νοημάτων μέσα από τη δόμηση κατάλληλων σχημάτων από τους μαθητές σχετικά με την έννοια του ορίου και τις παρανοήσεις της, με την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής με εννοιολογικό και όχι τυπικό τρόπο και, τέλος, με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος.

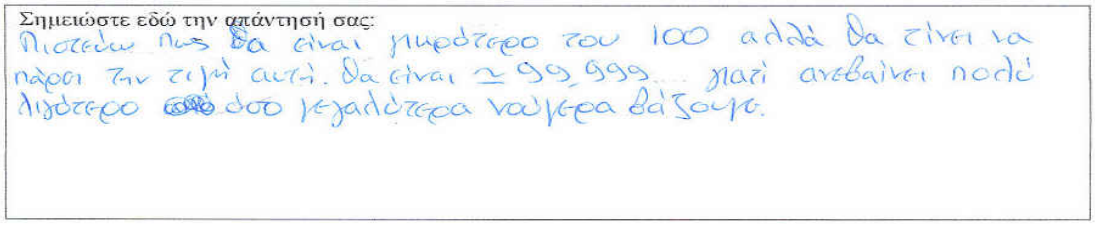
Οι ευκαιρίες που παρέχει το λογισμικό

⊣ Το όριο

Οι μαθητές στην Ελλάδα δεν έχουν καμία ή, στην καλύτερη περίπτωση, έχουν ελάχιστη επαφή με την έννοια του ορίου μέχρι την τρίτη τάξη του Λυκείου. Η έννοια του ορίου όμως αποτελεί τον πυρήνα του Απειροστικού Λογισμού και είναι μια από τις δυσκολότερες ως προς την κατανόησή τους έννοιες των μαθηματικών (Tall, 1997; Lagrange, 1999). Η εισαγωγή της έννοιας στο Ελληνικό σχολείο επιχειρείται να γίνει διαισθητικά. Το πρόβλημα είναι ότι η επιζητούμενη διαισθητική εποπτεία πάνω στην έννοια επιχειρείται να αποκτηθεί με τη βοήθεια στατικών εικόνων. Οι μαθητές

συνήθως βλέπουν τυπωμένη στο σχολικό εγχειρίδιο ή σε κάποιο άλλο βιβλίο την εικόνα της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Η στατικότητα της εικόνας επιχειρείται να εξουδετερωθεί με τη χρήση βελών που υποδηλώνουν κίνηση της μεταβλητής και των τιμών της συνάρτησης. Ο ορισμός του ορίου δεν εξετάζεται και τελικά οι μαθητές, με τη σύμφωνη γνώμη των δασκάλων τις περισσότερες φορές, αρκούνται στην εκμάθηση κάποιων κανόνων υπολογισμού ορίων και στην εξάσκησή τους στο πεδίο αυτό. Το αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης και πρακτικής είναι η 'αλγεβροποίηση' των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Το όριο αντιμετωπίζεται ως ένας άγνωστος ή ως μια παράμετρος σε μια αλγεβρική παράσταση χάνοντας το νόημα και τη σημασία του. Το ίδιο συμβαίνει και με άλλες έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, που στηρίζονται στην έννοια του ορίου, όπως η παράγωγος και το ορισμένο ολοκλήρωμα (Tall, 1997).

Η έννοια του ορίου είναι δισυπόστατη. Από τη μια πλευρά η άπειρη διαδικασία και από την άλλη το αντικείμενο (Artigue, 1997). Η μεγαλύτερη από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι να ταυτοποιήσουν αρχικά και στη συνέχεια να ταυτίσουν αυτές τις δυο διαφορετικές όψεις της έννοιας. Είναι η ίδια αδυναμία που πολύ συχνά εμφανίζεται στην ταύτιση του αριθμού 0,999… (η άπειρη διαδικασία) με τον αριθμό 1 (το αντικείμενο). Την αδυναμία αυτή εμφάνισαν και μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα. Ένα παράδειγμα αποτελεί η πεποίθηση μιας ομάδας μαθητών του τρίτου σχολείου οι οποίοι απαντώντας στην ερώτηση 4 («*Πόσο νομίζετε ότι είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;*») γράφουν στο φύλλο εργασίας (εικόνα 3):


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Πιστεύω πως θα είναι μικρότερο του 100 αλλά θα τείνει να πάρει την τιμή αυτή. Θα είναι ≃ 99,999... γιατί ανεβαίνει πολύ λιγότερο ~~...~~ όσο μεγαλύτερα νούμερα βάζουμε.

Εικόνα 3: Το εμβαδόν είναι 99,99… και τείνει στο 100

Οι μαθητές θεωρούν ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι μικρότερο από 100 αλλά τείνει στο 100 μια και είναι περίπου ίσο με 99,99…. Είναι ξεκάθαρο ότι πιστεύουν πως οι αριθμοί 99,999… και 100 είναι δυο διαφορετικοί αριθμοί και απλά ο ένας

είναι πολύ κοντά στον άλλο. Το περιεχόμενο της έκφρασης '*τείνει να πάρει την τιμή αυτή*' είναι για τους δυο μαθητές '*είναι ένας πολύ κοντινός αριθμός*'. Δηλαδή το όριο ως διαδικασία (που εκφράζεται από τον αριθμό $99{,}99\ldots$) και το όριο ως αντικείμενο (που εκφράζεται από την τιμή 100) είναι δυο διαφορετικές οντότητες που για τους συγκεκριμένους μαθητές στη φάση αυτή δεν ταυτίζονται. Το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε και στην ομάδα των μαθητριών του πρώτου σχολείου η δράση της οποίας μελετήθηκε στα επεισόδια 4 και 6.

Δ: Θα είναι πολύ μικρές οι διαφορές. Θα φτάσει στο 99,999 κλπ.
Ε: Δηλαδή στην πραγματικότητα;
Δ: 100. Αλλά δεν θα είναι 100.

Επεισόδιο 11: Ο αριθμός 99,999… δεν είναι ίσος με τον αριθμό 100

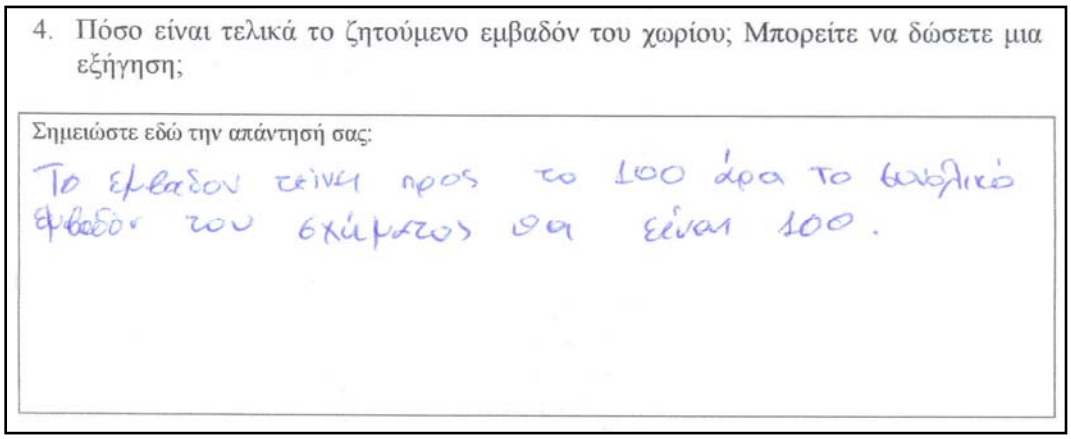
Η μαθήτρια Δ δεν μπορεί να αντιληφθεί ότι οι αριθμοί $99{,}999\ldots$ και 100 είναι οι δυο όψεις του ίδιου νομίσματος. Θεωρεί ότι είναι δυο διαφορετικοί αριθμοί και μάλιστα ότι ο $99{,}999\ldots$ είναι μικρότερος από τον 1. Αυτό θα την οδηγήσει σε μια δυσκολία σε σχέση με την αναγνώριση της έννοιας του ορίου και την ταύτισή του με μια συγκεκριμένη τιμή όπως θα φανεί παρακάτω στα επεισόδια $18{,}19$ και 20.

Η δυσκολία στην αναγνώριση της έννοιας του ορίου

Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω είναι η δυσκολία που έχουν οι μαθητές να αναγνωρίσουν ένα όριο έξω από συγκεκριμένα περικείμενα. Το πρόβλημα γίνεται οξύτερο στην περίπτωση που έχουν να αντιμετωπίσουν ένα όριο ακολουθίας. Οι μαθητές της τρίτης τάξης του Λυκείου δεν έχουν έλθει σε επαφή με όριο ακολουθίας. Στο σχολικό εγχειρίδιο της τάξης αυτής το όριο ακολουθίας απαντάται σε μια μόνο υποπαράγραφο. Δίνεται ο ορισμός της ακολουθίας και αφού απλώς αναφέρεται ότι για τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας εφαρμόζουμε τις ίδιες μεθόδους που εφαρμόστηκαν για τον υπολογισμό ορίου συνάρτησης δίνεται και ένα παράδειγμα υπολογισμού ορίου. Η ευκαιρία βέβαια έχει χαθεί από την Β΄ τάξη του Λυκείου όπου δεν ασχολούμαστε με το άθροισμα των απείρων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου μια και αυτό 'είναι εκτός ύλης'. Ακόμα χειρότερα, υπάρχουν μαθητές οι οποίοι αγνοούν ακόμα και την ύπαρξη της έννοιας της ακολουθίας μια και αρκετοί καθηγητές επιλέγουν στην Β΄ Λυκείου, λόγω της πίεσης χρόνου και με δεδομένη την κατάργηση των Γενικών Εξετάσεων στην τάξη αυτή, να καταπιαστούν με τη διδασκαλία του τέταρτου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου, το αντικείμενο του

οποίου είναι η μελέτη της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, και να αγνοήσουν το τρίτο κεφάλαιο του οποίου το θέμα είναι οι ακολουθίες και ιδιαίτερα οι πρόοδοι. Έτσι για τους μαθητές αυτούς είναι εξαιρετικά δύσκολο να αντιμετωπίσουν ξαφνικά, μέσα από τον ορισμό της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, μια καινούργια έννοια - αυτή της ακολουθίας – μια και το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ακριβώς το όριο της ακολουθίας αθροισμάτων Riemann και ταυτίζεται με το κοινό όριο των ακολουθιών κατώτερων και ανώτερων αθροισμάτων της συνάρτησης.

Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα. Δυο μαθητές, ο Σ και ο Κ, προσπαθούν να αιτιολογήσουν την εικασία τους ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με 100 τετραγωνικές μονάδες. Απαντώντας στο ερώτημα: «*Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;*» γράφουν στο φύλλο εργασίας (εικόνα 4)


4. Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

Το εμβαδον τείνει προς το 100 άρα το ολοκληρώ εμβαδόν του σχήματος θα είναι 100.

Εικόνα 4: Η εξήγηση με ορολογία ανάλυσης

Σε πρώτη ανάγνωση μπορεί να θεωρηθεί ότι οι δυο μαθητές οδηγούνται μέσα από τη διαδικασία στην έννοια του ορίου. Όμως μια πιο προσεκτική εξέταση της κατάστασης ανατρέπει την εικόνα αυτή. Λίγο αργότερα, όταν προσπαθούν να δώσουν έναν κανόνα για τον υπολογισμό του εμβαδού, γίνεται ο παρακάτω διάλογος μεταξύ των μαθητών και του ερευνητή:

Σ: Αν δεν βρήκατε ότι υπάρχει, λέει, μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα;
Ε: Δηλαδή μπορείτε να περιγράψετε τη διαδικασία που έγινε μέχρι τώρα; Τι κάναμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν;
Κ: Δίναμε τιμές.
Σ: Όσο δίναμε τιμές, τόσο βγάζαμε εμβαδά.
Ε: Δηλαδή; Ποιος είναι ο κανόνας; Τι είναι ένας κανόνας; Ένας

κανόνας θα λέει: Στην αρχή κάνω αυτό και μετά κάνω εκείνο και μετά το άλλο και τελείωσα.

Σ: Όσο αυξάνουμε… (παύση)

Ε: Μάλιστα. Για να δούμε. Δηλαδή τι κάναμε; Βρήκαμε ένα άθροισμα εμβαδών ορθογωνίων και μετά αυξήσαμε το πλήθος τους πολύ. Και τι παρατηρήσαμε; Κάτι τέτοιο.

Σ: Όσο αυξάνεται το πλήθος των ορθογωνίων τόσο αυξάνεται και το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Άρα είναι ανάλογα. Αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο.

Επεισόδιο 12: Η αδυναμία σύλληψης της έννοιας του ορίου

Οι δυο μαθητές στην απάντησή τους στο ερώτημα 4 χρησιμοποιούν ορολογία ορίου: 'Το εμβαδόν τείνει προς το 100'. Στην πραγματικότητα όμως, όπως φαίνεται από το επεισόδιο 12, απέχουν πολύ από το να συλλάβουν το γεγονός ότι έχουν να κάνουν με ένα όριο. Αντιμετωπίζουν την κατάσταση με όρους άλγεβρας και όχι ανάλυσης. Έτσι ενώ αναπτύσσεται αρχικά μια πρώτη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου δεν κατορθώνουν τελικά να συνδέσουν άμεσα το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με το εμβαδό του χωρίου (*'Όσο αυξάνεται το πλήθος των ορθογωνίων τόσο αυξάνεται και το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων'*). Βέβαια γίνεται άμεσα αντιληπτό στο σημείο αυτό ότι η έλλειψη θεωρητικού υπόβαθρου – η άγνοια δηλαδή του ορισμού ο οποίος δεν συζητείται στην τάξη αφού είναι 'εκτός ύλης' – στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα ενός επιπλέον τρόπου προσέγγισης της έννοιας. Έτσι, αναγκαία, περιορίζονται σε μια αλγεβρικής φύσης (και μάλιστα λανθασμένη) αντιμετώπιση της κατάστασης: *'Άρα είναι ανάλογα'*.

Στο επόμενο επεισόδιο οι μαθήτριες των επεισοδίων 4, 6 και 11 ασχολούνται με το ίδιο πρόβλημα. Προσπαθούν να ανακαλύψουν πόσο είναι το ζητούμενο εμβαδόν.

Ζ: Βασικά να δούμε αν μπορεί να πάει ποτέ 100; Αν πάει 100 και μισό τότε το έχει συμπληρώσει (εννοεί το χωρίο).

Δ: Και γιατί να είναι 100 το εμβαδόν και να μην είναι 101;Γιατί το είπαμε χθες; (αναφέρεται στο pretest). Άσε με!

Ζ: Όχι. Σκεφτόμουνα ότι στις προηγούμενες ερωτήσεις…(σκέφτεται)… για να το κάνουμε ορατό…(επεμβαίνει η Δ)

Δ: Να πάρουμε το όριο.

Επεισόδιο 13: Η εμφάνιση της έννοιας του ορίου

Τα δυο κορίτσια δεν χρησιμοποιούν ορολογία ορίου όπως τα αγόρια στο επεισόδιο 12 και όμως οδηγούνται με φυσικό τρόπο στην αναγκαιότητα χρήσης του.

Γιατί παρουσιάζεται αυτή η διαφορά; Θα πρέπει να γυρίσουμε λίγο πίσω και να δούμε τη δουλειά των δυο μαθητών του επεισοδίου 11 σε προηγούμενα ερωτήματα:

Σ: (Διαβάζει) «Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μεγαλύτερο από 99;». 100 και πάνω είναι; Όχι. 200 και πάνω πρέπει να είναι τελικά. Για να το δοκιμάσουμε λίγο.
Κ: Μεγάλε!
Σ: 99,7. Και λιγότερο να βάλλουμε δηλαδή θα μπει. Για να βάλουμε 100. Α! Είναι 98.
Κ: 98,8 λέει.
Σ: Από 200 είναι λοιπόν.
Κ: (Διαβάζει) «Μπορείτε να κάνετε το ίδιο όταν το άθροισμα των εμβαδών πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 99,5 και μικρότερο από 99,8;». Πόσο ήταν το 99,70;
Σ: Έχω βάλλει ήδη 200. Στο 200 μας δίνει 99,25. Τη μικρότερη τιμή.
Κ: 99,25;
Σ: Ναι. Τη μικρότερη τιμή.
Κ: Τη μικρότερη τιμή; Σε σύγκριση με τι;
Σ: Δεν υπάρχει σύγκριση. Απλώς τη μικρότερη τιμή πάνω από το 99. Δεν κοίταξα άλλη. Τώρα θέλουμε 99,5. Που το έχουμε δει; Στο 270 είναι 99,4. 99,48 στο 290. Στο 300 βγάζει 99,5 ακριβώς. Νταν!
Κ: Ωραία! Σωστό.
Σ: Μέχρι το 99,8. Για να δούμε για 1000. 99,85. Να βάλουμε 885. Βγαίνει λιγότερο ε;
Κ: Λες να είναι 800;
Σ: Λες;
Κ: Ναι.
Σ: Για πάμε. 800. Τώρα λέει από 99,8 και πάνω. Από 800.

Επεισόδιο 14: Η αδυναμία δόμησης σχήματος

Οι δυο μαθητές στο ερώτημα 3 δείχνουν να ξεκινούν από μια καλή βάση. Εξετάζουν τις τιμές του αθροίσματος των εμβαδών για ν=200 και για ν=100. Δεν προχωρούν πέρα από το σημείο αυτό. Αρκούνται στην τιμή 200. Δεν εξετάζουν αν υπάρχει και μικρότερη τιμή του ν για την οποία το άθροισμα των εμβαδών να είναι μεγαλύτερο από 99. Θεωρούν όμως ότι αυτή δεν είναι απλά μια τιμή που τους κάνει αλλά ότι είναι μια χαρακτηριστική τιμή, μια τιμή που καθορίζει το σύνορο των ζητούμενων τιμών (‘*Από 200 είναι λοιπόν*’). Όμως λίγο πιο κάτω ο Σ αναφέρεται στη μικρότερη τιμή πάνω από το 99 από αυτές που κοίταξε (‘*Δεν κοίταξα άλλη*’). Φαίνεται λοιπόν να αναπτύσσουν μια στρατηγική παρόμοια με αυτήν των μαθητών των επεισοδίων 5,8,9 και 10. Ψάχνουν για μια τιμή που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις των

ζητουμένων χωρίς παραπάνω διερεύνηση. Η διαφορά είναι ότι στο επεισόδιο αυτό οι δυο μαθητές είναι βέβαιοι ότι η τιμή ν=200 δίνει αποτέλεσμα που ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες σε αντίθεση με τους Β και Η που εικάζουν ότι η τιμή 1450 είναι ικανοποιητική, χωρίς όμως να βεβαιωθούν για αυτό. Η στρατηγική τους λοιπόν φαίνεται ότι είναι περισσότερο λεπτομερής από τη στρατηγική των Β και Η και ότι προσεγγίζει αυτή των μαθητριών του επεισοδίου 7 (*'Πόσο ήταν στο 99,70;'*). Στα ερωτήματα 3a και 3b όμως η αντίληψή τους για το διδακτικό συμβόλαιο είναι πιο κοντά στην αντίληψη των μαθητριών του επεισοδίου 6 με την έννοια ότι αναζητούν τιμές του ν για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών φράσσεται σε ένα υποδιάστημα του ζητούμενου διαστήματος. Αναζητούν λοιπόν και αυτοί πιο 'ικανοποιητικές' τιμές για το πλήθος ν των ορθογωνίων στα ερωτήματα αυτά. Η στρατηγική τους όμως δεν είναι εξίσου λεπτομερής και επεξεργασμένη με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθη. Για ν=800 το άθροισμα των εμβαδών είναι 99,81 που είναι μεγαλύτερο από 99,8. Αυτή η τιμή είναι ικανοποιητική μεν για το ερώτημα 3b αλλά όχι και για το 3a όπου τους ζητείται πλήθος ορθογωνίων για το οποίο το άθροισμα των εμβαδών να είναι μικρότερο από 99,8. Επίσης, αν και έχουν στη διάθεσή τους την πληροφορία για τη δυνατότητα αύξησης του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων, δεν είναι σε θέση να την αξιοποιήσουν (*'Στο 300 βγάζει 99,5 ακριβώς. Νταν'*). Οι δυο μαθητές λοιπόν είναι φανερό ότι δεν καταφέρνουν να αναπτύξουν ένα σχήμα που θα τους επιτρέψει να χειριστούν αποτελεσματικά την κατάσταση. Το αποτέλεσμα της αδυναμίας αυτής είναι να μην διενεργείται η διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης. Το εργαλείο–μηχάνημα δεν μετατρέπεται λοιπόν σε όργανο-εργαλείο και το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές να αδυνατούν να παράγουν μαθηματικά νοήματα. Αντίθετα τα δυο κορίτσια έχουν κατασκευάσει μέσα από τη διαδικασία της ενοργανωτικής γένεσης ένα όργανο που τις βοηθάει να αναπτύξουν νοήματα μέσα από τις καταστάσεις που χειρίζονται. Το ίδιο συμβαίνει και με τους μαθητές των επεισοδίων 5,7,8 και 9 όπως φαίνεται στο επόμενο επεισόδιο.

> *Β: Φτιάξαμε την καμπύλη αυτή εδώ. Ωραία! Και τώρα προσπαθούσαμε…(παύση)…Μας έδινε εδώ πέρα κάτι τέτοια (δείχνει τα ορθογώνια)… Πάτα το ρε Η να πάει στα 5 ορθογώνια. Μας έδινε 5, 6 ορθογώνια και βγάζουμε με έναν τρόπο εδώ το εμβαδόν των ορθογωνίων. Του αθροίσματος. Ωραία; Εμείς δίνουμε 5,6,7,8,10, 50 και 1000 ορθογώνια κλπ και βρίσκουμε πόσο είναι το εμβαδόν του αθροίσματος. Όχι. Το άθροισμα των εμβαδών.*

Η: Αυτό έχουμε κάνει τώρα;
Β: Ναι. Αυτό έχουμε κάνει. Και εδώ εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου. Έχουμε δώσει μια μεγάλη τιμή, το 1000, και έχει μαυρίσει όλο. Οπότε είναι πάνω κάτω γύρω στο 100 το εμβαδόν όλο.
Η: Αυτό εδώ. Έτσι;
Β: Ναι. Γύρω στο 100. Ε! Και κάνουμε την αφαίρεση αυτή εδώ πέρα (δείχνει την τρίτη στήλη του πίνακα του ερωτήματος 1). Όχι. 99,85 είναι.
Η: 99,85 είναι για 1000 ορθογώνια. Στα 1000 ορθογώνια πάλι αφήνει ένα μικρό κενό. Που μικραίνει. Δεν είναι τέλειο; 100 είναι ακριβώς!

Επεισόδιο 15: Η διαισθητική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου

Το επεισόδιο αυτό διαδραματίζεται πριν από τα επεισόδια 5,7,8 και 9. Οι μαθητές προσεγγίζουν διαισθητικά την έννοια του ορίου μέσα από τον αναστοχασμό της δράσης τους και των αποτελεσμάτων της. Είναι σημαντικό ότι ο Η καταλήγει ότι το όριο της ακολουθίας των αποτελεσμάτων των μετρήσεων αποτελεί ακριβώς την τιμή του ζητούμενου εμβαδού. Αλλά και μετά την τροποποίηση του σχήματος που είχαν δομήσει που προκλήθηκε από την παρέμβαση του παρατηρητή (επεισόδιο 5) οδηγούνται και πάλι στην έννοια του ορίου:

Β: Τι ζητάει μετά;
Η: Στο πίσω φύλλο λέει: Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδό του χωρίου; Εντάξει, 100 είναι, αλλά δεν θα το γράψουμε έτσι. Είναι…
Β: Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδό του χωρίου. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση; Μια εξήγηση.
Η: Να πούμε όσο μεγαλύτερο πλήθος ορθογωνίων δώσουμε τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση και το εμβαδόν προσεγγίζει το 100.
Β: Κάτσε να το γράψουμε.
Η: Δηλαδή…
Β: Όσο μεγαλώνει το πλήθος τότε το εμβαδόν των… Όχι. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων πλησιάζει το 100. Ναι. Λοιπόν για πες. Παρατηρούμε…
Η: (υπαγορεύει) ότι όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των ορθογωνίων τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση και παρατηρούμε
Β: Τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση;
Η: Ναι. Η προσέγγισή μας;
Β: Η μέτρηση. Τέλος πάντων.
Η: Και παρατηρούμε. Το έγραψες; Και παρατηρούμε ότι …
Β: Το άθροισμα των εμβαδών…
Η: Αν το άθροισμα των εμβαδών. Μια στιγμή. Πόσο να βάλλω;
Β: 2000;
Η: Ναι. Αν βάλουμε 2000 ορθογώνια βλέπεις; Πάει στο 99,92. Δηλαδή πολύ κοντά στο εμβαδόν. Λοιπόν. Και παρατηρούμε ότι αν βάλουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό πλήθους, άνοιξε παρένθεση, πχ περίπου

μάλλον 2000, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες…
Β: Προσεγγίζει το 100.
Η: Άρα…
Β: Ναι…
Η: Άρα το εμβαδό είναι 100.

Επεισόδιο 16: Η διαισθητική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου μέσα από το τροποποιημένο σχήμα

Οι μαθητές στο επεισόδιο αυτό, που έπεται της παρέμβασης του παρατηρητή, χρησιμοποιούν ορολογία ορίου για να περιγράψουν την κατάσταση όπως και οι μαθητές του επεισοδίου 10. Η διαφορά είναι ότι αυτοί οι δυο μαθητές δεν μένουν μόνο στην ορολογία. Έχουν τροποποιήσει το σχήμα που ανέπτυξαν για το χειρισμό των καταστάσεων σύγκρισης και διάταξης αλλά έχουν οδηγηθεί, όπως και τα κορίτσια, στην ανάπτυξη του οργάνου-εργαλείου. Αυτό τους δίνει τη δυνατότητα να παράγουν μαθηματικά νοήματα μέσα από τη δράση τους. Παρατηρούν ότι μεταβάλλοντας το πλήθος των ορθογωνίων ώστε αυτό να μεγαλώσει (‘…*όσο μεγαλώνει το πλήθος*…’) και, κυρίως, από ένα πλήθος και μετά (‘…*αν βάλλουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό πλήθους*…’) οι τιμές του εμβαδού είναι πολύ κοντά στο 100 (‘…*το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων πλησιάζει το 100*’ και ‘…*τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες … προσεγγίζει το 100*’). Και ολοκληρώνουν: ‘*άρα το εμβαδόν είναι 100*’. Οδηγούνται λοιπόν, μέσα από τη διαδικασία, στην έννοια του ορίου.

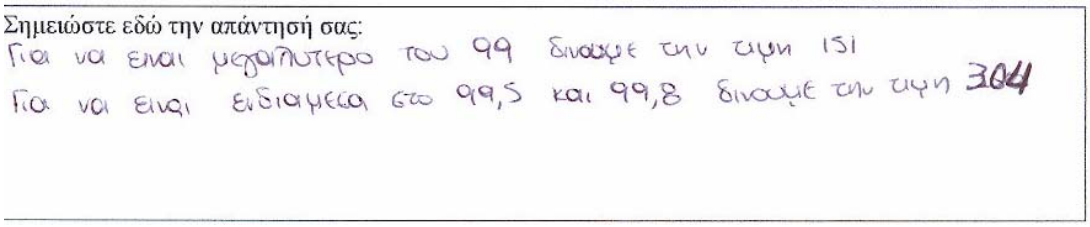
Το όριο και οι τιμές της ακολουθίας

Μια συνήθης παρανόηση των μαθητών σε σχέση με την έννοια του ορίου είναι ότι θεωρούν πως οι τιμές μιας συνάρτησης δεν μπορούν να επιτύχουν την οριακή τιμή (Cornu, 1991 ; Tall, 1997). Στο θέμα αυτό είναι αξιοσημείωτο ότι οι Μαστορίδης και Ζαχαριάδης (2004) αναδεικνύουν το γεγονός ότι την ίδια ακριβώς παρανόηση έχει αναπτύξει και ένα μέρος των μαθηματικών που εργάζονται ως εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη χώρα μας. Η παρανόηση αυτή φαίνεται να κυριαρχεί και στις αντιλήψεις των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή. Οι μαθητές, με την εξαίρεση πολύ λίγων όπως ο Η στα επεισόδια 13 και 14, θεωρούσαν δεδομένο, στο πρώτο τουλάχιστον στάδιο της διαδικασίας, ότι το όριο του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων δεν θα γίνει ποτέ ίσο με το εμβαδόν του χωρίου. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω επεισόδια:

Σ: (Διαβάζει) Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Πόσο είναι το εμβαδόν;
Π: Εσείς τι πιστεύετε; Σύμφωνα με όσα έχετε γράψει πιο πριν.
Κ: Το 100 είναι μωρέ!
Σ: Γιατί όμως το 100;
Κ: Αφού τείνει όλο προς τα εκεί. Το 100 δεν είναι; (απευθύνεται στον ερευνητή)
Ε: Έλα. Τι είναι;
Κ: Πόσο είναι τελικά το εμβαδόν του χωρίου;
Ε: Πόσο λες ότι είναι;
Κ: 100. Όλο προς τα εκεί τείνει. Αλλά δεν το ακουμπάει όμως.

Επεισόδιο 17: Οι τιμές δεν μπορούν να είναι ίσες με το όριο

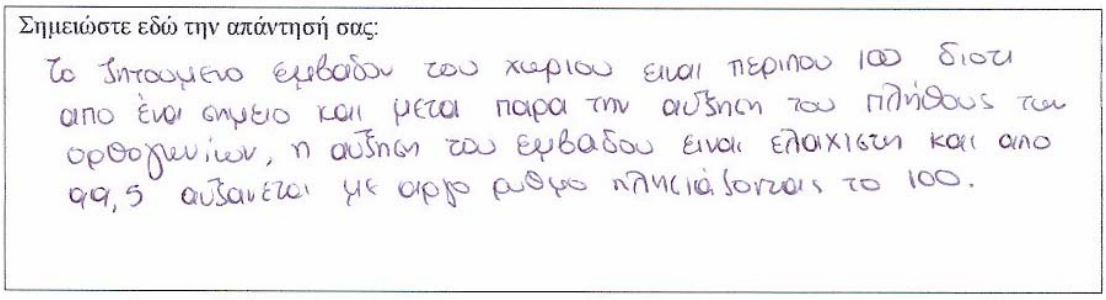
Στο επεισόδιο 17 εξετάζεται και πάλι η δράση των μαθητών των επεισοδίων 12 και 14. Ο Κ έχει επιτύχει να έχει μια πρώτη επαφή με την έννοια του ορίου, πράγμα που δεν κατορθώνει ο Σ. Αλλά αμέσως εκφράζει τη βεβαιότητά του ότι το εμβαδό δεν μπορεί να είναι ακριβώς 100 ('*…Αλλά δεν το ακουμπάει όμως*'). Η βεβαιότητα αυτή στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι οι δυο μαθητές δεν φαίνεται, όπως έγινε φανερό και στη μελέτη του επεισοδίου 12, να μπορούν να συνδέσουν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με το εμβαδόν του χωρίου. Αιτία της αδυναμίας αυτής είναι το ότι δεν έχουν επιτύχει να εννοιολογικοποιήσουν την έννοια του ορίου με αποτέλεσμα να μπορούν να συσχετίσουν τις δυο ποσότητες μόνο αλγεβρικά μέσα από μια σχέση μικρότερου. Οι δυο μαθητές δεν καταφέρνουν να υπερβούν τη γεωμετρική εποπτεία που αποκτούν με την οπτική αναπαράσταση η οποία τους υποβάλλει την αντίληψη ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου. Έτσι και το «όριο» του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων, στο βαθμό που το ανακαλύπτουν, δεν μπορεί παρά να είναι μικρότερο από το πραγματικό εμβαδόν του χωρίου.


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Για να είναι μεγαλύτερο του 99 δίνουμε την τιμή 151
Για να είναι ενδιάμεσα στο 99,5 και 99,8 δίνουμε την τιμή 304

Εικόνα 5: Η στρατηγική της ικανοποιητικής τιμής

Σε μια αντίστοιχη κατάσταση βρίσκονται και οι μαθητές μιας ομάδας του τρίτου σχολείου. Έχουν αναπτύξει την ίδια στρατηγική με τις μαθήτριες του επεισοδίου 7.

Είναι φανερό ότι οι μαθητές αρκούνται στην εξεύρεση μιας ικανοποιητικής τιμής σε κάθε ερώτημα. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουν όλα τα ερωτήματα αυτής της μορφής. Οικοδομούν λοιπόν ένα σχήμα αντίστοιχο με αυτό των μαθητριών του επεισοδίου 7 που τελικά τους οδηγεί στην έννοια του ορίου.


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

Το ζητουμενο εμβαδον του χωριου ειναι περιπου 100 διοτι απο ενα σημειο και μετα παρα την αυξηση του πληθους του ορθογωνιων, η αυξηση του εμβαδου ειναι ελαχιστη και απο 99,5 αυξανεται με αργο ριθμο πλησιαζοντας το 100.

Εικόνα 6: Το όριο της αύξουσας ακολουθίας εμβαδών

Και στην περίπτωση αυτών των μαθητών είναι προφανές ότι θεωρούν ότι το όριο της ακολουθίας δεν είναι ακριβώς 100 αλλά μια τιμή που προσεγγίζει το 100 αφού σαφώς δηλώνουν ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι '*περίπου 100*'.

Αλλά και οι δυο μαθήτριες του επεισοδίου 11, που φαίνεται ότι οδηγούνται σε μια ξεκάθαρη αντίληψη για τη χρήση οριακών διαδικασιών, αντιμετωπίζουν το ίδιο πρόβλημα:

Ζ: (Διαβάζει) Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου;
Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;
Ε: Εδώ τι γίνεται; Έχετε κάποια εκτίμηση;
Δ: Κατ' αρχήν, δεν μπορούμε ποτέ να το βρούμε.

Επεισόδιο 18: Είναι το όριο ακριβές;

Ακόμα και μια απλή ανάγνωση του επεισοδίου καθιστά φανερό το ότι η Δ θεωρεί ότι μια οριακή διαδικασία δεν μπορεί να μας δώσει ακριβές αποτέλεσμα. Μας δίνει απλά μια τάση, αλλά όχι αποτέλεσμα. Η πεποίθηση αυτή της μαθήτριας είναι σαφής και στο επόμενο επεισόδιο.

Δ: Θα είναι πολύ μικρές οι διαφορές. Θα φτάσει στο 99,999 κλπ.
Ε: Δηλαδή στην πραγματικότητα;
Δ: 100. Αλλά δεν θα είναι 100.
Ε: Να το δούμε αυτό. Μπορεί να είναι 100;
Δ: Θεωρητικά ναι.
Ε: Τι είναι αυτό που σε κάνει να λες ότι δεν θα είναι 100;
Δ: Δεν ξέρω. Γιατί να είναι 100 δηλαδή; Επειδή πλησιάζει πάρα πολύ;

Συγκριτικά στις τελευταίες τιμές εκεί είναι. 99,9 κλπ.
Ζ: Βασικά είναι πολύ μικρή η διαφορά τους.
Δ: Ναι.
Ζ: Μηδέν κόμμα μηδέν κάτι.
Δ: Ελάχιστη. Δηλαδή το 5001 με το 2500 έχουν διαφορά 0,03 και είναι 2500 ορθογώνια.
Ε: Άρα λοιπόν πόσο μπορεί να είναι το ζητούμενο εμβαδόν; Που καταλήγουμε;
Δ: Του χωρίου;
Ε: Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου.
Δ: Μια τιμή κοντά στο 100;

Επεισόδιο 19: Το όριο δεν μπορεί να είναι τιμή

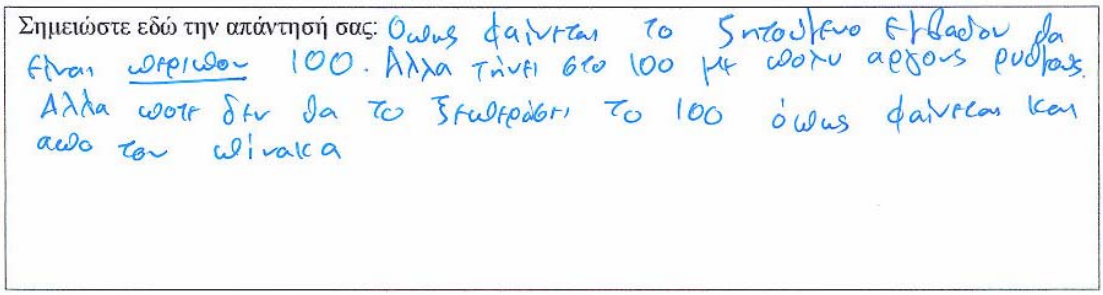
Στο επεισόδιο αυτό κυριαρχεί η πεποίθηση της Δ ότι δεν μπορούμε μέσα από την οριακή διαδικασία να πάρουμε συγκεκριμένο αποτέλεσμα, αλλά φαίνεται προς το τέλος ότι η πεποίθηση αυτή αρχίζει να κάμπτεται. Η σιγουριά δίνει τη θέση της σε μια στάση αναζήτησης επιβεβαίωσης από τον ερευνητή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το στοιχείο είναι ότι η Δ ήταν εκείνη που πρότεινε τη χρήση ορίου (επεισόδιο 13). Ενώ λοιπόν αντιλήφθηκε ότι είχαν να κάνουν με την έννοια του ορίου δεν μπόρεσε να ξεπεράσει τις παρανοήσεις της για την έννοια. Έτσι οδηγείται στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός εμβαδού χωρίου με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος δεν είναι ακριβής με την έννοια ότι δεν δίνει το πραγματικό εμβαδόν αλλά μια προσέγγισή του.

Δ: Εγώ θέλω να τα μάθω για να υπολογίζω ακριβώς. Άρα τώρα που δεν μπορώ να υπολογίζω ακριβώς γιατί να το μάθω;
Ε: Δεν μπορείς να το υπολογίσεις ακριβώς λες, έτσι; Γιατί νομίζεις ότι δεν μπορείς να το υπολογίσεις ακριβώς;
Δ: Γιατί αυτό που κάνουμε τώρα…(παύση). Εντάξει υποψιασμένη ότι είναι κάτι σαν ολοκλήρωμα …(παύση).
Ζ: Εσύ με ολοκλήρωμα δεν το άρχισες; (αναφέρεται στο pretest)
Δ: Ναι. Εγώ με ολοκλήρωμα το έκανα χθες. Αλλά έκανα λάθος ολοκλήρωμα. Άλλο αυτό.

Επεισόδιο 20: Ο υπολογισμός εμβαδού με ολοκλήρωμα δεν είναι ακριβής

Η μαθήτρια Δ εκφράζει την απογοήτευσή της για το γεγονός ότι δεν φαίνεται η διαδικασία να οδηγεί σε έναν ακριβή, με την έννοια που προαναφέρθηκε, υπολογισμό του εμβαδού. Η ανάγνωση του επεισοδίου καθιστά φανερό το γεγονός ότι έχει ήδη κάποιες περιορισμένες γνώσεις σχετικά με το ορισμένο ολοκλήρωμα. Είναι επίσης σαφές ότι δεν έχει επιτύχει την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά και ότι δεν κατέχει ακόμα τις τεχνικές που θα της επιτρέψουν να χειριστεί προβλήματα που σχετίζονται με αυτήν.

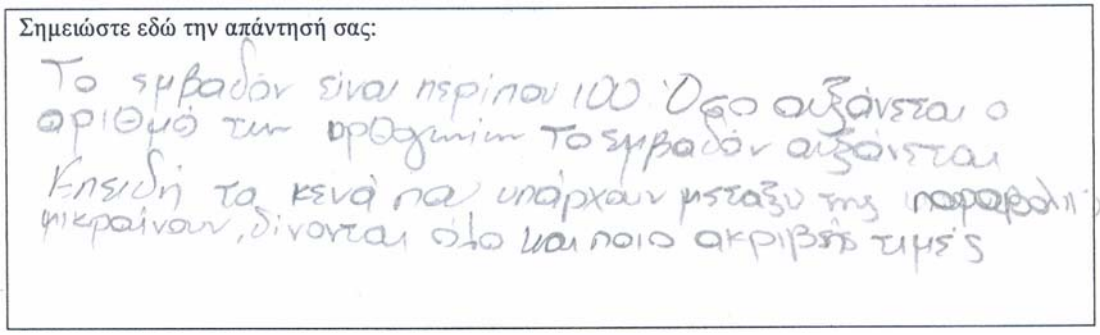
Μια άλλη παρανόηση σε σχέση με την έννοια του ορίου είναι πως οι τιμές της συνάρτησης δεν μπορούν να ξεπεράσουν την οριακή τιμή (Tall, 1997). Και αυτή η παρανόηση παρατηρήθηκε στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα. Για παράδειγμα μια ομάδα μαθητών του τρίτου σχολείου απαντάει στο ερώτημα 4 («*Πόσο νομίζετε ότι είναι τελικά το εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;*»):


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας: Όπως φαίνεται το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι περίπου 100. Αλλά τείνει στο 100 με πολύ αργούς ρυθμούς. Αλλά ποτέ δεν θα το ξεπεράσει το 100 όπως φαίνεται και από τον πίνακα

Εικόνα 7: Οι τιμές της ακολουθίας δεν μπορούν να υπερβούν το όριο

Η άποψη των μαθητών καταγράφεται με ρητό και κατηγορηματικό τρόπο: *'Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι περίπου 100…. Αλλά δεν θα ξεπεράσει το 100 όπως φαίνεται από τον πίνακα '*. Που μπορεί να οφείλεται η στάση αυτή των μαθητών; Το ίδιο φαινόμενο παρατηρήθηκε σε όλες σχεδόν τις ομάδες. Απλά η συγκεκριμένη ομάδα δηλώνει ρητά την πεποίθησή της. Στις περισσότερες από τις υπόλοιπες ομάδες η πεποίθηση αυτή διακρίνεται πίσω από τις απαντήσεις χωρίς να δηλώνεται. Για παράδειγμα στα επεισόδια 16 και 17 οι μαθητές δυο ομάδων από το πρώτο και το δεύτερο σχολείο αντίστοιχα εκφράζουν την πεποίθησή τους ότι το εμβαδόν είναι περίπου 100. Αυτή η πεποίθηση μπορεί να συνδεθεί με την αντίληψη ότι οι τιμές της ακολουθίας δεν μπορούν να ξεπεράσουν την τιμή 100; Άξιο προσοχής είναι το γεγονός ότι οι μαθητές της εικόνας 7 υπογραμμίζουν τη λέξη 'περίπου' θέλοντας να τονίσουν την θέση τους ότι το εμβαδόν δεν είναι ακριβώς 100. Στη λογική τους τα δυο γεγονότα είναι συνυφασμένα. Το άθροισμα των εμβαδών προσεγγίζει τον αριθμό 100 μένοντας όμως πάντα μικρότερο από αυτόν. Συνεπώς και το όριο της ακολουθίας δεν μπορεί να ταυτιστεί με τον αριθμό 100. Στην πραγματικότητα η ίδια αντίληψη υποβόσκει στη σκέψη των περισσότερων μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα. Που μπορεί να οφείλεται αυτό; Η πιθανότερη απάντηση είναι ότι οφείλεται στο σχεδιασμό της έρευνας. Οι ακολουθίες κατώτερων και ανώτερων αθροισμάτων είναι γνησίως μονότονες. Οι μαθητές λοιπόν έρχονται αντιμέτωποι μόνο με περιπτώσεις

μονότονης σύγκλισης. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούνται φαινόμενα ακριβώς τέτοιας μορφής παρανοήσεων (Tall & Vinner, 1981; Tall, 1997). Στη συγκεκριμένη έρευνα η ανάπτυξη της παρανόησης ευνοήθηκε και από τη γεωμετρική εποπτεία που ανέπτυξαν οι μαθητές, όπως ήδη αναφέρθηκε κατά τη μελέτη του επεισοδίου 17 και όπως φαίνεται από την απάντηση μιας ομάδας μαθητών στο πρώτο σχολείο:


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

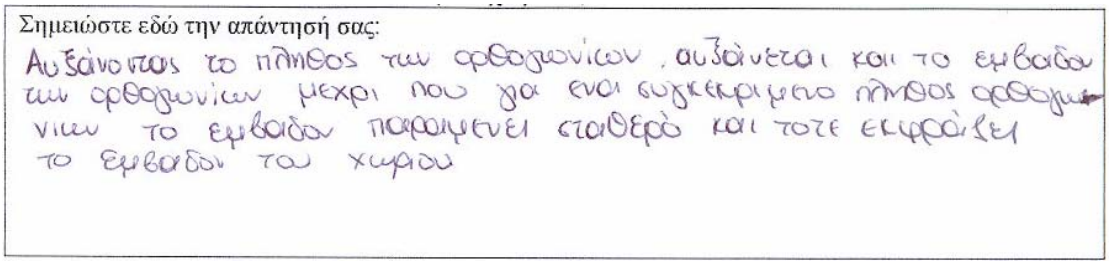
Το εμβαδόν είναι περίπου 100 Όσο αυξάνεται ο αριθμό των ορθογωνίων Το εμβαδόν αυξάνεται επειδή τα κενά που υπάρχουν μεταξύ της παραβολή μικραίνουν, δίνονται όλο και πιο ακριβείς τιμές

Εικόνα 8: Η γεωμετρική εποπτεία

Οι δυο μαθητές στην απάντηση αυτή ισχυρίζονται με βάση τα αποτελέσματα των προηγούμενων παρατηρήσεών τους ότι το εμβαδόν του χωρίου '*…είναι περίπου 100.*'. Προσπαθώντας να δώσουν μια εξήγηση για την επιλογή τους καταγράφουν σε πρώτη φάση τη μονοτονία της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων (' *Όσο αυξάνεται ο αριθμός των ορθογωνίων το εμβαδόν αυξάνεται*'. Είναι προφανές ότι εδώ όταν γράφουν 'εμβαδόν' εννοούν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων). Στη συνέχεια καταφεύγουν στη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας για να ολοκληρώσουν το συλλογισμό τους. Παρατηρούν ότι το κενό μεταξύ της γραφικής παράστασης και των ορθογωνίων μικραίνει ('*…τα κενά που υπάρχουν μεταξύ της παραβολής…*'. Και στο σημείο αυτό η έκφραση που χρησιμοποιούν δεν είναι ακριβής αλλά είναι σαφές ότι αναφέρονται στο κενό μεταξύ της γραφικής παράστασης και των ορθογωνίων), οπότε καταλήγουν ότι με τη διαδικασία αυτή παίρνουν '… *όλο και πιο ακριβείς τιμές*'. Η οπτική αναπαράσταση τους οδηγεί άμεσα στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι για οποιαδήποτε τιμή του ν μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου μια και πάντα θα υπάρχει κενό μεταξύ της γραφικής παράστασης και των ορθογωνίων.

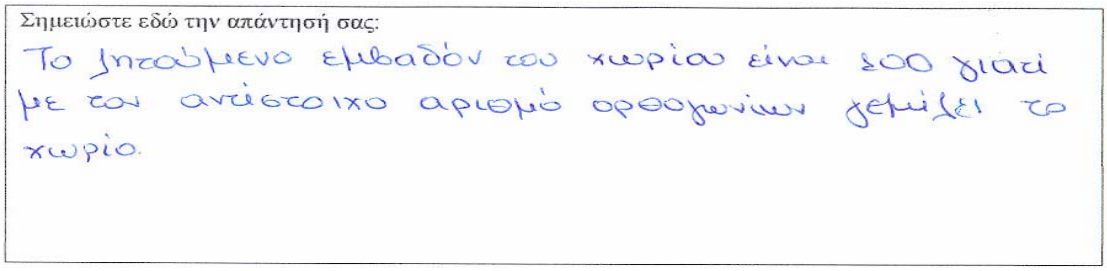
Ακόμα μια παρανόηση παρατηρήθηκε στις αντιλήψεις για το όριο μιας άλλης ομάδας από το τρίτο σχολείο απαντήσεις της οποίας φαίνονται στις εικόνες 5 και 6. Οι μαθητές εμφανίζουν την πεποίθηση ότι από ένα σημείο και μετά, δηλαδή από

κάποιο πλήθος ορθογωνίων και πάνω, οι τιμές της ακολουθίας σταθεροποιούνται στην τιμή που αποτελεί το όριο.


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Αυξάνοντας το πλήθος των ορθογωνίων, αυξάνεται και το εμβαδόν των ορθογωνίων μεχρι που για ενα συγκεκριμενο πλήθος ορθογωνιων το εμβαδον παραμενει σταθερό και τοτε εκφράζει το εμβαδον του χωριου

Εικόνα 9: Για να υπάρχει όριο πρέπει η ακολουθία να είναι τελικά σταθερή

Οι μαθητές στο επεισόδιο αυτό εκφράζουν την πεποίθησή τους ότι για να υπάρχει το όριο της ακολουθίας αθροισμάτων θα πρέπει η ακολουθία να είναι τελικά σταθερή (‘…*μέχρι που για ένα συγκεκριμένο πλήθος ορθογωνίων το εμβαδόν παραμένει σταθερό και τότε εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου*’). Βέβαια παρατηρείται στο σημείο αυτό μια αντίφαση με την απάντηση των ίδιων μαθητών σε προηγούμενο ερώτημα. Ενώ πριν οι μαθητές θεωρούσαν δεδομένο ότι η ακολουθία κατώτερων αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα (εικόνα 6) τώρα απαιτούν να είναι τελικά σταθερή. Το γεγονός αυτό δεν μπορεί παρά να οφείλεται στην πεποίθηση ότι για υπάρχει το όριο της ακολουθίας θα πρέπει από μια τιμή του ν και μετά όλες οι τιμές της να ταυτίζονται με την οριακή τιμή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η παρανόηση φαίνεται να επικρατεί ακόμα και της γεωμετρικής εποπτείας. Αλλά μια απάντηση άλλης ομάδας του ίδιου σχολείου μπορεί να οδηγήσει σε μια διαμετρικά διαφορετική ερμηνεία:

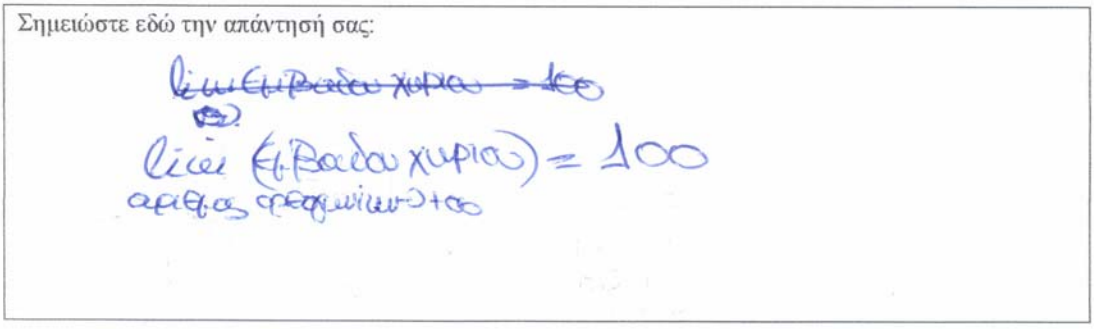

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου είναι 500 γιατί με τον αντίστοιχο αριθμό ορθογωνίων γεμίζει το χωρίο.

Εικόνα 10: Από ένα σημείο και μετά οι τιμές της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων ταυτίζονται με το εμβαδόν του χωρίου

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο σχολείο αυτό οι Η/Υ που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ισχυρότεροι από τους Η/Υ που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα δυο πρώτα σχολεία.

Το αποτέλεσμα ήταν ότι οι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν ακόμα και πλήθος 10000 ορθογωνίων σε αντίθεση με τους μαθητές των άλλων σχολείων που είχαν τη δυνατότητα να χειριστούν μέχρι 5000 ορθογώνια στην καλύτερη περίπτωση. Όμως η αίσθηση που δίνεται για τόσο μεγάλους αριθμούς ορθογωνίων είναι ότι δεν υπάρχει μεταβολή του αθροίσματος των εμβαδών μια και οι διαφορές είναι πολύ μικρές και οπτικά δεν γίνονται αντιληπτές. Αν λοιπόν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης του αποτελέσματος στο result box δεν είναι τέτοιο που να επιτρέπει την παρατήρηση αυτών των μικρών διαφορών ή αν οι μαθητές δεν εκμεταλλευτούν και το στοιχείο αυτό, τότε εύλογα θεωρούν ότι η ακολουθία από μια τιμή του ν και μετά γίνεται σταθερή. Έτσι η γεωμετρική εποπτεία μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι από ένα πλήθος ορθογωνίων και πάνω το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων παραμένει σταθερό αφού ταυτίζεται πια με το εμβαδόν του χωρίου (‘…*γεμίζει το χωρίο*…’) το οποίο είναι προφανώς σταθερό. Δηλαδή εν τέλει ήταν ακριβώς η γεωμετρική εποπτεία και πάλι που οδήγησε τους μαθητές στην ανάπτυξη της συγκεκριμένης παρανόησης.

Το κύριο χαρακτηριστικό όλων των προβλημάτων και των παρανοήσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω σε σχέση με την έννοια του ορίου είναι ότι οι μαθητές συγχέουν το εμβαδόν του χωρίου με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Το πρόβλημα δηλαδή τελικά είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν το εμβαδόν του χωρίου ως μια μεταβλητή ποσότητα και όχι ως ένα σταθερό μέγεθος. Ταυτίζουν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με το εμβαδόν του χωρίου. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση μιας ομάδας μαθητών από το δεύτερο σχολείο όταν επιχειρούν να κάνουν μια πρώτη εκτίμηση σχετικά με το πόσο είναι το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου:



Εικόνα 11: Το εμβαδόν του χωρίου είναι μεταβαλλόμενο μέγεθος

Οι μαθητές στην απάντησή τους δεν αναφέρονται στο όριο της ακολουθίας αλλά στο όριο του εμβαδού του χωρίου. Δεν αντιμετωπίζουν το εμβαδό του χωρίου ως όριο της ακολουθίας αθροισμάτων. Αξιοποιούν τα δεδομένα των πινάκων που έχουν καταρτίσει σε προηγούμενο ερώτημα για να υπολογίσουν ένα όριο το οποίο όμως θεωρούν ότι είναι το όριο του σταθερού εμβαδού του χωρίου και όχι το όριο της μεταβλητής ακολουθίας αθροισμάτων. Η μοναδική εξήγηση που μπορεί να δοθεί για τη στάση αυτή των μαθητών είναι ότι έχουν ταυτίσει το σταθερό εμβαδόν του χωρίου με το μεταβαλλόμενο άθροισμα εμβαδών των ορθογωνίων. Κάποιοι άλλοι μαθητές από αυτούς που συμμετείχαν στην έρευνα ταυτίζουν τις τιμές της ακολουθίας για μεγάλες τιμές του ν με το όριό της, όπως έγινε με τους μαθητές της εικόνας 9. Και οι δυο αυτές κατηγορίες μαθητών αναπτύσσουν λοιπόν την αντίληψη ότι αφού οι τιμές της ακολουθίας αθροισμάτων προσεγγίζουν την τιμή 100 παραμένοντας όμως πάντα μικρότερες από αυτήν στην περίπτωση της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων (ή μεγαλύτερες στην περίπτωση της ακολουθίας ανώτερων αθροισμάτων) και το όριο της ακολουθίας δεν μπορεί να ταυτιστεί με την τιμή 100.

Το κριτήριο παρεμβολής

Το κριτήριο παρεμβολής είναι ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία της ανάλυσης. Η χρήση του όμως τόσο στο ελληνικό σχολείο όσο και διεθνώς περιορίζεται σε έναν τυπικό διαδικασιακό τρόπο εφαρμογής του. Αυτό μαρτυρούν και οι εναλλακτικές ονομασίες του όπως 'κριτήριο σάντουιτς' ή κριτήριο των Bobbies' που αποκλειστικό σκοπό έχουν να υπενθυμίζουν στους μαθητές τον τυπικό τρόπο εφαρμογής του. Οι μαθητές ασκούνται σχεδόν αποκλειστικά στο να αναγνωρίζουν τις καταστάσεις στις οποίες μπορεί το κριτήριο να χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια να το εφαρμόζουν σε επίπεδο διαδικασίας. Το κριτήριο δεν φαίνεται να έχει για αυτούς κάποιο άλλο ουσιαστικό περιεχόμενο εκτός του ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό κάποιων ορίων κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Έτσι τα αποτελέσματα από τη χρήση του είναι φτωχά μια και περιορίζονται σε επίπεδο μεθοδολογίας λύσης ασκήσεων. Αν όμως καταστεί δυνατό να χρησιμοποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε εκτός από το διαδικασιακό να απευθύνεται και στο εννοιολογικό μέρος της διδασκαλίας, τότε μπορεί να αποδειχθεί σημαντικός παράγοντας στην προσπάθεια να ξεπεραστούν οι δυσκολίες εννοιολογικοποίησης της έννοιας του ορίου καθώς και στο να αρθούν οι

παρανοήσεις γύρω από την έννοια. Ένα καλό παράδειγμα χρήσης του κριτηρίου παρεμβολής στην κατεύθυνση αυτή παρατηρήθηκε και στην παρούσα έρευνα.

Στο επεισόδιο 19 η Δ αναρωτιέται γιατί το εμβαδόν του χωρίου είναι ακριβώς 100 (*'…Γιατί να είναι 100 δηλαδή; Επειδή πλησιάζει πάρα πολύ;'*). Την ίδια απορία έχει και κατά τον υπολογισμό του εμβαδού με τη βοήθεια της ακολουθίας ανώτερων αθροισμάτων. Λίγο αργότερα όμως γίνεται ο παρακάτω διάλογος:

Ε: Δεν θέλω τώρα να κάνετε απόδειξη. Θέλω να μου πείτε τι είδατε.
Ζ: Γενικά ή σήμερα;
Ε: Γενικά.
Δ: Ότι το εμβαδόν μπορεί να είναι και πάνω από 100.
Ε: Ποιο εμβαδόν μπορεί να είναι πάνω από 100; Του χωρίου;
Δ: Του χωρίου όχι. Των ορθογωνίων ναι.
Ε: Εχθές τι έλεγες;
Δ: Εντάξει!
Ε: Δεν σου κάνω παρατήρηση. Απλά σου λέω ότι απάντησες μόνη σου στην ερώτηση που μου έθεσες χθες (αναφορά στο επεισόδιο 19). Έτσι δεν είναι;
Δ: Ναι. Ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι σταθερό. Αυτό που αλλάζει είναι το πώς το υπολογίζουμε. Αν είναι τα ορθογώνια από πάνω ή από κάτω.
Ε: Έτσι. Αλλά το εμβαδόν πόσο θα είναι;
Δ: Σταθερό.
Ζ: Μέχρι 100.
Ε: Μπορούμε να συζητήσουμε γιατί είναι σταθερό;
Δ: Είναι σταθερό. Δεν μεταβάλλεται το σχήμα του χωρίου.

Επεισόδιο 21: Τελικά το εμβαδόν του χωρίου είναι σταθερό

Η μαθήτρια Δ κάνει τελικά τη διάκριση μεταξύ του εμβαδού του χωρίου και του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων. Αντιλαμβάνεται ότι το χωρίο δεν είναι μεταβλητό οπότε και το εμβαδόν του θα πρέπει να είναι σταθερό. Ο ερευνητής εξετάζει αν η γνώση αυτή είναι επαρκώς σταθεροποιημένη θέτοντας θέμα αιτιολόγησης της σταθερότητας του εμβαδού του χωρίου (*'…Μπορούμε να συζητήσουμε γιατί είναι σταθερό;'*) . Η απάντηση είναι ξεκάθαρη και αφοπλιστική. Η συγκεκριμένη γνώση έχει λοιπόν πια σταθεροποιηθεί επαρκώς. Σημαίνει όμως το γεγονός αυτό ότι ξεπεράστηκε και η παρανόηση σχετικά με την έννοια του ορίου; Η απάντηση είναι αρνητική όπως φαίνεται στο επόμενο επεισόδιο που έπεται χρονικά του επεισοδίου 21:

Ε: Γιατί λοιπόν να μην είναι 100,005 ή 99,998;

Δ: Γιατί όσο πάει η διαφορά μειώνεται. Άρα κάποια στιγμή θα είναι τόσο μικρή που δεν θα είναι υπολογίσιμη.
Ε: Μάλιστα. Αυτή είναι μια καλή παρατήρηση. Και πόσο θα είναι τότε το εμβαδόν;
Ζ: 100 just.
Ε: Ωραία. Θα είναι 100 just.
Δ: Θα είναι;

Επεισόδιο 22: Η παρανόηση επιμένει

Είναι άξιο παρατήρησης πως παρά το γεγονός ότι ο διάλογος της μαθήτριας Δ με τον ερευνητή κατέληξε στη διαπίστωση ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι σταθερό η Ζ στο επεισόδιο 21 δεν έχει ακόμα ξεπεράσει την παρανόηση (σχολιάζει: '*Μέχρι 100*') πράγμα όμως που συμβαίνει στο επεισόδιο 22 ('*100 just*'). Αντίθετα η Δ παρά το ότι στο επεισόδιο 21 ξεκαθαρίζει τη διαφορετικότητα του εμβαδού του χωρίου και του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων δεν είναι ακόμα σε θέση να άρει την παρανόηση. Αντιλαμβάνεται διαισθητικά ότι οι ακολουθίες ανώτερων και κατώτερων αθροισμάτων ισοσυγκλίνουν (αναφερόμενη στη διαφορά των αντίστοιχων τιμών τους λέει: '*Γιατί όσο πάει η διαφορά μειώνεται. Άρα κάποια στιγμή θα είναι τόσο μικρή που δεν θα είναι υπολογίσιμη*'). Αλλά ακόμα δεν μπορεί να εντάξει σε αυτό το πλαίσιο και το εμβαδόν του χωρίου. Συνεχίζει να το αντιμετωπίζει ως το όριο της κάθε μιας από τις δυο ακολουθίες ξεχωριστά. Το αποτέλεσμα αυτής της κατάστασης είναι να συνεχίζει να θεωρεί ότι είναι περίπου 100 και όχι 100 ακριβώς (αναρωτιέται: '*Θα είναι;*'). Βέβαια διαισθητικά αντιλαμβάνεται τη σχέση διάταξης που υπάρχει μεταξύ των εμβαδών:

Δ: Λοιπόν. Είναι στη μέση το εμβαδόν του χωρίου, από κάτω είναι το κάτω άθροισμα και από πάνω το άνω άθροισμα.
Ζ: Α! Ανισότητα.
Δ: Μεγαλύτερο ή ίσο.
Ζ: Άρα έχουμε: Μεγαλύτερο είναι το άθροισμα..
Δ: Είναι: Κάτω, χωρίο, άνω.
Ζ: Ναι.

Επεισόδιο 23: Η διάταξη των εμβαδών

Έτσι αμέσως μετά είναι σε θέση να παρατηρήσει την εμφάνιση του κριτηρίου παρεμβολής χρησιμοποιώντας τις γνώσεις και την εμπειρία της σε διαδικασιακό επίπεδο:

Ε: Οπότε;

Δ: Είναι το κριτήριο παρεμβολής. Ναι;

Επεισόδιο 24: Η εμφάνιση του κριτηρίου παρεμβολής

Η διάταξη των εμβαδών λειτούργησε ως μεθοδολογικός κανόνας που οδήγησε τη μαθήτρια, σε επίπεδο διαδικασίας, στην αναγνώριση μιας κατάστασης πρόσφορης για τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής. Η παρατήρηση της δυνατότητας χρήσης του κριτηρίου όμως διευρύνει τα περιθώρια δράσης των δυο μαθητριών και δίνει τη δυνατότητα αξιοποίησής του σε εννοιολογικό επίπεδο. Λίγο αργότερα, αφού πρώτα ξεκαθαρίζουν ότι μόλις προ ολίγου υπολόγισαν το όριο της ακολουθίας ανώτερων αθροισμάτων ενώ την προηγουμένη ημέρα είχαν υπολογίσει το όριο της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων, έχουν τον εξής διάλογο με τον ερευνητή:

Ε: Όταν το υπολογίσατε πόσο βγήκε αυτό το όριο;
Ζ: 100.
Ε: Ωραία. Στο χθεσινό φύλλο εργασίας πόσο ήταν το όριο;
Δ: 100.
Ε: Άρα πόσο είναι το εμβαδόν;
Δ: 100.
Ε: Περίπου;
Ζ: Όχι.
Δ: Όχι. Just.

Επεισόδιο 25: Τελικά το εμβαδόν είναι 100 ακριβώς

Όπως φαίνεται από την ανάγνωση του επεισοδίου 25 οι δυο μαθήτριες έχουν πλέον ξεπεράσει την παρανόηση της έννοιας του ορίου. Ξεκαθαρίζουν ότι το εμβαδόν του χωρίου, δηλαδή το όριο, είναι 100 ακριβώς (‘*Just.*’) και όχι περίπου 100. Με ποιο τρόπο συντελείται η μεταβολή αυτή; Είναι σαφές ότι ο καταλύτης για τη μεταβολή αυτή είναι η χρήση του κριτηρίου παρεμβολής. Οι μαθήτριες έχουν ξεκαθαρίσει ότι το εμβαδόν του χωρίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών των ακολουθιών κατώτερων και ανώτερων αθροισμάτων (επεισόδιο 23). Επίσης έχουν αντιληφθεί διαισθητικά μέσα από την γεωμετρική εποπτεία που τους προσφέρει η οπτική αναπαράσταση ότι οι ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο (επεισόδιο 22). Οδηγούνται με τον τρόπο αυτό στην παρατήρηση της εμφάνισης του κριτηρίου παρεμβολής. Στη συνέχεια η χρήση του κριτηρίου με ουσιαστικό εννοιολογικό και όχι απλά με τυπικό τρόπο τους δίνει τη δυνατότητα να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι 100.

⊣ Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδό παραβολικού χωρίου

Το σημείο αυτό είναι από τα πιο κρίσιμα της διδακτικής διαδικασίας γιατί η ομάδα ή ακόμα και όλη η τάξη βρίσκεται πια σε κατάσταση θεσμοποίησης. Είναι το σημείο στο οποίο ο διδάσκων θα πρέπει με μεγάλη προσοχή να θεσμοποιήσει και να καθορίσει με σαφήνεια τη γνωστική υπόσταση την παραχθείσας γνώσης. Είναι η στιγμή που θα πρέπει να οριστεί πια η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Κάτι τέτοιο δεν είχε συμπεριληφθεί στην ερευνητική διαδικασία στα δυο πρώτα σχολεία. Όμως, παρά το γεγονός αυτό, εκ των πραγμάτων κατέστη αναγκαίο να ενταχθεί και το στοιχείο αυτό στη διαδικασία μια και οι μαθητές – στο σύνολό τους στο πρώτο και το τρίτο σχολείο και στην πλειονότητά τους στο δεύτερο - δεν αγνοούσαν την ύπαρξη της έννοιας. Έτσι ορίστηκε στο σημείο αυτό η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Μετά από αυτό οι μαθητές των δυο πρώτων σχολείων δεν εμφάνισαν δυσκολία να συνδέσουν την ερευνητική διαδικασία με τον ορισμό της έννοιας. Στο τρίτο σχολείο η φάση αυτή είχε ενταχθεί στη διδακτική διαδικασία από το σχεδιασμό της.

Η διαδικασία που προηγήθηκε βοηθάει λοιπόν τους μαθητές να εσωτερικεύσουν (Vygotsky, 1978; Mariotti, 2002) την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Οι μαθητές είναι πια ικανοί να εσωτερικεύσουν την έννοια και να κατανοήσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου. Αποτέλεσμα αυτών είναι ότι διαισθάνονται τις νέες δυνατότητες που αποκτούν σε ένα πεδίο όπου μόνο περιορισμένες δυνατότητες είχαν, αυτό του υπολογισμού εμβαδών επίπεδων χωρίων, και αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά της. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο επεισόδιο που αποτελεί χρονικό συνεχές με το επεισόδιο 25:

Ε: Λύθηκε το θέμα;
Ζ: Ω!
Δ: Εντάξει. Θα μάθω ολοκληρώματα. Το αποφάσισα.

Επεισόδιο 26: Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι χρήσιμο

Ο ερευνητής στην αρχή του επεισοδίου αναφέρεται σε μια παρατήρηση της Δ η οποία την προηγούμενη μέρα στη διάρκεια της έρευνας είχε εκφράσει την απογοήτευσή της για την αποτελεσματικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος στον υπολογισμό εμβαδού χωρίου και είχε αναρωτηθεί για την αναγκαιότητα χρήσης του. Οι δυο μαθήτριες έχουν πια κατανοήσει ότι το εμβαδόν του χωρίου ταυτίζεται με το κοινό όριο των δυο ακολουθιών αθροισμάτων που είναι 100 (επεισόδιο 25). Ακόμα

γνωρίζουν, έστω και σε τυπικό μόνο επίπεδο μέχρι τη στιγμή αυτή, ότι αυτό ακριβώς το κοινό όριο είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,10]$. Βέβαια η τυπική αυτή γνώση δεν είχε μέχρι τότε κάποιο ουσιαστικό εννοιολογικό περιεχόμενο για τις δυο μαθήτριες. Αυτός ήταν και ο λόγος για τον οποίο ο ορισμός της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος όπως και οι δυνατότητες που αυτή μπορεί να τους παρέξει δεν παρουσίαζαν κάποιο ενδιαφέρον για αυτές (επεισόδιο 20). Μόλις η έννοια απόκτησε εννοιολογικό περιεχόμενο έγινε ελκυστική. Η Ζ έκπληκτη αντιλαμβάνεται ξαφνικά ότι όλες οι αμφιβολίες τους δεν έχουν πλέον υπόσταση. Η μέθοδος υπολογισμού εμβαδού με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος λειτουργεί και δίνει ακριβή αποτελέσματα σε περιπτώσεις που δεν ήταν μέχρι τότε δυνατός ο υπολογισμός μια και δεν είχαν τα κατάλληλα εργαλεία για τη δουλειά αυτή. Η μαθήτρια Δ αντιλαμβάνεται επίσης ότι οι ενστάσεις της ήταν άστοχες και δηλώνει την πρόθεσή της να μάθει να χρησιμοποιεί αποδοτικά το νέο εργαλείο.

Η εκμετάλλευση των περιορισμών που επιβάλλει το λογισμικό

Οι λειτουργικές ιδιαιτερότητες και οι αδυναμίες του λογισμικού μπορούν υπό προϋποθέσεις να οδηγήσουν στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου από τους μαθητές. Στόχος στην περίπτωση της παρούσας έρευνας είναι η εκμετάλλευση της αδυναμίας που εμφανίζει το λογισμικό στις προσεγγίσεις των αποτελεσμάτων. Η αδυναμία αυτή του λογισμικού είναι διττή. Πρώτον μπορεί να δώσει μόνο ρητές προσεγγίσεις των αποτελεσμάτων ακόμα και όταν αυτά είναι άρρητοι αριθμοί. Δεύτερον ο καθορισμός του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης δεν είναι μια διαδικασία προφανής. Αντίθετα ο χρήστης δυσκολεύεται να ανακαλύψει τη δυνατότητα αυτή. Η εκμετάλλευση της συγκεκριμένης αδυναμίας μπορεί να γίνει μόνο μέσα από την ανάπτυξη κατάλληλων σχημάτων όπως καταδείχθηκε παραπάνω. Θα πρέπει λοιπόν να καθοδηγηθούν οι μαθητές στη οικοδόμηση αυτών των σχημάτων μέσα από αντίστοιχα κατάλληλες τεχνικές. Όμως συχνά οι δάσκαλοι θεωρούν ότι αυτές οι τεχνικές είναι αυτονόητες ή, ακόμα, ότι είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με το εργαλείο ώστε δεν σχετίζονται με το αντικείμενο που μελετάται (Lagrange, 1999). Στην περίπτωση του λογισμικού Autograph η συγκεκριμένη αδυναμία είναι εγγενής. Επίσης, η διαφορά μεταξύ της ρητής

προσέγγισης και του άρρητου πραγματικού αποτελέσματος θεωρείται για τους περισσότερους δασκάλους προφανής, κάτι που όμως δεν συμβαίνει με τους μαθητές.

Κατά την πρώτη ημέρα διεξαγωγής της έρευνας δεν υπήρξε μαθητής σε κάποιο από τα σχολεία που να επιχείρησε να επανακαθορίσει το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης πριν την παρέμβαση του ερευνητή ή του παρατηρητή. Αυτό άλλαξε βέβαια τη δεύτερη μέρα μια και οι μαθητές είχαν ήδη την εμπειρία της διαπραγμάτευσης του θέματος από την προηγούμενη. Όλοι οι μαθητές αρκέστηκαν κατά τη διερεύνηση της πρώτης ημέρας στην προσέγγιση του αποτελέσματος που έδινε η προεπιλογή. Δεν παρατηρήθηκε η ύπαρξη μαθητή που να προβληματίστηκε για το αν το αποτέλεσμα είναι ρητός ή άρρητος αριθμός. Ακόμα περισσότερο, πριν από την παρέμβαση δεν εμφανίζεται κανένας μαθητής που να αντιλαμβάνεται ότι τα αναγραφόμενα στο result box αποτελέσματα είναι ρητές προσεγγίσεις των πραγματικών αποτελεσμάτων. Έτσι παρατηρήθηκε και το φαινόμενο μια ομάδα μαθητών του τρίτου σχολείου να είναι πεπεισμένη ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων μπορεί να είναι ίσο με 100, όπως φαίνεται στο επόμενο επεισόδιο:

M1: Πόσο είναι στα 510;
M2: 100,3
M1: Πόσο να βάλλουμε τώρα; 1000;
M2: Να βάλλουμε ένα μεγάλο νούμερο.
M1: Όπως εχθές το 10000; Μας είπε ότι μπορεί να κολλήσει.
M2: Έλα μωρέ. Χθες κόλλησε; Άσε. (Χειρίζεται το σύστημα). Α! Νάτο! Κοίτα! 100.

Επεισόδιο 27: Το λογισμικό εξαπατά τους μαθητές

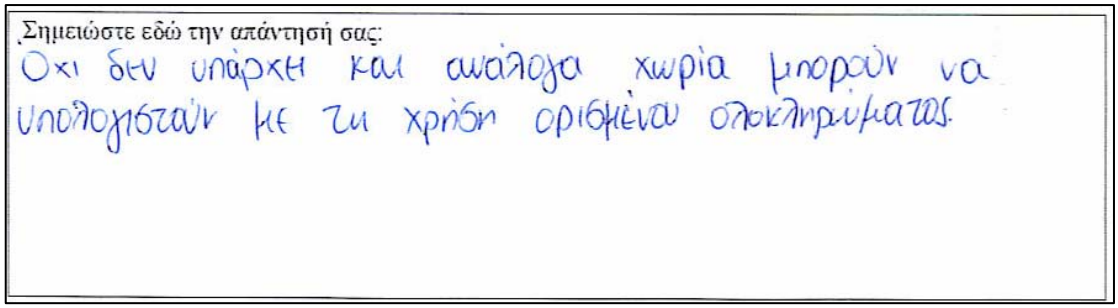
Οι δυο μαθητές βρίσκονται στη φάση της διερεύνησης της συμπεριφοράς του ανώτερου αθροίσματος. Όμως δεν έχουν φροντίσει να αλλάξουν τη ρύθμιση για το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης. Έτσι για πλήθος 10000 ορθογωνίων η προσέγγιση του αποτελέσματος είναι 100. Στην παράληψη αυτή μπορεί να συμβάλλουν δυο παράγοντες. Αρχικά δεν θεώρησαν αναγκαίο κάτι τέτοιο στην προηγούμενη διερεύνησή τους απλούστατα γιατί δεν χρειάστηκε πουθενά. Για παράδειγμα στην περίπτωση του κατώτερου αθροίσματος το αποτέλεσμα της μέτρησης για 10000 ορθογώνια ήταν 99,99 και για όλες τις τιμές του πλήθους ν των ορθογωνίων που επέλεξαν και στις δυο διερευνήσεις δεν παρουσιάστηκε πρόβλημα στην σύγκριση των αποτελεσμάτων. Ο δεύτερος παράγοντας είναι ότι στο σχολείο αυτό η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε σε μια ημέρα. Συνεπώς οι μαθητές δεν είχαν το

χρόνο να αναστοχαστούν πάνω στη δράση τους και να τη μεταβάλλουν όποτε αυτό θα τους ήταν χρήσιμο. Έτσι εμπιστεύτηκαν το αποτέλεσμα χωρίς παραπάνω διερεύνηση. Δεν τους απασχόλησε καθόλου αν τα αποτελέσματα που παίρνουν είναι ακριβή ή προσεγγιστικά. Εμπιστεύονται τις δυνατότητες του υπολογιστικού συστήματος και δεν επιχειρούν μια ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Στο σημείο αυτό λοιπόν είναι απαραίτητη η παρέμβαση του διδάσκοντα, πράγμα που δεν έγινε με τη συγκεκριμένη ομάδα. Ο διδάσκων μπορεί στο σημείο αυτό να παρέμβει, να θέσει ζητήματα προς συζήτηση επανακαθορίζοντας τους όρους της διερεύνησης και να εκμεταλλευτεί την αδυναμία αυτή προς όφελος των μαθητών του. Τι πιο απλό από να τους ζητήσει να δώσουν στο ν τιμές κοντά σε αυτές που έχουν ήδη δώσει, όπως για παράδειγμα 9500 ή 104 (μια και οι μαθητές έχουν επιλέξει τις τιμές 10000 και 105). Έτσι οι μαθητές θα μπουν στη διαδικασία μιας πιο λεπτομερούς και εμπεριστατωμένης διερεύνησης μέσα από την οποία θα οδηγηθούν στην οικοδόμηση των σχημάτων που απαιτούνται για την εννοιολογική κατανόηση των εννοιών. Χωρίς αυτή την παρέμβαση, και αυτό είναι ένα πρόβλημα στο σχεδιασμό της έρευνας, οι μαθητές εύλογα θεώρησαν ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι 100 χωρίς να διεισδύσουν στο περιεχόμενο των εννοιών που απαρτίζουν το εννοιολογικό πεδίο του ορισμένου ολοκληρώματος.

⊣ Η εξαγωγή και διατύπωση κανόνα ⊢

Ένα μέρος των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα δυσκολεύτηκε ή, ακόμα παραπάνω, δεν ήταν σε θέση να διατυπώσει κανόνες οι οποίοι να περιγράφουν τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και να υποστηρίζουν τα συμπεράσματα στα οποία οι μαθητές αυτοί οδηγήθηκαν από την επεξεργασία των δεδομένων. Έχει βέβαια ήδη παρατηρηθεί ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στο να εξάγουν σχέσεις από ένα δεδομένο σύνολο τιμών μεγεθών που σχετίζονται μεταξύ τους ή να διατυπώσουν κανόνες που να περιγράφουν τις σχέσεις αυτές (Kynigos et al, 1997). Έτσι 4 από τις 18 ομάδες μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα δεν μπόρεσαν να διατυπώσουν κάποιον, έστω και υποτυπώδη, κανόνα. Τρεις ακόμα ομάδες αντί να επιχειρήσουν να διατυπώσουν έναν κανόνα με τον οποίο να περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε και να γενικεύεται η μέθοδος θεώρησαν αρκετό να δηλώσουν ότι εμβαδά ανάλογων χωρίων υπολογίζονται με τη βοήθεια του ορισμένου

ολοκληρώματος. Οι δυο από τις ομάδες αυτές ανήκαν στο πρώτο σχολείο. Η απάντηση της μιας από τις δυο ομάδες στην αντίστοιχη ερώτηση φαίνεται στην εικόνα 12:


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Οχι δεν υπάρχει και αναλογα χωρία μπορούν να υπολογιστούν με τη χρήση ορισμένου ολοκληρώματος.

Εικόνα 12: Ο κανόνας είναι η χρήση ορισμένου ολοκληρώματος

Οι μαθητές των ομάδων αυτών, ενώ μέχρι τότε δεν είχαν καμία ενασχόληση με τον ορισμό της έννοιας, ήταν σε θέση όπως φάνηκε από το pretest να χειριστούν σε επίπεδο διαδικασίας ορισμένα ολοκληρώματα απλών τουλάχιστον συναρτήσεων. Γιατί λοιπόν δεν διατύπωσαν έναν κανόνα; Μια απάντηση είναι ότι η προηγούμενη διαδικασιακή γνώση δεν επέτρεψε στους μαθητές να επιτύχουν την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Tall, 1997; Ferrini-Mundy & Guardard, 1992). Μια άλλη απάντηση στο ερώτημα θα μπορούσε να είναι ότι οι μαθητές των δυο ομάδων ήταν προετοιμασμένοι για την ανάπτυξη ενός νέου εργαλείου για τον υπολογισμό εμβαδών χωρίων ο οποίος ήταν αδύνατο να γίνει με τους μέχρι τότε γνωστούς τρόπους, όπως καταδεικνύεται από τις αιτιάσεις των μαθητών της μιας ομάδας, αυτής της εικόνας 12, προς τον παρατηρητή που ήταν ο διδάσκων καθηγητής:

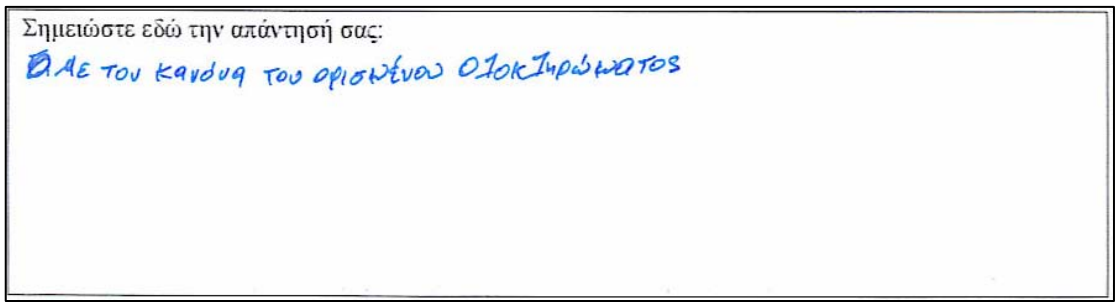
Δ: Τόσα χρόνια δεν μαθαίναμε κύριε ότι δεν υπολογίζεται αυτό το εμβαδόν παρά μόνο με ολοκληρώματα;
Α: Ναι. Δεν μας λέγατε θα το μάθετε στην τρίτη;

Επεισόδιο 28: Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το κατάλληλο εργαλείο για τον υπολογισμό εμβαδών ανάλογων χωρίων

Είναι φανερό ότι για τους δυο μαθητές η χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος στον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων δεν αποτελεί μια νέα και αποκαλυπτική εμπειρία. Ο ορισμός της έννοιας είναι μεν κάτι καινούργιο για αυτούς αλλά η χρήση της για τον υπολογισμό εμβαδών είναι αναμενόμενη. Στο πλαίσιο αυτό είναι εύλογο να θεωρούν οι μαθητές ότι ο ζητούμενος κανόνας για τον τρόπο υπολογισμού του

εμβαδού του παραβολικού χωρίου δεν μπορεί να είναι άλλος από την απαίτηση για χρήση του νέου εργαλείου δηλαδή του ορισμένου ολοκληρώματος.

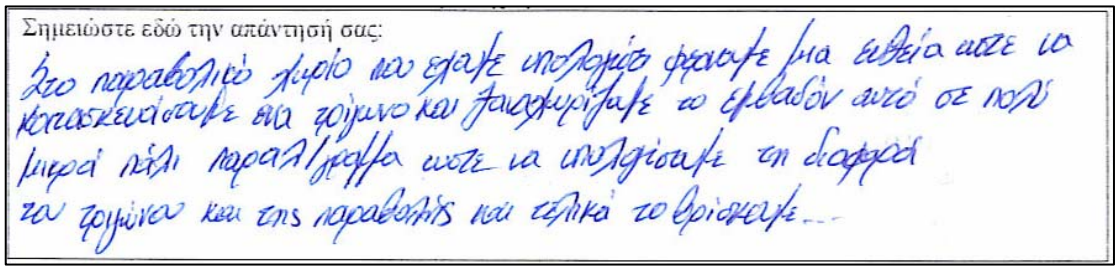
Η τρίτη ομάδα, που είναι ομάδα του δεύτερου σχολείου, είναι αυτή της οποίας η δράση εμφανίζεται στα επεισόδια 12, 14 και 17. Οι μαθητές δεν έχουν καταφέρει να οικοδομήσουν κατάλληλα σχήματα ικανά να τους επιτρέψουν να ξεφύγουν από την αλγεβρικής φύσης ερμηνεία των πραγμάτων και να τους δώσουν τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουν την κατάσταση με όρους ανάλυσης. Έτσι την πρώτη μέρα αντί να διατυπώσουν κανόνα αρκούνται στην καταγραφή της λανθασμένης άποψης ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι ανάλογο του πλήθους τους ('…*Όσο αυξάνεται το πλήθος των ορθογωνίων τόσο αυξάνεται και το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Άρα είναι ανάλογα*') όπως φαίνεται στο επεισόδιο 12. Τη δεύτερη ημέρα όμως οι μαθητές απαντούν στην αντίστοιχη ερώτηση:


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Βάλε του κανόνα του ορισμένου ολοκληρώματος

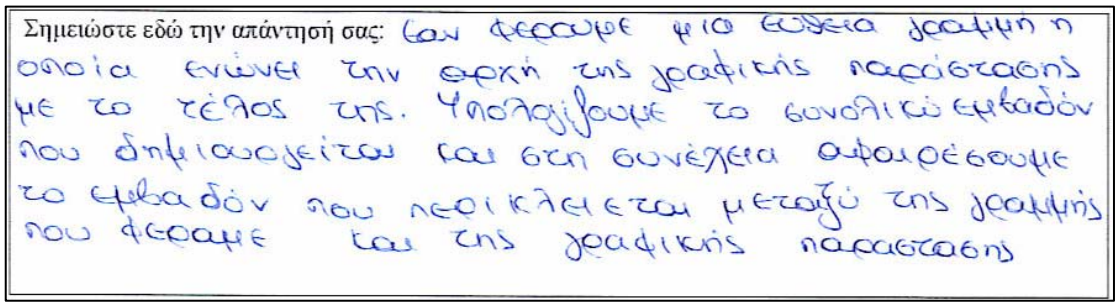
Εικόνα 13: Ο κανόνας του ορισμένου ολοκληρώματος

Αυτό που είναι άξιο προσοχής είναι ότι από τη μελέτη των προεισαγωγικών δοκιμίων εξάγεται το συμπέρασμα πως οι δυο μαθητές πριν από την έρευνα δεν είχαν καμία απολύτως γνώση σε σχέση με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και τις δυνατότητες που αυτή παρέχει. Η πρώτη επαφή τους με την έννοια ήταν μέσα από τη διαδικασία της έρευνας. Έτσι μέσα από τη δραστηριότητά τους κατά την πρώτη μέρα της ερευνητικής διαδικασίας, την εμπλοκή τους στη διερεύνηση της διαδικασίας με την οποία ορίζεται η έννοια και αξιοποιώντας τις πληροφορίες που πήραν από τον ερευνητή και τον παρατηρητή ανέπτυξαν μια πρώτη νοητική εικόνα για την έννοια. Η νοητική εικόνα όμως που δομήθηκε από τους μαθητές παραμένει στο διαδικασιακό επίπεδο, είναι δηλαδή μια ρουτίνα υπολογισμού. Επομένως μπορεί να αποτελεί έναν κανόνα.

Δυο άλλες ομάδες, αυτή τη φορά από το τρίτο σχολείο, διατύπωσαν τους λανθασμένους «κανόνες» που φαίνονται στις εικόνες 14 και 15:


Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:
Στο παραβολικό χωρίο που είχαμε υπολογίσει φτιάξαμε μια ευθεία ώστε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο και ξαναχωρίσαμε το εμβαδόν αυτό σε πολύ μικρά πάλι παραλληλόγραμμα ώστε να υπολογίσουμε τη διαφορά του τριγώνου και της παραβολής και τελικά το βρήκαμε...

Εικόνα 14: Η μετατροπή του παραβολικού χωρίου σε τριγωνικό

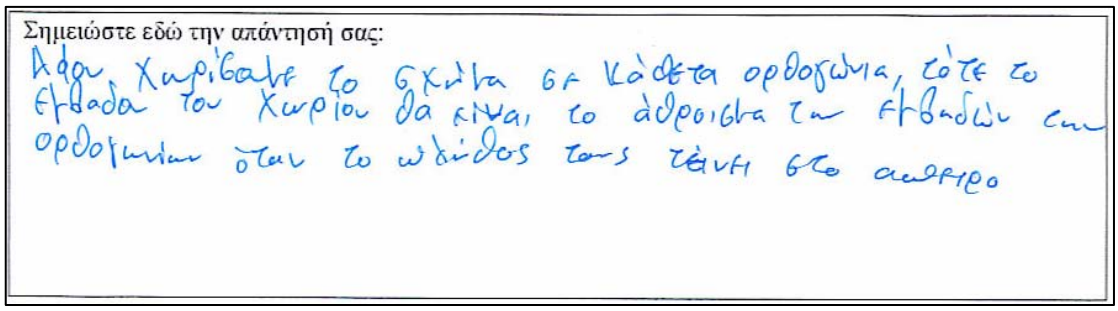

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας: Εάν φέρουμε μια ευθεία γραμμή η οποία ενώνει την αρχή της γραφικής παράστασης με το τέλος της. Υπολογίζουμε το συνολικό εμβαδόν που δημιουργείται και στη συνέχεια αφαιρούμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που φέραμε και της γραφικής παράστασης

Εικόνα 15: Το παραβολικό χωρίο και το τρίγωνο

Οι ομοιότητα των δυο κανόνων σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι οι δυο ομάδες εργάστηκαν σε γειτονικούς Η/Υ οδηγεί με αρκετά μεγάλη σιγουριά στο συμπέρασμα ότι οι κανόνες αυτοί είναι προϊόν συνεργασίας των μελών των δυο ομάδων. Το πιο ενδιαφέρον στοιχείο στους δυο αυτούς κανόνες είναι ότι οι μαθητές, σε αντίθεση με τους μαθητές της εικόνας 12 και του επεισοδίου 27, προσπαθούν να αναγάγουν τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου σε υπολογισμό εμβαδού ενός σχήματος που μπορεί να γίνει με τους γνωστούς μέχρι τότε τρόπους. Προτείνουν λοιπόν τη χάραξη μιας ευθείας ώστε να μεταφερθούν στον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου. Βέβαια οι μαθητές της πρώτης ομάδας (εικόνα 13) επιχειρούν ανεπιτυχώς να εντάξουν στοιχεία της διαδικασίας που προηγήθηκε στην απάντησή τους (‘*…και ξαναχωρίζουμε το εμβαδόν αυτό σε πολύ μικρά πάλι παραλληλόγραμμα…*’). Αντίθετα οι μαθητές της δεύτερης ομάδας (εικόνα 14) δεν προτείνουν κανέναν απολύτως τρόπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της ευθείας που προτείνουν να χαράξουμε και της γραφικής παράστασης. Μεταθέτουν λοιπόν το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού του

παραβολικού χωρίου που τους δόθηκε σε αυτό του υπολογισμού ενός ανάλογου χωρίου και μάλιστα δυσκολότερης μορφής. Από την άποψη αυτή θα μπορούσε να λεχθεί ότι οι μαθητές δεν διατυπώνουν κανόνα.

Οι υπόλοιπες 9 ομάδες κατόρθωσαν να διατυπώσουν κανόνες που περιγράφουν – άλλοι καλύτερα και άλλοι χειρότερα – τη διαδικασία που ακολουθήθηκε. Όμως οι κανόνες αυτοί επηρεάζονται έντονα από τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του ορίου και τις παρανοήσεις της. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του κανόνα που διατύπωσε μια ομάδα του τρίτου σχολείου και φαίνεται στην εικόνα 9. Είναι άμεσα παρατηρήσιμο ότι η διατύπωση του κανόνα καθορίζεται από την αντίληψη των μαθητών ότι για να συγκλίνει η ακολουθία θα πρέπει να είναι τελικά σταθερή. Το ίδιο φαινόμενο της επίδρασης των παρανοήσεων της έννοιας του ορίου στον κανόνα παρατηρείται στους κανόνες που διατυπώνουν ακόμα τρεις ομάδες. Μόνο 5 από τις 18 ομάδες (μια στο πρώτο σχολείο και από δυο ομάδες στο δεύτερο και το τρίτο σχολείο) κατορθώνουν να διατυπώσουν έναν κανόνα που να μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητικός. Ένας τέτοιος κανόνας, που διατυπώθηκε από μια ομάδα του τρίτου σχολείου, φαίνεται στην εικόνα 16:

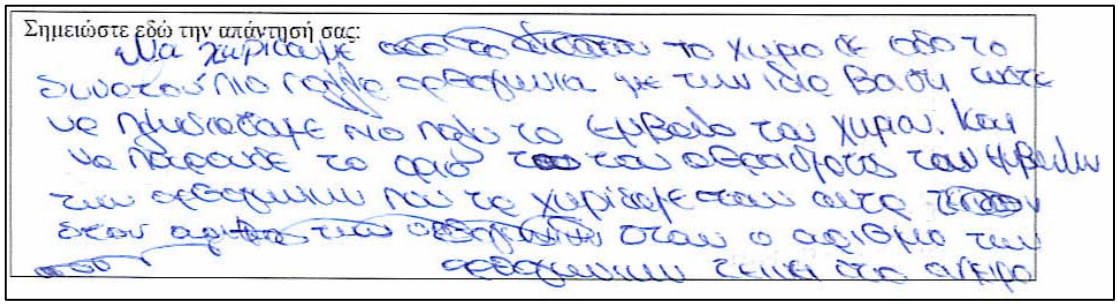

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

Αφού χωρίσαμε το σχήμα σε κάθετα ορθογώνια, τότε το εμβαδό του χωρίου θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων όταν το πλήθος τους τείνει στο απειρο

Εικόνα 16: Ο κανόνας για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου

Οι μαθητές εδώ δεν αναφέρονται ρητά στην ύπαρξη ορίου. Όμως η διατύπωση που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν σαφώς υπονοεί την ύπαρξή του (‘… *όταν το πλήθος τους* [των ορθογωνίων] *τείνει στο άπειρο*’). Η διατύπωση συμπυκνώνει τρία διαδοχικά βήματα: Πρώτα χωρίζουμε το σχήμα (εδώ εννοούν το χωρίο) σε ορθογώνια με βάση στον άξονα των x (‘*Αφού χωρίσουμε το σχήμα σε κάθετα ορθογώνια…*’). Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων και στο τρίτο βήμα υπολογίζουμε το όριο αυτού του αθροίσματος (‘…*το εμβαδόν του χωρίου θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων όταν το πλήθος τους τείνει στο*

άπειρο’). Οι μαθητές λοιπόν έχουν διατυπώσει ένα κανόνα που περιγράφει πολύ καλά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε. Περισσότερο λεπτομερειακός και ακριβής είναι ο κανόνας που διατυπώνεται από μια ομάδα του δεύτερου σχολείου:



Εικόνα 17: Ο λεπτομερής κανόνας

Οι μαθητές στον κανόνα που προτείνουν ξεκαθαρίζουν ότι τα ορθογώνια θα πρέπει να έχουν ίσες βάσεις που είναι μια χρήσιμη παρατήρηση για την εφαρμογή της διαδικασίας. Η απαίτηση για ‘…*όσο το δυνατόν πιο πολλά ορθογώνια*…’ είναι βέβαια περιττή στο σημείο αυτό αλλά πιθανότατα εντάχθηκε ως συνέπεια της απαίτησης για χρήση ορίου στον υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια αναφέρονται στο άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων και στο όριο της ακολουθίας καθώς ‘…*ο αριθμός των ορθογωνίων τείνει στο άπειρο*’. Η αναφορά των μαθητών στο όριο είναι αυτή τη φορά άμεση (‘…*να πάρουμε το όριο του αθροίσματος των εμβαδών*…’). Ο κανόνας αυτός, όπως και ο προηγούμενος, περιέχει τα ίδια τρία βήματα. Η διαφορά μεταξύ των δυο κανόνων είναι ότι στον δεύτερο είναι ξεκάθαρη η απαίτηση για διαμέριση που ορίζει διαστήματα ίσου μήκους, δηλαδή για την ισότητα των βάσεων των ορθογωνίων, και η απαίτηση για χρήση ορίου. Διατυπώνουν λοιπόν και αυτοί οι μαθητές έναν σχεδόν πλήρη κανόνα.

⊣ Η δυσκολία στην μετάβαση στο περιβάλλον «χαρτί – μολύβι» ⊢

Η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στη μαθηματική εκπαίδευση σε καμία περίπτωση δεν αποσκοπεί στην μείωση της χρήσης της τυπικής μαθηματικής έκφρασης. Αντίθετα η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα χρησιμοποιώντας ως μέσο τον τυπικό φορμαλισμό (Kynigos, 2002). Η ανατροφοδότηση που λαμβάνει ο μαθητής από το μηχάνημα δεν είναι όμως πάντα και αναγκαία συμβατή με τις συνήθεις εκφράσεις που είναι γενικά

αποδεκτές σε τυπικό μαθηματικό περιβάλλον. Έτσι, λίγοι μόνο μαθητές μπορούν να μετασχηματίσουν αυτό που παίρνουν ως ανταπόκριση του μηχανήματος στις ενέργειές τους σε μια συνήθη σε περιβάλλον 'χαρτί-μολύβι' έκφραση (Lagrange, 1999). Αυτό είναι κάτι που παρατηρήθηκε και στα πλαίσια της παρούσας έρευνας. Οι μαθητές, ακόμα και αυτοί που είχαν κατορθώσει να διατυπώσουν έναν κανόνα, είχαν πολύ μεγάλες δυσκολίες, αξεπέραστες σε αρκετές περιπτώσεις, να μεταφέρουν την εμπειρία που αποκόμισαν από τη δραστηριότητα σε περιβάλλον 'χαρτί – μολύβι', με την έννοια ότι δεν ήταν σε θέση να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους. Μόνο μετά από παρέμβαση και με την καθοδήγηση του ερευνητή ή των παρατηρητών πέτυχαν οι 6 από τις 18 ομάδες να κάνουν μια απόδειξη. Οι δυσκολίες σχετίζονται κυρίως με την πρώτη και τη δεύτερη φάση του κανόνα που διατυπώθηκε. Οι μαθητές απέτυχαν στην πλειονότητά τους να εκφράσουν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων ως συνάρτηση του πλήθους τους. Η αποτυχία αυτή μπορεί να αναλυθεί σε δυο επιμέρους συνιστώσες. Η πρώτη είναι η δυσκολία υπολογισμού του εμβαδού του τυχαίου ορθογωνίου, που με τη σειρά της αναλύεται στην δυσκολία υπολογισμού της βάσης των ορθογωνίων και την αδυναμία υπολογισμού του ύψους τους, καθώς και τη δυσκολία στην άθροιση των εμβαδών. Η δεύτερη πηγάζει από την εκτίμηση μερικών μαθητών ότι τα ορθογώνια είναι ισεμβαδικά. Όσοι μαθητές κατόρθωσαν τελικά να κατασκευάσουν τον τύπο της ακολουθίας ήταν σε θέση να υπολογίσουν και το όριό της.

Η πεποίθηση ότι τα ορθογώνια είναι ίσα

Μια εντυπωσιακή παρατήρηση είναι ότι υπήρξαν μαθητές που ανέπτυξαν την αντίληψη ότι τα ορθογώνια που σχηματίζονται για την κάλυψη του χωρίου είναι ισεμβαδικά. Το επεισόδιο που ακολουθεί διαδραματίζεται κατά την προσπάθεια δυο μαθητών να υπολογίσουν το εμβαδόν των ορθογωνίων.

Β: Αυτό εδώ πέρα το 72 είναι το άθροισμα των ορθογωνίων.
Η: Ναι.
Β: Οπότε αν το διαιρέσουμε με το 5 θα βρούμε το εμβαδόν του ενός ορθογωνίου. Κατάλαβες;
Η: Ναι.

Επεισόδιο 29: Ο μερισμός του συνολικού εμβαδού

Οι μαθητές έχουν επιλέξει ν=5 και με τη βοήθεια της οπτικής αναπαράστασης που παρατηρούν στην οθόνη προσπαθούν να κατανοήσουν ποιος είναι ο κατάλληλος μηχανισμός για τον υπολογισμό του εμβαδού κάθε ορθογωνίου. Το εντυπωσιακό είναι ότι τελικά εκτελούν μια διαίρεση μερισμού χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους ότι τα αντικείμενα-ορθογώνια προφανώς δεν είναι ίσα, κάτι που είναι εμφανές από την παρατήρηση του σχήματος. Κάτι τέτοιο θα μπορούσαμε πιθανόν να το αναμένουμε από μικρά παιδιά αλλά όχι και από μαθητές της τρίτης τάξης του Λυκείου. Όμως 'τα αρχικά διδακτικά μοντέλα φαίνονται να ριζώνουν τόσο βαθιά στο νου του μαθητή, ώστε συνεχίζουν να ασκούν έναν ασυνείδητο έλεγχο πάνω στη νοητική του συμπεριφορά ακόμα και αφού ο μαθητής αποκτήσει τυπικές μαθηματικές έννοιες που είναι σωστές και στηρίζονται σε γερές βάσεις.' (Fischbein et al, 1999). Μια τέτοια περίπτωση παρατηρείται στην περίπτωση των μαθητών του επεισοδίου. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι η πράξη που αντιστοιχεί στον μερισμό ενός συνόλου είναι η διαίρεση. Έτσι αφού γνωρίζουν το συνολικό εμβαδό και θέλουν να υπολογίσουν το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου αποφασίζουν να κάνουν διαίρεση. Το άδηλο μοντέλο υποβάλλει όμως την αντίληψη ότι τα αποτελέσματα μιας ενέργειας μερισμού με διαίρεση είναι ίσα. Έτσι η απόφασή τους για μερισμό της επιφάνειας τους υποχρεώνει στην αποδοχή της ισότητας των εμβαδών των ορθογωνίων.

Μια παρόμοια αντίληψη φαίνεται ότι αναπτύσσουν και δυο συμμαθήτριές τους στην προσπάθειά τους να διατυπώσουν τον κανόνα που τους ζητείται:

Ε: Και ύστερα;
Δ: Θα προσθέσουμε τα εμβαδά.
Ε: Ωραία.
Δ: Άρα θα είναι ν επί το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου.
Ε: Γιατί; Είναι ίδια τα ορθογώνια; Είναι ίσα;
Δ: Όχι. Αλλά θα είναι επί $f(x)$. Κάτι σαν μεταβλητή.

Επεισόδιο 30: Τα ορθογώνια είναι ισεμβαδικά

Είναι φανερό ότι η Δ ξεκινώντας από το μοντέλο του πολλαπλασιασμού ως επαναληπτικής πρόσθεσης έχει οδηγηθεί στην αντίληψη ότι η πρόσθεση ομοειδών αντικειμένων ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό ενός από αυτά με το πλήθος τους. Η υιοθέτηση αυτής της αντίληψης όμως επιβάλλει την άτυπη παραδοχή της ισότητας των εμβαδών. Η παρέμβαση του ερευνητή της υπενθυμίζει επίσης την απαίτηση του μοντέλου για ισότητα των αντικειμένων. Έτσι επιχειρεί να εισάγει μια μεταβλητή, την

τιμή f(x), που θα την βοηθήσει να ξεπεράσει την αντίφαση μεταξύ της απαίτησης του μοντέλου για ίσα εμβαδά και της εποπτείας της ανισότητας των εμβαδών.

Ο υπολογισμός του εμβαδού του τυχαίου ορθογωνίου

Ακριβώς ο υπολογισμός του εμβαδού των ορθογωνίων αποδείχθηκε ότι ήταν το σημαντικότερο πρόβλημα που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην προσπάθεια που κατέβαλαν να μεταφέρουν τις παρατηρήσεις τους και τα συμπεράσματά τους σε περιβάλλον 'χαρτί-μολύβι'. Το πρόβλημα εστιάζεται σε δυο σημεία: τη δυσκολία υπολογισμού της βάσης των ορθογωνίων και τη δυσκολία υπολογισμού του ύψους τους. Όσοι υπολόγισαν το εμβαδόν του τυχαίου ορθογωνίου αντιμετώπισαν ένα νέο πρόβλημα. Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων απαιτείται η γνώση του αθροίσματος των τετραγώνων των ν πρώτων φυσικών. Ο τύπος αυτός δόθηκε στους μαθητές. Έτσι στο σημείο αυτό τα προβλήματα δεν ήταν σοβαρά.

Ο υπολογισμός της βάσης

Οι μαθητές αντιμετώπισαν σοβαρό πρόβλημα στον υπολογισμό της βάσης των ορθογωνίων, δηλαδή στον υπολογισμό του μήκους των διαστημάτων που ορίζει η διαμέριση. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις χρειάστηκε η παρέμβαση του ερευνητή ή των παρατηρητών. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο επεισόδιο:

Ε: Μπορούμε να βρούμε πόση είναι η βάση;
Ζ: Θα είναι ένα… κόμμα… κάτι…
Ε: Πως θα το βρούμε όμως; [Αδυνατούν να προχωρήσουν]. Για να δούμε. Εδώ τι έχουμε κάνει; Έχουμε χωρίσει το διάστημα [0,10] σε πόσα ίσα κομμάτια;
Δ: Σε 7. Να τα χωρίσουμε σε ζυγό αριθμό για να είναι πιο εύκολο;
Ζ: Ωραία.
Δ: Βάλε 10. [Η μαθήτρια Ζ χειρίζεται τον υπολογιστή]. Ω! Είναι 1. Είναι 1.
Ε: Καλά λοιπόν. Αν τα ορθογώνια είναι 10 είναι εύκολο.
Δ: Και το 20. Όλα τα πολλαπλάσια του 10.
Ε: Εντάξει. Αν όμως είναι 7 που είχατε βάλει πριν;
Ζ: Είναι 1 και κάτι.
Δ: Αυτό το κάτι πόσο είναι; [Και πάλι αδυνατούν να προχωρήσουν].
Ε: Μισό λεπτό. Πόσο είναι αυτό το μήκος; (Δείχνει στην οθόνη το διάστημα [0,10]).
Ζ: 10.
Ε: Σε πόσα κομμάτια το χωρίσατε;

Ζ: Σε 7.
Ε: Πόσο είναι λοιπόν κάθε κομμάτι;
Δ: 10/7. Είναι 10/7.
Ε: Ωραία. Ας πούμε τώρα ότι έχουμε πάρει ν ορθογώνια. Πόση είναι η βάση;
Ζ: 10/ν.

Επεισόδιο 31: Η βάση των ορθογωνίων είναι 10/ν

Στο επεισόδιο αυτό είναι εμφανής η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθήτριες να υπολογίσουν τη βάση των ορθογωνίων παρά το ότι ξεκινούν κάνοντας μια σωστή κίνηση. Αποφασίζουν να εξετάσουν πρώτα τι συμβαίνει σε μια ειδική περίπτωση και στη συνέχεια να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους. Αυτή η στρατηγική, από το ειδικό στο γενικό, είναι συνήθως σε ανάλογες καταστάσεις αποδοτική. Έχοντας όμως επιλέξει αρχικά έναν δύσκολο για την περίσταση αριθμό, τον αριθμό 7, αποφασίζουν να μεταβάλλουν την επιλογή τους ώστε να οδηγηθούν σε μια πιο απλή κατάσταση. Επιλέγουν λοιπόν τον αριθμό 10, οπότε παρατηρώντας την οθόνη αντιλαμβάνονται άμεσα ότι το μήκος της βάσης κάθε ορθογωνίου είναι 1. Και πάλι όμως μόνο μετά από την παρέμβαση του ερευνητή καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση των 7 ορθογωνίων η βάση καθενός είναι 10/7 και, στη συνέχεια, οδηγούνται στη γενίκευση για τυχαίο πλήθος ορθογωνίων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και μια άλλη προσέγγιση του θέματος από μια ομάδα μαθητών όταν και αυτοί με τη σειρά τους προσπαθούν να υπολογίσουν το μήκος της βάσης κάθε ορθογωνίου.

Δ: Χωρίζουμε το χωρίο σε πολύ μικρά κομματάκια.
Π: Μπράβο! Και τα κομματάκια αυτά τι εμβαδόν έχουν κάθε φορά;
Α: Το χωρίζουμε σε τόσο μικρά κομματάκια ώστε να θεωρείται ευθεία κάθε κομματάκι;
Π: Και πόσο είναι το πλάτος τους;
Δ: Απειροελάχιστο.
Π: Μισό λεπτό. Ας πούμε ότι το χωρίζω σε ν κομμάτια. Ας πούμε σε 100 κομμάτια.
Α: Ένα.
Π: Στάσου. Το [0,10] είναι το διάστημά μας. Πόσο είναι το μήκος κάθε κομματιού;
Α: Το [0,10] σε 100; 0,1 είναι.

Επεισόδιο 32: Στις αρχές του Απειροστικού Λογισμού

Στο επεισόδιο αυτό είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον ότι οι μαθητές έχουν οδηγηθεί σε μια προσέγγιση του θέματος χαρακτηριστική μιας φάσης της εξέλιξης του

απειροστικού λογισμού, της γενίκευσης που επιχειρεί ο Stevin στις μεθόδους του Αρχιμήδη. Κυριαρχεί η αντίληψή τους ότι αν καλύψουν το χωρίο από πολύ μικρά ορθογώνια, τόσο μικρά '… *ώστε να θεωρείται ευθεία κάθε κομματάκι*', θα μπορέσουν αθροίζοντάς τα να υπολογίσουν το εμβαδόν του. Η χρήση του ρήματος '*θεωρείται*' από τους μαθητές δεν είναι τυχαία. Αντιλαμβάνονται σαφώς ότι δεν κατασκευάζουν ευθύγραμμα τμήματα αλλά ορθογώνια που έχουν κάποια βάση μια και στην ερώτηση που θέτει ο παρατηρητής για το πόσο είναι το πλάτος τους η απάντηση του Δ είναι '*Απειροελάχιστο*'. Δέχονται δηλαδή την ύπαρξη πλάτους έστω και αμελητέου. Στη συνέχεια, με την άμεση καθοδήγηση του παρατηρητή, μπαίνουν στη διαδικασία προσδιορισμού του μήκους της βάσης των ορθογωνίων ακολουθώντας και αυτοί τη στρατηγική από το ειδικό στο γενικό.

⊣ Ο υπολογισμός του ύψους

Μεγάλες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές και στον υπολογισμό του ύψους των ορθογωνίων. Το πρόβλημα εστιάζεται σε δυο παράγοντες. Ποια είναι τα σημεία της διαμέρισης; Σε ποιο από τα δυο άκρα της βάσης πρέπει να υπολογιστεί τι ύψος; Αυτά είναι τα δυο ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει ο λύτης προκειμένου να υπολογίσει το ύψος του ορθογωνίου. Η αδυναμία απάντησης στα ερωτήματα αυτά είναι η αιτία αποτυχίας των μαθητών στο συγκεκριμένο έργο. Το επόμενο επεισόδιο, χαρακτηριστικό της δράσης των μαθητών στην προσπάθεια αναζήτησης απάντησης στο δεύτερο ερώτημα, αποτελεί χρονικό συνεχές με το επεισόδιο 31:

> *Ζ: Και το ύψος θα είναι…*
> *Δ: Το f(10/ν). Όχι.*
> *Ζ: Το 10 είναι εδώ* (δείχνει στην οθόνη το δεξί άκρο του [9,10]). *Αν πάμε εδώ* (δείχνει το τελευταίο διάστημα της διαμέρισης) *είναι αυτό το σημείο* (δείχνει το αριστερό άκρο του διαστήματος). *Το ύψος είναι το f αυτού του σημείου.*

Επεισόδιο 33: Που να υπολογίσουμε το ύψος;

Στο επεισόδιο αυτό οι δυο μαθήτριες προσπαθούν να υπολογίσουν το ύψος ενός ορθογωνίου. Βρίσκονται ακόμα στο στάδιο της διερεύνησης. Στη φάση παρατήρησης της κατάστασης και της προσπάθειας διατύπωσης μιας εικασίας. Παρατηρούν και μελετούν λοιπόν το τι συμβαίνει σε μια ειδική περίπτωση για το κατώτερο άθροισμα. Επιλέγουν το τελευταίο ορθογώνιο, αυτό που έχει βάση το διάστημα [9,10]. Έχει προηγηθεί ο υπολογισμός του μήκους της βάσης κάθε ορθογωνίου. Η Δ θεωρώντας

ότι πρέπει να αξιοποιηθεί το στοιχείο αυτό διατυπώνει την εικασία ότι το ύψος είναι f(10/ν). Είναι φανερό ότι οι δυο μαθήτριες έχουν κατανοήσει ότι το ύψος ισούται με μια τιμή της συνάρτησης f. Η Δ προτείνει την τιμή f(10/ν) αν και αντιλαμβάνεται ότι αυτό είναι λανθασμένο. Αντιλαμβάνεται ότι το λάθος βρίσκεται στην επιλογή του 10/ν, μια και αυτό προσδιορίστηκε ως το μήκος της βάσης και όχι ως σημείο της διαμέρισης δηλαδή σημείο του άξονα των τετμημένων, και όχι στο ότι το ύψος είναι τιμή της συνάρτησης όπως με ξεκάθαρο τρόπο προτείνει η Ζ ('…*Το ύψος είναι το f αυτού του σημείου*'). Το πρόβλημά τους είναι να βρουν το κατάλληλο σημείο. Η Ζ αποφασίζει να αξιοποιήσει τις δυνατότητες που της προσφέρει η οπτικοποίηση του προβλήματος, η γεωμετρική εποπτεία που έχει αναπτύξει. Εστιάζει το ενδιαφέρον της αρχικά στον άξονα των τετμημένων. Απομονώνει το διάστημα [9,10] που είναι αυτό που την ενδιαφέρει. Στη συνέχεια το ενδιαφέρον της στρέφεται στο ορθογώνιο. Με τη βοήθεια της οπτικής αναπαράστασης προσδιορίζει την πλευρά του ορθογωνίου που ταυτίζεται με το ύψος του. Αποφασίζει έτσι ότι το ύψος του ορθογωνίου είναι η τιμή της συνάρτησης f στο αριστερό άκρο του διαστήματος, δηλαδή στο σημείο 9. Πρόκειται για μια διερεύνηση της οποίας η γραμμή είναι: Ξεκινάω από το ειδικό για να καταλήξω στο γενικό. Προσδιορίζω πρώτα το σημείο στο οποίο θα μετρήσω το ύψος και στη συνέχεια το υπολογίζω. Το επόμενο βήμα είναι η γενίκευση, κάτι που δεν συμβαίνει στο επεισόδιο 33. Ένα ερώτημα που τίθεται είναι γιατί οι μαθήτριες επέλεξαν το τελευταίο ορθογώνιο και όχι κάποιο άλλο. Μια απάντηση πρέπει να είναι ότι θεώρησαν πιο εύκολο το χειρισμό του τελευταίου ορθογωνίου αφού γνώριζαν την τελική πλευρά του. Από μόνη της όμως η απάντηση αυτή δεν αρκεί γιατί αφού έχουν διαμερίσει το διάστημα [0,10] σε δέκα ισομήκη διαστήματα με απλή παρατήρηση της οθόνης ήταν σε θέση να γνωρίζουν όλα τα σημεία της. Επομένως θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε από τα ορθογώνια ως παράδειγμα στη διερεύνησή τους. Γιατί λοιπόν επέλεξαν το τελευταίο και όχι κάποιο άλλο; Απάντηση μπορεί να μας δώσει η ανάλυση του επεισοδίου 30 στο οποίο φάνηκε ότι οι μαθήτριες θεωρούν πως όλα τα ορθογώνια μπορούν να αντιπροσωπευθούν από οποιοδήποτε από αυτά. Δηλαδή οποιοδήποτε από τα ορθογώνια συμπεριφέρεται ως τυχαίο. Έτσι επιλέγουν το τελευταίο αφού μπορούν να το χειριστούν πιο εύκολα από τα άλλα και μπορεί να τα αντιπροσωπεύσει χωρίς κανένα πρόβλημα.

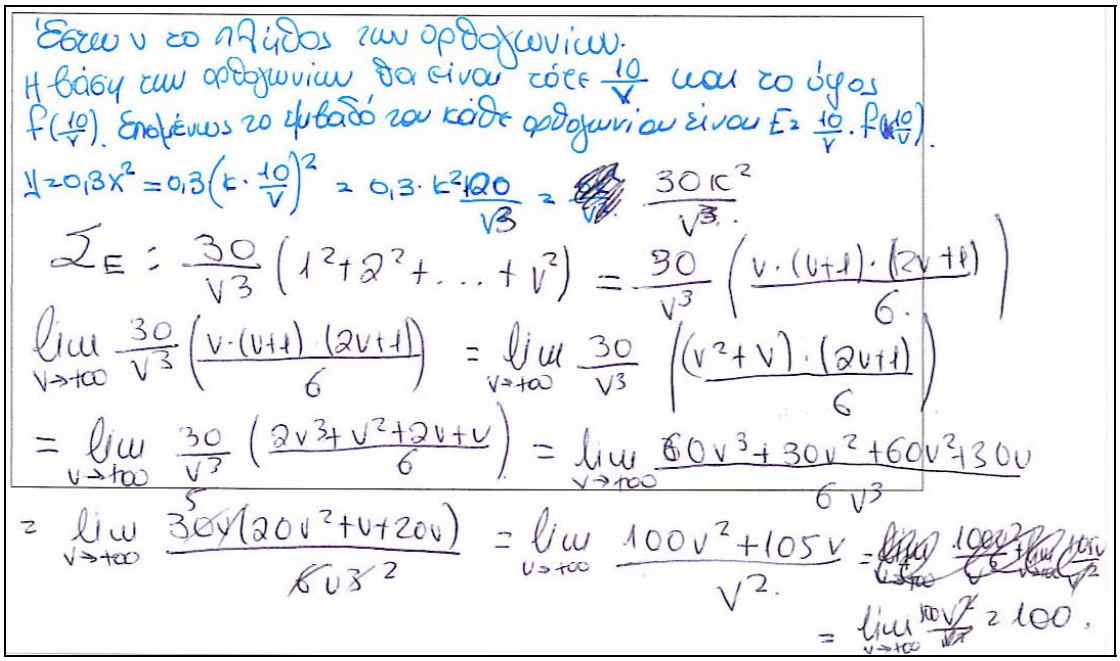
Το επόμενο πρόβλημα που έπρεπε να αντιμετωπιστεί ήταν ο υπολογισμός του ύψους του τυχαίου ορθογωνίου για μια τυχαία διαμέριση. Η καρδιά του προβλήματος είναι και πάλι η δυσκολία στον υπολογισμό της βάσης μια και στην πραγματικότητα ο πρώτος παράγοντας που δημιουργούσε τις δυσκολίες στον υπολογισμό του ύψους ήταν ο προσδιορισμός των σημείων της διαμέρισης. Χαρακτηριστικό του τρόπου που αντιμετώπισαν το θέμα αυτό οι μαθήτριες της προηγούμενης ομάδας, αλλά και οι μαθητές σχεδόν όλων των άλλων ομάδων που κατόρθωσαν να φτάσουν στο σημείο αυτό, είναι το επόμενο επεισόδιο:

Ε: Από πού να αρχίσουμε να υπολογίζουμε τα σημεία;
Ζ: Από το μηδέν. Το πρώτο είναι το μηδέν.
Ε: Το επόμενο ποιο θα είναι;
Δ: Το 10/ν;
Ε: Ναι. Το 10/ν. Δείξτε μου ποιο είναι το σημείο αυτό. (Δείχνουν και οι δυο μαζί το δεξιό άκρο του πρώτου διαστήματος). *Ωραία. Το επόμενο σημείο ποιο θα είναι;*
Ζ: Το 10/ν +1. Λάθος. Όχι συν 1 (σκέφτονται για λίγο χωρίς αποτέλεσμα)
Ε: Πόσο είναι το μήκος κάθε διαστήματος;
Ζ: Ένα.
Ε: Καλά. Ένα είναι εδώ, σε αυτό που βλέπουμε. Γενικά;
Ζ: Να βάλουμε ένα άλλο ν;
Δ: Το 100.
Ζ: Όχι, το 7 να βάλουμε ξανά. (Χειρίζεται τον Η/Υ).
Ε: Αυτό πόσο είναι; (Δείχνει στην οθόνη το πρώτο διάστημα)
Ζ: 10/7.
Ε: Γενικά;
Ζ: 10/ν.
Δ: Ναι. Σωστά. 10/ν.
Ε: Το επόμενο πόσο είναι;
Ζ: 10/ν.
Δ: 10/ν δεν θα είναι και αυτό;
Ε: Άρα ποιο θα είναι το επόμενο σημείο;
Δ: Το 2 επί 10/ν.
Ζ: Άρα λοιπόν θα είναι ν επί 10/ν;

Επεισόδιο 34: Ο κανόνας για τα σημεία της διαμέρισης

Το κύριο χαρακτηριστικό που παρατηρείται στο επεισόδιο είναι η δυσκολία των μαθητριών να προσδιορίσουν τα σημεία της διαμέρισης. Μόνο μετά από λεπτομερή καθοδήγηση του ερευνητή αρχίζουν να κατανοούν τη διαδικασία υπολογισμού χωρίς όμως τελικά να τον ολοκληρώσουν. Η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετώπισαν ήταν η δυσκολία αλλαγής πλαισίου μεταξύ ειδικού και γενικού. Η προσήλωσή τους στην

παρατήρηση των δεδομένων που εμφανίζονται στην οθόνη περιόρισε τη δυνατότητά τους να γενικεύσουν. Ενώ το θέμα της συζήτησης με τον ερευνητή είναι η γενική περίπτωση παραμένουν προσηλωμένες στην ειδική περίπτωση ν=10. Για να μπορέσουν να προχωρήσουν πρέπει να επαναλάβουν τη διαδικασία γενίκευσης που είχε προηγηθεί κατά την προσπάθεια υπολογισμού της βάσης. Αλλά αποτυγχάνουν στον επιτυχή προσδιορισμό του τελευταίου σημείου (*'Άρα λοιπόν θα είναι ν επί 10/ν;'*). Η αποτυχία στον προσδιορισμό του τελευταίου κυρίως σημείου ήταν κοινό χαρακτηριστικό των διερευνήσεων όλων σχεδόν των ομάδων και βέβαια επηρέασε τον υπολογισμό του ύψους του τελευταίου ορθογωνίου όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα στην οποία παρουσιάζεται η προσπάθεια απόδειξης στην περίπτωση της ακολουθίας κατώτερων αθροισμάτων από μια ομάδα του δεύτερου σχολείου.



Εικόνα 18: Το λάθος στον υπολογισμό του ύψους του τελευταίου ορθογωνίου

Η μελέτη των γραφομένων στην εικόνα 18 αποκαλύπτει ότι και οι μαθητές της ομάδας αυτής βρίσκονται σε σύγχυση σε σχέση με την κατάσταση. Αρχικά θεωρούν ότι όλα τα ορθογώνια έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος, δηλαδή είναι ισεμβαδικά (*'… Η βάση των ορθογωνίων θα είναι 10/ν και το ύψος f(10/ν)'*). Στη συνέχεια, όταν επιχειρούν να γράψουν το εμβαδόν του τυχαίου ορθογωνίου μεταβάλλουν την άποψή τους (*'… Έτσι το εμβαδό του κάθε ορθογωνίου είναι* $\mathrm{E} = \frac{10}{\nu} \cdot f\left(\kappa \cdot \frac{10}{\nu}\right)$*'*). Δεν

υπάρχουν στοιχεία για τον λόγο αυτής της αλλαγής. Μια πιθανή ερμηνεία μπορεί να είναι η παρέμβαση του ερευνητή ή του παρατηρητή. Μια άλλη μπορεί να είναι ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν την αντίφαση μεταξύ της θεώρησής τους ότι τα ορθογώνια είναι ισεμβαδικά και της αντίληψης ότι είναι άνισα που επιβάλλει η γεωμετρική εποπτεία. Όποια και αν είναι η ερμηνεία γεγονός παραμένει ότι ο υπολογισμός του ύψους του τελευταίου ορθογωνίου είναι λανθασμένος. Το τελευταίο εσωτερικό σημείο της διαμέρισης είναι το $(\nu-1)\frac{10}{\nu}$ και όχι το $\nu\cdot\frac{10}{\nu}$, όπως θεωρούν οι μαθητές. Έτσι το ύψος του τελευταίου ορθογώνιου είναι $f\left((\nu-1)\frac{10}{\nu}\right)$ και όχι $f\left(\nu\cdot\frac{10}{\nu}\right)$.

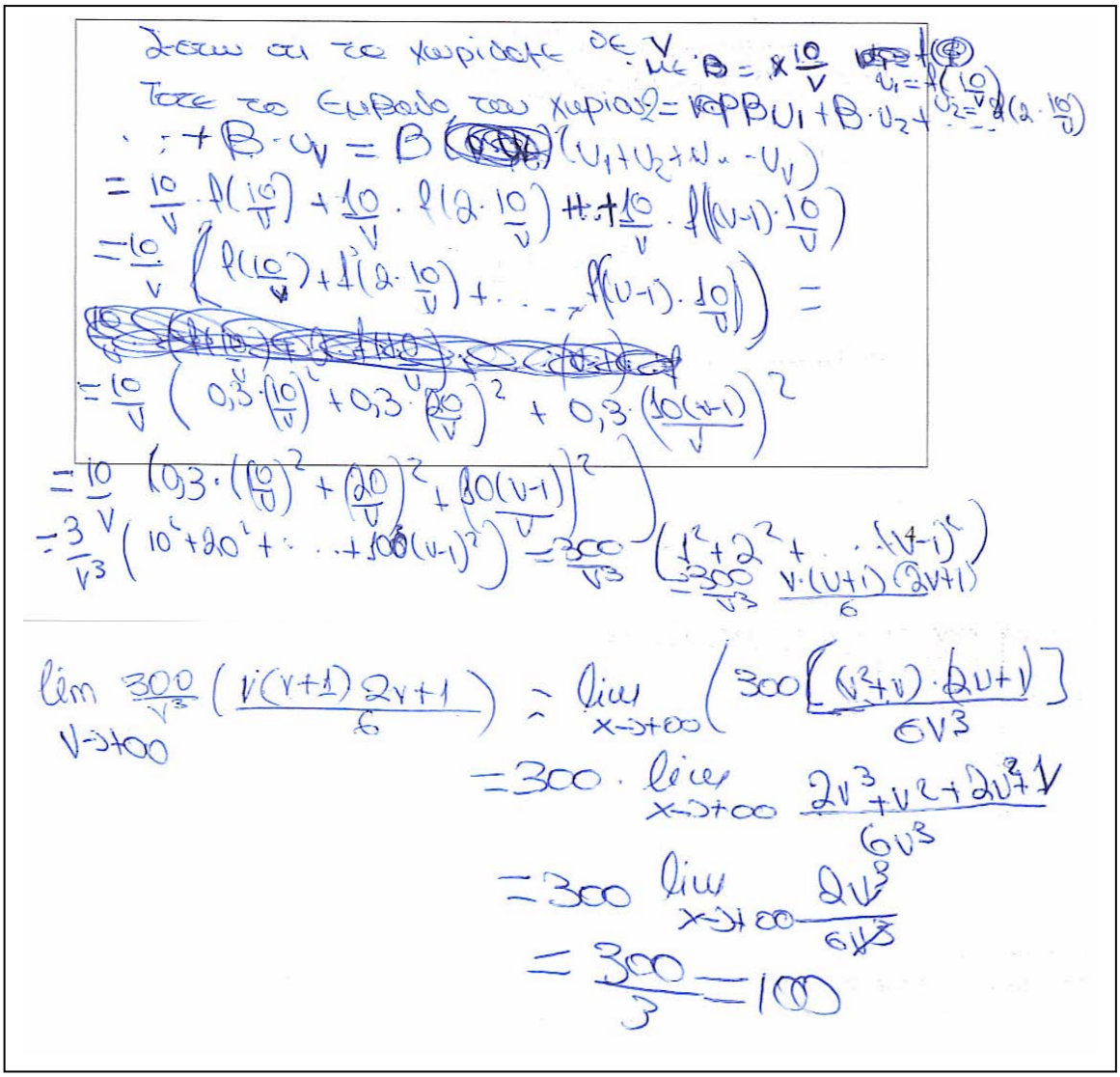
Γενικά η διαδικασία υπολογισμού του ύψους του τυχαίου ορθογωνίου αποδείχτηκε ότι ήταν εξαιρετικά δύσκολο έργο για τους μαθητές, όπως γίνεται φανερό στο παρακάτω επεισόδιο:

Ζ: Μπορούμε να γράψουμε το εμβαδό ενός τυχαίου ορθογωνίου;
Δ: Θα είναι αυτό (δείχνει το $f\left((\nu-1)\frac{10}{\nu}\right)$*) επί κ; Όχι.*
Ζ: Όχι.
Ε: Ας πάρουμε ένα τυχαίο από αυτά τα ορθογώνια. Ας πούμε ότι είναι το κ στη σειρά ορθογώνιο. Πόσο θα είναι το ύψος του;
Δ: Αυτό (δείχνει στην οθόνη).
Ε: Δηλαδή πόσο είναι;
Ζ: Αυτό (δείχνει στο φύλλο εργασίας το $f\left((\nu-1)\frac{10}{\nu}\right)$*).*
Ε: Για ν;
Δ: Για κ.
Ζ: Άρα άμα θέλουμε το εμβαδό του….
Ε: Το ύψος του τυχαίου, του κ-στου, ορθογώνιου μπορούμε να το γράψουμε;
Ζ: (γράφει) f του κ μείον 1 επί 10 προς κ.
Ε: Προς κ;
Δ και Ζ: (ταυτόχρονα) Όχι.
Δ: Επί 10/ν. Άρα αλλάζει μόνο αυτό (δείχνειστο φύλλο εργασίας στον τύπο που έγραψαν το κ-1).

Επεισόδιο 35: Ο κανόνας για τον υπολογισμό του ύψους του τυχαίου ορθογωνίου

Η εξέταση των διαλόγων στο επεισόδιο φανερώνει ότι χωρίς την καθοδήγηση του ερευνητή πολύ δύσκολα οι μαθήτριες θα κατόρθωναν να φτάσουν στον σωστό υπολογισμό του ύψους. Υπήρξαν όμως ομάδες που κατόρθωσαν να κάνουν μια

σωστή απόδειξη, όπως η ομάδα που διατύπωσε τον κανόνα της εικόνας 17. Η απόδειξη που έκανε η ομάδα αυτή φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 19: Η απόδειξη

⊣ Η συνεργασία ⊢

Μια σημαντική πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας που μπορεί να αξιοποιηθεί με τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών είναι η συνεργασία. Κατά τους Sutherland & Balacheff (1999) η σκέψη αναδύεται μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση και την συνεργατική εργασία. Η συνεργατική μάθηση είναι δηλαδή ο ένας από τους δυο πόλους ανάδυσης της σκέψης ενός μαθητή. Αναπτύσσεται στα πλαίσια μιας κοινωνικής δομής η οποία στην περίπτωση της παρούσας έρευνας είναι ο ομάδα που

εντάσσεται στο περιβάλλον της τάξης. Έτσι παρατηρούνται αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της ίδιας της ομάδας, μεταξύ των ομάδων και μεταξύ των ομάδων και του διδάσκοντα.

Η αλληλεπίδραση στο πλαίσιο της ομάδας

Η δυνατότητα παρατήρησης της συμπεριφοράς των μαθητών στα πλαίσια της ομάδας περιορίστηκε όπως είναι φυσικό στις ομάδες εκείνες για τις οποίες υπάρχει καταγεγραμμένο οπτικοακουστικό υλικό. Δεν παρατηρήθηκε διαφορά ως προς την αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών κάθε ομάδας ανάμεσα στις ομάδες μαθητών του πρώτου σχολείου, του οποίου οι μαθητές έχουν μεγάλη εμπειρία σε αυτής της μορφής δραστηριότητες και επανειλημμένα έχουν στο παρελθόν εργαστεί σε ομάδες, και στις ομάδες των άλλων δυο σχολείων, οι μαθητές των οποίων για πρώτη φορά εντάχθηκαν σε μια τέτοια δραστηριότητα και δεν είχαν εμπειρία συνεργατικής διαδικασίας.

- **Οι ρόλοι των μελών της ομάδας**

Οι μαθητές αφέθηκαν να καθορίσουν μόνοι τους, χωρίς την παρέμβαση ή την παραίνεση του ερευνητή ή των παρατηρητών, τους ρόλους τους. Έτσι ο ένας από τους μαθητές ανέλαβε το χειρισμό του υπολογιστή και ο άλλος τη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας. Οι μαθητές δεν φαίνεται ότι θεωρούσαν ότι ο χειριστής του υπολογιστή έχει κυρίαρχο ρόλο στην ομάδα σε αντίθεση με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Κυνηγός, 2007) σύμφωνα με τα οποία ο «πληκτρολογητής» προσπαθεί να προστατεύσει τη θέση του που θεωρείται δεσπόζουσα και ηγετική. Ο παράγοντας που αξιολογήθηκε από τους ίδιους τους μαθητές ως σημαντικός στην έρευνα αυτή ήταν η παραγωγή μαθηματικού νοήματος, όπως φαίνεται και στο επόμενο επεισόδιο:

Δ: Εγώ λέω ότι είναι f του κ επί 10/ν. Και αυτό να το βάλουμε στο x.
Ε: Σωστά. Έτσι είναι.
Ζ: Α! Καλά το έγραψες. Μπράβο ρε Μιμή! Γι' αυτό σε αγαπάω.

Επεισόδιο 36: Το κριτήριο αναγνώρισης είναι η παραγωγή νοημάτων

Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα τη δεύτερη ημέρα της διαδικασίας κατά την προσπάθεια υπολογισμού του ύψους των ορθογωνίων του άνω αθροίσματος. Η Ζ χειρίζεται τον υπολογιστή και η Δ συμπληρώνει το φύλλο εργασίας . Οι μαθήτριες

έχουν αλλάξει ρόλους σε σχέση με την πρώτη ημέρα. Η μαθήτρια Δ συμπληρώνει το φύλλο εργασίας και η Ζ χειρίζεται τον υπολογιστή. Στο επεισόδιο που εξετάζεται η Δ δίνει λύση στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν και η Ζ την επιβραβεύει με την επιδοκιμασία της. Η αναγνώριση της συμβολής στην προώθηση της αποτελεσματικής δράσης δεν έχει να κάνει με τον ρόλο που έχει αναλάβει κάθε μαθήτρια αλλά με το έργο που παράγει.

Κάτω από το πρίσμα αυτό η μελέτη των επεισοδίων 9, 10, 15 και 29 ως προς τη σημαντικότητα των δυο ρόλων στην παραγωγή νοημάτων από τη μια πλευρά και στην κατάκτηση δεσπόζουσας θέσης μέσα στην ομάδα από την άλλη αποκαλύπτει ότι ο ίδιος ο ρόλος δεν συμβάλει στο ένα ούτε και στο άλλο. Στα επεισόδια 9 και 10 ο μαθητής Β αδυνατεί να παρακολουθήσει την εξέλιξη της σκέψης του Η ο οποίος παράγει νοήματα και προχωράει τη διαδικασία ουσιαστικά μόνος του. Ο Β εκφράζει την αδυναμία του αυτή άμεσα στο επεισόδιο 9 (*'Γιατί ρε; Δεν κατάλαβα τι κάνεις'*) και έμμεσα στο επεισόδιο 10 (*'Κάτσε ρε! Περίμενε!'*) όταν καθυστερεί τον Η γιατί και πάλι αδυνατεί να ακολουθήσει τους ρυθμούς του και ζητάει χρόνο για να προλάβει να σκεφτεί τις ενέργειές του. Αντίθετα στα επεισόδια 15 και 29 ο Β είναι αυτός που κατευθύνει τη διαδικασία και καθορίζει το ρυθμό και την παραγωγή νοημάτων ενώ ο Η δυσκολεύεται να ον παρακολουθήσει. *'Αυτό έχουμε κάνει τώρα;'* απορεί ο Η στο επεισόδιο 15 μετά την ανακεφαλαίωση της δράσης τους που κάνει ο Β, ενώ και στο επεισόδιο 29 ο Β έχει κυρίαρχο ρόλο: *'Οπότε αν το διαιρέσουμε με το 5 θα βρούμε το εμβαδόν του ενός ορθογωνίου. Κατάλαβες;'*. Τα τρία επεισόδια διαδραματίζονται κατά την πρώτη ημέρα. Και στα τρία ο Η είναι ο χειριστής και ο Β συμπληρώνει τα φύλλα εργασίας. Αυτό που παρατηρείται λοιπόν είναι μια σκυταλοδρομία μεταξύ των μαθητών για την παραγωγή νοημάτων και την προώθηση του έργου που τους έχει ανατεθεί. Ο ρόλος του κάθε μαθητή δεν επηρεάζει την δυνατότητά του για παραγωγή νοημάτων, με την έννοια ότι δεν του προσφέρει πρόσθετες αλλά ούτε και του αφαιρεί ευκαιρίες. Ταυτόχρονα δεν επηρεάζει και τη θέση του στην ομάδα.

Η εναλλαγή ρόλων

Αξιοσημείωτο είναι ότι τη δεύτερη ημέρα οι μαθητές με δική τους πρωτοβουλία και χωρίς παρέμβαση του ερευνητή ή των παρατηρητών και αυτή τη φορά άλλαξαν ρόλους. Σε κάποιες ομάδες, όπως στην περίπτωση της ομάδας των επεισοδίων 2 και 3, παρατηρήθηκε εναλλαγή των μαθητών στους δυο ρόλους και κατά τη διάρκεια της

διαδικασίας. Γενικά η εναλλαγή των μαθητών στους ρόλους μπορεί να χαρακτηρισθεί ως ομαλή και χωρίς προβλήματα. Αυτό βέβαια θα πρέπει, όπως φάνηκε παραπάνω να συνδέεται και με την αντίληψή των μαθητών ότι ο ρόλος τους μέσα στην ομάδα δεν τους εξασφαλίζει κυρίαρχη θέση. Δηλαδή ο ρόλος δεν αποτελούσε για τους μαθητές ένα σημαντικό διακύβευμα. Έτσι δεν ένοιωσαν την ανάγκη να προστατεύσουν το ρόλο τους. Ένας άλλος παράγοντας που θα μπορούσε να ερμηνεύσει το αποτέλεσμα αυτό είναι η ηλικιακή ωρίμανση των μαθητών. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα δεν είναι μαθητές του Δημοτικού όπως στην έρευνα του Κυνηγού (2007) ούτε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου όπως στην έρευνα της Τρούκη (2003) τα αποτελέσματα της οποίας κατά τον Κυνηγό (2007) είναι σύμφωνα με τα δικά του. Είναι μαθητές της τρίτης τάξης του Λυκείου. Επομένως διαθέτουν μεγαλύτερη ωριμότητα και μπορούν πολύ πιο εύκολα και ώριμα να εμπλακούν σε καταστάσεις που απαιτούν συνεργασία. Η κυριαρχία στο πλαίσιο της ομάδας δεν σχετίζεται με τον ρόλο που αναλαμβάνει ο μαθητής μέσα σε αυτήν αλλά με την προσωπικότητα και τις δυνατότητές του. Για παράδειγμα στα επεισόδια 2 και 3 παρατηρήθηκε η δράση δυο μαθητριών από το δεύτερο σχολείο. Η Λ είναι μαθήτρια με πληθωρική προσωπικότητα και θεωρείται μια από τις καλύτερες μαθήτριες της τάξης. Η Π είναι μια μαθήτρια χαμηλού προφίλ και θεωρείται μάλλον καλή. Έτσι η θέση της Λ στην ομάδα είναι δεσπόζουσα, όπως φαίνεται στο επεισόδιο 2, λόγω του χαρακτήρα της αλλά και λόγω της παγιωμένης θέσης των μαθητριών στο πλαίσιο της τάξης. Η Λ είναι καλύτερη μαθήτρια και αυτό καθορίζει τις συμπεριφορές τόσο στο πλαίσιο της τάξης όσο και στο εσωτερικό της ομάδας κατά τη διάρκεια της έρευνας. Βέβαια το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρήθηκε στις υπόλοιπες ομάδες, τουλάχιστον όχι τόσο ξεκάθαρα όσο σε αυτή την ομάδα ώστε να αξίζει να καταγραφεί. Αυτό που παρατηρείται κατά τη διάρκεια του επεισοδίου 2 είναι ότι όταν χρειαστεί να γίνει μια διόρθωση (στίχοι 21 και 22 του επεισοδίου) η Λ με μια κίνηση, που φαίνεται να θεωρεί αυτονόητη, και χωρίς καμία αντίδραση από την πλευρά της Π επανακαθορίζει τους ρόλους. Αναλαμβάνει λοιπόν το χειρισμό του μηχανήματος μια και είναι μια κρίσιμη στιγμή που χρειάζονται αποφάσεις και άμεση δράση. Εδώ δεν έχουμε μια ομαλή εναλλαγή ρόλων αλλά εκμετάλλευση από τη μια μαθήτρια της δεσπόζουσας θέσης της στο πλαίσιο της ομάδας.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ ομάδων

Και στην περίπτωση της μελέτης της αλληλεπίδρασης μεταξύ ομάδων, όπως και σε αυτή στο εσωτερικό των ομάδων, τα δεδομένα είναι περιορισμένα. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα είναι ακόμα πιο περιορισμένα γιατί δεν υπάρχουν γενικές καταγραφές της δράσης των ομάδων στους χώρους των εργαστηρίων. Έτσι η μελέτη περιορίστηκε στις περιπτώσεις που παρατηρήθηκαν στις υπάρχουσες καταγραφές της δράσης των ομάδων. Η αλληλεπιδράσεις αυτές έχουν τη μορφή συνεργασίας μεταξύ των μελών των δυο ομάδων με στόχο την παροχή ή λήψη βοήθειας σε κάποιο τεχνικό θέμα, όπως θέματα χειρισμού του μηχανήματος, ή την ανάπτυξη νοημάτων και την προώθηση της εκτέλεσης του έργου. Μια περίπτωση συνεργασίας για λήψη βοήθειας είναι αυτή του επεισοδίου που ακολουθεί.

Π: (Διαβάζει) Στη γραμμή Equation συμπληρώνετε την εξίσωση της παραβολής: $y=0.3x^2$.
Λ: Α! Δεν το πιστεύω. (Γελάνε). Που είναι το y; Κώστα. Κώστα, (απευθύνεται σε συμμαθητή της σε διπλανή ομάδα) που είναι το y;
Κ: Κοίτα ρε τι τραβάμε! Λοιπόν. Να εδώ. Γράψε τώρα 0 κόμμα 3 x.
Λ: Το x; Που είναι το x;
Κ: Εδώ.
Λ: Α, ωραία. Ευχαριστώ.

Επεισόδιο 37: Παροχή βοήθειας από μέλος άλλης ομάδας

Στο επεισόδιο αυτό οι μαθήτριες των επεισοδίων 2 και 3 απευθύνονται σε συμμαθητή τους διπλανής ομάδας ζητώντας του να τις βοηθήσει στον χειρισμό του μηχανήματος. Μια αντίστοιχη περίπτωση είναι αυτή του επεισοδίου που ακολουθεί:

Τ: Παιδιά πως θα γίνει αυτό εδώ; Τι λέει; Τι θα πει εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου; Τι γράφουμε εδώ;
Δ: Πόσο νομίζεις ότι είναι το εμβαδόν του χωρίου και η απόκλιση που έχει αυτό εδώ (δείχνει στην οθόνη) από αυτό που νομίζεις.
Α: Πόσο είναι η διαφορά ρε παιδάκι μου.
Δ: Πόση είναι η διαφορά του εμβαδού του χωρίου από αυτό των ορθογωνίων που έχετε βρει.
Α: Καταλάβατε;
Ν: Όχι.
Α: Ρε παιδάκι μου βάζεις εδώ πέρα (δείχνει τον animation controller) πλήθος ορθογωνίων.
Τ: Το ξέρουμε αυτό.
Α: Πατάς ΟΚ και σου μαυρίζει εδώ (δείχνει την περιοχή του ζητούμενου εμβαδού). Πατάς δεξί κλικ και κάνεις update result box.

Τ: Ναι. Το έχουμε βρει αυτό.
Α: Ωραία. Λοιπόν, και κάνεις τη διαφορά από το 100. Πόσο απέχει από το 100.

Επεισόδιο 38: Παροχή βοήθειας σε θέματα ουσίας

Σε αυτό το επεισόδιο παρατηρείται η συνεργασία των μελών δυο ομάδων του πρώτου σχολείου. Οι μαθήτριες της μιας ομάδας ζητούν τη βοήθεια των συμμαθητών τους μιας ομάδας που δουλεύει σε γειτονικό υπολογιστή για τη συμπλήρωση μιας στήλης ενός πίνακα ερώτησης του φύλλου εργασίας. Το θέμα αυτό δεν είναι απλά ένα διαδικαστικό θέμα σε επίπεδο χειρισμού του μηχανήματος. Είναι ένα θέμα ουσίας στην πορεία της διαδικασίας της διερεύνησης. Με αφορμή τον τρόπο συμπλήρωσης του φύλλου εργασίας οι μαθητές των δυο ομάδων εμπλέκονται σε μια συζήτηση που σχετίζεται με τον πυρήνα της μελετώμενης έννοιας.

Και οι δυο παραπάνω αλληλεπιδράσεις πραγματώνονται για τεχνικούς λόγους ή με αφορμή τεχνικούς λόγους. Μια άλλη περίπτωση συνεργασίας με θέμα την παραγωγή μαθηματικού νοήματος αυτή τη φορά είναι αυτή που γίνεται φανερή από την ανάγνωση των εικόνων 14 και 15. Όπως ήδη αναφέρθηκε η ομοιότητα των δυο κανόνων και το γεγονός ότι οι δυο ομάδες εργάζονταν σε διπλανούς υπολογιστές αποτελούν μια ισχυρότατη ένδειξη ότι οι κανόνες αυτοί αποτελούν προϊόν συνεργασίας των μελών των δυο ομάδων. Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει καταγεγραμμένη καμία πληροφορία για τον τρόπο που πραγματώθηκε η συνεργασία αυτή. Επομένως δεν μπορούμε να αναφερόμαστε με βεβαιότητα σε αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο ομάδων αφού η ομοιότητα των δυο κανόνων μπορεί να είναι και αποτέλεσμα της αντιγραφής από τη μια ομάδας της εργασίας της άλλης.

Η αλληλεπίδραση ομάδας και διδάσκοντος

Αυτό που πρέπει να τονιστεί από την αρχή είναι ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των ομάδων και του διδάσκοντα σε επίπεδο παραγωγής νοημάτων μια και πρόκειται για μονοσήμαντη διαδικασία. Η μοναδική κατεύθυνση στην οποία πραγματώθηκε η αλληλεπίδραση αυτή στη διάρκεια της έρευνας ήταν από την πλευρά του διδάσκοντα προς τους μαθητές με δική του πρωτοβουλία ή μετά από αίτημα των μαθητών. Μια από τις βασικές διαδικασίες αλληλεπίδρασης μεταξύ δασκάλου και μαθητή είναι η σημειολογική διαμεσολάβηση που εμφανίζεται, για παράδειγμα, όταν «η άμεση παρόρμηση του μαθητή να

αντιδράσει σε ένα ερέθισμα παρεμποδίζεται από τη σκόπιμη εισαγωγή κάποιου 'σήματος' από το δάσκαλο» (Bartolini Bussi, 1994, σελ.125). Αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση της αποκάλυψης από τον ερευνητή και τους παρατηρητές της δυνατότητας ελέγχου του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων στις προσεγγίσεις των αποτελεσμάτων των μετρήσεων στο result box (επεισόδιο 5). Η παρέμβαση που επιχειρείται παρέχει σε κάποιους μαθητές τη δυνατότητα να μεταβάλλουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων και να οδηγηθούν μέσα από μια αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία σε μια υψηλότερου επιπέδου αντίληψη των εμπλεκόμενων στη διαδικασία εννοιών. Μια ακόμα στοχευμένη παρέμβαση παρατηρείται στα επεισόδια 30, 31, 34 και 35 στα οποία ο ερευνητής καθοδηγεί πλέον άμεσα τη διαδικασία μια και οι δυο μαθήτριες αδυνατούν να εξάγουν τα αναγκαία συμπεράσματα από τα στοιχεία που έχουν και να γενικεύσουν. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε σε όλες σχεδόν τις ομάδες στο σημείο αυτό. Κρίθηκε λοιπόν απαραίτητη αυτή η παρέμβαση για να μπορέσει να προχωρήσει η διαδικασία. Οι μαθητές βρίσκονται σε ένα πολύ κρίσιμο σημείο, στη φάση της απόδειξης. Η απόδειξη αυτή για τους περισσότερους μαθητές βρίσκεται έξω από τις δυνατότητές τους. Έτσι έχουν την ανάγκη της βοήθειας από τον διδάσκοντα. Σε μερικές περιπτώσεις, όπως στα επεισόδια που μόλις αναφέρθηκαν, ο ερευνητής και οι παρατηρητές έδωσαν αυτή τη βοήθεια χωρίς να τους ζητηθεί. Σε κάποιες άλλες οι μαθητές επικαλέστηκαν τη βοήθεια για λόγους τεχνικούς – χειρισμός του συστήματος – αλλά και ουσιαστικούς. Τέτοια παραδείγματα παρατηρούνται στα παρακάτω επεισόδια.

Β: Κύριε πως κάνουμε update;
Η: Δεξί κλικ πάνω στο … τέτοιο.
Ε: Έχετε επιλέξει τα ορθογώνια; Ωραία. Δεξί κλικ πάνω σε ένα ορθογώνιο και επιλέξτε update.

Επεισόδιο 39: Επίκληση για βοήθεια σε τεχνικά θέματα

Στο επεισόδιο αυτό οι δυο μαθητές δυσκολεύονται στο χειρισμό του λογισμικού και επικαλούνται τη βοήθεια του ερευνητή και των παρατηρητών. Είναι μια περίπτωση επίκλησης βοήθειας που δεν είναι σημαντική για την ίδια τη διαδικασία. Καταδεικνύει όμως το γεγονός ότι τελικά οι μαθητές έχουν την τάση να ζητούν τη βοήθεια του διδάσκοντα στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και όχι να τις αποκρύπτουν. Με την έννοια αυτή θα ήταν δυνατό μια τέτοια στάση να θεωρηθεί ως

αλληλεπίδραση μια και οι μαθητές επικαλούνται τη βοήθεια πιθανότατα για να νοιώσουν πιο ασφαλείς μέσα στη διερευνητική διαδικασία.

Το επόμενο επεισόδιο, με πρωταγωνιστές τους ίδιους μαθητές διαδραματίζεται λίγο αργότερα και αναφέρεται σε πιο ουσιαστικά για τη διερεύνηση θέματα:

Η: Δεν κατάλαβα κάτι ρε συ εδώ τώρα! Λέει τη διαφορά του αθροίσματος από το εμβαδό του χωρίου. Το εμβαδό του χωρίου πόσο είναι; Το ξέρουμε; Αφού το χωρίο είναι το άθροισμα αυτών των εμβαδό συν αυτά τα μικρά κουτάκια (δείχνει στην οθόνη)
Β: Κύριε, να σας ρωτήσουμε κάτι; Καλά, βρήκαμε και κάποια άλλα εδώ πέρα, αλλά λέει εδώ πέρα να … τη διαφορά του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου. Το εμβαδόν του χωρίου; Δηλαδή;
Η: Από όλο το εμβαδόν δηλαδή αυτό εδώ πέρα; (δείχνει το χωρίο στην οθόνη)
Π: Ναι.
Β: Δηλαδή; Αφού δεν ξέρουμε εμείς αυτά τα μικρά!
Π: Προσέξτε. Είναι εκτίμηση της διαφοράς. Εκείνο που θέλουμε να μετρήσουμε ποιο είναι; Το εμβαδό τίνος;
Β: Αυτό εδώ πέρα όλο.
Π: Του χωρίου.
Β: Ναι. Του χωρίου.
Π: Ωραία. Πως το μετράμε; Πως το μετράει το πρόγραμμα; Το χωρίζει σε ορθογώνια.
Η+Β: Ναι.
Π: Κάθε φορά το ορθογώνιο δεν καλύπτει μέχρι πάνω όλη την επιφάνεια. Αφήνει κάτι.
Η: Ναι. Αυτά εδώ τα μικρά.
Β: Τα τριγωνάκια.
Π: Ωραία. Το θέμα λοιπόν είναι το εξής. Εκτίμηση κάνετε δεν κάνετε μέτρηση! Μπορείτε να εκτιμήσετε πόσο είναι όλο το εμβαδόν; Τα ορθογώνια μαζί με αυτό που λείπει.

Επεισόδιο 40: Επίκληση για βοήθεια σε θέμα ουσίας

Στο επεισόδιο αυτό οι μαθητές ζητούν τη βοήθεια του παρατηρητή για κάποιο θέμα ουσίας. Έχουν αρχίσει να μπαίνουν στα πρώτα ουσιαστικά θέματα της διερεύνησης και προσπαθούν να κατανοήσουν το πλαίσιο στο οποίο θα πρέπει να εργαστούν. Δεν έχουν ακόμα καταφέρει να αντιληφθούν πιο είναι το περιεχόμενο της διερεύνησης μια και βρίσκονται στο πρώτο στάδιο της διαδικασίας. Για τον λόγο αυτό και η παρέμβαση του παρατηρητή είναι εκτεταμένη και λεπτομερειακή. Ο παρατηρητής, που είναι και ο διδάσκων καθηγητής της τάξης και γνωρίζει πολύ καλά τους μαθητές του, αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να τους δώσει τον τόνο της διερεύνησης

και αυτό ακριβώς κάνει. Οι μαθητές χρειάζονται βοήθεια για να προσανατολιστούν στο νέο περιβάλλον – αυτός είναι στην πραγματικότητα ο λόγος για τον οποίο ζητούν βοήθεια - και ο διδάσκων αντιδρά θετικά στο αίτημά τους αυτό.

V. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Η χρήση του λογισμικού Autograph δεν δημιούργησε προβλήματα στους μαθητές. Αντίθετα η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από τη χρήση του δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν τα κατάλληλα σχήματα ώστε να επιτύχουν την άρση των παρανοήσεων που συνδέονται με την έννοια του ορίου και να επιτύχουν την εννοιολογική κατανόηση των εννοιών του ορίου και του ορισμένου ολοκληρώματος. Από την πλευρά του ο δάσκαλος των μαθηματικών εντάσσοντας στη γκάμα των εργαλείων του τη χρήση του λογισμικού αποκτά τη δυνατότητα του σχεδιασμού μιας νοηματικής διδασκαλίας της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος με στόχο την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές του.

Συμπεράσματα

Σκοπός της έρευνας ήταν να εξετάσει και να αναδείξει τη φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της τρίτης τάξης του ελληνικού Λυκείου στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να μελετήσει τις δυνατότητες που προσφέρονται από την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από τη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδακτική διαδικασία. Ο φιλόδοξος στόχος ήταν να προτείνει λύσεις στο πρόβλημα της ανεπαρκούς κατανόησης της έννοιας. Όμως η ερμηνεία των στοιχείων που συλλέχτηκαν κατά τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας, και κυρίως η ερμηνεία της συμπεριφοράς των μαθητών και η προσπάθεια περιγραφής της ανέλιξης της σκέψης τους και των νοημάτων που αναπτύσσονται, ενέχει το στοιχείο της προσωπικής εμπλοκής του ερευνητή. Αυτό σημαίνει ότι τα συμπεράσματα της έρευνας δεν αποτελούν αντικειμενικές αλήθειες, κάτι που βέβαια εκτός των άλλων βρίσκεται και έξω από την αντίληψη του ερευνητή για τη φύση της γνώσης, αλλά απλά την άποψη του ερευνητή για τα προβλήματα που αναλύονται.

Η ανάλυση των δεδομένων της ερευνητικής διαδικασίας έγινε κάτω από το πρίσμα της θεωρίας της ενοργανωμένης δράσης. Αυτό σημαίνει ότι σημαντικό μέρος της ανάλυσης της συμπεριφοράς των μαθητών και της δημιουργίας νοημάτων από αυτούς καταλαμβάνει η μελέτη της διαδικασίας ανάδυσης του οργάνου μέσα από τη δημιουργία των κατάλληλων σχημάτων από τους μαθητές, την επανοργάνωσή τους και το μετασχηματισμό τους ώστε να καταστούν αποτελεσματικά στη δημιουργία και

την ανάδυσή του οργάνου. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής και το λογισμικό Autograph σε μια τέτοια θεώρηση αντιμετωπίζονται ως artifact που με την ανάπτυξη από την πλευρά του χρήστη των κατάλληλων σχημάτων θα μετασχηματισθεί σε ένα εργαλείο-όργανο ικανό να του προσδώσει τη δυνατότητα να προσεγγίσει νοηματικά τις μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με το εννοιολογικό πεδίο του ορισμένου ολοκληρώματος. Τα συμπεράσματα της έρευνας συναρτώνται με αυτή τη θεώρηση.

Το πρώτο λοιπόν ζήτημα είναι η δυνατότητα χρήσης των ψηφιακών τεχνολογιών, στη συγκεκριμένη περίπτωση του υπολογιστικού συστήματος και κυρίως του λογισμικού, με στόχο την οικοδόμηση σχημάτων που θα οδηγήσουν στην ανάδυση του οργάνου. Το λογισμικό Autograph 3.0, όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό και από την περιγραφή του, είναι ένα ισχυρό πακέτο διερευνητικού λογισμικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια μεγάλη ποικιλία διερευνητικών διαδικασιών μάθησης σε κάθε σχεδόν τάξη του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος. Ως εργαλείο πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία και την υποστήριξη της νοηματικής μάθησης σε όλα σχεδόν τα μαθηματικά προβλήματα που σχετίζονται με έννοιες της άλγεβρας, του απειροστικού λογισμού και της ανάλυσης, της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Θα μπορούσε κανείς λοιπόν να περιμένει ότι διακρίνεται από δυσκολία στη χρήση του και πολυπλοκότητα των λειτουργιών του, όπως συμβαίνει με αντίστοιχα ψηφιακά αλγεβρικά συστήματα.. Παρατηρήθηκε όμως, και αυτό είναι το πρώτο από τα συμπεράσματα της έρευνας, ότι οι μαθητές μπορούν με αρκετή ευκολία να χειριστούν το λογισμικό ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή όχι εμπειρίας στη χρήση διερευνητικού λογισμικού. Είναι λοιπόν το πακέτο λογισμικού Autograph 3.0 είναι ένα εύχρηστο και ισχυρό διερευνητικό λογισμικό που μπορεί να υποστηρίξει το μαθητή αλλά και τον καθηγητή στην προσπάθεια για εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων.

Το δεύτερο στοιχείο που παρατηρήθηκε είναι ότι ο τρόπος εμπλοκής των μαθητών με το λογισμικό στο πλαίσιο της δραστηριότητας μεταβλήθηκε μετά την επέμβαση του ερευνητή ή των παρατηρητών και την υπόδειξη προς τους μαθητές για τη δυνατότητα μεταβολής του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης των αποτελεσμάτων που εμφανίζονται στο result box. Η επιλογή κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας να μην δοθεί η πληροφορία αυτή στους μαθητές έγινε με στόχο αυτοί να υποχρεωθούν εκ των πραγμάτων να αναζητήσουν μια τέτοια επιλογή στο λογισμικό. Να νοιώσουν δηλαδή την ανάγκη μιας όλο και καλύτερης προσέγγισης

ώστε να αντιληφθούν το περιεχόμενο της έκφρασης «οσοδήποτε κοντά θέλουμε». Η επιλογή αυτή είναι φανερό ότι ήταν ατυχής μια και κανένας μαθητής δεν προσπάθησε αυθόρμητα να μεταβάλλει το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης. Αντίθετα, παρατηρήθηκε το φαινόμενο κάποιοι μαθητές να καταλήξουν σε λανθασμένα συμπεράσματα, όπως ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι ίσο με 100, μια και το υπολογιστικό σύστημα στο οποίο εργάζονταν τους παρείχε τη δυνατότητα να ορίσουν ένα πολύ μεγάλο πλήθος ορθογωνίων (μέχρι και 10000 ορθογώνια) για το οποίο η προσέγγιση του αποτελέσματος της μέτρησης που εμφανίζεται στο result box στην προεπιλεγμένη ρύθμιση ήταν 100. Η πιθανότητα ύπαρξης τόσο ισχυρών υπολογιστικών συστημάτων στο εργαστήριο πληροφορικής ενός σχολείου δεν είχε ληφθεί υπόψη κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας. Σε κάθε περίπτωση, η συμπεριφορά αυτή των μαθητών είναι σύμφωνη με το συμπέρασμα των Sutherland & Balacheff (1999) ότι ο τρόπος που έχει δομηθεί και οργανωθεί η δραστηριότητα έχει σημαντική επίδραση στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τον μικρόκοσμο οι μαθητές. Αυτό που παρατηρήθηκε όμως είναι πως για τους περισσότερους από τους μαθητές ο τρόπος εμπλοκής τους μεταβλήθηκε μετά την παρέμβαση του δασκάλου και την πληροφορία που τους δόθηκε. Άρα και οι σημειολογικές παρεμβάσεις του δασκάλου όπως και ο διαμεσολαβητικός ρόλος του στη διδακτική διαδικασία επηρεάζουν καθοριστικά τη δράση των μαθητών και, κατά συνέπεια, το είδος και τη φύση των σχημάτων που αυτοί οικοδομούν.

Η έννοια του ορίου είναι μια από τις δυσκολότερες και πλέον δυσνόητες έννοιες των μαθηματικών. Η κατανόησή της απαιτεί υψηλό επίπεδο γνώσεων και μεγάλη ωριμότητα από την πλευρά των μαθητών. Το σύνολο των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχε επιτύχει την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο μια και είναι συνεχείς και συχνές οι αναφορές στο πρόβλημα αυτό στη διεθνή βιβλιογραφία (Cornu, 1991; Tall & Vinner, 1981; Tall, 1997; Artigue, 1997a). Οι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν την έννοια και τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτήν σε επίπεδο διαδικασίας (Tall, 2004) αλλά ήταν συχνό το φαινόμενο της ανάπτυξης παρανοήσεων γύρω από αυτήν (Cornu, 1991; Artigue, 1997a). Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίστηκαν σε αρκετά μεγάλο βαθμό όταν οι μαθητές οικοδόμησαν μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με τον υπολογιστή και τη χρήση του λογισμικού Autograph το σχήμα που ονομάστηκε ‘σχήμα προσέγγισης’. Ο υπολογιστής και το λογισμικό μαζί με τα σχήματα χρήσης του και το σχήμα

προσέγγισης που δομήθηκαν από τους μαθητές κατά τη διαδικασία αποτέλεσαν ένα όργανο το οποίο, όποτε αναδύθηκε, αποτέλεσε για τους μαθητές μια σταθερή βάση στήριξης στην προσπάθειά τους για την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορίου. Έτσι ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων σε υπολογιστικό περιβάλλον και η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από τη χρήση του λογισμικού Autograph αποτέλεσαν καθοριστικούς παράγοντες για τη βελτίωση του επιπέδου κατανόησης της έννοιας του ορίου.

Στο γεγονός αυτό συνέβαλε και η κατανόηση του κριτηρίου παρεμβολής. Όπως έχει ήδη αναλυθεί στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων η χρήση του κριτηρίου παρεμβολής γίνεται συνήθως σε αυστηρά διαδικασιακό επίπεδο. Το νοηματικό περιεχόμενο της πρότασης είναι συνήθως ανύπαρκτο. Η χρήση του λογισμικού είχε και στην περίπτωση του κριτηρίου παρεμβολής ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα που περιγράφηκαν παραπάνω για την έννοια του ορίου. Επιπλέον, η εννοιολογική κατανόηση του κριτηρίου και η ενσυνείδητη νοηματική χρήση του αποτέλεσε το έναυσμα για το ξεπέρασμα παρανοήσεων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου, όπως ότι το όριο δεν μπορεί να ταυτίζεται με τιμή της συνάρτησης. Έτσι ένα δευτερεύον συμπέρασμα της έρευνας, που δεν είχε συμπεριληφθεί στα ερωτήματα αλλά προέκυψε τυχαία από την ίδια την έρευνα και την μελέτη των δεδομένων, είναι ότι η ισοσύγκλιση μπορεί να αξιοποιηθεί για την άρση των παρανοήσεων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου.

Αλλά και σε σχέση με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος παρατηρήθηκαν παρόμοιες καταστάσεις. Το επίπεδο κατανόησης της έννοιας ήταν πολύ χαμηλό είτε γιατί οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί την έννοια, όπως κάποιοι μαθητές του σχολείου της Δυτικής Ελλάδας, είτε γιατί όσοι είχαν έλθει σε επαφή με την έννοια ήταν ικανοί και πάλι να την χειριστούν μόνο σε επίπεδο διαδικασίας χωρίς μάλιστα να μπορούν να τη συνδέσουν επαρκώς με το εμβαδό του παραβολικού χωρίου, γεγονός που είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα διαφόρων ερευνών (Orton, 1983; Rasslan & Tall, 2002). Οι μαθητές μετά την άρση των παρανοήσεων γύρω από την έννοια του ορίου και με τη βοήθεια της νοηματικής χρήσης του κριτηρίου παρεμβολής κατορθώνουν να αντιληφθούν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως το κοινό όριο των δυο ακολουθιών αθροισμάτων και επιπλέον κατορθώνουν πια να κατανοήσουν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = 0.3x^2$ στο διάστημα $[0,10]$ εκφράζει το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση τον

άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (επεισόδια 25 και 26). Δηλαδή η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προκύπτει ως αποτέλεσμα της χρήσης του υπολογιστικού συστήματος στη διαδικασία της διερεύνησης συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση από τους μαθητές της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

Από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας προέκυψαν δυο ακόμα συμπεράσματα που όμως αφορούν ζητήματα τα οποία δεν είχαν συμπεριληφθεί σε αυτά που θα εξετάζονταν αλλά παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Το πρώτο είναι ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία στο να εξάγουν συμπεράσματα από ένα σύνολο δεδομένων και να διατυπώσουν κανόνες σε σχέση με αυτά. Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνα με ανάλογα συμπεράσματα άλλων ερευνών στο παρελθόν (Kynigos et al. 1997). Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές δυσκολεύονται να διατυπώσουν έναν κανόνα που να περιγράφει τη διαδικασία που ακολουθήθηκε. Τα αίτια της κατάστασης αυτής μπορεί να είναι, όπως αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, η αντίληψη ότι τελικά το ορισμένο ολοκλήρωμα αποτελεί μια ρουτίνα υπολογισμού εμβαδών και ακόμα ότι η προηγούμενη διαδικασιακή γνώση παρεμποδίζει την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης. Το βαθύτερο όμως αίτιο είναι η αδυναμία αφαίρεσης από την πλευρά των μαθητών. Οι μαθητές συνηθισμένοι σε ένα σχολικό περιβάλλον στο οποίο το ζητούμενο είναι η αναπαραγωγή «τελειοποιημένης» γνώσης, η απομνημόνευση κανόνων, η εκμάθηση διαδικασιακών ρουτίνων και η εξάσκηση σε συγκεκριμένους τύπους ασκήσεων έχουν χάσει ή, ακόμα χειρότερα, δεν έχουν αναπτύξει την ικανότητα της αναστοχαστικής αφαίρεσης που αποτελεί μοχλό της μάθησης. Αποτέλεσμα αυτής της αντίληψης για τη μαθησιακή διαδικασία και την εκπαίδευση είναι να αδυνατούν οι μαθητές να χειριστούν καταστάσεις που ξεφεύγουν από τα συνήθη πλαίσια δράσης μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας.

Το δεύτερο από τα συμπεράσματα που προαναφέρθηκε πως προέκυψαν ‘εκτός προγράμματος’ είναι ότι οι μαθητές εμφανίζουν τεράστιες δυσκολίες στο να αποδείξουν τους ισχυρισμούς τους. Είναι πολύ δύσκολο για αυτούς να μεταφέρουν σε περιβάλλον ‘χαρτί – μολύβι’ την εργασία τους σε υπολογιστικό περιβάλλον (Ruthven, 2002; Artigue, 2002). Ο πυρήνας του προβλήματος είναι η απόδειξη (Mariotti, 2000). Στην περίπτωση της παρούσας έρευνας βέβαια δεν θα μπορούσε να έχει κανείς την απαίτηση από τους μαθητές να ανακαλύψουν από μόνοι τους την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Οι τάξεις μας δεν συγκροτούνται από πολλαπλά

αντίγραφα του Αρχιμήδη. Το ζητούμενο ήταν απλά η καταγραφή και η τυπική απόδειξη των συμπερασμάτων που προέκυψαν από τη διαδικασία. Ήταν επιλογή στο σχεδιασμό της έρευνας να μην καθοδηγηθούν λεπτομερειακά οι μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία, μια και κατά τον Ruthven (2002) η λεπτομερής καταγραφή των τεχνικών και ο κατακερματισμός της διαδικασίας παρεμποδίζουν την ανάπτυξη νοημάτων, αλλά να επιχειρηθεί να εξαναγκαστούν σε μια διαδικασία αναστοχαστικής αφαίρεσης μέσα από την οποία να καταλήξουν στον ζητούμενο κανόνα και την εφαρμογή του στην απόδειξη. Αποδείχτηκε ότι ο σχεδιασμός αυτός ήταν πολύ φιλόδοξος. Δεν υπήρξε ομάδα που να έκανε την απόδειξη, τουλάχιστον την πρώτη ημέρα, χωρίς τη βοήθεια του ερευνητή ή των παρατηρητών.

Η νοηματική διδασκαλία είναι ένα από τα ζητούμενα για την αναβάθμιση της ποιότητας της μάθησης στο πλαίσιο του σχολείου μας. Η παρούσα έρευνα απέδειξε ότι η χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών και ειδικά του λογισμικού Autograph δίνει τη δυνατότητα στο δάσκαλο των μαθηματικών να εμπλουτίσει τη διδασκαλία του στην κατεύθυνση αυτή. Ο δάσκαλος εκμεταλλευόμενος τις επιλογές του λογισμικού, όπως τη δυνατότητα μεταβολής της ακρίβειας των προσεγγίσεων των αποτελεσμάτων των μετρήσεων, μπορεί να σχεδιάσει και να οργανώσει δραστηριότητες που στοχεύουν άμεσα, μέσα από την οικοδόμηση των κατάλληλων σχημάτων, στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών διδακτικών αντικειμένων. Παρατηρήθηκε κατά τη μελέτη των στοιχείων ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στον υπολογισμό του κατώτερου και του ανώτερου αθροίσματος για μια διαμέριση του διαστήματος $[0,10]$. Το πρόβλημα εντοπίστηκε σε ένα κυρίως στοιχείο. Οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να ορίσουν τη διαμέριση. Αποτέλεσμα αυτού του προβλήματος ήταν και το γεγονός ότι δεν μπορούσαν να υπολογίσουν το ύψος του τυχαίου ορθογωνίου. Από τη δύσκολη αυτή θέση βγήκαν με τη βοήθεια του ερευνητή ή των παρατηρητών αξιοποιώντας τις επιπλέον δυνατότητες που τους προσέφερε το λογισμικό ‘πειράζοντας’ και ‘μαστορεύοντας’ τις κατασκευές τους. Έχοντας στην οθόνη την γραφική παράσταση της συνάρτησης μπορούσαν με μεγάλη ευκολία να μεταβάλλουν τη διαμέριση του διαστήματος. Έτσι είχαν τη δυνατότητα να διερευνήσουν σε σύντομο χρονικό διάστημα και με εντυπωσιακό τρόπο το τι συμβαίνει σε πολλές περιπτώσεις και για διαμερίσεις διαφορετικής λεπτότητας, πράγμα που δεν μπορεί να γίνει σε περιβάλλον ‘χαρτί – μολύβι’. Η καθοδήγηση των μαθητών από το δάσκαλο σε μια τέτοια διαδικασία τους επέτρεψε να επιτύχουν τη

νοηματική κατανόηση εννοιών όπως η έννοια του ορίου. Δεν μπορεί βέβαια κανένας να ισχυριστεί ότι η νοηματική διδασκαλία είναι προνόμιο μόνον όσων επιλέγουν να αξιοποιήσουν τις δυνατότητες που προσφέρουν οι ψηφιακές τεχνολογίες και να εκμεταλλευτούν την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται. Όμως είναι φανερό ότι ο δάσκαλος αποκτά μέσα από την αξιοποίησή τους νέα ισχυρά όπλα στη μάχη του για τη βελτίωση της διδασκαλίας, τον εμπλουτισμό της ώστε να αποκτήσει νοηματικό περιεχόμενο και χαρακτήρα και, τέλος, στην προσπάθεια για ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών αντικειμένων από τους μαθητές του. Η εννοιολογική παράμετρος της διδακτικής διαδικασίας ενισχύεται ενώ συγχρόνως η τεχνική παράμετρος, σε επίπεδο χειρισμού του λογισμικού και της τεχνολογίας αλλά και σε επίπεδο εργασίας σε περιβάλλον 'χαρτί –μολύβι', δεν υποβαθμίζεται. Αντίθετα η αναβάθμιση της διδακτικής διαδικασίας στο εννοιολογικό επίπεδο επιτρέπει την αναβάθμισή της και σε διαδικασιακό επίπεδο. Έτσι ο δάσκαλος των μαθηματικών αξιοποιώντας τις δυνατότητες που του προσφέρει το λογισμικό Autograph και την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται κατά τη χρήση του έχει τη δυνατότητα να οργανώσει μια νοηματική διδασκαλία του ορισμού της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, κάτι που παρουσιάζει σοβαρές δυσκολίες σε μια παραδοσιακή αίθουσα διδασκαλίας.

Η μελέτη των στοιχείων που συλλέχτηκαν κατά τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας δημιούργησε στον ερευνητή την αίσθηση ότι θα ήταν χρήσιμο αυτά να εξεταστούν και υπό το πρίσμα της θεωρίας του 'μαθηματικού διαλόγου' (mathematical discussion) (Bartolini Bussi, 1996, 1999) και του 'πεδίου εμπειρίας' (field of experience) (Boero et al, 1995). Όμως κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό να πραγματοποιηθεί γιατί λόγω του διαφορετικού προσανατολισμού στο σχεδιασμό της έρευνας τα στοιχεία που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν με ικανοποιητικά αποτελέσματα ήταν λίγα. Οι υπάρχουσες καταγραφές μπορούν κυρίως να αξιοποιηθούν στην κατεύθυνση της υποκειμενικής ανέλιξης της γνώσης και την ανάλυση της διαδικασίας δημιουργίας σχημάτων για κάθε μαθητή ξεχωριστά μια και είναι πολύ περιορισμένες οι καταγραφές που αφορούν σε κινήσεις, χειρονομίες, τη στάση του σώματος και γενικά στοιχεία κοινωνικής επαφής. Η έρευνα λοιπόν περιορίστηκε σε μια απλή καταγραφή της συμπεριφοράς και των αλληλεπιδράσεων των παραγόντων της μαθησιακής διαδικασίας στην εξέλιξή της στο πλαίσιο της μαθηματικής γνώσης. Το σύνολο σχεδόν των στοιχείων αφορούν στην

αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών των ομάδων ή την παρέμβαση του ερευνητή και των παρατηρητών είτε με δική τους πρωτοβουλία είτε μετά από επίκληση βοήθειας από τους μαθητές. Δυο είναι τα σημαντικά συμπεράσματα που προέκυψαν. Δεν παρατηρήθηκε τάση προστασίας του ρόλου τους από τους μαθητές. Το συμπέρασμα αυτό βρίσκεται σε αντίθεση με αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Kynigos & Theodossopoulou, 2001; Τρούκη, 2003; Κυνηγός, 2007). Η διαφορά αυτή μπορεί να ερμηνευτεί αν ληφθούν υπόψη οι διαφορετικές συνθήκες. Σήμερα ο υπολογιστής είναι πια μέρος της καθημερινότητας ενός μαθητή. Οι προηγούμενες έρευνες πραγματοποιήθηκαν σε μια εποχή και ένα περιβάλλον στο οποίο η χρήση ενός υπολογιστικού συστήματος αποτελούσε προνόμιο. Έτσι ήταν φυσιολογικό οι μαθητές να επιζητούν το ρόλο του χειριστή. Ένα ακόμα παράγοντας είναι ότι οι προηγούμενες έρευνες αφορούσαν μαθητές του Δημοτικού ή της πρώτης τάξης του Γυμνασίου. Η παρούσα έρευνα έγινε με συμμετοχή μαθητών της τρίτης τάξης του Λυκείου. Όμως η ηλικιακή ωρίμανση είναι φυσικό να αμβλύνει αντιθέσεις και ανταγωνισμούς αυτού του είδους. Με το θέμα αυτό συνδέεται και το δεύτερο συμπέρασμα. Η προνομιακή θέση των μαθητών στο πλαίσιο της ομάδας, όταν υπάρχει, εξαρτάται εν μέρει από τη θέση τους στην παραδοσιακή τάξη και κυρίως από την ικανότητα παραγωγής νοημάτων.

Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Ένα από τα συμπεράσματα της έρευνας είναι ότι η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που παράγεται από την ένταξη στη διδακτική διαδικασία των ψηφιακών τεχνολογιών, με τη μορφή του λογισμικού πακέτου Autograph, σε συνδυασμό με την εννοιολογική κατανόηση και τη νοηματική χρήση του κριτηρίου παρεμβολής δημιουργούν τις κατάλληλες συνθήκες για την άρση των παρανοήσεων που συνδέονται με την έννοια του ορίου. Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε ως απότοκο της διαδικασίας. Δεν υπήρξε συγκεκριμένος σχεδιασμός για τη διερεύνηση του θέματος. Συνεπώς θα ήταν χρήσιμο να εξεταστεί διεξοδικά σε μια κατάλληλα σχεδιασμένη έρευνα η συμβολή της χρήσης της ισοσύγκλισης στην εννοιολογικής κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Μια δεύτερη πρόταση για περαιτέρω διερεύνηση είναι η πρόταση για διεξαγωγή μιας αντίστοιχης έρευνας προσανατολισμένης στην ανάλυση των δεδομένων κάτω από το πρίσμα της θεωρίας του μαθηματικού διαλόγου και των πεδίων γνώσης. Η έρευνα αυτή θα μπορούσε να εστιαστεί στην εξέταση των παραμέτρων του

εξωτερικού πλαισίου και των εσωτερικών πλαισίων των μαθητών και του διδάσκοντα με την έννοια που προσδίδουν στους όρους οι Boero et al (1995) και Mariotti (2000) .

Η παρακολούθηση του μαθήματος 'Ανάλυση για την Διδακτική' υπήρξε αφορμή για την ανάπτυξη ενός προβληματισμού για το κατά πόσο η μέθοδος της κάλυψης του εμβαδού, όπως προσεγγίζεται στο ολοκλήρωμα Lebesgue, θα μπορούσε να είναι πιο εύκολα κατανοητή από τους μαθητές από τη μέθοδο προσέγγισης του εμβαδού ως κοινό όριο των ακολουθιών ανώτερων και κατώτερων αθροισμάτων. Ένας επιπλέον παράγοντας που συνηγορεί υπέρ της πρότασης αυτής είναι ότι, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, έχουμε περιοριστεί στην ολοκλήρωση της κλάσης των συνεχών συναρτήσεων. Η εισαγωγή του ολοκληρώματος Lebesgue διευρύνει την κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε αυτές που έχουν αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας. Έτσι αποκτάμε τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε και προβλήματα υπολογισμού εμβαδών μη συνεχών συναρτήσεων. Θα μπορούσε λοιπόν να διερευνηθεί κατά πόσο θα ήταν εφικτό αλλά και χρήσιμο η εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann να έπεται μιας παρουσίασης του ολοκληρώματος Lebesgue.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν κατά τις δυο πρώτες φορές διεξαγωγής της έρευνας

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία:
Τάξη: Γ
Ομάδα:

Το πρόβλημα του κηπουρού

Ένας κηπουρός περιποιείται έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου με πρόσοψη 20 μέτρα και βάθος 30 μέτρα. Στον κήπο υπάρχει ένα μονοπάτι παραβολικής μορφής με κορυφή το μέσο της πρόσοψης, όπου βρίσκεται η είσοδος του κήπου, που καταλήγει στις δυο πίσω γωνίες του κήπου. Η εξίσωση της παραβολής την οποία ακολουθεί το μονοπάτι είναι $y=0.3x^2$. Ο κηπουρός θέλει να φυτέψει λουλούδια στα δυο κομμάτια του κήπου που περικλείονται από την πρόσοψη, το παραβολικό μονοπάτι και την πλαϊνή περίφραξη. Γνωρίζει ότι μπορεί να φυτέψει 4 λουλούδια σε κάθε τετραγωνικό μέτρο γης. Αναρωτιέται πόση είναι η επιφάνεια που θα φυτευτεί για να παραγγείλει τον απαραίτητο αριθμό λουλουδιών. Αποφάσισε ότι για ευκολία θα ασχοληθεί αρχικά με τη μέτρηση μόνο του δεξιού κομματιού. Για μπορέσει να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής αποφάσισε, μετά από συμβουλή ενός γνωστού του μαθηματικού, να χωρίσει το μέρος της πρόσοψης που αντιστοιχεί στην περιοχή αυτή σε πέντε ίσα μέρη και στη συνέχεια να χωρίσει την επιφάνεια της οποίας θέλει να υπολογίσει το εμβαδόν σε ορθογώνιες ζώνες με βάση τα τμήματα αυτά με τέτοιο τρόπο ώστε μόνο η πίσω αριστερή γωνία κάθε ζώνης να ακουμπάει το μονοπάτι.

Προσδιορισμός του εμβαδού του δεξιού τμήματος στο πρόβλημα του κηπουρού με το εκπαιδευτικό λογισμικό Autograph 3:

1. Κατασκευή του σχήματος

- Εκκινήστε το λογισμικό Autograph ακολουθώντας τη διαδρομή: **Έναρξη→Προγράμματα→Autograph 3→Autograph**.
- Στο παράθυρο που ανοίγει επιλέξτε: **Advanced.** (Θα πρέπει να ανοίξει ένα παράθυρο που εμφανίζει ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Αν δεν ανοίξει, επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **File→ New 2D Graph Page**).
- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **File→Save as**. Να ονομάστε το αρχείο: **ομάδαx**, όπου x είναι ο αριθμός της ομάδας σας και να το αποθηκέψετε στο φάκελο «**Τα έγγραφά μου**».
- Επιλέξτε από την γραμμή εργαλείων το κουμπί: **Edit Axes**. Στην καρτέλα **Ranges** μπορείτε να καθορίσετε τις τιμές των μεταβλητών στους δυο άξονες.
  Ορίστε για το x τις τιμές: **Minimum: -12** **και** **Maximum: 12**.
  Ορίστε για το y τις τιμές: **Minimum: -5** **και** **Maximum: 35.**
- Επιλέξτε από την γραμμή από τη γραμμή μενού: **Object→Enter Shape**…

Στο παράθυρο που ανοίγει εμφανίζεται ένας πίνακας στον οποίο συμπληρώνουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου (για να μετακινηθούμε στο επόμενο κελί μπορούμε να χρησιμοποιούμε το πλήκτρο Enter). Ορίστε τα σημεία (-10,30), (-10,0), (10,0) και (10,30). (Μπορούμε να αφήσουμε τσεκαρισμένη την επιλογή **Fill Shape** αν θέλουμε το εσωτερικό του πολυγώνου να χρωματιστεί).

- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: E**quation…→Enter Equation**.
  Στο παράθυρο που ανοίγει κάνουμε τις εξής ενέργειες:
  i) Στη γραμμή Equation συμπληρώνετε την εξίσωση της παραβολής: $y=0.3x^2$ (τη δύναμη x^2 μπορείτε να τη γράψετε πληκτρολογώντας απλά xx)
  ii) Επιλέγετε **Startup Options** και στο παράθυρο που ανοίγει **Manual**. Ορίζετε **x start = -10** και **x finish =10**. Πατάτε **Ok** για να γυρίσετε στο προηγούμενο παράθυρο και πάλι **Ok.** Θα πρέπει να εμφανιστεί η γραφική παράσταση.

2. Μέτρηση του εμβαδού του σχήματος

- Επιλέξτε τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε **Find Area**… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Στο πλαίσιο **Parameters** επιλέξτε άκρα **Start Point =0** και **End Point=10** και το πλήθος των ορθογωνίων (**Divisions**). (Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και το ανώτερο άθροισμα).
- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **View → Results Box**… για να πάρετε μια μέτρηση για το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.
- Επιλέξτε τα ορθογώνια πατώντας με το ποντίκι πάνω σε ένα από αυτά. Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **View → Animation Controller**… Στο παράθυρο που ανοίγει μπορείτε χρησιμοποιώντας τα βελάκια ή γράφοντας στο πλαίσιο να μεταβάλετε το πλήθος των ορθογωνίων. Για κάθε τιμή του πλήθους των ορθογωνίων μπορείτε να πάρετε μια νέα μέτρηση του εμβαδού με τον εξής τρόπο: Επιλέξτε τα ορθογώνια, κάνετε δεξί κλικ σε κάποιο από αυτά και επιλέξτε από το μενού που αναδύεται **Update Results Box**…

Ερωτήματα:

1. Μπορείτε με τη βοήθεια του λογισμικού να συμπληρώσετε τις τιμές των εμβαδών στον παρακάτω πίνακα;

Πλήθος ορθογωνίων	Άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων	Εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου
5		
6		
7		
8		
10		
20		
30		

2. Μπορείτε, με τη βοήθεια των δεδομένων του πίνακα αλλά και με τη βοήθεια του λογισμικού να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο;

Σημειώστε εδώ την περιγραφή σας:

3. Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μεγαλύτερο από 99;
   a. Μπορείτε να κάνετε το ίδιο όταν το άθροισμα των εμβαδών πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 99.5 και μικρότερο από 99.8;
   b. Πόσο πρέπει να είναι το πλήθος τους ώστε το εμβαδόν του αθροίσματος να είναι μεταξύ 99.8 και 99.9;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

4. Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

5. Ερευνήστε αν υπάρχει πλήθος ορθογωνίων στα οποία να διαιρείται το χωρίο και το άθροισμα των εμβαδών τους να υπερβαίνει το εμβαδόν που γράψατε στη προηγούμενη ερώτηση;
   a. Αν βρήκατε ότι υπάρχει, μπορείτε να εκτιμήστε το πραγματικό εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να προτείνετε ένα τρόπο υπολογισμού του;
   b. Αν δεν βρήκατε ότι υπάρχει, μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου αυτού αλλά και άλλων ανάλογων χωρίων;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

6. Μπορείτε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι αυτό που ισχυρίζεστε;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Ημερομηνία:
Τάξη: Γ
Ομάδα:

Το πρόβλημα του κηπουρού(Συνέχεια)

Επιλέξτε τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε **Find Area**… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή **Rectangle (+)**. Στο πλαίσιο **Parameters** επιλέξτε άκρα **Start Point =0** και **End Point=10** και το πλήθος των ορθογωνίων (**Divisions**).

Ερωτήματα:

7. Μπορείτε με τη βοήθεια του λογισμικού να συμπληρώσετε τις τιμές των εμβαδών στον παρακάτω πίνακα;

Πλήθος ορθογωνίων	Άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων	Εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου
5		
6		
7		
8		
10		
20		
30		

8. Μπορείτε, με τη βοήθεια των δεδομένων του πίνακα αλλά και με τη βοήθεια του λογισμικού να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο;

Σημειώστε εδώ την περιγραφή σας:

9. Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μικρότερο από 101;

   Μπορείτε να κάνετε το ίδιο όταν το άθροισμα των εμβαδών πρέπει να είναι μικρότερο από 100.5 και μεγαλύτερο από 100.1;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

10. Πόσο είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

11. Ερευνήστε αν υπάρχει πλήθος ορθογωνίων στα οποία να διαιρείται το χωρίο και το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μικρότερο από το εμβαδόν που γράψατε στη προηγούμενη ερώτηση;
    a. Αν βρήκατε ότι υπάρχει, μπορείτε να εκτιμήστε το πραγματικό εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να προτείνετε ένα τρόπο υπολογισμού του;
    b. Αν δεν βρήκατε ότι υπάρχει, μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου αυτού αλλά και άλλων ανάλογων χωρίων;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

12. Μπορείτε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι αυτό που ισχυρίζεστε;

13. Ονομάζουμε κάτω άθροισμα το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται ολόκληρα κάτω από τη γραφική παράσταση και υπολογίστηκαν στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Ονομάζουμε άνω άθροισμα το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που υπερβαίνουν την καμπύλη. Μπορείτε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;
Σαν **Διαφορά** θεωρούμε τη διαφορά (Άνω άθροισμα)-(Κάτω άθροισμα)

Πλήθος ορθογωνίων	Άνω άθροισμα	Κάτω άθροισμα	Διαφορά
5			
6			
7			
8			
10			
20			
30			

14. Ποια είναι η σχέση του ζητούμενου εμβαδού του χωρίου με το κάτω και το άνω άθροισμα εμβαδών; Μπορείτε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν είναι αυτό που ισχυρίζεστε;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν κατά την τρίτη διεξαγωγή της έρευνας για την έρευνα - διδακτική πρόταση

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία:
Τάξη: Γ
Ομάδα:

Το πρόβλημα του κηπουρού

Ένας κηπουρός περιποιείται έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου με πρόσοψη 20 μέτρα και βάθος 30 μέτρα. Στον κήπο υπάρχει ένα μονοπάτι παραβολικής μορφής με κορυφή το μέσο της πρόσοψης, όπου βρίσκεται η είσοδος του κήπου, που καταλήγει στις δυο πίσω γωνίες του κήπου. Η εξίσωση της παραβολής την οποία ακολουθεί το μονοπάτι είναι $y=0.3x^2$. Ο κηπουρός θέλει να φυτέψει λουλούδια στα δυο κομμάτια του κήπου που περικλείονται από την πρόσοψη, το παραβολικό μονοπάτι και την πλαϊνή περίφραξη. Γνωρίζει ότι μπορεί να φυτέψει 4 λουλούδια σε κάθε τετραγωνικό μέτρο γης. Αναρωτιέται πόση είναι η επιφάνεια που θα φυτευτεί για να παραγγείλει τον απαραίτητο αριθμό λουλουδιών. Αποφάσισε ότι για ευκολία θα ασχοληθεί αρχικά με τη μέτρηση μόνο του δεξιού κομματιού. Για μπορέσει να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής αποφάσισε, μετά από συμβουλή ενός γνωστού του μαθηματικού, να χωρίσει το μέρος της πρόσοψης που αντιστοιχεί στην περιοχή αυτή σε πέντε ίσα μέρη και στη συνέχεια να χωρίσει την επιφάνεια της οποίας θέλει να υπολογίσει το εμβαδόν σε ορθογώνιες ζώνες με βάση τα τμήματα αυτά με τέτοιο τρόπο ώστε μόνο η πίσω αριστερή γωνία κάθε ζώνης να ακουμπάει το μονοπάτι.

Προσδιορισμός του εμβαδού του δεξιού τμήματος στο πρόβλημα του κηπουρού με το εκπαιδευτικό λογισμικό Autograph 3:

3. Κατασκευή του σχήματος

- Εκκινήστε το λογισμικό Autograph ακολουθώντας τη διαδρομή: **Έναρξη→Προγράμματα→Autograph 3→Autograph**.
- Στο παράθυρο που ανοίγει επιλέξτε: **Advanced.** (Θα πρέπει να ανοίξει ένα παράθυρο που εμφανίζει ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Αν δεν ανοίξει, επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **File→ New 2D Graph Page**).
- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **File→Save as**. Να ονομάστε το αρχείο: **ομάδα0x**, όπου x είναι ο αριθμός της ομάδας σας και να το αποθηκέψετε στο φάκελο «**Τα έγγραφά μου**».
- Επιλέξτε από την γραμμή εργαλείων το κουμπί: **Edit Axes**. Στην καρτέλα **Ranges** μπορείτε να καθορίσετε τις τιμές των μεταβλητών στους δυο άξονες.
  Ορίστε για το x τις τιμές: **Minimum: -12** **και** **Maximum: 12**.
  Ορίστε για το y τις τιμές: **Minimum: -5** **και** **Maximum: 35.**
- Επιλέξτε από την γραμμή από τη γραμμή μενού: **Object→Enter Shape**…

Στο παράθυρο που ανοίγει εμφανίζεται ένας πίνακας στον οποίο συμπληρώνουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του πολυγώνου (για να μετακινηθούμε στο επόμενο κελί μπορούμε να χρησιμοποιούμε το πλήκτρο Enter). Ορίστε τα σημεία (-10,30), (-10,0), (10,0) και (10,30). (Μπορούμε να αφήσουμε τσεκαρισμένη την επιλογή **Fill Shape** αν θέλουμε το εσωτερικό του πολυγώνου να χρωματιστεί).

- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: E**quation…→Enter Equation**.
  Στο παράθυρο που ανοίγει κάνουμε τις εξής ενέργειες:
  iii) Στη γραμμή Equation συμπληρώνετε την εξίσωση της παραβολής: $y=0.3x^2$ (τη δύναμη x^2 μπορείτε να τη γράψετε πληκτρολογώντας απλά xx)
  iv) Επιλέγετε **Startup Options** και στο παράθυρο που ανοίγει **Manual**. Ορίζετε **x start = -10** και **x finish =10**. Πατάτε **Ok** για να γυρίσετε στο προηγούμενο παράθυρο και πάλι **Ok.** Θα πρέπει να εμφανιστεί η γραφική παράσταση.

4. Μέτρηση του εμβαδού του σχήματος

- Επιλέξτε τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε **Find Area**… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Στο πλαίσιο **Parameters** επιλέξτε άκρα **Start Point =0** και **End Point=10** και το πλήθος των ορθογωνίων (**Divisions**). (Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και το ανώτερο άθροισμα).
- Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **View → Results Box**… για να πάρετε μια μέτρηση για το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων.
- Επιλέξτε τα ορθογώνια πατώντας με το ποντίκι πάνω σε ένα από αυτά. Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: **View → Animation Controller**… Στο παράθυρο που ανοίγει μπορείτε χρησιμοποιώντας τα βελάκια ή γράφοντας στο πλαίσιο να μεταβάλετε το πλήθος των ορθογωνίων. Για κάθε τιμή του πλήθους των ορθογωνίων μπορείτε να πάρετε μια νέα μέτρηση του εμβαδού με τον εξής τρόπο: Επιλέξτε τα ορθογώνια, κάνετε δεξί κλικ σε κάποιο από αυτά και επιλέξτε από το μενού που αναδύεται **Update Results Box**…

Ερωτήματα:

15. Μπορείτε με τη βοήθεια του λογισμικού να συμπληρώσετε τις τιμές των εμβαδών στον παρακάτω πίνακα; (Η τρίτη στήλη να συμπληρωθεί μετά την απάντηση στο ερώτημα 4).

Πλήθος ορθογωνίων	Άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων	Εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου
5		
6		
7		
8		
10		
20		
30		

16. Μπορείτε, με τη βοήθεια των δεδομένων του πίνακα αλλά και με τη βοήθεια του λογισμικού να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο;

Σημειώστε εδώ την περιγραφή σας:

17. Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μεγαλύτερο από 99;

    Μπορείτε να κάνετε το ίδιο όταν το άθροισμα των εμβαδών πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 99.5 και μικρότερο από 99.8;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

18. Πόσο νομίζετε ότι είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

19. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου αυτού αλλά και άλλων ανάλογων χωρίων;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

20. Να αποθηκεύσετε το αρχείο. Στη συνέχεια να ανοίξετε μια καινούργια σελίδα 2D (File→ New 2D Graph Page**)**. Επιλέξτε από τη γραμμή μενού: File→Save as. Να ονομάστε το αρχείο: **ομάδα1x**, όπου x είναι ο αριθμός της ομάδας σας και να το αποθηκέψετε στο φάκελο «**Τα έγγραφά μου**». Ακολουθείστε τη διαδικασία που ακολουθήσατε και πριν για να κατασκευάσετε το σχήμα. Επιλέξτε πάλι τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε Find Area… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (+). Στο πλαίσιο Parameters επιλέξτε άκρα Start Point =0 και End Point=10 και το πλήθος των ορθογωνίων (Divisions). Μπορείτε με τη βοήθεια του λογισμικού να συμπληρώσετε τις τιμές των εμβαδών στον παρακάτω πίνακα; (Η τρίτη στήλη να συμπληρωθεί μετά την απάντηση στο ερώτημα 10).

Πλήθος ορθογωνίων	Άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων	Εκτίμηση της διαφοράς του αθροίσματος των εμβαδών από το εμβαδόν του χωρίου
5		
6		
7		
8		
10		
20		
30		

21. Μπορείτε, με τη βοήθεια των δεδομένων του πίνακα αλλά και με τη βοήθεια του λογισμικού να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο;

Σημειώστε εδώ την περιγραφή σας:

22. Μπορείτε να βρείτε μια τιμή για το πλήθος των ορθογωνίων στα οποία πρέπει να χωρίσετε το χωρίο ώστε το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι μικρότερο από 101;
    Μπορείτε να κάνετε το ίδιο όταν το άθροισμα των εμβαδών πρέπει να είναι μικρότερο από 100.5 και μεγαλύτερο από 100.1;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

23. Πόσο εκτιμάτε ότι είναι τελικά το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου; Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

24. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου αυτού αλλά και άλλων ανάλογων χωρίων;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

25. Ονομάζουμε κάτω άθροισμα το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται ολόκληρα κάτω από τη γραφική παράσταση και υπολογίστηκαν στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Ονομάζουμε άνω άθροισμα το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που υπερβαίνουν την καμπύλη. Μπορείτε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα;
Σαν **Διαφορά** θεωρούμε τη διαφορά (Άνω άθροισμα)-(Κάτω άθροισμα)

Πλήθος ορθογωνίων	Άνω άθροισμα	Κάτω άθροισμα	Διαφορά
5			
6			
7			
8			
10			
20			
30			

26. Ποια είναι η σχέση του ζητούμενου εμβαδού του χωρίου με το κάτω και το άνω άθροισμα εμβαδών; Μπορείτε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν είναι αυτό που ισχυρίζεστε;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Ημερομηνία:
Τάξη: Γ
Ομάδα:

Το πρόβλημα του κηπουρού(Συνέχεια)

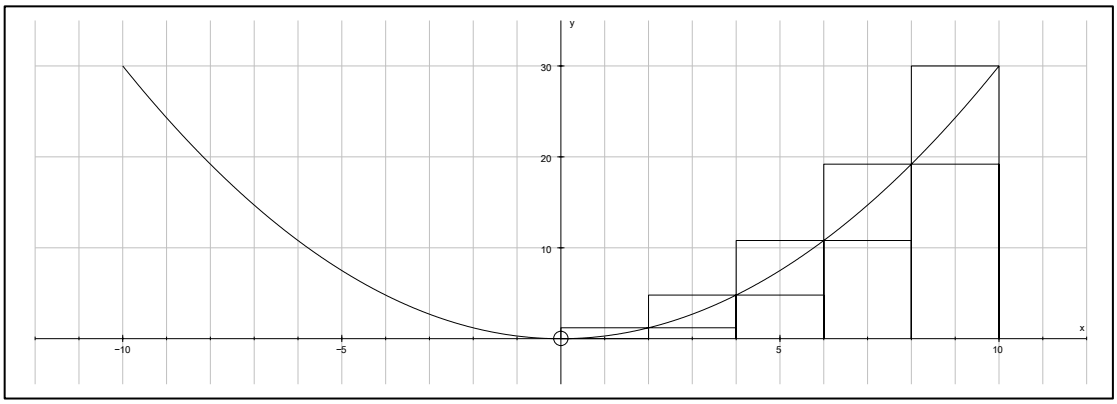
Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Αποθηκεύστε το αρχείο στον φάκελο «**Τα έγγραφά μου**» με το όνομα **ομάδα2x**, όπου x η αριθμός της ομάδας σας (αλλά μην το κλείσετε).

Χρησιμοποιώντας τον Animation Controller καθορίστε και πάλι πλήθος των ορθογωνίων 5. Επιλέξτε τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε **Find Area**… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Στο πλαίσιο **Parameters** επιλέξτε άκρα **Start Point =0** και **End Point=10** και ορίστε το πλήθος των ορθογωνίων (**Divisions**) στο 5. Πατήστε το OK. Τώρα θα πρέπει να βλέπετε μαζί το κάτω αλλά και το πάνω άθροισμα. Παρατηρείστε ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου του κάτω αθροίσματος ισούται με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $y = 0.3x^2$ στο διάστημα που ορίζεται από τα άκρα της βάσης του και ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου του άνω αθροίσματος ισούται με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο ίδιο διάστημα.

Ερωτήματα:

1. Επιλέξτε έναν τυχαίο αριθμό σε κάθε διάστημα. Κατασκευάστε τα ορθογώνια με βάση το συγκεκριμένο διάστημα και ύψος την τιμή της συνάρτησης για τον αριθμό που επιλέξατε.



Ποια είναι η σχέση του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών με το κάτω και το άνω άθροισμα;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

2. Τι νομίζετε ότι θα συμβεί αν αυξήσουμε το πλήθος των ορθογωνίων; Μπορείτε να εικάσετε πόσο θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των «ενδιάμεσων» ορθογωνίων;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

3. Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε ***συνεχή*** συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_\nu = \beta$ σε ν υποδιαστήματα $[\alpha, x_1], [x_1, x_2], \cdots [x_{\kappa-1}, x_\kappa], \cdots [x_{\nu-1}, \beta]$ ίσου μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$.

Σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$

που ονομάζεται άθροισμα Riemann της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$.

Όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής, το όριο του αθροίσματος Riemann, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu \to \infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$, υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός,. Το όριο αυτό ονομάζεται ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

4. Επιλέξτε πάλι τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε Find Area… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Στο πλαίσιο Parameters επιλέξτε άκρα Start Point =10 και End Point=0 και ορίστε το πλήθος των ορθογωνίων (Divisions) στο 5. Πατήστε το OK. Πατήστε το κουμπί Update box… Τι παρατηρείτε; (Αν νομίζετε ότι αυτό θα σας βοηθήσει, μπορείτε να μεταβάλλετε με τη βοήθεια το Animation Controller το πλήθος των ορθογωνίων και να πάρετε διαδοχικές μετρήσεις. Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία και για τα πάνω ορθογώνια για να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της εικασίας σας).

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

5. Μπορείτε να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα αυτά και να δώσετε έναν κανόνα;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

6. Επιλέξτε πάλι τη γραφική παράσταση. Κάνετε δεξί κλικ πάνω της και επιλέξτε Find Area… Στο παράθυρο που ανοίγει τσεκάρετε στο πλαίσιο Method την επιλογή Rectangle (-). Στο πλαίσιο Parameters επιλέξτε άκρα Start Point =10 και End Point=10 και ορίστε το πλήθος των ορθογωνίων (Divisions) στο 5. Πατήστε το OK. Πατήστε το κουμπί Update box… Τι παρατηρείτε; (Αν νομίζετε ότι αυτό θα σας βοηθήσει, μπορείτε να μεταβάλλετε με τη βοήθεια το Animation Controller το πλήθος των ορθογωνίων και να πάρετε διαδοχικές μετρήσεις. Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία και για τα πάνω ορθογώνια ή και αλλάζοντας την τιμή 10 στα Start Point και End Point για να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της εικασίας σας).

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

7. Μπορείτε να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα αυτά και να δώσετε έναν κανόνα;

Σημειώστε εδώ την απάντησή σας:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000): Computer mediated learning :An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 5***,** 25–45. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Artigue, M. (1997a): Teaching and learning elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution? Proceedings of the First Mediterranean Conference on Mathematics. G.A. Makrides (ed), Chypre, janvier 1997, 207-219, Cyprus Pedagogical Institute and Cyprus Mathematical Society.

Artigue,M. (1997b). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques lies à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics 33*(2), 133–169.

Artigue, M. (2002): Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*, 245-274. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In M. Artigue et al. (Eds), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364–370). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002): Students' Conceptions: An Introduction to a Formal Characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 65 – ISSN: 1298-020X.

Bartolini Bussi, M.G. (1991): Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furenghetti (ed.), Proc. of the 15th PME Int. Conf., 1, Assisi, Italia, 1–16.

Bartolini Bussi, M.G. (1994): Theoritical and empirical approaches to classroom interactions. In Biehler, Scholz, Sträber and Winkelmann (Eds), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 121-132.

Bartolini Bussi, M.G. (1996): Mathematical discussion and perspective drawing in primary school, *Educational Studies in Mathematics 31*(1-2), 11–41.

Bartolini Bussi, M.G. (1999): Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In A. Sierpinska et al. (eds.), *Language and Communication in Mathematics Classroom*, NCTM.

Beguin, P. & Rabardel, P. (2000): Designing for instrument-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems, 12*: 173-190.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E. (1995): Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. Proc. of PME-XIX, Recife.

Boyer, C., B. (1949): *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. N. York: Dover Publications.

Boyer, C., B., & Merzbach, U..C. (1997): Η Ιστορία των Μαθηματικών. (Κουσουλάκου, Β., μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού (Πρωτότυπη έκδοση, 2nd ed., 1991, New York: Wiley).

Brousseau, G. (1982): Le contrat didactique : le milieu. *Dans RDM* vol 9 no3.

Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Dans RDM* vol 7 no2.

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers. Netherland.

Bruner, J. S. (1964): The Course of Cognitive Growth. *American Psychologist, 19*, 1-15.

Carpenter, T.R., Corbitt, M.K., Kepner, H.S., Lindquist, M.M, & Reys, R. (1980): Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school, *The mathematics teacher, 73*(5), 329-338.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 77-111.

Cobb, P. (1997): Learning from distributed theories of intelligence. In E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp.169-176). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003): Design Experiments in Educational Research. *Educational Research*, Vol. 32, (1), 9-13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004) : Design Research : Theoretical and Methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 13 (1),15-42. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cornu, B. (1991): Limits. In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Cuoco, A. (2002): Thoughts on reading Artigue's "Learning Mathematics in a CAS environment". *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 293–299. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981): *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.

Defouad, B. (2000): *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Dreyfus, T., & Hadas, N. (1996): Proof as answer to the question why. *International Reviews on Mathematical Education 96*(1), 1–5.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt and M. Santos (Eds), *Proceedings of the 21st PME-NA Conference, 1* (pp. 3–26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Edwards, D., & Mercer, N. (1987): *Common knowledge. The development of understanding in the classroom*. London: Methuen.

Ferrini-Mundy, J. & Gaudard, M. (1992): Preparation or Pitfall in the Study of College Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(1), 56-71.

Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Aproach.* Reidel.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M., & Sciollis Marino, M. (1999): Ο ρόλος των λανθανόντων μοντέλων στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Στης Βοσνιάδου, Σ. (επιμ. έκδ.) *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών* (σελ. 87-109). Αθήνα: Gutenberg.

Goldin, G. A. (2002): Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A., & Kaput, J.J. (1996): A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L.Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Guin, D., & Trouche, L.(1999): The complex process of converting tool into mathemtical instruments: The case of calculators, *International Journal of computer for mathematical learning, 3*(3), 195-227.

Heid, M. K., Sheets, C., & Matras, M. A. (1990). Computer-enhanced algebra: New roles and challenges for teachers and students. In T. J. Cooney (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 NCTM yearbook)* (pp. 194-204). Reston, VA: Author.

Heath, T., L. (2001): *Η Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Τόμος 2.* (Αγγελή, Α., Βλάμου, Ε., Γραμμένος, Θ., & Σπανού, Ε., μετάφραση). Αθήνα: ΚΕΕΠΕΚ. (Πρωτότυπη έκδοση, 1921, Oxford University).

Heath, T., L. (2002): *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications.

Henry, M. (2006): *Διδακτική Μαθηματικών: Παρουσίαση της διδακτικής με στόχο την επιμόρφωση των διδασκόντων* (Κοντογιάννης, Γ., Πρίντεζης, Ι., & Σπύρου, Π., μετάφραση). Αθήνα: Μαθηματικό Τμήμα του Ε.Κ.Π.Α.). (Πρωτότυπη έκδοση, 1991, IREM de Besancon).

Hershkowitz, R. (1989): Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge University Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964): *The early growth of logic in the child: Classification and seriation*. New York: Norton.

Inhelder B. & Cellerier G. (Eds.). (1992): *Le cheminement des découvertes de l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Jost, K. L. E. (1992): The implementation of technology in the calculus classroom: an examination of teacher beliefs, practice and curriculum change. Unpublished Ph.D, (Syracuse University, 1992). *Dissertation Abstracts International,* 53/06, 1876

Kelly, A. (2003): (Guest Editor). Research as Design (Edutorial). *Educational Research*, Vol. 32 (1), 3-4.

Kendal, M., & Stacey, K. (2001): The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(2),* 143–165.

Knop, I. (2003): Principles for a mathematics curriculum using technology. *Proceedings of the CAME Meeting*. Reims, June 2003

Kutzler, B. (1994): DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal, 1*(1), 37–48.

Kutzler, B. (2000, October 6): The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. Retrieved January 25, 2006, from http://b.kutzler.com/art_eng.htm

Kynigos, C. (2002): Generating Cultures for Mathematical Microworld Development in a Multi-Organisational Context. *Journal of Educational Computing Research*, Baywood Publishing Co. Inc. (1&2), 183-209.

Kynigos, C., Koutlis, M. & Hatzilakos, T. (1997): Mathematics with Component-Oriented exploratory software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 229-250.

Kynigos, C., & Thedossopoulou, V. (2001): Synthesizing Personal, Interactionist and Social Norms Perspectives to Analyze Collaborative Learning in the Classroom in the Context of a Computer Based Innovation Program. *Journal of Classroom Interaction, 36*(2), 63–73.

Lagrange, J.B. (1999): Learning pre-calculus with complex calculators: Mediation and instrumental genesis, *Proceedings of the 23rd PME Conference. Haifa. 3* (pp. 193- 200).

Lagrange, J. B. (2000). L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement: Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics 43*(1), 1–30.

Lakatos, I. (1996): *Αποδείξεις και ανασκευές. Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης.* (Μετάφραση). Αθήνα: Τροχαλία. (Πρωτότυπη έκδοση, 1970).

Mariotti, M.A. (2000): Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics, 44 (1-3)*, 25-53.

Mariotti, M.A. (2002): Influences of technologies advances in students' math learning. In L. D. English (ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 695-723). Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Mastorides, E. & Zachariades, T. (2004): Secondary Mathematics Teachers' Knowledge Concerning the Concept of Limit and Continuity. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, 481–488.

Mellin-Olsen, S. (1987): *The politics of Mathematics Education*. Reidel.

Orton, A. (1983): Student's Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 1-18.

Papert, S. (1991): *Νοητικές Θύελλες : Παιδιά, Υπολογιστές και Δυναμικές Ιδέες. Τα πάντα γύρω από τη Logo*. (Α. Σταματίου, μετάφραση). Αθήνα: Οδυσσέας. (Πρωτότυπη έκδοση, 1980)

Piaget, J. (1980): *Les formes élémentaires de la dialectique*. Paris: Gallimard.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004): A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of Computer Algebra Systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*, 59–93.

Rabardel, P. (1995): *Les hommes et les technologies*. Paris: Armand Colin.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002): Definitions and Images for the Definite Integral Concept. Retrieved July 12, 2006 from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ pdfs/dot2002h-pme26-rasslan.pdf

Rasslan, S., & Vinner, S. (1997). Images and Definitions for the Concept of Even / Odd Function. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (pp. 41-48). University of Helsinki. Lahti, Finland.

Robert, A., & Robinet, J. (1989): Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM no 1*. Publie par l'IREM de Paris VII.

Ruthven, K. (2002): Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of Computer Algebra Systems. *International Journal of Computers foe Mathematical Learning, 7*, 275-291. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In Harel, G & Dubinsky, E. (Eds.). MAA Notes and Report Series, 25-58.

Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996): Epistemologies of mathematics and mathematics education. In Bishop et al. (Eds), *Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

Stacey, K. (2001): Teaching with CAS in a Time of Transition. Paper presented at the CAME Symposium 2001: Theme 2 Presentation.

Tall, D., O. (1997): Functions and Calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., O. (2004): Introducing Three Worlds of Mathematics. Retrieved July 12, 2006 from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Tall, D., O., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Task Force, Πρόγραμμα Ευρωπαϊκής Επιτροπής, 1996 (http://www2.echo.lu).

Tharp, M. L., Fitzsimmons, J. A., & Brown Ayers, R. L. (1997): Negotiating a technological shift: Teacher perception of the implementation of graphing calculators. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*(4), 551-575.

Trouche, L. (2004): Environnements Informatises et Mathématiques: Quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics 55*, 181–197. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

The United Kingdom's National Council for Educational Technology (1994).

Van der Waerden, B., L. (2003): *Η αφύπνιση της Επιστήμης* (Γ. Χριστιανίδης, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (Πρωτότυπη έκδοση, 1954, Kluwer Academic Publishers B. V).

Van Oers, B. (1996): Learning Mathematics as a Meaningful Activity. In Stefe, Nesher, Cobb, Goldin, Green (Eds). *Theories of Mathematical Learning* (pp. 91-113).

Vergnaud, G., (1991): La théorie des champs conceptuels. *Dans Recherches en Didactiques des Mathématiques no 6*.

Verillon, P. (2000): Revisiting Piaget and Vygotsky: In Search of a Learning Model for Technology Education. *The journal of Technology Studies XXVI,1*.

Verillon, P., & Andreucci, C. (2005): Artifacts and cognitive development: How do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought? *Communication orale, 15ème PATT Conference, Technology Education and Research*. Amsterdam, Netherlands.

Verillon, P., & Rabardel, P.(1995): Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77- 101.

Von Glaserfeld E. (1987): Learning as a Constructive Activity. In Janvier (Eds), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 3-18). London: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1985): La méthode instrumentale en psychologie. In B. Schneuwly & J. P. Bronckart (Eds.). *Vygotsky aujourd'hui*, pp. 39-47. Neufchâtel: Delachaux et Niestlé. (Πρωτότυπη έκδοση 1930).

Vygotsky, L. S. (1988): *Σκέψη και γλώσσα*. (Α. Ρόδη, μετάφραση). Αθήνα: Γνώση. (Πρωτότυπη έκδοση 1932).

Vygotsky, L. S. (1997): *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών*. (Σ. Βοσνιάδου, Α. Μπίμπου, μετάφραση) *Αθήνα:* Guteberg. (Πρωτότυπη έκδοση 1978)

Weigand, H. G., & Weller, H. (2001): Changes of working styles in a Computer Algebra environment: The case of functions. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6*, 87–111.

Wu, H. (1998): *Notices of American Mathematical Society, 45-1*, 77-85.

Yerushalmy, M. (1993): Generalization in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy and B. Wilson (Eds). *The Geometric Supposer, What is it a Case of?* (pp. 57–84). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zbiek, R.M., (2001): *Influences on Mathematics Teachers' Transitional Journeys in Teaching with CAS*. Paper presented at the CAME Symposium 2001: Theme 2 Reaction.

Ελληνική

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Σ., Παπασταυρίδης Σ., & Πολύζος, Γ. (2003): *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης* (Ε έκδ.). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Γαγάτσης, Α., Σπύρου, Π., & Ευαγγελίδου, Α. (2004): Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Στο Α. Γαγάτσης, Α. Ευαγγελίδου, Ε. Φτιάκα, Λ. Κυριακίδης, Ν. Τσαγγαρίδου, & Μ. Κουτσούλης (Εκδ.), *Σύγχρονες Τάσεις στην Εκπαιδευτική Έρευνα και Πρακτική, Πρακτικά VII Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου* (σ. 427-434). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΚΟΕΕ.

Γιαννακούλιας, Ε. (2005): *Από τη μέθοδο της εξάντλησης στο Λογισμό του Leibniz. Μια σύντομη περιγραφή της εξέλιξης του Ολοκληρωτικού Λογισμού*. Ανακτηθέν από το διαδίκτυο την 10 Δεκεμβρίου 2005 από τον ιστότοπο http://eclass.uoa.gr/courses/MATH119/document/Leibniz.pdf

Δαφέρμος, Μ. (2002): *Η Πολιτισμική-Ιστορική θεωρία του Vygotsky*. Αθήνα: Ατραπός.

Δημητρακοπούλου, Α. (2002): Διαστάσεις διδακτικής διαχείρισης των εκπαιδευτικών εφαρμογών των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας: Προς μια ολοκληρωμένη αξιοποίησή τους στην εκπαίδευση. Στων Χ. Κυνηγού & Ε. Β. Δημαράκη (Επιμ. έκδ.). *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής* (σελ. 57-81). Αθήνα: Καστανιώτης.

Κλαουδάτος, Ν. (1996): *Διδακτική των μαθηματικών. Σημειώσεις μαθημάτων*. Αθήνα: Μαθηματικό Τμήμα του Ε.Κ.Π.Α.

Κολέζα, Ε. (2000): *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κυνηγός, Χ. (2005): Μαθηματικά με εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας. *1ο Συνέδριο Εν.Ε.Δι.Μ., Πρακτικά εισηγήσεων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κυνηγός, Χ. (2007): *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα. Ελληνικά Γράμματα.

Κυνηγός, Χ. και Δημαράκη, Ε. (2002): Νοητικά εργαλεία και πληροφοριακά μέσα: Παιδαγωγικά αξιοποιήσιμες εφαρμογές των νέων τεχνολογιών στη γενική παιδεία. Στων Χ. Κυνηγού & Ε. Β. Δημαράκη (Επιμ. έκδ.). *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής* (σελ. 17-26). Αθήνα: Καστανιώτης.

Μεταξάς, Ν. (2006): *Η δυσκολία κατανόησης του ορισμού του αορίστου ολοκληρώματος. Ανάλυση μέσα από διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια*. Διπλωματική εργασία. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα.

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ. & Γιαννακούλιας Ε.(1999): *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι*. Αθήνα: Συμμετρία.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Τμήμα δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (2003): *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2003-2004, Τεύχος Β*. (Ζ έκδ.). Αθήνα: ΟΕΔΒ

Πάσχος, Θ., & Φαρμάκη, Β. (2005): Η αναστοχαστική αφαίρεση στη δόμηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Μια μελέτη περίπτωσης. *1ο Συνέδριο Εν.Ε.Δι.Μ., Πρακτικά εισηγήσεων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Σακονίδης, Χ. (2005): Έκφραση μαθηματικής σκέψης: Ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις. *1ο Συνέδριο Εν.Ε.Δι.Μ., Πρακτικά εισηγήσεων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Τρούκη, Ε. (2003): Λεκτική Επικοινωνία των Μαθητών και Διερευνητική Μάθηση με τη Βοήθεια των Νέων Τεχνολογιών. Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Τομέας Παιδαγωγικής, ΦΠΨ, Φιλοσοφική Σχολή ΕΚΠΑ.

Χριστιανίδης, Γ. (2003): *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.