ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΜΑΡΙΝΑ Ι. ΠΑΛΛΑ

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Σπύρου

Αθήνα 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Παναγιώτη Σπύρου (επιβλέπων)	Επίκ. Καθηγητής	……..
2) Μιχαήλ Μυτιληναίο	Καθηγητής	……..
3) Δέσποινα Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια	……..

στους μαθητές μου

Ευχαριστώ θερμά:

- Τον κ. Παναγιώτη Σπύρου ο οποίος επέβλεπε τη συγγραφή της διπλωματικής εργασίας και ήταν πάντα πρόθυμος να βοηθήσει αποτελεσματικά.
- Τον κ. Μιχάλη Μυτιληναίο για τις πολλές και ουσιαστικές συζητήσεις μας σχετικά με το θέμα της εργασίας, καθώς επίσης για την υπομονή και κατανόησή του.
- Την κ. Δέσποινα Πόταρη για τις χρήσιμες υποδείξεις της όσον αφορά τη διεξαγωγή της έρευνας.
- Τους μαθητές που πρόθυμα συμμετείχαν στην έρευνα και τους μαθηματικούς καθηγητές τους οι οποίοι διευκόλυναν την πραγματοποίησή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ……...…….…13
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ……...14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ……..…15
Περίληψη……....15
Διατύπωση του προβλήματος…….……15
Σκοπός της έρευνας……...…16
Ερευνητικά ερωτήματα…….….16
Αναγκαιότητα της έρευνας…….…17
Σημαντικότητα της έρευνας……...……17
Οριοθέτηση του προβλήματος……...……....19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ……....21
Περίληψη…….…...21
Δομή του κεφαλαίου……..21
Ιστορική αναδρομή της μαθηματικής επαγωγής…….…...22
Αρχή της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής - 5^{ο} αξίωμα του Peano.…….25
Παραλλαγές της μαθηματικής επαγωγής…….…..29
Παραγωγικός και επαγωγικός συλλογισμός……..……....33
Απόδειξη – Εικασία……...37
Δυσκολίες - παρανοήσεις στη μάθηση της μαθηματικής επαγωγής……..…44
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ……55
Περίληψη……...55
Δείγμα……55
Δεδομένα και διαδικασία……...55
Συνεντεύξεις……..59
Ανάλυση……....60

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ……61

Περίληψη……..61

Αποτελέσματα……..…61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ…….…..95

Περίληψη……..95

Συμπεράσματα…….……95

Εισηγήσεις – Προτάσεις……...……..……102

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι….……..……105

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ….……107

ΑΝΑΦΟΡΕΣ……..113

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Σελίδα

1 Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο ερώτημα του τεστ……..……..62

2 Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο ερώτημα του τεστ……..……70

3 Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο τρίτο ερώτημα του τεστ…….77

4 Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο τέταρτο ερώτημα του τεστ……82

5 Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο πέμπτο ερώτημα του τεστ…….……..…….…88

6 Συντελεστές συσχέτισης (Pearson r) μεταξύ των ερωτημάτων του τεστ…….……92

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Σελίδα

1 Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο πρώτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο……69

2 Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο δεύτερο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο……75

3 Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο τρίτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο……..81

4 Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο τέταρτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο……..87

5 Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο πέμπτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο……91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ

Περίληψη

Οι μαθητές, κατά τη διάρκεια φοίτησής τους στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, διδάσκονται διάφορες αποδεικτικές μεθόδους ώστε να είναι σε θέση να αποδεικνύουν προτάσεις και θεωρήματα, καθώς και να τις εφαρμόζουν αυτές για την επίλυση προβλημάτων. Η παρούσα έρευνα έχει στόχο να διερευνήσει τα επίπεδα κατανόησης της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής από τους μαθητές Λυκείου και να εντοπίσει τις τυχόν δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν, όταν τη χρησιμοποιούν.

Διατύπωση του προβλήματος

Έρευνες σχετικές με τον τυπικό μαθηματικό συλλογισμό συχνά επικεντρώνονται στην επίγνωση εκ μέρους των μαθητών της αναγκαιότητας της απόδειξης έναντι διαισθητικών ή εμπειρικών συλλογισμών (π.χ. Healy & Hoyles, 2000) ή στους μηχανισμούς του συλλογισμού των μαθητών, όταν χρησιμοποιούν συγκεκριμένες αποδεικτικές μεθόδους. Μια απ' αυτές είναι η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή (Movshovitz – Hadar, 1993). Οι μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (Avital & Libeskind, 1978), οι φοιτητές των σχολών θετικών επιστημών (Nardi & Iannone, 2003) καθώς και οι φοιτητές των παιδαγωγικών σχολών (Stylianides & Philippou, in press) αντιμετωπίζουν συχνά δυσκολίες στην κατανόηση σε βάθος της μαθηματικής επαγωγής.

Σκοπός της έρευνας

Η έρευνα αυτή έχει σκοπό να εντοπίσει τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τους μηχανισμούς του μαθηματικού συλλογισμού τους, όταν επιλύουν προβλήματα όπου είναι αναγκαία η απόδειξη. Συγκεκριμένα, στοχεύει να συμβάλλει στη διερεύνηση των δυσκολιών σχετικά με τους μηχανισμούς της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή. Στα ελληνικά σχολεία της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, η αναφερόμενη αποδεικτική μέθοδος χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στη Β' τάξη του Ενιαίου Λυκείου. Πιο ειδικά, η έρευνα έχει σκοπό να καταγράψει και να μελετήσει τις δυσκολίες που προσδιορίστηκαν σε γραπτά δοκίμια μαθητών τα οποία αναφέρονται στη μαθηματική επαγωγή, καθώς και τις αιτιολογήσεις που δόθηκαν, μέσω συνέντευξης, από ένα μέρος του εξεταζόμενου δείγματος.

Ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση το σκοπό της παρούσης ερευνητικής εργασίας επιδιώκεται να διερευνηθεί ο τρόπος και ο βαθμός που κατανοούν οι μαθητές τη δομή της μαθηματικής επαγωγής. Ειδικότερα, διερευνώνται τα ερωτήματα:

- Αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι η μαθηματική επαγωγή συνδέεται με την καλή διάταξη των φυσικών αριθμών;
- Θεωρούν ότι οι δύο συνθήκες της μεθόδου είναι ανεξάρτητες, αλλά και οι δύο απαραίτητες ώστε να ολοκληρωθεί η αποδεικτική διαδικασία;
- Μπορούν να κάνουν εικασίες και επιπλέον, αισθάνονται την ανάγκη να αποδείξουν, και όχι απλώς να γενικεύσουν, τον επαγωγικό συλλογισμό τους;

Αναγκαιότητα της έρευνας

Στο διεθνή χώρο υπάρχουν αρκετές έρευνες σχετικές με την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής από τους μαθητές και τους φοιτητές (π.χ. Movshovitz – Hadar, 1993; Nardi & Iannone, 2003; Wistedt & Brattstrom, 2005).

Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας διαπιστώθηκε ότι στον ελληνικό χώρο δεν υπάρχουν αντίστοιχες έρευνες. Η μαθηματική επαγωγή, όμως, δυσκολεύει τους περισσότερους μαθητές και η εμπειρία των εκπαιδευτικών το επιβεβαιώνει. Επομένως, θεωρήθηκε σκόπιμο να πραγματοποιηθεί μια έρευνα στην οποία θα συμμετέχουν μαθητές και μαθήτριες ελληνικών σχολείων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Σημαντικότητα της έρευνας

Η μαθηματική επαγωγή είναι ένα βασικό εργαλείο για την απόδειξη μαθηματικών θεωρημάτων τα οποία αναφέρονται σε σύνολα στοιχείων που μπορούν να τοποθετηθούν σε μια, ένα προς ένα, αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επιπλέον, η μαθηματική επαγωγή είναι ένα από τα αξιώματα τα οποία ορίζουν τη δομή των φυσικών αριθμών. Καθώς το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών έχει τις ρίζες του στους φυσικούς αριθμούς, η βελτίωση της κατανόησης και η άνεση με την οποία χρησιμοποιεί κάποιος τη μαθηματική επαγωγή είναι σημαντικοί παράγοντες στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του (Avital & Lebeskind, 1978).

Με τη διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής στο σχολείο επιδιώκεται η άσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία και η κατανόηση της έννοιας του αλγορίθμου. Ως κομμάτι της Θεωρίας Αριθμών, που αποτελεί ίσως τον πιο ελκυστικό κλάδο της μαθηματικής επιστήμης, η μαθηματική επαγωγή αναμένεται να προκαλέσει το

ενδιαφέρον των μαθητών και να διεγείρει την πνευματική περιέργεια και την ερευνητική τους διάθεση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2005).

Ακόμη, η μαθηματική επαγωγή μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις επαναληπτικές και αναδρομικές μεθόδους οι οποίες, λόγω της ανάπτυξης της τεχνολογίας των υπολογιστών, χρησιμοποιούνται όλο και πιο πολύ (Allen, 2001).

Επιπλέον, η μαθηματική επαγωγή, εκτός από αποδεικτική μέθοδος, χρησιμοποιείται στην επίλυση υπολογιστικών και κατασκευαστικών προβλημάτων της γεωμετρίας, στην εύρεση γεωμετρικών τόπων, στον ορισμό εννοιών όπου περιέχεται το πέρασμα «από το ν στο ν+1», καθώς και στον αριθμό των διαστάσεων στην ν – διάστατη γεωμετρία (Golovina & Yaglom, 1979).

Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα και τη χρησιμότητα της μαθηματικής επαγωγής, η παρούσα έρευνα μελετά τον τρόπο και τον βαθμό που οι μαθητές την κατανοούν. Ένα χαρακτηριστικό της έρευνας είναι ότι δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην εννοιολογική παρά στη διαδικαστική πλευρά της αποδεικτικής μεθόδου. Επίσης, επιχειρεί να τονίσει τη διαφορά μεταξύ της απόδειξης και της εικασίας, αλλά ταυτόχρονα να επισημάνει την αλληλοσυσχέτιση και αλληλοσυμπλήρωσή τους.

Πιστεύεται ότι η διερεύνηση των δυσκολιών και των αδυναμιών των μαθητών σχετικά με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα βοηθήσει και τους καθηγητές να σχεδιάζουν και να οργανώνουν τη διδασκαλία της αντίστοιχης ενότητας κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να είναι όσο το δυνατό πιο αποτελεσματική.

Οριοθέτηση του προβλήματος

Η μελέτη αυτή διερευνά τις δυσκολίες των μαθητών όσον αφορά τους μηχανισμούς της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή. Υπάρχουν, όμως, κάποιες πτυχές του προβλήματος οι οποίες δε θα εξεταστούν σ' αυτή τη μελέτη.

Η έρευνα εστιάζει κυρίως στο μαθητή και δε μελετά ούτε τις μεθόδους διδασκαλίας ούτε το είδος των διδακτικών δραστηριοτήτων που πραγματοποιήθηκαν μέσα στη σχολική αίθουσα, οι οποίες πιστεύεται ότι επηρεάζουν την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής.

Μια άλλη βασική πτυχή του προβλήματος, που δεν εξετάζεται και δε λαμβάνεται υπόψη στην παρούσα έρευνα, είναι ο εκπαιδευτικός. Ειδικότερα, η έρευνα δε μελετά το επίπεδο κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, τις απόψεις του για τη διδασκαλία της αντίστοιχης ενότητας, καθώς επίσης, τα μοντέλα και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί κατά τη διαπραγμάτευση της έννοιας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περίληψη

Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη μαθηματική δομή της τέλειας επαγωγής και πολλές φορές δημιουργούνται παρανοήσεις, με αποτέλεσμα η γνώση της μεθόδου να είναι τις περισσότερες φορές εύθραυστη (fragile knowledge) παρά στερεή (solid knowledge). Παρόλο που υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα στη μαθηματική επαγωγή και τον επαγωγικό συλλογισμό όπως, επίσης, ανάμεσα στην απόδειξη και την εικασία, οι παραπάνω έννοιες συνδέονται και σχετίζονται μεταξύ τους.

Δομή του κεφαλαίου

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τις βασικές πτυχές που μελετώνται στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια. Αρχικά γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή της μαθηματικής επαγωγής και παρουσιάζεται η μαθηματική δομή της. Στη συνέχεια αναλύονται εννοιολογικά οι όροι παραγωγικός συλλογισμός, επαγωγικός συλλογισμός, απόδειξη και εικασία. Τέλος, αναφέρονται τα ευρήματα διάφορων ερευνητών σχετικά με την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής από τους μαθητές.

Ιστορική αναδρομή της μαθηματικής επαγωγής

Η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων έθεσε από πολύ νωρίς τους μαθηματικούς μπροστά σε ένα πρόβλημα. Μία πρόταση, η οποία αληθεύει για ορισμένες περιπτώσεις ακεραίων, πώς μπορεί να αποδειχθεί ότι αληθεύει γενικά; Προφανώς, είναι αδύνατο να εξεταστούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις. Η μαθηματική επαγωγή είναι μία απλή, αλλά πολλαπλά χρήσιμη και ισχυρή μέθοδος για τη λύση αυτού του προβλήματος. Χρησιμοποιείται αποτελεσματικά ως αποδεικτικό εργαλείο, σχεδόν σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Για παράδειγμα, στην άλγεβρα, στη γεωμετρία, στην τριγωνομετρία, στη συνδυαστική, στη θεωρία γραφημάτων και σε πολλά άλλα πεδία.

Οι άνθρωποι έχουν δείξει ενδιαφέρον για τους φυσικούς αριθμούς από πολύ παλιά. Οι αρχαίοι μαθηματικοί ήξεραν και χρησιμοποιούσαν την αρχή 'descente infinie' (άπειρη φθίνουσα διαδικασία), η οποία είναι μια μορφή της μαθηματικής επαγωγής. Η συγκεκριμένη αρχή είναι η ακόλουθη: «αν ζητείται να δειχθεί ότι κανένας φυσικός αριθμός δεν έχει την ιδιότητα φ, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ο οποίος έχει την ιδιότητα φ, υπάρχει ένας μικρότερος φυσικός αριθμός $\mu < \nu$ ο οποίος, επίσης, έχει την ιδιότητα φ». (Αν υπήρχε ένας φυσικός με την ιδιότητα φ, θα βρίσκαμε ατελείωτα μικρότερους και μικρότερους φυσικούς αριθμούς με την ιδιότητα φ, το οποίο είναι άτοπο). Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν την παραπάνω αρχή για την απόδειξη της ασυμμετρίας των τμημάτων. Τον 17^{ο} αιώνα, η αρχή ξαναανακαλύφτηκε από τον P. Fermat (Hajek & Pudlak, 1993).

Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθηματικός Francesco Maurolico (Μαυρόλυκος) μας δίνει την πρώτη γραπτή πηγή όπου εφαρμόζεται η μαθηματική επαγωγή. Συγκεκριμένα, απέδειξε το 1557 ότι «το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών», δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό, $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$. Η

δημοσίευση της παραπάνω πρότασης έγινε το 1575 στο βιβλίο του «Arithmeticorum Libri Duo». Για την απόδειξη της πρότασης αυτής ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε τη βοηθητική πρόταση: «κάθε τετράγωνο, όταν αυξάνεται με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο», δηλαδή την ταυτότητα $\nu^2 + (2\nu + 1) = (\nu + 1)^2$.

Ουσιαστικά έδειξε ότι υπάρχει ένας γενικός τρόπος μετάβασης από μια περίπτωση στην αμέσως επόμενη. Η μέθοδος αυτή διατυπώθηκε με σαφήνεια από τον Blaise Pascal, το 1654, στην πραγματεία του «Traite sur le triangle arithmetique» για το αριθμητικό τρίγωνο. Διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου, ο Pascal έγραψε τα εξής:

«*Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*

- *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
- *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*

Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος· Έτσι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο.» (Θωμαΐδης, 2004; Lambrou, 2005).

Οι παραπάνω μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν διαισθητικά τους φυσικούς αριθμούς. Ένα χαρακτηριστικό, όμως, των νεότερων μαθηματικών, ειδικά από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, είναι η αξιωματική ανάπτυξη μιας θεωρίας. Ο Giuseppe Peano (1858 – 1932), στο έργο του «Arithmetices principia, nova methodo exposita» (1889) συμπεριέλαβε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στα πέντε αξιώματά του για τη θεμελίωση της αριθμητικής. Κατά συνέπεια, ο διαισθητικός τρόπος αντιμετώπισης της μαθηματικής επαγωγής γίνεται πλέον μια νόμιμη αποδεικτική μέθοδος (Lambrou, 2005; Τουμάσης, 2002).

Όσον αφορά τους όρους «μαθηματική επαγωγή» ή «τέλεια επαγωγή», καθιερώθηκαν στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα με τις εργασίες των A. de Morgan (1838) και R. Dedekind (1887). Θεωρήθηκε απαραίτητο να γίνει διάκριση από την «ατελή επαγωγή» που χρησιμοποιείται στις Φυσικές Επιστήμες και η οποία προσπαθεί να βρει κανονικότητα και συνοχή πίσω από τις παρατηρήσεις, ώστε να εξάγει γενικά συμπεράσματα, μέσω των ειδικών και συγκεκριμένων περιπτώσεων (Θωμαΐδης, 2004).

Αρχή της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής – 5^{ο} αξίωμα του Peano

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστεί αναλυτικά η αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η οποία αποτελεί το πέμπτο αξίωμα της αξιωματικής θεωρίας του Peano για τη θεμελίωση της αριθμητικής. Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι ισοδύναμη με την αρχή του ελαχίστου (ή αρχή της καλής διάταξης). Τέλος, θα αναφερθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα άπειρο σύνολο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σ' αυτό η μαθηματική επαγωγή.

Αναλυτικά, η αρχή της μαθηματικής επαγωγής διατυπώνεται ως εξής:

> «Αν για ένα υποσύνολο Α του συνόλου Ν των φυσικών αριθμών ισχύουν:
> α) $0 \in A$
> β) για κάθε φυσικό αριθμό ν, αν $\nu \in A$ τότε $(\nu+1) \in A$,
> τότε συμπεραίνουμε ότι το σύνολο Α ισούται με το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών, δηλαδή Α = Ν».

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής είναι η εξής:

> «Έστω ότι η p είναι μια μαθηματική ιδιότητα. Λέμε ότι η p(x) ισχύει αν ο αριθμός x ικανοποιεί την ιδιότητα p.
> Υποθέτουμε ότι:
> α) η p(0) ισχύει, και
> β) αν η p(κ) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό κ, τότε η p(κ+1) ισχύει.
> Τότε η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν».
> (Μυτιληναίος & Κατερίνης, 1993; Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999).

Η σχέση (α) αναφέρεται ως *βάση της επαγωγής ή βασικό βήμα* και η σχέση (β) ως *βήμα της επαγωγής ή επαγωγικό βήμα*. Η υπόθεση ότι η p(κ) είναι αληθής στη σχέση (β) αναφέρεται ως *επαγωγική υπόθεση*.

Μια άλλη χρήσιμη διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής είναι η ακόλουθη πρόταση: «Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ελάχιστο στοιχείο», η οποία είναι γνωστή ως η αρχή του ελαχίστου ή αρχή της καλής διάταξης.

Θα αποδείξουμε ότι:
«Η αρχή του ελαχίστου είναι ισοδύναμη με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής».

Απόδειξη
Αρχικά, υποθέτουμε ότι αληθεύει η αρχή του ελαχίστου και θα αποδείξουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.
Πράγματι, έστω ότι:
α) η p(0) ισχύει, και
β) αν η p(κ) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό κ, τότε η p(κ+1) ισχύει.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός μ τέτοιος, ώστε η p(μ) να μην ισχύει.
Θεωρούμε το σύνολο $A=\{\nu\in N: p(\nu) \text{ δεν ισχύει }\}$.
Το A είναι μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών, οπότε, σύμφωνα με την αρχή του ελαχίστου, υπάρχει ελάχιστο στοιχείο του A έστω το λ. Προφανώς $\lambda\neq 0$, εφόσον η p(0) ισχύει. Επειδή το λ είναι το ελάχιστο στοιχείο του A, θα έχουμε $\lambda-1\notin A$, δηλαδή η p(λ-1) ισχύει. Από την υπόθεση προκύπτει ότι η p(λ) ισχύει, δηλαδή $\lambda\notin A$, το οποίο είναι άτοπο.
Επομένως η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι αληθεύει η αρχή της μαθηματικής επαγωγής και θα αποδείξουμε την αρχή του ελαχίστου.

Πράγματι, έστω Α, ένα μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι το Α δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε το σύνολο Β που αποτελείται από τους φυσικούς που είναι μικρότεροι από όλα τα στοιχεία του Α, δηλαδή:

$$\kappa \in B \Leftrightarrow [\text{ για κάθε } \mu \in A : \kappa < \mu].$$

Παρατηρούμε ότι $0 \in B$ (διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του Α).

Έστω $\nu \in B$. Τότε όλα τα στοιχεία του Α είναι μεγαλύτερα από το ν. Από την υπόθεση ότι το Α δεν έχει ελάχιστο στοιχείο έπεται ότι $\nu+1 \notin A$, συνεπώς όλα τα στοιχεία του Α είναι μεγαλύτερα από το ν+1. Δηλαδή $\nu+1 \in B$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής συμπεραίνουμε ότι $B = N$, και άρα $A = \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως το Α έχει ελάχιστο στοιχείο.

(Μυτιληναίος & Κατερίνης, 1993)

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί στην παρακάτω γενικευμένη της μορφή, όπου στο βασικό βήμα μπορεί να θεωρηθεί ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός ν_0 και όχι αναγκαστικά το μηδέν.

Αναλυτικά:

> «Έστω ότι η p είναι μια μαθηματική ιδιότητα. Λέμε ότι η p(x) ισχύει αν ο αριθμός x ικανοποιεί την ιδιότητα p.
>
> Υποθέτουμε ότι:
>
> α) η $p(\nu_0)$ ισχύει, όπου ν_0 φυσικός αριθμός, και
>
> β) για κάθε φυσικό $\kappa \geq \nu_0$ αν η $p(\kappa)$ ισχύει, τότε η $p(\kappa+1)$ ισχύει.
>
> Τότε η $p(\nu)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \nu_0$».
>
> (Μυτιληναίος & Κατερίνης, 1993)

Η μαθηματική επαγωγή δεν περιορίζεται μόνο στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Μπορεί να εφαρμοστεί στην απόδειξη μιας πρότασης p(κ) για κάθε ακέραιο κ ≥ β, όπου β ένας οποιοσδήποτε ακέραιος (αρνητικός, μηδέν ή θετικός). Στην πραγματικότητα, πρόκειται για μια μετατόπιση του συνόλου των φυσικών κατά β μονάδες.

Αν ζητείται να αποδειχθεί με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μια πρόταση p(κ) για όλους τους ακέραιους αριθμούς κ, θα πρέπει να γίνουν δύο επαγωγές — μία προς τα πάνω από π.χ. το 0 και μία προς τα κάτω από το 0.

Σύμφωνα με τους Avital & Hansen (1976), η μαθηματική επαγωγή μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε άπειρο σύνολο ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

i. Ύπαρξη διάταξης (για δυο οποιαδήποτε διαφορετικά στοιχεία του συνόλου είναι φανερό ποιο προηγείται του άλλου)
ii. Ασυμμετρία (αν το α προηγείται του β, τότε το β δεν προηγείται του α)
iii. Μεταβατικότητα (για οποιαδήποτε τριάδα στοιχείων α, β, γ του συνόλου, αν το α προηγείται του β και το β προηγείται του γ, τότε το α προηγείται του γ)
iv. Καλή διάταξη (κάθε υποσύνολο του συνόλου έχει ελάχιστο στοιχείο)

Επιπλέον, πρέπει να ισχύει η ιδιότητα πως κάθε στοιχείο του συνόλου, εκτός από το πρώτο, έχει ένα καλά ορισμένο προηγούμενο στοιχείο.

Κάθε σύνολο που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες μπορεί να τοποθετηθεί σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς, αρκεί τα στοιχεία του δοσμένου συνόλου να είναι τοποθετημένα κατά μέγεθος.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις συνθήκες i, ii και iii, αλλά όχι την iv.

Παραλλαγές της μαθηματικής επαγωγής

Σε πολλές περιπτώσεις, διευκολύνει η χρησιμοποίηση της μαθηματικής επαγωγής με τροποποιημένη μορφή, ώστε να αποδειχθεί μια πρόταση ή να λυθεί ένα πρόβλημα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι πιο χαρακτηριστικές παραλλαγές της μαθηματικής επαγωγής και δίνεται από ένα παράδειγμα εφαρμογής τους (Lambrou, 2005).

1) **Ισχυρή μαθηματική επαγωγή (ή δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής)**

Υποθέτουμε ότι:
α) η p(0) ισχύει, και
β) αν οι p(0), p(1),p(2), …, p(κ) ισχύουν, τότε η p(κ+1) ισχύει.
Τότε η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μια πιο απλή εκδοχή της δεύτερης μορφής είναι η εξής:
Υποθέτουμε ότι:
α) οι p(0), p(1) ισχύουν, και
β) αν οι p(κ-2), p(κ-1) ισχύουν, όπου κ > 1, τότε η p(κ) ισχύει.
Τότε η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Ένα παράδειγμα όπου φαίνεται η χρησιμότητα αυτής της μορφής της μαθηματικής επαγωγής είναι το επόμενο:

«Δίνεται η ακολουθία Fibonacci (α_ν) με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ και $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$.

Να αποδειχθεί ότι : $\alpha_\nu \leq (\frac{7}{4})^\nu$, για κάθε θετικό φυσικό αριθμό ν».

2) Άλματα

Μπορούμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας πρότασης p(ν) για κάθε φυσικό αριθμό ν, προχωρώντας κάθε φορά 2 βήματα.
Συγκεκριμένα, το βήμα της επαγωγής παίρνει τη μορφή: «αν η p(κ) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό κ, τότε η p(κ+2) ισχύει». Επιπλέον, επαληθεύουμε την ισχύ των προτάσεων p(1) και p(2). Επομένως, μέσω των συνεπαγωγών:
p(1) $\Rightarrow$ p(3) $\Rightarrow$ p(5) $\Rightarrow$ p(7) $\Rightarrow$… και p(2) $\Rightarrow$ p(4) $\Rightarrow$ p(6) $\Rightarrow$ p(8) $\Rightarrow$…
η πρόταση p(ν) αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Ένα παράδειγμα, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλματα των 2 βημάτων, είναι το εξής:

« να αποδειχθεί ότι για όλους τους θετικούς φυσικούς αριθμούς ν ισχύει:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{\nu-1}\nu^2 = (-1)^{\nu-1}(1 + 2 + \ldots + \nu) \text{ ».}$$

Στη γενική περίπτωση, μπορούμε να έχουμε άλμα t βημάτων, όπου t ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Αρκεί να αποδείξουμε την ισχύ των p(1) , p(2) , …, p(t) και της συνεπαγωγής p(κ) $\Rightarrow$ p(κ+t).

3) Διπλή μαθηματική επαγωγή

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος χρειάζεται πρώτα να αποδειχθεί επαγωγικά μια βοηθητική πρόταση.

Για παράδειγμα:

« να αποδειχθεί ότι για όλους τους θετικούς φυσικούς αριθμούς ν, ο αριθμός

$2 \cdot 7^{\nu} + 3 \cdot 5^{\nu} - 5$ είναι πολλαπλάσιο του 24».

(*Υπόδειξη*: Κατά την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης παρουσιάζεται η ανάγκη να αποδειχθεί επαγωγικά ότι ο αριθμός $6 \cdot 5^{\kappa} - 30$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 24).

4) Μαθηματική επαγωγή δύο διαστάσεων

Αν μια πρόταση p(μ, ν) εξαρτάται από δύο θετικούς φυσικούς αριθμούς μ, ν τότε μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω αποδεικτική πορεία:

- Αποδεικνύουμε την πρόταση για ν = 1, δηλαδή την p(μ, 1) για κάθε φυσικό αριθμό μ. Για τον σκοπό αυτό, αποδεικνύουμε πρώτα την p(1, 1) και έπειτα την συνεπαγωγή p(κ, 1) $\Rightarrow$ p(κ+1, 1) , όπου κ τυχαίος θετικός φυσικός αριθμός.
- Εφαρμόζουμε την μαθηματική επαγωγή ως προς ν. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι ισχύει η p(μ, κ) αποδεικνύουμε την p(μ, κ+1).

Ως παράδειγμα αναφέρουμε το επόμενο:

«να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $(2m)!(2n)!$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού $m!n!(m+n)!$, για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς ακεραίους m και n ».

Η μέθοδος επεκτείνεται και σε περιπτώσεις της μορφής p(ν_1 ,ν_2 ,ν_3 ,…, ν_λ).

5) Ενίσχυση της πρότασης που ζητείται να αποδειχθεί

Για παράδειγμα, προσπαθώντας να δείξουμε ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς ν ≥ 2 ισχύει : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{3}{4}$, συναντάμε δυσκολία.

Μπορούμε όμως να αποδείξουμε την πιο ισχυρή ανισότητα :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}\leq\frac{3}{4}-\frac{1}{\nu}$$

οπότε έμμεσα αποδεικνύουμε και την αρχική.

Παραγωγικός και επαγωγικός συλλογισμός

Πολλές φορές δημιουργείται σύγχυση ανάμεσα στους όρους 'μαθηματική (ή τέλεια) επαγωγή' και 'επαγωγικός συλλογισμός'. Στη φιλοσοφία και τις εφαρμοσμένες επιστήμες ο όρος επαγωγικός συλλογισμός χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη διαδικασία εξαγωγής γενικών συμπερασμάτων από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Στα μαθηματικά, από την άλλη μεριά, τέτοια συμπεράσματα αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερη επιφύλαξη, επειδή τα μαθηματικά είναι μια 'αποδεικτική' επιστήμη, με την έννοια ότι κάθε πρόταση πρέπει να συνοδεύεται από μια αυστηρή απόδειξη, ώστε να γίνει αποδεκτή. Η μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται ως αποδεικτική μέθοδος στα πλαίσια της παραγωγικής και όχι της επαγωγικής σκέψης. Για να γίνει σαφής η διάκριση αυτή, θα αναλυθούν περαιτέρω οι προαναφερθέντες όροι.

Η συλλογιστική σκέψη ορίζεται ως η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων από κάποια δεδομένα στη διάρκεια μιας διαλογικής διαδικασίας. Ο συλλογισμός διέπει την ανθρώπινη σκέψη και βάζει τις βάσεις της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ειδικότερα:

Στον *παραγωγικό συλλογισμό* αρχίζουμε από μια γενική πρόταση που θεωρείται αληθής και με την επικουρία ενός ακόμη δεδομένου τερματίζουμε σε μια άλλη πρόταση που επιβάλλεται με λογική αναγκαιότητα ως ακολουθία (λογικό προϊόν) των προηγούμενων προτάσεων. Ο παραγωγικός συλλογισμός αφορά στη διαδικασία συναγωγής συμπερασμάτων που είναι λογικά αναγκαία, ξεκινώντας από το γενικό και καταλήγοντας σε κάτι πιο ειδικό.

Ο *επαγωγικός συλλογισμός* εκκινεί από το ειδικό και το συγκεκριμένο και καταλήγει στο γενικό και το αφηρημένο. Η επαγωγή είναι ένας ατελής συλλογισμός διότι το συμπέρασμα δεν προκύπτει ως λογική αναγκαιότητα, όπως στην περίπτωση του παραγωγικού συλλογισμού. Ο επαγωγικός συλλογισμός είναι ο συλλογισμός που μας επιτρέπει να γενικεύουμε τις γνώσεις μας και να μεταφερόμαστε πέραν των ειδικών παρατηρήσιμων γεγονότων, χωρίς όμως ποτέ να είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι οι γενικεύσεις μας είναι σωστές. Οι αληθείς προϋποθέσεις ενός επαγωγικού

συλλογισμού δεν μπορούν να εγγυηθούν για την ορθότητα των συμπερασμάτων που προκύπτουν από αυτές, όπως στην περίπτωση του παραγωγικού συλλογισμού. Τα επαγωγικά συμπεράσματα αντανακλούν βαθμούς πιθανότητας και πρέπει να συνοδεύονται με όρους, όπως *ίσως*, *πιθανώς*, για μεγαλύτερη ακρίβεια (Βοσνιάδου, 2004). Θα μπορούσε να θεωρηθεί ως πιο εύστοχος και αντιπροσωπευτικός ο όρος 'επαγωγικός πιθανοθεωρητικός συλλογισμός'.

Για παράδειγμα ο Goldbach διατύπωσε το 1742 την πρόταση: «κάθε άρτιος αριθμός είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών». Πέρασαν πάνω από δυόμισι αιώνες και δε γνωρίζουμε αν αυτή η πρόταση, γνωστή ως εικασία του Goldbach, είναι αληθής. Η εικασία επιβεβαιώνεται μέσα σε όλες τις ελέγξιμες περιπτώσεις (π.χ. 100=3+97 ή 20948=19+20929), αλλά ίσως υπάρχει κάποιος άρτιος αριθμός χωρίς τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Η πρόταση παραμένει εικασία μέχρι να βρεθεί μια καθολική απόδειξη που θα αναφέρεται σε όλους τους άπειρους άρτιους αριθμούς ή μέχρι να βρεθεί ένα αντιπαράδειγμα που θα την καταρρίψει.

Ο Αριστοτέλης (4^{ος} αι. π.Χ.) θεωρούσε τον παραγωγικό συλλογισμό ως το μοναδικό ορθό τρόπο ασφαλούς σκέψης και θεμελίωσε την τυπική λογική, η οποία επικρατούσε μέχρι την Αναγέννηση. Έκτοτε, η αποτελεσματικότητά αυτού του είδους συλλογισμού ελαττώθηκε, επειδή δεν αξιοποιούσε τα δεδομένα της παρατήρησης και της εμπειρίας και έγινε μια απλή διανοητική άσκηση. Κατά συνέπεια η εμπειρική ένδειξη, στην οποία στηριζόταν η απόδειξη, παραγκωνίστηκε από την αυθεντία και, όσο περισσότερες αυθεντίες μπορούσε να επικαλεστεί κανείς, τόσο περισσότερο ισχυροποιούσε και τη θέση του. Όπως ήταν φυσικό, με μια τέτοια κατάχρηση του βασικού εργαλείου, η επιστήμη έγινε στείρα.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το αδιέξοδο του ορθολογισμού του Descartes. Εκείνο που χαρακτηρίζει τον Descartes είναι η μεθοδική αμφιβολία, δηλαδή ένας προσποιητός συστηματικός σκεπτικισμός, για τις όποιες αλήθειες δεν παράγονται με μια σίγουρη μέθοδο. Επιχειρεί να καταστήσει τα θεμέλια της γνώσης αδιάσειστα. Θεωρεί ότι καμιά επιστήμη δεν οικοδομείται με άλλο τρόπο παρά μόνο με την

ενόραση και την παραγωγή. Ουσιαστικά ο Descartes υιοθετεί μια μέθοδο η οποία καταστρέφει το δεδομένο των αισθήσεων, το οποίο δεν ικανοποιεί το αίτημα της απόλυτης βεβαιότητας και το αντικαθιστά με την ορθολογική κατασκευή. Ανακύπτει, όμως, ένα σοβαρό ερώτημα που σχετίζεται με το δεδομένο της δυνατότητας παραγωγής λανθασμένων συμπερασμάτων ή ακόμη και άμεσης αναγνώρισης λανθασμένων πρώτων αρχών ως αληθών. Αλλά το πιο σημαντικό, ίσως, ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο αυτό το μαθηματικό, παραγωγικό μοντέλο που προτείνει μπορεί να εξηγήσει το φυσικό κόσμο, έναν κόσμο συμπτωματικών γεγονότων (Σπύρου, 2005).

Η ιστορία της λογικής αλλάζει τον 17^{ο} αιώνα, όταν ο Francis Bacon άρχισε να τονίζει την παρατηρησιακή βάση της επιστήμης. Πρότεινε τη μέθοδο της επαγωγικής πιθανοθεωρητικής λογικής, μέσω της οποίας η εξέταση μιας σειράς περιπτώσεων θα οδηγούσε σε μια υπόθεση και τελικά σε μια γενίκευση. Πιο αναλυτικά, ο Bacon πίστευε ότι μπορεί κάποιος να καταλήξει σε γενικά συμπεράσματα όταν:

- κάνει προσωπικές παρατηρήσεις στο περιβάλλον,
- καταγράψει συγκεκριμένα στοιχεία συγκεκριμένων γεγονότων και
- κάνει γενίκευση βασισμένη στα δεδομένα που συνέλεξε.

Ο Bacon έστρεψε την προσοχή των επιστημόνων στη φύση, αξιώνοντας τη μαρτυρία της εμπειρίας προκειμένου να υπάρξει επαλήθευση. Η επαγωγική μέθοδος είναι πολύ σημαντική γιατί οδηγεί πέρα από τα ήδη γνωστά, είναι ένας τρόπος ανακάλυψης νέας γνώσης. Ο Bacon συνέβαλε ουσιαστικά στην ανάπτυξη της επιστήμης, εφόσον δημιούργησε ευνοϊκές προϋποθέσεις για την επεξεργασία της επαγωγής, παρόλο που το βήμα που έκανε προς τα εμπρός ήταν μονόπλευρο.

Πιο ριζοσπαστική είναι η άποψη του Karl Popper ότι οι επιστημονικές θεωρίες γεννώνται ως υποθέσεις ή εικασίες και στη συνέχεια υπόκεινται σε πειραματικές δοκιμασίες, κατά τις οποίες οι επικριτές τους προσπαθούν να τις ανατρέψουν. Σύμφωνα με τον Popper οι υποθέσεις και οι εικασίες μπορούν να διαψεύδονται μέσα στα γεγονότα και όχι να επαληθεύονται. Η πρόταση π.χ. «κάθε χαλκός είναι αγωγός

ηλεκτρισμού», που έχει μορφή καθολικού νόμου της φύσης, δεν είναι επαληθεύσιμη, εφόσον είναι αδύνατο να παρατηρηθεί όλος ο χαλκός μέσα στο σύμπαν. Μια θεωρία επιτρέπεται να θεωρείται επιστημονική, υποστήριζε ο Popper, μόνο αν είναι ικανή κατ' αρχήν να εξεταστεί και να διακινδυνεύσει να ανατραπεί. Από τη στιγμή που μια θεωρία επιβιώνει μετά από τέτοιες δοκιμασίες, αποκτά ένα βαθμό αξιοπιστίας, αλλά ποτέ δεν αποδεικνύεται (Σπύρου, 2005).

Η διάκριση ανάμεσα στον παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό, πολλές φορές είναι δύσκολη να γίνει, όταν το αντικείμενο μελέτης είναι η ανθρώπινη σκέψη. Στην καθημερινή ζωή αλλάζουμε συνέχεια από παραγωγικούς σε επαγωγικούς συλλογισμούς. Ειδικότερα, οι πεποιθήσεις μας καθοδηγούν τις παρατηρήσεις μας και οι παρατηρήσεις αλλάζουν τις πεποιθήσεις μας. Συνεπώς, την επαγωγική μέθοδο του Bacon αναπόφευκτα ακολούθησε η *επαγωγική – παραγωγική προσέγγιση* που συνδυάζει την απαγωγή του Αριστοτέλη με την επαγωγή του Bacon. Αυτή συνίσταται από μια παλινδρομική κίνηση κατά την οποία ο ερευνητής πρώτα κινείται επαγωγικά από παρατηρήσεις σε υποθέσεις και κατόπιν παραγωγικά από αυτές τις υποθέσεις στις συνεπαγωγές τους, προκειμένου να ελέγξει την εγκυρότητά τους από τη σκοπιά της συμβατότητάς τους με την αποδεκτή γνώση. Ύστερα από επανεξέταση, όπου αυτή είναι αναγκαία, αυτές οι υποθέσεις υποβάλλονται σε περαιτέρω δοκιμασία διαμέσου της συλλογής δεδομένων, η οποία σχεδιάζεται ειδικά για να ελέγξει την εγκυρότητα των υποθέσεων στο επίπεδο της εμπειρίας (Cohen & Manion, 1994).

Η μαθηματική επαγωγή, όπως και οποιαδήποτε παραγωγική μέθοδος συλλογισμού, δεν είναι σε θέση από μόνη της να ανακαλύψει καινούργια γνώση. Τις περισσότερες φορές η μαθηματική επαγωγή καλείται να πιστοποιήσει την αλήθεια προτάσεων, οι οποίες όμως προέκυψαν ως αποτέλεσμα της επαγωγικής μεθόδου γενίκευσης, μέσω της παρατήρησης και του πειραματικού ελέγχου. Συνεπώς, η μαθηματική επαγωγή και ο επαγωγικός συλλογισμός, αν και αντίθετα κατευθυνόμενες μέθοδοι γνώσης, πρέπει να ιδωθούν μέσα από το πλαίσιο της αλληλοσυσχέτισης και αλληλοσυμπλήρωσής τους.

Απόδειξη – Εικασία

Η απόδειξη είναι ένα σημαντικό κομμάτι των μαθηματικών και πρέπει να εξετάζονται από τους μαθητές η λειτουργία της απόδειξης, η σημασία και οι περιορισμοί της. Αλλά στη σχολική αίθουσα ο ρόλος – κλειδί της απόδειξης είναι η προαγωγή της μαθηματικής κατανόησης. Μια έγκυρη απόδειξη γίνεται πειστική και νόμιμη σε έναν μαθηματικό μόνο όταν οδηγεί σε πραγματική μαθηματική κατανόηση. Οι μαθητές πρέπει να διδαχθούν τη φύση και τους κανόνες του παραγωγικού συλλογισμού, ώστε να είναι σε θέση να αποφανθούν πότε ένα αποτέλεσμα είναι ή δεν είναι αποδεκτό. Η καλύτερη όμως απόδειξη είναι αυτή που βοηθά κάποιον να δει, όχι μόνο πως κάτι είναι σωστό, αλλά και γιατί είναι σωστό (Hanna, 2000a).

Ο Schoenfeld (1994) τονίζει πως η απόδειξη οδηγεί στη βεβαιότητα. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό των μαθηματικών που τα διαφοροποιεί από τους υπόλοιπους επιστημονικούς κλάδους. Η απόδειξη δε πρέπει να εκλαμβάνεται ως μια τυπική ιεροτελεστία, αλλά ως μια απλή κωδικοποίηση της καθαρής σκέψης και ως ένας τρόπος επικοινωνίας με τους άλλους. Για τους μαθηματικούς η απόδειξη είναι ένας τρόπος σκέψης, εξερεύνησης και πλησιάσματος στην κατανόηση. Από αυτή την οπτική γωνία θα έπρεπε να τη βλέπουν και οι μαθητές.

Ο Miyazaki (2000) διαπιστώνει ότι δυστυχώς οι μαθητές, συνήθως, μαθαίνουν την απόδειξη μόνο σαν ένα είδος αποτελεσματικής ιεροτελεστίας στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών. Ως εκ τούτου, δεν προσπαθούν να αξιοποιήσουν μια απόδειξη σε καταστάσεις εκτός των σχολικών μαθηματικών, όπου θα τους ήταν χρήσιμη ή ακόμη και επικερδής. Ο ερευνητής τονίζει και μια άλλη όψη της απόδειξης την οποία θεωρεί ιδιαίτερα σημαντική. Ο μαθητής πρέπει να αποκτήσει την ικανότητα, όχι μόνο να αποδεικνύει μια πρόταση, αλλά να δείχνει και να εξηγεί στους άλλους (π.χ. συμμαθητές, δάσκαλος) γιατί η πρόταση είναι σωστή. Είναι γενικά αποδεκτό ότι χρησιμοποιούμε διαφορετικούς τύπους απόδειξης ανάλογα σε ποιον απευθυνόμαστε.

Ο Dreyfus (2003) παρατηρεί πως οι εξελίξεις στον τομέα των ίδιων των μαθηματικών δείχνουν την πολυπλοκότητα της έννοιας της τυπικής απόδειξης. Συνεπώς, δε θα έπρεπε να περιμένουμε από τους μαθητές να είναι ικανοί να επιτύχουν να αποδεικνύουν με ένα υψηλό και εξεζητημένο τρόπο σκέψης, χωρίς πρώτα να έχουν καλλιεργηθεί για πολλά χρόνια στο πνεύμα της δικαιολόγησης και της φύσης της μαθηματικής σκέψης. Στη σημερινή εποχή γίνεται λόγος για εκτενείς αποδείξεις, για πιθανοθεωρητικές αποδείξεις, για αποδείξεις χωρίς προαπαιτούμενες γνώσεις, για ολογραφικές[1] αποδείξεις, για οπτικές αποδείξεις, καθώς και για αποδείξεις υποστηριζόμενες από υπολογιστή. Η απάντηση στην ερώτηση τι θεωρείται απόδειξη, δεν είναι απόλυτη, αλλά καθορίζεται κοινωνικά από τη μαθηματική κοινότητα. Ο ερευνητής προτείνει ως στόχο της απόδειξης στη σχολική αίθουσα να είναι η επεξηγηματική της λειτουργία.

Οι Recio & Godino (2001) ταξινομούν τις απαντήσεις των μαθητών, όταν προσπαθούν να αποδείξουν μια μαθηματική πρόταση, σε πέντε κατηγορίες τις οποίες μεταφράζουν ως αντίστοιχα αποδεικτικά σχήματα. Αναλυτικά:

1) Η απάντηση είναι πολύ ελλιπής, δηλαδή συγκεχυμένη και ασυνάρτητη.
2) Ο μαθητής ελέγχει την πρόταση με παραδείγματα, χωρίς σημαντικά λάθη (explanatory argumentative schemes).
3) Ο μαθητής ελέγχει την πρόταση με παραδείγματα και υποστηρίζει τη γενική της εγκυρότητα (empirical – inductive proof schemes).
4) Ο μαθητής δικαιολογεί την εγκυρότητα της πρότασης, χρησιμοποιώντας άλλα γνωστά θεωρήματα ή προτάσεις, με τη βοήθεια μερικώς σωστών διαδικασιών (informal deductive proof schemes).

[1] Η ολογραφική απόδειξη απαιτεί την καταγραφή μιας μαθηματικής απόδειξης στη λογική ενός προγράμματος υπολογιστών, με έναν ιδιαίτερα λεπτομερειακό τρόπο και με τη χρήση μιας τυπικής γλώσσας. Εξαιτίας του τρόπου καταγραφής αυτής, αν υπάρχει ένα σφάλμα σε οποιαδήποτε γραμμή της απόδειξης τότε το σφάλμα αυτό αναπαράγεται και διαδίδεται ομοιόμορφα σε κάθε γραμμή της. Με τον έλεγχο, επομένως, τυχαία επιλεγμένων γραμμών και όχι του συνόλου των γραμμών που καταγράφουν την απόδειξη είναι δυνατός ο έλεγχος της ορθότητας μιας απόδειξης. Η επικύρωση, όμως, της αντίστοιχης μαθηματικής πρότασης υπόκειται σε μια πιθανότητα σφάλματος, η οποία μπορεί μεν να ελαχιστοποιηθεί αλλά όχι και να μηδενιστεί (Χασάπης, 2003).

5) Ο μαθητής δίνει μια ουσιωδώς σωστή απόδειξη, η οποία περιλαμβάνει έναν κατάλληλο συμβολισμό (formal deductive proof schemes).

Οι προαναφερόμενοι ερευνητές παρατήρησαν ότι όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα νέο πρόβλημα στο οποίο είναι απαραίτητο να αναπτύξουν καινούριες αποδεικτικές στρατηγικές, τότε ο αυθόρμητος τύπος επιχειρηματολογίας που υιοθετείται είναι ο εμπειρικός – επαγωγικός, δηλαδή ξεκινούν με απλές συγκεκριμένες περιπτώσεις. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε και ο Sriraman (2005), ο οποίος προτείνει στους δασκάλους να χρησιμοποιούν τις αυθόρμητες επαγωγικές προσεγγίσεις των μαθητών προκειμένου να δείξουν την αναγκαιότητα της απόδειξης, ζητώντας από αυτούς εικασίες σχετικά με ένα μεγάλο ή άπειρο σύνολο περιπτώσεων από ένα πεπερασμένο, σχετικά μικρό, σύνολο παραδειγμάτων. Επίσης, προτείνει την επίλυση προβλήματος όπου, μέσα από οικείες καταστάσεις, οι μαθητές αρχίζουν να σκέφτονται 'μαθηματικά' και αντιλαμβάνονται την ανάγκη της απόδειξης. Μια τέτοιου είδους προσέγγιση δείχνει στους μαθητές ότι υπάρχουν στοιχεία της εμπειρίας τους που σχετίζονται και με έναν άλλο, πιο 'μαθηματικό' τρόπο, διαφορετικό από αυτόν που οι ίδιοι χρησιμοποιούν απλά από συνήθεια.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1994), όταν κάποιος εστιάζει στη μαθηματική σκέψη, δηλαδή την ικανότητα να κάνεις ή να χρησιμοποιείς μαθηματικά, τότε πρέπει να λαμβάνει σοβαρά υπόψη του το μαθηματικό περιεχόμενο, τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος ή τις ευρετικές, καθώς και το κατά πόσο καλά και πόσο αποτελεσματικά οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μαθηματικές πηγές που έχουν στη διάθεσή τους.

Τα ευρήματα των παραπάνω ερευνητών θυμίζουν τα λόγια του Polya (1998) : "τα μαθηματικά όταν παρουσιάζονται με αυστηρότητα είναι μια συστηματική, παραγωγική επιστήμη, όμως τα μαθηματικά 'εν τω γεννάσθαι' είναι μια επαγωγική επιστήμη" (σελ. 154). Η εμπειρική επαγωγική προσέγγιση πολύ συχνά οδηγεί σε σπουδαίες ανακαλύψεις. Για παράδειγμα ο Gauss, ο πρίγκιπας των μαθηματικών,

κάνοντας μετρήσεις, υπέθεσε, στην αρχή του 19ου αιώνα, αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως θεώρημα των πρώτων αριθμών. Συγκεκριμένα υπέθεσε πως το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του ν είναι περίπου ίσο με το $\frac{\nu}{\log \nu}$.

Ενενήντα χρόνια αργότερα δύο μαθηματικοί ο Hadamard και ο de la Vallee – Poussin απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι η εικασία είναι αληθινή.

Ο Lakatos (1996) στο έργο του «Αποδείξεις και Ανασκευές» παρουσιάζει τα μαθηματικά να αναπτύσσονται από ένα πρόβλημα και μια εικασία. Θεωρεί ότι απόδειξη δε σημαίνει μια μηχανική διαδικασία που επιβάλλει την αλήθεια μέσα από μια αδιάσειστη ακολουθία υποθέσεων και συμπερασμάτων, αλλά σημαίνει μάλλον εξηγήσεις, πιστοποιήσεις, επεξεργασίες που κάνουν την εικασία πιο εύλογη, πιο πειστική και μέσω των αντιπαραδειγμάτων πιο αναλυτική και ακριβή. Ισχυρίζεται ότι τα μη τυπικά μαθηματικά (δηλαδή τα μαθηματικά που βρίσκονται στη διαδικασία της ανάπτυξης και της ανακάλυψης) είναι μια επιστήμη που αναπτύσσεται μέσω διαδοχικών κριτικών και βελτιώσεων των θεωριών, καθώς και με την προώθηση νέων και ανταγωνιστικών θεωριών, και όχι με τον παραγωγικό τρόπο των τυποποιημένων μαθηματικών. Ο Lakatos διατυπώνει την αντίθεση ανάμεσα στις παραδοσιακές «ευκλείδειες» θεωρίες για τη θεμελίωση των μαθηματικών και τις «ψευδοεμπειρικές» θεωρίες οι οποίες θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι ουσιαστικά εικασίες και όχι αλάθητα και ο ίδιος προτείνει μια ψευδοεμπειρική θεωρία.

Παρόλα αυτά, κάθε πρόταση που υποστηρίζεται από μια εμπειρική επαγωγική πληροφορία πρέπει να θεωρείται ως εικασία, δηλαδή μια υπόθεση η οποία έχει πιθανότητα να είναι αληθής. Παραμένει εικασία μέχρι να βρεθεί μια αυστηρή απόδειξη. Ας θυμηθούμε τον Euler ο οποίος πίστευε πως το πολυώνυμο $\nu^2 + \nu + 41$ δίνει πρώτους αριθμούς. Ισχύει για ν = 1, 2, …, 39 αλλά για ν = 40 ο αριθμός $40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41^2$ δεν είναι πρώτος!

Επίσης, ο Euler είχε διατυπώσει την εικασία ότι η εξίσωση $\chi^4 + \psi^4 + \zeta^4 = \omega^4$ δεν έχει ακέραιες λύσεις. Η εικασία άντεξε δύο ολόκληρους αιώνες και μόλις το 1988 ο μαθηματικός Noam Elkies βρήκε τέσσερις, όχι και τόσο προφανείς, αριθμούς που καταρρίπτουν την εικασία: $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$.

Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εικασία του P. Fermat ότι οι αριθμοί της μορφής $2^{2^n} + 1$ είναι πρώτοι. Ενώ αληθεύει για n = 0, 1, 2, 3, 4, ο L. Euler ανακάλυψε, έναν αιώνα αργότερα, πως για n = 5 προκύπτει ο σύνθετος αριθμός $4294967297 = 641 \times 6700417$.

Παρόμοια, ο G. Leibniz παρατήρησε και απέδειξε ότι για κάθε φυσικό ν, ο αριθμός ν^3-ν διαιρείται με το 3, ο αριθμός ν^5-ν διαιρείται με το 5, ο αριθμός ν^7-ν διαιρείται με το 7. Συμπέρανε ότι για κάθε περιττό αριθμό κ και οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν, ο ν^κ-ν διαιρείται με το κ. Γρήγορα όμως κατάλαβε ότι το πρότυπο αυτό δεν ήταν σωστό επειδή $2^9 - 2 = 510$, που δε διαιρείται με το 9.

Ένα άλλο παράδειγμα που πείθει για την ανασφάλεια της εμπειρικής επαγωγής είναι το εξής: Αν υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή της παράστασης $991n^2 + 1$ για n = 1, 2, 3, 4,… δεν πρόκειται να βρούμε έναν αριθμό που να είναι τέλειο τετράγωνο, ακόμη και αν ασχοληθούμε μέρες ή χρόνια με το πρόβλημα. Η ελάχιστη τιμή του n ώστε να προκύψει τέλειο τετράγωνο είναι: n=12055735790331359447442538767!

Ερευνητικά αποτελέσματα των Healy & Hoyles (2000) έχουν δείξει ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 14-15 χρόνων αντιλαμβάνεται ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα δεν έχουν γενικό και καθολικό χαρακτήρα (ιδιαίτερα αν η πρόταση προς απόδειξη είναι μη οικεία), αλλά αναγνωρίζει ότι τα παραδείγματα αποτελούν ένα δυνατό μέσο για την επικύρωση της αλήθειας μιας πρότασης. Ακόμη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μια έγκυρη απόδειξη είναι γενική και δεν είναι απαραίτητη επιπλέον δουλειά για την εξακρίβωση της αλήθειας των ειδικών περιπτώσεων. Θεωρούν, όμως, πως οι

αποδείξεις με φορμαλιστικό τρόπο είναι δύσκολες, προσφέρουν λίγα στη μετάδοση και εξήγηση των μαθηματικών που περικλείονται, αν και βαθμολογούνται από τους εκπαιδευτικούς με μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τις εμπειρικές ή αφηγηματικές αποδείξεις.

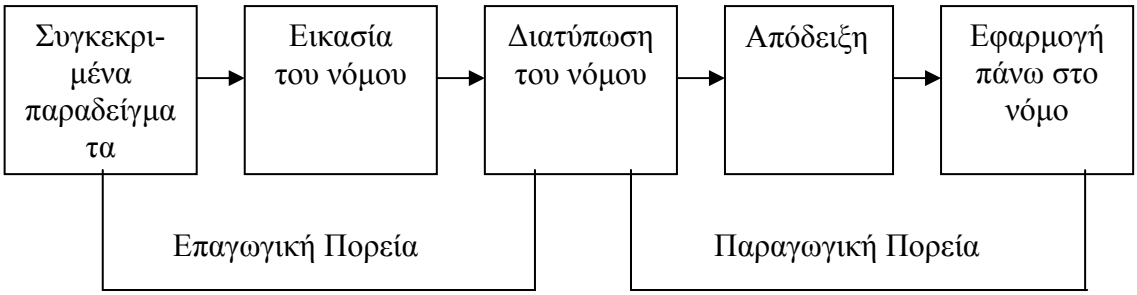
Η Hanna (2000b) θεωρεί πως, ενώ η εξερεύνηση και η απόδειξη είναι ξεχωριστές δραστηριότητες, η μία ενισχύει και συμπληρώνει την άλλη. Η εξερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη, ενώ η απόδειξη είναι η επικύρωση. Η εξερεύνηση ενός προβλήματος οδηγεί κάποιον να συλλάβει τις δομές και τις διακλαδώσεις του, αλλά δεν μπορεί να αποφέρει μια σαφή κατανόηση του κάθε συνδέσμου. Μέσω της εξερεύνησης τα συμπεράσματα παραμένουν προσωρινά. Η απόδειξη είναι εκείνη που εγκαθιδρύει τα συμπεράσματα. Όταν πλέον μια πρόταση αποδειχθεί, τότε δεν υπάρχει περαιτέρω ανάγκη για επιβεβαίωση. Ο Polya (1998) αναφέρει χαρακτηριστικά: «Στα μαθηματικά, όπως και στις φυσικές επιστήμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση και την επαγωγή για την ανακάλυψη γενικών νόμων. Υπάρχει όμως μια διαφορά. Στις φυσικές επιστήμες δεν υπάρχει μεγαλύτερη εγκυρότητα από την παρατήρηση και την επαγωγή, ενώ στα μαθηματικά παρέχεται μια τέτοια εγκυρότητα με την αυστηρή απόδειξη» (σελ.154).

Η μαθηματική επαγωγή είναι μια αποδεικτική μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται για να πιστοποιήσει την αλήθεια κάποιων προτάσεων μέσω παραγωγικού συλλογισμού. Συνήθως, όμως, αυτές οι προτάσεις προκύπτουν μετά από παρατηρήσεις και τη διατύπωση μιας εικασίας. Στη συνέχεια η εικασία πρέπει να αποδειχθεί ώστε να γίνει αποδεκτή ως αληθής πρόταση. Διαφορετικά, παραμένει εικασία που ίσως κάποτε καταρριφθεί (π.χ. εικασία Fermat) ή θα προκαλεί τους μαθηματικούς για την εύρεση μιας απόδειξης (π.χ. εικασία Goldbach). Είναι ενδιαφέρον και χρήσιμο οι μαθητές να αντιληφθούν τη σχέση εικασίας και απόδειξης.

Ο Τουμάσης (2002) προτείνει η προσέγγιση στη μαθηματική επαγωγή να μη γίνεται με προβλήματα της μορφής «να αποδείξτε ότι…», επειδή θυμίζει αυταρχικό

πρόσταγμα. Απεναντίας η μορφή των ερωτήσεων που χρησιμοποιείται θα πρέπει να παρέχει κίνητρα στους μαθητές, να διεγείρει την περιέργειά τους, να προκαλεί την ενεργητική τους συμμετοχή, να ενθαρρύνει και να καλλιεργεί την ερευνητική στάση και να ενισχύει την παρατήρηση. Την ίδια άποψη υποστηρίζουν και οι Avital & Hansen (1976) οι οποίοι προτείνουν να ζητείται από τους μαθητές να πειραματιστούν, να διατυπώσουν μια εικασία, να ελέγξουν την εικασία και στο τέλος να την αποδείξουν με μαθηματική επαγωγή.

Προκειμένου να επιτευχθεί μια σύνθεση μεταξύ της επαγωγικής και της παραγωγικής διδακτικής πορείας, οι Κολέζα, Μακρής και Σούρλας (2000) προτείνουν το παρακάτω σχήμα για την περιγραφή μαθηματικών αντικειμένων:



Δυσκολίες-παρανοήσεις στη μάθηση της μαθηματικής επαγωγής

Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται διάφορες πηγές λάθους και δυσκολίας των μαθητών κατά την εκμάθηση της μαθηματικής επαγωγής. Στη συνέχεια θα αναφερθούν αναλυτικά οι πιο σημαντικές και οι συχνότερα εμφανιζόμενες δυσκολίες ή παρανοήσεις των μαθητών.

1. Υπάρχει κάτι το αμφιλεγόμενο στο νόημα που δίνουμε στη λέξη 'επαγωγή'. Από τη μια μεριά, η επαγωγή είναι η διαδικασία ανακάλυψης γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδυασμού ειδικών περιπτώσεων – παραδειγμάτων, η οποία χρησιμοποιείται σε όλες τις επιστήμες. Από την άλλη μεριά, η μαθηματική επαγωγή είναι μια αυστηρή μορφή παραγωγικής απόδειξης, η οποία χρησιμοποιείται μόνο στα μαθηματικά για την απόδειξη ενός ορισμένου είδους προτάσεων. Υπάρχει, ωστόσο, κάποια πρακτική σύνδεση μεταξύ των δύο διαδικασιών. Τα αποτελέσματα της επαγωγικής μεθόδου συνήθως αποδεικνύονται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής (Ernest, 1984). Η μαθηματική επαγωγή αρχίζει από κει που τελειώνει η εργασία της επαγωγής (Τουμάσης, 2002). Η μαθηματική επαγωγή συχνά προκύπτει ως το τελευταίο βήμα ή η τελευταία φάση μιας επαγωγικής έρευνας[2] και αυτή η τελευταία φάση συχνά χρησιμοποιεί ιδέες οι οποίες εμφανίζονται στις φάσεις που προηγήθηκαν (Polya, 1954). Δηλαδή, οι δύο διακριτές μέθοδοι μπορούν συχνά να αφορούν διαφορετικές όψεις του ίδιου παραδείγματος.

   Πολλές φορές, οι μαθητές αποτυγχάνουν να αντιληφθούν τη διαφορά ανάμεσα στους δύο τύπους της επαγωγής. Προκειμένου να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία, ο G. Polya (1998) προτείνει η μαθηματική επαγωγή να ονομάζεται

[2] Ο Polya προκειμένου να ελέγξει αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στο πλήθος των κορυφών, Κ, το πλήθος των εδρών, Ε, και το πλήθος των ακμών, Α, ενός κυρτού πολυέδρου ξεκινά με συγκεκριμένα κυρτά πολύεδρα και διατυπώνει εικασίες. Η πρώτη είναι ότι το Ε αυξάνει με το Κ. Όταν αυτό διαψευστεί, ακολουθούν δυο άλλες: ότι το Α αυξάνει με το Ε, και ότι το Α αυξάνει με το Κ. Κερδίζει η τέταρτη εικασία: το Κ+Ε αυξάνει με το Α. Τότε καταλήγει στον τύπο του Euler Κ+Ε=Α+2, ο οποίος στη συνέχεια πρέπει να αποδειχθεί (Polya, 1954).

«απόδειξη από τον n στον n+1» ή πιο απλά «μετάβαση στον επόμενο ακέραιο».

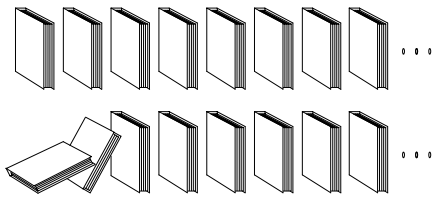
2. Μια εννοιολογική δυσκολία είναι η έλλειψη κατανόησης εις βάθος της μεθόδου. Γεννιούνται τα ερωτήματα: Ποια είναι η βάση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής; Πώς μπορεί να δικαιολογηθεί; Οποιαδήποτε απάντηση στις παραπάνω ερωτήσεις θα πρέπει να αναφέρεται στην καλή διάταξη των φυσικών αριθμών. Οι φυσικοί αριθμοί έχουν την μοναδική ιδιότητα να μπορούν όλοι να παράγονται από έναν αρχικό αριθμό (το μηδέν ή το ένα) και τον επαναλαμβανόμενο σχηματισμό των επόμενων. Για να δείξουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα μπορούμε να εκμεταλλευτούμε αυτή τη διάταξη (Avital & Lebeskind, 1978 ; Ernest, 1984). Αν ο αρχικός φυσικός αριθμός έχει την ιδιότητα και αν περνά, διαμέσου της διατεταγμένης ακολουθίας, από οποιονδήποτε φυσικό αριθμό στον επόμενό του, τότε η ιδιότητα ισχύει για όλους τους φυσικούς, εφόσον όλοι λαμβάνουν χώρα στην ακολουθία (Ernest, 1984). Υπάρχουν κάποιες μεταφορές και εξωτερικές αναπαραστάσεις οι οποίες ενδεχομένως βοηθούν στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής και της διάταξης των φυσικών αριθμών.

   Για παράδειγμα:

   i. Το ανέβασμα της σκάλας, σκαλί – σκαλί
   ii. Η μετάδοση ενός μηνύματος σε μια σειρά στρατιωτών
   iii. Η αναχώρηση ενός τρένου, βαγόνι – βαγόνι
   iv. Η είσοδος της βασίλισσας σε όλα τα κλειδωμένα δωμάτια του παλατιού, δεδομένου πως έχει το κλειδί του πρώτου δωματίου και πως σε κάθε δωμάτιο υπάρχει το κλειδί του επόμενου
   v. Το γκρέμισμα μιας μεγάλης σειράς από ντόμινο ή βιβλία

   Ας δούμε αναλυτικά το τελευταίο παράδειγμα που ίσως είναι και το πιο γνωστό:

Χαρακτηριστικά του παραδείγματος	**Αντίστοιχο χαρακτηριστικό της επαγωγής**
Ένα ντόμινο	Ένας φυσικός αριθμός
Σειριακή τακτοποίηση των ντόμινο	Διάταξη των φυσικών αριθμών
Γκρέμισμα των ντόμινο	Ιδιότητα των αριθμών
Συνέπεια του σπρωξίματος	Επαγωγικό βήμα
Σπρώξιμο του πρώτου ντόμινο	Βασικό βήμα



Υπάρχει, όμως, ο προβληματισμός μερικών ερευνητών πως η αναπαράσταση με τα ντόμινο αποτυγχάνει να απεικονίσει την άπειρη φύση της μαθηματικής επαγωγής και την ατελείωτη σειρά εφαρμογής του κανόνα modus ponens[3] (Movshovitz – Hadar, 1993).

Ωστόσο, οι Ron & Dreyfus (2004) διαπίστωσαν πως μερικοί εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν λανθασμένα μοντέλα τα οποία παραποιούν τις βαθύτερες μαθηματικές έννοιες και, στην ουσία, δείχνουν τις δικές τους εννοιολογικές

[3] Ο κανόνας modus ponens είναι αποδεικτικός κανόνας της Λογικής, ο οποίος λέει ότι από τις προτάσεις p και $p \rightarrow q$ παράγεται η πρόταση q. Δηλαδή: $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ (Μυτιληναίος, 2004).

δυσκολίες. Για παράδειγμα, μία εκπαιδευτικός η οποία συμμετείχε σε μια έρευνα τους, προκειμένου να εξηγήσει τον έλεγχο της βάσης της επαγωγής, δίνει το παράδειγμα ενός ηλεκτρικού εργαλείου. «Λέω στους μαθητές ότι θέλω να αγοράσω ένα μεταχειρισμένο εργαλείο. Πριν παζαρέψω την τιμή, το βάζω στην πρίζα για να δω αν δουλεύει, ώστε να αξίζει το παζάρεμα». Οι ερευνητές παρατηρούν ότι η εκπαιδευτικός θεωρεί το βασικό βήμα της μαθηματικής επαγωγής ως μια πράξη που δικαιολογεί την προσπάθεια απόδειξης και όχι ως ένα αναπόσπαστο κομμάτι της απόδειξης. Επιπλέον, χρησιμοποιεί παράδειγμα όπου δεν υπάρχει καν μια μεταβλητή η οποία να παίρνει φυσικές τιμές.

Οι Lakoff & Nunez (2000) στα πλαίσια της θεωρίας τους περί 'εννοιολογικής μεταφοράς'[4] θεωρούν ότι η μαθηματική επαγωγή μπορεί να γίνει κατανοητή μέσω της ΄βασικής μεταφοράς του απείρου' (basic metaphor of infinity), η οποία ουσιαστικά είναι μια νοητική προέκταση των επαναλαμβανόμενων διαδικασιών. Με βάση αυτή τη μεταφορά, οι διαδικασίες που συνεχώς επαναλαμβάνονται θεωρούνται σαν να έχουν ένα τέλος και ένα τελικό αποτέλεσμα. Δηλαδή, προστίθεται μια μεταφορική ολοκλήρωση της συνεχιζόμενης διαδικασίας ώστε να φαίνεται πως έχει ένα αποτέλεσμα, στο οποίο, όμως, υπάρχει η έννοια του απείρου. Ειδικότερα στην περίπτωση της μαθηματικής επαγωγής, η τελική προκύπτουσα κατάσταση της επαναλαμβανόμενης διαδικασίας είναι η εξής: «η ιδιότητα p είναι αληθής για τα στοιχεία του συνόλου *όλων* των φυσικών αριθμών». Προστίθεται το μεταφορικό τέλος: «Το σύνολο των φυσικών αριθμών για τους οποίους αληθεύει η ιδιότητα p είναι μοναδικό και περιέχει *όλους* τους πεπερασμένους

[4] Σύμφωνα με τους ερευνητές η μεταφορά είναι το βασικό μέσο με το οποίο η αφηρημένη σκέψη είναι δυνατή. Όταν χρησιμοποιείται μεταφορά, τότε οι αφηρημένες έννοιες γίνονται κατανοητές μέσω περισσότερο συγκεκριμένων εννοιών. Για παράδειγμα, η στοργή κατανοείται με τη βοήθεια της φυσικής θερμότητας, όπως φαίνεται στις παρακάτω προτάσεις: «Στο χώρο της εργασίας μου συμπεριφέρονται πολύ *ζεστά*» ή «Δεν κατάφεραν ακόμη να σπάσουν τον *πάγο*».

φυσικούς αριθμούς». Δηλαδή, στο συμπέρασμα υπάρχει ένα άπειρο σύνολο πεπερασμένων αριθμών.

3. Μια παρανόηση που μερικές φορές εμφανίζεται είναι η άποψη ότι κάποια από τις συνθήκες της μαθηματικής επαγωγής δε χρειάζεται (Ron & Dreyfus, 2004). Πιο συνηθισμένη είναι η περίπτωση της βάσης της επαγωγής. Ο καλύτερος ίσως τρόπος για να εκδιωχθούν οι αμφιβολίες είναι παραδείγματα από λανθασμένες επαγωγικές δηλώσεις (Ernest, 1984).

   Για παράδειγμα, θεωρούμε τον ισχυρισμό: «Κάθε φυσικός αριθμός της μορφής 2ν+1 είναι άρτιος». Αν και ο ισχυρισμός είναι προφανώς ψευδής, ωστόσο ισχύει το επαγωγικό βήμα της μαθηματικής επαγωγής. Πράγματι, αν ο αριθμός 2ν+1, ν∈N, είναι άρτιος τότε ο αριθμός 2(ν+1)+1 = 2ν+2+1 = (2ν+1)+2 είναι επίσης άρτιος ως άθροισμα δύο άρτιων αριθμών. Συνεπώς, ο έλεγχος της ισχύος του βασικού βήματος είναι απαραίτητος και ουσιαστικός.

4. Μια από τις πιο συνηθισμένες παρανοήσεις των μαθητών είναι η εξής: «η μαθηματική επαγωγή είναι μια μέθοδος στην οποία υποθέτουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε!». Είναι μια εύλογη δυσκολία. Θεωρούμε ως δεδομένη την επαγωγική υπόθεση p(ν) και μέσω μιας σύνθετης διαδικασίας καταλήγουμε στην απόδειξη της πρότασης p(ν). Από τη σκοπιά των μαθητών, σε άλλες στοιχειώδεις παραγωγικές αποδείξεις μια τέτοια διαδικασία είναι αθέμιτη (Ernest, 1984 ; Reid, 2002). Η παραπάνω δυσκολία δείχνει πως οι μαθητές δεν κατανοούν τη δομή της επαγωγικής απόδειξης και, ιδιαίτερα, δε διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των δύο 'ν'. Στη μεν επαγωγική υπόθεση, το ν είναι αυθαίρετο αλλά ταυτόχρονα συγκεκριμένο, δηλαδή συμπεριφέρεται ως λογική σταθερά. Στο δε συμπέρασμα, το ν συμπεριφέρεται ως ελεύθερη μεταβλητή, δηλαδή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε φυσική τιμή.

   Για να αποφευχθεί αυτή η παρανόηση, προτείνεται η μαθηματική επαγωγή να εκφράζεται με δύο μεταβλητές (Ernest, 1984). Αυτό γίνεται κυρίως για

παιδαγωγικούς λόγους ενώ δεν είναι απαραίτητο από τη μαθηματική σκοπιά (Movshovitz – Hadar, 1993).

Δηλαδή, αντί της μορφής:

> «Υποθέτουμε ότι:
> α) η p(0) ισχύει, και
> β) αν η p(ν) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό ν, τότε η p(ν+1) ισχύει.
> Τότε η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν».

να χρησιμοποιείται η μορφή:

> «Υποθέτουμε ότι:
> α) η p(0) ισχύει, και
> β) αν η p(κ) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό κ, τότε η p(κ+1) ισχύει.
> Τότε η p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν».

Είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν ότι η επαγωγική υπόθεση χρησιμοποιείται μόνο στο επαγωγικό βήμα.

5. Οι Avital & Lebeskind (1978) εντοπίζουν μια εννοιολογική δυσκολία των μαθητών όσον αφορά το επαγωγικό βήμα. «Πώς μπορούμε να αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης p(κ+1), αν δε γνωρίζουμε την αλήθεια της πρότασης p(κ);». Η βασική γνώση που χρειάζονται οι μαθητές είναι ο κανόνας modus ponens $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$. Στη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ δε χρειάζεται κάποιος να γνωρίζει ότι η πρόταση p είναι αληθής, αλλά να δείξει ότι αν η p είναι αληθής, αυτό συνεπάγεται την αλήθεια της πρότασης q. Για να γίνει κατανοητό από τους μαθητές θα μπορούσαν, για παράδειγμα, να δοθούν

γεωμετρικά (και όχι μόνο) προβλήματα διατυπωμένα στη μορφή: «αν…, τότε…» αντί της μορφής: «Δίνεται τρίγωνο…Να δειχθεί ότι…».

6. Οι Avital & Lebeskind (1978) εντοπίζουν δύο τεχνικά προβλήματα των μαθητών στη χρήση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής. Πρώτο, τη μετάφραση του βήματος $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$ όταν εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο πρόβλημα και δεύτερο τους αλγεβρικούς χειρισμούς που υπεισέρχονται στην απόδειξη αυτού του βήματος.

   Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το πρόβλημα: «Αποδείξτε ότι αν για οποιουσδήποτε n θετικούς αριθμούς $x_1, x_2,\ldots, x_n$ έχουμε $x_1x_2\ldots x_n = 1$ τότε $x_1+ x_2+\ldots+ x_n \geq n$». Το βήμα $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$ θα μπορούσε να γραφεί ως εξής: Υποθέτοντας ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς $x_1, x_2,\ldots, x_k$ με $x_1x_2\ldots x_k = 1$ ισχύει $x_1+ x_2+\ldots+ x_k \geq k$, θα αποδείξουμε ότι αν $y_1y_2\ldots y_ky_{k+1} = 1$ τότε $y_1 + y_2 +\ldots+ y_k + y_{k+1} \geq k+1$. Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές $x_1, x_2,\ldots, x_k, x_{k+1}$ αντί τις διαφορετικές y_i.

   Η μη σωστή μετάφραση του επαγωγικού βήματος μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε παράδοξα. Σύμφωνα με τους Polya (1954) και Avital & Lebeskind (1978) μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών! Πράγματι:

   Θεωρούμε την πρόταση $p(\nu)$: 'Οποιεσδήποτε ν γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών'. Για $\nu = 1$ η πρόταση είναι προφανώς αληθής. Υποθέτουμε ότι αληθεύει η $p(\kappa)$: 'Οποιεσδήποτε κ γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών' και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει η $p(\kappa+1)$, δηλαδή: 'Οποιεσδήποτε κ+1 γυναίκες έχουν το ίδιο χρώμα ματιών'. Πράγματι, έστω οποιαδήποτε ομάδα από κ+1 γυναίκες. Εξαιρούμε μια γυναίκα από την ομάδα. Σύμφωνα με την υπόθεση οι κ γυναίκες που έμειναν έχουν το ίδιο χρώμα ματιών. Τοποθετούμε την προηγούμενη γυναίκα στην ομάδα και αφαιρούμε μια άλλη. Οι κ γυναίκες έχουν επίσης το ίδιο χρώμα ματιών. Συνεπώς όλες έχουν το ίδιο χρώμα. Πώς θα εξηγήσουμε το παράδοξο; Ο Polya προτείνει να κοιτάξουμε μερικές

γυναίκες στα μάτια! Στην πραγματικότητα το λάθος προκύπτει από το γεγονός ότι η συνεπαγωγή $p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$ δεν αληθεύει για $\kappa = 1$ (σε μια ομάδα δύο γυναικών η καθεμιά έχει μόνη της το ίδιο χρώμα ματιών, χωρίς απαραίτητα τα δύο χρώματα να συμπίπτουν, π.χ. καστανά – μπλε).

Υπάρχει και το παράδοξο με το ψεύτικο νόμισμα, μέσω του οποίου διαπιστώνεται ότι υπάρχει ένα χάσμα ανάμεσα στη διαδικαστική και την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής (Movshovitz – Hadar, 1993). Η συγγραφέας θεωρεί πως η γνώση ενός ατόμου είναι εύθραυστη (fragile) υπό την προϋπόθεση ότι το άτομο μπορεί να βρεθεί σε γνωστική σύγκρουση. Αυτό σημαίνει πως το άτομο βρίσκει δύο αντίθετες δηλώσεις αρκετά πειστικές ώστε να δεχθεί και τις δύο. Εφόσον όμως παραδέχεται πως είναι αντιφατικές, κατά συνέπεια δε μπορεί να είναι και οι δύο σωστές. Ο τελικός σκοπός της διαδικασίας της μάθησης γενικά, και της μαθηματικής επαγωγής ειδικότερα, είναι να αναπτυχθεί η κατανόηση κάποιου σε τέτοιο βαθμό ώστε όταν υπάρχουν αντιφάσεις να είναι δύσκολο να αντισταθεί στη δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης. Ερχόμενοι οι μαθητές σε γνωστική σύγκρουση, αντιλαμβάνονται ότι η υπάρχουσα γνώση κάποιων εννοιών είναι ελλιπής. Το να αντιμετωπίσουν και να λύσουν τη δυσκολία βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες και η γνώση τους να γίνει πιο στερεή (solid).

7. Όπως ήδη αναφέρθηκε, μια πρωτεύουσα δεξιότητα περικλείει τις αλγεβρικές τεχνικές που απαιτούνται για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος. Κάποιες φορές οι μαθητές εργάζονται με το ένα μέλος μιας ισότητας με σκοπό να αποδείξουν ότι είναι ίσο με το άλλο μέλος. Άλλες φορές εργάζονται με τα δύο μέλη και μέσω ισοδυναμιών καταλήγουν σε κάτι αληθές. Αυτή η προσέγγιση διευκολύνει στις ισότητες, όχι όμως στις ανισότητες (Nardi & Iannone, 2003). Οι μαθητές, καλό είναι, να εκτίθενται σε μια ποικιλία παραδειγμάτων όπου θα

τονίζεται πως δεν υπάρχει μια 'βασιλική οδός' για όλες τις περιπτώσεις. Κάθε περίπτωση πρέπει να εξετάζεται με βάση τις χαρακτηριστικές ιδιότητές της και είναι έργο των μαθητών να βρουν μια σύντομη και περισσότερο κατάλληλη προσέγγιση (Ernest, 1984).

8. Μια άλλη δυσκολία προκύπτει από τη λογική μορφή της διατύπωσης της αρχής της μαθηματικής επαγωγής και συγκεκριμένα από τη χρήση των ποσοδεικτών (υπαρξιακός ποσοδείκτης '∃', καθολικός ποσοδείκτης '∀'). Μια προφανής αντιμετώπιση της συγκεκριμένης δυσκολίας είναι η διδασκαλία της χρήσης των ποσοδεικτών, καθώς και η εξάσκηση των μαθητών με προτάσεις αυτού του τύπου (Ernest, 1984).

9. Η κατανόηση των μαθητών φαίνεται να χτίζεται πάνω στα παραδείγματα που εισάγονται στη σχολική τάξη και με βάση αυτά τα παραδείγματα σχηματίζουν ιδέες για τα γενικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής επαγωγής. Π.χ. θεωρούν ότι σχετίζεται με την Άλγεβρα και με την παραγωγή αποδείξεων κάτω από προκαθορισμένες συνθήκες. Αυτές οι πεποιθήσεις έρχονται σε σύγκρουση με κάποια δραστηριότητα που απαιτεί μια γεωμετρική, ίσως, εφαρμογή της επαγωγικής απόδειξης (Wistedt & Brattstrom, 2005). Οι μαθητές θα έπρεπε να εφαρμόζουν τη μέθοδο σε ένα ευρύ πεδίο προβλημάτων, όπως σε αλγεβρικές ταυτότητες, σε αθροίσματα πεπερασμένων σειρών, σε άπειρες σειρές, στη θεωρία αριθμών (κυρίως στη διαιρετότητα) ή στη γεωμετρία (Ernest, 1984).

10. Σε ερευνητικά ευρήματα (Nardi & Iannone, 2003) φάνηκε η δυσκολία των μαθητών να μεταφράσουν τη λεκτική διατύπωση μιας πρότασης, η οποία αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή, σε ένα άθροισμα της μορφής $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$ ή στην πιο απλή μορφή '+…+'. Επιπλέον, υπήρχε σύγχυση του ρόλου του κ στο επαγωγικό βήμα. Άλλες φορές θεωρούνταν δείκτης του αθροίσματος και άλλες φορές σταθερά.

Οι ερευνητές Dubinsky & Lewin (1986) διαιρούν τα υποκείμενα σε τρία επίπεδα ως προς την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές την εκφράζουν ατελώς και δεν μπορούν να τη συσχετίσουν με συγκεκριμένες καταστάσεις. Στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές είναι σε θέση να δώσουν μια κατανοητή εξήγηση της τέλειας επαγωγής, συμπεριλαμβανομένου και του τυπικού ορισμού, και είναι ικανοί να εξηγήσουν διάφορες σχετικές προτάσεις. Παρόλα αυτά, δεν μπορούν να την εφαρμόσουν σε συγκεκριμένες καταστάσεις με σκοπό να αποδείξουν ή να ελέγξουν μια ιδιότητα. Στο τρίτο και τελευταίο επίπεδο οι μαθητές έχουν μια ολοκληρωμένη δομή της μαθηματικής επαγωγής την οποία χρησιμοποιούν όποτε χρειάζεται, για παράδειγμα στην απόδειξη ενός θεωρήματος ή στην επίλυση προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν οι μαθητές της θετικής κατεύθυνσης της Β' τάξης των Ενιαίων Λυκείων της Κοζάνης. Στους 213 μαθητές δόθηκε τεστ με πέντε ερωτήματα ανάπτυξης, με το οποίο ασχολήθηκαν στο σχολείο για 45 λεπτά. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με 18 μαθητές. Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από την περιγραφική στατιστική και τα στατιστικά κριτήρια r, F και t από την επαγωγική. Επιπλέον, παρουσιάζονται αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις με ποιοτική ανάλυση.

Δείγμα

Τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα ήταν μαθητές και μαθήτριες των τριών Ενιαίων Λυκείων της πόλης της Κοζάνης. Πήραν μέρος 213 παιδιά (106 αγόρια και 107 κορίτσια), δηλαδή όλοι όσοι παρακολουθούσαν τα μαθήματα της θετικής κατεύθυνσης της Β' Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2005-06, εκτός από ένα πολύ μικρό αριθμό μαθητών που απουσίαζαν δικαιολογημένα από το σχολείο τους τη μέρα πραγματοποίησης του τεστ.

Δεδομένα και διαδικασία

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας του σχολικού βιβλίου που αναφέρεται στη μαθηματική επαγωγή, δόθηκε προειδοποιημένα στους μαθητές ένα τεστ (αναφέρεται στο Παράρτημα Ι). Οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους 45 λεπτά

(μία διδακτική ώρα). Σημειώνεται ότι η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε από τον αντίστοιχο εκπαιδευτικό του κάθε σχολικού τμήματος.

Τα ερωτήματα που συμπεριλήφθησαν στο τεστ επιλέχθηκαν με σκοπό να μελετήσουν πώς κατανοείται η μαθηματική επαγωγή από τους μαθητές και να εντοπίσουν τις τυχόν δυσκολίες που αυτοί αντιμετωπίζουν. Συγκεκριμένα, το κάθε ερώτημα εστιάζει σε ένα χαρακτηριστικό ή μια εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής.

Αναλυτικά:

1. Με το πρώτο ερώτημα ελέγχεται αν οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν σωστά τη μαθηματική επαγωγή και η ικανότητα αυτή θα συγκριθεί με τις απαντήσεις τους στα επόμενα ερωτήματα του τεστ. Για παράδειγμα μήπως κάποιος, ενώ διατυπώνει την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, αδυνατεί να την εφαρμόσει; Ο Vinner (1991) θεωρεί πως η αποστήθιση του τυπικού ορισμού μιας έννοιας δεν εγγυάται την κατανόηση της.

2. Με το δεύτερο ερώτημα ελέγχεται αν οι μαθητές γνωρίζουν πως μια βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής στην απόδειξη κάποιας πρότασης είναι αυτή να αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς. Στην ουσία, ελέγχεται αν αντιλαμβάνονται την καλή διάταξη των φυσικών αριθμών και ειδικότερα την έννοια του ‘επόμενου’ αριθμού, η οποία έννοια διαφοροποιεί τους φυσικούς από τους υπόλοιπους πραγματικούς αριθμούς.

3. Με το τρίτο ερώτημα ελέγχεται αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την απουσία της πρώτης συνθήκης της μαθηματικής επαγωγής, δηλαδή του βασικού βήματος, στην απόδειξη και αν θεωρούν τη συνθήκη αναγκαία και ουσιαστική ή απλά ως ένα απαιτούμενο χωρίς ιδιαίτερη σημασία. Το ερώτημα είναι διατυπωμένο κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο μαθητής να στοχάζεται πάνω στη λύση που έδωσε ένα τρίτο πρόσωπο. Συνεπώς, του δίνεται η ευκαιρία να

εστιάσει στη δικαιολόγηση της λύσης παρά στη λύση αυτή καθεαυτή (Zazkis & Hazzan, 1999).

4. Η μορφή του τέταρτου ερωτήματος είναι οικεία στους μαθητές εφόσον χρησιμοποιείται στις περισσότερες ασκήσεις κυρίως των σχολικών βιβλίων, αλλά και γενικότερα των βιβλίων που απευθύνονται σε μαθητές. Καταρχήν, δίνεται η ευκαιρία στους πιο αδύναμους μαθητές να απαντήσουν. Επιπλέον, ελέγχεται αν οι μαθητές λύνουν μεν γνωστές ασκήσεις, αλλά πιθανώς αποτυγχάνουν στις περιπτώσεις που η διατύπωση είναι μη τετριμμένη (ερωτήματα 2, 3 και 5).

5. Στο πέμπτο ερώτημα ζητείται η διατύπωση μιας εικασίας και δίνεται η ευκαιρία να ελεγχθεί αν οι μαθητές διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ εικασίας και απόδειξης. Επιπλέον, ένα μη παραδοσιακό πρόβλημα εμποδίζει τους μαθητές να το δουν ως πρόβλημα ρουτίνας που λύνεται με συγκεκριμένη μέθοδο. Τα σχήματα που δίνονται στο ερώτημα παραπέμπουν τους μαθητές πιο πολύ στη γεωμετρία, ενώ ο όρος μαθηματική επαγωγή τους παραπέμπει σε αλγεβρικές κυρίως σχέσεις. Κατά συνέπεια, το αντιμετωπίζουν ως ένα αυθεντικό πρόβλημα συμβάλλοντας θετικά στο να σκεφτούν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της μαθηματικής επαγωγής.

Είναι χρήσιμο να σημειωθεί πως τα ερωτήματα επιλέχθηκαν να είναι αρκετά απλά από άποψη τεχνικής (π.χ. χωρίς πολύπλοκες αλγεβρικές πράξεις), ώστε οι μαθητές να επικεντρώνονται περισσότερο στην ουσία της μαθηματικής επαγωγής.

Στη συνέχεια τα ερωτήματα βαθμολογήθηκαν ως εξής:

Ερώτημα 1 : 3 → σωστός ορισμός
2 → ελλιπής ορισμός
1 → λανθασμένη απάντηση

0 → καμία απάντηση

Ερώτημα 2 : 3 → σωστή απάντηση με αιτιολόγηση

2 → σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση

1 → λανθασμένη απάντηση

0 → καμία απάντηση

Ερώτημα 3 : 3 → σωστή απάντηση με αιτιολόγηση

2 → σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση

1 → λανθασμένη απάντηση

0 → καμία απάντηση

Ερώτημα 4 : 3 → απόδειξη της ισότητας

2 → ελλιπής απόδειξη της ισότητας

1 → λανθασμένη απάντηση

0 → καμία απάντηση

Ερώτημα 5 : 4 → σωστή εικασία, εύρεση σχέσης και απόδειξή της

3 → σωστή εικασία, εύρεση σχέσης και ελλιπής απόδειξή της

2 → διατύπωση της σωστής εικασίας

1 → λανθασμένη απάντηση

0 → καμία απάντηση

Συνεντεύξεις

Με ένα μέρος του δείγματος των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις ώστε να εξεταστούν περαιτέρω οι πιο συχνά εμφανιζόμενες απαντήσεις, να εκμαιευτούν αιτιολογήσεις που δεν ήταν ξεκάθαρες στο γραπτό κείμενο, να διευκρινιστούν σπάνιες απαντήσεις και επιπλέον, να εξεταστεί κατά πόσο οι απαντήσεις ήταν μια τυχαία και αυθαίρετη επιλογή του μαθητή ή μια συνειδητή και σταθερή προσέγγιση (στα τεστ γραφόταν το ονοματεπώνυμο του κάθε μαθητή, οπότε ήταν εύκολο να εντοπιστεί κάποιος συγκεκριμένος).

Η κάθε συνέντευξη μαγνητοφωνήθηκε και είχε διάρκεια περίπου 20 λεπτά. Στο Παράρτημα ΙΙ αναφέρονται κάποια αποσπάσματα των συνεντεύξεων.
Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν με 18 παιδιά (9 αγόρια και 9 κορίτσια) των οποίων οι απαντήσεις στο τεστ ήταν ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος για τα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν ήδη τεθεί. Χρησιμοποιήθηκε, δηλαδή, η εστιασμένη συνέντευξη. «Το διακριτικό χαρακτηριστικό αυτού του τύπου είναι ότι εστιάζεται στις υποκειμενικές απαντήσεις του ερωτώμενου για μια γνωστή κατάσταση στην οποία έχει συμμετάσχει και η οποία έχει αναλυθεί από τον συνεντευκτή πριν από τη συνέντευξη. Έχει έτσι τη δυνατότητα (ο συνεντευκτής) να χρησιμοποιήσει στοιχεία από τη συνέντευξη, για να τεκμηριώσει ή να απορρίψει υποθέσεις που δημιουργήθηκαν προηγουμένως» (Cohen & Manion, 1994, σελ.377).

Επιπρόσθετα, εξηγήθηκε στους μαθητές πως το κύριο ενδιαφέρον εστιάζεται στον τρόπο σκέψης τους προκειμένου να δώσουν μια απάντηση και όχι στο αν η απάντηση είναι σωστή ή λανθασμένη. Το πλεονέκτημα των συνεντεύξεων, σύμφωνα με τον Hunting (1997), είναι ότι ο μαθητής, ο οποίος αποτελεί την πηγή των δεδομένων και ο δάσκαλος - συνεντευκτής, ο οποίος αναλύει και μεταφράζει τα δεδομένα, βρίσκονται σε μια απευθείας επικοινωνία, όπου ο καθένας επιδρά πάνω στον άλλο. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων πρέπει να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να

εξηγούν τη σκέψη τους και όχι ο ερευνητής να παρεμβαίνει και να επιδεικνύει τις δικές του γνώσεις. Οι συνεντεύξεις επιτρέπουν στους μαθητές να 'διδάξουν' τους δασκάλους τους και οι δάσκαλοι πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι τους δίνεται η ευκαιρία να μάθουν μέσα από αυτή τη διαδικασία. Οι Heid, Blume, Zbiek & Edwards (1999) θεωρούν πολύ σημαντικό οι δάσκαλοι να ακολουθούν τη σκέψη των μαθητών παρά να την κατευθύνουν προς τον δικό τους τρόπο σκέψης. Υπάρχει ο κίνδυνος οι δάσκαλοι να θεωρούν τη συνέντευξη ως μια μορφή διδασκαλίας και κατ' επέκταση πιο πολύ να παρακινούν τους μαθητές προς τη σωστή απάντηση, παρά να ερευνούν τη σκέψη των μαθητών ώστε να δουν τι ακριβώς κατανόησαν.

Ανάλυση

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS-12.0. Στους πίνακες που ακολουθούν στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συχνότητες και τα ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε ερώτημα του τεστ ξεχωριστά, δίνοντας κατ' αυτό τον τρόπο μια γενική εικόνα της κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από τους μαθητές. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση της βαθμολογίας μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών. Τα στοιχεία της περιγραφικής στατιστικής συμπληρώνονται με ποιοτική ανάλυση τόσο των γραπτών εξηγήσεων στα τεστ όσο και των συνεντεύξεων. Επιλέχθηκαν εκείνες οι απαντήσεις που φανερώνουν τα στάδια κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής από τους μαθητές, καθώς και τις διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν. Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν αναφέρονται τα επιμέρους ποσοστά των διάφορων ειδών απαντήσεων που παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ώστε να αποφευχθούν ακατάλληλες γενικεύσεις,. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έδωσαν όλοι οι μαθητές γραπτές εξηγήσεις και δεν είχαν όλοι την ευκαιρία της συνέντευξης ώστε να δώσουν κάποιες επιπλέον διευκρινήσεις. Τέλος, παρουσιάζονται τόσες συσχετίσεις, όσες διαπιστώθηκαν ανάμεσα στα ερωτήματα του τεστ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Οι μαθητές, σε αρκετά μεγάλο ποσοστό, μπορούν να διατυπώνουν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής και να την εφαρμόζουν για την απόδειξη αλγεβρικών ισοτήτων, αλλά πολλές φορές αυτό γίνεται μηχανικά και χωρίς τη βαθιά κατανόηση της μαθηματικής δομής της. Κατά συνέπεια, μειώνονται τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών όταν πρόκειται για επίλυση μη τετριμμένων προβλημάτων και για ερωτήματα όπου μελετώνται η αναγκαιότητα και η σημασία του βασικού και του επαγωγικού βήματος.

Αποτελέσματα

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων για κάθε ένα ερώτημα του τεστ ξεχωριστά. Επιπρόσθετα, αναφέρονται χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών, όπως και αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις, προκειμένου να αναδειχθούν καλύτερα μερικά από τα σημαντικότερα ευρήματα της έρευνας (με Ε συμβολίζεται η ερευνήτρια και με Μ ο μαθητής ή η μαθήτρια). Στο τέλος, αναφέρονται οι συσχετίσεις που διαπιστώθηκαν ανάμεσα στα ερωτήματα του τεστ.

Πρώτο ερώτημα

Ο πίνακας 1 συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο ερώτημα του τεστ. Το 34,3% των μαθητών έδωσε τον πλήρη ορισμό, ενώ το 38,5% παρέλειψε κάποια στοιχεία. Το 11,2% έδωσε λανθασμένο ορισμό ή απλά ανέφερε κάποιες περιγραφικές ιδιότητες της αποδεικτικής μεθόδου. Το υπόλοιπο 16% δεν απάντησε καθόλου στο ερώτημα.

Πίνακας 1

Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο ερώτημα του τεστ

	Μαθητές	Ποσοστά %
Σωστός ορισμός	73	34,3
Ελλιπής ορισμός	82	38,5
Λανθασμένη απάντηση	24	11,2
Καμία απάντηση	34	16,0
Σύνολο	213	100

Μερικοί από τους μαθητές που απάντησαν σωστά σ' αυτό το ερώτημα έκαναν αναφορά στον ελάχιστο φυσικό αριθμό ν_0 στην επαγωγική βάση, δηλαδή τη γενικευμένη μορφή της μαθηματικής επαγωγής και άλλοι στην έννοια του επόμενου φυσικού αριθμού ($\nu \rightarrow \nu+1$) στο επαγωγικό βήμα. Κάποιοι μαθητές αναφέρουν ρητά τη μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτική μέθοδο και μία μαθήτρια (Μ24) στο τέλος της απάντησης σημειώνει: «*Τα παραπάνω στηρίζονται στα αξιώματα Peano*».

Οι 34 από τους 155 μαθητές που έδωσαν έναν πλήρη ή ελλιπή ορισμό ανέφεραν τη μαθηματική επαγωγή ως μια διαδικασία που αποτελείται από τρία βήματα. Στην πραγματικότητα θεωρούν ως πρώτο βήμα τη βάση της επαγωγής και χωρίζουν το επαγωγικό βήμα $p(\nu) \Rightarrow p(\nu+1)$ σε δύο επιμέρους βήματα:

1. υποθέτουν ότι η $p(\nu)$ είναι αληθής για έναν τυχαίο φυσικό αριθμό ν
2. αποδεικνύουν ότι η $p(\nu+1)$ είναι αληθής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω μαθητές ανήκαν σε δυο συγκεκριμένα τμήματα των σχολείων που πήραν μέρος στην έρευνα και η διαφοροποίησή τους πιθανά οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας των αντίστοιχων καθηγητών.

Οι ορισμοί που χαρακτηρίστηκαν ως ελλιπείς θα μπορούσαν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ορισμοί που δεν περιείχαν κάποια πληροφορία, όπως για παράδειγμα ότι το $p(\nu)$ συμβολίζει έναν ισχυρισμό ή ότι η μαθηματική επαγωγή αναφέρεται στους θετικούς ακέραιους (αν και χρησιμοποιούσαν τη μεταβλητή ν). Η συνολική εικόνα, όμως, των αντίστοιχων γραπτών δείχνει ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές γνωρίζουν τον ορισμό, αλλά δυσκολεύονται να τον διατυπώσουν με ακρίβεια ή θεωρούν ότι απευθύνονται σε μαθηματικό και κάποιες διευκρινήσεις είναι περιττές. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ορισμοί με πιο σημαντικές και ουσιαστικές παραλείψεις. Για παράδειγμα, ενώ περιγραφόταν η αποδεικτική μέθοδος, δε γραφόταν ρητά το συμπέρασμα ότι: «ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε θετικό φυσικό αριθμό». Άλλοι μαθητές στο βασικό βήμα αντί για την κατοχύρωση της αλήθειας του $p(1)$, έγραφαν απλώς ότι εξετάζουν την ισχύ του $p(1)$ χωρίς να γίνεται πιο σαφές.

Στις λανθασμένες απαντήσεις διακρίνεται μια αδυναμία εκ μέρους των μαθητών να διατυπώσουν τον ορισμό. Υπάρχουν κάποια περιγραφικά σχόλια, όπως για παράδειγμα: «*Τη μέθοδο αυτή θα τη χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ανισώσεις, εξισώσεις κ.τ.λ. ότι ισχύουν για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν*» ή «*Μαθηματική*

επαγωγή είναι η μέθοδος με την οποία μπορούμε να αποδείξουμε α > γ. Αρκεί να δείξουμε ότι για έναν αριθμό β ισχύουν: α > β και β > γ».

Οι περισσότερες, όμως, απαντήσεις φανερώνουν μια αποτυχημένη προσπάθεια απομνημόνευσης του ορισμού και έλλειψη κατανόησής του με αποτέλεσμα να διατυπώνονται προτάσεις ασαφείς, χωρίς συνοχή και νόημα. Δίνονται μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- «*Μαθηματική επαγωγή είναι η σχέση με την οποία συνδέονται σε μια μαθηματική σχέση ένα σύνολο αριθμών*»

- «*Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι ένας ορισμός για να διαπιστώσουμε αν μια πρόταση είναι αληθής και ισχύει για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς*»

- «*Όταν μια παράσταση ισχύει για έναν αριθμό ν και ισχύει και για τον ν+1 τότε ισχύει για όλους τους όμοιούς του*»

- «*Έστω ότι έχουμε μια παράσταση p(ν) που ισχύει. Αρκεί να δείξουμε ότι θα ισχύει και η p(ν+1). Και να καταλήξουμε σε μια σχέση που θα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο*»

- «*Υπάρχουν τρία βήματα. Παίρνουμε ότι ισχύει για ν=1, μετά ότι p(ν) ισχύει, άρα και p(ν+1). Θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει*»

Μερικοί από τους μαθητές που άφησαν αναπάντητο το πρώτο ερώτημα δήλωσαν στη συνέντευξη:

Μ125: «*Εγώ ποτέ δεν τα πάω καλά με τη θεωρία. Γι' αυτό έκανα μόνο τις ασκήσεις*»

Μ119: «*Δεν έγραψα τον ορισμό, γιατί δεν ήξερα ότι σήμερα θα γινότανε το τεστ!*»

Αφενός, παρατηρείται μια δυσκολία εκ μέρους αυτών των μαθητών να διατυπώσουν τον ορισμό. Αφετέρου, φαίνεται να αντιμετωπίζουν τη θεωρία ξεχωριστά και πιθανώς ανεξάρτητα από την επίλυση προβλημάτων, χωρίς να αξιοποιούν τη σύνδεση και τη σχέση που υπάρχουν μεταξύ τους.

Στις συνεντεύξεις ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν με μη φορμαλιστικό τρόπο πότε και πώς χρησιμοποιείται η μαθηματική επαγωγή. Κάποιοι από εκείνους που έδωσαν σωστό ορισμό, όπως φάνηκε από τα λεγόμενά τους, είχαν πράγματι κατανοήσει την αποδεικτική μέθοδο:

Μ123: «*Για να αποδείξουμε ότι μια πρόταση αληθεύει για όλους τους αριθμούς παίρνουμε τον πρώτο, τον μικρότερο αριθμό και αποδεικνύουμε ότι ισχύει. Μετά διαλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό, υποθέτουμε ότι ισχύει και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για τον επόμενό του. Αφού ισχύει για τον πρώτο, άρα για τον κάθε επόμενό του, άρα για όλους τους αριθμούς*»

Ε: «*Η μαθηματική επαγωγή ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό;*»

Μ123: «*Όχι. Για θετικούς ακέραιους*»

Μ82: «*Είναι μια σειρά από βήματα που για να ισχύει το επόμενο πρέπει το κάθε προηγούμενο να έχει και αυτό ισχύ. Δηλαδή, πρέπει να ξεκινήσουμε από το πρώτο βήμα και να καταλήξουμε στο τελευταίο. Και πρέπει να ισχύει και το δεύτερο και το τρίτο και το τέταρτο*»

Ε: «*Ποιο είναι το τελευταίο βήμα;*»

Μ82: «*Κανονικά δεν έχουμε τελευταίο βήμα. Είναι το ν που είναι αόριστος αριθμός. Θέλω να πω ότι δεν ξέρουμε ποιος αριθμός είναι*»

Μ78: «*Πρώτα από όλα έχω την άποψη ότι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής, σίγουρα, δε βρίσκει εφαρμογή μόνο στα μαθηματικά. Είναι μια μέθοδος με την οποία μπορούμε να πάμε με μια λογική σειρά από κάτι ειδικό σε κάποιο γενικό. (...) Στα μαθηματικά συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι ένας ισχυρισμός ίσως ισχύει. Κάνουμε τις πράξεις με μια διαδικασία και αποδεικνύουμε ότι ισχύει γενικότερα*».

Ο τελευταίος μαθητής έκανε μια αναφορά και στον επαγωγικό συλλογισμό.

Κάποιοι μαθητές στις συνεντεύξεις απλά επανέλαβαν τον ορισμό όπως τον είχαν σημειώσει.
Υπήρχαν όμως και αυτοί που αδυνατούσαν να τον περιγράψουν με σαφή και συγκροτημένο τρόπο:

Μ81: «*Εγώ το έχω μάθει όπως το λέει ο ορισμός!*»
Ε: «*Πότε καταλαβαίνεις ότι πρέπει να χρησιμοποιήσεις τη μαθηματική επαγωγή;*»
Μ81: «*Όταν μας δίνουν κάποιους αριθμούς και θέλουμε να βρούμε το ν. Μας δίνουν, δηλαδή, ότι το ν είναι μεγαλύτερο από κάτι άλλο, αντικαθιστούμε για p(ν) και μετά πρέπει να ισχυριστούμε ότι ισχύει και για p(ν+1)*»

Μ125: «*Πότε χρησιμοποιούμε τη μαθηματική επαγωγή; ... Δε ξέρω*»
Ε: «*Γιατί το τέταρτο ερώτημα το έλυσες με τη μαθηματική επαγωγή;*»
Μ125: «*Έχω λύσει πολλές ασκήσεις και το κάνω μηχανικά πλέον*»

Ε: «*Πότε χρησιμοποιούμε τη μαθηματική επαγωγή;*»

Μ101: «*Δε ξέρω*»

Ε: «*Γιατί το τέταρτο ερώτημα προσπάθησες να το λύσεις με τη μαθηματική επαγωγή και δεν το έλυσες με κάποιον άλλο τρόπο;*»

Μ101: ……

Ε: «*Όταν μου δίνουν μια άσκηση πάντα τη λύνω με μαθηματική επαγωγή;*»

Μ101: «*Όχι, αλλά εδώ το κατάλαβα*»

Ε: «*Τι είναι αυτό που σε βοήθησε να καταλάβεις;*»

Μ101: «*Επειδή λέει για κάθε θετικό ακέραιο;*» (*αναρωτιέται*)

Ε: «*Πότε χρησιμοποιούμε τη μαθηματική επαγωγή;*»

Μ122: «*Δεν μπορώ να το εξηγήσω*»

Ε: «*Στο τέταρτο ερώτημα παρατηρώ ότι εφαρμόζεις τη μαθηματική επαγωγή. Γιατί την εφάρμοσες;*»

Μ122: «*Για να αποδείξω ότι ισχύει μια παράσταση*»

Ε: «*Όταν, επομένως, έχουμε μια παράσταση πάντα εφαρμόζουμε τη μαθηματική επαγωγή;*»

Μ122: «*Όχι*»

Ε: «*Πότε θα την εφαρμόζουμε;*»

Μ122: «*… Δε ξέρω*»

Μια μαθήτρια που έγραψε λανθασμένο ορισμό, έδωσε την παρακάτω απάντηση για το πότε χρησιμοποιούμε την μαθηματική επαγωγή:

Μ127: «*Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο αριθμών μπορεί να συνδεθεί με μια σχέση*»

Ε: «*Οποιοδήποτε σύνολο αριθμών;*»

Μ127: «*Ένα συγκεκριμένο, ένα περιορισμένο*»

Ε: «*Για παράδειγμα*;»

Μ127: «*Για τους θετικούς ακέραιους*»

Ε: «*Θα μπορούσαμε και για κάποιο άλλο σύνολο αριθμών να το αποδείξουμε*;»

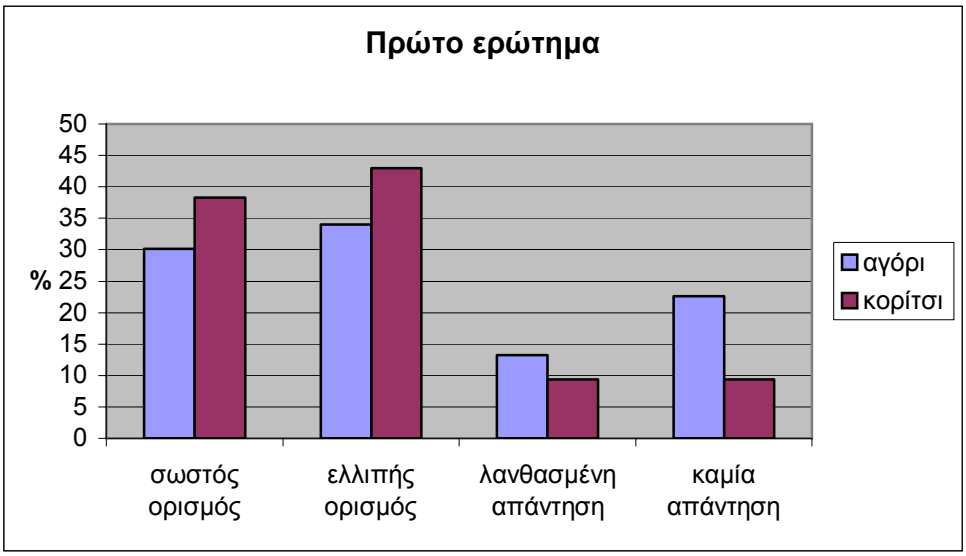
Μ127: «*Όχι*;»

Ε: «*Εσύ θα μου πεις*!»

Μ127: «*Όχι;…Όχι…Μπορεί*»

Στο Διάγραμμα 1 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των διάφορων ειδών απαντήσεων στο πρώτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο, όπου παρατηρείται πως τα κορίτσια έχουν καλύτερη επίδοση.

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με το διάγραμμα φαίνεται ότι μεγαλύτερο ποσοστό κοριτσιών γράφουν τον σωστό (38,32%) ή ελλιπή (42,98%) ορισμό από ότι τα αγόρια (30,19% και 33,96% αντίστοιχα) και μικρότερο ποσοστό κοριτσιών δίνουν λανθασμένη απάντηση (9,35%) ή αφήνουν αναπάντητο το ερώτημα (9,35%) σε σχέση με τα αγόρια (13,21% και 22,64% αντίστοιχα).



Διάγραμμα 1: Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο πρώτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο

Ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων βαθμολογίας των μαθητών και των μαθητριών στο πρώτο ερώτημα. Ειδικότερα τα κορίτσια (M = 2,10, SD = 0,92) έχουν μεγαλύτερο μέσο όρο βαθμολογίας από ότι τα αγόρια (M = 1,71, SD = 1,13), $t(211) = 2,73$, $p = 0,007$.

Δεύτερο ερώτημα

Ο πίνακας 2 συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο ερώτημα του τεστ. Το 45,1% των μαθητών απάντησε σωστά, ότι, δηλαδή, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μαθηματική επαγωγή για την απόδειξη της δοσμένης πρότασης. Επιπρόσθετα, αιτιολόγησε την απάντησή του λέγοντας ότι η μαθηματική επαγωγή εφαρμόζεται στους θετικούς ακεραίους και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη προτάσεων που αναφέρονται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Το 13,6% των μαθητών απάντησε μεν αρνητικά, αλλά χωρίς αιτιολόγηση. Το 38% απάντησε λανθασμένα πως έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη μαθηματική επαγωγή στη συγκεκριμένη περίπτωση και, τέλος, μόνο 7 (3,3%) μαθητές δεν απάντησαν καθόλου.

Πίνακας 2

Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο δεύτερο ερώτημα του τεστ

	Μαθητές	Ποσοστά %
Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση	96	45,1
Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση	29	13,6
Λανθασμένη απάντηση	81	38,0
Καμία απάντηση	7	3,3
Σύνολο	213	100

Μερικοί από τους μαθητές που απάντησαν αρνητικά στο ερώτημα έγραψαν επιπλέον σχόλια, τα οποία αξίζει να αναφερθούν:

- Κάποιοι μαθητές θεώρησαν πως εφόσον δε μπορεί να εφαρμοστεί η μαθηματική επαγωγή, συνεπώς δε θα ισχύει η σχέση $2^x > x$, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x. Παρατηρείται μια σύγχυση μεταξύ του ευρύτερου συνόλου αριθμών για τους οποίους ισχύει μια σχέση και του συνόλου αριθμών που καλύπτεται μέσω μιας συγκεκριμένης απόδειξης.

- Κάποιοι άλλοι μαθητές θεώρησαν ως πρόβλημα την έλλειψη δυνατότητας εύρεσης του μικρότερου θετικού πραγματικού αριθμού ώστε να ελεγχθεί το πρώτο βήμα της αποδεικτικής μεθόδου. Στις συνεντεύξεις δόθηκε η ευκαιρία να γίνει πιο ξεκάθαρη η σκέψη τους.

  M78: *«...Δε ξέρω ποιος είναι ο πρώτος όρος. Στους θετικούς ακεραίους ξεκινάμε από το 1. Στους θετικούς πραγματικούς δε ξεκινάμε από το 1. Αρχίζει από το 0,01 , το 0,001 , το 0,0001 και ...πάει λέγοντας».*

Ζητήθηκε από τους μαθητές που πήραν μέρος στη συνέντευξη να απαντήσουν στο τροποποιημένο ερώτημα: *Μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της μαθηματικής επαγωγής για να αποδειχθεί η πρόταση: «Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x με $x \geq 1$ ισχύει $2^x > x$ » ;*

Οι μαθητές θεώρησαν ότι αφού ξεπεράστηκε το πρόβλημα του πρώτου βήματος της μαθηματικής επαγωγής, ίσως έχουν πλέον το δικαίωμα να εφαρμόσουν την αποδεικτική μέθοδο.

Σ' αυτό το σημείο ξεκίνησε ένας διάλογος σχετικά με το ποιοι είναι οι ακέραιοι και ποιοι οι πραγματικοί αριθμοί, όπου φάνηκε η αδυναμία των περισσοτέρων παιδιών να ορίσουν αυτούς τους αριθμούς και κυρίως τους πραγματικούς.

Ε: *«Ποιοι είναι οι ακέραιοι αριθμοί;»*

Μ127: *«Όλοι οι αριθμοί. Και οι αρνητικοί και οι θετικοί»*
Ε: *«Πες μου μερικούς»*
Μ127: *«-1,3,5,…»*

Μ126: *«Οι ακέραιοι είναι οι 0, ± 1, ± 2, ± 3…»*

Ε: *«Ποιοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;»*

Μ101: *«Είναι όλοι οι αριθμοί εκτός από τις ρίζες»*
Ε: *«Οι ρίζες τι αριθμοί είναι;»*
Μ101: *«Δεκαδικοί»*

Μ119: *«Είναι όλοι οι αριθμοί. Και οι φυσικοί και οι ακέραιοι και τα κλάσματα»*

Μ80: *«Είναι όλοι. Ρητοί και άρρητοι»*

Μ104: *«Όλο το R».*

Στη συνέχεια τέθηκε ο προβληματισμός γιατί στον ορισμό της τέλειας επαγωγής να αναφέρονται μόνο οι θετικοί ακέραιοι και όχι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Μ79: *«Οι ακέραιοι είναι οι πιο γνωστοί αριθμοί: 1, 2, 3,…Ενώ αν πεις σε κάποιον* $\sqrt{3}$ *..., τότε τα πράγματα δυσκολεύουν!»*

Μ103: *«Επειδή ανήκει στο κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών και μελετάει μόνο τους θετικούς ακέραιους»*

Μ80: *«Εμένα έτσι μου το δίνουν, έτσι το μαθαίνω!»*

Στην απάντηση του τελευταίου μαθητή φαίνεται, δυστυχώς, μια παθητική στάση εκ μέρους του και έλλειψη προσπάθειας για προσωπική εκτίμηση και κρίση.

Μόνο μερικοί από τους μαθητές που θεωρούσαν τον ν+1 ως τον επόμενο φυσικό αριθμό του ν και όχι ως έναν απλό αριθμό, μπόρεσαν στη συνέχεια να αντιληφθούν ότι δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο στους πραγματικούς, δηλαδή δεν υφίσταται η έννοια του επόμενου πραγματικού αριθμού.

Ε: *«Ποιος είναι ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 1,7;»*
Μ122: *«Το 2,7»*
Ε: *«Μεταξύ των 1,7 και 2,7 δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός;»*
Μ122: *«Το 1,71»*
Ε: *«Μεταξύ των 1,7 και 1,71 δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός;»*
Μ122: *«Το 1,701 , το 1,7001 , το 1,700…001. Δε μπορώ να τον βρω»*

Δε συνέβη όμως το ίδιο με όλους τους μαθητές:

Ε: *«Όταν σου δίνουν έναν πραγματικό αριθμό μπορείς να βρεις τον επόμενό του;»*
Μ123: *«Επειδή μερικοί πραγματικοί δεν ορίζονται;» (αναρωτιέται)*
Ε: *«Ποιος αριθμός δεν ορίζεται;»*

Μ123: *«Το π, ας πούμε»*

Ε: *«Το π είναι πραγματικός αριθμός;»*

Μ123: *«Όχι, δεν είναι»*

Ε: *«Ποιοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;»*

Μ123: *«Οι ακέραιοι, τα κλάσματα»*

Ε: *«Υπάρχει άλλος αριθμός που δεν είναι πραγματικός;»*

Μ123: *«Το e»*

Οι 14 από τους 81 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα ότι εφαρμόζεται η μαθηματική επαγωγή και στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, δικαιολόγησαν την απάντησή τους επαληθεύοντας την ανισότητα για κάποιες φυσικές τιμές του x (π.χ. x = 1, 2, 3, 4) ή κάποιες ρητές τιμές (π.χ. $x = \frac{1}{3}$) και γενικεύοντας το συμπέρασμά τους για όλους τους θετικούς πραγματικούς. Διαπιστώνεται ένας επαγωγικός συλλογισμός που, όπως αναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, διαφέρει από τη μαθηματική επαγωγή.

Οι 51 από τους 81 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα αντιμετώπισαν τη μεταβλητή x ως μια μεταβλητή που παίρνει θετικές ακέραιες τιμές και προσπάθησαν να αποδείξουν την ανισότητα χρησιμοποιώντας τα βήματα της μαθηματικής επαγωγής, άλλοι επιτυχώς και άλλοι ελλιπώς.

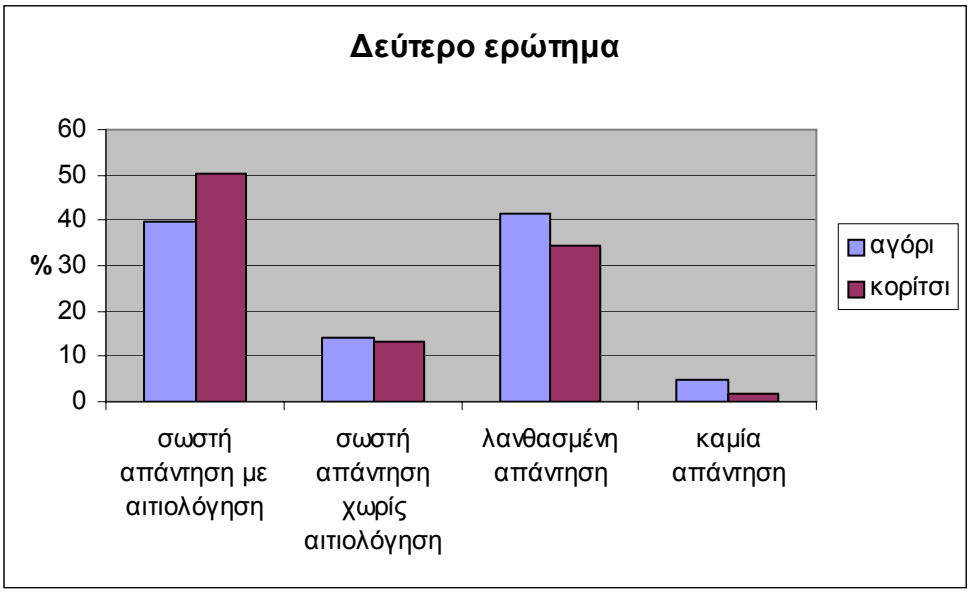
Παρόλο που στα ερωτήματα του τεστ δε ζητήθηκε η απόδειξη μιας ανισότητας (λόγω της σχετικά μικρής διάρκειας της σχολικής διδακτικής ώρας), αξίζει να αναφερθεί το πιο συνηθισμένο λάθος των παραπάνω μαθητών, το οποίο σχετίζεται με τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Συγκεκριμένα:

Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουν ότι για έναν τυχαίο θετικό ακέραιο αριθμό κ ισχύει $2^{\kappa} > \kappa$ (Σ1) και θέλουν να αποδείξουν ότι $2^{\kappa+1} > \kappa+1$ (Σ2). Από τη σχέση (Σ1), πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της με το 2, προκύπτει: $2^{\kappa+1} > 2\kappa$. Συνεπώς, αρκεί

να δειχθεί ότι $2\kappa \geq \kappa+1 \Leftrightarrow \kappa \geq 1$, το οποίο ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Οι μαθητές, όμως, στο σύνολό τους θεωρούν λανθασμένα ότι αρκεί να δείξουν $2\kappa > \kappa+1 \Leftrightarrow \kappa > 1$. Η τελευταία σχέση δεν αληθεύει για τον ακέραιο αριθμό 1 και κατά συνέπεια οι μαθητές συμπεραίνουν ότι η αρχική πρόταση δεν ισχύει.

Στο Διάγραμμα 2 παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των διάφορων ειδών απαντήσεων στο δεύτερο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο.



Διάγραμμα 2: Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο δεύτερο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο

Παρόλο που ο μέσος όρος βαθμολογίας των κοριτσιών (M = 2,12, SD = 0,96) είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο των αγοριών (M = 1,89, SD = 0,99), ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι δεν υπάρχει

στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων βαθμολογίας των μαθητών και των μαθητριών στο δεύτερο ερώτημα ($p = 0,082 > 0,05$).

Τρίτο ερώτημα

Ο πίνακας 3 συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο ερώτημα του τεστ. Το 43,7% των μαθητών βρήκε ότι παραλείπεται το πρώτο βήμα της μαθηματικής επαγωγής και επιπλέον απέδειξε ότι δεν ισχύει, οπότε η δοσμένη σχέση δεν αληθεύει. Το 10,3% των μαθητών ανέφερε μόνο ότι παραλείπεται το πρώτο βήμα της αποδεικτικής μεθόδου, χωρίς να προχωρήσει στο στάδιο ελέγχου της ισχύος του. Η απάντηση θεωρήθηκε ελλιπής, επειδή η απουσία της βάσης της επαγωγής δε συνεπάγεται πως η προς απόδειξη σχέση είναι αναγκαστικά λανθασμένη. Το 32,4% των μαθητών έδωσε λανθασμένη απάντηση και το υπόλοιπο 13,6% δεν απάντησε καθόλου.

Πίνακας 3

Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο τρίτο ερώτημα του τεστ

	Μαθητές	Ποσοστά %
Σωστή απάντηση με αιτιολόγηση	93	43,7
Σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση	22	10,3
Λανθασμένη απάντηση	69	32,4
Καμία απάντηση	29	13,6
Σύνολο	213	100

Στις συνεντεύξεις μαθητών που διαπίστωσαν την απουσία του πρώτου βήματος της μαθηματικής επαγωγής και απέδειξαν ότι δεν αληθεύει, ακούστηκαν σχόλια τα οποία φανερώνουν διαφορετικές αντιλήψεις για την αναγκαιότητα της ισχύος του βασικού βήματος, καθώς και της σχέσης του με το επαγωγικό βήμα.
Για παράδειγμα, ο παρακάτω μαθητής γνωρίζει το ρόλο του πρώτου βήματος:

M82: *«Αν δεν ισχύει το πρώτο βήμα, δεν μπορούμε να συνεχίσουμε. Όπως λέει στο βιβλίο, είναι σαν ντόμινο. Αν δεν ισχύει το πρώτο βήμα, δε ξέρουμε από πού να ξεκινήσουμε»*

E: *«Μπορείς να περιγράψεις πιο αναλυτικά το παράδειγμα με τα ντόμινο;»*

M82: *«Ναι. Θα λέγαμε ότι αφού ισχύει για το πρώτο, θα ισχύει για το δεύτερο, κατά συνέπεια για το τρίτο,..., θα φτάσουμε στο ν. Ενώ αν δεν ισχύει για το πρώτο, δεν ξεκινάμε καθόλου»*

Κάποιοι μαθητές, όμως, συνδέουν την ισχύ της επαγωγικής βάσης με την ισχύ του επαγωγικού βήματος. Για παράδειγμα:

M172: *«Έστω ν = 1. Έχουμε 1 = 6, κάτι που δεν ισχύει. Και αφού δεν ισχύει το πρώτο βήμα, άρα δε θα ισχύει και το επόμενο»*

M119: *«Για ν = 1 προκύπτει: 1 = 6, κάτι που δεν ισχύει. Άρα, ο υπόλοιπος ισχυρισμός είναι λάθος»*

M66: *«1 = 6, δεν ισχύει. Άρα δε θα ισχύει και το p(ν+1) και κατ' επέκταση δε θα αληθεύει ούτε το p(ν)»*

Είκοσι δύο μαθητές του δείγματος αρκέστηκαν μόνο στην απουσία του πρώτου βήματος για να τεκμηριώσουν ότι η αρχική σχέση δεν ισχύει, και δεν έλεγξαν την ισχύ του.

Μ78: *«Δεν τελέστηκε το πρώτο βήμα της μαθηματικής επαγωγής, δηλαδή δεν αποδείξαμε ότι η σχέση (Σ) ισχύει για ν = 1»*

Ε: *«Αν ο μαθητής αποδείκνυε ότι ισχύει για ν = 1, θα ήταν σωστή η σχέση (Σ);»*

Μ78: *«Όχι. Θα έπρεπε να προχωρήσει και στο δεύτερο βήμα και να αποδείξει ότι ισχύει και για ν+1»*

Ε: *«Δεν απέδειξε το δεύτερο βήμα;»*

Μ78: *«Ναι, αλλά προχώρησε στο δεύτερο βήμα χωρίς να κάνει το πρώτο».*

Στους μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση διακρίνονται δυο κατηγορίες:

- Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τους μαθητές που, αντί να εντοπίσουν το λάθος στη αιτιολόγηση του ισχυρισμού, έβρισκαν λάθη στην προς απόδειξη σχέση ή στο συμπέρασμα:

  - *«Το λάθος είναι στην αρχική πρόταση: ν = ν +5 ⇔ 0 = 5 το οποίο είναι άτοπο»*

  - *«Αποκλείεται να ισχύει, γιατί 20 ≠ 25 ό,τι ισχυρισμό και να κάνει»*

  Όσοι από αυτούς πήραν μέρος στη συνέντευξη και ξαναμελέτησαν το ερώτημα μπόρεσαν να εντοπίσουν ποιο ήταν το ζητούμενο.

- Η δεύτερη και πολυπληθέστερη κατηγορία (ποσοστό 55%) περιλαμβάνει τους μαθητές που μπερδεύτηκαν με το συμβολισμό και τη διαφορά μεταξύ

της ελεύθερης μεταβλητής ν και της παραμέτρου κ, η οποία παίρνει αυθαίρετη αλλά συγκεκριμένη τιμή:

- *«Αφού ν = κ, δεν μπορεί ν = κ+1»*

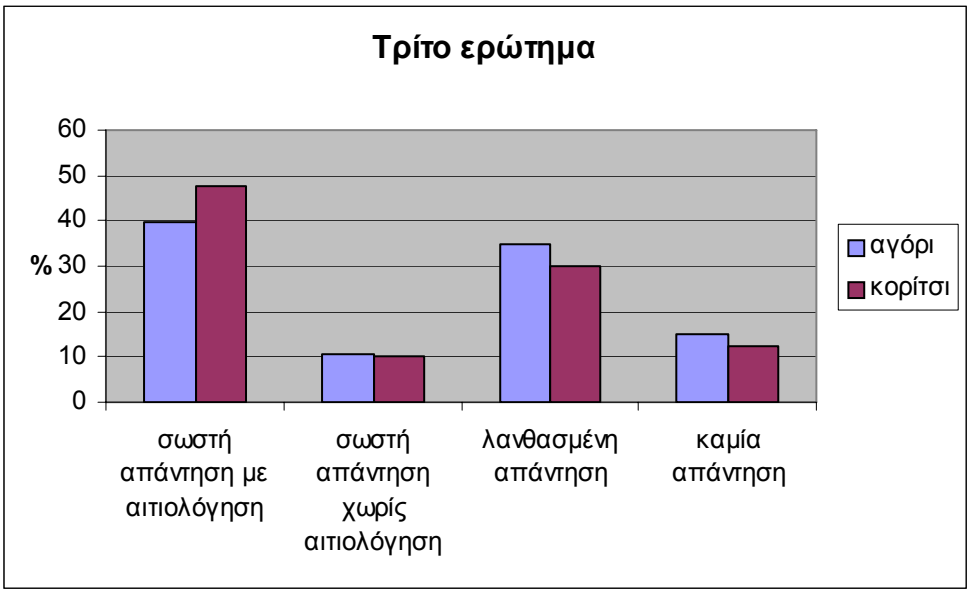
- *«Όταν ο μαθητής υπέθεσε ότι ισχύει για ν = κ έχει κ = κ+5. Όταν πρόσθεσε και στα δύο μέλη το 1, έχει (κ+1) = (κ+1)+5. Όμως η υπόθεση είναι ν = ν+5. Άρα αυτό που πρέπει να αποδείξει είναι (ν+6) = (ν+6)+5 και όχι ν = κ+1. Άρα, με λάθος υπόθεση και απόδειξη καταλήγει σε άτοπο»*

- *«Ο μαθητής υποθέτει ότι ισχύει για ν = κ, δηλαδή κ = κ+5. Η υπόθεση είναι λανθασμένη αφού χρησιμοποιείται ως δεδομένο αυτό που πρέπει να αποδειχθεί»*

- *«Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση. Για ν = κ η σχέση γίνεται ν = κ+5. Όταν αντικαθιστούμε τον ν, δεν αντικαθίσταται και μπροστά και μετά. Μόνο στο δεύτερο μέλος»*

- Μ102: *«Είναι λάθος, γιατί σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η σχέση αυτή θα ισχύει για ν = ν+1 και όχι για ν = ν+5»*
  Ε: *«Μου το εξηγείς λίγο καλύτερα;»*
  Μ102: *«Αυτό που λέει το βιβλίο, δηλαδή το επόμενο. Ενώ το ν+5 είναι ν+1, ν+2, ν+3,…»*

Στο Διάγραμμα 3 παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των διάφορων ειδών απαντήσεων στο τρίτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο.



Διάγραμμα 3: Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο τρίτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο

Ο μέσος όρος βαθμολογίας των κοριτσιών (M = 1,93, SD = 1,13) είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο των αγοριών (M = 1,74, SD = 0,96), αλλά ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($p = 0,224 > 0,05$).

Τέταρτο ερώτημα

Ο πίνακας 4 συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών στο τέταρτο ερώτημα του τεστ. Το 54% των μαθητών έδωσε μια πλήρη απόδειξη της δοσμένης ισότητας, ενώ το 24,9% δεν κατάφερε να την ολοκληρώσει. Το 18,8% των μαθητών έδωσε λανθασμένη ή ασαφή απάντηση και μόνο το 2,3% των μαθητών δεν ασχολήθηκε με το συγκεκριμένο ερώτημα.

Πίνακας 4
Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο τέταρτο ερώτημα του τεστ

	Μαθητές	Ποσοστά %
Απόδειξη της ισότητας	115	54,0
Ελλιπής απόδειξη	53	24,9
Λανθασμένη απάντηση	40	18,8
Καμία απάντηση	5	2,3
Σύνολο	213	100

Το 78,9% των μαθητών (σχεδόν οι 4 στους 5) κατάφεραν να αποδείξουν την ισότητα, είτε ολοκληρωμένα, είτε με κάποιες παραλείψεις. Το ερώτημα θεωρήθηκε οικείο και χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες, όπως φαίνεται και από τα σχόλια των μαθητών στις συνεντεύξεις:

M102: *«Είναι μια καθαρή άσκηση. Δε ζητάει τίποτα περίεργο»*

Μ104: *«Έχουμε λύσει αρκετές τέτοιες στην τάξη»*

Μ78: *«Οι περισσότερες ασκήσεις που έχει το σχολικό βιβλίο είναι τέτοιας μορφής καθώς, επίσης, έχει και ανισότητες»*

Μ80: *«Αυτό το ερώτημα είναι εύκολο, γιατί σε τέτοια έχουμε συνηθίσει»*

Μ103: *«Είναι εύκολη, γιατί δεν έχει και τίποτα να πεις! Είναι στάνταρ τα βήματα στη μαθηματική επαγωγή»*

Παρόλα αυτά υπήρξαν κάποιες δυσκολίες στην εφαρμογή της μεθόδου. Με μεγαλύτερη συχνότητα παρουσιάστηκε το εξής φαινόμενο στο επαγωγικό βήμα:
Οι μαθητές υποθέτουν ότι η σχέση ισχύει για ν = κ, δηλαδή:

p(κ): $$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\kappa(\kappa+1)=\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}$$

ή ισοδύναμα $$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\kappa^2+\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}$$

και προσπαθούν να αποδείξουν ότι ισχύει για ν = κ+1, δηλαδή:

p(κ+1): $$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\kappa(\kappa+1)+(\kappa+1)(\kappa+2)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{3}$$

Ξεκινούν από το πρώτο μέλος της σχέσης p(κ+1):

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\kappa(\kappa+1)+(\kappa+1)(\kappa+2)=$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\kappa(\kappa+1)+\kappa^2+\kappa+2\kappa+2=$$

αλλά στη συνέχεια αντικαθιστούν λανθασμένα:

$$\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}+2\kappa+2=\ldots$$

αντί για τη σωστή αντικατάσταση $\frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}{3}+\kappa^2+\kappa+2\kappa+2=\ldots$

με αποτέλεσμα την αδυναμία να καταλήξουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Σε μερικά γραπτά ελεγχόταν η ισχύς του ισχυρισμού p(1) ως εξής:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+1(1+1)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}\Leftrightarrow 1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}\Leftrightarrow 2=2$$. Άρα ισχύει.

Αξίζει να γίνει αναφορά και στις λανθασμένες απαντήσεις όπου οι μαθητές δεν εφάρμοζαν σωστά τη μαθηματική επαγωγή ή δεν την ανέφεραν καθόλου και απλά έγραφαν κάποιες σχέσεις ασύνδετες μεταξύ τους.

Στην προσπάθειά τους να αποδείξουν τη ζητούμενη σχέση δεχόντουσαν ως προφανείς ισότητες της μορφής:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+1(1+1)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}\Leftrightarrow 2+6+12+...+2=\frac{7}{3}$$.

Άρα ισχύει!

Πιο συνηθισμένη, όμως, ήταν η λανθασμένη μετάφραση του ισχυρισμού p(κ+1), όπως φαίνεται και από τα παρακάτω παραδείγματα:

- $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+\kappa(\kappa+1)+(\kappa+1)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{3}$
- $(\kappa+1)(\kappa+2)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}{3}$

Στις συνεντεύξεις τέθηκε στους μαθητές ο παρακάτω προβληματισμός για το τέταρτο ερώτημα:

Ε: *«Εσύ χρησιμοποίησες τη μαθηματική επαγωγή και απέδειξες σωστά την ισότητα. Φαντάσου ότι ένας συμμαθητής σου αντικαθιστούσε στη σχέση στη θέση του ν τις διαδοχικές θετικές ακέραιες τιμές 1, 2, 3, 4,…και κάθε φορά προέκυπτε κάτι που ισχύει. Μέχρι να τελειώσει ο χρόνος που είχε στη*

διάθεσή του, είχε καταφέρει να επαληθεύσει τη σχέση μέχρι την τιμή π.χ. ν = 100. Οπότε συμπεραίνει ότι η ισότητα ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Είναι σωστή η απάντησή του;»

Ουσιαστικά, μέσω του ερωτήματος έγινε προσπάθεια να ελεγχθεί αν οι μαθητές διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ μαθηματικής επαγωγής και επαγωγικού πιθανοθεωρητικού συλλογισμού, σύμφωνα με τον οποίο ξεκινώντας από το μερικό καταλήγουμε στο γενικό, με την ύπαρξη, όμως, πιθανότητας εξαγωγής λανθασμένου συμπεράσματος.
Αναφέρονται ορισμένες απαντήσεις:

Μ103: *«Δεν είναι σωστή η λύση του μαθητή. Γιατί αν ισχύει για κάποιο σύνολο αριθμών, δε σημαίνει ότι ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους. Μπορεί απλά αυτό να συμβαίνει μέχρι κάποιο συγκεκριμένο αριθμό και μετά από κει και πέρα να μην ισχύει»*

Μ78: *«Θεωρητικά είναι σωστό αλλά στην ουσία δε θα καταλήξει πουθενά. Αφού οι αριθμοί είναι άπειροι, δε θα τελειώσει ποτέ. Δε θα μπορέσει ποτέ να αποδείξει για όλους τους αριθμούς»*

Υπήρξαν και αντίθετες απόψεις:

Μ122: *«Είναι σωστή η λύση»*
Ε: *«Η σχέση ισχύει και για ν = 1000;»*
Μ122: *«Ισχύει»*
Ε: *«Πώς το ξέρουμε;»*
Μ122: *«Αφού ισχύει για μια τιμή του ν»*
Ε: *«Δηλαδή όταν ισχύει για μια τιμή του ν, τότε ισχύει για όλες;»*
Μ122: *«Για θετικούς ακεραίους»*

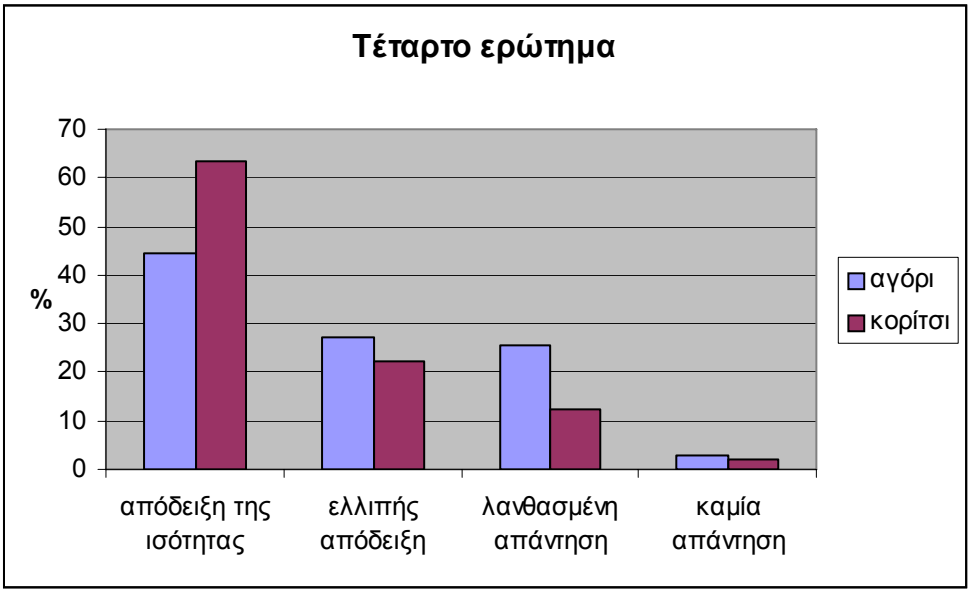
Μ81: *«Πρέπει να ξεκινήσουμε πρώτα από τον μικρότερο ακέραιο»*

Ε: *«Ο συγκεκριμένος μαθητής, πράγματι, ξεκινά από την τιμή ν = 1, μετά παίρνει ν = 2, μετά ν = 3 κ.ο.κ. Μπορούμε να ελέγξουμε μια σχέση αντικαθιστώντας διαδοχικά όλες τις ακέραιες τιμές;»*

Μ81: *«Πάλι θα ίσχυε. Όπως, ας πούμε, βρήκε ότι ισχύει για ν = 2, πάλι θα ισχύει και για τις άλλες τιμές. Πιστεύω ότι είναι σωστή η λύση»*

Στο Διάγραμμα 4 παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των διάφορων ειδών απαντήσεων στο τέταρτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο, όπου παρατηρείται πως τα κορίτσια έχουν καλύτερη επίδοση.

Συγκεκριμένα, το ποσοστό 63,55 % των κοριτσιών απέδειξε την ισότητα έναντι του 44,34% των αγοριών και το 12,15% των κοριτσιών έδωσε λανθασμένη απάντηση έναντι του 25,47% των αγοριών. Στις άλλες δύο κατηγορίες δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές. Πράγματι, το 27,36% των αγοριών και το 22,43% των κοριτσιών έδωσαν ελλιπή απάντηση και το 2,83% των αγοριών και το 1,87% των κοριτσιών δεν απάντησαν καθόλου.



Διάγραμμα 4: Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο τέταρτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο

Ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων βαθμολογίας των αγοριών και των κοριτσιών στο τέταρτο ερώτημα. Ειδικότερα τα κορίτσια (M = 2,48, SD = 0,78) έχουν μεγαλύτερο μέσο όρο βαθμολογίας από ότι τα αγόρια (M = 2,13, SD = 0,89), t (211) =2,99, p = 0,003.

Πέμπτο ερώτημα

Ο πίνακας 5 συνοψίζει τις απαντήσεις των μαθητών στο πέμπτο ερώτημα του τεστ. Μόνο το 8% των μαθητών υπέθεσε τη σωστή σχέση και στη συνέχεια την απέδειξε, ενώ το 5,6% αδυνάτισε να ολοκληρώσει την απόδειξη. Το σημαντικό ποσοστό 55,9% των μαθητών κατάφερε να κάνει απλώς τη σωστή εικασία. Το 7,5% έδωσε λανθασμένη απάντηση και το υπόλοιπο 23% άφησε αναπάντητο το ερώτημα.

Πίνακας 5
Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών στο πέμπτο ερώτημα του τεστ

	Μαθητές	Ποσοστά %
Σωστή εικασία, εύρεση σχέσης και απόδειξή της	17	8,0
Σωστή εικασία, εύρεση σχέσης με ελλιπή απόδειξη	12	5,6
Σωστή εικασία	119	55,9
Λανθασμένη απάντηση	16	7,5
Καμία απάντηση	49	23,0
Σύνολο	213	100

Το πέμπτο ερώτημα, όπως φαίνεται και από τα παρακάτω αποσπάσματα μερικών συνεντεύξεων, θεωρήθηκε ενδιαφέρον από τους μαθητές αλλά και δύσκολο. Ας

σημειωθεί, ότι στο σχολικό βιβλίο και στην πλειοψηφία των σχολικών βοηθημάτων δεν υπάρχουν ερωτήματα αυτής της μορφής.

Μ101: *« Η πέμπτη (άσκηση) μου φάνηκε δύσκολη. Δεν μπόρεσα να βρω την ισότητα για να την αποδείξω»*

Μ79: *«Το πέμπτο θέμα ήθελε λίγο περισσότερη σκέψη»*

Μ78: *«Τα θέματα ήταν εύκολα εκτός από το πέμπτο που το σκέφτηκα πολύ, αλλά δυστυχώς τελείωσε ο χρόνος. Πιστεύω ότι αν είχα περισσότερο χρόνο θα το έλυνα»*

Μ82: «*Το πέμπτο θέμα με δυσκόλεψε, για να πω την αλήθεια. Ήθελε κάποια εξυπνάδα…. Σου κινούσε το ενδιαφέρον»*

Οι 148 μαθητές (σχεδόν το 70%) κατάφεραν να κάνουν τη σωστή εικασία και υπέθεσαν ότι το πλήθος των σχηματιζόμενων ισόπλευρων τριγώνων πλευράς ενός εκατοστού μέσα στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ν εκατοστών είναι ίσο με $ν^2$ (όταν σχεδιαστούν οι κατάλληλες ευθείες που υποδεικνύει το ερώτημα).

Μόνο οι 29 μαθητές, όμως, από αυτούς κατάφεραν να προσδιορίσουν μια σχέση και να την αποδείξουν με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, είτε ολοκληρωμένα (17 μαθητές), είτε ελλιπώς (12 μαθητές). Στα γραπτά εντοπίστηκαν δυο είδη σωστών απαντήσεων, τα οποία παρουσιάζονται συνοπτικά:

1. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των ζητούμενων τριγώνων ισούται με το άθροισμα των ν πρώτων περιττών αριθμών, συνεπώς αρκεί να αποδειχθεί η σχέση: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2ν-1) = ν^2$

2. Υποθέτοντας ότι μέσα στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ν εκατοστών σχηματίζονται ν^2 ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς ενός εκατοστού, παρατηρούμε ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ν + 1 εκατοστών σχηματίζονται επιπλέον 2ν +1 μικρά ισόπλευρα τρίγωνα. Συνολικά: $\nu^2 + (2\nu + 1) = (\nu + 1)^2$ τρίγωνα.

Υπήρξαν μαθητές που απλώς έκαναν μια σωστή υπόθεση και μαθητές που βρήκαν μεν τη σωστή εικασία, αλλά απέτυχαν να προσδιορίσουν τη σωστή σχέση. Για παράδειγμα :

- $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + \nu = \nu^2$
- $2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + \nu^2 = \nu^2$

Στις λανθασμένες απαντήσεις υπήρχαν είτε λανθασμένες εικασίες:

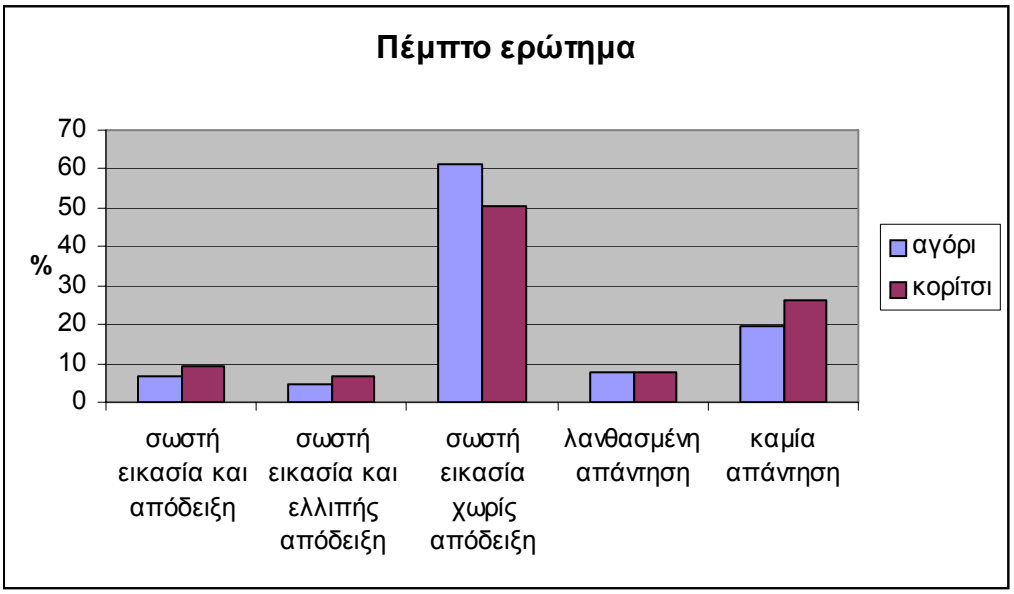
- $4 + 9 + 16 + \ldots + \nu = \sqrt{\nu}$
- $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (\nu - 1) = \nu(\nu + 1)$
- $2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 16 + \ldots + \nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

είτε αποτυχημένες προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος:

- Οι ν = 2, ν = 3, ν = 4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω = 1. Ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 + 3 - 2$
- $\alpha_1 = 4$, ω = 5

  $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu = 4 + (\nu - 1)5 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 5\nu - 1$

Στο Διάγραμμα 5 παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των διάφορων ειδών απαντήσεων στο πέμπτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο.



Διάγραμμα 5: Σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στο πέμπτο ερώτημα του τεστ με βάση το φύλο

Είναι το μοναδικό ερώτημα του τεστ στο οποίο ο μέσος όρος βαθμολογίας των αγοριών (M = 1,71, SD = 1,05) είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο των κοριτσιών (M = 1,65, SD = 1,21), αλλά ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($p = 0,731 > 0,05$).

Συσχετίσεις μεταξύ των ερωτημάτων

Υπολογίστηκαν οι συντελεστές συσχέτισης r του Pearson ανάμεσα στα πέντε ερωτήματα του τεστ και παρουσιάζονται στον Πίνακα 6. Όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί και στατιστικώς σημαντικοί (με εξαίρεση το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των ερωτημάτων Q2 και Q5, καθώς και τον αντίστοιχο συντελεστή των ερωτημάτων Q3 και Q5, οι οποίοι είναι στατιστικώς ασήμαντοι). Το μέγεθος των συντελεστών κυμαίνεται από 0,14 (ερωτήματα Q2 και Q4) μέχρι 0,32 (ερωτήματα Q3 και Q4). Δηλαδή, οι μαθητές με υψηλό βαθμό σε ένα ερώτημα τείνουν να έχουν υψηλό βαθμό και σε άλλα ερωτήματα του τεστ, αν και το μέγεθος των συσχετίσεων αυτών δεν είναι μεγάλο.

Πίνακας 6

Συντελεστές συσχέτισης (Pearson r) μεταξύ των ερωτημάτων του τεστ

Ερωτήματα	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Q1: Ορισμός	1,00	0,21*	0,18*	0,30*	0,22*
Q2: Μαθ/κή επαγωγή και πραγματικοί αριθμοί		1,00	0,28*	0,14*	0,02
Q3: Έλεγχος - σημασία του βασικού βήματος			1,00	0,32*	0,12
Q4: Απόδειξη ισότητας				1,00	0,23*
Q5: Εικασία, εύρεση και απόδειξη σχέσης					1,00

* $p < 0,05$ N = 213

Προκειμένου να σχηματιστεί μια γενική εικόνα της επίδοσης των μαθητών, αναφέρεται ότι, με βάση την επεξεργασία των γραπτών, μόνο 5 μαθητές από τους 213 (ποσοστό 2,35%) απάντησαν σωστά σε όλα τα ερωτήματα του τεστ. Αν εξαιρεθεί το πέμπτο ερώτημα το οποίο θεωρήθηκε δύσκολο, τότε το αντίστοιχο ποσοστό των σωστών απαντήσεων γίνεται 6,57% (14 μαθητές).
Επιπλέον, το 79,34% των μαθητών (169 παιδιά) απάντησαν σωστά και πλήρως τουλάχιστον σε ένα από τα ερωτήματα, ενώ το 1,88% (4 παιδιά) έδωσαν σε όλα τα ερωτήματα είτε λανθασμένη είτε καμία απάντηση.

Όσον αφορά τα ερωτήματα Q1, Q4 και Q5 διαπιστώνουμε ότι από τους 155 μαθητές που έδωσαν πλήρη ή ελλιπή ορισμό, οι 97 απέδειξαν με επιτυχία την ισότητα του τέταρτου ερωτήματος (ποσοστό 62,58%) και οι 24 από τους 97 (σχεδόν 1 στους 4) έκαναν σωστή εικασία στο πέμπτο ερώτημα, βρήκαν μια σχέση και την απέδειξαν έστω και ελλιπώς.

Ειδικότερα για το ερώτημα Q5 παρατηρούμε ότι από τους μαθητές που διατύπωσαν λανθασμένα ή καθόλου τον ορισμό και από τους μαθητές που δεν απέδειξαν την ισότητα στο τέταρτο ερώτημα, κανένας δεν κατάφερε να απαντήσει ολοκληρωμένα στο πέμπτο ερώτημα, αν και αρκετοί μπόρεσαν να διατυπώσουν την εικασία.

Τέλος, από τους 93 μαθητές που εντόπισαν την απουσία του βασικού βήματος στο τρίτο ερώτημα και έλεγξαν την ισχύ του, οι 64 (ποσοστό 68,82%) απέδειξαν πλήρως την ισότητα του τέταρτου ερωτήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περίληψη

Από τα αποτελέσματα της παρούσης έρευνας φαίνεται ότι πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη μαθηματική δομή της τέλειας επαγωγής. Όταν οι μαθητές κατανοούν κάθε επιμέρους και ουσιαστικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής επαγωγής, καθώς επίσης το ρόλο και τη σημασία του στη συνολική δομή της, τότε είναι περισσότερο ικανοί να αντιμετωπίσουν με επιτυχία μια ποικιλία ερωτημάτων και προβλημάτων.

Συμπεράσματα

Η μελέτη των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα του τεστ και οι επιπλέον διευκρινίσεις που δόθηκαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων οδηγούν στο χωρισμό των μαθητών σε τρία επίπεδα ως προς την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη δομή της, αδυνατούν να τη διατυπώσουν και δεν μπορούν να την εφαρμόσουν ούτε σε απλές περιπτώσεις. Στο δεύτερο επίπεδο οι μαθητές δίνουν μια κατανοητή εξήγηση της αποδεικτικής μεθόδου και την εφαρμόζουν σε γνωστές καταστάσεις. Κυριαρχεί, όμως, η μηχανική αντιμετώπισή της παρά η βαθιά κατανόησή της. Στο τρίτο επίπεδο οι μαθητές έχουν μια ολοκληρωμένη δομή της μαθηματικής επαγωγής, κατανοούν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της, τη χρησιμοποιούν όποτε χρειάζεται, ακόμη και στην επίλυση δύσκολων ή πρωτότυπων προβλημάτων. Η παραπάνω κατάταξη των μαθητών σε κατηγορίες έρχεται σχεδόν σε συμφωνία με τα ευρήματα των ερευνητών Dubinsky & Lewin (1986). Η πλειοψηφία των μαθητών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα βρίσκεται στο δεύτερο επίπεδο.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικά τα συμπεράσματα, όπως προκύπτουν από τα αποτελέσματα της έρευνας.

Κάποιοι μαθητές δυσκολεύονται να διατυπώσουν την αρχή της τέλειας επαγωγής με αποτέλεσμα στη διατύπωση του ορισμού να παραλείπουν βασικά στοιχεία της. Για παράδειγμα, μερικοί θεωρούν αυτονόητο ότι χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή ν, αυτή αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς και δεν το αναφέρουν καθόλου. Άλλοι ταυτίζουν την πρόταση p(ν) με μια ισότητα ή ανισότητα και ουσιαστικά περιορίζουν την εφαρμογή της σε αλγεβρικά προβλήματα. Το γεγονός αυτό πιθανά να οφείλεται στα παραδείγματα που δίνονται και στα ερωτήματα που τίθενται στη σχολική αίθουσα, τα οποία είναι κυρίως αλγεβρικά και της μορφής: «για κάθε θετικό ακέραιο να αποδείξετε ότι ισχύει…».

Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι αναφέρουν τα δύο βήματα της αποδεικτικής μεθόδου, χωρίς όμως να αναφέρουν το συμπέρασμα, αφήνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ανολοκλήρωτο τον συλλογισμό τους. Μια ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί είναι η μηχανική εκ μέρους των μαθητών αντιμετώπιση της μεθόδου και όχι η κατανόησή της σε βάθος.

Μερικοί μαθητές χωρίζουν το επαγωγικό βήμα $p(\nu) \Rightarrow p(\nu+1)$ σε δύο επιμέρους βήματα. Αρχικά υποθέτουν ότι ο ισχυρισμός p(ν) είναι αληθής (χωρίς, όμως, να διευκρινίζεται πάντοτε ότι αυτό γίνεται για έναν τυχαίο φυσικό αριθμό ν) και στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι ο p(ν+1) είναι επίσης αληθής. Δημιουργείται, συνεπώς, η απορία γιατί να υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει, εφόσον στην ουσία αυτή θέλουμε να αποδείξουμε. Η παραπάνω εννοιολογική δυσκολία των μαθητών έχει σχέση με τη φύση και το ρόλο της μεταβλητής ν. Στο μεν επαγωγικό βήμα το ν είναι μια λογική σταθερά, δηλαδή αυθαίρετη αλλά ταυτόχρονα συγκεκριμένη, ενώ στο συμπέρασμα ('η πρόταση p(ν) αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό ν') το ν είναι ελεύθερη μεταβλητή.

Μια διαφορετική ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί είναι η αδυναμία πολλών μαθητών να αντιληφθούν τη συνεπαγωγή ως ένα αντικείμενο, με αποτέλεσμα να την αντιμετωπίζουν απλά ως μια διαδικασία (Dubinsky, 1989).
Επιπλέον, υπάρχουν μαθητές οι οποίοι αποδεικνύουν μόνο τον ισχυρισμό p(ν+1) στη θέση της συνεπαγωγής p(ν) $\Rightarrow$ p(ν+1), επειδή προφανώς δεν καταλαβαίνουν τη σημασία της (Stylianides & Philippou, in press).

Παρουσιάστηκε το φαινόμενο μερικοί μαθητές να απαντούν στα ερωτήματα όπου χρειάζεται να εφαρμοστεί η μαθηματική επαγωγή, αλλά να αφήνουν αναπάντητο το ερώτημα με τον ορισμό. Μια ερμηνεία θα μπορούσε να είναι η αδυναμία διατύπωσης μιας μαθηματικής έννοιας όπου απαιτείται σαφήνεια, ακρίβεια και λιτότητα. Παρουσιάστηκε, όμως, και το ακριβώς αντίθετο φαινόμενο όπου οι μαθητές διατυπώνουν σωστά την αποδεικτική μέθοδο, αλλά αδυνατούν να την εφαρμόσουν. Τα ερευνητικά ευρήματα συμφωνούν με τα αντίστοιχα του Vinner (1991) πως η διατύπωση του ορισμού δε συνεπάγεται και την κατανόησή του.

Ένα ερευνητικό ερώτημα είναι κατά πόσο οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι η μαθηματική επαγωγή συνδέεται με την καλή διάταξη των φυσικών αριθμών. Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώνεται ότι ελάχιστοι μαθητές αναρωτήθηκαν γιατί η μαθηματική επαγωγή εφαρμόζεται μεν στους φυσικούς αλλά όχι στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς και οι ίδιοι δυσκολεύτηκαν να δώσουν μια εξήγηση. Το γεγονός αυτό πιθανά να οφείλεται στο ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν μηχανικά τους αριθμούς ν και ν+1 και δεν εστιάζουν στο ότι είναι διαδοχικοί (πολύ βοηθητική είναι η αναπαράσταση της μεθόδου π.χ. με τα ντόμινο). Το εμπόδιο στους πραγματικούς αριθμούς είναι η μη ύπαρξη του επόμενου πραγματικού αριθμού και κατά συνέπεια υπάρχει αδυναμία γενίκευσης της ισχύος του ισχυρισμού για το σύνολο όλων των πραγματικών.

Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές αδυνατούν να καταλάβουν πώς είναι δυνατό μια σχέση να ισχύει μεν για όλους τους θετικούς πραγματικούς, αλλά κάποια αποδεικτική μέθοδος να μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα υποσύνολο μόνο του πεδίου ορισμού της σχέσης και συγκεκριμένα στους φυσικούς αριθμούς. Πιο αναλυτικά, οι μαθητές θεωρούν λανθασμένα ότι εφόσον η μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται για την απόδειξη μιας σχέσης σε κάποιο σύνολο αριθμών (π.χ. $2^{\nu} > \nu$, για κάθε θετικό φυσικό ν), τότε δεν είναι δυνατό η σχέση να ισχύει σε ένα ευρύτερο σύνολο, όπου δεν εφαρμόζεται η συγκεκριμένη αποδεικτική μέθοδος (π.χ. $2^{x} > x$, για κάθε θετικό πραγματικό x). Η παραπάνω δυσκολία φανερώνει ότι οι μαθητές δε γνωρίζουν τις προϋποθέσεις, τους περιορισμούς και τις ιδιαιτερότητες των διαφόρων μεθόδων απόδειξης, ώστε να γίνεται η κατάλληλη χρήση και αξιοποίησή τους. Όταν μια αποδεικτική μέθοδος δε συμβάλλει στην απόδειξη μιας πρότασης, τότε μάλλον ψάχνουμε για άλλη μέθοδο, παρά απορρίπτουμε την πρόταση!

Όσον αφορά το ερευνητικό ερώτημα κατά πόσο οι μαθητές θεωρούν ότι οι δύο συνθήκες της μαθηματικής επαγωγής είναι ανεξάρτητες, αλλά και οι δύο απαραίτητες ώστε να ολοκληρωθεί η αποδεικτική διαδικασία, διαπιστώθηκαν τα εξής:
Πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία της βάσης της επαγωγής και το ρόλο της στον αποδεικτικό κανόνα modus ponens του προτασιακού λογισμού. Ειδικότερα, θεωρούν πρόβλημα την απουσία του βασικού βήματος, αλλά δεν ελέγχουν αν είναι αληθές ή όχι (Stylianides & Philippou, in press). Κάποιοι μαθητές έχουν την άποψη ότι το βασικό βήμα δε χρειάζεται καθόλου ή ότι πρέπει απαραίτητα να ισχύει ως κάτι προφανές (Ron & Dreyfus, 2004). Αυτό, ίσως, οφείλεται στο ότι το βασικό βήμα είναι συνήθως εύκολα ελέγξιμο, οπότε το κύριο βάρος της απόδειξης πέφτει στο επαγωγικό βήμα. Ένας άλλος λόγος είναι η μορφή των προβλημάτων τα οποία δίνονται στους μαθητές. Είναι κυρίως της 'κλειστής' μορφής: «να αποδείξετε ότι η σχέση p(ν) ισχύει για κάθε φυσικό $\nu \geq \nu_0$», όπου η αριθμητική τιμή του ν_0 δίνεται έτοιμη και όχι 'ανοιχτής' μορφής, όπως π.χ.: «να ελέγξετε για ποιους

φυσικούς αριθμούς ισχύει η p(ν)», όπου ο ελάχιστος φυσικός αριθμός $ν_0$ θα πρέπει να βρεθεί από τους ίδιους τους μαθητές.
Επιπλέον, κάποιοι μαθητές συνδέουν την ισχύ του βασικού βήματος με την ισχύ του επαγωγικού βήματος. Ειδικότερα θεωρούν πως αν δεν ισχύει το βασικό βήμα τότε δε θα ισχύει και το επαγωγικό.

Στο ερώτημα, όπου ζητείται η απόδειξη μιας σχέσης για τους φυσικούς αριθμούς, παρουσιάστηκαν δυσκολίες των μαθητών στη μετάφραση του επαγωγικού βήματος $p(κ) \Rightarrow p(κ+1)$, καθώς και στους αλγεβρικούς χειρισμούς που υπεισέρχονται στην απόδειξη του. Παρόλα αυτά, οι μαθητές θεωρούν εύκολα τα ερωτήματα που έχουν παραστάσεις αλγεβρικής μορφής και αυτό πιθανά οφείλεται στην εξοικείωσή τους με προβλήματα τέτοιας μορφής ή στην άποψη ότι η μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο στην Άλγεβρα και για την απόδειξη προβλημάτων συγκεκριμένης μορφής. Αυτές οι πεποιθήσεις, όμως, έρχονται σε σύγκρουση με κάποια δραστηριότητα που απαιτεί μια διαφορετική εφαρμογή της επαγωγικής απόδειξης, όπως είναι το πέμπτο ερώτημα του τεστ (Wistedt & Brattstrom, 2005).

Το γεωμετρικό πρόβλημα αιφνιδίασε και δυσκόλεψε τους μαθητές, ίσως επειδή οι περισσότεροι για πρώτη φορά αντιμετώπισαν πρόβλημα με μη αλγεβρική μορφή. Το γεωμετρικό σχήμα παραπέμπει στη Γεωμετρία και στους ‘δικούς’ της τρόπους απόδειξης, ενώ η μαθηματική επαγωγή διδάσκεται στα πλαίσια της Θεωρίας Αριθμών.

Επιχειρώντας να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να κάνουν εικασίες και αν αισθάνονται την ανάγκη να αποδείξουν, και όχι απλώς να γενικεύσουν, τον επαγωγικό συλλογισμό τους, παρατηρούμε τα εξής:
Οι περισσότεροι μαθητές του δείγματος μπορούν να κάνουν εικασίες, αν και δυσκολεύονται να βρουν μια σχέση η οποία να εκφράζει την εικασία ώστε στη συνέχεια να την αποδείξουν με μαθηματική επαγωγή. Παρατηρείται, δηλαδή, έντονα

το φαινόμενο οι μαθητές να αδυνατούν να μεταφράσουν τη σκέψη τους σε μαθηματική γλώσσα και αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα των ερευνητριών Nardi & Iannone (2003). Το συγκεκριμένο φαινόμενο πιθανά συμβαίνει επειδή οι μαθητές δεν έρχονται συχνά αντιμέτωποι με λεκτικά προβλήματα, αλλά συνήθως με προβλήματα διατυπωμένα κατευθείαν στη συμβολική γλώσσα.

Επιπλέον, οι μαθητές προκειμένου να δημιουργήσουν εικασίες χρησιμοποιούν τον επαγωγικό συλλογισμό ξεκινώντας από ειδικές περιπτώσεις και γενικεύοντας το συμπέρασμα τους (Ernest, 1984; Polya, 1954; Τουμάσης, 2002). Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι θεωρούν την εικασία ως κάτι διαφορετικό από την απόδειξη και ειδικότερα, ως ένα βοηθητικό βήμα ώστε να βρεθεί η ζητούμενη σχέση, η οποία στη συνέχεια πρέπει να αποδειχθεί. Μπορεί, βέβαια, να τους διευκόλυνε η διατύπωση του αντίστοιχου ερωτήματος και αξίζει να ερευνηθεί αν με μια πιο γενική διατύπωση οι μαθητές θα αντιδρούσαν παρόμοια.

Ανάμεσα στους μαθητές που έλαβαν μέρος στη συνέντευξη υπάρχουν μερικοί που κατανοούν πως η επαλήθευση μιας ισότητας από ένα συγκεκριμένο, έστω και μεγάλο, σύνολο φυσικών τιμών, δεν εγγυάται την ισχύ της για όλους τους φυσικούς αριθμούς. Υπάρχουν, όμως, και μαθητές με αντίθετη άποψη και αυτό φανερώνει τη σύγχυση μεταξύ της μαθηματικής επαγωγής και του επαγωγικού συλλογισμού.

Τέλος, είναι ενδιαφέρον να συζητηθούν οι συσχετίσεις που διαπιστώθηκαν μεταξύ των ερωτημάτων του τεστ. Συγκεκριμένα:
Διαπιστώθηκε θετική συσχέτιση, στατιστικώς σημαντική, μεταξύ του πρώτου και του τέταρτου ερωτήματος του τεστ. Οι μαθητές οι οποίοι μπορούν να διατυπώνουν σωστά και πλήρως την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, μπορούν να την εφαρμόζουν στην απόδειξη αλγεβρικών ισοτήτων και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό πιθανά να οφείλεται στο ότι υπάρχει μια άμεση αντιστοιχία ανάμεσα στις συνθήκες του ορισμού και τα βήματα που ακολουθούνται στην απόδειξη μιας αλγεβρικής σχέσης.

Είναι αξιοσημείωτο ότι στα δύο παραπάνω ερωτήματα ο μέσος όρος βαθμολογίας των κοριτσιών είναι στατιστικώς σημαντικά μεγαλύτερος από τον μέσο όρο βαθμολογίας των αγοριών.

Επίσης, υπάρχει θετική συσχέτιση στατιστικώς σημαντική, μεταξύ του τρίτου και του τέταρτου ερωτήματος. Δηλαδή, ένας μαθητής που γνωρίζει και εφαρμόζει τα βήματα της αποδεικτικής μεθόδου, μπορεί να διαπιστώσει αν λείπει το βασικό βήμα και να ελέγξει αν ικανοποιείται η αντίστοιχη σχέση ($p(\nu_0)$, όπου ν_0 ο ελάχιστος φυσικός αριθμός) και αντίστροφα.

Όποτε, όμως, απαιτείται κατανόηση της μαθηματικής δομής της μαθηματικής επαγωγής, τότε η θετική συσχέτιση μεταξύ των ερωτημάτων είναι πιο ασθενής. Για παράδειγμα αυτό συναντάται στο δεύτερο ερώτημα του τεστ, όπου είναι αναγκαία η διάκριση των φυσικών αριθμών από τους υπόλοιπους θετικούς πραγματικούς ως προς την ύπαρξη του επόμενου αριθμού.

Το πέμπτο ερώτημα συσχετίζεται θετικά και στατιστικώς σημαντικά με το πρώτο και τέταρτο ερώτημα, αλλά δε βρέθηκε συσχέτιση με το δεύτερο και τρίτο ερώτημα. Η ενασχόληση των μαθητών μ’ ένα πρωτότυπο και μη αλγεβρικό πρόβλημα, όπου χρειάζεται να εφαρμοστεί η μαθηματική επαγωγή, φαίνεται να συνδέεται περισσότερο με τη γνώση και το χειρισμό της αποδεικτικής μεθόδου, παρά με τη λεπτομερή ανάλυση των δομικών στοιχείων της.

Εισηγήσεις - Προτάσεις

Στο τεστ δε ζητήθηκε η απόδειξη μιας ανισωτικής σχέσης, λόγω της σχετικά περιορισμένης χρονικής διάρκειάς του και επειδή δόθηκε μεγαλύτερη βαρύτητα στην κατανόηση της μαθηματικής δομής της μαθηματικής επαγωγής, παρά στους αλγεβρικούς χειρισμούς των μαθητών. Θα ήταν ενδιαφέρον να ερευνηθεί αυτό το είδος προβλημάτων. Υπάρχουν, μάλιστα, ανισωτικές σχέσεις οι οποίες δεν αληθεύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα η $2^{\nu} > \nu^2$. Ενώ ισχύει για $\nu = 1$, δεν ισχύει για $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$ και στη συνέχεια ισχύει για κάθε φυσικό $\nu \geq 5$. Η μαθηματική επαγωγή πρέπει να εφαρμοστεί για $\nu \geq 5$. Υπάρχει περίπτωση κάποιοι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την πληροφορία ότι η σχέση ισχύει για $\nu = 1$ και να προσπαθούν ανεπιτυχώς να την αποδείξουν για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$.

Για τα άτομα που πήραν μέρος στην έρευνα, ο έλεγχος των μέσων όρων με το κριτήριο t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων όρων βαθμολογίας των μαθητών και των μαθητριών στο πρώτο και το τέταρτο ερώτημα. Προκύπτουν τα ερευνητικά ερωτήματα μήπως τα κορίτσια διατυπώνουν με μεγαλύτερη ακρίβεια και σαφήνεια μια μαθηματική έννοια ή μήπως μπορούν και την αποστηθίζουν πιο εύκολα από ότι τα αγόρια. Επιπλέον, θα μπορούσε να ερευνηθεί μήπως τα κορίτσια παίρνουν μεγαλύτερους βαθμούς στις γνωστές και αλγοριθμικές ασκήσεις σε σχέση με τα αγόρια. Έρευνες για απαντήσεις σε τέτοιου είδους ερωτήματα, μάλλον δεν πρέπει να περιοριστούν στην μαθηματική επαγωγή, αλλά να καλύπτουν ένα ευρύτερο φάσμα μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Στην παρούσα έρευνα έλαβαν μέρος μαθητές μιας συγκεκριμένης επαρχιακής πόλης, με αποτέλεσμα να μη γενικεύονται τα συμπεράσματα για όλους τους Έλληνες μαθητές. Θα ήταν ενδιαφέρον να γίνει μια έρευνα για την κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής όπου το δείγμα θα επιλεγεί με τυχαία δειγματοληψία από ολόκληρη την ελληνική επικράτεια. Ταυτόχρονα εξετάζονται και νέες μεταβλητές,

όπως για παράδειγμα ο τόπος μόνιμης διαμονής των μαθητών ή ο τύπος του σχολείου φοίτησης τους (δημόσιο - ιδιωτικό).

Η συγκεκριμένη έρευνα εστιάζει κυρίως στο μαθητή και δε μελετά τον εκπαιδευτικό και τη διδασκαλία. Μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να μελετήσει αν η κατανόηση της αποδεικτικής μεθόδου από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, η μέθοδος διδασκαλίας του, οι αναπαραστάσεις της μαθηματικής επαγωγής που χρησιμοποιεί και το είδος των δραστηριοτήτων που επιλέγει να πραγματοποιηθούν στη σχολική τάξη κατά την διαπραγμάτευση της έννοιας επηρεάζουν το βαθμό κατανόησης των μαθητών.

Θα ήταν, επίσης, ενδιαφέρουσα μια έρευνα η οποία θα μελετά τη γνώση όλων των μεθόδων απόδειξης με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Η μαθηματική επαγωγή θα ιδωθεί μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της απόδειξης και ίσως δοθεί στους μαθητές η ευκαιρία να αντιληφθούν βαθύτερα τη χρησιμότητα και τη δύναμή της.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

(Τεστ)

1. Να διατυπώσετε την αρχή της μαθηματικής (ή τέλειας) επαγωγής.

2. Μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της μαθηματικής επαγωγής για να αποδειχθεί η πρόταση: «Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x ισχύει $2^x > x$ » ;
Ναι ή όχι; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

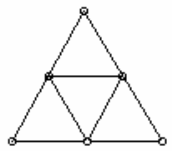
3. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι αριθμοί 20 και 25 είναι ίσοι και δικαιολογεί τον ισχυρισμό του ως εξής:
«Θα αποδείξω ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ν = ν+5 (Σ).
Υποθέτω ότι ισχύει για ν = κ, δηλαδή κ = κ+5.
Προσθέτω και στα δύο μέλη της ισότητας το 1, οπότε: (κ+1) = (κ+1)+5, δηλαδή η σχέση (Σ) ισχύει και για ν = κ+1.
Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η σχέση (Σ) ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους.
Επομένως για ν = 20 θα έχουμε: 20 = 20+5 = 25»!
Μπορείτε να βρείτε το λάθος στον παραπάνω ισχυρισμό; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

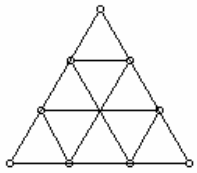
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\nu(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$$

5. Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι μήκους ν εκατοστών, όπου ν φυσικός αριθμός με ν ≥ 2. Με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του, το τρίγωνο χωρίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους 1 εκατοστού.

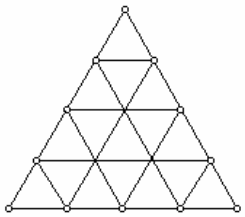
Για παράδειγμα:



Για ν = 2 σχηματίζονται
4 ισόπλευρα τρίγωνα



Για ν = 3 σχηματίζονται
9 ισόπλευρα τρίγωνα



Για ν = 4 σχηματίζονται
16 ισόπλευρα τρίγωνα

Μπορείτε να υποθέσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε πόσα ισόπλευρα τρίγωνα σχηματίζονται, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά μήκους ν εκατοστών;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

(Αποσπάσματα συνεντεύξεων)

Πρώτο απόσπασμα

……..

Ε: Αν κάποιος δεν είναι μαθηματικός και σου ζητάει να του εξηγήσεις τι είναι η μαθηματική επαγωγή και πότε τη χρησιμοποιούμε, τι θα του πεις;

Μ103: Η μαθηματική επαγωγή ασχολείται με αποδείξεις που αφορούν τους θετικούς ακεραίους. Και ισχύει όταν έχουμε ένα σύνολο αριθμών και θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση. Τότε όμως δε γίνεται να το αποδείξουμε για κάθε αριθμό ξεχωριστά. Έτσι αποδεικνύουμε για έναν τυχαίο αριθμό και αποδεικνύουμε μετά ότι ισχύει και για τον επόμενο αριθμό αυτού του τυχαίου. Έτσι όποιον αριθμό και να πάρουμε, παρασύρει και τον επόμενο. Και αν στη θέση του επόμενου βάλουμε τον κανονικό, εκείνος παρασύρει με τη σειρά του τον επόμενο και έτσι παρασύρει όλους τους αριθμούς.

Ε: Γιατί δεν μπορούμε να εξετάσουμε τους αριθμούς έναν – έναν;

Μ103: Γιατί είναι άπειροι όλοι οι θετικοί ακέραιοι.

Ε: Ποιοι είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί;

Μ103: 1, 2, 3, 4,… κ.λ.π.

……

……..

Ε: Στο τρίτο ερώτημα, όπου ζητείται να βρεθεί το λάθος του δοσμένου ισχυρισμού ενός μαθητή, απαντάς: «Το λάθος στον ισχυρισμό είναι το εξής $\nu = \nu+5 \Leftrightarrow \nu-\nu = 0 \Leftrightarrow 0=5$ που είναι άτοπο». Σου φαίνεται λάθος επειδή προκύπτει 0=5. Σ' αυτό έχεις δίκαιο. Όμως ο μαθητής δεν το είδε έτσι. Προσπάθησε να το αποδείξει με τη μαθηματική επαγωγή. Αν σου έδιναν τη σχέση $\nu = \nu+5$ και σου έλεγαν προσπάθησε να την αποδείξεις με τη μαθηματική επαγωγή, τι θα έκανες;

Μ103: Να αποδείξω ότι ν = ν+5;

Ε: Ναι.

Μ103: Αν πάω το ν στο άλλο μέλος, μετά βγαίνει ν-ν =0 ⇔ 0=5.

Ε: Συμφωνώ. Όταν όμως θέλεις να αποδείξεις κάτι με τη μαθηματική επαγωγή, μεταφέρεις τους όρους στο πρώτο μέλος;

Μ103: Α, όχι. Βάζουμε για ν=1, εκτός αν είναι το ν μεγαλύτερο ή ίσο από κάτι, οπότε βάζουμε τη μικρότερη τιμή.

Ε: Ωραία. Εδώ τι θα δοκίμαζες;

Μ103: Την τιμή 1. Θα πρέπει 1=1+5, δηλαδή 1=6 που είναι άτοπο.

Ε: Μετά τι θα έκανες;

Μ103: Αν έβγαινε 1=6;

Ε: Ναι.

Μ103: Μετά θα έλεγα έστω ότι ισχύει για έναν τυχαίο αριθμό ν.

Ε: Αυτό κάνει και ο μαθητής. Πρόσεξε! Υποθέτει ότι ισχύει για ν=κ.

Μ103: Ναι, αλλά το πρώτο του βήμα είναι λάθος. Αν έβγαινε σωστό, τότε θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε.

Ε: Στη συγκεκριμένη περίπτωση που βγαίνει 1=6;

Μ103: Είναι λάθος το πρώτο βήμα. Το δεύτερο βήμα είναι σωστό, αν ισχύει το πρώτο. Όμως το πρώτο είναι λάθος. Άρα, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μαθηματική επαγωγή.

……
……..

Ε: Το τέταρτο ερώτημα, όπου ζητείται η απόδειξη μιας ισότητας, το απάντησες σωστά.

Μ103: Εύκολη είναι, εντάξει.

Ε: Γιατί είναι πιο εύκολη από τις άλλες;

Μ103: Είναι εύκολη, γιατί δεν έχει και τίποτα να πεις! Είναι στάνταρ τα βήματα στη μαθηματική επαγωγή.

Ε: *Εσύ χρησιμοποίησες τη μαθηματική επαγωγή και απέδειξες σωστά την ισότητα. Φαντάσου ότι ένας συμμαθητής σου αντικαθιστούσε στη σχέση στη θέση του ν τις διαδοχικές θετικές ακέραιες τιμές 1, 2, 3, 4,…και κάθε φορά προέκυπτε κάτι που ισχύει. Μέχρι να τελειώσει ο χρόνος που είχε στη διάθεσή του, είχε καταφέρει να επαληθεύσει τη σχέση μέχρι την τιμή π.χ. ν = 100. Οπότε συμπεραίνει ότι η ισότητα ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Είναι σωστή η απάντησή του;»*

Μ103: *Δεν είναι σωστή αυτή η λύση που έκανε ο μαθητής. Γιατί αν ισχύει για κάποιο σύνολο αριθμών, δε σημαίνει ότι ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους. Μπορεί απλά αυτό να συμβαίνει μέχρι κάποιο συγκεκριμένο αριθμό και μετά από κει και πέρα να μην ισχύει.*

Ε: *Πολύ ωραία. Επομένως τι κερδίζουμε εμείς όταν εφαρμόζουμε τη μαθηματική επαγωγή;*

Μ103: *Είναι σαν να έχουμε αντικαταστήσει στην ισότητα όλους τους θετικούς ακέραιους.*

Ε: *Πόσοι είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί;*

Μ103: *Άπειροι.*

Δεύτερο απόσπασμα

……..

Ε: Στο δεύτερο ερώτημα απάντησες ότι η μαθηματική επαγωγή δε μπορεί να εφαρμοστεί στους πραγματικούς αριθμούς, αλλά μόνο στους θετικούς ακέραιους. Αναρωτήθηκες γιατί άραγε να μην ισχύει για τους πραγματικούς αριθμούς;

Μ82: Πιθανώς, στους αρνητικούς να είναι διαφορετικά τα πράγματα.

Ε: Στο ερώτημα όμως λέει θετικούς πραγματικούς. Συνεπώς με το πρόσημο δεν έχουμε πρόβλημα.

Μ82: Μπορεί τα δεκαδικά ψηφία να αλλάζουν κάπως τα πράγματα. Δηλαδή τα κλάσματα μπορεί να λειτουργούν διαφορετικά.

Ε: Μάλιστα. Μπορεί να σκεφτείς ποιο βήμα της μαθηματικής επαγωγής θα λειτουργούσε διαφορετικά; Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο βήμα, όπου αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για ν=1.

Μ82: Ποιος θα ήταν ο μικρότερος πραγματικός αριθμός; Το 0,000…πόσο; Δεν μπορώ να βρω ποιος είναι.

Ε: Σωστά. Αν κάποιος μας πει: «Δείξτε ότι ισχύει η δοσμένη σχέση για όλους τους πραγματικούς αριθμούς τους μεγαλύτερους ή ίσους του 1», τότε έχεις τον ελάχιστο πραγματικό αριθμό.

Μ82: Ναι. Λοιπόν…,ε,…. Δηλαδή, τώρα θέλουμε το ν+1…Λογικά δε θα μπορούμε, γι' αυτό και δεν ισχύει. Το θέμα είναι γιατί.

Ε: Στους φυσικούς αριθμούς το ν και το ν+1 ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;

Μ82: Είναι διαδοχικοί.

Ε: Πολύ ωραία. Καταρχήν, ποιοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;

Μ82: Όλοι οι αριθμοί.

Ε: Πες μου έναν πραγματικό αριθμό.

Μ82: Θα πω το 0,365.

Ε: Μπορείς να βρεις τον επόμενό του;

Μ82: Προσθέτοντας το 1;

Ε: Τον αμέσως επόμενο πραγματικό αριθμό.

Μ82: Δε μας βοηθάει το 1 για να βρούμε τον αμέσως επόμενο. Δεν υπάρχει αμέσως επόμενος πραγματικός αριθμός.

……

Ε: Πώς σου φάνηκε το πέμπτο ερώτημα;

Μ82: Με δυσκόλεψε, να πω την αλήθεια.

Ε: Ήταν ενδιαφέρον;

Μ82: Ναι. Αν σε ενδιαφέρουν, δηλαδή, τα μαθηματικά.

Ε: Στην αρχή απάντησες: «Θα έχουμε $ν^2$ τρίγωνα». Πολύ ωραία. Εξήγησέ μου λίγο το συλλογισμό σου.

Μ82: Εγώ στην αρχή σκέφτηκα ότι εφόσον μας δίνεται ότι για ν=2 σχηματίζονται 4 τρίγωνα, για ν=3 σχηματίζονται 9 τρίγωνα, άρα ομοίως θα είναι $ν^2$ τρίγωνα.

Ε: Θα μπορούσες να σταματήσεις σ' αυτό το σημείο και να πεις ότι έλυσες την άσκηση;

Μ82: Όχι. Θα έπρεπε να αποδείξω την υπόθεση. Παρατήρησα ότι είναι άθροισμα περιττών αριθμών και απέδειξα με τη μαθηματική επαγωγή ότι $1+3+5+\ldots+(2ν-1)= ν^2$.

……

Ε: Η μαθηματική επαγωγή πότε νομίζεις ότι χρησιμοποιείται; Σου φαίνεται ότι είναι ένα εργαλείο βασικό ή κάτι που πρέπει να μάθεις απλώς επειδή είναι στην σχολική ύλη;

Μ82: Όπως και για όλα τα άλλα κεφάλαια στο σχολείο, εμείς ζούμε με την αγωνία των πανελλαδικών, οπότε μαθαίνουμε ό,τι μας ζητάνε για τις εξετάσεις. Δηλαδή, ο καθηγητής δίνει μεγαλύτερη βάση εκεί.

Ε: Θεωρείς ότι αυτή η ενότητα ή σου έχουν πει ότι αυτή η ενότητα δεν είναι σημαντική για τις πανελλαδικές;

Μ82: Είναι λιγότερο σημαντική από κάποιες άλλες. Αλλά δεν είμαι της άποψης ότι πρέπει να διαχωρίζουμε τα μαθηματικά γιατί όλα είναι χρήσιμα.

Ε: Ποια είναι η χρησιμότητα των μαθηματικών;

Μ82: Εγώ νομίζω ότι σου δίνουν μια σφαιρικότερη αντίληψη των πραγμάτων. Δηλαδή μπορείς μέσω των μαθηματικών να καταλάβεις καλύτερα κάποια πράγματα που συμβαίνουν γύρω σου. Βέβαια, όχι όπως διδασκόμαστε εμείς τα μαθηματικά στο σχολείο, αλλά αν τα παρατηρήσεις καλύτερα…

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Allen, L. (2001). Teaching mathematical induction: an alternative approach. *Mathematics Teacher*, vol. 94, no 6, 500-504.

Avital, S., & Hansen, R. (1976). Mathematical induction in the classroom. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 399-411.

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, *9*, 429-438.

Βοσνιάδου, Σ. (2004). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία. Τόμος Α'*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.

Dreyfus, T. (2003). What counts as proof in the Mathematics classroom? *Proceedings of the 3rd Colloquium on the Didactis of Mathematics,* Department of Education, University of Crete, 18-19 April 2003, 113-122.

Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*(3), 285-304.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: the genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 55-92.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 173-189.

Golovina, L., & Yaglom, I. (1979). *Induction in geometry*. Mir Publishers, Moscow.

Hajek, P., & Pudlak, P. (1993). *Metamathematics of first-order Arithmetic*. Springer-Verlag.

Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Hanna, G. (2000b). A critical examination of three factors in the decline of proof. *Interchange*, vol. 31/1, 21-33.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, no. 4, 396-428.

Heid, M. K., Blume, G., Zbiek, R. M., & Edwards, B. (1999). Factors that influence teachers learning to do interviews to understand students' mathematical understandings. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 223-249.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Θωμαΐδης, Ι. (2004). *Ιστορικά Σημειώματα* στο Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2004) *Μαθηματικά Β' τάξη Ενιαίου Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Κολέζα, Ε., Μακρής, Κ., & Σούρλας, Κ. (2000). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Lacoff, G. & Nunez, R. (2000). *Where mathematics Comes From: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και ανασκευές*. Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

Lambrou, M. (2005). *Mathematical induction*. University of Crete, for MATHEU project.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 47-68.

Movshovitz – Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 253-268.

Μυτιληναίος, Μ. (2004). *Λογική*. Αθήνα: Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

Μυτιληναίος, Μ., & Κατερίνης, Π. (1993). *Διακριτά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εκδόσεις Ευγ. Μπένου.

Nardi, E., & Iannone, P. (2003). The rough journey towards a consistent mathematical proof: the P(n) → P(n+1) step in mathematical induction. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 3-5 January 2003, Athens, Greece, 621-628.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., & Γιαννακούλιας. Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Παπαναστασίου, Κ. & Παπαναστασίου, Ε.Κ. (2005). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Λευκωσία: Συγγραφέας.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press, New Jersey.

Polya, G. (1998). *Πώς να το λύσω*. (Τ. Πατρώνης, Επιμέλεια ελληνικής έκδοσης). Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 83-99.

Reid, D. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 527-547.

Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The use models in teaching proof by mathematical induction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 14-18 July 2004, Bergen, Norway, vol. 4, 113-120.

Σπύρου, Π. (2005). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Σημειώσεις παραδόσεων. Αθήνα.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, *13*, 55-80.

Sriraman, B. (2005). Problem solving as a procursor to mathematical proof. *Mathematics in School*, vol. 34, no 1, 4-8.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (accepted). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

Wistedt, I., & Brattstrom, G. (2005). Understanding mathematical induction in a cooperative setting. In A. Chronaki, & I.M. Christiansen (Eds), *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication,* (pp. 173-203). Information Age Publishing.

Χασάπης, Δ. (2003). Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης. *Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά.* Πρακτικά 2ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, 15-16 Μαρτίου 2003, Θεσσαλονίκη, σελ.11-28.

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17* (4), 429-439.