ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Τμημα Επιστήμων Αγωγής

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ

ΠΑΝΤΕΛΕΩΝ ΓΕΩΡΓΙΑ– ΧΡΙΣΤΙΝΑ

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Κα. Φαρμάκη Βασιλική

ΑΘΗΝΑ 2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στην τριμελή επιτροπή και ιδιαίτερα στην επιβλέπουσα καθηγήτρια κα. Φαρμάκη Βασιλική για την πολύτιμη βοήθεια τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Αφιερώνω αυτήν την εργασία στους γονείς μου και στη δίδυμη αδελφή μου Δήμητρα, για την αμέριστη ηθική συμπαράσταση τους.

Αθήνα, 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ 4

2 ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 8

2.1 Το 5ο αίτημα του Ευκλείδη και οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες 8

2.1.1 Θεμελίωση των επιστημών στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη 9

2.1.2 Αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας στα Στοιχεία του Ευκλείδη 14

2.1.3 Η απόδειξη του Πτολεμαίου 25

2.1.4 Η απόδειξη του Πρόκλου 31

2.1.5 Μερικά επιπλέον ιστορικά στοιχεία… 37

2.1.6 Υπερβολική Γεωμετρία 44

2.1.7 Ελλειπτική Γεωμετρία 50

2.1.8 Συμπέρασμα 55

2.2 Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας-αρρητότητας 57

2.2.1 Πυθαγόρειοι και ανακάλυψη των αρρήτων 57

2.2.2 Η αρρητότητα Του $\sqrt{2}$ στον Πλατωνικό διάλογο «Μένων» 64

2.2.3 Ο Θεαίτητος και η συμβολή του στην αρρητότητα 75

2.2.4 Συμπέρασμα 83

2.3 Η υπεράσπιση από το Cauchy «της αρχής της συνέχειας» 84

2.3.1 Η απόδειξη του Seidel και η αποδεικτικής καταγωγής έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης. 87

2.3.2 Η μέθοδος του αποκλεισμού των εξαιρέσεων του Abel 90

2.3.3 Εμπόδια στην ανακάλυψη της αποδεικτικής ανάλυσης 91

2.4 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat 95

3 ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 106

3.1 Ο Thorndike και η θεωρία των δεσμών – Συνδετισμός και λάθος 108

3.2 Φορμαλισμός και λάθος 110

3.3 Ημιεμπειρικισμός και λάθος 113

3.4 Κονστρουκτιβισμός και λάθος 120

3.5 Συμπέρασμα 124

4 ΕΠΙΛΟΓΟΣ 125

5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 127

5.1 Η Ανακάλυψη της Αμερικής 127

5.2 Η Ανακάλυψη του Ποσειδώνα 129

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 131

1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε τη σημασία του λάθους στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και να τεκμηριώσουμε την άποψη πως η μαθηματική επιστήμη προχώρησε όχι μόνο με επιτυχείς αποδείξεις και αληθείς εικασίες αλλά και μέσω αναληθών εικασιών και αξιωμάτων και βέβαια μη ορθών αποδείξεων.

Στην πορεία της εξέλιξης της μαθηματικής επιστήμης λάθη έγιναν πολλά, αλλά κάθε ένα είχε την δική του συνεισφορά. Θα εξετάσουμε επιλεγμένους σημαντικούς σταθμούς της ιστορίας των μαθηματικών, όπου κάποιος αρχικός μη ορθός ισχυρισμός αλλά και μια μη σωστή απόδειξη έγινε η αιτία της ανακάλυψης καινοτόμων εννοιών και θεωρημάτων.

Πρώτος σταθμός μας είναι το $5^{ο}$ αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που συναντάται στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων. Η αλήθεια του αιτήματος αυτού απασχόλησε για πάρα πολλά χρόνια την μαθηματική κοινότητα και έγινε το αντικείμενο πολλών συζητήσεων και διενέξεων. Εξετάζοντας την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας στα Στοιχεία του Ευκλείδη και αντιπαραβάλλοντας την με τον τρόπο θεμελίωσης των επιστημών όπως αναφέρεται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη (χωρία 72a14-24 & 76a 31-77a4) παρατηρούμε ότι την εποχή εκείνη υπήρχε η άποψη ότι μια θεωρία είναι ισχυρή όταν εμπεριέχει όσο το δυνατόν λιγότερα αιτήματα και περισσότερους ορισμούς. Όσο αφορά όμως τα αιτήματα 4 και 5 της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του βιβλίου Ι των Στοιχείων, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη πρέπει να αποδεικνύονται αφού στηρίζονται σε παράγωγες έννοιες.

Με βάση τη παραπάνω λογική οι Πτολεμαίος και Πρόκλος δίνουν την απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος (χωρία 362,20-367,27 και 371,24-373,2 αντίστοιχα). Φυσικά οι αποδείξεις περιέχουν λάθη, τα οποία και εντοπίζονται (σελ. 25-30 και 31-36).

Ο Saccheri στην προσπάθεια του να αποδείξει το $5^{ο}$ αίτημα με την εις άτοπο απαγωγή το συνδέει με το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου και διατυπώνει μια τριχοτομία, της οξείας γωνίας, της αμβλείας γωνίας και της ορθής γωνίας. Απορρίπτει την περίπτωση της αμβλείας γωνίας αλλά όχι και της οξείας. Ουσιαστικά ο Saccheri θεμελιώνει την Υπερβολική Γεωμετρία αλλά δεν το αντιλαμβάνεται. (σελ. 37-39).

Οι πρώτοι που υποπτεύτηκαν την ανεξαρτησία του αιτήματος της παραλληλίας από τα άλλα αιτήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ήταν ο Gauss, ο Bolyai και ο

Lobachevski. Ο Gauss δυστυχώς δεν κατάφερε σε όλη του τη ζωή να δημοσιεύσει κάτι πάνω στο θέμα αυτό. Ο Janos Bolyai δημοσιεύει ένα εικοσιεξάλιδο παράρτημα στο πρώτο τόμο του έργου του πατέρα του. Χαρακτηριστικό είναι αυτό που διατυπώνει «*Από το τίποτα έχω δημιουργήσει ένα παράξενο νέο σύμπαν*» (σελ. 39-40). Όμως ο πρώτος που δημοσίευσε μια συστηματική ανάπτυξη του θέματος στην πραγματικότητα, ήταν ο Lobachevski. Η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία που αυτός ανέπτυξε συχνά σήμερα αναφέρεται ως Λομπατσέφσκια Γεωμετρία δίνοντας έτσι τέλος στην αμφισβήτηση του 5^{ου} αιτήματος (σελ. 42-43).

Ως δεύτερος σταθμός μας επιλέχτηκε η θεμελίωση των άρρητων αριθμών. Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν σε μια ρητή δομή του κόσμου, το οποίο συνεπάγεται ότι δυο μεγέθη είναι πάντα σύμμετρα. Οι ίδιοι εντόπισαν ότι η εικασία είναι ψευδής ανακαλύπτοντας την ασυμμετρία της διαγωνίου με την πλευρά τετραγώνου κάτι που συναντάμε και στον Πλατωνικό διάλογο «Μένων» (χωρίο 82c-86c). Οδηγήθηκαν στην ασυμμετρία μέσω της μουσικής και της αρμονίας. Στο απόσπασμα 6 του Φιλολάου 16-24 αναφέρεται πως οι Πυθαγόρειοι κατασκεύασαν μουσική κλίμακα μέσω μιας άπειρης διαδικασίας.

Συνεχίζοντας ο Θεαίτητος στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων, το οποίου και του ανήκει, δίνει το κριτήριο ασυμμετρίας δυο μεγεθών μέσω της άπειρης ανθυφαίρεσης Σχετικές αναφορές βρίσκουμε και στο Πλατωνικό διάλογο «*Θεαίτητο*». (σελ. 75-82).

Τρίτος σταθμός είναι η εισαγωγή της έννοιας της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας. Ο Cauchy δίνει μια λάθος απόδειξη στην εικασία: «*το όριο κάθε συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση*», που μέχρι τότε εθεωρείτο τετριμμένα αληθής. Τόσο ο Fourier όσο και ο Poisson είχαν ήδη δώσει αντιπαραδείγματα μέχρις ότου τελικά ο Seidel εντοπίζει το λάθος, αποδεικνύει το θεώρημα και εισάγει την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης (σελ.87-89).

Τελευταίος σταθμός μας αποτελεί η απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, [$\chi^{\eta} + \psi^{\eta} = \zeta^{\eta}$, δεν έχει ακέραιες λύσεις όταν το η είναι μεγαλύτερο από 2] μια απόδειξη που χρειάστηκε να περάσουν 350 χρόνια για να ολοκληρωθεί. Περίπου το 1637, ο Φερμά στο περιθώριο του βιβλίου *Αριθμητικά*, γραμμένο από τον Διόφαντο, δίπλα από ένα πρόβλημα ανάλυσης του τετραγώνου ενός ακεραίου σε τετράγωνα δυο ακεραίων διατυπώνει το θεώρημα και αναφέρει «*πως έχει ανακαλύψει μια θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο δεν είναι αρκετά μεγάλο για να τη χωρέσει*». Αυτή η μυστηριώδης διατύπωση είχε ως αποτέλεσμα γενιές μαθηματικών να ασχοληθούν για να

ανακαλύψουν «*την όντως θαυμάσια απόδειξη*», την οποία ο Φερμά είχε ισχυριστεί ότι διέθετε. Παρακολουθούμε τις προσπάθειες πολύ μεγάλων μαθηματικών να βρουν την απόδειξη. Στην προσπάθεια τους αυτή ανακαλύπτουν καινούριες έννοιες και προχωρούν σε εκπληκτικό βαθμό την μαθηματική επιστήμη. Μερικοί από αυτούς είναι οι Euler, Dirichlet, Legendre, Lame, Lebesque, Gauss, Germain, Fourier, Kummer, Galois, Abel, Dedekind, Poincare, Mordell, Faltings, Granville, Brown, Taniyama, Shimura, Frey, Ribet. Τελικά ο Andrew Wiles ήταν αυτός που έδωσε τη απόδειξη του θεωρήματος. Η βαθύτερη αξία του θεωρήματος είναι ότι η τελική λύση του προβλήματος προέκυψε ενοποιώντας όλο το εύρος των μαθηματικών. Ο ίδιος ο Andrew Wiles χαρακτήρισε την απόδειξη του ως απόδειξη του 20^{ου} αιώνα (σελ.95-105).

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, εξετάζουμε την αντιμετώπιση του λάθους από μερικές θεωρίες μάθησης που αναπτύχθηκαν στη διάρκεια των χρόνων, όπως: Συνδετισμός, Φορμαλισμός, Ημιεμπειρικισμός, και Κονστρουκτιβισμός.

Στον Συνδετισμό το λάθος πρέπει να αποφεύγεται. Είναι δείγμα αποτυχίας καθώς δεν οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα. Εδώ έχουμε τη διατύπωση του νόμου του αποτελέσματος. Το είδος της εργασίας που προτείνεται ονομάζεται «*πρακτική και εξάσκηση*», μια τεχνική που κατείχε και εξακολουθεί να κατέχει μια αξιοσημείωτη θέση στην ιστορία της διδακτικής των μαθηματικών ακόμη και μέχρι σήμερα. Η εφαρμογή ωστόσο, της μεθόδου του Thorndike εμπεριέχει το κίνδυνο να αναγορευτεί η «*πρακτική και εξάσκηση*» ως η ανώτερη μέθοδος για τη διδασκαλία των μαθηματικών. (σελ.108-109).

Στον Φορμαλισμό το λάθος δεν έχει θέση, είναι ανύπαρκτο αφού τα μαθηματικά είναι το πρότυπο της τελειότητας και της αρμονίας. Επιδιώκεται, μια ακραία αξιωματική ανάπτυξη των μαθηματικών όπου μεγάλη σημασία δίνεται στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Τον Φορμαλισμό ακολούθησε μια μεταρρύθμιση των μαθηματικών που ονομάστηκε κίνηση των «*μοντέρνων μαθηματικών*». Επισυνάπτεται απόσπασμα από το βιβλίο «*Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης; Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών*» του Morris Kline, από το οποίο γίνονται φανερές οι καταστροφικές συνέπειες της μεθόδου αυτής στα παιδιά (σελ.110-112).

Ο Ημιεμπειρικισμός αποτελεί μια σύγχρονη φιλοσοφία και προσφέρει μια εντελώς νέα διάσταση στη φιλοσοφία των μαθηματικών λόγω της προτεραιότητας που δίνει στη μαθηματική πρακτική. Εδώ, τα μαθηματικά είναι ότι κάνουν ή έχουν κάνει οι μαθηματικοί, με όλες τις ατέλειες που είναι μοιραίο να υπεισέρχονται σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα ή δημιουργία. Αναπτύσσεται αναλυτικά η μέθοδος αποδείξεων και

ανασκευών του Lakatos με τη βοήθεια χαρακτηριστικού παραδείγματος, από το οποίο προκύπτει ότι η δημιουργία και ανάπτυξη της προσωπικής γνώσης των μαθηματικών είναι αυτό που ζητείται και όχι η μετάβαση της απόλυτης γνώσης από το δάσκαλο στο μαθητή (σελ. 113-119).

Στην κατασκευαστική θεωρία της γνώσης η μαθηματική γνώση δεν είναι σταθερή και αμετάβλητη, έχει μέσα της το στοιχείο της αλλαγής· τα αποτελέσματα της είναι πάντα ανοιχτά για αναθεώρηση. Η αντίληψη ότι τα μαθηματικά μεταβάλλονται μας οδηγεί στη νομιμοποίηση της πιθανότητας του λάθους σ' αυτά. Οι εικασίες, οι λανθασμένες υποθέσεις, τα μερικώς σωστά αποτελέσματα παίζουν ρόλο θεμελιακό στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης (σελ.120-123).

Μελετώντας όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, πως η εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και ιδιαίτερα των μαθηματικών συντελείται και μέσω λαθών. Τα λάθη αυτά σε πολλές περιπτώσεις αποτέλεσαν το εφαλτήριο για περαιτέρω ανάπτυξη. Πολλές φορές στην πορεία συναντήσαμε λανθασμένες θεωρίες. Έχουμε όμως τη γνώμη ότι η προσφορά των θεωριών αυτών ήταν σημαντική, γιατί η κάθε μια ήταν και μια δημιουργική ιδέα για προβληματισμό και αφετηρία για παραπέρα προσπάθεια.

Μεταφέροντας τη παραπάνω άποψη στην εκπαιδευτική διαδικασία, υποστηρίζουμε πως τα λάθη των παιδιών θα πρέπει να είναι για τους διδάσκοντες αφετηρία για συζήτηση και όχι αιτία για τιμωρία. Τα συμπεράσματα που μπορούν να προκύψουν μέσα από την κατανόηση ενός λάθους μπορεί να είναι σημαντικά και εποικοδομητικά και η διαδικασία για την ανάδειξη του λάθους μπορεί να είναι μια ενδιαφέρουσα διδακτική πρακτική. Τότε μπορούμε να ελπίσουμε πως στο μέλλον τα παιδιά μέσα από τα λάθη τους θα συνειδητοποιήσουν την αξία και την μαγεία των μαθηματικών.

2 ΣΤΑΘΜΟΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2.1 Το 5ο αίτημα του Ευκλείδη και οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Το πρώτο όνομα που σκέφτεται κάποιος που έχει τελειώσει το σχολείο όταν ακούει τη λέξη Γεωμετρία είναι σίγουρα αυτό του Ευκλείδη. Η πρώτη γεωμετρία που διδάχτηκε (ίσως και η μοναδική) είναι η Ευκλείδεια και μάλιστα πολύ πιθανόν να θυμάται το ομώνυμο αίτημα,δηλαδή το αίτημα της παραλληλίας. Είναι άραγε, τόσο σημαντικό ώστε να χαρακτηρίζει μια ολόκληρη Γεωμετρία;

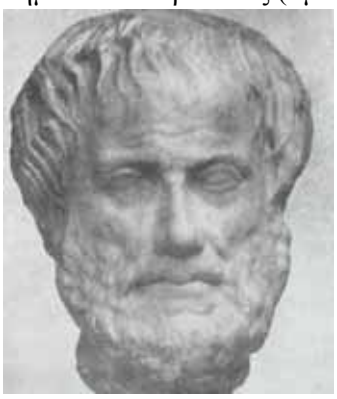
Η Γεωμετρία του Ευκλείδη βασίζεται όπως γνωρίζουμε σε 5 αιτήματα. Η λέξη *αίτημα* παλαιότερα σήμαινε το αναπόδεικτο ή αυτό που αναγνωρίζεται ως αλήθεια, μια αλήθεια που γίνεται αποδεκτή χωρίς απόδειξη. Αν εξετάσουμε τα αιτήματα 1, 2, 3, 4 βλέπουμε ότι η διατύπωση τους είναι εύκολη και ότι στην ουσία είναι αυταπόδεικτα εν αντιθέση με το $5^{ο}$ αίτημα το οποίο διατυπώνεται πολύπλοκα και είναι λιγότερο αυταπόδεικτο. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος πολλοί ήταν αυτοί που το αμφισβήτησαν και προσπάθησαν να το εξαλείψουν ή να το αποδείξουν. Η ιστορία του $5^{ου}$ αιτήματος είναι πράγματι πολύ ενδιαφέρουσα και εξέχουσα από διδακτικής άποψης. Επομένως, αξίζει να μελετηθεί ιδιαιτέρως.

Μια σωστή μελέτη του $5^{ου}$ αιτήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, απαιτεί την αναφορά στα αξιωματικά συστήματα τόσο του Ευκλείδη όσο και του Αριστοτέλη. Σκοπός, η διαπίστωση τη θέσης που κατείχαν τα αξιώματα την εποχή εκείνη, στη θεμελίωση ενός συστήματος.

(Σημείωση: Η εικόνα δείχνει το εξώφυλλο της πρώτης Αγγλικής έκδοσης των Στοιχείων του Ευκλείδη).

2.1.1 Θεμελίωση των επιστημών στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη

Ο Αριστοτέλης στα Αναλυτικά Ύστερα **72a14-24** θεμελιώνει το αξιωματικό του σύστημα και διακρίνει τις (άμεσες) **αρχές**:



Στα **αξιώματα** ως τις προτάσεις (γνώσεις) που είναι απαραίτητο να τις κατέχει όποιος πρόκειται να μάθει οτιδήποτε. Ως παράδειγμα, αναφέρει την αρχή της αντίφασης.

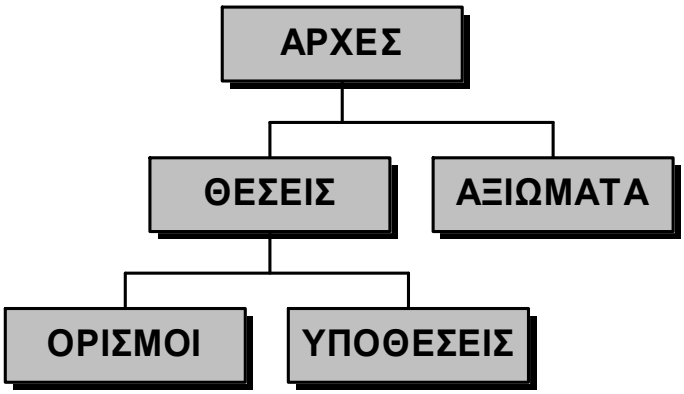
Στις **θέσεις** ως τις πιο ειδικές γνώσεις, διαφορετικές για κάθε επιστήμη.

Στη συνέχεια χωρίζει τις θέσεις στους **ορισμούς** και τις **υποθέσεις**.

Ορισμοί είναι προτάσεις οι οποίες δηλώνουν το *τι έστιν* δηλαδή τι είναι κάτι και αναφέρει ως παράδειγμα τι είναι μονάδα. (Άλλο π.χ. τι είναι γραμμή ή σημείο) ενώ

Υποθέσεις είναι προτάσεις οι οποίες δηλώνουν *εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι* δηλαδή αν κάτι υπάρχει ή όχι (π.χ. υπάρχει η μονάδα).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:



«*Ἀμέσου δ᾽ ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ᾽ ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τιρ ἣν δ᾽ ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμαρ ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦταρ τοῦτο γὰρ μάλιστ᾽ ἐπὶ τοῖς τοιούτοις εἰώθαμεν ὄνομα λέγειν. θέσεως δ᾽ ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑπόθεσις, ἡ δ᾽ ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστιρ τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόνρ ὑπόθεσις δ᾽ οὐκ ἔστιρ τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταὐτόν».*

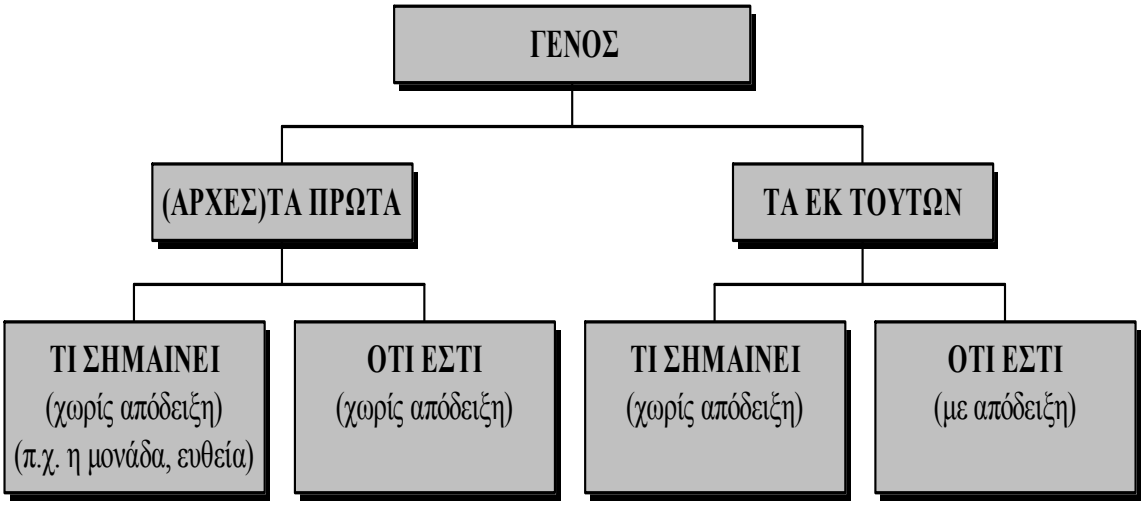
Στο χωρίο **[76 a 31 – 77 a 4]** ο Αριστοτέλης συνεχίζει και ορίζει ως αρχές σε κάθε γένος (αριθμητική - γεωμετρία) εκείνες τις προτάσεις για τις οποίες το ότι υπάρχουν δεν μπορεί ν' αποδειχθεί. Αναλυτικά:

ΑΡΧΑΙΟ ΚΕΙΜΕΝΟ	**ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ**
Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι· οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ' ἕτερα δεικνύναι. Ἔστι δ' ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις τὰ μὲν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, κοινὰ δὲ κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμόν γε ὅσον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην γένει· ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδὶ καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά. ἱκανὸν δ' ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ' ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ' ἀριθμητικῷ ἐπ' ἀριθμῶν. Ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς. ταῦτα γὰρ λαμβάνουσι τὸ εἶναι καὶ τοδὶ εἶναι. τὰ δὲ τούτων πάθη καθ' αὑτά, τί μὲν σημαίνει ἕκαστον, λαμβάνουσιν, οἷον ἡ μὲν ἀριθμητικὴ τί περιττὸν ἢ ἄρτιον ἢ τετράγωνον ἢ κύβος, ἡ δὲ γεωμετρία τί τὸ	Ονομάζω αρχές σε κάθε γένος εκείνες για τις οποίες το ότι υπάρχουν δεν μπορεί να αποδειχθεί. Το τι, λοιπόν, σημαίνουν οι όροι «πρώτες αρχές» και «οι ιδιότητες που απορρέουν από αυτές» θεωρείται ως δεδομένο, ως προς το ότι όμως υπάρχουν, για τις αρχές κατ΄ ανάγκην θεωρείται ως δεδομένο, ενώ για τα άλλα θα πρέπει να αποδεικνύεται. Παραδείγματος χάριν, [θεωρείται ως δεδομένο] το τι σημαίνει «μονάδα» «ευθύ» και τρίγωνο· ενώ όμως θεωρείται ως δεδομένο ότι η μονάδα και το μέγεθος υπάρχουν, [η ύπαρξη] των λοιπών πρέπει να αποδεικνύεται. Από τις αρχές, τώρα, των οποίων γίνεται χρήση στις αποδεικτικές επιστήμες, άλλες ανήκουν αποκλειστικά σε κάθε επιστήμη, και άλλες από κοινού, πλην από κοινού κατ΄ αναλογία, επειδή χρησιμοποιούνται στο μέτρο μόνο που εμπίπτουν στο γένος το οποίο υπάγεται στην εν λόγω επιστήμη. Παράδειγμα αποκλειστικής αρχής, είναι το ότι η «γραμμή» και το «ευθύ» είναι το «τάδε συγκεκριμένο πράγμα» και κοινή αρχή το ότι «αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπολειπόμενα είναι ίσα». Από τις κοινές όμως αυτές αρχές, ισχύει [σε κάθε περίπτωση] τόσο μόνο μέρος, όσο αρμόζει στο δεδομένο γένος, διότι το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο, ακόμη και αν συμβεί [στην περίπτωση του γεωμέτρη] να μην εφαρμόσει [κάποια αρχή] στο σύνολο αλλά στα μεγέθη μόνο και [στην περίπτωση του ειδικού της αριθμητικής] μόνο στους αριθμούς. Είναι επίσης αποκλειστικά για μια επιστήμη και τα αντικείμενα που εκλαμβάνει ως υπαρκτά, και σχετικώς με τα οποία μελετά τις καθ΄ αυτές ιδιότητές τους, όπως επί παραδείγματι τις μονάδες η αριθμητική και τα σημεία και τις γραμμές η γεωμετρία. Πράγματι, για τα αντικείμενα αυτά θεωρείται ως δεδομένο τόσο ότι υπάρχουν όσο και ότι είναι κάτι το συγκεκριμένο. Όσον αφορά όμως με τις ιδιότητές τους καθ΄ αυτές, μόνο το τι σημαίνει κάθε μία θεωρείται ως

ἄλογον ἢ τὸ κεκλάσθαι ἢ νεύειν, ὅτι δ' ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων. καὶ ἡ ἀστρολογία ὡσαύτως. πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει. ἐνίας μέντοι ἐπιστήμας οὐδὲν κωλύει ἔνια τούτων παρορᾶν, οἷον τὸ γένος μὴ ὑποτίθεσθαι εἶναι, ἂν ᾖ φανερὸν ὅτι ἔστιν (οὐ γὰρ ὁμοίως δῆλον ὅτι ἀριθμὸς ἔστι καὶ ὅτι ψυχρὸν καὶ θερμόν), καὶ τὰ πάθη μὴ λαμβάνειν τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλαρ ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν, ὅτι γνώριμον. ἀλλ᾽ οὐδὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν. Οὐκ ἔστι δ᾽ ὑπόθεσις οὐδ᾽ αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι᾽ αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ, ἐπεὶ οὐδὲ συλλογισμός. ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί. ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ᾽, ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μαν-θάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ἂν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτό, αἰτεῖται. καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημαρ	δεδομένο, παραδείγματος χάριν, από την αριθμητική [θεωρείται ως δεδομένο] το τι σημαίνει περιττός ή άρτιος αριθμός, τετράγωνο ή κύβος, και από τη γεωμετρία το τι ανορθολογικό ή τεθλασμένη ή πλάγια γραμμή· το ότι όμως υπάρχουν αυτά αποδεικνύονται τόσο μέσω των κοινών αρχών όσο και μέσω των συμπερασμάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί. Το ίδιο ισχύει και για την αστρολογία. Κάθε αποδεικτική επιστήμη στρέφεται, πράγματι, γύρω από τρία πράγματα: εκείνα που θεωρεί ότι υπάρχουν (αυτά είναι το γένος του οποίου εξετάζει τις καθ ΄αυτές ιδιότητες), τα λεγόμενα κοινά αξιώματα, επί τη βάση των οποίων, ως πρώτων προκειμένων, πραγματοποιεί την απόδειξη, και τρίτον, τις ιδιότητες, για κάθε μια από τις οποίες θεωρεί ως δεδομένο [η επιστήμη] το τι σημαίνει. Τίποτα ωστόσο δεν εμποδίζει ορισμένες επιστήμες να παραβλέπουν κάποια από αυτά [τα τρία αυτά πράγματα], όπως επί παραδείγματι, να μην υποθέτει ότι υπάρχει το γένος, αν συμβαίνει να είναι φανερό ότι υπάρχει (διότι δεν είναι εξίσου προφανές το ότι υπάρχει αριθμός με το ότι υπάρχει ψυχρό ή θερμό), ή να μην αναφέρει ρητά το τι σημαίνουν οι ιδιότητες, αν συμβαίνει να είναι προφανείς· όπως ακριβώς ούτε στην περίπτωση των κοινών αρχών αναφέρεται ρητά το τι σημαίνει «το να αφαιρεθούν από ίσα», επειδή αυτό είναι γνωστό. Πλην, [οι εξαιρέσεις αυτές] δεν εμποδίζουν στο παραμικρό να είναι τρία τα εκ φύσεως συστατικά στοιχεία της απόδειξης: το αντικείμενο της απόδειξης, οι ιδιότητες προς απόδειξη και οι αρχές αποδείξεως. Δεν είναι, εξ άλλου, υπόθεση ούτε αίτημα αυτό που υπάρχει αναγκαία από μόνο του και αναγκαία φρονούμε [ότι υπάρχει κατ΄ αυτόν τον τρόπο, και αυτό] επειδή η απόδειξη, όπως και ο συλλογισμός δεν απευθύνεται στον εξωτερικό λόγο, αλλά στον λόγο της ψυχής. Είναι, πράγματι πάντοτε δυνατόν να προβάλλει κάποιος ενστάσεις στον εξωτερικό λόγο, όχι όμως πάντοτε και στον εσωτερικό. Όσα, λοιπόν, ενώ είναι επιδεκτικά αποδείξεως, τα θεωρεί ο δάσκαλος ως δεδομένα χωρίς να τα αποδείξει, αυτά, αν συμβαίνει να τα θεωρεί ως δεδομένα με την συναίνεση του μαθητή, αποτελούν αντικείμενο υποθέσεως και είναι υπόθεση, όχι στην απόλυτη έννοια, αλλά

ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας. Οἱ μὲν οὖν ὅροι οὐκ εἰσὶν ὑποθέσεις (οὐδὲν γὰρ εἶναι ἢ μὴ λέγεται), ἀλλ᾽ ἐν ταῖς προτάσεσιν αἱ ὑποθέσεις, τοὺς δ᾽ ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ· τοῦτο δ᾽ οὐχ ὑπόθεσις (εἰ μὴ καὶ τὸ ἀκούειν ὑπόθεσίν τις εἶναι φήσει), ἀλλ᾽ ὅσων ὄντων τῷ ἐκεῖνα εἶναι γίνεται τὸ συμπέρασμα. (οὐδ᾽ ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται, ὥσπερ τινὲς ἔφασαν, λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι, τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα.) ἔτι τὸ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις πᾶσα ἢ ὡς ὅλον ἢ ὡς ἐν μέρει, οἱ δ᾽ ὅροι οὐδέτερον τούτων.	αναφορικά με τον μαθητή μόνο, αν πάλι συμβαίνει να θεωρεί το ίδιο πράγμα ως δεδομένο, είτε ο μαθητής δεν έχει καμία γνώμη ή έχει αντίθετη γνώμη γι΄ αυτό, τότε πρόκειται για αίτημα. Και σε αυτό διαφέρουν η υπόθεση από το αίτημα· αίτημα δηλαδή, είναι το αντίθετο από την γνώμη του μαθητή, ή κάθε πρόταση επιδεκτική αποδείξεως την οποία κάποιος θεωρεί ως δεδομένη και την χρησιμοποιεί χωρίς να την αποδείξει. Οι όροι, λοιπόν, δεν είναι υποθέσεις (διότι δεν λένε τίποτα για το αν είναι ή δεν είναι κάτι), αλλά οι υποθέσεις, είναι στις προτάσεις [της επιστήμης που περιέχονται]. Οι όροι πρέπει απλώς και μόνο να γίνονται κατανοητοί· αυτό όμως δεν είναι υπόθεση (εκτός αν έλεγε κάποιος ότι είναι υπόθεση και το να ακούει κανείς κάτι), ενώ είναι αντιθέτως, εκείνα από τα οποία με το να είναι όπως είναι παράγεται το συμπέρασμα. (Ούτε άλλωστε, πρέπει να θεωρηθεί ότι κάνει ψευδείς υποθέσεις ο γεωμέτρης, όπως ισχυρίζονται ορισμένοι, όταν λέγουν ότι ενώ δεν πρέπει να μετέρχεται κανείς ψεύδη, ο γεωμέτρης ψεύδεται παρ΄ όλα αυτά, όταν διατείνεται ότι η γραμμή έχει μήκος ένα πόδι ή είναι ευθεία ενώ δεν έχει μήκος ένα πόδι ή δεν είναι ευθεία. Ο γεωμέτρης, ωστόσο, δεν συμπεραίνει το παραμικρό από την συγκεκριμένη γραμμή την οποία μνημόνευσε, αλλά [συμπεραίνει αποκλειστικά] από όσα υποδηλώνουν τα σχήματά του). Εξ άλλου, κάθε αίτημα και κάθε υπόθεση, είναι είτε ως όλον είτε ως εν μέρει, ενώ οι οροί [δεν είναι] ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Από τα παραπάνω προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:



Ενώ ένα άλλο διάγραμμα που προκύπτει είναι:

Σύμφωνα με αυτό το δεύτερο διάγραμμα προκύπτει η εξής σχέση με το χωρίο Αναλυτικά Ύστερα 72a14-24

τα ΙΔΙΑ ≡ ΘΕΣΕΙΣ ενώ τα ΚΟΙΝΑ ≡ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

2.1.2 Αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Στο 1ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη συναντούμε όρους, αιτήματα και κοινές έννοιες. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των ορισμών είναι 23, των κοινών εννοιών 9 ενώ των αιτημάτων μόλις 5. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αντίληψη πως μια καλή θεωρία είναι αυτή που έχει όσο γίνεται περισσότερους ορισμούς και όσο το δυνατόν λιγότερα αιτήματα, δηλαδή προτάσεις που τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Ο Αριστοτέλης συμφωνεί, όπως θα δούμε και αναλυτικότερα παρακάτω, και λέει ότι οι ορισμοί είναι ανώτεροι από τα αιτήματα, τα οποία είναι εμπειρικά, και. εκφράζουν την αδυναμία μας να εκφράσουμε αντίστοιχους ορισμούς. Σκοπός του επομένως ήταν η εύρεση κατάλληλων ορισμών ώστε με τη βοήθεια αυτών τα αξιώματα να γίνουν θεωρήματα, δηλαδή αποδείξιμες προτάσεις

ΟΡΟΙ

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
9. Οταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
10. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.
11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
12. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
13. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.
15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
18. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.
19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.
20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
21. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιονῥ τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.
23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ

1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. **Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.**

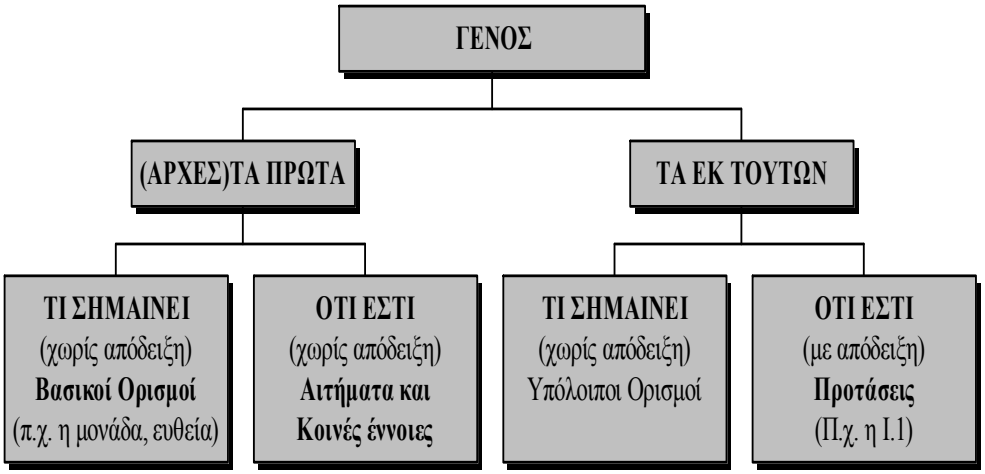
ΚΟΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4. [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
5. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
6. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
8. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].
9. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Μια πρώτη αντιστοιχία μεταξύ των συστημάτων του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη που βασίζεται στο χωρίο Αναλυτικά Ύστερα **72a14-24** είναι η παρακάτω :

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ	**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**
ΑΞΙΩΜΑΤΑ	**ΚΟΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**
ΘΕΣΕΙΣ **ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ**	**ΑΙΤΗΜΑΤΑ**
ΟΡΙΣΜΟΙ	**ΟΡΟΙ**

Ενώ σύμφωνα με το χωρίο Αναλυτικά Ύστερα **[76 a 31 – 77 a 4]** έχουμε την εξής αντιστοιχία:



Ενώ από το δεύτερο διάγραμμα προκύπτει:

Μια δεύτερη αντιστοιχία μεταξύ των συστημάτων του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη είναι η παρακάτω :

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ		ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ
ΤΑ ΠΡΩΤΑ	ΚΟΙΝΑ	ΚΟΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
	ΙΔΙΑ	ΑΙΤΗΜΑΤΑ (1° – 2° – 3°) / ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ
ΤΑ ΕΚ ΤΟΥΤΩΝ		ΥΠΟΛΟΙΠΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ

Η ομοιότητα μεταξύ των αποδεικτικών επιστημών του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη είναι φανερή. Τόσο ο Ευκλείδης όσο και ο Αριστοτέλης θεωρούν ως ιδεώδες την εύρεση σε κάθε περίπτωση κατάλληλων ορισμών με σκοπό την αναβάθμιση των αιτημάτων σε αποδείξιμες προτάσεις. Και οι δυο δηλαδή, ακολουθούσαν το πνεύμα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών που πίστευαν στη δύναμη ενός καλού ορισμού. Η ομοιότητα τους αυτή οφείλεται στο γεγονός πως τα στοιχεία του Ευκλείδη αναπτύχθηκαν σε μεγάλο βαθμό στην Ακαδημία του Πλάτωνος, στην οποία μαθητής ήταν και ο Αριστοτέλης. Ο Ευκλείδης βαθύτατα πλατωνιστής ήταν φυσικό λοπόν να επηρεαστεί από τον Αριστοτέλη.

Διαφορά ωστόσο, παρατηρείται στην υπόσταση των αιτημάτων 4 και 5 του Ευκλείδη. Ο Αριστοτέλης πίστευε πως μόνο τα 3 πρώτα αιτήματα μπορούμε να τα δεχτούμε, δηλαδή να μην απαιτούμε απόδειξη γι' αυτά. Τα άλλα δυο αιτήματα επειδή δεν στηρίζονται σε αρχικές έννοιες αλλά σε παράγωγες, πρέπει να αποδειχτούν. (Στο πλαίσιο αυτό ο Πρόκλος όπως θα δούμε παρακάτω απαιτεί την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος).

Στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα 76β32-35** όπως είδαμε ο Αριστοτέλης διαχωρίζει την υπόθεση από το αίτημα και ορίζει ως αίτημα κάθε πρόταση που ενώ χρειάζεται απόδειξη τη θεωρούμε ως δεδομένη, και τη χρησιμοποιούμε χωρίς να την αποδεικνύουμε

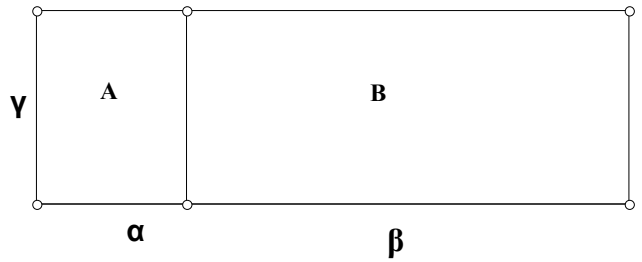
«*καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας*».

Έχει ιδιαίτερη σημασία στο σημείο αυτό να γνωρίζουμε την άποψη του Αριστοτέλη για το τι είναι απόδειξη. Ο Αριστοτέλης λοιπόν, θεωρεί ότι οτιδήποτε διατυπώνεται με παράγωγες έννοιες είναι αποδείξιμο, κάτι που φυσικά αποτελεί εσφαλμένη αντίληψη. Δεν πίστευε δηλαδή, ότι υπάρχουν προτάσεις οι οποίες, ούτε οι ίδιες, ούτε οι αρνήσεις τους δεν μπορούν ν' αποδειχθούν. Έτσι, και το 5^{ο} αίτημα του Ευκλείδη είναι σαφές για τον Αριστοτέλη ότι αποδεικνύεται αφού αναφέρεται σε παράγωγες έννοιες.

Παράδειγμα που δείχνει αυτήν την προσπάθεια αντικατάστασης των αξιωμάτων από ορισμούς συναντάμε στο χωρίο **[158b24-159α2]** στα **Τοπικά του Αριστοτέλη**.

«*Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι καὶ ἐπιχειρεῖν, οἷον πότερον ἓν ἑνὶ ἐναντίον ἢ πλείωρ ὁρισθέντων δὲ τῶν ἐναντίων κατὰ τρόπον ῥᾴδιον συμβιβάσαι πότερον ἐνδέχεται πλείω τῷ αὐτῷ εἶναι ἐναντία ἢ οὔ. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁρισμοῦ δεομένων. ἔοικε δὲ καὶ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἔνια δι᾽ ὁρισμοῦ ἔλλειψιν οὐ ῥᾳδίως γράφεσθαι, οἷον ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλευρὰν τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διαιρεῖ τήν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον.* ***τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί ἔστι δ᾽ ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου*** *οὗτος. ἁπλῶς δὲ τὰ πρῶτα τῶν στοιχείων τιθεμένων μὲν τῶν ὁρισμῶν, οἷον τί γραμμὴ καὶ τί κύκλος, ῥᾷστα δεῖξαι (πλὴν οὐ πολλά γε πρὸς ἕκαστον ἔστι τούτων ἐπιχειρεῖν διὰ τὸ μὴ πολλὰ τὰ ἀνὰ μέσον εἶναι) ἂν δὲ μὴ τιθῶνται οἱ τῶν ἀρχῶν ὁρισμοί, χαλεπόν, τάχα δ᾽ ὅλως ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ τούτοις καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τοὺς λόγους ἔχει*».

Όπως λοιπόν λέει ο Αριστοτέλης, είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθούν ορισμένες υποθέσεις λόγω έλλειψης του κατάλληλου ορισμού. Ως παράδειγμα, αναφέρει αρχικά την ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων αντιθέτων κάποιου μοναδικού πράγματος. Αν όμως τα ενάντια ορισθούν όπως πρέπει, τότε θα ήταν δυνατόν να συμπεράνει κανείς, αν το ίδιο πράγμα έχει ή όχι, περισσότερα από ένα ενάντια Στα μαθηματικά αναφέρει ως παράδειγμα το παρακάτω: η ευθεία που τέμνει ένα παραλληλόγραμμο και είναι παράλληλη προς τη μια πλευρά διαιρεί ομοίως και την πλευρά και το χωρίο. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}$ όπου α, β τμήματα και Α, Β χωρία.



Την ιδιότητα αυτή δεν μπορούμε να την αποδείξουμε αν δεν έχουμε κατάλληλο ορισμό. Αν όμως δοθεί ο κατάλληλος ορισμός της αναλογίας τότε η απόδειξη είναι εύκολη και άμεση. Ο ζητούμενος ορισμός είναι

Δυο λόγοι είναι ίσοι εάν και μόνο εάν έχουμε την ίδια ανταναίρεση (ανθυφαίρεση) και αντιστρόφως. Συμβολικά:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B} \Leftrightarrow \text{Ανθ}(\alpha, \beta) = \text{Ανθ}(A, B)$$

Απόδειξη

Έχουμε:

$\alpha = \kappa_1 * \beta + \alpha_1, \quad \alpha_1 < \beta$

$\beta = \kappa_2 * \alpha_1 + \beta_1, \quad \beta_1 < \alpha_1$

$\alpha_1 = \kappa_3 * \beta_1 + \alpha_2, \alpha_2 < \beta_1$

……..

Άρα, $\text{Ανθ}(\alpha, \beta) = [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots]$

Ομοίως

$A = \kappa_{1'} * B + A_1, \quad A_1 < B$

$B = \kappa_{2'} * A_1 + B_1, \quad B_1 < A_1$

$A_1 = \kappa_{3'} * B_1 + A_2, A_2 < B_1$

……..

Άρα, $\text{Ανθ}(A, B) = [\kappa_1', \kappa_2', \kappa_3', \ldots]$

Επομένως θα πρέπει

$[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots] = [\kappa_1', \kappa_2', \kappa_3', \ldots] \Leftrightarrow \kappa_i = k_{i'} \; \forall \; i$

Όμως, $A = \alpha * \gamma$ και $B = \beta * \gamma$ οπότε αν πολλαπλασιάσουμε με γ τις ανθυφαιρετικές σχέσεις των α, β προκύπτει:

$\alpha\gamma = \kappa_1 * \beta\gamma + \alpha_1\gamma$, όπου $\alpha_1\gamma < \beta\gamma$ αφού $\alpha_1 < \beta$

$\beta\gamma = \kappa_2 * \alpha_1\gamma + \beta_1\gamma$, όπου $\beta_1\gamma < \alpha_1\gamma$ αφού $\beta_1 < \alpha_1$

$\alpha_1\gamma = \kappa_3 * \beta_1\gamma + \alpha_2\gamma$, όπου $\alpha_2\gamma < \beta_1\gamma$ αφού $\alpha_2 < \beta_1$

……..

Άρα,

$A = \kappa_1 * B + A_1, \quad A_1 = \alpha_1\gamma < B$

$B = \kappa_2 * A_1 + B_1, \quad B_1 = \beta_1\gamma < \alpha_1\gamma = A_1$

$A_1 = \kappa_3 * B_1 + A_2, \quad A_2 = \alpha_2\gamma < \beta_1\gamma = B_1$

……..

Άρα, $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots] = [\kappa_1', \kappa_2', \kappa_3', \ldots] \Leftrightarrow \kappa_i = k_i' \ \forall \ i$ ■

Με τον ίδιο τρόπο, είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν οι πρώτες στοιχειώδεις αρχές, από την στιγμή που έχουν δοθεί οι κατάλληλοι ορισμοί, για παράδειγμα το τι είναι η γραμμή και τι είναι ο κύκλος. (Αν και τα επιχειρήματα που μπορεί να επικαλεσθεί κάποιος για κάθε μία από αυτές δεν είναι πολλά, επειδή δεν υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα). Αντιθέτως, αν οι ορισμοί δεν έχουν δοθεί, αυτό είναι πάρα πολύ δύσκολο έως αδύνατον. Όμοια με αυτά, ισχύουν και για τους διαλεκτικούς συλλογισμούς.

Σχόλια για το θέμα αυτό βρίσκουμε και στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα**, **[90β18-27].** Λέει πως

«*Δεν μπορεί να μην υπάρχουν κάποιες αρχές από τις οποίες να ξεκινά ένα αξιωματικό σύστημα*». Και λίγο πιο κάτω *ότι δεν μπορούμε να αποδεικνύουμε τα πάντα γιατί πάμε προς τα πίσω στο άπειρο ή διαφορετικά θα πρέπει να ξεκινάμε από ορισμούς χωρίς απόδειξη*»[1].

«*Ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ὁρισμὸς ἅπαντος οὗπερ καὶ ἀπόδειξις, δῆλον. τί δαί, οὗ ὁρισμός, ἆρα παντὸς ἀπόδειξις ἔστιν ἢ οὔ; εἷς μὲν δὴ λόγος καὶ περὶ τούτου ὁ αὐτός. τοῦ γὰρ ἑνός, ᾗ ἕν, μία ἐπιστήμη. ὥστ᾽ εἴπερ τὸ ἐπίστασθαι τὸ ἀποδεικτόν ἐστι τὸ τὴν ἀπόδειξιν ἔχειν, συμβήσεταί τι ἀδύνατονῥ ὁ γὰρ τὸν ὁρισμὸν ἔχων ἄνευ τῆς ἀποδείξεως ἐπιστήσεται. ἔτι αἱ ἀρχαὶ τῶν ἀποδείξεων ὁρισμοί, ὧν ὅτι οὐκ ἔσονται ἀποδείξεις δέδεικται πρότερον*"***ἢ ἔσονται αἱ ἀρχαὶ ἀποδεικταὶ καὶ τῶν ἀρχῶν ἀρχαί, καὶ τοῦτ᾽ εἰς ἄπειρον βαδιεῖται, ἢ τὰ πρῶτα ὁρισμοὶ ἔσονται ἀναπόδεικτοι**».

Επίσης, στο χωρίο **Μεταφυσικά [1005β11-14]** : τονίζεται η αξία της ορθής φιλοσοφικής και επιστημονικής αρχής, την όποια ονομάζει « ἀνυπόθετον ».

«*πάντων βεβαιοτάτας. ἔστι δ᾽ οὗτος ὁ φιλόσοφος. βεβαιοτάτη δ᾽ ἀρχὴ πασῶν περὶ ἣν διαψευσθῆναι ἀδύνατονῥ γνωριμωτάτην τε γὰρ ἀναγκαῖον εἶναι τὴν τοιαύτην (περὶ γὰρ ἃ μὴ γνωρίζουσιν ἀπατῶνται πάντες) καὶ ἀνυπόθετον*».

[1] Το χωρίο αυτό έρχεται σε αντίφαση με τα παραπάνω, αφού τώρα ούτε το 5ο αίτημα αποδεικνύεται ούτε η άρνηση του.

Και στο χωρίο **Μεταφυσικά 1006α3-9** επαναλαμβάνεται η άποψη πως **είναι αδύνατον για οποιοδήποτε πράγμα να είναι και ταυτόχρονα να μην είναι**, και μέσω αυτού ότι αυτή είναι η πιο βέβαιη από όλες τις αρχές. Μερικοί ωστόσο από έλλειψη παιδείας απαιτούν να αποδεικνύεται ακόμα και αυτό διότι έλλειψη παιδείας είναι να μην γνωρίζει κάποιος για ποια πράγματα πρέπει να ζητά απόδειξη και για ποια όχι. Απόδειξη επομένως δεν μπορεί να υπάρχει για όλα ανεξαιρέτως τα πράγματα διότι τότε θα βαδίζαμε εις άπειρον.

«*ἡμεῖς δὲ νῦν εἰλήφαμεν ὡς ἀδυνάτου ὄντος ἅμα εἶναι καὶ μὴ εἶναι, καὶ διὰ τούτου ἐδείξαμεν ὅτι βεβαιοτάτη αὕτη τῶν ἀρχῶν πασῶν. ἀξιοῦσι δὴ καὶ τοῦτο ἀποδεικνύναι τινὲς δι᾽ ἀπαιδευσίαν ἔστι γὰρ ἀπαιδευσία τὸ μὴ γιγνώσκειν τίνων δεῖ ζητεῖν ἀπόδειξιν καὶ τίνων οὐ δεῖ· ὅλως μὲν γὰρ ἁπάντων ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι (εἰς ἄπειρον γὰρ ἂν βαδίζοι, ὥστε μηδ᾽ οὕτως εἶναι ἀπόδειξιν)*»

Ακόμα, στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα 72b5-28** βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν να αποδειχτεί κάθε γνώση.

«*Ἡμεῖς δέ φαμεν οὔτε πᾶσαν ἐπιστήμην ἀποδεικτικὴν εἶναι, ἀλλὰ τὴν τῶν ἀμέσων ἀναπόδεικτον*»

Συγκεκριμένα αποκρούει τις δυο ακραίες απόψεις

1. Ότι δεν υπάρχει γνώση διότι όλα πρέπει να αποδεικνύονται και
2. Ότι υπάρχει γνώση γιατί όλα μπορούν να αποδειχτούν

«'Εν*ίοις μὲν οὖν διὰ τὸ δεῖν τὰ πρῶτα ἐπίστασθαι οὐ δοκεῖ ἐπιστήμη εἶναι, τοῖς δ᾽ εἶναι μέν, πάντων μέντοι ἀπόδειξις εἶναι*»

Η πρώτη άποψη οδηγεί σε μια άπειρη διαδικασία, «εἰς ἄπειρον ἀξιοῦσιν ἀνάγεσθαι» ενώ η δεύτερη οδηγεί σε μια κυκλική διαδικασία «*ἐνδέχεσθαι γὰρ κύκλῳ γίνεσθαι τὴν ἀπόδειξιν καὶ ἐξ ἀλλήλων*».

Ο Αριστοτέλης λοιπόν, υποστηρίζει ότι δεν μπορεί να αποδειχτεί κάθε γνώση αλλά ότι οι άμεσες γνώσεις είναι αναπόδεικτες. Όσο για τη κυκλική απόδειξη θεωρεί ότι είναι αδύνατη επειδή τα ίδια πράγματα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα προγενέστερα και μεταγενέστερα «*ἀδύνατον γάρ ἐστι τὰ αὐτὰ τῶν αὐτῶν ἅμα πρότερα καὶ ὕστερα εἶναι*». Η κυκλική δηλαδή διαδικασία για τον Αριστοτέλη δεν είναι τίποτε άλλο εκτός από την

απόδειξη της μορφής: αν το Α υπάρχει τότε το Α υπάρχει. «*ὥστε συμβαίνει λέγειν τοὺς κύκλῳ φάσκοντας εἶναι τὴν ἀπόδειξιν οὐδὲν ἕτερον πλὴν ὅτι τοῦ Α ὄντος τὸ Α ἔστιν*».

Ανάλογα, στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα 84α30-33** βλέπουμε ότι οι αρχές δεν βαδίζουν στο άπειρο καθώς αν υπάρχουν πράγματι αρχές τότε ούτε τα πάντα μπορούν να αποδεικνύονται ούτε η απόδειξη μπορεί να συνεχίζεται έπ' άπειρον. Από κάπου πρέπει να αρχίσουμε. Η αρχή αυτή είναι ένας καλός ορισμός.

«*δῆλον ἤδη καὶ τῶν ἀποδείξεων ὅτι ἀνάγκη ἀρχάς τε εἶναι, καὶ μὴ πάντων εἶναι ἀπόδειξιν, ὅπερ ἔφαμέν τινας λέγειν κατ' ἀρχάς. εἰ γὰρ εἰσὶν ἀρχαί, οὔτε πάντ' ἀποδεικτὰ οὔτ' εἰς ἄπειρον οἷόν τε βαδίζειν*»

Επίσης, στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα 90b26-27** αν αποδεικνύουμε κάθε αρχή τότε βαδιζουμε στο άπειρο, οπότε τα πρώτα, οι ορισμοι είναι ανποδεικτοι

«*ἢ ἔσονται αἱ ἀρχαὶ ἀποδεικταὶ καὶ τῶν ἀρχῶν ἀρχαί, καὶ τοῦτ' εἰς ἄπειρον βαδι-*
εῖται, ἢ τὰ πρῶτα ὁρισμοὶ ἔσονται ἀναπόδεικτοι».

και τέλος, όπως λέει και στο χωρίο **Αναλυτικά Ύστερα 72b10-11** «*ἀδύνατον γὰρ τὰ ἄπειρα διελθεῖν*». Δηλαδή είναι αδύνατον να ξεπεράσω το άπειρο.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία είναι από το τις παραδόσεις του μαθήματος «*Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*» (καθηγητής Σ. Νεγρεπόντης).

Απόπειρες απόδειξης 5ου αιτήματος

Όπως συμπεραίνουμε από τα παραπάνω, τα αιτήματα αποτελούσαν αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Ένα από τα πιο αμφιλεγόμενα ήταν το 5ο. Είδαμε πως πίστευαν ότι αποδεικνύεται και επομένως δεν θα πρέπει να θεωρείται αίτημα. Το αίτημα αυτό μέσα στην ιστορία δέχτηκε πολλές κριτικές και επιθέσεις. Τελικά το 19ο αιώνα αποδείχτηκε ότι το 5ο αξίωμα είναι ανεξάρτητο των άλλων.

5ο Αξίωμα: «*Αν μια ευθεία που τέμνει δυο άλλες ευθείες, σχηματίζει στις εντός και επί τ' αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δυο ορθών, τότε οι δυο ευθείες, προεκτεινόμενες έπ' άπειρον θα συμπέσουν και μάλιστα προς το μέρος όπου βρίσκονται οι γωνίες με το μικρότερο των 2 ορθών άθροισμα*».

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να δούμε την προσπάθεια δυο από τους πολλούς μαθηματικούς που επιχείρησαν να αποδείξουν το 5ο αίτημα, του Πτολεμαίου και του Πρόκλου.

Ο Πρόκλος, στα σχόλια του **[365,6-365,7]**.

«*τοῦτο αἴτημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφθὲν ἀποδείξεως ἠξίωσαν. δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος*» και **[365,12-365,14]**

«*ἵνα μὴ καὶ ἡμεῖς ὄχλον ἐπεισάγωμεν ἄλλον,* ***καὶ ὡς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων.***»

τονίζει το γεγονός ότι οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αξίωναν την απόδειξή του ο 5ο αιτήματος. Ας δούμε πρώτα την απόπειρα του Πτολεμαίου να αποδείξει το 5ο αίτημα.

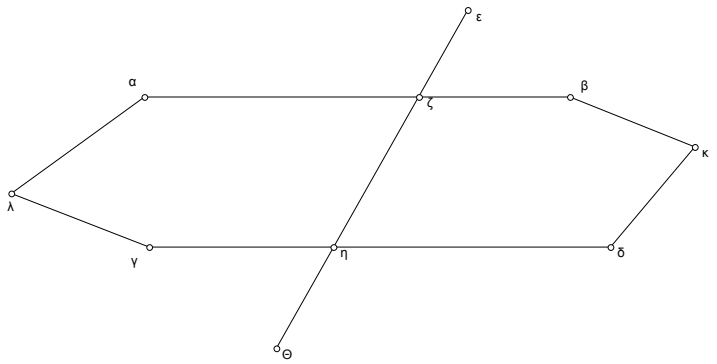
2.1.3 Η απόδειξη του Πτολεμαίου

Στα σχόλια του Πρόκλου για την πρόταση Ι28 γίνεται μια αναφορά για την προσπάθεια του Πτολεμαίου ν' αποδείξει το 5^{ο} αίτημα.

Πτολεμαῖος δὲ ἐν οἷς ἀποδεῖξαι προέθετο τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ορθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, οὗτο πρὸ πάντων δεικνὺς τὸ θεώρημα τὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ὑπαρχουσῶν τῶν ἐντὸς παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας οὕτω πως δείκνυσιν **[362,14-362,20]**

Σύμφωνα με τον Heath την απόδειξη του Πτολεμαίου μπορούμε να τη χωρίσουμε σε 4 βήματα:

1^{ο} ΒΗΜΑ: [362,20 – 363,18] : Αποδεικνύει ότι αν μια ευθεία (εζηθ) τέμνει δυο άλλες ευθείες, τις αβ, γδ και σχηματίζει $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ = 2ορθές τότε οι αβ, γδ είναι παράλληλες,



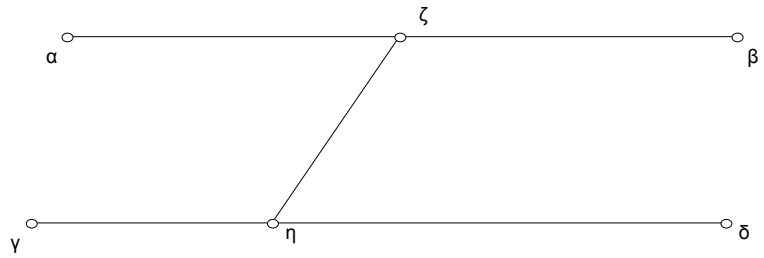
ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τις αὐτὰς εὐθεῖα ἡ εζηθ, ὥστε τὰς ὑπὸ βζη καὶ ὑπὸ ζηδ γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν. λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ. εὐθεῖαι, τουτέστιν ἀσύμπτωτοί εἰσιν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτωσαν ἐκβαλλόμεναι αἱ βζ ηδ κατὰ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ηζ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν αβ, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ αζη βζη γωνίας ὁμοίως δέ, ἐπεὶ ἡ ηζ ἐφέστηκεν	Έστω οι ευθείες αβ, γδ και η τέμνουσα εζηθ, έτσι ώστε $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ = 2ορθές. Θα δείξουμε ότι αβ, γδ είναι παράλληλες, δηλαδή ασύμπτωτες. Έστω, ότι οι βζ, ηδ προεκτεινόμενες τέμνονται στο κ. Επειδή η ηζ τέμνει την αβ και σχηματίζει $\alpha\hat{\zeta}\eta + \beta\hat{\zeta}\eta$ = 2 ορθές, ομοίως, επειδή η ηζ τέμνει και την γδ θα

ἐπὶ τὴν γδ, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ γηζ δηζ γωνίας. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ὑπὸ αζη βζη γηζ δηζ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ δύο αἱ ὑπὸ βζη ζηδ δύο ὀρθαῖς ὑπόκεινται ἴσαι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ αζη γηζ καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς ἴσαι. εἰ οὖν αἱ ζβ ηδ δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς ἐκβαλλόμεναι συνέπεσον κατὰ τὸ κ, καὶ αἱ ζα ηγ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. δύο γὰρ ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ αζη γηζ ἴσαι εἰσίν. ἢ γὰρ κατ' ἀμφότερα συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ἢ κατ' οὐδέτερα, εἴπερ καὶ αὗται κἀκεῖναι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. συμπιπτέτωσαν οὖν αἱ ζα ηγ κατὰ τὸ λ. αἱ ἄρα λαβκ λγδκ εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστιν δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς συμπίπτειν τὰς εὐθείας. παράλληλοι ἄρα εἰσίν.	σχηματίζει $\gamma\hat{\eta}\zeta + \delta\hat{\eta}\zeta =$ 2 ορθές. Άρα, αφού $\alpha\hat{\zeta}\eta + \beta\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta + \delta\hat{\eta}\zeta =$ 4 ορθές ⇨ $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta =$ 2 ορθές και $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ = 2 ορθές ⇨ Έτσι, αφού οι ζβ, ηδ που σχηματίζουν δυο ορθές γωνίες, προεκτεινόμενες τέμνονται στο κ, και οι ζα, ηγ, αν προεκταθούν θα τέμνονται.. Οι $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ = 2 ορθές άρα τέμνονται έστω στο λ. Άρα, οι ευθείες λαβκ και λγδκ περικλείουν χωρίο κάτι που είναι άτοπο, σύμφωνα με τη 9η κοινή έννοια: ***dÚo eÙqe‹ai cwr„on oÙ periškousin***. Άρα, δεν είναι δυνατόν οι αβ, γδ να συμπίπτουν, άρα, είναι παράλληλες.

<u>2ο</u> ΒΗΜΑ: Προσπαθεί να αποδείξει ότι αν μια ευθεία τέμνει δυο παράλληλες ευθείες τότε οι εντός και επί τ' αυτά γωνίες έχουν άθροισμα = 2 ορθές, χωρίς να χρησιμοποιήσει το 5ο αίτημα. Δηλαδή, προσπαθεί να δείξει την πρόταση Ι29, χωρίς να χρησιμοποιήσει το 5ο αίτημα. **[365,22-366,14]**

Πρόταση Ι29: ʹ

«*Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας*».



ἔστωσαν οὖν παράλληλοι αἱ αβ γδ καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ ηζ· λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ αζη γηζ δύο ὀρθῶν μείζους, αἱ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ βζη δηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους ἀλλὰ καὶ δύο ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί ᾽οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ αζ γη παράλληλοι ἢ αἱ ζβ ηδ, ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς αζ γη δύο ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντός, καὶ ἡ εἰς τὰς ζβ ηδ ἐμπίπτουσα δύο ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντός᾽ἀλλ᾽ αἱ αὐταὶ καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους᾽αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ αζη γηζ βζη δηζ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι᾽ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας.	Έστω ότι οι παράλληλες ευθείες αβ, γδ και ηζ η τέμνουσα ευθεία. Ισχυρίζομαι ότι οι εντός και επί τ' αυτά δεν είναι ίσες με δυο ορθές : $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta \neq$ 2 ορθές. και. Έστω $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ >2ορθές. Τότε οι υπόλοιπες $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ < 2 ορθές. ώστε το άθροισμα $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta + \beta\hat{\zeta}\eta + \delta\hat{\eta}\zeta$ = 4 ορθές. Όμως, αζ // γη ⇨ $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ > 2 ορθές, σύμφωνα με την υπόθεση. Άρα, καταλήγουμε σε άτοπο. Έστω τώρα $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ <2 ορθές. Ανάλογα, θα πρέπει $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ >2 ορθές. ώστε το άθροισμα $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta + \beta\hat{\zeta}\eta + \delta\hat{\eta}\zeta$ = 4ορθές. Όμως, αζ// γη ⇨ $\beta\hat{\zeta}\eta + \zeta\hat{\eta}\delta$ < 2 ορθές, σύμφωνα με την υπόθεση. Άρα, καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ = 2 ορθές.

<u>3^ο</u> ΒΗΜΑ: Απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος με τη βοήθεια του 2^{ου} βήματος. Χρησιμοποιεί την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. **[366,15-367,2]**

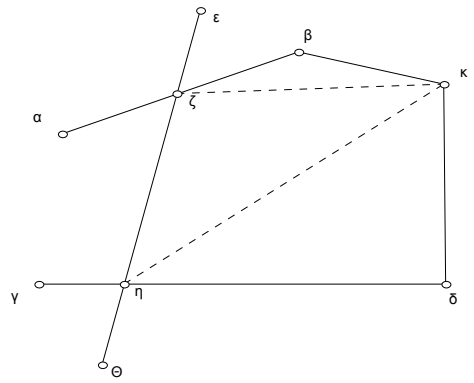
«***Τούτου δὴ οὖν προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβητήτως ἀποδείκνυται*».** (Εφόσον έχει αποδειχθεί αυτό, τότε αυτό που θέλουμε (5^{ο} αίτημα) αποδεικνύεται χωρίς καμία αμφισβήτηση)

λέγω γὰρ ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. μὴ γὰρ συμπιπτέτωσαν. ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοί εἰσιν, ἐφ᾽ ἃ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα, ἐφ᾽ ἃ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ᾽ ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι. εἰ δὲ τοῦτο, παράλληλοί εἰσιν. ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον	Ισχυρίζομαι δηλαδή ότι αν σε δυο ευθείες η τέμνουσα σχηματίζει τις εντός και επί ταυτά γωνίες μικρότερες των δυο ορθών, τότε οι ευθείες προεκτεινόμενες θα συμπέσουν και μάλιστα στο μέρος που οι γωνίες είναι μικρότερες από δυο ορθές. Έστω ότι δεν τέμνονται από τη μεριά που οι γωνίες είναι μικρότερες των δυο ορθών, τότε δεν θα τέμνονται ούτε από την άλλη μεριά, αφού οι γωνίες είναι μεγαλύτερες των δυο ορθών. Άρα, οι ευθείες είναι ασύμπτωτες και από τις δυο πλευρές, δηλαδή είναι παράλληλες. Όμως αποδείξαμε ότι αν δυο ευθείες είναι παράλληλες τότε οι εντός και επί ταυτά γωνίες είναι ίσες με δυο ορθές γωνίες. Άρα, οι εντός και επί ταυτά είναι και ίσες και μικρότερες των δυο ορθών, αδύνατον.

4ο ΒΗΜΑ: Αποδεικνύει ότι οι αβ, γδ τέμνονται προς τη μεριά που οι εσωτερικές γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο των 2 ορθών. **[367,2-367,27]**

«*Ταῦτα προδεδειχὼς ὁ Πτολεμαῖος καὶ καταντήσας εἰς τὸ προκείμενον ἀκριβέστερόν τι προσθεῖναι βούλεται καὶ δεῖξαι ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθῶν ποιῇ ἐλάσσονας, οὐ μόνον οὐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, ὡς δέδεικται, ἀλλὰ καὶ ἡ σύμπτωσις αὐτῶν κατ᾽ ἐκεῖνα γίνεται τὰ μέρη, ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, οὐκ ἐφ᾽ ἃ αἱ μείζονες*»

Πράγματι,



ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ εζηθ ποιείτω τὰς ὑπὸ αζη καὶ ὑπὸ γηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. αἱ λοιπαὶ ἄρα μείζους δύο ὀρθῶν. ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι δέδεικται. εἰ δὲ συμπίπτουσιν, ἢ ἐπὶ τὰ α γ συμπεσοῦνται, ἢ ἐπὶ τὰ β δ. συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ β δ κατὰ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ αζη καὶ γηζ δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ αζη βζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ γηζ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ βζη. τριγώνου ἄρα τοῦ κζη ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. ἀλλὰ μὴν συμπίπτουσι. κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, καθ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες.	Έστω οι δυο ευθείες αβ, γδ και εζηθ η τέμνουσα που σχηματίζει $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ < 2ορθές ⇨ $\beta\hat{\zeta}\eta + \delta\hat{\eta}\zeta$ >2 ορθές. Έχουμε ήδη δείξει ότι οι αβ, γδ δεν είναι ασύμπτωτες, επομένως θα συναντώνται είτε από τη μεριά των α, γ ή από τη μεριά των β, δ. Έστω ότι συναντώνται από τη μεριά των β, δ στο κ. Τότε, αφού $\alpha\hat{\zeta}\eta + \gamma\hat{\eta}\zeta$ < 2 ορθές και $\alpha\hat{\zeta}\eta + \beta\hat{\zeta}\eta$ = 2 ορθές ⇨ $\gamma\hat{\eta}\zeta < \beta\hat{\zeta}\eta$, δηλαδή η εξωτερική γωνία του τριγώνου κζη είναι μικρότερη από την απέναντι εΣΩτερική γωνία, βζη, κάτι που φυσικά είναι άτοπο. Άρα, οι αβ, γδ δεν συναντώνται από τη μεριά των β, δ. Άρα, θα συναντώνται από τη μεριά των α, γ, δηλαδή από τη μεριά όπου οι γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο των 2 ορθών. ■

Η αδυναμία της απόδειξης του Πτολεμαίου

Σύμφωνα με το Πρόκλο η αδυναμία στην απόδειξη του Πτολεμαίου βρίσκεται στο 2^{ο} βήμα, στην απόδειξη της πρότασης Ι29. Ο Πτολεμαίος υποθέτει, ότι εάν οι αβ, γδ είναι παράλληλες οτιδήποτε ισχύει για τις εντός και επί τ' αυτά γωνίες στο ένα μέρος, (δηλαδή: αν είναι ίσες, μεγαλύτερες ή μικρότερες από δυο ορθές) ισχύει και στο άλλο μέρος, εισάγει δηλαδή ένα είδος συμμετρίας στο επίπεδο. **Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μια παράλληλη. Δηλαδή, ο Πτολεμαίος υποθέτει κάτι ισοδύναμο με το αίτημα που αποδεικνύει.**

«*Ταῦτα μὲν οὖν ὁ Πτολεμαῖος. ἐφιστάνειν δὲ ἄξιον, μή ποτε παραλογισμός τίς ἐστιν ἐν ταῖς εἰλημμέναις ὑποθέσεσι, λέγω δὲ ἐν ἐκείναις, ἐν αἷς ἔλεγεν ὅτι τῆς τεμνούσης εὐθείας τὰς ἀσυμπτώτους τέτταρας ἐντὸς γωνίας ποιούσης αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἢ δύο ὀρθῶν μείζους ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. οὐ γὰρ τελεία ἡ διαίρεσις. κωλύει γὰρ οὐδὲν τὸν ἀσυμπτώτους λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δυεῖν ὀρθῶν ἐκβαλλομένας τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, καὶ οὐχ ἕνα περὶ τούτων ἀποδέχεσθαι λόγον. ἀτελοῦς δὲ οὔσης τῆς διαιρέσεως οὐκ ἀποδέδεικται τὸ προκείμενον*»

Ταυτόχρονα, από το Πρόκλο βλέπουμε ότι υπάρχει μια ακόμη αδυναμία. Θεωρεί ότι οι 4 γωνίες έχουν άθροισμα = 4 ορθές. Αυτό όμως δεν το ξέρουμε, χρειάζεται απόδειξη. Ταυτόχρονα, αν υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει τότε αυτό θα ίσχυε για οποιαδήποτε ευθείες και όχι συγκεκριμένα για παράλληλες, άρα καταλήγουμε στα ίδια.

«*ἐπεὶ κἂν μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας τὰ αὐτὰ ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων*».

«*ἔτι δὲ κἀκεῖνο πρὸς τὴν δεῖξιν ῥητέον, ὅτι οὐ καθ' αὑτὸ δείκνυσι τὸ ἀδύνατον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ παραλλήλους τέμνουσά τις εὐθεῖα μείζους ἐποίησεν τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα μέρη δύο ὀρθῶν ἢ ἐλάσσους, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ ἄτοπον ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, ἀλλ' ἐπειδὴ τέσσαρες τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἐντὸς τῶν τεμνομένων, διὰ τοῦτο ἀδύνατος ἑκατέρα τῶν ὑποθέσεων τούτων, ἐπεὶ κἂν μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας τὰ αὐτὰ ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων. Πρὸς μὲν οὖν Πτολεμαῖον ταῦτα λέγοντες ἐπιστήσομεν φανερὰ γὰρ ἡ τῆς δείξεως ἀσθένεια διὰ τῶν εἰρημένων*».

Πρόκλος, Εις Ευκλείδην [368,1-368,26]

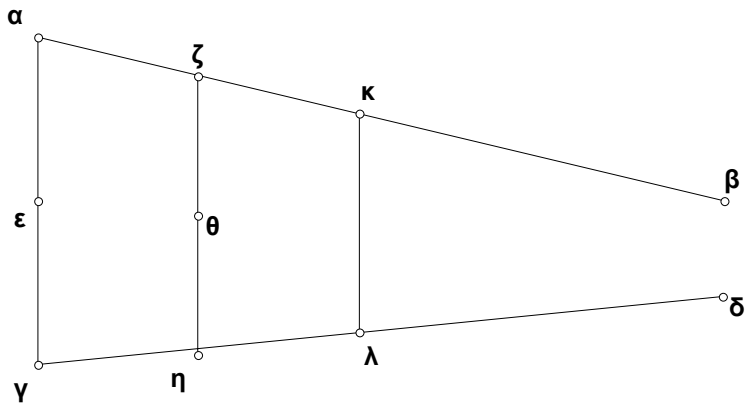
2.1.4 Η απόδειξη του Πρόκλου

Η απόδειξη του Πρόκλου βασίζεται στην αρχή πέρατος του Αριστοτέλη. (ιδιότητα Ευδόξου - Αρχιμήδη).

Ο Πρόκλος αρχικά αναφέρεται σ' αυτούς που υποστηρίζουν ότι είναι αδύνατον δυο ευθείες να τέμνονται από τη μεριά που η τέμνουσα σχηματίζει τις εντός και επί τ' αυτά γωνίες μικρότερες των δυο ορθών.

«*φέρε δὲ κἀκείνους ἐπισκεψώμεθα τοὺς λέγοντας ἀδυνατὸν εἶναι τὰς ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν*». **[368,26-369,1]**

Η απόδειξη στην οποία καταφεύγουν θυμίζει το παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. **[369,1 - 369,20]**



λαβόντες γὰρ εὐθείας δύο τὰς αβ γδ καὶ ἐμπίπτουσαν εἰς αὐτὰς τὴν αγ καὶ ποιοῦσαν τὰς ἐντὸς δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας οἴονται (?) δεικνύναι μὴ συμπιπτούσας τὰς αβ γδ. διῃρήσθω γὰρ δίχα ἡ αγ κατὰ τὸ ε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τῆς αβ ἴση τῇ αε ἡ αζ, ἀπὸ δὲ τῆς γδ ἴση τῇ εγ ἡ γη. δῆλον ἄρα ὅτι αἱ αζ γη οὐ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ ζη. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται, **ἔσονται αἱ δύο τῇ αγ ἴσαι ἐν τριγώνῳ**,	Αν πάρουμε τις ευθείες αβ, γδ και ως τέμνουσα την αγ που σχηματίζει τις εντός και επί τ'αυτά γωνίες μικρότερες των δυο ορθών, θα δείξουμε ότι οι αβ, γδ δεν συμπίπτουν. Έστω ε το μέσο της αγ. Παίρνουμε τμήμα στην αβ ίσο με αε, το αζ και παίρνουμε τμήμα στην γδ ίσο με το αε, το γη. Τότε οι αζ, γη δεν θα τέμνονται στο ζη γιατί αν τέμνονται θα

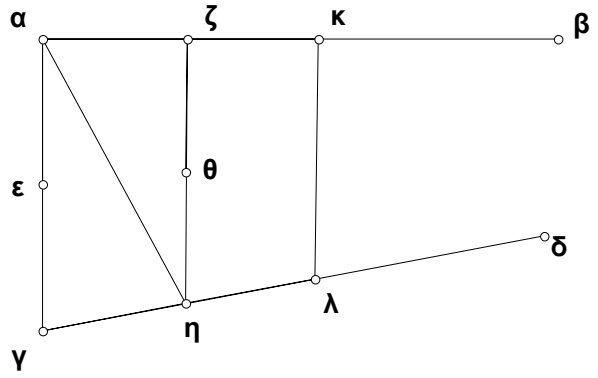
ὅπερ ἀδύνατον πάλιν ἐπεζεύχθω ἡ ζη καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ θ καὶ ἴσαι ἀφῃρήσθωσαν. οὐδὲ αὗται ἄρα συμπεσοῦνται διὰ τὰ αὐτά. **καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον ποιοῦντες**,	σχηματίζουν τρίγωνο στο οποίο οι δυο πλευρές είναι ίσες προς την τρίτη, την αγ, κάτι που είναι αδύνατον. Πάλι τέμνω κατά το ήμισυ την ζη, και έστω θ το μέσο. Έπειτα στις ζβ, ηδ παίρνουμε τμήματα ίσα με ζθ, έστω τα ζκ, ηλ. Ούτε οι ζκ, ηλ τέμνονται στην κλ και με αυτό τον τρόπο συνεχίζουμε έπ' άπειρον

Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύουν ότι οι αβ, γδ δεν τέμνονται ποτέ. «*δεικνύναι φασὶν ὅτι οὐδαμοῦ συμπίπτουσιν αἱ αβ γδ εὐθεῖαι*».

Έπειτα με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος αποδεικνύουν ότι υπάρχουν ευθείες, που σχηματίζουν τις εντός και επί τ' αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δυο ορθών, και τέμνονται εφόσον όμως τέμνονται οι αη, γη στο σημείο η. Διαφορετικά όποιοι αρνούνται κάτι τέτοιο

«*προσαναιροῦσι καὶ τὸ πρῶτον τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου λέγον ἐξεῖναι ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἀγαγεῖν*»,

δηλαδή αναιρούν το πρώτο αίτημα. [369,21-371,10]



Στη συνέχεια ο Πρόκλος προσπαθεί ν' αποδείξει το 5^{ο} αίτημα ξεκινώντας από τα λεγόμενα του Αριστοτέλη περί της αρχής του πέρατος με την οποία απέδειξε ότι ο κόσμος είναι πεπερασμένος.

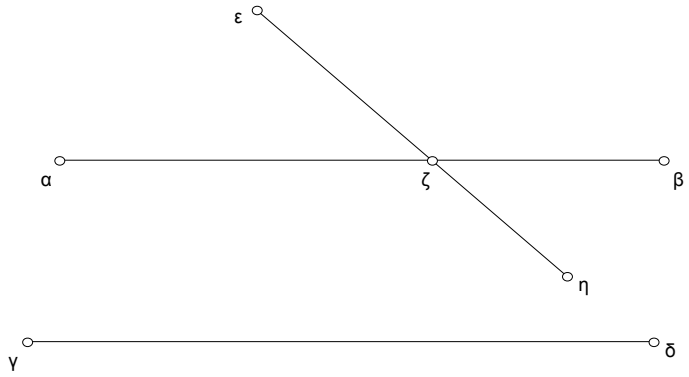
«*πρὸς δὲ τὸν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἴδειν λεγέσθω παρ᾽ ἡμῶν ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον,* ***ᾧ καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον***». **[371,10-371,14]**

«ἐὰν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλωνται εὐθεῖαι γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ᾽ ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον μέγεθος ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπείρων οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων ἄπειρον τὸ μεταξύ. πεπερασμένου γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον, ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους μεῖζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι». **[371,14-371,23]**

Υποστηρίζει, δηλαδή ότι η απόσταση μεταξύ δυο ευθειών που τέμνονται γίνεται όσο μεγάλη θέλουμε δηλαδή, τείνει στο άπειρο. Με βάση αυτή τη σκέψη, αποδεικνύει τη παρακάτω πρόταση

Πρόταση (1): «λέγω ὅτι, ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τέμνει τις εὐθεῖα, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ ἡ εζη». [**371,24- 372,28]**

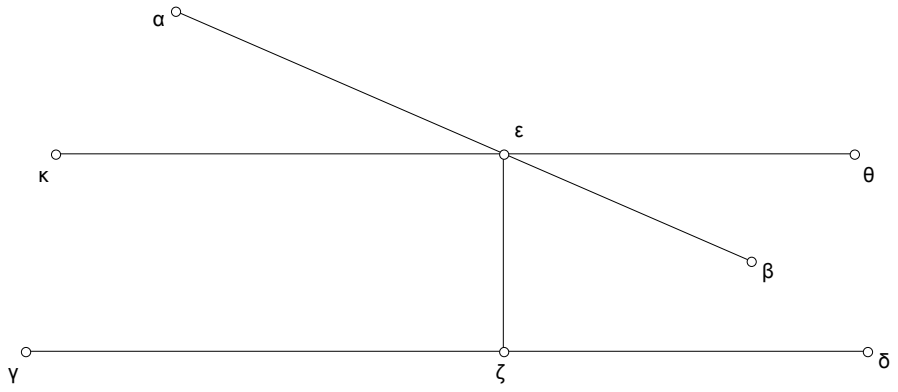
Έστω αβ, γδ παράλληλες. Αν εζη τέμνει την αβ τότε θα τέμνει και την γδ. (Δηλαδή, αποδεικνύει ότι αν μια ευθεία τέμνει μια από τις δυο παράλληλες τότε θα τέμνει και την άλλη.)



lšgw Óti t¾n gd teme‹. ™peˆ g¦r dÚo eÙqe‹a… e„sin ¢f' ˜nÕj shme…ou toà z, e„j ¥peiron ™kballÒmenai aí bz zh,	Υποστηρίζω ότι θα τέμνει και την γδ. Επειδή οι δύο ευθείες τέμνονται στο ζ, αν τις προεκτείνουμε η απόστασή τους θα

pantÕj megšqouj me„zona œcousi di£stasin, éste kaˆ toÚtou, Óson ™stˆ tÕ metaxÝ tîn paralll»lwn. Ótan oân me‹zon ¢ll»lwn diastîsin tÁj toÚtwn diast£sewj teme‹ ¹ zh t¾n gd	γίνει μεγαλύτερη από κάθε πεπερασμένο μέγεθος, όπως για παράδειγμα όσο είναι το διάστημα μεταξύ των παραλλήλων. Όταν λοιπόν η απόσταση μεταξύ τους γίνει μεγαλύτερη από την απόσταση αυτή τότε θα τέμνει η ζη την γδ

Στη συνέχεια στηρίζεται στην πιο πάνω πρόταση προσπαθεί να «αποδείξει» το 5^{ο} αίτημα.



Χρησιμοποιεί το πιο πάνω σχήμα και αναφέρει**: [372,11-373,2]**

œstwsan g¦r dÚo eÙqe‹ai af ab gd, kaˆ ™mpiptštw e„j aÙt¦j ¹ ez ™l£ssonaj dÚo Ñrqîn poioàsa t¦j ØpÕ bez dez. Išgw Óti sumpesoàntai af eÙqe‹ai kat¦ taàta t¦ mšrh, ™f' § af tîn dÚo Ñrqîn e„sin ™l£ssouj. ™peid¾ g¦r af ØpÕ bez dze ™l£ssouj e„sˆ dÚo Ñrqîn, tÍ Øperocí tîn dÚo Ñrqîn œstw ‡sh ¹ ØpÕ qeb. kaˆ. ™kbebl»sqw ¹ qe ™pˆ tÕ k. ™peˆ oân e„j t¦j kq gd ™mpšptwken ¹ ez kaˆ poie‹	Ας είναι δύο ευθείες οι αβ,γδ και η εζ που τις τέμνει τέτοια ώστε οι γωνίες βεζ και δεζ να είναι μικρότερες από δύο ορθές. Θα αποδείξω ότι οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος αυτών των γωνιών. Επειδή οι βεζ και δεζ είναι μικρότερες από δύο ορθές έστω η γωνία θεβ που συμπληρώνει τις δύο ορθές. Ας προεκταθεί η θε προς το κ. Επειδή λοιπόν η εζ που τέμνει τις κθ και γδ σχηματίζει της εντός και επί τα αυτά γωνίες θεζ και

t¦j ™ntÕj dÚo Ñrqa‹j ‡saj t¦j ØpÕ qez dze, par£llhlo… e„sin aƒ qk gd eÙqe‹ai. kaˆ tšmnei t¾n kq ¹ ab· teme‹ ¥ra kaˆ t¾n gd di¦ tÕ prodedeigmšnon. sumpesoàntai ¥ra aƒ ab gd kat¦ t¦ mšrh ™ke‹na, ™f' § aƒ tîn dÚo Ñrqîn ™l£ssonej, éste dšdeiktai tÕ proke…menon	δζε ίσες με δύο ορθές, οι θκ και γδ θα είναι παράλληλες. Εφόσον η αβ τέμνει την κθ θα τέμνει και την γδ όπως αποδείχθηκε παραπάνω. Τέμνονται λοιπόν οι αβ, γδ προς εκείνο το μέρος που υπάρχουν οι γωνίες που είναι μικρότερες από δύο ορθές. Συνεπώς το προκείμενο έχει αποδειχθεί. ■

Η αδυναμία της απόδειξης του Πρόκλου

Ο Heath στο βιβλίο του αναφέρει πως ο Clavius επικρίνει την απόδειξη του Πρόκλου λέγοντας ότι η πρόταση του Αριστοτέλη από την οποία ξεκινάει, χρειάζεται και η ίδια απόδειξη. Στην προσπάθεια του δηλαδή να αποδείξει το 5^{ο} αίτημα χρησιμοποιεί ένα καινούριο αίτημα. Σημειώνει, ότι όπως δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι δυο ευθείες, των οποίων η απόσταση μειώνεται συνέχεια, κάποτε θα συναντηθούν, έτσι δεν μπορούμε και να υποθέσουμε ότι δυο ευθείες που αποκλίνουν συνεχώς, τελικά θα είναι τόσο μακριά ώστε η κάθετος από ένα σημείο της μιας ευθείας στην άλλη ευθεία να είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε απόσταση. Μάλιστα, ο Clavius αναφέρει ως αντιπαράδειγμα τη υπερβολή και μία ασύμπτωτή της, όπου ενώ η απόσταση μεταξύ τους μειώνεται συνεχώς τελικά οι γραμμές δεν τέμνονται. Από την άλλη, η πρόταση που διατύπωσε ο Αριστοτέλης δεν ισχύει στην ελλειπτική γεωμετρία καθόσον οι τεμνόμενες ευθείες έχουν πεπερασμένη απόσταση. Επίσης, στο χωρίο **[371,27-372,8],** ο Πρόκλος δέχεται, ότι από το σημείο F μόνο μία παράλληλη μπορούμε να φέρουμε προς τη CD, κάτι επίσης ισοδύναμο με αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

Τελειώνουμε αναφέροντας ένα απόσπασμα του Αριστοτέλη σχετικά με το σφάλμα στο οποίο υπέπεσαν όσοι επιχείρησαν να αποδείξουν το 5^{ο} αίτημα. Είναι από Αναλυτικά Πρότερα 65α4 :

«*ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων*».

Δηλαδή

«… το οποίο κάνουν αυτοί που νομίζουν ότι αποδεικνύουν το 5^{ο} αίτημα των παραλλήλων, διότι αυτοί υποπίπτουν στο σφάλμα να χρησιμοποιούν εκείνα τα οποία θα ήταν αδύνατον να αποδείξουν αν δεν υπήρχε η έννοια της παραλληλίας».

2.1.5 Μερικά επιπλέον ιστορικά στοιχεία…

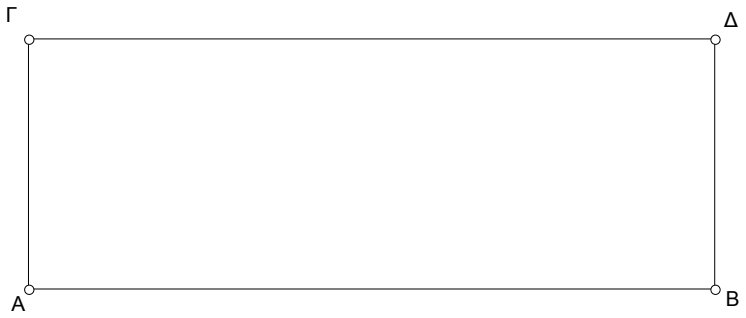
Το 5^{ο} αξίωμα επομένως αποτελούσε πηγή έντονου προβληματισμού. Για να το ξεπεράσουν προσπάθησαν αρχικά, όπως είδαμε, να το αποδείξουν, χωρίς όμως να το καταφέρουν. Στη συνέχεια να το αντικαταστήσουν μ' ένα πιο αποδεκτό ισοδύναμο του όπως το **«Από ένα δεδομένο σημείο που δεν βρίσκεται πάνω σε μια δεδομένη ευθεία, μπορούμε να φέρουμε μια και μόνο ευθεία παράλληλη προς τη δεδομένη (John Playfair, 1748-1819)»**. Τέλος, οδηγήθηκαν στην άρνηση του.

Η άρνηση του 5^{ου} αξιώματος μπορεί να γίνει με δυο τρόπους:

I. Δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας άγονται 2 ή και περισσότερες παράλληλες προς τη δοθείσα.
II. Αρνούμαστε εξ ολοκλήρου την ύπαρξη της παραλληλίας.

Η άρνηση επομένως, του 5^{ου} αξιώματος είχε σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία των λεγόμενων Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, ***της Υπερβολικής*** (I) και της ***Ελλειπτικής*** (II).

Όπως μας πληροφορεί ο Howard Eves, μια από την πιο αξιόλογες μελέτες στο αίτημα της παραλληλίας έκανε ο Girolamo Saccheri στα 1733. Ο Saccheri (1667-1733) γεννήθηκε στο Σαν Ρέμο στα 1667. Διάβασε τα Στοιχεία του Ευκλείδη και ξετρελάθηκε με την αποδεικτική μέθοδο της *εις άτοπον απαγωγής*. Έτσι, σκέφτηκε να την εφαρμόσει στη μελέτη του αιτήματος των παραλλήλων του Ευκλείδη. Πρέπει να ήταν η πρώτη φορά που κάποιος είχε την ιδέα να μελετήσει τις συνέπειες μιας άρνησης του περίφημου αιτήματος. Το αποτέλεσμα των ερευνών αυτών ήταν ένα μικρό βιβλίο με τίτλο *Euclides ab omni naevo vndicatus* (Ο Ευκλείδης απαλλαγμένος από κάθε σφάλμα). Στην εργασία αυτή δέχεται τις 28 πρώτες προτάσεις των Στοιχείων του Ευκλείδη, οι οποίες δεν απαιτούν το 5^{ο} αίτημα για την απόδειξη τους, και με τη βοήθεια αυτών προχωράει στη μελέτη του ισοσκελούς δισορθογωνίου (birectangle), δηλαδή ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, στο οποίο ΑΓ=ΒΔ και οι γωνίες Α και Β είναι ορθές. (Σχήμα 1).



(Σχήμα 1)

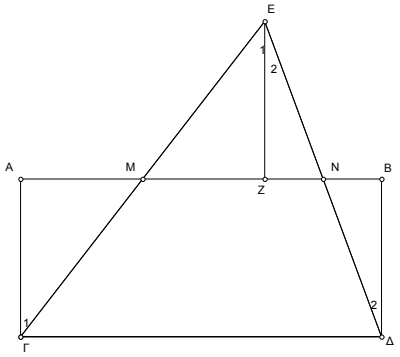
Φέρνοντας τις διαγωνίους ΑΔ και ΒΓ και χρησιμοποιώντας απλά θεωρήματα ισότητας (που υπάρχουν ανάμεσα στις πρώτες 28 προτάσεις του Ευκλείδη), ο Saccheri με ευκολία δείχνει ότι οι γωνίες Γ και Δ είναι ίσες μεταξύ τους.

Τίποτα όμως δεν μπορεί να προκύψει σχετικά με το μέγεθος αυτών των γωνιών. Φυσικά, από το 5^{ο} αίτημα προκύπτει ότι οι γωνίες αυτές είναι ορθές, αλλά αυτό το αίτημα δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Συνεπώς, οι δυο γωνίες θα μπορούσαν να είναι και οι δυο ορθές ή και οι δυο αμβλείες ή και οι δυο οξείες γωνίες[2].

---

[2] Το τετράπλευρο Saccheri συνδέεται με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ως εξής: (Στράντζαλος, 2002)

Έστω ΔΓΕ τυχόν τρίγωνο, όπως στο διπλανό σχήμα, (όπου το τρίγωνο έχει επιλεγεί οξυγώνιο, αλλά οι συλλογισμοί που θα ακολουθήσουν εφαρμόζονται ανάλογα και στις άλλες περιπτώσεις).



Τα Μ και Ν είναι τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών του τριγώνου και οι ΓΑ, ΔΒ και ΕΖ είναι κάθετες στην ΑΒ. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΜΑΓ και ΜΖΒ προκύπτει ΑΓ=ΕΖ και $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Επίσης, από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΕΖΝ και ΝΒΔ, προκύπτει ΕΖ=ΒΔ και $\hat{E}_2 = \hat{\Delta}_2$. Επομένως, έχουμε ΑΓ=ΒΔ οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι (ανεστραμμένο) τετράπλευρο Saccheri, και για τις γωνίες του τριγώνου ισχύει: $\hat{E} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = A\widehat{\Gamma}\Delta + B\widehat{\Delta}\Gamma$

Στο σημείο αυτό ενεργεί χωρίς προκαταλήψεις και ονομάζει τις τρεις δυνατότητες: **υπόθεση της ορθής γωνίας** $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=1$ορθή **(Ευκλείδεια Γεωμετρία), υπόθεση της αμβλείας γωνίας** $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}>1$ορθή **(Ελλειπτική Γεωμετρία) και υπόθεση της οξείας γωνίας** $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}<1$ορθή **(Υπερβολική Γεωμετρία).** Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποκλείσει τις τελευταίες δυνατότητες δείχνοντας ότι οι αντίστοιχες υποθέσεις οδηγούν σε αντιφάσεις και να μείνει έτσι, με εις άτοπον απαγωγή, η πρώτη υπόθεση. Αλλά μπορεί να δειχτεί ότι η υπόθεση αυτή είναι ισοδύναμη με το 5° αίτημα του Ευκλείδη. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να αποδειχτεί το αίτημα των παραλλήλων και να εκλείψει το ψεγάδι της παραδοχής του Ευκλείδη.

Με τη σιωπηλή παραδοχή, όπως έκανε και ο Ευκλείδης (στην απόδειξη της Πρότασης I16), ότι οι ευθείες γραμμές είναι άπειρες σε μήκος, ο Saccheri κατάφερε να απορρίψει την υπόθεση της αμβλείας γωνίας, αλλά η υπόθεση της οξείας γωνίας αποδείχτηκε πολύ δυσκολότερη και τελικά αδύνατη. Αξιόλογες προσπάθειες για την εύρεση αντίφασης στην υπόθεση της οξείας γωνίας έκαναν επίσης και οι Johann Heinrich Lambert (1728-1777) και Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Αυτό όμως δεν επετεύχθη. Το γεγονός ωστόσο αυτό δεν είναι παράξενο καθώς σήμερα είναι γνωστό πως η γεωμετρία που αναπτύχθηκε από ένα ορισμένο βασικό σύνολο υποθέσεων μαζί με την υπόθεση της οξείας γωνίας, είναι τόσο συνεπής όσο και η Ευκλείδεια γεωμετρία που αναπτύχθηκε από το ίδιο βασικό σύνολο υποθέσεων μαζί με την υπόθεση της ορθής γωνίας. Με άλλα λόγια δηλαδή, ***ότι το αίτημα των παραλλήλων δεν μπορεί να εξαχθεί ως θεώρημα από τις άλλες υποθέσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά είναι ανεξάρτητο από τις υποθέσεις αυτές.***

Χρειάστηκε πολύ μεγάλη φαντασία για να υποστηριχτεί μια τέτοια δυνατότητα γιατί το ανθρώπινο μυαλό για δυο χιλιετίες είχε περιχαρακωθεί από την προκατάληψη της παράδοσης στη σταθερή πίστη πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν σίγουρα η μόνη αυθεντική και πως κάθε αντίθετο γεωμετρικό σύστημα απλά δεν μπορούσε να είναι συνεπές.

Οι πρώτοι που υποπτεύτηκαν την ανεξαρτησία του αιτήματος των παραλλήλων ήταν ο Karl Freidrich Gauss (1777-1855) από τη Γερμανία, ο Janos Bolyai (1802-1860) από την Ουγγαρία και ο Lobachevski (1793-1856) από τη Ρωσία. Οι τρεις αυτοί μαθηματικοί, ανεξάρτητα ο ένας από των άλλο προσέγγισαν το θέμα με τη μορφή του αιτήματος όπως το διατύπωσε ο Playfair, μελετώντας τρεις δυνατότητες: Από ένα δεδομένο σημείο που δεν βρίσκεται πάνω σε μια δεδομένη ευθεία γραμμή, μπορούμε να

φέρουμε μόνο μια, καμία ή περισσότερες από μια ευθείες γραμμές παράλληλες προς τη δεδομένη ευθεία. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις υποθέσεις της ορθής, της αμβλείας και της οξείας γωνίας. Δεχόμενοι, όπως έκαναν οι προγενέστεροι τους, ότι μια ευθεία γραμμή έχει άπειρο μήκος, η δεύτερη περίπτωση απορριπτόταν εύκολα. Ωστόσο, η αδυναμία να βρουν μια αντίφαση στη τρίτη περίπτωση οδήγησε καθέναν από τους τρεις μαθηματικούς να υποψιαστούν έγκαιρα μια συνεπή αν και ίσως παράξενη γεωμετρία κάτω απ' αυτή την υπόθεση και καθένας χωρίς να γνωρίζει τη δουλειά των άλλων δυο, πέτυχε για το δικό του, το προσωπικό ενδιαφέρον, μια εκτεταμένη ανάπτυξη της νέας γεωμετρίας.

Ο Gauss ήταν ίσως ο πρώτος που στόχευσε σε μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Δυστυχώς όμως δεν κατάφερε σε όλη του τη ζωή να δημοσιεύσει κάτι πάνω στο θέμα αυτό. (Ήθελε να αποφύγει την κατακραυγή των Βοιωτών τους οποίους οι Αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν ανόητους (D. Davis, 2001)). Τα συμπεράσματα του μας είναι γνωστά από γράμματα σε φίλους, από δυο δημοσιευμένες κριτικές για έργα άλλων και από μερικές σημειώσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στα χαρτιά του μετά το θάνατο του. Τέλος, αυτός ήταν που ονόμασε τη γεωμετρία *Μη Ευκλείδεια*.

Ο δεύτερος που στόχευσε σε μια *Μη Ευκλείδεια* Γεωμετρία ήταν ο Bolyai. Ο

Bolyai, επηρεάστηκε και παρακινήθηκε να μελετήσει το αίτημα αυτό από τον πατέρα του, τον μαθηματικό Farkas Bolyai ο οποίος είχε ασχοληθεί με το θέμα αυτό. Σε ένα γράμμα του προς τον πατέρα του, ο Janos Bolyai αποκαλύπτει την απόφαση του να δημοσιεύσει ένα φυλλάδιο πάνω στη θεωρία των παραλλήλων, μόλις θα έβρισκε το χρόνο και την ευκαιρία να βάλει το υλικό σε τάξη και χαρακτηριστικά αναφωνεί: «*Από το τίποτα έχω δημιουργήσει ένα παράξενο νέο σύμπαν*».

«*Έχω πάρει την απόφαση να δημοσιεύσω μια εργασία στη θεωρία των παραλλήλων μόλις βάλω σε τάξη το σχετικό υλικό και μου το επιτρέψουν οι περιστάσεις…Ο στόχος δεν έχει εισέτι επιτευχθεί, έχω όμως προχωρήσει σε τόσο θαυμάσιες ανακαλύψεις που με έχουν συνεπάρει και η απώλεια τους θα ήταν πηγή αδιάκοπης λύπης…* ***Έχω δημιουργήσει ένα καινούριο σύμπαν από το τίποτα****. Ότι σου έχω στείλει μέχρι τώρα δεν είναι παρά ένα σπίτι από τραπουλόχαρτα, συγκρινόμενα με ένα πύργο*» (D. Davis, 2001).

Σημειώνουμε ότι αρχικά ο πατέρας του Janos Bolyai, Wolfgang Bolyai, συμμαθητής του Gauss, ήταν αντίθετος με την ενασχόληση του γιου του με το αίτημα των παραλλήλων εξαιτίας της απογοήτευσης που είχε δοκιμάσει ο ίδιος ασχολούμενος με αυτό το θέμα. Έγραφε:

«*Δεν πρέπει να επιχειρήσεις αυτήν την προσέγγιση στις παράλληλες. Γνωρίζω αυτόν το δρόμο πολύ καλά ως το τέλος του. Έχω διασχίσει αυτήν την απύθμενη νύχτα που έσβησε όλο το φως και τη χαρά από τη ζωή μου. Σε ικετεύω, παράτησε αυτήν την επιστήμη των παραλλήλων στην ησυχία της…. Αυτή η αβυσσαλέα σκοτεινιά θα μπορούσε ίσως να καταπιεί χίλιους Νεύτωνες*». (D. Davis, 2001).

Ωστόσο, το γράμμα του γιου του, του μετέδωσε τον ενθουσιασμό και τον παρότρυνε να καθαρογράψει τα ευρήματα του το συντομότερο δυνατό.

«*Αν έχεις πραγματικά επιτύχει κάτι καλό σχετικά με το πρόβλημα, θα ήταν ενδεδειγμένο να μην καθυστερήσεις τη δημοσιοποίηση του για δυο λόγους: πρώτα διότι οι ιδέες εύκολα περνούν από τον ένα στον άλλο και είναι πολύ πιθανό κάποιος να σε προλάβει στη δημοσίευση των αποτελεσμάτων και κατά δεύτερο λόγο, πρέπει να ξέρεις πως για πολλά πράγματα υπάρχει μια ορισμένη εποχή κατά την οποία ευδοκιμούν ταυτόχρονα σε πολλά μέρη όπως για παράδειγμα οι βιολέτες την άνοιξη. Επίσης, κάθε επιστημονική διαπάλη συνιστά σοβαρό πόλεμο, του οποίου το τέλος δεν μπορώ να πω πότε έρχεται. Οφείλουμε, επομένως, να προχωρούμε σε κατακτήσεις όταν είμαστε σε θέση, μια και ο πρώτος έχει πάντοτε σημαντικό πλεονέκτημα*».

Τελικά το φυλλάδιο αυτό εμφανίστηκε ως ένα εικοσιεξάλιδο παράρτημα στο πρώτο τόμο του έργου του πατέρα του, *Πραγματεία επί των στοιχείων των μαθηματικών για μελετηρούς νέους*, και είναι και το μοναδικό που δημοσίευσε πάνω στο θέμα αυτό. Αυτό οφείλεται εν μέρει στην μη αναγνώριση της αξίας του από τον Gauss. Ωστόσο, άφησε πλήθος χειρόγραφες σελίδες σχετικά μ' αυτό.

Τονίζουμε τέλος ότι ο Janos Bolyai, αντίθετα από το Saccheri αντελήφθη ότι πρόκειται για ένα τύπο Γεωμετρίας ανάλογης αξίας με την Ευκλείδεια (ο Heath, γράφει *πως υπήρξε θύμα της προκατάληψης της εποχής του ότι η μόνη δυνατή γεωμετρία ήταν η Ευκλείδεια και παρουσιάζει το περίεργο θέαμα ενός ανθρώπου που αναγείρει ένα οικοδόμημα πάνω σε καινούρια θεμέλια με σπουδή και εργατικότητα σκοπεύοντας να το γκρεμίσει αμέσως μετά* (Heath, 1956)), και ότι σε αντίθεση με το Gauss δεν φοβήθηκε να δημοσιοποιήσει τις ιδέες του.

Παρόλο που οι Gauss και Bolyai αναγνωρίζονται ως οι πρώτοι που συνέλαβαν μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, ο ρώσος μαθηματικός Lobachevski ήταν στην πραγματικότητα ο πρώτος που δημοσίευσε μια συστηματική ανάπτυξη του θέματος.

Η πρώτη του μελέτη πάνω στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία δημοσιεύτηκε στα 1829-1830 στον Αγγελιοφόρο του Καζάν, δυο ή τρία χρόνια πριν τυπωθεί το έργο του Bolyai, μια μελέτη που πέρασε απαρατήρητη. Ακολούθησαν άλλες δυο δημοσιεύσεις μια στα γερμανικά (1840) και μια στα γαλλικά (1855). Ο ίδιος δεν έζησε για να δει το έργο του να αποκτά κάποια αναγνώριση. Η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία που αυτός ανέπτυξε συχνά σήμερα αναφέρεται ως Λομπατσέφσκια Γεωμετρία, ενώ του έχει αποδοθεί ο τίτλος «ο Κοπέρνικος Της Γεωμετρίας».

Η αρμόζουσα προσοχή στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία δόθηκε μόνο μερικά χρόνια μετά την εμφάνιση του Lobachevski. Ένα ακόμη πράγμα έμενε να επιτευχθεί: να δοθούν αποδείξεις της εσωτερικής συνέπειας της νέας γεωμετρίας, δηλαδή αποδείξεις για την συνέπεια της υπόθεσης της οξείας γωνίας. Οι αποδείξεις αυτές δόθηκαν από τον Eugenio Beltrami (1835–1900), τον Arthur Cayley (1821-1895), τον Felix Klein (1849-1925), τον Henri Poincare (1854-1912) και άλλους.

Επακόλουθο της συνέπειας της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Lobachevski, είναι ότι έφερε τη κατάληξη του παλιού προβλήματος του αιτήματος των παραλλήλων. Η συνέπεια απέδειξε ότι το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τις άλλες υποθέσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και απέδειξε την αδυναμία να εξαχθεί το αίτημα ως θεώρημα από τις άλλες υποθέσεις.

Υπάρχουν ωστόσο επακόλουθα της συνέπειας της Μη Ευκλείδειας γεωμετρίας που φτάνουν πολύ μακρύτερα από το τερματισμό του προβλήματος το αιτήματος των παραλλήλων. Ένα από τα πιο σημαντικά είναι η απελευθέρωση της γεωμετρίας από τη παραδοσιακή της μορφή. Τα αξιώματα της γεωμετρίας έγιναν για τον μαθηματικό απλές υποθέσεις που η φυσική τους αλήθεια ή το ψέμα δεν τον απασχολούσε. Ο μαθηματικός μπορούσε να παίρνει τα αξιώματα του όπως ήθελε, με μόνη προϋπόθεση να έχουν μια συνέπεια μεταξύ τους. Αποδείχτηκε ότι ένα αξίωμα όπως χρησιμοποιείται η λέξη από τους μαθηματικούς, δεν έχει καμία σχέση με το αυταπόδεικτο ή την αλήθεια. Επίσης, τα μαθηματικά πλέον θεωρούνται ως αυθαίρετη δημιουργία του ανθρώπινου νου και όχι ως

κάτι που ουσιαστικά μας το υπαγόρευσε κάποια αναγκαιότητα του κόσμου που ζούμε. Το ζήτημα αυτό τίθεται καθαρά στα παρακάτω λόγια του Ε.Τ. Μπελ (E.T.Bell):

«*Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ο μυθιστοριογράφος επινοεί τους χαρακτήρες, τους διαλόγους και τις καταστάσεις των οποίων ο ίδιος είναι δημιουργός και καθοδηγητής, έτσι και ο μαθηματικός επινοεί ανάλογα τα αξιώματα πάνω στα οποία στηρίζει τα μαθηματικά του συστήματα. Και ο μυθιστοριογράφος και ο μαθηματικός ίσως να επηρεάζονται από το περιβάλλον τους στην επιλογή και το χειρισμό του υλικού τους, κανένας τους όμως δεν εξαναγκάζεται από καμία εξωανθρώπινη, αιώνια αναγκαιότητα να δημιουργήσει ορισμένους χαρακτήρες ή να επινοήσει ορισμένα συστήματα*». (Howard Eves,1990).

Θα δούμε στη συνέχεια περιληπτικά τα πιο βασικά στοιχεία των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, Υπερβολικής και Ελλειπτικής. Στο τέλος παραθέτουμε πίνακα σύγκρισης αυτών με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

2.1.6 Υπερβολική Γεωμετρία

Η υπερβολική γεωμετρία, οικοδομείται στην βάση του συστήματος αξιωμάτων Ευκλείδη – Hilbert, όπου όμως το $5^{ο}$ αξίωμα του Ευκλείδη, έχει αντικατασταθεί από το υπερβολικό αξίωμα:

«Υπάρχει μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής, έτσι ώστε από το Α να διέρχονται δύο τουλάχιστον παράλληλες προς την ευθεία ε».

Επιπλέον, αποδεικνύεται ό,τι αν ισχύει το υπερβολικό αξίωμα, τότε ισχύει και το γενικευμένο υπερβολικό αξίωμα:

«Για κάθε σημείο Α εκτός ευθείας ε, υπάρχουν άπειρες ευθείες παράλληλες προς την ε».

➡ Το κοινό μέρος αξιωμάτων της Ευκλείδειας και της Υπερβολικής Γεωμετρίας, λέμε ότι αποτελεί την «***Ουδέτερη Γεωμετρία***»

Ορισμένα θεωρήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας

⇨**Αίτημα 5Υ:** Δοθέντος ενός σημείου εκτός ευθείας, υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες διερχόμενες από το δοθέν σημείο, οι οποίες όσο και αν προεκταθούν δεν τέμνουν τη δοθείσα ευθεία.

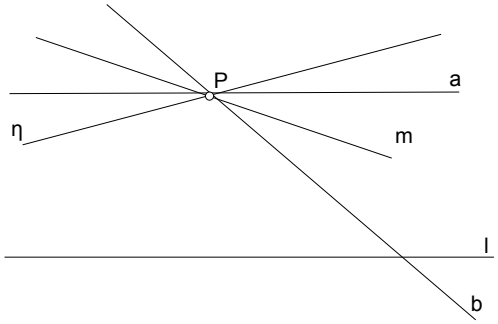
⇨**Θεώρημα:** Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από $180^{ο}$.

⇨**Θεώρημα:** Δυο τρίγωνα με ίσες τις αντίστοιχες τους γωνίες είναι ίσα.

⇨**Θεώρημα:** Δοθέντος σημείου Ρ εκτός ευθείας l, υπάρχουν δυο ευθείες, m και n διερχόμενες από το Ρ οι οποίες δεν τέμνουν την l, με την ιδιότητα:

i Όλες οι ευθείες μεταξύ των m και n δεν τέμνουν την l.

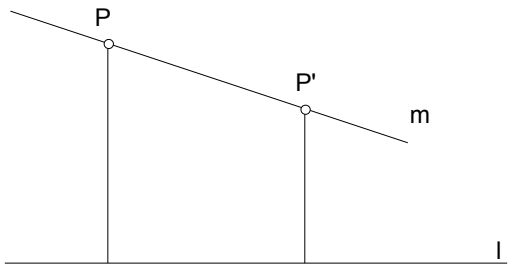
ii Όλες οι ευθείες που δεν βρίσκονται μεταξύ των m και n και διέρχονται από το Ρ τέμνουν την l.



⇨**Θεώρημα:** Αν η m διέρχεται από το r και είναι παράλληλη της l, και το P΄ είναι ένα άλλο σημείο επί της m, τότε η m διέρχεται από το P΄ και είναι παράλληλη της l. Δηλαδή, η m είναι η χαμηλότερη ευθεία (στη μια κατεύθυνση) που διέρχεται από το P΄ και η οποία δεν τέμνει την l.

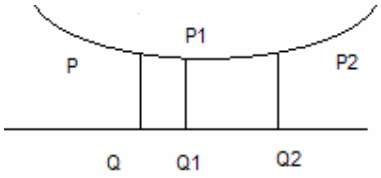
Αν η m είναι παράλληλη της l, τότε η l είναι παράλληλη της m.

⇨**Θεώρημα:** Οι παράλληλες ευθείες πλησιάζουν η μια την άλλη ασυμπτωτικά στην κατεύθυνση της παραλληλίας τους. Επιπλέον, η απόσταση μεταξύ τους μειώνεται συνεχώς καθώς κινούμαστε στην κατεύθυνση της παραλληλίας.



⇨**Θεώρημα:** Δυο ευθείες με μια κοινή κάθετη είναι αποκλίνουσες, και αποκλίνουσες ευθείες έχουν μια και μόνο μια κοινή κάθετη.

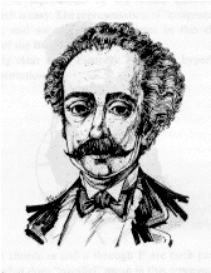
(Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι παράλληλες ευθείες έχουν άπειρες κοινές κάθετες, ενώ στην Υπερβολική Γεωμετρία ευθείες (αυστηρά) παράλληλες δεν έχουν καμία και αποκλίνουσες ευθείες έχουν μόνο μία. Στο παρακάτω σχήμα η μοναδική κάθετως είναι η PQ).



⇨**Θεώρημα:** Η απόσταση μεταξύ αποκλινουσών γραμμών αυξάνεται καθώς απομακρύνεται κανείς από την κοινή κάθετη.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ένα **μοντέλο** για την υλοποίηση της υπερβολικής γεωμετρίας οφείλεται στον



Beltrami. Ο **Beltrami** προηγήθηκε χρονικά των Klein και Poincare**.** Το «όχι πλήρες» μοντέλο του δημοσιεύτηκε το 1868. Σύμφωνα με αυτό η Υπερβολική Γεωμετρία μπορεί να υλοποιηθεί πάνω σε μια ψευδόσφαιρα.

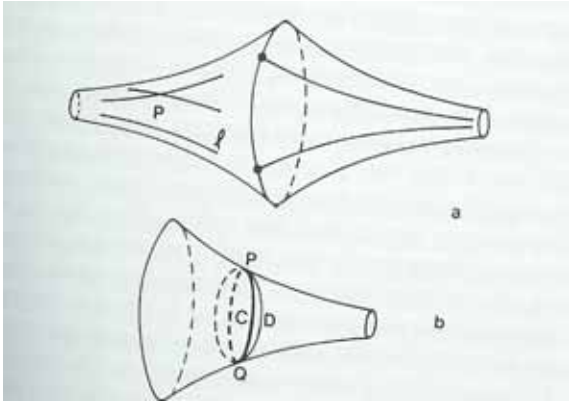
Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο εφοδιασμένο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, ορίζουμε:

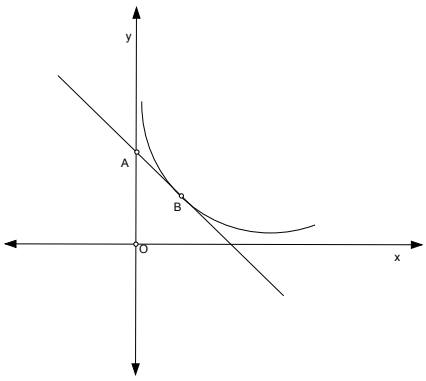
- **Υπερβολικό επίπεδο**, το σύνολο των σημείων {M (x,y) / y >0}.
- **Υπερβολικές ευθείες**, ορίζουμε τις ημιευθείες και τα ημικύκλια, που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ και περιέχονται στο υπερβολικό επίπεδο.
- **Υπερβολικό σημείο**, ορίζουμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του επιπέΔΟΥ..

Τέλος:

- **Παράλληλες** λέγονται δύο ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Η ψευδόσφαιρα παράγεται από τη περιστροφή ως προς τον άξονα των y μιας καμπύλης C τα σημεία της οποίας έχουν την ιδιότητα: Το τμήμα AB της εφαπτομένης από το οποίο σημείο επαφής A ως τον άξονα των y να είναι σταθερό. Ωστόσο, στο μοντέλο αυτό δεν υλοποιείται ολόκληρη η Υπερβολική Γεωμετρία παρά μόνο μέρος της.





Ένα άλλο **μοντέλο** της υπερβολικής γεωμετρίας, το οποίο οφείλεται στον **Klein**, είναι το εξής:

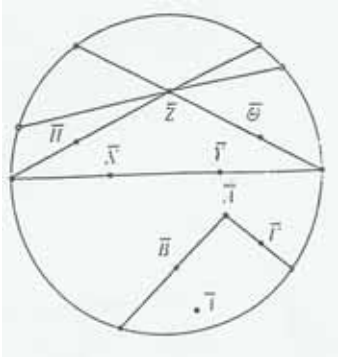
ΜΟΝΤΕΛΟ KLEIN

Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο, θεωρούμε κύκλο (O,R). Τότε ως:

- **Υπερβολικό επίπεδο**, θεωρούμε το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.
- **Υπερβολικές ευθείες**, θεωρούμε τις χορδές του κύκλου χωρίς τα άκρα τους
- **Υπερβολικό σημείο**, θεωρούμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του υπερβολικού επιπέδου.
- **Παράλληλες** λέγονται δύο ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Και στο μοντέλο αυτό, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα της Ουδέτερης Γεωμετρίας και επιπλέον ισχύει το υπερβολικό αξίωμα.

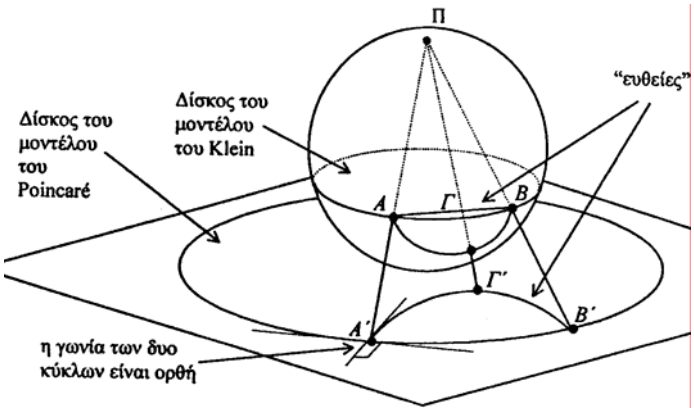
Πράγματι, όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα,



- Από το σημείο $\overline{Z}$ εκτός της ευθείας $\overline{XY}$ άγονται περισσότερες από μια παράλληλες προς αυτήν (δεν την τέμνουν εντός του επιπέδου, δεδομένου ότι τα σημεία της περιφέρειας δεν ανήκουν στο επίπεδο), επομένως πρόκειται για μια μη Ευκλείδεια Γεωμετρία και συγκεκριμένα για την υπερβολική.
- Η ημιευθεία $\overline{Z\Theta}$ είναι οριακά παράλληλη προς την $\overline{XY}$ και η ημιευθεία $\overline{ZH}$ είναι οριακά παράλληλες προς την $\overline{YX}$ δηλαδή πρόκειται για παράλληλες που καθορίζουν τα όρια των παραλλήλων προς την $\overline{XY}$ (οι ευθείες που περνάνε από το $\overline{Z}$ και βρίσκονται δεξιά της $\overline{ZH}$ και αριστερά της $\overline{Z\Theta}$ τέμνουν την $\overline{XY}$ **).**
- Δεν είναι πάντα δυνατό να βρούμε μια ευθεία που να περνάει από εσωτερικό σημείο (το $\overline{\Delta}$) μιας γωνίας (της $\overline{B\Delta\Gamma}$) και να τέμνει και τις δυο πλευρές της.

Με χρήση του παραπάνω προτύπου, μπορεί να υλοποιηθεί η υπερβολική Γεωμετρία και σε ένα άλλο **μοντέλο, του Poincare**, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ POINCARE



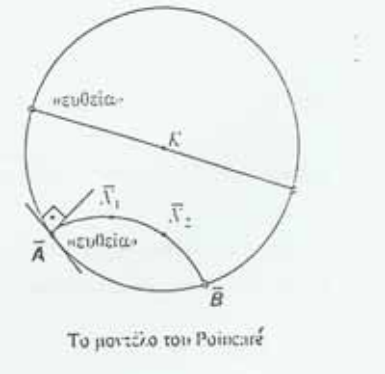
Εικόνα 1

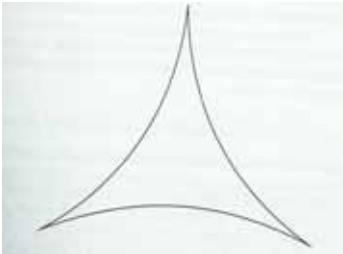
Το μοντέλο του Poincare (1854-1912) προκύπτει από το μοντέλο του Klein, με στερεογραφική προβολή, όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα. Επειδή η στερεογραφική προβολή, διατηρεί τις γωνίες και το επίπεδο των Α,Β,Γ είναι κάθετο στο δίσκο του μοντέλου του Klein (το ημικύκλιο ΑΓΒ είναι τομή του επιπέδου. αυτού με τη σφαίρα), το τόξο κύκλου Ά΄Γ΄Β είναι κάθετο στο στη περιφέρεια του δίσκου του Poincare. Έτσι, το μοντέλο του Poincare έχει ως :

- **επίπεδο** (και πάλι) έναν ανοιχτό δίσκο, τον οποίο θα υποθέσουμε μοναδιαίο
- **ευθείες** τις προβολές των ευθειών του δίσκου του Klein, οι οποίες θα είναι είτε τόξα κύκλων κάθετων στην περιφέρεια του δίσκου (όπως πριν), είτε διάμετροι του κύκλου αν η ευθεία ΑΒ είναι διάμετρος του δίσκου του Klein.
- **Σημεία** τα εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου δίσκου

Και σε αυτό το μοντέλο έχουμε από ένα σημείο εκτός ευθείας περνάνε περισσότερες από μια παράλληλες της και υπάρχουν «οριακές παράλληλοι». (Στράτζαλος, 2002)

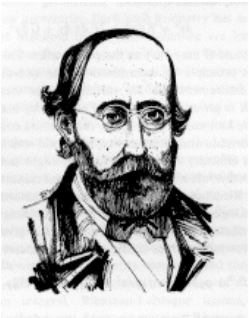
(Υπερβολικό ↓ τρίγωνο)



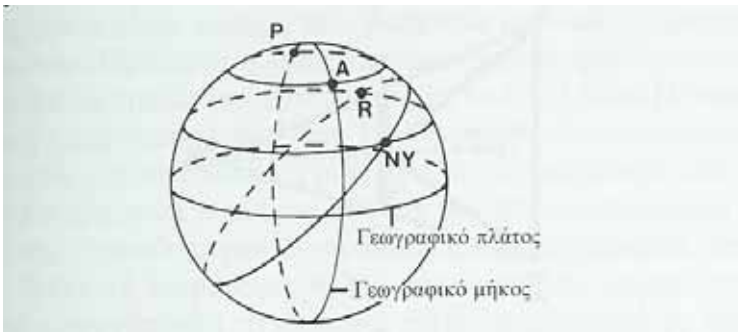


2.1.7 Ελλειπτική Γεωμετρία

Ένας άλλος τύπος Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, πιο προσιτός στη διαίσθηση από



την Υπερβολική Γεωμετρία, αλλά λιγότερο προσιτός ως προς τα θεωρήματα, είναι η Γεωμετρία σε σφαίρα, όπως είναι η επιφάνεια της Γης. Η αναγνώριση ότι αυτός ο κόσμος μπορεί να αποτελέσει εναλλακτική απάντηση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αποδίδεται στον Γερμανό μαθηματικό **Bernhard Riemann (1826-1866).** (D. Davis, 2001)



Υπάρχουν δυο ειδών Ελλειπτικής Γεωμετρίας:
Η **απλή Ελλειπτική Γεωμετρία** και η **διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία**.

Στην **απλή Ελλειπτική Γεωμετρία** ισχύουν τα εξής: Τα αιτήματα **1, 3, 4** της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αντί για τα αιτήματα 2 και 5 έχουμε:

2΄: Ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί σε μια ευθεία. Η ευθεία αυτή μπορεί να είναι χωρίς όρια αλλά όχι απαραιτήτως άπειρου μήκους.

5΄: Δυο ευθείες τέμνονται πάντοτε.

Επίσης, στην απλή Ελλειπτική Γεωμετρία ισχύουν οι προτάσεις:

Α Μια ευθεία δεν χωρίζει το επίπεδο

Β Δυο διαφορετικά σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία.

Ενώ στην **διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία** ισχύουν τα εξής:

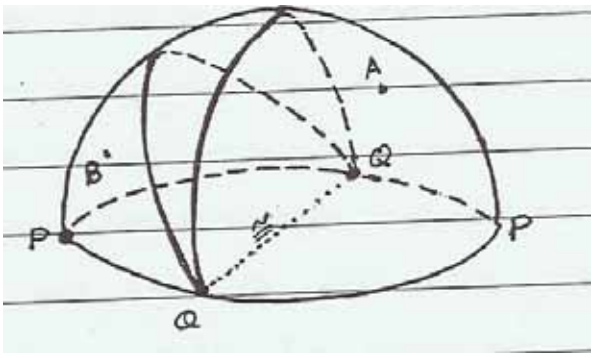
Τα αιτήματα 1, 2΄, 3, 4, 5΄. Και οι προτάσεις

Α Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο

Β Δυο διαφορετικά σημεία δεν ορίζουν μοναδική ευθεία.

Με την βοήθεια των παραπάνω αξιωμάτων, το **μοντέλο υλοποίησης** της **απλής ελλειπτικής γεωμετρίας** είναι το εξής: Ορίζουμε ως

- **Επίπεδο** της Ελλειπτικής Γεωμετρίας**:** την επιφάνεια μιας σφαίρας.
- **Σημεία** της Ελλειπτικής Γεωμετρίας**:**
  - τα σημεία της επιφάνειας ενός ημισφαιρίου (στον Ευκλείδειο χώρο $\Re^2$) εφ' όσον αυτά δεν κείνται επί της γραμμής του ισημερινού και
  - τα σημεία του ισημερινού όταν τα ταυτίσουμε με τα αντιδιαμετρικά τους
- **Ευθείες της Ελλειπτικής Γεωμετρίας:** τους μισούς μέγιστους κύκλους της σφαίρας.



Ενώ το **μοντέλο υλοποίησης** της **διπλής ελλειπτικής γεωμετρίας** είναι το εξής: Ορίζουμε ως

- **Ελλειπτικό επίπεδο**, την επιφάνεια μιας σφαίρας.
- **Ελλειπτικό σημείο**, ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων πάνω στο ελλειπτικό επίπεδο.
- **Ελλειπτική ευθεία**, (όλο) τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας που διέρχεται από δύο διακεκριμένα ελλειπτικά σημεία.

Πιο συγκεκριμένα, έχω το παρακάτω σχήμα, στο οποίο:

- **Ελλειπτικό επίπεδο** είναι η επιφάνεια της σφαίρας Ο
- **Ελλειπτικό σημείο** είναι κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της Ο
- **Ελλειπτική ευθεία** είναι κάθε μέγιστος κύκλος του Ο

Το ζεύγος (N, S) καθώς και το ζεύγος (A,B) είναι Ελλειπτικά σημεία. Τα δύο αυτά σημεία, ορίζουν την Ελλειπτική ευθεία (N, S) (A, B), δηλαδή τον μέγιστο κύκλο ANBS της σφαίρας Ο.

Απόσταση δύο ελλειπτικών σημείων ορίζεται ως το πιο μικρό τόξο από τα δύο τόξα που ορίζουν τα δύο ελλειπτικά σημεία, έτσι η μέγιστη δυνατή απόσταση δυο ελλειπτικών σημείων είναι π/2, αν θέσω την ακτίνα του κύκλου ίση με την μονάδα.

Αποδεικνύεται ακόμη ότι το άθροισμα των γωνιών ενός Ελλειπτικού τριγώνου είναι πάνω από 180°.

Μέσω των μοντέλων μπορούμε να διατυπώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες της Ελλειπτικής Γεωμετρίας (Βασιλείου, 2003) :

Απλή Ελλειπτική Γεωμετρία	**Διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία**
Μια ευθεία **δεν** χωρίζει το επίπεδο	Μια ευθεία χωρίζει το επίπεδο
Από δυο σημεία διέρχεται τουλάχιστον μια ευθεία	Από δυο σημεία διέρχεται τουλάχιστον μια ευθεία
Δυο ευθείες τέμνονται ακριβώς **σε ένα** σημείο	Δυο ευθείες τέμνονται ακριβώς **σε δυο** σημεία
Όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος	Όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεδαλύτερο από 180°.	Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεδαλύτερο από 180°.

Πίνακας που συγκρίνει την Ευκλείδεια και τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία

(P. J. Davis- R. Hersh, Από το βιβλίο των Prenowitz και Jordan, Geometry.)

	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ			
	Ευκλείδη	**Lobachevsky**	**Riemann**	
Δυο διαφορετικές ευθείες τέμνονται	Το πολύ σε ένα	Το πολύ σε ένα	Σε ένα (απλή Ελλειπτική) Σε δυο (διπλή Ελλειπτική)	Σημείο Σημεία
Με δεδομένη την ευθεία Ε και ένα σημείο Σ έξω από την Ε υπάρχει(ουν)	Μοναδική ευθεία	Δυο ευθείες τουλάχιστον	Καμία ευθεία	Που περνά(ουν) από το Σ και είναι παράλληλη(ες) στην Ε
Μια ευθεία	Χωρίζεται	Χωρίζεται	Δε χωρίζεται	Σε δυο τμήματα από ένα σημείο.
Παράλληλες ευθείες	Ισαπέχουν	Δεν ισαπέχουν ποτέ	Δεν υπάρχουν	
Αν μια ευθεία τέμνει τη μια από τις δυο παράλληλες τότε	Πρέπει	Μπορεί ή δεν μπορεί		Να τέμνει την άλλη
Η υπόθεση του Saccheri που ισχύει είναι η υπόθεση	Της ορθής γωνίας	Της οξείας γωνίας	Της αμβλείας γωνίας	
Δυο ευθείες κάθετες στην ίδια γραμμή	Είναι παράλληλες	Είναι παράλληλες	Τέμνονται	
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι	Ίσο με	Λιγότερο από	Μεγαλύτερο από	180°
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι	Ανεξάρτητο	Ανάλογο με την έλλειψη	Ανάλογο με την υπερβολή	Του αθροίσματος των γωνιών του
Δυο τρίγωνα με ίσες τις αντίστοιχες γωνίες είναι	Όμοια	Ισοδύναμα	Ισοδύναμα	

ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΤΡΙΩΝ (Στράντζαλος, 2002)

Ευκλείδης (~300π.Χ.) $\xrightarrow{\text{Κριτική στο } 5^{o} \text{ αίτημα}}$ Πρόκλος(~ 410 – 485)
Nassireddin(1201 – 1274)
Wallis(1616 – 1703)

$\xrightarrow{\text{Ουσιώδης Κριτική στο } 5^{o} \text{ αίτημα}}$ *Saccheri*(1667 – 1733)
Lambert(1728 – 1777)
Legenre(1752 – 1833)

$\xrightarrow{\text{πρώτα συμπεράσματα στην Υπερβολική Γεωμετρία}}$ Gauss (1777-1855)

$\xrightarrow{\text{Ενδιαφέρουσες συνεισφορές}}$ Kant (1724 - 1804)
Schweikart (1780 - 1859)
Taurinuw (1794 - 1874)
Legendre (1752 - 1833)

$\xrightarrow{\text{Το ρητό σπάσιμο του φράγματος}}$

Lobachevski(1793 – 1856)
J.Bolyai(1802 – 1860)

$\xrightarrow{\text{Τα μοντέλα νομιμοποίησης}}$ *Gauss*(1777 – 1855)
Όλική Γεωμετρία Επιφανειών
Beltrami(1853 – 1900)
Klein(1849 – 1925)
Το πρώτο πλήρες μοντέλο
Poincare(1854 – 1912)
λειτουργικό μοντέλο

$\xrightarrow{\text{Η πρώτη πλήρης αξιωματική θεμελίωση της Υπερβολικής και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πνεύμα ττο Ευκλείδη.}}$ Hilbert
(1862 - 1943)

2.1.8 Συμπέρασμα

Στόχος της εργασίας, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή είναι η ανάδειξη της αξίας του λάθους μέσα από ιστορικά παραδείγματα. Πρώτος σταθμός μας σε αυτήν την ιστορική αναδρομή είναι το 5^{ο} αίτημα του Ευκλείδη, το αξίωμα της παραλληλίας.

Το αίτημα αυτό έγινε αντικείμενο πολλών συζητήσεων και διαφωνιών για πάρα πολλά χρόνια. Κορυφαίοι μαθηματικοί προσπάθησαν να το αποδείξουν, ανάμεσα τους οι Πτολεμαίος και Πρόκλος, όμως σε κάθε περίπτωση κάπου υπήρχε λάθος.

Η καλύτερη μελέτη του 5^{ου} αιτήματος με σκοπό την αναγνώριση της αξίας του, απαιτεί γνώση της θέσης των μαθηματικών την εποχή που διατυπώθηκε. Για το λόγο αυτό κρίναμε σκόπιμο την ανάπτυξη των αξιωματικών συστημάτων του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη. Παρατηρήσαμε λοιπόν, πως τόσο στον Αριστοτέλη όσο και στον Ευκλείδη πρωταρχική αξία έχουν οι *Ορισμοί*. Τα αιτήματα αντιθέτως, προσπαθούσαν να τα μειώσουν, ακόμα και να τα εξαφανίσουν αντικαθιστώντας τα, αν αυτό ήταν δυνατόν με κατάλληλους ορισμούς.

«***Πολλαῖς τε τῶν θέσεων μὴ καλῶς ἀποδιδομένου τοῦ ὁρισμοῦ οὐ ῥᾴδιον διαλέγεσθαι … τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον».***

Πίστευαν λοιπόν πως αν είχαμε ένα κατάλληλο ορισμό της παραλληλίας τότε το αίτημα αυτό θα αποδεικνυόταν. Στο πλαίσιο αυτής της φιλοσοφικής άποψης οι Πτολεμαίος και Πρόκλος αποπειράθηκαν να το αποδείξουν. Παρατίθενται χαρακτηριστικά χωρία από τα «Αναλυτικά Ύστερα», «Τοπικά» και «Μεταφυσικά» του Αριστοτέλη που επιβεβαιώνουν τις αντιλήψεις του περί ορισμών, αξιωμάτων, προτάσεων και αποδείξεων και με τη βοήθεια αυτών γίνεται σύγκριση με το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη.

Ακολουθούν οι αποδείξεις των Πτολεμαίο και Πρόκλο με εντοπισμό των λαθών που δεν κατάφεραν να αποφύγουν. Το λάθος στο οποίο υπέπεσε ο Πτολεμαίος ήταν ουσιαστικά ότι χρησιμοποίησε κάτι ισοδύναμο με αυτό που ήθελε να αποδείξει. (Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μια παράλληλη) ενώ τα λάθη του Πρόκλου ήταν δυο. Το πρώτο ήταν κοινό με του Πτολεμαίου και το δεύτερο ότι η πρόταση του Αριστοτέλη από την οποία ξεκινάει την απόδειξη του, χρειάζεται και η ίδια απόδειξη, δηλαδή χρησιμοποιεί ένα καινούριο αίτημα.

Η συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι το 5^{ο} αίτημα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, κυρίως όμως το ότι μπορούμε να θεμελιώσουμε μια εξίσου ισοδύναμη

Γεωμετρία με την Ευκλείδεια αρνούμενοι το 5^{ο} αίτημα, ήταν ένα τεράστιο και πολύ δύσκολο βήμα. Η δε σημαντικότητα του ανυπέρβλητη.

Πρωτοπόρος σε αυτήν την προσπάθεια ήταν ο Saccheri. Ο Saccheri στην προσπάθεια του να αποδείξει το 5^{ο} αίτημα διατυπώνει τρεις υποθέσεις. της οξείας γωνίας (≡Υπερβολική Γεωμετρία), της αμβλείας γωνίας (≡Ελλειπτική Γεωμετρία) και της ορθής γωνίας (≡Ευκλείδεια Γεωμετρία.). Τα θεωρήματα που παρήγαγε στηριγμένος στην υπόθεση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180^{ο}, συγκροτούν ένα είδος γεωμετρίας τόσο λογικής όσο και η Ευκλείδεια. Ωστόσο, ο Saccheri δεν το αντιλήφθηκε. Ο Heath γράφει *πως υπήρξε θύμα της προκατάληψης της εποχής του ότι η μόνη δυνατή γεωμετρία ήταν η Ευκλείδεια και παρουσιάζει το περίεργο θέαμα ενός ανθρώπου που αναγείρει ένα οικοδόμημα πάνω σε καινούρια θεμέλια με σπουδή και εργατικότητα σκοπεύοντας να το γκρεμίσει αμέσως μετά* (Heath, 1956).

Ο Gauss ήταν αυτός που πρώτος πιθανότατα αντιλήφθηκε ότι η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι εξίσου έγκυρη με την Ευκλείδεια, αλλά δεν δημοσίευσε τίποτα. Έγραψε πως ήθελε να αποφύγει την κατακραυγή των Βοιωτών τους οποίους οι Αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν ανόητους (D. Davis, 2001).

Ο Janos Bolyai δημοσιεύει ένα εικοσιεξάλιδο παράρτημα στο πρώτο τόμο του έργου του πατέρα του και είναι και το μοναδικό που δημοσίευσε πάνω στο θέμα αυτό. Χαρακτηριστικό αυτό που διατυπώνει «*Από το τίποτα έχω δημιουργήσει ένα παράξενο νέο σύμπαν*».

Ωστόσο, ο μαθηματικός Lobachevski ήταν στην πραγματικότητα ο πρώτος που δημοσίευσε μια συστηματική ανάπτυξη του θέματος. Η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία που αυτός ανέπτυξε συχνά σήμερα αναφέρεται ως Λομπατσέφσκια Γεωμετρία, ενώ του έχει αποδοθεί ο τίτλος «*ο Κοπέρνικος Της Γεωμετρίας*».

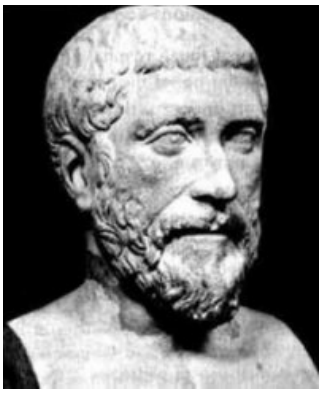
Ένας άλλος τύπος Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας που προέκυψε είναι η Γεωμετρία σε σφαίρα, όπως είναι η επιφάνεια της Γης. Η αναγνώριση ότι αυτός ο κόσμος μπορεί να αποτελέσει εναλλακτική απάντηση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αποδίδεται στον Γερμανό μαθηματικό Bernhard Riemann. (D. Davis2001).

Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στην άποψη πως η ίδια η επιστήμη βρίσκει πάντα τη δύναμη να αναγνωρίζει τα λάθη της και να προχωρά. Μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να χρειαστούν χρόνια, όμως κάποια στιγμή αυτό γίνεται. Οι προσπάθειες και αποτυχίες μέχρι εκείνη τη στιγμή αποτελούν τα σκαλοπάτια προς αυτήν την επιτυχία. Η ύπαρξη τους επομένως είναι αναγκαία.

2.2 *Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας-αρρητότητας*

2.2.1 Πυθαγόρειοι και ανακάλυψη των αρρήτων

Δεύτερος σταθμός μας στην ιστορία των μαθηματικών, με σκοπό την ανάδειξης της αξίας του λάθους, είναι η αρχική πίστη των Πυθαγορείων στην δομή του σύμπαντος από φυσικούς αριθμούς. Όπως αναφέρει ο Δ. Αναπολιτάνος, η κοσμική αρμονία ήταν για τους Πυθαγόρειους ταυτόσημη με την αρμονία που εκφραζόταν από τους λόγους φυσικών αριθμών. Αυτό τους οδήγησε στην πίστη πως το σύμπαν μπορούσε να περιγραφεί και καθοριστεί πλήρως στα πλαίσια ρητών σχέσεων της μορφής p/q με p και q φυσικούς και q≠0. Ο Δ. Αναπολιτάνος, συνεχίζει και λέει πως ήταν τόσο βαθιά ριζωμένη η πίστη των Πυθαγορείων στη δομή του σύμπαντος κατά τρόπο ρητό, ώστε η ανακάλυψη του Πυθαγορείου θεωρήματος να οδηγήσει σε κρίση. Αυτή η Πυθαγόρεια πίστη για σύμμετρη (ρητή) δομή του κόσμου έμελλε να διαψευσθεί. Το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμοζόμενο σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ίσες κάθετες πλευρές έχει σαν αποτέλεσμα τη διαπίστωση πως η υποτείνουσα του συγκεκριμένου τριγώνου δεν έχει κοινό μέτρο με τις κάθετες πλευρές του ίδιου τριγώνου. Αν δηλαδή, με ψ παραστήσουμε το μήκος της υποτείνουσας και με χ το μήκος μιας από τις κάθετες πλευρές τότε: $\psi^2 = 2\chi^2$. Αν ο λόγος $\frac{\psi}{\chi} = \frac{\kappa}{\lambda}$ δηλαδή είναι λόγος αριθμό προς αριθμό όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί, τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, τα μήκη ψ και χ είναι σύμμετρα. Αν όχι, τότε ο κόσμος δεν είναι κατασκευασμένος με τον τρόπο που οι Πυθαγόρειοι αρχικά περιέγραψαν.



Μια απόδειξη της αρρητότητας του «$\sqrt{2}$ [3]»

Η απόδειξη αυτή βασίζεται στη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής, και έχει ως εξής: Έστω ότι υπάρχουν κ, λ φυσικοί αριθμοί με (κ, λ) =1, δηλαδή κ, λ πρώτοι μεταξύ τους τέτοιοι ώστε $\frac{\psi}{\chi} = \frac{\kappa}{\lambda}$ και $\frac{\psi^2}{\chi^2} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} = 2$. Τότε $\kappa^2 = 2\lambda^2$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο α, ο α^2 είναι άρτιος αν και μόνο αν ο α είναι άρτιος. Επομένως αφού ο κ^2 είναι το διπλάσιο ενός ακέραιου, συμπεραίνουμε ότι ο κ^2 είναι άρτιος και συνεπώς και ο κ πρέπει να είναι άρτιος. Έστω λοιπόν κ = 2ν. Τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: $4\nu^2=2\lambda^2 \Leftrightarrow 2\nu^2=\lambda^2$ από την οποία καταλήγουμε ότι ο λ^2 είναι άρτιος και συνεπώς και ο λ είναι άρτιος. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού υποθέσαμε ότι οι κ και λ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έτσι η υπόθεση ότι υπάρχουν κ, λ φυσικοί αριθμοί με (κ, λ) =1, τέτοιοι ώστε $\frac{\psi}{\chi} = \frac{\kappa}{\lambda}$ και $\frac{\psi^2}{\chi^2} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} = 2$ (και άρα $\psi^2=2\chi^2$) μας οδήγησε σε μια αδύνατη κατάσταση και επομένως πρέπει να απορριφθεί. ■

Όλη η Πυθαγόρεια θεωρία κατέρρευσε. Μια μεγάλη κρίση προαγγελλόταν στα θεμέλια των μαθηματικών. Ήταν τόσο το σκάνδαλο ώστε σύμφωνα με φήμες έγιναν για ένα διάστημα προσπάθειες να κρατηθεί μυστικό. Ένας θρύλος λέει ότι ο Πυθαγόρειος Ίππασσος από το Μετάποντιο εξαφανίστηκε στη θάλασσα εξαιτίας της ασέβειας του να φανερώσει το μυστικό στους ξένους ή σύμφωνα με μια άλλη εκδοχή εξορίστηκε από τη κοινότητα των πυθαγορείων και στήθηκε ένα μνήμα του σαν να είχε πεθάνει. (H. Eves, 1989)

Ενδεικτικά αποσπάσματα σχετικά με το θέμα αυτό συναντάμε στο βιβλίο *Πυθαγόρειος βίος του Ιάμβλιχου*. (Το ιστορικό της ανακάλυψης της ασυμμετρίας, μια νέα θεώρηση του David H. Fowler).

[3] Η απόδειξη αυτή είναι σύγχρονη και είναι βασισμένη πάνω σε αυτήν που υπάρχει στον Αριστοτέλη Αναλυτικά Ύστερα 41a23-30, όπου διατυπώνεται η αρχή της αντίφασης: αν $\sqrt{2}$ σύμμετρο τότε περιττά=άρτια.

1. Ιάμβλιχος, Πυθαγόρειος Βίος [18,88,13 – 18,89,1]

«*περὶ δ᾽ Ἱππάσου μάλιστα, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρώτως σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων ἀπώλετο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς εὑρών, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι*».

«Για τον Ίππασο κατ' εξοχήν [λένε] πως ήταν ένας από τους Πυθαγορείους. Επειδή, όμως, αποκάλυψε τα μυστικά και περιέγραψε πρώτος σφαίρα αποτελούμενη από δώδεκα πεντάγωνα, χάθηκε μεν στη θάλασσα, επειδή ασέβησε, απέκτησε όμως δόξα, γιατί το ανακάλυψε, αυτά όμως όλα ανήκουν σ' «εκείνον» τον άνδρα. Επειδή έτσι ονομάζουν τον Πυθαγόρα και δεν τον προσαγορεύουν με το όνομα του».

2. Ιάμβλιχος, Πυθαγόρειος Βίος [34,246,10 – 34,247,1]

«*τὸν γοῦν πρῶτον ἐκφάναντα τὴν τῆς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας φύσιν τοῖς ἀναξίοις μετέχειν τῶν λόγων οὕτως φασὶν ἀποστυγηθῆναι, ὡς μὴ μόνον ἐκ τῆς κοινῆς συνουσίας καὶ διαίτης ἐξορισθῆναι, ἀλλὰ καὶ τάφον αὐτοῦ κατασκευασθῆναι, ὡς δῆτα ἀποιχομένου ἐκ τοῦ μετ᾽ ἀνθρώπων βίου τοῦ ποτε ἑταίρου γενομένου*».

«Λέγεται λοιπόν ότι εκείνος που πρώτος ανακάλυψε τη φύση της συμμετρίας και της ασυμμετρίας σ' εκείνους που ήταν ανίκανοι να την καταλάβουν τόσο πολύ μισήθηκε από τους Πυθαγορείους, ώστε όχι μόνο τον έδιωξαν από την κοινότητα και τη ζωή τους, αλλά και τάφο κατασκεύασαν γι' αυτόν, σαν να ήταν κάποιος που είχε μεταναστεύσει από την ανθρώπινη ζωή και είχε πάει σε μια άλλη».

3. Ιάμβλιχος, Πυθαγόρειος Βίος [34,247,10 – 34,247,1]

«*οἳ δέ φασι καὶ τὸ δαιμόνιον νεμεσῆσαι τοῖς ἐξώορα τὰ Πυθαγόρου ποιησαμένοις. φθαρῆναι γὰρ ὡς ἀσεβήσαντα ἐν θαλάσσῃ τὸν δηλώσαντα τὴν τοῦ εἰκοσαγώνου σύστασινῥ τοῦτο δ᾽ ἦν δωδεκάεδρον, □ν τῶν πέντε λεγομένων στερεῶν σχημάτων, εἰς σφαῖραν ἐκτείνεσθαι. ἔνιοι δὲ τὸν περὶ τῆς ἀλογίας καὶ τῆς ἀσυμμετρίας ἐξειπόντα τοῦτο παθεῖν ἔλεξαν*».

«Άλλοι επίσης λένε ότι η Θεία Δύναμη αγανάκτησε με εκείνους που διέδωσαν [σε αμύητους] τη διδασκαλία του Πυθαγόρα δηλαδή εκείνος που δήλωσε (εξήγησε) φανερά την κατασκευή του εικοσαγώνου χάθηκε στη θάλασσα σαν να ήταν ασεβές πρόσωπο, δηλαδή αυτός που φανέρωσε τη μέθοδο εγγραφής στη σφαίρα του δωδεκαέδρου, που είναι ένα από τα λεγόμενα πέντε στερεά σχήματα. Αλλά σύμφωνα με άλλους αυτό συνέβη σ' εκείνον που ανέπτυξε τη διδασκαλία περί άλογων και ασυμμέτρων[4]*».*

Η κρίση που προκλήθηκε από την ανακάλυψη του $\sqrt{2}$ γρήγορα ξεπεράστηκε. Σύμφωνα με μελέτες του Σ. Νεγρεπόντη, οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν την έννοια της ασυμμετρίας δυο αριθμών. Πιο αναλυτικά:

Για τους Πυθαγόρειους απαραίτητη προϋπόθεση για τη καλλιέργεια ενός ανθρώπου ήταν η μελέτη τεσσάρων μαθημάτων: της Μουσικής, της Αριθμητικής, της Γεωμετρίας και της Αστρονομίας (Πλάτων Πολιτεία 530c8-531c8). Έτσι, οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν πολύ με τη μουσική, μια επιστήμη άμεσα συνδεδεμένη με τα μαθηματικά. Το πέμπτο βιβλίο του Ευκλείδη, που ανήκει στον Εύδοξο ασχολείται με τη θεωρία λόγων - μεγεθών. Όμως είναι αδιανόητο να υπήρχε θεωρία λόγων μεγεθών χωρίς θεωρία λόγων - αριθμών. Θεωρία λόγων αριθμών συναντάμε στο βιβλίο VII, μια θεωρία που βασίζεται στη ανθυφαίρεση και είναι ανεξάρτητη από τη θεωρία του Ευδόξου. Υπήρχε επομένως, μια πρώτη εμπειρική θεωρία αριθμών. Ωστόσο, μεταξύ της εμπειρικής θεωρίας μουσικών διαστημάτων και λόγων αριθμών και του βιβλίου VII των Στοιχείων όπου αναπτύσσεται η θεωρία λόγων αριθμών με ανθυφαίρεση, υπάρχει ένα κενό. Προκύπτει επομένως το ερώτημα πως εμφανίστηκε η ανθυφαίρεση, τι τους οδήγησε να την επινοήσουν και αν όντως υπάρχει στους Πυθαγόρειους και στην εμπειρική θεωρία λόγων.

Απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα δίνει ο Φιλόλαος. Ο Φιλόλαος, ήταν φιλόσοφος του 5^{ου} αιώνα. Γεννήθηκε στον Τάραντα της Κάτω Ιταλίας και πέθανε στην Ηράκλεια. Ήταν Πυθαγόρειος, σύγχρονος του Σωκράτη, μια γενιά νεότερος του Πλάτωνα και ο αρχαιότερος από τον οποίο σώζεται κάτι γραπτό και το οποίο αναφέρεται στη μουσική. Έτσι, στο απόσπασμα 6 του Φιλολάου 16-24 βρίσκουμε τον υπολογισμό των τεσσάρων πρώτων όρων της πολλαπλασιαστικής ανθυφαίρεσης της αρμονίας. Αυτό

[4] (Σημείωση: Η μετάφραση προέρχεται από το *Ιαμβλίχου, Πυθαγορικός βίος,* μετάφραση Σ. Λαμπροπούλου, Αθήνα, Πύρινος, κόσμος, 1982)

αποτελεί και το πέρασμα από την εμπειρική θεωρία μέσω της ανθυφαίρεσης στην ανθυφαιρετική θεωρία.

«ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσωι μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. ***οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσιες, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δὲ δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις»*.**

Αρχικά, σημειώνει ότι η αρμονία (δια πασών) αποτελείται από δυο διαστήματα δι' ὀξειᾶν (δια πέντε) και συλλαβὰ (δια τεσσάρων) ενώ είναι
δι' ὀξειᾶν = συλλαβὰ και ἐπόγδοον. Οπότε έχουμε:

αρμονία $(\frac{2}{1})$ = δι' ὀξειᾶν $(\frac{3}{2}) \oplus$ συλλαβά $(\frac{4}{3})$, δι' ὀξειᾶν $(\frac{3}{2})$ > συλλαβά $(\frac{4}{3})$

δι' ὀξειᾶν $(\frac{3}{2})$ = συλλαβά $(\frac{4}{3}) \oplus$ ἐπόγδοον $(\frac{9}{8})$, συλλαβά $(\frac{4}{3})$ > ἐπόγδοον $(\frac{9}{8})$

Το χωρίο συνεχίζεται δίνοντας κάποια αριθμητικά δεδομένα από τα οποία τελικά προκύπτει :

Αρμονία = 5 ἐπόγδοα $\oplus$ 2 διέσεις

δι' ὀξειᾶν = 3 ἐπόγδοα $\oplus$ 1 δίεση

συλλαβά = 2 ἐπόγδοα $\oplus$ 1 δίεση

Το ερώτημα λοιπόν που τους απασχολούσε ήταν αν υπάρχει μέτρο για την αρμονία, δηλαδή αν υπάρχει κάποιο διάστημα ω = Δ(α, β) τέτοιο ώστε:

$\frac{2}{1} = \omega^{\kappa}$ και $\frac{3}{2} = \omega^{l}$.

Αρχικά εξετάζουμε αν το $\frac{3}{2}$ είναι μέτρο. Έχουμε :

$\frac{2}{1} = \frac{3}{2} * \frac{4}{3}$, $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$, άρα το $\frac{3}{2}$ όχι μέτρο από την ύπαρξη του υπολοίπου $\frac{4}{3}$

Εξετάζουμε αν το $\frac{4}{3}$ είναι μέτρο:

$\frac{3}{2} = \frac{4}{3} * \frac{9}{8}$, $\frac{4}{3} > \frac{9}{8}$ άρα το $\frac{4}{3}$ όχι μέτρο από την ύπαρξη του υπολοίπου $\frac{9}{8}$

Εξετάζουμε αν το $\frac{9}{8}$ είναι μέτρο :

$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} * \delta$, όπου $\delta = \frac{256}{243}$ και $\frac{9}{8} > \delta$, άρα το $\frac{9}{8}$ δεν είναι μέτρο από την ύπαρξη του υπολοίπου δ.

Εξετάζουμε αν το δ είναι μέτρο :

$\frac{9}{8} = \delta^2 * \kappa$, όπου $\delta > \kappa = \frac{3^{12}}{2^{19}}$ Επομένως έχουμε ανθυφαιρετική διαδικασία:

1. $\frac{2}{1} = (\frac{3}{2})^1 * \frac{4}{3}$, $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$
2. $\frac{3}{2} = (\frac{4}{3})^1 * \frac{9}{8}$, $\frac{9}{8} < \frac{4}{3}$
3. $\frac{4}{3} = (\frac{9}{8})^2 * \frac{2^8}{3^5}$, $\frac{2^8}{3^5} < \frac{9}{8}$
4. $\frac{9}{8} = (\frac{2^8}{3^5})^2 * \frac{3^{12}}{2^{19}}$, $\frac{3^{12}}{2^{19}} < \frac{2^8}{3^5}$
5. $\frac{2^8}{3^5} = (\frac{3^{12}}{2^{19}})^3 * \frac{2^{65}}{3^{41}}$, $\frac{2^{65}}{3^{41}} < \frac{3^{12}}{2^{19}}$
6. $\frac{3^{12}}{2^{19}} = (\frac{2^{65}}{3^{41}})^1 * \frac{3^{53}}{2^{84}}$, $\frac{3^{53}}{2^{84}} < \frac{2^{65}}{3^{41}}$
7. $\frac{2^{65}}{3^{41}} = (\frac{3^{53}}{2^{84}})^5 * \frac{2^{485}}{3^{306}}$, $\frac{2^{485}}{3^{306}} < \frac{3^{53}}{2^{84}}$
8. $\frac{3^{53}}{2^{84}} = (\frac{2^{485}}{3^{306}})^2 * \frac{3^{665}}{2^{1054}}$, $\frac{3^{665}}{2^{1054}} < \frac{2^{485}}{3^{306}}$

Άρα, Ανθ(2, $\frac{3}{2}$) = [1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, …]. Παρατηρούμε ότι όλα τα υπόλοιπα είναι της μορφής $\frac{2^\nu}{3^\mu}$ ή $\frac{3^\nu}{2^\mu} (\neq 1)$ από ιδιότητα αρτίων - περιττών. Άρα, η ανθυφαίρεση είναι άπειρη. Άρα, δεν μπορώ να βρω κοινό μουσικό μέτρο αφού κανένα από τα προκύπτοντα διαστήματα δεν είναι μουσικό μέτρο. Τώρα, όμως προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχει άλλος τρόπος που να δίνει μουσικό μέτρο ή αν αυτό όντως δεν υπάρχει. Απάντηση σε αυτό δίνουν και πάλι οι Πυθαγόρειοι μέσω της πρότασης Χ2, (την οποία και θα μελετήσουμε αναλυτικά λίγο πιο κάτω).

Πρόταση Χ2:

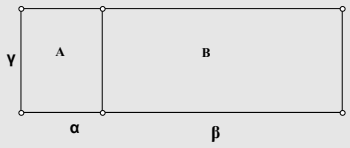
«Εὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη».

Δηλαδή

Αν δοθούν δυο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε απομένει δεν μετρά το προηγούμενο του, τότε τα δυο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

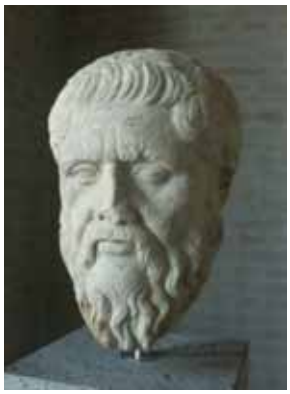
Υποθέτουμε πως έχοντας αντιληφθεί οι Πυθαγόρειοι ότι η απειρία της πολλαπλασιαστικής ανθυφαίρεσης οδηγεί στην αδυναμία ύπαρξης κοινού μέτρου, ουσιαστικά γνώριζαν την πρόταση Χ2 που διατυπώνεται στο δέκατο βιβλίο των Στοιχείων και η οποία ανήκει στον Θεαίτητο.

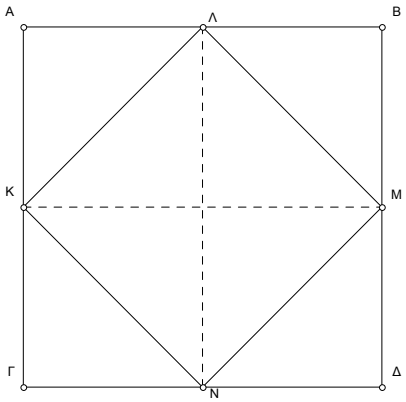
Επισυνάπτουμε εδώ ένα πίνακα που δείχνει την χρονική εξέλιξη της θεωρίας λόγων αριθμών – μεγεθών.

ΘΕΩΡΙΑ ΛΟΓΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	Εμπειρική θεωρία λόγων μεγεθών χωρίς κατάλληλο ορισμό - Πυθαγόρειοι →	Ανθυφαιρετική θεωρία λόγων μεγεθών -Τοπικά Αριστοτέλη $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B}$ ⇔ Ανθ(α,β)=Ανθ(Α,Β)  →	Θεωρία λόγων μεγεθών βιβλίο V του Ευδόξου (V .5) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ⇔ ∀ ζεύγος φυσικών αριθμών m, n ισχύει: mα>nβ⇨mγ>nδ mα=nβ⇨mγ=nδ mα<nβ⇨mγ<nδ
ΘΕΩΡΙΑ ΛΟΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	Εμπειρική θεωρία λόγων αριθμών – μουσική - Πυθαγόρειοι →	Θεωρία λόγων αριθμών - Βιβλίο VII $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ⇔ ορισμός κα: Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.	

2.2.2 Η αρρητότητα Του $\sqrt{2}$ στον Πλατωνικό διάλογο «Μένων»

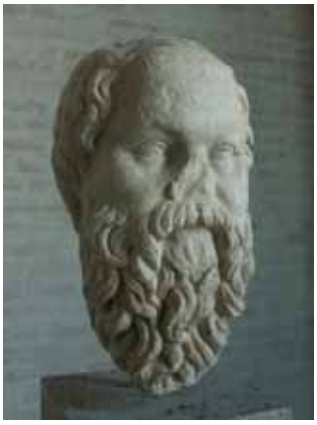
Μια άλλη μαρτυρία της γνώσης της αρρητότητας από τους Πυθαγόρειους αποτελεί και ο Πλατωνικός διάλογος «Μένων», ένας διάλογος κατά βάση φιλοσοφικός. Στο διάλογο αυτό ο Σωκράτης μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις καταφέρνει να καθοδηγήσει το δούλο του Μένωνα να ανακαλύψει ότι το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ το οποίο έχει ως διαγώνιο τη πλευρά του μεγάλου τετραγώνου.





Ο Σωκράτης (κάτω εικόνα) ισχυρίζεται ότι αφού ο δούλος δεν γνώριζε καθόλου μαθηματικά, η γνώση του πρέπει να είναι μια ανάμνηση από την προγενέστερη ζωή του πριν τη γέννηση του. Για τον Πλάτωνα (πάνω εικόνα) αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι υπάρχει η αληθινή γνώση, η απόλυτη αιώνια γνώση.

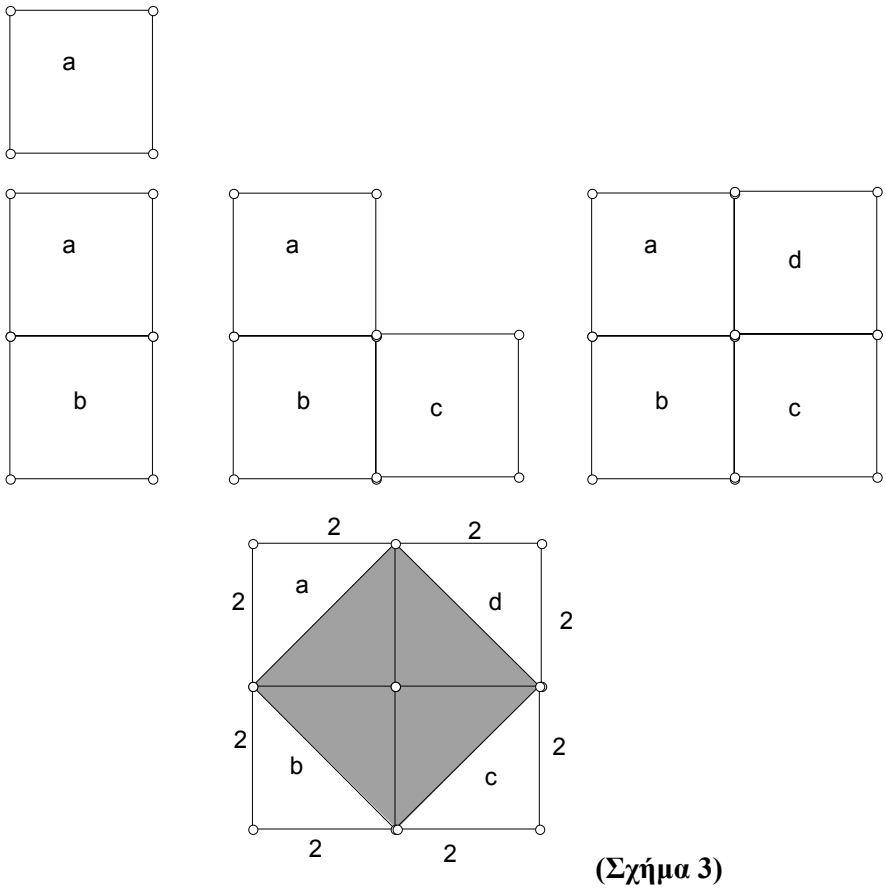
Αναλυτικότερα, ο διάλογος αρχίζει με την παρακάτω ερώτηση που ο Σωκράτης απευθύνει στο δούλο. «*Ποιο είναι το μήκος πλευράς τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με 2 πόδες;*» (Ζητείται δηλαδή το μήκος πλευράς τετραγώνου με εμβαδόν $E_2 = 2*E_1 = 2*2^2 = 2*4 = 8$ πόδες). Ο δούλος αρχικά απαντάει πως το ζητούμενο μήκος πρέπει να είναι ίσο με 4 πόδες. Βλέπουμε εδώ ότι ο δούλος κάνει λάθος. Ο Σωκράτης σε αυτό το σημείο σχολιάζει πως ο δούλος πιστεύει ότι γνωρίζει τη σωστή απάντηση ενώ στην πραγματικότητα δεν τη γνωρίζει και ότι από εδώ και στο εξής θα αρχίσει να θυμάται. Ο Σωκράτης στη συνέχεια με διαδοχικές ερωτήσεις τον βοηθά να αντιληφθεί το σφάλμα του. Έτσι, καταλαβαίνει ότι ένα τετράγωνο με πλευρά 4 πόδες θα είχε εμβαδόν 16 πόδες, ($4^2 = 16 = 4*2^2$) δηλαδή 4πλάσιο του αρχικού και όχι διπλάσιο που είναι το ζητούμενο. Η νέα πρόταση του δούλου είναι ότι το ζητούμενο μήκος είναι μιάμιση φορά μεγαλύτερο από το αρχικό δηλαδή $\frac{3}{2}*2=3$ πόδες. Φυσικά, και αυτή η λύση είναι λάθος αφού τότε το τετράγωνο θα έχει εμβαδόν $3^2 = 9 \neq 8$. Ο δούλος



επηρεαζόμενος από το νέο λάθος που έκανε δηλώνει αδυναμία να βρει αυτό που του ζητά ο Σωκράτης. Το σχόλιο του Σωκράτη σε αυτό το σημείο είναι το εξής:

«*Στην αρχή ο δούλος δεν ήξερε ποια είναι η πλευρά του τετραγώνου με E_2=8 και ακόμα δεν γνωρίζει αλλά στην αρχή νόμιζε πως τη γνώριζε και απαντούσε με θάρρος σαν να τη γνώριζε και δεν πίστευε ότι αγνοεί. Τώρα όμως πια γνωρίζει πως αγνοεί και όπως ακριβώς δεν γνωρίζει, έτσι ούτε νομίζει πως γνωρίζει.*»

Η συνειδητοποίηση άγνοιας κατά το Σωκράτη είναι κάτι θετικό καθώς κινητοποιεί το δούλο να ψάξει για να μάθει. Ο διάλογος συνεχίζεται και οδηγεί στην κατασκευή του σχήματος 3



(Σχήμα 3)

Κάθε μια από τις διαγώνιους χωρίζει το κάθε τετράγωνο σε 2 ίσα μέρη. Οι τέσσερις αυτές γραμμές είναι ίσες. Άρα, έχουμε 4 μισά και επομένως το εμβαδόν του εσωτερικού τετραγώνου είναι : $E_2 = 4 * 2 = 8$ πόδες.

Άρα, το μήκος πλευράς τετραγώνου με $E_2 = 8$ είναι η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου, δηλαδή του τετραγώνου με $E_1 = 4$. Αν συμβολίσουμε με δ τη διαγώνιο και με α την πλευρά του αρχικού τετραγώνου τότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E_2=\delta^2,} \\ \mathbf{E_1=\alpha^2,} \\ \mathbf{E_2=2^*E_1} \end{array}\right\} \boxed{\boldsymbol{\delta^2 = 2*\alpha^2}}$$

Έχοντας δει αναλυτικά το διάλογο μπορούμε τώρα να διακρίνουμε τα βήματα της ανθυφαίρεσης της διαμέτρου δ προς την πλευρά α. (Θέματα Διδακτικής Των Μαθηματικών, Σ. Νεγρεπόντης, 2000)

Πρώτο βήμα: $\delta = \alpha + \delta_1$, $\delta_1<\alpha$ Πράγματι, αυτό ισχύει αν και μόνο αν:

$\alpha < \delta < 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < \delta^2$ και $\delta^2 = 2\alpha^2 < 4\alpha^2$, ισχύει

Άρα, $\boldsymbol{\delta_1 = \delta - \alpha}$

(από 82d-83d, προκύπτει $\alpha < \delta$, $\delta < 2\alpha$)

ΣΩ. Ἐπειδὴ δὲ δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται;	**ΣΩ.** Επειδή όμως και αυτή η πλευρά είναι δυο πόδες μπορεί το σχήμα να είναι άλλο από δυο φορές οι δυο πόδες;
ΠΑΙ. Γίγνεται.	**ΔΟΥ.** Όχι
ΣΩ. Δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν;	**ΣΩ.** Άρα είναι δυο φορές οι δυο πόδες
ΠΑΙ. Ναί.	**ΔΟΥ.** Ναι
ΣΩ. Πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες; λογισάμενος εἰπέ.	**ΣΩ.** Πόσο λοιπόν κάνει δυο φορές οι δυο πόδες; Υπολόγισε και πες μου
ΠΑΙ. Τέτταρες, ὦ Σώκρατες.	**ΣΩ.**Τέσσερα Σωκράτη
ΣΩ. Οὐκοῦν γένοιτ' ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο;	**ΔΟΥ.** Θα μπορούσε λοιπόν να υπάρξει σχήμα διπλάσιο τούτο εδώ, τέτοιο που να έχει όλες τις πλευρές ίσες, όπως αυτό;
ΠΑΙ. Ναί.	**ΔΟΥ.**Ναι
ΣΩ. Πόσων οὖν ἔσται ποδῶν;	**ΣΩ.** Πόσα πόδια θα είναι λοιπόν;
	ΔΟΥ. Οχτώ

ΠΑΙ. Ὀκτώ. **ΣΩ**. Φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν ηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη. ἡ μὲν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν· τί δὲ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου; **ΠΑΙ**. Δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία. **ΣΩ**. Ὁρᾷς, ὦ Μένων, ὡς ἐγὼ τοῦτον οὐδὲν διδάσκω, ἀλλ' ἐρωτῶ πάντα; καὶ νῦν οὗτος οἴεται εἰδέναι ὁποία ἐστὶν ἀφ' ἧς τὸ ὀκτώπουν χωρίον ενήσεται· ἢ οὐ δοκεῖ σοι; **ΜΕΝ**. Ἔμοιγε. **ΣΩ**. Οἶδεν οὖν; **ΜΕΝ**. Οὐ δῆτα. **ΣΩ**. Οἴεται δέ γε ἀπὸ τῆς διπλασίας; **ΜΕΝ**. Ναί. **ΣΩ**. Θεῶ δὴ αὐτὸν ἀναμιμνῃσκόμενον ἐφεξῆς, ὡς δεῖ ἀναμιμνήσκεσθαι. Σὺ δέ μοι λέγε ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῂς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι; τοιόνδε λέγω, μὴ ταύτῃ μὲν μακρόν, τῇ δὲ βραχύ, ἀλλὰ ἴσον πανταχῇ ἔστω ὥσπερ τουτί, διπλάσιον δὲ τούτου, ὀκτώπουν· ἀλλ' ὅρα εἰ ἔτι σοι ἀπὸ τῆς διπλασίας δοκεῖ ἔσεσθαι. **ΠΑΙ**. Ἔμοιγε. **ΣΩ.** Οὐκοῦν διπλασία αὕτη ταύτης	**ΣΩ.** Εμπρός λοιπόν, προσπάθησε να μου πεις πόσο θα είναι κάθε πλευρά εκείνου. Του ενός είναι δυο πόδες πόσο θα είναι του άλλου, του διπλασίου; **ΔΟΥ.** Φανερό είναι, Σωκράτη, πως θα είναι διπλάσια. **ΣΩ.** Βλέπεις, Μένων, πως εγώ δεν διδάσκω τούτον τίποτα αλλά συνεχώς τον ρωτώ; Και τούτος νομίζει ότι γνωρίζει ποια είναι η πλευρά από την οποία θα δημιουργηθεί το σχήμα των οχτώ ποδών ή δεν σου φαίνεται πως είναι έτσι; **ΜΕΝ.** Βέβαια. **ΣΩ**. Γνωρίζει όμως; **ΜΕΝ.** Όχι βέβαια. **ΣΩ**. Νομίζει πως το σχήμα προκύπτει από τη διπλάσια γραμμή **ΜΕΝ**. Ναι **ΣΩ**. Παρατήρησε λοιπόν τούτον πως θ' αρχίσει στο εξής να θυμάται, όπως πρέπει να θυμάται. Εσύ πες μου από τη διπλάσια πλευρά υποστηρίζεις πως προκύπτει διπλάσιο σχήμα. Και εννοώ βέβαια τέτοιο σχήμα που να μην έχει τη μια πλευρά μεγάλη και την άλλη μικρή, αλά να τις έχει όλες ίσες, όπως τούτο εδώ, αλλά να είναι διπλάσιο, δηλαδή οκτώ πόδες. Πρόσεξε λοιπόν, σου φαίνεται πως τούτο θα προκύψει από τη διπλάσια πλευρά ; **ΔΟΥ.** Ναι βέβαια. **ΣΩ.** Λοιπόν η μια πλευρά γίνεται διπλάσια απ' όσο ήταν αν προσθέσουμε

γίγνεται, ἂν ἑτέραν τοσαύτην προσθῶμεν ἐνθένδε; **ΠΑΙ.** Πάνυ γε. **ΣΩ**. Ἀπὸ ταύτης δή, φῄς, ἔσται τὸ ὀκτώπουν χωρίον, ἂν τέτταρες τοσαῦται γένωνται; **ΠΑΙ**. Ναί. **ΣΩ.** Ἀναγραψώμεθα δὴ ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσας τέτταρας. ἄλλο τι ἢ τουτὶ ἂν εἴη ὃ φῄς τὸ ὀκτώπουν εἶναι; **ΠΑΙ**. Πάνυ γε. **ΣΩ**. Οὐκοῦν ἐν αὐτῷ ἐστιν ταυτὶ τέτταρα, ὧν ἕκαστον ἴσον τούτῳ ἐστὶν τῷ τετράποδι; **ΠΑΙ.** Ναί. **ΣΩ.** Πόσον οὖν γίγνεται; οὐ τετράκις τοσοῦτον; **ΠΑΙ.** Πῶς δ᾽ οὔ; **ΣΩ**. Διπλάσιον οὖν ἐστιν τὸ τετράκις τοσοῦτον; ᾽ **ΠΑΙ.** Οὐ μὰ Δία. **ΣΩ.** Ἀλλὰ ποσαπλάσιον; **ΠΑΙ**. Τετραπλάσιον. **ΣΩ.** Ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον. **ΠΑΙ.** Ἀληθῆ λέγεις. **ΣΩ**. Τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. οὐχί; **ΠΑΙ**. Ναί. **ΣΩ**. Ὀκτώπουν δ᾽ ἀπὸ ποίας γραμμῆς;	εδώ άλλη μια του ίδιου μεγέθους **ΔΟΥ.** Βέβαια. **ΣΩ.** Από τούτη άρα υποστηρίζεις ότι θα προκύψει το σχήμα των οκτώ πόδων, αν γίνουν τέσσερις ίσες πλευρές **ΔΟΥ.** Ναι **ΣΩ.** Ας χαράξουμε λοιπόν από αυτήν τέσσερις ίσες πλευρές. Κάποιο άλλο ή τούτο εδώ υποστηρίζεις πως είναι το σχήμα των οκτώ πόδων; **ΔΟΥ.** Αυτό βέβαια. **ΣΩ.** Σε τούτο όμως περιλαμβάνονται τέσσερα σχήματα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με το σχήμα των τεσσάρων ποδών, έτσι δεν είναι; **ΔΟΥ.** Ναι **ΣΩ.** Πόσο λοιπόν γίνεται; Δεν είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερο τούτου; **ΔΟΥ.** Πως όχι; **ΣΩ.** Άρα το κατά τέσσερις φορές μεγαλύτερο είναι διπλάσιο; **ΔΟΥ.** Όχι μα το Δια. **ΣΩ.** Τότε πόσο μεγαλύτερο είναι; **ΔΟΥ.** Τετραπλάσιο. **ΣΩ.** Επομένως από τη διπλάσια πλευρά, παιδί μου, δεν προκύπτει σχήμα διπλάσιο αλλά τετραπλάσιο. **ΔΟΥ.** Σωστά μιλάς. **ΣΩ.** Τέσσερις φορές λοιπόν οι τέσσερις πόδες κάνει δεκαέξι ή όχι; **ΔΟΥ.** Ναι. **ΣΩ.** Το σχήμα λοιπόν των οκτώ ποδών από ποια πλευρά προκύπτει; Δεν είναι

οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον; **ΠΑΙ**. Φημί. **ΣΩ**. Τετράπουν δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί; **ΠΑΙ**. Ναί. **ΣΩ**. Εἶενῥ τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστιν, τούτου δὲ ἥμισυ; **ΠΑΙ**. Ναί. **ΣΩ**. Οὐκ ἀπὸ μὲν μείζονος ἔσται ἢ τοσαύτης γραμμῆς, ἀπὸ ἐλάττονος δὲ ἢ τοσησδί; ἢ οὔ;	τετραπλάσιο με βάση την πλευρά τούτη; **ΔΟΥ.** Έτσι λέω. **ΣΩ.** Αυτό λοιπόν το τετράγωνο των τεσσάρων ποδών δεν προέκυψε από τη μισή από αυτή γραμμή; **ΔΟΥ.** Ναι **ΣΩ.** Ας είναι. το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν είναι διπλάσιο από το ένα (των τεσσάρων ποδών) και μισό από το άλλο (των δεκάξι ποδών) **ΔΟΥ.** Ναι **ΣΩ.** Δεν θα προκύψει λοιπόν από πλευρά μεγαλύτερη αυτής και μικρότερη εκείνης; Η όχι;

Δεύτερο βήμα: $\alpha = 2\delta_1 + \alpha_1$, $\alpha_1 < \delta_1$ όπου ο λόγος α/δ_1

Πράγματι, αυτό ισχύει $\Leftrightarrow 2\delta_1 < \alpha < 3\delta_1$, $\Leftrightarrow 2(\delta-\alpha) < \alpha < 3(\delta-\alpha) \Leftrightarrow$

$2\delta < 3\alpha$, $4\alpha<3\delta \Leftrightarrow 8\alpha^2 = 4\delta^2 < 9\alpha^2$ και $16\alpha^2 < 9\delta^2 = 18\alpha^2$, ισχύει

Άρα, $\boldsymbol{\alpha_1 = 3\alpha - 2\delta}$**, λόγος** $\boldsymbol{\delta_1/\alpha_1}$

(από 83e προκύπτει : $2\delta<3\alpha$, η ανισότητα $4\alpha < 3\delta$ προκύπτει εύκολα από τη πρώτη αφού $2\delta < 3\alpha \Leftrightarrow 4\delta^2 <9\alpha^2 \Leftrightarrow 8\delta^2 <18\alpha^2 \Leftrightarrow 16\alpha^2 < 9\delta^2 \Leftrightarrow 4\alpha < 3\delta$ και ενδεχομένως γι΄ αυτό το λόγο παραλείπεται στον Μένων)

ΣΩ. Πειρῶ δὴ λέγειν πηλίκην τινὰ φῂς αὐτὴν εἶναι. **ΠΑΙ**. Τρίποδα. **ΣΩ**. Οὐκοῦν ἄνπερ ρίπους ᾖ, τὸ ἥμισυ ταύτης προσληψόμεθα καὶ ἔσται τρίπους; δύο μὲν γὰρ οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ νθένδε ὡσαύτως δύο μὲν οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ γίγνεται τοῦτο τὸ χωρίον ὃ φῄς.	**ΣΩ**. Προσπάθησε λοιπόν να μου πεις πόσο μεγάλη νομίζεις πως είναι τούτη **ΔΟΥ.** Τρεις πόδες **ΣΩ**. Αν λοιπόν είναι τρεις πόδες θα πάρουμε το μισό τούτης, θα το προσθέσουμε και θα γίνει τρεις πόδες. Γιατί τούτα εδώ είναι δυο πόδες κι αυτό ένας και από την άλλη πλευρά επίσης είναι δυο πόδες κι αυτό ένας κι έτσι προκύπτει το

	σχήμα που λες.
ΠΑΙ. Ναί.	**ΔΟΥ.** Ναι
ΣΩ. Οὐκοῦν ἂν ᾖ τῇδε τριῶν καὶ τῇδε τριῶν, τὸ ὅλον χωρίον τριῶν τρὶς ποδῶν γίγνεται;	**ΣΩ**. Επομένως, αν η μια πλευρά είναι τρεις πόδες και η άλλη επίσης τρεις, το σχήμα συνολικά δεν είναι τρεις φορές τρεις πόδες;
ΠΑΙ. Φαίνεται.	**ΔΟΥ.** Έτσι φαίνεται.
ΣΩ. Τρεῖς δὲ τρὶς πόσοι εἰσὶ πόδες;	**ΣΩ**. Τρεις φορές το τρία πόσους πόδες κάνουν;
ΠΑΙ. Ἐννέα.	**ΔΟΥ.** Εννιά.
ΣΩ. Ἔδει δὲ τὸ διπλάσιον πόσων εἶναι ποδῶν;	**ΣΩ**. Και το διπλάσιο πόσοι πόδες έπρεπε να είναι;
ΠΑΙ. Ὀκτώ.	**ΔΟΥ.** Οκτώ
ΣΩ. Οὐδ' ἄρ' ἀπὸ τῆς τρίποδός πω τὸ ὀκτώπουν χωρίον γίγνεται	**ΣΩ**. Άρα, το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν προκύπτει ούτε από την πλευρά των τριών ποδών.
ΠΑΙ. Οὐ δῆτα.	**ΔΟΥ.** Όχι βέβαια.
ΣΩ. Ἀλλ' ἀπὸ ποίας; πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς· καὶ.	**ΣΩ**. Τότε από ποια πλευρά σχηματίζεται; Προσπάθησε να μας πεις με ακρίβεια. Κι αν δεν θέλεις να το εκφράσεις με αριθμό δείξε την πλευρά.

Κριτηρίου Του Λόγου

Έστω α >β μεγέθη και έστω ότι η ανθυφαίρεση έχει τη μορφή :

$\alpha = \kappa_0 * \beta + \alpha_1, \quad \alpha_1 < \beta$

$\beta = l_0 * \alpha_1 + \beta_1, \quad \beta_1 < \alpha_1$

$\alpha_1 = \kappa_1 * \beta_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 < \beta_1$

$\beta_1 = l_1 * \alpha_2 + \beta_2, \quad \beta_2 < \alpha_2$

……..

$\alpha_n = \kappa_n * \beta_n + \alpha_{n+1}, \quad \alpha_{n+1} < \beta n$

$\beta_n = l_n * \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad \beta_{n+1} < \alpha_{n+1}$

……..

$\alpha_m = \kappa_m * \beta_m + \alpha_{m+1}, \quad \alpha_{m+1} < \beta_m$

$\beta_m = l_m * \alpha_{m+1} + \beta_{m+1}, \quad \beta_{m+1} < \alpha_{m+1}$

Αν $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_m}{\beta_m}$ Τότε η Ανθ(α, β) είναι άπειρη και έχει την εξής μορφή

Ανθ(α, β) = [$\kappa_0, l_0, \kappa_1, l_1$**, …,** $k_n, l_n, ..., k_{m-1}, l_{m-1}$ **]**

Εφαρμογή Του Κριτηρίου Του Λόγου:

$\frac{a}{\delta_1} = \frac{\delta_1}{\alpha_1}$, αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\frac{a}{(\delta - a)} = \frac{(\delta - a)}{(3a - 2\delta)}$ ⇔

$\delta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\delta = 3\alpha^2 - 2\alpha\delta$ ⇔ $\delta^2 = 2\alpha^2$, ισχύει (η συζήτηση στο Μένων 83e-85b οδηγεί στην κατασκευή της διαμέτρου δ, η οποία ικανοποιεί την ισότητα $\delta^2 = 2\alpha^2$, συνθήκη ακριβώς ισοδύναμη με την ανάμνηση λόγου $\frac{a}{\delta_1} = \frac{\delta_1}{\alpha_1}$ ■.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αυτό το περίφημο χωρίο, επιβεβαιώνει την ανθυφαιρετική ερμηνεία για τη πλατωνική θεωρία της ανάμνησης, η δε θεωρία της αναμνήσεως αποκαλύπτεται ως μια απλή αναδιατύπωση του γεωμετρικού κριτηρίου του λόγου. Η περιοδικότητα έχει καθοριστεί και λαμβάνουμε:

Ανθ (δ, α)= [1, 2, 2, …] = [1, $\overline{2}$].

Από όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν καταρχήν την δυνατότητα μη ύπαρξης κοινού μέτρου μεταξύ δυο μεγεθών ή δυο αριθμών. Γνώριζαν επίσης την αρρητότητα του $\sqrt{2}$ (ασυμμετρία μεταξύ πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου) και την περιοδική ανθυφαίρεση αυτού. Σε αυτό το σημείο θεωρούμε σημαντικό να προσθέσουμε και κάτι ακόμη για το $\sqrt{2}$. Σε σχόλια του Θέωνα του Σμυρνέα συναντούμε την κατασκευή ζεύγων αριθμών, όπως (1, 1), (2, 3), (5, 7), … Οι αριθμοί αυτοί κατασκευάζονται ως εξής:

$p_1 = 1$, $q_1 = 1$

$p_{n+1} = p_n + q_n$, $qn = 2 * p_n + q_n$.

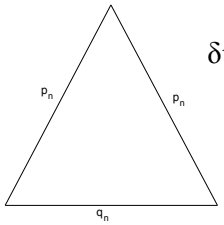
- **Πλευρικοί** λέγονται οι αριθμοί οι οποίοι παριστάνουν τα μήκη των πλευρών τετραγώνων. Συμβολίζουμε p_n
- **Διαμετρικοί** λέγονται οι αριθμοί εκείνοι οι οποίοι παριστάνουν τα μήκη των αντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) των τετραγώνων. Συμβολίζουμε q_n

Ο Θέων συνεχίζει και ανακαλύπτει και άλλες σχέσεις μεταξύ των αριθμών αυτών και συγκεκριμένα την σχέση: $qn^2 = 2 * p_n^2 \pm 1$ ή $qn^2 = 2 * p_n^2 + (-1)^\eta$ χωρίς όμως να τις αποδεικνύει.

Άλλες πηγές όπου συναντάμε αυτούς τους αριθμούς είναι:

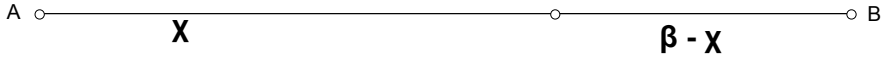
- **Πλάτων Πολιτεία 546a**, όπου στο χωρίο αυτό γίνεται σαφές ότι το ζεύγος $(p_3, q_3) = (5, 7)$ είναι γνωστό καθώς και η σχέση $q_3^2 = 2 * p_3^2 - 1$
- **Ιάμβλιχος, σχόλια εις Νικόμαχον** όπου γίνεται και εδώ αναφορά στους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς χωρίς και πάλι την απόδειξη της σχέσεως $q_n^2 = 2 * p_n^2 + (-1)^\eta$
- **Πρόκλος, Σχόλια εις Πολιτείαν** χωρίο (2.24.16-25.13) όπου επαναλαμβάνει αυτά που αναφέρονται στο Θέωνα και τον Ιάμβλιχο και χωρίο (2.27.1-29.4) όπου αναφέρει τρόπο απόδειξης της σχέσης $qn^2 = 2 * p_n^2 + (-1)^\eta$.

Από τη σχέση $q_n^2 = 2 * p_n^2 + (-1)^\eta$ που καλείται «θεμελιώδης σχέση των πλευρικών διαμετρικών αριθμών» προκύπτει $(\frac{q_n}{p_n})^2 = 2 + \frac{1}{p_n^2}(-1)^n$ Άρα,



$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{p_n} = \sqrt{2}}$, οπότε έχουμε γεωμετρική προσέγγιση του $\sqrt{2}$ με ισοσκελή τρίγωνα της παραπάνω μορφής, δηλαδή έχουμε άλλη μια απόδειξη της γνώσης του $\sqrt{2}$.

Επίσης, αναφέρουμε ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν την χρυσή τομή, δηλαδή το χωρισμό ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Παραδείγματος χάριν, θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα β και ένα ευθύγραμμο τμήμα χ με χ<β έτσι ώστε $\frac{\beta}{\chi} = \frac{\chi}{\beta - \chi}$



Τότε η ανθυφαίρεση της χρυσής τομής Ανθ (β, χ) είναι:

$\beta = 1 * \chi + (\beta - \chi)$ με $\beta - \chi < \chi$

$\chi = 1 * (\beta - \chi) + 2 * \chi - \beta$ με $2 * \chi - \beta < \beta - \chi$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως το κριτήριο λόγου αφού

$\frac{\beta}{\chi} = \frac{\chi}{\beta - \chi}$ ή $\beta * (\beta - \chi) = \chi^2$. Άρα, Ανθ(β, χ) =$[\bar{1}]$. (Η κατασκευή της γίνεται στην Πρόταση ΙΙ.11).

Ο διάλογος αυτός εν κατακλείδι, εκτός των άλλων, είναι χαρακτηριστικός της φιλοσοφίας του Πλατωνισμού. Ο Σωκράτης χρησιμοποιώντας τη μαιευτική μέθοδο προσπαθεί ουσιαστικά να "εκμαιεύσει" την απάντηση από το δούλο. Σύμφωνα με τον Πλατωνισμό, όπως αναφέρει ο Δ. Αναπολιτάνος, τα αντικείμενα των μαθηματικών έχουν μια πραγματική αντικειμενική ύπαρξη σε κάποιο ιδεατό βασίλειο, ανεξάρτητη από το ανθρώπινο γένος, γι' αυτό εξάλλου και η μαθηματική δραστηριότητα είναι μια διαδικασία ανακάλυψης (όχι επινόησης) των προϋπαρχόντων συσχετίσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών.

Οι μαθηματικές αλήθειες δεν εξαρτώνται από τη δυνατότητα ή μη του μαθηματικού να τις συλλάβει. Υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και ο μαθηματικός τις ανακαλύπτει, όπως ο αστρονόμος ανακαλύπτει για πρώτη φορά ένα άγνωστο άστρο στρέφοντας το βελτιωμένο του τηλεσκόπιο προς περιοχές του σύμπαντος μακρινές και μέχρι χθες απρόσιτες. Ο μαθηματικός επομένως για το Πλάτωνα δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες. Αυτές υπάρχουν ανεξάρτητα απ' αυτόν και αναμένουν υπομονετικά τον εξερευνητή τους. Η σύλληψη μιας συγκεκριμένης ιδέας και η μέθοδος για την εκμαίευση των μαθηματικών αληθειών συνδέονται με την αθανασία της ψυχής. Για τον Πλάτωνα, ο καθένας αν καθοδηγηθεί σωστά μπορεί να ανακαλύψει τη αλήθεια καθώς αυτή είναι αιώνια. Η γνώση είναι ανάμνηση. Η αισθητηριακή αντίληψη και η διαλεκτική μέθοδος παίζουν ρόλο απλά εκμαιευτικό.

Εξετάζοντας επομένως τον Πλατωνισμό ως προς την θέση του λάθους, μπορούμε να πούμε τα εξής: η εφαρμογή της μαιευτικής μεθόδου. μέσα σε μια τάξη, ενισχύει το διάλογο και τη συμμετοχή του παιδιού στη ανακάλυψη μιας γνώσης που κατέχει αλλά δεν το γνωρίζει. Όπως προκύπτει από τη μελέτη του διαλόγου, τα λάθη που έκανε ο δούλος ήταν εκείνα που με τη βοήθεια των κατάλληλων ερωτήσεων τον οδήγησαν στην συνειδητοποιήσει της ήδη υπάρχουσας γνώσης μέσα του. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα λάθη είναι αυτά που βοηθούν αυτόν που τα διαπράττει να σκεφτεί περισσότερο και τελικά να αυξήσει την κριτική ικανότητα. **Ο ρόλος άρα, των λαθών είναι θετικός και η ύπαρξη τους είναι αναγκαία -και όχι αθέμιτη- στη διαδικασία ανακάλυψης της γνώσης.** Επισυνάπτουμε τις απόψεις των Rene Thom και Kurt Godel, ένθερμων υποστηρικτών του Πλατωνισμού.

Ο Thom γράφει στα 1971:

«*Για οτιδήποτε εξετάζεται, οι μαθηματικοί θα πρέπει να δείχνουν τη δύναμη των πιο βαθιών τους πεποιθήσεων και έτσι να επιβεβαιώνουν ότι η μαθηματικές μορφές έχουν πραγματική ύπαρξη, ανεξάρτητη από το νου που τις εξετάζει… Όμως σε οποιαδήποτε*

δεδομένη στιγμή, οι μαθηματικοί έχον μόνο ατελή και αποσπασματική άποψη αυτού του κόσμου των ιδεών».

Ενώ η άποψη του Godel είναι:

«*Όσο απομακρυσμένα κι αν είναι τα αντικείμενα της θεωρίας συνόλων από την εμπειρία των αισθήσεων, έχουμε πράγματι γι' αυτά κάτι σαν αντίληψη, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι τα αξιώματα επιβάλλονται πάνω μας σαν να υπάρχουν στ' αλήθεια. Δε βρίσκω για ποιο λόγο θα πρέπει να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σ' αυτό το είδος της αντίληψης , δηλαδή στη μαθηματική ενόραση, από ότι στην άμεση αντίληψη… Και οι δυο μπορούν να αντιπροσωπεύουν μια όψη της αντικειμενικής πραγματικότητας*». (Davis-Hersh, 1980)

2.2.3 Ο Θεαίτητος και η συμβολή του στην αρρητότητα

Ο Θεαίτητος, ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του Πλάτωνα. Όπως μας πληροφορεί ο B. L. Van Der Waerden ο Θεαίτητος έζησε στο διάστημα (417-369 π.Χ.). Αρχικά μαθητής και αργότερα καθηγητής της Ακαδημίας του Πλάτωνα, συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της μελέτης των μαθηματικών της σχολής, προ του Ευδόξου. Ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος τον χαρακτηρίζει ως έναν αξιοθαύμαστα προικισμένο νέο που ποτέ άλλοτε δεν συνάντησε στη μακρά διάρκεια του βίου του. Ως ένα νέο όχι όμορφο στο πρόσωπο αλλά απίστευτα ευμαθή, ευγενή και γενναίο όσο κανείς άλλος, Θέλοντας να τονίσει τον θαυμασμό του προς το πρόσωπο του Θεαίτητου λέει χαρακτηριστικά «*Αυτός εδώ όμως έρχεται τόσο απαλά και αλάθευτα και τέλεια προς τα μαθήματα και προς τις έρευνες, με πολλή πραότητα, ωσάν τη ροή λαδιού που ρέει χωρίς ψίθυρο, ώστε να θαυμάζει κανείς πώς τόσο νέος κατορθώνει όλα αυτά.*» Δεν πίστευε πως μπορούσε κάποιος άνθρωπος να συνδυάζει τόσες αρετές. Τα λόγια του Θεόδωρου επιβεβαιώνει και ο Σωκράτης μετά τη γνωριμία τους.

Μετά τον πρόωρο θάνατό του, ο Πλάτωνας του αφιέρωσε τον διάλογο "Θεαίτητος", στον οποίο φαίνεται ο θαυμασμός του ιδίου και της σχολής για το έργο του. Βέβαια είναι φανταστικός, αφού ο Σωκράτης είχε πεθάνει το 399 π.Χ., όταν ο Θεαίτητος ήταν 18 ετών. Δεν μπορεί όμως να ήταν φανταστική η παρουσίαση από τον Θεαίτητο της νέας μεθόδου. έκφρασης των «δυνάμεων», η οποία μάλλον θα παρουσιάστηκε γύρω στο 380 π.Χ..

Στον διάλογο «Θεαίτητος» φαίνεται να παρουσιάζει στον Σωκράτη και τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο, τον δάσκαλο στα μαθηματικά του Πλάτωνα, μία μέθοδο έκφρασης όλων των «δυνάμεων» (τετραγωνικών ριζών, 147d).

Αναλυτικότερα, στο πλατωνικό αυτό διάλογο, τίθεται αρχικά το θέμα τι είναι γνώση και αν αυτή είναι συνώνυμη με την σοφία. Η απάντηση που δίνει ο Θεαίτητος αρχικά είναι λανθασμένη καθώς δηλώνει πως γνώση είναι η γνώση των διάφορων τεχνών. Αναφέρεται δηλαδή σε είδη γνώσεων και όχι στην ίδια τη γνώση. Αφού έχει γίνει αντιληπτό από τον Θεαίτητο η εσφαλμένη σκέψη του, ο διάλογος συνεχίζεται με θέμα την ανακάλυψη της αρρητότητας των πλευρών των τετραγώνων με εμβαδά 3, 5, 7, …, 17 από το Θεόδωρο. Στο σημείο αυτό ο Θεαίτητος προτείνει το χωρισμό των αριθμών σε δυο διαφορετικές κατηγορίες: Στους **τετράγωνους αριθμούς** και στους **προμήκεις αριθμούς.**

- **Τετράγωνοι (και ισόπλευροι)**: είναι οι **αριθμοί** οι οποίοι προκύπτουν με πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του π.χ. 4, 9, 16,…
- **Προμήκεις**: είναι οι **αριθμοί** οι οποίοι δεν προκύπτουν από τέτοιου είδους πολλαπλασιασμό π.χ. 6=2*3, 8=2*4,…

Με βάση τη παραπάνω διάκριση των αριθμών ο Θεαίτητος συνεχίζει και διακρίνει τις **γραμμές** σε εκείνες

- δια των οποίων μπορεί να κατασκευαστεί τετράγωνο, του οποίου το εμβαδόν αντιστοιχεί σε τετράγωνο αριθμό, τις οποίες και ονομάζει **μήκος** και σε εκείνες
- δια των οποίων κατασκευάζουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδόν δεν αντιστοιχεί σε τετράγωνο αριθμό, τις οποίες και ονομάζει **δυνάμεις**

Ανάλογα ισχύουν και στα στερεά

Θεαίτητος [147d3-148b4]

ΘΕΑΙ. *Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος ᾗ ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.*

ΣΩ. *Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;*

ΘΕΑΙ. *Ἔμοιγε δοκοῦμενῇ σκόπει δὲ καὶ σύ.*

ΣΩ. *Λέγε.*

ΘΕΑΙ. *Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομενῇ τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες* ***τετράγωνόν*** *τε καὶ* ***ἰσόπλευρον*** *προσείπομεν.*

ΣΩ. *Καὶ εὖ γε.*

ΘΕΑΙ. *Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ᾽ ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες* ***προμήκη ἀριθμὸν*** *ἐκαλέσαμεν.*

ΣΩ. *Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;*

ΘΕΑΙ. *Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι,* ***μῆκος*** *ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη,* ***δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ᾽ ἐπιπέδοις ἃ δύνανται.*** *καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.*

ΣΩ. *Ἄριστά γ᾽ ἀνθρώπων, ὦ παῖδες· ὥστε μοι δοκεῖ ὁ Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς ψευδομαρτυρίοις ἔσεσθαι.*

Ωστόσο, η ουσία δεν έγκειται τόσο στους παραπάνω ορισμούς, όσο στη πρόταση που διατυπώνεται συνοπτικά στο τέλος «*τα ευθύγραμμα τμήματα (π.χ.* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$*) τα οποία παράγουν τετράγωνο με εμβαδόν ακέραιο αλλά όχι τετράγωνο αριθμό είναι ασύμμετρα ως προς τη μονάδα μήκους*»[5].

Η ομοιότητα που υπάρχει ανάμεσα στην ορολογία του διαλόγου Θεαίτητος και σ΄ εκείνη της αρχής του δέκατου βιβλίου είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακή και πρέπει να τονιστεί. Η φράση «μήκει σύμμετρος» εμφανίζεται αυτούσια και στα δυο ενώ η έκφραση «δυνάμει σύμμετρος» αντιστοιχεί στον Πλάτωνα στην περιφραστική διατύπωση «*ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται*». Ηχητικά και σημασιολογικά οι λέξεις μήκος και δυνάμεις στον Πλάτωνα συνδέονται στενά με τις φράσεις μήκη σύμμετρος και δυνάμει σύμμετρος του Ευκλείδη. Και ενώ στον Πλάτωνα ο Θεαίτητος ξεκινά υπενθυμίζοντας τα επιτεύγματα του Θεόδωρου, το δέκατο βιβλίο αρχίζει με τρεις προτάσεις που αναφέρονται στις διαδοχικές αφαιρέσεις άνισων μεγεθών, μεταξύ των οποίων απαντά, **<u>ως πρόταση Χ2, ακριβώς το κριτήριο της ασυμμετρίας</u>** που κατά πάσα πιθανότητα είχε χρησιμοποιήσει ο Θεόδωρος στην έρευνα του.

Πρόταση Χ2: *Εὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται* τὰ *μεγέθη.*

Δηλαδή

Αν δοθούν δυο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε απομένει δεν μετρά το προηγούμενο του, τότε τα δυο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Ουσιαστικά η **Πρόταση Χ2 λέει :**

Αν α, β είναι 2 μεγέθη με α>β και η ανθυφαίρεση του α προς το β είναι άπειρη τότε τα α, β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

[5] Η ανάλογη πρόταση για τους στερεούς αριθμούς, η οποία υποδεικνύεται συνοπτικά από το Θεαίτητο θα έπρεπε να διατυπώνεται ως εξής: «*τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία παράγουν κύβους με όγκο ακέραιο αλλά όχι κυβικό αριθμό, είναι ασύμμετρα ως προς τη μονάδα μήκους*»

Είναι επομένως φανερό ότι ο διάλογος «Θεαίτητος» και το βιβλίο Χ συνδέονται και συμπληρώνουν το ένα το άλλο. Ο Θεαίτητος χρειαζόταν τις προτάσεις Χ5, Χ6 και Χ9 για να αποδείξει την πρόταση που διατυπώνει στον διάλογο. Η άποψη αυτή επιβεβαιώνεται και από τη σημείωση στην Πρόταση Χ9 το οποίο αναφέρει ότι το Θεώρημα ανακαλύφθηκε από το Θεαίτητο.

Ένα ερώτημα που προκύπτει κατά τη μελέτη του δέκατου βιβλίου είναι για ποιο λόγο υπάρχει η πρόταση Χ1. Στο δέκατο βιβλίο χρησιμοποιείται αποκλειστικά στην απόδειξη της πρότασης Χ2. Η απόδειξη της Χ2 από τη Χ1 είναι εξαιρετικά κομψή μπορεί όμως να γίνει χωρίς την παραμικρή δυσκολία και χωρίς την Χ1 π.χ. ως εξής: αν τα μεγέθη Α και Β είχαν κοινό μέτρο Ε τότε τα υπόλοιπα που προκύπτουν από την ανθυφαίρεση θα ήταν πάντοτε πολλαπλάσια του Ε και μάλιστα σταθερά ελαττούμενα πολλαπλάσια, οπότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων η ακολουθία των υπολοίπων θα έφανε στο τέλος.

Κατά συνέπεια η Χ1 δεν είναι απαραίτητη ως προαπαιτούμενη της Χ2. Αλλά, τότε ποιον σκοπό εξυπηρετεί η Χ1; Χρειάζεται για να θεμελιωθεί η θεωρία των αναλογιών. Προφανώς ο Θεαίτητος άρχισε το βιβλίο του με μια έκθεση της θεωρίας των αναλογιών με βάση τον ορισμό της ανταναίρεσης. Ακολουθώντας τη συνηθισμένη μέθοδο άρχισε με λήμματα τα οποία θα του χρειάζονταν αργότερα. Σε αυτά περιλαμβάνεται η Χ1. Στις προτάσεις Χ2,3 θεμελίωσε τη θεωρία της άπειρης και πεπερασμένης ανταναίρεσης πετυχαίνοντας έτσι, συγχρόνως να βρει ένα κριτήριο συμμετρίας για δυο ευθύγραμμα τμήματα ή για δυο επιφάνειες. Είναι πιθανό ότι το επόμενο βήμα ήταν η θεωρία των αναλογιών με βάση τον ορισμό μέσω της ανταναίρεσης στον οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης. Ο Ευκλείδης παρέλειψε αυτό το κομμάτι γιατί είχε ήδη δεδομένη μια άλλη θεωρία αναλογιών στο πέμπτο βιβλίο. Από το χωρίο από τα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλη που παρατέθηκε πιο πριν γίνεται φανερό γιατί προτιμήθηκε η νέα αυτή η θεωρία, που οφείλεται στον Εύδοξο, ήταν πιο απλή. Ο Θεαίτητος τότε προχώρησε στην ανάπτυξη της θεωρίας των αναλογιών (Χ4, 5…). Σε αυτό το τμήμα του βιβλίου, ο Ευκλείδης αντικατέστησε τις αποδείξεις με άλλες των οποίων τη μέθοδο δανείστηκε από τον Αρχύτα και τη σχολή του. Το επόμενο κύριο τμήμα του δέκατου βιβλίου που αναφέρεται στα 13 είδη άρρητων γραμμών έμεινε ουσιαστικά αμετάβλητο από τον Ευκλείδη, εκτός από μερικές ήσσονος σημασίας προτάσεις και παρατηρήσεις που πρόσθεσαν αυτός και οι διάδοχοι του και που σκοπό είχαν να διασαφηνίσουν το εξαιρετικά δύσκολο θέμα.

Άρα, η αξία του Θεαίτητου έγκειται στη μελέτη που έκανε των ασύμμετρων τμημάτων που παράγουν σύμμετρα τετράγωνα. Αυτός εισήγαγε τις ακριβείς έννοιες «μήκη σύμμετρος» και «δυνάμει σύμμετρος» με τις οποίες επιτευχθεί η ταξινόμηση των ευθυγράμμων τμημάτων σε σύμμετρα «μήκη» και ασύμμετρες «πλευρές τετραγώνων». Στη πρόταση Χ9 διατύπωσε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για δυο τετράγωνα ώστε οι πλευρές του να είναι μήκη σύμμετρες.

Πρόταση Χ9

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγονἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λογον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Δηλαδή,

Πρόταση Χ9

Τα τετράγωνα μήκη σύμμετρων ευθειών έχουν λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό και τα τετράγωνα που έχουν λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμό προς τετρώγωνο έχουν πλευρές μήκει σύμμετρες . Ενώ τα τετράγωνα μήκει ασύμμετρων ευθειών δεν έχουν λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό και τα τετράγωνα που δεν έχουν λόγο μεταξύ τους όπως έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό ούτε τις πλευρές έχουν μήκει σύμμετρες.

Με σύγχρονο συμβολισμό έχουμε :

- αν Α, Β μήκει σύμμετρες ευθείες, τότε: $\frac{A^2}{B^2} = \frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ τετράγωνοι αριθμοί (δηλαδή, $\kappa = \alpha^2$ και $\lambda = \beta^2$) και αντίστροφα
- αν Α, Β μήκει ασύμμετρες ευθείες, τότε: $\frac{A^2}{B^2} \neq \frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ τετράγωνοι αριθμοί και αντίστροφα.

Πολύ σημαντικό είναι και το πόρισμα που ακολουθεί:

Πόρισμα

«*Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.*

πάλιν ἐπεί, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκειρ ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δή, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροιρ εἰ γὰρ [εἰσι] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροιρ ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει]».

Με τη βοήθεια διαγράμματος το παραπάνω πόρισμα λέει :

Πόρισμα

- αν Α, Β μήκει σύμμετρες ευθείες, ⇨ Α, Β δυνάμει σύμμετρες ευθείες
- αν Α, Β δυνάμει σύμμετρες ευθείες ⇨ { μήκει σύμμετρες ευθείες / όχι μήκει σύμμετρες ευθείες }
- αν Α, Β μήκει ασύμμετρες ευθείες ⇨ { δυνάμει σύμμετρες ευθείες / όχι δυνάμει σύμμετρες ευθείες }
- αν Α, Β δυνάμει ασύμμετρες ευθείες, ⇨ Α, Β μήκει ασύμμετρες ευθείες

Αυτό του επέτρεψε να απαντήσει στο ερώτημα ποιες πλευρές τετραγώνων είναι σύμμετρες προς τη μονάδα του μήκους και έτσι να λύσει με κάθε γενικότητα το πρόβλημα που ο Θεόδωρος είχε μπορέσει να αντιμετωπίσει μόνο για τετράγωνα με εμβαδά από 3 έως 17 τετραγωνικούς πόδες.
Ακόμα,

Από προτάσεις Χ1-8 έχουμε:

- Α, Β σύμμετρα μεγέθη ⇔ έχουν κοινό μέτρο ⇔ έχουν λόγο αριθμό προς αριθμό ⇔ Ανθ (Α, Β) πεπερασμένη
- Α, Β ασύμμετρα μεγέθη ⇔ δεν έχουν κοινό μέτρο ⇔δεν έχουν λόγο αριθμό προς αριθμό ⇔ Ανθ (Α, Β) άπειρη

Άρα καταλήγει στο παρακάτω σημαντικό χαρακτηρισμό

Ο Θεαίτητος χαρακτηρίζει **ρητές** τις ευθείες

- η ανθυφαίρεση τους είναι πεπερασμένη (δυνάμει και μήκει σύμμετροι)
- η ανθυφαίρεση τους είναι άπειρη μεν αλλά περιοδική (ή και παλινδρομική) (δυνάμει μόνο σύμμετροι)

Ο Θεαίτητος χαρακτηρίζει **άλογες** τις ευθείες

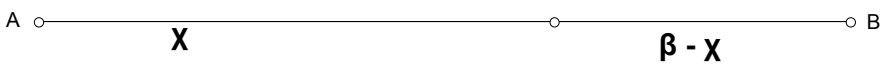
- η ανθυφαίρεση τους είναι άπειρη (ούτε μήκει ούτε δυνάμει σύμμετροι)

Σημειώνουμε ότι όταν έχουμε ευθείες με άπειρη ανθυφαίρεση αλλά περιοδική, ή παλινδρομική τότε ουσιαστικά η ανθυφαίρεση είναι γνωστή και άρα το συνεχές κλάσμα τους είναι γνωστό. Παραδείγματος χάριν, γνωρίζουμε ότι

Ανθ($\sqrt{2}$, 1) = [1, 2, 2, **…**] = [1, $\overline{2}$] ⇨ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$ ($\alpha^2 = 2\beta^2$),.

Γι' αυτό και ο Θεαίτητος τις χαρακτηρίζει ως ρητές. Τέλος αν αντιστρόφως γνωρίζουμε το συνεχές κλάσμα ενώ αριθμού μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτό. Παραδείγματος χάριν, γνωρίζουμε ότι το συνεχές κλάσμα της χρυσής τομής (έστω χ αυτή) είναι: $\chi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$ ⇨ $\chi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}$ ⇨ $\chi = 1+\cfrac{x}{x+1}$ ⇨ $x^2 - x - 1 = 0$ ⇨

$\chi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, που είναι η χρυσή τομή!. (Ανθ(χ,1) = [1, 1, …] = [$\overline{1}$]).



$$\frac{\beta}{\chi} = \frac{\chi}{\beta - \chi}$$

2.2.4 Συμπέρασμα

Μελετήσαμε το ιστορικό της ανακάλυψης της ασυμμετρίας- αρρητότητας. Είδαμε πως αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν στην ύπαρξη μόνο ρητών αριθμών. Ωστόσο, σύμφωνα με το κ. Νεγρεπόντη η αρρητότητα ήταν γνωστή στους Πυθαγόρειους μέσω της μουσικής. Είχαν βρει πως η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη. Η σύγχυση επομένως που προκαλείται από την μη εύρεση κοινού μέτρου μεταξύ διαγωνίου και πλευράς τετραγώνου μέτρου, ακόμα και κρίση όπως λέγεται, είναι προσωρινή και καταφέρνουν να την ξεπεράσουν και να προχωρήσουν.

Την γνώση της αρρητότητας επιβεβαιώνει και ο Πλατωνικός διάλογος Μένων. Έχουμε την αρρητόττα του $\sqrt{2}$, την ασυμμετρία δηλαδή μεταξύ πλευράς και διαγωνίου τετραγώνου. Το κριτήριο του λόγου εφαρμόζεται και έχουμε απόδειξη της άπειρης αλλά περιοδικής ανθυφαίρεσης του $\sqrt{2}$. Άλλες πηγές αποτελούν η Πολιτεία του Πλάτωνος 546α, Ιάμβλιχος, σχόλια εις Νικόμαχον και Πρόκλος, Σχόλια εις Πολιτείαν χωρία (2.24.16-25.13), (2.27.1-29.4) όπου γίνεται αναφορά στους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, στη σχέση που τους συνδέει $q_n^2 = 2 * p_n^2 + (-1)^\eta$ και κυρίως τη σχέση τους με το $\sqrt{2}$, τη γεωμετρική δηλαδή προσέγγιση του.

Ακολουθεί ο Πλατωνικός διάλογος Θεαίτητος, που αποδεδειγμένα σχετίζεται με το δέκατο βιβλίο του Ευκλείδη. Εδώ, διατυπώνεται η εξέχουσας σημασίας πρόταση Χ2, που αποτελεί και το κριτήριο ασυμμετρίας, κριτήριο που πρέπει οι Πυθαγόρειοι να γνώριζαν.

Για άλλη μια φορά, όπως και στην περίπτωση του Ευκλείδειου αιτήματος ($5^{ου}$ αιτήματος), έχουμε μια αρχική λανθασμένη πίστη. Ωστόσο, η συνειδητοποίηση του λάθους δεν οδηγεί σε τόσο μεγάλη κρίση που να προκαλεί διάλυση, αντίθετα, κινητοποιεί τους Πυθαγόρειους στην εύρεση της αλήθειας. Θεμελιώνουν εξ αρχής την θεωρία τους και προχωρούν την μαθηματική επιστήμη πολλά βήματα μπροστά καθώς το κριτήριο της ασυμμετρίας που διατυπώνεται τελικά στην πρόταση Χ2 αποτελεί σταθμό στα μαθηματικά. Και πάλι η ιστορία μας αποδεικνύει πως χωρίς λάθη δεν μπορεί να υπάρχει εξέλιξη.

2.3 Η υπεράσπιση από το Cauchy «της αρχής της συνέχειας»

Έως τώρα είδαμε δυο πολύ σημαντικούς σταθμούς στη ιστορία των μαθηματικών. Κοινό σημείο και των δυο η αφετηρία τους, μια αρχική λανθασμένη εικασία. Στην πρώτη περίπτωση αυτή οδήγησε στην θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και στη δεύτερη περίπτωση στην έννοια της ασυμμετρίας.

Ένας εξίσου σημαντικός σταθμός, όπου μια εσφαλμένη αρχική αίσθηση βοήθησε στην ανακάλυψη καινούριων εννοιών και επομένως και αυτός με τη σειρά του στην προώθηση της μαθηματικής επιστήμης, είναι η υπεράσπιση από τον Cauchy της «*αρχής της συνέχειας*». Το κέρδος από το «*λάθος*» αυτό είναι η έννοια της ***ομοιόμορφης σύγκλισης***, έννοια ιδιαίτερα σημαντική στον απειροστικό λογισμό.

Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο τις διάφορες φιλοσοφικές σχολές και την θέση του λάθους μέσα σε αυτές. Μια από αυτές είναι και ο ημιεμπειρικισμός του Lakatos, η πιο απλά, η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών του Lakatos.
Περιληπτικά τα στάδια της μεθόδου αυτής είναι:

1. Διατυπώνεται κάποια αρχική εικασία
2. Παρουσιάζεται μια απόδειξη
3. Αναδύονται καθολικά αντιπαραδείγματα (αντιπαραδείγματα της όλης αρχικής εικασίας)
4. Επανεξετάζεται η απόδειξη: εντοπίζονται τα ένοχα λήμματα

Η υπεράσπιση από τον Cauchy της «*αρχής της συνέχειας*» είναι μια περίπτωση προβλήματος που προσφέρεται να μελετηθεί με βάση τη μέθοδο αυτή του Lakatos.

Σ' αυτήν την περίπτωση η αρχική εικασία είναι ότι «**το όριο κάθε συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση**», εικασία που όπως σήμερα γνωρίζουμε δεν είναι σωστή.

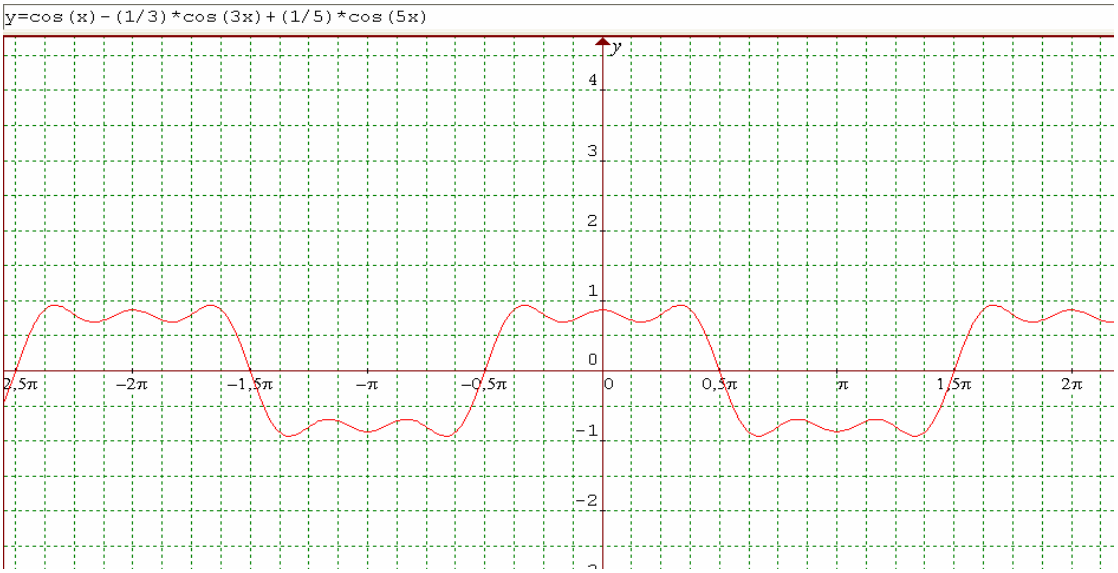
Η εικασία αυτή έμεινε αναπόδεικτη όλο το 18ο αιώνα καθώς θεωρείτο ειδική περίπτωση του γενικού αξιώματος «**ότι αληθεύει έως το όριο αληθεύει και για το ίδιο το όριο**», και επομένως δεν υπήρχε η ανάγκη για να αποδειχτεί. Ο πρώτος που έδωσε μια

απόδειξη αυτής της εικασίας, ήταν ο Cauchy. (Η απόδειξη του είναι εσφαλμένη και το λάθος οφείλεται κυρίως στην επιπόλαιη χρήση των απειροστών). Προκύπτει εδώ το ερώτημα: δεδομένου ότι μέχρι τότε η εικασία θεωρούνταν τετριμμένα αληθής, γιατί ο Cauchy αισθάνθηκε την ανάγκη να την αποδείξει; Ποιος την είχε υποβάλλει σε κριτική;

Το παράδοξο είναι ότι από το 1807 στην πραγματεία του Fourier (1768-1830) (αλλά και σε χειρόγραφα του Poisson) υπάρχουν αντιπαραδείγματα σ' αυτό το αποτέλεσμα του Cauchy. Παραδείγματος χάριν, ο Fourier γνώριζε ότι η

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, 0 \le x < \pi \\ -\frac{\pi}{4}, \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

και $f(x+2\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \Re$



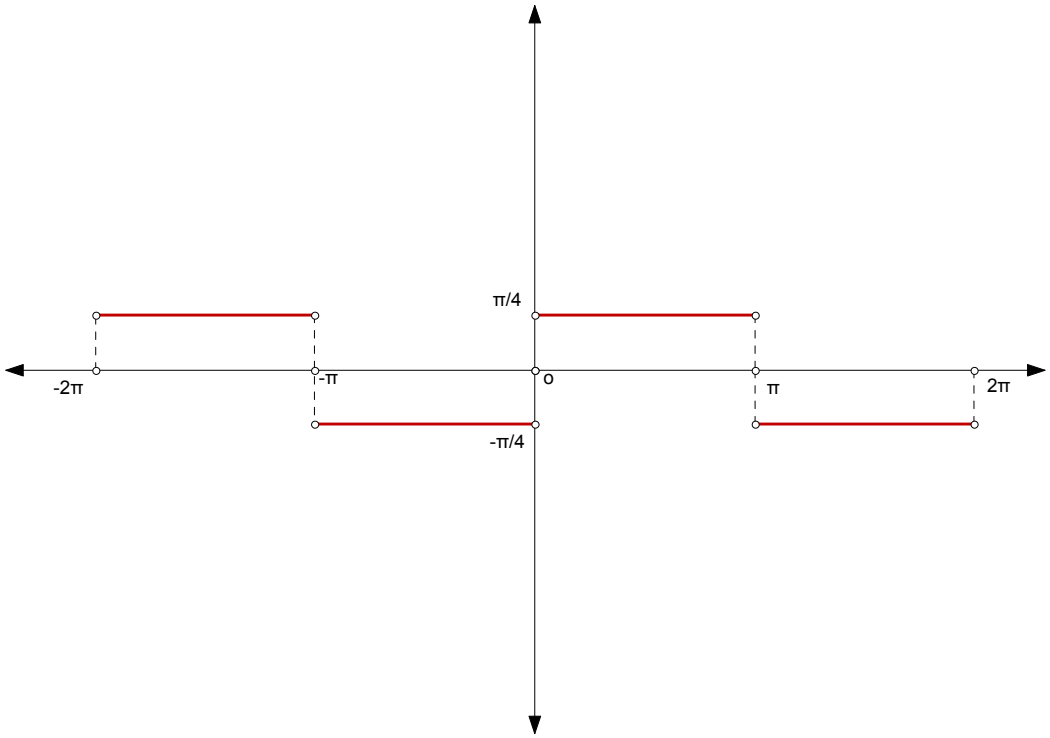
Όμως ο Fourier δεν θεώρησε ότι ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα ήταν σε σύγκρουση με το αποτέλεσμα του Cauchy, καθώς υπήρχε μια διπλή σύγχυση: της έννοιας της συνάρτησης και της έννοιας της συνέχειας. Ο Fourier θεωρούσε συνεχή μια συνάρτηση, όχι σύμφωνα με τον αυστηρό ορισμό του Cauchy, αλλά αν μπορούσε να σχεδιαστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Ορισμός Cauchy : Έστω $X \subset \Re$, f : $X \to \Re$, μια πραγματική συνάρτηση και $x_o \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_o αν για κάθε ε > 0 υπάρχει δ = δ(ε, x) > 0 ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο X αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x_o αν δεν είναι συνεχής στο x_o και ασυνεχής (στο X) αν δεν είναι συνεχής (στο X).

Καθώς λοιπόν, η έννοια της συνάρτησης ήταν επίσης σε σύγχυση, η οριακή συνάρτηση f του παραπάνω παραδείγματος που έχει το παρακάτω γράφημα



θεωρείται συνεχής, εφόσον το συμπληρωμένο γράφημα (που βέβαια σύμφωνα με το σύγχρονο ορισμό, δεν είναι πλέον συνάρτηση) μπορούμε να το σχεδιάσουμε χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

2.3.1 Η απόδειξη του Seidel και η αποδεικτικής καταγωγής έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Όλοι αισθάνονταν τότε ότι αυτή περίπτωση Cauchy - Fourier δεν ήταν αθώος γρίφος αλλά μοιραία κατάρα για όλα τα νέα «αυστηρά μαθηματικά» Ο Dirichlet στις περίφημες δημοσιεύσεις του περί των σειρών Fourier παρότι ενδιαφερόταν να δείξει ακριβώς με ποιον τρόπο τέτοιες συγκλίνουσες σειρές από συνεχείς συναρτήσεις αντιπροσωπεύουν συνεχείς συναρτήσεις, και ενώ προφανώς γνώριζε τις απόψεις του Cauchy για τη συνέχεια, δεν μνημονεύει καθόλου την προφανή αντίφαση.

Ο Seidel (1821-1896) έλυσε τελικά το αίνιγμα εντοπίζοντας το ένοχο λήμμα στην απόδειξη του Cauchy. Αυτό όμως συνέβη το 1847. Γιατί χρειάστηκε τόσος χρόνος; Για να απαντήσουμε πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικά τη διάσημη ανακάλυψη του Seidel.

Η Απόδειξη του Seidel

Έστω $\sum f_\nu(x)$ μια συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε ν ας ορίσουμε $\sum_\nu x = \sum_{\mu=0}^{\nu} f_\mu(x)$ και $\rho_\nu(x) = \sum_{\mu=(\nu+1)}^{\infty} f_\nu(x)$ Η απόδειξη του Cauchy έχει σχηματικά ως εξής: Δεδομένου ενός ε>0 τότε:

1. Υπάρχει ένα δ ώστε για κάθε β, εάν $|\beta|$<δ τότε $\left|\sum_\nu(x+\beta) - \sum_\nu(x)\right|$<ε και αυτό λόγω της συνέχειας των $\sum_\nu(x)$
2. Υπάρχει ένα Ν ώστε για ν≥Ν να ισχύει $|\rho_\nu(x)|$<ε και αυτό λόγω σύγκλισης της $\sum f_\nu(x)$ [6].
3. Υπάρχει ένα ΄Ν ώστε να ισχύει το ίδιο για ν≥ ΄Ν για το $|\rho_\nu(x+\beta)|$<ε και αυτό γιατί και το $\sum f_\nu(x+\beta)$ συγκλίνει.

Όλα μαζί δίνουν για όλα τα β με β<δ:

---

[6] **Κριτήριο Cauchy** : Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ⇔ για κάθε ε > 0 υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , ώστε $\left|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n\right|$ < ε για κάθε n > m ≥ n_0

$$| f(x+\beta) - f(x) | = | \sum_{\nu} (f+\beta) + \rho_{\nu}(x+\beta) - \sum_{\nu} (f(x) - \rho_{\nu}(x)) |$$

$$\leq \left| \sum_{\nu} (x+\beta) - \sum_{\nu} (x) \right| + | \rho_{\nu}(x+\beta) | + \left| \rho_{\nu}(x) \right|$$

$$< 3\varepsilon$$

Όμως τα καθολικά αντιπαραδείγματα σειρών που συγκλίνουν σε ασυνεχείς κατά Cauchy συναρτήσεις δείχνουν ότι σε αυτή τη σχηματική απόδειξη υπάρχει κάποιο λάθος. Ποιο είναι όμως το ένοχο λήμμα; Αν προχωρήσουμε σε μια προσεκτική μελέτη της απόδειξης, χρησιμοποιώντας τα ίδια σύμβολα αλλά καθιστώντας ρητές τις συναρτησιακές εξαρτήσεις μερικών ποσοτήτων, προκύπτουν τα εξής:

1') $\left| \sum_{\nu} (x+\beta) - \sum_{\nu} (x) \right| < \varepsilon$ για $\beta < \delta(\varepsilon, \chi, \nu)$

2') $\left| \rho_{\nu}(x) \right| < \varepsilon$ για $\nu > N(\varepsilon, \chi)$

3') $| \rho_{\nu}(x+\beta) | < \varepsilon$ για $\nu > N(\varepsilon, \chi + \beta)$

άρα

$$| \sum_{\nu} (f+\beta) + \rho_{\nu}(x+\beta) - \sum_{\nu} (f(x) - \rho_{\nu}(x)) | = f(x+\beta) - f(x) < 3\varepsilon$$

εάν $\nu > \max z \; N(\varepsilon, z)$ για όλα τα z και $\beta < \delta(\varepsilon, \chi, \mu)$.■

Το κρυμμένο λήμμα ήταν ότι αυτό το μέγιστο θα έπρεπε να υπάρχει για όλα τα ε. Αυτό ονομάστηκε ***απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης***.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X σύνολο και f, $f_n : X \to \Re$ συναρτήσεις για $n = 1, 2, \ldots$

►Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** στη συνάρτηση f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n_0, ώστε

$n \geq n_0$, $x \in X$ ⇨ $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$. Γράφουμε στην περίπτωση αυτή $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

►Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ***συγκλίνει κατά σημείο*** στη συνάρτηση f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n_0, ώστε

$n \geq n_0$ ⇨ $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$. Γράφουμε στην περίπτωση αυτή $f_n \to f$ κατά σημείο και καλούμε την f οριακή συνάρτηση της ακολουθίας (f_n).

Τα μεγάλα εμπόδια προς αυτήν την ανακάλυψη ήταν μάλλον τρία.

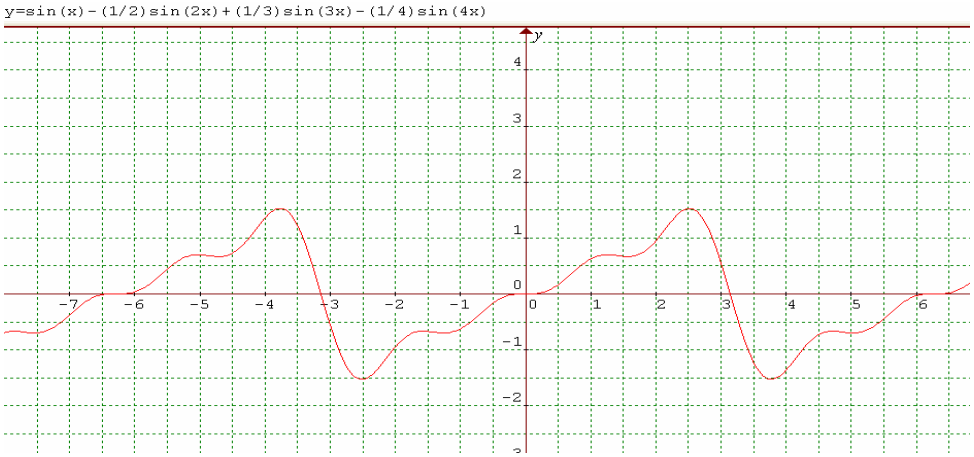
1. Το πρώτο ήταν η χαλαρή εκ μέρους του Cauchy χρήση των απείρως μικρών ποσοτήτων.
2. Το δεύτερο ήταν πως ακόμα κι αν μερικοί μαθηματικοί είχαν προσέξει ότι σ' αυτή την απόδειξη εμπλέκεται η παραδοχή ότι υπάρχει ένα μέγιστο ενός άπειρου συνόλου των N, θα την έκαναν κάλλιστα αποδεκτή χωρίς δεύτερη σκέψη. Η ύπαρξη αποδείξεων σε προβλήματα μέγιστων απαντά για πρώτη φορά στη σχολή του Weierstrass.
3. Το τρίτο και κυριότερο εμπόδιο ήταν η κυριαρχία της ευκλείδειας μεθοδολογίας.

Πριν το σχολιάσουμε αυτό γενικά ας δούμε συγκεκριμένα πως ο Abel έλυσε το πρόβλημα που έθετε το θεώρημα του Cauchy σχετικά με τα αντιπαραδείγματα του Fourier. Θα δείξουμε ότι το έλυσε με τη μέθοδο του αποκλεισμού των εξαιρέσεων.

2.3.2 Η μέθοδος του αποκλεισμού των εξαιρέσεων του Abel

Ο Niels.H.Abel (1802-1829), σημαντικός Νορβηγός μαθηματικός, ήταν ο πρώτος που διατύπωσε επιφυλάξεις για το θεώρημα του Cauchy. Στα 1826, είχε υπόψη του παρόμοια παραδείγματα όπως τη συνάρτηση:

$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \ldots$, η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε τιμή (2m+1)π του χ, για m ακέραιο,



και στη φημισμένη του πραγματεία για την διωνυμική σειρά γράφει με κάποια διστακτικότητα «*μου φαίνεται ότι υπάρχουν μερικές εξαιρέσεις στο θεώρημα του Cauchy*» Αντί όμως να εντοπίσει το σφάλμα της απόδειξης του Cauchy, κάτι που ενδεχομένως θα τον οδηγούσε στην ανακάλυψη της έννοιας της ομοιόμορφης σύγκλισης, απλά προσπαθεί να περιορίσει το πεδίο εντός του οποίου το αποτέλεσμα του Cauchy είναι έγκυρο. Διατυπώνει επομένως την απορία: «***Ποια είναι η ασφαλής περιοχή του θεωρήματος Cauchy;***»

Η απάντηση που δίνει είναι η εξής: Η περιοχή εγκυρότητας των θεωρημάτων ανάλυσης γενικότερα, και αυτού του θεωρήματος για τη συνέχεια της συνάρτησης ορίου ειδικότερα, περιορίζεται στις δυναμοσειρές. Όλες αυτές οι γνωστές εξαιρέσεις αυτής της βασικής αρχής της συνέχειας είναι τριγωνομετρικές σειρές. Έτσι ο Abel πρότεινε την υποχώρηση της ανάλυσης στην ασφαλή περιοχή των δυναμοσειρών εγκαταλείποντας τις τριγωνομετρικές σειρές του Fourier σαν μια ανεξέλεγκτη ζούγκλα όπου οι εξαιρέσεις είναι κανόνας και οι επιτυχίες θαύματα.

2.3.3 Εμπόδια στην ανακάλυψη της αποδεικτικής ανάλυσης

Ο συσχετισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης με το αποτέλεσμα του Cauchy έγινε όπως είδαμε με αξιοσημείωτη καθυστέρηση στα 1847 από τον Γερμανό μαθηματικό P.L Seidel, μαθητή του Dirichlet (ο οποίος χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα του Dirichlet στις σειρές Fourier για αντιπαραδείγματα στο αποτέλεσμα του Cauchy).

Ένα ερώτημα επομένως που προκύπτει από την εξέταση αυτού του προβλήματος είναι γιατί οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί από το 1821 έως το 1847 δεν κατάφεραν να ανακαλύψουν το απλό λάθος στην απόδειξη του Cauchy και να το βελτιώσουν.

Μια πρώτη απάντηση που θα μπορούσαμε να δώσουμε είναι ότι δεν κατείχαν τη μέθοδο των αποδείξεων και ανασκευών. Με αυτό, εννοούμε ότι η αντίδραση τους στην εύρεση κάποιου αντιπαραδείγματος ήταν να το εξαιρούν και όχι να προσπαθούν να το αναλύσουν και να βρουν το ένοχο λήμμα. Ο Siedel ωστόσο, βαδίζοντας αντίστροφα και βρίσκοντας παραδείγματα ασυνεχών οριακών συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν την υπόθεση του Cauchy, εντόπισε το λάθος. Αυτό λοιπόν, που εμπόδισε σύμφωνα με τον Lakatos, τη γενιά που προηγήθηκε του Siedel να κάνει αυτή τη παρατήρηση ήταν η κυριαρχία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Ο Cauchy είχε ως κίνητρο τη συνειδητή προσπάθεια να εφαρμοστεί η ευκλείδεια μεθοδολογία στον Απειροστικό Λογισμό. Ο Cauchy και οι υποστηρικτές του, πίστευαν ότι μόνο με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαν να φωτίσουν «*τις σκοτεινές περιοχές της ανάλυσης*». Ο Cauchy προχώρησε στη γραμμή του Pascal: αρχίζει ορίζοντας τους θολούς όρους της ανάλυσης, π.χ. όριο, σύγκλιση, συνέχεια κ.τ.λ. μέσω των οικείων όρων της αριθμητικής, και στη συνέχεια αποδεικνύει ότι δεν είχε αποδειχθεί ή ότι δεν ήταν εντελώς προφανές. Για να βελτιώσει τις εικασίες αναζήτησε τις εξαιρέσεις και περιόρισε την περιοχή εγκυρότητας των αρχικών και σχηματικά διατυπωμένων εικασιών σε μια ζώνη ασφαλείας, εφάρμοσε δηλαδή τη μέθοδο αποκλεισμού των εξαιρέσεων.

Ένας συγγραφέας, στην έκδοση του 1865 του Larousse (πιθανόν Καταλανός), ειρωνεύτηκε σαρκαστικά την αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων εκ μέρους του Cauchy. Έγραψε «*Εισήγαγε στην επιστήμη μόνο αρνητικά δόγματα... πραγματικά σχεδόν αποκλειστικά ανακάλυπτε τις αρνητικές πλευρές της αλήθειας, αυτές φρόντιζε να καθιστά σαφείς : αν έβρισκε ψήγματα χρυσού στον ασβεστίτη θα ανακοίνωνε ότι η κιμωλία δεν αποτελείται αποκλειστικά από ανθρακικό ασβέστιο*».

Ένα σημείο μιας επιστολής του Abel προς τον Holmboe δίνει πρόσθετα στοιχεία γι' αυτήν την ενδοσκοπική διάθεση της σχολής του Cauchy:

«*Έχω αρχίσει να εξετάζω τους πιο σημαντικούς κανόνες που (προς το παρόν) σεβόμαστε ώστε να δείξω ποιες περιπτώσεις τους δεν έχουν καλώς. Το ζήτημα παρουσιάζει θετική πρόοδο και έχει απεριόριστο ενδιαφέρον για μένα*».

Ότι οι υποστηρικτές της αυστηρότητας έκριναν ασήμαντο, όπως τις εικασίες περί του ορίου μη συγκλινουσών σειρών, το έριχναν στη πυρά. Ο Abel έγραψε: «*Οι αποκλίνουσες σειρές είναι έργο του διαβόλου*». Δεν προκαλούν παρά «*συμφορές και παραδοξότητες*».

Καθώς όμως προσπαθούσαν σταθερά να βελτιώσουν τις εικασίες τους με τον αποκλεισμό των εξαιρέσεων, δεν σκέφτηκαν ποτέ να βελτιώσουν αποδεικνύοντας. Οι δυο δραστηριότητες της εικασίας και της απόδειξης διακρίνονται σαφώς στην Ευκλείδεια παράδοση. Η ιδέα μιας απόδειξης που αξίζει το όνομα της έστω και χωρίς να είναι οριστική ήταν ξένη προς τους υποστηρικτές της αυστηρότητας. Τα αντιπαραδείγματα θεωρούνταν βαριές και καταστροφικές κριτικές: έδειχναν ότι η εικασία είναι λανθασμένη και ότι έπρεπε να αρχίσουν μια νέα, εκ του μηδενός, αναζήτηση.

Αυτό γίνεται κατανοητό καθώς στον 18^{ο} αιώνα πενιχρά αποσπάσματα επαγωγικής συλλογιστικής ονομάζονταν αποδείξεις. Δεν υπήρχε όμως τρόπος να βελτιωθούν αυτές οι «*αποδείξεις*». Ορθώς απορρίφθηκαν «μη αυστηρές αποδείξεις» - δηλαδή μη αποδείξεις.[7] Τα επαγωγικά επιχειρήματα ήταν λανθασμένα και ρίχτηκαν στην πυρά. Τα παραγωγικά επιχειρήματα θεωρούνταν αλάνθαστα και χρησιμοποιήθηκαν ως αντικαταστάτες. «*Απαλείφω κάθε αβεβαιότητα*» δήλωνε ο Cauchy. Η ανασκευή της αυστηρής απόδειξης του Cauchy πρέπει να εκτιμηθεί εντός αυτού του πλαισίου. Η υπό συζήτηση ανασκευή δεν ήταν η μόνη: την αυστηρή απόδειξη από τον Cauchy του τύπου Euler ακολούθησε σειρά δημοσιεύσεων οι οποίες ανέφεραν τις γνωστές «*εξαιρέσεις*».

Οι διέξοδοι ήσαν μόνο δυο: η αναθεώρηση όλης της φιλοσοφίας των μαθηματικών περί του αλάθητου της ευκλείδειας μεθοδολογίας ή η αποσιώπηση του προβλήματος. Ας δούμε πρώτα τι θα σήμαινε προσπάθεια αναθεώρησης. Θα έπρεπε να εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι όλα τα μαθηματικά μπορεί να αναχθούν σε αδιαμφισβήτητες αληθείς κοινοτοπίες, ότι δηλαδή υπάρχουν δηλωτικές προτάσεις για τις οποίες η διαίσθηση μας για το αληθές δεν είναι δυνατόν να σφάλει. Έπρεπε επίσης να εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι η παραγωγική συμπερασματική μας διαίσθηση είναι αλάνθαστη. Μόνο με αυτές τις δυο παραδοχές θα απελευθερωνόταν ο δρόμος προς την ελεύθερη ανάπτυξη της μεθόδου των αποδείξεων και ανασκευών και την εφαρμογή της

[7] Abel [1826α], s. 263. Για τους Cauchy και Abel «αυστηρός σημαίνει παραγωγικός σε αντίθεση με τον επαγωγικό.

στο κριτικό έπαινο της παραγωγικής συλλογιστικής και στο πρόβλημα της αντιμετώπισης των αντιπαραδειγμάτων.

Όσο ένα αντιπαράδειγμα θεωρούνταν ψεγάδι όχι μόνο για ένα θεώρημα αλλά και για τον μαθηματικό που το ανακάλυψε, όσο υπήρχαν είτε αποδείξεις μόνο είτε μη αποδείξεις, όχι όμως στέρεες αποδείξεις με ασθενή σημεία, τόσο η μαθηματική κριτική τελούσε υπό δίωξη. Το αλάνθαστο φιλοσοφικό υπόβαθρο της ευκλείδειας μεθόδου. έθρεψε τα αυταρχικά παραδοσιακά σχήμα στην επιστήμη των μαθηματικών, εμπόδισε τη δημοσίευση και το σχολιασμό εικασιών και κατέστησε ανέφικτη την ανάπτυξη της μαθηματικής κριτικής. Η φιλοσοφική κριτική υπάρχει επειδή μπορεί να μας αρέσει ένα ποίημα χωρίς να το θεωρούμε κατ' ανάγκην τέλειο. Η επιστημονική ή μαθηματική κριτική δεν μπορεί να υπάρχει όταν σε ένα μαθηματικό ή επιστημονικό αποτέλεσμα το μόνο που εκτιμάμε είναι αν οδηγεί στην τέλεια αλήθεια. Μια απόδειξη είναι απόδειξη μόνο όταν αποδεικνύει. Και είτε αποδεικνύει είτε όχι, τίποτε άλλο. Έτσι η ιδέα που τόσο καθαρά εξέφρασε ο Siedel ότι μια απόδειξη μπορεί να είναι σεβαστή χωρίς να είναι αλάνθαστη, ήταν ένα επαναστατικό βήμα το 1847, και δυστυχώς παραμένει το ίδιο ακόμα και σήμερα.

Δεν είναι σύμπτωση το ότι η ανακάλυψη της μεθόδου των αποδείξεων και ανασκευών έγινε τη δεκαετία του 1840, όταν το ρήγμα στην οπτική του Newton (με τις εργασίες του Fresnel τις δεκαετίες του 1810 και 1820), και η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών (με τις εργασίες των Lobatschewsky το 1829 και Bolyai το 1832) διέλυσαν την αλαζονεία περί του αλάθητου.

Πριν ανακαλυφθεί η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών, το πρόβλημα που έθετε η εμφάνιση ενός αντιπαραδείγματος σ' ένα αυστηρά αποδεδειγμένο θεώρημα δεν μπορούσε να επιλυθεί παρά μόνο με τη μέθοδο του αποκλεισμού των εξαιρέσεων. *Η απόδειξη αποδεικνύει το θεώρημα με μόνη εκκρεμότητα την ακριβή περιοχή εγκυρότητας του. Αυτή προσδιορίζεται εντοπίζοντας και αποκλείοντας προσεκτικά τις εξαιρέσεις του θεωρήματος (αυτός ο ευφημισμός είναι χαρακτηριστικό εκείνης της εποχής). Οι εξαιρέσεις περιλαμβάνονται στη διατύπωση του θεωρήματος.*

Η κυριαρχία της μεθόδου αποκλεισμού των εξαιρέσεων δείχνει πως η ευκλείδεια μεθοδολογία έχει σε ορισμένες κρίσιμες προβληματικές καταστάσεις δηλητηριώδεις επιδράσεις στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Οι περισσότερες από αυτές τις καταστάσεις προκύπτουν στις αναπτυσσόμενες μαθηματικές θεωρίες όπου οι αναπτυσσόμενες έννοες είναι το όχημα της προόδου και όπου τα πιο ενδιαφέροντα γεγονότα συμβαίνουν στα σύνορα των εννοιών, στις διευρύνσεις ή τους περιορισμούς

τους, στις διευκρινίσεις και διαφοροποιήσεις τους. Σ' αυτές τις αναπτυσσόμενες θεωρίες η διαίσθηση είναι αδοκίμαστη, διστάζει και σφάλλει. Δεν υπάρχει θεωρία που να μην πέρασε από τέτοια περίοδο ανάπτυξης. Τέτοιες περίοδοι είναι οι εντυπωσιακότερες από ιστορικής πλευράς και θα έπρεπε να είναι και οι σημαντικότερες από διδακτικής πλευράς, και δεν μπορεί να κατανοηθούν χωρίς να γίνει κατανοητή η μέθοδος των αποδείξεων και ανασκευών, χωρίς να γίνει αποδεκτή μια προσέγγιση της αλήθειας που επιτρέπεται να κάνει και λάθη.

Σημείωση: Τα παραπάνω στοιχεία είναι από τα βιβλία

1. Απειροστικός Λογισμός, τόμος ΙΙβ, των Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλο, Ε. Γιαννακούλια και
2. Αποδείξεις και Ανασκευές, Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης του Imre Lakatos (μετάφραση: Γ. Γεωργακόπουλος)

Παραθέτουμε την απόδειξη όπως αυτή υπάρχει στη σελ. 522 Απειρ. Λογ. ΙΙβ

Έστω $X \subset \Re$ και $f_n : X \to \Re$ συνεχείς συναρτήσεις για n = 1,2,… . Αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \Re$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Έστω $X \subset \Re$, χ_o και X, $f_n : X \to \Re$ συνεχείς συναρτήσεις για n = 1,2,… ώστε η f_n είναι συνεχής στο χ_o για n = 1,2,… και $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Τότε η f είναι συνεχής στο χ_o.

Απόδειξη

Έστω ε > 0. Εφ' όσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα υπάρχει φυσικός αριθμός η_o ώστε $\eta \geq \eta_o$, $x \in X$ ⇨ $\left|f_\eta(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Εφ' όσον f_{n_o} είναι συνεχής στο χ_o, υπάρχει δ > 0, ώστε χ ∈X, $\left|x - x_0\right| < \delta$ ⇨ $\left|f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Άρα, χ ∈X, $\left|x - x_0\right| < \delta$ ⇨

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \left|f(x) - f_{\eta_o}(x_0)\right| + \left|f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_0)\right| + \left|f_{n_o}(x_o) - f(x_0)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο χ_o. Με βάση αυτό το θεώρημα προκύπτει το ζητούμενο.

2.4 Το τελευταίο θεώρημα του Fermat

« Η $\chi^{\eta} + \psi^{\eta} = \zeta^{\eta}$
δεν έχει ακέραιες λύσεις όταν το η είναι μεγαλύτερο από 2 ».

Το τελευταίο θεώρημα του Fermat έχει μακρά ιστορία. Για περισσότερο από 3 αιώνες ήταν το πιο διάσημο άλυτο πρόβλημα στα μαθηματικά. Πολλοί κορυφαίοι μαθηματικοί προσπαθούσαν μέσα στο χρόνο να το αποδείξουν αλλά δεν τα κατάφερναν. Το τελευταίο θεώρημα του Fermat είχε καταλήξει να συμβολίζει το ανέφικτο. Οι προσπάθειες αυτές όμως αυτές αν και αποτυχημένες είχαν ένα πολύ θετικό και ουσιαστικό αποτέλεσμα, την ανάπτυξη καινούριων κλάδων των μαθηματικών.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η ιστορία του θεωρήματος του Φερμά είναι πολύ παλαιότερη και από τον ίδιο το Φερμά. Η προέλευση αυτού του θεωρήματος είναι τόσο παλαιά όσο ο ανθρώπινος πολιτισμός. Έχει τις ρίζες του στο πολιτισμό που αναπτύχθηκε στην Εποχή του Χαλκού στην εύφορη πεδιάδα μεταξύ Τίγρη και Ευφράτη, στην αρχαία Βαβυλωνία. Στην καθημερινή ζωή των Βαβυλωνίων τα τετράγωνα αριθμών εμφανίζονται φυσιολογικά. Οι Βαβυλώνιοι ήθελαν να γνωρίζουν πότε το τετράγωνο ενός ακεραίου ήταν δυνατόν να χωριστεί σε τετράγωνα δυο άλλων ακεραίων. Παραδείγματος χάριν, ένας αγρότης ο οποίος είχε στη κατοχή του ένα αγρόκτημα 25 τ.μ. είναι δυνατόν να το ανταλλάξει με δυο τετράγωνα αγροκτήματα το ένα ίσο με 16 τ.μ. και το άλλο ίσο με 9 τ.μ. Σήμερα γράφουμε $5^2=3^2+4^2$. Οι τριάδες ακεραίων όπως το 3, 4 και 5 ονομάζονται *πυθαγόρειες τριάδες* και ήταν γνωστές στους Βαβυλώνιους περισσότερο από χίλια χρόνια πριν από την εποχή του διάσημου Έλληνα μαθηματικού Πυθαγόρα. Όλα αυτά τα στοιχεία είναι γνωστά από μια σπάνια πήλινη πλάκα η οποία χρονολογείται από το 1900 π.Χ.

Ας παρακολουθήσουμε λίγο την ιστορία αυτού του θεωρήματος που απασχόλησε τόσα χρόνια τη μαθηματική κοινότητα. Ο Πιερ ντε Φερμά ήταν Γάλλος νομικός του 17^{ου} αιώνα και συγχρόνως ερασιτέχνης μαθηματικός. Γεννήθηκε τον Αύγουστο του 1601 στην August. Απέκτησε τρεις γιους και δυο κόρες από το γάμο του με την Louse Long. Από τους τρεις γιους του ο Clement Samuel κληρονόμησε το επιστημονικό έργο του πατέρα του και το εξέδωσε μετά το θάνατο του. Χάρη σ' αυτόν γνωρίζουμε σήμερα το

διάσημο Τελευταίο Θεώρημα το Φερμά καθώς υπήρχε γραμμένο μέσα σε ένα από τα βιβλία του που εξέδωσε ο γιος του και που διασώζεται μέχρι τις μέρες μας. Ο Bell υποστηρίζει ότι ο Φερμά, αν και νομικός στο επάγγελμα, ήταν ο πιο παραγωγικός μαθηματικός του 17^{ου} αιώνα, ενός αιώνα που υπήρξε μάρτυρας της εργασίας ορισμένων από τα μεγαλύτερα πνεύματα μαθηματικών όλων των εποχών. Από τα εκπληκτικότερα επιτεύγματα του Fermat ήταν η ανάπτυξη των κύριων ιδεών του απειροστικού λογισμού, δεκατρία χρόνια πριν από τη γέννηση του Ισαάκ Νεύτων. Επίσης, μας παρέδωσε τη θεωρία των αριθμών, όπου πολύ σημαντική είναι η έννοια του πρώτου αριθμού.

Ο Φερμά είχε γοητευτεί από τις μαθηματικές εργασίες των αρχαίων Ελλήνων. Οι αντιλήψεις του για τις ιδέες του διαφορικού λογισμού είχαν ενδεχομένως διαμορφωθεί στο πλαίσιο του έργου των κλασσικών αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, Αρχιμήδη και Ευδόξου, οι οποίοι έζησαν αντίστοιχα τον 3^{ο} και 4^{ο} αιώνα π.Χ. Κάθε στιγμή του ελεύθερου χρόνου του ο Φερμά μελετούσε το έργο των αρχαίων Ελλήνων. Το χόμπι του -το πάθος του- ήταν να προσπαθεί να γενικεύει τις εργασίες των αρχαίων και να αποκαλύπτει νέα ομορφιά στις ανακαλύψεις τους που είχαν μείνει θαμμένες για πάρα πολλά χρόνια. «*Έχω ανακαλύψει πλήθος υπερβολικά κομψών θεωρημάτων*» είχε πει κάποτε. Αυτά τα θεωρήματα τα σημείωνε στο περιθώριο των μεταφράσεων των αρχαίων βιβλίων τα οποία κατείχε.

Του Φερμά τον μάγευαν οι αριθμοί. Σ' αυτούς έβρισκε ομορφιά και νόημα και παρουσίασε πλήθος θεωρημάτων στη θεωρία αριθμών. Μεταξύ των αγαπημένων αρχαίων κειμένων, μεταφρασμένων στα λατινικά, που αγαπούσε ο Φερμά, ήταν τα *Αριθμητικά*, γραμμένα από τον Έλληνα μαθηματικό Διόφαντο που έζησε το 3^{ο} αιώνα π.Χ. στην Αλεξάνδρεια. Περίπου το 1637, ο Φερμά σε περιθώριο αυτού του βιβλίου του, δίπλα από ένα πρόβλημα ανάλυσης του τετραγώνου ενός ακεραίου σε τετράγωνα δυο ακεραίων έγραψε στα λατινικά.

«***Από την άλλη πλευρά είναι αδύνατο να αναλύσουμε έναν κύβο σε δυο κύβους, μια τέταρτη δύναμη σε δυο τέταρτες δυνάμεις ή γενικά κάθε δύναμη, εκτός από το τετράγωνο, σε δυο δυνάμεις με τον ίδιο εκθέτη. Έχω ανακαλύψει όντως θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο δεν είναι αρκετά μεγάλο για να τη χωρέσει***.»

Αυτή η μυστηριώδης διατύπωση είχε ως αποτέλεσμα γενιές μαθηματικών να ασχοληθούν για να ανακαλύψουν «*την όντως θαυμάσια απόδειξη*» την οποία ο Φερμά είχε ισχυριστεί ότι διέθετε.

Μέχρι τις αρχές του 18ου αιώνα κάθε άλλο θεώρημα του Φερμά είχε αποδειχτεί σωστό ή λανθασμένο. Ωστόσο, τούτη η φαινομενικά απλή πρόταση παρέμεινε αναπόδεικτη. Ακόμα και στο δικό μας αιώνα οι υπολογιστές εγκατέλειψαν την προσπάθεια να αποδείξουν την ισχύ του θεωρήματος. Αν και οι υπολογιστές επαληθεύουν το θεώρημα για μεγάλο πλήθος αριθμών, είναι αδύνατο να το επαληθεύσουν για κάθε αριθμό. Αν και το θεώρημα είναι δυνατό να ελεγχθεί για δισεκατομμύρια αριθμούς απομένουν ωστόσο άπειροι αριθμοί και άπειροι εκθέτες. Το θεώρημα έπρεπε να αποδειχτεί μαθηματικά. Μάλιστα, τη δεκαετία του 1800 η Γαλλική και η Γερμανική Ακαδημία Επιστημών πρόσφεραν βραβείο σε οποιονδήποτε θα αποδείκνυε το θεώρημα. Κάθε χρόνο λοιπόν χιλιάδες μαθηματικοί και μανιώδεις ερασιτέχνες έστελναν αποδείξεις σε περιοδικά μαθηματικών και σε επιτροπές κρίσης. Όμως τελικά έμεναν με άδεια χέρια.

Ο ίδιος ο Φερμά είχε κατορθώσει να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα του για n = 4. Αντιλήφθηκε, επίσης, ότι αν για ορισμένη δύναμη του n υπάρχει λύση, τότε υπάρχει λύση και για κάθε πολλαπλάσιο του n. Αρκεί λοιπόν να θεωρήσουμε ως εκθέτη μόνον πρώτους αριθμούς (εκτός από τον 2). Ο Leonard Euler (1707-1783) απέδειξε ανεξάρτητα από το Φερμά τις περιπτώσεις n = 3 και n = 4. Το 1828 ο Peter G. L. Dirichlet (1805-1859) κατόρθωσε να αποδείξει τη περίπτωση n = 5. Το 1830 ο Adrien -Marie Legendre (1752-1833) απέδειξε την ίδια περίπτωση. Ο Gabriel Lame (1795-1870) και ο Henri Lebesque (1875-1941) που τον διόρθωσε το 1840, μπόρεσαν να αποδείξουν την περίπτωση n=7. Διακόσια χρόνια μετά τη διάσημη σημείωση του Φερμά στο περιθώριο είχε αποδειχθεί απλώς για τους εκθέτες 3, 4, 5, 6 και 7. Έως το άπειρο ο δρόμος ήταν μακρύς. Όλοι οι μαθηματικοί αναζητούσαν την άπιαστη γενική απόδειξη, κατέληγαν ωστόσο σε αποδείξεις μόνο για ειδικές τιμές του εκθέτη.

Η συνεισφορά των Euler, Gauss (1777-1855) και Sophie Germain (1776-1831) στη μετέπειτα απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά ήταν πολύ σημαντική.

Η πρωτοπόρα εργασία του Euler στους φανταστικούς αριθμούς, -μιγαδική ανάλυση- κυρίως όμως στο πεδίο της τοπολογίας αποδείχτηκε απαραίτητη στην κατανόηση και στην προσπάθεια επίλυσης του μυστηρίου του Φερμά.

Τα αποτελέσματα του Gauss στη θεωρία αριθμών είχαν μεγάλη σημασία σε κάθε προσπάθεια των μαθηματικών να αποδείξουν το τελευταίο θεώρημα του Φερμά. Ωστόσο, ο ίδιος δεν προσπάθησε να το αποδείξει, παρόλο που η ακαδημία του Παρισιού προσέφερε μεγάλο βραβείο, όπως τον πληροφόρησε ο φίλος του H. W. M. Olbers. Ίσως, ήταν ο μόνος μαθηματικός της Ευρώπης που αντιλήφθηκε πόσο δύσκολη ήταν η

απόδειξη. Ο ίδιος έγραψε στον Olbers την άποψη του για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά: «*Σου είμαι πολύ υποχρεωμένος για την είδηση που αφορά το βραβείο του Παρισιού. Ομολογώ ωστόσο, ότι επειδή το θεώρημα του Φερμά είναι μια απομονωμένη πρόταση με ενδιαφέρει ελάχιστα: μπορώ εύκολα να παραθέσω πλήθος παρόμοιων προτάσεων τις οποίες δεν μπορούμε να τις αποδείξουμε, ούτε να τις ξεφορτωθούμε.*»

Η Sophie Germain, ήταν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς που προσπάθησαν να αποδείξουν το τελευταίο θεώρημα του Φερμά και συνέλαβε σημαντικά στη πρόοδο επίλυσης του. Διατύπωσε τη πρόταση ότι αν υπάρχει λύση της εξίσωσης του Φερμά για n = 5 τότε καθένας από τους τρεις αριθμούς πρέπει να διαιρείται με το 5. Με βάση αυτό στο τελευταίο θεώρημα του Φερμά διακρίνουμε δυο κατηγορίες αριθμών: $1^{η}$) τους μη διαιρετούς με το 5 και $2^{η}$) οι υπόλοιποι αριθμοί. Το θεώρημα γενικεύτηκε ώστε να περιλάβει και άλλες δυνάμεις. Η Sophie Germain διατύπωσε ένα γενικό θεώρημα που επέτρεπε να αποδείξουμε το τελευταίο θεώρημα του Φερμά για κάθε πρώτο αριθμό η μικρότερο από 100 της $1^{ης}$ κατηγορίας.

Ένας άλλος μεγάλος μαθηματικός που με τις μελέτες του συνέβαλε κι αυτός στην απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά είναι ο Fourier (1768-1830). Ο Fourier ανέπτυξε μια πολύ σημαντική θεωρία στις περιοδικές συναρτήσεις. *Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τις περισσότερες συναρτήσεις σε οσοδήποτε βαθμό ακρίβειας επιθυμούμε ως άθροισμα πολλών (θεωρητικά άπειρων όταν επιθυμούμε απόλυτη ακρίβεια) ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων*. Η εφαρμογή των σειρών Fourier σε φυσικά φαινόμενα και σε μεθόδους που χρησιμοποιούν οι υπολογιστές είναι πολύ μεγάλη. Επιπλέον όμως οι συγκεκριμένες σειρές εφαρμόζονται σε αμιγώς μαθηματικά θέματα, ένα πεδίο που δεν κέντριζε το ενδιαφέρον του Fourier. Τον $20^{ο}$ αιώνα οι σειρές Fourier έπαιξαν ρόλο στη θεωρία αριθμών σαν εργαλείο για το μετασχηματισμό μαθηματικών στοιχείων από μια περιοχή σε άλλη στο πλαίσιο της εργασίας του Goro Shimura. Τώρα γνωρίζουμε ότι η απόδειξη της εικασίας του Shimura βρίσκεται σε κομβικό σημείο στο πλαίσιο της απόδειξης του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά. Η επέκταση των περιοδικών συναρτήσεων του Fourier στο μιγαδικό επίπεδο οδήγησε στην ανακάλυψη των αυτόμορφων συναρτήσεων και των μορφών modular. Το επίτευγμα αυτό είχε σημαντική επίδραση στο τελευταίο θεώρημα του Φερμά μέσω της εργασίας ενός άλλου Γάλλου μαθηματικού του Henri Poincare.

Απόπειρα να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά έκανε και ο Gabriel Lame. Η απόδειξη του στηριζόταν σε μια μέθοδο που είχε προτείνει ο Liouville και αφορούσε την παραγοντοποίηση του Fermat με γραμμικούς παράγοντες

χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς. Ο ίδιος ο Liouville ωστόσο, υπέδειξε το λάθος στην απόδειξη του Lame λέγοντας πως η παραγοντοποίηση που είχε προτείνει δεν ήταν μοναδική.

Ο Ernst Eduard Kummer (1810-1893) είναι ο άνθρωπος που περισσότερο από κάθε σύγχρονο του έφθασε πλησιέστερα σε μια γενική λύση του προβλήματος του Φερμά. **Ο Kummer επινόησε όντως μια πλήρη μαθηματική θεωρία, τη θεωρία των ιδεωδών αριθμών προσπαθώντας να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα Του Φερμά.** Η εργασία του Kummer με τους ιδεώδεις αριθμούς του επέτρεψε να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά για κάθε εκθέτη μικρότερο από το 100 καθώς και για τα άπειρα πολλαπλάσια των πρώτων αριθμών αυτής της περιοχής. Το γεγονός ότι αυτή η σημαντική θεωρία είναι αποτέλεσμα έμπνευσης στο πλαίσιο της προσπάθειας επίλυσης του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά δείχνει πως **είναι δυνατόν να αναπτύξουμε νέες θεωρίες προσπαθώντας να λύσουμε ειδικά προβλήματα.**

Ακολουθεί η συνεισφορά του μεγάλου και ιδιοφυή μαθηματικού Galois (1811-1832) -αν και ήταν μόλις 20 χρόνων- στην προσπάθεια επίλυσης του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά καθώς η θεωρία του αποτελεί το κρίσιμο βήμα στη μέθοδο που ακολουθήθηκε μετά από ενάμιση αιώνα.

Ένας ακόμη μαθηματικός που συνέλαβε με το έργο του στη προσέγγιση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά είναι ο Abel (1802-1829). Η έννοια τη αβελιανής ομάδας αποτελεί κρίσιμο στοιχείο στη σύγχρονη διαπραγμάτευση του προβλήματος αυτού.

Έπεται η εξίσου σημαντική συνεισφορά του Dedekind (1831-1916) στη σύγχρονη προσέγγιση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά. Αυτή είναι η ανάπτυξη της θεωρίας των ιδεωδών, οι οποίοι ήταν γενίκευση των ιδεωδών αριθμών του Kummer. Ένα αιώνα μετά την ανάπτυξη του Dedekind οι ιδεώδεις θα ενέπνεαν τον Barry Mazur. Κατόπιν ο Andrew Wiles θα εκμεταλλευόταν την εργασία του Mazur.

Ένας άλλος μαθηματικός με εξαιρετικές ικανότητες είναι ο Henri Poincare (1854-1912). Η συμβολή του στη τοπολογία, κλάδος που αναπτύχθηκε από τον Euler, ήταν πολύ σημαντική. Η μελέτη των μορφών, των επιφανειών και των συνεχών συναρτήσεων, όπως και οι μορφές Modular, τομέας στον οποίο ο Poincare υπήρξε πρωτοπόρος, έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη προσέγγιση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά.

Ο Mordell (1888-1972) στη συνέχεια ανακάλυψε μια σχέση μεταξύ των λύσεων αλγεβρικών εξισώσεων και της τοπολογίας, που του φάνηκε πολύ παράξενη. Είναι μια

σχέση μεταξύ του αριθμού των οπών σε μια επιφάνεια (δηλαδή του γένους της επιφάνειας) στο χώρο λύσεων μιας εξίσωσης και του ερωτήματος αν η εξίσωση έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων. Έτσι, αν η επιφάνεια των λύσεων έχει γένος ανώτερο από δυο τότε η εξίσωση έχει πεπερασμένο πλήθος ακέραιων λύσεων. Ο ίδιος τελικά δεν κατάφερε να την αποδείξει, γι' αυτό έμεινε γνωστή ως εικασία του Mordell.

Ο Gerd Faltings κατόρθωσε το 1983 να αποδείξει την εικασία του Mordell. Προέκυπτε επομένως το συμπέρασμα ότι επειδή το γένος της εξίσωσης του Φερμά για η μεγαλύτερο από 3 είναι 2 ή περισσότερο, οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, αν υπάρχουν, είναι πεπερασμένες.

Οι Granville και Heath Brown χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Faltings απέδειξαν ότι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης του Φερμά, αν υπάρχουν, ελαττώνεται εκθετικά με την αύξηση του n. Αποδείχτηκε ότι καθώς το n αυξάνεται το ποσοστό των εκθετών για τους οποίους το τελευταίο θεώρημα του Φερμά αληθεύει προσεγγίζει το 1%.

Άρα, το 1983 η κατάσταση με το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά έχει ως εξής: Έχει αποδειχθεί για κάθε n έως το 1.000.000 και επιπλέον, για μεγαλύτερα n αν υπάρχουν λύσεις τότε είναι ελάχιστες και ελαττώνονται με την αύξηση του n.

Οι Yuataka Taniyama (1927-1958) και Goro Shimura, Ιάπωνες μαθηματικοί και φίλοι οργάνωσαν το Σεπτέμβριο του 1955 ένα συνέδριο στο Τόκιο. Ένας από τους προσκληθέντες ήταν ο Andre Weil. Μια εικασία διατυπώνεται δειλά από τον Taniyama, αλλά συνδέεται με το όνομα του Weil: «*Μήπως οι αυτόμορφες συναρτήσεις συνδέονται με τις ελλειπτικές καμπύλες και όχι μόνο οι συναρτήσεις modular*;»

Ο Shimura μια δεκαετία αργότερα και αφού ο Taniyama έχει πεθάνει, αντιλαμβάνεται το λάθος του φίλου του και οδηγείται στη διατύπωση μιας πιο θαρραλέας εικασίας: «*κάθε ελλειπτική καμπύλη στους ρητούς ομογενοποιείται από μορφή* modular». Στις αρχές της δεκαετίας του '60 ο Shimura συναντά τον Serre ο οποίος τον αμφισβητεί και ισχυρίζεται ότι υπάρχουν ελλειπτικές καμπύλες στις οποίες δεν ισχύουν. Τότε ο Shimura απαντά διατυπώνοντας με ακρίβεια την εικασία του: *Μια τέτοια καμπύλη πάντα ομογενοποιείται από μια καμπύλη modular*.

Είμαστε στο 1984. Ένας άλλος μαθηματικός, ο Gerhard Frey βοηθά με το έργο του στο να φθάσουμε σιγά, σιγά στη λύση του περίφημου προβλήματος. Έχει μελετήσει τις εργασίες των Hasse, Weil, Mazur και έχει επηρεαστεί από αυτές. Προέλαβε ένα ισχυρισμό ο οποίος φαινόταν προκλητικός. «***Αν η εικασία Shimura- Taniyama είναι όντως σωστή, το τελευταίο θεώρημα το Φερμά αληθεύει».***

Η πορεία της σκέψης του Frey ήταν ιδιοφυής. Αν υποθέσουμε ότι το τελευταίο θεώρημα του Φερμά δεν ισχύει τότε για κάποια δύναμη n μεγαλύτερη του 2 υπάρχει λύση στην εξίσωση του Φερμά: $\chi^{\eta} + \psi^{\eta} = \zeta^{\eta}$ όπου χ, ψ, και ζ ακέραιοι. Από τις συγκεκριμένες εξισώσεις προκύπτει μια ιδιαίτερη ελλειπτική καμπύλη, της οποίας ο Frey προσδιόρισε την εξίσωση, η οποία ονομάζεται καμπύλη Frey και η οποία είναι μη modular. Όμως αν η εικασία των Shimura- Taniyama αληθεύει τότε κάθε ελλειπτική καμπύλη είναι modular. Άρα, μια τέτοια καμπύλη δεν μπορεί να υπάρχει. Ουσιαστικά λοιπόν ο ισχυρισμός του Frey είναι της μορφής: από το Α προκύπτει το Β. Αν το Β δεν είναι σωστό τότε ούτε το Α είναι σωστό.

Ο Ken Ribet ήταν αυτός που τελικά κατάφερε να αποδείξει την εικασία του Frey, μια εικασία που στην αρχή θεωρούσε ως *¨αστεία¨*. Ο δρόμος για τη λύση του προβλήματος του Φερμά με τις σύγχρονες μεθόδους της αριθμητικής αλγεβρικής γεωμετρίας ήταν πλέον ανοιχτός. Απέμενε μόνο να βρεθεί αυτός που θα αποδείκνυε την εικασία Shimura- Taniyama. Τότε το Τελευταίο Θεώρημα Του Φερμά θα ίσχυε αυτομάτως.

Ο Andrew Wiles είχε ως παιδικό όνειρο να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα Του

Φερμά. Ήταν μόλις 10 ετών όταν διάβασε για το πρόβλημα αυτό. Ωστόσο, για πολλά χρόνια το παραμέλησε μια και το πρόβλημα αυτό δεν ήταν πλέον στη μόδα. Η αφορμή να ασχοληθεί ξανά με το Τελευταίο Θεώρημα Του Φερμά δόθηκε όταν πληροφορήθηκε από ένα φίλο του ότι ο Ken Ribet απέδειξε την εικασία του Frey. *Ο Wiles ηλεκτρίστηκε. Εκείνη τη στιγμή αντιλήφθηκε ότι η ζωή του άλλαξε.* Κλειδώθηκε στη σοφίτα του και άρχισε να εργάζεται.

Το μεγαλείο του Wiles έλεγε αργότερα ο Frey ήταν ότι πίστευε σε ότι έκανε, όταν ουδείς μαθηματικός στην υφήλιο πίστευε όντως ότι μέχρι το τέλος του 20^{ου} αιώνα θα αποδεικνυόταν η εικασία Shimura- Taniyama. Εργάστηκε μυστικά και σκληρά για 7 χρόνια απομονωμένος από το κόσμο. Στη διάρκεια της επίπονης αυτής προσπάθειας του, ζήτησε τη βοήθεια μόνο δυο πολύ έμπιστων και εχέμυθων φίλων του, των Katz και Peter Sarnak, ώστε να επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα του βήμα προς βήμα.

Στο τέλος του Ιουνίου του 1993 ο Andrew Wiles ταξίδευσε αεροπορικώς για την Αγγλία. Επέστρεφε στο πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ όπου είκοσι χρόνια πριν υπήρξε φοιτητής. Ο καθηγητής John Coates, ο οποίος είχε επιβλέψει την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής, οργάνωνε ένα συνέδριο με αντικείμενο τη Θεωρία Iwasawa, θέμα πάνω στο οποίο είχε εκπονήσει τη διατριβή του και διέθετε αρκετές γνώσεις. Του

ζήτησε λοιπόν, να δώσει μια σύντομη ωριαία ομιλία σε θέμα της αρεσκείας του. Ο Andrew Wiles προς έκπληξη των άλλων που συμμετείχαν στο συνέδριο, λόγω της κλειστότητας του χαρακτήρα του, δέχτηκε. Ζήτησε όμως η ομιλία του να είναι τρίωρη. Είχε έρθει η ώρα να πραγματοποιήσει το παιδικό του όνειρο. Η θυσία εφτά χρόνων και οι ατέλειωτες ώρες μοναξιάς, θα τέλειωναν.

Κανείς δεν γνώριζε το περιεχόμενο της ομιλίας του, ούτε και το σκοπό αυτής. Την πρώτη μέρα της ομιλίας του ο Andrew Wiles αντάμειψε τους περίπου είκοσι μαθηματικούς που είχαν έρθει στη διάλεξη του με ένα ισχυρό και απροσδόκητο αποτέλεσμα. Η αγωνία αυξανόταν. Υπήρχαν ακόμα άλλες δυο διαλέξεις. Τη δεύτερη μέρα η ένταση της παρουσίασης αυξήθηκε. Ο Andrew Wiles παρουσίασε πρωτότυπες ιδέες με τη μορφή νέων θεωρημάτων μαζί με τις αποδείξεις τους.

Την επόμενη μέρα, Τετάρτη 23 Ιουνίου 1993 ήταν η τελευταία διάλεξη του. Η αίθουσα είχε ξεχειλίσει. Ο Andrew Wiles άρχισε και πάλι να γράφει φαινομενικά ατέλειωτους τύπους και θεωρήματα πάνω στο πίνακα. «*Υπήρχε μόνο μια ενδεχόμενη αποκορύφωση μόνο μια ενδεχόμενη κατάληξη της παρουσίασης του Wiles*» είπε αργότερα ο καθηγητής Ken Ribet. Ο Andrew Wiles τέλειωνε τις τελευταίες λίγες γραμμές της απόδειξης μιας αινιγματικής και πολύπλοκης μαθηματικής εικασίας, της εικασίας των Shimura-Taniyama. Τότε, ξαφνικά πρόσθεσε μια τελευταία γραμμή, επαναδιατυπώνοντας μια εξίσωση ηλικίας αιώνων. Πριν από επτά χρόνια ο Ken Ribet είχε αποδείξει ότι τούτη η εξίσωση ήταν συνέπεια της εικασίας των Shimura-Taniyama. «*Κι αυτό αποδεικνύει το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat*» είπε σχεδόν αδιάφορα. «*Νομίζω λοιπόν ότι σε τούτο το σημείο πρέπει να σταματήσω.*»

Σε λίγα λεπτά σε όλο τον κόσμο το ηλεκτρονικό ταχυδρομείο άρχισε να αστράφτει και μηνύματα να ξετυλίγονται μέσα από μηχανές φαξ. Φαινόταν ότι το μυστήριο ηλικίας 350 ετών, το πιο διάσημο μαθηματικό πρόβλημα όλων των εποχών, είχε λυθεί. Οι εφημερίδες περιέγραφαν τον άνθρωπο που κατά τα φαινόμενα είχε λύσει το μαθηματικό πρόβλημα που είχε αντισταθεί περισσότερο από κάθε άλλο και η λύση του παρέμενε πρόκληση για περισσότερο από 350 χρόνια. Σε μια νύχτα το Andrew Wiles, το όνομα ενός ήσυχου και απομονωμένου ανθρώπου, μπήκε σε κάθε σπίτι.

Η απόδειξη του Andrew Wiles περιείχε έννοιες και θεωρίες οι οποίες την εποχή του Φερμά ήταν άγνωστες ακόμα και μέχρι τον $20^{ο}$ αιώνα. Ήταν επομένως απαραίτητο να επικυρωθούν από ειδικούς ανεξάρτητα του Andrew Wiles. Η απόδειξη στάλθηκε σε κορυφαίους μαθηματικούς. Η αισιοδοξία ωστόσο διάρκεσε λίγο. Στη λογική της

απόδειξης ανακαλύφτηκε ένα κενό. Ο Andrew Wiles προσπάθησε να το μπαλώσει αλλά μάταια. Αυτό παρέμενε. Ο Wiles αποσύρθηκε στη σουίτα του.

Ωστόσο, το πρωινό της Δευτέρας της 19^{ης} Σεπτεμβρίου του 1994 ήρθε η ώρα για να δοθεί επιτέλους η λύση του περίφημου αυτού προβλήματος. Τη λύση την έδωσε ο ίδιος ο Andrew Wiles. Η νέα απόδειξη ήταν διόρθωση αυτής που είχε παρουσιάσει τον Ιούνιο του 1993 στο πανεπιστήμιο του Cambridge, και που προς μεγάλη απογοήτευση του ίδιου ήταν λανθασμένη. Είχε αφιερώσει 7 χρόνια από τη ζωή του στη προσπάθεια του να κυνηγήσει το όνειρο του ζώντας ουσιαστικά φυλακισμένος σε μια σοφίτα. Ευτυχώς, ένα χρόνο μετά την κατάρρευση της πρώτης του απόδειξης, και σε μια τελευταία απόπειρα πριν εγκαταλείψει κάθε προσπάθεια βρήκε το λάθος. Είχε βρει την σωστή απόδειξη. «*Ήταν η σημαντικότερη στιγμή σε ολόκληρη την επαγγελματική ζωή μου. Ξαφνικά, απολύτως αναπάντεχα ήρθε η απίστευτη ανακάλυψη*»… «*Ήταν τόσο απερίγραπτα όμορφη, ήταν τόσο απλή και συνάμα μεγαλόπρεπη. Την πρώτη νύχτα πήγα σπίτι και κοιμήθηκα με τις σκέψεις αυτής της ανακάλυψης. Και το επόμενο πρωί την ξαναέλεγξα και την βρήκα εντάξει. Ήταν κάτι που ήθελα να το ανακοινώσω στη γυναίκα μου με μεγάλη ικανοποίηση. Το βρήκα! Βρήκα τη διόρθωση στην απόδειξή μου!*» Ήταν αλήθεια και όχι όνειρο. Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά αναπαυόταν πλέον εν ειρήνη.

Ο ίδιος ο Andrew Wiles χαρακτήρισε την απόδειξη του ως απόδειξη του 20^{ου} αιώνα καθώς χρησιμοποίησε την εργασία πολλών μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα. Σύμφωνα λοιπόν με τον ίδιο ήταν αδύνατο να έχει υπόψη του τούτη την απόδειξη ο Φερμά όταν έγραφε στο περιθώριο της σελίδας τη διάσημη σημείωση του. Μήπως ο Φερμά διέθετε άλλη απόδειξη; Η απάντηση είναι πιθανόν όχι. Δεν είμαστε όμως απόλυτα βέβαια και ίσως δεν το μάθουμε ποτέ.

Η βαθύτερη αξία του θεωρήματος δεν είναι απλώς ότι το θεώρημα σχετίζεται με όλη τη πορεία του ανθρώπινου πολιτισμού, αλλά το ότι η τελική λύση του προβλήματος προέκυψε ενοποιώντας όλο το εύρος των μαθηματικών. Πρέπει να τονίσουμε ότι η επιχείρηση απόδειξης του θεωρήματος ήταν έργο πολλών ανθρώπων. Ενδεικτικά θυμίζουμε τους : Ernst Kummer, Barry Mazur, Frey, Ribet, Shimura και Taniyama.

Κλείνουμε την αναφορά μας στο τελευταίο θεώρημα του Φερμά με κάποια λόγια του Andrew Wiles που περιγράφουν την 7χρονη αναζήτηση του Ιερού Δισκοπότηρου των μαθηματικών.

«*Ίσως, ο καλύτερος τρόπος για να περιγράψω την εμπειρία μου στα μαθηματικά είναι να την παρομοιάσω με την εμπειρία του να εισέρχεσαι σε ένα σκοτεινό μέγαρο. Εισέρχεσαι στο πρώτο σκοτεινό, απολύτως σκοτεινό δωμάτιο. Σκοντάφτεις δεξιά- αριστερά*

και πέφτεις επάνω στα έπιπλα. Σιγά, σιγά μαθαίνεις που βρίσκεται κάθε έπιπλο. Και τελικά μετά από περίπου έξι μήνες βρίσκεις το διακόπτη και ανάβεις το φως. Ξαφνικά λοιπόν, τα πάντα φωτίζονται και βλέπεις λοιπόν που βρισκόσουν. Κατόπιν εισέρχεσαι στο επόμενο σκοτεινό δωμάτιο…»

Σημείωση: Όλες τα παραπάνω στοιχεία περιέχονται στο βιβλίο του A. Aczel: Πώς ο A. Wiles έλυσε το τελευταίο θεώρημα του Φερμά. (Μετάφραση: Α. Δ. Βαλαδάκης.)

Διαδρομή με τραμ προς το Nikko στο συνέδριο του 1955. Από αριστερά προς τα δεξιά: T. Tamagava, J-P Serre, Y. Taniyama και A. Weil

Από αριστερά προς τα δεξιά : John Coates, Andrew Wiles, Ken Ribet και Karl Rubin γιορτάζουν την αποόδειξη του Wiles στο Κέμπριτζ μετά την ιστορική παρουσιάση.

Ακολούθεί πίνακας φωτογραφιών μαθηματικών που ασχολήθηκαν με το τελευταίο θεώρημα του Fermat.

Euler	Dirichlet	Legendre
Lame	**Gauss**	**Germain**
Fourier	**Kummer**	**Galois**
Abel	**Faltings**	**Ribet**
Frey	**Taniyama**	**Shimura**

3 ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών είναι αναμφισβήτητα άρρηκτα συνδεδεμένη με τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Δεν είναι τυχαίο πως οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί (Πυθαγόρας, Δημόκριτος, Πλάτων,…) ήταν συγχρόνως και φιλόσοφοι. Μερικά από τα ερωτήματα που απασχολούν κάθε φιλοσοφία είναι: τι είναι μαθηματικά, ποια η φύση τους και ποια η προέλευση τους. Κάθε φιλοσοφία δίνει διαφορετική απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα και κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί στην υιοθέτηση μιας διαφορετικής άποψης για τη διδακτική των μαθηματικών με αποτέλεσμα την ανάπτυξη διάφορων θεωριών μάθησης. Επομένως, η επιλογή διδακτικής πρακτικής από το δάσκαλο συνδέεται άμεσα (συνειδητά ή ασυνείδητα) με κάποια συγκεκριμένη φιλοσοφία.

Η ψυχολογία των μαθηματικών ενδιαφέρεται να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως πως οι άνθρωποι μαθαίνουν μαθηματικά, πως σκέπτονται και με ποιο τρόπο κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες. Οι κατά το δυνατόν πιο ακριβείς απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά είναι σίγουρα πολύτιμες για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Είναι φυσικό οι απόψεις που επικρατούν σε κάθε εποχή για τη μάθηση, να επηρεάζουν τις μεθόδους και τις στρατηγικές που ακολουθεί ο δάσκαλος μέσα στη τάξη. Για το λόγο αυτό στη πορεία διδασκαλίας των μαθηματικών, ανάλογα με τις εκάστοτε αντιλήψεις περί μαθηματικών, αναπτύχθηκαν πολλές θεωρίες μάθησης διαφορετικές μεταξύ τους. Ο δάσκαλος επομένως στηρίζεται σε κάποια από αυτές τις θεωρίες μάθησης όταν επιλέγει τον τρόπο διδασκαλίας του και το ρόλο τόσο τον δικό του όσο και των παιδιών μέσα στη τάξη.

Η συνεισφορά μιας θεωρίας μάθησης έγκειται στην οργάνωση που προσφέρει ως προς την έρευνα και τη γνώση που αφορά τις διαδικασίες μάθησης. Ωστόσο, υπάρχουν πολλοί ενδοιασμοί ως προς την αξιοπιστία των αρχών που συνεπάγεται η υιοθέτηση κάποιας συγκεκριμένης θεωρίας. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν υπάρχουν νόμοι και αρχές της μάθησης που να μπορούν να διδαχθούν με πλήρη εμπιστοσύνη για το αποτέλεσμα τους. Δεν είναι δυνατόν να δοθεί μια καθοριστική απάντηση σ’ αυτούς τους ενδοιασμούς για τον απλό λόγο ότι καμία θεωρία μάθησης δεν είναι τόσο αφηρημένη ή τόσο πλήρης ώστε να ερμηνεύει όλα τα εργαστηριακά ερωτήματα.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, ως βέλτιστη λύση θεωρείται η προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών ως ένα φαινόμενο αυτό καθ’ εαυτό. Οι παρατηρήσεις, οι

μαγνητοσκοπήσεις και βιντεοσκοπήσεις για παράδειγμα, της διδακτικής πρακτικής μέσα στη τάξη μπορούν να μας δώσουν πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και δασκάλων σ' ένα ζωντανό διδακτικό πλαίσιο. Ακολουθεί η ανάπτυξη παιδαγωγικών μοντέλων, τα οποία και πρέπει να ελέγχουν πειραματικά για να διαπιστωθεί πόσο καλά εξηγούν και προβλέπουν καταστάσεις. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης, η παιδαγωγική των μαθηματικών χειραφετείται από την ψυχολογία κατά τον ίδιο τρόπο που η ίδια προσέγγιση βοήθησε την ψυχολογία να χειραφετηθεί από την φιλοσοφία.

Η τελευταία προσέγγιση όμως δεν σημαίνει ότι καταργεί την αξία των θεωρητικών μοντέλων. Τα θεωρητικά μοντέλα είναι αυτά που θα αναλύσουν και θα ερμηνεύσουν τις παρατηρήσεις που συλλέγονται από την καταγραφή του διδακτικού φαινομένου. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως τα φαινόμενα μάθησης και διδασκαλίας είναι αλληλένδετα και δεν είναι δυνατόν να απομονώσουμε το ένα από το άλλο χωρίς αυτό να αποβεί εις βάρος του άλλου.

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό παραθέτουμε μερικές από τις βασικότερες θεωρίες μάθησης που εν καιρώ άσκησαν σημαντικότατη επίδραση στη παιδαγωγική των μαθηματικών. Αυτές είναι οι: Συνδετισμός, Φορμαλισμός, Ημιεμπειρικισμός και Κονστρουκτιβισμός. Αναφέρουμε τα χαρακτηριστικά της κάθε μιας και εστιάζουμε στον τρόπο που κάθε μία αντιμετωπίζει το λάθος. Θεωρούμε πως η πτυχή αυτή αποτελεί κεντρικό σημείο της φιλοσοφίας κάθε θεωρίας.

3.1 Ο Thorndike και η θεωρία των δεσμών – Συνδετισμός και λάθος

Ο Thorndike (1874-1949) θεωρείται ο σκαπανέας της θεωρίας μάθησης. Το όνομα του Thorndike είναι συνδεδεμένο με τη διατύπωση του «νόμου του αποτελέσματος» που είναι προάγγελος αυτού που σήμερα ονομάζουμε «***αρχές ενίσχυσης***». Ο Thorndike ανακάλυψε αυτό το νόμο, όχι μελετώντας το φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών, αλλά πειραματιζόμενος στο εργαστήριο με γάτες και σκύλους, πιθήκους και κοτόπουλα. Τα αποτελέσματα του τον οδήγησαν στην υπόθεση ότι η μάθηση είναι μια αργή διαδικασία δοκιμών και λαθών.

Ο νόμος του αποτελέσματος μας λέει συγκεκριμένα ότι οι αντιδράσεις που παράγουν θετικά αποτελέσματα τείνουν να επαναλαμβάνονται. Αντίθετα, οι αντιδράσεις που δεν παράγουν θετικά αποτελέσματα σταματούν να επαναλαμβάνονται. Ο Thorndike ονόμασε αυτού του είδους τη μάθηση ***συντελεστική εξάρτηση*** (***instrumental conditioning***) διότι οι αντιδράσεις ενισχύονται όταν συντελούν στην παραγωγή κάποιας αμοιβής (Βοσνιάδου, 2001).

Ο Thorndike θεωρούσε ότι τα συμπεράσματα του θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και στα ανθρώπινα όντα. Όλοι στα σχολικά μας χρόνια έχουμε ξοδέψει πολλές ώρες στην επίλυση ασκήσεων αριθμητικής, άλγεβρας και γεωμετρίας. Το είδος αυτής της εργασίας ονομάζεται «***πρακτική και εξάσκηση***» και υποτίθεται ότι θα μας βοηθούσε να αποκτήσουμε ευχέρεια και άνεση στην εκτέλεση των αριθμητικών. Η τεχνική της πρακτικής και της εξάσκησης κατείχε και εξακολουθεί να κατέχει μια αξιοσημείωτη θέση στην ιστορία της διδακτικής των μαθηματικών ακόμη και μέχρι σήμερα. Υπήρχε εποχή που αποτελούσε τη βασική αρχή διδασκαλίας και μάθησης. Σίγουρα η εξάσκηση είναι αναγκαία και συντελεί στην επίτευξη της τελειότητας αλλά και σίγουρα δεν είναι αρκετή μόνο αυτή.

Η εφαρμογή ωστόσο, της μεθόδου του Thorndike εμπεριέχει το κίνδυνο να αναγορευτεί η πρακτική και η εξάσκηση ως η ανώτερη μέθοδος για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Έτσι, αν και ο Thorndike τόνισε ότι τα προβλήματα εξάσκησης θα πρέπει να προξενούν το ενδιαφέρον στους μαθητές, δεν άργησαν να ακουστούν οι πρώτες κριτικές οι οποίες εστίαζαν σε δυο σημεία:

Το πρώτο σημείο ήταν ότι η συνδετική θεωρία, έτσι όπως εφαρμόστηκε από τον Thorndike, δεν λάμβανε καθόλου υπόψη τις ποιοτικές διαφορές που υπάρχουν στις υπολογιστικές ικανότητες μεταξύ παιδιών και ενηλίκων. Τα παιδιά χρησιμοποιούν και επινοούν διαφορετικές τεχνικές από τους μεγάλους για να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις.

Το δεύτερο σημείο ήταν ότι η μέθοδος της πρακτικής και εξάσκησης δημιουργούσε μια λανθασμένη άποψη για το σκοπό της μάθησης, που δεν είναι τόσο το αποτέλεσμα αλλά το πώς φθάνει κανείς σ' αυτό. Έτσι, με τη μέθοδο αυτή ο μαθητής κινδυνεύει να φθάσει στο αποτέλεσμα μαθαίνοντας μια διαδικασία εντελώς μηχανικά, χωρίς να καταλαβαίνει τι στην ουσία κάνει και γιατί το κάνει. Η πραγματική κατανόηση απαιτεί προσοχή στις μαθηματικές αρχές, τις δομές πάνω στις οποίες βασίζονται οι υπολογιστικοί κανόνες. Αυτό που πραγματικά χρειάζεται ένας μαθητής είναι να κατανοήσει τη σημασία αυτών των αρχών και όχι να εκτελεί μηχανικά αυτοματοποιημένες κινήσεις. Η εξάσκηση μέσω της επανάληψης δεν αποτελεί εγγύηση για την πραγματική κατανόηση. Με το να μάθουν τα παιδιά παραδείγματος χάριν, τον πίνακα του πολλαπλασιασμού μέχρι 9*9, δεν σημαίνει ότι έχουν καταλάβει τους κανόνες του πολλαπλασιασμού. Επομένως, όταν συναντούν πρωτόγνωρες καταστάσεις που χρειάζεται πραγματική κατανόηση των κανόνων, δεν θα είναι σε θέση να τα βγάλουν πέρα. (Τουμάσης, 1999)

Εάν επομένως, θεωρήσουμε ότι η μάθηση των μαθηματικών συνίσταται στην κατανόηση ενός ενοποιημένου συνόλου αρχών, προτύπων και δομών, τότε η μέθοδος της πρακτικής και της εξάσκησης δεν προσφέρει και πολλά πράγματα. Η πρακτική και η εξάσκηση αναγνωρίζονται ως σπουδαίες τεχνικές για την ανάπτυξη κάποιων υπολογιστικών δεξιοτήτων και την προώθηση της ταχύτητας και της ακρίβειας στους υπολογισμούς με την προϋπόθεση βέβαια να μην εθίζουν τους μαθητές στη μηχανική εργασία.

Είναι σαφές από τα παραπάνω ότι το λάθος σε αυτή τη θεωρία μάθησης πρέπει να αποφεύγεται. Το λάθος είναι δείγμα αποτυχίας καθώς δεν οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα ενώ το μόνο που ενδιαφέρει είναι το σωστό αποτέλεσμα. Το ποιες είναι οι βαθύτερες αιτίες που οδήγησαν στο λάθος δεν εξετάζεται. Δίνονται πολλές ασκήσεις ίδιας μορφής με σκοπό την όσο δυνατόν πιο ταχύτερη λύση αυτών. Τελικό αποτέλεσμα είναι να ενισχύεται η παπαγαλία. Για την εκπαίδευση, επομένως αυτή η θεωρία μάθησης είχε άστοχες συνέπειες. Δυστυχώς, το μοντέλο αυτό ακόμα και σήμερα εξακολουθεί να εφαρμόζεται. Είναι σίγουρα το πιο ξεκούραστο για ένα δάσκαλο.

3.2 Φορμαλισμός και λάθος

Στη φορμαλιστική θεωρία μάθησης, θεμελιωτής της οποίας είναι ο **Hilbert (1862-1943)**, τα μαθηματικά ασχολούνται με τη μελέτη τυπικών, συμβολικών συστημάτων. Θεωρούνται ως μια συλλογή από αφηρημένα συστήματα στα οποία οι όροι είναι απλά σύμβολα και οι προτάσεις είναι τύποι που περιέχουν τα σύμβολα αυτά. Είναι η επιστήμη της τυπικής παραγωγής συμπερασμάτων από τα αξιώματα στα θεωρήματα. Επιδιώκεται, μια ακραία αξιωματική ανάπτυξη των μαθηματικών όπου μεγάλη σημασία δίνεται στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη.

Είναι αλήθεια ότι ο Φορμαλισμός είναι εκείνο το φιλοσοφικό ρεύμα του απολυτικισμού το οποίο επηρέασε, περισσότερο από κάθε άλλο, άμεσα τη μαθηματική εκπαίδευση, κυρίως κατά το δεύτερο ήμισυ του 20^{ου} αιώνα. Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να δούμε την άποψη των φορμαλιστών για τη γεωμετρία. Διακρίνουν τη γεωμετρία σε δυο κατηγορίες. Τη γεωμετρία ως μιας παραγωγικής δομής ή αξιωματικού συστήματος και τη γεωμετρία ως μια περιγραφική επιστήμη. Για τους φορμαλιστές μόνο η πρώτη είναι μαθηματικά. Η χρήση των εικόνων ή διαγραμμάτων ή ακόμη της διαίσθησης και φαντασίας, είναι όλα εξωμαθηματικές λειτουργίες οι οποίες δεν προσφέρουν τίποτα στον αποδεικτικό συλλογισμό. Κατά συνέπεια, όλες αυτές οι καταστάσεις δεν θα έπρεπε να παρουσιάζονται σε ένα μαθηματικό βιβλίο ή και μέσα στη τάξη ακόμα.!!!.

Για τον φορμαλιστή κάποιος αρχίζει να κάνει πραγματικά μαθηματικά από τη στιγμή που μυείται στην αποδεικτική διαδικασία. Οτιδήποτε άλλο, όπως για παράδειγμα το πώς οδηγήθηκε κάποιος να κατασκευάσει αυτήν την απόδειξη ή το πώς σκέφτηκε για να συλλάβει τη γενική στρατηγική επίλυση ενός προβλήματος, δεν έχει καμία σχέση με τα πραγματικά μαθηματικά, είναι χωρίς ενδιαφέρον και περιττό. Η επιτυχία συνεπώς ενός μαθηματικού προγράμματος εξαρτάται από το πλήθος των θεωρημάτων που έχουν αποδειχθεί.

Η φορμαλιστική λοιπόν μορφή των μαθηματικών, έχει διεισδύσει στα σχολικά βιβλία με αποτέλεσμα αυτά να επιμένουν στην αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Πιστεύεται τελικά ότι με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η παπαγαλία από την πλευρά των μαθητών καθώς κάθε έννοια είναι το αποτέλεσμα μιας λογικής. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν

συμβαίνει. Ως αιτία δίνεται η αδυναμία των καθηγητών να εξηγήσουν στους μαθητές τους τη λογική που οδήγησε στη κατασκευή των συγκεκριμένων εννοιών και αξιωμάτων.

Στο Φορμαλισμό αυτό, το λάθος δεν έχει θέση, είναι ανύπαρκτο. Τα μαθηματικά είναι το πρότυπο της τελειότητας και της αρμονίας, οι μαθηματικές αποφάνσεις είναι μνημεία τελειότητας και στέρεης γνώσης, Επομένως, τα λάθη στα μαθηματικά είναι επικριτέα και θεωρούνται σημάδια αποτυχίας του μαθητή στο να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του απέναντι στο σχολείο. Το λάθος δεν αναγνωρίζεται ως απαραίτητο συστατικό της ανθρώπινης σκέψης στην πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης και δημιουργίας. Άρα, τα λάθος δεν έχει παιδαγωγική αξία, είναι απλώς σημάδι αδυναμίας και ατέλειας.

Το Φορμαλισμό ακολούθησε μια μεταρρύθμιση των μαθηματικών που ονομάστηκε κίνηση των «*μοντέρνων μαθηματικών*». Όμως από τα πρώτα χρόνια, η εφαρμογή της διδασκαλίας των μοντέρνων μαθηματικών οδήγησε σε αδιέξοδα, τα οποία οφείλονταν στους αφηρημένους συμβολισμούς και την υπερβολική αυστηρότητα. Τα αποτελέσματα ήταν μάλλον πενιχρά καθώς δημιούργησε περισσότερα προβλήματα από όσα έλυσε. Επισυνάπτουμε εδώ ένα απόσπασμα από το βιβλίο « *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης; Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών*» του Morris Kline:

Βρισκόμαστε σε μια τάξη όπου διδάσκονται μοντέρνα μαθηματικά.

Η δασκάλα ρωτάει: «*Γιατί 2+3 είναι ίσο με 3+2;*»

Χωρίς να διστάσουν, οι μαθητές απαντούν: «*Γιατί και τα δυο κάνουν 5*».

«Όχ»ι τους επιτιμά η δασκάλα. *«Η σωστή απάντηση είναι: Γιατί ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης»!!!!!*

Η επόμενη ερώτηση της είναι *: «Γιατί 9+2=11»;*

Και πάλι οι μαθητές αποκρίνονται αμέσως*: «Γιατί 9+1 κάνουν 10 και 1 ακόμη κάνουν 11».*

«Λάθος», αναφωνεί η δασκάλα *: «Η σωστή απάντηση βρίσκεται στον ορισμό του 2, δηλαδή 9+2=9+(1+1)=(9+1)+1=10+1=11 αλλά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, 9+(1+1)=(9+1)+1. Ε, λοιπόν 9+1=10&10+1=11, από τον ορισμό του 11».*

Προφανώς η τάξη δεν τα πηγαίνει και πολύ καλά, και γι' αυτό η δασκάλα δοκιμάζει μιαν απλούστερη ερώτηση: «*Είναι το 7 αριθμός*;» Οι μαθητές σαστισμένοι από το απλό της ερώτησης, ούτε που το κρίνουν σκόπιμο να δώσουν απάντηση. Μα η απλή συνήθεια της υπακοής, τους σπρώχνει να δώσουν καταφατική απάντηση. Η δασκάλα τα χάνει. «*Αν σας ρωτούσα ποιοι είστε, τι θα μου λέγατε*;»

Οι μαθητές είναι τώρα επιφυλακτικοί και δεν απαντούν, αλλά ένας πιο θαρραλέος δίνει απάντηση; «*Είμαι ο Σπύρος Παπαγιάννης*».

Η δασκάλα φαίνεται να μην πιστεύει στα μάτια της και λέει επιτιμητικά: «*Θέλεις να πεις ότι είσαι το όνομα Σπύρος Παπαγιάννης; Και βέβαια όχι. Είσαι ένας άνθρωπος και τ' όνομα σου είναι Σπύρος Παπαγιάννης»*. Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στην αρχική μου ερώτηση. *Είναι το 7 αριθμός; Όχι, βέβαια! Είναι το όνομα ενός αριθμού. 5+2, 6+1 και 8-1 είναι ονόματα του ίδιου αριθμού. Το σύμβολο 7 είναι ένα αριθμητικό για τον αριθμό*»…

Ο διάλογος συνεχίζεται στο ίδιο πνεύμα. Μάλιστα, παρακάτω αναφέρεται ότι όταν ένας πατέρας ρώτησε το οκτάχρονο παιδί του πόσο κάνει 5+3 η απάντηση που έλαβε ήταν ότι 5+3 = 3+5 εξαιτίας της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Εμβρόντητος, διατύπωσε την ερώτηση αλλιώς « *Μα πόσα μήλα είναι 5 μήλα και 3 μήλα;*» Το παιδί δεν έχει χωνέψει ότι «και» σημαίνει «συν» και γι' αυτό ρώτησε : «*Θέλεις να πεις 5 μήλα συν 3 μήλα;*» Ο γονιός έσπευσε να πει ναι και περίμενε γεμάτος ελπίδα. «*Α!*», είπε το παιδί, «*δεν έχει σημασία αν μιλούμε για μήλα, αχλάδια ή βιβλία. 5+3=3+5 σε όλες τις περιπτώσεις*».

Το παραπάνω απόσπασμα, αν και ίσως λίγο γραφικό, πιστεύουμε πως είναι αρκετά αντιπροσωπευτικό της φιλοσοφίας των «*μοντέρνων μαθηματικών*». Οι απαντήσεις πρέπει να είναι αυστηρά μαθηματικές. Κάθε άλλη απάντηση, ακόμα και σωστή, αλλά διατυπωμένη διαφορετικά, λαμβάνεται ως λανθασμένη. Τα παιδιά δίνουν απαντήσεις στη γλώσσα που καταλαβαίνουν και όμως αυτό θεωρείται σφάλμα και τιμωρείται. Πώς λοιπόν να μην τρομοκρατηθούν; Πώς να καταλάβουν μαθηματικά όταν στην ερώτηση πόσο κάνουν 5 μήλα συν 3 μήλα δίνουν ως απάντηση 5+3=3+5 σε όλες τις περιπτώσεις; Πώς τέλος να έχουν το θάρρος να δοκιμάσουν;

Είναι σαφές ότι στα πλαίσια μιας τέτοιας θεωρίας το λάθος τιμωρείται. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι δεν δίνεται η δυνατότητα έκφρασης των μαθητών και κυρίως ότι δίνεται τόση σημασία στην τήρηση των κανόνων όπου στο τέλος χάνεται η ουσία. Είναι αναπόφευκτο πως παιδιά που έχουν διδαχθεί μαθηματικά με βάση αυτή τη φιλοσοφία δεν πρόκειται να θυμούνται τίποτα στη μετέπειτα ζωή τους.

3.3 Ημιεμπειρικισμός και λάθος

Μια άλλη φιλοσοφία των μαθηματικών είναι ο ημιεμπειρικισμός του Lakatos. Ο ημιεμπειρικισμός είναι μια σύγχρονη φιλοσοφία και προσφέρει μια εντελώς νέα διάσταση στη φιλοσοφία των μαθηματικών λόγω της προτεραιότητας που δίνει στη μαθηματική πρακτική (Tymoczo 1986, Davis και Hersh, 1981). Αντιτίθεται στον Φορμαλισμό για τον οποίο χαρακτηριστικά αναφέρει: «*Ο Φορμαλισμός αποσυνδέει την ιστορία των μαθηματικών από τη φιλοσοφία των μαθηματικών…Ο Φορμαλισμός αρνείται το status των μαθηματικών στα περισσότερα από εκείνα που γενικά θεωρούνται μαθηματικά και δεν μπορεί να πει τίποτε σχετικά με την ανάπτυξη τους…*»

Ο Lakatos αναλυτικότερα, θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι ότι κάνουν ή έχουν κάνει οι μαθηματικοί, με όλες τις ατέλειες που είναι μοιραίο να υπεισέρχονται σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα ή δημιουργία. Είναι ένας διάλογος μεταξύ των ανθρώπων οι οποίοι προσπαθούν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα. Οι μαθηματικοί είναι επισφαλείς και τα προϊόντα τους, μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις, δεν είναι δυνατόν να θεωρηθούν ποτέ τέλεια ή τελικές αιώνιες αλήθειες, αλλά μπορεί να χρειαστούν αναθεώρηση καθώς τα στάνταρ της αυστηρότητας αλλάζουν και νέες σημασίες εμφανίζονται στο προσκήνιο. Τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα δεν είναι δυνατόν να μελετηθούν σε απομόνωση από την ιστορία τους και τις εφαρμογές τους στις επιστήμες. (Τουμάσης, 1999).

Για τον Lakatos απόδειξη σ' αυτό το γενικό πλαίσιο των μη τυποποιημένων μαθηματικών δε σημαίνει μια μηχανική διαδικασία που επιβάλλει την αλήθεια μέσα από μια αδιάσπαστη ακολουθία υποθέσεων και συμπερασμάτων. Σημαίνει μάλλον εξηγήσεις, πιστοποιήσεις, επεξεργασίες που κάνουν την εικασία πιο εύκολη πιο πειστική, ενώ γίνεται πιο αναλυτική και ακριβής κάτω από τη πίεση των αντιπαραδειγμάτων.

Κάθε βήμα της απόδειξης υπόκειται και αυτό σε κριτική, η οποία μπορεί να είναι μια απλή επιφύλαξη ή το αποτέλεσμα ενός αντιπαραδείγματος σε ένα ιδιαίτερο επιχείρημα. Ένα αντιπαράδειγμα που αμφισβητεί ένα βήμα σε κάποιο επιχείρημα ο Lakatos το ονομάζει «*τοπικό αντιπαράδειγμα*». Ένα αντιπαράδειγμα που αμφισβητεί όχι

το επιχείρημα αλλά το ίδιο το συμπέρασμα το ονομάζει «*καθολικό αντιπαράδειγμα*». (P. J. DAVIS – R.HERSH, 1981).

Οι βασικές θέσεις των ημιεμπειρικιστών είναι οι εξής:

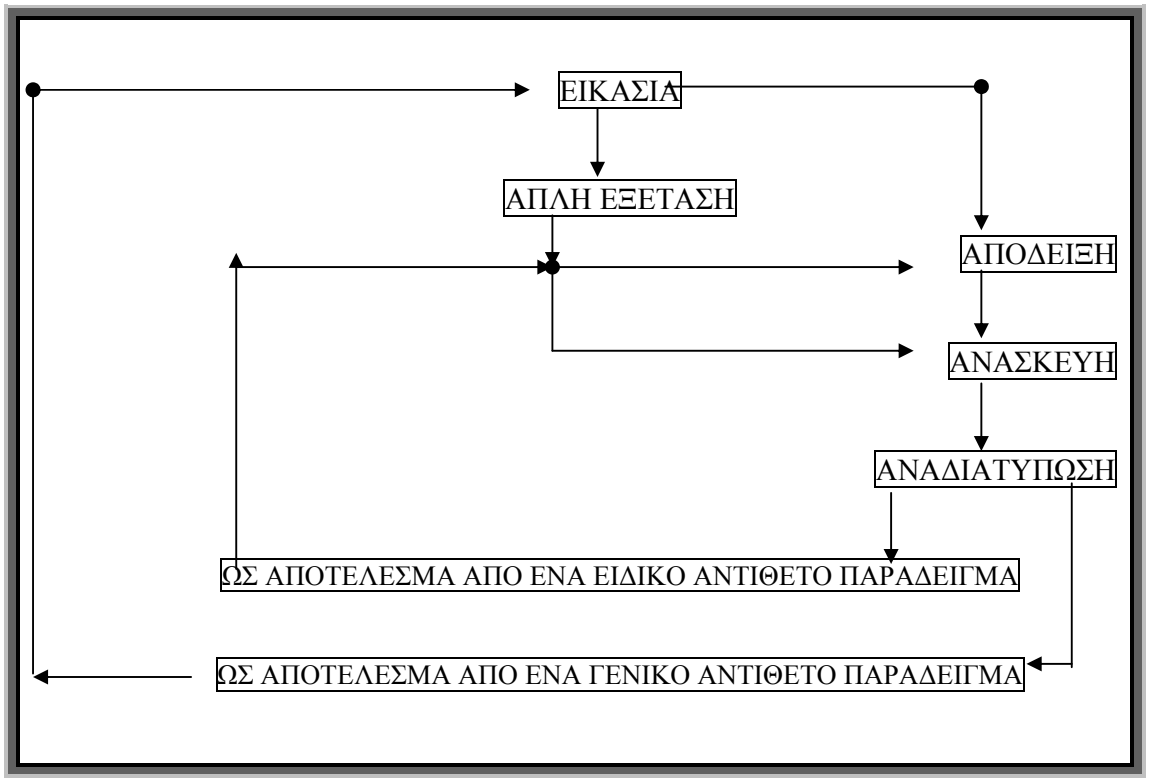
1. Η μαθηματική γνώση είναι επισφαλής
2. Τα μαθηματικά είναι ένα υποθετικό – παραγωγικό σύστημα. Η απόδειξη για τον Lakatos δεν σημαίνει μια μηχανική διαδικασία, η οποία μεταφέρει την αλήθεια μέσω μιας αλυσίδας υποθέσεων και συμπερασμάτων. Απεναντίας, απόδειξη σημαίνει εξηγήσεις, αιτιολογήσεις, επεξεργασίες, οι οποίες κάνουν την εικασία πιο ευλογοφανή, πιο πειστική, ενώ γίνεται πιο λεπτομερειακή και ακριβής κάτω από την πίεση των αντιπαραδειγμάτων.
3. Η ιστορία έχει κεντρική θέση. Επιστημολογικό έργο της φιλοσοφίας των μαθηματικών είναι να ερμηνεύσει την πραγματική μαθηματική γνώση η οποία υπάρχει.
4. Τα μη τυπικά μαθηματικά έχουν το προβάδισμα. Είναι η πηγή όλων των τυποποιημένων μαθηματικών
5. Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης ή ευρετική αποτελεί ένα από τα ενδιαφέροντα κάθε φιλοσοφίας των μαθηματικών. Εδώ το πρότυπο της μαθηματικής ανακάλυψης αποτελείτε από τα ακόλουθα στάδια:

   I. Αρχική εικασία
   II. Απόδειξη, η οποία έχει ως σκοπό να αναλύσει την αρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα
   III. Εμφάνιση αντιπαραδειγμάτων στην αρχική εικασία
   IV. Η απόδειξη επανεξετάζεται Το ένοχο λήμμα εντοπίζεται και τοποθετείται ως επιπλέον συνθήκη στην αρχική εικασία Το θεώρημα, δηλαδή η βελτιωμένη εικασία, αντικαθιστά την αρχική εικασία.

Στη διδακτορική του διατριβή με τίτλο *Αποδείξεις και Ανασκευές* ο Lakatos (1984) διαπραγματεύεται την ιστορία του γνωστού τύπου των Euler-Descartes για τα πολύεδρα, **K+E=A+2**. όπου K: αριθμός των κορυφών, E: αριθμός των εδρών και A

αριθμός των ακμών. Παρουσιάζει ένα δάσκαλο και τους μαθητές του οι οποίοι μέσα από ένα γόνιμο διάλογο γεμάτο από συγκρουόμενες απόψεις, επιχειρήματα και αντιεπειχηρήματα, προσπαθούν να ανακαλύψουν τον περίφημο αυτό τύπο. Μέσα από αυτόν το διάλογο αναδύεται μια εικόνα η οποία παρουσιάζει τα μαθηματικά να αναπτύσσονται από ένα πρόβλημα και μια εικασία, μέσα από επιτυχίες και αποτυχίες, μέσα από προσπάθειες, οι οποίες οδηγούν σε προσωρινές αλήθειες, οι οποίες αμφισβητούνται και αναθεωρούνται συνεχώς μέσα από μια περιπετειώδη πορεία ζικ-ζακ.

Θα επιμείνουμε εδώ στην ευρετική μέθοδο του Lakatos καθώς θεωρούμε ότι μέσα από αυτήν μπορεί κανείς να δει ολοφάνερα τη διδακτική αξία του λάθους. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η μέθοδος με τη βοήθεια ενός διαγράμματος.



Θα εξηγήσουμε τη μέθοδο μέσα από ένα παράδειγμα από τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών.

Ξεκινούμε από μια αρχική διατύπωση την οποία ονομάζουμε σπόρο. Αυτή η διατύπωση θα πρέπει να είναι ενδιαφέρουσα και εντελώς απλή. Το αντικείμενο της άσκησης είναι για το σπουδαστή να ποτίσει το σπόρο ώστε να αναπτυχθεί σε ένα εύρωστο φυτό.

Πρώτη Πράξη

Σπόρος: Αν ένας αριθμός λήγει σε 2, τότε διαιρείτε με το 2

Παραδείγματα: Το 42 τελειώνει σε 2 και διαιρείται με το 2. Το 172 τελειώνει σε 2 και διαιρείται με το 2.

Απόδειξη: Ένας αριθμός είναι ζυγός αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8. Όλοι οι άλλοι ζυγοί διαιρούνται με το 2. Ιδιαίτερα εκείνοι που λήγουν σε 2 διαιρούνται με το 2.

Απόδειξη: (πιο πολύπλοκη) Αν ένας αριθμός σε ψηφιακή μορφή είναι ab…c2, τότε ξεκάθαρα έχει τη μορφή (ab…c0)+2 και επομένως τη μορφή 10Q+2=2*(5Q+1).

Συμπερασματικό άλμα: Αν ένας αριθμός τελειώνει σε N, τότε διαιρείται με το N.

Σχόλιο: Να είσαι τολμηρός και να κάνεις τη φανερή γενίκευση. Δεν θα χαλάσει ο κόσμος αν αποδειχθεί λάθος.

Παράδειγμα: Αν ένας αριθμός τελειώνει σε 5, διαιρείται με το 5. Σίγουρα 15, 25, 128095 κ.τ.λ. Αλίμονο όμως!

Αντίθετο παράδειγμα: Αν ένας αριθμός τελειώνει σε 4, διαιρείται με το 4;Δυστυχώς όχι.

Αντίρρηση: Αλλά κάποιοι αριθμοί που τελειώνουν σε 4 διαιρούνται με το 4 (π.χ. ο 24). Μερικοί αριθμοί που τελειώνουν σε 9 διαιρούνται με το 9 (π.χ. ο 99).

Ανακεφαλαίωση της εμπειρίας: Φαίνεται ότι οι αριθμοί από το 1 έως το 9 διαιρούνται σε 2 κατηγορίες. Κατηγορία Ι : Τα ψηφία έτσι που όταν ένας αριθμός τελειώνει σε N, να διαιρείται πάντα με το N. Κατηγορία ΙΙ: Τα ψηφία N έτσι που όταν ένας αριθμός τελειώνει σε N, να διαιρείται μόνο περιστασιακά με το N.

Κατηγορία Ι: 1, 2, 5

Κατηγορία ΙΙ: 3, 4, 6, 7, 8, 9

Σημείο Τάξης: Τι συμβαίνει με τους αριθμούς που τελειώνουν σε 0; Διαιρούνται με το 0; Όχι Αλλά διαιρούνται με το 10. Χμ! Ίσως πρέπει να το προσέξουμε. Αυτό το φαινόμενο δεν ταιριάζει με τη μορφή του σπόρου.

Ορισμός: Ας ονομάσουμε τους αριθμούς της κατηγορίας Ι «μαγικούς». Έχουν μια ευχάριστη ιδιότητα.

Δοκιμαστικό Θεώρημα: Οι αριθμοί 1, 2 και 5 είναι μαγικοί αριθμοί. Είναι οι μόνοι μαγικοί αριθμοί;

Αντίθετο Παράδειγμα: Τι συμβαίνει με τον αριθμό 25; Δεν είναι μαγικός; Αν ένας αριθμός λήγει σε 25 διαιρείται με το 25. Για παράδειγμα 225, 625

Αντίρρηση: Νομίζαμε ότι μιλούσαμε για μονοψήφιους αριθμούς.

Αντίκρουση: Ναι, αυτό συνέβαινε στην αρχή. Αλλά το φαινόμενο με το 25 είναι ενδιαφέρον. Ας διερευνήσουμε λιγάκι το αρχικό ερώτημα

Αναδιατύπωση: Έστω ότι ο N αντιπροσωπεύει όχι μόνο ένα απλό ψηφίο αλλά μια ολόκληρη ομάδα ψηφίων όπως 23, 41, 505, κ.τ.λ. Ορίζομε ότι ο N είναι μαγικός αν ένας αριθμός που λήγει στην ομάδα ψηφίων N διαιρείται με το N. Έχει νόημα αυτός ο διευρυμένος ορισμός;

Παραδείγματα: Ναι, έχει. Το 25 είναι μαγικό. Το 10 είναι μαγικό. Το 20 είναι μαγικό. Το 30 είναι μαγικό.

Αντίθετο Παράδειγμα: Το 30 δεν είναι μαγικό. Το 130 δεν διαιρείται με το 30. Για σκεφτείτε. Πως ξέρετε ότι το 25 είναι μαγικό;

Θεώρημα: Το 25 είναι μαγικός αριθμός.

Απόδειξη: Αν ένας αριθμός λήγει σε 25 έχει τη ψηφιακή μορφή

abc…e25 = abc…e00+25 και συνεπώς τη μορφή 100Q+25=25(4Q+1).

Αναδιατύπωση του στόχου: Βρείτε όλους τους μαγικούς αριθμούς.

Συσσώρευση τα εμπειρίας: Οι 1, 2, 5, 10, 25, 50, 100, 250, 500, 1000 είναι όλοι μαγικοί αριθμοί.

Παρατήρηση: Όλοι οι μαγικοί αριθμοί που μπορέσαμε να βρούμε φαίνεται ότι είναι γινόμενα των 2 και του 5. Σίγουρα οι παραπάνω αριθμοί είναι.

Εικασία: Κάθε αριθμός N που έχει τη μορφή $N=2^p*5^q$ όπου είναι μαγικός αριθμός.

Σχόλιο: Φαίνεται λογικό. Τι έχουμε να χάσουμε;

Αντίθετο παράδειγμα: Πάρτε για p=3, q=1. Τότε $N= 2^3*5=40$. Ένας αριθμός που λήγει σε 40 διαιρείται πάντα με το 40; Όχι. Παράδειγμα, 140.

Αναδιατύπωση: Παρ' όλα αυτά τι θα λέγατε για το αντίστροφο; Όλοι οι μαγικοί αριθμοί που βρήκαμε έχουν αυτή τη μορφή 2^p*5^q. Ίσως όλοι οι μαγικοί αριθμοί να έχουν αυτή τη μορφή.

Αντίρρηση: Αυτός δεν ήταν ο σκοπός σας;

Αντίκρουση: Όχι, αυτό που σκόπευα ήταν το αντίστροφο: ένας αριθμός της μορφής 2^p*5^q είναι μαγικός. Βλέπετε τη διαφορά;

Θεώρημα: Αν το N είναι ένας μαγικός αριθμός, τότε $N=2^p*5^q$.

Απόδειξη: Έστω ότι ένας αριθμός λήγει σε N. (Θυμηθείτε σ' αυτή τη δήλωση το N δρα σαν μια ομάδα ψηφίων).Τότε ο αριθμός ψηφιακά θα μοιάζει με abc…eN. Θα θέλαμε να τον διαχωρίσουμε όπως πιο πριν. Επομένως έστω ότι N έχει d(N) ψηφία. Τότε ο αριθμός abc…eN είναι στην πραγματικότητα abc…e00…0+N, όπου στο τέλος υπάρχουν d(N) μηδενικά. Επομένως ο αριθμός έχει τη μορφή $Q*10^{d(N)}+N$. (Εξετάστε το όταν d(N) =2, 3,

κ.τ.λ.). Όλοι οι αριθμοί που λήγουν σε N έχουν αυτή τη μορφή. Αντίστροφα, αν Q είναι τυχαίος αριθμός τότε ο αριθμός $Q*10^{d(N)}+N$ λήγει σε N. Τώρα αν ο N είναι μαγικός διαιρεί πάντα τον $Q*10^{d(N)}+N$. Από τη στιγμή που ο N διαιρεί τον N πρέπει να διαιρεί διαρκώς τον $Q*10^{d(N)}$ για κάθε Q. Αλλά το Q πρέπει να είναι ένας απλός αριθμός, για παράδειγμα το 1. Επομένως ο N πρέπει να διαιρεί το $10^{d(N)}$. Εφόσον, $10^{d(N)} = 2^{d(N)} *5^{d(N)}$ είναι η παραγοντοποίηση σε πρώτους παράγοντες, αυτό συνεπάγεται ότι ο N πρέπει να παραγοντοποιείται σε δυάρια και πεντάρια.

Η τωρινή θέση: Ξέρουμε ότι ένας μαγικός αριθμός είναι αριθμός που έχει τη μορφή $N=2^p*5^q$ για κάποιους ακέραιους p, q ≥0. Θα θέλαμε να το αντιστρέψουμε αυτό. Τότε θα είχαμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για τους μαγικούς αριθμούς.

Επανεστίαση της εμπειρίας: Από τη στιγμή που ξέρουμε ότι όλοι οι μαγικοί αριθμοί έχουν τη μορφή $N=2^p*5^q$, το πρόβλημα καταλήγει στο εξής: Τι πρέπει να διαπιστωθεί σχετικά με τα p και q για να κάνει το N που προκύπτει μαγικό;

Εικασία: p≤q;

Αντίθετο παράδειγμα: p=0, q=4, $N=2^0*5^4$ =625. Είναι το 625 μαγικός αριθμός; Όχι. Το 625 δεν διαιρείται με το 625.

Εικασία: p=q;

Αντίρρηση: Τότε $N=2^p *5^q =10^p$ ή 1, 10, 100, … Εντάξει, αλλά υπάρχουν και άλλοι μαγικοί αριθμοί.

Εικασία: p≥q;

Αντίθετο παράδειγμα: p=3, q=1, $N=2^3*5^1$ =40 Αυτός δεν είναι μαγικός αριθμός.

Παρατήρηση: Χμ! Κάτι λεπτό φαίνεται εδώ. Αυτό μας φέρνει στο τέλος της πρώτης πράξης. Η διαδικασία συνεχίζεται για κείνους που έχουν αρκετό ενδιαφέρον και αντοχή. (P. J. DAVIS-R.HERSH, 1981).

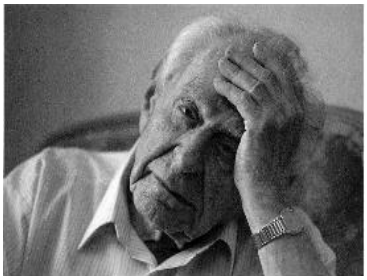
Η φιλοσοφία αυτή του Lakatos έχει σημαντικές επιπτώσεις στη διδακτική των μαθηματικών. Το ζητούμενο είναι η δημιουργία και ανάπτυξη της προσωπικής γνώσης των μαθηματικών και όχι η μετάβαση της απόλυτης γνώσης από το δάσκαλο στο μαθητή. Η πορεία αυτή για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης είναι μια περιπέτεια η οποία περιέχει δοκιμές, πειραματισμούς, εικασίες, ελέγχους, τροποποιήσεις και συνεχή διαπραγμάτευση. Η μαθηματική γνώση κατακτείται, δεν προσφέρεται έτοιμη, αλλά ούτε και μεταδίδεται. Επομένως, στο πλαίσιο της φιλοσοφίας αυτής το λάθος, είναι ένα αναπόφευκτο συστατικό στη πορεία εξέλιξης και χαρακτηρίζει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών. Γι' αυτό το λόγο λοιπόν και στη διδασκαλία των μαθηματικών το

λάθος δεν πρέπει να θεωρείται μόνο σημάδι αδυναμίας και ατέλειας, αλλά και ως ένα αξιόλογο παιδαγωγικό εργαλείο για την ανίχνευση των παραγόντων, οι οποίοι δρουν ανασταλτικά στη διαδικασία μάθησης.

3.4 Κονστρουκτιβισμός και λάθος

Η κατασκευαστική φιλοσοφία των μαθηματικών απασχολεί τα τελευταία χρόνια πολλούς ερευνητές. Η επίδραση της στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών είναι πολύ σημαντική γι' αυτό και σήμερα γίνεται μεγάλη προσπάθεια από πολλούς να την υιοθετήσουν και να την εφαρμόσουν. Κύριοι αντιπρόσωποι αυτής της φιλοσοφίας είναι οι Popper (1902-1994), Lakatos και Kuhn.

Ο Popper προκάλεσε επανάσταση στη φιλοσοφία της επιστήμης το 1934 με το



έργο του «Η Λογική Της Επιστημονικής Ανακάλυψης» (The Logic Of Scientific Discovery). Υποστήριξε ότι οι επιστημονικές θεωρίες μάλλον επινοούνται ως υποθέσεις, εικασίες ακόμα και ως μαντέματα και τότε υπόκεινται σε πειραματικές δοκιμασίες κατά τις οποίες οι επικριτές τους προσπαθούν να τις ανατρέψουν. Μια θεωρία μπορεί να θεωρείται επιστημονική μόνο αν είναι ικανή κατ' αρχήν να εξεταστεί και να διακινδυνεύσει ν' ανατραπεί. Η επιστημονική γνώση προχωρά αναιρώντας παρά επιβεβαιώνοντας υποθέσεις.

Λίγο αργότερα ο Kuhn (1987) υποστήριξε ότι η επιστήμη προχωρά μάλλον μέσα από διαδοχικές επαναστάσεις. Οι μεγάλες αλλαγές εμφανίζονται στην επιστήμη όχι εξαιτίας μιας βαθμιαίας συστηματικής αλλαγής των απόψεων για τον κόσμο, αλλά μάλλον επειδή καινούριες απόψεις έρχονται ν' αναδιοργανώσουν όλες τις πλευρές της κανονικής επιστήμης (normal science).

Στην κατασκευαστική θεωρία της γνώσης, «*η λειτουργία της γνώσης είναι προσαρμοστική και εξυπηρετεί στην οργάνωση του κόσμου των εμπειριών και όχι στην ανακάλυψη μιας προϋπάρχουσας και ανεξάρτητης από τον άνθρωπο αντικειμενικής αλήθειας.*» (Von Glasersfeld, 1987). Η μαθηματική γνώση δεν είναι σταθερή και αμετάβλητη, έχει μέσα της το στοιχείο της αλλαγής. Τα αποτελέσματα της είναι πάντα ανοιχτά για αναθεώρηση. Δεν είναι τελειωμένο προϊόν αλλά μια διαδικασία αναζήτησης. Άρα, τα μαθηματικά είναι « *μια κοινωνικά κατασκευασμένη ανθρώπινη δραστηριότητα που έχει ιστορία, παράδοση και κουλτούρα* » (Richards, J, 1991)

Η αντίληψη ότι τα μαθηματικά μεταβάλλονται μας οδηγεί στη νομιμοποίηση της πιθανότητας του λάθους σ' αυτά. Ο Lakatos ήδη έχει αναφέρει ότι τα μαθηματικά

υπόκεινται σε λάθη, δεν είναι αδιαμφισβήτητα. Αναπτύσσονται με την κριτική και την διόρθωση των θεωριών τους, οι οποίες δεν είναι ποτέ ολοκληρωτικά απαλλαγμένες από ασάφειες ή λάθη ή παραλείψεις. Η θέση αυτή επιβεβαιώνεται από την ίδια την ιστορία των μαθηματικών, όπως έχουμε δει παραπάνω, όπου λάθη έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση και ανάπτυξη της επιστήμης, με πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Αφού, λοιπόν η μαθηματική γνώση στους κονστρουκτιβιστές είναι δημιούργημα του ανθρώπινου μυαλού το λάθος εμφανίζεται όταν η γνώση αποδεικνύεται κάποια στιγμή μη λειτουργική και μη αποτελεσματική για την ερμηνεία και την αντιμετώπιση του κόσμου. Το λάθος όχι μόνο είναι νόμιμο στη δουλειά του μαθηματικού, αλλά είναι ουσιαστικό συστατικό στη διαδικασία επινόησης μιας μαθηματικής έννοιας. Οι εικασίες, οι λανθασμένες υποθέσεις, τα μερικώς σωστά αποτελέσματα παίζουν ρόλο θεμελιακό στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. «*Όποιος ασχολείται με την επιστήμη ξέρει καλά ότι η δύναμη του δεν προέρχεται από το αλάνθαστο, αλλά αντίθετα από την ικανότητα του για συνεχή αυτοδιόρθωση*.» (Cipra, B. 1985).

Οι απόψεις του Piajet για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών αποτέλεσαν ορόσημο για την νέα αυτή κατεύθυνση στη παιδαγωγική ψυχολογία. Η θεωρία του κονστρουκτιβισμού, ειδικά για τα μαθηματικά, βασίζεται πάνω στην εμπειρική και θεωρητική εργασία του Piaget και στην πιο πρόσφατη εργασία θεωρητικών και ερευνητικών παιδαγωγών στην περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Εν συντομία, αναφέρουμε ότι σύμφωνα με το Piaget η ανθρώπινη νοημοσύνη είναι μια διαδικασία προσαρμογής, όπου οι έννοιες της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης αποτελούν βάσεις της μάθησης. Αφομοίωση είναι η διαδικασία κατά την οποία ο οργανισμός αντιδρά προς το περιβάλλον με την ενσωμάτωση εμπειριών στα υπάρχοντα σχήματα ενώ συμμόρφωση είναι η λειτουργία κατά την οποία τροποποιούνται τα υπάρχοντα σχήματα όταν αυτά δεν είναι αρκετά για να προσλάβει τα καινούρια ερεθίσματα- εμπειρίες. Τέλος, με τη διαδικασία της εξισορρόπησης ο οργανισμός κάθε ανθρώπου οργανώνει τις εμπειρίες του κατά τρόπο έτσι ώστε να εξασφαλίζει τέλεια προσαρμογή.

Κεντρική ιδέα του κονστρουκτιβισμού είναι ότι το παιδί κατασκευάζει ενεργητικά τη γνώση κατανοώντας την σύμφωνα με τα δικά του γνωστικά αποθέματα και δεν την απορροφά παθητικά αποδεχόμενες τις απόψεις των άλλων. Το ερέθισμα για την κατασκευή της νέας γνώσης ξεκινάει από μια προβληματική κατάσταση, η οποία αρχικά φαίνεται με τις ενυπάρχουσες γνώσεις του παιδιού.

Επιπλέον, το άτομο συμμετέχει σε ομάδες. Κάθε παιδί εκφράζει την άποψη του και μέσα από τη συζήτηση που γίνεται οδηγούνται στην νέα γνώση. Με τη μέθοδο αυτή τα παιδιά μαθαίνουν να επικοινωνούν, να ανταλλάσσουν απόψεις και κυρίως να προωθούν τους σκοπούς μιας ομάδας.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις βασικές ιδέες του κονστρουκτιβισμού στις παρακάτω:

1. Τα παιδιά επινοούν και κατασκευάζουν τις δικές τους μεθόδους για να λύσουν μαθηματικά προβλήματα
2. Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος
3. Ο ρόλος της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη μάθηση των μαθηματικών είναι καθοριστικής σημασίας.

Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις ο δάσκαλος των μαθηματικών δεν είναι πλέον ο αφηγητής αλλά ο δημιουργός των προβληματικών καταστάσεων. Ο δάσκαλος είναι αυτός που πρέπει να επιλέξει τις κατάλληλες δραστηριότητες που θα οδηγήσουν τους μαθητές του στην οικοδόμηση της νέας γνώσης επάνω στις υπάρχουσες. Δεν είναι πλέον ο μοναδικός που κρίνει. Η τάξη μετατρέπεται σε μια μαθηματική κοινότητα, η οποία αποφασίζει για την αλήθεια και την εγκυρότητα των ιδεών εξετάζοντας κριτικά τις αιτιολογήσεις που δίνουν οι μαθητές.

Ο ρόλος λοιπόν του δασκάλου αλλάζει, γίνεται πιο απαιτητικός. Πρέπει ο ίδιος να έχει μια ενεργητική διάθεση απέναντι στα μαθηματικά και να μη θεωρεί τις μαθηματικές αλήθειες δεδομένες αλλά διαπραγματεύσιμες, ένα μήνυμα που πρέπει να περάσει και στα παιδιά. Πρέπει να δημιουργεί το κατάλληλο περιβάλλον για συζήτηση και οι παρεμβάσεις του να οδηγούν στην ανάπτυξη της αυτονομίας του παιδιού. Πρέπει, αντί να ψάχνει για μια ευθεία, σύντομη και απλή διαδρομή η οποία θα οδηγήσει τους μαθητές στην επιτυχία, να ενθαρρύνει την εξερεύνηση των παγίδων και των σκοτεινών σημείων οδηγώντας τους μαθητές σε μια περιπέτεια με σκοπό την ανακάλυψη και δημιουργία νέων μαθηματικών εννοιών και ιδεών. (Τουμάσης, 1999) Αν ο εκπαιδευτής επικεντρώνει μόνο στην επίδοση του εκπαιδευόμενου, ο δάσκαλος πρέπει να ανησυχεί με το τι συμβαίνει στο μυαλό του μαθητή. Ο δάσκαλος πρέπει να ακούσει τον μαθητή, να ερμηνεύσει τι ο μαθητής κάνει και λέει, και να προσπαθήσει να χτίσει ένα "μοντέλο" των εννοιολογικών κατασκευών του μαθητή. Αυτό είναι, φυσικά, λανθασμένο τόλμημα.

Αλλά χωρίς αυτό, κάθε προσπάθεια να αλλάξει τις εννοιολογικές δομές του μαθητή μπορεί να μην είναι περισσότερο από μια χαμένη υπόθεση.

Στα πλαίσια αυτής της θεωρίας, καταλήγουμε ότι θεμελιακά διαφορετικός είναι ο ρόλος που παίζει το λάθος. Το λάθος πλέον δεν θεωρείται αμάρτημα. Αποτελεί φυσιολογικό συστατικό της ανθρώπινης σκέψης, που η ανάλυση του και η διεύρυνση του οδηγεί σε νέες εξερευνήσεις και στο προχώρημα της μαθηματικής γνώσης. Από το αφιερωμένο στους μαθητές ¨δικαίωμα στο λάθος¨ περνάμε προοδευτικά στην έρευνα καταστάσεων, που τα λάθη είναι ενδεικτικά μιας γνώσης η οποία κατασκευάζεται απαραίτητα στη διαδικασία μάθησης. Με άλλα λόγια τα λάθη των μαθητών μας ενδιαφέρουν καθώς είναι αποδοτικά για τη μάθηση. Αναφέρουμε εδώ ένα απόσπασμα του Herbert Grinsburg (από το Uhildreus's Arithmetic 1977).

« *Σε τελευταία ανάλυση δεν βοηθάει σε τίποτε να εξηγηθούν τα λάθη με όρους έλλειψη εξυπνάδας ή επιδεξιότητας στα μαθηματικά. Τέτοιες αντιλήψεις συσκοτίζουν το γεγονός ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα στρατηγικών λογικής προέλευσης* ».

3.5 Συμπέρασμα

Έχοντας μελετήσει κα αναπτύξει μερικές από τις πιο σημαντικές θεωρίες μάθησης, αντιλαμβανόμαστε, ότι η διδακτική των μαθηματικών έχει κάνει σημαντικές προόδους στην κατανόηση της πορείας απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και στην ανακάλυψη των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση μαθηματικών εννοιών με την επίλυση προβλημάτων.

Η *ουσία των μαθηματικών είναι η ελευθερία τους*, είπε ο Cantor. Ελευθερία να κατασκευάζουμε, ελευθερία να κάνουμε υποθέσεις. Αυτές οι όψεις των μαθηματικών αναγνωρίζονται στον κονστρουκτιβισμό και στο φορμαλισμό. Ως μαθηματικοί ξέρουμε ότι επινοούμε ιδεατά αντικείμενα και μετά προσπαθούμε να ανακαλύψουμε τα γεγονότα σχετικά με αυτά. Κάθε φιλοσοφία που δεν μπορεί να διευθετήσει αυτή τη γνώμη είναι πολύ μικρή.

Το έργο του Lakatos και του Popper δείχνουν ότι η σύγχρονη φιλοσοφία είναι ικανή να αποδεχτεί την αλήθεια της μαθηματικής εμπειρίας. Αυτό σημαίνει αποδοχή της νομιμότητας των μαθηματικών όπως είναι: με την πιθανότητα να σφάλλουν, με την πιθανότητα να διορθώνονται και γεμάτα νόημα.

Τα μαθηματικά είναι ένα μοναδικό πράγμα. Οι πλατωνικές, φορμαλιστικές και κονστρουκτιβιστικές όψεις τους είναι πιστευτές επειδή η καθεμία αντιστοιχεί σε μια ορισμένη σκοπιά. Κάθε μια απ' αυτές όμως είναι λανθασμένη αν την πάρουμε μόνη της, απλά και μόνο επειδή είναι ατελής και μονόπλευρη.

4 ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Έχοντας μελετήσει μερικές από τις πιο σημαντικές στιγμές στην ιστορία των Μαθηματικών, μπορούμε να πούμε ότι κατά τις διάφορες φάσεις της εξέλιξης, υπήρξαν μεγάλα πνεύματα, που έκαναν καταπληκτικές ανακαλύψεις, διατύπωσαν και ανέπτυξαν θεωρίες και έθεσαν τις βάσεις για νέες δημιουργικές προσπάθειες.

Ωστόσο, είναι γεγονός ότι παρουσιάστηκαν και περιπτώσεις που πολλές από τις θεωρίες αυτές αποδείχτηκαν λανθασμένες, άλλες ελλιπείς και μερικές μάλιστα ήταν απλά αφελείς σκέψεις. Παρόλα αυτά, έχουμε τη γνώμη ότι η προσφορά των ανακαλύψεων και των θεωριών αυτών, ήταν σημαντική, ακόμα και στην τελευταία περίπτωση, γιατί η κάθε μια ήταν και μια δημιουργική ιδέα για το προβληματισμό και αφετηρία για παραπέρα προσπάθεια. Αποδεικνύεται ότι στα μαθηματικά το λάθος και η αναζήτηση του λάθους είναι αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας.

Τις θεωρίες αυτές μελέτησαν οι μαθηματικοί που ακολούθησαν, τις βελτίωσαν, τις συμπληρώσαν, τις ταξινόμησαν, τις θεμελίωσαν αξιωματικά και τις έφεραν στην σημερινή μορφή τους. Και η ιστορία συνεχίζεται. Ο J. M. Levy Leblond στον πρόλογο του για τον Cipra (1985) υποστηρίζει

«Όποιος υπηρετεί την επιστήμη γνωρίζει καλά ότι η δύναμη της δεν οφείλεται σε κάποιο εσωτερικό αλάνθαστο, αλλά αντίθετα στην ικανότητα της να αυτοδιορθώνεται ασταμάτητα.»

ή όπως έλεγε ο Albert Einstein «*όταν τα μαθηματικά αναφέρονται στην πραγματικότητα δεν είναι βέβαια. Όταν είναι βέβαια, δεν αναφέρονται στην πραγματικότητα*».

Τελικά «*ο μόνος άνθρωπος που δεν κάνει λάθη είναι αυτός που δεν κάνει τίποτα*». (Theodore Roosvelt)

Τελειώνουμε με το υπέροχο ποίημα του Κωνσταντίνου Καβάφη

« *Η Ιθάκη* »

Σα βγεις στον πηγαιμό για την Ιθάκη,
να εύχεσαι να ναι μακρύς ο δρόμος,
γεμάτος περιπέτειες, γεμάτος γνώσεις.
Τους Λαιστρυγόνας και τους Κύκλωπας,
τον θυμωμένο Ποσειδώνα μη φοβάσαι,

τέτοια στον δρόμο σου ποτέ σου δεν θα βρεις,
αν μεν' η σκέψις σου υψηλή, αν εκλεκτή
συγκίνησις το πνεύμα και το σώμα σου αγγίζει.
Τους Λαιστρυγόνας και τους Κύκλωπας,
τον άγριο Ποσειδώνα δεν θα συναντήσεις,
αν δεν τους κουβανείς μες στην ψυχή σου,
αν η ψυχή σου δεν τους στήνει εμπρός σου.
Να εύχεσαι νάναι μακρύς ο δρόμος.
Πολλά τα καλοκαιρινά πρωϊά να είναι
που με τι ευχαρίστησι, με τι χαρά
θα μπαίνεις σε λιμένας πρωτοειδωμένους,
να σταματήσεις σ' εμπορεία Φοινικικά,
και τες καλές πραγμάτειες ν' αποκτήσεις,
σεντέφια και κοράλλια, κεχριμπάρια κ' έβενους,
και ηδονικά μυρωδικά κάθε λογής,
όσο μπορείς πιο άφθονα ηδονικά μυρωδικά,
σε πόλεις Αιγυπτιακές πολλές να πας,
να μάθεις και να μάθεις απ' τους σπουδασμένους.
Πάντα στον νου σου να χεις την Ιθάκη.
Το φθάσιμον εκεί ειν' ο προορισμός σου.
Αλλά μη βιάζεις το ταξίδι διόλου.
Καλλίτερα χρόνια πολλά να διαρκέσει
και γέρος πια ν' αράξεις στο νησί,
πλούσιος με όσα κέρδισες στο δρόμο,
μη προσδοκώντας πλούτη να σε δώσει η Ιθάκη.
Η Ιθάκη σ' έδωσε τ' ωραίο ταξίδι.
Χωρίς αυτήν δεν θα έβγαινες στον δρόμο.
Άλλα δεν έχει να σε δώσει πια.
Κι αν πτωχική την βρεις, η Ιθάκη δε σε γέλασε.
Έτσι σοφός που έγινες, με τόση πείρα,
ήδη θα το κατάλαβες οι Ιθάκες τι σημαίνουν.

Κωνσταντίνος Π. Καβάφης

5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

5.1 Η Ανακάλυψη της Αμερικής

Θα αρχίσουμε την αναφορά μας με την ανακάλυψη της Αμερικής από τον Κολόμβο, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου ένα λάθος άλλαξε τον κόσμο. Ο Κολόμβος, εξερευνητής γεννημένος στην Γένοβα, ασχολήθηκε νωρίς με τις ιδέες που είχαν διατυπωθεί ήδη από τον Αριστοτέλη και το Σενέκα για τη δυνατότητα να ταξιδέψεις στη σφαιρική γη προς δυτικά, επιδιώκοντας ο ίδιος να φτάσει με αυτό τον τρόπο στις Ινδίες, δεδομένου ότι ο ανατολικός δρόμος είχε περιοριστεί μετά την κατάλυση του Βυζαντίου. Την επιθυμία τού Κολόμβου να πραγματοποιήσει αυτό το ταξίδι ενδυνάμωσαν οι απόψεις του Ιταλού αστρονόμου Paolo Toscanelli, ο οποίος με εσφαλμένους υπολογισμούς, στηριζόμενος και σε αυθαίρετες εκτιμήσεις του Σενέκα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η απόσταση της Ευρώπης προς τις Ινδίες μέσω του Ατλαντικού ήταν πολύ μικρή.

Μετά από διαπραγματεύσεις χωρίς αποτέλεσμα με τον Ιωάννη Β' της Πορτογαλίας για τη χρηματοδότηση μιας αποστολής προς τις Ινδίες με δυτική πορεία, παρουσίασε ο Κολόμβος το 1486 τα σχέδιά του στη βασίλισσα Ισαβέλλα Α' της Καστίλης. Τον Απρίλιο 1492 υπέγραψαν ο Φερδινάνδος Β' της Ισπανίας και η Ισαβέλλα μία σύμβαση με τον Κολόμβο για τη χρηματοδότηση της αποστολής και για την κατανομή των λαφύρων που θα προέκυπταν. Έτσι ξεκίνησε ο μεγάλος θαλασσοπόρος με τρία μικρά πλοία (καραβέλες) και την αναμονή τού ενός δεκάτου από τα κέρδη που θα προέκυπταν στο «νέο κόσμο». Η εκκίνηση της πορείας έγινε στις 3 Αυγούστου 1492 και στις 12 Οκτωβρίου έφτασε, μετά από πολλές περιπέτειες που περιβάλλονται με διάφορους θρύλους στις 12 Οκτωβρίου του ίδιου έτους σε ένα νησί που ανήκει σήμερα στις Μπαχάμες. Συνεχίζοντας έφτασε στην Κούβα (Cipango), την οποία θεώρησε τμήμα της Ιαπωνίας και τέλος στην Αϊτή που την ονόμασε Εσπανιόλα. Να σημειωθεί ότι οι άτλαντες που χρησιμοποίησε ο Κολόμβος για τα ταξίδια του στηρίζονταν ακόμα στους υπολογισμούς του Πτολεμαίου, 15 αιώνες πριν!

Επειδή ο θαλασσοπόρος νόμισε ότι έφτασε σε κάποια νησιά στα ανατολικά των Ινδιών, ονομάζονται αυτά τα νησιά μέχρι σήμερα «Ανατολικές Ινδίες». Ακολούθησαν άλλα τρία ταξίδια, στο δεύτερο έφτασε ο Κολόμβος στα νησιά Πουέρτο Ρίκο, Ντομινίκα, Γουαδελούπη και Ιαμαϊκή και στο τρίτο από τα τέσσερα, αφού ανακάλυψε τα νησιά Τρινιντάντ και Τομπάγκο, κατέληξε το 1498 στις εκβολές του ποταμού Ορινόκο, σε έδαφος της αμερικάνικης ηπείρου. Ανάμεσα στο τρίτο και το τέταρτο ταξίδι συγκρούστηκε ο Κολόμβος με την ισπανική εξουσία, του αφαιρέθηκε η αρχηγία και στάλθηκε κρατούμενος στην Ισπανία. Το τέταρτο ταξίδι του πραγματοποιήθηκε μετά την απελευθέρωσή του και σ' αυτό επισκέφτηκε περιοχές της κεντρικής Αμερικής. Επέστρεψε ασθενής στην Ισπανία, όπου πέθανε ξεχασμένος στην πόλη Βαγιαδολίδ. Μέχρι και το θάνατό του ήταν ο μεγάλος εξερευνητής πεπεισμένος ότι βρήκε τις Ινδίες σε δυτική διαδρομή. Αυτή τη διαδρομή έμελλε να ανακαλύψει περίπου 20 χρόνια αργότερα ο Μαγγελάνος.

Αρκετά χρόνια μετά το θάνατο του Κολόμβου έγινε αντιληπτό ότι με τα ταξίδια του είχε ανακαλυφθεί μία νέα ήπειρος μεταξύ Ευρώπης και Ασίας, η οποία ονομάστηκε Αμερική από το όνομα του Αμέρικο Βεσπούτσι που τη χαρτογράφησε με τα μέσα της εποχής.

Για να γίνει αντιληπτή η σύγχυση που επικρατούσε εκείνη την εποχή ως προς τις ακριβείς γεωγραφικές συνθήκες, αναφέρουμε ένα εξερευνητή, ονομαζόμενο Vasco Nunez de Balboa (1475-1519), που έφτασε το 1513 σε ακτή του σημερινού Παναμά και, αφήνοντας πίσω τους συνταξιδιώτες του, ανάμεσά τους τον Πιζάρο, προχώρησε στην ξηρά δυτικά για να βρει κάποια γνωστή πόλη των Ινδιών. Όταν επέστρεψε αρκετές εβδομάδες αργότερα δήλωσε απογοητευμένος στους αναμένοντας φίλους του ότι δεν βρήκε τις Ινδίες, «μόνο θάλασσα, παντού θάλασσα!». Είχε ανακαλύψει για λογαριασμό των Ευρωπαίων τον Ειρηνικό Ωκεανό και δεν το κατάλαβε… Τα βιβλία των θαλασσοπόρων αναφέρουν γι' αυτό τον Μπαλμπόα ως πρώτο νεότερο Ευρωπαίο που «αντίκρισε» τον Ειρηνικό ωκεανό. Τον ωκεανό αυτό «ανακάλυψαν» και διέπλευσαν ως πρώτοι Ευρωπαίοι ο Μαγγελάνος και η συνοδεία του.

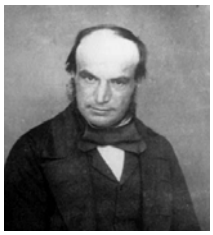
Η λάθος λοιπόν πεποίθηση του Κολόμβου πως ταξιδεύοντας δυτικά θα συναντήσει τις Ινδίες οδήγησε στην ανακάλυψη μιας καινούριας Ηπείρου, της Αμερικής. (http://www.2search.gr/history/otheradvices.asp?id=62).

5.2 ***Η Ανακάλυψη του Ποσειδώνα***

Συνεχίζουμε την αναφορά μας με ένα παράδειγμα από την Αστρονομία, την ανακάλυψη του πλανήτη Ποσειδώνα. Ο πλανήτης Ουρανός ανακαλύφθηκε το 1871 από ένα ερασιτέχνη, αλλά με ιδιοφυΐα προικισμένο αστρονόμο, τον William Herschel (1738-1822) μ' ένα αυτοσχέδιο τηλεσκόπιο. Με τη βοήθεια των νόμων του Kepler, η τροχιά του πλανήτη αυτού γρήγορα προσδιορίστηκε και διαπιστώθηκε ότι η απόσταση του από τον Ήλιο ήταν διπλάσια περίπου της απόστασης του Κρόνου, καθώς και ότι μια ολόκληρη περιφορά του Ουρανού γύρω από τον Ήλιο διαρκούσε 84 χρόνια.

Κατά το 1830 όμως τα στοιχεία της κίνησης του πλανήτη αυτού που είχαν συγκεντρωθεί μέχρι τότε έδειξαν μερικές αποκλίσεις από την θεωρητικά καθορισμένη τροχιά του, αποκλίσεις για τις οποίες δεν μπορούσαν να δοθούν ικανοποιητικές εξηγήσεις. Μερικοί αστρονόμοι εξέφρασαν την άποψη ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα πιθανόν να μην ισχύει για τόσο μεγάλες αποστάσεις από τον Ήλιο. Άλλοι όμως υποπτεύτηκαν μήπως οι αποκλίσεις είχαν ως αιτία τις επιδράσεις πάνω στον Ουρανό κάποιου κομήτη που δεν είχε μέχρι τότε ανακαλυφθεί ή κάποιου άλλου πλανήτη σε ακόμα πιο μεγάλη απόσταση από τον Ήλιο.

Ένας νεαρός φοιτητής του Πανεπιστημίου Cambridge, ο **John Couch Adams**



(1819-1892) τόσο πολύ ενθουσιάστηκε με τη δυνατότητα της ανακάλυψης ενός νέου πλανήτη ώστε καταπιάστηκε ο ίδιος με το δύσκολο υπολογισμό των στοιχείων της τροχιάς ενός νέου πλανήτη, κινούμενου σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα, και του οποίου (ζητούμενου πλανήτη) οι παρέλξεις πάνω στον Ουρανό θα δικαιολογούσαν τις ανωμαλίες που είχαν παρατηρηθεί στην κίνηση του πλανήτη αυτού. Όταν το 1845 τέλειωσε τους υπολογισμούς του ζήτησε από τον Royal Observatory του Greenwich να γίνουν έρευνες για την ανεύρεση του υποθετικού αυτού πλανήτη. Η αίτηση του όμως αυτή δεν πάρθηκε στα σοβαρά.

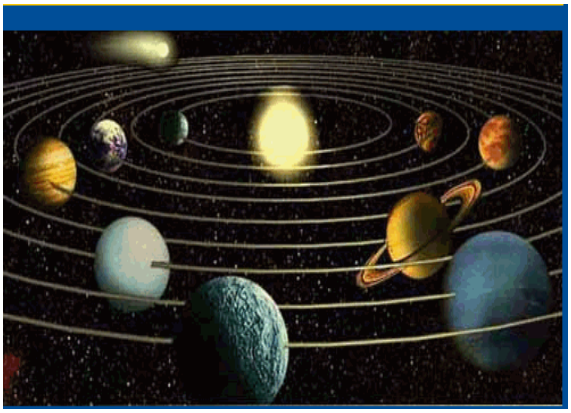
Ανεξάρτητα από τον Adams και ταυτόχρονα σχεδόν μ' αυτόν, όμοιους

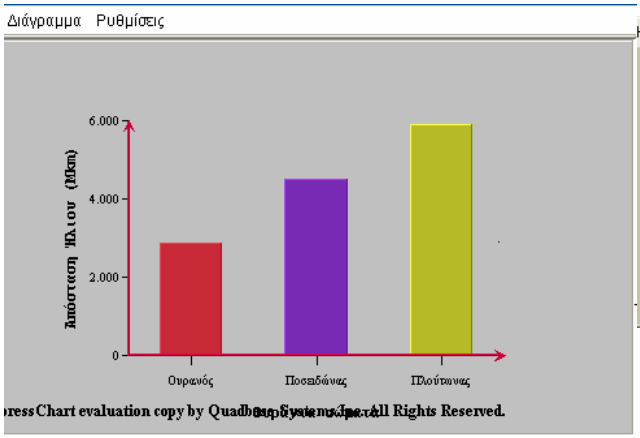
υπολογισμούς είχε κάνει στο Παρίσι και ο **Jean Joseph Le Verier** (1811-1877). Αυτός όμως ζήτησε από τον διευθυντή του αστεροσκοπείου του Βερολίνου, τον Johan Gall να επιβεβαιώσει με την παρατήρηση τα συμπεράσματα της εργασίας του. Το ίδιο βράδυ

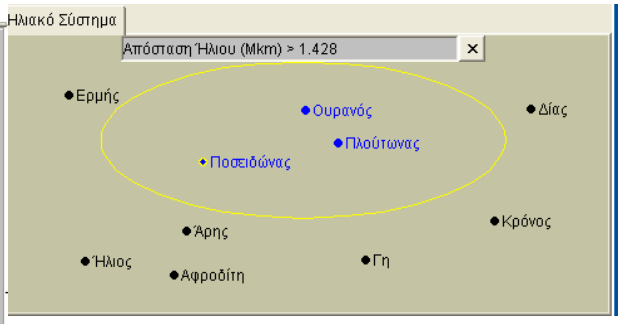
που πήρε ο Gall την επιστολή του Le Verier ερεύνησε τον Ουρανό στην περιοχή που του υπόδειξε ο Le Verier και <u>ανακάλυψε το νέο πλανήτη, τον Ποσειδώνα, στην ίδια ακριβώς θέση που είχε προβλέψει ο Γάλλος αστρονόμος.</u>

Η επιτυχία αυτή θεωρήθηκε ως ένας θρίαμβος του νόμου της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, αλλά και ως ένας από τους πρώτους θριάμβους της αριθμητικής ανάλυσης της τέχνης και της επιστήμης του υπολογισμού. (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός του Tom Apostol).

Βλέπουμε λοιπόν πως μερικές αποκλίσεις της τροχιάς του Ουρανού από την θεωρητικά υπολογισμένη οδήγησε στην ανακάλυψη ενός πλανήτη. Είναι πράγματι θαυμαστό.







6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Α. Γαγάτσης, Διδακτική των μαθηματικών - Θεωρία – Έρευνα, Art of Text, Θεσσαλονίκη 1995
2. Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, Νεφέλη, Αθήνα 1985
3. Ε. Βασιλείου, Μεταπτυχιακή Γεωμετρία Για Τη Διδακτική, Αθήνα 2003
4. Μ. Τουμάσης, Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα 1999
5. Π. Στράτζαλος, Στοιχεία από τη Νεότερη Ιστορία Των Μαθηματικών. Η Εξέλιξη Των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών Μετά το 1750, Αθήνα 2002
6. Σ. Βοσνιάδου, Εισαγωγή στην ψυχολογία, Gutenberg, Αθήνα 2001
7. Σ. Βοσνιάδου, Η ψυχολογία των μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα 1999
8. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός ΙΙβ, Αίθρα, Αθήνα 1995
9. Amir Aczel, Πώς ο Α. Wiles έλυσε το τελευταίο θεώρημα του Φερμά (Μετάφραση Α.Δ. Βαλαδάκης) Τροχαλία, 1998
10. B. L. Van Der Waerden, Η Αφύπνιση της επιστήμης, Π.Ε.Κ. Ηράκλειο 2000
11. Claire Margolinas, Η Σημασία του σωστού και του λάθους στην τάξη των μαθηματικών, Σαββάλας, Αθήνα 2003 (Μετάφραση Ειρήνη Τζιμπλάκη)
12. Donald M. Davis, Η Φύση και η δύναμη των μαθηματικών, Απόδοση στα Ελληνικά: Δημήτρης Καραγιάννακης, Μανώλης Μαγειρόπουλος, Π. Ε. Κ, Ηράκλειο 2001
13. Howard Eves, Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών μετά το 1650, (Τόμοι Ι, ΙΙ), Μάρτιος 1990
14. Imre Lakatos, Αποδείξεις και Ανασκευές- Η Λογική Της Μαθηματικής Ανακάλυψης, Τροχαλία, Αθήνα 1996
15. Morris Kline, Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης, Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών, Βάνιας, Θεσσαλονίκη 1993
16. P.J. Davis – R. Hersh, Η μαθηματική εμπειρία, Τροχαλία, 1981
17. Sir Thomas L. Heath, Euclid, The thirteen books of the elements, Dover Publications, Inc. N.Y.