ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Διπλωματική Εργασία

“Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ LEONHARD EULER ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ”

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

ΑΘΗΝΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2007

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 13/ 11 /2007 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1.Ευστάθιος Γιαννακούλιας (επιβλέπων καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	……
2.Θεοδόσιος Ζαχαριάδης	Αναπλ. Καθηγητής	……
3.Διονύσιος Λάππας	Αναπλ. Καθηγητής	……

Leonhard Euler (1707-1783)

Στον πατέρα μου,
χωρίς τη βοήθεια του οποίου θα ήταν αδύνατο να ολοκληρώσω την παρούσα εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή……... 11

Κεφάλαιο 1

Η ζωή και το έργο του Leonhard Euler

1.1 Τα πρώτα χρόνια……..……. 14

1.2. Τα πρώτα χρόνια στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης: 1727-1741..... 18

1.3. Τα χρόνια στο Βερολίνο: 1741-1766……... 22

1.4. Η δεύτερη περίοδος στην Αγία Πετρούπολη και τα τελευταία του χρόνια: 1766- 1783…… 26

1.5. Λίγα λόγια για το έργο του……... 30

1.6. Η προσωπικότητα του Euler……. 37

Κεφάλαιο 2

Συναρτήσεις

2.1 Εισαγωγή…… 40

2.2 Ορισμός συνάρτησης……. 43

2.3 Είδη συναρτήσεων……. 47

2.4 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων……... 52

2.5 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών……. 57

2.6 Ένας πιο γενικός ορισμός της συνάρτησης…… 59

2.7 Η έννοια της συνέχειας…….. 61

Κεφάλαιο 3

Το άπειρο

3.1 Εισαγωγή…… 63

3.2 Οι άπειρες ποσότητες……. 65

3.3 Οι απείρως μικρές ποσότητες (απειροστά)…….....……... 70

3.4 Η "Άλγεβρα" των διαφορικών……... 72

3.5 Το μηδέν και το άπειρο ως όρια……. 78
3.6 Εφαρμογές του απείρου στις σειρές……... 80

Κεφάλαιο 4

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός

4.1 Η φύση των Διαφορικών…… 86
4.2 Βασικοί κανόνες Διαφόρισης……. 93
4.3 Μέγιστα και ελάχιστα…… 96
4.4 Διαφορικές εξισώσεις……. 98
4.5 Μερικές διαφορικές εξισώσεις……... 100
4.6 Το Θεώρημα των μεικτών παραγώγων…….. 101
4.7 Ολοκλήρωμα…….. 103
4.8 Η ερμηνεία του Διπλού ολοκληρώματος……... 107

Κεφάλαιο 5

Σειρές

5.1 Εισαγωγή…… 111
5.2 Η ιστορία ενός διάσημου προβλήματος……. 115
5.3 Η λύση που έδωσε ο Euler στο “Basel Problem”…….. 118
5.4 Η επέκταση του προβλήματος……... 125
5.5 Ανάπτυγμα συναρτήσεων σε άπειρες σειρές……. 128

Κεφάλαιο 6

Λογάριθμοι

6.1 Εισαγωγή…… 130
6.2 Ο Euler και οι λογάριθμοι…….. 136
6.3 Οι εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις ως αναπτύγματα…….. 141

Κεφάλαιο 7

Μιγαδικοί αριθμοί

7.1 Εισαγωγή…… 146
7.2 Euler και Μιγαδικοί αριθμοί…….. 147
7.3 Μιγαδικοί λογάριθμοι…… 152

Επίλογος…… 155

Βιβλιογραφία…… 157

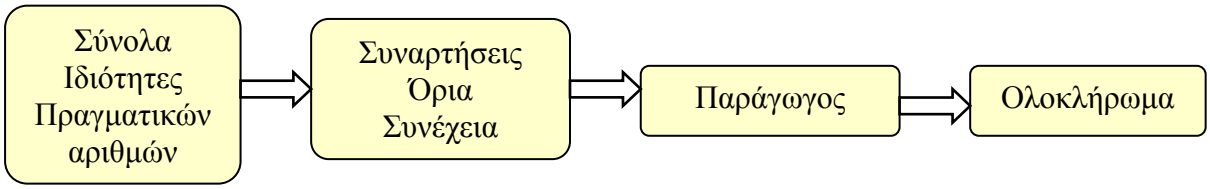
Εισαγωγή

Ο 18ος αιώνας είναι ολόκληρος αφιερωμένος από μαθηματικής πλευράς, στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Ο Leonhard Euler είναι σε μεγάλο βαθμό (τόσο στο μαθηματικό όσο και στο τυπικό-φορμαλιστικό) ο συνεχιστής του Leibniz, κυρίως με το έργο του *Introductio in analysin infinitorum* (1748) και ο θεμελιωτής της Ανάλυσης.[1] Το παραπάνω έργο μαζί με το δίτομο *Institutiones calculi differentialis* του 1755 [Διδασκαλίες διαφορικού λογισμού] και το τρίτομο *Institutiones calculi integralis* [Διδασκαλίες ολοκληρωτικού λογισμού] του 1768 χρησίμευσαν ως πρότυπα εγχειριδίων για πολλά χρόνια. Τα βιβλία και οι εργασίες του Euler περικλείουν κατά προσέγγιση το ένα τρίτο της έρευνας στα Μαθηματικά και τη Μηχανική από το 1726 μέχρι το 1800. Το έργο του μεγαλειώδες τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε όγκο παραμένει ανεξάντλητο ακόμα. Η γλώσσα που χρησιμοποίησε ήταν κυρίως τα Λατινικά και λιγότερο τα Γερμανικά και τα Ρωσικά. Αυτό έκανε ακόμα πιο δύσκολη την έρευνα στο έργο του αφού οι μεταφράσεις στα Αγγλικά είναι έργο των πρόσφατων χρόνων.

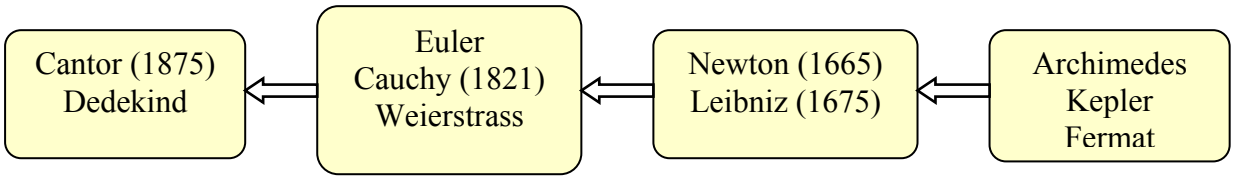
Η παρούσα εργασία έχει στόχο να παρουσιάσει τη συμβολή του Euler στον Απειροστικό Λογισμό και η χρονική περίοδος που πραγματεύεται είναι αμέσως μετά την εισαγωγή αυτού του νέου είδους Λογισμού από τους Newton και Leibniz και αρκετά πριν την αυστηρή θεμελίωση του. Ο Euler υπήρξε εξερευνητής και συνάμα πρωτοπόρος σε αρκετά θέματα. Ο όγκος του έργου του είναι πραγματικά τεράστιος και απροσπέλαστος ακόμα και για τον σύγχρονο μελετητή. Ο Γάλλος μαθηματικός-αστρονόμος Francois Arago τον χαρακτήρισε ως την '*ενσάρκωση της Ανάλυσης*'. Ο Euler θεωρείται δίκαια ο πιο παραγωγικός μαθηματικός στην ιστορία των μαθηματικών. Χαρακτηριστικό είναι ότι και σήμερα ακόμα ένα μεγάλο μέρος της ύλης των μαθηματικών που διδάσκεται στο σχολείο βρίσκεται ουσιαστικά στο επίπεδο της επεξεργασίας του Euler. Αυτό μας δίνει μια επιπλέον δυνατότητα προσέγγισης στο έργο του. Την ιστορική προσέγγιση που βασίζεται στη λογική ότι κάθε μαθηματική έννοια δεν είναι μεμονωμένη και αυθύπαρκτη, αλλά αντλεί σημασία από το παρελθόν και καταξιώνεται από τη δυνατότητα να επηρεάζει το μέλλον . Πράγματι η σειρά με την οποία τα βασικά εγχειρίδια παρουσιάζουν τις έννοιες και τις θεωρίες, δεν είναι η πορεία που το ανθρώπινο πνεύμα ακολούθησε στην συγκρότηση των εννοιών και

[1] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος & Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος 1ος, σελ. 210.

θεωριών αυτών. Παρόλο που η παραδοσιακή διδασκαλία της Ανάλυσης ακολουθεί το παρακάτω διάγραμμα



Η ιστορική ανάπτυξη των παραπάνω ακολούθησε αντίστροφη πορεία.



Είναι φανερό ότι η κατανόηση της δυναμικής πορείας της μαθηματικής σκέψης διευκολύνεται από τη μελέτη της ιστορίας. Ο Henry Poincaré γράφει χαρακτηριστικά: "*Το έργο του δασκάλου είναι να κάνει τα παιδιά να ακολουθήσουν την ατραπό που ακολούθησαν οι πατέρες τους, περνώντας γρήγορα από ορισμένα στάδια χωρίς να παραλείψουν κανένα. Με αυτή την έννοια η ιστορία είναι ο οδηγός μας*". Μέσα σε αυτό το πλαίσιο αναπτύσσεται και η παρούσα εργασία επιχειρώντας να παρουσιάσει αυτή την εξέλιξη βασικών εννοιών της Ανάλυσης κατά το 18^{ο} αιώνα και ειδικότερα το ρόλο που έπαιξε ο Euler στη διαμόρφωση αυτών. Στο πρώτο κεφάλαιο μέσα από μια βιογραφική μελέτη παρουσιάζεται η ζωή και το έργο του. Αμέσως μετά, στο επόμενο κεφάλαιο βλέπουμε τον τρόπο προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης από τον Euler, την εξέλιξη και καθιέρωση αυτού του θεμελιώδους μαθηματικού αντικειμένου, το λογισμό των συναρτήσεων αλλά και την πολύ βασική ιδιότητα της συνέχειας που μόλις είχε αρχίσει να διερευνάται. Το τρίτο κεφάλαιο, μέσα από τη μελέτη της απείρως μικρής και της απείρως μεγάλης ποσότητας, προβάλλει το διαχωριστικό όριο ανάμεσα στην Άλγεβρα και τον Απειροστικό Λογισμό. Ο Euler άλλοτε με τρόπο φιλοσοφικό και άλλοτε με τρόπο μαθηματικό προσπαθεί να φωτίσει τα θεμέλια αυτού του νέου κλάδου των μαθηματικών. Το διαφορικό είναι η απαιτούμενη έννοια διαχείρισης του απείρου και το μηδέν και το άπειρο βρίσκουν τρόπο συσχέτισης μεταξύ τους. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η φύση των διαφορικών, οι βασικοί κανόνες διαφόρισης, η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και η έννοια του ολοκληρώματος όπως την αντιλαμβάνονταν εκείνη την εποχή. Το πέμπτο κεφάλαιο σκιαγραφεί την εξέλιξη των λογαρίθμων και τη συμβολή του Euler σε αυτήν. Στο έκτο κεφάλαιο μελετάται η σύγκλιση των σειρών και παρουσιάζεται ο τρόπος επίλυσης του διάσημου 'Basel

problem', που καθιέρωσε τον Euler μεταξύ των κορυφαίων σύγχρονών του μαθηματικών. Η έρευνα ολοκληρώνεται με το έβδομο κεφάλαιο όπου παρουσιάζονται κάποια βασικά συμπεράσματα του Euler για τους μιγαδικούς, περιγράφεται η απόδειξη της διάσημης σχέσης $e^{i\pi}+1=0$ και αποσαφηνίζεται η φύση των μιγαδικών λογαρίθμων.

Κεφάλαιο 1ο

Η ζωή και το έργο του Leonhard Euler

1.1 Τα πρώτα χρόνια

Ο Leonhard Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας τον Απρίλη του 1707. Ήταν γιος του Paul Euler και της Marguerite Brucker. Λίγο μετά τη γέννησή του η οικογένεια εγκαταστάθηκε στο γειτονικό χωριό του Riechen. Ο πατέρας του ήταν Καλβινιστής πάστορας και επιθυμούσε ο γιος του να τον διαδεχθεί στην εκκλησία του χωριού. Δεδομένου ότι και η μητέρα του προέρχονταν από οικογένεια ιερέων το μέλλον του νεαρού Leonhard Euler φαινόταν προδιαγεγραμμένο. Έτσι ο Euler σε ηλικία 14 χρονών μπήκε στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας για σπουδές στη Θεολογία.

Σύντομα όμως έγινε φανερό ότι το ενδιαφέρον του Leonhard Euler είχε στραφεί στα Μαθηματικά. Ο ίδιος ο Paul Euler, ο πατέρας του, του είχε διδάξει Μαθηματικά από μικρή ηλικία. Ο Paul Euler είχε παρακολουθήσει τις διαλέξεις του καθηγητή Jacob Bernoulli, ενός διακεκριμένου μαθηματικού που κατείχε την έδρα των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας, και ήταν και ο ίδιος ολοκληρωμένος μαθηματικός. Ο Paul την εποχή της μαθητείας του στο πανεπιστήμιο συγκατοικούσε με τον Johann Bernoulli, μικρότερο αδερφό του Jacob. Την εποχή που πήγε ο Leonhard στο Πανεπιστήμιο ο Jacob Bernoulli είχε πεθάνει και την έδρα των Μαθηματικών κατείχε ο Johann Bernoulli, ο οποίος δίκαια θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ο μεγαλύτερος εν ενεργεία μαθηματικός του κόσμου αφού ο Leibniz είχε πεθάνει λίγα χρόνια πριν ενώ ο Newton είχε από καιρό εγκαταλείψει τα Μαθηματικά λόγω ηλικίας. Αξιοσημείωτο είναι πως η οικογένεια Bernoulli μετακόμισε στη Βασιλεία, μια μικρή πόλη που δύσκολα θα τη χαρακτήριζε κανείς πνευματική πρωτεύουσα του κόσμου, μετά από τους θρησκευτικούς διωγμούς που σημειώθηκαν στην Αμβέρσα. Ένα τραγικό γεγονός που όμως έδωσε τη δυνατότητα στον Euler να γνωρίσει ένα σπουδαίο πνευματικό καθοδηγητή.

Έτσι ο Leonhard γνώρισε τον Johann Bernoulli καθώς και τους γιους του Daniel και Nicolaus. Ο Johann Bernoulli αναγνώρισε την ιδιοφυΐα του Leonhard στα Μαθηματικά και τον παρότρυνε να εμβαθύνει τις σπουδές του προς την κατεύθυνση αυτή. Ο Bernoulli έγινε πνευματικός καθοδηγητής για το νεαρό φοιτητή. Του πρότεινε

μαθηματικά αναγνώσματα για τα οποία συζητούσαν μια φορά τη βδομάδα στο σπίτι του καθηγητή.[2]

Στην αυτοβιογραφία του ο Euler γράφει:

> *Σύντομα μου δόθηκε η ευκαιρία να έχω πρόσβαση στον διάσημο καθηγητή Johann Bernoulli, ο οποίος είχε την καλή διάθεση να με συμβουλεύει γύρω από τις μαθηματικές επιστήμες. Είναι αλήθεια ότι λόγω των εργασιών του αρνήθηκε κατηγορηματικά να μου παραδώσει ιδιαίτερα μαθήματα, μου έδωσε, όμως, μια πολύ πιο σοφή συμβουλή. Μου πρότεινε να προμηθευτώ μερικά δύσκολα βιβλία Μαθηματικών και να τα μελετήσω με μεγάλη επιμέλεια. Όποτε θα αντιμετώπιζα κενά ή αξεπέραστες δυσκολίες θα μπορούσα να πηγαίνω κάθε Σάββατο το απόγευμα ώστε να διασαφηνίζει όλες τις δυσκολίες. Το έκανε με τέτοιο εύληπτο τρόπο ώστε όποτε υπήρχε η ανάγκη να συμπληρώσει ένα κενό ή να διευκρινίσει μια δυσκολία, δέκα ακόμα κενά ή δυσκολίες εξαφανίζονταν αμέσως. Είναι σίγουρα ο καλύτερος τρόπος να προχωρήσεις στα Μαθηματικά.*[3]

Καθώς τα χρόνια περνούσαν και η σχέση τους ωρίμαζε ο Bernoulli συνειδητοποιούσε όλο και περισσότερο ότι αυτός ο νεαρός μαθητής ήταν μοναδικός. Παρόλο που ο πρώτος ήταν ιδιαίτερα ανταγωνιστικός και ευέξαπτος άνθρωπος, γεγονός που, εκτός των άλλων, το μαρτυρούν οι καυγάδες του με το μεγαλύτερο αδερφό του αλλά και τους γιους του, κάποτε έγραψε στον Euler τα παρακάτω γενναιόδωρα λόγια:

---

[2] Δεν έχει διασωθεί ακριβής λίστα των αναγνωσμάτων του, θα μπορούσαμε όμως να κάνουμε κάποιες υποθέσεις. Ο Ronald Calinger στο άρθρο του *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727-1741)* που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Historia Mathematica, pp. 121-166, αναφέρει ότι είναι πολύ πιθανό να διάβασε τα εξής βιβλία: 'Project' (1687), 'Nouvelles conjectures sur la pesanteur' (1690) του Varignon – που τον βοήθησαν να προετοιμαστεί για τη διπλωματική του - 'Dialogue on the Two Chief World Systems, Ptolemaic and Copernican' (1632) του Galileo Galilei, 'Principia philosophia' (1644) και 'Geometria' (1695) του Rene Descartes, 'Principia Mathematica' (1687) και 'Opticks' (1704) του Isaac Newton, τα άρθρα του Jakob Bernoulli για τις άπειρες σειρές (1713) καθώς και τη μελέτη του 'Ars conjectandi' (1715), 'Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum' (1716) του Jakob Hermann, 'Methodus incrementorum directa et inversa' (1715) του Brook Taylor και 'Arithmetica infinitorum' (1656) του John Wallis.

[3] Η απόδοση στα Ελληνικά των κειμένων είναι του γράφοντος. Για πληρέστερη ενημέρωση στο: V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 6.

Παρουσιάζω τις υψηλότερες αναλύσεις σαν να ήταν στην παιδική τους ηλικία, εσύ, όμως, τις φέρνεις στην ωριμότητά τους.[4]

Φαίνεται πως ο Euler ήταν ο αγαπημένος του μαθητής. Δεν ήταν, λοιπόν, τυχαίο που τον αποκαλούσε 'πρίγκιπα των Μαθηματικών'.[5] Η περίοδος που ο Euler βρισκόταν σε συνεχή επαφή με τον καθηγητή ήταν αποφασιστική για την εξέλιξή του ως μαθηματικού. Ο ίδιος παραδέχεται ότι:

Έπρεπε να εγγραφώ στη Θεολογία και βρέθηκα να κάνω αίτηση για να σπουδάσω Ελληνική και Εβραϊκή γλώσσα χωρίς να κάνω μεγάλη πρόοδο σε όλα αυτά γιατί αποδείχτηκε ότι τον περισσότερο χρόνο μου τον αφιέρωνα σε μαθηματικές σπουδές. Για καλή μου τύχη οι σαββατιάτικες επισκέψεις στον Bernoulli συνεχιζόταν. [6]

Σε ηλικία δεκαπέντε χρονών ο Euler έλαβε από το Πανεπιστήμιο της Βασιλείας το bachelor και δύο χρόνια μετά, το 1724, πήρε master. Με την ευκαιρία της απονομής του μεταπτυχιακού του εκφώνησε ένα λόγο που είχε ως θέμα του μια συγκριτική μελέτη της φιλοσοφίας του Descartes και του Newton.[7] Ο Euler είχε ευρεία μόρφωση γιατί εκτός από τα Μαθηματικά μελέτησε Θεολογία, Ιατρική, Αστρονομία, Φυσική και Γλώσσες. Αργότερα θα τον δούμε να γράφει κυρίως στα λατινικά και μερικές φορές στα γαλλικά παρόλο που η μητρική του γλώσσα ήταν τα Γερμανικά.

Το 1727 η Παρισινή Ακαδημία των Επιστημών ανακοίνωσε ένα διεθνές επιστημονικό διαγωνισμό σχετικά με τη θέση των καταρτιών στα πλοία. Ο Euler παρόλο που δεν είχε δει ποτέ στη ζωή του πλοίο συμμετείχε στο διαγωνισμό γράφοντας μια μελέτη, το κυριότερο μέρος της οποίας ήταν η ανάλυση, η μαθηματική τεχνική της εξάρτησης. Η αδυναμία της βρισκόταν στην σχεδόν ολοκληρωτική έλλειψη

---

[4] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, p. 592.

[5] Όπως φαίνεται από την επιγραφή επιστολής του Bernoulli προς τον Euler, με χρονολογία 23 Σεπτεμβρίου 1745, αυτός σημείωνε: Viro incomparabili Leonardo Euler Mathematicorum Principi, 'προς τον ασύγκριτο άντρα, πρίγκιπα των Μαθηματικών'. Στο G. Loria, *Ιστορία των μαθηματικών*, τόμος 3ος, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, σελ. 103.

[6] Leonhard Euler, Elements of Algebra. In Clifford Truesdell (Ed.), *Leonhard Euler, Supreme Geometer* p. xii.

[7] Άλλοι ερευνητές όπως ο Varadarajan, αναφέρουν πως ο Euler ολοκλήρωσε τις πανεπιστημιακές του σπουδές το 1726. Δες στο V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 6.

πρακτικότητας.[8] Τελικά η συμμετοχή του βραβεύτηκε με τιμητική διάκριση (*accessit*) και δημοσιεύτηκε. Στο μέλλον θα κέρδιζε το πρώτο βραβείο δώδεκα φορές.[9] Ένα βραβείο καθόλου ευκαταφρόνητο αν σκεφτεί κανείς πως εκτός από την ικανοποίηση της επιβράβευσης του επιστημονικού του έργου, ο Euler λάμβανε ένα σημαντικό χρηματικό ποσό που τον βοηθούσε να λύσει οικονομικά προβλήματα αλλά και να συνεχίσει με τον ίδιο ζήλο τις συμμετοχές του.[10]

Την ίδια περίοδο έκανε αίτηση για τη θέση του καθηγητή της Φυσικής στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας και για να υποστηρίξει τη συμμετοχή του έγραψε μια μονογραφία για τον ήχο με τίτλο: "*Dissertatio physica de sono"*. Παρόλο που δεν πήρε τη θέση του καθηγητή, μάλλον λόγω της νεότητάς του, η μελέτη του αξιολογήθηκε ως η δεύτερη καλύτερη και στα χρόνια που θα ακολουθούσαν θα παρέμενε κλασσική. Σε αυτή τη μονογραφία έκανε μια ανακεφαλαίωση της υπάρχουσας γνώσης για την ακουστική, διατύπωσε με μαθηματικό τρόπο και με μεγάλη ευκρίνεια τις βασικές ερωτήσεις και απάντησε σε μερικές από αυτές.

Η αποτυχία αυτή δεν τον αποθάρρυνε. Συνέχισε τις μελέτες του ελπίζοντας αυτή τη φορά σε μια θέση στην Ακαδημία των Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, όπου ήδη βρίσκονταν οι παλιοί φίλοι και συμμαθητές του Daniel και Nicolaus Bernoulli ως καθηγητές Μαθηματικών. Η Ακαδημία είχε ιδρυθεί το 1725 από την Αικατερίνη την Α΄, τη χήρα του Μεγάλου Πέτρου, που ακολούθησε τα σχέδια του άντρα της, ο οποίος με τη σειρά του είχε ακολουθήσει τη συμβουλή του Leibniz. Την επόμενη χρονιά από την ίδρυσή της ο Euler δέχτηκε μια πρόσκληση των αδερφών Bernoulli για μια θέση στην Ακαδημία.[11] Η θέση που προορίζονταν γι αυτόν ήταν στον τομέα της ιατρικής και της φυσιολογίας. Έτσι ο Euler μελέτησε φυσιολογία στη

---

[8] Λέγεται ότι αυτή η πρώτη προσπάθεια μιας ανεξάρτητης εργασίας υπήρξε αποκαλυπτική της δύναμης αλλά και της αδυναμίας του έργου του. Κατηγορήθηκε ότι τα μαθηματικά του απομακρύνονταν από την πραγματικότητα. Ο E. T. Bell στο βιβλίο του *Οι μαθηματικοί:από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 229-230 γράφει: «Το φυσικό σύμπαν ήταν για τον Euler μόνο μια ελκυστική ευκαιρία για τα Μαθηματικά και σπάνια κάτι που του φαινόταν ενδιαφέρον από μόνο του. Και αν το σύμπαν δεν ταίριαζε στην ανάλυσή του, το λάθος ήταν του σύμπαντος». Θεωρούμε πως ο ισχυρισμός αδικεί τον μεγάλο μαθηματικό, γιατί όπως θα δούμε και παρακάτω στο έργο του, δεν υπήρξε κλάδος των μαθηματικών που να ασχολήθηκε, και να μη μελέτησε εκτός από το θεωρητικό κομμάτι του και τις εφαρμογές του.

[9] Σε μια από τις συμμετοχές του έλυσε ένα πρόβλημα Αστρονομίας μέσα σε τρεις μέρες. Γεγονός θαυμαστό αν αναλογιστεί κανείς πως ορισμένοι από τους κορυφαίους επιστήμονες της εποχής του είχαν ζητήσει χρονικό περιθώριο αρκετών μηνών για να ανακοινώσουν τη λύση του.

[10] Το ίδιο βραβείο κέρδισε δέκα φορές ο Daniel Bernoulli και δύο ο Johann Bernoulli, γιοι και οι δύο του διάσημου μαθηματικού Johann Bernoulli. Σε μια περίπτωση, μάλιστα, ο Euler με ένα άρθρο του για τις παλίρροιες, μοιράστηκε το βραβείο με τους Maclaurin και Daniel Bernoulli.

[11] Ο Daniel Bernoulli, εκπροσωπώντας τον πρόεδρο της Ακαδημίας, Lavrentii Blumentrost, προσέφερε στον Euler ένα μέτριο επίδομα, γύρω στα 200 ρούβλια, δωρεάν στέγη, θέρμανση και φωτισμό καθώς και 130 ρούβλια για να αντιμετωπίσει τα έξοδα της μετακίνησής του.

Βασιλεία παρακολουθώντας διαλέξεις στην Ιατρική.[12] Τέλος ο Euler προσελήφθη στην Πετρούπολη το 1727 ως συνεργάτης του ιατρικού τομέα της Ακαδημίας.

1.2. Τα πρώτα χρόνια στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης: 1727-1741

Η σταδιοδρομία του Euler στη Ρωσία δεν ξεκίνησε με τους καλύτερους οιωνούς. Τη χρονιά που έφτασε στην Αγία Πετρούπολη, πέθανε η Αικατερίνη η Α΄ και ο Πέτρος ο Β΄ που πήρε τη θέση της δεν έδειχνε ενδιαφέρον για τις υποθέσεις της Ακαδημίας. Οι συντηρητικοί Ρώσοι ευγενείς που είχαν αναλάβει την εποπτεία του δωδεκάχρονου Πέτρου, ήταν εναντίον της Ακαδημίας καθώς την έβλεπαν σαν φορέα εισβολής των ξένων επιστημόνων που προέρχονταν από τη Γερμανία, την Ελβετία και τη Γαλλία. Χωρίς να μπορούν να καταλάβουν τη σπουδαιότητα της λειτουργίας της, καθυστερούσαν τις πληρωμές, πάγωσαν τη χρηματοδότηση για την κάλυψη των κενών θέσεων και γενικά συμπεριφέρονταν εχθρικά στα ξενόφερτα μέλη της Ακαδημίας. Έτσι το πρώτο εκείνο διάστημα ο Euler αναγκάστηκε να καταταγεί στο ρωσικό ναυτικό με το βαθμό του υπολοχαγού για να λύσει το βιοποριστικό του πρόβλημα. Από εκεί απέκτησε γνώσεις γύρω από την κατασκευή και τη λειτουργία των πλοίων και αργότερα έγινε αυθεντία στη ναυτική επιστήμη. Η βασιλεία του Πέτρου του Β΄ δεν κράτησε πολύ. Μετά το θάνατό του, τον Φεβρουάριο του 1730, στο θρόνο ανέβηκε η Άννα η Α΄. Κατά τη διάρκεια της βασιλείας της οι επιστήμες ξαναβρήκαν τη χαμένη τους αίγλη. Εντωμεταξύ μέσα στη σύγχυση των ημερών και μετά το θάνατο του Nicolaus Bernoulli από πνιγμό, ο Euler ανέλαβε τη θέση αναπληρωτή καθηγητή Μαθηματικών. Το 1730, ο Herman μαθηματικός που γεννήθηκε στη Βασιλεία το 1678 και εργαζόταν στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης ως καθηγητής της Φυσικής, επέστρεψε στην πατρίδα του με τον τίτλο του καθηγητή της ηθικής και του φυσικού δικαίου. Η χηρεύουσα θέση του καθηγητή της Φυσικής δόθηκε στον Euler. Όταν τρία χρόνια μετά ο Daniel Bernoulli επέστρεψε κι αυτός στην πατρίδα του για να γίνει καθηγητής Ανατομίας και Βοτανικής, ο Euler επιτέλους κατέλαβε την έδρα των Μαθηματικών. Κι ήταν μόλις είκοσι έξι χρονών.

Κατά τη διάρκεια αυτών των πρώτων χρόνων του στη Ρωσία ο Euler έμεινε στο σπίτι του Daniel Bernoulli. Έτσι η αναχώρηση του Daniel ήταν μεγάλη απογοήτευση για τον Euler που είχε συνδεθεί μαζί του στενά σε προσωπικό αλλά και επιστημονικό

[12] Ακόμα και τότε όμως η μελέτη του τον οδήγησε στα μαθηματικά. Η φυσιολογία π.χ. του αυτιού τον οδήγησε σε μια μαθηματική έρευνα για τον ήχο, σχετική με την διάδοση των κυμάτων κ.λ.π.

επίπεδο. Οι δυο τους έκαναν εκτεταμένες συζητήσεις για τη Φυσική και τα Μαθηματικά, οι οποίες αφορούσαν το εύρος της επιστήμης γενικά και ήταν κατά κάποιο τρόπο προάγγελος της ευρωπαϊκής επιστήμης των επόμενων δεκαετιών.

Παρά την απογοήτευσή του για το φίλο που έφυγε, η έδρα των Μαθηματικών ήταν πια δική του. Μια τέτοια επαγγελματική και ακαδημαϊκή ανέλιξη έκανε τον Euler να νιώσει ασφαλής. Η Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης ήταν κατ' ουσία ένας ερευνητικός οργανισμός που πλήρωνε αδρά τα μέλη της για να παράγουν επιστημονική έρευνα. Ο Euler ήταν αφοσιωμένος στην έρευνα και ταυτόχρονα ήταν υποχρεωμένος να δημοσιεύει τις μελέτες του και να βοηθάει την κυβέρνηση της τσαρίνας και αργότερα του τσάρου σε όποιο ζήτημα προέκυπτε.[13] Με τον καιρό έγινε επιστημονικός σύμβουλος της κυβέρνησης. Ετοίμαζε χάρτες, επέβλεπε το κυβερνητικό τμήμα της γεωγραφίας, έγραψε τα στοιχειώδη μαθηματικά εγχειρίδια για τα σχολεία της Ρωσίας, βοήθησε στην αναμόρφωση του συστήματος των μέτρων και των σταθμών και επινόησε πρακτικά μέτρα για τον έλεγχο των κλιμάκων, συμβούλευε το ρωσικό ναυτικό, μελετούσε ναυπηγική και αξιολογούσε έως και μηχανές πυρόσβεσης.[14]

Εκείνα τα χρόνια ήταν πολύ παραγωγικά για τον Euler. Οι συνάδελφοί του στην Ακαδημία ήταν στην πλειοψηφία τους πρώτης τάξεως επιστήμονες και οι συνθήκες εργασίας που του πρόσφερε η Ακαδημία ήταν εξαιρετικές. Σε ένα γράμμα του το 1749 έγραφε:

> *...εγώ και άλλοι που είχαμε την ευτυχία να βρεθούμε στη Ρωσική Ακαδημία δεν μπορούμε να μην αναγνωρίσουμε πως γίναμε αυτό που είμαστε χάρη στις θαυμάσιες συνθήκες που επικρατούσαν εκεί…*[15]

Οι συνθήκες ήταν ευνοϊκές κι έτσι ο Euler παντρεύτηκε το 1733 την Katherina Gsell, την κόρη ενός Ελβετού ζωγράφου που εργαζόταν στην Ακαδημία. Ο Gottlob Juncker, ποιητής που εργαζόταν στην Ακαδημία και σκάρωνε στίχους για να τονίσει κάποια ιδιαίτερα και σημαντικά γεγονότα που συνέβαιναν στους κόλπους της, δεν αγνόησε ένα τέτοιο σημαντικό γεγονός όπως ο γάμος του Euler. Έτσι διαβάζουμε:

---

[13] Η Ακαδημία έβγαζε ένα ερευνητικό περιοδικό με το όνομα Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae στο οποίο ο Euler δημοσίευσε δεκάδες άρθρα.

[14] Αν και οι μελέτες του αφορούσαν και την Αστρολογία, αρνήθηκε να κάνει το ωροσκόπιο του πρίγκιπα Ιβάν. Για τη δουλειά αυτή υπέδειξε τον αστρονόμο του παλατιού.

[15] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 8.

Who would have thought it.
That our Euler should be in love?
Day and night he thought constantly,
How he wanted more to calculate numbers.
His profound learned sense was free.[16]

Η Katherina και ο Euler έζησαν μαζί, μέχρι και το θάνατό της (1773), σαράντα ευτυχισμένα και γόνιμα χρόνια και απέκτησαν δεκατρία παιδιά, από τα οποία μόνο πέντε επιβίωσαν έως την ενηλικίωση και μόνο τρία έζησαν περισσότερο από τους γονείς τους. Για να στεγάσει την οικογένειά του ο Euler αγόρασε ένα σπίτι στις όχθες του ποταμού Νέβα, κοντά στην Ακαδημία. Ο πρώτος του γιος, ο Johann Albrecht που έμελλε να γίνει λαμπρός επιστήμονας και με τον οποίον θα συνεργαζόταν στο μέλλον, γεννήθηκε ένα χρόνο μετά. Δίκαια θα αναρωτηθεί κανείς πώς κατάφερνε μέσα σε μια τόσο μεγάλη οικογένεια να εργάζεται και μάλιστα με τόσο εντατικούς ρυθμούς. Λέγεται, λοιπόν, ότι ήταν από κείνους τους χαρισματικούς ανθρώπους που μπορούν να εργαστούν οπουδήποτε και κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες. Συχνά έγραφε τις εργασίες του με ένα μωρό στα πόδια ενώ τα άλλα παιδιά έπαιζαν γύρω του.[17]

Παρόλα αυτά η ακαδημαϊκή ζωή του δεν ήταν ανέμελη. Λόγω της πολιτικής αναταραχής που βρίσκονταν η χώρα, κατά καιρούς υπήρξε έλλειψη ανοχής στις διαφορετικές φωνές και μια αυξανόμενη καχυποψία στους ξένους. Ο ίδιος ο Euler, όντας ξένος μέσα στην Ακαδημία όπως και πολλοί άλλοι άλλωστε, χαρακτήριζε τη θέση του ως 'μάλλον άχαρη'.[18] Κάτω από αυτές τις συνθήκες έπρεπε επιπλέον να αντιμετωπίσει το διευθυντή της Ακαδημίας, έναν αλαζόνα γραφειοκράτη με το όνομα Johann Schumacher, που το κύριο ενδιαφέρον του ήταν 'η καταπίεση των ταλέντων'. [19] Όταν ο Schumacher αποπειράθηκε να τοποθετήσει τον Euler στο ίδιο επίπεδο με μερικούς μέτριους συναδέλφους του ο Euler διαμαρτυρήθηκε έντονα:

---

[16] Ronald Calinger, *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years' (1727-1741)*, p. 129.

[17] Αν και κάποιες από τις φημολογίες μπορεί να θεωρηθούν υπερβολές, είναι αξιοσημείωτη η φήμη που λέει πως έγραφε ένα μαθηματικό άρθρο μισή ώρα πριν το φαγητό. Όταν το τελείωνε το τοποθετούσε στην κορυφή μιας στοίβας άρθρων που είχε ήδη γράψει για να δημοσιευτούν και ο τυπογράφος έπαιρνε από το πάνω μέρος το πιο πρόσφατο. Έτσι εξηγείται γιατί συνέβαινε συχνά οι ημερομηνίες δημοσίευσης να έχουν αντίθετη σειρά από εκείνη της συγγραφής.

[18] Leonhard Euler, Elements of Algebra. In Clifford Truesdell (Ed.), *Leonhard Euler, Supreme Geometer* p. xx.

[19] William Dunham, *Euler The Master of Us All*, p. xxiii.

Μου φαίνεται πολύ υποτιμητικό για μένα, που έπαιρνα έως τώρα τον υψηλότερο μισθό από όλους, να εξομοιωθώ οικονομικά τώρα με τους υπόλοιπους…πιστεύω πως οι επιστήμονες που πήγαν τα Μαθηματικά τόσο μακριά όσο εγώ είναι πολύ λίγοι σε όλη την Ευρώπη και κανένας από αυτούς δεν θα δεχόταν να εργαστεί για 1000 ρούβλια. [20]

Παρότι ο Euler ήταν ικανότατος στις συναλλαγές του με το διευθυντή της Ακαδημίας, σίγουρα δε θα ένιωθε άνετα δουλεύοντας κάτω από την επίβλεψη ενός ξεροκέφαλου γραφειοκράτη που υποτιμούσε τον λαμπρό επιστήμονα.[21] Ευτυχώς η αυξανόμενη αίγλη του Euler στο μαθηματικό κόσμο βοήθησε να ξεπεραστούν τα εμπόδια και να αναδειχθεί ο κορυφαίος επιστήμονας στους κόλπους της Ακαδημίας.

Τούτα τα παραγωγικά χρόνια η διάνοια του Euler έλαμψε και η δουλειά του επεκτάθηκε σε πολλούς τομείς. Μελέτησε θέματα όπως η θεωρία των αριθμών, οι άπειρες σειρές, η ανάλυση των μεταβλητών και κατόπιν ασχολήθηκε με την εφαρμογή τους σε διάφορους κλάδους όπως η μουσική, η χαρτογραφία, η ναυπηγική κ.α. Συνολικά ετοίμασε γύρω στις 100 δημοσιεύσεις για διάφορα ζητήματα. Μια από τις σπουδαιότερες εργασίες του αυτή την περίοδο ήταν η πραγματεία του πάνω στη Μηχανική (*Mechanica, sive Motus Scientia analytice exposita, 1736*). Ο Euler, σε αυτό το έργο, ήταν ο πρώτος που εισήγαγε αλγεβρικές και αναλυτικές μεθόδους στη μηχανική, σπάζοντας έτσι την παράδοση του Νεύτωνα και των σύγχρονών του που επέμεναν στις γεωμετρικές μεθόδους. Η πραγματεία του Euler, δημοσιευμένη περίπου έναν αιώνα μετά τη δημοσίευση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του Καρτέσιου, έκανε στη Μηχανική ό,τι ο Καρτέσιος στη Γεωμετρία: την ελευθέρωσε από τα δεσμά της συνθετικής παρουσίασης και την έκανε αναλυτική.[22] Δίκαια το έργο θεωρήθηκε ορόσημο στην ιστορία της φυσικής. Την ίδια περίοδο θα δημοσιευτούν δύο τόμοι πάνω στις Ναυτικές Επιστήμες (*Scientia navalis*) που περιελάμβαναν μελέτες για την υδροδυναμική, τη ναυπηγική και τη ναυσιπλοΐα.

Αυτή η τεράστια παραγωγή, που αναλυτικότερα θα δούμε στην ενότητα που είναι αφιερωμένη στο έργο του, προκάλεσε σοβαρά προβλήματα στην υγεία του επιστήμονα με αποτέλεσμα το 1738 να χάσει το φως του από το δεξί μάτι. Λέγεται πως

[20] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 8.
[21] Ένας από τους λόγους που έφυγε ο Daniel Bernoulli από την Ακαδημία ήταν η κούραση που ένιωσε από τις συνεχόμενες ίντριγκες του Schumacher.
[22] E. T. Bell, *Οι μαθηματικοί: από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 235.

σχολιάζοντας το πρόβλημα είπε 'αυτό σημαίνει λιγότερος περισπασμός' και συνέχισε να εργάζεται με τους ίδιους σκληρούς ρυθμούς.[23]

1.3. Τα χρόνια στο Βερολίνο: 1741-1766

Η βασιλεία της τσαρίνας Άννας δεν κράτησε πολύ. Μετά το θάνατό της, το 1740, τη διαδέχτηκε στο θρόνο η Ελισάβετ, κόρη του Πέτρου του Α΄, ύστερα από πραξικόπημα εναντίον του τσάρου Ιβάν που είχε βασιλεύσει στη χώρα για λίγο.[24] Η πολιτική αναταραχή και η ξενοφοβία που επικρατούσε στη χώρα εντάθηκαν και δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε πως η κατάσταση στη χώρα ήταν ακόμα και επικίνδυνη για τους ξένους. Εκείνη την περίοδο ο Euler πήρε ένα γράμμα από τον βασιλιά Φρειδερίκο το Μέγα της Πρωσίας που τον καλούσε να διευθύνει το μαθηματικό τμήμα της Πρωσικής Ακαδημίας των Επιστημών.[25] Έτσι το 1741 έφυγε από την Αγία Πετρούπολη για το Βερολίνο. Στην Ακαδημία του Βερολίνου επρόκειτο να μείνει για εικοσιπέντε χρόνια, έως ότου επιστρέψει ξανά πίσω στη Ρωσία.

Η Ακαδημία του Βερολίνου όφειλε την έμπνευση της δημιουργίας της στο Leibniz. Κατά τη διάρκεια, όμως, της βασιλείας του Φρειδερίκου του Α΄, ενός ανθρώπου αμαθούς και άξεστου, η Ακαδημία παραμελήθηκε. Με το θάνατό του το 1740 και την ανάληψη της εξουσίας από το Φρειδερίκο το Μέγα η Ακαδημία απέκτησε ξανά ζωή. Ο νέος βασιλιάς επιθυμούσε να προστατεύσει τους εργάτες των γραμμάτων και των επιστημών και να δώσει κύρος στην Ακαδημία. Για το λόγο αυτό συγκέντρωσε στους κόλπους της πολλούς και εκλεκτούς επιστήμονες της εποχής.

Όταν ο Euler έφτασε στο Βερολίνο εντυπωσίασε τη βασίλισσα, η οποία προσπάθησε να τον εξιχνιάσει μέσα από ερωτήσεις. Οι απαντήσεις του όμως ήταν μονοσύλλαβες. '*Γιατί δεν θέλετε να μου μιλήσετε;*' τον ρώτησε. '*Κυρία*', της απόκρίθηκε '*έρχομαι από μια χώρα όπου, αν μιλήσεις, σε κρεμούν*'.[26] Στο Βερολίνο ο Euler ήταν αρκετά ευκατάστατος και αγόρασε σπίτι στο Βερολίνο και μια φάρμα στο Charlottenburg.[27] Τα χρήματα που έπαιρνε από την Πρωσική κυβέρνηση ήταν περίπου

---

[23] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 11.
[24] Η Ελισάβετ διακυβέρνησε τη χώρα από το 1741 έως το 1762. Κατά τη διάρκεια της βασιλείας της, το 1755, ιδρύθηκε το Πανεπιστήμιο της Μόσχας.
[25] Την ίδια πρόσκληση δέχτηκαν οι Daniel και Johann Bernoulli αλλά την απέρριψαν.
[26] E. T. Bell, *Οι μαθηματικοί:από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 236.
[27] Όταν κατά τη ρώσικη εισβολή του 1760 η φάρμα του λεηλατήθηκε, ο Ρώσος στρατηγός, δηλώνοντας ότι δεν έκανε πόλεμο κατά των επιστημών, τον αποζημίωσε με ένα γενναίο χρηματικό ποσό ενώ η αυτοκράτειρα Ελισάβετ, όταν άκουσε για τη ζημιά, του έστειλε ένα επιπλέον χρηματικό ποσό.

1600 τάλιρα ετησίως ενώ πληρωνόταν και από την Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης καθώς παρέμενε μέλος της, καθ' όλη τη διάρκεια της παραμονής του στο Βερολίνο. Στην πραγματικότητα ο Euler έστελνε τις μισές του μελέτες για δημοσίευση στη Ρωσική Ακαδημία, έγραφε σημαντικά βιβλία με αφορμή αυτή τη συνεργασία, συμβούλευε την Ακαδημία σε θέματα επιστημονικού ενδιαφέροντος και γενικότερα λειτουργούσε σαν αντιπρόσωπός της στο Δυτικό κόσμο.[28]

Τη χρονιά, βέβαια, που έφτασε στην Πρωσία ήταν σε εξέλιξη ο πρώτος πόλεμος της Σιλεσίας. Ο αυτοκράτορας ήταν αφοσιωμένος στον πόλεμο και ως εκ τούτου η αναδιοργάνωση και λειτουργία της Ακαδημίας καθυστερούσε. Μην έχοντας ο Euler άλλα καθήκοντα, ανέλαβε να παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα σε μέλη βασιλικών οικογενειών. Μαθητές του υπήρξαν τα παιδιά του δούκα της Βυρτεμβέργης και αργότερα η πριγκίπισσα Φιλιππίνα Von Schwendt, του οίκου Anhalt Dessau, ανιψιά του βασιλιά της Πρωσίας. Όταν τα μαθήματα τελείωσαν, μετά το 1760, ο Euler αποφάσισε να τα εκδώσει. Έτσι γεννήθηκε το σπουδαίο του έργο 'Γράμματα σε μια Γερμανίδα Πριγκίπισσα' που απέκτησε τεράστια δημοτικότητα και μεταφράστηκε σε επτά γλώσσες. Τα 'Γράμματα' ήταν οι παραδόσεις των μαθημάτων του προς την πριγκίπισσα σε τομείς όπως η Μηχανική, η Φυσική, η Οπτική, η Αστρονομία, η θεωρία Ήχου, η Μεταφυσική, η Ηθική, ακόμα και η Λογική.[29] Στο κυρίως μέρος του έργου ο Euler απαντάει σε ερωτήματα όπως: γιατί κάνει κρύο στην κορυφή ενός ψηλού βουνού στις τροπικές χώρες, γιατί το φεγγάρι φαίνεται μεγαλύτερο όταν ανατέλλει και γιατί ο ουρανός είναι μπλε. Στην αμερικάνικη έκδοση του 1833 ο εκδότης έγραφε στον πρόλογο:

> «Η ευχαρίστηση του αναγνώστη συνυπάρχει σε κάθε βήμα της εξέλιξης καθώς κάθε προσέγγιση στη γνώση που ακολουθεί γίνεται πηγή ολοένα και μεγαλύτερης ικανοποίησης.»[30]

Το έργο παραμένει ακόμα και σήμερα ένα από τα πιο χαρακτηριστικά δείγματα εκλαϊκευμένης επιστήμης.

---

[28] Αυτή η συνεργασία δεν σταμάτησε ακόμα και κατά τη διάρκεια του Επταετούς Πολέμου, όπου τα ρώσικα στρατεύματα εισέβαλλαν στο Βερολίνο.

[29] Είναι αξιοσημείωτο πως στις επιστολές που αναφέρονται στην παραγωγική λογική, ο Euler ανέπτυξε τη γεωμετρική ανάπτυξη των συλλογισμών μέσα από συστήματα κύκλων, μια τεχνική που χρησιμοποιείται από τότε.

[30] Leonhard Euler, *Letters of Euler on Different Subjects in Natural Philosophy*, p. ii.

Ενώ η εναρκτήρια συνεδρίαση της Ακαδημίας καθυστερούσε, ο Euler καθώς και άλλοι διανοούμενοι της εποχής που κατοικούσαν στο Βερολίνο δημιούργησαν μια ιδιωτική Εταιρία, η οποία για λίγους μήνες πρόσφερε επιστημονικό βήμα στους επιστήμονες. Ο ίδιος ο Euler δημοσίευσε πέντε εργασίες του στα Βερολίνεια Ανάλεκτα (*Miscellanea Berolinensia*) που ήταν το περιοδικό δελτίο της Εταιρίας. Ο βίος της Εταιρίας έμελλε να είναι πολύ μικρός καθώς τον Ιανουάριο του 1744 ξεκίνησε επιτέλους η λειτουργία της Ακαδημίας του Βερολίνου, η οποία αποφάσισε να εκδίδει ένα ετήσιο δελτίο με τον τίτλο 'Ιστορία της Ακαδημίας των Επιστημών και των Γραμμάτων του Βερολίνου'.[31] Η νέα Ακαδημία, ακολουθώντας τα ίχνη των άλλων μεγάλων Ακαδημιών της εποχής, διοργάνωνε δημόσιους διεθνείς διαγωνισμούς. Σε έναν από αυτούς το θέμα του διαγωνισμού ήταν η κριτική της 'Μοναδολογίας' του Leibniz, της φιλοσοφικής του θεωρίας για τις Μονάδες. Ο Euler παρότι, λόγω της θέσης του στην Ακαδημία, επρόκειτο να είναι μέλος της κριτικής επιτροπής, δεν άντεξε στον πειρασμό κι έγραψε μια μελέτη στα Γερμανικά ενάντια στη θεωρία του Leibniz. Αν και το δημοσίευμα ήταν ανώνυμο, όλοι κατάλαβαν τον συγγραφέα και επέκριναν τη στάση του.[32]

Στο Βερολίνο ο Euler έφτασε στο απόγειο της καριέρας του. Στην Ακαδημία του Βερολίνου δημοσίευσε περισσότερα από 125 άρθρα του για τα Μαθηματικά και τη φυσική ενώ στη Ρωσία έστειλε άλλα 100. Ήταν ακούραστος και η δημιουργικότητά του φαίνεται πως δεν είχε προηγούμενο.[33] Το 1748 δημοσίευσε την πραγματεία του για την ανάλυση, "*Introductio in analysin infinitorum",* στην οποία εξέθεσε με μεγαλοπρεπή τρόπο τη θεωρία του για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις εφαρμογές τους. Αυτό το βιβλίο υπήρξε ορόσημο για την ανάλυση και κυριάρχησε στο χώρο για περισσότερο από έναν αιώνα. Ακόμα και σήμερα η ανάγνωσή του είναι γοητευτική.[34] Το 1744 δημοσιεύτηκε μια μονογραφία του στο Λογισμό των μεταβολών (*Methodus inveniendi lineas curves maximi minimive proprietate gaudentes*) που είχε ξεκινήσει να γράφεται την εποχή που βρίσκονταν στην Αγία Πετρούπολη και το 1765 δημοσιεύτηκε

[31] Από το 1745 έως το 1769 δημοσιεύτηκαν 25 τόμοι, ενώ από το 1772 η έκδοση είχε τον τίτλο 'Νέα Υπομνήματα της Ακαδημίας των Επιστημών και των Γραμμάτων του Βερολίνου'.

[32] Οι κριτικές ενάντια στο έργο και στο συγγραφέα του επαναλήφθηκαν την εποχή που ο Euler πήρε το μέρος του Maupertuis στη διαμάχη του με τον Konig. Για περισσότερα σχετικά με τη διαμάχη στο βιβλίο G. Loria, *Ιστορία των μαθηματικών*, τόμος 3ος, σελ. 85-87.

[33] Λίγοι μαθηματικοί, ακόμα και σήμερα, έφτασαν ή πλησίασαν τον Euler στην ποσότητα παραγωγής πρωτότυπου και αξιόλογου έργου.

[34] Η έκδοση αυτού του βιβλίου σήμαινε πως δεν υπήρχε ανάγκη πια να διαβάζει κανείς τα δυσνόητα κείμενα του Leibniz ή τις εργασίες του Newton, που ήταν διατυπωμένες σε μια άκαμπτη γεωμετρική γλώσσα τελείως αταίριαστη για τα περισσότερα ζητήματα που διαπραγματευόταν.

η πραγματεία του για τη Μηχανική των στερεών σωμάτων (*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*).

Φυσικά, όπως συνέβη και στη Ρωσία, ο Euler ήταν επιφορτισμένος και με καθήκοντα που σχετίζονταν με τις ανάγκες του αυτοκράτορα και της επικράτειας γενικότερα. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια ασχολήθηκε, μεταξύ άλλων, με το νομισματικό σύστημα, το αποχετευτικό σύστημα, τα κανάλια ναυσιπλοΐας και το συνταξιοδοτικό σύστημα.

Κι ενώ φαίνεται πως ο Φρειδερίκος ο Μέγας κατανοούσε την ανάγκη της ανάπτυξης των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους, δεν ήξερε τίποτα από Μαθηματικά και μάλλον τα περιφρονούσε. Ο αυτοκράτορας θεωρούσε τον εαυτό του έναν πολυμαθή πνευματώδη σοφό που αγαπούσε τη φιλοσοφία, την ποίηση και οτιδήποτε γαλλικό. Δεν είναι συμπτωματική η προτίμησή του σε προσωπικότητες όπως ο Voltaire και ο d' Alembert και η απαξίωσή του προς το πρόσωπο του Euler.[35] Χαρακτηριστικό είναι ότι οι υποθέσεις της Ακαδημίας διεξάγονταν στα Γαλλικά και όχι στα Γερμανικά. Για το βασιλιά ο Euler ήταν ένας άξεστος που δε γνώριζε τίποτα από φιλοσοφία. Ο Voltaire, που περνούσε μεγάλο μέρος του χρόνου του κολακεύοντας τον Φρειδερίκο, έδειχνε να βρίσκει μεγάλη ευχαρίστηση στο να εμπλέκει τον Euler σε φιλοσοφικές συζητήσεις στις οποίες ήταν δύσκολο να ανταποκριθεί, δεδομένου ότι αφορούσαν ζητήματα που δεν γνώριζε.[36] Παρόλα αυτά ο Euler τα δεχόταν όλα με ευχαρίστηση και γελούσε μαζί με τους άλλους για τις γκάφες του.

Οι σχέσεις του Euler και του βασιλιά συνεχώς επιδεινώνονταν. Το γεγονός, όμως, που καθόρισε τις σχέσεις τους ήταν άλλο. Όταν ξεκίνησε τη λειτουργία της η Ακαδημία, ο βασιλιάς διόρισε διευθυντή της τον Maupertius, έναν επιστήμονα μικρότερου βεληνεκούς από τον Euler. Ο τελευταίος, όπως ήταν αναμενόμενο λόγω του χαρακτήρα του, είχε θερμές σχέσεις με το διευθυντή και ενδιαφερόταν πραγματικά για τις υποθέσεις του ιδρύματος. Μετά το θάνατο του Maupertius, το 1759, και για διάστημα τεσσάρων ετών, ο ουσιαστικός διευθυντής της Ακαδημίας ήταν ο Euler, αν και δεν είχε τοποθετηθεί επίσημα. Ο Φρειδερίκος όχι μόνο δεν του πρόσφερε τη θέση αλλά φάνηκε να μελετά το διορισμό του d' Alembert. Ο τελευταίος προσκλήθηκε στο Βερολίνο και, παρόλο που υπήρχε μια παλιά ψυχρότητα ανάμεσα σε αυτόν και τον Euler για κάποια μαθηματική αιτία, δήλωσε ξεκάθαρα στον βασιλιά ότι θα ήταν

[35] Λέγεται μάλιστα, ότι ο Φρειδερίκος αποκαλούσε τον Euler «ο κύκλωπάς μου» κάνοντας έτσι ένα απάνθρωπο σχόλιο στην περιορισμένη όραση του τελευταίου.

[36] Ο Voltaire πίστευε για τον Euler πως ήταν ένας άνθρωπος που ποτέ του δεν έμαθε φιλοσοφία και για να ικανοποιήσει τον εαυτό του καλλιέργησε τη φήμη του μαθηματικού που σε ελάχιστο χρόνο γέμιζε τις περισσότερες σελίδες με υπολογισμούς από οποιονδήποτε άλλον.

βλασφημία να βάλει άλλον μαθηματικό πάνω από τον Euler. Απέρριψε την προσφορά του βασιλιά κι έφυγε. Το ποτήρι, όμως, ξεχείλισε. Ο Euler άρχισε να σκέφτεται την αποχώρησή του από την Ακαδημία. Μετά από αυτό έγραψε στο γραμματέα της Ακαδημίας της Αγίας Πετρούπολης εκφράζοντας του την επιθυμία του να επιστρέψει.

Στη Ρωσία η πολιτική κατάσταση είχε σταθεροποιηθεί. Η βασιλεία της Ελισάβετ τερματίστηκε το 1762 και στο θρόνο ανέβηκε ο τσάρος Πέτρος ο Γ΄, ο οποίος δολοφονήθηκε σχεδόν αμέσως μετά την άνοδό του στην εξουσία. Τη θέση του πήρε η γυναίκα του, Αικατερίνη η Β΄, η Μεγάλη Αικατερίνη, όπως ονομάστηκε, για το έργο της και την προσφορά της στη χώρα. Ήταν μια έξυπνη και καλλιεργημένη γυναίκα που έδωσε ώθηση στις επιστήμες και έκανε τη Ρωσία μια μεγάλη πολιτική και στρατιωτική ευρωπαϊκή δύναμη. Στις μέρες της άνθησε και ξαναβρήκε την παλιά της αίγλη η Ακαδημία των Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης και έγινε η αρχή για τη δημιουργία των συλλογών τέχνης του μουσείου Hermitage.

Μια από τις πρώτες, λοιπόν, προτεραιότητές της ήταν η Ακαδημία. Έτσι έδωσε εντολή στον πρέσβη της χώρας της στην Πρωσία να κάνει μια προσφορά στον Euler και να δεχτεί όλους τους όρους που πιθανόν έθετε ο επιστήμονας. Έτσι άνοιξε ο δρόμος για την επιστροφή του. Αρχικά ο Φρειδερίκος αρνήθηκε να εγκρίνει την αναχώρησή του. Ο Euler, όμως, επέμενε δίνοντας έμφαση στο γεγονός πως ήταν Ελβετός πολίτης. Κάτω από την πίεση της τσαρίνας και του Euler τελικά δέχτηκε να τον αντικαταστήσει εκφράζοντας την ενόχλησή του με σκληρά ανέκδοτα εναντίον του Euler. Ο επιστήμονας μαζί με την οικογένειά του και αρκετούς βοηθούς του ταξίδεψε για τη Ρωσία, κάνοντας μια μικρή στάση περίπου δύο μηνών στην Πολωνία όπου ο βασιλιάς Stanislas, ένας παλιός εραστής της Αικατερίνης, τον υποδέχτηκε με τιμές και εγκαρδιότητα. Ο Euler επέστρεψε, τελικά, στην Αγία Πετρούπολη ως ήρωας παγκοσμίου φήμης και σεβασμού.

1.4. Η δεύτερη περίοδος στην Αγία Πετρούπολη και τα τελευταία του χρόνια: 1766-1783.

Οι τιμές υποδοχής που του έγιναν ήταν μεγάλες, επισκιάστηκαν, όμως, από την είδηση για το ναυάγιο του πλοίου που μετέφερε τα πράγματά τους. Η αντίδραση της Αικατερίνης ήταν άμεση. Του παρέδωσε ένα πλήρως εξοπλισμένο σπίτι, για να στεγάσει τη δεκαοχταμελή οικογένειά του, και του παραχώρησε μία από τις μαγείρισσές της.

Η καινούρια αρχή, όμως, έκρυβε κι άλλες συμφορές. Ενώ ο Euler εργαζόταν αδιάκοπα μια σοβαρή ασθένεια του προκάλεσε απώλεια όρασης κι από το άλλο του μάτι.[37] Μπορούσε τώρα να δει μόνο πολύ μεγάλους χαρακτήρες. Ευτυχώς, προαισθανόμενος την εξέλιξη της όρασής του, είχε εξασκηθεί στο γράψιμο μαθηματικών τύπων σε μια μεγάλη πλάκα που είχε προσαρμόσει στο γραφείο του. Έτσι όταν πια έχασε την όρασή του έγραφε τους μαθηματικούς τύπους που ήθελε στην πλάκα και υπαγόρευε στους βοηθούς του τις μαθηματικές φράσεις που εξηγούσαν τους τύπους.[38] Οι ρυθμοί της δουλειάς του δεν έπεσαν καθόλου μετά την τύφλωσή του. Θα έλεγε κανείς πως αυξήθηκαν.[39] Σε αυτό τον βοήθησε σημαντικά η τεράστια μνήμη που διέθετε καθώς και η δυνατότητα που είχε να κάνει πολύπλοκους υπολογισμούς με το μυαλό. Ήξερε απ' έξω την Αινειάδα του Βιργίλιου και, παρόλο που σπάνια είχε ξανακοιτάξει το βιβλίο από τότε που ήταν νέος, μπορούσε να απαγγείλει στίχους της. Ο Condorcet αναφέρει το εξής παράδειγμα για να μνημονεύσει την καταπληκτική μνήμη του Euler: δύο μαθητές του Euler που είχαν υπολογίσει το άθροισμα των δεκαεπτά όρων μιας πολύπλοκης συγκλίνουσας σειράς –για μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής- διαφώνησαν μεταξύ τους για μια μονάδα στο πεντηκοστό ψηφίο του αποτελέσματος. Για να αποφασίσει ο Euler έκανε όλο τον υπολογισμό με το μυαλό του. Η απάντησή του ήταν όντως η σωστή.[40] Παρόλα αυτά, θα πρέπει να ήταν δύσκολο για τον Euler να στηρίζεται στους άλλους για να κάνει τους υπολογισμούς του. Σε ένα συγκινητικό του γράμμα προς τον Lagrange, έγραψε:

> *Μου έχουν διαβάσει όλους τους υπολογισμούς σου που αφορούν την εξίσωση* $101 = p^2 - 13q^2$, *και έχω πειστεί εντελώς για την αξία τους. Αλλά καθώς είμαι ανίκανος να διαβάσω ή να γράψω, πρέπει να ομολογήσω πως η φαντασία μου δεν μπόρεσε να παρακολουθήσει ούτε τους συλλογισμούς σου στα βήματα που ακολούθησες ούτε να κρατήσει στη μνήμη τη σημασία των συμβόλων που χρησιμοποίησες. Είναι αλήθεια πως παρόμοιες διερευνήσεις στο παρελθόν μου ήταν*

[37] Το 1771 ο Euler υποβλήθηκε σε μια εγχείρηση ματιού και για λίγες μέρες έβλεπε. Η χαρά του όμως δεν κράτησε πολύ αφού η όρασή του χάθηκε τελικά και έμεινε στο σκοτάδι για τα υπόλοιπα δώδεκα χρόνια της ζωής του.

[38] Εργαζόταν με βοηθούς, πολλοί από τους οποίους ήταν επιστήμονες πρώτης τάξεως όπως, για παράδειγμα, ο γιος του Johann Albrecht.

[39] Τα μισά σχεδόν από το σύνολο των άρθρων του γράφτηκαν την περίοδο αυτή. Λέγεται πως το 1775, π.χ., έγραφε κατά μέσο όρο ένα άρθρο τη βδομάδα.

[40] E. T. Bell, *Οι μαθηματικοί: από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 238.

πολύ ευχάριστες και ξόδευα πολύ χρόνο γι αυτές. Τώρα, όμως, μπορώ να ασχοληθώ μόνο με ότι μπορώ να κρατήσω στο μυαλό μου και συχνά αναγκάζομαι να βασιστώ σε κάποιους φίλους για να κάνουν τους υπολογισμούς που έχω σχεδιάσει…[41]

Στην αλληλογραφία του Lagrange, του d' Alembert και άλλων κορυφαίων μαθηματικών της εποχής εκφράζεται η ανησυχία και η συμπάθειά τους για την αναπηρία του. Ο ίδιος όμως δεν το βάζει κάτω. Ένα λαμπρό παράδειγμα των υπολογισμών του νου του είναι η ανάλυση που έκανε στο πρόβλημα της κίνησης της Σελήνης. Η σεληνιακή θεωρία, που προξενούσε πονοκέφαλο στο Νεύτωνα, αναλύθηκε διεξοδικά από τον Euler την εποχή που μπορούσε να χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς του μόνο το μυαλό του.[42] Ποτέ άλλοτε η καταπληκτική του μνήμη δεν τον βοήθησε τόσο όσο την εποχή που έβλεπε τα Μαθηματικά με τα μάτια του μυαλού του μόνο. Τα υπόλοιπα βιβλία που υπαγόρευσε στους βοηθούς του αυτήν την περίοδο είναι: το έργο του *Dioptrica*, το μνημειώδες τρίτομο έργο για τον Ολοκληρωτικό Λογισμό με τίτλο "*Institutiones calculi integralis"* και η πραγματεία του για την Άλγεβρα με τον τίτλο *"Vollstandige Anleitung zur Algebra"*.

Στα πρώτα χρόνια της δεύτερης περιόδου του Euler στη Ρωσία αναφέρεται και το παρακάτω γεγονός που, εκτός των άλλων, τονίζει την ακλόνητη θρησκευτική του πίστη. Όταν ο Diderot, προσκεκλημένος της Μεγάλης Αικατερίνης, επισκέφτηκε το παλάτι της Ρωσίας προσπάθησε να μυήσει τους αυλικούς της βασίλισσας στον αθεϊσμό. Η Αικατερίνη θέλοντας να σταματήσει τη μετάδοση αθεϊστικών ιδεών στην αυλή της παρακάλεσε τον Euler να τη βοηθήσει, πράγμα εύκολο γιατί τα Μαθηματικά ήταν σαν κινέζικα για το φιλόσοφο Diderot. Ο De Morgan στο κλασσικό βιβλίο του 'Ο σάκος με τα παράδοξα' (1872) αναφέρει:

Ο Diderot πληροφορήθηκε πως ένας σοβαρός μαθηματικός κατείχε μια αλγεβρική απόδειξη της ύπαρξης του Θεού και θα την παρουσίαζε μπροστά σε όλη την αυλή, αν ήθελε να την ακούσει (ο Diderot). Ο φιλόσοφος συγκατένευσε ευχαρίστως… ο Euler προχώρησε προς το

[41] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 13.
[42] Ο Euler ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μια αξιόλογη μέθοδο προσεκτικού υπολογισμού του προβλήματος. Για περισσότερα στο βιβλίο: E. T. Bell, *Οι μαθηματικοί: από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 227-228.

μέρος του και είπε με σοβαρότητα και με απόλυτη σιγουριά: 'Κύριε,

$\frac{a+b^n}{n} = x$, *συνεπώς υπάρχει Θεός. Αποκριθείτε!'*.[43]

Τα γέλια που ακολούθησαν σκέπασαν τη στενάχωρη σιωπή του φιλοσόφου που ζήτησε από την αυτοκράτειρα την άδεια να επιστρέψει στη Γαλλία. Έτσι ο Euler κατάφερε έστω και καθυστερημένα να δώσει τη δική του απάντηση στους Γάλλους φιλοσόφους που υποτιμούσαν το έργο του.

Πριν ακόμα περάσουν έξι χρόνια από την επιστροφή του Euler στη Ρωσία ένα ακόμα δυσάρεστο γεγονός σημάδεψε τη ζωή της οικογένειάς του. Στη μεγάλη πυρκαγιά του 1771 το σπίτι του καθώς και ολόκληρη η επίπλωσή του κάηκαν. Ο ίδιος σώθηκε από θαύμα χάρη στον ηρωισμό του Ελβετού υπηρέτη του Peter Grimm (ή Grimmon) που τον έβγαλε μέσα από τις φλόγες. Κι ενώ η βιβλιοθήκη δεν γλίτωσε την καταστροφή, ευτυχώς τα χειρόγραφά του, χάρη στις έγκυρες ενέργειες του κόμη Orloff, σώθηκαν. Η οικογένεια, οι φίλοι καθώς και οι αφοσιωμένοι μαθητές του στάθηκαν στο πλευρό του για να μπορέσει να συνεχίσει το επιστημονικό του έργο. Η αυτοκράτειρα αποκατέστησε τη ζημιά και η ζωή συνεχίστηκε.

Το 1773, όμως, ένα νέο χτύπημα τον βρήκε. Τη χρονιά που ο Euler έγινε εξήντα έξι χρονών, πέθανε η γυναίκα του, Κατερίνα. Τρία χρόνια αργότερα παντρεύτηκε την Salome Abigail Gsell, ετεροθαλή αδερφή της γυναίκας του, κι έζησε μαζί της μέχρι το θάνατό του.

Ο Euler πέθανε στις 18 Σεπτεμβρίου 1783 από εγκεφαλική αιμορραγία. Μέχρι να αφήσει και την τελευταία του πνοή κυριολεκτικά εργαζόταν. Εκείνη την ημέρα έκανε παρέα με τα εγγόνια του και μετά ασχολήθηκε με ερωτήματα που σχετίζονταν με την πτήση των μπαλονιών.[44] Το απόγευμα της ίδιας μέρας δούλεψε με τους βοηθούς του πάνω στην τροχιά του πρόσφατα ανακαλυφθέντος πλανήτη Ουρανού.[45] Η εσωτερική αιμορραγία που υπέστη προκάλεσε τον άμεσο θάνατό του. Αφού τον πένθησαν η οικογένειά του, οι συνάδελφοί του και ολόκληρη η επιστημονική κοινότητα οδηγήθηκε στην τελευταία του κατοικία. Ένας μεγάλος επιστήμονας θα

---

[43] Η πηγή υπάρχει στο βιβλίο του E. T. Bell, *Οι μαθηματικοί: από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ 234.

[44] Το θέμα αυτό ήταν επίκαιρο εξαιτίας των πτήσεων που είχαν επιχειρήσει εκείνη τη χρονιά οι αδερφοί Montgolfier πάνω από το Παρίσι με μπαλόνια ζεστού αέρα. Η πρώτη πτήση με ζώα πραγματοποιήθηκε μια μέρα μετά το θάνατο του Euler, τα νέα όμως, των προηγούμενων πτήσεων είχαν φτάσει στα αυτιά του επιστήμονα.

[45] Στις δεκαετίες που ακολούθησαν η τροχιά του πλανήτη αναλύθηκε από τους αστρονόμους υπό το φως των εξισώσεων του Euler. Η έρευνα οδήγησε στην ανακάλυψη του μακρινού πλανήτη Ποσειδώνα.

έμενε για πάντα στην ιστορία. Τα λόγια του Marquis de Condorcet, στην υμνολογία του, δείχνουν πόσο βαθύ είναι το αποτύπωμά του: όποιος στο μέλλον ασχοληθεί με τα Μαθηματικά '*θα βρει οδηγό και συμπαραστάτη του τον Euler… όλοι οι μαθηματικοί είναι μαθητές του*'. [46]

1.5. Λίγα λόγια για το έργο του.

Τα χρόνια που προηγήθηκαν της μαθηματικής σταδιοδρομίας του Euler η μαθηματική και φυσική επιστήμη είχε λύσει έναν τεράστιο αριθμό μεμονωμένων προβλημάτων με στόχο την ενοποίηση. Όμως δεν είχε γίνει ακόμα μια συστηματική επιχείρηση ενοποίησης όλων των Μαθηματικών, καθαρών και εφαρμοσμένων. Η Αναλυτική Γεωμετρία, που εγκαινιάστηκε το 1637, χρησιμοποιούνταν ήδη περίπου εννιά δεκαετίες, ο Λογισμός περίπου πέντε και ο Νευτώνειος νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας ήταν γνωστός τα τελευταία σαράντα χρόνια. Οι ισχυρές αναλυτικές μέθοδοι του Descartes, του Newton και του Leibniz που συνδέονταν με τη Μηχανική και τη Γεωμετρία δεν είχαν γίνει ακόμα πεδίο εξαντλητικής μελέτης και έρευνας. Κι ενώ η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός ήταν ακόμα στην παιδική τους ηλικία, ο Euler κατανόησε γρήγορα τις μεθόδους τους και έκανε αλλαγές, ενίοτε δε και τελειοποιήσεις, που εφάρμοσε σε πολλά πεδία των θετικών επιστημών. Επιπλέον συστηματοποίησε και ενοποίησε διασκορπισμένα μερικά αποτελέσματα και απομονωμένα θεωρήματα δίνοντας έτσι πολύτιμες ανακαλύψεις. Χαρακτηριστικό είναι ότι και σήμερα ακόμα ένα μεγάλο μέρος της ύλης των Μαθηματικών που διδάσκεται στο σχολείο βρίσκεται ουσιαστικά στο επίπεδο της επεξεργασίας του Euler. Η παρουσίαση των κωνικών τομών, για παράδειγμα, και των τετραγωνικών επιφανειών στον χώρο των τριών διαστάσεων από την άποψη της γενικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι δική του.

Ο Euler δημιούργησε, κυριολεκτικά, νέους κλάδους των Μαθηματικών όπως η συνδυαστική τοπολογία (combinatorial topology), η θεωρία γραφημάτων (graph theory), ο λογισμός των μεταβολών (calculus of variations) και η Τοπολογία (topology)[47]. Ήταν ο ιδρυτής της σύγχρονης αποτύπωσης του διαφορικού και

[46] Euler, *Opera Omnia*, ser. 3, vol. 12, p. 308.

[47] Ένα από τα προβλήματα που τον οδήγησαν στην μελέτη και κατά συνέπεια τη δημιουργία της τοπολογίας, ως ιδιαίτερου κλάδου των μαθηματικών, ήταν το ακόλουθο ερώτημα: ο ποταμός Pregel διασχίζει το Konigsberg, πόλη της Γερμανίας και ιδιαίτερη πατρίδα του Kant, δημιουργώντας στο πέρασμά του ένα νησί. Το νησί συνδέεται με τη στεριά με πέντε γέφυρες. Άλλες δύο γέφυρες ενώνουν απλώς

ολοκληρωτικού λογισμού (*modern differential and integral calculus*) και στα βιβλία του παρουσίασε την Άλγεβρα και το λογισμό με τις εφαρμογές τους σε ολόκληρες γενιές σπουδαστών. Χωρίς υπερβολή θα μπορούσαμε να πούμε πως πέτυχε στην ανάλυση αυτό που ο Ευκλείδης πέτυχε στη Γεωμετρία.[48] Επιπλέον έβαλε τα θεμέλια της θεωρίας των αριθμών ως ιδιαίτερου κλάδου των Μαθηματικών, μια διαδικασία που ολοκληρώθηκε από τον Gauss με την έκδοση του μνημειώδους έργου του "*Disquisitiones Arithmeticae*".

Ακολουθεί μια λίστα με τα αντικείμενα που απασχόλησαν τον Euler, στα περισσότερα από τα οποία οι μελέτες του ήταν πρωτοπόρες:

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός

Λογαριθμικές, εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Διαφορικές εξισώσεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις

Ελλειπτικές συναρτήσεις και ολοκληρώματα

Υπεργεωμετρικά ολοκληρώματα

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Θεωρία Αριθμών

Άλγεβρα

Συνεχή κλάσματα

Ζήτα γινόμενα

Άπειρες σειρές και γινόμενα

Αποκλίνουσες σειρές

Μηχανική σωματιδίων

Μηχανική στερεών σωμάτων

Λογισμός μεταβολών

Οπτική (θεωρία και εφαρμογές)

Υδροστατική

Υδροδυναμική

Αστρονομία

Κίνηση σελήνης και πλανητών

Τοπολογία

Θεωρία γραφημάτων

τις όχθες του ποταμού. Είναι δυνατόν να περάσουμε διαδοχικά από όλες τις γέφυρες χωρίς να περάσουμε καμιά από αυτές δεύτερη φορά;

[48] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p. 1.

Παρακάτω δεν θα κάνουμε μια αναλυτική παρουσίαση του έργου του. Θα σταθούμε μόνο σε ορισμένα σημεία με σκοπό να φωτίσουμε κάποιους σταθμούς που μπορεί να τον σημάδεψαν και ως άνθρωπο και ως μαθηματικό. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Την πρώτη περίοδο της παραμονής του στην Αγία Πετρούπολη, το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών του Euler επικεντρώθηκαν σε τρία σημεία: στη θεωρία των αριθμών, στον απειροστικό λογισμό και στους κλάδους που αναδείχτηκαν από αυτόν - τις διαφορικές εξισώσεις και το λογισμό μεταβολών - και τέλος στη μηχανική. Ο Euler έβλεπε τα τρία αυτά πεδία αλληλοσυνδεόμενα. Η μελέτη της θεωρίας των αριθμών ήταν ζωτικής σημασίας για τη θεμελίωση του λογισμού και των ειδικών συναρτήσεων, και οι διαφορικές εξισώσεις ήταν σημαντικές για τη Μηχανική.

Μελετώντας τις θεωρίες του Pierre Fermat, ερευνώντας τις διοφαντικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού και διατυπώνοντας τις βασικές αρχές του πεδίου, σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από ότι οι προηγούμενοι μαθηματικοί, ουσιαστικά προετοίμασε το δρόμο για τον Carl Friedrich Gauss.

Στην ενασχόλησή του με τα παραπάνω σημαντικό ρόλο έπαιξε ο φιλικός δεσμός που ανέπτυξε με τον Christian Goldbach. Ο τελευταίος υπήρξε καταλύτης για τον Euler γιατί όπως φαίνεται ήταν αυτός που τον προέτρεψε να εστιάσει στη θεωρία των αριθμών. Τα Μαθηματικά για τον Goldbach ήταν χόμπι και καθώς ήταν παθιασμένος, μετέφερε στον Euler ερωτήματα και πληροφορίες που συγκέντρωνε στα ταξίδια του. Οι περισσότερες από τις επιστολές της αλληλογραφίας τους αφορούσαν ζητήματα της θεωρίας των αριθμών και του λογισμού. Το πρώτο γράμμα που έγραψε ο Goldbach στον Euler, το Δεκέμβρη του 1729, περιείχε ένα υστερόγραφο στο οποίο ρωτούσε το μαθηματικό εάν γνώριζε τις προτάσεις του Fermat σύμφωνα με τις οποίες όλοι οι αριθμοί του τύπου $2^{2^n}+1$ ήταν πρώτοι. Στην αρχή ο Euler δεν έδειξε ενδιαφέρον αλλά στην πορεία μελέτησε τη θεωρία των αριθμών και απέρριψε τους ισχυρισμούς του Fermat για τους πρώτους αριθμούς. Τελικά ο Euler προχώρησε πέρα από το Fermat και ανακάλυψε προς το τέλος της ζωής του το νόμο της αμοιβαιότητας[49] δευτέρου βαθμού

[49] «Νόμος αμοιβαιότητας δευτέρου βαθμού» (Law of quadratic reciprocity). [Ο νόμος αυτός χρησιμοποιεί την ακόλουθη έννοια των «δευτεροβάθμιων υπολοίπων» (quadratic residues). Αν δοθέντων δύο ακεραίων p και q υπάρχει ακέραιος x τέτοιος ώστε ο x^2-q να διαιρείται ακριβώς με τον p, τότε το q καλείται δευτεροβάθμιο υπόλοιπο του p]. Αν p και q είναι περιττοί πρώτοι αριθμοί διάφοροι αλλήλων τότε οι εξισώσεις $x^2 \equiv q \pmod{p}$, $x^2 \equiv p \pmod{q}$, ή και οι δύο έχουν λύσεις, ή

για τον οποίο δεν παρείχε καμιά απόδειξη. Στο μέλλον θα αποδεικνυόταν από τον Gauss.

Την εποχή που ο Euler μελετούσε τη θεωρία των αριθμών, ο Johann Bernoulli του έστειλε ένα γράμμα, τον Ιανουάριο του 1728, σχετικά με την αξία της συνάρτησης $y=(-1)^x$. Αφού μελέτησε τη διαμάχη μεταξύ του Leibniz και του Bernoulli, έτσι όπως διαγράφεται στην αλληλογραφία τους κατά τα έτη 1712-1713 και εξασκήθηκε σε αλγεβρικές και αριθμητικές μεθόδους, βρήκε ότι $\log(-1)=\pi i$. Αυτή η ανακάλυψη αναίρεσε τους ισχυρισμούς και του Leibniz, που είχε υποστηρίξει σε ένα γράμμα του το 1712 ότι ο λογάριθμος $\log(-1)$ δεν υπάρχει αλλά και του Bernoulli που υποστήριζε ότι $\log(-a)=\log a$. Ο Euler προχώρησε στη μελέτη των λογαρίθμων ανακαλύπτοντας, γύρω στα 1746, ότι $\log i=(2k+\frac{1}{2})\pi i$. Επιπλέον ξεκαθάρισε ότι οι λογάριθμοι όλων των αρνητικών πραγματικών αριθμών και των φανταστικών αριθμών είναι φανταστικοί.

Την ίδια περίοδο ο Euler έλυσε ένα από τα διασημότερα ανοιχτά προβλήματα όλων των εποχών, το επονομαζόμενο **'Basel problem'**. Το πρόβλημα απαιτούσε να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,$$

Η λύση του απασχόλησε όλους τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής, ο Euler όμως ανακάλυψε ότι το άθροισμα είναι

$$\frac{\pi^2}{6}$$

και ακόμα ότι

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Η λύση αυτού του προβλήματος τον καθιέρωσε ως έναν από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς της εποχής του. Αργότερα απέδειξε ότι:

$$1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2\kappa}$$

και οι δύο δεν έχουν λύσεις, εκτός αν οι p και q είναι της μορφής $4n+3$, οπότε η μία εξίσωση έχει λύση ενώ η άλλη δεν έχει.

όπου B_{2K} είναι λογικοί αριθμοί, οι αριθμοί Bernoulli όπως ονομάστηκαν από τον Euler εξαιτίας του γεγονότος ότι τους εισήγαγε αρχικά στο μαθηματικό στίβο ο Bernoulli με το έργο του Ars Conjectandi. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός της σειράς

$$1+\frac{1}{2^{2k+1}}+\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{4^{2k+1}}+...$$

παραμένει ανοιχτός ακόμα και σήμερα.

Ο Euler αγαπούσε πολύ να ασχολείται με προβλήματα που αφορούσαν σε ακριβείς αριθμητικούς υπολογισμούς. Από μια τέτοια ενασχόληση θα πρέπει να εμπνεύστηκε την ανακάλυψη του αθροιστικού τύπου με το όνομα Euler-Maclaurin, το 1734. Τέσσερα χρόνια μετά κατέληξε στα ίδια συμπεράσματα και ο Maclaurin. Παρόλα αυτά ο Euler δεν διεκδίκησε την πρωτιά της ανακάλυψης. Το μόνο που δήλωσε ήταν πως ήδη από το 1734 ο τύπος είχε ανακοινωθεί δημόσια μπροστά στα μέλη της Ακαδημίας. Τελικά, ο τύπος που ανακάλυψε ο Euler πήρε τα ονόματα και των δύο μαθηματικών, χάρη στην πραότητα και την ευγένεια του Euler. Ο μαθηματικός αυτός τύπος (summation formula) ήταν ο αγαπημένος του. Τον χρησιμοποίησε σε δεκάδες προβλήματα και μεταβλητές. Ο τύπος ήταν ο εξής:

$$f(0)+f(1)+...+f(m)=\int_0^m f(x)dx+\frac{1}{2}(f(0)+f(m))$$
$$+\sum_{k\geq 1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(m)-f^{(2k-1)}(0)\right).$$

Η αριστερή πλευρά του τύπου είναι μια αποκλίνουσα σειρά και γι αυτό θα πρέπει να τη δούμε σαν μια ασυμπτωτική σειρά. Αυτό, όμως, απαιτεί ιδιαίτερες ικανότητες για να αποφασίσει κανείς μέχρι πού θα πρέπει να πάει το άθροισμα αυτής της πλευράς. Ο Euler, φυσικά, ήταν αριστοτέχνης σε αυτό.

Την περίοδο της συχνής επαφής του Euler με τον Johann Bernoulli, η αγάπη για την ανακάλυψη και η φιλομάθεια του πρώτου θα πρέπει να ήταν ισχυρά κίνητρα για να τον οδηγήσουν αργότερα στα βήματα του καθηγητή του. Εκείνη την περίοδο ο Johann μαζί με τον αδερφό του Jakob μελετούσαν τη δουλειά του Leibniz για την ανάλυση και είχαν συμβάλει με την έρευνά τους στη λύση προβλημάτων που αφορούσαν τις ιδιότητες των καμπύλων (*properties of curves*), οι οποίες με τη σειρά τους υπήρξαν η λύση σε πολλά άλυτα προβλήματα όπως η λύση του ισόχρονου (*isochrone*)[50]. Ο Euler, έχοντας στο μυαλό του αυτές τις μελέτες προχώρησε στη μορφοποίηση αυτών των

[50] Δηλαδή της καμπύλης κατά μήκος της οποίας ένα σώμα πέφτει με σταθερή ταχύτητα.

ερωτήσεων και παρήγαγε τις εξισώσεις Euler-Langrange για την ανάλυση των μεταβολών (*calculus of variation*).

Αργότερα, όταν πια βρισκόταν στο Βερολίνο, ασχολήθηκε με τα περίφημα άπειρα γινόμενα του ημίτονου x (*infinite product expansion for x*), τα οποία του επέτρεψαν να ισχυροποιήσει τα αποτελέσματα του σχετικά με την τιμή Ζήτα (*zeta value*). Επιπλέον, αυτήν την περίοδο, ανακάλυψε τη σχέση που υπήρχε μεταξύ της εξίσωσης Pell $x^2 - Ny^2 = 1$ και του συνεχούς κλάσματος για $\sqrt{N}$.

Στο πεδίο της ανάλυσης μελέτησε τις σειρές και αναγνώρισε πως, εκτός από την περίπτωση που μια άπειρη σειρά συγκλίνει, δεν είναι ασφαλής η χρήση τους. Από μια ατέρμονη σειρά π.χ. έχουμε:

$$\ell(x-1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots$$

αν τώρα θέσουμε $x = \frac{1}{2}$, καταλήγουμε στο ατόπημα:

$$2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Η μελέτη των σειρών και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε αποτέλεσαν αφορμή ως ένα βαθμό για την ανάπτυξη αυτού του κλάδου των Μαθηματικών.

Μέσα σε αυτά τα στενά πλαίσια που θέσαμε, νομίζουμε πως θα είχε ενδιαφέρον να κάνουμε μια μικρή αναφορά και στο συμβολισμό που χρησιμοποίησε ο Euler, ο οποίος θεωρείται ο πιο πετυχημένος εφευρέτης συμβόλων όλων των εποχών. Το 1727 κι ενώ βρισκόταν στη Ρωσία ο Euler μελέτησε την εκτόξευση βλημάτων από κανόνια. Στη μελέτη που έγραψε για να περιγράψει τα αποτελέσματά του χρησιμοποίησε πάνω από 12 φορές το γράμμα e για να συμβολίσει τη βάση του συστήματος φυσικών λογαρίθμων. Ο Euler χρησιμοποίησε πάλι το γράμμα e για αυτόν τον αριθμό του οποίου ο υπερβολικός λογάριθμος ισούται με τη μονάδα, σε ένα γράμμα του προς τον Goldbach, το 1731. Αργότερα το χρησιμοποίησε τυπωμένο για πρώτη φορά στο έργο του *Mechanica*. Τελικά το γράμμα e, που προέρχεται μάλλον από το πρώτο γράμμα της λέξης *exponential*, καθιερώθηκε σύντομα.

Στον Euler επίσης οφείλεται και η καθιέρωση του γράμματος π για το λόγο του μήκους προς τη διάμετρο ενός κύκλου. Παρά το γεγονός ότι το γράμμα π εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο έργο Νέα Μαθηματικά του William Jones το 1706, φαίνεται να απέκτησε τη φήμη του αργότερα, γύρω στα 1737, όταν το χρησιμοποίησε ο Euler.

Άλλο ένα σύμβολο που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Euler ήταν το i, αν και αυτό έγινε προς το τέλος της ζωής του.

Σύμβολα, ορολογία και ιδέες του Euler συναντάμε και στη γεωμετρία, την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Από τον Euler προέρχονται τα γράμματα α, β, γ για τις πλευρές ενός τριγώνου καθώς και τα γράμματα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ για τις απέναντι γωνίες. Για την ακτίνα του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου και την ημιπερίμετρο του τριγώνου χρησιμοποίησε αντίστοιχα τα γράμματα r, R και s. Ενώ στον Euler οφείλουμε και το σύμβολο ℓx για το λογάριθμο του x, το $\sum$ για το άθροισμα και $f(x)$ για μια συνάρτηση του x.

Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρουμε τις ενέργειες που έχουν γίνει ως τώρα για την συγκέντρωση αλλά και την έκδοση ολόκληρου του έργου του που πήρε το όνομα **Opera Omnia**. Η ιστορία της συγκέντρωσης του έργου του, το οποίο είναι τεράστιο και ανεξερεύνητο ακόμα ως ένα βαθμό, ξεκινάει από το 1907. Εκείνη την εποχή η Ελβετική Ακαδημία Φυσικών Επιστημών ανέθεσε σε μια επιτροπή τη συλλογή και έκδοση όλων των γραπτών του μεγάλου μαθηματικού. Αυτό απαιτούσε όχι μόνο μια γενναία χρηματοδότηση αλλά και τη συμβολή, κυριολεκτικά, δεκάδων διακεκριμένων μαθηματικών από ολόκληρο τον κόσμο. Η σταδιακή έκδοση των έργων ξεκίνησε το 1911 αλλά διακόπηκε χωρίς να έχει ολοκληρωθεί. Οι εργασίες ξανάρχισαν λίγα χρόνια πριν και σήμερα ουσιαστικά έχουν τελειώσει με εξαίρεση λίγους τόμους από τη σειρά IV A και κάποιους από τη σειρά IV B, οι οποίοι ετοιμάζονται και σύντομα πρόκειται να εκδοθούν. Έως τώρα έχουν εκδοθεί 70 τόμοι, για πολλούς από τους οποίους έχουν γραφτεί σημαντικές εισαγωγές από διάσημους σύγχρονούς μας μαθηματικούς. Κάθε τόμος έχει από 300 έως 600 σελίδες, πράγμα που σημαίνει πως ολόκληρο το έργο αποτελείται από περισσότερες από 30.000 τυπωμένες σελίδες. Τα άπαντα χωρίζονται σε τέσσερις σειρές και ουσιαστικά αποτελούν την πιο γιγάντια προσπάθεια που έγινε ποτέ για τη συλλογή και έκδοση έργου. Η πρώτη σειρά, *series prima: Opera mathematica*, περιέχει μελέτες σε ότι σήμερα ονομάζουμε *'pure mathematics'*. Στη δεύτερη σειρά, *Series secunda: Opera mechanica et astronomica*, οι μελέτες αφορούν στη μηχανική και την αστρονομία. Η Τρίτη σειρά, *Series tertia*: *Opera physica, Miscellanea*, είναι αφιερωμένη στη φυσική. Η τέταρτη και τελευταία σειρά είναι χωρισμένη σε δύο τμήματα. Στο πρώτο, *series quarta, A: Commercium epistolicum*, περιλαμβάνονται οι εννέα τόμοι της αλληλογραφίας του, ενώ στο δεύτερο,

series quarta, B:Manuscripta, θα συμπεριληφθούν επτά τόμοι με αδημοσίευτα χειρόγραφα, σημειώσεις, ημερολόγια, κ.α.

1.6. Η προσωπικότητα του Euler.

Ο Euler θεωρείται ο πιο παραγωγικός μαθηματικός στην ιστορία των Μαθηματικών. Ο Γάλλος μαθηματικός Francois Arago τον χαρακτήρισε ως την 'ενσάρκωση της Ανάλυσης'. Ο τελευταίος έλεγε πως ο Euler μπορούσε να υπολογίζει χωρίς εμφανή προσπάθεια, 'όπως ακριβώς αναπνέουν οι άνθρωποι και όπως οι αετοί κρατιούνται ψηλά στον αέρα'.[51] Λένε πως έγραφε τις εργασίες του με την ίδια ευκολία που γράφει κανείς ένα γράμμα σε ένα φίλο του. Είχε καταπληκτική μνήμη και μπορούσε να κάνει περίπλοκους υπολογισμούς με το μυαλό.

Οι μελετητές που ασχολήθηκαν με τη ζωή και το έργο του συμφωνούν ότι ο Euler υπήρξε σπουδαίος αλγοριθμιστής, φορμαλιστής και καθολικός μαθηματικός.[52] Ως αλγοριθμιστής μπορούσε να βρίσκει τις ρίζες αριθμών επινοώντας πρακτικές μεθόδους ή να λύνει προβλήματα με έξυπνα τεχνάσματα, μια πρακτική που δεν διδάσκεται συστηματικά αλλά έχει κυρίως να κάνει με το φυσικό ταλέντο του επιστήμονα. Και παρότι σήμερα ένας αλγοριθμιστής περιφρονείται, θα πρέπει να αναλογιστούμε το δρόμο που άνοιξε ο Euler συνδέοντας φαινομενικά ασύνδετες φόρμουλες χάρη στην σχεδόν υπερφυσική ενόρασή του.

Ένας αλγοριθμιστής είναι ένας φορμαλιστής που αγαπά τις όμορφες φόρμουλες αυτές καθ' αυτές. Πριν τον Euler οι άπειρες σειρές και τα παράγωγά τους υπήρχαν μόνο σε απομονωμένες δουλειές του Leibniz, του Gregory, του Wallis κα. Ο Euler ήταν ο πρώτος που εργάστηκε συστηματικά πάνω σε αυτές και αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον. Τα τελευταία χρόνια ο τύπος των αποκλινουσών σειρών είναι πανίσχυρος και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ πεδίο ενδιαφερόντων. Είναι πραγματικά εντυπωσιακό το εύρος των ενδιαφερόντων του Euler. Εργαζόταν πάνω σε οτιδήποτε είχε κάποια σχέση με τα Μαθηματικά. Δεν φαίνεται να είχε κάποια προτίμηση για ένα συγκεκριμένο πεδίο. Όλοι οι τομείς των Μαθηματικών ήταν για αυτόν αντικείμενο μελέτης, γεγονός αξιοσημείωτο αν αναλογιστούμε ότι θα ήταν δύσκολο για κάποιον να έχει ακόμα και μια συνοπτική εικόνα όλων των Μαθηματικών. Ο Euler ήταν ο πρώτος και ίσως ο μεγαλύτερος ανάμεσα στους καθολικούς μαθηματικούς.

---

[51] Carl B. Boyer – Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των μαθηματικών*, σελ. 492-493.
[52] Πιθανότατα μόνο ο Jakobi και ο Ramanujan μπορούν να συγκριθούν με τον Euler ως φορμαλιστές.

Μερικά από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα του Euler είναι τα επόμενα:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\log(-1) = i\pi + 2ki\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}) \qquad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}$$

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + ... + \frac{1}{n^{2k}} + ... = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

$$\frac{\pi}{\sin sp} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n-s} \right)$$

$$\pi \cot s\pi = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n-s} \right)$$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - ...$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - ...$$

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} ...$$

$$\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - ...$$

$$\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - ...$$

Το πιο χαρακτηριστικό όμως γνώρισμα της δουλειάς του ήταν η διαύγεια των γραπτών του. Διαβάζοντας κανείς τα γραπτά του μπορεί να ακολουθήσει βήμα προς βήμα τους συλλογισμούς του με ευκολία. Κι αν κάποτε υπήρχε ανάγκη να διευκρινιστούν κάποια σημεία δεν δίσταζε να ξαναγράψει για το ίδιο θέμα αναλυτικότερα. Δεν φοβόταν μήπως χάσει την υπόληψή του. Ταυτόχρονα όχι μόνο δεν έδειχνε φθόνο για τις εργασίες των άλλων αλλά απεναντίας χαιρόταν με την πρόοδό τους. Η απόφασή του να μοιραστεί τον αθροιστικό τύπο (summation formula) με τον Maclaurin, οι συμβουλές που έδωσε στον Fagnano όταν ξεκίνησε την εργασία του πάνω στα αλγεβρικά ολοκληρώματα (algebraic integrals) καθώς και ο θαυμασμός που εκδήλωσε για τον Lagrange, για την εργασία του στο λογισμό μεταβολών, είναι όλα παραδείγματα μιας αγνής προσωπικότητας.

Είναι αδύνατο να μελετήσει κανείς τον Euler χωρίς να μαγευτεί. Υπήρξε για τα Μαθηματικά ότι ο Σαίξπηρ για τη λογοτεχνία και ότι ο Μότσαρτ για τη μουσική: καθολικός και μοναδικός.[53]

[53] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, p 15.

Κεφάλαιο 2ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγή

Ο Harold M. Edwards στο άρθρο του *"Read the masters!"*[54] μας προτρέπει να διαβάσουμε τους μεγάλους μαθηματικούς από τα ίδια τα κείμενά τους. Ενώ γενικά όλοι θα συμφωνήσουμε ότι αυτή είναι μια καλή συμβουλή, υπάρχει το πρόβλημα της κατανόησης των κειμένων τους. Αυτά τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούν δύσκολη γλώσσα ακόμα και για κάποιον με αρκετές μαθηματικές γνώσεις και δεν έχουν παιδαγωγική προσέγγιση. Άλλωστε οι περισσότεροι μεγάλοι μαθηματικοί συνέβαλλαν στην ανάπτυξη των Μαθηματικών μέσα από τις ανακαλύψεις τους και όχι ως συγγραφείς και παιδαγωγοί. Το *Principia* του μεγάλου Newton, αν και μοναδικής σημασίας στην εξέλιξη των θετικών επιστημών, σε καμία περίπτωση δε μπορεί να αποτελέσει αφετηρία μάθησης για τους σπουδαστές. Το ίδιο ισχύει και για το έργο "*Disquisitiones Arithmeticae*" του Gauss και για τα περισσότερα γραπτά των μεγάλων μαθηματικών.

Σε καμιά περίπτωση όμως δε συμβαίνει κάτι τέτοιο όταν διαβάζουμε τον Euler. Ο Euler ξεχωρίζει ανάμεσα στους μεγάλους μαθηματικούς για τη σαφήνεια των γραπτών του, για την διάθεσή του να μας δείξει το πώς οδηγήθηκε στις ανακαλύψεις του και για την ανοιχτή και ειλικρινή παραδοχή της αποτυχίας του όταν δεν κατόρθωνε να αποδείξει προτάσεις ή θεωρήματα για τα οποία είχε αρκετές ενδείξεις για την ισχύ τους. Ο George Pólya εκφράζει τα παραπάνω ως εξής:

> «*Ο Euler, ένας μεγάλος μαθηματικός του επαγωγικού συλλογισμού, έκανε σημαντικές ανακαλύψεις (στις άπειρες σειρές, στη θεωρία των αριθμών και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών) με τη μέθοδο της επαγωγής, δηλαδή με την παρατήρηση, την τολμηρή εικασία και πανέξυπνη επαλήθευση. Υπό αυτή τη θεώρηση ο Euler δεν είναι μοναδικός. Και άλλοι μαθηματικοί, γνωστοί και άγνωστοι, χρησιμοποιούν την επαγωγή εκτεταμένα στις εργασίες τους.*
>
> *Όμως ο Euler φαίνεται σε εμένα σχεδόν μοναδικός για ένα λόγο: καταβάλλει μεγάλη προσπάθεια ώστε να παρουσιάσει τη σχετική επαγωγική ένδειξη*

[54] H. M. Edwards, Read the masters!. In L. A. Steen (Ed.) *Mathematics Tomorrow*, p. 105-110.

προσεκτικά, με λεπτομέρεια και με σωστή σειρά. Την παρουσιάζει πειστικά αλλά και με ειλικρίνεια, ως ένας πραγματικός επιστήμονας. Η παρουσίαση του είναι "η ειλικρινής έκθεση των ιδεών οι οποίες τον οδήγησαν σε αυτές τις ανακαλύψεις" και έχει μια ξεχωριστή χάρη. Φυσικά, όπως και κάθε άλλος συγγραφέας, προσπαθεί να εντυπωσιάσει τους αναγνώστες του, αλλά, ως ένας πολύ καλός συγγραφέας, προσπαθεί να εντυπωσιάσει τους αναγνώστες του μόνο με πράγματα τα οποία έχουν πραγματικά εντυπωσιάσει και τον ίδιο.[55]»

Ακόμα και ανάμεσα στους σύγχρονούς του, ο Euler ήταν γνωστός ως κάποιος του οποίου τα έργα είχαν ιδιαίτερη σαφήνεια και κομψότητα. Ο Nicholas Fuss (που ήταν ένας από τους άμεσους μαθητές του Euler, και ένας από τους οκτώ που έγιναν εξέχοντα μέλη της Ρωσικής Ακαδημίας των Επιστημών στην Αγία Πετρούπολη)[56], στον επικήδειο του Euler έγραψε για την σαφήνεια των ιδεών του, για την ακρίβεια των προτάσεων του και για τη σειρά με την οποία αυτές είχαν παρατεθεί. Ο γιος του Nicholas Fuss, ο Paul-Heinrich Fuss, στην εισαγωγή της συλλογής των γραμμάτων που εκδόθηκαν το 1843, έγραψε για την εντυπωσιακά απλή και σαφή έκθεση της εμβριθούς έρευνας και της επιδέξιας επιλογής παραδειγμάτων.

Ακολουθώντας λοιπόν και εμείς τη συμβουλή του Edwards, θέτουμε ως αφετηρία στη μελέτη μας το εξαιρετικό βιβλίο "*Introduction to Analysis of the Infinite*" του Euler, στο οποίο ο Euler ακόμα και από την πρώτη πρόταση του πρόλογου δείχνει την προσπάθεια να προσεγγίσει τον αναγνώστη και να βάλει από τη αρχή τα πράγματα σε σωστή σειρά. Αναφερόμενος στο βιβλίο, ο ιστορικός Carl Boyer έγραψε: "*ήταν αυτή η δουλειά που έκανε την ιδέα των συναρτήσεων βασική στα Μαθηματικά*"[57]. Πριν τον Euler, η ανάλυση ήταν για τις ιδιότητες των καμπύλων ενώ μετά απ' αυτόν ήταν για τις ιδιότητες των συναρτήσεων. Η αλλαγή ήταν ριζική και άλλαξε για πάντα το πεδίο των Μαθηματικών. Το βιβλίο *Introductio* του Euler αποδείχτηκε εξαιρετικά σημαντικό επηρεάζοντας αργότερα τα Μαθηματικά στο περιεχόμενο, το στυλ και στο σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων. Ο Boyer αναγνώριζε αυτή την επιρροή όταν έγραψε ότι το βιβλίο '*συνεισέφερε στη στοιχειώδη Ανάλυση τόσο όσο τα στοιχεία του Ευκλείδη στη Γεωμετρία*' υψηλός έπαινος πραγματικά. Ο Ernest William Hobson (1856-1933) έκανε το δικό του επαινετικό σχόλιο παρατηρώντας:

---

[55] G. Pólya, *Mathematics & Plausible Reasoning, Induction and Analogy in Mathematics*, vol. 1.
[56] The Russian Members of the American Academy of Arts and Sciences, Eufrosina Dvoichenko-Markov, Proceedings of the American Philosophical Society, Vol. 109, No. 1, Feb. 18, 1965, pp. 53-56
[57] Dunham William, *EULER The Master of Us All*, p 17.

"Σπάνια άλλο βιβλίο στην ιστορία των μαθηματικών επιστημών δίνει στον αναγνώστη τόσο έντονη την εντύπωση της ιδιοφυίας του συγγραφέα όσο το βιβλίο Introductio"[58].

Ο Euler ξεκινάει με την παρατήρηση ότι πολλοί σπουδαστές έχουν δυσκολία στην κατανόηση της Ανάλυσης, και ιδιαίτερα της έννοιας του απείρου. Εντοπίζει το πρόβλημα στη μη επαρκή κατανόηση ορισμένων θεμάτων από την Άλγεβρα. Δηλώνει ότι έχει καταβάλει κάθε προσπάθεια να αναδείξει επαρκώς αυτά τα θέματα, τα οποία είναι απολύτως απαραίτητα για την κατανόηση της Ανάλυσης, ιδιαίτερα όσον αφορά τα θέματα που σχετίζονται με την εισαγωγή της έννοιας του άπειρου. Στο βιβλίο του αυτό αντιμετωπίζει πολλά θέματα μέσω της Άλγεβρας, ενώ συνήθως αυτά επιλύονταν με τη βοήθεια της Ανάλυσης. Με αυτόν τον τρόπο ο συσχετισμός μεταξύ Άλγεβρας και Ανάλυσης γίνεται ξεκάθαρος.

Ειδικότερα, αναφέρει:

> *Έχοντας εξηγήσει όσα αφορούν την τάξη μιας καμπύλης, επανέρχομαι για να αποκαλύψω τις γενικές ιδιότητες όλων των καμπύλων…Παρόλο που όλα αυτά στις μέρες μας επιτυγχάνονται μέσω του διαφορικού λογισμού, εδώ τα έχω παρουσιάσει χρησιμοποιώντας μόνο Άλγεβρα, ώστε να γίνει ευκολότερη η μετάβαση από την Ανάλυση του πεπερασμένου στην Ανάλυση του Άπειρου….Εφόσον υπάρχουν θέματα από τη Γεωμετρία τα οποία προσφέρονται για την εκμάθηση της Ανάλυσης, συμπεριέλαβα ένα παράρτημα στο οποίο παρουσιάζω, χρησιμοποιώντας λογισμό, τη θεωρία των στερεών και των επιφανειών των στερεών.*[59]

Το βιβλίο περιλάμβανε τα απαραίτητα Μαθηματικά που απαιτούνταν ώστε ύστερα να μπορεί να συνεχίσει κάποιος τη μελέτη των Μαθηματικών σε επίπεδο απειροστικού λογισμού (διαφορικού και ολοκληρωτικού). Όπως κι ο τίτλος υπονοεί, ο Euler χρησιμοποίησε την έννοια του απείρου στην ανάπτυξη των προαπαιτούμενων Μαθηματικών, κάνοντας έτσι το βιβλίο για το σημερινό αναγνώστη μια παράξενη μείξη απλής και σε βάθος ανάλυσης.

---

[58] E. W. Hobson, *Squaring the Circle: A History of the Problem*, in Squaring the Circle and Other Monographs, Chelsea, New York, p. 42.
[59] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, pp. ix-x.

Φωτογραφία από την πρώτη έκδοση του "Introductio in Analysin infinitorum"

2.2 Ορισμός συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι η πιο σημαντική έννοια σε ολόκληρο το οικοδόμημα των Μαθηματικών και ανάγεται στη γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων. Είναι το κυριότερο εργαλείο περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα και η πορεία που οδήγησε από τους απλούς συσχετισμούς στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης πέρασε διάφορα στάδια. Τη λέξη «συνάρτηση», στο λατινικό[60] της ισοδύναμο, φαίνεται πως την εισήγαγε ο Leibniz το 1694, αρχικά ως όρο για να εκφράσει κάθε ποσότητα συνδεμένη με μια καμπύλη, όπως οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στην καμπύλη, η κλίση της

[60] Το λατινικό ρήμα *fungor* σημαίνει εκτελώ – λειτουργώ.

καμπύλης, η ακτίνα καμπυλότητας κ.λ.π.[61]. Η συμβολή του Euler σ' αυτή την έννοια υπήρξε καθοριστική.

Ο Euler ξεκινάει ορίζοντας τη *σταθερή ποσότητα* ως μια καθορισμένη ποσότητα η οποία πάντα κρατά την ίδια τιμή. Ποσότητες αυτού του τύπου είναι αριθμοί οποιουδήποτε είδους οι οποίοι διατηρούν την ίδια σταθερή τιμή. Εάν είναι απαραίτητο να συμβολίζουμε σταθερές ποσότητες με ένα σύμβολο, προτείνει να χρησιμοποιούνται τα αρχικά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου a, b, c κλπ. Συσχετίζει την Άλγεβρα με την Ανάλυση αναφέροντας ότι στη μεν Άλγεβρα τα πρώτα γράμματα χρησιμοποιούνται για γνωστές σταθερές ποσότητες και τα τελευταία για άγνωστες αλλά επίσης σταθερές ποσότητες, στη δε Ανάλυση τα πρώτα γράμματα χρησιμοποιούνται για σταθερές ποσότητες, ενώ τα τελευταία για μεταβλητές.

Η έννοια της μεταβλητής ποσότητας έχει καθοριστικό ρόλο στην Ανάλυση του Euler. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια αποτέλεσε τη θεμέλιο λίθο πάνω στην οποία έκτισε τον Απειροστικό Λογισμό. Μια *μεταβλητή ποσότητα* είναι μία ποσότητα η οποία δεν είναι καθορισμένη και η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Εφόσον όλες οι καθορισμένες τιμές μπορούν να εκφραστούν ως αριθμοί, μια μεταβλητή ποσότητα παίρνει ως τιμές όλους τους δυνατούς αριθμούς (όλους τους αριθμούς όλων των τύπων αναφέρει χαρακτηριστικά). Οι μεταβλητές ποσότητες συνήθως συμβολίζονται με τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου z, y, x, κλπ.
Μια μεταβλητή ποσότητα καθορίζεται όταν μια συγκεκριμένη τιμή εκχωρείται σε αυτή. Επομένως μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να καθοριστεί με απειρία τρόπων, εφόσον όλοι ανεξαιρέτως οι αριθμοί μπορούν να εκχωρηθούν σε αυτή. Άρα μια μεταβλητή ποσότητα εμπεριέχει ανεξαιρέτως όλους τους αριθμούς, δηλαδή τους θετικούς, τους αρνητικούς, τους ακέραιους, τους ρητούς, τους άρρητους και τους υπερβατικούς. Ακόμα και το μηδέν και οι μιγαδικοί αριθμοί δεν εξαιρούνται από τις δυνατές τιμές μιας μεταβλητής ποσότητας.

Οι μεταβλητές έπαιξαν το ρόλο των στοιχείων των συνόλων του σύγχρονου ορισμού της συνάρτησης[62]. Η έννοια της μεταβλητής προέκυψε ιστορικά από τη μεταβλητή γεωμετρική ποσότητα. Το 17^{ο} αιώνα η καμπύλη ήταν το βασικό αντικείμενο της έρευνας στην ανάλυση και ενσωμάτωνε σχέσεις μεταξύ μεταβλητών

[61] Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, τόμος 2^{ος}, σελ. 200.
[62] Giovanni Ferraro, *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*, p. 108.

γεωμετρικών ποσοτήτων και αριθμών.[63] Ο Euler προσπαθώντας να ξεφύγει από τη σύνδεση με τη Γεωμετρία στον ορισμό της μεταβλητής κατάφυγε σε μια αφηρημένη-καθολική ποσότητα και έπαψε να αναφέρεται σε γεωμετρικές μεταβλητές ποσότητες. Σύμφωνα με τον Euler η *μεταβλητή ποσότητα* γίνεται η γενίκευση της γεωμετρικής ποσότητας μέσα από μια διαδικασία βαθμιαίας αφαίρεσης. « *Έτσι μια μεταβλητή ποσότητα είναι το γένος μέσα στο οποίο περικλείονται οι ποσότητες όλων των ειδών*»[64]. Το νόημα αυτό φαίνεται ακόμα περισσότερο σ' ένα από τα *γράμματα* του Euler στη Γερμανίδα πριγκήπισα[65] όπου αναφέρει: «*Υπάρχουν περισσότεροι τύποι αντίληψης που εκφράζονται μέσα από την Αφαίρεση. Αυτοί εφοδιάζουν το νου με τα πιο σημαντικά θέματα για τη διεύρυνση των δυνάμεων του. Αυτές είναι οι ιδέες του γένους και των ειδών. Όταν βλέπω μια αχλαδιά, μια κερασιά, μια μηλιά, μια βελανιδιά, ένα έλατο κ.λ.π., όλα αυτά είναι διαφορετικά. Εν τούτοις σημειώνω αρκετά πράγματα που είναι κοινά μεταξύ τους. Εγώ σταματώ να εξετάζω τα πράγματα αυτά μέσα από τις κοινές διαφορές τους και δίνω τον όρο δέντρο στο αντικείμενο αυτό για το οποίο αυτές οι ποσότητες είναι κατάλληλες*». Δηλαδή μια γενική γνώση περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά που συγκροτούν την ουσία αυτής της γνώσης. Έτσι η γνώση της μεταβλητής που αφορά την ουσία της ποσότητας συνίσταται στην ικανότητα της ποσότητας να αυξάνεται ή να μειώνεται[66]. Αυτό είναι και το κύριο χαρακτηριστικό του πώς αντιλαμβανόντουσαν την έννοια της μεταβλητής το 18^{ο} αιώνα. Ο Lacroix στο έργο του "*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*" το 1797 αναφέρει χαρακτηριστικά: «*ποσότητες που έχουν αλλάξει ή είναι ικανές προς αλλαγή ονομάζονται μεταβλητές και το όνομα σταθερές δίνεται σ' αυτές τις ποσότητες που διατηρούν την τιμή τους κατά τον υπολογισμό*».

Ο Euler μετά τον ορισμό της σταθερής και μεταβλητής ποσότητας μας δίνει τον ορισμό της *συνάρτησης*: « **Μια *συνάρτηση*[67] μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια**

---

[63] Με την επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο (μεταβλητό) του επιπέδου αυτού ένα ζεύγος αριθμών (τις συντεταγμένες του). Με τον τρόπο αυτό αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία διαφορετικά ζεύγη αριθμών. Σε κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα καλό ορισμένο σημείο του επιπέδου, συντεταγμένες του οποίου είναι αυτοί οι αριθμοί. Έτσι προκύπτει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία που μας επιτρέπει για κάθε καμπύλη να φτιάχνουμε μια εξίσωση.

[64] Leonhard Euler, *Introduction to Analysis of the Infinity*, p.2. Ο Euler χρησιμοποιεί τις έννοιες είδος και γένος με την Αριστοτελική έννοια.

[65] Leonhard Euler, *Lettres à un Princesse d' Allemagne*.

[66] Giovanni Ferraro, *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*, p. 109.

[67] Με *πλάγια γραφή* ή «εντός εισαγωγικών» θα γράφουμε τον όρο **συνάρτηση** όπως την εννοεί ο Euler.

αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες»[68].

Ως πρώτα παραδείγματα συναρτήσεων με μεταβλητή z δίνει τα $a+3z$, $az-4z^2$, $az+b\sqrt{a^2-z^2}$, c^z.

> 4. *Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, & numeris seu quantitatibus constantibus.*
>
> Omnis ergo expressio analytica, in qua præter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expressionem componentes sunt constantes, erit Functio ipsius z: Sic $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{(aa-zz)}$; c^z; &c. sunt Functiones ipsius z.

Ο ορισμός της συνάρτησης από το κείμενο του Euler

Αμέσως μετά ο Euler με παράδειγμα τη συνάρτηση $\sqrt{9-z^2}$ κάνει κάποιες παρατηρήσεις. Αν το z παίρνει πραγματικές τιμές, η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση είναι το 3. Αν όμως το z πάρει μιγαδικές[69] τιμές, όπως για παράδειγμα 5i, τότε δεν υπάρχει καθορισμένη μέγιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει η συνάρτηση. Στην πραγματικότητα, μέσα από αυτό, αναφέρεται, χωρίς όμως να τα ορίζει, σε πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης. Λέγοντας ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση είναι το 3, έχει προηγουμένως περιορίσει τις τιμές από όπου μπορεί να πάρει τιμές το z σε αυτές για τις οποίες η υπόρριζος ποσότητα είναι θετική. Επίσης αναφέρεται στην επέκταση του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών καθώς και στην ύπαρξη σταθερών συναρτήσεων. Αναφέρει ως παράδειγμα τις z^0, 1^z και $\frac{a^2-az}{a-z}$, οι οποίες αν και έχουν τη μορφή συνάρτησης, στην πραγματικότητα όμως είναι σταθερές ποσότητες. Με παρόμοιο τρόπο ο Euler σε προηγούμενη εργασία του είχε δώσει τον ορισμό του γενικού όρου της σειράς: «*Ο γενικός όρος είναι ο τύπος που αποτελείται από σταθερές ποσότητες ή άλλες ποσότητες όπως το n που δίνει τη διάταξη των όρων, έτσι αν κάποιος επιλέγει τον 3° όρο, τότε το 3 τοποθετείται στη θέση του n*». Στον Euler αναλυτική έκφραση σημαίνει μαθηματικός τύπος. Αναγνώριζε ότι η έκφραση $y=\sqrt{x^2}$ αποτελεί συνάρτηση αφού οριζόταν με έναν τύπο αλλά δε θεωρούσε το ίδιο για την $y=\begin{Bmatrix} x, & x\geq 0 \\ -x, & x\leq 0 \end{Bmatrix}$.

[68] Leonhard Euler, *Introduction to Analysis of the Infinity*, p.3.

[69] Στο πρωτότυπο ο Euler χρησιμοποιούσε τον όρο "φανταστικός" (imaginary). Ο όρος "μιγαδικός αριθμός" (complex number) εισήχθη αργότερα από τον Gauss.

2.3 Είδη συναρτήσεων

Ο Euler διακρίνει τις συναρτήσεις σε αλγεβρικές και υπερβατικές. **Αλγεβρικές** θεωρεί αυτές που προκύπτουν από αλγεβρικές και μόνο πράξεις, ενώ υπερβατικές θεωρεί τις υπόλοιπες. Αλγεβρικές πράξεις θεωρεί την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση, την ύψωση σε δύναμη και τις ρίζες. **Υπερβατικές** συναρτήσεις θεωρεί τις εκθετικές, τις λογαριθμικές, τις τριγωνομετρικές και όλες τις άλλες που μας παρέχει ο ολοκληρωτικός λογισμός, μόνο όμως εάν η μεταβλητή υπεισέρχεται σε αυτές. Για παράδειγμα, η $\log z$ είναι υπερβατική συνάρτηση, όχι όμως η $z \log 5$.

Ο Euler αναφέρει επίσης την περίπτωση συναρτήσεων οι οποίες δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή τύπου. Τέτοιες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις όπου για αυτές είναι γνωστή μια σχέση μεταξύ της τιμής της συνάρτησης και της μεταβλητής ποσότητας. Εδώ χρειάζεται να συμβολίσει ταυτόχρονα στην ίδια σχέση και την ανεξάρτητη μεταβλητή και την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης. Συμβολίζει με z την ανεξάρτητη μεταβλητή και με Z την αντίστοιχη τιμή της. Δίνει ως παράδειγμα τη συνάρτηση που ορίζεται από την εξίσωση $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Ακόμα και αν αυτή η εξίσωση δεν μπορεί να επιλυθεί, το γεγονός παραμένει ότι το Z ισούται με κάποια έκφραση που συντίθεται από τη μεταβλητή z και σταθερές ποσότητες, και για αυτό το λόγο το Z είναι συνάρτηση του z (σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης τον οποίο έχει ήδη δώσει).

Ο Euler συνεχίζει διαχωρίζοντας τις αλγεβρικές συναρτήσεις σε **ρητές** και **άρρητες.** Ρητές συναρτήσεις ονομάζει τις συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή δε συμμετέχει σε αρρητότητα. Στις ρητές συναρτήσεις οι μόνες πράξεις που επιτρέπονται για τη μεταβλητή είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση και η ύψωση σε δύναμη με ακέραιο εκθέτη. Η μεταβλητή συμμετέχει σε αρρητότητα όταν είναι υψωμένη σε δύναμη με μη ακέραιο εκθέτη. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$z \log 5,\ az^3 - bz^5,\ a - z,\ \frac{a^2 + z^2}{a + z}$$

είναι ρητές[70], ενώ οι συναρτήσεις

[70] Σήμερα ρητές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις της μορφής P/Q όπου οι P και Q είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις ($Q \neq 0$).

$$\sqrt{z},\ a+\sqrt{a^2-z^2},\ \left(a-2z+z^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

είναι άρρητες.

Τις ρητές συναρτήσεις ο Euler τις διαχωρίζει σε **πολυωνυμικές** και **"ρητές"**. (Ο Euler ως "ρητές" θεωρεί τις ρητές κλασματικές συναρτήσεις). Πολυωνυμική χαρακτηρίζει τη συνάρτηση όταν η μεταβλητή δεν έχει αρνητικό εκθέτη, ούτε περιέχονται κλάσματα με τη μεταβλητή στον παρονομαστή. Ως γενικό τύπο των πολυωνυμικών συναρτήσεων δίνει τον τύπο:

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\ldots$$

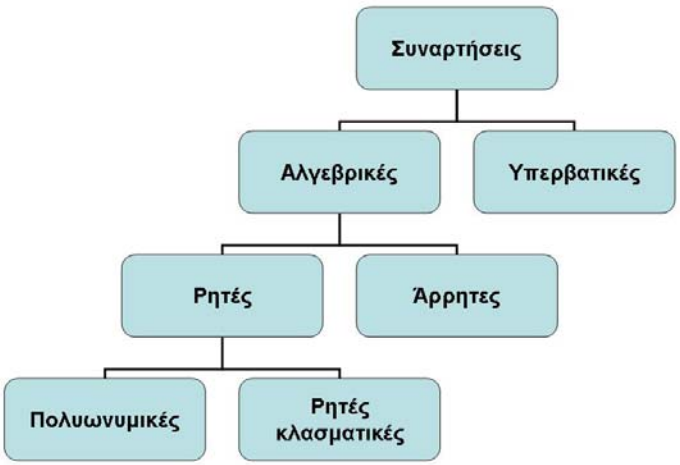
"Ρητές" συναρτήσεις είναι εκείνες στις οποίες η μεταβλητή έχει αρνητικό εκθέτη ή στις οποίες περιέχονται κλάσματα με τη μεταβλητή τον παρονομαστή. Ως γενικό τύπο των ρητών συναρτήσεων δίνει τον τύπο

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\ldots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\ldots}$$

όπου στους δύο προηγούμενους τύπους τα a, b, c, d, f, ... και α, β, γ, δ, ε, ζ, … είναι θετικοί, αρνητικοί, ακέραιοι, κλασματικοί, ρητοί, άρρητοι, ακόμα και υπερβατικοί.

Ο Euler τονίζει ότι τα a, b, c, d, f, ... και α, β, γ, δ, ε, ζ, … δεν αλλάζουν τη φύση των συναρτήσεων.

Ο διαχωρισμός των συναρτήσεων κατά Euler είναι σε μορφή διαγράμματος ο ακόλουθος:



Ο Euler συνεχίζοντας στην κατηγοριοποίηση των συναρτήσεων, μιλά για **συναρτήσεις πολλών τιμών**. Εδώ πρέπει να προσέξουμε να μη γίνει σύγχυση με τις

συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, με τη σημερινή έννοια και για τις οποίες μιλά ο ίδιος παρακάτω (5° κεφάλαιο του *"Intoductio"*). Όταν μιλά για συναρτήσεις πολλών τιμών, εξηγεί ότι: Συνάρτηση μιας τιμής είναι εκείνη για την οποία θα πάρουμε μία τιμή για τη συνάρτηση, οποιαδήποτε τιμή και να θέσουμε στη μεταβλητή. ***Συνάρτηση πολλών τιμών είναι η συνάρτηση για την οποία θα πάρουμε περισσότερες από μια τιμές για μία μόνο τιμή της μεταβλητής***. Είναι προφανές ότι αυτές οι "*συναρτήσεις*" δεν είναι συναρτήσεις με τη σημερινή έννοια. Στο σημείο αυτό φαίνεται ξεκάθαρα η διαφορά με τον σύγχρονο ορισμό της συνάρτησης όπου το μονοσήμαντο της εξαρτημένης μεταβλητής είναι απαραίτητη προϋπόθεση. Ο Euler συνεχίζει εξηγώντας ότι όλες οι άρρητες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις πολλών τιμών, και αυτό γιατί σε αυτές υπάρχουν ριζικά. Έτσι αυτές επιλυόμενες δίνουν τόσες τιμές όσες και η τάξη της ρίζας. Αυτό όμως με τη σημερινή ορολογία δημιουργεί πρόβλημα στην κατανόηση των όσων θέλει να πει ο Euler. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης που έχει δώσει ο ίδιος και δεν θεωρεί δεδομένο ότι πάντα θα δίνεται ο τύπος επιλυμένος ως προς τη συνάρτηση. (Ως παράδειγμα εμείς δίνουμε τη σχέση $f^2(x)-1=0$. Αυτή αν επιλυθεί ως προς $f(x)$ θα μας δώσει για κάθε τιμή του x δύο τιμές για την f. Προφανώς η f δεν αποτελεί συνάρτηση με το σύγχρονο ορισμό, ενώ για τον Euler η f αποτελεί συνάρτηση δύο τιμών.)

Ακόμα ως τέτοιες "συναρτήσεις" αναφέρει και κάποιες υπερβατικές όπως τη "*συνάρτηση*" $\arcsin(x)$, η οποία είναι "*συνάρτηση*" απείρων τιμών, δηλαδή για μία τιμή του x, η $\arcsin(x)$ παίρνει άπειρες τιμές.

Κατόπιν δίνει αναλυτικά παραδείγματα *συναρτήσεων* δύο τιμών, τριών τιμών, τεσσάρων τιμών και γενικεύει για n τιμές.

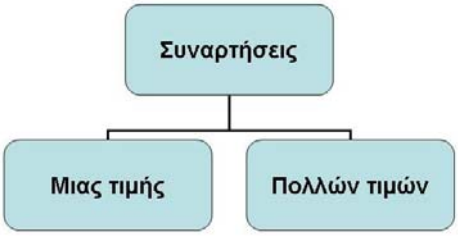
Θεωρεί $P,Q,R,S,...$ συναρτήσεις μια τιμής του z, και Z συνάρτηση του z.

Στη περίπτωση της τετραγωνικής εξίσωσης $Z^2-PZ+Q=0$ προκύπτει ότι $Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\frac{1}{4}P^2-Q}$ και άρα είναι προφανές ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής z, η "συνάρτηση" Z παίρνει δύο τιμές.

Όμοια εξηγεί για την κυβική εξίσωση και τελικά γενικεύει δίνοντας την εξίσωση n τάξης:

$$Z^n-PZ^{n-1}+QZ^{n-2}-RZ^{n-3}+SZ^{n-4}-...=0.$$

Ο διαχωρισμός των συναρτήσεων σε μιας και πολλών τιμών κατά Euler είναι σε μορφή διαγράμματος ο ακόλουθος:



Συνεχίζοντας κάνει μια προσπάθεια ορισμού της *αντίστροφης συνάρτησης*. Ταυτίζοντας τη συνάρτηση με την εξίσωση, δίνει το παράδειγμα $y^3 = ayz - bz^2$, όπου το y είναι "συνάρτηση" τριών τιμών του z . Αντίστοιχα θεωρεί και το z ως "συνάρτηση" δύο τιμών του y. Με παρόμοιο τρόπο δίνει και την έννοια της *σύνθεσης συναρτήσεων*.

Η επόμενη κατηγοριοποίηση που δίνει είναι ανάμεσα σε ***άρτιες*** και ***περιττές*** συναρτήσεις. *Άρτιες* είναι οι συναρτήσεις οι οποίες παίρνουν την ίδια τιμή αν θέσουμε στη μεταβλητή τους μία τιμή ή την αντίθετή της. Ως παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων δίνει τα ακόλουθα:

$$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \ldots, \qquad Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \ldots}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \ldots}, \qquad Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{4}{7}} + \ldots$$

$$Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \ldots, \qquad Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}} + \ldots}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}} + \ldots}$$

όπου η μεταβλητή είτε είναι υψωμένη σε άρτια δύναμη, είτε είναι υψωμένη σε κλασματική δύναμη με αριθμητή άρτιο και παρονομαστή περιττό.

Άρτιες "συναρτήσεις" πολλών τιμών είναι οι συναρτήσεις οι οποίες παίρνουν τις ίδιες τιμές αν θέσουμε στις μεταβλητές τους μία τιμή ή την αντίθετή της. Ως παράδειγμα ο Euler αναφέρει την $Z^2 = az^4 Z + bz^2$ [71]. Πρόκειται για μια "συνάρτηση" Z δύο τιμών του z, η οποία παίρνει δύο τιμές Z_1, Z_2 για κάποιο $z = k$ και τις ίδιες δύο τιμές Z_1, Z_2 για $z = -k$. Δηλαδή για το παράδειγμα που δίνει ο Euler έχουμε την ισοδύναμη $Z^2 - az^4 Z - bz^2 = 0$, η οποία δίνει

[71] Η μετάφραση του John D. Blanton που χρησιμοποιούμε, δεδομένου ότι το πρωτότυπο είναι στα Λατινικά, έχει λάθος, το οποίο έχει μεταφερθεί από το αρχικό κείμενο – *Opera Omnia* – και οφείλεται σε τυπογραφικό λάθος.

$$Z_{1,2} = \frac{az^4 \pm \sqrt{a^2z^8 + 4bz^2}}{2}.$$

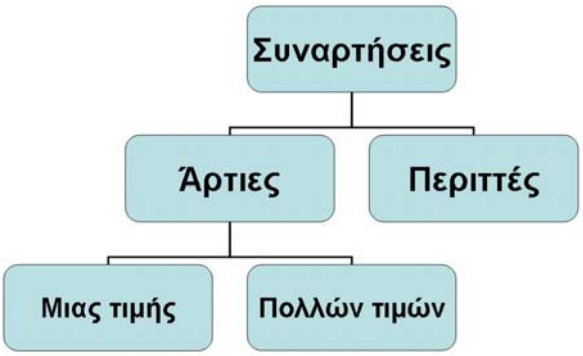
Αντίστοιχα δίνει παράδειγμα και για άρτια "συνάρτηση" τριών τιμών, την $Z^3 - az^2Z^2 + bz^4Z - cz^8 = 0$ και γενικεύει. Σε κάθε περίπτωση η μεταβλητή (z) πρέπει να είναι υψωμένη σε άρτιο εκθέτη για να είναι η "συνάρτηση" (Z) άρτια.

Περιττές είναι οι "συναρτήσεις" των οποίων η τιμή αλλάζει πρόσημο όταν στη θέση της μεταβλητής τους αντικατασταθεί η αντίθετη της μεταβλητής. Τέτοιες είναι οι:

$$z^1,\ z^3,\ z^5,\ z^7,\ldots,\ z^{-1},\ z^{-3},\ z^{-5},\ z^{-7},\ldots,\ az + bz^3,\ az + az^{-1},\ z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{5}{3}},$$

όπου και ο αριθμητής και ο παρονομαστής του εκθέτη είναι περιττοί.

Ο διαχωρισμός των συναρτήσεων σε άρτιες και περιττές κατά Euler είναι σε μορφή διαγράμματος ο ακόλουθος:



Μετά την παραπάνω κατηγοριοποίηση, ο Euler αποδεικνύει προτάσεις που σχετίζονται με πράξεις μεταξύ άρτιων και περιττών συναρτήσεων.

- Άρτια συνάρτηση *πολλαπλασιαζόμενη* με περιττή συνάρτηση δίνει περιττή συνάρτηση.
- Περιττή συνάρτηση *πολλαπλασιαζόμενη* με περιττή συνάρτηση δίνει άρτια συνάρτηση.
- Περιττή συνάρτηση *διαιρούμενη* με περιττή συνάρτηση δίνει άρτια συνάρτηση.
- Η *αντίστροφη* περιττής συνάρτησης είναι και αυτή περιττή συνάρτηση.

Ο Euler ως καλός συγγραφέας και καλός δάσκαλος δείχνοντας συνέπεια ως προς την πρόλογό του μας προετοιμάζει για την εισαγωγή στην Ανάλυση δίνοντας μας όλα τα αναγκαία εκείνα στοιχεία της Άλγεβρας που θεωρεί απαραίτητα. Πράγματι, όλοι

γνωρίζουμε πως αν και η Ανάλυση είναι ξεχωριστός κλάδος των Μαθηματικών, τα απαραίτητα εργαλεία αντλούνται από την Άλγεβρα. Σκόπιμο λοιπόν είναι να ακολουθήσουμε το μονοπάτι στο οποίο μας οδηγεί ο Euler. Η αρχή λοιπόν θα γίνει με μετασχηματισμούς συναρτήσεων.

2.4 Μετασχηματισμοί συναρτήσεων

Ο Euler ορίζει τον μετασχηματισμό συνάρτησης ως την αλλαγή του τύπου της συνάρτησης, είτε με την εισαγωγή μιας διαφορετικής μεταβλητής, είτε (εάν κρατήσουμε την ίδια μεταβλητή) με την έκφραση του τύπου της συνάρτησης με διαφορετικό (ισοδύναμο) τρόπο. Αυτοί οι μετασχηματισμοί θα του χρειαστούν αργότερα στον ολοκληρωτικό λογισμό και συνεπής με τον πρόλογο του τα αναπτύσσει εκτενώς έγκαιρα.

Ο Euler τονίζει τη σύνδεση του παραπάνω ορισμού με την εμπειρία μας από την Άλγεβρα, όπου και εκεί η ίδια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους.

Όσον αφορά την αλλαγή τύπου, ο Euler δίνει τα παρακάτω χαρακτηριστικά παραδείγματα, που διαφέρουν στη μορφή αλλά είναι ισοδύναμα:

$$2-3z+z^2=(1-z)(2-z)$$

$$a^3+3a^2z+3az^2+z^3=(a+z)^3$$

$$\frac{2a^2}{a^2-z^2}=\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}=\sqrt{1+z^2}+z$$

Ο Euler αναγνωρίζει ότι συχνά για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, κάποια από τις ισοδύναμες μορφές μιας παράστασης είναι περισσότερο βολική και αυτή θα πρέπει να επιλέγεται. Στη συνέχεια ο Euler αναφέρεται στην παραγοντοποίηση πολυωνυμικών συναρτήσεων, διότι συχνά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε μια συνάρτηση ως γινόμενο. Έτσι αν έχουμε την πολυωνυμική συνάρτηση $Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+\ldots$ και $f,g,h,\ldots$ είναι οι ρίζες της Z, τότε αυτή εκφράζεται ως το γινόμενο $Z=A(z-f)(z-g)(z-h)\ldots$ Τα $f,g,h,\ldots$ δε θα πρέπει να συγχέονται με συναρτήσεις. Αποτελούν μόνο αριθμούς. Το σύμβολο f ως σύμβολο συνάρτησης αν και αποδίδεται στον Euler δεν το έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα. Η πρώτη χρήση του εμφανίζεται στην

εργασία του E-45[72] με τίτλο *"Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiudem generic"*.

Ως ισοδύναμο τρόπο παραγοντοποίησης της πολυωνυμικής συνάρτησης ο Euler δίνει για τη μορφή $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ (όπου οι ρίζες της $Z = 0$ είναι οι $f, g, h, \ldots$) την έκφραση $Z = A\left(1 - \frac{z}{f}\right)\left(1 - \frac{z}{g}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right)\ldots$

Στο σημείο αυτό ο Euler αναφέρει ότι οι ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι πραγματικές ή μιγαδικές, αλλά ο αριθμός των μιγαδικών ριζών είναι πάντα άρτιος.

Εδώ παρουσιάζει και το εξής σημαντικό "θεώρημα":

> *"Εάν η πολυωνυμική συνάρτηση* Z *παίρνει την τιμή* A *όταν* $z = a$ *και την τιμή* B *όταν* $z = b$*, τότε υπάρχει τιμή του* z *μεταξύ των* a *και* b *για την οποία η συνάρτηση* Z *παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των* A *και* B *"*[73].

Στην πραγματικότητα πρόκειται για το "*Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής*", που διατυπώθηκε από μεταγενέστερους του Euler. Ο Euler δεν αποδεικνύει αυστηρά το παραπάνω "θεώρημα", όμως δίνει μια περιγραφική και διαισθητική εξήγηση. Έχει σημασία να την αναφέρουμε, ώστε να έχουμε μια πληρέστερη εικόνα του πώς μαθηματικοί του μεγέθους του Euler εκείνη την εποχή προσέγγιζαν αυτά τα θέματα.

> *Εφόσον* Z *είναι μια συνάρτηση μιας τιμής του* z*, τότε για οποιαδήποτε πραγματική τιμή που θέτουμε στο* z*, υπάρχει μια πραγματική τιμή για τη συνάρτηση* Z*. Έτσι, όταν* $z = a$*, το* Z *έχει την τιμή* A *και όταν* $z = b$*, το* Z *έχει την τιμή* B*. Όμως η συνάρτηση* Z *δε μπορεί να περάσει από το* A *στο* B *χωρίς να πάρει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.*
>
> *Συμπληρωματικά αναφέρει ότι αν η* $Z - A = 0$ *και η* $Z - B = 0$ *έχουν από μια πραγματική ρίζα, τότε η εξίσωση* $Z - C = 0$ *έχει και αυτή μία πραγματική ρίζα, αν το* C *βρίσκεται μεταξύ των* A *και* B.

---

72 Αφορά την αρίθμηση στο "eneström index" όπου είναι καταχωρημένα τα γραπτά του Euler και είναι διαθέσιμα στη δικτυακή διεύθυνση http://math.dartmouth.edu/~euler/. Το 1910 και 1913 ο Σουηδός μαθηματικός Gustav Eneström ολοκλήρωσε την πρώτη συστηματική αρχειοθέτηση του έργου του Euler. Μέτρησε και αρίθμησε 866 εργασίες, περιλαμβάνοντας βιβλία, άρθρα και μέρος της σημαντικής άλληλογραφίας του Euler. Σε κάθε μια από αυτές δόθηκε ένας αριθμός από το E1 μέχρι το E866 που είναι γνωστός ως "αριθμός Eneström". Αυτό αποτέλεσε έναν πολύ καλό τρόπο άμεσης προσπέλασης στα γραπτά του Euler και οι περισσότεροι μελετητές χρησιμοποιούν αυτόν προκειμένου να αναφέρονται στις εργασίες του. Η ολοκληρωμένη λίστα δημοσιεύθηκε το 1913 με τον τίτλο *"Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind"* [Τα γραπτά του Euler ταξινομημένα με βάση το έτος που έγραψε το καθένα από αυτά].

73 Leonhard Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite*, chap. 2, § 33, p. 21.

Αν και παρακάτω θα σχολιάσουμε με σύγχρονη μαθηματική προσέγγιση αλλά και συμβολισμό τα όσα διαπραγματεύεται ο Euler, είναι σκόπιμο σε αυτό το σημείο να αποδώσουμε το παραπάνω θεώρημα με σύγχρονη ορολογία χωρίς όμως να αλλοιώσουμε τη βασική δομή του.

Αν f είναι μια "συνάρτηση" του z και $f(a), f(b)$ οι τιμές της "συνάρτησης" για $z = a$ και $z = b$, τότε για οποιοδήποτε c για το οποίο ισχύει $f(a) < c < f(b)$ υπάρχει κάποιο x μεταξύ των a και b τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

Αμέσως μετά διατυπώνει το *θεώρημα ύπαρξης ρίζας πολυωνύμου*:

Αν σε μια πολυωνυμική συνάρτηση Z ο μεγαλύτερος εκθέτης του z είναι περιττός αριθμός ($2n+1$), τότε η συνάρτηση Z έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Η απόδειξη που κάνει, αν και στερείται αυστηρότητας με τις γνώσεις που έχουμε σήμερα, είναι εξαιρετικά ευφυής και είναι η παρακάτω:

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \ldots$

Αν $z = \infty$, *τότε όλοι οι όροι εκτός του μεγιστοβάθμιου απαλείφονται και άρα* $Z = z^{2n+1}$ *και αφού* $z = \infty$, *έχουμε ότι* $Z = \infty^{2n+1} = \infty$. *Άρα το* $Z - \infty$ *έχει μια πραγματική ρίζα.*

Όμοια, αν $z = -\infty$, *τότε* $Z = z^{2n+1} = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$. *Άρα το* $Z - (-\infty) = Z + \infty$ *έχει και αυτό μια πραγματική ρίζα.*

Επομένως το $Z + C$, *σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα*[74], *θα έχει και αυτό μία πραγματική ρίζα, αν* $-\infty < C < +\infty$. *Για αυτό το λόγο, όταν* $C = 0$, *η συνάρτηση* Z *έχει μια πραγματική ρίζα, τη* c, *όπου* $-\infty < c < +\infty$.

Το συμπέρασμα δεν ισχύει αν ο εκθέτης του μεγιστοβάθμιου όρου είναι άρτιος[75].

Ο Euler συνεχίζει να μας δίνει τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να συνεχίσουμε τη μελέτη μας στον απειροστικό λογισμό, δίνοντας μας την παρακάτω πολύ χρήσιμη μέθοδο:

Μια κλασματική συνάρτηση $\frac{M}{N}$, όπου οι M και N είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του z και ο βαθμός του M είναι μικρότερος από το βαθμό του N, μπορεί να αναλυθεί

---

[74] Εάν η πολυωνυμική συνάρτηση Z παίρνει την τιμή ∞ όταν $z = \infty$ και την τιμή $-\infty$ όταν $z = -\infty$, τότε υπάρχει τιμή του z μεταξύ των $-\infty$ και ∞ για την οποία η συνάρτηση Z παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των $-\infty$ και ∞, (και άρα και το 0).

[75] Για παράδειγμα, η πολυωνυμική εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

σε τόσα απλά κλάσματα της μορφής $\frac{A}{p-qz}$ όσα και οι διαφορετικές ρίζες του παρονομαστή N.

Αν ο παρονομαστής N παραγοντοποιηθεί σε πρωτοβάθμια πολυώνυμα, τότε η έκφραση $\frac{M}{N}$ μπορεί να αναλυθεί σε τόσα κλάσματα όσα και οι ρίζες του παρονομαστή N, αφού κάθε παράγοντας γίνεται ο παρονομαστής ενός μερικού κλάσματος. Επομένως, αν $p-qz$ είναι παράγοντας του N, τότε θα είναι ο παρονομαστής ενός συγκεκριμένου μερικού κλάσματος, και εφόσον ο βαθμός του αριθμητή αυτού του κλάσματος πρέπει να είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή $p-qz$, προκύπτει ότι ο αριθμητής πρέπει να είναι σταθερός αριθμός. Άρα για κάθε παράγοντα $p-qz$ του παρονομαστή N προκύπτει ένα απλό κλάσμα $\frac{A}{p-qz}$ και το άθροισμα όλων αυτών των κλασμάτων είναι ίσο με τη συνάρτηση $\frac{M}{N}$.

Παράδειγμα:

Έστω η κλασματική συνάρτηση $\frac{1+z^2}{z-z^3}$. Για τον παρονομαστή έχουμε: $z-z^3 = z(1-z^2) = z(1-z)(1+z)$. Άρα $\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} - \frac{C}{1+z}$. Αρκεί να υπολογίσουμε τα A, B, C. Έχουμε $1+z^2 = A(1-z)(1+z) + Bz(1+z) + Cz(1-z)$, δηλαδή $1+0z+z^2 = A+(B+C)z+(-A+B-C)z^2$. Από εδώ έχουμε το σύστημα των εξισώσεων $\left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B+C=0 \\ -A+B-C=1 \end{array}\right\}$ από όπου $A=1, B=1, C=-1$.

Άρα $\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$. Ακριβώς ότι κάνουμε και σήμερα.

Η επόμενη τεχνική που παρουσιάζει είναι η αλλαγή μεταβλητής. Προηγουμένως μας έχει δώσει τον ορισμό των *όμοιων συναρτήσεων*[76]. Στις όμοιες

[76] Εάν Z είναι μια συνάρτηση του z και Y είναι μια συνάρτηση του y τέτοια ώστε το Y να ορίζεται από το y και σταθερές, με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο και το Z εκφράζεται από το z και σταθερές, τότε

συναρτήσεις δίνει παραδείγματα συναρτήσεων για τα οποία προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής ότι πρόκειται για όμοιες συναρτήσεις[77]. Εδώ συνεχίζει τη μελέτη της μεθόδου της αλλαγής μεταβλητής για τη μετατροπή τύπων σε καταλληλότερους ή απλούστερους για το συγκεκριμένο πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί. Μάλιστα δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην απαλοιφή ριζικών παρουσιάζοντας αρκετά παραδείγματα. Ο Ferraro κάνει μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση με στόχο να αναδείξει την ιδέα της συσχέτισης ή ακόμα καλύτερα της συναρτησιακής σχέσης που κρύβεται πίσω από τις αναλυτικές εκφράσεις[78]. Ο Euler μετασχημάτισε την έκφραση $y=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ στην $y=\frac{2x}{1+x^2}$ αντικαθιστώντας το z με $\frac{1-x}{1+x}$. Όμως ο Euler δεν είδε αυτό ως έναν περαιτέρω μετασχηματισμό της αναλυτικής έκφρασης αλλά αισθάνθηκε την ανάγκη για μια εξήγηση με όρους συσχέτισης ανάμεσα σε ζευγάρια αριθμών: «*Αν δώσουμε μια ορισμένη τιμή στο* x*, τότε βρίσκουμε την τιμή του* y *που προκύπτει από το* z *και ταυτόχρονα παράγει το* z*. Αφού* $x=\frac{1}{2}$ *τότε* $z=\frac{1}{3}$ *και* $y=\frac{4}{5}$*. Βρίσκουμε επίσης ότι* $y=\frac{4}{5}$ *αν στη* $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ *θέσουμε* $z=\frac{1}{3}$»[79]. Η εξάρτηση ή η σχέση είναι το πρώτο, μη αναλυτικό, διαισθητικό επίπεδο του περιεχόμενου της συνάρτησης που εκφράζεται στο παραπάνω παράδειγμα. Στο δεύτερο επίπεδο η συναρτησιακή σχέση με κατάλληλα σύμβολα γίνεται αναλυτική έκφραση. Σύμφωνα με το Ferraro, ο τύπος και η συναρτησιακή σχέση δεν αντιδιαστέλλονται στην ιδέα της συνάρτησης του Euler αλλά ήταν στενά συνδεμένα.

οι συναρτήσεις Y και Z ονομάζονται όμοιες συναρτήσεις των y και z αντίστοιχα. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $Z=a+bz+cz^2$ και $Y=a+by+cy^2$ είναι όμοιες συναρτήσεις των z και y. Από αυτό τον ορισμό προκύπτει ότι εάν Y και Z είναι όμοιες συναρτήσεις των y και z, τότε, εάν το y αντικατασταθεί στη θέση του z, η συνάρτηση Z θα γίνει η συνάρτηση Y.

[77] Το πρώτο παράδειγμα που δίνει είναι οι όμοιες συναρτήσεις $ay+by^3$ του y και $a(y+n)+b(y+n)^3$ του $y+n$, όπου με την αντικατάσταση $z=y+n$ η ομοιότητα των συναρτήσεων είναι προφανής. Το δεύτερο παράδειγμα που δίνει είναι οι όμοιες συναρτήσεις $\frac{a+bz+cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ του z και $\frac{az^2+bz+c}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}$ του $\frac{1}{z}$, όπου με την αντικατάσταση $y=\frac{1}{z}$ η ομοιότητα αυτών των συναρτήσεων είναι επίσης προφανής.

[78] Giovanni Ferraro, *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*, p. 111.

[79] Leonhard Euler, *Introduction to Analysis of the Infinity*, p. 38.

2.5 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Ο ορισμός που δίνεται είναι αντίστοιχος της συνάρτησης μιας μεταβλητής και είναι ο παρακάτω:

Μια "συνάρτηση" δύο ή περισσότερων μεταβλητών[80] *ποσοτήτων* x, y, z *είναι μια έκφραση που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτές.*

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό η έκφραση $x^3 + xyz + az^3$ είναι μια συνάρτηση των τριών μεταβλητών x, y, z.

Στο σημείο αυτό ο Euler προσπαθεί να προσεγγίσει την έννοια του απείρου. Για την ακρίβεια, το προσεγγίζει με έναν αλγεβρικό τρόπο και καταλήγει να αναφερθεί σε αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε "διάταξη απείρου". Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής με μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Η συνάρτηση μιας μεταβλητής παίρνει άπειρες τιμές, μια για κάθε τιμή που θέτουμε στη μεταβλητή της. Επομένως και στη συνάρτηση πολλών μεταβλητών αντιστοιχούν άπειρες τιμές για κάθε μεταβλητή της ξεχωριστά. Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι όλες οι μεταβλητές παίρνουν οποιεσδήποτε τιμές, η συνάρτηση θα έχει αριθμό τιμών "μεγαλύτερο από το άπειρο", όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Euler[81].

Όπως και τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έτσι και τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών τις διαχωρίζει πρωτίστως σε **αλγεβρικές** και **υπερβατικές**, τις αλγεβρικές σε **ρητές** και **άρρητες**, και τις ρητές σε **πολυωνυμικές** και **κλασματικές**.

Επίσης διευκρινίζει ότι όπως υπάρχουν συναρτήσεις πολλών τιμών μιας μεταβλητής, έτσι υπάρχουν και συναρτήσεις πολλών τιμών πολλών μεταβλητών.

Στη συνέχεια δίνει τον ορισμό ομογενών και ετερογενών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. **Ομογενείς** είναι οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών για τις οποίες κάθε όρος τους έχει τον ίδιο βαθμό. Αντίστοιχα, **ετερογενείς** είναι οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών για τις οποίες οι όροι τους δεν έχουν τον ίδιο βαθμό. Ο Euler ορίζει το βαθμό ως εξής: Μια σταθερά δεν έχει βαθμό. Μια μεταβλητή έχει βαθμό ίσο με 1. Μια μεταβλητή υψωμένη σε τετράγωνο ή το γινόμενο δύο μεταβλητών έχει βαθμό ίσο με 2. Το γινόμενο τριών μεταβλητών ή το γινόμενο μιας μεταβλητής επί μία άλλη υψωμένη στο τετράγωνο έχει βαθμό ίσο με 3 κ.ο.κ. Έτσι οι όροι αy και βz έχουν βαθμό ίσο με

[80] Leonhard Euler, *Introduction to Analysis of the Infinity*, chap. 5, § 78, p. 64.
[81] Ο.π., p. 65.

1. Οι όροι $\alpha y^2, \beta yz, \gamma z^2$ έχουν βαθμό ίσο με 2. Οι όροι $\alpha y^3, \beta y^2 z, \gamma yz^2, \delta z^3$ έχουν βαθμό ίσο με 3. Οι όροι $\alpha y^4, \beta y^3 z, \gamma y^2 z^2, \delta yz^3, \varepsilon z^4$ έχουν βαθμό ίσο με 4 κ.ο.κ.

Μια πολυωνυμική συνάρτηση είναι ομογενής αν κάθε όρος της έχει τον ίδιο βαθμό. Ως παραδείγματα ο Euler δίνει τις γενικές μορφές πολυωνύμων που είναι συναρτήσεις των y και z. Η γενική μορφή ομογενούς πολυωνύμου πρώτου βαθμού είναι η $\alpha y + \beta z$. Η γενική μορφή ομογενούς πολυωνύμου δευτέρου βαθμού είναι η $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$. Η γενική μορφή ομογενούς πολυωνύμου τρίτου βαθμού είναι η $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3$. Η γενική μορφή ομογενούς πολυωνύμου τετάρτου βαθμού είναι η $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4$.

Μια ρητή συνάρτηση είναι ομογενής αν και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ομογενείς. Παράδειγμα ομογενούς ρητής συνάρτησης των y και z είναι η $\dfrac{ay^2 + bz^2}{\alpha y + \beta z}$.

Ο βαθμός μιας ρητής συνάρτησης βρίσκεται αφαιρώντας το βαθμό του παρονομαστή από το βαθμό του αριθμητή. Το δοθέν παράδειγμα είναι μια συνάρτηση πρώτου βαθμού, εφόσον ο αριθμητής είναι δευτέρου βαθμού και ο παρονομαστής πρώτου. Προφανώς υπάρχουν ρητές συναρτήσεις μηδενικού και αρνητικού βαθμού.

Ο Euler επεκτείνει τον ορισμό των ομογενών συναρτήσεων ώστε να συμπεριλάβει και τις άρρητες συναρτήσεις. Αν P είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού n, τότε η $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ είναι συνάρτηση βαθμού $\dfrac{\mu}{\nu} n$.

Όσον αφορά τις ετερογενείς συναρτήσεις, ο Euler τις κατηγοριοποιεί σύμφωνα με τον αριθμό των διαφορετικών βαθμών που ενυπάρχουν σε αυτές.

Ο Euler στη συνέχεια κάνει μια σημαντική παρατήρηση: Υπάρχουν ετερογενείς συναρτήσεις οι οποίες μπορούν να μετατραπούν σε ομογενείς μέσω κατάλληλης αντικατάστασης μιας από των μεταβλητών τους. Τονίζει όμως ότι δεν είναι προφανές υπό ποιες προϋποθέσεις μπορεί να γίνει αυτό. Ως παράδειγμα δίνει την ετερογενή συνάρτηση $y^5 + z^2 y + y^3 z + \dfrac{z^3}{y}$ των y και z, η οποία με την αντικατάσταση $z = x^2$ γίνεται $y^5 + x^4 y + y^3 x^2 + \dfrac{x^6}{y}$, που είναι ομογενής συνάρτηση των x και y βαθμού ίσου με 5. Ως δεύτερο παράδειγμα δίνει την ετερογενή συνάρτηση

$y + y^2x + y^3x^2 + y^5x^4 + \frac{a}{x}$ των y και x, η οποία με την αντικατάσταση $x = \frac{1}{z}$ γίνεται $y + \frac{y^2}{z} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{y^5}{z^4} + az$, που είναι ομογενής συνάρτηση των y και z βαθμού ίσου με 1.

2.6 Ένας πιο γενικός ορισμός της συνάρτησης

Το 17ο αιώνα οι συναρτησιακές σχέσεις ήταν προσανατολισμένες στις καμπύλες και ως εκ τούτου μελετήθηκαν γεωμετρικά. Συμβολικές εκφράσεις με τις οποίες κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει συγκεκριμένους κανόνες, χρησιμοποιήθηκαν αργότερα για να δηλώσουν τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών ποσοτήτων. Έτσι το 18ο αιώνα το πραγματικά καινούργιο στην αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης δεν ήταν η συναρτησιακή σχέση στα Μαθηματικά αλλά το γεγονός ότι η συναρτησιακή σχέση έγινε αντικείμενο υπολογισμών μέσω τύπων ή αναλυτικών εκφράσεων. Στο "intoductio" ο Euler εξερεύνησε αυτή τη νέα προσέγγιση του συναρτησιακού συσχετισμού και όρισε τη συνάρτηση ως «τύπο» και αποσιώπησε τη συναρτησιακή σχέση. Δεν θα πρέπει να μας διαφεύγει ότι το εν λόγω βιβλίο ήταν ένα βιβλίο Ανάλυσης και οι τύποι έπαιξαν σημαντικό ρόλο σ' αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών σε αντίθεση με τη Γεωμετρία και τη Μηχανική όπου τα αντικείμενα της έρευνας ήταν συναρτησιακές σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικές και φυσικές οντότητες. Οι δυο πλευρές της συνάρτησης είναι αυτές που εξηγούν και την παρουσία ενός διαφορετικού ορισμού που δίνει ο Euler στο βιβλίο του "Institutiones calculi differentialis" το 1755. Όρισε τη συνάρτηση με εντελώς γενικό τρόπο, δίνοντας ένα περισσότερο γενικό ορισμό της συνάρτησης:

«*Εάν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από κάποιες άλλες ποσότητες έτσι ώστε αν οι τελευταίες αλλάξουν θα αλλάξουν και οι πρώτες, τότε οι πρώτες ποσότητες ονομάζονται συναρτήσεις των δευτέρων. Αυτός ο ορισμός εφαρμόζεται με αρκετή ευρύτητα και περιλαμβάνει όλους τους τρόπους με τους οποίους μια ποσότητα μπορεί να καθοριστεί από μια άλλη. Εάν, λοιπόν, το* x *συμβολίζει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες οι οποίες εξαρτώνται από το* x *με οποιοδήποτε τρόπο, ή καθορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του* x*»*[82].

[82] Leonhard Euler, *Institutiones Calculi Differentialis*. Το βιβλίο αυτό εκδόθηκε σε δύο μέρη το 1755 και μεταφράστηκε στα Γερμανικά το 1790. Για το πρώτο μέρος υπάρχει επίσης και μετάφραση στα Αγγλικά (*Foundations of Differential Calculus*, Springer; (1st Ed.), 2000).

Ο Ferraro πιστεύει ότι η διαφορά ανάμεσα στους δυο ορισμούς της συνάρτησης είναι περισσότερο ζήτημα έμφασης που εξαρτάται από το συγκεκριμένο κείμενο (*"Institutiones calculi differencialis"*). Ο ορισμός του 1755 παρουσιάστηκε στον πρόλογο όπου ο Euler συζητά την επιστημολογική φύση του Διαφορικού Λογισμού. Παρατηρεί (ο Euler) ότι ο Λογισμός δεν μπορεί να οριστεί με χρήση καθημερινών αντιλήψεων και ότι ακόμα και ο κλάδος της Ανάλυσης των πεπερασμένων ποσοτήτων απ' τον οποίο αναπτύχθηκε ο Διαφορικός Λογισμός δεν είναι επαρκής για το σκοπό αυτό. Επομένως έπρεπε να εισάγει τις βασικές έννοιες του Λογισμού (μεταβλητές, συναρτήσεις, απειροστά και λόγους διαφορικών) μ' έναν διαισθητικό τρόπο. Οι ορισμοί στον πρόλογο του 1755 είναι διαφορετικοί απ' αυτούς που έδωσε ο Euler στο *"introduction"* . Όρισε τη μεταβλητή ως μια ποσότητα που μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται χωρίς περιορισμό και διευκρίνισε την έννοια δίνοντας ένα μη αναλυτικό παράδειγμα (τροχιά βλήματος)[83]. Μέσα από αυτό προβάλει την σχέση εξάρτησης που έχουν οι μεταβλητές και είναι αυτό που χαρακτηρίζει τη συνάρτηση γενικότερα. Δείχνει τη μετάβαση διαισθητικών σχέσεων μεταξύ εμπειρικών ή γεωμετρικών ποσοτήτων σε σύμβολα και αναλυτικές σχέσεις που είναι ικανές για υπολογισμούς. Ο λογισμός της συνάρτησης εμπεριείχε τη γνώση της αναλυτικής έκφρασης και της συναρτησιακής σχέσης. Κάποιος έπρεπε να κατέχει αλγοριθμικούς κανόνες που σχετίζονται με την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης, όπως οι κανόνες της διαφόρισης. Ήταν όμως απαραίτητο να μπορεί να υπολογίζει την ποσότητα $f(x)$ που αντιστοιχούσε σε μια δοθείσα τιμή της ποσότητας x (για παράδειγμα, από ένα πίνακα τιμών), τουλάχιστον όταν το x μεταβαλλόταν μέσα σε ένα διάστημα. Μόνο όταν αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνταν, ένα σύμβολο συσχετισμένο με μια δοθείσα συναρτησιακή σχέση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνάρτηση.

Εκείνο που δεν είναι άμεσα εμφανές σε αυτές τις πρώτες προσεγγίσεις της συνάρτησης, αλλά θα πρέπει να διακριθεί ιδιαίτερα στον τελευταίο ορισμό, είναι μια άλλη επιστημολογική διάσταση που κρύβει. Η συνάρτηση, στη μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στους υπολογισμούς. Στην ουσία πρόκειται για μια εκτίμηση ενός μεγέθους y η οποία όμως ανάγεται στην εκτίμηση

[83] Ο Euler θεώρησε 4 ποσότητες: την ποσότητα του μπαρουτιού, τη γωνία βολής, την απόσταση (βεληνεκές) και το χρόνο. Σύμφωνα με τη θεώρηση του κάθε μια από αυτές θα μπορούσε να εννοηθεί ως μεταβλητή ή σταθερή ανάλογα με τις συνθήκες αφού η μεταβολή σε κάποια από αυτές τις ποσότητες παράγει μεταβολές στις άλλες. Για παράδειγμα, αν η ποσότητα του μπαρουτιού είναι σταθερή και αλλάξει η γωνία βολής τότε θα αλλάξει η απόσταση και ο χρόνος. Έτσι η απόσταση και ο χρόνος είναι οι μεταβλητές που εξαρτώνται από τη γωνία βολής με σταθερή την ποσότητα του μπαρουτιού.

ενός άλλου μεγέθους x μέσω της σχέσης που τα συνδέει. Το y έρχεται να αποτελέσει το στόχο που επιδιώκεται να γνωρίζουμε την τιμή του, σε ένα πλαίσιο διαχείρισης, την στιγμή που το x μας είναι το άμεσα προσπελάσιμο. Με αυτή την οπτική η συνάρτηση προσφέρεται ως διαμεσολαβητικό εργαλείο εκτίμησης και περιγραφής[84].

2.7 Η έννοια της συνέχειας

Η μελέτη της κίνησης ενός σώματος στο χώρο ήταν ένα από τα κυρίαρχα προβλήματα εκείνης της εποχής που μελετούμε. Με δεδομένο ότι πάρα πολλές φυσικές διαδικασίες εξελίσσονται με συνεχή τρόπο ήταν σχεδόν αδιανόητο στους επιστήμονες του 18^{ου} αιώνα να ερευνήσουν για κάποιου άλλου είδους συμπεριφορά στη φύση. Μέχρι τότε ο Λογισμός ήταν ένας λογισμός καμπύλων και συνεπώς υπήρχε ένας γεωμετρικός χαρακτήρας. Έτσι η ιδιότητα της συνέχειας χρησιμοποιούνταν στη Γεωμετρία για να δειχθεί ότι μια καμπύλη που έχει τα σημεία της εκατέρωθεν μιας ευθείας αναγκαστικά πρέπει να τέμνει την καμπύλη. Αυτό ακριβώς εκφράζει ο Euler στο θεώρημα της παραγράφου 2.4[85] αλλά με αλγεβρικό τρόπο. Η έννοια της συνέχειας ήταν η εκ φύσεως ιδιότητα. Κάθε συνάρτηση εμπεριείχε την ιδιότητα αυτή[86]. Ένα αντικείμενο θεωρούνταν συνεχές αν ήταν ενιαίο. Η καμπύλη την εποχή εκείνη ήταν κυρίως ένα εμπειρικό αντικείμενο που προσέγγιζαν βασιζόμενοι στη διαίσθηση και όχι ένα μαθηματικό αντικείμενο με μια συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση. Η διαισθητική ιδέα της συνέχειας είναι το αποτύπωμα που αφήνει ένα μολύβι στο χαρτί χωρίς να σηκώσουμε το χέρι μας. Μια συνάρτηση χωρίς άλματα στο γράφημα της και με δεδομένη την υπόθεση της ύπαρξης ενδιάμεσων τιμών. Μια συνάρτηση ήταν συνεχής ή δεν ήταν συνάρτηση. Σύμφωνα με τον Euler κάθε συνάρτηση $y(x)$ είχε την ακόλουθη ιδιότητα: Το $\Delta y = y(x+\omega) - y(x)$ είναι απειροστό αν το ω είναι απειροστό. Αυτό έκφρασε και αργότερα ο Bolzano αλλά με ακόμα καλύτερη διατύπωση: "Αν x είναι ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, τότε η διαφορά $y(x+\omega) - y(x)$ είναι δυνατόν (μεταβάλλοντας το ω) να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα".[87] Ο ορισμός της συνάρτησης μέσω της αναλυτικής έκφρασής

---

[84] Παναγιώτης Σπύρου, *Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και η διδακτική μεταφορά της.*

[85] *"Εάν η πολυωνυμική συνάρτηση* Z *παίρνει την τιμή* A *όταν* $z = a$ *και την τιμή* B *όταν* $z = b$*, τότε υπάρχει τιμή του* z *μεταξύ των* a *και* b *για την οποία η συνάρτηση* Z *παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των* A *και* B *"*

[86] Giovanni Ferraro, *Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815*, p. 123.

[87] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος & Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος 1^{ος}, σελ. 138.

της εξακολουθούσε να δημιουργεί προβλήματα. Έτσι ο Euler στο δεύτερο τόμο του *'introductio'* αναφέρει ότι μια συνεχής καμπύλη είναι τέτοια που εκφράζεται από μια απλή συνάρτηση (Δηλαδή έναν τύπο του x). Αν όμως η καμπύλη είναι τέτοιας φύσης που για τα μεταβλητά της μέρη απαιτούνται διαφορετικές συναρτήσεις τότε ονομάζουμε την καμπύλη ασυνεχή. Είναι ενδιαφέρον ότι στο ίδιο βιβλίο που μελετά την $y = (-1)^x$, χρησιμοποιεί τον όρο εξίσωση και όχι συνάρτηση για τη συγκεκριμένη, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι είναι παράδοξο αντικείμενο, του οποίου το γράφημα ήταν πλήρες ασυνεχές. Έτσι, συναρτήσεις όπως η $y = \frac{1}{x}$ είναι συνεχείς, διότι δίνονται από έναν τύπο αλλά με μη συνεχές γράφημα, αφού αυτό αποτελείται από δυο κομμάτια. Ο Euler με τη μελέτη πολυωνυμικών, ρητών, εκθετικών, λογαριθμικών, τριγωνομετρικών συναρτήσεων και γενικότερα συναρτήσεων που είχαν πράγματι την ιδιότητα της συνέχειας με τη σύγχρονη θεώρηση. Έτσι, παρόλο που έλειπε ένας ορθός αναλυτικός ορισμός της έννοιας, παρήγαγε σωστά αποτελέσματα. Το τελικό στάδιο εξέλιξης προς την μαθηματικά αυστηρή διατύπωση της έννοιας της συνέχειας δόθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό Karl Weierstrass (1815-1897) και από τον επίσης Γερμανό Edward Heine (1821-1881), ο οποίος ακολουθώντας τις διαλέξεις του Weierstrass διατύπωσε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό, που από τότε έχει επικρατήσει.

Κεφάλαιο 3ο

Το άπειρο

3.1 Εισαγωγή

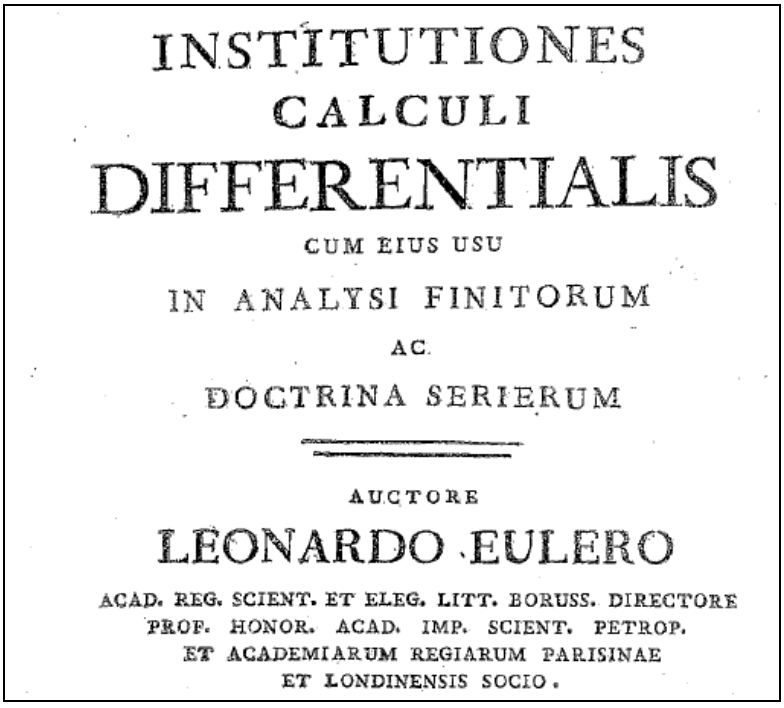
Η ιστορία του απείρου, ως πηγή πολύ μεγάλων δυσκολιών των θεμελιώσεων, είναι πλούσια σε προσπάθειες ορισμού, από τα παράδοξα του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι αυτά του Cantor και του Russel. Η σημερινή ανάπτυξη της *non standar* ανάλυσης, που προσπαθεί να δώσει μια αυστηρή θεμελίωση στον απειροστικό λογισμό, φανερώνει ότι το επιστημολογικό ερώτημα δεν είναι ακόμα κλειστό[88]. Το άπειρο αποτελεί αναμφίβολα μια από τις πιο σημαντικές και ταυτόχρονα τις πιο μυστηριώδεις μαθηματικές και φιλοσοφικές έννοιες. Η επαγωγικής υφής πίστη ότι ο χρόνος είναι χωρίς πέρατα και το απεριόριστο της ανθρώπινης σκέψης με άμεση συνέπεια το απεριόριστο των νοητικών κατασκευών είναι βασικές αιτίες της έλξης του ανθρώπινου νου από την έννοια του απείρου σύμφωνα με τον Αριστοτέλη. Οι διαδικασίες που, κατά τον Αριστοτέλη, είναι υπεύθυνες για την εξοικείωση μας με το άπειρο είναι δύο: η αθροιστική και η διαιρετική διαδικασία. Ο ίδιος διέκρινε το άπειρο, σε δυνητικό και πραγματικό, απορρίπτοντας το δεύτερο αφού θεώρησε αδύνατη την θεώρηση αντικειμένων άπειρων διαστάσεων. Στο Μεσαίωνα, οι φιλόσοφοι συζητούσαν πάνω σ' αυτό το θέμα υποστηρίζοντας άλλοι το *εν δυνάμει* και άλλοι το *εν ενεργεία* άπειρο. Ο Γαλιλαίος συνάντησε δυσκολίες στη μελέτη των απειροσυνόλων και υποστήριξε ότι η ύπαρξη εν ενεργεία απείρων πρέπει να απορριφθεί. Πολύ αργότερα ο Gauss σ' ένα γράμμα του το 1831, γράφει: «*Διαμαρτύρομαι για τη χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής, αυτό στα Μαθηματικά δεν επιτρέπεται ποτέ. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν κατά τον οποίο μπορεί κανείς να μιλάει για τα όρια στα οποία ορισμένοι λόγοι μπορούν να πλησιάζουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι αυξάνονται απεριόριστα*»[89].

Ο Euler στο βιβλίο του *"Institutiones calculi differentialis"*[90] (εισαγωγή στο Διαφορικό Λογισμό θα λέγαμε σήμερα) που εξέδωσε το 1755 αφιερώνει ένα κεφάλαιο

---

[88] Michel Henry, *Διδακτική μαθηματικών*, σελ. 84.
[89] Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, τόμος 2ος,σελ. 207.
[90] Το σύνολο του έργου μεταφράστηκε στα Γερμανικά το 1790. Το βιβλίο είχε δύο μέρη. Το πρώτο μερος είχε 9 κεφάλαια και 278 σελίδες στο πρωτότυπο. Ο John Blanton μετέφρασε αυτό το μέρος του βιβλίου στα αγγλικά το 2000 που κυκλοφόρησε με τίτλο *'Foundations of Differential Calculus'*. Το δεύτερο μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει 18 κεφάλαια ανεπτυγμένα σε 602 σελίδες στο πρωτότυπο, όπου ο Euler αναπτύσσει τον Απειροστικό Λογισμό και τις σειρές.

στη σπουδή του απείρου. Στο 3ο κεφάλαιο , του πρώτου μέρους με τίτλο "on the infinite and the infinitely small", ο Euler προσπαθεί να φωτίσει τα φιλοσοφικά θεμέλια του απειροστικού λογισμού. Ως εκ τούτου το κείμενο είναι περισσότερο φιλοσοφική προσέγγιση παρά αυστηρή μαθηματική θεμελίωση. Αν και ο Euler προσπαθεί σε διάφορα σημεία του έργου του να κάνει μια αξιωματική θεμελίωση της Ανάλυσης[91], στο εν λόγω κεφάλαιο που πραγματεύεται το άπειρο[92] κάνει μια προσπάθεια να βάλει τις στέρεες βάσεις, νιώθοντας έντονα την ανάγκη διατύπωσής τους, χωρίς όμως να το καταφέρνει με επιτυχία, όπως θα δούμε παρακάτω. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι βρισκόμαστε στο 18ο αι. και η αξιωματική θεμελίωση της ανάλυσης δεν έχει ακόμα πραγματοποιηθεί. Η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θα περιμένει ένα ακόμα αιώνα ώσπου ο Dedekind με τις τομές του να βάλει τα στέρεα θεμέλια της ανάλυσης και να δώσει την νομοτέλεια που έλειπε στον απειροστικό λογισμό. Έτσι η διαμάχη μεταξύ του Newton που θεωρούσε ότι τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου είναι απείρως και συνεχώς διαιρετά με τον Leibniz που πίστευε ότι ο κόσμος είναι σύνθεση των αδιαίρετων εσχάτων μερών (μονάδες) ήταν στην ουσία μια διαφωνία για τη φύση των πραγματικών αριθμών και κατ' επέκταση για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού.


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS USU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

Εξώφυλλο από έκδοση της εποχής του Euler

[91] *«Η μαθηματική Ανάλυση δεν είναι τίποτε άλλο από μια συμφωνία του απείρου», David Hilbert*. Μ. Κωνσταντινίδης, *David Hilbert, Για το άπειρο*, σελ. 25.

[92] *«…τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη του απείρου, ο σκοπός τους είναι η συμβολική κατανόηση του απείρου με ανθρώπινα, δηλαδή πεπερασμένα, μέσα»*, *Herman Weyl. ο.π.*, σελ. 6.

3.2 Οι άπειρες ποσότητες

Σύμφωνα με τον Euler κάθε ποσότητα, ανεξάρτητα από το μέγεθός της, μπορεί πάντοτε ν' αυξάνεται και δεν υπάρχει εμπόδιο να προστεθεί σε μια δοσμένη ποσότητα μια άλλη ίδιων χαρακτηριστικών ποσότητα. Επιπρόσθετα, δεν υπάρχει ποσότητα τόσο μεγάλη που να μην μπορεί να βρεθεί μια μεγαλύτερη και έτσι κάθε ποσότητα μπορεί ν' αυξάνεται επ' άπειρο. Δηλαδή κάθε ποσότητα μπορεί ν' αυξάνεται απεριόριστα και χωρίς όριο. Όπως ο ίδιος υποστήριζε αν κάποιος ήθελε να αντικρούσει την αλήθεια της παραπάνω πρότασης, θα έπρεπε να δώσει κάποια ποσότητα η οποία δεν μπορούσε να αυξηθεί και έτσι θα χρειαζόταν να βρεθεί μια ποσότητα στην οποία δεν θα μπορούσε να προστεθεί τίποτα. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την έννοια της ποσότητας η οποία αποκλείει αυτή την δυνατότητα. Έτσι, θα πρέπει να δεχτούμε ότι κάθε ποσότητα μπορεί πάντοτε ν' αυξάνεται δίχως όριο, δηλαδή να αυξάνεται μέχρι το άπειρο.

Αν και ο τρόπος που όρισε τη συνάρτηση ο Euler δεν βασίζεται σε σύνολα, η νύξη που κάνει για **είδος ποσότητας**[93] μας παραπέμπει έμμεσα στο πεδίο ορισμού. Ο Euler προσπαθώντας να μας εισάγει στην έννοια του απείρου χρησιμοποιεί τη «σειρά[94]» των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, …[95] και συγχρόνως δίνει την ευθεία γραμμή ως ένα είδος γεωμετρικής αναπαράστασης της αυξητικής της ιδιότητας. Οι φυσικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο μη τετριμμένο που διαισθητικά το προσεγγίζουμε εύκολα μέσω του επαγωγικού τρόπου ορισμού του. Πράγματι δεν υπάρχει κάποιος αριθμός στον οποίο αν προστεθεί η μονάδα δεν θα συνέθετε τον επόμενο αριθμό ο οποίος είναι μεγαλύτερος. Συνεπώς, η σειρά των φυσικών συνεχίζει δίχως όριο, κι ούτε είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε κάποιο «μέγιστο[96]» αριθμό πέρα από τον οποίο δεν υπάρχει άλλος μεγαλύτερος αριθμός. Οι φυσικοί αριθμοί δεν έχουν όριο. Με όμοιο τρόπο η ευθεία γραμμή δεν μπορεί να εκταθεί ως κάποιο σημείο που να μην μπορεί να εκταθεί περαιτέρω. Από αυτό είναι φανερό ότι, και οι «ακέραιοι» και η ευθεία γραμμή μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα μέχρι το άπειρο. Έτσι ανεξάρτητα από το είδος της ποσότητας που έχουμε, συμπεραίνουμε ότι κάθε ποσότητα, ανεξάρτητα από το

---

[93] *"kind of quantity"* J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 73.

[94] Μιλάει για σειρά και όχι για σύνολο αφού ακόμα δεν έχει οριστεί (δεν έχουμε θεωρία συνόλων).

[95] Παρατηρούμε ότι ο Euler δεν περιλαμβάνει το μηδέν στους φυσικούς. Άλλωστε είναι το μόνο στοιχείο που δεν είναι επόμενο κάποιου προηγούμενου και εκ των πραγμάτων θα αποτελούσε εξαίρεση της επιχειρηματολογίας του.

[96] Αναφέρει ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο (αρχιμήδεια ιδιότητα).

μέγεθός της, μπορεί πάντοτε να γίνεται όλο και μεγαλύτερη και έτσι να αυξάνεται δίχως όριο μέχρι το άπειρο.

Ο Euler αναφέρει: «*η θεωρία του απείρου είναι συσχετισμένη με τόσες πολλές δυσκολίες και ακόμη παραπέρα με τόσες ανακολουθίες που προέκυψαν από την προσπάθεια αρκετών επιστημόνων να την εξηγήσουν, ώστε με κανέναν τρόπο δεν είναι ορατό το πώς θα ξεκαθαριστούν*»[97]. Το άπειρο ανέκαθεν προξένησε και προξενεί αρκετές δυσκολίες και προβλήματα στο καθορισμό του όπως και στην κατανόησή του. Είναι χαρακτηριστικό ότι αρκετά χρόνια αργότερα το 1925 ο Hilbert επισημαίνει αυτή ακριβώς τη δυσκολία λέγοντας: «*…η σημασία του απείρου δεν έχει διευκρινιστεί ακόμα πλήρως*» Από το γεγονός ότι μια ποσότητα μπορεί ν' αυξηθεί στο άπειρο, κάποιοι συμπέραναν ότι υπήρχε πράγματι μια άπειρη ποσότητα και την περιγράψανε με τέτοιον τρόπο σύμφωνα με τον οποίο αυτή η ποσότητα δεν μπορούσε ν' αυξηθεί. Έτσι όμως η ιδέα της ποσότητας έχανε τη βασική της ιδιότητα και ερχόταν σε αντίθεση με τον ορισμό της μεταβλητής ποσότητας του Euler που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, η ύπαρξη μιας τέτοιας ποσότητας θα ήταν αντιφατική καθώς θέτοντας ένα όριο στην αυξητική ιδιότητα της ποσότητας δεν θα μπορούσε να προκύψει άπειρη ποσότητα με επαγωγικό τρόπο.

Ο Euler από το γεγονός ότι **κάθε ποσότητα** μπορεί να αυξηθεί ως το άπειρο συμπέρανε ότι δεν υπάρχει άπειρη ποσότητα. Αυτό που φαίνεται είναι ότι η μαθηματική του διαίσθηση τον είχε οδηγήσει στη διάκριση του ορίου και της αριθμητικής τιμής. Η ποσότητα τείνει στο άπειρο αλλά δεν είναι άπειρη η ίδια. «*Μια ποσότητα που αυξάνεται συνεχώς δεν γίνεται άπειρη εκτός αν θα έχει ήδη αυξηθεί δίχως όριο. Ωστόσο, εκείνο που πρέπει να αυξηθεί δίχως όριο δεν μπορεί να εκληφθεί σαν να είναι ήδη άπειρο*»[98]. Παρόλο ότι δεν δέχεται την ύπαρξη της άπειρης ποσότητας αναγκάζεται να δεχθεί την ύπαρξη άπειρων αριθμών προκειμένου να αντιμετωπίσει κάποια προβλήματα.

«Αν υπάρχουν πράγματα που είναι άπειρα διαιρετά, όπως πολλοί φιλόσοφοι πιστεύουν, το πλήθος των μερών που συγκροτούν αυτά τα πράγματα είναι πράγματι άπειρο. Έτσι αν ισχύει ο ισχυρισμός ότι ο αριθμός είναι πεπερασμένος τότε οι αρχικές ποσότητες δεν μπορεί να είναι άπειρα διαιρετές. Με όμοιο τρόπο αν όλος ο κόσμος ήταν άπειρος τότε ο αριθμός των σωμάτων που συγκροτούν τον κόσμο σίγουρα θα ήταν

[97] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 74, p. 48.
[98] Ο.π., § 75, p. 48.

άπειρος και όχι πεπερασμένος.» Με αυτό το επιχείρημα ο Euler μας εισάγει το δίπολο πεπερασμένου - απείρου για να καταλήξει τελικά στο ότι **το μη πεπερασμένο είναι ταυτόσημο με το άπειρο**.

Ο συλλογισμός του ακολούθησε την παρακάτω πορεία. Οποιοσδήποτε ισχυρίζεται ότι κάποιο υλικό είναι άπειρα διαιρετό αρνείται ότι κατά τη συνεχή διαίρεση του υλικού οδηγείται σε τόσο μικρά κομμάτια που δεν μπορούν να διαιρεθούν περαιτέρω. Άρα, αυτό το υλικό στο οποίο θα φτάναμε δεν έχει έσχατα μέρη (αδιαίρετα), μιας και τα αδιαίρετα μέρη στα οποία φτάνει κάποιος με τη συνεχή διαίρεση πρέπει να είναι ικανά να υποβληθούν σε περαιτέρω υποδιαίρεση. Συμπερασματικά, οποιοσδήποτε σε αυτήν την περίπτωση λέει ότι ο αριθμός των μερών είναι άπειρος, επίσης κατανοεί ότι τα έσχατα μέρη είναι αδιαίρετα και προσπαθεί να μετρήσει αυτά τα μέρη που δεν είναι ποτέ προσεγγίσιμα και ως εκ τούτου ανύπαρκτα. Αν κάποιο υλικό έχει τη δυνατότητα πάντοτε να υποδιαιρείται στερείται αδιαίρετων ή εντελώς στοιχειωδών ποσοτήτων. Γι αυτό το λόγο όποιος ισχυρίζεται ότι κάποιο υλικό μπορεί να διαιρεθεί επ' άπειρο αρνείται ότι το υλικό αποτελείται από στοιχειώδη μέρη.

Όσο αφορά τα μέρη ενός σώματος ή ενός υλικού, δεν κατανοούμε τα έσχατα ή τα στοιχειώδη μέρη του, από τα οποία κανένα δεν υφίστανται, αλλά εκείνα που προκύπτουν πραγματικά από τη διαίρεση. Τότε, αφού υποθετικά παραδεχόμαστε ότι το υλικό είναι άπειρα διαιρετό, ακόμα κι ένα πολύ μικρό μέρος ενός υλικού μπορεί να διαιρεθεί σε πολλά μέρη, παρόλα αυτά δεν υπάρχει αριθμός που να μπορεί να δοθεί και να είναι τόσο μεγάλος ώστε ένας μεγαλύτερος αριθμός μερών κομμένος από αυτό το μέρος να μπορεί να φανερωθεί. Έτσι ο αριθμός των μερών, των πράγματι μη εσχάτων, δηλαδή αυτών που επιδέχονται περαιτέρω διαίρεση και συνθέτουν κάθε σώμα, είναι μεγαλύτερος από κάθε αριθμό που μπορεί να δοθεί. Έτσι λοιπόν αν όλο το σύμπαν είναι άπειρο, ο αριθμός των σωμάτων που συγκροτούν το σύμπαν είναι μεγαλύτερος από κάθε αριθμό. Αφού αυτός δεν είναι πεπερασμένος αριθμός καταλήγει στο συμπέρασμα ότι ένας άπειρος αριθμός και ένας αριθμός μεγαλύτερος από οποιοδήποτε αριθμό είναι ταυτόσημες έννοιες.

Ο Euler δέχεται την άπειρη διαιρετότητα ως σύννομη με τη λογική και σίγουρα ως πιο βολική για την μελέτη του Απειροστικού Λογισμού όπως θα δούμε παρακάτω. Αυτά τα έσχατα μέρη ονομάζονται από μερικούς άτομα[99], από άλλους μονάδες ή στοιχειώδεις οντότητες. Αυτά τα έσχατα μέρη δε διαιρούνται για δύο λόγους. Ο πρώτος

[99] Ο Δημόκριτος πίστευε πως η διαίρεση ενός υλικού σώματος πρέπει να σταματά σε κάποιο απειρο-ελάχιστο και αδιαίρετο στοιχείο, το άτομο (δηλαδή το άτμητο).

είναι ότι δεν έχουν μέγεθος (έκταση) και ο δεύτερος είναι πως αν και έχουν μέγεθος είναι τόσο αδιαπέραστα και σκληρά ώστε καμιά δύναμη δεν είναι αρκετή ώστε να τα διαιρέσει[100], να τα διαιρέσει. Σε κάθε επιλογή υπήρχε μια επιχειρηματολογία που οδηγούσε σε αντιφάσεις. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι τα έσχατα μέρη στερούνται οποιουδήποτε μεγέθους τότε υπολείπονται και περαιτέρω μερών. Παρόλα αυτά είναι αδύνατο να συλλάβουμε πώς ένα σώμα μπορεί να συσταθεί από ένα πεπερασμένο αριθμό μερών αυτού του είδους. Ο Euler δίνει το εξής παράδειγμα: Έστω ότι ένα κυβικό πόδι (μονάδα όγκου ίση με 0,028cm^3) ενός υλικού αποτελείται από χίλιες στοιχειώδεις οντότητες αυτού του είδους και ότι στην πραγματικότητα κατακερματίζεται σε χίλια κομμάτια. Αν αυτά τα κομμάτια είναι ίσα, τότε το καθένα από αυτά θα είναι ίσο με ένα κυβικό δάχτυλο. Αν δεν είναι ίσα, μερικά θα είναι μεγαλύτερα και μερικά μικρότερα. Ένα κυβικό δάχτυλο θα είναι μια στοιχειώδη οντότητα και θα έρθουμε αντιμέτωποι με μια μεγάλη αντίφαση εκτός αν δεχτούμε ότι υπάρχει μια στοιχειώδη οντότητα και το υπόλοιπο του χώρου είναι άδειο. Με αυτόν τον τρόπο όμως *αναιρείται η συνέχεια του σώματος*.[101] Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, το άπειρο και το συνεχές είναι ουσιωδώς συναρτημένα, έτσι, ώστε οποιαδήποτε προσπάθεια ανάλυσης του δεύτερου να απαιτεί αναγκαστικά και σύγχρονη προσπάθεια ανάλυσης ή μελέτης του πρώτου. Αν κάποιος μπορούσε να αντιτείνει ότι ο αριθμός των στοιχειωδών οντοτήτων που περιλαμβάνονται σε ένα κυβικό πόδι ύλης είναι πολύ μεγαλύτερος από χίλια δεν θα κέρδιζε απολύτως τίποτα. Οποιαδήποτε δυσκολία ακολουθεί τον αριθμό χίλια θα παραμείνει με οποιοδήποτε άλλο αριθμό ανεξάρτητα από το μέγεθός του. Ο Euler αναφέρει: «*Ο εμπνευστής της μονάδας, ένας πολύ οξυδερκής άντρας, ο Leibniz, εξέτασε σε βάθος αυτό το πρόβλημα και τελικά αποφάσισε ότι η ύλη διαιρείται επ' άπειρο. Ως εκ τούτου δεν είναι δυνατό να φτάσει στη μονάδα πριν το σώμα διαιρεθεί άπειρα*». Είναι φανερό ότι η έλλειψη των κατάλληλων ορισμών το 18^{ο} αιώνα δημιουργούσε πολλά προβλήματα. Αν και η διαίσθηση αυτών των μεγάλων ήταν τις περισσότερες φορές στη σωστή κατεύθυνση, η έλλειψη των κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων τους εγκλώβιζε σε σειρά αντιφάσεων. Η ιδιοφυία του Euler και η μελέτη των προκατόχων του από τον ίδιο τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι αυτός που αρνείται ότι τα σώματα σχηματίζονται από στοιχειώδεις οντότητες και αυτός που

[100] Θεωρεί δεδομένο ότι η ενέργεια που θα χρειαζόταν για κάτι τέτοιο, θα έπρεπε να είναι τεράστια. Πολύ αργότερα, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η ατομική ενέργεια θα αποκτήσει υπόσταση και θα ανατρέψει το ατομικό μοντέλο που κυριάρχησε χιλιάδες χρόνια.

[101] Αριστοτέλης: *«Το άπειρο εμφανίζεται κατά προτεραιότητα στο συνεχές: γι' αυτό και το άπειρο χρησιμοποιείται συχνά στους ορισμούς του συνεχούς, όταν λέμε ότι το άπειρα διαιρέσιμο είναι συνεχές»*.

υποστηρίζει ότι τα σώματα διαιρούνται επ' άπειρο και οι δύο συνομολογούν το ίδιο πράγμα. Ο Euler θεωρεί ότι και οι δύο απόψεις, του Newton και του Leibniz, είναι εκφάνσεις της ίδιας πραγματικότητας. Δέχεται την επ' άπειρο διαιρετότητα της ύλης και αντιλαμβάνεται τις στοιχειώδεις οντότητες ως αδιάστατα μεγέθη.

Μέσα από τη σπουδή του απείρου που κάνει ο Euler στο κεφάλαιο αυτό μας δείχνει και τις φιλοσοφικές του πεποιθήσεις. Απορρίπτοντας τις στοιχειώδεις οντότητες και τον πεπερασμένο χαρακτήρα τους αναδεικνύει τη διάνοια ως το ασφαλές κριτήριο της αλήθειας. Απορρίπτει τα συμπεράσματα των αισθήσεων κατά το μεγαλύτερο μέρος τους και θέτει τα Μαθηματικά στην ανώτερη βαθμίδα του ορθολογισμού. Η καθαρή διάνοια δέχεται τη δυνατότητα ότι το ένα χιλιοστό του κυβικού ποδιού στερείται έκτασης (μεγέθους), ενώ αυτό φαίνεται παράδοξο στη διαίσθηση. Αυτό που συχνά εξαπατά τις αισθήσεις μπορεί να είναι αληθινό, αλλά αυτό μπορούν να το διαπιστώσουν μόνο μαθηματικοί όπως ο ίδιος αναφέρει. Τα Μαθηματικά μας προστατεύουν από τα λάθη των αισθήσεων και μας διδάσκουν για τα αντικείμενα που συλλαμβάνονται από τις αισθήσεις, κάποιες φορές σε βάθος και κάποιες φορές μόνο επιφανειακά. Η μαθηματική επιστήμη είναι μακριά από κάθε μεταφυσικό επιχείρημα το οποίο θα την καθιστούσε αναξιόπιστη. Οι απόψεις του θυμίζουν έντονα τη γνωσιοθεωρία του Πλάτωνα σύμφωνα με την οποία η διάκριση ανάμεσα στον κόσμο των Ιδεών και τον κόσμο των αισθήσεων είναι το όριο της αλήθειας. Η αίσθηση είναι το ερέθισμα ενώ η διάνοια οριοθετεί το πλαίσιο ελέγχου και επικύρωσης της γνώσης. Παρόλο αυτά η μαθηματική ενόραση απαλλαγμένη από την άμεση αισθητηριακή αντίληψη έπαιξε καθοριστικό ρόλο στο έργο του Euler και τον οδήγησε συχνά σε μεγαλοφυή συμπεράσματα.

Ο Euler αν και δεν δέχεται την ύπαρξη άπειρης ποσότητας εντούτοις θεωρεί αναγκαία την ύπαρξη άπειρων αριθμών μιας και αυτοί εμφανίζονται συχνά σε μαθηματικούς υπολογισμούς. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα αναφέρει το άθροισμα της σειράς 1+2+3+4+5+… Αφού αυτοί οι αριθμοί συνεχίζουν χωρίς τέλος, και το άθροισμα αυξάνει, σίγουρα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο, άρα θα γίνεται άπειρο. Άρα, ο αριθμός που θα εκφράζει αυτό το άθροισμα θα είναι μεγαλύτερος από κάθε άλλο και ως εκ τούτου άπειρος. Προκειμένου να παραστήσει αυτό τον αριθμό χρησιμοποίησε το γνωστό σύμβολο του απείρου[∞][102], με το οποίο εννοούσε έναν αριθμό μεγαλύτερο από κάθε πεπερασμένο. Αν και στο συγκεκριμένο έργο του

[102] Το σύμβολο ∞ χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον John Wallis, στο βιβλίο του *'Arithmetica Infinitorum'* (1656).

απόφυγε την όποια επιχειρηματολογία θα στηριζόταν στη γεωμετρία σ' αυτό το σημείο ο Euler αναφέρει: «*Άρα, όταν μια παραβολή πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να πούμε ότι είναι μια άπειρη έλλειψη, μπορούμε σωστά να πούμε ότι ο άξονας της παραβολής είναι μια ευθεία γραμμή άπειρου μήκους*»[103].

3.3 Απείρως μικρές ποσότητες (απειροστά)

Σύμφωνα με τον Euler κάθε ποσότητα μπορεί να ελαττωθεί τόσο ώστε να εξαφανιστεί. Έτσι μια απείρως μικρή ποσότητα είναι μια ποσότητα που εξαφανίζεται (χάνεται) και άρα είναι στην πραγματικότητα **ίση με το μηδέν** σύμφωνα με τον ίδιο. Υπάρχει επίσης ένας ορισμός της απείρως μικρής ποσότητας ως μια ποσότητα που είναι μικρότερη από οποιαδήποτε άλλη. Αυτόν όμως τον θεωρεί αντιφατικό. Ο Euler καταλήγει στο ότι η απείρως μικρή ποσότητα στα Μαθηματικά είναι μια ποσότητα που είναι ίση με το μηδέν. Για την ακρίβεια μια ποσότητα που καταλήγει να είναι μηδέν. Είναι μια υπόθεση που του είναι απαραίτητη στους υπολογισμούς του και δεν διστάζει να τη διατυπώσει ξεκάθαρα. Από το κείμενο είναι φανερό πως προσπαθεί να το *αποδείξει,* αλλά όπως θα δούμε παρακάτω αυτό που κάνει είναι περισσότερο να μας δείχνει τους τρόπους για την ορθή διαχείριση αυτής της υπόθεσης.

Ο Euler αφού ολοκλήρωσε την επιχειρηματολογία του σχετικά με το «απείρως μεγάλο» μας εισάγει στην έννοια του «απείρως μικρού». Ενώ στην πρώτη περίπτωση η θεώρηση είναι περισσότερο φραστικός συλλογισμός και το σύμβολο (∞) ενιαίο, στην περίπτωση του «άπειρα μικρού» τα πράγματα διαφοροποιούνται. Χρησιμοποιεί μια *γεωμετρική αναλογία* προκειμένου να συγκρίνει τις διαφορετικές «άπειρα μικρές» ποσότητες και να καταλήξει στον απαιτούμενο συμβολισμό. Αποδεικνύει, θα μπορούσαμε να πούμε, το γεγονός ότι αν και οι ποσότητες[104] αυτές είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με το μηδέν, παρόλα αυτά χρειαζόμαστε διαφορετικά σύμβολα για να τις αναπαραστήσουμε. Αναφέρει συγκεκριμένα: «*Ενώ δυο μηδενικά είναι ίσα μεταξύ τους, έτσι ώστε να μην έχουν διαφορά, εντούτοις όμως έχουμε δύο τρόπους να τα συγκρίνουμε, αριθμητικό ή γεωμετρικό, γι αυτό ας δούμε τα πηλίκα των ποσοτήτων που συγκρίνονται με τους δύο αυτούς τρόπους για να εντοπίσουμε τη διαφορά.*» Έτσι, ενώ ο *αριθμητικός λόγος* (αναλογία) ανάμεσα σε δύο μηδενικά είναι μια ισότητα, δεν ισχύει το ίδιο στην περίπτωση μιας γεωμετρικής αναλογίας. Αυτό το στηρίζει στο έξης: στη *γεωμετρική*

[103] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 82.
[104] Ο Blanton στη μετάφραση του *"Institutiones calculi differentialis"* χρησιμοποιεί τη λέξη "nothings" για να αποδώσει αυτές τις ποσότητες.

αναλογία $\frac{2}{1}=\frac{0}{0}$ ο τέταρτος όρος είναι ίσος με μηδέν όπως και ο τρίτος. Από τη φύση της πρότασης, αφού ο πρώτος όρος είναι ο διπλάσιος του δεύτερου, είναι αναγκαίο ο τρίτος να είναι ο διπλάσιος του τέταρτου.

Ξεκινώντας από την αλήθεια της σχέσης $n\cdot 0=0$ συμπεραίνει ότι $\frac{n}{1}=\frac{0}{0}$[105]. Έτσι δείχνει ότι δύο μηδενικά μπορεί να βρίσκονται σε διαφορετική αναλογία, παρόλο που από την άποψη της αριθμητικής, είναι αναλογία ίσων. Αφού λοιπόν μεταξύ μηδενικών κάθε αναλογία είναι δυνατή, για να δείξουμε αυτήν την ποικιλομορφία χρησιμοποιούμε διαφορετικούς συμβολισμούς για κάθε σκοπό, ειδικά όταν ερευνάται μια γεωμετρική αναλογία μεταξύ δύο μηδενικών. Στο λογισμό του απείρως μικρού, ασχολούμαστε ακριβώς με τις γεωμετρικές αναλογίες των απείρως μικρών ποσοτήτων και αυτός είναι ο λόγος που θα πρέπει να χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για να παραστήσουμε αυτές τις ποσότητες.

Το σύμβολο που χρησιμοποίησε προκειμένου να συμβολίσει την άπειρα μικρή ποσότητα ήταν το dx. Έτσι αφού το $dx=0$ θα είναι και το $adx=0$, όπου a είναι μια πεπε-ρασμένη ποσότητα. Παρόλα αυτά ο γεωμετρικός λόγος $\frac{adx}{dx}$ είναι πεπερασμένος και συγκεκριμένα είναι $\frac{a}{1}$. Γι' αυτό το λόγο αυτές οι άπειρα μικρές ποσότητες dx και adx παρόλο που είναι και οι δύο ίσες με το 0 δεν μπορούν να μπερδευτούν όταν υπολογί-ζουμε το λόγο τους. Με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε να κάνουμε με τις άπειρα μικρές ποσότητες dx και dy. Παρόλο που αυτά είναι και τα δύο ίσα με 0 εντούτοις ο λόγος τους δεν είναι αυτός των ίσων. Πράγματι όλη η δύναμη του διαφορικού λογισμού αφορά τη μελέτη των λόγων οποιωνδήποτε δύο απείρως μικρών ποσοτήτων αυτού του είδους. (Sandifer '*foundation of calculus*'). Ο Euler τονίζει την αξία αυτών και δήλωνε πεπεισμένος για τον καθοριστικό ρόλο που θα έπαιζαν στο μέλλον. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η έννοια του απειροστού όχι μόνο υπήρξε η βάση της ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού αλλά και η βασική ιδέα της *non standard analysis*. Το 1966 ο Abraham Robinson εισήγαγε τους λεγόμενους «μη κλασικούς» πραγματικούς αριθμούς, ένα δηλαδή μη κλασικό πρότυπο για τους πραγματικούς αριθμούς εκ των οποίων μερικοί είναι μικρότεροι από κάθε ρητό αλλά μεγαλύτεροι του μηδενός.

[105] Διαιρεί με το μηδέν την προηγούμενη ισότητα.

Αφού το απείρως μικρό είναι στην πραγματικότητα τίποτα (*nothing*[106]) σύμφωνα με τον Euler, είναι φανερό ότι μια πεπερασμένη ποσότητα μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται προσθέτοντας ή αφαιρώντας μια μικρή ποσότητα. Αν a είναι μια πεπερασμένη ποσότητα και dx μια άπειρα μικρή (ποσότητα) τότε $a+dx$ και $a-dx$ ή γενικότερα $a \pm ndx$ είναι ίσα με a. Παρόλο που θεωρούμε τη σχέση μεταξύ του $a \pm ndx$ και του a ως αριθμητική περισσότερο παρά ως γεωμετρική, και στις δύο περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι ο λόγος αυτός είναι ο λόγος μεταξύ ίσων. Ο αριθμητικός λόγος των ίσων είναι φανερός αφού $ndx = 0$ απ' όπου έχουμε $a \pm ndx - a = 0$. Από την άλλη ο γεωμετρικός λόγος ισχύει όταν $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$. Από αυτό προκύπτει ο *γνωστός* κανόνας ότι η απείρως μικρή ποσότητα απαλείφεται σε σύγκριση με το πεπερασμένο και άρα μπορεί να μη ληφθεί υπόψη (δηλαδή αφού $dx \to 0$ dx διαγράφεται). "*Για αυτό το λόγο η ένσταση που προκύπτει από την ανάλυση του απείρου, ότι υπολείπεται αυστηρής γεωμετρικής ερμηνείας, αποτυγχάνει γιατί και η πιο αμελητέα ποσότητα δεν λαμβάνεται ως τίποτα (όπως στην Αριθμητική). Έτσι με τεκμηρίωση μπορούμε να* σταθεροποιήσουμε ότι σε αυτήν την υπέροχη επιστήμη των Μαθηματικών κρατούμε την ίδια τέλεια γεωμετρική αυστηρότητα που συναντάμε στα βιβλία των αρχαίων"[107]. Τα παραπάνω δεν μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως απόδειξη αλλά σίγουρα αποτυπώνουν την ιστορική εξέλιξη σημαντικών εννοιών.

3.4 Η "*Άλγεβρα*" των διαφορικών

Αφού η απείρως μικρή ποσότητα dx είναι **ίση** με το 0, το τετράγωνό της dx^2 και ο κύβος της dx^3 όπως και κάθε dx^n όπου n θετικός εκθέτης θα είναι ίσος με το 0 και σε σύγκριση με μια πεπερασμένη ποσότητα θα απαλείφεται. Εντούτοις ακόμα και η απείρως μικρή ποσότητα dx^2 απαλείφεται συγκρινόμενη με το dx. Ο λόγος $\frac{dx \pm dx^2}{dx}$ είναι εκείνος των ίσων ανεξαρτήτως αν η σύγκριση είναι αριθμητική ή γεωμετρική. Για την αριθμητική είναι ξεκάθαρο. Για τη γεωμετρική σύγκριση έχουμε: $\frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$. Με όμοιο τρόπο έχουμε $dx \pm dx^3 = dx$ και γενικότερα $dx \pm dx^{n+1} = dx$, όπου n θετικός εκθέτης. Πράγματι ο γεωμετρικός λόγος

[106] Αυτή ακριβώς τη λέξη χρησιμοποιεί ο J. Blanton στη μετάφραση του Euler.
[107] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 87.

$\frac{dx \pm dx^{n=1}}{dx} = 1 + dx^n$, αφού $dx^n = 0$ ο λόγος είναι αυτός των ίσων. Χρησιμοποιώντας τους εκθέτες συμβόλιζε με dx το άπειρα μικρό πρώτης τάξης, με dx^2 το δεύτερης τάξης, με dx^3 το τρίτης τάξης και ούτω καθεξής. Αυτό είναι καθαρό μέσα από τη σύγκριση του dx με το dx^n , n θετικός εκθέτης, όπου οι απείρως μικρές ποσότητες μεγαλύτερης τάξης απαλείφονται.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύει ότι μια απείρως μικρή ποσότητα τρίτης ή μεγαλύτερης τάξης απαλείφεται συγκρινόμενη με μια της δεύτερης τάξης. Γενικότερα, μια απείρως μικρή ποσότητα μεγαλύτερης τάξης απαλείφεται συγκρινόμενη με μια κατώτερης τάξης. Έτσι αν $m < n$ τότε $adx^m + bdx^n = adx^m$, όπου το dx^n απαλείφεται σε σχέση με το dx^m, όπως είπαμε. Αυτό ισχύει επίσης και όταν οι εκθέτες είναι κλασματικοί, δηλαδή το dx απαλείφεται σε σχέση με το $\sqrt{dx}$ $(dx^{1/2})$ έτσι ώστε $a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}$. Ακόμα κι αν ο εκθέτης του dx είναι ίσος με 0 εμείς έχουμε $dx^0 = 1$ όπου $dx = 0$. Έτσι, η δύναμη του dx^n γίνεται ίση με 1 αν $n = 0$ και από το να είναι μια πεπερασμένη ποσότητα γίνεται απείρως μικρή ποσότητα αν $n > 0$. Καταλήγει λοιπόν ότι υπάρχει ένας **άπειρος αριθμός** τάξεων μικρών ποσοτήτων και παρόλο που όλες αυτές είναι ίσες με το 0, θα πρέπει να είναι είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στη χρήση τους όπως φάνηκε από τις προηγούμενες σχέσεις.

Αφού εισάγαγε την έννοια του απείρως μικρού ανέπτυξε τις ιδιότητες του α-πείρου ή του απείρως μεγάλου. Έτσι το κλάσμα $1/z$ γίνεται τόσο μεγαλύτερο όσο μικραίνει ο παρανομαστής z. Αν z είναι μια ποσότητα μικρότερη από κάθε διακριτή-πεπερασμένη ποσότητα, δηλαδή απείρως μικρή, τότε η τιμή του κλάσματος $1/z$ γίνεται μεγαλύτερη από οποιαδήποτε πεπερασμένη ποσότητα, και έτσι άπειρη. Γι' αυτό αν η μονάδα ή οποιαδήποτε πεπερασμένη ποσότητα διαιρεθεί με κάτι απείρως μικρό ή "μηδέν", το πηλίκο θα είναι απείρως μεγάλο, δηλαδή μια άπειρη ποσότητα. Αφού το σύμβολο του απείρου ∞ χρησιμοποιήθηκε για μια απείρως μεγάλη ποσότητα, δίνει την ισότητα $\frac{a}{dx} = \infty$. Την αλήθεια αυτού την στηρίζει στην αντιστροφή της προηγούμενης σχέσης $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. Εδώ ο Euler παρόλο που δεν διέθετε ορισμό του **ορίου** δίνει δυο

πολύ βασικά αποτελέσματα προκειμένου να αναπτύξει τον Απειροστικό Λογισμό. Με σύγχρονο συμβολισμό είναι: $\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty$ και $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$.

Έτσι όσο μεγαλύτερος είναι ο παρανομαστής z του κλάσματος $1/z$ τόσο μικρότερη τιμή παίρνει το κλάσμα έτσι ώστε αν το z γίνει μια άπειρα μεγάλη ποσότητα, δηλαδή $z=\infty$ τότε απαραίτητα η τιμή του a/∞ γίνεται απείρως μικρή.

Τα παραπάνω τα θεωρεί τόσο αδιάψευστα που γράφει: "*Οποιοσδήποτε αρνείται αυτά τα επιχειρήματα θα δυσκολευτεί με την αναγκαιότητα της διάψευσης ακόμα και των πιο βέβαιων αρχών της ανάλυσης*". Η *απόδειξη* που δίνει είναι η παρακάτω:

Έστω κάποιος ότι υποστηρίζει ότι το κλάσμα $a/0$ είναι πεπερασμένο και έστω ότι θέτουμε $a/0=b$ τότε και τα δύο μέρη της ισότητας είναι πολλαπλασιασμένα από τον παρανομαστή. Δηλαδή $\frac{a}{0}=b\Rightarrow 0\cdot\frac{a}{0}=0\cdot b\Rightarrow a=0\cdot b$. Τότε η πεπερασμένη ποσότητα b πολλαπλασιασμένη με το 0 παράγει ένα πεπερασμένο a που είναι άτοπο. Πολύ λιγότερο η τιμή b του $a/0$ μπορεί να είναι ίση με το 0. Με κανένα τρόπο το 0 πολλαπλασιασμένο με το 0 δεν παράγει την ποσότητα a. Στο ίδιο άτοπο θα καταλήξει κι όποιος αρνείται ότι $\frac{a}{\infty}=0$, αφού θα ήταν σαν να έλεγε ότι $\frac{a}{\infty}=b$ δηλαδή μια πεπερασμένη ποσότητα. Από την ισότητα $\frac{a}{\infty}=b$ θα προέκυπτε ότι $\infty=\frac{a}{b}$ αλλά από αυτό θα συμπεραίναμε ότι το κλάσμα $\frac{a}{b}$, με a, b πεπερασμένες ποσότητες είναι άπειρο το οποίο είναι επίσης άτοπο. Ούτε είναι δυνατό οι τιμές των κλασμάτων $\frac{a}{0}$ και $\frac{a}{\infty}$ να είναι μιγαδικές (complex) αφού η τιμή του κλάσματος με αριθμητή πεπερασμένο και παρανομαστή μιγαδικό δεν μπορεί να είναι ούτε απείρως μεγάλη ούτε απείρως μικρή.

Ο Euler ικανοποιημένος από την παραπάνω επιχειρηματολογία έδωσε εκ νέου τους ορισμούς της απείρως μικρής και μεγάλης ποσότητας με πιο μαθηματικό τρόπο θα λέγαμε. Έτσι μια **απείρως μεγάλη ποσότητα** είναι το πηλίκο που προκύπτει από τη διαίρεση μιας πεπερασμένης ποσότητας προς μια απείρως μικρή ποσότητα.

Αντίστροφα μια **απείρως μικρή ποσότητα** είναι το πηλίκο που προκύπτει από τη διαίρεση μιας πεπερασμένης ποσότητας προς μια απείρως μεγάλης ποσότητας. Έτσι λοιπόν μια απείρως μικρή ποσότητα είναι απείρως μεγάλη ποσότητα σε σχέση με μια πεπερασμένη ποσότητα και μια άπειρη ποσότητα είναι απείρως μεγαλύτερη από μια πεπερασμένη ποσότητα. Παρακάτω από την ισότητα $\frac{a}{0}=\infty$ συμπεραίνει ότι το 0 πολλαπλασιασμένο με μια απείρως μεγάλη ποσότητα παράγει μια πεπερασμένη ποσότητα. Δηλαδή ότι $0\infty = a$. Το αποτέλεσμα αυτό, αν και περίεργο όπως ο ίδιος ομολογεί, το δέχεται ως αληθές αφού "*είναι αποτέλεσμα ενός ξεκάθαρου επαγωγικού συλλογισμού*".

Το επόμενο συμπέρασμα που μας δίνει με σύγχρονο συμβολισμό είναι το $\lim_{x\to\infty} ax = \infty$. Η τεκμηρίωση που δίνει είναι παρόμοια με τα προηγούμενα και είναι η ακόλουθη:

Όπως όταν συγκρίνουμε απείρως μικρές ποσότητες με ένα γεωμετρικό λόγο μπορούμε να βρούμε τεράστιες διαφορές, έτσι όταν συγκρίνουμε απείρως μεγάλες ποσότητες η διαφορά που προκύπτει μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη εφόσον δεν διαφέρουν μόνο στους γεωμετρικούς λόγους αλλά και στους αριθμητικούς. Έτσι A είναι μια άπειρη ποσότητα που προέκυψε από τη διαίρεση μιας πεπερασμένης ποσότητας a από μια άπειρα μικρή dx έτσι ώστε $\frac{a}{dx}=A$. Ομοίως $\frac{2a}{dx}=2A$ και $\frac{na}{dx}=nA$. Αφού $n\cdot A$ είναι μια άπειρη ποσότητα προκύπτει ότι ο λόγος μεταξύ δύο απείρως μεγάλων ποσοτήτων μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Έτσι **αν μια άπειρη ποσότητα είτε διαιρείται είτε πολλαπλασιάζεται με ένα πεπερασμένο αριθμό το αποτέλεσμα θα είναι πάλι μια άπειρη ποσότητα**.

Ο Euler μας εισάγει στη θεωρία του απείρου και δεν παραλείπει συνεχώς να δίνει παραδείγματα της αναγκαιότητας του. Έτσι στην παράγραφο 94 του εν λόγω κεφαλαίου γράφει: "*Παρόλα αυτά υπάρχουν μερικοί για τους οποίους η ιδέα του απείρου, που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά, φαίνεται να είναι ύποπτη και για αυτό το λόγο πιστεύουν ότι η ανάλυση του απείρου πρέπει να απορριφθεί. Ωστόσο ακόμα και στα λιγότερα σημαντικά θέματα των Μαθηματικών δεν μπορούμε να κάνουμε χωρίς την έννοια του απείρου. Στην αριθμητική όπου η θεωρία των λογαρίθμων αναπτύσσεται, ο λογάριθμος του 0 (*$\log 0$*) λαμβάνεται και ως αρνητικός και ως άπειρος. Δεν υπάρχει κανένας νοήμων που θα τολμούσε να πει ότι αυτός ο λογάριθμος είναι ή πεπερασμένος*

είτε ίσος με μηδέν. Στη γεωμετρία και στην τριγωνομετρία αυτό είναι ακόμα πιο ξεκάθαρο. Κανείς δεν αρνείται ότι η εφαπτομένη (ή διατέμνουσα) μιας ορθής γωνίας είναι απείρως μεγάλη. Αφού το ορθογώνιο που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και την συνεφαπτομένη έχει μια περιοχή ίση με το τετράγωνο της ακτίνας και η συνεφαπτομένη μιας ορθής γωνίας είναι ίση με μηδέν, ακόμα και στη γεωμετρία πρέπει να γίνει παραδεκτό ότι το γινόμενο του μηδενός και του απείρου μπορεί να είναι πεπερασμένο". Αυτό που μας λέει δηλαδή είναι ότι $0 \cdot \infty =$ σταθερό – πεπερασμένο. Προφανώς ένα περίεργο συμπέρασμα που δημιουργεί ασάφεια στα λεγόμενα του και που θα δούμε την ανάπτυξη που κάνει αφού πρώτα δούμε πως αντιλαμβάνεται την έννοια της τάξης του απείρου.

Αφού $\frac{a}{dx}$ είναι μια άπειρη ποσότητα A, είναι φανερό ότι η ποσότητα $\frac{A}{dx}$ θα είναι μια ποσότητα απείρως μεγαλύτερη από την ποσότητα A. Υπάρχουν διάφορες σχέσεις αυτού του είδους μεταξύ απείρως μεγάλων ποσοτήτων έτσι που μερικές άπειρες ποσότητες να είναι μεγαλύτερες από κάποιες άλλες. Έτσι $\frac{a}{dx^2}$ είναι μια ποσότητα απείρως μεγαλύτερη από την $\frac{a}{dx}$. Αν $\frac{a}{dx} = A$ τότε $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Με όμοιο τρόπο η $\frac{a}{dx^3}$ είναι μια άπειρη ποσότητα, απείρως μεγαλύτερη από την $\frac{a}{dx^2}$ και έτσι είναι και άπειρα μεγαλύτερη από την $\frac{a}{dx}$. Από αυτό συμπεραίνει ότι υπάρχει μια απειρία βαθμών –τάξεων απείρου που καθένας τους είναι απείρως μεγαλύτερος από τον προηγούμενο. Έτσι αν ο αριθμός m είναι ελάχιστα μεγαλύτερος από τον n τότε $\frac{a}{dx^m}$ είναι μια άπειρη ποσότητα απείρως μεγαλύτερη από την άπειρη ποσότητα $\frac{a}{dx^n}$.

Όπως στις απείρως μικρές ποσότητες υπάρχουν γεωμετρικοί λόγοι ενδεικτικοί των ανισοτήτων και οι αριθμητικοί τους λόγοι δείχνουν πάντοτε την ισότητα έτσι με τις απείρως μεγάλες ποσότητες έχουμε γεωμετρικούς λόγους που δείχνουν την ισότητα, ενώ οι αριθμητικοί τους λόγοι δείχνουν την ανισότητα. Αν a και b είναι δύο πεπερασμένες ποσότητες, τότε ο γεωμετρικός λόγος των δύο άπειρων ποσοτήτων $\frac{a}{dx} + b$ και $\frac{a}{dx}$ δείχνει ότι είναι ίσες.

$$\frac{\frac{a}{dx}+b}{\frac{a}{dx}}=1+\frac{b\cdot dx}{a}=1 \text{ αφού } dx=0$$

Αν όμως αυτές συγκριθούν αριθμητικά προς ένα διαφορετικό b ο λόγος τότε δείχνει ανισότητα. Με όμοιο τρόπο ο γεωμετρικός λόγος

$$\frac{\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}}{\frac{a}{dx^2}}$$

δείχνει ισότητα. Εκφράζοντας το λόγο έχουμε $1+dx=1$ αφού $dx=0$. Από την άλλη η διαφορά είναι $\frac{a}{dx}$ και έτσι αυτό είναι άπειρο. Προκύπτει όταν υπολογίσουμε γεωμετρικούς λόγους μιας απείρως μεγάλης ποσότητας χαμηλότερης τάξης που θα απαλειφθεί συγκρινόμενη με μια απείρως μεγαλύτερη ποσότητα υψηλότερης τάξης.

Αφού λοιπόν ανέλυσε τις τάξεις του απείρου χρησιμοποίησε αυτές για να δικαιολογήσει το συμπέρασμα του ότι το γινόμενο μιας άπειρα μεγάλης και μιας άπειρα μικρής ποσότητας μπορεί να παράγει ως αποτέλεσμα μια πεπερασμένη ποσότητα όπως είδαμε παραπάνω αλλά και ότι το γινόμενο αυτού του είδους μπορεί να είναι απείρως μικρότερο ή μεγαλύτερο. Έτσι, αν η άπειρη ποσότητα $\frac{a}{dx}$ πολλαπλασιαστεί με την άπειρα μικρή ποσότητα dx, το γινόμενο θα είναι ίσο με το πεπερασμένο a. Εν τούτοις αν το $\frac{a}{dx}$ πολλαπλασιαστεί με το απείρως μικρό dx^2 ή dx^3 ή γενικότερα dx^n, το γινόμενο θα είναι $a\cdot dx,\ a\cdot dx^2,\ a\cdot dx^3,...,\ a\cdot dx^n$ και έτσι θα είναι απείρως μικρό. Ομοίως καταλαβαίνουμε ότι αν η άπειρη ποσότητα $\frac{a}{dx^2}$ πολλαπλασιαστεί με το απείρως μικρό dx τότε το γινόμενο θα είναι απείρως μεγάλο. Γενικά, αν $\frac{a}{dx^n}$ πολλαπλασιαστεί με το $b\cdot dx^m$ το γινόμενο $a\cdot b\cdot dx^{m-n}$ θα είναι απείρως μικρό αν $m>n$ και θα είναι πεπερασμένο αν $m=n$ και απείρως μεγαλύτερο αν $m<n$. Παρατηρούμε ότι αντιμετώπιζε το dx ως έναν πεπερασμένο αριθμό και τον χειριζόταν με αλγεβρικό τρόπο.

3.5 Το μηδέν και το άπειρο ως όρια

Οι απείρως μικρές και οι απείρως μεγάλες ποσότητες βρίσκονται συχνά μέσα στις *σειρές των αριθμών*. Ο Euler όταν αναφέρει σειρές αριθμών εννοεί αυτά που εμείς αντιλαμβανόμαστε ως σύνολα αριθμών. Από εδώ και πέρα λοιπόν θα χρησιμοποιούμε τον όρο σύνολο προκειμένου να παρακολουθήσουμε το συλλογισμό του. Εφόσον υπάρχουν πεπερασμένοι αριθμοί μέσα σε αυτές τις σειρές είναι φανερό ότι σύμφωνα με τους **νόμους της συνέχειας** κάποιος αριθμός περνάει από τις πεπερασμένες ποσότητες στις άπειρα μικρές και άπειρα μεγάλες ποσότητες. Έτσι το σύνολο των ακεραίων αριθμών συνεχίζεται και προς τα μπροστά και προς τα πίσω $\{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4...\}$. Με τη συνεχή μείωση οι αριθμοί προσεγγίζουν το μηδέν, δηλαδή το απείρως μικρό. Ύστερα συνεχίζουν περαιτέρω και γίνονται αρνητικοί. Από αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι οι θετικοί αριθμοί μειώνονται (ελαττώνονται-μικραίνουν) περνώντας από το μηδέν στους αρνητικούς αριθμούς ($-1>-2>-3$). Εν τούτοις αν θεωρήσουμε τα τετράγωνα αυτών των αριθμών, τότε αφού είναι όλα θετικά $\{...,+16,+9,+4,+1,0,+1,+4,+9,+16,...\}$ έχουμε το μηδέν ως τον *μεταβατικό αριθμό* από τους φθίνοντες θετικούς αριθμούς στους αύξοντες θετικούς αριθμούς. Αν αλλάξουν όλα τα πρόσημα τότε το μηδέν είναι ξανά ο μεταβατικός αριθμός από τους φθίνοντες αρνητικούς στους αύξοντες αρνητικούς αριθμούς.

Το επόμενο παράδειγμα που δίνει είναι το σύνολο $\left\{...,+\sqrt{-3},+\sqrt{-2},+\sqrt{-1},+0,+\sqrt{1},+\sqrt{2},+\sqrt{3},...\right\}$ Τότε αναφέρει το μηδέν ως ***ένα είδος ορίου*** μέσα από το οποίο οι πραγματικοί αριθμοί περνούν στους μιγαδικούς. Θεωρώντας τα στοιχεία του συνόλου ως σημεία μιας καμπύλης, τότε αν είναι θετικοί μικραίνουν ως την τελική απάλειψή τους και συνεχίζοντας περαιτέρω γίνονται ή αρνητικοί ή θετικοί ξανά ή ακόμα και μιγαδικοί. Το ίδιο συμβαίνει και με τους αριθμούς που ξεκινούν από αρνητικούς, μετά απαλείφονται και αν συνεχίσουν περαιτέρω γίνονται αρνητικοί, θετικοί ή μιγαδικοί. Τέτοιου είδους παραδείγματα βρίσκονται στη θεωρία των επίπεδων καμπυλών του Euler που αναπτύσσει στο δεύτερο τόμο του *introduction*.

Ακολουθώντας επαγωγικό συλλογισμό φτάνει στο σύνολο

$$\left\{...,-\frac{1}{4},-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{1},+\frac{1}{0},+\frac{1}{1},+\frac{1}{2},+\frac{1}{3},...\right\}$$

προκείμενου να δείξει την ύπαρξη άπειρων όρων. Εδώ το κάθε στοιχείο προκύπτει από το γενικό όρο $1/x$. Ο όρος που αντιστοιχεί όταν $x = 0$ είναι ο ***άπειρος όρος*** $1/0$. Από δεξιά προς τ' αριστερά οι όροι αυξάνουν, έτσι ώστε το $1/0$ είναι απείρως μεγάλο. Μετά απ' αυτό οι όροι μικραίνουν και γίνονται αρνητικοί. *Γι' αυτό μια απείρως μεγάλη ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί ως κάποιο είδος ορίου*, που περνώντας μέσα από τους θετικούς μπορεί να γίνει αρνητική και αντιστρόφως. Γι' αυτό το λόγο ερμηνεύτηκε από κάποιους ότι οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν μεγαλύτεροι από το άπειρο, εφόσον σε αυτή την σειρά οι όροι αυξάνουν συνεχώς και από τη στιγμή που έχουν φτάσει το άπειρο γίνονται αρνητικοί. Έστω το σύνολο

$$\left\{\ldots,+\frac{1}{9},+\frac{1}{4},+\frac{1}{1},+\frac{1}{0},+\frac{1}{1},+\frac{1}{4},+\frac{1}{9},\ldots\right\}$$

με γενικό όρο $1/x^2$, τότε αφού περάσουμε δια μέσου του απείρου $\left(1/0\right)$ οι όροι γίνονται θετικοί ξανά χωρίς να μπορεί να πει κάποιος ότι αυτοί είναι μεγαλύτεροι του απείρου.

Συχνά ένα άπειρο στοιχείο μέσα σ' ένα σύνολο θ' αποτελέσει ένα ***όριο*** που διαχωρίζει τους πραγματικούς από τους μιγαδικούς, όπως συμβαίνει στο σύνολο με γενικό όρο $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Δηλαδή:

$$\left\{\ldots,+\frac{1}{\sqrt{-3}},+\frac{1}{\sqrt{-2}},+\frac{1}{\sqrt{-1}},+\frac{1}{0},+\frac{1}{\sqrt{1}},+\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots\right\}$$

Απ' αυτό <u>δεν</u> προκύπτει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το άπειρο εφόσον από το προηγούμενο σύνολο

$$\left\{\ldots,+\sqrt{-3},+\sqrt{-2},+\sqrt{-1},+0,+\sqrt{1},+\sqrt{2},+\sqrt{3},\ldots\right\}$$

προκύπτει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μικρότεροι από το μηδέν. Είναι δυνατό να φανεί μία αλλαγή από τους πραγματικούς όρους στους μιγαδικούς, όπου το όριο δεν είναι ούτε μηδέν ούτε άπειρο. Π.χ. αν ο γενικός όρος είναι $1+\sqrt{x}$ $(\ldots,\sqrt{-1},1+\sqrt{0},1+\sqrt{1},\ldots)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις λόγω της αρρητότητας κάθε όρος έχει δύο τιμές. Στο όριο ανάμεσα στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς οι δύο τιμές έρχονται μαζί ως ίσες. Παρόλα αυτά, όποτε υπάρχουν όροι οι οποίοι στην αρχή είναι θετικοί και μετά γίνονται αρνητικοί, η μετάβαση γίνεται μέσα από ένα όριο που είναι απείρως μικρό ή απείρως μεγάλο. Αυτό ισχύει λόγω του νόμου της συνέχειας, το

οποίο γίνεται περισσότερο κατανοητό μέσα από τις επίπεδες καμπύλες. Ο Euler εδώ ολοκληρώνει τη διατύπωση των θέσεων του σχετικά με το άπειρο και μας παραθέτει τις πρώτες εφαρμογές από τις σειρές.

3.6 Εφαρμογές του απείρου στις σειρές

Από το άθροισμα των άπειρων σειρών μπορούμε να εξάγουμε πολλά αποτελέσματα που σύμφωνα με τον Euler θα ενισχύσουν τη θεωρία του απείρου και θα βοηθήσουν ν' απαντηθούν ερωτήματα-ενστάσεις που είχαν προκύψει. Έστω λοιπόν η σειρά που έχει ίσους όρους, π.χ. $1+1+1+1+1+...$ και συνεχίζεται στο άπειρο. Είναι φανερό ότι το άθροισμα όλων αυτών των όρων είναι μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αριθμό. Γι' αυτό το λόγο πρέπει να είναι άπειρος. Προκειμένου να μας πείσει για την αλήθεια του παραπάνω συλλογισμού χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα του κλάσματος:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...$$

Έτσι, αν $x=1$, τότε

$$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+...\Rightarrow\frac{1}{0}=\infty=1+1+1+1+...$$

Παρόλο που στον Euler είναι προφανές ότι όταν οι ίδιοι πεπερασμένοι αριθμοί προστίθενται άπειρες φορές τότε και το άθροισμα πρέπει να είναι άπειρο, εν τούτοις ο ίδιος συναισθάνεται ότι υπάρχουν κάποια κενά. Εξετάζει λοιπόν την άπειρη σειρά

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+...$$

που αντιμετωπίζει σοβαρές δυσκολίες. Έτσι:

αν $x=1$ τότε $1+1+1+1+1+...=\frac{1}{1-1}=\infty$. (A)

αν $x=2$ τότε $1+2+4+8+16+...=\frac{1}{1-2}=-1$ (B)

αν $x=3$ τότε $1+3+9+27+81+...=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$ (C)

αν $x=4$ τότε $1+4+16+64+256+...=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$ (D)

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Ο συλλογισμός είναι απλός. Αφού κάθε όρος της σειράς Β. εκτός από τον πρώτο, είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο όρο της σειράς Α, το άθροισμα της σειράς Β πρέπει να

είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα της σειράς Α. Παρόλα αυτά, ο υπολογισμός δείχνει ότι η σειρά Α έχει άθροισμα ∞ ενώ η Β έχει ένα αρνητικό άθροισμα, το -1, που είναι μικρότερο από το μηδέν. Αυτό είναι ακατανόητο. Ακόμα λιγότερο μπορούμε να δεχτούμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα' αθροίσματα των σειρών C, D, κ.ο.κ. που έχουν αρνητικά αποτελέσματα, ενώ όλοι οι όροι είναι θετικοί.

Αν και βλέπει την αντίφαση δεν απορρίπτει τα αποτελέσματα. Αντίθετα θεώρει ότι εξηγούν την προηγούμενη άποψη, δηλαδή ότι οι αρνητικοί μερικές φορές μπορούν να θεωρηθούν μεγαλύτεροι από άπειρο. Με δεδομένο ότι όταν οι αριθμοί μικραίνουν και μετά το μηδέν γίνονται αρνητικοί κάνει μια επισήμανση – διάκριση μεταξύ των αρνητικών αριθμών -1, -2, -3, … και των αρνητικών $\frac{+1}{-1},\frac{+2}{-1},\frac{+3}{-1},...$ όπου ο πρώτος είναι μικρότερος του μηδενός και ο τελευταίος είναι μεγαλύτερος του απείρου. Αν και αυτά τα επιχειρήματα φαίνονται αλλόκοτα στον σύγχρονο αναγνώστη που είναι εξοικειωμένος με τη χρήση των αρνητικών αριθμών δεν ήταν το ίδιο ξεκάθαρα την εποχή εκείνη. Οι μαθηματικοί ακόμα δεν είχαν ξεκαθαρίσει επαρκώς τη φύση των αριθμών και πολύ περισσότερο των αρνητικών. Ο μεγάλος Άγγλος μαθηματικός John Wallis (1616-1703) είχε διατυπώσει παρόμοια επιχειρήματα πριν τον Euler. Στο βιβλίο του *Arithmetica Infinitorum* (Αριθμητική των απείρων) που κυκλοφόρησε το 1665 συμπεριέλαβε το ακόλουθο επιχείρημα: Αφού το $\frac{a}{0}$ με $a>0$, είναι θετικό άπειρο και αφού $\frac{a}{\beta}$, με $\beta<0$, είναι αρνητικός αριθμός, τότε αυτός ο αρνητικός αριθμός πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το θετικό άπειρο αφού στη δεύτερη περίπτωση ο παρανομαστής είναι μικρότερος από τον παρανομαστή στην πρώτη περίπτωση (δηλαδή $\beta<0$).[108] Αυτό οδήγησε το Wallis στο συμπέρασμα ότι ένας αρνητικός αριθμός είναι ταυτόχρονα μικρότερος του μηδενός και μεγαλύτερος του (θετικού) απείρου. Αν λάβουμε υπόψη το παραπάνω σε συνδυασμό με το διαφορετικό τρόπο προσέγγισης μέσω άπειρων σειρών, τα συμπεράσματα του Euler δείχνουν λιγότερο αλλόκοτα. Όμως ακόμα και με αυτή τη σύμβαση δεν μπόρεσε να ξεπεραστεί το πρόβλημα. Π.χ. αν έχουμε τη σειρά $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...=\frac{1}{(1-x)^2}$ και θέσουμε $x=1$ προκύπτει

ότι $1+2+3+4+5+...=\frac{1}{(1-1)^2}=\frac{1}{0}=\infty$ $\qquad (A)$

[108] Nahin Paul, *Φανταστικές ιστορίες*, σελ. 33.

και αν $x = 2$ προκύπτει ότι $1 + 4 + 12 + 32 + 80 + ... = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$ (B)

Κάθε όρος της σειράς B είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο όρο της σειράς A, εκτός από τον πρώτο όρο. Έτσι όμως καταλήγουμε σε άτοπο με αποτέλεσμα οι αρχές στις οποίες στηριχτήκαμε να μην είναι έγκυρες. Ο Euler στο σημείο αυτό καταλάβαινε την έλλειψη αλλά ταυτόχρονα ήθελε να προχωρήσει. Προκειμένου να ξεφύγει αναγκάζεται να κάνει συμβιβασμούς με τη μαθηματική αυστηρότητα αλλά και με τη λογική. Γράφει λοιπόν στην παράγραφο 105:

"Όμως, αν αρνηθούμε ότι $-1 = \frac{+1}{-1}$ *και* $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b}$ *τότε οι σταθερότερες βάσεις της ανάλυσης θα κατέρρεαν και η προηγούμενη ερμηνεία θα ήταν μη αποδεκτή. Γι' αυτό θα έπρεπε καλύτερα να αρνηθούμε ότι τα αθροίσματα που δίνουν οι προηγούμενοι γενικοί τύποι είναι τα σωστά. Αφού αυτές οι σειρές παράγονται από τη συνεχή διαίρεση και αφού τα υπόλοιπα διαιρούνται περαιτέρω, προκύπτει ότι τα υπόλοιπα μεγαλώνουν όλο και περισσότερο όσο συνεχίζουμε τη διαίρεση, έτσι ώστε ποτέ το υπόλοιπο να μην είναι αμελητέα ποσότητα. Ακόμα λιγότερο μπορεί το τελευταίο υπόλοιπο που διαιρέθηκε με το απειροστό, να παραληφθεί, εφόσον αυτό είναι άπειρο. Αφού δεν παρατηρήσαμε αυτό στην προηγούμενη σειρά, όπου το υπόλοιπο έγινε μηδέν, δε θα ήταν αξιοσημείωτο ότι αυτά τα αθροίσματα μας οδήγησαν σε παράλογα αποτελέσματα. Εφόσον αυτή η τεκμηρίωση προκύπτει από την εγκυρότητα της σειράς είναι ξεκάθαρη η άρση κάθε αμφιβολίας."*

Ας δούμε το ανάπτυγμα του κλάσματος $\frac{1}{1-x}$ στον πρώτο πεπερασμένο αριθμό των όρων για να δούμε τι εννοούσε ο Euler . Έχουμε:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}, \ldots$$

Αν κάποιος έλεγε ότι η πεπερασμένη σειρά $1+x+x^2+x^3$ έχει άθροισμα ίσο με $\frac{1}{1-x}$, τότε αυτός οδηγείται σε λάθος εξαιτίας της ποσότητας $\frac{x^4}{(1-x)}$. Αν αυτός έλεγε ότι το άθροισμα της σειράς $1+x+x^2+x^3+...+x^{1000}$ είναι $\frac{1}{1-x}$ τότε το λάθος του είναι ίσο με $\frac{x^{1001}}{(1-x)}$. Αν το x είναι μεγαλύτερο από 1, τότε το λάθος είναι πολύ μεγάλο.

Από αυτό βλέπουμε ότι αυτός που θα έλεγε ότι, όταν η παραπάνω σειρά συνεχίζεται στο άπειρο, δηλαδή ότι $1+x+x^2+x^3+...+x^{\infty}$, και ότι το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-x}$, τότε το λάθος του θα ήταν $\frac{x^{\infty+1}}{(1-x)}$, και αν το $x>1$ τότε το λάθος είναι πράγματι άπειρο. Συγχρόνως όμως, το ίδιο επιχείρημα εξηγεί γιατί η σειρά $1+x+x^2+x^3+x^4+...$, συνεχιζόμενη στο άπειρο, έχει πραγματικό άθροισμα $\frac{1}{1-x}$, με την προϋπόθεση ότι το x είναι ένα κλάσμα μικρότερο από την μονάδα. Σε αυτήν την περίπτωση το λάθος $x^{\infty+1}$ είναι απείρως μικρό και έτσι *ίσο* με μηδέν, έτσι που αυτό μπορεί ν' απαλειφθεί χωρίς σφάλμα. Έτσι, αν θέσουμε $x=\frac{1}{2}$, τότε ισχύει

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Με όμοιο τρόπο το υπόλοιπο της σειράς στο οποίο το x είναι ένα κλάσμα μικρότερο από την μονάδα, θα έχουμε πραγματικό άθροισμα με τον τρόπο που δείξαμε.

Το ίδιο ερώτημα έχει βάση για το άθροισμα της αποκλίνουσας σειράς, όπου τα πρόσημα εναλλάσσονται. Προκύπτει από τον ίδιο τύπο με αντικατάσταση του x με $-x$. Δηλαδή $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...$

Αν δεν διατυπώσουμε το τελικό υπόλοιπο, τότε θα έχουμε:

$$1-1+1-1+1-1+...=\frac{1}{2} \qquad \text{(A)}$$

$$1-2+4-8+16-32+...=\frac{1}{3} \qquad \text{(B)}$$

$$1-3+9-27+81-243+...=\frac{1}{4} \qquad \text{(C)}$$

Είναι φανερό ότι το άθροισμα της σειράς (Β) δεν μπορεί να είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$, εφόσον όσο περισσότεροι όροι προστίθενται στην πραγματικότητα, τόσο το άθροισμα απομακρύνεται από το $\frac{1}{3}$. Αλλά **το άθροισμα οποιασδήποτε σειράς πρέπει να έχει ένα όριο στο οποίο να προσεγγίζουν τα μερικά αθροίσματα, όσο πιο πολλοί όροι προστίθενται**.

Από αυτό συμπεραίνει ότι η σειρά αυτού του είδους που ονομάζεται αποκλίνουσα, δεν έχει σταθερά αθροίσματα, εφόσον τα μερικά αθροίσματα δεν προσεγγίζουν κάποιο όριο που θα μπορούσε να είναι το άθροισμα για την άπειρη σειρά. Αυτό είναι βεβαίως ένα πραγματικό συμπέρασμα, αφού έχει δείξει ότι το λάθος προκύπτει παραλείποντας το τελικό υπόλοιπο. Ο Euler πίστευε πως τα αθροίσματα δεν οδηγούν τελικά σε λάθος παρόλο που δεν δείχνουν αληθινά. Ακόμα περισσότερο τα θεωρεί αναγκαία αφού η χρήση αυτών τον οδήγησε σε σημαντικά αποτελέσματα όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Είναι ενδιαφέρον ότι ο Euler στα γραπτά του αποτυπώνει όλο το συλλογισμό που τον οδηγεί σε κάποιο αποτέλεσμα χωρίς να φοβάται. Δεν κρατάει τίποτα φοβούμενος μην κάνει λάθος. Η όποια κρίση και διόρθωση είναι καλοδεχούμενη και την επιζητά. Ακόμα και όταν έχει καταλήξει σε κάτι πιο σωστό παραθέτει και τα προηγούμενα βήματα που τον οδήγησαν εκεί. Έτσι έκανε και εδώ. Αφού μας έδωσε την κάθε σκέψη του πάνω στα προηγούμενα αθροίσματα στο τέλος του κεφαλαίου δίνει και τη λύση του πάνω στο πρόβλημα.

Εντοπίζει το αίτιο της σύγχυσης στον ορισμό του αθροίσματος της σειράς. "*Πιστεύω δε ότι όλη η δυσκολία έγκειται στον ορισμό άθροισμα. Αν όπως συνήθως συμβαίνει θεωρήσουμε ότι το άθροισμα μιας σειράς, είναι το άθροισμα όλων των όρων της, τότε μόνο οι άπειρες σειρές συγκλίνουν σε κάποια σταθερή τιμή και τότε όλο και περισσότεροι όροι που προσθέτουμε μπορούν να έχουν αθροίσματα. Παρόλα αυτά, οι συγκλίνουσες σειρές που οι όροι τους δεν μικραίνουν, ανεξάρτητα από την εναλλαγή των προσήμων, δεν έχουν σταθερά αθροίσματα, υποθέτοντας ότι χρησιμοποιούμε τη λέξη άθροισμα για το σύνολο όλων των όρων τους. Θεωρώντας τις περιπτώσεις σειρών που αναφέραμε με λανθασμένα αθροίσματα, όπως η πεπερασμένη έκφραση* $\frac{1}{1-x}$ *για την άπειρη σειρά* $1+x+x^2+x^3+\ldots$ ***Η αλήθεια είναι ότι η έκφραση αυτή δεν αποτελεί το άθροισμα της σειράς, αλλά η σειρά παράγεται από την έκφραση αυτή****. Έτσι η λέξη άθροισμα δεν θα πρέπει ν' αναφέρεται".*

Ξεπέρασε τις δυσκολίες και τις αντιφάσεις δίνοντας στη λέξη άθροισμα ένα νόημα διαφορετικό από το σύνηθες της εποχής. Έτσι το άθροισμα μιας άπειρης σειράς έγινε η πεπερασμένη έκφραση από την οποία παράγεται η σειρά. Με αυτή την έννοια το πραγματικό άθροισμα της άπειρης σειράς $1+x+x^2+x^3+...$ είναι $\frac{1}{1-x}$, εφόσον η σειρά παράγεται από το κλάσμα ανεξαρτήτως τι τιμή θα πάρει το x. **Με αυτό τον συλλογισμό αν η σειρά είναι συγκλίνουσα, ο νέος ορισμός του αθροίσματος ταυτίζεται με το συνήθη ορισμό του αθροίσματος.** Αφού οι αποκλίνουσες σειρές δεν έχουν άθροισμα δεν υπάρχει πραγματική δυσκολία που να προκύπτει από αυτή την έννοια του αθροίσματος. Τελικά, με τη βοήθεια αυτού του ορισμού μπορούμε να διατηρήσουμε τη **χρησιμότητα των αποκλινουσών σειρών**. (Θυμίζει έντονα τον Αριστοτέλη, σύμφωνα με τον οποίο η εύρεση του κατάλληλου ορισμού για ένα μαθηματικό αντικείμενο απαλείφει παράδοξα και δυσκολίες). Ο ρόλος των αποκλινουσών σειρών και η χρησιμότητά τους στα Μαθηματικά ήταν για πολύ καιρό θέμα υπό αμφισβήτηση. Ο Niels Henrik Abel το 1826 αναφέρει χαρακτηριστικά «*οι αποκλίνουσες σειρές είναι η εφεύρεση του διαβόλου και είναι ντροπή να στηρίζεται σε αυτές οποιαδήποτε απόδειξη. Χρησιμοποιώντας αυτές οποιοσδήποτε μπορεί να σκιαγραφήσει οποιοδήποτε συμπέρασμα τον ευχαριστεί και αυτός είναι ο λόγος που οι σειρές αυτές παρήγαγαν τόσο λάθη και παράδοξα…*»[109].

Η σημασία του απείρου για τα Μαθηματικά δεν διευκρινίστηκε πλήρως, ούτε αργότερα με τον Weierstrass που έδωσε μια θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού. Ο Hilbert σ' ένα άρθρο του με θέμα το άπειρο έγραψε: «Ανέκαθεν το άπειρο διήγειρε την ανθρώπινη ψυχή περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Δύσκολα μπορεί να βρεθεί μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα το λογικό όσο αυτή του απείρου. Εντούτοις καμιά άλλη έννοια δεν χρειάζεται διαφώτιση όσο αυτή»[110]. Η έννοια του απείρου αποτέλεσε και αποτελεί θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης. Είναι αυτή η έννοια που δημιούργησε παράδοξα και αμφισβητήσεις αλλά και εκείνη που έκανε γόνιμη τη μαθηματική σκέψη για περαιτέρω πρόοδο και ανάπτυξη. Ο Euler μέσα από αυτή την ανάλυση σχετικά με τις έννοιες της άπειρα μεγάλης, της άπειρα μικρής ποσότητας αλλά και του απείρου γενικότερα, χωρίς να έχει στα χέρια του τη μαθηματική έννοια του ορίου μας έδωσε τις βάσεις για την περαιτέρω μελέτη του Απειροστικού Λογισμού.

[109] Moris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, p. 973.
[110] David Hilbert, *Για το άπειρο*, σελ. 14-15.

Κεφάλαιο 4ο
Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός

4.1 Η φύση των Διαφορικών

Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου *"Institutiones calculi defferentialis"* ο Euler αναφέρει ότι αν η μεταβλητή x δεχτεί αύξηση ίση με ω, τότε κάθε συνάρτηση του x λαμβάνει μια αύξηση που εκφράζεται ως $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \ldots$, και αυτή η έκφραση μπορεί να είναι πεπερασμένη ή να πηγαίνει στο άπειρο. Έτσι η συνάρτηση y, όταν γράφουμε $x+\omega$ για το x, παίρνει την μορφή: $y' = y + P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \ldots$
Όταν η προηγούμενη τιμή του y αφαιρείται από αυτή τότε η διαφορά αυτή εκφράζεται ως $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \ldots$. Αφού η αντίστοιχη τιμή του x είναι $x' = x + \omega$ τότε έχουμε τη διαφορά $\Delta x = \omega$. Τα γράμματα $P, Q, R, \ldots$ αφορούν συναρτήσεις του x εξαρτώμενες από το y.

Οποιαδήποτε αύξηση ω της μεταβλητής ποσότητας x έχει συμβεί, ταυτόχρονα ορίζει την αύξηση που συμβαίνει στο y, τη συνάρτηση του x, υπό τον όρο ότι μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις $P, Q, R, \ldots$ για οποιαδήποτε συνάρτηση y. Σε αυτό το κεφάλαιο και σε όλη την ανάλυση του απείρου, η αύξηση ω εξαιτίας της οποίας συμβαίνει η αύξηση στη μεταβλητή x θα είναι απείρως μικρή μέχρι μηδενισμού, *δηλαδή ίση με μηδέν* όπως απαιτεί και ο ίδιος . Έτσι είναι φανερό ότι η αύξηση ή η διαφορά της συνάρτησης y θα είναι επίσης απείρως μικρή. Με αυτή την υπόθεση κάθε όρος της έκφρασης $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \ldots$ θα μηδενιστεί (απαλειφθεί) σε σχέση με κάθε προηγούμενό του (όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας), έτσι ώστε τελικά θα απομείνει η ποσότητα $P\omega$. Για αυτό το λόγο στην περίπτωση όπου το ω είναι απείρως μικρό, η διαφορά του y, Δy, είναι ίση με $P\omega$.

Ο Euler αναφέρει ότι η ανάλυση του απείρου, δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των διαφορών, όπου οι διαφορές είναι απείρως μικρές και όχι πεπερασμένες όπως μέχρι τώρα. Έτσι η μέθοδος των απείρως μικρών διαφορών θα πρέπει να αποτελεί ξεχωριστό τμήμα της Ανάλυσης του απείρου. Για τις διαφορές αυτές προτείνει ειδικά ονόματα και συμβολισμούς. Ο Leibniz τις απείρως μικρές ποσότητες τις ονομάζει **Διαφορικά** (*Differentials*). Αυτή την ορολογία ακολουθεί και ο

Euler. Από την ανάλυση του πρώτου κεφαλαίου του *'Foundations of Differential Calculus'*, σχετικά με τις τάξεις (βαθμούς) των διαφορών, κατανοούμε εύκολα το νόημα του διαφορικού πρώτης, δεύτερης, τρίτης κλπ τάξης οποιασδήποτε μεταβλητής. Αντί του συμβόλου Δ με το οποίο σε προηγούμενο κεφάλαιο ο Euler συμβόλισε τη διαφορά[111], στο σημείο αυτό χρησιμοποιεί το σύμβολο d, έτσι ώστε με dy να ορίζεται το Διαφορικό 1ης τάξης, dy^2 το 2ης τάξης κ.λ.π.

Ο Euler ορίζει ως **Διαφορικό Λογισμό**[112] εκείνο το λογισμό που μελετά τις απείρως μικρές ποσότητες (διαφορικά). Σε ρόλο ιστορικού ανοίγει μια παρένθεση και μας μεταφέρει το κλίμα της εποχής του. Αναφέρεται στο Newton και τον Leibniz, αποδίδοντας και στους δύο την πρόοδο στο νέο αυτό κλάδο των Μαθηματικών. Είναι προφανές πως η διαμάχη ανάμεσα στις δυο σχολές, την Αγγλική και τη Γερμανική σχετικά με την πατρότητα του Διαφορικού λογισμού είχε ήδη πάρει διαστάσεις. Τα διαφορετικά ονόματα και συμβολισμοί έδωσαν της προϋποθέσεις ώστε το χάσμα να αποκτήσει μεγάλη διάσταση. Ο Newton και οι Άγγλοι ονόμαζαν τις απείρως μικρές διαφορές «ροές» και μερικές φορές «αυξήσεις». Μια μεταβλητή ποσότητα μετά από συνεχείς αυξήσεις οδηγεί σε ένα σύνολο διαφορετικών τιμών και γι' αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μια οντότητα ρέουσα και από αυτό προκύπτει η λέξη «ροή» (*fluxion*). Αυτό το εισήγαγε ο Newton για το ρυθμό μεταβολής, προκειμένου να ορίσει μια απείρως μικρή αύξηση που δέχεται μια ποσότητα, ως «ρέουσα» (*fluent*) κατ' αναλογία. Σύμφωνα με τον Euler, οι όροι αυτοί φαίνεται να αποδίδονται καλύτερα στα Λατινικά καθώς εκφράζουν περισσότερο την υπόστασή τους.

Ο Euler δεν έμεινε στη χρήση των λέξεων και του συμβολισμού και προσπάθησε μέσα από τα γραπτά του να εξομαλύνει τις διαφορές. Προσπάθησε να αναδείξει την ουσία του Λογισμού και όχι να κάνει εξαντλητική κριτική στους προκάτοχους του. Συγκεκριμένα αναφέρει:

---

[111] Ο Euler στο κεφάλαιο 1 με τίτλο «Πεπερασμένες Διαφορές» του βιβλίου *"Institutiones Calculi Differentialis"* μας δίνει μια μεταβλητή ποσότητα χ και μια αύξηση ω. Στη φάση αυτή το ω νοείται ως πεπερασμένο. Ζητά λοιπόν να αντικαταστήσουμε το x με το $x+\omega$ στη συνάρτηση $\frac{\alpha+x}{\alpha^2+x^2}$. Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{\alpha+x+\omega}{\alpha^2+x^2+2x\omega+\omega^2}$. Από το x και την αύξηση ω έχουμε την αριθμητική ακολουθία $x, x+\omega, x+2\omega, x+3\omega, \ldots$ Αντίστοιχα η συνάρτηση y μας δίνει μια ακολουθία τιμών $y, y', y'', y''', \ldots$ Με αυτήν την παρατήρηση είναι έτοιμος να περιγράψει τις πεπερασμένες διαφορές της συνάρτησης. Είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται το σύμβολο Δ γι' αυτό το σκοπό.

[112] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 115.

«Η αντιπαράθεση δεν έχει νόημα σχετικά με τη χρήση των λέξεων και του συμβολισμού και δεν θα πρέπει να μειώνει την προσφορά των Άγγλων πάνω σε αυτό το θέμα. Έτσι τα Διαφορικά τα ονομάζουν ροές και τα συμβολίζουν με τη χρήση τελειών ως εξής: με $\dot{y}$ συμβολίζουν την πρώτη ροή του y, με $\ddot{y}$ τη δεύτερη ροή, με $\dddot{y}$ την τρίτη ροή, κ.ο.κ. Αυτός ο συμβολισμός μπορεί να μην έχει πρόβλημα όταν ο αριθμός των τελειών είναι μικρός και άρα εύκολα αναγνωρίσιμος, αλλά δημιουργεί σύγχυση και γίνεται εξαιρετικά άβολος όταν ο αριθμός των τελειών είναι μεγάλος (π.χ. το $d^{10}y$ θα ήταν εξαιρετικά άβολο να το συμβολίσουμε χρησιμοποιώντας τις τελείες). Υπάρχουν λοιπόν πολλές περιπτώσεις Διαφορικών μεγάλης τάξης όπου ο Αγγλικός τρόπος συμβολισμού είναι ανεφάρμοστος. Προκειμένου κάποιος να είναι εύστοχος στη χρήση και το συμβολισμό όλων αυτών, θα πρέπει να γνωρίζει και τους δύο τρόπους. Αντίθετα οι Άγγλοι ακολουθούν το δικό τους συμβολισμό αρνούμενοι να διαβάσουν γραπτά που χρησιμοποιούν τις δικές μας μεθόδους. Πράγματι αποκομίσαμε χρήσιμα συμπεράσματα διαβάζοντας μελέτες τους και εγώ επισήμανα την αντίστοιχη ωφέλεια αυτών όποτε αυτοί διάβασαν τις δικές μας. Έτσι ενώ ο ενιαίος συμβολισμός θα ήταν ιδανικός για τη μελέτη του Διαφορικού Λογισμού, εν τούτοις θα πρέπει να είμαστε εξοικειωμένοι και με τους δύο συμβολισμούς προκειμένου να ωφεληθούμε τα μέγιστα διαβάζοντας βιβλία γραμμένα και με τους δύο τρόπους.»[113].

Ο Newton ανέπτυξε το λογισμό των ροών στο έργο του *"Methodus fluxionum et serierum infinitarum"*[114] το 1671 αλλά δημοσιεύτηκε το 1736 μετά το θάνατο του. Ο Leibniz είχε δημοσιεύσει νωρίτερα τα δικά του αποτελέσματα και τον αντίστοιχο συμβολισμό. Ο Euler ακολούθησε το συμβολισμό του Leibniz μιας και τον εύρισκε περισσότερο λειτουργικό όπως γράφει ο ίδιος στο παραπάνω χωρίο. Ο Leibniz έλεγε: *«Το μυστικό της Ανάλυσης είναι η καθιέρωση κατάλληλης ορολογίας και συμβολισμού και η τέχνη της καλής χρήσης των συμβόλων»*.

Όπως χρησιμοποίησε το γράμμα ω για να συμβολίσει την αύξηση από την οποία η μεταβλητή x αυξάνεται, (με δεδομένο ότι το ω είναι απείρως μικρό), έτσι ώστε να είναι το διαφορικό του x, αντίστοιχα χρησιμοποίησε τη μέθοδο γράφοντας $\omega = dx$. Έτσι από δω και πέρα το dx θα συμβολίζει την απείρως μικρή διαφορά από την οποία προκύπτει η αύξηση του x. Όμοια το διαφορικό του y (συνάρτησης του x),

[113] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 116-7.
[114] *"Μέθοδος των Ροών και Άπειρες Σειρές"*.

dy, θα παριστά την αύξηση του y όταν το x αυξάνει κατά dx. $dy = y' - y$ όπου y' είναι η τιμή της συνάρτησης αν αντικαταστήσουμε το x με το $x + dx$.

Ο Euler αυτά τα παρουσιάζει με ιδιαίτερα αναλυτικό τρόπο προσπαθώντας να εξαφανίσει κάθε παρανόηση και ερωτηματικό από τον αναγνώστη. Έτσι γράφει χαρακτηριστικά:

«Θα πρέπει να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι το γράμμα d που χρησιμοποιούμε εδώ δε συμβολίζει μια ποσότητα αλλά χρησιμοποιείται για να εκφράσει την έννοια διαφορικό όπως το γράμμα ℓ χρησιμοποιείται για την έννοια του λογάριθμου. Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι με το σύμβολο dy δε συμβολίζουμε το γινόμενο δύο ποσοτήτων d και y όπως γίνεται συνήθως στην Ανάλυση, αλλά το διαφορικό του y»[115].

Έτσι αν y είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του x, τότε το πρώτο διαφορικό του y θα έχει τη μορφή $P\omega$ και αφού $\omega = dx$ τότε θα έχουμε $dy = Pdx$. Έτσι, το διαφορικό οποιασδήποτε συνάρτησης y εκφράζεται από το γινόμενο της συνάρτησης P (του x) και του διαφορικού dx. Αν και, τα διαφορικά dx και dy είναι και τα δύο απείρως μικρά και ως εκ τούτου **ίσα με το μηδέν**, εντούτοις υπάρχει ένας πεπερασμένος λόγος ανάμεσά τους. Αυτός είναι ο $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{1}$. Είναι φανερό ότι αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση P τότε ξέρουμε και το λόγο των διαφορικών. Αυτό που θεωρεί σημαντικό είναι να υπολογίσει το γεωμετρικό λόγο μεταξύ των διαφορικών και όχι αυτά τα ίδια που άλλωστε είναι ίσα με το μηδέν. Στο σημείο αυτό ο Euler στην πραγματικότητα μας εισάγει στην έννοια της παραγώγου.

Ο Euler μελέτησε και χρησιμοποίησε διαφορικά αλλά δεν μίλησε για παράγωγο, πολύ δε περισσότερο στα βιβλία ανάλυσης που έγραψε, στα οποία προσπάθησε να είναι απαλλαγμένα από κάθε σχέση με τη γεωμετρία. Αν και σε διάφορα σημεία επικαλείται την γεωμετρική αυστηρότητα ως κριτήριο αλήθειας, εντούτοις δεν τη χρησιμοποίησε στην Ανάλυση του. Η προσέγγιση του ήταν εντελώς αλγεβρική. Όταν λοιπόν αναφέρει ότι αν και dy, dx είναι ίσα με μηδέν ενώ ο λόγος τους είναι η πεπερασμένη ποσότητα P εισάγει την έννοια της παραγώγου. Θα εξετάσουμε τη συνάρτηση $y = x^2$. Έστω ότι η μεταβλητή x αυξάνει κατά την απείρως μικρή ποσότητα ω. Τότε $\Delta x = (x + \omega) - x = \omega$ και αφού $(x + \omega)^2 = x^2 + 2x\omega + \omega^2$

[115] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 119.

έχουμε $\Delta y = x^2 + 2x\omega + \omega^2 - x^2 = 2x\omega + \omega^2$ έτσι $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \omega \overset{(\omega=0)}{\Rightarrow} 2x$. Ο Euler κατανοούσε διαισθητικά τα όρια και παρόλο που δεν τα χρησιμοποίησε για να φθάσει στην έννοια της παραγώγου έφθασε σχεδόν στο ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό ακριβώς εκφράζει και ο Harold Edwards [116].

Τα διαφορικά είναι πιο εύκολο να υπολογισθούν παρά οι πεπερασμένες διαφορές τους. Έτσι, για την πεπερασμένη διαφορά Δy με την οποία μια συνάρτηση αυξάνει όταν η μεταβλητή x αυξάνει κατά ω, δεν είναι αρκετό να ξέρουμε την P αλλά πρέπει να ξέρουμε και τις συναρτήσεις $Q, R, S, ...$ αφού αυτές βρίσκονται στην πεπερασμένη διαφορά η οποία εκφράζεται ως $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + ...$ ενώ για το διαφορικό του y χρειάζεται να ξέρουμε μόνο τη συνάρτηση P. Γι' αυτό το λόγο από τη γνώση μας για την πεπερασμένη διαφορά μιας συνάρτησης μπορούμε να ορίσουμε εύκολα το διαφορικό της. Αντίθετα, από το διαφορικό μιας συνάρτησης δεν μπορούμε να ορίσουμε την πεπερασμένη διαφορά [117]. Στην πραγματικότητα, το πρώτο διαφορικό $dy = Pdx$ δίνει τον πρώτο όρο της πεπερασμένης διαφοράς, δηλαδή το $P\omega$.

Αν η ποσότητα ω κατά την οποία αυξάνεται η μεταβλητή x είναι πολύ μικρή, τότε στην έκφραση $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + ...$ οι όροι $Q\omega^2$ και $R\omega^3$, όπως και οι επόμενοί τους, είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με το $P\omega$, έτσι ώστε να μπορούν να μη ληφθούν υπόψη στους υπολογισμούς όπου η αυστηρότητα δεν είναι τόσο σημαντική. Σε αυτή την περίπτωση, γνωρίζοντας το διαφορικό Pdx ξέρουμε περίπου και την πεπερασμένη διαφορά $P\omega$ και αυτό πολλές φορές είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Κάποιοι υποστήριξαν ότι τα διαφορικά είναι πολύ μικρές αυξήσεις αλλά όχι ίσες με μηδέν. Αυτό το επιχείρημα χρησιμοποιήθηκε από άλλους για να κατηγορήσουν την ανάλυση του απείρου λέγοντας ότι δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα. Γενικότερα καθ' όλη τη διάρκεια του 18ου αιώνα υπήρξαν αντιθέσεις και αμφισβητήσεις που αφορούσαν τη στέρεα και αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση του George Berkeley (1685-1753), τον οποίο ανησυχούσε η ολοένα αυξανόμενη τάση προς τις μηχανιστικές και τις ντετερμινιστικές αντιλήψεις, διότι πίστευε ότι η τάση αυτή εγκυμονούσε κινδύνους για τη θρησκεία. Ο Berkeley κατηγορούσε το Newton και τον Leibniz ότι χρησιμοποιούσαν μεθόδους που δεν

[116] Harold Edwards, *Euler's definition of the derivative*.

[117] Παρόλα αυτά, ο Euler στο δεύτερο μέρος του βιβλίου του *"Institutiones calculi differentialis"* στην παράγραφο 49, εξηγεί ότι από τη γνώση των διαφορικών όλων των τάξεων είναι δυνατό να υπολογιστεί η πεπερασμένη διαφορά της δοθείσας συνάρτησης.

καταλάβαιναν και ότι κατέληγαν σε ορθά συμπεράσματα περνώντας από λογικές αντιφάσεις και αμφισβητούμενες έννοιες:

«*Ο Newton χρησιμοποίησε παραγώγους (fluxions) ως το ικρίωμα ενός οικοδομήματος, ως αντικείμενα που τίθενται στο περιθώριο, όταν πεπερασμένες ποσότητες ανευρίσκονται προς αυτές. Αλλά αυτοί οι πεπερασμένοι εκθέτες ανευρίσκονται με τη χρήση των fluxions. Άρα ό,τι αποτέλεσμα προκύπτει από τη χρήση αυτών των εκθετών και αναλογιών αναφέρεται στις fluxions οι οποίες άρα πρέπει να είναι προηγουμένως κατανοητές. Και τι είναι λοιπόν αυτές οι fluxions; Άραγε οι ταχύτητες απειροστικών μεταβολών; Και τι είναι αυτές οι απειροστές μεταβολές; Δεν είναι ούτε πεπερασμένες ποσότητες, ούτε ποσότητες απεριόριστα μικρές, ούτε και ανύπαρκτες ποσότητες. Δεν πρέπει κανείς να τις απόκαλέσει τα φαντάσματα ποσοτήτων που έχουν απέλθει;*»[118]

Ο Euler δέχτηκε τη λογική αυτών των ενστάσεων και προκειμένου να είναι συνεπές το σύστημά του θεώρησε ότι οι απείρως μικρές ποσότητες είναι **ίσες με το μηδέν**. Στην παράγραφο 122 του ίδιου κεφαλαίου προκειμένου να το ξεκαθαρίσει έδωσε το ακόλουθο παράδειγμα:

«Αυτοί που δεν παραδέχονται ότι οι απείρως μικρές ποσότητες είναι ίσες με το μηδέν, είναι σαν να συγκρίνουν τα διαφορικά, με ένα κόκκο άμμου σε σχέση με τη γη. Σαν να λένε δηλαδή, ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο της γης με ακρίβεια αν δεν έχουμε συμπεριλάβει στους υπολογισμούς μας έναν κόκκο άμμου. Θεωρούν ότι ο λόγος μιας πεπερασμένης ποσότητας προς μια απείρως μικρή ποσότητα είναι όπως ο λόγος της γης προς ένα κόκκο άμμου».

Ας δούμε την ερμηνεία των διαφορικών δεύτερης τάξης[119], σύμφωνα με τον Euler. Αυτά προκύπτουν από τις διαφορές δεύτερης τάξης όπου το ω έγινε το απείρως μικρό dx. Στη διαφορά δεύτερης τάξης της συνάρτησης y που δίνεται από την έκφραση $P\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \ldots$ αν θεωρήσουμε το ω απείρως μικρό, τότε οι όροι $Q\omega^3, R\omega^4, \ldots$ απαλείφονται σε σχέση με τον πρώτο όρο $P\omega^2$ έτσι ώστε αν $\omega = dx$ το διαφορικό του y δεύτερης τάξης θα είναι ίσο με Pdx^2 (όπου dx^2 είναι το τετράγωνο του διαφορικού dx)[120]. Αν και το δεύτερης τάξης διαφορικό της συνάρτησης y είναι ίσο με μηδέν και ισχύει $d^2y = Pdx^2$, εντούτοις το d^2y προς dx^2 έχουν πεπερασμένο

[118] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος & Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος 1ος, σελ. 330.

[119] Ο Euler (J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 126, p. 67) ορίζει ως δεύτερης τάξης διαφορικό το διαφορικό του διαφορικού.

[120] Στο σημείο αυτό ο Euler αναφέρεται στο τετράγωνο του διαφορικού με το συμβολισμό dx^2. Αυτό είναι διαφορετικό από το σημερινό συμβολισμό όπου χρησιμοποιούμε $(dx)^2$ για να το περιγράψουμε.

λόγο ίσο με $P/1$. Εάν $y = x$ τότε $P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,...$ και έτσι το d^2x μηδενίζεται. Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι η μεταβλητή x λαμβάνει ίσες αυξήσεις (χωρίς όμως αυτό να δημιουργεί κάποια βλάβη στη γενικότητα, όπως αναφέρει ο ίδιος) οπότε η δεύτερη τιμή του x, γίνεται $x^I = x + dx$, η επόμενη $x^{II} = x + 2dx$, $x^{III} = x + 3dx \ldots$ Αφού οι πρώτες διαφορές dx είναι σταθερές και οι δεύτερες απαλείφονται, το διαφορικό δεύτερης τάξης d^2x είναι ίσο με μηδέν. Γι αυτό το λόγο και τα υπόλοιπα διαφορικά $d^3x,\ d^4x,\ d^5x$, είναι ίσα με μηδέν και αυτό δεν επηρεάζεται από το γεγονός ότι οι αυξήσεις είναι ίσες μεταξύ τους.

Όσον αφορά το διαφορικό της σταθερής συνάρτησης δεν υπόκειται σε αυξήσεις ή μειώσεις και εκ των πραγμάτων το θεωρεί ίσο με μηδέν αφού όλες οι δυνάμεις του dx μηδενίζονται.

Έστω ότι $dy = pdx$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το d^2y. Αφού το dx είναι μια σταθερά και δεν αλλάζει ακόμα κι αν θέσουμε $x + dx$ όπου x, χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο το διαφορικό της ποσότητας p. Έστω, λοιπόν, $dp = qdx$ αφού το διαφορικό οποιασδήποτε μεταβλητής του x έχουμε δει ότι έχει αυτή τη μορφή. Από αυτά που έχουμε δείξει στη μελέτη των πεπερασμένων διαφορών, συμπεραίνουμε ότι $d(np) = n \cdot qdx$, $n =$ σταθερή ποσότητα. Αντικαθιστούμε το n με το dx και έτσι έχουμε $d(pdx) = qdx^2$ οπότε $d^2y = qdx^2$ και από εδώ φαίνεται αυτό που αναφέρθηκε στα προηγούμενα, δηλαδή ότι ο λόγος d^2y/dx^2 είναι πεπερασμένος.

Από τη μελέτη των Διαφορών προκύπτει ότι οι Διαφορές δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης είναι δυνατόν να υπολογιστούν μόνο αν οι τιμές του x ακολουθούν κάποιο κανόνα. Για τον ίδιο λόγο και τα διαφορικά δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης μπορούν να υπολογιστούν εφόσον η μεταβλητή x αυξάνει με σταθερό τρόπο. Έτσι αν η αύξηση κάθε φορά είναι σταθερή και ίση με dx, για το διαφορικό δεύτερης τάξης έχουμε:

$$d^2x = dx' - dx = 0$$

$$d^2x' = dx'' - dx' = 0$$

$$d^2x'' = dx''' - dx'' = 0$$

Αν η αύξηση δεν ήταν σταθερή, τότε τα $dx,\ dx',\ dx'',...$ δεν θα ήταν ίσα μεταξύ τους και έτσι θα ήταν $d^2x \neq 0$. Γι' αυτό το λόγο, τα δεύτερης τάξης διαφορικά είναι

συνάρτηση του x με διαφορετικό τύπο. Αν $dy = pdx$ το διαφορικό δεύτερης τάξης του y (d^2y) δεν είναι ίσο με $dp \cdot dx$.

Αφού $p, q, r, s, t, ...$ είναι πεπερασμένες ποσότητες σε ειδικές συναρτήσεις του x, το πρώτο διαφορικό του y έχει έναν πεπερασμένο λόγο προς το πρώτο διαφορικό του x. Δηλαδή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{1}$$

Για το λόγο αυτό, τα διαφορικά dx και dy λέγονται ομογενή.

Όμοια:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{1}$$

άρα $d^2x,\ dx^2$ είναι ομογενή.

4.2 Βασικοί κανόνες Διαφόρισης

Στο σημείο αυτό είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να αποδείξουμε τους βασικούς τύπους διαφόρισης σύμφωνα με τις απόψεις του Euler για τα διαφορικά.

Αφού $dx = 0 \Rightarrow (dx)^2 = 0,$ και αφού $(dx)^2$ είναι διαφορικό μεγαλύτερης τάξης από το ένα, έχουμε:

$$dx + (dx)^2 = dx \Rightarrow$$

$$\frac{dx + (dx)^2}{dx} = 1 \Rightarrow$$

$$1 + dx = 1, \text{ έτσι}$$

$$dx + (dx)^{n+1} = dx, \text{ για όλα τα } n > 0$$

- ο κανόνας της Δύναμης

$$\text{εάν } y = x^n, \text{ τότε}$$

$$dy = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1}x^{n-2}(dx)^2 + ...$$

$$\text{Άρα, } dy = nx^{n-1}dx$$

- ο κανόνας γινομένου

εάν $y = pq$, τότε

$$d(pq) = (p + dp)(q + dq) - pq$$

$$= pq + pdq + qdp + dpdq - pq$$

το $dpdq$ παραλείπεται επειδή είναι απειροστό μεγαλύτερης τάξης

$$d(pq) = pdq + qdp$$

- ο κανόνας του πηλίκου

$$\frac{1}{q+dq} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{1+\frac{dq}{q}}\right)$$

$$= \frac{1}{q}(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} - \cdots)$$

$$= \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}$$

Μέσα από τη χρήση των γεωμετρικών σειρών ο Euler κατέληξε στο συμπέρασμα ότι

$$\left(\frac{1}{q+dq}\right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2} \ (*)$$

Έτσι έχουμε:

$$d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+dp}{q+dq} - \frac{p}{q}$$

$$= (p+dp)\left(\frac{1}{q+dq}\right) - \frac{p}{q}$$

$$(*) = (p+dp)(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}) - \frac{p}{q}$$

$$= \frac{p+dp}{q} - \frac{pdq+dpdq}{q^2} - \frac{p}{q}$$

Συνδυάζοντας τους όρους, βρίσκοντας τον κοινό παρανομαστή, και παραλείποντας το *dpdq* ως απειροστό μεγαλύτερης τάξης, μπορούμε να απλοποιήσουμε κατά πολύ αυτή την εξίσωση.

$$d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{qp+qdp-pdq-pq}{q^2}$$

$$d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{qdp-pdq}{q^2}$$

- υπερβατικοί ή φυσικοί λογάριθμοι

ο Euler χρησιμοποίησε τις σειρές του Mercator[121] για να αναπτύξει το $\ln(1+x)$.

$$\left(\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

Αν $y = \ln x$ τότε

$$dy = \ln(x+dx) - \ln x$$

$$= \ln(\frac{x+dx}{x})$$

$$= \ln(1+\frac{dx}{x})$$

Άρα $dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{x^2} + \frac{dx^3}{x^3} - \cdots$

και παραλείποντας τα διαφορικά υψηλότερης τάξης έχουμε

$$dy = \frac{dx}{x}$$

- τριγωνομετρικές συναρτήσεις

[121] Ο Nicolaus Mercator το 1668 εξέδωσε το βιβλίο του *«Logarithmotechnica»* (Λογαριθμικές τεχνικές) στο οποίο παρουσιαζόταν η συγκεκριμένη σχέση.

Για να βρει τις παραγώγους του ημίτονου και του συνημίτονου ο Euler αναμφίβολα χρησιμοποίησε τις σειρές του ημίτονου και του συνημίτονου. Δηλαδή:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{και} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Τώρα το μόνο που είχε να κάνει ο Euler ήταν να αντικαταστήσει το x με το dx και να παραλείψει τα απειροστά της μεγαλύτερης σειράς, για να πάρει το αποτέλεσμα:

$$\sin(dx) = dx, \text{ και } (*)$$

$$\cos(dx) = 1, \qquad (**)$$

το οποίο είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι το dx είναι μηδέν, σύμφωνα με αυτά που είπαμε. Τότε ο Euler εκμεταλλεύτηκε την ιδιότητα του τριγωνομετρικού αθροίσματος για να προσθέσει ένα απειροστό στο x. Έτσι:

$$\begin{aligned} dy &= \sin(x + dx) - \sin x \\ &= \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x \quad (***) \\ &= \sin x + \cos x dx - \sin x \\ dy &= \cos x dx. \end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα των εξισώσεων (*) και (**) αντικαθιστώνται στην εξίσωση (***) για να απλοποιήσουν την παράγωγο. Η ίδια διαδικασία και τεχνική χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι:

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

Αν και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούσε ο Euler προκειμένου να φτάσει σε αυτά τα συμπεράσματα δεν είναι αποδεκτά σήμερα, παρόλα αυτά το μυαλό που κρυβόταν πίσω από όλα αυτά ήταν μοναδικό.

4.3 Μέγιστα και ελάχιστα

Ο Euler ασχολήθηκε και με τη διαφόριση συναρτήσεων δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Στο σχετικό κεφάλαιο δεν κάνει καμιά αναφορά στον τρόπο με τον οποίο αναπτύχθηκε αυτή η έννοια και αναφέρει μόνο τη δυνατότητα που έχει κάθε μεταβλητή ν' αλλάζει ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Έτσι αν το V είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών x και y, τότε το ολικό διαφορικό dV προκύπτει από τη μεταβολή του x σε $x + dx$ και του y δε $y + dy$ και δίνεται από τη σχέση $dV = pdx + qdy$ όπου p, q

είναι οι διαφορικοί συντελεστές που προκύπτουν λαμβάνοντας κάθε φορά το y ή το x ως σταθερό. Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό

$$p = \frac{\partial V}{\partial x} \text{ και } q = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Ο Euler αφιερώνει δυο κεφάλαια στην εύρεση μέγιστων και ελάχιστων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στο κείμενό του δεν υπάρχουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις. Η μελέτη των ακρότατων γίνεται μόνο με αναλυτικό τρόπο. Ξεκινάει αναλύοντας τη διαφορά ανάμεσα στο ολικό μέγιστο όπου η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και το τοπικό μέγιστο όπου η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή τοπικά. Εξάγει τα βασικά κριτήρια σύμφωνα με τα οποία μια συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Ο Euler θεωρεί ότι αν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{dy}$$

γίνονται ίσες με μηδέν για κάποιο x, y τότε αυτό αποτελεί και σημείο πιθανού ακρότατου. Ισχυρίζεται ακόμα ότι αν

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0 \text{ και } \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0 \text{ για } x = x_0 \text{ και } y = y_0$$

τότε η συνάρτηση V έχει ελάχιστη τιμή εκεί,

$$\text{ενώ αν } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0 \text{ και } \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0$$

έχει μέγιστη τιμή[122]. Αν εφαρμόσουμε το παραπάνω στη συνάρτηση

$$V = x^3 + y^2 - 3xy + \frac{3}{2}x$$

έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 3y + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2y - 3x$$

Αν λύσουμε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} 3x^2 - 3y + \frac{3}{2} = 0 \\ 2y - 3x = 0 \end{Bmatrix}$$

βρίσκουμε

$$\left(x = 1, y = \frac{3}{2}\right) \text{ και } \left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}\right)$$

[122] Victor Katz, *A History of Mathematics*, p. 573.

τα οποία θα έπρεπε να ήταν σημεία όπου η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή. Όμως αυτό δεν ισχύει. Το δεύτερο δεν είναι σημείο ελάχιστου αλλά σαγματικό[123] σημείο. Ο Euler στο σημείο αυτό απέτυχε να δώσει ολοκληρωμένα συμπεράσματα.

4.4 Διαφορικές εξισώσεις

Το 1728 η μόνη γενική μέθοδος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων ήταν αυτή των «χωριζομένων μεταβλητών»[124]. Ο Euler μελέτησε μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων ξεκινώντας από την πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση $dy + pydx = Qdx$. Με σημερινό συμβολισμό είναι $y' + Py = Q$ όπου P, Q συναρτήσεις του x. Η απαίτηση της συνέχειας των P, Q δεν προβλημάτιζε των Euler αφού η εν λόγω ιδιότητα συνόδευε κάθε συνάρτηση όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το ζητούμενο ήταν να βρεθεί μια συνάρτηση $\rho = \rho(x)$ τέτοια ώστε αν η παραπάνω εξίσωση πολλαπλασιαστεί με το ρ, το αριστερό μέλος να γίνεται η παράγωγος του γινομένου ρy. Δηλαδή $\rho \frac{dy}{dx} + \rho Py = \rho Q$ και θα πρέπει η ρ να ικανοποιεί την απαίτηση $\rho \frac{dy}{dx} + \rho Py = \frac{d(\rho y)}{dx}$. Πράγματι $\frac{d(\rho y)}{dx} = \frac{d\rho}{dx} y + \rho \frac{dy}{dx} = (\rho Q) = \rho \frac{dy}{dx} + \rho Py$. Άρα $\frac{d\rho}{dx} = \rho P$ η συνθήκη που πρέπει να ισχύει. Στην εξίσωση όμως αυτή οι μεταβλητές χωρίζονται και μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς ρ: $\frac{d\rho}{\rho} = Pdx \Rightarrow \ell n|\rho| = \int Pdx + \ell nC \Rightarrow \rho = e^{\int Pdx}$ (μπορούμε χωρίς πρόβλημα να θέσουμε $\pm C = 1$ αφού δεν μας ενδιαφέρει να βρούμε τη γενική λύση της ρ). Η συνάρτηση ρ είναι αυτή που ονομάζουμε ολοκληρωτικό παράγοντα και οφείλεται στον Euler[125].

---

[123] Μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει σαγματικό σημείο σ' ένα κρίσιμο σημείο (a,b) αν σε κάθε ανοικτό κυκλικό δίσκο με κέντρο το (a,b) υπάρχουν σημεία (x,y) του πεδίου ορισμού όπου $f(x,y) > f(a,b)$ και σημεία (x,y) του πεδίου ορισμού όπου $f(x,y) < f(a,b)$. Το σημείο $(a,b,f(a,b))$ πάνω στην επιφάνεια $z = f(x,y)$ καλείται σαγματικό σημείο.

[124] Edward Sandifer, *The early mathematics of Leonhard Euler* p. 22.

[125] Τον ολοκληρωτικό παράγοντα ο Euler τον παρουσιάζει στην παράγραφο 16 της εργασίας του με τίτλο *"Nova methodus innumerabiles aequationes differentialis secundi gradus reducendi ad aequationes differentialis primi gradus"* και κωδικό E-10. Αν και η τεχνική αυτή ήταν ιδιαίτερης αξίας ο ίδιος ο Euler δεν φαίνεται να είχε αντιληφθεί τη σπουδαιότητα της και χρειάστηκαν δέκα χρόνια μέχρι ο Alexis Clairaut να αναδείξει τη μέθοδο.[ο.π.].

Έτσι η γενική λύση της $dy + pydx = Qdx$ που δόθηκε το 1734 και αποτελεί μέθοδο επίλυσης γραμμικών πρώτης τάξης ήταν η $y = e^{-\int Pdx} \int e^{\int Pdx} Qdx$.[126]

Ο Euler μελέτησε την εξίσωση της μορφής $Pdx + Qdy = 0$ στην περίπτωση που $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Όταν ισχύει η προηγούμενη ισότητα η διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ακριβής* και το $Pdx + Qdy$ *τέλειο διαφορικό*.[127] Τότε αν βρούμε τη συνάρτηση f της οποίας είναι τέλειο διαφορικό θα έχουμε $df(x, y) = 0$ με γενική λύση $f(x, y) = C$. Ασχολήθηκε με την εύρεση του ολοκληρωτικού παράγοντα που πολλαπλασιαζόμενος θα μετέτρεπε σε *ακριβή* κάθε διαφορική πρώτης τάξης. Ακόμα στην εργασία του E-10 με τίτλο "*Nova methodus innumerabiles aequationes differentialis secundi gradus reducendi ad aequationes differentialis primi gradus*[128] " μας παρουσιάζει μια μέθοδο που με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής μετατρέπει διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης σε πρώτης. Βέβαια αυτό δεν είναι δυνατό για κάθε τύπο διαφορικής εξίσωσης αλλά μόνο κάποιων τύπων. Ως εκ τούτου ξεκινάει από την διαφορική $Pdy^n = Qd\upsilon^n + d\upsilon^{n-2}dd\upsilon$ (*) όπου P, Q συναρτήσεις του y (ανεξάρτητη μεταβλητή) και όπως ο Euler λέει το dy κρατιέται σταθερό. Επιλέγει αυτή ειδικά, γιατί η εξαρτημένη μεταβλητή υ δεν εμφανίζεται παρά μόνο ως διαφορικό. Θέτει $d\upsilon = zdy$ απ' όπου $dd\upsilon = [d(zdy) = dzdy + zddy] = dzdy$ (**) αφού dy σταθερό και άρα $ddy = 0$. Από τις σχέσεις (*) και (**) έχουμε:

$$Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2}dy^{n-2}dzdy \qquad \text{ή} \qquad Pdy^n = Qz^n dy^n + z^{n-2}dy^{n-1}dz$$

Διαιρώντας με dy^{n-1} έχουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$Pdy = Qz^n dy + z^{n-2}dz$$ [129]

Παρόλο που το κίνητρο του υπολογισμού των διαφορικών εξισώσεων προέκυψε κυρίως από τα φυσικά προβλήματα ο Euler δεν τα αναφέρει ποτέ στο κείμενο. Τόσο το *"Institutiones calculi integralis"* όσο και το *"Institutiones calculi defferentialis"* είναι βιβλία γνήσιας ανάλυσης χωρίς εφαρμογές από τη γεωμετρία ή τη μηχανική.

---

[126] Victor Katz, *A History of Mathematics*, p. 574.

[127] Το $Pdx + Qdy$ είναι τέλειο διαφορικό αν υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$: $\partial f / \partial x = P$ και $\partial f / \partial y = Q$.

[128] Ο Euler χρησιμοποιεί τον όρο βαθμό για την έννοια που εμείς σήμερα καλούμε τάξη διαφορικής εξίσωσης.

[129] Edward Sandifer, *The early mathematics of Leonhard Euler*, p. 22.

4.5 Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Η θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων άρχισε να αναπτύσσεται στα μέσα του 18ου αιώνα όχι μόνο με τον Euler αλλά και με τον Jean Rond d' Alembert (1717-1783) και τον Daniel Bernoulli. Όπως και στην περίπτωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων έτσι και εδώ η μελέτη των φυσικών φαινόμενων ήταν η αιτία της μελέτης των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Εδώ θα συζητήσουμε μόνο έναν ειδικό τύπο της μερικής διαφορικής εξίσωσης, την κυματοειδή (ή κυματική) εξίσωση[130]. Έτσι ενώ η μετατόπιση μιας χορδής είχε μέχρι τότε μελετηθεί ξεχωριστά ως συνάρτηση του χρόνου και ξεχωριστά ως συνάρτηση της απόστασης ενός σημείου της παλλόμενης χορδής από το ένα άκρο της, τώρα η προσπάθεια να μελετηθεί η μετατόπιση ως συνάρτηση δυο μεταβλητών οδήγησε στη θεώρηση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Η συζήτηση πάνω στο θέμα των παλλόμενων χορδών ξεκίνησε από μια εργασία του d' Alembert το 1747 στην οποία πρότεινε μια λύση στο πρόβλημα της μορφής μιας τεντωμένης χορδής σε δόνηση. Έστω λοιπόν μια ελαστική χορδή η οποία είναι τεντωμένη μεταξύ δυο στηριγμάτων στο οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε ο άξονας x να κείται κατά μήκος της χορδής. Επειδή η θέση ενός σημείου πάνω σε μια χορδή εξαρτάται από την απόσταση του σημείου από το ένα άκρο της (x) και από το χρόνο (t) τότε η κατακόρυφη μετατόπιση δίνεται από τη συνάρτηση $y=(t,x)$. Ο d' Alembert θεώρησε ότι η χορδή αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό απειροστών μαζών και κατέληξε στη διαφορική εξίσωση που με σύγχρονο συμβολισμό είναι η: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Το $c=\frac{T}{\rho}$, όπου T η τάση που ασκείται στη χορδή και ρ η μάζα ανά μονάδα μήκους της χορδής. Για $c^2=1$ βρήκε τη λύση $y=\Psi(t+x)+\Gamma(t-x)$, όπου Ψ και Γ είναι τυχαίες διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Η παραπάνω εξίσωση περιλαμβάνει μια απειρία καμπύλων και αυτό οδήγησε σε μεγάλη αμφισβήτηση.

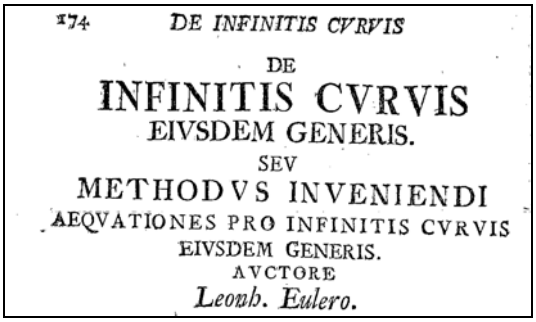
Δυο χρόνια μετά ο Euler δημοσίευσε τη δική του λύση στο ίδιο πρόβλημα δίνοντας τη γενικότερη λύση $y=\Psi(t+ax)+\Gamma(t-ax)$. Ο Euler διαφοροποιήθηκε στα είδη αρχικής θέσης που μπορούσαν να επιτραπούν έτσι ώστε η $y(0,x)=f(x)$

[130] Κάποια μορφή αυτής της εξίσωσης, ή μια γενίκευση αυτής, εμφανίζεται σχεδόν αναπόφευκτα σε κάθε μαθηματική ανάλυση φαινόμενων που περιλαμβάνει τη διάδοση κυμάτων σε ένα συνεχές μέσον. Για παράδειγμα οι μελέτες ακουστικών κυμάτων και υδάτινων κυμάτων βασίζονται σ' αυτή την εξίσωση.

μπορούσε να είναι οποιαδήποτε καμπύλη στο διάστημα $[0,\ell]$, ακόμα και κάποια που δεν οριζόταν από μια αναλυτική έκφραση. Μπορούσε να είναι μια καμπύλη ζωγραφισμένη με το χέρι. Έτσι δεν ήταν απαραίτητο για τη συνάρτηση να είναι διαφορίση σε κάθε σημείο και το πιο σημαντικό ήταν ο ορισμός στο αρχικό διάστημα. Ακόμα και αν υπήρχαν απομονωμένα σημεία όπου η συνάρτηση δεν ήταν διαφορίσιμη , μπορούσε να θεωρήσει την παραπάνω λύση της διαφορικής εξίσωσης γιατί σύμφωνα με την άποψη του δεν επηρέαζε τη γενική συμπεριφορά της συνάρτησης [131].

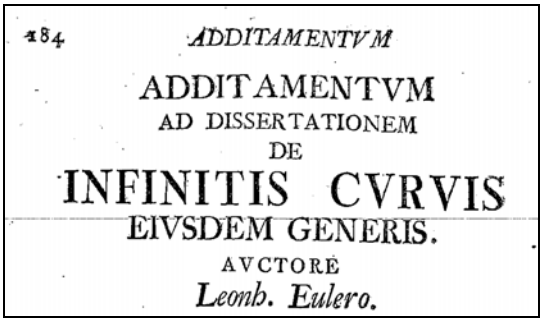
4.6 Το Θεώρημα των μεικτών παραγώγων

Ο Euler το 1734 έγραψε μια εργασία με τίτλο *"De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis"* [Σχετικά με την απειρία των καμπύλων ενός δοθέντος είδους, ή μια μέθοδος εύρεσης εξισώσεων για μια απειρία καμπύλων ενός δοθέντος είδους]. Ο τίτλος μας παραπέμπει στις οικογένειες καμπύλων και ο αναγνώστης δεν μπορεί να εικάσει ότι αυτό είναι ένα άρθρο που αφορά μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η εργασία αυτή με κωδικό E-44[132] μαζί με το E-45[133] ανήκουν σε μια ομάδα εργασιών που αφορά τις διαφορικές εξισώσεις.


174 DE INFINITIS CVRVIS

DE
INFINITIS CVRVIS
EIVSDEM GENERIS.
SEV
METHODVS INVENIENDI
AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS
EIVSDEM GENERIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

E-44


184 ADDITAMENTVM

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM
DE
INFINITIS CVRVIS
EIVSDEM GENERIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

E-45

Ο Euler αρχίζει με τον ορισμό της παραμέτρου. Χρησιμοποίησε το παράδειγμα της εξίσωσης $y^2 = ax$ η οποία παράγει άπειρες παραβολές για κάθε τιμή του a. Το a συμπεριφέρεται ως σταθερά και όχι ως μεταβλητή. Ο ίδιος ο Euler ακολουθώντας την

[131] Victor Katz, *A History of Mathematics*, p 80.
[132] Αφορά την αρίθμηση στο *"eneström index"* όπου είναι καταχωρημένα τα γραπτά του Euler και είναι διαθέσιμα στη δικτυακή διεύθυνση http://math.dartmouth.edu/~euler/.
[133] *"Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiudem generic"*.

ορολογία του Jakob Hermann χρησιμοποιεί για το a τη λέξη "modulus". Ο Euler είπε ότι αν μια αλγεβρική εξίσωση[134] δίνεται με μεταβλητές x και z και περιλαμβάνει την παράμετρο a (modulus a) τότε αυτή ορίζει μια ειδική καμπύλη αν το a θεωρηθεί σταθερό, αλλά δίνει 'όλες τις καμπύλες' αν το a θεωρηθεί ως παράμετρος.

Έστω $z = \int Pdx$, όπου P περιλαμβάνει την παράμετρο a και τα z, x.

Τότε θεωρώντας το a σταθερό έχουμε $dz = Pdx$. Αν όμως το a θεωρηθεί μεταβλητή τότε $dz = Pdx + Qda$. Το ερώτημα που απασχόλησε τον Euler ήταν η φύση του Q. Προκειμένου να λύσει αυτό το πρόβλημα κάνει μια παρένθεση και μας δίνει ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματά του στην ανάλυση μαζί με την απόδειξή της.

Ο Euler τη διατυπώνει ως εξής:

«*Αν μια ποσότητα A που συντίθεται από δύο μεταβλητές t και u διαφοριστεί κρατώντας σταθερό το t*[135] *και το διαφορικό διαφοριστεί κρατώντας σταθερό το u κι αφήνοντας το t ως μεταβλητή, τότε προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα ακόμα κι αν αντιστραφεί η σειρά και η ποσότητα A διαφοριστεί κρατώντας το u σταθερό και στη συνέχεια διαφοριστεί το διαφορικό κρατώντας το t σταθερό κι αφήνοντας το u ως μεταβλητή*»[136]

Η παραπάνω πρόταση είναι αυτό που γνωρίζουμε ως '**θεώρημα των μεικτών παραγώγων**' σύμφωνα με το οποίο:

[Αν η $f(x,y)$ και οι μερικές της παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy} και f_{yx} ορίζονται σε όλο το ανοικτό διάστημα που περιέχει το σημείο (a,b) και είναι συνεχείς στο (a,b) τότε: $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$]

Η μερική παράγωγος προκύπτει όταν κρατάμε σταθερές όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές μιας συνάρτησης πλην μιας, και διαφορίζουμε ως προς τη μία αυτή μεταβλητή. Θα πρέπει να θυμίσουμε ότι ο Euler έγραψε για διαφορικά και όχι για παραγώγους. Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποίησε την παραπάνω διατύπωση, που μπορεί να ξενίζει το σημερινό αναγνώστη αλλά ήταν φυσικό για την εποχή εκείνη. Χρειάστηκαν κάμποσα χρόνια μέχρι να φτάσουμε στη σχέση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ ή } f_{xy} = f_{yx}.$$

[134] Σύμφωνα με τον Edward Sandifer ο Euler στο σημείο αυτό πράγματι εννοεί αλγεβρικές εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν αθροίσματα, γινόμενα, λόγους, ρίζες και όχι υπερβατικές εξισώσεις.

[135] Με σύγχρονο συμβολισμό είναι η μερική παράγωγος $\frac{\partial A(t,u)}{\partial u}$.

[136] Edward Sandifer, *The early mathematics of Leonhard Euler* p. 143.

Το σύμβολο ∂ χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Legendre[137] το 1786 για το συμβολισμό της μερικής παραγώγου. Ας δούμε την απόδειξη που έδωσε ο Euler με τα μαθηματικά εργαλεία που διέθετε:

Έστω A μια συνάρτηση του t και του u. Στη θέση του t στην A θέτει $t+dt$ και αυτό που προκύπτει από την αντικατάσταση το ονομάζει B. Ύστερα στη θέση του u στην A θέτει $u+du$ και το ονομάζει C. Μετά θέτει $t+dt$ στη θέση του t και $u+du$ στη θέση του u στην A και τη συνάρτηση που προκύπτει την ονομάζει D. Αυτό είναι το ίδιο που θα είχαμε αν θέταμε $u+du$ στη θέση του u στη B και το ίδιο αν θέταμε $t+dt$ στη θέση του t στη C. Από αυτό προκύπτει ότι το διαφορικό της A, αν το t κρατηθεί σταθερό, είναι $C-A$. Τότε αυτό δίνει $D-B$ και έτσι το διαφορικό θα είναι $D-B-C+A$.

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά και θέσουμε $t+dt$ στη θέση του t στην A για να πάρουμε τη B, τότε το διαφορικό με το t μεταβλητή είναι το $B-A$. Σε αυτό το διαφορικό αν θέσουμε $u+du$ στη θέση του u θα πάρουμε $D-C$. Έτσι το διαφορικό της A θα είναι $D-B-C+A$.

Παρατηρούμε ότι τα διαφορικά υπολογίζονται με αλγεβρικό τρόπο μέσα από διαδικασίες αντικατάστασης (και όχι με χρήση ορίων) ενώ η απαίτηση της συνέχειας των μερικών παραγώγων απουσιάζει.

Το υπόλοιπο της εργασίας αφορά το πώς ένα ολοκλήρωμα όπως το $z=\int Pdx$ εξαρτάται από το a, αν το P είναι μια συνάρτηση του x και περιλαμβάνει μια παράμετρο a. Είναι προφανές ότι το εργαλείο για τη λύση του προβλήματος υπήρξε σημαντικότερο από το ίδιο το πρόβλημα.

4.7 Ολοκλήρωμα

Όπως στο Διαφορικό Λογισμό μελετούμε το διαφορικό μιας ποσότητας βρίσκοντας το διαφορικό της, αντίστοιχα ο Ολοκληρωτικός Λογισμός ασχολείται με την εύρεση μιας ποσότητας της οποίας γνωρίζουμε ήδη το διαφορικό. **Ολοκλήρωμα** είναι η ποσότητα εκείνη που το διαφορικό της είναι ίσο με τη δοθείσα ποσότητα[138] (αν έχουμε μια ποσότητα τότε ολοκλήρωμά της είναι η ποσότητα εκείνη της οποίας το

[137] Adrien Marie Legendre, *Memoire sur la manière de distinguer les maxima et les minima dans les questions dépendant du calcul des variations*.
[138] J.D. Blanton, *Foundations of Differential Calculus*, § 139, p. 72.

διαφορικό είναι η αρχική δοθείσα ποσότητα). Στο τρίτομο έργο του *"Institutiones calculi integralis"* (1768-1770), ο Euler ορίζει την ολοκλήρωση, όπως ο Leibniz και ο Johann Bernoulli, ως την τυπική αντιστροφή της διαφόρισης (της παραγώγισης) και όχι ως εμβαδόν μιας περιοχής. Είναι ενδιαφέρον ότι στο βιβλίο αυτό δεν έχει συμπεριλάβει υπολογισμούς εμβαδών, όγκων και επιφανειών. Ακόμα δεν φαίνεται πουθενά το *Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού* που δίνει τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

Η ερμηνεία της ονομασίας ολοκλήρωμα που δίνει ο ίδιος ο Euler είναι η παρακάτω:

«Α*φού ένα διαφορικό μπορεί να θεωρηθεί ως η απειροστή αύξηση που λαμβάνει μια ποσότητα, τότε αυτή η ποσότητα που ένα μέρος της είναι λογικό να θεωρηθεί ως όλο, ονομάζεται* <u>*ολοκλήρωμα*</u>*. Έτσι, αφού* dy *είναι το διαφορικό του* y*, ο* y *με τη σειρά του είναι ολοκλήρωμα του* x*. Αφού* d^2y *είναι το διαφορικό του* dy*, τότε το* dy *είναι το ολοκλήρωμα του* d^2y*. Από αυτό φαίνεται ότι κάθε διαφόριση εξεταζόμενη από άλλη οπτική είναι συγχρόνως ένα παράδειγμα ολοκλήρωσης*».

Η προέλευση και η φύση των ολοκληρωμάτων και των διαφορικών γίνεται περισσότερο κατανοητή μέσα από τη θεωρία των πεπερασμένων διαφορών. Όπως φάνηκε με ποιο τρόπο μπορεί να βρεθεί η διαφορά οποιασδήποτε ποσότητας, έτσι είδαμε και πως μπορεί να βρεθεί μια ποσότητα που η διαφορά της είναι γνωστή. Ονομάζουμε αυτήν την ποσότητα ως το άθροισμα της διαφοράς. Έτσι, όπως οι διαφορές γίνονται διαφορικά όταν τις προσεγγίζουμε με απείρως μικρές ποσότητες, έτσι και τα αθροίσματα γίνονται ολοκληρώματα. Οι Άγγλοι για τα διαφορικά χρησιμοποιούσαν τη λέξη *"fluxions"* [ροές] και για τα ολοκληρώματα το όνομα *"fluents"* [ρέουσες].

Το σύμβολο που χρησιμοποίησε ο Euler για να συμβολίσει το ολοκλήρωμα είναι το $\int$. Ο συμβολισμός αυτός που έφτασε και μέχρι τις μέρες μας οφείλεται στον Leibniz και εκφράζει το πρώτο γράμμα της λέξης *"summa"*, δηλώνοντας το άθροισμα των ελάχιστων αδιαίρετων ποσοτήτων[139]. Αντίθετα ο Newton και άλλοι μαθηματικοί πριν από αυτόν χρησιμοποίησαν τα σύμβολα $\boxed{f(x)}$ ή $\square f(x)$ [140]. Έτσι αν $dy = pdx$ τότε το y είναι το ολοκλήρωμα του pdx. Δηλαδή, $y = \int pdx$ αφού $y = \int dy$. Όμοια,

[139] Howard Eves, *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, σελ. 39.
[140] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος & Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος 1ος, σελ. 207.

αν $d^2y = qdy$ όπου $dp = qdx$ τότε $dy = \int d^2y = pdx$ αφού $p = \int qdx$ έχουμε $dy = dx\int qdx$ άρα $y = \int dx \cdot \int qdx$.

Αφού το διαφορικό dy είναι μια απείρως μικρή ποσότητα, το ολοκλήρωμα του y είναι πεπερασμένη ποσότητα. Ομοίως, το d^2y είναι απείρως μικρότερο από το ολοκλήρωμα του dy.

Στο πρώτο μέρος του *"Institutiones calculi integralis"* ασχολείται με τεχνικές ολοκλήρωσης συναρτήσεων βρίσκοντας αντιπαράγωγους διαφόρων τύπων ενώ στο υπόλοιπο ασχολείται με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Ο Euler ξεκινάει με αποτελέσματα όπως:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \text{ για } n \neq -1 \text{ και } \int \frac{adx}{x} = a\ell nx + c = \ell ncx^a .$$

Χρησιμοποίει ευρύτατα την τεχνική της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων και μεθόδους αλλαγής μεταβλητής για την ολοκλήρωση τετραγωνικών ριζών. Αυτές τις μεθόδους τις έχει αναπτύξει λεπτομερώς στο *introduction* και εδώ αναδεικνύει τη χρησιμότητα τους. Αφιερώνει ένα κεφάλαιο στην ολοκλήρωση με χρήση σειρών (τεχνική που χρησιμοποίησε ευρύτατα ο Newton) και ολοκλήρωση κατά μέρη ειδικά στην περίπτωση των λογαριθμικών και των εκθετικών και χρησιμοποίησε τις αντικαταστάσεις

$$\cos\phi = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ και } \sin\phi = \frac{2x}{1+x^2}$$

για να απαλείψει ημίτονα και συνημίτονα από ρητές συναρτήσεις.

Η πρώτη συστηματική μελέτη τον 18ο αιώνα της προσέγγισης του ολοκληρώματος ως όριο αθροίσματος βρίσκεται στο *Institutiones Calculi Integralis* του Euler. Αν και ο Euler, όπως είδαμε παραπάνω, είχε ορίσει το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο της παραγώγου, συνειδητοποίησε ότι μερικές φορές ήταν απαραίτητο να χρησιμοποιήσει άλλες ιδιότητες του ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του, ή έστω μιας ικανοποιητικής προσέγγισής του. Ο Euler θεώρησε το X ως συνάρτηση του x, και μελέτησε το ολοκλήρωμα $\int Xdx$ μεταξύ των ορίων α και x. Προκειμένου να υπολογίσει την τιμή αυτού ακολούθησε την εξής διαδικασία: διαίρεσε το διάστημα $[a,x]$ σε υποδιαστήματα μήκους $a'-a,\ a''-a',\ ...,\ x'-x'',\ x-x'$ όπου $a < a' < a'' < a''' < ... < x'' < x' < x$. Τις τιμές της συνάρτησης X στα σημεία $a,\ a',\ a'',\ ...,\ x'',\ x',\ x$ τις συμβόλισε με $A,\ A',\ A'',...,X'',\ X'$ και X.

Ο Euler είπε ότι μεταξύ δύο τιμών του x που διαφέρουν κατά μια μικρή ποσότητα, η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερή. Έτσι το ολοκλήρωμα $\int Xdx$ σε αυτό το μικρό διάστημα είναι η τιμή της συνάρτησης εκεί πολλαπλασιασμένη με το μήκος του μικρού διαστήματος. Έτσι η τιμή του ολοκληρώματος $\int Xdx$ μεταξύ των ορίων α και x μπορεί να προσεγγιστεί από άθροισμα $y = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + ... + X'(x - x')$. Αυτό επομένως είναι το άθροισμα το οποίο προσεγγίζει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος με τη συνάρτηση υπολογισμένη στο αριστερό άκρο των υποδιαστημάτων, όπως ο Cauchy έγραψε αρκετά χρόνια μετά. Ο Euler δε βρήκε ένα γενικό τρόπο υπολογισμού του σφάλματος της προσέγγισης, αλλά κατάφερε να βρει διάφορους τρόπους με τους οποίους εξασφάλιζε καλές προσεγγίσεις.

Ο Euler θεώρησε συναρτήσεις που οι τιμές τους συνεχώς αυξάνουν (αύξουσες) ή που συνεχώς φθίνουν (φθίνουσες). Τότε το ολοκλήρωμα $\int Xdx$ μεταξύ των δοσμένων ορίων περιέχεται μεταξύ δύο αθροισμάτων. Το πρώτο από τα αθροίσματα είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων το μήκος της μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το μήκος του αντίστοιχου υποδιαστήματος και το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς είναι ίσο με την τιμή του x στο αριστερό άκρο αυτού του υποδιαστήματος. Το δεύτερο άθροισμα είναι το αντίστοιχο άθροισμα για τις τιμές των x στο δεξιό άκρο των υποδιαστημάτων. Δηλαδή:

$$b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + ... + X'(x - x') < \int Xdx < b + A'(a' - a) + A''(a'' - a') + ... + X(x - x')$$ A

υτός ο τρόπος δίνει μια μέθοδο ελέγχου του σφάλματος αλλά δεν είναι αποτελεσματικός αν η συνάρτηση δεν είναι μονότονη στο διάστημα που τη μελετάμε. (Ο Euler δε χρησιμοποιούσε τον όρο μονότονη.)

Παρόλα αυτά ο Euler υποστήριζε ότι η προσέγγιση μπορεί να γίνεται όλο και καλύτερη διαλέγοντας κατάλληλα υποδιαστήματα. Έτσι, αν οι τιμές της συνάρτησης μεταξύ δύο τιμών του x αλλάζουν απότομα, πρέπει να επιλεγούν πολύ μικρά διαστήματα, ενώ αν οι τιμές της συνάρτησης δεν αλλάζουν απότομα, μπορούν να επιλεγούν μεγαλύτερα διαστήματα. Επομένως, σύμφωνα με τον Euler, ο τρόπος μεταβολής της συνάρτησης είναι εκείνος που καθορίζει εάν για το δοσμένο ολοκλήρωμα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ίσα ή άνισα, μεγάλα ή μικρά διαστήματα[141].

[141] Grabiner Judith, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, p. 149.

Ο Euler και ο Cauchy χρησιμοποίησαν ίδιες μεθόδους προσέγγισης αθροισμάτων και διαπίστωσαν ότι καλύτερη επιλογή διαστημάτων παράγει καλύτερες προσεγγίσεις, αν και οι γενικότερες απόψεις τους για τα ολοκληρώματα διαφέρουν σημαντικά. Ο Euler πίστευε ότι το ολοκλήρωμα είχε ύπαρξη ανεξάρτητη της προσεγγιστικής διαδικασίας. Επίσης, δεν μπορούσε να υπολογίσει την ακρίβεια της προσέγγισης για μια συνάρτηση που δεν ήταν μονότονη. Σε αυτό φαίνεται και η γενικότερη άποψη για τις προσεγγίσεις κατά το 18ο αιώνα. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, η συνάρτηση θεωρείται a-priori ολοκληρώσιμη και η δουλειά των μαθηματικών είναι να βρουν την καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Πέρασαν αρκετά χρόνια μέχρι που ο Cauchy να θέσει το ερώτημα τού κατά πόσο είναι ολοκληρώσιμη μια συνάρτηση, και πολύ περισσότερο, μέχρι τελικά να απαντηθεί αυτό το ερώτημα.
Εντούτοις, οι τρόποι υπολογισμού ολοκληρωμάτων από τον Euler αποδείχθηκαν χρήσιμοι για τους επόμενους μαθηματικούς. Για παράδειγμα, ο Legendre (1752-1833) χρησιμοποίησε τις τεχνικές του αθροίσματος για να προσεγγίσει ολοκληρώματα των οποίων η συνάρτηση σε μερικά σημεία απειρίζεται. Πολλές φορές ο Fourier, στο έργο του *Analytical Theory of Heat*, χρησιμοποίησε την ιδέα ότι το ολοκλήρωμα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως άθροισμα. Ο Fourier, ο Legendre και ο Euler έδειξαν τη χρησιμότητα της προσέγγισης του ολοκληρώματος ως άθροισμα όταν ο υπολογισμός της αντιπαραγώγου αποτύγχανε και έδωσαν τα απαραίτητα στοιχεία ώστε οι επόμενοι μαθηματικοί να προχωρήσουν στην αυστηρή θεμελίωση του ολοκληρωτικού λογισμού.

4.8 Η ερμηνεία του Διπλού ολοκληρώματος.

Ο Euler σε μια εργασία του το 1769 έδωσε την πρώτη εξήγηση της ερμηνείας ενός διπλού ολοκληρώματος. Ξεκίνησε γενικεύοντας την έννοια του ολοκληρώματος ως αντιπαράγωγου. Έτσι αν $\iint zdxdy$ ήταν μια συνάρτηση δυο μεταβλητών x, y το διαφορικό της που θα προέκυπτε διαφορίζοντας και ως προς τις δυο μεταβλητές διαδοχικά θα ήταν το $zdxdy$. Για παράδειγμα έδωσε το $\iint adxdy = axy + X + Y$ όπου X είναι μια συνάρτηση του x και Y μια συνάρτηση του y. Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα είναι το $\int\int \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$. Ολοκληρώνοντας και ως προς τις δυο μεταβλητές έχουμε:

$$\int \frac{dx}{x} \arctan \frac{y}{x} + X \quad \text{και} \quad \int \frac{dy}{y} \arctan \frac{x}{y} + Y$$

Ο Euler χρησιμοποίησε σειρές προκειμένου να υπολογίσει το δεύτερο ολοκλήρωμα και έδειξε ότι και τα δυο ολοκληρώματα οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα[142]:

$$\iint \frac{dxdy}{x^2+y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \ldots$$

Με δεδομένη την ιδέα του διπλού ολοκληρώματος ως διπλής αντιπαραγώγου, ο Euler γενίκευσε την αντίληψη της εύρεσης εμβαδού μέσω ενός μονού ολοκληρώματος προς την εύρεση όγκων χρησιμοποιώντας το διπλό ολοκλήρωμα. Το πρώτο του παράδειγμα ήταν να βρει τον όγκο κάτω από το ογδοημόριο της σφαίρας με ακτίνα a και εξίσωση $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Παίρνοντας το στοιχειώδες εμβαδόν $dxdy$ στο πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου στο x-y επίπεδο, ο Euler είπε ότι ο όγκος της συμπαγούς στήλης πάνω από το απειροστό ορθογώνιο είναι $dxdy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Για να ορίσει αυτό τον όγκο ολοκλήρωσε πρώτα ως προς y, κρατώντας το x σταθερό βρήκε

$$\left[\frac{1}{2}y\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]dx$$

ως τον όγκο υπό το κομμάτι της σφαίρας πάνω από το ορθογώνιο του οποίου το πλάτος είναι dx και το μήκος y. Αντικαθιστώντας το y με το $\sqrt{a^2 - x^2}$, ο Euler υπολόγισε τον όγκο του ίδιου τμήματος και βρήκε $\frac{\pi}{4}\left(a^2 - x^2\right)dx$. Ολοκληρώνοντας ως προς x βρίσκει $\frac{\pi}{4}\left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)$ και αντικαθιστώντας το x με το a βρίσκει τον ζητούμενο όγκο $\frac{\pi}{6}a^3$.

Το πιο ενδιαφέρον τμήμα της εργασίας του Euler πάνω στα διπλά ολοκληρώματα ήταν η αναφορά του στο τι συμβαίνει σε ένα διπλό ολοκλήρωμα αν αλλάξουν οι μεταβλητές του, δηλαδή αν οι x και y δίνονται σαν συναρτήσεις δυο νέων μεταβλητών t και v. Ο Euler ήθελε να προσδιορίσει πως θα μετασχηματίσει το ολοκλήρωμα του $Zdxdy$ σ' ένα νέο ολοκλήρωμα με στοιχειώδες εμβαδόν $dtdv$.

Ο Euler συνειδητοποίησε ότι αν ο μετασχηματισμός των μεταβλητών ακολουθείται από μια περιστροφή, δηλαδή αν:

$$x = a + mt + v\sqrt{1 - m^2} \qquad \text{και} \qquad y = b + t\sqrt{1 - m^2 - mv}$$

[142] Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι συνεχής και ισχύει το θεώρημα Fubini (1879-1943) σύμφωνα με το οποίο η σειρά ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

όπου m είναι το συνημίτονο της γωνίας θ της περιστροφής, τότε τα στοιχειώδη εμβαδά $dxdy$ και $dtdv$ πρέπει να είναι ίσα[143]. Ύστερα όμως από τους υπολογισμούς βρήκε:

$$dx = mdt + dv\sqrt{1-m^2}$$

$$dy = dt\sqrt{1-m^2} - mdv$$

Πολλαπλασιάζοντας έχουμε:

$$dxdy = m\sqrt{1-m^2}dt^2 + \left(1-2m^2\right)dtdv - m\sqrt{1-m^2}dv^2$$

που δεν επιβεβαίωσε την εικασία του Euler. Αυτό που ήθελε να κάνει ο Euler ήταν να αναπτύξει μια μέθοδο που στην παραπάνω περίπτωση θα έδινε $dxdy = dtdv$ και στην πιο γενική περίπτωση $dxdy = Wdtdv$, όπου W μια συνάρτηση του t και του v.

Η ιδέα του Euler ήταν να ασχοληθεί με κάθε μεταβλητή χωριστά όπως έγινε στη διπλή ολοκλήρωση. Έτσι εισήγαγε τη νέα μεταβλητή v έτσι που το $y = f(x,v)$ συνάρτηση των x,v. Τότε:

$dy = Pdx + Qdv$ και υποθέτοντας x σταθερό $\Rightarrow dy = Qdv$

και άρα $\iint dxdy = \iint Qdxdv = \int dv \int Qdx$ [144] (1)

όμοια εισάγουμε τη μεταβλητή t έτσι που $x = f(t,v)$ συνάρτηση των t,v

τότε $dx = Rdt + Sdv$ (2) και υποθέτοντας v σταθερό $\Rightarrow dx = Rdt$ (3)

έτσι από (1) και (3) έχουμε $\int dv \int Qdx = \int dv \int QRdt = \iint QRdtdv$

Έτσι η αρχική επίλυση στο πρόβλημα ήταν $dxdy = QRdtdv$. Όμως η λύση αυτή δεν ήταν ικανοποιητική αφού το Q μπορεί να εξαρτάται από το x και η μέθοδος δεν είναι συμμετρική.

Σε μια προσπάθεια βελτίωσης της λύσης θεώρησε το $y = f(t,v)$ συνάρτηση των t,v

και υπολόγισε το y εκ νέου οπότε

$$dy = Pdx + Qdv \overset{(2)}{=} P(Rdt + Sdv) + Qdv = PRdt + (PS + Q)dv$$

ακόμα αν $PR = T$ (4) και $PS + Q = V$ (5) $dy = Tdt + Vdv$

(4),(5) $\Rightarrow QR = VR - ST$ άρα η τελική λύση ήταν $dxdy = (VR - ST)dtdv$.

[143] Victor Katz, *A History of Mathematics*, p. 577.
[144] Η απαίτηση της συνέχειας των συναρτήσεων είναι απαραίτητη.

Στην πραγματικότητα απαιτείται να χρησιμοποιηθεί η απόλυτη τιμή του $VR - ST$ αφού το εμβαδόν που εκφράζει είναι μια θετική ποσότητα. Όλα αυτά δεν είναι παρά το πολύ χρήσιμο *θεώρημα αλλαγής μεταβλητών* στα διπλά ολοκληρώματα. Είναι αυτό που συνοψίζεται στην εξής σχέση:

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x(t,v),y(t,v))\left|Det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,v)}(t,v)\right|dtdv$$

Όπου τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από τις συναρτησιακές σχέσεις ανάμεσα στα (x,y) και (t,v).

Πράγματι:

$$\left\{\begin{matrix} R = \dfrac{\partial x}{\partial t} & S = \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ T = \dfrac{\partial y}{\partial t} & V = \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\} \text{ και άρα } \begin{vmatrix} R & S \\ T & V \end{vmatrix} = |VR - ST|$$

που είναι και σχεδόν το αποτέλεσμα του Euler . Βέβαια στο σημείο αυτό λείπει η απαίτηση της συνέχειας των μερικών παραγώγων που τη θεωρεί δεδομένη. Το επιχείρημα του Euler ήταν τυπικό στις αποδείξεις του 18^{ου} αιώνα και παρόμοιο επιχείρημα χρησιμοποίησε και ο Lagrange για την αλλαγή μεταβλητής σ' ένα ολοκλήρωμα τριών διαστάσεων. Κανένας τους δεν μελέτησε αν υπήρχαν σημεία όπου οι μερικές παράγωγοι δεν θα υπήρχαν.

Η ανάλυση του απείρου σχετίζεται με την ανακάλυψη των διαφορικών και των ολοκληρωμάτων. Γι' αυτό το λόγο ο Λογισμός που αναπτύχθηκε χωρίστηκε σε δύο κομμάτια: τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Και στα δύο κομμάτια υπάρχουν άριστες εφαρμογές, τόσο στην Ανάλυση όσο και στην ανώτερη Γεωμετρία.

Η δημιουργία του διαφορικού λογισμού αποτελεί μια διαχωριστική γραμμή ή ένα σημείο καμπής στην ιστορία των Μαθηματικών. Τα νέα Μαθηματικά που ενέπνευσε η μεγάλη αυτή ανακάλυψη διαφέρουν σημαντικά από τα παλιά Μαθηματικά, που είχαν κυρίως κληρονομηθεί από τους αρχαίους Έλληνες. Ο διαφορικός μαζί με τον ολοκληρωτικό λογισμό αποτελούν το πρώτο στάδιο των γνωστικών αντικειμένων που σήμερα ονομάζουμε Ανώτερα Μαθηματικά.

Κεφάλαιο 5^{ο}

ΣΕΙΡΕΣ

5.1 Εισαγωγή

Στην αρχή του 17^{ου} αιώνα, οι άπειρες σειρές συναντιούνταν σπάνια στα Μαθηματικά και η γνώση των Μαθηματικών γι' αυτές ήταν μικρή. Μέχρι το τέλος του αιώνα ένας τεράστιος όγκος δουλειάς από συγκεκριμένα παραδείγματα και γενικά θεωρήματα είχε αναπτυχθεί. Άπειρες σειρές υπήρχαν στις εργασίες πολλών μαθηματικών όπως των Newton, Gregory, Leibniz, Bernoullis και άλλων. Το βιβλίο "*Tractatus de seriebus infinitis*" του Jakob Bernoulli (1689), που αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, κάνει μια πολύ καλή περιγραφή αυτής της έκρηξης της γνώσης. Ήταν μια υπέροχη στιγμή και οι μαθηματικοί είχαν κάθε λόγο να νιώθουν υπερήφανοι για την πρόοδό τους τα τελευταία εκατό χρόνια. Ακόμα και το 18^{ο} αιώνα όμως τα περισσότερα συμπεράσματα για τη σύγκλιση των σειρών βασίστηκαν κυρίως στη διαίσθηση και σε επιχειρήματα που στερούνταν μαθηματικής αυστηρότητας. Είναι χρήσιμο να δούμε μέσα από κάποια παραδείγματα της εποχής εκείνης τον τρόπο που οι μαθηματικοί αντιμετώπιζαν τις σειρές.

Σήμερα είμαστε εξοικειωμένοι με το γεγονός ότι ορισμένες σειρές δεν συγκλίνουν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η σειρά $1-1+1-1+1-1+...$ που ενώ δίνει μερικά ενδιαφέροντα αθροίσματα εντούτοις δεν συγκλίνει. Το 17^{ο} αιώνα όμως πολλοί μαθηματικοί ήταν τόσο αισιόδοξοι για τη νεοαποκτηθείσα μαθηματική γνώση που πίστευαν ότι μπορούν να επιλύσουν οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση και να υπολογίσουν το άθροισμα οποιασδήποτε σειράς. Για παράδειγμα ο Daniel Bernoulli σχετικά με την παραπάνω σειρά πίστευε ότι το άθροισμά της είναι $\frac{1}{2}$. Στο αποτέλεσμα αυτό οδηγήθηκε όχι λόγω του αναπτύγματος

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+...$$

αλλά επειδή θεώρησε το άθροισμα της σειράς ως μέση τιμή των μερικών αθροισμάτων 1 και 0. Με αντίστοιχο επιχείρημα ο Bernoulli συμπέρανε ότι το άθροισμα της σειράς $1+0-1+1+0-1+1+0-1+...$ είναι $\frac{2}{3}$.

Ο πρώτος που αντιμετώπισε τις σειρές με ένα τρόπο πιο συστηματικό ήταν ο Euler. Τέτοιου είδους σειρές (με εναλλασσόμενο πρόσημο) μελέτησε στην εργασία του *"De seriebus divergentibus"* (On divergent series) [E-247], που γράφτηκε το 1746 αλλά δημοσιεύτηκε το 1760 [145].. Στην εργασία αυτή, γραμμένη δύο χρόνια μετά το *introductio* στο οποίο αρχίζει τη μελέτη των σειρών, ο Euler έδωσε μια τιμή στην "υπεργεωμετρική σειρά του Wallis" όπως την ονόμασε ο ίδιος. Η σειρά αυτή είναι η $1-1+2-6+24-120+720-5040+\ldots$. Οι όροι της είχαν εισαχθεί έναν αιώνα νωρίτερα από τον Wallis τους οποίους ονόμαζε "υπεργεωμετρικούς αριθμούς" και είναι αυτοί που εμείς σήμερα ονομάζουμε παραγοντικούς αριθμούς[146](factorial numbers). Ο Euler συχνά πριν παρουσιάσει τη μελέτη του αθροίσματος μιας τέτοιου είδους σειράς κάνει μια προσπάθεια να πείσει τον αναγνώστη ότι αυτό έχει μια ιδιαίτερη αξία. Στην περίπτωση αυτή ξεκινάει με το εξής παράδειγμα:

"*Κανένας δεν αμφιβάλλει ότι η γεωμετρική σειρά* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ *συγκλίνει στο 2. Όσο περισσότεροι όροι προσθέτονται, το άθροισμα προσεγγίζει το 2 κι αν προστεθούν 100 όροι, η διαφορά ανάμεσα στο άθροισμα και το 2 είναι ένα κλάσμα με 30 ψηφία στον παρονομαστή και 1 στον αριθμητή του. Οι σειρές* $1+1+1+1+1+\ldots$ *και* $1+2+3+4+5+6+\ldots$ *που οι όροι τους δεν τείνουν προς το 0 θα αυξάνουν προς το άπειρο και αποκλίνουν*."[147]

Εδώ ο Euler μας αναφέρει την ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης μιας σειράς. Δηλαδή, την απαίτηση το όριο του νιοστού όρου να είναι 0. Σε αντίστοιχο συμπέρασμα είχε φτάσει νωρίτερα και ο Leibniz διατυπώνοντας την ίδια συνθήκη προκειμένου να αποφανθεί για τη σύγκλιση ή όχι μιας εναλλασσόμενης σειράς. Αυτό αποτέλεσε ένα από τα πρώτα *κριτήρια σύγκλισης* σειράς [148] με χαρακτηριστικά παραδείγματα που το επιβεβαιώνουν τις σειρές

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \text{ και } \ell og2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$ [149]

---

[145] Μια μετάφραση των πρώτων 12 παραγράφων και μια σύντομη περίληψη του υπόλοιπου της εργασίας παρουσιάστηκε υπό τη μορφή άρθρου στο περιοδικό *Historia Mathematica* με τον τίτλο "Euler's 1760 paper on divergent series" το 1976 από τους E.J. Barbeau και P.J. Leah.

[146] Ο γενικός τύπος που παράγει αυτούς είναι ο $n!=\prod_{k=1}^{n}k \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

[147] E.J. Barbeau & P.J. Leah, *Euler's 1760 paper on divergent series*.

[148] Κριτήριο Leibniz: Αν $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq\ldots\geq 0$ και $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει.

[149] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time. A New Look at Old Themes*, p. 126.

Ο Euler μας παραθέτει 4 ζευγάρια αποκλίνουσων σειρών και κάνει κάποια σχόλια και τοποθετήσεις σ' αυτά.

$$\text{A}\left\{\begin{array}{l} 1+1+1+1+1+1+\ldots \\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\ldots \end{array}\right\}$$

$$\text{B}\left\{\begin{array}{l} 1-1+1-1+1-1+\ldots \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}\ldots \end{array}\right\}$$

$$\Gamma\left\{\begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+\ldots \\ 1+2+4+8+16+32+\ldots \end{array}\right\}$$

$$\Delta\left\{\begin{array}{l} 1-2+3-4+5-6+\ldots \\ 1-2+4-8+16-32+\ldots \end{array}\right\}$$

Ξεκινάει κάνοντας αναφορά στις μεγάλες διαφωνίες που υπήρξαν μεταξύ των μαθηματικών εξαιτίας των αθροισμάτων των σειρών. Κάποιοι δεν δέχονταν ότι μπορούν να βρεθούν αθροίσματα όπως τα παραπάνω ενώ άλλοι είχαν αντίθετη άποψη. Σύμφωνα με τον ίδιο η πρώτη σειρά της λίστας είναι άπειρη για δυο λόγους. Από τη φύση των αριθμών που είναι άπειροι αλλά και από το ανάπτυγμα της γεωμετρικής σειράς, σύμφωνα με το οποίο $\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ και άρα άπειρο. Σχετικά με το δεύτερο είδος ο Leibniz σε ένα γράμμα του το 1713 προς τον Cristian Wolf υπολόγισε το άθροισμα της σειράς $1-1+1-1+1-1+\ldots$ και το βρήκε $\frac{1}{2}$. Το αποτέλεσμα αυτού είχε προκύψει από το ανάπτυγμα του κλάσματος $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$ για $x=1$. Με όμοιο τρόπο από το ανάπτυγμα του $\frac{1}{(1+x)^2}$ είχε βρει ότι το άθροισμα της σειράς $1-2+3-4+5-6+\ldots$ είναι $\frac{1}{4}$. Ο Euler κάνει ένα βήμα παραπέρα και λέει:

"*όποιος αρνείται το επιχείρημα λέγοντας ότι* $\frac{1}{1+a}$ *δεν είναι ίσο με την άπειρη σειρά* $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-\ldots$ *εκτός αν το* a *είναι ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας, και αυτό γιατί αν καταλήξουμε στη διαίρεση* $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\ldots\pm a^n\mp\frac{a^{n+1}}{1+a}$ *τότε: ακόμα και αν το* n *θεωρηθεί άπειρος*

αριθμός, το κλάσμα $\mp\frac{a^{n+1}}{1+a}$ *δεν μπορεί να αγνοηθεί εκτός αν εξαφανιστεί, πράγμα που συμβαίνει αν* $a<1$ *και στην περίπτωση αυτή η σειρά συγκλίνει. Στις άλλες περιπτώσεις είναι πάντα απαραίτητο να συμπεριλάβουμε το υπόλοιπο* $\mp\frac{a^{n+1}}{1+a}$ *στον υπολογισμό γιατί παρόλο που είναι με πρόσημο* $\mp$ *εκφράζοντας άρτιους ή περιττούς αντίστοιχα, αν το* n *είναι άπειρο το υπόλοιπο δεν μπορεί να αγνοηθεί ακριβώς γιατί ένας άπειρος αριθμός δεν είναι ούτε περιττός ούτε άρτιος και ως εκ τούτου δεν παρέχει κριτήριο για επιλογή πρόσημου.*" [150]

Εδώ ο Euler κάνει ένα σημαντικό βήμα και θέτει τον περιορισμό $a<1$ προκειμένου να συγκλίνει η εν λόγω σειρά. Βέβαια ούτε αυτό είναι σωστό αφού θα πρέπει $|a|<1$ προκειμένου να συγκλίνει. Η σύγχυση σχετικά με τη σύγκλιση των σειρών φαίνεται ακόμα περισσότερο στην επόμενη παράγραφο της ίδιας εργασίας:

"*Οι υπερασπιστές της ιδέας του αθροίσματος των αποκλινουσών σειρών επιλύουν αυτό το παράδοξο κάνοντας μια διάκριση αρκετά ευφυή αλλά όχι τόσο ακριβή μεταξύ των αρνητικών ποσοτήτων όταν υποστηρίζουν ότι υπάρχουν κάποιες μικρότερες από το μηδέν και άλλες μεγαλύτερες του απείρου, δηλαδή περισσότερο άπειρες ποσότητες. Το πρώτο είδος ποσότητας προκύπτει από το -1 όταν αυτό προέρχεται από την αφαίρεση του μεγαλύτερου* $a+1$ *από το μικρότερο* a*. Το δεύτερο είδος όταν το -1 προκύπτει από το ανάπτυγμα της σειράς 1+2+4+8+32+... όπως βγαίνει από τη διαίρεση του 1 με το -1.Στην πρώτη περίπτωση το -1 εκφράζει έναν αριθμό μικρότερο του μηδενός ενώ στη δεύτερη έναν αριθμό μεγαλύτερο του απείρου*"

Ο Euler σε κάποια εργασία του αναγνωρίζει, ότι η χρήση των σειρών επιτρέπεται μόνον όταν αυτές είναι συγκλίνουσες. Παρά ταύτα, στην ίδια εργασία (*Comm, Acad. Sci. Petrop., 11, 1739, 116-27, pub. 1750 = Opera, (1), 14, 350-63*), καταλήγει στη σχέση

$$\ldots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\ldots=0$$

και δικαιολογεί το αποτέλεσμα αυτό ως εξής:

Γράφει $$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+\ldots$$

[150] E.J. Barbeau & P.J. Leah, *Euler's 1760 paper on divergent series*, pp. 145-146.

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$$

και προσθέτει κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες[151].

Παρά τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν και τα λάθη που προέκυπταν από ατελής ορισμούς, υπήρχαν και πολλά θετικά αποτελέσματα στη μελέτη των σειρών. Τα ερωτήματα και τα προβλήματα που επιζητούσαν λύση ήταν πολλά και αποτέλεσαν τις νέες προκλήσεις για τους μαθηματικούς ερευνητές του επόμενου αιώνα. Ο Euler φυσικά ήταν ένας τέτοιος ερευνητής και σ' ένα διάσημο πρόβλημα, αυτό που ονομάζουμε **'Basel problem'**, ανταποκρίθηκε στην πρόκληση με πολύ εντυπωσιακό τρόπο. Στην επόμενη παράγραφο θα πούμε την ιστορία του μαθηματικού του θριάμβου.

5.2 Η ιστορία ενός διάσημου προβλήματος

Ο Jakob Bernoulli αγαπούσε τις άπειρες σειρές. Όχι μόνο απέδειξε την απόκλιση των αρμονικών σειρών, αλλά ήξερε τα ακριβή αθροίσματα για αρκετές συγκλίνουσες σειρές. Ένας απλός τύπος ήταν ο αθροιστικός τύπος (**summation formula**) για τις άπειρες γεωμετρικές σειρές **(infinite geometric series)**:

$$a+a\cdot r+a\cdot r^2+\ldots+a\cdot r^k+\ldots=\frac{a}{1-r}$$

δεδομένου ότι $-1<r<1$.

Σε άλλα πιο σύνθετα παραδείγματα σειρών θα μπορούσε επίσης να βρεθεί το άθροισμά τους. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$, όπου η γενική μορφή του παρανομαστή είναι αυτό που ονομάζουμε k τριγωνικός αριθμός, $k(k+1)/2$.

Ένας τρόπος υπολογισμού του 17ου αιώνα για αυτή τη σειρά ήταν η εξής:

[151] Ν. Αρτεμιάδης, *Ιστορία των Μαθηματικών,* σελ.345.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots\right)$$
$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\right]$$
$$=2(1)=2$$

Με σύγχρονο συμβολισμό το παραπάνω συμπέρασμα αποδίδεται ως:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)/2}=2 \text{ (πρόκειται για τη γνωστή τηλεσκοπική σειρά).}$$

Λιγότερο γνωστή είναι η άθροιση του Jacob Bernoulli που έκανε για την άπειρη σειρά: $\frac{a}{b}+\frac{a+c}{bd}+\frac{a+2c}{bd^2}+\frac{a+3c}{bd^3}+\ldots$, της οποίας οι αριθμητές αποτελούν την αριθμητική πρόοδο $a, a+c, a+2c, a+3c, \ldots$ και οι αντίστοιχοι παρανομαστές αποτελούν τη γεωμετρική πρόοδο: $b, bd, bd^2, bd^3, \ldots$.

Για παράδειγμα, αν $a=1$, $b=3, c=5$ και $d=7$, έχουμε:

$\frac{1}{3}+\frac{6}{21}+\frac{11}{147}+\frac{16}{1029}+\frac{21}{7203}+\frac{26}{50421}+\ldots$, της οποίας το ακριβές άθροισμα είναι κάθε άλλο παρά προφανές.

Στο κεφάλαιο 14 του "*Tractatus*", ο Bernoulli υπολόγισε αυτή τη σειρά. Η διορατικότητά του τον οδήγησε το να τη γράψει ως ακολούθως:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+c}{bd}+\frac{a+2c}{bd^2}+\frac{a+3c}{bd^3}+\ldots$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{bd}+\frac{a}{bd^2}+\frac{a}{bd^3}+\ldots\right)+\left(\frac{c}{bd}+\frac{c}{bd^2}+\frac{c}{bd^3}+\ldots\right)+=\left(\frac{c}{bd^2}+\frac{c}{bd^3}+\ldots\right)+$$
$$\left(\frac{c}{bd^3}+\ldots\right)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Κάθε άπειρη σειρά σε παρένθεση είναι γεωμετρική και αν δεχτούμε ότι $d>1$ είναι επίσης και συγκλίνουσα. Αντικαθιστώντας αυτές με τα αθροίσματά τους:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+c}{bd}+\frac{a+2c}{bd^2}+\frac{a+3c}{bd^3}+\ldots$$

$$=\frac{a/b}{1-1/d}+\frac{c/bd}{1-1/d}+\frac{c/bd^2}{1-1/d}+\ldots$$

$$= \frac{ad}{bd-b} + \frac{c}{b(d-1)}\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{d^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{ad}{bd-b} + \frac{c}{b(d-1)}\left(\frac{1}{1-1/d}\right) = \frac{ad^2 - ad + cd}{bd^2 - 2bd + b}$$

Για το αριθμητικό παράδειγμα που αναφέραμε παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{21} + \frac{11}{147} + \frac{16}{1029} + \frac{21}{7203} + \frac{26}{50421} + \ldots = \frac{77}{108}$$

Υπήρχαν και άλλες σειρές που ο Jacob Bernoulli υπολόγισε. Δύο από αυτές ήταν οι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = 6 \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} = 26$$

Ο Jacob Bernoulli είχε επομένως αποδείξει την ικανότητά του να υπολογίζει αθροίσματα σειρών. Έφτασε στο σημείο να νιώθει τόσο σίγουρος για τις δυνάμεις του, ώστε ξεκίνησε ν' ασχολείται με ένα πρόβλημα σειρών που μέχρι στιγμής δεν είχε λυθεί. Αυτό το πρόβλημα ήταν ο υπολογισμός των αντιστρόφων των τέλειων τετραγώνων. Δηλαδή ο υπολογισμός του αθροίσματος $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$

Το πρόβλημα είχε διατυπώσει πρώτος ο Pietro Mengoli (1625-1686) το 1644 και ο ίδιος δεν είχε καταφέρει να το επιλύσει. [Ed. Sandifer "Euler's Solution of the Basel Problem"]

Ο Oldenburg σ' ένα γράμμα του προς τον Leibniz το 1673 είχε θέσει το ερώτημα του αθροίσματος αυτής της σειράς, αλλά ο Leibniz δε μπόρεσε να το απαντήσει. [σελ. 496 Brower]. Ο Jacob Bernoulli επιχείρησε στα 1689 (σελ. 496 Brower], να δώσει και εκείνος απάντηση. Θεώρησε το γενικότερο πρόβλημα του αθροίσματος της σειράς:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{k^p} + \ldots$$

Για $p = 1$ έχουμε την αρμονική σειρά η οποία είναι αποκλίνουσα και την μελέτη της οποίας ο Bernoulli χειρίστηκε με τελειότητα όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Κατόπιν ο Bernoulli θέλησε να μελετήσει την περίπτωση του $p = 2$, δηλαδή το πρόβλημα που ο Leibniz δεν κατάφερε να επιλύσει. Παρόλο ότι δεν το περίμενε, ο Bernoulli συνάντησε μεγάλη δυσκολία σε αυτή τη σειρά. Παρόλα αυτά όμως οδηγήθηκε σε κάποια σημαντικά συμπεράσματα. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2k^2 \geq k(k+1)$, ή αλλιώς $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k+1)/2}$, ο Bernoulli εφαρμόζοντας για

$k=1, k=2, k=3, k=4, \ldots$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προέκυψαν, οδηγήθηκε στην ανισότητα:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots \leq 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)/2}+\ldots$$

Το δεύτερο μέρος της παραπάνω ανισότητας είναι η τηλεσκοπική σειρά που αναφέραμε προηγουμένως και συγκλίνει στο 2. Επομένως ο Bernoulli κατάλαβε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \leq 2$.

Επειδή $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$, για κάθε $p \geq 2$ το τελικό συμπέρασμα του Bernoulli είναι ότι:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p \leq 2, \quad p \geq 2}$$

Επομένως, ο Bernoulli κατάφερε ν' αποδείξει ότι για $p \geq 2$ η σειρά συγκλίνει και βρήκε ένα άνω φράγμα, το 2. Ο Bernoulli παραδέχτηκε την ήττα του. Γράφοντας από την πόλη της Βασιλείας στο "*Tractactus*" ζητούσε επίλυση στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτό το πρόβλημα έγινε γνωστό ως "**Basel Problem**".

5.3 Η λύση που έδωσε ο Euler στο "Basel Problem"

Ο Euler ασχολήθηκε με αυτό το πρόβλημα ενώ βρισκόταν στην Αγία Πετρούπολη έπειτα από προτροπή του Goldbach το 1729 όπου σ' ένα γράμμα[152], του έγραφε: «*Αξιότιμε κύριε σκεφτόμουν τους νόμους κάτω από τους οποίους μια σειρά μπορεί να υπολογιστεί. Ο Αξιότιμος κύριος Bernoulli πρότεινε να σας γράψω*». Μέχρι το 1735 ο Euler είχε βρει τη λύση στο πρόβλημα που του είχε τεθεί. Η λύση αυτή του Euler για το "Basel problem", δηλαδή για την εύρεση της τιμής του αθροίσματος $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$, δημοσιεύθηκε το 1740 στο Volume 7 του *Commentarii* με τίτλο *"De summis serierum reciprocarum"*[153] [On sums of series of reciprocals](Αναφορικά με τα αθροίσματα σειρών αντιστρόφων).

[152] Ο Euler και ο Goldbach αντάλλαξαν 196 γράμματα από το 1729 μέχρι και το 1764 όπου και πέθανε ο τελευταίος.
[153] Edward Sandifer, *The early Mathematics of Leonhard Euler*, p.157.

Ένα πρώτο βήμα που έκαναν και οι προηγούμενοι από αυτόν, ήταν να προσεγγίσουν την άπειρη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ προσθέτοντας τους πρώτους όρους. Η σύγκλιση της σειράς όμως είναι ιδιαίτερα αργή. Για παράδειγμα:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{100}\approx 1,54977 \qquad \text{(άθροισμα δέκα όρων)}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{10000}\approx 1,63498 \qquad \text{(άθροισμα εκατό όρων)}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{1000^2}\approx 1,64393 \qquad \text{(άθροισμα χιλίων όρων)}$$

Σήμερα γνωρίζουμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα είναι σωστό με ακρίβεια μόνο δύο δεκαδικών ψηφίων. Ο Euler το 1731 βρήκε πολύ καλύτερο τρόπο προσέγγισης του αθροίσματος[154]. Το τέχνασμα του Euler ήταν να υπολογίσει το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{1/2}-\frac{\ell n(1-t)}{t}dt$ με δύο διαφορετικούς τρόπους:

α) $$I=\int_0^{1/2}-\frac{\ell n(1-t)}{t}dt=\int_0^{1/2}-\frac{-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-...}{t}dt=\int_0^{1/2}(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}+...)dt=$$

$$t+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{9}+\frac{t^4}{16}+...\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1/2^2}{4}+\frac{1/2^3}{9}+\frac{1/2^4}{16}+... \qquad (*)$$

[Με βάση το ανάπτυγμα του $\ell n(1-t)$]

β) κάνοντας αλλαγή μεταβλητής έθεσε $1-t=z$. Έτσι

$$I=\int_0^{1/2}\frac{\ell nz}{1-z}dz=\int_0^{1/2}(1+z+z^2+z^3+...)\ell nzdz=$$

$$\int_0^{1/2}\ell nzdz+\int_0^{1/2}z\ell nzdz+\int_0^{1/2}z^2\ell nzdz+\int_0^{1/2}z^3\ell nzdz+...$$

Αφού το $\frac{1}{1-z}$ είναι το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $1+z+z^2+z^3+z^4+...$ με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

[154] Οι ενέργειες αυτές του Euler περιγράφονται στην εργασία του με τίτλο *"De summatione innumerabilium progressionum"* (On the summation of innumerably many progressions) [E-20].

$$\int_1^{1/2} z^n \ell nz dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\ell nz - \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\Bigg|_1^{1/2}$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = (z\ell nz - z) + (\frac{z^2}{2}\ell nz - \frac{z^2}{4}) + (\frac{z^3}{3}\ell nz - \frac{z^3}{9}) + (\frac{z^4}{4}\ell nz - \frac{z^4}{16}) + ...\Bigg|_1^{1/2} =$$

$$\ell nz\left[z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + ...\right] - \left(z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + ...\right)\Bigg|_1^{1/2} =$$

$$\ell nz\left[-\ell n(1-z)\right] - \left(z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + ...\right)\Bigg|_1^{1/2} =$$

$$-\left[\ell n\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1/2^2}{4} + \frac{1/2^3}{9} + \frac{1/2^4}{16} + ...\right) + \left[\ell n1\right].\left[\ell n0\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = .$$

$$-\left[\ell n2\right]^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1/2^2}{4} + \frac{1/2^3}{9} + \frac{1/2^4}{16} + ...\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**) και τη μεταξύ τους ισότητα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/2^2}{4} + \frac{1/2^3}{9} + \frac{1/2^4}{16} + ...\right) + \left[\ell n2\right]^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}} + \left[\ell n2\right]^2$$

Παρατηρούμε βέβαια ότι στους παραπάνω χειρισμούς δεν υπήρξε ιδιαίτερα αυστηρός. Διέγραψε χωρίς δισταγμό το $\left[\ell n1\right]\left[\ell n0\right]$ και ολοκλήρωσε μια άπειρη σειρά. Παρόλα αυτά κατάφερε να μετασχηματίσει το άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ στην ισοδύναμη έκφραση του $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}} + \left[\ell n2\right]^2$ που είχε πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης εξαιτίας του 2^{k-1} όρου στον παρανομαστή. Ακόμα περιείχε το $\left[\ell n2\right]^2$ το οποίο ο Euler γνώριζε με ακρίβεια πολλών δεκαδικών ψηφίων. Αποτέλεσμα αυτών είναι χρησιμοποιώντας μόνο τους πρώτους 14 όρους από τη νέα σειρά να βρούμε $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \approx 1,644934$ που είναι σωστό στα πρώτα 6 δεκαδικά ψηφία. Αυτό δίνει καλύτερο αποτέλεσμα απ' ότι το άθροισμα 1000 όρων της αρχικής σειράς. Ήταν μια πολύ καλύτερη προσέγγιση αλλά όχι η λύση του προβλήματος.

Οι προσπάθειες του Euler συνεχίστηκαν και η λύση του προβλήματος δεν άργησε να έρθει. Το 1735 ο Euler βρήκε τελικά τη λύση στο διάσημο πρόβλημα και γράφει χαρακτηριστικά:

"*Τώρα όμως, πέρα από κάθε προσδοκία, έχω βρει μια όμορφη έκφραση για το άθροισμα* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...$ *που εξαρτάται από το τετράγωνο του κύκλου…Έχω βρει ότι 6 φορές το άθροισμα της σειράς είναι ίσο με το τετράγωνο της περιφέρειας του κύκλου με διάμετρο* 1."

Η μεθοδολογία που ακολούθησε ήταν η εξής ήταν:

Πρώτα όρισε το "άπειρο πολυώνυμο" $P(x)$ ως:

$$P(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-...$$

Για το $P(x)$ είναι προφανές ότι ισχύει $P(0)=1$. Όσον αφορά τις λύσεις της εξίσωσης $P(x)=0$, είναι εξίσου προφανές ότι το $x=0$ δεν είναι ρίζα, αφού $P(0)=1$.

Το $P(x)$ μπορεί για $x\neq 0$ να γραφεί ως:

$$P(x)=x\left[\frac{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-...}{x}\right]=$$

$$=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-...}{x}=\frac{\sin x}{x}$$

Το ανάπτυγμα του $\sin x$ είχε ήδη αποδειχθεί από τον Euler στο *"Introductio"*[155].

Επομένως το $P(x)=0$ μας οδηγεί στο $\sin x=0$ και άρα στο $x=\pm k\pi$ για $k=1,2,...$

Στη συνέχεια ο Euler εξέφρασε το $P(x)$ ως γινόμενο. Αυτό το κατάφερε χρησιμοποιώντας ότι, κάθε πολυώνυμο $A(x)$ n βαθμού με μη μηδενικές ρίζες $a_1,a_2,...a_n$ και για το οποίο $A(0)=1$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο με την ακόλουθη μορφή:

$$A(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)...\left(1-\frac{x}{a_n}\right)$$

διότι για $x=0$ έχουμε $P(0)=1$, και για $x=a_k$ όπου $k=1,2,...,n$ έχουμε $P(a_k)=0$.

[155] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, pp.106-107.

Το $P(x)$ επομένως μπορεί να γραφεί ως γινόμενο:

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-3\pi}\right)\ldots$$

$$=\left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right]\ldots \qquad (***)$$

όπου η τελευταία ισότητα εξάγεται από τον τύπο της διαφοράς τετραγώνων.

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Το $P(x)$ που εξ' ορισμού είναι άθροισμα απείρων όρων, γράφεται και ως γινόμενο απείρων παραγόντων. Ο Euler στη συνέχεια κάνει τους πολλαπλασιασμούς στο γινόμενο των άπειρων παραγόντων και καταλήγει άμεσα στη σχέση

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\ldots\right)x^2+\ldots \quad (****)$$

όπου στο δεύτερο μέλος ακολουθούν οι δυνάμεις του x^4, του x^6, κ.ο.κ.

Κατόπιν ο Euler εξισώνει τους συντελεστές της δύναμης x^2 του πρώτου και του δεύτερου μέλους:

$$-\frac{1}{3!}=-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right)$$

Και καταλήγει στη λύση του προβλήματος:

$$\boxed{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}}$$

Όταν ο Johann Bernoulli έμαθε το θρίαμβο του Euler, έγραψε:

"*Κι έτσι ικανοποιείται η φλέγουσα επιθυμία του αδελφού μου, ο οποίος συνειδητοποιώντας ότι η ανίχνευση του αθροίσματος ξεπερνούσε τη φαντασία, ομολόγησε δημόσια ότι ο ζήλος του δεν απέδωσε τίποτα. Πόσο θα ήθελα να ζούσε ο αδερφός μου ακόμη.*"[156]

Ο Euler είχε καταφέρει να λύσει ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα με πραγματικά ιδιοφυή τρόπο και να αποκτήσει φήμη στους μαθηματικούς της Ευρώπης. Το τέχνασμα του Euler να γράψει το πολυώνυμο $P(x)$ ως γινόμενο άπειρων παραγόντων ήταν καθοριστικό. Την τεχνική αυτή την αναπτύσσει ιδιαίτερα στο βιβλίο του *introduction*

[156] Carl Boyer & Uta C. Merzbach, *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, σελ. 497.

στο 11ο κεφάλαιο όπου παράγει ως εφαρμογή τον τύπο του Wallis[157] ενισχύοντας με αυτό τον τρόπο τα συμπεράσματα του. Πράγματι αν θέσουμε $x=\frac{\pi}{2}$ στην σχέση (***) έχουμε:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left[1-\frac{\left(\pi/2\right)^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\pi/2\right)^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\pi/2\right)^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{\left(\pi/2\right)^2}{16\pi^2}\right]...\Rightarrow$$

$$\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)...\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12...}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13...}$$ που είναι ο τύπος του Wallis.

Ο Euler έδωσε τρεις λύσεις του *Basel problem* στην εργασία του "*De summis serierum reciprocarum*" αλλά υπήρχαν κάποια προβλήματα. Οι δύο πρώτες λύσεις εξαρτιούνταν από λεπτούς χειρισμούς στις άπειρες σειρές και γι' αυτό υπήρχαν κριτικές που αμφισβητούσαν τους χειρισμούς αυτούς. Αμφισβητήσεις υπήρξαν και για την τρίτη λύση η οποία παρουσιάστηκε παραπάνω και η οποία είναι η περισσότερο διαδεδομένη λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με αυτή τη λύση η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ γράφεται ως σειρά Taylor $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-...$ και ως άπειρο γινόμενο $\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{-3\pi}\right)...$ Η τεκμηρίωση του Euler βασίστηκε στο επιχείρημα ότι αφού έχουν τις ίδιες ρίζες θα είναι και ίσα μεταξύ τους. Αυτό βέβαια είναι μια αναγκαία συνθήκη αλλά όχι και ικανή, ένα σφάλμα που ο Euler έχει επαναλάβει αρκετές φορές στο έργο του. Οι συναρτήσεις $e^x\frac{\sin x}{x}$ και $\frac{\sin x}{x}$ ενώ έχουν τις ίδιες ρίζες δεν εκφράζονται από το ίδιο άπειρο γινόμενο. Στην περίπτωση του $\frac{\sin x}{x}$ δεν υπήρχε τελικά πρόβλημα αλλά η κριτική που ασκήθηκε ήταν δικαιολογημένη. Τελικά ο Euler το 1741 έδωσε μία ακόμη λύση του προβλήματος στην εργασία του με τίτλο "*Demonstration de la somme de cette suite*

[157] Ο John Wallis τον είχε αποδείξει με διαφορετικό τρόπο το 1655.

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc$" [E-63]. Η λύση αυτή ήταν εντελώς διαφορετική και την έδωσε ως απάντηση στις κριτικές που είχαν διατυπωθεί. Η εργασία δημοσιεύτηκε στο περιοδικό "*Journal littéraire d' Allemagne*" το 1743 και η απόδειξη είχε ως εξής:

Έστω τους κύκλος ακτίνας 1, s το μήκος τόξου και $x=\sin s$ ή $s=\arcsin x$,

$$\text{τότε} \qquad ds=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{και} \quad s=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τους παραπάνω ισότητες και έχουμε

$$sds=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\ldots\Rightarrow$$

$$\left[\left(1+a\right)^n=1+\frac{n}{1}a+\frac{n\left(n-1\right)}{1.2}a^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{1.2.3}a^3+\ldots \text{ για } \alpha=\chi^2 \text{ και } n=-\frac{1}{2}\right]$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\ldots\right)dx \qquad (2)$$

$$\text{άρα από (1),(2)} \quad sds=\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2.3}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4.5}\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}+\ldots\Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2}sds=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2.3}\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4.5}\int_0^1\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}+\ldots \qquad (3)$$

με παραγοντική ολοκλήρωση για κάθε όρο έχουμε:

$$\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^ndx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\boxed{\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^ndx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

[αφού η ολοκλήρωση είναι από το 0 μέχρι το 1, ο δεύτερος όρος δεξιά της ισότητας είναι ίσος με 0]

έτσι τα ολοκληρώματα είναι:

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1,\quad \int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},\quad \int_0^1\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4}{5}\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$

$$\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{6}{7}\int_0^1\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},\ldots$$

επομένως αντικαθιστώντας στη σχέση (3) έχουμε:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{5\cdot5}+\frac{1}{7\cdot7}+\frac{1}{9\cdot9}+\ldots \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\left[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\right]+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\ldots\right]$$
$$=\left[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\right]+\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 9}+\ldots\right]$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

5.4 Η επέκταση του προβλήματος

Ο Euler προχώρησε ακόμα παραπέρα αξιοποιώντας την τεχνική που είχε εφαρμόσει προκειμένου να υπολογίσει τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ για $p>2$. Προκειμένου να γίνει αυτό έπρεπε να βρεθούν οι συντελεστές του $x^4, x^6, \ldots$ της σχέσης (****). Τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να οριστούν αυτοί ήταν διαθέσιμα από τους τύπους του Newton που είχαν δημοσιευθεί στο *Newton's Arithmetica Universalis* και περιγράφουν τη σχέση ανάμεσα στις ρίζες και τους συντελεστές τους πολυωνύμου. Θα παρουσιάσουμε τον τόπο με τον οποίο ο Euler απέδειξε τους τύπους συνδέοντας τους ρίζες με τους συντελεστές τους πολυωνύμου. Η απόδειξη αυτή έγινε περίπου το 1750 και είχε το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι χρησιμοποίησε τεχνικές του Διαφορικού Λογισμού προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα Άλγεβρας.

Έστω το πολυώνυμο $n-$βαθμού $P(y)=y^n-Ay^{n-1}+By^{n-2}-Cy^{n-3}+\ldots\pm N$ και $r_1, r_2, \ldots r_n$ οι ρίζες αυτού. Τότε οι συντελεστές $A, B, C, \ldots N$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = A$$
$$\sum_{k=1}^{n} r_k^2 = A\sum_{k=1}^{n} r_k - 2B$$
$$\sum_{k=1}^{n} r_k^3 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^2 - B\sum_{k=1}^{n} r_k + 3C$$
$$\sum_{k=1}^{n} r_k^4 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^3 - B\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + C\sum_{k=1}^{n} r_k - 4D$$

Η απόδειξη που έδωσε ο Euler ήταν η εξής[158]:

Έγραψε το πολυώνυμο σε μορφή γινομένου $P(y)=(y-r_1)(y-r_2)...(y-r_n)$ αφού $r_1,r_2,...r_n$ είναι ρίζες αυτού και ύστερα με χρήση λογάριθμων το μετέτρεψε σε άθροισμα.

$$\ell nP(y)=\ell n(y-r_1)+\ell n(y-r_2)+...+\ell n(y-r_n)$$

Το επόμενο βήμα ήταν διαφορίσει την παραπάνω ισότητα

$$\frac{P'(y)}{P(y)}=\frac{1}{y-r_1}+\frac{1}{y-r_2}+...+\frac{1}{y-r_n}$$

Κάθε κλάσμα τους

$$\frac{1}{1-r_k}=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{1-r_k/y}\right)=\frac{1}{y}\left(1+\frac{r_k}{y}+\frac{r_k^2}{y^2}+...\right)=\frac{1}{y}+\frac{r_k}{y^2}+\frac{r_k^2}{y^3}+\frac{r_k^3}{y^4}+...$$

εξαιτίας του αναπτύγματος της γεωμετρικής σειράς . Άρα:

$$\frac{P'(y)}{P(y)}=\frac{1}{y-r_1}+\frac{1}{y-r_2}+...+\frac{1}{y-r_n}=\frac{n}{y}+\left[\sum_{k=1}^{n}r_k\right]\frac{1}{y^2}+\left[\sum_{k=1}^{n}r_k^2\right]\frac{1}{y^3}+\left[\sum_{k=1}^{n}r_k^3\right]\frac{1}{y^4}+... \quad (1)$$

αφού τους $P(y)=y^n-Ay^{n-1}+By^{n-2}-Cy^{n-3}+...\pm N$ έχουμε την προφανή ισότητα

$$\frac{P'(y)}{P(y)}=\frac{ny^{n-1}-A(n-1)y^{n-2}+B(n-2)y^{n-3}-C(n-3)y^{n-4}+...}{y^n-Ay^{n-1}+By^{n-2}-Cy^{n-3}+...\pm N} \quad (2)$$

Ο Euler χρησιμοποίησε το ίδιο τέχνασμα. Έκφρασε την ίδια ποσότητα με διαφορετικούς τρόπους και εξίσωσε τους σχέσεις (1) και (2)

$$ny^{n-1}-A(n-1)y^{n-2}+B(n-2)y^{n-3}-C(n-3)y^{n-4}+...=$$

$$(y^n-Ay^{n-1}+By^{n-2}-Cy^{n-3}+...\pm N).\left(\frac{n}{y}+\left[\sum_{k=1}^{n}r_k\right]\frac{1}{y^2}+\left[\sum_{k=1}^{n}r_k^2\right]\frac{1}{y^3}+...\right)=$$

$$ny^{n-1}+\left(-nA+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)y^{n-2}+\left(nB-A\sum_{k=1}^{n}r_k+\sum_{k=1}^{n}r_k^2\right)y^{n-3}-...$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του y στην παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$-A(n-1)=-nA+\sum_{k=1}^{n}r_k\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}r_k=A$$

$$B(n-2)=nB-A\sum_{k=1}^{n}r_k+\sum_{k=1}^{n}r_k^2\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}r_k^2=A\sum_{k=1}^{n}r_k-2B$$

$$\sum_{k=1}^{n}r_k^3=A\sum_{k=1}^{n}r_k^2-B\sum_{k=1}^{n}r_k+3C$$

[158] William Dunham, *Euler The Master of Us All*, p. 50.

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^4 = A\sum_{k=1}^{n} r_k^3 - B\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + C\sum_{k=1}^{n} r_k - 4D$$

Στην παραπάνω απόδειξη υπάρχουν σημεία που χρειάζονται περισσότερη προσοχή. Για παράδειγμα όταν παίρνει το λογάριθμο $\ell n(y - r_k)$ υποθέτει ότι $y > r_k$ χωρίς να το αναφέρει. Ακόμα όταν χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα $\frac{1}{y - r_k} = \frac{1}{y} + \frac{r_k}{y^2} + \frac{r_k^2}{y^3} + \frac{r_k^3}{y^4} + \ldots$ της γεωμετρικής σειράς υπάρχει πάλι μια σιωπηρή υπόθεση σύγκλισης. Σίγουρα υπάρχουν κενά με τη γνώση που έχουμε σήμερα αλλά η εφευρετικότητα του Euler σε συνδυασμό με την αποτελεσματικότητα παραμένει μοναδική.

Επιστρέφουμε στον υπολογισμό του $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ για $p > 2$. Ο Euler αξιοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα κατάφερε να υπολογίσει το άθροισμα τους άπειρης σειράς $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$ για $p = 4, 6, 8, \ldots 26$. Θεώρησε το πολυώνυμο που περιλάμβανε μόνο άρτιες δυνάμεις $1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx6 + \ldots \pm Nx^{2n} = (1 - r_1x^2)(1 - r_2x^2)\ldots(1 - r_nx^2)$

Αφού αντικατέστησε το x^2 με το $\frac{1}{y}$ συνέχισε ως εξής:

$$1 - A\left(\frac{1}{y}\right) + B\left(\frac{1}{y}\right)^2 - C\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \ldots \pm N\left(\frac{1}{y}\right)^n = \left(1 - r_1\frac{1}{y}\right)\left(1 - r_2\frac{1}{y}\right)\ldots\left(1 - r_n\frac{1}{y}\right)$$

Και πολλαπλασιάζοντας με y^n και τα δύο μέλη της ισότητας κατέληξε στη σχέση

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \ldots \pm N = (y - r_1)(y - r_2)\ldots(y - r_n)$$

Στη λύση του προβλήματος της Βασιλείας είχε φθάσει στη σχέση

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots == \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right]\ldots$$

Που είναι όμοια με την

$1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx6 + \ldots \pm Nx^{2n} = (1 - r_1x^2)(1 - r_2x^2)\ldots(1 - r_nx^2)$

με $A = \frac{1}{3!}$, $B = \frac{1}{5!}$, $C = \frac{1}{7!}$ και $r_k = \frac{1}{k^2\pi^2}$ για $k = 1, 2, \ldots$ άρα

- $\sum_{k=1}^{n} r_k = A \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{1}{3!} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ (που ήδη είχε αποδείξει)
- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2 = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} - 2B = \left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{2}{5!} = \frac{1}{90} \Rightarrow k = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}}$
- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^3 = A\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right)^2 - B\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\right) + 3C = \left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{1}{90}\right) - \left(\frac{1}{5!}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{7!}\right) = \frac{1}{945} \Rightarrow$

  $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}}$

Τελικά το 1744 υπολόγισε για $p = 26$ βρίσκοντας το εντυπωσιακό αποτέλεσμα

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}}=\frac{2^{24}}{27!}(76977927\pi^{26})=\frac{1315862}{11094481197603057812 5}\pi^{6}}$$

Τα αποτελέσματα αυτά τα περιγράφει στο "*introduction*" στην παράγραφο 168.

Ο Euler μ' αυτό τον τρόπο έδωσε απαντήσεις σε ερωτήματα που δεν είχαν τεθεί καν. Πολύ περισσότερο η μελέτη του περιείχε στοιχεία σχετικά με τους αριθμούς Bernoulli και τη συνάρτηση ζήτα. Η συνάρτηση ζήτα ορίζεται ως $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s}}$ για πραγματικές τιμές του $s>1$. Ο Riemann το 1859 αξιοποίησε την συνάρτηση αυτή στην προσπάθεια του να αποδείξει το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών. Θεώρησε μιγαδικές τιμές του s και απέδειξε κάποιες βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $\zeta(s)$. Παρουσίασε στην εργασία του έξη υποθέσεις και αξιοποιώντας τις υποθέσεις αυτές έδωσε απόδειξη του θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. Μέχρι σήμερα, μόνο οι πέντε από αυτές έχουν αποδειχθεί ενώ η έκτη παραμένει ανοικτό πρόβλημα και είναι γνωστή ως υπόθεση του Riemann[159]. Ο Euler το 1739 απέδειξε ότι $\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}=(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}\cdot B_{2n}}{2(2n)!}$ όπου με B_n συμβολίζουμε τους αριθμούς Bernoulli οι οποίοι μπορούν να οριστούν από τον αναδρομικό τύπο $B_0=1,\ B_n=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}B_s$ για $n\geq 2$ [160] $\left[B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ldots\right]$. Το πρόβλημα όταν το p είναι περιττός παρέμεινε άλυτο και μόλις το 1978 αποδείχτηκε ότι για $p=3$ το αποτέλεσμα είναι άρρητος.

5.5 Ανάπτυγμα συναρτήσεων σε άπειρες σειρές

Ο Euler σε αυτό το κεφάλαιο του "*introduction*" μας εισάγει με άμεσο τρόπο στην έκφραση ρητών (κλασματικών) και άρρητων συναρτήσεων ως πολυώνυμα με άπειρους όρους. Αναφέρει ότι ακόμα και η φύση των υπερβατικών συναρτήσεων γίνεται ευκολότερα κατανοητή όταν εκφραστούν με αυτή τη μορφή. Δεν περιορίζει καν τους εκθέτες σε ακεραίους και τονίζει ότι κάθε μη πολυωνυμική συνάρτηση μπορεί να γραφεί με τη μορφή $Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\cdots$, όπου οι εκθέτες $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

---

[159] Η διατύπωση της υπόθεσης αυτής είναι: οι μη τετριμμένες ρίζες της $\zeta(s)$, όπου $s\in\mathbb{C}$, έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $1/2$ ($\delta\eta\lambda.$ $\mathrm{Re}(s)=1/2$).

[160] Ronald Calinger, *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741)*, p. 136.

Το πρώτο παράδειγμα που έδωσε είναι η συνάρτηση $\frac{a}{\alpha+\beta z}$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως η άπειρη σειρά $\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}z+\frac{a\beta^2}{\alpha^3}z^2-\frac{a\beta^3}{\alpha^4}z^3+\frac{a\beta^4}{\alpha^5}z^4-\cdots$ [161] Συγκεκριμένα πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά, εφόσον το πηλίκο δύο συνεχόμενων όρων είναι το $-\frac{\alpha}{\beta z}$. Στο σημείο αυτό θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο ο Euler έκανε τους υπολογισμούς του και έφτασε σε αυτό το συμπέρασμα. Έθεσε την συνάρτηση $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ ίση με $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$ και υπολόγισε τους συντελεστές $A,B,C,D,...$ για τους οποίους ισχύει η ισότητα. Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, έχουμε:

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=(\alpha+\beta z)(A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=\alpha A+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots+\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\beta Ez^5+\cdots\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0=\alpha A-a+(\alpha B+\beta A)z+(\alpha C+\beta B)z^2+(\alpha D+\beta C)z^3+(\alpha E+\beta D)z^4+\cdots\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha A-a=0\\ \alpha B+\beta A=0\\ \alpha C+\beta B=0\\ \alpha D+\beta C=0\\ \alpha E+\beta D=0\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A=\frac{a}{\alpha}\\ B=-\frac{a\beta}{\alpha^2}\\ C=\frac{a\beta^2}{\alpha^3}\\ D=-\frac{a\beta^3}{\alpha^4}\\ \mathrm{E}=-\frac{a\beta^4}{\alpha^5}\\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\end{matrix}\right\}$$

και γενικά ισχύει ότι ο συντελεστής του όρου z^n είναι ο $\pm\frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$, όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε n άρτιο και το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί σε n περιττό.

Με όμοιο τρόπο αντιμετωπίσε τη συνάρτηση $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ και έδωσε το παράδειγμα $\frac{1+2z}{1-z-z^2}=1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+...$ και συνέχισε γενικεύοντας για κάθε ρητή συνάρτηση.

---

[161] Με σύγχρονο συμβολισμό είναι αυτό που θα γράφαμε ως $\frac{a}{\alpha+\beta z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\beta^{n-1}}{\alpha^n}z^{n-1}$

Κεφάλαιο 6ο

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

6.1 Εισαγωγή

Στο δίτομο έργο του «***Introductio in Analysin Infinitorum***» (Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση) ο Euler έκανε πολλά περισσότερα από το να προσφέρει ένα αφηρημένο ορισμό της συνάρτησης. Έριξε φως σε αυτές τις συναρτήσεις που αναδείχτηκαν ως τα πλέον θεμελιώδη δομικά στοιχεία της ανάλυσης. Όρισε τα πολυώνυμα, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις εκθετικές συναρτήσεις *('απλές δυνάμεις που οι εκθέτες τους είναι μεταβλητές'*) 'Από τις αντίστροφες συναρτήσεις αυτών', συνέχισε αναφερόμενος στις εκθετικές συναρτήσεις, '*έχω φτάσει στην πιο φυσική και καρποφόρα ιδέα που είναι αυτή των λογαρίθμων*'[162].

Από την αρχή είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι πίνακες λογαρίθμων επινοήθηκαν έναν αιώνα πριν τη γέννηση του Euler. Η συνεισφορά του Euler έγκειται στο ότι εμβάθυνε με τις ιδέες του τις έννοιες των λογαρίθμων. Ο Euler όρισε τη λογαριθμική συνάρτηση, αναγνώρισε ρητά την αντίστροφη σχέση των λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων, παρατήρησε και διέκρινε τη σπουδαιότητα αυτού που είναι γνωστό ως φυσικός λογάριθμος και εφάρμοσε τα αποτελέσματα των ερευνών του σε θεωρητικά ζητήματα. Όπως συμβαίνει συχνά, ο Euler μας άφησε ως κληροδότημα μια μαθηματική ιδέα την οποία σφράγισε με ανεξίτηλο τρόπο.

'Οι λογάριθμοι' διαβεβαίωνε ο Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) *'μειώνοντας τη δουλειά, διπλασίασαν τη ζωή των αστρονόμων'*[163]. Μολονότι η έλλειψη αστρονόμων 140 ετών δείχνει την υπερβολή της δήλωσης του Laplace, η παρατήρησή του ήταν εύστοχη. Με τη χρήση των λογαρίθμων ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση απλοποιήθηκαν στις απλούστερες εφαρμογές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και – όπως ο ίδιος ο Euler τόνιζε- *'οι λογάριθμοι είναι πολύ χρήσιμοι στην εύρεση περίπλοκων ριζών*'. Ένας πίνακας λογαρίθμων αποτελούσε για την εποχή που πρωτοπαρουσιάστηκε ότι είναι σήμερα για μας ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής: μια μηχανή που εξοικονομεί χρόνο και ταυτόχρονα ένα απαράμιλλο εργαλείο εργασίας.

---

[162] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, p. vii.
[163] William Dunham, *Euler The Master of Us All*, p. 50.

Ο όρος 'λογάριθμος' για πρώτη φορά επινοήθηκε από τον John Napier (1550-1617) στις αρχές του 17ου αιώνα[164]. Παρότι ο Napier ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την κεντρική ιδέα, ήταν ο συνάδελφός του Henry Briggs (1561-1631) που μέσα σε κάποια χρόνια κατασκεύασε το γνωστό πίνακα των 'πιο συνηθισμένων' λογαρίθμων (με βάση το 10). Ο Briggs ξεκίνησε βάζοντας $0 = \log 1$ και $1 = \log 10$. (Εάν αυτό φαίνεται σήμερα αυτονόητο ίσως να μας σοκάρει η ιδέα ότι στις αρχικές μελέτες του Napier 0 = log10,000,000)[165].

Έτσι πώς κάποιος θα προσδιορίσει, ας πούμε, το $\log 5$; Στις μέρες μας φυσικά το βρίσκουμε με ένα κομπιουτεράκι ή για όσους δεν τα πάνε καλά με την τεχνολογία το αναζητούμε σε έναν παλιό πίνακα λογαρίθμων. Όμως οι δημιουργοί των λογαρίθμων δεν είχαν τέτοιες επιλογές. Έπρεπε να παράγουν λογαρίθμους με επίπονο τρόπο – μια κουραστική εργασία που απαιτούσε την κατανόηση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων, ευχέρεια στη χρήση του δύσκολου αλγόριθμου εύρεσης τετραγωνικών ριζών και τεράστια υπομονή.

Για να πάρουμε μια ιδέα για τη μέθοδο του Briggs, θα υπολογίσουμε το λογάριθμο του 5 με βάση το 10.

Κατ' αρχάς σημειώστε ότι

$$\log\sqrt{10} = \log(10^{1/2}) = \frac{1}{2}\log 10 = 0.5$$

Με δεδομένο ότι $\sqrt{10} \simeq 3.1622777$, εμείς βρήκαμε ότι $\log 3.1622777 = 0.5$ περίπου.

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\log\sqrt{\sqrt{10}} = \log(\sqrt{10^{1/2}}) = \log 10^{1/4} = \frac{1}{4}\log 10 = 0.25\,.$$

Βρήκαμε λοιπόν ότι $\log 1.7782794 = 0.25$. Άρα $\sqrt{\sqrt{10}} \simeq 1.7782794$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε τετραγωνικές ρίζες και ταυτόχρονα υποδιπλασιάζουμε τους λογάριθμους. Παρότι ο Briggs διεξήγαγε τους υπολογισμούς του με το χέρι σε 30 δεκαδικές θέσεις, παραθέτουμε παρακάτω ένα συνοπτικό πίνακα αποτελεσμάτων:

[164] William Dunham, *Euler The Master of Us All*, p. 19.
[165] Burn, R. P., *Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms*, p. 3.

Αριθμός	Λογάριθμος
10	1.00000
$3.1622777 = \sqrt{10} = 10^{1/2}$	0.50000
$1.7782794 = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{1/4}$	0.25000
$1.3335214 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{1/8}$	1.12500
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$1.0011249 = 10^{1/2048}$	0.00048828
$1.0005623 = 10^{1/4096}$	0.00024414
$1.0002811 = 10^{1/8192}$	0.00012207

Έτσι για τους αριθμούς της αριστερής στήλης του παραπάνω πίνακα, οι λογάριθμοι είναι υπολογισμένοι ακριβώς. Με αυτόν τον τρόπο μας δίνουν ένα πλαίσιο σύγκρισης μέσα στο οποίο θα μπορούμε να υπολογίσουμε (προσεγγίσουμε) άλλος λογάριθμους, όπως θα δούμε παρακάτω.

Επιστρέφουμε λοιπόν πάλι στον υπολογισμό του λογάριθμου 5.

Έχουμε $\sqrt{5} \simeq 2,2360680$ και επίσης $\sqrt{\sqrt{5}} \simeq 1,4953488$. Κάνοντας υπολογισμούς (χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των τετραγωνικών ριζών), φθάνουμε στο ότι:

$$5^{1/4096} = 1,0003930.$$

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, έχουμε:

$$1,0002811 < 1,0003930 < 1,0005623 \;\Leftrightarrow\; 10^{1/8192} < 5^{1/4096} < 10^{1/4096}$$

Αν θέσουμε $x = \log 5^{1/4096}$ τότε έχουμε:

$$\log 10^{1/8192} = 0,00012207 < x = \log 5^{1/4096} < \log 10^{1/4096} = 0,00024414$$

Θεωρεί λοιπόν ότι οι δύο τιμές συνδέονται με γραμμικό τρόπο και υπολογίζει την νέα άγνωστη τιμή ως ενδιάμεση τιμή.

$$\frac{x - 0,00012207}{0,00024414 - 0,00012207} = \frac{1,0003930 - 1,00028811}{1,0005623 - 1,0002811} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0,000170646 = \log 5^{1/4096} \Leftrightarrow \log 5 = 4096 \cdot (0,000170646) = 0,698966$$

Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ καλή, αφού η πραγματική τιμή του log5 με 6 σημαντικά ψηφία είναι $\log 5 = 0,698970$.

Ενώ η προσεγγιστική τιμή που υπολογίσαμε είναι $\log 5 = 0,698966$.

Δυστυχώς αυτή η προσπάθεια του Briggs είχε ως αποτέλεσμα μόνο τον υπολογισμό του log5. Για να βρούμε το log6 ή το log5,34, ή οποιοδήποτε άλλο χρειαζόταν επανάληψη της διαδικασίας. Δηλαδή έπρεπε να υπολογίσει το $\sqrt{6}$, $\sqrt{\sqrt{6}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}$,... και να συγκρίνει με τον ήδη έτοιμο πίνακα των λογαρίθμων του 10, διαδικασία επίπονη.

Ο Briggs λοιπόν, ενώ είχε ανακαλύψει έναν ευφυέστατο τρόπο να υπολογίζει λογαρίθμους, παρόλα αυτά είναι κοπιαστικός ιδιαίτερα. Και αυτό γιατί, ενώ χρειάζεται μία μόνο φορά να υπολογιστεί ο πίνακας των λογαρίθμων της βάσης (10), πρέπει για κάθε νέο αριθμό του οποίου θέλουνε να υπολογίζουμε τον λογάριθμο, να υπολογίζουμε τις διαδοχικές ρίζες. Είναι ιδιαίτερα κρίμα, γιατί αμέσως μετά τον Briggs, βρήκαν τον τρόπο να μετατρέπουν σύνθετες εκφράσεις σε άπειρες σειρές και να χρησιμοποιούν αυτές τις άπειρες σειρές για να βρουν πολύ ικανοποιητικές προσεγγίσεις των σύνθετων εκφράσεων. Μεταξύ των μαθηματικών που ασχολήθηκαν με αυτές ήταν ο Nicholas Mercator (1620-1687), James Gregory (1638-1675) και ο Isaak Newton (1642-1727).

Ο Newton για παράδειγμα ανέπτυξε το $(1+x)^r$ ως εξής:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2\cdot 1}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4 + \ldots$$

Σύμφωνα με τον Newton, αυτό ισχύει όταν το r είναι ρητός (θετικός ή αρνητικός).

[Η πρώτη επαρκής απόδειξη του θεωρήματος του διώνυμου για θετικές ακέραιες δυνάμεις εμφανίζεται στην μελέτη με τίτλο "*Ars conjectandi*" του Jakob Bernoulli που δημοσιεύτηκε το 1813. Η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή. Ο Newton ήταν αυτός που πρώτος διατύπωσε το θεώρημα σε γενική μορφή για κάθε ρητό εκθέτη, αν και δεν το απέδειξε. Την απόδειξη μας δίνει μερικά χρόνια αργότερα ο Euler[166]:

π.χ. αν $x = \frac{1}{5}$ και $r = \frac{1}{2}$

τότε χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $\sqrt{1,2}$.

[166] Eric Temple Bell, *Οι Μαθηματικοί από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*, σελ. 468-469.

$$\sqrt{1,2}=\left(1+\frac{1}{5}\right)^{1/2}$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2.1}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3.2.1}\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}=\frac{2191}{2000}=1,09545$$

Ενώ η τιμή που βρίσκουμε με τον υπολογιστή με προσέγγιση 5 δεκαδικά ψηφία είναι $\sqrt{1,2}\simeq 1,09545$.

Το να χρησιμοποιήσεις άπειρες σειρές για να υπολογίσεις τετραγωνικές ρίζες είναι το ένα πράγμα. Το να χρησιμοποιήσεις όμως σειρές για υπολογισμό λογαρίθμων είναι τελείως διαφορετικό. Τα πρώτα βήματα ως προς την κατεύθυνση αυτή έγιναν από τους Gregory of St.Vincent (1584-1667) και Alfonso de Sarasa (1618-1667) των οποίων η εργασία πρότεινε έναν σύνδεσμο μεταξύ των λογαρίθμων και του εμβαδού κάτω από τμήματα μιας υπερβολής. Θα δώσουμε την ανάλυση μέσω του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού.

Έστω η περιοχή A(x) κάτω από την υπερβολή $y=\frac{1}{t}$ μεταξύ $t=1$ και $t=x$.

$$A(ab)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{a\cdot u}d(a\cdot u)\quad\left(t=a\cdot u\Leftrightarrow u=\frac{t}{a}\right)$$

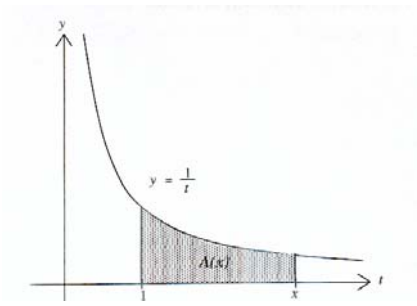
$$=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{a\cdot u}\cdot adu=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{u}du=A(a)+A(b)$$

Όμοια για το $A(a^r)$ έχουμε:

$$A(a^r)=\int_1^{a^r}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{u^r}(ru^{r-1}du)=r\int_1^{a}\frac{1}{u}du=rA(a)$$

Οι παραπάνω σχέσεις θυμίζουν τις αντίστοιχες ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$\log(a\cdot b)=\log a+\log b \qquad\qquad \log a^r=r\log a$$



Τα χωρία τα οποία αναφέρθηκαν είναι αυτά που σήμερα ονομάζουμε φυσικούς λογάριθμους, αλλά εκείνη την εποχή δε ήταν πλήρως γνωστοί. Το κύριο πρόβλημα ήταν η δυσκολία στον υπολογισμό αυτών των χωρίων. Το 1660 ο Mercator και ο Newton, εργαζόμενοι ανεξάρτητα κατάφεραν να υπολογίσουν αυτά τα χωρία και άρα και τους αντίστοιχους λογάριθμους με τη χρήση άπειρων σειρών. Θα δείξουμε με σύγχρονο συμβολισμό τη μεθοδολογία του Newton.

$$\text{Θέτει } \ell(1+x) := \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα για $r=-1$, έχουμε:

$$(1+t)^{-1} = 1+(-1)t+\frac{(-1)(-1-1)}{2\cdot 1}\cdot t^2+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3\cdot 2\cdot 1}t^3+\ldots = (1-t)+t^2-t^3+\ldots$$

$$\text{Άρα } \ell(1+x) = \int_0^x \left(1-t+t^2-t^3+t^4\ldots\right)dt = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots$$

Η παραπάνω παράσταση είναι μια απλή σειρά για το υπερβολικό χωρίο. Ο Newton παρατήρησε ότι για μικρές τιμές του x, αυτή η σειρά δίνει πολύ καλές προσεγγίσεις λογαρίθμων. Άλλωστε αυτό χρησιμοποίησε για να υπολογίσει το $\ell(1,1) = \int_0^{0,1} \frac{1}{1+t}dt$ με ακρίβεια 57 δεκαδικών ψηφίων.

$$\ell(1.1) = \ell(1+0,1) = \int_0^{0,1} \frac{1}{1+t}dt = 0,1-\frac{(0,1)^2}{2}+\frac{(0,1)^3}{3}-\frac{(0,1)^4}{4}+\ldots$$

Οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα είχαν φτάσει πολύ μακριά. Τα επιτεύγματά τους ήταν εντυπωσιακά και βρισκόμαστε στο σημείο, όπου οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνταν ευρέως και υπολογίζονταν εύκολα με τις τεχνικές των άπειρων σειρών.

Ο Sarasa αναγνώρισε ότι τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή έχουν την λογαριθμική ιδιότητα, δηλαδή $A(ab) = A(a)+A(b)$, όπου μετατρέπει τον πολλαπλασιασμό σε πρόσθεση, $A(a:b) = A(a)-A(b)$, όπου μετατρέπει τη διαίρεση σε αφαίρεση και $A(a^r) = rA(a)$, ο υπολογισμός δύναμης. Η ανάλυση των Sarasa και Vincent για να είναι εύχρηστη χρειαζόταν έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού των αντίστοιχων υπερβολικών χωρίων. Εκεί βοήθησε ο Newton, Κατορθώνοντας αυτά τα υπερβολικά χωρία να τα ανάγει σε σειρές και με αυτόν τον τρόπο να πετύχει τον εύκολο

υπολογισμό τους, έχοντας ταυτόχρονα μεγάλη ακρίβεια. Ο ορισμός των Vincent και Sarasa για τα υπερβολικά χωρία είναι ο: $A(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Ο Newton όρισε $\ell(1+x):=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$.

Και στις δύο περιπτώσεις πρόκειται για τον ίδιο ορισμό που προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής ως εξής:

Θέτουμε $\omega=1+t \Leftrightarrow t=\omega-1$

άρα $l(1+x):=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_1^{1+x}\frac{1}{\omega}d\omega$ (θέτουμε $y=1+x$) $\Rightarrow l(y)=\int_1^y \frac{1}{\omega}d\omega=A(y)$

Ο Games Gregory (1638-1675) σχολίασε τη δύναμη της μεθόδου του Newton και τη σύγκρινε με τις προηγούμενες μεθόδους και κατέληξε ότι η μέθοδος των άπειρων σειρών του Newton διέφερε με τις προηγούμενες μεθόδους, όσο η λάμψη του μεσημεριανού ήλιου διαφέρει από τη λάμψη των πρώτων ηλιαχτίδων του ξημερώματος.[167]

6.2 Ο Euler και οι λογάριθμοι

Ο Euler στο βιβλίο του *"Introduction to Analysis of the Infinite"* στα 6_o και 7_o κεφάλαιο μελετάει τους λογαρίθμους. Προηγουμένως έχει ορίσει τις εκθετικές συναρτήσεις ως συναρτήσεις του τύπου $y=a^z$, $a>1$. Αυτές ο Euler τις θεωρούσε εύκολα κατανοητές: «*ο βαθμός στον οποίον το y εξαρτάται από το z είναι εύκολα κατανοητός από τη φύση των εκθετικών*»[168]. Ο Euler τότε σκέφτηκε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή αν θέλουμε να δώσουμε τιμή στο z ώστε να ισχύει $a^z=y$, τότε η τιμή του z, στο βαθμό που μπορούμε να τη δούμε σαν συνάρτηση του y, ονομάζεται λογάριθμος του y. Δηλαδή όρισε το λογάριθμο ως αντίστροφη της εκθετικής με σύγχρονο συμβολισμό: $z=\log_a y \Leftrightarrow a^z=y$. Ο Euler είχε συλλάβει το πρόβλημα στη σωστή του βάση. Γι' αυτόν ο λογάριθμος δεν ήταν ένα απλό υπολογιστικό εργαλείο, αλλά η αντίστροφη συνάρτηση των εκθετικών. Και αφού υπήρχαν άπειρες επιτρεπόμενες βάσεις, υπήρχαν πολλές λογαριθμικές συναρτήσεις να μελετηθούν. Παρακάτω, ακολουθώντας τα βήματα του Euler στο κεφάλαιο 6 του *"Intoduction"* θα

[167] Dunham William, *EULER The Master of Us All*, p. 28.
[168] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, p.77.

υπολογίσουμε τον λογάριθμο του 5, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με την τετραγωνική ρίζα που παρουσιάστηκε παραπάνω. Κατόπιν, αναφερόμενος σε διάφορες τεχνικές του Newton και του Mercator παρατήρησε ότι «έχουν βρεθεί πολύ πιο γρήγοροι τρόποι υπολογισμού των λογαρίθμων». Τις μεθόδους αυτές θα περιγράψει στο κεφάλαιο 7 του «*Introduction*».

Ο Euler, επίσης, έδειξε με το «χρυσό κανόνα του» των λογαρίθμων ότι αν έχουμε υπολογίσει το $\log_a y$, τότε είναι εύκολο να κάνουμε αλλαγή βάσης, δηλαδή να υπολογίσουμε το $\log_b y$ όπου το b είναι οποιαδήποτε άλλη βάση. Η ιδέα του αυτή είναι ταυτόχρονα απλή και ισχυρή.

Θέτουμε $z = \log_b y$ και άρα $y = b^2$.

$$z = \log_b y \Leftrightarrow y = b^2$$

$$y = b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a y = \log_a b^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a y = z \log_a b \Rightarrow z = \frac{\log_a y}{\log_a b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$$

Ο κανόνας του Euler όχι μόνο μετατρέπει λογαρίθμους από μία βάση σε μία άλλη, αλλά οδηγεί στη διαπίστωση ότι ο λόγος των λογαρίθμων δύο αριθμών είναι ίδιος ανεξαρτήτως βάσεως.

Δηλαδή: $\dfrac{\log_b y}{\log_b x} = \dfrac{\log_a y / \log_a b}{\log_a x / \log_a b} = \dfrac{\log_a y}{\log_a x}$

Στο τέλος του 6^{ου} κεφαλαίου στο «*Introduction*» ο Euler παραθέτει μερικά αριθμητικά προβλήματα. Ένα που είναι πρόσφατο, ακόμα και για τα σημερινά δεδομένα, είναι ο υπολογισμός τόκου στην επαναπληρωμή δανείου. Ένα άλλο έχει να κάνει με τον υπολογισμό του ετήσιου ρυθμού ανάπτυξης ενός πληθυσμού. Ας δούμε λοιπόν, το δεύτερο απ' αυτά τα δύο προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Με τον κατακλυσμό η ανθρωπότητα μειώθηκε σε 6 άτομα. Ας υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός μετά από 200 χρόνια ήταν ένα εκατομμύριο άνθρωποι. Θα θέλαμε να βρούμε τον ετήσιο ρυθμό ανάπτυξης.

ΛΥΣΗ:

Υποθέτουμε ότι κάθε χρόνο η αύξηση είναι $\frac{1}{x}$, και άρα μετά από 200 χρόνια ο πληθυσμός είναι:

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \cdot 6 = 1.000.000 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} = \left(\frac{1.000.000}{6}\right)^{1/200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{200}\log\frac{1.000.000}{6} = \frac{1}{200}\cdot 5,2218487 = 0,0261092 .$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1.061.963}{1.000.000} \Leftrightarrow 1.000.000 = 61.963x \Leftrightarrow x \simeq 6 .$$

Συνεπώς, εμείς αποδείξαμε ότι αν ο πληθυσμός αυξάνεται κάθε χρόνο κατά 1/16 περίπου, τότε θα έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Αν τώρα ο ίδιος ρυθμός διατηρηθεί για ένα χρονικό διάστημα 400 χρόνων, τότε ο πληθυσμός γίνεται:

$$1.000.000\frac{1.000.000}{6} = 166.666.666.666 .$$

Τότε όμως ολόκληρη η γη δε θα ήταν σε θέση να διατηρήσει αυτόν τον πληθυσμό[169].

Οι κοινοί λογάριθμοι, δηλαδή αυτοί που έχουν βάση το 10, έχουν μια ειδική χρησιμότητα πέρα από αυτή που έχουν οι λογάριθμοι με κάποια άλλη βάση. Αυτό ισχύει διότι η αριθμητική μας βασίζεται στο δεκαδικό σύστημα. Με δεδομένο ότι οι λογάριθμοι όλων των αριθμών εκφράζονται όχι μόνο με δυνάμεις του 10 αλλά και με δεκαδικούς, οι λογάριθμοι των αριθμών μεταξύ του 1 και του 10 βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1, ενώ οι λογάριθμοι των αριθμών μεταξύ του 1 και του 100 βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 2, κ.ο.κ. Επομένως ένας λογάριθμος αποτελείται από δύο τμήματα: ένα ακέραιο μέρος, που ονομάζεται **χαρακτηριστική (characteristic)** και ένα δεκαδικό, που ονομάζεται **μαντίσσα (mantissa)**[170].

---

[169] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, p.86.
[170] Ο.π. p. 90.

Η χαρακτηριστική του αριθμού είναι κατά μία μονάδα μικρότερη από τον αριθμό των ψηφίων που εκφράζουν τον αριθμό. Για παράδειγμα, ο λογάριθμος του αριθμού 78509 έχει χαρακτηριστική 4 (log78509 = 4,89492), εφόσον ο αριθμός αυτός έχει 5 ψηφία. Επομένως από τον λογάριθμο ενός αριθμού μπορούμε άμεσα να βρούμε πόσα ψηφία έχει το ακέραιο μέρος του αριθμού αυτού. Επίσης για παράδειγμα, από το λογάριθμο 7,5804631 μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι το ακέραιο μέρος του αντίστοιχου αριθμού είναι οκταψήφιος αριθμός (πραγματικά: log38059501,88232 = 7,5804631).

Αν οι μαντίσσες δύο λογαρίθμων είναι ίσες, αλλά οι χαρακτηριστικές είναι διαφορετικές, τότε οι αριθμοί που αντιστοιχούν σε αυτούς τους λογαρίθμους έχουν λόγο που είναι δύναμη του 10. Προκύπτει επομένως ότι οι δύο αριθμοί έχουν τα ίδια μη μηδενικά ψηφία. Για παράδειγμα, έστω οι λογάριθμοι 4,9130187 και 6,9130187. Βλέπουμε ότι οι μαντίσσες των λογαρίθμων αυτών είναι ίσες. Άρα οι αντίστοιχοι αριθμοί θα έχουν λόγο ίσο με δύναμη του 10 και άρα θα έχουν τα ίδια μη μηδενικά ψηφία. Πράγματι, πρόκειται για τους αριθμούς 81850 και 8185000 διότι,

log81850 = 4,9130187 και log8185000 = 6,9130187.

Ως δεύτερο παράδειγμα έχουμε ότι

log8185 = 3,9130187 και log8,185 = 0,9130187.

Βλέπουμε ότι και πάλι έχουμε την ίδια μαντίσσα στους λογάριθμους και άρα οι αντίστοιχοι αριθμοί έχουν λόγο δύναμη του 10.

Από τη μαντίσσα ενός λογαρίθμου προκύπτουν τα ψηφία του αντίστοιχου αριθμού, ενώ από τη χαρακτηριστική ενός λογαρίθμου προκύπτει ο αριθμός των ψηφίων του ακέραιου μέρους του αντίστοιχου αριθμού.

Για παράδειγμα, έστω ότι μας δίνεται ο λογάριθμος 2,7603429. Η μαντίσσα είναι 0,7603429 και αντιστοιχεί στον αριθμό 5,758945 (πράγματι log5,758945 = 0,7603429). Επομένως η μαντίσσα 0,7603429 αντιστοιχεί στα ψηφία 5758945. Η χαρακτηριστική συν 1 μας δίνει τον αριθμό των ψηφίων του ακέραιου μέρους. Άρα ο αριθμός που αντιστοιχεί στο λογάριθμο είναι ο 575,8945.

Έτσι έχουμε:

- Λογάριθμος: 2,7603429
- Μαντίσσα: 0,7603429
  - Αριθμός που ο λογάριθμός του αντιστοιχεί στη μαντίσσα: 5,758945 (log5,758945 = 0,7603429).
  - Ψηφία αριθμού που ο λογάριθμός του αντιστοιχεί στη μαντίσσα: 5758945.
- Χαρακτηριστική: 2
  - Χαρακτηριστική + 1 = 3
- Αριθμός που αντιστοιχεί στο λογάριθμο: 575,8945 (log575,8945 = 2,7603429).

Λογάριθμος	Χαρακτηριστική	Μαντίσσα	Αριθμός
3,7603429	3	0,7603429	5758,945
2,7603429	2	0,7603429	575,8945
1,7603429	1	0,7603429	57,58945
0,7603429	0	0,7603429	5,758945
-1,7603429	-1	0,7603429	0,5758945
-2,7603429	-2	0,7603429	0,05758945
-3,7603429	-3	0,7603429	0,005758945

Ο Euler χρησιμοποιεί την παραπάνω μέθοδο για τον υπολογισμό του αριθμού $2^{2^{24}}$. Θεωρεί την πρόοδο 2, 4, 16, 256,… όπου ο κάθε όρος είναι το τετράγωνο του προηγούμενου και θέτει ως ερώτημα τον υπολογισμό του 25ου όρου της. Πρόκειται με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό για τη ακολουθία $a_n = 2^{2^n}$ για n=0, 1,.. και ο 25ος όρος της είναι ο $2^{2^{24}}$.

Έχουμε ότι:

n	0	1	2	3	…	24
2^n	1	2	4	8	…	
$a_n = 2^{2^n}$	2	2^2	2^4	2^8	…	$2^{2^{24}}$

Οι εκθέτες αποτελούν γεωμετρική πρόοδο και ο εκθέτης του 25ου όρου είναι ο 2^{24} = 16777216. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό $2^{16777216}$.

Ο λογάριθμος του $2^{16777216}$ είναι ο $\log 2^{16777216} = 16777216\log 2$. Έχουμε ότι log2 = 0,301029995663981195 και άρα ο λογάριθμος του $2^{16777216}$ είναι ο 5050445,25973367. Από τη χαρακτηριστική του λογαρίθμου βλέπουμε ότι ο αριθμός μας έχει 5050446 ακέραια ψηφία. Από τη μαντίσσα 0,25973367 προκύπτουν τα ψηφία του αριθμού. Τα πρώτα ψηφία είναι τα 181858 (διότι $\log^{-1} 0{,}25973367 = 1{,}81858\ldots$). Άρα ο $2^{16777216}$ είναι ο αριθμός με 5050446 ακέραια ψηφία όπου τα πρώτα έξι από αυτά είναι τα 181858.

6.3 Οι εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις ως αναπτύγματα άπειρων σειρών

Στο 7ο κεφάλαιο του *Introduction* φαίνεται έντονα η μαθηματική ιδιοφυία του Euler. Αφού έχει ήδη ορίσει τους λογαρίθμους, εκφράζει τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις ως αναπτύγματα άπειρων σειρών. Αυτή τη μελέτη του θα δώσουμε αμέσως παρακάτω, αφού τονίσουμε ότι η μαθηματική διατύπωση που έδωσε ήταν στοιχειώδης και μη αυστηρή. Παρόλα αυτά όμως, πολύ έξυπνη και διορατική. Ξεκινάει λοιπόν, προσπαθώντας να εκφράσει το $a^x, a > 1$, με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσει το διωνυμικό ανάπτυγμα του Newton.

$$a^x = 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^4 + \ldots$$

$$= 1 + kx + \frac{j-1}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j\cdot j}\left(\frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{j\cdot j\cdot j}\left(\frac{k^4x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right) + \ldots$$

Αλλά το x είναι πεπερασμένο και το ω είναι απειροελάχιστα μικρό, και άρα το $j = \frac{x}{\omega}$ πρέπει να είναι άπειρα μεγάλο. Ο Euler δεν αναφερόταν σε όρια, αντί γι' αυτό αναφερόταν σε απειροελάχιστα μικρές και άπειρα μεγάλες ποσότητες. Επειδή το j ήταν άπειρα μεγάλο, ο Euler έκανε τις παρακάτω προσεγγίσεις:

$$\frac{(j-1)}{j} = 1, \qquad \frac{(j-2)}{j} = 1, \qquad \frac{(j-3)}{j} = 1, \quad \ldots$$

Με αυτόν τον τρόπο το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο j γιατί αυτός απαλείφεται. Επομένως προκύπτει ότι:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{k^4x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \dots . \quad \text{(σχέση 1)}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι καταλήγει σ' ένα ανάπτυγμα για το a^x, όπου δεν είναι αρχικά χρήσιμο διότι περιέχει και τον όρο k. Όμως ο Euler κατέληξε σε δύο συμπεράσματα. Το πρώτο συμπέρασμα ήταν ότι για $x = 1$, προκύπτει ότι:

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{k^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \dots$$

Το δεύτερο συμπέρασμά του ήταν ότι θα μπορούσε το α να είναι η συγκεκριμένη εκείνη βάση για την οποία $k = 1$. Δηλαδή να ισχύει $a^{\omega} = 1 + \omega$, όπου το ω είναι, όπως είπαμε και πριν, απειροελάχιστα μικρό.

Με το αριθμητικό παράδειγμα που έδωσε ο Euler και παρουσιάσαμε παραπάνω, ο Euler κατέληξε ότι το k εξαρτάται από τη τιμή του α. Για να καταλήξει σε κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα, είδε ότι χρειαζόταν στο ανάπτυγμα του a^x (σχέση 1) να θέσει $x = k = 1$. Παρόλο που μπορούσε να θέσει $x = 1$ χωρίς πρόβλημα, για να θέσει $k = 1$ έπρεπε να περιορίσει τη σχέση που θα προέκυπτε σε μια συγκεκριμένη και μοναδική τιμή του α, για την οποία $k = 1$. Πραγματικά ο Euler έθεσε $x = k = 1$ και προέκυψε η εξής τιμή για το συγκεκριμένο αυτό α.

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \dots = 2,718281828459045235360 28$$

Αυτή η σταθερά συμβολίστηκε από τον Euler με το γράμμα e και οι λογάριθμοι που σχετίζονται με αυτή τη σταθερά (βάση) ονομάστηκαν από τον Euler φυσικοί ή υπερβολικοί λογάριθμοι.

Επίσης, θέτοντας $k = 1$ και $a = e$ προκύπτει:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

Ο Euler είχε επιτύχει να εκφράσει το e^x ως ανάπτυγμα μιας άπειρης σειράς. Στη συνέχεια ο Euler έψαξε να βρει ανάπτυγμα σειράς για τη φυσική λογαριθμική συνάρτηση, της οποίας ο σύγχρονος συμβολισμός είναι ℓn.

Όπως και πριν θέτει $e^{\omega} = 1 + \omega$, όπου ω είναι απειροελάχιστα μικρό και θετικό. Από εδώ προκύπτει ότι: $\omega = \ln(1+\omega) \Rightarrow j\cdot\omega = j\cdot\ln(1+\omega) \Rightarrow j\cdot\omega = \ln(1+\omega)^j$. Όσο μεγαλώνει το j τόσο το $(1+\omega)^j$ θα ξεπερνάει τη μονάδα. Ο Euler κατέληξε ότι για οποιοδήποτε θετικό x, μπορούμε να βρούμε κάποιο j, τέτοιο ώστε: $x = (1+\omega)^j - 1$, $x > 0$.

[Θέτοντας ως βάση το e και όχι οποιαδήποτε άλλη βάση a, όπως είχες κάνει πριν στην ανάπτυξη των εκθετικών συναρτήσεων, ο Euler ασχολείται μόνο με την ανάπτυξη των φυσικών λογαρίθμων, των οποίων η βάση είναι το e και το αντίστοιχο $k=1$. Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν, ο Euler χρησιμοποιεί την ανακάλυψη των φυσικών λογαρίθμων, που είδαμε προηγουμένως, και άρα πετυχαίνει να εξαιρέσει τη μεταβλητή k από την ανάλυσή του]. Από τη τελευταία σχέση προκύπτουν τρία συμπεράσματα:

- $\omega=(1+x)^{1/j}-1 \Rightarrow (1+\omega)^j = x+1 \Rightarrow 1+\omega=(x+1)^{1/j} \Rightarrow \omega=(1+x)^{1/j}-1$
- $(1+x)=(1+\omega)^j = e^{\omega\cdot j} \Rightarrow \ln(1+x)=\ln e^{\omega\cdot j} \Rightarrow \ln(1+x)=\omega\cdot j$
- Επειδή $\ln(1+x)$ είναι πεπερασμένο, ενώ το ω είναι απειροελάχιστα μικρό, το j είναι απείρως μεγάλο.

Όπως και στην περίπτωση των εκθετικών συναρτήσεων, ο Euler δημιούργησε μια άπειρη σειρά χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα με κλασματικές δυνάμεις αυτή τη φορά.

$$\ln(i+x)=j\cdot\omega=j\left[(1+x)^{1/j}-1\right]=$$

$$=j\left[1=\left(\frac{1}{j}\right)x+\frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)}{2\cdot 1}x^2+\frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{j}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3+\ldots\right]-j=$$

$$=x-\frac{j-1}{2j}x^2+\frac{(j-1)(2j-1)}{2j\cdot 3j}x^3-\frac{(j-1)(2j-1)(3j-1)}{2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4+\ldots$$

Επειδή το j είναι πολύ μεγάλο, ο Euler θέτει:

$$\frac{j-1}{2j}=\frac{1}{2} \text{ (με σύγχρονο συμβολισμό δηλαδή: } \lim_{j\to\infty}\frac{j-1}{2j}=\frac{1}{2}\text{)}$$

$$\text{Όμοια } \frac{2j-1}{3j}=\frac{2}{3},\quad \frac{3j-1}{4j}=\frac{3}{4},\ldots$$

$$\text{Αντικαθιστώντας λοιπόν έχουμε } \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Και έτσι ο Euler έφτασε στη «σειρά» του Newton και του Mercator που αναφέραμε στα προηγούμενα. Η χρήση όμως των παραπάνω τύπων είναι περιορισμένη, και αυτό γιατί όπως ο Euler παρατήρησε, οι όροι αυτής της σειράς συνεχώς αυξάνονται και τα πρόσημα εναλλάσσονται. Έτσι η σειρά δε δείχνει να συγκλίνει. Γι' αυτό ο Euler σκέφτηκε ένα πολύ έξυπνο μαθηματικό τέχνασμα, ώστε τελικά να ξεπεράσει το

πρόβλημα και να καταλήξει σε έναν τύπο που η σειρά συγκλίνει ισχυρά. Αυτό το πέτυχε ως εξής:

Στο ανάπτυγμα $\ln(1+x)$ έθεσε αντί για x το $-x$, καταλήγοντας στον τύπο:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Ύστερα αφαίρεσε το δεύτερο ανάπτυγμα από το πρώτο:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \right] - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \right] = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right)}$$

Ο Euler είπε ότι οι παραπάνω σειρά συγκλίνει ισχυρά για μικρές τιμές του x και χρησιμοποίησε αυτόν τον τύπο για τον υπολογισμό λογαρίθμων και τη δημιουργία λογαριθμικών πινάκων. Είναι σημαντικό να δούμε στην πράξη τη χρήση του τύπου αυτού.

Εάν $x = \frac{1}{5}$ τότε:

$$\log\frac{6}{4} = \log\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \ldots$$

Εάν $x = \frac{1}{7}$ τότε:

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \ldots$$

και εάν $x = \frac{1}{9}$, τότε:

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \ldots$$

Από τους λογαρίθμους αυτών των κλασμάτων, μπορούμε να εξάγουμε τους λογάριθμους των ακεραίων αριθμών. Από τη φύση των λογαρίθμων έχουμε:

$$\log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} = \log 2, \text{ και } \log\frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$$

και $2\log 2 = \log 4$. Συνεπώς έχουμε:

$$\log\frac{5}{4} + \log 4 = \log 5,\ \ \log 2 + \log 3 = \log 6,\ \ 3\log 2 = \log 8,\ \ 2\log 3 = \log 9,$$

$$\log 2 + \log 5 = \log 10$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μπορούμε τώρα να παραθέσουμε τις τιμές των φυσικών λογαρίθμων των κλασμάτων από το 1 έως το 10.

$\log 1 = 0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000$	$\log 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321$
$\log 3 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452$	$\log 4 = 1.38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642$
$\log 5 = 1.60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593$	$\log 6 = 1.79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773$
$\log 7 = 1.94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639$	$\log 8 = 2.07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964$
$\log 9 = 2.19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905$	$\log 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$

Ο Euler χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σειρές, υπολόγισε τους λογαρίθμους των ακεραίων από το 1 μέχρι το 10, εκτός του αριθμού 7. Προκειμένου να υπολογίσει το λογάριθμο του 7 εργάστηκε ως εξής:

Έθεσε $x = \frac{1}{99}$. Τότε:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{99}}{1-\frac{1}{99}} = \frac{\frac{99+1}{99}}{\frac{99-1}{99}} = \frac{100}{98} = \frac{50}{49}.$$

Βρήκε το $\log\frac{1+x}{1-x} = \log\frac{50}{49}$ από το ανάπτυγμά του.

Επίσης, είναι $\log\frac{50}{49} = \log 50 - \log 49$.

Το log50 είναι:

$$\log 50 = \log(2\cdot 5^2) = \log 2 + \log 5^2 = \log 2 + 2\log 5,$$

οπότε και αυτό μπόρεσε να το υπολογίσει.

Άρα προέκυψε και το log49 ως $\log 50 - \log\frac{50}{49}$.

Τώρα το $\log 49 = \log 7^2 = 2\log 7$ και άρα $\log 7 = \frac{1}{2}\log 49$.

Έτσι ο Euler συμπλήρωσε τον πίνακα των λογαρίθμων από το 1 ως το 10.

Κεφάλαιο 7ο

Ο EULER ΚΑΙ ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

7.1 Εισαγωγή

Στα 1637, στο αριστουργηματικό έργο του *Geometrie*, ο Rene Descartes ανέφερε το σύνθετο ζήτημα των τετραγωνικών ριζών των αρνητικών αριθμών. '*Ούτε οι αληθινές* (όπως οι θετικές) *ούτε οι ψευδείς* (όπως οι αρνητικές) *ρίζες είναι πάντοτε πραγματικές. Μερικές φορές είναι φανταστικές*' έγραψε.[171] Πριν από αυτόν όσοι αναφέρονταν στις τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών χρησιμοποιούσαν όρους όπως «περίπλοκοι» ή «εξεζητημένοι» αριθμοί.

Ο όρος '*φανταστικός*' είναι δύσκολο να εμπνεύσει εμπιστοσύνη. Ακούγεται κάτι σαν πλάνη, σαν να επρόκειτο μια συζήτηση για τους φανταστικούς αριθμούς να έπρεπε να ξεκινήσει με τη φράση 'μια φορά κι έναν καιρό'. Οι φανταστικοί αριθμοί φαινόταν δύσκολο να έχουν οποιοδήποτε πραγματικό νόημα. Ο μεγάλος Άγγλος μαθηματικός John Wallis, για παράδειγμα είχε προβληματιστεί έντονα με τη γεωμετρική σημασία των φανταστικών αριθμών και διατύπωσε μερικές περίεργες απόψεις για τους αρνητικούς αριθμούς. Ο Euler στην άλγεβρα του γράφει: «*Όλες οι παραστάσεις του τύπου* $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, *κ.λ.π., είναι συνεπώς απίθανοι ή φανταστικοί αριθμοί, αφού αντιπροσωπεύουν ρίζες αρνητικών ποσοτήτων. Για τέτοιους αριθμούς μπορούμε με βεβαιότητα να ισχυριστούμε ότι δεν ούτε τίποτα ούτε μεγαλύτεροι από το τίποτα ούτε μικρότεροι από το τίποτα, και αυτό αναγκαστικά τους καθιστά φανταστικούς ή απίθανους*»[172].

Τίποτα δεν θα μπορούσε να είναι πιο μακριά από την αλήθεια. Όταν οι μαθηματικοί ξεπέρασαν την αποστροφή τους για τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών, ανακάλυψαν ότι τέτοιες οντότητες έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στα Μαθηματικά. Οι μιγαδικοί αριθμοί (όπως σήμερα τους αποκαλούμε), σε καμιά περίπτωση δεν ήταν μια άχρηστη ανακάλυψη. Αντίθετα, η μιγαδική ανάλυση, όπως θα λέγανε σήμερα, όχι μόνο πρόσφερε συναρπαστικές νέες προκλήσεις αλλά παρείχε αναπάντεχες πληροφορίες για τους πραγματικούς αριθμούς που βρίσκονταν μέσα στους

[171] William Dunhum, *Euler, the Master of Us All*, p. 81.
[172] Leonhard Euler, *Elements of Algebra*, § 144.

αντίστοιχους μιγαδικούς. Έτσι οι μαθηματικοί είδαν το γνωστό και οικείο μέσα από το φακό του μη οικείου αλλά αναμφίβολα χρήσιμου.

Δεν πρέπει να μας ξαφνιάζει το γεγονός ότι μια ολοκληρωμένη κατανόηση και αποδοχή των σύνθετων μεταβλητών δεν έγινε μονομιάς. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε τις ανακαλύψεις ενός μεγάλου πρωτοπόρου, του οποίου η μαθηματική φαντασία ταίριαζε απόλυτα σε αυτό που καλούμε "φανταστικό" στα σύγχρονα Μαθηματικά.

7.2 Euler και μιγαδικοί αριθμοί

Ο Euler χρησιμοποίησε το θεώρημα De Moivres's προκειμένου να αποδείξει τα δύο παρακάτω αναπτύγματα[173]:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\sin y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Πράγματι με δεδομένο ότι ισχύουν οι σχέσεις $\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n$ και $\cos n\vartheta - i\sin n\vartheta = (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n$ (*) για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$\cos n\vartheta = \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n}{2i}$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέρος της ισότητας με το δυωνυμικό θεώρημα συνεπάγεται ότι

$$\cos n\vartheta = \frac{1}{2}\left[\cos^n\vartheta + \frac{ni\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta}{1} - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)i\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta}{1.2.3} + \ldots\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos^n\vartheta - \frac{ni\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta}{1} + \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)i\cos^{n-3}\vartheta\sin^3\vartheta}{1.2.3} + ..\right]$$
$$= \cos^n\vartheta - \frac{n(n-1)\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)i\cos^{n-4}\vartheta\sin^4\vartheta}{1.2.3.4} - \qquad (**)$$

Σε αυτό το σημείο ο Euler έθεσε $x = n\vartheta$. Θεωρώντας το n απείρως μεγάλο, το $\vartheta = \frac{x}{n}$ γίνεται απείρως μικρό. Έτσι θεώρησε ότι $\cos\vartheta = 1$ και $\sin\vartheta = \vartheta = x/n$. Δηλαδή αυτό

[173] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, pp.106-107.

που θα εκφράζαμε με σύγχρονη ορολογία με τις σχέσεις: $\lim_{\vartheta\to 0}\cos\vartheta = 1$ και $\lim_{\vartheta\to 0}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$.

Αφού λοιπόν θεώρησε το n απείρως μεγάλο, αντικατέστησε τα $n-1, n-2, n-3, \ldots$ με n και από την σχέση (**) συμπέρανε ότι:

$$\cos x = 1^n - \frac{n.n.(1)^{n-2}\left(\frac{x}{n}\right)^2}{1.2} + \frac{n.n.n.n.(1)^{n-4}\left(\frac{x}{n}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

Με αντίστοιχο τρόπο αφαιρώντας τις σχέσεις (*) και διαιρώντας με 2 οδηγήθηκε στη σχέση $\sin n\vartheta = \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n - (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n}{2i}$ και από εκεί στο ανάπτυγμα:

$$\sin y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι Euler όταν ανέπτυσσε αυτά το 1948 στο *Introduction* χρησιμοποιούσε ακόμα το $\sqrt{-1}$ και όχι το $\boldsymbol{i}$, που εισήγαγε το 1777.

Ο Euler χρησιμοποιώντας το θεώρημα De Moivres's οδηγήθηκε σε μια ακόμα πιο εντυπωσιακή σχέση που είναι γνωστή ως *ταυτότητα του Euler* και είναι η παρακάτω

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

Ξεκίνησε με τη σχέση $\cos n\vartheta = \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n}{2}$, θεώρησε n έναν άπειρο αριθμό και επομένως $\vartheta = x/n$ άπειρα μικρό. Έτσι $\cos\vartheta = 1$ και $\sin\vartheta = \vartheta = \frac{x}{n}$ που με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση δίνουν:

$$\cos x = \cos n\vartheta = \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n}{2} = \frac{\left(1 + ix/n\right)^n + \left(1 - ix/n\right)^n}{2} \quad (***)$$

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο με τους λογάριθμους ο Euler θέτει $e^{\omega} = 1 + \omega$ για ω απείρως μικρό. Έτσι θεωρώντας το a πεπερασμένο και n απείρως μεγάλο έχουμε:

$$e^{\alpha} = \left(e^{\alpha/n}\right)^n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

και αντικαθιστώντας το α με τις ποσότητες ix και $-ix$ η σχέση (***) γίνεται

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για το ημίτονο

$$\sin x = \sin n\vartheta = \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n - (\cos\vartheta - i\sin\vartheta)^n}{2i} = \frac{\left(1 + ix/n\right)^n - \left(1 - ix/n\right)^n}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ισότητες έφτασε στη γνωστή σχέση:

$$\cos x + i\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = e^{ix}$$

Στην τελευταία σχέση αν αντικαταστήσουμε το x με το π παίρνουμε την σχέση

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

η οποία θεωρείται μια από τις πιο όμορφες σχέσεις των Μαθηματικών αφού συνδέει πέντε[174] θεμελιώδους σημασίας αριθμούς των Μαθηματικών. Η παραπάνω σχέση ήταν αυτή που οδήγησε τον Euler να γράψει στον d'Alembert και να του εξηγήσει με σαφήνεια τη φύση των λογαρίθμων των αρνητικών αριθμών. Ο Euler συνέχισε ακόμα παραπέρα και διατύπωσε άλλη μια ιδιότητα των λογαρίθμων που προέκυψε από την ταυτότητα του. Δηλαδή ότι κάθε αριθμός, θετικός ή αρνητικός, δεν έχει ένα λογάριθμο αλλά άπειρους. Ακόμα προκύπτει ότι οι λογάριθμοι των μιγαδικών αριθμών είναι επίσης μιγαδικοί αριθμοί. Τέλος για $\theta = \frac{\pi}{2}$ αντικαθιστώντας στον τύπο του Euler έχουμε $i = e^{i\pi/2}$ και τελικά $i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} = 0,20787958...$ Ένας φανταστικός αριθμός, υψωμένος σε μια φανταστική δύναμη, δίνει αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό (στην πραγματικότητα η δύναμη i^i παίρνει άπειρες διαφορετικές πραγματικές τιμές, μια από τις οποίες είναι και η $e^{-\pi/2}$) .

Ο Euler συνήθιζε να επανέρχεται στα θέματα που τον απασχολούσαν και να δίνει περισσότερες αποδείξεις για το ίδιο πρόβλημα. Έτσι και στην σχέση $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ έδωσε και άλλες αποδείξεις που επαλήθευαν τα συμπεράσματα του και που αξίζει να δούμε δυο από αυτές. Η πρώτη εξ αυτών χρησιμοποίει τεχνικές ολοκληρωτικού λογισμού και η δεύτερη βασίζεται στο ανάπτυγμα της e^x.

[174] Σύμφωνα με πολλούς μαθηματικούς το 1 παριστάνει την Αριθμητική, το i την Άλγεβρα, το π τη Γεωμετρία και το e την Ανάλυση.

Θέτοντας $\sin x = y$ έκανε το μετασχηματισμό $x = \sin^{-1} y = \arcsin y = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$. Ο Euler αντιμετωπίζοντας τους φανταστικούς ως πραγματικούς και κάνοντας την αντικατάσταση $y = iz$ και $dy = idz$ κατέληξε στην παρακάτω σχέση:

$$x = \int \frac{i}{\sqrt{1-(iz)^2}} dz = i\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = i\ell n\left(\sqrt{1+z^2} + z\right)$$

απ' όπου με $z = \frac{y}{i} = \frac{\sin x}{i}$ και $z^2 = \frac{\sin^2 x}{i^2} = -\sin^2 x$ έχουμε

$$x = i\ell n\left(\sqrt{1-\sin^2 x} + \frac{\sin x}{i}\right) = i\ell n(\cos x - i\sin x)$$

και επομένως

$$ix = i^2 \ell n(\cos x - i\sin x) = \ell n \frac{1}{cox - i\sin x} = \ell n(\cos x + i\sin x) \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{ix} = e^{\ell n(\cos x + i\sin x)} = \cos x + i\sin x}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα έφτασε και από το (γνωστό στον Euler) ανάπτυγμα $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$ αντικαθιστώντας το x με το ix με αλγεβρικό τρόπο ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{1.2} + \frac{(ix)^3}{1.2.3} + \frac{(ix)^4}{1.2.3.4} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right] \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned}$$

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια ο Euler ήταν πρωτοπόρος στο έργο του. Δεν δίσταζε να πάει ένα βήμα παραπέρα ακόμα και αν εκ πρώτης όψεως τα αποτελέσματα έδειχναν «μη πραγματικά». Έχοντας λοιπόν εξοικειωθεί με τα βασικά των μιγαδικών αριθμών έθεσε ερωτήματα όπως τι θα μπορούσε να είναι το ημίτονο και το συνημίτονο ενός *μη πραγματικού* τόξου ή ποια θα μπορούσε να είναι η φύση των λογάριθμων μιγαδικών ποσοτήτων.

Ξεκινώντας από το $\cos bi$ και το ανάπτυγμα του συνημίτονου έγραψε [175]

$$\cos(bi) = 1 - \frac{(bi)^2}{1.2} + \frac{(bi)^4}{1.2.3.4} - \frac{(bi)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \frac{b^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

Έχοντας αυτό τον τύπο μπορούμε πλέον να λύσουμε την $\cos x = 2$ όπου θέτοντας $x = bi$ έχουμε:

$$\cos x = 2 \Rightarrow \cos(bi) = 2 \Rightarrow \frac{e^b + e^{-b}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{\left(e^b\right)^2 + 1}{2e^b} = 2 \Rightarrow$$
$$\left(e^b\right)^2 - 4\left(e^b\right) + 1 = 0$$

άρα $e^b = 2 \pm \sqrt{3}$ και $b = \ell n\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

επομένως $x = bi = \ell n\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i$

με όμοιο τρόπο υπολόγισε για το ημίτονο [176]

$$\sin(bi) = bi - \frac{(bi)^3}{1.2.3} + \frac{(bi)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$= i\left[b + \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right]$$
$$= i\frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ και $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ [που γνώριζε την ισχύ τους μόνο για πραγματικούς αριθμούς] όρισε το ημίτονο και συνημίτονο για τυχαίο μιγαδικό αριθμό ως εξής:

$$\sin(a+bi) = \sin a \cos(bi) + \cos a \sin(bi) = \sin a \frac{e^b + e^{-b}}{2} + i \cos a \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$
$$\cos(a+bi) = \cos a \frac{e^b + e^{-b}}{2} - i \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύθηκαν ακόμα περισσότερο όταν χρησιμοποιώντας τα απέδειξε την πιο σημαντική τριγωνομετρική ταυτότητα με μιγαδικούς αριθμούς.

---

[175] John Blanton, *Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite*, p.128.
[176] Ο.π., p. 127.

$$\sin^2(a+bi)+\cos^2(a+bi)=\left[\sin a\frac{e^b+e^{-b}}{2}+i\cos a\frac{e^b-e^{-b}}{2}\right]^2+\left[\cos a\frac{e^b+e^{-b}}{2}-i\frac{e^b-e^{-b}}{2}\right]^2$$

$$=\sin^2 a\frac{e^{2b}+2+e^{-2b}}{4}+2i\sin a\cos a\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{4}-\cos^2 a\frac{e^{2b}-2+e^{-2b}}{4}$$

$$+\cos^2 a\frac{e^{2b}+2+e^{-2b}}{4}-2i\sin a\cos a\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{4}-\sin^2 a\frac{e^{2b}-2+e^{-2b}}{4}=$$

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1$$

7.3 Μιγαδικοί λογάριθμοι

Τι είναι οι λογάριθμοι των αρνητικών αριθμών;

Αυτό το ερώτημα βρίσκεται πίσω από τη διαμάχη του Johann Bernoulli και του Gottfried Wilhelm Leibniz στις αρχές του 18ου αιώνα. Η πρόκληση εκείνης της εποχής ήταν η ερμηνεία της φύσης των λογαρίθμων των αρνητικών αριθμών.

Η λύση του Bernoulli ήταν απλή[177]: πίστευε ότι $\ell n(-x)=\ell nx$ για κάθε $x>0$. Σύμφωνα με αυτόν αυτό προέκυπτε από τους κανόνες των λογαρίθμων όπου $2\ell n(-x)=\ell n(-x)^2=\ell n(x^2)=2\ell nx$ και άρα $\ell n(-x)=\ell nx$. Προκειμένου να πείσει και τους πιο δύσπιστους έδωσε μια διαφορετική λύση που στηριζόταν στο διαφορικό λογισμό. Έτσι έγραψε: $D_x[\ell n(-x)]=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}=D_x[\ell nx]$ και συμπέρανε ότι αφού τα διαφορικά (παράγωγοι) είναι ίσα θα ισχύει και $\ell n(-x)=\ell nx$. Ένα άμεσο πόρισμα είναι ότι $\ell n(-1)=\ell n(1)=0$, ένα αποτέλεσμα με το οποίο ο Johann Bernoulli ήταν απόλυτα εξοικειωμένος.

Ο Leibniz είχε διαφορετική άποψη. Παρατήρησε ότι αν $x=-2$ τότε από το ανάπτυγμα της σειράς $\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$ έχουμε $\ell n(-1)=-2-2-\frac{8}{3}-4-\frac{32}{5}-...$ άρα το $\ell n(-1)$ ως άθροισμα άπειρων αρνητικών αριθμών δεν μπορεί να είναι μηδέν όπως υποστήριζε ο Bernoulli.

Ο Leibniz συνέχισε ακόμα παραπέρα και απέρριψε επίσης την απόδειξη του Bernoulli που βασιζόταν στα διαφορικά. Υποστήριξε ότι ο κανόνας εύρεσης διαφορικού του

[177] Todd Doucet, *Leonhard Euler, On the logarithms of negative and imaginary numbers*, [E-168].

λογάριθμου ($D_x[\ell nx] = \frac{1}{x}$) ίσχυε μόνο για τις θετικές ποσότητες και άρα το συμπέρασμα $D_x[\ell n(-x)] = \frac{1}{x}$ ήταν λάθος.

Αυτές οι διαφωνίες παρέμειναν μέχρι που ο Euler ήρθε στο προσκήνιο. Γνωρίζοντας τη διαφωνία των δύο προγενέστερών του έγραψε δύο εργασίες το 1747 και 1749 με τίτλους "*On the controversy between Messrs. Leibniz and Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers*"[E-168] και "*On the logarithms of negative and imaginary numbers*"[E-807] όπου προσπάθησε να ξεκαθαρίσει το θέμα. Εκεί παρουσίασε πρώτα τα επιχειρήματα των διάσημων προκατόχων του. Αρνήθηκε τη θέση του Leibniz σχετικά με τον κανόνα του διαφορικού για το λογάριθμο και αρνήθηκε ότι αυτός ίσχυε μόνο για θετικές ποσότητες. Έγραψε χαρακτηριστικά: "*Αν ο Leibniz ήταν σωστός τότε αυτό καταρρίπτει τα θεμέλια όλης της Ανάλυσης, που αποτελούνται κυρίως από κανόνες και λειτουργίες που είναι αναμφισβήτητα αληθινές, ανεξάρτητα από τη φύση που κάποιος υποθέτει για τις ποσότητες που αυτοί χρησιμοποίησαν*".[178]

Ο Euler απέρριπτε ότι ένας γενικός κανόνας διαφόρισης ήταν περιορισμένης χρήσης. Όσο αφορά το επιχείρημα του Bernoulli δηλαδή ότι $D_x[\ell n(-x)] = D_x[\ell nx]$ ο Euler διαφοροποιήθηκε. Δεν θεωρούσε σωστό ότι αν έχουμε ίσες παραγώγους αυτές προκύπτουν από νέες συναρτήσεις. Ως άμεσο παράδειγμα έδωσε το εξής:

παρόλο που $2x \neq x$ εντούτοις $D_x[\ell n(2x)] = D_x[\ell n(x)]$

Το σωστό συμπέρασμα είναι ότι οι συναρτήσεις με ίσες παραγώγους διαφέρουν κατά μία σταθερά. Πράγματι, $\ell n(2x) = \ell nx + \ell n2$ και άρα $\ell n(-x) = \ell n[(-1)x] = \ell nx + \ell n(-1)$. Η σταθερά που το $\ell n(-x)$ και το ℓnx διαφέρουν ήταν το ασύλληπτο $\ell n(-1)$. Αυτό δεν ήταν όπως ο Bernoulli υποστήριζε ίσο με μηδέν και ο Euler ήταν αυτός που το βρήκε. Αυτό το ερώτημα αντιμετωπίστηκε με κάτι που ο Euler είχε ήδη ανακαλύψει. Ξεκινώντας από το $e^{i\pi} = -1$ και λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$\ell n(-1) = \ell n(e^{i\pi}) = i\pi$$

Οι λογάριθμοι των αρνητικών αριθμών, κατά συνέπεια δεν είναι πραγματικοί όπως φαντάζονταν οι Jean Bernoulli και ο d'Alembert αλλά καθαρά φανταστικοί.[179]

Έτσι ξεκαθάρισε η φύση των αρνητικών αριθμών.

---

[178] William Dunhan, *EULER The Master of Us All*, p. 99.
[179] Carl Boyer & Uta Merzbach, *Η ιστορία των μαθηματικών*, σελ. 500.

$$\text{Αν } x>0, \quad \ell n(-x)=\ell nx+i\pi$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί είχαν ξεφυτρώσει άλλη μια φορά σ' ένα ανέλπιστο μέρος.

Ο Euler πήγε ακόμα παραπέρα. Τον απασχόλησε το ερώτημα πόσους μιγαδικούς λογάριθμους έχει ένας μη μηδενικός αριθμός. Χρησιμοποιώντας ένα οικείο του επιχείρημα έγραψε:

$$\text{Αν } y=\ell nx \text{ τότε } x=e^{y}=\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n} \text{ όπου } n \text{ ένας άπειρος αριθμός.}$$

Ο αριθμός x έχει τόσους διαφορετικούς λογάριθμους όσες είναι και οι διαφορετικές τιμές του y που ικανοποιούν την παραπάνω ισότητα. Υποστήριξε ότι το $\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2}=x$ έχει δύο λύσεις και το $\left(1+\frac{y}{3}\right)^{3}=x$ έχει τρεις. Κατά αναλογία αν n είναι άπειρος αριθμός θα έπρεπε να υπάρχουν άπειρα y για τους οποίους $\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n}=x$. Δηλαδή ένας μη μηδενικός αριθμός μπορεί να έχει άπειρους λογάριθμους. Πράγματι από τη σχέση $e^{i(\vartheta\pm 2K\pi)}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$ αν θεωρήσουμε ότι $\ell na=c$, τότε και οι $c\pm 2K\pi i$ είναι επίσης φυσικοί λογάριθμοι του a.

Η παραπάνω άποψη ήταν εξαιρετικά πρωτότυπη και φανταστική. Τελικά πολύ σύντομα καθιέρωσε την απειρία των λογαρίθμων με τον πιο συγκεκριμένο τρόπο που θα μπορούσε κάποιος να φανταστεί. Με αναλυτικό τρόπο βλέπουμε πώς τους παρήγαγε:

Θεωρώντας τυχόν μιγαδικό $a+bi\neq 0$ έθεσε $c=\sqrt{a^2+b^2}$ και επέλεξε ϑ τέτοια ώστε $\sin\vartheta=\frac{b}{c}$. Τότε για $k=0,1,2,...$ ο Euler υποστήριξε ότι $\ell n(a+bi)=\ell nc+i(\vartheta\pm 2k\pi)$.

Από την τελευταία ισότητα εύκολα συμπεραίνουμε με χρήση της ταυτότητας του Euler ότι:

$$\begin{aligned} e^{\ell nc+i(\vartheta\pm 2k\pi)} &= e^{\ell nc}.e^{i(\vartheta\pm 2k\pi)}=c[\cos(\vartheta\pm 2k\pi)+i\sin(\vartheta\pm 2k\pi)] \\ &= c[\cos\vartheta+i\sin\vartheta]=c\left[\frac{a}{c}+i\frac{b}{c}\right]=a+bi \end{aligned}$$

Ο Euler έτσι διόρθωσε τους προγενέστερούς του και μας έδωσε τον ορισμό των μιγαδικών λογαρίθμων.

Επίλογος

Ο 18^{ος} αιώνας δίκαια ονομάζεται ο αιώνας του Euler στην ιστορία την μαθηματικής ανάλυσης. Οποιοσδήποτε διαβάσει τα έργα του θα εντυπωσιαστεί από την εκπληκτική τεχνική και την εμβάθυνση στην ουσία του θέματος. Ο Euler είχε μια ανοιχτόμυαλη και ευρεία προσέγγιση στην μελέτη των μαθηματικών προβλημάτων, η οποία, με τη σημερινή ορολογία, μάλλον αξίζει το επίθετο «συστηματική». Εφάρμοσε τα πιο ανεπτυγμένα μαθηματικά εργαλεία της εποχής του και ένα μεγάλο μέρος της ερευνάς του ήταν η αποτελεσματική και παραγωγική χρήση διαφόρων εννοιών του απειροστικού λογισμού. Βασικές έννοιες στην Ανάλυση του ήταν η έννοια του άπειρα μεγάλου και του άπειρα μικρού αριθμού. Εξήγησε αναλυτικά το μεθοδολογικό υπόβαθρο της τεχνικής του με την έννοια της *μηδενιζόμενης* ποσότητας και χωρίς να έχει κατάλληλους ορισμούς διαχειρίστηκε το άπειρο παράγοντας ένα πλήθος αποτελεσμάτων.

Εντούτοις, τα μαθηματικά του Euler δεν έχουν πάντα την αυστηρότητα και την ακρίβεια που συναντούμε στα σύγχρονα μαθηματικά. Αυτό είναι ιδιαίτερα φανερό στη χρήση του απείρου. Για πολλά χρόνια είχε κατηγορηθεί για το *λανθασμένο* χειρισμό του στις αποκλίνουσες σειρές, μέχρι που οι ιδέες του αποτέλεσαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη της *non standard* ανάλυσης του 20^{ου} αιώνα. Ο Euler είχε πλήρη γνώση της ανάλυσης και επίγνωση του τι ο ίδιος είχε δημιουργήσει, αν και του έλειπαν κάποια εργαλεία μαθηματικού φορμαλισμού, προκειμένου να αποδώσει σωστότερα τις ιδέες του. Αυτές οι αδυναμίες είχαν οπλίσει μ' επιχειρήματα τους μαθηματικούς, οι οποίοι κριτίκαραν το έργο του, ως πρωτόγονο, διαισθητικό και όχι σύγχρονο. Παρόλο που έχουν μια τεκμηρίωση για την κριτική τους, το ερώτημα που τίθεται, είναι κατά πόσο θα υπήρχαν τα μοντέρνα (σύγχρονα) μαθηματικά χωρίς αυτόν. Είναι γεγονός ότι πολλές φορές ο Euler προχώρησε στηριζόμενος τόσο στη διαίσθηση όσο και στη λογική. Αν όμως η αυστηρότητα είχε μπει εμπόδιο στην παραγωγική του σκέψη ίσως δεν είχε καταφέρει να φτάσει τόσο μακριά. Είναι γνωστό, άλλωστε, ότι η διαίσθηση πολλές φορές βρέθηκε πολύ πιο μπροστά από τη λογική επεξεργασία. Ο Euler, που φαίνεται πως το γνώριζε αυτό, πήρε ρίσκα και ο μαθηματικός κόσμος θα πρέπει να είναι ευγνώμων γι' αυτό. Ως εφευρέτης και εξερευνητής, με έναν ενθουσιασμό ο οποίος αντηχεί ακόμα και μετά από δύο αιώνες, έφτασε σε σημεία άγνωστα. Όπως κάθε μεγάλος εξερευνητής έχασε αναπόφευκτα κάποια σημεία στην πορεία του, χωρίς αυτό όμως να μειώνει το μέγεθος των επιτευγμάτων του. Εργαζόμενος στο «ημίφως»,

δουλεύοντας μόνο με τη δύναμη του νου και της φαντασίας ταξίδεψε στα όρια των μαθηματικών και πέρα από αυτά. Δεν ήταν απλό μυαλό εκείνο που μας έδωσε αυτά τα θαυμαστά μαθηματικά. Το έργο του χαρακτηρίζεται από διαφάνεια και πληρότητα. Ο Andre Weil έγραψε: «*Κανένας μαθηματικός δεν κατέκτησε ποτέ τέτοια θέση αναμφισβήτητης κυριαρχίας σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, θεωρητικών και εφαρμοσμένων, όπως έκανε ο Euler για το μεγαλύτερο μέρος του 18^{ου} αιώνα*»[180].

[180] William Dunhan, *EULER The Master of Us All*, p. 171

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αρτεμιάδης, Ν. (2001). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ακαδημία Αθηνών.

Bell, E. T. (1995) *Οι μαθηματικοί από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy*. Ηράκλειο Κρήτης Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Boyer, C. & Merzbach, U. T. (1997). *Η ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις. Πνευματικού.

Henry, M. (2001). *Διδακτική μαθηματικών*, (Σπύρου Π., μετάφραση). Αθήνα Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Hilbert, D. (1998). *Για το άπειρο*, (Κωνσταντινίδης Π., μετάφραση). Αθήνα: Τροχαλία.

Γιαννακούλιας, Ε. (2002). *Διδακτική του Απειροστικού λογισμού*, Σημειώσεις Παραδόσεων. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Howard, E. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, 2ος τόμος Αθήνα: Τροχαλία.

Finney, R. L. (2004). *Απειροστικός λογισμός*, τόμος 1ος, (Αντωνογιαννάκης Μ., μετάφραση). Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Loria, G. (1974). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα Εκδόσεις Παπαζήση.

Maor, E. (2005). *e Η ιστορία ενός αριθμού*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Nahin, P. (2004). *Φανταστικές ιστορίες-Οι περιπέτειες της* $\sqrt{-1}$. Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ. & Γιαννακούλιας, Ε. (1987). *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμος 1ος . Αθήνα :Εκδόσεις Αίθρα.

Σπύρου, Π. (2000). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Σπύρου, Π. & Γαγάτσης, Α. (2000). *Συνάρτηση: Επιστημολογική Διάσταση και η Διδακτική Μεταφορά*.

Spivak M. (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Ηράκλειο Κρήτης Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ξενόγλωσση

Alexanderson, G. L. (2006). About the cover: Euler and Konigsberg's Bridges: A Historical View. *Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society*, *43* (4), 567-573.

Barbeau, E. J. & Leah P. J. (1976). Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica*, *3*(2), 141-160.

Blanton, J. (1988). *Euler Introduction to Analysis of the Infinite*. New York: Springer-Verlag.

Burn, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica*, *28*(1), 1-17.

Calinger, R. (1996). Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741). *Historia Mathematica*, *23*(2), 121-166.

Calinger, R. (1998). Introduction to analysis of the infinite, book I : By Leonhard Euler; translated by John D. Blanton. New York (Springer-Verlag). 1988. xiii + 327 pp, (Book review), Historia Mathematica, Volume 19, Issue 2, May 1992, Pages 214-216.

Dunham, W. (1999). *EULER The Master of Us All*. Washimgton, DC: The Mathematical Association of America.

Dutka, J. (1996). On the summation of some divergent series of Euler and the zeta functions. *Archive for History of Exact Sciences*, *50*(2), 187-200.

Dvoichenko, M. E. (1965). The Russian Members of the American Academy of Arts and Sciences. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 109(1), 53-56.

Edwards, H. M. (1981). Read the masters! In L. A. Steen, (ed.), *Mathematics Tomorrow*, pp. 105-110. New York: Springer.

Edwards, H. M. (2007). Euler's Definition of The Derivative. *Bulletin of the American Mathematical Society*.

Euler, L. (1975). *Letters of Euler on Different Subjects in Natural Philosophy*. New York: Arno Press.

Euler, L. (1999). *On the controversy between Messrs. Leibniz and Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers* [E-168], (translated from the French by Stagy G. Langton). San Diego: University of San Diego.

Euler, L. (2005). *On the logarithms of negative and imaginary numbers* [E-807], (translated by Todd Doucet).

Euler, L. *The works online*. (http://math.dartmouth.edu/~euler/).

Fellmann, E. A. (1983). Leonhard Euler, 1707–1783: Memorial volume on the 200th anniversary of his death. *Historia Mathematica*, *10*(2), 225-227.

Ferraro, G. (2000). Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler. *Historia Mathematica*, *27*(2), 107-132.

Ferraro, G. (2004). Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus. *Historia Mathematica*, *31*(1), 34-61.

Ferraro, G. (2007). Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815. *Historia Mathematica*, 34(1), 62-88.

Fraser, C. (1994). The Origins of Euler's Variational Calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, *47*(2), 103-141.

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York: Dover Publications.

Katz,V. (1998). *A History of Mathematics*. New York: Addison Wesley.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Mills, S. (1985). The independent derivations by Leonhard Euler and Colin MacLaurin of the Euler-MacLaurin Summation Formula. *Archive for History of Exact Sciences*, *33*(1-3), 1-13.

Muusepp, P. (1975). D'Alembert's letter to Euler of 3 march 1766. *Historia Mathematica*, *2*(3), 309-311.

Pólya G. (1954). *Mathematics & Plausible Reasoning, Induction and Analogy in Mathematics*, vol. 1. Princeton.

Sandifer, E. (2007). *The Early Mathematics of Leonhard Euler*. Washimgton, DC: Mathematical Association of America.

Terrall, M. (1989). Leonhard Euler, Opera Omnia: Series IVA: Commercium epistolicum. Vol. VI: Correspondance de Leonhard Euler avec P.-L.M. de Maupertuis et Frédéric II. Edited by Pierre Costabel, Eduard Winter, Asot T. Grigorijan, and Adolph P. Juskevic. Basel (Birkhäuser). 1986. xi + 454 pp. SwF 192 (Book review), *Historia Mathematica,* Volume 16, Issue 1, February 1989, Pages 96-97.

Truesdell, C. (1840). *Leonhard Euler-Elements of Algebra*. New York:

Varadarajan, V. S. (2006). *Euler Through Time. A New Look at Old Themes*. American Mathematical Society.