# Γνωστική Εμπλοκή Μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου με την Πολυωνυμική Συνάρτηση Δευτέρου Βαθμού με Συνδυασμένη Χρήση Προσομοιωτή και Υπολογιστικού Αλγεβρικού Συστήματος.

**Διπλωματική Εργασία της Αργυρώς Παπαδοπούλου**

**Επιβλέποντες καθηγητές:**

**1) Κυνηγός Χ. Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών**

**2) Ζαχαριάδης Θ. Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών**

**3) Φιλίππου Χ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου**

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών»**

**Αθήνα 2006**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**
που απονέμει το
**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών**
**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**
Εγκρίθηκε την .....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα | Υπογραφή |
|---|---|---|
| 1) Χρόνης Κυνηγός (επιβλέπων Καθηγητής) | Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μιου Αθηνών | |
| 2) Θεοδόσης Ζαχαριάδης | Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μιου Αθηνών | |
| 3) Γιώργος Φιλίππου | Καθηγητής Παν/μιου Κύπρου | |

***Στους δασκάλους μου και***

***στους μαθητές μου.***

**Παπαδοπούλου Αργυρώ, Σεπτέμβριος 2006**

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών»

***Γνωστική Εμπλοκή Μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου με την Πολυωνυμική Συνάρτηση Δευτέρου Βαθμού με Συνδυασμένη Χρήση Προσομοιωτή και Υπολογιστικού Αλγεβρικού Συστήματος.(σελ. 90)***

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα μελετάμε την χρήση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών αναζητώντας ενδείξεις γνωστικής εμπλοκής των μαθητών σε εργασίες που δεν μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν με τυπικά μέσα όπως το μολύβι και το χαρτί. Η αλληλεπίδραση των μαθητών με τον Η/Υ αλλά και μεταξύ τους στα πλαίσια της δημιουργίας μικρών ομάδων, η συζήτηση και τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές κατά τη διάρκεια των εργασιών με τον Η/Υ, η χρήση στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων, η συναισθηματική τους ανταπόκριση σε συγκεκριμένες μαθησιακές δραστηριότητες είναι μερικά από τα στοιχεία που μελετήθηκαν προκειμένου να αξιολογηθεί το είδος και το επίπεδο της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών.

Στόχος της έρευνας ήταν να μελετηθεί η επίδραση της συνδυασμένης χρήσης διαφορετικών υπολογιστικών περιβαλλόντων στη γνωστική εμπλοκή μαθητών διαφόρων ηλικιών (γυμνάσιο και λύκειο) καθώς και το είδος και το βάθος αυτής της γνωστικής εμπλοκής τους μέσα από ποικιλία δραστηριοτήτων με κεντρικό θέμα την δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση. Βασική παραδοχή της έρευνας είναι ότι το είδος των εργασιών και τα μέσα που προσφέρονται στους μαθητές δίνουν το έναυσμα για μια δημιουργική μελέτη η οποία κινητοποιεί το ενδιαφέρον, τη προσήλωση, και τις στρατηγικές των μαθητών.

Έξι μαθητές χωρισμένοι σε 3 ομάδες των 2 μαθητών η κάθε μια βιντεοσκοπήθηκαν κατά την διάρκεια 2 δίωρων περιόδων ανά ομάδα. Στο πρώτο δίωρο οι μαθητές πειραματίστηκαν και έπαιξαν στο «Αβάκιο» με τον μικρόκοσμο «ζογκλέρ» που προσομοιώνει την βολή μιας μπάλας ή και περισσότερων σε επίπεδη αναπαράσταση, ενώ στο δεύτερο δίωρο χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Autograph που ανήκει στην κατηγορία των CAS (Computer Algebra System) δηλαδή είναι ένα Αλγεβρικό Υπολογιστικό Σύστημα, για τη μελέτη της γραφικής παράστασης της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης και την ε-

πίλυση προβλήματος. Έγινε προσπάθεια οι δραστηριότητες να μπουν σε ένα ενιαίο πλαίσιο ώστε η αρχική δράση στο «ζογκλέρ» να οδηγεί ως επακόλουθο και συνέπεια στη δράση στο Autograph, με λίγα λόγια οι δραστηριότητες στα δυο λογισμικά δεν είναι ανεξάρτητες αλλά συμπληρωματικές.

Τα δεδομένα προήλθαν από τις απομαγνητοφωνήσεις της 12ωρης (3 ομάδες επί 4 ώρες) βιντεοσκόπησης, από τα φύλλα εργασίας των μαθητών και από την ημιδομημένη συνέντευξη που ακολούθησε στο τέλος των πειραμάτων. Τα στοιχεία που συλλέχθηκαν χωρίστηκαν σε τρεις βασικές κατηγορίες: α) στρατηγικές β) συναισθηματική ανταπόκριση γ) αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους και με τον Η/Υ και σε κάθε κατηγορία έγινε προσπάθεια αποτίμησης του επιπέδου γνωστικής εμπλοκής των μαθητών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν προβληματισμό και εμπλέκονται σε εργασίες που προκαλούν το ενδιαφέρον τους έχοντας ως έναυσμα το παιχνίδι, ενώ ένα καθαρά μαθηματικό περιβάλλον ακόμα και με το ελκυστικό περίβλημα του Η/Υ δεν επαρκεί για να τους δημιουργήσει ερωτηματικά και ερευνητικές προθέσεις. Οι μεγαλύτεροι μαθητές επέλεξαν να λύσουν το πρόβλημα που τους δόθηκε αλγεβρικά ενώ οι μικρότεροι το έλυσαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό. Το αίσθημα της ευχαρίστησης και της ικανοποίησης από την εργασία ήταν πιο έντονο με τη χρήση του παιχνιδιού «ζογκλέρ», ενώ κατά γενική ομολογία το Autograph αν και λιγότερο ελκυστικό ήταν πιο «κοντά» στα σχολικά μαθηματικά. Περισσότερα αποτελέσματα και βέβαια τα συμπεράσματα της έρευνας παρουσιάζονται στο 4$^{ο}$ κεφάλαιο.

Στην εισαγωγή γίνεται σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά την έρευνα στη διδακτική των συναρτήσεων και των πολλαπλών αναπαραστάσεων τους με στόχο την κατάδειξη της σημασίας τέτοιων ερευνητικών προσπαθειών για την μαθηματική εκπαίδευση. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σε θέματα που αφορούν την κατηγοριοποίηση του εκπαιδευτικού λογισμικού και την χρήση του στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για την έννοια και τα είδη της γνωστικής εμπλοκής και τις μεθόδους αποτίμησης του επιπέδου της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή των λογισμικών που χρησιμοποιήθηκαν, των δραστηριοτήτων των μαθητών με τα συγκεκριμένα λογισμικό, του σχεδιασμού της έρευνας και του θεωρητικού πλαισίου που ακολουθήθηκε καθώς και αναλυτική παρουσίαση επιλεγμένων επεισοδίων

και για τις 3 ομάδες στα δυο λογισμικά. Στο τέταρτο κεφάλαιο έχουμε τα αποτελέσματα της έρευνας και τα συμπεράσματα.

Ευχαριστώ τους δασκάλους μου, καθηγητές Χρόνη Κυνηγό και Γιώργο Φιλίππου για την βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφεραν.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

**Εισαγωγή** 11

**1. Οι νέες τεχνολογίες στη μαθηματική εκπαίδευση** 15

1.1 Χρήσεις του εκπαιδευτικού λογισμικού 15

1.2 Θεωρίες μάθησης μαθηματικών και ο ρόλος των Η/Υ 18

**2. Η έννοια της εμπλοκής στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών** 23

2.1 Ορισμοί της εμπλοκής 24

2.2 Η Θεωρία της εμπλοκής: ένα θεωρητικό πλαίσιο για την μάθηση και διδασκαλία με Η/Υ 28

2.3 Μέθοδοι μέτρησης των επιπέδων γνωστικής εμπλοκής των μαθητών 30

**3. Η έρευνα** 35

3.1 Το πλαίσιο της έρευνας 35

Α) Το λογισμικό 35

Β) Οι δραστηριότητες 39

Γ) Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων 41

Δ) Οι ομάδες 42

3.2 Οι δραστηριότητες στον «ζογκλέρ» 43

3.3 Οι δραστηριότητες στο Autograph 63

**4. Συμπεράσματα** 77

Στρατηγικές- η γνωστική συνιστώσα της εμπλοκής 77

Συναισθηματική συνιστώσα της εμπλοκής 79

Τι έκαναν οι μαθητές σε σχέση με την τετραγωνική συνάρτηση; 81

**Επίλογος** 83

Βιβλιογραφία 85

Παράρτημα Α 90

# Εισαγωγή

## Η σημασία της εκπαιδευτικής έρευνας σε θέματα που αφορούν την μελέτη συναρτήσεων

Από το 1980 η μελέτη των συναρτήσεων και των αναπαραστάσεων τους ως γραφήματα, πίνακες τιμών και μαθηματικά σύμβολα έγινε το επίκεντρο για πολλές έρευνες στην μαθηματική εκπαίδευση (Kieran, 2006) Ιδιαίτερα οι γραφικές αναπαραστάσεις θεωρήθηκαν ως εργαλεία με το οποία θα μπορούσαμε να «γεμίσουμε» με νόημα τις λεκτικές-συμβολικές αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο πολύ νωρίς προωθήθηκε η ιδέα ότι οι Η/Υ μπορούσαν να εμπλουτίσουν την διδασκαλία μαθηματικών με την χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Αρκετοί μαθηματικοί και εκπαιδευτικοί τότε θεώρησαν ότι η τεχνολογία των υπολογιστών με τα μέσα που παρείχε θα μπορούσε να δώσει σημαντικά (θετικά) αποτελέσματα στο επίπεδο των σχολικών και πανεπιστημιακών μαθηματικών. Έτσι σύντομα οι συναρτήσεις κυριάρχησαν στις αλγεβρικές δραστηριότητες και ιδιαίτερα στην επίλυση «πραγματικών προβλημάτων» (real world problems) και μάλιστα με χρήση τεχνολογίας δηλαδή με μεθόδους διαφορετικές από τον χειρισμό των συμβολικών αναπαραστάσεων με το χέρι. Αυτή τη θέση εκφράζει ο Heid (1996) όταν λέει πως «*Η συναρτησιακή προσέγγιση της αλγεβρικής σκέψης.....προτείνει μια μελέτη της άλγεβρας που επικεντρώνει στην ανάπτυξη εμπειριών με συναρτήσεις και οικογένειες συναρτήσεων μέσα από πραγματικές καταστάσεις των οποίων οι ποσοτικές σχέσεις μπορούν να περιγραφούν από αυτά τα μοντέλα*» (p. 239)

Ενώ η μελέτη και η χρήση των συναρτήσεων και των αναπαραστάσεων τους βρίσκεται από πολύ νωρίς στο αναλυτικό πρόγραμμα του ελληνικού (και όχι μόνο) σχολείου, οι ερευνητές και οι δάσκαλοι συμφωνούν πως οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση κυρίως των συνδέσεων που εκφράζουν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων. Ο Kaput (1992) συνέδεσε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις συναρτήσεις με τις εγγενείς δυσκολίες που υπάρχουν στον χειρισμό και την σύνταξη των πολύ περιεκτικών αλγεβρικών συμβόλων και στην ελλιπή κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ιδιαίτερη διάκριση γίνεται από τον Kaput στη σημασία της γραφικής παράστασης αφού αν και οι πίνακες τιμών, τα γραφήματα και οι εξισώσεις μπορούν όλα να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν διμελείς σχέσεις υπάρχει

σημαντική διαφορά μεταξύ του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης γιατί σ' αυτήν είναι εφικτή η αναπαράσταση μιας διμελούς σχέσης με μια μόνο γραφική οντότητα - την καμπύλη της συνάρτησης.

Για πολλούς ερευνητές, η κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ των εξισώσεων και των γραφημάτων τους θεωρείται θεμελιώδης στην ανάπτυξη νοήματος για πολλές αλγεβρικές έννοιες και εξακολουθεί να θεωρείται κεντρικό ζήτημα στην έρευνα. Για παράδειγμα οι έρευνες των Moschkovich, Schoenfeld και Arcavi (1993) και Knuth (2000) μελέτησαν την κατανόηση της έννοιας ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου μιας γραμμής ικανοποιούν την εξίσωση της γραμμής, μέσα από προβλήματα που απαιτούσαν την χρήση αυτής της έννοιας. Ο Knuth βρήκε ότι οι μαθητές στηρίζονταν περισσότερο στις γραπτές συμβολικές αναπαραστάσεις, ακόμα και σε εργασίες στις οποίες η γραφική αναπαράσταση ήταν πιο κατάλληλη επιλογή. Τα ευρήματα επίσης έδειξαν ότι για οικεία προβλήματα ρουτίνας οι μαθητές έκαναν τις συνδέσεις μεταξύ των γραπτών συμβολικών αναπαραστάσεων και των γραφημάτων, αλλά αυτή η κατανόηση ήταν στην καλύτερη περίπτωση επιφανειακή.

Οι Zaslavsky, Sela και Leron (2002) βρήκαν ότι υπάρχει μεγάλη σύγχυση όσον αφορά τις συνδέσεις μεταξύ των αλγεβρικών και γεωμετρικών όψεων της κλίσης, της κλίμακας και της γωνίας. Οι απαντήσεις σε μια απλή αλλά όχι τυπική άσκηση που αφορούσε την συμπεριφορά της κλίσης υπό μια μη ομογενή μεταβολή της κλίμακας έδειξαν την ύπαρξη δυο βασικών προσεγγίσεων- την αναλυτική και την οπτική- και τον συνδυασμό τους. Οι ερευνητές πρότειναν η διδασκαλία της κλίσης να διακρίνει μεταξύ της εσφαλμένης έννοιας της οπτικής κλίσης-όπως η κλίση μιας ευθείας (για την οποία η γωνία είναι ένα σχετικό μέγεθος)- και την αναλυτική άποψη-όπως είναι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης.

Αρκετές επίσης έρευνες έχουν γίνει για την μελέτη συναρτήσεων στο σχολείο με χρήση κατάλληλου λογισμικού όπως για παράδειγμα των Schwarz και Hershkowitz (1999) οι οποίοι μελέτησαν την μάθηση της έννοιας της συνάρτησης σε περιβάλλον που περιλάμβανε καταστάσεις προβλήματος, graphing computers και λογισμικά εργαλεία πολλαπλών αναπαραστάσεων. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να αποφασίσουν μόνοι τους ποια αναπαράσταση θα χρησιμοποιούσαν, πότε και πώς θα συνέδεαν τις αναπαραστάσεις και με ποιο μέσο θα δούλευαν. Δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε ερωτήσεις για την ερμηνεία συγκεκριμένων γραφικών αναπαραστάσεων, την παραγωγή γραφημάτων και την σχέση συγκεκριμένων γραφημάτων προς την αλγεβρική τους μορφή. Οι ερευνητές βρήκαν ότι οι

μαθητές: α) πιο συχνά χρησιμοποιούσαν τις δύο βασικές συναρτήσεις την γραμμική και την τετραγωνική, β) χρησιμοποιούσαν αυτές ως πρότυπα για να χειριστούν μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων γ) κατανοούσαν τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων.

Αντιθέτως οι Cavanagh και Mitchelmore (2000) διαπίστωσαν την ύπαρξη πολλών αντιφατικών παρανοήσεων μεταξύ των μαθητών καθώς αυτοί ασχολούνταν με ποικιλία δραστηριοτήτων με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Υπήρχε η τάση να αποδεχτούν χωρίς κριτική σκέψη το σχήμα ενός γραφήματος, φτωχή ήταν και η κατανόηση της έννοιας της κλίμακας ενώ ανεπαρκής ήταν η διάκριση ανάμεσα στο ακριβές και το προσεγγιστικό. Σε έρευνα των Hershkowitz και Kieran (2001) που αφορούσε μαθητές 16 ετών που ασχολήθηκαν με προβλήματα βασισμένα στη χρήση συναρτήσεων με παράλληλη χρήση graphing calculator ως εργαλείο, οι μαθητές βρέθηκε ότι μετέβαιναν από την εισαγωγή των πινάκων τιμών στην αντίστοιχη γραφική παράσταση χωρίς να βλέπουν ή να εξετάζουν την αλγεβρική αναπαράσταση της κατάστασης - φαινόμενο που σύμφωνα με τους ερευνητές, μπορεί να χρήζει ιδιαίτερης προσοχής όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο ενσωματώνεται στη διδασκαλία των συναρτήσεων ο graphing calculator.

Εκτός από τους graphing calculators η πρόσφατη έρευνα της Γαλλικής *διδακτικής* παράδοσης ( Artigue, 2002, Lagrange 2003) δείχνει ότι και άλλα τεχνολογικά εργαλεία όπως είναι τα Αλγεβρικά Υπολογιστικά Συστήματα (Computer Algebra Systems) μπορούν να προσφέρουν εννοιολογική και τεχνική ανάπτυξη στα μαθηματικά, εφόσον δεν αγνοούνται τα ζητήματα τεχνικής. Ειδικότερα ο Lagrange (2003), ανέπτυξε την ιδέα ότι η τεχνική είναι η γέφυρα μεταξύ της πράξης και της θεωρίας. Με άλλα λόγια, καθώς οι μαθητές αναπτύσσουν τεχνικές ανταποκρινόμενοι σε συγκεκριμένες εργασίες, εμπλέκονται και σε μια διαδικασία κατασκευής θεωρίας. Οι Kynigos et al (1997) νωρίτερα προσεγγίζουν μια παρόμοια ιδέα υποστηρίζοντας ότι ο εμπλουτισμός της αναπαράστασης και η λειτουργικότητα και η ανατροφοδότηση που μπορούν να επιτευχθούν με τη νέα τεχνολογία δεν μειώνουν την σημασία του φορμαλισμού στην μαθηματική έκφραση. Αντιθέτως η νέα τεχνολογία μπορεί ταυτόχρονα να ενδυναμώσει και τα δύο είδη μαθηματικών αναπαραστάσεων και να κάνει εφικτή την εστίαση στην κατασκευή παιδαγωγικών περιβαλλόντων με στόχο την κατασκευή μαθηματικού νοήματος.

Παρόλο που τα αποτελέσματα από τις παραπάνω έρευνες φαίνεται να είναι αντιφατικά σχετικά με την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων, η πλειοψηφία των ερευνητών

που μελετά την επίδραση των τεχνολογικών εργαλείων αναφέρει σημαντικά οφέλη των μαθητών όσον αφορά την κατανόηση των συναρτήσεων.

Αν και οι προσεγγίσεις των ερευνητών είναι διαφορετικές και τα τεχνολογικά εργαλεία ποικίλα, υπάρχει ομοφωνία ως προς το γεγονός ότι οι συναρτήσεις και οι αναπαραστάσεις τους και ειδικότερα η γραφική παράσταση τους, είναι δύσκολες μαθηματικές έννοιες που προβληματίζουν την διδακτική μαθηματικών. Φαίνεται ακόμα πως η χρήση Η/Υ αποτελεί αν όχι μονόδρομο, ένα σπουδαίο μέσο με το οποίο μπορούμε να συνδέσουμε τις πολλαπλές αναπαραστάσεις, δίνοντας την δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματικά νοήματα σε μεγαλύτερο βάθος και να κατανοήσουν καλύτερα το αντικείμενο. Μ' αυτό το επιχείρημα έγινε η επιλογή της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης ως θέμα μελέτης της παρούσας έρευνας.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας ανέδειξε επίσης και μια σειρά επιχειρημάτων υπέρ της επιλογής των δύο λογισμικών (ζογκλέρ στο Αβάκιο και Autograph) που αν και έχουν διαφορετική κουλτούρα συνδέθηκαν μέσω μιας ενιαίας δραστηριότητας και λειτούργησαν συμπληρωματικά για την μελέτη της πολυωνύμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού. Βασική ιδέα είναι η θέση που διατυπώνουν οι Kynigos et al, (1997) ότι το λογισμικό που σχεδιάζεται για την διερεύνηση των συναρτήσεων πρέπει να ενθαρρύνει την ταυτόχρονη εμφάνιση αναπαραστάσεων όπως η συμβολική αλγεβρική, η γραφική, η εικονική και μέσω πινάκων τιμών. Έτσι μέσα από την προσομοίωση της βολής στο «ζογκλέρ» οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια πραγματική κατάσταση-πρόβλημα ενώ ταυτόχρονα δημιουργείται η ανάγκη μοντελοποίησης του προβλήματος με την χρήση των μαθηματικών κάτι που οδηγεί στο περιβάλλον του Autograph και την μελέτη του φαινόμενου με μαθηματικά εργαλεία παραμετρικής διερεύνησης.

# 1. Οι νέες τεχνολογίες στη μαθηματική εκπαίδευση

## 1.1 Χρήσεις του εκπαιδευτικού λογισμικού

Η ιστορία της εφαρμογής Η/Υ στη διδασκαλία των μαθηματικών ξεκίνησε με τα προγράμματα «γυμνάσματα και εξάσκηση» και την διδασκαλία με υπολογιστές (Kaput,1992), τα περιβάλλοντα μάθησης με Logo (Papert, 1980), το Geometric Supposer (Yerusalmy & Chazan, 1990), τα περιβάλλοντα πολυμέσων (Lampert & Loewenberg Ball, 1998), και The Jasper Series (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1994, 1996), όλ' αυτά περιείχαν την καινοτομία της χρήσης της τεχνολογίας σαν γνωστικό εργαλείο για την μαθηματική σκέψη και πρόσφεραν στους μαθητές ευκαιρίες για κατασκευή της προσωπικής τους γνώσης.(De Corte, Greer, Verschaffel, 1996). (αναφορά: Hurm, & Jarvela, 2005)

Έκτοτε η χρήση των Η/Υ επεκτάθηκε και ταυτόχρονα λόγω της πληθώρας υλικού έγινε επιτακτική η ανάγκη για το αναλυτικό πρόγραμμα αλλά και για το δάσκαλο να αναφέρεται σε μια ταξινόμηση των χρήσεων αυτού του λογισμικού και του εκπαιδευτικού και διδακτικού στόχου που εξυπηρετεί το καθένα απ' αυτά. Αυτό είναι απαραίτητο για να αποφύγουμε την χρήση ακατάλληλων εκπαιδευτικών υλικών και ταυτόχρονα για να κάνουμε την βέλτιστη επιλογή τεχνολογίας για τις ανάγκες της τάξης και του εκπαιδευτικού συστήματος.

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για να δημιουργηθούν ταξινομήσεις για την χρήση των Η/Υ στα σχολεία. Το 1980 ο Taylor ταξινόμησε το εκπαιδευτικό λογισμικό των μαθηματικών σε τρεις τύπους, ανάλογα με τον τρόπο που χρησιμοποιείται ο Η/Υ σε κάθε περίπτωση:Α) Λογισμικό όπου ο Η/Υ λειτουργεί σαν καθοδηγητής (tutor), π.χ. για παρουσίαση διδακτικού υλικού, για αξιολόγηση ή πρακτική εξάσκηση. Β) Λογισμικό όπου ο Η/Υ λειτουργεί σαν εργαλείο (tool) , π.χ. τα spreadsheets. Γ) Ο Η/Υ σαν μαθητευόμενος (tutee), π.χ. οι γλώσσες προγραμματισμού. (αναφορά Σακονίδης, Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ 1997)

Πιο πρόσφατα οι Handal και Herrington (2003) περιέγραψαν τις κατηγορίες μάθησης μαθηματικών με υπολογιστές συμπεριλαμβάνοντας ασκήσεις, διδασκαλία, παιχνίδια, προσομοιώσεις, υπερμέσα και εργαλεία (ανοιχτά περιβάλλοντα μάθησης). Αυτή η ταξινόμηση στηρίζεται στην διάκριση των εργαλείων και τονίζει την χρήση του μαθηματικού εκ-

παιδευτικού λογισμικού ως μέσο που αναπτύσσει την εμπειρία και την ανακάλυψη και έτσι εμπλουτίζει την μάθηση μαθηματικών (αναφορά: Kurz, Middleton, & Yanik, 2005).

Μια πιο γενική κατηγοριοποίηση προσανατολισμένη στην διδακτική πρακτική γίνεται από τον Κυνηγό (2002). Τα κυρίαρχα ρεύματα που επιδρούν στη εκπαιδευτική χρήση των Η/Υ είναι κατά βάση δύο: α) <u>τα νοητικά εργαλεία</u> και β) <u>τα πληροφοριακά επικοινωνιακά μέσα</u>. Τα νοητικά εργαλεία που συνήθως τα αποκαλούμε και διερευνητικό λογισμικό δίνουν στους μαθητές τη δυνατότητα να «*δημιουργούν και να κατασκευάζουν μοντέλα φαινομένων, σχέσεων και αναπαραστάσεων και ταυτόχρονα να αξιοποιούν την άμεση, ακριβή αλλά και ουδέτερη ανταπόκριση του εργαλείου για να πειραματίζονται, διερευνούν, διατυπώνουν και αναπαριστούν ιδέες και έννοιες*». (Κυνηγός, 2002 σελ. 18). Το δεύτερο ρεύμα αφορά την χρήση του υπολογιστή ως μέσου επικοινωνίας και πληροφόρησης. Ο Η/Υ αποτελεί πλέον ένα αναγνωρισμένο βήμα επικοινωνίας και αναζήτησης πληροφοριών. Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.) εξετάζονται για την παιδαγωγική τους αξιοποίηση στο τομέα της ανάπτυξης κοινωνικών δεξιοτήτων, συνεργατικής ή και εξ αποστάσεως μάθησης.

Οι Kurz, Middleton, και Yanik, (2005) παραθέτουν ένα μοντέλο χρήσης των Η/Υ που περιλαμβάνει τις εξής κατηγόριες:

1) <u>Λογισμικό επανάληψης και εξάσκησης</u>, το οποίο χρησιμοποιείται απλώς για να παρουσιάσει μια ποικιλία ασκήσεων σε μια συγκεκριμένη περιοχή των μαθηματικών. Μ' αυτού του είδους το λογισμικό ο χρήστης λειτουργεί υπό τον έλεγχο του προγράμματος. Η χρήση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση κατ' αυτό τον τρόπο δεν είναι παρά μια προέκταση και εφαρμογή της συμπεριφορικής προσέγγισης της μάθησης, γι' αυτό και οι κριτικές για το σχεδιασμό και την χρήση του Η/Υ κατ' αυτό τον τρόπο είναι αρνητικές. Ο Oliver (2000) διαπιστώνει ότι η τεχνολογία που προσφέρεται ως delivery δεν επιτρέπει στους μαθητές να σκεφτούν για την μαθηματική διαδικασία ή την εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης. Αντιθέτως η ενεργός συμμετοχή των μαθητών στην μαθηματική σκέψη και ανακάλυψη μπορεί να προάγει μια πιο ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών.

2) <u>Γενικό λογισμικό</u> είναι αυτό που χρησιμοποιείται για χρήση σε μια ποικιλία μαθηματικών θεμάτων και είναι σχεδιασμένο για πολλές διαφορετικές εφαρμογές. Παράδειγμα αποτελεί το Geometer's Sketchpad που είναι ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και

το ελληνικό Αβάκιο. Σύμφωνα με τους Kurz, Middleton, και Yanik, (2005) το γενικό λογισμικό προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα στο χρήστη μαθητή: ευκαιρίες να ερευνήσει και να κάνει ανακαλύψεις μαθηματικών εννοιών κάνοντας πειραματισμό, χειρισμό αντικειμένων, οπτικοποίηση των μοντέλων, αναζήτηση μοτίβων και γενικεύσεων, ανάπτυξη της γνωστικής επάρκειας, ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της μαθηματικής αιτιολόγησης

3) Εξειδικευμένο λογισμικό. Είναι το λογισμικό που επικεντρώνεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή των μαθηματικών και διαφέρει από τον πρώτο τύπο στο ότι αφορά εκμάθηση μιας νέας γνώσης και όχι την επανάληψη της, ενώ παράλληλα διαφέρει από την δεύτερη κατηγορία στο ότι εστιάζει σε ένα συγκεκριμένο θέμα.

4) Λογισμικό περιβάλλον. Είναι το λογισμικό που συνδυάζει διαφορετικούς τύπους πληροφοριών, μαθηματικών θεμάτων και συναφών διασυνδέσεων σε μια ποικιλία γνωστικών αντικειμένων. Αυτό το λογισμικό επιτρέπει πολύπλοκες έρευνες συχνά σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου και είναι ειδικά σχεδιασμένο για ομαδο-συνεργατική διδασκαλία. Παράδειγμα τέτοιου λογισμικού αποτελεί το Jasper Project [1] (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1997).

5) Λογισμικό επικοινωνίας το οποίο έχει σχεδιαστεί για να κάνει δυνατή την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και την συνεργατική μάθηση μέσα και έξω από την τάξη. Υπάρχει η δυνατότητα ανάπτυξης μεταγνωστικών ικανοτήτων με την μελέτη των συζητήσεων των μαθητών, ενώ στην παραδοσιακή τάξη είναι αδύνατο να μιλήσουν όλοι οι μαθητές ταυτόχρονα και να έχουμε όλοι μια καθαρή εικόνα της σκέψης όλων.

Μια συγκριτική θεώρηση των 4 πλαισίων που παρουσιάζονται για την χρήση των Η/Υ στην μαθηματική εκπαίδευση, αναδεικνύει αρκετές ομοιότητες αλλά και διαφορές:

Η άποψη του υπολογιστή δασκάλου του Taylor ταυτίζεται με την έννοια του λογισμικού επανάληψης και εξάσκησης των Kurz, Middleton, και Yanik και του λογισμικού διδασκαλίας των Handal και Herrington. Ο Κυνηγός δεν παραθέτει τέτοια κατηγορία λογισμικού και αυτό φανερώνει μια επιστημολογική στάση ως προς την χρήση των Η/Υ, η οποία υπαγορεύει την κριτική προσέγγιση των εργαλείων και το πώς αναδεικνύουν την μαθηματική γνώση στην τάξη. Το γενικό, ειδικό λογισμικό, το λογισμικό περιβάλλον και οι χρήσεις του λογισμικού ως εργαλείου ή ως μαθητευόμενου θα μπορούσαν να αποτελούν υ-

ποσύνολα του όρου νοητικά εργαλεία. Τέλος παρατηρούμε πως μόνο οι δύο από τις 4 ταξινομήσεις περιλαμβάνουν την σημαντική κατηγορία του λογισμικού ως επικοινωνιακού - πληροφοριακού μέσου και ίσως αυτό να σχετίζεται με απόψεις για την σημασία του επικοινωνιακού πλαισίου στην μάθηση και τη διδακτική πρακτική.

## 1.2 Θεωρίες μάθησης μαθηματικών και ο ρόλος των Η/Υ

Οι Η/Υ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εμπλουτίσουν την μαθηματική γνώση των παιδιών, εστιάζοντας σ' ότι μπορεί να γίνει πέρα απ' την παραδοσιακή χρήση χαρτιού και μολυβιού. Η χρήση των Η/Υ σαν γνωστικά εργαλεία που βοηθούν τους μαθητές να μάθουν δυναμικές μαθηματικές έννοιες, που δεν θα μπορούσαν διαφορετικά να προσεγγίσουν, θα πρέπει να είναι ο στόχος των προγραμμάτων έρευνας και ανάπτυξης όχι μόνο γιατί οι μαθητές θα μάθουν τα ίδια τα μαθηματικά καλύτερα και γρηγορότερα, αλλά θα μάθουν επίσης μέσα απ' αυτή τη διαδικασία θεμελιωδώς διαφορετικά μαθηματικά.

Ποια ακριβώς είναι αυτά τα διαφορετικά μαθηματικά, σε ποιο θεωρητικό πλαίσιο διδακτικής, παιδαγωγικής και ψυχολογίας στηρίζονται και τέλος τι ρόλο προδιαγράφουν για τα εκπαιδευτικά λογισμικά;

**Α) Θεωρίες μάθησης μαθηματικών με Η/Υ**

Ο Tall (1993) ακολουθώντας την γνωστική παράδοση του Piaget διακρίνει δύο γνωστικές διαδικασίες που αφορούν την μάθηση των μαθηματικών η μία είναι η κατακόρυφη ανάπτυξη που αναφέρεται στην διαδικασία καταχώρησης και αφομοίωσης των μαθηματικών αντικειμένων και η άλλη είναι η οριζόντια ανάπτυξη που αφορά τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων. Ο Tall πιστεύει ότι και οι δυο μορφές ανάπτυξης προκαλούν δυσκολίες στους μαθητές, είτε γιατί απαιτούν χρόνο για εξοικείωση είτε γιατί απαιτούν ταυτόχρονο έλεγχο διαφορετικών αναπαραστάσεων και των μεταξύ τους συνδέσεων. Αυτές οι δυσκολίες μπορούν να αρθούν με τη χρήση ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος. Η συχνότητα της μάθησης στην κατακόρυφη συνιστώσα μπορεί να αλλάξει αν προσφέρουμε στους μαθητές περιβάλλοντα Η/Υ που επιτρέπουν την διαισθητική μελέτη υψηλού επιπέδου εννοιών. Επιπλέον και η οριζόντια ανάπτυξη, με τη διασύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων, μπορεί να προγραμματιστεί ώστε ο μαθητής να λειτουργεί σε μια αναπαράσταση και ταυτόχρονα να μπορεί να δει τις συνέπειες των ενεργειών του σε άλλες διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις. Ο υπολογιστής μπορεί να αντιδράσει με ένα

προκαθορισμένο τρόπο και έτσι προσφέρει ένα περιβάλλον όπου μπορούμε να εξερευνήσουμε τις συνέπειες επιλεγμένων ενεργειών και να προβλέψουμε ή ελέγξουμε θεωρίες υπό κατασκευή. Ο Tall κάνει ειδική αναφορά στον Papert και τους μικρόκοσμούς του ως τέτοιου είδους λογισμικά που συνεισφέρουν και στις δύο μορφές γνωστικής ανάπτυξης της μάθησης μαθηματικών.

Πρωτοπόρος ο Papert, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Logo και την περίφημη χελώνα του ως μέσο, οραματίστηκε ένα διαφορετικό σχολείο, ένα περιβάλλον (το μικρόκοσμο–microworld) πλούσιο σε ευκαιρίες ανάπτυξης μαθηματικών νοημάτων όπου η μάθηση των μαθηματικών θα προκύπτει ως μια φυσιολογική διαδικασία μέσα από την δράση και την επικοινωνία. (Papert, S., 1980). Ο όρος μικρόκοσμος χρησιμοποιήθηκε από τον Papert για να περιγράψει ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον μάθησης μαθηματικών με υπολογιστές, όπου οι αναγκαίες προϋποθέσεις ήταν δομημένες μέσα στο σύστημα και οι μαθητές μπορούσαν να γίνουν ενεργοί αρχιτέκτονες της γνώσης τους.

Η Edwards (1998) αναφέρει ότι ο όρος «μικρόκοσμος» περιλαμβάνει την έννοια της ενσωμάτωσης ενός υποσυνόλου των μαθηματικών ή της φυσικής όχι επειδή υπάρχει κάποια άρρηκτη σύνδεση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις ενός μικρόκοσμου και τα μαθηματικά ή τη φυσική, αλλά «*γιατί αυτά τα περιβάλλοντα προσφέρουν στους μαθητές την ευκαιρία να αλληλεπιδράσουν διαλεκτικά και κιναισθητικά με κατασκευές που έχουν μαθηματικό ή επιστημονικό περιεχόμενο μέσω του συμβολικού συστήματος ενός προγράμματος*» (Edwards, 1998, p. 74)

Ομοίως η Hoyles (1993) περιγράφει τον όρο μικρόκοσμο ως εργαλείο που περιλαμβάνει παιγνιώδεις και άτυπες αλληλεπιδράσεις στις οποίες το «*λογισμικό και η μάθηση αναπτύσσονται αλληλεπιδραστικά στην αναζήτηση πλούσιων επιστημολογικά στόχων*» (Hoyles, 1993, p.3)

Οι Healy, Hoyles και Noss (1997) χρησιμοποιούν το περιβάλλον των μικρόκοσμων για να μελετήσουν τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα μέσω της δράσης πάνω σε πραγματικά αντικείμενα και σχέσεις. Χρησιμοποιούν τον όρο situated abstraction για να περιγράψουν την έννοια της μαθηματικής αφαίρεσης ως μια διαδικασία που αναπτύσσεται σε μια δεδομένη δραστηριότητα και υποστηρίζουν ότι αυτή η διαδικασία εκφράζεται καλύτερα μέσα σε υπολογιστικά περιβάλλοντα όπως οι μικρόκοσμοι.

Προτείνουν λοιπόν ένα ειδικό ρόλο για τα εκπαιδευτικά λογισμικά: «*να κάνουν ορατές και διαχειρίσιμες τις περιπτώσεις που παρέχουν την δυνατότητα ανάπτυξης αφαιρετικής σκέψης*». (Healy, L., Hoyles, C. & Noss, R. 1997 p. 26)

Οι Στεργιοπούλου, Γυφτοδήμος και Κυνηγός. (1997) χρησιμοποιούν τον όρο παιδαγωγικά σχεδιασμένο προγραμματιστικό περιβάλλον όπως για παράδειγμα το περιβάλλον της γλώσσας Logo που εισήγαγε ο Papert. Οι ερευνητές ισχυρίζονται πως αυτό ακριβώς το περιβάλλον μπορεί να συμβάλει «*στην ποιοτική βελτίωση του δίπολου διδασκαλία – μάθηση μέσα από πολλές σχολικές δραστηριότητες, με την εφαρμογή μιας παιδαγωγικής πρακτικής με επαγωγικό χαρακτήρα (constructionism), που ευνοεί την έρευνα, την ανακάλυψη και αναπτύσσει την κρίση μέσα από την ανταλλαγή απόψεων και την εποικοδομητική συνεργασία.*» (Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ 1997 σελ.161). Η διδακτική υπεροχή των μικρόκοσμων, ιδιαίτερα για τα μαθηματικά, προκύπτει από την δυνατότητα που έχει ο ίδιος ο δάσκαλος να τους οργανώσει δημιουργώντας μια σειρά δραστηριοτήτων για τη τάξη του. Επιπλέον η κατασκευή παραμετρικών μικρόκοσμων δίνει ευκαιρίες και ερεθίσματα για ανάπτυξη δύσκολων νοητικών ικανοτήτων, όπως η διερεύνηση της συμπεριφοράς και της μεταβολής μεγεθών, η γενίκευση και η αφαίρεση που αποτελούν στοιχεία χρήσιμα όχι μόνο για την επιστημονική σκέψη αλλά και για την καθημερινότητα.

**Β) Ο ρόλος των Η/Υ στη μαθηματική εκπαίδευση**

Τα χρήματα που ξοδεύονται για υπολογιστές στα δημόσια σχολεία έχουν αυξηθεί τα τελευταία χρόνια και αυτό φανερώνει την δυνατότητα για αποτελεσματική εφαρμογή των υπολογιστών στα σχολικά μαθηματικά. Η γρήγορα αυξανόμενη εισαγωγή μεγάλης ποσότητας υπερσύγχρονου ηλεκτρονικού υλικού στα σχολεία, μας σπρώχνει στο να ξανασκεφτούμε τι είναι σημαντικό στη μαθηματική εκπαίδευση καθώς και τι νέες δυνατότητες έχουμε ώστε παλιά εμπόδια στη μαθηματική εκπαίδευση να αρθούν. Αυτό, όπως το χαρακτηρίζει ο Goldenberg (1999), είναι το αποτέλεσμα του «Δούρειου Ίππου» δηλαδή να εισέλθουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στην εκπαιδευτική πράξη και να προκαλέσουν αλλαγή.

Η δυνατότητα της αλλαγής στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών αναδεικνύεται μέσα από την εξέλιξη της τεχνολογίας, αλλά η πορεία προς αυτές τις αλλαγές είναι μακριά. Σύμφωνα με τους Hoyles & Noss (2003) «*μόνο όσοι πάσχουν από τεχνολογικό ντε-*

*τερμινισμό δεν θα μπορούσαν να αναγνωρίσουν πόση έρευνα πρέπει ακόμα να γίνει ώστε να προκαλέσει ριζικές και θεμελιώδεις αλλαγές στην μαθηματική εκπαίδευση ακόμα κι όταν προσφέρεται προσβάσιμη τεχνολογία που υποστηρίζεται από έρευνα*»(p. 45). Ο Kaput (1992) αναφέρει την έλλειψη έρευνας οποιουδήποτε είδους η οποία να συνδέεται με την τεχνολογία και αποδίδει την περιθωριοποίηση της τεχνολογίας στην μαθηματική εκπαίδευση στα σύνθετα θέματα που περιβάλλουν την χρήση της. Μεταξύ των αιτιών αναφέρει ότι: α) Η τεχνολογία απαιτεί συνεχή επανεξέταση του αναλυτικού προγράμματος, της παιδαγωγικής και του περιεχομένου σπουδών. β) Οι πρακτικές δυσκολίες της πρόσβασης των μαθητών σε υπολογιστές, το κόστος των λογισμικών και η δυσκολία ανάπτυξης υλικού εντός του αναλυτικού προγράμματος συχνά εμποδίζουν την έρευνα. γ) Εξαιτίας των ραγδαίων αλλαγών στην τεχνολογία, η έρευνα συχνά έχει πάψει να είναι επίκαιρη μέχρι να ολοκληρωθεί.

Ακόμα όμως κι αν το πεδίο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών με χρήση Η/Υ είναι καινούργιο και ανεξερεύνητο, μετράει 25 περίπου έτη ζωής, αρκετά χρήσιμα και ενδιαφέροντα συμπεράσματα έχουν ήδη εξαχθεί και μπορούν να εμπλουτίσουν την διδασκαλία μαθηματικών αλλάζοντας την παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας τους.

Σε αντίθεση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας όπου πολλές φορές έξυπνοι μαθητές παραιτούνταν της προσπάθειας με τα μαθηματικά, η τεχνολογία μπορεί να προσφέρει το δόλωμα του εναλλακτικού με το οποίο οι μαθητές θα αποκτούν πρόσβαση σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες χωρίς την παρατεταμένη περίοδο της απόκτησης δεξιοτήτων που ήταν συνήθως ο μόνος δρόμος και από πολλές απόψεις, απέτυχε. Το θέμα βέβαια δεν είναι να αντικαταστήσουμε τα παλιά αναποτελεσματικά εργαλεία με καινούρια αν δεν φροντίσουμε οι μαθητές να γίνουν ικανοί χρήστες τους, γιατί διαφορετικά θα έχουμε αντικαταστήσει το ένα εμπόδιο με ένα άλλο. «*Φυσικά ίσως κανένα επίπεδο ικανοτήτων στα ηλεκτρονικά εργαλεία δεν μπορεί ας πούμε να καλύψει μια έλλειψη αλγεβρικής ικανότητας – αυτή η ερώτηση πρέπει να αναμένει μια ερευνητική απάντηση – αλλά έλλειψη και των δυο ικανοτήτων ξεκάθαρα δεν είναι πρόοδος!*» (Goldenberg, 1999, p.210)

Ο Goldenberg (1999) ασκεί κριτική στον τρόπο που συχνά το εκπαιδευτικό μας σύστημα χρησιμοποιεί τους Η/Υ και τις δυνατότητες που αυτοί μας προσφέρουν. Είναι σαν να χρησιμοποιούμε νέα εργαλεία για να εξυπηρετήσουμε παρωχημένους εκπαιδευτικούς σκοπούς π.χ. η προτίμηση σε τεστ πολλαπλής επιλογής, που βαθμολογούνται από μηχα-

νές με συνέπεια την αυξανόμενη υποστήριξη σχολείων που επικεντρώνουν στη γνώση της ύλης. «*Σπεύδουμε στο Internet και πιέζουμε για ανάλυση δεδομένων στο πρόγραμμα σπουδών, και τα δυο πραγματοποιούνται μέσω των νέων εργαλείων τεχνολογίας και εστιάζουν την προσοχή κατά τον ίδιο τρόπο – στη συλλογή πληροφορίας και όχι στη συστηματοποίηση των ιδεών ή στην ανάπτυξη και σχηματισμό της αιτιολόγησης.*» (Goldenberg, 1999 p.208)

Φαίνεται λοιπόν πως η εισαγωγή των Η/Υ στα σχολεία μπορεί να προκαλέσει αντίθετα αποτελέσματα αν ο ρόλος τους περιοριστεί στην αναζήτηση πληροφοριών και δεν οργανωθεί κατάλληλα ώστε να αναδείξει τη μαθηματική κατανόηση και αιτιολόγηση. Ένας λοιπόν από τους πιο σημαντικούς στόχους είναι να καθορίσουμε το ρόλο της τεχνολογίας με προσανατολισμό στις «*καλές μαθηματικές συνήθειες του μυαλού*» κάτι τέτοιο θα μας οδηγήσει σε επιλογή λογισμικών των οποίων το σχέδιο θα στοχεύει τόσο στην λύση προβλημάτων όσο και στην εισαγωγή μαθηματικών ιδεών και προβλημάτων προς εξερεύνηση και διατύπωση που θα οδηγούν τους μαθητές σε νέους τρόπους σκέψης για τα προβλήματα και νέες συνδέσεις ανάμεσα στις ιδέες. Ένας πρωταρχικός σκοπός της τεχνολογίας θα ήταν να βοηθήσει τους μαθητές να σχηματοποιήσουν, να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν τις μαθηματικές ιδέες, δευτερευόντως η τεχνολογία θα μπορούσε να υπηρετήσει κι άλλους σκοπούς, όπως να μειώσει την προαπαιτούμενη γνώση που χρειάζεται ή την υπολογιστική προσπάθεια που πρέπει να ξοδευτεί για τη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων.

## 2. Η έννοια της εμπλοκής στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται ανανέωση του ενδιαφέροντος των ερευνητών σχετικά με τους μηχανισμούς με τους οποίους οι συναισθηματικές αντιδράσεις και η συμπεριφορά των μαθητών στις μαθησιακές δραστηριότητες μορφοποιούν και επηρεάζουν την πρόσκτηση της γνώσης και την ανάπτυξη των ικανοτήτων τους (Chapman, 2003). Αν ταυτόχρονα λάβουμε υπόψη μας την έμφαση που δίνεται στο επίπεδο της ακαδημαϊκής απόδοσης και επίδοσης των μαθητών στα σχολεία, καταλαβαίνουμε γιατί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αποκτούν γνώση μέσα από την μαθησιακή διαδικασία έχει γίνει πρωτεύον ζήτημα. Γι' αυτό το λόγο πολλές μελέτες (Meece, Blumenfeld & Hoyle, 1988) τονίζουν το σημαντικό ρόλο που μπορεί να παίξει η εμπλοκή (engagement) του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία.

Οι όροι σχολική εμπλοκή, εμπλοκή σε εργασίες, γνωστική εμπλοκή, χρησιμοποιούνται συχνά για να αναφερθούν στη συναισθηματική ανταπόκριση και τη συμπεριφορά του μαθητή στο σχολικό περιβάλλον, στην τάξη, κατά τη διάρκεια του μαθήματος ή/και κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Πολλές έρευνες έχουν συγκλείνει στο συμπέρασμα ότι αυτοί οι παράγοντες παίζουν ρόλο κλειδί στη μάθηση των μαθητών, όμως τα συμπεράσματα ποικίλουν εξαιτίας των διαφορών που εμφανίζονται στους ορισμούς και τις προσεγγίσεις με τις οποίες αποτιμώνται τα επίπεδα γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Στόχος λοιπόν της συγκεκριμένης ανασκόπησης της βιβλιογραφίας είναι: (i) να γίνει μια διάκριση των διαστάσεων της εμπλοκής των μαθητών έτσι όπως έχει σκιαγραφηθεί και μελετηθεί από την εκπαιδευτική έρευνα και (ii) να περιγραφούν οι μέθοδοι που έχουν χρησιμοποιηθεί στις διάφορες εμπειρικές ερευνητικές μελέτες για να αποτιμηθούν τα επίπεδα γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Ειδικότερα το ενδιαφέρον μας δεν περιστρέφεται μόνο γύρω από ζητήματα ορισμών και αποτελεσμάτων των διαφόρων ερευνών αλλά ταυτόχρονα εστιάζεται και στους τρόπους αποτίμησης του επιπέδου εμπλοκής των μαθητών ώστε να επιλεγεί η κατάλληλη για την παρούσα μελέτη μέθοδος «μέτρησης» της.

## 2.1 Ορισμοί της εμπλοκής

Οι πρώτοι ορισμοί της εμπλοκής των μαθητών στηρίχθηκαν κυρίως σε ενδείξεις χρονικής διάρκειας (time-on-task) της ενασχόλησης των μαθητών με εργασίες (Fisher, et al., 1980, McIntyre, et al., 1983, Brophy, 1983 αναφορά Chapman, 2003). Ο Natriello (1984) όρισε την εμπλοκή των μαθητών ως «*συμμετοχή σε δραστηριότητες που προσφέρει το σχολικό πρόγραμμα*» (αναφορά Chapman, 2003), ένας τέτοιος ορισμός χρησιμοποιείται κυρίως για να περιγράψει την προθυμία των μαθητών να συμμετέχουν στις συνήθεις σχολικές δραστηριότητες, να εκτελούν τις εργασίες που τους αναθέτει ο δάσκαλος και να ακολουθούν τις οδηγίες του στη διάρκεια του μαθήματος. Αρνητικοί δείκτες εμπλοκής στην έρευνα του Natriello αποτελούν οι αδικαιολόγητες απουσίες από τα μαθήματα, η αντιγραφή στα διαγωνίσματα και η καταστροφή της σχολικής περιουσίας. Αυτού του είδους ο ορισμός της σχολικής εμπλοκής ουσιαστικά ταυτίζεται με την συμμόρφωση των μαθητών στις επιταγές του σχολικού συστήματος και συχνά αναφέρεται ως «**εμπλοκή στη σχολική διαδικασία**».

Ένας δεύτερος πιο σύγχρονος ορισμός που συναντάται στη βιβλιογραφία είναι αυτός των Skinner & Belmont (1993) ο οποίος εστιάζει σε γνωστικές, συμπεριφορικές και συναισθηματικές ενδείξεις εμπλοκής των μαθητών σε συγκεκριμένες εργασίες:

*«Η εμπλοκή σε αντιπαράθεση με την απαρέσκεια στο σχολείο αναφέρεται στην ένταση και την συναισθηματική ποιότητα της συμμετοχής των μαθητών στη ανάληψη και ολοκλήρωση μαθησιακών δραστηριοτήτων…Τα παιδιά που εμφανίζουν σταθερή συμπεριφορική εμπλοκή στις μαθησιακές δραστηριότητες συνοδεύονται από μια θετική συναισθηματική διάθεση. Επιλέγουν έργα που βρίσκονται στα όρια των δυνατοτήτων τους, αναλαμβάνουν δράση όταν τους δίνεται η ευκαιρία, και καταβάλλουν έντονη προσπάθεια και συγκέντρωση για την ολοκλήρωση μαθησιακών δραστηριοτήτων, γενικά εμφανίζουν θετικά συναισθήματα κατά την διάρκεια της εργασίας τους όπως ενθουσιασμό, αισιοδοξία, περιέργεια, και ενδιαφέρον. Το αντίθετο της εμπλοκής είναι η απαρέσκεια, όπου τα παιδιά εμφανίζουν παθητική συμπεριφορά, δεν προσπαθούν σκληρά, παραιτούνται εύκολα μπροστά στις προκλήσεις… μπορεί να βαριούνται, να νοιώθουν καταπιεσμένα, ανήσυχα, ή ακόμα και θυμωμένα από την παραμονή τους στην τάξη, μπορεί να αντιπαρέρχονται των μαθησιακών ευκαιριών ή ακόμα να επαναστατούν ενάντια στους δασκάλους και τους συμμαθητές τους.»* (p. 572)

Από μια διαφορετική σκοπιά οι Pintrich & De Groot (1990) συνδέουν τα επίπεδα εμπλοκής των μαθητών με την χρήση γνωστικών και μεταγνωστικών αυτό-ρυθμιστικών στρατηγικών που κατευθύνουν και καθοδηγούν τις μαθησιακές τους διαδικασίες. Απ' αυτή την άποψη η εμπλοκή των μαθητών θεωρείται περισσότερο ως μια σκόπιμη συμπεριφορά που μπορεί να παρατηρηθεί μέσα από τα είδη των γνωστικών στρατηγικών που επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές (π.χ. οι απλές ή «επιφανειακές» στρατηγικές όπως οι δοκιμές σε αντιδιαστολή με τις «βαθύτερες» στρατηγικές όπως η επεξεργασία), και από την προθυμία τους να επιμείνουν σε δύσκολα έργα ρυθμίζοντας την ίδια τους τη μαθησιακή συμπεριφορά. Ο όρος που περιγράφει καλύτερα αυτή τη μορφή εμπλοκής είναι «**εμπλοκή στο μαθησιακό έργο**» και χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στην γνωστική διαδικασία, την ενεργό συμμετοχή, και την συναισθηματική εμπλοκή των μαθητών σε συγκεκριμένα μαθησιακά έργα. Σύμφωνα με τους Blumenfeld et al (2004) αυτός ο ορισμός προϋποθέτει την χρήση τριών αλληλένδετων μεταξύ τους κριτηρίων που αποτιμούν τα επίπεδα εμπλοκής των μαθητών:

i) Γνωστικά κριτήρια, που έχουν ως δείκτη την έκταση και την κατανάλωση διανοητικής προσπάθειας στα μαθησιακά έργα (π.χ., προσπάθειες των μαθητών να ενσωματώσουν την νέα γνώση μέσα σε παλιότερα γνωστικά σχήματα και να καθοδηγήσουν την κατανόηση της εργασίας τους μέσω της χρήσης γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών). Η **γνωστική εμπλοκή** περιλαμβάνει την ύπαρξη μαθησιακών στόχων και εσωτερικών κινήτρων του μαθητή, την αυτορρύθμιση και την ικανότητα εφαρμογής στρατηγικών.

ii) Συμπεριφορικά κριτήρια, με δείκτη το βαθμό της ενεργητικής ανταπόκρισης στα μαθησιακά έργα που παρουσιάζονται (π.χ., ενεργός ανταπόκριση των μαθητών σε μια προηγηθείσα διδασκαλία όπως είναι η διατύπωση σχετικών ερωτήσεων, η επίλυση προβλημάτων και η συμμετοχή σε συζητήσεις με τους δασκάλους και τους συμμαθητές)

iii) Συναισθηματικά κριτήρια, με δείκτη το επίπεδο επένδυσης των μαθητών και των συναισθηματικών τους αντιδράσεων στα μαθησιακά έργα (π.χ., υψηλά επίπεδα ενδιαφέροντος ή θετικές στάσεις προς τα μαθησιακά έργα).

Η χρήση αυτών των όρων και οι διακρίσεις τους ποικίλουν από ερευνητή σε ερευνητή, έτσι για παράδειγμα οι Blumenfeld et al (2004) θεωρούν το ενδιαφέρον ως μια μορφή συναισθηματικής εμπλοκής, ενώ στο Πρόγραμμα για την Διεθνή Αξιολόγηση των Μαθητών (PISA) το οποίο παρέχει μια διεθνή άποψη για τα ζητήματα εμπλοκής και κινήτρων, το ενδιαφέρον αναφέρεται ως κίνητρο, ενώ οι έννοιες της αυτορρύθμισης και ικανότητας εφαρμογής στρατηγικών που είναι χαρακτηριστικά της γνωστικής εμπλοκής αναφέρονται ως στρατηγικές ελέγχου (Schooling Isssues Digest, 2005). Συχνά, σύμφωνα με την Chapman (2003) οι μορφές εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία είναι αλληλεξαρτώμενες, έτσι για παράδειγμα οι μαθητές με θετικές στάσεις προς τη μάθηση (συναισθηματική εμπλοκή) είναι πιο πιθανό να υιοθετήσουν αποτελεσματικές μαθησιακές στρατηγικές (γνωστική εμπλοκή).

Η Ainley (1993) αναφέρει τον όρο «εμπλοκή» ως το βαθμό κατά τον οποίο ένας μαθητής συνδέεται ενεργά με το περιεχόμενο, ή με κάποιο μέρος του περιεχομένου μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας, όπου «η ενεργός σύνδεση» προϋποθέτει ότι το άτομο ενεργεί ώστε να διατηρήσει ή να επεκτείνει την επαφή του με το αντικείμενο με σκοπό να αυξήσει την γνώση του γι' αυτό. Η «ποιότητα» ή το «επίπεδο» αυτής της σύνδεσης θεωρείται εν γένει ότι έχει προφανή αποτελέσματα στη μάθηση, αφού οι μαθητές που εμπλέκονται γνωστικά έχουν περισσότερες πιθανότητες να μάθουν κάτι με επιτυχία απ' ότι οι μαθητές των οποίων η εμπλοκή με το αντικείμενο της μάθησης είναι χαμηλή. Η μελέτη της Ainley (1993) διερεύνησε την αλληλεπίδραση μεταξύ κινήτρων, μαθησιακών στρατηγικών και επίδοσης. Τρεις «τύποι εμπλοκής με μάθηση» προσδιορίστηκαν από τα δεδομένα του ερωτηματολογίου, τα οποία συνδέθηκαν είτε με «βαθιά», «επιτυχή» ή «επιφανειακή» προσέγγιση της γνώσης. Η ίδια η εμπλοκή συνδέθηκε από την Ainley με «*τη γενική τάση των μαθητών να μαθαίνουν*» και με «*την κατασκευή του έργου από τους μαθητές*» ώστε να επηρεάσουν τις μαθησιακές στρατηγικές που υιοθετούν (Ainley, 1993, p. 404).

Οι ερευνητές γενικά συμφωνούν ότι η γνωστική εμπλοκή περιλαμβάνει την σκέψη που κάνουν οι μαθητές όταν εμπλέκονται σε ακαδημαϊκές εργασίες μάθησης. Για παράδειγμα, οι Meece et al (1998) όρισαν την γνωστική εμπλοκή από την «*καταγεγραμμένη χρήση μεταγνωστικών και αυτορρυθμιστικών στρατηγικών από τους μαθητές και όχι από την χρήση στρατηγικών αναζήτησης βοήθειας και αποφυγής της προσπάθειας*» (p. 515). Ομοίως, οι Blumenfeld et al (1992) όρισαν την γνωστική εμπλοκή ως τη χρήση «*μεταγνωστικής σκέ-*

*ψης, και αυτορρυθμιστικών στρατηγικών ώστε να γίνει στοχαστική προσέγγιση της γνώσης»* (p. 207).

Οι Corno και Mandinach (1983) πρότειναν ένα μοντέλο γνωστικής εμπλοκής που διακρίνει τέσσερις τύπους γνωστικής εμπλοκής: αυτορρυθμιζόμενη εμπλοκή (όπου η γνωστική διαδικασία των μαθητών προκύπτει από υψηλούς στόχους ή μεταγνωστικές συνιστώσες), εστιασμένη στο έργο ( όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα ειδικό για το έργο σχεδιασμό και παρωθούνται συνήθως σε έργα που απαιτείται ο μετασχηματισμός και όχι η πρόσκτηση πληροφοριών), διαχείριση πηγών (όπου οι μαθητές αναζητούν βοήθεια από εξωτερικές πηγές), και δεκτικότητα (στην οποία οι μαθητές επενδύοντας ελάχιστη σκέψη ανταποκρίνονται παθητικά συνήθως σε διδασκαλία που βραχυκυκλώνει την αυτορρυθμιζόμενη γνωστική τους διαδικασία). Τονίζουν ότι οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να προσαρμόζουν το δικό τους στυλ γνωστικής εμπλοκής σε διαφορετικές περιπτώσεις έργων, και να αποφεύγουν την εξάρτηση από μια συγκεκριμένη στρατηγική. Για παράδειγμα, η επιτυχία στην διαχείριση πηγών μπορεί να δημιουργήσει μια προτίμηση γι' αυτό το είδος εμπλοκής και να περιορίσει μελλοντική χρήση ανώτερων τύπων γνωστικής εμπλοκής, όπως είναι η αυτορρύθμιση και η εστίαση στο έργο.

Κατά τους Helme & Clarke (2001) η γνωστική εμπλοκή τοποθετείται μέσα σε μια σύνθετη και κυκλική αλληλεπίδραση παραγόντων που περιλαμβάνουν το άτομο, την κατάσταση της τάξης και το είδος της εργασίας:

α) Οι προσωπικότητες των μαθητών φέρνουν στην μαθησιακή κατάσταση ένα πλήθος από χαρακτηριστικά τα οποία επηρεάζουν την γνωστική τους εμπλοκή. Αυτά συμπεριλαμβάνουν ικανότητες, γνώση, διαθέσεις, εμπνεύσεις, προσδοκίες, απόψεις, ανάγκες, αξίες και στόχους (Corno και Mandinach, 1983, Meece, Blumenfield & Hoyle, 1988, Ainley, 1993).

β) Το μαθησιακό περιβάλλον που αναφέρεται ουσιαστικά στην «κουλτούρα της τάξης», φέρνει στο προσκήνιο καταστάσεις που είτε περιορίζουν είτε προάγουν συγκεκριμένες διδακτικές και μαθησιακές στρατηγικές και συγκεκριμένες μορφές αλληλεπίδρασης με το δάσκαλο και τους άλλους μαθητές. Οι αναλύσεις των δεδομένων που συλλέχθηκαν στο Classroom Learning Project (Helme et al, 2001) δείχνουν ότι το στυλ διδασκαλίας και η

φύση των αλληλεπιδράσεων των συμμαθητών έχουν ισχυρή επίδραση στην γνώση και μεταγνώση του μαθητή.

γ) Οι μαθησιακές εργασίες και δραστηριότητες προσφέρουν το όχημα για την γνωστική εμπλοκή του μαθητή. Οι Helme & Clarke (2001) ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία παρατηρούν ότι τα χαρακτηριστικά των εργασιών όπως είναι η πολυπλοκότητα (Williams & Clarke, 1997), η πρόκληση (Csikszentmihalyi & Csikszentmihalyi, 1988), η εξοικείωση (Helme, 1994), το εσωτερικό ενδιαφέρον και η προσωπική σημαντικότητα (Clarke, 1996) σχετίζονται με τους τύπους και το είδος της γνωστικής εμπλοκής του μαθητή.

## 2.2 Η θεωρία της εμπλοκής: ένα θεωρητικό πλαίσιο για την μάθηση και διδασκαλία με Η/Υ

Η θεωρία της εμπλοκής αποτελεί δημιούργημα των ερευνητών Kearsley και Shneiderman (1999) και προήλθε από τις διδακτικές τους εμπειρίες σε ηλεκτρονικά και από απόσταση εκπαιδευτικά περιβάλλοντα.

Βασική ιδέα της θεωρίας της εμπλοκής είναι ότι οι μαθητές πρέπει «*να εμπλέκονται σε μαθησιακές δραστηριότητες με νόημα μέσω της αλληλεπίδρασης με τους συμμαθητές τους σε εργασίες που αξίζουν τον κόπο.*» Αν και εξ αρχής μια τέτοια εμπλοκή μπορεί να συμβεί και χωρίς τη χρήση τεχνολογίας οι Kearsley και Shneiderman υποστηρίζουν ότι η τεχνολογία διευκολύνει την εμπλοκή με τρόπους που είναι δύσκολο να επιτύχουμε διαφορετικά, κατ' αυτό τον τρόπο η θεωρία της εμπλοκής φαίνεται να αποτελεί ένα θεωρητικό πλαίσιο για τη μάθηση και τη διδασκαλία με Η/Υ.

Η θεωρία της εμπλοκής παρουσιάζεται επομένως ως ένα μοντέλο μάθησης σε περιβάλλοντα που βασίζονται στη χρήση τεχνολογίας και συνθέτει πολλά στοιχεία από προηγούμενες θεωρίες μάθησης. Η βασική υπόθεση είναι πως οι μαθητές πρέπει να εμπλέκονται ουσιαστικά με την εργασία τους ώστε να προκύψει αποτελεσματική μάθηση και η επίτευξη της εμπλοκής μπορεί να γίνει αν δοθεί έμφαση ι) στις συνεργατικές προσπάθειες, ιι) στις δημιουργικές εργασίες, ιιι) με στόχους που έχουν νόημα και εκτός της σχολικής τάξης.

Οι θεωρίες μάθησης που στηρίζουν τη θεωρία της εμπλοκής είναι η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση λόγω της έμφασης που δίνεται στη μάθηση με νόημα, ενώ υπάρχει και το στοιχείο της συνεργασίας μεταξύ συμμαθητών και της δημιουργίας μιας κοινότητας μά-

θησης που παραπέμπουν στις κοινωνικογνωστκές προσεγγίσεις και τις θεωρίες εδραιωμένης μάθησης (situated learning).

Με τον όρο μάθηση μέσω της εμπλοκής κωδικοποιούνται όλες οι δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ενεργές γνωστικές διαδικασίες όπως δημιουργικότητα, επίλυση προβλήματος επαγωγικός συλλογισμός, λήψη αποφάσεων και αξιολόγηση. Επιπλέον οι μαθητές δημιουργούν εσωτερικά κίνητρα μάθησης λόγω του είδους της δραστηριότητας και του μαθησιακού περιβάλλοντος.

Η θεωρία της εμπλοκής προϋποθέτει την ύπαρξη συνεργατικών ομάδων που δουλεύουν σε έργα που έχουν νόημα και εκτός της σχολικής τάξης. Αυτοί οι τρεις συντελεστές ομάδες – έργο – αξιοποίηση του έργου και εκτός της τάξης συνδέονται με την τριλογία συντονίζω – δημιουργώ – προσφέρω και υπονοούν ότι οι μαθησιακές δραστηριότητες συμβαίνουν στο περιβάλλον μιας ομάδας, βασίζονται στην παραγωγή έργου και έχουν έναν αυθεντικό εξωτερικό πραγματικό στόχο.

Ο ρόλος της τεχνολογίας είναι να διευκολύνει όλα τα στοιχεία εμπλοκής. Η χρήση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και του διαδικτύου αυξάνουν την έκταση και την ευκολία αλληλεπίδρασης με όλους του συμμετέχοντες και την πρόσβαση στην πληροφορία. Η μεγάλη ποικιλία λογισμικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανάλυση, σχεδιασμό, επίλυση προβλήματος, δημιουργία παρουσιάσεων, δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν σύνθετες εργασίες.

Η τεχνολογία προσφέρει ένα ηλεκτρονικό mileux (περιβάλλον) το οποίο παράγει το είδος της δημιουργικότητας και επικοινωνίας που ευνοούν την ανάπτυξη της εμπλοκής των μαθητών. Επομένως η θεωρία εμπλοκής μπορεί να αποτελέσει ένα νέο παράδειγμα για τη μάθηση και την διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας, η οποία δίνει έμφαση στο θετικό ρόλο που μπορεί να παίξει η τεχνολογία στην ανθρώπινη αλληλεπίδραση και ανάπτυξη.

## 2.3 Μέθοδοι μέτρησης του επιπέδου της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών

Η επισκόπηση της βιβλιογραφίας που αφορά τις έρευνες που επιχειρούν την μελέτη και την μέτρηση των επιπέδων γνωστικής εμπλοκής των μαθητών περιλαμβάνει μια πληθώρα διαφορετικών μεθόδων συλλογής δεδομένων και τρόπων αποτίμησης της. Έτσι έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορα μέσα συλλογής δεδομένων και μέτρησης όπως ερωτηματολόγια, κλίμακες μέτρησης, άμεση παρατήρηση, ανάλυση δειγμάτων εργασίας και εστιασμένες μελέτες περιπτώσεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε στοιχεία από την μελέτη διαφόρων ερευνητικών εκθέσεων σχετικών με την γνωστική εμπλοκή και των τρόπων μέτρησης που έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί, αναζητώντας μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα της κάθε προσέγγισης.

**Α) Μετρήσεις αυτοαναφορών με χρήση ερωτηματολόγιων.**

Οι αυτοαναφορικές μετρήσεις έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές για να καθορίσουν κυρίως συμπεριφορικά, γνωστικά και συναισθηματικά χαρακτηριστικά της εμπλοκής σε μια συγκεκριμένη εργασία. Οι ερωτήσεις που συνδέονται με τα γνωστικά χαρακτηριστικά της εμπλοκής αναζητούν πληροφορίες σχετικά με παράγοντες όπως η προσοχή έναντι της έλλειψής της, η διανοητική προσπάθεια που καταβάλλεται σε μια εργασία (π.χ. η ενοποίηση των νέων με τις προηγούμενες γνώσεις) και η επιμονή στο έργο (π.χ. αντιδράσεις σε μια αποτυχία ώστε να γίνει κατανοητό το έργο και η ύλη του μαθήματος). Οι ερωτήσεις επίσης μπορεί να αφορούν τα επίπεδα ανταπόκρισης των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος (π.χ. η λεκτική ανταπόκριση κατά την διάρκεια μιας συζήτησης). Επίσης ερωτήσεις που αφορούν το συναισθηματικό τομέα τυπικά ζητούν από τους μαθητές να αξιολογήσουν το ενδιαφέρον τους και τις συναισθηματικές τους αντιδράσεις προς τις μαθησιακές δραστηριότητες και προσφέρουν δείκτες για την επιλογή δραστηριοτήτων (π.χ. επιλογή περισσότερο ή λιγότερο δύσκολων και προκλητικών εργασιών), την επιθυμία αναζήτησης περισσότερης γνώσης πάνω σε συγκεκριμένους τομείς και το αίσθημα του ενθουσιασμού στην αρχή μιας νέας εργασίας.

Οι Meece, Blumenfeld και Hoyle (1988) χρησιμοποίησαν ερωτηματολόγιο για να μετρήσουν την γνωστική εμπλοκή των μαθητών ζητώντας τους να αναφέρουν πως χρησιμοποιούν τις γνωστικές, μεταγνωστικές ή επιφανειακές στρατηγικές τους στην αντιμετώπιση

εργασιών. Η χρήση γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών (π.χ. «ξαναδιάβασα αυτά που δεν καταλάβαινα» και «προσπάθησα να καταλάβω με ποιο τρόπο η εργασία που έκανα ταίριαζε σε όσα ήξερα») χρησιμοποιήθηκε ως δείκτης της ενεργούς εμπλοκής στο έργο, ενώ η χρήση επιφανειακών στρατηγικών (π.χ. «Παρέλειψα τα δύσκολα σημεία») θεωρήθηκε δείκτης επιπόλαιας και επιφανειακής μορφής εμπλοκής.

Παρόμοια ερωτηματολόγια χρησιμοποίησαν και οι Miller et al (1996) για να αποτιμήσουν την χρήση ουσιαστικών ή επιφανειακών μαθησιακών στρατηγικών. Το ερωτηματολόγιο γνωστικής εμπλοκής των Miller et al συμπεριλάμβανε και δείκτες της προσπάθειας και της επιμονής των μαθητών στο έργο και ιδιαίτερα το βαθμό ανταπόκρισης σε δύσκολα έργα (π.χ. «προσπάθησα όσο περισσότερο μπορούσα», «κατέβαλλα πολύ λίγη προσπάθεια»)

Τα ερωτηματολόγια εκτός από το να ρωτάνε πότε ένας μαθητής εμπλέκεται σε ένα μαθησιακό έργο, μπορούν να προσφέρουν και πληροφορίες σχετικά με τις αιτίες που κάνουν αναγκαία μια τέτοια μελέτη. Οι έρευνες έχουν δείξει θετικές συσχετίσεις μεταξύ της αντίληψης των μαθητών για τον έλεγχο της μάθησής τους και των επιπέδων της γνωστικής τους εμπλοκής. Για παράδειγμα, η έρευνα των Schunk & Zimmerman, (1994) από την οποία προέκυψε ότι τα επίπεδα εμπλοκής σχετιζόταν θετικά με την αυτοπεποίθηση των μαθητών και την αυτεπάρκεια των μαθητών για την επίτευξη συγκεκριμένων μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Βασικό μειονέκτημα των ερωτηματολογίων αυτοαναφοράς είναι ότι βασίζονται σε πληροφορίες που προέρχονται συνήθως από τα ίδια τα παιδιά και δίνουν κατά συνέπεια αποτελέσματα ευαίσθητα σε υποκειμενικές εκτιμήσεις.

**Β) Λίστες ελέγχου και κλίμακες εκτίμησης.**

Εκτός από τα ερωτηματολόγια, κάποιες μελέτες έχουν χρησιμοποιήσει κλίμακες αποτίμησης για να μετρήσουν τα επίπεδα γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Για παράδειγμα οι κλίμακες αναφοράς των δασκάλων που χρησιμοποίησαν οι Skinner & Belmont, (1993) ζητούσαν από τους δασκάλους να αξιολογήσουν την προθυμία των μαθητών τους να συμμετέχουν σε μαθησιακές δραστηριότητες, με κριτήριο την προσπάθεια, την προσοχή και την επιμονή κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας, ενώ ταυτόχρονα αξιολό-

γησαν και τις συναισθηματικές αντιδράσεις των μαθητών με κριτήρια την ανία έναντι του ενδιαφέροντος, την ευχαρίστηση έναντι της απαρέσκειας, την ανησυχία και το άγχος.

Οι κλίμακες μέτρησης δίνουν μια ποσοτική διάσταση σε χαρακτηριστικά και μεταβλητές που είναι κατ' εξοχήν ποιοτικά και ίσως αυτό να αποτελεί ευκολία για κάποιους ερευνητές, παρόλ' αυτά οι κλίμακες μέτρησης υπάγονται στους ίδιους περιορισμούς με τα ερωτηματολόγια.

**Γ) Άμεση Παρατήρηση.**

Αν και οι κλίμακες μέτρησης και τα ερωτηματολόγια αυτοαναφοράς χρησιμοποιούνται ευρέως, η εγκυρότητα των δεδομένων που προέρχονται από αυτές τις μετρήσεις μεταβάλλεται και εξαρτάται κυρίως από την ικανότητα των μαθητών να αξιολογήσουν την ίδια τους τη γνωστική και συναισθηματική συμπεριφορά. Επομένως πολλές φορές η άμεση παρατήρηση των μαθητών μέσα στην εκπαιδευτική διαδικασία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιβεβαιώσει τα επίπεδα της γνωστικής τους εμπλοκής. Η Chapman (2003) αναφέρει σειρά από έρευνες (π.χ. Ellet & Chauvin, 1991, Ysseldyke & Christenson, 1993, Greenwood and Delquadri, 1988) και παρατηρεί ότι τα πρωτόκολλα που χρησιμοποιούνται σ' αυτές τις περιπτώσεις εκτιμούν την εμπλοκή των μαθητών μέσα από δείκτες που είναι αρκετά γενικοί. Για παράδειγμα το CISSAR (Code for Instructional Structure and Student Academic Response: Greenwood and Delquadri, 1988) ;όπως αναφέρεται από την Chapman (2003) ορίζει την εμπλοκή με όρους συμπεριφορικούς όπως την παρακολούθηση του μαθήματος, την εργασία μέσα στην τάξη και την διαχείριση των πηγών-πληροφοριών.

Βασικό χαρακτηριστικό των προαναφερόμενων μελετών είναι ότι έχουν όλες χρησιμοποιήσει ένα δειγματοληπτικό σύστημα επιλογής χρονικών στιγμών όπου ο παρατηρητής καταγράφει αν μια συγκεκριμένη συμπεριφορά ήταν απούσα ή παρούσα κατά μια χρονική στιγμή . Με τη χρήση αυτής της μεθόδου η συμπεριφορά των μαθητών κωδικοποιείται για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και μπορεί να δώσει εκτιμήσεις του επιπέδου εμπλοκής τους, αλλά ταυτόχρονα είναι πολύ πιθανό οι εκτιμήσεις αυτές να είναι πιο ευαίσθητες στις διακυμάνσεις της επιμονής και της συνέπειας στη συμπεριφορά των μαθητών.

**Δ) Ανάλυση Δείγματος Εργασίας**

Αρκετοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει την μέθοδο της ανάλυσης δείγματος εργασίας για να εκτιμήσουν τα επίπεδα της εμπλοκής των μαθητών και εστιάζουν στην χρήση ανώτερων γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών από τους μαθητές κατά τη διάρκεια ενός μαθησιακού έργου (learning task). Στοιχεία τέτοιων υψηλών γνωστικών και μεταγνωστικών μαθησιακών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, μπορούμε να συλλέξουμε από ποικίλες πηγές όπως τα projects των μαθητών, τις γραπτές εργασίες στο σχολείο ή στο σπίτι, τα γραπτά δοκίμια των εξετάσεων και των τεστ κ.τ.λ. Σύμφωνα με την Chapman (2003) η επάρκεια αυτών των μεθόδων εξαρτάται από την επιλογή κατάλληλου υλικού για την εργασία, καθώς και από ένα προκαθορισμένο σύνολο κριτηρίων (rubric) για την αξιολόγηση της εργασίας. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο κριτήριο για τη αποτίμηση της εφαρμογής ικανοτήτων σκέψης υψηλού επιπέδου στην εργασία ενός μαθητή, θα μπορούσε να συμπεριλαμβάνει αναζήτηση στοιχείων που να επιβεβαιώνουν την χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, σχεδιασμού και μεταγνωστικών στρατηγικών (π.χ. Pintrich & DeGroot, 1990).

**Ε) Εστιασμένη μελέτη περίπτωσης (focused case study)**

Όταν το ενδιαφέρον μιας έρευνας περιορίζεται σε μια μικρή ομάδα μαθητών, είναι πιο χρήσιμο να συλλέγονται λεπτομερείς περιγραφές για το επίπεδο της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Οι μελέτες περίπτωσης επιτρέπουν στους ερευνητές να απαντήσουν σε ερωτήματα που αφορούν την γνωστική εμπλοκή των μαθητών με τρόπο επαγωγικό, καταγράφοντας λεπτομέρειες σχετικές με την αλληλεπίδραση των μαθητών με άλλους ή/και με αντικείμενα μέσα στην τάξη. Αυτές οι λεπτομερείς εκθέσεις συνήθως περιγράφουν τόσο την συμπεριφορά των μαθητών όσο και το περικείμενο της τάξης στο οποίο συμβαίνουν. Γενικά οι μελέτες περίπτωσης επιχειρούν να θέσουν την παρατήρηση της γνωστικής εμπλοκής μέσα στο συνολικό περικείμενο της τάξης και ενδιαφέρονται εξίσου για τις διαδικασίες που σχετίζονται με την εμπλοκή, όσο και για την αποτίμηση του επιπέδου εμπλοκής των μαθητών.

# 3. Η έρευνα

## 3.1 Το πλαίσιο της έρευνας

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που έγινε στα προηγούμενα κεφάλαια είχε ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση ενός θεωρητικού πλαισίου που καθόρισε τα κριτήρια επιλογής του λογισμικού, τον τρόπο διεξαγωγής της έρευνας και την διαδικασία αποτίμησης των επιπέδων γνωστικής εμπλοκής των μαθητών. Συγκεκριμένα:

**Α) Το λογισμικό**

Χρησιμοποιήθηκαν δύο λογισμικά, το «ζογκλέρ» που προσομοιώνει βολή σε οριζόντιο επίπεδο στο περιβάλλον του Αβακίου και το Autograph που ανήκει στην κατηγορία των λογισμικών CAS (Computer Algebra Systems) και το οποίο χρησιμοποιείται για αλγεβρικές εφαρμογές και διερεύνηση συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων.

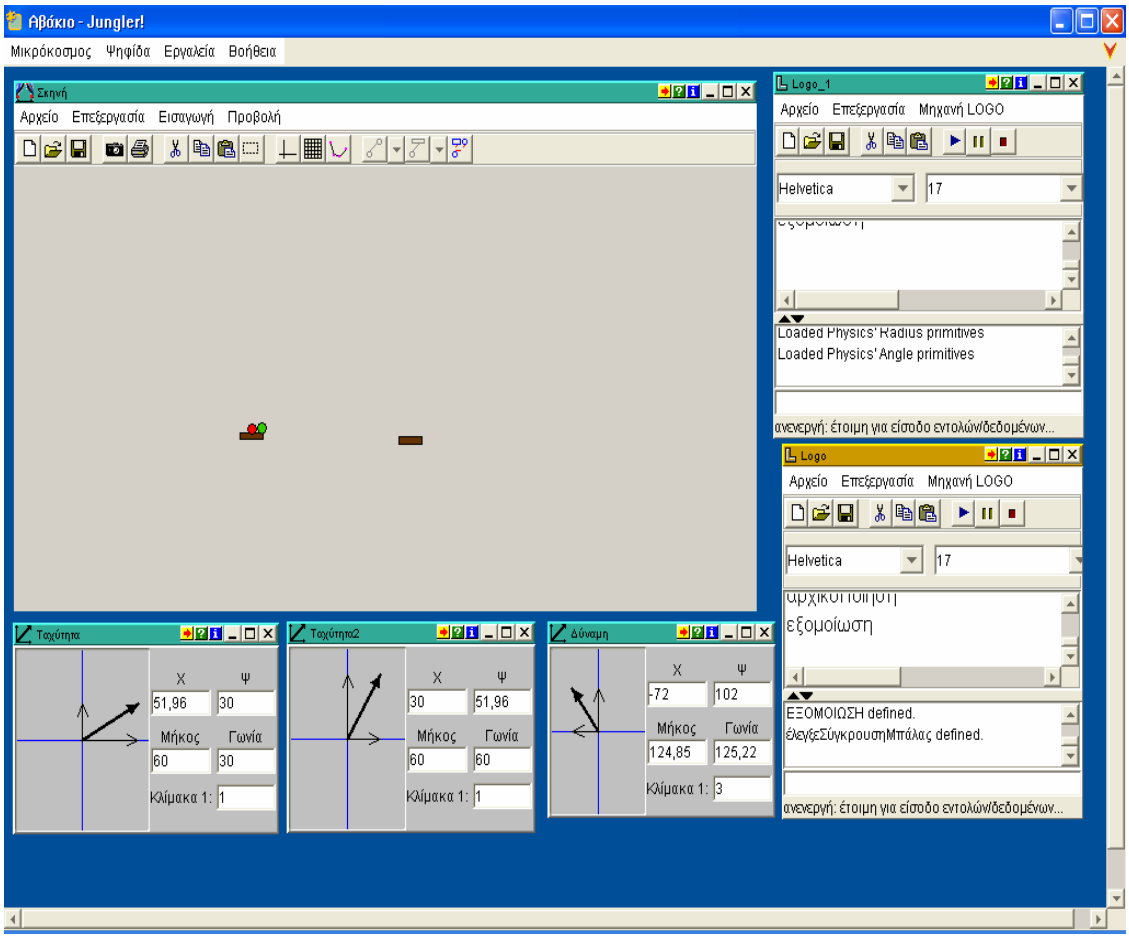
**Ο μικρόκοσμος του «ζογκλέρ»**

Ο μικρόκοσμος του «ζογκλέρ» θα μπορούσε να κατηγοριοποιηθεί ως διερευνητικό λογισμικό ή και ως παιχνίδι με εκπαιδευτικό ενδιαφέρον στα πεδία της φυσικής και των μαθηματικών. Είναι σχεδιασμένος στο περιβάλλον του Αβακίου και χρησιμοποιεί 5 εργαλεία-ψηφίδες: τη σκηνή όπου ενεργοποιούνται οι 2 μπάλες και οι 2 ρακέτες - χέρια του ζογκλέρ, 2 ψηφίδες Logo μια για κάθε μπάλα που περιέχουν σε γλώσσα προγραμματισμού Logo τις εντολές βάσει των οποίων υλοποιείται η κίνηση της κάθε μπάλας, 3 ψηφίδες διανύσματα όπου οι 2 αντιπροσωπεύουν την ταχύτητα κάθε μπάλας ενώ η τρίτη το διάνυσμα της εφαρμοζόμενης δύναμης και τις μεταβολές του.(Εικόνα 1)

Οι ψηφίδες συνδέονται δυναμικά έτσι ώστε οι επεμβάσεις των μαθητών – παικτών σε κάθε ψηφίδα να επηρεάζουν τα αποτελέσματα στην κίνηση της κάθε μπάλας. Για παράδειγμα κάθε αλλαγή στο διάνυσμα της συνισταμένης δύναμης (που γίνεται με απλό σύρσιμο του βέλους ) προκαλεί και διαφορετική συμπεριφορά της μπάλας, ενώ κατά τη διάρκεια μιας βολής ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει και την μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας.

Ο «ζογκλέρ» λειτουργεί κυρίως ως ένα δυναμικό παιχνίδι όπου ο μαθητής μπορεί να είναι παίκτης και ταυτόχρονα κατασκευαστής του παιχνιδιού αφού μπορεί να αλλάξει τους κα-

νόνες κίνησης, κρούσης, τον αριθμό των μπαλών, ακόμα και να φτιάξει δύο ζογκλέρ οι οποίοι από κοινού να κρατούν τις μπάλες στον αέρα.




Εικόνα 1: Ο μικρόκοσμος του «ζογκλέρ» στο Αβάκιο

Μέσα στον «ζογκλέρ» πραγματοποιούνται: α)Δυναμικός χειρισμός και μεταβολή διανυσματικών μεγεθών γραφικά και με συμβολική γλώσσα Logo. β) Αναπαράσταση του μοντέλου κίνησης ενός σώματος με συμβολική γλώσσα και μελέτη των διαδικασιών ελέγχου της κίνησης. γ) Εξομοίωση ενός πραγματικού απλουστευμένου προβλήματος στον υπολογιστή με τη βοήθεια πραγματικών δεδομένων.

Με το παιχνίδι αυτό ο μαθητής εμπλέκεται με έννοιες ταχύτητας, σχετικής ταχύτητας, επιβράδυνσης, επιτάχυνσης και κρούσης. Αναπαριστά τις έννοιες αυτές με ρεαλιστικές προσομοιώσεις του φαινόμενου, με γραφικές παραστάσεις και με συμβολικό τυπικό φορμαλισμό. Πειραματίζεται, εικάζει, παρατηρεί, συμπεραίνει, ελέγχει και πάνω απ' όλα, κατασκευάζει ένα παιχνίδι και το παίζει παράλληλα.

Η επιλογή του «ζογκλέρ» ως ένα λογισμικό μέσω του οποίου θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την γνωστική εμπλοκή των μαθητών με την πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού βασίζεται σε τρία επιχειρήματα:

α) Αποτελεί ένα παιχνίδι και ως εκ τούτου έχει περισσότερες πιθανότητες να «κινήσει» το ενδιαφέρον των μαθητών ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζει αρκετή δυσκολία, καθώς απαιτεί εμπλοκή των μαθητών σε όλα τα στάδια της πειραματικής διαδικασίας (παρατήρηση της εξέλιξης του φαινόμενου, εικασία, κατασκευή υποθέσεων, έλεγχος υποθέσεων, εξαγωγή συμπερασμάτων, διατύπωση κανόνων για το παρατηρούμενο μοντέλο κίνησης) και άρα μπορεί να προκαλέσει και την γνωστική τους εμπλοκή.

β) Προσφέρει το έναυσμα για την μελέτη της πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού μέσα από τη μαθηματικοποίηση ενός ρεαλιστικού προβλήματος βολής και ειδικότερα μέσα από την μελέτη της τροχιάς του κινητού.

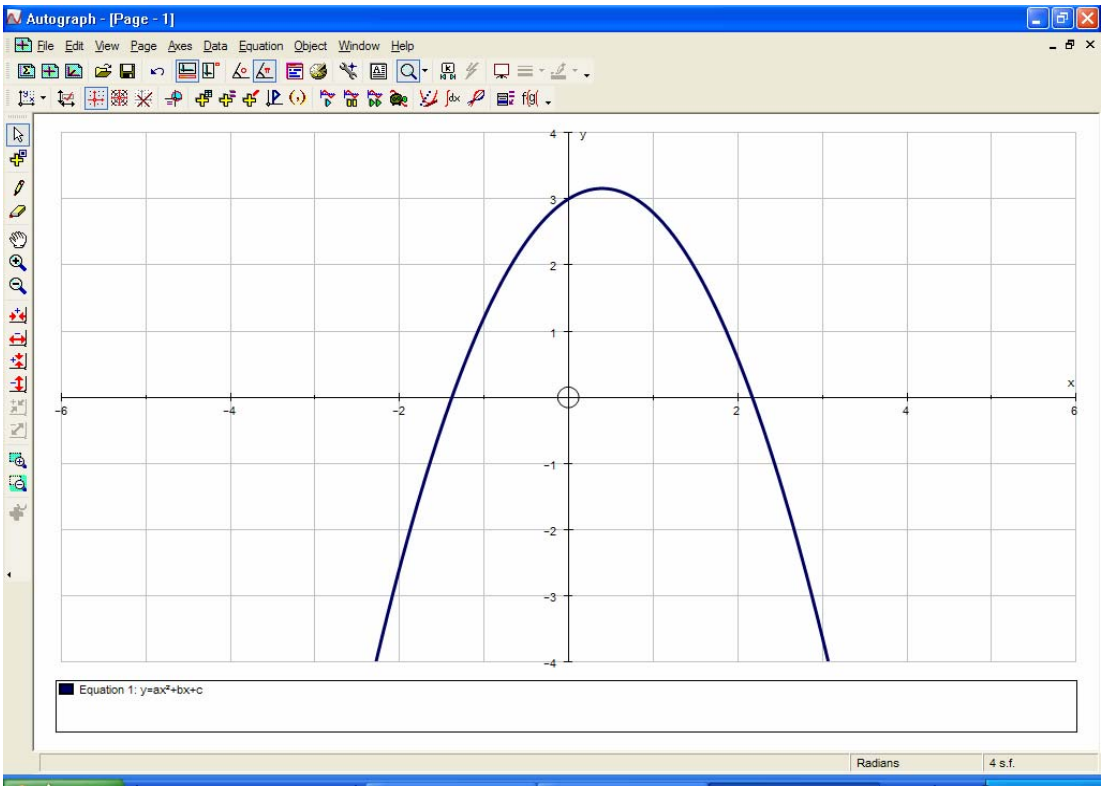
γ) Ο σχεδιασμός του λογισμικού επιτρέπει τις δυναμικές αναπαραστάσεις ιδιαίτερα μέσω των μεταβολέων των διανυσμάτων χαρακτηριστικό που σύμφωνα με τον Kynigos (1997) αποτελεί ένα ενδιαφέρον «όχημα» με το οποίο μπορούμε να συνδέσουμε συμβολικές και γραφικές μαθηματικές αναπαραστάσεις μέσω της παρατήρησης της εξέλιξης τους καθώς οι μαθητές μεταβάλουν άμεσα και κατά βούληση τις παραμέτρους. Επιπλέον ο «ζογκλέρ» διαθέτει άλλο ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτό της δυνατότητας προγραμματισμού το οποίο ενθαρρύνει την δημιουργικότητα των μαθητών (Kynigos, 1997) δίνοντας τους την ευκαιρία να δημιουργήσουν τις δικές τους δραστηριότητες.

**Το Autograph**

Το Autograph είναι ένα δυναμικό λογισμικό που λειτουργεί σε 3 επίπεδα: Μονοδιάστατα με Στατιστική και Πιθανότητες, δυδιάστατα με γραφικές παραστάσεις, σύστημα συντεταγμένων, μετασχηματισμούς και δυμεταβλητά δεδομένα και τριδιάστατα με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, σύστημα συντεταγμένων και μετασχηματισμούς.

Το Autograph έχει Βρετανική καταγωγή και χρησιμοποιείται σε αρκετά σχολεία στην Αγγλία για την διδασκαλία των μαθηματικών σε επίπεδο γυμνασίου, λυκείου και κολλεγίου (αντίστοιχα secondary και college levels). Εφαρμόζεται συστηματικά στο πρόγραμμα του Oundle School (http://www.oundleschool.org.uk/) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με υπερσύγχρονα μέσα διδασκαλίας όπως είναι οι αλληλεπιδραστικοί α-

σπροπίνακες (interactive whiteboards). Αποτελείται από ανεξάρτητα μαθηματικά αντικείμενα που επιλέγουν οι μαθητές προκειμένου να μελετήσουν μαθηματικές έννοιες όπως στην περίπτωση της παρούσας μελέτης όπου τα παιδιά ασχολήθηκαν με την διερεύνηση της μορφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=ax^2+bx+c$ χρησιμοποιώντας μεταβολείς των παραμέτρων (constant controller) και την κίνηση (animation controller). (εικόνα 2)




Εικόνα 2 Το Autograph

Το Autograph επιλέχθηκε ως ένα αντιπροσωπευτικό λογισμικό CAS- αλγεβρικό υπολογιστικό σύστημα που δίνει την δυνατότητα για δυναμικό χειρισμό παραμέτρων και παρατήρησης των μεταβολών των γραφικών παραστάσεων, στοιχείο που θεωρείται απαραίτητο στη μελέτη των συναρτήσεων. Η παρατήρηση των *patterns* δίνει στους μαθητές την ευκαιρία και την δυνατότητα να κάνουν υποθέσεις και να βγάλουν συμπεράσματα μέσα από την παραγωγή πολλών παραδειγμάτων, ενώ ταυτόχρονα τους ωθεί να κάνουν γενικεύσεις και να αναζητήσουν αιτιολόγηση.

Βασικό επιχείρημα για την επιλογή του Autograph, αποτελεί εκτός από την δυνατότητα δυναμικής διερεύνησης και κατασκευής γραφικών παραστάσεων, η αρτιότητα του ως υπολογιστικού εργαλείου και η ευκολία στη χρήση του από τους μαθητές, αφού μέσα σε μισή ώρα είχαν οι περισσότεροι μάθει τα βασικά του χαρακτηριστικά.

**Β) Οι δραστηριότητες.**

Στο πείραμα, όπως αναφέρεται και στον τίτλο έλαβαν μέρος μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου (2 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, δύο από την Α΄ και δύο από την Β΄ Λυκείου) και οι δραστηριότητες επιλέχθηκαν με βάση το γεγονός ότι τη χρονική στιγμή που έγινε το πείραμα (τέλος Φεβρουαρίου με αρχές Απρίλη 2006) οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί στο σχολείο την έννοια της συνάρτησης και είχαν μελετήσει την τετραγωνική συνάρτηση.

Η πρώτη δραστηριότητα ήταν δίωρη και για τις 3 ομάδες και περιλάμβανε μισή ώρα εξοικείωση με το περιβάλλον του «ζογκλέρ», όπου οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να ρωτήσουν για την χρήση των ψηφίδων και τον τρόπο λειτουργίας του λογισμικού αλλά και για τις δυνατότητες πειραματισμού και την ελευθερία παρέμβασης και μεταβολής των διαφόρων παραμέτρων του συστήματος. Σε όλες τις ομάδες δόθηκε αρχικά η οδηγία να επιχειρήσουν να πετύχουν με την μπάλα την ρακέτα του αντιπάλου μεταβάλλοντας κατάλληλα τα διανύσματα της ταχύτητας ενώ η δύναμη παρέμενε σταθερή και ίση με το βάρος. Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να δυσκολέψουν το παιχνίδι ώστε ο «αντίπαλος» να μη πετύχει τη ρακέτα εύκολα. Στο τέλος της δραστηριότητας ζητήθηκε από τους μαθητές να σχολιάσουν ελεύθερα αυτά που έκαναν και να πουν την γνώμη τους για το λογισμικό και την πιθανή του χρησιμότητα.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, που ήταν επίσης δίωρη, οι μαθητές ασχολήθηκαν με το λογισμικό Autograph. Για μισή περίπου ώρα έγινε μια ενημέρωση για το λογισμικό και την χρήση του κυρίως για την κατασκευή και μελέτη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και στη συνέχεια τους δόθηκαν δύο φύλλα εργασίας (Παράρτημα Α).

Στο φύλλο εργασίας 1 οι μαθητές ασχολούνται με δύο συναρτήσεις την ευθεία ($y=ax$ και $y=ax+b$) και την παραβολή ($y=ax^2$ και $y=ax^2+b$). Αρχικά (ερώτηση 1) ζητάμε τα ονόματα και ένα πρόχειρο σχήμα για τις $y=ax+b$ και $y=ax^2+b$. Στη συνέχεια (ερώτηση 2 και 3) οι μαθητές κατασκευάζουν μια ευθεία στο Autograph και παρατηρούν με την χρήση του constant controller τις μεταβολές της γραφικής της παράστασης σε σχέση με τις διάφορες

τιμές των παραμέτρων a και b, ενώ καλούνται να γράψουν τα συμπεράσματά τους και τις παρατηρήσεις τους. Στις ερωτήσεις 4 και 5 κάνουν μια αντίστοιχη εργασία για τις $y=ax^2$ και $y=ax^2+b$. Μια εύλογη απορία σ' αυτό το σημείο θα μπορούσε να είναι: για πιο λόγο υπάρχουν ερωτήσεις που αφορούν την ευθεία και γιατί απουσιάζει το πλήρες πολυώνυμο δευτέρου βαθμού; Το βασικό επιχείρημα στην πρώτη επιλογή, είναι ότι με την χρήση της παραμετρικής ευθείας, ωθούμε τα παιδιά στην παρατήρηση των μεταβολών και στη διατύπωση συμπερασμάτων μέσα από ένα απλό σχήμα όπως είναι η ευθεία. Η μετάβαση σ' ένα πιο δύσκολο επίπεδο όπου πλέον δουλεύουμε με την παραβολή είναι πιο εύκολη, αφού τα παιδιά έχουν εξοικειωθεί προηγουμένως με την αντίστοιχη εργασία στην ευθεία. Τέλος, η μελέτη του πλήρους πολυώνυμου δευτέρου βαθμού ($y=ax^2+bx+c$) θα αποτελούσε ερώτημα εκτός φύλλου εργασίας μόνο για τις ομάδες που θα ολοκλήρωναν τα δύο προηγούμενα φύλλα, με βάση το σκεπτικό μιας προοδευτικής σταδιακής προσέγγισης των χαρακτηριστικών της συνάρτησης και του τρόπου που οι παράμετροι επηρεάζουν το σχήμα της. Μια μόνο ομάδα (Β΄ Λυκείου) ολοκλήρωσε τη μελέτη του πολυωνύμου όπως θα φανεί στη ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Στο φύλλο εργασίας 2, οι μαθητές λύνουν ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τις βολές που έκαναν στον «ζογκλέρ». Ανοίγουν ένα αρχείο του Autograph όπου έχουν αποτυπωθεί κάποια σημεία από την τροχιά της μπάλας του ζογκλέρ σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έγιναν την προηγούμενη φορά και καλούνται να απαντήσουν σε τρία ερωτήματα:

**1.** Μπορείτε με ένα πρόχειρο σχήμα να περιγράψετε την τροχιά της μπάλας;

**2.** Ποια από τις συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο μπορείτε να πείτε ότι έχει ως γραφική παράσταση την συγκεκριμένη τροχιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**3.** Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης που διέρχεται από τα σημειωμένα σημεία και να περιγράψετε τι κάνετε και γιατί;

Μια πρώτη παρατήρηση ως προς τις δραστηριότητες με τα λογισμικά αφορά την διαφορετικότητα των δυο λογισμικών που δίνονται στα παιδιά και την διαφορετική προσέγγιση του μαθηματικού αντικειμένου που στην προκείμενη περίπτωση είναι η τετραγωνική συνάρτηση. Από τη μια μεριά στο «ζογκλέρ» οι μαθητές πειραματίζονται ελεύθερα όπως ακριβώς κάνουν με ένα παιχνίδι, ενώ στο Autograph ακολουθούν ένα αυστηρό στυλ δουλειάς όπου πρέπει να κινηθούν μέσα στα αυστηρά καθορισμένα πλαίσια του φύλλου ερ-

γασίας. Το λογισμικό του «ζογκλέρ» παραπέμπει σε ένα παιχνίδι ενώ του Autograph σε μαθηματικό εργαλείο. Τα κοινά σημεία των δραστηριοτήτων στα δύο λογισμικά είναι πως:

α) Οι δύο δραστηριότητες αναφέρονται άμεσα ή έμμεσα στην δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση αν και με διαφορετική προσέγγιση π.χ. στο ζογκλέρ η συνάρτηση υλοποιείται μέσω της τροχιάς της μπάλας που πραγματοποιείται σε κάθε βολή και της εξίσωσης της τροχιάς που βρίσκεται στην ψηφίδα της Logo, αντίστοιχα στο Autograph η μελέτη της συνάρτησης είναι άμεση και απαιτεί τη χρήση του μαθηματικού φορμαλισμού και της καρτεσιανής της αναπαράστασης

β) Οι δυο δραστηριότητες ταυτόχρονα δίνουν στο μαθητή τη δυνατότητα να πειραματιστεί, να παρατηρήσει τα αποτελέσματα των ενεργειών του, να διατυπώσει υποθέσεις και να τις επιβεβαιώσει,

γ) Προσφέρουν στο μαθητή μαθηματικά εργαλεία όπως τα διανύσματα (ζογκλέρ) και οι γραφικές παραστάσεις (Autograph) τα οποία μπορεί να χειριστεί με δυναμικό τρόπο κι αυτό αποτελεί θεμελιώδη διαφορά σε σχέση με αντίστοιχες δραστηριότητες με χαρτί και μολύβι.

Μια δεύτερη παρατήρηση που αφορά έμμεσα τις δραστηριότητες είναι πως από τους μαθητές ζητήθηκε να λειτουργήσουν συνεργατικά και να συντάξουν κοινές απαντήσεις στα ερωτήματά που τους τέθηκαν.

**Γ) Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων**

Οι δραστηριότητες των 3 ομάδων βιντεοσκοπήθηκαν και στη συνέχεια ακολούθησε απομαγνητοφώνηση των συζητήσεων με ταυτόχρονη περιγραφή των κινήσεων, των εκφράσεων των μαθητών και της κατάστασης της οθόνης σε κάθε περίπτωση, κατ' αυτό τον τρόπο προέκυψαν περίπου 35 φύλλα ή $35 \cdot 28 \cdot 2=1960$ σειρές υλικού οι οποίες στη συνέχεια κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις ομάδες με βάση: 1)την χρήση στρατηγικών όπως διατύπωση υποθέσεων, εκτέλεση πειράματος, διαδικασία δοκιμής λάθους, διατύπωση ερωτημάτων, αναζήτηση βοήθειας, 2) την έκφραση συναισθημάτων μέσα από τις λεκτικές τους παρατηρήσεις αλλά και την γλώσσα του σώματος όπως κινήσεις ανυπομονησίας γκριμάτσες, κραυγές χαράς, χειρονομίες και 3) επεισόδια στα οποία φαίνεται η γνωστική εμπλοκή των μαθητών .

Η αποτίμηση της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών έγινε με βάση έναν ορισμό της εμπλοκής που αποτελεί σύνθεση των ορισμών των Pintrich & De Groot (1990) και Blumenfeld et al (2004) (βλ. κεφάλαιο 2). Η γνωστική εμπλοκή στα μαθηματικά, στην παρούσα έρευνα περιγράφεται από δύο συνιστώσες: α) την γνωστική συνιστώσα που αναφέρεται στη σκέψη, τις στρατηγικές και τον έλεγχο που ασκεί ο μαθητής κατά την ενασχόληση του με μαθησιακά έργα με μαθηματικό περιεχόμενο σε περιβάλλον Η/Υ, β) την συναισθηματική συνιστώσα που αναφέρεται στις αντιδράσεις (ανία, αδιαφορία, ενδιαφέρον, συζήτηση) και τα συναισθήματα (ευχαρίστηση ή απαρέσκεια) που προκαλούνται κατά την εμπλοκή του με αυτά τα έργα και η οποία εκδηλώνεται με στοιχεία συμπεριφοράς όπως η επιμονή ενασχόλησης με ένα έργο, η αφιέρωση χρόνου, κόπου και προσπάθειας, το ενδιαφέρον κτλ. Η υψηλού επιπέδου εμπλοκή χαρακτηρίζεται από τη χρήση παραγωγικών στρατηγικών που προάγουν το έργο και αιτιολογούν επαρκώς τις αποφάσεις των μαθητών, οι συζητήσεις που δεν σχετίζονται με το πείραμα θεωρούμε ότι δείχνουν έλλειψη ενδιαφέροντος και χαλαρή εμπλοκή.

**Δ) Οι ομάδες**

Για λόγους ευκολίας οι 3 ομάδες αναφέρονται ως ομάδες Α, Β, Γ και η ερευνήτρια με Ε. Οι μαθητές της ομάδας Α είναι οι $A_1$ και $A_2$ και με αντίστοιχο τρόπο αναφέρονται και οι υπόλοιποι. Στην ομάδα Α συμμετέχουν δύο αγόρια Γ΄ Γυμνασίου, στην ομάδα Β έχουμε δύο αγόρια Α΄ Λυκείου και τέλος στην ομάδα Γ έχουμε δύο κορίτσια Β΄ Λυκείου. Το δείγμα των μαθητών θα μπορούσε να θεωρηθεί τυχαίο αφού προέρχονται από διαφορετικά σχολεία της Αθήνας. Η επίδοση στα μαθηματικά, των συγκεκριμένων μαθητών, την εποχή που έγινε η έρευνα κυμαινόταν από 13 μέχρι 19 της εικοσαβάθμιας κλίμακας αξιολόγησης του σχολείου ενώ σε κάθε ομάδα, έγινε προσπάθεια να συμπεριλαμβάνονται άτομα του ίδιου δυναμικού, ώστε να είναι όσο το δυνατό ισότιμη η συμμετοχή στις δραστηριότητες. Οι μαθητές των ομάδων Α και Β είχαν επίδοση 13-17 και της ομάδας Γ ήταν μαθήτριες του 19.

### 3.2 Οι δραστηριότητες στον «ζογκλέρ»

Η παρουσίαση των δεδομένων που θα ακολουθήσει, γίνεται μέσω της αναλυτικής περιγραφής των δρώμενων κάθε ομάδας και υποστηρίζεται από μέρος του απομαγνητοφωνημένου υλικού και στιγμιότυπων του λογισμικού και της βιντεοσκόπησης. Στη συνέχεια θα γίνει μια συγκεντρωτική και συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων με βάση:

α)την κατηγοριοποίηση στις δύο συνιστώσες που προαναφέραμε (γνωστική-συναισθηματική)

β) συγκριτική θεώρηση με βάση την εκτίμηση του επιπέδου της γνωστικής εμπλοκής, τη διάκριση της ηλικίας και του επιπέδου των γνώσεων των μαθητών.

**Η ομάδα Α στον ζογκλέρ**

Οι μαθητές στη ομάδα Α (είναι 2 αγόρια μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, χαμηλών σχολικών επιδόσεων) αρχικά με την βοήθεια και καθοδήγηση της ερευνήτριας ασχολήθηκαν με την ανακάλυψη του «ζογκλέρ» και των δυνατοτήτων που τους δίνει ώστε να καθορίσουν την κίνηση της μπάλας τόσο μέσα από το δυναμικό χειρισμό του διανύσματος της ταχύτητας όσο και από την αλλαγή των αρχικών συνθηκών που περιγράφονται στις εντολές στην ψηφίδα της Logo. Στο επεισόδιο που ακολουθεί οι μαθητές προσπαθούν να ξεκινήσουν το παιχνίδι που είναι να καταφέρουν να σημαδέψουν με την μπάλα την ρακέτα του αντίπαλού τους που είναι τοποθετημένη σε σταθερή θέση.

(Τα νούμερα δίπλα στην αρχή κάθε σειράς αντιστοιχούν στην αρίθμηση του απομαγνητοφωνημένου υλικού και για κάθε ομάδα η αρίθμηση ξεκινά από το 1.)

11. Ε: Πες μας ακριβώς τι έκανες;

12. $A_1$: Κατέβασα τη ρακέτα ακριβώς κάτω από τη μπάλα κατεβάζω και την ταχύτητα (αναφέρεται στο διάνυσμα της ταχύτητας)…Έκανα μαγικό; Ναι!

13. Ε: Πες μας λοιπόν τι έκανες;

14. $A_1$: Τι έκανα; Δεν μπορώ να πω… Έβαλα τη ρακέτα κάτω από τη μπάλα και κατάφερα να…

15. $A_2$: Να κάνει η μπάλα γκελ…να πηδήσει πάνω στην ρακέτα.

16. $A_1$: Να κάνω και κάτι άλλο που φαντάστηκα; (αλλάζει θέση στις ρακέτες ενώ η μπάλα αναπηδά στην ίδια θέση)

17. Ε: Αυτός ήταν ο στόχος σας;

18. $A_2$: Ποιος ήταν ο στόχος μας; (και οι δύο μαθητές αγνοούν την ερευνήτρια και ασχολούνται με την μπάλα και τις αλλαγές στο διάνυσμα της ταχύτητας)

19. Γιατί βάλατε το διάνυσμα της ταχύτητας έτσι; (κάθετα προς τα πάνω.)

Εικόνα 3: Η ομάδα Α με τον «ζογκλέρ»

20. $A_2$: Γιατί όπου πάει η ταχύτητα θα πάει και η μπάλα.(δείχνει με το δείκτη του την κίνηση της μπάλας στο υπολογιστή)

21. Ε: Και γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας ανεβοκατεβαίνει;

22. $A_1$: Τι είναι διάνυσμα; (Οι μαθητές έχουν μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του διανύσματος.)

23. $A_2$: Το βελάκι. Κοίτα το μεγαλώνω και η ταχύτητα μεγαλώνει. Ωχ χάθηκε η μπάλα!

(οι μαθητές συνεχίζουν να πειραματίζονται και το ποντίκι έρχεται στα χέρια του $A_2$)

29. Ε: Τι κάνεις εδώ Κώστα; (Ο Κώστας είναι ο μαθητής $A_2$)

30. $A_2$: Βάζω την ταχύτητα και την δύναμη διαγώνια ώστε να πάω κατευθείαν στη ρακέτα που είναι πιο δίπλα. Για να δούμε…

31. $A_1$: Δεν πρόλαβες να πιάσεις την ρακέτα …(Μετά από 6 προσπάθειες, οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι είναι αδύνατον να προλάβουν να πιάσουν την ρακέτα για να αποκρούσουν την μπάλα αφού έχουν ενεργοποιήσει μια εντολή βολής, εξάλλου αυτή είναι η φιλοσοφία του παιχνιδιού, οι μαθητές να αναγκαστούν να εστιάσουν στις αρχικές συνθήκες της βολής και όχι σε δεξιότητες απόκρουσης και ανακλαστικών).

55. $A_1$: (απευθύνεται στην Ε) Κυρία, δεν θα νικήσει κανείς, δεν μπορούμε να κάνουμε την μπάλα να πάει από τη μια ρακέτα στην άλλη.

56. Ε: Γιατί ασχολείστε με τη ρακέτα;

57. $A_2$: Να βάλουμε τη ρακέτα σα στόχο, σε μια θέση και να δούμε αν θα πετύχουμε. (επαναλαμβάνουν το πείραμα τοποθετώντας τα διανύσματα ταχύτητας και δύναμης διαγώνια δεξιά πιστεύοντας ότι έτσι θα πετύχουν την ρακέτα, το πείραμα επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά για 5 φορές με μικρότερη δύναμη και ταχύτητα αλλά κάθε φορά η μπάλα απομακρύνεται κάνοντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Οι μαθητές έχουν απογοητευτεί και αναρωτιούνται αν το μηχάνημα δουλεύει καλά.)

65. $A_2$: Κάτι δεν πάει καλά. Κυρία, είστε σίγουρη ότι δεν κάνει λάθος;

66. Ε: Τι να πω παιδιά, έχω δει να παίζουν και η μπάλα να πηγαίνει από την μια ρακέτα στην άλλη. Μέχρι στιγμής έχετε δοκιμάσει μόνο ένα συνδυασμό δύναμης και ταχύτητας πρέπει να το σκεφτείτε περισσότερο.

67. $A_1$: Αν βάλουμε πάλι τη δύναμη διαγώνια (δείχνει προς τα δεξιά) θα φύγει προς τα πάνω (εννοεί η μπάλα), ενώ αν μηδενίσουμε τη δύναμη τότε η μπάλα θα φύγει προς τα πάνω και με το βάρος που θα έχει θα πέσει στην άλλη ρακέτα προς τα κάτω. (Η δοκιμή τους οδηγεί σε αποτυχία αφού για F=0 η μπάλα κινείται ευθύγραμμα ομαλά)

68. $A_2$: Η μπάλα μας έφυγε πάλι. Δεν καταλαβαίνω, ας αλλάξουμε αυτά εδώ (δείχνει τα χ και ψ που είναι οι συνιστώσες της δύναμης)

69. $A_1$: Τετμημένη και τεταγμένη. Όχι, κοίτα τι κάναμε, πριν βάζαμε μια δύναμη δεξιά και η μπάλα πήγαινε προς τα κει (δείχνει δεξιά) μετά μηδενίσαμε τη δύναμη και η μπάλα πήγαινε με την ταχύτητα άρα η μπάλα κάνει …(διστάζει) Πώς τη λέμε την κίνηση με συνισταμένη 0; (Προσπαθεί να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις του από τη φυσική.)

70. $A_2$: Δε θυμάμαι, κάτι ομαλή. Ναι, με σταθερή ταχύτητα! Αυτό δεν μας κάνει…η μπάλα θέλουμε να κάνει καμπύλη και να πέσει πάνω στη ρακέτα και να γυρίσει.

71. $A_1$: (απευθύνεται στην Ε) Να βάλουμε τη δύναμη να πηγαίνει αριστερά!

72. Ε: Δοκιμάστε το να δούμε, αλλά προσπαθήστε να φέρετε στο μυαλό σας τι συμβαίνει όταν πετάτε μια μπάλα και για πιο λόγο πέφτει.

73. $A_2$: Η μπάλα πέφτει με το βάρος.

74. $A_1$: Το βρήκα! Η δύναμη είναι λίγο προς τα πάνω δεξιά και η ταχύτητα ίσια (εννοεί οριζόντια δεξιά). Αυτό δεν είναι;(προς την Ε, ενώ ταυτόχρονα παίρνει το ποντίκι από τον $A_2$ για να δοκιμάσει την υπόθεσή του)

Ακολουθούν 4 αποτυχημένες προσπάθειες, όπου σε καμία δεν τοποθετούν ως συνισταμένη δύναμη το βάρος, αφού είναι ιδιαίτερα ισχυρή η πεποίθηση ότι για να κινηθεί το σώμα πρέπει η δύναμη αναγκαστικά να έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα, ενώ ταυτόχρονα θεωρούν ότι αυτή η δύναμη εφαρμόζεται στιγμιαία και μετά παύει να δρα στο σώμα. Τελικά ο $A_1$ κάνει μια υπόθεση.

101. $A_1$: Θέλουμε να κατέβει η μπάλα και να πάει και δεξιά όμως όλες τις φορές μας φεύγει χωρίς να κατέβει άρα κάτι κάνουμε λάθος…Να κατέβει…αν η δύναμη είναι κάτω και η ταχύτητα πάνω ή η δύναμη πάνω και η ταχύτητα κάτω; Δοκίμασε. (απευθύνεται στον $A_2$ ενώ η βασική στρατηγική τους είναι η δοκιμή και το λάθος.)

102. $A_2$: Η δύναμη πάνω και η ταχύτητα κάτω…(δοκιμάζει) Όχι.(με απογοήτευση) Η δύναμη κάτω και η ταχύτητα πάνω… Τώρα κάνει ότι έκανε στην αρχή πηδάει πάνω στην ρακέτα.

103. $A_1$: Λοιπόν η μπάλα ξεκινάει πάντα με ότι της λέει η ταχύτητα και στη συνέχεια κάνει ότι της λέει η δύναμη.

104. Ε: Γιατί το λες αυτό;

105. $A_1$: Είδα αυτό εδώ (δείχνει την κλίση της ταχύτητας). Θα βάλουμε την ταχύτητα δεξιά πάνω και την δύναμη κάτω δεξιά….(μετά από λίγο πετυχαίνουν μια βολή)

106. Ε: Τι μορφή έχει η τροχιά της μπάλας; Αναγνωρίζετε κάτι που μάθατε πρόσφατα στα μαθηματικά;

107. $A_2$: Η τροχιά;

108. $A_1$: Ναι η γραμμή (κάνει μια υποθετική καμπύλη στον αέρα με το χέρι του), είναι κύκλος (εννοεί κυκλική);

109. $A_2$: Κυρία δεν είναι κυκλική έτσι; (Αναζητά επιβεβαίωση) .

110. Ε: Δεν ξέρω, δεν δικαιολογείτε αυτά που λέτε.

111. $A_2$: Κάποιες φορές όμως πήγε ευθεία…

112. $A_1$: Αυτό δεν ήταν κανονικό χτύπημα ήταν δοκιμή.

Η συζήτηση για την τροχιά της μπάλας δεν έχει συνέχεια καθώς οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν, ούτε ανακαλούν στην μνήμη τους, την συνάρτηση της παραβολής που έχουν πολύ πρόσφατα διδαχθεί στο σχολείο. Συνεχίζουν να παίζουν και να δοκιμάζουν βολές.

……..

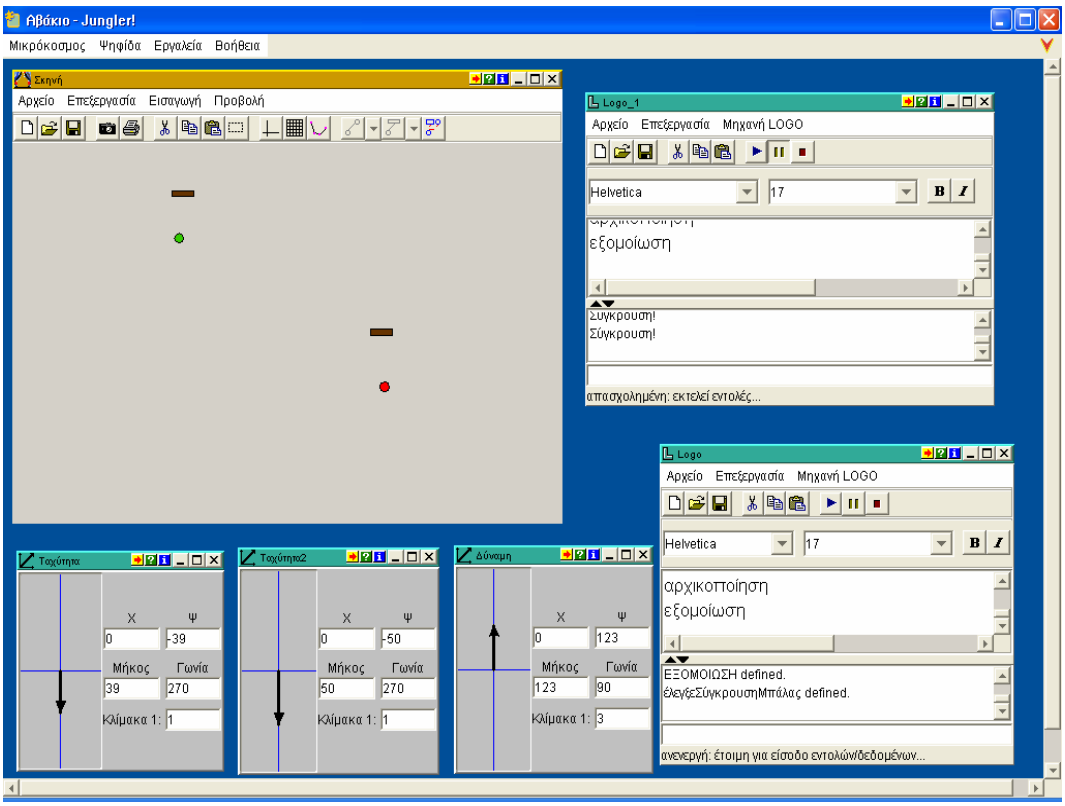
120. $A_1$: Αν βάζαμε τη δύναμη κάθετα κάτω, θα βάλω μικρή δύναμη και μεγάλη ταχύτητα με γωνία 140…Ναι αυτό ήταν το κατάφερα.

121. $A_2$: Να βάλουμε σκορ και να παίξουμε αλλά εγώ θα βάλω τις ρακέτες και εσύ τα βελάκια (εννοεί να καθορίσει τις παραμέτρους της βολής)

122. $A_1$: Εντάξει…..Ει… οι ρακέτες είναι πολύ μακριά. Με προκαλείς! Λοιπόν η δύναμη εδώ (την τοποθετεί κάθετα προς τα κάτω με μικρό μέτρο) και η ταχύτητα εδώ (μεγάλη ταχύτητα με κλίση 137). Ααχ ξέφυγε! Δεν μετράει, άλλη μία. (δοκιμάζει μεγαλύτερη δύναμη και το πετυχαίνει). 1-0 σημείωνε (προς τον συμμαθητή του)

Ο $A_1$ τοποθετεί τις ρακέτες τη μία πάνω και την άλλη κάτω ώστε να δυσκολέψει τον αντίπαλό του και το παιχνίδι συνεχίζεται για 10 λεπτά ώσπου κάποια στιγμή οι δύο παίκτες αποφασίζουν να αλλάξουν τους κανόνες και να μην κάνουν βολές, αλλά να προκαλέσουν «περίεργες» κινήσεις της μπάλας με ακραίες τιμές στην δύναμη και την ταχύτητα.

Το πιο ενδιαφέρον από τα «περίεργα» που πέτυχαν ήταν να κάνουν την μπάλα να αναπηδά με φορά προς τα κάτω έχοντας την μία ρακέτα πάνω από την μπάλα και την δύναμη να δρα με φορά προς τα πάνω!




Εικόνα 4: Η δύναμη και η ταχύτητα τοποθετούνται με αντίθετη φορά.

250. $A_1$: Θα δοκιμάσω κάτι άλλο…Μμμ να την βάλω (την μπάλα) να πηγαίνει κάτω και τη ρακέτα εδώ (δείχνει πάνω από την μπάλα) και τη δύναμη πάνω και την ταχύτητα κάτω…(δοκιμάζει) Ναι, ναι κοίτα τι κάνει!!

251. $E_1$: Τι κάνατε εδώ; Με τι μοιάζει η κίνηση της μπάλας;

252. $A_2$: Σαν να την κρατάει ένα αόρατο σκοινί και ξαναγυρνά πίσω είναι πολύ «περίεργο» (ο μαθητής είπε «cool»).

253. $A_1$: Όχι αόρατο σκοινί, είναι σαν αόρατο ελατήριο κολλημένο στη ρακέτα.

254. Ε: Πώς όμως το πέτυχες;

255. $A_1$: Το σκέφτηκα…Άλλαξα τα αρχικά (εννοεί τις αρχικές συνθήκες) και τα έβαλα έτσι (δείχνει στον υπολογιστή) και η μπάλα πάει προς τα κάτω γιατί η ταχύτητα που της έδωσα είναι προς τα κάτω ενώ η δύναμη είναι προς τα πάνω και έτσι η μπάλα ξαναγυρνά και έτσι έβαλα τη ρακέτα από πάνω της για να μη μου φύγει (εννοεί η μπάλα) και αυτό!

**Παρατηρήσεις-Ανάλυση**

Σχετικά με τη γνωστική συνιστώσα της εμπλοκής η ομάδα Α χρησιμοποιεί ως βασική στρατηγική τη **δοκιμή και το λάθος** σχεδόν σε όλη τη διάρκεια του πειράματος. Οι λέξεις «δοκίμασε», «δοκιμή» χρησιμοποιούνται με μεγάλη συχνότητα στο διάλογο των παιδιών (στ. 101 και αλλού). Βασικό χαρακτηριστικό της εργασίας τους είναι **η έλλειψη διατύπωσης υποθέσεων και επαρκούς αιτιολόγησης** των επιλογών τους ενώ μια υποτυπώδης αιτιολόγηση γίνεται ύστερα από παρέμβαση της ερευνήτριας (στ. 13-14, 19-20, 72-73, 104) και έχει ως βάση τη διαίσθηση και την εμπειρία που αποκτούν καθώς παίζουν με τον «ζογκλέρ». Οι μαθητές σε μία περίπτωση επιχειρούν να **ανακαλέσουν τις γνώσεις φυσικής** που έχουν (στ. 69-70) αλλά αυτή η προσπάθεια είναι άκαρπη είτε επειδή δεν μπορούν να συνδέσουν τις γνώσεις τους με αυτά που βλέπουν είτε γιατί δεν διαθέτουν επαρκείς γνώσεις. Η έννοια του διανύσματος χρησιμοποιείται με επιτυχία διαισθητικά και οι μαθητές χειρίζονται την ψηφίδα - διάνυσμα του «ζογκλέρ» για να κάνουν επιτυχημένες βολές (στ. 22). Ενώ κατά τη διάρκεια της παρουσίασης του «ζογκλέρ» από την ερευνήτρια (για περίπου μισή ώρα) οι μαθητές γνώρισαν τις δυνατότητες επέμβασης στο πρόγραμμα μέσω της Logo, δεν επιχείρησαν να ασχοληθούν μ' αυτή την ψηφίδα με δυο πιθανές αιτίες: είτε απορροφήθηκαν από τις δυνατότητες παιχνιδιού και την προσπάθεια να χειριστούν τις ψηφίδες των διανυσμάτων οπότε πρακτικά δεν πρόλαβαν να ασχοληθούν με μια τέτοια ιδέα, είτε δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν τις συναρτήσεις που περιγράφουν και καθορίζουν την εξομοίωση. Στο ερώτημα αν αναγνωρίζουν την μορφή που έχει η τροχιά της μπάλας σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έκαναν (στ. 106-111) απαντούν ότι αυτή είναι κυκλική κάτι που αποτελεί συνήθη παρανόηση αν και γνωρίζουν την γραφική παράσταση τετραγωνικής συνάρτησης που είχαν πρόσφατα διδαχθεί στο σχολείο.

Σχετικά με τη συναισθηματική συνιστώσα της εμπλοκής σε επίπεδα αντιδράσεων και προτιμήσεων παρατηρείται ότι το λογισμικό συγκέντρωσε την **απόλυτη προσοχή** των μαθητών εξ αρχής. Χαρακτηριστικό είναι πως στην περίπου δίωρη βιντεοσκόπηση οι μαθητές δεν έκαναν σχόλια μη συναφή με την συγκεκριμένη δραστηριότητα. Ταυτόχρονα έδειξαν και ιδιαίτερη **επιμονή** αφού παρά τις διαδοχικές αποτυχίες και την **αβεβαιότητα** που είχαν στις επιλογές τους συνέχισαν να προσπαθούν αν και χρησιμοποιούσαν αναποτελεσματικές τεχνικές επανάληψης του ίδιου πειράματος. Παρατηρήθηκε ότι η διαίσθηση

πως η δύναμη και η ταχύτητα πρέπει να έχουν την ίδια διεύθυνση ώστε να επιτευχθεί η βολή, είναι πολύ ισχυρή και έτσι προηγήθηκαν 5 άκαρπες επαναλήψεις πριν αλλάξουν τακτική (στ. 57). Οι μαθητές εκφράσανε την **δημιουργικότητα** τους ακόμα και αφού τυπικά είχε τελειώσει το πείραμα και είχαν πετύχει τις συνήθεις βολές. Έβαλαν τη **φαντασία** τους να δουλέψει και πέτυχαν «μαγικά»(στ. 12) και «cool» (στ 250-255) στιγμιότυπα.

Η γνωστική εμπλοκή της ομάδας Α με βάση τον ορισμό που έχουμε δώσει θα έπρεπε να χαρακτηριστεί χαμηλή διότι λείπει ένα πλαίσιο ικανοποιητικής αιτιολόγησης των ενεργειών, λείπει ένα σχέδιο, μια υπόθεση, εναλλακτικές λύσεις και γενικότερα η ερευνητική συμπεριφορά των μαθητών χαρακτηρίζεται από τυχαίες επιλογές. Οι μαθητές όμως είναι ευχαριστημένοι από το παιχνίδι και η δυσκολία που συνάντησαν δεν τους αποθάρρυνε αντιθέτως ένοιωσαν ικανοποίηση και ενθουσιασμό (στ. 57 και 65)

**Η ομάδα Β στον ζογκλέρ**

Η ομάδα Β αποτελείται από δύο αγόρια Α΄ Λυκείου, ο $B_1$ είναι μέτριων σχολικών επιδόσεων (13) ο $B_2$ είναι μαθητής του (17), εμφάνισαν πανομοιότυπες αντιδράσεις με αυτές της ομάδας Α. Δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα να πετύχουν μια βολή και χρειάστηκαν περίπου 45 λεπτά δοκιμών και αρκετών διαπραγματεύσεων και διαπληκτισμών μέχρι να αποδώσει η συνεργασία τους. Το καινούριο στοιχείο σ' αυτή την ομάδα είναι πως εξαρχής ενδιαφέρθηκαν για την ψηφίδα της Logo και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να διαλύσουν το παιχνίδι 3 φορές και να «κολλήσουν» το πρόγραμμα καθώς έκαναν ακραίες επιλογές προσπαθώντας να αλλάξουν και να εξερευνήσουν τον κόσμο του «ζογκλέρ».

Στα επεισόδια που ακολουθούν φαίνονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν και η τακτική που ακολουθούν προκειμένου να πετύχουν την πρώτη βολή.

Έχουν περάσει περίπου 20 λεπτά και οι μαθητές έχουν καταφέρει να κάνουν την μπάλα έπειτα από αλλεπάλληλες αποτυχημένες δοκιμές (πάνω από 20 αλλαγές στα αρχικά διανύσματα της δύναμης και της ταχύτητας) να αναπηδά στη ρακέτα ενώ αναρωτιούνται για το ρόλο της ταχύτητας και της δύναμης και επιχειρούν να σκεφτούν τι συμβαίνει σε μια πραγματική βολή.

182. $B_2$: Πρέπει να σκεφτούμε τι γίνεται όταν πετάμε τη μπάλα. Έχετε ένα μπαλάκι;(απευθύνεται στην Ε) (Βασική στρατηγική σ' αυτή την περίπτωση είναι μια νοητή

προσπάθεια επανάληψης του πειράματος σε πραγματικές συνθήκες και όχι στην προσομοίωση που φάνηκε να τους μπερδεύει.)

183. Ε: Δεν έχω πρόχειρο.

184. $B_2$: Τότε να το φανταστώ… Ας πούμε πως είμαστε και παίζουμε μπάλα και δίνουμε μια κλωτσιά τότε είναι σα δίνουμε μια δύναμη με κατεύθυνση όπου θέλουμε εμείς να πάει…και η μπάλα φεύγει και έχει μια ταχύτητα. Μου φαίνεται πως η ταχύτητα είναι πάντα όπως μπαίνει η δύναμη. (εννοεί ότι η δύναμη που εφαρμόζεται στο σώμα έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα)

185. Ε: Να σε ρωτήσω ένα πράγμα, δρα κάποια δύναμη στο σώμα από τη στιγμή που αυτό φεύγει από το πόδι σου;

186. $B_2$: Όχι.

187. $B_1$: Ναι.

188. Ε: Τι απ' τα δυο;

189. $B_1$: Εγώ θα πω το ξέρω, η δύναμη δίνει ενέργεια στη μπάλα και κινείται.

190. $B_2$: Δεν ρωτάει αυτό. Όταν φεύγει η μπάλα δεν υπάρχει πια δύναμη, αυτό κρατάει όσο ακουμπά το πόδι μας.

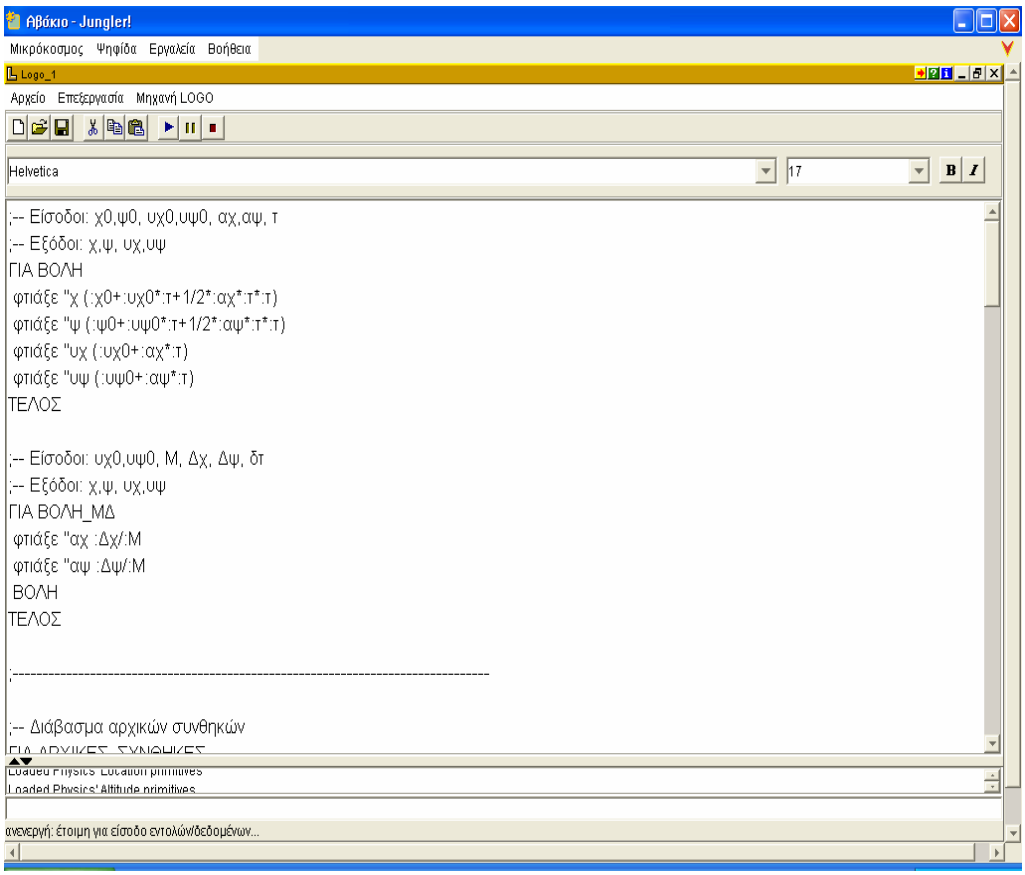
191. Ε: Δηλαδή αυτή τη στιγμή σ' αυτό το στυλό δεν ασκείται καμία δύναμη; (η Ε δείχνει ένα στυλό πάνω στο τραπέζι)

192. $B_1$: Είναι ακίνητο. Δεν υπάρχει δύναμη!

193. $B_2$: Μα έχουμε το βάρος για θυμήσου το ξέρουμε ότι πάντα σχεδιάζουμε ένα σώμα και το βάρος που είναι κάθετο…(εννοεί στο μάθημα της Φυσικής)

194. $B_1$: Αυτά είναι στους τύπους εκεί (δείχνει την ψηφίδα της Logo)

Οι μαθητές ασχολούνται με το πρόγραμμα που καθορίζει τις παραμέτρους του «ζογκλέρ» και σύντομα αναγνωρίζουν τις συναρτήσεις που περιγράφουν την βολή.




Εικόνα 5: Η ψηφίδα της Logo στον «ζογκλέρ»

201. $B_2$: Αυτό εδώ (δείχνει τα $u_x$ και $u_\psi$ στην εικόνα 5) είναι ταχύτητα και είναι δύο (γυρνάει στο διάνυσμα της ταχύτητας και αναγνωρίζει τις δύο συνιστώσες)

201. $B_1$: Τα χ και ψ είναι θέση και τα αχ και αψ ….α είναι η επιτάχυνση αλλά δεν τη βλέπουμε πουθενά. (εννοεί ότι δεν υπάρχει ψηφίδα διάνυσμα για την επιτάχυνση)

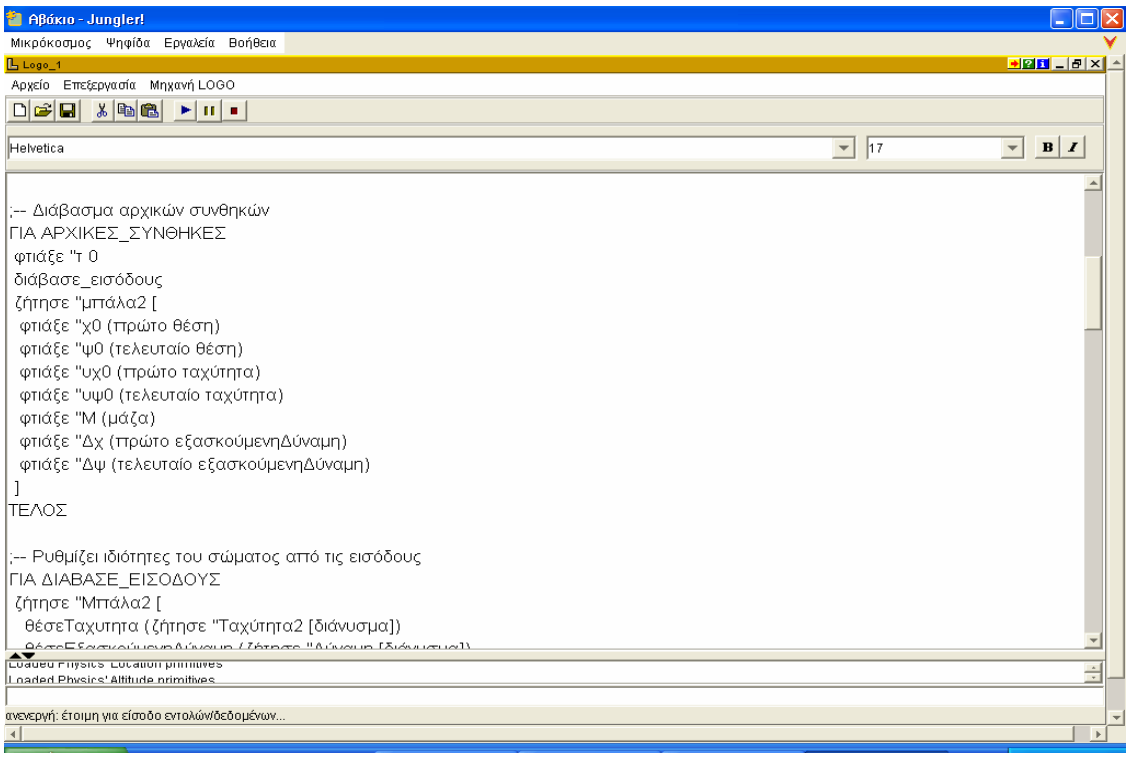
202. $B_2$: Να τα λέει εδώ Μ μάζα και Δχ, Δψ δύναμη (εικόνα 6). Στη φυσική έχουμε δύναμη ίσον μάζα δια επιτάχυνση…

203. Ε: Δεν λες σωστά τη σχέση.

204. $B_2$: …Εμ, δύναμη ίσον μάζα επι επιτάχυνση, είναι επί.

205. $B_1$: Και εδώ λέει φτιάξε "χ (:χ0+:υχ0*:τ+1/2*:αχ*:τ*:τ) πρέπει να είναι και άλλος τύπος ( απευθύνεται στην Ε). Το ταυ είναι χρόνος και το αστεράκι είναι επί;

206. Ε: Ναι.




Εικόνα 6: Η ψηφίδα της Logo στον «ζογκλέρ»

207. $B_2$: (απευθύνεται στον $B_1$) Λοιπόν ταχύτητα επί επιτάχυνση επί επιτάχυνση και 1/2 μπροστά…Γιατί δεν έβαλε επιτάχυνση στο τετράγωνο;… Τον ξέρουμε αυτό τον τύπο είναι στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

208. $B_1$: Η μπάλα δεν θέλουμε να πάει ευθεία. Μπερδεύτηκα τώρα…(σωπαίνουν για λίγο)

209. $B_2$: Είπατε ότι μπορούμε να τα πειράξουμε (απευθύνεται στην Ε και ζητάει άδεια να αλλάξει τις εντολές)

210. Ε: Αν αυτό θέλετε.

Οι μαθητές αλλάζουν το ½ με 10 και εξαφανίζουν την παράμετρο του χρόνου. Επιστρέφουν στο πείραμα και ανακαλύπτουν ότι:

216. $B_2$: Είναι ακίνητη κάναμε βλακεία. Δεν μπορούμε να εξαφανίσουμε το χρόνο βάλε ένα ταυ.( Ο $B_2$ έχει μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση από τον $B_1$ και παίρνει περισσότερες πρωτοβουλίες από τον συμμαθητή του)

217. $B_1$: ...Πάει ευθεία και φεύγει.

218. $B_2$: Βάλε τρία ταυ (επεμβαίνουν στο πρόγραμμα και αλλάζουν τον τύπο σε $\tau^3$)

219. $B_1$: Γιατί έγινε αυτό;

Η μπάλα έκανε μια τροχιά που αντιστοιχεί στην $y=ax^3$ και σε λίγο το πρόγραμμα κολλάει για πρώτη φορά, το πρόβλημα διορθώνεται και επαναλαμβάνεται η δοκιμή με αλλαγές στην εξίσωση της τροχιάς, ενώ ακολουθούν άλλα δύο «κολλήματα». Αυτές οι αλλαγές που επιχειρούν οι μαθητές δεν είναι σκόπιμες αλλά οφείλονται στην περιέργεια των παιδιών και τη διάθεσή τους να ανακαλύψουν τους συσχετισμούς μεταξύ της ψηφίδας της Logo και του πειράματος που υλοποιείται στη ψηφίδα-σκηνή του «ζογκλέρ».

250. $B_2$: Ακόμα δεν έχουμε κάνει τίποτα, δε νομίζω ότι πρέπει να συνεχίσουμε εδώ (εννοεί στην Logo).

251. $B_1$: Καλά, ας αρχίσουμε πάλι με αυτά εδώ, (δείχνει τις ψηφίδες των διανυσμάτων) αλλά να κάνουμε συνδυασμούς.

252. $B_2$: Να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα είναι προς τα πάνω, ώστε η μπάλα να εκτοξευτεί και η δύναμη είναι πλάγια, για να μπορέσει να πάει από κει (δείχνει την ρακέτα). Για να δω φύγε απ' τη μέση.

253. $B_1$: Δεν είναι δικό σου το παιχνίδι δώσε μου το ποντίκι. Δεν θα κάνεις εσύ ό, τι θέλεις. (Οι αποτυχίες έχουν δημιουργήσει εκνευρισμό και ο $B_1$ αισθάνεται αδικημένος σε σχέση με την κατοχή του ποντικιού επίσης αμφισβητεί τις αποφάσεις του $B_2$ που φέρεται ως αυθεντία.)

254. Ε: Παιδιά, γράφω και τον καυγά σας!

255. $B_2$: Λοιπόν, να βάλουμε την δύναμη αριστερά κάτω και την ταχύτητα αριστερά αλλά προς τα πάνω;

256. $B_1$: Και γιατί έτσι;

257. $B_2$: Τώρα παίζω εγώ.

258. $B_1$: Η κυρία είπε και οι δυο μαζί.

259. $B_2$: Ορίστε κοίτα σχεδόν πέτυχα…Λίγο πιο δω τη ρακέτα…Σε πια γωνία είχα βάλει τη δύναμη;…Αρχικοποίηση …Εξομοίωση…Insert. (Ο $B_2$ αγνοεί τον συμμαθητή του και εστιάζει στις ατομικές του προσπάθειες)…. Νάτο, νάτο κοίτα αυτό ήταν!

260. $B_1$: Μπράβο, αυτό δεν σου είπα να κάνεις πριν;

261. Ε: Μήπως μπορείτε να μου εξηγήσετε για πιο λόγο αυτή τη φορά πέτυχε το πείραμα;

262. $B_2$: Γιατί το έκανα εγώ.

263. $B_1$: (κοροϊδευτικά προς τον $B_2$) Μμμ… Η δύναμη έπρεπε να μπει κάτω ώστε το σώμα να κατέβει και η ταχύτητα προς τα πάνω για να εκτοξευτεί…

264. $B_2$: Να παίξουμε τώρα; (απευθύνεται στην Ε που γνέφει καταφατικά)

Για ένα δεκάλεπτο ακολουθεί μια «μάχη», όπου οι αντίπαλοι σκαρφίζονται περίεργες θέσεις για τις ρακέτες ώστε να δυσκολέψουν τον άλλο να σκοράρει. Σε μια περίπτωση ο $B_1$ απαίτησε από τον $B_2$ να πετύχει βολή σε ρακέτα που βρισκόταν πάνω από την μπάλα, ενώ ο $B_2$ απάντησε προκαλώντας τον να καταφέρει την μπάλα να κινείται από την μία ρακέτα στην άλλη όχι από το πάνω μέρος αλλά από κάτω!

312. $B_1$: Να βάλουμε τις ρακέτες κοντά στο ίδιο ύψος …Έτσι, και την ταχύτητα δεξιά κάτω και την δύναμη δεξιά (την τοποθετεί οριζόντια). Ωχ έφυγε ευθεία…

313. $B_2$: Η δύναμη πρέπει να είναι προς τα πάνω για να γυρίσει η μπάλα. Βάλε τη δύναμη εδώ (δείχνει στον υπολογιστή) και η ταχύτητα είναι καλή ίσως λιγότερη.

314. $B_1$: Δεν το πιστεύω πάει και από κάτω, αυτό δεν μπορούμε να το κάνουμε πραγματικά; (Εικόνα 7)

315. Ε: Αν είχαμε μαγνήτες και σιδερένιες μπάλες…

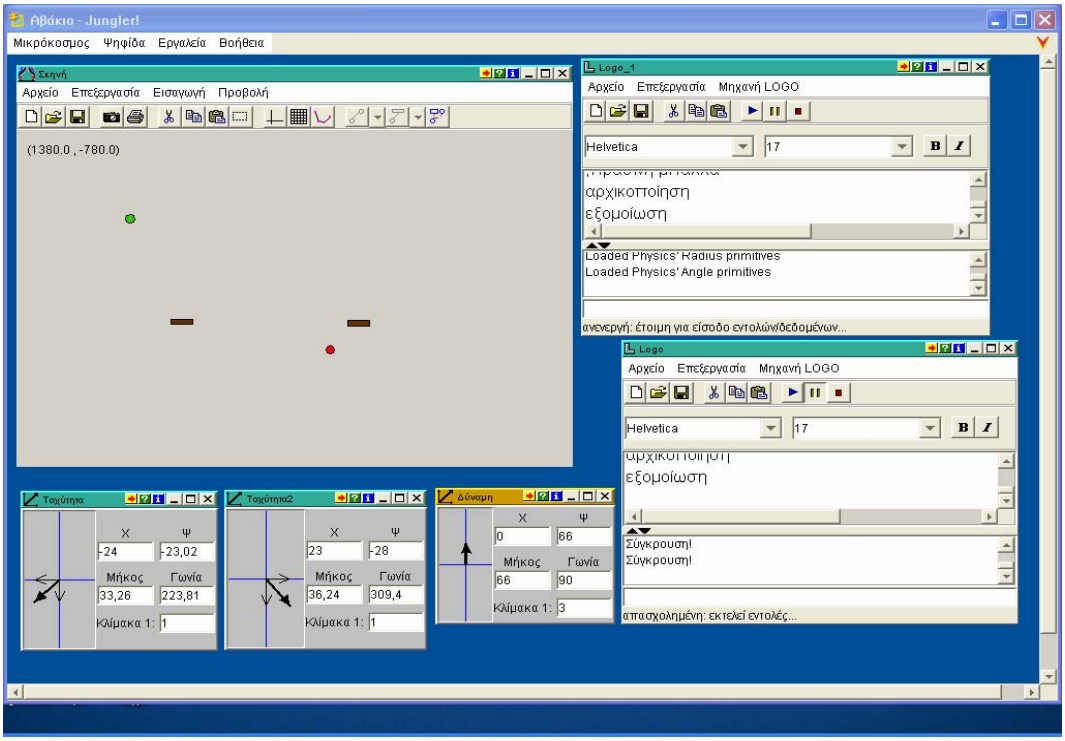
316. $B_2$: Μου άρεσε τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;

317. Ε: Πρώτα θέλω να σκεφτείτε και να μου απαντήσετε προσεχτικά. Τι μορφή έχει η τροχιά που κάνει αυτή τη στιγμή η μπάλα, έτσι όπως πάει ανάποδα;

318. $B_1$: Κάνει κύκλο. Όχι ολόκληρο κάνει ένα κομμάτι. Ένα…

319. $B_2$: Τόξο. Αλλά δεν είμαι σίγουρος έχουμε και άλλες γραμμές που κάνουν καμπύλη χωρίς να είναι κύκλος. Δεν μπορώ να πω με σιγουριά…

320. Ε: Για θυμηθείτε στη Logo τι ήταν αυτά που είδατε, αυτά καθορίζουν την τροχιά της μπάλας…




Εικόνα 7: Η ανάποδη βολή

321. $B_2$: Οι τύποι! Για να δω…(ανοίγει τις εντολές στη ψηφίδα Logo) Ο τύπος που αλλάξαμε ήταν αυτός εδώ [δείχνει τις εντολές φτιάξε "χ (:χ0+:υχ0*:τ+1/2*:αχ*:τ*:τ)

φτιάξε "ψ (:ψ0+:υψ0*:τ+1/2*:αψ*:τ*:τ)]. Όμως δεν καταλαβαίνω τι μπορεί να μας λέει αυτό; (κοιτάει ερωτηματικά την Ε)

322. $B_1$: Και γιατί να μην είναι τόξο;

323. Ε: Σκεφτείτε λίγο ακόμα υπάρχει κάτι που κάνατε πρόσφατα στα μαθηματικά και μπορεί να σας βοηθήσει.

324. $B_1$: (απευθύνεται στον $B_2$) Τι κάναμε πρόσφατα στα μαθηματικά;

325. $B_2$: Συναρτήσεις, ευθεία, τριώνυμο, υπερβολή… κι εδώ έχουμε καμπύλη αλλά δεν βλέπω κανένα τριώνυμο. ( ο μαθητής έχει ένα δίκιο αφού ο τύπος δεν έχει την τυποποιημένη μορφή του τριωνύμου που έχει συνηθίσει να βλέπει στα μαθηματικά και έτσι αδυνατεί να κάνει τη σύνδεση. Η συζήτηση δεν συνεχίστηκε περισσότερο και οι δύο μαθητές επέστρεψαν στο παιχνίδι και παρέμειναν ακόμα και αφού τελείωσε η βιντεοσκόπηση.)

**Παρατηρήσεις-Ανάλυση**

Οι διάφορες στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές της Β ομάδας κυρίως με πρωτοβουλία του μαθητή $B_2$ δείχνουν ένα διαφορετικό επίπεδο γνωστικής εμπλοκής ίσως πιο σύνθετο απ' αυτό της ομάδας Α. Ενώ κυριαρχεί η δοκιμή και το λάθος και γενικά ο **πειραματισμός**, η ομάδα χρησιμοποιεί και άλλες μεθόδους για να μπορέσει να πετύχει τη βολή. Στους στ. 182, 183, 184 ο μαθητής **επιχειρεί να φανταστεί μια πραγματική βολή** που την εκτελεί ο ίδιος και την αναλύει ώστε να μπορέσει να χειριστεί την αντίστοιχη κατάσταση-πρόβλημα στον «ζογκλέρ». Μια τρίτη εναλλακτική λύση που ανακαλύπτουν είναι να ανοίξουν τις εντολές στην ψηφίδα της **Logo** (στ. 201-206) όπου τελικά αναγνωρίζουν τα μεγέθη αλλά έχουν πρόβλημα κατανόησης στη σύνδεση των τύπων με το φαινόμενο. Το ιδιαίτερο στοιχείο στη στρατηγική της Β ομάδας είναι πως δεν διστάζουν να «χαλάσουν» το πρόγραμμα προκειμένου να δουν πως «δουλεύει» και αυτό είναι μια **πειραματική τακτική διερεύνησης ακραίων περιπτώσεων** που τουλάχιστον τους οδήγησε σε χρήσιμες διαπιστώσεις όπως ότι αν απαλείψουμε το χρόνο το σώμα δεν κινείται ενώ με πρωτοβάθμιο χρόνο το σώμα κινείται ευθύγραμμα (στ.216-217). Αλλάζοντας την τον βαθμό της μεταβλητής «τ» που αντιπροσωπεύει το χρόνο πετυχαίνουν και άλλες μορφές κίνησης που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις ευθείας ή ακόμα και της $y=ax^3$(στ. 218-219). Χρησιμοποιούν τη λέξη «**υπόθεση**» όταν πρόκειται να εκτελέσουν μια δοκιμή και οδηγούνται σε μια επιτυχημένη βολή χρησιμοποιώντας την εμπειρία που αποκτούν παίζοντας με τον «ζογκλέρ» και τη **διαίσθηση** τους.

Ισχυρή και σ' αυτή την ομάδα είναι η πεποίθηση ότι ταχύτητα και δύναμη πρέπει υποχρεωτικά να έχουν την ίδια φορά (στ.184), γεγονός που προκάλεσε το μεγαλύτερο μέρος της καθυστέρησης στην εκτέλεση της βολής. Στο ερώτημα τι μορφή έχει η τροχιά της μπάλας, ο $B_1$ απαντά ότι είναι τόξο κύκλου, ενώ ο $B_2$ προβληματίζεται γιατί γνωρίζει ότι υπάρχουν και άλλες καμπύλες γραμμές που δεν είναι κυκλικά τόξα (στ. 317-319). Η Ε επεμβαίνει και τους ωθεί να θυμηθούν τα μαθηματικά που έχουν πρόσφατα διδαχθεί στο σχολείο, η επέμβαση δεν είναι επιτυχημένη αφού από τη μία αναφέρουν το τριώνυμο, ως συνάρτηση που δίνει καμπύλη γραφική παράσταση αλλά δεν αναγνωρίζουν στους τύπους της Logo κάτι που να επιβεβαιώνει την θέση αυτή. Όπως ακριβώς συνέβη και με την ομάδα Α έτσι και η ομάδα Β δεν συνδέει τα γνωστικά αντικείμενα των μαθηματικών και

της φυσικής με το πείραμα στο «ζογκλέρ» κατά συνέπεια τα επιχειρήματά που χρησιμοποιούν είναι επιφανειακά ενώ η αιτιολόγηση των ενεργειών τους υποτυπώδης.

Στο συναισθηματικό μέρος της εμπλοκής κυριαρχεί το στοιχείο του **ανταγωνισμού** το οποίο απέδωσε στο τέλος του πειράματος την «ανάποδη βολή». Οι μαθητές έδειξαν **επιμονή** αφού ακόμα και μετά από 20 αποτυχημένες απόπειρες συνέχισαν να αναζητούν τρόπο να εκτελέσουν την βολή, η επιμονή τους και η **περιέργεια** τους τούς ώθησε να «διαλύσουν» (στ. 209-219) το πρόγραμμα αναζητώντας απαντήσεις. Αν και οι απαντήσεις ήταν λιγοστές οι δύο μαθητές και ιδιαίτερα ο $B_1$ που ήταν και ο πιο «αδύνατος» έδειξαν **ενθουσιασμό** με το παιχνίδι και τις δυνατότητες που είχαν να κάνουν πράγματα πολύ δύσκολα υπό κανονικές συνθήκες.(στ. 316)

**Η ομάδα Γ στον ζογκλέρ**

Η ομάδα Γ αποτελείται από δυο μαθήτριες Β΄ Λυκείου, με πολύ καλές σχολικές επιδόσεις (19). Τα κορίτσια δούλεψαν συνεργατικά αλλά αρχικά δυσκολεύτηκαν να πετύχουν την πρώτη βολή. Σ' αντίθεση με τα αγόρια, τα κορίτσια ήταν πολύ συντηρητικά στις υποθέσεις που έκαναν και δεν επιχείρησαν να μελετήσουν ακραίες καταστάσεις ή να «διαλύσουν τον «ζογκλέρ» για να δουν πως δουλεύει, αντίθετα επανέλαβαν αρκετές φορές την ίδια αποτυχημένη προσπάθεια μέχρι να απορρίψουν την αρχική τους διαίσθηση για το πώς θα επιτευχθεί η βολή και χρειάστηκε να επιστρατεύσουν τις γνώσεις τους στη φυσική για να πετύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στο επεισόδιο που ακολουθεί οι μαθήτριες προσπαθούν από κοινού να διαμορφώσουν ένα πλαίσιο υποθέσεων αφού έχουν απογοητευτεί από την πειραματική διαδικασία. (10 επαναλήψεις πειράματος με σχεδόν ίδιες αρχικές συνθήκες όπου δύναμη και ταχύτητα έχουν την ίδια φορά).

185. $Γ_1$: Δεν δοκιμάζω άλλη φορά πρέπει να το σκεφτούμε. Κάτι είναι λάθος… Λοιπόν βάλαμε την ταχύτητα πάνω δεξιά και την δύναμη το ίδιο είδαμε τις γωνίες $80^o$ και στις δύο και μετά προσομοίωση (είναι εντολή της Logo που ενεργοποιεί τη βολή με τις αρχικές συνθήκες που επιλέγει ο παίκτης)… Η μπάλα έφυγε ευθεία προς τα πάνω ενώ έπρεπε να γυρίσει και να πέσει στην άλλη ρακέτα! (η $Γ_1$ επιχειρεί ανακεφαλαίωση των ενεργειών τους μέχρι στιγμής για να μπορέσει να εντοπίσει το λάθος και ταυτόχρονα αναζητεί την αιτία της αποτυχίας των επιλογών τους)

186. $Γ_2$: Να σκεφτούμε τι γίνεται στις βολές; Έχουμε μια αρχική ταχύτητα βολής $u_0$ που την θυμάμαι πλάγια εκτός και αν είναι κατακόρυφη (εννοεί) βολή προς τα πάνω. Να πάρω ένα χαρτί; (απευθύνεται στην Ε) Έχουμε το σώμα και την βολή (σημειώνει μια καμπύλη) και σε μια θέση σημειώνουμε την ταχύτητα που εφάπτεται στη τροχιά της μπάλας…

187. $Γ_1$: Συνήθως την αναλύουμε σε $u_x$ και $u_y$.

188. $Γ_2$: Ναι, αλλά η δύναμη ποια θα είναι.

189. $Γ_1$: Την εφαρμόσαμε αρχικά και έτσι το σώμα απέκτησε κινητική ενέργεια που γίνεται δυναμική…Όμως η δύναμη που βάζουμε δρα όλη την ώρα, σωστά; (αναζητά επιβεβαίωση από την Ε που γνέφει καταφατικά). Αν σε ένα σώμα εφαρμόζεται σταθερή δύναμη τότε το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση και κινείται με την ίδια φορά και κατεύθυνση που έχει η δύναμη. (η μαθήτρια επαναλαμβάνει το γνωστό δεύτερο νόμο μηχανικής του Newton). Επομένως έτσι όπως βάζαμε τη δύναμη η μπάλα έφευγε ευθεία έξω από την οθόνη.

190. $Γ_2$: Γι' αυτό δεν γυρνούσε πίσω (η μπάλα). Αν όμως βάλουμε τη δύναμη… (γυρνάει στο χαρτί της που έχει σχεδιάσει τη βολή) Υπάρχει δύναμη όσο γίνεται η βολή; Εε…

191. $Γ_1$: Εγώ θα σχεδίαζα το βάρος… Ναι, αυτό πρέπει να βάλουμε, το βάρος είναι, μόνο έτσι θα γυρίσει η μπάλα εδώ (δείχνει την άλλη ρακέτα διαγράφοντας μια καμπύλη τροχιά με το χέρι στον αέρα)

192. $Γ_2$: Πάρε (δίνει στη $Γ_1$ το ποντίκι) δοκίμασε το εσύ, εγώ το σκέφτομαι (η $Γ_2$ δεν έχει πειστεί εντελώς και ζητά την πειραματική επιβεβαίωση της υπόθεσης που έχει κάνει η $Γ_1$)

193. $Γ_1$: Ωραία, μμ… Θα βάλω τη δύναμη εδώ και την ταχύτητα εκεί (τοποθετεί την δύναμη κατακόρυφα προς τα κάτω για να έχει το βάρος και την αρχική ταχύτητα πλάγια προς τα πάνω δεξιά) Insert. Και ναι, ναι επιτέλους!

194. $Γ_2$: Είχες δίκιο αυτό ήταν.

Στη συνέχεια οι δυο μαθήτριες χάνουν το ενδιαφέρον τους για τον «ζογκλέρ», θεωρούν ότι δεν είναι απαραίτητο να παίξουν αντίπαλες, το μόνο που κάνουν επιπλέον είναι να επιχειρήσουν ταυτόχρονη βολή και με τις δύο μπάλες ώστε να πετύχουν αυτό που κάνει ένας πραγματικός «ζογκλέρ» με πολλές μπάλες. Γνωρίζοντας την διαδικασία δεν δυσκο-

λεύονται καθόλου και το παιχνίδι παύει να έχει μυστικά γι' αυτές. Το επόμενο ζήτημα που διαπραγματεύονται είναι η ερώτηση που έγινε και στις 3 ομάδες:

248. Ε: Για πείτε μου τώρα που βλέπουμε τις μπάλες να πηγαίνουν από τη μια ρακέτα στην άλλη, τι γραμμή νομίζετε ότι διαγράφει η τροχιά της μπάλας;

249. $Γ_1$: Μου έρχεται να πω κυκλική…

250. $Γ_2$: Θα μπορούσε να είναι.

251. $Γ_1$: Πρέπει να ξέρουμε την εξίσωση της κίνησης (εννοεί την εξίσωση τροχιάς). Στην πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα είναι …(γράφει) $s=u_0 t-1/2 g t^2$

252. $Γ_2$: Αν ήταν κύκλος θα έπρεπε να ήταν $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=ρ^2$ (η $Γ_2$ αναφέρει την καρτεσιανή εξίσωση κύκλου με κέντρο $(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ την οποία διδάσκονται στην Β΄ Λυκείου μαζί και με τις υπόλοιπες κωνικές τομές, στα μαθηματικά της Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης)

253. $Γ_1$: Ποιο είναι το x και το y σ' αυτή την περίπτωση; …(σωπαίνουν για λίγο κοιτώντας το χαρτί με την εξίσωση) Συνήθως λύνουμε ως προς y άρα μάλλον το s είναι y και το t είναι x (η μαθήτρια αναφέρεται στο συνήθη τρόπο γραφής μιας συνάρτησης του y με ανεξάρτητη μεταβλητή το x κατ' αυτό τον τρόπο μετασχηματίζει την αρχική σχέση που περιέχει σύμβολα φυσικής σε σχέση που περιέχει οικεία μαθηματικά σύμβολα)

254. Ε: Γράψε τώρα τον τύπο έτσι όπως τον σκέφτηκες. (η μαθήτρια γράφει $y= u_0x-1/2 ax^2$)

255. $Γ_2$: Αν είχαμε μόνο αυτό το κομμάτι (δείχνει $y=1/2 ax^2$) θα έλεγα ότι είναι παραβολή.

256. Ε: Γιατί;

257. $Γ_1$: Εσείς μας το έχετε πει η $y=2px^2$ είναι παραβολή. (η μαθήτρια χρησιμοποιεί τις γνώσεις της στις κωνικές τομές όπου το σχολικό βιβλίο εξετάζει μόνο δύο περιπτώσεις παραβολών τις $y=2px^2$ και $x=2py^2$ αυτό έχει ως αποτέλεσμα τελικά οι δύο μαθήτριες να μπερδευτούν)

258. $Γ_2$: Και το άλλο κομμάτι (αναφέρεται στον όρο $y= u_0x$) είναι μια ευθεία από την αρχή των αξόνων…Προσθέσαμε μια ευθεία σε μια παραβολή; Η παραβολή πρέπει να είναι

ανάποδη με p<0….Λέω βλακείες; (έχει ανασφάλεια για όσα λέει και ζητά επιβεβαίωση από την Ε)

259. Ε: Καλά τα λες συνέχισε.

260. $Γ_1$: Αφού δεν είναι κύκλος…δεν είναι έλλειψη, δεν είναι υπερβολή και σίγουρα δεν είναι ευθεία το μόνο που μένει είναι μια ανάποδη παραβολή! (η $Γ_1$ καταφεύγει στη εις άτοπο απαγωγή για να δώσει απάντηση στο ερώτημα.)

261. Ε: Γιατί δεν είναι ευθεία;

262. $Γ_1$: Σίγουρα δεν είναι, αφού η μπάλα κάνει καμπύλη!

Στη συνέχεια ύστερα από ερώτηση της Ε δικαιολογεί πλήρως χρησιμοποιώντας τους τύπους γιατί αποκλείει όλες τις κωνικές τομές που έχει αναφέρει, όμως αν και νοιώθει αυτοπεποίθηση για τις γνώσεις της θεωρεί ότι μπορεί να υπάρχουν κι άλλες γραμμές που δεν γνωρίζει και η συζήτηση λήγει με μια παράκληση.

272. $Γ_1$: Κυρία θα μας πείτε μετά πια είναι η σωστή απάντηση;

**Παρατηρήσεις-Ανάλυση**

Η ομάδα Γ χρησιμοποιεί ποικιλία στρατηγικών για να πετύχει την πρώτη βολή. Αρχικά επιχείρησαν να θέσουν διαισθητικά τις αρχικές συνθήκες κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο που έκαναν και οι ομάδες Α και Β. Μετά από 10 αποτυχημένες προσπάθειες όπου επαναλάμβαναν το ίδιο σχεδόν πείραμα αποφασίζουν να σκεφτούν πριν πράξουν. Στη συνέχεια ανακεφαλαιώνουν τις ενέργειές τους αναζητώντας το λάθος τους (στ. 185) και σχεδιάζουν μια βολή στο χαρτί για να καταλάβουν καλύτερα τι γίνεται (στ. 186-188). Επιστρατεύουν τις γνώσεις τους από την φυσική και γενικά ότι γνωρίζουν που σχετίζεται με βολές (στ. 189-190) και διατυπώνουν μια υπόθεση την οποία στη συνέχεια επιβεβαιώνουν πειραματικά (στ. 192-193).

Παρατηρούμε ότι οι δυο μαθήτριες ακολουθούν μια **επιστημονική,** σε μικρογραφία, **προσέγγιση** του προβλήματος της βολής αφού η στρατηγική τους εκτός από την **δοκιμή και το λάθος** που εγκαταλείπεται γρήγορα, περιλαμβάνει **ανακεφαλαίωση** και ανάλυση της εργασίας που έχει γίνει, δημιουργία ενός σχήματος που αντιπροσωπεύει την βολή επομένως χρήση του μέσου **χαρτί-μολύβι** και **αναζήτηση και αναφορά στις προηγούμενες γνώσεις** τους που αφορούν τις βολές και τους νόμους της μηχανικής. Η υπόθεση επι-

βεβαιώνεται επιτυχώς με επανάληψη του πειράματος και διόρθωση των αρχικών συνθηκών της βολής. Η γνωστική εμπλοκή των μαθητριών θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως υψηλού επιπέδου με χρήση γνωστικών και μεταγνωστικών στρατηγικών και με επαρκή έλεγχο στα αποτελέσματα και την αιτιολόγηση των ενεργειών τους.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η συζήτηση που αφορά το είδος της γραμμής που αποτελεί την τροχιά της μπάλας, αφού η ομάδα Γ είναι η μόνη από τις 3 ομάδες που κατάφερε να απαντήσει στο συγκεκριμένο ερώτημα σωστά! Οι δυο μαθήτριες έχουν καλή γνώση φυσικής και μαθηματικών και εύκολα απορρίπτουν την απάντηση που προκύπτει διαισθητικά, ότι δηλαδή, η τροχιά της μπάλας είναι κυκλική (στ.249). Για να φτάσουν στο σωστό συμπέρασμα γράφουν πρώτα την εξίσωση της τροχιάς σε ένα χαρτί και στη συνέχεια **μετασχηματίζουν τις μεταβλητές s και t σε y και x** αντίστοιχα ώστε να διευκολυνθούν στην αναγνώριση με βάση τους μαθηματικούς τύπους των κωνικών τομών. Οι τύποι των κωνικών τομών τους είναι πρόσφατοι και γνωστοί και έτσι απορρίπτεται η εξίσωση κύκλου, έλλειψης και υπερβολής. Η ύπαρξη δύο όρων στην εξίσωση που ο ένας παραπέμπει σε ευθεία και ο άλλος σε παραβολή (στ.257-258) αρχικά δημιουργεί σύγχυση στις δυο μαθήτριες στη συνέχεια όμως ακολουθώντας ένα είδος **απαγωγής σε άτοπο (**στ. 260-262) καταλήγουν στη σωστή απάντηση ότι δηλαδή πρόκειται για μια «ανάποδη παραβολή».

Σε συναισθηματικό επίπεδο οι μαθήτριες δείχνουν ενδιαφέρον αλλά όχι ενθουσιασμό για το παιχνίδι και η προσέγγιση τους διαρκεί όσο δεν πετυχαίνουν την βολή, στη συνέχεια χάνουν το ενδιαφέρον τους αν και νοιώθουν ικανοποίηση που κατάφεραν να αποκρυπτογραφήσουν τα μυστικά του «ζογκλέρ».

### 3.3 Οι δραστηριότητες στο Autograph

Αφού ολοκλήρωσαν και οι τρεις ομάδες την εργασία στον «ζογκλέρ» ασχολήθηκαν για ένα περίπου δίωρο στο δεύτερο λογισμικό το Autograph. Στο πρώτο μισάωρο όπως ακριβώς έγινε και με το «ζογκλέρ» οι μαθητές εξοικειώθηκαν με το λογισμικό με την βοήθεια της ερευνήτριας και στη συνέχεια τους δόθηκαν δύο φύλλα εργασίας στα οποία έπρεπε να απαντήσουν από κοινού.

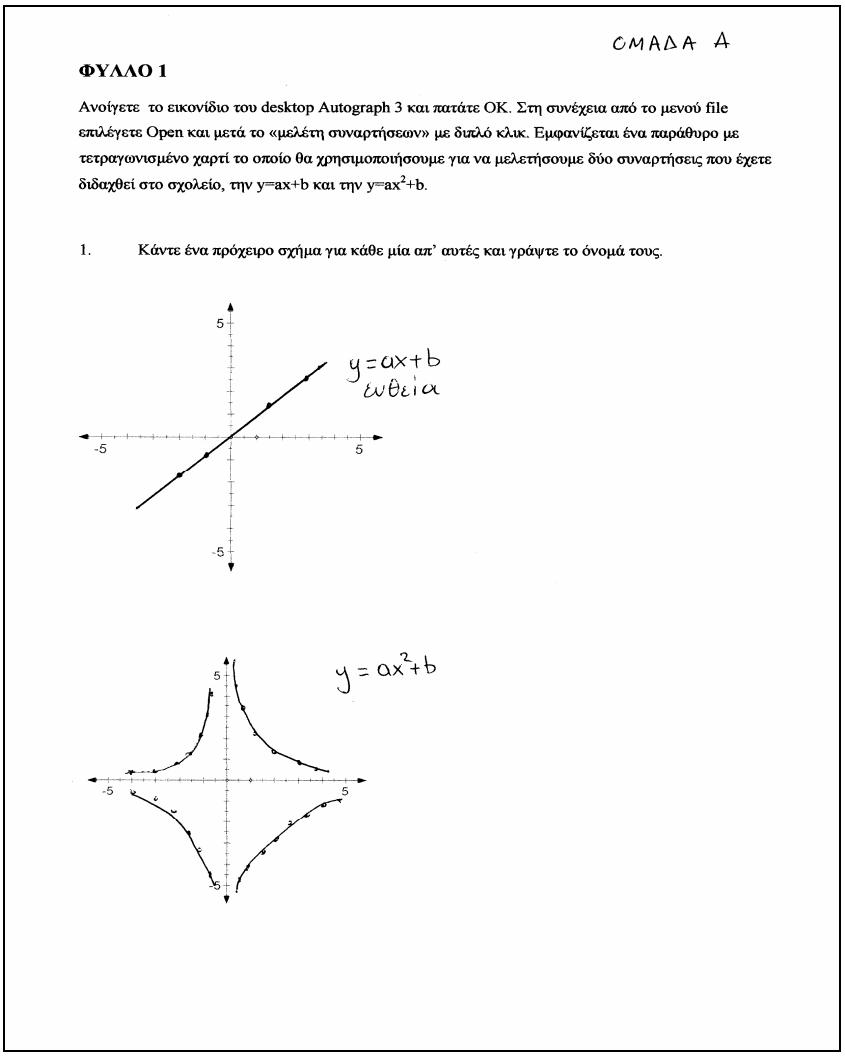
Επειδή ακριβώς υπήρχαν τα φύλλα εργασίας μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα σε κάθε ερώτηση και για τις 3 ομάδες ενώ κάποια ενδιαφέροντα επεισόδια θα παρουσιαστούν πιο αναλυτικά

**Το 1$^{ο}$ φύλλο εργασίας στο Autograph**

Το ερώτημα 1 που υπάρχει στο φύλλο 1 είναι μια δραστηριότητα που προηγείται της χρήσης του Autograph και είχε διπλό στόχο α) να μας δώσει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε τις γνώσεις των μαθητών για τις δυο συναρτήσεις (ευθεία και τετραγωνική συνάρτηση) και τη μορφή της γραφικής τους παράστασης και β) πιθανά να τους βοηθήσει να ενεργοποιήσουν ή και να επαναφέρουν στη μνήμη τους αυτές τις γνώσεις ώστε να τις χρησιμοποιήσουν στις υπόλοιπες ενέργειες:

1. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για κάθε μια από τις $y=ax+b$ και $y=ax^2+b$ και γράψτε το όνομά τους.

Το ερώτημα αυτό τίθεται πριν από την εργασία στο Autograph και σκοπό έχει να διερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές οι οποίοι έχουν διδαχθεί στο σχολείο τόσο τη ευθεία όσο και την δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση τις αναγνωρίζουν και τις σχεδιάζουν σωστά. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ενώ για την ευθεία η αναγνώριση και ο σχεδιασμός είναι επιτυχής και για τις 3 ομάδες, αντίθετα για την παραβολή που αντιπροσωπεύεται από την $y=ax^2+b$ υπάρχει αρκετός προβληματισμός και διαφορετικές απόψεις ενώ μόνο η ομάδα Γ έδωσε το όνομα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στα σχήματα (εικόνες 8, 9, 10) που ακολουθούν βλέπουμε τις απαντήσεις της κάθε ομάδας:



ΟΜΑΔΑ Α

**ΦΥΛΛΟ 1**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Στη συνέχεια από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το «μελέτη συναρτήσεων» με διπλό κλικ. Εμφανίζεται ένα παράθυρο με τετραγωνισμένο χαρτί το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε δύο συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο, την y=ax+b και την $y=ax^2+b$.

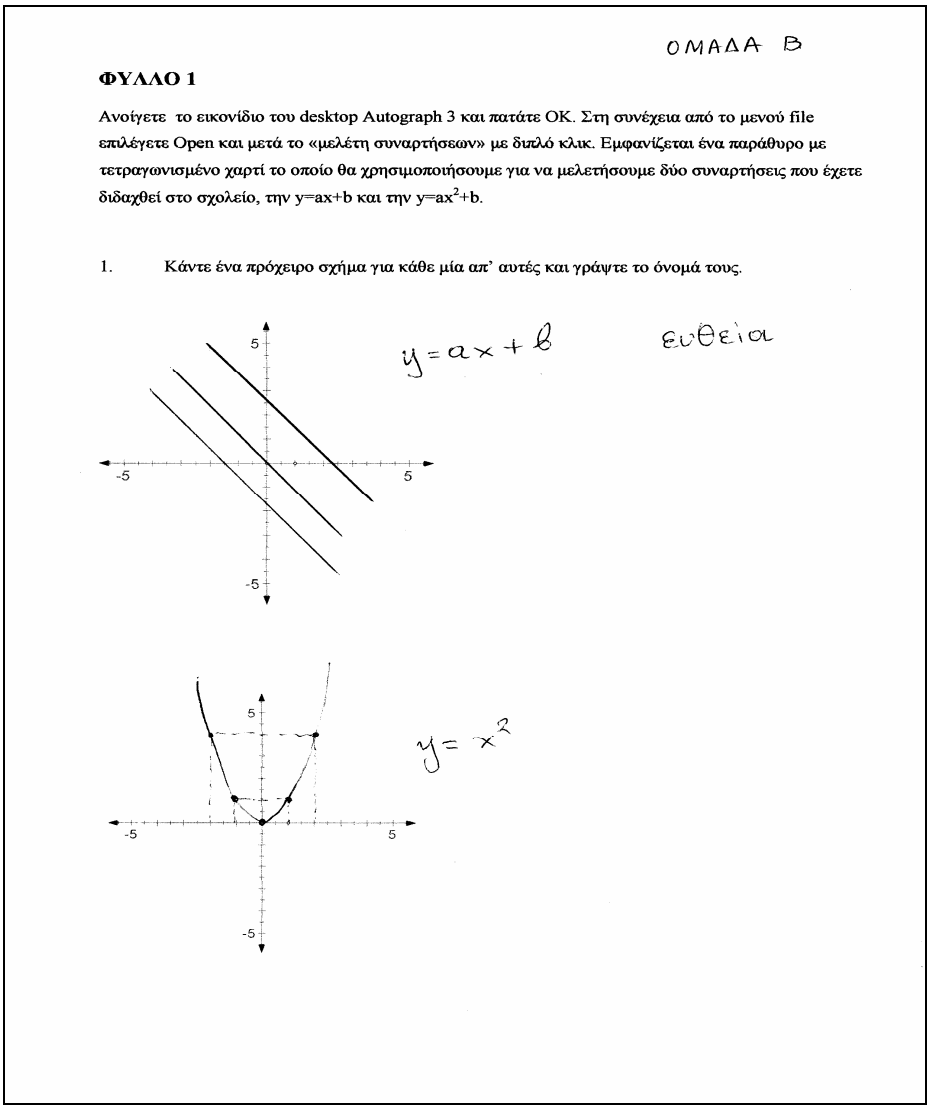
1. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για κάθε μία απ' αυτές και γράψτε το όνομά τους.



Εικόνα 8. Η απάντηση της ομάδας Α στην ερώτηση 1 του 1ου φύλλου εργασίας.

Παρατηρούμε ότι η ομάδα Α αναγνωρίζει την γραφική παράσταση της ευθείας και μπορεί να κάνει ένα πρόχειρο σχήμα που την αντιπροσωπεύει, παρόλο που σχεδιάζει μόνο την ειδική περίπτωση όπου η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Στη γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης, παρατηρούμε ότι οι μαθητές της ομάδας Α έχουν μια πλήρη σύγχυση με τις ισοσκελείς υπερβολές y=1/x και y=-1/x, οι οποίες διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα της Γ΄ Γυμνασίου α-μέσως μετά την $y=ax^2+bx+c$.



ΟΜΑΔΑ Β

**ΦΥΛΛΟ 1**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Στη συνέχεια από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το «μελέτη συναρτήσεων» με διπλό κλικ. Εμφανίζεται ένα παράθυρο με τετραγωνισμένο χαρτί το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε δύο συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο, την y=ax+b και την $y=ax^2+b$.

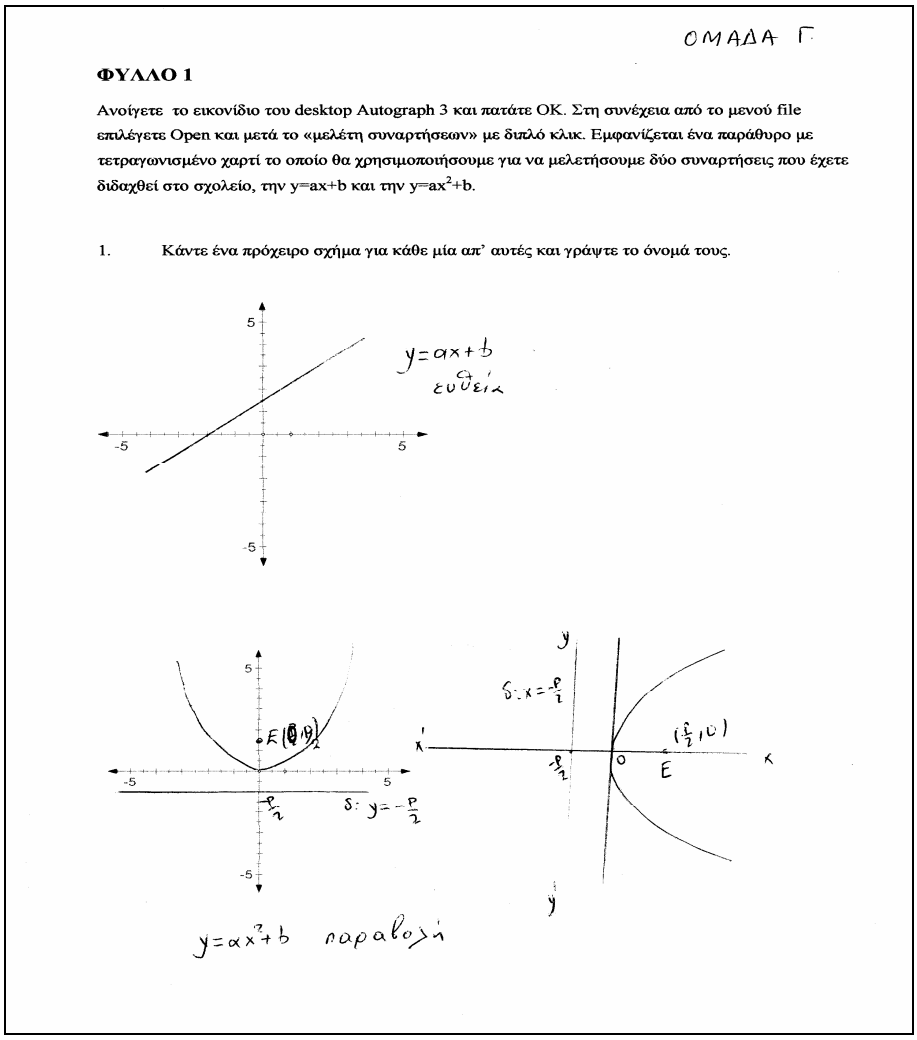
1. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για κάθε μία απ' αυτές και γράψτε το όνομά τους.



Εικόνα 9. Η απάντηση της ομάδας Β στην ερώτηση 1 του 1ου φύλλου εργασίας.

Η ομάδα Β αναγνωρίζει την ευθεία(εικόνα 9) και τις παράλληλες μετατοπίσεις της ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου β και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την ευθεία ως συνάρτηση απ' ότι με άλλα είδη συναρτήσεων.

Η γραφική παράσταση της $y=x^2$ αποτελεί ειδική περίπτωση της $y=ax^2+b$, για a=1, b=0 και μπορεί να θεωρηθεί επιτυχημένη αναγνώριση της συνάρτησης, έστω και αν οι μαθητές δεν αναφέρουν ότι πρόκειται για την παραβολή.



ΟΜΑΔΑ Γ

**ΦΥΛΛΟ 1**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Στη συνέχεια από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το «μελέτη συναρτήσεων» με διπλό κλικ. Εμφανίζεται ένα παράθυρο με τετραγωνισμένο χαρτί το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε δύο συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο, την y=ax+b και την $y=ax^2+b$.

1. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για κάθε μία απ' αυτές και γράψτε το όνομά τους.



Εικόνα 10. Η απάντηση της ομάδας Γ στην ερώτηση 1 του 1ου φύλλου εργασίας.

Οι μαθήτριες στη ομάδα Γ αναγνωρίζουν και τις δύο συναρτήσεις αλλά έχουν ένα μικρό πρόβλημα με την παραβολή. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Β΄ Λυκείου οι παραβολή διδάσκεται στα μαθηματικά της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης ως κωνική τομή στην Αναλυτική Γεωμετρία, ενώ η δευτεροβάθμια πολυωνύμική συνάρτηση $y=ax^2+bx+c$ μελετάται στην Α΄ Λυκείου, αυτή η διαφορετική προσέγγιση της παραβολής πρώτα ως πολυώνυμο και στη συνέχεια ως κωνική τομή δημιουργεί όπως φάνηκε στις μαθήτριες της ομάδας Γ΄ μια δυσκολία κατανόησης. Για παράδειγμα η δεύτερη γραφική παράσταση που έχουν κατασκευάσει δεν αποτελεί συνάρτηση, αλλά είναι η παραβολή $y^2=2px$ με εστία E(p/2,0) και διευθετούσα x=-p/2.

Οι ερωτήσεις 2,3,4,5 αφορούν δραστηριότητα στο Autograph που σχετίζεται με τη διερεύνηση της μορφής της γραφικής παράστασης ευθείας και πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Χαρακτηριστικό στοιχείο αυτής της δραστηριότητας είναι ο δυναμικός χειρισμός του μεταβολέα των σταθερών (constant controller), που επιτρέπει την κίνηση της κάθε γραμμής καθώς οι μαθητές αλλάζουν τις τιμές των παραμέτρων. Οι απαντήσεις τους ήταν σε μικρό ή μεγάλο βαθμό ακριβείς, ενώ η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιούν για να εκφράσουν και να διατυπώσουν την σκέψη τους κυμαίνεται από απλοϊκή (Εικόνα 11 ομάδα Α) μέχρι σχεδόν ακριβής και σαφής (Εικόνα 13 ομάδα Γ).

Είναι φανερό πως η εμπειρία οι γνώσεις και η αυτοπεποίθηση που διαθέτει η ομάδα Γ αντανακλώνται στις απαντήσεις τους. Οι άλλες δυο ομάδες περιέγραψαν τις παρατηρήσεις τους αλλά η διερεύνηση τους παρουσιάζει ελλείψεις. Για παράδειγμα η απάντηση της ομάδας Α στο ερώτημα 2 (Εικόνα 11) παρουσιάζει κενά καθώς δεν είναι σαφές τι σημαίνει η έκφραση η ευθεία «ανεβαίνει», πιθανά να εκφράζεται έτσι η έννοια της αύξουσας συνάρτησης και στην αντίθετη περίπτωση της φθίνουσας. Στο ερώτημα 4 η παραβολή βαφτίζεται «κούπα» από τους μαθητές προκειμένου να περιγράψουν τη μορφή που παίρνει μέσα από μεταβολές του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Οι συζητήσεις των μαθητών έτσι όπως καταγράφηκαν στην βιντεοσκόπηση εστιάστηκαν αρχικά στην διαδικασία εφαρμογής των εντολών του φύλλου εργασίας και στη συνέχεια στην παρατήρηση των αποτελεσμάτων των ενεργειών τους. Η διατύπωση των απαντήσεων δυσκόλεψε ιδιαίτερα τις ομάδες Α και Β και γενικά το γράψιμο δεν φάνηκε να τους ευχαρίστησε ιδιαίτερα, προσπάθησαν να διεκπεραιώσουν τυπικά την εργασία και δεν έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το λογισμικό παρά μόνο στο σημείο που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τον μεταβολέα των παραμέτρων όπου οι αντιδράσεις τους ήταν κυρίως επιφωνήματα θαυμασμού για τις δυνατότητες που τους έδινε το λογισμικό.

ΟΜΑΔΑ Α

**2**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y=ax και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k που λέγεται constant controller και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Όταν μεγαλώνει το α και είναι θετικό η ευθεία ανεβαίνει.
Όταν το α είναι αρνητικό η ευθεία αλλάζει θέση και κατεβαίνει

**3.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y= ax+b και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

Αλλάζουμε το b και όταν γίνεται από 0 σε 1.
η ευθεία ανεβένει παράλληλα προς τα πάνω

**4**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Όταν το α είναι θετικό η κοίλα κοιτάει πάνω και όταν γίνεται αρνητικό κοιτάει κάτω.

**5.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2+b$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

Όταν αλλάζουμε το b η κοίλα κινείται πάνω ή κάτω.

Εικόνα 11. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Α

ΟΜΑΔΑ Β

**2**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y=ax και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k που λέγεται constant controller και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Με a θετικό η y=ax μετακινείται από αριστερά προς τα δεξιά με a αρνητικό πάει αντίθετα.

**3.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y= ax+b και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

Όσο μεγαλώνει το b η ευθεία μετακίνεται προς τα πάνω και μόλις το μειώσαμε άρχισε να κατεβαίνει

**4**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Με θετικό άλφα η παραβολή είναι στραμμένη πάνω, όσο μεγαλώνει το (α) η παραβολή κλείνει όταν το (α) γίνεται μείον ένα η παραβολή ήταν στραμμένη προς τα κάτω

**5.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2+b$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

με β = 1 η παραβολή κινείται ένα προς τα πάνω και όσο μεγάλωνε το β τόσο ανέβαινε η παραβολή.

Εικόνα 12. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Β

ΟΜΑΔΑ Γ.

**2**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y=ax και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k που λέγεται constant controller και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Με $a>0$ η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο ενώ με $a<0$ στο 2ο και 4ο. Αν έχουμε $a=0$ τότε η ευθεία είναι ο xx'. Το a είναι η κλίση της ευθείας και ισχύει $a=εφω$ όπου ω η γωνία της ευθείας με τον θετικό ημιάξονα ox

**3.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y= ax+b και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

~~Το b~~ Όταν αλλάζει το b η ευθεία κινείται παράλληλα προς τα πάνω όταν $b>0$ και προς τα κάτω όταν $b<0$ Όταν είναι $b=0$ τότε η ευθεία γίνεται η πρώτη περίπτωση $y=ax$

**4**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

Το a επηρεάζει το άνοιγμα της γραφ. παράστασης και το αν θα έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο. Όταν είναι $a>0$ τότε έχουμε ∪ ενώ για $a<0$ έχουμε ∩ Αν το a μεγαλώνει το άνοιγμα στενεύει και ανάποδα.

**5.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2+b$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

Τι b κάνει ότι και στην περίπτωση της $y=ax+b$ και αλλάζει πάνω κάτω τη θέση της $y=ax^2$. Πάει πάνω όταν $b>0$ και κάτω $b<0$. Για $b=0$ ~~η~~ έχουμε $y=ax^2$

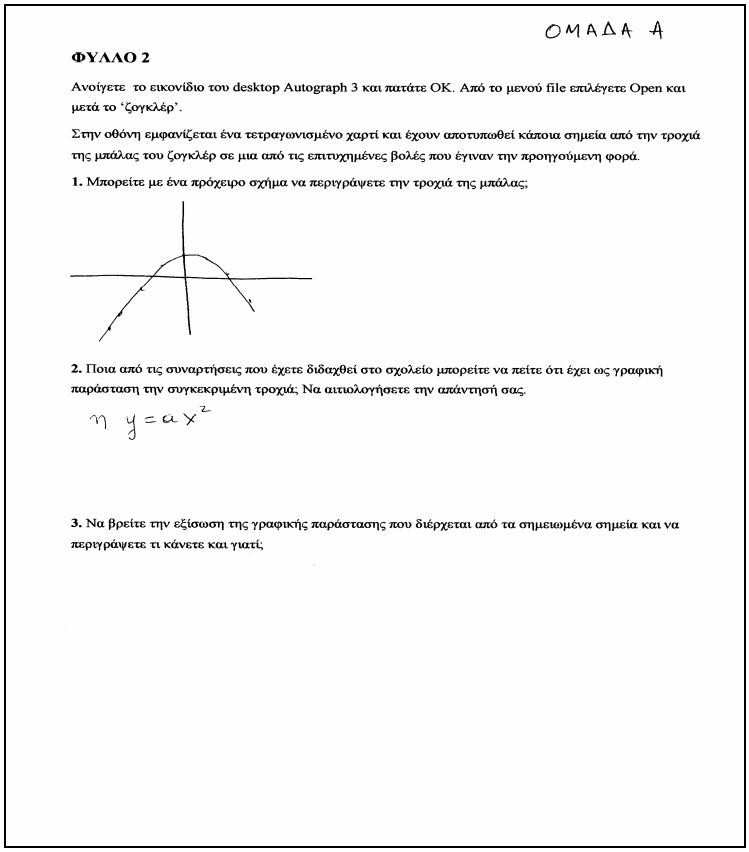
Εικόνα 13. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Γ

**Το 2ο φύλλο εργασίας στο Autograph**

Το δεύτερο φύλλο εργασίας στο Autograph περιέχει 3 δραστηριότητες που θα μπορούσαν να θεωρηθούν δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος. Οι μαθητές άνοιξαν ένα αρχείο του Autograph το οποίο περιείχε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο είχαν αποτυπωθεί σημεία από την τροχιά της μπάλας του «ζογκλέρ» σε μια από τις επιτυχημένες βολές. Ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν πρόχειρα την τροχιά της μπάλας (ερώτηση 1 φύλλο 2), να πουν αν γνωρίζουν πια συνάρτηση μπορεί να έχει μια τέτοια μορφή, να αιτιολογήσουν την απάντησή τους (ερώτηση 2 φύλλο 2) και τέλος να βρουν την εξίσωση της τροχιάς της μπάλας που διέρχεται από τα συγκεκριμένα σημεία (ερώτηση 3 φύλλο 2). Δεν δόθηκαν περιορισμοί στη χρήση του μέσου δηλαδή οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουν είτε χαρτί και μολύβι είτε το Autograph για να λύσουν το πρόβλημα. Οι απαντήσεις των μαθητών φαίνονται στις εικόνες 14, 15 και 16.

Οι τρεις ομάδες έκαναν σωστά το πρόχειρο σχήμα της παραβολής και αναγνώρισαν σχετικά εύκολα την $y=ax^2+b$ κάτι που είναι λογικό αφού προηγουμένως είχαν ασχοληθεί στο φύλλο 1 με τη μελέτη αυτής ακριβώς της συνάρτησης. Μόνο η ομάδα Α διαφοροποιήθηκε και έγραψε ότι η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την τροχιά της μπάλας είναι η $y=ax^2$ (Εικόνα 14). Οι μαθήτριες της ομάδας Γ θέλησαν να δώσουν δύο απαντήσεις στις οποίες επαναλαμβάνεται ο διαχωρισμός που έχουν κάνει εξ αρχής ανάμεσα στην παραβολή που λειτουργεί ως συνάρτηση και στην παραβολή ως κωνική τομή. Στο φύλλο 2 της ομάδας Γ (Εικόνα 16) φαίνεται και το λάθος που έχουν κάνει οι μαθήτριες αφού η $x^2=2py$ είναι μεν παραβολή αλλά έχει κορυφή την αρχή των αξόνων ενώ η τροχιά που έχουν σχεδιάσει είναι μετατόπισή της προς τα πάνω κατά μια σταθερά. Οι μαθητές στην ομάδα Β δικαιολογούν την επιλογή της $y=ax^2+b$ (Εικόνα 15) ως λογική συνέπεια της προηγούμενης δραστηριότητας τους στο φύλλο 1 και νοιώθουν την ανάγκη να γίνουν πιο σαφείς και επεξηγηματικοί και έτσι διευκρινίζουν ότι το a πρέπει να είναι αρνητικό και το b θετικό, δίνουν συγκεκριμένες πιθανές τιμές των παραμέτρων $a=-1$ και $b=2$.

Σε αντίθεση με τις 2 πρώτες ερωτήσεις του φύλλου 2 που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ρουτίνες, η τρίτη ερώτηση δημιούργησε αρκετό προβληματισμό και συζήτηση και προκάλεσε μια πιο ουσιαστική γνωστική εμπλοκή των μαθητών σε σχέση με τις προηγούμενες δραστηριότητες στο Autograph.



ΟΜΑΔΑ Α

**ΦΥΛΛΟ 2**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το 'ζογκλέρ'.

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα τετραγωνισμένο χαρτί και έχουν αποτυπωθεί κάποια σημεία από την τροχιά της μπάλας του ζογκλέρ σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έγιναν την προηγούμενη φορά.

**1.** Μπορείτε με ένα πρόχειρο σχήμα να περιγράψετε την τροχιά της μπάλας;

**2.** Ποια από τις συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο μπορείτε να πείτε ότι έχει ως γραφική παράσταση την συγκεκριμένη τροχιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

η $y = ax^2$

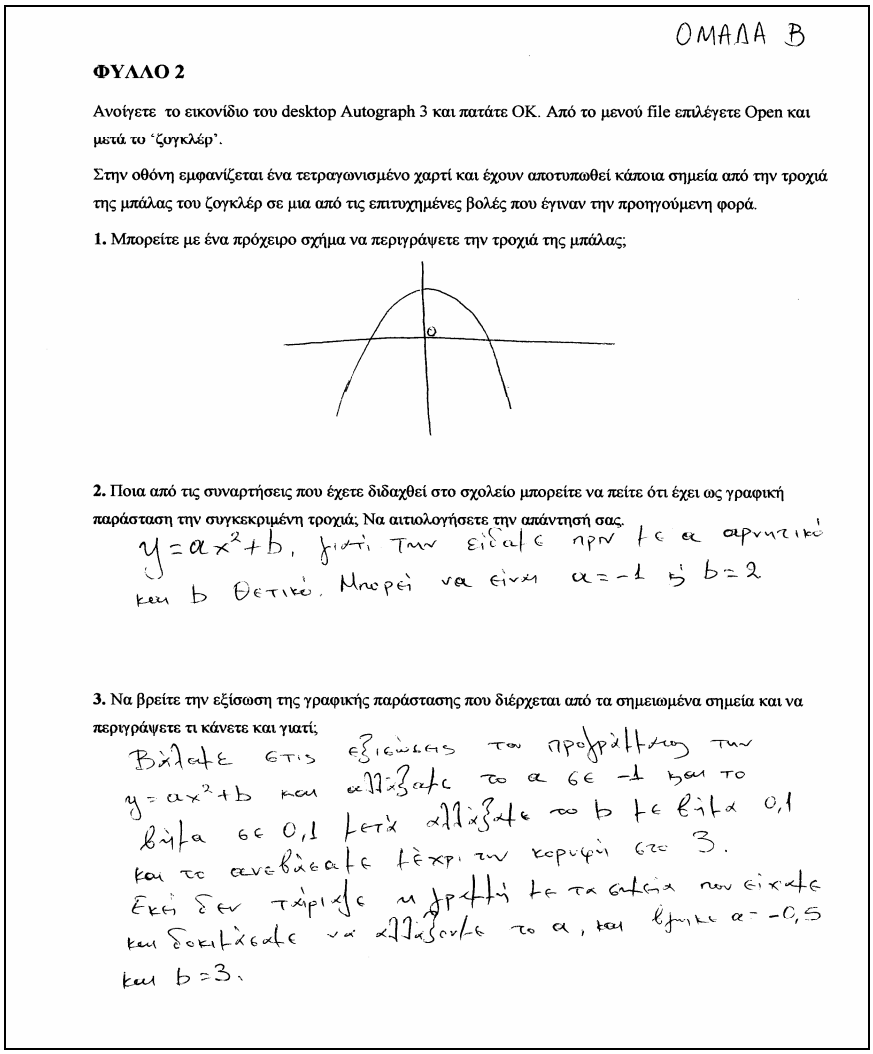
**3.** Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης που διέρχεται από τα σημειωμένα σημεία και να περιγράψετε τι κάνετε και γιατί;

Εικόνα 14. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Α

Η ομάδα Α απέτυχε να βρει τρόπο υπολογισμού των παραμέτρων a και b παρόλο που ζήτησε και έλαβε επανηλημένα βοήθεια και υποδείξεις από την Ε. Η βασική υπόδειξη ήταν να χρησιμοποιήσουν όσα έμαθαν από το λογισμικό ή να δημιουργήσουν εξισώσεις με αγνώστους τα a και b. Δεν τα κατάφεραν στο Autograph και δεν έδειξαν ιδιαίτερη υπομονή και επιμονή, έκαναν μόνο 3 δοκιμές με το μεταβολέα των σταθερών (constant controller) χρησιμοποιώντας αρχικά την $y=ax^2$ και κατόπιν την $y=ax^2+b$ (με υπόδειξη) γενικά συμπεριφέρθηκαν σαν να μην είχαν κάνει πριν λίγο στο φύλλο 1 παρατηρήσεις που θα τους βοηθούσαν να υποθέσουν ότι το a θα έπρεπε να είναι αρνητικό και το b θετικό. Ο $A_1$ θεώρησε τη δραστηριότητα «βαρετή» και ο $A_2$ είπε πως οι γραφικές παραστάσεις «πάντα με δυσκολεύουν, δεν καταλαβαίνω που μας χρειάζονται»! Ως συνέπεια αυτής της στάσης η ερώτηση 3 έμεινε αναπάντητη για την ομάδα Α.

Η ομάδα Β επέδειξε μια μεγάλη ευχέρεια στη λύση του ερωτήματος 3 με χρήση του λογισμικού. Σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα ο μαθητής $B_1$ που ήταν και ο πιο «αδύνατος» σε σχολική επίδοση, κατάφερε να βρει την καμπύλη που ταιριάζει καλύτερα στα δοθέντα

σημεία με χρήση μόνο του constant controller. Ο $B_1$ ενθουσιάστηκε με την επιτυχία του ενώ ο $B_2$ αν και ήταν δύσπιστος αρχικά για την ορθότητα των ενεργειών του συμμαθητή του επανέλαβε τη δοκιμή δύο φορές και βρήκε το ίδιο αποτέλεσμα.



ΟΜΑΔΑ Β

**ΦΥΛΛΟ 2**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το 'ζογκλέρ'.

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα τετραγωνισμένο χαρτί και έχουν αποτυπωθεί κάποια σημεία από την τροχιά της μπάλας του ζογκλέρ σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έγιναν την προηγούμενη φορά.

**1.** Μπορείτε με ένα πρόχειρο σχήμα να περιγράψετε την τροχιά της μπάλας;

**2.** Ποια από τις συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο μπορείτε να πείτε ότι έχει ως γραφική παράσταση την συγκεκριμένη τροχιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$y = ax^2 + b$, γιατί τον είδατε πριν το α αρνητικό και b θετικό. Μπορεί να είναι $a = -1$ & $b = 2$

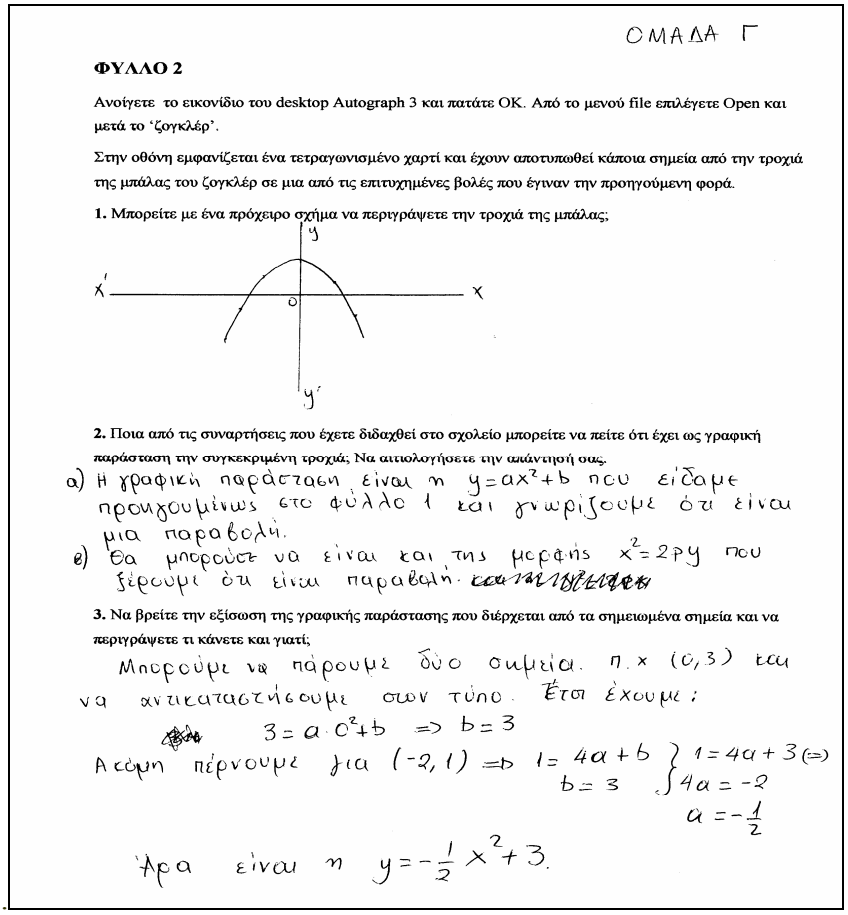
**3.** Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης που διέρχεται από τα σημειωμένα σημεία και να περιγράψετε τι κάνετε και γιατί;

Βάλατε στις εξισώσεις του προγράμματος την $y = ax^2 + b$ και αλλάξατε το α σε -1 και το b σε 0,1 μετά αλλάξατε το b με βήμα 0,1 και το ανεβάσατε μέχρι την κορυφή στο 3. Εκεί δεν τάριαξε μ γραμμή με τα σημεία που είχατε και δοκιμάσατε να αλλάξουμε το α, και βγήκε α = -0,5 και b = 3.

Εικόνα 15. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Β

Χαρακτηριστικό για την ομάδα Β είναι πως κατάφερε να αφομοιώσει τις πληροφορίες που αποκόμισε από τη δραστηριότητα στο φύλλο 1 και μάλιστα μπόρεσε να λύσει το πρόβλημα χωρίς τη χρήση άλγεβρας! (Εικόνα 15) Ο μαθητής $B_1$ δήλωσε πως «δεν θα μπορούσα να το λύσω αλλιώς» ενώ ο μαθητής $B_2$ ανέφερε ότι πρώτα σκέφτηκε να κάνει σύστημα με τα σημεία που έδινε το πρόγραμμα αλλά τελικά η λύση του $B_1$ «ήταν πιο γρήγορη».

Η ομάδα Γ απάντησε σωστά στα ερωτήματα 1 και 2 αναγνωρίζοντας την παραβολή. Στο ερώτημα 2 θέλησαν να δώσουν δύο εκδοχές της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει την τροχιά της μπάλας διατηρώντας έτσι το διαχωρισμό που έχουν κάνει εξαρχής βλέποντας ταυτόχρονα τη συνάρτηση $y=ax^2+b$ και την κωνική τομή $x^2=2py$. (Εικόνα 16)



ΟΜΑΔΑ Γ

**ΦΥΛΛΟ 2**

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το 'ζογκλέρ'.

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα τετραγωνισμένο χαρτί και έχουν αποτυπωθεί κάποια σημεία από την τροχιά της μπάλας του ζογκλέρ σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έγιναν την προηγούμενη φορά.

**1.** Μπορείτε με ένα πρόχειρο σχήμα να περιγράψετε την τροχιά της μπάλας;



**2.** Ποια από τις συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο μπορείτε να πείτε ότι έχει ως γραφική παράσταση την συγκεκριμένη τροχιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Η γραφική παράσταση είναι η $y=ax^2+b$ που είδαμε προηγουμένως στο φύλλο 1 και γνωρίζουμε ότι είναι μια παραβολή.

β) Θα μπορούσε να είναι και της μορφής $x^2=2py$ που ξέρουμε ότι είναι παραβολή.

**3.** Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης που διέρχεται από τα σημειωμένα σημεία και να περιγράψετε τι κάνετε και γιατί;

Μπορούμε να πάρουμε δύο σημεία. π.χ (0,3) και να αντικαταστήσουμε στον τύπο. Έτσι έχουμε:

$3=a\cdot 0^2+b \Rightarrow b=3$

Ακόμη παίρνουμε για $(-2,1) \Rightarrow 1=4a+b$, $b=3$ $\Big\}$ $1=4a+3 \Leftrightarrow 4a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$

Άρα είναι η $y=-\frac{1}{2}x^2+3$.

Εικόνα 16. Δραστηριότητες στο Autograph με την ομάδα Γ

Οι μαθήτριες άνοιξαν το Autograph αλλά δεν ασχολήθηκαν καθόλου με ενέργειες σ' αυτό παρά μόνο για να πάρουν πληροφορίες για τις συντεταγμένες των σημείων. Το ερώτημα 3 λύθηκε αλγεβρικά (με σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων) με σχετική ευκολία ενώ το αποτέλεσμα δοκιμάστηκε και με το λογισμικό ύστερα από υπόδειξη της Ε. Οι δραστηριότητες στο Autograph δεν δυσκόλεψαν τη ομάδα Γ και όπως παρατήρησε η $Γ_1$ «θα μπορούσαμε να τα λύσουμε χωρίς τον υπολογιστή» αλλά και ότι «το πρόγραμμα είναι εντυ-

πωσιακό γιατί μας δίνει απευθείας την γραφική παράσταση και αν θέλουμε να αλλάξουμε τα νούμερα βλέπουμε την αλλαγή χωρίς να κάνουμε νέα γραφική παράσταση»

**Παρατηρήσεις-Ανάλυση**

Στο Autograph οι μαθητές ασχολήθηκαν με ένα «καθαρό» μαθηματικό αντικείμενο όπως είναι η μελέτη συνάρτησης και χρησιμοποίησαν ένα μαθηματικό εργαλείο-λογισμικό, που τους έδωσε τη δυνατότητα να διερευνήσουν δυναμικά τη συμπεριφορά της συνάρτησης, καθώς οι ίδιοι με τη χρήση του μεταβολέα σταθερών άλλαζαν τις τιμές των συντελεστών. Η γνωστική εμπλοκή των μαθητών κατά τη διάρκεια των εργασιών με το Autograph παρουσίασε ποικιλία όπως και με τον «ζογκλέρ» αλλά σε διαφορετικό επίπεδο. Το ζητούμενο αρχικά ήταν να χρησιμοποιήσουν **μαθηματική γλώσσα** για να περιγράψουν τις μεταβολές και να συντάξουν ένα μαθηματικό κείμενο με τις παρατηρήσεις τους, στο τέλος κλήθηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμό στη μέθοδο λύσης.

Πραγματικά και οι τρεις ομάδες ανταποκρίθηκαν σ' αυτή την προσδοκία, αλλά σε διαφορετικό βαθμό με βάση την εμπειρία την ηλικία και τις διαθέσιμες γνώσεις τους. Η **ανατροφοδότηση** από το ίδιο το πρόγραμμα προκάλεσε την γνωστική εμπλοκή των μαθητών καθώς προσπάθησαν να αποτυπώσουν και να διατυπώσουν σωστά αυτά που έβλεπαν να συμβαίνουν στην οθόνη, γεγονός που δεν αποδείχθηκε και τόσο εύκολο ιδιαίτερα για τις ομάδες Α και Β που δυσκολεύτηκαν και προβληματίστηκαν σχετικά με το τι έπρεπε να γράψουν και πως.

Για παράδειγμα η ομάδα Α σε όλες τις απαντήσεις χρησιμοποιεί **απλοϊκό τρόπο γραφής** με λέξεις αντί για μαθηματικά σύμβολα (εικόνα 11) παρόλα αυτά περιγράφει σωστά τη συμπεριφορά της ευθείας και της παραβολής. Η ομάδα Β κάνει το ίδιο ενώ παρατηρείται διαφοροποίηση ανάμεσα στα δύο κείμενα αφού το πρώτο (εικόνα 12) είναι γραμμένο από τον μαθητή $B_1$ (που είναι και ο πιο «αδύνατος») ενώ το δεύτερο (εικόνα 15) είναι γραμμένο από τον $B_2$. Συγκεκριμένα το πρώτο κείμενο την ομάδας Β γράφτηκε από τον $B_1$ καθ' υπαγόρευση από τον $B_2$ και έτσι εμφανίζονται πολλές εκφράσεις όπως «άλφα θετικό» που θα μπορούσαν να έχουν γραφεί με μαθηματικά σύμβολα. Η ομάδα Γ χρησιμοποιεί μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια και περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά της συ-

νάρτησης στοιχείο που αποδίδεται στο γνωστικό υπόβαθρο και την εμπειρία των μαθητριών.(εικόνες 13 και 16)

Το πρόβλημα του ερωτήματος 3 οδήγησε τους μαθητές της ομάδας Α σε παραίτηση, αρνήθηκαν να ασχοληθούν άλλο με γραφικές παραστάσεις και άφησαν την προσπάθεια στη μέση με βασική δικαιολογία την «**αντιπάθεια προς τις συναρτήσεις**» και τις γραφικές τους παραστάσεις. Σε επίπεδο συναισθηματικής εμπλοκής θα λέγαμε ότι επικράτησε **ανία και απαρέσκεια**, το λογισμικό χαρακτηρίστηκε «**πολύ μαθηματικό**» και δεν τους προσέλκυσε το ενδιαφέρον παρά μόνο όταν το πάτημα ενός κουμπιού (του μεταβολέα) προκάλεσε την κίνηση της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές στο τέλος της δραστηριότητας εξέφρασαν την απογοήτευσή τους και ζήτησαν να ξαναπαίξουν με το «ζογκλέρ».

Οι μαθητές της ομάδας Β ήταν πιο δεκτικοί προς το λογισμικό, ιδιαίτερα ο μαθητής $B_1$ που αντιμετωπίζει δυσκολίες στο σχολείο ένιωσε μεγάλη ικανοποίηση γιατί μπόρεσε να λύσει το πρόβλημα πιο γρήγορα από τον συμμαθητή του $B_2$, ακόμα και αν δεν χρησιμοποίησε αλγεβρικό τρόπο. Η γνωστική τους εμπλοκή ήταν σημαντική καθώς χρειάστηκε να διατυπώσουν και να χρησιμοποιήσουν τις ίδιες τις παρατηρήσεις τους για να λύσουν το πρόβλημα, κάτι που έκαναν με επιτυχία.

Οι μαθήτριες της ομάδας Γ είχαν την δυνατότητα να εκφράζονται με **σαφήνεια και ακρίβεια** σε μαθηματική γλώσσα και χρησιμοποίησαν κυρίως τις προηγούμενες γνώσεις τους για να διατυπώσουν τις παρατηρήσεις τους στην μελέτη των συναρτήσεων. Το λογισμικό προκάλεσε την γνωστική τους εμπλοκή μέσω του **δυναμικού χειρισμού** της οικείας μαθηματικής αναπαράστασης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων. Στο συναισθηματικό επίπεδο της εμπλοκής το λογισμικό λειτούργησε ως ένα νέο και «**ενδιαφέρον**» όπως το χαρακτήρισε η $Γ_1$ στοιχείο, που τους δημιούργησε «**θετική εντύπωση**», η δραστηριότητα ήταν ευχάριστη και «μάλλον εύκολη» για τις δυο μαθήτριες. Οι ίδιες παρατήρησαν ότι θα τις ενδιέφερε να κάνουν δραστηριότητες με το Autograph γιατί θεωρούν ότι είναι «**πολύ καλό να βλέπουμε τι συμβαίνει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης χωρίς να χάνουμε χρόνο με πολλά σχήματα**».

## 4. Συμπεράσματα

Η γνωστική εμπλοκή των μαθητών μέσα από την εργασία τους με το «ζογκλέρ» και το Autograph μας έδωσε πληροφορίες για τον τρόπο που σκέφτηκαν οι μαθητές με την ανάλυση των γνωστικών και μεταγνωστικών τους στρατηγικών, για την αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ τους όσο και με τον Η/Υ, πληροφορίες για τη συναισθηματική τους κατάσταση μέσω των αντιδράσεων και των σχολίων τους κατά την διάρκεια των εργασιών ενώ αναδείχθηκαν ζητήματα κατανόησης μαθηματικών εννοιών και δημιουργίας μαθηματικού νοήματος.

**Στρατηγικές- η γνωστική συνιστώσα της εμπλοκής**

Μια σύνοψη των αποτελεσμάτων σχετικά με τα είδη στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν ανάλογα με το λογισμικό και ανά ομάδα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 1.

Παρατηρούμε ότι οι 3 ομάδες χρησιμοποίησαν ποικιλία στρατηγικών αυτό όπως έγινε σε διαφορετικό βαθμό και συχνότητα για κάθε ομάδα. Έτσι η ομάδα Α των «μικρών» όπως Γ' Γυμνασίου χρησιμοποίει κυρίως τον πειραματισμό και την δοκιμή και το λάθος ως βασική στρατηγική και στα δύο λογισμικά. Επιπλέον δεν διαθέτουν σχέδιο δράσης και λειτουργούν κυρίως ακολουθώντας τη διαίσθησή εξαρτώμενοι πλήρως από την αντίδραση-ανατροφοδότηση του λογισμικού. Αυτό πιθανά οφείλεται στην έλλειψη γνώσεων ή και στην επιφανειακή γνώση μαθηματικών εννοιών της συνάρτησης και της γραφικής παράστασης, στην αδυναμία να δουν συνδέσεις των όσων γνώσεων τους από τη φυσική και τα μαθηματικά με τα δεδομένα προβλήματα, στην έλλειψη εμπειρίας και όσο αφορά τις δραστηριότητες στο Autograph στην έλλειψη διάθεσης να ασχοληθούν με το λογισμικό.

Η ομάδα Β όπως Α΄ Λυκείου βρίσκεται σε ανώτερο επίπεδο γνωστικής εμπλοκής σε σχέση με τους μαθητές της Α ομάδας, αλλά υστερεί στη μαθηματική διατύπωση των νοημάτων ενώ αποτυγχάνει και στην προσπάθειά της να ανακαλέσει και να χρησιμοποιήσει προηγούμενες γνώσεις της κάνοντας τις απαραίτητες συνδέσεις με τα συγκεκριμένα προβλήματα που αντιμετώπισε στις δραστηριότητες. Η γνωστική τους εμπλοκή παρουσιάζει ποιοτικά στοιχεία καθώς διαθέτουν σχέδιο δράσης, διατυπώνουν υποθέσεις (κυρίως στο ζογκλέρ) θέτουν ερωτήματα αλλά σε επίπεδο ενεργειών περιορίζονται στον πειραματισμό και τη δοκιμή και το λάθος.

| | «ζογκλέρ» | Autograph |
|---|---|---|
| **Ανάκληση και χρήση προηγούμενων γνώσεων** | Β, Γ | Β, Γ |
| **Δημιουργία και εκτέλεση σχεδίου** | Β, Γ | Β, Γ |
| **Διατύπωση ερωτημάτων** | Α, Β, Γ | |
| **Πειραματισμός** | Α, Β, Γ | Α, Β, Γ |
| **Κατασκευή υποθέσεων** | Α, Β, Γ | |
| **Δοκιμή και Λάθος** | Α, Β, Γ | Α, Β |
| **Αλγεβρική Λύση** | | Γ |
| **Χρήση του λογισμικού για λύση προβλήματος** | Α, Β, Γ | Β |
| **Μαθηματικοποίηση προβλήματος** | | Γ |

Πίνακας 1. Οι στρατηγικές των μαθητών στα δυο Λογισμικά

Η ομάδα Γ όπως Β΄ Λυκείου εμφανίζει ποιοτική γνωστική εμπλοκή με πληθώρα στρατηγικών που στηρίζεται κυρίως στις πολύ καλές γνώσεις των μαθητριών στα μαθηματικά και την φυσική και στην αυτοπεποίθησή τους κατά την διατύπωση αυτών των γνώσεων. Γνωρίζουν ακριβώς πώς να κάνουν συνδέσεις των γνώσεων τους με τα συγκεκριμένα προβλήματα και κάνουν τους απαραίτητους μετασχηματισμούς των μαθηματικών τύπων προκειμένου να εξάγουν χρήσιμες πληροφορίες. Η τακτική τους δεν στηρίζεται εξολοκλήρου στην δοκιμή και το λάθος αλλά ούτε και στην ανατροφοδότηση που παρείχαν τα δυο λογισμικά έτσι πολύ συχνά καταφεύγουν στο χαρτί και το μολύβι σχεδιάζοντας, συζητώντας και αναλύοντας τα δεδομένα όπως. Δεν εξαρτώνται από το λογισμικό και προτιμούν την μαθηματική λύση και τη συζήτηση σε αντίθεση με τις άλλες δυο ομάδες που πρώτευε η ενέργεια ενώ ακολουθούσαν η σκέψη και η συζήτηση. Διαθέτουν αυτορρύθμι-

ση που τους δίνει την δυνατότητα να μεταφέρουν με επιτυχία γνώσεις και δεξιότητες από μια μαθησιακή κατάσταση σε μια άλλη.

Η γενικότερη παρατήρηση που μπορεί να γίνει για την μελέτη και την αποτίμηση του επιπέδου της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών, είναι πως αν και τα δυο λογισμικά προσφέρουν πληθώρα ερεθισμάτων και δυνατοτήτων στους μαθητές δεν επαρκούν από μόνα τους στο να αναπτύξουν οι μαθητές επιστημονική ή μαθηματική σκέψη. Η έλλειψη γνώσεων περιορίζει τους μαθητές σε λίγες τεχνικές και στρατηγικές επιφανειακής γνωστικής εμπλοκής ενώ αντίθετα η βαθιά γνωστική εμπλοκή στηρίζεται στην επιτυχημένη εφαρμογή των γνώσεων αυτών ανάλογα με την περίσταση και το πρόβλημα που τίθεται. Έτσι για τους μαθητές των ομάδων Α και Β οι δραστηριότητες στα δυο λογισμικά θα ήταν προτιμότερο να τεθούν ως εισαγωγή ή αφορμή για παραπέρα συζήτηση και ανάλυση εννοιών μαθηματικών και φυσικής, με λίγα λόγια θα μπορούσαν να είναι έναυσμα για μια παραγωγική συζήτηση ανάμεσα στο διδάσκοντα και τους μαθητές ώστε να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα και μάθηση.

**Συναισθηματική συνιστώσα της εμπλοκής**

Η συναισθηματική συνιστώσα της γνωστικής εμπλοκής φάνηκε ότι καθορίζει συνολικά την συμπεριφορά και την απόδοση των μαθητών. Επιμονή, αυτοσυγκέντρωση, συνεργασία, ικανοποίηση, ενθουσιασμός, ευχαρίστηση και οι αντίθετες τους έννοιες αποτελούν τις όψεις της συναισθηματικής εμπλοκής που παρατηρήθηκε. Η συναισθηματική συνιστώσα της εμπλοκής παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της γνωστικής εμπλοκής και στην μαθησιακή διαδικασία γενικότερα, αφού το σύστημα των συναισθημάτων και των πεποιθήσεων των μαθητών, επιδρά στη μαθησιακή διαδικασία και την καθορίζει σε μεγάλο βαθμό (Φιλίππου, Χρίστου, 2001). Στον πίνακα 2 που ακολουθεί ταξινομούνται οι αντιδράσεις και τα συναισθήματα των μαθητών κατά ομάδα και δραστηριότητα:

| | **Ζογκλέρ** | **Autograph** |
|---|---|---|
| **Επιμονή** | Α, Β, Γ | Β, Γ |
| **Αυτοσυγκέντρωση** | Α, Β, Γ | Β, Γ |
| **Σχόλια σχετικά με την δραστηριότητα** | Α, Β, Γ στο 95% του χρόνου της καταγεγραμμένης ομιλίας έκαναν μόνο σχόλια σχετικά με τις δραστηριότητες | Β, Γ στο 90% του χρόνου της καταγεγραμμένης ομιλίας έκαναν μόνο σχόλια σχετικά με τις δραστηριότητες. |
| **Σχόλια άσχετα με την δραστηριότητα** | Α, Β, Γ αμελητέο ποσοστό του χρόνου εργασίας | Α στο 30% του χρόνου της καταγεγραμμένης εργασίας έκαναν σχόλια άσχετα με τις δραστηριότητες. |
| **Ενθουσιασμός** | Α, Β | Γ |
| **Ικανοποίηση-Ευχαρίστηση** | Α, Β, Γ | Γ |
| **Ανία** | | Α |
| **Παραίτηση** | | Α |

Πίνακας 2: Η συναισθηματική συνιστώσα της εμπλοκής

Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώθηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας καθώς τα αρνητικά συναισθήματα και οι στάσεις της ομάδας Α την οδήγησαν να παραιτηθεί της προσπάθειας στο Autograph, ενώ αντίθετα το κίνητρο και η ευχαρίστηση του παιχνιδιού κράτησαν τους δυο μαθητές κοντά στον «ζογκλέρ». Οι πιθανότητες ανάπτυξης της μάθησης και της ενεργούς γνωστικής εμπλοκής είναι σαφώς μεγαλύτερες όταν συνοδεύονται από αισθήματα ικανοποίησης και ενθουσιασμού από την εργασία. Ένα ενδιαφέρον μαθησιακό αντικείμενο ή μια δραστηριότητα με ενδιαφέρον για τους μαθητές έχει μεγαλύτερες πιθα-

νότητες να προκαλέσει την γνωστική τους ανάπτυξη και τη μάθηση. Όπως είπε ο μαθητής $B_1$ «πρώτη φορά έκανα μαθηματικά και δεν κατάλαβα πως πέρασε η ώρα!»

**Τι έκαναν οι μαθητές σε σχέση με την τετραγωνική συνάρτηση;**

Το ερώτημα απασχόλησε την έρευνα από καθαρά διδακτική σκοπιά, όπου φάνηκαν τόσο οι παρανοήσεις που σχετίζονται με τις συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις όσο και η δυνατότητα που έχουν οι μαθητές να παράγουν λύσεις, να δημιουργούν νοήματα και να επιχειρούν άλλοτε με επιτυχία και άλλοτε όχι, συνδέσεις μεταξύ των προηγούμενων γνώσεών τους, των διαισθητικών τους αντιλήψεων και των αποτελεσμάτων των ενεργειών τους στα δυναμικά περιβάλλοντα που αντιπροσωπεύουν τα δύο λογισμικά.

Στον «ζογκλέρ» οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να εμπλακούν με την δευτεροβάθμια τετραγωνική συνάρτηση μέσα από την προσομοίωση της βολής. Η αναγνώριση της εξίσωσης της τροχιάς της μπάλας έγινε μόνο από την ομάδα Γ, ενώ η ομάδα Β που «άνοιξε» την ψηφίδα προγραμματισμού Logo και διάβασε τις εξισώσεις δεν κατάφερε να μεταφράσει τα σύμβολα της φυσικής σε μαθηματικά σύμβολα. Οι ομάδες Α και Β θεώρησαν ότι η τροχιά της μπάλας είναι κυκλική, αυτή ήταν μια πολύ ισχυρή διαίσθηση των μαθητών να ταυτίζουν τις καμπύλες με τμήματα κύκλων. Η περίπτωση της κυκλικής τροχιάς απορρίφθηκε από την ομάδα Γ η οποία διέθετε τρόπους να ελέγξει την υπόθεση και να την καταρρίψει μαθηματικά. Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ενώ οι μαθητές της ομάδας Α είχαν διδαχθεί και μάλιστα πολύ πρόσφατα σε σχέση με τον χρόνο που έγινε το πείραμα, την τετραγωνική συνάρτηση, δεν αναγνώρισαν την γραφική της παράσταση τόσο στο σχήμα της τροχιάς της μπάλας στον «ζογκλέρ» όσο και στην αρχική δραστηριότητα στο Autograph, όπου τους ζητήθηκε να κάνουν ένα πρόχειρο σχήμα για την συνάρτηση $y=ax^2+b$. Αντίθετα ενδεικτικό της σύγχυσης που είχαν σχετικά με την γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης ήταν το ότι σχεδίασαν την γραφική παράσταση δύο υπερβολών και μάλιστα στο ίδιο σύστημα αξόνων πιστεύοντας ότι αντιστοιχούσε στην $y=ax^2+b$. Μια ερμηνεία για το γεγονός δίνουν οι ίδιοι οι μαθητές που δήλωσαν ότι οι γραφικές παραστάσεις «πάντα με δυσκολεύουν, δεν καταλαβαίνω που μας χρειάζονται»!

Η ομάδα Β είχε μια πιο ουσιαστική εμπλοκή με την έννοια της συνάρτησης μέσω της εξίσωσης τροχιάς της μπάλας στο «ζογκλέρ» όπου, επεμβαίνοντας στο πρόγραμμα οι δύο μαθητές, κατάφεραν να παράγουν τροχιές που αντιπροσώπευαν την $y=ax^3$ και την ευθεία,

δεν μπόρεσαν όμως να δώσουν επαρκή εξήγηση για τη συμπεριφορά της μπάλας. Στο ζήτημα της τροχιάς εμφανίστηκε και ένα μικρό πρόβλημα με τις μαθήτριες της ομάδας Γ που χρησιμοποίησαν τις γνώσεις τους από την αναλυτική γεωμετρία και τις κωνικές τομές, οι οποίες ως γνωστό δεν είναι κατ' ανάγκη συναρτήσεις. Έτσι οι γραφικές παραστάσεις που σχεδίασαν περιέχουν εκτός από το «σωστό» σχήμα της παραβολής ως συνάρτησης και την παραβολή ως κωνική τομή.

Η έννοια του διανύσματος έγινε επίσης αντικείμενο συζήτησης για την ομάδα Α όπου τα διανύσματα χαρακτηρίστηκαν ως «βελάκια» που καθόριζαν την κίνηση της μπάλας. Ο χειρισμός των διανυσμάτων έγινε διαισθητικά και από τις 3 ομάδες, αλλά με ευκολία αφού άμεσα κατανόησαν και χωρίς βοήθεια ή υποδείξεις, ότι σύροντας για παράδειγμα το διάνυσμα της ταχύτητας προς τα πάνω είχαν μεγαλύτερο μέτρο ταχύτητας ενώ περιστρέφοντας το πετύχαιναν διαφορετικές γωνίες βολής. Μάλιστα οι μαθήτριες της ομάδας Γ, κατά τη διάρκεια του πειραματισμού κατέγραψαν τις γωνίες βολής, για να μπορούν να επαναλάβουν τα πειράματα τους και για να ξεχωρίσουν τη γωνία που θα έδινε επιτυχές αποτέλεσμα.

Στον «ζογκλέρ» η συζήτηση των μαθητών αφορούσε ταυτόχρονα και την φυσική. Όμως η σύνδεση των μαθηματικών με τη φυσική έγινε με επιτυχία μόνο από την ομάδα Γ η οποία μετέτρεψε τις μεταβλητές u και t της εξίσωσης της τροχιάς, σε μεταβλητές y και x αντίστοιχα, για να μπορεί να δει την μαθηματική σχέση. Οι υπόλοιποι μαθητές είχαν διαισθήσεις σχετικά με την λειτουργία των αρχικών συνθηκών δύναμης και ταχύτητας που τους εμπόδισαν για αρκετό χρονικό διάστημα να καταλάβουν την σχέση μεταξύ των επιλογών τους και της βολής. Μέσα απ' αυτή τη δυσκολία αναπτύχθηκε συζήτηση που, άλλοτε απλοϊκά (ομάδες Α και Β) και άλλοτε με σαφήνεια και αυστηρότητα (ομάδα Γ), έδωσε την δυνατότητα στους μαθητές να εκφραστούν με όρους φυσικής και μαθηματικών επιχειρώντας όχι μόνο χρήση αλλά και σύνδεση των εννοιών.

## Επίλογος

Η μελέτη που έγινε είχε ως στόχο να διερευνήσει την δυνατότητα που μπορεί να προσφέρει, σε επίπεδο γνωστικής εμπλοκής, η συνδυασμένη χρήση λογισμικών. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης οφείλεται στη διδακτική δυναμική που μπορούν να προσφέρουν τέτοιες εμπειρίες στους μαθητές.

Σενάρια στα οποία οι μαθητές βλέπουν την εφαρμογή των μαθηματικών σε πραγματικά προβλήματα μπορούν να πραγματοποιηθούν και χωρίς Η/Υ, το διαφορετικό με τη χρήση τους όπως τονίστηκε και στην εισαγωγή, είναι πως επιτρέπουν την ταυτόχρονη διαχείριση πολλαπλών αναπαραστάσεων γεγονός απαραίτητο στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και στα ανώτερα μαθηματικά που εισάγονται στο Λύκειο. Η συνδυασμένη χρήση των δύο λογισμικών πρόσφερε αυτή την δυνατότητα: για παράδειγμα η έννοια του διανύσματος που είναι απαραίτητη στη μελέτη της φυσικής χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές στον «ζογκλέρ» με επιτυχία, ενώ με τυπικό μέσο το μολύβι και το χαρτί ή τον πίνακα μπορούμε απλώς να δώσουμε μια στατική εικόνα του διανύσματος και αυτό αποτελεί μόνο ένα στιγμιότυπο του φαινόμενου. Στο Autograph η τυπική διερεύνηση των παραμέτρων της συνάρτησης απόκτησε κίνηση ενώ τον έλεγχο της μεταβολής των συντελεστών είχαν αποκλειστικά στους μαθητές. Γενικά και από τα δύο λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν φάνηκε ότι το καινούριο στοιχείο που δίνει η χρήση των Η/Υ στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών είναι πως μπορεί (αν τα λογισμικά είναι κατάλληλα επιλεγμένα) να προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να δράσουν ασκώντας έλεγχο σε μαθηματικά αντικείμενα τα οποία ανταποκρίνονται προσφέροντας απάντηση σε ερωτήματα του τύπου «τι θα γίνει αν…». Τέτοια ερωτήματα γίνονται από τους μαθητές αλλά δύσκολα υλοποιούνται στο τυπικό σχολικό πρόγραμμα.

Από τη συζήτηση των μαθητών φάνηκε ότι πραγματικά δημιουργήθηκαν ερωτήματα που αφορούσαν τους φυσικούς νόμους και τα μαθηματικά. Οι μαθητές επιχείρησαν, ιδιαίτερα στον «ζογκλέρ», να μελετήσουν «ακραίες καταστάσεις» και είχαν ανταπόκριση από τον υπολογιστή γεγονός που φάνηκε να τους ενθουσιάζει. Το θέμα βέβαια είναι, πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε διδακτικά μια τέτοια περίσταση, αναζητώντας την απάντηση στο ερώτημα «γιατί συμβαίνει αυτό;»

Το όφελος των μαθητών από την εμπλοκή τους με τα λογισμικά και τις συγκεκριμένες δραστηριότητες, θα μπορούσε να μεγιστοποιηθεί, αν η διδακτική παρέμβαση της ερευνήτριας ήταν μεγαλύτερη, τότε όμως θα είχαμε μια άλλη έρευνα που θα μελετούσε τα αποτελέσματα της διδασκαλίας με Η/Υ και θα αποτελούσε μια διαθεματική διδακτική πρόταση για τα μαθηματικά και τη φυσική.

Μειονέκτημα της έρευνας θα μπορούσε να θεωρηθεί το μικρό μέγεθος του δείγματος και ο πολύ λίγος χρόνος χρήσης των λογισμικών από τους μαθητές που δεν αφήνει περιθώρια για ακριβείς προβλέψεις των αποτελεσμάτων μιας εφαρμογής σε μεγαλύτερη κλίμακα και σε βάθος χρόνου. Όμως φαίνεται ότι οι δυνατότητες που διαγράφονται από αυτού του είδους τα σενάρια, αν συνοδεύονται από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση και επιλογή του «σωστού» εκπαιδευτικού λογισμικού, μπορούν να αυξήσουν τα επίπεδα της γνωστικής εμπλοκής των μαθητών και να τους προσφέρουν ευκαιρίες να δουν και να χρησιμοποιήσουν «περισσότερα» μαθηματικά.

**Ελληνική Βιβλιογραφία**

**1.** Αρβανίτης, Τ., Τουμάσης, Μ. (2003). *Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*. Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλα.

**2.** Καλαβάσης, Φ., Μεϊμάρης, Μ. (1997). Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ Διδακτική *Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες 4η Διεθνής Επιστημονική διημερίδα στη Διδακτική των Μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Αιγαίου – Παιδαγωγικά Τμήματα. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

**3.** Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (2002). *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη

**4.** Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί Παράγοντες στη Μάθηση των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ατραπός.

**Ξένη Βιβλιογραφία**

**5.** Ainley, M. (1993). Styles of engagement with learning: Multidimensional assessment of their relationship with strategy use and school achievement. *Journal of Educational Psychology, 85(3),* 395-405.

**6.** Artigue, M., (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

**7.** Barkatsas, A., Pierce, R., & Stacey, K. (in press). A scale for monitoring student's attitudes to learning mathematics with technology. *Computers and Education*.

**8.** Blumenfeld, P.C., Fredericks, J. A., & Paris, A. H. (2004). Student engagement: potential of the concept, state of the evidence. *Review of Educational Research*, 74(1), 59-109.

**9.** Blumenfeld, P. C., Puro, P. & Mergendoller, J. R. (1992). Translating motivation into thoughtfulness. In H. H. Marshall (Ed.) *Redefining student learning: Roots of educational change*. Norwood, N J.: Ablex Publishing Corporation.

**10.** Brophy, J. (1983). Conceptualizing student motivation. *Educational Psychologist*, 18, 200-215.

**11.** Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2000). Student misconceptions in interpreting basic calculator displays. In T. Nakahara & M. Koyama(Eds), Proceedings of the 24th PME International Conference, 2, 161-168.

**12.** Chapman, E. (2003). Alternative approaches to assessing student engagement rates. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 8(13).

**13.** Corno, L. and Mandinach, E. (1983). The role of cognitive engagement in classroom learning and motivation. *Educational Psychologist, 18(2),* 88-108

**14.** Di Martino P. & Zan R. **(**2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. *Proceedings of PME 25* (Utrecht, Netherlands), vol.3, 351-358.

**15.** Edwards, L. D. (1998). Embodying mathematics and science: Micro worlds as representations. *Journal of Mathematical Behaviour* 17, 1, 53 – 78.

**16.** Goldenberg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 4, 191-224.

**17.** Hannula, M., Evans, J.,Philippou, G. & Zan, R. (2004). Affect in mathematics education – Exploring theoretical frameworks. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I*, pp 107-136.

**18.** Healy, L., Hoyles, C. & Noss, R. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 203-233.

***19.*** Heid, M., (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 239-255), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.*

**20.** Helme, S., & Clarke, D.,(2001). Cognitive engagement in the Mathematics classroom, in Clarke (ed), p. 131-153.

**21.** Hershkovitz, R., & Kieran, C.,(2001). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: An experience with graphing calculators. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 1,* 96-107.

**22.** Hoyles, C. and Noss, R. (2003) 'What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?' In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (eds), Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

**23.** Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (NATO ASI Series F, vol. 121). Berlin: Springer-Verlag. Pages 1 – 17.

**24.** Hurm, T-R. ,& Jarvela, S. (2005). Students' activity in computer supported collaborative problem solving in mathematics. *International Journal of Computers for Mathemati*cal Learning. 10, 49-73.

**25.** Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In: Grouws D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Simon and Schuster Macmillan. pp. 515-556.

**26.** Kearsley, G. & Shneiderman, B. (1999). Engagement theory: A framework for technology-based teaching and learning. Retrieved November 28, 2005 from: http://home.sprynet.com/~gkearsley/engage.htm

**27.** Kieran, C.,(2006). "Research on the learning and teaching of Algebra". In A. Gutierrez, P. Boero (eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*: Past, Present and Future, Rotterdam: Sense Publishers. p.11-49.

**28.** Knuth, E. J. (2000), Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study, *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 500-508.

**29.** Kurz, T. L., Middleton, J. A., & Yanik, H. B. (2005). A taxonomy of software for mathematics instruction. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education* [Online serial], *5*(2). Retrieved November 28, 2005 from : http://www.citejournal.org/vol5/iss2/mathematics/article1.cfm

**30.** Kynigos, C., Koutlis, M., Hadzilakos, T. (1997). Mathematics with component oriented exploratory software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229-250.

**31.** Kynigos, C. (1997). Dynamic representations of angle with a Logobased variation tool: A case study. *Proceedings of the Sixth European Logo Conference*. Budapest.

***32.*** Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283), Reston, USA: NCTM.

**33.** Leder, G. C., & Vale, C. M. (2004). Student views of computer-based mathematics in the middle years: Does gender make a difference? *Educational Studies in Mathematics. 56*, 287-312.

**34.** Lopez-Morteo G., & Lopez G. (in press). Computer support for learning mathematics: A learning environment based on recreational learning objects. *Computers and Education.*

**35.** Meece, J. L., Blumenfeld, P.C., & Hoyle, R. H. (1988). Students' goal orientations and cognitive engagement in classroom activities. *Journal of Educational Psychology,* 80(4), 514-523.

**36.** Miller, R. B., Greene, B. A., Montalvo, G. P., Ravindran, B., & Nichols, J. D. (1996). Engagement in academic work: The role of learning goals, future consequences, pleasing others, and perceived ability. *Contemporary Educational Psychology*, 21, 388-422.

**37.** Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T.P. Carpenter. *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69-100). Hillsdale, USA: Laurence Erlbaum.

**38.** Oliver, K. (2000). Methods for developing constructivist learning on the web. *Educational Technology, 40*(6), 5-18.

**39.** Papert, S. (1991). *Νοητικές Θύελλες.* (Σταματίου Α., μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Οδυσσέας. (πρωτότυπη έκδοση, 1980).

**40.** Pintrich, P. R., & De Groot, E. V. (1990). Motivation and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology*, 82(1), 33-40.

**41.** http://www.pisa.oecd.org

**42.** Schunk, D. H., & Zimmerman, B.J. (Eds.) (1994). *Self – regulation of learning and performance: issues and educational applications. Hillsdale, N. J. :Erlbaum Associates.*

**43.** Schwarz, B. B., & Hershkowitz, R., (1999) Prototype: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, 362-389.

**44.** Skinner & Belmont (1993). Motivation in the classroom: Reciprocal effects of teacher behavior and student engagement across the school year. *Journal of Educational Psychology*, 85(4), 571-581.

**45.** Tall D. (1993) Technology and mathematics education; computer environments for the learning of mathematics**.** *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. pp. 189–199.

**46.** Zaslacsky, O., Sela, H., & Leron, U.(2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale, *Educational Studies in Mathematics,* 49, 119-140.

**47.** Schooling Issues Digest: Student Motivation and Engagement. Retrieved November 28, 2005 from:http://www.dest.gov.au/sectors/school_education/publications_resources/schooling_issues_digest/schooling_issues_digest_motivation_engagement.htm

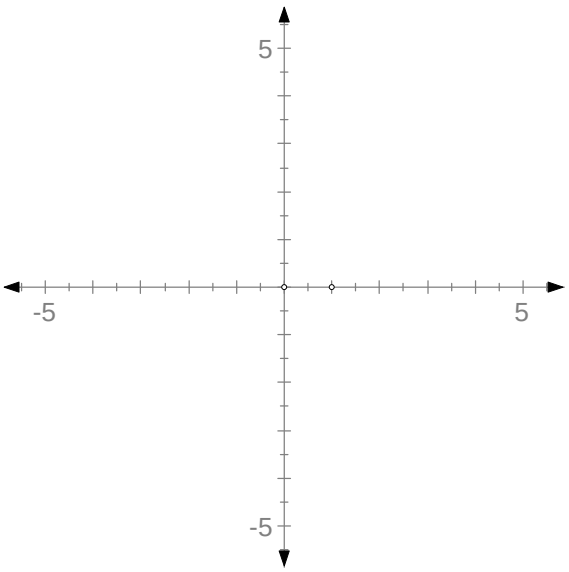
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

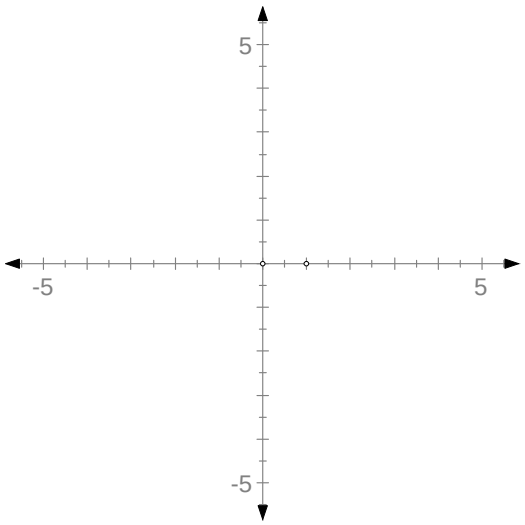
## Φύλλα εργασίας με το Autograph

## ΦΥΛΛΟ 1

Ανοίγετε το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Στη συνέχεια από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το «μελέτη συναρτήσεων» με διπλό κλικ. Εμφανίζεται ένα παράθυρο με τετραγωνισμένο χαρτί το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε δύο συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο, την $y=ax+b$ και την $y=ax^2+b$.

1. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για κάθε μία απ' αυτές και γράψτε το όνομά τους.






**2**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y=ax και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k που λέγεται constant controller και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

**3.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την y= ax+b και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

**4**. Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του a;

**5.** Στο μενού Equation επιλέξτε Enter Equation γράψτε την $y=ax^2+b$ και πατήστε OK. Από την γραμμή εργαλείων επιλέξτε το κουμπί με το k και στο παράθυρο που εμφανίζεται αλλάξτε και βάλτε b δοκιμάστε τα πράσινα βελάκια πάνω και κάτω τι παρατηρείτε; Μπορείτε να κάνετε μια διαπίστωση για τη μορφή της γραφικής παράστασης σε σχέση με τις τιμές του b;

## ΦΥΛΛΟ 2

Ανοίγετε  το εικονίδιο του desktop Autograph 3 και πατάτε OK. Από το μενού file επιλέγετε Open και μετά το 'ζογκλέρ'.

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα τετραγωνισμένο χαρτί και έχουν αποτυπωθεί κάποια σημεία από την τροχιά της μπάλας του ζογκλέρ σε μια από τις επιτυχημένες βολές που έγιναν την προηγούμενη φορά.

**1.** Μπορείτε με ένα πρόχειρο σχήμα να περιγράψετε την τροχιά της μπάλας;

**2.** Ποια από τις συναρτήσεις που έχετε διδαχθεί στο σχολείο μπορείτε να πείτε ότι έχει ως γραφική παράσταση την συγκεκριμένη τροχιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**3.** Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης που διέρχεται από τα σημειωμένα σημεία και να περιγράψετε τι κάνετε και γιατί;