ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ -
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Διπλωματική Εργασία

Οι Συμμετρίες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου

Βασιλική Παπαγιαννακοπούλου
Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Λάππας, Δ.

Αθήνα, Ιούνιος 2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ..... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1. Διονύσιος Λάππας (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	
2. Παναγιώτης Σπύρου	Επίκ. Καθηγητής	
3. Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αναπλ. Καθηγητής	

Ευχαριστώ τον επίκουρο καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη
και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Γιαννακούλια Ευστάθιο,
οι οποίοι με τίμησαν με τη συμμετοχή τους
στην εξεταστική επιτροπή.
Ευχαριστώ θερμά τον αναπληρωτή καθηγητή
και επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας
κ. Λάππα Διονύσιο
για την πολύτιμη βοήθειά του που μου προσέφερε
και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε
τόσο στις προπτυχιακές
όσο και στις μεταπτυχιακές μου σπουδές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ -
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό - Διατμηματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Διπλωματική Εργασία

Οι Συμμετρίες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου

Βασιλική Παπαγιαννακοπούλου
Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Λάππας, Δ.

Αθήνα, Ιούνιος 2008

Στην Οικογένειά μου

Περιεχόμενα

Η λέξη συμμετρία χρησιμοποιείται στην καθημερινή μας γλώσσα με δύο νοήματα. Απ' τη μια, συμμετρικό σημαίνει κάτι που έχει καλές αναλογίες που είναι καλά ισορροπημένο και η συμμετρία υποδηλώνει αυτήν την ιδιαίτερη συμφωνία πολλών μερών με την οποία αυτά συγκροτούν μια ολότητα. Η ομορφιά είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη συμμετρία.
Ως δεύτερο νόημα της συμμετρίας, έχουμε τη δίπλευρη συμμετρία (συμμετρία αριστερά και δεξιά) που δίνει μια εικόνα ισορροπίας πολλή εντυπωσιακή και ευδιάκριτη στη δομή των ανώτερων ζώων, ειδικά του ανθρώπινου σώματος.

Hermann Weyl (∗)

(∗) Το 1952 ο Hermann Weyl, μαθητής του David Hilbert και καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Gettingen, όταν ετοιμαζόταν να αποχωρήσει λόγω ηλικίας από το Institut Advanced Studies Priston, έδωσε μια σειρά από δημόσιες διαλέξεις με θέμα τη συμμετρία. *«Συμμετρία»* είναι και ο τίτλος του βιβλίου *του Hermann Weyl* που προέκυψε από τις διαλέξεις αυτές. Το βιβλίο αυτό παραμένει μέχρι σήμερα *μια αξεπέραστη γενική μελέτη της συμμετρίας.* Ο Weyl πέρα από την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών της συμμετρίας έχει αναλύσει το θέμα αυτό μέσα από τους ορίζοντες της φιλοσοφίας, του πολιτισμού και της τέχνης.

0.1 Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό να παρουσιάσει τις συμμετρίες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου. Οι συμμετρίες ενός «αντικειμένου» είναι μετασχηματισμοί, που αφήνουν το «αντικείμενο» αμετάβλητο, δηλαδή η *συνολική μορφή* του αντικειμένου είναι *ίδια* πριν και μετά τη μετατόπιση. Τα ίσα σχήματα διατηρούν τις ιδιότητές τους ανεξάρτητα από την τοποθέτησή τους στο επίπεδο.
Οι συμμετρίες ενός αντικειμένου σχηματίζουν ομάδα, καθώς το σύνολο των συμμετριών ενός σχήματος δεν είναι μια *τυχαία* συλλογή μετασχηματισμών, αλλά είναι ένα σύνολο με εσωτερική δομή. Συνεπώς, η επάλληλη εφαρμογή μετασχηματισμών, που ανήκουν στο σύνολο, σ' ένα σχήμα είναι ένας από τους μετασχηματισμούς του συνόλου αυτού. (Μια ομάδα είναι ένα κλειστό σύστημα μετασχηματισμών, καθώς αν συνθέσουμε δύο απ' αυτούς έχουμε ως αποτέλεσμα ένα στοιχείο-μετασχηματισμό της ίδιας ομάδας.)
Η μελέτη των ομάδων ενισχύθηκε έντονα από το διάσημο Πρόγραμμα Erlanger του Felix Klein, μια διάλεξη που είχε δώσει ο Klein το 1872 στο Πανεπιστήμιο του Erlagen. **Ο Klein χρησιμοποίησε ομάδες συμμετριών -αντίστοιχες της Ευκλείδειας ομάδας- για να ταξινομήσει τις γεωμετρίες.** Μέχρι την οικοδόμηση των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών, η μελέτη της γεωμετρίας ήταν περιορισμένη σε μία αληθινή a priori γεωμετρία, την Ευκλείδεια γεωμετρία.
Από τα τέλη του 19ου αιώνα η μία γεωμετρία άρχισε να διαιρείται και να πολλαπλασιάζεται. Οικοδομήθηκαν η Ελλειπτική Γεωμετρία, η Υπερβολική Γεωμετρία, η Προβολική Γεωμετρία, η Συγγενής Γεωμετρία (ή Φυσική), η Σύμμορφη Γεωμετρία, η Διαφορική Γεωμετρία και οι πρώτες σκέψεις της Τοπολογίας. Η ενοποίηση των γεωμετριών από τον Klein αποκάλυψε απρόσμενες σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές γεωμετρίες. Μερικές γεωμετρίες προέκυψαν να έχουν ομάδες όμοιες με τις ομάδες άλλων γεωμετριών (γεωμετρίες ισοδύναμες μεταξύ τους) ή λίγο παραλλαγμένες. Οι γεωμετρίες που βασίζονται σε ευρύτερες ομάδες είναι «πιο γενικές» από εκείνες που βασίζονται σε μικρότερες και κάθε Θεώρημα που ισχύει στη γεωμετρία με τη μεγαλύτερη ομάδα συνεπάγεται ότι ισχύει και στη γεωμετρία με τη μικρότερη ομάδα.
Οι γεωμετρίες κατά Klein είναι ζεύγη (G, X), όπου το $X \neq \emptyset$ είναι ένα σύνολο και το G είναι μια ομάδα που δρα πάνω στο X. Μια γεωμετρία σε ένα σύνολο X δεν ορίζεται από τα σημεία και τις ευθείες της, από την παραλληλία, την ορθογωνιότητα και τις άλλες σχέσεις, αλλά από μια υποομάδα G της ομάδας των «1-1» και «επί» αντιστοιχίσεων $X \longrightarrow X$ με πράξη τη σύνθεση των απεικονίσεων. (Τα στοιχεία της ομάδας G είναι οι μετασχηματισμοί που «επιτρέπει» η γεωμετρία Klein (G, X) πάνω στο X). Ο βασικός «προβληματισμός» της γεωμετρίας Klein (G, X), που πρέπει να ενσωματωθεί στον ορισμό της (!), είναι ο εξής: να μελετηθούν εκείνες οι ιδιότητες των υποσυνόλων του X, που

παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τα στοιχεία της G. Μια ιδιότητα J ενός υποσυνόλου A του X *παραμένει αναλλοίωτη ως προς* G, αν το $f(A)$ έχει την ιδιότητα J για κάθε $f \in G$. Με τη νέα αυτή άποψη προφανώς τα σχήματα δεν αποτελούνται από ευθύγραμμα σχήματα, κύκλους κ.λ.π., αλλά είναι υποσύνολα του X. Σύμφωνα με τον Klein, οι γεωμετρικές ιδιότητες χαρακτηρίζονται από τη σταθερότητά τους υπό μιας ομάδας μετασχηματισμών.
Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, με την οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, οι βασικές έννοιες είναι οι αποστάσεις και οι γωνίες. Οι μετασχηματισμοί που διατηρούν τις αποστάσεις και τις γωνίες είναι ακριβώς οι στερεές κινήσεις. Συνεπώς, η ιδέα του Klein είναι να αντιστρέψουμε αυτό το ζήτημα, δηλαδή να πάρουμε την ομάδα των στερεών κινήσεων ως το βασικό αντικείμενο και να συνάγουμε απ' αυτήν τη γεωμετρία. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, μια θεμιτή γεωμετρική γενική ιδέα είναι οτιδήποτε παραμένει αμετάβλητο μέσα από μια στερεά κίνηση, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των διαφόρων ειδών σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες αν αυτά «μετακινηθούν» στο επίπεδό τους αποτελεί βασικό αντικείμενο της επίπεδης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παράδειγμα μιας τέτοιας γενικής ιδέας αποτελεί το «ορθογώνιο τρίγωνο». Επίσης, αναλλοίωτες ιδιότητες των σχημάτων είναι για παράδειγμα σε ένα παραλληλόγραμμο ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και σε ένα τρίγωνο ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^0. Τώρα, η επιμονή του Ευκλείδη στα ίσα τρίγωνα ως αποδεικτική μέθοδος εξηγείται με σαφήνεια, καθώς τα τρίγωνα είναι ίσα ακριβώς όταν το ένα τρίγωνο μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στο άλλο με μια στερεά κίνηση. Κατ' ουσίαν, ο Ευκλείδης (*) τα χρησιμοποίησε για να παίξουν τον ίδιο ρόλο που παίζουν οι μετασχηματισμοί που προτιμήθηκαν από τον Klein.
Στο κείμενο αυτό καθ' αυτό που ακολουθεί δε θα γίνει περαιτέρω αναφορά στη γεωμετρία κατά Klein, αν και η αναφορά των παραπάνω πληροφοριών κρίθηκε απαραίτητη για να γίνει αντιληπτή η χρησιμότητα των ομάδων συμμετριών για την ταξινόμηση των γεωμετριών. Εδώ, θα εστιάσουμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

(*) Η Ευκλείδεια Γεωμετρία χρησιμοποιεί τη μετατόπιση των γεωμετρικών σχημάτων για την απόδειξη θεμελιωδών της Προτάσεων, υποθέτοντας ότι κατά τη μετακίνησή τους τα γεωμετρικά αντικείμενα παραμένουν αμετάβλητα. Όπως παρατηρεί ο Πρόκλος, για την απόδειξη της Πρότασης Ι.4 των Στοιχείων, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της «επίθεσης» (υπέρθεσης). Όμως, γενικά φαίνεται ότι *ο Ευκλείδης δεν αποδέχεται* τη μέθοδο της «επίθεσης», αφού τη χρησιμοποιεί μόνο δύο φορές στο μεγαλειώδες έργο του, τα Στοιχεία, στις αποδείξεις των Ι.4 και Ι.8.. Παραδείγματος χάριν, αν αποδεχόταν αυτή τη μέθοδο, θα απεδείκνυε το Αίτημα IV. περί της ισότητας των ορθών γωνιών με «επίθεση». Άλλωστε, η δυνατότητα της κίνησης δεν πηγάζει ούτε από τις κοινές έννοιες ούτε από τα αιτήματα ούτε από Προτάσεις που προηγήθηκαν της χρήσης της μεθόδου (παρά μόνο από τη διαίσθησή μας και την εμπειρία μας).

Οι ομάδες μετασχηματισμών, που αφήνουν αμετάβλητη μια συγκεκριμένη διάταξη στο επίπεδο είναι οικεία αντικείμενα μελέτης για φοιτητές και για ερευνητές. Παραδείγματος χάριν, γνωρίζουμε την C_n, την κυκλική ομάδα τάξης n, την οποία αντιλαμβανόμαστε πλήρως ως μια ομάδα στροφών που αφήνει αμετάβλητο ένα κανονικό n-γωνο και την D_n, μια διεδρική ομάδα τάξης $2n$, ως μια ομάδα όλων των ισομετριών (στροφών και ανακλάσεων), που αφήνουν αμετάβλητο το ίδιο πολύγωνο. (Η λέξη isometry («ισομετρία»), όπως και η λέξη isomorphism («ισομορφισμός»), (λέξεις που χρησιμοποιούνται στη διεθνή βιβλιογραφία) προέρχονται από την Ελληνική ρίζα του iso («ίσο») που εξηγείται και ως κάτι αμετάβλητο και αναλλοίωτο. Έτσι, οι ισόμορφες ομάδες έχουν την ίδια «μορφή» και μια ισομετρία μεταφέρει ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα με το ίδιο «μέτρο».) Στο Πρώτο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας θα αναλύσουμε σε κάποιο βαθμό τις κυκλικές και διεδρικές ομάδες συμμετριών των κανονικών πολυγώνων. Φυσικές επεκτάσεις των παραπάνω παραδειγμάτων υπάρχουν, αλλά απουσιάζουν από τα περισσότερα εισαγωγικά κείμενα άλγεβρας. Αυτές είναι οι ομάδες ισομετριών στο επίπεδο που αφήνουν αμετάβλητο ένα σχέδιο ή ένα μοτίβο (pattern) στο επίπεδο. Αν το μοτίβο είναι πεπερασμένο, μια τέτοια ομάδα είναι κατ' ανάγκην μια υποομάδα κάποιας διεδρικής ομάδας. Αν το μοτίβο επαναλαμβάνεται περιοδικά σε μία ή σε δύο κατευθύνσεις, οι μεταφορές και οι ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως είναι πρόσθετες πιθανές ισομετρίες του μοτίβου και έτσι η ομάδα που αφήνει ένα τέτοιο σχέδιο αμετάβλητο θα είναι μια άπειρη διακριτή ομάδα. Σχέδια που είναι αμετάβλητα υπό όλων των συνθέσεων μιας μόνο μεταφοράς αποτελούν ένα διάζωμα (frieze) ή μια μπορντούρα διακόσμησης και οι ομάδες μ' αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται «ομάδες συμμετρίας διακοσμητικών ταινιών» ή «ομάδες διαζώματος» ή «ομάδες φρίζας» (frieze groups). Ανάλυση αυτών των ομάδων παρουσιάζεται στο Δεύτερο Κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Μοτίβα, τα οποία είναι αμετάβλητα υπό γραμμικών συνδυασμών δυο γραμμικώς ανεξάρτητων μεταφορών, επαναλαμβάνονται περιοδικά σε δύο κατευθύνσεις και συνεπώς οι ομάδες τους ονομάζονται «ομάδες συμμετρίας του επιπέδου» ή «ομάδες ταπετσαρίας» (wallpaper groups). Στο Τρίτο Κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται και αναλύονται διεξοδικά οι «ομάδες ταπετσαρίας». Τα μοτίβα των ομάδων αυτών καλούνται επιστρώσεις του επιπέδου. Στο Τέταρτο Κεφάλαιο, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα σημαντικό Θεώρημα, και τα Πορίσματά του, που αναφέρεται στα *κυρτά πολύγωνα που δε μπορούν να επιστρώσουν το επίπεδο.* Ακολουθεί και μια σύντομη περιγραφή άλλων αποτελεσμάτων σχετικά με το προηγούμενο Θεώρημα και τα Πορίσματά του.

Τί μας οδηγεί να μελετήσουμε τις ομάδες συμμετρίας του επιπέδου; Η συνύφανση στοιχειωδών πτυχών της Ευκλείδειας γεωμετρίας μετασχηματισμών και της θεωρίας ομάδων κάνουν τις ομάδες αυτές εξαιρετικές για μελέτη. Επίσης, υπάρχουν αρκετά μη-μαθηματικά θετικά στοιχεία που καθιστούν τη μελέτη τους ιδιαιτέρως ελκυστική. Το να αναλύσουμε ένα επαναλαμβανόμενο σχέδιο, το να δούμε τί το κάνει να «αποφέρει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα» και να δημιουργήσουμε τα αρχικά σχέδια χρησιμοποιώντας τη δύναμη μαθηματικών «νόμων» που διέπουν τα σχέδια αυτά είναι ένα ισχυρό μη μαθηματικό κίνητρο για τη μελέτη αυτών των ομάδων. Αναπάντεχα, **η λέξη «συμμετρία» έχει διπλό νόημα: η καλλιτεχνική σημασία και η μαθηματική σημασία θεωρούνται ως αδιαχώριστες**.

Συγκεκριμένα, ένα σημαντικό κίνητρο για να μάθουμε για τις ομάδες αυτές είναι η ευκαιρία που έχουμε να μελετήσουμε τα παραδείγματα των ευρηματικών αλληλοσυνδεόμενων μοτίβων από τον Ολλανδό καλλιτέχνη M. C. Escher (1898-1972). Το έργο του είναι ίσως η πιο συγκεκριμένη απόδειξη για τη δύναμη που έχει αποκτηθεί στην κατανόηση αυτών των ομάδων. Προσπαθούσε για πολλά χρόνια να δημιουργήσει «ζωντανά» αλληλοσυνδεόμενα σχέδια, με αποτελέσματα τέχνης πρωτόγονης τεχνοτροπίας. Όταν συνειδητοποίησε ότι αυτά τα είδη σχεδίων διέπονται από ομάδες ισομετριών, μελέτησε τη διαθέσιμη μαθηματική βιβλιογραφία. Τα σχέδια που δημιούργησε, αφού μελέτησε τις υπάρχουσες πληροφορίες, είναι εξαιρετικά περίπλοκα, ώστε να σαστίζει ο νους ενός απλού παρατηρητή. Τα παρακάτω δύο σχέδια είναι δείγματα του έργου του.

M. C. Escher, Work 78, [17]

M. C. Escher, Work 130, [17]

Στοιχεία κρυσταλλογραφίας είναι μέρος της θεωρίας των ομάδων συμμετριών επίσης, γεγονός που αποτυπώνεται ως άλλο ένα θετικό στοιχείο. Η ταξινόμηση των περιοδικών μοτίβων σύμφωνα με τις ομάδες συμμετρίας τους είναι το δισδιάστατο αντίστοιχο του συστήματος που χρησιμοποιείται από τους Κρυσταλλογράφους για να ταξινομήσουν τα κρύσταλλα. Έτσι, οι ομάδες αυτές επίσης ονομάζονται «δισδιάστατες κρυσταλλογραφικές ομάδες».

Συνοπτικά, στο κείμενο που ακολουθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα μελετήσουμε τα τέσσερα είδη ισομετριών, βασικά Θεωρήματα αυτών, τις πεπερασμένες ομάδες συμμετριών των κανονικών πολυγώνων και το Θεώρημα του Leonardo, τις 7 διαφορετικού τύπου ομάδες διακοσμητικών ταινιών (ομάδες φρίζας) και τα ισάριθμα μοτίβα τους και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε διεξοδικά με τις 17 διαφορετικού τύπου διακοσμητικές «ομάδες ταπετσαρίας» (Wallpaper groups) στο Ευκλείδειο επίπεδο και τα ισάριθμα μοτίβα τους που επιστρώνουν το επίπεδο. Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε σε κυρτά πολύγωνα που δε μπορούν να επιστρώσουν το επίπεδο διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας ένα σημαντικό Θεώρημα και συναφή αποτελέσματα αυτού.

Κεφάλαιο 1

Οι επίπεδοι μετασχηματισμοί στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

1.1 Οι τέσσερεις κατηγορίες επίπεδων μετασχηματισμών

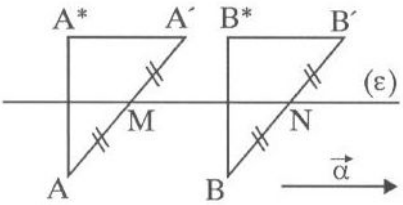
1. Στροφή
   Στροφή κατά γωνία θ (με $\theta \in (-\pi, \pi]$) με κέντρο της στροφής ένα σημείο O (συμβολίζουμε με $\rho_{O,\theta}$) ορίζεται ο μετασχηματισμός του επιπέδου, κατά τον οποίο το O παραμένει σταθερό, ενώ ένα σημείο A αντιστοιχίζεται στο A' με $\overline{OA} = \overline{OA'}$ και $\angle AOA' = \angle\theta$. Συνεπώς, κατά τη στροφή σταθερό σημείο του μετασχηματισμού είναι μόνο το κέντρο O της στροφής.

2. Ανάκλαση (ή κατοπτρισμός)
   Ανάκλαση ως προς μια ευθεία (ε) του επιπέδου (συμβολίζουμε με σ_ε) είναι η απεικόνιση, που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο A του επιπέδου το συμμετρικό του A' ως προς την ευθεία αυτή. Η ανάκλαση λέγεται και *συμμετρία ως προς άξονα* την ευθεία (ε).
   Βασικό χαρακτηριστικό της ανάκλασης είναι ότι αλλάζει τον προσανατολισμό, καθώς απεικονίζει διανύσματα κάθετα στην ευθεία στα αντίθετά τους διανύσματα, τις «δεξιόστροφες» γωνίες σε «αριστερόστροφες» και αντίστροφα. Επίσης, κάθε σημείο $A \in (\varepsilon)$ απεικονίζεται στο ίδιο σημείο, δηλαδή τα σημεία της (ε) είναι αναλλοίωτα (παραμένουν σταθερά) κατά το μετασχηματισμό. Αν σημείο $P \notin (\varepsilon)$, τότε απεικονίζεται στο σημείο P' του επιπέδου ώστε η ευθεία (ε) να είναι μεσοκάθετος του $\overline{PP'}$.

3. Παράλληλη μεταφορά (ή μεταφορά ή ολίσθηση)
   Παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ονομάζεται ο μετασχηματισμός

του επιπέδου κατά τον οποίο κάθε σημείο A αντιστοιχίζεται στο σημείο A', ώστε το $\overrightarrow{AA'}$ να έχει ίσο μήκος και να είναι παράλληλο και ομόρροπο (συγγραμμικό) με το $\vec{\alpha}$, δηλαδή $\overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$ (συμβολίζουμε με $\tau_{A,A'}$).
Κάθε μεταφορά μετασχηματίζει δύο τυχαία σημεία A και B σε δύο σημεία A' και B' αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Προφανώς, η μεταφορά ευθείας κατά διάνυσμα είναι ευθεία παράλληλη στην αρχική.

4. Ανάκλαση μετ' ολισθήσεως (ή μεταφορά μετ' ανακλάσεως)
Ένας μετασχηματισμός του επιπέδου ορίζεται ανάκλαση μετ' ολισθήσεως (συμβολίζουμε με γ), όταν υπάρχουν μια ευθεία (ε) κι ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ $//(\varepsilon)$ ώστε κάθε σημείο A να αντιστοιχεί στο A', το οποίο προκύπτει από μια μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μια ανάκλαση ως προς την ευθεία (ε). Επομένως, η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως είναι σύνθεση δύο μετασχηματισμών, μιας μεταφοράς και μιας ανάκλασης, όπου ο άξονας της ανάκλασης είναι παράλληλος με το διάνυσμα της μεταφοράς.
Στην ανάκλαση μετ' ολισθήσεως είναι αναλλοίωτα του μετασχηματισμού μόνο τα σημεία του άξονα της. Επίσης, κάθε μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει ένα σημείο με το αντίστοιχό του βρίσκεται πάνω σ' αυτόν τον άξονα.
Για παράδειγμα, αν A', B' είναι τα αντίστοιχα σημεία των A, B σε μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε τα μέσα M, N των AA' και BB' καθορίζουν τον άξονα (ε) της ανάκλασης μετ' ολισθήσεως.



Ορισμός: Έστω μια ευθεία (ε) του επιπέδου και ένα σημείο $O \in (\varepsilon)$. Ο μετασχηματισμός σ_ε λέγεται και *συμμετρία ως προς κέντρο* το O ή ημιστροφή (μισή στροφή), αν:

α. Για $P = O$, τότε $\sigma_O(P) = P$, δηλαδή το O είναι αναλλοίωτο σημείο του μετασχηματισμού.

β. Για $P \neq O$, τότε το O είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{PP'}$, όπου $P' = \sigma_O(P)$.

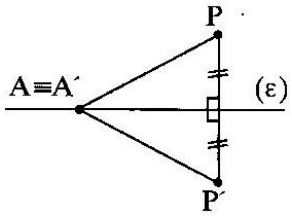
Προφανώς, η συμμετρία ως προς O ταυτίζεται με έναν μετασχηματισμό στροφής κατά γωνία $\theta = \pi$ (και γι' αυτό καλείται και μετασχηματισμός μισής στροφής). Συμβολίζουμε: $\rho_{O,180^0} = \sigma_O$.

1.2 Βασικά Θεωρήματα Ισομετριών

Ισομετρία είναι ένας μετασχηματισμός M, όταν διατηρεί τις αποστάσεις των σημείων, δηλαδή: αν $A' = M(A)$ και $B' = M(B)$, τότε $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Θεώρημα 1. *Οι ανακλάσεις είναι ισομετρίες.*

Απόδειξη
Έστω A', P' οι εικόνες δύο σημείων A και P στην ανάκλαση ως προς ευθεία (ε), $A' = M(A) = A$ και $P' = M(P)$. Από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων, προκύπτει ότι $\overline{AP} = \overline{A'P'}$. Άρα, η ανάκλαση διατηρεί τις αποστάσεις.

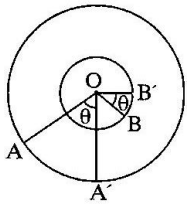


Θεώρημα 2. *Η παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία.*

Απόδειξη
Αν AB είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα μεταφοράς του, τότε από το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ προκύπτει ότι $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Έτσι, η παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία.

Θεώρημα 3. *Η στροφή είναι ισομετρία.*

Απόδειξη
Έστω A', B' οι εικόνες δύο σημείων A και B ως προς τη στροφή γύρω από το O κατά γωνία θ. Από τον ορισμό της στροφής, έχουμε $\overline{OA} = \overline{OA'}$ και $\overline{OB} = \overline{OB'}$, $\angle AOA' = \angle\theta$ και $\angle A'O'B' = \angle\theta$.



Συνεπώς, τα τρίγωνα AOB και $A'OB'$ είναι ίσα, αφού έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίση. Άρα, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Έτσι, η στροφή είναι ισομετρία.

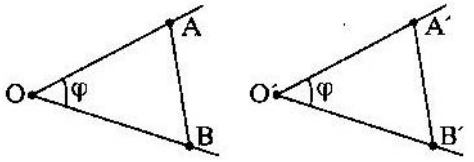
Παρατηρήσεις: Από τον ορισμό της στροφής έχουμε άμεσα ότι αν O ένα σημείο και θ, φ πραγματικοί αριθμοί, τότε $\rho_{O,\varphi} \circ \rho_{O,\theta} = \rho_{O,\theta+\varphi}$ και $\rho_{O,\theta}^{-1} = \rho_{O,-\theta}$. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\rho_{O,30} = \rho_{O,390} = \rho_{O,-330}$, καθώς γενικά για πραγματικούς αριθμούς θ και φ έχουμε: $\theta^0 = \varphi^0$ αν και μόνον αν $\theta = \varphi + 360\kappa$ για κάποιον ακέραιο κ. Έστω ευθείες l και m να τέμνονται και να σχηματίζουν κατευθυνόμενες γωνίες 135^0 και -45^0 από την l στην m. Παρατηρείστε ότι $135 \neq -45$, $135^0 \neq -45^0$, $270 \neq -90$, αλλά $270^0 = -90^0$.□

Θεώρημα 4. *Κάθε ισομετρία του επιπέδου απεικονίζει συνευθειακά σημεία του επιπέδου σε συνευθειακά σημεία (συγγραμικότητα).*

Απόδειξη
Έστω δύο σημεία A και B, τα οποία ανήκουν στην ευθεία (ε) και έστω ότι οι εικόνες τους $A' = M(A)$ και $B' = M(B)$ ορίζουν μια άλλη ευθεία, έστω την (ε').
Έστω P ένα τρίτο σημείο που ανήκει κι αυτό στην (ε) και βρίσκεται μεταξύ των A και B. Άρα, θα ισχύει ότι: $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$. Αν A', P', B' είναι οι εικόνες των A, P, B, τότε θα έχουμε $\overline{AP'} + \overline{P'B'} = \overline{A'B'}$, εφ' όσον ο μετασχηματισμός αυτός είναι μια ισομετρία. Επομένως, τα A', P' και B' θα είναι συνευθειακά και μάλιστα το P' θα βρίσκεται μεταξύ των A' και B'.
Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι αν το P' είναι συνευθειακό με τα A' και B', τότε το $P \in (\varepsilon)$. Επειδή ο μετασχηματισμός M είναι μια ισομετρία, είναι 1-1 και επί. Άρα, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο P του επιπέδου, τέτοιο ώστε $P' = M(P)$.
Ας υποθέσουμε ότι το $P \notin (\varepsilon)$, τότε σχηματίζεται ένα τρίγωνο, το $\triangle APB$. Επειδή $\overline{AP} = \overline{AP'}$, $\overline{PB} = \overline{P'B}$ και $\overline{AB} = \overline{AB'}$ με βάση την τριγωνική ιδιότητα ισχύει $\overline{AP} + \overline{PB} > \overline{AB}$, το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο, αφού $\overline{A'P'} + \overline{P'B'} = \overline{A'B'}$. Άρα, $P \in (\varepsilon)$.

Θεώρημα 5. *Κάθε ισομετρία διατηρεί το μέτρο των γωνιών.*

Απόδειξη
Έστω M μια ισομετρία και $\angle AOB$ μια οποιαδήποτε γωνία $\angle\varphi$, τότε $A' = M(A)$, $O' = M(O)$ και $B' = M(B)$. Λόγω της ισομετρίας, έχουμε $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$ και $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Άρα, τα τρίγωνα AOB και $A'O'B'$ είναι ίσα και συνεπώς οι γωνίες τους είναι ίσες.



□

Επομένως,
(α) Αν $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1') = M(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2') = M(\varepsilon_2)$, τότε $(\varepsilon_1')\perp(\varepsilon_2')$.
(β) Αν $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1') = M(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2') = M(\varepsilon_2)$, τότε $(\varepsilon_1')//(\varepsilon_2')$.

Συμπέρασμα: Οι ισομετρίες απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες σε γωνίες και επιπλέον διατηρούν την παραλληλία και την καθετότητα των ευθειών, τα μέτρα των τμημάτων και των γωνιών.

Θεώρημα 6. *Αν A, B, Γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου και A', B', Γ' τρία άλλα, τότε, εφ' όσον υπάρχει μια ισομετρία M τέτοια ώστε $A' = M(A)$, $B' = M(B)$ και $\Gamma' = M(\Gamma)$, αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη
Έστω ότι υπάρχουν δύο ισομετρίες M_1 και M_2 με:

$$M_1(A) = A' = M_2(A),\ M_1(B) = B' = M_2(B),\ M_1(\Gamma) = \Gamma' = M_2(\Gamma).$$

Θα δείξουμε ότι $M_1 = M_2$.
Έστω P ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου. Επειδή οι M_1, M_2 είναι ισομετρίες, θα έχουμε $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $A\Gamma = A'\Gamma'$. Επειδή τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, τότε από το Θεώρημα 4, προκύπτει ότι και τα A', B', Γ' δε θα είναι συνευθειακά. Ας υποθέσουμε ότι $M_1(P) \neq M_2(P)$. Τότε: αν $P' = M_1(P)$ και $P'' = M_2(P)$, θα έχουμε $\overline{PA} = \overline{P'A'} = \overline{P''A}$. Άρα, το A' θα ανήκει στη μεσοκάθετο του $\overline{P'P''}$. Για τον ίδιο λόγο και τα B' και Γ' ανήκουν στη μεσοκάθετο του $\overline{P'P''}$. Όμως, τότε τα A', B' και Γ' θα είναι συνευθειακά, άτοπο. Άρα, $M_1(P) = M_2(P)$ για όλα τα P. Οπότε, $M_1 = M_2$, δηλαδή η ισομετρία είναι μοναδική.□

Σύμφωνα μ' αυτό το Θεώρημα, μια ισομετρία καθορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία. Επομένως, για να συμπίπτουν δυο ισομετρίες αρκεί να συμπίπτουν σε τρία μη συνευθειακά σημεία. Όμως, δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων A, B, Γ και τριών A', B', Γ', το Θεώρημα δε μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ισομετρίας με $A' = M(A)$, $B' = M(B)$ και $\Gamma' = M(\Gamma)$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μια τέτοια ισομετρία υπάρχει μόνο αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

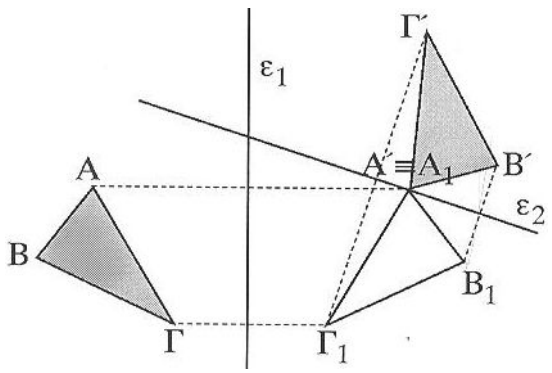
Θεώρημα 7. *Κάθε ισομετρία είναι ισοδύναμη με τη σύνθεση το πολύ τριών ανακλάσεων.*

Συνεπώς, κάθε ισομετρία είναι της μορφής: σ_{ε_1}, $\sigma_{\varepsilon_1} \circ \sigma_{\varepsilon_2}$ ή $\sigma_{\varepsilon_1} \circ \sigma_{\varepsilon_2} \circ \sigma_{\varepsilon_3}$.
Απόδειξη
Από το προηγούμενο Θεώρημα, κάθε ισομετρία καθορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία. Έστω, λοιπόν, τα ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $A' = M(A)$, $B' = M(B)$, $\Gamma' = M(\Gamma)$ και $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{B\Gamma} = \overline{B'\Gamma'}$, $\overline{A\Gamma} = \overline{A'\Gamma'}$. Ο στόχος μας είναι να συμπέσουν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με εφαρμογή το πολύ τριών ανακλάσεων.

Περιπτώσεις

1η Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι συμμετρικό του $A'B'\Gamma'$ ως προς μια ευθεία (ε), οπότε η ισομετρία είναι ισοδύναμη με την αξονική συμμετρία ως προς την ευθεία (ε).

2η Διαφορετικά, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
(α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ *έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.*
Τότε βρίσκουμε το συμμετρικό τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ του $AB\Gamma$ ως προς τη μεσοκάθετο (ε_1) του $\overline{AA'}$. Επειδή η αξονική συμμετρία είναι ισομετρία, έχουμε $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{A'B'}$, τότε το A' βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $\overline{B'B_1}$ αλλά και του $\overline{\Gamma'\Gamma_1}$, επειδή και $\overline{A\Gamma} = \overline{A'\Gamma'} = \overline{A_1\Gamma_1}$. Αν η μεσοκάθετος αυτή είναι η (ε_2), τότε η ισομετρία έχει αναλυθεί σε δύο ανακλάσεις. (Η ίδια ανάλυση ισχύει και στην περίπτωση που τα A' και A_1 δε συμπίπτουν.)



(β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ *δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.*
Τότε παίρνουμε μια αυθαίρετη ευθεία (ε) και βρίσκουμε το συμμετρικό του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την (ε), έστω το $A_1B_1\Gamma_1$. Επειδή η ανάκλαση αλλάζει τον προσανατολισμό, το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ έχει τον ίδιο

προσανατολισμό με το $A'B'\Gamma'$. Έτσι, αναγόμαστε στο (α) και για να συμπέσουν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ θα χρειαστούμε δύο ακόμη ανακλάσεις.

Συνεπώς, δύο ίσα τρίγωνα συμπίπτουν με εφαρμογή τριών το πολύ ανακλάσεων. Προφανώς, το Θεώρημα αυτό ισχύει και αντίστροφα, αφού κάθε ανάκλαση απεικονίζει ένα τρίγωνο σε τρίγωνο ίσο με το αρχικό.

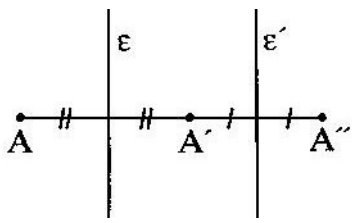
1.3 Οι ανακλάσεις παράγουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία

Εφ' όσον κάθε ισομετρία εκφράζεται ως σύνθεση ανακλάσεων, πρέπει να αναζητήσουμε τους τρόπους με τους οποίους οι μετασχηματισμοί (ισομετρίες) που εξετάσαμε εκφράζονται μέσω ανακλάσεων. Επομένως, θα εξετάσουμε όλους τους συνδυασμούς ανακλάσεων, δηλαδή μίας, δύο ή τριών ανακλάσεων, ώστε να βρούμε όλες τις δυνατές μορφές ισομετριών. Έχουμε ως στόχο να δείξουμε ότι οι ανακλάσεις παράγουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία, δηλαδή αποτελούν σύστημα γεννητόρων της.

σ_ε, δηλαδή μια ανάκλαση ως προς ευθεία ε.

σ_ε, $\sigma_{\varepsilon'}$ με $\varepsilon//\varepsilon'$, δηλαδή δυο ανακλάσεις και οι άξονες ε, ε' να είναι παράλληλοι.

Θεώρημα 8. *Η σύνθεση δυο ανακλάσεων ($\sigma_\varepsilon \circ \sigma_{\varepsilon'}$) ως προς παράλληλες ευθείες ($\varepsilon//\varepsilon'$) είναι παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα διπλάσιου μήκους της απόστασης των δύο ευθειών.*

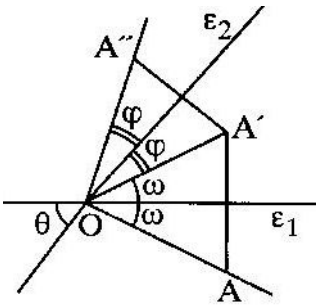


Απόδειξη
Έστω ότι η απόσταση των δύο ευθειών είναι λ. Αν A' είναι το συμμετρικό ενός σημείου A ως προς την ε (συμβολίζουμε με $\sigma_\varepsilon(A) = A'$) και A'' το συμμετρικό του A' ως προς την ε' (συμβολίζουμε με $\sigma_{\varepsilon'}(A') = A''$), τότε η ε είναι η μεσοκάθετος του $\overline{AA'}$ και η ε' του $\overline{A'A''}$. Έτσι, $\overline{AA'} = \lambda$ και $\overline{A'A''} = \lambda$. Άρα, $\overline{AA''} = 2\lambda$.

σ_{ε_1}, σ_{ε_2} με $\varepsilon_1 \nparallel \varepsilon_2$, δηλαδή δύο ανακλάσεις και οι άξονες ε_1, ε_2 να μην είναι παράλληλοι.

Θεώρημα 9. *Η σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς δύο τεμνόμενες ευθείες είναι ισοδύναμη με μια* **στροφή** *με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών κατά γωνία διπλάσια της γωνίας των δύο ευθειών.*

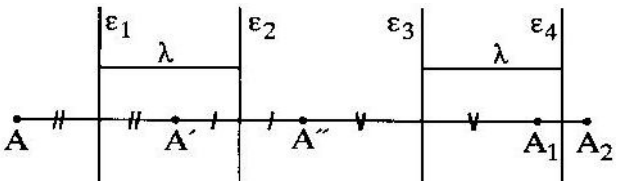
Απόδειξη
Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται σ' ένα σημείο O και σχηματίζουν γωνία θ. Θα δείξουμε ότι $\sigma_{\varepsilon_1} \circ \sigma_{\varepsilon_2} = \rho_{O,2\theta}$.



Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ε_1 (συμβολίζουμε με $\sigma_{\varepsilon_1}(A) = A'$) και A'' το συμμετρικό του A' ως προς την ε_2 (συμβολίζουμε με $\sigma_{\varepsilon_2}(A') = A''$). Λόγω των ανακλάσεων, η ε_1 είναι μεσοκάθετος του $\overline{AA'}$ και η ε_2 του $\overline{A'A''}$. Η γωνία $\angle AOA'' = 2\cdot\angle\omega + 2\cdot\angle\varphi$, αλλά $\angle\omega + \angle\varphi = \angle\theta$. Άρα, $\angle AOA'' = 2\cdot\angle\theta$.

Θεώρημα 10. *Η σύνθεση τριών ανακλάσεων ως προς τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 ($\sigma_{\varepsilon_1} \circ \sigma_{\varepsilon_2} \circ \sigma_{\varepsilon_3}$ με $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$) είναι μια ανάκλαση.*

Απόδειξη
Θεωρούμε μια ακόμα ευθεία $\varepsilon_4 // \varepsilon_3$, τέτοια ώστε η απόσταση των ε_3, ε_4 να είναι ίση με την απόσταση των ε_1, ε_2.

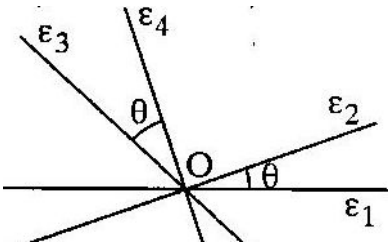


Τότε, από προηγούμενο Θεώρημα, η ανάκλαση ως προς τις ε_1 και ε_2 είναι μεταφορά με $\overline{AA''} = 2\lambda$. Το ίδιο ισχύει και για την ανάκλαση ως προς τις ε_4 και ε_3.

Τρεις ανακλάσεις και όλοι οι άξονες ε_1, ε_2, ε_3 να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Θεώρημα 11. *Οι ανακλάσεις ως προς τρεις συντρέχουσες στο ίδιο σημείο ευθείες είναι ανάκλαση.*

Απόδειξη
Έστω ότι οι τρεις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο O.



Θεωρούμε και μια άλλη ευθεία ε_4, η οποία να διέρχεται κι αυτή από το O και να σχηματίζει με την ε_3 την ίδια γωνία $\angle\theta$, που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2. Οι δυο ανακλάσεις ως προς τις ε_1, ε_2 είναι στροφή κατά γωνία $2 \cdot \angle\theta$. Το ίδιο ισχύει και για τις δύο ανακλάσεις ως προς τις ευθείες ε_3 και ε_4. Άρα, η ανάκλαση ως προς τις ε_1, ε_2, ε_3 θα είναι ανάκλαση.
(Το Θεώρημα είναι γνωστό ως *Θεώρημα των τριών ανακλάσεων.*)

Τρεις ανακλάσεις και όλοι οι άξονες ε_1, ε_2, ε_3 δεν είναι όλοι παράλληλοι ή συντρέχοντες.

Θεώρημα 12. *Οι ανακλάσεις ως προς τρεις ευθείες που δεν είναι όλες παράλληλες ή συντρέχουσες είναι ανάκλαση μετ' ολισθήσεως.*

(Παραλείπουμε την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος.)

Από την εξέταση όλων των περιπτώσεων, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 13. *Κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι ή μια ανάκλαση ή μια στροφή ή μια παράλληλη μεταφορά ή μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως.*

Ταξινόμηση των ισομετριών: Αποδεικνύεται ότι η σύνθεση τεσσάρων ανακλάσεων ανάγεται σε σύνθεση δύο ανακλάσεων. Πιο γενικά, η σύνθεση άρτιου πλήθους ανακλάσεων ανάγεται σε σύνθεση δύο ανακλάσεων.
Μια ισομετρία του επιπέδου λέγεται άρτια, αν είναι γινόμενο άρτιου πλήθους ανακλάσεων και περιττή αν είναι γινόμενο περιττού πλήθους ανακλάσεων. Μια άρτια ισομετρία είναι ένα γινόμενο δύο αξονικών συμμετριών, ενώ μια περιττή ισομετρία είναι μια αξονική συμμετρία ή ένα γινόμενο τριών αξονικών συμμετριών. Καμιά ισομετρία δε μπορεί να είναι και άρτια και περιττή.

Ισομετρίες	Άρτιες	Μεταφορές ή Στροφές
	Περιττές	Ανακλάσεις ή Ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως

Κίνηση ονομάζουμε κάθε γινόμενο περιττών αξονικών συμμετριών, ενώ γνήσια κίνηση το γινόμενο άρτιων αξονικών συμμετριών.
Μια ισομετρία ονομάζεται απλώς κίνηση αν αλλάζει τον προσανατολισμό του σχήματος και γνήσια κίνηση αν δεν τον αλλάζει. Μια ανάκλαση και γενικά η σύνθεση περιττού πλήθους ανακλάσεων αλλάζει τον προσανατολισμό. Η σύνθεση δύο ανακλάσεων διατηρεί τον προσανατολισμό. Μάλιστα, οι ισομετρίες που προκύπτουν από τη σύνθεση δύο ανακλάσεων είναι όλες οι ισομετρίες που διατηρούν τον προσανατολισμό.

1.4 Θεωρήματα σύνθεσης Ισομετριών

Θεώρημα 14. *Αν P είναι ένα σημείο, m μια ευθεία και α μια ισομετρία, τότε:*

$$\alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(m)} \text{ και } \alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(P)}$$

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα για την πρώτη εξίσωση του παραπάνω Θεωρήματος θέτοντας ως ισομετρία α μια στροφή κατά γωνία 60^0 με κέντρο το P, δηλαδή την $\rho_{P,60}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα, αν περιστρέψουμε τα σημεία του επιπέδου με κέντρο το P κατά -60^0, μετά τα ανακλάσουμε ως προς την ευθεία m και μετά τα περιστρέψουμε με κέντρο το P κατά $+60^0$, το αποτέλεσμα όλων αυτών είναι ακριβώς το ίδιο με μοναδική ανάκλαση ως προς άξονα n, όπου $n = \rho_{P,60}(m)$. (Είναι πραγματικά αξιοθαύμαστο αυτό το αποτέλεσμα.) «Ανάλογο» αποτέλεσμα για τις μεταφορές και τις στροφές δίνει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 15. *Αν α είναι μια ισομετρία, τότε:*

$$\alpha \circ \tau_{A,B} \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(A),\alpha(B)} \text{ και } \alpha \circ \rho_{C,\Theta} \circ \alpha^{-1} = \rho_{\alpha(C),\pm\Theta},$$

όπου το θετικό πρόσημο ισχύει όταν η ισομετρία α είναι άρτια και το αρνητικό πρόσημο όταν η α είναι περιττή.

Θεώρημα 16. *Μη-ταυτοτικές στροφές με διαφορετικά κέντρα δεν αντιμετατίθενται.*

Πότε οι ανακλάσεις αντιμετατίθενται;

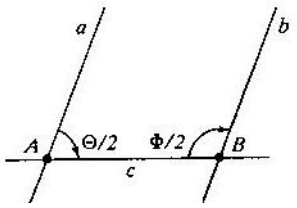
Θεώρημα 17. *Ανακλάσεις ως προς διαφορετικούς άξονες m και n αντιμετατίθενται (δηλαδή $\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m$) αν και μόνον αν $m = n$ ή $m \perp n$.*

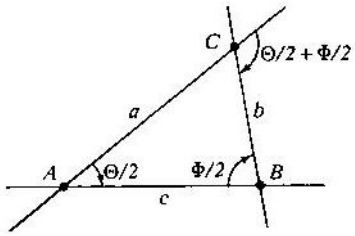
Απόδειξη
Για οποιεσδήποτε ευθείες m, n τα ακόλουθα βήματα είναι ισοδύναμα:
1. $\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m$
2. $\sigma_m \circ \sigma_n \circ \sigma_n = \sigma_m$
3. $\sigma_{\sigma_n(m)} = \sigma_m$
4. $\sigma_n(m) = m$
5. $m = n$ ή $m \perp n$.

Με σύγκριση των 1. και 5. έχουμε την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

Θεώρημα 18. *Μια στροφή κατά Θ^0 ακολουθούμενη από μια στροφή κατά Φ^0 είναι μια στροφή κατά $(\Theta + \Phi)^0$, εκτός αν $(\Theta + \Phi)^0 = 0^0$, όπου σ' αυτήν την περίπτωση το γινόμενο είναι μια μεταφορά. Μια μεταφορά ακολουθούμενη από μη-ταυτοτική στροφή Θ^0 είναι μια στροφή Θ^0. Μια μη-ταυτοτική στροφή κατά Θ^0 ακολουθούμενη από μια μεταφορά είναι μια στροφή κατά Θ^0. Μια μεταφορά ακολουθούμενη από μια μεταφορά είναι μια μεταφορά.*

Το Θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως *«Θεώρημα Πρόσθεσης γωνιών»*.
Απόδειξη
Θεωρούμε τα γινόμενα άρτιων ισομετριών. Γνωρίζουμε ήδη ότι το γινόμενο δύο μεταφορών είναι μια μεταφορά και ότι το γινόμενο δύο στροφών μπορεί επίσης να είναι μια μεταφορά σε κάποιες περιπτώσεις. Παραδείγματος χάριν, $\sigma_B \circ \sigma_A = \tau^2_{A,B}$. (Μια μισή στροφή είναι μια στροφή κατά 180^0.) Έχουμε διατυπώσει παραπάνω (ως παρατήρηση) ότι $\rho_{C,\Phi} \circ \rho_{C,\Theta} = \rho_{C,\Theta+\Phi}$. Ας θεωρήσουμε το γινόμενο $\rho_{B,\Phi} \circ \rho_{A,\Theta}$ δύο μη-ταυτοτικών στροφών με διαφορετικά κέντρα. Αν $c = \overleftrightarrow{AB}$, υπάρχει μια ευθεία a που διέρχεται από το A και μια ευθεία b που διερχέται από το B, τέτοιες ώστε $\rho_{A,\Theta} = \sigma_c \circ \sigma_a$ και $\rho_{B,\Phi} = \sigma_b \circ \sigma_c$. Έτσι, $\rho_{B,\Phi} \circ \rho_{A,\Theta} = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c \circ \sigma_a = \sigma_b \circ \sigma_a$. Όταν $(\Theta + \Phi)^0 = 0^0$, τότε οι ευθείες a και b είναι παράλληλες και το γινόμενό τους είναι μια μεταφορά. Είναι εύκολο να το δούμε αυτό, αν επιλέξουμε τις κατευθυνόμενες γωνίες ως τις εσωτερικές γωνίες από την ίδια πλευρά της c. (Δείτε στο παρακάτω σχήμα που έχουμε $\Theta/2 + \Phi/2 = -180$.) Όμως, όταν $(\Theta + \Phi)^0 \neq 0^0$, τότε οι ευθείες a και b τέμνονται σε κάποιο σημείο C και το γινόμενο $\rho_{B,\Phi} \circ \rho_{A,\Theta}$ είναι μια στροφή.





Συγκεκριμένα, επιλέγοντας πάλι τις γωνίες όπως στην παραπάνω περίπτωση (δείτε στο παραπάνω σχήμα) με χρήση του Θεωρήματος Εξωτερικής Γωνίας από τη στοιχειώδη Γεωμετρία, η κατευθυνόμενη γωνία από την a στην b είναι $(\Theta/2 + \Phi/2)^0$. Συνεπώς, το γινόμενο $\sigma_b \circ \sigma_a$ είναι μια στροφή περί το C κατά μια γωνία $(\Theta + \Phi)^0$. Έτσι, $\rho_{B,\Phi} \circ \rho_{A,\Theta} = \rho_{C,\Theta+\Phi}$.
Τώρα, σχετικά με το ποιό είναι το γινόμενο μιας μεταφοράς και μιας μηταυτοτικής στροφής. Σε ένα τέτοιο γινόμενο αντικαθιστούμε μια μεταφορά με το γινόμενο δύο στροφών κατά 180^0 η καθεμιά και επιτυγχάνουμε να έχουμε ως γινόμενο τριών στροφών μια στροφή κατά γωνία $(\Theta + 180 + 180)^0$, που είναι ακριβώς μια στροφή κατά γωνία Θ^0.

Θεώρημα 19. *Αν γ είναι μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία c και α είναι μια ισομετρία, τότε η $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$ είναι μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία $\alpha(c)$.*

(Παραλείπουμε την απόδειξη αυτού του Θεωρήματος.)

1.5 Κυκλική - Διεδρική ομάδα συμμετριών των κανονικών πολυγώνων

Η συμμετρία ενός σχήματος μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας ισομετρίας, που αφήνει το σχήμα αναλλοίωτο. Αρκεί να εξετάσουμε τους τρόπους με τους οποίους το σχήμα συμπίπτει με το ίδιο το σχήμα, για να μετρήσουμε τη συμμετρία του. Παραδείγματος χάριν, η καταμέτρηση των περιστροφικών συμμετριών ενός κανονικού πολυγώνου μπορεί να γίνει με το να προσδιορίσουμε τους άξονες συμμετρίας του κανονικού πολυγώνου και να καταμετρήσουμε το πλήθος των διαφορετικών στροφών του γύρω απ' αυτό. Μια τέτοια όμως «απλή» καταμέτρηση των κινήσεων συμμετρίας δεν είναι αρκετή για την απόκτηση ενός χρηστικού μέσου καταγραφής των ποιοτικών χαρακτηριστικών της συμμετρίας των γεωμετρικών σχημάτων, καθώς οφείλουμε να λάβουμε υπόψη και τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι κινήσεις *συνδυάζονται* μεταξύ τους. Το σύνολο όλων των συμμετριών ενός σχήματος, συμπεριλαμβανομένης της ταυτοτικής συμμετρίας, σχηματίζει μια ομάδα, την οποία καλούμε ομάδα συμμετρίας του σχήματος.
Η ομάδα των ισομετριών κάθε κανονικού πολυγώνου κέντρου O δημιουργείται από τις στρόφές ρ και τις ανακλάσεις σ που ικανοποιούν τις σχέσεις: (όπου 1: ταυτοτική)

$$\rho^{\nu} = 1,\ \sigma^2 = 1$$

Συνεπώς, η καταμέτρηση των κινήσεων συμμετρίας μπορεί να γίνει με τον προσδιορισμό των στοιχείων της περιστροφικής ομάδας συμμετρίας κάθε κανονικού πολυγώνου.

1.5.1 Η κυκλική ομάδα συμμετρίας

Οι στροφές δημιουργούν μια κανονική κυκλική υποομάδα συμμετρίας, την C_{ν}. *Κυκλική ομάδα συμμετρίας* ονομάζεται η ομάδα που αποτελείται από επαναλήψεις μιας μοναδικής περιστροφής κατά γωνία $2\pi/\nu$.
Ο αριθμός των επαναλήψεων της στροφής που απαιτείται, για να επανέλθει το σχήμα στην αρχική του θέση, ονομάζεται *τάξη* της ομάδας. Γενικότερα, η τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων της. Αν ρ είναι ένα στοιχείο της κυκλικής ομάδας και $\rho^{\nu} = 1$, τότε λέμε ότι το ρ^{ν} είναι πεπερασμένης τάξης. Με τον όρο τάξη του ρ εννοούμε τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό ν, για τον οποίο ισχύει $\rho^{\nu} = 1$.
Στοιχεία της κυκλικής ομάδας κάθε κανονικού πολυγώνου τάξης ν είναι οι στροφές ρ κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$ γύρω από το κέντρο O (θυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με $\rho_{O,\frac{2\pi}{\nu}}$, συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί στα παρακάτω κεφάλαια).

* C_1 (συμμετρία πρώτης τάξης): Στην περίπτωση αυτή στην πραγματικότητα δεν έχουμε συμμετρία, αφού η γωνία στροφής είναι $2\pi/1 = 2\pi$.

* C_2 (συμμετρία δεύτερης τάξης): Είναι η ανάκλαση, αφού η γωνία στροφής είναι $2\pi/2 = \pi$. Η C_2 περιέχει μόνο την ταυτοτική συμμετρία και μια ανάκλαση και είναι η ομάδα συμμετρίας ενός παραλληλογράμμου, που δεν είναι ρόμβος.

* C_3 (συμμετρία τρίτης τάξης): Είναι η συμμετρία ενός ισοπλεύρου τριγώνου, που είναι το κανονικό πολύγωνο με τον ελάχιστο αριθμό πλευρών.

* C_4 (συμμετρία τέταρτης τάξης): Είναι η συμμετρία του τετραγώνου.

* .....

Τα απλούστερα σχήματα που έχουν κυκλική συμμετρία είναι τα κανονικά πολύγωνα. Στην επίπεδη γεωμετρία, για κάθε φυσικό αριθμό $\nu = 3, 4, 5, ...$ υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές το οποίο συνδέεται με την ύπαρξη μιας ομάδας στροφών ν τάξης.

1.5.2 Η διεδρική ομάδα συμμετρίας

Οι στροφές και οι ανακλάσεις παράγουν από κοινού μια ομάδα συμμετρίας, τη διεδρική ομάδα συμμετρίας, την D_ν, η οποία περιέχει 2ν στοιχεία. Διεδρική ομάδα συμμετρίας ονομάζουμε την ομάδα που αποτελείται από επαναλήψεις μιας στροφής και την ίδια γωνία $2\pi/\nu$ συνδυασμένη με ανάκλαση ως προς ν άξονες που σχηματίζουν γωνίες ίσες με $2\pi/2\nu = \pi/\nu$.
Στοιχεία της διεδρικής ομάδας κάθε κανονικού πολυγώνου τάξης ν είναι οι στροφές ρ κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$ γύρω από το κέντρο και τις ανακλάσεις ως προς ευθείες που διέρχονται από το κέντρο και τις κορυφές του πολυγώνου είτε από το κέντρο και τα μέσα των πλευρών του.

* D_1: σημαίνει ανάκλαση, άρα είναι η ομάδα συμμετρίας ενός ισοσκελούς τριγώνου.

* D_2: είναι η ομάδα συμμετρίας ενός ορθογωνίου.

* D_3: έχει 6 στοιχεία, τα $1, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\circ\sigma, \rho^2\circ\sigma$. Απ' αυτά δύο στοιχεία είναι τρίτης τάξης, ρ, ρ^2 και τρία στοιχεία δεύτερης τάξης, τα $\sigma, \rho \circ \sigma, \rho^2 \circ \sigma$ (ομάδα συμμετριών ενός ισόπλευρου τριγώνου).

* .....

Έστω ν ένας θετικός ακέραιος αριθμός με $\nu > 2$ και ένα κανονικό ν-γωνο με κέντρο την αρχή των αξόνων και μια κορυφή του πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox.
Το κανονικό πολύγωνο συμπίπτει με το αυτό πολύγωνο με ν στροφές κατά γωνία $\rho = 2\pi/\nu$ και ανακλάσεις ως προς τον άξονα xx'. Η ομάδα συμμετρίας του κανονικού ν-γώνου σχηματίζεται από ν διακριτές στροφές ρ, ρ^2, ρ^3,..., ρ^ν και από ν περιττές ισομετρίες $\rho \circ \sigma$, $\rho^2 \circ \sigma$, $\rho^3 \circ \sigma$,..., $\rho^\nu \circ \sigma$. Η ομάδα συμμετρίας του κανονικού ν-γώνου έχει 2ν συμμετρίες και είναι η διεδρική ομάδα D_ν. Επομένως, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό $\nu > 2$ υπάρχει ένα πολύγωνο, το οποίο έχει ομάδα συμμετρίας D_ν. Η υποομάδα της D_ν που περιέχει όλες τις άρτιες ισομετρίες στην D_ν σχηματίζει την C_ν. Επειδή η C_ν είναι η κυκλική ομάδα ν τάξης που παράγεται από στροφή κατά $2\pi/\nu$ είναι ομάδα συμμετρίας ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές.
Συμπερασματικά, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό $\nu > 2$, υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές που έχει ομάδα συμμετρίας την D_ν.
Θα αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα ότι στο επίπεδο δεν υπάρχουν άλλες πεπερασμένες ομάδες συμμετριών, εκτός αυτών των δύο που περιγράψαμε για κάθε κανονικό πολύγωνο.

1.6 Θεώρημα του Leonardo

Θεώρημα 20. *Οι μοναδικές* **πεπερασμένες** *ομάδες συμμετριών είναι οι κυκλικές ομάδες C_n και οι διεδρικές ομάδες D_n.*

Έστω $\mathbb{I}$ μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών. Τότε η $\mathbb{I}$ δε μπορεί να περιέχει μια μη-ταυτοτική μεταφορά ή μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως, καθώς και η μια και η άλλη μπορούν να παράγουν μια άπειρη υποομάδα της $\mathbb{I}$. Έτσι, η $\mathbb{I}$ περιέχει μόνο στροφές και ανακλάσεις. Θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις. Την περίπτωση η $\mathbb{I}$ να περιέχει μόνο στροφές και την περίπτωση η $\mathbb{I}$ να περιέχει τουλάχιστον μια ανάκλαση.

1η περίπτωση:

Έστω $\mathbb{I}$ μια πεπερασμένη ομάδα συμμετριών που περιέχει μόνο στροφές. Ένα ενδεχόμενο είναι η $\mathbb{I}$ να είναι η ταυτοτική ομάδα C_1. Διαφορετικά, υποθέτουμε ότι η $\mathbb{I}$ περιέχει μια μη-ταυτοτική στροφή $\rho_{A,\Theta}$. Υποθέτουμε ότι η $\rho_{B,\Theta}$ είναι μια μη-ταυτοτική στροφή που ανήκει στην $\mathbb{I}$, τέτοια ώστε $B \neq A$. Τότε η $\mathbb{I}$ πρέπει να περιέχει τη σύνθεση

$$\rho_{B,\Phi}^{-1} \circ \rho_{A,\Theta}^{-1} \circ \rho_{B,\Phi} \circ \rho_{A,\Theta},$$

που είναι μια μεταφορά από Θεώρημα Πρόσθεσης Γωνιών που δεν είναι η ταυτοτική. Καθώς αυτό είναι αδύνατο, πρέπει να έχουμε $B = A$ και όλες τις μη-ταυτοτικές στροφές που ανήκουν στην $\mathbb{I}$ να έχουν κέντρο το A. Σημειώνουμε ότι η $\rho_{A,-\Phi}$ ανήκει στην $\mathbb{I}$ αν και μόνον αν η $\rho_{A,\Phi}$ ανήκει στην $\mathbb{I}$. Επίσης, όλα τα στοιχεία που ανήκουν στην $\mathbb{I}$ μπορούν να γραφούν στη μορφή $\rho_{A,\Phi}$, όπου $0 \leq \Phi < 360$. Έστω $\rho = \rho_{A,\Phi}$, όπου η Φ έχει τη μικρότερη θετική τιμή. Εάν η $\rho_{A,\Psi}$ ανήκει στην $\mathbb{I}$ με $\Psi > 0$, τότε η $\Psi - k\Phi$ δε μπορεί να είναι θετική και μικρότερη από τη Φ για κανένα ακέραιο k από την ελαχιστοποίηση της Φ. Έτσι, $\Psi = k\Phi$ για κάποιον ακέραιο k και $\rho_{A,\Psi} = \rho^k$. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία της $\mathbb{I}$ είναι ακριβώς οι δυνάμεις της ρ. Συμπεραίνουμε ότι μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών, η οποία δεν περιέχει ανακλάσεις είναι μια κυκλική ομάδα C_n για κάποιον ακέραιο n.

2η περίπτωση:

Έστω $\mathbb{I}$ μια πεπερασμένη ομάδα ισομετριών που περιέχει τουλάχιστον μια ανάκλαση. Καθώς η ταυτοτική ισομετρία είναι μια άρτια ισομετρία, καθώς μια ισομετρία και η αντίστροφή της έχουν τον ίδιο κατοπτρισμό και καθώς το γινόμενο δύο άρτιων ισομετριών είναι μια άρτια ισομετρία, έπεται ότι το υποσύνολο όλων των άρτιων ισομετριών που ανήκουν στην $\mathbb{I}$ σχηματίζουν μια πεπερασμένη υποομάδα της $\mathbb{I}$. Από την προηγούμενη παράγραφο, διαπιστώνουμε ότι αυτή η υποομάδα πρέπει να είναι η κυκλική ομάδα C_n παραγόμενη από κάποια στροφή ρ, έστω με κέντρο A. Έτσι, οι άρτιες ισομετρίες που ανήκουν στην $\mathbb{I}$ είναι οι n στροφές ρ, ρ^2, ..., ρ^n με $\rho^n = 1$. Υποθέτουμε ότι η $\mathbb{I}$ έχει m ανακλάσεις. Αν σ είναι μια ανάκλαση που ανήκει στην $\mathbb{I}$, τότε οι n περιττές ισομετρίες $\rho \circ \sigma$, $\rho^2 \circ \sigma$, ..., $\rho^n \circ \sigma$ ανήκουν στην $\mathbb{I}$. Έτσι, $n \leq m$. Όμως, οι m περιττές ισομετρίες πολλαπλασιασμένες από τα δεξιά με την σ δίνουν m διαφορετικές άρτιες ισομετρίες. Έτσι, $m \leq n$. Συνεπώς, $m = n$ και η $\mathbb{I}$ περιέχει τα $2n$ στοιχεία παραγόμενα από τη στροφή ρ και την ανάκλαση σ. Αν $n = 1$, τότε $\mathbb{I} = \langle\sigma\rangle$. Αν $n > 1$, τότε η $\rho\circ\sigma$ πρέπει να είναι μια ανάκλαση ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο A. Συμπεραίνουμε ότι πεπερασμένη ομάδα ισομετριών που περιέχει μια ανάκλαση είναι μια διεδρική ομάδα D_n για κάποιον ακέραιο n.
Οι παραπάνω δύο περιπτώσεις αποτελούν την απόδειξη του Θεωρήματος του Leonardo.
Ένα άμεσο Πόρισμα του Θεωρήματος του Leonardo για την ομάδα συμμετρίας ενός πολυγώνου, δεδομένου ότι πρέπει να είναι πεπερασμένη, είναι το εξής:
Η ομάδα συμμετρίας για ένα πολύγωνο είναι είτε μια κυκλική ομάδα είτε μια διεδρική ομάδα.

Κεφάλαιο 2

Οι επτά ομάδες συμμετρίας των διακοσμητικών ταινιών

Κάτω από τις μαρκίζες των παλιών κτιρίων, γύρω από αρχαία αγγεία, κατά μήκος μιας σελίδας ενός βιβλίου, υπάρχει συχνά μια διακοσμητική ταινία, η οποία δημιουργείται από την επανάληψη με συγκεκριμένο τρόπο ενός σχεδίου, ενός μοτίβου. Κάθε τέτοια γεωμετρική κατασκευή καλείται **ζωοφόρος** ή **διακοσμητική ταινία** ή απλώς **φρίζα** (frieze) και είναι ένα από τα αντικείμενα της διακοσμητικής συμμετρίας.
Η αντίστοιχη της λέξης frieze στα ελληνικά είναι ζωοφόρος (ή ζωφόρος). Κατά την αρχαιότητα το τμήμα των ναών (ως επί το πλείστον του ιωνικού ρυθμού) μεταξύ του επιστηλίου και του γείσου ονομαζόταν διάζωμα και ήταν διακοσμημένο με μετόπες και τριγλύφους ή με ζωοφόρο. Οι ζωοφόροι ήταν διακοσμητικές ταινίες με συνεχείς παραστάσεις σκηνών με ανθρώπους και ζώα.
Η περίφημη ζωοφόρος του Παρθενώνα, έργο του Φειδία του Αλκαμένη, απεικονίζει Ολύμπιους θεούς και την Παναθηναϊκή πομπή.
Στην αρχιτεκτονική χρησιμοποιείται η λέξη φρίζα για την τεχνική απόδοση του όρου «frieze». Όμως, η λέξη «frieze» προήλθε από τη γαλλική λέξη «frise» και αυτή με τη σειρά της από τη μεσαιωνική λέξη «frisium» ή «phrygium» που αποτελεί απλή παραλλαγή της λατινικής λέξης «phryx» και είναι ο εκλατινισμός της αρχαιοελληνικής λέξης «Φρυξ(-γος)». Η Φρυγία ήταν αρχαία χώρα στη Β.Δ. Μικρά Ασία και ήταν περιώνυμη για τις χρυσοποίκιλτες ταινίες και ζώνες της.
Διακοσμητικές ταινίες εντοπίζονται και σε δημιουργήματα μικρότερου μεγέθους όχι μόνο στον αρχαίο Ελληνικό πολιτισμό, όπου αφθονούν τέτοιοι διάκοσμοι σε τοιχογραφίες, αγγεία της γεωμετρικής εποχής, αετώματα κ.ά. (με μαιάνδρους, ανθέμια, κυμάτια κ.ά.), αλλά και σε πολλούς άλλους και μάλιστα σε διάφορες ιστορικές εποχές.
Για παράδειγμα, σε αρχαία περσική τοιχογραφία στο παλάτι του Δαρείου στα

Σούσα, συναντάμε το διάζωμα με τους τοξότες, διάφορες ρωμαϊκές αρχιτεκτονικές διακοσμήσεις με τόξα και φυλλώματα, ορισμένα αραβουργήματα, υαλοπίνακες μεσαιωνικών καθεδρικών ναών (κυρίως γοτθικού ρυθμού) κ.λ.π. Εγχάρακτα ταινιωτά μοτίβα χρησιμοποιήθηκαν και στους ύστερους χρόνους, προκειμένου να διακοσμηθούν κυρίως οικιακά σκεύη.

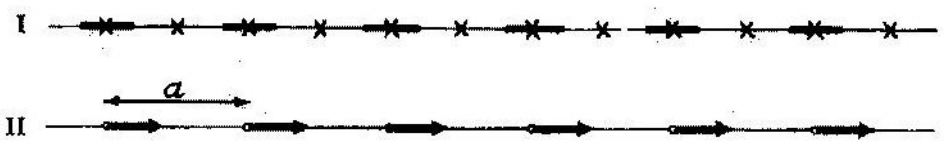
Τοιχογραφία με τοξότες

Η συμμετρία των διακοσμήσεων πάνω σε επιφάνειες έχει σχέση με τις μη πεπερασμένες ομάδες ισομετρικών απεικονίσεων του επιπέδου. (Οι πεπερασμένες ισομετρίες σχετίζονται με τα κανονικά πολύγωνα στο επίπεδο (δείτε στο Πρώτο Κεφάλαιο), ενώ στον τρισδιάστατο χώρο με τα κανονικά πολύεδρα - Πλατωνικά στερεά.)
Όλες αυτές οι διακοσμητικές ταινίες έχουν μια βασική ιδιότητα, η οποία είναι ότι το αρχικό μοτίβο επαναλαμβάνεται μεταφερόμενο κατά μήκος της ταινίας. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι όλες αυτές οι διακοσμητικές ταινίες, ανεξάρτητα από το αρχικό μοτίβο που διαθέτουν, μπορούν να καταταγούν σε επτά μόνο ομάδες, οι οποίες είναι ομάδες συμμετρίας και περιέχουν τους γνωστούς μας μετασχηματισμούς του επιπέδου, δηλαδή ανακλάσεις, στροφές, μεταφορές και ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Το αρχικό μοτίβο το οποίο δημιουργεί την ταινία μπορεί να είναι οποιοδήποτε γεωμετρικό ή μη σχέδιο.
Παραβλέποντας άλλα στοιχεία μιας διακοσμητικής ταινίας και επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας μόνο στις συμμετρίες που τις παράγουν και κάτω από τις οποίες παραμένουν αμετάβλητα τέτοια σχέδια, θα δούμε ότι υπάρχουν επτά μόνο δυνατοί τύποι διακοσμητικών ταινιών.

Ορισμός: Μια ομάδα ισομετριών η οποία σταθεροποιεί μια δοθείσα ευθεία c και της οποίας οι μεταφορές σχηματίζουν μια άπειρη κυκλική ομάδα είναι μια ομάδα φρίζας με **κεντρικό άξονα** την ευθεία c.

Έστω τ μια μη ταυτοτική μεταφορά, η οποία μετατοπίζει ένα τμήμα μιας ευθείας c, τότε η μεταφορά σταθεροποιεί τη δοθείσα ευθεία, την οποία ονομάζουμε κεντρικό άξονα της μεταφοράς. Αυτή η ρυθμική επανάληψη μπορεί να

συνδυασθεί με έναν κατοπτρισμό, δηλαδή με μια ανακλαστική συμμετρία, καθώς μια ευθεία μπορεί να κατοπτριστεί ως προς κάθε σημείο της. Μόνο αυτοί οι δύο τύποι συμμετρίας είναι δυνατοί σε ένα μονοδιάστατο ή διακοσμητικό σχέδιο. Τότε τα κέντρα των κατοπτρισμών ακολουθούν το ένα το άλλο. Στο σχήμα με x σημειώνονται τα κέντρα της ανάκλασης.



Όλες οι μεταφορές οι οποίες μετακινούν ένα δεδομένο σχέδιο «επ' άπειρον» πάνω στον κεντρικό άξονα είναι πολλαπλάσια της βασικής μεταφοράς. Η μεταφορά είναι στοιχείο μη πεπερασμένης τάξης στην ομάδα των ισομετριών του επιπέδου, γιατί όσες φορές και αν μεταφερθεί ένα σχήμα δεν πρόκειται να επανέλθει εκεί απ' όπου ξεκίνησε.
Οι πραγματικές διακοσμητικές ταινίες δεν είναι αυστηρά μονοδιάστατες, αλλά η συμμετρία τους επωφελείται μόνο από την κατά μήκος διεύθυνσή της.
Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε όλες τις ομάδες των φριζών, τις οποίες θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}$, με κεντρικό άξονα την ευθεία c και των οποίων οι μεταφορές σχηματίζουν μια άπειρη κυκλική ομάδα, η οποία έχει δημιουργηθεί από την τ. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν επτά μόνο τέτοιες ομάδες συμμετρίας.
Για κάθε ομάδα θα δώσουμε τον τύπο της φρίζας που έχει η ομάδα αυτή, καθώς και τις ομάδες των συμμετριών της. Επίσης, θα διατυπώσουμε κριτήρια με τα οποία θα διακρίνουμε τα σχέδια που έχουν αυτή την ιδιαίτερη ομάδα συμμετρίας.
Για την κατασκευή μιας φρίζας επιλέγουμε κατ' αρχήν μια ευθεία c κατά μήκος της οποίας θα αναπτυχθεί η φρίζα και την οποία θα σταθεροποιούν οι μεταφορές πάνω στην c. Επιλέγουμε ένα σημείο A ως εξής:

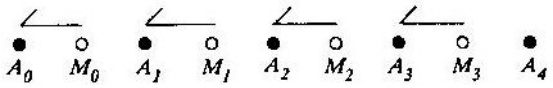
1η περίπτωση: Αν η $\mathbb{F}$ περιέχει στροφές κατά 180^0 (μισές στροφές ή συμμετρίες ως προς κέντρο), τότε το σημείο A επιλέγεται να είναι το κέντρο μιας από αυτές τις στροφές.

2η περίπτωση: Αν η $\mathbb{F}$ δεν περιέχει στροφές κατά 180^0, αλλά περιέχει ανακλάσεις ως προς άξονες κάθετους στην c, τότε το A επιλέγεται να είναι το σημείο τομής ενός απ' αυτούς τους άξονες και της c.

3η περίπτωση: Αλλιώς το σημείο A επιλέγεται να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της c.

2.1 Η ομάδα $\mathbb{F}_1$

Η πιο απλή περίπτωση για την $\mathbb{F}$ είναι η ομάδα που δημιουργείται μόνο από μια μεταφορά τ. Έστω $\mathbb{F}_1 = \langle \tau \rangle$
Επιλέγουμε κατ' αρχήν μια ευθεία c κατά μήκος της οποίας θα αναπτυχθεί η φρίζα και η οποία θα αποτελεί τον κεντρικό άξονά της. Πάνω στην ευθεία c, επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της A (Αφού η $\mathbb{F}$ δεν περιέχει στροφές κατά 180^0 ούτε ανακλάσεις, τότε το A μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της (3η περίπτωση).) και έστω A_i η εικόνα του A στη μεταφορά τ, δηλαδή $\tau^i(A) = A_i$, τότε $A_o = A$.
Η φρίζα θα περιέχει άπειρα σημεία A_i τα οποία θα βρίσκονται πάνω στην c και τα οποία η τ θα τα μεταφέρει στα A_j. Η τ θα μεταφέρει ακόμα και τα μέσα δυο διαδοχικών σημείων A_i και A_{i+1}. Έστω M_i το μέσο των A_i και A_{i+1}. Τότε $\tau^i(M) = M_i$.



Σχήμα 1

Οι φρίζες που ανήκουν σε αυτόν τον τύπο σχηματίζονται μόνο από τις μεταφορές του αρχικού σχεδίου. Ο τύπος της φρίζας που έχει την $\mathbb{F}_1$ ως ομάδα συμμετρίας δεν έχει κέντρο συμμετρίας ούτε άξονα συμμετρίας. (Δείτε το Σχήμα 1.)
Στις φρίζες που ανήκουν σε αυτόν τον τύπο δεν υπάρχουν παρά μόνο μεταφορές, με διάνυσμα μεταφοράς παράλληλο στη διεύθυνση της φρίζας, δηλαδή τον κεντρικό της άξονα.
Στην ομάδα αυτή ανήκει και η γνωστή αρχαία περσική τοιχογραφία, το διάζωμα με τους τοξότες από το παλάτι του Δαρείου στα Σούσα, φωτογραφία του οποίου υπάρχει στη σελ. 26. Η διακοσμητική αυτή ταινία δημιουργείται μόνο από μεταφορές. Η βασική μεταφορά καλύπτει διπλάσια απόσταση από την απόσταση από τοξότη σε τοξότη, γιατί οι ενδυμασίες των ανδρών εναλλάσσονται.
Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σε αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

FFFFFFFF, ΓΓΓΓΓΓΓΓ, PPPPPPPP

2.2 Η ομάδα $\mathbb{F}_2$

Εκτός από τις μεταφορές άλλες άρτιες ισομετρίες, οι οποίες σταθεροποιούν την ευθεία c, είναι οι μισές στροφές με κέντρο πάνω στην c. (Με μισές στροφές τα σημεία της c απεικονίζονται σε σημεία της c.)
Έστω λοιπόν ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει μια μισή στροφή. Επειδή η στροφή κατά 180^0 ως προς σημείο A ενός άξονα ταυτίζεται με έναν κατοπτρισμό των σημείων του άξονα ως προς το σημείο A, τη συμβολίζουμε με σ_A, όπως και τις ανακλάσεις. Έστω $\mathbb{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$.
Στην $\mathbb{F}$ θα περιέχεται ακόμα και η σύνθεση $\tau \circ \sigma_A$, η οποία είναι η μισή στροφή σ_M. Η $\mathbb{F}$ θα περιέχει επομένως στροφές κατά 180^0 γύρω από κάθε A_j και κάθε M_i. Αυτές θα είναι και οι μοναδικές μισές στροφές στην $\mathbb{F}$.
Έστω ότι, εκτός από τις μισές στροφές με κέντρα τα A_i και M_i, και ένα άλλο σημείο P του κεντρικού άξονα c είναι το κέντρο ορισμένων μισών στροφών στην $\mathbb{F}$. Τότε, στην $\mathbb{F}$ θα ανήκει και η σύνθεση των δυο μισών στροφών $\sigma_P \circ \sigma_A$, γιατί κάθε ομάδα είναι κλειστή στη σύνθεση των στοιχείων που περιέχει, η οποία όμως είναι μια μεταφορά. Έτσι, $\sigma_P \circ \sigma_A(A) = A_n$ για κάποιο n. Τότε, $\sigma_P(A) = A_n$ και το P είναι το μέσον των A και A_n. Επομένως, το P ταυτίζεται με ένα M. Άρα, η $\mathbb{F}$ περιέχει μόνο τις μισές στροφές, οι οποίες έχουν κέντρα τα A_i και τα M_i.
Στον τύπο αυτό της φρίζας υπάρχουν μια σειρά από κέντρα συμμετρίας κατανεμημένα σε ίσες αποστάσεις κατά μήκος του κεντρικού άξονα c. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κέντρα συμμετρίας είναι $\frac{|\vec{a}|}{2}$, όπου $\vec{a}$ το διάνυσμα της μεταφοράς.
Ο τύπος μιας φρίζας, η οποία έχει την $\mathbb{F}_2$ ως ομάδα συμμετρίας έχει κέντρο συμμετρίας, αλλά δεν έχει άξονα συμμετρίας. (Δείτε το Σχήμα 2.)

Σχήμα 2

Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

SSSSSSSS, NNNNNNNN, ZZZZZZZZ

Αν, λοιπόν, η $\mathbb{F}$ περιέχει μόνο άρτιες ισομετρίες, τότε είναι μια από τις $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$. (Μια άρτια ισομετρία είναι μεταφορά ή στροφή.)
Νέες ομάδες ισομετρίας για την $\mathbb{F}$ θα προκύψουν μόνο αν διευρύνουμε τις $\mathbb{F}_1$ και $\mathbb{F}_2$ προσθέτοντας περιττές συμμετρίες. (Μια περιττή ισομετρία είναι μια

ανάκλαση ή μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως.)
Κατ' αρχήν, ας προσθέσουμε στις $\mathbb{F}_1$ και $\mathbb{F}_2$ ανακλάσεις.
Οι ανακλάσεις που θα προσθέσουμε θα πρέπει να έχουν άξονες ή την ίδια την c ή άξονες κάθετους στην c, καθώς μια ανάκλαση ως προς άξονα l σταθεροποιεί την c, αν $l = c$ ή $l \perp c$.

2.3 Η ομάδα $\mathbb{F}_1^1$

Την πιο απλή ανάκλαση που μπορούμε να προσθέσουμε στην $\mathbb{F}_1$ είναι η ανάκλαση σ_c, δηλαδή ανάκλαση ως προς τον κεντρικό άξονα. Έστω $\mathbb{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$.
Η $\mathbb{F}_1^1$ θα περιέχει τη σύνθεση $\tau \circ \sigma_c$, η οποία είναι μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία c, που μεταφέρει το A στο A_n, αφού η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως είναι σύνθεση μιας μεταφοράς και μιας ανάκλασης.
Επειδή $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$, η $\mathbb{F}_1^1$ είναι μια αβελιανή ομάδα.
Στις φρίζες που ανήκουν στον τύπο αυτό, υπάρχουν ανακλάσεις ως προς τον άξονα c και μεταφορές. Ο τύπος μιας φρίζας, ο οποίος έχει την $\mathbb{F}_1^1$ ως ομάδα συμμετρίας, δεν έχει κέντρα συμμετρίας και ο άξονάς της είναι άξονας συμμετρίας της. (Δείτε το Σχήμα 3.)

Σχήμα 3

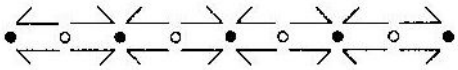
Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

DDDDDDDD, EEEEEEEE, BBBBBBBB

2.4 Η ομάδα $\mathbb{F}_2^1$

Επειδή η $\mathbb{F}$ περιέχει ήδη την ανάκλαση σ_c, ας προσθέσουμε σ' αυτήν την σ_A, δηλαδή ανάκλαση ως προς άξονα κάθετο στην c στο σημείο A. (Επιλέγουμε ο άξονας να είναι κάθετος στην c, ώστε κάθε σημείο της c να απεικονίζεται σε σημείο της c.)
Έστω $\mathbb{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$.
Η $\mathbb{F}_2^1$ περιέχει τη σύνθεση $\sigma_c \circ \tau^n$, η οποία είναι ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία c, που μεταφέρει το A στο A_n.
Ακόμη, η $\mathbb{F}_2^1$ περιέχει και τη σύνθεση $\tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$, η οποία όμως είναι η ανάκλαση ως προς άξονα κάθετο στην c στο A_i και τη σύνθεση $\tau^{2i+1} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$,

η οποία όμως είναι η ανάκλαση ως προς άξονα κάθετο στην c στο M_i.
Ο τύπος της φρίζας, ο οποίος έχει την $\mathbb{F}_2^1$ ως ομάδα συμμετρίας, έχει κέντρο συμμετρίας και ο άξονας της είναι ένας άξονας συμμετρίας της. (Δείτε το Σχήμα 4.)



Σχήμα 4

Στις φρίζες που ανήκουν στον τύπο αυτό, υπάρχουν μεταφορές και ανακλάσεις ως προς τον άξονά της, την ευθεία c, και ως προς άξονες κάθετους στην c.
Η απόσταση μεταξύ δύο κέντρων συμμετρίας είναι διπλάσια της απόστασης δύο αξόνων συμμετρίας και ισούται με το διάνυσμα μεταφοράς.
Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

IIIIIIII, HHHHHHHH, ΘΘΘΘΘΘΘΘ

2.5 Η ομάδα $\mathbb{F}_1^2$

Στην $\mathbb{F}$, η οποία δεν περιέχει μια μισή στροφή, ας προσθέσουμε τώρα μια ανάκλαση ως προς άξονα α, ο οποίος είναι κάθετος στην c, την σ_α. Στην περίπτωση αυτή, το σημείο A ανήκει στην τομή των α και c. Τότε, όπως και προηγουμένως, η $\mathbb{F}$ περιέχει τη σύνθεση των $\tau^{2i} \circ \sigma_\alpha$, η οποία είναι μια ανάκλαση ως προς ευθεία κάθετη στην c, στο A_i και τη σύνθεση $\tau^{2i+1} \circ \sigma_\alpha$, η οποία είναι μια ανάκλαση ως προς ευθεία κάθετη στην c, στο M_i.
Έστω ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει μια ακόμη ανάκλαση, την c_l ως προς ευθεία l. Τότε $l \neq c$, γιατί η σύνθεση $\sigma_c \circ \sigma_\alpha$, η οποία είναι μισή στροφή δεν ανήκει στην $\mathbb{F}$. Άρα $l \perp c$, οπότε, όπως αναπτύχθηκε και στην προηγούμενη περίπτωση, η $\mathbb{F}$ περιέχει τη μεταφορά $\sigma_l \circ \sigma_\alpha$, η οποία μεταφέρει το A στο A_n, για κάποιο n. Έτσι, $\sigma_l(A) = A_n$, για κάποιο n με $n \neq 0$ και ο άξονας l είναι κάθετος στην c σε κάποιο σημείο A_i ή σε κάποιο σημείο M_i. Επομένως, η $\mathbb{F}$ περιέχει μόνο τις ανακλάσεις ως προς ευθείες κάθετες στην c στο A_i και στο M_i.
Έστω $\mathbb{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_\alpha \rangle$, όπου α είναι μια ευθεία κάθετη στην c στο A.
Ο τύπος της φρίζας, ο οποίος έχει την $\mathbb{F}_1^2$ ως ομάδα συμμετρίας δεν έχει κέντρο συμμετρίας, έχει άξονες συμμετρίας, αλλά ο κεντρικός άξονας δεν είναι άξονας συμμετρίας της. (Δείτε το Σχήμα 5.)

Σχήμα 5

Στις φρίζες, που ανήκουν στον τύπο αυτό, υπάρχουν συμμετρίες ως προς άξονες κάθετους στη διεύθυνση της φρίζας και μεταφορές με διάνυσμα μεταφοράς παράλληλο στη διεύθυνση της φρίζας.
Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

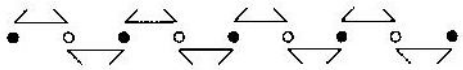
AAAAAAAA, ΔΔΔΔΔΔΔΔ, TTTTTTTT

Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει όλες τις δυνατές περιπτώσεις, οι οποίες προκύπτουν αν προσθέσουμε ανακλάσεις στην $\mathbb{F}_1$,

$$\mathbb{F}_1 = \langle \tau \rangle,\ \mathbb{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle,\ \mathbb{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_\alpha \rangle$$

2.6 Η ομάδα $\mathbb{F}_2^2$

Έστω ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει μισές στροφές και ότι η ανάκλαση που προσθέτουμε γίνεται ως προς τον άξονα q διαφορετικό από τον c και τους κάθετους στα σημεία A_i και M_i.
Για τον άξονα αυτό υπάρχουν δυο δυνατότητες $q = c$ ή $q \perp c$.
Αν $q = c$, τότε έχουμε την $\mathbb{F}_1^1$.
Αν $q \perp c$ και η q είναι κάθετη στην c στο A_i ή στο M_i, τότε έχουμε την $\mathbb{F}_2^1$ και επομένως καμιά νέα ομάδα δεν έχει προκύψει για την $\mathbb{F}$.
Άρα, για να σχηματίσουμε μια νέα ομάδα συμμετρίας της $\mathbb{F}$, πρέπει η ανάκλαση που θα προσθέσουμε να γίνει ως προς άξονα, ο οποίος δεν περνάει από τα A_i και M_i. Επειδή η $\mathbb{F}$ περιέχει μισές στροφές και το κέντρο τους πρέπει να βρίσκεται πάνω στην c, η q δε μπορεί παρά να είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AM_i}$. Έστω, λοιπόν, ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει την σ_p, όπου p είναι η μεσοκάθετος του AM. Τότε, η $\mathbb{F}$ δε μπορεί να περιέχει καμιά άλλη ανάκλαση ως προς ευθεία α, κάθετη στη c στο A, καθώς η μεταφορά $\sigma_p \circ \sigma_\alpha$ θα μεταφέρει το A στο M, το οποίο είναι αδύνατο.
Ακόμη, επειδή $\sigma_p \circ \sigma_\alpha = \sigma_p \circ \sigma_c \circ \sigma_A$, τότε η $\mathbb{F}$ δε μπορεί να περιέχει και την ανάκλαση σ_c. Επομένως, $\mathbb{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle$, όπου p είναι η μεσοκάθετος του $\overline{AM}$.
Η $\mathbb{F}_2^2$ περιέχει τη σύνθεση $\sigma_p \circ \sigma_A$, η οποία όμως είναι ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την c και την οποία ονομάζουμε $\gamma = \sigma_p \circ \sigma_A$. Επειδή $\tau = \gamma^2$ και $\sigma_p = \gamma \circ \sigma_A$, τότε $\mathbb{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$.
Μια φρίζα, η οποία έχει την $\mathbb{F}_2^2$ ως ομάδα συμμετρίας, έχει κέντρο συμμετρίας, έχει άξονα συμμετρίας, αλλά ο άξονάς της c, δεν είναι άξονας συμμετρίας της. (Δείτε το Σχήμα 6.)



Σχήμα 6

Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

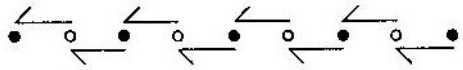
MWMWMWMW

Έχουμε τώρα υπολογίσει όλες τις δυνατές περιπτώσεις προσθέτοντας ανακλάσεις στην $\mathbb{F}_2$:

$$\mathbb{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle,\ \mathbb{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle,\ \mathbb{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle = \langle \gamma, \sigma_A \rangle.$$

2.7 Η ομάδα $\mathbb{F}_1^3$

Ας υποθέσουμε ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει μια άλλη περιττή ισομετρία, μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως α. Τότε, η α έχει άξονα την c και η α^2 είναι μια μεταφορά, η οποία σταθεροποιεί τον άξονα c.
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για τη μεταφορά α^2: $\alpha^2 = \tau^{2n}$ και $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$, δηλαδή να σχηματίζεται από άρτιο ή περιττό πλήθος μεταφορών.
Έστω $\alpha^2 = \tau^{2n}$. Τότε, η σύνθεση $(\alpha \circ \tau^{-n})^2$ είναι η ταυτοτική ισομετρία. Έτσι, η περιττή ισομετρία $\alpha \circ \tau^{-n}$ πρέπει να είναι η σ_c, καθώς η σ_c^{-1} είναι η ταυτοτική ισομετρία. Στην περίπτωση αυτή, η $\mathbb{F}$ περιέχει την σ_c και τη σύνθεση $\sigma_c \circ \tau$.
Εάν η $\mathbb{F}$ δεν περιέχει μια μισή στροφή, τότε έχουμε την $\mathbb{F}_1^1$. Εάν η $\mathbb{F}$ περιέχει μια μισή στροφή, τότε έχουμε την $\mathbb{F}_2^1$.
Έστω ότι $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$. Τότε, η σύνθεση $(\tau^{-n} \circ \alpha)^2$ είναι η μεταφορά τ.
Έστω $\gamma = \tau^{-n} \circ \alpha$. Τότε, η γ είναι μια περιττή ισομετρία. Έτσι, η γ πρέπει να είναι η μοναδική ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία c, η οποία μεταφέρει το A στο M. Έστω $\mathbb{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$. Τότε, η γ είναι μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την c, τέτοια ώστε $\gamma^2 = \tau$.
Ο τύπος μιας φρίζας που έχει την $\mathbb{F}_1^3$ ως ομάδα συμμετρίας δεν έχει κέντρο συμμετρίας ούτε άξονα συμμετρίας. (Δείτε το Σχήμα 7.)



Σχήμα 7

Γράμματα του ελληνικού και λατινικού αλφαβήτου, τα οποία επαναλαμβανόμενα μπορούν να σχηματίσουν μια ταινία που ανήκει σ' αυτόν τον τύπο είναι τα παρακάτω.

DWDMDWDMDWDM

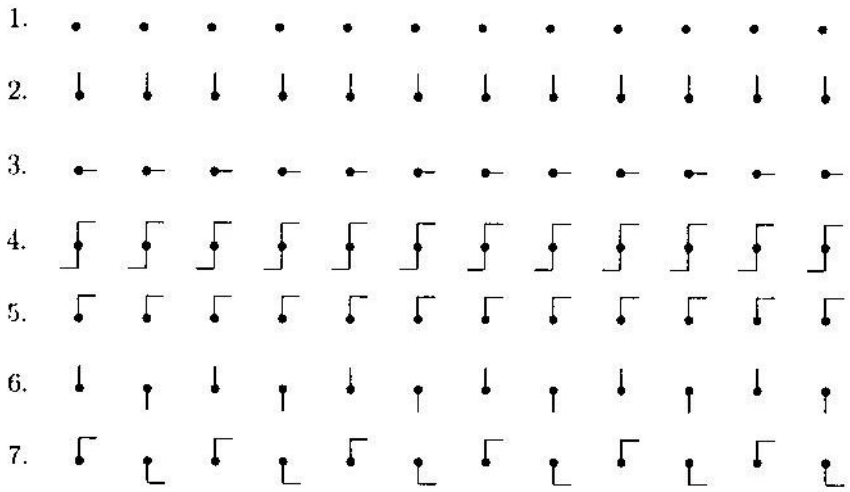
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $\mathbb{F}$ περιέχει και άλλες ισομετρίες εκτός από εκείνες που γενικεύτηκαν από την ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ με άξονα τον c, όπου $\gamma^2 = \tau$. Επειδή το τετράγωνο της μεταφοράς $\sigma_c \circ \gamma$ είναι η τ, τότε η $\sigma_c \circ \gamma$ δεν ανήκει στην $\langle \tau \rangle$. Έτσι, η σ_c δεν ανήκει στην $\mathbb{F}$. Αν η $\mathbb{F}$ περιέχει την σ_l με $l \perp c$, τότε η $\mathbb{F}$ περιέχει τη μισή στροφή $\sigma_l \circ \gamma$. Αν η $\mathbb{F}$ περιέχει μια μισή στροφή, τότε η $\mathbb{F}$ πρέπει να περιέχει την σ_A. Στην περίπτωση αυτή, η $\mathbb{F}$ περιέχει την σ_A και την ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ με άξονα την ευθεία c, ώστε $\gamma^2 = \tau$. Έτσι, η $\mathbb{F}$ είναι η $\mathbb{F}_2^2$.
Έχουμε, τελικά, εξετάσει όλες τις δυνατότητες για την $\mathbb{F}$.

Επομένως, η ομάδα $\mathbb{F}$ πρέπει να είναι μια από τις επτά παραπάνω ομάδες, οι οποίες ορίζονται με σχέσεις γεννητόρων ως ακολούθως:
$\mathbb{F}_1 = \langle \tau \rangle$, $\mathbb{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$, $\mathbb{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_\alpha \rangle$, $\mathbb{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$, $\mathbb{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$, $\mathbb{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$, $\mathbb{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$.

2.8 Τα μονοδιάστατα μοτίβα και το πλέγμα τους

Τα πιο απλά είδη επαναλαμβανόμενων μοτίβων είναι τα μονοδιάστατα. Είναι λίγο μονότονα και βαρετά, αλλά αποτελούν δείγματα ιδεών, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για μοτίβα που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον.
Ένα πλέγμα πάνω σε μια ευθεία αποτελείται από σημεία τοποθετημένα σε ίσα διαστήματα, που επεκτείνονται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Παραδείγματος χάριν,

Ένα **μοτίβο φρίζας** κατασκευάζεται με την τοποθέτηση ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου σχημάτων πάνω σ' ένα μονοδιάστατο πλέγμα στο επίπεδο. (Υπάρχει ουσιαστικά ένα μόνο τέτοιο πλέγμα, το οποίο εμείς μπορούμε να θεωρήσουμε να είναι οι ακέραιοι αριθμοί κατά μήκος του άξονα των x.) Υπάρχουν επτά διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε σχήματα πάνω σ' ένα πλέγμα και αυτοί απεικονίζονται ακριβώς από κάτω.

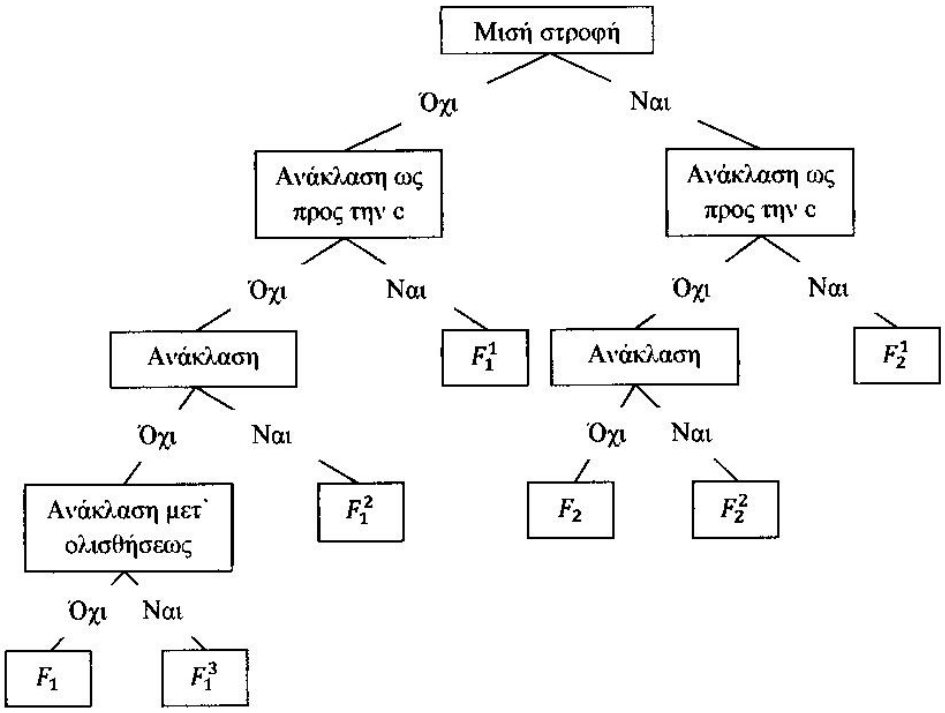


B. Johnston & F. Richman, 1997, [9]

2.9 Κριτήρια κατάταξης των διακοσμητικών ταινιών σε ομάδες συμμετρίας

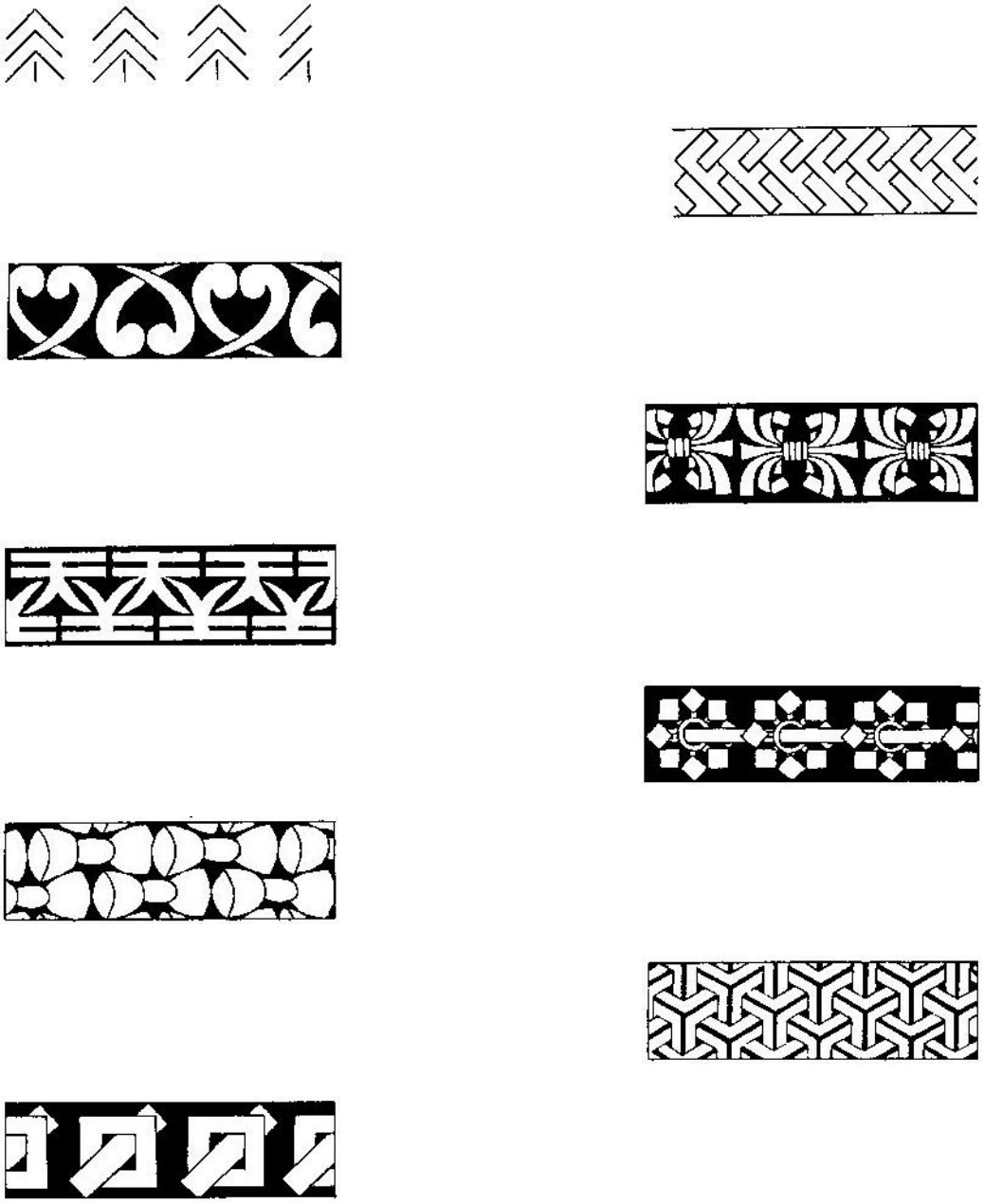
Μπορούμε να αποφασίσουμε σε ποιά ομάδα συμμετρίας ανήκει μια οποιαδήποτε διακοσμητική ταινία απαντώντας στα παρακάτω ερωτήματα, τα οποία προέκυψαν από την ανάλυση που προηγήθηκε.

1. Υπάρχει κέντρο συμμετρίας;
2. Είναι η ευθεία c άξονας συμμετρίας;
3. Υπάρχει άλλος άξονας συμμετρίας;
4. Ο τύπος της φρίζας σταθεροποιείται από μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως;



2.10 Ασκήσεις αναγνώρισης «ομάδων φρίζας»

Παρουσιάζει ενδιαφέρον το να εντοπίσει κανείς σε ποιά ομάδα φρίζας ανήκει καθένα από τα παρακάτω σχέδια και να τεκμηριώσει τον ισχυρισμό του με τα κριτήρια που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.



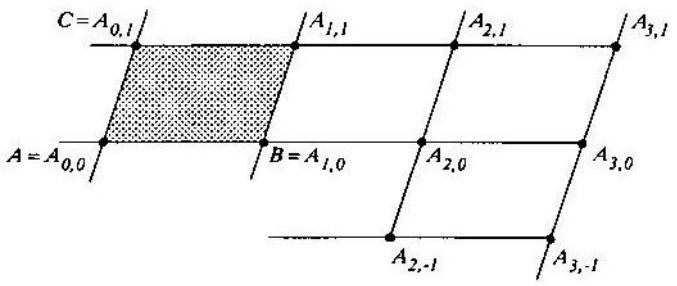
Κεφάλαιο 3

Οι ομάδες συμμετρίας του επιπέδου (Wallpaper groups)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις διακοσμητικές ομάδες διαζώματος, ομάδες των οποίων η υποομάδα των μεταφορών παράγεται από μία μεταφορά. Τώρα, εστιάζουμε στις διακοσμητικές ομάδες του επιπέδου, που η υποομάδα των μεταφορών τους παράγεται από δύο μεταφορές. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν *δεκαεπτά* ομάδες διαφορετικού τύπου διακοσμητικών επιστρώσεων τοίχου, τις οποίες θα αποκαλούμε «ομάδες ταπετσαρίας». Ο χαρακτηρισμός αυτών των ομάδων ως *«διακοσμητικές»* έχει να κάνει με την καλλιτεχνική σημασία της συμμετρίας αυτών των ομάδων που, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή αυτής της εργασίας, είναι αδιαχώριστη με τη μαθηματική τους σημασία.
Ένα «περιοδικό» ή «επαναλαμβανόμενο» μοτίβο στο επίπεδο είναι ένα σχέδιο που έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχουν μια πεπερασμένη περιοχή και δύο γραμμικώς ανεξάρτητες μεταφορές, τέτοιες ώστε το σύνολο όλων των εικόνων της περιοχής, αφού ενεργήσει η ομάδα που παράγεται απ' αυτές τις μεταφορές, αναπαράγει το αρχικό σχέδιο.
Η ομάδα των μεταφορών ενός περιοδικού μοτίβου είναι το σύνολο όλων των μεταφορών που απεικονίζουν το μοτίβο πάνω σε αυτό καθ' αυτό. Η μικρότερη περιοχή του επιπέδου που έχει την ιδιότητα το σύνολο των εικόνων της μέσω αυτής της ομάδας των μεταφορών να καλύπτει το επίπεδο είναι μια *μονάδα του μοτίβου* (unit of the pattern). Όλες οι μονάδες έχουν την ίδια επιφάνεια, αλλά οι σκιαγραφήσεις τους μπορούν να έχουν άπειρες παραλλαγές. Είναι σαν πλακίδια, όλα όμοια, τα οποία γεμίζουν το επίπεδο, χωρίς κενά ή αλληλεπικαλύψεις και είναι τοποθετημένα σε παράλληλες σειρές. Ορισμένα περιοδικά σχέδια περιλαμβάνουν μέρος ή όλο το σύνορο μιας μονάδας ως μέρος του σχεδίου (κάποιοι αποκρύπτουν αυτό το περίγραμμα και βλέπουν μόνο μια επαναλαμβανόμενη εικόνα έναντι ενός κενού φόντου).
Κάθε περιοδικό μοτίβο φυσικά συνδέεται με ένα *πλέγμα σημείων* (lattice of

points). Επιλέγοντας οποιοδήποτε σημείο του μοτίβου, το πλέγμα είναι το σύνολο όλων των εικόνων αυτού του σημείου, αφού ενεργήσει η ομάδα μεταφορών του μοτίβου. Μια μονάδα του πλέγματος (lattice unit) είναι μια μονάδα η οποία είναι ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία πλέγματος. Τα διανύσματα που σχηματίζουν τις πλευρές μιας μονάδας πλέγματος δημιουργούν την ομάδα μεταφορών του μοτίβου. Οι κρυσταλλογράφοι χρησιμοποιούν τον όρο πρωτόγονης τεχνοτροπίας καλλιτεχνικό κύτταρο (primitive cell) για μια μονάδα πλέγματος. Στη βιβλιογραφία συναντούμε και τους παραπλήσιους όρους κυτταρική μονάδα (unit cell) ή απλά κύτταρο (cell) για μια μονάδα του πλέγματος. Στην παρουσίαση μας θα κρατήσουμε τον όρο «μονάδα του πλέγματος».
Εκτός από τις μεταφορές, ένα περιοδικό μοτίβο μπορεί επίσης να απεικονισθεί στο ίδιο από οποιαδήποτε άλλη ισομετρία του επιπέδου: στροφές, ανακλάσεις ή ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Η ομάδα συμμετρίας του μοτίβου είναι το σύνολο όλων των ισομετριών που απεικονίζουν το μοτίβο σε αυτό καθ' αυτό. Η ταξινόμηση των περιοδικών μοτίβων σύμφωνα με τις ομάδες συμμετρίας τους είναι το δισδιάστατο αντίστοιχο του συστήματος που χρησιμοποιείται από τους Κρυσταλλογράφους για να ταξινομήσουν τα κρύσταλλα. Συνεπώς, οι ομάδες αυτές επίσης ονομάζονται δισδιάστατες κρυσταλλογραφικές ομάδες (two-dimensional crystallographic groups).
Τώρα, θα δούμε τους όρους που αναφέραμε παραπάνω με χρήση μαθηματικών συμβόλων και θα συνεχίσουμε μ' αυτά μια διεξοδική ανάλυση του ζητήματος.

Μια «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ είναι μια ομάδα ισομετριών, της οποίας οι μεταφορές είναι ακριβώς αυτές που ανήκουν στη $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, όπου εάν $\tau_1 = \tau_{A,B}$ και $\tau_2 = \tau_{A,C}$ τότε τα A, B, C είναι μη συγγραμμικά σημεία. Το **πλέγμα** για την $\mathbb{W}$ καθορισμένο από ένα σημείο P είναι το σύνολο όλων των εικόνων του P κάτω από τις μεταφορές που ανήκουν στην $\mathbb{W}$. Καθώς κάθε μεταφορά της «ομάδας ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ είναι του τύπου $\tau_2^j \circ \tau_1^i$, όλα τα σημεία A_{ij} σχηματίζουν ένα πλέγμα, όπου $A_{ij} = \tau_2^j \circ \tau_1^i(A)$. (Δείτε την Εικόνα 1.)

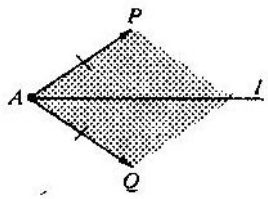


Εικόνα 1

Μια **μονάδα του πλέγματος** για την $\mathbb{W}$ ως προς το σημείο A και παραγόμενη από τις μεταφορές τ_1 και τ_2 είναι μια τετράπλευρη περιοχή με κορυφές τις A_{ij}, $A_{i+1,j}$, $A_{i,j+1}$ και $A_{i+1,j+1}$. Μια μονάδα πλέγματος είναι πάντα μια τετράπλευρη περιοχή καθορισμένη από ένα παραλληλόγραμμο. Ένα πλέγμα με μια ορθογώνια μονάδα πλέγματος καλείται **ορθογώνιο** και ένα πλέγμα με μια ρομβική μονάδα πλέγματος καλείται **ρομβικό**. *Κατ' αρχήν, θα δείξουμε ότι ένα πλέγμα είναι απαραίτητα ρομβικό ή ορθογώνιο, όταν η $\mathbb{W}$ περιέχει περιττές ισομετρίες.*

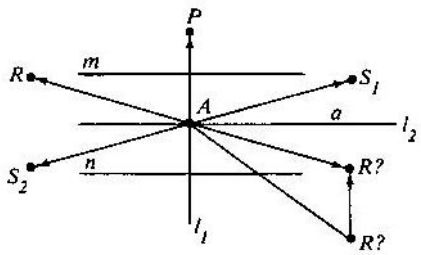
Ας υποθέσουμε ότι η σ_l ανήκει στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η l είναι παράλληλη σε μια διαγώνιο μιας ρομβικής μονάδας του πλέγματος ή ότι η l είναι παράλληλη σε μια πλευρά μιας ορθογώνιας μονάδας του πλέγματος. Έστω A ένα σημείο πάνω στην l. Έστω $\tau_{A,P}$ η πιο μικρού μήκους μη-ταυτοτική μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση. Ούτε $\overleftrightarrow{AP} = l$ ούτε $\overleftrightarrow{AP} \perp l$. Έστω $Q = \sigma_l(P)$. Τότε η μεταφορά $\tau_{A,Q}$ ανήκει στην $\mathbb{W}$, καθώς $\tau_{A,Q} = \sigma_l \circ \tau_{A,P} \circ \sigma_l^{-1}$. (Δείτε την Εικόνα 2.) Καθώς $AP = AQ$ και τα σημεία A, P, Q είναι μη συγγραμμικά, η $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \rangle$ είναι η ομάδα όλων των μεταφορών που ανήκουν στην $\mathbb{W}$ και η l περιέχει μια διαγώνιο μιας ρομβικής μονάδας του πλέγματος.



Εικόνα 2

2η περίπτωση. Είναι $\overleftrightarrow{AP} = l$ ή $\overleftrightarrow{AP} \perp l$. Έστω α η κάθετη ευθεία στην $\overleftrightarrow{AP}$ στο σημείο A, m η μεσοκάθετος του $\overline{AP}$ και $n = \sigma_\alpha(m)$. (Δείτε την Εικόνα 3.) Έστω $\tau_{A,R}$ η πιο μικρού μήκους μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$, η οποία όμως δεν ανήκει στη $\langle \tau_{A,P} \rangle$. Τότε το R είναι πάνω στην m, πάνω στην n ή μεταξύ των m και n, καθώς διαφορετικά η $\tau_{A,P}^{\pm 1} \circ \tau_{A,R}$ είναι πιο μικρού μήκους από τη μεταφορά $\tau_{A,R}$. Επιπλέον, μελετώντας τη μεταφορά $\tau_{A,R}$ και την αντίστροφή της, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η $\tau_{A,R}$ είναι τέτοια που το R είναι πάνω στην m, πάνω στην α ή μεταξύ των m και α.



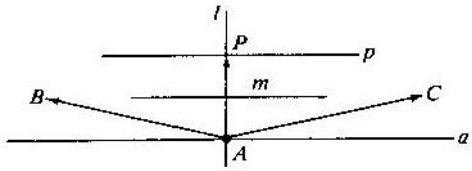
Εικόνα 3

Έστω $S = \sigma_l(R)$. Υποθέτουμε ότι το R είναι μεταξύ των m και α. Αν $l = \overleftrightarrow{AP}$, τότε η $\tau_{A,S} \circ \tau_{A,R}$ είναι μια μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$ μικρότερου μήκους από τη μεταφορά $\tau_{A,P}$. Αν $l \perp \overleftrightarrow{AP}$, τότε η $\tau_{S,A} \circ \tau_{A,R}$ είναι μια μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$ μικρότερου μήκους από τη μεταφορά $\tau_{A,P}$. Επομένως, πρέπει να έχουμε το R πάνω στην m ή πάνω στην α. Αν το R είναι πάνω στην m, τότε η $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle$ είναι η ίδια με την $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$, καθώς $\tau_{A,S} \circ \tau_{A,R} = \tau_{A,P}$. Έτσι, η l είναι παράλληλη με μια διαγώνιο μιας ρομβικής μονάδας του πλέγματος ($\square ARPS_1$ στην Εικόνα 3) ως προς το σημείο A και παραγόμενη από τις μεταφορές $\tau_{A,R}$ και $\tau_{A,S}$. Απ' την άλλη μεριά, αν το R είναι πάνω στην α, τότε η $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$ είναι η ομάδα όλων των μεταφορών που ανήκουν στην $\mathbb{W}$ και η l είναι παράλληλη σε μια πλευρά μιας ορθογώνιας μονάδας του πλέγματος για την $\mathbb{W}$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 1. *Αν η σ_l ανήκει σε μια «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$, τότε η l είναι παράλληλη σε μια διαγώνιο μιας ρομβικής μονάδας του πλέγματος για την $\mathbb{W}$ ή αλλιώς η l είναι παράλληλη σε μια πλευρά μιας ορθογώνιας μονάδας του πλέγματος για την $\mathbb{W}$.*

Τώρα, υποθέτουμε ότι η «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ δεν περιέχει ανακλάσεις, αλλά περιέχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την ευθεία l. Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2 που ασχοληθήκαμε με τις ομάδες φρίζας, η μικρότερη ομάδα που περιέχει ανάκλαση μετ' ολισθήσεως και μεταφορές που ανήκουν στην $\mathbb{W}$ που σταθεροποιούν την l είναι μια ομάδα φρίζας $\mathbb{F}_1^3$ παραγόμενη από μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ με άξονα την ευθεία l. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γ^2 είναι η μικρότερου μήκους μεταφορά που σταθεροποιεί την l. Έστω A ένα σημείο της l. Έστω α κάθετη ευθεία στην l στο σημείο A, $m = \gamma(\alpha)$, $p = \gamma^2(\alpha)$ και $P = \gamma^2(A)$. Έτσι, η $\tau_{A,P}$ είναι η μικρότερου μήκους μεταφορά στη $\langle \gamma \rangle$. Έστω $\tau_{A,B}$ η μικρότερου μήκους μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$, η οποία όμως δεν ανήκει στην $\langle \gamma^2 \rangle$. Καθώς η $\tau_{A,P}^{\pm 1} \circ \tau_{A,B}$ δε μπορεί να είναι μικρότερου μήκους από την $\tau_{A,B}$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το B είναι πάνω στην α ή βρίσκεται μεταξύ των α και p. Αν το B είναι πάνω στην α, τότε η $\mathbb{W}$ έχει ένα

ορθογώνιο πλέγμα και η l είναι παράλληλη σε μια πλευρά μιας ορθογώνιας μονάδας του πλέγματος. Υποθέτουμε ότι το B είναι μεταξύ των a και p. (Δείτε την Εικόνα 4.)



Εικόνα 4

Έστω $C = \sigma_l(B)$. Τότε η $\tau_{A,C}$ ανήκει στην $\mathbb{W}$, καθώς $\tau_{A,C} = \gamma \circ \tau_{A,B} \circ \gamma^{-1}$. Έτσι, $\tau_{A,C} \circ \tau_{A,B} = \gamma^2$ και το B είναι πάνω στην m. Έτσι, το $\square ABPC$ είναι μια ρομβική μονάδα πλέγματος με την l να περιέχει μια διαγώνιο. Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2. *Αν η «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως, τότε η $\mathbb{W}$ σταθεροποιεί ένα πλέγμα, το οποίο είναι ρομβικό ή ορθογώνιο.*

Αν η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ μεταφέρει το σημείο A στο σημείο P στο πλέγμα που καθορίζεται από το A για την «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$, τότε εφαρμόζοντας την γ και μετά την $\tau_{P,A}$ προκύπτει μια ανάκλαση, καθώς το γινόμενο είναι μια περιττή ισομετρία που σταθεροποιεί το σημείο A. Ειδικότερα, αυτό αποδεικνύει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Αν μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ σταθεροποιεί ένα πλέγμα για την $\mathbb{W}$, τότε η $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση.*

Εδώ, ολοκληρώνονται τα απαραίτητα αποτελέσματα για τις περιττές ισομετρίες σε μια «ομάδα ταπετσαρίας». Τώρα, συνεχίζουμε με τις στροφές.

3.1 Ο Κρυσταλλογραφικός Περιορισμός

Σύντομα, θα λέγαμε ότι καθώς τα κέντρα στροφής ενός μοτίβου απεικονίζονται με μεταφορές σε νέα κέντρα στροφής (που έχουν την ίδια τάξη), μόνο στροφές τάξης 2, 3, 4 ή 6 μπορούν να προκύψουν ως ισομετρίες ενός περιοδικού σχεδίου. Η πρόταση αυτή αποτελεί τον Κρυσταλλογραφικό Περιορισμό και αναπτύσσεται και αποδεικνύεται παρακάτω. Κατ' αρχήν, δίνουμε κάποιους ορισμούς.

Το σημείο P είναι ένα n-**κέντρο** για μια ομάδα $\mathbb{I}$ ισομετριών, αν οι στροφές που ανήκουν στην $\mathbb{I}$ με κέντρο το P σχηματίζουν μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα C_n με $n > 1$. Ένα **σχήμα** είναι ένα μη-κενό σύνολο σημείων. Αν το

σημείο P είναι ένα n-κέντρο για την ομάδα συμμετρίας για ένα σχήμα, τότε το P επίσης καλείται ένα n-**κέντρο** για το σχήμα. Ένα **κέντρο συμμετρίας** είναι ένα n-κέντρο για κάποιο n. Έτσι, αν το σημείο P είναι ένα 4-κέντρο για κάποιο σχήμα, τότε το P είναι ένα σημείο συμμετρίας γι' αυτό το σχήμα, καθώς $\sigma_P = \rho^2_{P,90}$. Σ' αυτήν την περίπτωση, το σημείο P είναι ένα σημείο συμμετρίας, αλλά το P δεν είναι ένα 2-κέντρο. Επίσης, σημειώνουμε ότι αν ένα σημείο Q είναι ένα 3-κέντρο για κάποιο σχήμα, τότε το Q δεν είναι ένα σημείο συμμετρίας γι' αυτό το σχήμα.
Η εξέταση των n-κέντρων για μια ομάδα εξελίσσεται να είναι πολύ επωφελής. Πρώτον, *για δεδομένο n, το σύνολο των n-κέντρων πρέπει να είναι σταθερό από κάθε ισομετρία που ανήκει στην ομάδα.* Για να το κατανοήσουμε αυτό, υποθέτουμε ότι $\alpha(P) = Q$ για κάποια ισομετρία α που ανήκει στην ομάδα $\mathbb{I}$. Από τις εξισώσεις $\alpha \circ \rho_{P,\Theta} \circ \alpha^{-1} = \rho_{Q,\pm\Theta}$ και $\alpha^{-1} \circ \rho_{Q,\Phi} \circ \alpha = \rho_{P,\pm\Phi}$ καταλαβαίνουμε ότι το Q είναι ένα n-κέντρο αν και μόνον αν το P είναι ένα n-κέντρο (για κάποιο n). Αυτό το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα διατυπώνεται στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4. *Για δεδομένο n, αν σημείο P είναι ένα n-κέντρο για την ομάδα $\mathbb{I}$ των ισομετριών και η $\mathbb{I}$ περιέχει μια ισομετρία που μεταφέρει το P στο Q, τότε το Q είναι ένα n-κέντρο για την $\mathbb{I}$. Αν η ευθεία l είναι ένας άξονας συμμετρίας για ένα σχήμα και η ομάδα συμμετρίας για το σχήμα περιέχει μια ισομετρία που μεταφέρει την l στην m, τότε η ευθεία m είναι άξονας συμμετρίας για το σχήμα.*

Καθώς το πιο κοντινό κέντρο συμμετρίας σε ένα δεδομένο n-κέντρο είναι συχνά απαραίτητο στις αποδείξεις παρακάτω, θέλουμε να δείξουμε ότι κάποια κέντρα συμμετρίας δε μπορούν να είναι αυθαίρετα κοντά. Υποθέτουμε ότι οι στροφές $\rho_{A,360/n}$ και $\rho_{P,360/n}$ με $P \neq A$ και $n > 1$ ανήκουν στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Τότε η $\mathbb{W}$ περιέχει το γινόμενο $\rho_{P,360/n} \circ \rho_{A,-360/n}$, το οποίο είναι μια μη-ταυτοτική μεταφορά $\tau_2^j \circ \tau_1^i$ για κάποια i και j από το Θεώρημα Πρόσθεσης Γωνιών (Έχουμε αναφερθεί σ' αυτό στο Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 18). Έτσι,

$$\rho_{P,360/n} = \tau_2^j \circ \tau_1^i \circ \rho_{A,360/n} \text{ και } \rho_{P,360/n}(A) = \tau_2^j \circ \tau_1^i \circ \rho_{A,360/n}(A) = A_{ij}.$$

Συνεπώς, είτε το P είναι το μέσο των A και A_{ij} (όταν $n = 2$) ή αλλιώς το $\triangle APA_{ij}$ είναι ισοσκελές. Σε κάθε περίπτωση, $2AP = AP + PA_{ij} \geq AA_{ij} > 0$ από την τριγωνική ανισότητα. Κατά συνέπεια, το $2AP$ δεν είναι μικρότερο από το μήκος οποιασδήποτε μη-ταυτοτικής μεταφοράς που ανήκει στην $\mathbb{W}$.

Θεώρημα 5. *Αν οι $\rho_{A,360/n}$ και $\rho_{P,360/n}$ με $P \neq A$ και $n > 1$ ανήκουν στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$, τότε το $2AP$ δεν είναι μικρότερο από το μήκος της μικρότερης μη-ταυτοτικής μεταφοράς που ανήκει στην $\mathbb{W}$.*

Το παραπάνω Θεώρημα δηλώνει επακριβώς καθένα από τα ακόλουθα:

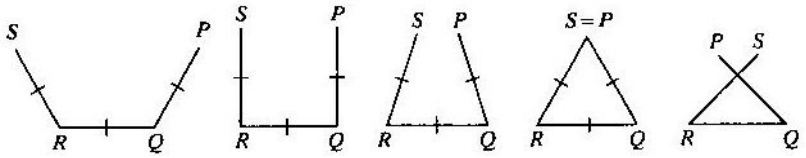
(1) Δύο n-κέντρα (για το ίδιο n) δε μπορεί να είναι «πολύ κοντά».

(2) Ένα 2-κέντρο και ένα 4-κέντρο δε μπορεί να είναι πολύ κοντά.

(3) Ένα 3-κέντρο και ένα 6-κέντρο δε μπορεί να είναι πολύ κοντά.

(4) Ένα 2-κέντρο και ένα 6-κέντρο δε μπορεί να είναι πολύ κοντά.

Θα χρησιμοποιήσουμε την (1), αμέσως, για να δείξουμε ότι οι πιθανές τιμές του n, τέτοιες ώστε να υπάρχει ένα n-κέντρο σε μια «ομάδα ταπετσαρίας», είναι αρκετά περιορισμένες.
Υποθέτουμε ότι το P είναι ένα n-κέντρο της «ομάδας ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Έστω Q ένα n-κέντρο (ίδιο n) στη μικρότερη δυνατή απόσταση από το P, με $Q \neq P$. Η ύπαρξη του σημείου Q είναι εξασφαλισμένη από τα δύο προηγούμενα Θεωρήματα. Έστω $R = \rho_{Q,360/n}(P)$.



Εικόνα 5

Τότε το R είναι ένα n-κέντρο και $PQ = QR$. Έστω $S = \rho_{R,360/n}(Q)$. Τότε το S είναι ένα n-κέντρο και $RQ = RS$. Εάν $S = P$, τότε $n = 6$. (Δείτε την Εικόνα 5.) Εάν $S \neq P$, τότε πρέπει να έχουμε $SP \geq PQ = RQ$ από την επιλογή του Q. Συνεπώς, αν $S \neq P$, τότε $n \leq 4$. Έτσι, το n ανήκει στο σύνολο $\{2, 3, 4, 6\}$ και έχουμε αποδείξει τον **Κρυσταλλογραφικό Περιορισμό:**

Θεώρημα 6. *Αν ένα σημείο P είναι ένα n-κέντρο για μια «ομάδα ταπετσαρίας», τότε το n ανήκει στο σύνολο $\{2, 3, 4, 6\}$.*

Ένα άμεσο πόρισμα του Κρυσταλλογραφικού Περιορισμού είναι το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 7. *Αν μια «ομάδα ταπετσαρίας» περιέχει ένα 4-κέντρο, τότε η ομάδα δεν περιέχει ούτε ένα 3-κέντρο ούτε ένα 6-κέντρο.*

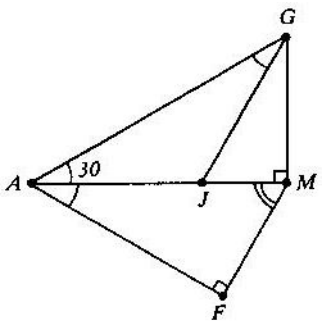
Αυτό έπεται από το γεγονός ότι οι $\rho_{P,120}$ και $\rho_{Q,90}$ δε μπορεί να βρίσκονται στην ίδια «ομάδα ταπετσαρίας», γιατί το γινόμενο $\rho_{P,120} \circ \rho_{Q,-90}$ είναι μια στροφή 30^0 γύρω από κάποιο σημείο και δε μπορεί να ανήκει σε καμιά «ομάδα ταπετσαρίας» από τον Κρυσταλλογραφικό Περιορισμό.

3.2 «Ομάδες Ταπετσαρίας» και Μοτίβα

Πρόκειται να βρούμε όλες τις πιθανές «ομάδες ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$, αρχίζοντας από εκείνες τις ομάδες που περιέχουν ένα n-κέντρο. Από τον Κρυσταλλογραφικό Περιορισμό, είναι αρκετό να μελετήσουμε μόνο τις τιμές $6, 3, 4$ και 2 για το n. Αρχίζουμε αποδεικνύοντας το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο δείχνει την αφθονία συμμετρίας που απαιτείται να επαληθεύσει ένα 6-κέντρο.

Θεώρημα 8. *Υποθέτουμε ότι το σημείο A είναι ένα 6-κέντρο για την «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Δεν υπάρχουν 4-κέντρα για την $\mathbb{W}$. Επιπλέον, το κέντρο συμμετρίας το πιο κοντινό στο A είναι ένα 2-κέντρο M και το A είναι ένα κέντρο ενός κανονικού εξαγώνου, του οποίου οι κορυφές είναι 3-κέντρα και οι πλευρές του έχουν ως μέσα 2-κέντρα. Όλα τα κέντρα συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ είναι καθορισμένα από τα σημεία A και M.*

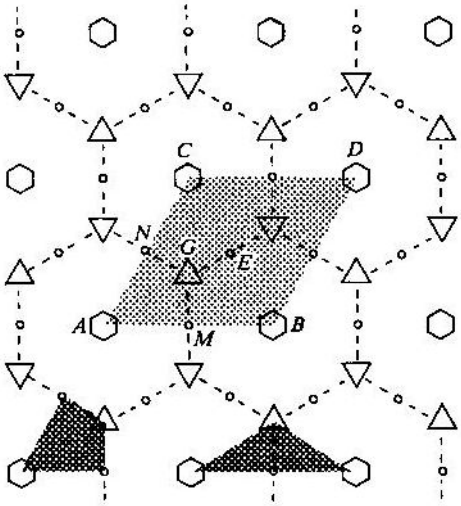
Κατ' αρχήν, σημειώνουμε ότι η $\mathbb{W}$ δε μπορεί να περιέχει 4-κέντρα, αφού η $\mathbb{W}$ περιέχει το 6-κέντρο A (από το προηγούμενο Θεώρημα). Έστω M ένα n-κέντρο, το πιο κοντινό στο A. Αν το M ήταν ένα 3-κέντρο ή ένα 6-κέντρο, τότε θα υπήρχε ένα κέντρο F πιο κοντά στο A από το M, όπου $\rho_{M,120} \circ \rho_{A,60} = \rho_{F,180}$. (Δείτε την Εικόνα 6.)



Εικόνα 6

Έτσι, το M πρέπει να είναι ένα 2-κέντρο. Καθορίζουμε ένα σημείο G από την εξίσωση $\rho_{M,180} \circ \rho_{A,-60} = \rho_{G,120}$. Έτσι, το G είναι είτε ένα 3-κέντρο είτε ένα 6-κέντρο. Ωστόσο, το G δε μπορεί να είναι ένα 6-κέντρο, καθώς τότε θα υπήρχε ένα κέντρο J μεταξύ των A και M, όπου το J είναι καθορισμένο από την εξίσωση $\rho_{G,60} \circ \rho_{A,60} = \rho_{J,120}$. Συνεπώς, το G πρέπει να είναι ένα 3-κέντρο. Οι εικόνες του G υπό την ισχύ των στροφών $\rho_{A,60}$ είναι οι κορυφές του εξαγώνου στη διατύπωση του Θεωρήματος. Αν $B = \sigma_M(A)$ και $C = \rho_{A,60}(B)$, τότε το B και το C είναι 6-κέντρα για την $\mathbb{W}$. Τα κέντρα συμμετρίας καθορισμένα από το 6-κέντρο A και το 2-κέντρο M είναι όπως φαίνονται στην Εικόνα 7. Αν $N = \rho_{A,60}(M)$, τότε το N είναι ένα 2-κέντρο για την $\mathbb{W}$. Επίσης, αφού το 6-κέντρο A πρέπει να πάει σε ένα 6-κέντρο υπό ενός στοιχείου της $\mathbb{W}$, τότε οι

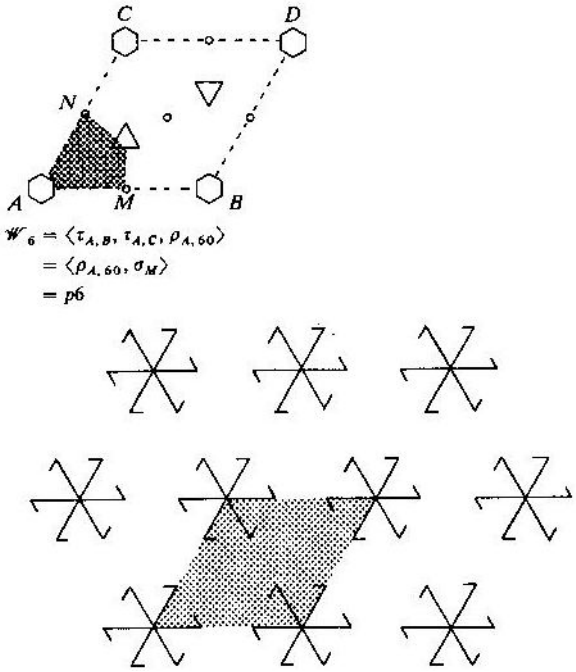
$\sigma_M \circ \sigma_A$ και $\sigma_N \circ \sigma_A$ είναι οι πιο μικρού μήκους μεταφορές που ανήκουν στην $\mathbb{W}$. Συνεπώς, οι μεταφορές $\tau_{A,B}$ και $\tau_{A,C}$ πρέπει να παράγουν την υποομάδα μεταφορών της $\mathbb{W}$. Έχουμε την πρώτη μας ειδική «ομάδα ταπετσαρίας»: $\mathbb{W}_6 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60} \rangle = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M \rangle$, όπου το $\triangle ABC$ είναι ισόπλευρο και M είναι το μέσο του $\overline{AB}$. Στην Εικόνα 7, μια μονάδα του πλέγματος καθορισμένη από το $\square ABDC$ είναι ελαφρά σκιασμένη με M το μέσο του $\overline{AB}$ και N το μέσο του $\overline{AC}$. Αυτή η παραστατική γραφή θα χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια, με E το σημείο τέτοιο που το $\square NAME$ είναι ένα παραλληλόγραμμο. Οι δυο σκοτεινές περιοχές στην Εικόνα 7 καλούνται *βάσεις* για την $\mathbb{W}_6$. Η πιο μικρή πολυγωνική περιοχή t, τέτοια ώστε το επίπεδο να καλύπτεται από το $\{\alpha(t) | \alpha \in \mathbb{W}\}$ καλείται μια (πολυγωνική) **βάση ή θεμελιώδης περιοχή** για την «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Οι βάσεις ή θεμελιώδεις περιοχές μπορούν να χρησιμοποιούνται για να δημιουργούν «μοτίβα ταπετσαρίας» που έχουν μια δεδομένη «ομάδα ταπετσαρίας» ως ομάδα συμμετρίας. Αν t' είναι ένα σχήμα με ταυτοτική ομάδα συμμετρίας να ανήκει στην πολυγωνική βάση t, τότε η ένωση όλων των εικόνων $\alpha(t')$ με α να ανήκει στην $\mathbb{W}$ είναι ένα σχήμα με όλες τις συμμετρίες να ανήκουν στην $\mathbb{W}$. Αυτό το σχήμα λέγεται ότι έχει μοτίβο (motif) t'.



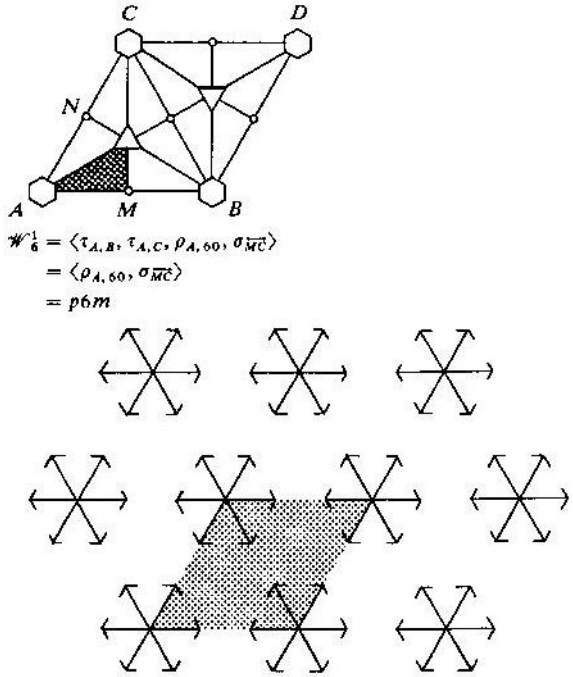
Εικόνα 7

Στη δημιουργία ενός «μοτίβου ταπετσαρίας», ένα μόνο μοτίβο (motif) t' είναι επιλεγμένο για τη βάση (θεμελιώδη περιοχή) t, το οποίο μέρος του μοτίβου (pattern) που ανήκει στη μονάδα πλέγματος είναι καθορισμένο και αυτό είναι τότε ακριβώς που μεταφέρεται πέρα για πέρα στο επίπεδο, για να δώσει το «μοτίβο ταπετσαρίας». Για κάθε μια από τις 17 «ομάδες ταπετσαρίας», θα έχουμε ένα σχήμα όπως αυτό στην Εικόνα 8. Αυτές θα έχουν ένα μοτίβο (pattern) με το μοτίβο (motif) ελέγχου, μια μονάδα πλέγματος με μια βάση -

θεμελιώδη περιοχή και τις συμμετρίες αναγραφόμενες, δυο σύνολα γεννητόρων για την ομάδα και δύο ονομασίες για την ομάδα. (G. Martin, 1982, [10])



Εικόνα 8



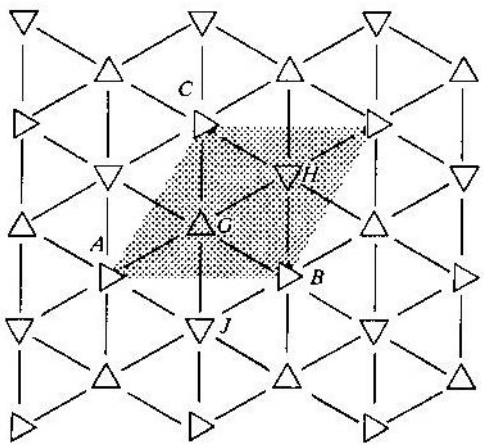
Εικόνα 9

Επιπλέον στη σημειογραφία του Fejes Tóth που εμπεριέχει το «$\mathbb{W}$», θα δοθεί η *σύντομη διεθνής μορφή* που χρησιμοποιείται από τους Κρυσταλλογράφους. Για παράδειγμα, η ομάδα $\mathbb{W}_6$ ορίζεται ως $p6$ από τους Κρυσταλλογράφους.
Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_6$ στην $\mathbb{W}$. Καθώς το ρομβικό πλέγμα των 6-κέντρων καθορίστηκε από το 6-κέντρο A πρέπει να είναι σταθερό από κάθε ισομετρία στην $\mathbb{W}$, τότε (Θεώρημα 3) όλες οι επεκτάσεις της $\mathbb{W}_6$ επιτυγχάνονται προσθέτοντας ανακλάσεις που σταθεροποιούν αυτό το πλέγμα. Όμως, εξαιτίας του πλούτου της $\mathbb{W}_6$, η πρόσθεση καθεμιάς από τις πιθανές ανακλάσεις χρειάζεται την εισαγωγή όλων των πιθανών ανακλάσεων. (Δείτε την Εικόνα 9.) Έστω $\mathbb{W}_6^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60}, \sigma_{\overleftrightarrow{MC}} \rangle$. Από το αποτέλεσμα στην $\mathbb{W}_6$, τότε $\mathbb{W}_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M, \sigma_{\overleftrightarrow{MC}} \rangle$. Έτσι,

$$\mathbb{W}_6^1 = \langle \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}, \sigma_{\overleftrightarrow{GM}}, \sigma_{\overleftrightarrow{MA}} \rangle$$

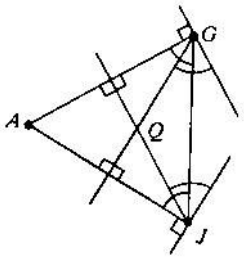
και η $\mathbb{W}_6^1$ παράγεται από τις τρεις ανακλάσεις ως προς τις τρεις ευθείες που περιέχουν τις πλευρές ενός $30^0 - 60^0 - 90^0$ τριγώνου. Επίσης, αποδεικνύεται ότι $\mathbb{W}_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_{\overleftrightarrow{MC}} \rangle$. *Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_6$ έχει ένα 6-κέντρο, αλλά όχι άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_6^1$ έχει ένα 6-κέντρο κι έναν άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ένα 6-κέντρο έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_6$ ή την $\mathbb{W}_6^1$.* Μεταφερόμαστε στις «ομάδες ταπετσαρίας» με ένα 3-κέντρο, αλλά χωρίς ένα 6-κέντρο και αποδεικνύουμε το ακόλουθο Θεώρημα, αντίστοιχο με το προηγούμενο.

Θεώρημα 9. *Αν το σημείο A είναι ένα 3-κέντρο για την «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ και δεν υπάρχουν 6-κέντρα για την $\mathbb{W}$, τότε κάθε κέντρο συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ είναι ένα 3-κέντρο και το A είναι το κέντρο ενός κανονικού εξαγώνου, του οποίου οι κορυφές είναι 3-κέντρα. Όλα τα κέντρα συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ είναι καθορισμένα από το σημείο A και ένα από τα πιο κοντινά 3-κέντρα.*



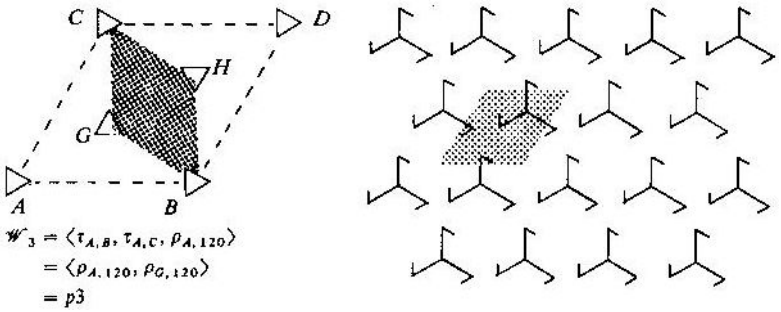
Εικόνα 10

Το ότι κάθε κέντρο P για την $\mathbb{W}$ πρέπει να είναι ένα 3-κέντρο έπεται από το γεγονός ότι η $\rho_{A,-120} \circ \rho_{P,180}$ δε μπορεί να ανήκει στην $\mathbb{W}$ για κανένα σημείο P, καθώς η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει 6-κέντρα. Έστω G το πιο κοντινό 3-κέντρο στο A. Έστω J τέτοιο ώστε $\rho_{G,120} \circ \rho_{A,120} = \rho_{J,240}$. Τότε το J είναι ένα 3-κέντρο και το $\triangle AGJ$ είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Οι εικόνες του G και του J υπό την ισχύ των δυνάμεων της $\rho_{A,120}$ είναι οι κορυφές του εξαγώνου στη διατύπωση του Θεωρήματος. Η επανάληψη του ισχυρισμού για κάθε 3-κέντρο αποδεικνύει ότι όλα τα 3-κέντρα είναι παρατεταγμένα, όπως στην Εικόνα 10 και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος.
Επιπλέον, από την Εικόνα 11, βλέπουμε ότι καθεμιά από τις $\rho_{G,120} \circ \tau_{A,G}$ και $\rho_{J,120} \circ \tau_{A,J}$ είναι η $\rho_{Q,120}$, όπου Q είναι το κέντρο βάρους του $\triangle AGJ$. Άρα, ούτε η $\tau_{A,G}$ ούτε η $\tau_{A,J}$ ανήκουν στην $\mathbb{W}$, καθώς διαφορετικά το Q θα ήταν ένα 3-κέντρο πιο κοντά στο A από ότι το G. Έτσι, εάν η $\tau_{A,B}$ είναι η πιο μικρού μήκους μεταφορά στην $\mathbb{W}$, τότε το 3-κέντρο B δεν είναι μια κορυφή του εξαγώνου των πιο κοντινών 3-κέντρων στο A. Έστω B και C καθορισμένα από τις $\tau_{A,B} = \rho_{G,120} \circ \rho_{A,-120}$ και $\tau_{A,C} = \rho_{G,-120} \circ \rho_{A,120}$.



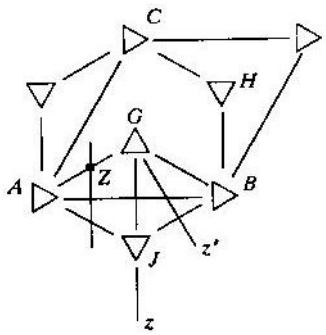
Εικόνα 11

Τότε οι $\tau_{A,B}$ και $\tau_{A,C}$ είναι οι πιο μικρού μήκους μεταφορές που ανήκουν στην $\mathbb{W}$ και μεταφέρουν το A στα επόμενα των πιο κοντινών 3-κέντρων. Άρα, οι $\tau_{A,B}$ και $\tau_{A,C}$ παράγουν την ομάδα μεταφορών της $\mathbb{W}$. Έστω $\mathbb{W}_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120} \rangle$. Εάν η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει περιττές ισομετρίες, τότε η $\mathbb{W}$ πρέπει να είναι η $\mathbb{W}_3$. (Δείτε την Εικόνα 12.)



Εικόνα 12

Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_3$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ χωρίς ανακλάσεις προσθέτοντας ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Τότε (Θεώρημα 3), η $\mathbb{W}$ πρέπει να έχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως, η οποία να μεταφέρει ένα 3-κέντρο A σε ένα 3-κέντρο που δεν ανήκει στο πλέγμα που καθορίζεται από το A. Συνθέτοντας αυτήν την ανάκλαση μετ' ολισθήσεως με μια μεταφορά και πιθανόν με μια στροφή περί το A, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που μεταφέρει το A είτε στο G είτε στο J. Υποθέτουμε ότι η γ είναι μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που ανήκει στην $\mathbb{W}$, η οποία μεταφέρει το A στο G. Τότε $\gamma = \sigma_z \circ \sigma_Z$, όπου Z είναι το μέσο των A και G και z κάποια ευθεία που διέρχεται από το G. Αφού η σ_Z σταθεροποιεί το σύνολο όλων των 3-κέντρων, τότε η σ_z πρέπει επίσης να σταθεροποιεί το σύνολο όλων των 3-κέντρων. (Δείτε την Εικόνα 13.)

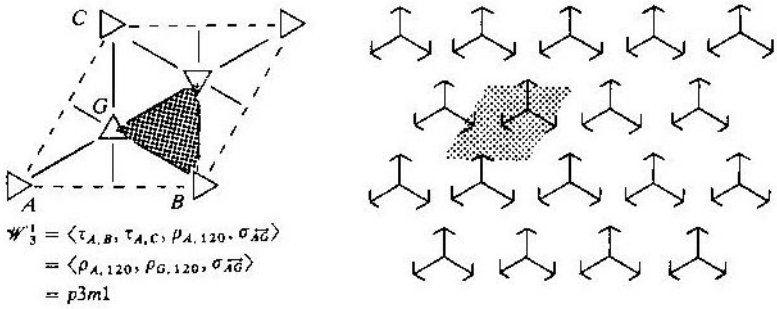


Εικόνα 13

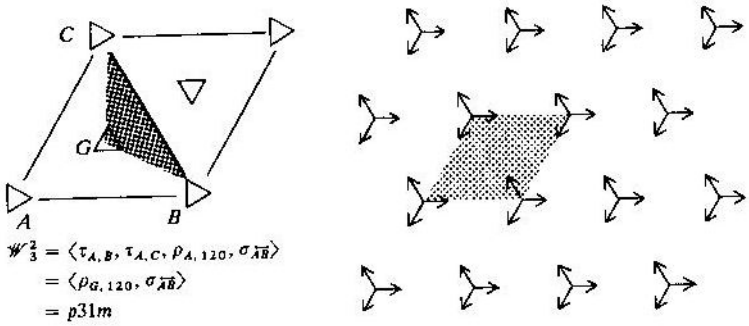
Συνθέτοντας την σ_z με μια στροφή περί το G, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η z είναι είτε η μεσοκάθετος του $\overline{JB}$ ή $z = \overleftrightarrow{GJ}$. Το πρώτο είναι αδύνατο καθώς διαφορετικά η $\overleftrightarrow{AG}$ είναι ο άξονας της γ και η $\tau_{B,A} \circ \gamma^2$ είναι μια μεταφορά που ανήκει στην $\mathbb{W}$ μήκους AG και μικρότερου μήκους από την $\tau_{A,B}$. Οπότε, $z = \overleftrightarrow{GJ}$. Όμως, τότε $\rho_{G,-120} \circ \gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}} \circ \sigma_z \circ \sigma_z \circ \sigma_Z = \sigma_{\overleftrightarrow{ZJ}}$ και η $\mathbb{W}$ περιέχει την ανάκλαση ως προς τη μεσοκάθετο του $\overline{AG}$. Ομοίως, η παρουσία μιας ανάκλασης μετ' ολισθήσεως που μεταφέρει το A στο J συνεπάγεται ότι η ανάκλαση ως προς τη μεσοκάθετο του $\overline{AJ}$ ανήκει στην $\mathbb{W}$. Σε κάθε περίπτωση, η $\mathbb{W}$ πρέπει να περιέχει μια ανάκλαση, εάν η $\mathbb{W}$ είναι μια επέκταση της $\mathbb{W}_3$ και περιέχει μια περιττή ισομετρία.

Όλες οι επεκτάσεις της $\mathbb{W}_3$ σε μια ομάδα χωρίς 6-κέντρα προσθέτοντας περιττές ισομετρίες επιτυγχάνονται προσθέτοντας ανακλάσεις. Εάν η $\mathbb{W}_3$ επεκτείνεται προσθέτοντας την σ_l, τότε η ευθεία l πρέπει να είναι άξονας συμμετρίας για το σύνολο των 3-κέντρων. Αφού μια τέτοια ευθεία πρέπει να διέρχεται το λιγότερο από ένα 3-κέντρο, υποθέτουμε ότι η l είναι μια ευθεία που διέρχεται από το 3-κέντρο A. Έστω $\mathbb{W}_3^1 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\overleftrightarrow{AG}} \right\rangle$ και

$\mathbb{W}_3^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\overleftrightarrow{AB}} \rangle$. (Δείτε τις Εικόνες 14 και 15.) Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι η $\mathbb{W}_3^1$ παράγεται από τρεις ανακλάσεις ως προς τις τρεις ευθείες που περιέχουν τις πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου.



Εικόνα 14

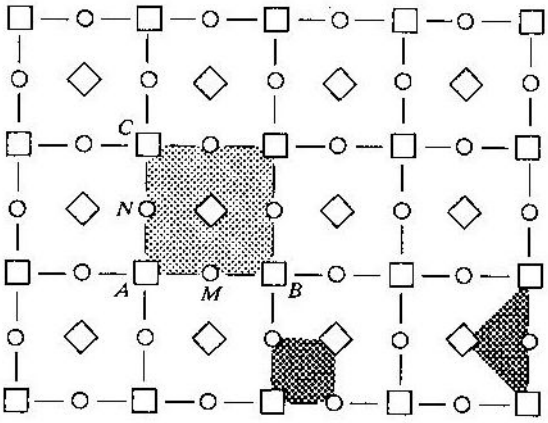


Εικόνα 15

Οι ομάδες $\mathbb{W}_3^1$ και $\mathbb{W}_3^2$ επιτυγχάνονται προσθέτοντας στην $\mathbb{W}_3$ μια ανάκλαση ως προς μια εκ των διαγωνίων της ρομβικής μονάδας του πλέγματος που καθορίζεται από το A. Προσθέτοντας τις ανακλάσεις και ως προς τις δυο διαγωνίους θα παράγουμε μια ημιστροφή και ένα 6-κέντρο. Έτσι, κάθε «μοτίβο ταπετσαρίας» που περιέχει μόνο τρία κέντρα έχει μια εκ των $\mathbb{W}_3$, $\mathbb{W}_3^1$ ή $\mathbb{W}_3^2$ ως ομάδα συμμετρίας. *Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας $\mathbb{W}_3$ έχει ένα 3-κέντρο, δεν έχει 6-κέντρο και δεν έχει άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας $\mathbb{W}_3^1$ έχει ένα 3-κέντρο, δεν έχει 6-κέντρο και κάθε 3-κέντρο είναι πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας $\mathbb{W}_3^2$ έχει ένα 3-κέντρο εκτός ενός άξονα συμμετρίας, αλλά δεν έχει 6-κέντρο.*

Οι σύντομοι διεθνείς τύποι $p3m1$ και $p31m$ συχνά εναλλάσσονται στη μαθηματική βιβλιογραφία και συνιστάται προσοχή όποτε τις συναντούμε. Θα ακολουθήσει συγκεκριμένο παράδειγμα στην επόμενη υποενότητα με χρήση των γεννητόρων για τις ομάδες συμμετρίας του επιπέδου για πλήρη διασαφήνηση του συγκεκριμένου θέματος.

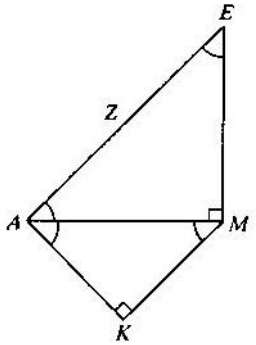
Το ακόλουθο Θεώρημα θεωρώντας 4-κέντρα να ανήκουν σε μια «ομάδα ταπετσαρίας» είναι ανάλογο με εκείνο που θεωρεί 6-κέντρα. Η απόδειξη ακολουθεί της διατύπωσης του Θεωρήματος. (Δείτε την Εικόνα 16.)



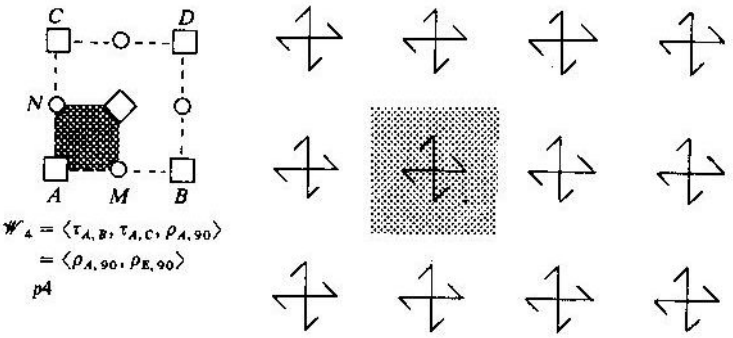
Εικόνα 16

Θεώρημα 10. *Υποθέτουμε ότι το A είναι ένα 4-κέντρο για μια «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$. Τότε, δεν υπάρχουν 3-κέντρα για την $\mathbb{W}$ και δεν υπάρχουν 6-κέντρα για την $\mathbb{W}$. Επιπλέον, το κέντρο συμμετρίας το πιο κοντινό στο A είναι ένα 2-κέντρο M και το A είναι το κέντρο του τετραγώνου, του οποίου οι κορυφές είναι 4-κέντρα και του οποίου οι πλευρές έχουν ως μέσα 2-κέντρα. Όλα τα κέντρα συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ καθορίζονται από τα A και M.*

Από το πόρισμα (Θεώρημα 7) του Κρυσταλλογραφικού Περιορισμού, εάν A είναι ένα 4-κέντρο για «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$, τότε κάθε κέντρο συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ είναι είτε ένα 2-κέντρο είτε ένα 4-κέντρο. Έστω M ένα κέντρο συμμετρίας το πιο κοντινό στο A. Εάν το M ήταν ένα 4-κέντρο, τότε το K θα ήταν ένα κέντρο συμμετρίας πιο κοντά στο A απ' ότι το M, όπου K δίνεται από τη σχέση $\rho_{M,90} \circ \rho_{A,90} = \sigma_K$. (Δείτε την Εικόνα 17.) Έτσι, το M πρέπει να είναι ένα 2-κέντρο. Τότε το E είναι ένα 4-κέντρο, όπου $\rho_{M,180} \circ \rho_{A,-90} = \rho_{E,90}$.



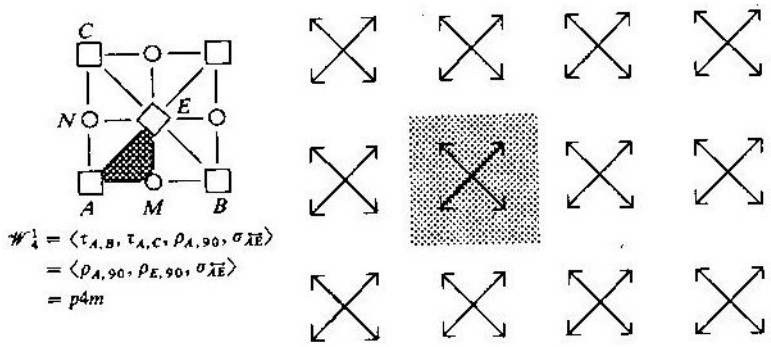
Εικόνα 17



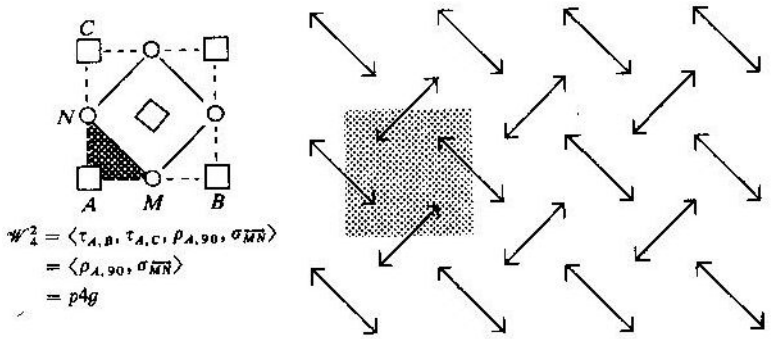
Εικόνα 18

Οι εικόνες των E και M υπό την ισχύ των $\rho_{A,90}$ είναι, ακριβώς, οι κορυφές και τα μέσα του τετραγώνου στη διατύπωση του Θεωρήματος. Η μεταφορά $\tau_{A,E}$ δεν ανήκει στην $\mathbb{W}$, καθώς διαφορετικά το Z είναι ένα κέντρο συμμετρίας πιο κοντινό στο A απ' ότι το M, όπου $\tau_{A,E} \circ \sigma_A = \sigma_Z$. Αν $N = \rho_{A,90}(M)$, $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A$, και $\tau_{A,C} = \sigma_N \circ \sigma_A$, τότε το $\square NAME$ είναι ένα τετράγωνο και οι μεταφορές $\tau_{A,B}$ και $\tau_{A,C}$ είναι οι πιο μικρού μήκους μεταφορές που ανήκουν στην $\mathbb{W}$ και παράγουν την υποομάδα μεταφορών. Άρα, δεν υπάρχει περισσότερος χώρος για οποιαδήποτε επιπλέον κέντρα συμμετρίας απ' αυτά που έχουμε ήδη μετρήσει (Θεώρημα 5). Τα κέντρα συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ φαίνονται στην Εικόνα 16. Έστω $\mathbb{W}_4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90} \rangle$, όπου E είναι το κέντρο του τετραγώνου $\square ABDC$. Αν η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει περιττές ισομετρίες, τότε η $\mathbb{W}$ πρέπει να είναι η $\mathbb{W}_4$. Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η $\mathbb{W}_4$ παράγεται από τις $\rho_{A,90}$ και $\rho_{E,90}$. (Δείτε την Εικόνα 18.)

Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_4$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ προσθέτοντας περιττές ισομετρίες. Εάν η σ_l ανήκει στην $\mathbb{W}$, τότε η l πρέπει να είναι άξονας συμμετρίας για το σύνολο όλων των 4-κέντρων που ανήκουν στην $\mathbb{W}$. Εξαιτίας της αφθονίας των στροφών που ανήκουν στην $\mathbb{W}_4$, φαίνεται να είναι επαρκές να θεωρήσουμε την πρόσθεση είτε μιας ανάκλασης στον άξονα συμμετρίας που διέρχεται από ένα 4-κέντρο ή αλλιώς μιας ανάκλασης στον άξονα συμμετρίας εκτός όλων των 4-κέντρων. Οι ευθείες $\overleftrightarrow{AE}$ και $\overleftrightarrow{MN}$ θα βοηθήσουν στο σκοπό μας.
Πρώτον, έστω $\mathbb{W}_4^1 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}} \right\rangle$. (Δείτε την Εικόνα 19.)
Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η $\mathbb{W}_4^1$ παράγεται επίσης από τις τρεις ανακλάσεις ως προς τις τρεις ευθείες που περιέχουν τις πλευρές ενός ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου.
Δεύτερον, έστω $\mathbb{W}_4^2 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{MN}} \right\rangle$. (Δείτε την Εικόνα 20.)

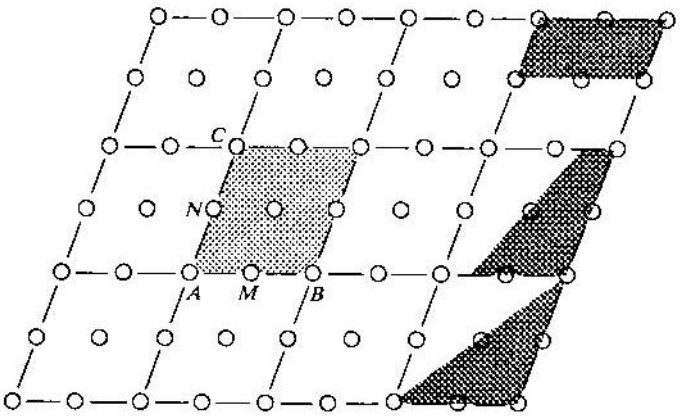


Εικόνα 19



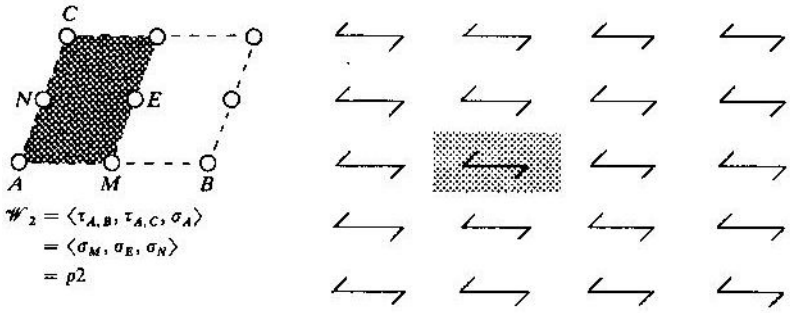
Εικόνα 20

Μαζί οι $\sigma_{\overleftrightarrow{AE}}$ και $\sigma_{\overleftrightarrow{MN}}$ δε μπορούν να προστεθούν στην $\mathbb{W}_4$ χωρίς την εισαγωγή ενός κέντρου συμμετρίας πιο κοντινού στο A από το M.
Για να θεωρήσουμε τη δυνατότητα της επέκτασης της $\mathbb{W}_4$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ χωρίς ανακλάσεις προσθέτοντας περιττές ισομετρίες, είναι επαρκές (Θεώρημα 3) να υποθέσουμε ότι η $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που μεταφέρει το 4-κέντρο A σε ένα 4-κέντρο, το οποίο δεν ανήκει στο πλέγμα που καθορίζεται από το A. Συνθέτοντας αυτήν την ανάκλαση μετ' ολισθήσεως με μια κατάλληλη μεταφορά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ που μεταφέρει το A στο E. Αν Z το μέσο των A και E, τότε $\gamma = \sigma_z \circ \sigma_Z$ για κάποια ευθεία z που διέρχεται από το E. Αφού η γ πρέπει να σταθεροποιεί το σύνολο όλων των 4-κέντρων, τότε η z πρέπει να είναι μια εκ των $\overleftrightarrow{ME}$, $\overleftrightarrow{BE}$ ή $\overleftrightarrow{NE}$. Όμως, η γ ακολουθούμενη, ακριβώς, από τις $\rho_{E,90}$, $\rho_{E,180}$ ή $\rho_{E,270}$ δίνει την ανάκλαση ως προς την $\overleftrightarrow{MN}$. Επεκτείνοντας την $\mathbb{W}_4$ από περιττές ισομετρίες καταλήγουμε μόνο στις $\mathbb{W}_4^1$ ή $\mathbb{W}_4^2$. *Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_4$ έχει ένα 4-κέντρο και δεν έχει άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_4^1$ έχει άξονα συμμετρίας πάνω σε ένα 4-κέντρο. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_4^2$ έχει ένα 4-κέντρο και έναν άξονα συμμετρίας εκτός όλων των 4-κέντρων.*



Εικόνα 21

Τώρα, υποθέτουμε ότι η «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ έχει ένα 2-κέντρο A και κάθε κέντρο συμμετρίας για την $\mathbb{W}$ είναι ένα 2-κέντρο. Έτσι, η σ_A ανήκει στην $\mathbb{W}$. Με $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ την υποομάδα μεταφορών της $\mathbb{W}$, έστω $\sigma_M = \tau_{A,B} \circ \sigma_A$, $\sigma_N = \tau_{A,C} \circ \sigma_A$ και $\sigma_E = \sigma_N \circ \sigma_A \circ \sigma_M$. Τα σημεία M, N, E είναι 2-κέντρα και έχουμε τη συνήθη παραστατική γραφή με $\square ABDC$ να καθορίζει μια μονάδα πλέγματος. (Δείτε την Εικόνα 21.) Κάθε σημείο A_{ij} στο πλέγμα που είναι καθορισμένο από το A είναι ένα 2-κέντρο καθώς επίσης και τα μέσα οποιονδήποτε δύο τέτοιων σημείων του πλέγματος είναι 2-κέντρα. Δε μπορεί να υπάρχουν περισσότερα κέντρα συμμετρίας απ' αυτά.



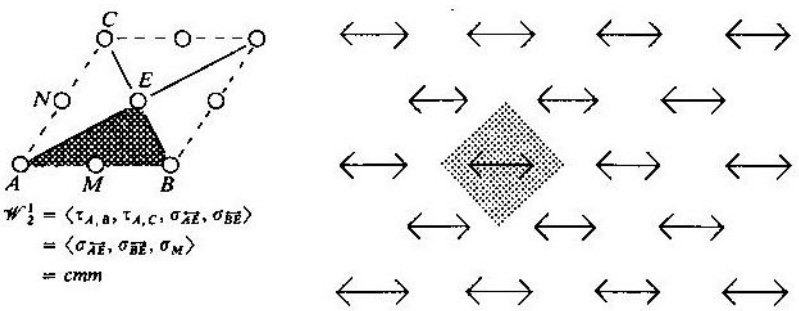
Εικόνα 22

Έστω $\mathbb{W}_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle$. Αν η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει περιττές ισομετρίες, τότε $\mathbb{W} = \mathbb{W}_2$. (Δείτε την Εικόνα 22.) Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η $\mathbb{W}_2$ παράγεται από τις $\tau_{A,B}$, $\tau_{A,C}$ και σ_E και επίσης από τις σ_M, σ_E και σ_N.
Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_2$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ προσθέτοντας μόνο περιττές ισομετρίες. Υποθέτουμε ότι η σ_l ανήκει στην $\mathbb{W}$. Τότε η $\mathbb{W}$ έχει ένα ρομβικό ή ορθογώνιο πλέγμα (Θεώρημα 1). Στην μη-ορθογώνια ρομβική περίπτωση, η ευθεία l είναι παράλληλη σε μια διαγώνιο μιας μονάδας πλέγματος κι έτσι πρέπει να διέρχεται από ένα 2-κέντρο. Σ' αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι ένα 2-κέντρο πάνω στην l. Τότε η

l περιέχει μια διαγώνιο μονάδας του πλέγματος που καθορίζεται από το A. Όμως, η πρόσθεση της ανάκλασης ως προς μια διαγώνιο μιας μονάδας πλέγματος απαιτεί την πρόσθεση της ανάκλασης και ως προς την άλλη διαγώνιο, καθώς το κέντρο της μονάδας πλέγματος είναι ένα 2-κέντρο. Έστω

$$\mathbb{W}_2^1 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}}, \sigma_{\overleftrightarrow{BE}} \right\rangle.$$

(Δείτε την Εικόνα 23.) Επομένως, στην μη-ορθογώνια περίπτωση, έχουμε μόνο τη δυνατότητα όπου $\mathbb{W} = \mathbb{W}_2^1$. Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η $\mathbb{W}_2^1$ επίσης παράγεται από τις $\sigma_{\overleftrightarrow{AE}}$, $\sigma_{\overleftrightarrow{BE}}$ και σ_M. Εάν μια ρομβική μονάδα πλέγματος είναι ορθογώνια, τότε η μονάδα πλέγματος είναι τετράγωνο και είναι η ειδική περίπτωση της γενικής ορθογώνιας περίπτωσης που μελετούμε στη συνέχεια.



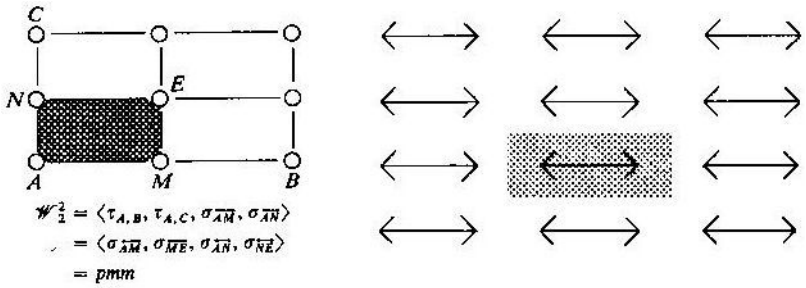
Εικόνα 23

Μια επέκταση $\mathbb{W}$ της $\mathbb{W}_2$ δε μπορεί να έχει μια ανάκλαση ως προς μια διαγώνιο μιας μονάδας πλέγματος, εκτός εάν η μονάδα πλέγματος είναι ρομβική και δε μπορεί να έχει ανακλάσεις και ως προς μια διαγώνιο και ως προς έναν άξονα παράλληλο σε μια πλευρά, καθώς κάθε n-κέντρο είναι ένα 2-κέντρο. Συνεπώς, για να επεκτείνουμε την $\mathbb{W}_2$ με ανακλάσεις εναπομένει να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση, όπου μια μονάδα πλέγματος είναι ορθογώνια (πιθανώς τετράγωνη) και η σ_l ανήκει στην $\mathbb{W}$ με την l παράλληλη σε μια πλευρά μονάδας πλέγματος καθορισμένη από το $\square ABDC$. Υπάρχουν δυο δυνατότητες: είτε η l να διέρχεται από ένα 2-κέντρο είτε η l να περνά ανάμεσα δύο γειτονικών γραμμών των 2-κέντρων. Στην πρώτη περίπτωση, η εισαγωγή της ανάκλασης ως προς μια εκ των ευθειών που περιέχουν μια πλευρά του $\square NAME$ απαιτεί την εισαγωγή της ανάκλασης ως προς καθεμιά απ' αυτές τις ευθείες. Σ' αυτήν την περίπτωση, η $\mathbb{W}$ είναι η $\mathbb{W}_2$ καθορισμένη από:

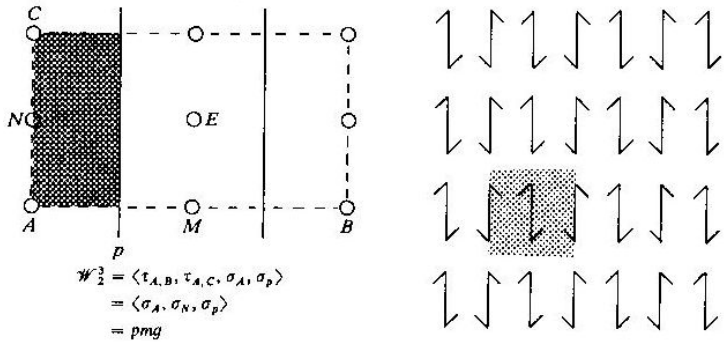
$$\mathbb{W}_2^2 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AM}}, \sigma_{\overleftrightarrow{AN}} \right\rangle.$$

(Δείτε την Εικόνα 24.) Στη δεύτερη περίπτωση, όπου η l περνά μεταξύ δυο γειτονικών γραμμών των 2-κέντρων, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η l είναι παράλληλη στην $\overleftrightarrow{AN}$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η

$\mathbb{W}$ είναι η $\mathbb{W}_2^3$ καθορισμένη από: $\mathbb{W}_2^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_p \rangle$, όπου p είναι η μεσοκάθετος του $\overline{AM}$. (Δείτε την Εικόνα 25.) Ολοκληρώσαμε με τις επεκτάσεις της $\mathbb{W}_2$ προσθέτοντας μόνο ανακλάσεις.

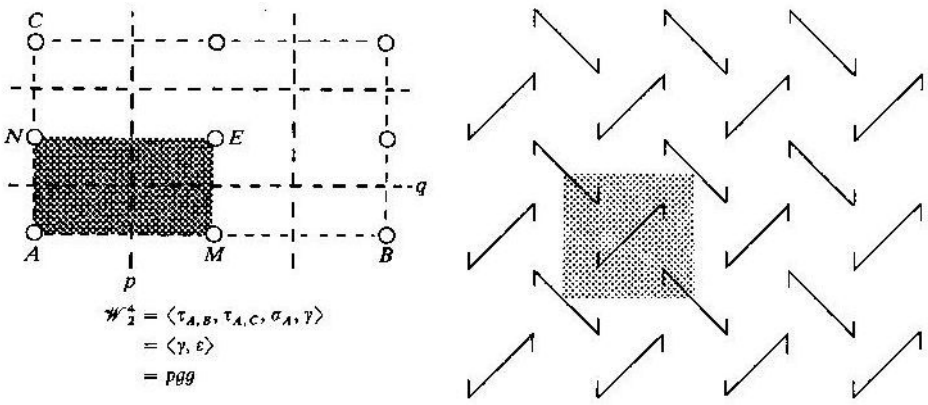


Εικόνα 24



Εικόνα 25

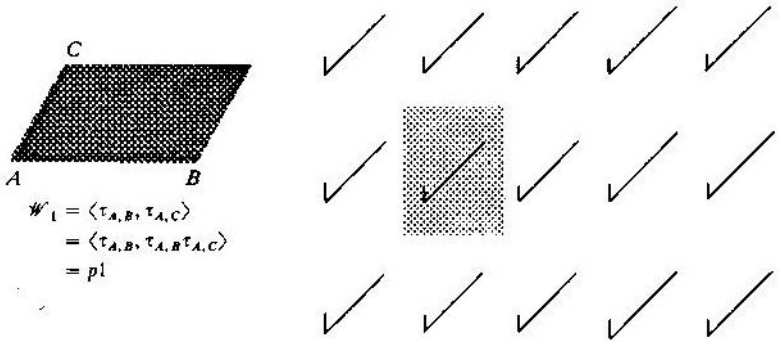
Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_2$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ προσθέτοντας μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως γ, τέτοια ώστε να μην παρουσιαστούν ανακλάσεις. Μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που έχει έναν άξονα που διέρχεται από ένα 2-κέντρο καθιστά αναγκαία την εισαγωγή μιας ανάκλασης. Συνεπώς, ο άξονας της γ πρέπει να περνάει μεταξύ δύο γειτονικών γραμμών των 2-κέντρων. Αυτό προϋποθέτει ότι η παραλληλόγραμμη μονάδα πλέγματος είναι ορθογώνια. Έστω p η μεσοκάθετος του $\overline{AM}$ και έστω q η μεσοκάθετος του $\overline{AN}$. Μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς τον άξονα p να μεταφέρει το 2-κέντρο M στο 2-κέντρο C ακολουθούμενη από την $\tau_{C,A}$ παράγει την «ανεπιθύμητη» ανάκλαση σ_p. Έτσι, έστω γ η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που μεταφέρει το M στο N και το A στο E και έστω ε η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως που μεταφέρει το N στο M και το A στο E. Ο άξονας της γ είναι ο p και $\gamma^2 = \tau_{A,C}$ και ο άξονας της ε είναι ο q και $\varepsilon^2 = \tau_{A,B}$. Τότε $\gamma \circ \sigma_A = \varepsilon$. Έστω $\mathbb{W}_2^4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma \rangle$. Τότε η $\mathbb{W}_2^4$ όχι μόνο περιέχει και την γ και την ε -και συνεπώς όλες οι δυνατές ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως των οποίων η παρουσία επίσης δεν προϋποθέτει ανακλάσεις- αλλά η $\mathbb{W}_2^4$ παράγεται ακόμη από τις γ και ε. (Δείτε την Εικόνα 26, όπου οι άξονες των ανακλάσεων μετ' ολισθήσεως φαίνονται με διακεκομμένες γραμμές.)



Εικόνα 26

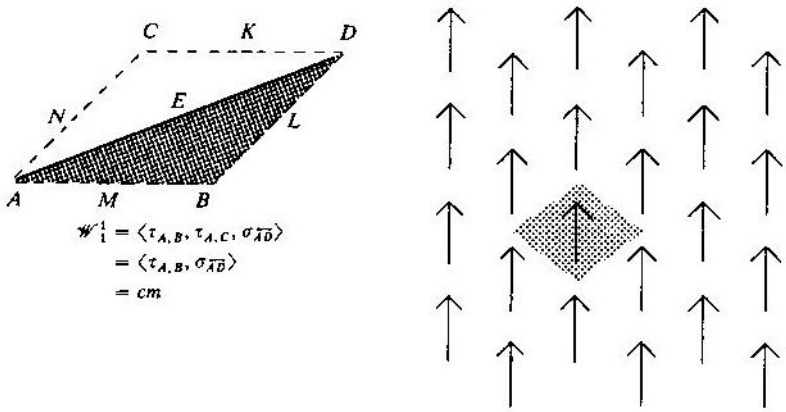
Τελικά, η επέκταση της $\mathbb{W}_2$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» προσθέτοντας μόνο περιττές ισομετρίες δίνουν μια εκ των $\mathbb{W}_2^1$, $\mathbb{W}_2^2$, $\mathbb{W}_2^3$ ή $\mathbb{W}_2^4$. *Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_2$ έχει ένα 2-κέντρο, κάθε κέντρο συμμετρίας είναι ένα 2-κέντρο και δε σταθεροποιείται από καμιά περιττή ισομετρία. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_2^1$ έχει ένα 2-κέντρο, κάθε κέντρο συμμετρίας είναι ένα 2-κέντρο και κάποια, αλλά όχι όλα τα 2-κέντρα, είναι πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_2^2$ έχει ένα 2-κέντρο, κάθε κέντρο συμμετρίας είναι ένα 2-κέντρο και κάθε 2-κέντρο είναι πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_2^3$ έχει ένα 2-κέντρο, κάθε κέντρο συμμετρίας είναι ένα 2-κέντρο, έχει έναν άξονα συμμετρίας και όλοι οι άξονες συμμετρίας είναι παράλληλοι. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_2^4$ έχει ένα 2-κέντρο, κάθε κέντρο συμμετρίας είναι ένα 2-κέντρο, δεν έχει άξονα συμμετρίας, αλλά σταθεροποιείται από μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως.*

Τώρα, εναπομένουν εκείνες οι «ομάδες ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ που δεν έχουν κέντρο συμμετρίας. Εάν η $\mathbb{W}$ περιέχει μια σ_l, υποθέτουμε ότι το A είναι πάνω στην l. Εάν η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει ανάκλαση, αλλά έχει μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως, υποθέσουμε ότι το A είναι πάνω στον άξονα της ανάκλασης μετ' ολισθήσεως που ανήκει στην $\mathbb{W}$. Υπάρχει η περίπτωση, όπου η $\mathbb{W}$ να μην περιέχει άλλες ισομετρίες εκτός των μεταφορών. Σ' αυτήν την περίπτωση, $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1$, όπου $\mathbb{W}_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ με A αυθαίρετο και A, B, C μη συγγραμικά. (Δείτε την Εικόνα 27.)

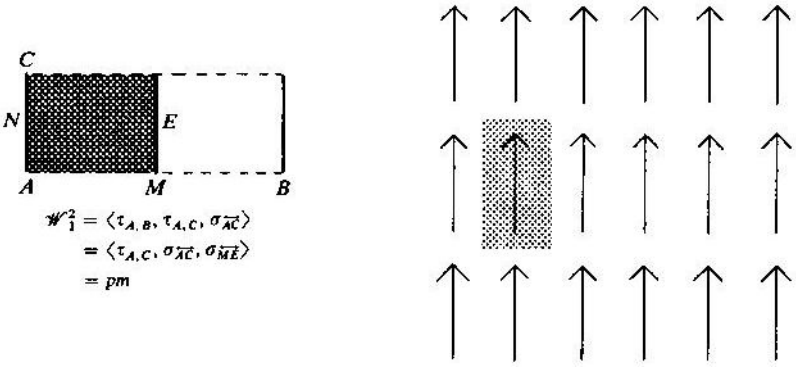


Εικόνα 27

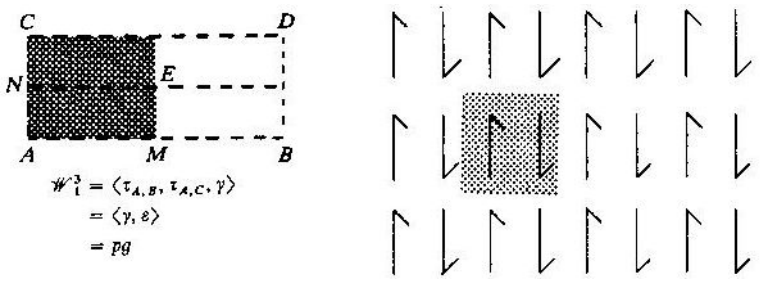
Θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_1$ στην «ομάδα ταπετσαρίας» $\mathbb{W}$ προσθέτοντας μόνο περιττές ισομετρίες. Εάν η σ_l ανήκει στην $\mathbb{W}$ με το A πάνω στην l, τότε (Θεώρημα 1) υπάρχει μια ρομβική μονάδα πλέγματος καθορισμένη από το $\square ABDC$ με $l = \overleftrightarrow{AD}$ ή αλλιώς υπάρχει μια ορθογώνια μονάδα πλέγματος καθορισμένη από το $\square ABDC$ με $l = \overleftrightarrow{AC}$. Στην περίπτωση που το $\square ABDC$ είναι τετράγωνο, η $\mathbb{W}$ δε μπορεί να έχει ανακλάσεις και ως προς την $\overleftrightarrow{AD}$ και ως προς την $\overleftrightarrow{AC}$, επειδή η $\mathbb{W}$ δεν περιέχει στροφές. Έστω $\mathbb{W}_1^1 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AD}} \right\rangle$ και $\mathbb{W}_1^2 = \left\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \right\rangle$. Εάν η $\mathbb{W}$ περιέχει μια ανάκλαση, τότε η $\mathbb{W}$ είναι μια εκ των $\mathbb{W}_1^1$ ή $\mathbb{W}_1^2$. (Δείτε την Εικόνα 28 και παρατηρείστε ότι η $\overleftrightarrow{NK}$ δεν είναι άξονας συμμετρίας για την $\mathbb{W}_1^1$.) Έστω γ οι ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως με άξονα $\overleftrightarrow{NK}$ που μεταφέρουν το N στο K. Έτσι, $\gamma^2 = \tau_{A,D}$. Τότε η γ ανήκει στην $\mathbb{W}_1^1$ και, στην πραγματικότητα, η $\mathbb{W}_1^1$ παράγεται από τις γ και $\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}$. Απ' την άλλη πλευρά, όλες οι ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως που ανήκουν στην $\mathbb{W}_1^2$ είναι της μορφής $(\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \circ \tau_{A,B}^j) \circ \tau_{A,C}^i$ με $i \neq 0$ και έχουν άξονες οι οποίοι είναι επίσης άξονες συμμετρίας για την $\mathbb{W}_1^2$. (Δείτε την Εικόνα 29.)



Εικόνα 28



Εικόνα 29



Εικόνα 30

Τέλος, θεωρούμε την επέκταση της $\mathbb{W}_1$ με ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως μόνο. Οι άξονες των ανακλάσεων μετ' ολισθήσεως πρέπει να είναι παράλληλοι, επειδή η $\mathbb{W}_1$ δεν περιέχει στροφές. Έχουμε μια επιπλέον περίπτωση, όπου μια εκ των παραγόμενων μεταφορών είναι το τετράγωνο μιας ανάκλασης μετ' ολισθήσεως που ανήκει στην $\mathbb{W}$. Έστω $\mathbb{W}_1^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle$, όπου γ είναι η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα $\overleftrightarrow{AB}$ που μεταφέρει το A στο M. (Δείτε την Εικόνα 30.) Έτσι, $\gamma^2 = \tau_{A,B}$. Προφανώς, η $\mathbb{W}_1^3$ παράγεται από την $\tau_{A,C}$ και τη γ. Έστω $\varepsilon = \tau_{A,C} \circ \gamma$. Τότε η ε είναι η ανάκλαση μετ' ολισθήσεως ως προς άξονα την $\overleftrightarrow{NE}$ που μεταφέρει το N στο E και η $\mathbb{W}_1^3$ παράγεται από τη γ και την ε. Έτσι, η $\mathbb{W}_1^3$ περιέχει όλες τις πιθανές ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως.

Η επέκταση της $\mathbb{W}_1$ σε μια «ομάδα ταπετσαρίας» προσθέτοντας μόνο περιττές ισομετρίες δίνει μια εκ των $\mathbb{W}_1^1$, $\mathbb{W}_1^2$ ή $\mathbb{W}_1^3$. *Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_1$ δεν έχει κέντρο συμμετρίας και δε σταθεροποιείται από οποιαδήποτε περιττή ισομετρία. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_1^1$ δεν έχει κέντρο συμμετρίας, σταθεροποιείται από ανακλάσεις και ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως, αλλά κάποιοι άξονες των ανακλάσεων μετ' ολισθήσεως δεν είναι άξονες συμμετρίας. Ένα «μοτίβο*

ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_1^2$ δεν έχει κέντρο συμμετρίας, σταθεροποιείται από ανακλάσεις και ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως και όλοι οι άξονες των ανακλάσεων μετ' ολισθήσεως είναι άξονες συμμετρίας. Ένα «μοτίβο ταπετσαρίας» που έχει ομάδα συμμετρίας την $\mathbb{W}_1^3$ δεν έχει κέντρο συμμετρίας, δεν έχει άξονα συμμετρίας, αλλά σταθεροποιείται από μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως.

Εδώ, η διερεύνηση των «ομάδων ταπετσαρίας» έχει ολοκληρωθεί, καθώς όλες οι πιθανές «ομάδες ταπετσαρίας» έχουν κατηγοριοποιηθεί. Έτσι, διατυπώνουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 11. *Αν η $\mathbb{W}$ είναι μια «ομάδα ταπετσαρίας», τότε υπάρχουν σημεία και άξονες, τέτοια ώστε η $\mathbb{W}$ να είναι μια εκ των δεκαεπτά ομάδων*

$\mathbb{W}_1$	$\mathbb{W}_2$	$\mathbb{W}_4$	$\mathbb{W}_3$	$\mathbb{W}_6$
$\mathbb{W}_1^1$	$\mathbb{W}_2^1$	$\mathbb{W}_4^1$	$\mathbb{W}_3^1$	$\mathbb{W}_6^1$
$\mathbb{W}_1^2$	$\mathbb{W}_2^2$	$\mathbb{W}_4^2$	$\mathbb{W}_3^2$	
$\mathbb{W}_1^3$	$\mathbb{W}_2^3$			
	$\mathbb{W}_2^4$			

που προσδιορίσαμε παραπάνω.

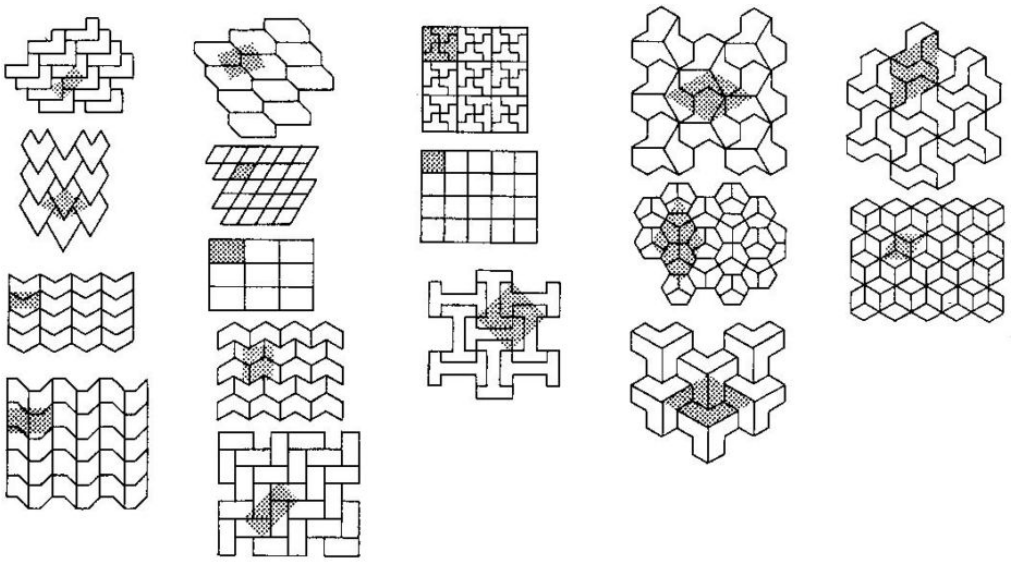
Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει το «κλειδί» για τα «μοτίβα ταπετσαρίας» (G. Martin, 1982, [10]), τα οποία έχουμε αναπτύξει μέσω επιχειρηματολογίας, όπου εδώ οι λέξεις «μερικά» και «όλα» υποδηλώνουν την ύπαρξη τουλάχιστον ενός, ενώ το «μερικά» δε συμπεριλαμβάνει τουλάχιστον ένα. Η Εικόνα 31 (στην υποενότητα που ακολουθεί) δίνει το μοτίβο για κάθε ομάδα **σε αντίστοιχη θέση** με το «κλειδί». Τα μοτίβα στην εικόνα καλούνται επιστρώσεις και είναι το θέμα του επόμενου κεφαλαίου.

Το παραπάνω Θεώρημα ταξινόμησης για τις «ομάδες ταπετσαρίας» είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fedorov**, καθώς ο Fedorov διατύπωσε αυτές τις ομάδες το 1891. Το Θεώρημα επαναδιατυπώθηκε το 1897 από τους Fricke και Klein και ξανά το 1924 από τον Polya και από τον Niggli.

Όχι n-κέντρα	Μόνο 2-κέντρα	4-κέντρα	Μόνο 3-κέντρα	6-κέντρα
$\mathbb{W}_1, \quad p1$ Όχι περιττές ισομετρίες	$\mathbb{W}_2, \quad p2$ Όχι περιττές ισομετρίες	$\mathbb{W}_4, \quad p4$ Όχι άξονες συμμετρίας	$\mathbb{W}_3, \quad p4$ Όχι άξονες συμμετρίας	$\mathbb{W}_6, \quad p6$ Όχι άξονες συμμετρίας
$\mathbb{W}_1^1, \quad cm$ Κάποιοι άξονες ανάκλασης μετ' ολισθήσεως δεν είναι άξονες συμμετρίας	$\mathbb{W}_2^1, \quad cmm$ Κάποια 2-κέντρα όχι πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας	$\mathbb{W}_4^1, \quad p4m$ Ένας άξονας συμμετρίας πάνω σ' ένα 4-κέντρο	$\mathbb{W}_3^1, \quad p3m1$ Όλα τα 3-κέντρα πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας	$\mathbb{W}_6^1, \quad p6m$ Ένας άξονας συμμετρίας
$\mathbb{W}_1^2, \quad pm$ Όλοι οι άξονες ανάκλασης μετ' ολισθήσεως είναι άξονες συμμετρίας	$\mathbb{W}_2^2, \quad pmm$ Όλα τα 2-κέντρα πάνω σ' έναν άξονα συμμετρίας	$\mathbb{W}_4^2, \quad p4g$ Ένας άξονας συμμετρίας εκτός των 4-κέντρων	$\mathbb{W}_3^2, \quad p31m$ Ένα 3-κέντρο εκτός όλων των αξόνων συμμετρίας	
$\mathbb{W}_1^3, \quad pg$ Όχι άξονας συμμετρίας, αλλά ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως	$\mathbb{W}_2^3, \quad pmg$ Όλοι οι άξονες συμμετρίας είναι παράλληλοι			
	$\mathbb{W}_2^4, \quad pgg$ Όχι άξονας συμμετρίας, αλλά ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως			

3.2.1 Η κρυσταλλογραφική σημειογραφία

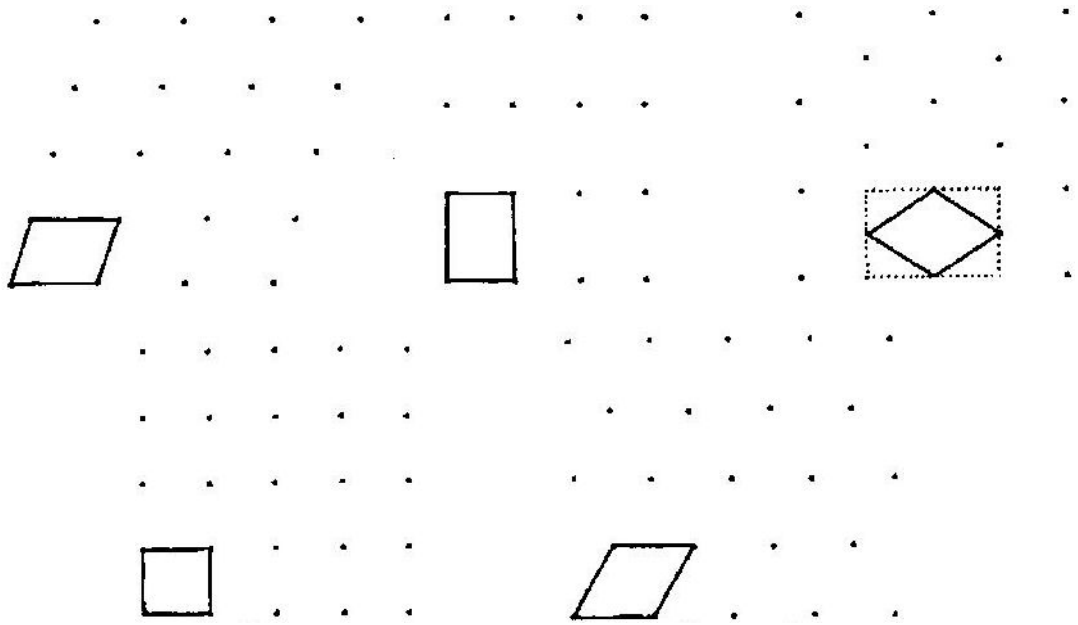
Η κρυσταλλογραφική σημειογραφία αυτών των ομάδων αποτελείται από τέσσερα σύμβολα που προσδιορίζουν την (συμβατικά) επιλεγμένη μονάδα πλέγματος, τη μεγαλύτερη τάξη μιας στροφής και άλλες θεμελιώδεις συμμετρίες. Συνήθως, μια μονάδα πλέγματος επιλέγεται με τα κέντρα της μεγαλύτερης τάξης της στροφής στις κορυφές. Σε δύο περιπτώσεις επιλέγεται μια «κεντραρισμένη μονάδα πλέγματος», έτσι ώστε οι άξονες ανάκλασης να είναι κάθετοι και σε μία ή δύο πλευρές της μονάδας πλέγματος. Ο «άξονας των x» της μονάδας πλέγματος είναι η αριστερή πλευρά της μονάδας πλέγματος (το διάνυσμα κατευθύνεται προς τα κάτω). Η ερμηνεία του πλήρους διεθνούς συμβόλου (που διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά) είναι η ακόλουθη: (1) το γράμμα p ή c δηλώνει την πρωταρχική (primitive) ή κεντραρισμένη (centered) μονάδα πλέγματος, (2) ο ακέραιος αριθμός n δηλώνει τη μεγαλύτερη τάξη μιας στροφής, (3) το σύμβολο δείχνει έναν άξονα συμμετρίας κάθετο στον άξονα των x: το m (mirror) δείχνει έναν άξονα ανάκλασης, το g (glide reflection) δείχνει ότι δεν υπάρχει ανάκλαση, αλλά ένας άξονας ανάκλασης μετ' ολισθήσεως, το 1 δείχνει ότι δεν υπάρχει κανείς άξονας συμμετρίας, (4) το σύμβολο δείχνει έναν άξονα συμμετρίας σε γωνία α με τον άξονα των x, με το α να εξαρτάται από το n, τη μεγαλύτερη τάξη μιας στροφής: $\alpha = 180^0$, για $n = 1$ ή 2, $\alpha = 45^0$, για $n = 4$, $\alpha = 60^0$, για $n = 3$ ή 6: τα σύμβολα m, g, 1 ερμηνεύονται όπως και στο (3). Η μη ύπαρξη συμβόλων στην τρίτη και τέταρτη θέση δείχνει ότι η ομάδα δεν περιέχει καμιά ανάκλαση ή ανάκλαση μετ' ολισθήσεως. (Δείτε σελ. 71.)



Εικόνα 31

Πολλοί άξονες συμμετρίας προκύπτουν από το συνδυασμό των μεταφορών ή στροφών με τις συμμετρίες που αναγράφονται στην τρίτη και τέταρτη θέση του διεθνούς συμβολισμού. Εκτός από τις περιπτώσεις των p3ml και p3lm, τα σύμβολα τεσσάρων θέσεων μπορούν να συντομευθούν χωρίς απώλεια της «ταυτότητάς» τους και η σύντομη αυτή γραφή είναι διεθνής και την χρησιμοποιούμε και στον προηγούμενο πίνακα, σελ. 62 και σε επόμενη υποενότητα.

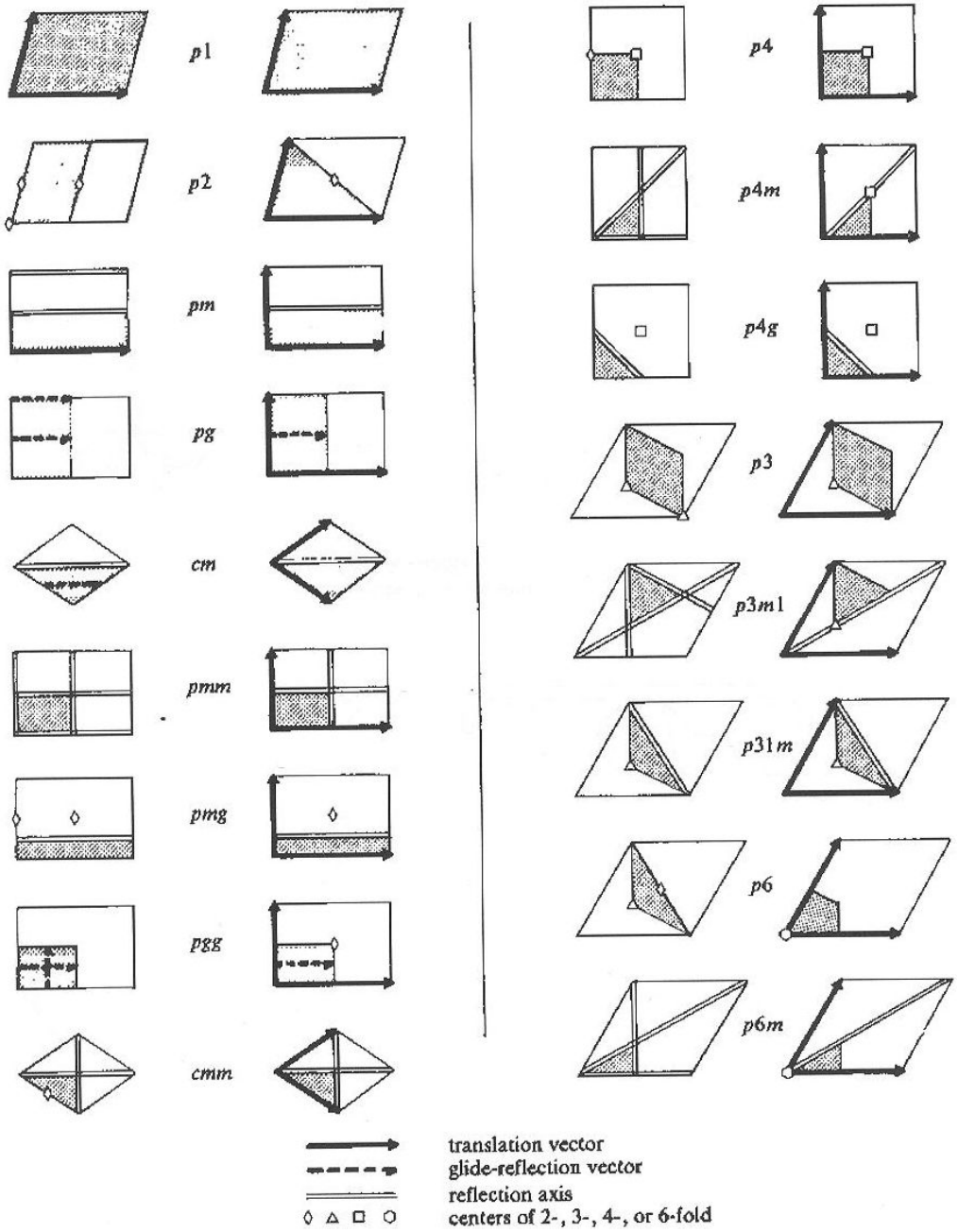
3.2.2 Τα πέντε είδη πλέγματος για τα περιοδικά μοτίβα του επιπέδου



Τα πέντε είδη μονάδων του πλέγματος, όπως εμφανίζονται παραπάνω, είναι: παραλληλόγραμμο (σε δύο περιπτώσεις), ορθογώνιο (σε πέντε περιπτώσεις), ρομβικό (σε δύο περιπτώσεις), τετράγωνο (σε τρεις περιπτώσεις) και εξαγωνικό (ισόπλευρα τρίγωνα) (σε πέντε περιπτώσεις).
Οι μονάδες του πλέγματος έχουν επιλεγεί από τους Κρυσταλλογράφους *για σκοπούς ταξινόμησης των κρυστάλλων.*
Η «κεντραρισμένη» μονάδα πλέγματος περιέχει δύο μονάδες και εμφανίζεται με διακεκομμένες γραμμές στο ρομβικό πλέγμα.

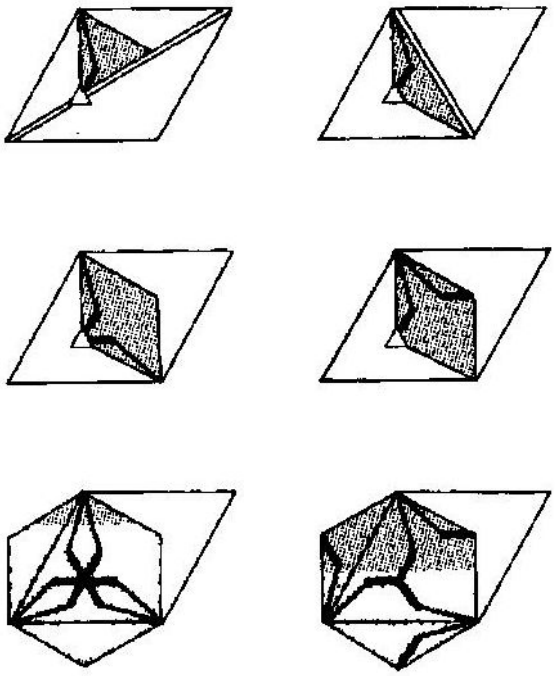
3.2.3 Οι γεννήτορες για τις ομάδες συμμετρίας του επιπέδου

Γενικά στην άλγεβρα, η εύρεση γεννητόρων μιας ομάδας είναι ένας συνηθισμένος στόχος. Στην περίπτωση των ομάδων συμμετρίας στο επίπεδο, όμως, η εύρεση γεννητόρων έχει κάτι περισσότερο από αλγεβρική σημασία. Όχι μόνο λίγες ισομετρίες θα δημιουργούν την ομάδα συμμετρίας ενός περιοδικού σχεδίου, αλλά οι ίδιες ισομετρίες, ενεργώντας σε ένα μικρό τμήμα του σχεδίου, θα παράγουν αντίγραφα αυτής της περιοχής και θα δημιουργούν το σχέδιο καλύπτοντας όλο το επίπεδο. Καλούμε *«θεμελιώδη περιοχή» (fundamental region) ή βάση (base)* (ή *«ασύμμετρη μονάδα»* - asymmetric unit, σύμφωνα με τους Κρυσταλλογράφους) ενός περιοδικού μοτίβου τη μικρότερη περιοχή του επιπέδου, της οποίας οι εικόνες μέσω μιας πλήρους ομάδας συμμετρίας του μοτίβου καλύπτουν το επίπεδο. (Έχουμε ήδη κάνει αναφορά σ' αυτόν τον όρο.) Η επιφάνεια μιας θεμελιώδους περιοχής θα είναι πάντα ένα ρητό μέρος μιας μονάδας και, όπως συμβαίνει και με τις μονάδες, όλες οι θεμελιώδεις περιοχές ενός μοτίβου θα έχουν την ίδια επιφάνεια, αν και τα περιγράμματά τους μπορεί να ποικίλλουν σε μεγάλο βαθμό. Συχνά, το μοτίβο (motif) είναι όρος που χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει το μικρότερο τμήμα ενός σχεδίου που δημιουργεί όλο το περιοδικό σχέδιο, όταν δράσει μια ομάδα συμμετρίας του σχεδίου: σ' αυτή τη χρήση το μοτίβο είναι ένα σύμβολο, το οποίο μπορεί να εντοπισθεί μέσα σε μια θεμελιώδη περιοχή.
Για την αλγεβρική (και γεωμετρική) ανάλυση αυτών των ομάδων, ένα ελάχιστο σύνολο γεννητόρων είναι η πιο επιθυμητή επιλογή. Εντούτοις, αν επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο γεννητόρων για να δημιουργήσουμε ένα σχέδιο έχοντας αυτό να δρα σε μια θεμελιώδη περιοχή, μια διαφορετική επιλογή των γεννητόρων μπορεί να αναδείξει καλύτερα το στόχο. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζονται για κάθε ομάδα δύο σύνολα γεννητόρων και η θέση τους σχετικά με μια μονάδα πλέγματος που περιέχει μια θεμελιώδη περιοχή του σχεδίου.



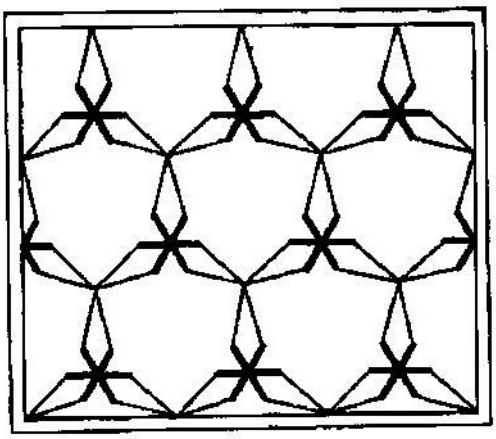
Ένα ελάχιστο σύνολο γεννητόρων υποδεικνύεται στα αριστερά και ένα σύνολο γεννητόρων που εμπεριέχει τα διανύσματα μεταφοράς της μονάδας πλέγματος υποδεικνύονται στα δεξιά. (D. Schattschneider, 1978, [13].)

Για κάθε ομάδα, το δεύτερο σύνολο γεννητόρων που δίνεται περιλαμβάνει τα διανύσματα μεταφορών που διαμορφώνουν τις πλευρές της μονάδας πλέγματος. Αυτοί οι γεννήτορες μπορούν να προτιμηθούν για την παραγωγή ενός πλακιδίου ή την αποτύπωση ενός σχεδίου με το χέρι ή τον υπολογιστή. Οι στροφές, οι ανακλάσεις ή οι ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως που παρουσιάζονται συμπληρώνουν μια μονάδα με τις εικόνες της θεμελιώδους περιοχής. Κατόπιν, οι μεταφορές επαναλαμβάνουν αυτήν τη μονάδα για να καλύψουν το επίπεδο. (Μια μονάδα πλέγματος συμπληρώνεται για τα πρώτα 12 είδη, μια μονάδα στο σχήμα ενός κανονικού εξαγώνου συμπληρώνεται για τα τελευταία 5 είδη).
Δεδομένου ότι τα μοτίβα των τύπων p3m1 και p31m συχνά συγχέονται, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θα δείξουμε πώς να χρησιμοποιούμε το παραπάνω διάγραμμα, δημιουργώντας ένα μοτίβο για κάθε τύπο παραγόμενο από το ίδιο μοτίβο (motif). Σε κάθε περίπτωση, αρχίζουμε με ένα μόνο μοτίβο (motif) σε σχήμα «μπαστουνιού του χόκεϊ», τοποθετημένο σε μια σκιασμένη θεμελιώδη περιοχή του κάθε τύπου μοτίβου και έχοντας τα σημεία τέλους του στα 3-κέντρα της στροφής. Κάθε μοτίβο παράγεται τότε από την εφαρμογή στη θεμελιώδη περιοχή των ισομετριών που αναγράφονται στο παραπάνω διάγραμμα, στη σειρά που εμφανίζονται.

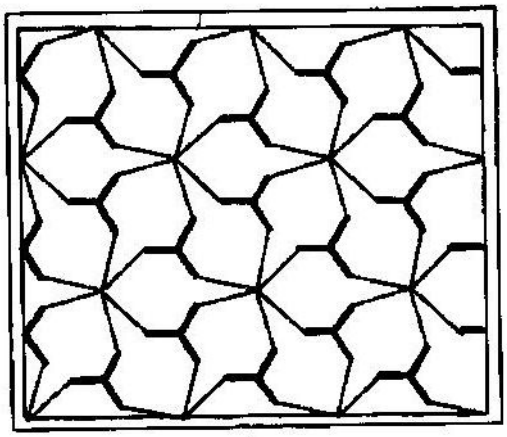


Κατ' αρχήν, τοποθετούμε το μοτίβο (motif) σε σχήμα «μπαστουνιού του χόκεϊ» στη θεμελιώδη περιοχή, όπως περιγράψαμε.
Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε ανάκλαση της θεμελιώδους περιοχής ως προς τον

άξονα που υποδεικνύεται. Μετά, περιστρέφουμε κατά 120^0 γύρω από τα 3-κέντρα που υποδεικνύονται.
Τέλος, μεταφέρουμε κατά διανύσματα, που αποτελούν πλευρά της μονάδας του πλέγματος. Έτσι, οδηγούμαστε στα ακόλουθα σχήματα.



$p3m1$



$p31m$

Εδώ, απεικονίζονται τα παραγόμενα μοτίβα των τύπων $p3m1$ και $p31m$, που έχουν ως αρχή το ίδιο μοτίβο (motif). Σημειώνουμε ότι στο ολοκληρωμένο $p31m$ μοτίβο, μια «φυσική» θεμελιώδης περιοχή είναι η μισή του πλακιδίου που έχει σχήμα βέλους, ενώ μια «φυσική» μονάδα είναι 3 εκ των αλληλεμπλεκόμενων πλακιδίων των οποίων το περίγραμμα μοιάζει σαν ένα στροφείο.

Οπτικά, οι διαφορές στα δύο μοτίβα στο Σχήμα είναι εντυπωσιακές. Συνεπώς, δεν υπάρχει πιθανότητα ένα μοτίβο να παρανοηθεί ως ένα άλλο. Διαγράμματα που δείχνουν καθένα από τα δεκαεπτά μοτίβα που προκύπτουν όταν το ίδιο μοτίβο (σωστά τοποθετημένο σε μια θεμελιώδη περιοχή) δράσει από καθεμία από τις ομάδες συμμετρίας προσφέρουν μια σαφή οπτική απόδειξη των διαφορών τους.

3.3 Περιληπτικά για την αναγνώριση των περιοδικών μοτίβων του επιπέδου

1. $\mathbb{W}_1$ ή $p1$: Το πλέγμα είναι παραλληλόγραμμο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1 μονάδα.

2. $\mathbb{W}_2$ ή $p2$: Το πλέγμα είναι παραλληλόγραμμο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1/2 μονάδα.

3. $\mathbb{W}_1^2$ ή pm: Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1. Ανακλάσεις υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1/2 μονάδα.

4. $\mathbb{W}_1^3$ ή pg: Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1. Ανακλάσεις δεν υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1/2 μονάδα.

5. $\mathbb{W}_1^1$ ή cm: Το πλέγμα είναι ρομβικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1/2 μονάδα.

6. $\mathbb{W}_2^2$ ή pmm: Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Ανακλάσεις υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.

7. $\mathbb{W}_2^3$ ή pmg: Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας. Επιπλέον, οι άξονες ανάκλασης είναι παράλληλοι.

8. $\mathbb{W}_2^4$ ή pgg: Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Ανακλάσεις δεν υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.

9. $\mathbb{W}_2^1$ ή cmm: Το πλέγμα είναι ρομβικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας. Επιπλέον, οι άξονες ανάκλασης είναι κάθετοι.

10. $\mathbb{W}_4$ ή $p4$: Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.

11. $\mathbb{W}_4^1$ ή $p4m$: Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/8 της μονάδας. Επιπλέον, τα 4-κέντρα είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης.

12. $\mathbb{W}_4^2$ ή $p4g$: Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/8 της μονάδας. Επιπλέον, τα 4-κέντρα δεν είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης.

13. $\mathbb{W}_3$ ή $p3$: Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/3 της μονάδας.

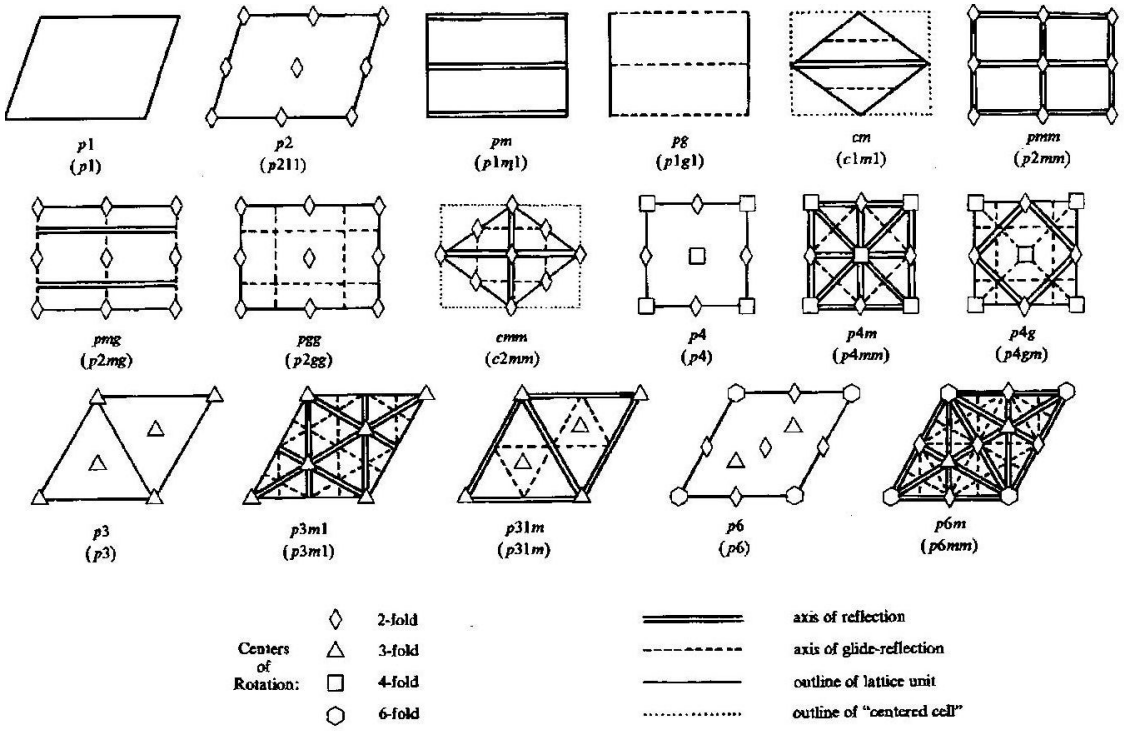
14. $\mathbb{W}_3^1$ ή $p3m1$: Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας. Επιπλέον, όλα τα 3-κέντρα είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης.

15. $\mathbb{W}_3^2$ ή $p31m$: Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας. Επιπλέον, δεν είναι όλα τα 3-κέντρα πάνω στους άξονες ανάκλασης.

16. $\mathbb{W}_6$ ή $p6$: Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 6. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας.

17. $\mathbb{W}_6^1$ ή $p6m$: Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 6. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι το 1/12 της μονάδας.

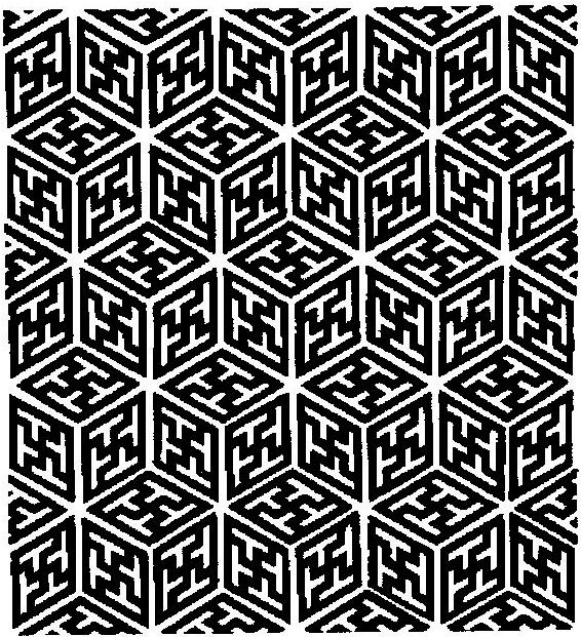
Σημείωση: Μια ανάκλαση μετ' ολισθήσεως θεωρείται μη-τετριμμένη, αν η μεταφορά και η ανάκλαση που τη συνιστούν δεν είναι συμμετρίες του μοτίβου.
Δείτε επίσης την ιστοσελίδα: http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html



Οι μονάδες του πλέγματος με τις συμμετρίες των μοτίβων του επιπέδου. Η διεθνής σημειογραφία προσδιορίζει τις 17 δισδιάστατες κρυσταλλογραφικές ομάδες. Πρώτα δίνεται η σύντομη μορφή και στις παρενθέσεις η πλήρης μορφή.
(D. Schattschneider, 1978, [13])

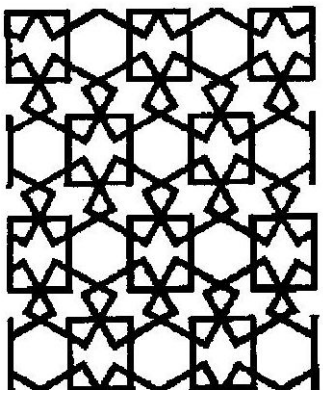
3.4 Παραδείγματα μοτίβων από διάφορους Πολιτισμούς

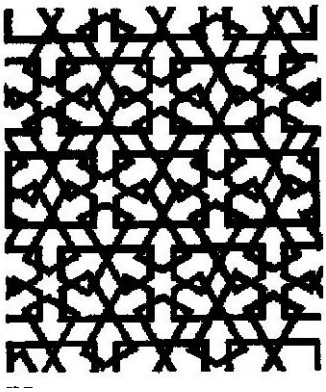
1. **Αραβικό Τ-σχέδιο** (∗)
   Ένα σχέδιο μοτίβου τύπου $\mathbb{W}_6$ ή $p6$. Πραγματικά, δημιουργεί μια τρισδιάστατη αίσθηση κύβων. Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Οι μοναδικές ισομετρίες αυτού του σχεδίου πέραν των μεταφορών είναι οι στροφές, με μέγιστη τάξη στροφής 6. Δεν υπάρχουν ούτε ανακλάσεις ούτε (μητετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας.



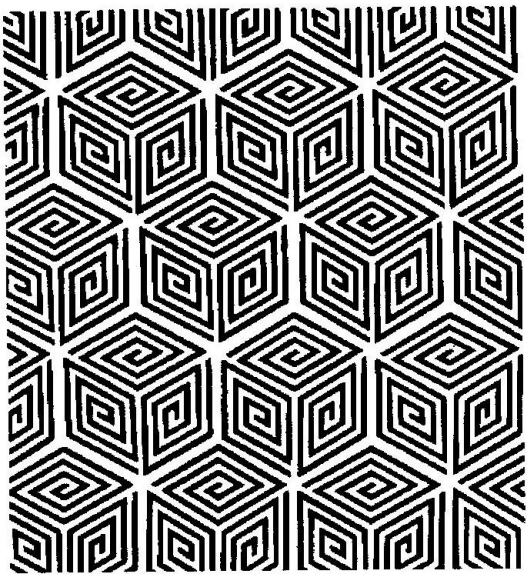
(∗) *Όλα τα παραδείγματα της συγκεκριμένης ενότητας υπάρχουν στο βιβλίο Isometrica του G. Baloglou, 2007,* [6] *με* © *MIT Press, 1981.*

2. **Αραβικά ορθογώνια**
Δύο αρκετά περίπλοκα «ορθογώνια» μοτίβα τύπου $\mathbb{W}_6^1$ ή $p6m$. Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 6. Υπάρχουν ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/12 της μονάδας.

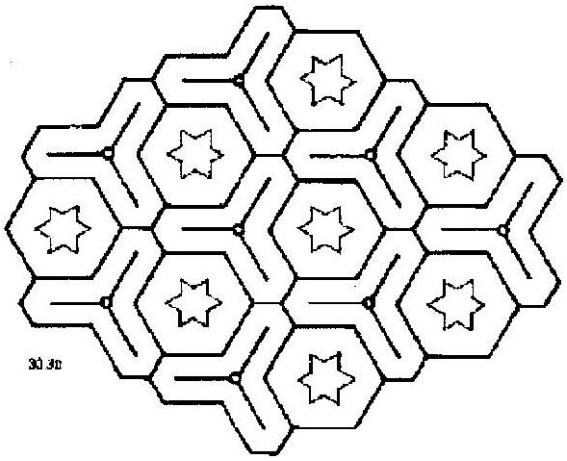




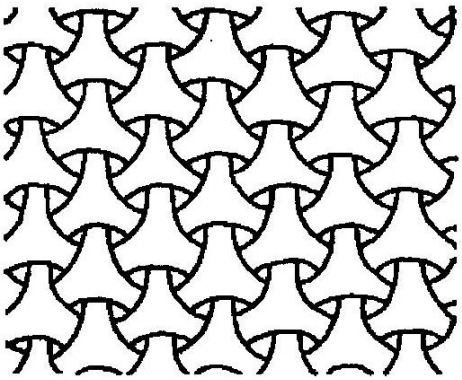
3. **Αραβική ρομβική διακόσμηση**
Παρόμοια με το Αραβικό T-σχέδιο, κι αυτό το σχέδιο τύπου $\mathbb{W}_3$ ή $p3$ δημιουργεί μια τρισδιάστατη αίσθηση κύβων. Πάλι, το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Εδώ, η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3. Δεν υπάρχουν ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/3 της μονάδας.



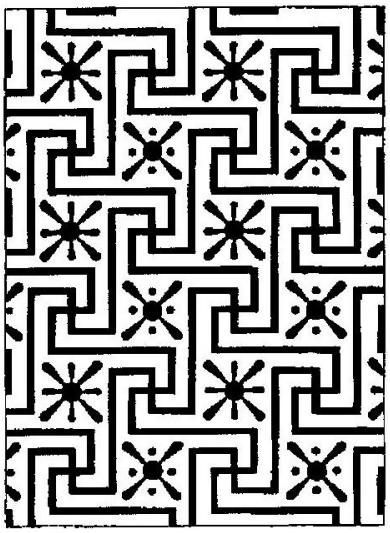
4. **Περσικά αστέρια**
Στο ακόλουθο παράδειγμα από την Περσία, τα αστέρια των έξι κορυφών και τα εξάγωνα δίνουν την ψευδαίσθηση ενός $\mathbb{W}_6^1$ ή $p6m$ μοτίβου, αλλά δεν πρέπει να «εξαπατηθούμε» παραβλέποντας τα τρίποδα σχέδια. Πρόκειται για ένα παράδειγμα τύπου $\mathbb{W}_3^1$ ή $p3m1$. Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3 και μάλιστα όλα τα 3-κέντρα είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης, που υπάρχουν. Επίσης, υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας.



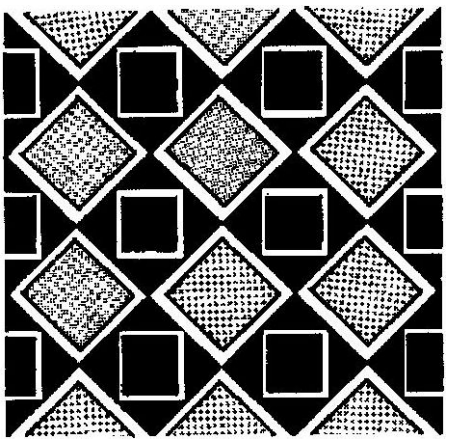
5. **Ιαπωνικά τρίγωνα**
Ένα σχέδιο από την Ιαπωνία με καμπυλόγραμμα τρίγωνα τύπου $\mathbb{W}_3^2$ ή $p31m$. Το πλέγμα είναι εξαγωνικό. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 3 με τα 3-κέντρα να μην είναι όλα πάνω στους άξονες ανάκλασης, που υπάρχουν. Επίσης, υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/6 της μονάδας.



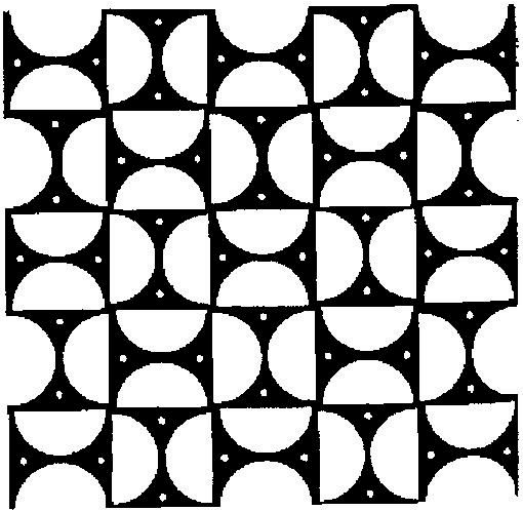
6. **Δύο είδη Αιγυπτιακών «λουλουδιών»**
Πρόκειται για ένα αξιόλογο σχέδιο τύπου $\mathbb{W}_4$ ή $p4$ από την Αρχαία Αίγυπτο. Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4. Εδώ, δεν υπάρχουν ούτε ανακλάσεις ούτε (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.



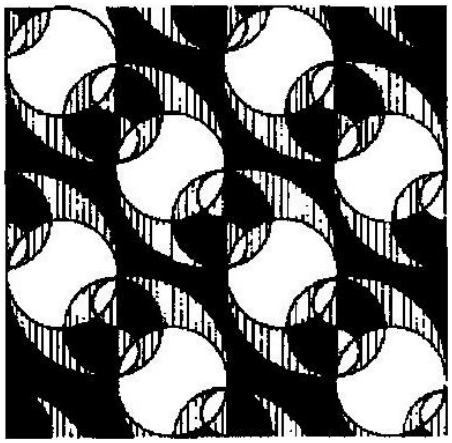
7. **Βυζαντινά τετράγωνα**
Παράδειγμα τύπου $\mathbb{W}_4^1$ ή $p4m$. Προφανώς, το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4 και μάλιστα τα 4-κέντρα είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης, που υπάρχουν. Επίσης, υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/8 της μονάδας.



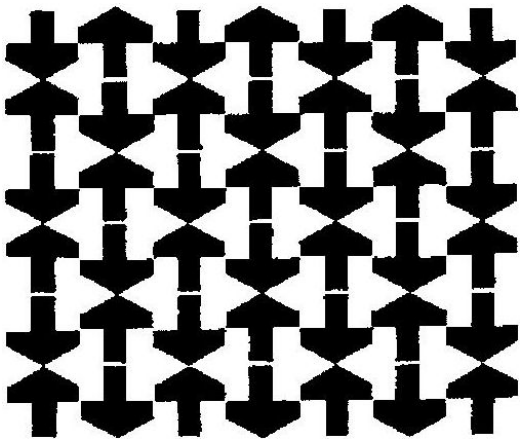
8. **Ρωμαϊκά ημικύκλια**
Ένα παράδειγμα μοτίβου τύπου $\mathbb{W}_4^2$ ή $p4g$. Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 4 και επιπλέον παρατηρούμε ότι τα 4-κέντρα δεν είναι πάνω στους άξονες ανάκλασης, που υπάρχουν. Επίσης, υπάρχουν και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/8 της μονάδας.



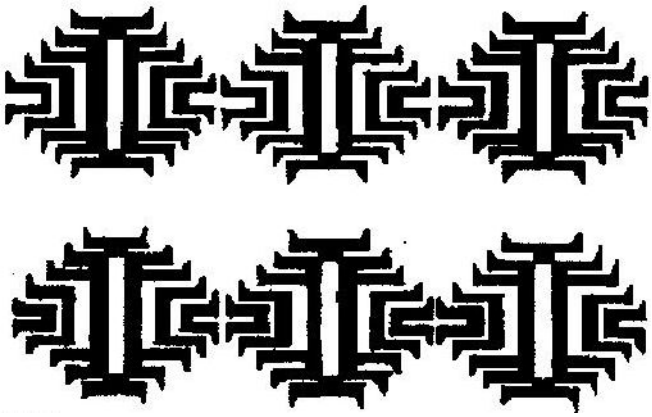
9. **Ιταλικές καμπύλες**
Το παρακάτω σύγχρονο ιταλικό κεραμικό ανήκει στο μοτίβο τύπου $\mathbb{W}_2$ ή $p2$. Παρατηρούμε ότι το πλέγμα είναι παραλληλόγραμμο και η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Επίσης, ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι η 1/2 μονάδα.



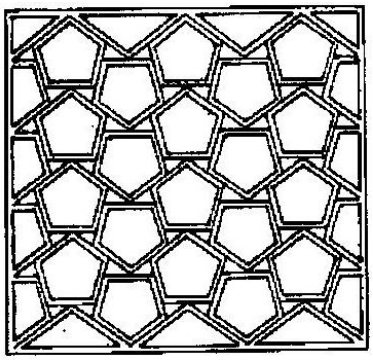
10. **Τουρκικά βέλη**
Ένα τουρκικό σχέδιο 16ου αιώνα με μοτίβο τύπου $\mathbb{W}_2^1$ ή cmm. Σ' αυτήν την περίπτωση το πλέγμα είναι ρομβικό και η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Προφανώς, υπάρχουν ανακλάσεις ως προς δύο κατευθύνσεις (οι άξονες κάθετοι μεταξύ τους) και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.



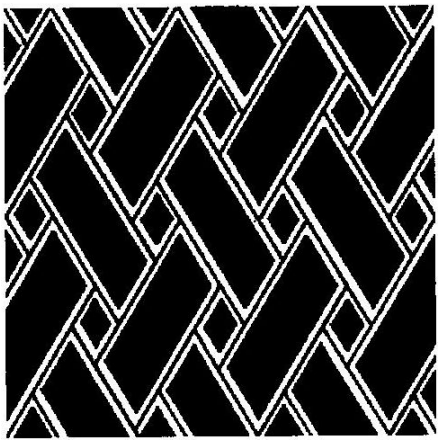
11. **Αμερικάνικες πύλες**
Απεικονίζεται ένα μοτίβο, από τη φυλή των Nez Perce, τύπου $\mathbb{W}_2^2$ ή pmm. Παρατηρούμε ότι το πλέγμα είναι ορθογώνιο, υπάρχουν ανακλάσεις ως προς δύο κατευθύνσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Επίσης, μια στροφή 180^0 είναι ισομετρία του μοτίβου. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.



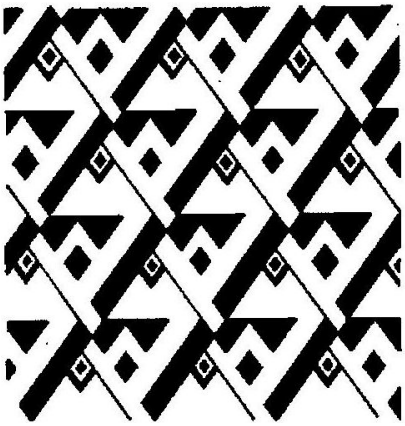
12. **Κινέζικα πεντάγωνα**
Το ακόλουθο παράδειγμα ενός Κινέζικου κιγκλιδώματος παραθύρου πλησιάζει σε μια δημοφιλή έλλειψη δυνατότητας, αυτή της επίστρωσης του επιπέδου με *κανονικά* πεντάγωνα. (Απόδειξη για το ποιά κανονικά πολύγωνα επιστρώνουν το επίπεδο υπάρχει στο επόμενο κεφάλαιο.) Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2. Υπάρχουν ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως. Βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας. Επιπλέον, μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι άξονες ανάκλασης είναι παράλληλοι. Συνεπώς, πρόκειται για ένα μοτίβο τύπου $\mathbb{W}_2^3$ ή pmg.



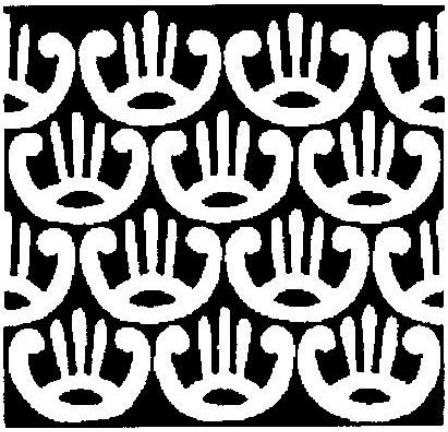
13. **Κονγκολέζικα παραλληλόγραμμα**
Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι γεμάτο από ετερόστροφα παραλληλόγραμμα, τα οποία μας επιτρέπουν να εξασκηθούμε στον καθορισμό των αξόνων ανάκλασης μετ' ολισθήσεως. Είναι τύπου $\mathbb{W}_2^4$ ή pgg, καθώς το πλέγμα είναι ορθογώνιο, η μέγιστη τάξη στροφής είναι 2, δεν υπάρχουν ανακλάσεις, υπάρχουν όμως (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως και βάση του μοτίβου είναι το 1/4 της μονάδας.



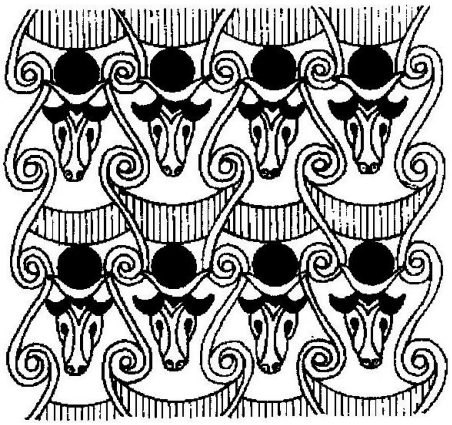
14. **Από τη γη των Incas**
Ένα πολύ γεωμετρικό σχέδιο των Incas το οποίο, παρά τη γεωμετρική του ομορφιά και πολυπλοκότητα, δεν έχει άλλες ισομετρίες πέραν των μεταφορών και γι' αυτό ταξινομείται ως «μοτίβο ταπετσαρίας» τύπου $\mathbb{W}_1$ ή $p1$. Το πλέγμα είναι παραλληλόγραμμο. Η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1. Ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν. Βάση του μοτίβου είναι 1 μονάδα.



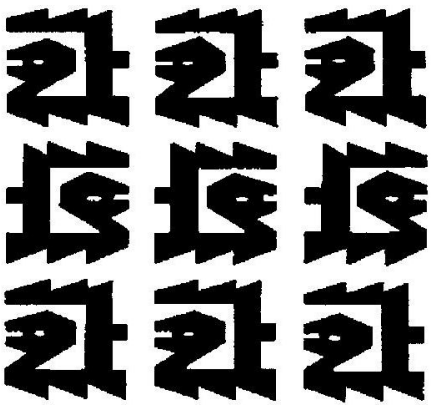
15. **Φοινικικά νεκρώσιμα «στέμματα»**
Το ακόλουθο σχέδιο από ένα Φοινικικό τάφο στη Συρία φανερώνει ότι το μοτίβο τύπου $\mathbb{W}_1^1$ ή cm υπάρχει εδώ και πάρα πολλά χρόνια. Το ίδιο συμβαίνει με τα περισσότερα, αν όχι με όλα, τα «μοτίβα ταπετσαρίας». Εδώ, το πλέγμα είναι ρομβικό, η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1, υπάρχουν ανακλάσεις και (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως και βάση του μοτίβου είναι η 1/2 μονάδα.



16. **Αρχαία Αιγυπτιακά βόδια**
Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ένα μοτίβο τύπου $\mathbb{W}_1^2$ ή pm κυριαρχημένο από την ακινησία (ηρεμία) που τείνει να χαρακτηρίζει τα μοτίβα τύπου pm (καθώς επίσης και τα βόδια). Εδώ, το πλέγμα είναι ορθογώνιο, η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1, ανακλάσεις υπάρχουν, (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως δεν υπάρχουν και βάση του μοτίβου είναι η 1/2 μονάδα.

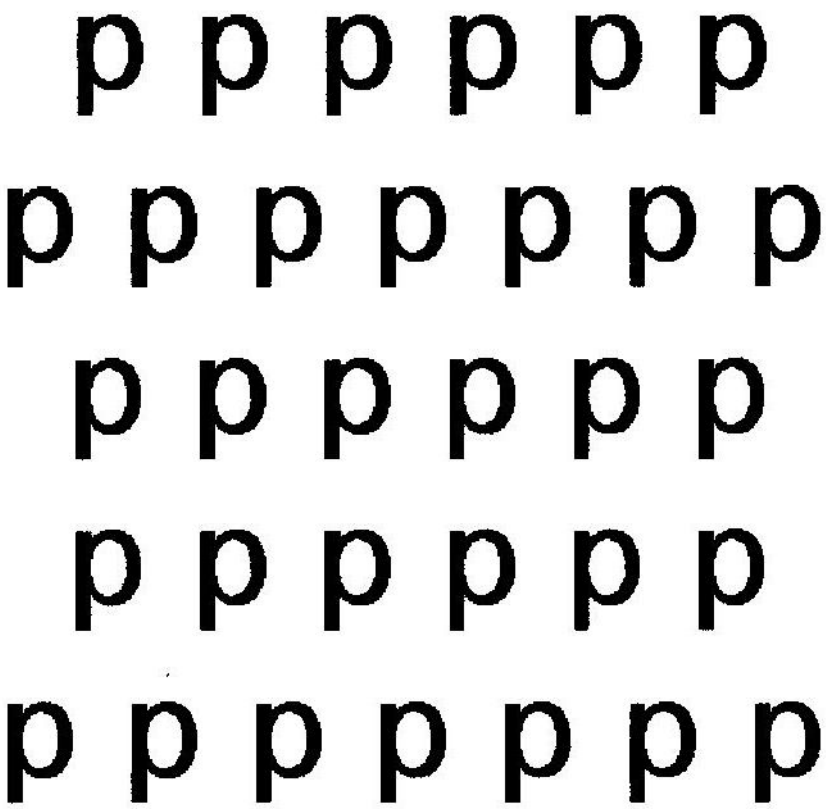


17. **Περουβιανά πουλιά**
Στο ακόλουθο παράδειγμα προφανώς υπάρχουν δύο σμήνη πουλιών που «πετούν» προς διαφορετικές κατευθύνσεις και αυτή η αίσθηση των «αντίθετων» κινήσεων **κάθετα** στην κατεύθυνση της ανάκλασης μετ' ολισθήσεως είναι απόλυτα συνηθισμένη σε μοτίβα τύπου $\mathbb{W}_1^3$ ή pg. Το πλέγμα είναι ορθογώνιο, η μέγιστη τάξη στροφής είναι 1, ανακλάσεις δεν υπάρχουν, (μη-τετριμμένες) ανακλάσεις μετ' ολισθήσεως υπάρχουν και βάση του μοτίβου είναι η 1/2 μονάδα.



3.5 Σχέδια που δεν ανήκουν σε καμιά από τις «ομάδες ταπετσαρίας»

Παρακάτω έχουμε ένα σχέδιο που αποτελείται από αντίγραφα p-μοτίβων μπορντούρας/φρίζας με κάποιον «ακανόνιστο» τρόπο, ώστε το τελικό αποτέλεσμα να μην είναι ένα «μοτίβο ταπετσαρίας».



Για ποιό λόγο το σχέδιο αυτό δεν αποτελεί «μοτίβο ταπετσαρίας»; Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα, πρέπει να γνωρίζουμε το υπόλοιπο τμήμα του σχεδίου αυτού. Όλα τα «μοτίβα ταπετσαρίας» είναι άπειρα και πρέπει πάντα να μπορούμε να φανταζόμαστε την «προέκτασή» τους πέραν από τη σελίδα που έχουμε μπροστά μας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, (σε περίπτωση που δεν έχετε ήδη εικάσει) μιας και το παραπάνω μοτίβο είναι «παθολογικό» εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο αυτό «προεκτείνεται». Αρχίζουμε με ένα αντίγραφο p-μοτίβου μπορντούρας/φρίζας, μετά τοποθετούμε **ένα** «μετατοπισμένο» αντίγραφο κατάλληλα κάτω απ' αυτό, συνεχίζουμε με **δύο** «ευθύγραμμα» (του πρώτου) αντίγραφα από κάτω, μετά με **ένα** «μετατοπισμένο» αντίγραφο κάτω απ' αυτά, μετά με **τρία** «ευθύγραμμα» αντίγραφα πάλι, μετά με **ένα** «μετατοπισμένο» αντίγραφο, κ.ο.κ. Επίσης, η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται σε όλες

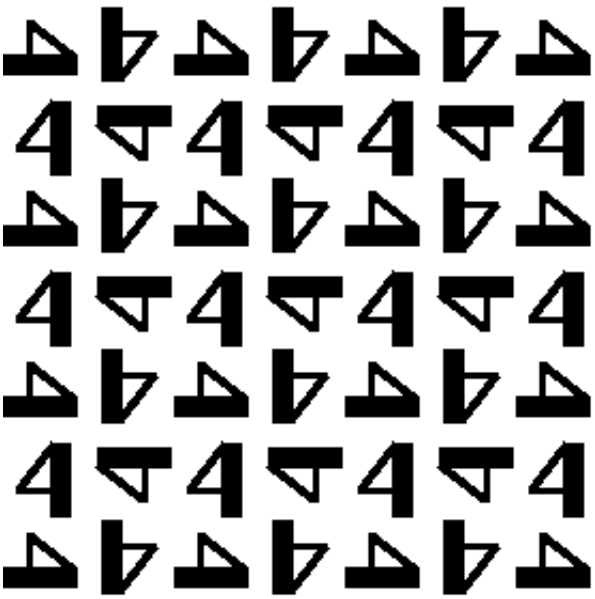
τις σειρές πάνω από τη γραμμή κορυφής που έχουμε στο παραπάνω σχέδιο. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι ένα σχέδιο της μορφής ...32123... δεν είναι ένα «μοτίβο ταπετσαρίας», καθώς αυτό έχει μεταφορές σε μια μόνο κατεύθυνση, την οριζόντια.

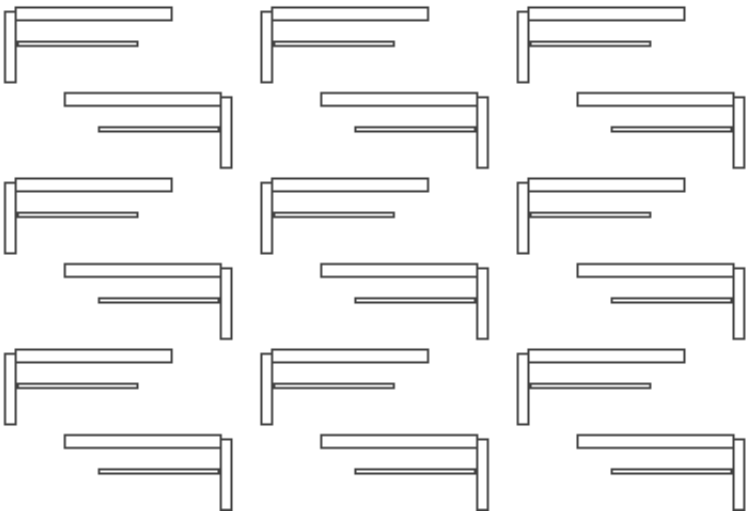
Ακολουθεί ένα ακόμη σχέδιο που δεν αποτελεί «μοτίβο ταπετσαρίας» μιας και έχει μεταφορές σε μια μόνο κατεύθυνση, κατακόρυφη σ' αυτό το παράδειγμα.

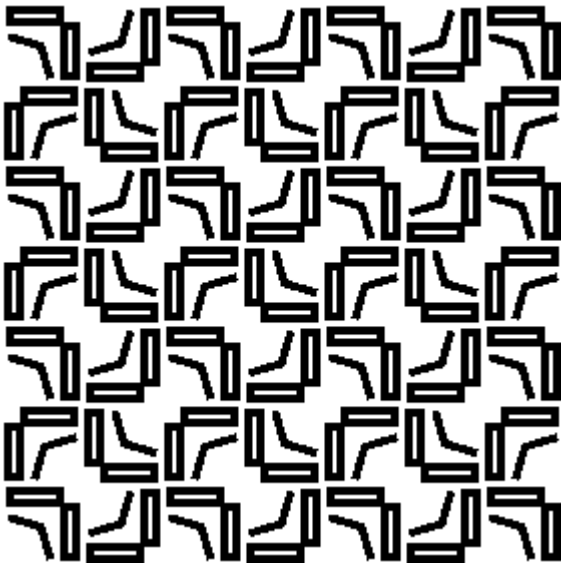
Σε αντίθεση με το παράδειγμα που δημιουργήθηκε από αντίγραφα p - μοτίβων μπορντούρας/φρίζας με κάποιον «ακανόνιστο» τρόπο, το παράδειγμα αυτό δημιουργήθηκε με «κανονικό - τακτικό» τρόπο ενός μονοδιάστατου σχεδίου, το οποίο όμως **δεν** είναι ένα μοτίβο μπορντούρας/φρίζας.
Σε περίπτωση που δεν έχετε παρατηρήσει πρωταγωνιστικό ρόλο στο σχέδιο παίζει το πασίγνωστο $\pi \approx 3.141592654...$, που έχει ένα άπειρο, μη επαναλαμβανόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα. Μπορεί το σχέδιο να είναι παραπλανητικό, αλλά **μία** μόνο ανάκλαση (ακριβώς στη μέση) δε μπορεί να παράγει μια μεταφορά.

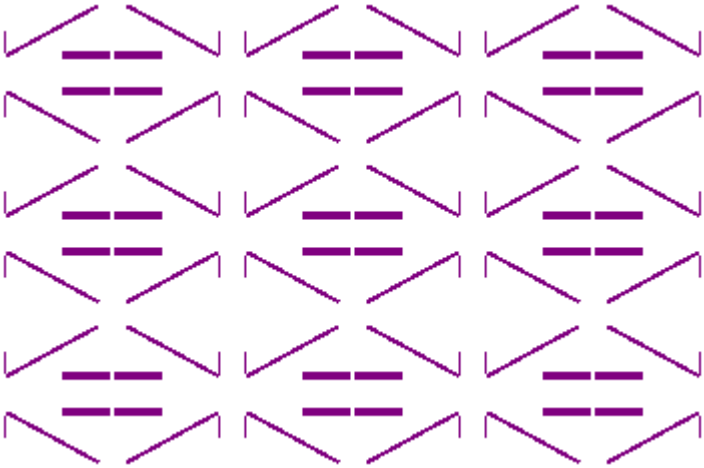
3.6 Ασκήσεις αναγνώρισης «ομάδων ταπετσαρίας»

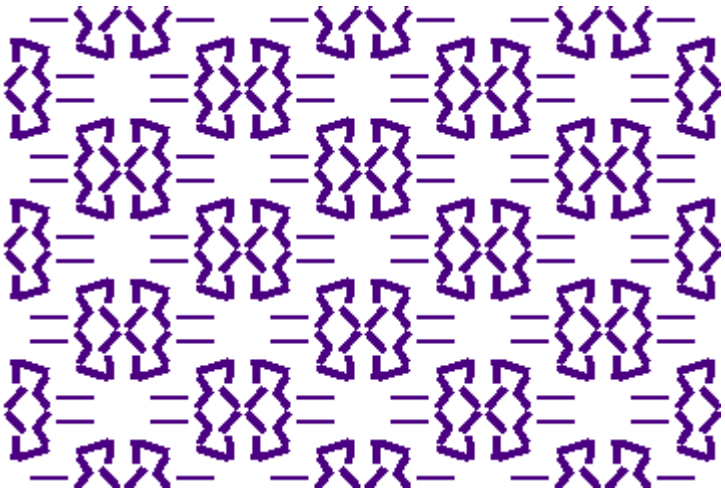
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το να εντοπίσει κανείς σε ποιά «ομάδα ταπετσαρίας» ανήκει καθένα από τα παρακάτω σχέδια και να τεκμηριώσει τον ισχυρισμό του. (Όλα τα σχέδια δημιουργήθηκαν μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή, [16].)

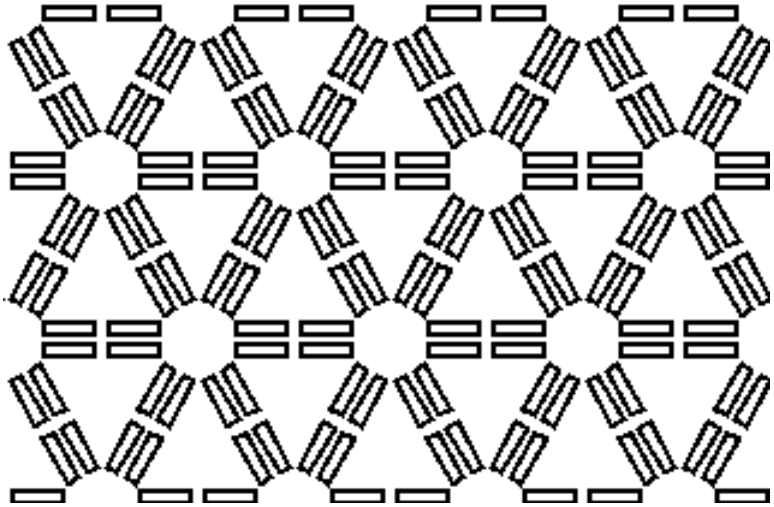








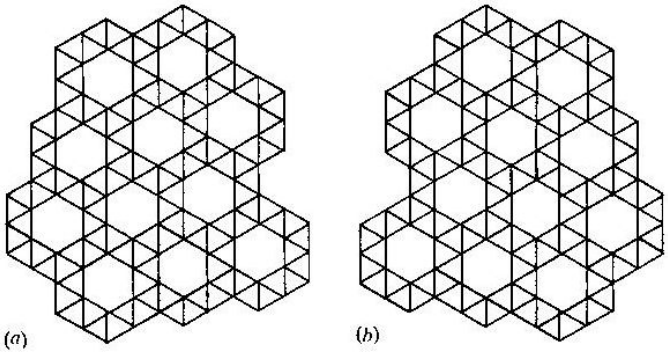




Κεφάλαιο 4

Πλακίδια Ψηφιδωτού

Πλακόστρωση ή επίστρωση του επιπέδου είναι ένα σύνολο $\{T_1, T_2, ...\}$ πολυγωνικών περιοχών που καλύπτουν το επίπεδο χωρίς κενά και χωρίς αλληλεπικαλύψεις μιας μη-μηδενικής επιφάνειας. Μια πολυγωνική περιοχή T_i περιέχει το σύνορό της και θα την χαρακτηρίζουμε *πολύγωνο*. Τα πολύγωνα T_i είναι τα «πλακίδια» του ψηφιδωτού. Κάθε πολύγωνο είναι ένα πλακίδιο για κάποιο ψηφιδωτό. Μια επίστρωση είναι αντίστοιχα **μονοεδρική**, **διεδρική**, **τριεδρική**, αν τα πλακίδια ανήκουν σε ένα είδος, δύο είδη ή τρία είδη ως προς την ισότητα, αντίστοιχα. Στη γενική περίπτωση, μια επίστρωση είναι r-**εδρική**, αν υπάρχει ένα σύνολο $\{P_1, P_2, ..., P_r\}$ των r πολυγώνων, τέτοιο ώστε κάθε πλακίδιο της επίστρωσης είναι ίσο με ακριβώς ένα από τα P_i και αν καθένα από τα P_i είναι ίσο με τουλάχιστον ένα από τα πλακίδια.
Αν το σύνολο $\{T_1, T_2, ...\}$ αποτελεί μια επίστρωση και α είναι μία ισομετρία, τότε το σύνολο $\{\alpha(T_1), \alpha(T_2), ...\}$ αποτελεί μια επίστρωση **ίση** με την προηγούμενη.



Δύο ίσες (διεδρικές) επιστρώσεις με δύο είδη πολυγώνων, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο.

4.1 Κυρτά πολύγωνα που δεν επιστρώνουν το επίπεδο

Ο σκοπός μας σ' αυτήν την ενότητα είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα. (I. Niven, 1978, [11].)

Θεώρημα 1. *(α) Αν α και β είναι οποιοιδήποτε θετικοί πραγματικοί αριθμοί, είναι αδύνατο να επιστρώσουμε το επίπεδο με οποιαδήποτε συλλογή κυρτών πολυγώνων καθένα από τα οποία έχει 7 ή περισσότερες πλευρές, εμβαδό μεγαλύτερο από α και περίμετρο μικρότερη από β.*
(β) Αν οποιαδήποτε από τις συνθήκες στα πολύγωνα αφαιρεθεί, τότε είναι δυνατό να επιστρώσουμε το επίπεδο με πολύγωνα που πληρούν τις άλλες απαιτήσεις.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στο (α) μέρος δεν υπάρχει καμία απαίτηση ισότητας στα πολύγωνα. Από «οποιαδήποτε συλλογή» σημαίνει να επιτρέπεται ακριβώς οποιοδήποτε σύνολο κυρτών πολυγώνων που πληροί τις προδιαγραφές. Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι είναι αδύνατο να επιστρωθεί το επίπεδο με οποιαδήποτε συλλογή πολυγώνων, που αποτελείται από ίσα αντίγραφα ενός πεπερασμένου αριθμού διαφορετικών κυρτών πολυγώνων, καθένα με 7 ή περισσότερες πλευρές. Στο (β) μέρος υπάρχουν τέσσερεις συνθήκες που αφορούν σε: κυρτότητα, 7 ή περισσότερες πλευρές, κάτω φράγμα εμβαδού, άνω φράγμα περιμέτρου.
Επίστρωση του επιπέδου με πολύγωνα σημαίνει η κάλυψή του χωρίς χάσματα ή επικαλύψεις, εξαιρώντας τα κοινά σύνορα των πολυγώνων. Η απόδειξη του (α) μέρους του θεωρήματος, που θα δώσουμε παρακάτω, δείχνει κάτι περισσότερο:

Πόρισμα 1. *Είναι αδύνατο να καλύψουμε ένα τετράγωνο πλευράς*

$$4\beta + 32\beta^3\alpha^{-1} \tag{4.1}$$

και το εσωτερικό του με πολύγωνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος.

Η λέξη «κάλυψη» χρησιμοποιείται εδώ, για να επιτρέψει τη δυνατότητα η πολυγωνική κάλυψη να επεκτείνεται πέρα από το σύνορο του τετραγώνου. Κατά συνέπεια, μια κάλυψη ενός τετραγώνου είναι διαφορετική από μια «ανατομή» ενός τετραγώνου, όπου το πρόβλημα είναι να υποδιαιρεθεί το τετράγωνο σε περιοχές που ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες. Επίσης, να σημειώσουμε ότι ενδεχομένως το Πόρισμα 1 να μπορεί να βελτιωθεί, υπό την έννοια να μειώσουμε την τιμή της (4.1) για το μήκος της πλευράς του τετραγώνου. Άλλες συνέπειες του βασικού Θεωρήματος είναι τα εξής αποτελέσματα:

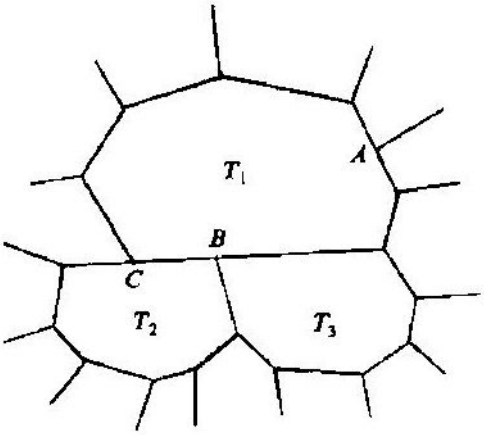
Πόρισμα 2. *Δεδομένης οποιασδήποτε επίστρωσης του επιπέδου από κυρτά πολύγωνα που έχουν κάτω φράγμα εμβαδών και άνω φράγμα περιμέτρων, πρέπει να υπάρχουν απείρως πολλά πολυγωνικά πλακίδια που να έχουν έξι ή λιγότερες πλευρές.*

Πόρισμα 3. *Οποιαδήποτε επίστρωση του επιπέδου από μια συλλογή κυρτών πολυγώνων των οποίων τα εμβαδά είναι κάτω φραγμένα και των οποίων οι περίμετροι είναι άνω φραγμένες πρέπει να περιέχει απείρως πολλά πολύγωνα των οποίων οι ακμές συναντούν ακμές όχι περισσότερων από έξι άλλων πολυγώνων. (Εδώ «οι ακμές συναντούν ακμές» ερμηνεύεται υπό την έννοια ότι οι δύο ακμές έχουν περισσότερα από ακριβώς ένα κοινό σημείο κορυφής.)*

Τις αποδείξεις αυτών των τριών πορισμάτων θα τις παρουσιάσουμε μετά από την απόδειξη του (α) μέρους του Θεωρήματος.
Για την απόδειξη του (α) μέρους του Θεωρήματος χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Euler σύμφωνα με το οποίο $\upsilon + f = s + 1$, όπου υ, f και s είναι αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών, πολυγώνων και πλευρών (ή ακμών) σ' ένα πολυγωνικό δίκτυο στο επίπεδο που έχει ένα πεπερασμένο πλήθος πολυγώνων. Άλλο ένα μόνο αποτέλεσμα χρησιμοποιείται και είναι το ισοπεριμετρικό θεώρημα στο επίπεδο, σύμφωνα με το οποίο μεταξύ όλων των περιοχών που φράσσονται από μια απλή κλειστή καμπύλη δεδομένου μήκους, ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδό. Αυτό χρησιμοποιείται για να δώσει ένα άνω φράγμα β^2 στο εμβαδό του κάθε πολυγώνου. Το ισοπεριμετρικό θεώρημα, αν και γνωστό, δεν είναι εύκολο να αποδειχθεί αν εξαιρέσουμε την περιορισμένη μορφή όπου υποθέτουμε ότι μια λύση υπάρχει. Έτσι, επισημαίνουμε ότι μπορούμε να παρακάμψουμε το ισοπεριμετρικό θεώρημα, αν επιθυμούμε, από τον ακόλουθο απλό ισχυρισμό. Κάθε πολύγωνο στο επίπεδο περιμέτρου μικρότερης από β, που έχει (έστω) μια κορυφή στο (0,0), δε μπορεί να έχει κάθε σημείο κοινό με το σύνορο ενός κύκλου ακτίνας $\beta/2$ που έχει κέντρο στην αρχή. Ως εκ τούτου, το πολύγωνο βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα σ' αυτόν τον κύκλο εμβαδού $\pi\beta^2/4$ και έπεται ότι ένα τέτοιο πολύγωνο έχει εμβαδό μικρότερο από β^2.
Η απόδειξη του (β) μέρους του Θεωρήματος που δίνεται είναι ακριβώς μια περιγραφή αντιπαραδειγμάτων, χρησιμοποιώντας μόνο τις απλούστερες των προηγούμενων ιδεών.

Απόδειξη του (α) μέρους του Θεωρήματος
Υποθέτουμε ότι το επίπεδο μπορεί να επιστρωθεί από μια συλλογή κυρτών πολυγώνων καθένα από τα οποία έχει επτά ή περισσότερες πλευρές, εμβαδό μεγαλύτερο από α και περίμετρο μικρότερη από β, όπου α και β είναι οποιοιδήποτε προκαθορισμένοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Στη βάση αυτής της υπόθεσης, δημιουργούμε μια αντίφαση. Στην πραγματικότητα, μια αντίφαση επιτυγχάνεται αν υποθέσουμε μόνο ότι ένα τετράγωνο (με το εσωτερικό του)

πλευράς ίσης ή μεγαλύτερης της έκφρασης (4.1) μπορεί να καλυφθεί από μια επίστρωση χρησιμοποιώντας μια συλλογή τέτοιων πολυγώνων. Ως εκ τούτου, είναι απλούστερο να υποθέσουμε ότι όλο το επίπεδο επιστρώνεται. Στο τέλος της απόδειξης, αυτό προσαρμόζεται στην πεπερασμένη τετραγωνική περιοχή. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε σ' αυτήν την απόδειξη ότι το Θεώρημα δεν είναι περιορισμένο σε επιστρώσεις που είναι «από-ακμή-σε-ακμή». Μια «από-ακμή-σε-ακμή» επίστρωση του επιπέδου από πολύγωνα είναι μια επίστρωση στην οποία κάθε δύο πολυγωνικά πλακίδια έχουν (i) κανένα κοινό σημείο ή (ii) ακριβώς ένα κοινό σημείο που είναι μια κορυφή καθενός εκ των δυο πολυγωνικών πλακιδίων ή (iii) ένα κοινό ευθύγραμμο τμήμα που είναι ολόκληρη ακμή (ή πλευρά) καθενός εκ των πλακιδίων. Εμείς επιτρέπουμε τη δυνατότητα επιστρώσεων που δεν είναι «από-ακμή-σε-ακμή», όπως εικονογραφείται στο παρακάτω σχήμα, όπου έχουμε τρία πλακίδια T_1, T_2 και T_3 και τρεις από τις κορυφές του πολυγωνικού δικτύου σχηματίσθηκαν από μια επίστρωση, που σημειώθηκαν για ιδιαίτερη προσοχή και είναι οι A, B και C.



Θα αναφερθούμε σε καθένα από τα πολύγωνα στην επίστρωση με δύο έννοιες, ως «πλακίδιο» και ως «πολυγωνικό δίκτυο». Η πρώτη έννοια είναι η μια επιδιωκόμενη στη διατύπωση του Θεωρήματος. Η δεύτερη έννοια, το πολυγωνικό δίκτυο, μπορεί να έχει περισσότερες κορυφές και πλευρές από ένα πλακίδιο. Για παράδειγμα, το πλακίδιο T_1 έχει 7 κορυφές και 7 πλευρές, αλλά ως πολυγωνικό δίκτυο έχει 9 κορυφές και 9 πλευρές. Οι κορυφές A και B συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση του T_1 ως πολυγωνικό δίκτυο, αλλά όχι στην ανάλυση του ως ένα πλακίδιο. Ομοίως, το πλακίδιο T_2 έχει 7 κορυφές και 7 πλευρές, αλλά ως πολυγωνικό δίκτυο έχει 8 κορυφές και 8 πλευρές, εξ' αιτίας της συμπερίληψης της κορυφής C. Το πλακίδιο T_3, αντιθέτως, έχει 7 κορυφές και 7 πλευρές, χωρίς καμιά αύξηση όταν θεωρηθεί ως πολυγωνικό δίκτυο. Κάθε πολυγωνικό δίκτυο έχει την ιδιότητα, ακριβώς όπως κάθε πλακίδιο, το πλήθος των κορυφών και το πλήθος των πλευρών να είναι ίσο. Αν

ένα πολύγωνο θεωρείται ως πλακίδιο ή ως πολυγωνικό δίκτυο, το εμβαδό του είναι το ίδιο φυσικά και η περίμετρός του επίσης.
Ωστόσο, το τί μπορεί να αλλάξει καθώς εμείς θεωρούμε ένα πολυγωνικό πλακίδιο στην αντίστοιχη εκδοχή ως ένα πολυγωνικό δίκτυο είναι το πλήθος των κορυφών και των πλευρών, όπως είδαμε. Στην κάθε κορυφή που προστίθεται στη διαδικασία, για παράδειγμα, στις κορυφές A και B στο πλακίδιο T_1 στο προηγούμενο σχήμα, εισάγεται μια επιπρόσθετη «εσωτερική γωνία» μέτρου π. Έτσι, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του πολυγωνικού δικτύου T_1 είναι 7π, επειδή το T_1 έχει 9 πλευρές. Γενικά, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε πολυγωνικού δικτύου με n πλευρές είναι $(n-2)\pi$ και αυτό είναι πάντα τουλάχιστον 5π, καθώς (από την υπόθεσή μας) το πλήθος των πλευρών ενός πολυγωνικού δικτύου είναι τουλάχιστον 7.
Με ένα συντεταγμένο σύστημα πάνω στο επίπεδο, έστω το $S(r)$ να υποδηλώνει το τετράγωνο με το εσωτερικό του, περιέχοντας όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν τις $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, όπου ο θετικός πραγματικός αριθμός r θα επιλεγεί αρκετά μεγάλος, για να δώσει μια αντίφαση. Έστω N_1 το πεπερασμένο δίκτυο των πολυγωνικών πλακιδίων στο επίπεδο που καλύπτει ακριβώς το $S(r)$. Για να γίνουμε πιο σαφείς, τα πολύγωνα στο N_1 συμπεριλαμβάνουν όλα τα πολυγωνικά πλακίδια που έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το $S(r)$. Αλλά επίσης, θέλουμε το δίκτυο N_1 να μην έχει «τρύπες», έτσι ώστε τα πολύγωνα με τα εσωτερικά τους στο N_1 να αποτελούν το τοπολογικό ισοδύναμο ενός δίσκου. Έτσι, στην περίπτωση που υπάρχει ένα πολυγωνικό πλακίδιο T, το οποίο δεν έχει κοινό σημείο με το $S(r)$, αλλά είναι περιβαλλόμενο από πλακίδια καθένα εκ των οποίων έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το $S(r)$, συμπεριλαμβάνουμε το T στο δίκτυο N_1. Το κάτω φράγμα α στο εμβαδό καθενός πολυγώνου παρέχει βεβαιότητα ότι το δίκτυο N_1 είναι μια πεπερασμένη συλλογή πολυγώνων.
Έστω f_1 το πλήθος των πολυγώνων στο δίκτυο N_1 και υ_1 το συνολικό πλήθος των κορυφών, καθένα μετρημένο μόνο μία φορά, σ' αυτά τα f_1 πολύγωνα του δικτύου. Επειδή η περίμετρος κάθε πολυγώνου είναι μικρότερη από β, έπεται ότι το πλήρες δίκτυο N_1 βρίσκεται καθ' ολοκληρίαν στο εσωτερικό της κλειστής τετραγωνικής περιοχής $S(r+\beta)$, το οποίο είναι το τετράγωνο με το εσωτερικό του με κορυφές τα $(\pm(r+\beta), \pm(r+\beta))$.
Έστω N το πεπερασμένο δίκτυο των πολυγωνικών πλακιδίων, τα οποία καλύπτουν ακριβώς την κλειστή τετράγωνη περιοχή $S(r+\beta)$. Έτσι, το N βρίσκεται σε σχέση με το $S(r+\beta)$ ακριβώς όπως το N_1 βρίσκεται σε σχέση με το $S(r)$, όπως εξηγήθηκε παραπάνω. Έστω f το πλήθος των πολυγώνων στο πεπερασμένο δίκτυο N και τα υ, s να υποδηλώνουν το πλήθος των κορυφών και πλευρών αντιστοίχως, καθένα μετρημένο μόνο μια φορά, αυτών των f πολυγώνων του δικτύου. Από το θεώρημα του Euler σε ένα δίκτυο πολυγώνων

γνωρίζουμε ότι

$$\upsilon + f = s + 1, \quad \upsilon + f > s \tag{4.2}$$

Θεωρούμε τις εσωτερικές γωνίες στα πολύγωνα στο δίκτυο N_1. Δεδομένου ότι υπάρχουν f_1 τέτοια πολύγωνα και ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών σε ένα πολύγωνο με 7 ή περισσότερες πλευρές είναι τουλάχιστον 5π ακτίνια, το άθροισμα αυτών των γωνιών είναι τουλάχιστον $5\pi f_1$. Αλλά αυτά τα πολύγωνα του δικτύου έχουν υ_1 κορυφές και το συνολικό άθροισμα γωνιών στην κάθε κορυφή είναι το πολύ 2π: το άθροισμα αυτό είναι ακριβώς 2π στις εσωτερικές κορυφές στο δίκτυο N_1, αλλά μικρότερο από 2π στις κορυφές στο εξωτερικό σύνορο του δικτύου. Από αυτή τη σύγκριση των εκτιμήσεων για το συνολικό άθροισμα όλων των εσωτερικών γωνιών των πολυγώνων στο δίκτυο, έπεται ότι

$$2\pi\upsilon_1 \geq 5\pi f_1, \quad 2\upsilon_1 \geq f_1. \tag{4.3}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις υ κορυφές των πολυγώνων στο δίκτυο N. Καθώς αυτά τα πολύγωνα του δικτύου έχουν s πλευρές όλα και κάθε πλευρά ενώνει δυο κορυφές, βλέπουμε ότι το $2s$ απαριθμεί κάθε κορυφή περισσότερες από μια φορά. Κάθε κορυφή προσάπτεται σε δυο πλευρές το λιγότερο, έτσι κάθε κορυφή απαριθμείται το λιγότερο δυο φορές από το $2s$. Επιπλέον, κάθε εσωτερική κορυφή ανήκει το λιγότερο σε τρία πολύγωνα του δικτύου, επειδή τα πολυγωνικά πλακίδια είναι κυρτά από υπόθεση και έτσι το λιγότερο τρία πλακίδια συναντιούνται σε κάθε κορυφή. Συνεπώς, κάθε εσωτερική κορυφή μετριέται το λιγότερο τρεις φορές από το $2s$.
Τώρα, κάθε κορυφή του δικτύου N_1 είναι μια εσωτερική κορυφή του δικτύου N, έτσι υπάρχουν τουλάχιστον υ_1 εσωτερικές κορυφές στο δίκτυο N. Μετρώντας καθεμιά απ' αυτές τρεις φορές και μετρώντας τις άλλες κορυφές, $\upsilon - \upsilon_1$ το πλήθος, δυο φορές, προκύπτει η ανισότητα

$$2s \geq 3\upsilon_1 + 2(\upsilon - \upsilon_1) = 2\upsilon + \upsilon_1. \tag{4.4}$$

Αλλά $2\upsilon + 2f > 2s$ από (4.1) και αυτό με την (4.4) δίνει $2f > \upsilon_1$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με 2 και χρησιμοποιώντας την (4.3), έχουμε

$$4f > 2\upsilon_1 \geq 5f_1. \tag{4.5}$$

Θέτοντας $f_2 = f - f_1$, διαπιστώνουμε ότι f_2 είναι το πλήθος των πολυγώνων στο N, τα οποία δεν είναι στο δίκτυο N_1. Αυτή η σχέση μαζί με την (4.5) δίνει

$$4f = 4f_1 + 4f_2 > 5f_1, \quad 4f_2 > f_1. \tag{4.6}$$

Κάθε πολύγωνο έχει περίμετρο μικρότερη από β. Από το ισοπεριμετρικό θεώρημα στο επίπεδο (ή από τον αντίστοιχο ισχυρισμό που παραθέσαμε παρακάμπτοντας αυτό το θεώρημα), κάθε πολύγωνο έχει εμβαδό μικρότερο από β^2.

Συνεπώς, τα f_1 πολύγωνα στο δίκτυο N_1 έχουν συνολικό εμβαδό μικρότερο από $\beta^2 f_1$. Αλλά αυτά τα πολύγωνα καλύπτουν την κλειστή τετραγωνική περιοχή $S(r)$ με εμβαδό $4r^2$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι:

$$\beta^2 f_1 > 4r^2. \tag{4.7}$$

Στη συνέχεια, μελετούμε τα f_2 πολύγωνα, τα οποία ανήκουν στο δίκτυο N αλλά όχι στο N_1. Καθένα απ' αυτά τα πολύγωνα έχει εμβαδό μεγαλύτερο από α, έτσι το συνολικό εμβαδό όλων των f_2 πολυγώνων υπερβαίνει το αf_2. Τώρα αυτά τα πολύγωνα βρίσκονται καθ' ολοκληρίαν μέσα στην κλειστή τετραγωνική περιοχή $S(r+2\beta)$ κι αυτό γιατί, καθώς η περίμετρος κάθε πολυγώνου είναι μικρότερη από β, όλο το δίκτυο N βρίσκεται μέσα στην κλειστή τετραγωνική περιοχή $S(r+2\beta)$, η οποία είναι το τετράγωνο με κορυφές

$$(\pm(r+2\beta), \pm(r+2\beta)).$$

Επίσης, τα f_2 πολύγωνα που ανήκουν στο N αλλά όχι στο N_1 βρίσκονται καθ' ολοκληρίαν έξω από την κλειστή τετραγωνική περιοχή $S(r)$. Το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται μέσα στο $S(r+2\beta)$ αλλά εκτός του $S(r)$ είναι $4(r+2\beta)^2 - 4r^2$. Αυτό είναι το άνω φράγμα για το συνολικό εμβαδό των f_2 πολυγώνων και έτσι έχουμε

$$4(r+2\beta)^2 - 4r^2 \geq \alpha f_2. \tag{4.8}$$

Οι ανισότητες (4.6), (4.7) και (4.8) είναι αντιφατικές αν το r είναι αρκετά μεγάλο, όπως αποδεικνύεται άμεσα. Εκτελώντας πράξεις στην (4.8) και πολλαπλασιάζοντας με $4\beta^2$, έχουμε

$$64\beta^3(r+\beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2,$$

χρησιμοποιώντας τις (4.6) και (4.7). Διαιρώντας με $4\alpha r$, συνεπάγεται ότι

$$r < 16\beta^3\alpha^{-1}(1+\beta/r). \tag{4.9}$$

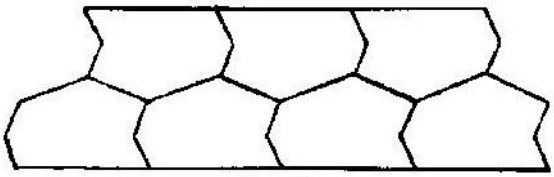
Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι αυτό είναι λάθος αν $r = \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}$. Επίσης, αν η (4.9) δεν ισχύει για μια θετική τιμή του r, τότε δεν ισχύει για όλες τις μεγαλύτερες τιμές του r. Άρα, έχουμε μια αντίφαση αν

$$r \geq \beta + 16\beta^3\alpha^{-1}, \tag{4.10}$$

κι έτσι το μέρος (α) του Θεωρήματος αποδείχτηκε.
Αυτή η αντίφαση προήλθε έχοντας την κλειστή τετραγωνική περιοχή $S(r+\beta)$

καλυμμένη από το δίκτυο των πολυγώνων N. Αυτό το τετράγωνο έχει πλευρές μήκους $2r + 2\beta$. Μέσω της (4.10), έχουμε αποδείξει ότι είναι αδύνατο να καλύψουμε ένα τετράγωνο με το εσωτερικό του πλευράς $4\beta + 32\beta^3\alpha^{-1}$ ή μεγαλύτερης με πολύγωνα του τύπου που περιγράφηκαν στο Θεώρημα. Αυτό είναι το Πόρισμα 1. Το Πόρισμα 2 έπεται άμεσα. Εάν υπήρχαν μόνο πεπερασμένα πολλά πολυγωνικά πλακίδια που να έχουν 6 ή λιγότερες πλευρές, θα ήταν δυνατό να εντοπίσουμε μια αυθαίρετα μεγάλη περιοχή του επιπέδου επιστρωμένη μόνο από κυρτά πολύγωνα με 7 ή περισσότερες πλευρές, που έρχεται σε αντίφαση με το Πόρισμα 1.
Το Πόρισμα 3 έπεται από την απόδειξη του Θεωρήματος με την ακόλουθη παρατήρηση. Καθώς οι ανισότητες (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) και (4.6) στην απόδειξη του Θεωρήματος «συζητούνται» στο δίκτυο των πολυγώνων και όχι στα αρχικά πολυγωνικά πλακίδια, το Πόρισμα 2 είναι τεκμηριωμένο με το ισχυρότερο συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχουν άπειρα πολλά δίκτυα πολυγώνων που να έχουν 6 ή λιγότερες πλευρές. Έτσι, συνεπάγεται το Πόρισμα 3.

Απόδειξη του (β) μέρους του Θεωρήματος
Υπάρχουν τέσσερεις συνθήκες στα πολύγωνα στο (α) μέρος του Θεωρήματος: κυρτότητα, 7 ή περισσότερες πλευρές, εμβαδό μεγαλύτερο από α, περίμετρο μικρότερη από β. Για να αποδείξουμε το (β) μέρος, θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν επιστρώσεις του επιπέδου, που ικανοποιούν όλες εκτός μιας εξ' αυτών των συνθηκών.
Πρώτον, το επίπεδο μπορεί να καλυφθεί με μη-κυρτά πολύγωνα που έχουν 7 ή περισσότερες πλευρές. Ακολουθεί εικονογράφηση μιας τέτοιας επίστρωσης με ένα 7-πλευρο πολύγωνο και ίσα αντίγραφα αυτού.

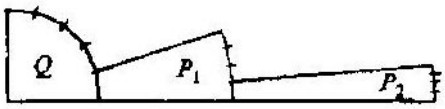


Δεύτερον, η συνθήκη ότι πρέπει να υπάρχουν 7 ή περισσότερες πλευρές είναι απαραίτητη, επειδή υπάρχουν πολλές επιστρώσεις από n-γωνα με $n = 3, 4, 5, 6$ και μια μεγάλη ποικιλλία τέτοιων παραδειγμάτων υπάρχει στη βιβλιογραφία. (π.χ. Grunbaum & Shephard, Tiling by regular polygons, Math. Mag., 50 (1977) pp. 227-247) (Φυσικά το επίπεδο μπορεί να επιστρωθεί από μια συλλογή επταγώνων και τριγώνων και διάφορους άλλους συνδυασμούς με απείρως πολλά από το καθένα.)
Τέλος, παραθέτουμε δυο επιστρώσεις του επιπέδου από κυρτά επτάγωνα, η πρώτη που έχει πολύγωνα με περίμετρο μικρότερη από β, η δεύτερη που έχει

πολύγωνα με εμβαδό μεγαλύτερο από α. Αυτές οι δυο επιστρώσεις είναι κατασκευασμένες στο ίδιο βασικό μοτίβο, χρησιμοποιώντας κυρτά 7-γωνα τοποθετημένα «ακτινωτά» προς τα έξω από την αρχή. Οι κορυφές των πολυγώνων, δοσμένες σε πολικές συντεταγμένες, θα βρίσκονται σε ομόκεντρους κύκλους ακτίνων $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ...$ και ούτω καθ' εξής.
Πρώτα, καθορίζουμε το πολύγωνο Q από τις κορυφές, καταγεγραμμένες σε αριστερόστροφη διάταξη, $(0,0)$ και $(\rho_1, k\pi/10)$, $k = 0,1,2,3,4,5$, όπου το ρ_1 πρέπει να είναι ορισμένο με σαφήνεια. Τρία περισσότερα πολύγωνα επιτυγχάνονται στρέφοντας το Q επιτυχώς κατά γωνίες $\pi/2$, π και $3\pi/2$ με την αρχή ως το κέντρο της στροφής. Έτσι, έχουμε τέσσερα κυρτά επτάγωνα εσωκλείοντας την αρχή, με 20 κορυφές (σε όλα τα επτάγωνα) που βρίσκονται στον κύκλο ακτίνας ρ_1 με κέντρο στην αρχή.
Για $n = 1, 2, 3, ...$ προσδιορίζουμε το πολύγωνο P_n από τις κορυφές

$$(\rho_n, \pi/(10 \cdot 4^{n-1})), (\rho_n, 0), (\rho_{n+1}, k\pi/10 \cdot 4^n), \;\; k = 0,1,2,3,4, \qquad (4.11)$$

καταγεγραμμένες αριστερόστροφα σε διάταξη, όπου ρ_n και ρ_{n+1} πρέπει να είναι ορισμένες με σαφήνεια. Επισημαίνουμε ότι η πρώτη και η τελευταία από τις κορυφές που είναι καταγεγραμμένες στην (4.11) είναι συγγραμμικές με την αρχή, καθώς επίσης και οι κορυφές $(\rho_n, 0)$ και $(\rho_{n+1}, 0)$. Συνεπώς, ένας δακτύλιος πολυγώνων που να κυκλώνει την αρχή επιτυγχάνεται στρέφοντας τα P_n περί την αρχή κατ' επανάληψη κατά γωνία $\pi/10 \cdot 4^{n-1}$. Ο δακτύλιος κλείνει αφότου η στροφή επαναληφθεί $20 \cdot 4^{n-1} - 1$ φορές. (Η λέξη «δακτύλιος» χρησιμοποιείται εδώ με την έννοια γεωμετρικού μοτίβου, όχι με την τεχνική αλγεβρική έννοια.) Ακολουθεί η εικονογράφηση των Q, P_1 και P_2.



Επιπλέον, οι εξωτερικές κορυφές του δακτυλίου των πολυγώνων που σχηματίζεται στρέφοντας τα P_n είναι οι ίδιες με τις εσωτερικές κορυφές του δακτυλίου των πολυγώνων που σχηματίζεται στρέφοντας τα P_{n+1} περί την αρχή. Αυτές οι κοινές κορυφές είναι οι

$$(\rho_{n+1}, k\pi/(10 \cdot 4^n)), \;\; k = 0,1,2,...,20 \cdot 4^n - 1,$$

Αυτό έπεται ότι τα κυρτά πολύγωνα $Q, P_1, P_2, P_3, ...$, μαζί με τα ίσα αντίγραφα τους που σχηματίζονται από τις στροφές περί την αρχή, καλύπτουν όλο το επίπεδο χωρίς κενό ή επικάλυψη, προϋποθέτοντας ότι το ρ_n τείνει στο άπειρο μαζί με το n.
Τώρα καθορίζουμε τις τιμές των $\rho_1, \rho_2, \rho_3, ...$ με δυο κατευθύνσεις, πρώτον παίρνοντας ένα σύνολο πολυγώνων που ικανοποιεί τη συνθήκη ότι καθένα έχει

περίμετρο $< \beta$ και δεύτερον παίρνοντας ένα σύνολο πολυγώνων καθένα με εμβαδό $> \alpha$. Ο πρώτος σκοπός επιτυγχάνεται ορίζοντας

$$\rho_n = n\beta/8, \;\; n = 1, 2, 3, ..., \tag{4.12}$$

έτσι ώστε το ρ_n τείνει στο άπειρο μαζί με το n. Τώρα επαληθεύουμε ότι το πολύγωνο P_n έχει περίμετρο $< \beta$. Η πλευρά που συνδέει τις πρώτες δύο κορυφές που είναι καταγεγραμμένες στην (4.11) έχει μήκος μικρότερο από το τόξο του κύκλου με $r = \rho_n$ διαμέσου αυτών των σημείων. Αυτό το μήκος τόξου είναι

$$\pi\rho_n/(10 \cdot 4^{n-1}) = n\beta\pi/(20 \cdot 4^n), \tag{4.13}$$

και αυτό είναι γνησίως μικρότερο από $\beta/7$. Η πλευρά του P_n που ενώνει τις κορυφές $(\rho_n, 0)$ και $(\rho_{n+1}, 0)$ έχει μήκος

$$\rho_{n+1} - \rho_n = \beta/8 < \beta/7.$$

Μια άλλη πλευρά του P_n έχει επίσης μήκος $\rho_{n+1} - \rho_n$ και οι τέσσερεις εναπομείνουσες πλευρές, οι οποίες ενώνουν τις τελευταίες πέντε κορυφές στην (4.11), έχουν μήκη του τύπου (4.13), όπου n αντικαθιστούμε με $n+1$. Έτσι, όλες οι 7 πλευρές του P_n έχουν μήκος $< \beta/7$ και συνεπώς η περίμετρος είναι μικρότερη από β. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι το πολύγωνο Q έχει την ίδια ιδιότητα.

Έτσι, έχουμε μια επίστρωση του επιπέδου από κυρτά επτάγωνα καθένα με περίμετρο μικρότερη από β. Από το (α) μέρος του Θεωρήματος, έπεται ότι τα εμβαδά αυτών των επταγώνων δε μπορούν να είναι κάτω φραγμένα από οποιοδήποτε θετικό σταθερό α. Χωρίς αναφορά στο (α) μέρος του Θεωρήματος, δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε με ευθύ τρόπο ότι το εμβαδό του επταγώνου P_n, με ρ_n όπως ορίζεται στην (4.12), πλησιάζει το 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο. Άλλωστε, στην (4.13) φαίνεται ότι $n/4^n$ τείνει στο 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Τελικά, για να καταφέρουμε μια επίστρωση με κυρτά επτάγωνα καθένα με εμβαδό μεγαλύτερο από α, χρησιμοποιούμε έναν ορισμό διαφορετικό απ' αυτόν της (4.12). Φυσικά, σ' αυτήν την περίπτωση οι περίμετροι των επταγώνων δε θα είναι κάτω φραγμένες από καμιά σταθερά β, εξαιτίας του (α) μέρους του Θεωρήματος. Πρώτα, θέλουμε να επιλέξουμε ρ_1 τέτοιο ώστε το επτάγωνο Q να έχει εμβαδό μεγαλύτερο από α. Το εμβαδό καθενός κυρτού επταγώνου ασφαλώς υπερβαίνει το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τρεις εκ των κορυφών του, έτσι μελετούμε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις

$$(0, 0), (\rho_1, 0) \text{ και } (\rho_1, \pi/2).$$

Αυτό το τρίγωνο έχει εμβαδό $\rho_1^2/2$ και μπορούμε ασφαλώς να επιλέξουμε ρ_1 που να υπερβαίνει το α.
Συνεχίζουμε αναδρομικά ορίζοντας για $n = 1, 2, 3, ...,$

$$\rho_{n+1} = n + \rho_n + 2\alpha\rho_n^{-1} cosec(\pi/10 \cdot 4^{n-1}). \tag{4.14}$$

Σημειώνουμε ότι το ρ_n τείνει στο άπειρο μαζί με το n, έτσι αυτός ο ορισμός πράγματι δίνει μια επίστρωση ολόκληρου του επιπέδου. Με ευθύ τρόπο επίσης μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι καθένα από τα επτάγωνα $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ έχει εμβαδό μεγαλύτερο από α. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση του P_n. Αυτό το επτάγωνο έχει εμβαδό μεγαλύτερο από εκείνο του τριγώνου που σχηματίζεται από τις τρεις πρώτες κορυφές που παρατίθενται στην (4.11), συγκεκριμένα,

$$(\rho_n, \pi/10 \cdot 4^{n-1}), (\rho_n, 0), (\rho_{n+1}, 0).$$

Το εμβαδό του τριγώνου αυτού, από τον τύπο βάσης-ύψους, είναι

$$\tfrac{1}{2}(\rho_{n+1} - \rho_n)\rho_n \sin \pi/(10 \cdot 4^{n-1}).$$

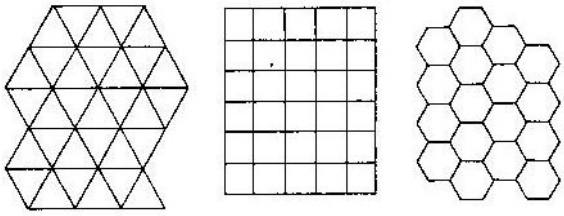
Αυτό το εμβαδό υπερβαίνει το α, καθώς φαίνεται άμεσα από την (4.14). Επίσης, καθώς μια πλευρά του επταγώνου P_n έχει μήκος $\rho_{n+1} - \rho_n$ και καθώς αυτό υπερβαίνει το n είναι προφανές ότι οι περίμετροι των πολυγώνων της επίστρωσης δεν είναι κάτω φραγμένες. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος.

4.2 Σύντομη περιγραφή άλλων αποτελεσμάτων σε σχέση με το Θεώρημα της 4.1 και τα Πορίσματά του

Αν ένα *κυρτό* πολύγωνο μπορεί να επαναλαμβάνεται με μεταφορές για να γεμίσει το επίπεδο, το πλήθος των πλευρών του δε μπορεί να υπερβαίνει το 6. Η επίστρωση του επιπέδου με πολύγωνα που έχουν 6 ή λιγότερες πλευρές μπορεί να ολοκληρωθεί με μια ποικιλία τρόπων. Ένα σύνηθες ζήτημα εδώ είναι η επίστρωση του επιπέδου από ένα μόνο πολύγωνο και τις ίσες εικόνες του (μονοεδρική επίστρωση). Πρώτα απ' όλα, στην περίπτωση των κανονικών πολυγώνων είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχουν μόνο τριών ειδών κανονικά πολύγωνα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιστρώσουν το επίπεδο. Συγκεκριμένα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο. Αυτό συνεπάγεται, επειδή η εσωτερική γωνία ενός κανονικού n-γώνου είναι $\pi(1-2/n)$ ακτίνια. Έτσι, αν ένα τέτοιο πολύγωνο επιστρώνει το επίπεδο, τότε από υπολογισμούς γωνιών το 2π πρέπει να είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi(1-2/n)$, έστω

$$2\pi = k\pi(1-2/n) \text{ ή } (k-2)(n-2) = 4.$$

Οι μόνες λύσεις με ακεραίους είναι $n = 3, 4, 6$, που δίνουν τα τρία είδη πολυγώνων που αναφέρθηκαν.



(Μονοεδρικές) επιστρώσεις με μοναδικό είδος πολυγώνου, ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο, ένα κανονικό εξάγωνο, αντίστοιχα.

Αυτό το αποτέλεσμα ήταν γνωστό στον Πάππο, καθώς είναι σαφές από «πιστό» εδάφιο που έχει παρατεθεί στη σελ. 390 στο «A History of Greek Mathematics», vol.2, Oxford Press, 1921 του T. Heath.

Είναι ένας σχεδόν προφανής ισχυρισμός ότι το επίπεδο μπορεί να επιστρωθεί από οποιοδήποτε τρίγωνο και τις ίσες εικόνες του. Ομοίως, το επίπεδο μπορεί να επιστρωθεί από οποιοδήποτε τετράπλευρο, κυρτό ή μη. Ένας συνήθης τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να αρχίσουμε στρέφοντας το τετράπλευρο μέσω μιας ημιστροφής (στροφής κατά γωνία π) περί του μέσου καθεμιάς από τις πλευρές του. Το αρχικό τετράπλευρο και το ίσο αντίγραφό του από την ημιστροφή σχηματίζει ένα εξάγωνο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιστρώσει το επίπεδο με μεταφορές αυτό και μόνο αυτό.

Η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη για τα πεντάγωνα και τα εξάγωνα, μερικά από τα οποία επιστρώνουν το επίπεδο και μερικά που δε μπορούν. Ξεκινώντας από την πιο εύκολη περίπτωση, η κατηγορία των κυρτών εξαγώνων καθένα από τα οποία επιστρώνουν το επίπεδο αποδόθηκε στον K. Reinhardt (1918). Ο R. B. Kershner (1968) «έλυσε» το ανάλογο πρόβλημα για κυρτά πεντάγωνα, αλλά οι καταγραφές του δεν είναι πλήρεις. Προσέφερε κάποιες νέες κατηγορίες, προηγουμένως άγνωστες, των πενταγώνων που επιστρώνουν το επίπεδο. Ακολούθησαν κάποιες συμπληρώσεις από άλλους ερευνητές, όμως είναι ακόμη ένα άλυτο πρόβλημα αν όλα τα κυρτά πεντάγωνα που επιστρώνουν το επίπεδο είναι γνωστά. Επίσης, δεν υπάρχει πλήρης ανάλυση για το ποιά μη-κυρτά πεντάγωνα και ποιά μη-κυρτά εξάγωνα επιστρώνουν το επίπεδο.

Οι περιπτώσεις επίστρωσης που αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αλλά μια λεπτομερής καταγραφή τους και περαιτέρω έρευνα του ζητήματος της πλακόστρωσης δεν είναι στους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Βιβλιογραφία

[1] Αναπολιτάνος, Δ., Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη, 1985.

[2] Λάππας, Δ., Σημειώσεις από τη διδασκαλία στο μεταπτυχιακό μάθημα «Ιστορία των Νεώτερων Μαθηματικών» της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, 2007.

[3] Ράπτης, Ε., Σημειώσεις από τη διδασκαλία στο μεταπτυχιακό μάθημα «Άλγεβρα για τη Διδακτική» της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, 2007.

[4] Τσικοπούλου, Σ., Ισομετρίες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου: Συνθετική και Αναλυτική προσέγγιση - Εφαρμογές, Διπλωματική εργασία για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, 2003.

[5] Armstrong, M., A., Ομάδες και Συμμετρία, Μετάφραση και επ. επιμέλεια Δημήτριος Νταής, Εκδόσεις Leader Books, 2002.

[6] Baloglou, G., Isometrica: A Geometrical Introduction to Planar Crystallographic Groups, Suny Oswego, 2007.

[7] Escher, M. C., Escher on Escher, Exploring the Infinite, Harry N. Abrams, INC., Publishers, New York, 1989.

[8] Fraleigh, J. B., Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.

[9] Johnston, B. L. & Richman, F., Numbers and Symmetry: An introduction to Algebra, 1997.

[10] Martin, G. E., Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

[11] Niven, I., Convex Polygons that Cannot Tile the Plane, Their Recognition and Notation, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 10. (Dec., 1978), pp. 785-792.

[12] Rees, E. G., Notes on Geometry, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[13] Schattschneider, D., The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 6. (Jun. - Jul., 1978), pp. 439-450.

[14] Weyl, H., Symmetry, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1982.

[15] http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c0_Wallpaper.html

[16] http://escher.epfl.ch/escher/

[17] http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-symmetry.htm